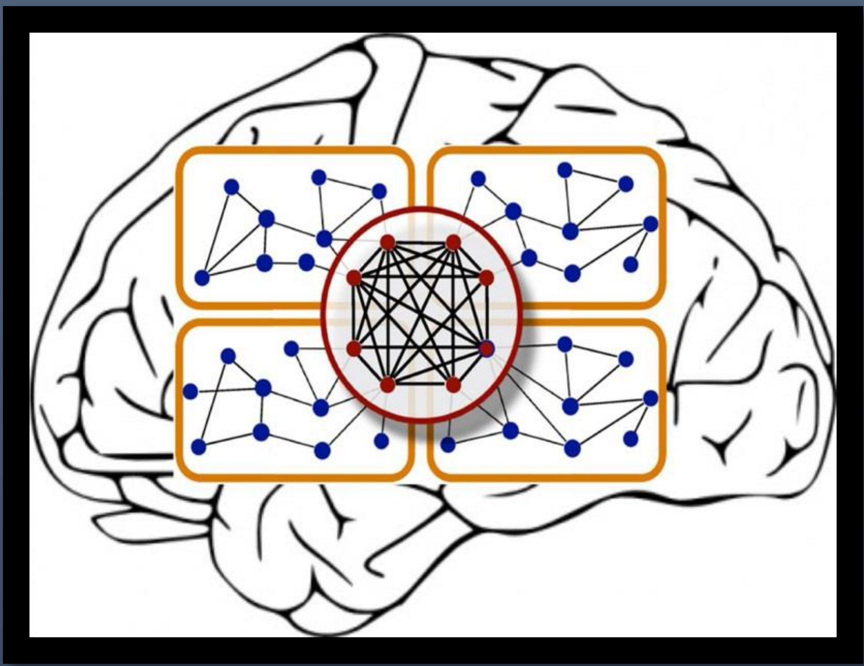
۱۳۹۴

۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



منطق‌فازی و کنترل‌فازی- عصبی

منطق فازی و کنترل فازی-عصبی

دکتر علی غفاری

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه برنگذرد

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان | **صفحه**

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری

فصل ۱–   آشنایی با منطق فازی و تاریخچه آن

۱-۱- مقدمه و تاریخچه

در سال ۱۹۶۵ میلادی مقاله‌ای با عنوان مجموعه‌های فازی[۱] توسط **دکتر لطفی عسگرزاده**[۲] استاد ایرانی‌الاصل دانشگاه کالیفرنیا برکلی (که خود را به اختصار زاده می‌نامد) در مجله اطلاعات و کنترل[۳] به چاپ رسید، که اولین سند منتظر شده در این زمینه و آغاز تحولی قابل توجه در علوم ریاضی و مهندسی است. در این مقاله مجموعه فازی به عنوان مجموعه‌ای با مرزهای غیردقیق معرفی شده است [؟؟]. در سال ۱۹۷۴ میلادی، زاده عبارت منطق فازی[۴] را در مقاله دیگری معرفی و به کار برد. در این مقاله همچنین اصطلاح استدلال تقریبی[۵] بیان و تعریف شده است.

در دهه ۱۹۶۰ و پیش از آن که زاده مقاله اول خود را منتشر نماید، وی متخصصی صاحب نظر در زمینه تحلیل سیستم‌ها[۶] بود. نیاز به ریاضیات و منطق فازی در این سال‌ها به ذهن زاده رسید. این نیاز از آنجا ناشی می‌شد، که علیرغم تلاش وسیعی که وی و همکارانش در تحلیل سیستم‌های دینامیکی به کار می‌بردند و علیرغم پیشرفت‌ها و موفقیت‌های گسترده‌ای که در این زمینه کسب کرده بودند، در تحلیل سیستم‌هایی که با روابط انسانی سر و کار دارند، ناموفق بودند. پرسشی ذهن زاده را مشغول کرده بود که چرا تحلیل سیستم‌هایی مانند سیستم‌های فیزیکی، مکانیکی و الکتریکی، یا به عبارت دیگر، سیستم‌هایی که در دینامیک آنها روابط انسانی موثر نیست[۷] با کمک ریاضیات کلاسیک مقدور و ممکن است، ولی سیستم‌هایی که با موجودات زنده[۸] سر و کار دارند، مانند سیستم‌های اقتصادی، اجتماعی، بیولوژیکی، فلسفی و حقوقی، تحلیل سیستم‌ها پیچیده و در بسیاری موارد غیر ممکن است. پاسخِ زاده به این سوال آن بود که،

« سیستم‌هایی که با موجودات زنده سر و کار دارند، سیستم‌هایی هستند که مرزها و محدوده‌های تیز[۹] صریح و دقیق ندارند و آنها را می‌توان به صورت سیستم‌هایی با مرزهای غیردقیق طبقه‌بندی کرد. علت عدم توانایی ریاضیات در تحلیل سیستم‌های با مرزهای غیردقیق نیز آن است که، در ریاضیات کلاسیک اصولاً مجموعه‌هایی با مرزهای غیردقیق تعریف نشده‌اند؛ به عبارت دیگر، ریاضیات کلاسیک تنها می‌تواند به تحلیل سیستم‌هایی بپردازد، که در مجموعه‌های صریح و دقیق تعریف شده باشند. در ریاضیات کلاسیک

---

[۱] Fuzzy Sets

[۲] Lotfi A. Zadeh

[۳] Information and Control

[۴] Fuzzy Logic

[۵] Approximate Reasoning

[۶] System Analysis

[۷] Inanimated Systems

[۸] Animated Systems

[۹] Sharp Boundary

همه چیز یا "آری" یا "نه" است؛ یا یک عنصر متعلق به مجموعه‌ای هست یا متعلق به آن مجموعه نیست؛ چراغ یا روشن است یا خاموش؛ همه چیز یا A است یا $NOT(A)$. عناصر نمی‌توانند تا اندازه‌ای عضو یک مجموعه باشند. زاده می‌گفت : « ریاضیات جدیدی باید ابداع شود، تا بتواند مجموعه‌هایی که اعضای آن الزاماً تعلق صد در صد به آن مجموعه ندارند را بیان نماید. وی چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های فازی[۱] نامید. کلمه Fuzzy در لغت یعنی کُرکی، در هم و بر هم، پُرزدار، مبهم، ناروشن، تار. »

۱-۲- مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های صریح

در مجموعه‌های صریح عناصر یا عضو آن مجموعه هستند یا خیر. درحالیکه در مجموعه‌های فازی، برای تعیین میزان تعلق هر عضو به آن مجموعه کمیتی به نام **درجه عضویت**[۲] یا میزان عضویت به آن عضو نسبت داده می‌شود، که بین صفر و یک قرار دارد. درجه عضویت **صفر** مشخص‌کننده آن است که، عضو هیچگونه تعلقی به آن مجموعه ندارد. درجه عضویت **یک** مبین آن است که، تعلق عضو به مجموعه مورد نظر قطعی و صد در صد است. اعداد بین صفر و یک، نشان‌دهنده درجه عضویت عناصری هستند که **تا اندازه ای** عضو آن مجموعه هستند. بنابراین در مجموعه‌های فازی، میزان تعلق عناصر به مجموعه‌ها نسبی است و از صفر درصد تا صد در صد می‌تواند تغییر کند. برای نمونه، اگر مجموعه "افراد قد بلند یک شهر" را در نظر بگیریم، با یک مجموعه فازی سر و کار داریم؛ که افراد مختلف "قد بلند" متناسب با "مقدار قدشان" میزان عضویتی بین صفر و یک در این مجموعه پیدا می‌کنند.

یکی دیگر از ویژگی‌های مجموعه‌های فازی آن است که "وابسته به موضوع[۳]" هستند. این بر خلاف مجموعه‌های صریح است ،که "مستقل از موضوع[۴]" هستند. کلمه "دایره" یک عبارت ریاضی است، که در تهران، توکیو و سوئد یک مفهوم را می‌رساند. این در حالی است که، عبارت "قد بلند" در این شهرها مفهوم یکسانی ندارند. "قد بلند" یک مجموعه فازی و "دایره" یک مجموعه صریح است. "دایره" متعلق به ریاضیات کلاسیک و "قد بلند" متعلق به ریاضیات فازی است.

به عنوان مثالی دیگر، دو مفهوم "پیوسته" و "ملایم" را مقایسه می‌کنیم. یک تابع "پیوسته" متعلق به ریاضیات کلاسیک است، که ممکن است تابعی "ملایم" نباشد. تابع "ملایم" مفهومی متعلق به ریاضیات فازی است، که ممکن است "پیوسته" نباشد. "پیوسته" مفهومی است که در همه جا و در همه شرایط

۱ Fuzzy Sets

۲ Membership Grade

۳ Content Dependent

۴ Content Independent

مفهومی دقیق و صریح وتعریف شده دارد؛ درحالیکه تابع "ملایم" "وابسته به موضوع" است و در شرایط و مکان‌های مختلف می‌تواند متفاوت باشد. متغیرهای کلامی که ما در محاوره از آنها استفاده می‌کنیم، مانند کوچک، کوتاه، بلند، چاق، گرم، جوان و غیره، خود به خود و بدون آنکه موضوع مرتبط با آنها تعیین و معرفی شوند، معنای یگانه و مستقلی ندارند. این از ویژگی‌های ریاضیات فازی است، که در آن مجموعه‌های فازی "وابسته به موضوع" هستند.

۱-۳-منطق فازی و منطق کلاسیک

منطق کلاسیک را ارسطو فیلسوف یونانی در قرن ؟؟ پیش از میلاد بنیاد نهاد. ارسطو روشی اصولی برای پاسخ به سوالات مطرح شده در مورد جهان پیرامون خود ارائه می‌نماید. منطق کلاسیک می‌آموزد، که چگونه می‌توان به کمک آنچه می‌دانیم، درباره چیزهایی که نمی‌دانیم، نتیجه‌گیری کنیم. این نوع نتیجه‌گیری از مقدمات پذیرفته شده را استدلال منطقی یا استنتاج منطقی می‌نامند

در منطق ارسطویی گزاره‌ها یا "درست" هستند یا "نادرست"؛ حالت میانه‌ای در کار نیست. این امر باعث می‌شود، نتایج استدلال‌ها نیز همین گونه باشد. تنها یکی از حالت‌ها برای نتیجه، قابل قبول اعلام می‌شود یا "درست" یا "نادرست". منطق ارسطویی پایه و اساس ریاضیات کلاسیک است. هر قضیه‌ای که در ریاضیات کلاسیک اثبات می‌شود، از منطق ارسطویی و استنتاج منطقی آن مشتق شده است. به این خاطر است که، قضایای ریاضی دقیق و صریح هستند؛ ابهام و تقریبی در میان نیست. « مجموع زوایای هر مثلث در صفحه، ۱۸۰ درجه است.»، « هر عدد به توان صفر، مساوی واحد است.»، « هیچ مثلث قائم الزاویه‌ای، اضلاع برابر ندارد.»، شاخه‌های مختلف علوم، مانند فیزیک، شیمی و مهندسی نیز، که عمدتاً بر پایه ریاضیات کلاسیک بیان و ارائه می‌شوند، صریح و دقیق هستند. منطق کلاسیک آن چنان قدرتی دارد که بیش از ؟؟ سال است، که بر جهان علم، اندیشه، فرهنگ و هنر مسلط شده است. کمتر کسی است که آن را به چالش بطلبد.

در قرن بیستم میلادی، برتراند راسل، فیلسوف و ریاضی‌دان انگلیسی، تناقض‌هایی را در منطق ارسطو مطرح کرد. وقتی شهروندی می‌گوید : « مردم این شهر دروغ‌گو هستند.» شما چه استنتاجی در مورد وی و مردم شهر می‌کنید؟ اگر مردم شهر دروغ‌گو هستند، پس این شهروند نیز دروغ‌گو است؛ گفته وی که مردم شهر دروغگو هستند، نیز دروغ است؛ پس مردم شهر راستگو هستند؛ ولی چون شهروند از اهالی همین شهر است و مردم شهر راستگو هستند، پس درست گفته که مردم شهر دروغ‌گو هستند؛ بنابراین مردم شهر دروغ‌گو هستند. این تناقضی است که در استدلال کلاسیک وجود دارد. اساس این تناقض از آنجا ناشی می‌شود، که یک گزاره نمی‌تواند تا اندازه‌ای درست و تا اندازه‌ای نادرست باشد. این اشکالی است که در

منطق ارسطویی وجود دارد. در واقعیت "راستگویی" و "دروغگویی" مردم یک شهر نسبی است. مردم به طور نسبی راستگو، و یا دروغگو هستند. حتی عبارت "مردم" نباید به صورت صفر و یک، همه و هیچکدام تلقی شود. مساله این است که، در منطق ارسطویی حالت میانه وجود ندارد. در نقطه مقابل منطق کلاسیک که بیان‌کننده "استدلال دقیق و صریح[۱]" است، منطق فازی بیان‌کننده "استدلال تقریبی[۲]" است. با منطق فازی تناقض مذکور از بین می‌رود. مردم شهر جمعیت زیادی هستند، که گرچه بخش عمده‌ای از آنها و در موارد متعددی دروغ می‌گویند، ولی کسانی همچون این شهروند نیز هستند، که میزان تعلق آنها به مجموعه "شهروندان دروغگو" اندک است؛ و عبارتی که بیان شده است نیز، تنها مبین آن است که « زیاد به حرف مردم این شهر اعتماد نکنید، چون دروغگو زیاد دارد.»

به مثال دیگری از تناقض در منطق کلاسیک توجه کنید.

مقدمه اول : آپارتمان ارزان در تهران، کمیاب است.

مقدمه دوم : چیزی که کمیاب است، گران است.

نتیجه : آپارتمان ارزان در تهران گران است.

چنین تناقض‌هایی در منطق فازی دیده نمی‌شود.

منطق فازی زبانی است، که مساله نسبی بودن و وابستگی به موضوع را نشان داده، بیان می‌نماید. منطق فازی یعنی تئوری مجموعه‌های فازی. علت آنکه می‌گوییم "منطق فازی" و آن را به جای تئوری مجموعه‌های فازی به کار می‌بریم، آن است که، استفاده از اصطلاح منطق فازی آسان‌تر است. به عبارت دیگر، ما واقعاً درباره تئوری مجموعه‌های فازی، در مقابل تئوری مجموعه‌های صریح بحث می‌کنیم.

نکته مهم دیگر آنکه انسان در محاوره و مکالمه، همواره از گزاره‌های تقریبی استفاده می‌کند. به مثال زیر توجه نمایید.

« اغلب سوئدی‌ها، بلوند هستند.»

در اینجا، کلمه "اغلب" فازی است؛ یعنی مرز دقیق ندارد؛ مشخص نشده که دقیقاً چند درصد مردم سوئد بلوند هستند؛ بلکه با بیان چنین عبارتی، یک برداشت عام به شنونده منتقل می‌شود، که نشان‌دهنده بلوند بودن اکثریت سوئدی‌ها است. کلمه "سوئدی‌ها" خود فازی است و طیف وسیعی را، از مردمی که اصالتاً و نسل در نسل سوئدی بوده‌اند، تا مردمی که صرفاً متولد سوئد هستند و حتی کسانی را که طبق

[۱] Precise Reasoning

[۲] Approximate Reasoning

قانون تبعه کشور سوئد هستند، شامل می‌شود. پس "سوئدی" خود یک عبارت فازی است. "بلوند" نیز فازی است و طیف رنگی گسترده‌ای از رنگ پوست و مو را شامل می‌شود. به این ترتیب می‌بینیم که در محاورات مردمی عبارات عمدتاً فازی هستند و می‌توان گفت که،

« منطق کلاسیک یا منطق ارسطویی با این هدف ایجاد شده، که استدلال‌های دقیق را به وجود آورد و دسته‌بندی کند. ریاضیات کلاسیک بر منطق ارسطویی استوار است.

در مقابل، منطق فازی[۱] با این هدف ارائه شده، که استدلال‌های تقریبی را که انسان به طور طبیعی در محاوره به کار می‌برد، بیان و ارائه نماید. مجموعه‌های فازی و ریاضیات فازی بر منطق فازی استوار است.»

در مثال‌های زیر، تفاوت منطق ارسطویی و منطق فازی نشان داده شده است. به عنوان نخستین مثال می‌خواهیم از دو گزاره « x بزرگ‌تر یا مساوی y است.» و « y بزرگ‌تر یا مساوی z است.» به نتیجه‌ای در مورد x و z برسیم.

گزاره اول :	x بزرگ‌تر یا مساوی y است.	$x \geq y$
گزاره دوم :	y بزرگ‌تر یا مساوی z است.	$y \geq z$
نتیجه :	x بزرگ‌تر یا مساوی z است.	$x \geq z$

حال چنانچه به جای گزاره اول بالا داشته باشیم « x خیلی بزرگ‌تر از y است.» و به جای گزاره دوم « y خیلی بزرگ‌تر از z است.» و بخواهیم رابطه x و z را بیان کنیم، داریم،

گزاره اول :	x خیلی بزرگ‌تر از y است.	$x \gg y$
گزاره دوم :	y خیلی بزرگ‌تر از z است.	$y \gg z$
نتیجه :	x خیلی بزرگ‌تر از z است.	$x \gg z$

در اینجا از گزاره‌های فازی استفاده شده است. "خیلی بزرگ‌تر" یک مجموعه فازی است.

گزاره اول :	راه یخبندان، لغزنده است.
گزاره دوم :	راه لغزنده، خطرناک است.
نتیجه :	راه یخبندان، خطرناک است.

[۱] Fuzzy Logic

در اینجا نیز، "راه یخبندان"، "راه لغزنده" و "راه خطرناک" مجموعه‌های فازی هستند. باید توجه داشت که چون در این نوع استدلال، با مجموعه‌های فازی رو برو هستیم، ممکن است آنچه در نتیجه استدلال بیان می‌شود، دقیقاً منطبق با گزاره‌های اول یا دوم نباشد. مثال بعدی این مورد را بهتر نشان می‌دهد.

گزاره اول : این گوجه فرنگی، قرمز است.

گزاره دوم : اگر گوجه فرنگی قرمز باشد، آنگاه رسیده است.

نتیجه : این گوجه فرنگی، رسیده است.

گوجه فرنگی ها در مجموعه‌های فازی "قرمز" می‌توانند مقادیر عضویت متفاوتی داشته باشند. برای نمونه می‌توانند کمی قرمز، قرمز، یا قرمز تیره باشند. این درحالی است که، قانون کلی که در گزاره دوم بیان شده دو مجموعه قرمز و رسیده را به هم ربط می‌دهد. به عبارتی ممکن است "این گوجه فرنگی" در گزاره اول دقیقاً منطبق بر مجموعه فازی "گوجه فرنگی قرمز" در مقدمه دوم نباشد. پس استنتاج "رسیده بودن این گوجه فرنگی" نیز امری تقریبی است. مثلاً اگر در گزاره اول "این گوجه‌فرنگی" تا اندازه‌ای "قرمز" باشد، یعنی میزان و مقدار عضویتش در مجموعه "قرمز" زیاد نباشد، می‌توان نتیجه گرفت که مقدار عضویت آن در مجموعه "رسیده" نیز زیاد نیست. این استنتاج تقریبی است؛ نتیجه آن است که، "گوجه فرنگی" مورد نظر، تا اندازه‌ای "رسیده" است.

به‌طورکلی، می‌توان گفت که در منطق و ریاضیات فازی ما با دو مقوله مهم و اساسی سر و کار داریم. الف) متغیرهای کلامی ب) قواعد اگر-آنگاه فازی. منظور از "متغیرهای کلامی" عبارت‌های فازی هستند، که ما در محاوره و مکالمه به طور گسترده از آنها استفاده می‌کنیم و منظور از "قواعد اگر-آنگاه فازی" گزاره‌هایی است، که با استفاده از "متغیرهای کلامی" و ارتباط دادن آنها با یکدیگر، دستورالعمل‌ها و قوانین منطقی و قابل قبول را به وجود آورده‌ایم. آنچه می‌ماند این که، عبارت‌ها و متون کلامی را چگونه با مفاهیم ریاضی و دستورالعمل‌هایی که با آن آشنا هستیم، یعنی مفاهیم ریاضی کلاسیک، بیان کنیم

۱-۴- بیان مفاهیم فازی با ریاضیات کلاسیک

مجموعه‌های صریح و منطق کلاسیک را می‌توان حالت‌های مرزی مربوط به مجموعه‌های فازی و منطق فازی دانست. در حالی که در مجموعه‌های فازی، میزان عضویت عناصر بین صفر و یک تغییر می‌کند، این محدوده‌ها و مرزها همان مجموعه‌های صریح هستند؛ با این وجود، برای بیان مفاهیم فازی ابزاری جز ریاضیات کلاسیک در اختیار نداریم. از سوی دیگر، گرچه منطق فازی گستره بسیار وسیعی از مفاهیم کلامی و سیستم‌های مرتبط با موجودات زنده را پوشش می‌دهد، ولی با ساختاری که برای مجموعه‌های

فازی در نظر گرفته شده، بسیاری از مفاهیم دنیای واقع را نمی‌توان با آن بیان و ارائه نمود. در نقاشی اگر رنگی را روی بوم بگذارید، سپس رنگ دیگری را به آن بی‌افزایید، الزاماً همان نتیجه‌ای را نمی‌دهد که ابتدا رنگ دوم و سپس رنگ اول را به بوم وارد کنید. در آشپزی اینکه ندانید ابتدا باید کدام ماده غذایی و سپس کدامیک را به غذا بی‌افزایید و آنها را اشتباهاً جابجا استفاده کنید، ممکن است به دو نوع غذای متفاوت و یا به اخراج شما از آشپزخانه منجر شود! در بسیاری از سیستم‌های اجتماعی، اقتصادی، مدیریتی، هنری و غیره، $a+b$ الزاماً مساوی $b+a$ نیست.

بیان یک عبارت به جای عبارت دیگری، ممکن است در مسائل اجتماعی فاجعه بیافرینند. این گونه مفاهیم را نمی‌توان با ریاضیات فازی بیان کرد؛ زیرا، در این ریاضیات $a+b$ و $b+a$ با هم برابرند. محدودیت‌هایی که توسط پایه‌گذاران منطق فازی، در ریاضیات فازی برای آن اعمال شده است، به این خاطر بوده که بتوانند با ساده‌ترین وسیله، مفاهیم مختلف را نمایش دهند و عملیات گسترده‌ای را روی این مجموعه‌ها و مفاهیم به اجرا در آورند.

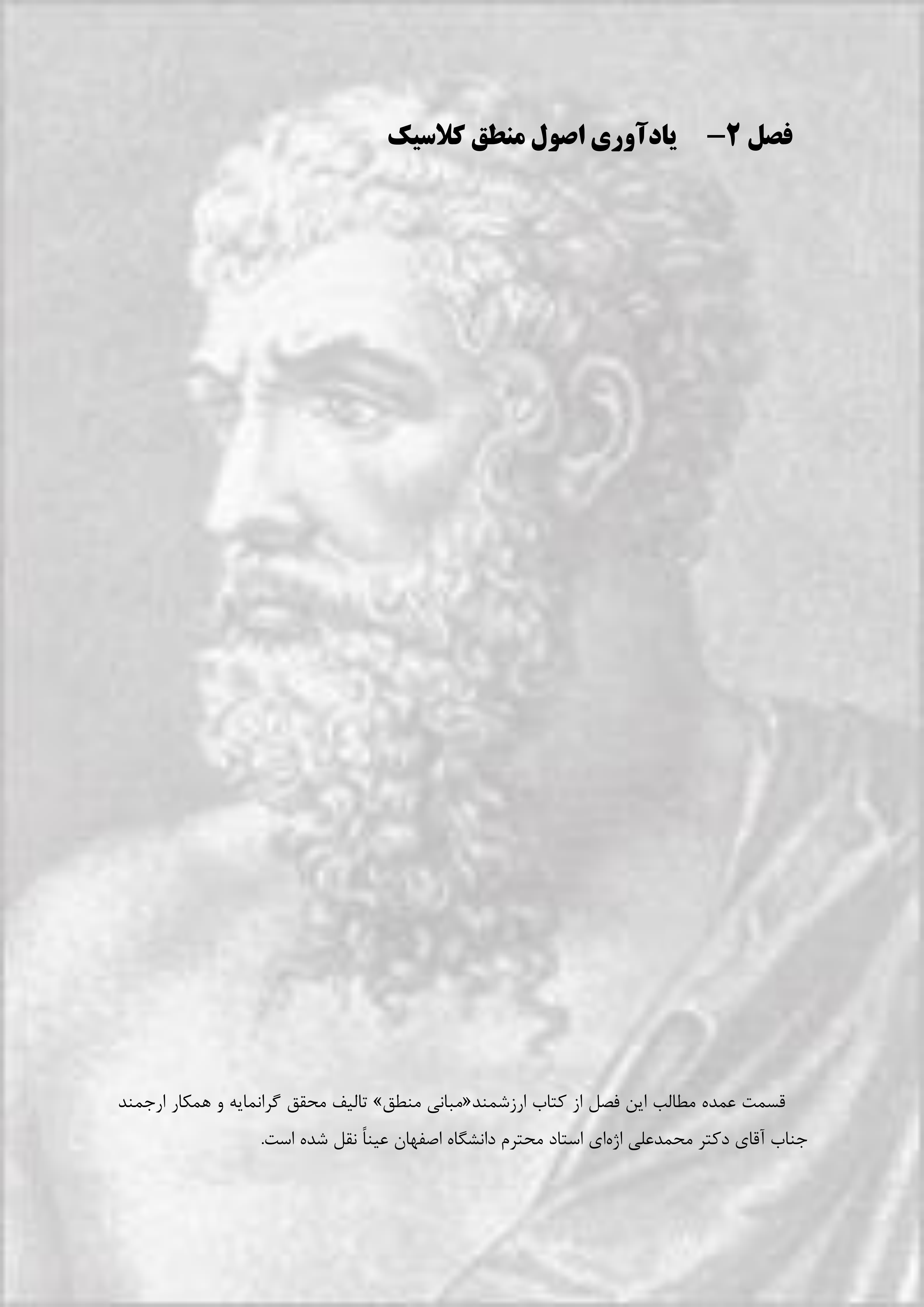
۱–۵– کاربرد ها

پروژه کلاسی داده شود

۱–۶– محاسبات نرم

استفاده از روش‌های محاسباتی در کاربردهای مختلف ارائه شده در قسمت ؟؟کاربردها؟؟، می‌تواند صرفاً بر مبنای ریاضیات و منطق فازی باشد و یا همراه با سایر روش‌ها به انجام رسد. به‌طورکلی، علاوه بر منطق فازی، محاسبات عصبی، محاسبات ژنتیک و محاسبات احتمالاتی، می‌توانند همراه با منطق فازی در یک سیستم مورد استفاده قرار گیرند؛ ترکیب دو یا بیشتر این روش‌ها را **محاسبات نرم**[1] می‌نامند.

[1] Soft Computing



فصل ۲–   یادآوری اصول منطق کلاسیک

قسمت عمده مطالب این فصل از کتاب ارزشمند«مبانی منطق» تالیف محقق گرانمایه و همکار ارجمند جناب آقای دکتر محمدعلی اژه‌ای استاد محترم دانشگاه اصفهان عیناً نقل شده است.

۲-۱- تعاریف و اصطلاحات

منطق چیست؟

انسان متفکر از ابتدای وجود، برای بیان مفاهیم مختلف، شناخت جهان پیرامونی خود و جهان هستی، و برای پاسخ دادن به سوالاتی که با آن روبرو بوده، تلاش کرده، در جستجوی راه‌حلی مناسب و مسیری روشن و قابل قبول بوده است. اولین فیلسوفان کسانی بودند، که درباره جهان هستی و اساس و مبنای آن اظهار نظرهایی کردند. آنها چون سوالات اساسی را مطرح می‌کردند و راه و روشی را جهت کشف حقایق ارائه می‌دادند، **فیلسوف** نامیده شدند. هم چنین چون سوالاتی را که درباره جهان هستی مطرح می‌کردند و اظهار نظرهایی که می‌کردند برای مردم جالب توجه بود، مشهور شدند و نامشان باقی ماند.

با این همه تا زمانی که برای یافتن پاسخ به سوالات طرح شده، "روشی مطلوب و مورد پذیرش اندیشمندان" ارائه شود، نسل‌های فراوانی از فیلسوفان آمدند و رفتند. از میان متفکرین متقدم، این فلاسفه یونان بودند، که به تدریج روش‌های مقبولی را برای دستیابی به پاسخ سوالات مطرح شده پیشنهاد کردند. "ارسطو" فیلسوف یونانی، شاگرد افلاطون بنیان‌گزار منطق است. **منطق**[۱] علم به قواعد و قوانینی است که فکر را هدایت کند و از خطا مصون دارد [؟؟].

منطق سعی می‌کند تا نشان دهد، انسان چگونه باید برای وصول به حقیقت و احتراز از خطا، استدلال کند [؟؟]. به عبارت دیگر، منطق علم قوانین استدلال است [؟؟]. منطق هنر فکر کردن است [؟؟]. "ارسطو" برای پاسخ دادن به سوالات، روشی روشن و مورد قبول را ارائه داد، برای آن اصول و قواعدی را وضع کرد و این مجموعه را منطق نامید.

منطق ارسطویی پایه و اساس دانش‌های بشری و مبنای پیشرفت‌های انسان در علومی مانند فیزیک، شیمی، ریاضیات، پزشکی و مهندسی است. اساس منطق "کلام" است و کلام متشکل از کلمات است. اساس منطق به نحوه چیدن کلمات و جملات در کنار هم و استدلال و استنتاج مربوط می‌شود. منطق می‌گوید که چگونه با قراردادن چند کلمه متشکل از اسم، فعل، صفت، حرف، مسند، مسندالیه و ... یک جمله یا در زبان منطقی یک "قضیه" یا یک "گزاره" ساخته می‌شود، و چگونه از ترکیب دو یا چند گزاره می‌توان به نتیجه‌گیری‌ها و استدلال‌های معقول و مطلوب رسید. مثلاً از دو گزاره مورد قبول « انسان فانی است» و « سقراط انسان است» به این نتیجه برسیم که « سقراط فانی است»**.** حال اگر کسی با قبول داشتن آن دو مقدمه بگوید که « سقراط جاویدان است» تکذیب قول سابق خود را کرده و به تناقض گویی پرداخته است [؟؟]. پیشرفت‌های جهان امروز در زمینه‌های مهندسی، پزشکی، فن‌آوری، هوافضا و امثال آن

[۱] Logic

همه بر علوم پایه استوار هستند. واقعیت‌های علمی را دانشمندان علوم پایه **کشف** می‌کنند و مهندسین از این واقعیت‌ها برای آسایش انسان و دستیابی وی به آرزوهایش استفاده و ابزار و وسایل را **اختراع** می‌کنند.

بنابراین اساس علوم پایه بر کشف واقعیت‌های جهان هستی است. ابزار لازم برای "کشف" توسط دانشمندان دو چیز است؛ اول دانش موجود و استنتاجات منطقی برای پی‌بردن به ناشناخته‌های جهان هستی و دوم ریاضیات. بسیاری از اصول علمی بر ریاضیات استوار است و پیشرفت‌ها و دستاوردهای علمی محصول دانش ریاضی است. از سوی دیگر اصول و مبانی ریاضیات بر قضایای ریاضی استوار است و اساس قضایای ریاضی بر منطق ریاضی استوار است و اساس منطق ریاضی بر استنتاجات منطقی استوار است؛ بر منطق ارسطویی.

ارسطو پایه‌گذار منطق کلاسیک است. منطقی که پاسخ‌های قطعی و دقیق به شما ارائه می‌کند. منطقی که نتیجه‌اش "درست بودن" یا "نادرست بودن" یک عبارت کلامی است. اساس "منطق" بیان عبارت‌ها و استدلال‌هایی است که شنونده را راضی می‌کند، دلنشین است، مورد قبول است و نمی‌توان با آن لجاج کرد. دانش بشری خود را مرهون منطق می‌داند و اصول منطقی ارسطو چند هزار سال بدون تغییر بر عرصه جهان علم حکم‌فرمائی کرده است.

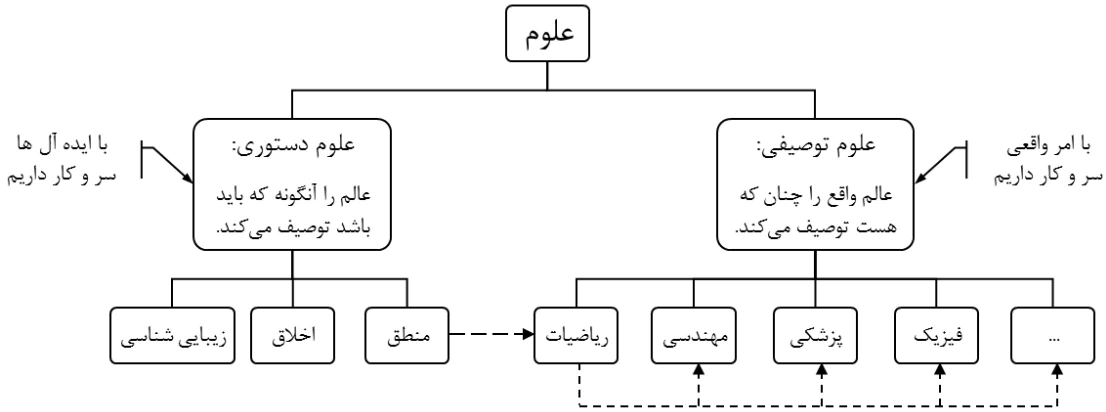
گرچه در قرون اخیر به خصوص در قرن بیستم، بعضی اندیشمندان و فلاسفه تضادهایی را در منطق ارسطویی نشان دادند، ولی تا ارائه منطق فازی توسط آقای لطفی زاده کسی راه چاره‌ای برای رفع این تناقص‌ها ارائه نکرده بود (نمونه‌هایی از این تضادها در فصل اول بیان شده است). در این فصل ما صرفاً با منطق کلاسیک آشنا می‌شویم.

تعریف منطق

منطق علمی است که اصول و قواعد اندیشیدن را می‌آموزد. به عبارت دیگر، منطق، مجموعه دستورها و قواعدی است که هرگاه رعایت شود، انسان از لغزش و خطای فکر مصون می‌ماند [؟؟].

باید توجه داشت که منطق، اساس و پایه شاخه دیگری از مجموعه علوم، یعنی ریاضیات است. ریاضیات کلاسیک بر منطق ارسطویی استوار است و آنچه در شاخه‌های دیگر علوم با زبان ریاضی بیان می‌شود، به‌طور اصولی ریشه در منطق ارسطویی دارد.

برخی نظریه‌پردازان، علوم را طبق شکل ۲-۱ تقسیم‌بندی می‌کنند [؟؟]. این تقسیم‌بندی از نظر مفهومی بین علوم توصیفی و علوم دستوری تفکیک قائل می‌شود و همانطور که دیده می‌شود، منطق در شاخه علوم دستوری و عمده علومی که ما با آنها به‌عنوان مهندس سروکار داریم، در حوزه علوم توصیفی قرار می‌گیرد.



شکل ۲-۱ : تقسیم‌بندی علوم به دو دسته دستوری و توصیفی

قوانین علوم توصیفی به صورت جمله‌های اخباری « مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است» و قوانین علوم دستوری به صورت جمله‌های انشائی هستند « نفس باد صبا مشک‌فشان خواهد شد» و یا « هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است».

عبارت منطقی حاصل اندیشه درست است. از عبارت‌های منطقی برای بیان مفاهیم مختلف، برای پاسخ دادن به سوالاتی که انسان با آن روبرو است، و برای دستیابی به استنتاج‌ها و استدلال‌های معتبر می‌توان استفاده کرد. بدین منظور باید :

۱. درست اندیشید.

۲. واقعیت‌های ملموس و مورد قبول را بیان کرد.

۳. از اصول و قواعد علم منطق استفاده کرد.

۴. مفاهیم و موضوعات مورد نظر را اثبات یا نفی کرد.

برای ورود به مبحث منطق کلاسیک با تعریف گزاره آغاز می‌کنیم. سپس نسبت یا ارتباط گزاره‌ها و مفاهیم مختلف آنها را بیان می‌نمایم؛ و در ادامه به تعریف انواع گزاره‌های ساده و مرکب می‌پردازیم. تمامی اینها مقدماتی برای بیان استنتاج منطقی (یا استدلال منطقی) است، که اساس منطق ارسطویی است. از سه نوع استدلال منطقی، موضوع بحث ما عمدتاً با استدلال قیاسی است، که به معنای استنتاج از کلی به جزئی است. اشکال چهارگانه قیاس اقترانی و ضرب‌های شانزده‌گانه هر شکل بیان می‌شوند. این فصل با بیان قوانین مهم استنتاج قیاسی شرطی به پایان می‌رسد.

گزاره

گزاره[1] جمله‌ای خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد؛ هرچند درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد. گزاره را با حروفی مانند p، q و r نشان می‌دهند. هر گزاره درست را با "د"، "T" یا "1" و هر گزاره نادرست را با "ن"، "F" یا "0" نشان می‌دهند. "گزاره" را در کتاب‌های منطق "قضیه" نیز معنی کرده‌اند. یعنی به جای "گزاره" از عبارت "قضیه" استفاده شده است.

جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند. هم‌چنین بعضی جملات خبری نیز گزاره نیستند. گزاره باید مرکب (از چند لفظ درست شده باشد)، تام (معنای کاملی را برساند و شنونده را منتظر نگذارد) و خبری (متضمن حکم قطعی باشد) باشد.

مثال ۲-۱ : کدامیک از جملات زیر گزاره هستند؟

الف) ۳۷ عددی فرد است.

ب) $-4 > -7$

ج) 10^{13} عدد بزرگی است.

د) $2^{100}+1$ عددی اول است.

ه) هزارمین عدد اول ۷۳۵۴۲۱ است.

و) گل سرخ زیباست.

ز) سعدی شاعر خوبی است.

ح) بَه بَه چه باغ زیبایی!

ط) لطفاً کتاب‌هایتان را باز کنید.

حل: عبارت‌های الف، ب، د و ه گزاره‌اند.

نقیض یک گزاره

نقیض یک گزاره بر حسب تعریف عبارت است از گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی است. نقیض یک گزاره با عبارت « چنین نیست که ...» در جلوی گزاره درست می‌شود. مثلاً نقیض گزاره « ۷ عددی فرد است» را به صورت زیر بیان می‌کنیم،

« چنین نیست که، ۷ عددی فرد است».

نقیض گزاره p را با $\tilde{p}$ نشان می‌دهیم.

[1] Proposition, Statement

جدول ۲-۱ . ارزش نقیض یک گزاره

p	$\tilde{p}$
د	ن
ن	د

مثال ۲-۲ : نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۳۱ عددی اول است.

ب) $10^2 + 10^3 = 10^5$

ج) $\sqrt{9+16} = 3 + 4$

د) $7 > 3$

حل :

الف) ۳۱ عددی اول نیست.

ب) $10^2 + 10^3 \neq 10^5$

ج) $\sqrt{9+16} \neq 3 + 4$

د) $7 \leq 3$

در این قسمت به تبیین **گزاره‌های مرکب** می‌پردازیم. برای ورود به این مبحث، ابتدا باید نحوه **ارتباط** بین دو یا چند مفهوم مختلف تعریف و بیان شوند. مفاهیم مختلفی که نحوه ارتباط آنها باید تعریف شوند، می‌توانند دو یا چند کلمه، دو یا چند مجموعه، و یا دو یا چند گزاره باشند.

نسبت یا ارتباط

آنچه دو یا چند چیز را به هم مربوط می‌کند، **نسبت** یا **ارتباط**[۱] نام دارد. پ، نسبت یا ارتباط بیان‌کننده نوع و نحوه ارتباط دو یا چند چیز است [؟؟]. به‌طورکلی چهار نوع ارتباط بین دو مفهوم تعریف می‌شود.

مرتبط نبودن یا تباین

تعریف کلاسیک تباین : دو مفهوم را نسبت به هم متباین[۲] یا دارای نسبت تباین نامند، چنانچه فردی (عضوی) یکی از دو مفهوم را داشته باشد، مفهوم دیگر در مورد آن فرد (عضو) صدق نکند. مانند نرم و خشن، یا تاریک و روشن، یا خوب و بد یا زنده و مرده. نمی‌تواند موجودی هم زنده باشد، هم مُرده؛ یا نمی‌تواند چیزی هم تاریک باشد، هم روشن؛ یا نمی‌تواند موجودی هم انسان باشد و هم اسب.

۱ Relation

۲ Complete Mutual Exclusion

برای نمونه،

این پارچه نرم است؛ پس این پارچه خشن نیست.

این اتاق تاریک است؛ پس این اتاق روشن نیست.

آن کار خوب است؛ پس آن کار بد نیست.

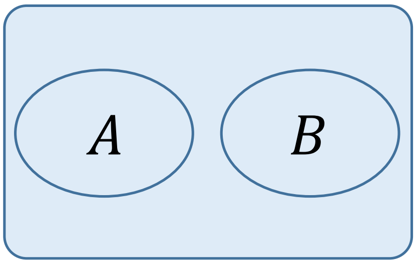
او زنده است؛ پس او مُرده نیست.

او انسان است؛ پس او اسب نیست.

همین جا متذکر می‌شویم که مفهوم تباین، در قالب منطق کلاسیک است که به این ترتیب تعریف می‌شود. خواهیم دید که در منطق فازی چنین مرز سفت و سختی کمرنگ می‌شود. خواهیم دید که عبارت‌های نرم و خشن، تاریک و روشن، خوب و بد همگی مفاهیمی فازی هستند. مثلاً یک پارچه می‌تواند تا اندازه‌ای نرم و تا اندازه‌ای خشن باشد؛ یک اتاق می‌تواند تا اندازه‌ای تاریک و تا اندازه‌ای روشن باشد؛ و یا کیفیت یک ماشین لباسشویی تا اندازه‌ای خوب و تا اندازه‌ای هم بد باشد. از سوی دیگر، انسان و حیوان یا انسان و اسب، از نظر فیزیولوژی کمیت‌هایی صریح و غیرفازی هستند. پس این دو مفهوم صرفاً متعلق به مجموعه‌های صریح و در حوزه منطق کلاسیک قابل بحث‌اند و متباین هستند.

تعریف ریاضی تباین : دو مجموعه A و B را متباین نامند، اگر هیچ عضو مجموعه A، عضو مجموعه B نباشد و بالعکس؛ مگر مجموعه تهی.

نمایش تباین: مفهوم تباین را می‌توان به صورت زیر نشان داد.



شکل ۲-۲ : نمایش مفهوم تباین

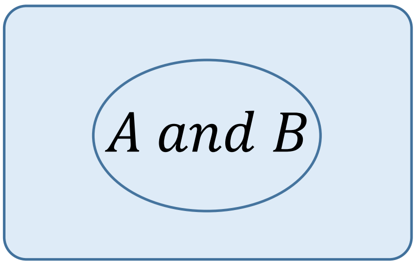
مفهوم تباین را می‌توان چنین نیز بیان کرد؛ دو مجموعه A و B متباین هستند، چنانچه اشتراک آنها مجموعه تهی باشد $A \cap B = \emptyset$.

تساوی

تعریف کلاسیک تساوی : دو مفهوم کلی را با یکدیگر مساوی[1] نامند، در صورتی‌که اگر یکی از دو مفهوم در موردی صدق کند، مفهوم دیگر نیز در همان مورد صدق کند. مانند دو مفهوم "انسان" و "ناطق".

تعریف ریاضی تساوی: دو مجموعه A و B را مساوی نامند، اگر داشته باشیم :

$$A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$



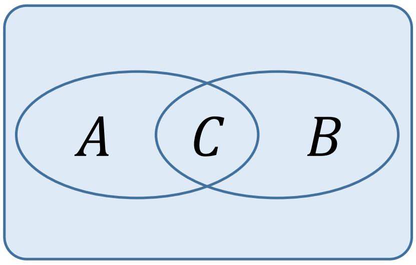
شکل ۲-۳ : نمایش مفهوم تساوی

عام و خاص من وجه (اشتراک)

تعریف کلاسیک اشتراک : دو مفهوم کلی را دارای نسبت عام و خاص من وجه[2] نامند، در صورتی‌که آن دو مفهوم تنها در برخی مصادیق مشترک باشند. مانند دو مفهوم "دانشجو" و "شاعر".

تعریف ریاضی اشتراک : اشتراک دو مجموعه A و B به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A \cap B \triangleq C \neq \emptyset \neq A \neq B$$



شکل ۲-۴ : مفهوم عام وخاص من وجه (اشتراک)

عام و خاص مطلق

تعریف کلاسیک عام و خاص مطلق : دو مفهوم کلی را با یکدیگر عام و خاص مطلق[3] نامند، در صورتی که اگر یکی از دو مفهوم در مورد چیزی صدق کند، مفهوم دیگر نیز در مورد آن چیز صدق کند، **اما نه برعکس**. مانند مفاهیم "انسان" و "حیوان".

---

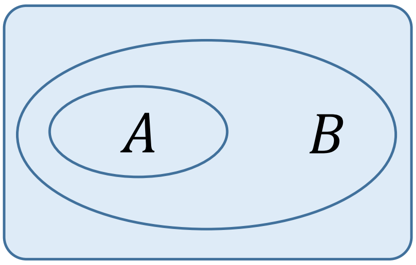
[1] Equivalence, Mutual Inclusion

[2] Partial Inclusion

[3] Complete Conclusion

تعریف ریاضی عام و خاص مطلق : دو مجموعه A و B را عام و خاص مطلق نامند، اگر داشته باشیم،

$A \subseteq B$، $A \neq B$ و $B \nsubseteq A$



شکل ۲-۵ : مفهوم عام وخاص مطلق

۲-۲-انواع گزاره

گزاره‌ها را می‌توان به دو دسته گزاره‌های حملی یا گزاره‌های ساده[۱] و گزاره‌های مرکب[۲] تقسیم نمود. گزاره مرکب را گزاره شرطی نیز می‌نامند که در ادامه توضیح خواهیم داد. شکل ۲-۶ انواع گزاره‌ها و تقسیم‌بندی آنها را نشان می‌دهد.

۲-۲-۱- گزاره حملی یا گزاره ساده

گزاره ساده یا **حملی** گزاره‌ای است که " در آن به ثبوت خبری برای چیزی یا نفی چیزی حکم شود ". پس گزاره ساده گزاره‌ای است که در آن " چیزی را بدون هیچ شرطی به چیز دیگری استناد داده باشند".

برای نمونه،

سقراط انسان است.

هر فلزی هادی الکتریسیته است.

چوب هادی الکتریسیته نیست.

انسان ناطق است.

راه هموار نیست.

زمین کروی است.

گزاره ساده از ۳ جزء تشکیل می‌شود :

۱. موضوع[۳] یا مُسند الیه،

---

[۱] Categorial Proposition

[۲] Composite Proposition

[۳] Subject

۲. محمول[1] یا مُسند، و
۳. رابطه[2].

موضوع یا **مُسند الیه** آن قسمت از گزاره است که چیزی (مُسند) را بدان نسبت می‌دهیم. در مثال‌های بالا به ترتیب سقراط، فلز، چوب، انسان، راه و زمین موضوع هستند.

محمول یا **مُسند** فعل یا صفتی است که به موضوع نسبت داده می‌شود. در مثال‌های بالا به ترتیب انسان، هادی الکتریسیته، هادی الکتریسیته، ناطق، هموار و کروی محمول هستند.

رابط لفظی است که بیان‌کننده تحقق یا عدم تحقق نسبت، میان موضوع و محمول است. در مثال‌های بالا به ترتیب، است، است، نیست، است، نیست و است، رابط هستند.

اقسام گزاره حملی

گزاره حملی از لحاظ موضوع به چهار دسته تقسیم می‌شوند :

۱. **شخصیه** که در آن موضوع جزئی است. مانند « پاستور کاشف میکروب است.»

۲. **طبیعیه** که در آن موضوع کلی است. مانند « انسان ناطق است.»

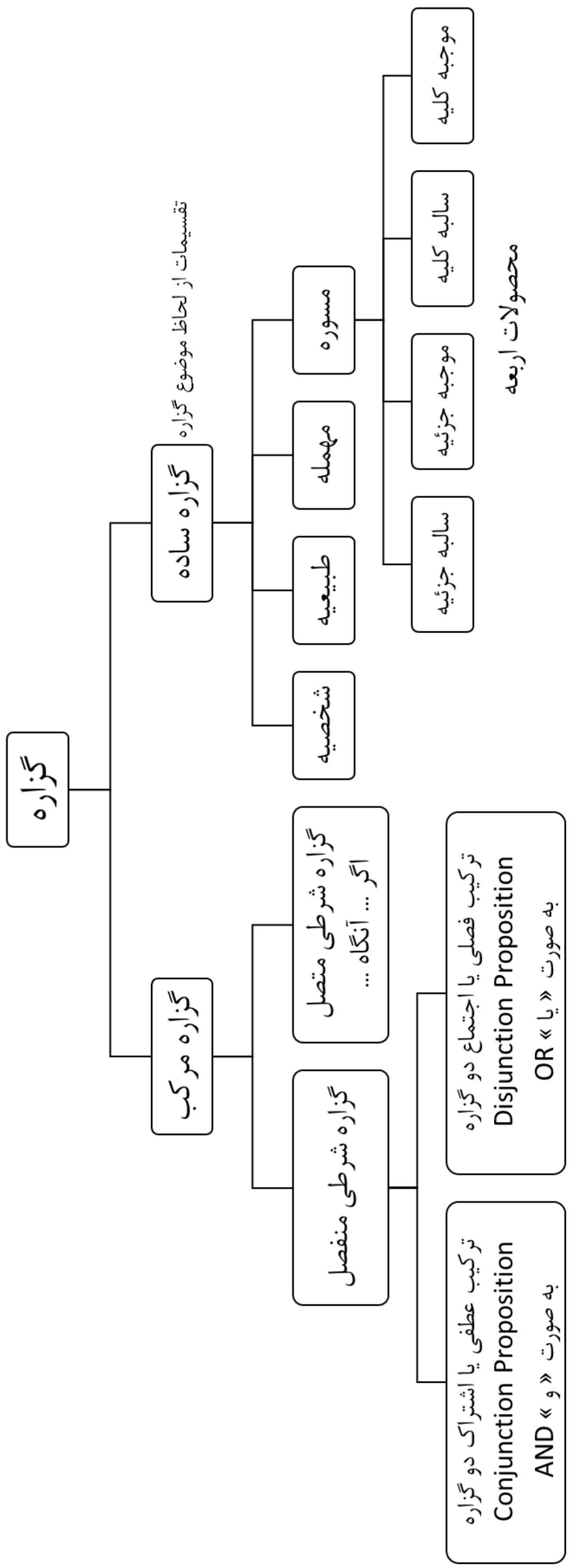
۳. **مهمله** که در آن موضوع همه افراد* هستند، بدون تعیین کمیت افراد. یعنی ممکن است شامل همه افراد و یا تنها برخی از آنها شود. مانند « دانشجویان در کلاس حاضر شدند. » یا « مردم این شهر کوشا هستند. »

❊ منظور از افراد موضوع است؛ یعنی همان مُسند الیه.

۴. **محصوره** یا **مسوره** که در آن کمیت موضوع در متن گزارش شده است. مانند « هر فلزی هادی الکتریسیته است. » یا « بعضی فلزات اکسید می‌شوند. » یا « هیچ انسانی عمر جاودان ندارد. » یا « همه حیوانات دندان دارند». (توجه شود که آخرین گزاره یک گزاره نادرست است.)

[1] Predicate

[2] Copula



شکل ۲-۶: انواع گزاره‌ها و تقسیم‌بندی آنها

کلمه‌ای که در گزاره مسوره دلالت بر کمیت دارد، **سور** گزاره نامیده می‌شود. مانند "هر"، "همه"، "بعضی"، "هیچ".

گزاره محصوره یا مسوره خود بر چهار قسم است، که اختصاراً به آنها **محصولات اربعه** می‌گویند.

۱. **موجبه کلیه** (مثبت و کلی) : مانند « هر انسانی به غذا احتیاج دارد.»

۲. **سالبه کلیه** (منفی و کلی) : مانند « هیچ انسانی در این جهان جاودان نیست.»

۳. **موجبه جزئیه** (مثبت و جزئی) : مانند « بعضی گیاهان گل می‌دهند.»

۴. **سالبه جزئیه** (منفی و جزئی) : مانند « بعضی گیاهان گل نمی‌دهند.»

بنابراین هر گزاره محصوره یا کلیه است یا جزئیه؛ و یا موجبه است یا سالبه. کلیت یا جزئیت را **کم** یا **کمیت گزاره**، و ایجاب و سلب را **کیف** یا **کیفیت گزاره** می‌نامند.

نحوه بیان موجبه کلیه در زبان فارسی با کلمات"هر"، "همه" و ...، و در عربی "کل"، و "الف و لام" استغراق است. نحوه بیان موجبه جزئیه و سالبه جزئیه در زبان فارسی "برخی" و "پاره‌ای"، و در عربی "بعض" است. نحوه بیان سالبه کلیه در زبان فارسی "هیچ" است.

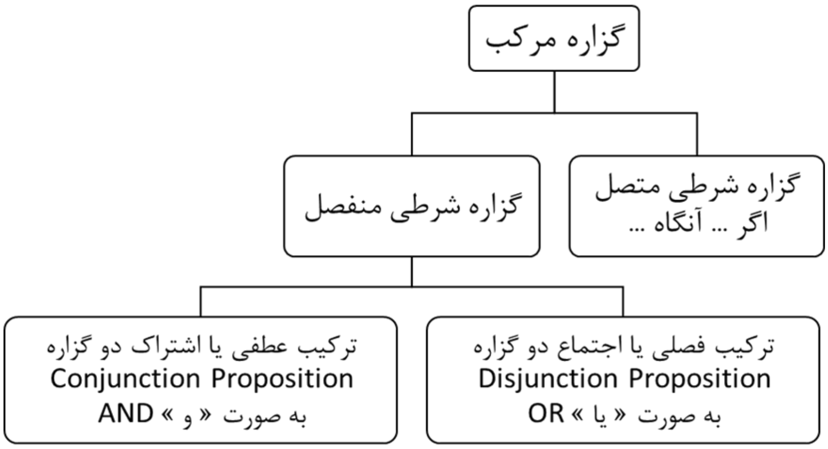
۲-۲-۲- گزاره مرکب یا گزاره شرطی

گزاره مرکب گزاره‌ای است که از ترکیب چند گزاره ساده درست شده باشد. مانند،

اگر	گزاره ساده	آنگاه	گزاره ساده ....
	گزاره ساده	و	گزاره ساده ....
	گزاره ساده	یا	گزاره ساده ....

آنچه گزاره‌های ساده را به‌هم مربوط می‌کنند، **رابط‌های گزاره‌ای** نام دارد.

گزاره‌های مرکب خود به دو دسته تقسیم می‌شوند.



شکل ۲-۷ : انواع گزاره‌های مرکب و تقسیم‌بندی آنها

الف) گزاره شرطی منفصل

گزاره‌های شرطی منفصل اگرچه ظاهراً عبارت شرطی "اگر" را ندارند و دو یا چند گزاره ساده را با الفاظ "یا" و "و" به هم وصل می‌کنند، اما گزاره شرطی نامیده می‌شوند؛ زیرا، از نظر مفهومی الفاظ "یا" و "و"، نوعی شرط برای درستی گزاره مرکب ایجاد می‌کنند. گزاره شرطی منفصل به دو دسته تقسیم می‌شود.

ترکیب فصلی دو گزاره یا اجتماع دو گزاره

اگر دو گزاره را با لفظ "یا" با هم ترکیب کنیم، گزاره مرکب حاصل، **ترکیب فصلی**[۱] نامیده می‌شود. ترکیب فصلی دو گزاره p و q را با $p \vee q$ نشان می‌دهند، که در آن نماد $\vee$ به معنی "یا" است و آن را **فاصل** نیز می‌نامند. مانند « حسین به خانه می‌آید **یا** به سینما می‌رود. »

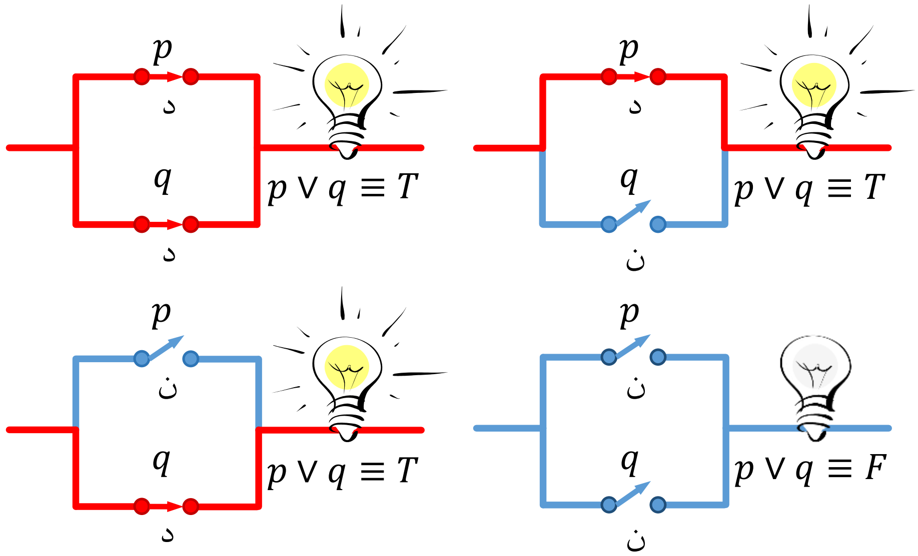
ارزش ترکیب فصلی دو گزاره وقتی درست است، که لااقل یکی از آن دو درست باشد.

جدول ۲-۲ . ارزش ترکیب فصلی دو گزاره

$p \vee q$	q	p
د	د	د
د	ن	د
د	د	ن
ن	ن	ن

۱ Disjunction Composition

مثال ۲-۳ : مدار الکتریکی با دو کلید موازی و یک لامپ در انتهای مدار : بسته بودن کلید با ارزش"د" و باز بودن با ارزش "ن" نشان داده شده است. روشن بودن چراغ با ارزش "د" و خاموش بودن آن با "ن" بیان می‌شود.



شکل ۲-۸ : نمایش ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با استفاده از مدار الکتریکی

مثال ۲-۴ : کدامیک از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف) ۱۷ عددی اول یا فرد است.

ب) $(2 = 5) \vee (2 < 5)$

ج) $(2^3 < 3^2) \vee (5^7 = 27350)$

د) $\left(\sqrt{5^2 + 7^2} = 5 + 7\right) \vee (3^{11} = 705421)$

حل :

الف) هر دو گزاره درست است، پس گزاره مرکب نیز درست است.

ب) گزاره اول (سمت چپ) نادرست و گزاره دوم درست است، پس گزاره مرکب درست است.

ج) گزاره اول (سمت چپ) درست و گزاره دوم نادرست است، پس گزاره مرکب درست است.

د) هر دو گزاره نادرست است، پس گزاره مرکب نادرست است.

مثال ۲-۵ : جدول ارزش گزاره $\tilde{p} \vee (p \vee \tilde{q})$ را تشکیل دهید.

جدول ۲-۳ . ارزش گزاره مرکب $\tilde{p} \vee (p \vee \tilde{q})$

p	q	$\tilde{p}$	$\tilde{q}$	$p \vee \tilde{q}$	$\tilde{p} \vee (p \vee \tilde{q})$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

گزاره مرکب بالا صرف‌نظر از ارزش گزاره‌های p و q همواره درست است.

ترکیب عطفی دو گزاره یا اشتراک دو گزاره

اگر دو گزاره ساده را با حرف "و" به هم مربوط کنیم، گزاره مرکبی ساخته می‌شود، که آن را **ترکیب عطفی**[۱] دو گزاره نامند. ترکیب عطفی دو گزاره p و q را با $p \wedge q$ نشان می‌دهند، که در آن نماد $\wedge$ به معنی "و" است.

برای نمونه گزاره‌های زیر،

الف) عدد ۲ زوج **و** اول است.

ب) $7 > 5$ **و** $5 > 3$

دو گزاره مرکب با ترکیب عطفی هستند.

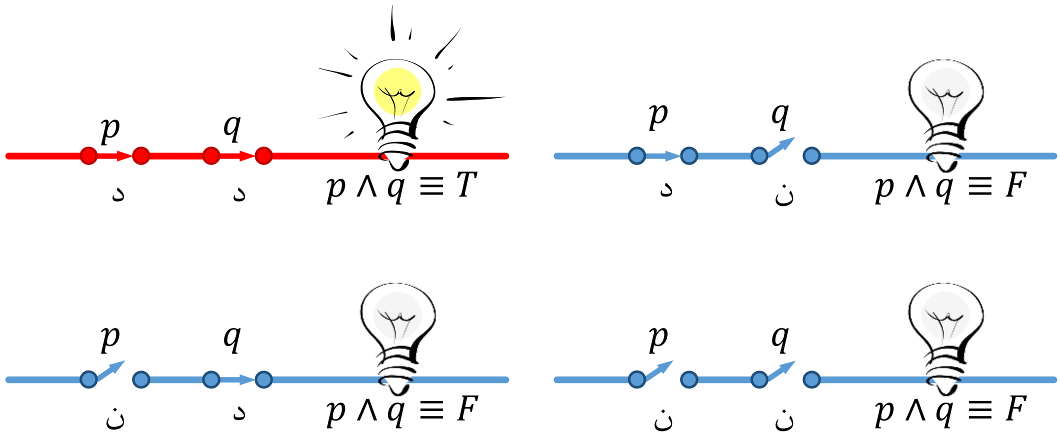
ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

جدول ۲-۴ . ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

[۱] Conjunction Composition

مثال ۲-۶ : ارزش ترکیب عطفی دو گزاره را می‌توان به یک مدار الکتریکی با دو کلید سری که در انتهای آن یک لامپ قرار دارد، تشبیه کرد. لامپ وقتی روشن می‌شود که هر دو کلید بسته باشند.



شکل ۲-۹ : نمایش ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با استفاده از مدار الکتریکی

مثال ۲-۷ : کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) تهران پایتخت ایران و مسکو پایتخت روسیه است.

ب) $3 < 5$ و $-3 < -5$

ج) $3^{11} = 27431$ و $5^4 = 625$

د) عدد ۱۴۱ بر ۲ و ۷ بخش‌پذیر است.

حل :

الف) هر دو گزاره درست هستند؛ پس گزاره مرکب هم درست است.

ب) گزاره سمت چپ نادرست و گزاره سمت راست درست است؛ پس گزاره مرکب نادرست است.

ج) گزاره سمت چپ درست و گزاره سمت راست نادرست است؛ پس گزاره مزکب نادرست است.

د) هر دو گزاره نادرست هستند؛ پس گزاره مرکب نادرست است.

در ردیف چهارم ترکیب عطفی را **اشتراک نقیضین** و ترکیب فصلی را **اجتماع نقیضین** گویند. ردیف پنجم به **قانون جابجایی** معروف است. قوانین ردیف هشتم را **قوانین دمورگان** و ردیف نهم را **قوانین جذب** گویند.

جدول ۲-۵ . خاصیت‌های ترکیب فصلی و ترکیب عطفی دو گزاره

	ترکیب عطفی "و"	ترکیب فصلی "یا"
۱	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
۲	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee T \equiv T$
۳	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee F \equiv p$
۴	$p \wedge \tilde{p} \equiv F$	$p \vee \tilde{p} \equiv T$
۵	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
۶	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
۷	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
۸	$(\widetilde{p \wedge q}) \equiv \tilde{p} \vee \tilde{q}$	$(\widetilde{p \vee q}) \equiv \tilde{p} \wedge \tilde{q}$
۹	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
۱۰	$p \wedge (\tilde{p} \vee q) \equiv p \wedge q$	$p \vee (\tilde{p} \wedge q) \equiv p \vee q$

ب) گزاره شرطی متصل

نوع دیگری از گزاره‌های مرکب، گزاره شرطی متصل نام دارد و گزاره‌ای است که در آن به پیوستگی و اتصال دو گزاره ساده حکم شده باشد. ساختار گزاره شرطی متصل با دو کلمه **اگر** و **آنگاه** درست می‌شود.

اگر .... (گزاره ساده) آنگاه .... (گزاره ساده)

بنابراین دو گزاره ساده با دو کلمه یا دو لفظ **اگر** و **آنگاه**، با ساختار بالا با هم ترکیب شده، گزاره شرطی متصل را به وجود می‌آورند.

اگر گزاره‌های ساده را در ساختار

$$If \dots\dots\dots, \qquad Then \dots\dots\dots$$

به ترتیب با p و q نشان دهیم، گزاره شرطی متصل به صورت « $If\ p,\ Then\ q$ » یا « اگر p آنگاه q » در می‌آید و با نماد زیر بیان شده و خوانده می‌شود « اگر p آنگاه q » یا « $If\ p,\ Then\ q$ ».

$$p \Longrightarrow q$$

در ترکیب شرطی دو گزاره، p یا گزاره ساده اول را **مقدم** یا **مبتدی**[1] یا **بیان مقدمه**[2] نامند. همچنین گزاره ساده دوم یعنی q را **تالی**[3] یا **نتیجه**[4] نامند.

خواهیم دید که این نوع گزاره کاربرد وسیعی در منطق فازی دارد که در فصول بعد به آن خواهیم پرداخت.

برای نمونه،

اگر نور شدت یابد (مقدم یا p)، آنگاه مردمک چشم تنگ می‌شود (تالی یا q).

پرسش مهمی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که چون گزاره مرکب خود یک گزاره است، ارزش آن چگونه است؛ یعنی یک گزاره مرکب در چه صورت "درست" و در چه صورت "نادرست" است.

ارزش گزاره مرکب شرطی متصل

همانطورکه در گزاره شرطی منفصل ارزش گزاره به درست یا نادرست بودن گزاره‌های اول و دوم مربوط می‌شود، در اینجا نیز ارزش گزاره متصل به p و q بستگی دارد. عملاً می‌خواهیم بدانیم که اگر p و q هر دو درست، p درست و q نادرست، p نادرست و q درست، و بالاخره هر دو نادرست باشند، ارزش گزاره مرکب چگونه است. ابتدا با ذکر مثالی این مورد را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲-۸ : کدامیک از گزاره‌های شرطی زیر درست هستند؟

الف) اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۲ نیز بخش‌پذیر است.

ب) $2 < 3 \Longrightarrow -2 < -3$

ج) $2^5 = 31 \Longrightarrow \left(\text{97 عددی اول است}\right)$

د) اگر ستاره‌ها گنجشک باشند، آنگاه موش‌ها پرواز می‌کنند.

حل :

الف) می‌دانیم که اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد (یعنی مقدم درست باشد)، آن عدد بر ۲ نیز بخش‌پذیر است (یعنی تالی نیز درست است). پس گزاره مرکب درست است.

ب) مقدم این گزاره درست $(3 > 2)$ و تالی نادرست است $(-3 \nless -2)$. پس گزاره شرطی نادرست است.

[1] Antecedent

[2] Premise

[3] Consequence

[4] Conclusion

ج) گرچه مقدم نادرست است، ولی تالی ربطی به مقدم ندارد و تالی خود درست است. در نتیجه، این عبارت واقعاً شرطی نیست و به هر صورت این گزاره مرکب درست است.

د) نادرستی این مورد را نمی‌توان ثابت کرد؛ زیرا گرچه موش‌ها پرواز نمی‌کنند، اما ستاره‌ها هم گنجشک نیستند. شاید اگر ستاره‌ها گنجشک باشند موش‌ها هم پرواز کنند. از طرفی چون اصل بر درستی است و شما نتوانسته‌اید نادرستی عبارت را اثبات کنید، پس این مورد درست است. گرچه مقدم و تالی هر دو نادرست هستند، ولی نمی‌توانید نادرستی گزاره ترکیبی را ثابت کنید. همچنین اصل بر صحت و درستی است؛ پس گزاره شرطی مرکب درست است.

جدول زیر ارزش گزاره شرطی متصل را بر حسب درستی مقدم یا تالی، نشان می‌دهد.

جدول ۲-۶ . جدول ارزش گزاره شرطی متصل

مانند	گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$	تالی q	مقدم p	
الف	د	د	د	۱
ب	ن	ن	د	۲
ج	د	د	ن	۳
د	د	ن	ن	۴

از جدول بالا نتیجه می‌شود،

۱) اگر مقدم ترکیب شرطی (p) نادرست باشد، گزاره شرطی درست است. به عبارت دیگر، گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ به انتفاء مقدم (منفی بودن مقدم) درست است.

۲) اگر تالی ترکیب شرطی (q) درست باشد، گزاره شرطی درست است. یعنی ارزش گزاره شرطی در این حالت مستقل از مقدم است.

بعداً خواهیم دید که گزاره سطر اول جدول بالا که در آن مقدم و تالی هر دو درست هستند، اساس استدلال معتبر یا استنتاج منطقی را تشکیل می‌دهد.

۲-۲-۳- گزاره‌های متشکل از چند گزاره مرکب

می‌توانیم گزاره‌های مرکبی تشکیل دهیم که به صورت‌های زیر باشند :

الف) یک گزاره ساده، ترکیب منفصل یا متصل با یک $\boxed{\text{گزاره مرکب}}$

ب) یک $\boxed{\text{گزاره مرکب}}$ ترکیب منفصل یا متصل با یک $\boxed{\text{گزاره مرکب}}$

خود گزاره‌های مرکب (که با کادر مشخص شده‌اند)، می‌توانند یکی از ترکیب‌های منفصل یا متصل دو گزاره، مانند جدول ۲-۷ باشند.

جدول ۲-۷ . گزاره‌های مرکب قابل ترکیب با یک گزاره ساده به صورت منفصل یا متصل

۱	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	۴	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	۷	$p \vee (q \vee r)$
۲	$p \vee (q \Rightarrow r)$	۵	$p \Rightarrow (q \vee r)$	۸	$p \wedge (q \wedge r)$
۳	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	۶	$p \vee (q \wedge r)$	۹	$p \wedge (q \vee r)$

مثال ۲-۹ : اگر $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی $r \Rightarrow (p \wedge s)$ چیست؟

حل : اگر $p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، از جدول می‌توان گفت که p درست و $(q \vee r)$ نادرست است. بنابراین q و r هر دو نادرست هستند و گزاره $r \Rightarrow (p \wedge s)$ **به انتفاء مقدم** درست است.

مثال ۲-۱۰ : ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \tilde{p})$ را تعیین کنید.

حل : چون تالی گزاره شرطی درست است، بنابراین گزاره شرطی مرکب همواره درست است.

۲-۳- صورت‌های مختلف بیان گزاره شرطی $p \Rightarrow q$

۱) اگر p آنگاه q

۲) p نتیجه می‌دهد q را

۳) q اگر p

۴) در صورتی که p، q و $p \Rightarrow q$ درست باشند، p شرط کافی است برای q / شرط کافی برای q آن است که p

۵) در صورتی که p، q و $p \Rightarrow q$ درست باشند، q شرط لازم است برای p / شرط لازم برای p آن است که q

برای نمونه دو بیان چهارم و پنجم تنها در مورد مثال ۲-۴ بخش الف که در آن p و q هردو درست هستند، صادق است.

مثال ۲-۱۱ : شکل‌های مختلف بیان گزاره شرطی،

۱) اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه دو قطرش مساوی هستند.

۲) مستطیل بودن یک چهارضلعی نتیجه می‌دهد، مساوی بودن قطرها را.

۳) دو قطر یک چهارضلعی مساوی هستند، اگر چهارضلعی مستطیل باشد.

۴) $\begin{cases} \text{مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.} \\ \text{شرط کافی برای آن که دو قطر یک چهارضلعی مساوی باشد، آن است که چهارضلعی مستطیل باشد.} \end{cases}$

۵) $\begin{cases} \text{مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.} \\ \text{شرط لازم برای آن که یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن است که دو قطرش مساوی باشند.} \end{cases}$

قضیه ۲-۱ : به ازای دو گزاره ساده و دلخواه p و q دو گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ و $\tilde{p} \vee q$ هم‌ارز هستند.

$$p \Longrightarrow q \equiv \tilde{p} \vee q$$

جدول ۲-۸ . هم‌ارزی $p \Rightarrow q$ و $\tilde{p} \vee q$ (اثبات قضیه ۲-۱)

p	q	$\tilde{p}$	$p \Longrightarrow q$	$\tilde{p} \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

قضیه ۲-۲ : (نقیض گزاره شرطی) : نقیض $p \Longrightarrow q$ یعنی $(\widetilde{p \Longrightarrow q})$ برابر با $p \wedge \tilde{q}$ است.

$$(\widetilde{p \Longrightarrow q}) = p \wedge \tilde{q}$$

اثبات : با استفاده از قضیه ۲-۱ و قضیه دمورگان (جدول ۲-۵ ردیف هشتم) خواهیم داشت :

$$(\widetilde{p \Longrightarrow q}) \equiv (\widetilde{\tilde{p} \vee q}) \equiv p \wedge \tilde{q}$$

مثال ۲-۱۲ : ثابت کنید،

$$p \Longrightarrow (\tilde{p} \Longrightarrow \tilde{q}) \equiv T.$$

اثبات :

قضیه ۲-۱	$p \Longrightarrow (\tilde{p} \Longrightarrow \tilde{q}) \equiv p \Longrightarrow (p \vee \tilde{q})$
قضیه ۲-۱	$\equiv \tilde{p} \vee (p \vee \tilde{q})$
جدول ۲-۵ ردیف هفتم	$\equiv (\tilde{p} \vee p) \vee \tilde{q}$
جدول ۲-۵ ردیف چهارم	$\equiv T \vee \tilde{q}$
جدول ۲-۵ ردیف دوم	$\equiv T$

۲-۴-استنتاج منطقی، استدلال منطقی، استدلال معتبر

استدلال یا **استنتاج**[۱] سه نوع است :

۱) **قیاس** : استنتاج از کلی به جزئی.

۲) **استقراء** : استنتاج از جزئی به کلی.

۳) **تمثیل** : استنتاج بر اساس شباهت و مثال.

در اینجا به تشریح و بیان قانون قیاس می‌پردازیم :

۲-۴-۱- قانون قیاس

اساسی‌ترین نوع استدلال در منطق ارسطویی، استدلال قیاسی[۲] است. قیاس گفتاری است، مرکب از دو یا چند گزاره که ذاتاً مستلزم گزاره‌ای دیگر است. دو گزاره‌ای که قیاس از آن تشکیل یافته است را **مقدمتین**[۳] می‌نامند. یکی از آن دو مقدمه را اصطلاحاً **مقدمه صغری** و دیگری را **مقدمه کبری** نامند. گزاره‌ای که از این دو مقدمه لازم می‌آید را **نتیجه**[۴] می‌نامند [؟؟].

قیاس، استدلالی ازکل به جزء است. به عبارت دیگر استنتاج امری جزئی از قانون کلی را **قیاس** نامند. در اصطلاح منطقیین، قیاس استدلالی است که از ترکیب چند گزاره (لااقل دو گزاره) حاصل شود به‌نحوی‌که از ترکیب آنها، گزاره جدیدی به نام **نتیجه** استنتاج گردد. مثلاً برای اثبات اینکه « هوا دارای جرم است »، می‌توان از دو گزاره استفاده کرد. دو گزاره‌ای که به‌کمک آنها گزاره نتیجه، استنتاج می‌شود را **گزاره کلی** و **گزاره جزئی** می‌نامند. به گزاره کلی **کبری** و به گزاره جزئی **صغری** نیز گفته می‌شود. در این مثال گزاره‌ها چنین‌اند :

دو مقدمه	Two Promises	مقدمه اول	گزاره کلی یا گزاره کبری :	هر جسمی دارای جرم است.
		مقدمه دوم	گزاره جزئی یا گزاره صغری :	هوا دارای جسم است.
			گزاره نتیجه :	هوا دارای جرم است.

[۱] Logical Inference or Logical Reasoning

[۲] Hypothetical Syllogism

[۳] Premises

[۴] Conclusion

گزاره‌ای که باید ثابت شود تا پیش از اثبات **گزاره مطلوب** و پس از آن **نتیجه** نامیده می‌شود. گزاره مطلوب مانند هر گزاره دیگری، از سه قسمت موضوع[۱] یا مُسند الیه، محمول[۲] یا مُسند و رابطه درست می‌شود. در مثال « هوا دارای جرم است »، موضوع « هوا » و « دارای جرم بودن » محمول گزاره است.

بطورکلی در گزاره مطلوب موضوع گزاره را **اصغر** و محمول آن را **اکبر** گزاره مطلوب می‌نامند. معمولاً موضوع اصغر و محمول اکبر است، زیرا عموماً کلیت محمول بیش از موضوع است. جمع موضوع و محمول را در گزاره مطلوب، یعنی اصغر و اکبر گزاره را **حدّین** یا **طرفین** گزاره نامند.

	هوا	دارای جرم	است.
	موضوع	محمول	رابطه
یا	مُسندالیه	مُسند	رابطه
یا	اصغر	اکبر	رابطه

در قانون قیاس برای اثبات گزاره، باید یک **حد وسط** بین حدّین گزاره مطلوب یافت. **حد وسط** یا **میانجی** عاملی است، که در گزاره مطلوب وجود ندارد؛ ولی باید به کمک آن گزاره مطلوب اثبات شود. یعنی باید با هر کدام از اکبر و اصغر گزاره مطلوب به همراه حد وسط دو گزاره جدید ساخت. پس در هرکدام از این دو گزاره، آن عامل، یعنی حد وسط، اوسط یا میانجی وجود دارد. در این مثال حد وسط « جسم » است، گزاره‌ای که با اکبر و حد وسط ساخته می‌شود، **گزاره کبری**، و گزاره‌ای که با اصغر و حد وسط ساخته می‌شود، **گزاره صغری** نام دارد. در این مثال صغری و کبرای این استنتاج به صورت زیر می‌باشند :

صغری			کبری		
هوا	جسم	است.	هر جسمی	دارای جرم	است.
اصغر	حد وسط	رابطه	حد وسط	اکبر	رابطه
موضوع	محمول	رابطه	موضوع	محمول	رابطه
	گزاره صغری			گزاره کبری	

گزاره یا مقدمه‌ای که اصغر در آن بکار رفته است   گزاره یا مقدمه‌ای که اکبر در آن بکار رفته است

هوا دارای جرم است

گزاره نتیجه

---

۱ Subject

۲ Predicate

پس گزاره نتیجه چنین می‌شود،

هوا	دارای جرم	است.
اصغر	اکبر	رابطه
موضوع	محمول	رابطه
S	P	

پس در استنتاج قیاسی سه حد وجود دارد :

اصغر	اکبر	اوسط
هوا	دارای جرم بودن	جسم

اوسط یا حد وسط در هر دو گزاره صغری و کبری، یا به عبارتی در مقدمه اول و دوم تکرار می‌شود مانند «جسم» در مثال بالا. چون اوسط نقش رابط و میانجی را بین اصغر و اکبر بازی می‌کند، پس از ایفای نقش خود در، نتیجه، حذف می‌شود. چون حد وسط در صغری با اصغر و در کبری با اکبر اقتران پیدا می‌کند، این نوع قیاس را **قیاس اقترانی** می‌نامند.

در همه شکل های عبارت نتیجه، اوسط حذف می‌شود و همواره به صورت زیر است.

موضوع نتیجه، اصغر است. (S) محمول نتیجه، اکبر است. (P) رابطه

الف) اشکال چهارگانه قیاس اقترانی

قیاس اقترانی از لحاظ موقعیت **حد وسط** یا **اوسط** به چهار شکل تقسیم می‌شود :

شکل اول) حد وسط در صغری محمول است و در کبری موضوع.

مانند،

هوا جسم است. هر جسمي داراي وزن است.

هوا دارای وزن است.

شکل دوم) حد وسط هم در صغری محمول است و هم در کبری.

مانند،

هر مثلث متساوی‌الاضلاعی متساوی‌الزوایا است. هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الزوایا نیست.

هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی قائم‌الزاویه نیست.

شکل سوم) حد وسط هم در صغری موضوع است و هم در کبری.

مانند،

هر درختي گیاه است.　　　　بعضي درخت‌ها گلدار هستند.

بعضی گیاهان گلدار هستند.

شکل چهارم) حد وسط در صغری موضوع است و در کبری محمول.

مانند،

هر انساني حیوان است.　　　　هر نویسنده‌ای انسان است.

بعضی حیوانات نویسنده هستند.

شکل چهارم دور از ذهن است و در منطق ارغنون ارسطو هم نیامده است. اشکال چهارگانه گفته شده، در قالب یک شعر آمده است :

اوسط اگر حمل یافت در بر صغری و باز　　　　وضع به صغری گرفت، شکل نخستین شمار

حمل به هر دو دوم، وضع به هر دو سوم　　　　رابع اشکال را عکس نخستین شمار

ب) نمایش اشکال چهارگانه قیاس

اشکال چهارگانه، تنها از نظر مکان حد وسط در صغری و کبری مشخص می‌شود. اگر اصغر یعنی موضوع نتیجه را با S، و اکبر یعنی محمول نتیجه را با P، و اوسط یعنی لفظ تکرار شده در صغری و کبری را با M نشان دهیم، اشکال چهارگانه به صورت زیر خواهند بود :

جدول ۲-۹ . اشکال چهارگانه قیاس

	شکل ۱	شکل ۲	شکل ۳	شکل ۴
صغری	S-M	S-M	M-S	M-S
کبری	M-P	P-M	M-P	P-M
نتیجه	S-P	S-P	S-P	S-P

ج) ضرب‌های شانزده‌گانه هریک از اشکال اربعه قیاس

هریک از اشکال چهارگانه قیاس دارای شانزده حالت یا ضرب است. هریک از دو مقدمه صغری و کبری می‌تواند یکی از محصولات اربعه باشد. محصولات اربعه یعنی :

۱) **موجبه کلیه** (یعنی مثبت وکلی) که آنها را با علامت a در محل«-» نشان می‌دهیم.
۲) **سالبه کلیه** (یعنی منفی و کلی) که آنها را با علامت e در محل«-» نشان می‌دهیم.
۳) **موجبه جزئیه** (یعنی مثبت و جزئی) که آنها را با علامت i در محل«-» نشان می‌دهیم.
۴) **سالبه جزئیه** (یعنی منفی و جزئی) که آنها را با علامت o در محل«-» نشان می‌دهیم.

ضرب‌های شانزده‌گانه شکل اول قیاس

در شکل اول که حد وسط در صغری محمول و در کبری موضوع است، شانزده حالت می‌تواند اتفاق بیافتد، به این ترتیب که صغری یکی از چهار محصول مذکور باشد. در این حالت کبری می‌تواند هر یک از موارد بالا باشد که چهار حالت ایجاد می‌شود و با تغییر وضعیت صغری این امر تکرار می‌گردد.

اگر صغری موجبه کلیه باشد، کبرای قیاس می‌تواند موجبه کلیه، سالبه کلیه، موجبه جزئیه یا سالبه جزئیه باشد، که چهار حالت ایجاد می‌شود.

	۱)	۲)	۳)	۴)
صغری	SaM	SaM	SaM	SaM
کبری	MaP	MeP	MiP	MoP
نتیجه	S-P	S-P	S-P	S-P

اگر صغری سالبه کلیه باشد، کبرای قیاس می‌تواند یکی از محصولات اربعه باشد.

	۵)	۶)	۷)	۸)
صغری	SeM	SeM	SeM	SeM
کبری	MaP	MeP	MiP	MoP
نتیجه	S-P	S-P	S-P	S-P

اگر صغری موجبه جزئیه باشد، کبرای قیاس می‌تواند یکی از محصولات اربعه باشد.

	۹)	۱۰)	۱۱)	۱۲)
صغری	SiM	SiM	SiM	SiM
کبری	MaP	MeP	MiP	MoP
نتیجه	S-P	S-P	S-P	S-P

اگر صغری سالبه جزئیه باشد، کبرای قیاس می‌تواند یکی از محصولات اربعه باشد.

	۱۳)	۱۴)	۱۵)	۱۶)
صغری	SoM	SoM	SoM	SoM
کبری	MaP	MeP	MiP	MoP
نتیجه	S-P	S-P	S-P	S-P

در جدول زیر خلاصه ضرب‌های شانزده‌گانه برای شکل اول از قیاس آورده شده است. در شکل‌های دوم، سوم و چهارم نیز هر کدام مشابه شکل اول ۱۶ ضرب ایجاد می‌شود. بنابراین جمعاً ۶۴ ضرب خواهیم داشت که از این ۶۴ ضرب تعدادی معتبر نیست.

جدول ۲-۱۰. ضرب‌های شانزده‌گانه شکل اول قیاس

ضرب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
مقدمه اول (صغری)	موجبه کلی				سالبه کلی				موجبه جزئی				سالبه جزئی			
	a	a	a	a	e	e	e	e	i	i	i	i	o	o	o	o
مقدمه دوم (کبری)	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o

شرایط شکل اول

در شکل اول همه ضرب‌ها قابل قبول نیست. شرایط ویژه نتیجه بخش بودن شکل اول دو شرط است.

الف) موجبه بودن صغری (ضرب‌های ۱ تا ۴ و ۹ تا ۱۲ در جدول ۲-۱۰)

ب) کلی بودن کبری (ضرب‌های ۱، ۲، ۵، ۶، ۹، ۱۰، ۱۳ و۱۴ در جدول ۲-۱۰)

در نتیجه ضرب‌های قابل‌قبول عبارتند از :۱، ۲، ۹ و ۱۰.

ضرب ۱	موجبه کلی	SaM	هر انسانی حیوان است.
	موجبه کلی	MaP	هر حیوانی حساس است.
	موجبه کلی	SaP	هر انسانی حساس است.
ضرب ۲	موجبه کلی	SaM	هر انسانی حیوان است.
	سالبه کلی	MeP	هیچ حیوانی گیاه نیست.
	سالبه کلی	SeP	هیچ انسانی گیاه نیست.
ضرب ۹	موجبه جزئی	SiM	بعضی انسان ها دانشمند هستند.
	موجبه کلی	MaP	هر دانشمندی قابل احترام است.
	موجبه جزئی	SiP	بعضی انسان ها قابل احترام هستند.

	موجبه جزئی	SiM	بعضی انسان ها ورزشکار هستند.
ضرب ۱۰	سالبه کلی	MeP	هیچ ورزشکاری ناتوان نیست.
	سالبه جزئی	SoP	بعضی انسان ها ناتوان نیستند.

چرا ضرب ۳ قابل‌قبول نیست؟ با یک مثال به بررسی این موضوع می‌پردازیم :

	موجبه کلی	SaM	هر انسانی حیوان است.
ضرب ۳	موجبه جزئی	MiP	بعضی حیوانات دُم دارند.
		S-P	نه می‌توان نتیجه گرفت « هر انسانی دُم دارد» و نه «بعضی انسان‌ها دُم دارند»

همچنین در مثال ضرب ۳ نمی‌توان نتیجه گرفت که « هیچ انسانی دُم ندارد» و یا « بعضی انسان‌ها دُم ندارند». یعنی علیرغم آنکه نتیجه‌گیری درست است، اما ربطی به مقدمات گفته شده ندارد.

چرا ضرب ۴ قابل‌قبول نیست؟

	موجبه کلی	SaM	هر انسانی حیوان است.
ضرب ۴	سالبه جزئی	MoP	بعضی حیوانات دُم ندارند.
		S-P	نه می‌توان نتیجه گرفت « هیچ انسانی دُم ندارد» و نه «بعضی انسان‌ها دم ندارند»

نتیجه‌گیری مهم : **در شکل اول نتیجه تابع اخس مقدمتین است.**

در قیاس، نتیجه از نظر کمیت و کیفیت تابع اخس مقدمتین است. اخس یعنی پست‌ترین یا ضعیف‌ترین[1]. چون قضیه جزئیه از قضیه کلیه ضعیف‌تر است و قضیه سالبه از قضیه موجبه ضعیف‌تر است بنابراین :

۱) اگر یکی از دو مقدمه سالبه باشد، نتیجه نیز سالبه است.

۲) اگر یکی از در مقدمه جزئیه باشد، نتیجه نیز جزئیه است.

شرایط شکل دوم

شرایط اعتبار شکل دوم عبارت است از :

الف) اختلاف دو مقدمه در سلب و ایجاب

ب) کلیت کبری

ضرب‌های قابل قبول، ۲، ۵، ۱۰و ۱۳ می‌باشند. در شکل دوم نیز **نتیجه تابع اخس مقدمتین است.**

[1] Weakest

ضرب ۲	صغری	SaM	هر فلزی هادی الکتریسیته است.
	کبری	PeM	هیچ چوبی هادی الکتریسیته نیست.
	نتیجه	SeP	هیچ فلزی چوب نیست.

ضرب ۵	صغری	SeM	هیچ چوبی هادی الکتریسیته نیست.
	کبری	PaM	هر فلزی هادی الکتریسیته است.
	نتیجه	SeP	هیچ چوبی فلز نیست.

ضرب ۱۰	صغری	SiM	بعضی انسان‌ها فداکار هستند.
	کبری	PeM	هیچ خودخواهی فداکار نیست.
	نتیجه	SoP	بعضی انسان‌ها خودخواه نیستند.

ضرب ۱۳	صغری	SoM	بعضی مردم سالم نیستند.
	کبری	PaM	همه ورزشکاران سالم هستند.
	نتیجه	SoP	بعضی مردم ورزشکار نیستند.

چرا در شکل دوم، ضرب۱ قابل قبول نیست؟ با یک مثال به این پرسش پاسخ می‌دهیم :

ضرب ۱	صغری	SaM	هر فلزی هادی الکتریسیته است.
	کبری	PaM	هر آلیاژ مس هادی الکتریسیته است.
	نتیجه	SaP	هر فلزی آلیاژ مس است. (نادرست)

با توجه به نمونه بالا متوجه می‌شویم که نتیجه حاصل از صغری و کبری ضرب ۱ از شکل دوم، درست نیست؛ بنابراین این ضرب قابل قبول نمی‌باشد.

شرایط شکل سوم

شرایط اعتبار شکل سوم عبارت است از :

الف) موجبه بودن صغری

ب) کلی بودن یکی از دو مقدمه

ضرب‌های قابل قبول، ۱، ۲، ۳، ۴، ۹ و ۱۰ می‌باشند.

	صغری	MaS	هر کارمندی بیمه است.
ضرب ۱	کبری	MaP	هر کارمندی مالیات می‌پردازد.
	نتیجه	SiP	بعضی کسانی که بیمه‌اند مالیات می‌دهند.

	صغری	MaS	هر درختی گیاه است.
ضرب ۲	کبری	MeP	هیچ درختی بدون نور زنده نمی‌ماند.
	نتیجه	SoP	بعضی گیاهان بدون نور زنده نمی‌مانند.

	صغری	MaS	هر درختی گیاه است.
ضرب ۳	کبری	MiP	بعضی درخت‌ها گلدار هستند.
	نتیجه	SiP	بعضی گیاهان گلدار هستند.

	صغری	MaS	هر درختی گیاه است.
ضرب ۴	کبری	MoP	بعضی درخت‌ها گلدار نیستند.
	نتیجه	SoP	بعضی گیاهان گلدار نیستند.

	صغری	MiS	بعضی انسان‌ها نویسنده هستند.
ضرب ۹	کبری	MaP	هر انسانی ناطق است.
	نتیجه	SoP	بعضی نویسندگان ناطق هستند.

	صغری	MiS	بعضی اطفال باهوش هستند.
ضرب ۱۰	کبری	MeP	هیچ طفلی پُر تجربه نیست.
	نتیجه	SoP	بعضی افراد باهوش پُر تجربه نیستند.

در شکل سوم، نتیجه همیشه جزئی است؛ حتی اگر هر دو مقدمه کلی باشند، بنابراین شرط « نتیجه تابع اخس مقدمتین است.» از نظر کلی و جزئی بودن صادق نیست.

چرا در شکل سوم، ضرب۵ قابل قبول نیست؟ با یک مثال به این پرسش پاسخ می‌دهیم :

	صغری	MeS	هیچ درختی بدون نور زنده نمی‌ماند.
ضرب ۵	کبری	MaP	هر درختی ریشه دارد.
	نتیجه	S-P	؟!!

همانطورکه می‌بینیم، از صغری و کبری در نمونه بالا، هیچ نتیجه منطقی و درستی نمی‌توان گرفت. پس این ضرب قابل قبول نیست.

شرایط شکل چهارم

شرایط اعتبار شکل چهارم عبارت است از :

الف) موجبه بودن دو مقدمه و کلی بودن صغری، **یا**
ب) اختلاف دو مقدمه در سلب، ایجاب و کلی بودن یکی از آنها

ضرب‌های قابل قبول، ۱، ۲، ۳، ۵ و ۱۰ می‌باشند.

	صغری	MaS	هر پرنده بال دارد.
ضرب ۱	کبری	PaM	هر کبوتر پرنده است.
	نتیجه	SiP	بعضی بال‌داران پرنده هستند.
	صغری	MaS	هر انسان حیوان است.
ضرب ۲	کبری	PeM	هیچ گوسفندی انسان نیست.
	نتیجه	SoP	بعضی حیوانات گوسفند نیستند.
	صغری	MaS	هر پرنده تخم‌گذار است.
ضرب ۳	کبری	PiM	بعضی مهره‌داران پرنده هستند.
	نتیجه	SiP	بعضی تخم‌گذاران مهره‌دار هستند.
	صغری	MeS	هیچ گیاهی بدون غذا زنده نمی‌ماند.
ضرب ۵	کبری	PaM	هر درختی گیاه است.
	نتیجه	SeP	هیچ درختی بدون غذا زنده نمی‌ماند.
	صغری	MiS	بعضی از مردان جوان هستند.
ضرب ۱۰	کبری	PeM	هیچ زنی مرد نیست.
	نتیجه	SoP	بعضی از جوانان زن نیستند.

اعتبار ضرب‌های۱و ۳ ناشی از وجود شرط الف و اعتبار ضرب‌های ۲، ۵ و ۱۰ مربوط به شرط ب است. نتیجه فقط در ضرب ۵ کلی است (نتیجه این ضرب SeP است که سالبه‌کلیه است).

د) نمونه‌هایی از ضرب‌های ۱۶گانه شکل یک قیاس و تحلیل چگونگی اعتبار ضرب‌های معتبر

در ابتدا همانطورکه در جدول ۲-۱۰ گفته شد، مجدداً یادآوری می‌گردد، که در تمامی اشکال قیاس اقترانی در ضرب‌های ۱ تا ۴، صغری قیاس موجبه کلی، در ضرب‌های ۵ تا ۸ صغری قیاس سالبه کلی، در ضرب‌های ۹ تا ۱۲ موجبه جزئی و بالاخره در ضرب‌های ۱۳ تا ۱۶ صغری یا مقدمه اول سالبه جزئی است. مقدمه دوم یا کبری قیاس در هر ۴ ضرب متوالی حالت‌های مختلف را اختیار می‌کنند، یعنی در ضرب‌های ۱ تا ۴ به ترتیب a، e، i و o هستند و این تکرار می‌شود.

در ضرب‌های ۱ تا ۴ زیر صغری موجبه کلی (a) است. در مورد بعضی ضرب‌ها، پس از ذکر مثال‌ها توضیح و تحلیل ارائه می‌شود.

ضرب ۱

صغری : هر انسانی موجود زنده است.
کبری : هر موجود زنده‌ای فانی است.
نتیجه : هر انسانی فانی است.

معتبر است

ضرب ۲

صغری : هر انسانی موجود زنده است.
کبری : هیچ موجود زنده‌ای عمر جاودان ندارد.
نتیجه : هیچ انسانی عمر جاودان ندارد.

معتبر است

ضرب ۳

صغری : هر انسانی موجود زنده است.
کبری : بعضی موجودات زنده تخم‌گذار هستند.
نتیجه :
بعضی انسان‌ها تخم‌گذار هستند. ✗
بعضی انسان‌ها تخم‌گذار نیستند. ✗
هر انسانی تخم‌گذار است. ✗
هیچ انسانی تخم‌گذار نیست. ✓

معتبر نیست

گرچه آخرین گزاره درست است، ولی از مقدمات قیاس قابل استنتاج نیست. بقیه گزاره‌ها نیز که نادرست هستند. پس ضرب ۳ نامعتبر است.

مثال دیگری که نتیجه متفاوتی می‌دهد و می‌تواند یک استنتاج منطقی باشد، در اینجا ذکر می‌شود.

ضرب ۳	صغری : هر انسانی موجود زنده است. کبری : بعضی موجودات زنده عمر طولانی دارند. ――――――― نتیجه : بعضی انسان ها عمر طولانی دارند.	**معتبر نیست**

نتیجه این قیاس درست است و عبارت مذکور در مورد بعضی انسان ها صدق می‌کند. علیرغم چنین مواردی ضرب ۳ غیر قابل قبول است چون مورد نقض (مانند مثال اول) برای آن وجود دارد. در این مورد پس از ذکر همه ضرب های ۱۶گانه توضیح خواهیم داد.

مثال دیگری از ضرب ۳ چنین است.

ضرب ۳	صغری : هر انسانی موجود زنده است. کبری : بعضی موجودات زنده هوازی هستند. ――――――― نتیجه : هر انسانی هوازی است. بعضی انسان‌ها هوازی هستند.	**معتبر نیست**

بدیهی است گزاره نتیجه اول صحیح است، ولی این گزاره از مقدمات قیاس قابل استنتاج نیست.

ضرب ۴	صغری : هر انسانی موجود زنده است. کبری : بعضی موجودات زنده تخم‌گذار نیستند. ――――――― نتیجه : هیچ انسانی تخم‌گذار نیست. بعضی انسان‌ها تخم‌گذار نیستند.	**معتبر نیست**

گرچه گزاره اول نتیجه صحیح است ولی این گزاره نیز از مقدمات قیاس قابل استنتاج نیست.

در ضرب‌های ۵ تا ۸ صغری قیاس سالبه کلیه است.

ضرب ۵	صغری : هیچ انسانی حشره نیست. کبری : همه حشرات تخم‌گذار هستند. ――――――― نتیجه : هیچ انسانی تخم‌گذار نیست.	**معتبر نیست**

علی‌رغم اینکه نتیجه درست است، ولی از مقدمات قیاس قابل استنتاج نیست. مثلاً اگر در صغری قیاس به جای "انسان"، "ماهی" بگذاریم، چنین می‌شود،

ضرب ۵	صغری : هیچ ماهی حشره نیست. کبری : همه حشرات تخم‌گذار هستند. ――――――― نتیجه : هیچ ماهی تخم‌گذار نیست.	**معتبر نیست**

بدیهی است، این استنتاج نادرست است.

ضرب ۶

صغری : هیچ انسانی حشره نیست.

کبری : هیچ حشره‌ای خلبان نیست.

نتیجه : هیچ انسانی خلبان نیست. ✗

بعضی انسان‌ها خلبان هستند. ✓

معتبر نیست

نتیجه دوم درست است، اما از مقدمات قیاس استنتاج نمی‌شود.

ضرب ۷

صغری : هیچ انسانی حشره نیست.

کبری : بعضی حشرات مفید هستند.

نتیجه : هر استنتاجی نادرست خواهد بود.

معتبر نیست

ضرب ۸

صغری : هیچ انسانی حشره نیست.

کبری : بعضی حشرات شاخک دارند.

نتیجه : هر استنتاجی نادرست خواهد بود.

معتبر نیست

در ضرب‌های ۹ تا ۱۲ صغری قیاس موجبه جزئیه است.

ضرب ۹

صغری : بعضی انسان‌ها دانشمند هستند.

کبری : هر دانشمندی قابل احترام است.

نتیجه : بعضی انسان‌ها قابل احترام هستند.

معتبر است

ضرب ۱۰

صغری : بعضی انسان‌ها دانشمند هستند.

کبری : هیچ دانشمندی بی‌سواد نیست.

نتیجه : بعضی انسان‌ها بی‌سواد نیستند.

معتبر است

ضرب ۱۱

صغری : بعضی انسان‌ها دانشمند هستند.

کبری : بعضی دانشمندان سیاه‌پوست هستند.

نتیجه : بعضی انسان ها سیاه‌پوست هستند.

معتبر نیست

علیرغم اینکه نتیجه درست است، ولی از مقدمات صغری و کبری قابل نتیجه‌گیری نیست؛ زیرا نتیجه می‌تواند این نیز باشد، که « بعضی انسان‌ها سیاه‌پوست نیستند ».

ضرب ۱۲

صغری : بعضی انسان‌ها دانشمند هستند.

کبری : بعضی دانشمندان سیاه‌پوست نیستند.

نتیجه : بعضی انسان‌ها سیاه‌پوست نیستند.

معتبر نیست

در این ضرب نیز می‌توان گفت که « بعضی انسان‌ها سیاه‌پوست هستند »، لذا از مقدمات قیاس نتایج مختلف حاصل می‌شود و قابل قبول نیست.

در ضرب‌های ۱۳ تا ۱۶ صغری قیاس سالبه جزئیه است.

ضرب ۱۳

صغری : بعضی انسان‌ها کشتی‌گیر نیستند.

کبری : همه کشتی‌گیران پُرزور هستند.

نتیجه : هر استنتاجی بی‌معنی است.

معتبر نیست

ضرب ۱۴

صغری : بعضی انسان‌ها کشتی‌گیر نیستند.

کبری : هیچ کشتی‌گیری کم‌زور نیست.

نتیجه : هر استنتاجی نامعتبر است.

معتبر نیست

ضرب ۱۵

صغری : بعضی انسان‌ها کشتی‌گیر هستند.

کبری : بعضی کشتی‌گیران باسواد هستند.

نتیجه :
بعضی انسان‌ها باسواد هستند.
بعضی انسان‌ها بی‌سواد هستند.
هر استنتاجی نامعتبر است.

معتبر نیست

ضرب ۱۶

صغری : بعضی انسان‌ها کشتی‌گیر هستند.

کبری : بعضی کشتی‌گیران باسواد نیستند.

نتیجه : هر استنتاجی نامعتبر است.

معتبر نیست

توضیحاتی درباره انواع گزاره‌ها از نظر کمی و کیفی

نکته ۲-۱ . در گزاره موجبه کلیه که مثبت است و با کلمات همه، هر و ... همراه می‌شود، ساختار به صورت زیر است.

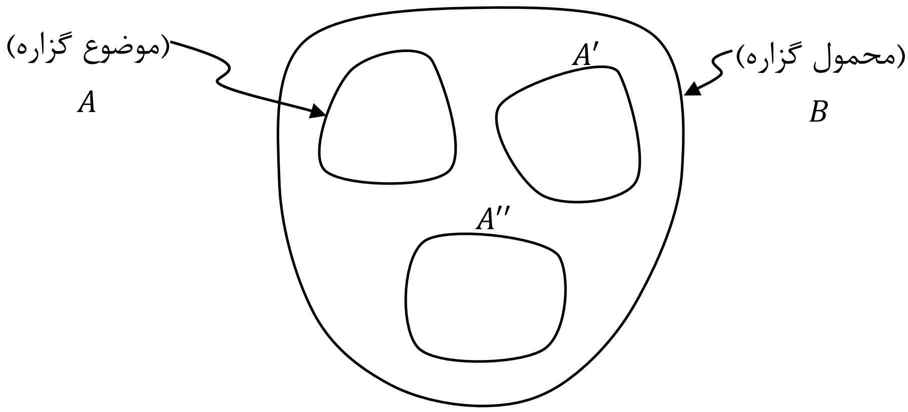
هر A، B است.

نمونه :   هر حشره‌ای،   تخم‌گذار   است.

در این نوع گزاره، موضوع (یعنی A) زیرمجموعه محمول (یعنی B) است.

$$A \subset B \nRightarrow B \subset A$$

نکته ۲-۲ . در گزاره مذکور هیچ عضوی از A نیست که عضو B نباشد. برای نمونه هیچ عضوی از مجموعه حشرات نیست، که تخم‌گذار نباشد (درغیراین‌صورت گزاره نادرست است) و همه حشرات تخم‌گذار هستند. در عین حال، معنای گزاره بالا این نیست که الزاماً فقط حشرات تخم‌گذار هستند ($B \nsubseteq A$). بنابراین ممکن است، مجموعه‌های دیگری مانند A'، A'' و ... نیز باشند، که آنها نیز زیرمجموعه B هستند. برای نمونه، علاوه بر حشرات، مجموعه‌های دیگری مانند ماهی‌ها، پرندگان، قورباغه‌ها و ... نیز، زیرمجموعه تخم‌گذارها هستند. شکل زیر نمایش گزاره موجبه کلیه است، که در آن زیرمجموعه‌ها خود ممکن است اشتراک داشته یا نداشته باشند.



شکل ۲-۱۰ : نمایش گزاره موجبه کلیه « هر A ، B است. »

نکته ۲-۳ . در گزاره موجبه جزئیه که مثبت است و جزئی، "بعضی" و "برخی" و کلماتی از این دست به‌کار رفته و ساختار به صورت زیر است.

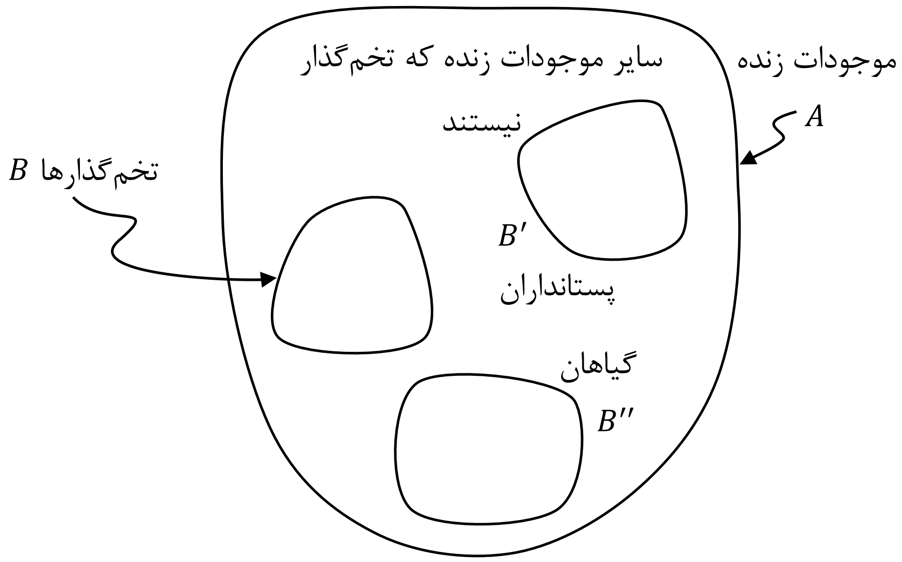
بعضی Aها، B هستند.

نمونه :   بعضی موجودات زنده،   تخم‌گذار   هستند.

در این نوع گزاره (برخلاف موجبه کلیه)، محمول (یعنی B) زیرمجموعه موضوع (یعنی A) است.

$$A \nsubseteq B, \qquad B \subseteq A, \qquad \{\text{موجودات زنده}\} \subseteq \{\text{تخم‌گذار}\}$$

معنی گزاره بالا آن است که، "تخم‌گذارها" قسمتی از مجموعه کلی تری به نام "موجودات زنده" هستند، که این مجموعه علاوه بر "تخم‌گذارها"، زیرمجموعه‌های دیگری نیز می‌تواند داشته باشد.



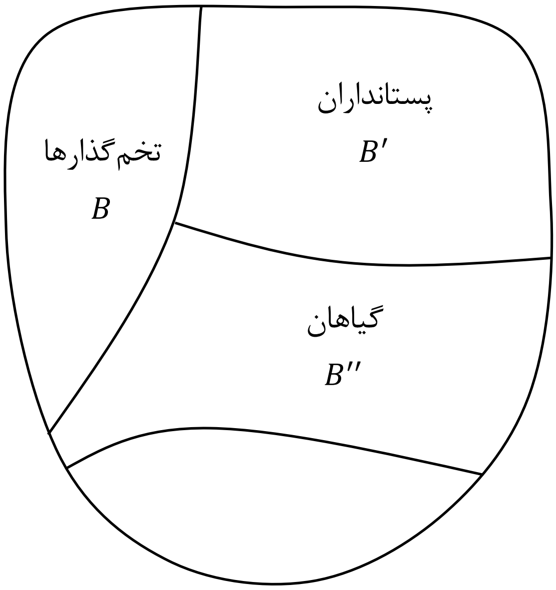
شکل ۲-۱۱ : نمایش گزاره موجبه جزئیه « بعضی A ها، B هستند.»

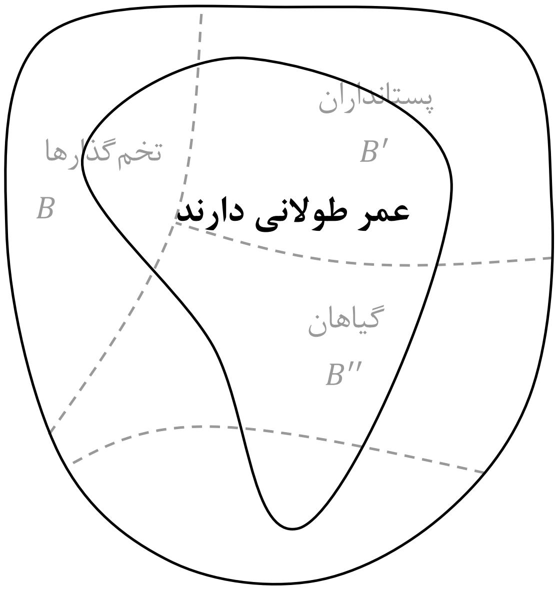
نکته ۲-۴ . در گزاره موجبه جزئیه به ازای یک A، ممکن است زیرمجموعه‌های B، B'، B'' و غیره، مانند شکل بالا هیچ اشتراکی نداشته باشند. از طرفی ممکن است گزاره به صورتی بیان شود، که زیرمجموعه‌ها اشتراک داشته باشند.

دو مثال زیر تفاوت این دو گزاره را نشان می‌دهد.

گزاره الف:	بعضی موجودات زنده	تخم‌گذار هستند.
گزاره ب :	بعضی موجودات زنده	عمر طولانی دارند.

در گزاره اول که زیرمجموعه‌ها B، B'، B'' و ... هستند، هیچ "تخم‌گذاری"، "گیاه" یا "پستاندار" نیست و زیرمجموعه‌ها با هم اشتراک ندارند. در گزاره دوم چون در بین انواع "موجودات زنده" از "تخم‌گذارها" و "پستانداران" و "گیاهان" بعضی مانند "لاک‌پشت‌ها"، "کلاغ‌ها" و بعضی "درختان"، "عمر طولانی" دارند؛ لذا زیرمجموعه‌ها اشتراک دارند. این باعث می‌شود، بعضی انواع استنتاج‌ها منطقی شوند و بعضی دیگر غیرمنطقی و نامعتبر باشند.





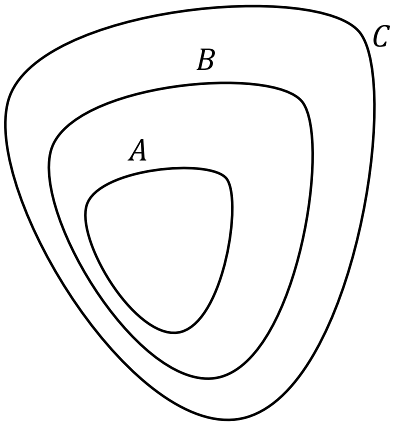
شکل ۲-۱۲ : در (الف) زیرمجموعه‌ها اشتراک ندارند و در (ب) زیرمجموعه‌ها اشتراک دارند.

نمایش ضرب ۱ :

هر A ، B است.

هر B ، C است.

هر A ، C است.



شکل ۲-۱۳ : نمایش ضرب یک

نمایش ضرب ۳

هر A ، B است.

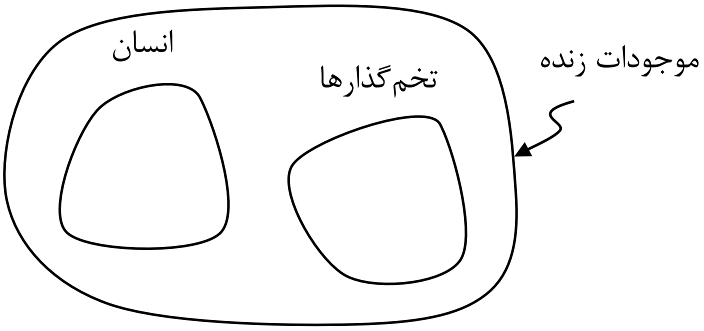
بعضی B ها ، C هستند.

مانند،

هر انسانی ، موجود زنده است.

بعضی موجودات زنده ، تخم‌گذار هستند.

چون A و C یعنی انسان و تخم‌گذارها که هر دو زیر مجموعه B ها یا همان موجودات زنده هستند، اشتراک ندارند، این نوع قیاس یعنی ضرب ۳ معتبر نیست.



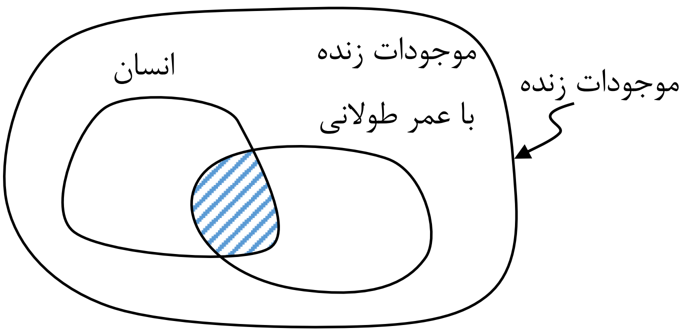
شکل ۲-۱۴ : نمایش ضرب سه، بدون اشتراک زیرمجموعه‌ها

مثال دوم از ضرب ۳

هر انسانی ، موجود زنده است.

بعضی موجودات زنده ، عمر طولانی دارند.

بعضی انسان ها عمر طولانی دارند.



شکل ۲-۱۵ : نمایش ضرب سه، با اشتراک زیرمجموعه‌ها

چون دو مجموعه اشتراک دارند، استنتاج صحیح است.

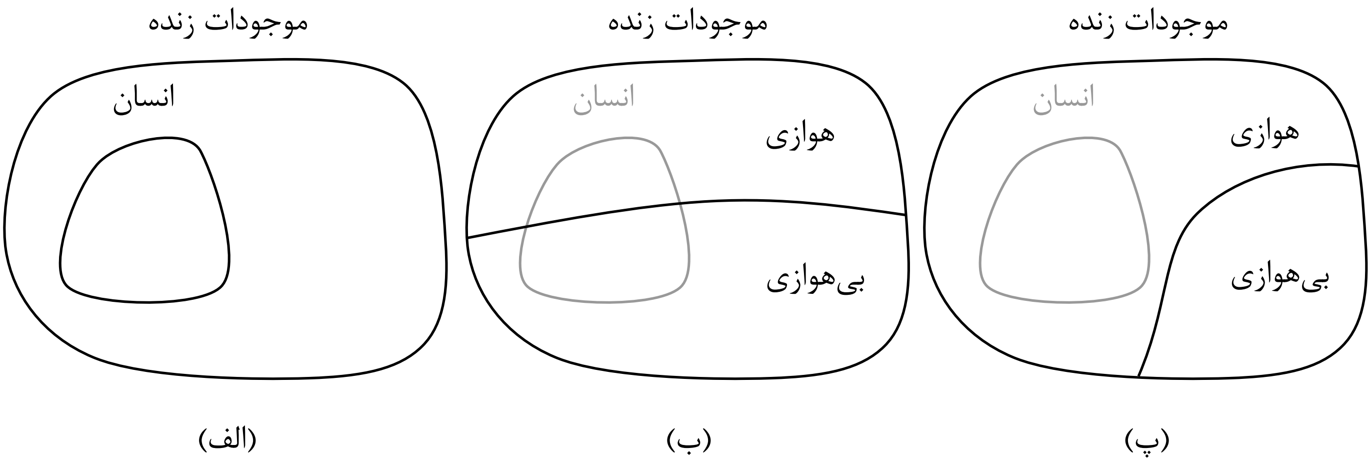
در عین حال چون مثال اول از ضرب ۳ درست نیست پس مثال نقض در این ضرب وجود دارد و ضرب ۳ نامعتبر است.

در مثال سوم از ضرب ۳ داریم،

هر انسانی ، موجود زنده است.
بعضی موجودات زنده ، هوازی هستند.

نمی‌توان استنتاج کرد که « هر انسانی هوازی است.»

پس ضرب ۳ معتبر نیست.



شکل ۲-۱۶ : نمایش ضرب سه؛ نمی‌توان تنها یکی از مفاهیم "هوازی" یا "بی‌هوازی" را به "انسان" نسبت داد و به (پ) رسید.

نکته ۲-۵ . هر کدام از مقدمات قیاس یک نمایش دارد، که وقتی مقدمه اول **"و"** مقدمه دوم را می‌نویسیم، می‌خواهیم در مورد فصل مشترک یا اشتراک دو مقدمه نتیجه‌گیری کنیم. مانند کاغذهای شفافی که روی هم قرار بگیرند و بخواهیم اشتراک اجزا و عناصر را ببینیم. یادآوری می‌کنیم، که استنتاج قیاسی یعنی به شرط صدق مقدمات نتیجه **همواره** درست باشد.

۲-۴-۲- قوانین مهم استنتاج قیاسی شرطی

برحسب تعریف هر گزاره شرطی[۱] همواره درست را **استنتاج منطقی** یا **استلزام منطقی** می‌نامند، که از ترکیب دو یا چند گزاره **ساده** یا **مرکب** درست می‌شود.

استنتاج منطقی یا **استدلال معتبر** را می‌توان به صورت زیر هم تعریف کرد :

استدلال معتبر استدلالی است که در صورت صدق مقدمات (یعنی درست بودن مقدمه‌های اول و دوم)، نتیجه استدلال نیز صادق باشد (یعنی درست باشد).

مهمترین قوانین استنتاج که در منطق کلاسیک به‌کار می‌روند عبارت از سه قانون قیاس زیر است.

[۱]منظور از گزاره شرطی آن است که، مقدمات اول و دوم یعنی صغری و کبری، هر دو یا یکی از آنها یک گزاره شرطی باشد.

الف) قانون قیاس[1]

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow r$$

خوانده می‌شود : [p آنگاه q و q آنگاه r] آنگاه r.

این قانون را می‌توان چنین نوشت :

مقدمه اول :	اگر p آنگاه q
مقدمه دوم :	اگر q آنگاه r
نتیجه :	آنگاه r

ب) قانون قیاس انتزاع[2]

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

این قانون را می‌توان چنین نوشت :

مقدمه اول :	اگر p آنگاه q
مقدمه دوم :	p
نتیجه :	q

مانند،

مقدمه اول :	اگر آفتاب طلوع کند، p	ستارگان در آسمان ناپدید می‌شوند. q
مقدمه دوم :	آفتاب طلوع کرده است.	
نتیجه :	ستارگان در آسمان ناپدید شده‌اند.	

توجه شود که در اینجا مقدمه اول کبری و مقدمه دوم صغری است. در بیان این دو مقدمه می‌توان ابتدا صغری را گفت و آن را مقدمه اول نامید، و پس از آن کبری را گفت و آن را مقدمه دوم نامید. به عبارت دیگر $(p \Rightarrow q) \wedge p$ را می‌توان با $p \wedge (p \Rightarrow q)$ جایگزین نمود.

مقدمه اول :	p
مقدمه دوم :	اگر p آنگاه q
نتیجه :	q

[1] Hypothetical Syllogism

[2] Modus Ponens

این قانون به عنوان« **قیاس استثنائی مرکب با کبری شرطی متصل و وضع مقدم آن** » نیز نامیده می‌شود. بعداً خواهیم دید که در استنتاج فازی از قانون قیاس انتزاع تعمیم‌یافته[1] به طور مفصل استفاده خواهد شد.

اثبات قانون انتزاع از راه استدلال :

قضیه ۱	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv [(\tilde{p} \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$
ردیف پنجم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv [p \wedge (\tilde{p} \vee q)] \Rightarrow q$
ردیف هفتم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow q$
قضیه ۱	$\equiv (\widetilde{p \wedge q}) \vee q$
ردیف هشتم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv (\tilde{p} \vee \tilde{q}) \vee q$
ردیف پنجم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv q \vee (\tilde{q} \vee \tilde{p})$
ردیف ششم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv (q \vee \tilde{q}) \vee \tilde{p}$
ردیف چهارم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv T \vee \tilde{p}$
ردیف دوم از جدول خواص ترکیبات	$\equiv T$

اثبات قانون انتزاع از راه جدول درستی :

جدول ۲-۱۱ . بررسی درستی قانون انتزاع

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

[1] Generalized Modus Ponens

ج) قانون قیاس نقیض انتزاع[1]

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge \tilde{q}] \Longrightarrow \tilde{p}$$

این قانون را می‌توان چنین نوشت :

مقدمه اول : اگر p آنگاه q

مقدمه دوم : نقیض q

نتیجه : نقیض p

مانند،

مقدمه اول : اگر آفتاب طلوع کند، ستارگان در آسمان ناپدید می‌شوند.

مقدمه دوم : ستارگان آشکار هستند (ناپدید نشده‌اند).

نتیجه : آفتاب طلوع نکرده است.

توجه داریم که،

مقدمه اول : اگر p آنگاه q

مقدمه دوم : نقیض q

نتیجه : نقیض p

مانند،

مقدمه اول : اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۲ بخش‌پذیر است.

مقدمه دوم : ۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست.

نتیجه : ۵ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

درحالیکه،

مقدمه اول : اگر p آنگاه q

مقدمه دوم : نقیض p

نتیجه : ~~نقیض q~~ (نادرست است)

مانند،

مقدمه اول : اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۲ بخش‌پذیر است.

مقدمه دوم : ۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

نتیجه : ~~۶ بر ۲ بخش‌پذیر نیست.~~ (نادرست است.)

بنابراین، گزاره مرکب $[(p \Longrightarrow q) \wedge \tilde{p}] \Longrightarrow \tilde{q}$ استنتاج منطقی نیست.

[1] Modus Tollens

قانون قیاس نقیض انتزاع به عنوان « **قانون قیاس استثنائی مرکب از یک قضیه شرطی متصل و نقیض تالی آن** » نیز شناخته و تعریف می‌شود.

مثال ۲-۱۳ : ثابت کنید گزاره شرطی زیر یک استنتاج منطقی است.

$$\tilde{p} \Longrightarrow (q \vee \tilde{p})$$

حل :

اثبات از راه استدلال :

قضیه ۲-۱	$\tilde{p} \Longrightarrow (q \vee \tilde{p}) \equiv p \vee (q \vee \tilde{p})$
جدول ۲-۵ ردیف پنجم	$\equiv p \vee (\tilde{p} \vee q)$
جدول ۲-۵ ردیف ششم	$\equiv (p \vee \tilde{p}) \vee q$
جدول ۲-۵ ردیف چهارم	$\equiv T \vee q$
جدول ۲-۵ ردیف دوم	$\equiv T$

اثبات از راه جدول درستی :

جدول ۲-۱۲. بررسی درستی $\tilde{p} \Rightarrow (q \vee \tilde{p})$

p	q	$\tilde{p}$	$q \vee \tilde{p}$	$\tilde{p} \Longrightarrow (q \vee \tilde{p})$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

مثال ۲-۱۴ : ثابت کنید استنتاج زیر استنتاج منطقی یا معتبر نیست.

$$[(p \Longrightarrow q) \wedge q] \Longrightarrow p$$

حل :

این قانون را می‌توان چنین نوشت :

مقدمه اول : اگر p آنگاه q

مقدمه دوم : q

نتیجه : p

مانند،

مقدمه اول :	اگر آفتاب طلوع کند،	ستارگان در آسمان ناپدید می‌شوند.
مقدمه دوم :		ستارگان ناپدید شده‌اند.
نتیجه :		~~آفتاب طلوع کرده است~~.

زیرا ممکن است شب باشد یا ابری باشد.

اثبات از راه استدلال :

قضیه ۱ $\quad [(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p \equiv [(\tilde{p} \vee q) \wedge q] \Rightarrow p$

قضیه ۱ $\quad \equiv \left[(\widetilde{\tilde{p} \vee q}) \wedge p\right] \vee p$

ردیف هشتم از جدول خواص ترکیبات $\quad \equiv \left[(\widetilde{\tilde{p} \vee q}) \vee \tilde{q}\right] \vee p$

ردیف هشتم از جدول خواص ترکیبات $\quad \equiv [(p \wedge \tilde{q}) \vee \tilde{q}] \vee p$

ردیف پنجم از جدول خواص ترکیبات $\quad \equiv [\tilde{q} \vee (\tilde{q} \wedge p)] \vee p$

ردیف نهم از جدول خواص ترکیبات $\quad \equiv \tilde{q} \vee p$

بدیهی است هنگامیکه p نادرست و q درست باشد، $\tilde{q}$ نادرست بوده، $\tilde{q} \vee p$ نادرست می‌شود. (در استدلال جدولی با فلش مشخص شده است.)

اثبات از راه جدول درستی :

جدول ۲-۱۳ . بررسی درستی $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن ⟵
ن	ن	د	ن	د

در سطر سوم، با وجود اینکه مقدمه اول و مقدمه دوم هر دو درست هستند، نتیجه یعنی سطر سوم از ستون پنجم نادرست است. استدلالی که مقدمات آن درست باشد، ولی نتیجه آن نادرست باشد، استدلال نامعتبر یا استدلال غیرمنطقی یا استنتاج غیرمنطقی است.

جدول ۲-۱۴ . نمونه‌ای برای هر یک از ضرب‌های ۱۶گانه از چهار شکل قیاس اقترانی

	مقدمه اول (صغری)	مقدمه دوم (کبری)	نتیجه
۱-۱-۱	هر الف، ب است.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی ازپستانداران، مذکر هستند.	بعضی از انسان‌ها، مذکر هستند.
۱-۲-۲	هر الف، ب است.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی ازپستانداران، مذکر نیستند.	بعضی از انسان‌ها، مذکر نیستند.
۱-۳-۳	هر الف، ب است.	هر ب، ج است.	هر الف، ج است.
	هر انسانی، پستاندار است.	هر پستانداری، مهره‌دار است.	هر انسانی، مهره‌دار است.
۱-۴-۴	هر الف، ب است.	هیچ ب، ج نیست.	هیچ الف، ج نیست.
	هر انسانی، حیوان است.	هیچ حیوانی، مایع نیست.	هیچ انسانی، مایع نیست.
۱-۵-۵	بعضی الف‌ها، ب هستند.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی از انسان‌ها، پزشک هستند.	بعضی از پزشکان، مرد هستند.	بعضی از انسان‌ها، مرد هستند.
۱-۶-۶	بعضی الف‌ها، ب هستند.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی از انسان‌ها، پزشک هستند.	بعضی از پزشکان، مرد نیستند.	بعضی از انسان‌ها، مرد نیستند.
۱-۷-۷	بعضی الف‌ها، ب هستند.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	هر نَری نیاز، به ماده دارد.	بعضی از پستانداران، نیاز به ماده دارند.
۱-۸-۸	بعضی الف‌ها، ب هستند.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی از پرندگان، تخم‌گذار هستند.	هیچ تخم‌گذاری، زاینده نیست.	بعضی پرندگان، زاینده نیستند.
۱-۹-۹	هیچ الف، ب نیست.	هر ب، ج است.	هیچ الف، ج نیست.
	هیچ انسانی، پرنده نیست.	هر پرنده، تخم‌گذار است.	هیچ انسانی، تخم‌گذار نیست.

۱-۱۰-۱۰	هیچ الف، ب نیست.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ انسانی، پرنده نیست.	بعضی پرندگان، سخنگو هستند.	بعضی انسان‌ها، سخنگو نیستند.
۱-۱۱-۱۱	هیچ الف، ب نیست.	هیچ ب، ج نیست.	هیچ الف، ج نیست.
	هیچ انسانی، تخم‌گذار نیست.	هیچ تخم‌گذاری، زاینده نیست.	هیچ انسانی، زاینده نیست.
۱-۱۲-۱۲	هیچ الف، ب نیست.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ انسانی، پرنده نیست.	بعضی پرندگان، سخنگو نیستند.	بعضی انسان‌ها، سخنگو نیستند.
۱-۱۳-۱۳	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی پرندگان، ناطق نیستند.	هر ناطقی، سخن می‌گوید.	بعضی پرندگان، سخنگو نیستند.
۱-۱۴-۱۴	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی از انسان‌ها، پزشک نیستند.	بعضی از پزشکان، مرد هستند.	بعضی از انسان‌ها، مرد نیستند.
۱-۱۵-۱۵	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی پرندگان، ناطق نیستند.	هیچ ناطقی، بی‌جان نیست.	بعضی پرندگان، بی‌جان نیستند.
۱-۱۶-۱۶	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی از انسان‌ها، پزشک نیستند.	بعضی از پزشکان، مرد نیستند.	بعضی از انسان‌ها، مرد نیستند.
۲-۱-۱۷	هر الف، ب است.	هر ج، ب است.	هر الف، ج است.
	هر انسانی، پستاندار است.	هر مهره‌داری، پستاندار است.	هر انسانی، مهره‌دار است.
۲-۲-۱۸	هر الف، ب است.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی مهره‌داران، پستاندار هستند.	بعضی انسان‌ها، مهره‌دار هستند.
۲-۳-۱۹	هر الف، ب است.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی مهره‌داران، پستاندار نیستند.	بعضی انسان‌ها، مهره‌دار نیستند.
۲-۴-۲۰	هر الف، ب است.	هیچ ج، ب نیست.	هیچ الف، ج نیست.
	هر آبی، مایع است.	هیچ مایعی، جامد نیست.	هیچ آبی، جامد نیست.

۲-۵-۲۱	بعضی الف‌ها، ب هستند.	هر ج، ب است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	هر مردی، نَر است.	بعضی از پستانداران، نَر هستند.
۲-۶-۲۲	بعضی الف‌ها، ب هستند.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	بعضی انسان‌ها، نَر هستند.	بعضی از پستانداران، انسان هستند.
۲-۷-۲۳	بعضی الف‌ها، ب هستند.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	بعضی انسان‌ها، نَر نیستند.	بعضی از پستانداران، انسان نیستند.
۲-۸-۲۴	بعضی الف‌ها، ب هستند.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی از پستانداران، نَر نیستند.
۲-۹-۲۵	هیچ الف، ب نیست.	هر ج، ب است.	هیچ الف، ج نیست.
	هیچ نَری، ماده نیست.	هر زنی، ماده است.	هیچ نَری، زن نیست.
۲-۱۰-۲۶	هیچ الف، ب نیست.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی انسان‌ها، ماده هستند.	بعضی نَرها، انسان نیستند.
۲-۱۱-۲۷	هیچ الف، ب نیست.	هیچ ج، ب نیست.	هیچ الف، ج نیست.
	هیچ نَری، ماده نیست.	هیچ مردی، ماده نیست.	هیچ نَری، ماده نیست.
۲-۱۲-۲۸	هیچ الف، ب نیست.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی انسان‌ها، ماده نیستند.	بعضی نَرها، انسان نیستند.
۲-۱۳-۲۹	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	هر ج، ب است.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر نیستند.	هرمردی، نَراست.	بعضی از پستانداران، مرد نیستند.
۲-۱۴-۳۰	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر نیستند.	بعضی از انسان‌ها، نَر هستند.	بعضی از پستانداران، انسان نیستند.
۲-۱۵-۳۱	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر نیستند.	هیچ زنی، نَر نیست.	بعضی از پستانداران، زن نیستند.
۲-۱۶-۳۲	بعضی الف‌ها، ب نیستند.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر نیستند.	بعضی از انسان‌ها، نَر نیستند.	بعضی از پستانداران، انسان نیستند.

۴-۱-۳۳	هیچ ب، الف نیست.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	هر نَری، نیاز به ماده دارد.	بعضی از نَرها، نیاز به ماده ندارند.
۴-۲-۳۴	هیچ ب، الف نیست.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی از نَرها، انسان هستند.	بعضی از ماده‌ها، انسان نیستند.
۴-۳-۳۵	هیچ ب، الف نیست.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	هیچ نَری، زن نیست.	هیچ ماده‌ای، زن نیست.
۴-۴-۳۶	هیچ ب، الف نیست.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی از نَرها، انسان نیستند.	بعضی از ماده‌ها، انسان نیستند.
۴-۵-۳۷	هر ب، الف است.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	هر مهره‌داری، پستاندار است.	هر انسانی، مهره‌دار است.
۴-۶-۳۸	هر ب، الف است.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی انسان‌ها، مرد هستند.	هر پستانداران، مرد هستند.
۴-۷-۳۹	هر ب، الف است.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	هیچ انسانی، پرنده نیست.	بعضا از پستانداران، پرنده نیستند.
۴-۸-۴۰	هر ب، الف است.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	بعضی پستانداران، مرد نیستند.
۴-۹-۴۱	بعضی ب‌ها، الف هستند.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد هستند.	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی مردها، پستاندار هستند.
۴-۱۰-۴۲	بعضی ب‌ها، الف هستند.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	هیچ پستانداری، تخم‌گذار نیست.	بعضی از نَرها، تخم‌گذار نیستند.
۴-۱۱-۴۳	بعضی ب‌ها، الف هستند.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	بعضی از پستانداران، انسان هستند.	بعضی از نَرها، انسان هستند.

۴-۱۲-۴۴	بعضی ب‌ها، الف هستند.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	بعضی از پستانداران، انسان نیستند.	بعضی از نَرها، انسان نیستند.
۴-۱۳-۴۵	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	هر ب، ج است.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	هر مردی، نیاز به ماده دارد.	بعضی مردها، نیاز به ماده ندارند.
۴-۱۴-۴۶	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	بعضی ب‌ها، ج هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر هستند.	بعضی از پستانداران، انسان هستند.	بعضی از نَرها، انسان نیستند.
۴-۱۵-۴۷	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	هیچ ب، ج نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	هیچ انسانی، پرنده نیست.	بعضی مردها، پرنده نیستند.
۴-۱۶-۴۸	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	بعضی ب‌ها، ج نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی ازپستانداران، نَر نیستند.	بعضی از پستانداران، انسان نیستند.	بعضی از نَرها، انسان نیستند.
۴-۱-۴۹	هر ب، الف است.	هر ج، ب است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	هر مهره‌داری، پستاندار است.	بعضی پستانداران، مهره‌دار هستند.
۴-۲-۵۰	هر ب، الف است.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی از موجودات زنده، انسان هستند.	بعضی از پستانداران، موجود زنده هستند.
۴-۳-۵۱	هر ب، الف است.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	هیچ پرنده‌ای، انسان نیست.	بعضی از پستانداران، پرنده نیستند.
۴-۴-۵۲	هر ب، الف است.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هر انسانی، پستاندار است.	بعضی از موجودات زنده، انسان نیستند	بعضی از پستانداران، موجود زنده نیستند.
۴-۵-۵۳	بعضی ب‌ها، الف هستند.	هر ج، ب است.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی از موجودات زنده، انسان هستند.	هر مردی، موجود زنده است.	بعضی از انسان‌ها، موجود زنده نیستند.
۴-۶-۵۴	بعضی ب‌ها، الف هستند.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج هستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد هستند.	بعضی از موجودات زنده، انسان هستند.	بعضی مردها، موجود زنده هستند.
۴-۷-۵۵	بعضی ب‌ها، الف هستند.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد هستند.	هیچ پرنده‌ای، انسان نیست.	بعضی مردها، پرنده نیستند.

۴-۸-۵۶	بعضی ب‌ها، الف هستند.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد هستند.	بعضی از موجودات زنده، انسان نیستند.	بعضی مردها، موجود زنده نیستند.
۴-۹-۵۷	هیچ ب، الف نیست.	هر ج، ب است.	هیچ الف، ج نیست.
	هیچ پرنده‌ای، انسان نیست.	هر گنجشکی، پرنده است.	هیچ انسانی، گنجشک نیست.
۴-۱۰-۵۸	هیچ ب، الف نیست.	بعضی ج‌ها، ب هستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی از انسان‌ها، نَر هستند.	بعضی از ماده‌ها، انسان نیستند.
۴-۱۱-۵۹	هیچ ب، الف نیست.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ پرنده‌ای، انسان نیست.	هیچ سگی، پرنده نیست.	بعضی از انسان‌ها، سگ نیستند.
۴-۱۲-۶۰	هیچ ب، الف نیست.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	هیچ نَری، ماده نیست.	بعضی از انسان‌ها، نَر نیستند.	بعضی از ماده‌ها، انسان نیستند.
۴-۱۳-۶۱	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	هر ج، ب است.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی از موجودات زنده، انسان نیستند.	هر مردی، موجود زنده است.	بعضی از انسان‌ها، موجود زنده نیستند.
۴-۱۴-۶۲	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	بعضی از موجودات زنده، انسان هستند.	بعضی مردها، موجود زنده نیستند.
۴-۱۵-۶۳	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	هیچ ج، ب نیست.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	هیچ پرنده‌ای، انسان نیست.	بعضی مردها، پرنده نیستند.
۴-۱۶-۶۴	بعضی ب‌ها، الف نیستند.	بعضی ج‌ها، ب نیستند.	بعضی الف‌ها، ج نیستند.
	بعضی انسان‌ها، مرد نیستند.	بعضی از موجودات، زنده انسان نیستند.	بعضی مردها، موجود زنده نیستند.

فصل ۳– مجموعه‌های فازی

۳-۱- مقدمه

می‌خواهیم با ذکر مثالی **مجموعه‌های فازی**[1] یا غیرصریح را تعریف و معرفی کرده، تفاوت آن‌ها را با **مجموعه‌های صریح**[2] بیان کنیم.

ما در محاوره روزانه اغلب اصطلاحاتی را به کار می‌بریم، که دارای مفاهیم صریح و قطعی نیستند؛ بلکه از نظر کلامی، مفاهیمی تقریبی را بیان می‌کنند، که در اغلب موارد ساختار تقریبی آن‌ها بیشتر از مفاهیم دقیق مورد استقبال و استفاده عموم قرار می‌گیرد. مثلا وقتی از سردی و گرمی هوا صحبت می‌کنیم، این مفهومی است که محدوده متداول دما در منطقه مورد نظر را بیان می‌کند. در مناطق معتدل کره زمین هوای سرد وگرم از ۳-۲ درجه سانتیگراد تا ۳۰-۲۵ درجه می‌توانند متغیر باشد. در مناطق سرد محدوده هوای سرد وگرم می‌تواند از ۲۰- یا حتی ۳۰- درجه شروع شود و به حدود ۲۰ تا ۲۵ درجه متغیر باشد. از سوی دیگر در مناطق گرمسیر محدوده هوای سرد وگرم از ۱۵-۲۰ درجه می‌تواند تا ۴۵ و حتی ۵۰ درجه سانتیگراد متغیر باشد. آنچه در مناطق سردسیر هوای گرم نامیده می‌شود، در مناطق گرمسیر ممکن است هوای سرد نام داشته باشد. از سوی دیگر، هرکدام از این مفاهیم کلامی محدوده‌ای از دما را شامل می‌شود. پس ما در محاوره و مکالمه به جای آن که از عبارت‌های دقیق برای بیان دما استفاده کنیم، از عبارت‌های غیردقیق با مرزهای قابل تغییر بهره می‌بریم، که به محیطی که در آن هستیم نیز وابسته است.

ترمهایی نظیر "هوای آفتابی"، "افراد قدبلند"، "صنایع کوچک" و "درختان تنومند" نمونه‌های دیگری از عبارتهای کلامی هستند که مفاهیم دقیق و صریحی را بیان نمی‌کنند.

هوای آفتابی به معنای آن نیست که هیچ ابری در آسمان نباشد. وقتی هوا ۵٪ ، ۱۵٪ وحتی ۲۰٪ هم ابری باشد، هنوز هوای آفتابی نام می‌گیرد. از طرفی واضح است هنگامی‌که همه آسمان ابری باشد و یا قسمت عمده آسمان ابری است، چنین هوایی را نمی‌توان آفتابی نامید. بنابراین سوالی که مطرح می‌شود آن است که، مرز هوای آفتابی و هوای ابری کجاست؟ آیا این مرز، ۵۰٪ است؟ آیا اگر ۴۹٪ آسمان ابری باشد هوا آفتابی است واگر ۵۱٪ باشد هوا ابری است. می‌دانیم که ما درتعریف هوای آفتابی و ابری چنین مرزهای دقیقی نداریم و از مفاهیمی تقریبی و غیردقیق استفاده می‌کنیم. نمره خوب در یک امتحان چند است؟ در سیستم آموزشی ما ۱۹ خوب است؟ واضح است که چنین است. آیا نیم نمره کمتر باز هم خوب است؟ جواب مثبت است. اگر ۱۸/۵ نمره خوبی است، آیا نیم نمره کمتر خوب نیست؟ بله، بازهم خوب

[1] Fuzzy Set

[2] Crisp Set

است. بدیهی است با این استدلال نمره ردی هم باید خوب به نظر برسد، که یقیناً این طور نیست و منطقی به نظر نمی‌رسد.

برای حل این تناقض چه باید کرد؟

عبارت "هوای آفتابی" را می‌توان برحسب میزان ابری بودن از وضعیتی که به عنوان "شرایط آفتابی" قابل قبول است، تا وضعیتی که به عنوان"شرایط ابری" قابل قبول است، درجه‌بندی کرد.

این در واقع ایده اصلی"مجموعه‌های فازی" است، مجموعه‌هایی غیردقیق، غیرصریح و با مرزهای غیردقیق. مجموعه‌هایی بسیار گسترده‌تر از مجموعه‌های صریح، به‌گونه‌ای که مجموعه‌های صریح تنها حالت خاصی از مجموعه‌های فازی می‌شوند.

مجموعه‌های صریح را چنین تعریف می‌کنیم:

مجموعه‌های صریح اجزا مربوط به یک فضای معین را به دو گروه تقسیم می‌نماید :

۱. عضوها (آن‌هایی که قطعاً متعلق به مجموعه هستند)، و
۲. غیر عضوها (آن‌هایی که قطعا متعلق به مجموعه نیستند).

به این ترتیب یک مرز دقیق و مشخص بین اعضا و غیراعضا در مجموعه‌های صریح وجود دارد.

از سوی دیگر مجموعه‌های فازی چنین تعریف می‌شوند :

مجموعه‌های فازی مجموعه‌هایی هستند که، میزان تعلق اجزا و اعضا در این مجموعه نسبی است و اعضا می‌توانند تا اندازه‌ای عضو این مجموعه باشند. میزان عضویت عناصر در این مجموعه می‌تواند از "عضو نبودن" تا "به طور کامل عضو بودن" تغییر نماید. از نظر ریاضی می‌توان به هر عضو مجموعه مرجع یک مقدار عضویت نسبت داد، که نشان دهنده میزان عضویت آن عضو در مجموعه فازی باشد.

در مجموعه‌های صریح تابعی به عنوان تابع مشخصه تعریف می‌شود، که به هر عضو مجموعه مرجع[۱] عدد صفر یا یک را نسبت می‌دهد. اعضایی که عدد "یک" به آن‌ها داده شده عضو مجموعه صریح هستند، و آن‌هایی که عدد "صفر" به آن‌ها نسبت داده شده، عضو مجموعه صریح نیستند.

[۱] مجموعه مرجع یا Reference set یا Universe of Discourse؛ مجموعه‌ای است صریح، که اعضا آن می‌توانند خود مجموعه‌های صریح کوچکتر یا عضو مجموعه‌های فازی باشند. مثلاً افراد جامعه مجموعه مرجع هستند و در این مجموعه مرجع افراد مسن یا افراد جوان مجموعه‌های فازی زیر مجموعه مرجع هستند.

۳–۲– تعاریف و اصطلاحات مجموعه‌های فازی

تابع مشخصه

برای هر مجموعه مرجع X با اجزا x، یک مجموعه صریح $A \subseteq X$ عبارت است از همه اعضا $x \in X$ به‌طوری‌که هر جز x یا به مجموعه‌ی A تعلق دارد یا ندارد. با تعریف **تابع مشخصه**[۱] برای هر جز x در X می‌توانیم مجموعه A را با زوج‌های مرتب $(\mathrm{x},0)$ یا $(x,1)$ بیان کنیم که $(x,0)$ یعنی $x \notin X$ و $(x,1)$ یعنی $x \in X$. به‌این‌ترتیب در مجموعه‌های کلاسیک یا صریح، تابع مشخصه یا صفر است یا یک.

در مجموعه‌های فازی برخلاف مجموعه‌های کلاسیک، هر عضو می‌تواند تا اندازه‌ای به مجموعه فازی تعلق داشته باشد، پس تابع مشخصه مجموعه‌های فازی مجاز است مقادیر بین صفر و یک را داشته باشد، که بیان کننده درجه عضویت یک جز در مجموعه فازی است.

مجموعه‌های فازی و توابع عضویت

اگر مجموعه مرجع X و اعضای آن x باشند. مجموعه فازی A در X را می‌توان با زوج‌های مرتب زیر تعریف کرد،

$$A = \{\mathrm{x}, \mu_A(\mathrm{x}) | x \in X\}$$

که در آن $\mu_A(\mathrm{x})$ را **تابع عضویت**[۲] مجموعه فازی A نامند. تابع عضویت ، هر عضو X مانند x را به یک مقدار معین بین صفر و یک که **مقدار عضویت**[۳] نام دارد، مربوط می‌کند.

بدیهی است، مجموعه‌های فازی بسط و گسترش مجموعه‌های کلاسیک هستند، که در آن‌ها توابع عضویت می‌تواند مقادیر بین صفر و یک را داشته باشد. در سیستم‌های کلاسیک، چون این توابع فقط یکی از دو مقدار صفر یا یک را دارند، لذا به آن‌ها توابع مشخصه می‌گوییم.

معمولاً X را reference set یا universe of discourse و یا به اختصار universe نامند؛ ما در این درس آن را مجموعه مرجع می‌نامیم.

X می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. یعنی از اجزا گسسته درست شده باشد، یا فضای پیوسته‌ای را نشان دهد.

[۱] Characteristic Function

[۲] Membership Function

[۳] Membership Grade

مثال ۳-۱ : سیستم فازی با مجموعه مرجع گسسته نامرتب

اگر مجموعه مرجع X به صورت زیر شامل تنها سه شهر باشد،

$$X = \{\text{تبریز، اصفهان، شیراز}\}$$

و این‌ها شهرهایی باشند در مجموعه فازی، که می‌خواهیم علاقمندی مردم به زندگی در این شهرها را تعیین کنیم. بنابراین مجموعه فازی A را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$A = \{\text{شهر مورد علاقه برای زندگی}\}$$

دراین صورت، نحوه ارائه این مجموعه فازی می‌تواند به صورت زیر باشد،

$$A = \{(\text{تبریز}، 0.9), (\text{اصفهان}، 0.8), (\text{شیراز}، 0.6)\}$$

بدیهی است این مقادیر عضویت ۰/۹ ، ۰/۸، ۰/۶ کاملا اختیاری است و بسته به نظر فرد تغییر می‌کند. به این خاطر اصولاً مجموعه‌های فازی را **وابسته به موضوع**[1] می‌نامند.

مثال ۳-۲ : مجموعه فازی با مجموعه مرجع گسسته مرتب

اگر $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ تعداد فرزندانی باشد که یک خانواده مایل داشتن آن است، در اینصورت مجموعه فازی، می‌تواند به صورت زیر تعریف شود.

$$B = \{(0,0.1), (1,0.3), (2\ ,0.7), (3,1), (4\ ,0.7), (5\ ,0.3), (6\ ,0.1)\}$$

در اینجا با یک مجموعه گسسته مرتب داریم، تابع عضویت برای این مجموعه فازی در شکل ۳-۱ الف) نمایش داده شده است.

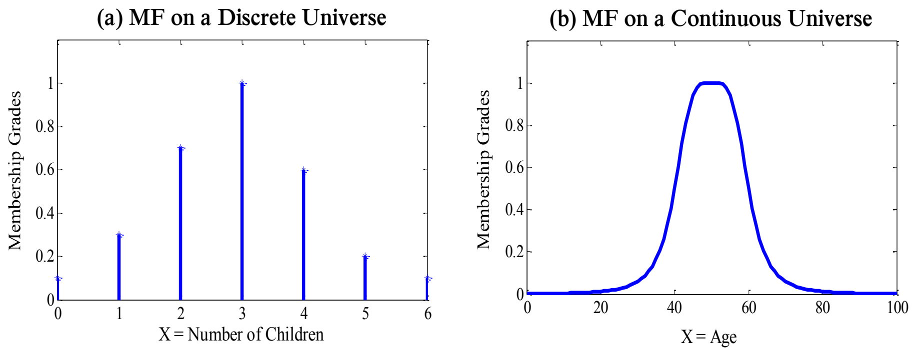
مثال ۳-۳ : مجموعه فازی با مجموعه مرجع پیوسته

اگر $X = R^{+}$ مجموعه‌ای از سن افراد باشد و مجموعه C شامل افراد حدود ۵۰ سال سن باشد، در این‌صورت C را می‌توان چنین تعریف کرد،

$$C = \{(\mathrm{x}, \mu_C(\mathrm{x}))|x \in X\}$$
$$\mu_C(\mathrm{x}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$

تابع عضویت این مجموعه فازی در شکل ۳-۱ ب) نمایش داده شده است.

[1] Content Dependent



شکل ۳-۱ : الف)مجموعه گسسته مربوط به مثال ۳-۲ ب) مجموعه پیوسته مربوط به مثال ۳-۳

توجه کنیم که ساختار مجموعه فازی به دو موضوع اصلی مربوط می‌شود. یکی شناسایی مجموعه مرجع مناسب و دوم تعیین تابع عضویت مناسب. تشخیص و تعیین تابع عضویت **وابسته به موضوع**[۱] است. یعنی توابع عضویتی که برای یک موضوع مشخص توسط دو فرد متفاوت تعیین شود، ممکن است از نظر مقدار عضویت کاملاً با هم متفاوت باشند.

در نتیجه می‌توان گفت که، مجموعه‌های فازی "وابسته به موضوع" و غیر اتفاقی هستند؛ و این‌ها مهم‌ترین اختلاف بین مجموعه‌های فازی با تئوری احتمالات است. در تئوری احتمالات با پدیده‌های اتفاقی و **کاملاً موضوعی**[۲] سروکار داریم.

نمایش مجموعه‌های فازی

مجموعه فازی A را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت.

اگر x از اجزا گسسته درست شده باشد :
$$A = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(\mathrm{x}_i)}{x_i}$$

اگر x از اجزا پیوسته درست شده باشد :
$$A = \int_{x \in X} \frac{\mu_A(\mathrm{x})}{x}$$

در اینجا جمع و انتگرال برای نشان دادن اجتماع زوج های $\left(x_i, \mu_A(x_i)\right)$ و $\left(x, \mu_A(x)\right)$ به کار رفته است و واقعاً جمع و انتگرال نیست. هم چنین علامت تقسیم یا / به معنای تقسیم نیست و صرفاً نشان‌دهنده زوج‌های مذکور هستند.

۱ Subjective (Content Dependent)

2 Objective Treatment of Random Phenomena

با تعریف‌های بالا می‌توان مجموعه‌های فازی مثال‌های مثال **۳-۱**، مثال **۳-۲** و مثال **۳-۳** را چنین نشان داد.

$$A = \left\{\frac{\text{شیراز}}{0.6}, \frac{\text{اصفهان}}{0.8}, \frac{\text{تبریز}}{0.9}\right\}$$

$$B = \frac{0.1}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.1}{6}$$

$$C = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{x}{1+\left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$

مثال ۳-۴ : یک مجموعه مرجع با تعداد اعضا محدود از سنین مختلف افراد یک جامعه با ۹ عضو از ۵ سال تا ۸۰ سال را در نظر می‌گیریم. چهار مجموعه فازی، که همگی زیر مجموعه‌های مجموعه مرجع هستند را چنین انتخاب می‌کنیم : نوزاد، بالغ، جوان، پیر. جدول ۳-۱، مقدار عضویت هرکدام از اعضا مجموعه مرجع در مجموعه‌های فازی چهارگانه را نشان می‌دهد (شکل ۳-۲).

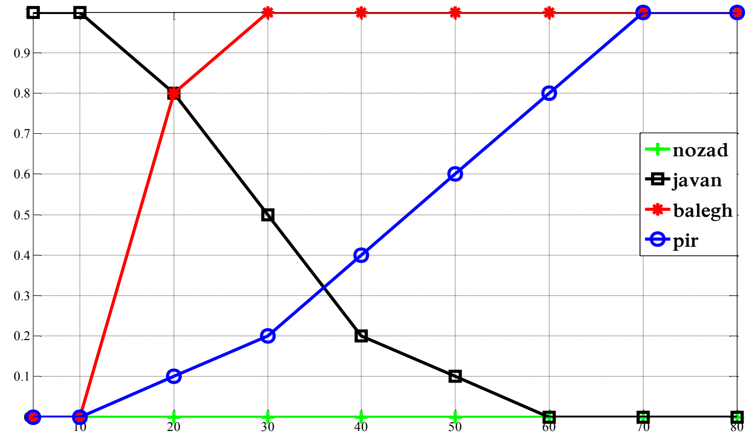
جدول ۳-۱ . مقدار عضویت هرکدام از اعضا مجموعه مرجع در مجموعه‌های فازی چهارگانه

اجزا	نوزاد	بالغ	جوان	پیر
۵	۰	۰	۱	۰
۱۰	۰	۰	۱	۰
۲۰	۰	۰,۸	۰,۸	۰,۱
۳۰	۰	۱	۰,۵	۰,۲
۴۰	۰	۱	۰,۲	۰,۴
۵۰	۰	۱	۰,۱	۰,۶
۶۰	۰	۱	۰	۰,۸
۷۰	۰	۱	۰	۱
۸۰	۰	۱	۰	۱

اعداد داخل جدول بالا مقادیر (سن) μ_A را بیان می‌کنند، که در آن A هر یک از چهار مجموعه فازی نوزاد، بالغ، جوان و یا پیر است.

در این شکل ، گرچه مجموعه‌های فازی گسسته هستند، ولی، برای روشن شدن نحوه تغییرات هرکدام از آن‌ها نقاط مختلف را که نشان‌دهنده مقدار عضویت هر مجموعه فازی است، به هم وصل کرده‌ایم. نقاط نشان‌دهنده توابع عضویت نوزاد با + بالغ با * جوان با □ وپیر با ○ نشان داده شده‌اند. مثلاً یک عضو ۳۰

ساله مجموعه مرجع، در مجموعه پیر مقدار عضویت ۰/۲، در مجموعه جوان مقدار عضویت ۰/۵ و در مجموعه فازی بالغ، دارای مقدار عضویت ۱ است.



شکل ۳-۲ : مجموعه‌های فازی نوزاد، بالغ، جوان وپیر

پشتیبان مجموعه فازی

پشتیبان[۱] مجموعه فازی A از مجموعه مرجع X، یک مجموعه صریح شامل همه اجزا x است، که دارای مقدار عضویت غیرصفر در A' باشند. یعنی پشتیبان مجموعه فازی در X به وسیله تابع زیر به دست می‌آید،

$$\sup A = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\}.$$

برای نمونه، پشتیبان مجموعه فازی جوان از جدول ۳-۱ عبارت از مجموعه صریح زیر است،

$$\sup A = \{5,10,20,30,40,50\}.$$

یک مجموعه تهی دارای پشتیبان تهی است یعنی به تمام اجزا مجموعه مقدار صفر را نسبت می‌دهد. مجموعه فازی نوزاد در جدول ۳-۱ نمونه‌ای از یک مجموعه فازی تهی در مجموعه مرجع مورد بحث است.

فرض کنید x_i یک عضو مجموعه پشتیبان مجموعه فازی A و μ_i مقدار عضویت آن در مجموعه فازی A باشد. در این صورت آن‌گونه که پیشتر نیز دیدیم، A را می‌توان چنین نشان داد،

$$A = \sum_{x_i \in X} \frac{\mu_A(\mathrm{x}_i)}{x_i}.$$

اگر X پیوسته باشد (برای نمونه یک فاصله معین از اعداد حقیقی)، مجموعه فازی چنین بیان می‌شود،

---

۱ Support

$$A = \int_{x \in X} \frac{\mu_A(\mathrm{x})}{x}.$$

در واقع زوج‌های مرتب $\frac{\mu_i}{\mathrm{x}_i}$ را می‌توان اعضا مجموعه فازی A نامید.

ارتفاع

ارتفاع[1] یک مجموعه فازی A در فضای مرجع X عبارت است از، بزرگترین مقدار تابع عضویت $\mu_A(x)$ به اندازه تمامی اعضا مجموعه مرجع X.

$$height = \max\{\mu_A(x)\}, \qquad for\ \forall x \in X$$

مجموعه فازی نرمال

مجموعه فازی نرمال A در فضای مرجع X مجموعه است که ارتفاع آن برابر یک است.

$$A : \mathrm{height}(A) = 1$$

هسته مجموعه فازی

هسته[2] یک مجموعه فازی A مجموعه‌ای از همه نقاط x در A است طوری‌که،

$$\mathrm{core}(A) = \{x|\mu_A(\mathrm{x}) = 1\}.$$

نقطه عبور

نقطه عبور[3] مجموعه فازی A نقطه یا نقاطی مانند $x \in X$ است، که در آن $\mu_A(\mathrm{x}) = 0.5$.

$$\mathrm{crossover}(A) = \{x|\mu_A(\mathrm{x}) = 0.5\}$$

مجموعه فازی یگانه

مجموعه فازی که پشتیبان آن یک نقطه یگانه در X با $\mu_A(\mathrm{x}) = 1$ است را **مجموعه فازی یگانه**[4] می‌نامیم.

در شکل ۳-۳ الف) پشتیبان و نقطه عبور مربوط به مجموعه فازی میانسال با تابع عضویت ناقوسی شکل، و در شکل ۳-۳ ب) مجموعه فازی یگانه ۴۵ ساله نشان داده شده است.

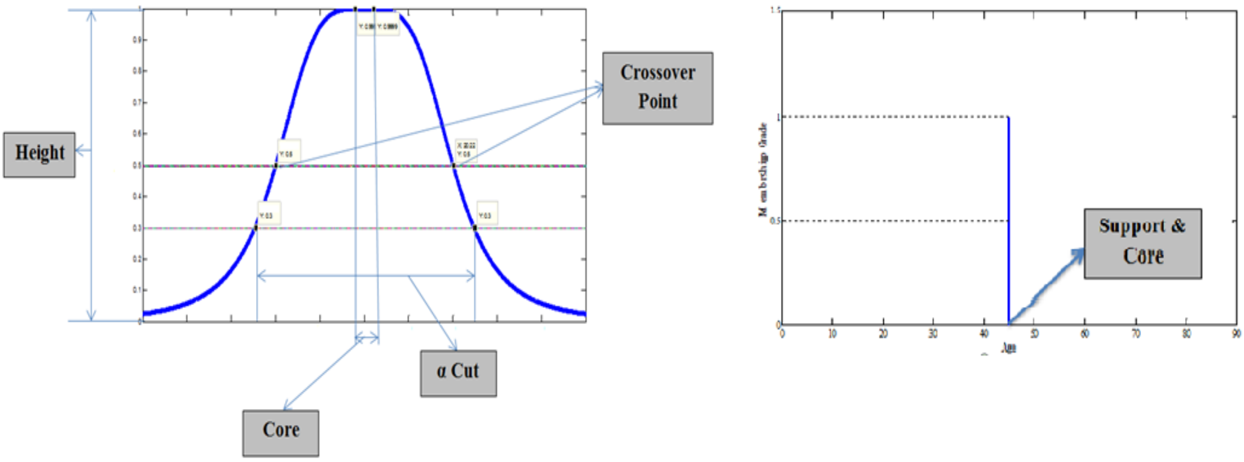
---

[1] Height

[2] Core

[3] Crossover Point

[4] Fuzzy Singleton



(الف) (ب)

شکل ۳-۳ : هسته، ارتفاع و نقطه عبور. الف) مجموعه فازی میانسال. ب) مجموعه فازی یگانه ۴۵ سال.

برش α

یک مجموعه فازی A را می‌توان چنین نوشت،

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$$

که مقدار α می‌تواند دلخواه انتخاب شود، اما باید در محدوده مقادیر درجه عضویت مجموعه فازی مورد نظر انتخاب شود. مثلا برای $\alpha = 0.2$ برش α از مجموعه فازی جوان از جدول ۳-۱ یک مجموعه فازی بصورت زیر است،

$$\text{جوان}_{0.2} = \{5,10,20,30,40\}$$

$$\text{جوان}_{0.8} = \{5,10,20\}$$

$$\text{جوان}_{1} = \{5,10\}$$

توجه کنید که همه برش های α از هر مجموعه فازی در مجموعه مرجع X عبارت است از، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های صریح X. مجموعه همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$ که بیان‌کننده برش‌های مجزا از مجموعه فازی A باشد را **مجموعه سطح**[۱] نامند و چنین نمایش می‌دهند.

$$\Lambda_A = \{\alpha | \mu_A(x) \;\; for\ some\ x \in X\}$$

در این رابطه Λ_A نشان‌دهنده مجموعه سطح A در مجموعه مرجع X است.

[۱] Level Set of A

مجموعه فازی محدب

مجموعه فازی A در فضای مرجع X **محدب**[۱] است، اگر وتنها اگر برای همه مقادیر x_1 و x_2 متعلق به X و همه مقادیر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم،

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

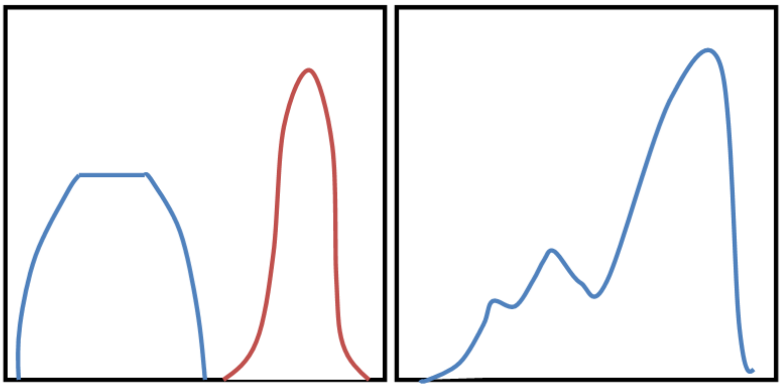
یعنی تمامی عناصر مجموعه مرجع X که بین دو مقدار دلخواه x_1 و x_2 قرار دارند، باید مقدار عضویتی بزرگتر از حداقل مقادیر عضویت مجموعه فازی A به ازای x_1 و x_2 داشته باشند.

توجه کنیم که تعریف تحدب یک مجموعه فازی به این معنا نیست که الزاماً تابع عضویت یک مجموعه فازی محدب خود یک تابع محدب است.

تابع $f(x)$ محدب است اگر،

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

این شرط، از شرط صفحه پیش که برای مجموعه فازی محدب بیان شد، سخت‌تر است. شکل ۳-۴ مفهوم تحدب مجموعه‌های فازی را بیان می‌کند. در شکل ۳-۴ الف) دو مجموعه فازی محدب نشان داده شده است. مجموعه فازی سمت چپ هر دو شرط را اقناء می‌کند، درحالی‌که شکل سمت راست تنها شرط اول را اقناء می‌کند. شکل ۳-۴ ب) یک مجموعه فازی غیر محدب را نشان می‌دهد.



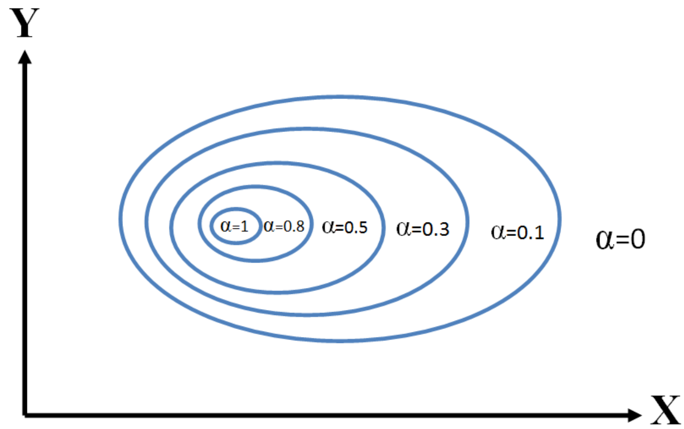
(ب) (الف)

شکل ۳-۴ : الف) دو مجموعه فازی محدب. ب) یک مجموعه فازی غیرمحدب.

شکل زیر نشان‌دهنده یک مجموعه فازی محدب در $\mathbb{R}^2$ است، که با برش های α برای مقادیر مختلف مجموعه سطح ارائه شده است.

---

[۱] Convexity



شکل ۳-۵ : مجموعه فازی محدب در $\mathbb{R}^2$ با برش‌های α برای مقادیر مختلف مجموعه سطح.

اگر مجموعه فازی محدب نباشد، برش‌های α باعث می‌شود شکل کانتورهای[۱] بالا به صورتی درآید که منحنی‌های بسته همدیگر را قطع کنند.

عددی فازی

اگر مجموعه فازی A در فضای مرجع X نرمال و محدب باشد آن را **عدد فازی** نامند. بیشتر مجموعه‌های فازی مورد استفاده در کاربردهای مختلف علوم مهندسی از نوع عدد فازی هستند.

کاردینالیتی اسکالر

کاردینالتی اسکالر[۲] یک مجموعه فازی A برای یک مجموعه محدود x در X تعریف شده است. این کمیت را با $|A|$ نشان می‌دهند و عبارت است از، مجموع درجات عضویت همه اعضا X در A،

$$|A| = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i).$$

برای نمونه کاردینالتی اسکالر مجموعه فازی پیر از جدول ۳-۱ عبارت است از،

$$|old| = 0 + 0 + 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.6 + 0.8 + 1 + 1 = 4.1.$$

کاردینالتی اسکالر مجموعه فازی نوزاد در جدول ۳-۱ برابر صفر است.

۱ Contour

۲ Scalar Cardinality

۳-۳- روابط پارامتری انواع توابع عضویت

آنچه در این قسمت بیان می‌شود، انواع نمایش و معادلات مربوط به مجموعه‌های فازی یک بعدی است. مجموعه‌های فازی چند بعدی در قسمت‌های بعد تعریف و توابع عضویت آن‌ها نیز شرح داده می‌شوند. برای مجموعه‌های فازی یک بعدی توابع عضویت مختلف را ارائه می‌کنیم. لازم به ذکر است که توابع عضویت مورد استفاده در کاربردهای مدلسازی و کنترل بسیار متنوع هستند. در اینجا، تنها چند نمونه از روابط مربوط به توابع عضویت ارائه شده است.

الف – تابع عضویت مثلثی

یک تابع عضویت مثلثی[۱] با سه پارامتر (a, b, c) به صورت زیر بیان می‌شود،

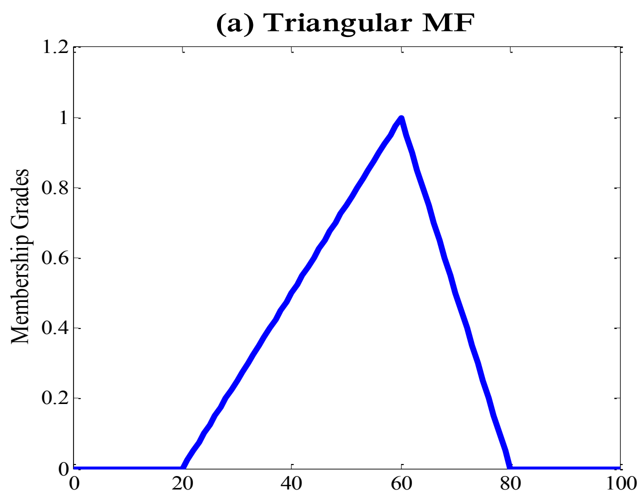
$$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & c \leq x \end{cases}$$

با استفاده از عبارت‌های min، max معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$triangular(x, a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

پارامترهای (a, b, c) که در آن $a < b < c$ است.

شکل ۳-۶ تابع عضویت مثلثی $(x, 20,60,80)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۶ : تابع عضویت مثلثی $(x, 20, 60, 80)$

۱ Triangular Membership Function

ب – تابع عضویت ذوزنقه‌ای

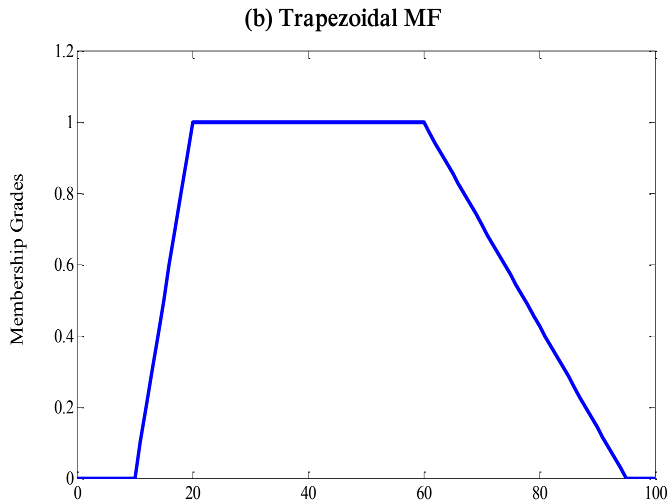
یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای[1] با چهار پارامتر (a,b,c,d) به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ 0 & d \le x \end{cases}$$

با استفاده از عبارت‌های min، max معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$trapezoid(x,a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$

پارامترهای (a,b,c,d) با $(a<b<c<d)$ مختصات x چهار گوشه ذوزنقه را نشان می‌دهد. شکل ۳-۷ تابع عضویت ذوزنقه‌ای $(x,10,20,60,95)$ را ارائه کرده است.



شکل ۳-۷ : تابع عضویت ذوزنقه‌ای $(x,10,20,60,95)$

تابع عضویت مثلثی متداول‌ترین تابع عضویت در کاربردهای مختلف مهندسی است. تابع عضویت ذوزنقه‌ای نیز پس از تابع عضویت مثلثی به طور گسترده‌ای در زمینه‌های گوناگون کاربرد سیستم‌های فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. باوجود کاربردهای بسیار، این دو نوع تابع عضویت در گوشه‌های محلی تقاطع خطوط، ملایم نیستند. پرش در مشتق این توابع باعث می‌شود در برخی از کاربردها، سایر توابع عضویتی که در گوشه ها ملایم هستند، به عنوان جایگزین مناسب مورد توجه قرار گیرند.

[1] Trapezoidal Membership Function

ج – تابع عضویت گوسی

یک تابع عضویت گوسی[1] با دو پارامتر (c, σ) مشخص می‌شود،

$$gaussian(x, c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

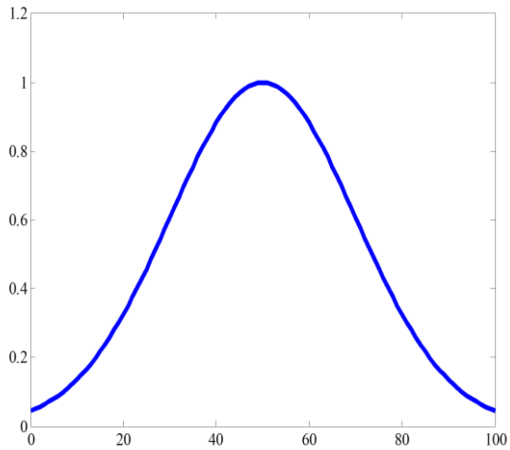
c نشان‌دهنده مرکز و σ نشان‌دهنده پهنای تابع عضویت است (در $\mathrm{x} = c$ مقدار تابع عضویت ۱ است). شکل ۳-۹ نمایش تابع عضویت گوسی به صورت $(x, 50{,}20)$ است.

د – تابع عضویت ناقوسی

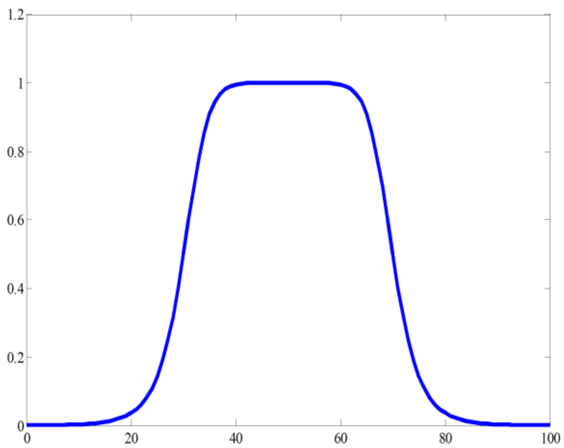
یک تابع عضویت ناقوسی[2] با سه پارامتر (a, b, c) مشخص می‌شود،

$$gbell(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

که در آن پارامتر b معمولا مثبت است (اگر b منفی باشد شکل تابع عضویت به صورت ناقوس معکوس در می‌آید). شکل ۳-۹ نمایش تابع عضویت ناقوسی با مشخصات $(x, 20{,}4{,}50)$ ناقوس است.



شکل ۳-۹ : تابع عضویت گوسی $(x, 50, 20)$

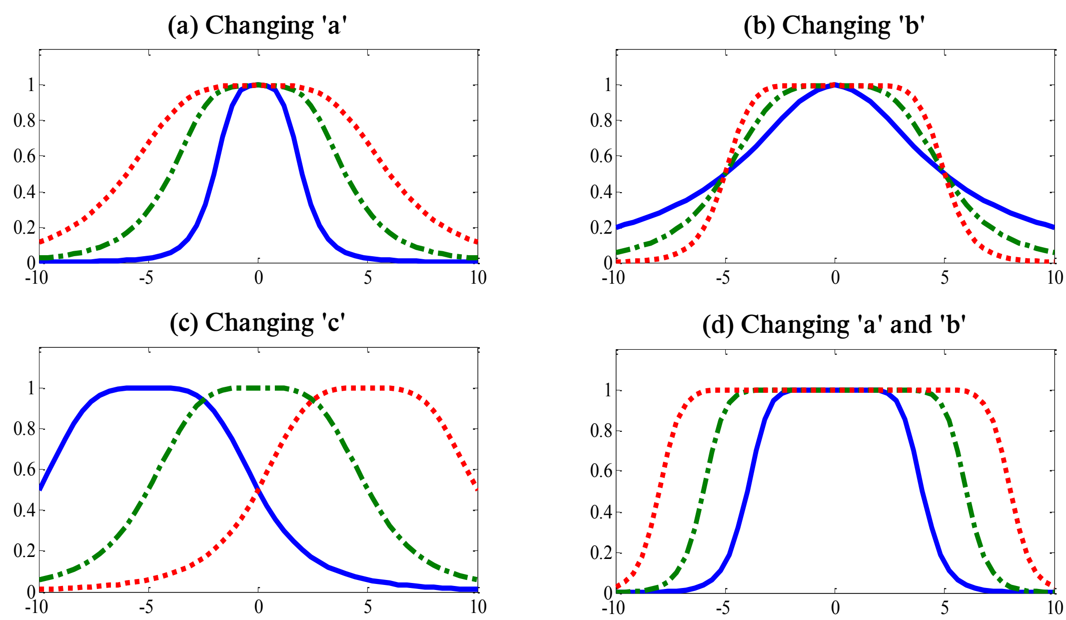


شکل ۳-۹ : تابع عضویت ناقوسی $(x, 20, 4, 50)$

شکل ۳-۱۰ اثر تغییر هرکدام از پارامترها در نحوه تغییرشکل تابع عضویت ناقوسی را نشان می‌دهد.

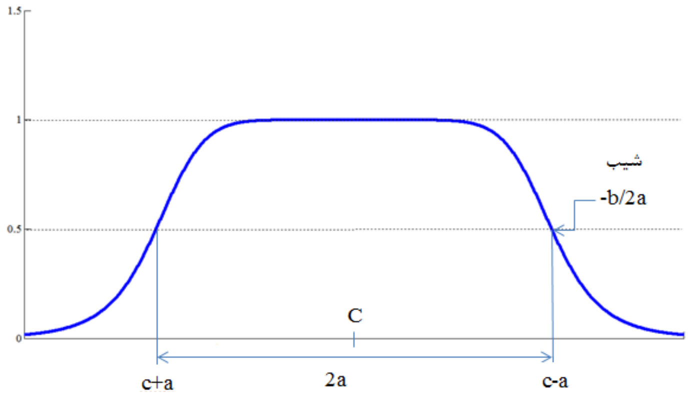
[1] Gaussian Membership Function

[2] Generalized Bell Membership Function



شکل ۳-۱۰ : اثر تغییر پارامترها بر روی تابع عضویت ناقوسی

در شکل ۳-۱۱ معنا و مفهوم هرکدام از پارامترها در تابع عضویت ناقوسی نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۱ : مفهوم هرکدام از پارامترها در تابع عضویت ناقوسی

۳-۴- مجموعه‌های فازی چند بُعدی

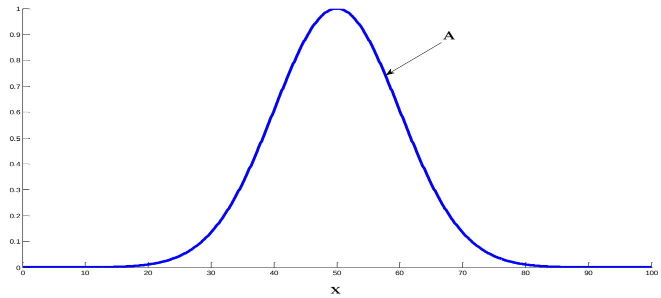
الف – فضای مرجع چند بُعدی

تاکنون راجع به فضای مرجع یک بُعدی x بحث کرده‌ایم، ولی فضای مرجع می‌تواند دوبُعدی باشد. برای نمونه فضای حاصل‌ضرب دو بعدی $X * Y$ که خود یک صفحه است، می‌تواند به عنوان فضای مرجع در نظر گرفته شود. در این‌صورت هر عضو مجموعه مرجع با (x, y) نمایش داده می‌شود.

به‌طورکلی فضای مرجع می‌تواند n بُعدی باشد. این فضای n بُعدی را با $X_1, X_2, \dots, X_n$ و اعضای آن را با $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمایش می‌دهیم. اکنون به اختصار مجموعه‌های فازی دو بُعدی و چند بُعدی را تعریف و با مجموعه‌های فازی یک بُعدی مقایسه می‌کنیم.

ب – نمایش مجموعه فازی یک بُعدی

مجموعه فازی یک بُعدی را پیشتر تعریف کردیم. دیدیم اگر تعداد اعضا محدود باشد، با $A = \sum \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ و اگر تعداد اعضا نامحدود باشد، با $A = \int \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ نشان داده می‌شود. نمایش مجموعه فازی یک بُعدی A در فضای دو بُعدی X و $\mu_A(x)$ در شکل ۳-۱۲ زیر نشان داده شده است.

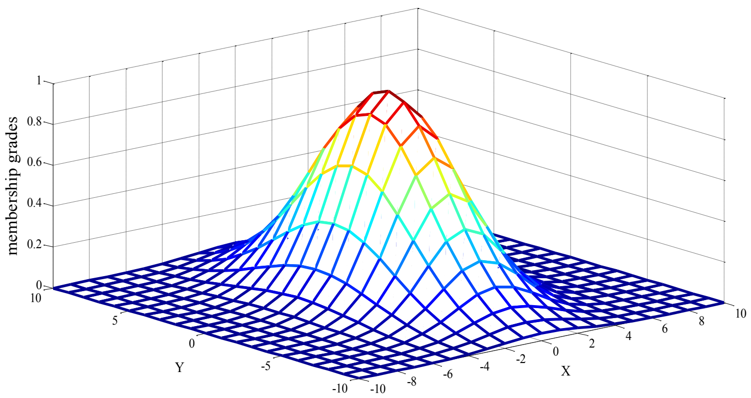


شکل ۳-۱۲ : مجموعه فازی یک بعدی A در فضای دوبعدی X و $\mu_A(x)$

ج – مجموعه فازی دو بُعدی

مجموعه فازی دو بُعدی R در فضای مرجع کارتزین $X \times Y$ یک مجموعه فازی است، که به هر عضو مجموعه مرجع مانند (x, y) یک مقدار عضویت مانند $\mu_R(\mathrm{x,y})$ نسبت می‌دهد. بدین‌ترتیب مجموعه مرجع در صفحه XY بوده و باید این مجموعه فازی را در فضای سه بُعدی $X, Y, \mu_R(\mathrm{x,y})$ نمایش داد. این مجموعه فازی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$R = \int_{X \times \mathrm{Y}} \frac{\mu_R(\mathrm{x,y})}{(\mathrm{x,y})}.$$



شکل ۳-۱۳ : مجموعه فازی دو بعدی A در فضای سه بُعدی X و Y و $\mu_{R(x,y)}$

د – مجموعه فازی n بُعدی

مجموعه فازی n بُعدی در فضای مرجع کارتزین $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ یک مجموعه فازی است، که به هر عضو مجموعه مرجع مانند $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک مقدار عضویت $\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نسبت می‌دهد. بدین‌ترتیب مجموعه مرجع در اینجا یک فضای n بُعدی است و برای نمایش مجموعه فازی R باید آن را در فضای $n+1$ بُعدی $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نمایش داد. این مجموعه فازی به صورت زیر بیان می‌شود،

$$R = \int_{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n} \frac{\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

بدیهی است، چون امکان نمایش تصویری با بیش از سه بُعد مقدور نیست، برای $n > 2$ نمی‌توان μ_R را نشان داد و رسم نمود.

۳–۵– عملیات روی مجموعه‌های فازی یک بُعدی

در مجموعه‌های فازی نیز مشابه مجموعه‌های کلاسیک، عملیات مختلف نظیر اجتماع، اشتراک، متمم، تساوی و غیره بین مجموعه‌های مختلف تعریف و ارائه می‌شود. در این بخش نخست روابط مربوط به مجموعه‌های فازی یک بُعدی را بیان می‌کنیم.

الف – تساوی در مجموعه فازی

دو مجموعه فازی A و B در فضای مرجع X **هم‌ارز** یا **مساوی**[۱] هستند، اگر و تنها اگر برای همه $x \in X$ داشته باشیم،

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

ب – زیر مجموعه فازی

مجموعه فازی A در فضای مرجع X **زیرمجموعه فازی**[۲] از مجموعه فازی B نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر به ازای همه مقادیر x داشته باشیم،

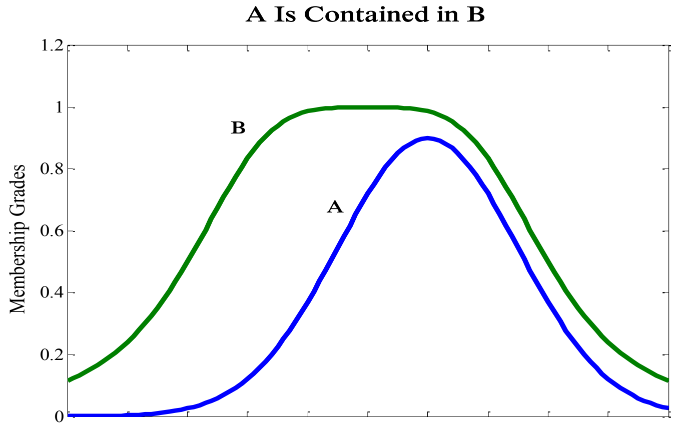
$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

به عبارت دیگر،

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

[۱] Equivalent

[۲] Fuzzy Containment or Subset

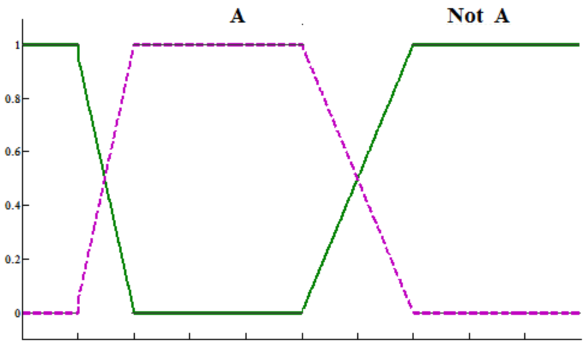


شکل ۳-۱۴ : مفهوم زیرمجموعه فازی

ج – متمم مجموعه فازی

متمم[۱] مجموعه فازی A را $\bar{A}$ (یا $-A$ یا Not A) می‌نامند و$\bar{A}$ مجموعه‌ای فازی است، که تابع عضویت آن در شکل ۳-۱۵ چنین تعریف می‌شود،

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$



شکل ۳-۱۵ : مفهوم متمم فازی

د – اجتماع مجموعه‌های فازی

اجتماع[۲] دو مجموعه فازی مانند A و B یک مجموعه فازی مانند C است که به صورت $C = A \cup B$ یا $C = A \text{ or } B$ نوشته می‌شود و تابع عضویت آن برحسب A و B چنین است،

$$\mu_C(x) = \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x).$$

نکته ۳-۱ . اجتماع دو مجموعه فازی A و B را ماکزیمم یا OR دو مجموعه فازی می‌نامیم.

[۱] Fuzzy Complement or Negation
[۲] Union or Disjunction

نکته ۳-۲ . اجتماع یا ماکزیمم، یکی از انواع OR است، انواع دیگری مانند حاصل‌جمع جبری، حاصل‌جمع محدود و ... را نیز بحث خواهیم کرد.

اجتماع چند مجموعه فازی یک بُعدی

اجتماع مجموعه‌های فازی $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ در فضای مرجع X با توابع عضویت $\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_{n-1}}(x), \mu_{A_n}(x)$، عبارت است از مجموعه فازی C در فضای مرجع X و داریم،

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

تابع عضویت C در x یعنی $\mu_C(x)$ عبارت است از،

$$\mu_C(x) = \max\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)\right) \;\; for \;\; x \in X.$$

نکته ۳-۳ . تعریف دیگری از اجتماع دو مجموعه فازی عبارت است از، کوچکترین مجموعه فازی که هر دو مجموعه فازی را شامل شود. به بیان دیگر، اگر D مجموعه‌ای فازی است که A و B زیرمجموعه‌های آن هستند، در این‌صورت $A \cup B$ زیرمجموعه D است.

ه – اشتراک مجموعه‌های فازی

اشتراک[1] دو مجموعه فازی A و B یک مجموعه فازی C است که به صورت $C = A \cap B$ یا $C =$ A and B نوشته می‌شود و تابع عضویت آن بر حسب A و B چنین است،

$$\mu_C(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x).$$

نکته ۳-۴ . اشتراک دو مجموعه فازی A و B را مینیمم یا and دو مجموعه فازی می‌نامیم.

نکته ۳-۵ . اشتراک یا مینیمم، یکی از انواع and است، انواع دیگری مانند حاصل‌ضرب، حاصل‌ضرب محدود و ... را نیز بحث خواهیم کرد.

نکته ۳-۶ . اشتراک دو مجموعه فازی، بزرگترین مجموعه فازی است که در هر دوی A و B وجود دارد.

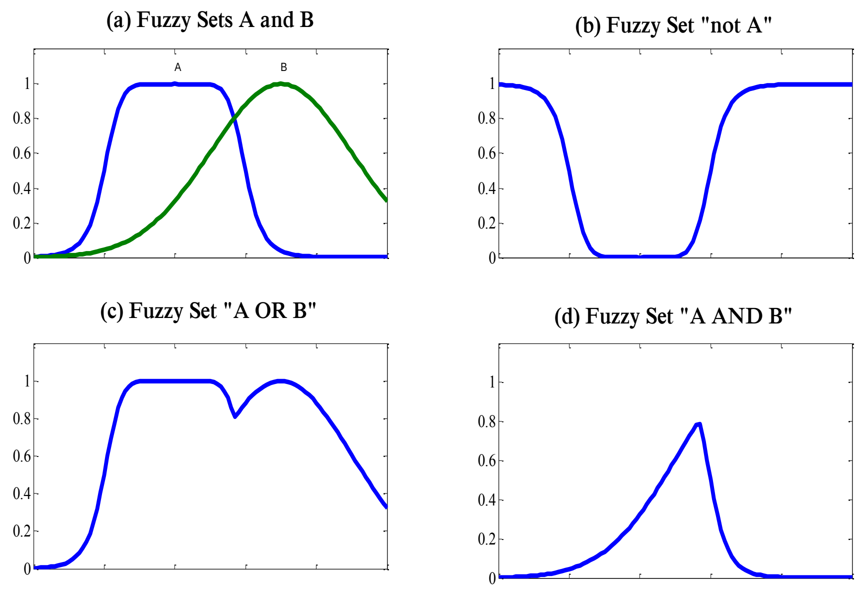
۳-۶- انواع دیگر متمم، اشتراک و اجتماع فازی

۳-۶-۱- متمم فازی

در بخش ۳-۵-ج- تعریف کلاسیک از متمم فازی[2] را دیدیم. حال به تعریف جامع‌تری از متمم مجموعه‌های فازی می‌پردازیم.

[1] Fuzzy Intersection or Conjunction

[2] Fuzzy Complement



شکل ۳-۱۶ : مفهوم الف) مجموعه‌های فازی ب) متمم فازی ج) اجتماع فازی د) اشتراک فازی

مجموعه فازی A را در نظر بگیرید که تابع عضویت آن با $\mu_A(x)$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید مقادیر عضویت A به ازای مقادیر مختلف x با $(a, b, \dots)$ نمایش داده شوند. برای نمونه،

$$\begin{cases}\mu_A(x_1) = a \\ \mu_A(x_2) = b\end{cases}.$$

متمم فازی A یعنی $\overline{A}$ تابع عضویت $\mu_{\bar{A}}(x)$ را دارد. برای متمم کلاسیک داریم،

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{A}}(x) = 0 \quad if \quad \mu_A(x) = 1 \\ \mu_{\bar{A}}(x) = 1 \quad if \quad \mu_A(x) = 0\end{aligned}$$

به‌علاوه شرایط مرزی در سایر نقاط هم مقدار تابع عضویت $\mu_{\bar{A}}(x)$ از رابطه $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ حاصل می‌شود. مثلاً اگر $\mu_A(x) = 0.3$ آنگاه $\mu_{\bar{A}}(x) = 0.7$. به‌طورکلی، اگر متمم A یا منفی[۱] A را با $\mathrm{N}(A)$ نشان دهیم، در متمم فازی کلاسیک داریم،

$$\mathrm{N}(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x) \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{N}(0) = 1 \\ \mathrm{N}(1) = 0 \\ \mathrm{N}(a) = 1 - a\end{cases}.$$

[۱] Negation

در شکل جامع‌تری از تابع متمم فازی، بجای رابطه $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ تعریف دیگری را جایگزین می‌کنیم. اگر N را یک **اپراتور متمم فازی** بنامیم، تعریف می‌شود،

یک اپراتور متمم فازی، تابعی پیوسته مانند N از [0,1] به [0,1] است ($N: [0,1] \to [0,1]$) که شرایط زیر در آن صدق می‌کنند،

۱. شرایط حدی یا مرزی،

$$\mathrm{N}(0) = 1, \qquad \mathrm{N}(1) = 0$$

۲. اگر $a \leq b$ آنگاه،

$$\mathrm{N}(a) \geq N(b).$$

شرط دوم را **شرط یکنواختی** نامند. a و b مقادیر عضویت مجموعه فازی A و $\mathrm{N}(a)$ و $\mathrm{N}(b)$ مقادیر عضویت مجموعه فازی متمم A هستند. شرط دوم تفاوتی است، که این متمم جدید با متمم کلاسیک دارد؛ و بیان‌کننده آن است که، افزایش مقدار عضویت یک مجموعه فازی به کاهش مقدار عضویت فازی متمم آن منجر می‌شود و برعکس.

بنابراین در اینجا، شرط $\mathrm{N}(a) = 1 - a$ تنها در شرایط مرزی صادق بوده و در دیگر نقاط بین ۰و ۱ تابع $\mathrm{N}(a)$ یک تابع پیوسته از a است که الزاماً $1 - a$ نیست. شرایط ۱ و ۲ بالا شرایط اصلی هستند. از این شرایط، شرط زیر نیز قابل محاسبه است،

$$\mathrm{N}\big(\mathrm{N}(a)\big) = a.$$

این رابطه بیان‌کننده آن است که، متممِ متممِ مجموعه فازی A، خود، متمم آن مجموعه فازی است. توجه داشته باشیم که در روابط ارائه شده برای این متمم فازی a همان تابع عضویت مربوط به مجموعه فازی است. مثال‌های زیر چند نمونه متمم فازی هستند، که شرایط ۱، ۲ و همچنین شرط ۳ در مورد آن‌ها صادق است.

الف – متمم سوگینو[1]

$$\mathrm{N}_s(a) = \frac{1 - a}{1 + sa}$$

که در آن s پارامتر بزرگتر از ۱– است. برای هر مقدار پارامتر s، یک اپراتور متمم به دست می‌آید. در رابطه$\mathrm{N}_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}$، $\mathrm{N}_s(a)$ تابع عضویت یک مجموعه فازی است، که متمم مجموعه فازی دیگر است،

[1] Sugeno’s Complement

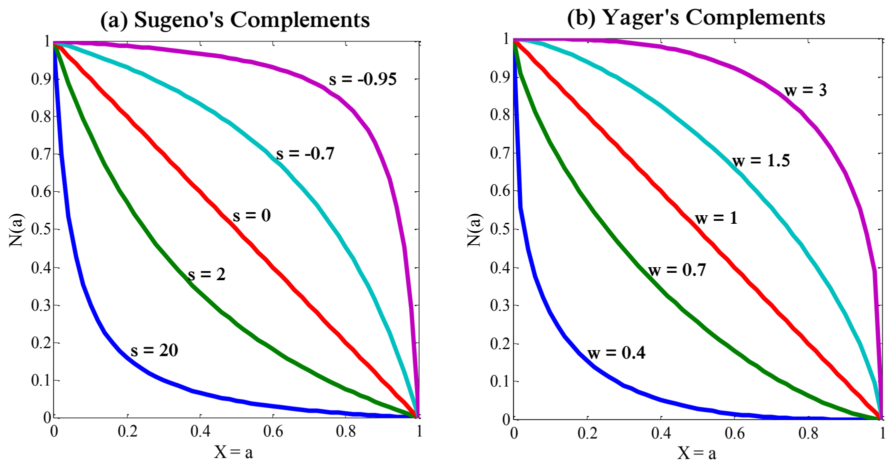
که تابع عضویت آن a است. بنابراین اگر مجموعه فازی A دارای تابع عضویت $\mu_A(x)$ باشد، تابع عضویت $\bar{A}$ (متمم A) عبارت است از:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \frac{1-\mu_A(x)}{1+s\mu_A(x)}.$$

برای $s = 0$ این متمم فازی، برابر متمم فازی بخش ۴۰؟؟ است،

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

در شکل ۳-۱۷ الف) متمم فازی سوگینو برای مقادیر مختلف s رسم شده است.



شکل ۳-۱۷ : الف) متمم سوگینو ب) متمم یاگر

ب – متمم یاگر[1]

$$\mathrm{N}_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$$

که در آن w پارامتری مثبت است.

توجه کنیم که بخاطر شرط سوم، هر دو متمم سوگینو و یاگر، نسبت به خط مستقیم ۴۵ درجه که نقطه $(0,0)$ را به $(1,1)$ وصل می‌کند، قرینه هستند.

در این دو مثال $\mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = a$ است. برای نمونه در سوگینو داریم،

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = \mathrm{N}\left(\frac{1-a}{1+sa}\right) = \frac{1-\left(\frac{1-a}{1+sa}\right)}{1+s\left(\frac{1-a}{1+sa}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = \frac{\frac{1+sa-1+a}{1+sa}}{\frac{1+sa+s-sa}{1+sa}} = \frac{a(s+1)}{1+s} = a$$

[1] Yager's Complement

همچنین برای متمم یاگر داریم،

$$\mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = \left[1 - \left[(1-a^w)^{\frac{1}{w}}\right]^w\right]^{\frac{1}{w}} = \left(1-(1-a^w)\right)^{\frac{1}{w}} = (a^w)^{\frac{1}{w}} = a.$$

به‌طورکلی برای اینکه $\mathrm{N}(a) = 1 - a$ باشد (متمم فازی نوع کلاسیک)، باید شرایط زیر برقرار باشد،

$$\mu_A(x_1) + \mu_{\bar{A}}(x_1) = \mu_A(x_2) + \mu_{\bar{A}}(x_2) = 1.$$

اگر این شرط همراه با شرایط ۱ و ۲ برقرار باشد، آنگاه $\mathrm{N}(a) = 1 - a$ می‌شود، که بطور آشکار شرط سوم را نیز دارا خواهد بود.

در متمم کلاسیک $\mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = a$ است، زیرا $\mathrm{N}(a) = 1 - a$ و $\mathrm{N}(\mathrm{N}(a)) = 1-(1-a) = a$.

نکته ۳-۷ . شرط $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ در مورد متمم‌های سوگینو و یاگر صادق نیست. در مورد آن‌ها داریم،

$$\frac{1-a}{1+sa} + a \neq 1$$
$$(1-a^w)^{\frac{1}{w}} + a \neq 1.$$

۳-۶-۲- اشتراک و اجتماع فازی در قالب اپراتورهای T-norm و S-norm

در بخش‌های ۳-۵-د و ۳-۵-هـ تعریف کلاسیک از اجتماع و اشتراک فازی[۱] را دیدیم. در این بخش تعریف جامع‌تری از اجتماع و اشتراک را ارائه و بیان می‌کنیم.

خواهیم دید که اجتماع و اشتراک فازی را می‌توان به عنوان اپراتورهایی در نظر گرفت، که خواص نُرم[۲] را دارند. اشتراک دو مجموعه فازی A و B را T-norm مثلثی یا نُرم مثلثی نامند، که خواص آن را در ادامه تعریف و بیان می‌کنیم. اجتماع دو مجموعه فازیA و B را S-norm یا T-conorm نامند. اشتراک دو مجموعه فازی A و B، و اجتماع آن‌ها توابعی هستند، که روابط ریاضی بین اجزا دو مجموعه A و B را بیان می‌کنند. چون مقادیر عضویت مجموعه‌های فازیA و B، بین صفر و یک قرار دارند، پس می‌توان گفت که T-norm و S-norm اپراتورهایی هستند که، به صورت زیر قابل بیان می‌باشند.

$$[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$
$$I \times I = I$$

که در آن $I = [0,1]$ یعنی مجموعه مقادیر بین صفر و یک، شامل صفر و یک هم می‌شود.

[۱] Fuzzy Intersection and Union

[۲] Norm

یادآوری : نُرم که با علامت ||.|| بیان می‌شود، تابعی با مقدار حقیقی از اجزا و المان‌های فضای خطی است. یک فضای خطی مجموعه‌ای است که در آن هر ترکیب خطی اجزا مجموعه، عضوی از مجموعه است؛ و می‌تواند ترکیبی از بردارها، سیگنال‌ها، سیستم‌ها یا هر مجموعه دیگری از اجزا و المان‌ها باشد. هر نُرم خواص زیر را دارد،

1. $\|x\|_P \geq 0$
2. $\|x\|_P = 0 \;\; if \;\; x = 0$
3. $\|\alpha x\|_P = |\alpha| \times \|x\|_P$
4. $\|x + y\|_P \leq \|x\|_P + \|y\|_P$

که در آن x و y دو عضو مجموعه فضای خطی و α اسکالر است.

الف – اپراتور T-norm یا نُرم مثلثی (اشتراک فازی)

اپراتور T-norm یا **نُرم مثلثی**[1] در بازه‌ی $I = [0,1]$ عبارت است از، نگاشتی از فضای $I \times I$ به فضای I که با "T" یا "*" یا "tn" نمایش داده می‌شود.

$$\mathrm{T}: I \times I \rightarrow I$$

تعریف کلی بالا به عنوان اشتراک دو مجموعه فازی A و B با توابع عضویت $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$،

$$\mu_{A \cap B}(x) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$$

است، مشروط بر اینکه چهار شرط زیر صادق باشد؛

اگر a, b, c مقادیر عضویت سه مجموعه فازی باشد، داشته باشیم،

1. $a \operatorname{tn} 1 = a$
2. $a \operatorname{tn} b = b \operatorname{tn} a$
3. $(a \operatorname{tn} b) \operatorname{tn} c = a \operatorname{tn} (b \operatorname{tn} c)$
4. $if \;\; a \leq b \Longrightarrow a \operatorname{tn} c \leq b \operatorname{tn} c$

این چهار شرط را به صورت زیر هم می‌توان نوشت :

۱. شرایط مرزی

$$\begin{cases} \mathrm{T}(0,0) = 0 \\ \mathrm{T}(a,1) = \mathrm{T}(1,a) = a \end{cases}$$

۲. شرط جابجایی

$$\mathrm{T}(a,b) = \mathrm{T}(b,a)$$

[1] Triangle Norm

۳. شرط شرکت‌پذیری[۱]

$$\mathrm{T}(\mathrm{T}(a,b),c)=\mathrm{T}\big(a,\mathrm{T}(b,c)\big)$$

۴. شرط یکنواختی

$$if\ \ a\leq b\Longrightarrow \mathrm{T}(a,c)\leq \mathrm{T}(b,c)$$

شرط اول نشان‌دهنده عمومیت یافتن اشتراک فازی از اشتراک صریح یا کلاسیک است. شرط دوم نشان می‌دهد که اپراتور T-norm به‌ترتیب ترکیب مجموعه‌های فازی بی‌اثر است و در آن تغییری ایجاد نمی‌کند. شرط سوم به ما اجازه می‌دهد، که اشتراک هر تعداد مجموعه فازی را با هر ترتیبی که مایل هستیم بگیریم، و ترتیب آن‌ها در نتیجه حاصل تغییری ایجاد نمی‌کند.

و بالاخره شرط چهارم نشان می‌دهد که، کاهش در مقدار عضویت باعث کاهش در اشتراک آن مجموعه فازی یا هر مجموعه فازی اختیاری می‌شود.

چند نوع اپراتور T-norm

از بین تعداد زیادی از اپراتورهای T-norm که تا به حال معرفی شده‌اند (اپراتورهایی که خواص ذکر شده در بالا را داشته باشند) چهار نوع از همه مشهورتر می‌باشند.

۱. مینیمم : $\mathrm{T}_{\min}(a,b)$
۲. حاصلضرب جبری[۲] : $\mathrm{T}_{\mathrm{ap}}(a,b)$
۳. حاصلضرب محدود[۳] : $\mathrm{T}_{\mathrm{bp}}(a,b)$
۴. حاصلضرب شدید[۴] : $\mathrm{T}_{\mathrm{dp}}(a,b)$

این چهار نوع اپراتور T-norm به صورت زیر تعریف می‌شوند،

1. $\mathrm{T}_{\min}(a,b)=min(a,b)=a\wedge b$
2. $\mathrm{T}_{\mathrm{ap}}(a,b)=ab$
3. $\mathrm{T}_{\mathrm{bp}}(a,b)=\max(0,a+b-1)=0\vee(a+b-1)$
4. $\mathrm{T}_{\mathrm{dp}}(a,b)=\begin{cases}a & if\quad b=1\\ b & if\quad a=1\\ 0 & if\quad a,b<1\end{cases}$

[۱] Associativity
[۲] Algebraic Product
[۳] Bounded Product
[۴] Drastic Product

توجه کنیم که a و b مقادیر عضویت مربوط به مجموعه‌های فازی A و B هستند. در واقع می‌توان به جای a و b، $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ را قرار داد، که توابع عضویت مربوط به مجموعه‌های فازی A و B هستند. بنابراین a و b بین صفر و یک قرار دارند.

در شکل ۳-۱۸ چند نوع T-norm برای هنگامی‌که $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ هر دو در یک مجموعه مرجع هستند، نشان داده شده است.

1. $\mathrm{T_{min}}\big(\mu_A(x),\mu_B(x)\big)=\min\big(\mu_A(x),\mu_B(x)\big)$
2. $\mathrm{T_{ap}}\big(\mu_A(x),\mu_B(x)\big)=\mu_A(x)\mu_B(x)$
3. $\mathrm{T_{bp}}\big(\mu_A(x),\mu_B(x)\big)=\max(0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1)$
4. $\mathrm{T_{dp}}\big(\mu_A(x),\mu_B(x)\big)=\begin{cases}\mu_A(x) & if \quad \mu_B(x)=1\\ \mu_B(x) & if \quad \mu_A(x)=1\\ \quad 0 & if \quad \mu_A(x),\mu_B(x)<1\end{cases}$

از طرفی رابطه زیر درباره این T-normها همواره برقرار است،

$$\mathrm{T_{dp}}(a,b)\le\mathrm{T_{bp}}(a,b)\le\mathrm{T_{ap}}(a,b)\le\mathrm{T_{min}}(a,b)$$

چند نوع اپراتور T-norm دیگر

علاوه بر چهار اپراتور T-norm که پیشتر بیان شد، در اینجا دو اپراتور T-norm دیگر نیز معرفی می‌کنیم.

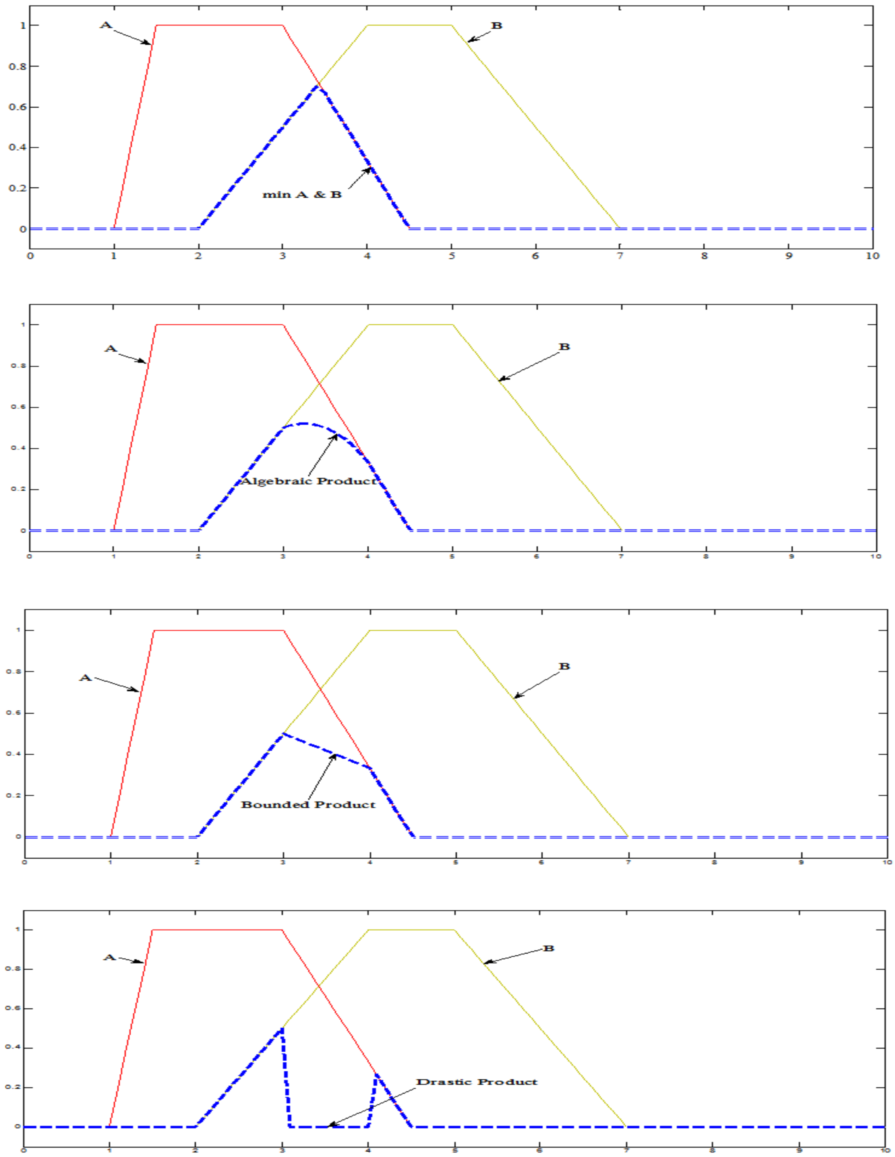
T-norm دامبی

اپراتور دامبی[۱] که در سال ۱۹۸۲ توسط دامبی معرفی شد، از رابطه زیر پیروی می‌کند،

$$Dombi: a \ \ \mathrm{tn} \ \ b=1-\min\left\{\left((1-a)^{\psi}+(1-b)^{\psi}\right)^{\frac{1}{\psi}},1\right\}$$

که در آن ψ پارامتری مثبت می‌باشد.

[۱] Dombi’s T-norm



شکل ۳–۱۸ : چهار نوع مشهور T – Norm

T-norm هاماچر

اپراتور هاماچر[1] که در سال ۱۹۷۸ توسط هاماچر معرفی شد، از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند،

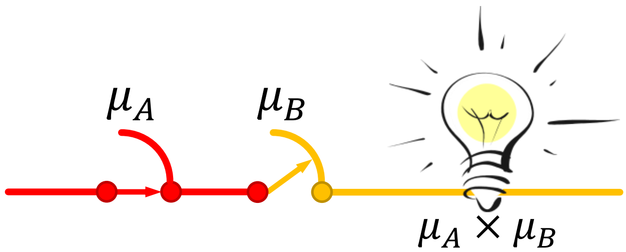
$$Hamacher: a\ \ tn\ \ b = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}$$

که در آن γ پارامتری بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد.

مثال ۳–۵ : اپراتور and یک T-norm است. به عنوان مثالی از اپراتور and که معنای حاصل‌ضرب دارد (ردیف دوم از نمونه T-normهای بیان شده)، به کلیدهای تنظیم نور چراغ که بین صفر و یک تغییر می‌کنند، توجه کنید.

[1] Hamacher T-norm

$$\mu = \mu_A \times \mu_B$$



شکل ۳-۱۹ : مدار سری؛ نمونه‌ای از اپراتور T-Norm

در اینجا μ با توجه به اپراتور and یک T-norm از نوع حاصل‌ضرب است. بنابراین در اینجا and به معنای min، یعنی اشتراک نیست؛ بلکه به معنای حاصل‌ضرب است، که خود یک T-norm است.

ب – اپراتور S-norm یا T-conorm (اجتماع فازی)

اپراتور S-norm در بازه‌ی $I = [0,1]$ عبارت است از، نگاشتی از فضای $I \times I$ به فضای I که با "S" یا "$\dotplus$" یا "sn" نمایش داده می‌شود.

$$\mathrm{S}: I \times I \to I$$

به‌طوری‌که اگر a, b, c مقادیر عضویت سه مجموعه فازی باشد، با اعمال اپراتور sn باید چهار شرط زیر صادق باشد. به‌عبارت‌دیگر اپراتور Sn اپراتوری است که اگر بر روی اعضای a, b, c اعمال شود، خواص زیر صادق باشد.

1. $a \text{ Sn } 0 = a$
2. $a \text{ Sn } b = b \text{ Sn } a$
3. $(a \text{ Sn } b) \text{ Sn } c = a \text{ Sn } (b \text{ Sn } c)$
4. $if \;\; a \leq b \Longrightarrow a \text{ Sn } c \leq b \text{ Sn } c$

این چهار شرط را می‌توان به صورت زیر نوشت،

۱. شرایط مرزی

$$\begin{cases} \mathrm{Sn}(1,1) = 1 \\ \mathrm{Sn}(0,a) = \mathrm{Sn}(a,0) = a \end{cases}$$

۲. شرط جابجایی

$$\mathrm{Sn}(a,b) = \mathrm{Sn}(b,a)$$

۳. شرط شرکت‌پذیری

$$\mathrm{Sn}(\mathrm{Sn}(a,b),c) = \mathrm{Sn}\big(a, \mathrm{Sn}(b,c)\big)$$

۴. شرط یکنواختی

$$if \;\; a \leq b \Longrightarrow \mathrm{Sn}(a,c) \leq \mathrm{Sn}(b,c)$$

چند نوع اپراتور S-norm

مهمترین انواع اپراتور S-norm عبارتند از :

۱. ماکزیمم: $\mathrm{Sn}_{\max}(a,b)$

۲. جمع جبری[۱] : $\mathrm{Sn}_{\mathrm{as}}(a,b)$

۳. جمع محدود[۲] : $\mathrm{Sn}_{\mathrm{bs}}(a,b)$

۴. جمع شدید[۳] : $\mathrm{Sn}_{\mathrm{ds}}(a,b)$

این چهار اپراتور S-norm چنین تعریف می‌شوند،

1. $\mathrm{Sn}_{\max}(a,b) = \max(a,b)$

2. $\mathrm{Sn}_{\mathrm{as}}(a,b) = a + b - ab$

3. $\mathrm{Sn}_{\mathrm{bs}}(a,b) = \min[1, a+b]$

4. $\mathrm{Sn}_{\mathrm{ds}}(a,b) = \begin{cases} a & if \quad b = 0 \\ b & if \quad a = 0 \\ 1 & if \quad a,b > 0 \end{cases}$

1. $\mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

2. $\mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$

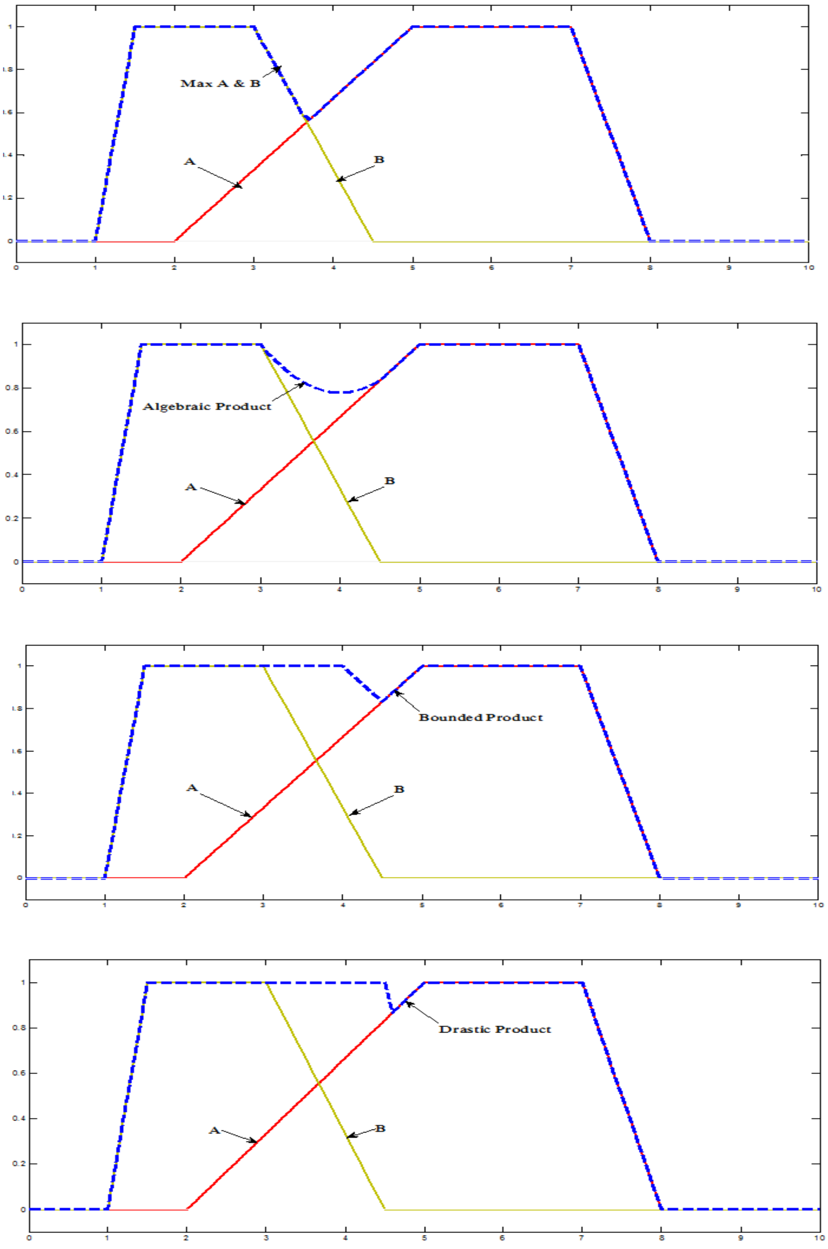
3. $\mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x) = \min[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$

4. $\mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & if \quad \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x) & if \quad \mu_A(x) = 0 \\ 1 & if \quad \mu_A(x), \mu_B(x) > 0 \end{cases}$

۱ Algebraic Sum

۲ Bounded Sum

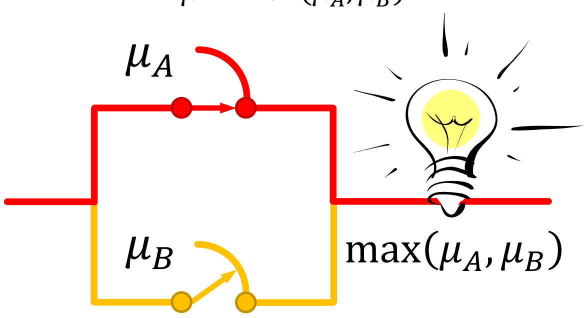
۳ Drastic Sum



شکل ۳-۲۰ : چهار نوع مشهور S – Norm

مثال ۳-۶ : اپراتور OR یک S-norm است.

$$\mu = \max(\mu_A, \mu_B)$$



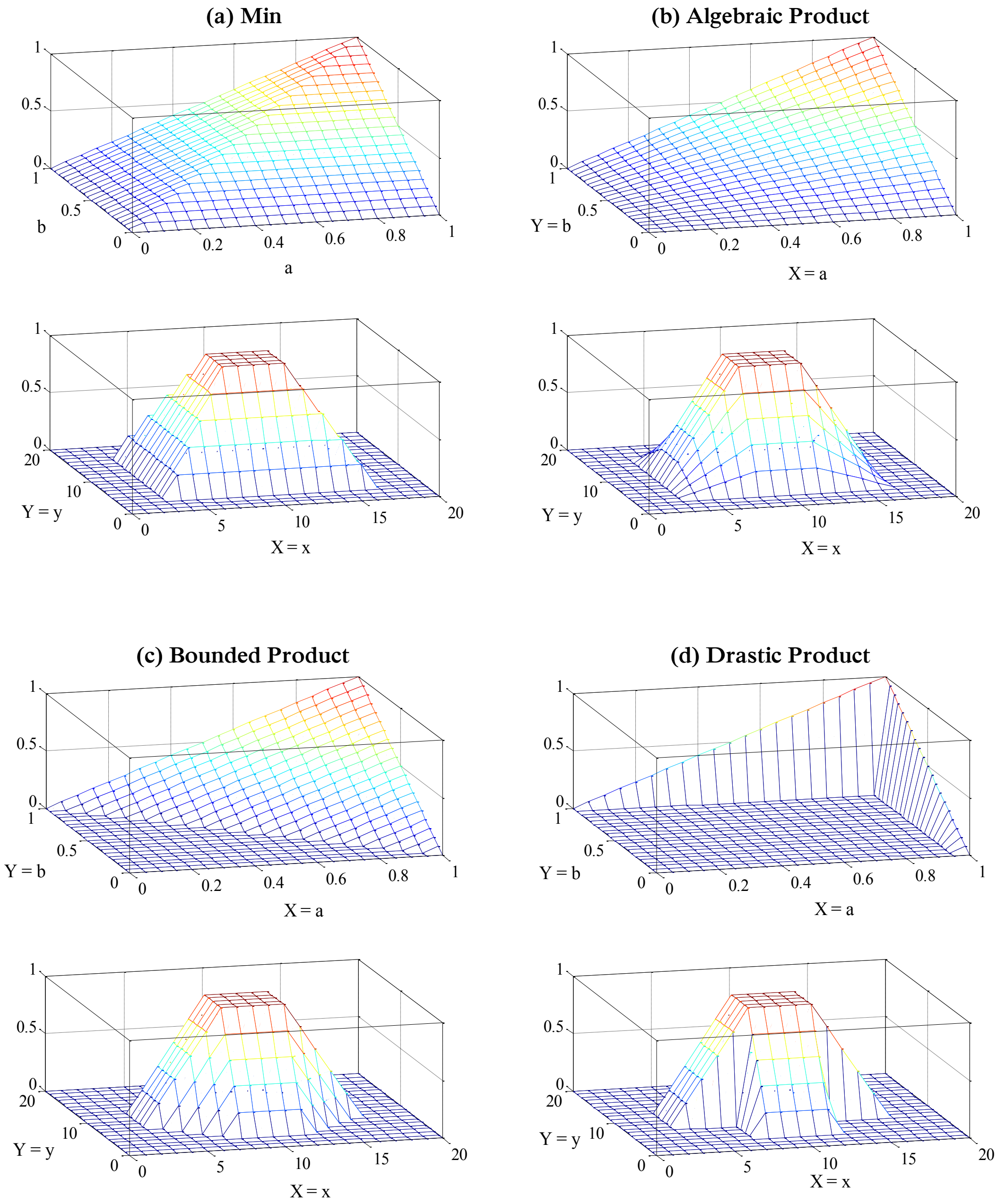
شکل ۳-۲۱ : مدار موازی مثالی از اپراتور S-Norm

ج – اعمال اپراتورهای T-norm و S-norm به مجموعه‌های فازی در فضاهای مرجع مختلف

A و B می‌توانند به جای اینکه در یک مجموعه مرجع تعریف شوند، متعلق به دو مجموعه مرجع باشند. اگر A و B در دو مجموعه مرجع X و Y باشند، در این‌صورت اشتراک دو مجموعه فازی A و B با اعمال اپراتور T-norm (در قالب هر کدام از انواع مختلف T-normها، از جمله چهار نوع ارائه شده) با درنظر گرفتن $\mu_A(x) = a$ و $\mu_B(y) = b$ به دست می‌آید.

در این حالت T-norm، a و b یک تابع عضویت دو بعدی می‌شود، که آن را می‌توان به عنوان حاصل‌ضرب کارتزین A و B تحت چهار نوع اپراتور مختلف T-norm در نظر گرفت.

شکل ۳-۲۲



شکل ۳-۲۲ چهار نوع اپراتور T-norm را با تابع عضویت دو بُعدی در فضای سه بُعدی نشان می‌دهد.

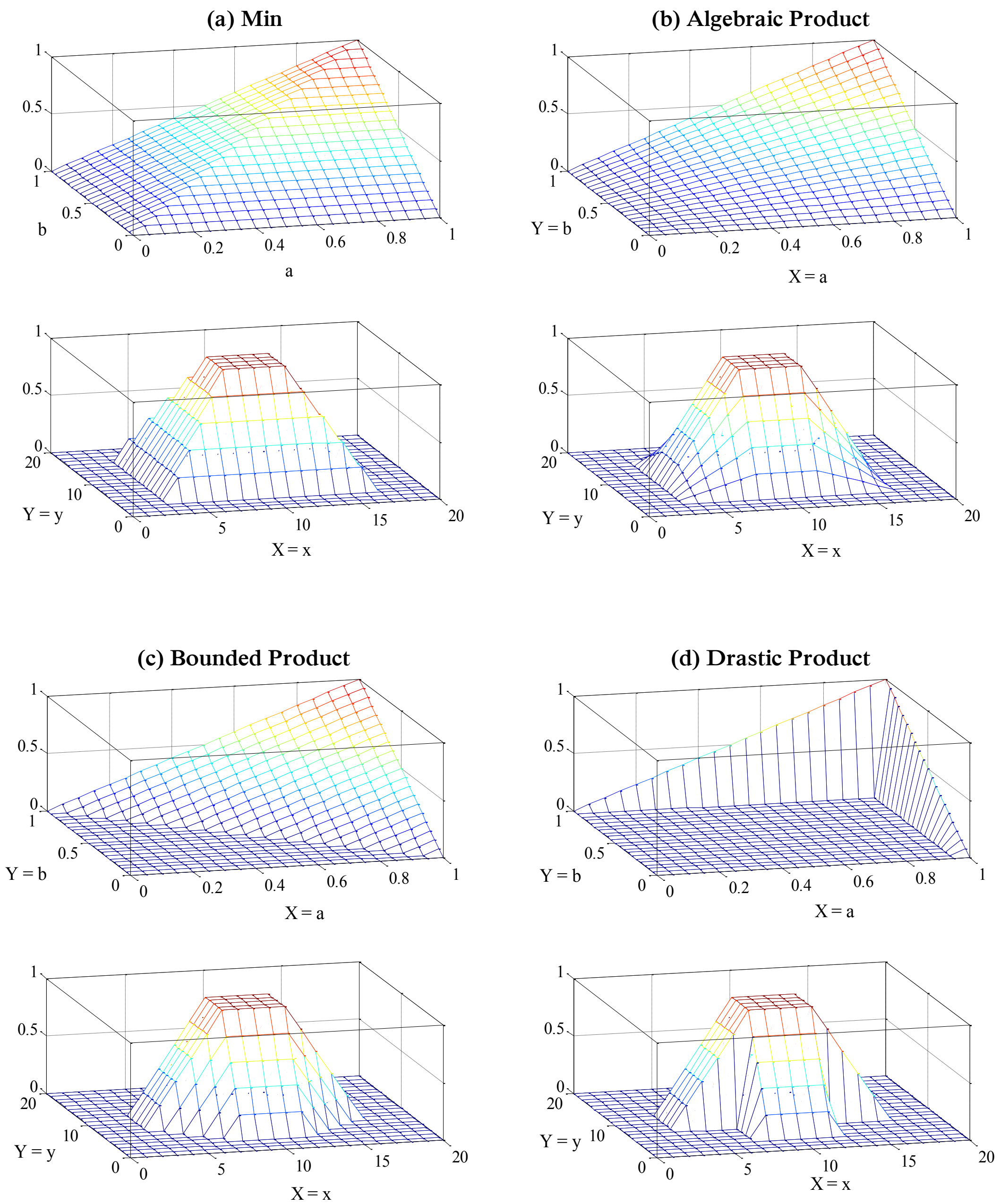
شکل ۳-۲۳ همان سطوح را هنگامی‌که،

$$\begin{cases} a = \mu_A(x) = trapezoid(x,3,8,12,17) \\ b = \mu_B(y) = trapezoid(x,3,8,12,17) \end{cases}$$

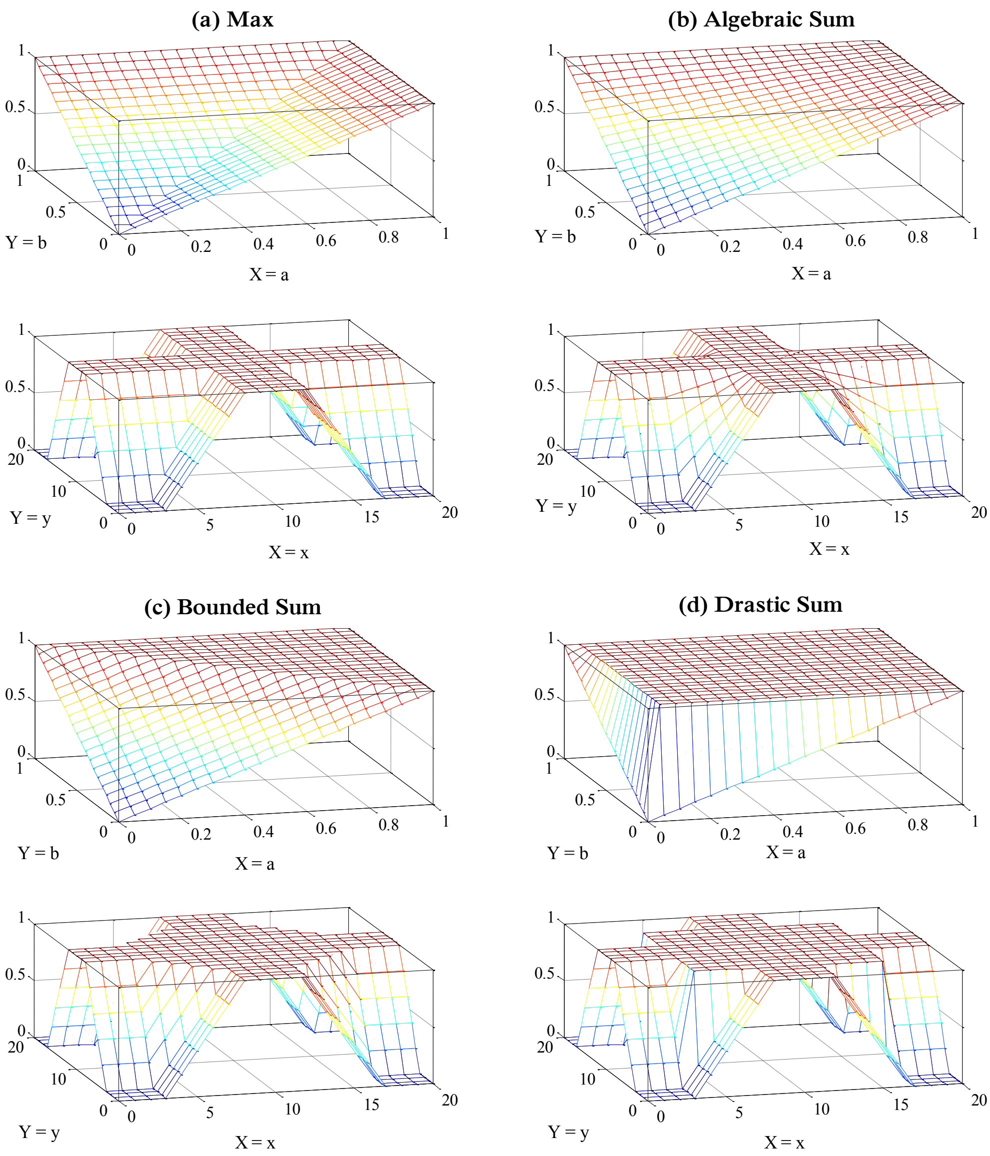
است، نشان می‌دهد. این توابع عضویت دو بُعدی را به عنوان حاصل‌ضرب کارتزین A و B به چهار نوع اپراتور T-norm در نظر گرفته‌ایم.

توجه کنیم که در T-normهای یک بُعدی و دو بُعدی همواره داریم،

$$T_{\mathrm{dp}}(a,b) \le T_{\mathrm{bp}}(a,b) \le T_{\mathrm{ap}}(a,b) \le T_{\min}(a,b)$$



شکل ۳-۲۲ : نمایش چهار نوع اپراتور T-norm با تابع عضویت دو بُعدی در فضای سه بُعدی



شکل ۳-۲۳ : نمایش چهار نوع اپراتور S-norm با تابع عضویت ذوزنقه‌ای در فضای سه بُعدی

فصل ۴–   روابط فازی و قوانین فازی

۴–۱– مقدمه

در این فصل با توسعه مفهوم متغیر و تابع از مجموعه‌های صریح به مجموعه‌های فازی، خواهیم دید که می‌توان چند موضوع فازی را با یکدیگر مربوط و متصل نمود. ارتباط بین موضوعات و مفاهیم فازی با یکدیگر می‌تواند در یک فضای مرجع یا در فضاهای مرجع متفاوت انجام شود. خواهیم دید که چنانچه دو یا چند موضوع در یک مجموعه مرجع باشند، رابطه بین مفاهیم فازی را می‌توان در قالب مفاهیم ریاضی مانند اجتماع و اشتراک و تساوی و متمم فازی آن‌ها بیان کرد. همچنین ارتباط بین چند مفهوم فازی در فضاهای مرجع متفاوت را می‌توان با مفاهیم ریاضی به صورت مجموعه‌های فازی دو یا چندبعدی در قالب روابط ترکیبی فازی مانند AND، OR و اگر-آنگاه فازی بیان کرد.

در ادامه با تحلیل و نحوه بیان ریاضی این مفاهیم، مجموعه‌ای از قوانین فازی که در طراحی سیستم‌های کنترل فازی و در مدل‌سازی فازی کاربرد دارند را بررسی می‌کنیم.

۴–۲– اصل توسعه

در سال ۱۹۶۵، زاده[1] ایده اصل توسعه[2] را بیان کرد ولی در سال ۱۹۷۵ این نام را برگزید.

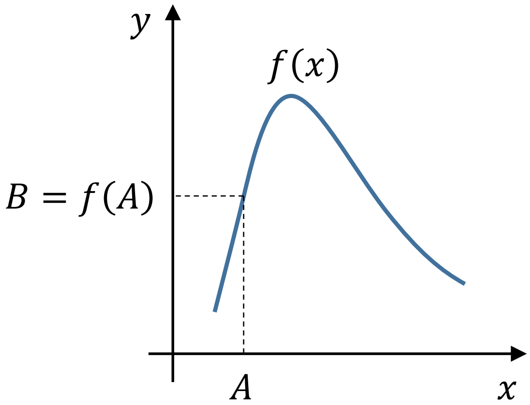
بنای **اصل توسعه** بر این امر استوار است که، یک تابع ریاضی به صورت $y = f(x)$ را می‌توان **نمایش ریاضی یک قاعده یا قانون** در استنتاج منطقی دانست. استنتاج منطقی شامل دو مقدمه صغری و کبری است. $y = f(x)$ معادل کبری قضیه است. $x = A$ معادل صغری قضیه است. نتیجه این استنتاج را می‌توان با رابطه ریاضی $y = f(A) = B$ نشان داد. تابع f نقش اوسط یا حد وسط را بین مقدمه اول و دوم بازی می‌کند. اگر A به جای عضوی از x یک زیر مجموعه فازی از فضای مرجع X باشد، تابع ریاضی$y = f(x)$ تعریف تابعی از یک متغیر است؛ هنگامیکه آن متغیر خود مجموعه‌ای فازی است، $y = f(A) = B$ یک مجموعه فازی در B را می‌دهد، که نتیجه این قانون یا قاعده (به عنوان مقدمه دوم یا کبری قضیه) و مشاهده $x = A$ (به عنوان مقدمه اول یا صغری قضیه) است. اصل توسعه می‌گوید، مجموعه فازی B در فضای مرجع Y شامل اجزا $y = f(x)$ است، که مقدار عضویت عناصر، همان مقدار عضویت عناصر نظیر در $x = A$ هستند. اصل توسعه می‌گوید اگر چند عضو از x دارای مقادیر عضویت متفاوت به یک عضو از Y منتسب شوند، مقدار عضویت عضو y در B برابر بزرگ‌ترین مقدار از xهای مربوطه است. پس اصل توسعه **زبان ریاضی و نمایش ریاضی** بیان استنتاج‌های منطقی، در فضای صریح و فازی هستند. اصل توسعه در

[1] Zadeh
[2] Extention Principle

واقع توسعه مفهوم متغیر و تابعی از آن متغیر از مجموعه‌های صریح[1] به مجموعه‌های فازی است. اصل توسعه خود یک قانون فازی است.

رابطه $y = f(x)$ را که در آن x، y و f همگی متعلق به مجموعه‌ای صریح هستند، در نظر بگیرید. برای نمونه داریم،

$$\begin{array}{c} y = f(x) \\ x = A \\ \hline y = f(A) = B \end{array}$$



شکل ۴-۱ : رابطه $y = f(x)$ را که در آن x، y و f همگی متعلق به مجموعه‌ای صریح هستند.

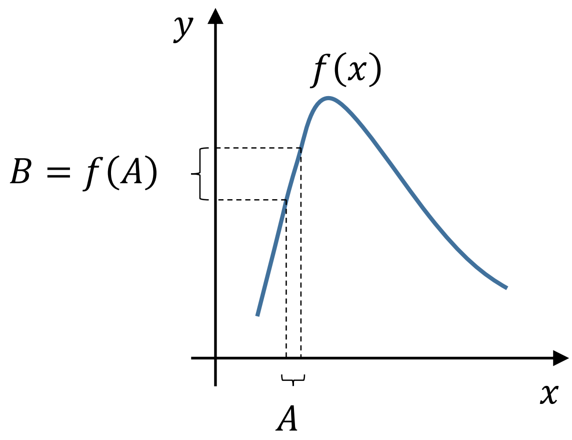
اگر $y = f(x)$ را به عنوان یک قانون یا قاعده و $x = A$ را به عنوان مشاهده در نظر بگیریم، می‌توان آنها را به ترتیب به عنوان گزاره‌های کبری و صغری یک استنتاج قیاسی در نظر گرفت، که از این دو مقدمه، نتیجه $y = f(A) = B$ حاصل می‌شود.

دیدگاه بالا، به معنای بیان استنتاج قیاسی در قالب معادلات و روابط ریاضی است. خواهیم دید که زاده با استفاده از این مفهوم و گسترش آن به مجموعه‌های فازی راهکارهای منطقی برای بیان استنتاج‌های فازی به صورت روابط ریاضی ارائه داده است.

حال فرض کنید f کماکان تابع صریح است؛ ولی A به جای آن که عضو صریح مجموعه مرجع X باشد، یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X باشد. می‌خواهیم مجموعه فازی حاصل از اعمال تابع f را بر روی مجموعه فازی A به دست آوریم. دراین‌صورت $y = f(A)$ مجموعه فازی جدیدی است در Y، که آن را B می‌نامیم.

$$\begin{array}{c} y = f(x) \\ x = A \\ \hline y = f(A) = B \end{array}$$

[1] Crisp



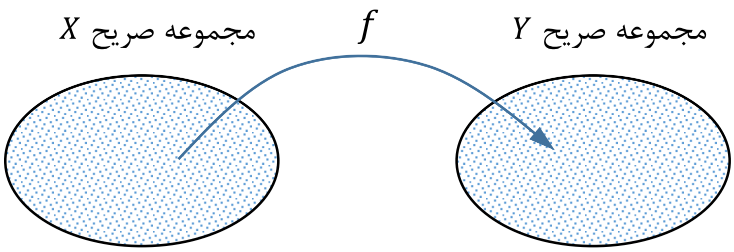
شکل ۴-۲ : رابطه $y = f(x)$ را که در آن f صریح و x فازی است.

بنابراین $B = f(A)$ مجموعه فازی حاصل در y است، که به صورت زیر تعریف می‌شود،

مجموعه فازی B مجموعه‌ای است، که مقدار عضویت هر عضو مانند y از رابطه $\mu_B(y) = \mu_A(x)$ به دست می‌آید.

بنابراین اصل توسعه تعریف تابعی از یک متغیر است، وقتی آن متغیر، خود، مجموعه‌ای فازی است. مجموعه فازی بدست آمده با تعریف بالا بیان و ارائه می‌شود. همین مفاهیم را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد.

فرض کنید $f: X \to Y$ تابعی از مجموعه صریح X به مجموعه صریح Y باشد. مجموعه فازی A در X داده شده است. مجموعه فازی B در Y را با اعمال تابع f به اجزاء مجموعه فازی A بدست می‌آوریم.



شکل ۴-۳ : نمای شماتیک تابع f از مجموعه صریح X به مجموعه صریح Y

اجزاء مجموعه فازی A به صورت $x_1, x_2, \ldots$ بوده، آنها را به‌طورکلی x می‌نامیم. اجزاء مجموعه فازی B به صورت $y_1, y_2, \ldots$ بوده، آنها را به‌طورکلی y می‌نامیم. رابطه بین x، y به صورت $y = f(x)$ تعریف شده است.

برحسب تعریف مجموعه فازی B در Y مجموعه‌ای با تابع عضویت به صورت زیر است،

$$\mu_B(y) = \mu_A(x) \tag{۱-۴}$$

مثال ۴-۱ :

$$A \quad (Fuzzy\ Set) = \left\{\frac{0.1}{-3} + \frac{0.2}{-6} + \frac{0.3}{-8}\right\}$$

فرض می‌کنیم رابطه بین x، y با تابع f زیر تعریف می‌شود،

$$y = |x|.$$

دراین‌صورت اجزاء مجموعه فازی B در y عبارتند از $y_1 = 3, y_2 = 6, y_3 = 8$ در نتیجه مجموعه فازی B با توجه به رابطه (۴-۱) به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$Y \text{ در } B \text{ مجموعه فازی} = \left\{\frac{0.1}{3} + \frac{0.2}{6} + \frac{0.3}{8}\right\}.$$

مثال ۴-۲ : مجموع صریح x عبارت است از $X = \{1,2,3, \ldots ,10\}$ مجموعه فازی کوچک یا $small$ در X چنین تعریف می‌شود،

$$small = \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5}\right\}$$

بقیه عناصر X مقدار عضویتشان صفر است که ذکر نشده‌اند.

فرض کنیم تابع f که X را به Y مرتبط می‌کند، چنین تعریف شود،

$$y = x^2$$

در این صورت مجموع Y دارای ده عضو است : ۱، ۴، ۹، ... و ۱۰۰.

مجموعه فازی در Y به‌این‌ترتیب $small^2$ است (تقریبی برای خیلی کوچک بودن).

$$small^2 = \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{9} + \frac{0.6}{16} + \frac{0.4}{25}\right\}$$

رابطه (۴-۱) صفحه پیش را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\mu_B(y) = \mu_A\big(f^{-1}(y)\big) \tag{۴-۲}$$

اگر تابع f یک به یک نباشد، یعنی چند نقطه متمایز در X با مقادیر عضویت متفاوت در A به یک نقطه واحد در Y نگاشته شوند، برای تعیین مقدار عضویت y در B یعنی $\mu_B(y)$ طبق تعریف بزرگ‌ترین مقدار از بین مقادیر نظیر مربوط به X انتخاب می‌شود.

$$\mu_B(y) \triangleq \max_{x = f^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{۴-۳}$$

رابطه (۴-۳) رابطه اصلی مربوط به اصل توسعه است. اصل توسعه اساس محاسبه روابط فازی در فضاهای چند بُعدی است که به آن خواهیم پرداخت.

مثال ۴-۳ : مجموعه مرجع X عبارت از

$$X = \{-10, -9 \dots, -1,0,1,2, \dots, 9,10\}$$

است و $y = f(x) = x^2$. بنابراین بُرد تابع f برابر است با،

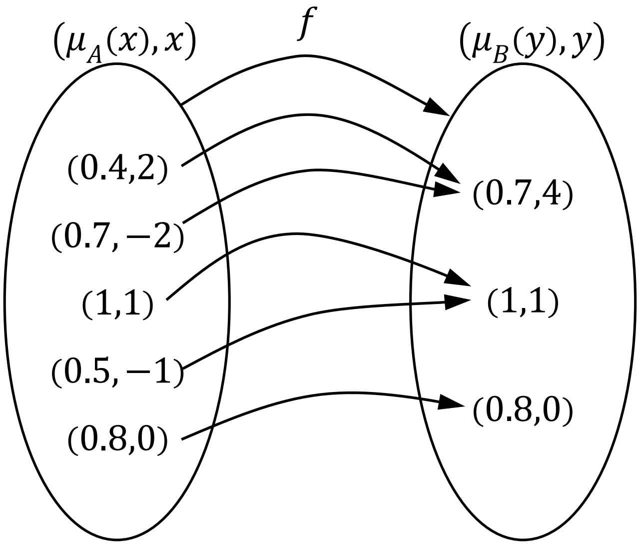
$$Y = \{0,1,4 \dots, 100\}.$$

فرض کنید مجموعه فازی A در X به صورت زیر تعریف شده باشد،

$$A = \left\{\frac{0.7}{-2} + \frac{0.5}{-1} + \frac{0.8}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.4}{2}\right\}.$$

نمای شماتیک در شکل ۴-۴ ارائه شده است.

برای نقطه 4 در Y که از نقاط -2 و 2 در X به دست آمده، مقدار $\mu_B(4)$ عبارت است از 0.7. زیرا مقدار عضویت -2 و 2 در X به ترتیب 04 و 0.7 است. بنابراین طبق رابطه (۴-۳) مقدار عضویت B در نقطه 4 برابر حداکثر 04 و 0.7 است.



شکل ۴-۴ : نمای شماتیک اعمال تابع f بر روی A

مثال ۴-۴ : اصل توسعه از مجموعه فازی با مجموعه مرجع گسسته

مجموع فازی A در X را برای پنج عضو x_1 تا x_5 به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$A = \left\{\frac{0.1}{-2} + \frac{0.4}{-1} + \frac{0.8}{0} + \frac{0.9}{1} + \frac{0.3}{2}\right\},$$

و تابع $y = f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است،

$$y = f(x) = x^2 - 3.$$

درنتیجه مقادیر نظیر x، $y = f(x)$ عبارت است از،

$$x:\ -2,-1,0,1,2$$
$$y=f(x):1,-2,-3,-2,1.$$

بنابراین مجموعه فازی B در Y برابر،

$$B=\left\{\frac{0.1}{1}+\frac{0.4}{-2}+\frac{0.8}{-3}+\frac{0.9}{-2}+\frac{0.3}{1}\right\}$$

خواهد بود. چون برای y های 1 و -2 دو مقدار مختلف $\mu_B(y)$ وجود دارد، پس براساس اصل توسعه، مقداری که بزرگ‌تر است، انتخاب می‌شود،

$$B=\left\{\frac{0.8}{-3}+\frac{(0.4\vee 0.9)}{-2}+\frac{(0.1\vee 0.3)}{1}\right\}=\left\{\frac{0.8}{-3}+\frac{0.9}{-2}+\frac{0.3}{1}\right\}.$$

مثال ۴-۵ : اصل توسعه با مجموعه مرجع پیوسته

$$\mu_A(x)=\mathrm{bell}(x,1.5,2,0.5)$$
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-1 & if\quad x\geq 0\\ x & if\quad x<0\end{cases}$$

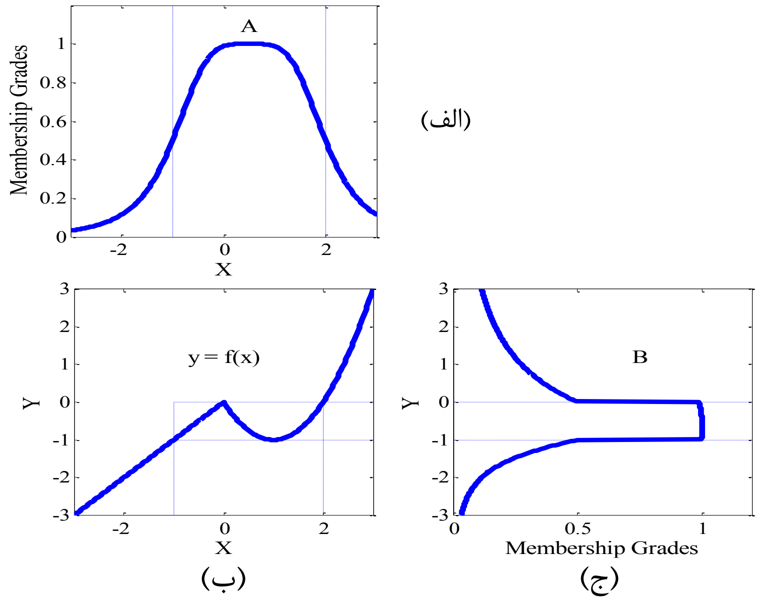
شکل ۴-۵ الف) رسم تابع عضویت مجموعه فازی A به صورت ناقوسی را نشان می‌دهد. شکل ۴-۵ ب) رسم تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد، که برای مقادیر منفی x به صورت $y=x$ و برای مقادیر مثبت x به صورت $(x-1)^2-1$ تعریف شده است.

بنابراین X مجموعه مرجع صریح و پیوسته و Y مجموع مرجع پیوسته مقطعی[1] است. مجموعه فازی A در X ناقوسی است و مجموعه فازی B در Y به صورت شکل ۴-۵ ج) رسم شده است.

۴-۳- عبارت‌های کلامی فازی، مفاهیم و نمایش ریاضی آنها

همانطورکه در منطق کلاسیک، رابطه[2] به عنوان نحوه تعامل و ارتباط بین دو یا چند مفهوم مطرح است، در منطق فازی نیز همین امر صادق است. آنچه به عنوان عملیات روی مجموعه‌های فازی یک‌بعدی گفته شد، عملاً نشان‌دهنده "نسبت" یا "رابطه" بین دو مفهوم در یک فضای مرجع X است. برای نمونه اگر مردم یک شهر را از یک‌سو به "کودکان" و "بزرگسالان" و از سوی دیگر به افراد "با شنوایی معمولی"، "کم‌شنوایان" و "ناشنوایان" تقسیم کنیم، می‌توان عبارتی مانند "کودکان کم‌شنوا" را به عنوان رابطه‌ای بین دو مفهوم در یک **فضای مرجع مشترک** بیان نمود.

[1] Peacewise Continuous
[2] Relation



شکل ۴-۵ : الف) تابع عضویت A در X ب) تابع $y = f(x)$ ج) تابع عضویت B در Y

عبارت "کودکان کم‌شنوا" **مفهومی کلامی** است. این مفهومی کلامی را می‌توان با مفهوم ریاضی مجموعه‌ی فازی یک بُعدی بیان نمود. این‌گونه مفاهیم ریاضی با نمایش‌های ریاضی به صورت "اشتراک دو مجموعه فازی" یا اجتماع آن‌ها یا متمم و تساوی و غیره بین دو مجموعه فازی، در یک فضای مرجع X بیان می‌شود. در نمونه بالا مجموعه فازی تحت عنوان "کودکان کم‌شنوا" در مجموعه مرجع شهر X تعریف می‌شود، و شامل افرادی است که **کودک و کم‌شنوا** باشند. این همان مفهوم اشتراک بین دو مجموعه فازی است، که در فضای یک بُعدی X مطرح شده است.

جدول ۴-۱ خلاصه این موارد را برای فضای یک بُعدی نشان می‌دهد.

جدول ۴-۱ . مفاهیم کلامی، مفاهیم ریاضی و نمایش ریاضی آنها برای فضای مرجع یک بُعدی

مفهوم کلامی	مفهوم ریاضی	نمایش ریاضی
بیان و تعریف "رابطه" یا "نسبت" بین دو یا چند موضوع در یک فضای مرجع X	مجموعه‌های فازی یک بُعدی مانند اجتماع یا اشتراک دو مجموعه فازی تساوی دو مجموعه یا چند مجموعه فازی	$C = A \cup B$ $C = A \cap B$ $A \subseteq B$ $B \subseteq A$ $A, B \subset X$

مشابه آنچه برای فضاهای یک بُعدی بیان شد، مفاهیم مربوط به ارتباط، رابطه و نسبت بین موضوعات مختلف در فضاهای بیش از یک بُعد را نیز می‌توان در منطق فازی بیان داشت.

همان‌طورکه در منطق کلاسیک، "رابطه" به عنوان عامل ارتباط دو یا چند مفهوم مطرح است، در منطق فازی نیز همین امر صادق است. یعنی رابطه بین دو یا چند موضوع در فضاهای مختلف را می‌توان با مفاهیم

ریاضی فازی بیان کرد. این مفاهیم ریاضی فازی به صورت مجموعه‌های فازی دو یا چند بُعدی بیان می‌شوند. نمایش ریاضی آنها نیز به صورت معادلات ؟؟ و ؟؟ بیان می‌شوند.

در ریاضیات فازی، روابط فازی بین دو یا چند مفهوم را قوانین فازی نیز می‌نامند. با توجه به اینکه انواع روابط منطقی را می‌توان بین دو یا چند موضوع بیان کرد، پس نمایش ریاضی آن‌ها نیز متنوع و مختلف خواهد بود. یک قانون فازی مانند «اگر X متعلق به فازی A است، آنگاه Y متعلق به مجموعه فازی B است.» را می‌توان با یک رابطه فازی دو بعدی R به صورت $R : A \to B$ نمایش داد، که نمایش ریاضی آن به صورت زیر است.

$$R : A \to B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}. \qquad (۴-۴)$$

در این رابطه $\mu_R(x,y)$ یک مجموعه فازی دو بُعدی در فضای کارتزین $X \times Y$ است، که ارتباط بین توابع عضویت $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$ را تعیین می‌کند. $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$ به ترتیب توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B هستند، که در فضاهای مرجع X و Y تعریف شده‌اند. جدول ۴-۲ مفاهیم کلامی، مفاهیم ریاضی و نمایش ریاضی آنها را در فضاهای مرجع دو یا چند بُعدی نشان می‌دهد.

جدول ۴-۲ . مفاهیم کلامی، مفاهیم ریاضی و نمایش ریاضی ارتباط بین دو یا چند موضوع

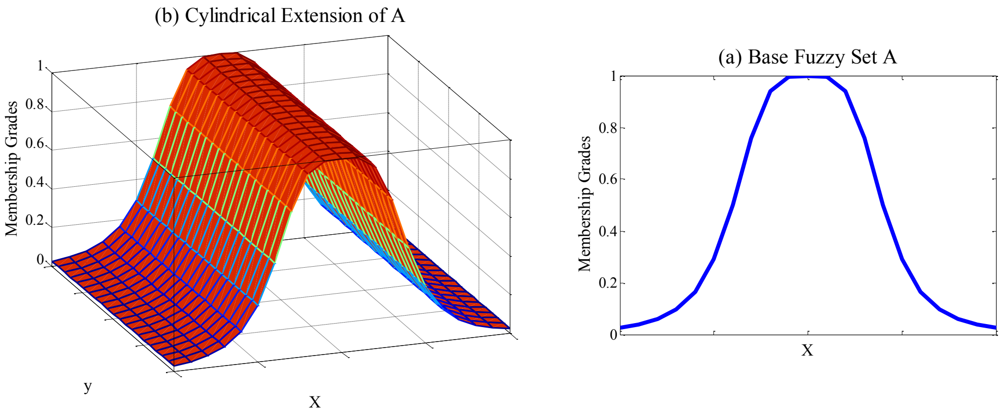
مفهوم کلامی	مفهوم ریاضی	نمایش ریاضی
بیان "ارتباط"، "رابطه" یا "نسبت" بین دو یا چند موضوع در دو فضای متفاوت (مثلاً فضای مرجع X و Y) یا چند فضای متفاوت (مثلاً فضای مرجع X_1 تا X_n) یا به عبارتی بیان روابط ترکیبی مختلف وقتی این موضوعات با عبارت‌ها و رابط‌هایی مانند AND و OR و یا مفاهیم استدلالی مانند اگر-آنگاه با هم مرتبط می‌شوند.	مجموعه‌های فازی دو بُعدی و یا مجموعه‌های فازی چند بُعدی در قالب روابط ترکیبی فازی مانند AND و OR و یا قوانین اگر-آنگاه فازی	$R = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}$ $R = \int_{X_1\times\ldots\times X_n} \frac{\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$

۴-۴- توسعه سیلندری و تصاویر مجموعه فازی

الف – توسعه سیلندری از توابع فازی یک بُعدی

اگر A مجموعه فازی یک بعدی در X باشد، طبق تعریف، توسعه سیلندری آن در $X \times Y$ یک مجموعه فازی دو بعدی است، که با $C(A)$ نمایش داده می‌شود. مفهوم این ایده در شکل ۴-۶ ارائه شده است.

$$C(A) = \int_{X\times Y} \frac{\mu_A(x)}{(x,y)}$$



(ب) (الف)

شکل ۴-۶ : الف) مجموعه فازی A در X ب) توسعه سیلندری A در $X \times Y$

۴-۴-۱- تصویر مجموعه فازی

فرض می‌کنیم R مجموعه فازی دو بعدی در $X \times Y$ باشد. دراین‌صورت تصویر مجموعه فازی[1] R روی X و Y چنین تعریف می‌شود،

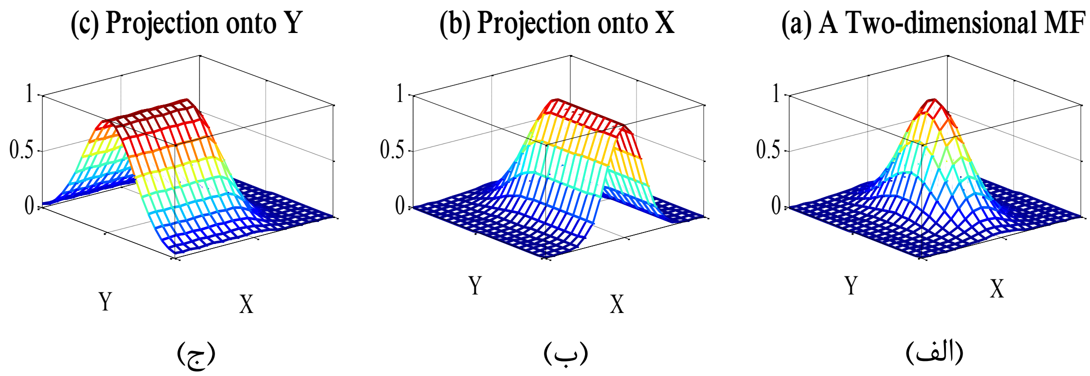
$$R_x = \int \frac{\max_y \mu_R(x,y)}{y} \qquad (۵-۴)$$

$$R_y = \int \frac{\max_x \mu_R(x,y)}{x} \qquad (۶-۴)$$

شکل ۴-۷ الف) نشان‌دهنده تابع عضویت مجموعه فازی دو بُعدی R است. شکل‌های (ب) و (ج) به‌ترتیب نشان‌دهنده تصویر مجموعه فازی دو بُعدی R و X, Y هستند.

---

[1] Projections of Fuzzy Sets



شکل ۴-۷ : الف) رابطه دو بعدی R ب) تصویر R روی X ج) تصویر R روی Y

۴-۵- توابع عضویت ترکیبی و غیرترکیبی

به‌طورکلی توابع عضویت دو بُعدی را می‌توان به دو گروه ترکیبی و غیر ترکیبی[1] تقسیم کرد. اگر تابع عضویت دو بُعدی را بتوان به وسیله رابطه تحلیلی از دو تابع عضویت یک بُعدی بدست آورد، آن را ترکیبی و در غیر این‌صورت، غیر ترکیبی نامند.

مثال ۴-۶ : توابع عضویت ترکیبی وغیر ترکیبی

مجموعه فازی R را چنین تعریف می‌کنیم،

$$A = \{(x,y) \text{ نزدیک } (3,4) \text{ است.}\}.$$

اگر تابع عضویت R را نیز چنین تعریف کنیم،

$$\mu_R(x,y) = e^{\left[-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2-(y-4)^2\right]}.$$

دراین‌صورت این تابع عضویت دو بُعدی ترکیبی است. زیرا می‌توان آن را به دو تابع عضویت یک بُعدی زیر جدا کرد،

$$\mu_R(x,y) = e^{-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} e^{-(y-4)^2} = \text{Gaussian }(x,3,2)\,.\ \text{Gaussian }(y,4,1).$$

توجه کنیم که در این حالت، مجموعه فازی R را می‌توان با **دو عبارت** که به وسیله رابط **AND** به هم مربوط شده‌اند، بیان کرد،

$$X \text{ is } near\ 3 \textbf{ AND } Y \text{ is } near\ 4.$$

[1] Composite and non-Composite

"X نزدیک 3 و Y نزدیک 4 است."

دراین‌صورت دو عبارت به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\mu_3(x) = \text{Gaussian }(x, 3,2)$$
$$\mu_4(y) = \text{Gaussian }(y, 4,1).$$

حاصل‌ضرب این دو تابع عضویت برای تفسیر انجام عمل AND بکار رفته است.

از سوی دیگر، اگر برای نشان دادن "مجموعه فازی (x, y) نزدیک (3,4) است" تابع عضویت دو بُعدی زیر را به کار ببریم، این تابع عضویت غیرترکیبی است.

$$\mu(x, y) = \frac{1}{1 + |x - 3|\ |y - 4|^{2.5}}$$

معمولاً یک تابع عضویت دو بُعدی ترکیبی نتیجه ارتباط دو تابع عضویت یک بُعدی است، که با AND یا OR به هم وصل شده‌اند. در این شرایط، تابع عضویت دو بُعدی را تجمع دو تابع عضویت یک بُعدی با اپراتورهای AND یا OR نامند. پیشتر دیدیم که عملکرد AND و OR روی مجموعه‌های فازی به صورت min و max هم ارائه شده است. در اینجا، تأثیر این اپراتورهای min و max را در به وجود آوردن مجموعه‌های فازی دو بعدی با یک مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۴-۷ : توابع عضویت ترکیبی دو بعدی براساس اپراتورهای min و max

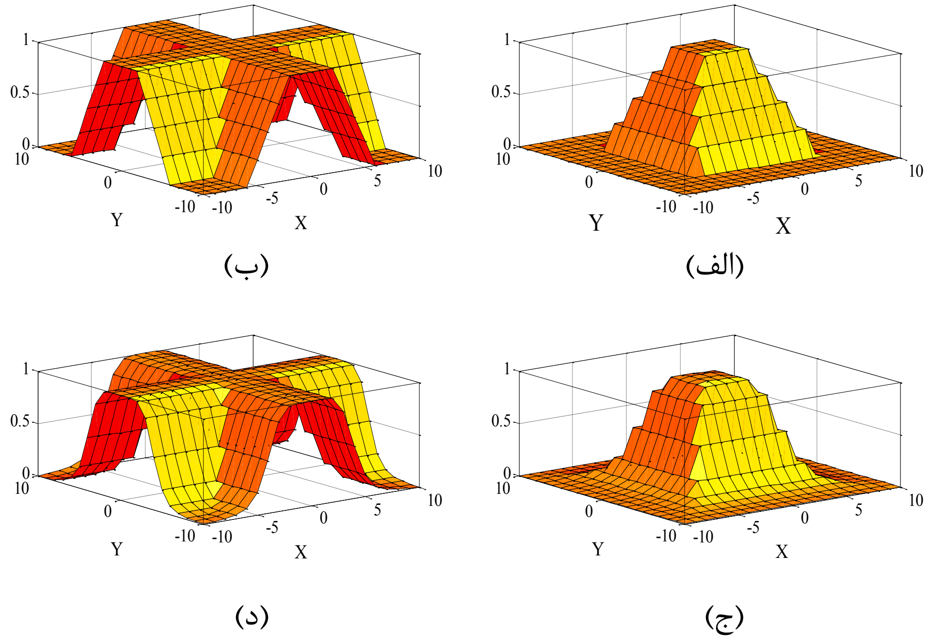
اگر $(x, -6, -2,2,6)$ ذوزنقه $= \mu(x)$، $(y, -6, -2,2,6)$ ذوزنقه $= \mu(y)$ باشد، با بکار بردن اپراتورهای min و max توابع عضویت دو بعدی در $X \times Y$ به صورت شکل ۴-۸ الف و ب) ایجاد می‌شوند. شکل ۴-۸ ج و د) نیز توابع عضویت دو بعدی را برای $\mu(x) = \text{bell}(x, 4,3,0)$ و $\mu(y) = \text{bell}(y, 4,3,0)$ نشان می‌دهد.

وقتی اپراتور min روی تجمع توابع عضویت یک بُعدی به کار می‌رود، تابع عضویت دو بُعدی نتیجه را می‌توان به یکی از دو روش زیر بدست آورد :

۱. با اعمال تعریف اشتراک دو مجموعه فازی به توسعه‌های سیلندری هرکدام از مجموعه‌های فازی یک بُعدی.
۲. با اعمال ضرب کارتزین[1] در مجموعه فازی یک بُعدی.

برای اپراتور max نیز مشابه همین بحث را می‌توان انجام داد.

[1] Cartesian Product



شکل ۴-۸ : الف) مینیمم توابع عضویت ذوزنقه‌ای   ب) ماکزیمم توابع عضویت ذوزنقه‌ای

ج) مینیمم توابع عضویت ناقوسی   د) ماکزیمم توابع عضویت ناقوسی

۴-۶- رابطه فازی

در فصل سوم مجموعه‌های فازی چند بُعدی و عملیات روی مجموعه‌های فازی یک بُعدی معرفی و بیان شده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم نشان دهیم که روابط فازی ارتباط بین دو یا چند متغیر فازی را در فضاهای مرجع مختلف نشان می‌دهد که نمایش آنها به وسیله مجموعه‌های فازی چند بُعدی میسر است.

رابطه فازی بیان ریاضی نحوه ارتباط و نسبت بین دو یا چند مجموعه فازی است. فرض کنید دو مجموعه فازی A و B در فضای یک بُعدی با اعضا به ترتیب x و y داریم و می‌خواهیم اعضای x و y را با مفاهیم مختلف به هم ربط دهیم. مثلاً می‌خواهیم مفاهیم زیر را به عنوان رابطه بین x و y بیان کنیم،

x و y

x یا y

x نزدیک y است.

x و y شبیه هم هستند.

اگر x کوچک باشد، آنگاه y بزرگ است.

هر کدام از مثال‌های بالا، رابطه‌ای را بین دو مجموعه فازی یک بُعدی A و B بیان می‌کند. می‌خواهیم نحوه بیان ریاضی هر کدام از موارد بالا را در قالب مجموعه‌های فازی ارائه دهیم. برحسب تعریف، هر کدام

از مفاهیم بالا، که رابطه بین اعضا x و y از دو مجموعه فازی یک بُعدی A و B هستند، با یک مجموعه فازی دو بُعدی (باینری) مانند R بیان می‌شوند.

تعریف رابطه فازی باینری یا دو بعدی

اگر X,Y دو مجموعه مرجع باشند، **رابطه فازی باینری** نشان‌دهنده رابطه و نسبتی بین اعضا x از مجموعه فازی A و اعضا y از مجموعه فازی B است.

اگر یک مجموعه فازی A با تابع عضویت $\mu_A(x)$ در فضای مرجع X با تابع عضویت $\mu_A(x)$ و یک مجموعه فازی B در فضای مرجع Y با تابع عضویت $\mu_B(y)$ را در نظر بگیریم، در این صورت **مجموعه فازی دو بُعدی R** در فضای مرجع حاصل‌ضرب کارتزین $X \times Y$ با تابع عضویت دو بُعدی $\mu_R(x,y)$ رابطه‌ای را بین x و y بیان می‌کند. می‌توان چنین در نظر گرفت که $\mu_R(x,y)$ به گونه‌ای است، که تصویر آن در فضاهای X,Y به‌ترتیب مجموعه های فازی یک بُعدی $\mu_B(y)$ و $\mu_A(x)$ است.

نحوه نمایش رابطه فازی باینری به وسیله یک مجموعه فازی دو بُعدی انجام می‌شود. یعنی این رابطه، خود یک مجموعه فازی دو بُعدی است، که با R نمایش داده می‌شود،

$$R = \int_{x \times y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)}.$$

که در آن $\mu_R(x,y)$ تابع عضویت دو بُعدی (x,y) ها است. رابطه فازی R بیان‌کننده رابطه بین متغیرهای x,y می‌باشد؛ مانند « y بزرگ‌تر از x است».

نکته مهم آن که، اگر مجموعه‌های فازی A و B دارای اعضا محدود باشند، در این صورت چون رابطه فازی R ارتباط بین این عناصر را نشان می‌دهد، به صورت یک ماتریس نشان داده می‌شود.

مثال ۴-۸ : فرض کنیم $X = Y = R^+$ (محور حقیقی و مثبت) باشد و رابطه فازی R بین x و y به صورت زیر تعریف شود،

$$R = y \text{ is much greater than } x$$

$$R = \{y \text{ به مراتب از } x \text{ بزرگ‌تر است.}\}.$$

فرض کنید مجموعه فازی دو بُعدی R با تابع عضویت دو بُعدی $\mu_R(x,y)$ به صورت زیر بیان شده باشد،

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{x+y+2} & x < y \\ 0 & x \geq y \end{cases}$$

اگر $x \to 0$ و $y \to \infty$ میل کند، $\mu_R(x,y) = 1$ می‌شود (حالت $y \gg x$) و هرچه x به سمت y میل کند، مقدار عضویت کمتر شده، در $x = y$ مقدار عضویت مساوی صفر می‌گردد، $\mu_R(x,y) = 0$. مجموعه

فازی دو بُعدی R را در این مثال می‌توان با یک **ماتریس رابطه‌ای**[1] نشان داد. به‌طورکلی اگر X دارای n عضو و Y دارای m عضو به صورت زیر باشد،

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

در این صورت ماتریس $R_{n\times m}$ رابطه میان اعضای X و Y را نشان می‌دهد. به این ترتیب که هر عضو ماتریس R، عبارت است از $\mu_R(x_i, y_j)$. به عبارت دیگر،

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$X_{n\times 1} = R_{n\times m}\, Y_{m\times 1}$$

باید توجه داشت که این ضرب، ضرب معمولی ماتریسی نیست؛ بلکه هر عضو R همان $\mu_R(x_i, y_j)$ است. مثلاً اگر $X = \{3,4,5\}$ و $Y = \{3,4,5,6,7\}$ باشد، R یک ماتریس 3×5 به صورت زیر می‌شود.

$$X_{3\times 1} = R_{3\times 5}\, Y_{5\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = R_{3\times 5} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = R_{3\times 5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$R_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0.111 & 0.200 & 0.273 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.167 & 0.231 \\ 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0.143 \end{bmatrix}$$

برای نمونه این ترم به ازای $x = 3$ و $y = 4$ است، که مقدار $\mu_R(3,4) = \frac{1}{9}$ می‌شود.

چون y خیلی از x بزرگ تر نیست، مقدار تابع عضویت آن 0.111 شده است.

۴–۷– ترکیب روابط فازی

روابط فازی در فضاهای حاصل‌ضرب کارترین مختلف را می‌توان با کمک اپراتور ترکیب روابط فازی به هم مربوط کرد. یکی از متداول‌ترین ترکیب‌های روابط فازی، ترکیب ارائه شده توسط زاده است، که آن را ترکیب ماکزیمم مینیمم می‌نامند.

[1] Relation Matrix

الف – ترکیب ماکزیمم مینیمم

اگر R_1 و R_2 دو رابطه فازی به ترتیب در فضای حاصل‌ضرب $V \times Y$ و $X \times V$ باشند، **ترکیب ماکزیمم مینیمم**[1] این دو رابطه فازی با رابطه فازی $R = R_1 \circ R_2$ بیان می‌شود، که تابع عضویت آن چنین تعریف می‌شود. (علت این تعریف را در ادامه توضیح خواهیم داد.)

$$\mu_R(x,y) = \max_v \left[\min\left(\mu_{R_1}(x,v), \mu_{R_2}(v,y)\right)\right] = \vee_v \left[\mu_{R_1}(x,v) \wedge \mu_{R_2}(v,y)\right],$$
$$v \in V, \qquad x \in X, \qquad y \in Y$$

که در آن $\vee$ به معنای max و $\wedge$ به معنای min است.

اگر R_1 و R_2 هر کدام با ماتریس رابطه‌ای بیان شوند، محاسبه ماتریس ترکیب ماکزیمم مینیمم (حاصل‌ضرب ماکزیمم مینیمم) $R = R_1 \circ R_2$ تقریباً مشابه ضرب ماتریسی است، با این تفاوت که حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع، به‌ترتیب، با $\wedge$ یعنی min و $\vee$ یعنی max جایگزین می‌شوند.

ترکیب ماکزیمم مینیمم را **حاصل‌ضرب ماکزیمم مینیمم**[2] نیز می‌نامند.

ب – ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب

با تعاریف مشابه زیر، ترکیب **ماکزیمم حاصل‌ضرب**[3] را بیان می‌کنیم.

اگر R_1 و R_2 دو رابطه فازی به‌ترتیب در فضای حاصل‌ضرب $V \times Y$ و $X \times V$ باشند، طبق تعریف ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب این دو رابطه فازی با $R = R_1 \circ R_2$ بیان می‌شود، که تابع عضویت آن چنین است،

$$\mu_R(x,y) = \max\left[\mu_{R_1}(x,v) \times \mu_{R_2}(v,y)\right].$$

نمونه زیر تفاوت این دو نوع ترکیب فازی را با مقادیر عددی، بهتر نشان می‌دهد.

مثال ۴-۹ : فرض کنیم دو رابطه فازی

$$R_1 = \left\{ x \text{ وابسته به } v \text{ است.} \right\}$$
$$R_2 = \left\{ v \text{ وابسته به } y \text{ است.} \right\}$$

به ترتیب R_1 در فضای کارتزین $X \times V$ و R_2 در فضای کارتزین $V \times Y$ تعریف شده باشند، که در آن $X = \{1,2,3\}$، چهار مقدار عددی معلوم $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ و دو مقدار عددی معلوم $Y = \{a, b\}$.

فرض کنید R_1 و R_2 محاسبه شده باشند و ماتریس‌های رابطه زیر برای آن‌ها به‌دست آمده باشند،

---

[1] Max-Min Composition

[2] Max-Min Product

[3] Max-Product Composition

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

اینک رابطه فازی $R = R_1 \circ R_2$ که بیان‌کننده رابطه فازی « x وابسته به y است.» می‌باشد را، بر مبنای R_1 و R_2 داده شده تعیین می‌کنیم. برای سادگی کاهش حجم محاسبات فرض کنیم می‌خواهیم میزان وابستگی بین المان دوم از X یعنی 2 و المان اول از Y یعنی a را تعیین کنیم. بنابراین باید سطر دوم از ماتریس R_1 را در ستون اول از ماتریس R_2 ضرب کنیم. اگر ترکیب ماکزیمم را استفاده کنیم داریم،

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(2, a) &= \max(0.4 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.2, 0.8 \wedge 0.5, 0.9 \wedge 0.7) \\ &= \max(0.4,0.2,0.5,0.7) \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

اگر ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب را استفاده کنیم، داریم،

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(2, a) &= \max(0.4 \times 0.9, 0.2 \times 0.2, 0.8 \times 0.5, 0.9 \times 0.7) \\ &= \max(0.36,0.04,0.4,0.63) = 0.63. \end{aligned}$$

۴–۸– متغیرهای کلامی

یکی از مهم‌ترین دستاوردهای مبحث فازی امکان بیان مفاهیم کلامی در قالب روابط و معادلات ریاضی است، همان‌طورکه در فصل ۱- بیان شد، پرفسور زاده پایه‌گذاری مبحث فازی را از زمانی آغاز کرد، که در مدل‌سازی سیستم های انسانی[1] با اشکال روبرو شد. روش‌های کلاسیک در تحلیل سیستم‌ها به طور بارزی برای بیان مفاهیمی که با سیستم‌های انسانی سر و کار دارند، ناتوان و نامتناسب هستند. در سیستم‌های انسانی رفتار سیستم‌ها بستگی تام به قضاوت‌ها و احساسات و عواطف انسان دارند. این امر مدل‌سازی سیستم‌های انسانی را پیچیده می‌سازد. این پیچیدگی را می‌توان در **اصل عدم سازگاری**[2] که به صورت زیر بیان می‌شود خلاصه کرد؛

"هرچه پیچیدگی یک سیستم بیشتر می‌شود، توانایی ما برای آنکه درباره آن سیستم بیان دقیق و پرمعنایی ارائه دهیم، کاهش می‌یابد، تا به آستانه‌ای می‌رسد که پس از آن، داشتن هم‌زمان دقت و مفهوم برای آن سیستم مانعه الجمع یکدیگر می‌شوند و یکی دیگری را نفی می‌کند."

[1] Humanistic Variable
[2] Principle of Incompatibility

مفهوم اصل عدم سازگاری را با مثالی توضیح می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهید برای یک سیستم واقعی متشکل از فنر و وزنه، مدل ریاضی ارائه کنید. ساده‌ترین مدل، یک معادله دیفرانسیل رسته دو به صورت $m\ddot{x} + kx = f(t)$ است؛ که در آن m جرم وزنه، k ثابت فنر، x تغییر مکان جرم و $f(t)$ نیروی وارد بر جرم است. اِشکال این مدل آن است که فرض شده فنر جرم ندارد. اگر فنر را دارای جرم در نظر بگیرم و خاصیت الاستیک جرم را هم منظور کنیم، مدل دقیق‌تری بدست می‌آید، ولی این مدل پیچیده‌تر از مدل رسته دو بالا است. با این وجود، این مدل هنوز با سیستم اصلی تفاوت دارد و می‌توان در جهت نزدیک‌تر کردن مدل به سیستم واقعی، مثلاً در نظر گرفت که، جرم در طول فنر دقیقاً یکنواخت توزیع نشده و در واقعیت، الاستیسیته فنر در نقاط مختلف تفاوت‌هایی دارند. با افزودن این نکات، به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌رسیم، که بسیار پیچیده‌تر از مدل‌های پیشین است. اما هنوز هم می‌توان دقت آن را بالاتر برد. مثلاً این که فنر واقعی خطی نیست و غیرخطی‌گری در نقاط مختلف فنر متفاوت است، و ... . درنظر گرفتن همه این موارد سیستم را چنان پیچیده و معادلات را به حدی افزایش می‌دهد که مفهوم ارتعاشی بودن سیستم فنر و وزنه، در لابلای معادلات پیچیده‌ای که به دست آمده است، گُم می‌شود و به نظر می‌رسد که این مجموعه پیچیده معادلات، مفهوم یا مفاهیم متفاوتی را ارائه می‌کنند.

برای حل این مشکل از زبان ریاضی فازی بهره می‌جوییم. سیستم فازی در مقابل سیستم صریحِ خشن است. نگاه فازی گرچه وارد جزئیات نمی‌شود، ولی مفهومی واقع‌بینانه را از سیستم ارائه می‌دهد. منطق فازی یعنی محاسبه با کلمات. بنابراین باید برای **متغیرهای کلامی**[1] و نحوه تبدیل آن‌ها به عبارت‌های ریاضی قواعد و قوانینی را وضع کنیم. آنچه در این بخش و ادامه این فصل تحت عنوان قوانین اگر-آنگاه فازی به آن خواهیم پرداخت نحوه تبدیل متغییرهای کلامی به مفاهیم ریاضی و یا به عبارتی نحوه انجام **محاسبات با کلمات** است.

تعریف متغیرهای کلامی

$$[x, T(x), D(x), L(x)]$$

هر متغیر کلامی به وسیله چهار مدول تعریف می‌شود.

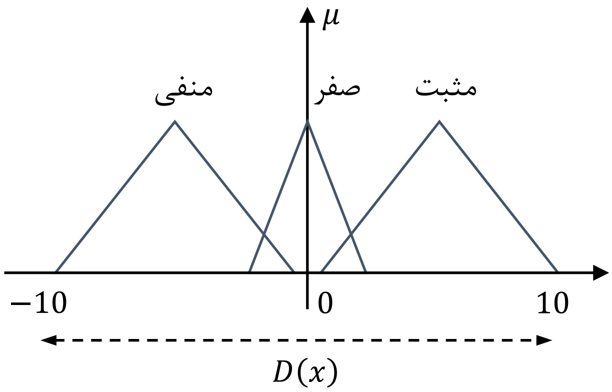
x : اسم متغیر کلامی است. برای نمونه سن، سرعت، دما، خطا، مشتق خطا

$T(x)$: مجموعه مقادیر کلامی است که برای متغیر جایگزین می‌شود. مثلاً برای دمای آب $T(x) =$ [سرد ملایم گرم] و برای خطا $T(x) =$ [منفی صفر مثبت]

[1] Linguistic Variable

$D(x)$: دامنه محدوده تغییرات متغیر کلامی x است. مثلاً در مورد دمای آب $D(x) = [0,100]$ و در مورد خطا $D(x) = [-10,10]$ و در مورد سرعت اتومبیل بر حسب کیلومتر $D(x) = [0,180]$.

$L(x)$: تابع عضویت هرکدام از متغیرهای کلامی $T(x)$ است که در محدوده مرجع $D(x)$ تعریف شده‌اند. مثلاً برای خطا می‌توان متغیر کلامی را با سه مجموعه فازی خطای منفی، خطای صفر و خطای مثبت مانند شکل ۴-۹ نشان داد.



شکل ۴-۹ : توابع عضویت انتخابی برای خطا

مثال ۴-۱۰ : متغیرهای کلامی و مقادیر کلامی

اگر سن متغیر کلامی باشد، در این‌صورت مجموعه ترم کلامی T(سن) آن می‌تواند به صورت زیر باشد.

T(سن)
= {جوان، خیلی جوان، نه خیلی جوان، میانسال، تقریباً پیر، نه خیلی پیر نه خیلی جوان، نه خیلی پیر، ...}

هر عضو T با یک مجموعه فازی در مجموعه مرجع بیان می‌شود. X در اینجا به صورت $X = [0,100]$ بیان می‌شود.

در متغیرهای کلامی قسمت ترم‌های کلامی یا $T(x)$ خود از چند بخش درست شده است. قسمت‌های مختلف ترم‌های کلامی عبارتند از،

ترمهای اصلی یا اولیه[1] در مثال ۴-۱۰ ترم‌های اولیه ترم‌های کلامی عبارتند از: جوان، میانسال، پیر.

منفی کردن[2] که با علامت نه به کار می‌رود.

NOT Young, NOT Old, …

[1] Primary Terms

[2] Negation

تشدید[1] : که با عبارت‌های خیلی (very)، تا اندازه‌ای (more or less)، فوق‌العاده زیاد (extremely) ظاهر می‌شوند. برای نمونه،

very Old, extremely Old, more or less Old.

موارد بالا همگی اپراتورهایی هستند، که معنای عبارت‌های تحت تأثیر خود را در یک حوزه مشخص و به شکل ویژه‌ای تغییر می‌دهند.

تمرکز[2] و انبساط[3] در متغیرهای کلامی

اگر A یک متغیر کلامی باشد که با یک مجموعه فازی تابع عضویت $\mu_A(0)$ نمایش داده شود، دراین‌صورت A^k به عنوان یک متغیر کلامی تعمیم‌یافته A تفسیر می‌شود.

$$A^k = \int_X \frac{[\mu_A(x)]k}{x}$$

در حالت خاص اپراتور A متمرکز عبارت است از،

$$\mathrm{Con}(A) = A^2, \qquad \mathrm{Dil}(A) = A^{0.5}.$$

به طور سنتی،

$$\mathrm{Con}(A) = A^2 = very\ A, \qquad \mathrm{Dil}(A) = A^{0.5} = more\ or\ less\ A,$$

یعنی $\mathrm{Con}(A)$ به جای $very\ A$ به کار می‌رود. برای نمونه اگر $A = \{\text{جوان}\}$ باشد، دراین‌صورت $\{\text{خیلی جوان}\}$ می‌شود A^2، و $\{\text{کم و بیش جوان}\}$ می‌شود $A^{0.5}$؛ ولی انواع دیگر تشدید با تغییر در A نیز ممکن است.

همچنین می‌توانیم اپراتورهای AND ،OR و NOT را نیز بیان کنیم،

$$\mathrm{NOT}(A) = -A = \int_X \frac{[1 - \mu_A(x)]}{x}$$

$$A\ \mathrm{AND}\ B = A \cap B = \int_X \frac{[\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)]}{x}$$

$$A\ \mathrm{OR}\ B = A \cup B = \int_X \frac{[\mu_A(x) \vee \mu_B(x)]}{x}.$$

---

[1] Hedges

[2] Concentration

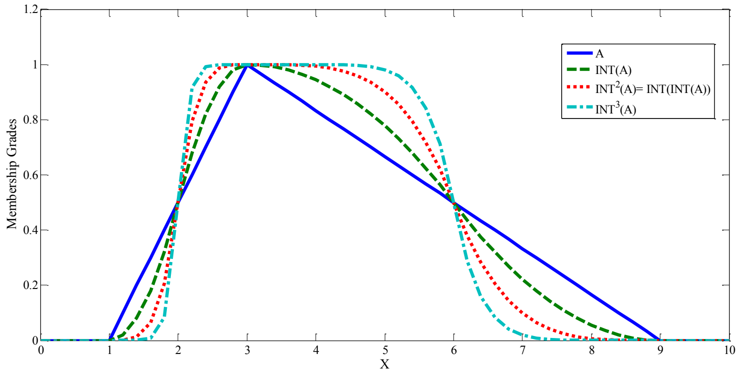
[3] Dilation

با استفاده از اپراتورهای $\mathrm{Con}(\cdot)$ و $\mathrm{Dil}(\cdot)$ برای "خیلی" و "کم و بیش"، همراه با تفسیر ترم‌های OR، AND و NOT طبق تعاریف بالا، می‌توانیم به ترکیب **ترم‌های کلامی**[1] بپردازیم. برای نمونه می‌توانیم به بیان ریاضی عبارت‌هایی مانند « نه خیلی جوان و نه خیلی پیر» یا « جوان ولی نه خیلی جوان» بپردازیم.

اپراتوری که فازی بودن یک مجموعه را کم می‌کند، Contrast Intensification است. با اعمال این اپراتور روی مجموعه کلامی A، نتیجه مجموعه فازی جدیدی است، که در آن میزان عضویتِ مقادیری از $\mu_A(x)$ که بین 0.5 و 0 هستند را کاهش و مقادیری از $\mu_A(x)$ که بین 1 و 0.5 هستند را، افزایش می‌دهد.

$$\mathrm{Int}(A) = \begin{cases} 2A^2 & for \quad 0 \le \mu_A(x) \le 0.5 \\ 2\tilde{A}^2 & for \quad 0.5 \le \mu_A(x) \le 1 \end{cases}$$

مثال ۴-۱۱ : اگر A تابع عضویت مثلثی به صورت $A = $ مثلث $(x, 1,3,9)$ باشد، نتیجه اعمال این اپراتور به دفعات به شکل زیر در می‌آید.



شکل ۴-۱۰ : اعمال اپراتور Int

مثال ۴-۱۲ : ترکیب ترم‌های کلامی

یکی از مهم‌ترین خواص کاربرد توابع عضویت فازی در عبارت‌های کلامی آن است که، می‌توان آن دسته از عبارت‌های کلامی را که به صورت ترکیبی از عبارت‌های ساده‌تر بیان می‌شوند و در محاوره و گفتگو و در مباحث نوشتاری مورد استفاده قرار می‌گیرند، را با ترکیب توابع عضویت به صورت عبارت‌های ریاضی بیان نمود. برای نمونه "ترم‌های مرکب کلامی" زیر را با توابع عضویت مرکب فازی برای مشخص کردن سن افراد بیان می‌کنیم؛

کم و بیش پیر : More or Less Old

نه پیر و نه جوان : NOT Young AND NOT Old

جوان ولی نه خیلی جوان : Young but NOT Too Young

[1] Composit of Linguistic Terms

خیلی خیلی پیر : Extremely Old

فرض می‌کنیم ترم‌های کلامی "جوان" و "پیر" با توابع عضویت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_{\text{جوان}}(x) = \text{bell}(x, 20, 2, 0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{20}\right)^4}$$

$$\mu_{\text{پیر}}(x) = \text{bell}(x, 30, 3, 100) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 100}{30}\right)^6}$$

که در آن X سن شخص در فاصله $[0,100]$ است. اکنون تابع عضویت هریک از ترم‌های کلامی زیر را به دست می‌آوریم. شکل ۴-۱۱ تابع عضویت ترم‌های کلامی ترکیبی بدست آمده را نشان می‌دهد.

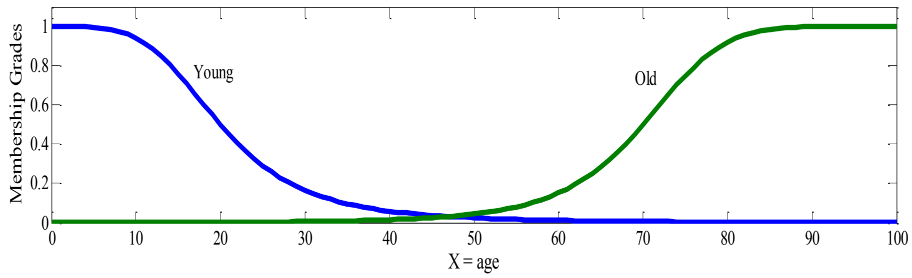
$$\mu_{\text{more or less old}}(x) = \left(\mu_{\text{old}}(x)\right)^{0.5} = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-100}{30}\right)^6}\right)^{0.5}$$

$$\mu_{\text{not young and not old}}(x) = \widetilde{\mu_{\text{old}}(x)} \cap \mu_{\widetilde{\text{young}}}(x) = \left\{\left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{20}\right)^4}\right) \wedge \left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x-100}{30}\right)^6}\right)\right\}$$

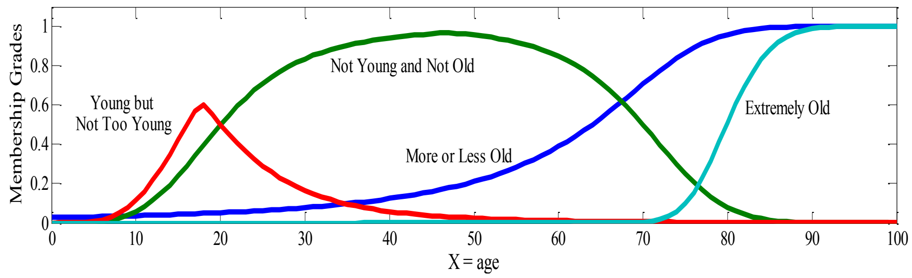
$$\mu_{\text{young but not too young}}(x) = \mu_{\text{young}} \cap \mu_{\widetilde{\text{young}}}(x)^2$$

$$\mu_{\text{young but not too young}}(x) = \left\{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{20}\right)^4}\right) \wedge \left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{20}\right)^4}\right)^2\right\}$$

$$\mu_{\text{extremely old}}(x) = \left(\mu_{\text{young}}(x)\right)^8 = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-100}{30}\right)^6}\right)^8$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۱ : الف) توابع عضویت پیر و جوان ب) ترم‌های کلامی ترکیبی

۴-۹-قواعد اگر-آنگاه فازی

قواعد **اگر-آنگاه فازی**[۱] با نام‌هایی مانند **قاعده فازی**[۲]، **بیان شرطی فازی**[۳] و **استدلال فازی**[۴] شناخته می‌شوند. یک قاعده اگر-آنگاه فازی به صورت کلی زیر است؛

اگر x مساوی A باشد، آنگاه y مساوی B است.

که درآن A, B مقادیر کلامی بوده با مجموعه‌های فازی در X, Y ارائه شده‌اند. معمولاً عبارت قسمت اول قاعده فازی یعنی «x مساوی A است» را **مقدم** یا **مبتدی**[۵]، **استدلال فازی یا فرض و بیان مقدمه**[۶] و عبارت «y مساوی B است» را **نتیجه** یا **تالی قانون فازی**[۷] می‌نامند. نمونه‌هایی از قواعد اگر-آنگاه فازی در ادامه آورده شده‌اند.

اگر فشار زیاد باشد، آنگاه حجم کم می‌شود.
اگر جاده لغزنده باشد، آنگاه رانندگی خطرناک است.
اگر گوجه‌فرنگی قرمز باشد، آنگاه رسیده است.
اگر سرعت زیاد باشد، آنگاه ترمز بگیرید.

مهمترین نحوه بیان قواعد اگر-آنگاه فازی به صورت زیر است،

اگر x برابر A باشد، آنگاه y برابر B است.

If x is A, **Then** y is B.

این قاعده را در مجموعه‌های فازی نیز به صورت $A \rightarrow B$ نشان می‌دهیم، این عبارت یک "رابطه" بین متغیر x, y است. یعنی یک قاعده اگر-آنگاه فازی را می‌توان به عنوان یک رابطه فازی در فضای حاصل‌ضرب $X \times Y$ بیان کرد،

$$\mathrm{R} : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} = \int_{x \times y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}. \qquad (۴-۷)$$

به‌طورکلی دو نوع تفسیر برای قاعده فازی $A \rightarrow B$ وجود دارد.

---

[1] Fuzzy If Then Rule
[۲] Fuzzy Rule
[3] Fuzzy Conditional Statement
[4] Fuzzy Implication
[5] Antecedent
[6] Premise
[7] Consequence or Conclusion

الف – رابطه فازی ربطی

اگر $A \to B$ به معنای همبستگی بین A و B باشد، آن را **رابطه فازی ربطی**[1] نامند. یعنی A و B به هم مربوط هستند. در این صورت معادله (۴-۷) چنین می‌شود،

$$R: A \longrightarrow B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} = \int \frac{\mu_A(x)\ \text{tn}\ \mu_B(y)}{(x,y)}.$$

که در آن tn هر نُرم مثلثی دلخواه می‌تواند باشد. مینیمم و حاصل‌ضرب جبری از متداول‌ترین انواع نُرم مثلثی هستند. متغیر کلامی نشان‌دهنده رابطه فازی ربطی "و" یا "AND " است.

برای آنکه این نوع رابطه بهتر درک شود، فرض کنید پلیس به دنبال مظنونی می‌گردد، که مشخصات وی "قد بلند **و** جوان **و** لاغر" است. هر کدام از این مشخصه‌ها با مجموعه‌ای فازی قابل بیان است. حال اگر شخصی پیدا شود که دو مشخصه اول را تا حد زیادی داشته باشد، ولی مشخصه سوم یعنی "لاغری" را نداشته باشد، مثلاً چاق باشد، علیرغم آنکه درجه عضویتش در "قد بلندی" و در "جوانی" نزدیک به یک است، به خاطر آنکه چاق است، از لیست مظنونین خاج می‌شود. به عبارت دیگر، این شخص به عنوان مظنون درجه عضویتی برابر مینیمم درجات عضویت سه مشخصه بیان شده را می‌تواند داشته باشد.

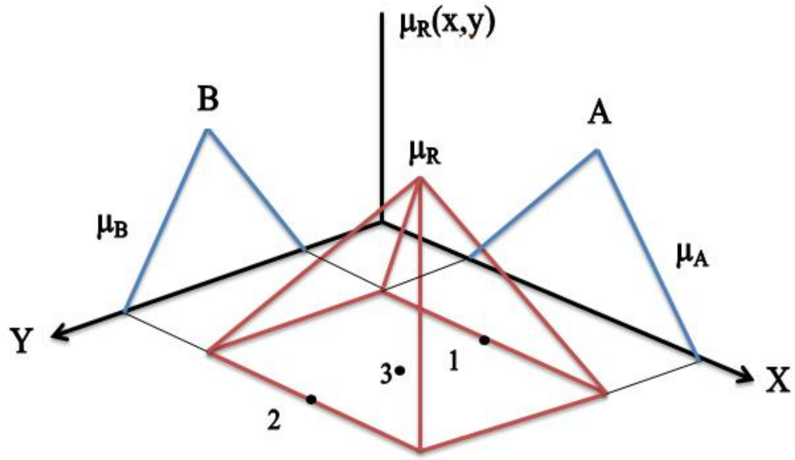
در کنترل، اغلب از رابطه فازی ربطی و $\text{T} - \text{norm}$ از نوع min استفاده می‌شود،

$$R: A \longrightarrow B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} = \int_{X\times Y} \frac{\min\big(\mu_A(x)\ \text{tn}\ \mu_B(y)\big)}{(x,y)}.$$

اگر توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B به فرم مثلثی نمایش داده شوند، دراین‌صورت تابع عضویت رابطه فازی ربطی $\mu_R(x,y)$ به صورت یک سطح هرمی در فضای سه بُعدی $\big(x, y, \mu_R(x,y)\big)$ طبق شکل ۴-۱۲ در می‌آید.

برای بدست آوردن $\mu_R(x,y)$ باید یک x, y معین فرض کنیم. واضح است هر x, y که انتخاب شود، نقطه‌ای در قاعده هرم شکل ۴-۱۲ را نشان می‌دهد. برای نمونه با انتخاب x, y مربوط به نقطه 1، در این نقطه $\mu_A(x) = 1$ و $\mu_B(y) = 0$، پس $\mu_R(x,y) = 0$ بوده، که مینیمم دو مقدار بالا است. اگر x, y مربوط به نقطه 2 انتخاب شود، داریم $\mu_A(x) = 1$ و $\mu_B(y) = 0$؛ پس باز هم $\mu_R(x,y) = 0$ است. اگر روی خط $2 - 1$ حرکت کنیم، در نقطه 3 هر دو μها برابر یک هستند، پس $\mu_R(x,y) = 1$ است.

[1] Fuzzy Conjunction



شکل ۴-۱۲ : تابع عضویت رابطه فازی ربطی $\mu_R(x,y)$

ب – رابطه فازی فصلی

اگر $A \to B$ به معنای شامل شدن A در B شود، این رابطه را **رابطه فازی فصلی**[1] نامند. یعنی A و B از هم مجزا هستند. در این صورت معادله (۴-۷) چنین می‌شود،

$$R: A \longrightarrow B = \int_{X \times Y} \frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} = \int_{X \times Y} \frac{\mu_A(x) \;\text{ sn }\; \mu_B(y)}{(x,y)}.$$

که در آن sn اپراتوری است، که انواع مختلف آن مانند ماکزیمم و جمع جبری را پیشتر دیده‌ایم. متغیر کلامی نشان‌دهنده رابطه فازی ربطی "یا" یا "OR " است.

پیش از آنکه از قواعد اگر-آنگاه فازی برای مدل‌سازی و آنالیز یک سیستم استفاده کنیم، باید مشخص کنیم از عبارت

If x is A **AND** y is B, …

که به صورت $A \to B$ است، چه مفهومی را استنتاج می‌کنیم. به‌طورکلی این عبارت یک رابطه بین دو متغیر x و y است. پس یک قاعده اگر-آنگاه فازی را می‌توان به عنوان یک رابطه فازی دو بُعدی در فضای حاصل‌ضرب $X \times Y$ بیان کرد.

$$R_m = A \times B = \int_{X \times Y} \frac{\mu_{R_m}(x,y)}{(x,y)} = \int_{X \times Y} \frac{\mu_A(x) \;\wedge\; \mu_B(y)}{(x,y)}$$

این رابطه توسط ممدانی ارائه گردیده است و از بکارگیری اپراتور min برای ترکیب ربطی نتیجه می‌شود.

[1] Fuzzy disjunction

$$R_{ap} = A \times B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_{R_{ap}}(x,y)}{(x,y)} = \int_{X\times Y} \frac{\mu_A(x)\,.\,\mu_B(y)}{(x,y)}$$

این رابطه توسط لارسن ارائه گردیده است و از بکار بردن اپراتور ضرب جبری برای ترکیب فصلی نتیجه می‌شود.

$$R_{bp} = A \times B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_{R_{bp}}(x,y)}{(x,y)} = \int_{X\times Y} \frac{\mu_A(x) \odot \mu_B(y)}{(x,y)} = \int_{X\times Y} \frac{0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)}{(x,y)}$$

$$R_{dp} = A \times B = \int_{X\times Y} \frac{\mu_{R_{dp}}(x,y)}{(x,y)} = \int_{X\times Y} \frac{\mu_A(x) \hat{\cdot} \mu_B(y)}{(x,y)} = \begin{cases} \mu_A(x) & if\ \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(y) & if\ \mu_A(x) = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

۴–۱۰– قواعد فازی ممدانی[1]

اولین کاربرد صنعتی منطق فازی توسط ابراهیم ممدانی Ebrahim Mamdani در اول دهه ۱۹۷۰ در انگلستان در Queen Mary College لندن انجام شد. ممدانی و دانشجوی دکترای وی Assilian برای کنترل یک ژنراتور بخار از منطق فازی استفاده کردند. رساله دکترای اصیلیان با این عنوان در ۱۹۷۴ دفاع شد.

الف – قواعد فازی ممدانی در کنترل‌کننده فازی

در یک کنترل‌کننده فازی مجموعه‌ای از قوانین یا قواعد فازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با یک مثال ساده به قانون فازی ممدانی برای حرکت خودرو توجه کنیم. می‌خواهیم براساس "سرعت" و "شتاب" خودرو که به صورت مجموعه‌های فازی بیان شده‌اند، در مورد نحوه "ترمزگیری" که خود نیز یک مجموعه فازی است، قانون فازی طراحی کنیم.

فرض کنید سرعت خودرو یک متغیر کلامی با مجموعه‌های فازی زیر است.

سرعت زیاد	سرعت متوسط	سرعت کم
high	medium	low

همچنین شتاب خودرو نیز متغیری کلامی است، که مجموعه‌های فازی با توابع عضویت تعریف شده در آن، به صورت زیر داده شده‌اند.

خیلی مثبت	متوسط مثبت	کمی مثبت	صفر	کمی منفی	متوسط منفی	خیلی منفی
positive high	positive medium	positive low	zero	negative low	negative medium	negative high

[1] Mamdani Fuzzy Rules

دو متغیر کلامی سرعت و شتاب، ورودی‌های کنترل‌کننده و مجموعه فازی ترمزگیری خروجی کنترل‌کننده است. متغیر کلامی ترمزگیری نیز دارای سه مجموعه فازی زیر است.

به تندی	ملایم	به کندی
fastly	modest	slowly

به ازای هرکدام از متغیرهای کلامی سرعت و شتاب، فرمان کنترلی باید یکی از انتخاب‌های بالا را داشته باشد.

If *Speed* is **high AND** *Acceleration* is **positive low,** Then *Braking* is **modest.**

اگر سرعت زیاد **و** شتاب کمی مثبت است، آنگاه ترمزگیری باید ملایم انجام شود.

یک قانون فازی با سه متغیر ورودی x_1، x_2 و x_3 (مثلاً خطا، مشتق خطا و مشتق دوم خطا) و دو متغیر خروجی u_1 و u_2 (مثلاً میزان باز بودن شیر) به صورت زیر قابل بیان است. فرض کنید x_1، پنج مجموعه فازی A_1 تا A_5 و x_2، چهار مجموعه فازی B_1 تا B_4 و x_3، هفت مجموعه فازی C_1 تا C_7 را داشته باشد. با توجه به سه ورودی و تعداد متغیرهای فازی هرکدام، جمعاً ۵×۴×۷ قانون فازی می‌توان نوشت. اولین قانون فازی چنین است،

If x_1 is $\boldsymbol{A_1}$ **AND** x_2 is $\boldsymbol{B_1}$ **AND** x_3 is $\boldsymbol{C_1}$**,** Then u_1 is $\boldsymbol{D_1}$, u_2 is $\boldsymbol{E_1}$.

در این معادله عبارت $[\text{If } x_1 \text{ is } \boldsymbol{A_1} \textbf{ AND } x_2 \text{ is } \boldsymbol{B_1} \textbf{ AND } x_3 \text{ is } \boldsymbol{C_1}]$ **مقدمه قانون**[1] و $[\text{Then } u_1 \text{ is } \boldsymbol{D_1}, u_2 \text{ is } \boldsymbol{E_1}.]$ **نتیجه قانون**[2] نام دارد.

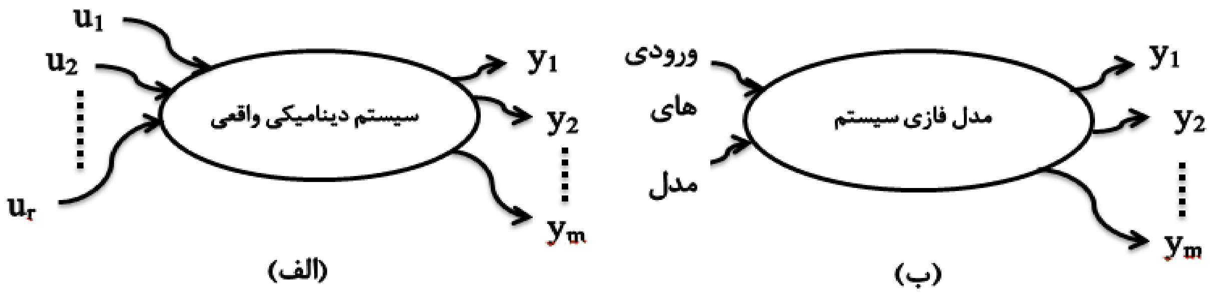
ب – قواعد فازی ممدانی در مدل‌سازی فازی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای منطق فازی مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی است. مدل‌سازی سیستم‌ها به روش منطق فازی صرفاً براساس داده‌های قابل اندازه‌گیری ورودی و خروجی سیستم‌ها انجام می‌شود. فرض کنید سیستم دینامیکی با شکل ۴-۱۳ الف) نمایش داده شود.

در این سیستم ورودی‌ها با u_1 تا u_r و خروجی‌ها با y_1 تا y_m نمایش داده شده‌اند. ورودی‌های سیستم شامل همه عواملی هستند که بر دینامیک سیستم و در نتیجه بر رفتار خروجی تأثیر می‌گذارند. به‌طورکلی این ورودی‌ها شامل ورودی‌های کنترلی و ورودی‌های اغتشاشی می‌باشند. در بسیاری از موارد، ورودی‌های

[1] Rule Antecedent
[2] Rule Consequent

سیستم واقعی قابل اندازه‌گیری نیستند. این امر به ویژه در سیستم‌های غیرمهندسی، مانند سیستم‌های اقتصادی، اجتماعی و سیاسی صادق است.



شکل ۴-۱۳ : نمای شماتیک سیستم دینامیکی واقعی و مدل فازی سیستم

برای نمونه در مدل‌سازی قیمت نفت و پیش‌بینی قیمت، سیستم واقعی "اقتصاد جهانی نفت" است. اگر خروجی این سیستم را قیمت در آینده (برای نمونه قیمت نفت فردا) در نظر بگیریم، عواملی که باعث تغییر در قیمت نفت می‌شوند طیف بسیار گسترده و وسیعی از ورودی‌های مختلف هستند. بعضی از این ورودی‌ها را می‌توان چنین نام برد : قیمت امروز نفت ، وضعیت عرضه و تقاضای نفت در بازار، ذخیره نفت کشورهای بزرگ مصرف‌کننده مثل چین و آمریکا، وقایع و رویدادهای مقطعی مانند انفجار در خط لوله یکی از کشورهای بزرگ صادرکننده، نزدیکی به زمان برگزاری کنفرانس‌های نفتی مثل اوپک، بروز بحران در کشورهای صادرکننده نفت، جنگ، اعلامیه‌ها و تصمیم‌گیری‌های مهم سیاسی، تغییرات در تراز قیمت ارز، سردی و گرمی هوا و ... .

تعداد این ورودی‌ها بسیار زیاد است. برخی از این ورودی‌ها در دراز مدت و به تدریج بر قیمت نفت اثر می‌گذارند و برخی دیگر تاثیر کوتاه مدت دارند؛ ولی آنچه شاخصه مهم و مشترک بیشتر این ورودی‌ها است، آن است که این کمیت‌ها عددی و قابل اندازه‌گیری نیستند. این‌ها مانند ورودی‌های معمول سیستم‌های صنعتی مثل دبی و فشار و ... نیستند که با حسگرهای متداول بتوان آنها را اندازه‌گیری کرد. به همین دلیل است که، ورودی‌های مدل الزاماً همان ورودی‌های سیستم‌های واقعی نیستند. ورودی‌های مدل باید قابل اندازه‌گیری باشند و به این خاطر ممکن است هیچکدام از ورودی‌های معمول سیستم اصلی، در مدل قابل استفاده نباشند. در نمونه "اقتصاد جهانی نفت"، ورودی‌های مدل فازی می‌توانند تنها و تنها قیمت نفت در امروز و در چندین روز گذشته و خروجی سیستم قیمت فردای نفت باشد.

فرض کنید سیستمی دارای یک ورودی و یک خروجی است (ورودی u، خروجی y).

فرض کنید که $y(k)$ نشان‌دهنده خروجی در زمان حال و هم‌چنین $y(k-1)$، $y(k-2)$ و به‌طورکلی $y(k-l)$ نشان‌دهنده خروجی یک و دو گام (Step) پیش، و $y(k+1)$ نشان‌دهنده خروجی در یک گام بعد باشد. اگر هر گام، یک روز، در نظر گرفته شود، $y(k)$ خروجی امروز و $y(k+1)$ خروجی در فردا

است. همین تعاریف برای ورودی نیز صادق است. براین اساس با فرض قابل اندازگیری بودن ورودی u، ساختار قانون فازی ممدانی در مدل‌سازی فازی این سیستم چنین است،

If $y(k)$ is $\boldsymbol{A_1}$ **AND** $y(k-1)$ is $\boldsymbol{A_2}$ **AND** $y(k-2)$ is $\boldsymbol{A_3}$**,**
AND $u(k)$ is $\boldsymbol{B_1}$ **AND** $u(k-1)$ is $\boldsymbol{B_2}$**,**
Then $y(k+1)$ is $\boldsymbol{A_j}$.

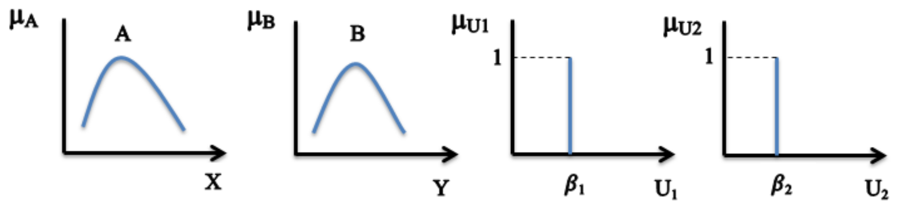
در این رابطه $A_1, A_2, A_3, \dots, A_j$ مجموعه‌های فازی خروجی y، B_1, B_2 مجموعه‌های فازی ورودی u هستند. هم‌چنین $y(k-l), \dots, y(k-2), y(k-1), y(k), y(k+1)$، به‌ترتیب خروجی‌های سیستم مدل در زمان‌های نمونه‌گیری $k+i,\ \ i=-l, \dots, 0,1$ هستند.

ج – قاعده فازی ممدانی با خروجی‌های یگانه فازی

در قاعده فازی ممدانی، قسمت "آنگاه" یعنی خروجی، می‌تواند مجموعه یگانه فازی[1]، باشد. در این‌صورت خواهیم داشت،

If x is $\boldsymbol{A}$ **AND** y is $\boldsymbol{B}$**,** Then u_1 is $\boldsymbol{\beta_1}$, u_2 is $\boldsymbol{\beta_2}$.

که در آن $\boldsymbol{\beta_1}$ و $\boldsymbol{\beta_2}$ نمایش‌دهنده مجموعه‌های یگانه فازی هستند.



شکل ۴-۱۴ : توابع عضویت ورودی و خروجی در مدل فازی ممدانی

در ادامه بحث خواهیم کرد که این نتیجه قانون، معادل قاعده فازی دیگری به نام قانون فازی سوگینو در حالت خاصی است که آن را مدل فازی سوگینو نوع صفر می‌نامیم. همچنین معادل حالت خاصی از قاعده فازی تسوکاموتو است، که در آن تابع عضویت مجموعه فازی قسمت "آنگاه" قاعده فازی به صورت تابع پله باشد.

سایر قوانین فازی را در فصل ۵- و تحت عنوان مدل‌های فازی بیان خواهیم کرد.

[1] Fuzzy Singleton

فصل ۵–استنتاج فازی

۵–۱– مقدمه

در این فصل به استنتاج فازی می‌پردازیم. استنتاج فازی صورت کلی‌تر و عمومی‌تر استنتاج کلاسیک است. در منطق کلاسیک و در قانون استنتاج، قیاس اقترانی یا قانون قیاس انتزاع[۱] را دیدیم؛ که این قانون به صورت $[(p \Rightarrow q) \wedge p]$ بیان می‌شود.

در منطق کلاسیک، این قانون را می‌توان به صورت زیر نوشت، که در آن A و B مجموعه‌های صریح هستند.

گزاره صغری	مشاهده	:	x متعلق به A است.
گزاره کبری	قانون	:	اگر x متعلق به A باشد آنگاه y متعلق به B است.
	نتیجه	:	y متعلق به B است.

در صورتی که A و B مجموعه‌های فازی باشند، قانون بالا به صورت زیر در می‌آید، که آن را **استنتاج فازی** نامند.

گزاره صغری	مشاهده	:	x متعلق به مجموعه فازی A است.
گزاره کبری	قانون	:	اگر x متعلق به مجموعه فازی A باشد، آنگاه y متعلق به مجموعه فازی B است.
	نتیجه	:	y متعلق به مجموعه فازی B است.

اگر در مقدمه یا صغری قضیه، مشاهده x متعلق به مجموعه فازی دیگری مانند A' باشد، که A' به A نزدیک است، و کبری قضیه یا قانون همانند پیش باشد، در این صورت نمی‌توان نتیجه گرفت که y الزاماً متعلق به مجموعه فازی B است؛ بلکه قاعدتاً y متعلق به مجموعه فازی دیگری مانند B' می‌شود، که B' به B نزدیک است، اما الزاماً با آن برابر نیست. در این صورت می‌توان نوشت،

گزاره صغری	مشاهده	:	x متعلق به مجموعه فازی A' است.
گزاره کبری	قانون	:	اگر x متعلق به مجموعه فازی A باشد، آنگاه y متعلق به مجموعه فازی B است.
	نتیجه	:	y متعلق به مجموعه فازی B' است.

[۱] Modus Ponens

چون A' به A نزدیک است، انتظار می‌رود که B' یا نتیجه نیز نزدیک B باشد. اما پرسش اصلی آن است که B' چگونه باید محاسبه شود؟ بدیهی است که این استدلال، دقیق و صریح نخواهد بود، بلکه استدلالی تقریبی و فازی است. این نوع استدلال را **استدلال تقریبی**[1] یا **استنتاج تقریبی** نامند.

در این فصل در این زمینه به تفصیل شرح خواهیم داد و استدلال تقریبی را بیان نموده، نحوه محاسبه و تعیین استنتاج B' را توضیح خواهیم داد.

به نمونه زیر توجه کنید که در آن دو مفهوم "قرمز بودن" و "رسیده بودن" گوجه‌فرنگی عبارت‌های فازی هستند،

مشاهده : این گوجه‌فرنگی قرمز است.

قانون : اگر گوجه‌فرنگی قرمز باشد، آنگاه رسیده است.

این استدلال، فازی است، اما استدلال تقریبی نیست. زیرا، "گوجه‌فرنگی" در مشاهده، قانون و استنتاج همه مساوی هستند و "قرمز" در مشاهده و قانون یکسان است. هم‌چنین "رسیده" در قانون و استنتاج نیز یکسان است. اما چون هم مقدمه و هم قانون و بالاخره استنتاج همه فازی هستند، به چنین استنتاجی **استنتاج فازی** گویند.

حال ببینیم در عمل و در استدلال‌های متداول چگونه استنتاج می‌کنیم و استنتاج تقریبی چگونه استفاده می‌شود.

مشاهده	این گوجه‌فرنگی **خیلی قرمز** است.
قانون	اگر گوجه‌فرنگی قرمز باشد، آنگاه رسیده است
نتیجه	این گوجه‌فرنگی **خیلی رسیده** است.

دیده می‌شود که "گوجه‌فرنگی" در مشاهده و قانون با هم متفاوت هستند. هم‌چنین "گوجه‌فرنگی" در قانون و نتیجه نیز متفاوت هستند. درحالیکه "گوجه‌فرنگی" در مقدمه و استنتاج با هم یکسان هستند. از طرفی به جای "قرمز" در قانون، آنچه در مقدمه آمده "خیلی قرمز" است؛ یعنی به جای A در قانون، A' را در مشاهده داریم و به جای B در نتیجه B' را خواهیم داشت. پس این نوع استنتاج دقیق نیست، بلکه استدلالی تقریبی است.

[1] Approximate Reasoning

این نوع استدلال را **استدلال تقریبی** نامند، که در آن مشاهده و قانون با هم تفاوت دارند. این نوع قانون قیاس را **قانون قیاس اقترانی عمومیت یافته**[1] نیز می‌نامند، که حالت عمومیت یافته قیاس اقترانی کلاسیک[2] است.

۵-۲- بیان ریاضی استنتاج فازی با قاعده استنتاج ترکیبی[3]

استدلال فازی و استدلال تقریبی یک روش استنتاج است، که براساس مجموعه‌ای از قواعد اگر-آنگاه فازی و واقعیت‌های شناخته شده و معلوم به نتیجه‌گیری می‌پردازد. برای بحث درباره استدلال تقریبی ابتدا «قاعده استنتاج ترکیبی[4]» که مبنای استدلال تقریبی است، معرفی می‌شود. به عبارت دیگر مفهوم استنتاج فازی با قاعده استنتاج ترکیبی بیان می‌گردد.

قاعده استنتاج ترکیبی توسط زاده معرفی شده است. مفهوم قاعده استنتاج ترکیبی همان مفهوم ترکیب روابط فازی است که قبلاً بحث کرده‌ایم. **ترکیب ماکزیمم و مینیمم روابط فازی** نمونه‌ای از ترکیب روابط فازی است. **ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب** نمونه دیگری از این نوع ترکیب است. در فصل چهارم و در بخش ؟؟ ()۴-۷، ترکیب روابط فازی به صورت ماتریس‌های رابطه‌ای بیان شده‌اند. هم‌چنین اصل توسعه نیز حالت خاصی از قاعده استنتاج ترکیبی است.

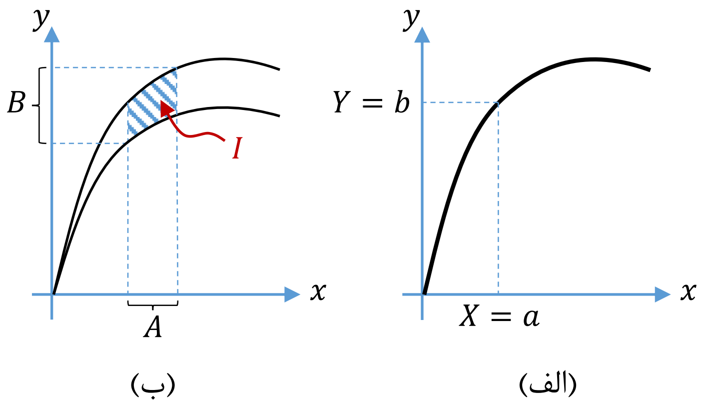
قاعده استنتاج ترکیبی حالت عمومی و کلی بیان زیر است،

فرض کنید رابطه بین دو متغیر x و y با منحنی $y = f(x)$ داده شده باشد. به ازای یک مقدار داده شده x مانند $x = a$، از رابطه $y = f(x)$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $y = b = f(a)$ (شکل ۴-۷ الف). اگر بخواهیم به این عبارت‌ها عمومیت دهیم، می‌توانیم فرض کنیم که a، یک فاصله در محدوده x باشد و در این صورت $f(x)$ تابعی است، که در یک فاصله معرفی شده است (شکل ۴-۷ ب).

در شکل ۴-۷-ب، برای تعیین بازه B در Y که متناظر با بازه A در X است، به صورت زیر عمل می‌کنیم،

ابتدا توسعه سیلندری A را به وجود می‌آوریم. سپس، محل تقاطع این توسعه سیلندری را با تابع فاصله‌ای f تعیین می‌کنیم. یعنی I را به دست می‌آوریم. تصویر I روی محور y، بازه B را نتیجه می‌دهد.

[1] Generalzed Modus Ponens
[2] Modus Ponens
[3] Mathemahcal Represeritation of fuzzy reasoning with compositional Rule of Inference.
[4] Compositional Rule of Inference



شکل ۵-۱ : تعیین $y = b$ از $x = a$, $y = f(x)$ الف) a و b نقطه هستند و $y = f(x)$ یک منحنی است.

ب) A و B فاصله هستند و $y = f(x)$ یک تابع بر حسب مقدار فاصله است.

۵–۳– نمایش ترسیمی و ریاضی استنتاج فازی

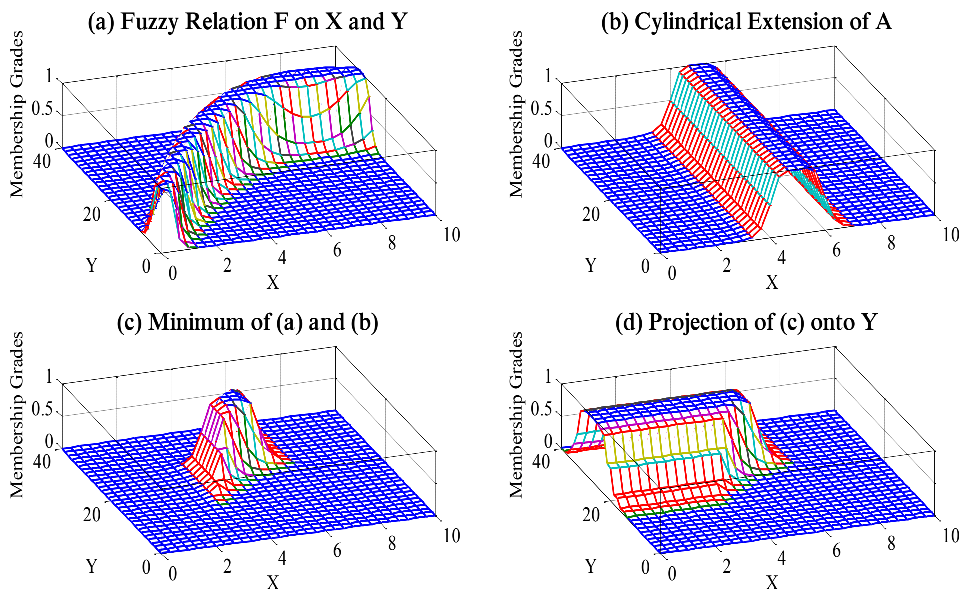
فرض کنید A یک مجموعه فازی در X و R یک رابطه فازی در $X \times Y$ باشد. مجموعه فازی B در Y را براساس ترکیب روابط فازی به دست می‌آوریم.

برای تعیین B در Y به ترتیب زیر عمل می‌کنیم (در شکل ۵-۲ فرض کرده‌ایم که A در X و f در $X \times Y$ داده شده‌اند، به‌طوریکه توسعه سیلندری A در شکل ۵-۲ ب) و تابع فازی دو بُعدی f در شکل ۵-۲ الف) ارائه شده است،

۱. ابتدا توسعه سیلندری مجموعه فازی A را به دست آورده، آن را $C(A)$ می‌نامیم (شکل ۵-۲ ب).

۲. محل تقاطع توسعه سیلندری $C(A)$ در رابطه فازی دو بُعدی R را به دست می‌آوریم (شکل ۵-۲ ج). (این محل تقاطع مشابه ناحیه I در شکل ۴-۷ است و خود یک مجموعه فازی دو بُعدی است، که با $C(A) \cap R$ بیان می‌شود).

۳. تصویر این مجموعه فازی دو بُعدی روی محور Y، مجموعه فازی B را می‌دهد (شکل ۵-۲ د). پس به طور خلاصه شکل ۵-۲ الف) رابطه فازی دو بُعدی R (در $X \times Y$) را بیان می‌کند، (ب) مجموعه فازی A و توسعه سیلندری آن را نشان می‌دهد، شکل (ج)، محل تقاطع توسعه سیلندری A با رابطه فازی دو بُعدی R و بالاخره شکل (د) تصویر این محل تقاطع روی محور Y را بیان می‌کند که همان مجموعه فازی B است.



شکل ۵-۲ : الف)رابطه فازی R ب)توسعه سیلندری A ج) مینیمم الف و ب د) تصویر ج در Y

توابع عضویت مجموعه‌های فازی A، $C(A)$، B و R را به ترتیب با $\mu_A(x)$، $\mu_{C(A)}(x,y)$، $\mu_B(y)$ و $\mu_R(x,y)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $\mu_{C(A)}(x,y)$ به صورت زیر با $\mu_A(x)$ مرتبط است (شکل ۵-۲ ب).

$$\mu_{C(A)}(x,y) = \mu_A(x) \qquad (۵-۱)$$

تابع عضویت اشتراک $C(A)$ و R $C(A) \cap R$ یعنی تابع عضویت منطقه تقاطع توسعه سیلندری A و R (شکل ۵-۲ ج) به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\mu_{C(A)\cap R}(x,y) = \min\left[\mu_{C(A)}(x,y), \mu_R(x,y)\right] = \min[\mu_A(x), \mu_R(x,y)] \qquad (۵-۲)$$

باید توجه داشت که به‌طورکلی می‌توان به جای min از هر نوع T-Norm دیگری نیز استفاده کرد، به شرط آن‌که به جای اشتراک نیز از مفهوم کلی‌تر T-Norm استفاده کنیم.

مجموعه فازی B، تصویر مجموعه فازی بدست آمده روی محور Y است.

$$\mu_B(y) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_R(x,y)]\} = \vee_x [\mu_A(x) \wedge \mu_R(x,y)] \qquad (۵-۳)$$

این رابطه، ترکیب ماکزیمم مینیمم دو رابطه ماتریسی است و معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شود،

$$B = A \circ R \qquad (۵-۴)$$

که در آن علامت $\circ$ به معنای اپراتور ترکیب است.

با استفاده از قاعده استنتاج ترکیبی می‌توانیم روش استنتاج را بر مبنای قواعد اگر-آنگاه فازی سازمان دهیم. این دستورالعمل استنتاج را معمولاً **استنتاج فازی** می‌نامند. آنچه در روابط (۵-۱) تا (۵-۴) بیان شده بیان ریاضی استنتاج فازی زیر است،

مشاهده	x متعلق به مجموعه فازی A است.
قانون	اگر x متعلق به A باشد آنگاه y متعلق به مجموعه فازی B است.
نتیجه	y متعلق به مجموعه فازی B است.

در روابط بالا، مجموعه فازی A با $\mu_A(x)$، قانون با مجموعه فازی دو بُعدی $R = A \rightarrow B$ که تابع عضویت آن $\mu_R(x,y)$ است، و مجموعه فازی نتیجه B با تابع عضویت $\mu_B(y)$ مشخص شده‌اند.

$$\begin{gathered} B = A \circ R = A \circ (A \rightarrow B) = (A \rightarrow B) \circ A \\ \mu_B(y) = \max\{\min[\mu_R(x,y), \mu_A(x)]\} \end{gathered} \tag{۵-۵}$$

$$\mu_B(y) = \mathrm{Sn}\left[\mathrm{Tn}\left(\mu_R(x,y), \mu_A(x)\right)\right] \tag{۵-۶}$$

۵-۳-۱- قانون استنتاج تقریبی

دیدیم که استنتاج فازی به صورت زیر بیان می‌شود،

گزاره صغری	مشاهده	x متعلق به مجموعه فازی A' است.
گزاره کبری	قانون	اگر x متعلق به مجموعه فازی A باشد، آنگاه y متعلق به مجموعه فازی B است.
	نتیجه	y متعلق به مجموعه فازی B' است.

اگر $\mu_R(x,y)$ مشخص‌کننده یک رابطه فازی شرطی در فضای حاصل‌ضرب $X \times Y$ و $\mu_{A'}(x)$ مشاهده مجموعه فازی A' در فضای مرجع X باشد، آنگاه استنتاج تقریبی مجموعه فازی B' در فضای مرجع Y با تابع عضویت $\mu_{B'}(x)$ براساس قانون قیاس اقترانی عمومیت‌یافته GMP به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\mu_{B'}(y) = \mathrm{Sn}\left[\mathrm{Tn}\left(\mu_R(x,y), \mu_{A'}(x)\right)\right] \tag{۵-۷}$$

برای همه مقادیر $y \in Y$، $x \in X$ عبارت‌های Tn، Sn نشانگر T-Normها، S-Normهای گوناگونی هستند، که با قرار دادن آن‌ها در رابطه بالا، قواعد استنتاج تقریبی متفاوتی را می‌توان به دست آورد.

در رابطه (۵-۷)، $\mu_R(x,y)$ بیان‌کننده قانون «اگر x مساوی A باشد، آنگاه y مساوی B است.» می‌باشد، که با مجموعه فازی دو بُعدی مشخص شده است. همچنین عبارت $\mu_{A'}(x)$ توسعه سیلندری مجموعه فازی A' است. عبارت $\mathrm{Tn}\left(\mu_R(x,y), \mu_{A'}(x)\right)$ اشتراک این دو مجموعه فازی دو بُعدی است، که خود یک مجموعه فازی دو بُعدی است. بالاخره، عبارت $\mathrm{Sn}\left[\mathrm{Tn}\left(\mu_R(x,y), \mu_{A'}(x)\right)\right]$ تصویر مجموعه فازی دو بُعدی در y است، که همان $\mu_{B'}(y)$ را ایجاد می‌کند.

رابطه (۵-۷) همان رابطه (۵-۶) است، که به جای $\mu_A(x)$ در استنتاج تقریبی $\mu_{A'}(x)$ قرارمی‌گیرد. اگر به جای S-Norm و T-Norm به‌ترتیب max و min قرار دهیم، یعنی از S-Norm نوع ماکزیمم و از T-Norm نوع مینیمم استفاده کنیم، **قانون استنتاج تقریبی زاده**[۱] حاصل می‌شود.

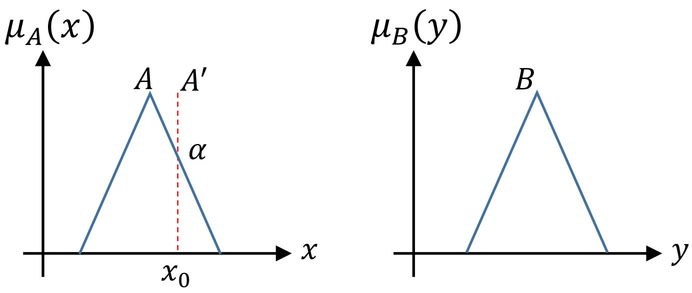
$$\mu_{B'}(y) = \sup_{for\ all\ x\in X, y\in Y} \left[\min\left(\mu_R(x,y), \mu_{A'}(x)\right)\right] \quad (۵-۸)$$

اگر به جای S-Norm، T-Norm به ترتیب max، dot قرار دهیم (یعنی در اینجا هم S-Norm، قانون استنتاج زاده یعنی ماکزیمم یا سوپریمم است. ولی برای T-Norm به جای min از اپراتور ضرب استفاده شده است). در این صورت قانون استنتاج تقریبی max-Dot نتیجه می‌شود.

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{for\ all\ x\in X, y\in Y} \left[\mu_R(x,y) \times \mu_{A'}(x)\right] \quad (۵-۹)$$

۵-۳-۲- تفسیر استنتاج‌های max-min و max-dot از روش ترسیمی

فرض می‌کنیم قانون فازی به صورت « اگر x برابر A باشد، آنگاه y برابر B است» بیان شود، که توابع فازی A و B به صورت مثلثی و A' یا مشاهده به صورت یک مجموعه فازی یگانه طبق شکل زیر بیان شده باشد. هدف یافتن استنتاج‌های B' در هر یک دو روش max-min و max-dot است.



شکل ۵-۳ : توابع عضویت A و B

حالت اول: بررسی استنتاج تقریبی max-min

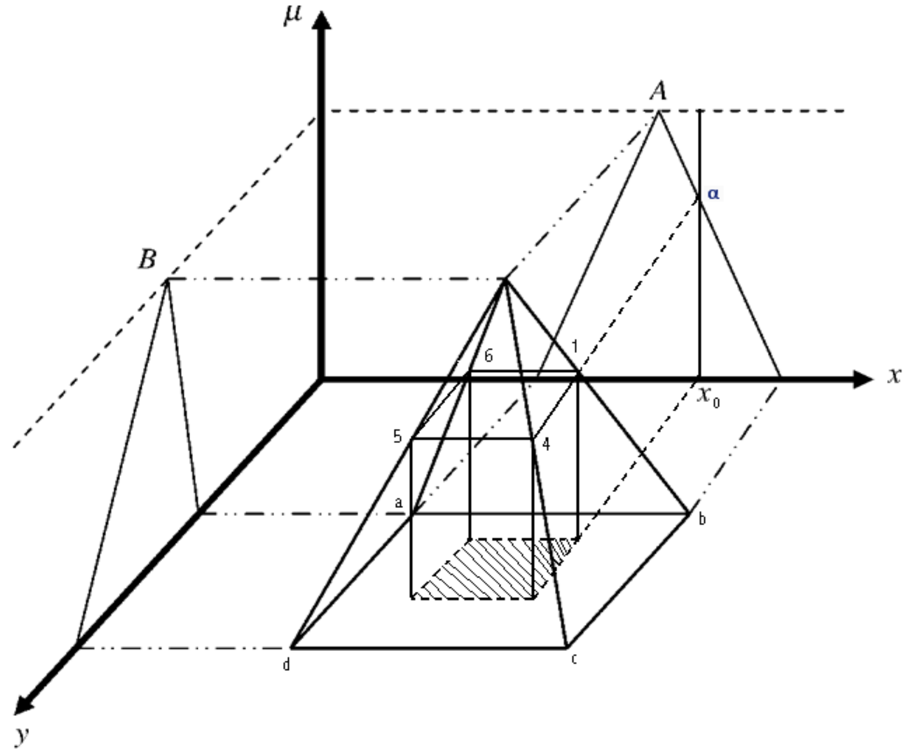
$$\mu_{B'}(y) = \sup\left[\min\left(\mu_R(x,y), \mu_{A'}(x)\right)\right] \quad (۵-۱۰)$$

توجه شود که در این رابطه $\mu_R(x,y)$ یک مجموعه فازی دو بُعدی که در فضای سه بُعدی با هرم کامل abcdo شکل ۵-۴ نمایش داده شده است و معادل قانون « اگر x، A باشد، آنگاه y، B است» می‌باشد. در این مورد مجموعه فازی A' مجموعه یگانه فازی در نظر گرفته شده و توسعه سیلندری آن یک صفحه، موازی صفحه μy می‌شود (شکل ۵-۴). از طرفی اثر $\mu_{A'}(x)$ در رابطه بالا با طول ax_0 در شکل ۵-۴

---

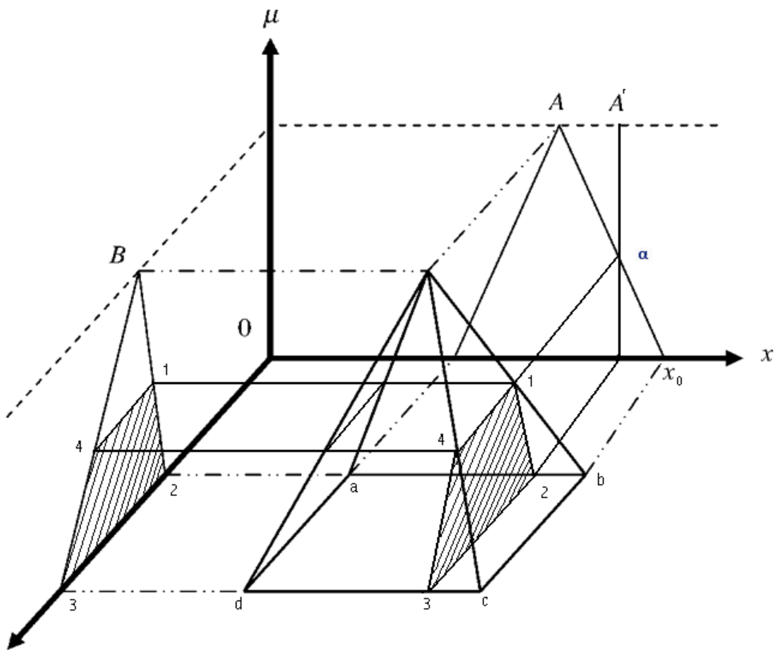
[۱] Zadeh Approximate Reasonling

مشخص شده است. علت آنکه قسمت داخل [.] در رابطه بالا برابر هرم ناقص شکل ۵-۵ می‌شود را می‌توان به صورت زیر توضیح داد. همان‌طورکه در شکل ۵-۵ نشان داده شده به ازای هر x و y دلخواه می‌توانیم عبارت $\min\left(\mu_R(x,y), ax_0\right)$ را به دست آوریم. بنابراین برای همه نقاط داخلی مربع مستطیل abcd در صفحه (x,y) باید بین مقادیر مربوط به ارتفاع نظیر هرم در نقاط مختلف و مقدار ax_0 مینیمم بگیریم. یعنی در تمامی نقاط abcd، هر جایی که ارتفاع هرم از ax_0 کوچکتر است مینیمم عبارت بالا همین مقدار است و هر جایی از صفحه abcd که ارتفاع هرم از ax_0 بزرگ‌تر است مینیمم عبارت بالا همان ax_0 است. با توجه به شکل زیر نقاطی از صفحه abcd که داخل منطقه هاشورخورده قرار دارند، ارتفاع هرم از ax_0 بیشتر است. بنابراین عبارت $\min\left(\mu_R(x,y), ax_0\right)$ در این نقاط محدود به ax_0 می‌شود.

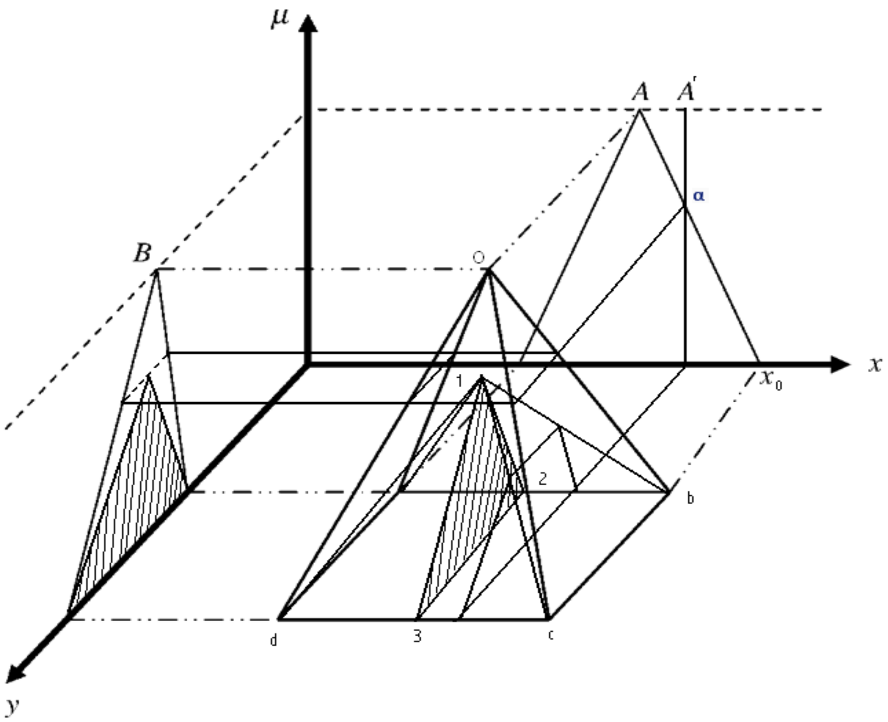


شکل ۵-۴ : توابع عضویت A و B و رابطه R

نتیجه آنکه عبارت مذکور هرم ناقص می‌شود که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است. بدیهی است سوپریمم این هرم ناقص به صورت سطح هاشور خورده 4-3-2-1 از شکل ۵-۵ به صورت سطح هاشورخورده روی $\mu_B(y)$ نشان داده شده است (تقاطع صفحه‌ای که از x_0 موازی صفحه سمت چپ این هرم ناقص را قطع کند با هم ناقص می‌شود ذوزنقه 1-2-3-4 شکل ۵-۵). مشابه همین بحث را می‌توان برای حالت دوم یعنی استنتاج max-dot انجام داد و نتیجه در شکل ۵-۶ نشان داده شده است.



شکل ۵-۵ : نتیجه مشاهده A' با استفاده از قاعده استنتاج max-min



شکل ۵-۶ : نتیجه مشاهده A' با استفاده از قاعده استنتاج max-dot

فرض کنید مجموعه فازی A در x داده شده: پس $\mu_A(x)$ معلوم است. مجموعه فازی B در y داده شده: پس $\mu_B(y)$ معلوم است. اکنون می‌خواهیم نخست یک قانون فازی و سپس یک استنتاج فازی را بیان کنیم. فرض کنید قانون فازی زیر را درنظر بگیرید،

If A, **Then** B

این قانون فازی را به صورت زیر بیان می‌کنیم،

$$R: A \to B$$

R یک مجموعه فازی دو بُعدی است، که آن را **رابطه فازی** می‌نامیم.

اگر R یک **رابطه فازی ربطی**[1] باشد (که در کنترل فازی اغلب چنین است) در این صورت تابع عضویت R به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \text{ Tn } \mu_B(y) \tag{۵-۱۱}$$

اگر R یک **رابطه فازی فصلی**[2] باشد، در این صورت تابع عضویت R به صورت زیر در می‌آید،

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \text{ Sn } \mu_B(y) \tag{۵-۱۲}$$

با داشتن $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$ می‌توان به صورت ترسیمی نیز $\mu_R(x, y)$ را رسم کرد. مثلاً شکل ۵-۲ با داشتن مجموعه فازی دو بعدی $R: A \to B$ و مجموعه فازی A در x، می‌خواهیم مجموعه فازی B در y را تعیین کنیم و بدست آوریم. این عملیات با معادلات (۵-۱) تا (۵-۵) نشان داده شده است.

با داشتن رابطه دو بُعدی $R: A \to B$ و مجموعه فازی A' در x می‌خواهیم مجموعه فازی B' در Y را بدست آوریم. روابط مربوطه در معادلات (۵-۷) تا (۵-۹) داده شده‌اند.

۵-۴- استنتاج تقریبی در حالت‌های مختلف

با استفاده از قاعده استنتاج ترکیبی که قبلاً بیان شد می‌توان روش و مراحل استنتاج تقریبی را برای تعیین B' بیان و تعریف کنیم. در اینجا می‌خواهیم برای حالت‌های مختلفی که شامل یک مشاهده و یک قاعده، چند مشاهده و یک قاعده و بالاخره چند مشاهده و چند قاعده می‌شود استنتاج را بررسی کنیم.

دیدیم که اگر A و B مجموعه‌های فازی در X و Y باشند، فرض می‌کنیم که قانون فازی $A \to B$ با رابطه فازی R در $X \times Y$ نمایش داده شود. فرض می‌کنیم A' نیز یک مجموعه فازی در x است. در این صورت مجموعه فازی B' به صورت زیر به دست می‌آید،

مشاهده	x مساوی A' است.
قانون	اگر x مساوی A باشد، آنگاه y مساوی B است.
نتیجه	y مساوی B' است.

[1] Fuzzy Conjunction

[2] Fuzzy Disjunction

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B) \tag{۱۳-۵}$$

$$\mu_{B'}(y) = \mathrm{Sn}\left[\,\mathrm{Tn}\left(\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y)\right)\right] \tag{۱۴-۵}$$

$$\mu_{B'}(y) = \vee_x \left[\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x,y)\right] \tag{۱۵-۵}$$

حالا به بررسی حالت‌های مختلف می‌پردازیم. در کنترل اغلب از رابطه فازی ربطی یعنی T-Norm و از بین T-Normها از نوع مینیمم برای $A \rightarrow B$ استفاده می‌شود (قانون فازی ممدانی). ما در این جا حالت‌های یک مشاهده و یک قانون، چند مشاهده و یک قانون و بالاخره حالت چند مشاهده و چند قانون را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵-۴-۱- حالت یکم: یک مشاهده و یک قانون

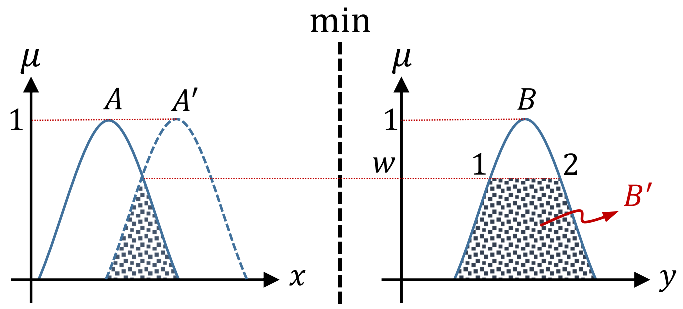
ساده‌ترین حالت استنتاج مربوط به حالتی است که یک مشاهده و یک قانون داریم. در این صورت نتیجه‌گیری طبق معادله (۵-۱۵) و با ساده کردن آن به صورت زیر درمی‌آید،

$$\mu_{B'}(y) = \left[\vee_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right)\right] \wedge \mu_B(x,y) \tag{۱۶-۵}$$

$$\mu_{B'}(y) = w \wedge \mu_B(x,y) \tag{۱۷-۵}$$

که در آن w ماکزیمم عبارت $\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)$ است. یعنی یک عدد است که مقدارش بین صفر و یک است.

$$w = \max\left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right) = \vee_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right) \tag{۱۸-۵}$$



شکل ۵-۷ : تفسیر ترسیمی GMP برای حالت یک مشاهده و یک قانون

شکل بالا تفسیر ترسیمی GMP را نشان می‌دهد، که در آن از استنتاج ممدانی و مرکب max-min استفاده شده است. در این شکل $w = \max\left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right)$؛ یعنی w مقدار ماکزیمم منطقه هاشورخورده در تقاطع A و A' است. همچنین $\mu_{B'}(y) = w \wedge \mu_B(y)$؛ یعنی مینیمم w و B. بنابراین باید بین $\mu_B(y)$ و w در همه منطقه تغییرات Y مینیمم‌گیری شود. هر جا w از B کوچکتر است، پاسخ

همان w است (در فاصله بین نقاط 1 و 2 از شکل سمت راست بالا) و هر جا B از w کوچک‌تر است، پاسخ همان B است (نقاط قبل از نقطه 1 و بعد از نقطه 2 در شکل ۵-۷ راست).

۵-۴-۲- حالت دوم: چند مشاهده، یک قانون

قانون اگر آنگاه با دو مشاهده به صورت زیر بیان می‌شود،

اگر x مساوی A و y مساوی B باشد آنگاه z مساوی C است.

If x is A **AND** y is B **THEN** $z = C$

قیاس اقترانی عمومیت یافته (GMP) در این حالت به صورت زیر درمی‌آید،

مشاهده x مساوی A' و y مساوی B' است.

قانون   اگر x مساوی A و $A \times B \to C$ و y مساوی B باشد، آنگاه $z = C$ است.

نتیجه z مساوی C' است.

رابطه فازی در قانون را می‌توان چنین بیان کرد،

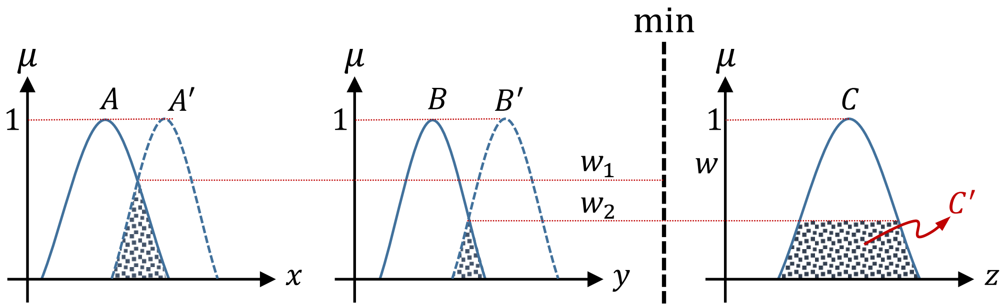
قانون فازی: این رابطه فازی را می‌توان با یک رابطه فازی سه بُعدی R_m نشان داد، که براساس فازی ممدانی به صورت زیر به دست می‌آید (تمرین برای دانشجویان که معادله زیر را ثابت کنند).

$$R_m(A,B,C) = (A \times B) \times C = \int_{X \times Y \times Z} \frac{\mu_A(x)\,\lambda\mu_B(y)\,\lambda\mu_C(z)}{(x,y,z)}$$

استنتاج فازی: برای بدست آوردن C' به موارد زیر توجه می‌کنیم:

معادله (۵-۱۳) یعنی $B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B)$ در اینجا تغییر یافته است. به جای A' داریم، $A' \times B'$ و به جای $R = A \to B$ داریم، R_m یعنی $R_m = A \times B \to C$ و به جای B' داریم، C'. پس،

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \to C)$$



شکل ۵-۸ : تفسیر ترسیمی GMP برای حالت چند مشاهده و یک قانون

رابطه C' را باز می‌نویسیم،

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \to C)$$
$$\mu_{C'}(x) = \vee_{x,y} [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)]$$

با جابه جایی نتیجه می‌شود (اثبات به عهده خواننده)،

$$\mu_{C'}(x) = \vee_{x,y} \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\} \wedge \mu_C(z)$$

در این رابطه نیز با جابه جایی نتیجه می‌شود (اثبات به عهده خواننده)،

$$\mu_{C'}(x) = \{\vee_x [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)]\} \wedge \{\vee_y [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)]\} \wedge \mu_C(z)$$

عبارت‌های اول و دوم نشان داده شده در سمت راست طبق رابطه (۵-۱۸) مساوی با w_1, w_2 هستند.

بنابراین داریم،

$$\mu_{C'}(x) = (w_1 \wedge w_2) \wedge \mu_C(z) \qquad (۵\text{-}۱۹)$$

در این رابطه w_1، ماکزیمم $A \cap A'$ یعنی ماکزیمم اشتراک A و A' و w_2، ماکزیمم $B \cap B'$ است. به‌طورکلی w_1 درجه سازگاری یا میزان نزدیکی A' به A، w_2 درجه سازگاری یا میزان نزدیکی B' به B را نشان می‌دهد شکل ۵-۸.

رابطه (۵-۱۹) را می‌توان چنین نوشت،

$$\mu_{C'}(x) = w \wedge \mu_C(z) \qquad (۵\text{-}۲۰)$$

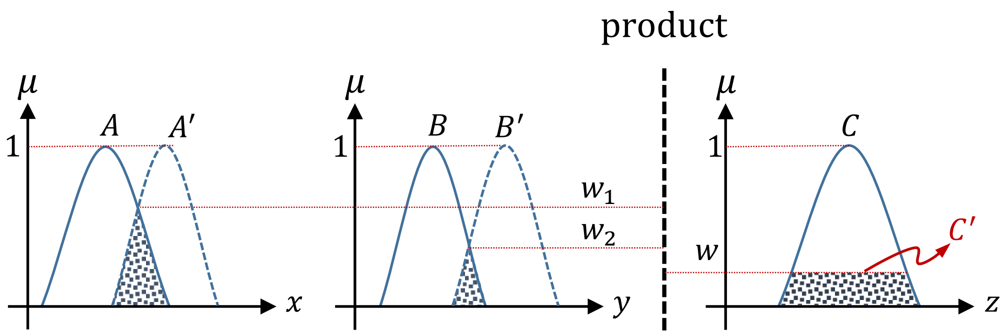
که در آن،

$$w = w_1 \wedge w_2 \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

در این حالت که دو مشاهده یا دو مقدمه داریم؛ چون دو مقدمه به وسیله **«و»** به هم مربوط شده‌اند. پس $w_1 \wedge w_2$، مینیمم بین دو مقدار w_1 و w_2 است. این مقدار مینیمم را که با w نشان داده‌ایم **قدرت آتش**[1] قانون فازی نامند. این کمیت نشان می‌دهد که مشاهده قانون تا چه اندازه محقق شده است. بدیهی است، علت انتخاب w به عنوان مینیمم دو مقدار w_1 و w_2، فرض آن است که در رابطه "اگر x مساوی A و y مساوی B باشد، آنگاه ... " عبارت **«و»** را به عنوان T-norm و از بین T-norm ها، مینیمم را برگزیده‌ایم (شکل ۵-۸). بنابراین، اگر مثلاً T-norm حاصل‌ضرب انتخاب گردد $w = w_1 \cdot w_2$ باید محاسبه شود. نمایش ترسیمی این حالت در شکل ۵-۹ دیده می‌شود، که در آن تابع عضویت مجموعه فازی

[1] Firing Strength

استنتاج شده، $\mu_{B'}(y)$، برابر است با تابع عضویت C هنگامی که این تابع عضویت به وسیله قدرت آتش $w = w_1 \wedge w_2$ محدود شده باشد.



شکل ۵-۹ : تفسیر ترسیمی GMP برای حالت چند مشاهده و یک قانون

C' را می‌توان از رابطه زیر نیز محاسبه و تعیین کرد.

$$C' = (A' \times B') \circ (A \times B \to C) \qquad (۲۲\text{-}۵)$$

مثال ۵-۱ : ثابت کنید که این رابطه به صورت زیر در می‌آید.

$$C' = [A' \circ (A \to C)] \cap [B' \circ (B \to C)] \qquad (۲۳\text{-}۵)$$

اثبات: با توجه به خواص اپراتورهای T-norm و S-norm، رابطه (۵-۲۲) را می‌توان چنین نوشت،

$$\begin{aligned}\mu_{C'}(z) &= \vee_{x,y}\, [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)] \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\ &= \vee_x\, [\mu_{A'}(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \wedge \vee_y\, [\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z)] \\ &= \mu_{A'}(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_C(z) \wedge \mu_{B' \circ (B \to C)}(z) \\ &= \mu_{A' \circ (A \to C)}(z) \wedge \mu_{B' \circ (B \to C)}(z)\end{aligned}$$

روابط (۵-۱۹) و (۵-۲۳) دو راه حل برای تعیین $\mu_{C'}(z)$ است وقتی دو مشاهده و یک قانون وجود دارد.

بطور خلاصه رابطه (۵-۱۹) می‌گوید،

الف: مینیمم A و A' یا $A \cap A'$ را تعیین و ماکزیمم این کمیت فازی را w_1 می‌نامیم (بخش هاشورخورده تقاطع A و A' در شکل ۵-۸).

ب: مینیمم B و B' یا $B \cap B'$ را تعیین و ماکزیمم این مجموعه فازی را w_2 می‌نامیم (بخش هاشورخورده تقاطع B و B' در شکل ۵-۸).

ج: بین w_1 و w_2 مینیمم را انتخاب می‌کنیم. $w_1 \wedge w_2$ (بین این دو عضویت، w_2 کمتر است. پس w_2 جواب است.

د: از w_2 خطی رسم می‌کنیم که $\mu_C(z)$ را قطع کند، C' حاصل شود (بخش هاشورخورده C' در شکل ۵-۸ راست.

رابطه (۵-۲۳) همین نتیجه را به صورت دیگری می‌دهد که نحوه انجام آن به صورت زیر است،

۱) $A' \circ (A \to C)$ استنتاج فازی است وقتی یک مشاهده x_n و یک قانون داریم در z برای تعیین آن طبق روش یک مشاهده و یک قانون عمل می‌کنیم.

$$C_1' = A' \circ (A \to C)$$
$$\mu_{C_1'}(z) = \left[\vee_x \left(\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)\right)\right] \wedge \mu_C(z) = w_1 \wedge \mu_C(z)$$

۲) به همین ترتیب $B' \circ (B \to C)$ استنتاج فازی است، وقتی یک مشاهده (w_1) در y و یک قانون در z داریم. برای تعیین آن،

$$C_2' = B' \circ (B \to C)$$
$$\mu_{C_2'}(z) = \left[\vee_y \left(\mu_{B'}(y) \wedge \mu_B(y)\right)\right] \wedge \mu_C(z) = w_2 \wedge \mu_C(z)$$

۳) اکنون بین C_1' و C_2' اشتراک می‌گیریم تا C' حاصل شود، $C' = C_1' \wedge C_2'$.

به‌طورکلی فرآیند استدلال تقریبی یا استنتاج در چهار گام انجام می‌شود،

۱- **درجه رقابت**: مشاهده‌ها را با مقدمه قوانین مقایسه کنید تا درجه رقابت تابع عضویت هر مشاهده را بدست آورید.

۲- **قدرت آتش:** درجات رقابت توابع عضویت مشاهده را در هر قانون با استفاده از اپراتورهای AND و OR با هم ترکیب کنید تا قدرت آتش یا درجه ارضای مشاهده قانون را بدست آورید.

۳- توابع عضویت بدست آمده را بررسی کیفی کنید.

۴-قدرت آتش را به تالی هر قانون اعمال کنید، تا تابع عضویت استنتاج شده را بدست آورید.

برای بررسی روش استنتاج به ترتیب زیر عمل می‌کنیم،

فرض می‌کنیم $R_1 = A_1 \times B_1 \to C_1$، $R_2 = A_2 \times B_2 \to C_2$. چون اپراتور ترکیب max-min روی اپراتور ∪ (اجتماع) توزیع می‌شود، پس داریم،

$$C' = (A' \times B') \circ (R_1 \cup R_2) = [(A' \times B') \circ R_1] \cup [(A' \times B') \circ R_2] = C_1' \cup C_2'$$

که در آن C_1' مجموعه فازی استنتاج شده در قانون اول، C_2' مجموعه فازی استنتاج شده از قانون دوم است.

اگر به جای قوانین فازی گفته شده که مشاهده‌ها با علامت «و» به هم مربوط می‌شدند، علامت «یا» داشته باشیم، مثلاً قانون فازی به صورت زیر باشد،

اگر x، A یا y، B باشد، آنگاه z، C است.

در این صورت قدرت آتش با تعیین ماکزیمم بین مشاهده‌ها حاصل می‌شود. بنابراین قانون فازی بالا معادل اجتماع دو قانون زیر است،

اگر x، A باشد، آنگاه z، C است.

اگر y، B باشد، آنگاه z، C است.

۵-۴-۳- حالت سوم: چند مشاهده و چند قانون

درحالتی‌که چند قانون داشته باشیم، استنتاج کلی بدست آمده، معادل اجتماع استنتاج‌های بدست آمده در هر کدام از قوانین است.

مشاهده: x، A' و y، B' است.

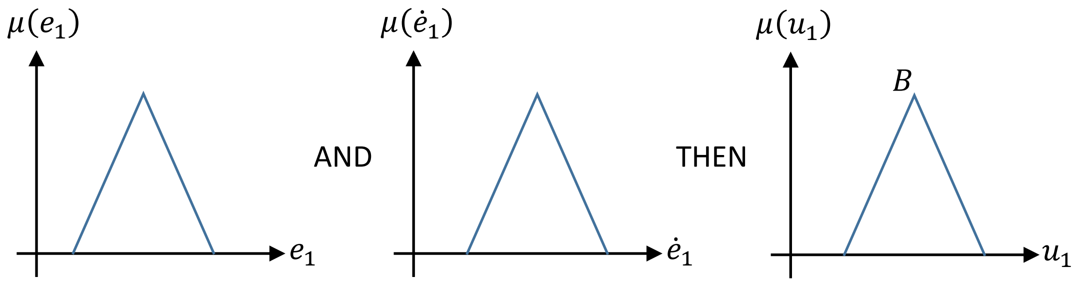
قانون ۱ : اگر x، A_1 و y، B_1 باشد، آنگاه z، C_1 است.

قانون ۲ : اگر x، A_2 و y، B_2 باشد، آنگاه z، C_2 است.

نتیجه : z، C' است.

فرض کنیم قانون فازی به صورت زیر باشد،

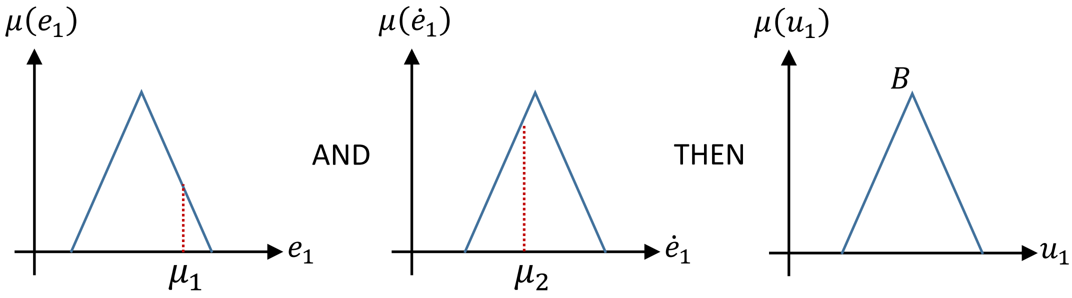
If e is e_1 **AND** $\dot{e}$ is $\dot{e}_1$, **Then** U is U_1



شکل ۵-۱۰ : قانون فازی

و حالا مشاهده یا ورودی‌های واقعی به کنترل‌کننده فازی یا صغری استنتاج آن است که e_1 مساوی μ_1، و $\dot{e}_1$ مساوی μ_2 است.

با توجه به اپراتور AND زاده بین μ_1 و μ_2 باید مینیمم یا کوچک‌تر را انتخاب کنیم، که در اینجا μ_1 کوچک‌تر است. مثلاً اگر $\mu_1 = 0.4$ و $\mu_2 = 0.9$ باشد $\mu = \min\,(0.9,0.4)$ می‌شود. در ادامه به استنتاج بپردازیم.



شکل ۵-۱۱ : اعمال مشاهده به صغرای قانون فازی

چنانچه در قانون ۱ برای اپراتور AND به جای min از حاصل‌ضرب استفاده کنیم، در این صورت $\mu = 0.9 \times 0.4 = 0.36$ حاصل می‌شود. بدیهی است به جای AND در سایر انواع T-Norm نیز می‌توان استفاده کرد؛ اما عمدتاً از همین دو نوع در سیستم‌های کنترلی استفاده می‌شود.

حالا با این μ برای تعیین و بدست آوردن استنتاج، براساس استنتاج‌های چهارگانه‌ای که مطرح می‌شود، به محاسبه نتیجه می‌پردازیم.

چهار نوع استنتاج مشهور که در کنترل فازی به طور گسترده استفاده می‌شوند عبارتند از،

۱) Zadeh/Mamdani Inference : $\min(\mu, \mu_u) \;\; for\ all\ u$

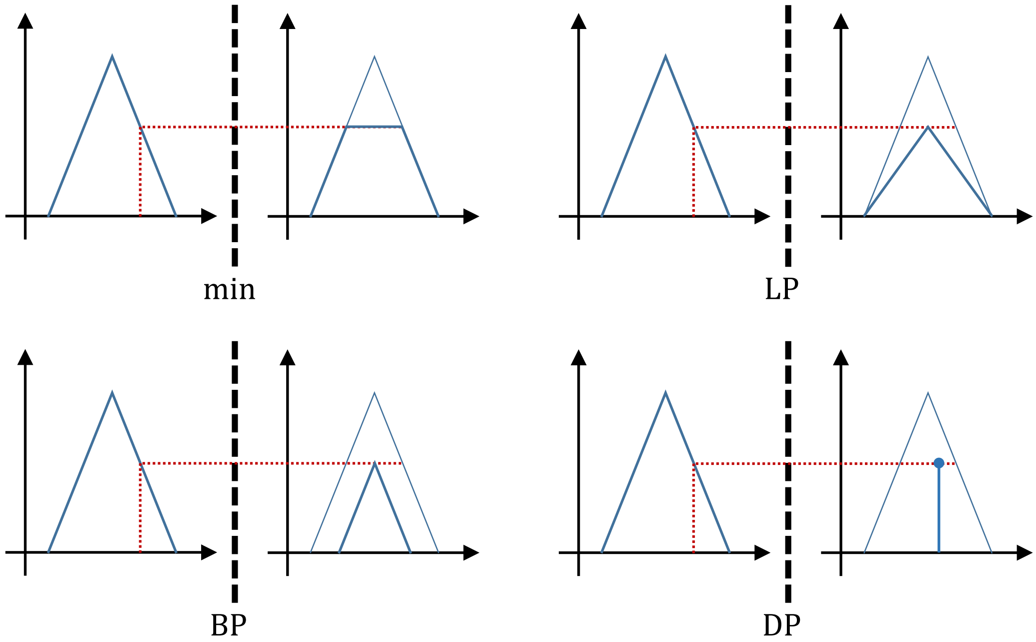
این μ همان μ ای است که با توجه به قاعده AND از بین μ های مقدمه استنتاج بدست آمده است.

۲) Larsen Product Inference : $\mu \times \mu_u \; for\ all\ u$

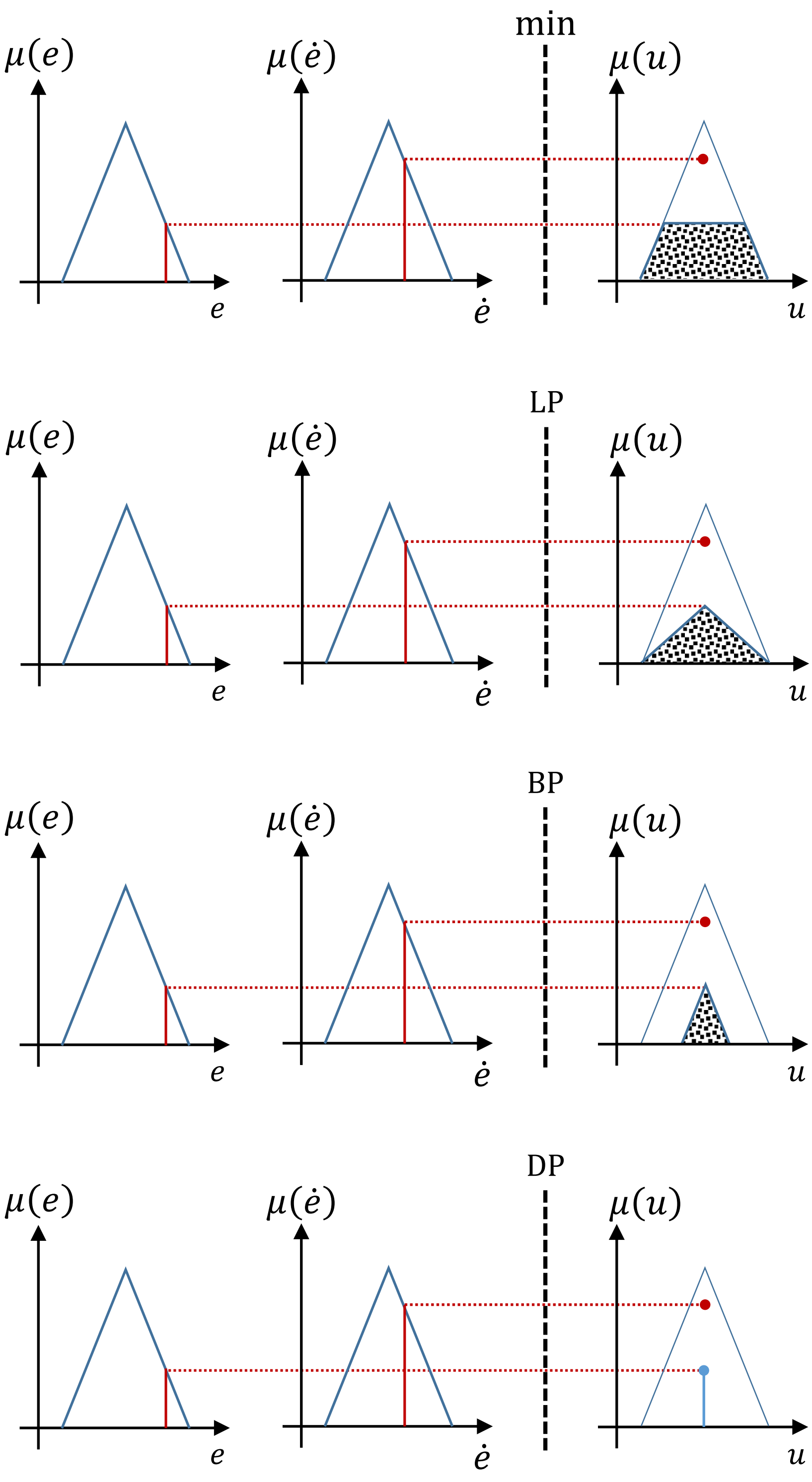
۳) Bounded Product Inference : $\max(\mu + \mu_u - 1, 0) \;\; for\ all\ u$

۴) Drastic Product Inference : $\begin{cases} \mu & if \quad \mu_u = 1 \\ \mu_u & if \quad \mu = 1 \\ 0 & if \quad \mu_u < 1, \mu < 1 \end{cases}$

توجه شود که مثلاً اولین قانون استنتاج یعنی (۱) همان max-min زاده و (۲) همان max-dot است، که قبلاً توضیح داده شد. همه این قوانین استنتاج همان T-Norm هایی هستند، که قبلاً توضیح داده شده‌اند. نتایج بدست آمده در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است.



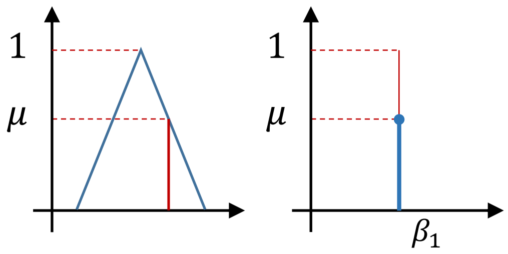
شکل ۵-۱۲ : چهار نوع استنتاج مشهور



شکل ۵-۱۳ : استنتاج با استفاده ازچهار نوع مشهور مکانیزم استنتاج الف) مینیمم ب) حاصل‌ضرب ج) حاصل‌ضرب محدود د) حاصل‌ضرب شدید.

الف. استنتاج ممدانی وقتی نتیجه‌های قانون، مجموعه‌های فازی یگانه هستند.

فرض کنیم از قسمت مقدمه قانون و براساس نوع AND بکار رفته μ مربوطه حاصل شده است. حالا می‌خواهیم ببینیم اگر در قاعده فازی ممدانی رابطه (۴) بکار رفته و نتیجه‌های قانون، مجموعه‌های فازی یگانه هستند، استنتاج چه خواهد شد.



شکل ۵-۱۴ : اعمال قدرت آتش به قسمت نتیجه قانون (چون قسمت نتیجه قانون یگانه است، استنتاج حاصله برای هر چهار روش استنتاج مذکور یکسان خواهد بود)

برای کنترل‌کننده‌های فازی ممدانی که در نتیجه قانون مجموعه‌های فازی یگانه بکار رفته استنتاج حاصله برای هر چهار روش استنتاج مذکور یکسان خواهد بود و در شکل بالا نشان داده شده است. زیرا،

۱) Zadeh/Mamdani Inference : $\min(\mu, 1)\ \ for\ all\ u$

۲) Larsen Product Inference : $\mu \times 1 = \mu\ for\ all\ u$

۳) Bounded Product Inference : $\max(\mu + \mu_u - 1/5) = \mu\ for\ all\ u$

۴) Drastic Product Inference : $\mu\ if\ \mu_u = 1 \Longrightarrow \mu$

ب. سیستم استنتاج فازی ممدانی

شکل ۵-۱۵ نحوه تعیین خروجی z را براساس سیستم استنتاج فازی ممدانی[1] با دو ورودی و دو قاعده فازی بیان می‌کند و نشان می‌دهد. در این شکل داریم،

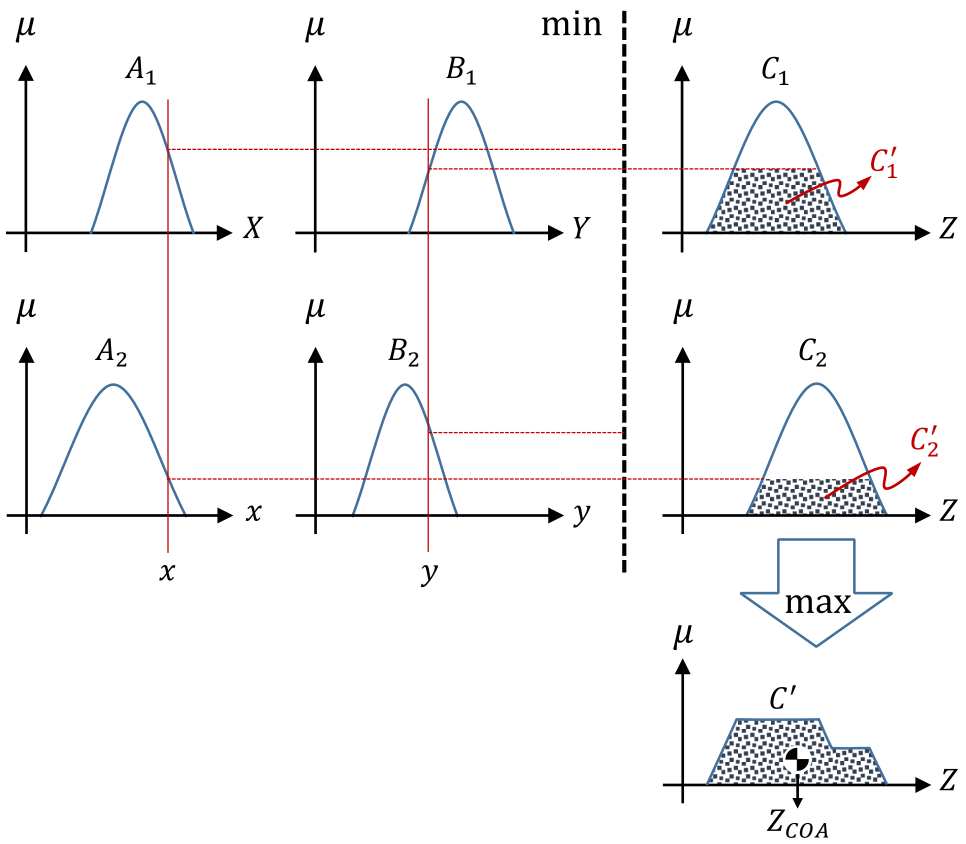
If x is A_1 **AND** Y is B_1, **Then** z is C_1

If x is A_2 **AND** Y is B_2, **Then** z is C_2

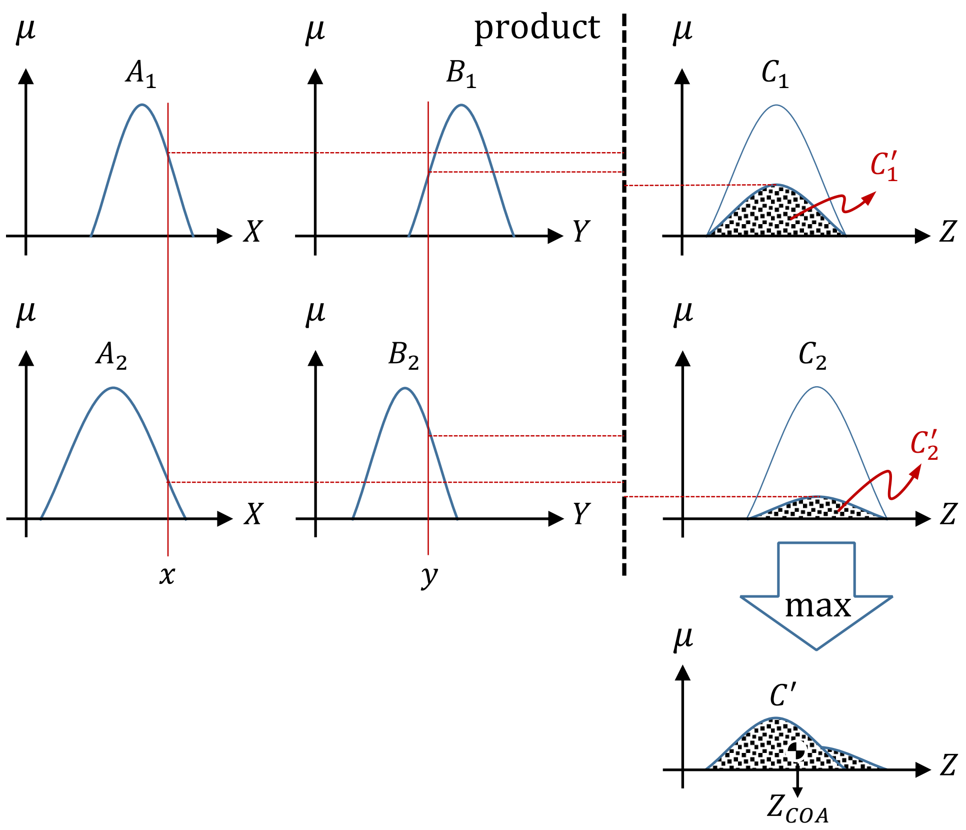
شکل ۵-۱۵ نحوه استنتاج را براساس قواعد فازی بالا و برای دو ورودی صریح x و y نشان داده است.

اگر برای اپراتور T-Norm از ضرب جبری، برای اپراتور S-Norm از ماکزیمم استفاده کنیم و به جای استنتاج max-min از استنتاج max-dot بهره گیریم، شکل ۵-۱۶ حاصل خواهد شد.

[1] Mamdani Fuzzy Inference System



شکل ۵-۱۵ : نحوه تعیین خروجی z براساس سیستم استنتاج فازی ممدانی با دو ورودی و دو قانون فازی



شکل ۵-۱۶ : استفاده از ماکزیمم و حاصل‌ضرب برای اپراتورهای S-Nnorm و T-Norm

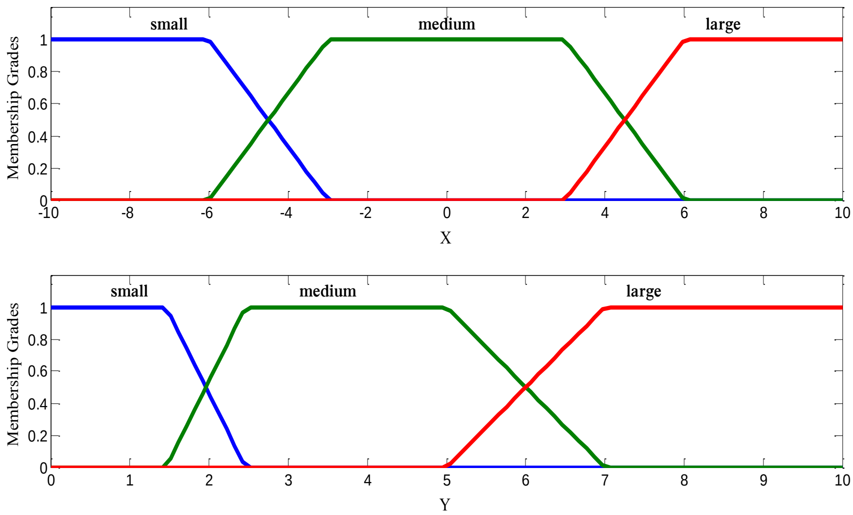
مثال ۵-۲ : مدل فازی ممدانی در حالت یک ورودی - یک خروجی

یک مدل فازی ممدانی با سه قانون به صورت زیر در می‌آید،

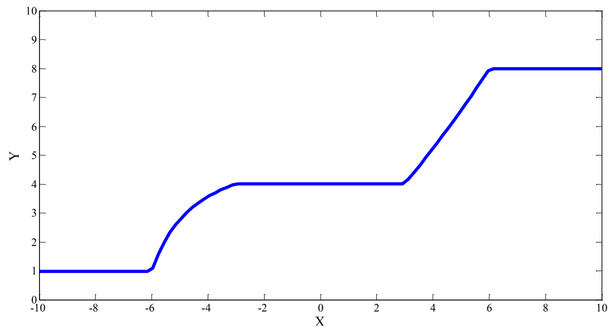
If x is $small$, **Then** Y is $small$
If x is $medium$, **Then** Y is $Medium$
If x is $large$, **Then** Y is $large$

در شکل ۵-۱۷، توابع عضویت X و Y رسم شده‌اند. محدوده تغییرات ورودی x، $[-10,10]$ و محدوده تغییرات خروجی Y، $[0,10]$ در نظر گرفته شده است.

با استنتاج max-min و غیر فازی ساز مرکز سطح، منحنی کلی خروجی بر حسب ورودی به صورت شکل ۵-۱۸ خواهد بود. همانطورکه ملاحظه می‌شود، متغیر خروجی Y هرگز به مقدار بیشینه خود 10 و مقدار کمینه خود 0 نمی‌رسد؛ بلکه مقادیر بیشینه و کمینه قابل دسترسی خروجی سیستم عبارتند از مرکز سطح توابع عضویت $Large$ در خروجی (یعنی سمت راست‌ترین تابع عضویت در خروجی Y) و $small$ در خروجی (یعنی سمت چپ‌ترین تابع عضویت در خروجی Y).



شکل ۵-۱۷ : توابع عضویت X و Y

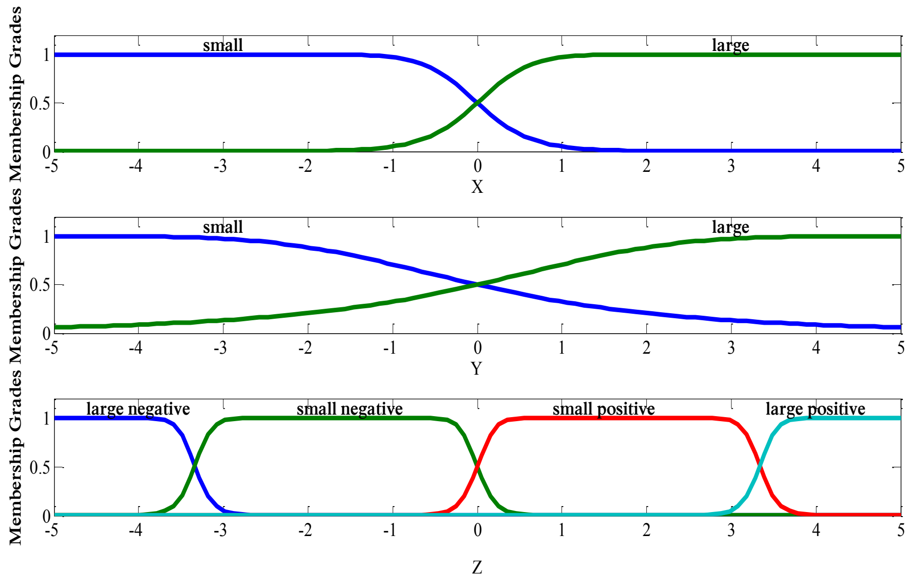


شکل ۵-۱۸ : خروجی بر حسب ورودی

مثال ۵-۳ : مدل فازی ممدانی با دو ورودی و یک خروجی

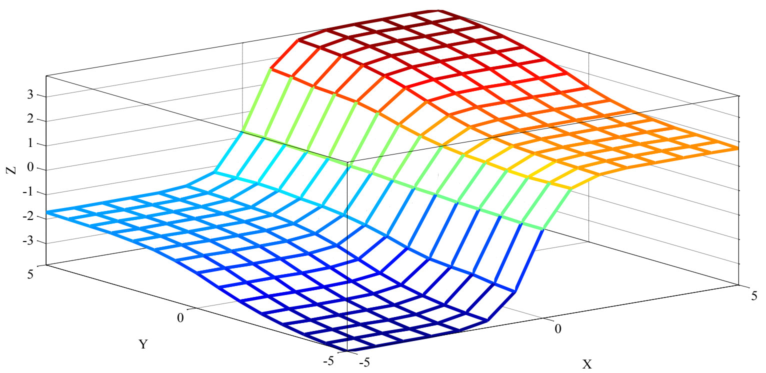
If X is $small$ AND Y is $small$ Then z is $Neg. large$
If X is $small$ AND Y is $large$ Then z is $Neg. small$
If X is $large$ AND Y is $small$ Then z is $Pos. small$
If X is $large$ AND Y is $large$ Then z is $Pos. large$

شکل ۵-۱۹ توابع عضویت X و Y و خروجی z را نشان داده است که در همه محدوده تغییرات $[-5,5]$ است.



شکل ۵-۱۹ : توابع عضویت ورودی و خروجی

با قانون استنتاج max-min و غیر فازی‌کننده مرکز سطح، منحنی z بر حسب X و Y در **شکل ۵-۲۰** نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۰ : منحنی خروجی بر حسب ورودی‌ها

۵-۴-۴- ج. مدل فازی سوگینو

مدل فازی سوگینو (یا مدل فازی TSK) به وسیله Takagi، Sugeno و Kang در سال ۱۹۸۵ ارائه شد. مدل TSK روشی سیستماتیک برای ایجاد فازی از مجموعه داده‌های ورودی- خروجی در یک سیستم است. ساختار کلی قاعده فازی سوگینو به شکل زیر است،

اگر x مساوی A و y مساوی B باشد، آنگاه $z = f(x, y)$ است.

در این رابطه مجموعه‌های فازی، در مقدمه قانون است و $z = f(x, y)$ یک تابع صریح (غیر فازی)، در نتیجه قانون است.

معمولاً تابع $f(x, y)$ به صورت چند جمله‌ای از متغیرهای ورودی x و y است؛ اما، به‌طورکلی می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد؛ مشروط بر آنکه بیان‌کننده خروجی مدل سیستمی باشد، که ورودی‌های آن در مقدمه قانون ارائه شده است.

اگر تابع $f(x, y)$ چند جمله‌ای رسته یک باشد، سیستم استنتاج فازی بدست آمده را **مدل فازی رسته یک سوگینو** نامند.

اگر f مقدار ثابتی باشد، آن را **مدل فازی رسته صفر سوگینو** نامند. خروجی مدل فازی رسته صفر سوگینو تابع ملایمی از ورودی‌های مدل است؛ مشروط بر آنکه توابع عضویت کنار هم در مقدمه قانون دارای مناطق مشترک کافی باشند. به عبارت دیگر، داشتن مناطق مشترک در نتیجه قانون تأثیر چندانی در ملایم کردن خروجی ندارد؛ بلکه مناطق مشترک[۱] در مقدمه قانون است که رابطه ورودی خروجی را ملایم می‌کند.

در این مدل هر قانون یک خروجی صریح دارد و خروجی کل سیستم با دادن وزن به هر کدام از خروجی‌ها و میانگین‌گیری از آنها حاصل می‌شود. این روش زمان لازم برای محاسبه فرآیند غیر فازی سازی در روش ممدانی را از بین می‌برد.

همانطورکه در شکل مشخص شده است خروجی کل سیستم به صورت میانگین وزن‌ها با رابطه زیر بیان شده است،

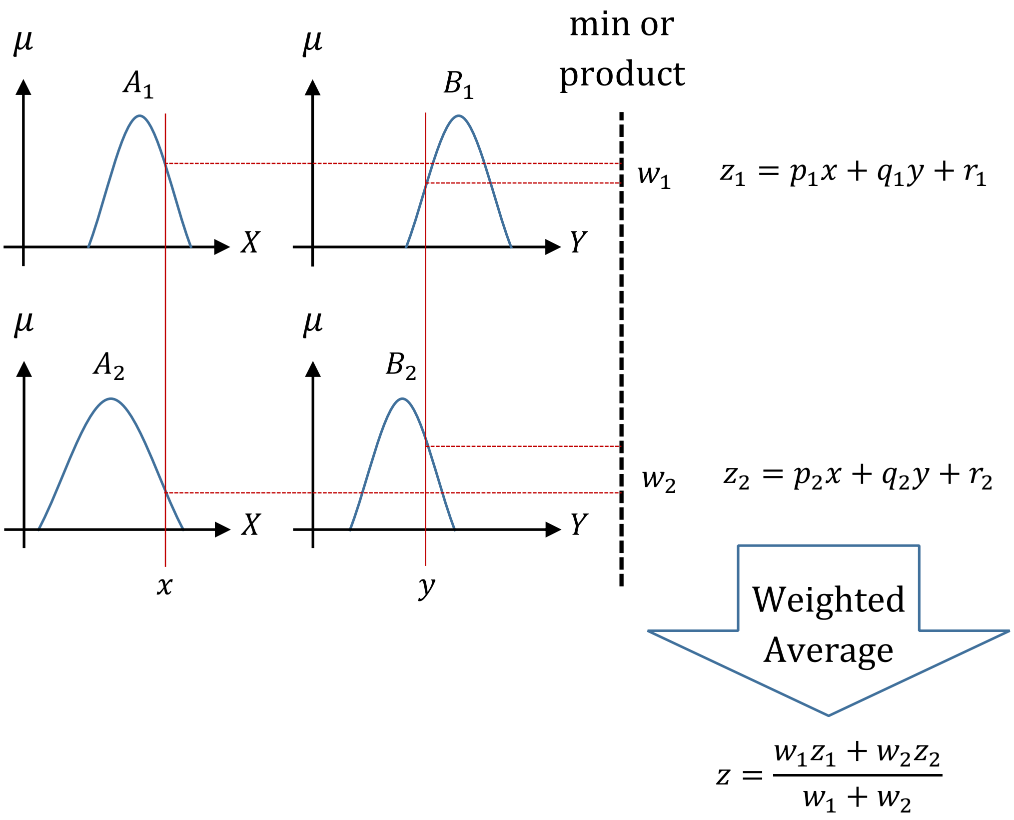
$$z = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2} \qquad (۲۴\text{-}۵)$$

که در آن w_1 و w_2 به ترتیب قدرت آتش[۲] مربوط به هر کدام از دو مقدمه قانون است.

---

[۱] overlap

[۲] Firing Strength



شکل ۵-۲۱ : مدل فازی سوگینو

می‌توان برای محاسبه خروجی کل سیستم به جای استفاده از اپراتور میانگین وزن‌ها از اپراتور جمع وزن‌ها استفاده کرد یعنی نوشت،

$$z = w_1z_1 + w_2z_2 \qquad (۵\text{-}۲۵)$$

w_1 و w_2 استنتاج است مثلاً مینیمم یا حاصل‌ضرب.

از مقایسه روابط (۵-۲۴) و (۵-۲۵) می‌توان نتیجه گرفت که اگر $w_1 + w_2 = 1$ باشد، نتیجه در رابطه یکسان است. بدیهی است، در شرایطی که مجموع قدرت‌های آتش برابر یک شود (یا نزدیک یک باشد)، می‌توان برای سادگی محاسبات از رابطه (۵-۲۵) به‌جای (۵-۲۴) استفاده کرد. ولی در حالت کلی که تضمینی برای مساوی یک بودن مجموع w ها وجود ندارد، رابطه (۵-۲۴) نتیجه مناسب‌تری را ارائه می‌دهد.

باید توجه داشت برای آنکه تابع خروجی پیوسته باشد، باید مقدار y وقتی که $X = small$ و درصد آن به جز بزرگ‌ترین X که هنوز $small$ است، با مقدار y وقتی که $X = medium$ و کم‌ترین مقدار آن یعنی کوچک‌ترین x به med است، با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} X\ small\ Y_1 = 0.1X + 6.4 \\ X\ med \quad Y_2 = -0.5X + 4 \end{cases} \Rightarrow Y_1 = Y_2 \Rightarrow 0.1X + 6.4 = -0.5X + 4 \Rightarrow X = -4$$

هم‌چنین باید داشته باشیم،

$$\begin{cases} X\ med\ \ Y = -0.5X + 4 \\ X\ large\ Y = X - 2 \end{cases} \Longrightarrow 1.5X = 6 \Longrightarrow X = 4$$

چون تنها قسمت فازی در مدل سوگینو، در مقدمه قانون است، می‌توان بین مجموعه قوانین فازی و قوانین غیرفازی طبق مثال‌های زیر تفاوت قائل شد.

مثال ۵-۴ : مقایسه مجموعه قواعد فازی و غیرفازی.

در یک مدل فازی سوگینو یک ورودی و یک خروجی داریم.

اگر X کوچک است، آنگاه $Y = 0.1X + 6.4$

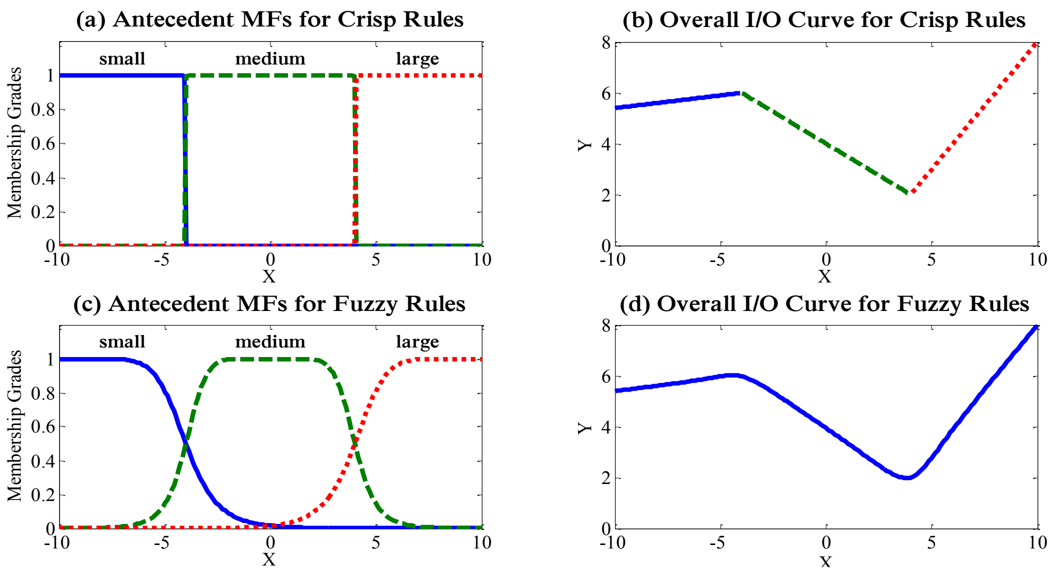
اگر X متوسط است، آنگاه $Y = -0.5X + 4$

اگر X بزرگ است، آنگاه $Y = X - 2$

دو حالت را برای X یعنی مقدمه قانون در نظر می‌گیریم:

حالت اول X مجموعه غیر فازی باشد (**شکل ۵-۲۲** الف)؛ در این صورت رابطه ورودی خروجی یک رابطه مقطعی خطی[۱] می‌شود (**شکل ۵-۲۲** ب).

حالت دوم X مجموعه فازی ملایم باشد (**شکل ۵-۲۲** ج). در این صورت منحنی ورودی خروجی نیز ملایم می‌شود (**شکل ۵-۲۲** د).



شکل ۵-۲۲ : الف) توابع عضویت قسمت مقدمه برای قوانین صریح ب)خروجی بر حسب ورودی برای قوانین صریح ج) توابع عضویت قسمت مقدمه برای قوانین فازی د) خروجی بر حسب ورودی برای قوانین فازی

[۱] Piecewise Linear

مثال ۵-۵ : مدل فازی سوگینو با دو ورودی و یک خروجی

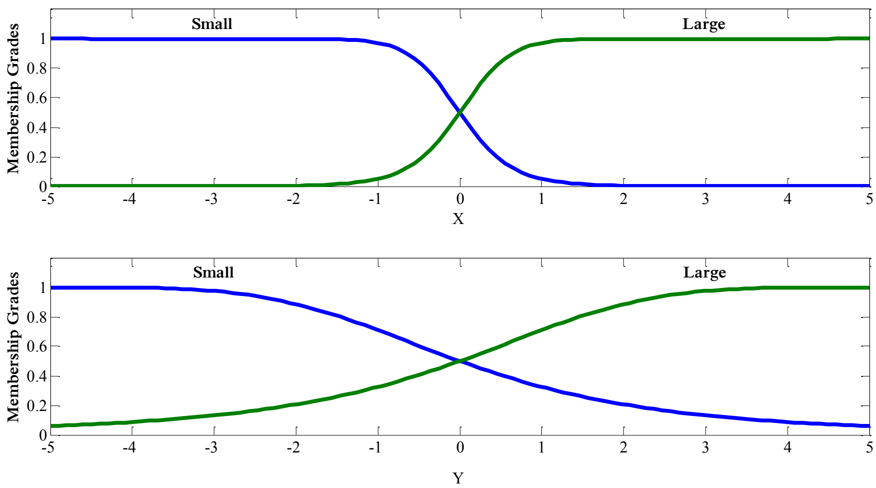
اگر X کوچک است و Y کوچک است، آنگاه $z = -x + y + 1$

اگر X کوچک است و Y بزرگ است، آنگاه $z = -y + 3$

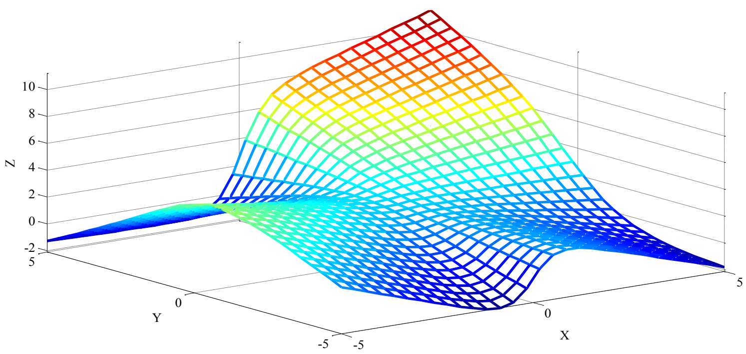
اگر X بزرگ است و Y کوچک است، آنگاه $z = -x + 3$

اگر X بزرگ است و Y بزرگ است، آنگاه $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y} + 2$

در شکل ۵-۲۳ توابع عضویت X,Y و در شکل ۵-۲۴ سطح نتیجه ورودی و خروجی نشان داده شده است. این شکل ترکیبی از چهار صفحه است که هر کدام خروجی یک حد قانون فازی است.



شکل ۵-۲۳ : توابع عضویت X,Y



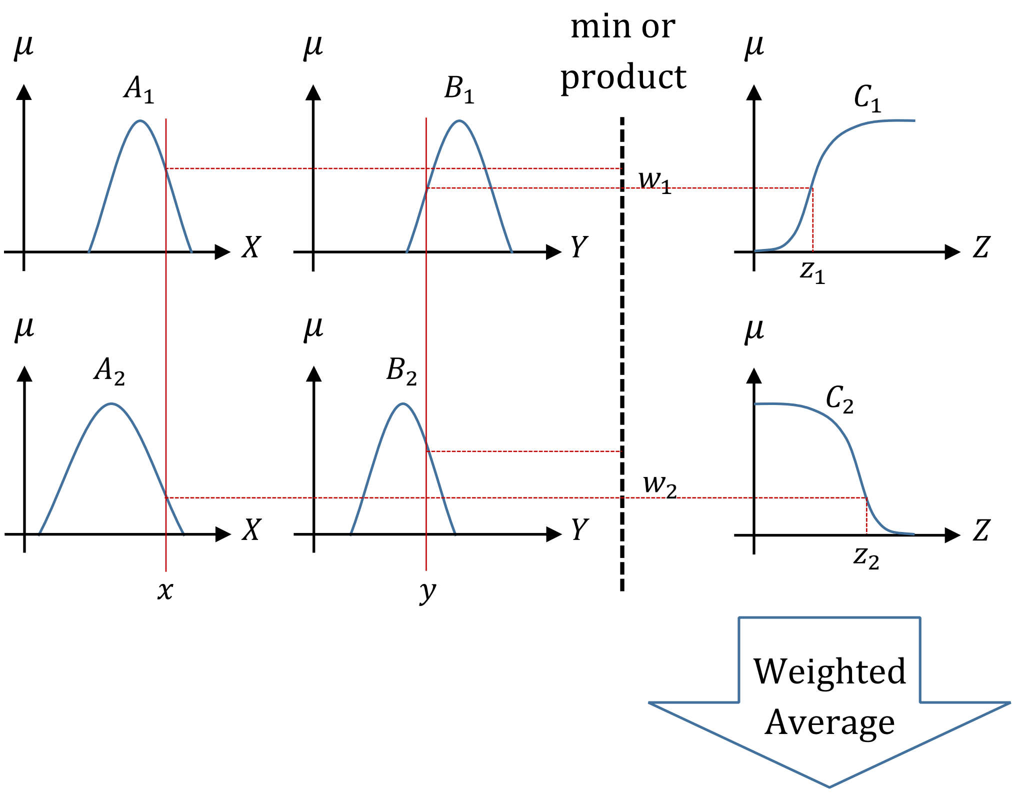
شکل ۵-۲۴ : سطح نتیجه ورودی و خروجی

بر خلاف مدل فازی ممدانی، مدل فازی سوگینو نمی‌تواند قاعده استنتاج ترکیبی را در مکانیزم استنتاج برآورده نماید. این امر در شرایطی که ورودی‌های به مدل فازی سوگینو هستند مشکلاتی را ایجاد می‌کند. با این وجود مدل فازی سوگینو بدون نیاز به فرآیند پیچیده غیر فازی ساز در بسیاری موارد مناسب‌ترین مدل در کاربردهای مهندسی است.

د. مدل فازی تسوکاموتو

در مدل فازی تسوکاموتو[۱] نتیجه هر قانون اگر-آنگاه فازی به وسیله یک مجموعه فازی با تابع عضویت یک جهته (یا افزایشی یا کاهشی) مانند شکل ۵-۲۵ ارائه می‌شود. در این مدل، خروجی استنتاج شده هر قانون به وسیله یک کمیت صریح تعریف می‌شود، که بستگی به مقدمه قانون دارد. همانطورکه در شکل نشان داده است، برای اولین قانون « اگر X مساوی A_1 و B_1 باشد، آنگاه $z = C_1 y$ است»، نخست با توجه به ورودی‌های x و y در هر لحظه و مجموعه‌های فازی A_1 و B_1 در مقدمه قانون w_1 (قدرت آتش) را براساس مینیمم یا حاصل‌ضرب بدست می‌آوریم. سپس، محل تقاطع w_1 با منحنی C_1، مقدار $z = z_1$ را به عنوان استنتاج نتیجه می‌دهد. خروجی کلی با میانگین‌گیری وزن‌دارِ خروجی‌های z_1 و z_2 حاصل می‌شود.

چون هر قانون یک خروجی صریح می‌دهد، در نتیجه در مدل تسوکاموتو، نتیجه کلی با میانگین‌گیری حاصل می‌شود و فرآیند زمان گیر غیر فازی سازی حذف می‌شود.



$$z = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2}$$

شکل ۵-۲۵ : مدل فازی تسوکاموتو

مثال ۵-۶ : مدل فازی تسوکاموتو با یک ورودی

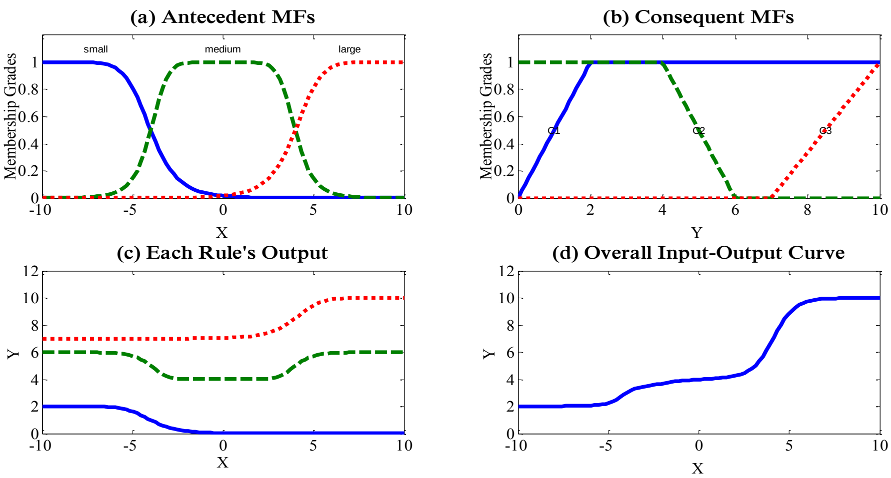
۱ Tsukamoto Fuzzy Model

اگر X کوچک است، آنگاه Y مساوی C_1 است.

اگر X متوسط است، آنگاه Y مساوی C_2 است.

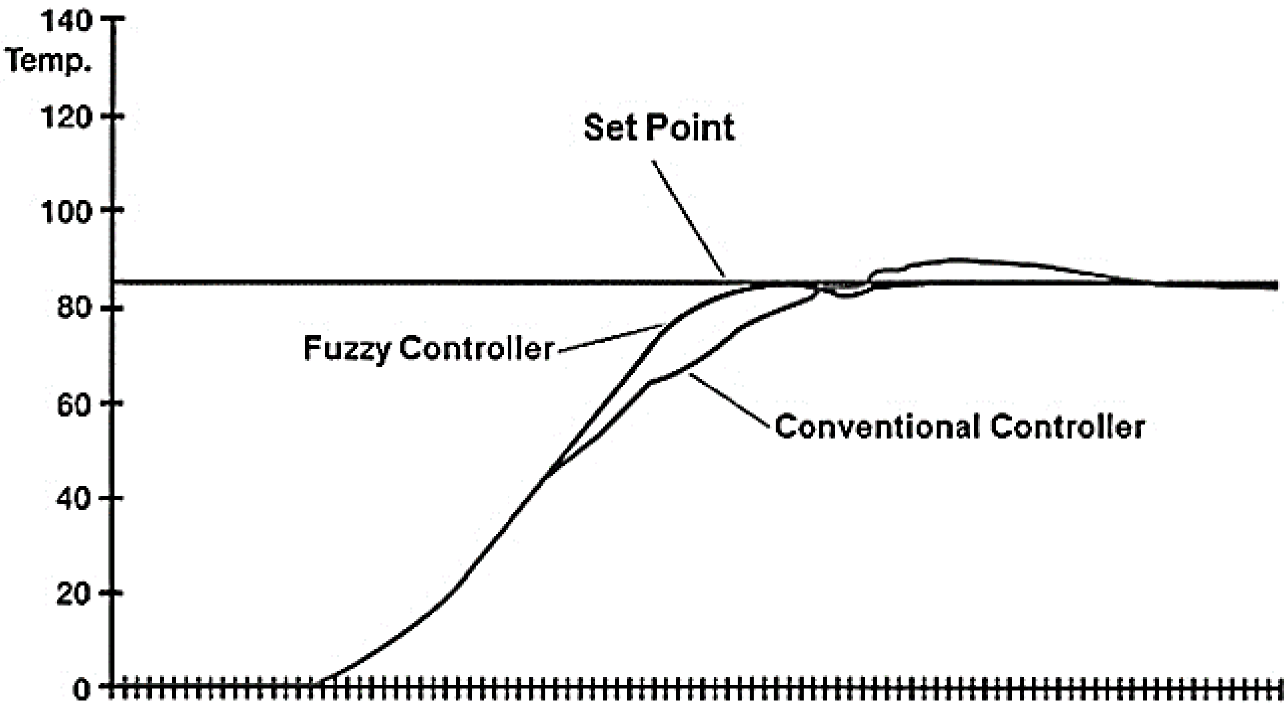
اگر X بزرگ است، آنگاه Y مساوی C_3 است.

توابع عضویت کوچک، متوسط و بزرگ برای این مثال در شکل ۵-۲۶ الف) نمایش داده شده است. توابع عضویت نتیجه‌های C_1، C_2 و C_3 نیز در شکل ۵-۲۶ ب) ارائه شده است. منحنی کلی ورودی- خروجی در شکل ۵-۲۶ ج) رسم شده است. خروجی در این شکل برابر است با $\frac{(\sum_{L=1}^{3} w_i f_i)}{(\sum_{L=1}^{3} w_i)}$ که در آن f_i خروجی هر قاعده فازی است که از محل تقاطع قدرت آتش w_i و تابع عضویت C_i بدست آمده است. اگر خروجی f_i هر قاعده فازی را بر حسب تابعی از x رسم کنیم شکل ۵-۲۶ د) بدست می‌آید. این شکل، با توجه به توابع عضویت اولیه و قواعد فازی اولیه، چندان آشکار و واضح نبود.



شکل ۵-۲۶ : الف) توابع عضویت مقدمه ب) توابع عضویت نتیجه

ج) خروجی هر قانون د) منحنی کلی ورودی خروجی


140
Temp.
120
100
80
60
40
20
0
Set Point
Fuzzy Controller
Conventional Controller

۶-۱- کنترل‌کننده فازی

مقدمه

کنترل‌کننده‌های فازی قدمتی نزدیک به مجموعه‌های فازی دارند. اولین کاربرد منطق و ریاضیات فازی در کنترل‌کننده‌های فازی ظاهر شد. موضوع پایان‌نامه دکتری اصیلیان[1] دانشجوی ابراهیم ممدانی[2] در دانشگاه لندن "Queens Mary College in London" کنترل موتور بخار با هوش مصنوعی بود، که در سال ۱۹۷۴ دفاع شد.

Assilian P., "Artificial Intelligence in the Control of Real Dynamical Systems"
PHD. Dissertation, London University (1974)

اولین مقاله در این زمینه در سال ۱۹۷۵ به چاپ رسید،

Assilian P. and Mamdani E., "An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller" International Journal of Man-Machine Studies 7 (1975), pp 1-13.

کارهای ممدانی و اصیلیان توسط زیمرمن[3] در دانشگاه آخن آلمان ادامه یافت. او علاوه بر کارهای تجربی، در زمینه تحلیلی نیز به طور گسترده تلاش کرد. از جمله در مورد پایداری سیستم‌های فازی مقاله زیر را منتشر نمود، که بنای کارهای فراوان بسیاری از متخصصین شد.

Zimmermann,H. J, and Thole,U., "On the Stability of Minimum and Product operators for the Intersection of Fuzzy Sets," Fuzzy Sets and System, 2, pp173-186.

توسعه و کاربرد واقعی سیستم‌های کنترلی فازی از دهه ۱۹۸۰ در ژاپن آغاز شد. ژاپنی‌ها برای درک این پدیده جدید، چندین دوره فرصت مطالعاتی را در دانشگاه برکلی آمریکا و در کنار پایه‌گذار مبحث فازی یعنی لطفی‌زاده[4] گذراندند. آنها اولین سخت‌افزارهای فازی را ساختند. مقاله زیر از نخستین کارهایی است که در این زمینه منتشر شد.

Yamakawa,T.,Shirai,Y.and Ueno,F. "Implementation of Fuzzy Logic Hardware System," Transaction of IEEE,Vol.c-63(1980) pp.720-725 and pp 861-862.

یکی از کاربردهای اولیه کنترل فازی در مترو ژاپن توسط کمپانی هیتاچی بود. مقاله زیر در همین زمینه منتشر شد.

Yasunobu,P. and Miamoto,P., "Automatic Train Operation by Predictive Fuzzy control" in Sugeno(Ed.) Industrial Application of Fuzzy Control(1985), ppp1-18, Amsterdum, NewYork.

[1] Assilian
[2] Mamdani
[3] Zimmermann
[4] Lotfi Zadeh

با موفقیت‌های به دست آمده برای کنترل‌کننده‌های فازی در ژاپن، گسترش وسیع کاربردها و تغییر موضع منتقدین به تحسین‌کنندگان را، از دهه ۱۹۸۰ میلادی در پی داشت. نخست در ژاپن و سپس در آمریکا، انواع انجمن‌ها، موسسات، مجلات و همایش‌های مرتبط با سیستم‌های فازی به وجود آمدند. حجم فعالیت‌های پژوهشی مرتبط با منطق فازی و کنترل فازی روزبه‌روز بیشتر و بیشتر شد. در زمینه سیستم‌های کنترل فازی انواع روش‌ها و دیدگاه‌ها ارائه شدند. با ارائه هر روش و دیدگاه جدید، مزایای آن در معرض قضاوت پژوهشگران قرار می‌گرفت و به دنبال آن معایب و ایرادات آن، عمدتاً توسط سایر محققین ارائه می‌شد، که ارائه پیشنهادی تازه برای جبران معایب را سبب می‌شد. از روش‌های کنترلی گوناگونی که حاصل این پژوهش‌ها است، می‌توان به صورت کلی موارد زیر را بیان کرد.

الف – کنترل‌کننده منطقی فازی کلاسیک

این کنترل‌کننده همان ساختاری را دارد که ابتدا در دهه ۷۰ میلادی توسط ممدانی و اصیلیان ارائه شده است. در مورد اجزاء این سیستم، نحوه کارکرد، مزایا و معایب آنها، در ادامه بحث خواهیم کرد. همچنین با ارائه یک نمونه نحوه کار کنترل‌کننده فازی نشان داده می‌شود. در ادامه این فصل (قسمت ؟؟ ۶-۳ با طراحی کنترل‌کننده فازی PID که بر اساس منطق فازی کلاسیک انجام شده آشنا می‌شویم).

ب – کنترل‌کننده فازی TS (تاکاگی–سوگینو)

اساس ساختار کنترل‌کننده فازی[1] T-S بر مدل فازی سوگینو استوار است، که در آن خروجی‌های قوانین اگر-آنگاه فازی، مقادیر صریح و غیرفازی هستند. در این روش خواهیم دید که پایداری و طراحی سیستم‌های کنترلی فازی غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و عملاً سیستم غیرخطی تبدیل به مدل‌های متعدد منطقه‌ای خطی می‌شود. این نوع کنترل‌کننده به طور مجزا در فصل ۹- بررسی می‌شود.

پ – کنترل‌کننده فازی – عصبی

کنترل‌کننده‌های فازی عصبی[2]، همانطورکه از نامش پیداست، از ترکیب روش‌های مبتنی بر مجموعه‌ها و منطق فازی از یک‌سو، و روش‌های مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی از سوی دیگر استوار است. با توجه به اهمیت این نوع روش‌ها، در فصل ۷- به شبکه‌های عصبی-تطبیقی و کنترل فازی- عصبی می‌پردازیم.

[1] T-S Fuzzy Logic Control Systems

[2] Neuro Fuzzy Control Systems

ت – کنترل فازی– تطبیقی

ث – کنترل فازی– لغزشی

ج – کنترل فازی ...

۶–۲–   کنترل‌کننده منطقی فازی کلاسیک

۶–۲–۱–   ساختار کنترل‌کننده منطقی فازی کلاسیک

شکل ۶-۱ ساختار کنترل‌کننده فازی کلاسیک را در سیستم مدار بسته نشان می‌دهد. کنترل‌کننده فازی کلاسیک یا به عبارت ساده‌تر کنترل‌کننده فازی، از قسمت‌های زیر تشکیل شده است،

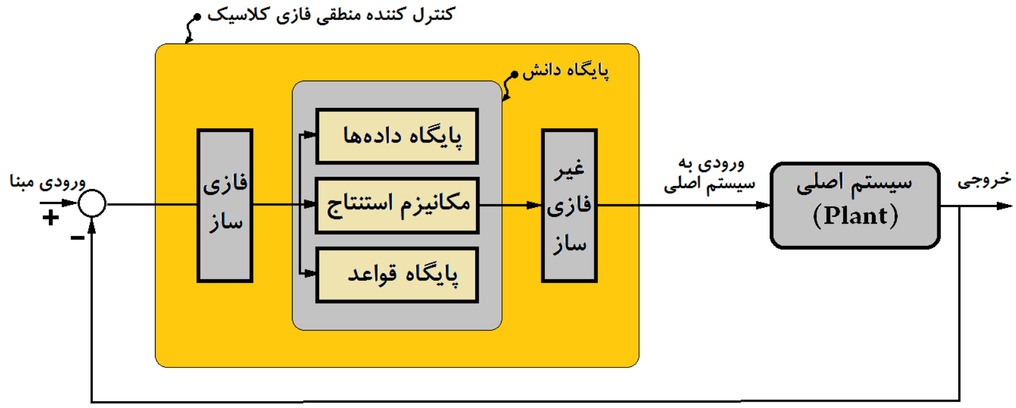
- فازی‌ساز[۱]
- پایگاه دانش[۲]
  - پایگاه داده‌ها[۳]
  - پایگاه قواعد[۴]
  - مکانیزم استنتاج[۵]
- غیرفازی‌ساز[۶].

الف – فازی‌ساز

داده‌های ورودی به فازی‌ساز، یا داده‌های صریح هستند، یا داده‌های نویزی و همراه با اغتشاش. اگر حسگرها که ورودی‌های به کنترل‌کننده را اندازه‌گیری می‌کنند، خوانش دقیق و صریح داشته باشند، در این صورت، این داده‌ها در فازی‌ساز تبدیل به مجموعه‌های فازی یگانه[۷] می‌شوند.

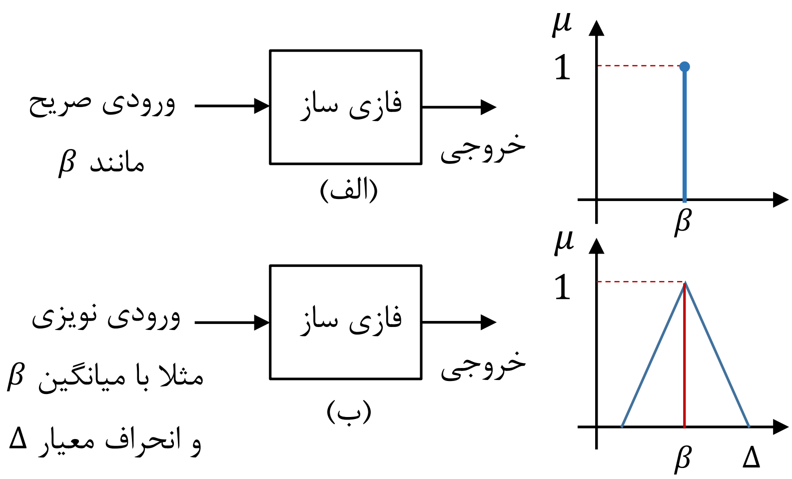
---

[1] Fuzzifier
[2] Knowlegebase
[3] Database
[4] Rule Base
[5] Inference Mechanism
[6] Defuzzifier
[7] Fuzzy Singleton



شکل ۶-۱ : ساختار کنترل‌کننده منطقی فازی کلاسیک در سیستم مدار بسته

از سوی دیگر، اگر داده‌های ورودی به فازی‌ساز، به دلیل نویزی بودن حسگرها متغیرهای اتفاقی[1] باشند، این داده‌ها در فازی‌ساز می‌توانند با توابع عضویت مثلثی نشان داده شوند. شکل ۶-۲ الف) ورودی صریح و خروجی فازی یگانه و شکل ۶-۲ ب) خروجی فازی با تابع عضویت مثلثی به خاطر نویزی بودن سنسور را نشان می‌دهد. در این مثلث، راس آن نشان‌دهنده مقدار متوسط[2] مجموعه داده‌های کمیت اندازه‌گیری شده توسط حسگر و قاعده روبروی آن (ضلع افقی) نشان‌دهنده تابعی از انحراف معیار[3] کمیت اندازه‌گیری (مثلاً دو برابر انحراف معیار) می‌تواند درنظر گرفته شود.



شکل ۶-۲ : الف) ورودی صریح به فازی‌ساز و خروجی فازی یگانه آن

ب) ورودی نویزی به فازی‌ساز و خروجی فازی با مقدار متوسط و انحراف معیار طبق شکل

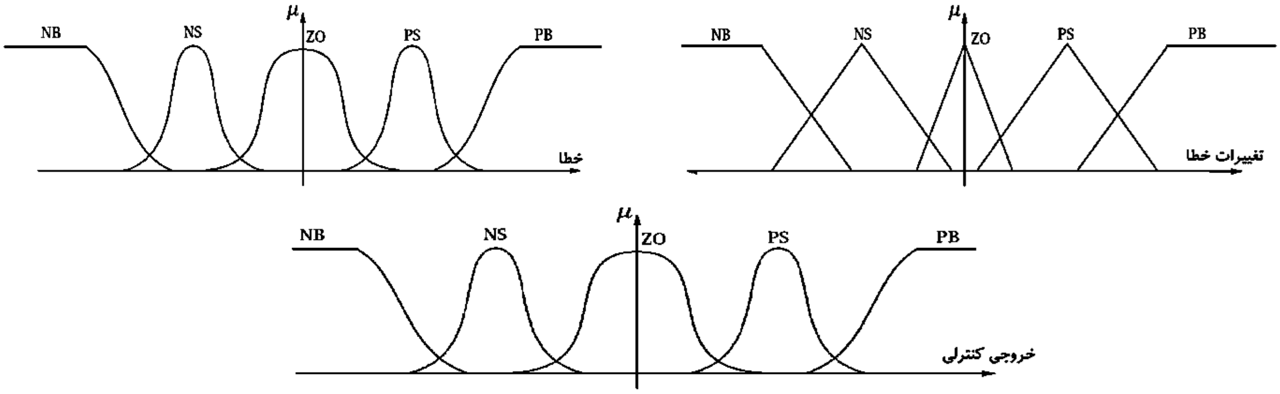
ب – پایگاه دانش

پایگاه دانش خود از سه قسمت درست شده است.

---
[1] Random variable
[2] Mean value
[3] Standard deviation

ب-۱- پایگاه داده‌ها

کلیه متغیرهای کلامی که در قالب اعداد فازی تعریف شده‌اند، شامل مجموعه‌های فازی ورودی‌ها و خروجی‌های کنترل‌کننده فازی، همراه با فضاهای مرجع آنها، در این قسمت تعریف و مشخص شده‌اند. بنابراین هر یک از متغیرهای کلامی در قالب مجموعه‌های فازی به صورت توابع عضویت فازی در پایگاه داده‌ها تعریف می‌شوند. شکل ۶-۳ نمونه‌هایی از مجموعه‌های فازی پایگاه داده‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۳ : نمونه‌ای از مجموعه‌های فازی در پایگاه داده‌ها که در آن $N = negative, P = positive$ بوده و $ZO = zero$، $S = small$ و $B = big$ است؛ در نتیجه مثلاً $NB = negative\ big$ یا منفی بزرگ است.

داده‌های موجود در پایگاه داده‌ها توسط طراح سیستم کنترلی مشخص و تعریف می‌شود.

ب-۲- پایگاه قواعد

کلیه قواعد اگر-آنگاه فازی که اساس ساختار کنترل‌کننده فازی را تشکیل می‌دهد، در این پایگاه قرار دارد. این قواعد یا براساس تجربیات اپراتور ماهر استخراج گردیده‌اند و یا براساس حجم وسیعی از شبیه‌سازی و سعی و خطا به دست آمده‌اند. جدول ۶-۱ نمونه‌ایی از این قواعد اگر-آنگاه فازی را نشان می‌دهد.

جدول ۶-۱ . نمونه‌ایی از قواعد اگر-آنگاه فازی

$e(k)$ \ $\Delta e(k)$	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
NM	۳	۳	۲	۲	۲	۳	۳
NS	۴	۳	۳	۲	۳	۳	۴
ZO	۵	۴	۳	۳	۳	۴	۵
PS	۴	۳	۳	۲	۳	۳	۴
PM	۳	۳	۲	۲	۲	۳	۳
PB	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲

در پایگاه قواعد جدول ۶-۱، سطر اول مقادیر کلامی متغیر فازی خطا e و ستون اول مقادیر کلامی متغیر فازی تغییرات خطا Δe را نشان می‌دهد. فرض شده است، هر کدام از این دو متغیر با پنج متغیر کلامی فازی نشان داده شود. در قانون فازی، خطا و تغییرات خطا مقدمات قانون و خروجی کنترل‌کننده (u یا Δu)، نتیجه قانون است. دو مقدمه قانون یعنی e و Δe، با AND به هم مرتبط هستند. این AND، همچون پیش، می‌تواند هر T-norm دلخواه باشد. انتخاب نوع T-norm بسته به نظر طراح سیستم کنترل فازی دارد ولی متداول ترین نوع در این مورد "حاصل‌ضرب جبری" و سپس "مینیمم" است. عناصر داخل جدول ۶-۱، مقادیر متغیر کلامی نتیجه قانون، یعنی خروجی کنترل‌کننده یا u را نشان می‌دهد.

ب–۳– مکانیزم استنتاج

مکانیزم استنتاج[1] هسته اصلی پایگاه دانش و کنترل‌کننده فازی است. در این قسمت با توجه به کمیت‌های ورودی به کنترل‌کننده فازی در هر لحظه، برای نمونه e و Δe، که در فازی‌ساز تبدیل به متغیرهای فازی شده‌اند (شکل ۶-۲)، با توجه به قواعد شرطی فازی در "پایگاه قواعد" و داده‌های موجود در "پایگاه داده‌ها" و با توجه به انتخاب نوع مکانیزم استنتاج (به فصل پنجم مراجعه شود)، خروجی نهایی را در هر لحظه استنتاج می‌نماید. این خروجی یک مجموعه فازی است، که شکل و ساختار آن بستگی به این دارد که، در هر لحظه مقادیر e و Δe ورودی به کنترل‌کننده فازی کدام قوانین فازی را فعال کرده باشد و متناسب با مکانیزم استنتاج مورد استفاده، این قوانین فازی فعال شده، چگونه خروجی کنترلی فازی را به وجود آورند.

ج – غیرفازی‌ساز

در غیرفازی‌ساز[2] خروجی مکانیزم استنتاج که مجموعه‌ای فازی است، تبدیل به فرمان کنترلی غیرفازی می‌شود، که خروجی نهایی از کنترل‌کننده فازی کلاسیک است (ورودی به سیستم اصلی در شکل ۶-۱). این خروجی غیرفازی باید به بهترین شکل، نشان‌دهنده تابع عضویت فرمان کنترلی فازی باشد، که از مکانیزم استنتاج به دست آمده است.

غیرفازی‌سازی به روش‌های مختلفی صورت می‌گیرد. سه روش اصلی آن در اینجا بیان می‌شود.

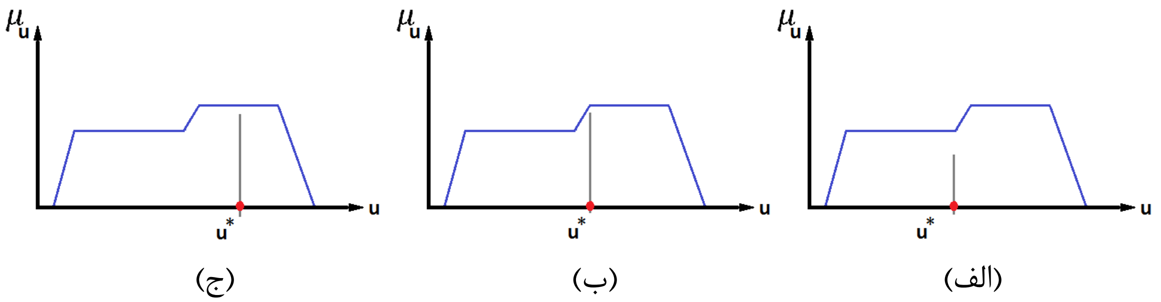
[1] Inference Mechanism
[2] Defuzzifier

ج–۱– غیرفازی‌ساز مرکز ثقل (یا مرکز سطح)[۱]

برای نمونه با درنظرگیری فرمان کنترلی فازی u با تابع عضویت پیوسته μ_u مانند شکل ۶-۴، در این روش، مرکز سطح تابع عضویت μ_u، کمیت غیرفازی u^* را مشخص می‌کند.

$$u^* = \frac{\int_u u.\mu_u \, \mathrm{d}u}{\int_u \mu_u \, \mathrm{d}u} \tag{۶-۱}$$

این روش به صورت ترسیمی در شکل ۶-۴ الف) نمایش داده شده است.



شکل ۶-۴ : تابع عضویت μ_u و الف) روش غیرفازی‌ساز مرکز سطح

ب) روش غیرفازی‌ساز اولین ماکزیمم، پ) روش غیرفازی‌ساز میانگین ماکزیمم

ج–۲– غیرفازی‌ساز اولین ماکزیمم[۲]

در این روش، اولین نقطه از u که به ازای آن تابع عضویت به مقدار حداکثر خود می‌رسد، به عنوان کمیت غیرفازی u^* انتخاب می‌شود.

$$u^* = \operatorname*{Inf}_{U} \left[u \in U |\, \mu(u) = \operatorname*{Sup}_{U} \mu(u) \right] \tag{۶-۲}$$

این روش به صورت ترسیمی در شکل ۶-۴ ب) نشان داده شده است.

ج–۳– غیرفازی‌ساز میانگین ماکزیمم

در این روش، میانگین ماکزیمم مقدار تابع عضویت به عنوان خروجی غیرفازی شده u^* درنظر گرفته می‌شود (شکل ۶-۴ ج).

[1] The Center of Gravity (or Center of Area) Method

[2] The First of Maximum (FOM) Method

د- غیرفازی‌سازی (وقتی خروجی قانون، تابعی صریح از ورودی‌های فازی است)

در سیستم‌های کنترلی که خروجی قوانین فازی، مجموعه‌های صریح هستند، مانند سیستم‌های فازی سوگینو که در فصل ۵- بررسی کردیم، باید خروجی نهایی کنترل‌کننده فازی را (که در اینجا دیگر کنترل‌کننده فازی کلاسیک نیست) محاسبه نمود. در این سیستم‌ها، قانون فازی می‌تواند به صورت زیر باشد،

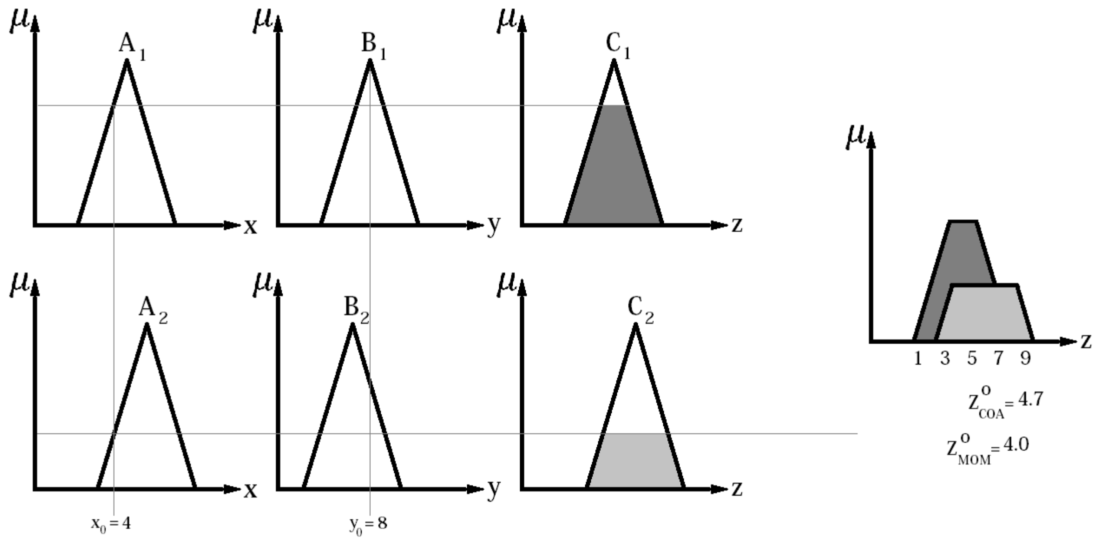
Rule i : If X is A_i AND Y is B_i, Then U is $f_i(X,Y)$

با فرض اینکه قدرت آتش قاعده فازی i ام مساوی W_i باشد، در این صورت خروجی نهایی u^* از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i f_i(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \qquad (۳-۶)$$

که در آن n تعداد قواعد فعال شده در هر لحظه است.

مثال ۶-۱ : شکل ۶-۵ نمونه‌ای از کنترل‌کننده فازی با دو ورودی و یک خروجی را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۵ : کنترل‌کننده فازی با دو ورودی x و y و خروجی z

فرض کنید که دو قانون فازی زیر را داریم،

Rule 1 : If X is A_1 AND Y is B_1 Then Z is C_1.

Rule 2 : If X is A_2 AND Y is B_2 Then Z is C_2.

اگر x_0 و y_0 مقادیر مشاهده شده برای متغیرهای فازی x و y، و توابع عضویت متغیرهای فازی x و y و z، مجموعه‌های فازی $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ به صورت زیر باشند،

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} & 2 \ll x \ll 5 \\ \dfrac{8-x}{3} & 5 \ll x \ll 8 \end{cases} \qquad \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{3} & 3 \ll x \ll 6 \\ \dfrac{9-x}{3} & 6 \ll x \ll 9 \end{cases}$$

$$\mu_{B_1}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-5}{3} & 5\ll y\ll 8\\ \dfrac{11-y}{3} & 8\ll y\ll 11\end{cases}\qquad \mu_{B_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-4}{3} & 4\ll y\ll 7\\ \dfrac{10-y}{3} & 7\ll y\ll 10\end{cases}$$

$$\mu_{C_1}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-1}{3} & 1\ll z\ll 4\\ \dfrac{7-z}{3} & 4\ll z\ll 7\end{cases}\qquad \mu_{C_2}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-3}{3} & 3\ll z\ll 6\\ \dfrac{9-z}{3} & 6\ll z\ll 9\end{cases}$$

و مقادیر مشاهده شده توسط حسگرها برابر با $x_0 = 4$ و $y_0 = 8$ باشند، می‌خواهیم،

یک - تابع عضویت فرمان کنترلی فازی، یعنی تابع عضویت z خروجی را بدست آوریم؛

دو - مقدار صریح کمیت کنترل خروجی z^* براساس روش‌های مختلف غیرفازی‌سازی را بدست آوریم.

در اجرای قسمت یک، آن‌گونه‌که از شکل ۶-۵ پیداست، به ازای x_0 و y_0 داریم،

$$\mu_{A_1}(x_0)=\mu_{A_1}(4)=\frac{2}{3},\qquad \mu_{A_2}(x_0)=\mu_{A_2}(4)=\frac{1}{3}$$

$$\mu_{B_1}(y_0)=\mu_{B_1}(8)=1,\qquad \mu_{B_2}(y_0)=\mu_{B_2}(8)=\frac{2}{3}$$

اگر AND در مقدمه قانون را مینیمم در نظر بگیریم، قدرت آتش قانون ۱ عبارت است از،

$$W_1=\min\left(\mu_{A_1}(x_0),\mu_{B_1}(y_0)\right)=\min\left(\frac{2}{3},1\right)=\frac{2}{3}$$

و به همین ترتیب در مورد قانون ۲ داریم،

$$W_2=\min\left(\mu_{A_2}(x_0),\mu_{B_2}(y_0)\right)=\min\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

با اعمال استنتاج max-min در موتور استنتاج، نخست بین نتیجه قانون ۱ (یعنی خروجی C_1) با تابع عضویت مثلثی و مقدار قدرت آتش قانون ۱ (یعنی $W_1 = 2.3$) مینیمم می‌گیریم. این نتیجه با قسمت هاشورخورده تیره در C_1 در شکل ۶-۵ مشخص شده است.

شکل بدست آمده یک ذوزنقه است. هم‌چنین با اعمال W_2 به نتیجه قانون ۲، C_2، ذوزنقه هاشورخورده بدست می‌آید. با ترکیب این دو نتیجه و اعمال اپراتور max، سمت راست شکل ۶-۵ ایجاد می‌شود.

برای غیرفازی‌سازی اگر از روش COA استفاده کنیم، مقدار خروجی صریح نهایی چنین می‌شود،

$$Z^*_{COA}=\frac{2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{3}+5\times\frac{2}{3}+6\times\frac{1}{3}+7\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=4.7$$

هم‌چنین اگر از روش FOM استفاده شود داریم،

$$Z^*_{FOM}=3$$

هم‌چنین از روش MOM داریم (در فاصله $z = 3$ تا $z = 5$ مقدار تابع عضویت بیشینه و برابر $\frac{2}{3}$ است.

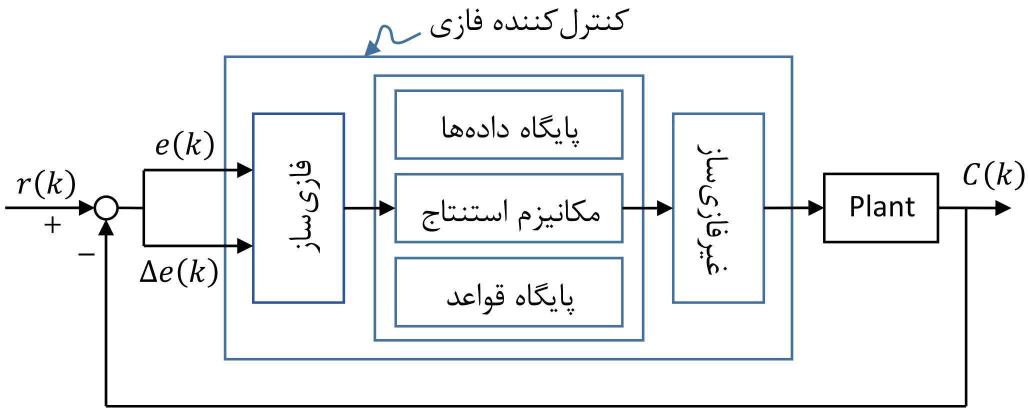
$$Z^*_{MOM} = \frac{3+5}{2} = 4$$

مثال ۶-۲ : در سیستم گسسته شکل ۶-۶ $r(k)$ ورودی مبنا و مقدار ثابتی است، خروجی سیستم $C(k)$ و تفاوت ورودی مبنا و خروجی (خطای سیستم) با $\Delta e(k)$ نشان داده شده است. ورودی کنترل‌کننده فازی $e(k)$ و $\Delta e(k)$ است، که $\Delta e(k)$ یا تغییرات خطا از رابطه زیر به دست می‌آید،

$$\Delta e(k) = e(k) - e(k-1) = [r(k) - C(k)] - [r(k-1) - C(k-1)]$$

با توجه به اینکه ورودی مبنای ثابت فرض شده نتیجه می‌شود،

$$\Delta e(k) = C(k-1) - C(k)$$



شکل ۶-۶ : سیستم گسسته با کنترل‌کننده فازی

پایگاه داده‌ها : Datebase

فرض کنید محدوده تغییرات $e(k)$ در فاصله $[a_1, b_1]$ و $\Delta e(k)$ در فاصله $[a_2, b_2]$ قرار دارد.

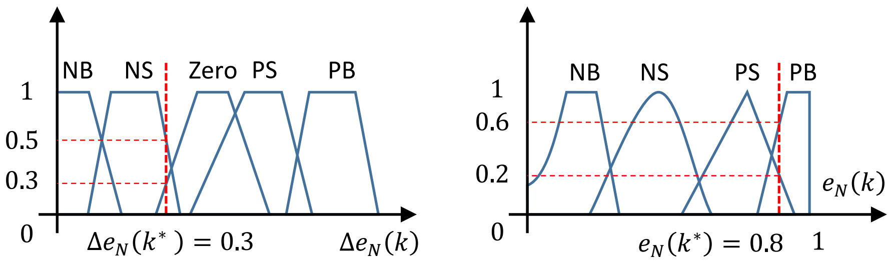
برای نرمال کردن محاسبات می‌توان این فواصل را به صورت زیر نیز نشان داد،

$$e_N(k) = \frac{e(k) - a_1}{b_1 - a_1} \quad (۴-۶)$$

$$\Delta e_N(k) = \frac{\Delta e(k) - a_2}{b_2 - a_2} \quad (۵-۶)$$

به این ترتیب، مقادیر نرمال شده $e_N(k)$ و $\Delta e_N(k)$ بین صفر و یک تغییر می‌کنند. شکل ۶-۷ توابع عضویت نرمال شده خطای $e_N(k)$ و تغییرات خطای نرمال شده $\Delta e_N(k)$ را نشان می‌دهد. معمولاً تعداد توابع عضویت هر متغیر بین ۳ تا ۷ انتخاب می‌شود.

فرض کنید در زمان k^* کمیت‌های $e(k^*)$ و $\Delta e(k^*)$ مقادیری هستند، که با قرار دادن آنها در معادلات (۶-۴) و (۶-۵)، $e_N(k^*)$ و $\Delta e_N(k^*)$ به ترتیب مساوی 0.8 و 0.3 به دست آمده‌اند. این مقادیر ورودی‌های یگانه فازی هستند، که در شکل ۶-۷ نشان داده شده‌اند.



شکل ۶-۷ : توابع عضویت $e_N(k)$ و $\Delta e_N(k)$ همراه با ورودی‌های یگانه فازی در لحظه k^*

همانطورکه در شکل مشخص شده است، ورودی $e_N(k^*)$ دو تابع عضویت مثبت بزرگ (PB) و مثبت کوچک (PS) را فعال کرده و ورودی $\Delta e_N(k^*)$ دو تابع عضویت تغییرات خطای منفی کوچک (NS) و صفر (Zero) را فعال کرده‌اند.

با توجه به شکل ۶-۷ داریم،

$$\mu_{PB}(e_N(k^*)) = 0.6, \qquad \mu_{PS}(e_N(k^*)) = 0.2$$

همچنین داریم،

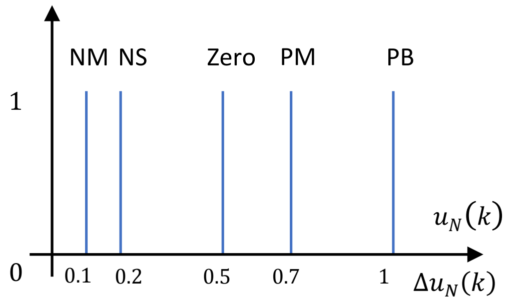
$$\mu_{NS}(\Delta e_N(k^*)) = 0.5, \qquad \mu_{Zero}(\Delta e_N(k^*)) = 0.3$$

قوانین فازی

در سیستم ارائه شده در این مثال، چون $e_N(k)$، پنج مجموعه فازی و $\Delta e_N(k)$ چهار مجموعه فازی دارد، در کل باید $4 \times 5 = 20$ قانون فازی طراحی شود. علیرغم آن که بیست قانون فازی طراحی می‌شوند، همانند ورودی‌ها، خروجی کنترل‌کننده فازی (یا ورودی به سیستم اصلی) معمولاً با تعداد محدودی مجموعه فازی (بین ۳ تا ۷) بیان می‌شود. بنابراین در قواعد فازی به ازای چندین حالت از ورودی‌ها، تنها یک نوع خروجی بدست می‌آید. در این مثال فرض می‌کنیم، خروجی‌ها مجموعه‌های یگانه فازی هستند. اگر دامنه خروجی نیز بین $[a_3, b_3]$ قرار داشته باشد، می‌توان خروجی $u(k)$ (یا تغییرات خروجی $\Delta u(k)$) را به صورت زیر نرمال کرد،

$$u_N(k)[or\ \Delta u_N(k)] = \frac{u(k) - a_3}{b_3 - a_3} \qquad (۶-۶)$$

در شکل ۶-۸ توابع عضویت خروجی به صورت پنج مجموعه فازی یگانه نشان داده شده است (می‌توان به جای مجموعه فازی یگانه، از هر نوع مجموعه فازی دیگری نیز استفاده کرد).



شکل ۶-۸ : توابع عضویت خروجی نرمال شده

قوانین فازی فعال شده در لحظه k^*

در لحظه k^* با توجه به شکل ۶-۷ در کل چهار قانون فعال می‌شود، که فرض می‌کنیم خروجی‌های قانون یا قسمت نتایج به صورت زیر انتخاب و طراحی شده باشند،

۱) If $e_N(k)$ is ***PS***
AND $\Delta e_N(k)$ is ***NS***
Then $u_N(k)[or\ \Delta u_N(k)]$ is ***NM***

۲) If $e_N(k)$ is ***PS***
AND $\Delta e_N(k)$ is ***Zero***
Then $u_N(k)[or\ \Delta u_N(k)]$ is ***PM***

۳) If $e_N(k)$ is ***PB***
AND $\Delta e_N(k)$ is ***NS***
Then $u_N(k)[or\ \Delta u_N(k)]$ is ***NS***

۴) If $e_N(k)$ is ***PB***
AND $\Delta e_N(k)$ is ***Zero***
Then $u_N(k)[or\ \Delta u_N(k)]$ is ***PB***

در این مثال AND در مقدمه قوانین را برای دو حالت به معنای min و به معنای حاصل‌ضرب محاسبه می‌کنیم.

الف - AND در مقدمه قوانین به معنای min :

۱) $$W_1 = \min\left(\mu_{PS}\big(e_N(k^*)\big), \mu_{NS}\big(\Delta e_N(k^*)\big)\right) = \min(0.2,0.5) = 0.2\ \ for\ \ u_N(k^*)\ \ is\ \ NM$$

۲) $$W_2 = \min\left(\mu_{PS}\big(e_N(k^*)\big), \mu_{Zero}\big(\Delta e_N(k^*)\big)\right) = \min(0.2,0.3) = 0.2\ \ for\ \ u_N(k^*)\ \ is\ \ PM$$

۳) $$W_3 = \min\left(\mu_{PB}\big(e_N(k^*)\big), \mu_{NS}\big(\Delta e_N(k^*)\big)\right) = \min(0.6,0.5) = 0.5\ \ for\ \ u_N(k^*)\ \ is\ \ NS$$

۴) $$W_4 = \min\Big(\mu_{PB}\big(e_N(k^*)\big), \mu_{Zero}\big(\Delta e_N(k^*)\big)\Big) = \min(0.6, 0.3) = 0.3 \;\; for \;\; u_N(k^*) \;\; is \;\; PB$$

ب – AND در مقدمه قوانین به معنای حاصل‌ضرب :

۱) $$W_1 = \mu_{PS}\big(e_N(k^*)\big).\mu_{NS}\big(\Delta e_N(k^*)\big) = 0.2 \times 0.5 = 0.1 \;\; for \;\; u_N(k^*) \;\; is \;\; NM$$

۲) $$W_2 = \mu_{PS}\big(e_N(k^*)\big).\mu_{Zero}\big(\Delta e_N(k^*)\big) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 \;\; for \;\; u_N(k^*) \;\; is \;\; PM$$

۳) $$W_3 = \mu_{PB}\big(e_N(k^*)\big).\mu_{NS}\big(\Delta e_N(k^*)\big) = 0.6 \times 0.5 = 0.3 \;\; for \;\; u_N(k^*) \;\; is \;\; NS$$

۴) $$W_4 = \mu_{PB}\big(e_N(k^*)\big).\mu_{Zero}\big(\Delta e_N(k^*)\big) = 0.6 \times 0.3 = 0.18 \;\; for \;\; u_N(k^*) \;\; is \;\; PB$$

استنتاج فازی

در این مثال چون خروجی‌ها یگانه هستند، عملاً تفاوتی بین انواع مختلف استنتاج به‌وجود نمی‌آید و هر کدام از روش‌های استنتاج چهارگانه یاد شده (یعنی مینیمم زاده-ممدانی، حاصل‌ضرب لارسن، ضرب محدود یا ضرب شدید) را به کار ببریم، نتایج یکسانی خواهیم داشت.

محاسبه خروجی

خروجی $u_N(k^*)$ (یا $\Delta e_N(k^*)$) در لحظه k^* با توجه به مقادیر W_1 تا W_4 و از معادله (۶-۳) در دو حالت AND به معنای مینیمم و حاصل‌ضرب چنین می‌شود،

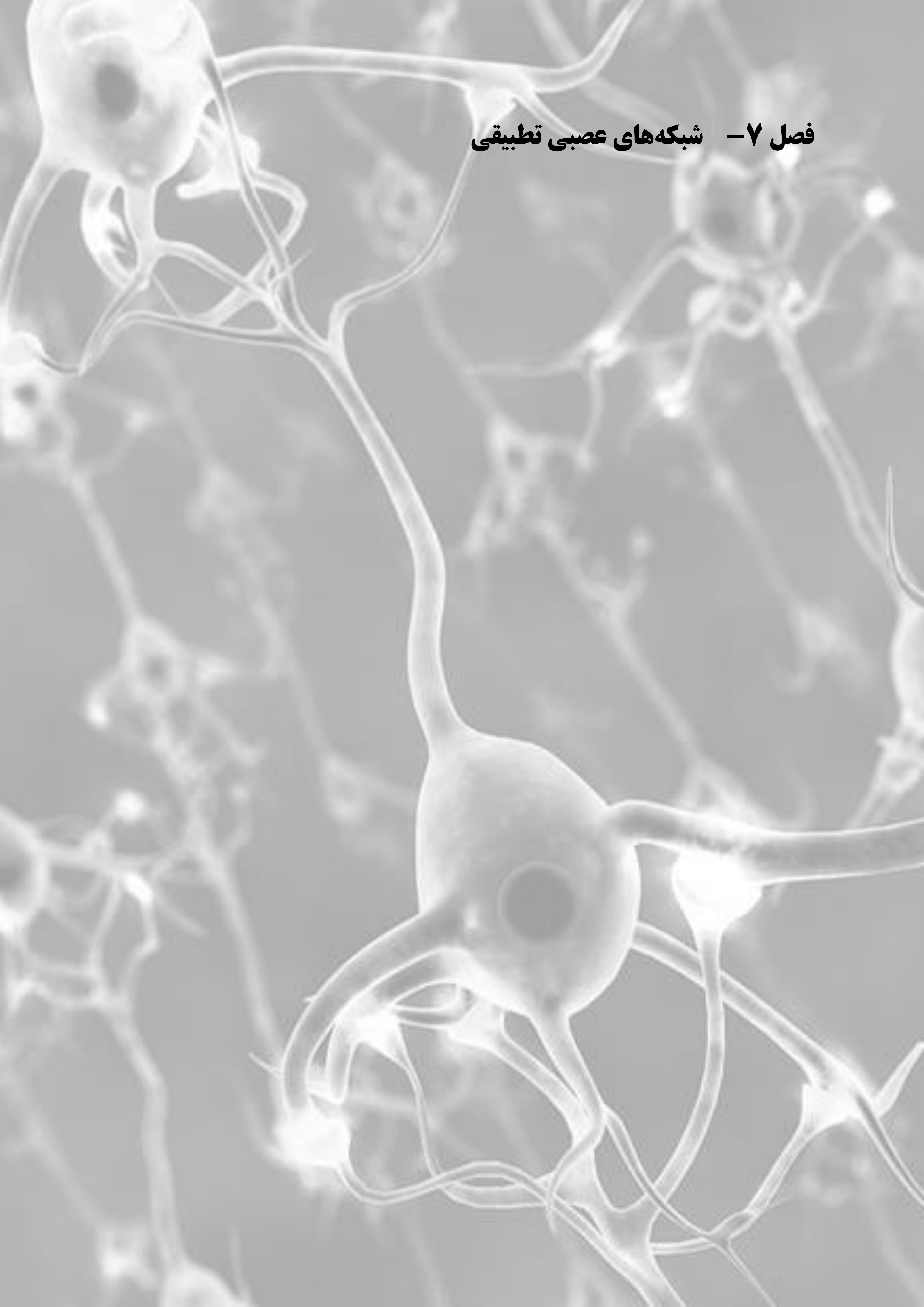
الف – AND به معنای مینیمم :

$$u_N(k^*) = \frac{0.2 \times 0.1 + 0.2 \times 0.7 + 0.5 \times 0.2 + 0.3 \times 1}{0.2 + 0.2 + 0.5 + 0.3} = 0.46$$

ب – AND به معنای حاصل ضرب :

$$u_N(k^*) = \frac{0.1 \times 0.1 + 0.06 \times 0.7 + 0.3 \times 0.2 + 0.18 \times 1}{0.1 + 0.06 + 0.3 + 0.18} = 0.43$$

فصل ۷–   شبکه‌های عصبی تطبیقی



۷–۱– مباحث ریاضی مورد استفاده در شبکه‌های عصبی

محاسبات ماتریسی

الف – ماتریس‌ها، بردارها و محاسبات ماتریسی

ماتریس‌ها

یک ماتریس $n \times m$ به صورت زیر بیان می‌شود،

$$A = [a_{ij}], \qquad i = 1,2,\dots,n, \qquad j = 1,2,\dots,m \tag{۱-۷}$$

اگر $n = m$ باشد، ماتریس مربعی است. اگر $m = 1$ باشد، ماتریس ستونی، و اگر $n = 1$ باشد، ماتریس سطری است. اگر $n = m = 1$، ماتریس A اسکالر است. ماتریس قرینه A را با A^T نشان می‌دهیم و داریم،

$$A^T = [a_{ji}], \qquad j = 1,2,\dots,m, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{۲-۷}$$

اگر $A = A^T$ باشد، ماتریس A را متقارن نامند، که A باید مربعی باشد. یک ماتریس را می‌توان به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد،

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{A_1}^{q} & \overbrace{A_2}^{m-q} \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}}^{m} \begin{matrix} \}\ p \\ \}\ n-p \end{matrix} \Bigg\} n \tag{۳-۷}$$

که در آن $A_1 = p \times q$، $A_2 = p \times (m-q)$، $A_3 = (n-p) \times q$، $A_4 = (n-p) \times (m-q)$، $p \geq 1$، $q \geq 1$ است.

مهم‌ترین نوع تقسیم‌بندی یک ماتریس، تقسیم آن به صورت ردیفی از بردارهای ستونی است،

$$A = [\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \cdots \quad \underline{a}_m] \tag{۴-۷}$$

که در آن $\underline{a}_i\ (i = 1,2,\dots n)$ یک بردار $n \times 1$ بُعدی است.

بنابراین از این پس، بردارها را با خط کوچک زیر حروف نشان می‌دهیم. برای نمونه $\underline{x}$ و $\underline{a}$ بردار هستند.

ضرب ماتریس‌ها

$$\begin{gathered} C^{m\times p} = A^{m\times n} \times B^{n\times p} \\ C = [C_{ij}], \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 1,2,\dots,p \end{gathered} \tag{۵-۷}$$

که در آن،

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{۶-۷}$$

بردارها

برای یک عدد صحیح d فرض کنید R^d مجموعه همه اجزا به صورت زیر باشد،

$$\{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_d\} \tag{۷-۷}$$

که می‌توان این مجموعه را به صورت مختصات نقطه x در فضای d بُعدی در نظر گرفت. این مختصات x_i را می‌توان به صورت بردار نیز نوشت،

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \tag{۸-۷}$$

خطی بودن

یک نگاشت$\underline{f}(\underline{x})$ خطی است، اگر اصل زیر در مورد آن صادق باشد،

$$if \quad x = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad then, \qquad f(x) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \tag{۹-۷}$$

معادلات ماتریسی

یک معادله ماتریسی به صورت زیر است،

$$\underline{y}^{n\times 1} = A^{n\times d} \times \underline{x}^{d\times 1} \tag{۱۰-۷}$$

$$\underline{y} = \sum_{k=1}^{d} \underline{a}_i \, x_i \tag{۱۱-۷}$$

که در آن $\underline{y}$ به صورت ترکیب خطی ستون‌های A در می‌آید.

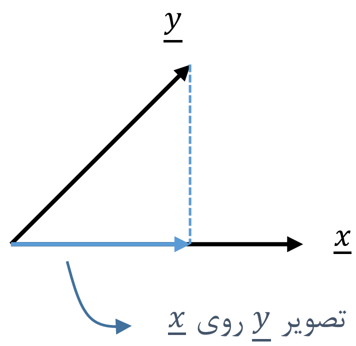
ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

ضرب داخلی دو بردار $d \times 1$، $\underline{x}$ و $\underline{y}$ یک **عدد** است، با $\langle \cdot \rangle$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\langle \underline{x}_{d\times 1}, \underline{y}_{d\times 1} \rangle = (\underline{x})^T \underline{y} = \underline{y}^T \underline{x} \tag{۱۲-۷}$$

به طور هندسی، $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ عبارت است از یک عدد، که آن عدد اندازه x ضرب در اندازه تصویر $\underline{y}$ روی $\underline{x}$ است. ضرب داخلی معیاری از میزان نزدیکی دو بردار است.

برای نمونه اگر اندازه $|\underline{x}| = 5$، اندازه $|\underline{y}| = 3$ و زاویه بین $\underline{y}$ و $\underline{x}$، $45°$ باشد، آنگاه اندازه تصویر $\underline{y}$ روی $\underline{x}$ مساوی $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، که در 5 ضرب شده، برابر با $15\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌گردد.



شکل ۷-۱ : (اندازه تصویر $\underline{y}$ روی $\underline{x}$) * (اندازه بردار $\underline{x}$) = $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

مقدار نتیجه ضرب داخلی $\underline{x}$ و $\underline{y}$ اگر زاویه بین آن‌ها صفر درجه باشد بیشینه، اگر ۹۰° درجه باشد صفر و اگر ۱۸۰° درجه باشد، منفی است. یعنی هر چه زاویه کمتر باشد ضرب داخلی بزرگ‌تر است.

همچنین داریم،

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \underline{x}^T \underline{x} = \sum_{k=1}^{d} x_k^2 \tag{۱۳-۷}$$

بنابراین طول اقلیدسی[۱] یا نُرم بردار $\underline{x}$ که با $\|x\|$ بیان می‌شود، عبارت است از،

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2} = [\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle]^{\frac{1}{2}} \tag{۱۴-۷}$$

و یا،

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \|x\|^2 \tag{۱۵-۷}$$

حاصل‌ضرب داخلی بردار $\underline{x}$ نسبت به یک ماتریس R به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\langle \underline{x}, R\underline{x} \rangle = \underline{x}^T R \underline{x} = \|x\|_R{}^2 \tag{۱۶-۷}$$

$$\langle \underline{x}, R\underline{y} \rangle = \underline{x}^T R \underline{y} = \underline{y}^T R \underline{x} \tag{۱۷-۷}$$

رابطه (۷-۱۶) یک نُرم مربعی است.

[۱] Euclidean Norm

نوع خاص و مفیدی از معادله (۷-۱۶) مربوط به اختلاف برداری دو بردار و معیاری برای نزدیکی آن دو بردار است.

$$\left\|\underline{x}-y\right\|_R = \langle(\underline{x}-\underline{y}), R(\underline{x}-\underline{y})\rangle = (\underline{x}-\underline{y})^T R(\underline{x}-\underline{y}) \quad (۷-۱۸)$$

$$= \|x\|_{\mathrm{R}}{}^2 + \|x\|_{\mathrm{R}}{}^2 - \left(\langle\underline{y}, R\underline{x}\rangle + \langle\underline{x}, R\underline{y}\rangle\right) \quad (۷-۱۹)$$

برای R متقارن رابطه (۷-۱۸) می‌شود،

$$\left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|_R = \langle(\underline{x}-\underline{y}), R(\underline{x}-\underline{y})\rangle = (\underline{x}-\underline{y})^T R(\underline{x}-\underline{y})$$

$$= \|x\|_{\mathrm{R}}{}^2 + \|x\|_{\mathrm{R}}{}^2 - 2\langle\underline{x}, R\underline{y}\rangle \quad (۷-۲۰)$$

باید توجه داشت که ضرب داخلی، عملگری خطی است. یعنی،

$$\langle\alpha\underline{x}_1 + \beta\underline{x}_2, \underline{y}\rangle = \alpha\langle\underline{x}_1, \underline{y}\rangle + \beta\langle\underline{x}_2, \underline{y}\rangle \quad (۷-۲۱)$$

اگر $\langle x, y\rangle = 0$ باشد، بردارهای $\underline{y}$ و $\underline{x}$ را عمود بر هم[۱] نامند.

تعریف P-norm

$$\left\|\underline{x}\right\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p\right)^{1/p} \quad (۷-۲۲)$$

اگر $p = 2$ باشد، همان حالتی است که پیش‌تر بررسی کردیم.

اگر $p = \infty$ باشد، آن را نُرم بیشینه[۲] نامند.

ضرب خارجی دو بردار $\underline{x}$ و $\underline{y}$ را با $> \underline{x}, \underline{y} <$ نشان می‌دهند و ماتریسی با رتبه یک است $(\underline{x}\underline{y}^T)$. $\underline{x}$ و $\underline{y}$ می‌توانند ابعاد مختلفی داشته باشند (برخلاف ضرب داخلی).

$$> \underline{x}^{n\times 1}, y^{m\times 1} <= \underline{x}\underline{y}^T = p^{n\times m} \quad (۷-۲۳)$$

P معمولا غیرمربعی است.

اگر $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه داریم،

$$\underline{x}\, y^T = P = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_m \end{bmatrix} \quad (۷-۲۴)$$

اگر P مربعی باشد، الزاما متقارن نیست.

[۱] Orthogonal

[۲] Maximum Norm

ب- مشتق‌پذیری ماتریس‌ها و بردارها

اگر $f(\underline{x})$ یک تابع اسکالر از n متغیر x_i باشد که $\underline{x}$ به صورت بردار $n \times 1$ نشان داده شده است، مشتق $f(\underline{x})$ نسبت به $\underline{x}$ بردار $n \times 1$ زیر است،

$$\frac{d}{d\underline{x}} f(\underline{x}) = \frac{df(\underline{x})}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}_1} \\ \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}_n} \end{bmatrix} \qquad (۲۵\text{-}۷)$$

معادله (۷-۲۵) را **بردار گرادیان f** نامند و با $\nabla_x f$ یا $grad_x \underline{f}$ نشان می‌دهند؛ که جهت بیشینه افزایش تابع f را نشان می‌دهد.

حال فرض می‌کنیم تابع $\underline{f}$ به جای اسکالر، خود یک بردار باشد.

مشتق‌گیری از یک تابع برداری $\underline{f}$ یعنی مشتق‌گیری از $\underline{f}(\underline{x})$ که در آن $\underline{f}_{m\times1}$ و $x_{n\times1}$، است، ماتریس $m \times n$ زیر را می‌دهد،

$$\frac{d\underline{f}(\underline{x})}{d\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (۲۶\text{-}۷)$$

این ماتریس را Jacobian تابع $\underline{f}(\underline{x})$ نامند و با $J_{\underline{x}}$ نشان می‌دهند.

برای ماتریس A و بردارهای $\underline{x}$ و $\underline{y}$ داریم،

$$\frac{d}{d\underline{x}}(A\underline{x}) = A \qquad (۲۷\text{-}۷)$$

$$\frac{d}{d\underline{x}}(y^T A\underline{x}) = A^T \underline{y} \qquad (۲۸\text{-}۷)$$

$$\frac{d}{d\underline{x}}(\underline{x}^T A\underline{x}) = (A + A^T)\underline{x} \qquad (۲۹\text{-}۷)$$

قاعده زنجیره‌ای

قاعده زنجیره‌ای برای الگوریتم یادگیری شبکه‌های پیش‌خور مورد استفاده قرار می‌گیرد و براساس دستورالعمل‌های زیر استوار است.

- یک تابع مشتق‌پذیر از یک تابع مشتق‌پذیر، خود مشتق‌پذیر است.

- اگر $\xi = \emptyset(x, y, \dots)$ و $\eta = \psi(x, y, \dots)$ و ...، توابع مشتق‌پذیر بر حسب x و y و ... باشند، و اگر $f\left(\xi, \eta, \dots\right)$ تابعی مشتق‌پذیر از ξ و η و ... باشد، در این صورت $f(\emptyset(x, y, \dots), \psi(x, y, \dots), \dots)$ یک تابع مشتق‌پذیر از x و y و ... است و مشتقات جزیی چنین هستند،

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \emptyset}\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \emptyset}\frac{\partial \emptyset}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \dots \end{aligned} \tag{۳۰-۷}$$

این نتایج مستقل از تعداد متغیرهای مستقل x، y و ... است.

بسط تیلور چند بُعدی

بسط تیلور برای تابع اسکالر f از یک متغیر برداری $\underline{x}$، یعنی $f(\underline{x})$، در اطراف $\underline{x}_0$ را می‌توان با استفاده از مطالب قبل به صورت زیر نوشت،

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \left[\frac{df(\underline{x}_0)}{d\underline{x}}\right]^T (x - x_0) + \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}_0)^T \left[\frac{d^2 f(x_0)}{d\underline{x}^2}\right](x - x_0) + h.o.t \tag{۳۱-۷}$$

اگر به جای $\underline{x}$، $\underline{x} + \Delta\underline{x}$ و به جای x_0، $\underline{x}$ و به جای $\underline{x} - \underline{x}_0$، $\Delta\underline{x}$ قرار دهیم نتیجه می‌شود،

$$f\left(\underline{x} + \Delta\underline{x}\right) = f(\underline{x}) + \frac{df(\underline{x})^T}{d\underline{x}}\Delta\underline{x} \tag{۳۲-۷}$$

عبارت $\frac{df(\underline{x})}{d\underline{x}}$ (طبق رابطه (۷-۲۵)) بردار گرادیان $f(\underline{x})$ است و طبق رابطه (۷-۱۲)، عبارت دوم سمت راست معادله (۷-۳۲) ضرب داخلی دو بردار است، و آشکار است که چرا گرادیان، در جهت بیشینه افزایش در $\underline{f}(\underline{x})$ است، همینطور داریم،

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(x_0) + \left[\frac{d\underline{f}(x_0)}{d\underline{x}}\right](\underline{x} - \underline{x}_0) + h.o.t \tag{۳۳-۷}$$

۷-۱-۱- معکوس مجازی ماتریس و روش کمترین مربعات (در توابع معین)

معادله زیر را در نظر می‌گیریم

$$A^{n\times m}\,\underline{x}^{m\times 1} = \underline{y}^{n\times 1} \tag{۳۴-۷}$$

سوالاتی که مطرح می‌شود به صورت زیر است:

۱. آیا می‌توان با داشتن A و $\underline{y}$، $\underline{x}$ را چنان یافت که در معادله بالا صدق کند، اگر نه؟ آیا می‌توانیم به جواب نزدیک شویم؟ چقدر می‌توان نزدیک شد؟

۲. با داشتن $\underline{x}$ و $\underline{y}$ (یا مثلا تعداد زیادی زوج x_i و y_i) آیا می‌توان A را به دست آورد؟ (بحث شناسایی سیستم)

این دو پرسش در طراحی و تحلیل شبکه‌های عصبی بسیار اهمیت دارد.

ماتریس‌های A مربعی با رتبه کامل تنها یک معکوس دارند، اگر رتبه ماتریس کمتر از رسته ماتریس باشد یا وقتی ماتریس مربعی نباشد، حالت‌های مختلفی می‌تواند اتفاق افتد.

اینجا معکوس کردن یک ماتریس غیرمربعی A مطرح است، که برای ماتریس A غیرمربعی $(m \times n)$، ماتریس **معکوس مجازی**[1] ماتریسی $n \times m$ است و با A^t نمایش داده می‌شود.

داریم،

$$AA^tA = A \tag{۷-۳۵}$$

$$A^tAA^t = A^t \tag{۷-۳۶}$$

$$(AA^t)^T = AA^t \tag{۷-۳۷}$$

اگر رتبه ماتریس A با تعداد ستونهایش برابر باشد، یک ماتریس مجازی معکوس مورد توجه معکوس کمترین مربعات[2] است، که به صورت زیر بیان می‌شود،

$$A^t = (A^TA)^{-1}A^T \tag{۷-۳۸}$$

فرمولاسیون جبری کمترین مربعات

معادله زیر را که تعداد معلوم‌ها بیشتر از مجهول‌ها هستند، در نظر می‌گیریم،

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} \tag{۷-۳۹}$$

که در آن y بردار $m \times 1$ و $\underline{x}$ بردار $n \times 1$ و $m > n$ ماتریس با رتبه مساوی n است. بدیهی است امکان اینکه این معادله برای هر y دلخواه همواره صادق باشد وجود ندارد.

حالا بردار خطای $m \times 1$ مربوط به حل تخمینی $\hat{x}$ از معادله بالا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\underline{e} = \underline{y} - A\,\underline{\hat{x}} \tag{۷-۴۰}$$

و سعی می‌کنیم روشی را برای کمینه‌سازی تابعی از این خطا به دست آوریم. یک چنین تابعی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود (تابع اسکالر J)،

[1] Psuedo Inverse

[2] Least Square Inverse

$$J = \underline{e}^T\ \underline{e} \tag{۴۱-۷}$$

برای کمینه‌سازی این تابع نسبت به $\underline{x}$ از آن مشتق می‌گیریم،

$$\frac{dJ}{d\underline{x}} = \underline{0} \tag{۴۲-۷}$$

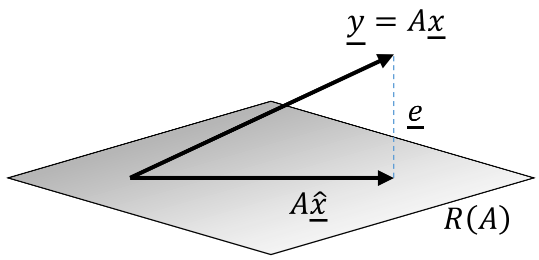
با استفاده از معادله (۷-۲۵)، می‌توان معادله (۷-۴۲) را به صورت زیر نوشت،

$$A^T A\ \underline{\hat{x}} = A^T\ \underline{y} \tag{۴۳-۷}$$

از این معادله $\underline{y}$ را می‌توان بدست آورد. توجه کنیم که در تئوری، می‌توان $\hat{x}$ را با معکوس کردن $A^T A$ و ضرب در $A^T\underline{y}$ بدست آورد.

تعبیر هندسی کمترین مربعات ($m > n$)

موارد مطرح شده در بالا از معادله (۷-۳۴) به بعد را می‌توان با تعبیر هندسی مطابق **شکل ۷-۲** بیان نمود.



شکل ۷-۲ : تعبیر هندسی حداقل مربعات

معادله $A\ \underline{x} = \underline{y}$ را می‌توان به عنوان نگاشت بردار n بُعدی $\underline{x}$ در بردار m بُعدی $\underline{y}$ در نظر گرفت (m بزرگتر از n است). مساله ما معکوس کردن این نگاشت است. در حالت این مساله که $m > n$ است، $\underline{y}$ در فضای ستونی A قرار نمی‌گیرد ($\underline{y}$ در $Range\ (A)$ قرار نمی‌گیرد). در نتیجه ما به دنبال جوابی از $\underline{x}$ هستیم مانند $\hat{x}$ بطوری که فاصله عمودی بین $A\hat{x}$ و $\underline{y}$ کمینه شود. این فاصله را بردار خطای $\underline{e}$ می‌نامیم (معادله (۷-۴۰)). طول بردار $\underline{e}$ وقتی کمینه است که $\underline{e}$ در فضای برداری عمود بر $R(A)$ واقع شود. این فضای عمود بر $R(A)$ را با $N(A^T)$ نشان می‌دهند و فضای پوچی A^T نامند. هر برداری در این فضا به وسیله معادله زیر مشخص می‌شود.

$$A^T\underline{\xi} = \underline{0} \tag{۴۴-۷}$$

بنابراین e باید طوری باشد که داشته باشیم،

$$A^T\underline{e} = 0 \tag{۴۵-۷}$$

به طور خلاصه، در شرایطی که $m > n$ باشد بهترین جواب معادله $\underline{y} = A\ \underline{x}$ از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$\hat{x} = \underbrace{\left(\overbrace{(A^T}^{n\times m} \overbrace{A)}^{m\times n}\right)^{-1}}_{n\times n} \underbrace{A^T}_{n\times m} \underbrace{y}_{m\times 1} \equiv n \times 1 \qquad (۴۶\text{-}۷)$$

۷-۱-۲- بهینه‌سازی براساس مشتق

در این قسمت یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان ارائه می‌شود. این روش می‌تواند جهت جستجوی مناسب را بر اساس داده‌های تابعی از مشتقات تعیین کند. روش‌های بیشترین شیب نزولی و نیوتن را بررسی می‌کنیم. این روش‌ها اساس بسیاری از الگوریتم‌های مبتنی بر گرادیان هستند. می‌خواهیم تابعی را که متغیرهای آن چندبُعدی هستند، کمینه سازیم. برای نمونه $E(x)$ که x شامل x_1 تا x_n است، به ازای چه مقداری از x کمینه است. این x را x^* و مقدار کمینه آن را $E(x^*)$ می‌نامیم.

روش‌های نزولی

فرض کنید می‌خواهیم تابع با مقدار حقیقی E را که در فضای n بُعدی $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ تعریف شده کمینه سازیم. پس، یافتن نقطه کمینه $x = x^*$ (احتمالا کمینه محلی) گام یکم از این جستجو است.

به‌طورکلی یک تابع هدف داده شده E ممکن است تابعی غیرخطی از x باشد. بخاطر پیچیدگی که ممکن است E برحسب x داشته باشد معمولا الگوریتم را به صورت الگوریتم تکرارپذیر[۱] در نظر می‌گیرند، تا بتوان همه فضای مناسب ورودی x را پوشش داد. در روش تکرارپذیر نزولی، مقدار بعدی x یا x_{next} با مقدار فعلی آن x_{now} به کمک بردار جهت دار d به هم مربوط می‌شوند.

$$x_{next} = x_{now} + \eta d \qquad (۴۷\text{-}۷)$$

که در آن η مقداری مثبت است که **اندازه گام** نامیده می‌شود، و نشان می‌دهد که متغیر x با چه نرخی در جهت مشخص شده تغییر می‌کند. در مباحث فازی عصبی، عبارت **نرخ آموزش** برای "اندازه گام" به کار می‌رود. رابطه (۷-۴۷) را می‌توان چنین نوشت،

$$x_{k+1} = x_k + \eta_k d_k\,, \qquad (k = 1,2,3, \dots) \qquad (۴۸\text{-}۷)$$

که در آن k شماره تکرار فعلی است. هدف آن است که x_k به یک مقدار کمینه (محلی) x^* همگرا شود.

[۱] Iterative

در روش‌های نزولی تکرارپذیر، کمیت $\eta_k d_k$ مربوط به k امین گام، در دو مرحله، محاسبه می‌شود. نخست جهت d تعیین گشته و آنگاه اندازه گام η محاسبه می‌گردد. نقطه بعدی x_{next} باید در نامساوی زیر صدق کند،

$$\begin{gathered} E(x_{next}) < E(x_{now}) \\ E(x_{now} + \eta_k d_k) < E(x_{now}) \end{gathered} \tag{۴۹-۷}$$

تفاوت اصلی در بین الگوریتم‌های مختلفی که روش‌های نزولی را ارائه می‌کنند، در مرحله یک از محاسبه بالا، یعنی در تعیین جهت d است. هنگامی که جهت d معلوم شد، همه الگوریتم‌ها به دنبال تعیین یک نقطه کمینه (محلی) در امتداد خطی هستند، که از نقطه x_{now} در جهت تعیین d رسم شده است. برای تعیین این نقطه کمینه در امتداد این خط، باید اندازه گام بهینه تعیین شود. یعنی در مرحله دوم، اندازه گام را به کمک کمینه‌سازی طول خط تعیین می‌کنیم.

$$\eta^* = \arg\min_{\eta>0} \phi(\eta) \tag{۵۰-۷}$$

که در آن،

$$\phi(\eta) = E(x_{now} + \eta d) \tag{۵۱-۷}$$

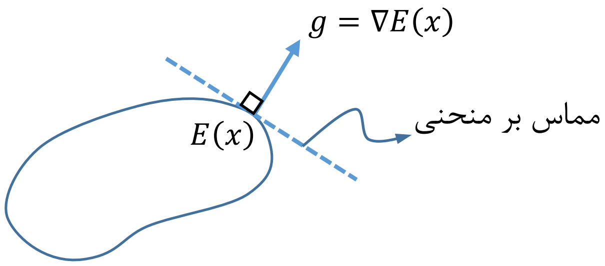
جستجو برای تعیین η^* به روش جستجوی خط یا جستجوی یک بُعدی انجام می‌شود. که در ادامه بیان خواهد شد. (در قسمت ۷-۵-)

روش‌های بر پایه گرادیان

اگر جهت کاهشی بردار d بر اساس گرادیان g از تابع هدف E تعیین شود، این روش‌های نزولی را **روش‌های نزولی بر پایه گرادیان** می‌نامند. گرادیان یک تابع مشتق‌پذیر E در x، بردار مشتق اول E بوده و آن را با g نمایش می‌دهیم،

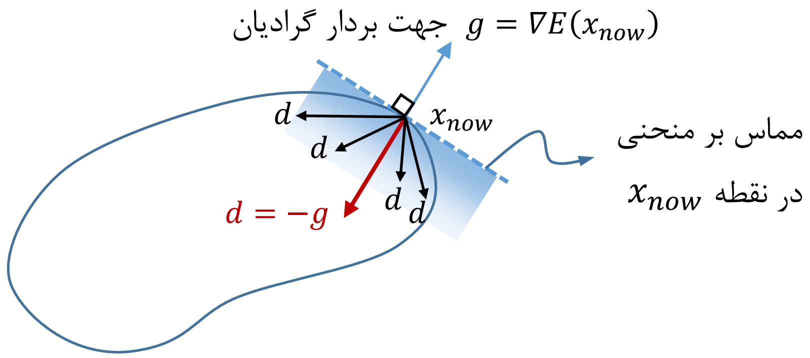
$$g(x) \triangleq \nabla E(x) \triangleq \left[\frac{\partial E(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial E(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial E(x)}{\partial x_3} \quad \frac{\partial E(x)}{\partial x_4}\right]^T \tag{۵۲-۷}$$

این بردار در هر نقطه بر منحنی $E(x)$ در آن نقطه عمود است.



شکل ۷-۳ : نمایش بردار گرادیان یک منحنی

اگر نقطه شروع روی منحنی $E(x)$، x_{now} باشد، بردار گرادیان در این نقطه با $g = \nabla E(x_{now})$ در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۷-۴ : نمایش بیشترین شیب نزولی در نقطه محلی x_{now}

منطقه زیر خط مماس بر منحنی در نقطه x_{now} که در جهت مقابل بردار گرادیان است و با سایه نشان داده شده، منطقه‌ای است که جهت بردار d را نشان می‌دهد (جهت بردار d جهتی است که x_{next} در آن جهت قرار دارد). چند نمونه از جهت‌های بردار d در شکل بالا نشان داده شده است. بردار ضخیم‌تر، در جهت مخالف g قرار دارد، یعنی $d = -g$. این جهت $d = -g$ را جهت **بیشترین شیب نزولی** در نقطه محلی x_{now} نامند.

به‌طورکلی برای یک جهت بردار گرادیان مانند شکل ۷-۴، جهت‌های امکان‌پذیر نزولی d (بخش سایه خورده) شرط زیر را دارند. d و g هردو ستونی و g^T سطری است.

$$\left.\frac{\mathrm{d}E(x_{now}+\eta d)}{\mathrm{d}\eta}\right|_{\eta=0} = g^T d = \text{حاصل‌ضرب داخلی بردار}$$
$$= \left(\text{اندازه بردار اول}\right) \times \left(\text{اندازه بردار دوم}\right) \times \cos\left(\text{زاویه بین دو بردار}\right) \qquad (۷-۵۳)$$

$$\left.\frac{dE\,(\overbrace{x_{now}+\eta d}^{x_{next}\ \text{موقعیت}})}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \|g^T\|\cdot\|d\|\cos(\xi) < 0$$

در منطقه سایه خورده زاویه ξ بیشتر از ۹۰° درجه است، پس $\cos\xi$ منفی است. باید توجه داشت که بسط تیلور E چنین است،

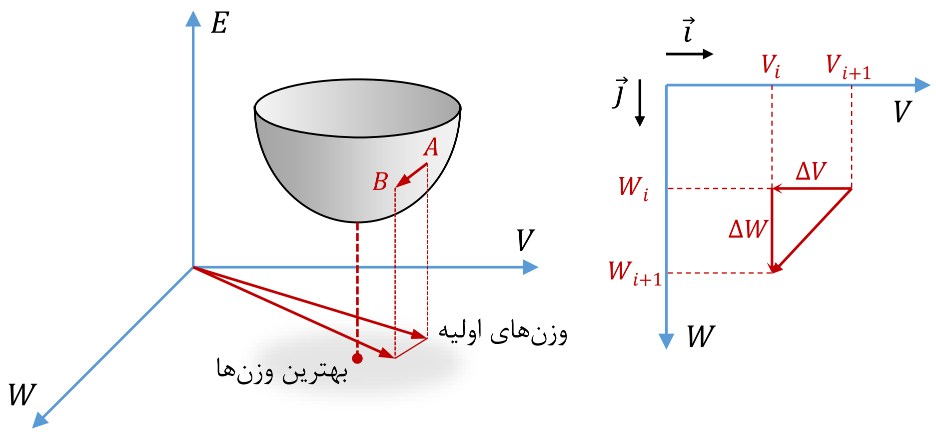
$$E[x_{now}+\eta d] = E[x_{now}] + \eta\,\underbrace{\nabla E(x)d}_{g^T} + h.o.t(\eta^2) \qquad (۵۴\text{-}۷)$$

اگر η به سمت صفر میل کند، عبارت‌های مرتبه بالاتر صفر می‌شوند. مشتق این عبارت نسبت به η تنها شامل ضرب داخلی g^T و d می‌شود. زیرا، عبارت اول سمت راست، η ندارد و مشتق عبارت دوم هم همان رابطه (۷-۸۷) می‌شود.

برای مقادیر مثبت و کوچک η نامساوی (۷-۴۹) در صورتی صادق خواهد بود که $g^T d < 0$ باشد. توجه شود که بردار گرادیان همواره عمود بر منحنی است.

روش بیشترین شیب نزولی

شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۵: روش کمینه‌سازی تابع خطا به روش بیشترین شیب نزولی

هدف تعیین بهترین مقادیر وزن‌های V و W است که تابع خطای $E=\sum_{p=1}^{P} E_p(V,W,I)$ را کمینه کند. در این رابطه V ماتریسی $m\times l$، W ماتریسی $n\times m$ و I بردار ورودی $1\times l$ است، برای سادگی محاسبات، فرض کنید که سطح خطای شکل بالا، کروی باشد. بردار $\overrightarrow{AB}$ را می‌توان محاسبه نمود.

$$\overrightarrow{AB} = (V_{i+1}-V_i)\vec{i} + (W_{i+1}-W_i)\vec{j} = \Delta V\vec{i} + \Delta W\vec{j} \qquad (۵۵\text{-}۷)$$

$\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ بردارهای یکه در امتداد V و W هستند. طبق تعریف بردار گرادیان عبارت است از،

$$\vec{G} = \frac{\partial E}{\partial V}\vec{\imath} + \frac{\partial E}{\partial W}\vec{\jmath} \qquad (۷-۵۶)$$

بنابراین بردار یکه در امتداد گرادیان برابر است با،

$$\vec{e}_{AB} = \frac{1}{|\vec{G}|}\left[\frac{\partial E}{\partial V}\vec{\imath} + \frac{\partial E}{\partial W}\vec{\jmath}\right] \qquad (۷-۵۷)$$

با توجه به رابطه (۷-۵۶) چون $\overrightarrow{AB}$ در امتداد بردار گرادیان است و با توجه به رابطه (۷-۵۷) می‌توان $\overrightarrow{AB}$ را چنین نوشت،

$$\overrightarrow{AB} = -\eta\left[\frac{\partial E}{\partial V}\vec{\imath} + \frac{\partial E}{\partial W}\vec{\jmath}\right] \qquad (۷-۵۸)$$

که در آن،

$$\eta = \frac{k}{|\vec{G}|}\,, \qquad k = cte \qquad (۷-۵۹)$$

از مقایسه دو رابطه (۷-۵۸) و (۷-۵۵) نتیجه می‌شود،

$$\Delta V = -\eta\frac{\partial E}{\partial V}\,, \qquad \Delta W = -\eta\frac{\partial E}{\partial W} \qquad (۷-۶۰)$$

در لایه خروجی و برای k امین نورون در این رابطه داریم،

$$E_k = (d_k - O_{ok})^2 \qquad (۷-۶۱)$$

که در آن d_k خروجی مطلوب k ام و O_{ok} خروجی نورون k ام از لایه خروجی است. برای محاسبه $\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}}$ با استفاده از قاعده مشتق‌گیری زنجیره ای داریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}} = \frac{\partial E_k}{\partial O_{ok}}\frac{\partial O_{ok}}{\partial I_{ok}}\frac{\partial I_{ok}}{\partial W_{ik}} \qquad (۷-۶۲)$$

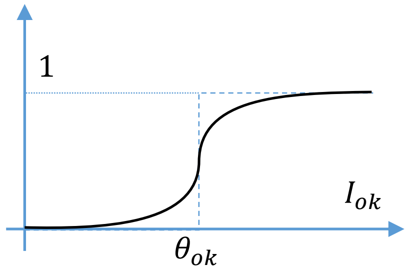
که در آن،

$$\frac{\partial E_k}{\partial O_{ok}} = -2(d_k - O_{ok}) \qquad (۷-۶۳)$$

و اگر خروجی k ام نورون خروجی با تابع سیگموئید بیان شود داریم،

$$O_{ok} = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(I_{ok} - \theta_{ok})}} \qquad (۷-۶۴)$$

که در آن I_{ok} ورودی به k امین لایه خروجی و θ_{ok} **آستانه**[۱] آن لایه است.



شکل ۷-۶ : تابع سیگموئید

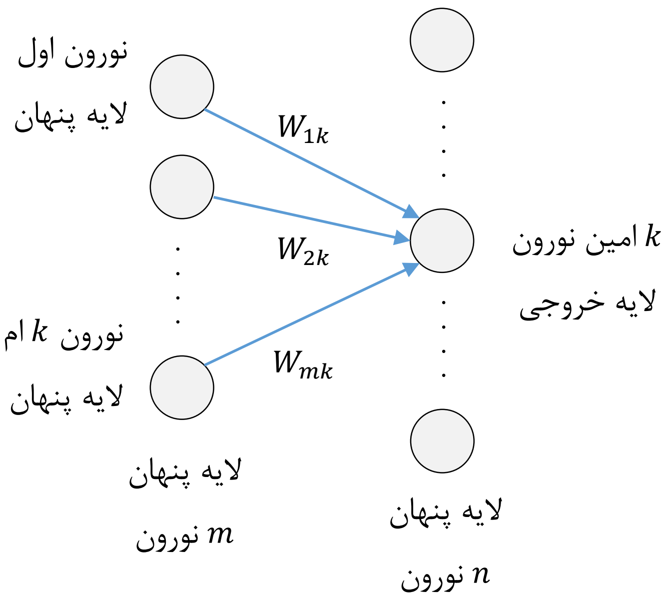
بنابراین،

$$\frac{\partial O_{ok}}{\partial I_{ok}} = \lambda O_{ok}(1 - O_{ok}) \tag{۶۵-۷}$$

حال می‌خواهیم $\frac{\partial I_{ok}}{\partial W_{ik}}$ را محاسبه کنیم. داریم،

$$I_{ok} = W_{1k}O_{H1} + W_{2k}O_{H2} + \cdots + W_{mk}O_{Hk} \tag{۶۶-۷}$$

که در آن I_{ok} ورودی به k امین نورون خروجی و O_{Hk} خروجی نورون k ام لایه پنهان است.



شکل ۷-۷ : ؟؟

بنابراین داریم،

[۱] Threshold

$$\frac{\partial I_{ok}}{\partial W_{ik}} = O_{Hi} \tag{۶۷-۷}$$

با قرار دادن از (۷-۶۳) و (۷-۶۵) و (۷-۶۷) در (۷-۶۲) نتیجه می‌شود،

$$\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}} = -2\lambda(d_k - O_{ok})\, O_{ok}\, (1 - O_{ok})O_{Hi} \tag{۶۸-۷}$$

در رابطه (۷-۶۰) داریم،

$$\Delta W_{ik} = -\eta \frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}} \tag{۶۹-۷}$$

این معادله در فرم ماتریسی چنین می‌شود،

$$\Delta W_{m\times n} = \eta_{\text{اسکالر}}\{O_{m\times 1}\}_H\{S_{1\times n}\} \tag{۷۰-۷}$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{۷۱-۷}$$

که در آن،

$$S_k = 2\lambda(d_k - O_{ok})O_{ok}(1 - O_{ok}) \tag{۷۲-۷}$$

به همین ترتیب $\frac{\partial E_k}{\partial V_{ij}}$ را محاسبه می‌کنیم. نتیجه می‌شود،

$$\frac{\partial E_k}{\partial V_{ij}} = \frac{\partial E_k}{\partial O_{ok}} \frac{\partial O_{ok}}{\partial I_{ok}} \frac{\partial I_{ok}}{\partial O_{Hi}} \frac{\partial O_{Hi}}{\partial I_{Hi}} \frac{\partial I_{Hi}}{\partial V_{ij}} \tag{۷۳-۷}$$

و داریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial I_{ok}} = \frac{\partial E_k}{\partial O_{ok}} \frac{\partial O_{ok}}{\partial I_{ok}} = -2\lambda(d_k - O_{ok})O_{ok}(1 - O_{ok})$$

$$\frac{\partial I_{ok}}{\partial O_{Hi}} = W_{ik}$$

$$\frac{\partial O_{Hi}}{\partial I_{Hi}} = 2\lambda O_{Hi}(1 - O_{Hi})$$

$$\frac{\partial I_{Hi}}{\partial V_{ij}} = O_{ij} = I_{ij}$$

بنابراین داریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial O_{ok}} = \frac{\partial O_{ok}}{\partial I_{ok}} \; \frac{\partial I_{ok}}{\partial O_{Hi}} = -W_{ik} S_k = -e_i$$

که در آن S_k در رابطه (۷-۷۱) داده شده است. عبارت S_k^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$S_k^* = -2 e_i \lambda O_{Hi} (1 - O_{Hi})$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial V_{ij}} = -S_k^* I_{ij} \tag{۷-۷۴}$$

و یا،

$$\Delta V_{l\times m} = \eta \{I_{l\times 1}\}_I S_{1\times m}^* \tag{۷-۷۵}$$

که در آن،

$$S^* = \begin{bmatrix} S_1^* \\ \vdots \\ S_m^* \end{bmatrix} \tag{۷-۷۶}$$

بنابراین داریم،

$$\Delta W_{m\times n} = \eta \{O_{m\times 1}\}_H S_{1\times n}$$
$$\Delta V_{l\times m} = \eta \{I_{l\times 1}\}_I S_{1\times m}^* \tag{۷-۷۷}$$

در معادلات (۷-۷۷)، $\boldsymbol{\eta}$ را **نرخ یادگیری** نامند.

۷-۲- شبکه عصبی طبیعی یا دستگاه عصبی

مقدمه

جانوران پرسلولی برای ایجاد هماهنگی بین اعمال سلول‌ها و اندام‌های مختلف بدن خود نیاز به عوامل و دستگاه‌های ارتباطی دارند. [؟؟]. دستگاه عصبی این وظیفه را بر عهده دارد. خواص ویژه دستگاه عصبی عبارت است از،

- تاثیرپذیری نسبت به محرک‌های خارجی.
- ایجاد یک جریان عصبی که نماینده تاثیر محرک است.
- هدایت جریان عصبی از یک نقطه دستگاه در بدن به نقطه دیگر.
- انتقال جریان عصبی از یک واحد عصبی به واحد دیگر.

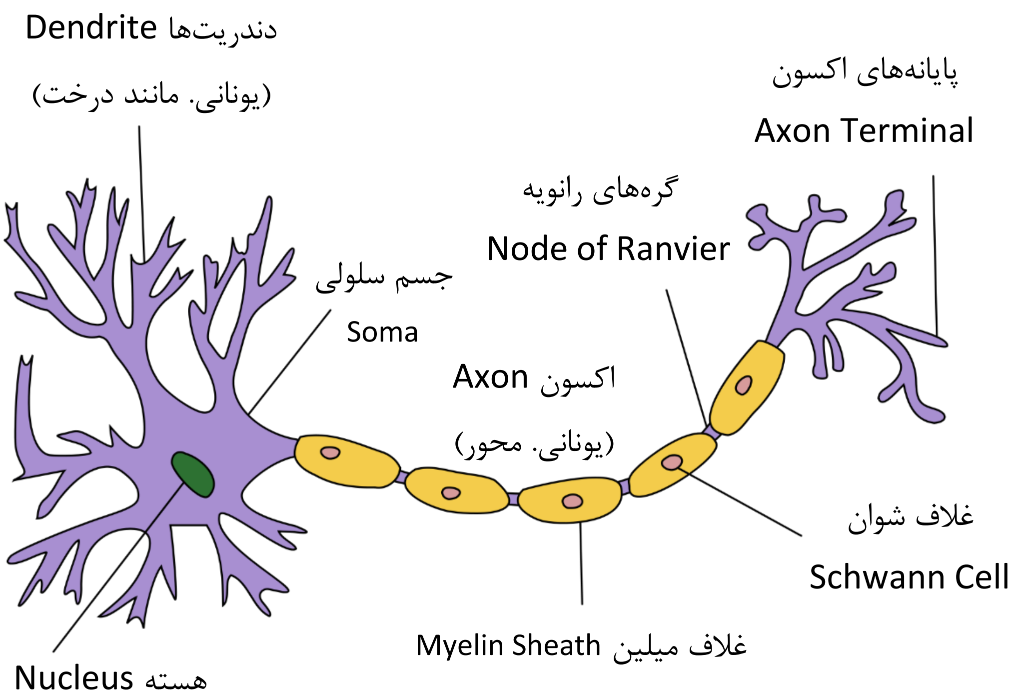
دستگاه عصبی بدن انسان شامل دو بخش اصلی است،

۱. دستگاه عصبی مرکزی
۲. دستگاه عصبی محیطی

دستگاه عصبی مرکزی شامل مغز و نخاع است که مراکز نظارت بر اعمال بدن هستند. دستگاه عصبی محیطی شامل تعداد زیادی رشته عصبی است، که در سرتاسر بدن گسترش یافته است. دستگاه عصبی محیطی از سه نوع عصب تشکیل شده است. اعصاب حسی که پیام‌های عصبی را از اندام‌ها به مغز می‌برند. اعصاب حرکتی که پیام‌های عصبی را از مغز و نخاع به ماهیچه‌ها می‌برند. اعصاب مختلط که مجموعه‌ای از تارهای حسی و حرکتی هستند.

نورون و ساختار آن

نورون‌ها، سلول‌های عصبی هستند، که اجزای تشکیل‌دهنده شبکه عصبی طبیعی یا دستگاه عصبی بدن را تشکیل می‌دهند. نورون‌ها، پیام‌های عصبی را به بافت‌ها و اندام‌های بدن مانند ماهیچه‌ها، غده‌ها و نیز نورون‌های دیگر می‌فرستند. پیام‌های عصبی که نورون‌ها ارسال می‌کنند، سیگنال‌های الکتروشیمیایی هستند. نورون‌ها انواع گوناگونی دارند؛ اما، ساختار کلی آنها به صورت ارائه شده در شکل ۷-۸ است.



شکل ۷-۸ :

هسته سلول در قسمت **جسم سلولی**[1] نورون قرار دارد. رشته‌هایی که از جسم سلولی بیرون آمده‌اند، بر دو نوع هستند؛ **دندریت**[2] و **اکسون**[3]. دندریت‌ها پیام را دریافت می‌کنند و به جسم سلولی می‌آورند. اکسون پیام عصبی را از جسم سلولی تا انتهای خود که **پایانه اکسون**[4] نام دارد هدایت می‌کند. پیام عصبی از محل پایانه اکسون به سلول دیگر انتقال می‌یابد. محلی را که در آن یک نورون با سلول دیگر ارتباط برقرار می‌کند، **سیناپس**[5] می‌نامند.

مغز انسان به طور متوسط 10^{11} (صد میلیارد) نورون دارد و هر نورون با حدود 10^4 (ده هزار) نورون دیگر تبادل اطلاعات می‌کند. این ارتباط را **ارتباط سیناپتیک** نامند. به این ترتیب حدود 10^{15} یا یک میلیون میلیارد اتصال سیناپسی در مغز انسان وجود دارد. مغز انسان چنین شبکه عظیم و سیستم پیچیده دینامیکی غیرخطی است. نورون‌های طبیعی یا در حالت فعالیت عصبی هستند و یا در حالت استراحت قرار دارند. حالت فعالیت یا آرامش نورون بستگی به اختلاف پتانسیل دو سوی غشای نورون دارد. **پتانسیل آرامش** حالتی است که نورون در حالت استراحت قرار دارد و پتانسیل درون سلول نسبت به بیرون آن منفی است.

پتانسیل عمل حالتی است که به علت تغییر ناگهانی و شدید در اختلاف پتانسیل بین دو سوی غشا در زمان بسیار کوتاهی پتانسیل داخل غشا نسبت به خارج آن مثبت‌تر می‌شود و بلافاصله به حالت اول خود بر می‌گردد. این پتانسیل نقطه به نقطه در طول رشته عصبی سیر می‌کند و توسط نورون‌ها منتقل می‌شود. این یک **پیام عصبی** است.

برای آن که پیام عصبی بتواند انتقال بیابد، باید دلیلی برای تغییر ناگهانی و شدید در اختلاف پتانسیل دو سوی غشا وجود داشته باشد. وقتی دستتان به ظرفی که داغ است، تماس پیدا می‌کند، پیام عصبی توسط حسگرها که یکی از انواع نورون‌های عصبی هستند، به مغز منتقل می‌شود. مغز به نورون‌های اعصاب حرکتی فرمان می‌دهد و دست به سرعت پس کشیده می‌شود. برای آنکه نورون فعال شود، باید سیگنال‌هایی که توسط دندریت‌ها به هسته سلول نورون می‌رسند، به آستانه معینی رسیده باشند تا آن نورون فعال شود.

[1] Soma

[2] Dendrite

[3] Axon

[4] Axon Terminal

[5] Synapse

۷-۳- شبکه عصبی مصنوعی

مقدمه

شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی هر دو می‌توانند توابع ورودی خروجی را تخمین بزنند و مدل‌سازی نمایند. هر دوی آنها سیستم‌های دینامیکی آموزش‌پذیر و دارای توانایی یادگیری هستند. داده‌های سیستم اصلی به صورت داده‌های نمونه‌برداری شده و برنامه‌هایی که به این منظور طراحی می‌شوند، نحوه تغییرات این مدل‌ها را بر حسب زمان تعیین می‌کند. بر خلاف روش‌های تخمین مبتنی بر مدل، مانند تخمین‌گر لوئین برگر و فیلتر کالمن، در روش‌های مدل‌سازی فازی وشبکه عصبی نیازی به مدل ریاضی وجود ندارد. آنها **تخمین‌گرهای بی‌نیاز از مدل ریاضی** هستند. آنها با استفاده از داده‌های عددی زمانی و یا داده‌های کلامی زمانی و به کمک تجربیات موجود آموزش می‌بینند.

شبکه‌های عصبی مصنوعی با تلاش برای مدل‌سازی از شبکه عصبی طبیعی در انسان به وجود آمده‌اند. این شبکه‌ها از تعداد بسیار زیادی واحد پردازش ساده درست شده‌اند، که در اینجا نیز نورون نامیده می‌شوند. نورون‌ها را می‌توان برای انجام محاسبات برنامه‌ریزی کرد و آموزش داد. از آنها می‌توان برای شناختن سیستم‌های مختلف برای ذخیره‌سازی اطلاعات حل مسئله بهینه‌سازی فیلترسازی اغتشاش و نویز از داده‌های اندازه‌گیری و مدل‌سازی سیستم‌های متغیر با زمان استفاده کرد [؟؟].

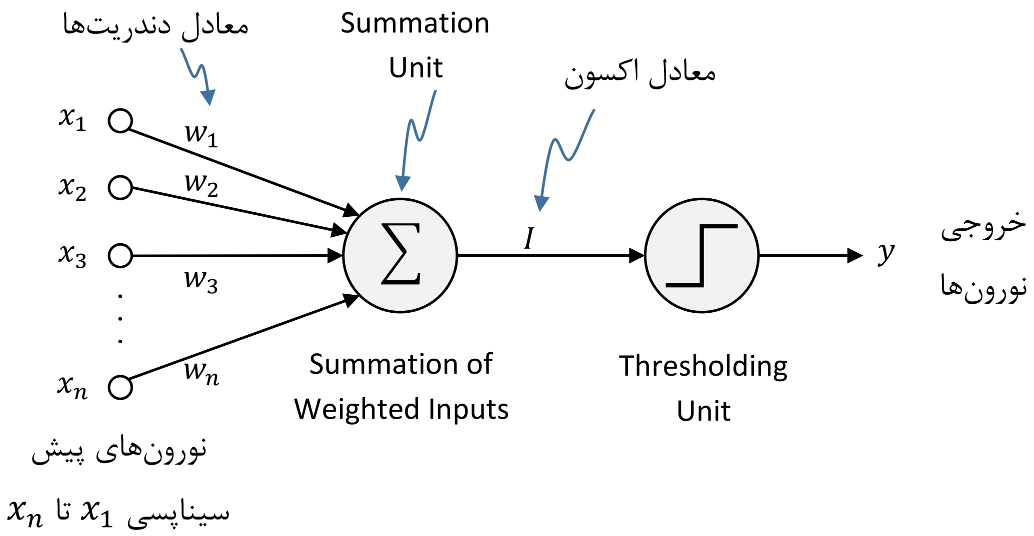
شبکه‌های عصبی مصنوعی ممکن است از میلیون‌ها نورون و رابط تشکیل شود. در آینده شبکه‌های عصبی ممکن است شامل میلیاردها نورون واقعی یا مدل‌های مجازی از نورون‌ها شود. به‌طورکلی هیچ سیستم آموزشی نمی‌تواند چنین شبکه بزرگی را کاملا راهبری، هماهنگ و پایدار نماید.

شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌توانند - همانند مغز انسان - طرح‌هایی را شناسایی کنند، که ما حتی نمی‌توانیم آنها را تعریف کنیم. این خاصیت را **تشخیص بدون تعریف** نامند. چگونه می‌توان یک درخت، یک بالش یا حالت رضایت ایجاد شده در چهره بر اثر عملکرد مناسب رایانه از تشخیص یک الگو را تعریف کرد. اصولا، این موارد و بسیاری دیگر را با ارائه مثال بیان و تعریف می‌کنیم. یادگیری این مفاهیم با یادگیری مفهوم دایره کاملا متفاوت است. این نوع مثال‌ها نمونه‌هایی از تشخیص بدون تعریف هستند. بدیهی است، برای تشخیص بدون تعریف سیستم تشخیص‌دهنده باید بسیار هوشمندتر از سیستمی باشد، که دایره را تشخیص می‌دهد. شبکه‌های عصبی مصنوعی با شبیه‌سازی عملکرد مغز می‌تواند به مدل‌سازی و شناسایی کلاس وسیعی از سیستم‌های دینامیکی بپردازد؛ سیستم‌هایی که روش‌های کلاسیک مدل‌سازی قادر به شناسایی آنها نیستند.

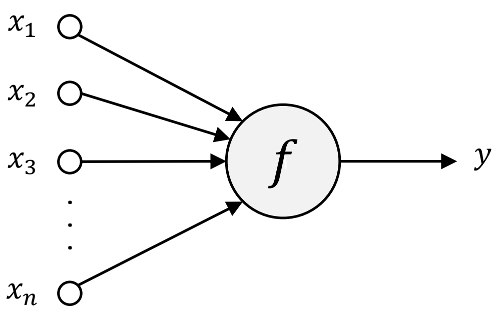
۷-۳-۱- مدل نورون مصنوعی

رفتار یک نورون در شکل ۷-۹-ب) نشان داده شده است. هر عضو این مدل مشابه عضوی از نورون طبیعی است. در این شکل x_1 تا x_n، n ورودی به نورون مصنوعی و w_1 تا w_n وزن رابطه‌های متصل به ورودی‌ها است (همانند دندریت‌ها در ورودی به نورون طبیعی هستند).

در نورون طبیعی ورودی‌های به نورون از راه دندریت‌ها داده می‌شوند. در داخل نورون، این ورودی‌ها جمع می‌شوند و اگر نتیجه آن از یک آستانه[۱] بیشتر گردد، سیگنال خروجی تولید می‌شود. سیگنال‌های ورودی از راه سیناپس‌ها[۲] از بدنه سلول نورون عبور می‌کنند، که سیناپس‌ها ممکن است سیگنال ورودی را شتاب دهند یا کند کنند.



(الف)



(ب)

شکل ۷-۹ : الف) مدل ساده یک نورون مصنوعی ب) شیوه نمایش مدل ساده نورون.

[۱] Threshold

[۲] Synapse

هنگامی که پیام عصبی به پایانه اکسون می‌رسد، می‌تواند به سلول‌های دیگر منتقل شود. محلی را که در آن یک نورون با سلول دیگر ارتباط برقرار می‌کند **سیناپس** می‌نامند.

عمل شتاب‌دهندگی یا کندشوندگی سیناپس‌ها در مدل ساده شکل ۷-۹-ب) با وزن‌های w_1 تا w_n نشان داده شده‌اند. بنابراین ورودی کل که توسط سلول نورون دریافت می‌شود برابر است.

$$I = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \tag{۷-۷۸}$$

خروجی کل نورون یعنی y تابعی از I است یعنی،

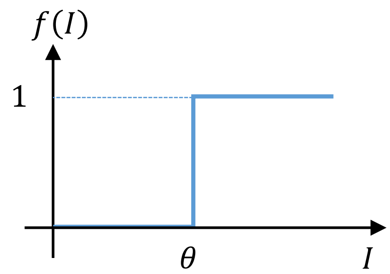
$$y = f(I)$$

تابع f را **تابع فعال‌ساز**[۱] می‌نامند، یک تابع متداول برای f در شبکه‌های عصبی مصنوعی استفاده از تابع آستانه است. در این نوع تابع اگر متغیر I از مقدار معینی مانند θ که آن را **آستانه** نامند، بزرگ‌تر باشد، خروجی برابر 1 و اگر کوچک تر یا مساوی θ باشد، خروجی مساوی صفر است و داریم،

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta\right) = f(I)$$

تابع $f(I)$ چنین تعریف می‌شود،

$$f(I) = \begin{cases} 1 & if \quad I > \theta \\ 0 & if \quad I \le \theta \end{cases} \tag{۷-۷۹}$$



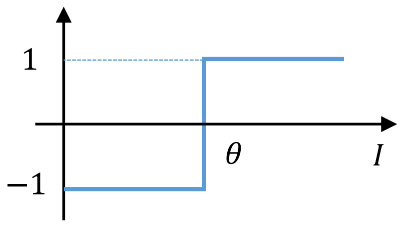
شکل ۷-۱۰ : تابع آستانه یک طرفه

تابع دیگری که **تابع علامت**[۲] نامیده می‌شود چنین است،

$$f(I) = \begin{cases} 1 & if \quad I > \theta \\ -1 & if \quad I \le \theta \end{cases} \tag{۷-۸۰}$$

[۱] Activation Function

[۲] Signum Function, Quantize Function



شکل ۷-۱۱ : تابع آستانه دو طرفه

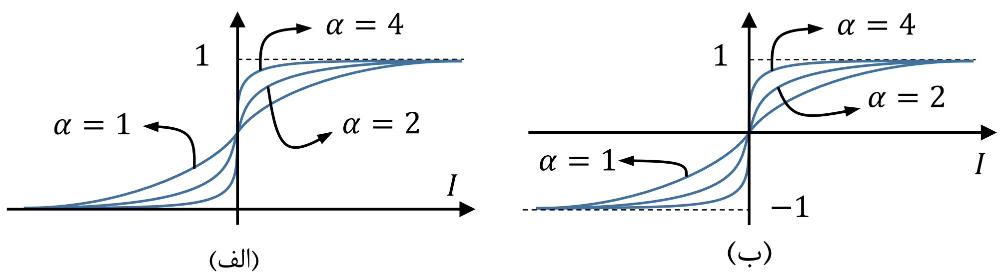
اشکال کار این توابع در مدل‌سازی نورون آن است که مشتق‌پذیر نیستند. برای حل این مساله به جای این توابع از توابع سیگموئید استفاده می‌کنیم.

تابع سیگموئید، تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است که به جای توابع آستانه شکل‌های شکل ۷-۱۰ و شکل ۷-۱۱ می‌توان آنها را به کار برد (به ازای $\theta = 0$).

$$f(I) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha I}} \tag{۸۱-۷}$$

$$f(I) = \frac{1 - e^{-\alpha I}}{1 + e^{-\alpha I}} \tag{۸۲-۷}$$

رابطه (۷-۸۱) تابع سیگموئید یک طرفه و رابطه (۷-۸۲) تابع سیگموئید دو طرفه را مشخص می‌کند. شکل زیر توابع سیگموئید یک و دو طرفه را به ازای مقادیر مختلف α و با فرض $\theta = 0$ نشان می‌دهد.

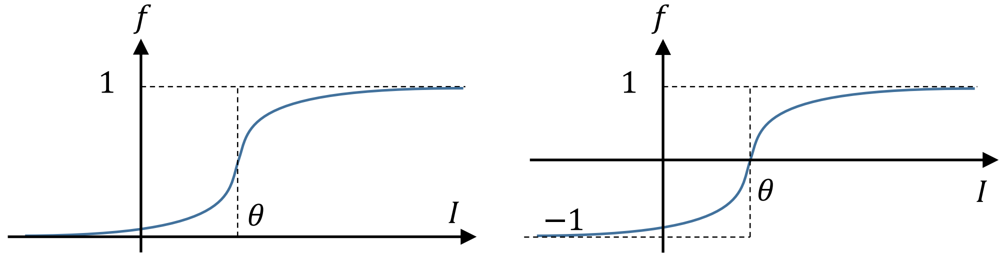


شکل ۷-۱۲ : الف) تابع سیگموئید یک طرفه ب) تابع سیگموئید دو طرفه به ازای $\theta = 0$

اگر $\theta \neq 0$ باشد، معادلات و شکل‌های توابع سیگموئید یک طرفه و دو طرفه به صورت زیر است،

$$f(I) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(I-\theta)}} \tag{۸۳-۷}$$

$$f(I) = \frac{1 - e^{-\alpha(I-\theta)}}{1 + e^{-\alpha(I-\theta)}} \tag{۸۴-۷}$$



(الف) (ب)

شکل ۷-۱۳ : الف) تابع سیگموئید یک طرفه ب) تابع سیگموئید دو طرفه به ازای $\theta \neq 0$

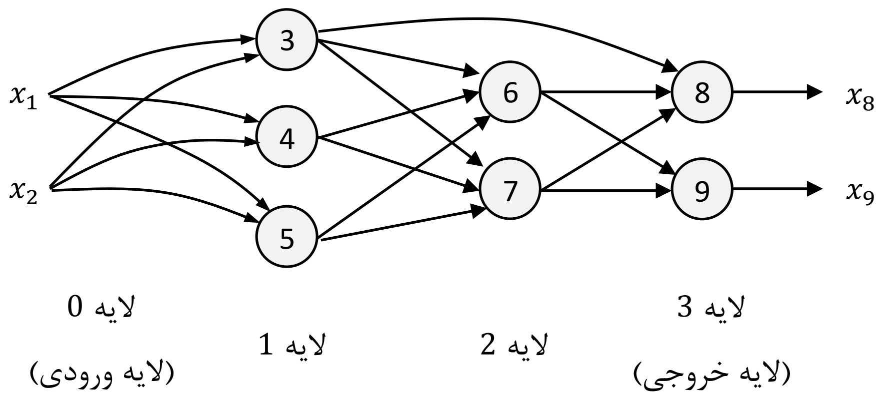
با این مقدمات به تعریف شبکه عصبی مصنوعی می‌پردازیم. شبکه عصبی مصنوعی، یک ساختار شبکه‌ای شامل تعداد بسیار زیادی اجزای پردازشی ساده (نورون مصنوعی) است، که شبکه به هم متصلی برای پردازش داده‌ها تشکیل می‌دهد. هر نورون نشان‌دهنده یک واحد پردازش است، که همانند نورون طبیعی توسط رابط‌ها به سایر نورون‌ها متصل است. در شبکه عصبی مصنوعی نقش دندریت‌ها و اکسون‌ها را رابط‌ها ایفا می‌کنند. رابط‌ها جهت‌دار هستند تا بتوانند روابط علت و معلولی[۱] میان نورون‌ها را نشان دهند. گره در شبکه عصبی مصنوعی نقش جسم سلولی در نورون طبیعی را به عهده دارد. هر گره در یک شبکه عصبی به عنوان یک نگاشت از ورودی‌ها به خروجی‌ها عمل می‌کند. به‌عبارت‌دیگر، خروجی هر گره، تنها به ورودی‌های همان لحظه گره بستگی دارد و هیچ نوع دینامیک یا حافظه‌ای در گره وجود ندارد و گره فاقد متغیرهای حالت است. پارامترهای یک شبکه عصبی در داخل گره‌ها توزیع شده است. گره‌های نورون‌های مصنوعی بر دو نوع هستند؛ استاتیکی و تطبیقی. **استاتیکی** بدین معنا که پارامتر قابل تغییر یا قابل تنظیم ندارند و **تطبیقی** آن که گره‌ها دارای پارامترهای قابل تنظیم هستند. معنی هوشمند بودن یک شبکه عصبی مصنوعی آن است که بتوان با آموزش شبکه پارامترهای قابل تنظیم گره‌های آن را به گونه‌ای تغییر داد که سیستمی را شناسایی کند یا طرحی را از بین مجموعه‌ای از طرح‌های گوناگون تشخیص دهد.

۷-۳-۲- ساختار شبکه عصبی مصنوعی

شکل ۷-۱۴ ساختار یک نمونه شبکه عصبی تطبیقی را نشان می‌دهد، که رفتار ورودی- خروجی آن به وسیله مجموعه‌ای از پارامترهای قابل اصلاح تعیین می‌شود. این ساختار شامل مجموعه‌ای از گره‌ها است. گره‌ها به وسیله رابط‌های جهت‌دار به هم متصل هستند. هر رابط نشان‌دهنده جهت جریان از یک گره به گره دیگر است. هر گره ارائه‌دهنده گره استاتیکی است که به عنوان یک تابع استاتیکی بر روی سیگنال‌های

[۱] Causal Relationship

ورودی به گره عمل می‌کند تا خروجی یکه برای آن گره ایجاد کند. معمولا تابع هر گره یک تابع پارامتری است که پارامترهای آن قابل تغییر و اصلاح هستند. با تغییر این پارامترها، تابع هر گره تغییر می‌کند و در نتیجه عملکرد کل شبکه تطبیقی نیز تغییر می‌یابد.



شکل ۷-۱۴ : ساختار شبکه عصبی

نکته ۷-۱ . هر گره در یک شبکه عصبی به عنوان یک نگاشت از ورودی‌هایش به خروجی اش عمل می‌کند. به عبارت دیگر خروجی هر گره تنها به ورودی‌های همان لحظه گره بستگی دارد و هیچ نوع دینامیک یا حافظه‌ای در گره وجود ندارد و گره فاقد متغیرهای حالت است.

فرض می‌شود، توابع گره‌ها همه جا بجز در تعدادی نقطه معین، مشتق‌پذیر هستند. همچنین یک شبکه تطبیقی نامتجانس است؛ یعنی هر گره می‌تواند تابعی متفاوت از تابع سایر گره‌ها داشته باشد. در شبکه‌های عصبی- تطبیقی، رابطها صرفا و تنها برای این منظور به کار می‌روند که نشان دهند جهت گسترش و تکثیر خروجی‌های گره چگونه است.

پارامترهای یک شبکه عصبی در داخل گره‌ها توزیع شده است، بنابراین هر گره دارای مجموعه‌ای از پارامترهای محلی است. اجتماع این مجموعه‌های محلی پارامترها، پارامترهای کل شبکه را ارائه می‌دهند.

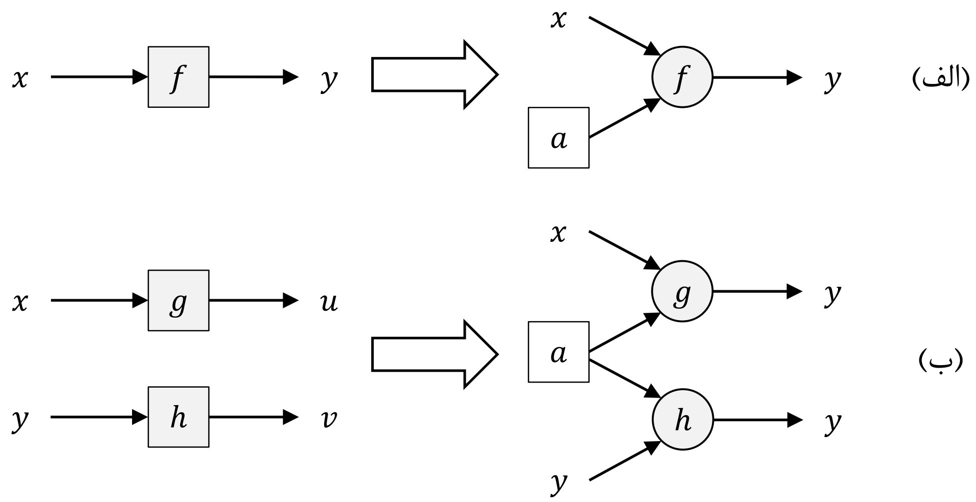
اگر مجموعه پارامترهای گره‌ای، یک مجموعه تهی باشد، در این‌صورت، عملکرد این **گره ثابت** است و قابل تغییر نیست. به بیان دیگر، تابع گره مقداری ثابت است. برای نشان دادن این نوع گره از دایره استفاده می‌شود.

اگر مجموعه پارامترهای یک گره یک مجموعه ناتُهی باشد، آنگاه تابع گره، بستگی به مقادیر پارامترها دارد. این نوع گره را **گره تطبیقی**[1] نامند و با مربع نشان می‌دهند.

[1] Adaptive Node

هر گره تطبیقی را می‌توان به یک گره ثابت و یک یا چند گره پارامتری تقسیم کرد. با بررسی نمونه‌ای این مطلب را بیان می‌کنیم.

مثال ۷-۱ : شکل ۷-۱۵-الف) یک شبکه تطبیقی با یک گره را نشان می‌دهد که می‌توان آن را با معادله $y = f(x, a)$ نشان داد. در این معادله x، ورودی، و y خروجی و a پارامتر مربوط به گره است. یک نمایش معادل به این صورت به دست می‌آید که، پارامتر a را از گره خارج کنیم و آن را داخل یک گره پارامتری قرار دهیم.



شکل ۷-۱۵ : تجزیه گره‌های تطبیقی الف) یک گره

ب) مساله پارامترهای مشترک که در آن $g = g(a, x)$، $h = h(a, y)$

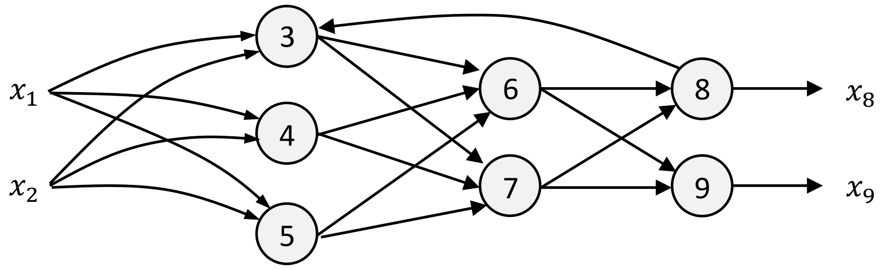
همانطورکه در شکل ۷-۱۵-الف) دیده می‌شود، یک گره پارامتری حالت خاصی از گره تطبیقی است که ورودی ندارد و خروجی آن، خود پارامتر است.

گره پارامتری در حل بعضی مسائل و مشکلات نمایشی و ساده‌سازی نمایش شبکه‌های عصبی مفید است. مانند مساله پارامتری مشترک نظیر شکل ۷-۱۵ ب) که در آن دو گره تطبیقی $u = g(x, a)$ و $V = h(y, a)$ در پارامتر a مشترک هستند و با خط‌چین ارتباط‌دهنده این دو گروه نشان داده شده است. با خارج کردن این پارامتر و قرار دادن آن در یک گره پارامتری، می‌توانیم مساله نیاز به پارامتر مشارکتی را در ساختمان سیستم به کار ببریم. این امر باعث ساده شدن نمایش شبکه و سادگی به کارگیری نرم افزار مربوط می‌شود.

شبکه‌های تطبیقی عصبی متناسب با نوع ارتباطی که دارند، به دو دسته تقسیم می‌شوند،

شبکه پیش‌خور[1] و شبکه برگشتی[2] یا پس‌خور. شبکه تطبیقی شکل ۷-۱۴، نمونه‌ای از شبکه **پیش‌خور** می‌باشد؛ زیرا، همه گره‌ها از سمت چپ به سمت راست و از ورودی به خروجی فعال می‌شود.

اگر یک مدار برگشتی در شبکه عصبی تطبیقی وجود داشته باشد، شبکه را **برگشتی** نامند. مانند شکل ۷-۱۶.

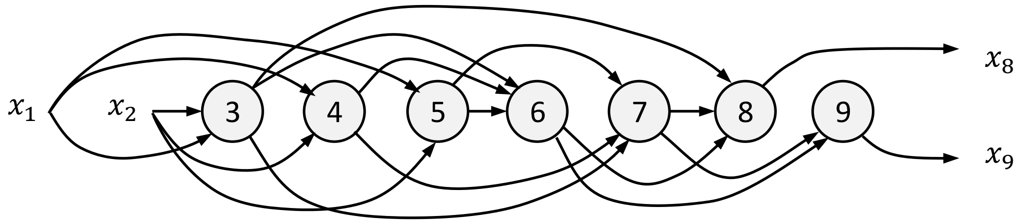


شکل ۷-۱۶ : یک شبکه تطبیقی از نوع برگشتی

نمایش ترسیمی شبکه‌های عصبی پیش‌خور را می‌توان به دو صورت ارائه نمود،

۱. **نمایش لایه‌ای**[3] مانند شکل‌های شکل ۷-۱۴، شکل ۷-۱۶شکل ۷-۱۷. در این نوع نمایش در هر لایه، هیچ ارتباطی بین گره‌های آن لایه وجود ندارد. مثلا در شکل ۷-۱۶، گره ۳ به گره ۴ و ۵ وصل نیست، یا گره ۶ به گره ۷ وصل نیست و خروجی هر گره در هر لایه به گره‌های لایه‌ای بعد وصل است. نوع نمایش لایه‌ای، بخاطر مدولار بودن بر نمایش بَعدی ترجیح داده می‌شود. به این معنا که گره‌های هر لایه از نظر عملکردی مشابه هم هستند یا عملکرد متناظری را بر روی بردار ورودی اعمال می‌کنند.

۲. **نمایش موقعیت مکانی گره‌ها** در این نوع نمایش گره‌ها به ترتیب پشت سر هم قرار می‌گیرند (گره ۱، ۲، ۳ و ...) و هیچ خط رابطی از گره j به گره i برای $i \geq j$ وجود ندارد. شکل ۷-۱۷ نمایش " موقعیت مکانی گره‌ها" مربوط به شکل ۷-۱۴ است (شکل ۷-۱۴ نمایش لایه‌ای و شکل ۷-۱۷ همان سیستم با نمایش موقعیت مکانی گره‌ها است). در این روش، فرمولاسیون و قواعد یادگیری ساده‌تر می‌شود (بعدا شرح داده می‌شود) ولی سیستم کمتر مدولار است. این نوع نمایش در واقع حالت خاصی از نمایش لایه‌ای است که در هر لایه تنها یک گره وجود دارد.



[1] Feedforward

[2] Recurrent

[3] Layered Representation

شکل ۷-۱۷ : یک مدار تطبیقی-عصبی مستقیم (پیش‌خور) با نمایش موقعیت مکانی گره‌ها

شبکه تطبیقی پیش‌خور در واقع یک نگاشت استاتیکی بین فضای ورودی و خروجی آن است. این نگاشت بر حسب ساختار شبکه (ترتیب قرار گرفتن گره‌ها و رابط‌ها) و عملکرد هر گره، می‌تواند یک رابطه ساده خطی یا یک رابطه پیچیده غیرخطی باشد.

در اینجا هدف آن است تا شبکه‌ای را طراحی و ایجاد کنیم که بتوانیم به یک نگاشت غیرخطی مطلوب دست یابیم. این نگاشت غیرخطی با استفاده از مجموعه‌ای از داده‌ها شکل می‌گیرد و به وجود می‌آید. این مجموعه داده‌ها شامل زوج‌های ورودی - خروجی مربوط به سیستم هدفی است که می‌خواهیم آن را مدل کنیم.

به عبارت ساده‌تر، از شبکه عصبی تطبیقی برای مدل‌سازی یک سیستم هدف استفاده می‌کنیم. این مجموعه داده‌ها را معمولا **مجموعه داده‌های یادگیری**[۱] می‌نامند. روشی را که برای تنظیم پارامترها به منظور بهبود کارکرد شبکه به کار می‌رود **قواعد یادگیری**[۲] یا **الگوریتم تطبیقی**[۳] می‌نامند. معمولاً عملکرد یک شبکه عصبی تطبیقی از راه مقایسه اختلاف میان خروجی سیستم واقعی و خروجی شبکه به ازای ورودی‌های یکسان بررسی و اندازه‌گیری می‌شود. این اختلاف را **اندازه خطا**[۴] می‌نامند، که برای کاربردهای مختلف می‌تواند فرم‌های متفاوتی داشته باشد.

به‌طورکلی یک قاعده یادگیری با اعمال یکی از روش‌ها و تکنیک‌های بهینه‌سازی به "اندازه خطای" داده شده تعیین می‌شود.

پس به طور خلاصه قواعد یادگیری را می‌توان چنین تعریف کرد،

قواعد یادگیری قواعدی هستند که مشخص می‌کنند پارامترهای قابل اصلاح در گره تطبیقی چگونه باید به‌هنگام[۵] شوند تا یک کمیت خطا را کمینه نمایند. این معیار مرتبط با خطا، معمولا یک رابطه ریاضی است که تفاوت بین خروجی واقعی شبکه، و خروجی مطلوب را نشان می‌دهد.

بنابراین شبکه تطبیقی، عملا برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود.

---

۱ Training Data Set

۲ Learning Rules

۳ Adaptation Algorithm

۴ The Error Measure

۵ Update

هدف از طراحی ساختار شبکه عصبی آن است که سیستم مورد نظر ناشناخته‌ای را که تنها به وسیله مجموعه‌ای از زوج‌های ورودی-خروجی مشخص شده، با ساختار شبکه‌ای مناسب و مجموعه‌ای از پارامترهای مرتبط مدل‌سازی کنیم.

در شبکه‌های عصبی، با پردازش اطلاعات روبرو هستیم. شبکه‌های عصبی مصنوعی با پردازش روی داده‌های تجربی، دانش یا قانون نهفته در ورای داده‌ها را به ساختار شبکه منتقل می‌کند.

یکی از قاعده یادگیری در شبکه‌های تطبیقی روش بیشترین شیب نزولی[۱] است که در آن بردار گرادیان از قانون زنجیره‌ای بدست می‌آید. این روش برای محاسبه بردار گرادیان اولین بار توسط برایسون و هو[۲] (سال ۱۹۶۹) ابداع شد. روش مذکور توسط ورباس[۳] در سال۱۹۷۴ و پارکر[۴] در سال ۱۹۸۲ بطور مستقل ارائه شد.

در سال ۱۹۸۶ روش گفته شده برای یافتن بردار گرادیان با نگاه جدیدی توسط روم هارت[۵] و همکارانش تحت عنوان روش یادگیری پس انتشار خطا[۶] ارائه شد. در این روش مقدار تابع خطا، برابر است با میانگین مربع اختلاف خروجی پیش‌رو[۷] و مقدار مطلوب خروجی.

با این مقدمات، ویژگی‌های شبکه عصبی مصنوعی را می‌توان به صورت زیر برشمرد.

۷-۳-۳- ویژگی‌های شبکه‌های عصبی

الف- یک شبکه عصبی نگاشتی از داده‌های ورودی به داده‌های خروجی است.

ب- شبکه عصبی با مثال‌ها آموزش می‌بیند. به این ترتیب که با داده‌های معلوم نمونه‌های مختلف آموزش می‌بیند تا برای آزمایش در مورد توانایی خود در استنتاج از داده‌های نامعلوم آماده شود. پس از این مرحله، شبکه‌های عصبی برای شناسایی مواردی که پیش‌تر آموزش ندیده‌اند، آماده می‌شوند.

ج- شبکه‌های عصبی توانایی عمومیت یافتن دارند؛ یعنی آنها می‌توانند با توجه به آنچه در گذشته رخ داده است وضعیت آینده یک سیستم را پیش‌بینی کنند.

---

[۱] Steepest Descent Method

[۲] Brayson & Ho

[۳] Werbos

[۴] Parker

[۵] Rume hurt

[۶] Back Propagation Learning Rule

[۷] Feedforward

د- شبکه‌های عصبی سیستم‌هایی مقاوم و در مقابل خطاها منعطف هستند. به این خاطر آنها می‌توانند از داده‌های ناقص و نویزی یک الگو، تمامی آن الگو را بازسازی کنند.

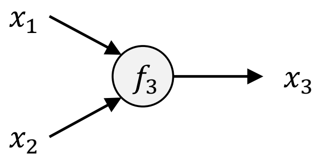
ه- شبکه‌های عصبی می‌توانند اطلاعات را به صورت موازی، با سرعت زیاد و در شکلی گسترده پردازش کنند.

۷-۳-۴- شبکه عصبی پرسپترون

شبکه عصبی **پرسپترون** یا استنباطی شبکه ای است که در آن نورون‌ها هر یک عملا از دولایه درست شده است. لایه اول هر نورون تابعی از ورودی‌ها است و لایه دوم همان نورون مانند تابع آستانه یا تابع سیگموئید عمل می‌کند. ترکیب این دو لایه، یک نورون شبکه پرسپترون را می‌سازد. برای روشن شدن مطلب ابتدا به مثال‌های مثال **۷-۲** و مثال **۷-۳** توجه کنید.

مثال ۷-۲ : یک شبکه تطبیقی با یک گره خطی (یعنی گره با تابع خطی)

همانطورکه پیش‌تر دیدیم، توابع گره‌ها می‌تواند خطی یا معمولا از نوع سیگوئید باشد. در اینجا فرض شده که گره خطی است.



شکل ۷-۱۸ : شبکه تطبیقی با یک گره خطی

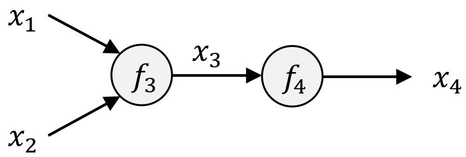
معادله سیستم عبارت است از،

$$x_3 = f_3(x_1, x_2, a_1, a_2, a_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$$

که در آن x_1،x_2 ورودی‌ها، a_1 و a_2 و a_3 پارامترهای قابل تنظیم هستند.

این تابع صفحه‌ای را در فضای x_1، x_2، x_3 نشان می‌دهد. با تغییر پارامترها می‌توان این صفحه را به اختیار تغییر داد. اگر مربع خطا را به عنوان اندازه خطا در این شبکه در نظر بگیریم می‌توان پارامترهای بهینه را از روش تخمین کمترین مربعات بدست آورد.

مثال ۷-۳ : مدار استنباطی یا مدار پرسپترون[۱]. اگر به مدار مثال ۷-۲ (شکل ۷-۱۸) یک گره اضافه کنیم که خروجی آن تنها دو مقدار صفر و یک را داشته باشد، در این صورت شبکه غیرخطی شکل ۷-۱۹ حاصل می‌شود.



شکل ۷-۱۹ : یک شبکه تطبیقی غیرخطی با دو گره (یک گره غیرخطی و یک گره خطی)

در این صورت داریم،

$$x_3 = f_3(x_1, x_2, a_1, a_2, a_3)$$

$$x_4 = f_4(x_3) = \begin{cases} 1 & if \;\; x_3 \geq 0 \\ 0 & if \;\; x_3 < 0 \end{cases}$$

خروجی اولین گره یک خط در فضای x_1 و x_2 است و دومین گره مشخص می‌کند که بردار ورودی x_1 و x_2 در کدام نیم‌صفحه است. می‌توان به جای شبکه شکل ۷-۱۹ با دو گره، شبکه معادلی بسازیم که تنها یک نورون دارد و تابع این نورون از ترکیب دو تابع f_3 و f_4 بدست آید. گره حاصله ساختار جعبه‌ای پرسپترون کلاسیک را ارائه می‌دهد (شکل ۷-۲۰). [؟؟]

چون تابع پله‌ای گره دوم، در یک نقطه ناپیوستگی دارد و در سایر نقاط خط راست است، برای فرآیند یادگیری که بر اساس مشتق‌گیری عمل می‌کند نامناسب است. همانطور که پیش‌تر بیان شد، بجای تابع پله‌ای از تابع سیگموئیدی استفاده می‌کنیم،

$$x_4 = f_4(x_3) = \frac{1}{1 + e^{-x_3}}$$

اگر توابع f_3 و f_4 را که به این ترتیب هر دو مشتق‌پذیر هستند با هم ترکیب کنیم شبکه پرسپترون حاصل می‌شود، شبکه پرسپترون عملا ترکیب چند لایه است و به همین خاطر به آن شبکه **پرسپترون چند لایه** نیز گویند.

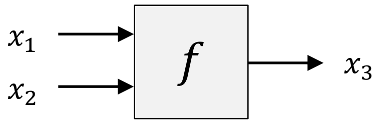
با قرار دادن از x_3 در معادله اخیر داریم،

$$x_4 = f_4(x_3) = \frac{1}{1 + e^{-x_3}} = \frac{1}{1 + e^{-(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}}$$

[۱] Perceptron Network

همانطور که دیده می‌شود با این ترتیب تابع f_3 مربوط به گره f_3 در شکل ۷-۱۹ مستقیما ملاحظه نمی‌شود و x_3 را مستقیما در تابع f_4 نمی‌بینیم و رابطه x_4 در معادله بالا بر حسب x_3 و x_4 به دست آمده است (طبق شکل ۷-۱۸).

پس، شبکه پرسپترون شبکه ای است که گرچه ظاهر یک نورون را دارد، در واقعا چند لایه است و شبکه‌ای غیرخطی اما مشتق‌پذیر است.

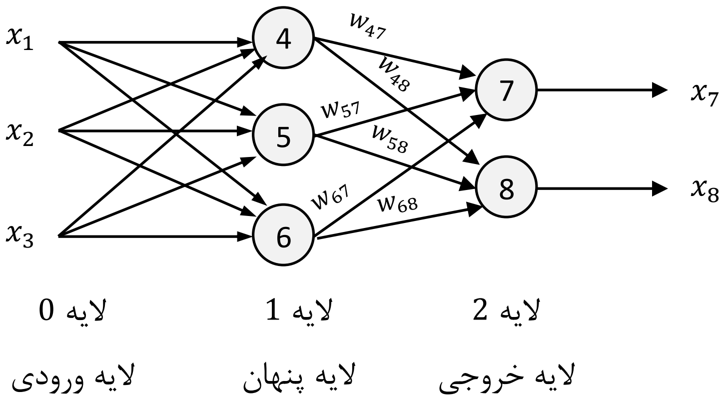


شکل ۷-۲۰ : شبکه پرسپترون غیرخطی مشتق‌پذیر

$$x_3 = f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + e^{-(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}}$$

مثال ۷-۴ : شبکه پرسپترون چند لایه

شکل ۷-۲۱ یک شبکه پرسپترون چند لایه با سه ورودی، دو خروجی و سه گره در لایه میانی را نشان می‌دهد. گره‌های لایه میانی را که نه به ورودی وصل هستند و نه به خروجی، **گره‌های پنهان** نامند و لایه میانی را که گره‌های پنهان در آن قرار دارند، **لایه پنهان** نامند. هر گره در این نوع شبکه، دارای تابع یکسان است که از ترکیب یک تابع خطی و یک تابع سیگموئیدی به دست آمده است؛ زیرا برحسب تعریف در شبکه پرسپترون هر لایه عملا ترکیب دو لایه است.



شکل ۷-۲۱ : شبکه پرسپترون

پارامترهای w_{47}، w_{57} و ...، وزن‌های مربوط به هر کدام از ورودی‌های به گره اول (گره ۷) از لایه خروجی هستند. به عنوان مثال در می‌توان نوشت،

$$x_7 = f_7\left(\text{ورودی ها}\right)$$

حالا این عبارت را به دو صورت می‌توان بیان کرد،

۱. خروجی گره‌های ۴ و ۵ و ۶، یعنی x_4 و x_5 و x_6، ورودی‌های گره ۷ هستند و پارامترهای گره ۷ شامل مجموعه پارامترهای زیر است،

$$\text{مجموعه پارامترهای گره 7} = \{w_{4,7}, w_{5,7}, w_{6,7}, t_7\}$$

تابع f_7 در گره ۷، ترکیبی از توابع خطی و توابع سیگموئیدی به صورت زیر است،

$$x_7 = \underbrace{f_7}_{\text{تابع سیگموئیدی}} [\underbrace{w_{4,7}x_4 + \ w_{5,7}x_5 + w_{6,7}x_6}_{\text{تابع خطی از ورودی‌ها و پارامترها}} + t_7]$$

و یا

$$x_7 = \frac{1}{1 + \exp[-(w_{4,7}x_4 + \ w_{5,7}x_5 + w_{6,7}x_6 + t_7)]}$$

۲. در نحوه بیان دیگری از این سیستم، می‌توان w_{ij} را به عنوان وزن اتصال گره i و گره j در نظر گرفت. t_j را آستانه گره j می‌نامیم. به این ترتیب در اینجا فرض کرده‌ایم که رابط یا اتصال بین دو گره دارای وزن است (بر خلاق آنچه پیش‌تر گفته بودیم که به‌طورکلی رابط‌ها وزن ندارند و تنها جهت علت و معلول را نشان می‌دهد)، لازم به ذکر است که اتصالات وزن‌دار تنها در این نوع شبکه (شبکه پرسپترون) اعتبار دارد. در مورد شبکه پرسپترون در قسمت‌های بعد بیشتر توضیح خواهیم داد.

(کمیت t_j در این مثال نشان می‌دهد که تابع خطی داخل پرانتز در مخرج عبارت، حتی اگر همه ورودی‌های x_4 و x_5 و x_6 صفر شوند، دارای مقدار است).

۷–۴– روش‌های یادگیری

مقدمه

روش‌های یادگیری در شبکه‌های عصبی را می‌توان در سه گروه تقسیم‌بندی کرد.

۱. روش یادگیری نظارتی
۲. روش یادگیری بدون نظارت
۳. روش امدادی یا تقویت شده

روش یادگیری نظارتی

در این روش به ازای هر الگوی ورودی به شبکه عصبی مصنوعی که برای آموزش شبکه به کار می‌رود، یک الگوی خروجی مطلوب وجود دارد؛ که خروجی محاسبه شده در شبکه با آن مقایسه و تفاوت الگوی خروجی شبکه با الگوی مطلوب برای آموزش شبکه به کار می‌رود. خطا یا تفاوت بین خروجی شبکه عصبی و خروجی مطلوب، پارامترهای شبکه عصبی را در جهت بهبود عملکرد آن و کاهش خطا در گام‌های بعد، تفسیر و اصلاح می‌کند.

روش یادگیری بدون نظارت

در این روش خروجی مطلوبی در مجموعه وجود ندارد تا واکنش یا خروجی شبکه با آن مقایسه شود. بنابراین، عملاً چون الگوی مطلوب در دسترس نیست، شبکه باید خاصیت خود اصلاحی یا به عبارتی تطبیق خود به خودی را داشته باشد؛ به طوری که الگوی بدست آمده از شبکه منطقی به نظر برسد.

روش یادگیری امدادی

در این روش گرچه نظارت وجود دارد، اما پاسخ مطلوب را ارائه نمی‌کند تا با خروجی شبکه مقایسه و تفاوت برای اصلاح پارامترها استفاده شود، بلکه ناظر صرفا می‌گوید که خروجی شبکه صحیح است یا خیر. این پاسخ به فرآیند یادگیری شبکه کمک می‌کند. برای پاسخ‌های صحیح امتیاز داده می‌شود و برای پاسخ نادرست جریمه در نظر گرفته می‌شود. روش یادگیری امدادی خیلی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، اما روش‌های نظارتی و غیر نظارتی بیشترین کاربرد را دارند.

۷–۴–۱– روش پس انتشار خطا در شبکه‌های پیش‌خور

در این قسمت اصول روش پس انتشار خطا[۱] به عنوان یک روش پایه‌ای قاعده یادگیری، برای شبکه‌های عصبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش از نظر ماهیت همان روش " بیشترین شیب نزولی" است. قسمت اصلی این قاعده یادگیری به این صورت است که مکررا یک بردار گرادیان طوری تعیین شود که هر جز این بردار گرادیان، مشتق اندازه خطا نسبت به هر کدام از پارامترهای سیستم گردد. این کار به کمک قاعده زنجیره‌ای انجام می‌شود. قاعده زنجیره‌ای یک فرمول اساسی برای مشتق‌گیری از توابع مرکب است. روش تعیین و بدست آوردن بردار گرادیان در یک ساختار شبکه‌ای را به‌طورکلی **پس انتشار** نامند؛ زیرا همانطورکه خواهیم دید، بردار گرادیان در جهتی خلاف جهت سیگنال محاسبه می‌شود. وقتی بردار گرادیان

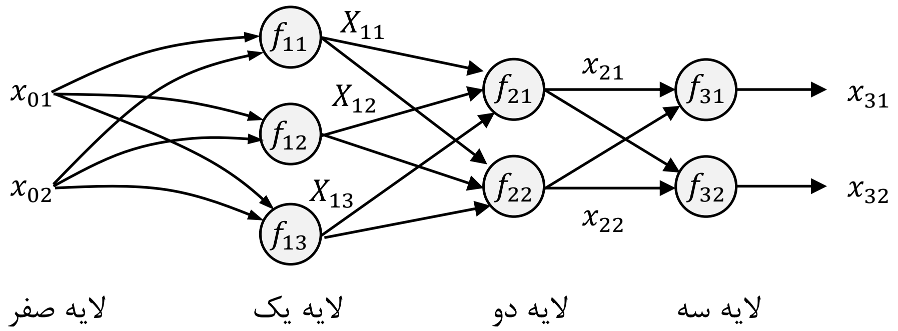
[۱] Back Propagation

محاسبه شد، روش‌های مختلفی بر مبنای بهینه‌سازی مشتق‌ها برای اصلاح و به‌هنگام‌سازی پارامترها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در میان روش‌های مختلف گفته شده، اگر روش بیشترین شیب نزولی را در مورد گرادیان خطا به کار ببریم الگوی یادگیری نتیجه را **قاعده یادگیری پس انتشار خطا**[1] نامند.

فرض کنید، یک شبکه تطبیقی در نمایش لایه‌ای دارای $L+1$ لایه است. این لایه‌ها را لایه صفر تا L می‌نامیم. ($l=0,1,2,\ldots,L$). به این ترتیب، لایه l یکی از لایه‌های این شبکه است، که از صفر تا L تغییر می‌کند.

فرض می‌کنیم لایه l دارای $N(l)$ گره باشد، برای نمونه لایه سوم دارای دو گره باشد. در این صورت خروجی گره i ام از لایه l ام ($i=1,2,\ldots,N(l)$) با $x_{l,i}$ و تابع این گره با $f_{l,i}$ نمایش داده می‌شود. برای نمونه خروجی گره اول از لایه سوم با $x_{3,1}$ و تابع این گره با $f_{3,1}$ بیان می‌شود.



شکل ۷-۲۲ : ؟؟

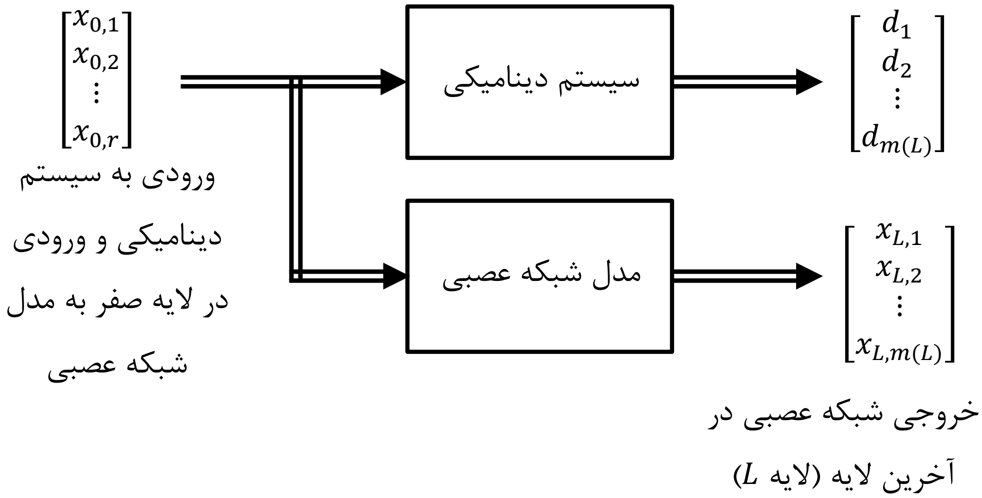
هم‌چنین فرض می‌کنیم که هیچ رابطه پرشی نداریم؛ یعنی بین لایه‌های غیر متوالی ارتباط وجود ندارد. چون خروجی هر گره به سیگنال ورودی و مجموعه پارامترهای آن گره بستگی دارد، بنابراین می‌توان برای تابع مربوط به گره f_{li} نوشت،

$$\text{تابع گره } i \text{ از لایه } l = f_{l,i} = f_{l,i}(x_{l-1,1},\ldots,x_{l-1,N(l-1)},\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$$

که در آن α و β و γ پارامترهای این گره هستند.

فرض کنید از روش پس انتشار خطا برای مدل‌سازی یک سیستم دینامیکی استفاده می‌کنیم. فرض کنید، سیستم دارای r ورودی و m خروجی باشد. هم‌چنین فرض کنید، برای آموزش شبکه عصبی از این بردارهای ورودی و خروجی کلا P مجموعه ورودی - خروجی داشته باشیم. به عبارت دیگر، P زوج برداری ورودی - خروجی داریم. شکل زیر سیستم دینامیکی و مدل شبکه عصبی آن را نشان می‌دهد.

[1] Back Propagation Learning Rule



شکل ۷-۲۳ : سیستم دینامیکی و مدل شبکه عصبی آن

جدول ۶-۱ ورودی‌ها، خروجی شبکه عصبی در آخرین لایه (لایه L) و خروجی سیستم دینامیکی را برای هر یک از مجموعه‌های ورودی- خروجی نشان می‌دهد.

جدول ۷-۱. خروجی شبکه عصبی در آخرین لایه (لایه L) و خروجی سیستم دینامیکی

	اولین مدخل	دومین مدخل	...	p امین مدخل	...	P امین مدخل
ورودی به سیستم دینامیکی و مدل شبکه عصبی	$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,r} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,r} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,r} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,r} \end{bmatrix}$
خروجی لایه Lام (آخر شبکه عصبی)	$\begin{bmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ \vdots \\ x_{L,m(L)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ \vdots \\ x_{L,m(L)} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ \vdots \\ x_{L,m(L)} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} x_{L,1} \\ x_{L,2} \\ \vdots \\ x_{L,m(L)} \end{bmatrix}$
خروجی سیستم دینامیکی	$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m(L)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m(L)} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m(L)} \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m(L)} \end{bmatrix}$

توجه شود که در جدول بالا صرفا بخاطر آن که تعداد زیرنویس پارامترها زیاد نشود، از نظر نمایشی، نشانه‌ای که شماره مدخل را نشان دهد، تعیین نشده است؛ در حالی که مقادیر ورودی به سیستم اصلی و شبکه عصبی در مدخل‌های متفاوت با هم متفاوت هستند.

می‌خواهیم برای p امین مدخل اندازه خطا را تعریف کنیم. بر حسب تعریف اندازه خطا را برای p امین مدخل به صورت جمع مربعات خطای بین خروجی سیستم دینامیکی و خروجی شبکه عصبی بیان می‌کنیم. چون بردار خروجی $m(L)$ عضو دارد، اگر اندازه خطا در p امین مدخل را با E_p نشان دهیم، خواهیم داشت،

$$E_p \triangleq \sum_{k=1}^{m(L)} \left(d_k - x_{L,k}\right)^2 \qquad (۸۵-۷)$$

بنابراین اندازه خطا در شبکه عصبی، تنها در آخرین لایه یعنی لایه L ام محاسبه می‌شود؛ زیرا، باید با خروجی سیستم دینامیکی یا d_k (برای $k = 1$ تا m) مقایسه شود.

رابطه (۷-۸۵) را می‌توان چنین نوشت،

$$E_p = \left(d_1 - x_{L,1}\right)^2 + \left(d_2 - x_{L,2}\right)^2 + \ \dots + \left(d_{m(L)} - x_{L,m(L)}\right)^2 \qquad (۸۶-۷)$$

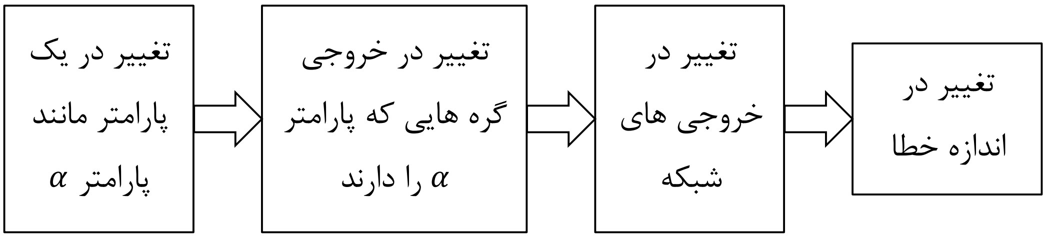
آشکار است، صفر شدن E_p، به معنای آن است که در P امین زوج داده‌ها، خروجی شبکه عصبی با خروجی سیستم دینامیکی برابر شده است. یعنی هرکدام از عبارت‌های سمت راست معادله (۷-۸۶) به تنهایی صفر شده‌اند. در چنین حالتی می‌توان گفت که شبکه عصبی یا مدل سیستم توانسته است، بردار خروجی سیستم اصلی را به ازای p امین زوج داده‌ها تولید کند.

وظیفه شبکه عصبی و سیستم یادگیری (الگوریتم یادگیری) آن است که اندازه خطای کل شبکه و به ازای همه p ها از 1 تا P یا $E \triangleq \sum_{p=1}^{P} E_p$ را کمینه سازد.

باید توجه داشت که تعریف E_p در معادله (۷-۸۵) عمومیت ندارد و تعاریف دیگری برای E_p برحسب شرایط و کاربردهای خاصی امکان دارد. نکته دیگر اینکه فرض می‌کنیم E_p فقط به گره‌های لایه خروجی بستگی دارد. در حالی که می‌توان تعاریف دیگری را نیز که در آنها E_p به سایر گره‌ها نیز بستگی داشته باشد، در این مورد به کار برد.

برای به کار بردن **روش بیشترین شیب نزولی**[۱] جهت کمینه‌سازی خطا، ابتدا باید بردار گرادیان را به دست آوریم. پیش از محاسبه بردار گرادیان به رابطه علت و معلولی زیر توجه کنید.

[۱] Steepest Descent Method



شکل ۷-۲۴ : ؟؟

در این شکل علامت ⇨ نشان‌دهنده رابطه علت و معلولی است. به این ترتیب یک تغییر کوچک در پارامتر α باعث تغییر در خروجی گره (هایی) می‌شود، که پارامتر α را دارند. این خود باعث تغییر در خروجی‌های آخرین لایه و در نتیجه باعث تغییر در اندازه خطا می‌شود. در نتیجه، ایده‌ی اساسی در محاسبه بردار گرادیان آن است که با نوعی از اطلاعات مربوط به مشتق شروع کنیم و لایه به لایه برگردیم، تا به لایه اول یعنی لایه ورودی برسیم.

برای ساده‌سازی محاسبات، عبارت نویی با عنوان **سیگنال خطا** یا $\varepsilon_{l,i}$ تعریف می‌کنیم. سیگنال خطا برابر با « مشتق اندازه خطای E_p نسبت به خروجی گره i ام از لایه l ام » در نظر گرفته می‌شود.

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\partial {E_p}^{+}}{\partial x_{l,i}} \qquad (۸۷-۷)$$

در این رابطه از اندازه خطا یا اندیس عملکردی خطا نسبت به خروجی i ام در لایه l ام مشتق گرفته‌ایم، پس طبق تعریف،

سیگنال خطا، $\varepsilon_{l,i}$، عبارت است از مشتق E_p نسبت به خروجی گره i ام در لایه l ام.

واضح است که E_p از رابطه (۷-۸۵) یا (۷-۸۶) محاسبه می‌شود و E برابر مجموع همگی E_p ها است. همچنین، توجه شود که چون E_p در لایه آخر محاسبه می‌شود، E_p تنها تابع $x_{L,i}$ است و نه $x_{l,i}$. پس $\frac{\partial E_p}{\partial x_{l,i}} = 0$ خواهد بود.

ورباس[۱] رابطه (۷-۸۷) را **مشتق ترتیبی**[۲] نام نهاده است. تفاوت بین مشتق ترتیبی و مشتق جزئی که از پیش می‌شناسیم، در نحوه نگاه ما به تابعی است که می‌خواهیم از آن مشتق بگیریم. مشتق جزئی $\frac{\partial E_p}{\partial x_{l,i}}$ مساوی صفر است؛ زیرا E_p مربوط به لایه L ام، یعنی آخرین لایه است و مستقیما به $x_{l,i}$ بستگی ندارد. از رابطه (۷-۸۶) داریم،

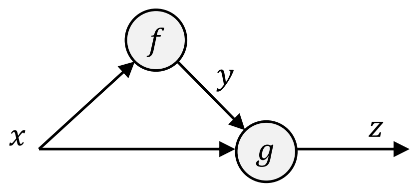
۱ Werbos

۲ Ordered Derivitive

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_{L,1}} = -2\left(d_1 - x_{L,1}\right)$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x_{L,2}} = -2\left(d_2 - x_{L,2}\right)$$
$$\vdots$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,k}} = -2\left(d_k - x_{L,k}\right) \qquad (۸۸-۷)$$

بدیهی است E_p به طور غیرمستقیم به $x_{l,i}$ بستگی دارد. زیرا هر تغییر در $x_{l,i}$ باعث تغییر در لایه‌های بَعدی شده، به لایه آخر می‌رسد. بنابراین تغییر در $x_{l,i}$ از مسیرهای غیرمستقیم به لایه خروجی منتقل می‌شود و در نتیجه باعث تغییر در E_p می‌گردد. به این ترتیب در رابطه (۷-۸۷)، $\varepsilon_{l,i}$ عبارت است از حد تغییرات در E_p به ازای تغییر بسیار کوچک در $x_{l,i}$. مثال زیر تفاوت بین مشتق ترتیبی و مشتق‌جزئی را بهتر نشان می‌دهد.

مثال ۷-۵ : سیستم شبکه تطبیقی ساده زیر را در نظر بگیرید که در آن z تابعی از x و y است و y خود تابعی از x است.



شکل ۷-۲۵ :

$$z = g(x, y)$$
$$y = f(x)$$

در محاسبه مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$، فرض می‌کنیم که همه متغیرهای ورودی دیگر (در اینجا متغیر y) ثابت هستند. بنابراین داریم،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$

به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که ورودی‌های x و y که وارد تابع g می‌شوند، مستقل از هم هستند و توجهی به این مورد که y واقعا خود تابعی از x است، نداریم. در حالی که در محاسبه مشتق ترتیبی، این ارتباط علت و معلولی غیرمستقیم را هم در نظر می‌گیریم و داریم،

$$\frac{\partial z^+}{\partial x} = \frac{\partial g(x, f(x))}{\partial x} = \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right|_{y=f(x)} + \left.\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right|_{y=f(x)} \times \frac{\partial f(x)}{\partial x} \qquad (۸۹-۷)$$

بنابراین در مشتق ترتیبی مسیرهای مستقیم و غیرمستقیم که رابطه علت و معلولی با هم دارند، هر دو مورد بررسی قرار می‌گیرند.

اکنون رابطه (۷-۸۶) را دوباره می‌نویسیم.

$$E_p = \sum_{k=1}^{m(L)} \left(d_k - x_{L,k}\right)^2 = \left(d_1 - x_{L,1}\right)^2 + \left(d_2 - x_{L,2}\right)^2 + \ \dots + \left(d_{m(L)} - x_{L,m(L)}\right)^2$$

این معادله اندازه خطا در آخرین لایه یعنی لایه L ام است، زیرا تنها در این لایه امکان مقایسه خروجی شبکه با خروجی سیستم دینامیکی وجود دارد. داشتیم،

$$E \triangleq \sum_{p=1}^{P} E_p$$

اینک عبارت سیگنال خطا یا $\varepsilon_{l,i}$ را تعریف می‌کنیم، که مشتق ترتیبی اندازه خطا نسبت به خروجی گره i ام در لایه l ام است.

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}}$$

این عبارت وقتی $l = L$ است، یعنی در لایه L ام همان مشتق پاره ای معمولی است؛ یعنی در لایه L ام داریم،

$$\varepsilon_{L,i} = \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L,i}} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}}$$

با جایگذاری از رابطه (۷-۸۶) به جای E_p نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L,1} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,1}} = -2\left(d_1 - x_{L,1}\right) \\
\varepsilon_{L,2} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,2}} = -2\left(d_2 - x_{L,2}\right) \\
&\vdots \\
\varepsilon_{L,i} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}} = -2\left(d_i - x_{L,i}\right) \\
&\vdots \\
\varepsilon_{L,m(L)} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,m(L)}} = -2\left(d_{m(L)} - x_{L,m(L)}\right)
\end{aligned} \qquad (۷-۹۰)$$

برای سایر لایه‌ها غیر از لایه L ام، با توجه به تعریف مشتق ترتیبی داریم،

$$\varepsilon_{l,i} = \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}}$$
$$= \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,1}} \cdot \frac{\partial f_{l+1,1}}{\partial x_{l,i}} + \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,2}} \cdot \frac{\partial f_{l+1,2}}{\partial x_{l,i}} + \cdots + \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,m(l+1)}} \cdot \frac{\partial f_{l+1,m(l+1)}}{\partial x_{l,m(l+1)}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m(l+1)} \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,j}} \cdot \frac{\partial f_{l+1,j}}{\partial x_{l,i}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{l,i} = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \varepsilon_{l+1,i} \cdot \frac{\partial f_{l+1,j}}{\partial x_{l,i}}, \qquad 0 \le l \le L-1 \tag{۹۱-۷}$$

که در آن،

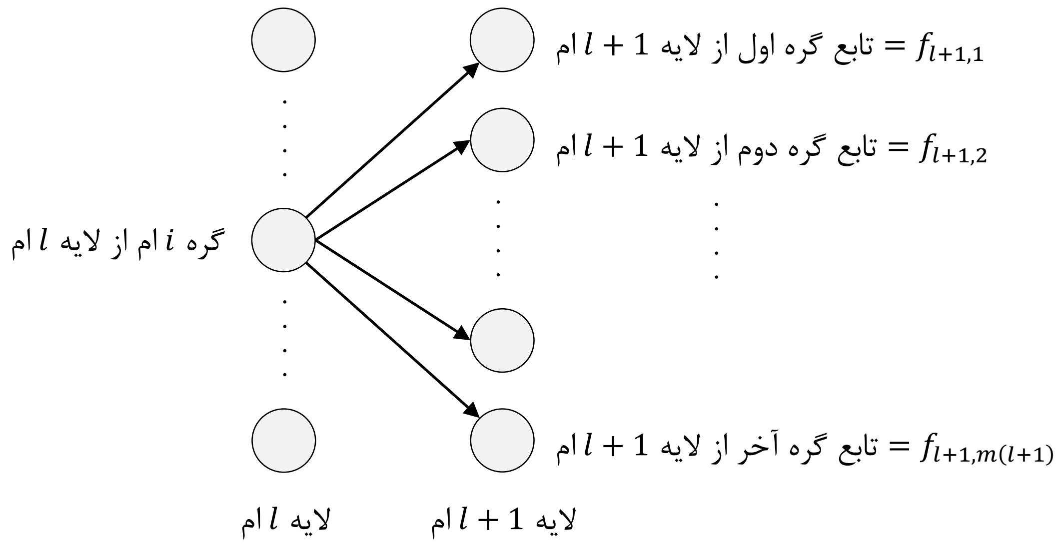
$\varepsilon_{l,i}$ سیگنال خطا در لایه l ام

$f_{l+1,2}$ تابع گره اول از لایه $l+1$ ام

$x_{l,i}$ خروجی گره i ام از لایه l ام

$\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,j}}$ سیگنال خطا در لایه $l+1$ ام

این عبارت عملا مشتق ترتیبی E_p در گره i ام از لایه l ام است، که چون l همه مقادیر به جز L را دارد، پس اگر مشتق ترتیبی معمولی بود، برابر صفر می‌شد؛ زیرا، E_p تنها در لایه آخر یعنی L تعریف شده و تابع $x_{l,i}$ نیست. از سویی، با توجه به تعریف مشتق ترتیبی، همانطورکه در رابطه (۹۱-۷) دیدیم، E_p بستگی به این پیدا می‌کند، که در لایه بَعدی، لایه $l+1$ ام، توابع هر یک از گره‌های این لایه چگونه به خروجی i ام از لایه l ام مربوط هستند.



شکل ۷-۲۶:

مثال ۷-۶ : می‌خواهیم معادله (۹۱-۷) را برای لایه $L-1$ ام (لایه پیش از آخر) محاسبه کنیم. اگر لایه L ام دو گره و لایه $L-1$ ام سه گره داشته باشد، $\varepsilon_{L-1,1}$، $\varepsilon_{L-1,2}$ و $\varepsilon_{L-1,1}$ را می‌یابیم.

$$\varepsilon_{L-1,1}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,1}}=\varepsilon_{L,1}\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,1}}+\varepsilon_{L,2}\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,1}}$$
$$\varepsilon_{L-1,2}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,2}}=\varepsilon_{L,1}\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,2}}+\varepsilon_{L,2}\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,2}}$$
$$\varepsilon_{L-1,3}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,3}}=\varepsilon_{L,1}\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,3}}+\varepsilon_{L,2}\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,3}}$$

با استفاده از روابط (۷-۹۰) با قرار دادن به جای $\varepsilon_{L,1}$ و $\varepsilon_{L,2}$ که مربوط به لایه آخر هستند، داریم،

$$\varepsilon_{L-1,1}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,1}}=-2\left(d_1-x_{L,1}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,1}}-2\left(d_2-x_{L,2}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,1}}$$
$$\varepsilon_{L-1,2}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,2}}=-2\left(d_1-x_{L,1}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,2}}-2\left(d_2-x_{L,2}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,2}}$$
$$\varepsilon_{L-1,3}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{L-1,3}}=-2\left(d_1-x_{L,1}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,1}}{\partial x_{L-1,3}}-2\left(d_2-x_{L,2}\right)\cdot\frac{\partial f_{L,2}}{\partial x_{L-1,3}}$$

توجه شود که درستی این رابطه از آن است که E_p مربوط به آخرین لایه بوده در نتیجه $\varepsilon_{l,i}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}}$ به مشتق E_p نسبت به خروجی‌های لایه بَعدی، که به آخرین لایه نزدیک‌تر است، یعنی لایه $l+1$ ام، بستگی دارد. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}\varepsilon_{l,i}&=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}}\\&=\sum_{j=1}^{m(l+1)}\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l+1,j}}\cdot\frac{\partial f_{l+1,j}}{\partial x_{l,i}}=\sum_{j=1}^{m(l+1)}\varepsilon_{l+1,i}\cdot\frac{\partial f_{l+1,j}}{\partial x_{l,i}},\qquad 0\le l\le L-1\end{aligned}\qquad (۷-۹۲)$$

بنابراین سیگنال خطای یک گره داخلی در لایه l را می‌توان به صورت ترکیب خطی سیگنال خطای گره‌های لایه $l+1$ ام بیان کرد. در نتیجه برای هر $0\le l<L$ و $1\le i\le m(l)$، می‌توانیم $\varepsilon_{l,i}=\frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}}$ را به ترتیب زیر محاسبه کنیم،

۱. ابتدا از رابطه (۷-۹۰) سیگنال خطا را در لایه آخر محاسبه می‌کنیم.
۲. سپس با استفاده از رابطه (۷-۹۱) سیگنال خطا را در لایه $L-1$ ام یعنی لایه پیش از آخر محاسبه می‌کنیم.
۳. استفاده از رابطه (۷-۹۱) را ادامه می‌دهیم تا به لایه مورد نظر l برسیم و خطای آن را محاسبه کنیم.

این الگوریتم را روش پس انتشار خطا[۱] می‌نامند؛ زیرا سیگنال خطا را نخست در لایه آخر محاسبه می‌کنیم و سپس لایه به لایه بر می‌گردیم تا به لایه ورودی برسیم.

[۱] Back Propagation

با این محاسبات مقادیر $\varepsilon_{l,i}$، برای همه لایه‌ها و گره‌ها که پارامتر α در آنها قرار دارد، از آخرین لایه تا لایه l ام تعیین می‌شود.

در مبحث شبکه‌های عصبی، بردار گرادیان بر حسب تعریف عبارت است از مشتق E_p یا اندازه خطا نسبت به هر پارامتر. بنابراین، دوباره قانون زنجیره‌ای را برای محاسبه بردار گرادیان استفاده می‌کنیم. اگر α پارامتری در i امین گره از لایه l باشد، داریم،

$$\frac{\partial {E_p}^+}{\partial \alpha} = \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,i}} \cdot \frac{\partial f_{l,j}}{\partial \alpha} = \varepsilon_{l,i} \cdot \frac{\partial f_{l,j}}{\partial \alpha} \tag{۹۳-۷}$$

رابطه (۷-۹۳) بر این اساس نوشته شده که پارامتر α در گره i ام از لایه l وجود داشته باشد. چنانچه پارامتر α در گره‌های مختلف لایه l وجود داشته باشد، رابطه (۷-۹۳) چنین می‌شود،

$$\frac{\partial {E_p}^+}{\partial \alpha} = \sum_{x^* \epsilon S} \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial \alpha} \tag{۹۴-۷}$$

این رابطه حالت کلی‌تری از رابطه (۷-۹۳) است، که در آن فرض می‌شود S مجموعه گره‌هایی از لایه l ام باشد، که پارامتر α را دارند.x^* و f^* خروجی و تابع گره‌هایی است، که در مجموعه S قرار دارند.

برای نمونه اگر در لایه l ام، با $m(l)$ گره، دو گره $l,1$ و $l,2$ پارامتر α را داشته باشند، داریم،

$$\frac{\partial {E_p}^+}{\partial \alpha} = \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,1}} \cdot \frac{\partial f_{l,1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial {E_p}^+}{\partial x_{l,2}} \cdot \frac{\partial f_{l,2}}{\partial \alpha}$$

مشتق اندازه خطا یا مشتق اندیس عملکردی خطا نسبت به α برای همه مدخل‌های $p = 1,2,\dots,P$ عبارت است از،

$$\frac{\partial E^+}{\partial \alpha} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial {E_p}^+}{\partial \alpha} \tag{۹۵-۷}$$

در روش بیشترین شیب نزولی[۱] رابطه و فرمول به‌هنگام‌سازی α که با $\Delta\alpha$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از،

$$\Delta\alpha = -\eta \frac{\partial E^+}{\partial \alpha} \tag{۹۶-۷}$$

در این رابطه η را **نرخ یادگیری**[۲] نامند، که به صورت زیر تعیین می‌شود،

$$\eta = \frac{k}{\sqrt{\sum_\alpha \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2}} \tag{۹۷-۷}$$

[۱] Steepest Descent Method

[۲] Learning Rate

در این رابطه k را **اندازه گام**[1] نامند، که معادل با طول هر تغییر در جهت بردار گرادیان در فضای پارامتری است. معمولا می‌توانیم اندازه گام یعنی k را برای تغییر در سرعت همگرایی تغییر دهیم.

مثال ۷-۷ : الگوریتم پس انتشار خطا

به عنوان نمونه‌ای از روش کار این الگوریتم، شبکه‌ای متشکل از سه لایه را در نظر بگیرید، که لایه ورودی l گره، لایه پنهان m گره و لایه خروجی n گره داشته باشد. فرض کنید که تابع فعال‌سازی در گره‌های پنهان و خروجی تابع سیگموئید و در لایه ورودی تابع خطی باشد. فرض می‌کنیم $1 \leq m \leq 21$. گام‌های لازم به شرح زیر است.

گام یکم ورودی‌ها و خروجی‌ها را نسبت به مقادیر بیشینه آنها نرمال کنید. ثابت شده است که شبکه عصبی در حالتی که ورودی‌ها و خروجی‌ها بین صفر و یک تغییر کنند، بهتر کار می‌کند. برای هر مدخل یا مجموعه ورودی خروجی، فرض کنید l ورودی با بردار ستونی $l \times 1$، و n خروجی با بردار ستونی $n \times 1$ در فرم نرمال داده شده‌اند.

گام دوم فرض کنید تعداد گره‌ها در لایه پنهان $1 \leq m \leq 21$ است.

گام سوم فرض کنید وزن رابط‌هایی که نورون‌های ورودی را به نورون‌های لایه پنهان وصل می‌کنند، با ماتریس $[V]_{l\times m}$ و وزن رابط‌هایی که نورون‌های لایه پنهان را به نورون‌های لایه خروجی وصل می‌کنند، با ماتریس $[W]_{m\times n}$ نشان داده شوند.

شرایط اولیه این وزن‌ها را مقادیر دلخواه اختیاری (معمولا بین -1 و 1) انتخاب کنید.

$$[V]^0 = \left[\text{وزن‌های دلخواه}\right], \qquad [W]^0 = \left[\text{وزن‌های دلخواه}\right]$$

در ادامه از نام‌های زیر بهره می‌گیریم.

I به معنای ورودی Input $\qquad$ O به معنای خروجی Output

$$\{\text{ورودی یا خروجی}\}_{\text{لایه}}$$

$\{I\}_I$	مجموعه ورودی‌ها به لایه ورودی	$l \times 1$
$\{O\}_I$	مجموعه خروجی‌ها از لایه ورودی	$l \times 1$
$\{I\}_H$	مجموعه ورودی‌ها به لایه پنهان	$m \times 1$

[1] Step Size

$\{O\}_H$	مجموعه خروجی‌ها از لایه پنهان	$m \times 1$
$\{I\}_O$	مجموعه ورودی‌ها به لایه خروجی	$n \times 1$
$\{O\}_O$	مجموعه خروجی‌ها از لایه خروجی	$n \times 1$

همچنین برای نمونه،

I_{Ok} ورودی به k امین نورون لایه خروجی

O_{Ok} خروجی از k امین نورون لایه خروجی

گام چهارم برای داده‌های آموزش یک مدخل ورودی خروجی را در نظر بگیرید، که در آن $\{I\}_I$ ورودی به لایه ورودی است. چون تابع فعال‌سازی این لایه مساوی یک و خطی است، داریم،

$$\underset{l\times 1}{\{O\}_I} = \underset{l\times 1}{\{I\}_I}$$

گام پنجم ورودی‌های به لایه پنهان را محاسبه می‌کنیم. برای این کار داریم،

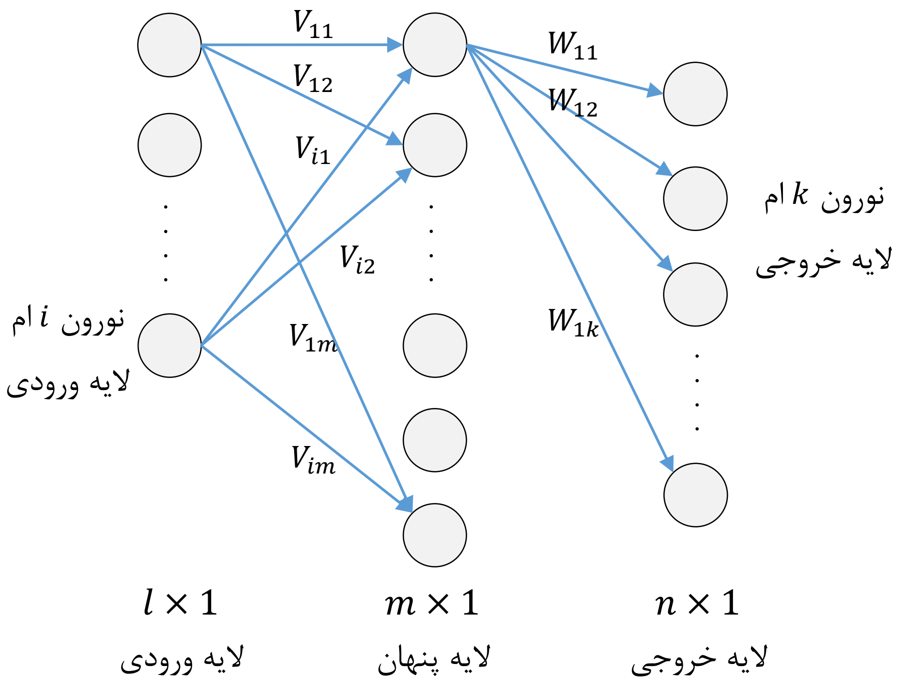
$$\underset{m\times 1}{\{I\}_H} = \underset{m\times l}{[V]^T} \; \underset{l\times 1}{\{O\}_I}$$

گام ششم خروجی‌های لایه پنهان را با استفاده از تابع سیگموئید (روابط (۷-۸۳) و (۷-۸۴)) محاسبه می‌کنیم،

$$\{O\}_H = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dfrac{1}{1+e^{-\lambda(I_{Hi}-\theta_{Hi})}} \\ \vdots \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

گام هفتم ورودی‌های به لایه خروجی را با ضرب وزن‌های مربوط به W در خروجی‌های لایه پنهان محاسبه می‌کنیم،

$$\underset{n\times 1}{\{I\}_O} = \underset{n\times m}{[W]^T} \; \underset{m\times 1}{\{O\}_H}$$



شکل ۷-۲۷:

گام هشتم فرض می‌کنیم، خروجی در لایه خروجی با تابع سیگموئید محاسبه می‌شود،

$$\{O\}_o = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dfrac{1}{1+e^{-\lambda(I_{Ok}-\theta_{Ok})}} \\ \vdots \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} O_{O1} \\ O_{O2} \\ \vdots \\ O_{On} \end{bmatrix} \tag{۹۸-۷}$$

این مقادیر خروجی‌های شبکه هستند. θ_{Ok} آستانه k امین خروجی لایه خروجی است.

گام نهم خطا یا تفاوت بین خروجی شبکه را با مقادیر مطلوب آن که با بردار n بُعدی $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ نشان داده شده محاسبه می‌کنیم.

برای k امین نورون لایه خروجی E_k از رابطه زیر محاسبه می‌شود،

$$E_k = (d_k - O_{Ok})^2 \tag{۹۹-۷}$$

برای محاسبه $\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}}$ قانون مشتق زنجیره ای را بکار می‌بریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}} = \frac{\partial E_k}{\partial O_{Ok}} \frac{\partial O_{Ok}}{\partial I_{Ok}} \frac{\partial I_{Ok}}{\partial W_{ik}} \tag{۱۰۰-۷}$$

در این معادله از رابطه (۷-۹۹) خواهیم داشت،

$$\frac{\partial E_k}{\partial O_{Ok}} = -2(d_k - O_{Ok}) \qquad (۱۰۱-۷)$$

با توجه به اینکه خروجی k امین نورون لایه خروجی O_{Ok} از رابطه (۷-۹۸) عبارت است از،

$$O_{Ok} = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(I_{Ok} - \theta_{Ok})}}$$

پس،

$$\frac{\partial O_{Ok}}{\partial I_{Ok}} = \frac{\lambda e^{-\lambda(I_{Ok} - \theta_{Ok})}}{[1 + e^{-\lambda(I_{Ok} - \theta_{Ok})}]^2} = \lambda O_{Ok}(1 - O_{Ok}) \qquad (۱۰۲-۷)$$

این نشان می‌دهد که مشتق تابع سیگموئید تابعی از خروجی است. برای محاسبه $\frac{\partial I_{Ok}}{\partial W_{ik}}$ نیز با توجه به اینکه یک لایه ورودی یک لایه پنهان و یک لایه خروجی داریم پس،

$$I_{Ok} = W_{1k}O_{H1} + W_{2k}O_{H2} + \cdots + W_{mk}O_{Hm}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial I_{Ok}}{\partial W_{ik}} = O_{Hi} \qquad (۱۰۳-۷)$$

با قرار دادن از معادلات (۷-۱۰۱)، (۷-۱۰۲) و (۷-۱۰۳) در رابطه (۷-۱۰۰)، بدست می‌آوریم،

$$\frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}} = -2\lambda(d_k - O_{Ok})O_{Ok}(1 - O_{Ok})O_{Hi}$$

می‌توان ثابت کرد که تغییرات W_{ik} یا ΔW_{ik} برابر مقدار زیر می‌شود،

$$\Delta W_{ik} = -\eta \frac{\partial E_k}{\partial W_{ik}}$$

و به همین ترتیب،

$$\Delta V = -\eta \frac{\partial E}{\partial V}$$

۷-۵- شبکه‌های فازی عصبی

ساختارهای مختلفی به عنوان شبکه‌های فازی عصبی[۱] می‌توان طراحی کرد. در این قسمت یکی از این شبکه‌ها که توسط جنگ[۲] ارائه شده بیان می‌شود.

[۱] Neuro-Fuzzy Networks

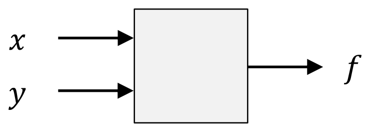
[۲] Jang

۷-۵-۱- ساختار جنگ

ساختار ارائه شده توسط جنگ[۱] در سال ۱۹۹۶، ANFIS[۲] نام دارد. در این نوع از شبکه فازی ابتدا سیستم‌های فازی به کمک روش‌های مختلف فازی مدل می‌شود. سپس این مدل فازی به شبکه عصبی معادل می‌شود. از جمله روش‌های مورد استفاده در طراحی مدل فازی، روش TSK است، که ورودی فازی و خروجی غیرفازی است.

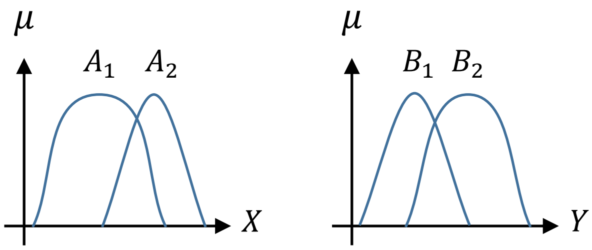
ساختار شبکه فازی ANFIS

برای بیان ساختار شبکه ANFIS به طور نمونه سیستم دو ورودی و یک خروجی زیر را در نظر می‌گیریم.



شکل ۷-۲۸ :

ورودی‌ها را x و y و خروجی را با f نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم، ورودی‌ها تنها دو تابع عضویت داشته باشند. A_1 و A_2، توابع عضویت ورودی x، و B_1 و B_2 تابع عضویت ورودی y به صورت زیر است.



شکل ۷-۲۹ : توابع عضویت ورودی‌های x, y

فرض می‌کنیم تنها دو قانون کنترلی از نوع سوگینوی مرتبه ۱ داشته باشیم،

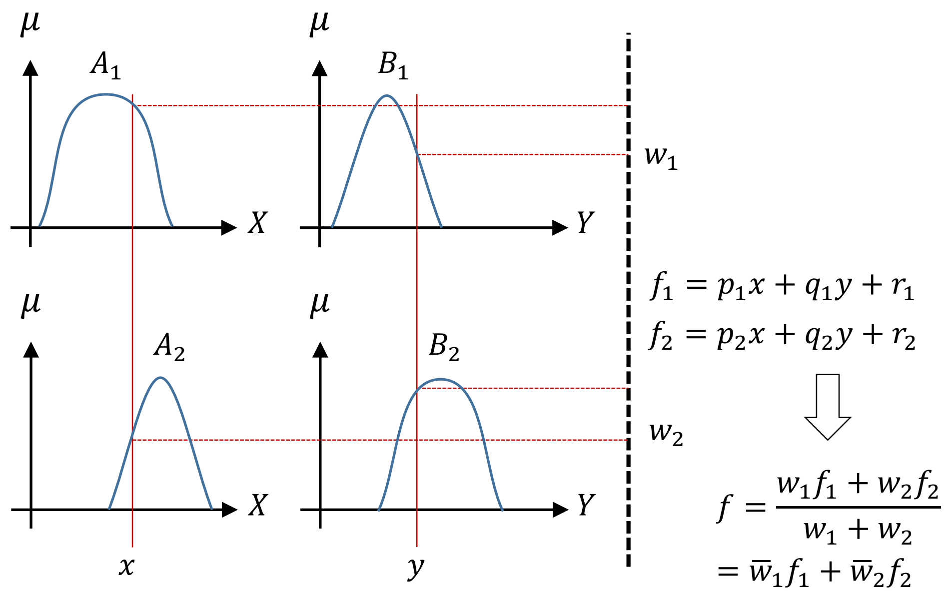
If x is A_1 **AND** y is B_1, **Then** $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$.
If x is A_2 **AND** y is B_2, **Then** $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$.

واضح است که در اینجا عملا به تعداد حاصل‌ضرب تعداد توابع عضویت x و y، ۴ قانون کنترلی خواهیم داشت، که بقیه را نیاورده ایم، مثلا دو قانون دیگر عبارتند از:

If x is A_1 **AND** y is B_2, **Then** $f_3 = p_3x + q_3y + r_3$.
If x is A_2 **AND** y is B_1, **Then** $f_4 = p_4x + q_4y + r_4$.

[۱] Jang Structure or Jang Architecture

[۲] Adaptive Network Based Fuzzy Inference System or Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System

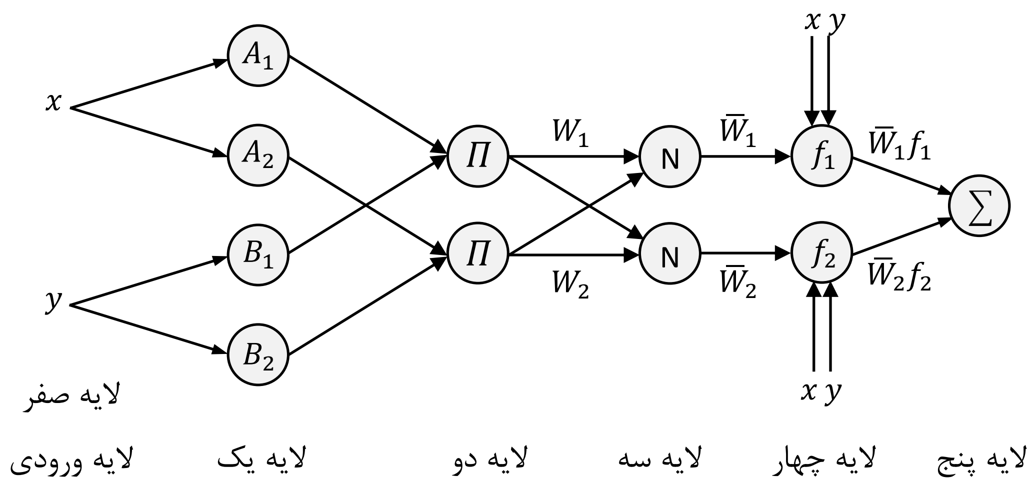


شکل ۷-۳۰ : استنتاج فازی

که در آن W_1 و W_2 حاصل‌ضرب استنتاج، یا وزن مربوط به قوانین فعال شده و یا،

$$f = \frac{W_1}{W_1 + W_2}f_1 + \frac{W_2}{W_1 + W_2}f_2, \qquad f = \bar{W}_1f_1 + \bar{W}_2f_2$$

هستند. این شبکه فازی به شبکه عصبی زیر تبدیل می‌شود،



شکل ۷-۳۱ : شبکه فازی-عصبی

لایه ۱

لایه یک، یک لایه تطبیقی است؛ یعنی **باید پارامترهای آن اصلاح شوند**. توابع هر کدام از گره‌های لایه یک، همان توابع عضویت فازی هستند، که با A_1 و A_2 و B_1 و B_2 یا با $\mu_{A_1}(x)$ و $\mu_{A_2}(x)$ و $\mu_{B_1}(x)$

و$\mu_{B_1}(x)$ نشان داده شده است. بنابراین هر گره یک تابع عضویت است و **آنچه اصلاح می‌شود پارامترهای این تابع عضویت است (مثلا هر گره ۲ تا ۳ یا بیشتر پارامتر دارد).**

ورودی‌های لایه یک، ورودی‌های x و y، و خروجی‌ها، همان توابع عضویت مربوط به هر گره هستند. اگر خروجی‌های هر کدام از گره‌ها در لایه‌ها را با $O_{l,i}$، یعنی خروجی i امین گره در لایه l ام، نشان دهیم، برای لایه یک داریم،

$$O_{1,1} = \mu_{A_1}(x) \qquad O_{1,3} = \mu_{B_1}(y)$$
$$O_{1,2} = \mu_{A_2}(x) \qquad O_{1,4} = \mu_{B_2}(y)$$

برای نمونه $\mu_{A_1}(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c_1}{a_1}\right|^{2b_1}}$ یک تابع عضویت ناقوسی است. پارامترهای a_1 و b_1 و c_1 را برای اولین گره از لایه یک و سایر پارامترهای مشابه را برای دومین تا آخرین گره از لایه یک، **پارامترهای مقدم**[1] می‌نامند.

لایه ۲

این لایه، یک لایه تطبیقی نیست، بلکه لایه ثابت است. خروجی هر گره در این لایه برابر حاصل‌ضرب ورودی‌ها به آن گره است. این لایه را با علامت ضرب یعنی Π نشان می‌دهیم.

$$O_{2,i} = w_i = \mu_{A_i}(x) * \mu_{B_i}(y), \qquad i = 1,2$$

در این مثال لایه دو، تنها دو گره دارد. زیرا، سیستم فازی فقط برای (A_1 و B_1) و(A_2 و B_2) تعریف شده است. گرچه در این سیستم فازی می‌توان چهار حالت زیر را در نظر گرفت.

$$O_{2,1} = w_1 = \mu_{A_1}(x) * \mu_{B_1}(y) = O_{1,1} * O_{1,3}$$
$$O_{2,2} = w_2 = \mu_{A_1}(x) * \mu_{B_2}(y) = O_{1,1} * O_{1,4}$$
$$O_{2,3} = w_3 = \mu_{A_2}(x) * \mu_{B_1}(y) = O_{1,2} * O_{1,3}$$
$$O_{2,4} = w_4 = \mu_{A_2}(x) * \mu_{B_2}(y) = O_{1,2} * O_{1,4}$$

بنابراین در لایه دو، خروجی، قدرت آتش هر قانون است.

به‌طورکلی در لایه دوم به جای Π (ضرب) می‌توان هر اپراتور T-norm دیگری که نشان‌دهنده AND باشد، به عنوان تابع گره استفاده کرد.

[1] Antecedent Parameters

لایه سوم

هر گره در این لایه ثابت است و با N نشان داده می‌شود. خروجی گره‌های این لایه "قدرت آتش نرمال شده" را نشان می‌دهند.

$$O_{3,1} = \bar{w}_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$
$$O_{3,2} = \bar{w}_2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

و به‌طورکلی می‌توان نوشت،

$$O_{3,i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, \qquad i = 1,2$$

لایه چهارم

در این لایه دوباره ورودی‌های x و y وارد می‌شوند. این لایه تطبیقی است. تابع هر گره یا خروجی هر گره در این لایه عبارت است از،

$$O_{4,1} = \bar{w}_1 f_1 = \bar{w}_1(p_1 x + q_1 y + r_1)$$
$$O_{4,2} = \bar{w}_2 f_2 = \bar{w}_2(p_2 x + q_2 y + r_2)$$

و یا به‌طورکلی،

$$O_{4,i} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i(p_i x + q_i y + r_i), \qquad i = 1,2$$

پارامترهای p_i و q_i و r_i، $(i = 1,2)$ در این دو گره از لایه چهارم باید تعیین شوند.

لایه پنجم

این لایه تطبیقی نیست. خروجی یا تابع این گره جمع ورودی‌ها است.

$$f = \sum \bar{w}_i f_i = \bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_2 f_2$$

مثال ۷-۸ : یک ساختار عصبی با دو ورودی و نُه قانون.

یک ساختار ANFIS با دو ورودی x و y و یک خروجی f در شکل ۷-۳۲ داده شده است. همچنین فرض می‌شود، نُه قانون سوگنو در اختیار داشته باشیم. یک نمونه از قانون در این مدل به شکل زیر است،

اگر x، A و y، B باشد، آنگاه $z = f(x, y)$ خواهد بود.

که در آن A و B مجموعه‌های فازی در قسمت مقدم و $z = f(x, y)$ یک تابع غیرفازی در قسمت تالی است. معمولا $f(x, y)$ یک چندجمله‌ای از متغیرهای ورودی x و y است.

اگر $f(x,y)$ یک چندجمله‌ای درجه یک باشد، سیستم فازی مورد بحث یک **مدل مرتبه اول سوگنو** نامیده می‌شود. در این صورت، قوانین بالا بشکل زیر بیان می‌گردد،

If x is A_1 AND y is B_1 Then $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$ قاعده 1

If x is A_2 AND y is B_2 Then $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$ قاعده 2

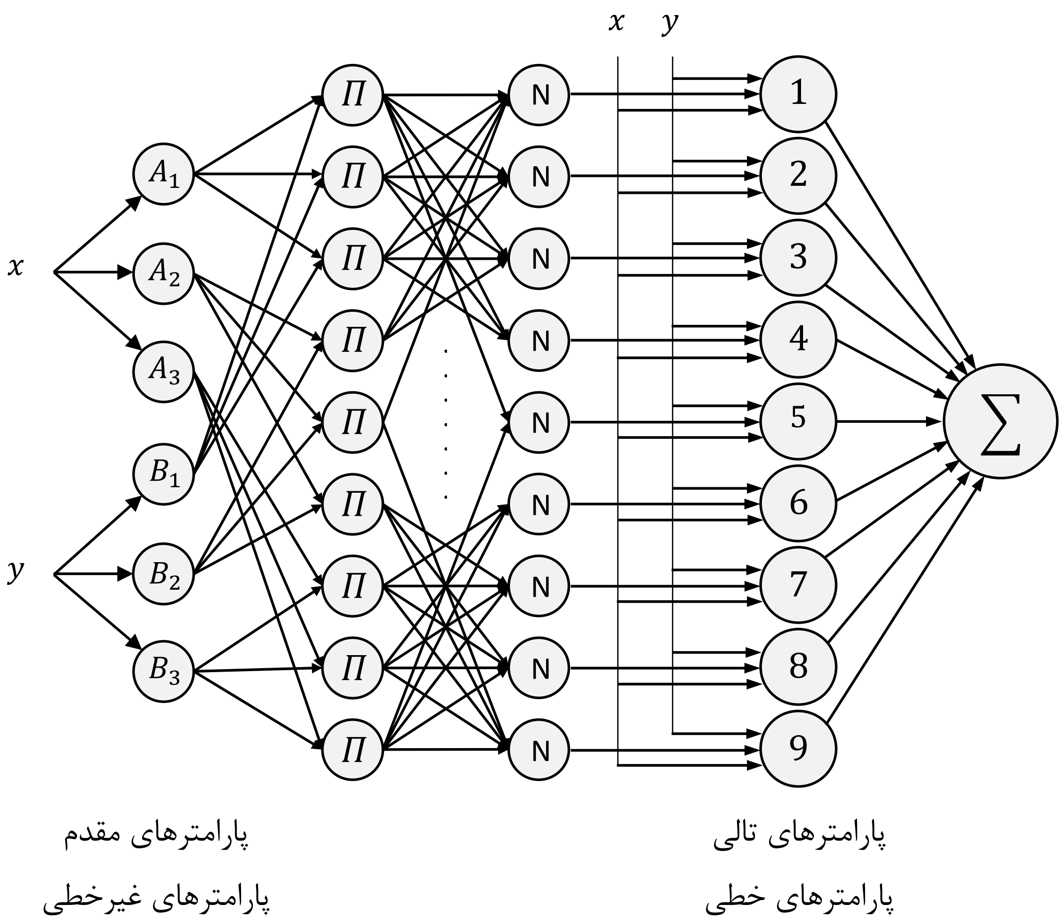
If x is A_3 AND y is B_3 Then $f_3 = p_3x + q_3y + r_3$ قاعده 3

ساختار ANFIS نشان داده شده در شکل زیر نیاز ما را برای پیاده‌سازی این قوانین برآورده می‌سازد.

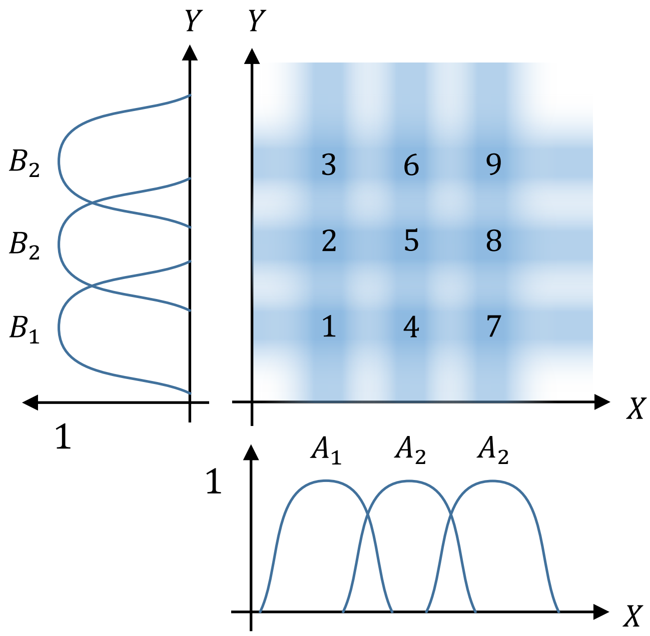
لایه اول نقش فازی کردن ورودی‌های x و y را بر عهده دارد، در این لایه از توابع عضویت گوسی که در شکل ۷-۳۳ نشان داده شده است، استفاده می‌شود.

$$O_i = \mu_{A_i}(x) = \text{gaussmf}\,(\sigma_i, c_i), \qquad i = 1,2,3$$
$$O_j = \mu_{B_j}(y) = \text{gaussmf}\left(\sigma_j, c_j\right), \qquad j = 4,5,6$$

در رابطه بالا، σ_i، c_i، σ_j و c_j پارامترهای قابل تنظیم (آموزش) و O_X بیانگر خروجی‌های لایه اول می‌باشند. پارامترهای این لایه به **پارامترهای مقدم** یا **پارامترهای غیرخطی** معروف هستند.



شکل ۷-۳۲ : شبکه فازی- عصبی



شکل ۷-۳۳ : نمایش توابع عضویت ورودی

لایه دوم این شبکه ضرب‌کننده‌های Π می‌باشد، که خروجی حاصل از هر گره این لایه (w_i) در واقع قدرت آتش هر قانون را مشخص می‌کند،

$$w_1 = O_1O_4 \quad w_2 = O_1O_5 \quad w_3 = O_1O_6$$
$$w_4 = O_2O_4 \quad w_5 = O_2O_5 \quad w_6 = O_2O_6$$
$$w_7 = O_3O_4 \quad w_8 = O_3O_5 \quad w_9 = O_3O_6$$

در این لایه به جای عملگر ضرب از هر اپراتور فازی که شرایط AND را برآورد، می‌توان استفاده کرد. خروجی گره i ام لایه سوم برابر است با قدرت آتش قانون i ام، بخش بر مجموع همه قدرت آتش قوانین،

$$\mathrm{w}_1 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_4 \quad \mathrm{w}_2 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_5 \quad \mathrm{w}_3 = \mathrm{O}_1\mathrm{O}_6$$

خروجی‌های این لایه به **قدرت آتش نرمالیزه شده** معروف هستند. خروجی‌های لایه چهارم (f_i) از ضرب قسمت تالی دستور فازی سوگنو مرتبه اول در ضرایب $\overline{w}_i$ تشکیل می‌شود،

$$f_i = \overline{w}_i(p_i x + q_i y + r_i), \qquad i = 1,2,\dots,9$$

پارامترهای این لایه $\{p_i, q_i, r_i\}$ به **پارامترهای تالی**، منتج (موخر) یا **پارامترهای خطی** معروف هستند و بالاخره در لایه پنجم که یک گره جمع‌کننده است، خروجی‌های حاصل از لایه چهارم با هم جمع می‌شوند تا خروجی نهایی بدست آید،

$$f = \sum_{i=1}^{9} f_i$$

توجه به این نکته مهم است که، لایه‌های دوم و سوم و پنجم لایه‌های ثابت، اما لایه‌های اول و چهارم لایه‌های تطبیقی می‌باشند. آموزش شبکه در واقع تغییر دادن پارامترهای این دو لایه برای دست یابی به هدف مطلوب است.

فصل ۸–   پایداری سیستم های فازی

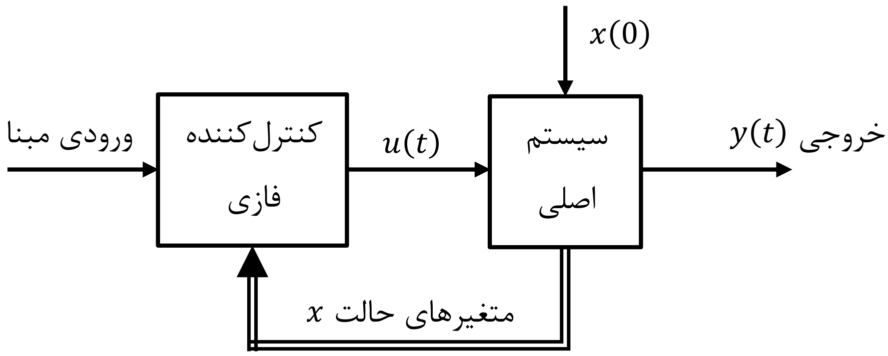
۸–۱– مقدمه

؟؟

۸–۲– کلاسی از سیستم های کنترل فازی

شکل ۴-۷ نمایش یک سیستم فازی است، که در آن سیستم اصلی[1] یک سیستم غیرخطی تک ورودی رسته n است، و در فضای حالت با معادله (۸-۱) مدل می‌شود.

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{۱-۸}$$



شکل ۸-۱ : سیستم کنترل فازی

در این معادله $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ بردار متغیرهای حالت است و داریم $x \in X$ که در آن X فضای مرجع است. توابع $f(x)$ و $b(x)$ دینامیک سیستم اصلی را بیان می‌کنند و داریم،

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}, b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ b_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ b_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

در معادله (۸-۱) ورودی $u(t)$ عبارت است از، خروجی کنترل‌کننده فازی که براساس غیرفازی‌ساز وزن‌دهی جمع خروجی روش T-S (رابطه ؟؟ ۶-۲-۳) محاسبه می‌شود.

ساختار FLC

کنترل‌کننده فازی شامل تعدادی قانون فازی تاکاگی سوگینو است که در آن ورودی های کنترل‌کننده یعنی x_1 تا x_n مجموعه های فازی هستند و خروجی کنترل‌کننده، یعنی u ورودی به سیستم اصلی است.

[1] Plant

هر یک از متغیرهای x_1 تا x_n به عنوان یک متغیر کلامی با تعدادی مجموعه فازی بیان می‌شود. فرض کنید تعداد کل قوانین فازی r است. در این صورت i امین قانون فازی به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\textbf{If } x_1 \text{ is } X_{i1}, \textbf{ AND } \ldots, \textbf{ AND } x_n \text{ is } X_{ni}, \text{ Then } u = u_i(x),\ i = 1, \ldots, r \qquad (۲\text{-}۸)$$

که در آن r عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی 2 و X_{1i} تا X_{ni} مجموعه های فازی مربوط به متغیرهای کلامی x_1 تا x_n در قانون i ام است. هم‌چنین خروجی $u_i(x)$ خروجی کنترلی در قانون i ام و تابع **AND** در مقدمه قانون یک T-norm است. خروجی u_i در قانون i ام می‌تواند یک مقدار عددی ثابت یا تابعی از متغیرهای حالت x_1 تا x_n باشد. هر قانون فازی یک قدرت آتش w_i به صورت رابطه (۸-۳) ایجاد می‌کند،

$$w_i(x) = \min\left[\mu_{X_{1i}}(x_1), \mu_{X_{2i}}(x_2), \ldots, \mu_{X_{ni}}(x_n)\right], i = 1,2, \ldots, r \qquad (۳\text{-}۸)$$

فرض می‌شود که برای هر مقدار x که به مجموعه مرجع X تعلق دارد، دستِ‌کم یک مقدار w_i وجود دارد که غیر صفر است.

ورودی کنترلی u به سیستم اصلی اعمال می‌شود تابعی از w_i و u_i است. با توجه به غیرفازی ساز بر اساس وزن داریم،

$$u = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i u_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i} \qquad (۴\text{-}۸)$$

برای هر ورودی $x^* \in X$ اگر قدرت آتش $w_i(x^*)$ مربوط به قانون فازی i ام صفر شود، این قانون فازی برای ورودی x^* بنابر تعریف غیر فعال نامیده می‌شود. در غیر این صورت **قانون فازی فعال** نامیده می‌شود.

بر اساس این تعریف، با $x = x^*$ قوانین فازی غیر فعال تاثیری بر ورودی کنترلی $u = u(x^*)$ ندارند بنابراین رابطه (۸-۴) را می‌توان به گونه ای نوشت که تنها قوانین فازی فعال را شامل شود،

$$u(x^*) = \frac{\sum_{i=1, w_i \neq 0}^{r} w_i(x^*) u_i(x^*)}{\sum_{i=1, \alpha_i \neq 0}^{r} w_i(x^*)} \qquad (۵\text{-}۸)$$

۸-۳- تحلیل پایداری سیستم های کنترل فازی در فرآیند های غیرخطی

تحلیل پایداری که در این بخش ارائه می‌شود بر اساس پایداری مجموعه‌های نامتغیر لاسال[۱] است. اساس بحث حاضر در مورد معیار پایداری در این بخش آن است که اگر خروجی کنترلی در هر قانون شرایط پایداری ذکر شده در اینجا را داشته باشد کل سیستم و به ازای همه قوانین پایدار است. قضیه ارائه شده در این بخش شرط کافی پایداری سیستم کنترلی ارائه شده در بخش ۸-۲- را ارائه می‌کند.

[۱] La Salle’s Invariant Set Theorem

فرض کنید تابع اسکالر $V(x)$ با مشتقات پیوسته مرتبه اول را به صورت زیر داریم،

$$V(x) > 0, \qquad for\ all\ x \neq 0$$

مشتق $V(x)$ در مسیر حرکت سیستم مدار باز (۸-۱) چنین است،

$$\dot{V}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}(f_i(x) + b_i(x)u)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}f_i(x) + u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}b_i(x)$$

و یا،

$$\dot{V}(x) = F(x) + B(x)u \tag{۸-۶}$$

که در آن،

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}f_i(x) \tag{۸-۷}$$

$$B(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}b_i(x) \tag{۸-۸}$$

اکنون روابط زیر را تعریف می‌کنیم،

$$B^0 = \{x \in X | B(x) = 0\} \tag{۸-۹}$$

$$B^+ = \{x \in X | B(x) > 0\} \tag{۸-۱۰}$$

$$B^- = \{x \in X | B(x) < 0\} \tag{۸-۱۱}$$

با این مقدمات قضیه زیر را بیان می‌کنیم،

قضیه ۸-۱ : فرض می‌کنیم کنترل‌کننده فازی سیستم (۸-۱) کنترل‌کننده فازی تاکاگی سوگینو ارائه شده در (۸-۲) باشد، که در آن سیستم اصلی غیرخطی و نقطه تعادل سیستم $x = 0$ فرض شده است. اگر تابع $V(x)$ وجود داشته باشد که برای همه $x \neq 0$، $V(x) > 0$ و مشتق اول $V(x)$ پیوسته باشد. هم‌چنین سه شرط زیر بر قرار باشد.

۱. داشته باشیم،

$$F(x) \leq 0, \qquad for\ \ all\ x \in B^0$$

۲. برای همه مقادیر $i = 1,2, \dots, r$،

$$u_i(x) \leq \frac{-F(x)}{B(x)}, \qquad for\ \ x \in X_i \cap B^+$$
$$u_i(x) \geq \frac{-F(x)}{B(x)}, \qquad for\ \ x \in X_i \cap B^-$$

۳. مجموعه

$$S = \{x \in X | \dot{V}(x) = 0\}$$

شامل هیچ مسیر حرکتی از سیستم به جز $x(t) = 0$ برای $t > 0$ نباشد.

در این صورت و با تحقق شرایط بالا سیستم کنترل مدار بسته در $x = 0$ پایدار مجانبی سراسری است.

برای اثبات این مساله باید ثابت کنیم که برای همه $x \in X$ همواره $\dot{V}(x) \leq 0$ است؛ یا به بیان دیگر، $\dot{V}(x)$ منفی نیمه معین است.

اثبات ؟؟

۸-۴- الگوریتم تحلیل پایداری

با توجه به اثبات قضیه پایداری مراحل بررسی و تحلیل پایداری سیستم کنترلی مدار بسته با کنترل‌کننده فازی تاکاگی سوگینو و سیستم اصلی غیرخطی به شرح زیر است.

۱. معادلات حالت سیستم اصلی را بنویسید.
۲. توابع عضویت کنترل‌کننده فازی تاکاگی سوگینو را مشخص کنید.
۳. مقدمه هر یک از قوانین فازی را مشخص کنید.
۴. تابع $V(x)$ را تعریف کنید. $\dot{V}(x)$ را محاسبه کنید. $F(x)$ و $B(x)$ و مجموعه های B^0، B^+ و B^- را تعیین کنید.
۵. اگر به ازای همه $x \in B^0$ داریم $F(x) \leq 0$ به مرحله ششم بروید. در غیر این صورت به مرحله چهارم برگردید.
۶. برای هر یک از قوانین فازی، کمیت u_i را طوری تعیین کنید که برای همه $i = 1,2,\dots,r$ داشته باشیم،

$$u_i(x) \leq \frac{-F(x)}{B(x)}, \qquad for\ \ x \in X_i \cap B^+$$
$$u_i(x) \geq \frac{-F(x)}{B(x)}, \qquad for\ \ x \in X_i \cap B^- \tag{۱۲-۸}$$

۷. بررسی شود که مجموعه $S = \{x \in X | \dot{V}(x) = 0\}$ بجز $x(t) = 0$ هیچ مسیر حرکتی از سیستم را شامل نمی‌شود.

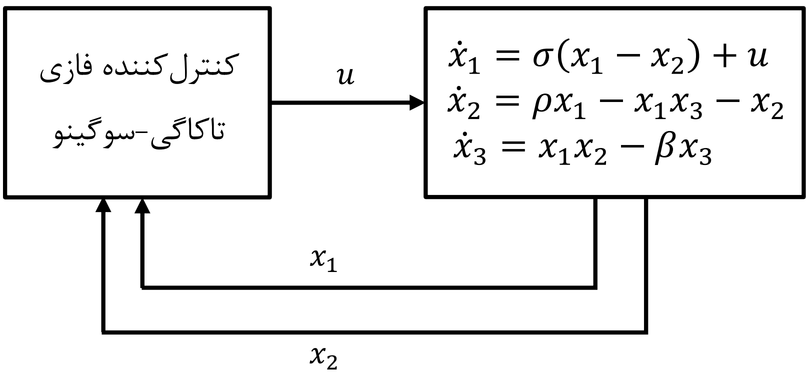
مثال ۸-۱ : سیستم دینامیکی غیرخطی که باید کنترل شود، سیستم آشوبناک لورنز انتخاب شده است. لورنز اولین پژوهشگری است که در زمان مدل سازی رفتارهای جوی و پیش بینی وضعیت هوا در روز های آینده، ابتدا به طور تصادفی پدیده آشوب را که مختص بعضی سیستم های غیرخطی است کشف کرد و سپس به تحلیل آن پرداخت. معادلات لورنز معمولا به صورت سه معادله دیفرانسیل کوپله غیرخطی بیان می‌شوند [؟؟].

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \rho x - xz - y$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z \qquad (۱۳\text{-}۸)$$

که در آن پارامتر های σ، ρ و β بزرگ‌تر از صفر هستند، که رفتار سیستم به آنها بستگی دارد. مجموعه این معادلات یک سیستم آشوبناک را بیان می‌کند که به شدت نسبت به شرایط اولیه حساس هستند و تغییر بسیار کوچکی در شرایط اولیه باعث می‌شود رفتار سیستم کاملاً شکل متفاوتی پیدا کند. مقادیر معمول مورد استفاده برای پارامترها عبارت هستند از $\sigma = 10$، $\rho = 28$ و $\beta = \frac{8}{3}$. هم‌چنین محدوده تغییرات x، y و z را بین -40 تا 40 در نظر می‌گیریم.

۸-۵- طراحی سیستم کنترل فازی پایدار

با فرض آن که متغیرهای x، y و z به ترتیب به عنوان متغیرهای حالت x_1 تا x_3 نامگذاری شوند و با فرض آن که ورودی u که خروجی کنترل‌کننده فازی تاکاگی سوگینو است، ورودی به سیستم غیرخطی (۸-۱۳) در نظر گرفته شود، مراحل ۱ تا ۷ الگوریتم ارائه شده در بخش ۸-۴- برای این سیستم به شرح زیر پیاده سازی و اجرا می‌شود.



شکل ۸-۲ : سیستم غیرخطی و کنترل‌کننده فازی T-S با دو ورودی x_1 و x_2 به کنترل‌کننده

گام یکم

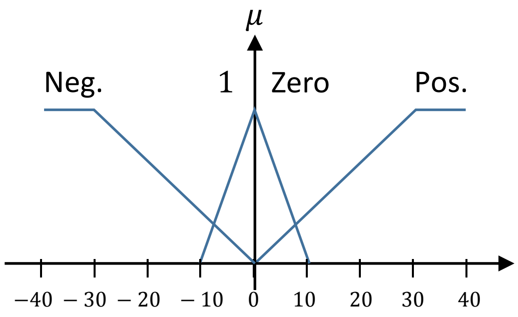
با فرض $x_1 = x$، $x_2 = y$ و $x_3 = z$ معادلات حالت سیستم غیرخطی با ورودی u چنین می‌شود،

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_1 - x_2) + u \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_1 x_3 - x_2 \quad , \qquad x(0) = x_0 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3 \end{aligned} \tag{۱۴-۸}$$

توجه داریم که هدف از الگوریتم، تعیین u به گونه ای است که سیستم مدار بسته غیرخطی پایدار باشد.

گام دوم

فرض می‌کنیم در طراحی کنترل‌کننده فازی دو متغیر x_1 و x_2 در شکل ۸-۳ نمایش داده شده است. هر متغیر، سه تابع عضویت دارد، که به‌ترتیب منفی (.Neg)، صفر (Zero) و مثبت (.Pos) نامگذاری شده‌اند.



شکل ۸-۳ : توابع عضویت x_1 و x_2

عملگر AND در مقدمه قوانین فازی T-Norm، مینیمم در نظر گرفته شده است.

گام سوم

جمعاً نُه قانون فازی برای این سیستم کنترل‌کننده فازی باید انتخاب و تعیین شود. در جدول ۸-۱ خروجی هر کدام از این قوانین از u_1 تا u_9 نام‌گذاری شده است.

جدول ۸-۱ . قوانین فازی در کنترل‌کننده

شماره قانون		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
مقدمه قانون	x_1	P	N	P	N	P	N	Z	Z	Z
	x_2	P	N	N	P	Z	Z	P	N	Z
نتیجه قانون	u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9

هدف تعیین u_1 تا u_9 به گونه ای است که سیستم مدار بسته پایدار مجانبی باشد.

گام چهارم

تابع کاندیدای لیاپانوف $V(x)$ را چنین بر می‌گزینیم،

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

این تابع پیوسته و مشتق پذیر در $\mathbb{R}^3$ همواره مثبت است. مشتق $V(x)$ در طول مسیر حرکت چنین می‌شود،

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3$$

با جایگزینی از (۵-۱) در این معادله نتیجه می‌شود،

$$\dot{V}(x) = -\sigma x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 + x_1x_2(\sigma + \rho) + x_1u$$

از مقایسه این رابطه با (۸-۶) نتیجه می‌شود،

$$F(x) = -\sigma x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 + x_1x_2(\sigma + \rho)$$
$$B(x) = x_1$$

بنابراین از مقایسه این روابط با روابط (۸-۹)، (۸-۱۰) و (۸-۱۱) مقادیر B^0، B^+ و B^- چنین می‌شود،

$$B^0 = \{0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3\}$$
$$B^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 > 0\}$$
$$B^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 < 0\}$$

با توجه به محدوده های تعیین شده برای x_1، x_2 و x_3 در این پرسش، روابط بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت،

$$B^0 = \{0, (-40,40), (-40,40)\}$$
$$B^+ = \{(0,40), (-40,40), (-40,40)\}$$
$$B^- = \{(-40,0), (-40,40), (-40,40)\}$$

گام پنجم

مقدار $F(x)$ در این پرسش به ازای B^0 یعنی به ازای $x_1 = 0$ همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر است. زیرا مقدار $F(x)$ چنین می‌شود،

$$F(x) = -x_2^2 - \beta x_3^2$$

چون $\beta > 0$ است، پس $F(x) < 0$ و بنابراین به گام ششم می‌رویم.

گام ششم

هر یک از قوانین فازی را بررسی می‌کنیم. باید روابط (۸-۱۲) در هر یک از قوانین صادق باشد و ورودی های کنترلی u_i (خروجی های کنترل‌کننده T-S) باید در هر یک از قوانین، دو شرط (۸-۱۲) را ارضا کنند. به این ترتیب مقادیر قابل قبول u_i در هر قانون فازی مشخص می‌شود و طراح با انتخاب u_i مناسب، سیستم کنترلی را طراحی می‌کند.

برای قانون شماره ۱، x_1 و x_2 هر دو مثبت (.Pos) هستند. بنابراین در قانون ۱، محدوده چنین است،

$$X_1 = \{[0,40] \times [0,40] \times [-40,40]\}$$

اشتراک این ناحیه با B^+ چنین است،

$$X_1 \cap B^+ = \left\{ \underbrace{[0,40]}_{\text{ناحیه مثبت } x_1} \times \underbrace{[0,40]}_{\text{ناحیه مثبت } x_2} \times \underbrace{[-40,40]}_{\text{همه ناحیه } x_1} \right\}$$

در این ناحیه باید $u_1(x) \le \frac{-F(x)}{B(x)}$ باشد، پس داریم،

$$u_1(x) \le \frac{-F(x)}{B(x)}$$

با جایگزینی $F(x)$ و $B(x)$ نتیجه می‌شود،

$$u_1(x) \le \sigma x_1 \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

چون x_1 و x_2 هر دو مثبت هستند، و عبارت سوم منفی است، $u_1(x)$ باید از سمت چپ کوچک‌تر باشد. پس $u_1(x)$ را چنین انتخاب می‌کنیم،

$$u_1(x) = -x_2(\sigma + \rho)$$

در این قانون هم‌چنین باید شرط دومی نیز برای ناحیه $x \in X_i \cap B^-$ برقرار باشد؛ اما، ناحیه گفته شده، تهی است، زیرا، B^- یعنی x_1 کوچک‌تر از صفر است؛ در حالی که X_1 در این قانون شامل نقاطی است که x_1 بزرگ‌تر از صفر است. پس انتخاب u_1 به صورت زیر نهایی است،

$$u_1(x) = -x_2(\sigma + \rho)$$

برای قانون شماره ۲، x_1 و x_2 هر دو منفی (.Neg) هستند. اشتراک X_2 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_2 \cap B^+ = \emptyset$$
$$X_2 \cap B^- = \{[-40,0] \times [-40,0] \times [-40,40]\}$$

بنابراین تنها باید معادله دوم از (۸-۱۲) که x مقدار دارد محاسبه شود،

$$u_2(x) \geq \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

عبارت σx_1 منفی است. عبارت دوم نیز منفی است؛ زیرا، x_1 در مخرج کسر منفی و صورت کسر مثبت است. عبارت $-x_2(\sigma + \rho)$ مثبت است. بنابراین چون $u_2(x)$ باید بزرگ‌تر یا مساوی مجموع این سه عبارت باشد، u_2 را مساوی عبارت سوم انتخاب می‌کنیم، که از مجموع سه عبارت بزرگ‌تر است

$$u_2(x) = -x_2(\sigma + \rho)$$

برای قانون شماره ۳، x_1 مثبت (.Pos) و x_2 منفی (.Neg) است. اشتراک X_3 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_3 \cap B^+ = \{[0,40] \times [-40,0] \times [-40,40]\}$$
$$X_3 \cap B^- = \emptyset$$

در این حالت از معادله اول (۸-۱۲) باید داشته باشیم،

$$u_3(x) \leq \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

عبارت های اول و دوم مثبت هستند. چون x_2 منفی است عبارت سوم هم مثبت است. پس سمت راست معادله همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. چون u_3 باید از این مقدار کوچک‌تر باشد، پس باید منفی باشد. برای نمونه،

$$u_3(x) = -1$$

برای قانون شماره ۴، x_1 منفی (.Neg) و x_2 مثبت (.Pos) است. اشتراک X_4 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_4 \cap B^+ = \emptyset$$
$$X_4 \cap B^- = \{[-40,0] \times [0,40] \times [-40,40]\}$$

در این حالت از معادله دوم (۸-۱۲) باید داشته باشیم،

$$u_4(x) \geq \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

عبارت های اول و دوم منفی هستند. چون x_1 منفی است، عبارت سوم نیز منفی است. چون x_2 مثبت است، پس سمت راست نامساوی همواره منفی است. پس کافی است $u_4(x)$ مثبت باشد. برای نمونه،

$$u_4(x) = 1$$

برای قانون شماره ۵، ، x_1 مثبت (.Pos) و x_2 صفر (Zero) است. اشتراک X_5 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_5 \cap B^+ = \{[0,40] \times [-10,10] \times [-40,40]\}$$
$$X_5 \cap B^- = \emptyset$$

در این حالت از معادله اول (۸-۱۲) باید داشته باشیم،

$$u_5(x) \le \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

عبارت های اول و دوم سمت راست مثبت هستند (کم‌ترین مقدار صفر است). کم‌ترین مقدار عبارت سوم به ازای $x_2 = 10$ بدست می‌آید. پس $u_5(x)$ را چنین بر می‌گزینیم،

$$u_5(x) = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - 10(\sigma + \rho)$$

برای قانون شماره ۶، x_1 منفی (.Neg) و x_2 صفر (Zero) است. اشتراک X_6 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_6 \cap B^+ = \emptyset$$
$$X_6 \cap B^- = \{[-40,0] \times [-10,10] \times [-40,40]\}$$

در این حالت از معادله اول (۸-۱۲) باید داشته باشیم،

$$u_6(x) \ge \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

عبارت های اول و دوم منفی هستند (بیش‌ترین مقدار صفر است). بیشترین مقدار عبارت سوم به ازای $x_2 = -10$ است و در این حالت عبارت سوم $10(\sigma + \rho)$ می‌شود. بنابراین $u_6(x)$ را چنین بر می‌گزینیم،

$$u_6(x) = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} + 10(\sigma + \rho)$$

برای قانون شماره ۷، x_1 صفر (Zero) و x_2 مثبت (.Pos) است. اشتراک X_7 با B^+ و B^- چنین است،

$$X_7 \cap B^+ = \{[0,10] \times [0,40] \times [-40,40]\} \quad (۱۵\text{-}۸)$$

$$X_7 \cap B^- = \{[-10,0] \times [0,40] \times [-40,40]\} \quad (۱۶\text{-}۸)$$

برای رابطه (۸-۱۵) که در آن x_1 بین $[0,10]$ و x_2 مثبت (.Pos) است، داریم،

$$u_7(x) \le \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

و برای رابطه (۸-۱۶) که در آن x_1 بین $[-10,0]$ و x_2 مثبت (.Pos) است، داریم،

$$u_7(x) \ge \frac{-F(x)}{B(x)} = \sigma x_1 + \frac{x_2^2 + \beta x_3^2}{x_1} - x_2(\sigma + \rho)$$

$u_7(x)$ باید طوری تعیین شود که هر دو این روابط برقرار باشند.

$$u_7(x) = -x_2(\sigma + \rho)$$

برای قوانین شماره ۸ و ۹، نیز با استدلالی همانند قانون شماره ۷، نتیجه مشابهی بدست می‌آید.

$$u_9(x) = u_8(x) = u_7(x) = -x_2(\sigma + \rho)$$

گام هفتم

می‌توان اثبات کرد (به عهده دانشجویان) که شرط سوم قضیه ۲-۱ نیز صادق است.

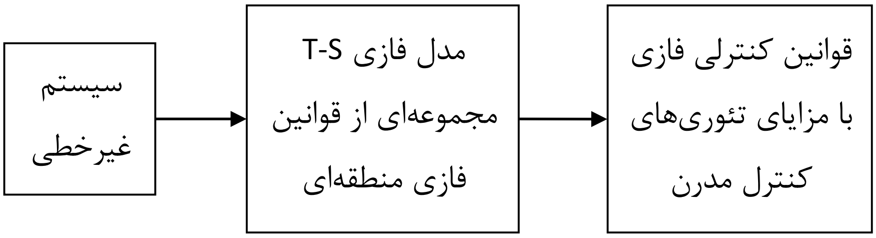
نتایج شبیه سازی اینجا ذکر شود؟؟

فصل ۹– طراحی سیستم‌های کنترل فازی بر اساس مدل فازی تاکاگی‌سوگینو

۹–۱– مقدمه

در این فصل روشی برای طراحی سیستم‌های کنترل فازی ارائه می‌شود، که بر اساس مدل فازی تاکاگی سوگینو پایه‌ریزی شده است. پایداری و طراحی سیستم‌های کنترل فازی غیرخطی مورد مطالعه می‌گیرد. مباحثی مانند پایداری، روش سیستماتیک طراحی، مشخصات رفتاری سیستم طراحی شده، قوام و بهینگی سیستم کنترلی مدنظر قرار می‌گیرند.

با استفاده از مدل فازی تاکاگی سوگینو (مدل T-S) که بر اساس آن عملا سیستم غیرخطی به مدل چندگانه منطقه‌ای خطی تبدیل می‌شود، می‌توان به یک قانون کنترلی دست یافت که از مزایای تئوری‌های کنترلی مدرن و پیشرفته به طور کامل بهره‌مند باشد. پس به طور خلاصه می‌توان مراحل طراحی را چنین نشان داد.



شکل ۹-۱: ؟؟

به طور خلاصه در این فصل به موارد زیر پرداخته می‌شود :

- ✓ روش‌های متنوعی از ابزارهای طراحی و تحلیل سیستم‌های کنترل فازی معرفی می‌شود، که این روش‌ها به مهندسین و پژوهشگران در حل مسائل کنترلی کمک می‌کند.
- ✓ در این فصل جعبه ابزاری برای کنترل سیستم‌ها ارائه می‌شود، که بر مبنای مدل فازی T-S پایه‌ریزی شده است. روش کنترلی، اصلاح‌کننده توزیع موازی نامیده می‌شود، که یک ساختار کنترلی برای مدل‌های فازی است.
- ✓ نشان داده می‌شود، که تحلیل پایداری و مسائل طراحی کنترلی ارائه شده در این فصل به مبحث نامساوی ماتریس خطی می‌انجامد.

۹–۲–مدل فازی تاکاگی سوگینو و اصلاح‌کننده توزیع موازی

در این قسمت نخست مدل فازی تاکاگی سوگینو و سپس اصلاح‌کننده توزیع موازی شرح داده می‌شوند.

۹-۲-۱- مدل فازی تاکاگی سوگینو

مدل فازی ارائه شده به وسیله تاکاگی و سوگینو [؟؟1]، مدلی است که برای بیان و مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی به کار می‌رود. در این روش، سیستم غیرخطی در محدوده ورودی- خروجی به مناطقی تقسیم شده و هر منطقه با یک قاعده یا قانون اگر-آنگاه فازی خطی بیان می‌شود.

مدل مجموعه سیستم غیرخطی با **آمیزه‌ای فازی**[۱] از مدل‌های خطی حاصل می‌گردد. نشان داده می‌شود، که بسیاری از سیستم‌های غیرخطی را می‌توان با مدل فازی T-S بیان کرد. در واقع ثابت می‌شود که مدل فازی T-S تقریب عمومی از سیستم‌های غیرخطی است.

قانون i ام از مدل فازی T-S در سیستم‌های فازی پیوسته زمانی[۲] (CFS) به صورت زیر است،

قانون i ام مدل اگر $Z_1(t)$ ، M_{i1} ، ... ... $Z_p(t)$ ، M_{ip} باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \qquad i = 1,2,3 \dots q, \qquad y(t) = C_i x(t) \tag{۹-۱}$$

در این رابطه M_{ij} یک مجموعه فازی و q تعداد قوانین فازی (تعداد زیر مجموعه‌های خطی) است.

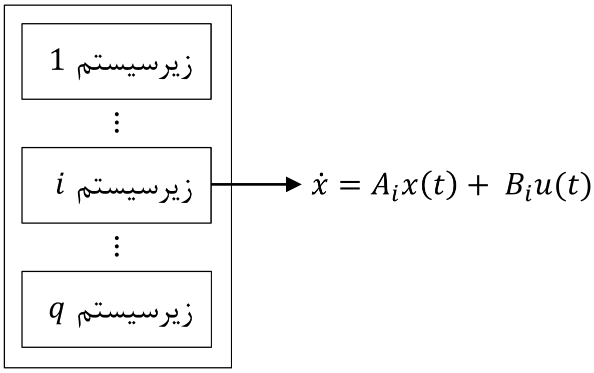
$x(t) \in \mathbb{R}^n$ متغیرهای حالت مدل خطی در قاعده i ام و $U(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار ورودی و $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی است. همچنین $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$ و $C_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ است. متغیرهای $Z_1(t), \dots, Z_p(t)$ متغیرهای معلوم مقدمه قانون فازی هستند. آنها می‌توانند توابعی از متغیرهای حالت، اغتشاشات خارجی یا زمان باشند. این متغیرها را با بردار $Z(t)$ نمایش می‌دهیم، $Z(t) = [z_1(t)\ z_2(t) \dots z_p(t)]$؛ یعنی فرض می‌شود متغیرهای مقدمه قواعد فازی یعنی $Z(t)$ها تابع ورودی $U(t)$ نیستند. این شرط برای این فرض شده که به فرآیند پیچیده غیرفازی‌سازی کنترل‌کننده فازی نیازی نباشد. هرکدام از استنتاج‌های حاصله که به صورت یک معادله خطی $\dot{x} = A_i x(t) + B_i u(t)$ در آمده است را یک **زیر مجموعه**[۳] می‌نامیم. بنابراین سیستم به صورت زیر در آمده است،

برای سیستم‌های فازی گسسته[۴] (DFS)، معادله (۹-۱) به صورت زیر در می‌آید،

قانون i ام مدل اگر $z_1(t)$، M_{i1} و ... و $z_p(t)$، M_{ip} باشد، آنگاه،

$$\begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ \mathrm{y(t) = C_i x(t)} \end{cases}, \quad i = 1,2,\dots,q \tag{۹-۲}$$

[1] Fuzzy Blending
[2] Continuous Fuzzy System
[3] Subsystem
[۴] Discrete Fuzzy Systems



شکل ۹-۲ : ؟؟

مدل‌سازی کل سیستم شامل همگی زیر مجموعه‌ها

برای یک زوج $x(t)$ و $u(t)$، خروجی نهایی سیستم فازی که شامل همه‌ی q زیر مجموعه فازی است، به صورت زیر در می‌آید،

در سیستم پیوسته فازی،

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)} = \sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big) \tag{۹-۳}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)} = \sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big) C_i x(t) \tag{۹-۴}$$

و در سیستم گسسته فازی،

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)} = \sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big) \tag{۹-۵}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)} = \sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big) C_i x(t) \tag{۹-۶}$$

در این معادلات عبارت‌های مختلف برای همه مقادیر t عبارتند از،

$$z(t) = \big[z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_p(t)\big]$$

$$w_i\big(z(t)\big) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}\left(z_j(t)\right)$$

$$w_i\big(z(t)\big) = \frac{w_i\big(z(t)\big)}{\sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big)} \tag{۹-۷}$$

در این عبارات ترم $M_{ij}(z_j(t))$ مقادیر عضویت $z_j(t)$ در مجموعه فازی M_{ij} است.

با توجه به اینکه داریم،

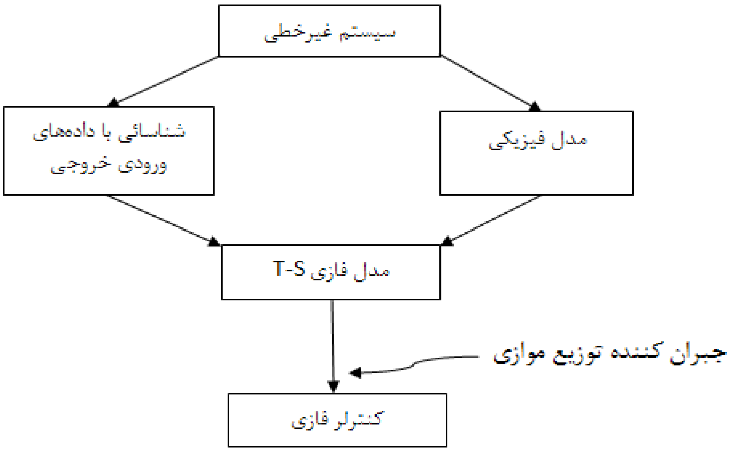
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{q} w_i\big(z(t)\big) > 0 \\ w_i\big(z(t)\big) \geq 0 \end{cases}, \qquad i = 1,2,\dots,q \tag{۸-۹}$$

بنابراین نتیجه می‌شود،

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big) = 1 \\ w_i\big(z(t)\big) \geq 0 \end{cases}, \qquad i = 1,2,\dots,q \tag{۹-۹}$$

۹-۲-۲- طراحی ساختار مدل فازی T-S

شکل ۹-۳ روش طراحی کنترل فازی بر اساس مدل T-S را نشان می‌دهد. برای طراحی کنترل‌کننده فازی در یک سیستم غیرخطی نخست باید مدل T-S برای سیستم یادشده ارائه گردد. در این بخش، چگونگی طراحی ساختار مدل فازی T-S را بیان می‌کنیم.



شکل ۹-۳ : طراحی کنترل‌کننده فازی بر مبنای مدل

به‌طورکلی دو روش برای طراحی ساختار مدل فازی وجود دارد،

۱. شناسایی (مدل‌سازی فازی) با استفاده از داده‌های ورودی - خروجی
۲. استخراج مدل فازی از معادلات غیرخطی سیستم دینامیکی

حجم گسترده‌ای از مقالات علمی در زمینه مدل‌سازی فازی با استفاده از داده‌های ورودی - خروجی تا به‌حال ارائه شده است. این روش عمدتا شامل دو مرحله می‌شود، شناسایی ساختار و شناسایی پارامترها.

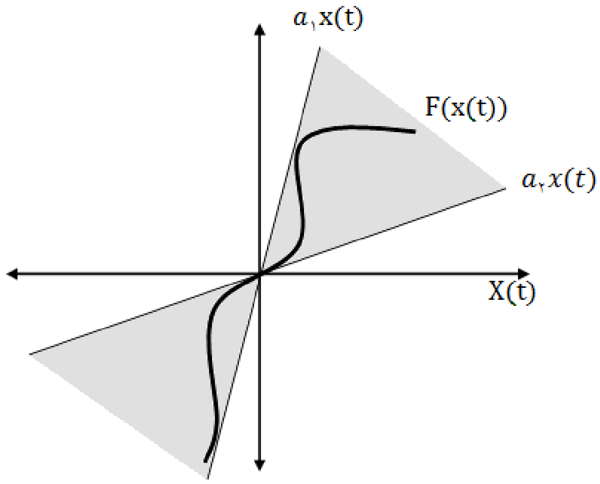
این روش به ویژه برای سیستم‌هایی مناسب است که ارائه آن‌ها با مدل‌های فیزیکی یا تحلیلی غیرممکن یا بسیار سخت باشد.

از سوی دیگر، معمولا در سیستم‌های مکانیکی، مدل‌های دینامیکی غیرخطی را می‌توان با روش‌هایی نظیر لاگرانژ یا زوش اویلرنیوتون استخراج کرد. در چنین مواردی، روش دوم طراحی ساختار مدل فازی یعنی استخراج مدل فازی از معادلات دینامیکی غیرخطی سیستم مناسب‌تر است. در این بخش به تشریح این روش می‌پردازیم. در این روش ایده‌های **غیرخطی ناحیه‌ای**[۱] و **تقریب محلی**[۲] یا ترکیب آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۹-۲-۳- غیرخطی ناحیه‌ای

ایده غیرخطی ناحیه‌ای در ساختار مدل فازی ابتدا در مقاله مرجع [؟؟] [10] ارائه گردید. این روش بر مبنای ایده زیر ارائه شده است. سیستم غیرخطی $\dot{x} = f\big(x(t)\big), f(0) = 0$ را در نظر بگیرید. هدف یافتن محدوده‌ای کلی مانند شکل ۹-۴ است، بطوریکه $f(x)$ همواره در داخل این محدوده قرار گیرد، یعنی داشته باشیم،

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) \in [a_1, a_2]x(t) \qquad (۹-۱۰)$$

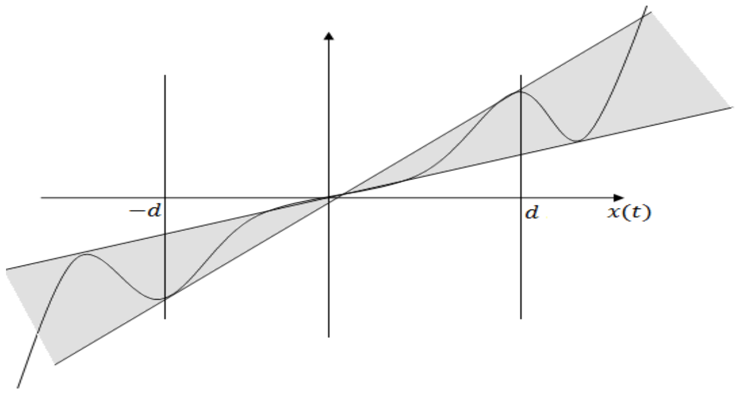


شکل ۹-۴ : غیرخطی ناحیه‌ای فراگیر[۳]

اگر بتوان معادلات غیرخطی سیستم را با غیرخطی ناحیه‌ای فراگیر معادله (۹-۱۰) نشان داد، استخراج مدل فازی دقیق تضمین می‌شود. از سوی دیگر، تعیین غیرخطی ناحیه‌ای فراگیر که برای همه مقادیر $x(t)$ صادق باشد، در بعضی سیستم‌های غیرخطی مقدور نیست. در این موارد باید غیرخطی ناحیه‌ای را نه برای همه xها، بلکه برای یک منطقه و محدوده معین از xها تعریف و بیان کنیم. با توجه به اینکه متغیرها در

[1] Sector Nonlinearity
[2] Local Approximation
[۳] Global Sector Nonlinearity

سیستم‌های فیزیکی همواره محدود هستند، این فرض منطقی است. شکل ۹-۵ یک سیستم غیرخطی ناحیه‌ای منطقه‌ای را نشان می‌دهد که در آن $-d < x(t) < d$ است.



شکل ۹-۵ : غیرخطی ناحیه‌ای منطقه‌ای

مثال ۹-۱ : سیستم غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + x_1(t){x_2}^3(t) \\ -x_2(t) + (3 + x_2(t)){x_1}^3(t) \end{bmatrix} \tag{۹-۱۱}$$

برای سادگی فرض می‌کنیم که

$$x_1\,(t)\epsilon[-1,1], \qquad x_2(t)\epsilon[-1,1]$$

معادله (۹-۱۱) را می‌توان چنین نوشت،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t){x_2}^3(t) \\ (3 + x_2(t)){x_1}^3(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

در این معادله ترم‌های $x_1(t)x_2^3\,(t)$ و $\left(3 + x_2(t)\right){x_1}^3\,(t)$ غیرخطی هستند. برای عبارت‌های غیرخطی تعاریف زیر را در نظر می‌گیریم،

$$z_1(t) = x_1(t){x_2}^3(t)$$
$$z_2(t) = \left(3 + x_2(t)\right)x_1^3(t)$$

بنابراین نتیجه می‌شود،

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

و یا،

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

حال مقادیر بیشینه و کمینه $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را با توجه به شروط $x_1(t)\epsilon[-1,1]$ و $x_2(t)\epsilon[-1,1]$ محاسبه می‌کنیم.

$$\max z_1(t) = 1 \qquad \min z_1(t) = -1$$
$$\max z_2(t) = 4 \qquad \min z_2(t) = 0$$

از مقادیر بیشینه و کمینه، z_1 و z_2 را می‌توان چنین نوشت،

$$z_1(t) = x_1(t)x_2{}^3(t) = M_1\left(z_1(t)\right) \times 1 + M_2\left(z_1(t)\right) \times (-1) \quad (۱۲-۹)$$

$$z_2(t) = \left(3 + x_2(t)\right)x_1{}^3(t) = N_1\left(z_2(t)\right) \times 4 + N_2\left(z_2(t)\right) \times (0) \quad (۱۳-۹)$$

که در آن،

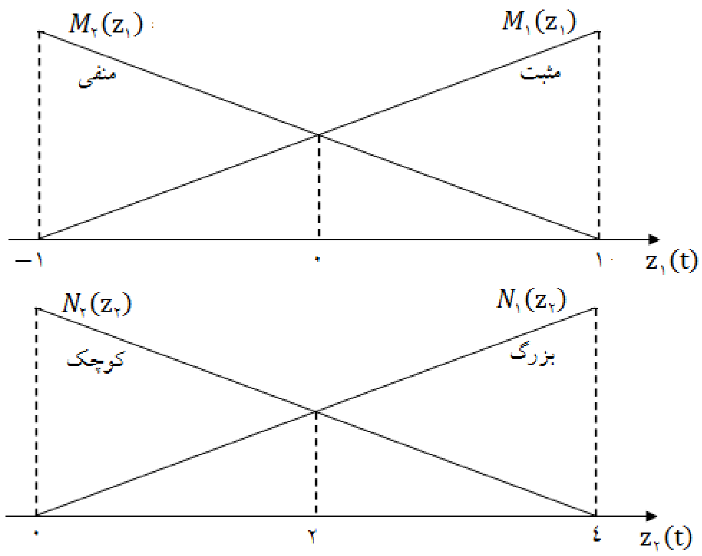
$$M_1\left(z_1(t)\right) + M_2\left(z_1(t)\right) = 1 \quad (۱۴-۹)$$

$$N_1\left(z_2(t)\right) + N_2\left(z_2(t)\right) = 1 \quad (۱۵-۹)$$

بنابراین توابع عضویت، برای نمونه با قرار دادن از معادله (۹-۱۸) در (۹-۱۶) و از (۹-۱۹) در (۹-۱۷) محاسبه می‌شوند.

$$M_1(z_1) = \frac{z_1(t) + 1}{2} \qquad M_2(z_1) = \frac{1 - z_1(t)}{2}$$

$$N_1(z_2) = \frac{z_2(t)}{4} \qquad N_2(z_2) = \frac{4 - z_2(t)}{4}$$



شکل ۹-۶: ؟؟

توابع عضویت را بشرح زیر نام‌گذاری می‌کنیم،

$M_1(z_1(t))$: *Posetive* مثبت $\qquad$ $N_1(z_2) = Big$ بزرگ

$M_2(z_1(t))$: *Negative* منفی $\qquad$ $N_2(z_2) = Small$ کوچک

در این صورت سیستم غیرخطی ؟؟ را با مدل فازی زیر می‌توان بیان کرد،

قاعده ۱ مدل

If $z_1(t)$ is *Posetive* **AND** $z_2(t)$ is Big, **THEN**

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

قاعده ۲ مدل

If $z_1(t)$ is *Posetive* **AND** $z_2(t)$ is $Small$, **THEN**

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

قاعده ۳ مدل

If $z_1(t)$ is $Negative$ **AND** $z_2(t)$ is Big, **THEN**

$$\dot{x}(t) = A_3 x(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

قاعده ۴ مدل

If $z_1(t)$ is *Posetive* **AND** $z_2(t)$ is $Small$, **THEN**

$$\dot{x}(t) = A_4 x(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

غیرفازی‌کننده به صورت زیر در می‌آید،

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{4} h_i\big(z(t)\big) A_i\, x(t)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} h_1\big(z(t)\big) &= M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)) \\ h_2\big(z(t)\big) &= M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)) \\ h_3\big(z(t)\big) &= M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)) \\ h_4\big(z(t)\big) &= M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)) \end{aligned}$$

این مدل فازی نشان‌دهنده سیستم غیرخطی در ناحیه $[-1,1] \times [-1,1]$ در فضای $x_1 \cdot x_2$ به طور دقیق است.

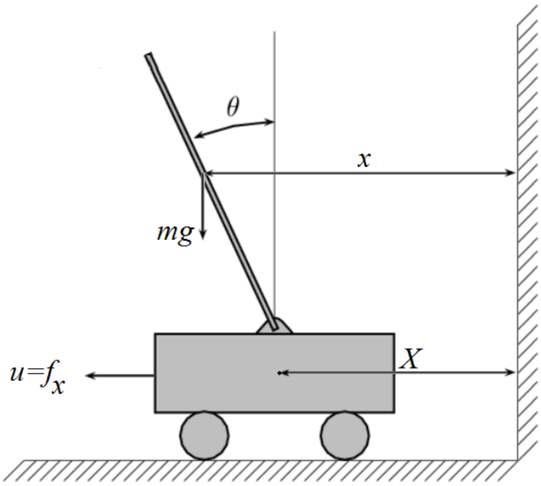
مثال ۹-۲ : معادله حرکت یک پاندول معکوس به صورت زیر داده شده است [؟؟] [21].

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g\, sin\big(x_1(t)\big) - \dfrac{a\, m\, l\, {x_2}^2(t) sin(2x_1(t))}{2} - a\, cos\big(x_1(t)\big)\, u(t)}{\dfrac{4\, l}{3} - a\, m\, l\, cos^2(x_1(t))} \qquad (۱۶\text{-}۹)$$

$$a = \frac{1}{M+m}$$

در این رابطه $x_1(t)$ زاویه پاندول از حالت عمودی و $x_2(t)$ سرعت زاویه‌ای پاندول است. شتاب ثقل، g نشان‌دهنده $g = 9.8\frac{m}{sec^2}$ و m جرم پاندول است. کمیت M جرم متحرک در صفحه افق است و u نیروی اعمال شده به جرم متحرک است.



شکل ۹-۷ : ؟؟

معادله (۹-۲۰) را می‌توان چنین نوشت،

$$\dot{x}_1(\mathrm{t}) = x_2(\mathrm{t})$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{\frac{4l}{3} - a\,m\,l\cos^2\big(x_1(t)\big)}\Big(g\sin\big(x_1(t)\big) - a\,m\,l x_2{}^2(t)\sin\big(2x_1(t)\big)/2 - a\cos\big(x_1(t)\big)\,u(t)\Big) \qquad (۹-۱۷)$$

در اینجا $z_1(t)$ تا $z_4(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$z_1(t) = \frac{1}{\frac{4l}{3} - a\,m\,l\cos^2\big(x_1(t)\big)}$$

$$z_2(t) = \sin\big(x_1(t)\big)$$

$$z_3(t) = x_2(t)\sin\big(2x_1(t)\big)$$

$$z_4(t) = \cos\big(x_1(t)\big)$$

که در آن $x_1(t)\epsilon(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ و $x_2(t)\epsilon[-\alpha,\alpha]$.

توجه شود که اگر $x_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ شود سیستم کنترل‌پذیر نیست. بنابراین برای اطمینان از کنترل‌پذیری سیستم و مدل فازی حاصله فرض می‌کنیم $x_1(t)\epsilon[-88°, 88°]$.

معادله (۹-۱۳) را با تعریف بالا می‌نویسیم.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = z_1(t)(g\, z_2(t) - \frac{a\, m\, l}{2} z_3(t)\, x_2(t) - a\, z_4(t) u(t))$$

همانطورکه در مثال ۹-۱ نشان داده شده است، عبارت $z_1(t) - z_2(t)$ را با نمایش مدل فازی T-S بیان می‌کنیم. با توجه به عبارت‌های زیر،

$$\max_{x_1(t)} z_1(t) = \frac{1}{\frac{4l}{3} - a\, m\, l\, \beta^2} \equiv q_1, \qquad \beta = cos(88°)$$

$$\max_{x_2(t)} z_2(t) = \frac{1}{\frac{4l}{3} - a\, m\, l} \equiv q_2$$

با این مقادیر نتیجه می‌شود،

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^{2} E_i(z_1(t))\, q_1 \qquad (۹-۱۸)$$

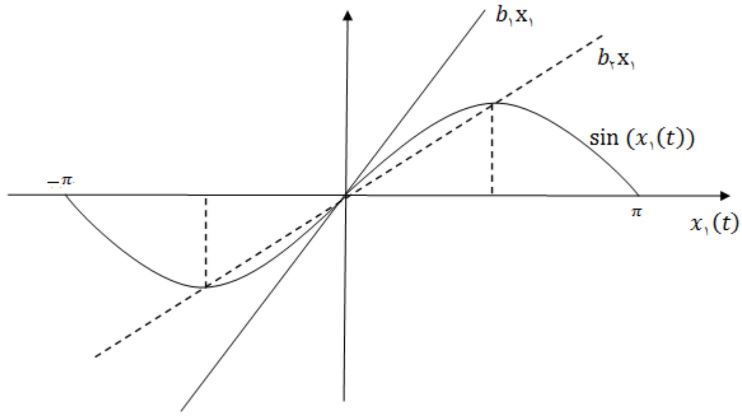
که در آن،

$$E_1\big(z_1(t)\big) = \frac{z_1(t) - q_2}{q_1 - q_2}, \qquad E_2\big(z_1(t)\big) = \frac{q_1 - z_1(t)}{q_1 - q_2}$$

توابع عضویت $E_1\big(z_1(t)\big)$ و $E_2\big(z_1(t)\big)$ از خاصیت،

$$E_1\big(z_1(t)\big) + E_2\big(z_1(t)\big) = 1$$

بدست آمده‌اند. شکل ۹-۸، کمیت $z_2(t) = sin(x_1(t))$ و منطقه داخلی آن را به ازای $x_1(t) \epsilon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ نشان می‌دهد. از این شکل می‌توان منطقه $[b_1, b_2]$ که شامل دو خط $b_1 \mathrm{x}_1$ و $b_2 \mathrm{x}_1$ می‌شود را تعیین کرد. در این شکل شیب‌های $b_1 = 1$ و $b_2 = \frac{2}{\pi}$ را داریم.



شکل ۹-۸ : $sin(x_1(t))$ و مناطق آن

بنابراین می‌توان $sin(x_1(t))$ را چنین نوشت،

$$z_2(t) = sin\big(x_1(t)\big) = \left(\sum_{i=1}^{2} M_i\big(z_2(t)\big)\, b_i\right) x_1(t) \qquad (۹-۱۹)$$

توابع عضویت $M_i(z_2(t))$ و $M_i(z_2(t))$ را می‌توان با توجه به اینکه مجموع آن‌ها مساوی یک است، محاسبه کرد.

$$M_1\big(z_2(t)\big)=\begin{cases}\dfrac{z_2(t)-\left(\frac{2}{\pi}\right)sin^{-1}(z_2(t))}{\left(1-\frac{2}{\pi}\right)sin^{-1}(z_2(t))} & z_2(t)\neq 0\\ 1 & z_2(t)=0\end{cases}$$

$$M_2\big(z_2(t)\big)=\begin{cases}\dfrac{sin^{-1}\big(z_2(t)\big)-z_2(t)}{\left(1-\frac{2}{\pi}\right)sin^{-1}(z_2(t))} & z_2(t)\neq 0\\ 0 & z_2(t)=0\end{cases}$$

به همین ترتیب داریم،

$$z_3(t)=x_2(t)\sin(2x_1(t))$$

زیرا،

$$max_{x_1(t),x_2(t)}\, z_3(t)=\alpha\equiv c_1$$
$$min_{x_1(t),x_2(t)}\, z_3(t)=-\,\alpha\equiv c_2$$

مشابه آنچه برای تعیین z_1 انجام شد، می‌توان نوشت،

$$z_3(t)=x_2(t)\,sin\big(2x_1(t)\big)=\sum_{i=1}^{2}N_i(z_3(t))\,c_i \qquad (۹-۲۰)$$

که در آن،

$$N_1\big(z_3(t)\big)=\frac{z_3(t)-c_2}{c_1-c_2},\qquad N_2\big(z_3(t)\big)=\frac{c_1-z_3(t)}{c_1-c_2}$$

همین روش را می‌توان برای $z_4(t)$ انجام داد. با توجه به اینکه داریم،

$$\max_{x_1(t)} z_4(t)=1\equiv d_1$$
$$\min_{x_1(t)} z_4(t)=\beta\equiv d_1$$

نتیجه می‌شود،

$$z_4(t)=cos\big(x_1(t)\big)=\sum_{i=1}^{2}S_i(z_4(t))\,d_i \qquad (۹-۲۱)$$

که در آن،

$$S_1\big(z_4(t)\big)=\frac{z_4(t)-d_2}{d_1-d_2},\qquad S_2\big(z_4(t)\big)=\frac{d_1-z_4(t)}{d_1-d_2}$$

از روابط (۹-۱۸) تا (۹-۲۱) می‌توان مدل فازی تاکاگی‌سوگینو را برای مدل پاندول معکوس مورد نظر در این مسئله به شرح زیر ارائه داد،

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} E_i\big(z_1(t)\big)M_j\big(z_2(t)\big)N_k\big(z_3(t)\big)S_l\big(z_4(t)\big)$$
$$\times [\begin{bmatrix}0 & 1\\ g\ q_i\ b_i & -\dfrac{a\ m\ l}{2} q_i c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -aq_i d_l\end{bmatrix} u(t)]$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} E_i\big(z_1(t)\big)M_j\big(z_2(t)\big)N_k\big(z_3(t)\big)S_l\big(z_4(t)\big) \quad (۹-۲۲)$$
$$\times \left[A_{ijkl}\, x(t) + B_{ijkl} u(t)\right]$$

جمع‌های معادله (۹-۲۲) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد،

$$\dot{x}(t) = \sum_{p=1}^{16} h_p\big(z(t)\big)\{A_p^*\, x(t) + B_p^* u(t)\} \quad (۹-۲۳)$$

که در آن،

$$p = l + 2(k-1) + 4(j-1) + 8(i-1)$$
$$h_p\big(z(t)\big) = E_i\big(z_1(t)\big)M_j\big(z_2(t)\big)N_k\big(z_3(t)\big)S_l\big(z_4(t)\big)$$
$$A_p^* = A_{ijkl}, \qquad B_p^* = B_{ijkl}$$

معادله (۹-۲۳) بیان‌کننده آن است، که مدل فازی دارای شانزده قانون به شرح زیر است،

قانون ۱ مدل

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_1^* X(t) + B_1^* U(t)$$

قانون مدل ۲

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_2^* X(t) + B_2^* U(t)$$

قانون مدل ۳

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_3^* X(t) + B_3^* U(t)$$

قانون مدل ۴

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_4^* X(t) + B_4^* U(t)$$

قانون مدل ۵

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_5^* X(t) + B_5^* U(t)$$

قانون مدل ۶

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_6^* X(t) + B_6^* U(t)$$

قانون مدل ۷

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_7^* X(t) + B_7^* U(t)$$

قانون مدل ۸

اگر $Z_1(t)$ "مثبت" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_8^* X(t) + B_8^* U(t)$$

قانون مدل ۹

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_9^* X(t) + B_9^* U(t)$$

قانون مدل ۱۰

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_{10}^* X(t) + B_{10}^* U(t)$$

قانون مدل ۱۱

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_{11}^* X(t) + B_{11}^* U(t)$$

قانون مدل ۱۲

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "صفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،
$$\dot{x}(t) = A_{12}^* X(t) + B_{12}^* U(t)$$

قانون مدل ۱۳

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_{13}^{*}X(t) + B_{13}^{*}U(t)$$

قانون مدل ۱۴

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "مثبت" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_{14}^{*}X(t) + B_{14}^{*}U(t)$$

قانون مدل ۱۵

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "بزرگ" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_{15}^{*}X(t) + B_{15}^{*}U(t)$$

قانون مدل ۱۶

اگر $Z_1(t)$ "منفی" و $Z_2(t)$ "غیرصفر" و $Z_3(t)$ "منفی" و $Z_4(t)$ "کوچک" باشد، آنگاه،

$$\dot{x}(t) = A_{16}^{*}X(t) + B_{16}^{*}U(t)$$

در روابط ارائه شده برای قوانین یک تا شانزده مدل، $Z_1(t)$ تا $Z_4(t)$ متغیرهای مقدمه قوانین فازی هستند و داریم،

$$A_1^* = A_{1111} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_1^* = B_{1111} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^* = A_{1112} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_2^* = B_{1112} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_3^* = A_{1121} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_3^* = B_{1121} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^* = A_{1122} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_4^* = B_{1122} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_5^* = A_{1211} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_5^* = B_{1211} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_6^* = A_{1212} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_6^* = B_{1212} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_7^* = A_{1221} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_7^* = B_{1221} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_8^* = A_{1222} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_1\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_1\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_8^* = B_{1222} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_1\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_9^* = A_{2111} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_9^* = B_{2111} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{10}^* = A_{2112} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_{10}^* = B_{2112} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^* = A_{2121} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_{11}^* = B_{2121} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^* = A_{2122} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_1 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_{12}^* = B_{2122} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{13}^* = A_{2211} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_{13}^* = B_{2211} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{14}^* = A_{2212} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_1 \end{bmatrix}, \qquad B_{14}^* = B_{2212} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{15}^* = A_{2221} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_{15}^* = B_{2221} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{16}^* = A_{2222} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g\,q_2\,b_2 & -\dfrac{a\,m\,l}{2}\,q_2\,c_2 \end{bmatrix}, \qquad B_{16}^* = B_{2222} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\,q_2\,d_2 \end{bmatrix}$$

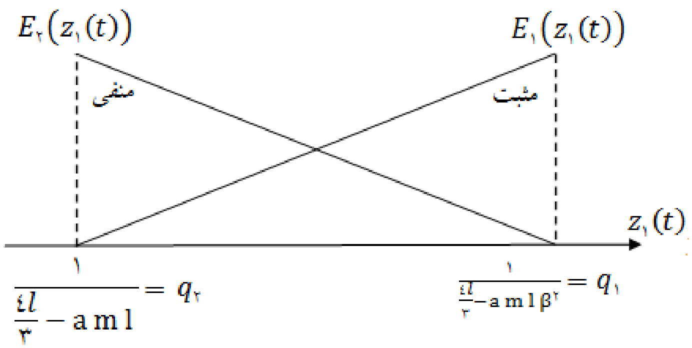
شکل‌های شکل ۹-۹ تا شکل ۹-۱۲ توابع عضویت را نشان می‌دهد، که عبارت هستند از،

$$E_1\big(z_1(t)\big) = \frac{z_1(t) - q_2}{q_1 - q_2}, \qquad E_2\big(z_1(t)\big) = \frac{q_1 - z_1(t)}{q_1 - q_2}$$

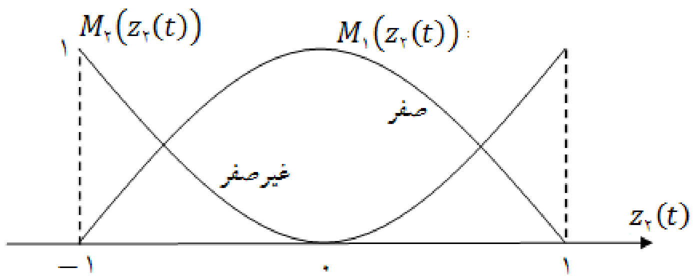
$$M_1\big(z_2(t)\big) = \frac{\sin(x_1(t)) - \left(\frac{2}{\pi}\right) z_2(t)}{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) z_2(t)}, \qquad M_2\big(z_2(t)\big) = \frac{x_1(t) - z_2(t)}{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) z_2(t)}$$

$$N_1\big(z_3(t)\big) = \frac{z_3(t) - c_2}{c_1 - c_2}, \qquad N_2\big(z_3(t)\big) = \frac{c_1 - z_3(t)}{c_1 - c_2}$$

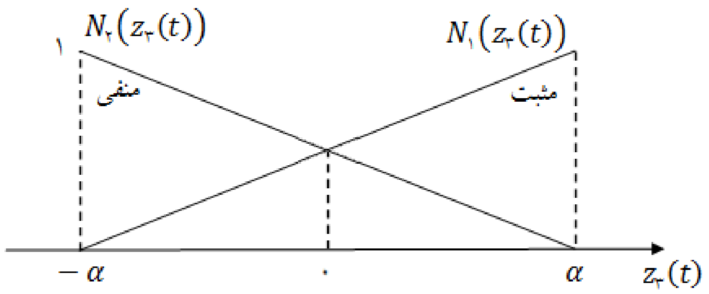
$$S_1\big(z_4(t)\big) = \frac{z_4(t) - d_2}{d_1 - d_2}, \qquad S_2\big(z_4(t)\big) = \frac{d_1 - z_4(t)}{d_1 - d_2}$$



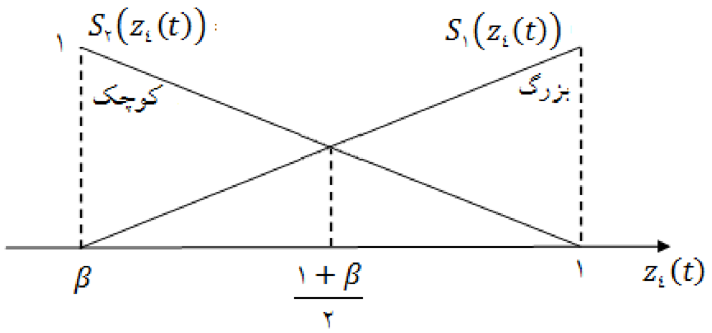
شکل ۹-۹ : توابع عضویت $E_1\big(z_1(t)\big)$ و $E_2\big(z_1(t)\big)$



شکل ۹-۱۰ : توابع عضویت $M_1(z_2(t))$ و $M_2(z_2(t))$



شکل ۹-۱۱ : توابع عضویت $N_1(z_3(t))$ و $N_2(z_3(t))$



شکل ۹-۱۲ : توابع عضویت $S_1(z_4(t))$ و $S_2(z_4(t))$

نکته ۹-۱ . پیش از اعمال روش غیرخطی ناحیه‌ای، بهتر است امکان ساده‌سازی مدل غیرخطی اصلی مورد بررسی قرار گیرد. این مرحله، به ویژه در موارد عملی و کاربردی مهم است؛ زیرا، همواره باعث کاهش تعداد قوانین مدل می‌شود، که خود باعث کاهش حجم تلاش برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی می‌گردد.

۹-۲-۴- تقریب محلی در فضای قسمت‌بندی شده فازی

روش دیگری برای بدست آوردن مدل فازی T-S روشی است با عنوان **تقریب محلی در فضای قسمت‌بندی شده فازی** شناخته می‌شود. اساس کار روش آن است که عبارت‌های غیرخطی را مدیرانه با عبارت مناسب خطی تقریب بزنیم. این روش سبب می‌شود تا تعداد قوانین مدل کاهش یابد. برای نمونه

مدل فازی پاندول معکوس در مثال ۹-۲ دارای شانزده قانون است. از سوی دیگر در مثال ۹- نشان خواهیم داد که همان سیستم را با روش تقریب محلی در فضای قسمت‌بندی شده فازی، می‌توان با مدل فازی که تنها دارای دو قانون است، نمایش داد. باید توجه داشت که تعداد قوانین مدل مستقیما به پیچیدگی تحلیل و طراحی شرایط LMI بستگی دارد.

این امر بدان جهت است که تعداد قوانین مجموعه کامل سیستم کنترل فیدبک به طور اصولی ترکیبی از تعداد قوانین مدل و تعداد قوانین کنترل فازی است.

نکته ۹-۲ . گرچه روش تقریب محلی در فضای قسمت‌بندی شده به کاهش تعداد قوانین مدل فازی منجر می‌گردد، ولی ممکن است طراحی قوانین کنترلی بر مبنای چنین مدل فازی تقریبی نتواند پایداری سیستم را تضمین کند. یکی از روش‌هایی که برای حل این مشکل وجود دارد، آن است که کنترل‌کننده طراحی شده **مقاوم** باشد. چنین مواردی در قسمت پنجم؟؟ این فصل بررسی خواهد شد.

مثال ۹-۳ : کاربرد روش تقریبی محلی در فضای قسمت‌بندی شده فازی برای مثال پاندول معکوس.

در مثال پاندول معکوس، مدل فازی طراحی شده دارای شانزده قانون است. می‌خواهیم با استفاده از روش تقریب محلی در فضای قسمت‌بندی شده فازی، این سیستم را با دو قانون تقریب بزنیم. بدیهی است، مدل بدست آمده تنها تقریبی از سیستم اصلی است. با این وجود، در همین قسمت نشان خواهیم داد یک کنترل‌کننده فازی که بر مبنای چنین مدل تقریبی و ساده شده‌ای طراحی می‌شود، برای سیستم غیرخطی اصلی نیز پاسخ مناسب می‌دهد.

وقتی نزدیک $x_1(t)$ صفر است، معادلات حالت پاندول معکوس (معادلات (۹-۱۶)) چنین می‌شود،

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (۹\text{-}۲۴)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{gX_1(t) - a\,U(t)}{\frac{4l}{3} - aml} \qquad (۹\text{-}۲۵)$$

وقتی $x_1(t)$ نزدیک $\pm\frac{\pi}{2}$ است، معادلات غیرخطی به صورت زیر در می‌آید،

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (۹\text{-}۲۶)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{2gX_1(t)/\pi - a\,\beta U(t)}{\frac{4l}{3} - aml\beta^2} \qquad (۹\text{-}۲۷)$$

که در آن $\cos\beta = 88°$

توجه شود که معادلات (۹-۲۴) تا (۹-۲۷) اکنون خطی شده‌اند. حال براساس این مدل تقریبی خطی شده، مدل فازی T-S را به دست می‌آوریم.

قانون ۱ مدل

اگر $x_1(t)$ نزدیک صفر است، آنگاه $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$.

قانون ۲ مدل

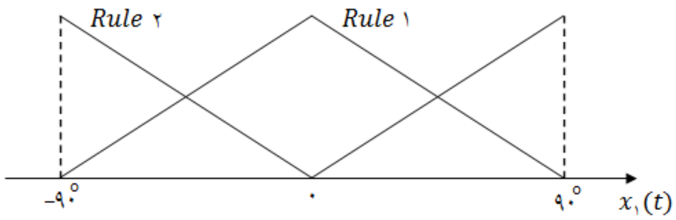
اگر $x_1(t)$ حدود $\pm\frac{\pi}{2}$ $(|x_1| < \frac{\pi}{2})$ است، آنگاه $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$.

در این دو قانون A_1، A_2، B_1 و B_2 عبارتند از،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{\frac{4l}{3} - a\,m\,l} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a}{\frac{4l}{3} - a\,m\,l} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{\pi(\frac{4l}{3} - a\,m\,l\,\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a\,\beta}{\frac{4l}{3} - a\,m\,l\,\beta^2} \end{bmatrix}, \qquad \beta = cos\,88°$$

توابع عضویت برای قوانین ۱ و ۲ بالا در شکل ۹-۱۳ زیر تعریف و نشان داده شده است.



شکل ۹-۱۳ : توابع عضویت مدل فازی پاندول معکوس با دو قانون

نکته ۹-۳ . در مثال ۹- توابع عضویت نوع مثلثی استفاده شده است. با توجه به اینکه مدل فازی اصولا مدل تقریبی است، پس می‌توان از توابع عضویت ساده‌ای مانند تابع عضویت مثلثی بهره گرفت. از سوی دیگر در مدل فازی مثال ۹-۲، توابع عضویت به نحوی تعیین شده‌اند که دقیقا دینامیک غیرخطی را به نمایش بگذارند.

۹-۲-۵- جبرانگر توزیع موازی

تاریخچه

روشی که در بحث کنترل فازی، **جبرانگر توزیع موازی**[1] (PDC) نامیده می‌شود، با مقاله‌ای از Kang و Sugeno که در سال ۱۹۸۶ به چاپ رسید [16] [؟؟]، آغاز می‌گردد. در آن مقاله روشی بر مبنای مدل برای کنترل فازی پیشنهاد شده بود. اما، به پایداری سیستم کنترلی اشاره نشده بود. در سال ۱۹۹۲ و در مقاله [2] [؟؟] از Tanako و Sugeno روش گفته شده بهبود یافت و پایداری نیز مطرح شد. سپس در مقاله [؟؟] [14]، این روش، جبران‌کننده توزیع موازی نام گرفت.

روش جبران‌گر توزیع موازی، ارائه‌کننده راهی برای طراحی کنترل‌کننده‌ای فازی، برای یک مدل فازی T-S است. باید توجه داشت که بسیاری از سیستم‌های واقعی، مانند سیستم‌های مکانیکی و سیستم‌های آشوبناک[2]، قابلیت نمایش با مدل فازی T-S را دارند.

در روش PDC هر قانون کنترلی بر مبنای قانون مربوطه در مدل فازی T-S طراحی می‌شود. کنترل‌کننده فازی طراحی شده، از نظر مقدمه قانون، دقیقا همان مقدمه قانون نظیر در مدل فازی را مورد استفاده قرار می‌دهد. به عبارت دیگر، کنترل‌کننده فازی و مدل فازی T-S دارای مقدمه قانون یکسان هستند. برای مدل‌های فازی (۹-۱) و (۹-۲)، کنترل‌کننده فازی PDC به صورت زیر طراحی می‌شود.

قانون i کنترلی

اگر $Z_1(t)$ ، M_{i1} و ... و $Z_p(t)$ ، M_{ip} باشد، آنگاه،

$$U(t) = -F_i x(t), \qquad i = 1,2, \dots q$$

قوانین کنترل فازی دارای قانون کنترل خطی (در اینجا کنترل فیدبک متغیرهای حالت) در قسمت نتیجه قانون است. البته به جای فیدبک متغیرهای حالت می‌توان از سایر قوانین کنترلی مانند فیدبک خروجی و کنترل دینامیکی فیدبک خروجی نیز استفاده نمود. در مورد روش کنترل دینامیکی فیدبک خروجی بعدا بحث خواهیم کرد.

می‌توان مشابه معادلات (۹-۳) و (۹-۴)،کنترل‌کننده فازی کل سیستم را به صورت زیر نوشت،

$$U(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{q} W_i\big(z(t)\big)\, F_i\, x(t)}{\sum_{i=1}^{q} W_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big)\, F_i x(t) \qquad (۹-۲۸)$$

[1] Parallel Distributed Compensation
[2] Chaotic System

هدف از طراحی کنترل‌کننده فازی آن است که بهره‌های فیدبک محلی یعنی F_iها را در قسمت نتیجه قانون کنترل‌کننده فازی بدست آوریم. با روش PDC ما روشی ساده و طبیعی را برای کنترل سیستم‌های کنترل غیرخطی در اختیار داریم.

نکته ۹-۴ . گرچه کنترل‌کننده فازی معادله (۹-۲۸) با استفاده از ساختار ناحیه‌ای بدست آمده است، ولی بهره فیدبک F_i باید برای شرایط عمومی سیستم دینامیکی محاسبه شوند. این امر بدان سبب لازم است که پایداری کل سیستم غیرخطی تضمین شود. یک مثال جالب در قسمت ؟؟ ۸-۴ ارائه خواهد شد.

مثال ۹-۴ : اگر سیستمی که باید کنترل شود، با مدل فازی داده شده در مثال ۹-۱ به نمایش گذاشته شده باشد، آنگاه با روش PDC، قانون کنترلی زیر را می‌توان ارائه داد،

اگر $x(t)$، M_{i1} و ... و $x(t-n+1)$، M_{in} باشد، آنگاه،

$$U(t) = -F_i x(t), \qquad i = 1,2,\dots,q$$

۹-۲-۶- یک نمونه جالب

در این بخش نتایج بدست آمده را برای سیستم گسسته زمانی ارائه می‌کنیم. این نتایج با تغییرات جزئی برای سیستم‌های پیوسته نیز قابل استفاده هستند.

سیستم گسسته مدار باز (۹-۵) را دوباره می‌نویسیم،

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{q} h_i\left(z(t)\right) A_i x(t) \tag{۹-۲۹}$$

یک شرط کافی پایداری که توسط تاناکا و سوگینو [؟؟] [1,2] استخراج شده و طبق آن پایداری سیستم (۹-۲۹) تضمین می‌شود، در ادامه و در قالب قضیه ۹-۱ ارائه می‌شود.

قضیه ۹-۱ : نقطه تعادل یک سیستم فازی به صورت (۹-۲۹) در همه نقاط پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک، P وجود داشته باشد به‌طوری که،

$$A_i^t P A_i - P < 0, \qquad i = 1,2,\dots,q \tag{۹-۳۰}$$

یعنی یک P مشترک باید برای همه زیرمجموعه‌ها وجود داشته باشد.

به ازای $q = 1$، این قضیه به قضیه پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های گسسته زمانی خطی منجر می‌گردد.

شرط پایداری در قضیه ۹-۱ را می‌توان با استفاده از فرم مربعی تابع لیاپانوف زیر استخراج کرد.

$$V\left(x(t)\right) = x(t)^T P\, x(t)$$

اگر یک $P > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $V(x(t))$، پایداری سیستم (۹-۲۹) را ثابت کند، در این صورت سیستم (۹-۲۹) را **پایدار مربعی** و $V(x(t))$ را **تابع مربعی لیاپانوف** نامند. قضیه ۹-۱، یک شرط کافی پایداری سیستم را ارائه می‌کند.

برای بررسی پایداری سیستم (۹-۲۹)، مشکل، یافتن یک P مشترک که به ازای آن همه زیر مجموعه‌ها پایدار باشند، همواره مطرح بوده است. در بیشتر مواقع روش سعی و خطا برای تعیین یک P مشترک به کار می‌رود [؟؟] [23,2].در مرجع [؟؟] [13] روشی ارائه شده است که بر طبق آن می‌توان P مشترک را برای سیستم‌های رسته دو، یعنی جایی که تعداد متغیرها $n = 2$ است، بدست آورد. در مراجع [؟؟] [14,15,24] نشان داده شده است که، مساله تعیین P مشترک به کمک LMI و با روش‌های بهینه‌سازی قابل حل است.

باید توجه داشت که (همان طور که خواهیم دید) شرط پایداری در قضیه ۹-۱، در LMI بیان شده است. برای بررسی پایداری یا باید یک p مشترک پیدا کنیم، یا نشان دهیم که چنین P وجود ندارد. این یک مسئله LMI است. این مورد را در قسمت ؟؟ ۸-۲-۸ نشان خواهیم داد. پرسش مهمی که مطرح می‌شود آن است که در سیستم (۹-۲۹)، اگر همه زیر سیستم‌ها پایدار باشند، یعنی همه A_iها پایدار باشند، آیا سیستم کلی (۹-۲۹) پایدار است؟ پاسخ در حالت کلی **منفی** است. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۹-۵ : سیستم فازی زیر را در نظر بگیرید که در آن $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$، $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است.

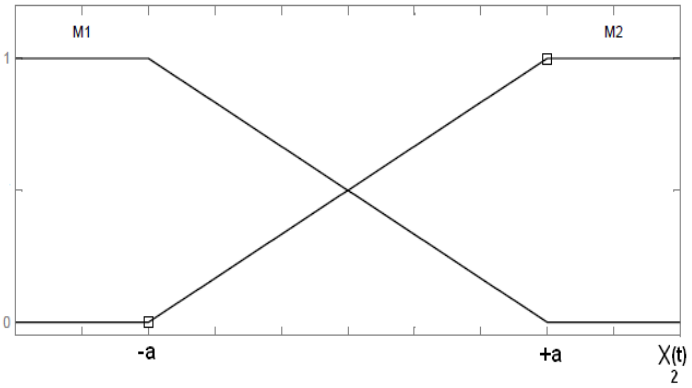
قانون ۱

اگر $x_2(t)$، M_1 است، آنگاه $x(t+1) = A_1 x(t)$

قانون ۲

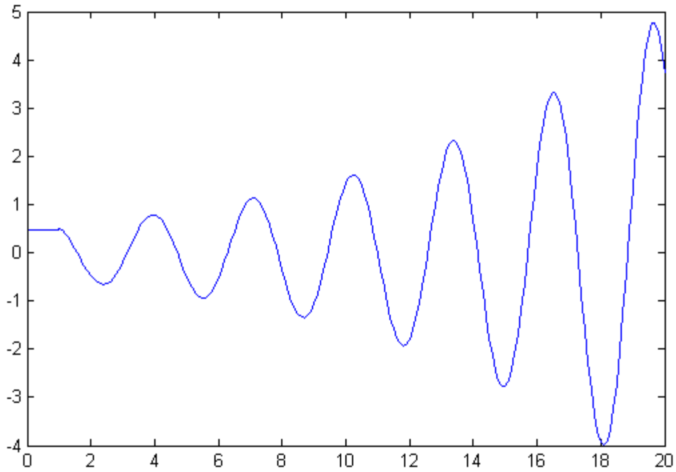
اگر $x_2(t)$، M_2 است، آنگاه $x(t+1) = A_2 x(t)$

توابع عضویت M_1 و M_2 در شکل زیر نمایش داده شده اند.



شکل ۹-۱۴ : توابع عضویت M_1 و M_2 در مثال ۹-۵

توجه شود که A_1 و A_2 هر دو پایدار هستند (مقادیر ویژه داخل دایره به شعاع یک قرار دارند). بنابراین زیرسیستم‌های خطی پایدار هستند. با وجود این، به ازای بعضی شرایط اولیه، سیستم فازی **ناپایدار** می‌شود. برای نمونه به ازای $a = 1$ و $x = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$ عکس‌العمل $x_1(t)$ در شکل (۸-۱۳) رسم شده است.

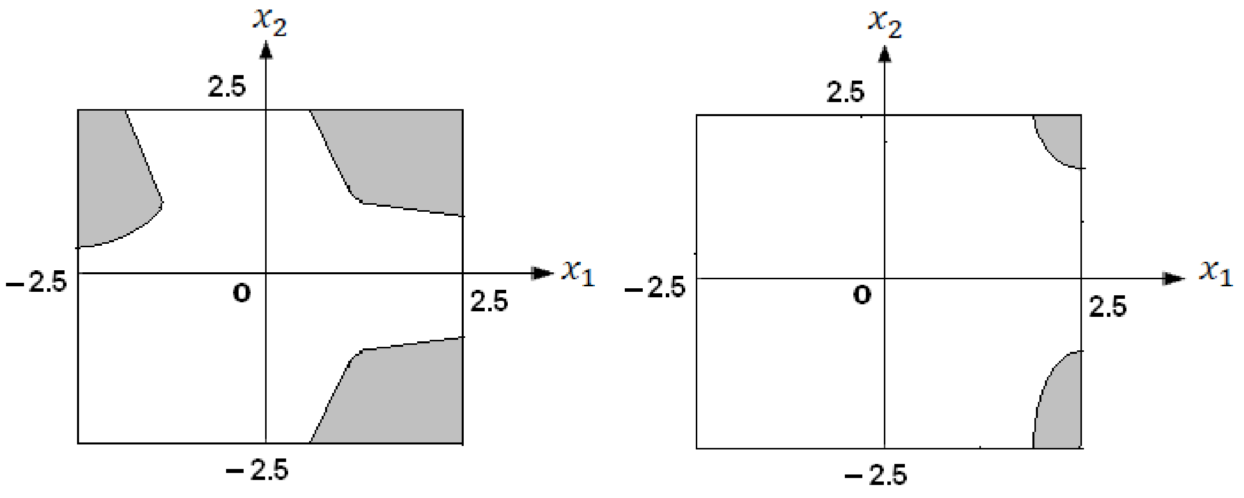


شکل ۹-۱۵ : عکس العمل $x_1(t)$ در مثال ۹-۵ به ازای $a = 1$

باید توجه داشت که با خطی‌سازی این سیستم فازی در اطراف $x = 0$ سیستم پایدار است؛ یعنی سیستم فازی به صورت ناحیه‌ای پایدار است. از سوی دیگر، علیرغم پایداری A_1 و A_2 سیستم کلی الزاما پایدار نیست. به عبارت دیگر، برای این سیستم، یک P مشترک که مثبت معین باشد، وجود ندارد؛ زیرا، سیستم فازی ناپایدار است. لازم به توضیح است که عدم وجود یک P مثبت معین مشترک را می‌توان به صورت تحلیلی ثابت کرد (به عهده خواهنده). همین نتیجه را می‌توان با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی که LMI را شامل می‌شود نیز استنتاج کرد.

پرسشی که در اینجا مطرح می‌شود آن است که، برای چه مقادیری از شرایط اولیه این سیستم فازی پایدار است؟ برای یافتن پاسخ باید منطقه جذب مبدأ مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد. در این سیستم

فازی منطقه جذب مبدأ و در نتیجه پایداری سیتم بستگی به a دارد. شکل ۹-۱۶ الف، منطقه جذب را به ازای $a = 1$ نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱۶ : منطقه جذب مثال ۹-۵ برای مقادیر مختلف a

مناطق سفید شکل ۹-۱۶ منطقه جذب را نشان می‌دهد و مناطق تیره مناطق ناپایدار را مشخص می‌کند.

تمرین ۱ : منطقه جذب را برای مثال ۹-۵ به ازای $a = 0.25$، $a = 0.5$، $a = 0.75$ و $a = 5$ محاسبه و شکل‌هایی مانند شکل ۹-۱۶ رسم کنید.

از مقایسه شکل ۹-۱۶ (الف) و (ب) بالا دیده می‌شود که با بزرگ شدن a منطقه جذب که با رنگ سفید مشخص شده بزرگ‌تر می‌شود. با انجام تمرین ۱ خواهید دید که با کوچک‌تر شدن a از مقدار 1 منطقه جذب کوچک‌تر می‌شود و پایداری سیستم کاهش می‌یابد. چون a در توابع عضویت شکل ۹-۱۴، شکل توابع عضویت را مشخص می‌کند، پس در این سیستم می‌توان گفت که منطقه جذب به توابع عضویت بستگی دارد.

اگر $a \to \infty$ میل کند، توابع عضویت چنین می‌شود،

$$x(t+1) = \frac{A_1 + A_2}{2} x(t)$$

این سیستم خطی، در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است.

در این سیستم وقتی a افزایش می‌یابد، سیستم فازی‌تر شده و وقتی a کوچک‌تر می‌گردد، سیستم صریح‌تر خواهد بود. از طرفی چون با افزایش a سیتم پایدارتر می‌شود، پس فازی‌تر شدن مترادف با افزایش پایدای و صریح‌تر شدن مترادف با ناپایداری است.

۹-۲-۷- مبدا روش طراحی بر مبنای LMI

در این قسمت مبدا روش طراحی کنترلی که هسته اصلی این فصل است، یعنی روش طراحی LMI بحث می‌شود. هدف در این قسمت روشن ساختن ایده تحلیل پایداری [؟؟] [24] و طراحی کنترل‌کننده فازی پایدار از طریق LMI است. جزئیات در ؟؟ قسمت ۳ ارائه خواهد شد.

طراحی کنترل‌کننده متغیرهای حالت از روش گام به گام

طبق رابطه (۹-۲۸) کنترل‌کننده فازی PDC عبارت است از،

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big)F_i\, x(t) \tag{۹-۳۱}$$

توجه شود که کنترل‌کننده (۹-۳۱) به‌طورکلی یک کنترل‌کننده خطی است.

با جایگزینی از (۹-۳۱) در (۹-۵) متغیرهای حالت سیستم مداربسته بدست می‌آید.

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} h_i\left(z(t)h_j\big(z(t)\big)\right)\left[A_i - A_iF_j\right]x(t) \tag{۹-۳۲}$$

قضیه ۹-۲ : نقطه تعادل کنترل فازی (۹-۳۲) در همه نقاط فضا پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک P وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند،

$$\begin{aligned} &\left[A_i - B_iF_j\right]^T P\left[A_i - B_iF_j\right] - P < 0 \\ &h_i z(t) h_j\big(z(t)\big) \neq 0, \qquad i,j = 1,2,3,4,\dots,q \end{aligned} \tag{۹-۳۳}$$

توجه شود که سیستم (۹-۳۲) را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} x(t+1) = &\sum_{i=1}^{q} h_i\big(z(t)\big)h_i\big(z(t)\big)\big(A_i - B_iF_j\big)x(t) \\ &+ 2\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j} h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)\, G_{ij}x(t) \end{aligned} \tag{۹-۳۴}$$

$$G_{ij} = \frac{\left[A_i - B_iF_i\right] + \left[A_i - B_jF_j\right]}{2}, \qquad i<j \quad s.t \quad h_j \cap h_i \neq \Phi$$

معادله (۹-۳۴) به معنای آن است که این معادله برای تمامی مقادیر $i<j$ صادق است، مشروط بر آن که $h_j \cap h_i \neq \Phi$ باشد. توجه شود که عبارت $h_j \cap h_i = \Phi$ به معنای آن است که i امین قانون هیچ‌گونه هم‌پوشانی با j امین قانون نداشته باشد. بنابراین می‌توان گفت که معادله G_{ij} در (۹-۳۴) برای همه مقادیر $i<j$ صادق است، مگر برای حالتی که $h_j \cap h_i = \Phi$ باشند.

بر اساس قضیه ۹-۲، شرط کافی پایداری به صورت قضیه ۹-۳ بیان می‌شود.

قضیه ۹-۳ : نقطه تعادل سیستم کنترل فازی (۹-۳۲) در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک وجود داشته باشد، به‌طوری که دو شرط زیر صادق باشند،

$$(A_i - B_iF_i)^T P (A_i - B_iF_i) - P < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \tag{۹-۳۵}$$

$$G_{ij}{}^T P G_{ij} - P < 0, \qquad i < j \le r \;\; s.t \;\; h_j \cap h_i \ne \Phi, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \tag{۹-۳۶}$$

نکته ۹-۵ . شرایط قضیه ۹-۳ از قضیه ۹-۲ ساده‌تر است. چرا؟

مسئله طراحی سیستم کنترلی انتخاب F_iها $(i = 1,2,3,\dots,q)$ به نحوی است که شرایط (۹-۳۵) و (۹-۳۶) در قضیه ۹-۳ صادق باشد.

با تعریفی که برای پایداری مربعی در قضیه ۹-۱ به کار برده‌ایم، پرسش طراحی سیستم کنترلی را می‌توان مستقیما و با توجه به قضیه ۹-۱ حل کرد. به عبارت دیگر باید F_iها در معادله (۹-۳۲) را طوری تعیین کنیم، که سیستم مدار بسته (۹-۳۲) پایدار مربعی باشد. اگر چنین مجموعه‌ای از F_iها وجود داشته باشد، سیستم (۹-۵) نیز پایدارپذیر مربعی از طریق طراحی PDC است.

ابتدا کنترل‌کننده را برای هر قانون طراحی می‌کنیم و پایداری آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور روش LMI را برای حل مسئله تحلیل پایداری سیستم‌های فازی به‌کار می‌بریم. اگر شرایط پایداری ارضا نشد، باید روش را تکرار کنیم.

پیش از بحث درباره LMI، حالتی را بررسی می‌کنیم، که ماتریس B در همه زیر مجموعه‌ها (قوانین) یکسان و مشترک باشد، یعنی داشته باشیم $B_i = B,\ i = 1,2,3,\dots,q$. در این صورت قضیه ۹-۳ به فرم ساده‌تری تبدیل می‌گردد که آن را تحت عنوان قضیه ۹-۴ بیان می‌کنیم.

قضیه ۹-۴ : در حالیکه $B_i = B,\ \ i = ,1,2,3,\dots q$ باشد، نقطه تعادل سیستم کنترل فازی (۹-۳۲) در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک P وجود داشته باشد، به‌طوری که شرط زیر صادق باشد،

$$(A_i - BF_i)^T P (A_i - BF_i) - P < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \tag{۹-۳۷}$$

علاوه براین، برای B مشترک اگر بتوان F_i را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم،

$$(A_i - BF_i) < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \tag{۹-۳۸}$$

که در آن G ماتریس هورویتز است، آنگاه سیستم (۹-۳۲) تبدیل به سیستم خطی زیر می‌شود،

$$x(t+1) = Gx(t)$$

این یک نتیجه خطی‌سازی است که در همه فضای متغیرهای حالت معتبر است. لازم به توضیح است که حتی اگر (A_i, B_i) کنترل‌پذیر باشد، ممکن است همواره نتوان یک G مشترک پیدا کرد.

مثال ۹-۶ : سیستم فازی زیر را در نظر بگیرید.

قانون یک مدل

اگر $x_2(t)$، M_1 باشد، آنگاه $x(t+1) = A_1 x(t) + Bu(t)$.

قانون دو مدل

اگر $x_2(t)$، M_2 باشد، آنگاه $x(t+1) = A_2 x(t) + Bu(t)$.

ماتریس‌های A_1 و A_2 همان ماتریس‌های مثال ۹-۵ هستند.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین ماتریس B برابر $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. با استفاده از قانون کنترلی PDC طبق رابطه (۹-۳۱) و با فرض آنکه مقادیر ویژه سیستم مداربسته را 0.5 و 0.35 انتخاب کنیم، خواهیم داشت،

$$F_1 = [0.15 \ \ -0.325]$$
$$F_2 = [-1.85 \ \ -0.325]$$
$$A_1 - BF_1 = A_2 - BF_2 = G = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.175 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت سیستم مداربسته می‌شود،

$$x(t+1) = G\, x(t)$$

این سیستم پایدار است؛ زیرا G پایدار است. در ادامه حالت عمومی‌تر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۹-۷ : سیستم فازی زیر را در نظر بگیرید،

قانون یک مدل

اگر $x_2(t)$، M_1 باشد، آنگاه $x(t+1) = A_2 x(t) + B_1 u(t)$.

قانون دو مدل

اگر $x_2(t)$، M_2 باشد، آنگاه $x(t+1) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$.

در اینجا A_1 و A_2 همان ماتریس‌های مثال ۹-۵ هستند و داریم،

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در توابع عضویت مورد استفاده از مثال ۹-۵، فرض شده است که $a = 1$ باشد. همچنین مقادیر ویژه سیستم مداربسته در 0.5 و 0.35 در نظر گرفته شده‌اند،

با این فرضیات نتیجه می‌شود،

$$F_1 = [0.65 \quad -0.5]$$
$$F_2 = [0.87 \quad -0.11]$$

همچنین خواهیم داشت،

$$A_1 - B_2F_1 = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0.35 & 0.5 \end{bmatrix}$$
$$A_2 - B_2F_2 = \begin{bmatrix} 0.74 & -0.72 \\ 0.13 & 0.11 \end{bmatrix}$$
$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0.215 & -0.945 \\ 0.240 & -0.305 \end{bmatrix}$$

توجه شود که G_{12} پایدار است. کنترل‌کننده PCD به صورت زیر در می‌آید.

قانون یک مدل،

اگر $x_2(t)$، M_1 باشد، آنگاه $u(t) = -F_1x(t)$.

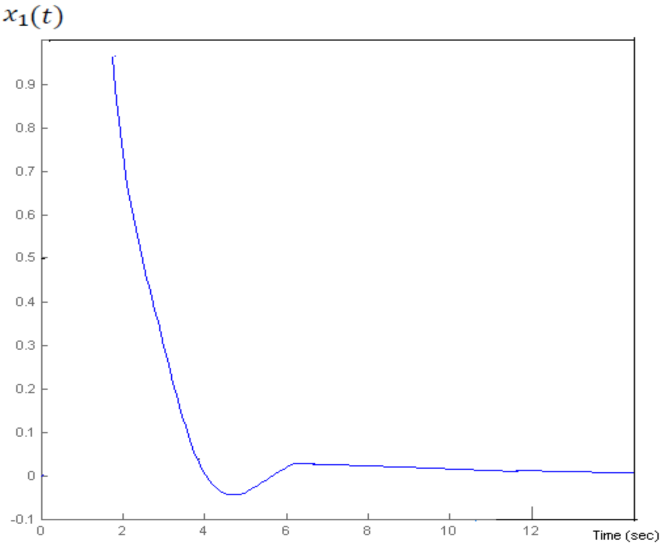
قانون دو مدل،

اگر $x_2(t)$، M_1 باشد، آنگاه $u(t) = -F_2x(t)$.

نشان داده می‌شود، اگر ماتریس مثبت معین P را به صورت زیر انتخاب کنیم، شرایط پایداری (۹-۳۵) و (۹-۳۶) ارضا خواهد شد. بنابراین سیستم کنترل فازی مداربسته که شامل مدل فازی T-S و کنترل‌کننده PCD است، در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است.

$$P = \begin{bmatrix} 1.181 & -0.0614 \\ -0.0614 & 2.3044 \end{bmatrix}$$

این ماتریس P با استفاده از الگوریتم بهینه LMI بدست می‌آید، که در ادامه نحوه محاسبه آن را خواهیم دید شکل ۹-۱۷ رفتار سیستم کنترل فازی را برای شرایط اولیه مشابه شکل ۹-۱۵ مثال ۹-۵ نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱۷ : رفتارسیستم کنترل فازی مثال ۹-۷

۹-۲-۸- طراحی کنترل‌کننده پایدار از نامساوی ماتریس خطی

از اواسط دهه ۱۹۹۰ دسته‌ای از مسائل بهینه‌سازی عددی به نام نامساوی ماتریس خطی[1] LMI مورد توجه فراوان قرار گرفته است [؟؟] [18] . این مسائل با روش‌های چند جمله‌ای زمانی قابل حل هستند. نشان داده شد که روش نقطه‌ای داخلی[2] در حل این مسائل بسیار موثر هستند [؟؟] [19]. بسیاری از مسائل سیستم‌های کنترلی را نیز می‌توان به این روش ارتباط داد. گرچه به جز موارد معدود این مسائل دارای حل تحلیلی نیستند؛ ولی، با روش LMI بیشتر مسائل کنترلی را می‌توان بصورت عددی حل کرد. به این خاطر، تبدیل یک مسئله کنترلی به یک مسئله LMI معادل یافتن راه حلی برای مسئله اصلی تلقی می‌شود.

تعریف : یک LMI یک نامساوی ماتریسی به صورت زیر است،

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \qquad (۳۹-۹)$$

که در آن $x^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]$ بردار متغیرها و ماتریس متقارن $n \times n$، F_iها داده شده‌اند. علامت نامساوی $0 <$ به معنای آن است که $F(x)$ مثبت معین است. معادله (۹-۳۹) روی x دارای قید محدب است. به عبارت دیگر، مجموعه $\{x|F(x) > 0\}$ مجموعه‌ای محدب است. رابطه نامساوی ماتریس خطی یا LMI (۹-۳۹) می‌تواند انواع مختلفی از قیود تحدب روی x را داشته باشد. به طور اخص نامساوی خطی، نامساوی مربعی محدب، نامساوی نرم ماتریسی و قیودی که در تئوری کنترل ظاهر می‌شوند، مانند، تابع

[1] Stable Controller Design Via Linear Matrix Inequality
[2] Interior Point Method

لیاپانوف و نامساوی ماتریس مربعی محدب، همگی می‌توانند در فرم LMI ارائه گردند. LMI در فرم چند عضوی $F^{(i)} > 0, i = 1,2,3, \dots, p$ می‌تواند مانند فرم یگانه LMI ارائه گردد،

$$diag\left(F^{(1)}, \dots F^{(p)}\right) > 0$$

در موارد اندکی در LMI، متغیرها خود ماتریس هستند. برای نمونه در نامساوی لیاپانوف داریم،

$$A^T PA - P < 0 \qquad (۹-۴۰)$$

در این رابطه $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ داده شده و $P = P^T$ متغیر است. در این حالت LMI بصورت $F(x) > 0$ نوشته نمی‌شود. البته نامساوی (۹-۴۰) را می‌توان بصورت (۹-۳۹) نمایش داد. کافیست در (۹-۳۹) روابط $F_0 = 0$ و $F_i = -A^T P_i A - P_i$ در نظر گرفته شود، که در آن P_1 تا P_m ماتریس‌های مربع $n \times n$ هستند.

مسئله LMI

برای یک LMI داده شده $F(x) > 0$، مسئله LMI [؟؟][18] عبارتست از یافتن یک x^{feas} [1] به‌طوری که $F(x^{feas}) > 0$ یا تعیین این LMI مقدور نیست. به عنوان یک نمونه، شرط پایداری لیاپانوف در قضیه ۹-۱ دقیقا یک مسئله LMI است. برای یک A_i داده شده به صورت $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 1,2,3, \dots, q$ باید P را طوری تعیین کنیم که شرط LMI را ارضا نماید. یعنی داشته باشیم،

$$P > 0, \qquad {A_i}^T PA_i - P < 0, \qquad i = 1,2,3, \dots, q$$

یا تعیین کنیم که چنین P وجود ندارد.

مسئله LMI را می‌توان هم از روش‌های نظری و هم عملی دنبال کرد. آنها را می‌توان به صورت چندجمله‌ای‌های زمانی حل کرد. همچنین در عمل می‌توان آنها را با ابزارهایی که امروز در یافته‌های اخیر ریاضیات فراهم شده اند، برای نمونه با روشی به نام **روش نقطه داخلی** که در سال‌های اخیر ارائه شده است، به طور موثر حل کرد. شرایط پایداری ارائه شده در این فصل، بصورت LMI بیان می‌شوند. این ساختار برای تحلیل پایداری از این نظراهمیت دارد، که الگوریتم بهینه‌سازی محدب می‌تواند در طراحی مسائل کنترلی مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین، ساختار ارائه شده، تحلیل پایداری و طراحی کنترل را در چهارچوب مدل فازی تاکاگی-سوگینو-کنگو منطق کنترلی PCD ممکن و مقدور می‌سازد.

روش طراحی ارائه شده در بخش پیش (مثال ۹-۷) یک روش بر مبنای فرآیند تکرار است. برای هر قانون یک کنترل‌کننده بر مبنای رفتار محلی سیستم طراحی می‌شود. سپس یک روش پایداری بر مبنای LMI ارائه می‌شود، تا از ارضای شرایط پایداری یقین حاصل شود. در حالتی که شرایط پایداری ارضا نشود،

[1] Feas: Abbreviation of Feasible

کنترل‌کننده مربوط به هر قانون دوباره طراحی می‌شود. روش طراحی بر مبنای تکرار در اینجا بسیار موثر است. به هر صورت، از نقطه نظر طراحی کنترلی، مطلوب‌تر آن است که به جای روش تکرار، بتوان مستقیما کنترل‌کننده‌ای طراحی کرد، که پایداری سیستم مدار بسته را تضمین نماید. این همان روشی است که به عنوان مسئله کنترلی در چهاچوب مدل تاکاگی - سوگینو و طراحی PDC مطرح می‌شود. در این فصل ادعا می‌شود، که مساله کنترلی را می‌توان با روش LMI ساختارسازی و حل کرد. حال ایده استفاده از روش LMI در حل مساله طراحی کنترل‌کننده‌ای را به اختصار بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم $q = 1$ باشد؛ یعنی تنها یک قانون اگر-آنگاه داشته باشیم. در این صورت معادله (۹-۵) به صورت معادله خطی نامتغیر با زمان در می‌آید،

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (۹\text{-}۴۱)$$

برای یک بهره کنترلی F داده شده، با استفاده از تئوری پایداری سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان در قضیه ۹-۲ سیستم (۹-۴۱) پایدار مربعی است، اگر $P > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که،

$$(A - BF)^T P (A - BF) - P < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \qquad (۹\text{-}۴۲)$$

مسئله طراحی کنترلی، تعیین بهره F فیدبک حالت به‌طوری خواهد بود که سیستم مدار بسته پایدار مربعی باشد. اگر چنین بهره F وجود داشته باشد، سیستم را **پایدارپذیرمربعی** گویند. چنین مسئله پایدارپذیر مربعی را می‌توان بصورت یک مسئله LMI بازسازی کرد.

شرط (۹-۴۲) از نظر P و F محدب نیست. با ضرب طرفین معادله از چپ در P^{-1} و با تغییر متغیر $X = P^{-1}$ معادله (۹-۴۲) چنین می‌شود،

$$X(A - BF)^T X^{-1} (A - BF) X - X < 0 \qquad (۹\text{-}۴۳)$$

با تعریف $M = FX$ برای $X > 0$ داریم $F = MX^{-1}$. با جایگزینی در (۹-۴۳) داریم،

$$X - (AX - BM)^T X^{-1} (AX - BM) > 0 \qquad (۹\text{-}۴۴)$$

این نامساوی غیرخطی محدب را می‌توان با استفاده از متمم Schur[1][؟؟] [18] به یک مسئله LMI تبدیل کرد. LMI نتیجه شده به صورت زیر در می‌آید،

$$\begin{bmatrix} X & (AX - BM)^T \\ (AX - BM) & X \end{bmatrix} > 0 \qquad (۹\text{-}۴۵)$$

بنابراین سیستم (۹-۴۱) به صورت مربعی پایدارپذیر است، مشروط بر آنکه یک $X > 0$ و یک M وجود داشته باشد، به‌طوری که LMI رابطه (۹-۴۵) صادق باشد. در این صورت بهره‌های فیدبک حالت از رابطه $F = MX^{-1}$ بدست می‌آید.

[1] Schur Complement

برای شرطی که$q > 1$ است، یعنی تعداد قوانین مدل‌های فازی تاکاگی - سوگینو بیش از یکی است نیز می‌توان روش طراحی کنترلی بر مبنای LMI را گسترش داد. برای نمونه پایدارپذیری مربعی مدل تاکاگی-سوگینو فازی از روش فیدبک خطی متغیرهای حالت را می‌توان بصورت مسئله LMI در X و M به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} X & (A_i - B_i M)^T \\ (A_i X - BM) & X \end{bmatrix} > 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q, \qquad X > 0 \tag{۹-۴۶}$$

و بهره‌های فیدبک حالت $F = MX^{-1}$ هستند.

نکته ۹-۶ . شرایط پایداری که در اینجا ارائه می‌شود، نه تنها تضمین‌کننده پایداری مدل فازی و سیستم کنترل فازی است، بلکه تضمین‌کننده پایداری سیستم واقعی نیز خواهد بود.

نکته ۹-۷ . نتایج پایداری بدست آمده در این قسمت که برای سیستم‌های گسسته زمانی حاصل شده است، برای سیستم‌های پیوسته زمانی نیز صادق است. در این حالت باید از رابطه زیر استفاده کنیم،

$$A^T P + PA < 0$$

۹-۲-۹- کاربرد روش پاندول معکوس

برای تشریح روش کنترلی PDC، پاندول معکوس مثال ۹-۲ را در نظر می‌گیریم که متغیرهای حالت آن زاویه پاندول از حالت عمودی x_1 و سرعت زاویه پاندول x_2 است. معادله حرکت با (۹-۱۶) داده شده است. در این معادلات m جرم پاندول، M جرم متحرک روی صفحه افق، $2l$ طول پاندول و u نیروی ورودی به جرم M است. همچنین $a = \frac{1}{m+M}$ در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود $m = 2kg$، $M = 8kg$، $2l = 1m$ بوده و نیروی u بر حسب نیوتن محاسبه می‌شود. در مرحله اول مدلی را که تنها دو قانون دارد و در مثال ۹- ارائه شده است، درنظر می‌گیریم.

۹-۲-۱۰- کنترل PDC بر مبنای مدل فازی با دو قانون

در مثال ۹-، سیستم پاندول معکوس با دو قانون فازی ۱ و۲ ارائه شده است. برای هر یک از این دو مدل یک کنترل‌کننده فیدبک طراحی می‌کنیم و مقادیر ویژه دو سیستم مداربسته را $[-2 \quad -2]$ فرض و انتخاب می‌کنیم.

بدین ترتیب، مقادیر ویژه $(A_1 - B_1 F_1)$ و $(A_2 - B_1 F_2)$ خواهند بود. با این انتخاب مقادیر بهره‌های فیدبک مربوط به هرکدام از سیستم‌های زیر مشخص می‌شود.

$$F_1 = [-120.6667 \quad -22.6667]$$
$$F_2 = [-2551.3 \ -764]$$

و خواهیم داشت،

$$A_1 - B_1F_1 = A_2 - B_1F_2 = G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$
$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

توجه شود که G_{12} یک ماتریس هورویتز است. با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی LMI نتیجه می‌شود،

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -212.1325 & -67.4675 \end{bmatrix} \tag{۴۷-۹}$$

می‌توان نشان داد که با توجه به بهره‌های کنترلی و P بالا، شرایط پایداری زیر صادق است،

$$(A_i - B_iF_i)^T P + P(A_i - B_iF_i) < 0, \qquad i = 1,2,3, \dots, q \tag{۴۸-۹}$$

$${G_{12}}^T P + PG_{12} < 0, \qquad i = 1,2,3, \dots, q \tag{۴۹-۹}$$

بنابراین قانون کنترلی PDC بصورت زیر در می‌آید.

قانون ۱

اگر x_1حدود $\pm\frac{\pi}{2}$ است ($|x_1|<\frac{\pi}{2}$)، آنگاه $u(t) = -F_1x(t)$.

قانون ۲

اگر x_1حدود $\pm\frac{\pi}{2}$ است ($|x_1|<\frac{\pi}{2}$)، آنگاه $u(t) = -F_2x(t)$.

بنابراین،

$$u\ (t) = -h_1(x_1(t))u(t)F_1x(t) - h_2(x_2(t))u(t)F_2x(t) \tag{۵۰-۹}$$

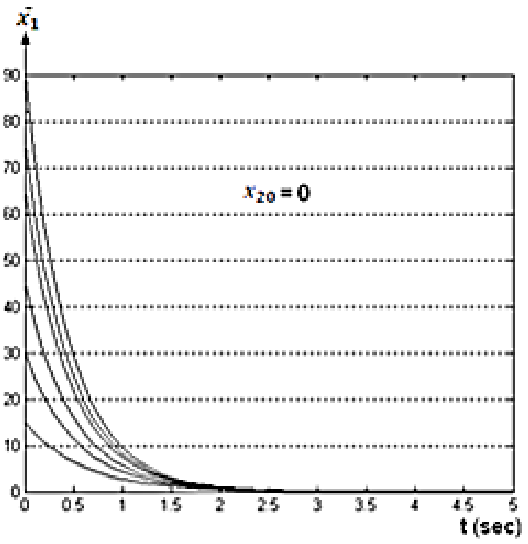
در این معادله h_1 و h_2 به ترتیب مقادیر عضویت قانون ۱ و ۲ هستند و داریم،

$$h_2 + h_1 = 1$$

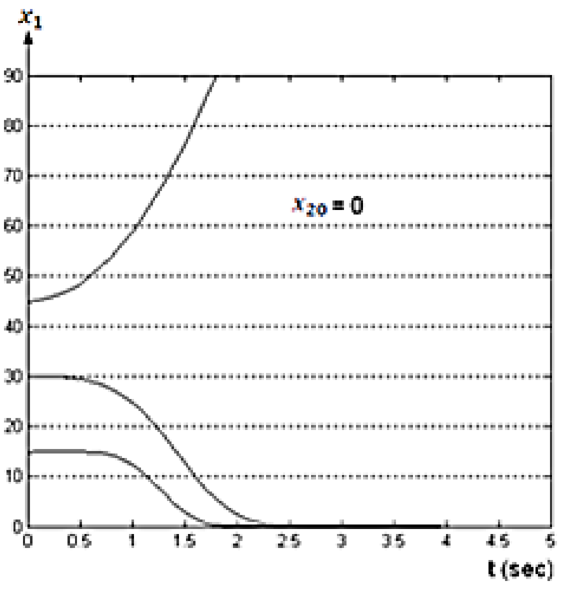
این قانون کنترلی غیرخطی، پایداری سیستم کنترل فازی، یعنی مدل فازی TS به همراه کنترل PDC را تضمین می‌کند.

برای نشان دادن توانایی کنترل‌کننده طراحی شده که مدل فازی آن تنها دو قانون دارد، این کنترل‌کننده PDC را به سیستم اصلی که با معادلات (۹-۱۶) داده شده‌اند، اعمال می‌کنیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که قانون کنترلی (۹-۵۰) می‌تواند پاندول معکوس را برای شرایط اولیه $x_{10} = \Theta_0$ از -88° تا $+88^\circ$ و $x_{20} = \omega_0 = 0$ متعادل و پایدار کند. شکل ۹-۱۸ رفتار $x_1(t)$ را در سیستم اصلی به ازای شرایط

اولیه مختلف و به ازای کنترل فازی با دو قانون طبق رابطه (۲-۴۵) نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد، به ازای شرایط مختلف که x_{10} یکی از شش زاویه $15^\circ 30^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 75^\circ, 85^\circ$ و در همه آنها $x_{20} = 0$ است، سیستم کنترل فازی با دو قانون سیستم را به وضعیت تعادل می‌رساند.



شکل ۹-۱۸ : تغییرات $x_1 = \theta$ با شرایط اولیه مختلف به ازای قانون کنترل فازی با دو قانون



شکل ۹-۱۹ : تغییرات $x_1 = \theta$ با شرایط اولیه مختلف با قانون کنترل فیدبک خطی $u(t) = -F_1 x(t)$

از سوی دیگر شکل ۹-۱۹ رفتار سیستم پاندول معکوس اصلی را به ازای قانون کنترلی خطی زیر نشان می‌دهد.

$$u(t) = -F_1 x(t)$$

در اینجا برای دو زاویه x_1 مساوی 15° و 30° به عنوان شرایط اولیه، رفتار سیستم به حالت تعادل برمی‌گردد. اما برای $x_1 \geq 45^{\circ}$ این کنترل‌کننده نمی‌تواند سیستم را به حالت تعادل برگرداند.

باید توجه داشت که برای کنترل سیستم غیرخطی پاندول معکوس (۹-۱۶)، می‌توان از روش‌های کنترل غیرخطی نیز استفاده کرد، که قادر است سیستم را به ازای شرایط اولیه در محدوده $\pm\frac{\pi}{2}$ به حالت تعادل بازگرداند [؟؟] [20]. ولی آنچه مسلم است آن است که، کنترل‌کننده‌هایی که به این ترتیب طراحی می‌شوند، بر خلاف کنترل‌کننده فازی ساختار پیچیده‌ای دارند؛ در حالیکه طراحی PDC ساده و کنترل‌کننده طراحی شده نیز ساختار ساده‌ای دارد.

۹-۲-۱۱- کنترل PDC بر مبنای مدل فازی با چهار قانون

فرض کنید پاندول معکوس بر روی پایه متحرک چنان ساخته شده است، که پاندول بتواند بر یک دایره کامل $[-\pi, \pi]$ حرکت کند. پس، فرض می‌کنیم $x_1 \in [-\pi, \pi]$ باشد؛ البته به جز نوار باریکی نزدیک $\pm\frac{\pi}{2}$.

حفظ تعادل پاندول برای محدوده تغییرات زاویه $\frac{\pi}{2} < |x_1| \leq \pi$ به عنوان **کنترل تاب معکوس** نامیده می‌شود. توجه شود که برای $x = \pm\frac{\pi}{2}$ سیستم کنترل‌ناپذیر است. با این مقدمات سیستم را با چهار قانون فازی زیر مدل می‌کنیم.

قانون یک مدل

اگر x_1 نزدیک صفر است، آنگاه، $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$.

قانون دو مدل

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به $\pm\frac{\pi}{2}$ است و داریم $|x_1| < \frac{\pi}{2}$، آنگاه، $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

قانون سه مدل

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به $\pm\frac{\pi}{2}$ است و داریم $|x_1| > \frac{\pi}{2}$، آنگاه، $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$.

قانون چهار مدل

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به π است، آنگاه، $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$.

در این روابط A_1 تا A_4 و B_1 تا B_4 عبارتند از،

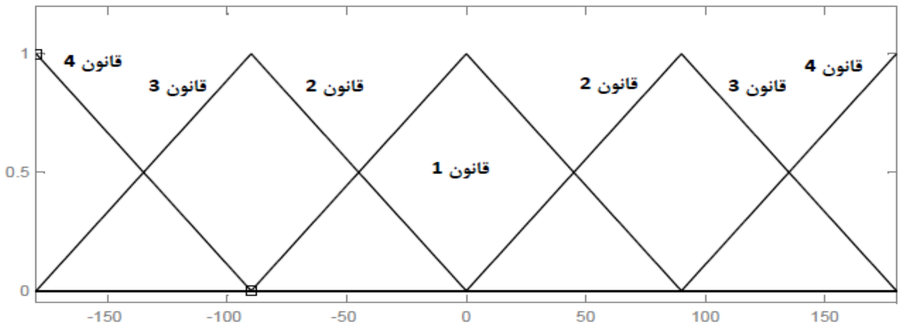
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{4l/3 - \mathrm{aml}} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-a}{4l/3 - \mathrm{aml}} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{\pi(4l/3 - \mathrm{aml}\beta^2)} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-a\beta}{4l/3 - \mathrm{aml}\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2g}{\pi(4l/3 - \mathrm{aml}\beta^2)} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-a\beta}{4l/3 - \mathrm{aml}\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a}{4l/3 - \mathrm{aml}} \end{bmatrix}$$

توابع عضویت این چهار قانون در شکل ۹-۲۰ رسم شده است.



شکل ۹-۲۰ : توابع عضویت مربوط به قوانین مدل

با انتخاب همه مقادیر ویژه زیرسیستم مساوی $[-2,2]$ بهره فیدبک F_1 و F_2 پیش‌تر محاسبه شده و بهره‌های فیدبک F_3 و F_4 عبارتند از،

$$F_3 = [2551.6 \quad 764.6]$$
$$F_4 = [22.6667 \; 22.6667]$$

در این صورت خواهیم داشت،

$$A_3 - B_3F_3 = A_3 - B_4F_3 = G$$

$$G_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -220.5230 & -67.4675 \end{bmatrix}$$

در این رابطه G_{34} ماتریس هورویتز است. می‌توان نشان داد که ماتریس P در معادله (۹-۴۷) شرط پایداری زیر را اقناع می‌کند.

$$(A_i - B_iF_i)^T P + P(A_i - B_iF_i) < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \qquad (۹\text{-}۵۱)$$

$$G_{34}{}^T P + PG_{34} < 0, \qquad i = 1,2,3,\dots,q \qquad (۹\text{-}۵۲)$$

بین مقادیر عضویت h_1 و h_3 هیچ هم‌پوشانی وجود ندارد. هم‌چنین بین h_1 و h_4، بین h_2 و h_3، بین h_2 و h_4 نیز هم‌پوشانی وجود ندارد. بنابراین برای بررسی پایداری، تنها G_{12} و G_{34} (طبق روابط (۹-۴۹) و (۹-۵۲)) باید تایید شوند.

کنترل‌کننده PCD در این سیستم با مدل فازی که چهار قانون دارد، به صورت زیر بیان می‌شود،

قانون ۱

اگر $x_1(t)$ نزدیک صفر است، آنگاه $u(t) = -F_1 x(t)$.

قانون ۲

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به $\pm\frac{\pi}{2}$ است و داریم $|x_1| < \frac{\pi}{2}$، آنگاه، $u(t) = -F_2 x(t)$.

قانون ۳

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به $\pm\frac{\pi}{2}$ است و داریم $|x_1| > \frac{\pi}{2}$، آنگاه، $u(t) = -F_3 x(t)$.

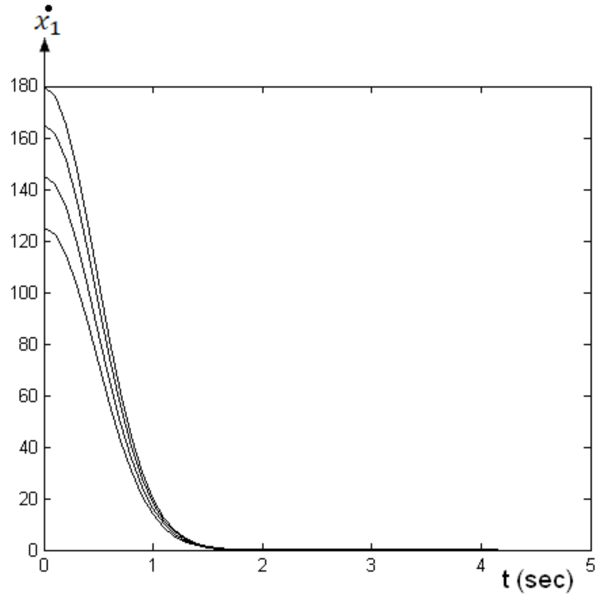
قانون ۴

اگر $x_1(t)$ در محدوده نزدیک به π است، آنگاه، $u(t) = -F_3 x(t)$.

بنابراین،

$$\begin{aligned} u\,(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - h_2(x_1(t))F_2x(t) - h_3(x_1(t))F_3x(t) \\ - h_4(x_1(t))F_4x(t) \end{aligned} \qquad (۹-۵۳)$$

این قانون کنترلی، پایداری سیستم کنترل فازی، یعنی مدل فازی با چهار قانون به همراه کنترل PDC، را تضمین می‌کند. این کنترل‌کننده را به سیستم اصلی (۹-۱۶) اعمال می‌کنیم تا رفتار سیستم مداربسته را بررسی نماییم. نتایج شبیه‌سازی اعمال کنترل‌کننده در سیستم اصلی نشان می‌دهد که، کنترل‌کننده (۹-۵۳) می‌تواند پاندول را برای همه شرایط اولیه مختلف زاویه x_1 متعادل کند؛ مگر در حالتی که $x_1(t)$ در محدوده باریک $88^\circ < |x_1| < 94^\circ$ قرار داشته باشد. اندازه این نوار نازک را می‌توان با افزایش تعداد قوانین مدل و کنترل‌کننده، کاهش داد. شکل ۹-۲۱ عکس‌العمل سیستم مداربسته اصلی برای شرایط اولیه $x_{10} = 125^\circ, 145^\circ, 165^\circ, 180^\circ$ و $x_{20} = 0$ را نشان می‌دهد.



شکل ۹-۲۱ : رفتار $x_1(t)$ سیستم مدار بسته پاندول با مدل فازی شامل چهار قانون به ازای شرایط مختلف x_{10} و $x_{20} = 0$

باید توجه داشت که کنترل‌کننده غیرخطی مرجع [؟؟] [20] برای $|x_1|$ بین $\frac{\pi}{2}$ و π قابل استفاده نیست. جدول ۹-۱ مقایسه بین روشهای طراحی کنترل‌کننده‌های فیدبک حالت خطی، کنترل‌کننده غیرخطی و کنترل‌کننده فازی را نشان می‌دهد.

جدول ۹-۱ . مقایسه روش‌های مختلف طراحی کنترل‌کننده پاندول معکوس

نوع کنترل‌کننده	محدوده عملکرد	سادگی	پایداری
خطی	$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	بلی	منطقه‌ای
غیرخطی	$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	خیر	غیرمنطقه‌ای
فازی PDC	$-\pi, \pi$	بلی	غیرمنطقه‌ای

بررسی قوام روش طراحی کنترل‌کننده فازی PDC :

در این مثال برای تعیین میزان قوام کنترل‌کننده شبیه‌سازی‌های زیر انجام شده است،

۱. جرم پاندول، m، از $2kg$ به $4kg$ تغییر یافته است.
۲. جرم جسم محرک، M، از $8kg$ به $4kg$ تغییر یافته است.
۳. طول بازوی پاندول، $2l$، از 1 متر به 0.5 متر تغییر یافته است.

نتایج شبیه‌سازی به ازای شرایط اولیه‌های $x_1(0) = 45^\circ, 85^\circ, 145^\circ, 180^\circ$ و $x_2(0) = 0$ برای هر حالت بدست آمده، در شکل‌های (۸-۲۱) تا (۸-۲۳) ؟؟ رسم شده است. مبحث طراحی مقاوم بطور جامع در ادامه بحث خواهد شد.

۹-۳- طراحی کنترل‌کننده LMI

در این بخش جزئیات تحلیل و طراحی کنترل‌کننده بر اساس روش LMI ارائه می‌شود. نشان داده خواهد شد که انواع مختلف ویژگی‌های عملکردی سیستم‌های کنترلی را می‌توان بر حسب LMI بیان و ارائه نمود. ویژگی‌های عملکردی سیستم‌های کنترلی شامل مواردی، مانند، شرایط پایداری، پایداری حالت ماندگار، شرایط نرخ کاهش میزان خطا، قیود روی ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم کنترلی و حذف اغتشاشات، هم در سیستم‌های پیوسته و هم گسسته زمانی است.

۹-۳-۱- شرایط پایداری سیستم‌های کنترل فازی

در دهه ۱۹۹۰ میلادی، موضوع پایداری سیستم‌های کنترل فازی در چهارچوب پایداری سیستم‌های غیرخطی بطور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است [؟؟] [18-1]. در این بخش بعضی نتایج مهم و پایه‌ای بدست آمده مورد بحث قرار می‌گیرد. قضایای قضیه **۹-۵** و قضیه **۹-۶** شرایط پایداری سیستم‌های مدار باز را بررسی می‌کند. قضیه ۹-۵ با تئوری پایداری لیاپانوف قابل اثبات است و اثبات قضیه ۹-۶ در مراجع [؟؟] [7,4] داده شده است.

قضیه ۹-۵ [CFS] : سیستم فازی پیوسته زمانی (۹-۲) را در نظر بگیرید. نقطه تعادل این سیستم به ازای $u = 0$ در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک P برای همه زیرمجموعه‌های سیستم وجود داشته باشد، به‌طوری که،

$$A_i^T P + PA_i < 0, \qquad i = 1,2,3, \dots, q \tag{۹-۵۴}$$

قضیه ۹-۶ [DFS] : نقطه تعادل سیستم گسسته فازی (۹-۵) به ازای $u = 0$ در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، مگر یک ماتریس مثبت معین مشترک P وجود داشته باشد بطوریکه،

$$A_i^T PA_i + P < 0, \qquad i = 1,2,3, \dots, q \tag{۹-۵۵}$$

یعنی باید یک P مشترک برای همه زیرمجموعه‌ها وجود داشته باشد.

در ادامه پایداری سیستم مداربسته را درنظر می‌گیریم. با جایگزینی از (۹-۲۸) در (۹-۳) و (۹-۵) داریم،

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} h_i\left(z(t)h_j\big(z(t)\big)\right)\left[A_{i-}A_iF_j\right]x(t) \quad \Leftarrow \quad \text{CFS} \tag{۹-۵۶}$$

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}h_i\left(z(t)h_j\big(z(t)\big)\right)\left[A_{i-}A_iF_j\right]x(t)\quad\Leftarrow\quad \mathrm{DFS} \tag{۵۷-۹}$$

با تعریف مقابل،

$$G_{ij}=A_i-B_iF_i$$

معادلات (۹-۵۶) و (۹-۵۷) بصورت زیر در می‌آید،

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&\sum_{i=1}^{q}h_i\left(z(t)h_i\big(z(t)\big)\right)G_{ij}x(t)\\&+2\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q}h_i\left(z(t)h_j\big(z(t)\big)\right)\left[\frac{G_{ij}+G_{ij}}{2}\right]x(t)\quad\Leftarrow\quad \mathrm{CFS}\end{aligned} \tag{۵۸-۹}$$

$$\begin{aligned}x(t+1)=&\sum_{i=1}^{q}h_i\left(z(t)h_i\big(z(t)\big)\right)G_{ij}x(t)\\&+2\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q}h_i\left(z(t)h_j\big(z(t)\big)\right)\left[\frac{G_{ij}+G_{ij}}{2}\right]x(t)\quad\Leftarrow\quad \mathrm{DFS}\end{aligned} \tag{۵۹-۹}$$

اگر قضایای قضیه **۹-۵** و قضیه **۹-۶** مربوط به سیستم مداریاز را به ترتیب به سیستم‌های CFS و DFS، یعنی در معادلات (۹-۵۸) و (۹-۵۹) بکار ببریم، شرایط پایداری سیستم‌های مداربسته بدست می‌آید، که در قضایای قضیه **۹-۷** و قضیه **۹-۸** زیر ارائه شده است.

قضیه ۹-۷ [CFS] : نقطه تعادل سیستم کنترلی فازی پیوسته‌ای که با معادله (۹-۵۸) داده شده، در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس P مثبت معین مشترک برای همه زیرسیستم‌ها وجود داشته باشد، به‌طوری که در دو شرط زیر صدق کند.

$${G_{ij}}^{T}P+PG_{ij}<0 \tag{۶۰-۹}$$

$$\frac{(G_{ij}+G_{ij})^{T}}{2}\;P+P\frac{(G_{ij}+G_{ij})}{2}\le 0,\qquad i<j\quad s.t\quad h_i\cap h_j\neq\emptyset \tag{۶۱-۹}$$

اثبات : با استفاده از قضیه ۹-۵ این قضیه به سادگی نتیجه می‌شود.

قضیه ۹-۸ [DFS] : نقطه تعادل سیستم کنترلی فازی گسسته‌ای که با معادله (۹-۵۹) داده شده، در همه نقاط فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس P مثبت معین مشترک برای همه زیرسیستم‌ها وجود داشته باشد، به‌طوری که در دو شرط زیر صدق کند.

$${G_{ii}}^{T}PG_{ii}-P<0 \tag{۶۲-۹}$$

$$\frac{(G_{ij}+G_{ij})^{T}}{2}\;P\frac{(G_{ij}+G_{ij})}{2}-P\le 0,\qquad i\;<j\;s.t\;h_i\cap h_j\neq\emptyset \tag{۶۳-۹}$$

اثبات : با استفاده از قضیه ۹-۶ مستقیما نتیجه می‌شود.

مسئله طراحی کنترل فازی، یعنی تعیین F_iها به ازای $j = 1,2,3, \dots, q$ که شرایط قضایای قضیه **۹-۷** یا قضیه **۹-۸** را به ازای یک ماتریس P مثبت معین مشترک ارضا نماید.

قضایای قضیه **۹-۷** و قضیه **۹-۸** درحالت یکسان بودن B در همه زیرسیستم‌ها :

اگر B در همه زیرسیستم‌ها یکسان و مشترک باشد، یعنی $B_1 = B_2 = \cdots = B_q = B$، در این حالت قضایای قضیه **۹-۷** و قضیه **۹-۸** به ترتیب به صورت زیر ساده می‌شوند.

قضیه فرعی ۱ : اگر داشته باشیم $B_1 = B_2 = \cdots = B_q = B$، نقطه تعادل سیستم کنترل فازی (۹-۵۸) در همه فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس P مثبت معین مشترک وجود داشته باشد، که شرط اول قضیه ۹-۷ یعنی رابطه (۹-۶۰) را ارضا نماید.

قضیه فرعی ۲ : در شرایطی که داشته باشیم $B_1 = B_2 = \cdots = B_{q-i} = B$، نقطه تعادل سیستم کنترل فازی (۹-۵۹) در همه فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس P مثبت معین مشترک وجود داشته باشد، که شرط اول قضیه ۹-۸ یعنی رابطه (۹-۶۲) را ارضا نماید.

به عبارت دیگر، وقتی B مشترک است، از رابطه اول قضیه ۹-۷ یعنی از رابطه ${G_{ij}}^T P + P G_{ij} < 0$، رابطه دوم قضیه ۹-۷ استنتاج می‌شود.

$$\frac{(G_{ij} + G_{ij})^T}{2} P + P \frac{(G_{ij} + G_{ij})}{2} \le 0$$

همچنین از رابطه اول قضیه ۹-۸ یعنی از رابطه ${G_{ii}}^T P G_{ii} - P < 0$، رابطه دوم قضیه ۹-۸ یعنی رابطه زیر استنتاج می‌شود.

$$\frac{(G_{ij} + G_{ij})^T}{2} P \frac{(G_{ij} + G_{ij})}{2} - P \le 0$$

برای بررسی پایداری سیستم کنترل فازی، بررسی‌ها و حاصل تحقیقات نشان می‌دهد، یافتن یک ماتریس P مثبت معین مشترک که شرایط قضایای قضیه **۹-۵** تا قضیه **۹-۸** را برآورده کند، کار پیچیده‌ای است. بعضی از محققین [؟؟] [4,7,9] روش‌های سعی وخطا را برگزیده اند. در مرجع [؟؟] [19]، برای سیستم‌های کنترل فازی رسته دو، روشی برای تعیین P مشترک ارائه شده است. اولین بار ونگ و تاناکا [؟؟] [11,12,17] نشان دادند که، تعیین P مشترک در طراحی کنترل‌کننده فازی را می‌توان بصورت یک مسئله محاسبات عددی حل کرد. یعنی شرایط پایداری قضایای قضیه **۹-۵** تا قضیه **۹-۸** را می‌توان بصورت LMI بیان و حل نمود. به‌طور نمونه، برای تعیین پایداری قضیه ۹-۷ ما باید P را چنان پیدا کنیم که در روابط LMI زیر صدق کند.

$$P > 0, \qquad {G_{ii}}^T P + P G_{ii} < 0$$
$$\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}^T P + P \frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \leq 0, \qquad i < j \quad s.t \quad h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

و یا اینکه نشان دهیم چنین P وجود ندارد. این یک مسئله **تحقق‌پذیری محدب** است. همان طورکه درقسمت ۲ ؟؟ نشان داده شد، این مسئله را می‌توان بصورت عددی حل کرد.

۹-۳-۲- شرایط پایداری نرم شده

دیدیم که تحلیل پایداری سیستم‌های کنترل فازی به تعیین یک P مشترک انجامید. اگر q یعنی تعداد قوانین اگر-آنگاه فازی بزرگ باشد، یافتن P مشترک که در قضایای قضیه **۹-۷** یا قضیه **۹-۸** صدق کند مشکل است. در این بخش شرایط پایداری دیگری را با ملایم‌سازی قضایای قضیه **۹-۷** و قضیه **۹-۸** ارائه می‌کنیم. قضایای قضیه **۹-۹** و قضیه **۹-۱۰** شرایط پایداری نرم شده را ارائه می‌کند [؟؟] [1,2,3].

پیش از ارائه قضایای قضیه **۹-۹** و قضیه **۹-۱۰** دو قضیه فرعی را بیان می‌کنیم.

قضیه فرعی ۳ : نامساوی زیر به ازای $\sum_{i=1}^{q} h_i(z(t)) = 1$ و $h_i(z(t)) \geq 0$ برای تمامی مقادیر i صادق است.

$$\sum_{i=1}^{q} h_i^2\big(z(t)\big) - \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q} 2h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)$$
$$= \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q} = \frac{1}{q-1} \ \{h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)\}^2 \ \geq 0$$

قضیه فرعی ۴ : اگر تعدا قوانینی که برای همه زمان‌ها فعال می‌شوند، کمتر یا مساوی S باشد، که در آن $1 < S \leq q$، آنگاه به ازای $\sum_{i=1}^{q} h_i(z(t)) = 1$ و $h_i\big(z(t)\big) \geq 0$ برای همه iها داریم،

$$\sum_{i=1}^{q} h_i^2\big(z(t)\big) - \frac{1}{q-1}\sum_{i=1}^{q}\sum_{i<j}^{q} 2h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big) \geq 0$$

اثبات : با توجه به قضیه فرعی ۳ بدیهی است.

با این مقدمات، قضایای قضیه **۹-۹** و قضیه **۹-۱۰** را که به ترتیب برای سیستم‌های پیوسته وگسسته فازی است، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۹-۹ [CFS] : فرض کنید که تعداد قوانین فازی فعال شده در همه زمان‌ها کمتر یا مساوی S باشد که داریم،

$$1 < S \leq q$$

نقطه تعادل سیستم کنترل فازی پیوسته‌ای که با معادله (۹-۵۸) داده شده در همه فضای حالت پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس P مشترک مثبت معین وجود داشته باشد و همچنین یک ماتریس Q مشترک مثبت نیمه معین نیز وجود داشته باشد، به‌طوری که برای $S > 1$،

$$G_{ii}{}^{T} P + P G_{ii} + (S-1)Q < 0 \qquad (۹-۶۴)$$

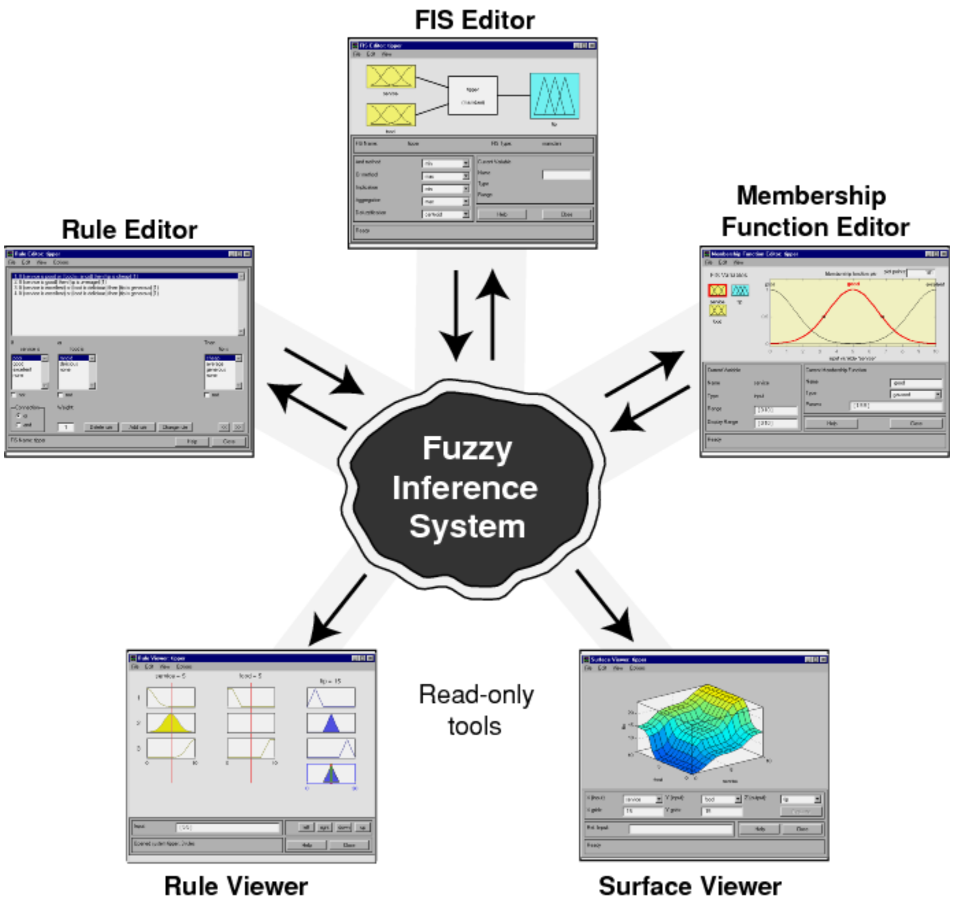
$$\frac{(G_{ij} + G_{ji})^{T}}{2} P + P \frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} - Q \leq, \qquad i < j \; s.t \; h_i \cap h_j \neq \emptyset \qquad (۹-۶۵)$$

قضیه ۹-۱۰ [DFS] :

پیوست الف) ساخت سیستم‌ها با استفاده از جعبه ابزار منطق فازی

در اینجا شیوه ساخت سیستم‌های فازی با استفاده از واسط کاربری گرافیکی (GUI) فراهم شده برای جعبه ابزار منطق فازی، در قالب نمونه محاسبه میزان انعام، بیان می‌شود. علاوه بر کار با GUI امکان کار با جعبه ابزار منطق فازی به صورت مستقیم از خط فرمان نیز وجود دارد، گرچه ساختن سیستم‌ها با استفاده از GUI ساده تر است. پنج ابزار گرافیکی در GUI برای ساخت، ویرایش، و مشاهده سیستم‌های استنتاج فازی در جعبه ابزار منطق فازی تعبیه شده است : ویرایشگر سیستم استنتاج فازی یا ویرایشگر FIS، ویرایشگر توابع عضویت، ویرایشگر قوانین، نمایشگر قوانین و نمایشگر رویه. این GUIها با یکدیگر پیوند داشته، و تغییراتی که با استفاده از یکی از آنها در FIS ایجاد می‌کنید، در دیگر GUIها نیز اعمال می‌شود. می‌توان یکی یا همه این GUIها را برای یک سیستم به صورت هم زمان باز کرد.

افزون‌براین، GUIهای اصلی، این جعبه ابزار شامل ویرایشگر گرافیکی ANFIS نیز هست، که برای ساخت و تحلیل سیستم‌های استنتاج فازی عصبی تطبیقی نوع سوگینو بکار می‌رود. GUI ویرایشگر ANFIS نیز در پیوست ب توضیح داده می‌شود.

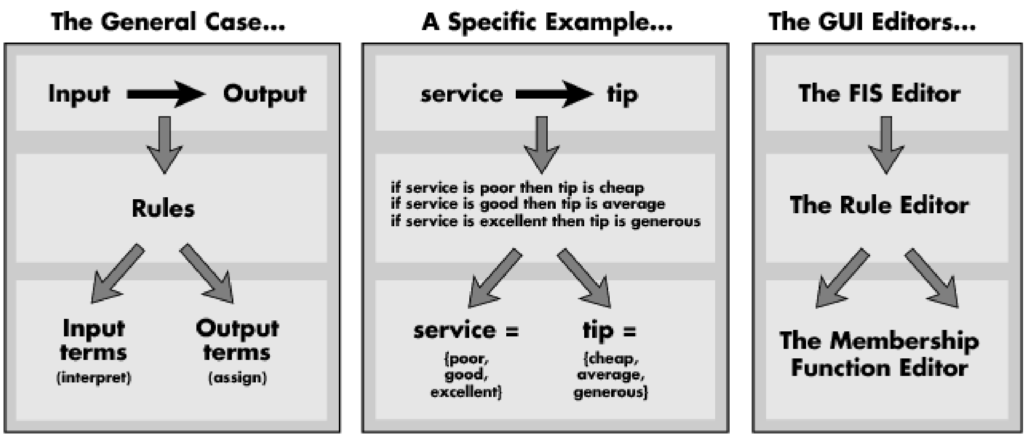


ویرایشگر FIS، به مسایل سطح بالای سیستم رسیدگی می‌کند: چند متغیر ورودی و خروجی وجود دارد؟ نام‌های آنها چیست؟ جعبه ابزار منطق فازی تعداد ورودی‌ها را محدود نکرده است. اما، تعداد ورودی‌ها ممکن است توسط میزان حافظه رایانه مورد استفاده، محدود گردد. همچنین، اگر تعداد ورودی‌ها، یا تعداد توابع عضویت زیاد باشد، ممکن است تحلیل FIS توسط دیگر GUIها سخت شده و با مشکل روبرو شوند.

ویرایشگر توابع عضویت برای تعریف شکل توابع عضویت مربوط به هر متغیر بکار می‌رود. ویرایشگر قوانین برای ویرایش لیست قوانین، که رفتار سیستم را تعریف می‌کنند، استفاده می‌گردد. نمایشگر قوانین و نمایشگر رویه، برای دیدن FIS و نه ویرایش آن بکار می‌روند. این GUIها تنها خواندنی هستند. نمایشگر قوانین به عنوان ابزاری برای دیدن طرز کار قوانین، استفاده می‌شود، که برای نمونه کدام قوانین فعال هستند، یا اینکه شکل هر کدام از توابع عضویت چگونه بر نتایج تاثیر می‌گذارند.

نمایشگر رویه، برای دیدن وابستگی یکی از خروجی‌ها به هر کدام از ورودی‌ها (نمودار دو بُعدی) یا دو تا از ورودی‌ها (نمودار سه بُعدی) است، یعنی نگاشت به خروجی را برای سیستم تولید و رسم می‌کند.

در این جا در قالب یک نمونه، بخش‌های اصلی سیستم استنتاج فازی و کار با GUIها را بررسی می‌کنیم.



پنج GUI اصلی با یکدیگر تعامل و تبادل اطلاعات دارند. همگی آنها می‌توانند به workspace یا حافظه رایانه بنویسند، یا از آن بخوانند. برای هر سیستم استنتاج فازی، هر کدام یا همگی GUIها را می‌توان هم زمان باز کرد. اگر بیش از یکی از آنها برای یک سیستم باز باشد، هر کدام از پنجره‌های GUI از دیگری آگاهی داشته و در صورت نیاز پنجره خود را به هنگام می‌سازند. بنابراین برای نمونه اگر با استفاده از ویرایشگر توابع عضویت نام‌ها تغییر داده شود، این تغییر در قوانین نشان داده شده در ویرایشگر قوانین نیز بازتاب می‌یابد. هم چنین GUIها می‌توانند برای هر تعداد از سیستم‌های FIS متفاوت نیز به طور هم زمان باز باشند. ویرایشگر FIS، ویرایشگر توابع عضویت و ویرایشگر قوانین می‌توانند FIS را خوانده و یا تغییر دهند، اما نمایشگر قوانین و نمایشگر رویه نمی توانند در FIS تغییری ایجاد کنند.

شروع به کار

با توصیف نمونه محاسبه میزان انعام، که دو ورودی و یک خروجی دارد، شروع می‌کنیم.

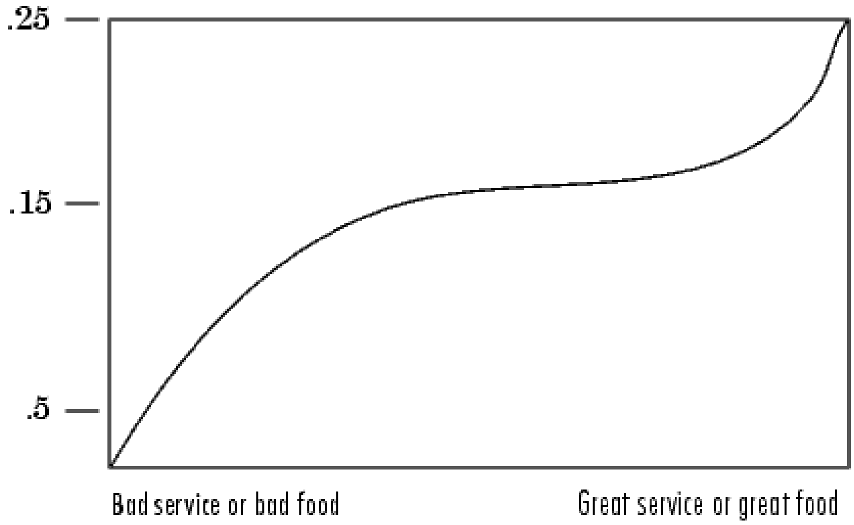
نمونه ساده محاسبه میزان انعام

با اختصاص عددی بین 0 و 10 برای بیان کیفیت خدمات ارائه شده در یک رستوران (که 10 به معنای عالی است)، و اختصاص عددی بین 0 و 10 برای بیان کیفیت خوراک ارائه شده در آن رستوران (که 10 به معنای عالی است)، انعام باید چه میزانی داشته باشد؟

به عنوان شروع می‌توان سه قانون زیر را برای محاسبه میزان انعام بیان کرد :

۱. اگر خدمات ضعیف یا خوراک ناخوشایند باشد، آنگاه انعام کم خواهد بود.
۲. اگر خدمات خوب باشد، آنگاه انعام متوسط است.
۳. اگر خدمات عالی باشد یا خوراک بسیار خوشمزه باشد، آنگاه انعام زیاد خواهد بود.

فرض می‌کنیم که انعام متوسط %15، انعام زیاد %25، و انعام کم %5 است. همچنین مفید خواهد بود تا ببینیم که تابع میزان انعام چه شکلی دارد.

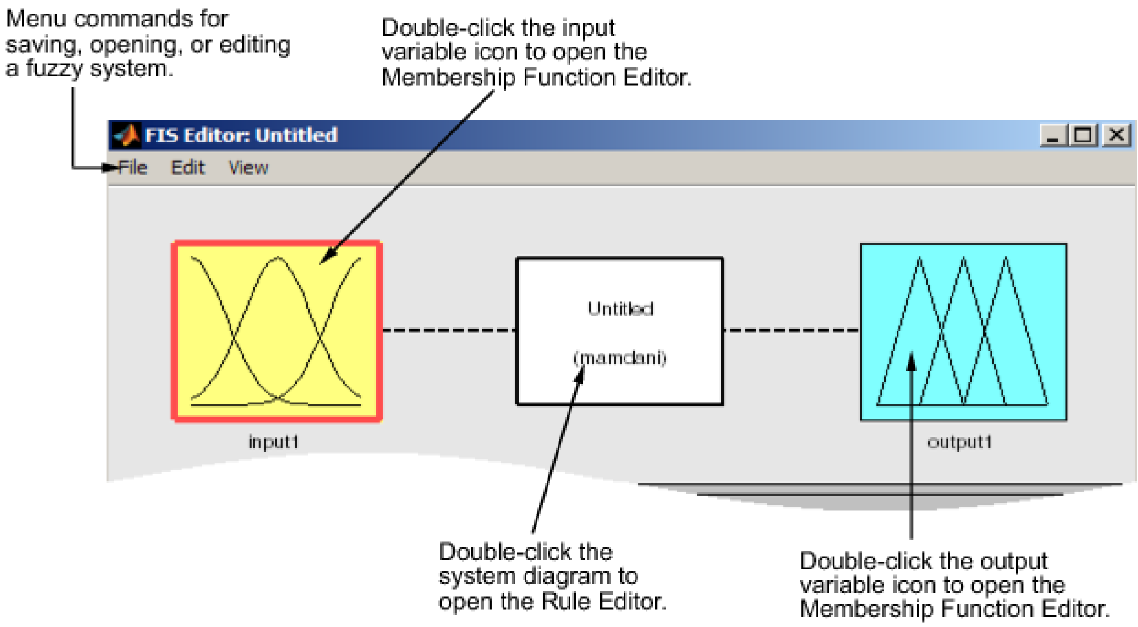


آشکار است که شکل منحنی به سنت، فرهنگ و دیگر عوامل مطرح در هر منطقه وابسته است، اما این سه قانون به طور کلی در همه جا یکسان است.

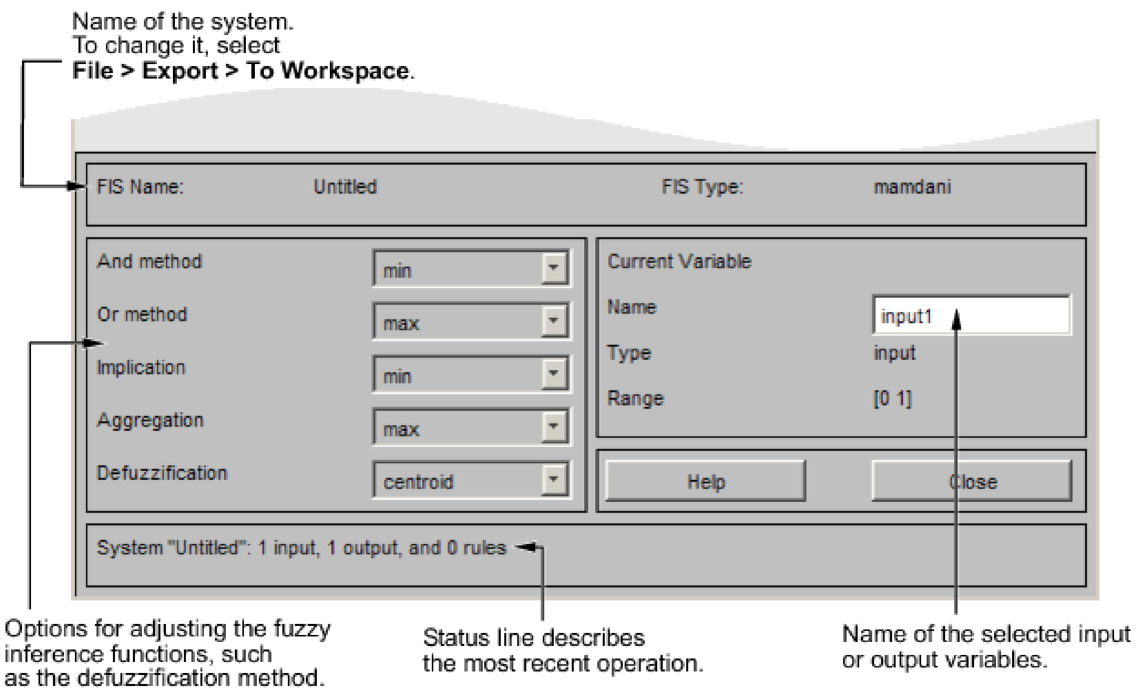
حال قوانین را داریم و می‌دانیم که شکل خروجی باید چگونه باشد. پس برای این فرآیند تصمیم گیری با استفاده از ابزارهای GUI یک سیستم استنتاج فازی می‌سازیم.

ویرایشگر FIS

ویرایشگر FIS اطلاعاتی را درباره یک سیستم استنتاج فازی نمایش می‌دهد. برای باز کردن ویرایشگر FIS، در خط فرمان MATLAB دستور `fuzzy` را بنویسید. ویرایشگر FIS باز شده و همانطور که در شکل زیر آورده شده است، سیستم فازی را با نام متغیرهای ورودی در چپ، و متغیرهای خروجی در راست نمایش می‌دهد. توابع عضویت نشان داده شده تنها آیکون هستند و شکل واقعی توابع عضویت را بیان نمی کنند.



در زیر نمودار، نام سیستم و نوع استنتاج بکار رفته قرار دارد.

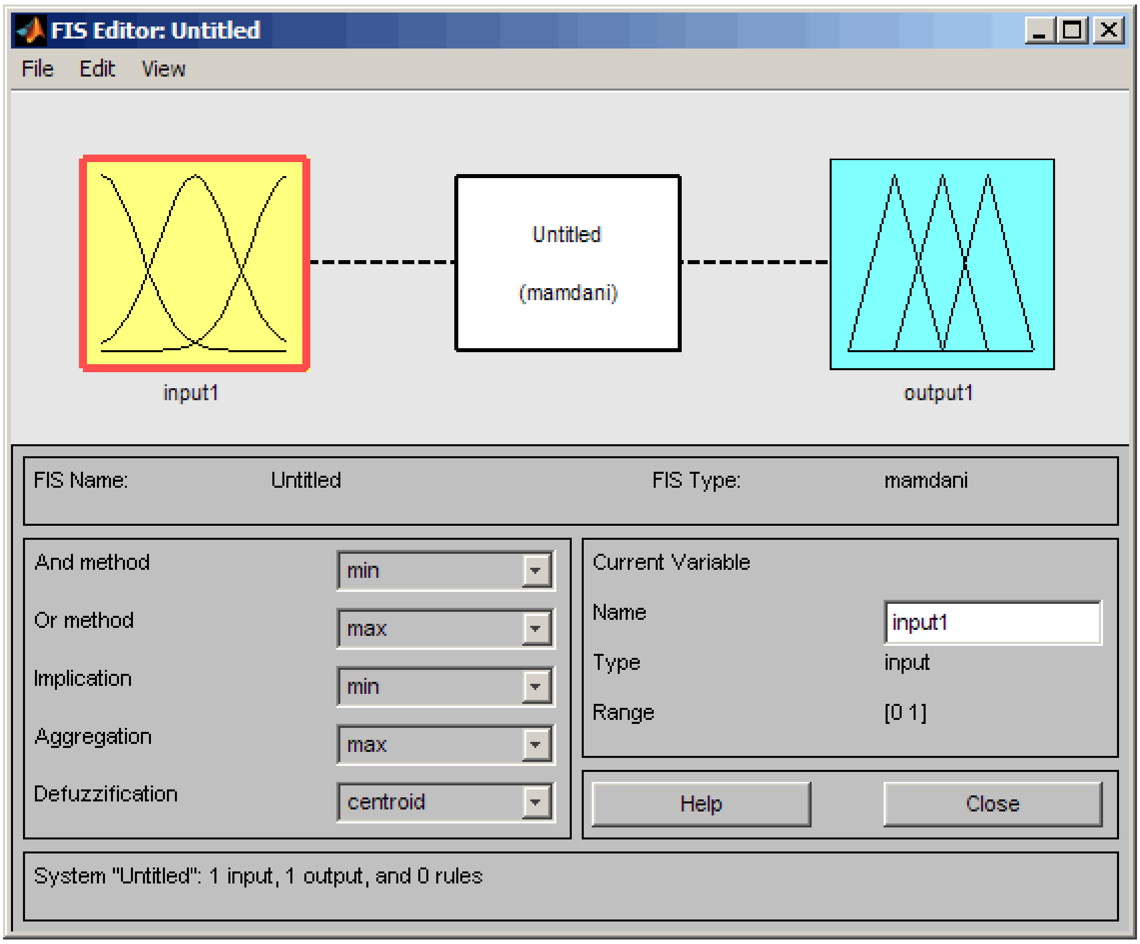


در این نمونه، از سیستم استنتاج پیش فرض نوع ممدانی بهره می‌گیریم. نوع دیگر سیستم استنتاج نوع سوگینو است. در زیر و سمت چپ، منوهایی وجود دارد، که می‌توانیم اجزای مختلف فرایند استنتاج را تعیین کنیم. در سمت راست نیز بخشی وجود دارد که نام هر کدام از متغیرها، نوع ورودی یا خروجی هر متغیر، و محدوده فضای مرجع هر کدام را نشان می‌دهد. در پایین پنجره نواری قرار دارد، که اطلاعاتی در مورد تازه ترین عمل انجام شده می‌دهد.

برای ساخت سیستم نمونه، دستور زیر را در خط فرمان می‌نویسیم

```
fuzzy
```

یک ویرایشگر FIS بدون عنوان باز می‌شود، که یک ورودی input1، و یک خروجی output1 دارد.



نکته : برای باز کردن ویرایشگر FIS با سیستم استنتاج فازی پیش ساخته که در tipper.fis ذخیره شده است، نویسید

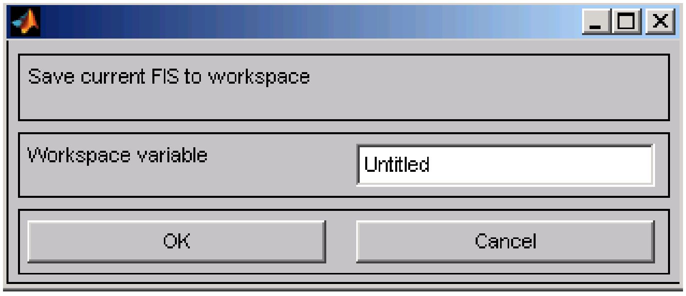
```
fuzzy tipper
```

در صورت استفاده از سیستم پیش ساخته، دیگر نیازی نیست تا خودتان قوانین یا توابع عضویت را بسازید.

در این نمونه، سیستمی با دو ورودی و یک خروجی خواهید ساخت. دو ورودی service (کیفیت خدمات) و food (کیفیت خوراک) هستند. خروجی نیز tip (میزان انعام) است.

برای افزودن متغیر ورودی دوم، و تغییر نام ورودی‌ها گام‌های زیر را انجام دهید:

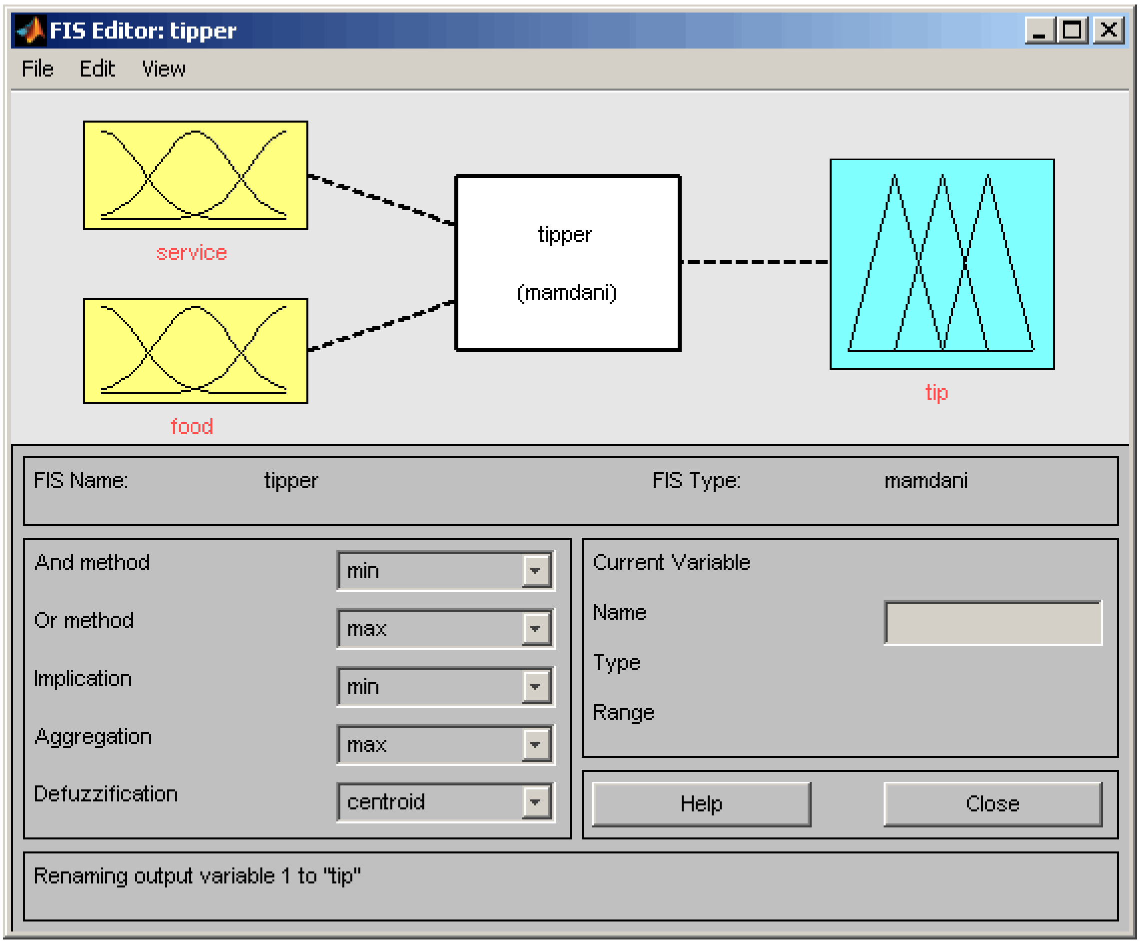
۱. انتخاب کنید Edit> Add variable> Input. یک جعبه زرد دیگر با نام input2 ایجاد می‌شود.
۲. جعبه زرد input1 را انتخاب کنید. جعبه انتخاب شده با کرانه قرمز مشخص می‌شود.
۳. در بخش Name، نام را از input1 به service تغییر داده و Enter را فشار دهید.
۴. جعبه زرد input2 را انتخاب کنید. جعبه انتخاب شده با کرانه قرمز مشخص می‌شود.
۵. در بخش Name، نام را از input2 به food تغییر داده و Enter را فشار دهید.
۶. جعبه آبی output1 را انتخاب کنید.
۷. در بخش Name، نام را از output1 به tip تغییر داده و Enter را فشار دهید.
۸. انتخاب کنید File> Export> To Workspace.



۹. در Workspace variable نام را tipper وارد کرده و OK را انتخاب کنید.

شکل سیستم به هنگام می‌شود تا نام‌های تازه متغیرهای ورودی و خروجی را بازتاب دهد. متغیر تازه‌ای به نام tipper در workspace وجود خواهد داشت، که دربرگیرنده اطلاعاتی درباره این سیستم است. ذخیره سازی در workspace با نامی تازه، به کل سیستم نیز این نام را اختصاص می‌دهد. پنجره سیستم به صورت زیر خواهد بود.

تنظیمات استنتاج را مقادیر پیش فرض می‌گذاریم. همه اطلاعاتی مورد نیاز در این GUI را وارد کرده‌ایم. در ادامه، برای هر کدام از متغیرها توابع عضویت را تعریف می‌کنیم. برای این کار، ویرایشگر توابع عضویت را باز می‌کنیم.

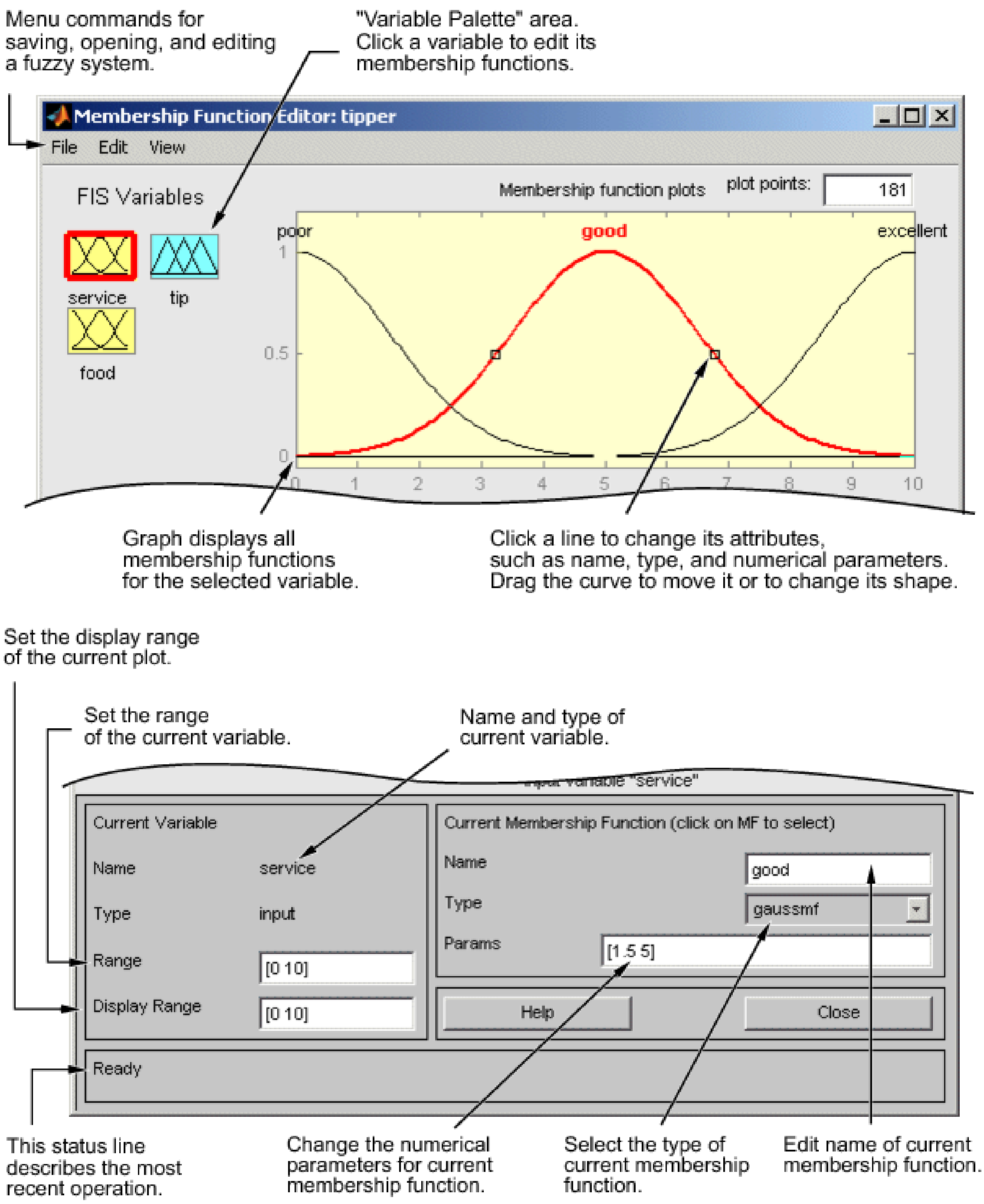


با هر کدام از سه روش زیر ویرایشگر توابع عضویت باز می‌شود.

- از راه پنجره ویرایشگر FIS، Edit> Membership Functions را انتخاب کنید.
- از راه پنجره ویرایشگر FIS، روی یکی از جعبه‌های آبی یا زرد متغیرهای خروجی یا ورودی دوبار کلیک کنید.
- در خط فرمان، دستور `mfedit` را بنویسید.

ویرایشگر توابع عضویت

ویرایشگر توابع عضویت ابزاری است که به شما امکان می‌دهد، تا توابع عضویت همه متغیرهای ورودی و خروجی کل سیستم استنتاج فازی را ببینید و ویرایش کنید. ویرایشگر توابع عضویت و ویرایشگر FIS برخی ویژگی‌های مشترک دارند، که در شکل دیده می‌شود. در حقیقت، همه پنج GUI اصلی منوهای تنظیمات مشابه، نوار وضعیت، و دکمه‌های Help و Close را دارند.



هنگامی که ویرایشگر توابع عضویت را باز می‌کنید، تا بر روی یک سیستم استنتاج فازی کار کنید که در workspace وجود ندارد، هیچ تابع عضویتی متناظر با متغیرهایی که در ویرایشگر FIS تعریف کرده‌اید وجود ندارد.

در بالا و سمت چپ ویرایشگر توابع عضویت، متغیرها قرار گرفته اند، که به شما امکان می‌دهد، برای هر کدام از متغیرها توابع عضویت را ویرایش کنید. برای این کار، هر کدام از آنها را انتخاب کنید، تا توابع مربوط به آن متغیر نمایش داده شوند.

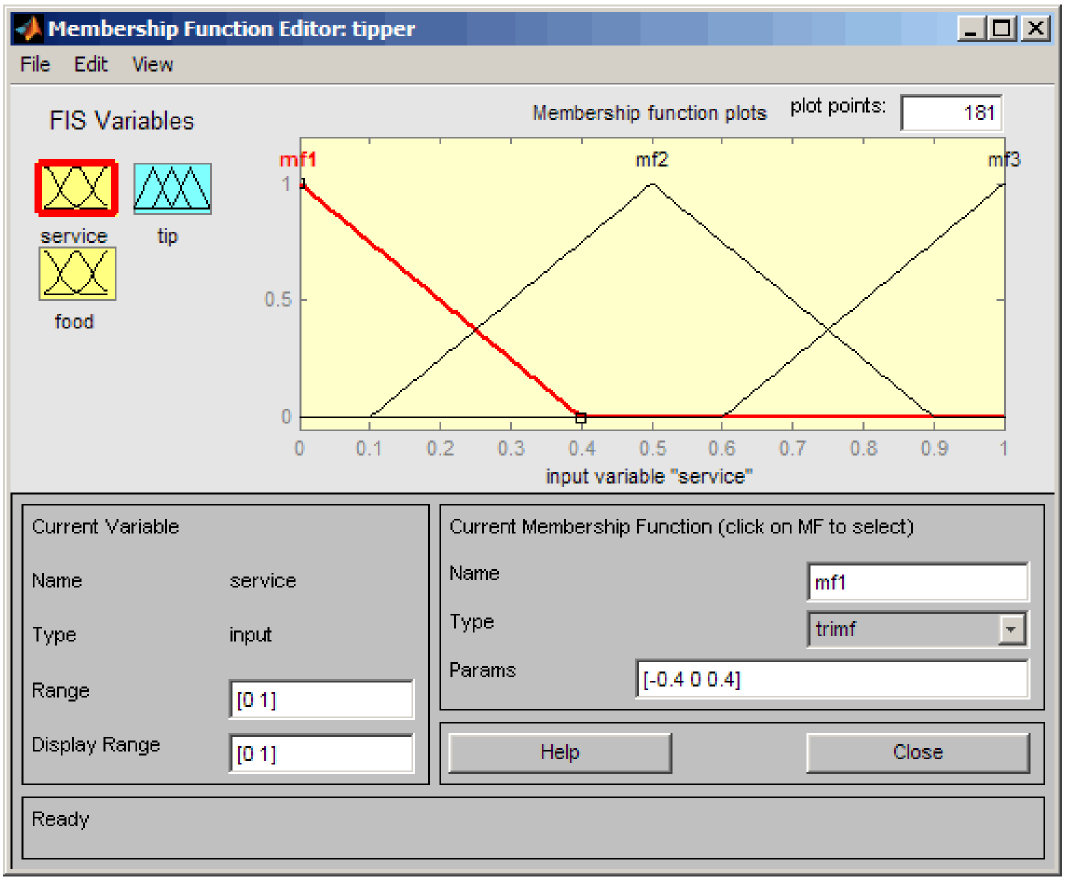
سپس از منوی Edit گزینه Add MFs را انتخاب کنید. پنجره جدیدی باز خواهد شد، که به شما امکان می‌دهد تا نوع و تعداد توابع عضویت مربوط به متغیری که انتخاب کرده‌اید را وارد کنید. در پایین و گوشه راست این پنجره، تنظیمات نام، نوع و پارامترهای (مربوط به هر منحنی)، تابع عضویت انتخابی وجود دارد.

در نمودار اصلی توابع عضویت متغیر انتخابی، نمایش داده می‌شود. این توابع عضویت را می‌توان از دو راه ویرایش کرد. نخست با استفاده از ماوس یک تابع عضویت را انتخاب و آن را جابجا کنید. همچنین با انتخاب و جابجا کردن مربع‌های کوچکی که روی تابع عضویت انتخابی وجود دارد، می‌توان آن تابع را متمرکز کرد یا انبساط داد. بدین ترتیب با تغییر گرافیکی توابع، مقادیر ریاضی توصیف کننده آن شکل نیز تغییر می‌کنند.

دوم از پایین و سمت چپ پنجره، که اطلاعاتی در مورد نوع و نام متغیر انتخابی وجود دارد. اینجا دو بخش برای وارد کردن محدوده متغیر انتخابی (فضای مرجع) و محدوده نمایش نمودار (که تاثیری بر سیستم ندارد) وجود دارد.

روند مشخص کردن توابع عضویت برای دو ورودی مربوط به نمونه محاسبه میزان انعام به صورت زیر است:

۱. روی متغیر service دوبار کلیک کنید تا ویرایشگر توابع عضویت باز شود.

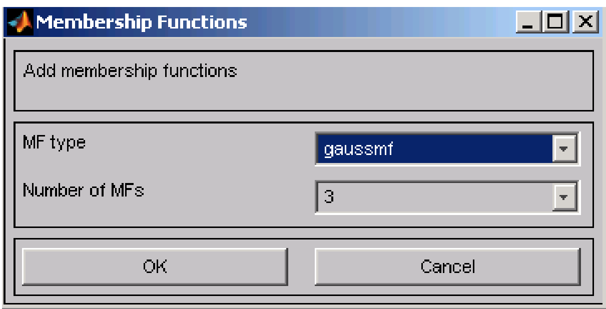


۲. در ویرایشگر توابع عضویت، بازه [0 10] را در بخش‌های Range و Display Range وارد کنید.

۳. توابع عضویت را برای متغیر ورودی service بسازید.

I. Edit> Remove All MFs را انتخاب کنید تا توابع عضویت پیش فرض متغیر ورودی service پاک شوند.

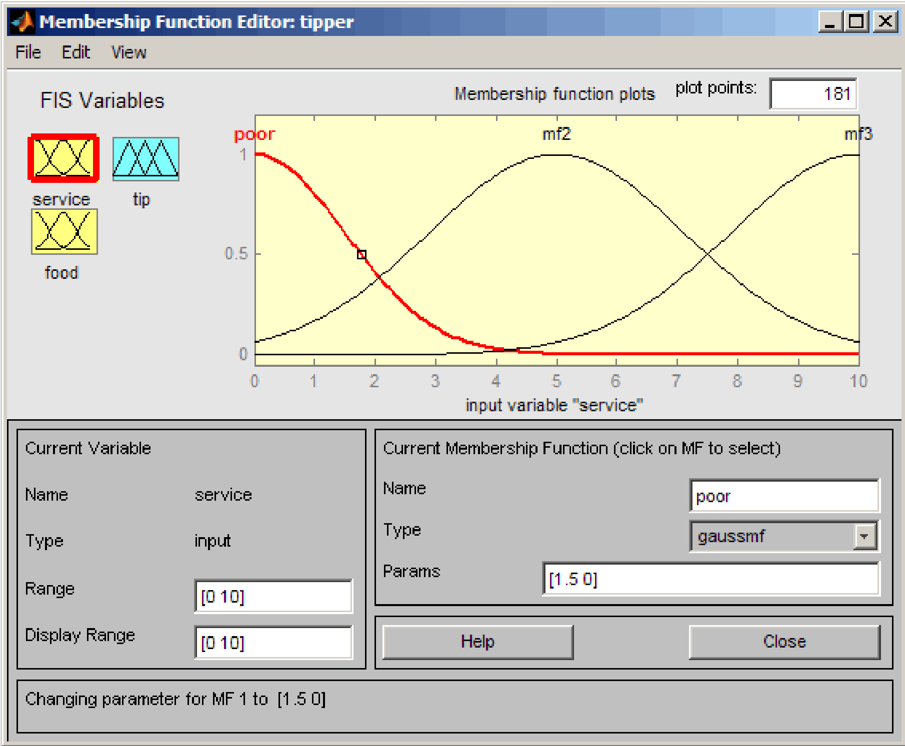
II. Edit> Add MFs را انتخاب کنید، تا پنجره ایجاد توابع عضویت باز شود.



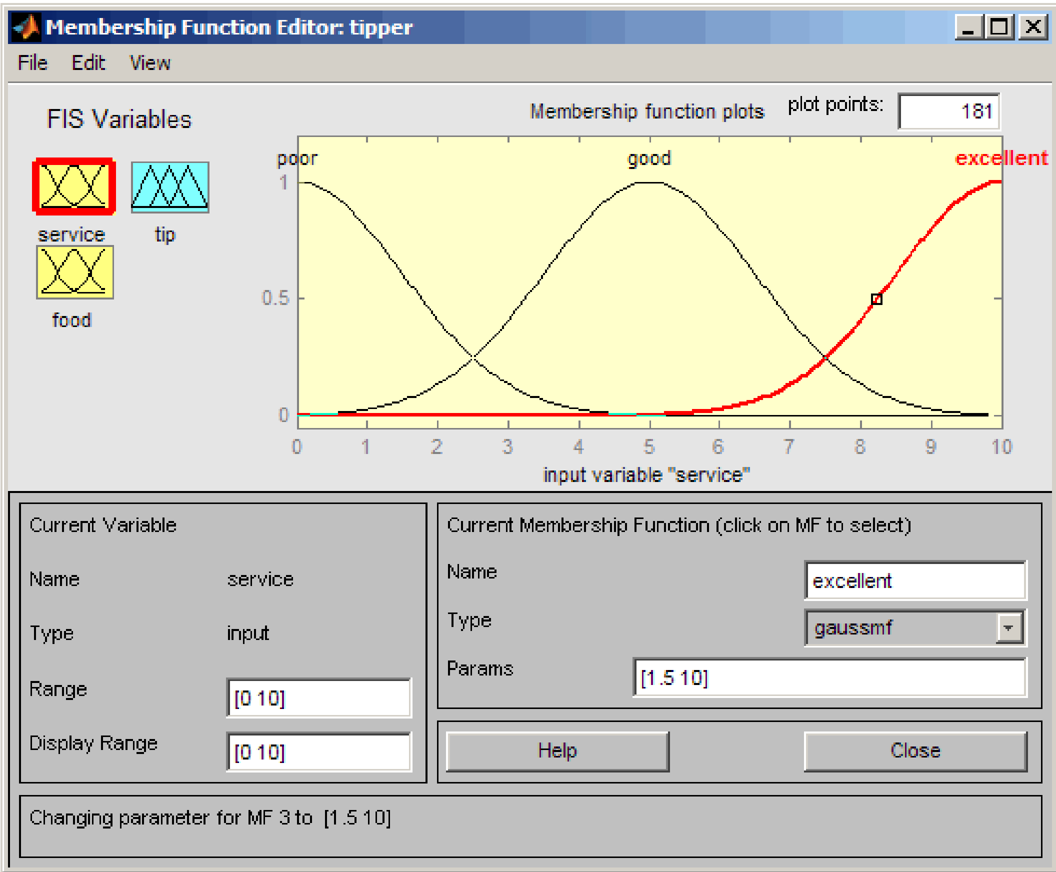
III. برای Number of MFs مقدار ۳ را قرار دهید.

IV. OK را بزنید تا سه تابع عضویت گوسی به متغیر ورودی service اضافه شود.

۴. توابع عضویت متغیر ورودی service را نام گذاری کرده و پارامترهای آن‌ها را مشخص کنید. منحنی سمت چپ را انتخاب کرده و نام آن را poor بگذارید. برای تنظیم شکل تابع عضویت، یا از ماوس استفاده کنید، یا پارامترها را وارد کرده و دوباره روی تابع عضویت کلیک کنید. مقادیر پیش فرض پارامترها [1.5 0] است.



۵. منحنی میانی را، good و منحنی راست را exellent نام بگذارید. در صورت نیاز پارامترهای آنها را نیز تغییر دهید.



۶. متغیر input را با کلیک روی food انتخاب کنید. هر دوی Range و Display Range را بردار [0 10] قرار دهید.

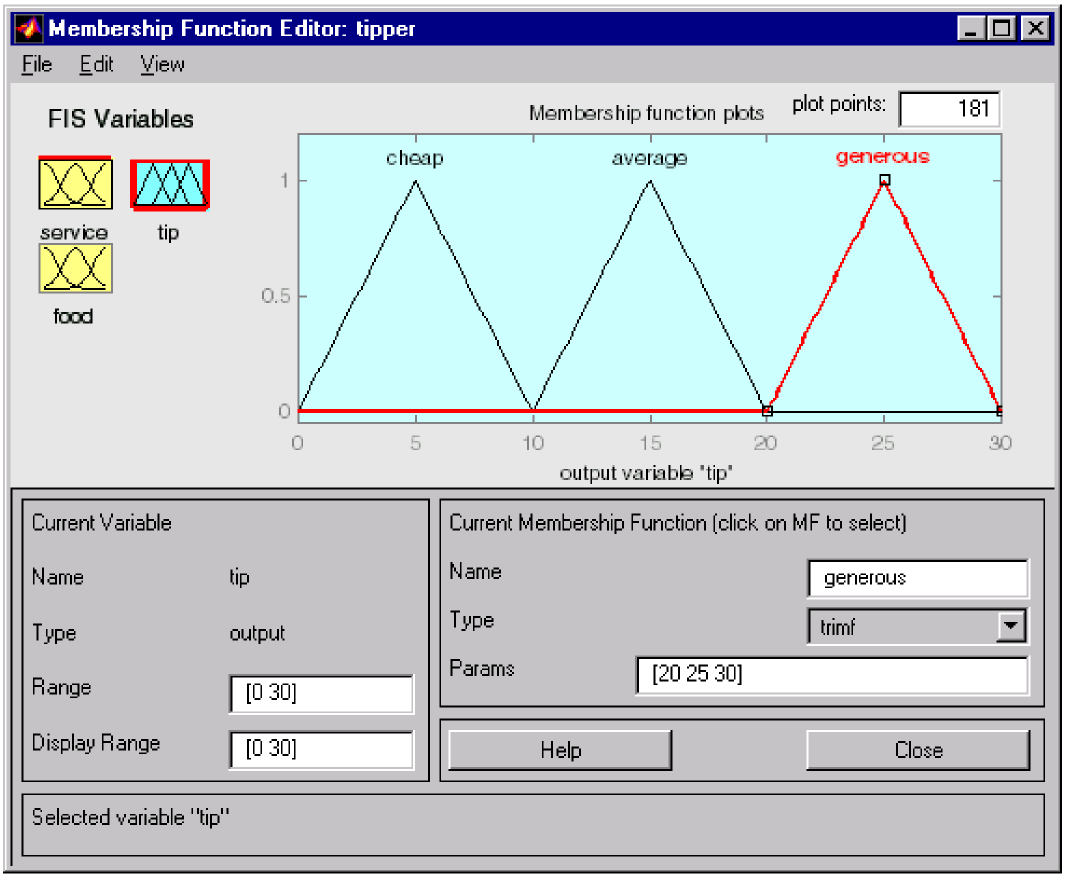
۷. Add MFs را از منوی Edit انتخاب کرده و دو منحنی trapmf به متغیر ورودی food اضافه کنید.

۸. یک بار روی ذوزنقه چپ کلیک کنید. نام منحنی را rancid بگذارید. برای تنظیم شکل تابع عضویت، یا از ماوس استفاده کنید یا پارامترها را وارد کرده و دوباره روی تابع عضویت کلیک کنید. مقادیر پیش فرض پارامترها [0 0 1 3] است.

۹. نام ذوزنقه راست را delicious بگذارید، و در صورت نیاز پارامترهای آن را تغییر دهید.

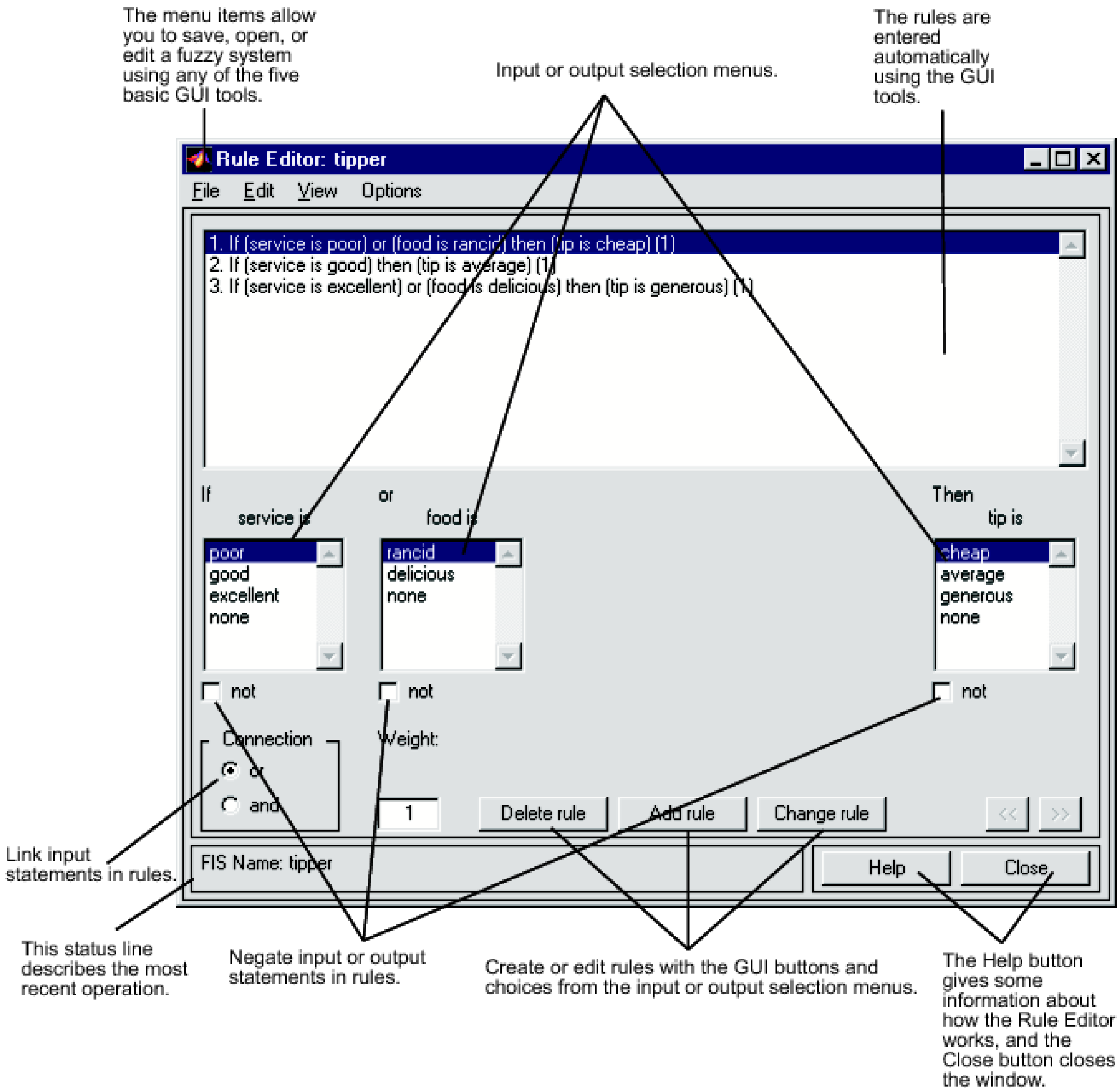
سپس باید توابع عضویت متغیر خروجی tip را بسازیم. برای ساختن توابع عضویت متغیر خروجی، از بالا و سمت چپ، متغیر خروجی tip را انتخاب کنید. متغیرهای ورودی بین 0 تا 10 بودند، اما خروجی tip بین 5 و 25 درصد است.

از توابع عضویت مثلثی برای خروجی استفاده می‌کنیم. نخست Range و Display Range را برای پوشش فضای مرجع خروجی، [0 30] قرار دهید. تابع عضویت cheap پارامترهای [0 5 10]، تابع عضویت average پارامترهای [10 15 20]، و تابع عضویت generous پارامترهای [20 25 30] را دارند. سیستم بدست آمده، باید به صورت زیر باشد.



اکنون که متغیرها نام گذاری شده اند، و توابع عضویت نام و شکل مناسب را دارند، آماده‌ایم تا قوانین را بنویسیم. برای باز کردن ویرایشگر قوانین، به منوی Edit رفته و Rules را انتخاب کنید یا در خط فرمان دستور `ruleedit` را بنویسید.

ویرایشگر قوانین



ساخت قوانین با استفاده از واسط گرافیکی ویرایشگر قوانین بسیار واضح است. براساس متغیرهای ورودی و خروجی تعریف شده در ویرایشگر FIS، ویرایشگر قوانین به شما اجازه می‌دهد، تا عبارات قانون را به صورت خودکار بنویسید. با استفاده از GUI شما می‌توانید :

- قوانین را با انتخاب هر متغیر از جعبه ورودی و خروجی، انتخاب یک گزینه Connection، و کلیک روی دکمه Add Rule بسازید.
- یک قانون را با انتخاب و کلیک روی دکمه Delete Rule حذف کنید.

- برای یک قانون با نوشتن عددی بین 0 و 1 در Weight، وزن اختصاص دهید. اگر وزنی مشخص نکنید، فرض می‌شود که برابر (1) است.
- انتخاب not زیر نام هر کدام از متغیرها، آن کمیت را متمم می‌کند.

ویرایشگر قوانین نیز منوهایی مشابه ویرایش گرهای FIS و توابع عضویت دارد. منوی Options> Format برای تنظیم نوع نمایش بکار می‌رود. همچنین از Options> Language می‌توان زبان را نیز تغییر داد.

برای وارد کردن قانون یکم در ویرایشگر قوانین موارد زیر را انتخاب کنید،

- Poor از متغیر service.
- Rancid از متغیر food
- گزینه or در بلوک Connection
- Cheap از متغیر tip

سپس روی Add rule کلیک کنید.

قانون نوشته شده به صورت زیر است.

1. If (service is poor) or (food is rancid) then (tip is cheap) (1)

عدد داخل پرانتز، وزن قانون را نشان می‌دهد.

به طور مشابه قوانین دوم و سوم را نیز وارد کنید.

1. If (service is poor) or (food is rancid) then (tip is cheap) (1)
2. If (service is good) then (tip is average) (1)
3. If (service is excellent) or (food is delicious) then (tip is generous) (1)

توجه کنید که در قانون دوم برای متغیر food، باید گزینه none انتخاب شود.

نکته : برای تغییر یک قانون نخست روی آن کلیک کنید. سپس تغییرات لازم برای آن قانون را انجام دهید و پس از آن دکمه Change rule را بزنید. برای نمونه، به منظور تغییر قانون یکم به

1. If (service not poor) or (food not rancid) then (tip not cheap) (1)

گزینه not زیر هر کدام از قوانین را انتخاب کرده، سپس روی Change rule کلیک کنید.

منوی Options> Format نشان می‌دهد، که قوانین را به صورت verbose می‌بینیم. با تغییر آن به symbolic قوانین نوشته شده به صورت زیر نمایش می‌یابند.

1. (service==poor) | (food==rancid) => (tip=cheap) (1)
2. (service==good) => (tip=average) (1)
3. (service==excellent) | (food==delicious) => (tip=generous) (1)

این سبک نمایش در ظاهر تفاوت زیادی ندارد، اما بیانی ساده تر دارد، چون به عباراتی مانند اگر و آنگاه وابسته نیست. اگر Options> Format را به indexed تغییر دهیم، نمایش فشرده‌ای از قوانین را خواهیم دید.

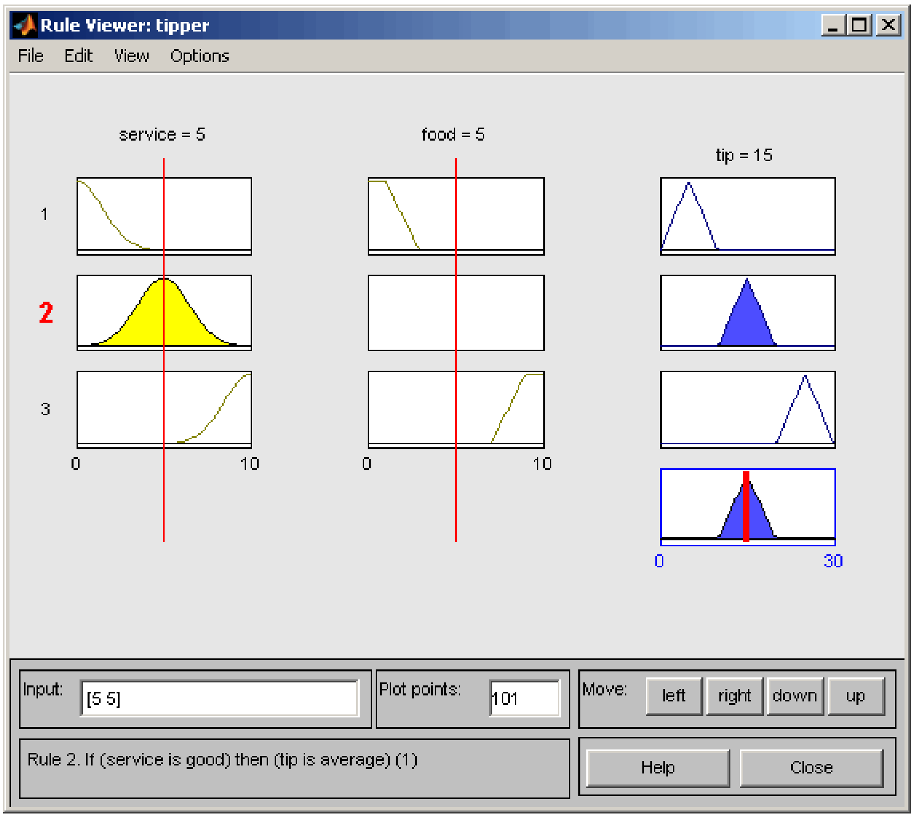
1. 1, 1 (1) : 1
2. 2, 2 (1) : 1
3. 3, 3 (1) : 1

این نوع نمایش در زبان ماشین و کُدنویسی استفاده می‌شود. ستون یکم در این ساختار نماینده متغیر یکم، ستون دوم نماینده متغیر خروجی، ستون سوم نماینده وزن هر قانون و ستون چهارم نشانه‌ای است که در این قانون (1) AND یا (2) OR بکار رفته است.

اعداد دو ستون نخست، به شماره اندیس تابع عضویت اشاره دارند. ترجمه نوشتاری قانون یکم بدین صورت است : "اگر ورودی یکم تابع MF1 (تابع عضویت یکم متناظر با ورودی یکم) باشد، آنگاه خروجی یکم باید تابع MF1 (تابع عضویت یکم متناظر با ورودی یکم) با وزن 1 باشد". چون این سیستم تنها یک ورودی دارد، اپراتور AND مشخص شده با 1 در ستون پایانی، تفاوتی ایجاد نمی کند.

کارایی سیستم به شیوه نام گذاری متغیرها و توابع عضویت وابستگی ندارد. بلکه نام گذاری مناسب، تنها تفسیر سیستم را برای خواننده ساده تر می‌سازد. بنابراین ساده تر است تا از نمایش verbose استفاده کنید.

تا به اینجای کار، سیستم استنتاج فازی، متغیرها، توابع عضویت، و قوانین لازم برای محاسبه خروجی به طور کامل تعریف شده اند. پس مناسب خواهد بود، اگر بتوانیم به کل رفتار سیستم تعریف شده نگاهی بیاندازیم و از صحت آن اطمینان حاصل کنیم. این هدف اصلی GUIهای نمایشگر قوانین و نمایشگر رویه است. برای باز کردن نمایشگر قوانین از منو View> Rules را انتخاب می‌کنیم.



نمایشگر قوانین طرز کار کلی فرآیند استنتاج فازی را نشان می‌دهد. این نمایشگر بر اساس تنظیمات سیستم استنتاج فازی که در ویرایشگر FIS تعریف کرده‌ایم، کار می‌کند. پنجره‌ای را می‌بینید که در آن ده نمودار قرار گرفته اند. سه نمودار بالایی مقدمه و نتیجه قانون یکم را نشان می‌دهند. هر قانون در یک ردیف و هر متغیر در یک ستون قرار دارد. شماره قانون در سمت چپ هر ردیف نمایش داده می‌شود. می‌توانید روی شماره هر قانون کلیک کنید، تا آن قانون را در نوار وضعیت ببینید.

- دو ستون اول نمودارها (شش نمودار زرد) توابع عضویت در مقدمه یا بخش If هر قانون را نشان می‌دهند.
- ستون سوم نمودارها (سه نمودار آبی) توابع عضویت در نتیجه یا بخش Then هر قانون را نشان می‌دهند.

  توجه کنید که برای متغیر food یک نمودار خالی وجود دارد. این نمودار انخاب none برای متغیر food در قانون دوم را بیان می‌دارد.
- نمودار چهارم در ستون سوم از نمودارها نتیجه کلی تصمیم گیری سیستم استنتاج را نشان می‌دهد. این تصمیم به مقادیر ورودی سیستم بستگی دارد. خروجی غیرفازی شده به صورت یک خط عمودی پررنگ روی نمودار نشان داده می‌شود.

متغیرها با مقادیر کنونی آنها در بالای ستون‌ها نشان داده می‌شوند. در پایین سمت چپ، بخش input وجود دارد، که می‌توانید یک مقدار مشخص را در آن وارد کنید. برای سیستم دو ورودی، برای نمونه می‌توان

بردار [9 8] را وارد کرد. هم چنین می‌توانید با کلیک روی هر کدام از نمودارها مقدار ورودی را تعیین کنید. این کار خط شاخص قرمز رنگ عمودی را جابجا می‌کند. با اعمال ورودی تازه، سیستم استنتاج عمل کرده و خروجی باز محاسبه می‌گردد.

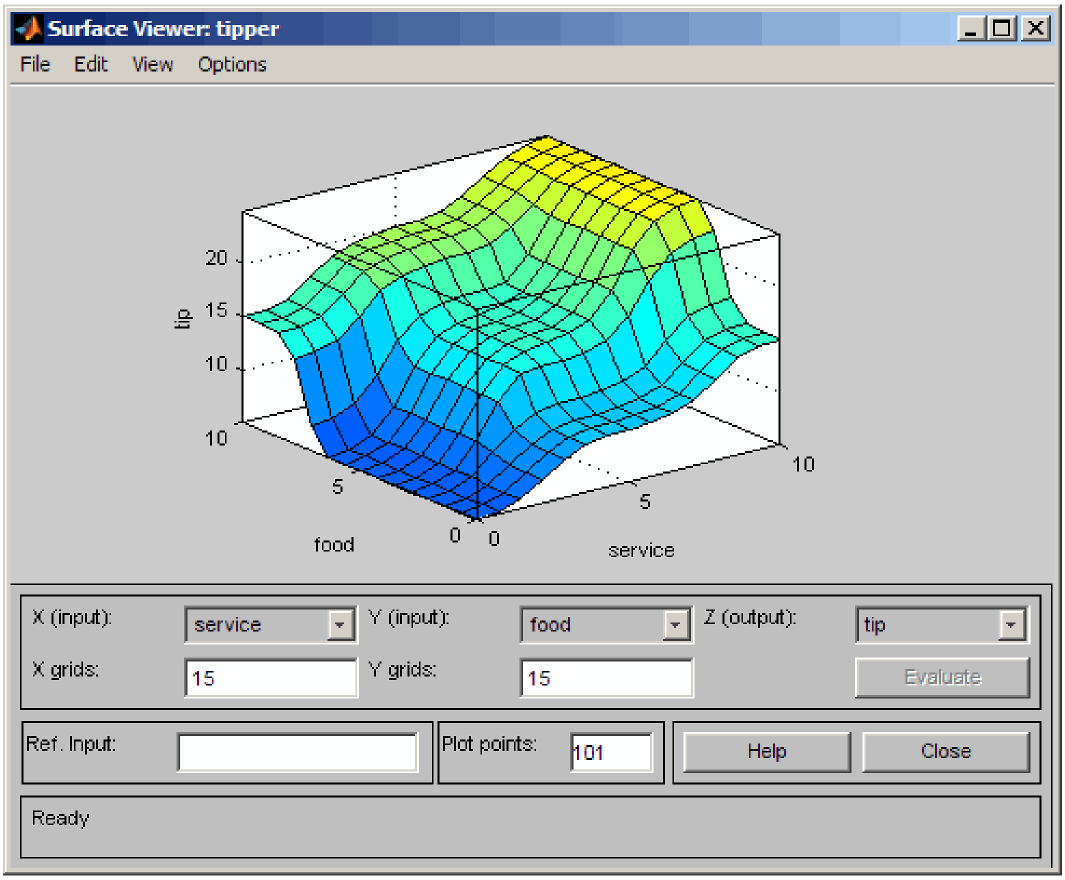
- جایی که خط شاخص متغیر service تابع عضویت poor را در نمودار بالا و چپ قطع می‌کند، نشان می‌دهد که این قانون به چه میزان فعال شده است.
- بخش زرد رنگ زیر منحنی تابع عضویت برای نمایش میزان فعالیت تابع عضویت را نشان می‌دهد.

می توانید نمودارها را با left، right، down و up جابجا کنید.

نمایشگر قوانین به شما امکان می‌دهد تا کل فرایند استنتاج فازی را یکجا بررسی کنید. نمایشگر قوانین همچنین نشان می‌دهد که چگونه شکل توابع عضویت روی نتیجه نهایی تاثیر می‌گذارد. چون همه مراحل هر قانون را نمایش می‌دهد، برای سیستم‌های بزرگ مناسب نیست اما به نسبت برای سیستم‌های با تعداد کم ورودی و خروجی با حدودا ۳۰ قانون و ۶ تا ۷ متغیر، به خوبی کار می‌کند.

نمایشگر قوانین، در هر زمان یک محاسبه را با جزئیات نشان می‌دهد. اما اگر لازم باشد تا به کل رویه خروجی سیستم (کل فضای پوشش داده شده خروجی بر حسب کل فضای ورودی) نگاهی بیاندازیم، باید از نمایشگر رویه استفاده کنیم. برای باز کردن نمایشگر رویه View> Surface را انتخاب کنید.

نمایشگر رویه



هنگامی که نمایشگر رویه را باز می‌کنید، یک منحنی سه بُعدی نمایش داده می‌شود که نگاشت food و service به مقدار tip را بیان می‌دارد. می‌توان کل نگاشت را در یک نمودار دید. هنگامی که به بیش از سه بُعد برای نمایش نیاز پیدا می‌شود برای نمایش نتایج با مشکل روبرو می‌شویم.

به همین دلیل، در نمایشگر رویه، منوهای :(X (input، :(Y (input و :(Z (output تعبیه شده اند، که به شما اجازه می‌دهد تا دو ورودی و یک خروجی دلخواه را برای نمایش انتخاب کنید. زیر این منوها دو بخش :X grids و :Y grids قرار دارد که به شما امکان می‌دهد تا تعداد خطوط شبکه بندی دلخواه خود را اعمال کنید. کاهش تعداد این خطوط زمان محاسبات لازم را برای سیستم‌های پیچیده، در حد مناسب نگه می‌دارد.

اگر نمودار نرم تری می‌خواهید، از بخش Plot points برای تعیین تعداد خطوطی که در محدوده ورودی و خروجی، در آنها توابع عضویت ارزیابی می‌شوند، استفاده کنید. مقدار این بخش به صورت پیش فرض 101 است.

با زدن دکمه Evaluate، محاسبات آغاز شده و پس از تکمیل رسم می‌شود. برای تغییر تعداد خطوط شبکه بندی محورهای X و Y رویه‌ای که نمایش داده می‌شود، بخش مربوطه را تغییر داده و Enter را بزنید.

نمودار رویه به هنگام خواهد شد. برای سیستم‌های با تعداد دو یا بیشتر ورودی، می‌توان با استفاده از ماوس زاویه نمایش رویه را تغییر داد.

بخش Ref. Input برای مواقعی بکار می‌رود که تعداد بیشتری از آنچه برای نگاشت رویه نمایش داده می‌شود داریم. با استفاده از این بخش می‌توانیم ورودی‌هایی که در رسم رویه در نظر گرفته نشده اند را مقدار دهیم.

در پایان این بخش، هنگامی که سیستم فازی را روی حافظه رایانه ذخیره می‌کنید، در واقع نمایشی از فایل FIS را به صورت فایل متنی ASCII با پسوند fis. ذخیره می‌کنید. این فایل متنی را می‌توان به سادگی خواند، فهمید و یا تغییر داد. هنگامی که سیستم فازی را در workspace ذخیره می‌کنید، در واقع متغیری (با نام انتخابی شما) ساخته می‌شود که به صورت یک structure برای سیستم فازی است. فایل‌های FIS و structureهای FIS یک سیستم معادل را نمایندگی می‌کنند و تفاوتی در سیستم ایجاد نمی کنند.

نکته : اگر سیستم را روی حافظه رایانه خود ذخیره نکنید، و تنها در workspace ذخیره کنید، با شروع دوباره نرم افزار، آن را از دست می‌دهید و نمی توانید بازیابی کنید.

پیوست ب) آموزش سیستم استنتاج فازی عصبی

شما می‌توانید سیستم‌های فازی نوع سوگینو را با استفاده از GUI ویرایشگر ANFIS بسازید، آموزش دهید، و آزمایش کنید. برای باز کردن GUI دستور زیر را در خط فرمان بنویسید

```
anfisedit
```

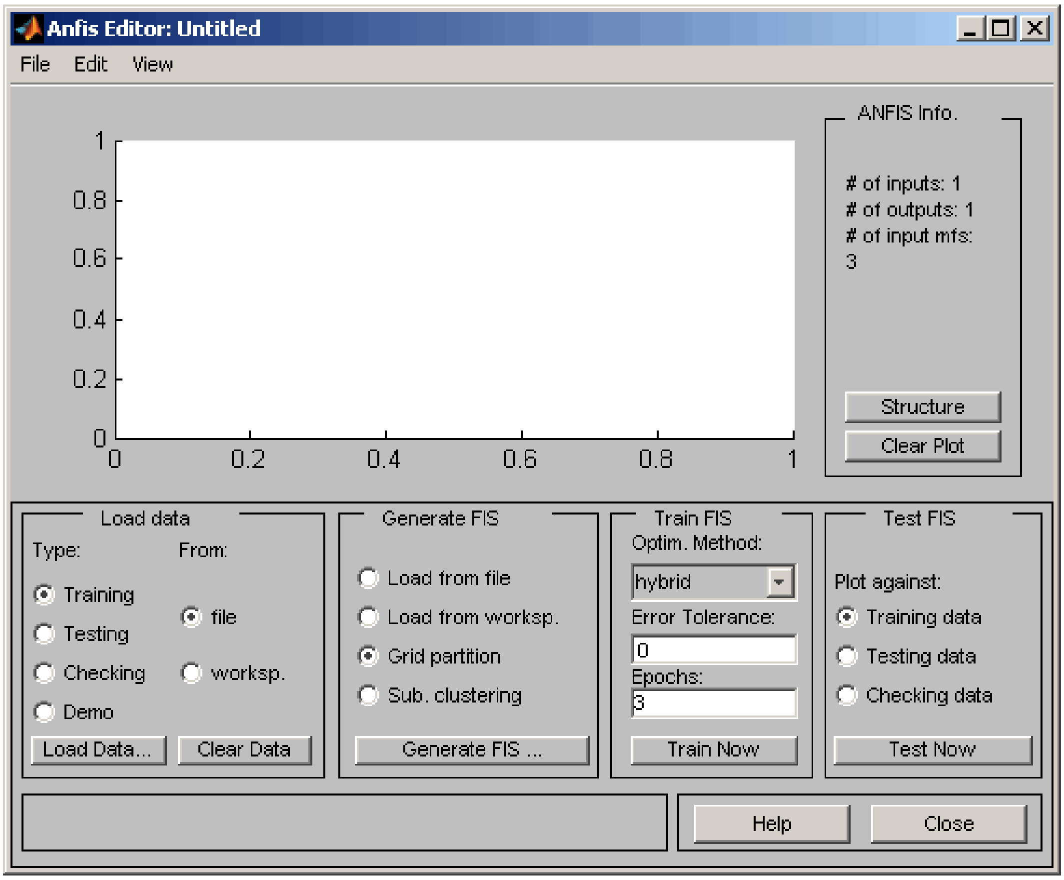
پنجره GUI ویرایشگر ANFIS که در شکل زیر نشان داده شده است، از چهار بخش تشکیل می‌شود. این GUI به شما امکان می‌دهد، تا کارهای زیر را انجام دهید :

۱. بارگذاری، رسم و پاک کردن داده‌ها

۲. ساخت یا بارگذاری ساختار اولیه FIS

۳. آموزش FIS

۴. ارزیابی FIS آموزش دیده



بارگذاری، رسم و پاک کردن داده‌ها

برای آموزش یک FIS، نخست باید داده‌های آموزش را که شامل داده‌های ورودی و خروجی مطلوب برای مدل سازی سیستم است را بارگذاری کنید. همچنین مجموعه داده‌ای که بارگذاری می‌شود باید آرایه‌ای با آرایش بردارهای ستونی از داده‌ها و داده خروجی در ستون پایانی باشد.

هم چنین می‌توانید داده‌های آزمایش و بررسی را نیز وارد GUI کنید. برای بارگذاری یک مجموعه داده از بخش Load Data استفاده کنید.

۱. نوع داده را مشخص کنید.

۲. داده‌ها را از یک فایل یا از workspace انتخاب کنید.

۳. روی دکمه Load Data کلیک کنید.

پس از بارگذاری، داده‌ها در نمودار رسم می‌شوند. داده‌های آموزش، آزمایش و بررسی به ترتیب به صورت دایره، لوزی و جمع به رنگ آبی نمایش داده می‌شوند.

برای پاک کردن یک مجموعه خاص از داده‌ها :

۱. در بخش Load Data نوع داده‌ها را مشخص کنید.

۲. دکمه Clear Data را بزنید.

این کار نمودار داده‌های پاک شده را نیز حذف می‌کند.

ساخت یا بارگذاری ساختار اولیه FIS

پیش از شروع آموزش FIS، باید ساختار اولیه مدل FIS را مشخص کنید. برای این کار به یکی از دو صورت زیر عمل کنید :

- ساختار FIS نوع سوگینوی از پیش ذخیره شده را از فایل آن یا از workspace بارگذاری کنید.
- با انتخاب یکی از دو روش زیر ساختار اولیه مدل FIS را ایجاد کنید :
  - Grid Partition : با بخش بندی شبکه‌ای داده‌ها یک FIS نوع سوگینوی تک خروجی ایجاد می‌کند.
  - Sub. Clustering : با استفاده از خوشه بندی داده‌ها یک FIS نوع سوگینوی تک خروجی ایجاد می‌کند.

برای مشاهده گرافیکی ساختار اولیه FIS روی دکمه Structure کلیک کنید.

آموزش FIS

پس از بارگذاری داده‌های آموزش و ایجاد ساختار اولیه FIS، می‌توان آموزش را شروع کرد.

گام‌های زیر چگونگی آموزش FIS را بیان می‌کنند :

۱. در بخش Optim. Method گزینه hybrid یا backpropaga را به عنوان روش بهینه سازی انتخاب کنید.

روش بهینه سازی hybrid ترکیبی از روش‌های کمترین مربعات و گرادیان نزولی پس انتشار خطا است.

۲. تعداد Epochs آموزش و Error Tolerance را به عنوان معیار توقف آموزش مشخص کنید.

فرایند آموزش با رسیدن به تعداد بیشینه epochها یا دست یابی به هدف خطای آموزش متوقف می‌شود.

۳. برای آموزش FIS دکمه Train Now را بزنید.

این کار پارامترهای توابع عضویت را تنظیم کرده و نمودار خطا را رسم می‌کند.

از نمودار خطا برای تشخیص بیش برازش در آموزش استفاده می‌شود. اگر خطا با تکرارهایی افزایش بیابد، بیش برازش رخ داده است.

ارزیابی FIS آموزش دیده

پس از آن که FIS آموزش دید، مدل با استفاده از داده‌های آزمایش و بررسی که متفاوت از داده‌های آموزش هستند، تایید می‌شود. برای تایید FIS آموزش دیده :

۱. داده‌های ارزیابی را انتخاب کرده و روی دکمه Load Data کلیک کنید.

۲. روی دکمه Test Now کلیک کنید.

این کار داده‌های ارزیابی را بر حسب خروجی FIS (به رنگ قرمز) رسم می‌کند.

در این بخش نمونه‌ای را بررسی می‌کنیم که داده‌های آموزش و بررسی مشابهی را بارگذاری می‌کند. داده‌های بررسی، نویزی شده اند.

۱. بارگذاری داده‌ها

۲. ایجاد ساختار اولیه FIS

۳. نمایش ساختار FIS

۴. آموزش ANFIS

۵. آزمایش FIS آموزش دیده در برابر داده‌ها

بارگذاری داده‌ها داده‌های آموزش (`fuzex1trnData` و `fuzex2trnData`) و داده‌های بررسی (`fuzex1chkData` و `fuzex2chkData`) را از workspace به داخل GUI ویرایشگر ANFIS بارگذاری کنید. برای این کار :

۱. دستورات زیر را در خط فرمان بنویسید تا داده‌ها از پوشه `fuzzydemos` در workspace بارگذاری شوند :

```
load fuzex1trnData.dat
load fuzex2trnData.dat
load fuzex1chkData.dat
load fuzex2chkData.dat
```

۲. ویرایشگر ANFIS را با نوشتن دستور `anfisedit` در خط فرمان باز کنید.

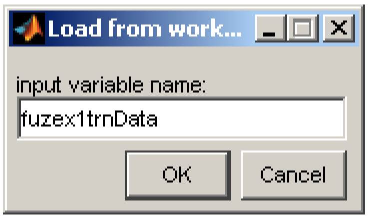
۳. برای بارگذاری داده‌های آموزش از workspace :

I. در بخش Load Data، گزینه‌های زیر را انتخاب کنید.

Type: Training

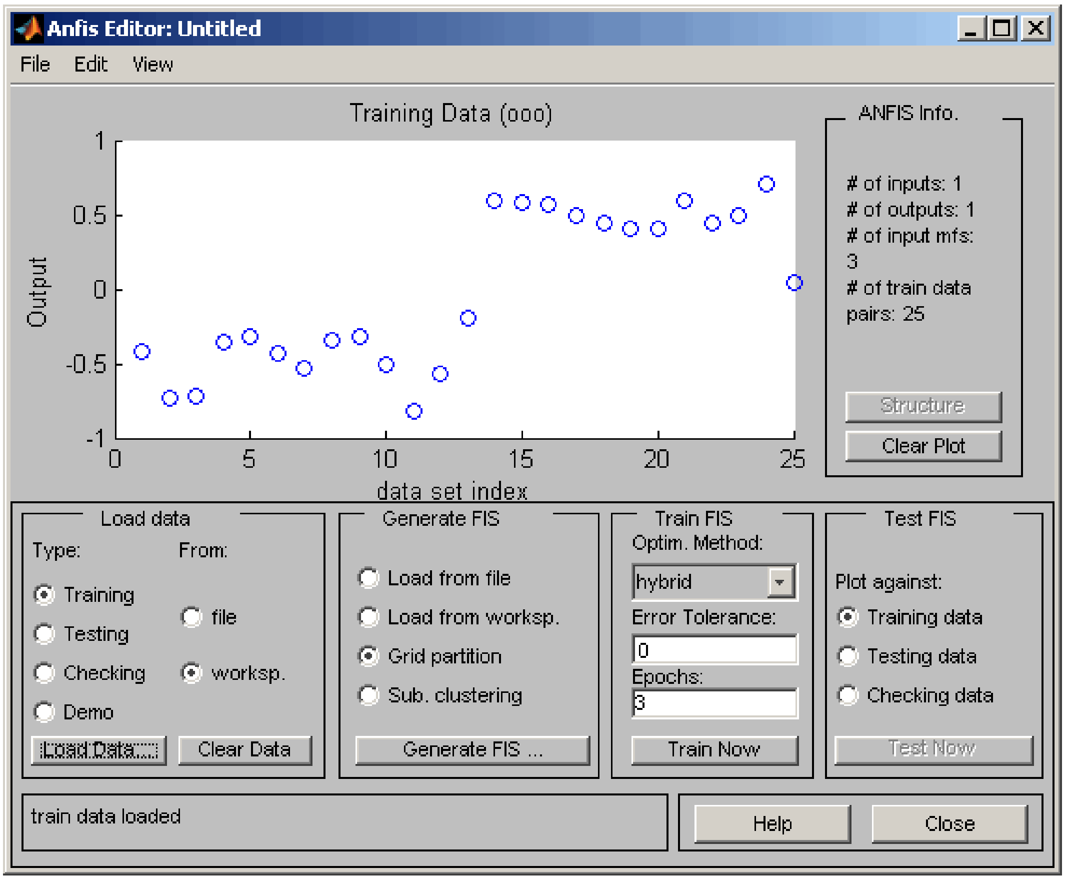
From: worksp.

II. روی Load Data کلیک کنید تا پنجره بارگذاری از workspace باز شود.



III. به صورت نمایش داده شده `fuzex1trnData` را وارد کرده و OK را بزنید.

داده‌های آموزش سیستم فازی را با تنظیم پارامترهای توابع عضویت که به بهترین سبک این داده‌ها (به صورت دایره رسم شده اند) را مدل می‌کنند، آموزش می‌دهد.



محور افقی به عنوان data set index مشخص شده است. این شاخص ردیفی را مشخص می‌کند که مقدار داده ورودی از آن بدست آمده است (چه ورودی بردار باشد چه اسکالر).

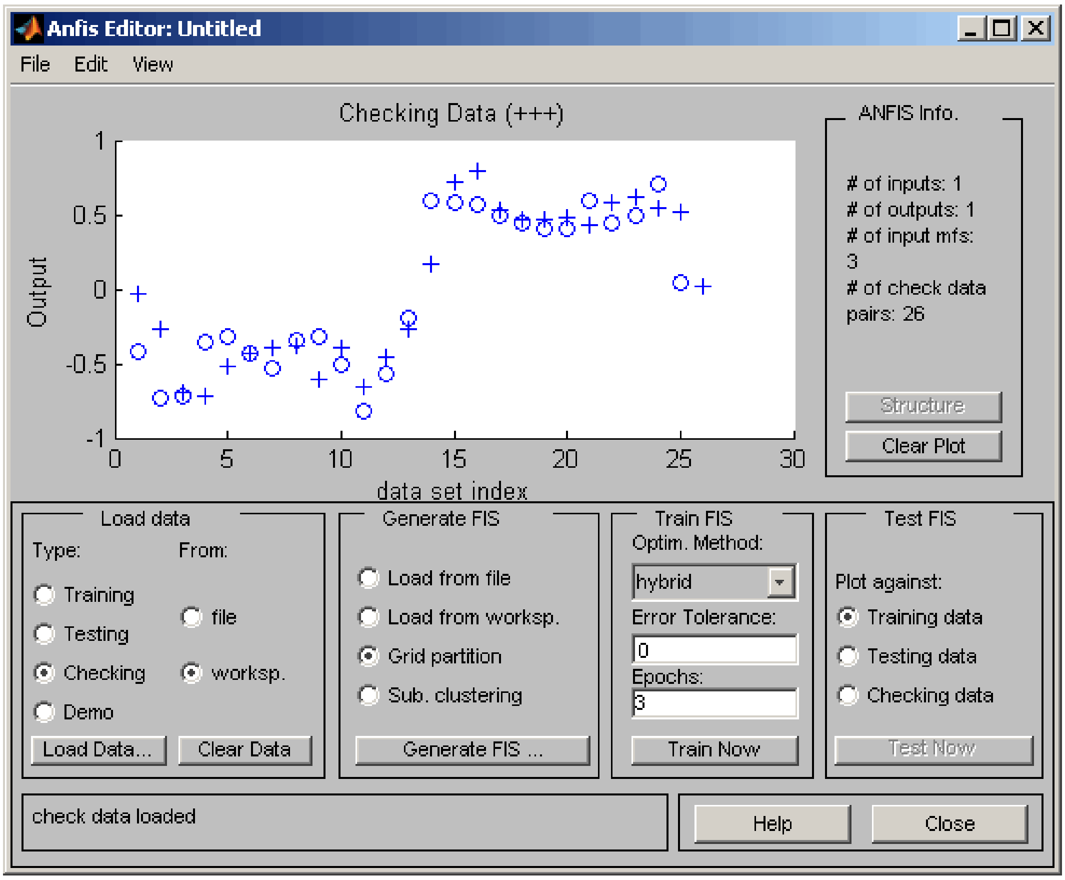
۴. برای بارگذاری داده‌های بررسی از workspace :

I. در بخش Load Data در ستون Type، گزینه Checking را انتخاب کنید.

II. روی Load Data کلیک کنید تا پنجره بارگذاری از workspace باز شود.

III. `fuzex1chkData` را به عنوان نام متغیر وارد کرده و OK را بزنید.

داده‌های بررسی در نمودار به صورت علامت جمع رسم می‌شوند.



گام بعدی مشخص کردن ساختار اولیه سیستم استنتاج فازی برای آموزش است.

ایجاد ساختار اولیه FIS می‌توانید یا پارامترهای FIS را به خواست خود مقداردهی اولیه کنید، یا اگر ایده‌ای از این مقادیر ندارید، ممکن است بخواهید تا توابع عضویت پارامتری شوند و خود anfis پارامترها را مقدار دهی اولیه نماید :

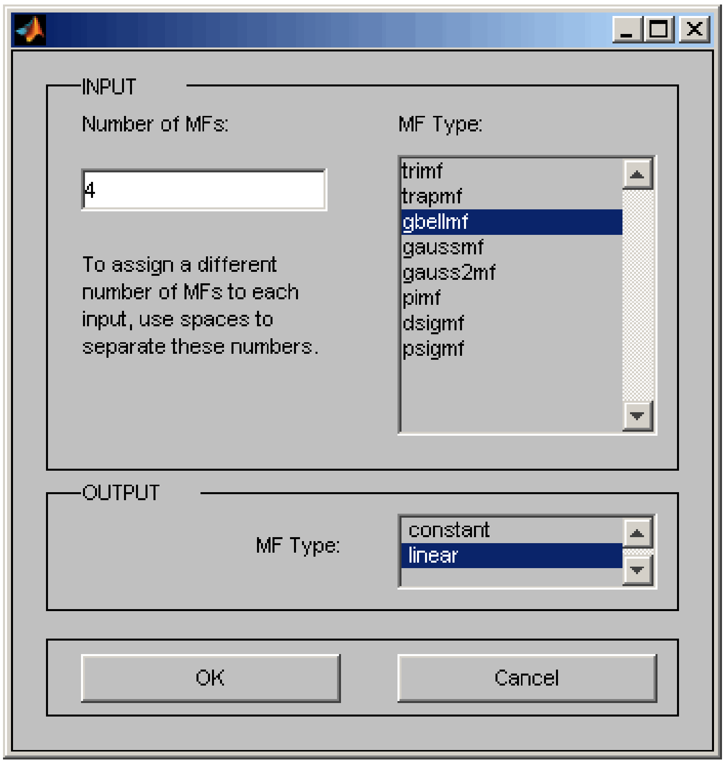
ایجاد خودکار ساختار FIS

برای ایجاد خودکار FIS توسط ANFIS :

۱. Grid Partition را انتخاب کنید.

۲. روی دکمه Generate FIS کلیک کنید. با این کار منویی باز می‌شود که می‌توانید تعداد توابع عضویت، MFs، و نوع توابع عضویت ورودی و خروجی را تعیین کنید. برای توابع عضویت خروجی تنها دو گزینه وجود دارد : constant و linear. این محدودیت در انتخاب توابع عضویت خروجی به دلیل آن است که ANFIS تنها با سیستم‌های نوع سوگینو کار می‌کند.

۳. این پنجره را همانند شکل زیر، پُر کرده و OK را بزنید.



می‌توانید FIS را از خط فرمان با دستورات `genfis1` و `genfis2` نیز ایجاد کنید.

تعیین توابع عضویت برای ANFIS به خواست شما

شما می‌توانید توابع عضویت دلخواه خود را با مشخص کردن پارامترهایی که ANFIS باید به عنوان ساختار اولیه FIS برای آموزش بکار بگیرد، انتخاب کنید. برای این کار :

۱. از منوی Edit گزینهٔ Membership Functions را انتخاب کنید.

۲. توابع عضویت مورد نظر خود را وارد کنید (توابع عضویت شخصی برای ANFIS غیرفعال است). توابع عضویت خروجی باید همگی constant یا linear باشند.

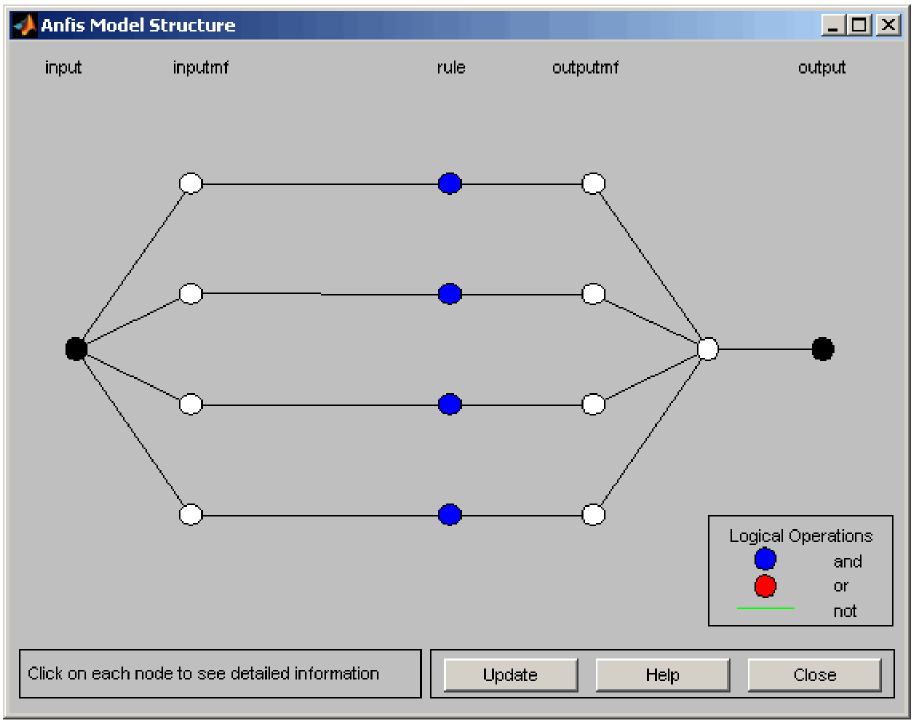
۳. از منوی Edit گزینهٔ Rules را انتخاب کرده و از ویرایشگر قوانین برای تولید قانون‌ها استفاده کنید.

۴. از منوی Edit گزینهٔ FIS Properties را انتخاب کنید. به FIS یک نام اختصاص دهید و آن را در یک فایل یا در workspace ذخیره کنید.

۵. دکمه Close را بزنید تا برای آموزش FIS، به GUI ویرایشگر ANFIS بازگردید.

۶. برای بارگذاری FIS برای مقدار دهی اولیه ANFIS، در بخش Generate FIS روی Load from worksp. یا Load from file کلیک کنید. FIS خود را که پیش تر ذخیره کرده‌اید، بارگذاری کنید.

نمایش ساختار FIS پس از آنکه FIS را ایجاد کردید، می‌توانید ساختار مدل را با کلیک روی Structure ببینید. پنجره‌ای به صورت زیر باز خواهد شد.



همچنین می‌توانید توابع عضویت یا قوانین را از منوی Edit، و گزینه‌های GUI ویرایشگر توابع عضویت و GUI ویرایشگر قوانین ببینید.

آموزش ANFIS دو روش برای بهینه سازی پارامترهای ANFIS وجود دارد، hybrid و backpropa. Error Tolerance برای معیار توقف آموزش بکار می‌رود، که متناسب با اندازه خطا است.

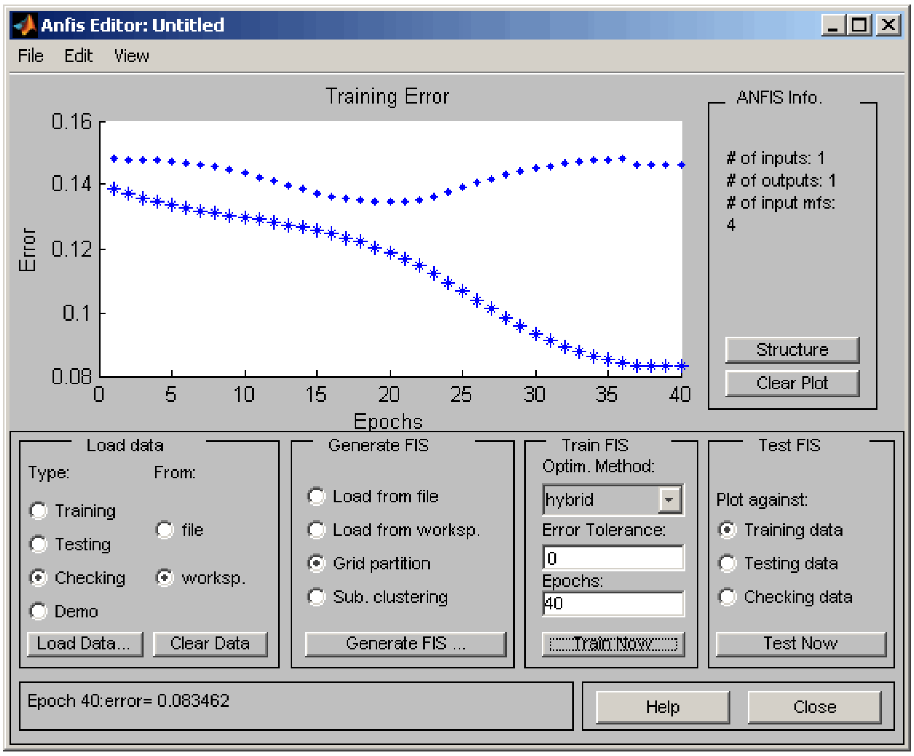
برای شروع آموزش :

۱. روش آموزش را hybrid قرار دهید.

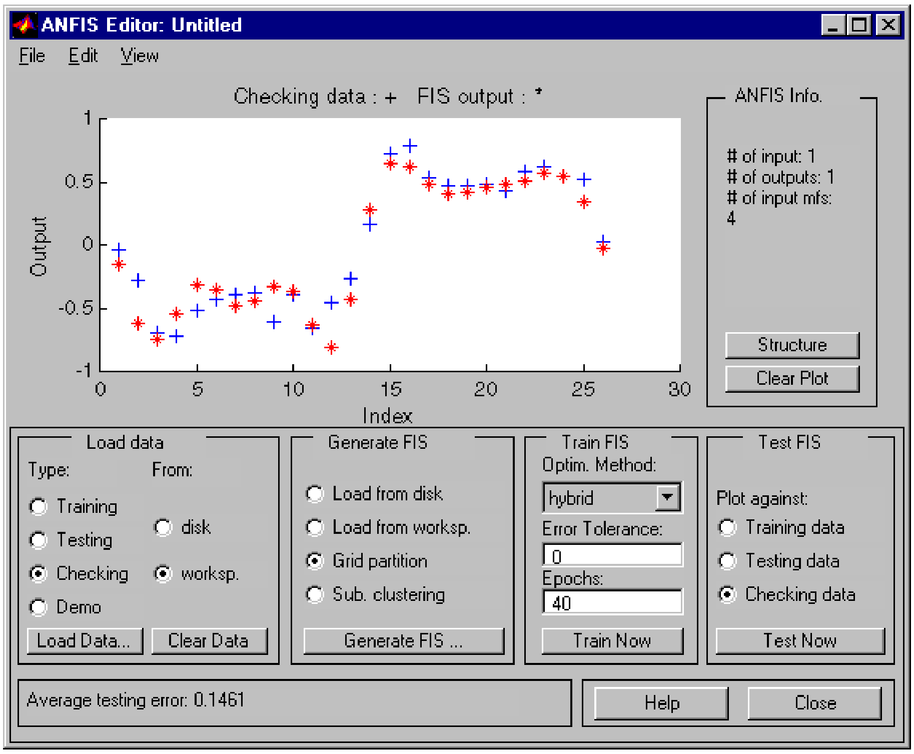
۲. تعداد Epochها را ۴۰ قرار دهید.

۳. Train Now را انتخاب کنید. پنجره زیر به نمایش در خواهد آمد.

خطای بررسی به صورت لوزی توپُر، و خطای آموزش به صورت ستاره نشان داده می‌شود. خطای بررسی تا جایی کم شده و پس از آن افزایش می‌یابد. این افزایش نشان دهنده بیش برازش مدل است.ANFIS پارامترها را در محل کمینه خطای بررسی بر می‌گزینند.



آزمایش FIS آموزش دیده در برابر داده‌ها برای آزمایش FIS در برابر داده‌های بررسی، در بخش Test FIS گزینه Checking data را انتخاب کنید، و روی Test Now کلیک کنید. هنگامی که FIS را در برابر داده‌های بررسی، آزمایش می‌کنید، به نظر مناسب می‌آید.



فهرست مراجع

واژه نامه فارسی به انگلیسی

اپراتور دامبی	Dombi Operator
اپراتور هاماچر	Hamacher Operator
اجتماع مجموعه‌های فازی	Fuzzy Union or Disjunction
ارتباط یا نسبت	Relation
ارتفاع	Height
آستانه	Threshold
استدلال	Logical Reasoning
استدلال تقریبی	Approximate Reasoning
استدلال دقیق	Precise Reasoning
استدلال فازی	Fuzzy Implication
استدلال قیاسی	Hypothetical Syllogism
استنتاج	Logical Inference
اشتراک مجموعه‌های فازی	Fuzzy Intersection or Conjunction
اصل توسعه	Extention Principle
اصل عدم سازگاری	Principle of Incompatibility
اکسون	Axon
الگوریتم تطبیقی	Adaptation Algorithm
آمیزه‌ای فازی	Fuzzy Blending
انبساط	Dilation
انحراف معیار	Standard deviation
اندازه خطا	The Error Measure
اندازه گام	Step Size
اولین ماکزیمم	First of Maximum
برگشتی	Recurrent
بازگشتی	Iterative
به‌هنگام	Update
بیان شرطی فازی	Fuzzy Conditional Statement
بیان مقدمه	Premise
پارامترهای مقدم	Antecedent Parameters
پایانه اکسون	Axon Terminal
پایگاه داده‌ها	Database
پایگاه دانش	Knowlegebase
پایگاه قواعد	Rule Base
پس انتشار خطا	Error Back Propagation
پشتیبان	Support
پیش‌خور	Feedforward
پیوسته مقطعی	Peacewise Continuous
تابع عضویت	Membership Function
تابع عضویت ذوزنقه‌ای	Trapezoidal Membership Function
تابع عضویت گوسی	Gaussian Membership Function
تابع عضویت مثلثی	Triangular Membership Function
تابع عضویت ناقوسی	Generalized Bell Membership Function
تابع علامت	Signum Function, Quantize Function
تابع فعال‌ساز	Activation Function
تابع مشخصه	Characteristic Function
تالی	Consequence
تباین	Complete Mutual Exclusion

ترکیب ترم‌های کلامی	Composit of Linguistic Terms
ترکیب عطفی	Conjunction Composition
ترکیب فصلی	Disjunction Composition
ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب	Max-Product Composition
ترکیب ماکزیمم مینیمم	Max-Min Composition
ترم‌های اصلی یا اولیه	Primary Terms
تساوی	Equivalence, Mutual Inclusion
تشدید	Hedge
تصویر مجموعه فازی	Projection of Fuzzy Set
تقریب محلی	Local Approximation
تمرکز	Concentration
جبرانگر توزیع موازی	Parallel Distributed Compensation
جسم سلولی	Soma
جمع جبری	Algebraic Sum
جمع شدید	Drastic Sum
جمع محدود	Bounded Sum
حاصلضرب جبری	Algebraic Product
حاصلضرب شدید	Drastic Product
حاصل‌ضرب ماکزیمم مینیمم	Max-Min Product
حاصلضرب محدود	Bounded Product
درجه عضویت	Membership Grade
دندریت	Dendrite
رابطه	Copula
رابطه فازی ربطی	Fuzzy Conjunction
رابطه فازی فصلی	Fuzzy Disjunction
روابط علت و معلولی	Causal Relationship
روش بیشترین شیب نزولی	Steepest Descent Method
روش نقطه‌ای داخلی	Interior Point Method
زیرمجموعه فازی	Fuzzy Containment or Subset
سیستم‌های آشوبناک	Chaotic Systems
سیناپس	Synapse
شبکه‌های فازی عصبی	Neuro-Fuzzy Networks
شرکت‌پذیری	Associativity
ضرب کارتزین	Cartesian Product
عام و خاص مطلق	Complete Conclusion
عام و خاص من وجه یا اشتراک	Partial Inclusion
عمود بر هم	Orthogonal
غیرخطی ناحیه‌ای	Sector Nonlinearity
غیرخطی ناحیه‌ای فراگیر	Global Sector Nonlinearity
غیرفازی‌ساز	Defuzzifier
فازی‌ساز	Fuzzifier
قاعده استنتاج ترکیبی	Compositional Rule of Inference
قدرت آتش	Firing Strength
قواعد فازی ممدانی	Mamdani Fuzzy Rules
قواعد یادگیری	Learning Rules
قوانین اگر–آنگاه فازی	Fuzzy If Then Rule
قیاس انتزاع	Modus Ponens
قیاس انتزاع تعمیم‌یافته	Generalized Modus Ponens
قیاس نقیض انتزاع	Modus Tollens
کاردینالتی اسکالر	Scalar Cardinality

مدار پرسپترون	Perceptron Network
مدل فازی تسوکاموتو	Tsukamoto Fuzzy Model
مرکز ثقل	Center of Gravity
مستقل از موضوع	Content Independent
مشتق ترتیبی	Ordered Derivitive
معکوس کمترین مربعات	Least Square Inverse
معکوس مجازی	Psuedo Inverse
مقدار متوسط	Mean value
مقدم یا مبتدی	Antecedent
مکانیزم استنتاج	Inference Mechanism
منطق	Logic
منطق فازی	Fuzzy Logic
موضوع یا مُسند الیه	Subject
نرخ یادگیری	Learning Rate
نُرم	Norm
نُرم اقلیدسی	Euclidean Norm
نُرم بیشینه	Maximum Norm
نُرم مثلثی	Triangle Norm
نقطه عبور	Crossover Point
نتیجه	Conclusion
نمایش لایه‌ای	Layered Representation
وابسته به موضوع	Content Dependent
هسته	Core
هم‌ارز یا مساوی	Equivalent
هم‌پوشانی	Overlap

کانتور	Contour
کنترل‌کننده‌های فازی عصبی	Neuro Fuzzy Control Systems
گره تطبیقی	Adaptive Node
گزاره	Proposition, Statement
گزاره‌های ساده	Categorial Proposition
گزاره‌های مرکب	Composite Proposition
ماتریس رابطه‌ای	Relational Matrix
متغیرهای اتفاقی	Random variables
متغیرهای کلامی	Linguistic Variable
متمم سوگینو	Sugeno’s Complement
متمم شُر	Schur Complement
متمم مجموعه فازی	Fuzzy Complement or Negation
متمم یاگر	Yager’s Complement
محاسبات نرم	Soft Computing
محدب	Convex
محدوده‌های تیز	Sharp Boundary
محمول یا مُسند	Predicate
مجموعه داده‌های یادگیری	Training Data Set
مجموعه سطح	Level Set
مجموعه صریح	Crisp Set
مجموعه فازی	Fuzzy Sets
مجموعه فازی یگانه	Fuzzy Singleton
مجموعه‌های نامتغیر لاسال	La Salle’s Invariant Set

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Adaptation Algorithm	الگوریتم تطبیقی
Adaptive Node	گره تطبیقی
Activation Function	تابع فعال‌ساز
Algebraic Product	حاصلضرب جبری
Algebraic Sum	جمع جبری
Antecedent	مقدم یا مبتدی
Antecedent Parameters	پارامترهای مقدم
Approximate Reasoning	استدلال تقریبی
Associativity	شرکت‌پذیری
Axon	اکسون
Axon Terminal	پایانه اکسون
Bounded Product	حاصلضرب محدود
Bounded Sum	جمع محدود
Cartesian Product	ضرب کارتزین
Categorial Proposition	گزاره‌های ساده
Causal Relationship	روابط علت و معلولی
Center of Gravity	مرکز ثقل
Chaotic Systems	سیستم‌های آشوبناک
Characteristic Function	تابع مشخصه
Complete Conclusion	عام و خاص مطلق
Complete Mutual Exclusion	تباین
Composit of Linguistic Terms	ترکیب ترم‌های کلامی
Composite Proposition	گزاره‌های مرکب
Compositional Rule of Inference	قاعده استنتاج ترکیبی
Conjunction Composition	ترکیب عطفی
Concentration	تمرکز
Conclusion	نتیجه
Consequence	تالی
Content Dependent	وابسته به موضوع
Content Independent	مستقل از موضوع
Contour	کانتور
Convex	محدب
Copula	رابطه
Core	هسته
Crisp Set	مجموعه صریح
Crossover Point	نقطه عبور
Database	پایگاه داده‌ها
Defuzzifier	غیرفازی‌ساز
Dendrite	دندریت
Dilation	انبساط
Disjunction Composition	ترکیب فصلی
Dombi Operator	اپراتور دامبی
Drastic Product	حاصلضرب شدید
Drastic Sum	جمع شدید
Error Back Propagation	پس انتشار خطا
Equivalence, Mutual Inclusion	تساوی
Equivalent	هم‌ارز یا مساوی
Euclidean Norm	نُرم اقلیدسی
Extention Principle	اصل توسعه

Feedforward	پیش‌خور
Firing Strength	قدرت آتش
First of Maximum	اولین ماکزیمم
Fuzzifier	فازی‌ساز
Fuzzy Blending	آمیزه‌ای فازی
Fuzzy Complement or Negation	متمم مجموعه فازی
Fuzzy Conditional Statement	بیان شرطی فازی
Fuzzy Conjunction	رابطه فازی ربطی
Fuzzy Containment or Subset	زیرمجموعه فازی
Fuzzy Disjunction	رابطه فازی فصلی
Fuzzy If Then Rule	قوانین اگر-آنگاه فازی
Fuzzy Implication	استدلال فازی
Fuzzy Intersection or Conjunction	اشتراک مجموعه‌های فازی
Fuzzy Logic	منطق فازی
Fuzzy Sets	مجموعه فازی
Fuzzy Singleton	مجموعه فازی یگانه
Fuzzy Union or Disjunction	اجتماع مجموعه‌های فازی
Gaussian Membership Function	تابع عضویت گوسی
Generalized Bell Membership Function	تابع عضویت ناقوسی
Generalized Modus Ponens	قیاس انتزاع تعمیم‌یافته
Global Sector Nonlinearity	غیرخطی ناحیه‌ای فراگیر
Hamacher Operator	اپراتور هاماچر
Hedge	تشدید
Height	ارتفاع

Hypothetical Syllogism	استدلال قیاسی
Inference Mechanism	مکانیزم استنتاج
Interior Point Method	روش نقطه‌ای داخلی
Iterative	بازگشتی
Knowlegebase	پایگاه دانش
La Salle's Invariant Set	مجموعه‌های نامتغیر لاسال
Layered Representation	نمایش لایه‌ای
Learning Rate	نرخ یادگیری
Learning Rules	قواعد یادگیری
Least Square Inverse	معکوس کمترین مربعات
Level Set	مجموعه سطح
Linguistic Variable	متغیرهای کلامی
Local Approximation	تقریب محلی
Logic	منطق
Logical Inference	استنتاج
Logical Reasoning	استدلال
Mamdani Fuzzy Rules	قواعد فازی ممدانی
Max-Min Composition	ترکیب ماکزیمم مینیمم
Max-Min Product	حاصل‌ضرب ماکزیمم مینیمم
Max-Product Composition	ترکیب ماکزیمم حاصل‌ضرب
Maximum Norm	نُرم بیشینه
Mean value	مقدار متوسط
Membership Function	تابع عضویت
Membership Grade	درجه عضویت
Modus Ponens	قیاس انتزاع
Modus Tollens	قیاس نقیض انتزاع

Neuro Fuzzy Control Systems	کنترل‌کننده‌های فازی عصبی
Neuro-Fuzzy Networks	شبکه‌های فازی عصبی
Norm	نُرم
Ordered Derivitive	مشتق ترتیبی
Orthogonal	عمود بر هم
Overlap	هم‌پوشانی
Parallel Distributed Compensation	جبرانگر توزیع موازی
Partial Inclusion	عام و خاص من وجه یا اشتراک
Peacewise Continuous	پیوسته مقطعی
Perceptron Network	مدار پرسپترون
Precise Reasoning	استدلال دقیق
Predicate	محمول یا مُسند
Premise	بیان مقدمه
Primary Terms	ترم‌های اصلی یا اولیه
Principle of Incompatibility	اصل عدم سازگاری
Projection of Fuzzy Set	تصویر مجموعه فازی
Proposition, Statement	گزاره
Psuedo Inverse	معکوس مجازی
Random variables	متغیرهای اتفاقی
Recurrent	برگشتی
Relation	ارتباط یا نسبت
Relational Matrix	ماتریس رابطه‌ای
Rule Base	پایگاه قواعد
Scalar Cardinality	کاردینالتی اسکالر

Schur Complement	متمم شُر
Sector Nonlinearity	غیرخطی ناحیه‌ای
Sharp Boundary	محدوده‌های تیز
Signum Function, Quantize Function	تابع علامت
Soft Computing	محاسبات نرم
Soma	جسم سلولی
Standard deviation	انحراف معیار
Steepest Descent Method	روش بیشترین شیب نزولی
Step Size	اندازه گام
Subject	موضوع یا مُسند الیه
Sugeno's Complement	متمم سوگینو
Support	پشتیبان
Synapse	سیناپس
The Error Measure	اندازه خطا
Threshold	آستانه
Training Data Set	مجموعه داده‌های یادگیری
Trapezoidal Membership Function	تابع عضویت ذوزنقه‌ای
Triangular Membership Function	تابع عضویت مثلثی
Triangle Norm	نُرم مثلثی
Tsukamoto Fuzzy Model	مدل فازی تسوکاموتو
Update	به‌هنگام
Yager's Complement	متمم یاگر