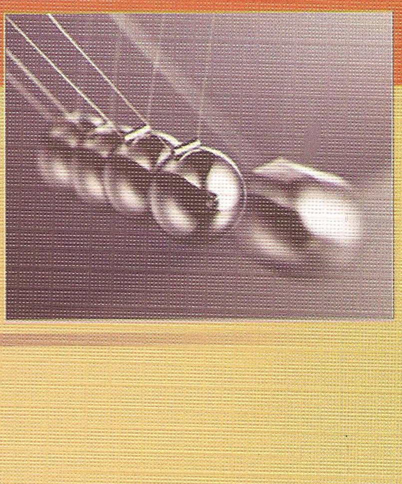
مکانیک (۱)

سینماتیک و دینامیک

برای داوطلبان المپیاد فیزیک



نویسندگان: سید علی مدنی تنکابنی
سید بابک مظهری

مکانیک (۱)

سینماتیک و دینامیک

برای داوطلبان المپیاد فیزیک

مؤلفان:
سیدعلی مدنی‌تنکابنی ـ سیدبابک مظهری

انتشارات خوشخوان

سرشناسه	: مدنی‌تنکابی، سیدعلی، ۱۳۶۸
عنوان و نام پدیدآور	: مکانیک (۱) سینماتیک و دینامیک برای داوطلبان المپیاد فیزیک مولفان علی مدنی‌تنکابنی، بابک مظهری
مشخصات نشر	: تهران: خوشخوان، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری	: ۳۹۲ص.
شابک	978-600-5695-12-0:
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
موضوع	: المپیادها (مکانیک)
موضوع	: حرکت‌شناسی ـ مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	: حرکت‌شناسی ـ آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
موضوع	: دینامیک ـ مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)
موضوع	: دینامیک ـ آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
شناسه افزوده:	مظهری، سیدبابک، ۱۳۶۸
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۸۹ LB۳۰۶۰٫۲۴٫م۳۷م۷
رده‌بندی دیویی	: ۳۷۳٫۲۳۸۰۷۶
شماره کتابخانه ملی	: ۲۱۹۸۹۹۱

انتشارات خوشخوان

مکانیک (۱) سینماتیک و دینامیک

مؤلفان: سیدعلی مدنی‌تنکابنی ـ سیدبابک مظهری
حروفچینی و صفحه‌آرایی: گروه فنی هیمه (۰۹۳۲۹۰۶۷۴۲۳ـ۶۶۴۶۴۰۹۴)
طراح جلد: علی عباسی
چاپ اول: زمستان ۱۳۸۹
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۸۶۰۰ تومان
شابک: ۹۷۸ـ۶۰۰ـ۵۶۹۵ـ۱۲ـ۰ ISBN: 978-600-5695-12-0

آدرس: تهران ـ خیابان جمهوری ـ خیابان دانشگاه شمالی ـ کوچه بهار ـ پلاک ۴ ـ طبقه ۲ **تلفن:** ۶۶۴۹۴۰۲۰
www.khoshkhan.ir

مقدمه مؤلف

مجموعه‌ی در نظر گرفته شده برای شما دانش‌آموزان عزیز، شامل کتاب‌هایی در زمینه‌های مکانیك، الکتریسیته، مغناطیس، نور، نجوم، و حرارت و سیالات می‌باشد. هر کتاب بنابر حجم مطالب، به بخش‌های کوچك‌تری که در جلدهای گوناگون آمده است، تقسیم شده است. با توجه به هدف اصلی این مجموعه که آمادگی دانش‌آموزان برای مراحل مختلف المپیاد فیزیك می‌باشد، مباحثش شامل مطالب علمی پایه‌ای و همچنین پیشرفته برای بالا بردن قابلیت شما در گذراندن مراحل مختلف المپیاد می‌باشد.

سعی ما در این مجموعه بر این بوده است که مباحث را از مفاهیم پایه‌ای تا پیشرفته با تشریح کافی و با ذکر مثال‌ها و مسائل مختلف، با کمترین پیچیدگی به شما آموزش داده شود، بنابراین با خواندن دقیق این مجموعه، می‌توانید به سطح بالایی از دانش فیزیك و قابلیت حل مسائل فیزیکی دست یابید.

توجه داشته باشید که دو قسمت مسائل حل شده (المپیادی و غیرالمپیادی) موجود در هر بخش، خود شامل نکات علمی مهمی هم در فهم مسائل و هم برای حل مسائل می‌باشد، لذا این قسمت‌ها را نیز مانند متن عملی ارائه شده به دقت مطالعه کنید.

قسمت اول مبحث مکانیك که در این کتاب (مکانیك (۱)) به آن پرداخته می‌شود، شامل دو بخش سینماتیك و دینامیك که از مهم‌ترین و پایه‌ای‌ترین مباحث فیزیکی است، می‌باشد. سعی ما در این کتاب بر این بوده است که با روندی متفاوت در ارائه مطالب، یادگیری مباحث ارائه شده را برای شما آسان‌تر و لذت‌بخش کنیم.

لازمه یادگیری بخش‌های دیگر مکانیك و حتی بخش‌هایی از دیگر مباحث فیزیکی این مجموعه، تسلط بر مباحث این کتاب است. بنابراین سعی کنید که با حوصله و دقت کافی این کتاب را مطالعه و مسائل آن را به دقت حل کنید.

آرزومندیم که با ارائه این کتاب و سایر کتاب‌های این مجموعه، به هدف خود در مورد رضایت شما عزیزان و همچنین بالا بردن سطح علمی دانش‌آموزان کشور عزیزمان دست یابیم.

babak.mazhari@gmail.com

alimadani : @ut.ac.ir

با آرزوی موفقیت

فهرست مطالب

۱

حرکت شناسی (سینماتیک)

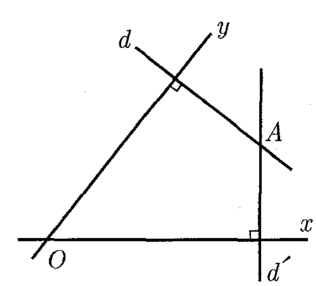
ما همه روزه در دنیای پیرامون خود حرکت‌های متفاوتی را مشاهده می‌کنیم که هرکدام در اثر عواملی خاص ایجاد شده‌اند. این عوامل تعیین کننده‌ی چگونگی حرکت یک جسم می‌باشند، برای مثال حرکت یک سیاره در مسیر دایروی به دور خورشید در اثر نیروی جاذبه‌ی بین آنها به وجود می‌آید و یا حرکت یک توپ تنیس در اثر ضربه‌ی شدید راکت در یک فاصله‌ی زمانی بسیار کوتاه به وجود می‌آید و سپس نیروی وزن توپ و مقاومت هوا هدایت کننده‌ی مسیر حرکت توپ خواهد بود.

علم سینماتیک به تحلیل و بررسی حرکات مختلف می‌پردازد بدون آنکه به عوامل ایجاد کننده‌ی این حرکات (نیروها) توجهی داشته باشد. به وسیله‌ی علم سینماتیک و روابطی که بر آن حاکم است می‌توان مشخصات حرکت یک جسم را تحلیل نمود. این مشخصات عبارتند از کمیت‌هایی که به وسیله‌ی دو کمیت بنیادی و اولیه‌ی مکان و زمان قابل تعریف می‌باشند و به آنها کمیت‌های ثانویه گفته می‌شود. در این فصل به بررسی این کمیت‌ها و چگونگی تحلیل حرکت یک جسم می‌پردازیم.

مکان و زمان

مکان و زمان دو کمیت پایه و بنیادی در علم فیزیک هستند و سیطره‌ی قوانین علم فیزیک را احاطه کرده‌اند به‌طوری که اگر ماهیت این دو کمیت را تغییر دهیم نگرشی نوین در علم فیزیک ایجاد خواهد شد همان‌طور که آلبرت انیشتین به وسیله‌ی نبوغ بی‌نظیر خود این کار را انجام داد و تحولی در علم فیزیک ایجاد نمود.

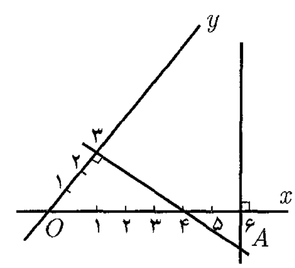
همان‌طور که می‌دانید ما در یک فضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم و برای اینکه بتوانیم به تحلیل حرکت‌های مختلف در این فضا بپردازیم باید یک ابزار ریاضی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم به وسیله‌ی آن به هر نقطه از فضا یک ترکیب ریاضی یکتا که مشخص کننده‌ی مکان آن نقطه در فضا باشد، نسبت بدهیم. از آنجایی که بسیاری از وقایع فیزیکی مانند حرکت یک جسم روی یک سطح صاف (مانند میز) را می‌توان در فضای دوبعدی یا صفحه فرض کرد ابتدا برای یک فضای دوبعدی این ابزار را به روش زیر ایجاد می‌نماییم:



شکل ۱-۱

در یک صفحه دو محور غیرموازی دلخواه به نام‌های x و y مانند شکل (۱ـ۱) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در یک نقطه مانند نقطه‌ی O قطع کنند. فرض کنید می‌خواهیم مکان نقطه‌ی A را به وسیله این دو محور در صفحه مشخص کنیم. یک خط از نقطه‌ی A می‌گذارنیم که بر محور

دلخواه y عمود باشد و نام آن را d می‌گذاریم. به طریق مشابه خطی عمود بر محور x از نقطه‌ی A می‌گذرانیم و نام آن را d' می‌گذاریم. حال اگر نقطه‌ی O را به عنوان نقطه‌ی مبدأ در صفحه در نظر بگیریم و دو محور x و y را به وسیله‌ی اعداد ریاضی درجه‌بندی کنیم، هر خط عمود بر محور y یا x نماینده‌ی یک عدد ریاضی و هر نقطه‌ی دلخواه در فضا حاصل تقاطع یک خط عمود بر محور y مانند d و یک خط عمود بر محور x مانند d' خواهد بود. اکنون کافیست ثابت کنیم که به ازای یک نقطه‌ی دلخواه در فضای دوبعدی مانند A تنها یک خط عمود بر هر یک از محورهای x و y می‌توان رسم کرد که از نقطه‌ی A بگذرد تا نشان دهیم به هر نقطه از فضا می‌توان یک ترکیب ریاضی منحصربه‌فرد نسبت داد. برای اثبات این مطلب از یک امر بدیهی در هندسه کمک می‌گیریم که می‌گوید دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند یا یکدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند. بنابراین دو خط عمود بر یک محور نمی‌توانند یکدیگر را در نقطه‌ی A قطع کنند زیرا دو خط عمود بر یک محور با یکدیگر موازی خواهند بود. پس توانستیم ابزاری ایجاد کنیم که ما را قادر می‌سازد به هر نقطه از صفحه یک زوج مرتب منحصربه‌فرد یعنی ترکیبی از دو عدد ریاضی نسبت دهیم که این اعداد ارتباط مستقیم با چگونگی درجه‌بندی محورهای x و y دارد و مکان نقطه را نسبت به نقطه‌ی مبدأ O مشخص می‌کند. قابل ذکر است که این دو عدد مستقل از یکدیگر می‌باشند، این بدین معناست که اگر در یک زوج مرتب مقدار x را ۳ اختیار کنیم هیچ تأثیری در مقدار y نخواهد داشت و y هر عددی را می‌تواند بپذیرد و مستقل از مقدار x می‌باشد.



شکل ۱-۲

برای مثال مکان نقطه‌ی A را در (شکل ۱ـ۲) اینگونه نمایش می‌دهیم:

$$A = (x, y) = (۶, ۳)$$

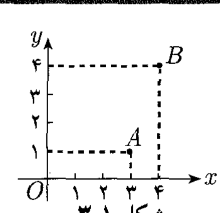
قابل ذکر است که در فضای سه‌بعدی نیز می‌توان این کار را به وسیله‌ی سه خط که دوبه‌دو غیرموازی هستند انجام داد. در این حالت مکان هر نقطه از فضا را می‌توان به وسیله‌ی سه عدد مستقل از یکدیگر مشخص کرد.

دستگاه مختصات

به ابزاری که به وسیله‌ی آن قادر باشیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله‌ی یک ترکیب ریاضی مشخص کنیم، دستگاه مختصات گفته می‌شود. نمونه‌ای که در قبل توضیح داده شد مثالی از یک دستگاه مختصات است. انواع مختلفی از دستگاه‌های مختصات وجود دارد که با توجه به مشخصات حرکت یک جسم دستگاه مختصات مناسب برای بررسی حرکت انتخاب می‌شود. ما در این کتاب از دستگاهی به نام دستگاه مختصات دکارتی برای حل مسائل استفاده خواهیم کرد و در قسمت المپیاد با گونه‌ی دیگری از دستگاه مختصات به نام دستگاه مختصات قطبی نیز به‌طور کامل آشنا خواهیم شد.

دستگاه مختصات دکارتی

دستگاه مختصات دکارتی در دوبعد متشکل از دو محور عمود بر هم می‌باشد که نقطه‌ی تقاطع این دو محور مبدأ دستگاه می‌باشد. به وسیله‌ی روشی که در قبل ارائه شد می‌توانیم به هر نقطه از فضای دو بعدی یا صفحه یک زوج مرتب یکتا نسبت دهیم مانند (شکل ۱ـ۳).



شکل ۱-۳

$$A = (x, y) = (۳, ۱) \qquad , \qquad B = (x, y) = (۴, ۴)$$

مکان و بردار

فرض کنید ما در مرکز یک دایره ایستاده‌ایم و می‌خواهیم مکان نقطه‌ای روی محیط دایره را مشخص کنیم. آیا در دست داشتن شعاع دایره برای تعیین مکان نقطه‌ای روی محیط آن کافی می‌باشد؟ جواب این سؤال منفی است. زیرا علاوه بر شعاع دایره جهت‌گیری آن نقطه نسبت به مرکز دایره عاملی تعیین کننده می‌باشد. بسیاری از کمیت‌های فیزیکی علاوه بر مقدار جهت نیز دارند مانند مکان و جابه‌جایی و ...، و همچنین کمیت‌هایی نیز وجود دارند که تنها به وسیله‌ی یک عدد که نشان دهنده‌ی مقدار آنهاست قابل بیان می‌باشند مانند زمان و جرم و ... .بردار ابزاریست برای بیان کمیت‌هایی که در آنها هر دو مشخصه‌ی جهت و اندازه تأثیرگذار می‌باشند.

بردار مکان

از نظر هندسی بردار مکان را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن روی مبدأ مختصات و انتهای آن منطبق بر نقطه مورد نظر می‌باشد. نمایش یک بردار به صورت عددی ارتباط مستقیم با دستگاه مختصاتی دارد که بردار را در آن رسم می‌کنیم. نحوه‌ی نمایش بردار مکان در دستگاه مختصات دکارتی به وسیله‌ی ترکیبی از دو عدد ریاضی می‌باشد همان‌طور که مکان یک نقطه را در این مختصات مشخص کردیم که در ادامه بیشتر توضیح خواهیم داد.

بردار جابه‌جایی

جابه‌جایی یا تغییر مکان نیز مانند مکان یک کمیت برداری است. بردار جابه‌جایی را می‌توان به صورت فلشی نمایش داد که ابتدای آن نقطه‌ی شروع حرکت و انتهای آن نقطه‌ی پایان حرکت می‌باشد در نتیجه بردار جابه‌جایی تنها به نقاط ابتدا و انتهای حرکت وابسته می‌باشد و مستقل از مسیر حرکت است.

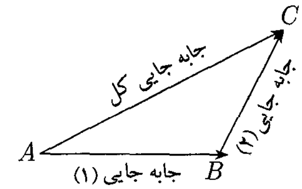
برای اینکه بیشتر مفهوم بردار را درک کنیم و با چگونگی کاربرد آن بیشتر آشنا شویم ابتدا باید با برخی از خواص و روابط بردارها آشنایی پیدا کنیم:

قوانین حاکم بر بردارها

بردار نیز همانند دستگاه مختصات یک تعریف ریاضی می‌باشد و در علم ریاضی تعاریف و روابط حاکم بر آنها به گونه‌ای شکل می‌گیرند که بتوان به وسیله‌ی آنها قوانین حاکم بر طبیعت را بیان و توجیه نمود. برای درک بهتر این موضوع برخی از روابط حاکم بر بردارها و ارتباط آنها با مشاهدات طبیعی را شرح می‌دهیم:

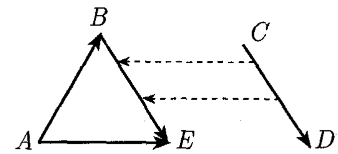
جمع برداری

بسیاری از کمیت‌های ثانویه در فیزیک از جابه‌جایی یا تغییر مکان حاصل می‌شوند و همان طور که گفته شد جابه‌جایی یک کمیت برداری است، پس روابط حاکم بر بردارها باید به گونه‌ای تعریف شوند که به وسیله‌ی آنها بتوان هرگونه تغییرات در جابه‌جایی‌های مختلف را بیان نمود از این رو جمع برداری را می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:



شکل ۱-۴

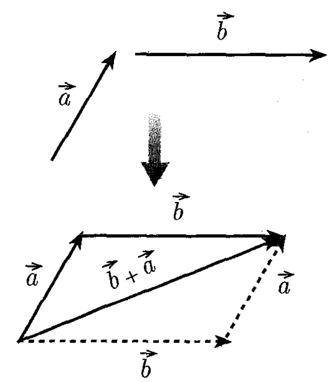
فرض کنید مطابق شکل (۱ـ۴) جسمی در اثر جابه‌جایی (۱) از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر مکان دهد و سپس در اثر جابه‌جایی (۲) از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C برود. آنچه مشاهده می‌شود این است که این جسم در نهایت در مجموع دو جابه‌جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C تغییر مکان داده است و می‌توان بردار $\overrightarrow{AC}$ را که معرف جابه‌جایی کل جسم است به صورت مجموع دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ معرفی کرد. پس به‌طور کلی مجموع دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که ابتدای $\vec{b}$ بر انتهای $\vec{a}$ منطبق باشد به صورت برداری نمایش می‌دهیم که ابتدای آن منطبق بر ابتدای $\vec{a}$ و انتهای آن منطبق بر انتهای $\vec{b}$ باشد و آن را برآیند یا مجموع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامیم.



شکل ۱-۵

حال فرض کنید دو بردار ما به گونه‌ای انتخاب شوند که ابتدای یکی روی انتهای دیگری نباشد (مانند شکل ۱ـ۵). این حالت برای جابه‌جایی غیرممکن است زیرا جابه‌جایی به صورت پیوسته انجام می‌پذیرد اما برای بسیاری از کمیت‌های ثانویه تنها جهت و طول بردار اهمیت دارد و نقاط ابتدا و انتهای بردارها اهمیتی نخواهد داشت. در این حالت برای به‌دست آوردن برآیند دو بردار، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و آن را به گونه‌ای جابه‌جا می‌کنیم تا ابتدای آن بر انتهای بردار دیگر منطبق شود و سپس حاصل جمع دو بردار را به‌دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$



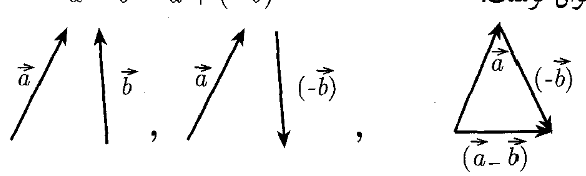
شکل ۱-۶

با توجه به مطالبی که گفته شد می‌توان روشی برای به‌دست آوردن مجموع دو بردار ارائه کرد بدین صورت که هرگاه دو بردار مورد نظر را مانند (شکل ۱ـ۶) به صورت اضلاع یک متوازی‌الاضلاع رسم کنیم یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع برابر با برآیند دو بردار خواهد شد.

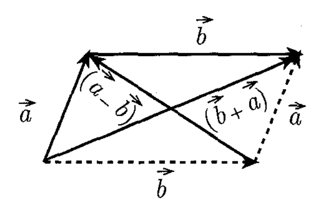
تفاضل دو بردار

برای توضیح تفاضل دو بردار ابتدا باید قرینه‌ی یک بردار را شرح دهیم. قرینه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$، برداریست به همان اندازه و در خلاف جهت $\overrightarrow{AB}$ و یا به عبارت دیگر بردار $\overrightarrow{BA}$ قرینه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ است. تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به شکل $(\vec{a}-\vec{b})$ به این معناست که بردار $\vec{a}$ را با قرینه‌ی بردار $\vec{b}$ جمع کنیم و می‌توان نوشت:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



شکل ۱-۷



شکل ۱-۸

قابل ذکر است که در متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آن دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد یک قطر برابر با حاصل جمع دو بردار و قطر دیگر بسته به جهت آن برابر با یکی از دو عبارت $(\vec{a}-\vec{b})$ یا $(\vec{b}-\vec{a})$ می‌شود.

ضرب عدد در بردار

شکل ۱-۹

در فیزیک عدد برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که تنها با یک مقدار قابل بیان هستند و جهت ندارند. به این کمیت‌ها، کمیت‌های اسکالر یا مقداری گفته می‌شود و از بردار برای نمایش کمیت‌هایی استفاده می‌شود که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند. ضرب یک عدد در یک بردار در علم فیزیک نشان دهنده‌ی ضرب یک کمیت مقداری مانند زمان در یک کمیت برداری مانند

جابه‌جایی است و حاصل آن یک کمیت برداری می‌باشد. در ضرب عدد در یک بردار، جهت بردار ثابت می‌ماند و مقدار بردار با توجه به مقدار عدد ضرب شده تغییر می‌کند (مانند شکل ۱ـ۹).

ضرب بردار در بردار

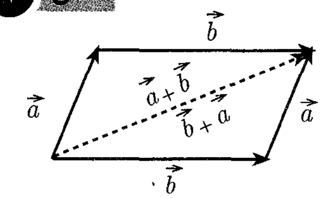
این ضرب نمایش دهنده‌ی ضرب دو کمیت برداری در یکدیگر می‌باشد و حاصل آن هم می‌تواند یک بردار باشد و هم می‌تواند یک عدد باشد. در آینده این نوع ضرب را بیشتر توضیح خواهیم داد.

مثال ۱

به صورت هندسی نشان دهید برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

حل. برای به‌دست آوردن طرف چپ تساوی ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار می‌دهیم و برای به‌دست آوردن طرف راست تساوی ابتدای بردار $\vec{a}$ را روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار می‌دهیم و در دو حالت مشاهده می‌کنیم بردار برآیند قطری از یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌باشد (شکل ۱ـ۱۰). به این خاصیت در جمع، خاصیت جابه‌جایی گفته می‌شود.



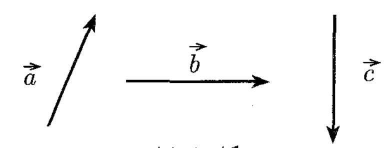
شکل ۱-۱۰

مثال ۲

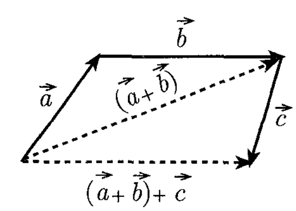
با استفاده از رسم شکل ثابت کنید که رابطه‌ی زیر برای سه بردار دلخواه $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برقرار می‌باشد:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

حل. سه بردار دلخواه $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به صورت فرضی مانند شکل (۱ـ۱۱) اختیار می‌نماییم. با توجه به طرف چپ تساوی ابتدا بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع نموده و سپس بردار $\vec{c}$ را با برآیند این دو بردار جمع می‌نماییم. برای این کار ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار داده و سپس ابتدای بردار $\vec{c}$ را روی انتهای برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرار می‌دهیم. با توجه به تعریف جمع برداری انتهای برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در حالتی که ابتدای $\vec{b}$ روی انتهای $\vec{a}$ باشد همان انتهای بردار $\vec{b}$ خواهد بود در نتیجه طرف چپ تساوی را از نظر هندسی می‌توان مانند (شکل ۱ـ۱۲) رسم کرد.

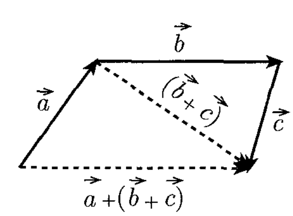


شکل ۱-۱۱



شکل ۱-۱۲

برای طرف راست تساوی به دلیل وجود پرانتز ابتدا باید برآیند دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به‌دست آوریم و سپس آن را با بردار $\vec{a}$ جمع نماییم. برای این کار ابتدای بردار $\vec{c}$ را روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار می‌دهیم و سپس ابتدای برآیند این دو بردار را که همان ابتدای بردار $\vec{b}$ می‌باشد بر انتهای بردار $\vec{a}$ منطبق می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که بردار برآیند نهایی همان بردار $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خواهد بود. به این خاصیت در جمع خاصیت انجمنی گفته می‌شود.



شکل ۱-۱۳

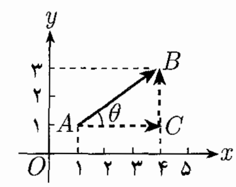
اکنون قوانین کلی حاکم بر بردارها را دانستیم و قادر هستیم نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در یک فضای دوبعدی یا صفحه، هر بردار را می‌توان به صورت مجموعی از دو بردار دیگر نمایش داد و اگر ما این دو بردار را موازی با محورهای دستگاه مختصات در نظر بگیریم قادر خواهیم بود که هر برداری در صفحه را به صورت مجموع دو بردار موازی با محورهای دستگاه نمایش دهیم.

این روش برای ما بسیار مفید است زیرا به وسیله‌ی آن می‌توانیم مسائل پیچیده‌ی صفحه‌ای را به مسأله‌ای بر روی خط راست تبدیل کنیم و با تحلیل مسأله روی دو محور دستگاه مختصات به جواب مسأله دست یابیم.

برای این کار یک بردار به طول واحد در جهت محور x به نام $\vec{i}$ تعریف می‌کنیم و یک بردار به طول واحد در جهت محور y به نام $\vec{j}$ تعریف می‌کنیم، به این دو بردار، بردارهای یکه نیز گفته می‌شود. اکنون هر برداری در صفحه را می‌توانیم به صورت ترکیبی از این دو بردار واحد نمایش دهیم و مسأله‌ی صفحه‌ای را ساده‌سازی کنیم. برای مثال به (شکل ۱ـ۱۴) توجه نمایید، در این شکل می‌خواهیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را به وسیله‌ی بردارهای یکه نمایش دهیم. این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم:



شکل ۱-۱۴

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \ , \ \overrightarrow{AC} = (۴ - ۱)\vec{i} = ۳\vec{i}$$
$$\overrightarrow{CB} = (۳ - ۱)\vec{j} = ۲\vec{j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AB} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

دیدیم که نحوه‌ی نمایش بردار در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $a\vec{i} + b\vec{j}$ می‌باشد که در این ترکیب a و b دو عدد حقیقی می‌باشند و اگر این بردار، بردار مکان یک نقطه باشد a عدد محور x و b عدد محور y خواهد بود. با توجه به (شکل ۱ـ۱۴) و روابط مثلثاتی حاکم بر مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت: ($|AB|$ نشان دهنده‌ی اندازه‌ی $\overrightarrow{AB}$ است)

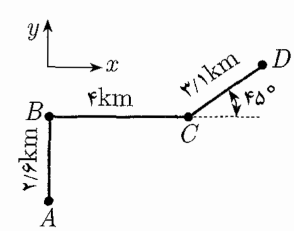
$$|BC| = |AB|\sin\theta \ , \ |AC| = |AB|\cos\theta$$
$$|AB|^۲ = |AC|^۲ + |CB|^۲$$

با داشتن مقدار بردار $\overrightarrow{AB}$ و زاویه‌ی θ می‌توانیم بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CB}$ را به شکل زیر نمایش دهیم:

$$\overrightarrow{AC} = |AB|\cos\theta\vec{i} \ , \ \overrightarrow{CB} = |AB|\sin\theta\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\theta\vec{i} + |AB|\sin\theta\vec{j}$$

مثال ۳

یک پستچی از نقطه‌ی شروع حرکت خود مسیری را که در (شکل ۱ـ۱۵) نشان داده شده است می‌پیماید. بردار جابه‌جایی کل را در دستگاه مختصات دکارتی به‌دست آورده و اندازه‌ی آن و زاویه‌ی θ را که این بردار با محور x می‌سازد بیابید. ($\overrightarrow{AB} \| y$ و $\overrightarrow{BC} \| x$)



شکل ۱-۱۵

حل. با توجه به شکل پستچی حرکت خود را در ۳ مرحله انجام داده است. این مراحل را به صورت ۳ بردار نمایش می‌دهیم و سپس این بردارها را با یکدیگر جمع می‌نماییم:

$$\overrightarrow{AB} = ۲/۶\vec{j} \ , \ \overrightarrow{BC} = ۴\vec{i}$$
$$\overrightarrow{CD} = (۳/۱ \times \cos ۴۵)\vec{i} + (۳/۱ \times \sin ۴۵)\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$= (۴ + ۳/۱ \times \cos ۴۵)\vec{i} + (۲/۶ + ۳/۱ \times \sin ۴۵)\vec{j}$$
$$\Rightarrow \ \overrightarrow{AD} = ۶/۱۹\vec{i} + ۴/۷۹\vec{j}$$

$$\Rightarrow |AD| = \sqrt{(۶/۱۹)^۲ + (۴/۷۹)^۲} = ۷/۸۳\text{km}$$

$$\sin\theta = \frac{۴/۷۹}{۷/۸۳} \rightarrow \theta = \sin^{-۱}(\frac{۴/۷۹}{۷/۸۳}) = ۳۷/۷^\circ$$

دقت کنید که طول بردار $\overrightarrow{AD}$ برابر با مسافتی که پستچی طی می‌کند نیست بلکه برابر با کمترین مسافت بین دو نقطه‌ی A و D می‌باشد. مسافتی که پستچی می‌پیماید برابر است با:

$$\Delta S = |AB| + |BC| + |CD| = ۲/۶ + ۴ + ۳/۱ = ۹/۷\text{km}$$

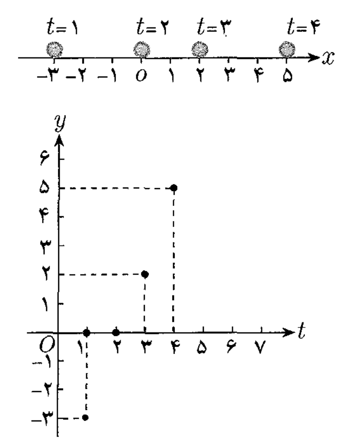
حرکت روی خط راست

در حرکت بر روی خط راست مسیر حرکت یک خط مستقیم مانند یکی از محورهای دستگاه مختصات می‌باشد و به همین دلیل تحلیل این حرکت بسیار ساده‌تر از تحلیل حرکت دوبعدی یا سه‌بعدی می‌باشد. در این نوع حرکت بردارهای جابه‌جایی مختلف و بردارهای مکان با یکدیگر موازی می‌باشند و به این دلیل محاسبات برداری بسیار ساده می‌شوند.

نمودار مکان ـ زمان

نمودار مکان ـ زمان، نموداری است که یکی از محورهای آن مکان و محور دیگر زمان می‌باشد و در یک حرکت مکان جسم را بر حسب زمان بیان می‌کند یا به عبارت دیگر مکان جسم را در هر لحظه بیان می‌کند. این نمودار ابزاری مفید برای حل مسائل سینماتیکی می‌باشد.

در (شکل ۱ـ۱۶) یک جسم نشان داده شده که بر روی محور ox در حال حرکت است. مکان این جسم را در هر لحظه می‌توان توسط برداری به شکل $a\vec{i}$ روی این محور نمایش داد، مثلاً در زمان $t = ۱\text{s}$ این جسم در مکان $x = -۳\vec{i}$ قرار دارد و در زمان‌های ۲، ۳ و ۴ ثانیه به ترتیب در مکان‌های $۰\vec{i}$، $۲\vec{i}$ و $۵\vec{i}$ قرار دارد. به این ترتیب می‌توان این چهار نقطه را مطابق شکل روی نمودار مکان ـ زمان این جسم رسم کرد.



شکل ۱ـ۱۶

با در اختیار داشتن نمودار مکان ـ زمان می‌توانیم تعیین کنیم که یک جسم در هر لحظه در چه مکانی قرار دارد و یا بین دو لحظه‌ی متفاوت چه مقدار جابه‌جایی صورت گرفته است. نکته‌ی جالب توجه این است که نمودار مکان ـ زمان یک جسم همواره یک تابع است زیرا یک جسم در یک لحظه نمی‌تواند در دو مکان متفاوت حضور داشته باشد و همچنین این تابع پیوسته است زیرا یک جسم نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک نقطه به نقطه‌ای با فاصله‌ی دور تغییر مکان دهد و مقید است که به طور پیوسته تغییر مکان دهد. نمودار مکان ـ زمان را می‌توان به صورت معادله نیز نشان داد که مکان را بر حسب زمان بیان می‌کند:

$$x = f(t) \xrightarrow{\text{برای مثال}} x = t^۲ + ۳t + ۵$$

مثال ۴ معادله‌ی حرکت جسمی که بر روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = ۳t - ۴$ می‌باشد: الف) چه مدت پس از لحظه‌ی $t = ۰\text{s}$ متحرک به مبدأ می‌رسد؟ ب) متحرک در لحظه‌ی

$t = ۱s$ در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد و جابه‌جایی آن بین دو لحظه‌ی $t = ۱s$ و $t = ۵s$ چه مقدار می‌باشد؟

حل. الف) متحرک زمانی به مبدأ حرکت می‌رسد که x برابر با صفر شود.

$$x = ۳t - ۴ = ۰ \ \rightarrow\ ۳t = ۴ \ \rightarrow\ t = \frac{۴}{۳}s$$

ب) متحرک در لحظه‌ی $t = ۱s$ در فاصله‌ی یک متری از مبدأ قرار دارد

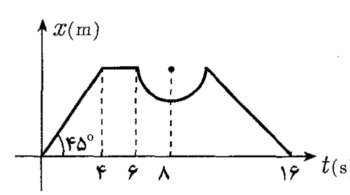
$$t = ۱s \ \Rightarrow\ \vec{x_۱} = ۳ - ۴ = -۱\vec{i}$$

$$t = ۵s \ \Rightarrow\ \vec{x_۲} = ۱۵ - ۴ = ۱۱\vec{i}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\overrightarrow{\Delta x}}_{\text{بردار جابه‌جایی}} = \vec{x_۲} - \vec{x_۱} = ۱۱\vec{i} - (-۱\vec{i}) = ۱۲\vec{i}$$

متحرک در بازه‌ی زمانی $۱s < t < ۵s$ به اندازه‌ی ۱۲ متر و در جهت مثبت محور x جابه‌جا شده است.

مثال ۵ نمودار مکان ـ زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند مطابق (شکل ۱ـ۱۷) می‌باشد مکان این جسم را در لحظات $t = ۷s$ و $t = ۱۲s$ بیابید و جابه‌جایی را بین این دو لحظه تعیین کنید. (منحنی بین لحظات ۶s و ۱۰s یک نیم‌دایره می‌باشد و مقیاس درجه‌بندی برای دو محور یکسان است.)



شکل ۱-۱۷

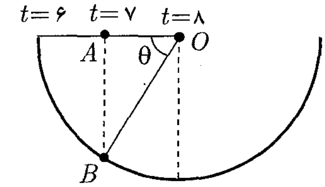
حل. به دلیل اینکه زاویه‌ی اولین خط $۴۵°$ درجه می‌باشد مکان در لحظه‌ی ۴s با زمان برابر و همان ۴ می‌شود و طبق نمودار تا لحظه‌ی $t = ۶s$ مکان روی $x = ۴m$ ثابت می‌ماند در لحظه‌ی $t = ۶s$ نمودار وارد نیم‌دایره می‌شود و مکان در لحظه‌ی $t = ۷s$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

مطابق (شکل ۱ـ۱۸) شعاع دایره معادل با زمانی برابر با ۲s می‌باشد پس می‌توان گفت:

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{R} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\ \theta = ۶۰^\circ \ \rightarrow\ AB = R\sin\theta = ۲ \times \sin ۶۰ = \sqrt{۳} = ۱/۷۳$$

$$\Rightarrow\ x_{(t=۷s)} = ۴ - ۱/۷۳ = ۲/۲۷m$$



شکل ۱-۱۸

و اما در $t = ۱۰s$ مکان جسم به $x = ۴m$ باز می‌گردد و پس از ۶ ثانیه به صفر می‌رسد پس برای $t = ۱۲s$ داریم:

$$\text{شیب خط}\ m = \frac{۰ - ۴}{۱۶ - ۱۰} = -\frac{۲}{۳}$$

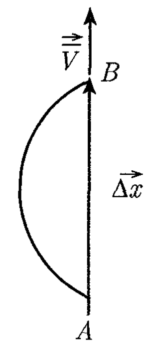
$$\Rightarrow\ x_{(t=۱۲s)} = x_{(t=۱۰s)} + (-\frac{۲}{۳}) \times (۱۲ - ۱۰) = ۴ - \frac{۴}{۳} = ۲/۶۷m$$

$$\Rightarrow\ \Delta x = ۲/۶۷ - ۲/۲۷ = ۰/۴m$$

به دلیل اینکه حرکت بر روی خط راست است محاسبات برداری مانند محاسبات عددی می‌باشند.

کمیت‌های ثانویه

پس از آشنایی با بردار به تعریف کمیت‌های ثانویه می‌پردازیم. کمیت‌های ثانویه، کمیت‌هایی هستند که مشخصات حرکت‌های مختلف را بیان می‌کنند و بررسی عمیق حرکت‌ها را امکان‌پذیر می‌سازد. سرعت، یکی از پرکاربردترین کمیت‌های ثانویه در علم فیزیک می‌باشد که از بردار جابه‌جایی ناشی می‌شود و در نتیجه یک کمیت برداری خواهد بود. ابتدا به تعریف سرعت متوسط می‌پردازیم و سپس سرعت لحظه‌ای را توضیح خواهیم داد.



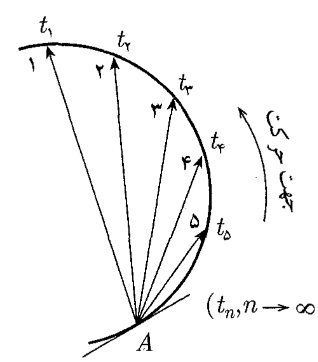
شکل ۱-۱۹

سرعت متوسط

فرض کنید متحرکی روی یک مسیر دلخواه مانند (شکل ۱ـ۱۹) از نقطه‌ی A تا B تغییر مکان دهد. در طی این حرکت بردار سرعت متوسط این متحرک برابر خواهد بود با بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B تقسیم بر زمان جابه‌جایی. بردار سرعت متوسط را با $\overrightarrow{\bar{v}}$ نمایش می‌دهیم و همان‌طور که از تساوی زیر مشاهده می‌شود سرعت متوسط به صورت ضرب یک عدد در بردار جابه‌جایی تعریف می‌شود پس خود برداریست هم جهت با بردار جابه‌جایی. یکای سرعت متوسط در SI طبق تعریف آن برابر است با متر تقسیم بر ثانیه:

$$\overrightarrow{\bar{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = (\frac{۱}{\Delta t})\overrightarrow{\Delta x}$$

سرعت لحظه‌ای



شکل ۱-۲۰

به (شکل ۱ـ۲۰) نگاه کنید. فرض کنید متحرکی در زمان t در نقطه‌ی A قرار دارد و این متحرک بر روی مسیر منحنی شکل در جهت نشان داده شده در حال حرکت است. اگر این متحرک در لحظه‌ی t_n از نقطه‌ی n عبور کند (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد) با دانستن بردار جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t و t_n می‌توان سرعت متوسط متحرک بین این دو لحظه را محاسبه نمود. با توجه به شکل ۱ـ۲۰ هر قدر مقدار n بزرگتر شود بازه‌ی زمانی حرکت یعنی $(t_n - t)$ کوچکتر خواهد شد و بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه نزدیک به خط مماس بر مسیر حرکت در لحظه‌ی t (نقطه‌ی A) خواهد شد. حال اگر لحظه‌ی t_n را آنقدر به لحظه‌ی t نزدیک کنیم که بردار جابه‌جایی بین این دو لحظه در جهت مماس بر مسیر شود طبق تعریف گفته می‌شود سرعت متوسط بین این دو لحظه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی t خواهد بود. در نتیجه سرعت یک متحرک در یک لحظه برابر خواهد بود با سرعت متوسط متحرک بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. اکنون شاید این سؤال به وجود بیاید که این سرعت متعلق به کدام یک از دو لحظه‌ی t یا t_n می‌باشد. پاسخ این سؤال این است که این دو لحظه آنقدر به یکدیگر نزدیک می‌باشند که هیچگاه نمی‌توان آنها را از یکدیگر تفکیک کرد و تنها به صورت حدی قابل نمایش می‌باشند. یعنی $(t_n - t \to ۰)$ یا $t_n \to t$ و این به معنی آن است که اختلاف این دو لحظه به سمت صفر میل می‌کند. برای فهم بهتر این موضوع فرض کنید بخواهیم سرعت جسمی را در لحظه‌ی $t = ۲\text{s}$ محاسبه کنیم. اگر برای این کار سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی $t = ۲\text{s}$ و $t = ۲/۰۰۰۱\text{s}$ را محاسبه کنیم جواب ما برابر با جواب حاصل از محاسبات حدی نخواهد بود ولی بسیار به یکدیگر نزدیک خواهند بود و اختلاف ناچیزی خواهند داشت. چگونگی محاسبه‌ی سرعت حدی را در آینده خواهیم آموخت.

سرعت و نمودار مکان ـ زمان

همان‌طورکه گفته شد بردار سرعت متوسط یک متحرک بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر خواهد بود با:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{t_2 - t_1}$$

حال اگر حرکت بر روی خط راست انجام پذیرد محاسبات برداری تبدیل به محاسبات عددی خواهد شد زیرا تمامی بردارها با یکدیگر موازی خواهند بود و می‌توان نوشت:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

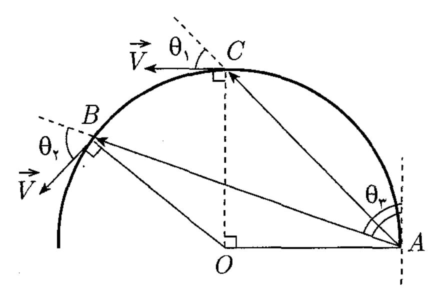
که این رابطه برابر خواهد بود با شیب خط مستقیمی که دو نقطه‌ی (t_1, x_1) و (t_2, x_2) را در نمودار مکان ـ زمان متحرک به یکدیگر متصل می‌نماید. حال اگر دو لحظه‌ی t_1 و t_2 بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند این رابطه برابر با سرعت لحظه‌ای در این لحظات خواهد بود و در نمودار مکان ـ زمان نیز این عبارت برابر خواهد بود با شیب خط واصل بین دو نقطه‌ی (t_1, x_1) و (t_2, x_2) و به دلیل اینکه این دو نقطه بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک هستند این خط همان خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی t_1 خواهد بود پس در نمودار مکان ـ زمان سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه خواهد بود.

مثال ۶

اتومبیلی در یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع $100\,m$ دور می‌زند:

الف) هنگامی که بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای جسم برای اولین بار با یکدیگر زاویه‌ی 45° می‌سازند اتومبیل چه مسافتی را پیموده است؟

ب) در این حالت طول بردار جابه‌جایی جسم را بیابید و آن را با مسافت طی شده مقایسه کنید.



شکل ۱-۲۱

حل. الف) می‌دانیم نقطه‌ی شروع حرکت نقطه‌ای مانند A می‌باشد و همچنین می‌دانیم که سرعت در هر لحظه در جهت مماس بر مسیر حرکت در آن لحظه خواهد بود و همچنین بردار سرعت متوسط میان دو لحظه هم‌جهت با بردار جابه‌جایی بین آن دو لحظه است. مطابق شکل (۱ـ۲۱) نقطه‌ی دلخواه B را در نظر بگیرید. در این نقطه زاویه‌ای که دو بردار سرعت لحظه‌ای و جابه‌جایی با یکدیگر می‌سازند برابر خواهد بود با θ_2، قابل ذکر است که زاویه‌ی بین دو بردار زاویه‌ای است که ابتدای آن دو بردار با یکدیگر می‌سازند نه انتهای یکی با ابتدای دیگری. از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در هر نقطه روی محیط دایره بر سرعت لحظه‌ای در آن نقطه عمود می‌باشد زیرا سرعت لحظه‌ای مماس بر دایره می‌باشد پس شعاع OB بر بردار $\vec{v}$ در نقطه‌ی B عمود خواهد بود در نتیجه زاویه‌ی $O\hat{B}A$ برابر خواهد بود با $(90 - \theta_2)$، با دانستن این نکته می‌توان نوشت:

$$O\hat{B}A = 90^\circ - \theta_2$$

$$OA = OB = R \Rightarrow O\hat{B}A = O\hat{A}B = 90^\circ - \theta_2$$

$$O\hat{A}B + \theta_3 = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ - \theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = \theta_3$$

بنابراین زاویه‌ی بردار جابه‌جایی با سرعت لحظه‌ای برای هر نقطه برابر خواهد بود با زاویه‌ی میان بردار جابه‌جایی و مماس بر دایره در نقطه‌ی A که این زاویه هنگامی برابر با 45° می‌شود که

متحرک روی نقطه‌ی C باشد و در هیچ نقطه‌ای قبل از آن این اتفاق نمی‌افتد:

$$A\hat{O}C = ۹۰^\circ \quad , \quad OA = OC \Rightarrow O\hat{C}A = O\hat{A}C$$
$$۱۸۰^\circ - O\hat{C}A - O\hat{A}C = ۹۰^\circ \Rightarrow O\hat{C}A = O\hat{A}C = ۴۵^\circ$$

(زاویه‌ی AC با مماس بر نقطه C برابر با ۴۵° می‌باشد.)

از روی شکل می‌توان نشان داد در طی حرکت متحرک از نقطه‌ی A تا زمانی که نیمی از محیط دایره پیموده شود این زاویه از ۰ تا ۹۰ درجه تغییر می‌کند و تنها در نقطه‌ی C برابر با ۴۵° می‌شود و مسافت طی شده تا نقطه‌ی C برابر است با:

$$\Delta S = \frac{۲\pi R}{۴} = \frac{\pi R}{۲} = ۵۰\pi = ۱۵۷/۰۸\text{m}$$

ب) طول بردار جابه‌جایی برابر است با:

$$\Delta x^۲ = AC^۲ = OA^۲ + OB^۲ = ۲R^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}R = ۱۴۱/۴۲\text{m}$$
$$\Rightarrow ۱۴۱/۴۲ < ۱۵۷/۰۸ \Rightarrow \Delta x < \Delta S$$

حرکت یکنواخت روی خط راست

هرگاه سرعت لحظه‌ای متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در تمام لحظه‌ها یکسان باشد، حرکت آن متحرک یکنواخت نامیده می‌شود. در حرکت یکنواخت روی خط راست نمودار مکان ـ زمان، یک خط راست خواهد بود زیرا شیب مماس بر این نمودار که بیانگر سرعت متحرک در هر لحظه می‌باشد باید در تمام لحظات یکسان باشد و تنها خط راست است که این خصوصیت را داراست. در نتیجه در این نوع حرکت، سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر با سرعت لحظه‌ای یا شیب خط در نمودار مکان ـ زمان می‌باشد:

$$\overline{v} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t$$

این رابطه برای حرکت یکنواخت بر روی خط راست برقرار می‌باشد و در حالت کلی اگر فاصله متحرکی تا مبدأ در لحظه‌ی $t = ۰$ برابر با $x_۰$ باشد و فاصله آن تا مبدأ در لحظه‌ی t برابر با x باشد با فرض حرکت یکنواخت بر روی خط راست می‌توان گفت:

$$x - x_۰ = v(t - t_۰) \overset{t_۰ = ۰}{\rightarrow} x = vt + x_۰$$

این رابطه همان معادله‌ی خط گذرنده از نمودار مکان ـ زمان می‌باشد که در آن v شیب خط و $x_۰$ عرض از مبدأ خط می‌باشد.

مثال ۷ راننده‌ای فاصله‌ی بین دو شهر را به ترتیب زیر می‌پیماید:

ابتدا به مدت یک ساعت با سرعت متوسط ۱۵m/s رانندگی کرده و پس از آن به مدت ۱۰ دقیقه توقف می‌کند. آنگاه با سرعت متوسط ۲۰m/s به مدت ۳۰ دقیقه به رانندگی ادامه می‌دهد

و بقیه‌ی مسیر را تا مقصد به مدت یک ربع ساعت با سرعت متوسط ۱۲m/s رانندگی می‌کند. اگر جاده‌ی میان این دو شهر یک مسیر مستقیم باشد به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) فاصله‌ی بین دو شهر چند کیلومتر است؟

ب) سرعت متوسط او در کل مسیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

ج) سرعت متوسط او در طول مدت رانندگی چند متر بر ثانیه است؟

حل. الف)

$$\Delta x_۱ = \overline{v_۱}\Delta t_۱ = ۱۵ \times (۱ \times ۶۰ \times ۶۰) = ۵۴۰۰۰\text{m} = ۵۴\text{km}$$

$$\Delta x_۲ = \overline{v_۲}\Delta t_۲ = ۰ \times (۱۰ \times ۶۰) = ۰\text{km}$$

$$\Delta x_۳ = \overline{v_۳}\Delta t_۳ = ۲۰ \times (۳۰ \times ۶۰) = ۳۶۰۰۰\text{m} = ۳۶\text{km}$$

$$\Delta x_۴ = \overline{v_۴}\Delta t_۴ = ۱۲ \times (۱۵ \times ۶۰) = ۱۰۸۰۰\text{m} = ۱۰/۸\text{km}$$

$$\sum_{i=۱}^{۴} \Delta x_i = ۵۴ + ۳۶ + ۱۰/۸ = ۱۰۰/۸\text{km}$$

ب)

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۴ + ۳۶ + ۱۰/۸}{۱ + \frac{۱۰}{۶۰} + \frac{۳۰}{۶۰} + \frac{۱۵}{۶۰}} = ۵۲/۵۹\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

ج)

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰۰/۸}{۱ + \frac{۳۰}{۶۰} + \frac{۱۵}{۶۰}} = ۵۷/۶\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

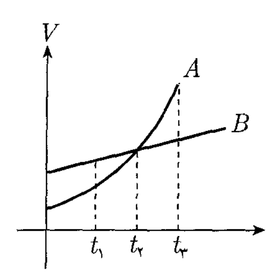
$$\overline{v} = ۵۷/۶ \times (\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}) = ۱۶\text{m/s}$$

نمودار سرعت ـ زمان

نمودار سرعت ـ زمان نیز مانند نمودار مکان ـ زمان برای حل مسائل سینماتیکی بسیار مفید است. این نمودار سرعت یک متحرک را بر حسب زمان نمایش می‌دهد. محور عمودی این نمودار سرعت و محور افقی آن زمان می‌باشد و این نمودار نیز مانند نمودار مکان ـ زمان همواره یک تابع پیوسته می‌باشد.

مثال ۸

نمودار سرعت ـ زمان (شکل ۱ـ۲۲) سرعت دو متحرک A و B را بر حسب زمان بیان می‌کند. اگر این دو متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در یک مکان قرار داشته باشند درکدام یک از لحظات $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ این دو متحرک می‌توانند برای بار دوم در یک مکان قرارگیرند.



شکل ۱-۲۲

حل. همان‌طور که مشاهده می‌شود در بازه‌ی زمانی $۰ < t < t_۲$ سرعت متحرک A کمتر از B می‌باشد پس تا لحظه‌ی $t = t_۲$ متحرک B همواره جلوتر از متحرک A می‌باشد ولی پس از لحظه‌ی $t = t_۲$ سرعت متحرک A بیشتر از B می‌شود و از این لحظه به بعد فاصله‌ی دو متحرک کاهش می‌یابد تا در لحظه‌ای مانند $t_۳$ این دو متحرک برای بار دوم در یک مکان قرار خواهند گرفت.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

هنگامی که شما از حال سکون شروع به دویدن می‌کنید سرعت شما از صفر شروع به افزایش یافتن می‌کند تا در نهایت به مقداری ثابت می‌رسد و هنگام ایستادن نیز سرعت شما کاهش می‌یابد تا به مقدار صفر برسد و شما به حالت سکون بازگردید. شتاب متوسط کمیتی برداری است که از تقسیم بردار تغییر سرعت بین دو لحظه بر زمان بین آن دو لحظه به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{\overline{a}} = \frac{\overrightarrow{v_۲} - \overrightarrow{v_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

بردار شتاب متوسط را به وسیله‌ی $\overrightarrow{\overline{a}}$ نمایش می‌دهند. در حرکت بر روی خط راست به دلیل موازی بودن بردارها این رابطه به شکل عددی درخواهد آمد:

$$\overline{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

شتاب کمیتی است که نرخ تغییر سرعت را بر حسب زمان بیان می‌کند و بر اساس تعریف آن، برداری هم جهت با بردار تغییر سرعت خواهد بود. یکای شتاب در سیستم واحد SI ($m/s^۲$) می‌باشد.

اگر دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک باشند شتاب متوسط بین این دو لحظه برابر با شتاب لحظه‌ای آنها خواهد بود. به دلیل شباهتی که تعریف شتاب با تعریف سرعت دارد تمام روابطی که بین سرعت و مکان برقرار بود، اینک بین شتاب و سرعت برقرار خواهد بود. پس برای حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت خواهیم داشت:

$$\overline{a} = a = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \ , \ v = at + v_۰$$

در حرکت بر روی خط راست هنگامی که دو بردار شتاب و سرعت هم جهت باشند سرعت در حال افزایش و حرکت تند شونده خواهد بود و هنگامی که این دو بردار در خلاف یکدیگر باشند حرکت کند شونده خواهد بود:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{حرکت تند شونده در جهت مثبت محور} : & a^+ \ , \ v^+ \\ \text{حرکت تند شونده در جهت منفی محور} : & a^- \ , \ v^- \end{array}\right\} \Rightarrow a \times v > ۰ \Rightarrow \text{حرکت تند شونده}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{حرکت کند شونده در جهت منفی محور} : & a^+ \ , \ v^- \\ \text{حرکت کند شونده در جهت مثبت محور} : & a^- \ , \ v^+ \end{array}\right\} \Rightarrow a \times v < ۰ \Rightarrow \text{حرکت کنده شونده}$$

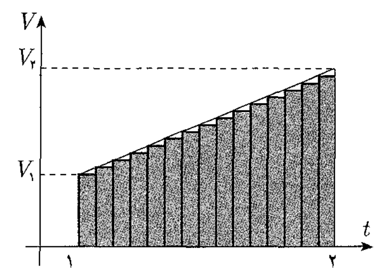
در حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرک به صورت خطی با شیب a و عرض از مبدأ $v_۰$ خواهد بود. در این حالت می‌توان نشان داد که سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر خواهد بود با مجموع سرعت در آن دو لحظه تقسیم بر دو:

$$\overline{v} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

برای اثبات این رابطه تنها کافیست نشان دهیم جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ برابر است با:

$$\Delta x = \overline{v}\Delta t = (\frac{v_۱ + v_۲}{۲})\Delta t$$

برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نمودار سرعت ـ زمان جسم را بین لحظات $t_۱$ تا $t_۲$ رسم می‌کنیم (مانند شکل ۱ـ۲۳) و سپس محور زمان را به بازه‌های بسیار کوچک زمانی تقسیم می‌کنیم. می‌دانیم در هر یک از این بازه‌ها جابه‌جایی برابر خواهد بود با سرعت متوسط در آن بازه ضرب در مقدار بازه‌ی زمانی. حال اگر بازه‌های زمانی را بی‌نهایت کوچک در نظر بگیریم سرعت متوسط در هر بازه برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه از آن بازه‌ی بی‌نهایت کوچک خواهد بود و مقدار جابه‌جایی متحرک در هر بازه برابر خواهد بود با سرعت لحظه‌ای ضرب در زمان آن بازه و بدین ترتیب جابه‌جایی کل برابر با مجموع همه‌ی جابه‌جایی‌ها خواهد بود. مقدار هر جابه‌جایی را می‌توان به صورت مساحت مستطیلی در نظر گرفت که طول آن مقدار سرعت متوسط در آن بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک و عرض آن برابر با زمان خواهد بود. در نتیجه جابه‌جایی کل بین دو لحظه‌ی دلخواه $t_۱$ و $t_۲$ برابر خواهد بود با مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$:



شکل ۱-۲۳

$$\Delta x = \text{مساحت زیر نمودار} = (\frac{v_۱ + v_۲}{۲})(t_۲ - t_۱)$$
$$= \overline{v}\Delta t \Rightarrow \overline{v} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

قابل ذکر است که مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان نیز برابر با تغییرات سرعت می‌باشد. اکنون با استفاده از سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست می‌توانیم معادله‌ی مکان ـ زمان را برای این حرکت بیابیم.

معادله‌ی مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

با استفاده از روابطی که به‌دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$$

در رابطه‌ی زیر Δx میزان جابه‌جایی در زمان Δt است و $v_۱$ و $v_۲$ به ترتیب سرعت در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ می‌باشند.

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t$$

حال اگر فرض کنیم $t_۱$ مبدأ زمان انتخاب شود $(t_۱ = ۰)$ و $t_۲$ را یک لحظه‌ی دلخواه در نظر بگیریم و سرعت متحرک را در $t = ۰$ برابر با $v_۰$ و در $t_۲$ برابر با $v_۲$ قرار دهیم همچنین مکان متحرک را نیز در این لحظات $x_۰$ و $x_۲$ قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$x_۲ - x_۰ = \frac{v_۲ + v_۰}{۲}(t_۲ - t_۰)$$

$$v_۲ = a(t_۲ - t_۰) + v_۰ \quad , \quad t_۰ = ۰ \Rightarrow v_۲ = at_۲ + v_۰$$

$$\Rightarrow x_۲ - x_۰ = \frac{at_۲ + v_۰ + v_۰}{۲}t_۲ \Rightarrow x_۲ = \frac{a}{۲}t_۲^۲ + v_۰t_۲ + x_۰$$

حال به دلیل اینکه $t_۲$ یک لحظه‌ی کاملاً دلخواه بوده است این رابطه برای هر لحظه‌ای مانند t برقرار خواهد بود:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

که در این رابطه $x_۰$ و $v_۰$ به ترتیب مکان و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ می‌باشند و x مکان متحرک در لحظه‌ی t و a شتاب حرکت می‌باشد.

برای به‌دست آوردن رابطه‌ای که کمیت زمان در آن حذف شده باشد به شکل زیر عمل خواهیم کرد:

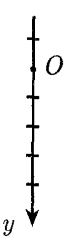
$$v = at + v_۰ \Rightarrow t = \frac{v - v_۰}{a}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}a(\frac{v - v_۰}{a})^۲ + v_۰(\frac{v - v_۰}{a}) + x_۰$$

$$\Rightarrow x - x_۰ = \frac{v^۲ - v_۰^۲}{۲a} \Rightarrow v^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x - x_۰)$$

سقوط آزاد

سقوط آزاد مثالی از حرکت بر روی خط راست با شتاب ثابت است که ما هر روزه آن را مشاهده می‌کنیم. هنگامی که شما ایستاده‌اید و یک پاک‌کن از دست شما رها می‌شود، حرکت پاک‌کن تا لحظه‌ی برخورد با زمین یک سقوط آزاد است که در مسیری مستقیم و تحت شتاب جاذبه‌ی زمین صورت می‌گیرد (این در صورتی است که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود). در سقوط آزاد جابه‌جایی در امتداد قائم صورت می‌گیرد و ما می‌توانیم برای راحتی کار بردار یکه‌ی خود را رو به سمت پایین در نظر بگیریم تا شتاب جاذبه همواره مثبت باشد در نتیجه جهت مثبت محور حرکت را رو به سمت پایین اختیار می‌کنیم: (مانند شکل ۱ـ۲۴)



شکل ۱-۲۴

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰$$

$$v = gt + v_۰$$

مثال ۹ گلوله‌ی کوچکی از بالای ساختمانی رها می‌شود. وقتی در ارتفاع ۱۵ متری بالای سطح زمین قرار دارد سرعتش $۱۰ \mathrm{m/s}$ است.

الف) سرعت سنگ در لحظه‌ی رسیدن به زمین چقدر است؟

ب) ارتفاع ساختمان و سرعت متوسط گلوله در مدت سقوط چقدر است؟ ($g = ۱۰ \mathrm{m/s^۲}$ فرض شود)

حل. الف) گلوله برای رسیدن به سطح زمین باید مسافتی معادل $۱۵\mathrm{m}$ را طی کند:

$$y - y_۰ = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t \Rightarrow ۱۵ = ۵t^۲ + ۱۰t$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = \begin{cases} ۱\mathrm{s} & \text{ق‌ق} \\ -۳s & \text{غ‌ق} \end{cases}$$

۱ ثانیه زمان می‌گذرد تا سنگ به سطح زمین برسد پس سرعت سنگ در سطح زمین خواهد بود:

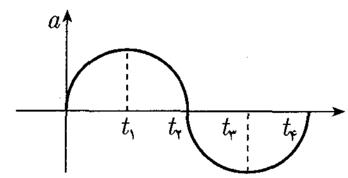
$$v = gt + v_\circ \Rightarrow v = g \times ۱ + ۱۰ = ۲۰\text{m/s}$$

ب)
$$\overline{v} = \frac{v_\circ + v_{\text{سطح زمین}}}{۲} = \frac{۰ + ۲۰}{۲} = ۱۰\text{m/s}$$

ارتفاع ساختمان $h = y = \overline{v}\Delta t = ۱۰\Delta t$

$$\Delta t = \frac{v - v_\circ}{g} = \frac{۲۰ - ۰}{۱۰} = ۲\text{s} \Rightarrow y = ۱۰ \times ۲ = ۲۰\text{m}$$

مثال ۱۰ در نمودار شتاب ـ زمان (شکل ۱ـ۲۵) تعیین کنید در هر بازه‌ی زمانی حرکت کند شونده یا تند شونده می‌باشد. ($v_\circ = ۰$)



شکل ۱-۲۵

حل. در فاصله‌ی زمانی $۰ < t < t_۲$ شتاب مثبت می‌باشد و سرعت نیز که برابر با مساحت زیر نمودار است در هر لحظه بین این بازه مثبت خواهد بود پس حرکت در این بازه تند شونده خواهد بود. در بازه‌ی $t_۲ < t < t_۴$ شتاب منفی است و اما سرعت همچنان مثبت است زیرا در لحظه‌ی $t_۲$ سرعت برابر است با مساحت نیم‌دایره از $t = ۰$ تا $t = t_۲$ و سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = t_۴$ به دلیل برابر بودن مساحت دو نیم‌دایره در بالا (مثبت) و پایین (منفی) محور زمان برای بار دوم صفر خواهد شد ولی هیچگاه منفی نخواهد شد بنابراین در بازه‌ی $t_۲ < t < t_۴$ حرکت کند شونده خواهد بود.

مثال ۱۱ جسمی را از حالت سکون از ارتفاع بسیار زیاد رها می‌کنیم رابطه‌ای بیابید که بگوید این جسم در ثانیه‌ی nام از حرکت خود چه مقدار جابه‌جا می‌شود. (n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد)

حل. ثانیه‌ی اول حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $۰ < t < ۱$ ثانیه در نتیجه ثانیه‌ی nام حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $n - ۱ < t < n$ ثانیه، برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در ثانیه‌ی nام حرکت می‌نویسیم:

$$v_{n-۱} = g(n-۱) + v_\circ \quad , \quad v_\circ = ۰$$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}g(۱)^۲ + v_{n-۱}(۱)^۲ = \frac{۱}{۲}g + ng - g = g(n - \frac{۱}{۲})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جملات جابه‌جایی در هر ثانیه از حرکت یک تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند که قدر آن برابر با شتاب حرکت می‌باشد. در حالت سقوط آزاد قدر این تصاعد برابر با g می‌باشد و جابه‌جایی کل را می‌توان از حاصل جمع جملات این تصاعد محاسبه نمود.

ثانیه‌ی ۱ام : $\Delta y_۱ = g(۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{g}{۲}$

ثانیه‌ی ۲ام : $\Delta y_۲ = g(۲ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۳g}{۲}$

ثانیه‌ی ۳ام : $\Delta y_۳ = g(۳ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۵g}{۲}$

$\vdots$

ثانیه‌ی nام : $\Delta y_n = g(n - \frac{۱}{۲}) = \frac{(۲n - ۱)g}{۲}$

حرکت در دو بعد

تا اینجا حرکت بر روی خط راست را آموختیم و با مشخصه‌های این حرکت آشنایی پیدا کردیم. اکنون می‌پردازیم به حرکت‌های منحنی شکل در دو بعد و با مشخصات این دسته از حرکات آشنایی پیدا می‌کنیم. همان‌طورکه اشاره شد ما می‌توانیم هر برداری در صفحه را به صورت حاصل جمع دو بردار موازی با محورهای مختصات بیان کنیم و گفتیم که می‌توانیم به وسیله‌ی دو بردار یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حرکات پیچیده‌ی صفحه‌ای را به حرکت بر روی خط راست ساده‌سازی کنیم. اکنون چگونگی این عمل را توضیح خواهیم داد.

بردار مکان و بردار جابه‌جایی در دو بعد

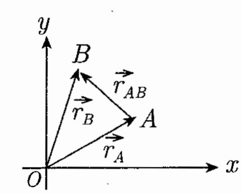
بردار مکان یک نقطه مانند A برداریست که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه‌ی A می‌باشد و بردار جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B برابر خواهد بود با:

جابه‌جایی از A به B: $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

جابه‌جایی از B به A: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

$$\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} \ , \ \ \vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

$$\Rightarrow \ \vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



شکل ۱-۲۶

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید تفکیک کردن بردارها به دو بردار موازی با محورها بر اساس $\vec{i}$ و $\vec{j}$ محاسبات برداری را تبدیل به محاسبات ساده‌ی عدد خواهد کرد.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی دلخواه برداری است هم جهت با بردار جابه‌جایی بین آن دو لحظه و همان‌طورکه توضیح داده شد سرعت لحظه‌ای در یک لحظه‌ی دلخواه برابر است با سرعت متوسط بین آن لحظه و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط را نیز می‌توان بر اساس بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بیان کرد برای مثال اگر ما رابطه‌ی x و t را برای یک متحرک در اختیار داشته باشیم می‌توانیم سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای متحرک را در هر زمانی در راستای محور x یا بردار $\vec{i}$ به‌دست آوریم مانند رابطه‌ی زیر:

$$x = ۳t - ۵ \ \Rightarrow \ v_x = ۳\text{m/s} \ \Rightarrow \ v_x = ۳\vec{i}$$

اما باید توجه داشت که v_x تنها مؤلفه‌ی افقی سرعت متحرک است و رابطه میان دو کمیت x و t هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره‌ی مؤلفه‌ی عمودی سرعت متحرک (v_y) در اختیار ما قرار نمی‌دهد.

نمایش سرعت لحظه‌ای در حرکت دوبعدی

می‌دانیم سرعت یک متحرک در لحظه‌ی t برابر خواهد بود با سرعت متوسط آن متحرک بین لحظه‌ی t و لحظه‌ای بی‌نهایت نزدیک به آن، در نتیجه برای محاسبه‌ی سرعت لحظه‌ای می‌توان

به روش زیر عمل کرد:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\Big)_{\Delta t \to \circ} \quad , \quad \overrightarrow{\Delta r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

به دلیل اینکه Δt به سمت صفر می‌کند متحرک زمان بسیار کوتاهی برای تغییر مکان خواهد داشت پس مقادیر Δy و Δx نیز به سمت صفر میل خواهند کرد. در این حالت رابطه‌ی سرعت لحظه‌ای را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

در این رابطه عبارت $\frac{dx}{dt}$ برابر است با مشتق تابع x بر حسب متغیر t و عبارت $\frac{dy}{dt}$ برابر است با مشتق تابع y نسبت به متغیر t.

$$\frac{dx}{dt} = v_x \ , \ \frac{dy}{dt} = v_y \ \Rightarrow \ \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

مثال ۱۲ معادله‌ی حرکت جسمی با دو رابطه‌ی زیر در SI مشخص شده است:

$$y = ۲t^۲ + ۱ \ , \ x = ۶t$$

الف) معادله‌ی مسیر حرکت را بیابید.

ب) معادله‌ی سرعت جسم را بنویسید و بزرگی سرعت را در $t = ۲\mathrm{s}$ محاسبه کنید.

ج) بردار سرعت متوسط جسم را بین لحظه‌های $t = ۱\mathrm{s}$ و $t = ۲\mathrm{s}$ بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

حل. الف) معادله‌ی مسیر حرکت معادله‌ای است که x و y را بر حسب یکدیگر بیان می‌کند:

$$x = ۶t \ \Rightarrow \ t = \frac{x}{۶} \ \Rightarrow \ y = ۲(\frac{x}{۶})^۲ + ۱ \ \Rightarrow \ y = \frac{x^۲}{۱۸} + ۱$$

ب)

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = ۶\vec{i} + (۴t)\vec{j}$$

$$t = ۲\mathrm{s} \ \Rightarrow \ \vec{v} = ۶\vec{i} + ۸\vec{j} \ \Rightarrow \ |v| = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰\,\mathrm{m/s}$$

ج)

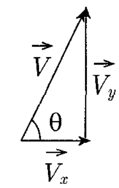
$$\overrightarrow{\overline{v}} = \overline{v_x}\vec{i} + \overline{v_y}\vec{j}$$

$$\overline{v_x} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۲ - ۶}{۲ - ۱} = ۶\,\mathrm{m/s}$$

$$\overline{v_y} = \frac{y_۲ - y_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۹ - ۳}{۲ - ۱} = ۶\,\mathrm{m/s}$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{\overline{v}} = ۶\vec{i} + ۶\vec{j}$$

مثال ۱۳ معادله‌ی حرکت جسمی به صورت $y = ۳x^۳ + ۵x$ می‌باشد اگر در مکان $x = ۱\text{m}$ سرعت جسم در راستای محور x برابر با ۲m/s باشد سرعت جسم در این مکان را به صورت برداری نمایش دهید.



شکل ۱-۲۷

$$x = ۱\text{m} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ۹x^۲ + ۵ = ۹ + ۵ = ۱۴ = \tan\theta \ \text{(شیب خط مماس)}$$

از آنجایی که سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است داریم: (شکل ۱ـ۲۷)

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = ۱۴ \Rightarrow v_y = ۱۴v_x = ۲۸\text{m/s}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = ۲\vec{i} + ۲۸\vec{j}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

در حرکت دوبعدی در صفحه شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ برداریست هم جهت با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه و شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ برداریست هم جهت با بردار تغییر سرعت بین لحظه‌ی $t_۱$ و یک لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به آن. هنگامی که یک جسم روی یک منحنی حرکت می‌کند به دلیل اینکه سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد، جهت آن همواره در حال تغییر می‌باشد و حتی اگر سرعت جسم از نظر اندازه ثابت بماند جهت آن در حال تغییر خواهد بود و در نتیجه بردار سرعت همواره در حال تغییر می‌باشد بنابراین حرکت روی یک مسیر منحنی شکل همواره یک حرکت شتابدار خواهد بود.

برای شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ می‌توان نوشت:

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v_۲} - \vec{v_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \quad , \quad \overrightarrow{\Delta v} = \Delta v_x\vec{i} + \Delta v_y\vec{j}$$
$$\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} \quad , \quad \vec{\bar{a}} = \bar{a}_x\vec{i} + \bar{a}_y\vec{j}$$

و برای شتاب لحظه‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \left.\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}\right)_{\Delta \to ۰} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \ , \ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a} = \frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} \ , \ \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{d^۲x}{dt^۲}\vec{i} + \frac{d^۲y}{dt^۲}\vec{j}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \ , \ \frac{dv_y}{dt} = a_y \Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

همان‌طورکه از روابط استنباط می‌شود بردار شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی $t_۱$ و $t_۲$ با بردار تغییر سرعت بین این دو لحظه هم جهت می‌باشد اما هیچ لزومی ندارد که این بردار با بردارهای $\vec{v_۱}$ یا $\vec{v_۲}$ هم جهت باشد. در حرکت بر روی خط راست به دلیل توازی دو بردار $\vec{v_۱}$ و $\vec{v_۲}$ تفاضل آنها نیز موازی با خودشان بود ولی در حرکت صفحه‌ای و حرکت بر روی مسیر منحنی شکل این امر تنها بین نقاطی از مسیر امکان‌پذیر است که مماس بر مسیر در آن نقاط با یکدیگر موازی باشند.

حرکت پرتابی

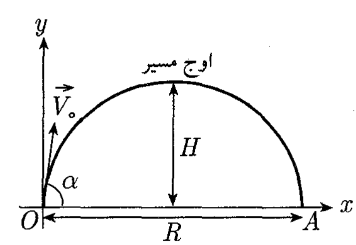
در این قسمت به تحلیل و بررسی حرکت در فضای دوبعدی با شتاب ثابت می‌پردازیم. در حرکت با شتاب ثابت مقدار و جهت بردار شتاب در تمام طول مدت حرکت ثابت می‌ماند. در این نوع حرکت برای سادگی حل مسأله دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که یکی از محورهای دستگاه موازی با بردار شتاب باشد و مقدار شتاب در راستای محور دیگر برابر با صفر شود. ساده‌ترین نوع حرکت با شتاب ثابت در صفحه حرکت پرتابی است. هنگامی که شما پاک‌کن خود را به سمت دوستتان پرتاب می‌کنید در صورت صرف‌نظر کردن از مقاومت هوا، پاک‌کن یک حرکت پرتابی را انجام خواهد داد. در حالت کلی اگر جسمی را به گونه‌ای پرتاب کنیم که امتداد سرعت اولیه‌ی جسم با امتداد قائم، زاویه‌ای به غیر از صفر درجه بسازد این جسم یک حرکت پرتابی را طی می‌کند و به آن یک **پرتابه** می‌گوییم. در حرکت پرتابی اندازه‌ی شتاب برابر با g و جهت آن رو به پایین خواهد بود.

محاسبات برای یک پرتابه که با سرعت $v_\circ$ و زاویه‌ی α پرتاب می‌شود مانند شکل ۱ـ۲۸ به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{a}_x = \circ \quad , \quad \vec{a}_y = -g\vec{j}$$
$$\vec{v}_{\circ x} = v_\circ \cos\alpha\vec{i} \quad , \quad \vec{v}_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha\vec{j}$$

سرعت افقی در طول مسیر ثابت می‌ماند.

$$\vec{a}_x = \circ \Rightarrow \vec{v}_{\circ x} = \text{cte}$$
$$x_\circ = \circ \Rightarrow \vec{x} = (v_\circ \cos\alpha\vec{i})t$$
$$\vec{a}_y = -g\vec{j} \quad , \quad \vec{v}_{\circ y} = v_\circ \sin\alpha\vec{j}$$
$$y_\circ = \circ \Rightarrow \vec{y} = \frac{۱}{۲}(-g\vec{j})t^۲ + (v_\circ \sin\alpha\vec{j})t$$
$$\Rightarrow \vec{y} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_\circ \sin\alpha)t\right)\vec{j}$$
$$\vec{v}_y = (-g\vec{j})t + \vec{v}_{\circ y} \Rightarrow \vec{v}_y = (-gt + v_\circ \sin\alpha)\vec{j}$$



شکل ۱-۲۸

به وسیله‌ی این معادلات می‌توانیم بردارهای مکان، سرعت و شتاب پرتابه را در هر لحظه مشخص کنیم. اکنون به وسیله‌ی معادلات زیر مسیر حرکت یک پرتابه را مشخص می‌کنیم:

$$x\vec{i} = (v_\circ \cos\alpha\vec{i})t \Rightarrow t = \frac{x}{v_\circ \cos\alpha}$$
$$y\vec{j} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + (v_\circ \sin\alpha)t\right)\vec{j}$$
$$\Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}g(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha})^۲ + v_\circ \sin\alpha(\frac{x}{v_\circ \cos\alpha})$$
$$\Rightarrow y = -\frac{gx^۲}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\alpha} + x\tan\alpha$$

از معادله‌ی مسیر حرکت مشخص است که حرکت پرتابی یک مسیر سهمی شکل را طی می‌کند.

در حرکت پرتابی فاصله‌ی افقی را که پرتابه طی می‌کند تا دوباره به ارتفاع اولیه برگردد، برد پرتابه و ارتفاع بالاترین نقطه‌ای را که پرتابه به آن می‌رسد ارتفاع اوج می‌نامیم. برای محاسبه‌ی برد و ارتفاع اوج یک پرتابه با سرعت اولیه $\vec{v}_\circ$ و زاویه‌ی α می‌توان به روش زیر عمل کرد:

نقطه‌ی اوج نقطه‌ای است که سرعت پرتابه در راستای محور y در آن نقطه برابر با صفر شود زیرا از این لحظه به بعد بردار سرعت v_y تغییر جهت خواهد داد و ارتفاع پرتابه کاهش می‌یابد:

$$\vec{v}_y = \circ \;\Rightarrow\; \circ = (-gt)\vec{j} + v_\circ \sin\alpha \vec{j}$$

$$\Rightarrow\; gt = v_\circ \sin\alpha \;\Rightarrow\; t = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g}$$

$$y_\circ = \circ \;\Rightarrow\; \vec{H} = \Big(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ \sin\alpha t\Big)\vec{j}$$

$$= \Big(-\frac{۱}{۲}g\big(\frac{v_\circ \sin\alpha}{g}\big)^۲ + (v_\circ \sin\alpha)\big(\frac{v_\circ \sin\alpha}{g}\big)\Big)\vec{j}$$

$$\Rightarrow\; \vec{H} = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g}\vec{j}$$

زمان رسیدن پرتابه تا نقطه‌ی اوج برابر با نصف کل زمان حرکت پرتابه می‌باشد تا به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب بازگردد:

$$\vec{x} = (v_\circ \cos\alpha \vec{i})t$$

$$\vec{R} = v_\circ \cos\alpha\big(\frac{۲v_\circ \sin\alpha}{g}\big)\vec{i} = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}\vec{i}$$

به روش دیگر: هنگامی که پرتابه به ارتفاع نقطه‌ی پرتاب باز می‌گردد با استفاده از معادله‌ی مسیر حرکت می‌توان نوشت:

$$y = \circ \;\Rightarrow\; \circ = \frac{-g(R^۲)}{۲v_\circ^۲ \cos^۲\alpha} + R\tan\alpha \Rightarrow\; R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}$$

مثال ۱۴ نشان دهید در چه زاویه‌ای از پرتاب، برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد شد و سپس ثابت کنید برای زاویه‌هایی که به یک اندازه از آن زاویه بیشتر و یا کمترند، بردها مساوی خواهند بود.

حل.

$$R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g} \;,\; R_{\max} \;\Rightarrow\; \frac{dR}{d\alpha} = \circ$$

$$\Rightarrow\; \frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_\circ^۲}{g} \times ۲ \times \cos ۲\alpha = \circ$$

$$\Rightarrow\; \cos ۲\alpha = \circ \;\Rightarrow\; ۲\alpha = \frac{\pi}{۲} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{۴}$$

در زاویه‌ی ۴۵° برد حرکت پرتابی بیشینه خواهد بود.

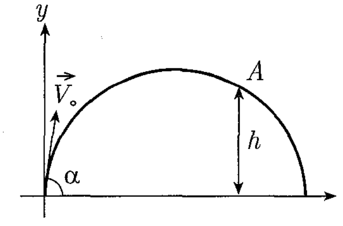
$$\theta = \big(\frac{\pi}{۴} + \alpha\big) \;,\; \beta = \big(\frac{\pi}{۴} - \alpha\big)$$

$$\Rightarrow\; R_\theta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\theta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin\big(\frac{\pi}{۲} + ۲\alpha\big) = \frac{v_\circ^۲}{g}\cos ۲\alpha$$

$$R_\beta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\beta = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin\big(\frac{\pi}{۲} - ۲\alpha\big) = \frac{v_\circ^۲}{g}\cos ۲\alpha = R_\theta$$

مثال ۱۵

مطابق (شکل ۱ـ۲۹) جسمی را با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_\circ$ و با زاویه‌ی α نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. با صرف‌نظر کردن از نیروی مقاومت هوا بزرگی سرعت عمودی جسم را در نقطه‌ی A به‌دست آورید.



شکل ۱-۲۹

حل. $\vec{y} = h\vec{j}$

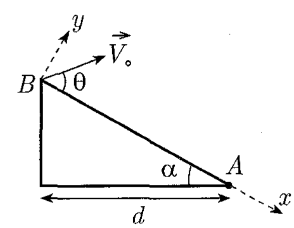
در این مسأله هیچ اطلاعاتی راجع به زمان مطرح نشده است پس بهتر است از معادله‌ای استفاده کنیم که زمان در آن حذف شده است.

$$v_y^{۲} - v_{\circ y}^{۲} = ۲(a_y)(y - y_\circ) \Rightarrow v_y^{۲} - v_{\circ y}^{۲} = ۲(-g)(y - y_\circ)$$
$$\Rightarrow v_h^{۲} - (v_\circ \sin\alpha)^{۲} = -۲g(h - \circ)$$
$$\Rightarrow v_h^{۲} = v_\circ^{۲} \sin^{۲}\alpha - ۲gh$$
$$\Rightarrow v_h = \pm\sqrt{v_\circ^{۲} \sin^{۲}\alpha - ۲gh}$$

اکنون طبق معادله‌ی روبه‌رو دو جواب قرینه برای سرعت در نقطه‌ی A به‌دست آمد که جواب مثبت غیرقابل قبول می‌باشد زیرا در نقطه‌ی A حرکت رو به پایین است و سرعت منفی می‌باشد. جواب مثبت برای نقطه‌ای در ارتفاع h قبل از رسیدن به نقطه اوج می‌باشد.

مثال ۱۶

مطابق (شکل ۱ـ۳۰) سرعت اولیه‌ی پرتابه را طوری تعیین کنید که مسیر حرکت پرتابه از نقطه‌ی A عبور کند.



شکل ۱-۳۰

حل. در این مسأله برای سادگی دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که محور x منطبق بر خط BA باشد و نقطه‌ی B را مبدأ دستگاه قرار می‌دهیم در این حالت داریم:

$$\vec{a}_x = g\sin\alpha\vec{i} \qquad , \qquad \vec{a}_y = -g\cos\alpha\vec{j}$$

t را زمان حرکت تا نقطه‌ی A در نظر می‌گیریم:

$$y_A = y_B = \circ \;\Rightarrow\; \vec{y}_A = \circ = \frac{۱}{۲}\vec{a}_y t^{۲} + \vec{v}_{\circ y} t$$
$$\Rightarrow \circ = \frac{۱}{۲}(-g\cos\alpha\vec{j})t^{۲} + (v_\circ \sin\theta\vec{j})t$$
$$\Rightarrow (v_\circ \sin\theta)t = (\frac{۱}{۲}g\cos\alpha)t^{۲} \;\Rightarrow\; t = \frac{۲v_\circ \sin\theta}{g\cos\alpha}$$
$$\vec{x}_A = |AB|\vec{i} = \frac{d}{\cos\alpha}\vec{i}$$
$$\vec{x}_A = \frac{۱}{۲}\vec{a}_x t^{۲} + \vec{v}_{\circ x} t = (\frac{۱}{۲}g\sin\alpha\vec{i})t^{۲} + (v_\circ \cos\theta\vec{i})t$$
$$\Rightarrow \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{۱}{۲}g\sin\alpha(\frac{۲v_\circ \sin\theta}{g\cos\alpha})^{۲} + v_\circ\cos\theta(\frac{۲v_\circ \sin\theta}{g\cos\alpha})$$
$$\Rightarrow d = \frac{۲v_\circ^{۲}\sin^{۲}\theta\sin\alpha}{g\cos\alpha} + \frac{v_\circ^{۲}\sin ۲\theta}{g}$$
$$\Rightarrow d = v_\circ^{۲}\left(\frac{۲\sin^{۲}\theta\tan\alpha + \sin ۲\theta}{g}\right) \Rightarrow v_\circ = \sqrt{\frac{dg}{۲\sin^{۲}\theta\tan\alpha + \sin ۲\theta}}$$

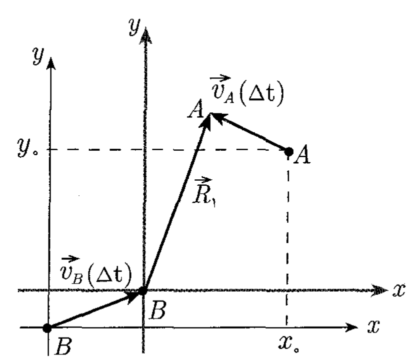
یکی از راه‌های ارزیابی نهایی جواب در فیزیک تحلیل دیمانسیونی جواب است یعنی اگر جواب را به صورت پارامتری به‌دست آوریم در این جواب هر پارامتر نشان دهنده‌ی یک کمیت فیزیکی می‌باشد و واحد خاص خود را دارد و در یک عبارت پارامتری اعدادی که نشان دهنده‌ی کمیت‌های فیزیکی نیستند بدون واحد هستند و در اثر محاسبات ریاضی ایجاد می‌شوند. برای مثال در مسأله‌ی بالا واحد جواب نهایی باید به صورت m/s باشد:

$$\mathrm{m/s} = \sqrt{\frac{(\mathrm{m})(\mathrm{m/s^2})}{(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})^2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})^2 + (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}})}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

سرعت و شتاب نسبی

حتماً تا به حال به وسیله قطار سفر کرده‌اید. هنگامی که شما در واگن قطار هستید و قطاری در مجاورت شما به حرکت درمی‌آید شما احساس خواهید کرد که قطار شما به حرکت درآمده است اما هنگامی که به زمین یا دیوارهای ایستگاه نگاه می‌کنید متوجه می‌شوید که سرعت شما صفر است و ساکن هستید. در این فرآیند شما دو سرعت متفاوت را برای خود قائل شده‌اید و دلیل این امر تفاوت دستگاه ناظر بر شما در این دو حالت می‌باشد. در حالت اول شما از دید ناظری در قطار مجاورتان سرعت خود را اندازه گرفته‌اید یعنی این سرعت در دستگاهی که متصل به قطار مجاور می‌باشد اندازه‌گیری شده است. به این سرعت، سرعت نسبی شما نسبت به قطار مجاورتان گفته می‌شود اما در حالت دوم دستگاه ناظر بر شما زمین می‌باشد که همان دستگاه ساکن یا اینرسی است و ناظر متصل به این دستگاه سرعت حقیقی شما را اندازه خواهد گرفت.

برای محاسبه سرعت جسم A نسبت به جسم B کافی است یک دستگاه مختصات به جسم B بچسبانیم و سرعت جسم A را در آن دستگاه اندازه‌گیری کنیم:



شکل ۱-۳۱

با توجه به شکل (۱ـ۳۱) مکان جسم A در دستگاه مختصات چسبیده به جسم B در لحظه $t_\circ$ به‌صورت $\vec{R}_\circ = x_\circ\vec{i} + y_\circ\vec{j}$ می‌باشد. پس از گذشت زمان (Δt) علاوه بر این‌که جسم A به‌طور جداگانه به میزان $\Delta\vec{R}_A = \vec{V}_A(\Delta t)$ تغییر مکان می‌دهد دستگاه متصل به جسم B نیز همراه جسم B به میزان $\vec{R}_B = \vec{V}_B(\Delta t)$ جابه‌جا می‌شود و مکان جدید جسم A در دستگاه متصل به جسم B در لحظه $t_\circ + \Delta t$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_\circ + \Delta\vec{R}_A - \Delta\vec{R}_B = \vec{R}_\circ + \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

حال اگر مقدار Δt را به سمت صفر میل دهیم می‌توانیم در هر لحظه سرعت نسبی جسم A نسبت به جسم B را بیابیم:

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_\circ = \Delta t(\vec{V}_A - \vec{V}_B)$$

$$\text{سرعت } A \text{ نسبت به } B = \frac{\text{جابه‌جایی جسم } A \text{ در این دستگاه}}{\text{تغییر زمان}} = \text{سرعت جسم } A \text{ در دستگاه چسبیده به جسم } B$$

$$\vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t\to\circ} \frac{\Delta\vec{R}_{A/B}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to\circ} \frac{\vec{R}_{(t_\circ+\Delta t)} - \vec{R}_{(t_\circ)}}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{A/B} = \lim_{\Delta t\to\circ} \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_\circ}{\Delta t} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \Rightarrow \frac{d\vec{R}_{A/B}}{dt} = \vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

در رابطه به‌دست آمده $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ سرعت‌های دو متحرک A و B نسبت به یک دستگاه مرجع مانند زمین می‌باشند. به همین صورت می‌توان نشان داد که سرعت جسم B نسبت به جسم A برابر است با:

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

این روابط در مورد شتاب نسبی نیز صدق می‌کند:

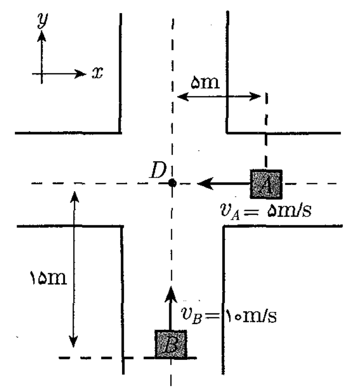
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

برای اثبات رابطه شتاب نسبی کافی است محورهای x و y را به v_x و v_y تبدیل کنیم.

مثال ۱۷

در یک چهارراه خودروهای A و B مانند شکل (۱ـ۳۲) در حرکت می‌باشند. اگر این خودروها در لحظه $t_\circ$ در مکان‌های نشان داده شده باشند، حداقل فاصله بین این دو خودرو را بیابید.



شکل ۱-۳۲

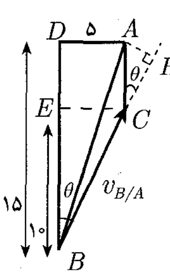
حل. برای حل این مسأله جسم A را ساکن در نظر می‌گیریم و سرعت جسم B را نسبت به جسم A محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = (۱۰)\vec{j} - (-۵)\vec{i} = ۱۰\vec{j} + ۵\vec{i}$$

همان‌طور که شکل (۱ـ۳۳) نشان می‌دهد اگر جسم A را ساکن در نظر بگیریم جسم B با سرعت $\vec{V}_{B/A}$ حرکت خواهد کرد و از کنار جسم A عبور خواهد کرد اما کمترین فاصله جسم A از امتداد سرعت $\vec{V}_{B/A}$ یعنی مسیر حرکت جسم B همان عمود AH خواهد بود که جواب مسأله می‌باشد: (شکل ۱ـ۳۴)

$$AH = AC\sin\theta\,,\ AC = DE = BD - BE = ۵\mathrm{m}$$

$$\sin\theta = \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰^۲ + ۵^۲}} = ۰/۴۵ \rightarrow\ AH = ۲/۲\mathrm{m}$$



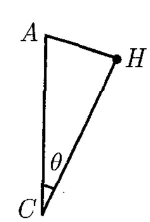
شکل ۱-۳۳

مثال ۱۸

آب رودخانه‌ای با سرعت $V_w = ۴\mathrm{m/s}$ از شمال به جنوب در حال حرکت است. می‌خواهیم به وسیله یک قایق موتوری عرض این رودخانه را طی کنیم اگر سرعت قایق موتوری در آب ساکن برابر با $V_b = ۵\mathrm{m/s}$ باشد: ($L = ۱۰\mathrm{m}$ عرض رودخانه)

الف) مسافت طی شده توسط قایق درکمترین زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه را بیابید.

ب) زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه از طریق کمترین مسافت ممکن را بیابید.



شکل ۱-۳۴

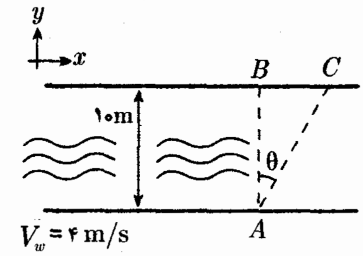
حل. الف) هنگامی که می‌گوییم سرعت قایق در آب ساکن برابر با $۵\mathrm{m/s}$ می‌باشد، یعنی سرعت قایق نسبت به آب در هر شرایطی $۵\mathrm{m/s}$ خواهد بود، زیرا اگر آب رودخانه با سرعت فرضی v در حال حرکت باشد، قایق نیز این سرعت را علاوه بر سرعت ایجاد شده توسط موتور خود به‌دست خواهد آورد و به‌طور خلاصه سرعت آب بر سرعت قایق تأثیرگذار خواهد بود:

سرعت قایق در آب ساکن یا سرعت حاصل توسط موتور: V_b

سرعت آب رودخانه: V_w

$$\vec{V}_B : \text{سرعت کل قایق} = \vec{V}_b + \vec{V}_w$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\text{قایق ، آب}} = \vec{V}_B - \vec{V}_w = \vec{V}_b + \vec{V}_w - \vec{V}_w = \vec{V}_b$$



شکل ۱-۳۵

پس اگر آب رودخانه را ساکن در نظر بگیریم سرعت قایق ۵m/s مشاهده می‌شود. حال اگر این سرعت به‌صورت کامل در راستای عرض رودخانه باشد، زمان حرکت قایق کمینه خواهد بود.

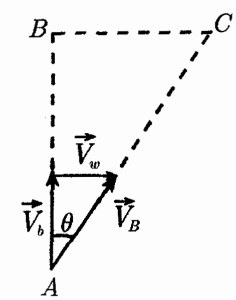
$$\vec{V}_{\text{قایق ، آب}} \| \text{عرض رودخانه} \rightarrow \vec{V}_{\text{قایق ، آب}} \| \vec{j}$$

$$\vec{V}_{\text{قایق ، آب}} = \vec{V}_b \| \vec{j} \rightarrow \vec{V}_b = V_b\vec{j} = ۵\vec{j}\ (\mathrm{m/s})$$

پس سرعت حاصل از موتور در راستای $\vec{j}$ خواهد بود و برای سرعت کل قایق داریم:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = ۵\vec{j} + ۴\vec{i}$$

و از آنجایی که مسیر حرکت بر راستای سرعت مماس می‌باشد، مسیر حرکت قایق در حالت «الف» بر روی خط AC خواهد بود و طول AC به شکل زیر قابل محاسبه است: (شکل ۱ـ۳۶)



شکل ۱-۳۶

$$\cos\theta = \frac{|\vec{V}_b|}{|\vec{V}_B|} = \frac{۵}{\sqrt{۴^۲ + ۵^۲}} = ۰/۷۸$$

$$AB = AC\cos\theta\ ,\ AB = L = ۱۰\mathrm{m} \rightarrow AC = \frac{۱۰}{۰/۷۸} = ۱۲/۸\mathrm{m}$$

$$AB\vec{j} = V_b\vec{j}(\Delta t_۱) \rightarrow \Delta t_۱ = \frac{۱۰}{۵} = ۲\mathrm{s}\ \text{کمترین زمان لازم}$$

ب) کمترین مسافت ممکن هنگانی اتفاق می‌افتد که قایق مسیر عرض رودخانه یعنی همان مسیر AB را طی کند. برای این امر سرعت کل قایق باید در راستای مسیر AB باشد.

$$\vec{V}_B \| AB \| \vec{j} : \vec{V}_B = \vec{V}_b + \vec{V}_w = \vec{V}_b + ۴\vec{i}$$

$$(\vec{V}_b + ۴\vec{i}) \| \vec{j} \rightarrow \vec{V}_b = V_b'\vec{j} - ۴\vec{i}\ ,\ |\vec{V}_b| = ۵\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow ۵^۲ = ۴^۲ + (V_b')^۲ \rightarrow (V_b')^۲ = ۹ \rightarrow V_b' = ۳\mathrm{m/s} \rightarrow \vec{V}_b = ۳\vec{j} - ۴\vec{i}$$

$$\rightarrow \vec{V}_B = ۳\vec{j} - ۴\vec{i} + ۴\vec{i} = ۳\vec{j}(\mathrm{m/s})$$

$$AB\vec{j} = V_B\vec{j}(\Delta t_۲) \rightarrow ۱۰ = ۳\Delta t_۲ \rightarrow \Delta t_۲ = ۳.\overline{۳}\mathrm{s}$$

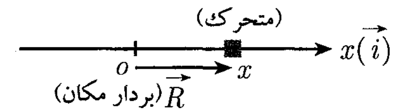
مباحث المپیاد

در قسمت المپیاد به بحث درباره‌ی موضوعات مطرح شده به شکل جامع‌تری می‌پردازیم و همچنین موضوعات جدیدی را مطرح خواهیم کرد که در حل مسائل پیچیده‌تر از آنها بهره خواهیم برد.
ابتدا به‌طورکلی مروری بر روابط به‌دست آمده در سینماتیک یک‌بعدی و دوبعدی خواهیم داشت:

$$\vec{r} = x\vec{i} \quad \text{بردار مکان}$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{t_2 - t_1}\vec{i}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



شکل ۱-۳۷

از این قسمت به بعد مشتق هر تابع دلخواه از زمان مانند f نسبت به زمان را با نماد $\dot{f}$ نشان می‌هیم:

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \ , \ \frac{dg}{dt} = \dot{g} \ , \ \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$$

شاید این سؤال برایتان به وجود آید که تفاوت میان دو تابع $f(t)$ و $\vec{R}(t)$ در چیست؟
پاسخ این سؤال بسیار ساده است. تابع $f(t)$ یک تابع اسکالر است یعنی به ازای هر ورودی t، تابع به شما یک عدد تحویل خواهد داد. در صورتی که تابع $\vec{r}(t)$ یک تابع برداری می‌باشد یعنی به ازای هر ورودی t شما یک بردار را به عنوان خروجی تابع خواهید داشت. حال شاید بپرسید مشتق در یک تابع برداری چگونه قابل محاسبه می‌باشد. در اینجا به صورت خلاصه این مطلب را توضیح می‌دهیم اما در قسمت‌های بعدی به‌طور مفصل به شرح این موضوع خواهیم پرداخت.
مشتق یک تابع برداری همانند مشتق یک تابع اسکالر با استفاده از تعریف مشتق محاسبه می‌شود. برای مثال سرعت یک متحرک در دو بعد به وسیله مشتق‌گیری از تابع مکان آن جسم که یک تابع برداری است به‌دست می‌آید:

$$\vec{r}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(t)} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_{(t+\Delta t)} - \vec{r}_{(t)}}{(t+\Delta t) - t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x_{(t+\Delta t)}\vec{i} + y_{(t+\Delta t)}\vec{j}\right] - \left[x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j}\right]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[x_{(t+\Delta t)} - x_{(t)}\right]\vec{i} + \left[y_{(t+\Delta t)} - y_{(t)}\right]\vec{j}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_{(t+\Delta t)} - x_{(t)}}{\Delta t}\right)\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{y_{(t+\Delta t)} - y_{(t)}}{\Delta t}\right)\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\
&\to \ \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \vec{v}
\end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید مشتق یک بردار بر حسب زمان نیز به صورت برداری دیگر ظاهر می‌شود که با توجه به تعریف مشتق قابل توجیه است. مشتق سرعت را نیز می‌توان به همین صورت محاسبه کرد و بردار شتاب را به‌دست آورد.

مروری بر روابط سینماتیکی در یک بعد

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} \rightarrow \overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}\Delta t$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{d(x\vec{i})}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d(\vec{i})}{dt}$$

از آنجایی که بردار یکه‌ی $\vec{i}$ ثابت و مستقل از زمان است، جمله‌ی $\frac{d(\vec{i})}{dt}$ برابر با صفر خواهد بود.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \rightarrow \overrightarrow{\Delta v} = \vec{a}\Delta t$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\frac{d\vec{r}}{dt})}{dt}$$

$$= \frac{d^{۲}\vec{r}}{dt^{۲}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{۲} - \vec{r}_{۱} = \int_{\vec{r}_{۱}}^{\vec{r}_{۲}} \overrightarrow{dr} = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \vec{v}dt = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \dot{x}dt(\vec{i})$$

$$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_{۲} - \vec{v}_{۱} = \int_{\vec{v}_{۱}}^{\vec{v}_{۲}} \overrightarrow{dv} = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \vec{a}dt = \int_{t_{۱}}^{t_{۲}} \ddot{x}dt(\vec{i})$$

در دو تساوی فوق از مفهوم انتگرال استفاده شده است که آن را توضیح خواهیم داد.

در قسمت قبل روابط سینماتیکی خود را بدون استفاده از مفهوم انتگرال و در سطح دروس پیش‌دانشگاهی بیان نمودیم اما در واقعیت کمتر مسأله‌ای بدون استفاده از مفاهیم مشتق و انتگرال قابل حل است. برای درک کاربرد انتگرال در مسائل فیزیکی مسأله‌ی زیر را حل خواهیم کرد.

مثال ۱۹ متحرکی با سرعت متغیر $\vec{v}(t)$ بر یک جاده‌ی مستقیم در حال حرکت می‌باشد.

الف) مقدار جابه‌جایی این متحرک را بین لحظات $t = ۲\text{s}$ و $t = ۵\text{s}$ بیابید.

ب) سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$ بیابید.

ج) تابع مکان این متحرک را بیابید. $(\vec{r}_{(t=۰)} = ۱۵\vec{i})$

$$\vec{v}_{(t)} = (at^{۲} + bt + c\sin t)\vec{i}\ (\text{m/s}) \quad , \quad a = b = ۲\ ,\ c = ۵۵$$

حل. الف) با توجه به صورت مسأله تنها اطلاعاتی که در اختیار ما قرار داده شده است تابع سرعت جسم بر حسب زمان می‌باشد. برای اینکه مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$ را بیابیم، می‌توانیم از سرعت متوسط متحرک در این بازه‌ی زمانی استفاده کنیم اما در این مسأله سرعت متوسط را در اختیار نداریم بلکه سرعت لحظه‌ای متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه را در اختیار داریم. اکنون به روش‌های زیر در یافتن میزان جابه‌جایی بین لحظات $t = ۲\text{s}$ و $t = ۵\text{s}$ توجه کنید:

روش اول:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{t=۵} - \vec{r}_{t=۲} = \vec{\bar{v}} \times \Delta t = ۳\vec{\bar{v}} \ , \ \ \vec{\bar{v}} : ۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$$

روش دوم:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_{t=۵} - \vec{r}_{t=۳/۵} + \vec{r}_{t=۳/۵} - \vec{r}_{t=۲} = \vec{\bar{v}}_۱ \times \Delta t_۱ + \vec{\bar{v}}_۲ \times \Delta t_۲$$

$$\begin{cases} \Delta t_۱ = (۵ - ۳/۵) = ۱/۵\text{s} & , \ \vec{\bar{v}}_۱ : ۳/۵\text{s} < \Delta t_۱ < ۵\text{s} \\ \Delta t_۲ = (۳/۵ - ۲) = ۱/۵\text{s} & , \ \vec{\bar{v}}_۲ : ۲\text{s} < \Delta t_۲ < ۳/۵\text{s} \end{cases}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta r} &= \vec{r}_{t=۵} - \vec{r}_{t=۴} + \vec{r}_{t=۴} - \vec{r}_{t=۳} + \vec{r}_{t=۳} - \vec{r}_{t=۲} \\ &= \overrightarrow{\Delta r_۱} + \overrightarrow{\Delta r_۲} + \overrightarrow{\Delta r_۳} = \vec{\bar{v}}_۱ \Delta t_۱ + \vec{\bar{v}}_۲ \Delta t_۲ + \vec{\bar{v}}_۳ \Delta t_۳ \end{aligned}$$

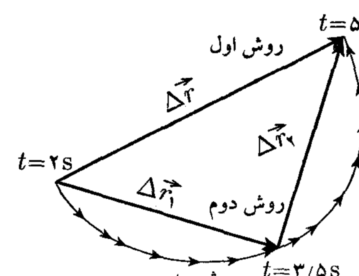
$$\begin{cases} \Delta t_۱ = (۵ - ۴) = ۱\text{s} & , \ \vec{\bar{v}}_۱ : ۴\text{s} < \Delta t_۱ < ۵\text{s} \\ \Delta t_۲ = (۴ - ۳) = ۱\text{s} & , \ \vec{\bar{v}}_۲ = ۳\text{s} < \Delta t_۲ < ۴\text{s} \\ \Delta t_۳ = (۳ - ۲) = ۱\text{s} & , \ \vec{\bar{v}}_۳ : ۲\text{s} < \Delta t_۳ < ۳\text{s} \end{cases}$$

$$\vdots$$

روش nام:

$$n \to \infty \ : \ \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_۱} + \overrightarrow{\Delta r_۲} + \overrightarrow{\Delta r_۳} + \cdots + \overrightarrow{\Delta r_n}$$

$$n \to \infty \ \Rightarrow \ \underset{۱ \leq i < n}{\Delta r_i} \ \to ۰ \ \Rightarrow \ \Delta r_i = dr_i$$



شکل ۱-۳۸

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید در روش nام بردار جابه‌جایی کل در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < \Delta t < ۵\text{s}$ را به وسیله مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی به وجود آمده در بازه‌های زمانی بی‌نهایت کوچک نشان داده‌ایم (مانند شکل ۱ـ۳۸). در نتیجه سرعت‌های متوسط نوشته شده در روش nام برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه‌ی متناظر با آن بردار جابه‌جاییِ بی‌نهایت کوچک خواهد بود. انتگرال یک ابزار ریاضی است که به وسیله‌ی آن می‌توان مجموع این مقدارهای بی‌نهایت کوچک را به‌دست آورد. برای درک کامل مفهوم انتگرال می‌توانید کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه کتاب‌ها را مطالعه کنید.

مجموع بردارهای جابه‌جایی در روش‌های مختلف حل مسأله را می‌توان به وسیله ابزار $\sum$ نشان داد و در حالتی که این بردارها بی‌نهایت کوچک باشند علامت $\sum$ به انتگرال با نماد $\int$ تبدیل خواهد شد.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=۱}^{n} \Delta r_i$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=۱}^{n} \Delta r_i = \int dr_i \quad : \quad \text{مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچک جابه‌جایی}$$

برای به‌دست آوردن حاصل یک انتگرال قضایایی وجود دارد که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به اثبات رسیده است. طبق این قضایا انتگرال به دو نوع انتگرال معین و انتگرال نامعین تفکیک می‌شود.

انتگرال معین: انتگرال ابزاری است که به وسیله‌ی آن می‌توان بی‌نهایت مقدار بسیار کوچک را با یکدیگر جمع کرد. حال این مقادیر بسیار کوچک می‌توانند به صورت تابعی از یک متغیر خاص باشند مثلاً در عبارت $\left(\lim\limits_{\Delta t_i\to 0} v(t_i)\Delta t_i\right)$ کل عبارت تابعی از متغیر t می‌باشد. این امر بسیار مفید می‌باشد زیرا محاسبه‌ی چنین انتگرالی با استفاده از قضایای انتگرال بسیار ساده خواهد بود. در انتگرال معین، متغیر انتگرال بین دو نقطه‌ی مشخص تغییر می‌کند مانند مسأله‌ی فوق ($2\text{s} < t < 5\text{s}$). در این نوع انتگرال، حاصل انتگرال یک عدد (در صورت اسکالر بودن تابع داخل انتگرال) و یا یک بردار (در صورت برداری بودن تابع داخل انتگرال) خواهد بود. انتگرال ایجاد شده در روش nام برای حل مسأله‌ی فوق از نوع انتگرال معین است.

فرم نمایش انتگرال معین :
$$\overrightarrow{\Delta R} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{v_i}\Delta t_i = \int_{t=2\text{s}}^{t=5\text{s}}\vec{v}dt$$

انتگرال نیز مانند $\sum$ حاصل جمع عبارات مختلف می‌باشد در نتیجه تمامی قوانین حاکم بر $\sum$ بر انتگرال نیز حاکم است.

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \ \rightarrow\ \int_{x_1}^{x_2}[f(x)+g(x)]dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

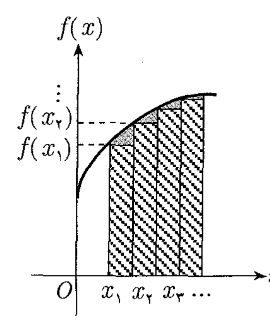
ضرایب ثابت از انتگرال خارج می‌شوند:

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i \ \rightarrow\ \int_{x_1}^{x_2} kf(x)dx = k\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

توجیه هندسی انتگرال

از نظر هندسی می‌توان انتگرال یک تابع را به صورت مساحت زیر منحنی آن تابع رسم کرد. در شکل (۱ـ۳۹) حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌های هاشورزده شده برابر است با:

$$S = f(x_1)\times(x_2-x_1) + f(x_2)\times(x_3-x_2) + \cdots + f(x_n)\times(x_{n+1}-x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\times(x_{i+1}-x_i)$$



شکل ۱-۳۹

حاصل عبارت به‌دست آمده برابر با مساحت مستطیل‌های هاشور خورده در زیر منحنی تابع می‌باشد و اما اختلاف کوچکی میان مساحت به‌دست آمده توسط مستطیل‌ها و مساحت زیر منحنی تابع وجود دارد که برابر با مساحت قسمت‌های سیاه شده در نمودار شکل (۱ـ۳۹) می‌باشد. حال اگر جمله‌ی $(x_{i+1} - x_i)$ را به سمت صفر میل دهیم آنگاه تعداد جملات موجود

در حاصل‌جمع (n) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در این حالت مساحت قسمت‌های سیاه شده بین مستطیل‌ها و نمودار تابع به سمت صفر میل خواهد کرد در نتیجه مساحت زیر نمودار تابع با مساحت مستطیل‌ها برابر خواهد شد. از طرفی با میل دادن n به سمت بی‌نهایت عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times (x_{i+1} - x_i)$ تبدیل به انتگرال تابع $f(x)$ از x_1 تا x_n خواهد شد در نتیجه انتگرال معین یک تابع از x_i تا x_j برابر با مساحت زیر منحنی تابع در بازه‌ی $x_i < x < x_j$ می‌باشد:

$$(n \to \infty) \ : \ (\Delta x_i \ \to \ 0) \ : \ \Delta x_i = dx$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times (\Delta x_i) = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = f(x) \quad \text{مساحت زیر منحنی نمودار تابع}$$

این نکته در مسائلی که نمودار تابع داخل انتگرال به صورت چندضلعی و یا دایروی باشد بسیار پرکاربرد می‌باشد زیرا محاسبه‌ی مساحت این اشکال هندسی ساده‌تر از محاسبه انتگرال از روش‌های جبری است.

اکنون به حل مسأله‌ی خودمان برمی‌گردیم:

در مسأله‌ی مطرح شده تابع سرعت بر حسب زمان همان تابع داخل انتگرال می‌باشد که با ضابطه‌ی $v(t) = at^2 + bt + c\sin t$ بیان شده است. ضابطه‌ی تابع نشان می‌دهد که شکل منحنی تابع پیچیده خواهد بود و نمی‌توان مساحت زیر نمودار تابع را به راحتی محاسبه نمود پس باید به دنبال روش دیگری برای حل این انتگرال باشیم.

برای حل چنین انتگرالی از روش حل انتگرال نوع دوم یا انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. برای آشنایی با این نوع انتگرال به اختصار به توضیح مفهوم انتگرال نامعین و قضایای مربوط به آن می‌پردازیم.

تفاوت اساسی میان انتگرال معین و انتگرال نامعین در کران‌های بالا و پایین متغیر انتگرال‌گیری در این دو نوع انتگرال می‌باشد. در انتگرال معین دیدیم که حاصل انتگرال یک عدد است که با توجه به کران‌های بالا و پایین انتگرال تعیین می‌شود ولی در انتگرال نامعین حداقل یکی از کران‌های انتگرال به صورت متغیر نوشته می‌شود که به ازای هر مقدار خاص برای کران متغیر انتگرال حاصل انتگرال نیز عددی مشخص خواهد بود و به ازای هر عددی که به جای کران متغیر در انتگرال نامعین قرار گیرد، این انتگرال تبدیل به یک انتگرال معین خواهد شد:

$$\text{شکل انتگرال نامعین با کران بالای متغیر} \ : \ \int_a^x f(x)dx \ , \quad \begin{array}{l} x = b \ \to \ \int_a^b f(x)dx = A \\ x = c \ \to \ \int_a^c f(x)dx = B \end{array}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با تغییر در مقدار کران متغیر انتگرال، حاصل انتگرال نیز تغییر می‌کند در نتیجه انتگرال نامعین خود تابعی از متغیر موجود در کران انتگرال می‌باشد:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) \ , \ \int_a^t f(x)dx = F(t) \ , \ \int_a^s f(x)dx = F(s)$$

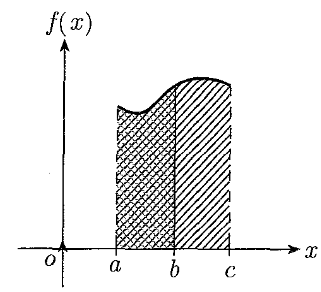
متغیر تابع f و متغیر کران انتگرال مستقل از یکدیگرند و هیچ لزومی ندارد که آنها را به وسیله‌ی نمادهای یکسان نشان دهیم برای مثال می‌توان متغیر کران انتگرال را با نماد t و متغیر تابع را با نماد x نشان داد، ولی باید توجه داشت که تابع جواب انتگرال به صورت تابعی از متغیر کران انتگرال می‌باشد.

اکنون می‌خواهیم به وسیله‌ی تابع F به‌دست آمده از انتگرال نامعین، مقدار انتگرال معین تابع f را در بازه‌ی $b < x < c$ به‌دست آوریم. برای این کار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) \ \rightarrow \begin{cases} F(b) = \int_a^b f(x)dx = A \\ F(c) = \int_a^c f(x)dx = B \end{cases}$$

$$F(c) - F(b) = \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

در عبارت $F(c) - F(b)$ یک بار انتگرال معین تابع f در محدوده‌ی $a < x < c$ محاسبه می‌شود و سپس انتگرال معین همان تابع از a تا b محاسبه شده و از حاصل انتگرال اول کم می‌شود. شمای هندسی حاصل عبارت $F(c) - F(b)$ بر روی نمودار تابع f در شکل ۱ـ۴۰ نمایش داده شده است.



شکل ۱-۴۰

$F(c) = \int_a^c f(x)dx =$ مساحت قسمت هاشور خورده بین $a < x < c$

$F(b) = \int_a^b f(x)dx =$ مساحت قسمت هاشور خورده بین $a < x < b$

$\rightarrow F(c) - F(b) =$ مساحت قسمت هاشور خورده بین $b < x < c$

$= \int_b^c f(x)dx$: انتگرال معین تابع $f(x)$ در بازه‌ی $b < x < c$

با آگاهی از برخی خواص انتگرال‌ها نتیجه‌ی فوق را می‌توان به صورت جبری نیز به‌دست آورد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (I)$$

اثبات خاصیت (I) بسیار ساده است و می‌توان به وسیله‌ی جمع کردن مساحت زیر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌های $a < x < b$ و $b < x < c$ آن را نشان داد.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (II)$$

خاصیت (II) با توجه به خاصیت (I) قابل اثبات می‌باشد:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0 \ \rightarrow \ \int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

با توجه به دو خاصیت (I) و (II) داریم:

$$\begin{aligned}F(c)-F(b) &= \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_b^a f(x)dx\\ &= \int_b^c f(x)dx\ :\ b<x<c \text{ انتگرال معین تابع } f \text{ در بازه‌ی }\end{aligned}$$

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان با استفاده از تابع F، انتگرال معین تابع f را در هر بازه‌ی دلخواه به‌دست آورد. به تابع F یک تابع اولیه برای تابع f گفته می‌شود. قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان می‌کند که رابطه‌ی میان دو تابع F و f به صورت زیر می‌باشد:

$$F'(x)=f(x) \ \rightarrow\ \int f(x)dx = F(x)$$

قضیه‌ی فوق درکتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال از همین مجموعه به اثبات رسیده است. این تساوی نشان می‌دهد به ازای یک تابع f یکتا، بی‌نهایت تابع اولیه F می‌توان یافت که در قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال صدق کند. این ادعا را به شکل زیر می‌توان اثبات کرد:

$$F_1(x)=\int f(x)dx \ \rightarrow\ F_1'(x)=f(x)$$

$$F_2(x)=F_1(x)+c$$

c: یک عدد ثابت دلخواه

$$\begin{aligned}\frac{dF_2(x)}{dx} &= \frac{d(F_1(x)+c)}{dx} = \frac{dF_1(x)}{dx}+\frac{dc}{dx}\\ &= \frac{dF_1(x)}{dx} = F_1'(x) = f(x)\\ &\rightarrow\ F_2'(x)=f(x) \ \rightarrow\ F_2(x)=\int f(x)dx\end{aligned}$$

همان‌طور که در اثبات فوق نشان داده شده است برای هر تابع انتگرال‌پذیر دلخواه مانند f بی‌نهایت تابع اولیه وجود دارد که تفاضل هر دو تابع دلخواه از میان این توابع اولیه برابر با عددی ثابت و مستقل از متغیر انتگرال خواهد بود. دلیل تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، تفاوت درکران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد برای مثال انتگرال نامعین تابع $f(x)$ را می‌توان به اشکال مختلفی نشان داد که در هر یک از این انتگرال‌ها کران پایین انتگرال عددی ثابت ولی متفاوت با کران پایین انتگرال‌های دیگر است:

$$\int_{a_1}^x f(x)dx\ ,\ \int_{a_2}^x f(x)dx\ ,\ \int_{a_3}^x f(x)dx\ ,\ \int_{a_4}^x f(x)dx\ ,\ \cdots$$

$$a_1, a_2, a_3, \cdots = \text{cte} \qquad ,\quad a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq \cdots$$

$$\int_{a_1}^x f(x)dx = F(x) \qquad ,\quad \int_{a_2}^x f(x)dx = F(x)+c_1$$

$$\int_{a_3}^x f(x)dx = F(x)+c_2 \quad ,\quad \int_{a_4}^x f(x)dx = F(x)+c_3$$

$$\int_{a_1}^{x} f(x)dx - \int_{a_2}^{x} f(x)dx = \int_{a_1}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx \qquad (I)$$

$$\int_{a_1}^{x} f(x)dx - \int_{a_2}^{x} f(x)dx = F(x) - [F(x) + c_1] = -c_1 \qquad (II)$$

$$(I),(II) \;\rightarrow\; c_1 = -\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^{a_1} f(x)dx$$

تفاوت در ثابت‌های موجود در توابع اولیه، به دلیل تفاوت در کران‌های ثابت انتگرال نامعین می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده با مفاهیم انتگرال معین و نامعین به صورت کلی آشنا شدیم و روش استفاده از آنها را آموختیم. در واقع مفاهیم مشتق و انتگرال جدا از یکدیگر نیستند و هرگاه بتوانیم مفهوم یکی را به خوبی درک کنیم، فهم دیگری نیز امکان‌پذیر خواهد بود زیرا هر دوی این مفاهیم با مقادیر بی‌نهایت کوچک سروکار دارند و به نوعی می‌توان گفت انتگرال همان معکوس مشتق می‌باشد.

انتگرال نامعین برخی توابع پرکاربرد ریاضی در زیر آورده شده است. (برای اثبات درستی انتگرال‌های زیر تنها کافی است از حاصل انتگرال نامعین مشتق گرفته و برابری آن را با تابع درون **انتگرال بررسی کنید.)**

$$۱)\quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$۲)\quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$۳)\quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$۴)\quad \int \left(\frac{1}{x \pm a}\right)dx = \ln|x \pm a| + c \;,\quad (\ln a = \log_e a)$$

$$۵)\quad \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \mathrm{Arctan}x + c$$

$$۶)\quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \mathrm{Arcsin}x + c$$

$$۷)\quad \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + c$$

$$۸)\quad \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + c$$

$$۹)\quad \int (e^{ax})dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

با استفاده از انتگرال‌های فوق می‌توانیم مسأله‌ی مطرح شده را به‌طور کامل حل نماییم:

الف) بردار جابه‌جایی بین لحظات $2s < t < 5s$:

$$\vec{v}_{(t)} = (at^2 + bt + c\sin t)\vec{i}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}_{(t_۲)} - \vec{R}_{(t_۱)} = \int_{t_۱}^{t_۲} \vec{v}(t)dt \\ t_۱ = ۲\text{s}\ ,\ t_۲ = ۵\text{s}\end{array}\right\} \rightarrow\ \overrightarrow{\Delta R} = \vec{R}_{(۵)} - \vec{R}_{(۲)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta R} = \int_۲^۵ (at^۲ + bt + c\sin t)\vec{i}dt$$

$\vec{i}$: بردار یکه‌ی مستقل از زمان $\rightarrow\ \overrightarrow{\Delta R} = \vec{i}\int_۲^۵ (at^۲ + bt + c\sin t)dt$

با استفاده از خواص انتگرال داریم:

$$\overrightarrow{\Delta R} = \vec{i}\Big[a\int_۲^۵ t^۲dt + b\int_۲^۵ tdt + c\int_۲^۵ \sin tdt\Big]$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\Delta R} = \vec{i}\left[\frac{a}{۳}(۵^۳ - ۲^۳) + \frac{b}{۲}(۵^۲ - ۲^۲) + c\Big(-\cos(۵) - (-\cos(۲))\Big)\right]$$

بردار جابه‌جایی بین لحظات $۲\text{s} < t < ۵\text{s}$: $(a = b = ۲\ ,\ c = ۵۵)$

$$\overrightarrow{\Delta R} = \vec{i}[۷۸ + ۲۱ - ۳۸/۵] = ۶۰/۵\vec{i}\ (\text{m})$$

ب) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $۲\text{s} < t < ۵\text{s}$:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{R}_{(۵)} - \vec{R}_{(۲)}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{۶۰/۵}{(۵-۲)}\vec{i} = ۲۰/۲\vec{i}\ (\frac{\text{m}}{\text{s}})$$

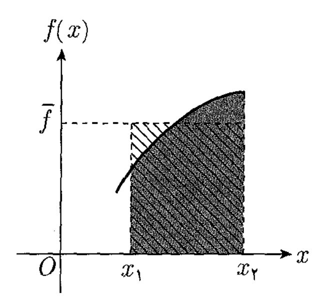
$\vec{\bar{v}}$ نشان دهنده‌ی مقدار متوسط تابع $\vec{v}(t)$ در بین لحظات $t = ۲\text{s}$ و $t = ۵\text{s}$ است. در حالت کلی برای تابع دلخواه $f(x)$ مقدار متوسط این تابع در بازه‌ی دلخواه $x_۱ < x < x_۲$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{f} = \frac{\int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx}{(x_۲ - x_۱)}\ \rightarrow\ \bar{f}(x_۲ - x_۱) = \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx$$

توجیه هندسی مقدار متوسط تابع $f(x)$ در شکل نمودار (۱ـ۴۱) نشان می‌دهد که مساحت مستطیل هاشور خورده در شکل برابر با مساحت زیر نمودار در بازه‌ی $x_۱ < x < x_۲$ است:

مساحت مستطیل هاشور خورده : $\bar{f}(x_۲ - x_۱)$

مساحت زیر نمودار : $\int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx$



شکل ۱-۴۱

ج) تابع مکان متحرک: برای حل این قسمت از مسأله باید از روش حل انتگرال نامعین استفاده کنیم:

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{v}(t)\ \rightarrow\ \vec{R}(t) = \int \vec{v}(t)dt$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \int (at^۲ + bt + c\sin t)\vec{i}dt$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{i}\Big[a\int t^۲dt + b\int tdt + c\int \sin tdt\Big]$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \vec{i}\left(\left(a\frac{t^{۳}}{۳}+c_{۱}\right)+\left(b\frac{t^{۲}}{۲}+c_{۲}\right)+(-c\cos t+c_{۳})\right]$$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = \left(\frac{at^{۳}}{۳}+\frac{bt^{۲}}{۲}-c\cos t+\underbrace{(c_{۱}+c_{۲}+c_{۳})}_{c'}\right)\vec{i}$$

$$= \left(\frac{at^{۳}}{۳}+\frac{bt^{۲}}{۲}-c\cos t+c'\right)\vec{i}$$

نتیجه‌ی حاصل از انتگرال نامعین نشان می‌دهد که بی‌نهایت تابع برداری به ازای مقدار ثابت‌های مختلف برای c' وجود دارد که از نظر ریاضی همگی آنها می‌توانند نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک باشند اما در دنیای واقعی تنها یکی از این توابع است که نشان دهنده‌ی تابع مکان این متحرک است در نتیجه برای مشخص نمودن این تابع باید اطلاعاتی در اختیار داشته باشیم تا بتوانیم ثابت c' متناظر با این تابع را به‌دست آوریم. این اطلاعات از روی شرایط اولیه‌ی مسأله در اختیار ما قرار می‌گیرد که در این مسأله به صورت $\vec{R}_{(۰)} = ۱۵\vec{i}\ (\mathrm{m})$ بیان شده است یعنی از میان تمامی توابع مکان به‌دست آمده از انتگرال نامعین تنها در یکی از توابع با یک ثابت c' مشخص است که متحرک در لحظه‌ی $t = ۰\mathrm{s}$ در مکان $\vec{R} = ۱۵\vec{i}$ قرار دارد و این تابع جواب قطعی مسأله‌ی ما می‌باشد. این احتمال وجود دارد که در برخی از مسائل تعداد ثابت‌های انتگرال‌گیری دو و یا چند ثابت باشد که در این حالت شرایط اولیه‌ی مسأله نیز به همین میزان افزایش پیدا می‌کند و به ازای هر یک ثابت انتگرال‌گیری، یک شرط اولیه خواهیم داشت. اگر تعداد ثوابت از تعداد شرایط اولیه‌ی مسأله بیشتر باشد نمی‌توانیم به جواب قطعی مسأله دست پیدا کنیم:

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{at^{۳}}{۳}+\frac{bt^{۲}}{۲}-c\cos t+c'\right)\vec{i}\ ,\ \ a=b=۲\ ,\ c=۵۵$$

$$\vec{R}(۰) = (۰+۰-c+c')\vec{i} = ۱۵\vec{i} \rightarrow c'-c=۱۵ \rightarrow c'=۷۰$$

تابع مکان متحرک بر حسب زمان:

$$\vec{R}(t) = (\frac{۲}{۳}t^{۳}+t^{۲}-۵۵\cos t+۷۰)\vec{i}$$

مثال ۲۰ ذره‌ی شماره‌ی (۱) تحت شتاب $a = -kv$ و ذره‌ی شماره‌ی (۲) تحت شتاب $a = -kt$ و ذره‌ی شماره‌ی (۳) تحت شتاب $a = -ks$ بر روی محور مستقیم S حرکت می‌کنند. هر سه ذره حرکت خود را از مبدأ مختصات در $S = ۰$ و با سرعت اولیه‌ی $v_{۰} = ۱۰\mathrm{m/s}$ در زمان $t = ۰$ آغاز کرده‌اند و مقدار ضریب k برای هر سه ذره برابر با ۰/۱ است. (دقت کنید که واحد k برای سه ذره متفاوت می‌باشد). تابع موقعیت، سرعت و شتاب هر سه ذره را بر حسب زمان به‌دست آورید.

حل. برای به‌دست آوردن توابع سرعت و مکان یک متحرک می‌توانیم از تابع شتاب آن متحرک انتگرال‌گیری کنیم و سپس به وسیله‌ی اعمال شرایط مرزی ثابت‌های حاصل از انتگرال را تعیین نماییم. اما در صورت این مسأله تابع شتاب ذرات (۱) و (۳) به‌صورت توابعی از زمان بیان نشده‌اند و در نتیجه نمی‌توان از آنها بر حسب متغیر زمان انتگرال‌گیری کرد. برای این‌که بتوانیم توابع شتاب، سرعت و مکان این دو ذره را بر حسب زمان بیان نماییم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

ذره (۱):

$$a=-kv \ , \ a=\frac{dv}{dt} \rightarrow -kv=\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{v}=-kdt \qquad (*)$$

اکنون می‌توانیم از سمت چپ تساوی $(*)$ بر حسب متغیر v و از سمت راست این تساوی بر حسب متغیر t انتگرال‌گیری نماییم:

$$\int_{10}^{v}\frac{dv}{v}=\int_{0}^{t}-kdt \Rightarrow \ln(\frac{v}{10})=-kt \rightarrow e^{\ln(\frac{v}{10})}=e^{-kt}$$
$$\Rightarrow v=10e^{(-0/1)t}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری از طرفین تساوی $(*)$ توانستیم تابع سرعت ذره بر حسب زمان را به‌دست آوریم و با استفاده از این تابع می‌توانیم توابع شتاب و مکان ذره را بیابیم:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(10e^{(-0/1)t})=-e^{(-0/1)t}$$
$$s=\int vdt=\int[10e^{(-0/1)t}dt]=-100e^{(-0/1)t}+c_1$$

شرایط مرزی:

$$t=0 \rightarrow s=0: c_1-100\times e^{0}=0$$
$$\rightarrow c_1-100=0 \rightarrow c_1=100$$
$$\rightarrow s=100(1-e^{(-0/1)t})$$

ذره (۲):

$$a=-kt$$
$$v=\int adt=\int -ktdt=-k\frac{t^2}{2}+c'_1=(-0/05)t^2+c'_1$$

شرایط مرزی:

$$t=0 \rightarrow v=10\mathrm{m/s} \rightarrow c'_1=10 \rightarrow v=10-(0/05)t^2$$
$$s=\int vdt=\int(10-0/05t^2)dt=10t-(\frac{0/05}{3})t^3+c'_2$$

شرایط مرزی:

$$t=0 \rightarrow s=0 \rightarrow c'_2=0 \rightarrow s=10t-0/017t^3$$

ذره (۳):

$$a=-ks$$

یکی از روابط بسیار سودمند در سینماتیک ذرات به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\times\frac{ds}{dt}\times\frac{dt}{ds}=\frac{dv}{dt}\times\frac{dt}{ds}\times v=\frac{vdv}{ds}$$
$$a=\frac{vdv}{ds} \rightarrow ads=vdv$$

در مسائلی که شتاب متحرک بر حسب مکان بیان شده باشد می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فوق تابع سرعت را نیز بر حسب مکان پیدا کرد:

$$ads = vdv \Rightarrow -ksds = vdv \rightarrow \int_{۰}^{s} -ksds = \int_{۱۰}^{v} vdv$$

$$\rightarrow (-۰/۱)\frac{s^۲}{۲} = (\frac{v^۲ - ۱۰^۲}{۲}) = \frac{v^۲}{۲} - ۵۰ \rightarrow v = \sqrt{۱۰۰ - ۰/۱s^۲}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = vdt \rightarrow \frac{ds}{v} = dt$$

$$\rightarrow \frac{ds}{\sqrt{۱۰۰ - ۰/۱s^۲}} = dt$$

$$\rightarrow \int_{۰}^{s} \frac{ds}{\sqrt{۱۰۰ - ۰/۱s^۲}} = \int_{۰}^{t} dt \rightarrow t = \frac{۱}{\sqrt{۰/۱}} \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۰/۱}s}{۱۰})$$

$$\rightarrow s = ۱۰\sqrt{۱۰} \sin \sqrt{۰/۱}t$$

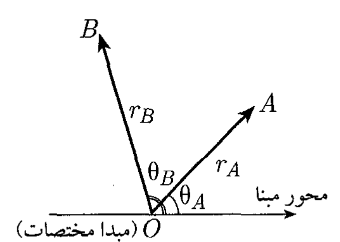
$$v = \frac{ds}{dt} = ۱۰ \cos \sqrt{۰/۱}t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -۱۰\sqrt{۰/۱} \sin \sqrt{۰/۱}t$$

دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی یکی دیگر از دستگاه‌های مختصات متداول و پرکاربرد در حل مسائل فیزیک است. در این دستگاه برای نشان دادن مکان یک نقطه بر روی صفحه از دو مشخصه‌ی فاصله نسبت به یک مبدأ مختصات (r) و زاویه نسبت به یک محور مبنا (θ) استفاده می‌کنیم. در شکل (۱ـ۴۲) مکان دو نقطه‌ی A و B در دستگاه مختصات قطبی به نمایش درآمده است.

$$A : (r_A, \theta_A) \quad , \quad B : (r_B, \theta_B)$$



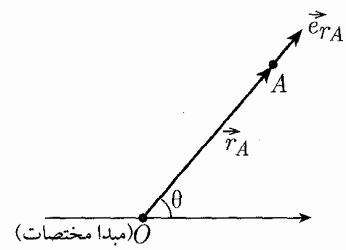
شکل ۱-۴۲

در دستگاه مختصات دکارتی دیدیم که برای نشان دادن هر بردار دلخواه در این دستگاه می‌توانیم از دو بردار یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ استفاده کنیم و با استفاده از این دو بردار توانستیم سینماتیک ذرات متحرک را در دستگاه مختصات دکارتی به صورت هوشمندانه‌تری مورد بررسی قرار دهیم. در دستگاه مختصات قطبی نیز برای حل مسائل مختلف، از دو بردار یکه با نمادهای $\vec{e_r}$ و $\vec{e_\theta}$ استفاده خواهیم کرد که در ادامه به‌طور تفصیلی به شرح این دو بردار خواهیم پرداخت.

بردار مکان در دستگاه مختصات قطبی

نقاطی واقع بر روی محیط یک دایره به شعاع r را در نظر بگیرید. اندازه‌ی بردار مکان تمام این نقاط برابر با r است و تنها تفاوت میان بردار مکان این نقاط در جهت آنهاست. در دستگاه مختصات قطبی برای نشان دادن جهت بردار مکان یک نقطه‌ی دلخواه مانند A بر روی دایره‌ای به مرکز O (مبدأ مختصات) و شعاع OA بردار یکه‌ی $\vec{e_r}$ را طوری تعریف می‌کنیم که اندازه‌ی آن برابر

با یک و جهت آن در راستای شعاع OA و به سمت بیرون (از O به A) باشد. در شکل (۱ـ۴۳) نحوه‌ی نمایش بردار مکان نقطه‌ی دلخواه A در دستگاه مختصات قطبی نشان داده شده است:



شکل ۱-۴۳

$$\vec{r_A} = r_A \vec{e_{r_A}}$$

r_A : نشان دهنده‌ی اندازه‌ی بردار مکان نقطه‌ی A

$\vec{e_{r_A}}$: نشان دهنده‌ی جهت بردار مکان نقطه‌ی A

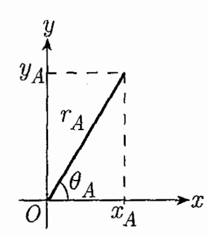
همان‌طور که دیدیم در دستگاه مختصات قطبی برای نشان دادن بردار مکان نقاط مختلف تنها از یک بردار یکه با نماد $\vec{e_r}$ استفاده می‌شود اما در این دستگاه مختصات، بردار یکه‌ی دیگری با نماد $\vec{r_\theta}$ نیز تعریف می‌شود که راستای آن در هر نقطه عمود بر راستای $\vec{e_r}$ و جهتش در جهت مسیر حرکت جسم متحرک است یعنی اگر جسم متحرک به نحوی حرکت کند که زاویه‌ی θ کاهش یابد جهت $\vec{e_\theta}$ ساعتگرد و اگر زاویه‌ی θ افزایش یابد جهت $\vec{e_\theta}$ پادساعتگرد خواهد بود:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} < ۰ \quad \rightarrow \vec{e_\theta} : \text{ساعتگرد} \\ \dfrac{d\theta}{dt} > \dot{\theta} > ۰ \quad \rightarrow \vec{e_\theta} : \text{پادساعتگرد} \end{cases}$$

کاربرد بردار یکه‌ی $\vec{e_\theta}$ را در مباحث بعدی به‌طور مفصل شرح خواهیم داد.

تبدیل دستگاه مختصات قطبی به دستگاه مختصات دکارتی

برای مشخص نمودن موقعیت یک نقطه در فضای دوبعدی از دو پارامتر x و y در دستگاه مختصات دکارتی و از دو پارامتر r و θ در دستگاه قطبی استفاده کردیم. با استفاده از چند رابطه‌ی ساده‌ی ریاضی می‌توان پارامترهای x و y را به پارامترهای r و θ تبدیل کرد و معادلات موجود در یک دستگاه مختصات را به معادلات حاکم بر دستگاه مختصات دیگر تبدیل کرد. به شکل (۱ـ۴۴) توجه کنید:



شکل ۱-۴۴

دکارتی : $A : (x_A, y_A)$

قطبی : $A : (r_A, \theta_A)$

$$x_A = r_A \cos\theta_A \rightarrow r_A = \frac{x_A}{\cos\theta_A}$$

$$y_A = r_A \sin\theta_A \rightarrow r_A = \frac{y_A}{\sin\theta_A}$$

$$\tan\theta_A = (\frac{y_A}{x_A}) \rightarrow \theta_A = \text{Arctan}(\frac{y_A}{x_A})$$

در حالت کلی برای هر نقطه‌ی دلخواه داریم:

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ \theta = \text{Arctan}(\frac{y}{x})$$

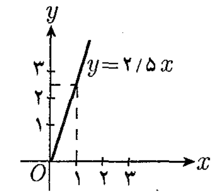
مثال ۲۱ منحنی معادله‌ی $y = ۲/۵x$ را در دستگاه مختصات دکارتی رسم نمایید و سپس معادله‌ی حاکم بر آن را در دستگاه مختصات قطبی بیابید. $(۰ \leq x \leq ۴)$

حل.

$$y = ۲/۵x \ , \ ۰ \leq x \leq ۴$$

$$x = r\cos\theta \ , \ \ y = r\sin\theta$$
$$\rightarrow r\sin\theta = ۲/۵ r\cos\theta \ \rightarrow \ \tan\theta = ۲/۵$$
$$\rightarrow \theta = \ \text{Arctan}(۲/۵) = ۶۸/۲^{\circ} \ = ۱/۲ \ \text{rad}$$

معادله‌ی خط $y = ۲/۵x$ در دستگاه مختصات قطبی به شکل $\theta = ۱/۲(\text{rad})$ درآمده است و به صورت شهودی نیز می‌توان این جواب را تأیید کرد زیرا برای یک خط گذرنده از مبدأ زاویه‌ی θ همواره ثابت است اما نکته بسیار مهم در اینجا تعیین دامنه‌ی تغییرات r می‌باشد زیرا دامنه‌ی تغییرات r خود وابسته به دامنه‌ی تغییرات متغیر تابع در دستگاه مختصات دکارتی یعنی همان x می‌باشد:



شکل ۱-۴۵

$$x = r\cos\theta \ , \ \ ۰ \leq x \leq ۴ \ \rightarrow \ ۰ \leq r\cos(۶۸/۲^{\circ}) \leq ۴$$
$$\rightarrow \frac{۰}{\cos(۶۸/۲^{\circ})} \leq r < \frac{۴}{\cos(۶۸/۲^{\circ})} \ \rightarrow \ ۰ \leq r \leq ۱۰/۷۷$$

معادله‌ی حاکم بر این خط در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر خواهد بود:

$$\theta = ۱/۲(\text{rad}) \ , \ \ ۰ \leq r \leq ۱۰/۷۷$$

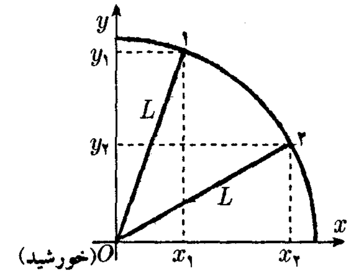
تعیین سرعت در دستگاه مختصات قطبی

در قسمت قبل چگونگی تعیین موقعیت یک نقطه را با استفاده از دستگاه مختصات قطبی شرح دادیم. اکنون می‌خواهیم روابط حاکم بر کمیت‌های سرعت و شتاب را در این دستگاه به‌دست آورده و به کمک این روابط مسائل سینماتیکی را در دستگاه مختصات قطبی حل کنیم. در دنیای پیرامون ما الگوهای حرکتی بسیار متفاوتی قابل مشاهده است. برای مثال سقوط آزاد یک قطره‌ی باران، دوران سیارات به دور خورشید و یا حرکت موج دریا نمونه‌هایی از الگوهای حرکتی در دنیای پیرامون ما می‌باشد. علم فیزیک به دنبال تحلیل اینگونه حرکات بر روی کاغذ و مدل‌سازی آنها با استفاده از اعداد و روابط ریاضی است.

دستگاه مختصات ابزاری است که در قسمت‌های گذشته به‌طور مفصل با آن آشنا شدیم و برخی از الگوهای حرکتی را به کمک نوع خاصی از این ابزار (دستگاه مختصات دکارتی) تحلیل نمودیم. در واقع تمامی الگوهای حرکتی موجود در دنیای پیرامون ما به کمک دستگاه مختصات دکارتی قابل حل می‌باشند اما بسیاری از آنها به وقت و انرژی بسیار بالایی نیاز دارند تا بتوان آنها را در دستگاه مختصات دکارتی مورد تحیلی و بررسی قرار داد، به همین دلیل برای حل بسیاری از مسائل می‌توان از دستگاه مختصات قطبی به جای دستگاه مختصات دکارتی استفاده نمود تا حل مسأله بسیار ساده‌تر شود. برای مثال حرکت دورانی سیارات به دور خورشید یک الگوی حرکتی خاص است که حول محیط یک دایره صورت می‌گیرد و با دستگاه مختصات قطبی بسیار سازگارتر است زیرا شعاع حرکت در این الگو ثابت است.

مثال ۲۲ معادله‌ی مسیر حرکت سیاره‌ی مریخ به دور خورشید را در هر دو دستگاه قطبی و دکارتی به‌دست آورید و از نظر سادگی این دو معادله را با یکدیگر مقایسه کنید. (فاصله‌ی مرکز مریخ تا مرکز خورشید: L)

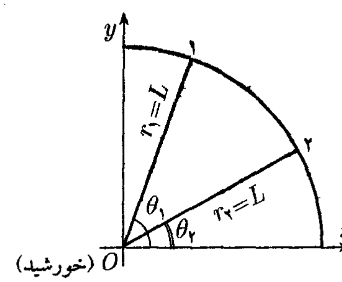
حل. معادله‌ی مسیر حرکت به صورت معادله‌ی محیط یک دایره‌ی به مرکز خورشید و شعاع L می‌باشد در نتیجه برای راحتی کار مبدأ دستگاه مختصات را منطبق بر مرکز خورشید قرار می‌دهیم:



شکل ۱-۴۶

$$\text{دستگاه مختصات دکارتی} : (y-0)^2+(x-0)^2=L^2$$
$$\rightarrow\ y^2+x^2=L^2\ \rightarrow\ y=\pm\sqrt{L^2-x^2}$$
$$\text{دستگاه مختصات قطبی} : y=r\sin\theta\,,\ x=r\cos\theta$$
$$\rightarrow\ r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta=L^2$$
$$\rightarrow\ r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=L^2\ \rightarrow\ r=\begin{cases}+L & \checkmark\\ -L & \otimes\end{cases}$$

طول بردار نمی‌تواند منفی باشد و تنها جواب $r=+L$ قابل قبول است.

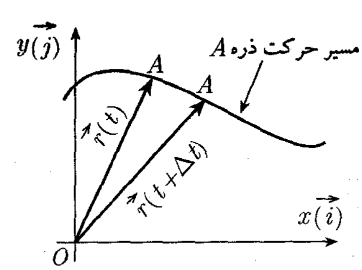


شکل ۱-۴۷

همان‌طور که مشاهده شد معادله‌ی مسیر حرکت در دستگاه مختصات قطبی بسیار ساده‌تر از معادله‌ی مسیر در دستگاه مختصات دکارتی است و این نتیجه نشان می‌دهد که انتخاب دستگاه مختصات مناسب برای حل مسأله از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است.

تعیین بردار سرعت در دستگاه مختصات قطبی با استفاده از تعریف مشتق

بردار سرعت یک ذره‌ی متحرک مشتق بردار مکان آن ذره نسبت به زمان است. در زیر این تعریف به صورت ریاضی در دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی ارائه گردیده است.



شکل ۱-۴۸

دستگاه مختصات دکارتی

$$\vec{r}_A=\vec{r}_A(t)\quad \text{بردار مکان ذره‌ی } A \text{ تابعی از زمان است}$$
$$\vec{r}_A=x_A(t)\vec{i}+y_A(t)\vec{j}$$
$$\vec{v}_A=\vec{v}_A(t)=\frac{d[\vec{r}_A(t)]}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_A(t+\Delta t)-\vec{r}_A(t)}{(t+\Delta t)-(t)}$$
$$\vec{v}_A(t)=(\vec{i})\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_A(t+\Delta t)-x_A(t)}{(t+\Delta t)-(t)}+(\vec{j})\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y_A(t+\Delta t)-y_A(t)}{(t+\Delta t)-(t)}$$
$$\vec{v}_A(t)=\frac{d[x_A(t)]}{dt}\vec{i}+\frac{d[y_A(t)]}{dt}\vec{j}=\dot{x}_A\vec{i}+\dot{y}_A\vec{j}$$

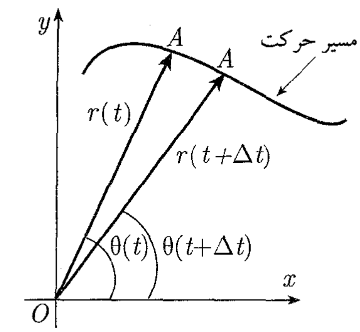
یادآوری: مشتق زمانی هر تابع دلخواه از زمان را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$f(t)\ \rightarrow\ \frac{df(t)}{dt}=\dot{f}$$

دستگاه مختصات قطبی: $r(t)$ نشان دهنده‌ی طول بردار $\vec{r}(t)$ می‌باشد.

$$\vec{r}_A=\vec{r}_A(t)=r_A(t)\vec{e}_r$$
$$\vec{v}_A=\vec{v}_A(t)=\frac{d[\vec{r}_A(t)]}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_A(t+\Delta t)-\vec{r}_A(t)}{(t+\Delta t)-(t)}$$

$$\rightarrow \vec{v}_A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_A(t+\Delta t)\vec{e}_r(t+\Delta t) - r_A(t)\vec{e}_r(t)}{(t+\Delta t)-(t)}$$



شکل ۱-۴۹

عبارت فوق نشان دهنده‌ی تعریف مشتق بردار مکان ذره‌ی A نسبت به زمان و یا همان سرعت ذره‌ی A است. نکته قابل توجه در این عبارت اینجاست که بردار یکه‌ی $\vec{e_r}$ در لحظه‌ی $(t+\Delta t)$ با بردار یکه‌ی $\vec{e_r}$ در لحظه‌ی (t) از نظر اندازه برابر (هر دو طولی برابر با یک دارند) ولی از نظر جهت متفاوت است و در واقع بردار $\vec{e_r}$ در دل خود تابعی از زاویه‌ی θ است که این زاویه نیز خود تابعی از زمان است در نتیجه بردار یکه‌ی $\vec{e_r}$ نیز خود تابعی از زمان است و با گذشت زمان جهتش تغییر می‌کند بنابراین نمی‌توان آن را از داخل حد بیرون آورد.

بر خلاف دستگاه مختصات قطبی در دستگاه مختصات دکارتی بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ هر دو هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت ثابت و مستقل از زمان هستند در نتیجه می‌توان آنها را از عبارت درون حد خارج کرد.

اکنون که نمی‌توانیم بردار یکه‌ی $\vec{e}_r$ را از عبارت داخل حد خارج نماییم قادر نخواهیم بود تا حاصل حد را با استفاده از روش‌های جبری حل کنیم بنابراین برای این هدف از روش‌های هندسی و ترسیمی استفاده می‌کنیم.

برای پیدا کردن مشتق یک تابع برداری نسبت به زمان در دستگاه مختصات قطبی ابتدا باید تفاضل دو بردار با فاصله‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک را بیابیم. در شکل (۱ـ۵۰) دو بردار $\vec{r}(t)$ و $\vec{r}(t+\Delta t)$ از تابع برداری مکان متحرک A رسم شده‌اند و Δt را به سمت صفر میل داده‌ایم. برای مشخص نمودن تفاضل دو بردار به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OD}$$

$r(t) = OB = OC$: شعاع دایره

$$r(t+\Delta t) = OD$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\Delta r_\theta} + \overrightarrow{\Delta r_r}\ ,\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\Delta r_\theta}\ ,\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\Delta r_r}$$

$\overrightarrow{\Delta r_r}$: تفاضل بردارها در راستای شعاعی

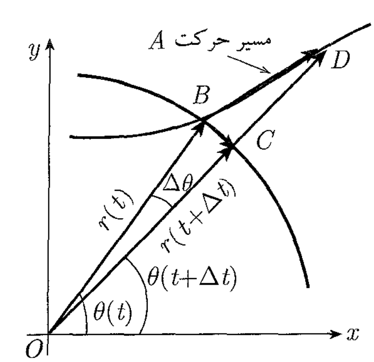
$\overrightarrow{\Delta r_\theta}$: تفاضل بردارها در راستای مماسی

$$\overrightarrow{\Delta r_r} = \overrightarrow{CD} = CD\ \vec{e}_{r(t+\Delta t)} = (OD-OC)\vec{e}_{r(t+\Delta t)}$$

$$= (OD-OB)\ \vec{e}_{r(t+\Delta t)} = \big[r(t+\Delta t) - r(t)\big]\vec{e}_{r(t+\Delta t)}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\Delta r_r} = \Delta r \cdot \vec{e}_{r(t+\Delta t)}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_\theta} = \overrightarrow{BC}$$

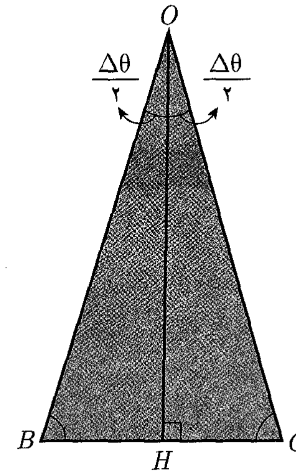


شکل ۱-۵۰

برای به‌دست آوردن اندازه و جهت بردار $\overrightarrow{BC}$ از روابط مثلثاتی در مثلث $\overset{\triangle}{OBC}$ استفاده می‌کنیم (به شکل (۱ـ۵۱) توجه کنید)

$$OB = OC \rightarrow BH = CH = \frac{BC}{2}$$

$$BH = OB\sin(\frac{\Delta\theta}{۲}) = CH \rightarrow BC = ۲OB\sin(\frac{\Delta\theta}{۲})$$
$$\rightarrow BC = ۲r(t)\sin(\frac{\Delta\theta}{۲})$$



شکل ۱-۵۱

نقاط B و C دو نقطه‌ی بی‌نهایت نزدیک به یکدیگر روی مسیر حرکت ذره‌ی A هستند در نتیجه تغییر زاویه‌ی بردار مکان میان این دو نقطه $(\Delta\theta)$ به سمت صفر میل می‌کند:

$$\lim_{\Delta t\to ۰} \Delta\theta = ۰$$
$$\lim_{\Delta\theta\to ۰} \sin(\frac{\Delta\theta}{۲}) = \frac{\Delta\theta}{۲} \rightarrow BC = ۲r(t)(\frac{\Delta\theta}{۲}) = r(t)\cdot\Delta\theta$$

در مورد جهت بردار $\overrightarrow{BC}$ می‌توان نشان داد که هرگاه زاویه‌ی $\Delta\theta$ به سمت صفر میل می‌کند جهت بردار $\overrightarrow{BC}$ نیز به جهت بردار $\vec{e_\theta}(t)$ میل می‌کند:

$$\triangle OBC : \left.\begin{array}{l} \hat{O}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ OB = OC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{O} = \Delta\theta \end{array}\right\} \rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰ - \Delta\theta}{۲}$$

در حد $\Delta\theta \to ۰$ بردار $\overrightarrow{BC}$ عمود بر بردار $\overrightarrow{OB}$ است.

$$\lim_{\Delta\theta\to ۰} \frac{۱۸۰ - \Delta\theta}{۲} = ۹۰$$

که بردار $\overrightarrow{OB}$ نیز همان بردار $\vec{e_r}(t)$ می‌باشد:

$$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\vec{e}_{r(t)}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}\|\vec{e}_{\theta(t)} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = r(t)\cdot\Delta\theta\ \vec{e}_{\theta(t)}$$

با استفاده از روش‌های فوق می‌توانیم تفاضل بردارهای مکان نقاط B و C را به شکل زیر بنویسیم:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_r} + \overrightarrow{\Delta r_\theta} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \Delta r\cdot\vec{e}_{r(t+\Delta t)} + r(t)\cdot\Delta\theta\vec{e}_{\theta(t)}$$

اکنون به وسیله نتیجه‌ی فوق حاصل حد موجود در تعریف مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta r\cdot\vec{e}_{r(t+\Delta t)}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{r(t)\cdot\Delta\theta\cdot\vec{e}_{\theta(t)}}{\Delta t}$$
$$\rightarrow \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to ۰}(\frac{\Delta r}{\Delta t}) \times \lim_{\Delta t\to ۰}\vec{e}_{r(t+\Delta t)} + r(t)\vec{e}_{\theta(t)}\lim_{\Delta t\to ۰}(\frac{\Delta\theta}{\Delta t})$$
$$\rightarrow \vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{e}_{r(t)} + \frac{d\theta(t)}{dt}r(t)\vec{e}_{\theta(t)}$$
$$\rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_{r(t)} + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_{\theta(t)}$$

در عبارت فوق جمله‌ی $\dot{r}(t)$، مشتق اندازه‌ی بردار $\vec{r}(t)$ نسبت به زمان در لحظه‌ی t، جمله‌ی $\vec{e_r}(t)$ بردار یکه‌ی شعاعی در لحظه‌ی t، جمله‌ی $r(t)$ اندازه‌ی بردار $\vec{r}(t)$ در لحظه‌ی t، جمله‌ی $\dot{\theta}(t)$ مشتق زاویه‌ی بردار $\vec{r}(t)$ نسبت به زمان در لحظه‌ی t و جمله‌ی $\vec{e_\theta}(t)$ بردار یکه‌ی مماسی در لحظه‌ی t می‌باشد. با تعمیم نتیجه‌ی فوق برای هر تابع برداری دلخواه در دستگاه مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\vec{f}(t)\ :\ \frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \dot{\vec{f}}(t) = \dot{f}\vec{e_r}(t) + f(t)\dot{\theta}(t)\vec{e_\theta}(t)$$

از این پس تمامی جملاتی که در سینماتیک دستگاه قطبی مورد استفاده قرار می‌دهیم تابعی از زمان هستند و برای راحتی نمایش، متغیر t را از جملات حذف می‌کنیم مثلاً برای سرعت در دستگاه قطبی می‌نویسیم:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

مثال ۲۳ معادله‌ی حرکت جسمی در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر است. اولاً معادله‌ی مسیر حرکت و تابع اندازه‌ی سرعت این متحرک را بر حسب زمان در این دستگاه بیابید. ثانیاً بردار سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t = ۲\text{s}$ به دو روش ترسیمی و تبدیل معادلات در دستگاه مختصات دکارتی بیابید.

$$r = t^۳ + \sin t\ (\text{m})\ \ ,\ \ \theta = t^۲\ (\text{rad})$$

حل. از معادله‌ی $r = t^۳ + \sin t$، طول بردار مکان متحرک در هر لحظه به‌دست می‌آید و از معادله‌ی $\theta = t^۲\ (\text{rad})$ زاویه‌ی این بردار با محور مبنا مشخص می‌شود.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$r = t^۳ + \sin t\ \rightarrow\ \dot{r} = ۳t^۲ + \cos t$$

$$\theta = t^۲\ \rightarrow\ \dot{\theta} = ۲t$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\ \rightarrow\ \vec{v} = (۳t^۲ + \cos t)\vec{e}_r + (۲t)(t^۳ + \sin t)\vec{e}_\theta$$

تابع اندازه‌ی سرعت متحرک بر حسب زمان:

$$v = \sqrt{(\dot{r})^۲ + (r\dot{\theta})^۲} = \sqrt{(۳t^۲ + \cos t)^۲ + \left[(۲t)(t^۳ + \sin t)\right]^۲}$$

$$\text{معادله‌ی مسیر حرکت}\ :\ \begin{cases} r = t^۳ + \sin t \\ \theta = t^۲ \end{cases}$$

$$\theta = t^۲\ \rightarrow\ t = \begin{cases} +\sqrt{\theta} & \checkmark \\ -\sqrt{\theta} & \otimes \end{cases}\qquad \text{زمان نمی‌تواند منفی باشد}$$

معادله‌ی مسیر حرکت در دستگاه مختصات قطبی:

$$r = t^۳ + \sin t\ \rightarrow\ r = (\sqrt{\theta})^۳ + \sin(\sqrt{\theta})$$

تعیین بردار سرعت در لحظه‌ی $t = ۲\mathrm{s}$:

الف) روش ترسیمی:

در روش ترسیمی با استفاده از ابزارهایی همچون خط‌کش، گونیا و پرگار و با انتخاب یک مقیاس مناسب مؤلفه‌های شعاعی $(\dot{r}\vec{e}_r)$ و مماسی $(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$ بردار سرعت را با طول و زاویه‌ی صحیح بر روی کاغذ رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از روش جمع برداری، بردار سرعت متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$t = ۲\mathrm{s} \rightarrow \theta = (t)^۲ = ۴(\mathrm{rad}) = \frac{۴ \times ۱۸۰}{\pi} = ۲۲۹{,}۲^\circ$$

$$r = t^۳ + \sin t = ۸ + \sin\left(\frac{۲ \times ۱۸۰}{\pi}\right) = ۸{,}۹\mathrm{m}$$

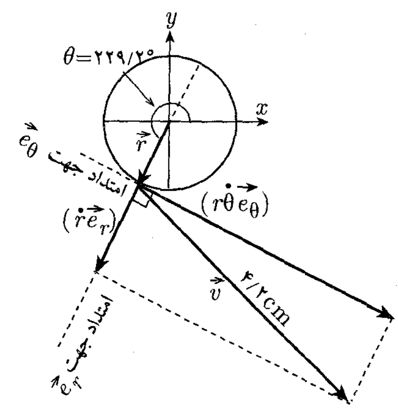
$$\dot{r} = ۳t^۲ + \cos t = ۳ \times ۴ + \cos\left(\frac{۲ \times ۱۸۰}{\pi}\right) = ۱۱{,}۶\ (\mathrm{m/s})$$

$$\dot{\theta} = ۲t = ۴\ \left(\frac{۱}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\vec{v} = ۱۱{,}۶\vec{e}_r + ۳۵{,}۶\vec{e}_\theta$$

واحد $\dot{\theta}$ برابر $\left(\frac{۱}{\mathrm{s}}\right)$ است زیرا کمیت زاویه بر خلاف کمیاتی چون جابه‌جایی، زمان و یا جرم دارای واحد نیست.

برای پیدا کردن جهت $\vec{e}_\theta$ می‌توانیم از θ نسبت به زمان مشتق بگیریم تا ببینیم متحرک در جهت افزایش زاویه حرکت می‌کند و یا در جهت کاهش زاویه:



شکل ۱-۵۲

$\dot{\theta} = ۲t\ ,\ t = ۲ \ \rightarrow\ \dot{\theta} = +۴ > ۰ \ \rightarrow$ افزایش زاویه

مقیاس : $[\frac{۱}{۹۰۰}]$

شعاع دایره‌ی رسم شده : $\frac{۱}{۹۰۰} \times ۸۹۰ \simeq ۱\mathrm{cm}$

مؤلفه‌ی شعاعی سرعت در شکل : $\dot{r}$: $\frac{۱}{۹۰۰} \times ۱۱۶۰ = ۱{,}۳\mathrm{cm}$

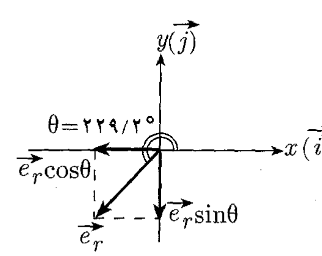
مؤلفه ی مماسی سرعت در شکل : $r\dot{\theta}$: $\frac{۱}{۹۰۰} \times ۳۵۶۰ \simeq ۴\mathrm{cm}$

طول بردار سرعت در شکل : $۴{,}۲\mathrm{cm}$

اندازه‌ی واقعی بردار سرعت : $۹۰۰ \times ۴{,}۲ = ۳۷۹۰\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right) = ۳۷{,}۹(\mathrm{m/s})$

ب) روش تبدیل معادلات به دستگاه مختصات دکارتی

برای تبدیل معادلات حاکم بر دستگاه مختصات قطبی به معادلات حاکم بر دستگاه مختصات دکارتی باید بردارهای $\vec{e_r}$ و $\vec{e_\theta}$ را به بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ تبدیل کنیم:



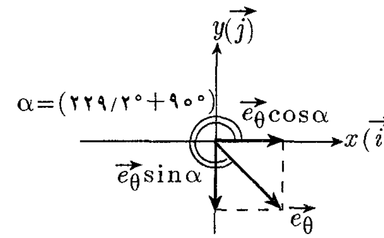
شکل ۱-۵۳

$$t = ۲\mathrm{s} \rightarrow \theta = ۲۲۹{,}۲^\circ$$

$$\vec{e_r} = (e_r \cos\theta)\vec{i} + (e_r \sin\theta)\vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{e_r} = -۰{,}۶۵\vec{i} - ۰{,}۷۶\vec{j}$$

$$\alpha = ۹۰ + \theta = ۳۱۹/۲^\circ$$
$$\vec{e_\theta} = (e_\theta \cos\alpha)\vec{i} + (e_\theta \sin\alpha)\vec{j}$$
$$\rightarrow \vec{e_\theta} = ۰/۷۶\vec{i} - ۰/۶۵\vec{j}$$
$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ t = ۲\text{s} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = ۱۱/۶(۰/۶۵\vec{i} - ۰/۷۶\vec{j}) + (۸/۹ \times ۴) \times (۰/۷۶\vec{i} - ۰/۶۵\vec{j})$$
$$\Rightarrow \vec{v} = (۱۹/۵\vec{i} - ۳۱/۹۶\vec{j})\ (\text{m/s})$$



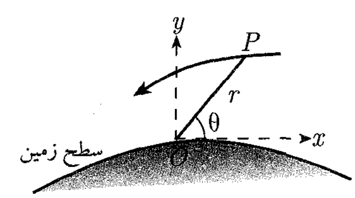
شکل ۱-۵۴

مثال ۲۴

شهاب‌سنگ P توسط راداری مستقر در رصدخانه‌ی زمینی O ردیابی شده است. هنگامی که شهاب‌سنگ درست در بالای سر رادار قرار دارد، مقادیر زیر توسط رادار ثبت شده‌اند:

$$\dot{\theta} = ۰/۴\text{rad/s}\ ,\ \dot{r} = -۲۰\text{km/s}\ ,\ r = ۸۰\text{km}$$

سرعت حرکت شهاب‌سنگ و زاویه‌ی α میان بردار سرعت آن و امتداد افق را بیابید.



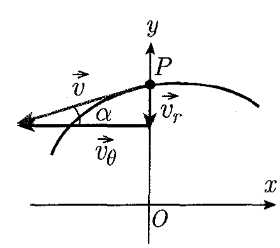
شکل ۱-۵۵

حل. با توجه به اطلاعاتی که رادار در اختیار ما قرار می‌دهد بهترین روش برای حل مسأله استفاده از دستگاه مختصات قطبی است.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}e_\theta$$
$$v = \sqrt{(\dot{r})^۲ + (r\dot{\theta})^۲} = \sqrt{(-۲۰)^۲ + (۸۰ \times ۰/۴)^۲} = ۳۷\text{km/s}$$

هنگامی که شهاب‌سنگ درست در بالای سر رادار قرار دارد زاویه‌ی θ برابر با ۹۰° خواهد بود: (شکل ۱ـ۵۶)

$$\tan\alpha = \left|\frac{v_r}{v_\theta}\right| = \left|\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\right| = \left|-\frac{۲۰}{۳۲}\right| = ۰/۶۲۵ \rightarrow \alpha = ۳۲^\circ$$



شکل ۱-۵۶

برای درک هر چه بیشتر مطالب از نمونه مسائل حل شده در انتهای فصل کمک بگیرید.

شتاب در دستگاه مختصات قطبی

برای به‌دست آوردن بردار شتاب در دستگاه مختصات قطبی باید از تابع بردار سرعت نسبت به زمان مشتق بگیریم. اکنون که با مشتق یک تابع برداری در دستگاه مختصات قطبی آشنا هستیم این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^۲\vec{r}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$$
$$\vec{a} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt}$$

$$\vec{a}=\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

پنج جمله‌ی فوق در اثر مشتق‌گیری از بردار سرعت نسبت به زمان حاصل شده‌اند. اکنون هر یک را به‌طور جداگانه بررسی می‌نماییم.

$$۱)\ \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e_r}=\frac{d(\frac{dr}{dt})}{dt}\vec{e_r}=\frac{d^۲r}{dt^۲}\vec{e_r}=\ddot{r}\vec{e_r}$$

در جملات دوم و پنجم عبارت، باز هم مشتق یک بردار نسبت به زمان پدیدار شده است:

$$۲)\ \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt}:\ \frac{d\vec{e_r}}{dt}=(\dot{e_r})\vec{e_r'}+(e_r)\dot{\theta}\vec{e_\theta'}$$

در عبارت فوق جمله‌ی $\dot{e}_r$ نشان دهنده‌ی مشتق اندازه‌ی بردار یکه‌ی $\vec{e}_r$ نسبت به زمان است و به دلیل اینکه طول این بردار همواره برابر با یک و مستقل از زمان است مقدار $\dot{e}_r$ برابر با صفر خواهد بود. جمله‌ی $\vec{e'}_r$ نشان دهنده‌ی بردار یکه‌ی شعاعی بردار $\vec{e}_r$ است یعنی $\vec{e'}_r$ برداری است با طول یک و در جهت $\vec{e}_r$ که همان $\vec{e}_r$ خواهد بود. جمله‌ی e_r نشان دهنده‌ی طول بردار $\vec{e}_r$ و برابر با یک است. جمله‌ی $\dot{\theta}$ نشان دهنده‌ی نرخ تغییر زاویه‌ی بردار $\vec{e}_r$ است و به دلیل اینکه بردار $\vec{e}_r$ همواره در جهت بردار $\vec{r}$ می‌باشد مقدار $\dot{\theta}$ برای این دو بردار با هم برابر است و در نهایت جمله $\vec{e'}_\theta$ نمایانگر بردار یکه‌ی مماسی بردار $\vec{e}_r$ است که چون $\vec{e}_r$ همواره در جهت $\vec{r}$ است و با آن حرکت می‌کند $\vec{e'}_\theta$ نیز همواره در جهت $\vec{e}_\theta$ می‌باشد در نتیجه دو بردار $\vec{e}_{\theta'}$ و $\vec{e}_\theta$ با یکدیگر برابر و یکسان هستند:

$$\dot{\vec{e}}_r=\dot{e}_r\vec{e'}_r+e_r\dot{\theta}\vec{e'}_\theta=\circ\,\vec{e}_r+\dot{\theta}\vec{e}_\theta=\dot{\theta}\vec{e}_\theta\rightarrow\dot{r}\dot{\vec{e}}_r=\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$۳)\ \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta=\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$۴)\ r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta=r\frac{(\frac{d\theta}{dt})}{dt}\vec{e}_\theta=r\frac{d^۲\theta}{dt^۲}\vec{e}_\theta=r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

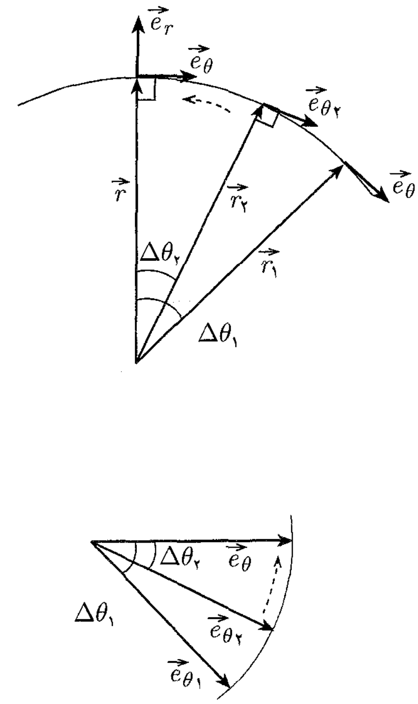
$$۵)\ r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\dot{\vec{e}}_\theta=(\dot{e}_\theta)\vec{e''}_r+(e_\theta)\dot{\theta}\vec{e''}_\theta$$

در عبارت فوق جمله‌ی $\dot{e}_\theta$ نشان دهنده‌ی مشتق اندازه‌ی بردار یکه $\vec{e}_\theta$ نسبت به زمان و مانند بردار یکه $\vec{e}_r$ برابر با صفر است. جمله‌ی $\vec{e''_r}$ نشان دهنده‌ی بردار یکه‌ی شعاعی بردار $\vec{e}_\theta$ است که طول آن برابر با یک و جهتش، هم‌جهت با بردار $\vec{e}_\theta$ می‌باشد در نتیجه دو بردار $\vec{e''}_r$ و $\vec{e}_\theta$ با یکدیگر برابر می‌باشند. جمله‌ی e_θ نشان دهنده‌ی طول بردار $\vec{e}_\theta$ و برابر با یک است. جمله‌ی $\dot{\theta}$ نمایانگر نرخ تغییر زاویه بردار $\vec{e}_\theta$ نسبت به زمان است که به دلیل اینکه این بردار نیز مانند بردار $\vec{e}_r$ همراه با بردار $\vec{r}$ حرکت می‌کند $\dot{\theta}$ برای هر سه بردار $\vec{r}$، $\vec{e}_r$ و $\vec{e}_\theta$ مقداری یکسان است و در نهایت جمله‌ی $\vec{e''}_\theta$ نشان دهنده‌ی بردار یکه‌ی مماسی بردار $\vec{e}_\theta$ است یعنی برداری با طول یک و راستایی عمود بر راستای بردار $\vec{e}_\theta$ و در جهتی که بردار $\vec{e}_\theta$ تغییر زاویه می‌دهد. با کمی دقت می‌توان نشان داد

که جهت بردار یکه‌ی مماسی بردار $\vec{e}_\theta$ یعنی e''_θ همواره در جهت بردار $(-\vec{e}_r)$ یعنی در خلاف جهت بردار $\vec{e}_r$ است.

بردار یکه‌ی e''_θ برداری است در راستایی عمود بر راستای بردار $\vec{e}_\theta$ در نتیجه راستای دو بردار $\vec{e}_r$ و e''_θ یکسان خواهد بود اما جهت بردار $\vec{e}_r$ به سمت خارج دایره و جهت بردار e''_θ به سمت داخل دایره است. (شکل ۱ـ۵۷)



شکل ۱-۵۷

$$(\lim_{n\to\infty} \vec{e}_{\theta_n} - \vec{e}_\theta) \perp \vec{e}_\theta \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} \vec{e}_{\theta_n} - \vec{e}_\theta) \parallel (\vec{e}_r) \rightarrow\ e''_\theta = (-\vec{e}_r)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dot{\vec{e}}_\theta = (\dot{e}_\theta)e''_r + (e_\theta)\dot{\theta}e''_\theta = ۰\vec{e}_\theta + (۱)\dot{\theta}(-\vec{e}_r) = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\rightarrow r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -r\dot{\theta}^۲\vec{e}_r$$

اکنون می‌توانیم رابطه‌ی کلی شتاب را در دستگاه مختصات قطبی به شکل زیر بنویسیم:

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^۲\vec{e}_r$$

$$\rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\vec{e}_r + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

در روابط سرعت و شتاب در دستگاه مختصات قطبی عبارت $\dot{\theta}$ به معنای سرعت زاویه‌ای یعنی همان مشتق زاویه نسبت به زمان می‌باشد که می‌توان آن را به وسیله نماد ω جایگزین کرد:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^۲)\vec{e}_r + (۲\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\vec{e}_\theta$$

اگر متحرکی، مسیری را حول محیط یک دایره با شعاع ثابت و با سرعت زاویه‌ای ثابت طی کند رابطه‌ی شتاب بسیار ساده‌تر خواهد شد که این حالت خاص در قسمت اول کتاب نیز تشریح شد:

$$r = \text{cte} \ ,\ \ \omega = \text{cte} \ \rightarrow\ \dot{r} = \ddot{r} = \dot{\omega} = ۰$$

$$\rightarrow \vec{a} = (۰ - r\omega^۲)\vec{r}_e + (۰ + ۰)\vec{e}_\theta = -r\omega^۲\vec{e}_r = -\frac{v^۲}{r}\vec{e}_r$$

مثال ۲۵ با استفاده از اطلاعات موجود در مثال (۲۳) بار دیگر مسأله را برای یافتن شتاب در دستگاه مختصات قطبی حل نمایید.

حل.

$$r = t^۳ + \sin t\ (\text{m})\ \ ,\ \ \theta = t^۲\ (\text{rad})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\vec{e}_r + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)^۲ + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^۲}$$

$$\ddot{r} = \frac{d(\dot{r})}{dt} = \frac{d(۳t^۲ + \cos t)}{dt} = ۶t - \sin t$$

$$r\dot{\theta}^۲ = (t^۳ + \sin t) \times (۲t)^۲$$

$$۲\dot{r}\dot{\theta} = ۲ \times (۳t^۲ + \cos t) \times (۲t)$$

$$r\ddot{\theta} = (t^۳ + \sin t) \times \frac{d(۲t)}{dt} = ۲ \times (t^۳ + \sin t)$$

$$a = \Big(\big[(۶t - \sin t) - (۴t^۵ + ۴t^۲ \sin t) \big]^۲$$
$$+ \big[(۱۲t^۳ + ۴t \cos t) + (۲t^۳ + ۲ \sin t) \big]^۲ \Big)^{\frac{۱}{۲}}$$

تعیین بردار شتاب در دستگاه مختصات قطبی در لحظه‌ی $t = ۲\mathrm{s}$:

الف) روش ترسیمی:

$$t = ۲ \ \rightarrow \ \theta = t^۲ = ۴\mathrm{rad} = ۲۲۹{,}۲^\circ \ , \ r = ۸ + \sin(\frac{۲ \times ۱۸۰}{\pi}) = ۸{,}۹\mathrm{m}$$
$$\dot{r} = ۳t^۲ + \cos t = ۳ \times ۴ + \cos(\frac{۲ \times ۱۸۰}{\pi}) = ۱۱{,}۶(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) \ , \ \dot{\theta} = ۲t = ۴(\frac{۱}{\mathrm{s}})$$
$$\ddot{r} = ۶t - \sin t = ۶ \times ۲ - \sin(\frac{۲ \times ۱۸۰}{\pi}) = ۱۱{,}۱(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}) \ , \ \ddot{\theta} = ۲(\frac{۱}{\mathrm{s}^۲})$$
$$\vec{a} = (۱۱{,}۱ - ۱۴۲{,}۴)\vec{e_r} + (۹۲{,}۸ + ۱۷{,}۸)\vec{e_\theta}$$
$$= -۱۳۱{,}۳\vec{e_r} + ۱۱۰{,}۶\vec{e_\theta}$$

مقیاس : $\left[\frac{۱}{۳۰۰۰}\right]$

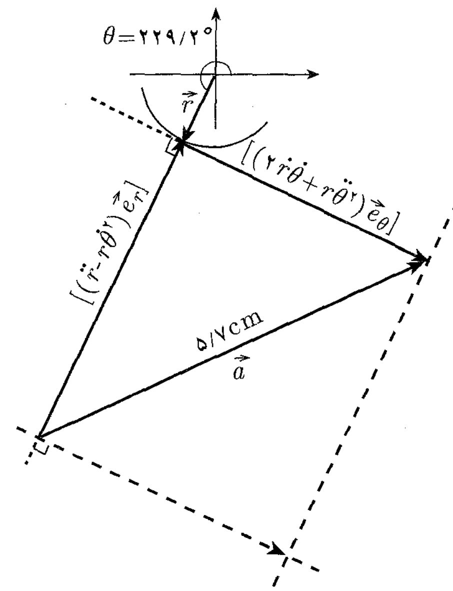
مؤلفه‌ی شعاعی شتاب : $\frac{۱}{۳۰۰۰} \times (-۱۳۱۳۰) = -۴{,}۴\mathrm{cm}$

مؤلفه‌ی مماسی شتاب : $\frac{۱}{۳۰۰۰} \times ۱۱۰۶۰ = ۳{,}۷\mathrm{cm}$

طول بردار شتاب با مقیاس $(\frac{۱}{۳۰۰۰})$: $۵{,}۷\mathrm{cm}$

اندازه واقعی بردار شتاب : $۳۰۰۰ \times ۵{,}۷ = ۱۷۱۰۰ \ \mathrm{cm/s}^۲$

$$\rightarrow a = ۱۷۱ \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$$



شکل ۱-۵۸

ب) روش تبدیل معادلات به دستگاه مختصات دکارتی:

مشابه حل در مثال (۲۳)

$$\vec{e_r} = (e_r \cos\theta)\vec{i} + (e_r \sin\theta)\vec{j}$$
$$\theta = ۲۲۹{,}۲^\circ \ \rightarrow \ e_r = -۰{,}۶۵\vec{i} - ۰{,}۷۶\vec{j}$$
$$\vec{e_\theta} = ۰{,}۷۶ - ۰{,}۶۵\vec{j}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\vec{e_r} + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$
$$= -۱۳۱{,}۳(-۰{,}۶۵\vec{i} - ۰{,}۷۶\vec{j}) + ۱۱۰{,}۶(۰{,}۷۶\vec{i} - ۰{,}۶۵\vec{j})$$
$$= ۱۶۹{,}۴\vec{i} + ۲۷{,}۹\vec{j}$$

مثال ۲۶

شکل بادامک نشان داده شده در شکل (۱_۵۹) طوری است که باعث می‌شود مهره A منحنی حلزونی به رابطه‌ی $r = b - c\cos\theta$ را طی کند که در آن $b > c$ است. اگر $b = ۱۰۰\mathrm{mm}$ و $c = ۵۰\mathrm{mm}$ و بازوی شیاردار با میزان ثابت $\dot{\theta} = ۲\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ دوران کند، مقدار سرعت (v) و شتاب (a) مربوط به مهره‌ی A را به‌دست آورید. (از سیستم واحد SI استفاده کنید.)

حل.

$$r = b - c\cos\theta \ , \ b = ۱۰۰(\mathrm{mm}) = ۰{,}۱(\mathrm{m}) \ , \ c = ۵۰(\mathrm{mm}) = ۰{,}۰۵(\mathrm{m})$$

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad , \quad \dot{\theta}=2(\frac{1}{s})$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\times\dot{\theta}=2\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{d(b-c\cos\theta)}{d\theta}=c\sin\theta=50\sin\theta_{(\text{mm})}$$

$$\rightarrow \dot{r}=100\sin\theta_{(\frac{\text{mm}}{\text{s}})}=0.1\sin\theta_{(\frac{\text{m}}{\text{s}})}$$

$$r=[100-50\cos\theta]_{(\text{mm})}=[0.1-0.05\cos\theta]_{(\text{m})}$$

$$\rightarrow r\dot{\theta}=[0.2-0.1\cos\theta]_{(\frac{\text{m}}{\text{s}})}$$

$$v=\sqrt{(\dot{r})^2+(r\dot{\theta})^2}=\sqrt{(0.1\sin\theta)^2+(0.2-0.1\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{100}+\frac{4}{100}+\frac{\cos^2\theta}{100}-\frac{4\cos\theta}{100}}$$

$$\rightarrow v=0.1\sqrt{5-4\cos\theta}$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$a=\sqrt{(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})^2}$$

$$\ddot{r}=\frac{d(\frac{dr}{dt})}{dt}=\frac{d(\frac{dr}{dt})}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}=\frac{d(100\sin\theta)}{d\theta}\times 2=100\cos\theta\times 2$$

$$=200\cos\theta_{(\frac{\text{mm}}{\text{s}^2})}=0.2\cos\theta_{(\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}$$

$$r\dot{\theta}^2=(0.4-0.2\cos\theta)_{(\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}$$

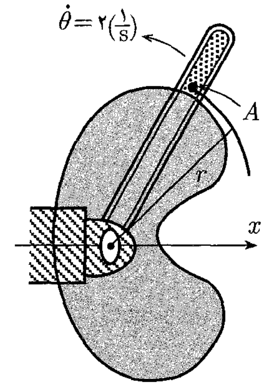
$$2\dot{r}\dot{\theta}=2\times 2\times 0.1\sin\theta=(0.4\sin\theta)_{(\frac{\text{m}}{\text{s}^2})}$$

$$\ddot{\theta}=0 \;\rightarrow\; r\ddot{\theta}=0$$

$$\rightarrow a=\sqrt{(0.2\cos\theta-0.4+0.2\cos\theta)^2+(0.4\sin\theta)^2}$$

$$=0.4\sqrt{1+1-2\cos\theta}$$

$$\rightarrow a=0.4\sqrt{2(1-\cos\theta)}=0.8\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|_{(\frac{\text{m}}{\text{s}})}$$



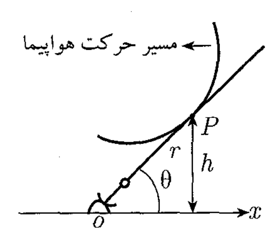
شکل ۱-۵۹

مثال ۲۷

در شکل (۱ـ۶۰) مسیر یک هواپیمای مسافربری (P) مشخص شده است. رادار نصب شده در نقطه‌ی O اطلاعات زیر را گزارش می‌کند. مقادیر سرعت و شتاب هواپیما را در این لحظه به‌دست آورید.

$$\dot{r}=40.2(\frac{\text{m}}{\text{s}}) \quad , \quad \ddot{r}=28.7(\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

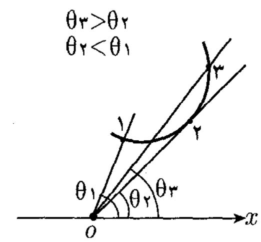
$$\ddot{\theta}=0.02(\frac{1}{\text{s}^2}) \quad , \quad \theta=30^\circ \quad , \quad h=1000\text{m}$$



شکل ۱-۶۰

حل. برای دست‌یابی به مقادیر سرعت و شتاب در دستگاه مختصات قطبی علاوه بر مقادیر $\dot{r}$، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ به مقدار $\dot{\theta}$ نیز نیازمندیم ولی این اطلاعات در صورت مسأله به‌طور مستقیم در اختیار ما قرار داده نشده است. همان‌طور که در شکل (۱ـ۶۰) مشاهده می‌کنید در این لحظه مسیر حرکت

هواپیما بر خط ردیاب رادار نصب شده در نقطه‌ی O مماس شده است و این اتفاق بدین معناست که در زمان‌های قبل از وقوع این حالت مقدار زاویه θ در حال کاهش و در نتیجه $\dot{\theta}$ منفی بوده است. اما پس از مماس شدن خط ردیاب رادار بر مسیر حرکت هواپیما زاویه θ شروع به افزایش کرده و $\dot{\theta}$ مثبت شده است در نتیجه در این لحظه‌ی خاص زاویه‌ی θ به کمترین مقدار خورد رسیده است و تابع $\theta(t)$ دارای اکسترمم (مینیمم) می‌باشد و $\dot{\theta}$ برابر با صفر است: (شکل ۱ـ۶۱)



شکل ۱-۶۱

$$\left.\begin{array}{l} t < t_۲ \rightarrow \dot{\theta} < ۰ \\ t > t_۲ \rightarrow \dot{\theta} > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\theta}_{(t=t_۲)} = ۰$$

$$\dot{r} = ۴۰/۱_{(\frac{m}{s})} \quad , \quad \ddot{r} = ۲۸/۷_{(\frac{m}{s^۲})}$$

$$\dot{\theta} = ۰_{(\frac{1}{s})} \quad , \quad \ddot{\theta} = ۰/۲_{(\frac{1}{s^۲})}$$

$$v = \sqrt{(\dot{r})^۲ + (r\dot{\theta})^۲} = \dot{r} = ۴۰/۱_{(\frac{m}{s})}$$

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta})^۲ - (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^۲} = \sqrt{(\ddot{r})^۲ + (r\ddot{\theta})^۲}$$

$$r\sin\theta = h \rightarrow ; r = \frac{h}{\sin\theta} \rightarrow r = ۲ \times ۱۰۰۰ = ۲۰۰۰_{m}$$

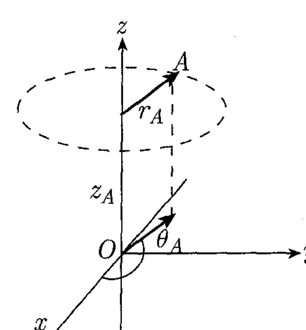
$$\rightarrow r\ddot{\theta} = ۴۰\frac{m}{s^۲} \rightarrow a = ۴۹/۲\frac{m}{s^۲}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

در قسمت‌های قبل با مفهوم دستگاه مختصات آشنا شدیم و دیدیم برای نشان دادن مکان هر نقطه در یک فضای دوبعدی به دو پارامتر مستقل نیاز خواهیم داشت که این دو پارامتر در دستگاه مختصات دکارتی (x,y) و در دستگاه مختصات قطبی (r,θ) بودند. برای این که بتوانیم مکان هر نقطه را در فضای سه‌بعدی به‌صورت یک ترکیب ریاضی نمایش دهیم به سه پارامتر مستقل نیازمند خواهیم بود که این سه پارامتر در دستگاه مختصات دکارتی (x,y,z) هستند. دستگاه مختصات استوانه‌ای یکی دیگر از انواع دستگاه‌های مختصات جهت نمایش مکان نقاط در فضای سه‌بعدی است و می‌توان به نوعی آن را تعمیم دستگاه مختصات قطبی از دو بعد به سه بعد دانست. پارامترهای مستقل در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از (r,θ,z) و در شکل (۱ـ۶۲) مکان نقطه دلخواه A به وسیله این دستگاه نمایش داده شده است.

در واقع z فاصله نقطه A از صفحه (x,y) یا (r,θ) می‌باشد.

$$A : (r_A, \theta_A, z_A)$$



شکل ۱-۶۲

طریقه نمایش بردار در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{k}$$

مشتق بردار در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(z\vec{k})}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{k} + z\dot{\vec{k}}$$

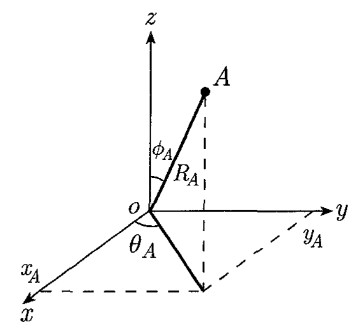
از آنجایی که بردار یکه $\vec{k}$ دارای اندازه و جهت ثابت است در نتیجه مشتق آن نسبت به زمان برابر با صفر خواهد بود:

$$\dot{\vec{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\vec{e}_r + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات کروی یکی دیگر از ابزارهای نمایش مکان نقاط مختلف در فضای سه‌بعدی می‌باشد که در این کتاب تنها اشاره مختصری به آن خواهد شد. کاربرد این نوع دستگاه بیشتر در حل انواع مسائل علم نجوم بروز پیدا می‌کند. پارامترهای مستقل این دستگاه (R, θ, φ) می‌باشند که در شکل (۱ـ۶۳) چگونگی نمایش مکان نقطه دلخواه A در این دستگاه شرح داده شده است.



شکل ۱-۶۳

R : فاصله مبدأ دستگاه تا نقطه موردنظر

θ : زاویه تصویر خط OA روی صفحه xy با محور x

φ : زاویه خط OA با محور z

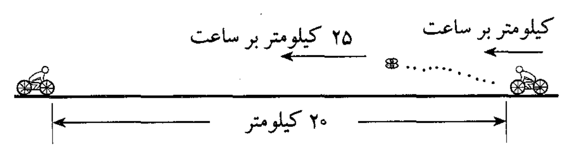
$A : (R_A, \theta_A, \varphi_A)$

مسائل نمونه فصل ۱

حرکت روی خط راست (حرکت یک‌بعدی)

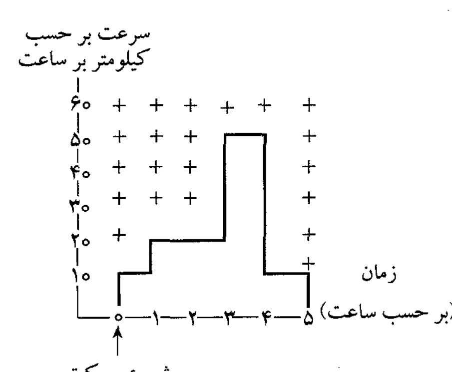
۱ . دوچرخه‌سواری مسافتی را با دوچرخه طی می‌کند. این دوچرخه سوار ساعت اول پنج کیلومتر، سه ساعت بعد هر ساعت چهار کیلومتر و دو ساعت آخر هر ساعت هفت کیلومتر طی می‌کند. این دوچرخه‌سوار در مجموع چند کیلومتر را طی کرده است؟

۲ . دو دوچرخه‌سوار با سرعت یکنواخت ۱۰ کیلومتر بر ساعت به طرف همدیگر حرکت می‌کنند. در لحظه‌ای که فاصله‌ی میان آنها ۲۰ کیلومتر است، زنبور عسلی از چرخ جلوی یکی از آنها، با سرعت یکنواخت ۲۵ کیلومتر بر ساعت، مستقیماً به طرف چرخ دوچرخه‌ی دیگر پرواز می‌کند. زنبور به محض تماس با چرخ دوچرخه، بی‌درنگ بر می‌گردد و با همان سرعت به سوی دوچرخه‌ی اول پرواز می‌کند و این حرکت رفت و برگشتی را آنقدر تکرار می‌کند تا دوچرخه‌ها با هم برخورد کنند و زنبور بینوا لای چرخ‌های آن له شود. این زنبور از لحظه‌ی جدا شدن از چرخ دوچرخه‌ی اول تا زمان پیش آمدن آن حادثه‌ی ناگوار چند کیلومتر در پرواز است؟



شکل ۱-۶۴

۳ . نمودار سرعت بر حسب زمان یک متحرک به صورت زیر است. مسافت طی شده در این حرکت چقدر است؟



شکل ۱-۶۵

۴ . دو اتومبیل در یک زمان از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی B راه افتاده‌اند. اتومبیل اول نصف راه را با سرعت ثابت v_1 و نصفه‌ی دیگر را با سرعت ثابت v_2 طی کرد. اتومبیل دوم نصف مدت حرکت خود را با سرعت v_1 و نصفه‌ی دوم زمان را با سرعت v_2 پیمود. سرعت متوسط هر اتومبیل را در صورتی که $v_1 = 30\text{km/h}$ و $v_2 = 50\text{km/h}$ باشد، بیابید.

۵ . دو جسم که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند اگر به سوی هم حرکت کنند، فاصله‌ی آنها هر ۱۰ ثانیه ۱۶ متر کم می‌شود. ولی اگر در یک جهت حرکت کنند، فاصله‌ی آنها هر ۵ ثانیه ۳ متر زیاد می‌شود. سرعت هر کدام از آنها را بیابید.

۶ . مختص نقطه‌ای که به‌طور مستقیم‌الخط در امتداد محور xها در حرکت است، طبق معادله‌ی $x = 11 + 35t + 41t^2$ با زمان تغییر می‌کند (x بر حسب سانتیمتر و t بر حسب ثانیه است). سرعت و شتاب این نقطه را به‌دست آورید.

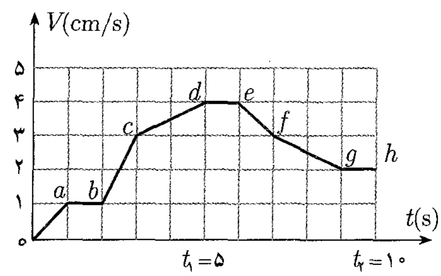
۷ . آسانسوری با شتاب ثابت a در حرکت است. شخصی داخل این آسانسور کتابی را رها می‌کند. شتاب کتاب نسبت به کف آسانسور چه اندازه است در صورتی که: (الف) آسانسور در حال بالا رفتن باشد. (ب) آسانسور در حال پایین آمدن باشد.

۸ . اتوبوس واحد خیابان فردوسی با سرعت ۳۶۰ سانتیمتر بر ثانیه به میدان فردوسی نزدیک می‌شود. یکی از مسافران اتوبوس با سرعت ۹۰ سانتیمتر بر ثانیه نسبت به صندلی‌ها و اشیای داخل اتوبوس به طرف جلو حرکت می‌کند. این شخص ساندویچی در دست دارد که با سرعت ۵ سانتیمتر بر ثانیه آن را فرو می‌دهد. مورچه‌ای روی ساندویچ از طرف نزدیک به دهان با سرعت ۲٫۵ سانتیمتر بر ثانیه به طرف انتهای دیگر ساندویچ در حرکت است. مورچه با چه سرعتی به میدان فردوسی نزدیک می‌شود؟

شکل ۱-۶۶

۹ . یک وسیله‌ی نقلیه موتوری یک سوم مسافت s را با سرعت $v_1 = ۱۰\mathrm{km/h}$، یک سوم بعدی را با سرعت $v_2 = ۲۰\mathrm{km/h}$ و آخرین قسمت را با سرعت $v_3 = ۶۰\mathrm{km/h}$ طی می‌کند. سرعت میانگین این متحرک را در تمام مسیر پیدا کنید.

۱۰ . در حرکت نشان داده شده در شکل زیر، سرعت میانگین و شتاب میانگین یک ذره متحرک را در مدت ۵ و ۱۰ ثانیه اول حرکت معین کنید.



شکل ۱-۶۷

۱۱ . جسمی که حرکت متشابه‌التغییر کند شونده دارد در مدت ۸ ثانیه مسافت ۱۸۰ متر طی کرده است و در آخر مسیر فوق سرعتش ۵ متر بر ثانیه شده است. سرعت اولیه و شتاب کند شونده آن را معلوم کنید.

۱۲ . جسمی را از ارتفاع H با سرعت اولیه‌ی v_0 در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنند. در همان زمان جسم دومی را از زمین و در همان امتداد با v'_0 به طرف بالا پرتاب می‌کنند. معلوم کنید پس از چه مدت دو جسم به هم می‌رسند.

۱۳ . قطاری با سرعت ۲۷ کیلومتر در ساعت در جهت مشرق حرکت می‌کند. مسافری که جلوی پنجره نشسته فکر می‌کند که باد از جهت شمال می‌وزد. موقعی که در جهت قبلی، سرعت قطار به ۵۴ کیلومتر در ساعت می‌رسد، مسافر خیال می‌کند که باد از شمال‌شرقی می‌وزد. امتداد و سرعت باد را معلوم کنید.

۱۴ . فاصله دو بندر رودخانه‌ای ۱۰۰ کیلومتر است. ناوچه‌ای این فاصله را در جهت جریان رودخانه در مدت ۴ ساعت می‌پیماید ولی در خلاف جهت جریان رودخانه در مدت ۱۰ ساعت طی می‌کند. سرعت v_1 آب را تعیین کنید.

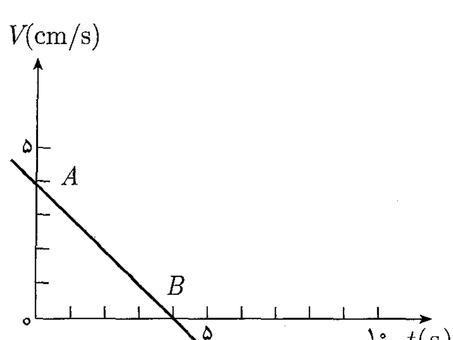
۱۵ . مسافر قطاری که با سرعت $۳۶\mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند، قطار دیگری که طول آن ۶۰۰ متر است و در همان جهت قطاری که مسافر سوار شده، در حرکت است را نگاه می‌کند. قطار دوم در مدت ۶۰ ثانیه از جلوی مسافر می‌گذرد. (الف) سرعت قطار دوم چقدر است؟ (ب) عبور قطار اول از مقابل مسافر قطار دوم چند ثانیه طول می‌کشد؟ طول قطار اول ۹۰۰ متر است. (پ) اگر دو قطار در خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند، هر مسافر قطار دیگر را چند ثانیه خواهد دید؟

۱۶ . دو قطار به فاصله‌ی زمانی ۱۰ دقیقه و با سرعت $v = ۳۰\mathrm{km/h}$ مسکو را به قصد پوشینکو ترک می‌کنند. سرعت قطار دیگری که از پوشینکو عازم مسکو است (u) و به فاصله‌ی زمانی $\tau = ۴$ دقیقه به این دو قطار می‌رسد چقدر است؟

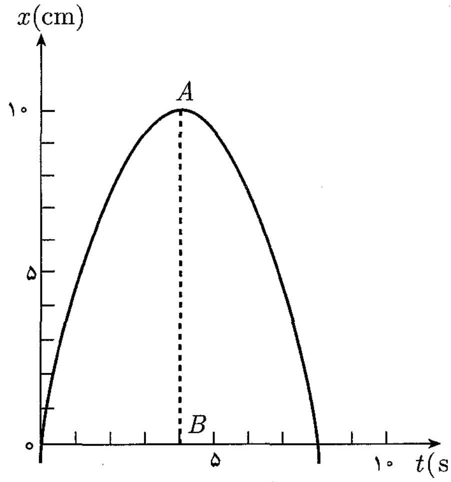
۱۷ . شخصی که با سرعت v، ثابت از نظر مقدار و جهت، در حال رفتن است از زیر فانوسی که در ارتفاع H از سطح زمین آویخته شده است، می‌گذرد. در صورتی که بلندی قدش h باشد، سرعت حرکت لبه‌ی سایه سر شخص روی زمین را پیدا کنید.

۱۸ . در جاده‌ی خشک، شتاب کند شونده‌ی اتومبیلی $۶/۲۸\mathrm{m/s^2}$ و در جاده‌ی خیس، شتاب کننده شونده‌ی آن $۳/۲\mathrm{m/s^2}$ است. میانگین زمان واکنش راننده $۰/۷۵\mathrm{s}$ است. راننده در لحظه‌ی $t = ۰$ مانعی را در جاده می‌بیند. در هر یک از حالات زیر، اتومبیل قبل از توقف چه مسافتی را می‌پیماید؟ (الف) سرعتش در جاده خشک $۴۰\mathrm{mi/h}$ است. (ب) سرعتش در جاده‌ی خیس $۴۰\mathrm{mi/h}$ است.

۱۹ . شکل‌های (۱ـ۶۸) و (۱ـ۶۹) سرعت جسم و تغییر مختص آن (سهمی) را نسبت به زمان نشان می‌دهند. مبدأ مقایسه‌ی زمان روی هر دو نمودار یکی است. آیا حرکت‌های نشان داده شده در این دو نمودار یکی هستند؟



شکل ۱-۶۸



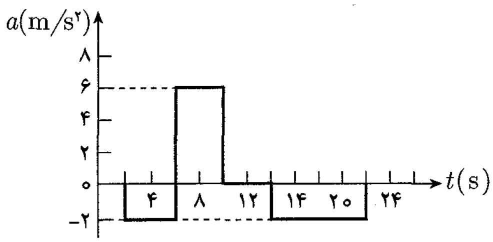
شکل ۱-۶۹

۲۰ . جسمی از رأس برجی سقوط آزاد می‌کند، پس از آنکه جسم اول l متر سقوط کرد، جسم دوم که h متر پایین‌تر از رأس برج بوده است، سقوط می‌کند. ثابت کنید اگر ارتفاط برج $H = \frac{(l+h)^۲}{۴l}$ باشد، دو جسم در زمان واحدی به زمین خواهند رسید.

۲۱ . دو وسیله‌ی نقلیه‌ی موتوری هم‌زمان نقطه‌ی A را ترک می‌کنند و پس از زمان $t_۰ = ۲\text{h}$ به نقطه‌ی B می‌رسند. وسیله‌ی نخست نصف مسافت را با سرعت $v_۱ = ۳۰\text{km/h}$ و نصف دیگر را با سرعت $v_۲ = ۴۵\text{km/h}$ طی می‌کند. وسیله‌ی دوم تمام مسیر را با شتاب ثابتی می‌پیماید. در چه لحظه‌ای از زمان سرعت دو وسیله یکسان است؟ آیا در این مسیر یکی از دیگری جلو می‌زند؟

۲۲ . موتور سیکلتی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب ثابت $۴/۲\text{m/s}^۲$ از حال سکون به راه می‌افتد. در این لحظه، اتومبیلی با سرعت ثابت ۷۲km/h از موتور سیکلت جلو می‌افتد. موتور سیکلت T ثانیه با شتاب ثابت حرکت می‌کند و سپس با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. ۴۲s پس از سبز شدن چراغ راهنما موتور سیکلت به اتومبیل می‌رسد. سرعت موتور سیکلت را در این لحظه به‌دست آورید. موتور سیکلت چه مسافتی را طی کرده است؟

۲۳ . در راستای محور xها نمودار شتاب ـ زمان جسمی به صورت زیر است. فرض کنید در لحظه‌ی $t = ۰$، $v = ۰$ و $x = ۰$ است. نمودار سرعت ـ زمان جسم را رسم کنید.



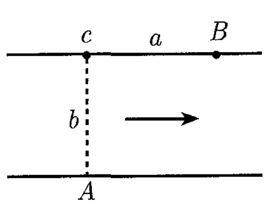
شکل ۱-۷۰

۲۴ . قطار مسافری با سرعت ۲۸m/s حرکت می‌کند. راننده، قطار باری را روی همان ریل در جلوی خود می‌بیند. در این لحظه، نوک قطار مسافری ۳۵۰m از آخرین واگن قطار باری عقب‌تر است و قطار باری با سرعت ۶m/s در همان جهت قطار مسافری حرکت می‌کند. حداکثر شتاب کنده شونده‌ی ترمز قطار مسافری $-۰/۷۱\text{m/s}^۲$ است. اگر زمان واکنش راننده (الف) $۰/۴\text{s}$ و (ب) $۰/۹\text{s}$ باشد، قطارها به هم برخورد می‌کنند؟ مکان تصادف را نسبت به مکانی به‌دست آورید که راننده اولین بار، قطار باری را دیده است. در لحظه‌ی تصادف، سرعت نسبی قطارها را به‌دست آورید.

حرکت در دو بعد

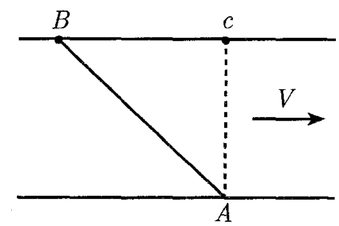
۲۵ . شخصی در فاصله‌ی $h = ۵۰\text{m}$ از جاده مستقیمی ایستاده است. اتومبیلی در جاده با سرعت $v_۱ = ۱۰\text{m/s}$ نزدیک می‌شود. فاصله اتومبیل از او در راستای جاده ۲۰۰ متر است. (الف) این شخص با سرعت ۳m/s باید به چه سمتی بدود تا به اتومبیل برسد. (بازه‌ای برای α تعیین کنید) (ب) با چه سرعت حداقلی بدود تا به ماشین برسد.

۲۶ . مردی با یک قایق پارویی باید از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B واقع در ساحل مقابل رودخانه‌ای برود (شکل ۱ـ۷۱). فاصله‌ی $Bc = a$ و پهنای $Ac = b$ است. مینیمم سرعت قایق نسبت به آب u چه اندازه باید باشد تا به نقطه B برسد؟ سرعت جریان آب برابر با $v_۰$ است.



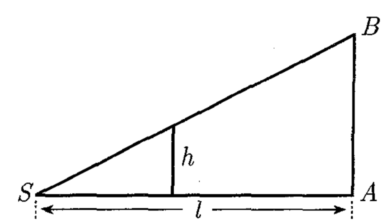
شکل ۱-۷۱

۲۷ . شخصی که باید با قایق از نقطه‌ی A در ساحل یک رودخانه به نقطه‌ی B واقع در ساحل مقابل برود در امتداد خط راست AB در حرکت است (شکل ۱ـ۷۲). پهنای رودخانه $AC = ۱\mathrm{km}$ و مسافت $BC = ۲\mathrm{km}$ است. حداکثر سرعت قایق نسبت به آب $u = ۵\mathrm{km/h}$ و سرعت جریان آب $v = ۲\mathrm{km/h}$ است. آیا شخص می‌تواند فاصله‌ی AB را در مدت ۳۰ دقیقه طی کند؟



شکل ۱-۷۲

۲۸ . چشمه‌ی نقطه‌ای نور s به فاصله‌ی l از پرده‌ی قائم AB قرار دارد. یک جسم کدر به ارتفاع h با سرعت ثابت v در امتداد خط راست SA از منبع به طرف پرده انتقال می‌یابد. معین کنید لبه‌ی بالایی سایه‌ی شئ با چه سرعت لحظه‌ای در طول پرده حرکت می‌کند؟ (شکل ۱ـ۷۳)

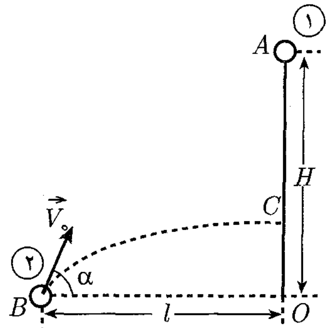


شکل ۱-۷۳

۲۹ . ارتفاع سالن ورزشی ۸ متر است. در این سالن توپی را با سرعت اولیه‌ی $v_۰ = ۲۰\mathrm{m/s}$ با زاویه‌ی α نسبت به کف سالن پرتاب می‌کنیم، طوری که به سقف اصابت نمی‌کند. اگر مقاومت هوا را ناچیز فرض کنیم، حداکثر برد جسم و زاویه‌ی α را معلوم کنید. نقطه‌ی پرتاب را تقریباً کف سالن فرض کنید.

۳۰ . دو وسیله‌ی نقلیه‌ی موتوری با سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$ در طول دو بزرگراه که با هم زاویه‌ی α می‌سازند، حرکت می‌کنند. اندازه و جهت سرعت هر یک را نسبت به دیگری پیدا کنید. چه مدت پس از رسیدن به تقاطع، فاصله‌ی بین آنها برابر با s خواهد بود؟

۳۱ . جسمی از نقطه‌ی A سقوط آزاد می‌کند، در همان زمان جسم دیگری را از نقطه‌ی B (شکل ۱ـ۷۴) با سرعت اولیه‌ی $v_۰$ و تحت زاویه‌ی α با افق پرتاب می‌کنند. هر دو جسم در فضا با هم برخورد می‌کنند. تحقیق کنید که زاویه‌ی α مستقل از سرعت اولیه‌ی $v_۰$ است و نیز مقدار α را برای حالت $\frac{H}{l} = \sqrt{۳}$ به‌دست آورید. مقاومت هوا را به حساب نیاورید.



شکل ۱-۷۴

۳۲ . برای یک هدف قائم که به فاصله‌ی ۵۰ متر قرار دارد، از یک تفنگ که افقی قرار دارد دو تیر، یکی با سرعت اولیه‌ی $v_{۰۱} = -۳۲۰\mathrm{m/s}$ و دیگری با سرعت اولیه‌ی $v_{۰۲} = ۳۵۰\mathrm{m/s}$ پرتاب شده است. فاصله‌ی نقاط اصابت گلوله‌ها را در نشانه معلوم کنید.

۳۳ . از دو نقطه بر روی یک امتداد قائم واقع در کنار رودخانه‌ای در یک زمان، دو جسم در امتداد افق پرتاب می‌شوند. سرعت اولیه‌ی آنها $v_۱ = ۵\mathrm{m/s}$ و $v_۲ = ۷/۵\mathrm{m/s}$ است. هر دو جسم در یک زمان به آب می‌افتند. برد اولی $x_۱ = ۱۰\mathrm{m}$ است.

الف) زمان پرواز جسم‌ها را معلوم کنید. ب) برد جسم دوم را معلوم کنید. پ) ارتفاع محل پرتاب آنها را از سطح آب معلوم کنید.

۳۴ . فوتبالیستی توپی را می‌زند. توپ با سرعت $v = ۱۶\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند، به میله دروازه برخورد نموده و برمی‌گردد. فاصله‌ی میله از فوتبالیست $l = ۵\mathrm{m}$ است. موقع برگشت حداکثر ارتفاع مسیر، درست در محل ایستادن فوتبالیست واقع می‌شود. با توجه به اینکه سرعت برگشت از میله با سرعت برخورد و همچنین زاویه‌ی برگشت از میله نسبت به افق با زاویه‌ی برخورد با آن مساوی است، زاویه‌ی سرعت اولیه‌ی توپ را با افق به‌دست آورید.

۳۵ . خمپاره‌اندازی به هدفی در فاصله‌ی ۴/۵۴ کیلومتری، شلیک می‌کند که در همان ارتفاع خمپاره‌انداز قرار دارد. خمپاره‌انداز

متوجه می‌شود که خمپاره ۲۷٫۵s پس از شلیک به هدف می‌خورد. زاویه‌ی لوله‌ی خمپاره‌انداز و بردار سرعت خمپاره را هنگام شلیک، نسبت به سطح افق به‌دست آورید.

۳۶ . جسمی از بالای سطح شیبداری با شیب °۲۲ با سرعت ۵۲m/s به صورت افقی پرتاب می‌شود. جسم در کجا به زمین می‌خورد.

۳۷ . هواپیمایی که تحت زاویه‌ی °۵۳ نسبت به خط قائم در حال شیرجه رفتن به پایین است، پرتابه‌ای را از ارتفاع ۷۳۰ متری رها می‌کند. پرتابه ۵٫۰۰ ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌خورد.

الف) تندی هواپیما چقدر بوده است؟

ب) در این مدت پرتابه در راستای افقی چه مسافتی پیموده است؟

پ) مؤلفه‌ی افقی و قائم سرعت پرتابه درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

۳۸ . سنجابی روی یک تیر تلفن به ارتفاع ۱۵m نشسته است. در فاصله‌ی ۲۰ متری، کمان‌داری سنجاب را نشانه می‌گیرد. کمان‌دار در ارتفاع ۱ متری بالای سطح زمین است. اگر سنجاب کمان‌دار را ببیند و در لحظه‌ی رها شدن تیر از کمان، بپرد،

الف) کمان‌دار در چه جهتی نشانه‌گیری کند تا سنجاب را بزند؟

ب) اگر سرعت اولیه‌ی تیر ۲۸m/s باشد، آیا تیر قبل از رسیدن سنجاب به زمین به آن برخورد می‌کند؟

پ) در چه فاصله‌ای از سطح زمین، تیر به سنجاب برخورد می‌کند؟

۳۹ . قایق A در ساعت ۸ صبح از بندر P با سرعت ۱۸km/h به طرف جنوب حرکت می‌کند. هم‌زمان قایق B از بندر Q در ۷۵ کیلومتری جنوب‌غربی بندر P با سرعت ۲۵km/h به راه می‌افتد.

الف) قایق B در چه جهتی حرکت کند تا به قایق A برسد؟

ب) این دو قایق در چه زمانی به هم می‌رسند؟

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱

حرکت روی خط راست (حرکت یک‌بعدی)

۱. همان‌طور که می‌دانید، مسافت برابر است با سرعت ضرب در زمان:

$$x = vt \ , \ v = \frac{x}{t} \qquad (۱)$$

برای اینکه بتوانیم مسافت کل طی شده را حساب کنیم، حرکت دوچرخه‌سوار را به سه قسمت با سرعت مساوی تقسیم می‌کنیم.

در قسمت اول، مسافت طی شده ۵ کیلومتر است و بنابراین نیازی به استفاده از سرعت نداریم، پس $x_۱ = ۵\text{km}$

در قسمت دوم، مسافت طی شده در هر ساعت، ۴ کیلومتر است. در نتیجه سرعت دوچرخه‌سوار در این قسمت ۴km/h است. بنابراین:

$$x = vt \Rightarrow x = ۴ \times ۳ \Rightarrow x_۲ = ۱۲\text{km}$$

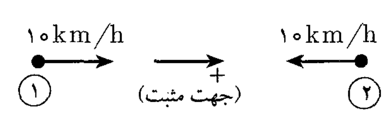
در قسمت آخر، در هر ساعت، ۷ کیلومتر طی می‌شود. در نتیجه سرعت دوچرخه‌سوار ۷km/h است. در نتیجه:

$$x = vt \Rightarrow x = ۷ \times ۲ \Rightarrow x_۳ = ۱۴\text{km}$$

بنابراین مجموع مسافت طی شده عبارتست از

$$x_{\text{کل}} = x_۱ + x_۲ + x_۳ \Rightarrow x_{\text{کل}} = ۵ + ۱۲ + ۱۴ \Rightarrow x_{\text{کل}} = ۳۱\text{km}$$

۲. ساده‌ترین راه‌حل این مسأله، منظورکردن زمان حرکت است. در اینگونه مسائل بعضی اوقات بهتر است که پس از محاسبه‌ی سرعت نسبی دو متحرک، یکی را ساکن و دیگری را با سرعتی برابر با سرعت نسبی فرض کنیم و سپس به بررسی مسأله بپردازیم. در اینجا، اندازه‌ی سرعت هر کدام از دوچرخه‌سوارها ۱۰km/h است.



شکل ۱-۷۵

بنابر بر شکل فوق داریم

$$v_۱ = ۱۰\text{km/h} \ , \ v_۲ = -۱۰\text{km/h}$$

سرعت نسبی متحرک‌های (۱) و (۲) برابر تفاضل سرعت آن دو است

$$v_{۲۱} = v_۱ - v_۲ \Rightarrow v_{۲۱} = ۱۰ - (-۱۰) \Rightarrow v_{۲۱} = ۲۰\text{km/h}$$

که $v_{۲۱}$ به معنی سرعت متحرک (۲) نسبت به متحرک (۱) است. حال فرض می‌کنیم که متحرک (۲) ایستاده است و متحرک (۱) با سرعت ۲۰km/h به سمت آن حرکت می‌کند.

همان‌طور که در صورت سؤال ذکر شده، فاصله‌ی دو دوچرخه‌سوار در این لحظه ۲۰km است. در نتیجه

$$x = vt \Rightarrow ۲۰ = ۲۰t \Rightarrow t = ۱\text{h}$$

بنابراین ۱ ساعت طول می‌کشد تا دوچرخه‌سوارها به یکدیگر برسند. حال با توجه به اینکه سرعت زنبور ۲۵km/h است، داریم

$$x = vt \Rightarrow x = ۲۵(۱) \Rightarrow x = ۲۵\text{km}$$

توجه کنید که برای حل مسأله و یافتن مسافت طی شده توسط زنبور، سرعت نسبی دوچرخه‌سوارها اهمیت دارند، به صورتی که ممکن است با تغییر بسیار کمی در مقدار سرعت و تغییر جهت آن، مسافت طی شده توسط زنبور عسل به میزان نامحدودی زیاد شود. (چگونه؟)

۳. همان‌طور که می‌دانید مساحت زیر منحنی سرعت بر حسب زمان، جابجایی جسم متحرک را نشان می‌دهد. حال اگر تمام منحنی بالای محور زمان باشد، یعنی سرعت متحرک تغییر علامت ندهد، جابه‌جایی متحرک همان مسافت طی شده توسط آن است.

شروع حرکت این متحرک در زمان صفر و پایان حرکت آن در پایان ثانیه‌ی پنجم حرکت است. حال با محاسبه‌ی مساحت زیرمنحنی سرعت بر حسب زمان که در شکل (۱ـ۶۵) نشان داده شده است، مسافت طی شده توسط متحرک را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
&t: ۰\text{s} \to ۱\text{s} \quad x = vt \Rightarrow x_۱ = ۱۰(۱ - ۰) \Rightarrow x_۱ = ۱۰\text{km}\\
&t: ۱\text{s} \to ۳\text{s} \quad x = vt \Rightarrow x_۲ = ۲۰(۳ - ۱) \Rightarrow x_۲ = ۴۰\text{km}\\
&t: ۳\text{s} \to ۴\text{s} \quad x = vt \Rightarrow x_۳ = ۵۰(۴ - ۳) \Rightarrow x_۳ = ۵۰\text{km}\\
&t: ۴\text{s} \to ۵\text{s} \quad x = vt \Rightarrow x_۴ = ۱۰(۵ - ۴) \Rightarrow x_۴ = ۱۰\text{km}
\end{aligned}$$

برای راحت‌تر شدن محاسبات، زمان حرکت را به بازه‌هایی تقسیم کرده‌ایم که سرعت متحرک در آنها ثابت است. حال با جمع کردن مسافت‌های طی شده در این بازه‌های زمانی، کل مسافت طی شده توسط متحرک را به‌دست می‌آوریم.

$$x_{\text{کل}} = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ \Rightarrow x_{\text{کل}} = ۱۰ + ۴۰ + ۵۰ + ۱۰ \Rightarrow x_{\text{کل}} = ۱۱۰\text{km}$$

۴. اکثر دانش‌آموزان موقع حل این مسأله فکر می‌کنند که سرعت متوسط اتومبیل‌ها $v_m = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}$ خواهد بود، در صورتی که چنین نیست. موقعی سرعت متوسط با این مقدار مساوی می‌شود که زمان حرکت متحرک با سرعت $C_۱$ برابر زمان حرکت متحرک با سرعت $v_۲$ باشد. پس بهتر است که سرعت متوسط را همیشه از نسبت مسافت طی شده به زمان حرکت، حساب کنیم.

بررسی حرکت اتومبیل اول:

ابتدا با استفاده از معادله‌ی سرعت، زمان لازم برای نیمه‌ی اول و نیمه‌ی دوم راه را می‌یابیم.

$$t = t_۱ + t_۲$$

$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow 0{,}5x = v_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{0{,}5x}{v_1}$$
$$x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow 0{,}5x = v_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{0{,}5x}{v_2}$$

که x کل مسافت طی شده توسط جسم است. در نتیجه کل زمان حرکت برابر است با

$$t = \frac{0{,}5x}{v_1} + \frac{0{,}5x}{v_2}$$

سرعت متوسط برابر با کل مسافت طی شده به زمان مورد نظر است. بنابراین

$$v_{m_1} = \frac{x}{t} \Rightarrow v_{m_1} = \frac{x}{\frac{0{,}5x}{v_1} + \frac{0{,}5x}{v_2}} \Rightarrow v_{m_1} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

حال با جایگذاری v_1 و v_2 در عبارت به‌دست آمده برای v_{m_1}، مقدار v_{m_1} را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{m_1} = \frac{2(30)(50)}{30 + 50} \Rightarrow v_{m_1} = 37{,}5\mathrm{km/h}$$

بررسی حرکت اتومبیل دوم:

ابتدا با استفاده از معادله‌ی سرعت، مسافت‌های طی شده در نیمه‌ی اول حرکت و نیمه‌ی دوم حرکت را می‌یابیم

$$x = x_1 + x_2$$
$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow x_1 = v_1(0{,}5t) \Rightarrow x_1 = 0{,}5v_1 t$$
$$x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow x_2 = v_2(0{,}5t) \Rightarrow x_2 = 0{,}5v_2 t$$

که t کل زمان حرکت جسم است. در نتیجه کل مسافت طی شده عبارتست از

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 0{,}5v_1 t + 0{,}5v_2 t$$

بنابراین

$$v_{m_2} = \frac{x}{t} \Rightarrow v_{m_2} = \frac{0{,}5v_1 t + 0{,}5v_2 t}{t} \Rightarrow v_{m_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

حال مقدار v_{m_2} را به‌دست می‌آوریم

$$v_{m_2} = \frac{30 + 50}{2} \Rightarrow v_{m_2} = 40\mathrm{km/h}$$

۵. همان‌طور که به نظر می‌رسد، باید با استفاده از سرعت نسبی دو جسم، در دو حالت ذکر شده در صورت مسأله، به بررسی آن بپردازیم. وقتی که دو جسم به سمت هم حرکت می‌کنند، هر کدام احساس می‌کند که دیگری با سرعتی برابر با مجموع سرعتشان به سوی آن می‌آید، در

نتیجه در این حالت، سرعت نسبی آنها برابر با مجموع سرعت آنهاست. (شکل ۱ـ۷۶ الف) پس

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow (v_۱ + v_۲) = \frac{x_۱}{t_۱}$$

با توجه به اینکه در این حالت، سرعت آنها در هر ۱۰ ثانیه، ۱۶ متر کم می‌شود، داریم

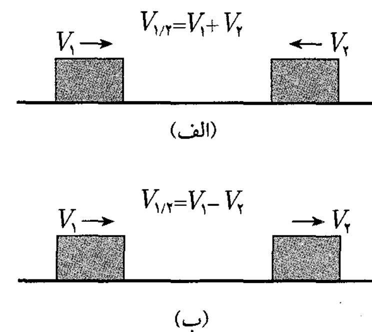
$$v_۱ + v_۲ = \frac{۱۶}{۱۰} \Rightarrow v_۱ + v_۲ = ۱/۶\text{m/s} \qquad (۱)$$

موقعی که دو جسم در یک جهت حرکت می‌کنند، سرعت نسبی آنها برابر تفاضل سرعت آنهاست. (شکل ۱ـ۷۶ ب) پس

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow v_۱ - v_۲ = \frac{x_۲}{t_۲}$$

با توجه به اینکه در این حالت، سرعت آنها در هر ۵ ثانیه، ۳ متر کم می‌شود، داریم

$$v_۱ - v_۲ = \frac{۳}{۵} \Rightarrow v_۱ - v_۲ = ۰/۶\text{m/s} \qquad (۲)$$



شکل ۱-۷۶ اهمیت جهت حرکت در سرعت نسبیِ اجسام

بر اساس معادلات (۱) و (۲)، $v_۱$ و $v_۲$ عبارتند از:

$$v_۱ = ۱/۱\text{m/s} \qquad v_۲ = ۰/۵\text{m/s}$$

۶. همان‌طور که از ظاهر معادله مشخص است، این معادله مربوط به حرکت متشابه‌التغییر تند شونده (شتاب ثابت) است. حال با دو راه به حل این مسأله می‌پردازیم.

راه اول: می‌دانیم که شکل کلی معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت به صورت کلی $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$ است. حال با معادل‌سازی (برابر قرار دادن ضرایب جمله‌ها) این معادله و معادله‌ی داده شده در صورت سؤال، می‌یابیم.

$$x_۰ = ۱۱\text{cm} \qquad v_۰ = ۳۵\text{cm/s} \qquad a = ۸۲\text{cm/s}^۲$$

در نتیجه، شتاب این حرکت $۸۲\text{cm/s}^۲$ است. حال با استفاده از معادله‌ی سرعت در یک حرکت شتاب ثابت، سرعت نقطه‌ی مورد نظر در زمان دلخواه t را می‌یابیم.

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۸۲t + ۳۵\text{cm/s}$$

راه دوم: ابتدا با مشتق‌گیری از معادله‌ی مکان ـ زمان، سرعت نقطه بر حسب زمان را می‌یابیم.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(۴۱t^۲ + ۳۵t + ۱۱) \Rightarrow V = ۸۲t + ۳۵\text{cm/s}$$

حال با مشتق‌گیری از معادله‌ی سرعت ـ زمان، شتاب نقطه به‌دست می‌آید.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}(۸۲t + ۳۵) \Rightarrow a = ۸۲\text{cm/s}^۲$$

۷. در ابتدا باید دقت کنید که برای پاسخگویی به این مسأله، شتاب کتاب نسبت به کف آسانسور به جهت شتاب آسانسور بستگی دارد، نه به جهت حرکت آن (جهت سرعت آسانسور). شتاب کتاب نسبت به کف آسانسور برابر تفاضل شتاب مطلق کتاب و آسانسور است، یعنی

$$a = a_b - a_e$$

که a_b و a_e به ترتیب نشان دهنده‌ی شتاب مطلق کتاب و آسانسور است.

شتاب مطلق کتاب پس از رها شدن از دست شخص، برابر شتاب گرانش است و جهت آن به سمت پایین می‌باشد، یعنی

$$a_b = -g$$

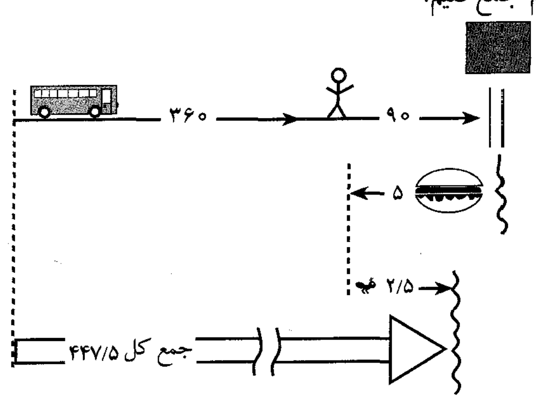
اگر شتاب آسانسور در جهت بالا باشد، داریم

$$a = a_b - a_e \;\Rightarrow\; a = (-g) - (a) \;\Rightarrow\; a = -(g + a)$$

در حالی که اگر شتاب آسانسور در جهت پایین باشد، می‌یابیم

$$a = a_b - a_e \;\Rightarrow\; a = (-g) - (-a) \;\Rightarrow\; a = -(g - a)$$

۸. همان‌طور که مشهود است، برای پاسخگویی به این سؤال باید از مفهوم سرعت نسبی استفاده کنیم. ابتدا جهت مثبت را به سمت میدان فردوسی در نظر می‌گیریم تا بتوانیم سرعت‌ها را به صورت جبری با هم جمع کنیم.



شکل ۱-۷۷

در شکل فوق به طور تصویری مسأله را حل کرده‌ایم ولی بهتر است روابط جبری آن را نیز بنویسیم.

برای بررسی روابط جبری، بهتر است از خود مورچه شروع کنیم. سرعت مورچه $۲/۵\mathrm{cm/s}$ (نسبت به ساندویچ) به سمت میدان فردوسی است. بنابراین

$$v_{۱۲} = v_۱ - v_۲ \qquad v_{۱۲} = +۲/۵\mathrm{cm/s}$$

سرعت ساندویچ نسبت به مسافر در حال حرکت $۵\mathrm{cm/s}$ در جهت منفی است. در نتیجه

$$v_{۲۳} = v_۲ - v_۳ \qquad v_{۲۳} = -۵\mathrm{cm/s}$$

سرعت مسافر نسبت به اتوبوس در حال حرکت ۹۰cm/s به سمت میدان فردوسی (جهت مثبت) است. بنابراین

$$v_{۳۴} = v_۳ - v_۴ \qquad v_{۳۴} = +۹۰\text{cm/s}$$

اتوبوس نیز با سرعت ۳۶۰cm/s به سمت میدان فردوسی (جهت مثبت) حرکت می‌کند. پس

$$v_۴ = ۳۶۰\text{cm/s}$$

که بر اساس روابط بالا، داریم

$$\begin{aligned} v_۱ &= (v_۱ - v_۲) + (v_۲ - v_۳) + (v_۳ - v_۴) + v_۴ \\ &\Rightarrow v_۱ = v_{۱,۲} + v_{۲,۳} + v_{۳,۴} + v_۴ \\ &\Rightarrow v_۱ = ۲/۵ - ۵ + ۹۰ + ۳۶۰ \\ &\Rightarrow v_۱ = ۴۴۷/۵\text{cm/s} \end{aligned}$$

۹. مسافت طی شده توسط وسیله‌ی نقلیه به سه قسمت مساوی با سرعت‌های ثابت تقسیم شده است. در قسمت اول یک سوم مسافت کل (S) با سرعت $v_۱ = ۱۰\text{km/h}$ طی می‌شود، پس

$$x_۱ = v_۱ t_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳}S = ۱۰ t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۳۰}\text{s}$$

در قسمت دوم، یک سوم بعدی مسیر را با سرعت $v_۲ = ۲۰\text{km/h}$ می‌پیماید. بنابراین

$$x_۲ = v_۲ t_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۳}S = ۲۰ t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{۱}{۶۰}\text{s}$$

در قسمت سوم، یک سوم انتهای مسیر با سرعت $v_۳ = ۶۰\text{km/h}$ طی می‌شود. در نتیجه

$$x_۳ = v_۳ t_۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳}S = ۶۰ t_۳ \Rightarrow t_۳ = \frac{۱}{۱۸۰}\text{s}$$

حال می‌توانیم سرعت میانگین متحرک را بیابیم.

$$\begin{aligned} v_m = \frac{S}{\Delta t} &\Rightarrow v_m = \frac{S}{t_۱ + t_۲ + t_۳} \\ &\Rightarrow v_m = \frac{S}{\frac{۱}{۳۰}\text{s} + \frac{۱}{۶۰}\text{s} + \frac{۱}{۱۸۰}\text{s}} \Rightarrow v_m = ۱۸\text{km/h} \end{aligned}$$

۱۰. برای محاسبه‌ی سرعت میانگین ذره، باید جابه‌جایی در طی زمان مورد نظر را بر زمان سپری شده تقسیم کنیم. در نمودار سرعت ـ زمان مساحت زیر منحنی (با در نظر گرفتن علامت جبری) بیان کننده‌ی جابه‌جایی ذره است. در نتیجه با محاسبه‌ی مساحت زیر منحنی شکل صورت مسأله، با استفاده از خانه‌های مربعی نشان داده شده، داریم

$$t : ۰\text{s} \rightarrow ۵\text{s} \quad \Delta S = ۱۰/۵\text{cm}$$

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{۱۰/۵}{۵} \Rightarrow v_m = ۲/۱\text{cm/s}$$

$$t: \text{۰s} \to \text{۱۰s} \quad \Delta S = \text{۲۵cm}$$
$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow v_m = ۲/۵\text{cm/s}$$

برای محاسبه‌ی شتاب میانگین، کافی است با خواندن مقادیر سرعت در ابتدا و انتهای بازه‌ی زمانی مورد نظر، تغییر سرعت را محاسبه نموده و با تقسیم این مقدار بر زمان سپری شده، شتاب متوسط را به‌دست آوریم. بنابراین

$$t: \text{۰s} \to \text{۵s} \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{v_۵ - v_۰}{۵ - ۰}$$
$$\Rightarrow a_m = \frac{۴ - ۰}{۵} \Rightarrow a_m = ۰/۸\text{cm/s}^۲$$
$$t: \text{۰s} \to \text{۱۰s} \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{v_{۱۰} - v_۰}{۱۰ - ۰}$$
$$\Rightarrow a_m = \frac{۲ - ۰}{۱۰ - ۰} \Rightarrow a_m = ۰/۲\text{cm/s}^۲$$

۱۱. برای یافتن شتاب و سرعت اولیه از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲ax \qquad (۱)$$
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v - v_۰}{t} \qquad (۲)$$

حال با جایگذاری مقدار a از عبارت (۲) در رابطه‌ی (۱)، داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲\left(\frac{v - v_۰}{t}\right)x \Rightarrow v + v_۰ = ۲\frac{x}{t}$$
$$\Rightarrow v_۰ = \frac{۲x}{t} - v \Rightarrow v_۰ = \frac{۲(۱۸۰)}{۸} - ۵$$
$$\Rightarrow v_۰ = ۴۰\text{cm/s}$$

بنابراین، می‌توانیم با جایگذاری مقدار $v_۰$ در رابطه‌ی (۲)، a را به‌دست آوریم.

$$a = \frac{۵ - ۴۰}{۸} \Rightarrow a = -۴/۳۷\text{cm/s}^۲$$

می‌توانستیم از رابطه‌ی $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$ نیز برای حل مسأله استفاده کنیم که به عهده‌ی خودتان گذاشته می‌شود.

۱۲. برای حل مسأله توجه داریم که حرکت جسم به بالا حرکت مرکبی است که از حرکت یکنواخت $s_۱ = v_۰t$ به طرف بالا و حرکت سقوط آزاد $s_۲ = \frac{۱}{۲}gt^۲$ به طرف پایین تشکیل شده است، که بر این اساس مسافتی که جسم در زمان t در جهت دور شدن از زمین می‌پیماید را می‌توانیم از معادله‌ی شتاب ثابت زیر به‌دست آوریم:

$$x = s_۱ - s_۲ = v_۰t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

چون متحرک اول از ارتفاع H به طرف بالا پرتاب شده است، فاصله‌ی آن از زمین پس از سپری شدن زمان t، از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$x_۱ = v_{\circ} t - \frac{۱}{۲} g t^۲ + H$$

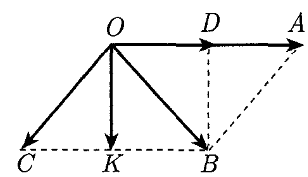
در زمان t که این دو جسم به هم می‌رسد، $x_۱$ و $x_۲$ باید برابر باشند. بنابراین

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow v_{\circ} t - \frac{۱}{۲} g t^۲ + H = v'_{\circ} t - \frac{۱}{۲} g t^۲$$
$$\Rightarrow v_{\circ} t + H = v'_{\circ} t \Rightarrow t = \frac{H}{v'_{\circ} - v_{\circ}}$$

۱۳. با استفاده از جمع بردارها به بررسی این مسأله می‌پردازیم. متوازی‌الاضلاع سرعت‌ها را به صورت زیر رسم می‌کنیم که در آن $OA = ۵۴\mathrm{km/h} = ۱۵\mathrm{m/s}$ سرعت ثانویه‌ی قطار و OC بردار سرعت باد نسبت به قطار است که مسافر آن را حس می‌کند.

زاویه‌ی OA با سرعت نسبی باد یعنی OC معلوم است. قطر OB از این متوازی‌الاضلاع سرعت مطلق باد است که می‌خواهیم آن را بیابیم.

سپس متوازی‌الاضلاع $OBDK$ را رسم می‌کنیم. OK رو به جنوب است، و OD نصف OA می‌باشد، بنابراین



شکل ۱-۷۸

$$OD = ۲۷\mathrm{km/h} = ۷/۵\mathrm{m/s}$$

مثلث OBA متساوی‌الساقین است، زیرا BD، هم ارتفاع و هم میانه‌ی این مثلث است. حال بنابر قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان مقدار OB را در مثلث OBD به‌دست آورد. پس

$$OB^۲ = OD^۲ + BD^۲ \;,\; OB = v \Rightarrow v^۲ = (۷/۵)^۲ + (۷/۵)^۲$$
$$\Rightarrow v^۲ = ۵۶/۲۵ + ۵۶/۲۵$$
$$\Rightarrow v^۲ = ۱۱۲/۵ \Rightarrow v = ۱۰/۶\mathrm{m/s}$$

در نتیجه مقدار سرعت مطلق باد $v = ۱۰/۶\mathrm{m/s}$ و جهت آن جنوب شرقی است.

۱۴. برای به‌دست آوردن سرعت جریان آب، باید سرعت مطلق کشتی در هر حالت را بیابیم. با استفاده از رابطه‌ی $x = vt$، این مقدار را به‌دست می‌آوریم.

در حالتی که ناوچه در جهت جریان رودخانه حرکت می‌کند، سرعت مطلق آن، مجموع سرعت ناوچه نسبت به آب $(v_۲)$ و سرعت آب است. بنابراین

$$v = v_۱ + v_۲ \;,\; x = vt \Rightarrow ۱۰۰ = (v_۱ + v_۲)(۴)$$
$$\Rightarrow v_۱ + v_۲ = ۲۵ \qquad (۱)$$

موقعی که ناوچه در خلاف جهت جریان آب حرکت می‌کند، سرعت مطلق آن تفاضل سرعت ناوچه نسبت به آب و سرعت آب است. پس

$$v = v_۲ - v_۱ \;,\; x = vt \Rightarrow ۱۰۰ = (v_۲ - v_۱)(۱۰)$$

$$\Rightarrow\ v_۲ - v_۱ = ۱۰ \qquad (۲)$$

حال با تفاضل طرفین روابط (۱) و (۲)، داریم:

$$۲v_۱ = ۱۵ \ \Rightarrow\ v_۱ = ۷/۵\text{km/h}$$

۱۵. الف) برای حل این مسأله نیز باید از مفهوم سرعت نسبی استفاده کنیم. اگر خود را به جای مسافر داخل قطار اول بگذارید، سرعت قطار دوم را برابر تفاضل سرعت مطلق قطار دوم و سرعت خودتان (یعنی سرعت قطار اول) گزارش می‌کنید، که همان سرعت قطار دوم نسبت به قطار اول است.

بنابراین

$$v = v_{۲۱} \ \Rightarrow\ v = v_۲ - v_۱$$

$$v_۱ = ۳۶\text{km/h} \ \Rightarrow\ v_۱ = ۱۰\text{m/s} \ \Rightarrow\ v = v_۲ - ۱۰$$

حال می‌توان فرض کرد که مسافر ساکن است و قطار دوم با سرعت v از مقابل آن عبور می‌کند. این قطار مسافت ۶۰۰m (که برابر طول خودش است) را در مدت ۶۰s طی می‌کند. در نتیجه

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \ \Rightarrow\ v = \frac{۶۰۰}{۶۰} \ \Rightarrow\ v = ۱۰\text{m/s}$$

$$v = v_۲ - ۱۰ \ \Rightarrow\ ۱۰ = v_۲ - ۱۰$$

$$\Rightarrow\ v_۲ = ۲۰\text{m/s} \ \Rightarrow\ v_۲ = ۷۲\text{km/h}$$

ب) این بار فرض می‌کنیم که مسافر قطار دوم ساکن است و قطار اول با سرعت نسبی $v_{۱۲}$ حرکت می‌کند. بنابراین

$$v = v_{۱۲} \ \Rightarrow\ v = v_۱ - v_۲$$

$$v_۱ = ۱۰\text{m/s}\,,\ v_۲ = ۲۰\text{m/s} \ \Rightarrow\ v = -۱۰\text{m/s}$$

باید توجه کنید که چون v منفی است، Δx را نیز باید منفی در نظر بگیریم، زیرا مسافت طی شده در جهت منفی است. بنابراین

$$\Delta x = v\Delta t \ \Rightarrow\ -۹۰۰ = (-۱۰)t \ \Rightarrow\ t = ۹۰\text{s}$$

پ) ابتدا زمانی که مسافر قطار اول، قطار دوم را می‌بیند به‌دست آورده و سپس این زمان را برای مسافر قطار دوم می‌یابیم.

با کمی تأمل متوجه می‌شویم که سرعت نسبی مسافران دو قطار نسبت به یکدیگر مقداری یکسان دارد.

$$|v_{۱۲}| = |v_{۲۱}| = |v_۱ - v_۲| = ۱۰ + ۲۰ \ \Rightarrow\ |v_{۱۲}| = ۳۰\text{m/s}$$

مسافر قطار اول باید مسافتی برابر با طول قطار دوم را طی کند. پس

$$s_۱ = |v_{۱۲}|t_۱ \Rightarrow ۶۰۰ = ۳۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۲۰\text{s}$$

مسافر قطار دوم باید مسافتی برابر با طول قطار اول را طی کند. پس

$$s_۲ = |v_{۱۲}|t_۲ \Rightarrow ۹۰۰ = ۳۰t_۲ \Rightarrow t_۲ = ۳۰\text{s}$$

۱۶. ابتدا لازم است که فاصله‌ی دو قطار را که مقصدشان پوشینکو است، بیابیم. سرعت هر دو قطار ۳۰km/h است و در یک جهت حرکت می‌کنند، در نتیجه فاصله‌ی آنها در طول زمان، زیاد نمی‌شود. فاصله‌ی اولیه‌آنها ناشی از تأخیر در آغاز حرکت یکی از آنها است. پس

$$s = vt \Rightarrow s = ۳۰(\frac{۱}{۶}) \Rightarrow s = ۵\text{km}$$

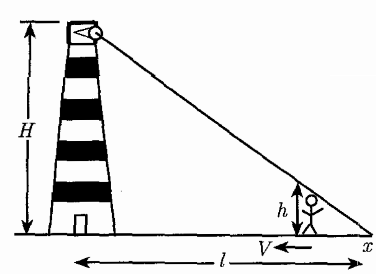
(توجه کنید که ۱۰ دقیقه، معادل $\frac{۱}{۶}$ ساعت است.)
قطار سوم که از پوشینکو عازم مسکو است را در نظر بگیرید. برای حل این قسمت می‌توانیم فرض کنیم که دو قطار دیگر ساکنند و قطار سوم با سرعت نسبی $v_{۳,۱}$ به سمت آنها حرکت می‌کند (چرا؟)، که برابر است با

$$v_{۳۱} = v_۳ - v_۱ \Rightarrow v_{۳۱} = u - (-۳۰) \Rightarrow v_{۳۱} = u + ۳۰$$

بنابراین

$$s = v_{۳۱}t \Rightarrow ۵ = (u + ۳۰)(\frac{۴}{۶۰}) \Rightarrow u = ۴۰\text{km/h}$$

۱۷. شکل (۱ـ۷۹) را که بیانگر صورت مسأله است، در نظر بگیرید:
بنابر شکل (۱ـ۷۹)، $v = -\dot{l}$ است، زیرا با حرکت شخص، فاصله‌ی آن از فانوس دریایی کم می‌شود.
سرعت لبه‌ی سایه برابر تغییر فاصله‌ی $(x + l)$ بر حسب زمان است (یعنی $u = \dot{x} + \dot{l}$).
برای یافتن x، روابط مثلثاتی حاکم بر شکل فوق را می‌نویسیم.



شکل ۱-۷۹

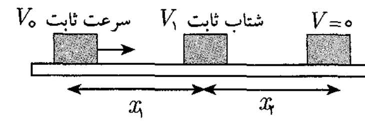
$$\frac{h}{H} = \frac{x}{x + l} \Rightarrow h(x + l) = xH \Rightarrow x = \frac{hl}{H - h}$$

حال با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق، x را می‌یابیم

$$\dot{x} = \frac{h\dot{l}}{H - h} \Rightarrow \dot{x} = \frac{h(-v)}{H - h} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{hv}{H - h}$$

بنابراین

$$u = \dot{l} + \dot{x} \Rightarrow u = -v - \frac{hv}{H - h}$$
$$\Rightarrow |u| = v(\frac{H}{H - h})$$



شکل ۱-۸۰

۱۸. در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل با سرعت ثابت حرکت می‌کند.
الف) حرکت کند شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط جایگذاری می‌شود.

$$v_\circ = ۴\circ \mathrm{mi/h} \Rightarrow v_\circ = ۴\circ \times \frac{۱۶\circ۹}{۳۶\circ\circ} \Rightarrow v_\circ = ۱۷/۹\mathrm{m/s}$$

x_1 (مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت) با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید:

$$x = vt \Rightarrow x_1 = ۱۷/۹ \times \circ/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۱۳/۴\mathrm{m}$$

x_2 مسافت طی شده در حرکت شتابدار با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به‌دست می‌آید:

$$v^2 - v_\circ^2 = 2ax \Rightarrow \circ - (۱۷/۹)^2 = ۲ \times (-۶/۲۸)(x_2)$$
$$\Rightarrow ۳۲\circ/۴۱ = ۱۲/۵۶x_2 \Rightarrow x_2 = ۲۵/۵\mathrm{m}$$

x کل مسافت طی شده است، پس

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۱۳/۴ + ۲۵/۲ \Rightarrow x = ۳۸/۶\mathrm{m}$$

ب) حرکت کنده شونده است و شتاب با علامت منفی در روابط جایگذاری می‌شود.
x_1 (مسافت طی شده در حرکت با سرعت ثابت) با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید:

$$x = vt \Rightarrow x_1 = ۱۷/۹ \times \circ/۷۵ \Rightarrow x_1 = ۱۳/۴\mathrm{m}$$

x_2 (مسافت طی شده در حرکت شتابدار) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان به‌دست می‌آید:

$$v^2 - v_\circ^2 = 2ax \Rightarrow \circ - (۱۷/۹)^2 = ۲(-۳/۲)x_2$$
$$\Rightarrow -۳۲\circ/۴۱ = -۶/۴x_2 \Rightarrow x_2 = ۵\circ/۱\mathrm{m}$$

x کل مسافت طی شده است، پس

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = ۱۳/۴ + ۵\circ/۱ \Rightarrow x = ۶۳/۵\mathrm{m}$$

۱۹. از نمودار سرعت (رجوع کنید به شکل ۱-۶۸) مشخص می‌شود که سرعت اولیه برابر است با $v_\circ = ۴\mathrm{cm/s}$ $(OA = ۴)$ و شتاب $a = -\frac{OA}{OB} = -۱\mathrm{cm/s^2}$ است. سرعت جسم نخست کاهش می‌یابد و در لحظه‌ی $t_1 = ۴\mathrm{s}$ به صفر می‌رسد و سپس از لحاظ مقدار زیاد می‌شود.

نمودار دوم (رجوع کنید به شکل ۱ـ۶۹) نشان دهنده‌ی یک حرکت متشابه‌التغییر است. جسم قبل از توقف مسافتی برابر با $h = ۱۰\,\mathrm{cm}$ را طی می‌کند. بنابر نمودار اول، مسافت طی شده قبل از توقف برابر با مساحت مثلث OAB، یعنی $۸\mathrm{cm}$ است. در نتیجه نمودارها نشان دهنده‌ی حرکت‌های متفاوتی هستند. بر طبق نمودار دوم سرعت اولیه برابر با $v' = \frac{۲h}{t_۱} = ۵\mathrm{cm/s}$ و شتاب برابر با $a' = -\frac{۲h}{t_۱^۲} = -۱{,}۲۵\mathrm{cm/s^۲}$ است، که با مقادیر به‌دست آمده از نمودار اول متفاوتند.

۲۰. اگر جسم اول مسافت l را در زمان $t_۱$ سقوط کرده باشد، می‌توان نوشت:

$$l = \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \;\Rightarrow\; t_۱ = \sqrt{\frac{۲l}{g}}$$

اگر فرض کنید که متحرک دوم در زمان $t_۲$ سقوط کند، برای اینکه دو جسم با هم به زمین برسند، مدت t سقوط متحرک اول چنین خواهد بود

$$t = t_۱ + t_۲ = \sqrt{\frac{۲l}{g}} + t_۲ \qquad (۱)$$

$t_۲$ زمان حرکت جسم دوم بر حسب ارتفاع سقوط $(H-h)$ قابل محاسبه است.

$$H - h = \frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \;\Rightarrow\; t_۲ = \sqrt{\frac{۲(H-h)}{g}} \qquad (۲)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲) در معادله‌ی (۱)، داریم:

$$t = \sqrt{\frac{۲l}{g}} + \sqrt{\frac{۲(H-h)}{g}}$$

حال معادله‌ی سقوط جسم اول را می‌نویسیم:

$$H = \frac{۱}{۲}gt^۲ \;\Rightarrow\; H = \frac{۱}{۲}g\left[\sqrt{\frac{۲l}{g}} + \sqrt{\frac{۲(H-h)}{g}}\right]^۲$$
$$\Rightarrow H = \left(\sqrt{H-h} + \sqrt{l}\right)^۲$$
$$\Rightarrow H = H - h + l + ۲\sqrt{(H-h)l}$$
$$\Rightarrow h - l = ۲\sqrt{l(H-h)}$$
$$\Rightarrow l^۲ + h^۲ - ۲lh = ۴lH - ۴lh$$

بنابراین

$$H = \frac{(l+h)^۲}{۴l}$$

در نتیجه اگر ارتفاع برج $H = \frac{(l+h)^۲}{۴l}$ باشد، دو جسم در زمان واحدی به زمین می‌رسند.

۲۱. مسافت طی شده و زمان طی این مسافت برای هر دو وسیله یکسان است. بنابراین سرعت متوسط آن دو برابر است. ابتدا با استفاده از داده‌های مربوط به وسیله‌ی نخست، سرعت متوسط دو وسیله را می‌یابیم.

زمان لازم برای طی نیمه‌ی اول مسیر را با استفاده از رابطه‌ی سرعت به‌دست می‌آوریم.

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow v_۱ = \frac{\frac{s}{۲}}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{s}{۲v_۱}$$

به همین ترتیب برای نیمه‌ی دوم مسیر داریم

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow v_۲ = \frac{\frac{s}{۲}}{t_۲} \Rightarrow t_۲ = \frac{s}{۲v_۲}$$

بنابراین، سرعت متوسط عبارتست از

$$v_m = \frac{s}{t_۱ + t_۲} \Rightarrow v_m = \frac{s}{\frac{s}{۲v_۱} + \frac{s}{۲v_۲}}$$
$$\Rightarrow v_m = \frac{۲v_۱v_۲}{v_۱ + v_۲} \Rightarrow v_m = ۳۶\mathrm{km/h}$$

در نتیجه فاصله‌ی بین نقاط A و B عبارتست از

$$s = vt \Rightarrow s = v_m t \Rightarrow s = ۳۶(۲) \Rightarrow s = ۷۲\mathrm{km}$$

بنابراین

$$t_۱ = \frac{s}{۲v_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۷۲}{۲(۳۰)} \Rightarrow t_۱ = \frac{۶}{۵}\mathrm{h}$$
$$t_۲ = \frac{s}{۲v_۲} \Rightarrow t_۲ = \frac{۷۲}{۲(۴۵)} \Rightarrow t_۲ = \frac{۴}{۵}\mathrm{h}$$

چون وسیله‌ی دوم، تمام مسیر را با شتاب ثابت طی می‌کند، می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی مسافت در حرکت با شتاب ثابت، شتاب وسیله‌ی دوم را بیابیم

$$s = \frac{۱}{۲}at_۰^۲ \Rightarrow a = \frac{۲s}{t_۰^۲} \Rightarrow a = \frac{۲(۷۲)}{۴} \Rightarrow a = ۳۶\mathrm{km/h^۲}$$

حال لحظاتی راکه سرعت وسیله‌ی دوم به $v_۱ = ۳۰\mathrm{km/h}$ و $v_۲ = ۴۵\mathrm{km/h}$ می‌رسد را به‌دست می‌آوریم.

$$v_۱ = at'_۱ \Rightarrow t'_۱ = \frac{v_۱}{a} \Rightarrow t'_۱ = \frac{۳۰}{۳۶} \Rightarrow t'_۱ = \frac{۵}{۶}\mathrm{h}$$
$$v_۲ = at'_۲ \Rightarrow t'_۲ = \frac{v_۲}{a} \Rightarrow t'_۲ = \frac{۴۵}{۳۶} \Rightarrow t'_۲ = \frac{۵}{۴}\mathrm{h}$$

سرعت متحرک اول نیز در این زمان‌ها برابر با همین مقادیر $(v_۲, v_۱)$ است. در نتیجه در لحظات $t'_۱ = \frac{۵}{۶}\mathrm{h}$ و $t'_۲ = \frac{۵}{۴}\mathrm{h}$ سرعت دو وسیله یکسان است.

حال قسمت دوم مسأله را حل می‌کنیم. در لحظه‌ای که یکی از آنها از دیگری جلو می‌زند، هر دو مسافت یکسانی را پیموده‌اند. در نتیجه معادله‌ی زیر، باید در نیمه‌ی اول مسیر برقرار باشد.

$$t \leq \frac{۶}{۵}\mathrm{h} \ : \ v_۱ t = \frac{at^۲}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \quad \text{در لحظه‌ی شروع که دو وسیله در کنار هم حرکت می‌کنند} & \checkmark \\ t = \frac{۲v_۱}{a} \Rightarrow t = \frac{۲(۳۰)}{۳۶} \Rightarrow t = \frac{۵}{۳}\mathrm{h} & \otimes \end{cases}$$

که نتیجه‌ی دوم با شرط $t < \frac{۶}{۵}\mathrm{h}$ توافق ندارد.

به همین ترتیب، برای نیمه‌ی دوم مسیر نیز داریم

$$\frac{۶}{۵}\mathrm{h} \leq t \leq ۲\mathrm{h}$$

$$v_۱ t' + v_۲(t - t') = \frac{at^۲}{۲} \Rightarrow ۳۰(\frac{۶}{۵}) + ۴۵(t - \frac{۶}{۵}) = \frac{۳۶t^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲\mathrm{h} \quad \text{دو وسیله هم‌زمان به نقطه‌ی } B \text{ می‌رسند} \\ t = \frac{۱}{۲}\mathrm{h} \end{cases}$$

که نتیجه‌ی دوم در این حالت در شرط $t > \frac{۶}{۵}\mathrm{h}$ صدق نمی‌کند. بنابراین هیچ یک از دو وسیله از دیگری جلو نمی‌زند.

۲۲. ابتدا حرکت موتور سیکلت را بررسی می‌کنیم. $x_۱$ جابه‌جایی موتور سیکلت در طی حرکت شتابدار را می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به‌دست آوریم.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \Rightarrow x'_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۴/۲T^۲ \Rightarrow x'_۱ = ۲/۱T^۲$$

سرعت موتور سیکلت در انتهای حرکت شتابدار با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید.

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴/۲T + ۰ \Rightarrow v = ۴/۲T \qquad (۱)$$

t مدت زمان حرکت موتور سیکلت با سرعت ثابت است، پس

$$T + t = ۴۲ \Rightarrow t = ۴۲ - T \qquad (۲)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) جابه‌جایی موتور سیکلت در طی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است.

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x'_۲ = ۴/۲T(۴۲ - T) + ۰ \Rightarrow x'_۲ = ۱۷۶/۴T - ۴/۲T^۲$$

بنابراین کل جابه‌جایی موتور سیکلت $x_۱$، عبارتست از

$$x_۱ = x'_۱ + x'_۲ \Rightarrow x_۱ = ۲/۱t^۲ + ۱۷۶/۴T - ۴/۲T^۲$$

$$\Rightarrow x_۱ = ۱۷۶/۴T - ۲/۱T^۲$$

برای اتومبیل نیز داریم

$$v = ۷۲\text{km/h} \Rightarrow v = ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۰\text{m/s}$$

مکان اتومبیل $x_۲$ با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید.

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x_۲ = ۲۰ \times ۴۲ \Rightarrow x_۲ = ۸۴۰\text{m}$$

زمانی که موتور سیکلت به اتومبیل می‌رسد، مکان هر دو $(x_۲, x_۱)$ با هم یکسان است. پس

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۱۷۶/۴T - ۲/۱T^۲ = ۸۴۰ \Rightarrow -۲/۱T^۲ + ۱۷۶/۴T - ۸۴۰ = ۰$$

$$\Rightarrow T = \frac{-۱۷۶/۴ \pm \sqrt{(۱۷۶/۴)^۲ - ۴(-۲/۱)(-۸۴۰)}}{۲(-۲/۱)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-۱۷۶/۴ \pm ۱۵۵/۱}{-۴/۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = ۵/۱\text{s} \\ T' = ۷۸/۹\text{s} \Rightarrow T' > ۴۲\text{s} \Rightarrow \text{نمی‌تواند جواب مسأله باشد} \end{cases}$$

در نتیجه $T = ۵/۱\text{s}$ جواب مسأله است.

سرعت موتور سیکلت هنگام رسیدن به اتومبیل، با جایگذاری $T = ۵/۱\text{s}$ در رابطه‌ی (۱) به‌دست می‌آید.

$$x_۱ = ۱۷۶/۴T - ۲/۱T^۲ \Rightarrow x_۱ = ۱۷۶/۴(۵/۱) - ۲/۱(۵/۱)^۲ \Rightarrow x_۱ = ۸۴۵\text{m}$$

۲۳. سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان جسم برابر تغییرات سرعت جسم است. پس می‌توان سرعت جسم را در انتهای هر بازه‌ی زمانی به‌دست آورد.

$t:$

$[۰ - ۲]_\text{s} : \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۰$

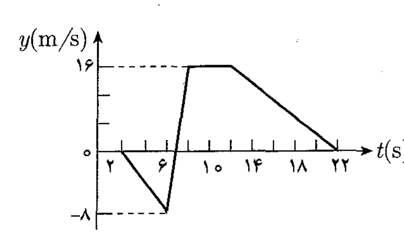
$[۲ - ۶]_\text{s} : \Delta v = -۲ \times ۴ \Rightarrow \Delta v = -۸\text{m/s} \Rightarrow v = -۸\text{m/s}$

$[۶ - ۱۰]_\text{s} : \Delta v = ۴ \times ۶ \Rightarrow \Delta v = ۲۴\text{m/s} \Rightarrow v = ۱۶\text{m/s}$

$[۱۰ - ۱۴]_\text{s} : \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۱۶\text{m/s}$

$[۱۴ - ۲۲]_\text{s} : \Delta v = -۲ \times ۸ \Rightarrow \Delta v = -۱۶\text{m/s} \Rightarrow v = ۰$

$[۲۲ - ۲۶]_\text{s} : \Delta v = ۰ \Rightarrow v = ۰$



شکل ۱-۸۱

شیب هر قسمت از نمودار سرعت ـ زمان، برابر شتاب جسم در آن مدت است. بنابراین نمودار سرعت ـ زمان جسم به صورت شکل (۱ـ۸۱) خواهد بود.

۲۴. الف) در مدت زمان واکنش راننده $t_1 = ۰/۴\text{s}$ هر دو قطار با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. مسافت طی شده قطار مسافری در مدت زمان واکنش راننده $x_{۰۱}$ با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید:

$$x_{۰۱} = vt_۱ \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۸(۰/۴) \Rightarrow x_{۰۱} = ۱۱/۲\text{m}$$

مسافت طی شده قطار مسافری در مدت زمان واکنش راننده $x_{۰۲}$ نیز به همین صورت است.

$$x_{۰۲} = vt_۱ + x_۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۶(۰/۴) + ۳۵۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۳۵۲/۴\text{m}$$

حال مسأله را پس از ترمز قطار مسافری بررسی می‌کنیم.
با استفاده از معادله‌ی مکان ـ زمان، می‌توانیم رابطه‌ی زیر را برای قطار مسافری بنویسیم.

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۱t + x_{۰۱} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲}(-۰/۷۱)t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲$$
$$\Rightarrow x_۱ = -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲$$

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت برای قطار باری، داریم

$$x_۲ = v_۲t + x_{۰۲} \Rightarrow x_۲ = ۶t + ۳۵۲/۴$$

وقتی که دو قطار برخورد می‌کنند، $x_۱$ و $x_۲$ باید با هم برابر باشند. بنابراین

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۱۱/۲ = ۶t + ۳۵۲/۴$$
$$\Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۲t - ۳۴۱/۲ = ۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{(۲۲)^۲ - ۴(-۰/۳۶)(-۳۴۱/۲)}}{۲(-۰/۳۶)}$$
$$\Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{-۷/۳}}{-۰/۷۲}$$

همان‌طور که می‌بینید، عدد زیر رادیکال منفی است. در نتیجه دو قطار نمی‌توانند به هم برخورد کنند.

ب) در زمان واکنش راننده $t_۱ = ۰/۹\text{s}$، دو قطار با سرعت ثابت حرکت می‌کنند.
مسافت طی شده توسط قطار مسافری در مدت زمان واکنش راننده $x_{۰۱}$ با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید.

$$x_{۰۱} = v_۱t_۱ \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۸(۰/۹) \Rightarrow x_{۰۱} = ۲۵/۲\text{m}$$

به همین ترتیب برای قطار باری نیز داریم

$$x_{۰۲} = v_۲t_۱ + x_۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۶(۰/۹) + ۳۵۰ \Rightarrow x_{۰۲} = ۳۵۵/۴\text{m}$$

حال مسأله را پس از ترمز قطار مسافری بررسی می‌کنیم.

با استفاده از معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت برای قطار مسافری، داریم

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۱t + x_{۰۱} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲}(-۰/۷۱)t^۲ + ۲۸t + ۲۵/۲$$
$$\Rightarrow x_۱ = -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۲۵/۲$$

با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت برای قطار باری، می‌توان نوشت

$$x_۲ = v_۲t + x_{۰۲} \Rightarrow x_۲ = ۶t + ۳۵۵/۴$$

زمانی که دو قطار برخورد می‌کنند، $x_۱$ و $x_۲$ باید برابر شوند. بنابراین

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۸t + ۲۵/۲ = ۶t + ۳۵۵/۴$$
$$\Rightarrow -۰/۳۶t^۲ + ۲۲t - ۳۳۰/۲ = ۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{(۲۲)^۲ - ۴(-۰/۳۶)(-۳۳۰/۲)}}{۲(-۰/۳۶)}$$
$$\Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm \sqrt{۸/۵}}{-۰/۷۲} \Rightarrow t = \frac{-۲۲ \pm ۲/۹}{-۰/۷۲}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-۲۲ + ۲/۹}{-۰/۷۲} \\ t' = \dfrac{-۲۲ - ۲/۹}{-۰/۷۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-۱۹/۱}{-۰/۷۲} \\ t' = \dfrac{-۲۴/۹}{-۰/۷۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۲۶/۵\mathrm{s} \\ t' = ۳۴/۶\mathrm{s} \end{cases}$$

که مدت زمان کمتر، یعنی $t = ۲۶/۵\mathrm{s}$ جواب مسأله است. زیرا $t' = ۳۴/۶\mathrm{s}$ برای موقعی است که دو قطار به یکدیگر برخورد نکنند و تنها از کنار هم بگذرند. که در این حالت یک‌بار در $t = ۲۶/۵\mathrm{s}$ و بار دیگر در $t' = ۳۴/۶\mathrm{s}$ از کنار هم می‌گذرند.

برای محاسبه‌ی مکان برخورد، $t = ۲۶/۵\mathrm{s}$ را در یکی از روابط $x_۱$ و $x_۲$ جایگذاری می‌کنیم. پس

$$x_۲ = ۶t + ۳۵۵/۴ \Rightarrow x_۲ = ۶(۲۶/۵) + ۳۵۵/۴ \Rightarrow x_۲ = ۵۱۴/۴\mathrm{m}$$

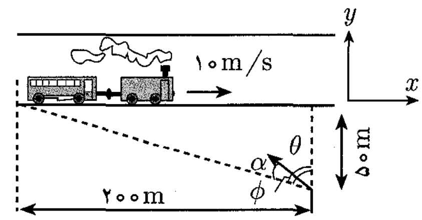
سرعت قطار مسافری در لحظه‌ی تصادف v با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید.

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -۰/۷۱(۲۶/۵) + ۲۸ \Rightarrow v = ۹/۲\mathrm{m/s}$$

سرعت نسبی دو قطار در لحظه‌ی تصادف v'، عبارتست از

$$v' = v - v_۲ \Rightarrow v' = ۹/۲ - ۶ \Rightarrow v' = ۳/۲\mathrm{m/s}$$

حرکت در دوبُعد



شکل ۱-۸۲

۲۵. الف) اگر α را زاویه‌ی امتداد دویدن شخص با امتدادی که اتومبیل دیده می‌شود در نظر بگیریم، برای به‌دست آوردن بازه‌ی مورد نظر، کافی است حداقل و حداکثر مقدار آن را بیابیم. شکل (۱ـ۸۲) را در نظر بگیرید.

حرکت در زمان طی شده برای رسیدن مسافر به قطار را می‌توان به دو حرکت تقسیم کرد، که یکی در راستای x و دیگری در راستای y است. برای راستای x، می‌توانیم قطار را ثابت فرض کنیم و در نظر بگیریم که سرعت مسافر در راستای x، برابر مجموع سرعت مطلق مسافر در راستای x و سرعت قطار است که همان سرعت مسافر نسبت به قطار در راستای x می‌باشد. حال مسافر باید ۲۰۰m را با این سرعت افقی جدید طی کند. در نتیجه

$$v = ۱۰ + ۳\sin\theta\ ,\ x = vt\ \Rightarrow\ ۲۰۰ = (۱۰ + ۳\sin\theta)t \qquad (۱)$$

مسافر باید در همین مدت، فاصله‌ی ۵۰ متری خود تا جاده را با مؤلفه‌ی قائم سرعت خود طی کند. بنابراین

$$v = ۳\cos\theta\ ,\ y = vt\ \Rightarrow\ ۵۰ = ۳\cos\theta t \qquad (۲)$$

حال با تقسیم طرفین معادلات (۱) و (۲)، داریم:

$$۴ = \frac{۱۰ + ۳\sin\theta}{۳\cos\theta}\ \Rightarrow\ ۱۲\cos\theta = ۱۰ + ۳\sin\theta$$
$$\Rightarrow\ ۱۲\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = ۱۰ + ۳\sin\theta$$

طرفین معادله‌ی فوق را به توان دو می‌رسانیم، پس

$$۱۴۴(۱ - \sin^۲\theta) = ۱۰۰ + ۶۰\sin\theta + ۹\sin^۲\theta$$
$$\Rightarrow\ ۱۵۳\sin^۲\theta + ۶۰\sin\theta - ۴۴ = ۰$$

با حل معادله‌ی درجه دوم فوق، جواب‌های $\sin\theta$ عبارتند از

$$\sin\theta_۱ = ۰/۳۷\quad ,\quad \sin\theta_۲ = -۰/۷۷$$
$$\theta_۱ = ۲۱/۷^\circ\quad ,\quad \theta_۲ = -۵۰/۴^\circ$$

از شکل (۱ـ۸۲) نیز داریم:

$$\tan\phi = \frac{۲۰۰}{۵} = ۴\ \Rightarrow\ \phi = ۷۶^\circ$$

حال می‌توانیم با استفاده از مقادیر حداقل و حداکثر θ، و مقدار ϕ، بازه‌ی مورد نظر برای α را بیابیم.

$$\alpha_{\min} = \phi - \theta_۱\ \Rightarrow\ \alpha_{\min} = ۵۴/۳^\circ$$

$$\alpha_{\max} = \phi - \theta_۲ \Rightarrow \alpha_{\max} = ۱۲۶{,}۴^\circ$$
$$\Rightarrow ۵۴{,}۳^\circ < \alpha < ۱۲۶{,}۴^\circ$$

ب) شکل قسمت (الف) را در نظر بگیرید. روابط (۱) و (۲) را با توجه به اینکه v مجهول است، بازنویسی می‌کنیم. پس

$$۲۰۰ = (۱۰ + v\sin\theta)t \quad , \quad ۵۰ = v\cos\theta t$$

حال طرفین دو رابطه‌ی فوق را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم. در نتیجه

$$\frac{۲۰۰}{۵۰} = \frac{۱۰ + v\sin\theta}{v\cos\theta} \Rightarrow ۴v\cos\theta = ۱۰ + v\sin\theta$$
$$\Rightarrow v = \frac{۱۰}{۴\cos\theta - \sin\theta}$$

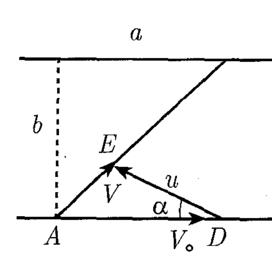
همان‌طورکه می‌دانید وقتی یک کمیت حداقل می‌شود، مشتق آن (نسبت به متغیر دیگر) برابر صفر است. بنابراین

$$\frac{dv}{d\theta} = ۰ \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{۱۰}{۴\cos\theta - \sin\theta}\right) = ۰$$
$$\Rightarrow \frac{-۱۰(-۴\sin\theta - \cos\theta)}{(۴\cos\theta - \sin\theta)^۲} = ۰$$
$$\Rightarrow ۴\sin\theta + \cos\theta = ۰$$
$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \theta = -۱۴{,}۰^\circ$$

در نتیجه به ازای $\theta = -۱۴{,}۰^\circ$ مسافر می‌تواند با حداقل سرعت به قطار برسد. بنابراین

$$v_{\min} = \frac{۱۰}{۴\cos(-۱۴{,}۰^\circ) - \sin(-۱۴{,}۰^\circ)} \Rightarrow v_{\min} = ۲{,}۴۲\text{m/s}$$

۲۶. قایق می‌خواهد از A به B برود، در نتیجه سرعت مطلق آن باید در امتداد AB باشد. بنابراین سرعت قایق نسبت به ساحل v در امتداد AB است (شکل ۱ـ۸۳). بدیهی است که $\vec{v}$ برآیند سرعت قایق نسبت به آب است، یعنی $\vec{v} = \vec{v_۰} + \vec{u}$. جهت بردار $\vec{v}$ و مقدار و جهت بردار $\vec{v_۰}$ معلوم است. با توجه به شکل (۱ـ۸۳) مینیمم مقدار u به ازای کمترین طول پاره‌خط DE است. چون $v_۰$ مقداری معین است، D یک نقطه‌ی ثابت است. همان‌طورکه می‌دانید، کمترین فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر عمود واصل از آن نقطه به خط موردنظر است. بنابراین اندازه‌ی بردار u وقتی مینیمم خواهد بود که u بر v عمود باشد.



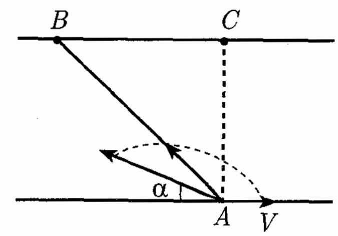
شکل ۱-۸۳

در نتیجه

$$u_{\min} = v_۰ \cos\alpha$$

که در آن $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ است. پس

$$u_{\min} = v_۰ \frac{b}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$



شکل ۱-۸۴

۲۷. ابتدا فرض کنید سرعت u با ساحل زاویه‌ی α داشته باشد (شکل ۱-۸۴). بنابراین

$$s = vt \Rightarrow BC = a = (u\cos\alpha - v)t \quad , \quad AC = b = (u\sin\alpha)t$$

که t مدت زمان حرکت قایق است.

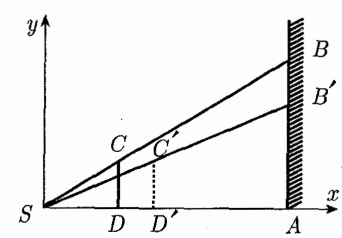
با حذف α از معادلات فوق، داریم

$$t^{۲}(u^{۲} - v^{۲}) - ۲vat - (a^{۲} + b^{۲}) = ۰$$

که از آن $t = \frac{۱۵}{۲۱}\mathrm{h}$ است. بنابراین طی مسافت AB در ۳۰ دقیقه ناممکن است.

۲۸. فرض کنید که در ابتدا $(t = ۰)$ جسم در نقطه‌ی s باشد (شکل ۱-۸۵) و در لحظه‌ی t موقعیت CD را پیدا کند. از تشابه مثلث‌های SCD و SBA می‌توانیم معادله‌ی زیر را بنویسیم

$$AB = \frac{hl}{SD} \quad , \quad SD = v_{۱}t \Rightarrow AB = \frac{hl}{v_{۱}t}$$



شکل ۱-۸۵

حال فرض کنید که زمان Δt گذشته و جسم در موقعیت جدید خود، یعنی $C'D'$ قرارگرفته است. بر این اساس سرعت نقطه‌ی B در یک لحظه‌ی زمانی مشخص برابر $v_{۲} = \frac{BB'}{\Delta t}$ است، در صورتی که زمان Δt که در آن مدت لبه‌ی سایه‌ی روی پرده به اندازه‌ی BB' جابه‌جا شده به سمت صفر میل کند. حال BB' را با استفاده از روابط مثلثاتی موجود در شکل (۱-۸۵) بر حسب پارامترهای مسأله به‌دست می‌آوریم.

$$BB' = AB - AB' \Rightarrow BB' = \frac{hl}{v_{۱}t} - \frac{hl}{v_{۱}(t+\Delta t)}$$
$$\Rightarrow BB' = \frac{hl\Delta t}{t(t+\Delta t)}$$

بنابراین

$$v_{۲} = \frac{hl}{v_{۱}t(t+\Delta t)}$$

حال با میل دادن Δt به سمت صفر، داریم

$$v_{۲} = \frac{hl}{v_{۱}t^{۲}}$$

۲۹. ابتدا به ازای حداکثر ارتفاع اوج که در اینجا ۸ متر است، زاویه‌ی پرتاب را می‌یابیم. بر اساس رابطه‌ی زیر (رابطه‌ی مستقل از زمان برای حداکثر ارتفاع اوج) داریم

$$H_{\max} = \frac{v_{۰}^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g} \Rightarrow ۸ = \frac{(۲۰)^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲(۹/۸۱)}$$
$$\Rightarrow \sin^{۲}\alpha = \frac{۱۶(۹/۸۱)}{۴۰۰}$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{۵}\sqrt{۹/۸۱} \Rightarrow \sin\alpha \approx ۰/۶۲۶۱$$

که از آن، مقدار تقریبی α به‌دست می‌آید.

$$\alpha \approx ۳۸{,}۷۶^\circ$$

حال با استفاده از این مقدار، حداکثر برد جسم را می‌یابیم

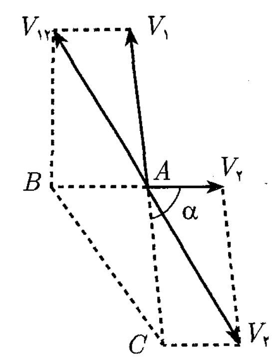
$$R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g} \Rightarrow R = \frac{(۲۰)^۲ \sin ۲(۳۸{,}۷۶^\circ)}{۹{,}۸۱} \Rightarrow R \approx ۴۰\mathrm{m}$$

توجه داشته باشید که اگر برای α، مقداری بیش از ۴۵° به‌دست آمده بود، برای یافتن حداکثر برد جسم، باید $\alpha = ۴۵^\circ$ را در رابطه‌ی $R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g}$ جایگذاری می‌کردیم. زیرا $v_\circ$ و g مقادیر معلوم هستند و حداکثر مقدار $\sin ۲\alpha$ برابر یک است که به ازای $\alpha = ۴۵^\circ$ به‌دست می‌آید.

۳۰. از این علائم استفاده می‌کنیم: $v_{۲۱}$ سرعت وسیله‌ی نقلیه دوم نسبت به اولی و $v_{۱۲}$ سرعت وسیله نقلیه اول نسبت به دومی است.

بدیهی است که $v_{۱۲} = v_{۲۱}$ است. حال با استفاده از قانون کسینوس‌ها در شکل (۱ـ۸۶) مقدار $v_{۲۱}$ را می‌یابیم. بر اساس این شکل، $AB = v_۲$، $AC = v_۱$ و $BC = v_{۲۱}$ است. در نتیجه

$$v_{۲۱}^۲ = v_۱^۲ + v_۲^۲ - ۲v_۱v_۲\cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$
$$\Rightarrow v_{۲۱}^۲ = v_۱^۲ + v_۲^۲ + ۲v_۱v_۲\cos\alpha$$



شکل ۱-۸۶

بنابراین زمان مورد نظر برای اینکه فاصله‌ی بین آنها برابر s شود، به‌دست می‌آید

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} \Rightarrow t = \frac{s}{v_{۲۱}} \Rightarrow t = \frac{s}{v_۱^۲ + v_۲^۲ + ۲v_۱v_۲\cos\alpha}$$

۳۱. بنابر شکل (۱ـ۷۴) نقطه‌ی C نقطه‌ی اوج گلوله‌ی دوم است. زیرا حرکت آن در نقطه‌ی C به صورت افقی نشان داده شده است. بنابراین l برابر با نصف برد گلوله است، یعنی $l = \frac{R}{۲}$. برای اینکه دو گلوله در نقطه‌ی C با یکدیگر برخورد کنند، زمان رسیدن گلوله‌ها از نقاط آغازین حرکت تا نقطه‌ی C باید با یکدیگر برابر باشد. ابتدا این زمان را برای گلوله‌ی اول می‌یابیم

$$H - h = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow t^۲ = \frac{۲(H-h)}{g} \qquad (۱)$$

که h همان OC است و برابر با ارتفاع اوج گلوله‌ی دوم می‌باشد.

برای به‌دست آوردن این زمان برای گلوله‌ی دوم، از رابطه‌ی سرعت و شتاب استفاده می‌کنیم.

$$v = at + v_\circ \Rightarrow \circ = -gt + v_\circ \sin\alpha \Rightarrow t = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g}$$
$$\Rightarrow t^۲ = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{g^۲} \qquad (۲)$$

که رابطه‌ی فوق با توجه به اینکه مؤلفه‌ی قائم سرعت جسم در نقطه‌ی اوج برابر صفر است، نوشته شده است.

با برابر قرار دادن رابطه‌ی (۱) و (۲) داریم

$$\frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{g^۲} = \frac{۲(H-h)}{g} \Rightarrow \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g} = H-h$$

همان‌طور که می‌دانید ارتفاع نقطه‌ی اوج از رابطه‌ی $h = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه

$$h = H - h \Rightarrow H = ۲h \qquad (۳)$$

حال رابطه‌ی بین ارتفاع اوج h و نصف برد l را می‌یابیم

$$\left.\begin{aligned} R = \frac{v_\circ^۲ \sin ۲\alpha}{g} \Rightarrow \quad & l = \frac{v_\circ^۲ \sin\alpha\cos\alpha}{g} \\ & h = \frac{v_\circ^۲ \sin^۲\alpha}{۲g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲h = l\tan\alpha \qquad (۴)$$

حال بر اساس روابط (۳) و (۴) رابطه‌ی مستقل از $v_\circ$، برای α به‌دست می‌آید.

$$\tan\alpha = \frac{H}{l}$$

به ازای $\frac{H}{l} = \sqrt{۳}$، داریم

$$\tan\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

۳۲. در حرکت‌های پرتابی، اگر نیرویی جز وزن جسم به آن وارد نشود، شتاب جسم فقط در راستای قائم خواهد بود که مقدار آن برابر با شتاب گرانش g است. بنابراین مؤلفه‌ی افقی سرعت اجسام (مثلاً تیرهای ذکر شده در این مسأله) ثابت می‌ماند.

حال با نظر به اینکه سرعت افقی تیرها ثابت می‌ماند، می‌توانیم زمان پیمودن فاصله‌ی ۵۰ متر را برای هر یک از آنها به‌دست آوریم.

$$v_{\circ ۱} = \frac{s}{t_۱} \Rightarrow ۳۲۰ = \frac{۵۰}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۵}{۳۲}\mathrm{s}$$
$$v_{\circ ۲} = \frac{s}{t_۲} \Rightarrow ۳۵۰ = \frac{۵۰}{t_۲} \Rightarrow t_۲ = \frac{۱}{۷}\mathrm{s}$$

در نتیجه می‌توانیم مقدار سقوط هر یک از آنها $(h_۲, h_۱)$ را بیابید.

$$h_۱ = \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱}{۲}(۹/۸۱)(\frac{۵}{۳۲})^۲ \Rightarrow h = ۱۱/۹۸\mathrm{cm}$$
$$h_۲ = \frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \Rightarrow h_۲ = \frac{۱}{۲}(۹/۸۱)(\frac{۱}{۷})^۲ \Rightarrow h_۲ = ۱۰/۰۱\mathrm{cm}$$

بنابراین فاصله‌ی نقاط اصابت گلوله‌ها عبارتست از

$$\Delta h = h_۱ - h_۲ \Rightarrow \Delta h = ۱/۹۷\text{cm}$$

۳۳. الف) همان‌طورکه در مسأله‌ی قبل ذکر کردیم، سرعت افقی اجسام طی حرکت ثابت می‌ماند. بنابراین با استفاده از داده‌های جسم اول، زمان پرواز دو جسم (که با هم برابرند) را می‌یابیم.

$$v_۱ = \frac{x_۱}{t} \Rightarrow ۵ = \frac{۱۰}{t} \Rightarrow t = ۲\text{s}$$

ب) حال با استفاده از زمان پرواز که در قسمت قبل به‌دست آوردیم، برد جسم دوم را می‌یابیم.

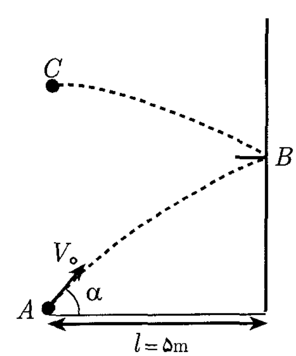
$$x_۲ = v_۲ t \Rightarrow x_۲ = ۷/۵(۲) \Rightarrow x_{\circ} = ۱۵\text{m}$$

پ) در این قسمت نیز با استفاده از زمان سقوط (زمان پرواز)، ارتفاع محل پرتاب هر کدام از آنها را می‌یابیم. با توجه به اینکه زمان سقوط هر دو یکی است و سرعت اولیه‌ی آنها مؤلفه‌ی قائم ندارد، ارتفاع اولیه‌ی آنها یکی است. پس

$$h = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}(۹/۸۱)(۲)^۲ \Rightarrow h_۱ = h_۲ = ۱۹/۶۲\text{m}$$

۳۴. ابتدا مسیر حرکت توپ را به صورت کیفی رسم می‌کنیم (شکل ۱ـ۸۷).

با کمی تأمل می‌توان مسأله را به راحتی حل کرد. چون در موقع برخورد، سرعت قائم توپ تغییر نمی‌کند، نیرویی در نقطه‌ی B در راستای قائم (شکل ۱ـ۸۷) بر توپ وارد نمی‌شود. بنابراین تنها نیروی وارد بر توپ در کل مدت حرکت (از A تا B و از B تا C)، نیروی وزن است. خصوصیت مهم نقطه‌ی C، صفر بودن مؤلفه‌ی قائم سرعت در آن نقطه است. با توجه به اینکه سرعت افقی توپ، در طول زمان تغییر نمی‌کند، و اینکه کل مسافت افقی طی شده، یک رفت و برگشت از نقطه‌ی آغاز تا میله‌ی دروازه و از میله دروازه تا نقطه‌ی اوج (یعنی ۱۰m) است، داریم



شکل ۱-۸۷

$$s = v_x t \Rightarrow ۱۰ = v_{\circ} \cos\alpha t \Rightarrow ۱۰ = ۱۶\cos\alpha t \qquad (۱)$$

بر اساس صفر بودن مؤلفه‌ی قائم سرعت در نقطه‌ی C، داریم

$$v = at + v_{\circ y} \Rightarrow \circ = -۹/۸۱t + v_{\circ}\sin\alpha \Rightarrow ۱۶\sin\alpha = ۹/۸۱t \qquad (۲)$$

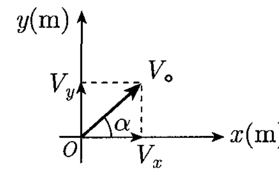
با حذف t از معادلات (۱) و (۲)، داریم

$$\frac{۱۰}{۱۶\sin\alpha} = \frac{۱۶\cos\alpha}{۹/۸۱} \Rightarrow (۱۶)^۲\sin\alpha\cos\alpha = ۹۸/۱$$
$$\Rightarrow \sin ۲\alpha = \circ/۷۶۶ \Rightarrow \alpha \approx ۲۵^{\circ}$$

۳۵. در مدت زمانی که خمپاره، فاصله‌ی افقی $۴/۵۴\text{km}$ را طی می‌کند، بالا رفته و به ارتفاع اولیه برمی‌گردد. بنابر شکل (۱ــ۸۸) داریم:

$$R = ۴/۵۴\text{km} \Rightarrow R = ۴۵۴۰\text{m}$$

$$v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta \quad , \quad v_{\circ y} = v_\circ \sin\theta$$



شکل ۱-۸۸

حرکت خمپاره در راستای محور yها، حرکت با شتاب ثابت (شتاب گرانش) است. بنابراین

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow y_\circ = -\frac{۱}{۲}(۹/۸۱)(۲۷/۵)^۲ + v_\circ \sin\theta(۲۷/۵) + y_\circ$$

$$\Rightarrow -۳۷۰۵/۶ + ۲۷/۵v_\circ \sin\theta = ۰ \Rightarrow ۲۷/۵v_\circ \sin\theta = ۳۷۰۵/۶$$

$$\Rightarrow v_\circ \sin\theta = ۱۳۴/۷ \qquad (۱)$$

هیچ شتابی در راستای محور xها به خمپاره وارد نمی‌شود. پس حرکت آن در راستای محور xها، حرکت با سرعت ثابت است. در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت، داریم

$$x = v_\circ \cos\theta t \Rightarrow ۴۵۴۰ = v_\circ \cos\theta(۲۷/۵)$$

$$\Rightarrow v_\circ \cos\theta = ۱۶۵/۱ \qquad (۲)$$

با تقسیم روابط (۱) و (۲) بر یکدیگر، θ به‌دست می‌آید.

$$\frac{v_\circ \sin\theta}{v_\circ \cos\theta} = \frac{۱۳۴/۷}{۱۶۵/۱} \Rightarrow \tan\theta = ۰/۸۲ \Rightarrow \theta = ۳۹/۲^\circ$$

حال با جایگذاری θ در رابطه‌ی (۱)، مقدار سرعت خمپاره را می‌یابیم.

$$v_\circ \sin\theta = ۱۳۴/۷ \Rightarrow v_\circ \sin ۳۹/۲ = ۱۳۴/۷ \Rightarrow ۰/۶۳v_\circ = ۱۳۴/۷$$

$$v_\circ = \frac{۱۳۴/۷}{۰/۶۳} \Rightarrow v_\circ = ۲۱۳/۱\text{m/s}$$

در نتیجه می‌توانیم بردار سرعت خمپاره $\vec{v_\circ}$ را بنویسیم.

$$\vec{v_\circ} = v_\circ \cos\theta\vec{i} + v_\circ \sin\theta\vec{j}$$

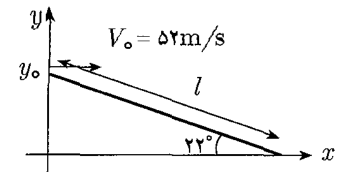
$$\Rightarrow \vec{v_\circ} = ۲۱۳/۱\cos(۳۹/۲^\circ)\vec{i} + ۲۱۳/۱\sin(۳۹/۲^\circ)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v_\circ} = ۱۶۵/۱\vec{i} + ۱۳۴/۷\vec{j}\text{m/s}$$

۳۶. در مدت زمانی که جسم، فاصله‌ی افقی R را طی می‌کند، ارتفاع $y_\circ$ را پایین می‌رود. اگر l طول مسافتی باشد که جسم روی سطح شیبدار طی کرده است، با توجه به شکل (۱ــ۸۹) داریم:

$$v_{\circ x} = v_\circ = ۵۲\text{m/s} \qquad v_{\circ y} = ۰$$

$$R = l\cos ۲۲^\circ \Rightarrow R = ۰/۹۳l \quad y_\circ = l\sin ۲۲^\circ \Rightarrow y_\circ = ۰/۸۳l$$



شکل ۱-۸۹

زمان پرواز جسم t با استفاده از رابطه‌ی حرکت با شتاب ثابت (شتاب گرانش) در راستای قائم به‌دست می‌آید.

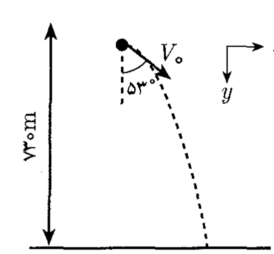
$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow \circ = -\frac{۱}{۲}(۹/۸۱)t^۲ + \circ + \circ/۳۸l$$
$$\Rightarrow -۴/۹t^۲ + \circ/۳۸l = \circ$$
$$\Rightarrow t^۲ = \circ/\circ۷۷l \Rightarrow t = \sqrt{\circ/\circ۷۷l}$$

حرکت جسم در راستای محور xها، حرکت با سرعت ثابت است. بنابراین

$$x = v_{\circ x}t + x_\circ \Rightarrow \circ/۹۳ = ۵۲\sqrt{\circ/\circ۷۷l}$$
$$\Rightarrow (\circ/۹۳l)^۲ = (۵۲\sqrt{\circ/\circ۷۷l})^۲$$
$$\Rightarrow \circ/۸۷l^۲ = ۲\circ۸/۲l$$
$$\Rightarrow \circ/۸۷l^۲ - ۲\circ۸/۲l = \circ \Rightarrow l(\circ/۸۷l - ۲\circ۸/۲) = \circ$$
$$\Rightarrow \begin{cases} l = \circ \\ \circ/۸۷l - ۲\circ۸/۲ = \circ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \circ/۸۷l = ۲\circ۸/۲ \Rightarrow l = ۲۴\circ\text{m} \checkmark$$

۳۷. ابتدا مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت اولیه پرتابه را که برابر با سرعت هواپیما است، می‌یابیم. بنابر شکل (۱ـ۹۰) داریم

$$v_{\circ x} = v_\circ \sin ۵۳^\circ = \circ/۸v_\circ \quad , \quad v_{\circ y} = v_\circ \cos ۵۳^\circ = \circ/۶v_\circ$$



شکل ۱-۹۰

الف) حال با استفاده از معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت (شتاب گرانش)، سرعت اولیه‌ی جسم را می‌یابیم.

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow ۷۳\circ = \frac{۱}{۲}(۹/۸۱)(۵)^۲ + \circ/۶v_\circ(۵) + \circ$$
$$\Rightarrow v_\circ = ۲\circ۲\text{m/s}$$

ب) چون سرعت جسم در راستای افقی ثابت می‌ماند، مسافت افقی طی شده با استفاده از معادله‌ی حرکت با سرعت ثابت به‌دست می‌آید. پس

$$x = v_{\circ x}t \Rightarrow x = \circ/۸v_\circ t \Rightarrow x = \circ/۸(۲\circ۲)(۵) \Rightarrow x = ۸\circ۸\text{m}$$

پ) مؤلفه‌ی افقی سرعت پرتابه ثابت است.

$$v_x = v_{\circ x} \Rightarrow v_x = \circ/۸v_\circ \Rightarrow v_x = \circ/۸(۲\circ۲) \Rightarrow v_x = ۱۶۱/۶\text{m/s}$$

مؤلفه‌ی قائم نیز با استفاده از معادله‌ی سرعت در حرکت با شتاب ثابت به‌دست می‌آید. بنابراین

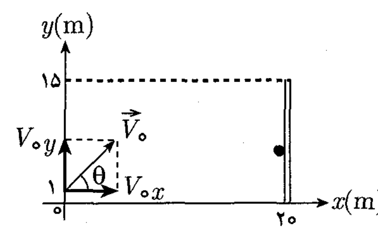
$$v_y = gt + v_{\circ y} \Rightarrow v_y = gt + \text{۰/۶}v_\circ$$
$$\Rightarrow v_y = \text{۹/۸۱}(\text{۵}) + \text{۰/۶}(\text{۲۰۲}) \Rightarrow v_y = \text{۱۷۰}\,\text{m/s}$$

۳۸. الف) در مدت زمانی که تیر فاصله‌ی افقی ۲۰m را طی می‌کند، سنجاب در حال سقوط آزاد است. با توجه به شکل (۱ـ۹۱)

$$v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta \Rightarrow v_{\circ x} = \text{۲۸}\cos\theta$$
$$v_{\circ y} = v_\circ \sin\theta \Rightarrow v_{\circ y} = \text{۲۸}\sin\theta$$

حرکت سنجاب در راستای محور yها، حرکت با شتاب ثابت (شتاب گرانش) است. پس

$$y = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}gt^{\text{۲}} + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow y_{\text{۱}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۹/۸۱})t^{\text{۲}} + \circ + \text{۱۵}$$
$$\Rightarrow y_{\text{۱}} = -\text{۴/۹}t^{\text{۲}} + \text{۱۵}$$



شکل ۱-۹۱

به همین ترتیب برای تیر نیز داریم:

$$y = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}gt^{\text{۲}} + v_{\circ y}t + y_\circ \Rightarrow y_{\text{۲}} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۹/۸۱})t^{\text{۲}} + \text{۲۸}\sin\theta + \text{۱}$$
$$\Rightarrow y_{\text{۲}} = -\text{۴/۹}t^{\text{۲}} + \text{۲۸}t\sin\theta + \text{۱}$$

حرکت تیر در راستای محور xها، حرکت با سرعت ثابت است. بنابراین

$$x = v_{\circ x}t + x_\circ \Rightarrow \text{۲۰} = \text{۲۸}t\cos\theta \Rightarrow t = \frac{\text{۱}}{\text{۱/۴}\cos\theta}$$

مقدار فوق را در روابط $y_{\text{۱}}$ و $y_{\text{۲}}$ جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه

$$y_{\text{۱}} = -\text{۴/۹}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱/۴}\cos\theta}\right)^{\text{۲}} + \text{۱۵} \Rightarrow y_{\text{۱}} = \frac{-\text{۴/۹}}{\text{۱/۹۶}\cos^{\text{۲}}\theta} + \text{۱۵} \qquad (\text{۱})$$
$$y_{\text{۲}} = -\text{۴/۹}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱/۴}\cos\theta}\right)^{\text{۲}} + \text{۲۸}\sin\theta\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱/۴}\cos\theta}\right) + \text{۱}$$
$$\Rightarrow y_{\text{۲}} = \frac{-\text{۴/۹}}{\text{۱/۹۶}\cos^{\text{۲}}\theta} + \text{۲۰}\tan\theta + \text{۱}$$

زمانی که تیر به سنجاب برخورد می‌کند، $y_{\text{۱}}$ و $y_{\text{۲}}$ باید برابر باشند. پس

$$y_{\text{۱}} = y_{\text{۲}} \Rightarrow \frac{-\text{۴/۹}}{\text{۱/۹۶}\cos^{\text{۲}}\theta} + \text{۱۵} = \frac{-\text{۴/۹}}{\text{۱/۹۶}\cos^{\text{۲}}\theta} + \text{۲۰}\tan\theta + \text{۱}$$
$$\Rightarrow \text{۱۵} - \text{۱} = \text{۲۰}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \text{۰/۷} \Rightarrow \theta = \text{۳۵}^\circ$$

با کمی دقت متوجه می‌شود که به ازای $\theta = \text{۳۵}^\circ$، کمان‌دار باید نوک تیر (محل اولیه‌ی سنجاب) را نشانه بگیرد.

ب و پ) برای محاسبه‌ی محل برخورد تیر به سنجاب، مقدار اولیه‌ی θ را در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$y_۱ = \frac{-۴/۹}{۱/۹۶\cos^۲ ۳۵^\circ} + ۱۵ \Rightarrow y_۱ = -۳/۷ + ۱۵$$

$$\Rightarrow y_۲ = y_۱ = ۱۱/۳\text{m}$$

در نتیجه در ارتفاع ۱۱/۳ متری سطح زمین، تیر به سنجاب برخورد می‌کند.

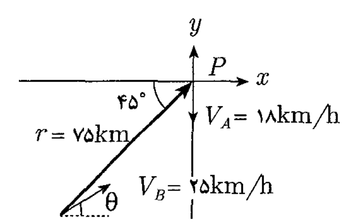
۳۹. با توجه به شکل (۱ـ۹۲) که بیانگر صورت مسأله است، می‌توان نوشت

$$\left.\begin{aligned} r_{\circ x} &= -۷۵\cos ۴۵^\circ \Rightarrow r_{\circ x} = -۵۳\text{km} \\ r_{\circ y} &= -۷۵\sin ۴۵^\circ \Rightarrow r_{\circ y} = -۵۳\text{km} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_\circ = -۵۳\vec{i} - ۵۳\vec{j}\text{km}$$

$$\vec{v}_A = -۱۸\vec{j}\text{km/h}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{Bx} &= ۲۵\cos\theta \\ v_{By} &= ۲۵\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v}_B = ۲۵\cos\theta\vec{i} + ۲۵\sin\theta\vec{j}\text{km/h}$$



شکل ۱-۹۲

معادله‌ی مکان ـ زمان قایق A عبارتست از:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A t \Rightarrow \vec{r}_A = (-۱۸\vec{j})t \Rightarrow \vec{r}_A = -۱۸t\vec{j}$$

معادله‌ی مکان ـ زمان قایق B عبارتست از:

$$\vec{r}_B = \vec{v}_B t + \vec{r}_{\circ B} \Rightarrow \vec{r}_B = (۲۵\cos\theta\vec{i} + ۲۵\sin\theta\vec{j})t - ۵۳\vec{i} - ۵۳\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_B = (۲۵t\cos\theta - ۵۳)\vec{i} + (۲۵t\sin\theta - ۵۳)\vec{j}$$

زمانی که قایق‌های A و B به هم می‌رسند، $\vec{r}_A$ و $\vec{r}_B$ با هم برابر می‌شوند. در نتیجه

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow -۱۸t\vec{j} = (۲۵t\cos\theta - ۵۳)\vec{i} + (۲۵t\sin\theta - ۵۳)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲۵t\cos\theta - ۵۳ = \circ \\ ۲۵t\sin\theta - ۵۳ = -۱۸t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵t\cos\theta = ۵۳ \\ ۲۵t\sin\theta + ۱۸t = ۵۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲۵t\cos\theta = ۵۳ \\ (۲۵\sin\theta + ۱۸)t = ۵۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

برای محاسبه‌ی θ، دو رابطه‌ی (۱) را بر هم تقسیم می‌کنیم. در نتیجه

$$\frac{(۲۵\sin\theta + ۱۸)t}{۲۵t\cos\theta} = \frac{۵۳}{۵۳} \Rightarrow \frac{۲۵\sin\theta + ۱۸}{۲۵\cos\theta} = ۱$$

$$\Rightarrow ۲۵\sin\theta + ۱۸ = ۲۵\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۲۵\sin\theta = ۲۵\cos\theta - ۱۸$$

$$\Rightarrow ۲۵\sqrt{۱-\cos^۲\theta} = ۲۵\cos\theta - ۱۸$$

$$\Rightarrow ۶۲۵(۱-\cos^۲\theta) = (۲۵\cos\theta - ۱۸)^۲$$

$$\Rightarrow ۶۲۵ - ۶۲۵\cos^۲\theta = ۶۲۵\cos^۲\theta + ۳۲۴ - ۹۰۰\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۱۲۵۰\cos^۲\theta - ۹۰۰\cos\theta - ۳۰۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۹۰۰ \pm \sqrt{(۹۰۰)^۲ - ۴(۱۲۵۰)(-۳۰۱)}}{۲(۱۲۵۰)}$$

$$\Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۹۰۰ \pm \sqrt{۲۳۱۵۰۰۰}}{۲۵۰۰}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۹۰۰ \pm ۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{۹۰۰ + ۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰} \\ \cos\theta' = \dfrac{۹۰۰ - ۱۵۲۱/۵}{۲۵۰۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{۲۴۲۱/۵}{۲۵۰۰} \\ \cos\theta' = \dfrac{-۶۲۱/۵}{۲۵۰۰} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = ۰/۹۷ \\ \cos\theta' = -۰/۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = ۱۴/۴^\circ \\ \theta' = ۱۰۴/۵^\circ \end{cases}$$

با توجه به شکل (۱ـ۹۲)، $\theta = ۱۴/۴^\circ$ جواب مسأله است.

برای محاسبه‌ی کل زمان حرکت t، زاویه‌ی $\theta = ۱۴/۴^\circ$ را در یکی از روابط (۱) جایگذاری می‌کنیم. پس

$$۲۵\tan\theta = ۵۳ \Rightarrow ۲۵t\cos(۱۴/۴^\circ) = ۵۳^\circ$$

$$\Rightarrow t = ۲/۲\text{h} \Rightarrow t = ۲_\text{h}۱۲_\text{min}$$

در نتیجه کل زمان حرکت ۲ ساعت و ۱۲ دقیقه است. در نتیجه دو قایق در ساعت $۱۲'$: ۱۰ صبح به هم می‌رسند.

تمرینات فصل ۱

حرکت روی خط راست (حرکت یک‌بعدی)

۱ . راننده‌ای برای صرفه‌جویی در مصرف سوخت، مسافت ۱۲۸mi را با سرعت ۵۵mi/h می‌پیماید. اگر این راننده با سرعت ۶۴mi/h حرکت می‌کرد، چند دقیقه زودتر به مقصد می‌رسید؟

جواب: $\Delta t = ۱۹/۸\,\mathrm{min}$

۲ . راننده‌ای برای طی مسافت ۴۸۴mi ابتدا ۱/۷۵h را با سرعت ۶۰mi/h حرکت می‌کند. سپس به مدت ۲۰ min توقف می‌کند. پس از آن ۳/۲۰h با سرعت ۶۲/۵mi/h حرکت می‌کند. سپس ۴۵ min توقف می‌کند. دوباره به راه می‌افتد و مسافت ۱۰۸mi را با سرعت ۶۵mi/h می‌پیماید. سپس ۱۵ min توقف می‌کند. اگر مسافت باقی‌مانده را با سرعت ۶۰mi/h طی کند، کل زمان مسافرت او را به‌دست آورید. سرعت متوسط او را در این سفر بیابید.

جواب: $t = ۹/۱۲\mathrm{h}\ ,\ \overline{v} = ۵۳/۱\mathrm{mi/h}$

۳ . دوچرخه‌سوار A با سرعت ثابت ۲۵km/h و دوچرخه‌سوار B با سرعت ثابت ۳۲km/h حرکت می‌کنند. سر ظهر، A به اندازه‌ی ۱۷/۵km از B جلوتر است. پس از چه مدت B از A سبقت می‌گیرد؟ در این مدت، دوچرخه سواران از محلی که ظهر در آنجا بودند، چقدر دور شده‌اند؟

جواب: $t = ۲/۵\mathrm{h}$ ،$\Delta x_A = ۶۲/۵\mathrm{km}$ ،$\Delta x_B = ۸۰\mathrm{km}$

۴ . مکان جسمی که در راستای محور x حرکت می‌کند، از معادله‌ی $x = ۳t - ۴t^۲ + t^۳$ به‌دست می‌آید، که در آن x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است.

الف) مکان جسم در زمان‌های $t = ۱, ۲, ۳, ۴\mathrm{s}$ کجاست؟ ب) جابه‌جایی جسم در بازه‌ی $t = ۰$ تا $t = ۴\mathrm{s}$ چیست؟ پ) سرعت متوسط جسم در بازه‌ی زمانی $t = ۲\mathrm{s}$ تا $t = ۴\mathrm{s}$ چقدر است؟ ت) نمودار تغییرات x بر حسب t را به ازای $۰ \le t \le ۴\mathrm{s}$ رسم کنید و نشان دهید برای پاسخ دادن به قسمت (ب) چگونه می‌توان از نمودار استفاده کرد.

جواب: الف) صفر، ۲m−، صفر، ۱۲m، ب) ۱۲m+، پ) ۷m/s+

۵ . مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، بر حسب سانتیمتر از معادله‌ی $x = ۹/۷۵ + ۱/۵۰t^۳$ به‌دست می‌آید، که در آن t بر حسب ثانیه است. مطلوبست محاسبه‌ی:

الف) سرعت متوسط ذره در بازه‌ی زمانی $t = ۲/۰۰\mathrm{s}$ تا $t = ۳/۰۰\mathrm{s}$. ب) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان‌های $t = ۲, ۲/۵, ۳\mathrm{s}$. پ) سرعت لحظه‌ای در موقعی که ذره در وسط فاصله‌ی میان دو مکان متناظر با $t = ۲/۰۰\mathrm{s}$ و $t = ۳/۰۰\mathrm{s}$ قرار دارد. ت) نمودار تغییرات x بر حسب زمان را رسم کنید و پاسخ‌های خواسته شده را به روش ترسیمی به‌دست آورید.

جواب: الف) $\overline{v} = ۲۸/۵\mathrm{cm/s}$،
ب) ۲۷cm/s، ۱۸/۷۵cm/s، $v = ۱۲\mathrm{cm/s}$
پ) $v = ۲۰/۲\mathrm{cm/s}$

۶ . پله‌کان برقی مسافرینی را که روی آن ایستاده‌اند در مدت یک دقیقه بالا می‌برد. اگر پله‌کان ساکن باشد، مسافرین در مدت ۳ دقیقه از آن بالا می‌روند. معلوم کنید مسافر از پله‌کان متحرک در چند دقیقه بالا خواهد رفت.

جواب: $t = ۴۵\mathrm{s}$

۷ . یک قایق ماهیگیری روی رودخانه‌ای حرکت می‌کرد. موقع عبور از زیر پل پاروی اضافیش به آب افتاد. ماهیگیر بعد از یک ساعت متوجه گم شدن پارو شد و عقب برگشته و ۶ کیلومتر پایین‌تر از پل پاروی خود را پیدا کرد. سرعت حرکت آب رودخانه چقدر بوده است؟ (فرض می‌کنیم سرعت حرکت ماهیگیر در جهت و خلاف جهت آب یکی بوده است.)

جواب: $v = ۳\mathrm{km/h}$

۸ . جسمی که حرکت متشابه‌التغییر تند شونده دارد در ثانیه چهارم حرکت خود ۳۵ متر راه پیموده است.

الف) شتاب حرکت جسم چقدر است؟ ب) سرعت جسم را در آخر ثانیه‌ی چهارم و دهم بیابید. پ) در ثانیه‌ی دوم و در ثانیه‌ی پنجم جسم چقدر راه می‌پیماید.

جواب: الف) $a = ۱۰\mathrm{m/s}^۲$، ب) $v_{۱۰} = ۱۰۰\mathrm{m/s}$ و $v_۴ = ۴۰\mathrm{m/s}$، پ) $x_۵ = ۴۵\mathrm{m}$ و $x_۲ = ۱۵\mathrm{m}$

۹ . از دوشی که در ارتفاع ۲۰۰ سانتی‌متری سطح زمین قرار دارد، قطره‌های آب به زمین می‌ریزند. این قطره‌ها در بازه‌های زمانی منظم (مساوی) سقوط می‌کنند و در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد، قطره‌ی چهارم شروع به افتادن می‌کند. در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد، محل قطره‌های دوم و سوم را پیدا کنید.

جواب: ۸۹cm و ۲۲cm پایین‌تر از دوش

۱۰ . آسانسور روبازی با تندی ۱۰m/s در حال بالا رفتن است. هنگامی که ارتفاع کف آسانسور از زمین به ۲۸m می‌رسد، پسر بچه‌ی درون آسانسور توپی را از ارتفاع ۲٫۰ متری کف آسانسور به طور قائم به بالا پرتاب می‌کند. تندی آغازی توپ نسبت به آسانسور ۲۰m/s است.

الف) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی نسبت به زمین بالا می‌رود؟ ب) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به کف آسانسور برگردد؟

جواب: الف) $h = ۷۶\text{m}$، ب) $t = ۴٫۲\text{s}$

۱۱ . جسمی از ارتفاع h سقوط آزاد می‌کند. در همان مبدأ زمان جسم دیگری با سرعت اولیه $v_\circ$ از ارتفاع H $(H > h)$ با سرعت اولیه $v_\circ$ در امتداد قائم به طرف زمین پرتاب می‌شود، هر دو جسم در یک زمان به زمین می‌رسند. سرعت اولیه‌ی جسم دوم را معلوم کنید.

جواب: $v_\circ = \frac{H-h}{۲h}\sqrt{۲gh}$

۱۲ . گربه‌ای در حال چرت زدن متوجه می‌شود که گلدانی از مقابل یک پنجره‌ی باز ابتدا بالا می‌رود و سپس پایین می‌آید. گلدان در کل رفت و برگشت به مدت ۰٫۵۰ ثانیه در معرض دید بوده و ارتفاع پنجره از بالا تا پایین ۲٫۰۰m است. گلدان تا چه ارتفاعی از لبه‌ی پنجره بالا رفته است؟

جواب: $h = ۲٫۳۴\text{m}$

۱۳ . دو جهانگرد که به فاصله‌ی ۴۰km از اقامتگاه خود قرار دارند، باید درکوتاهترین زمان ممکن با هم به آنجا برسند. آنها یک دوچرخه در اختیار دارند و تصمیم می‌گیرند که به نوبت از آن استفاده کنند. یکی از آنها پیاده و با سرعت $v_۱ = ۵\text{km/h}$ و دیگری سوار بر دوچرخه و با سرعت ۱۵km/h به راه می‌افتند. در ضمن قرار می‌گذارند که دوچرخه‌سوار در میانه‌ی راه از دوچرخه پیاده و دیگری پس از رسیدن به این نقطه سوار آن شود. سرعت میانگین جهانگردها چه اندازه خواهد بود؟ چه مدتی دوچرخه بدون استفاده می‌ماند؟

جواب: $v_m = ۷٫۵\text{km/h}$ و $t = ۵_{\text{h}}۲۰_{\text{min}}$

۱۴ . یک قایق پارویی با سرعت $v_۱ = ۳\text{km/h}$ نسبت به آب از اسکله‌ی C به طرف اسکله‌ی T حرکت می‌کند. در همین زمان یک کشتی با سرعت $v_۲ = ۱۰\text{km/h}$ اسکله‌ی T را به مقصد ترک می‌کند. در حالی که قایق بین دو اسکله در حرکت است، کشتی چهار مرتبه این مسافت را می‌پیماید و هم‌زمان با قایق به اسکله‌ی C می‌رسد. جهت جریان آب را پیدا کنید.

جواب: $v_\circ = ۰٫۵\text{km/h}$، رودخانه از T به طرف C در جریان است.

۱۵ . دانشجویی سنگی را در چاهی می‌اندازد و فاصله‌ی زمانی بین رها شدن سنگ و شنیدن صدای برخورد سنگ با آب ته چاه را اندازه‌گیری می‌کند. او فرض می‌کند سرعت صوت ۳۳۰m/s است و زمان لازم برای رسیدن صوت از ته چاه به دهانه‌ی آن را در نظر می‌گیرد. اگر فاصله‌ی زمانی اندازه‌گیری شده ۳٫۱۵s باشد، عمق چاه را به‌دست آورید.

جواب: $h = ۴۴٫۴\text{m}$

۱۶ . اتومبیلی با سرعت ۹۰km/h حرکت می‌کند. راننده در فاصله‌ی ۴۰ متری جلوی خود در وسط جاده، مانعی را می‌بیند. اگر زمان واکنش راننده ۰٫۴۸s و حداکثر شتاب اتومبیل هنگام ترمز گرفتن $۷٫۶\text{m/s}^۲$ باشد، آیا اتومبیل قبل از برخورد با مانع می‌ایستد؟

جواب: خیر

۱۷ . ارتفاع پنجره‌ای از سطح زمین ۳۶m است. از بالای پنجره، سنگی با سرعت ۱۲m/s به طرف پایین پرتاب می‌شود. ۱٫۲۵s پس از پرتاب، ارتفاع سنگ را از سطح زمین به‌دست آورید. سرعت سنگ را در این لحظه به‌دست آورید. سنگ با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟

جواب: $h = ۱۳٫۳\text{m}$، $v_۱ = ۲۴٫۲۵\text{m/s}$، $v = ۲۹٫۱\text{m/s}$

۱۸ . توپی به‌طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. ۱٫۲۵s بعد به $\frac{۳}{۴}$ حداکثر ارتفاع خود می‌رسد. حداکثر ارتفاع و سرعت اولیه توپ را به‌دست آورید.

جواب: $v_\circ = ۲۲٫۷۵\text{m/s}$ و $h = ۲۵٫۹\text{m}$ یا $v_\circ = ۸٫۵\text{m/s}$ و $h = ۳٫۶\text{m}$

۱۹ . موشکی در مدت ۳۸s به شتاب ۱٫۴۵g در جهت قائم می‌رسد. در این لحظه، سوختش تمام می‌شود و فقط شتاب گرانش

به آن وارد می‌شود. حداکثر ارتفاعی که موشک بالا می‌رود، کل زمان سپری شده از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ی برگشت آن به زمین و سرعت برخوردش با زمین را به‌دست آورید. (از وابستگی g به ارتفاع صرف‌نظر کنید.)

جواب: $h = ۲۵۱۳۷\text{m}$، $t = ۱۶۴/۷\text{s}$، $v = ۷۰۱/۷\text{m/s}$

۲۰ . در جاده‌ی مستقیمی، اتومبیلی از حال سکون به‌طور یکنواخت، شتاب می‌گیرد. در نقطه‌ای، سرعتش ۱۲m/s و ۸۰m جلوتر سرعتش ۲۰m/s است:

الف) شتاب اتومبیل را به‌دست آورید. ب) اتومبیل مسافت ۸۰m را در چه زمانی پیموده است؟ ج) در چه مدت زمانی، اتومبیل از حالت سکون به سرعت ۱۲m/s می‌رسد؟ د) هنگامی که سرعت اتومبیل به ۲۰m/s می‌رسد، چه مسافتی را از نقطه‌ی شروع حرکت پیموده است؟

جواب: الف) $a = ۱/۶\text{m/s}^۲$، ب) $t = ۵\text{s}$، ج) $t = ۷/۵\text{s}$، د) $x = ۱۲۵\text{m}$

۲۱ . اتومبیل A با سرعت ثابت ۹۰km/h و اتومبیل B با سرعت ثابت ۷۲km/h در یک جهت، حرکت می‌کنند. در لحظه‌ی $t = ۰$، اتومبیل A ۶۰ متر عقب‌تر از اتومبیل B وارد خط سبقت می‌شود. اتومبیل A وقتی ۲۰ متر از اتومبیل B جلو می‌افتد دوباره به خط خود برمی‌گردد. اتومبیل A چه مدت در خط سبقت بوده و در این مدت چه مسافتی را پیموده است؟

جواب: $t = ۱۶\text{s}$، $x = ۴۰۰\text{m}$

۲۲ . موشکی با شتاب $\frac{۱}{۲}g$ از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌شود. ۸s پس از جدا شدن از سطح زمین، پیچ کوچک شلی از سقف موشک رها می‌شود و به کف موشک می‌افتد. فاصله‌ی سقف موشک از کف آن $۳/۸\text{m}$ است. مدت زمان سقوط پیچ را به‌دست آورید. پیچ نسبت به نقطه‌ی ثابتی روی زمین چه مسافتی را می‌پیماید؟

جواب: $y = ۵۸/۶\text{m}$

۲۳ . دو باراندار به فاصله‌ی ۱km در امتداد ساحل رودخانه‌ای قرار دارند. سرعت جریان آب در رودخانه $۱/۴\text{km/h}$ است. در مدت $۳۰\ \text{min}$ قایق موتوری با سرعت ثابت نسبت به آب این فاصله را می‌رود و برمی‌گردد. سرعت قایق موتوری را نسبت به زمین به‌دست آورید.

جواب: $v = ۴/۴\text{km/h}$

۲۴ . قطاری که با سرعت $v = ۵۴\text{km/h}$ در حال حرکت است. هنگامی که در فاصله‌ی $L = ۴۰۰\text{m}$ از یک چراغ راهنما قرار می‌گیرد شروع به ترمز می‌کند. اگر شتاب قطار بعد از ترمز کردن $a = -۰/۳\text{m/s}^۲$ باشد، مکان آن را ۱ دقیقه پس از شروع ترمزگیری به‌دست آورید.

جواب: $l = ۴۰۰\text{m}$ از چراغ راهنما

۲۵ . بردار شعاعی یک ذره با زمان t به صورت $\vec{r} = \vec{a}t(۱ - \alpha t)$ تغییر می‌کند، که $\vec{a}$ یک بردار ثابت و α ضریبی ثابت است.

الف) سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{w}$ ذره را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید. ب) زمان Δt که طول می‌کشد تا ذره به نقطه‌ی اولیه بازگردد، و مسافت s طی شده در طول این مدت را بیابید.

جواب: الف) $\vec{v} = \vec{a}(۱ - ۲\alpha t)$، $\vec{w} = -۲\alpha\vec{a}$، ب) $\Delta t = \frac{۱}{\alpha}$، $s = \frac{a}{۲\alpha}$

۲۶ . نقطه‌ای در طول کمانی از دایره به شعاع R حرکت می‌کند. سرعت آن به مسافت طی شده با رابطه‌ی $v = a\sqrt{s}$ بستگی دارد، که a یک ثابت است. زاویه‌ی α بین بردار کل شتاب و بردار سرعت را به‌صورت تابعی از s بیابید.

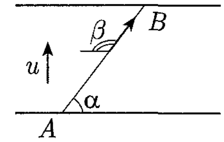
جواب: $\tan\alpha = \frac{۲s}{R}$

۲۷ . دو ذره در لحظه‌ی اولیه در یک مکان واقع شده‌اند و سپس با سرعت‌های $v_۱ = ۳۰\text{m/s}$ و $v_۲ = ۴۰\text{m/s}$ به‌طور افقی در جهت‌های مخالف پرتاب می‌شوند. فاصله‌ی بین این ذرات را در لحظه‌ای که بردار سرعت آنها بر هم عمودند، بیابید.

جواب: $l = ۲/۵\text{m}$

حرکت در دو بعد

۲۸ . یک کشتی در عرض یک رودخانه در طول خط راست AB که با ساحل زاویه‌ی α می‌سازد از نقطه‌ی A به سمت B واقع در ساحل مقابل حرکت می‌کند (شکل ۱ـ۹۳). باد با سرعت u عمود بر ساحل می‌وزد. پرچم روی دکل کشتی با راستای حرکت زاویه‌ی β می‌سازد. سرعت کشتی را نسبت به ساحل پیدا کنید. آیا با استفاده از داده‌های این مسأله می‌توان سرعت جریان آب رودخانه را پیدا کرد؟



شکل ۱-۹۳

جواب: $v = u\dfrac{\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{۲})}{\sin(\pi - \beta)}$

۲۹ . هواپیمایی مسافت ۲۵۰km را در جهت ۴۵° جنوب غربی، پرواز می‌کند. سپس ۴۰۰km به طرف شمال می‌رود. فاصله‌ی هواپیما و جهت مقصد را نسبت به نقطه‌ی آغاز حرکتش به‌دست آورید.

جواب: $R = ۲۸۴٫۷\text{km}$، مثلثاتی $\alpha = ۱۲۸٫۴^\circ$

۳۰ . دو نیرو به جسم ساکن واقع بر سطح افقی وارد می‌شوند. یکی از آنها نیروی ۲۰N در جهت منفی محور xها و دیگری نیروی ۴۵N در جهت ۶۰° نسبت به جهت مثبت محور xها است. اندازه و جهت نیروی مؤثر وارد بر این جسم را به‌دست آورید.

جواب: $F = ۳۹٫۱\text{N}$ و $\theta = ۸۶٫۳^\circ$

۳۱ . بازیکن گلف با سه ضربه، توپ را داخل حفره می‌اندازد. توپ با ضربه‌ی اول ۱۸ft به طرف شمال می‌رود و با ضربه‌ی دوم در جهت ۳۰° شرق جنوب می‌رود. ضربه‌ی سوم، توپ را ۳ft به طرف غرب حرکت می‌دهد و داخل حفره می‌اندازد. فاصله‌ی اولیه‌ی توپ را از حفره به‌دست آورید. در چه جهتی باید به توپ ضربه زده می‌شد تا با یک ضربه داخل حفره بیفتد؟

جواب: $R = ۱۱٫۶۴\text{ft}$، شمال‌شرقی $\theta = ۸۵^\circ$

۳۲ . دو نیروی $F_۱ = ۳۶\text{N}$ و $F_۲$ به جسمی وارد می‌شوند. جهت $\vec{F}_۲$ معلوم و نسبت به جهت مثبت محور xها -۶۰° است. بردار برآیند $\vec{F}_R = ۲۴\text{N}$ و در جهت مثبت محور xها است. اندازه‌ی بردار $\vec{F}_۲$ و جهت بردار $\vec{F}_۱$ را به‌دست آورید.

جواب: $F_۲ = ۱۷٫۵\text{N}$ و $\theta = ۲۵^\circ$ یا $F_۲ = ۴۱٫۲\text{N}$ و $\theta = ۸۵^\circ$

۳۳ . پسری می‌خواهد با تیرکمان، سنگی را به هدفی در فاصله‌ی ۳۰ متری و هم ارتفاع شانه‌اش بزند. او پس از چند بار تلاش، متوجه می‌شود برای اینکه سنگ به هدف بخورد باید $۴٫۳\text{m}$ بالاتر از هدف را نشانه بگیرد. سنگ با چه سرعتی از تیرکمان جدا می‌شود؟

جواب: $v_۰ = ۳۲٫۳\text{m/s}$

۳۴ . هواپیمای کوچکی با سرعت ۱۸۰km/h در ارتفاع ۲۴۰ متری، پرواز می‌کند. بسته‌ای را برای سیل‌زدگان، روی سقف مسطح ساختمانی می‌اندازد. خلبان در چه فاصله‌ای از سقف باید بسته را رها کند تا بسته درست روی سقف فرود بیاید؟

جواب: $R = ۳۵۰\text{m}$

۳۵ . معادله‌ی مکان یک ذره $\vec{r}$، که در صفحه xy حرکت می‌کند، به صورت $\vec{r} = (۲٫۰۰t^۳ - ۵٫۰۰t)\hat{i} + (۶٫۰۰ - ۷٫۰t^۴)\hat{j}$ است که در آن $\vec{r}$ بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. در لحظه‌ی $t = ۲٫۰۰\text{s}$:

الف) بردارهای $\vec{r}$، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ را معین کنید.

ب) زاویه‌ی خط مماس بر مسیر ذره نسبت به محور $+x$ چیست؟

جواب: الف) $\vec{r} = (۶\hat{i} - ۱۰۶\hat{j})\text{m}$ و $\vec{v} = (۱۹٫۰\hat{i} - ۲۲۴\hat{j})\text{m/s}$ و $\vec{a} = (۲۴٫۰\hat{i} - ۳۳۶\hat{j})\text{m/s}^۲$، ب) $\theta = -۸۵٫۲^\circ$

۳۶ . ذره‌ای با سرعت آغازی $\vec{v} = (۳٫۰۰\hat{i})\text{m/s}$ و شتاب ثابت $\vec{a} = (-۱٫۰۰\hat{i} - ۰٫۵۰۰\hat{j})\text{m/s}^۲$ از مبدأ مختصات شروع به حرکت می‌کند. وقتی ذره به مختصه x بیشینه می‌رسد، بردار سرعت و بردار مکان آن چیست؟

جواب: $\vec{v} = (-۱٫۵\hat{j})\text{m/s}$ و $\vec{r} = (۴٫۵۰\hat{i} - ۲٫۲۵\hat{j})\text{m}$

۳۷ . یک گوی بیسبال با تندی افقی ۱۶۱km/h از دست گوی‌انداز رها می‌شود. فاصله‌ی گوی‌انداز تا گوی‌زن $۱۸٫۳\text{m}$ است (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید). گوی ذکر شده:

الف) نیمه‌ی اول فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ ب) نیمه‌ی بعدی فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ پ) گوی در طی نیمه‌ی اول فاصله چقدر به‌طور آزاد سقوط می‌کند؟ ت) گوی پس از پیمودن نیمه‌ی بعدی فاصله چقدر پایین می‌آید؟

جواب: الف) $t = ۰٫۲۰۵\text{s}$، ب) $t = ۰٫۲۰۵\text{s}$، پ) $h = ۲۰٫۵\text{cm}$، ت) $h = ۶۱٫۵\text{cm}$

۳۸ . توپی از زمین به هوا پرتاب شده است. سرعت آن در ارتفاع ۹٫۱ متری، بر حسب متر بر ثانیه، برابر است با $\vec{v} = ۷٫۶\hat{i} + ۶٫۱\hat{j}\,\text{m/s}$ ($\hat{i}$ در راستای افقی و $\hat{j}$ در راستای قائم و به طرف بالاست).

الف) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ ب) مسافت

کل افقی پیموده شده توسط توپ چقدر است؟ پ) بزرگی و زاویه‌ی سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین چیست؟

جواب: الف) $h = ۱۱\text{m}$، ب) $s = ۲۳\text{m}$، پ) $v = ۱۷\text{m/s}$ و $\theta = ۶۳^\circ$ زیر راستای افق

۳۹ . قطاری با تندی ۳۰m/s (نسبت به زمین) به سمت جنوب حرکت می‌کند و قطره‌های باران به دلیل وزش باد متمایل به سمت جنوب فرو می‌ریزند. از دید ناظری که روی زمین ایستاده است، مسیر قطره‌های باران با راستای قائم زاویه‌ی ۷۰° می‌سازد. اما از دید ناظری که در قطار نشسته است، قطره‌های باران کاملاً به‌طور قائم می‌بارند. تندی قطره‌های باران را نسبت به زمین حساب کنید.

جواب: $v_\circ = ۱۷/۵\text{m/s}$

۴۰ . بشقاب پرنده‌ی اسباب‌بازی (فریزبی) در لابه‌لای شاخه‌های درختی به ارتفاع ۱۴m بالاتر از شانه‌های شخصی قرار دارد. او سعی می‌کند با پرتاب سنگ از فاصله‌ی ۱۰ متری آن را از لابه‌لای شاخه‌ها خارج کند. وقتی سنگ به بشقاب پرنده برخورد می‌کند، بردار سرعتش در جهت افق است. بردار سرعت اولیه‌ی سنگ و سرعت برخوردش به بشقاب پرنده را به‌دست آورید.

جواب: $v_\circ = ۱۷/۷\text{m/s}$ و $\theta = ۷۰/۳^\circ$، $v = ۵/۹\text{m/s}$

۴۱ . هواپیمای کوچکی با سرعت ۲۸۰km/h نسبت به هوا به‌طور افقی در حال پرواز است. اگر مقصد هواپیما شمال باشد و بادی با سرعت ۶۰km/h از شمال‌شرقی بوزد. هواپیما باید در چه جهتی حرکت کند؟ سرعت آن نسبت به زمین چقدر است؟

جواب: $\theta = ۱۲/۴^\circ$ و $v = ۲۷۳/۵\text{km/h}$

۴۲ . خلبان هواپیمایی متوجه می‌شود که باید در جهت ۱۸° شمال‌شرقی حرکت کند تا هواپیما نسبت به زمین به طرف شرق برود. سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۶۰km/h و سرعتش نسبت به زمین ۲۸۰km/h است. سرعت باد چقدر است؟

جواب: $v = ۸۶/۷\text{km/h}$

۴۳ . دو پسر تصمیم می‌گیرند در رودخانه‌ای مسابقه دهند. سرعت جریان آب رودخانه u است. یکی از پسرها در عرض رودخانه به نقطه‌ی روبه‌روی نقطه‌ی آغاز حرکتش شنا می‌کند و برمی‌گردد. دیگری به نقطه‌ای در پایین رودخانه به اندازه‌ی عرض رودخانه، شنا می‌کند و برمی‌گردد. اگر هر دو پسر با سرعت $v > u$ نسبت به آب حرکت کنند کدامیک برنده می‌شود؟

جواب: $\frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\sqrt{v^۲ - u^۲}}{v}$، اولی زودتر از دومی می‌رسد.

۴۴ . هواپیمایی از فرودگاه A بلند می‌شود و می‌خواهد به فرودگاه B در فاصله‌ی ۲۵۰ کیلومتری شمال A برود. سرعت هواپیما نسبت به هوا ۱۸۰km/h است. در آن روز بادی با سرعت ۶۰km/h از طرف جنوب شرقی می‌وزد. هواپیما در چه جهت قطب‌نما باید پرواز کند؟ پرواز چه مدت طول می‌کشد؟

جواب: نسبت به افق $\theta = ۷۶/۴^\circ$، $t = ۱/۱۵\text{h}$

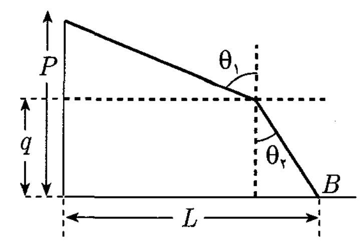
۴۵ . ذره‌ای در صفحه‌ی xy بنابر رابطه‌ی $x = a\sin\omega t$ و $y = a(۱ - \cos\omega t)$ حرکت می‌کند، که a و ω ثابت‌های مثبتند. زاویه‌ی بین بردار شتاب و سرعت را به‌دست آورید.

جواب: $\theta = \frac{\pi}{۲}$

سؤال‌های المپیاد فصل ۱

۱ ماشینی از نقطه‌ی A به مختصات $(x_A = o, y_A = p)$ به نقطه‌ی B به مختصات $(x_B = l, y_B = o)$ می‌رود. در ناحیه $y > q$ تندی ماشین برابر مقدار ثابت v_1 و در ناحیه $y < q$ تندی ماشین برابر مقدار ثابت v_2 است، که در آن $v_2 < v_1$ است. نشان دهید که ماشین می‌تواند در کمترین مدت به B برسد اگر مسیری مطابق شکل (۱ـ۹۴) طی کند، به‌طوری که:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (1)$$



شکل ۱-۹۴

تذکر

این مسأله نظیر حالت شکست نور به هنگام رفتن از یک محیط به محیط دیگر است و در آنجا رابطه‌ی (۱) را می‌توان از اصل کمترین زمان فرما به‌دست آورد.

«مرحله اول اولین المپیاد فیزیک ایران ـ مسأله ۱»

۲ متحرکی در ۲ متری مبدأ قرار دارد. از این نقطه ۳ متر به طرف شرق و ۴ متر به طرف جنوب حرکت می‌کند. فاصله‌ی نهایی متحرک از مبدأ چند متر است؟

الف) ۵ متر
ب) ۷ متر
ج) ۶/۴ متر
د) با این داده‌ها قابل محاسبه نیست

«مرحله اول دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴»

۳ اتومبیل فاصله‌ی بین دو شهر را با سرعت متوسط $60\,\mathrm{km/h}$ طی کرده است. کدامیک از جملات زیر قطعاً درست است؟

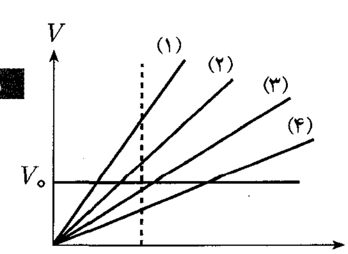
الف) اتومبیل در بین راه توقف نکرده است.
ب) اتومبیل با سرعت $60\,\mathrm{km/h}$ حرکت کرده است.
ج) فاصله‌ی دو شهر از $60\,\mathrm{km}$ بیشتر نیست.
د) سرعت اتومبیل حداقل یک بار $60\,\mathrm{km/h}$ بوده است.

«مرحله‌ی اول دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۵»

۴ گلوله‌ی A از بام ساختمانی به ارتفاع $24\mathrm{m}$ بدون سرعت اولیه رها می‌شود. هم‌زمان با آن گلوله‌ی B را از سطح زمین در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. در هنگام رسیدن دو گلوله به هم، اندازه‌ی سرعت گلوله‌ی A دو برابر اندازه‌ی سرعت گلوله‌ی B است. نقطه‌ی برخورد دو گلوله در چه ارتفاعی از سطح زمین بر حسب متر قرار دارد؟ «مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۹»

۵ کامیونی با سرعت ثابت v_0 درست در لحظه‌ی سبز شدن چراغ راهنمایی به چهار راه می‌رسد و بدون تغییر سرعت از چهار راه می‌گذرد. در همین لحظه اتومبیل از حال سکون با شتاب ثابت از چهار راه شروع به حرکت می‌کند و بعد از زمان T به کامیون می‌رسد. کدامیک از خطوط نمودار شکل (۱ـ۹۵) تغییرات سرعت اتومبیل بر حسب زمان را نشان می‌دهد.

الف) ۱
ب) ۲
ج) ۳
د) ۴



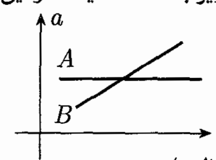
شکل ۱-۹۵

۶ دو جسم را از یک ارتفاع h با سرعت‌های افقی v_1 و v_2 $(v_1 > v_2)$ پرتاب می‌کنیم. دو جسم به دیواری قائم در فاصله‌ی l از نقطه‌ی پرتاب برخورد می‌کنند، به‌طوری که دو محل برخورد، ارتفاع h را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. نسبت $\frac{v_1}{v_2}$ چقدر است؟

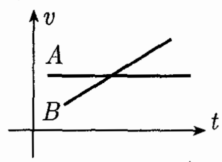
الف) $\sqrt{2}$ ب) ۲   ج) ۳   د) $\sqrt{3}$

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

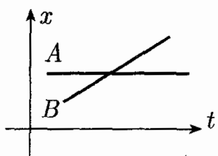
۷ دو خودروی A و B در جاده‌ای در حرکت‌اند. اگر متغیرهای حرکت آنها یکی از نمودارهای شکل زیر باشد، کدامیک از این نمودارها حتماً یک تصادف را نشان می‌دهد؟



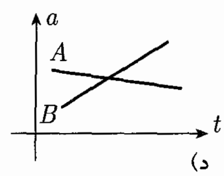
الف)



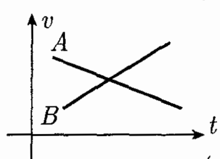
ب)



ج)



د)



ه)

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲»

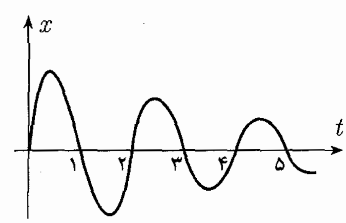
۸ متحرکی $\frac{1}{2}$ مسیر خود را با سرعت v، $\frac{1}{4}$ مسیر را با سرعت $\frac{v}{2}$، $\frac{1}{8}$ مسیر را با سرعت $\frac{v}{4}$، ...، و به همین صورت تا انتها طی می‌کند. سرعت متوسط این متحرک چقدر است؟

الف) $\frac{v}{2}$ ب) $\frac{v}{3}$ ج) $\frac{v}{4}$ د) صفر

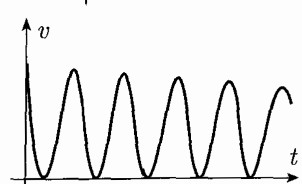
«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴»

۹ نمودار مکان ـ زمان جسمی مطابق شکل (۱ـ۹۶) است.

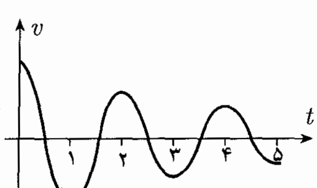
نمودار سرعت ـ زمان آن کدام یک از شکل‌های زیر است؟



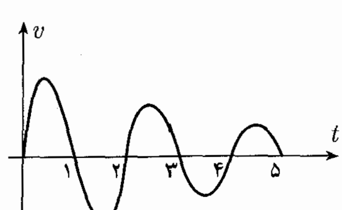
شکل ۱ـ۹۶



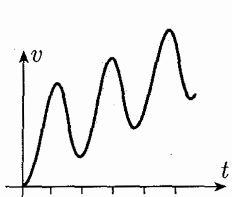
الف)



ب)



ج)

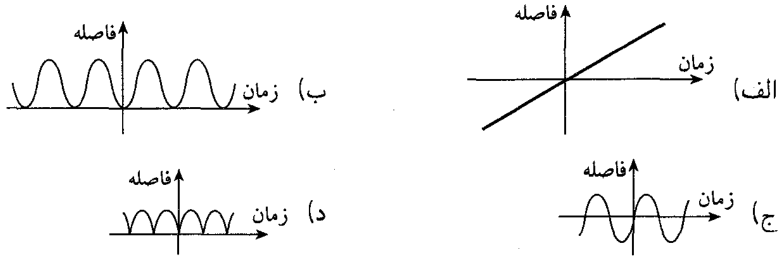


د)

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۹»

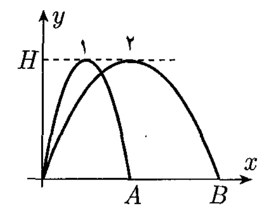
۱۰ متحرکی با سرعت ثابت روی دایره‌ای حرکت می‌کند. نمودار فاصله‌ی متحرک از نقطه‌ی ثابت A

روی محیط دایره، بر حسب زمان، شبیه کدامیک از شکل‌های زیر است؟



«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۱»

۱۱ نمودار حرکت دو پرتابه‌ی ۱ و ۲ مطابق شکل (۱ـ۹۷) است. دو پرتابه هم‌زمان پرتاب می‌شوند و ارتفاع اوجشان یکسان است. کدام گزینه درست است؟



شکل ۱-۹۷

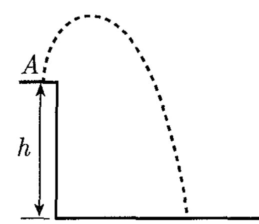
الف) پرتابه‌ها هم‌زمان و به ترتیب به نقاط A و B می‌رسند.

ب) پرتابه‌ی ۱ زودتر به A می‌رسد.

ج) پرتابه ۲ زودتر به B می‌رسد.

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۰»

۱۲ توپی را مطابق شکل (۱ـ۹۸) از نقطه‌ی A پرتاب می‌کنیم. مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت اولیه‌ی توپ به ترتیب v_x و v_y است. پس از برخورد توپ با زمین، اندازه‌ی مؤلفه‌ی قائم سرعت آن e برابر می‌شود. (e ضریب جهندگی نام دارد.) فرض کنید مؤلفه‌ی افقی سرعت ثابت می‌ماند. می‌خواهیم سرعت توپ پس از برخورد به زمین، با سرعت اولیه‌ی آن برابر باشد. کدام گزینه درست است؟ (شتاب جاذبه g است.)



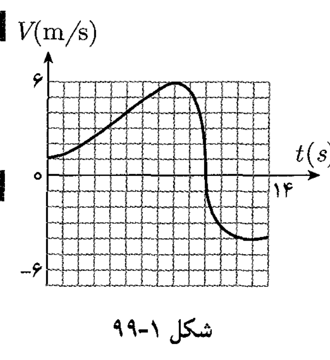
شکل ۱-۹۸

الف) $\sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \dfrac{e\sqrt{۲gh}}{۱ - e}$ ب) $v_y = \dfrac{e\sqrt{۲gh}}{۱ - e}$

ج) $\sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \dfrac{e\sqrt{۲gh}}{\sqrt{۱ - e^۲}}$ د) $v_y = \dfrac{e\sqrt{۲gh}}{\sqrt{۱ - e^۲}}$

«مرحله اول سیزدهمین المپیاد فیزیک سؤال ۲۹»

۱۳ نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک، از $t = ۰$ تا $t = ۱۴\text{s}$، مطابق شکل (۱ـ۹۹) است. در این مدت بیشترین فاصله‌ی متحرک از محل اولیه‌ی آن چند متر است؟



شکل ۱-۹۹

«مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۴»

۱۴ اتومبیلی در یک جاده‌ی افقی بدون پیچ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. هوا ساکن است و باران می‌بارد. قطره‌های باران با سرعت ثابت u سقوط می‌کنند.

الف) بردار سرعت قطره‌های باران نسبت به اتومبیل را به‌دست آورید. (اندازه‌ی بردار و زاویه‌ی آن نسبت به سطح زمین را به‌دست آورید.)

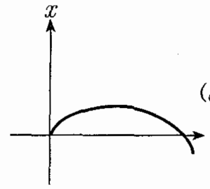
ب) فرض کنید زاویه‌ی شیشه‌ی جلوی اتومبیل با راستای قائم α باشد. چه شرطی بین α، u و v برقرار باشد تا بارانی که به شیشه‌ی جلوی اتومبیل می‌خورد، روی شیشه شروع به بالا رفتن کند؟

«مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

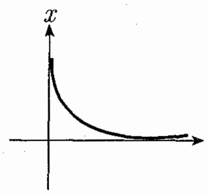
۱۵ سرعت جریان یک رود $v_۱$ است. رود به طرف شرق جریان دارد. روی این رود یک قایق با سرعت ثابت $v_۲$ نسبت به آب به طرف شرق حرکت می‌کند. در $t = ۰$ یک تکه چوب از قایق با سرعت

$v_۳$ به طرف شرق، نسبت به قایق، در رود پرتاب می‌شود. جهت مثبت را رو به شرق می‌گیریم. نمودار مکان این تکه چوب نسبت به قایق (x) بر حسب زمان کدام است؟

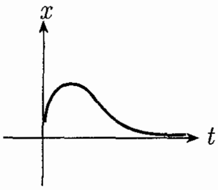
الف)



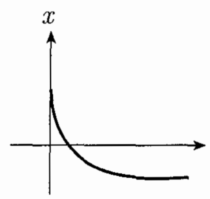
ب)



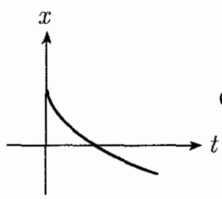
ج)



د)



ه)



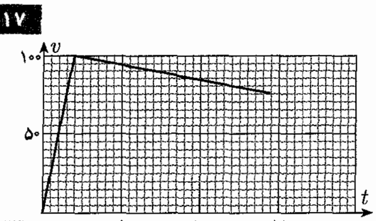
«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴»

۱۶ ذره‌ی ۱ با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند و با ذره‌ی مشابه دیگری (ذره‌ی ۲) برخورد می‌کند. ذره‌ی ۲ ساکن است. از دید یک دستگاه مختصات دیگر، ذره‌ی ۱ با سرعت v' به طرف راست و ذره‌ی ۲ با سرعت $-v'$ حرکت می‌کند. پس از برخورد، سرعت ۱ در این دستگاه مختصات $-\frac{v'}{۲}$ است و سرعت ذره‌ی ۲ در همین دستگاه مختصات $\frac{v'}{۲}$ می‌شود. سرعت ذره‌ی ۱ پس از برخورد، از دید دستگاه اول چقدر است؟ (**راهنمایی**: فرض کنید سرعت یک ذره، در یک دستگاه مختصات v باشد. اگر دستگاه مختصات دیگری با سرعت V نسبت به دستگاه مختصات اول حرکت کند، در این صورت سرعت نسبت به دستگاه مختصات دوم $v' = v - V$ می‌شود.)

الف) ۰ ب) $\frac{v}{۴}$ ج) $\frac{v}{۳}$ د) $\frac{v}{۲}$ ه) $\frac{۳v}{۴}$

«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۸»

۱۷ نمودار سرعت ـ زمان یک شناگر مطابق شکل (۱ـ۱۰۰) است. سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی صفر تا t را $\overline{v}(t)$ می‌نامیم. بیشینه‌ی $\overline{v}(t)$ برای این شناگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟



شکل ۱ـ۱۰۰

«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۱»

۱۸ شخصی از بالای یک ساختمان دو گلوله را به فاصله‌ی زمانی t رها می‌کند. وقتی گلوله‌ی دوم رها می‌شود، گلوله‌ی اول به اندازه‌ی h سقوط کرده است. دو شخص دیگر (A, B) در طبقه‌های پایین همان ساختمان‌اند. وقتی گلوله‌ی اول به B می‌رسد، گلوله‌ی دوم به A می‌رسد. فاصله‌ی این دو نفر از هم H است. اختلاف زمانی گذشتن دوگلوله از کنار A برابر T است. کدام گزینه

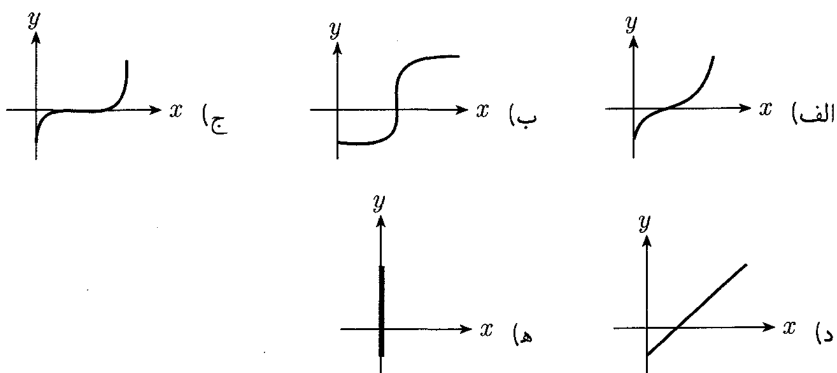
درست است؟

الف) $T < t$ و $H = h$ ب) $T = t$ و $H = h$

ج) $T < t$ و $H > h$ د) $T = t$ و $H > h$

«مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۲»

۱۹ فردی می‌خواهد با قایق از رودخانه‌ای عبور کند. سرعت پارو زدن او در آب ساکن را v بگیرید. او همواره در جهت عرض رودخانه پارو می‌زند. سرعت آب رودخانه از ساحل تا وسط آن تقریباً با فاصله از ساحل نزدیک‌تر متناسب است. منحنی مسیر حرکت قایق کدام است؟ محور x در طول رودخانه و محور y در عرض آن است.



«مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۵»

۲۰ قطاری روی یک ریل مستقیم حرکت می‌کند. مسافری که در قطار، رو به شمال ایستاده است، یک توپ را رها می‌کند و مشاهده می‌کند که توپ کمی جلوتر به کف قطار می‌رسد. در این صورت:

الف) قطار حتماً به طرف شمال حرکت می‌کند.

ب) قطار حتماً به طرف جنوب حرکت می‌کند.

ج) قطار حتماً به طرف شمال شتاب دارد.

د) قطار حتماً به طرف جنوب شتاب دارد.

«مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۶»

۲۱ اتوبوسی در یک ایستگاه ایستاده است. شخصی با سرعت ثابت v می‌دود تا به اتوبوس برسد. وقتی فاصله‌ی این شخص تا اتوبوس $۸\mathrm{m}$ است، اتوبوس با شتاب $۱\mathrm{m/s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند. اگر سرعت شخص تغییر کند، سرعتش حداقل چند متر بر ثانیه باشد تا به اتوبوس برسد؟

«مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۲»

۲۲ یک اتومبیل روی یک جاده‌ی مستقیم حرکت می‌کند. در هر یک از زمان‌های $t = ۱\mathrm{s}$، $t = ۲\mathrm{s}$ و $t = ۳\mathrm{s}$، یک کیسه از اتومبیل روی جاده می‌افتد. فاصله‌ی کیسه‌ی اول تا کیسه‌ی دوم $۲۰\mathrm{m}$، و فاصله‌ی کیسه‌ی دوم تا کیسه‌ی سوم $۳۰\mathrm{m}$ است. جهت مثبت را جهت حرکت اتومبیل بگیرید.

کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً سرعت متوسط اتومبیل بین $t = ۲\text{s}$ و $t = ۳\text{s}$ از سرعت متوسط اتومبیل بین $t = ۱\text{s}$ و $t = ۲\text{s}$ بیشتر است.

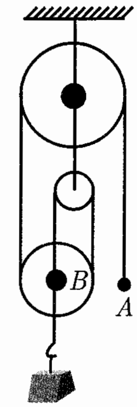
ب) حتماً سرعت اتومبیل در $t = ۲\text{s}$، از سرعت اتومبیل در $t = ۳\text{s}$ بیشتر است.

ج) حتماً شتاب اتومبیل در $t = ۲\text{s}$ مثبت است.

د) حتماً شتاب متوسط اتومبیل بین $t = ۱\text{s}$ و $t = ۳\text{s}$ مثبت است.

۲۳ انتهای طناب (نقطه‌ی A) در شکل (۱ـ۱۰۱) به اندازه‌ی l پایین کشیده می‌شود. مرکز قرقره متحرک (نقطه‌ی B) چقدر جابه‌جا خواهد شد؟

الف) l ب) $\frac{l}{۲}$ ج) $\frac{l}{۳}$ د) $\frac{l}{۴}$



شکل ۱ـ۱۰۱

«مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۸»

۲۴ یوزپلنگی آهویی را در فاصله‌ای می‌بیند و به سوی آن می‌رود. سرعت یوزپلنگ ۱۹۵km/h است و یوزپلنگ حداکثر می‌تواند یک دقیقه با این سرعت بدود. سرعت آهو ۶۵km/h است و آهو می‌تواند چند دقیقه با این سرعت بدود. فرض کنید یوزپلنگ می‌تواند آهویی را که حداکثر در فاصله‌ی D قرار دارد، بگیرد. اگر یوزپلنگ و آهو برای رسیدن به سرعت نهایی ۴ ثانیه زمان لازم داشته باشند، همچنین آهو پس از دیدن یوزپلنگ آناً فرار نکند، بلکه حدود ۲ ثانیه تأخیر داشته باشد، D حداکثر چند درصد تغییر می‌کند؟

الف) ٪۱ ب) ٪۱۰ ج) ٪۵۰ د) ٪۱۰۰

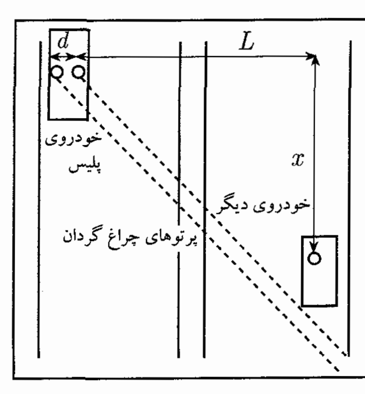
«مرحله اول شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۱»

۲۵ چراغ گردان خودروهای پلیس، متشکل از یک چراغ و یک آینه‌ی همگرا است، به گونه‌ای که چراغ در نقطه‌ی کانونی آینه است و در نتیجه نور چراغ به صورت موازی از آینه باز می‌تابد. آینه با سرعت زاویه‌ای ω حول چراغ می‌چرخد، یعنی هر ثانیه به اندازه‌ی زاویه‌ی ω رادیان می‌چرخد. یک خودروی پلیس در یک سمت یک بزرگراه ایستاده است و روی آن دو چراغ گردان به فاصله‌ی d از هم قرار دارند. دو چراغ گردان با سرعت زاویه‌ای یکسان ω می‌چرخند و پرتوهای آنها با هم موازی است. خودروی دیگری مانند شکل (۱ـ۱۰۲)، در سوی دیگر بزرگراه ایستاده است. فاصله‌ی چراغ گردان نزدیک‌تر تا این سوی دیگر بزرگراه (که خودروی دوم ایستاده است) برابر L است. $(d \ll L)$

الف) پرتوهای دو چراغ گردان با اختلاف زمانی T به چشم راننده‌ی خودرودی دوم می‌رسد. این اختلاف زمانی را بر حسب پارامترهای مسأله به تقریب به‌دست آورید و نمودار T بر حسب x را بکشید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک α می‌توانید فرض کنید که $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$، که α بر حسب رادیان است.

ب) بیشینه‌ی این اختلاف زمانی، به ازای xهای مختلف، چقدر است؟ این مقدار را به ازای $L = ۳۰\text{m}$، $d = ۱\text{m}$ و $\omega = ۶\text{rad/s}$ حساب کنید.



شکل ۱ـ۱۰۲

«مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۱»

۲۶ فردی می‌خواهد با قایق از یک طرف رودخانه‌ای به عرض $d = 50\,\mathrm{m}$ به طرف دیگر آن برود. سرعت پارو زدن او نسبت به آب ساکن $v = 3\,\mathrm{m/s}$ است. او در چه جهتی پارو بزند تا **طول مسیرش** به سمت دیگر رودخانه کوتاه‌ترین مقدار باشد. مسأله را برای دو حالت زیر حل کنید.

الف) سرعت آب رودخانه $u = 2\,\mathrm{m/s}$ است.

ب) سرعت آب رودخانه $u = 4\,\mathrm{m/s}$ است.

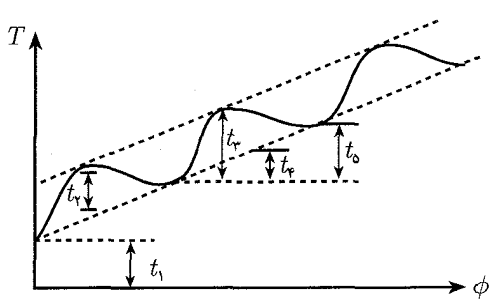
«مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۶»

۲۷ خودروی شماره‌ی ۱ در $t = 0$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و تا زمان $t = t_1$ شتابش مقدار ثابت a_1 است. پس از $t = t_1$ شتابش مقدار ثابت a_2 می‌شود. خودروی شماره‌ی ۲ در $t = 0$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتابش مقدار ثابت a است، طوری که $0 < a_1 < a < a_2$. در $t = T$ سرعت لحظه‌ای دو خودرو برابر است. سرعت متوسط خودروی ۱ از $t = 0$ تا $t = T$ را $\overline{v_1}$ و سرعت متوسط خودروی ۲ از $t = 0$ تا $t = T$ را $\overline{v_2}$ می‌نامیم کدامیک از گزینه‌ها درست است؟

الف) $\overline{v_1} > \overline{v_2}$ ب) $\overline{v_1} = \overline{v_2}$ ج) $\overline{v_1} < \overline{v_2}$

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۵»

۲۸ یو (I_0) یکی از قمرهای برجیس (مشتری) است که روی مداری دایره‌ای دور برجیس می‌گردد. زاویه‌ی میان خط واصل این قمر به مرکز برجیس با خط واصل برجیس به خورشید را ϕ می‌نامیم. رابطه‌ی ϕ با زمان به شکل $\phi = \omega t$ است، که ω مقداری ثابت است. نوری که در زمان $t = \dfrac{\phi}{\omega}$ از این قمر گسیل می‌شود، در زمان T به زمین می‌رسد. چون فاصله‌ی زمین از یو ثابت نیست، بستگی T به ϕ پیچیده‌تر از بستگی t به ϕ است. نمودار بستگی T به ϕ به شکل زیر است. مدار زمین به دور خورشید را دایره‌ای به قطر D بگیرید. از فاصله‌ی یو تا برجیس، در مقایسه با فاصله‌ی برجیس تا زمین و نیز قطر مدار زمین به دور خورشید چشم بپوشید، و فرض کنید حرکت مداری برجیس آن‌قدر کند است که طی یک سال زمینی، برجیس تقریباً جابه‌جا نمی‌شود. برجیس روی صفحه‌ی شامل مدار زمین به دور خورشید است. سرعت نور، بر حسب D و پارامترهای مشخص شده در شکل (۱ـ۱۰۳) کدام است؟



شکل ۱-۱۰۳

الف) $\dfrac{D}{t_1}$ ب) $\dfrac{D}{t_2}$ ج) $\dfrac{D}{t_3}$ د) $\dfrac{D}{t_4}$ هـ) $\dfrac{D}{t_5}$

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۱»

۲۹ شخصی ساعت ۶ صبح با خودرو از تهران عازم اصفهان می‌شود و ساعت $10 : 40'$ صبح

همان روز به اصفهان می‌رسد. این شخص ساعت ۸ صبح روز بعد با خودرو از اصفهان به تهران برمی‌گردد و ساعت ۲ بعدازظهر همان روز به تهران می‌رسد. یک نقطه‌ی دلخواه از مسیر را در نظر بگیرید. این نقطه را A می‌نامیم. هنگامی که این شخص در مسیر رفت به نقطه‌ی A می‌رسد، ساعت او عدد T_1 را نشان می‌دهد. در برگشت از اصفهان، هنگام رسیدن به نقطه‌ی A ساعت وی عدد T_2 را نشان می‌دهد. کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً نقطه‌ای از مسیر وجود دارد طوری که $T_1 = T_2$.

ب) هیچ نقطه‌ای از مسیر وجود ندارد طوری که $T_1 = T_2$.

ج) ممکن است نقطه‌ای از مسیر وجود داشته باشد و ممکن است وجود نداشته باشد طوری که $T_1 = T_2$.

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۷»

۳۰ یک هواپیما ساعت ۸ صبح به وقت محلی تورنتو عازم بلگراد، که در شرق آن واقع است، می‌شود. این هواپیما در همان روز، ساعت ۲۲ و ۳۵ دقیقه به وقت محلی بلگراد وارد آن شهر می‌شود. عرض جغرافیایی هر دو شهر ۴۵ درجه‌ی شمالی است. هواپیما مسیر میان دو شهر را روی مداری که از دو شهر می‌گذرد با سرعت متوسط $900\,\mathrm{km/h}$ نسبت به زمین می‌پیماید. طول جغرافیایی تورنتو ۷۵ درجه‌ی غربی است. طول جغرافیایی شهر بلگراد چند درجه‌ی شرقی است؟ (شعاع کره‌ی زمین را $6400\,\mathrm{km}$ بگیرند.)

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۲»

۳۱ خودرویی پشت چراغ قرمز ایستاده است. در $t = 0$ چراغ سبز می‌شود. و خودرو با شتاب ثابت $1\,\mathrm{m/s^2}$ راه می‌افتد. خودرو به مدت T با همین شتاب حرکت می‌کند، و پس از آن با سرعت ثابت به راه خودش ادامه می‌دهد. فاصله‌ی چهار راه بعدی تا این چراغ $450\,\mathrm{m}$ است. چراغ چهار راه بعدی در $t = 50\,\mathrm{s}$ سبز می‌شود. بیشینه‌ی T برای اینکه وقتی خودرو به چهار راه بعدی می‌رسد چراغ سبز باشد چند ثانیه است؟

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۹»

۳۲ می‌خواهیم عمق چاه، یعنی فاصله‌ی بین سطح آب درون چاه با سطح زمین را بسنجیم. برای این کار سنگی را به درون چاه می‌اندازیم و زمان بین رها شدن سنگ تا شنیدن صدای برخورد سنگ با سطح آب توی چاه، T، را با کرونومتر می‌سنجیم. اگر فرض کنیم صوت با سرعت بی‌نهایت منتشر شود و T را با دقت خیلی خوبی سنجیده‌ایم، آن وقت عمق چاه می‌شود $h_0 = \frac{1}{2}gT^2$. اگر صوت با سرعت بی‌نهایت منتشر شودو دقت زمان‌سنجی حدود $0{,}2\,\mathrm{s}$ باشد، عمق چاه می‌شود $h_0 + h_1$. اگر خطای زمان‌سنجی نداشته باشیم و سرعت صوت را $330\,\mathrm{m/s}$ بگیریم، عمق چاه می‌شود $h_0 + h_2$.

الف) $|h_1|$ تقریباً چقدر است؟

ب) در صورت امکان، علامت h_1 را تعیین کنید.

ج) $|h_2|$ تقریباً چقدر است؟ (دقت کنید که زمان برگشت صوت از ته چاه نسبت به زمان رسیدن سنگ به سطح آب، بسیار کوچک است.)

د) اگر می‌توان، علامت h_2 را تعیین کنید.

راهنمایی: اگر $|\epsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد، آنگاه $(1 + \epsilon)^2 \simeq 1 + 2\epsilon$.

«مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۳»

۳۳ یک جسم روی محور x حرکت می‌کند. این جدول مکان این جسم (x) در چند زمان (t) را نشان می‌دهد.

x	0	2m	5m
t	$t_0 = 0\text{s}$	$t_1 = 1\text{s}$	$t_2 = 3\text{s}$

کدام گزینه درست است؟

الف) شتاب جسم در هر زمان بین t_0 و t_2، حتماً مثبت است.

ب) شتاب جسم در هر زمان بین t_0 و t_2، حتماً منفی است.

ج) شتاب جسم در هر زمان بین t_0 و t_1، حتماً از شتاب جسم در هر زمان بین t_1 و t_2 بیشتر است.

د) شتاب جسم در هر زمان بین t_0 و t_1، حتماً از شتاب جسم در هر زمان بین t_1 و t_2 کمتر است.

ه) بین t_0 و t_2، شتاب جسم اگر ثابت باشد مثبت است. اما ممکن است شتاب جسم ثابت نباشد.

و) بین t_0 و t_2، شتاب جسم اگر ثابت باشد منفی است. اما ممکن است شتاب جسم ثابت نباشد.

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۵»

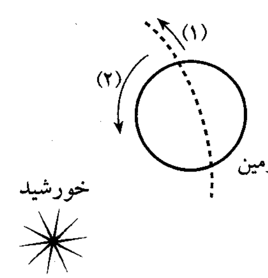
۳۴ فرض کنید سرعت حرکت قطارهای مترو، جز در زمان شتاب گرفتن، به‌طور معمول 10m/s^2 است. در صورت نیاز به جبران تأخیر، قطار می‌تواند با سرعت حداکثر 12m/s حرکت کند. شتاب سرعت گرفتن و ترمز کردن قطار همواره 1m/s^2 است. فاصله‌ی همه‌ی ایستگاه‌ها با هم برابر است و در شرایط عادی خروج از ایستگاه اول تا ورود به ایستگاه دوم ۱۰۰ ثانیه طول می‌کشد. اگر قطار در یک ایستگاه ۳۰ ثانیه بیشتر توقف کند، حداقل چند ایستگاه بعد می‌تواند به برنامه‌ی زمان‌بندی شده بازگردد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۲»

۳۵ مطابق شکل (۱ـ۱۰۴) پیکان شماره‌ی ۱ جهت سرعت حرکت زمین به دور خورشید را نشان می‌دهد، و پیکان شماره‌ی ۲ جهت سرعت چرخش زمین به دور محور خود را نشان می‌دهد. فرض کنید صفحه‌ی استوای زمین و صفحه‌ی مدار زمین به دور خورشید بر هم منطبق‌اند. شخصی روی استوا ایستاده است. در چه موقع جهت قائم آن شخص (رو به بالا) جهت حرکت زمین به دور خورشید را نشان می‌دهد؟

الف) طلوع خورشید ب) ظهر ج) غروب خورشید د) نیمه‌ی شب



شکل ۱-۱۰۴

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

۳۶ از بالای سطح زمین توپی با سرعت اولیه‌ی v_0 به بالا پرتاب می‌شود. بعد از زمان T از همان نقطه توپ دیگری بدون سرعت اولیه رها می‌شود. شرط لازم و کافی برای آنکه دو توپ پس از رها شدن توپ دوم، در نقطه‌ای از مسیر به هم برسند، چیست؟ فرض کنید ارتفاع نقطه‌ی پرتاب توپ از سطح زمین بسیار زیاد است، g شتاب گرانش زمین است.

الف) $v_0 < gT$ ب) $v_0 > \frac{gT}{2}$

ج) $\frac{gT}{2} < v_0 < gT$ د) $gT < v_0 < \sqrt{2}gT$

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۱»

۳۷ یک قطره در زمان صفر شروع به سقوط آزاد می‌کند. یک قطره‌ی دیگر در زمان Δt از همان نقطه‌ی A شروع به سقوط آزاد می‌کند. مشتق زمانی فاصله‌ی این دو قطره از هم در زمان t چیست؟ (g شتاب گرانش زمین است.)

الف) gt ب) $g\frac{t+\Delta t}{۲}$ ج) $g\Delta t$ د) $g\frac{\Delta t^۲}{t}$

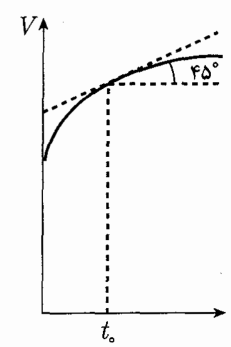
«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۷»

۳۸ در یک بزرگراه شرقی ـ غربی، خودرویی با سرعت ۱۲۰km/h به طرف شرق در حرکت است. راننده‌ی این خودرو، کامیون‌هایی را که در طرف دیگر بزرگراه، به سوی غرب می‌روند می‌شمارد، و می‌بیند که هر ۱۰ دقیقه ۷۰ کامیون از کنار او می‌گذرند. کسی کنار جاده ایستاده است و همین کامیون‌ها را نگاه می‌کند و می‌شمرد. این شخص می‌بیند که سرعت کامیون‌ها ۹۰km/h است و می‌بیند که در هر ساعت N کامیون از کنارش می‌گذرند. N برابر است با:

الف) ۱۴۰ ب) ۱۸۰ ج) ۳۶۰ د) ۴۲۰

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۰»

۳۹ نمودار سرعت ـ زمان برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند رسم شده است. هر ۱cm روی محور v را معادل ۱۰m/s، و هر ۱cm روی محور t را معادل ۱s گرفته‌ایم. شتاب متحرک در لحظه‌ی $t=t_۰$ چقدر است؟



شکل ۱-۵-۱۰۵

الف) ۰٫۱m/s² ب) ۱m/s² ج) ۱۰m/s² د) ۱۰۰m/s²

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۳»

۴۰ یک گیرنده روی محور x و به فاصله‌ی x از مبدأ است. دو فرستنده یکی در مبدأ و دیگری روی محور y و به فاصله‌ی ۵۰km از مبدأ، هم‌زمان دو علامت رادیویی می‌فرستند و گیرنده این دو علامت را به فاصله‌ی زمانی $۱۰^{-۴}$s از هم دریافت می‌کند. سرعت انتشار امواج رادیویی را ۳×۱۰^۵km/s بگیرید. x چند کیلومتر است؟ «مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۴»

۴۱ یک شکارچی و شکارش ساکن‌اند. شکارچی از زمان صفر با شتاب ثابت ۱۰m/s² دنبال شکار حرکت می‌کند. شکار ۲ ثانیه بعد شروع به فرار می‌کند و با شتاب ثابت ۱۵m/s² حرکت می‌کند. شکار و شکارچی هر دو روی یک خط راست حرکت می‌کنند. فاصله‌ی اولیه‌ی شکار و شکارچی از هم، حداکثر چند متر باشد تا شکارچی به شکار برسد؟

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۵»

۴۲ یک هواپیما با سرعت ثابت روی یک خط راست به طرف بالا حرکت می‌کند. این خط از نقطه‌ی O روی زمین می‌گذرد و با سطح افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. از این هواپیما در زمان‌های ۰، T و $۲T$ بسته‌هایی رها می‌شود. این بسته‌ها در فاصله‌های به ترتیب $x_۰$، $x_۱$ و $x_۲$ از نقطه‌ی O به زمین می‌رسند. کدام گزینه درست است؟

الف) $x_۲ - x_۱ < x_۱ - x_۰$ ب) $x_۲ - x_۱ = x_۱ - x_۰$ ج) $x_۲ - x_۱ > x_۱ - x_۰$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲»

۴۳ یک پرتابه از روی دامنه‌ی یک تپه پرتاب می‌شود. تپه را مثل یک مخروط بگیرید و فرض کنید صفحه‌ی شامل بردار سرعت اولیه‌ی پرتاب و آن مولد مخروط که از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد، قائم است. فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب تا پای تپه را بسیار بزرگ‌تر از $\frac{v^۲}{g\cos^۲\alpha}$ بگیرید، که v سرعت اولیه‌ی پرتاب، g شتاب گرانش، و α زاویه‌ی یال تپه (مولد مخروط) با افق است. کدام گزینه درست است؟

الف) این پرتابه با تپه برخورد نخواهد کرد.

ب) شرایط اولیه‌ای هست که این پرتابه با تپه برخورد خواهد کرد، و شرایط اولیه‌ای هست که این پرتابه با تپه برخورد نخواهد کرد.

ج) این پرتابه حتماً با تپه برخورد خواهد کرد. «مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۱»

۴۴ دو پرتابه ۱ و ۲ با سرعت‌های اولیه $v_۱$ و $v_۲$ از یک نقطه از سطح زمین پرتاب می‌شوند. سرعت‌های اولیه‌ی این دو پرتابه با هم موازیند. نقطه‌ی اوج این دو پرتابه را $H_۱$ و $H_۲$ می‌نامیم. محل تقاطع خطی که از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد و با سرعت اولیه موازی است با خط‌های قائمی که از $H_۱$ و $H_۲$ می‌گذرند را $H'_۱$ و $H'_۲$ می‌نامیم. طول خط‌های $H_۱H'_۱$ و $H_۲H'_۲$ را با $L_۱$ و $L_۲$ نمایش می‌دهیم. نسبت $\frac{L_۱}{L_۲}$ کدام است؟

الف) $(\frac{v_۲}{v_۱})^۲$ ب) $\frac{v_۲}{v_۱}$ ج) ۱ د) $\frac{v_۱}{v_۲}$ ه) $(\frac{v_۱}{v_۲})^۲$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۲»

۴۵ یک متحرک با سرعت ثابت روی یک خط راست حرکت می‌کند. این متحرک با فاصله‌های زمانی ثابت T علامت‌های صوتی می‌فرستد. یک ناظر ساکن این علامت‌ها را می‌گیرد. علامت $n+۱$ به اندازه‌ی τ_n بعد از علامت n دریافت می‌شود. فاصله‌ی متحرک با ناظر ابتدا کم و بعد زیاد می‌شود. کدام گزینه درست است؟

الف) τ_n ثابت است.

ب) τ_n بر حسب n صعودی است.

ج) τ_n بر حسب n نزولی است.

د) τ_n بر حسب n ابتدا صعودی و بعد نزولی است.

ه) τ_n بر حسب n ابتدا نزولی و بعد صعودی است.

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۹»

۴۶ از مبدأ مختصات گلوله‌هایی را با سرعت اولیه‌ی یکسان $v_۰$، با زاویه‌های مختلف α، و همگی در صفحه‌ی xy به بالا پرتاب می‌کنیم. گرانش در جهت $-y$، و اندازه‌ی شتاب گرانش g است. تعریف می‌کنیم $a=\frac{v_۰^۲}{۴g}$. مختصات نقاط اوج این گلوله‌ها در کدام یک از این معادله‌ها صدق می‌کند؟

الف) $\frac{x^۲}{۴a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$ ب) $\frac{x^۲}{۴a^۲}+\frac{(y-a)^۲}{a^۲}=۱$

ج) $\frac{x^۲}{۲a^۲}+\frac{(y-a)^۲}{a^۲}=۱$ د) $\frac{(x-a)^۲}{۴a^۲}+\frac{y^۲}{a^۲}=۱$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۰»

۴۷ در نقطه‌ی A در سطح زمین انفجاری رخ می‌دهد و موج این انفجار در نقطه‌ی B در سطح زمین آشکار می‌شود. این موج از دو راه به نقطه‌ی B می‌رسد. راه اول مسیر مستقیم از A تا B است، که در آن سرعت موج v_1 است. زمان رسیدن موج از این طریق T_1 است. راه دوم مسیر $ACDB$ است، که سرعت موج در پاره‌خط‌های AC و DB برابر v_1 و در پاره‌خط CD برابر v_2 است. زمان رسیدن موج از این طریق T_2 است. $ABCD$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است که $AB \| CD$، و زاویه‌های $\angle BAC$ و $\angle DBA$ برابر αاند. بین v_1 و v_2 و α این رابطه هست که $v_1 = v_2 \cos\alpha$. طول قاعده‌ی AB برابر l و ارتفاع ذوزنقه d است. به ازای $T_1 = 60\text{s}$، $T_2 = 48\text{s}$، $\sin\alpha = 0/8$ و $l = 120\text{km}$، مقدار d چند کیلومتر است؟

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۵»

۴۸ یک چرخ به شعاع r که محور آن افقی و ثابت است، چنان می‌چرخد که لبه‌ی زیری آن با زمین تماس دارد. سرعت هر یک از نقطه‌های لبه‌ی چرخ v است. نقطه‌ی تماس چرخ با زمین (پایین چرخ) را با P، و مرکز چرخ را با O نشان می‌دهیم. سنگی به لبه‌ی چرخ چسبیده و با آن می‌چرخد. در یک لحظه سنگ از چرخ جدا می‌شود. در این لحظه سنگ در نقطه‌ی Q است، چنان که زاویه‌ی OP با OQ برابر θ است. این سنگ در نقطه‌ی S به زمین می‌خورد. شتاب گرانش را g بگیرید. تعریف می‌کنیم $\alpha = (\frac{rg}{v^2})$ و $L = (\frac{v^2}{g})$.

الف) برد این پرتابه (طول PS) را بر حسب L، α و θ حساب کنید.

ب) در L و αی ثابت، برد به ازای $\theta = \theta_0$ بیشینه می‌شود. معادله‌ای برای θ_0 به‌دست آورید.

«مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۲»

۴۹ یک قرص در صفحه‌ی افقی است و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت پادساعتگرد حول مرکزش (نقطه‌ی O) می‌چرخد. شخصی که روی این قرص دوار ایستاده و با آن می‌چرخد، در زمان صفر جسمی را با سرعت v از روی قرص به‌طور قائم به بالا پرتاب می‌کند. در زمان پرتاب، مختصات دکارتی شخص $(x = r\ ,\ y = 0)$ است. این مختصات نسبت به زمین سنجیده شده‌اند و مبدأ مختصات نقطه‌ی O است. شتاب گرانش g است. جسم در زمان t به قرص می‌خورد. در این زمان جسم در نقطه‌ی P و شخص در نقطه‌ی Q است. تعریف می‌کنیم $\theta = (\frac{2\omega v}{g})$.

الف) t را حساب کنید.

ب) مختصات دکارتی P را بر حسب r و θ حساب کنید.

ج) مختصات دکارتی Q را بر حسب r و θ حساب کنید.

د) فاصله‌ی P با Q را بر حسب r و θ حساب کنید.

هـ) زاویه‌ی بردار OQ با بردار PQ را با α نشان می‌دهیم. تانژانت α را بر حسب θ حساب کنید.

«مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۳»

۵۰ شخصی در حال عبور از عرض خیابان است. مطابق شکل (۱ـ۱۰۶)، هنگامی که این شخص به وسط خیابان می‌رسد، خودرویی که در فاصله‌ی d از او قرار دارد و در وسط خیابان است، از حالت سکون با شتاب a بر روی یک خط مستقیم در امتداد خیابان به سمت او حرکت می‌کند. عرض خودرو $2l$ است. این شخص به خاطر اینکه زمان کافی برای ادامه‌ی مسیر قبل از تصادف با

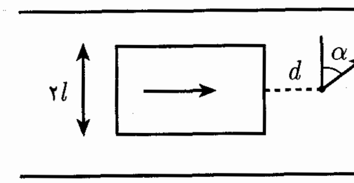
خودرو ندارد، مسیر خود را به سمت راست کج می‌کند و بر یک خط مستقیم ادامه مسیر می‌دهد. این خط با عرض خیابان زاویه‌ی α می‌سازد.

الف) $v(\alpha)$ (کمینه‌ی سرعت شخص برای اینکه برخورد با خودرو رخ ندهد) چقدر است؟

ب) α چقدر باشد تا $v(\alpha)$ کمینه شود؟

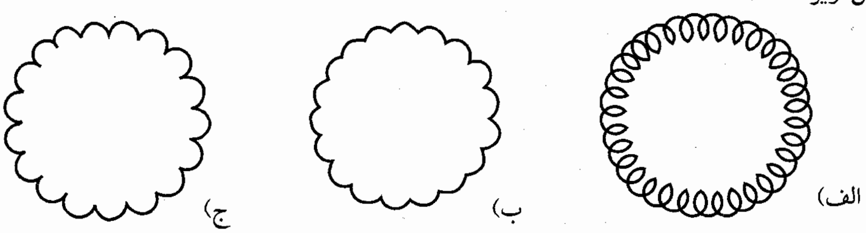
ج) کمینه‌ی $v(\alpha)$ چقدر است؟

«مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۹»



شکل ۱-۱۰۶

۵۱ فاصله‌ی زمین از خورشید $1/5 \times 10^{11}\mathrm{m}$ و فاصله‌ی ماه از زمین $3/8 \times 10^{8}\mathrm{m}$ است. زمین هر ۳۶۵ روز یک بار روی دایره‌ای به دور خورشید، و ماه هر ۲۷ روز یک بار روی دایره‌ای به دور زمین می‌گردد. فرض کنید این دو دایره هم صفحه باشند. مدار ماه به دور خورشید شبیه کدام شکل زیر است؟



«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

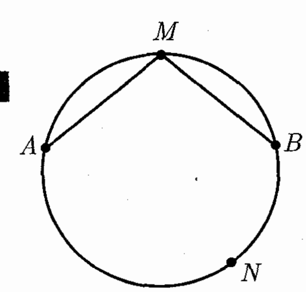
۵۲ نقطه‌ی A روی نیم‌خط ox و نقطه‌ی B روی نیم‌خط oy است. زاویه‌ی ox با oy برابر α است. در لحظه‌ی $t=0$ فاصله‌ی A از o برابر a و فاصله‌ی B از o برابر b است. در این لحظه نقطه‌ی A با سرعت v_A روی محور x، و نقطه‌ی B با سرعت v_B روی محور y حرکت می‌کند. قرارداد این است که سرعت‌ها مثبت‌اند. اگر حرکت در جهت مثبت محور باشد، v_B چقدر باشد تا در $t=0$ مشتق فاصله‌ی A از B صفر باشد؟

الف) $v_B = v_A \dfrac{b\cos\alpha + a}{a\cos\alpha + b}$ ب) $v_B = v_A \tan\alpha$

ج) $v_B = v_A \cos\alpha$ د) $v_B = v_A \dfrac{b\cos\alpha - a}{b - a\cos\alpha}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲»

۵۳ متحرکی مسیر A تا B را در مدت زمان ۱۰ دقیقه از یکی از راه‌های نشان داده شده طی می‌کند. در کدام مسیر اندازه‌ی بردار سرعت متوسط متحرک کوچک‌تر است؟



شکل ۱-۱۰۷

الف) مسیر منحنی AMB ب) مسیر راست AM و MB

ج) مسیر منحنی ANB د) تفاوتی نمی‌کند

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۷»

۵۴ یک جسم از ارتفاع h به طور افقی و با سرعت v پرتاب می‌شود. وقتی ارتفاع این جسم نصف می‌شود، چیزی به آن برخورد می‌کند که باعث می‌شود مؤلفه‌ی عمودی سرعت آن صفر شود ولی مؤلفه‌ی افقی سرعت تغییری نکند. وقتی ارتفاع این دو جسم دوباره نصف می‌شود (یعنی یک چهارم ارتفاع اولیه می‌شود) دوباره همین پدیده تکرار می‌شود، و این فرآیند ادامه می‌یابد. شتاب

گرانش g است. فاصله‌ی افقی محل برخورد جسم با زمین و محل پرتاب چقدر است؟

الف) $\frac{v\sqrt{\frac{2h}{g}}}{\sqrt{2}-1}$ ب) $2v\sqrt{\frac{h}{g}}$ ج) $v\sqrt{\frac{2h}{g}}$ د) $\frac{v\sqrt{\frac{h}{g}}}{\sqrt{2}-1}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۹»

۵۵ یک جسم از مبدأ مختصات، با سرعت v در راستای محور x (افقی) پرتاب می‌شود. محور y را قائم و رو به بالا می‌گیریم. این جسم در میدان گرانشی زمین حرکت می‌کند و پس از زمان T به نقطه‌ی (x, y) می‌رسد. در آزمایش‌های مختلف T را ثابت می‌گیریم و v را عوض می‌کنیم. با افزایش v،

الف) x ثابت می‌ماند و y کم می‌شود. ب) x ثابت می‌ماند و y ثابت می‌ماند.
ج) x ثابت می‌ماند و y زیاد می‌شود. د) x زیاد می‌شود و y کم می‌شود.
و) x زیاد می‌شود و y ثابت می‌ماند. ه) x زیاد می‌شود و y زیاد می‌شود.

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۰»

۵۶ یک متحرک روی سطح زمین حرکت می‌کند، چنان که اندازه‌ی سرعت آن ثابت است و جهت حرکت آن با شمال همواره زاویه‌ی ثابت α به سمت شرق می‌سازد. α بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از 90° است. کدام گزینه‌ی درست است؟

الف) پس از مدت محدودی، این متحرک به شمال می‌رسد.

ب) اگر نقطه‌ی شروع حرکت در نیم‌کره‌ی جنوبی باشد، این متحرک از نیم‌کره‌ی جنوبی خارج نخواهد شد.

ج) این متحرک هرگز به قطب شمال نمی‌رسد.

د) این متحرک حتماً استوا را قطع خواهد کرد.

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۱»

۵۷ سیاره‌ی ۱ روی دایره‌ای به شعاع R_1 و سیاره‌ی ۲ روی دایره‌ای به شعاع R_2 حرکت می‌کنند. صفحه‌ی دایره‌ها یکسان و مرکز دایره‌ها هم یکسان است. سرعت حرکت سیاره‌ها به ترتیب $R_1\omega_1$ و $R_2\omega_2$ است، که ω_1 و ω_2 ثابت‌اند. زاویه‌ی بین خط واصل سیاره‌ی ۱ با مرکز و خط واصل سیاره‌ی ۲ با مرکز را با θ نمایش می‌دهیم. مدتی که اندازه‌ی این زاویه کمتر از α است تقسیم بر مدت کل حرکت را با x نمایش می‌دهیم. α بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ است و ω_1 و ω_2 با هم برابر نیستند. اگر مدت کل حرکت بسیار زیاد باشد، مقدار x چقدر است؟

الف) $\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\alpha}{\pi}$ ب) $\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\alpha}{\pi}$ ج) $\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\frac{\alpha}{\pi}$

د) $\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}\frac{\alpha}{\pi}$ ه) $\frac{\alpha}{\pi}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۵»

۵۸ یک پرتابه از نقطه‌ی A در سطح زمین، با زاویه‌ی θ نسبت به افق چنان پرتاب می‌شود که به نقطه‌ی B در سطح زمین برسد. فرض کنید در اندازه‌ی سرعت پرتابه محدودیتی نداریم. فاصله‌ی A و B از هم R است. در نقطه‌ای روی پاره‌خط AB و به فاصله‌ی X از A یک دیوار به ارتفاع h

هست، که پرتابه باید از روی آن بگذرد. محدوده‌ی θ برای اینکه پرتابه بتواند از روی دیوار بگذرد و به نقطه‌ی B برسد کدام است؟

الف) $\tan\theta < \frac{Rh}{X(R+X)}$ ب) $\frac{Rh}{X(R+X)} < \tan\theta < \frac{Rh}{XR}$

ج) $\frac{Rh}{XR} < \tan\theta < \frac{Rh}{X(R-X)}$ د) $\frac{Rh}{X(R-X)} < \tan\theta$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۷»

۵۹ گلوله‌ای مستقیماً به سمت بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع h می‌رسد. سپس پایین می‌آید و به سطح زمین می‌خورد، و دوباره بالا می‌رود و این عمل تکرار می‌شود. فرض کنید به علت برخورد با زمین، در هر بار بالا و پایین رفتن، ارتفاع گلوله f برابر می‌شود ($f < ۱$). مسافت کل پیموده شده تقسیم بر زمان کل حرکت چقدر است؟

الف) $\frac{\sqrt{\frac{gh}{۲}}}{۱+f}$ ب) $\frac{\sqrt{\frac{gh}{۲}}}{۱+\sqrt{f}}$ ج) $\frac{\sqrt{\frac{gh}{۲}}}{۱-f}$ د) $\frac{\sqrt{\frac{gh}{۲}}}{۱-\sqrt{f}}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۸»

۶۰ پرتابه‌هایی با سرعت یکسان v ولی با زاویه‌های متفاوت نسبت به افق، و همگی از سطح زمین پرتاب می‌شوند تا دوباره به سطح زمین برسند. یکی از این پرتابه‌ها بیشترین طول مسیر را طی می‌کند. در مورد زاویه‌ی این پرتابه کدام گزاره درست است؟

الف) کمتر از ۴۵ درجه است.

ب) ۴۵ درجه است.

ج) بیشتر از ۴۵ درجه است.

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴۰»

۶۱ برد یک توپ که از نقطه‌ای بر روی سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $v_۰$ و زاویه‌ی ۴۵° نسبت به افق پرتاب می‌شود R است. مؤلفه‌ی قائم سرعت این توپ، پس از هر بار برخورد به زمین نصف می‌شود. اگر بخواهیم این توپ از همان نقطه‌ی قبلی و با همان سرعت اولیه‌ی $v_۰$ پرتاب شود و پس از n بار برخورد به زمین مسافت افقی R را طی کند، زاویه‌ی پرتاب آن نسبت به افق چقدر باید باشد؟

الف) $\frac{۱}{۲}\text{Arcsin}\frac{۲^{n-۱}}{۲^n-۱}$ ب) $\frac{۱}{۲}\text{Arcsin}\frac{n}{۲^n-۱}$

ج) $\text{Arcsin}\frac{۱}{\sqrt{۲}n}$ د) $\text{Arcsin}\frac{۲^{n-\frac{۱}{۲}}}{۲(۲^n-۱)}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴۲»

۶۲ دایره‌ی یک به شعاع r و دایره‌ی دو به شعاع R در یک صفحه‌اند و مرکزشان هم یکسان است. این دایره‌ها پادساعتگرد حرکت می‌کنند، چنان که سرعت زاویه‌ای دایره‌ی یک ω، و سرعت زاویه‌ای دایره‌ی دو Ω است. جسم A به دایره‌ی یک و جسم B به دایره‌ی دو چسبیده است، چنان که در زمان صفر A و B و مرکز دایره‌ها روی یک خط‌اند و مرکز بیرون پاره‌خط AB است. در زمان t جسم A از دایره‌ی یک جدا می‌شود و از آن پس نیرویی به آن وارد نمی‌شود. t چنان تنظیم شده است که جسم A به جسم B برخورد کند. به ازای $\Omega = ۰/۱\text{rad/s}$، $\omega = ۰/۲\text{rad/s}$،

$R = ۲۰\,\text{cm}$ و $r = ۱۰\,\text{cm}$.

کوچک‌ترین مقدار مثبت t چند ثانیه است؟

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۴»

۶۳ یک دونده روی یک پیست می‌دود که از یک بخش مستقیم به طول L و یک نیم‌دایره به طول x ساخته شده است. سرعت دونده در بخش مستقیم v و در بخش نیم‌دایره‌ای $v(x)$ است، که

$$v(x) = \frac{vx^۲}{x^۲ + b^۲}$$

و b یک ثابت مثبت است.

الف) زمان حرکت را حساب کنید.

ب) متوسط اندازه‌ی سرعت (مسافت پیموده شده تقسیم بر زمان) را حساب کنید.

ج) x را چنان حساب کنید که زمان حرکت کمینه شود.

د) به ازای این مقدار x متوسط اندازه‌ی سرعت را حساب کنید.

هـ) با فرض $۰ \leq x \leq D$، بیشترین مقدار متوسط اندازه‌ی سرعت به ازای کدام مقدار x به‌دست می‌آید؟ به ازای این مقدار x، متوسط اندازه‌ی سرعت چقدر است؟

«مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ مسأله‌ی ۶»

۶۴ دو خودروی A و B به ترتیب با سرعت‌های $۱۶\,\text{m/s}$ و $۸\,\text{m/s}$ روی یک خط راست به سمت یکدیگر در حرکت‌اند. هنگامی که فاصله دو خودرو از هم $۴۵\,\text{m}$ است خودروی A با شتاب $۲\,\text{m/s}^۲$ و خودروی B با شتاب $۴\,\text{m/s}^۲$ ترمز می‌کنند. چند ثانیه پس از شروع ترمز دو خودرو به هم می‌خورند و سرعت خودروی B در لحظه برخورد چقدر است؟

الف) $۲/۸\,\text{s}$ و صفر ب) $۳/۲\,\text{s}$ و صفر ج) $۳\,\text{s}$ و $۴\,\text{m/s}$ د) $۵\,\text{s}$ و $۱۲\,\text{m/s}$

«مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۷»

۶۵ هواپیمایی روی خط افقی در ارتفاع h با شتاب ثابت A پرواز می‌کند. این هواپیما شروع به رها کردن بسته‌هایی می‌کند. فرض کنید اولین بسته از نقطه $(x = ۰\ ,\ y = h)$ در زمان $t = ۰$ رها شده و در آن زمان سرعت هواپیما $v_۰$ است. در زمان T از بسته‌ها یک منحنی می‌گذرانیم. معادله این منحنی کدام است؟ در زمان T هنوز هیچ‌کدام از بسته‌ها به زمین نرسیده است. از مقاومت هوا چشم بپوشید.

الف) $x + \dfrac{A(h-y)}{g} = v_۰ T$

ب) $x - \dfrac{A(h-y)}{g} - v_۰\sqrt{\dfrac{۲(h-y)}{g}} = ۰$

ج) $x - \dfrac{A(h-y)}{g} = A\dfrac{T^۲}{۲} + v_۰ T$

د) $x + \dfrac{A(h-y)}{g} = \dfrac{AT^۲}{۲} + v_۰ T$

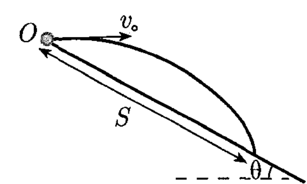
«مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۱»

۶۶ در مبدأ زمان آسانسوری با سرعت $۴\mathrm{m/s}$ رو به پایین در حرکت است و با شتاب $۲\mathrm{m/s^۲}$ سرعتش کند می‌شود. $۱\mathrm{s}$ بعد شخصی که درون آسانسور ایستاده است گلوله کوچکی را از ارتفاع $۱\mathrm{m}$ از کف آسانسور آزادانه رها می‌کند. در لحظه برخورد گلوله به کف آسانسور سرعت آن نسبت به کف آسانسور چند $\mathrm{m/s}$ است؟

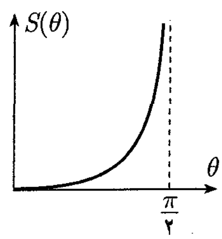
الف) ۲ ب) ۴ ج) $۲\sqrt{۵}$ د) $۲\sqrt{۶}$

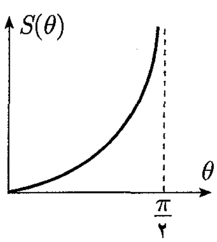
«مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۵»

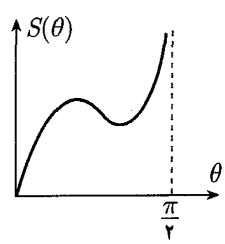
۶۷ سطح شیب‌دار طویلی در نقطه‌ی O لولایی دارد که توسط آن می‌توان شیب سطح را تغییر داد. از نقطه O گلوله‌ای را با سرعت اولیه افقی $v_۰$ پرتاب می‌کنیم. گلوله در فاصله S از نقطه O به سطح برخورد می‌کند. S با تغییر شیب سطح تغییر می‌کند. کدام گزینه می‌تواند نمودار S بر حسب θ باشد؟

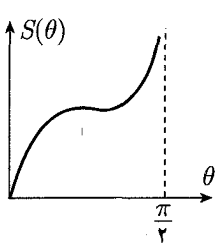


شکل ۱-۱۰۸

الف)


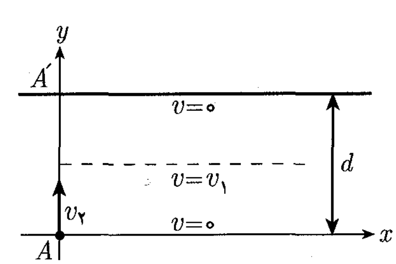
ب)


ج)


د)


«مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۱»

۶۸ در رودخانه‌ای به عرض d آب در امتداد محور x جریان دارد. سرعت آب در عرض رودخانه ثابت نیست. در وسط رودخانه سرعت $v_۱$ است و به طور یکنواخت کاهش می‌یابد و درکناره‌ها به صفر می‌رسد. قایقرانی از نقطه A با سرعت $v_۲$ (نسبت به آب) در امتداد محور y حرکت می‌کند، طوری که اگر آب ساکن بود به نقطه A' می‌رسید. معین کنید به دلیل حرکت آب، قایقران در چه فاصله‌ای از نقطه A' به ساحل مقابل می‌رسد؟



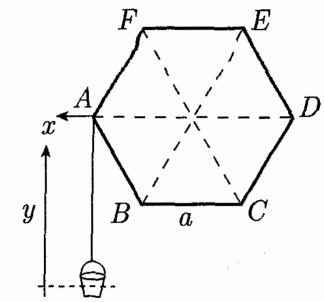
شکل ۱-۱۰۹

الف) $\frac{v_۲}{v_۱}d$ ب) $\frac{v_۲}{۲v_۱}d$ ج) $\frac{v_۱}{v_۲}d$

د) $\frac{v_۱}{۲v_۲}d$ هـ) $\frac{v_۲}{\sqrt{v_۱^۲+v_۲^۲}}d$ و) $\frac{v_۱}{\sqrt{v_۱^۲+v_۲^۲}}d$

«مرحله‌ی اول بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۰»

۶۹ شکل (۱ـ۱۱۰) مقطع قائم یک چرخ چاه قدیمی را نشان می‌دهد که از میله‌های افقی A ، B، C، D، E و F تشکیل شده است که توسط پره‌هایی به محور دستگاه، O متصل شده‌اند. مقطع



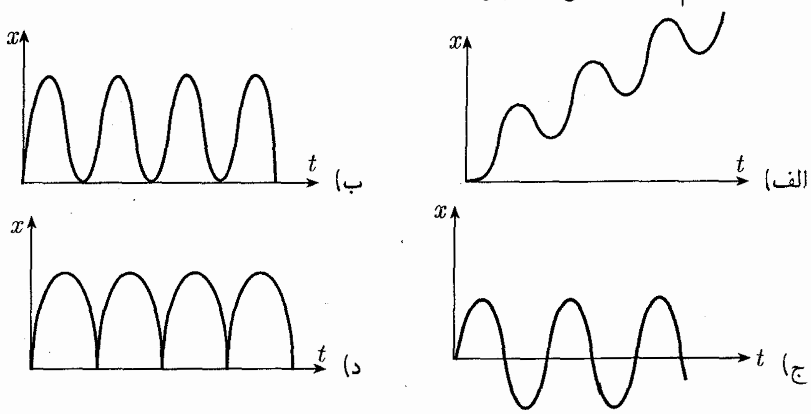
شکل ۱-۱۱۰

دستگاه یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a است. زاویه θ، زاویه میان پره OA و امتداد افقی OX است. در ابتدا قسمت آزاد طناب از میله افقی A آویزان است و سطل در نقطه $y = ۰$ قرار دارد، و زاویه چرخش دستگاه، θ نیز صفر است.

با چرخش دستگاه، ارتفاع سطل را به عنوان تابعی از θ به‌دست آورید و $y(\theta)$ را برای $۰ < \theta < \pi$ رسم کنید. فرض کنید طناب همواره قائم می‌ماند.

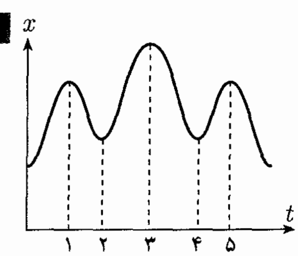
«مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۷»

۷۰ ذره‌ای در لحظه‌ی $t = ۰$ از نقطه‌ی $x = ۰$ و با سرعت $v = ۰$ در امتداد x شروع به حرکت می‌کند و شتاب آن $a = A\sin(\omega t)$ است، که در آن A و ω دو ثابت مثبت‌اند. منحنی مکان ـ زمان متحرک کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟



«مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۰»

۷۱ سرعت متوسط متحرکی بین زمان $t = ۰$ و $t = T$ را با $\overline{v}(۰, T)$ نمایش می‌دهیم. منحنی مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راستی حرکت می‌کند به صورت زیر است. اندازه $\overline{v}(۰, T)$ به ازای $T = T_۰$ بیشترین مقدار است. $T_۰$ در نزدیکی کدام زمان است؟



شکل ۱-۱۱۱

الف) $T_۱$ ب) $T_۲$ و $T_۴$ ج) $T_۱$ و $T_۵$ د) $T_۳$ هـ) $T_۵$

۷۲ ذره‌ای از روی سطح زمین با سرعت اولیه $v_۰$ با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌شود و روی زمین فرود می‌آید. نقطه پرتاب و فرود هم‌ترازند. مساحت سطح قائم بین منحنی مسیر و زمین را S می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟ (g شتاب گرانش زمین است.)

الف) $s = \frac{۲}{۳}\frac{v_۰^۲}{\sqrt{g}}\cos\theta\sin^۳\theta$ ب) $s = \frac{۱}{۳}\frac{v_۰^۳}{g}\cos^۳\theta\sin\theta$

ج) $s = \frac{۲}{۳}\frac{v_۰^۴}{g^۲}\cos\theta\sin^۳\theta$ د) $s = \frac{۱}{۳}\frac{v_۰^۵}{g^۳}\cos^۳\theta\sin\theta$

«مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۸»

۷۳ وقتی گلوله ساکنی منفجر می‌شود، به تعداد بسیار زیادی تکه تقسیم می‌شود. فرض کنید همه این تکه‌ها با سرعت U در جهت‌های مختلف فضا از نقطه انفجار دور می‌شوند. فرض کنید گلوله‌ای در لحظه رها شدن از ارتفاع h منفجر می‌شود. بیشترین اختلاف زمان ممکن بین رسیدن اولین و

آخرین تکه به زمین چقدر است؟ g شتاب گرانش است.

الف) $\frac{2U}{g}$ ب) $\frac{2\sqrt{U^2+2gh}}{g}$

ج) $\frac{U+\sqrt{U^2+2gh}}{g}$ د) $\frac{-U+\sqrt{U^2+2gh}}{g}$

«مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۲»

۷۴ هواپیمایی از نقطه‌ای روی خط استوا شروع به حرکت می‌کند. روی نصف‌النهار به اندازه ۵۰۰۰km به سمت شمال می‌رود. به سمت شرق می‌پیچد و ۵۰۰۰km به شرق می‌رود (یعنی دقیقاً در امتداد یک مدار ثابت). بعد به جنوب می‌پیچد و ۵۰۰۰km در امتداد نصف‌النهار به جنوب می‌رود تا دوباره به استوا برسد. بعد به غرب می‌پیچد و ۵۰۰۰km در امتداد استوا حرکت می‌کند. در اینجا فرود می‌آید. فاصله نقطه شروع پرواز با نقطه فرود روی خط استوا بر حسب ۱۰۰km چقدر است؟ (محیط زمین ۴۰۰۰۰km است.)

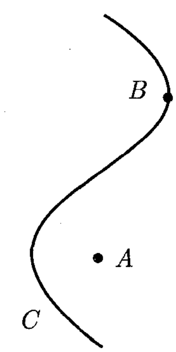
«مرحله‌ی اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۳»

سؤالات دوره تابستانی

۷۵ در شکل (۱ـ۱۱۲) خرگوشی مسیر C را طی می‌کند. یک یوزپلنگ که در نقطه‌ی A قرار دارد، به طرف خرگوش حرکت می‌کند. اگر یوزپلنگ در هر لحظه در جهتی حرکت کند که خرگوش را ببیند، نشان دهید:

$$\dot{x}=\dot{x}_B-v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \dot{y}=\dot{y}_B-v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۶ ـ مسأله‌ی ۱»



شکل ۱-۱۱۲

۷۶ در یک حرکت پرتابی، مقدار شتاب ناشی از نیروی اصطکاک بین جسم پرتابه و هوا در دو جهت y, x برابر با ثابت a است.

الف) معادله مسیر، $y=f(x)$ را در کلی‌ترین حالت ممکن به‌دست آورید.

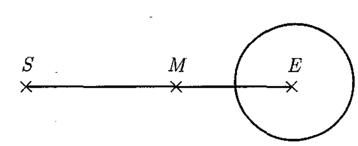
ب) تحت سرعت اولیه بسیار بالا و aی بسیار کوچک، مقدار برد بیشینه تحت چه زاویه‌ای به‌دست می‌آید؟

«آزمون دوم دوره تابستانی سال ۱۳۷۶ ـ مسأله ۲»

۷۷ ماه در مداری تقریباً دایره‌ای شکل به دور زمین می‌گردد. صفحه‌ی این مدار، تقریباً همان صفحه‌ی مدار زمین به دور خورشید است. در حالتی که خط واصل خورشید و ماه، زمین را قطع کند، کسوف رخ می‌دهد. لکه‌ی کسوف را روی زمین یک نقطه فرض کنید. می‌خواهیم سرعت لکه را نسبت به یک چارچوب در زمین به‌دست آوریم. فرض کنید محور حرکت وضعی زمین بر مدار حرکت زمین به دور خورشید عمود است. مبدأ زمان را لحظه‌ای بگیرید که مرکز زمین، ماه و خورشید روی یک خط قرار دارند. شعاع زمین را $R_E=6400\text{km}$ و فاصله‌ی زمین تا ماه را $R_M=60R_E$ بگیرید. فاصله‌ی خورشید تا زمین خیلی بزرگ‌تر از فاصله‌ی زمین تا ماه است. جهت دوران ماه به دور زمین همان جهت حرکت وضعی زمین می‌باشد.

الف) سرعت لکه را بر حسب زمان به‌دست آورید.

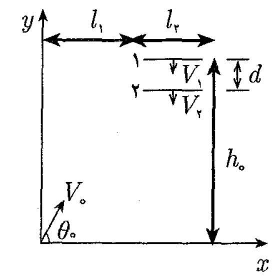
ب) لکه به طرف شرق حرکت می‌کند یا غرب؟



شکل ۱-۱۱۳

برای همه‌ی کمیت‌های دیگری که ممکن است لازم داشته باشید مقدار مناسبی انتخاب نمایید. عبارت‌های حاصل را با استفاده از اعداد داده شده تا حد ممکن ساده کنید. (تقریب‌های مناسبی به کار ببرید.)
«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۷ـ مسأله‌ی ۱»

۷۸ دو صفحه‌ی ۱ و ۲ که موازی محور x هستند، با سرعت ثابت v_1 در جهت $-\hat{j}$ در حرکت‌اند. زمانی که صفحه‌ی ۱ در $y = h_0$ قرار دارد، ذره‌ای با سرعت v_0 که با محور x زاویه‌ی θ_0 می‌سازد پرتاب می‌شود. مقادیر d، l_1، l_2 در چه شرایطی صدق کنند که ذره ابتدا با صفحه‌ی ۱ برخورد کند و سپس با صفحه‌ی ۲ برخورد کند و پس از آن دیگر هیچ برخوردی با دو صفحه نداشته باشد؟ تمام برخوردها را کشسان گرفته و از گرانش صرف‌نظر کنید. جرم ذره نسبت به صفحه‌ها ناچیز است.
«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۷ـ مسأله‌ی ۱»



شکل ۱-۱۱۴

۷۹ فردی می‌خواهد با قایق از نقطه‌ی A در یک سمت رودخانه، به سمت دیگر آن برود. عرض رودخانه l و سرعت آب رودخانه مقدار ثابت u است.

فرض کنید این فرد همواره به سمت نقطه‌ی B پارو می‌زند و سرعت پارو زدن او نسبت به آب همان مقدار u است. دستگاه مختصات را مطابق شکل به گونه‌ای بگیرید که مرکز دستگاه در نقطه‌ی B و نقطه‌ی A روی محور y باشد. C نقطه‌ای از مسیر قایق است. فاصله‌ی CB را S بگیرید. هنگامی که قایق به نقطه‌ی C می‌رسد:

الف) مؤلفه‌ی سرعت قایق در راستای CB، در راستای محور x و در راستای y را بر حسب α به‌دست آورید.

ب) سرانجام قایق در چه نقطه‌ای از محور xها به سمت دیگر رودخانه می‌رسد.

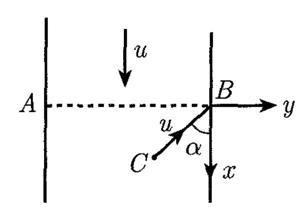
ج) معادله‌ی مسیر یعنی $y = y(x)$ را به‌دست آورید.

د) $\frac{d\alpha}{dt}$ را بر حسب α به‌دست آورید.

ه) زمان لازم برای رسیدن قایق از نقطه‌ی A به سمت دیگر رودخانه چقدر است؟

راهنمایی: برای محاسبه‌ی این زمان، ابتدا زمان رسیدن قایق به ساحل را هنگامی که به ساحل خیلی نزدیک است، محاسبه کنید.

«آزمون نهایی دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۸ـ مسأله‌ی ۵»

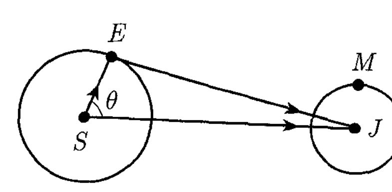


شکل ۱-۱۱۵

۸۰ سال‌ها قبل، پیش از اینکه دانشمندان بتوانند سرعت نور را به طور دقیق محاسبه کنند. اُ.رومر[1] منجم دانمارکی، زمان‌های کسوف یک قمر سیاره‌ی مشتری را مطالعه کرد. او توانست سرعت نور را از زمان تناوب رصد شده‌ی یک قمر مشتری تعیین کند. شکل (۱ـ۱۱۶) مدار زمین، E، حول خورشید، S، و همچنین یکی از اقمار مشتری را نشان می‌دهد. (رومر زمان بین دو ظهور متوالی قمر M از پشت مشتری را مشاهده کرد.)

یک سری طولانی از رصد کسوف‌ها اجازه می‌دهد که ارزیابی دقیقی از زمان تناوب واقعی داشته باشیم. زمان تناوب رصد شده بستگی به مکان نسبی زمین نسبت به دستگاه مرجع SJ (که به عنوان محور دستگاه مختصات در نظر گرفته می‌شود) دارد.

زمان متوسط گردش (واقعی) $T_0 = 42_h 28_m 16_s$ است و بیشینه‌ی زمان تناوب مشاهده شده $(T_0 + 15)_s$ است. فاصله‌ی متوسط زمین تا خورشید $R_E = 149/6 \times 10^6 \mathrm{km}$، زمان



شکل ۱-۱۱۶

1) O.Romer

تناوب گردش زمین و مشتری به دور خورشید به ترتیب ۳۶۵ روز و ۱۱٫۹ سال است.

الف) فرض کنید مدار زمین و مشتری دایره‌ای است. با توجه به قانون سوم کپلر یعنی اینکه مربع زمان تناوب گردش سیارات به دور خورشید متناسب با توان سوم فاصله‌ی آنها تا خورشید است (یعنی $T^2 \alpha R^3$)، فاصله‌ی مشتری تا خورشید، R_J، را به‌دست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای نسبی ωی زمین نسبت به دستگاه مرجع خورشید مشتری (SJ) را به‌دست آورید.

ج) فرض کنید یک ناظر ببیند که وقتی در مکان θ_k است M از سایه شروع به طلوع کردن می‌کند و در طلوع بعدی θ_{k+1} باشد ($k = 1, 2, 3, \cdots$). ناظر از این رصدها، پریود ظاهری گردش $T(t_k)$ را به صورت تابعی از زمان مشاهده، t_k، به‌دست می‌آورد. از نظر او این تغییرات مربوط به تغییرات فاصله‌ی مشتری $d(t_k)$ نسبت به ناظر طی این مشاهدات است.

ج_۱) با توجه به شکل (۱_۱۱۶) فاصله‌ی مشتری تا زمین، $d(t_k)$، را بر حسب تابعی از زمان t_k تا تقریب مرتبه‌ی اول نسبت به $\dfrac{R_E}{R_J}$ به‌دست آورید.

ج_۲) اختلاف فاصله‌ی مشتری تا زمین را در دو رصد متوالی از طلوع قمر مشتری $\Delta d = d(t + T_\circ) - d(t)$، به‌دست آورید.

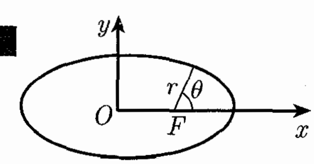
توجه کنید که $\omega T_\circ << 1$ است (مقدار $\omega T_\circ$ را به‌دست آورید.) بنابراین داریم $\sin \omega T_\circ \approx \omega T_\circ$ و $\cos \omega T_\circ \approx 1$. مقدار Δd را با توجه به این تقریبات به‌دست آورید.

د) $T(t_k)$ را بر حسب $T_\circ$، t_k وکمیت‌های ثابت دیگر به‌دست آورید. $T(t_k)$ را بر حسب t_k رسم کنید. مکان زمین، وقتی پریود بیشینه، پریود کمینه و پریود واقعی قمر M مشاهده می‌شود، کجاست؟

ه) سرعت نور را از نتایج بالا به‌دست آورید.

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ _ مسأله‌ی ۱»

۸۱ جسمی بر روی یک بیضی به معادله‌ی $r = \dfrac{a}{1 - \epsilon \cos\theta}$ با سرعت زاویه‌ی ωی ثابت حرکت می‌کند $(\theta = \omega t)$. در معادله‌ی فوق مبدأ مختصات بر روی یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد (مطابق شکل ۱_۱۱۷). شتاب و سرعت جسم را نسبت به مرکز بیضی که در وسط دو کانون قرار دارد به‌دست آورید. محور x در راستای قطر بزرگ بیضی و محور y در راستای قطر کوچک بیضی واقع است. جواب نهایی را در دستگاه دکارتی بر حسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بنویسید.

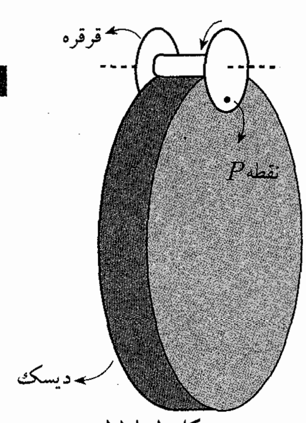


شکل ۱-۱۱۷

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۰ _ مسأله‌ی ۵»

۸۲ یک چرخ و محور (قرقره) که شعاع محور آن r می‌باشد، روی لبه‌ی دیسکی به شعاع R، مطابق شکل (۱_۱۱۸) می‌غلتد، به‌طوری که محور تقارن قرقره (O') حول مرکز دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد.

می‌خواهیم حرکت نقطه‌ای مانند P، روی بدنه‌ی قرقره (قسمت چرخ در چرخ و محور)، به فاصله‌ی λr از محور تقارن آن را بررسی کنیم (λ می‌تواند هر مقدار مثبتی را اختیار کند).



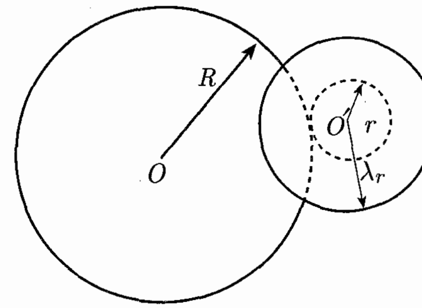
شکل ۱-۱۱۸

تعریف ذره‌ای در مسیر دلخواه $\vec{r}(t)$ در حرکت است. در هر نقطه از مسیر این ذره می‌توان دایره‌ای رسم کرد که مشتق اول و دوم دایره و مسیر یکی باشند و تقعر آنها در یک جهت

باشد. به عبارت دیگر می‌توان به صورت لحظه‌ای فرض کرد که ذره روی این دایره در حرکت است. به این دایره، دایره‌ی «بوسان» می‌گوییم و شعاع آن، **شعاع انحنای مسیر** در آن نقطه نام دارد که این شعاع از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{v^2}{a_\perp}$$

که v اندازه‌ی سرعت ذره و $a_\perp$ مؤلفه‌ی عمود بر مسیر شتاب می‌باشد.

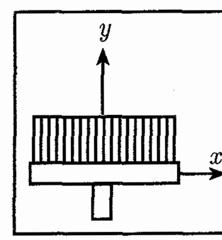


شکل ۱-۱۱۹

الف) شعاع انحنای مسیر نقطه‌ی P را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.
ب) معادلات حرکت را در مختصات قطبی، به مرکزیت محور دیسک بنویسید. $(r(t), \phi(t))$
ج) تحت چه شرایطی مسیر نقطه‌ی P، خودش را قطع نمی‌کند؟ (اگر مسیر روی خودش بیفتد، یعنی مرتباً تکرار شود، نمی‌گوییم که خودش را قطع کرده است!)

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۰ ـ مسأله‌ی ۴»

۸۳ آب از آب‌پاشی مطابق شکل (۱ـ۱۲۰) با سرعت v_0 خارج می‌شود. آب‌پاش را با سرعت $u_0 \sin\omega t$ در جهت x حرکت می‌دهیم. در زمان $t = 0$ وسط آب‌پاش در مبدأ مختصات بوده است. قطره‌ی آبی در زمان $t = T$ در نقطه‌ی $A(x = a, y = b)$ قرار دارد. این ذره از چه نقطه‌ای از آب‌پاش خارج شده و در چه مسیری به A رسیده است. از گرانش چشم بپوشید.



شکل ۱-۱۲۰

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسأله‌ی ۱»

۸۴ ذرات ۱ و ۲ با سرعت‌های ثابت $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ حرکت می‌کنند. در یک لحظه‌ی دلخواه از زمان که آن را مبدأ زمان در نظر می‌گیریم ($t = 0$)، بردارهای مکان این دو ذره به ترتیب $\vec{r}_{1i}$ و $\vec{r}_{2i}$ می‌باشند. نزدیک‌ترین فاصله‌ی این دو ذره چقدر است؟ در چه لحظه‌ای از زمان این نزدیک‌ترین فاصله اتفاق می‌افتد؟ دقت کنید که این زمان می‌تواند منفی باشد، چرا که مبدأ را در یک لحظه‌ی دلخواه در نظر گرفته‌ایم. همچنین شرطی را به‌دست آورید که برخورد دو ذره را تضمین کند.
راهنمایی: می‌توانید بدون استفاده از حسابان این مسأله را حل کنید. همچنین اجازه دارید بردارهای جدیدی بر حسب بردارهای داده شده تعریف کنید.

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۴»

۸۵ دو سیاره روی دو دایره‌ی هم مرکز با صفحه‌ی مشترک حرکت می‌کنند. شعاع مدار سیاره‌ی اول r_1، و شعاع مدار سیاره‌ی دوم r_2 است. بسامد زاویه‌ای سیاره‌ی اول ω_1 و بسامد زاویه‌ای سیاره‌ی دوم ω_2 است. دو سیاره هم جهت می‌گردند. سرعت‌های زاویه‌ای ثابت‌اند. مبدأ را مرکز دایره‌ها و محور x را یک محور دلخواه گذرنده از مبدأ و در صفحه‌ی دایره‌ها بگیرید. در $t = 0$ سیاره‌ی یک روی نیم‌محور مثبت x است و بردار مکان سیاره دو نسبت به نیم محور مثبت x برابر ϕ_0 است. زاویه‌ی بردار $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ نسبت به نیم‌محور مثبت x را θ می‌گیریم. $\vec{r_2}$ بردار مکان سیاره‌ی دو، و $\vec{r_1}$ بردار مکان سیاره‌ی یک است. مشتق θ نسبت به زمان را به‌دست آورید. در حالت $\omega_1 = \omega_2 = \omega$، این مشتق را ساده کنید.

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسأله‌ی ۵»

۸۶ یک ماهواره در مدار دایره‌ای در صفحه‌ای عمود بر محور $\hat{n}_0$ و گذرنده از مرکز زمین، دور زمین

می‌گردد. محور $\hat{n}_\circ$ نسبت به ستاره‌های دور (یک چارچوب لخت) ثابت است و جهت آن با مختصات کروی $\theta_\circ$ و $\phi_\circ$ داده می‌شود. محور z (که زاویه‌ی θ نسبت به آن سنجیده می‌شود) همان محور چرخش زمین (خط قطب جنوب و قطب شمال) است، و مرکز مختصات هم مرکز زمین است. جهت بردار مکان ماهواره در زمان t نسبت به مرکز زمین، $\hat{n}(t)$ است. این جهت هم با زاویه‌های θ و ϕ در مختصات کروی داده می‌شود. سرعت ماهواره (نسبت به چارچوب لخت):

$$\vec{v} = r\omega \hat{n}_\circ \times \hat{n}$$

است، که r فاصله‌ی ماهواره تا مرکز زمین، و ω سرعت زاویه‌ای ماهواره است. فرض کنید این سرعت زاویه‌ای با سرعت زاویه‌ای چرخش زمین به دور خود برابر است.

$(\frac{d\theta}{dt})$ و $(\frac{d\phi}{dt})$ را بر حسب ω و زاویه‌های مشخص کننده‌ی $\hat{n}_\circ$ و $\hat{n}$ به‌دست آورید.

چارچوبی را در نظر بگیرید که محور zاش همان محور چرخش زمین است، مرکزش هم همان مرکز زمین است، اما همراه با زمین می‌چرخد. زاویه‌های کروی نسبت به این چارچوب را با θ'، ϕ'، $\theta'_\circ$ و $\phi'_\circ$ نمایش می‌دهیم.

$(\frac{d\theta'}{dt})$ و $(\frac{d\phi'}{dt})$ را بر حسب ω و زاویه‌های پریم‌دار مشخص کننده‌ی $\hat{x}_\circ$ و $\hat{x}$ به‌دست آورید. (اینها در واقع سرعت ماهواره از دید یک ناظر زمینی‌اند.)

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۱»

۸۷ الف) ذره‌ای با شروع حرکت از نقطه‌ی A روی استوای کره‌ای به شعاع واحد، به اندازه‌ی زاویه‌ی α به سمت شرق می‌رود تا به نقطه‌ی B برسد. سپس به اندازه‌ی زاویه‌ی β روی دایره‌ی عظمیه‌ی گذرنده از قطب شمال و نقطه‌ی B به سمت شمال می‌رود. اگر مختصات اولیه‌ی ذره $x_\circ = 1$، $y_\circ = \circ$ و $z_\circ = \circ$ باشد، مختصات نهایی آن را حساب کنید.

$$\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1) = ?$$

ب) اکنون فرض کنید که این ذره از نقطه‌ی A به اندازه‌ی زاویه‌ی β روی دایره‌ی عظیمیه‌ی گذرنده از قطب شمال و نقطه‌ی A به سمت شمال برود تا به نقطه‌ی C برسد. سپس روی دایره‌ی عظیمیه‌ی گذرنده از نقطه‌ی C به اندازه‌ی زاویه‌ی α حرکتی کند که شروع آن به سمت شرق است. این حرکت روی دایره‌ی عظیمه‌ای صورت می‌گیرد که از C می‌گذرد و بر دایره‌ی عظیمیه‌ی گذرنده از C و قطب شمال عمود است.

دقت کنید که در مختصات کروی، ϕ با حَرکت روی استوا و θ با حرکت روی مدارها سنجیده می‌شود. (مدارها دایره‌های عظیمه‌ای عمود بر استوا هستند.)

مختصات نهایی ذره در این وضعیت را محاسبه کنید:

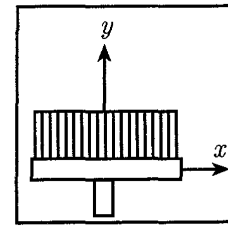
$$\vec{r}_2 = (x_2, y_1, z_2) = ?$$

ج) بردار اختلاف مختصات نهایی در این دو حالت $\vec{\Delta} = \vec{r_2} - \vec{r}$ را بیابید.

د) فرض کنید α و β از یک مرتبه‌ی کوچک باشند، $\vec{\Delta}$ را تا مرتبه‌ی دوم کوچکی (یعنی تا جملاتی که بزرگ‌تر از α^2، β^2 یا $\alpha\beta$ نیستند) محاسبه کنید.

راهنمایی: مختصات دکارتی معادل (r, θ, ϕ) در دستگاه‌کروی $(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ است.

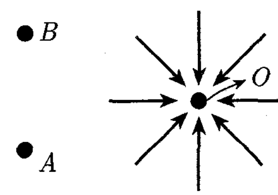
«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۵»



شکل ۱-۱۲۱

۸۸ آب از آب‌پاشی مطابق شکل (۱ـ۱۲۱) با سرعت $v_\circ$ خارج می‌شود. آب‌پاشی را با سرعت $u_\circ \sin\omega t$ در جهت x نسبت به دستگاه xyz حرکت می‌دهیم. در زمان $t = \circ$ وسط آب‌پاشی در مبدأ مختصات بوده است. در مبدأ مختصات اسفنج کوچکی آغشته به رنگ **ساکن** است، به‌طوری که قطراتی که از مبدأ پرتاب می‌شوند رنگی می‌شوند. در لحظه‌ی T از این مجموعه عکس می‌گیریم. نقاط رنگی منحنی‌ای به شکل $f(x,y) = \circ$ می‌سازند. $f(x,y)$ را به‌دست آورید. از گرانش چشم بپوشید.

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۲»



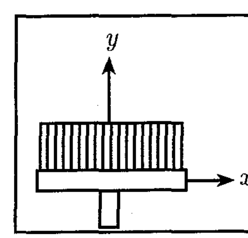
شکل ۱-۱۲۲

۸۹ در یک دریاچه‌ی فرضی، سوراخی وجود دارد که آب از آنجا به درون زمین فرو می‌رود. به همین دلیل همواره جریان آبی به سمت سوراخ وجود دارد. مکان سوراخ را مبدأ مختصات بگیرید.

الف) عمق کف رودخانه بر حسب r (فاصله از سوراخ) را به گونه‌ای به‌دست آورید. که اندازه‌ی سرعت آب دریاچه در همه جا تقریباً ثابت بماند. این سرعت را v بگیرید.

ب) شخصی می‌خواهد با یک قایق از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود. اندازه‌ی سرعت قایق برابر با v (همان سرعت آب دریاچه) و جهت آن همواره به سوی نقطه‌ی B است. مسیر حرکت قایق را به‌دست آورید. قایق سرانجام به کجا می‌رسد؟

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۴»



شکل ۱-۱۲۳

۹۰ آب از آب‌پاشی مطابق شکل (۱ـ۱۲۳) با سرعت $v_\circ$ در جهت محور y خارج می‌شود. آب‌پاش را با سرعت $u_\circ \sin\omega t$ در جهت x نسبت به دستگاه xy حرکت می‌دهیم. در زمان $t = \circ$ وسط آب‌پاش در مبدأ مختصات بوده است. در وسط آب‌پاش اسفنج کوچکی آغشته به رنگ قرار داده‌ایم، به‌طوری که قطرات آبی که از وسط آب‌پاش پرتاب می‌شوند رنگی می‌شوند. در لحظه‌ی T از این مجموعه عکس می‌گیریم. نقاط رنگی منحنی‌ای به شکل $f(x,y) = \circ$ می‌سازند. $f(x,y)$ را به‌دست آورید. از گرانش چشم بپوشید.

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ـ مسأله‌ی ۵»

۹۱ معادله‌ی بیضی‌ای که یک کانون آن مرکز مختصات است، در مختصات قطبی (r, θ)

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)}$$

است، که a نیم‌محور بزرگ بیضی، ϵ خروج از مرکز بیضی، و $\theta_\circ$ مختصه‌ی زاویه‌ای نقطه‌ی حضیض است. بردارهای یکه‌ی مختصات قطبی را با $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ نشان می‌دهیم. زاویه‌ی خط مماس بر بیضی با $\hat{e}_\theta$ را با ϕ نشان دهید. جهت مثبت این زاویه را ساعتگرد (خلاف جهت مثلثاتی) می‌گیریم.

الف) $\tan\phi$ را بر حسب θ و ثابت‌های وارد شده در معادله‌ی بیضی به دست آورید.

ب) فرض کنید $\epsilon << 1$، و ϕ را تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر نسبت به ϵ به‌دست آورید.

یک فضاپیما در مداری به شکل بیضی دور خورشید حرکت می‌کند (خورشید مرکز مختصات و یک کانون این بیضی است). این فضاپیما از کنار سیاره‌ای در صفحه‌ی مداری می‌گذرد. اثر این

سیاره آن است که به فضاپیما ضربه‌ای می‌زند که فقط جهت سرعت فضاپیما را عوض می‌کند. در اثر این ضربه، مکان فضاپیما تغییر نمی‌کند، صفحه بیضی هم عوض نمی‌شود، خورشید همچنان در کانون مسیر جدید می‌ماند و از پارامترهای بیضی a ثابت می‌ماند و ϵ و $\theta_\circ$ تغییر می‌کنند. این تغییرات چنان است که مقدار ϕ در نقطه (r,θ) (محل برخورد) به $\phi+\delta\phi$ تبدیل می‌شود.

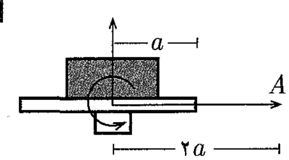
ج) با فرض $\epsilon \ll ۱$، رابطه r بر حسب θ در معادله بیضی تا اولین مرتبه نسبت به ϵ بنویسید.

د) دو بیضی در نظر بگیرید که یک کانون هر دو در مرکز مختصات است، نیم‌محور بزرگشان با هم برابر است و صفحه آنها هم یکسان است. با استفاده از معادله ساده شده حاصل از (ج)، شرطی بنویسید که این دو بیضی در مختصه زاویه θ یکدیگر را قطع کنند. این شرط را بر حسب ϵ و $\theta_\circ$ (پارامترهای یک بیضی) و ϵ' و $\theta'_\circ$ (پارامترهای بیضی دیگر) بنویسید.

ه) بگیرید $-\epsilon' = \epsilon + \delta\epsilon$ و $\theta'_\circ = \theta_\circ + \delta\theta_\circ$ با فرض این‌که $\delta\epsilon$ و $\delta\theta_\circ$ بسیار کوچک‌تر از ϵاند، از معادله حاصل از (د) مقدار $\delta\theta_\circ$ را به‌دست آورید.

و) با فرض این‌که $\delta\phi \ll \delta\epsilon \ll ۱$، مقدار $\delta\epsilon$ را بر حسب $\delta\phi$، θ و پارامترهای بیضی اولیه به‌دست آورید. «آزمون نهایی دوره تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسأله ۲»

۹۲ در لحظه $t=\circ$ از آب‌پاشی مطابق شکل (۱ـ۱۲۴) آب با سرعت u نسبت به آب‌پاش، از آن خارج می‌شود. در همان لحظه آب‌پاش با سرعت زاویه‌ای ω نسبت به مرکز آب‌پاش شروع می‌کند به چرخیدن. عرض آب‌پاش a و نقطه A در فاصله $۲a$ از مرکز آب‌پاش است.

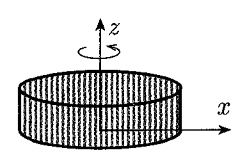


شکل ۱-۱۲۴

الف) کم‌ترین سرعت u چقدر باشد تا قبل از این‌که آب‌پاش یک دور کامل بزند، آب به نقطه A برسد؟

ب) بیشترین سرعت u چقدر باشد به‌طوری که وقتی آب‌پاش سه دور کامل می‌زند آب هنوز به نقطه A نرسیده باشد؟ «آزمون اول المپیاد فیزیک سال ۱۳۸۴ ـ مسأله ۳»

۹۳ از آب‌پاشی به شکل یک قرص، آب با سرعت قائم u نسبت به آب‌پاش از آن خارج می‌شود. صفحه آب‌پاش را صفحه xy بگیرید. از گرانش نیز صرف‌نظر کنید. آب‌پاش با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد.



شکل ۱-۱۲۵

الف) پنبه‌ای آغشته به رنگ روی محور x و در فاصله R از مرکز قرص قرار می‌دهیم. R از شعاع قرص کوچک‌تر است. پنبه ساکن است و آب‌پاش زیر آن می‌چرخد و قطره‌هایی که از محل پنبه رنگی رد می‌شوند رنگی می‌شوند. در زمان T از قطره‌های آب عکس می‌گیریم. قطره‌های رنگی چه خمی را تشکیل می‌دهند؟ معادله خم را به‌دست آورید.

ب‌ـ۱) پنبه آغشته به رنگ را روی آب‌پاش و در فاصله R از مرکز قرص می‌چسبانیم. حالا پنبه همراه آب‌پاش می‌چرخد و قطره‌هایی که از محل پنبه رنگی رد می‌شوند رنگی می‌شوند. فرض کنید در زمان $t=\circ$ پنبه‌ای آغشته به رنگ روی محور x باشد. در زمان T از قطره‌های آب عکس می‌گیریم. قطره‌های رنگی چه خمی را تشکیل می‌دهند؟ معادله خم را به‌دست آورید. برای این کار ابتدا مکان قطره‌ای که در زمان $t_۱$ از آب‌پاش جدا شده را در زمان t، یعنی $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$به‌دست آورید. $t_۱$ را بین آنها حذف کنید و x و y را بر حسب t و z به‌دست آورید.

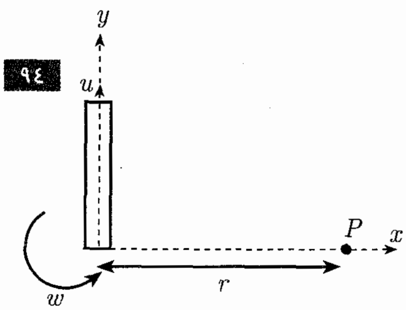
ب‌ـ۲) بگیرید $\tan\phi = y/x$، ϕ را بر حسب t و z به‌دست آورید. رابطه خود را برای z

بزرگ ساده کنید. (**راهنمایی**: بگیرید $\tan\alpha = wz/u$).

ب‌ـ۳) پای پیچ یعنی تغییر z به ازای تغییر ϕ به اندازه 2π. برای خمی که در بندهای قبل به‌دست آورده‌اید و برای z بزرگ پای پیچ را محاسبه کنید.

«آزمون سوم دوره تابستانی سال ۱۳۸۴ ـ مسأله ۱»

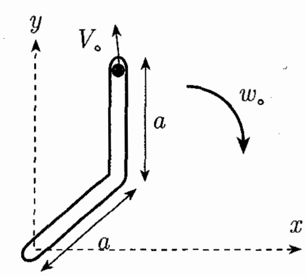
۹۴ یک انتهای لوله‌ای به طول R در مبدأ مختصات قرار دارد. آب با سرعت u نسبت به لوله از سر دیگر خارج می‌شود. لوله در لحظه‌ی $t = 0$ در جهت $\hat{y}$ و با سرعت زاویه‌ای ω شروع به دوران حول محور z می‌کند (راستای z عمود بر صفحه‌ی کاغذ و به سمت بیرون است). زمانی که اولین قطره‌ی آب به نقطه‌ی P با مختصات $(r, 0)$ می‌رسد را به‌دست آورید. این زمان را در حالت حدی $u \gg R\omega$ تا مرتبه‌ی یک و در حالت $u \ll R\omega$ تا مرتبه‌ی صفر حساب کنید (از گرانش صرف‌نظر کنید).



شکل ۱-۱۲۶

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۵ ـ مسأله‌ی ۱»

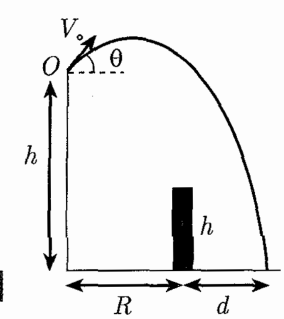
۹۵ مطابق شکل (۱ـ۱۲۷) فواره‌ای از دو لوله‌ی متصل به هم به طول a ساخته شده است. زاویه‌ی بین دو لوله β است. آب از لوله‌ای که در مبدأ است وارد و از سر دیگر با سرعت افقی v_0 نسبت به فواره از آن خارج می‌شود. فواره هم با سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = v_0 \tan(\frac{\beta}{2})/(2a)$ حول محور قائم z می‌چرخد. فرض کنید در ابتدا سر فواره که آب از آن خارج می‌شود روی محور x باشد (از گرانش صرف‌نظر کنید).



شکل ۱-۱۲۷

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۵ ـ مسأله‌ی ۲»

۹۶ یک توپ تنیس از نقطه‌ی o به ارتفاع h از سطح زمین و به فاصله‌ی افقی R از توری که ارتفاع آن نیز h است، پرتاب می‌شود. زاویه‌ی پرتاب نسبت به افق θ و پرتاب در صفحه‌ای عمود بر تور انجام می‌گیرد. اگر قرار باشد توپ در محدوده‌ی d از طرف دیگر تور به زمین بخورد، به ازای یک θی معین محدوده‌ی مجاز سرعت پرتاب (یعنی v_0) چقدر است؟ برای اینکه چنین محدوده‌ای وجود داشته باشد چه رابطه‌ای بین d، h، R و θ باید باشد؟ از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.



شکل ۱-۱۲۸

«آزمون اول المپیاد فیزیک سال ۱۳۸۵ ـ مسأله‌ی ۵»

۹۷ یک هواپیما در عرض جغرافیایی ثابت λ با سرعت ثابت $900\,\mathrm{km/h}$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. بر حسب مختصات کروی‌ای که مرکز آن مرکز زمین و محور z محور قطبی زمین (به سوی قطب شمال) است، عرض جغرافیایی متمم مختصه‌ی θ و طول جغرافیایی مختصه‌ی ϕ است. پارامتر s را چنان تعریف می‌کنیم که $s = +1$ باشد، اگر هواپیما به شرق حرکت کند، و $s = -1$ اگر هواپیما به غرب حرکت کند. محیط زمین $40000\,\mathrm{km}$ است و یک روز را با d نشان می‌دهیم. هواپیما سر ظهر شروع به حرکت می‌کند. طول جغرافیایی مقصد منهای طول جغرافیایی مبدأ را با α، مدت پرواز هواپیما را با T، و زمان محلی در مقصد در انتهای پرواز منهای زمان محلی در مبدأ در ابتدای پرواز را با τ نشان می‌دهیم. (یعنی اگر مثلاً هواپیما پس از ۴ ساعت پرواز به مقصد رسید و زمان رسیدن ساعت ۲ بعدازظهر همان روز به وقت مقصد بود، $T = 4n$ و $\tau = 2n$ است.)

الف) (τ/d) را بر حسب (T/d)، s و λ به‌دست آورید.

ب) (τ/d) را بر حسب $[\alpha/(2\pi)]$، s و λ به‌دست آورید.

ج) یک مسافر در هواپیما ساعتش را به وقت مبدأ نگه داشته است. کمترین زمان پرواز (جز صفر) را حساب کنید که وقتی هواپیما به مقصد رسید زمانی که ساعت این مسافر نشان می‌دهد با زمان مقصد یکی باشد (یعنی مثلاً ۲ بعدازظهر را نشان می‌دهند. ۲ بعدازظهر و ۲ بامداد یکی به حساب نمی‌آیند).

د) λ و s را برای حالتی حساب کنید که از هر جا هواپیما می‌گذرد در آنجا ظهر باشد.

ه) فرض کنید هواپیما در همان عرض جغرافیایی بخش (د) حرکت می‌کند، اما در جهت مخالف. کمترین زمان پرواز (جز صفر) برای اینکه هواپیما ظهر (به وقت مقصد) به مقصد برسد را حساب کنید.

«آزمون اول دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۵ ـ مسأله‌ی ۶»

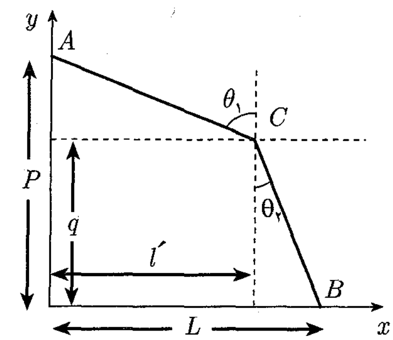
پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۱

۱ مسیر فرضی طی شده توسط ماشین در شکل (۱ـ۱۲۹) رسم شده است. قصد ما به‌دست آوردن θ_1 و θ_2 به گونه‌ای است که ماشین در کمترین زمان از A به B برسد.
زمان کل حرکت بر اساس شکل (۱ـ۱۲۹) عبارتست از:

$$t = t_1 + t_2 \ , \ \ t_1 = \frac{\overline{AC}}{v_1} \ , \ t_2 = \frac{\overline{BC}}{v_2}$$
$$\Rightarrow \ t = \frac{\overline{AC}}{v_1} + \frac{\overline{BC}}{v_2}$$

که در آن $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ برابرند با:

$$\overline{AC} = \sqrt{(p-q)^2 + l'^2} \ , \ \ \overline{BC} = \sqrt{(L-l')^2 + q^2}$$



شکل ۱-۱۲۹

حال عبارت مربوط به زمان کل t را بازنویسی می‌کنیم:

$$t = \frac{\sqrt{(p-q)^2 + l'^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-l')^2 + q^2}}{v_2}$$

با توجه به اینکه q ،L و p مقادیر ثابت هستند، باید l' را به گونه‌ای تعیین کنیم که t ماکزیمم شود. برای این کار از t نسبت به l' مشتق می‌گیریم و عبارت به‌دست آمده را برابر صفر قرار می‌دهیم تا l' مناسب به‌دست آید. بنابراین

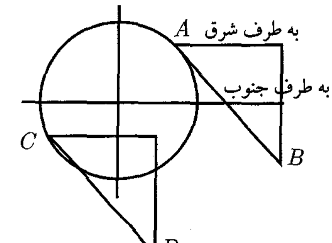
$$\frac{dt}{dl'} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{l'}{v_1\sqrt{(p-q)^2 + l'^2}} - \frac{L-l'}{v_2\sqrt{(L-l')^2 + q^2}} = 0$$
$$\Rightarrow \ \frac{v_1}{v_2} = \frac{l'/\sqrt{(p-q)^2 + l'^2}}{(L-l')/\sqrt{(L-l')^2 + q^2}} \qquad ((1))$$

با توجه به شکل (۱ـ۱۲۴) داریم:

$$\sin\theta_1 = \frac{l'}{\sqrt{(p-q)^2 + l'^2}} \qquad (2)$$
$$\sin\theta_2 = \frac{L-l'}{\sqrt{(L-l')^2 + q^2}}$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲) داریم: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$.

۲ برای مشخص کردن حرکت متحرک، مطابق شکل (۱ـ۱۳۰) یک صفحه با دو محور مختصات به کار می‌بریم. متحرک می‌تواند در ابتدا در یکی از نقاط واقع بر پیرامون دایره به شعاع ۲ متر که مرکز آن روی مبدأ مختصات است، باشد. فرض کنید متحرک ابتدا در نقطه‌ی A قرار دارد. متحرک پس از دو حرکت به نقطه‌ی B خواهد رسید. آشکار است که اگر آغاز حرکت در نقطه‌ی دیگری مثل C بود، متحرک به نقطه‌ی دیگری مثل D می‌رسید. بنابراین نمی‌توان مکان نهایی متحرک و در نتیجه فاصله‌ی آن را از مبدأ حساب کرد. در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.



شکل ۱-۱۳۰

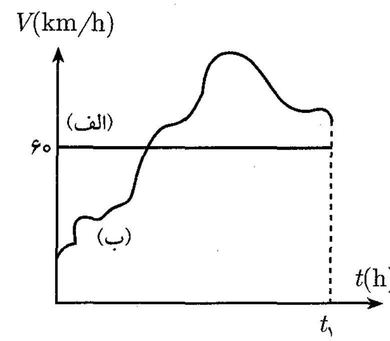
۳ حرکت اتومبیل به یکی از دو صورت زیر می‌تواند باشد:

الف) تمام مسیر با سرعت ۶۰km/h پیموده شده باشد.

ب) در طول مسیر سرعت تغییر کرده ولی سرعت متوسط ۶۰km/h بوده باشد.

این دو حالت را در شکل (۱ـ۱۳۱) رسم کرده‌ایم.

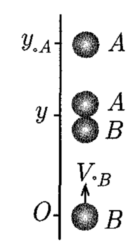
واضح است که فرض (الف) قطعی نیست، زیرا حالتی مانند (ب) نیز می‌تواند وجود داشته باشد. نکته‌ی اساسی در حل این سؤال، یکی بودن مسافت طی شده است.



شکل ۱-۱۳۱

فاصله‌ی بین دو شهر ثابت است و چون سرعت متوسط ۶۰km/h است، در هر حالتی زمان طی مسیر نیز یکسان است. همان‌طور که می‌دانید مسافت طی شده برابر مساحت زیر نمودار $v-t$ است. با توجه به این نکات، اگر سرعت اتومبیل در بازه‌ای از زمان کمتر از ۶۰km/h باشد، باید در بازه‌ای دیگر با سرعتی بالاتر از ۶۰km/h حرکت کند تا در نهایت، در مدت زمان $t_۱$ فاصله‌ی بین دو شهر را طی کرده باشد (شکل ۱ـ۱۳۱). بنابراین حداقل یک بار سرعتش ۶۰km/h بوده است. در نتیجه گزینه (د) صحیح است.

۴ در شکل (۱ـ۱۳۲) محور مختصات قائم y نشان داده شده است. مبدأ مختصات را روی سطح زمین می‌گیریم و معادله حرکت دو گلوله را می‌نویسیم. بنابراین



شکل ۱-۱۳۲

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_{\circ A}$$
$$y_B = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_{\circ B}t$$

در معادله بالا y_A و y_B فاصله گلوله‌ها از مبدأ مختصات، یعنی زمین در هر لحظه است. هنگامی که دو گلوله به هم می‌رسند، یعنی هر دو گلوله در یک فاصله از مبدأ قرار دارند، داریم

$$y_A = y_B \Rightarrow y_{\circ A} = V_{\circ B}t = ۲۴ \Rightarrow V_{\circ B} = \frac{۲۴}{t}$$

رابطه سرعت گلوله‌ها نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

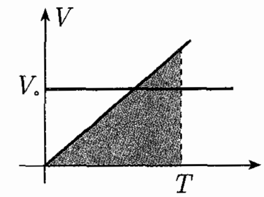
$$y_A = -gt + \circ$$
$$V_B = -gt + V_{\circ B}$$

در لحظه برخورد، سرعت گلوله A دو برابر سرعت گلوله B است ولی باید توجه داشت که گلوله B در حال بالا رفتن و گلوله A در حال پایین آمدن است. در نتیجه

$$V_A = -۲V_B \Rightarrow -gt = ۲gt - ۲V_{\circ B}$$
$$V_{\circ B} = \frac{۳}{۲}gt = \frac{۲۴}{t} \Rightarrow \frac{gt^۲}{۲} = ۸$$
$$y_A = -۸ + ۲۴ = ۱۶\text{m}$$

بنابراین محل برخورد گلوله‌ها ۱۶m از مبدأ مختصات که بر زمین منطبق است، فاصله دارد. در نتیجه جواب صحیح ۱۶m می‌باشد.

۵ در مدت T، باید جابجایی کامیون و اتومبیل یکسان باشد زیرا هر دو به یک جا رسیده‌اند. چون مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، برابر جابجایی یک جسم است، باید برای اتومبیل خطی را به عنوان نمودار سرعت ـ زمان انتخاب کرد که مساحت زیر آن با مساحت زیر خط افقی، یعنی نمودار سرعت ـ زمان کامیون برابر باشد. در شکل (۱ـ۱۳۳) این نمودار نشان داده شده است. در این شکل، مساحت مثلث هاشورخورده با مساحت مستطیل به اضلاع T و $V_\circ$ برابر است. بنابراین نمودار (۱) باید انتخاب شود. در نتیجه گزینه (الف) صحیح است.



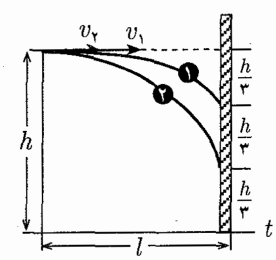
شکل ۱-۱۳۳

۶ حرکت دو پرتابه در شکل (۱ـ۱۳۴) نشان داده شده است. همان‌طور که می‌دانید شتاب هر دو پرتابه در راستای قائم، g است. در نتیجه:

$$y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \Rightarrow -\frac{h}{۳} = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲$$
$$y_۲ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \Rightarrow -\frac{۲h}{۳} = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ \qquad (۱)$$

واضح است که چون نیروی افقی بر آنها وارد نمی‌شود، شتاب افقی آنها صفر است و در نتیجه حرکت افقی آنها، حرکت با سرعت ثابت است. پس

$$t_۱ = \frac{l}{v_۱} \ , \ t_۲ = \frac{l}{v_۲} \qquad (۲)$$



شکل ۱-۱۳۴

با جایگذاری رابطه‌ی (۲) در (۱) داریم:

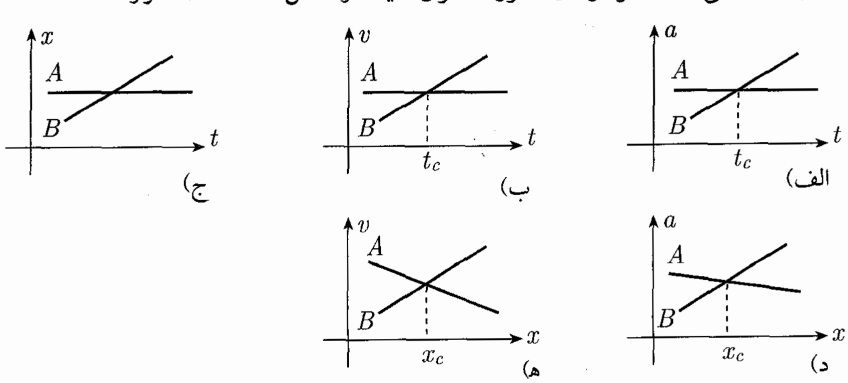
$$\frac{h}{۳} = \frac{g}{۲}(\frac{l}{v_۱})^۲ \ , \ \frac{۲h}{۳} = \frac{g}{۲}(\frac{l}{v_۲})^۲$$

از تقسیم دو رابطه‌ی بالا بر هم، نسبت سرعت‌ها به‌دست می‌آید. بنابراین

$$(\frac{v_۱}{v_۲})^۲ = ۲ \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \sqrt{۲}$$

در نتیجه گزینه‌ی (الف) درست است.

۷ با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای وقوع تصادف لازم است که دو متحرک (دو خودروی A و B) در یک زمان، به یک مکان برسند. بنابراین واضح است که تقاطع دو نمودار مکان ـ زمان یک تصادف را نشان می‌دهد. نمودارهای صورت سؤال عیناً در شکل (۱ـ۱۳۵) تکرار شده است.



شکل ۱-۱۳۵

بنابراین تنها نموداری که حتماً بیانگر یک تصادف است، نمودار (ج) است.

حال به تحلیل بقیه‌ی نمودارها می‌پردازیم. در نمودار (الف) شتاب دو خودرو بر حسب زمان نشان داده شده است. در لحظه‌ی t_c شتاب دو خودرو یکسان است، اما مکان و سرعت دو خودرو معلوم نیست. بنابراین تصادف حتمی نیست. در نمودار (ب) سرعت هر کدام از خودروها بر حسب زمان رسم شده است. از این نمودار پیداست که با گذشت زمان، سرعت خودروی B زیادتر می‌شود تا در لحظه‌ی t_c، سرعت با سرعت خودروی A برابر شود. اما معلوم نیست که در این لحظه دو خودرو درکجا هستند. چون ممکن است در چنین لحظه‌ای خودروها در دو نقطه از جاده باشند، بنابراین در این مورد هم وقوع تصادف حتمی نیست. در نمودارهای (د) و (هـ) در یک محل از جاده شتاب و یا سرعت دو خودرو با هم برابر است، اما زمان این برابری معلوم نیست. چون ممکن است برابری شتاب و یا سرعت در یک محل از جاده، x_c، ولی در زمان‌های متفاوت روی داده باشد. این نمودارها هم نشانه‌ی حتمی یک تصادف نیست. بنابراین تنها گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۸ همان‌طور که در صورت سؤال آمده، مسافت‌های داده شده با سرعت‌های معین طی می‌شوند، پس تنها کافی است زمان طی این مسافت‌ها با این سرعت‌ها را بیابیم. متحرک ابتدا $\frac{۱}{۲}$ مسیر خود را با سرعت v طی می‌کند، پس

$$t = \frac{s}{v} \Rightarrow t_۱ = \frac{\frac{۱}{۲}l}{v} = \frac{l}{۲v}$$

سپس $\frac{۱}{۴}$ مسیر خود را با سرعت $\frac{v}{۲}$ می‌پیماید، بنابراین

$$t_۲ = \frac{\frac{۱}{۴}l}{\frac{۱}{۲}v} = \frac{l}{۲v}$$

اگر این کار را برای بازه‌های بعدی هم انجام دهیم، در می‌یابیم که تمام بازه‌ها در زمان $\frac{l}{۲v}$ طی می‌شود. همین طور می‌دانیم که تعداد بازه‌ها نامحدود است، بنابراین زمان کل n برابر $\frac{l}{۲v}$ است که چون n بی‌نهایت است، زمان کل طی مسافت مورد نظر بی‌نهایت است. در نتیجه:

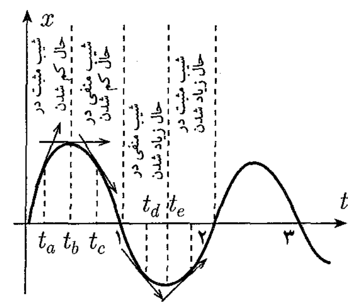
$$\overline{v} = \frac{s}{t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{l}{n\frac{l}{۲v}} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۲v}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{v} = ۰$$

بنابراین گزینه‌ی (د) صحیح است.

۹ چون نمودارها به‌طور دقیق قابل بررسی نیست، بهتر است با حذف گزینه به جواب درست برسیم و سپس جواب خود را تحلیل کنیم. همان‌طور که می‌دانید شیب نمودار مکان ـ زمان بیانگر سرعت جسم است. بنابر شکل موجود در صورت سؤال شیب نمودار مکان ـ زمان در لحظه‌ی $t = ۰$ مثبت است ولی نمودارهای (ج) و (د) سرعت صفر را در لحظه‌ی $t = ۰$ نشان می‌دهند. بنابراین گزینه‌های (ج) و (د) صحیح نمی‌باشند. نکته‌ی مهم دیگر این است که شیب نمودار مکان ـ زمان نشان داده شده در لحظاتی مانند $t = ۱$ منفی می‌باشند، این در حالتی است که نمودار (الف)

بیانگر آن است که سرعت هیچ گاه منفی نمی‌شود. در نتیجه گزینه‌ی (الف) نیز غلط است. بنابراین گزینه‌ی (ب) صحیح است. حال گزینه‌ی (ب) را بیشتر بررسی کرده و با نمودار مکان ـ زمان نشان داده شده مطابقت می‌دهیم.

در شکل (۱ـ۱۳۶) نمودار مکان ـ زمان جسم تکرار شده و همچنین در چند نقطه خط مماس بر نمودار رسم شده است. در لحظه‌ی $t = ۰$ شیب نمودار مثبت است. با گذشت زمان شیب نمودار همچنان مثبت است، اما کم می‌شود تا در لحظه t_b، شیب صفر می‌شود پس از این لحظه، کاهش شیب ادامه می‌یابد و منفی می‌شود. در لحظه‌ی $t_۱$، شیب منفی نمودار، بزرگ‌ترین اندازه را دارد و پس از آن شیب افزایش می‌یابد، یعنی اندازه‌ی آن شروع به کم شدن می‌کند. این افزایش شیب منفی تا لحظه‌ی t_e ادامه می‌یابد و در آنجا شیب مجدداً صفر می‌شود. پس از آن افزایش شیب ادامه می‌یابد و شیب مثبت می‌شود. روی نمودار علامت شیب و کم یا زیاد شدن آن با گذشت زمان نیز مشخص شده است. با توجه به این توضیحات، نمودار سرعت ـ زمان متحرک مانند شکل موجود در گزینه‌ی (ب) است. در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.



شکل ۱-۱۳۶

۱۰ مسیر حرکت متحرک که دایره است در شکل (۱ـ۱۳۷) نشان داده شده است. اگر متحرک در لحظه‌ی $t = ۰$ در نقطه‌ی A باشد، در لحظه‌ی t در نقطه‌ی B خواهد بود که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی آغاز حرکت یعنی A، برابر وتر AB است. با توجه به شکل (۱ـ۱۳۷) داریم:

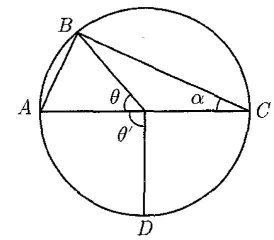
$$AB = ۲R\sin\alpha = ۲R\sin\frac{\theta}{۲}$$

چون سرعت متحرک ثابت است، کمان‌های مساوی در زمان‌های مساوی طی می‌شود. اگر طول کمان پیموده شده از نقطه‌ی A را S و اندازه‌ی سرعت را v بنامیم، داریم:

$$S = vt$$

می‌دانیم که زاویه‌ی مرکزی روبه‌روی کمان S بر حسب رادیان $\frac{S}{R}$ است. پس:

$$\frac{S}{R} = \theta \ , \ \ S = vt \ \Rightarrow \ \theta = \frac{vt}{R} = \omega t$$

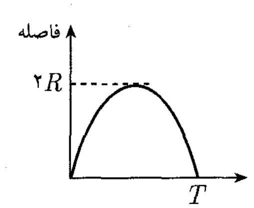


شکل ۱-۱۳۷

اکنون اگر مقدار θ را از این رابطه در رابطه‌ی قبل بگذاریم، داریم:

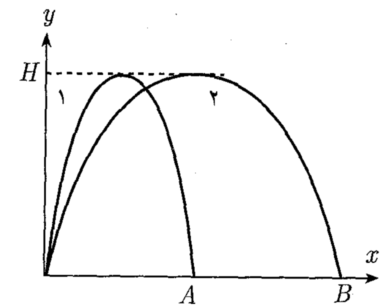
$$AB = ۲R\sin\frac{\omega}{۲}t$$

از شکل (۱ـ۱۳۷) پیداست که زاویه‌ی θ هنگامی که متحرک در نقطه‌ی A است، از صفر شروع و هنگامی که متحرک به نقطه‌ی C می‌رسد، تا مقدار π رادیان زیاد می‌شود. چون فاصله‌ی متحرک از نقطه‌ی A مورد نظر است و این مقدار همواره مثبت است، با عبور متحرک از نقطه‌ی C و رسیدن به نقطه‌ی مثالی D، باید به جای زاویه‌ی θ که در این حالت بزرگ‌تر از π رادیان است، زاویه‌ی θ' را قرار داد به‌طوری که همواره سینوس آن مثبت باشد. نمودار تغییرات فاصله‌ی متحرک از نقطه‌ی A در مدت زمانی که متحرک یک دور دایره را می‌پیماید، در شکل (۱ـ۱۳۸) نشان داده شده است. هنگامی که متحرک دورهای بعدی را می‌زند، همین نمودار تکرار می‌شود و نموداری مانند آنچه در گزینه‌ی (د) آمده است، به وجود می‌آید. پس گزینه‌ی (د) درست است.



شکل ۱-۱۳۸

۱۱ مسیر حرکت پرتابه‌ها در شکل (۱ـ۱۳۹) نشان داده شده است. می‌دانیم حرکت پرتابه را می‌توان ترکیبی از حرکت شتاب‌دار در راستای قائم و یک حرکت یکنواخت افقی دانست. چون ارتفاع اوج دو پرتابه یکسان است و ارتفاع اوج به سرعت اولیه در راستای قائم بستگی دارد، پس سرعت اولیه‌ی دو پرتابه در راستای قائم یکسان است. از طرفی چون دو پرتابه هم‌زمان پرتاب شده‌اند و زمان رسیدن به اوج برای آنها یکسان است، دو پرتابه هم‌زمان به نقطه‌ی اوج می‌رسند. آشکار است که برگشت از اوج به سطح افقی پرتاب نیز یکسان است. پس دو پرتابه هم‌زمان به نقاط A و B می‌رسند. اما چون سرعت اولیه‌ی پرتابه‌ها در راستای افقی یکسان نبوده است، در مدت زمان بالا رفتن و پایین آمدن پرتابه‌ها، پرتابه‌ی ۳ در راستای افقی بیشتر جابه‌جا شده است. بنابراین گزینه‌ی (الف) صحیح است.



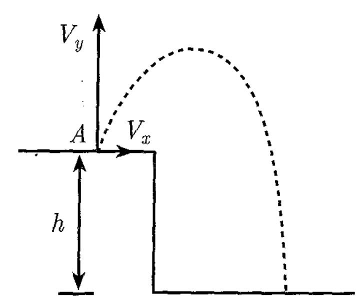
شکل ۱-۱۳۹

۱۲ مطابق شکل (۱ـ۱۴۰) توپ از نقطه‌ی A پرتاب شده است. سرعت اولیه‌ی توپ عبارتست از:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

زمانی که توپ به زمین برخورد می‌کند، نیروی افقی به آن وارد نمی‌شود. در نتیجه پس از برخورد با زمین، مؤلفه‌ی x سرعت توپ تغییر نمی‌کند. بنابراین برای آنکه سرعت توپ پس از برخورد با زمین با سرعت اولیه‌ی آن برابر باشد، باید مؤلفه‌ی y سرعت توپ پس از برخورد با زمین با مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتاب یکی باشد. می‌دانیم با پرتاب توپ، مؤلفه‌ی افقی سرعت توپ تغییر نمی‌کند، اما به علت شتاب گرانش g، مؤلفه‌ی قائم سرعت آن تغییر نمی‌کند. اگر مؤلفه‌ی قائم سرعت توپ را هنگام برخورد با زمین v'_y بگیریم، داریم:

$$v_y'^2 - v_y^2 = 2gh \rightarrow v'_y = \sqrt{2gh + v_y^2}$$



شکل ۱-۱۴۰

مؤلفه‌ی قائم سرعت توپ پس از برخورد با زمین، e برابر این مقدار است که باید با v_y برابر باشد، بنابراین:

$$ev'_y = v_y \Rightarrow e\sqrt{2gh + v_y^2} = v_y \Rightarrow v_y^2(1 - e^2) = e^2(2gh)$$
$$\Rightarrow v_y = \frac{e\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

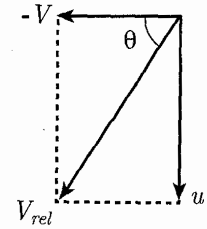
در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۳ با توجه به شکل (۱ـ۹۹) ملاحظه می‌شود که سرعت جسم از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 10\,s$ مثبت است، یعنی در این مدت از محل اولیه دور می‌شود. در لحظه‌ی $t = 10\,s$، سرعت جسم صفر می‌شود و پس از آن سرعتش منفی است، یعنی به طرف محل اولیه برمی‌گردد. پس دورترین فاصله‌ی جسم تا محل اولیه، مقداری است که جسم در $t = 10\,s$ به آنجا رسیده است. همان‌طور که می‌دانید مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، بیانگر فاصله‌ی متحرک از مکان اولیه است. بنابراین بیشترین فاصله‌ی متحرک از محل اولیه‌ی آن برابر مساحت زیر نمودار شکل (۱ـ۹۹) در فاصله‌ی ۰ تا ۱۰ ثانیه است. برای محاسبه‌ی این مساحت، باید خانه‌های مربع شکل زیر نمودار را بشماریم. تعداد خانه‌های زیر نمودار از $t = 0\,s$ تا $t = 10\,s$ تقریباً ۲۸ است. اضلاع این

خانه‌های مربع شکل ثانیه و متر بر ثانیه است، پس مساحت هر کدام از خانه‌ها معادل یک متر است در نتیجه بیشترین فاصله‌ی متحرک از مکان اولیه ۲۸m است.

۱۴ همان‌طور که می‌دانید، اگر سرعت جسم A، $\vec{v_A}$ و سرعت جسم B، $\vec{v_B}$، باشد. سرعت جسم A نسبت به جسم B، $v_{A/B}$ عبارتست از:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v_A} - \vec{v_B}$$

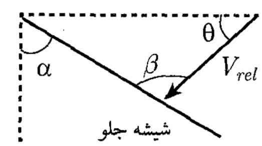


شکل ۱-۱۴۱

پس اگر بردار $(\vec{v_A})$ را با بردار $(-\vec{v_B})$ جمع کنیم، $\vec{v}_{A/B}$ به‌دست می‌آید. در شکل (۱ـ۱۴۱) بردارهای سرعت نشان داده شده است که سرعت قطره‌های باران u به سمت پایین و سرعت اتومبیل v به سمت راست است که ما منفی آن را در شکل (۱ـ۱۴۱) نشان داده‌ایم تا به راحتی $\vec{v}_{\text{rel}}$ به‌دست آید. بنابر شکل (۱ـ۱۴۱) داریم:

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{u^{۲} + v^{۲}} \ , \ \tan\theta = \frac{u}{v} \ \Rightarrow \ \theta = \tan^{-۱}(\frac{u}{v})$$

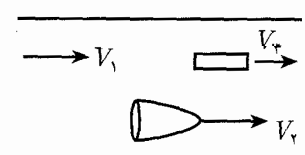
در شکل (۱ـ۱۴۲)، برخورد باران به شیشه جلوی اتومبیل نشان داده شده است. برای آنکه باران روی شیشه بالا برود، باید سرعت قطرات باران نسبت به اتومبیل، v_{rel}، دارای مؤلفه‌ای به طرف شیشه باشد، یعنی زاویه‌ی β بیش از ۹۰° باشد. از شکل (۱ـ۱۴۲) داریم:



شکل ۱-۱۴۲

$$\beta > ۹۰^\circ \ , \ \beta = ۱۸۰^\circ - ((۹۰^\circ - \alpha) + \theta) = ۹۰^\circ + \alpha - \theta$$
$$\Rightarrow ۹۰^\circ + \alpha - \theta > ۹۰^\circ \ \Rightarrow \ \theta < \alpha$$
$$\Rightarrow \tan^{-۱}(\frac{u}{v}) < \alpha \ \Rightarrow \ \frac{u}{v} < \tan\alpha$$

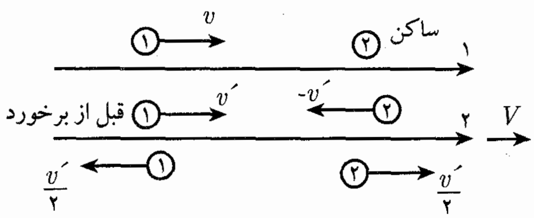
۱۵ در شکل (۱ـ۱۴۳) قایق و تکه چوب پرت شده از آن نشان داده شده است. در لحظه‌ی $t = ۰$ که تکه چوب از قایق به طرف شرق پرتاب می‌شود، سرعت آن نسبت به قایق مثبت است. همان‌طور که می‌دانید شیب نمودار مکان ـ زمان بیانگر سرعت جسم است. بنابراین شیب نمودار مکان ـ زمان در لحظه‌ی $t = ۰$ باید مثبت باشد که تنها گزینه‌های (الف) و (ج) این شرط را برآورده می‌کنند.
پس از مدتی چوب روی سطح آب می‌افتد و همراه آب (با سرعت آب رودخانه) حرکت می‌کند. چون قایق نسبت به آب رودخانه، دارای سرعت $v_۲$ به طرف شرق است، پس از مدتی به چوب که روی آب افتاده است می‌رسد و از کنار آن می‌گذرد. بنابراین باید مکان چوب نسبت به قایق به تدریج کم و سپس منفی شود. تنها گزینه‌ی (الف) این شرط دوم را هم برآورده می‌کند. پس گزینه‌ی (الف) درست است.



شکل ۱-۱۴۳

۱۶ در شکل (۱ـ۱۴۴) دو دستگاه مختصات (۱) و (۲) و دو ذره‌ی (۱) و (۲) نشان داده شده‌اند. فرض می‌کنیم سرعت دستگاه مختصات (۲) نسبت به دستگاه مختصات (۱)، v باشد. چنانچه این سرعت، به سرعت ذره‌های (۱) و (۲) در دستگاه مختصات (۲) افزوده شود، سرعت آنها در دستگاه مختصات (۱) به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\begin{array}{l} V + v' = v \\ V - v' = ۰ \end{array} \ \rightarrow \ V = \frac{v}{۲} \ , \ v' = \frac{v}{۲}$$



شکل ۱-۱۴۴

اکنون اگر سرعت V را به سرعت ذره‌ی (۱) پس از برخورد بیفزاییم، سرعت ذره (۱) در دستگاه مختصات (۱) پس از برخورد به‌دست می‌آید. پس

$$V'' = V - \frac{v'}{۲} = \frac{v}{۲} - \frac{v}{۴} \Rightarrow V'' = \frac{v}{۴}$$

در نتیجه گزینه‌ی (ب) درست است.

۱۷ بنا به تعریف سرعت متوسط عبارت است از:

$$\overline{v}(t) = \frac{x(t_۲) - x(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$$

جز در حالت حرکت یکنواخت که سرعت متوسط مستقل از زمان و برابر با سرعت متحرک است، سرعت متوسط بستگی به بازه‌ی زمانی در نظر گرفته شده دارد. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان شناگر، حرکت وی یکنواخت نیست، پس سرعت متوسط شناگر بستگی به زمان دارد و در لحظه‌ی خاصی بیشینه است. برای محاسبه‌ی سرعت متوسط شناگر باید تغییر مکان وی را در بازه‌ی زمانی صفر تا t محاسبه کنیم.

حرکت شناگر در بازه‌ی زمانی صفر تا ۲s، شتاب‌دار است. تغییر مکان و سرعت وی در لحظه‌ی $t = ۲\text{s}$ چنین است:

$$t = ۲\text{s} \qquad \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}(۱۰۰ \times ۲) = ۱۰۰\text{cm}$$
$$v_۱ = ۱۰۰\text{cm/s}$$

تغییر مکان شناگر در $t = ۲\text{s}$ به‌دست آمد که برابر با مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان در بازه‌ی زمانی ۰s تا ۲s است (زیرا مکان اولیه صفر بوده است).

حرکت شناگر برای $t \geq ۲\text{s}$ با شتاب منفی انجام شده است. شتاب وی در این مرحله با توجه به نمودار شکل (۱ـ۱۰۰) چنین است:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \Rightarrow a = \frac{۸۵ - ۱۰۰}{۱۲ - ۲} \Rightarrow a = -۱/۵\text{cm/s}^۲$$

حال تغییر مکان را از $t = ۲\text{s}$ تا زمان فرضی t می‌یابیم.

$$\Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a(t - ۲)^۲ + v_۰(t - ۲)$$
$$\Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}(-۱/۵)(t^۲ + ۴ - ۲t) + ۱۰۰(t - ۲)$$
$$\Rightarrow \Delta x_۲ = -۰/۷۵t^۲ + ۱۰۱/۵t - ۲۰۳$$

سرعت اولیه در مرحله‌ی دوم حرکت، همان سرعت شناگر در پایان مرحله‌ی اول، یعنی $t = ۲\mathrm{s}$ است که بر اساس نمودار سرعت ـ زمان برابر با $۱۰۰\mathrm{cm/s}$ است. اکنون می‌توان تغییر مکان کل شناگر را در بازه‌ی زمانی صفر تا t به‌دست آورد.

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ \Rightarrow x(t) - ۰ = ۰/۷۵t^۲ + ۱۰۱/۵t - ۱۰۳$$

$$\Rightarrow \overline{v}_۰(t) = \frac{x_۲(t)}{t} \Rightarrow \overline{v}_۰(t) = -۰/۷۵t + ۱۰۱/۵ - \frac{۱۰۳}{t}$$

همین طور برای مرحله‌ی اول حرکت رابطه x بر حسب زمان، همان معادله‌ی حرکت با شتاب یکنواخت است:

$$x(t) = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$$

$$v_۰ = ۰ \Rightarrow x_۱(t) = \frac{۱}{۲}at^۲$$

$$\overline{v_۱}(t) = \frac{x_۱(t)}{t} \Rightarrow \overline{v_۱}(t) = \frac{۱}{۲}at$$

چون $\overline{v_۱}(t)$ با زمان رابطه‌ی مستقیم دارد، حداکثر آن در انتهای بازه یعنی $t = ۲\mathrm{s}$ اتفاق می‌افتد و چون حرکت در این مرحله یکنواخت است، $\overline{v}(۲)$ برابر با میانگین سرعت در ابتدا و انتهای این بازه است. پس

$$\overline{v}_{max_۱} = \frac{v(۲) + v(۰)}{۲} \Rightarrow \overline{v}_{max_۱} = \frac{۱۰۰ + ۰}{۲} \Rightarrow \overline{v}_{max_۱} = ۵۰\mathrm{cm/s}$$

حال با مشتق گرفتن از $\overline{v_۲}(t)$ نسبت به t و مساوی صفر قرار دادن آن، لحظه‌ای را که $\overline{v_۲}(t)$ بیشینه است را می‌یابیم.

$$\frac{d\overline{v_۲}(t)}{dt} = -۰/۷۵ + \frac{۱۰۳}{t^۲} = ۰ \Rightarrow t^۲ = \frac{۱۰۳}{۰/۷۵} \Rightarrow t = ۱۱/۷\mathrm{s}$$

$$\Rightarrow \overline{v_۲}(۱۱/۷) = \overline{v}_{max_۲}$$

$$\Rightarrow \overline{v}_{max_۲} = -۰/۷۵ \times ۱۱/۷ + ۱۰۱/۵ - \frac{۱۰۳}{۱۱/۷}$$

$$\Rightarrow \overline{v}_{max_۲} = ۸۴\mathrm{cm/s}$$

$$\overline{v}_{max_۲} > \overline{v}_{max_۱} \Rightarrow \overline{v}_{max} = \overline{v}_{max_۲} = ۸۴\mathrm{cm/s}$$

پس بیشینه‌ی سرعت متوسط در تمام طول حرکت شناگر $۸۴\mathrm{cm/s}$ است.

۱۸ در شکل (۱ـ۱۴۵) محل رها شدن و محل اشخاص A و B نشان داده شده است. اگر زمان رسیدن گلوله‌ی اول به B را با t' و فاصله‌ی A از نقطه‌ی آغاز حرکت را با $h_۱$ نشان دهیم، داریم:

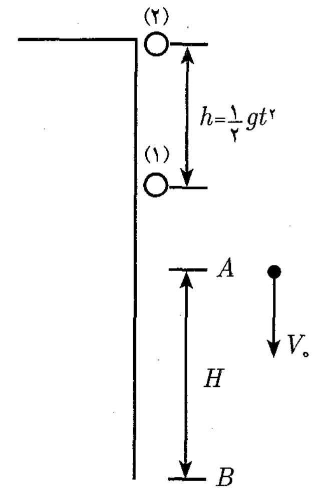
$$H + h_۱ = \frac{۱}{۲}gt'^۲ \qquad (۱)$$

حال اگر معادله‌ی حرکت را برای گلوله‌ی دوم نیز بنویسیم، داریم:

$$H + h_۱ = \frac{۱}{۲}g\big((t' - t) + T\big)^۲ \qquad (۲)$$

با برابر قرار دادن معادلات (۱) و (۲) می‌توانیم رابطه‌ی بین t و T را بیابیم. بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}gt'^{۲} = \frac{۱}{۲}g\big((t'-t)+T\big)^{۲} \Rightarrow t'^{۲} = (t'-t+T)^{۲}$$
$$\Rightarrow t' = t'-t+T \Rightarrow t = T$$



شکل ۱-۱۴۵

بر این اساس می‌توانیم h را بر حسب T به‌دست آوریم:

$$h = \frac{۱}{۲}gt^{۲} \Rightarrow h = \frac{۱}{۲}gT^{۲}$$

هنگامی که یکی از گلوله‌ها مثلاً گلوله‌ی اول به نقطه‌ی A برسد، دارای سرعت اولیه‌ای است که آن را $v_{\circ}$ می‌گیریم. فاصله‌ی زمانی رسیدن این گلوله از A به B، همان T است، زیرا بنا به فرض هنگامی که گلوله اول به B می‌رسد، گلوله‌ی دوم در A است و فاصله‌ی زمانی رسیدن گلوله‌ها به یک نقطه معین همواره مقدار ثابت T است. پس داریم:

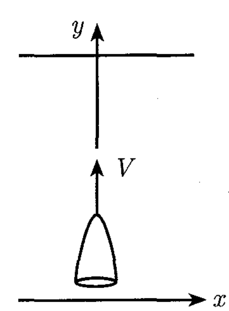
$$H = \frac{۱}{۲}gT^{۲} + v_{\circ}T > \frac{۱}{۲}gT^{۲} \Rightarrow H > h$$

در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۹ در شکل (۱ـ۱۴۶) قایقی که در عرض رودخانه پارو می‌زند نشان داده شده است. همان طور که در صورت سؤال آمده است، سرعت پارو زدن فرد در آب ساکن، مقدار ثابت v است، و چون همواره در جهت عرض رودخانه پارو می‌زند، داریم:

$$y = vt - y_{\circ} \Rightarrow t = \frac{۱}{v}(y+y_{\circ}) \qquad (۱)$$

که $(-y_{\circ})$ به این علت در معادله‌ی فوق آمده است که مبدأ مختصات را در وسط رودخانه قرار داده‌ایم، یعنی در زمان صفر که قایق شروع به حرکت می‌کند، در مکان $-y_{\circ}$ قرار دارد.



شکل ۱-۱۴۶

در صورت سؤال گفته شده است که سرعت آب رودخانه از ساحل تا وسط آن تقریباً با فاصله از ساحل نزدیک‌تر متناسب است. بنابراین می‌توانیم رابطه‌ی سرعت در راستای x را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{dx}{dt} = k(y+y_{\circ}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = kvt \Rightarrow dx = kvtdt$$
$$\Rightarrow \int_{\circ}^{x} dx = \int_{\circ}^{t} kvtdt$$
$$\Rightarrow x = \frac{kvt^{۲}}{۲} \qquad (۲)$$

حال t را از رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین

$$x = \frac{kv}{۲}\left(\frac{y+y_{\circ}}{v}\right)^{۲} \Rightarrow x = \frac{k}{۲v}(y+y_{\circ})^{۲} \qquad (۳)$$

با به‌دست آوردن شیب نمودار y بر حسب x در نقطه‌ی $y = ۰$، جواب مسأله مشخص می‌شود. حال از رابطه‌ی بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم تا این مقدار را بیابیم:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{k}{۲v}\left[۲(y + y_۰)\frac{dy}{dx}\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{k(y + y_۰)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{y=۰} = \frac{v}{ky_۰}\ ,\ \ y_۰ \neq ۰ \qquad (۴)$$

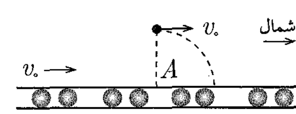
تذکر

همان‌طور که در ابتدای راه‌حل گفتیم، سرعت آب رودخانه تا وسط آن با فاصله از ساحل نزدیک‌تر متناسب است. بنابراین نمودار $x - y$ در نقطه‌ی $y = ۰$ دارای نقطه‌ی عطف است.

با توجه به معادلات (۳) و (۴) و تذکر فوق نمودار $x - y$ از دو سهمی پیوسته به هم تشکیل شده است که شیب آن در $y = ۰$ یک عدد متناهی غیرصفر است. در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.

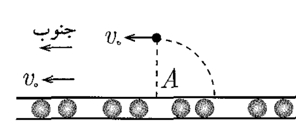
۲۰ ابتدا فرض می‌کنیم که قطار شتاب نداشته باشد. همان‌طور که می‌دانید که زمانی که توپ در دست مسافر است با سرعتی برابر با سرعت مسافر که همان سرعت قطار است حرکت می‌کند و هنگامی که مسافر توپ را رها می‌کند، به این دلیل که نیرویی در راستای افق به آن وارد نمی‌شود، شتاب افقی نخواهد داشت. بنابراین سرعت افقی آن برابر با سرعت قطار و هم‌جهت با آن باقی خواهد ماند. سرعت برابر با تغییرات مکان بر حسب زمان است، در نتیجه توپ و مسافر در مدت زمان یکسان، تغییر مکان یکسانی دارند. بنابراین توپ باید زیر پای مسافر به کف قطار برسد.

از آنجا که توپ کمی جلوتر به کف قطار رسیده است، پس حتماً قطار شتاب داشته است. چون جابه‌جایی افقی توپ در راستای شمال ـ جنوب بوده است، شتاب قطار نیز باید در همان راستای شمال ـ جنوب باشد. چون قطار روی یک ریل مستقیم حرکت می‌کرده است، سرعت آن نیز باید در راستای شمال ـ جنوب باشد. در این صورت بردارهای سرعت اولیه، سرعت بعدی و شتاب، همگی در راستای شمال ـ جنوب هستند. در شکل (۱ـ۱۴۷) حرکت قطار به طرف شمال فرض شده است. همان‌طور که توضیح داده شد، مؤلفه‌ی افقی سرعت توپ، پس از رها شدن، تغییر نمی‌کند. چون شخصی که توپ را رها می‌کند، رو به شمال ایستاده است و توپ جلوتر از او به کف قطار می‌رسد، توپ به طرف شمال نقطه‌ی A بر روی قطار جابه‌جا شده است. این به آن معنی است که در مدت زمان رسیدن توپ به کف قطار، توپ از قطار جلوتر افتاده است. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که سرعت قطار رو به شمال از $v_۰$ که هنگام رها شدن توپ داشت، کمتر شده است. آشکار است که شتابی که سرعت رو به شمال را کاهش دهد، رو به جنوب است.



شکل ۱-۱۴۷

در شکل (۱ـ۱۴۸) حرکت قطار به طرف جنوب فرض شده است. با این فرض نیز توپ به طرف شمال نقطه‌ی A جابه‌جا شده است، زیرا در هر صورت شخصی رو به شمال ایستاده است و مشاهده می‌کند که توپ جلوتر از او به کف قطار می‌رسد. این به آن معنی است که در مدت زمان رسیدن توپ به کف قطار، توپ از قطار که به سمت جنوب حرکت می‌کند، عقب افتاده است.



شکل ۱-۱۴۸

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که سرعت قطار رو به جنوب، از $v_۰$ که هنگام رها شدن توپ داشت، بیشتر شده است. بنابراین سرعت قطار رو به جنوب، بر حسب زمان، افزایش می‌یابد. در

نتیجه شتاب قطار رو به جنوب خواهد بود. ملاحظه می‌شود که جهت حرکت قطار می‌تواند رو به شمال و یا جنوب باشد، اما حتماً شتاب آن رو به جنوب است. در نتیجه گزینه (د) صحیح است.

۲۱ اگر مبدأ مختصات را در محلی که این شخص در این لحظه از آن می‌گذرد بگذاریم، معادله‌ی حرکت اتوبوس که حرکتی با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه است و شخص که یک حرکت با سرعت ثابت است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{اتوبوس} : x = \frac{1}{2}at^2 + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + 8$$
$$\text{شخص} : x = vt$$

حال این دو معادله را برابر هم قرار می‌دهیم تا شرط مورد نظر برای اینکه شخص حتماً به اتوبوس برسد را بیابیم. پس

$$vt = \frac{1}{2}t^2 + 8 \Rightarrow t^2 - 2vt + 8 = 0$$

که جواب‌های این معادله عبارتند از:

$$t_1 = \frac{2v + \sqrt{4v^2 - 64}}{2}\ ,\ t_2 = \frac{2v - \sqrt{4v^2 - 64}}{2}$$

برای اینکه جواب‌های فوق حقیقی باشند، عبارت زیر رادیکال باید مثبت باشد. بنابراین

$$4v^2 - 64 \geq 0 \Rightarrow v^2 \geq 16 \Rightarrow v \geq 4\text{m/s}$$

در نتیجه باید $v \geq 4\text{m/s}$ باشد تا شخص بتواند به اتوبوس برسد.

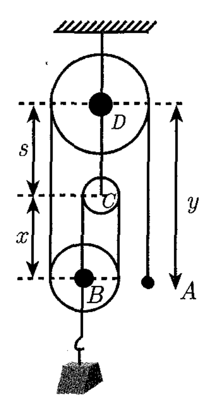
۲۲ همان‌طور که می‌دانید، سرعت متوسط یک جسم بیانگر مسافت پیموده شده توسط آن جسم در زمان مشخص است. فاصله‌های زمانی اول و دوم، یعنی به ترتیب $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 1\text{s}$ و $\Delta t_2 = t_3 - t_2 = 1\text{s}$ با هم برابرند که به ترتیب اختلاف زمانی بین افتادن کیسه‌های اول و دوم، دوم و سوم را بیان می‌کند. بر اساس اطلاعات داده شده در سؤال، مسافت پیموده شده در فاصله‌ی زمانی اول $20\,\text{m}$ و در فاصله‌ی زمانی دوم $30\,\text{m}$ است. پس:

$$\overline{v_1} = \frac{d_1}{\Delta t_1} = \frac{20}{1} = 20\text{m/s}\ ,\ \overline{v_2} = \frac{d_2}{\Delta t_2} = \frac{30}{1} = 30\text{m/s}$$

بنابراین سرعت متوسط اتومبیل بین $t = 2\text{s}$ و $t = 3\text{s}$، از سرعت متوسط اتومبیل بین $t = 1\text{s}$ و $t = 2\text{s}$ بیشتر است. در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۲۳ نکته‌ی اصلی در حل این گونه سؤالات، ثابت بودن طول طناب است. بنابراین بر اساس شکل (۱ـ۱۴۹)، داریم:

$$3x + y + s = \text{const.} \qquad (1)$$



شکل ۱-۱۴۹

چون قرقره‌ی C به طرف پایین کشیده می‌شود، نخ CD باید نیرویی رو به بالا به آن وارد کند، در نتیجه CD باید کشیده باشد تا بتواند نیروی کششی وارد کند، بنابراین S که برابر $|CD|$ است، مقداری ثابت دارد. حال تغییرات دو طرف رابطه‌ی (۱) را بررسی می‌کنیم. پس

$$۳\Delta x + \Delta y + ۰ = ۰ \ \Rightarrow\ \Delta x = -\frac{\Delta y}{۳} \ ,\ \ \Delta y = l$$

همان‌طور که ذکر کردیم، قرقره‌ی C باید ثابت بماند. در نتیجه $|\Delta x|$ بیانگر جابه‌جایی قرقره‌ی متحرک B است.

$$d_B = |\Delta x| = \frac{\Delta y}{۳} \ \Rightarrow\ d_B = \frac{l}{۳}$$

در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۲۴ چگونگی حرکت یوزپلنگ و آهو و مسافت طی شده توسط آنها در طی ۴ ثانیه‌ی اول حرکت چه آهو در فرار تأخیر داشته باشد و چه نداشته باشد، تفاوتی نمی‌کند. تنها تفاوت ایجاد شده در کل حرکت این است که یوزپلنگ ۲ ثانیه زودتر به حداکثر سرعت خود می‌رسد. حال اگر در نظر بگیریم که یوزپلنگ پس از یک دقیقه یعنی حداکثر مدتی که می‌تواند با حداکثر سرعت خود (۹۵km/h) بدود به آهو برسد، D عبارتست از:

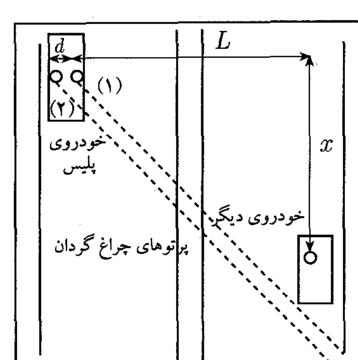
$$D = \Delta v(t) \ \Rightarrow\ D = (۹۵ - ۶۵)\frac{۱}{۶۰}(۱) \ \Rightarrow\ D = ۰/۵\text{km} = ۵۰۰\text{m}$$

۲ ثانیه به تأخیر آهو را می‌توانیم این گونه در نظر بگیریم که در مدت ۲ ثانیه، آهو ایستاده است در صورتی که یوزپلنگ با سرعت ۹۵km/h حرکت می‌کند. پس

$$\Delta D = vt \ \Rightarrow\ \Delta D = ۹۵ \times \frac{۱}{۳۶۰۰}(۲) \ \Rightarrow\ \Delta D = ۵۳\text{m}$$
$$\Rightarrow\ \frac{\Delta D}{D} = \frac{۵۳}{۵۰۰} \ \Rightarrow\ \frac{\Delta D}{D} = ۱۰/۵\%$$

در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۵ الف) مطابق شکل (۱ـ۱۵۰) در نظر بگیرید که نور چراغ (۱) در این لحظه از نقطه‌ی A می‌گذرد. همچنین زاویه‌ی بین پرتوی (۱) با افق را α و زاویه‌ی بین پرتو (۲) با افق را θ در نظر می‌گیریم. با کمی تأمل متوجه می‌شوید که چون پارامتر داده شده‌ی مسأله، سرعت زاویه‌ای ω است، کافی است اختلاف زاویه‌ی پرتوی (۲) در این لحظه و لحظه‌ای که از نقطه‌ی A می‌گذرد را به‌دست آوریم تا به راحتی اختلاف زمانی T را بیابیم.



شکل ۱-۱۵۰

حال متغیرهای فرض شده را بر اساس پارامترهای مسأله می‌یابیم.

$$\tan\alpha = \frac{x}{L}$$

چون دو پرتو با هم موازیند، α و θ برابر می‌باشند، پس

$$\tan\theta = \frac{x}{L} \qquad (۱)$$

زاویه‌ی بین پرتوی (۲) با افقی زمانی که از نقطه‌ی A عبور می‌کند را $\theta - \Delta\theta$ می‌نامیم، بنابراین

$$\tan(\theta - \Delta\theta) = \frac{x}{L+d} \Rightarrow \frac{\tan\theta - \tan\Delta\theta}{۱ + \tan\theta\tan\Delta\theta} = \frac{x}{L+d}$$

با توجه به کوچک بودن d در برابر L، می‌توان $\Delta\theta$ را کوچک در نظر گرفت. حال با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم

$$\frac{\frac{x}{L} - \Delta\theta}{۱ + (\frac{x}{L})\Delta\theta} = \frac{x}{L+d} \Rightarrow (\frac{x}{L} - \Delta\theta)(L+d) = x(۱ + \frac{x}{L}\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow \Delta\theta(L + d - \frac{x^۲}{L}) = \frac{xd}{L}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{xd}{L(L+d) + x^۲}$$

با توجه به اینکه سرعت زاویه‌ای چراغ‌های گردان ثابت است، داریم

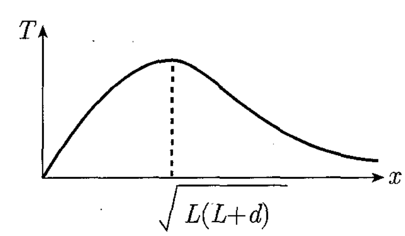
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{T} \Rightarrow T = \frac{\Delta\theta}{\omega} \Rightarrow T = \frac{d}{\omega}(\frac{x}{L(L+d) + x^۲}) \qquad (۲)$$

برای رسم نمودار T بر حسب x، چند نقطه‌ی مهم را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که واضح است، به ازای $x = ۰$، T نیز برابر صفر است. حال شیب نمودار T بر حسب x را با مشتق‌گیری از رابطه‌ی فوق می‌یابیم:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{\omega}\Big(\frac{L(L+d) + x^۲ - ۲x^۲}{(L(L+d) + x^۲)^۲}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{d}{\omega}\Big(\frac{L(L+d) - x^۲}{(L(L+d) + x^۲)^۲}\Big)$$

$\frac{dT}{dx}$ به ازای $x^۲ = L(L+d)$ برابر صفر، به ازای $x^۲ < L(L+d)$ مثبت و به ازای $x^۲ > L(L+d)$ منفی است. بنابراین نمودار $T - x$ در نقطه‌ی $x = \sqrt{L(L+d)}$ یک ماکزیمم نسبی دارد که حداکثر مقدار T را نیز بیان می‌کند. پس از نقطه‌ی $x = \sqrt{L(L+d)}$ نیز شیب نمودار $T - x$ منفی است. همچنین مقدار T همیشه مثبت است در نتیجه نمودار $T - x$ به صورت شکل (۱ـ۱۵۱) است.



شکل ۱-۱۵۱

ب) همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد، بیشینه‌ی این اختلاف زمانی در نقطه‌ی $x = \sqrt{L(L+d)}$ اتفاق می‌افتد. حال با استفاده از رابطه‌ی (۲) و مقادیر داده شده در صورت سؤال، این مقدار بیشینه را می‌یابیم. پس

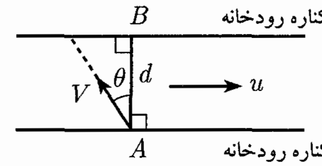
$$x = \sqrt{L(L+d)} \Rightarrow x = \sqrt{۳۰(۳۰ + ۱)} \Rightarrow x = ۳۰/۵\text{m}$$

$$T = \frac{d}{\omega}\Big(\frac{x}{L(L+d) + x^۲}\Big) \Rightarrow T = \frac{۱}{۶}\Big(\frac{۳۰/۵}{۳۰(۳۰ + ۱) + (۳۰/۵)^۲}\Big)$$

$$\Rightarrow T = ۲/۷ \times ۱۰^{-۳}\text{s}$$

۲۶ کوتاه‌ترین مسیر برای گذشتن از یک رودخانه، همان پاره‌خط عمود بر دو کناره‌ی رودخانه است (شکل ۱ـ۱۵۲). بنابراین قایقران باید طوری پارو بزند که روی این پاره‌خط حرکت کند، برای این کار باید سرعتش در راستای رودخانه برابر صفر باشد، یعنی در جهتی پارو بزند که مؤلفه‌ی افقی سرعت پارو زدنش، سرعت رودخانه را خنثی کند. در نتیجه باید رابطه‌ی زیر برای آن برقرار باشد:

$$v\sin\theta = u \qquad (۱)$$



شکل ۱-۱۵۲

که v سرعت پارو زدن او نسبت به آب ساکن و u سرعت رودخانه است.

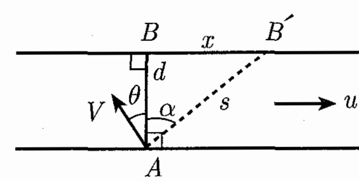
الف) بر اساس رابطه‌ی (۱)، θ عبارتست از

$$۳\sin\theta = ۲ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \theta = ۴۱/۸^\circ$$

ب) بر اساس رابطه‌ی (۱)، θ عبارتست از

$$۳\sin\theta = ۴ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۴}{۳} ※$$

تناقض فوق بیانگر آن است که قایقران نمی‌تواند سرعت رودخانه را خنثی کند. حال فرض کنیم که قایق طوری حرکت کند که پس از رسیدن به طرف دیگر رودخانه، به اندازه‌ی x با نقطه‌ی B فاصله بگیرد. (شکل ۱ـ۱۵۳)



شکل ۱-۱۵۳

مسافت طی شده (s) عبارتست از:

$$s^۲ = x^۲ + d^۲ \Rightarrow s = \sqrt{x^۲ + d^۲} \qquad (۱)$$

برای بررسی مسأله، پارامتر زمان را وارد می‌کنیم که در آخر تأثیر در جواب مورد نظر نمی‌گذارد. ابتدا x و d را بر حسب مؤلفه‌های عمودی و افقی سرعت قایق می‌یابیم:

$$x = v_x t \quad v_x = u - v\sin\theta \quad \Rightarrow \quad x = (u - v\sin\theta)t \quad (۲)$$
$$y = v_y t \quad v_y = v\cos\theta \quad \Rightarrow \quad d = (v\cos\theta)t \quad (۳)$$

بنابر روابط (۲) و (۳)، α برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{u - v\sin\theta}{v\cos\theta}$$

بنابراین

$$s = \frac{d}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{\cos\alpha} = \sqrt{۱ + \tan^۲\alpha} \Rightarrow s = d\sqrt{۱ + \left(\frac{u - v\sin\theta}{v\cos\theta}\right)^۲}$$
$$\Rightarrow s = d\frac{\sqrt{(v\cos\theta)^۲ + (u - v\sin\theta)^۲}}{v\cos\theta}$$

حال باید از s نسبت به θ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم تا ببینیم که به ازای چه مقداری از θ، s حداقل می‌شود. پس

$$\frac{ds}{d\theta} = d\frac{-uv^۲\cos^۲\theta / \sqrt{(v\cos\theta)^۲ + (u - v\sin\theta)^۲}}{(v\cos\theta)^۲}$$

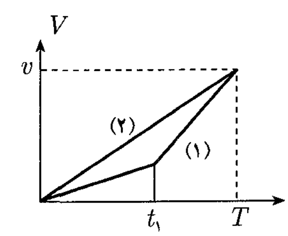
$$+\frac{v\sin\theta\sqrt{(v\cos\theta)^{۲}+(u-v\sin\theta)^{۲}}}{(v\cos\theta)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow\ uv^{۲}\sin^{۲}\theta-(u^{۲}v+v^{۳})\sin\theta+uv^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta_{۱}=\dfrac{u}{v}=\dfrac{۴}{۳}\ ※\\ \sin\theta_{۲}=\dfrac{v}{u}=\dfrac{۳}{۴}\ \Rightarrow\ \theta=۴۸/۶^{\circ}\end{cases}$$

در نتیجه قایقران باید تحت زاویه‌ی $۴۸/۶^{\circ}$ نسبت به خط قائم پارو بزند تا طول مسیرش به سمت دیگر رودخانه کوتاه‌ترین مقدار باشد.

۲۷ استفاده از نمودار، راه بسیار مناسب برای حل مسائلی است که حل تحلیلی آنها ممکن است بسیار طولانی باشد. با توجه به اینکه $۰<a_{۱}<a<a_{۲}$ می‌باشد، نمودار سرعت ـ زمان هر دو خودرو را در شکل (۱ـ۱۵۴) ترسیم کرده‌ایم. می‌دانیم هر دو خودرو در $t=۰$ از حالت سکون شروع به حرکت نموده و در $t=T$ نیز هر دو خودرو دارای سرعت‌های لحظه‌ای برابر هستند.



شکل ۱-۱۵۴

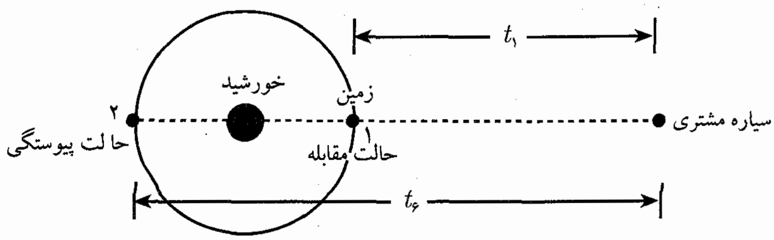
می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، نمودار سرعت ـ زمان به صورت خط راست می‌باشد، که شیب این خط برابر شتاب متحرک می‌باشد. در نتیجه نمودار سرعت ـ زمان خودروی (۲) خطی راست با شیب a است و نمودار سرعت ـ زمان خودروی (۱) شامل دو خط راست به ترتیب با شیب‌های $a_{۱}$ و $a_{۲}$ می‌باشد که نامساوی $۰<a_{۱}<a<a_{۲}$ بین $a_{۱}$، $a_{۲}$ و a برقرار است.

می‌دانیم سرعت متوسط یک متحرک در مدت زمان T، برابر مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان تقسیم بر مدت زمان T خواهد بود. در اینجا اگر سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان خودروی (۱) و (۲) را به ترتیب با $s_{۱}$ و $s_{۲}$ نشان دهیم، با توجه به شکل (۱ـ۱۵۴) واضح است که $s_{۱}<s_{۲}$ است و در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_{۱}}=\dfrac{s_{۱}}{T}\\ \overline{v_{۲}}=\dfrac{s_{۲}}{T}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overline{v_{۱}}<\overline{v_{۲}}$$

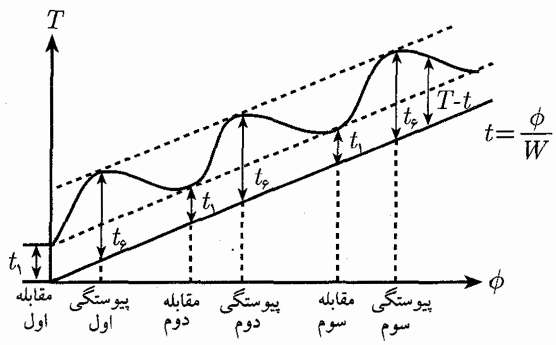
در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۲۸ بر اساس صورت مسأله، نوری که در زمان t از قمر یو می‌تابد، در زمان T به زمین می‌رسد، یعنی مدت زمانی که طول می‌کشد تا نور از این قمر به زمین برسد $T-t$ است که چون از فاصله‌ی یو تا برجیس در مقابل فاصله‌ی برجیس تا زمین و قطر مدار زمین به دور خورشید می‌توان صرف‌نظر کرد، می‌توان $T-t$ را مدت زمانی دانست که نور فاصله‌ی برجیس تا زمین را طی می‌کند. وقتی که زمین در نقطه‌ی (۱) (شکل ۱ـ۱۵۵) قرار دارد، در اصطلاح می‌گویند که برجیس در موقعیت مقابله قرار دارد و وقتی زمین در نقطه‌ی (۲) قرار داشته باشد، اصطلاحاً گفته می‌شود که برجیس در موقعیت پیوستگی قرار دارد.



شکل ۱-۱۵۵

نمودار صورت سؤال را با اضافه نمودن خط $t = \dfrac{\phi}{\omega}$ دوباره رسم می‌کنیم (شکل ۱ـ۱۵۶). با کمی تأمل متوجه می‌شویم که مدت زمانی که طول می‌کشد تا نور از قمر یو به زمین برسد $(T-t)$، برابر طول خط‌های قائم فیمابین نمودار ارائه شده در صورت سؤال و خط $t = \dfrac{\phi}{\omega}$ است.



شکل ۱-۱۵۶

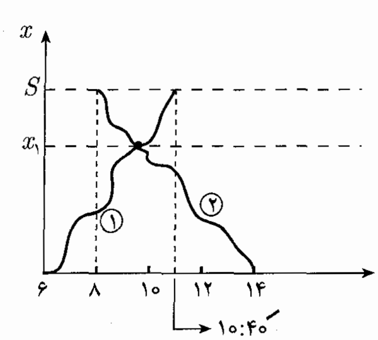
با دقت در نمودار شکل (۱ـ۱۵۶)، به راحتی در می‌یابیم که $t_۱$ مدت زمانی است که نور در حالت مقابله از برجیس به زمین می‌رسد و $t_۶$ مدت زمانی است که نور در حالت پیوستگی از برجیس به زمین می‌رسد. در نتیجه $t_۶ - t_۱$ برابر مدت زمانی است که نور، قطر مدار زمین به دور خورشید را طی می‌کند. با توجه به شکل صورت سؤال $t_۶ - t_۱ = t_۲$ است. بنابراین

$$c = \frac{D}{t_۶ - t_۱} = \frac{D}{t_۲}$$

که c سرعت نور است. در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۹ اگر فاصله‌ی تهران تا اصفهان را s در نظر بگیریم، حرکت این شخص در روز اول به صورت حرکت از مکان صفر تا s و در روز دوم به صورت حرکت از مکان s تا صفر است، بنابراین نمودارهای این دو حرکت شبیه به نمودارهای شکل (۱ـ۱۵۷) خواهند بود.

بر اساس شکل (۱ـ۱۵۷) و با کمی تأمل، واضح است که دو نمودار (۱) (حرکت در روز اول) و (۲) (حرکت در روز دوم) حتماً در نقطه‌ای مانند A همدیگر را قطع می‌کنند که این نقطه بیانگر مکان مشخصی از مسیر است که در آن ساعت شخص در هر دو روز عدد یکسانی را نشان می‌دهد. بنابراین حتماً نقطه‌ای از مسیر است که در آن ساعت شخص در هر دو روز عدد یکسانی را نشان می‌دهد. بنابراین حتماً نقطه‌ای از مسیر وجود دارد به طوری که $T_۱ = T_۲$ باشد. در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.



شکل ۱-۱۵۷

۳۰ ابتدا شعاع دایره‌ای را که تورنتو و بلگراد روی محیط آن قرار دارند را به‌دست می‌آوریم. عرض جغرافیایی هر دو شهر ۴۵° شمالی است، بنابراین بر اساس شکل (۱ـ۱۵۸)، داریم:

$$r = R\cos ۴۵^\circ \Rightarrow r = ۶۴۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow r = ۳۲۰۰\sqrt{۲}\text{km}$$

فاصله‌ی بین دو شهر را یک بار بر اساس پارامترهای هندسی شکل (۱ـ۱۵۸) و بار دیگر بر اساس روابط سینماتیکی، می‌یابیم. (فاصله‌ی بین دو شهر را L می‌نامیم.)

$$L = \frac{(۷۵+\phi)\pi}{۱۸۰} \times ۳۲۰۰\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

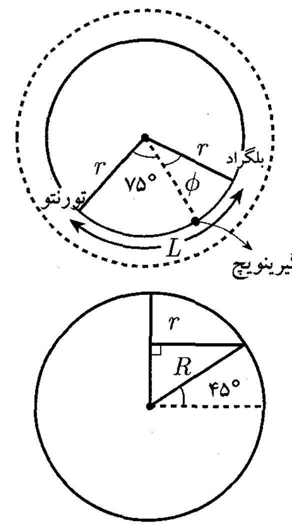
$$L = v \times t = ۹۰۰t \qquad (۲)$$

می‌دانیم هر ۱۵° در طول جغرافیایی، معادل یک ساعت در زمان است. در نتیجه زمان در گرینویچ $۵ = \frac{۷۵}{۱۵}$ ساعت، جلوتر از زمان در تورنتو است. به عنوان یک حدس اولیه فرض می‌کنیم که مقدار زاویه‌ی ϕ در محدوده‌ای باشد که زمان در بلگراد حدود یک ساعت از گرینویچ جلوتر باشد. بنابراین می‌توان گفت که زمان در بلگراد ۶ ساعت از زمان در تورنتو جلوتر است، یعنی ساعت $۲۲ : ۳۵'$ به وقت محلی بلگراد معادل $۱۶ : ۳۵'$ به وقت محلی تورنتو است. یعنی هواپیما به مدت $t = ۱۶ : ۳۵' - ۸ = ۸ : ۳۵'$ در پرواز بوده است. پس

$$(۲) \rightarrow L = ۹۰۰t = ۹۰۰(۸ + \frac{۳۵}{۶۰}) \Rightarrow L = ۷۷۲۵\text{km} \qquad (۳)$$

$$(۱) \rightarrow L = ۷۸/۹۸۴۶ \times (۷۵+\phi) \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳) \rightarrow ۷۵+\phi = \frac{۷۷۲۵}{۷۸/۹۸۴۶} \Rightarrow \phi = ۲۳^\circ$$



شکل ۱-۱۵۸

توجه کنید که طول جغرافیایی بلگراد ۲۳ درجه‌ی شرقی به‌دست آمد، یعنی حدس ما مبنی بر اینکه زمان در بلگراد، یک ساعت از زمان در گرینویچ جلوتر است، حدس قابل قبولی است.

۳۱ ابتدا می‌توانیم چک کنیم که آیا به ازای $T \geq ۵۰\text{s}$، خودرو می‌تواند قبل از اینکه چراغ قرمز شود به چهار راه بعدی برسد یا نه. با استفاده از روابط حرکت با شتاب ثابت، داریم

$$s = \frac{۱}{۲}at^۲ \ , \ a = ۱\text{m/s}^۲ \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}T^۲ \ , \ T = ۵۰\text{s}$$

$$s = \frac{۱}{۲}(۵۰)^۲ \Rightarrow s = ۱۲۵۰\text{m}$$

یعنی به ازای $T = ۵۰\text{s}$، خودرو چهارراه بعدی را رد کرده است. بنابراین محدودیتی برای T نداریم، زیرا که اگر حرکت خودرو همیشه با شتاب ثابت باشد، قبل از $t = ۵۰\text{s}$ چهارراه بعدی را رد کرده است.

۳۲ الف) خطای زمان‌سنجی بیانگر آن است که کرونومتر به جای زمان T، زمان $T \pm t_۰$ را نشان دهد که $t_۰$ یعنی همان خطای زمان‌سنجی در اینجا $۰/۲\text{s}$ است. پس

$$s = \frac{۱}{۲}g(T \pm t_۰)^۲ \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}gT^۲ + \frac{۱}{۲}gt_۰^۲ \pm gTt_۰$$

به خاطر کوچک بودن $t_۰$ در برابر T، از جمله‌ی دوم سمت راست رابطه‌ی فوق در برابر بقیه‌ی جملات آن می‌توان صرف‌نظر کرد. پس

$$s \approx \frac{۱}{۲}gT^۲ \pm gTt_۰ \ , \ s = h_۰ + h_۱ \Rightarrow h_۱ \approx \pm gTt_۰ \Rightarrow |h_۱| \approx gTt_۰$$

$$t_۰ = ۰/۲\text{s} \Rightarrow |h_۱| \approx ۰/۲gT$$

ب) خطای زمان‌سنجی به سبب خطای کرونومتر یا آزمایشگر یا هر دوی آنهاست، در نتیجه می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین نمی‌توان علامت $t_۰$ و در نتیجه علامت $h_۲$ را تعیین کرد.

ج) اگر $t_۱$ را زمان لازم برای رسیدن صوت از ته چاه در نظر بگیریم، داریم:

$$h_۰ + h_۲ = \frac{۱}{۲}g(T - t_۱)^۲ \Rightarrow h_۰ + h_۲ = \frac{۱}{۲}gT^۲ + \frac{۱}{۲}gt_۱^۲ - gTt_۱$$

به خاطر کوچک بودن $t_۱$ در برابر T، رابطه‌ی فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$h_۰ + h_۲ \approx \frac{۱}{۲}gT^۲ - gTt_۱ \qquad (۱)$$

$$t_۱ = \frac{h_۰}{v} = \frac{h_۰}{۳۳۰} = \frac{(\frac{۱}{۲})gT^۲}{۳۳۰} \Rightarrow |h_۲| \approx \frac{gT^۳}{۶۶۰}$$

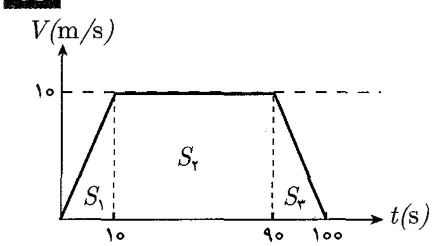
د) بر اساس رابطه‌ی (۱) واضح است که، علامت $h_۲$ منفی است، یعنی همیشه $h_۰$ از مقدار واقعی فاصله‌ی بین سطح آب درون چاه با سطح زمین بیشتر است.

۳۳ در مورد نوع این حرکت اطلاع زیادی نداریم. سرعت اولیه و نحوه‌ی تغییر شتاب را نمی‌دانیم. ولی اگر یک فرض اولیه بکنیم، می‌توانیم اطلاعات خوبی به‌دست آوریم. با فرض شتاب ثابت و بر اساس معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت، دو رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \ : \begin{cases} t = ۱\text{s} & ۲ = \frac{۱}{۲}a + v_۰ \\ t = ۳\text{s} & ۵ = \frac{۹}{۲}a + ۳v_۰ \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$$

بنابراین هرگاه فرض کنیم شتاب جسم ثابت است، مقدار شتاب آن منفی خواهد بود. در نتیجه گزینه‌ی (و) صحیح است.

۳۴ ابتدا فاصله‌ی دو ایستگاه را به‌دست می‌آوریم. بر اساس رابطه‌ی $v = at$، با توجه به اینکه $a = ۱\text{m/s}^۲$ است، ۱۰ ثانیه طول می‌کشد تا سرعت قطار از ۰m/s به ۱۰m/s یا از ۱۰m/s به صفر برسد. می‌دانیم که کل زمان حرکت بین دو ایستگاه ۱۰۰s است. بنابراین نمودار سرعت ـ زمان قطار در شرایط عادی به صورت شکل (۱ـ۱۵۹) است.



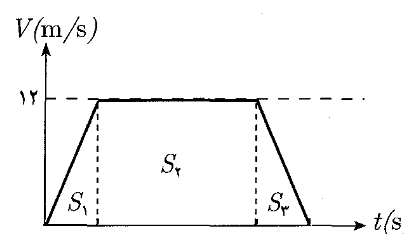
شکل ۱-۱۵۹

اگر s را به عنوان فاصله‌ی بین دو ایستگاه متوالی در نظر بگیریم، داریم:

$$s = s_۱ + s_۲ + s_۳ \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}(۱۰ \times ۱۰) + (۹۰ - ۱۰)(۱۰) + \frac{۱}{۲}(۱۰ \times ۱۰)$$

$$\Rightarrow s = ۹۰۰\text{m}$$

حال به بررسی حرکت قطار در شرایط اضطراری می‌پردازیم. می‌خواهیم محاسبه کنیم که قطار در شرایط اضطراری فاصله‌ی بین دو ایستگاه را در چند ثانیه طی می‌کند. می‌دانیم که حداکثر سرعت قطار در این حالت ۱۲m/s است، بنابراین نمودار سرعت ـ زمان قطار به صورت زیر است:



شکل ۱-۱۶۰

$$s = s_۱ + s_۲ + s_۳ \Rightarrow ۹۰۰ = \frac{۱}{۲}(۱۲ \times ۱۲) + ۱۲t + \frac{۱}{۲}(۱۲ \times ۱۲)$$

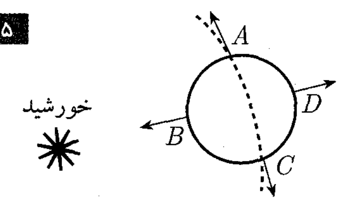
$$\Rightarrow t = ۶۳\text{s}$$

حداقل زمان بین دو ایستگاه را T می‌گیریم، پس

$$T = ۱۲ + t \Rightarrow T = ۸۷\mathrm{s}$$

قطار فاصله‌ی بین دو ایستگاه را در شرایط عادی در $۱۰۰\mathrm{s}$ و در شرایط اضطراری در $۸۷\mathrm{s}$ طی می‌کند. یعنی در شرایط اضطراری، قطار بین هر دو ایستگاه متوالی می‌تواند $۱۰۰ - ۸۷ = ۱۳\mathrm{s}$ صرفه‌جویی کند. حال می‌توان گفت اگر قطار در یک ایستگاه $۳۰\mathrm{s}$ بیشتر توقف کند، حداقل در ۳ ایستگاه بعدی می‌تواند آن را جبران کند. در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۳۵ در شکل (۱ـ۱۶۱) نقاط A، B، C و D به ترتیب بیانگر طلوع خورشید، ظهر، غروب خورشید و نیمه شب است. جهت قائم شخص رو به بالا در هر کدام نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌گردد، در نقطه‌ی A جهت قائم شخص رو به بالا جهت حرکت زمین به دور خورشید را نشان می‌دهد. در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.



شکل ۱-۱۶۱

۳۶ برای اینکه دو گلوله با هم برخورد کنند، باید مکان آن دو در لحظه‌ای مانند t یکسان شود. بنابراین برای بررسی مسأله باید رابطه‌ی مکان هرکدام ازگلوله‌ها را بر حسب زمان نوشته و با هم برابر قرار دهیم تا شرط لازم وکافی برای آنکه توپ‌ها پس از رها شدن توپ دوم، در نقطه‌ای از مسیر به هم برسند را بیابیم.

بنابراین

$$y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t \quad , \quad y_۲ = -\frac{۱}{۲}g(t-T)^۲$$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t = -\frac{۱}{۲}g(t-T)^۲$$

$$\Rightarrow v_\circ t = -\frac{۱}{۲}gT^۲ + gtT \Rightarrow t(gT - v_\circ) = \frac{۱}{۲}gT^۲$$

$$\Rightarrow t = \frac{\frac{۱}{۲}gT^۲}{gT - v_\circ} \Rightarrow t = \frac{gT^۲}{۲(gT - v_\circ)}$$

می‌دانیم که زمان تلاقی به‌دست آمده باید دارای دو شرط زیر باشد:

$$۱)\ t > \circ \Rightarrow \frac{gT^۲}{۲(gT - v_\circ)} > \circ \Rightarrow gT > v_\circ$$

$$۲)\ t > T \Rightarrow \frac{gT^۲}{۲(gT - v_\circ)} > T \Rightarrow gT > ۲(gT - v_\circ)$$

$$\Rightarrow gT < ۲v_\circ \Rightarrow \frac{gT}{۲} < v_\circ$$

$$\Rightarrow \frac{gT}{۲} < v_\circ < gT$$

در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۳۷ ابتدا مکان هر دو قطره بر حسب زمان را می‌یابیم. پس

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}gt^۲ \ , \ x_۲ = \frac{۱}{۲}g(t - \Delta t)^۲$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2$$
$$\Rightarrow \Delta x = gt(\Delta t) - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

که Δx بیان کننده‌ی فاصله‌ی بین دو ذره است. بنابراین مشتق زمانی فاصله‌ی این دو قطره در زمان t عبارتست از:

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = g\Delta t$$

در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۳۸ سرعت کامیون‌ها نسبت به شخص ساکن کنار جاده $v_1 = ۹۰\text{km/h}$ است، بنابراین سرعت کامیون‌ها نسبت به راننده خودرو برابر $v_2 = ۹۰ + ۱۲۰ = ۲۱۰\text{km/h}$ است. بر اساس صورت سؤال، هر ۱۰ دقیقه ۷۰ کامیون از کنار خودرو می‌گذرند. در نتیجه در هر ساعت $N = ۷۰ \times \frac{۶۰\ \text{min}}{۱۰\ \text{min}} = ۴۲۰$ کامیون از کنار خودرو می‌گذرد. حال می‌توانیم در نظر بگیریم که کامیون‌ها ایستاده‌اند و خودرو با سرعت ۲۱۰km/h حرکت می‌کند و در مدت یک ساعت مسافت s_1 را که ۴۲۰ برابر فاصله‌ی بین هر دو کامیون متوالی است را طی می‌کند. بنابراین

$$s_1 = ۲۱۰ \times ۱ \Rightarrow s_1 = ۲۱۰ \Rightarrow ۲۱۰ = ۴۲۰x \Rightarrow x = ۰/۵\text{km}$$

پس فاصله‌ی بین هر دو کامیون متوالی ۰/۵km است. حال می‌توانیم فرض کنیم که باز کامیون‌ها ایستاده‌اند و این بار شخص کنار جاده با سرعت ۹۰km/h حرکت می‌کند. بنابراین مسافت طی شده توسط شخص در هر ساعت برابر ۹۰km است. پس

$$s = Nx \Rightarrow ۹۰ = N(۰/۵) \Rightarrow N = ۱۸۰$$

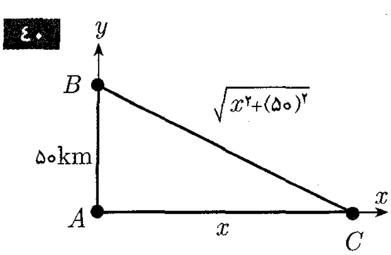
در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۹ همان‌طورکه می‌دانید شتاب متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان است. در نمودار صورت سؤال، شیب خط مماس در لحظه‌ی t_0 برابر $\tan ۴۵^\circ = ۱$ است. توجه کنید که هر ۱cm بر محور سرعت‌ها معادل ۱۰m/s و ۱cm بر محور زمان معادل ۱s است. پس

$$a = ۱ \times \frac{۱۰\text{m/s}}{۱\text{s}} \Rightarrow a = ۱۰\text{m/s}^2$$

در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۴۰ مطابق شکل (۱ـ۱۶۲) امواج فرستاده شده توسط فرستنده‌ی A بعد از طی مسیر AC و امواج فرستاده شده توسط فرستنده‌ی B بعد از طی مسیر BC، به گیرنده‌ی C می‌رسد.



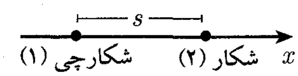
شکل ۱-۱۶۲

$$t_{AC} = \frac{|AC|}{v} \Rightarrow t_{AC} = \frac{x}{۳ \times ۱۰^۵}$$
$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 + |AB|^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{x^2 + ۲۵۰۰}$$
$$t_{BC} = \frac{|BC|}{v} \Rightarrow t_{BC} = \frac{\sqrt{x^2+۲۵۰۰}}{۳ \times ۱۰^۵}$$

$$t_{BC} - t_{AC} = ۱۰^{-۴} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^۲ + ۲۵۰۰} - x}{۳ \times ۱۰^۵} = ۱۰^{-۴}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۲۵۰۰} - x = ۳۰ \;\Rightarrow\; \sqrt{x^۲ + ۲۵۰۰} = ۳۰ + x$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۲۵۰۰ = x^۲ + ۶۰x + ۹۰۰$$
$$\Rightarrow ۱۶۰۰ = ۶۰x \;\Rightarrow\; x = ۲۶/۷\text{km}$$

۴۱ مطابق شکل (۱ـ۱۶۳) مبدا روی مکان اولیه‌ی شکارچی قرار می‌دهیم. فاصله‌ی اولیه‌ی شکار و شکارچی را s می‌نامیم.

حال رابطه‌ی مکان شکار و شکارچی را بر اساس معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت می‌نویسیم:



شکل ۱-۱۶۳

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱ t^۲ \;\Rightarrow\; x_۱ = \frac{۱}{۲}(۱۰)t^۲ \;\Rightarrow\; x_۱ = ۵t^۲$$
$$x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲(t-۲)^۲ + s \;\Rightarrow\; x_۲ = \frac{۱}{۲}(۱۵)(t-۲)^۲ + s$$
$$\Rightarrow\; x_۲ = ۷/۵(t-۲)^۲ + s$$
$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \;\Rightarrow\; \Delta x = ۷/۵(t-۲)^۲ + s - ۵t^۲$$
$$\Rightarrow\; \Delta x = ۲/۵t^۲ - ۳۰t + ۳۰ + s$$

اگر Δx (فاصله‌ی شکار از شکارچی) همیشه مثبت باشد، به این معنی است که هیچ‌گاه شکارچی به شکار نمی‌رسد که این حالت در صورتی پیش می‌آید که معادله‌ی درجه دوم فوق دارای Δ منفی باشد. پس حداقل s به ازای $\Delta = ۰$ به‌دست می‌آید. پس

$$۲/۵t^۲ + ۳۰t + ۳۰ + s = ۰$$
$$\Delta = (۳۰)^۲ - ۴(۲/۵)(۳۰ + s) = ۰ \;\Rightarrow\; s_{\min} = ۶۰\text{m}$$

۴۲ راستای افق را در راستای x در نظر می‌گیریم. سرعت هواپیما که دارای مقدار ثابت v می‌باشد، شامل دو مؤلفه $v_x = v_۰ \cos\theta$ و $v_y = v_۰ \sin\theta$ به ترتیب در راستای x و y است.

بر اساس معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت در راستای y، داریم:

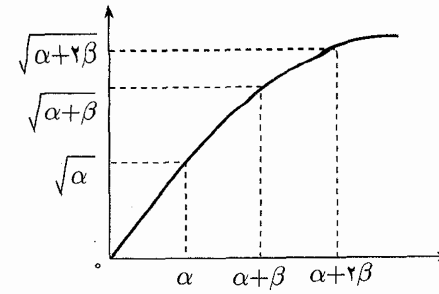
مدت زمان حرکت بسته‌ی اول : $t_۰ = \frac{v_y}{g} + \sqrt{a}$ $\qquad a = \frac{۲(\frac{v_y^۲}{۲g} + h)}{g}$

مدت زمان حرکت بسته‌ی دوم : $t_۱ = \frac{v_y}{g} + \sqrt{b}$ $\qquad b = \frac{۲v_y T}{g}$

مدت زمان حرکت بسته‌ی سوم : $t_۲ = \frac{v_y}{g} + \sqrt{a + ۲b}$

حال مقادیر x، $x_۱$ و $x_۲$ را حساب می‌کنیم. (x مکان هواپیما در لحظه‌ی صفر است)

$$\begin{cases} x_۰ = d + v_x t_۰ \\ x_۱ = d + v_x T + v_x t_۱ \\ x_۲ = d + ۲v_x T + v_x t_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ - x_۰ = v_x T + v_x(t_۱ - t_۰) \\ \\ x_۲ - x_۱ = v_x T + v_x(t_۲ - t_۱) \end{cases}$$



شکل ۱-۱۶۴

با توجه به روابط فوق کافی است که مقادیر $t_1 - t_0$ و $t_2 - t_1$ را با هم مقایسه کنیم.

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha} \ , \ \ t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha+2\beta} - \sqrt{\alpha+\beta}$$

حال نمودار رادیکالی شکل (۱ـ۱۶۴) را در نظر بگیرید.

همان‌طورکه می‌دانید و در شکل (۱ـ۱۶۴) نیز ملاحظه می‌کنید، شیب یک نمودار رادیکالی بر حسب افزایش x (در فرمول $y = \sqrt{x}$) کاهش می‌یابد. در نتیجه هر چه مقدار اولیه بیشتر باشد، به ازای افزایش مقداری یکسان بر روی محور x، مقدار کمتری بر روی محور y تغییر می‌کند. پس

$$\sqrt{\alpha+\beta} - \sqrt{\alpha} > \sqrt{\alpha+2\beta} - \sqrt{\alpha+\beta}$$

بنابراین

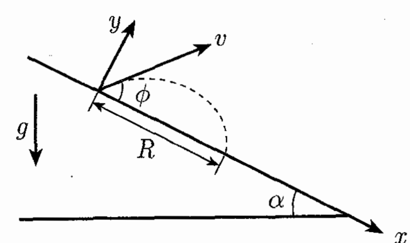
$$t_1 - t_0 > t_2 - t_1 \Rightarrow x_1 - x_0 > x_2 - x_1$$

در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۴۳ معادلات حرکت را در دستگاه نشان داده شده در شکل (۱ـ۱۶۵) بیان می‌کنیم:

$$x = -\frac{1}{2} g \cos\alpha t^2 + v \sin\phi t \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2 + v \cos\phi t$$



شکل ۱-۱۶۵

برد پرتابه (R) به ازای $y = 0$ به‌دست می‌آید. پس

$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2 + v\cos\phi t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{2v\sin\phi}{g\cos\alpha} \ \checkmark \end{cases}$$

با قرار دادن $t = \dfrac{2v\sin\phi}{g\cos\alpha}$ در معادله‌ی (۱) داریم:

$$\begin{aligned} R = x &= \frac{1}{2} g\sin\alpha \left(\frac{2v\sin\phi}{g\cos\alpha}\right)^2 + v\cos\phi\left(\frac{2v\sin\phi}{g\cos\alpha}\right) \\ &= \frac{2v^2\sin\phi}{g\cos\alpha}\left(\frac{\sin\alpha . \sin\phi}{\cos\alpha} + \cos\phi\right) \\ &= \frac{2v^2\sin\phi}{g\cos^2\alpha}(\sin\alpha\sin\phi + \cos\alpha\cos\phi) \\ &= \frac{2v^2\sin\phi}{g\cos^2\alpha}\cos(\phi-\alpha) \\ &= \frac{2v^2}{g\cos^2\alpha}\left(\sin\phi\cos(\phi-\alpha)\right) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق $R_x = \dfrac{2v^2}{g\cos^2\alpha}$ می‌باشد، همچنین بر اساس صورت سؤال، دامنه‌ی تپه بسیار بزرگ‌تر از $\dfrac{v^2}{g\cos^2\alpha}$ می‌باشد. پس پرتابه حتماً به تپه برخورد خواهد کرد. در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

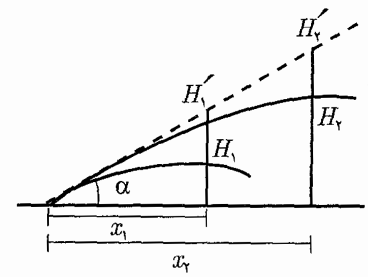
۴۴ شکل (۱ـ۱۶۶) را که بیانگر مسیر حرکت گلوله‌ها می‌باشد را در نظر بگیرید. ابتدا زمان اوج گلوله‌ها را حساب می‌کنیم. چون سرعت عمودی گلوله‌ها در نقطه‌ی اوج برابر صفر است، داریم:

$$gt_1 = v_1 \sin\alpha \Rightarrow t_1 = \frac{v_1 \sin\alpha}{g}$$

$$gt_2 = v_2 \sin\alpha \Rightarrow t_2 = \frac{v_2 \sin\alpha}{g}$$

$$x_1 = v_{x_1} t \Rightarrow x_1 = (v_1 \cos\alpha)\frac{v_1 \sin\alpha}{g} \Rightarrow x_1 = \frac{v_1^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$x_2 = v_{x_2} t_2 \Rightarrow x_2 = (v_2 \cos\alpha)\frac{v_2 \sin\alpha}{g} \Rightarrow x_2 = \frac{v_2^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$$



شکل ۱-۱۶۶

ارتفاع اوج دو پرتابه، یعنی فاصله‌ی نقاط H_1 و H_2 تا سطح افقی، عبارتند از:

$$h_1 = \frac{(v_1 \sin\alpha)^2}{2g} \quad , \quad h_2 = \frac{(v_2 \sin\alpha)^2}{2g}$$

$$H_1H'_1 = x_1 \tan\alpha - h_1 \Rightarrow H_1H'_1 = \frac{v_1^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_1^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow H_1H'_1 = \frac{v_1^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$H_2H'_2 = x_2 \tan\alpha - h_2 \Rightarrow H_2H'_2 = \frac{v_2^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_2^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

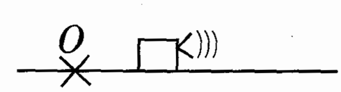
$$\Rightarrow H_2H'_2 = \frac{v_2^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{H_1H'_1}{H_2H'_2} = \frac{v_1^2 \sin^2\alpha/2g}{v_2^2 \sin^2\alpha/2g}$$

$$\Rightarrow \frac{H_1H'_1}{H_2H'_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$$

در نتیجه گزینه‌ی (هـ) درست است.

۴۵ مطابق شکل (۱ـ۱۶۷) فرض می‌کنیم که متحرک از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کند.



شکل ۱-۱۶۷

حالت اول: هرگاه متحرک در سمت چپ نقطه‌ی o باشد، علامت $n+1$، به مدت T ثانیه بعد از علامت n فرستاده می‌شود، اما فاصله‌ی محل ارسال علامت $n+1$ از ناظر ساکن کمتر از فاصله‌ی محل ارسال علامت n از ناظر ساکن است. در نتیجه $\tau_n < T$ می‌باشد. از طرفی میزان کاهش فاصله‌ی فوق با نزدیک شدن متحرک به نقطه‌ی o کاهش می‌یابد، یعنی τ_n افزایش می‌یابد.

حالت دوم: هرگاه متحرک در سمت راست نقطه‌ی o باشد، علامت $n+1$ به مدت T ثانیه بعد از علامت n فرستاده می‌شود. همچنین فاصله‌ی محل ارسال علامت $n+1$ از ناظر ساکن بیشتر از فاصله‌ی محل ارسال علامت n از ناظر ساکن است، در نتیجه $\tau_n > T$ می‌باشد. از طرف دیگر، میزان افزایش فاصله‌ی فوق با دور شدن متحرک از نقطه‌ی o افزایش می‌یابد، یعنی τ_n افزایش می‌یابد. در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴۶ فرض می‌کنیم که گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی v_0 و زاویه‌ی فرضی α پرتاب شده است. حال فاصله‌ی افقی نقطه‌ی اوج که برابر نصف برد است و همچنین ارتفاع اوج را می‌یابیم.

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad , \quad y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

حال این رابطه را بر اساس رابطه‌ی $a = \dfrac{v_0^2}{4g}$ بازنویسی می‌کنیم.

$$x = 2a \sin 2\alpha \quad , \quad y = 2a \sin^2 \alpha$$

در آخر α را از رابطه‌های فوق حذف می‌کنیم تا رابطه‌ی y و x به‌طور کلی به‌دست آید:

$$y = 2a \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{y}{2a} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{y}{2a}$$

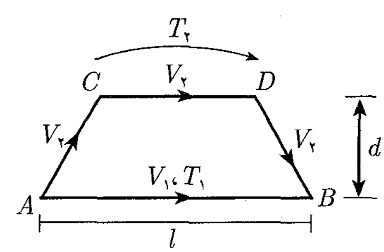
$$x = 2a \sin 2\alpha \Rightarrow x = 4a \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow x^2 = 16a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

بنابراین

$$x^2 = 16a^2 \left(\frac{y}{2a}\right)\left(1 - \frac{y}{2a}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{4a^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$$

در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴۷ ابتدا شکل (۱ـ۱۶۸) را که نشان دهنده‌ی دو مسیر حرکت موج است در نظر بگیرید.
حال T_1 و T_2 را بر حسب پارامترهای مسأله و متغیر d می‌نویسیم:



شکل ۱-۱۶۸

$$T_1 = \frac{l}{v_1} \Rightarrow 60 = \frac{120}{v_1} \Rightarrow v_1 = 2\text{km/s}$$

$$T_2 = 2\frac{\frac{d}{\sin\alpha}}{v_1} + \frac{l - 2d\cot\alpha}{v_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2d}{v_1 \sin\alpha} + \frac{l}{v_2} - \frac{2d\cos\alpha}{v_2 \sin\alpha}$$

همچنین می‌دانیم که $v_2 = \dfrac{v_1}{\cos\alpha}$ است. بنابراین

$$T_2 = \frac{2d}{v_1 \sin\alpha} + \frac{l\cos\alpha}{v_1} - \frac{2d\cos^2\alpha}{v_1 \sin\alpha}$$

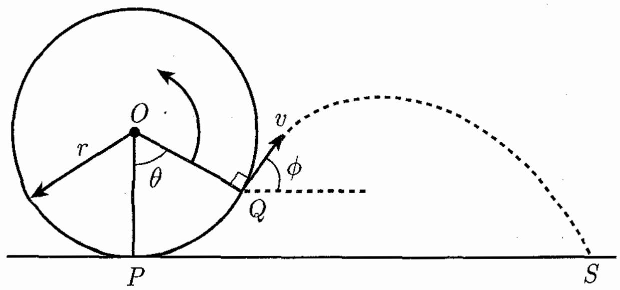
$$= \frac{l\cos\alpha}{v_1} + \frac{2d}{v_1 \sin\alpha}(1 - \cos^2\alpha)$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{l\cos\alpha}{v_1} + \frac{2d}{v_1\sin\alpha}\sin^2\alpha \Rightarrow T_2 = \frac{l\cos\alpha}{v_1} + \frac{2d\sin\alpha}{v_1}$$

$$T_2 = 48\text{s} \Rightarrow \frac{120 \times 0.6}{2} + \frac{2d \times 0.8}{2} = 48$$

$$\Rightarrow 0.8d = 12 \Rightarrow d = 15\text{km}$$

۴۸ الف) ابتدا شکل (۱ـ۱۶۹) را که چرخ و سنگ در لحظه‌ی جدا شدن است، در نظر بگیرید.



شکل ۱-۱۶۹

فاصله‌ی افقی نقطه‌ی S از P، برابر مؤلفه‌ی افقی فاصله‌ی Q از P و فاصله‌ی افقی S از Q (که با استفاده از معادله‌ی حرکت پرتابی به‌دست می‌آید) است. پس

$$x_{S/P} = x_{Q/P} + x_{S/Q} \quad , \quad x_{Q/P} = r\sin\theta$$

معادله‌ی y بر حسب x در یک پرتابه عبارت است از:

$$y = x\tan\phi - \frac{gx^{۲}}{۲v_{۰}^{۲}\cos^{۲}\phi}$$

که در آن ϕ زاویه‌ی پرتاب نسبت به افق است. بر اساس شکل (۱ـ۱۶۹) $\phi = \theta$ است. حال اگر مبدأ را در نقطه‌ی Q قرار داده و $y_{S/Q}$ که برابر $r(\cos\theta - ۱)$ است را در معادله‌ی فوق قرار دهیم، $x_{S/Q}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$r(\cos\theta - ۱) = x\tan\theta - \frac{gx^{۲}}{۲v_{۰}^{۲}\cos^{۲}\theta}$$

$$\Rightarrow x^{۲}\frac{(۱+\tan^{۲}\theta)}{۲L} - x\tan\theta + r(\cos\theta - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x_{S/Q} = \frac{\tan + \sqrt{\tan^{۲}\theta - ۲\alpha(۱+\tan^{۲}\theta)(\cos\theta - ۱)}}{\frac{(۱+\tan^{۲}\theta)}{L}}$$

$$\Rightarrow x_{S/P} = r\sin\theta + \frac{L\left(\tan\theta + \sqrt{\tan^{۲}\theta + ۲\alpha(۱+\tan^{۲}\theta)(۱-\cos\theta)}\right)}{(۱+\tan^{۲}\theta)}$$

ب) زمانی $x_{S/P}$ ماکزیمم می‌شود که مشتق رابطه‌ی به‌دست آمده برای $x_{S/P}$ نسبت به θ برابر صفر شود. پس

$$\frac{dx_{S/P}}{d\theta} = r\cos\theta + L\left[۱ + \frac{۱}{\sqrt{k}}\Big(\tan\theta + \alpha\big(۲\tan\theta(۱-\cos\theta) + \sin\theta\big)\Big)\right]$$
$$- \frac{۲L\tan\theta(\tan\theta + \sqrt{k})}{(۱+\tan\theta)}$$

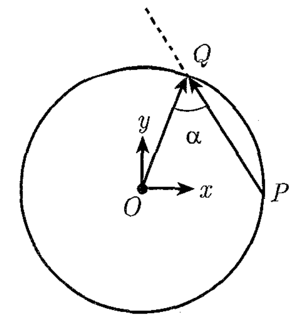
که k برابر $\left(\tan^{۲}\theta + ۲\alpha(۱+\tan^{۲}\theta)(۱-\cos\theta)\right)$ است.

رابطه‌ی فوق به ازای $\theta = \theta_{۰}$ برابر صفر است.

۴۹ الف) بر اساس اطلاعات مسأله، یک حرکت رفت و برگشت قائم داریم. بنابراین با استفاده از معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت می‌توانیم t را بیابیم. پس

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + vt$$

هنگام برخورد جسم با قرص : $y = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲ = vt \Rightarrow t = \frac{۲v}{g}$



شکل ۱-۱۷۰

ب) شکل (۱ـ۱۷۰) را که نشان دهنده‌ی قرص است، در نظر بگیرید.
چون شخص جسم را به‌طور قائم به بالا پرتاب کرده است، جسم دقیقاً به همان نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. بنابراین

$$r_p = r \ , \ \theta_p = ۰$$

ج) شخص روی لبه‌ی دیسک قرار دارد، یعنی $r_Q = r$. θ_Q را هم می‌توان بر اساس زمان به‌دست آمده در قسمت الف به‌دست آورد.

$$\theta_Q = \omega t \Rightarrow \theta_Q = \omega(\frac{۲v}{g}) \Rightarrow \theta_Q = \frac{۲\omega v}{g}$$

بر اساس تعریف $\theta = \frac{۲\omega v}{g}$ در صورت سؤال، داریم

$$\theta_Q = \theta \ , \ r_Q = r$$

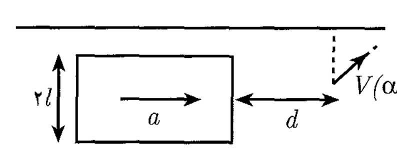
د) بر اساس قانون کسینوس‌ها، داریم

$$|PQ| = \sqrt{r^۲ + r^۲ - ۲r^۲\cos\theta} \Rightarrow |PQ| = r\sqrt{۲(۱-\cos\theta)}$$

ه) زاویه‌ی α را در شکل (۱ـ۱۷۰) نشان داده‌ایم. با توجه به اینکه مثلث ΔOPQ یک مثلث متساوی‌الساقین است. داریم

$$\alpha = \frac{۱۸۰^\circ - \theta}{۲} \Rightarrow \alpha = ۹۰^\circ - \frac{\theta}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = \tan(۹۰^\circ - \frac{\theta}{۲})$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \cot\frac{\theta}{۲}$$

۵۰ الف) با فرض زاویه‌ی دلخواه α، $v(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم. چون حداقل v_α را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم که خودرو دقیقاً از کنار شخص می‌گذرد. با توجه به شکل (۱ـ۱۷۱) در این مدت خودرو باید فاصله‌ی $d + l\tan\alpha$ را طی کند، در صورتی که شخص باید مسافت $\frac{l}{\cos\alpha}$ را بپیماید. حال زمان را یک بار بر اساس حرکت شخص و بار دیگر بر اساس حرکت خودرو می‌نویسیم و سپس با هم برابر قرار می‌دهیم. بنابراین



شکل ۱-۱۷۱

شخص : $t_۱ = \frac{(l/\cos\alpha)}{v(\alpha)}$

خودرو : $d + l\tan\alpha = \frac{۱}{۲}at_۲^۲ \Rightarrow t_۲ = \sqrt{\frac{۲(d+l\tan\alpha)}{a}}$

$$t_۱ = t_۲ \Rightarrow \frac{(\frac{l}{\cos\alpha})}{v(\alpha)} = \sqrt{\frac{۲(d+l\tan\alpha)}{a}}$$
$$\Rightarrow v(\alpha) = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{a}{۲(d+l\tan\alpha)}} \qquad (۱)$$

ب) از رابطه‌ی (۱) نسبت به α مشتق می‌گیریم تا αای که به ازای آن $v(\alpha)$ کمینه می‌شود به‌دست آید. پس

$$l\sqrt{\frac{a}{۲}}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^{۲}\alpha}\frac{۱}{\sqrt{d+l\tan\alpha}}+\frac{۱}{۲\cos\alpha}\sqrt{d+l\tan\alpha}\frac{-l/\cos^{۲}\alpha}{(d+l\tan\alpha)^{۲}}\right]=۰$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{l}{۲\cos\alpha(d+l\tan\alpha)} \Rightarrow ۲d\sin\alpha\cos\alpha+۲l\sin^{۲}\alpha=l \quad (۲)$$

$$\Rightarrow ۲d\sin\alpha\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=l-۲l\sin^{۲}\alpha$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را به توان دو می‌رسانیم. بنابراین

$$۴(l^{۲}+d^{۲})\sin^{۴}\alpha-۴(l^{۲}+d^{۲})\sin^{۲}\alpha+l^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \sin^{۴}\alpha-\sin^{۲}\alpha+\frac{l^{۲}}{۴(l^{۲}+d^{۲})}=۰$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}\alpha=\frac{\sqrt{d^{۲}+l^{۲}}+d}{۲\sqrt{d^{۲}+l^{۲}}} \quad (۳)$$

$$\Rightarrow \alpha=\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{\sqrt{d^{۲}+l^{۲}}-d}{۲\sqrt{d^{۲}+l^{۲}}}}$$

ج) بر اساس رابطه‌ی (۱)، داریم

$$v(\alpha)=l\sqrt{\frac{a}{۲}}\frac{۱}{\sqrt{d\cos^{۲}\alpha+l\sin\alpha\cos\alpha}}$$

همچنین بر اساس رابطه‌ی (۲)، داریم

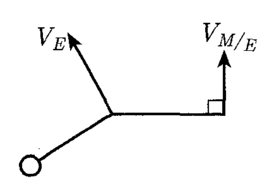
$$l\sin\alpha\cos\alpha=\frac{l^{۲}}{۲d}-\frac{l^{۲}}{d}\sin^{۲}\alpha$$

$$\Rightarrow v(\alpha)=l\sqrt{\frac{a}{۲}}\frac{۱}{\sqrt{d(۱-\sin^{۲}\alpha)+\frac{l^{۲}}{۲d}-\frac{l^{۲}}{d}\sin^{۲}\alpha}}$$

حال رابطه‌ی فوق را بر اساس رابطه‌ی (۳) بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$v(\alpha)=l\sqrt{\frac{a}{۲}}\frac{۱}{\sqrt{\frac{d}{۲}+\frac{\sqrt{l^{۲}+d^{۲}}}{۲}}} \Rightarrow v(\alpha)=l\sqrt{\frac{a}{d+\sqrt{d^{۲}+l^{۲}}}}$$

۵۱ برای تعیین شکل مدار ماه به دور خورشید باید سرعت ماه نسبت به خورشید را بیابیم. سرعت ماه نسبت به خورشید برابر مجموع سرعت زمین نسبت به خورشید و سرعت ماه نسبت به زمین است. پس



شکل ۱-۱۷۲

$$\vec{v}_M=\vec{v}_E+\vec{v}_{M/E}$$

با توجه به اعداد داده شده در صورت سؤال داریم:

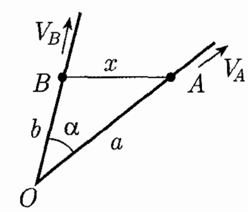
$$v_E=\frac{۲\pi\times ۱/۵\times ۱۰^{۱۱}}{۳۶۵}\simeq ۲\times ۱۰^{۹}\mathrm{m/day}$$

$$v_{M/E}=\frac{۲\pi\times ۳/۸\times ۱۰^{۸}}{۲۷}\simeq ۱۰^{۸}\mathrm{m/day}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید سرعت دوران زمین به دور خورشید حدود ۲۰ برابر سرعت دوران ماه نسبت به زمین است. در نتیجه مجموع $\vec{v_E}$ و $\vec{v}_{M/E}$ هیچگاه صفر نمی‌شود و $\vec{v}_M$ همواره به یک سمت است. بنابراین گزینه‌های (الف) و (ج) صحیح نمی‌باشند. زیرا در گزینه‌ی (الف) به خاطر حرکت دایره مانند رسم شده، سرعت در لحظاتی باید تغییر جهت دهد که مستلزم صفر شدن آن می‌باشد. همچنین در گزینه‌ی (ج) نیز حالتی است که در آن سرعت ماه برای لحظه‌ای صفر می‌شود.

با توجه به اینکه سرعت ماه نسبت به زمین حدود ۵٪ سرعت زمین به دور خورشید است، بدیهی است که گردش ماه به دور زمین نباید تأثیر زیادی روی مدار ماه به دور خورشید داشته باشد. به بیان دیگر حرکت ماه به دور خورشید، بیشتر تحت تأثیر حرکت زمین به دور خورشید است. بنابراین مدار آن تا حدودی شبیه مدار زمین به دور خورشید (دایره) خواهد بود. در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۵۲ شکل (۱ـ۱۷۳) را در نظر بگیرید.



شکل ۱-۱۷۳

بر اساس قانون کسینوس‌ها در مثلث ΔOAB داریم:

$$x^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\alpha$$

حال از دو طرف رابطه‌ی فوق مشتق می‌گیریم. پس

$$۲x\dot{x} = ۲a\dot{a} + ۲b\dot{b} - ۲\cos\alpha(a\dot{b} + b\dot{a})$$

که در آن $\dot{a}$ همان v_A، $\dot{b}$ همان v_B و $\dot{x}$ مشتق فاصله‌ی A از B (یا سرعت A نسبت به B) است. اگر بخواهیم v_B را به گونه‌ای بیابیم که در $t = ۰$ مشتق فاصله‌ی A از B صفر شود، باید $\dot{x}$ را در معادله‌ی بالا برابر صفر قرار دهیم تا v_B بر حسب بقیه‌ی پارامترهای مسأله به‌دست آید. بنابراین

$$\begin{aligned}
&۲av_A + ۲bv_B - ۲\cos\alpha(av_B + bv_A) = ۰\\
&\Rightarrow\ v_B(b - a\cos\alpha) = v_A(b\cos\alpha - a)\\
&\Rightarrow\ v_B = v_A\frac{b\cos\alpha - a}{b - a\cos\alpha}
\end{aligned}$$

در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.

۵۳ همان‌طور که می‌دانید اندازه‌ی بردار سرعت متوسط متحرک برابر اندازه‌ی تغییر بردار مکان متحرک در مدت زمان لازم برای آن است. در شکل (۱ـ۱۰۷) تغییر بردار مکان متحرک از A تا B برابر $\overrightarrow{AB}$ است و مستقل از مسیر می‌باشد. بنابراین اندازه‌ی آن نیز ثابت است. پس

$$\Delta t = \text{cte}\ ,\ \ \overrightarrow{\Delta r} = \text{cte}\ \Rightarrow\ \overline{v} = \frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t} = \text{cte}$$

در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.

۵۴ چون شتابی در راستای افق نداریم، حرکت افقی، حرکتی با سرعت ثابت است. پس تنها کافی است زمانی که طول می‌کشد تا جسم به زمین برسد را حساب کنیم. در هر قسمت مسیر، حرکت در راستای y، حرکتی با شتاب ثابت g و سرعت اولیه‌ی صفر (پس از هر برخورد) است. اگر مقدار سقوط در یکی از قسمت‌ها را h_i بنامیم، داریم

$$h_i = \frac{۱}{۲}gt_i^۲ \Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{۲h_i}{g}}$$

که در آن $h_i = \frac{h}{۲^i}$ است. بنابراین زمان کل حرکت عبارت است از:

$$t = \sum_{i=۰}^{\infty} t_i \Rightarrow t = \sum_{i=۰}^{\infty}\sqrt{\frac{۲h}{g(۲)^i}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲h}{g}}\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^{\frac{i}{۲}}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲h}{g}}\sum_{i=۰}^{\infty} ۲^{-\frac{i}{۲}}$$

سری فوق یک سری هندسی می‌باشد که جواب آن عبارت است از:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{۲h}{g}}}{\sqrt{۲}-۱}$$

بنابراین فاصله‌ی افقی محل برخورد جسم با زمین و محل پرتاب برابر است با:

$$x = vt \Rightarrow x = \frac{v\sqrt{\frac{۲h}{g}}}{\sqrt{۲}-۱}$$

در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.

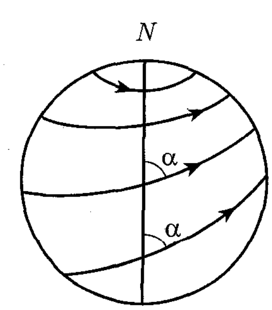
۵۵ حرکت در راستای x حرکتی با سرعت ثابت است، زیرا شتابی در راستای افق نداریم. بنابراین بر اساس رابطه‌ی $x = vT$، با ثابت نگه داشتن T و افزایش v، x افزایش می‌یابد. در نتیجه گزینه‌های (الف)، (ب) و (ج) غلط می‌باشند.

حرکت در راستای y، حرکتی با شتاب ثابت $-g$ است. پس

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t \ , \ v_{\circ y} = ۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}gT^۲$$

بنابراین با ثابت ماندن T، y نیز ثابت می‌ماند. در نتیجه گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

۵۶ مسیری که متحرک می‌پیماید، مشابه شکل (۱ـ۱۷۴) است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، متحرک در صورت حرکت از نیم‌کره‌ی جنوبی نیز به قطب شمال می‌رسد. زیرا در هر صورت زاویه‌ی مسیر با شمال α است و با نزدیک شدن به قطب شمال، دیگر نمی‌تواند از آن دور شود. بنابراین متحرک حتماً به قطب شمال می‌رسد و چون مسیر حرکت محدود است، زمان طی آن نیز محدود است. توجه کنید که اگر متحرک از قطب شمال آغاز به حرکت کند، از استوا رد نخواهد شد. در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.



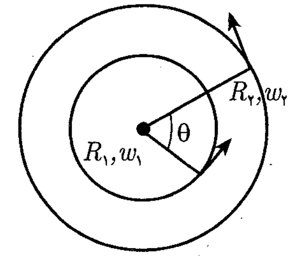
شکل ۱-۱۷۴

۵۷ شکل (۱ـ۱۷۵) را در نظر بگیرید. بر اساس این شکل و اطلاعات مسأله، اندازه‌ی زاویه‌ی بین خط واصل ستاره‌ها به مرکز (θ) عبارت است از:

$$\theta = |\omega_۲ - \omega_۱| t$$

بر اساس رابطه‌ی بالا اگر بخواهیم $\theta < \alpha$ باشد، داریم:

$$|\omega_۲ - \omega_۱| t < \alpha \overset{\omega_۱ \gtrless \omega_۲}{\Rightarrow} \frac{\alpha}{\omega_۲ - \omega_۱} < t < \frac{\alpha}{\omega_۱ - \omega_۲}$$



شکل ۱-۱۷۵

بنابراین طول بازه‌ای که t می‌تواند اختیار کند برابر است با:

$$T_۱ = \frac{۲\alpha}{\omega_۱ - \omega_۲}$$

ابتدا نسبت خواسته شده در طول یک دور را حساب می‌کنیم.

زمان کل حرکت (T) نیز به ازای ۲π رادیان دوران خواهد بود که عبارت است از:

$$T = \frac{۲\pi}{\omega_۱ - \omega_۲}$$

پس نسبت $\frac{T'}{T}$ در یک دور برابر است با:

$$\frac{T'}{T} = \frac{\frac{۲\alpha}{\omega_۱ - \omega_۲}}{\frac{۲\pi}{\omega_۱ - \omega_۲}} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{\alpha}{\pi}$$

بنابراین نسبت $\frac{T'}{T}$ در n دور نیز همین مقدار خواهد بود. در نتیجه گزینه‌ی (هـ) صحیح است.

۵۸ دو مجهول مسأله، سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب است. مسأله دو اطلاع مهم به ما داده است که یکی برد پرتابه و دیگری ملزوم بودن عبور آن از روی یک مانع است. رابطه‌ی مربوط به برد یک تساوی است که عبارت است از:

$$R = \frac{v_۰^۲ \sin ۲\theta}{g} \qquad (۱)$$

ولی رابطه‌ی مربوط به عبور پرتابه از روی مانع، یک نابرابری خواهد بود زیرا تنها شرط لازم برای آن، بزرگ‌تر بودن مختصه‌ی قائم پرتابه در آن نقطه از h است. بنابراین

$$y = X \tan\theta - \frac{gX^۲}{۲v_۰^۲ \cos^۲\theta} \ , \ \ y > h$$

$$\Rightarrow \ X \tan\theta - \frac{gX^۲}{۲v_۰^۲ \cos^۲\theta} > h \qquad (۲)$$

حال $v_۰$ را از رابطه‌ی (۱) در نابرابری (۲) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین

$$X \tan\theta - \frac{gX^۲ \sin ۲\theta}{۲Rg \cos^۲\theta} > h \ \Rightarrow \ X \tan\theta - \frac{X^۲ \sin\theta}{R \cos\theta} < h$$

$$\Rightarrow \ \tan\theta \left(\frac{X^۲}{R} - X\right) > -h \ \Rightarrow \ \tan\theta > \frac{hR}{X(R - X)}$$

در نتیجه گزینه‌ی (د) صحیح است.

۵۹ حرکت گلوله شامل حرکت‌های رفت و برگشتی به ترتیب تا ارتفاع $h, fh, f^{۲}h, \cdots$ است. بنابراین مسافت طی شده در کل حرکت عبارت است از:

$$s = ۲\sum_{i=۰}^{\infty} f^i h \;\Rightarrow\; s = ۲\frac{h}{۱-f}$$

رابطه‌ی فوق را بر اساس رابطه‌ی مجموع یک تصاعد هندسی به‌دست آوردیم.
همچنین زمان رفت و برگشت از روی زمین به ارتفاع فرضی $f^i h$ را می‌توان شامل دو بار سقوط از ارتفاع $f^i h$ دانست. پس

$$f^i h = \frac{۱}{۲}g(\frac{t_i}{۲})^{۲} \;\Rightarrow\; t_i = ۲\sqrt{\frac{۲f^i h}{g}}$$

بنابراین زمان کل حرکت برابر است با:

$$t = \sum_{i=۰}^{\infty} t_i \;\Rightarrow\; t = \sum_{i=۰}^{\infty} ۲\sqrt{\frac{۲f^i h}{g}}$$
$$\Rightarrow\; t = ۲\sqrt{\frac{۲h}{g}}\sum_{i=۰}^{\infty} f^{\frac{i}{۲}} \Rightarrow\; t = ۲\sqrt{\frac{۲h}{g}}\frac{۱}{۱-\sqrt{f}}$$

بنابراین مسافت کل پیموده شده تقسیم بر زمان کل حرکت عبارت است از:

$$\frac{s}{t} = \frac{(۲h/(۱-f))}{(۲\sqrt{\frac{۲h}{g}}/(۱-\sqrt{f}))} \;\Rightarrow\; \frac{s}{t} = \frac{\sqrt{\frac{gh}{۲}}}{۱+\sqrt{f}}$$

در نتیجه گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۶۰ همان‌طور که می‌دانید معادله‌ی برد پرتابه عبارت است از:

$$R = \frac{v_۰^{۲}}{g}\sin(۲\theta) \qquad (۱)$$

که در آن $v_۰$ سرعت اولیه‌ی پرتاب و θ زاویه‌ی پرتاب است. با توجه به این رابطه ملاحظه می‌شود که دو پرتابه که به اندازه‌ی زاویه‌ی دلخواه α از ۴۵° بالاتر و پایین‌تر باشند، برد یکسانی دارند، یعنی

$$\begin{aligned} \theta = ۴۵^\circ + \alpha \;\Rightarrow\; R = \frac{v_۰^{۲}}{g}\sin(۹۰^\circ + ۲\alpha) \;\Rightarrow\; R = \frac{v_۰^{۲}}{g}\cos ۲\alpha \\ \theta = ۴۵ - \alpha \;\Rightarrow\; R = \frac{v_۰^{۲}}{g}\sin(۹۰^\circ - ۲\alpha) \;\Rightarrow\; R = \frac{v_۰^{۲}}{g}\cos ۲\alpha \end{aligned} \qquad (۲)$$

همچنین رابطه‌ی حداکثر ارتفاع پرتابه عبارتست از:

$$h = \frac{v_۰^{۲}\sin^{۲}\theta}{۲g}$$

حال h را برای پرتابه‌هایی که به اندازه‌ی دلخواه α از 45° بالاتر و پایین‌تر باشند، می‌یابیم

$$\theta = 45^\circ + \alpha \Rightarrow h = \frac{v_\circ^2(1-\cos 2\theta)}{4g} \Rightarrow h = \frac{v_\circ^2(1+\sin 2\alpha)}{4g} \qquad (3)$$

$$\theta = 45^\circ - \alpha \Rightarrow h = \frac{v_\circ^2(1-\cos 2\theta)}{4g} \Rightarrow h = \frac{v_\circ^2(1-\sin 2\alpha)}{4g} \qquad (4)$$

چون بر اساس روابط (۲) برد پرتابه به ازای زاویه‌ی پرتاب‌های $\theta = 45^\circ \pm \alpha$ یکسان است و h برای زاویه‌ی پرتاب $\theta = 45^\circ + \alpha$ از h برای زاویه‌ی پرتاب $\theta = 45^\circ - \alpha$ بیشتر است، مسلماً طول مسیر به ازای زاویه‌های پرتاب پایین‌تر از 45°، از طول مسیر به ازای $\alpha \geq 0$, $\theta = 45^\circ + \alpha$ کمتر است. حال باید حالت‌های $\alpha = 0$ و $\alpha > 0$ را با هم مقایسه کنیم. اگر از رابطه‌ی (۲) نسبت به α مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{v_\circ^2}{g}(-2\sin 2\alpha) \qquad (5)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۳) نیز داریم:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{v_\circ^2}{4g}(2\cos 2\alpha) \qquad (6)$$

همان‌طور که می‌دانید حاصل یک تابع در $\alpha_\circ << 1$ برابر است با

$$f(\alpha_\circ) = f(0) + \frac{df(0)}{d\alpha}(\alpha_\circ)$$

که α تغییر بسیار کوچک در زاویه‌ی پرتاب است. بر اساس رابطه‌ی (۵)، $\frac{dR}{d\alpha}$ به ازای $\alpha = 0$ برابر صفر است یعنی به ازای $\alpha_\circ << 1$، داریم:

$$R(\alpha_\circ) = R(0) = R_{\theta=45^\circ} \qquad (7)$$

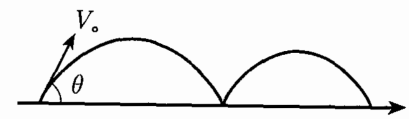
بر اساس رابطه‌ی (۶)، $\frac{dh}{d\alpha}$ به ازای $\alpha = 0$ برابر $\frac{v_\circ^2}{2g}$ است، یعنی به ازای $\alpha_\circ << 1$، داریم

$$h(\alpha_\circ) = h(0) + \frac{dh}{d\alpha}(\alpha_\circ) = h_{\theta=45^\circ} + \frac{v_\circ^2}{2g}\alpha_\circ \qquad (8)$$

بنابراین R به ازای $\alpha = 0$ و $\alpha > 0$ یکسان است ولی h به ازای $\alpha > 0$ بزرگ‌تر از $\alpha = 0$ (به ازای αهای کوچک) است. پس طول مسیر به ازای $\alpha > 0$ بیشتر از طول مسیر به ازای $\alpha = 0$ است. یعنی تا محدوده‌ای با افزایش α، طول مسیر افزایش می‌یابد. در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۶۱ چون شتابی در راستای افق نداریم، مؤلفه‌ی افقی سرعت ثابت می‌ماند. پس باید زمان کل حرکت برابر باشد با:

$$v_\circ \cos\theta(T) = R \Rightarrow T = \frac{R}{v_\circ \cos\theta} \qquad (1)$$



شکل ۱-۱۷۶

که در آن θ زاویه‌ی پرتاب و R برد پرتابه است.

از طرف دیگر بر اساس حرکت در راستای قائم، زمان کل حرکت از قسمت‌های زیر تشکیل شده است:

$$h_0 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_0^2 + v_0 \sin\theta(t_0) = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2v_0}{g}\sin\theta$$

$$h_1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t_1)^2 + v_0 \sin\theta(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = (\frac{2v_0}{g}\sin\theta) \times \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$h_{n-1} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g(t_{n-1})^2 + \frac{v_0 \sin\theta}{2^{n-1}}(t_{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow t_{n-1} = (\frac{2v_0}{g}\sin\theta) \times (\frac{1}{2})^{n-1}$$

توجه داشته باشید که در تمام معادلات فوق یکی از جواب‌ها $t = 0$ است که مدنظر ما نیست.

بنابراین زمان کل حرکت که مجموع t_iهاست، برابر است با:

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} t_i = \frac{2v_0}{g}\sin\theta(1 + \frac{1}{2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1})$$

تصاعد فوق یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است، پس

$$T = \frac{2v_0}{g}\sin\theta(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}) \Rightarrow T = \frac{4v_0}{g}\sin\theta(1-\frac{1}{2^n}) \qquad (2)$$

حال اگر T را از رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱) قرار دهیم، داریم:

$$\frac{R}{v_0 \cos\theta} = \frac{4v_0}{g}(1-\frac{1}{2^n}) \Rightarrow \frac{Rg}{2v_0^2} = \sin 2\theta(1-\frac{1}{2^n})$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{Rg}{2v_0^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{Rg}{2v_0^2}\frac{2^n}{2^n-1} \qquad (3)$$

برد پرتابه‌ای با زاویه‌ی پرتاب θ_0 عبارتست از:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$

حال به ازای $\theta_0 = 45^\circ$، داریم:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2 \times 45^\circ) \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g}$$

با قرار دادن R از رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱)، داریم

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}\frac{2^n}{2^n-1} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})$$

در نتیجه گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۶۲ همان‌طور که در شکل (۱ـ۱۷۷) ملاحظه می‌کنید، در مدت زمان t، جسم A به اندازه‌ی ωt و جسم B به اندازه‌ی Ωt دوران نموده‌اند. از این لحظه به بعد جسم A از دایره‌ی یک جدا شده و مسیری مستقیم را با سرعت $r\omega$ می‌پیماید تا به دایره‌ی دو برخورد نماید. شرط برخورد این است که مدت زمان طی شدن مسیر $A'C$ توسط جسم A (t') با زمان طی شدن کمان $\widehat{B'C}$ توسط جسم B برابر باشد:

$$\left.\begin{array}{l} A'C=\sqrt{R^{۲}-r^{۲}} \\ T'=\dfrac{A'C}{v_A} \end{array}\right\} \Rightarrow t'=\frac{\sqrt{R^{۲}-r^{۲}}}{r\omega}=\frac{\sqrt{(۰/۲)^{۲}-(۰/۱)^{۲}}}{۰/۱(۰/۲)}$$

$$\Rightarrow t'=۸/۶۶\mathrm{s} \qquad (۱)$$

حال تنها کافی است زاویه‌ی کمان $\widehat{B'C}$ را بیابیم تا زمان طی شدن این مسیر توسط جسم B را نیز به‌دست آوریم.

برای این کار ابتدا زاویه‌ی کمان $\widehat{A''C}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\widehat{A''C}=\angle O_{۱}=\cos^{-۱}\frac{r}{R}=\cos^{-۱}\frac{۱}{۲}=۶۰^{\circ} \qquad (۲)$$

همان‌طور که در شکل (۱ـ۱۷۷) ملاحظه می‌کنید $\widehat{B'C}$ برابر است با:

$$\widehat{B'C}=\widehat{A''C}-\widehat{A''B'}$$

$\widehat{A''B'}$ نیز اختلاف زاویه‌ی طی شده توسط دو جسم در مدت زمان t است، پس:

$$\widehat{B'C}=\widehat{A''C}-(\Omega-\omega)t$$

بر اساس رابطه‌ی (۲) کمان $\widehat{A''C}$ ۶۰° است، بنابراین بر اساس رابطه‌ی فوق، داریم:

$$\widehat{B'C}=\frac{\pi}{۳}-(۰/۱-۰/۲)t=\frac{\pi}{۳}+۰/۱t$$

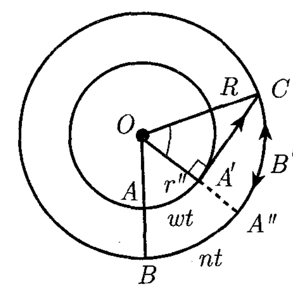
زمانی که جسم B باید مسیر $\widehat{B'C}$ را بپیماید، عبارت است از

$$\widehat{B'C}=\Omega t' \Rightarrow t'=\frac{\widehat{B'C}}{\Omega}=\frac{\frac{\pi}{۳}+۰/۱t}{۰/۱} \Rightarrow t'=\frac{۱۰\pi}{۳}+t \qquad (۳)$$

شرط برخورد، برابری این زمان با زمان طی شدن مسیر $\widehat{A'C}$ توسط جسم A است. در نتیجه باید روابط (۱) و (۳) را برابر قرار دهیم. پس

$$\frac{۱۰\pi}{۳}+t=۸/۶۶ \Rightarrow t=۸/۶۶-\frac{۱۰\pi}{۳} \Rightarrow t=-۱/۸۱\mathrm{s}$$

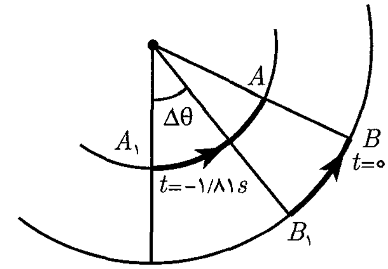
زمان منفی به‌دست آمده قابل قبول نیست، ولی به این معناست که A باید لحظه‌ای از دایره‌ی یک جدا شود که جسم A و B به اندازه‌ی $۱/۸۱\mathrm{s}$ برای رسیدن به هم لازم دارند. یعنی در



شکل ۱-۱۷۷

موقعیت‌های $A_۱$ و $B_۱$ در (شکل ۱ـ۱۷۸). این موقعیت در زمان مثبت هم به‌دست می‌آید. چون سرعت دوران A (ω) بیش از دوران B (Ω) است.

این حالت پس از اینکه جسم A یک دور کامل زد می‌تواند رخ دهد. اختلاف زاویه‌ی جسم A و B باید برابر $(\Delta\theta = ۱/۸۱(\omega - \Omega))$ شود. بنابراین



شکل ۱-۱۷۸

$$\Omega t - (\omega t - ۲\pi) = ۱/۸۱(\omega - \Omega) \Rightarrow (\Omega - \omega)t + ۲\pi = ۱/۸۱(\omega - \Omega)$$
$$\Rightarrow -۰/۱t = ۰/۱۸۱ - ۲\pi$$
$$\Rightarrow t = \frac{۲\pi}{۰/۱} - ۱/۸۱$$
$$\Rightarrow t = ۶۴/۶\text{s}$$
$$\Rightarrow t \simeq ۶۵\text{s}$$

۶۳ الف) ابتدا زمان طی هر قسمت مسیر را به‌دست می‌آوریم. پس

$$\text{بخش مستقیم} : L = vt_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{L}{v}$$
$$\text{بخش نیم‌دایره} : x = v(x)t_۲ \Rightarrow x = \frac{vx^۲}{x^۲ + b^۲}t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{x^۲ + b^۲}{vx}$$

بنابراین زمان حرکت برابر است با:

$$t = t_۱ + t_۲ \Rightarrow t = \frac{L}{v} + \frac{x^۲ + b^۲}{vx} \Rightarrow t = \frac{۱}{v}(L + \frac{x^۲ + b^۲}{x}) \qquad (۱)$$

ب) می‌دانیم که متوسط اندازه‌ی سرعت، مسافت پیموده شده تقسیم بر زمان است، بر اساس رابطه‌ی (۱)، داریم:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{L + x}{\frac{۱}{v}(L + \frac{x^۲+b^۲}{x})}$$
$$\Rightarrow \overline{v} = \frac{v(L + x)}{(L + x + \frac{b^۲}{x})} \qquad (۲)$$

ج) از رابطه‌ی (۱) نسبت به x مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا x به ازای زمان حرکت کمینه به‌دست آید. پس

$$\frac{dt}{dx} = \frac{۱}{v}(۱ - \frac{b^۲}{x^۲}) = ۰ \Rightarrow \frac{b^۲}{x^۲} = ۱ \Rightarrow x = b \qquad (۳)$$

د) حال مقدار x را از رابطه‌ی (۳) در رابطه‌ی (۲) جایگذاری می‌کنیم:

$$\overline{v} = \frac{v(L + b)}{(L + b + b)} \Rightarrow \overline{v} = \frac{v(L + b)}{(L + ۲b)}$$

هـ) از رابطه‌ی (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقدار x به ازای بیشترین مقدار متوسط اندازه‌ی سرعت به‌دست آید. پس

$$\frac{d\overline{v}}{dx} = v\frac{(L + x + \frac{b^۲}{x}) - (۱ - \frac{b^۲}{x^۲})(L + x)}{(L + x + \frac{b^۲}{x})^۲} = ۰$$

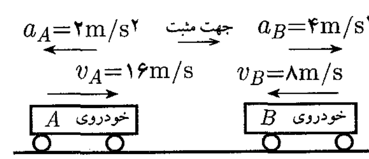
$$\Rightarrow \frac{b^۲}{x}+\frac{b^۲}{x^۲}(L+x)=۰ \Rightarrow b+\frac{bL}{x}+b=۰$$
$$\Rightarrow \frac{L}{x}=-۲ \Rightarrow x=-\frac{L}{۲}$$

x نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین جواب فوق غلط است. همان‌طورکه در رابطه‌ی مشتق فوق ملاحظه می‌کنید، $\frac{d\overline{v}}{dx}$ همیشه بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین $\overline{v}$ به ازای بیشترین مقدار x که در اینجا D است، ماکزیمم می‌شود. به ازای $x=D$، متوسط اندازه‌ی سرعت برابر است با:

$$\overline{v}=\frac{v(L+D)}{(L+D+\frac{b^۲}{D})}$$

۶۴ چون حرکت دو خودرو بر روی یک خط راست واقع است، حرکت آنها نسبت به هم نیز بر روی همان خط می‌باشد. پس راه‌حل مناسب برای این مسئله استفاده از مفاهیم سرعت و شتاب نسبی است. بنابراین

$$v_{BA}=v_B-v_A \Rightarrow v_{BA}=(-۸)-۱۶ \Rightarrow v_{BA}=-۲۴\mathrm{m/s}$$
$$a_{BA}=a_B-a_A \Rightarrow a_{BA}=۴-(-۲) \Rightarrow a_{BA}=۶\mathrm{m/s^۲}$$



شکل ۱-۱۷۹

با توجه به این‌که شتاب خودروی B به دلیل ترمز، منفی است، جهت آن در خلاف جهت حرکت خودروی B است (شکل ۱ـ۱۷۹). حال با توجه به مفاهیم سرعت و شتاب نسبی، فرض می‌کنیم که خودروی A ثابت است و خودروی B با سرعت v_{BA} و شتاب a_{BA} در حرکت است. بنابراین

$$s=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+s_۰ \Rightarrow s=\frac{۱}{۲}a_{BA}t^۲+v_{BA}t+s_۰$$
$$\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۲}(۶)t^۲-۲۴t+۴۵ \Rightarrow ۳t^۲-۲۴t+۴۵=۰$$
$$\Rightarrow t=\frac{۲۴\pm ۱۶}{۶} \Rightarrow t_۱=۳\mathrm{s}\ ,\ t_۲=۵\mathrm{s}$$

$t_۱$ زمان برخورد و $t_۲$ زمان رسیدن دو خودرو به یکدیگر پس از برخورد است که این امکان وجود ندارد. در نتیجه سرعت خودروی B در لحظه برخورد برابر است با:

$$v_B=a_Bt+v_{۰B} \Rightarrow v_B=۴(۳)-۸ \Rightarrow v_B=۴\mathrm{m/s}$$

بنابراین گزینه (ج) صحیح است.

۶۵ حرکت بسته‌ها دوبعدی است، بنابراین لازم است حرکت آنها را در دو جهت x و y تحت بررسی قرار دهیم. توجه داشته باشید که حرکت در جهت x حرکتی با سرعت ثابت است که میزان آن، برابر سرعت هواپیما می‌باشد. فقط باید توجه داشت که قبل از رها شدن، حرکت بسته‌ها، حرکتی یک‌بعدی و شتابدار در راستای x است. بنابراین معادلات حرکت یک بسته دلخواه که در زمان $t_۰$ رها شده است، عبارت است از:

$$x \text{ جهت } : x=v_{۰x}t+x_۰\ \ ,\ \ v_{۰x}=At_۰+v_۰\ \ ,\ \ x_۰=\frac{۱}{۲}At_۰^۲+v_۰t_۰$$

$$\Rightarrow\ x = (At_\circ + v_\circ)(T - t_\circ) + \frac{۱}{۲}At_\circ^۲ + v_\circ t_\circ$$

$$\Rightarrow\ x = -\frac{۱}{۲}At_\circ^۲ + At_\circ T + v_\circ T \qquad (۱)$$

$$y \text{ جهت } : y = \frac{۱}{۲}a_y t^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \ \Rightarrow\ y = -\frac{۱}{۲}g(T - t_\circ)^۲ + h \qquad (۲)$$

$$(۲) \rightarrow T - t_\circ = \sqrt{\frac{۲(h-y)}{g}} \ \Rightarrow\ t_\circ = T - \sqrt{\frac{۲(h-y)}{g}} \qquad (۳)$$

$$(۳),(۱) \rightarrow x + \frac{A(h-y)}{g} = \frac{AT^۲}{۲} + v_\circ T$$

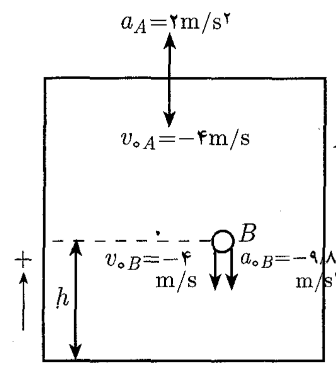
در نتیجه گزینه (د) صحیح است.

۶۶ سرعت اولیه شتاب آسانسور نسبت به دستگاه مختصات مطلق متصل به زمین عبارتست از

$$\text{آسانسور} : v_{\circ A} = -۴\text{m/s} \qquad a_A = ۲\text{m/s}^۲$$

$$\text{گلوله} : v_{\circ B} = -۴\text{m/s} \qquad a_B = g = -۹/۸۱\text{m/s}^۲$$

توجه داشته باشید که سرعت اولیه گلوله و آسانسور با یکدیگر برابر است.



شکل ۱-۱۸۰

حال فرض می‌کنیم که آسانسور ثابت است و گلوله با سرعت و شتاب نسبی v_{BA} و a_{BA} حرکت می‌کند که مقادیر آن برابر است با

$$v_{\circ BA} = v_{\circ B} - v_{\circ A} \ \Rightarrow\ v_{\circ BA} = -۴ - (-۴) \ \Rightarrow\ v_{\circ BA} = \circ$$

$$a_{BA} = a_B - a_A \ \Rightarrow\ a_{BA} = -۹/۸۱ - ۲ \ \Rightarrow\ a_{BA} = -۱۱/۸۱\text{m/s}^۲$$

حال معادله حرکت با شتاب ثابت را برای گلوله می‌نویسیم تا زمان رسیدن گلوله به کف آسانسور را به‌دست آوریم.

$$s = \frac{۱}{۲}a_{BA}t^۲ + v_{\circ BA}t + h \ \Rightarrow\ \circ = \frac{۱}{۲}(-۱۱/۸۱)t^۲ + ۱ \ \Rightarrow\ t = \sqrt{\frac{۲}{۱۱/۸۱}}\text{s}$$

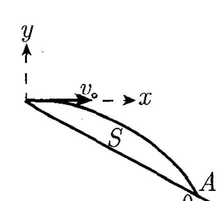
بنابراین در لحظه برخورد گلوله به کف آسانسور، سرعت آن نسبت به کف آسانسور برابر است با

$$|v_{BA}| = |a_{BA}t + v_{\circ BA}| \ \Rightarrow\ |v_{BA}| = \left| -۱۱/۸۱\sqrt{\frac{۲}{۱۱/۸۱}} \right|$$

$$\Rightarrow\ |v_{BA}| = \sqrt{۲ \times ۱۱/۸۱} \ \Rightarrow\ |v_{B/A}| \approx ۲\sqrt{۶}\text{m/s}$$

در نتیجه گزینه (د) صحیح است.

۶۷ s را به ازای یک مقدار دلخواه از θ به‌دست می‌آوریم. معادلات حرکت را در دو جهت x و y می‌نویسیم.



شکل ۱-۱۸۱

$$x \text{ جهت } : x = v_{\circ x}t + x_\circ \ \Rightarrow\ x = v_\circ t \qquad (۱)$$

$$y \text{ جهت } : y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ \ \Rightarrow\ y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۲)$$

اگر مختصات نقطه A (محل برخورد گلوله با سطح شیب‌دار) را $(x_۱, y_۱)$ در نظر بگیریم، داریم

$$\tan\theta = |\frac{y_۱}{x_۱}| \Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{-\frac{۱}{۲}gt^۲}{v_\circ t}\right|$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{gt}{۲v_\circ} \Rightarrow t = \frac{۲v_\circ}{g}\tan\theta \qquad (۳)$$

حال s را بر حسب $x_۱$ و $y_۱$ نوشته و t را از رابطه (۳) در آن جایگذاری می‌کنیم.

$$s = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲} \Rightarrow s = \sqrt{(v_\circ t)^۲ + (-\frac{۱}{۲}gt^۲)^۲}$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{(\frac{۲v_\circ^۲}{g}\tan\theta)^۲ + (\frac{۲v_\circ^۲}{g}\tan^۲\theta)^۲}$$

$$\Rightarrow s = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\tan\theta\sqrt{۱+\tan^۲\theta} \Rightarrow s = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\frac{\sin\theta}{\cos^۲\theta} \qquad (۴)$$

برای رسم نمودار s بر حسب θ لازم است $\frac{ds}{d\theta}$ را به‌دست آوریم تا نقاطی از نمودار که شیب آن صفر می‌شود، به‌دست آید:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\frac{\cos^۳\theta + ۲\cos\theta\sin^۲\theta}{\cos^۴\theta} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{۲v_\circ^۲}{g}\frac{۱+\sin^۲\theta}{\cos^۳\theta} \qquad (۵)$$

با توجه به رابطه (۴) مقدار s در بازه $\theta : \circ \to \frac{\pi}{۲}$ فقط به ازای $\theta = \circ$ برابر صفر است و بر اساس رابطه (۵) شیب نمودار s بر حسب θ در این بازه صفر نمی‌شود. در نتیجه گزینه (ب) صحیح است.

۶۸ نمودار سرعت رودخانه در نقاط مختلف عرض آن در شکل (۱ـ۱۸۲) نشان داده شده. زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه را با استفاده از معادله حرکت با سرعت ثابت در جهت y به‌دست می‌آوریم.

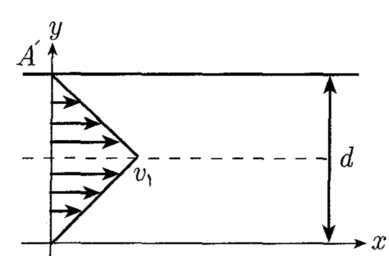
$$y = v_y t + y_\circ \Rightarrow d = v_۲ t + \circ \Rightarrow t = \frac{d}{v_۲}$$

بر اساس تقارن موجود نسبت به خط گذرنده از مرکز رودخانه، میزان حرکت قایق در جهت x در فاصله حرکت بین ساحل پایین تا مرکز و مرکز تا ساحل بالا با یکدیگر برابر است. بنابراین

$$y : \circ - \frac{d}{۲} \to t_۱ = \frac{d}{۲v_۲}$$

$$v_x = v_۱(\frac{y}{d/۲}) \Rightarrow v_x = \frac{۲v_۱}{d}y$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow x_۱ = \int_\circ^{t_۱}\frac{۲v_۱}{d}y dt$$



شکل ۱-۱۸۲

y بر اساس معادله حرکت در جهت y، برابر $y = v_۲ t$ است. بنابراین

$$x_۱ = \int_\circ^{t_۱}\frac{۲v_۱}{d}(v_۲ t)dt \Rightarrow x_۱ = \frac{۲v_۱v_۲}{d}\frac{t_۱^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{v_۱v_۲}{d}(\frac{d}{۲v_۲})^۲ \Rightarrow x_۱ = \frac{v_۱ d}{۴v_۲}$$

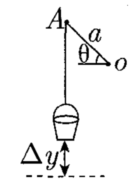
در نتیجه فاصله‌ای از نقطه A' که قایق به ساحل مقابل می‌رسد، برابر است با

$$x = 2x_1 \;\Rightarrow\; x = \frac{v_1}{2v_2}d$$

بنابراین گزینه (د) صحیح است.

۶۹ در ابتدا سر آزاد طناب روی نقطه A قرار دارد. با توجه به شکل (۱-۱۸۳)، داریم:

$$\Delta y_0 = a\sin\theta$$



شکل ۱-۱۸۳

این وضعیت ادامه پیدا می‌کند تا موقعی که سر آزاد طناب روی B بیفتد. این اتفاق در $\theta = 30^\circ$ می‌افتد.

در این وضعیت که سر آزاد روی B می‌افتد، داریم:

$$\Delta y_1 = a\Delta\sin\phi_1$$

که در آن ϕ_1 زاویه خط OB با OX است. می‌دانیم $\theta - \phi_1 = \frac{\pi}{3}$ است. حال وقتی که سر آزاد در $\theta = 30^\circ + 60^\circ$ روی C قرار می‌گیرد، داریم

$$y_0 = a\Delta\sin\phi_2$$

که در آن ϕ_2 زاویه خط OC با OX است. $\qquad \theta - \phi_2 = \frac{2\pi}{3}$

و این وضعیت ادامه پیدا می‌کند. بنابراین

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{6} \;:\; y = a\sin\theta$$

$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} \;:\; y = a\sin\frac{\pi}{6} + \left(a\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) - a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\; y = 2a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3} \;:\; y = 2a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\frac{\pi}{6} + \left(a\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) - a\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y = 4a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

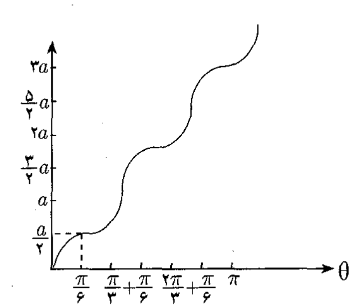
به طور کلی برای $\frac{\pi}{6} + \frac{i\pi}{3} \le \theta < \frac{\pi}{6} + \frac{(i+1)\pi}{3}$

$$y = 2(i+1)a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\left(\theta - \frac{(i+1)\pi}{3}\right) \qquad (1)$$

$$i \le \frac{3}{\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) < i+1 \;\Rightarrow\; i = \frac{3\theta}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = a\left(1 + \left(\frac{3\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\right) + a\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\left(1 + \left(\frac{3\theta}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow y = a\left(\frac{3\theta}{\pi} + \frac{1}{2}\right) + a\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\left(\frac{3\theta}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

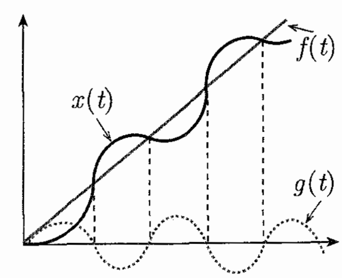


شکل ۱-۱۸۴

$$0 \le \theta < \frac{\pi}{6} \ : \ y = a\sin\theta$$
$$\frac{\pi}{6} \le \theta < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \ : \ y = 2a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{\pi}{3} \le \theta < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \ : \ y = 4a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\frac{2\pi}{3} \le \theta < \frac{\pi}{6} + \pi \ : \ y = 6a\sin\frac{\pi}{6} + a\sin(\theta - \pi)$$

۷۰ در صورت مسئله تابع شتاب ذره بر حسب زمان در اختیار ما قرار داده شده است در نتیجه با انتگرال‌گیری از این تابع و اعمال دو شرط اولیه‌ی $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$ می‌توانیم تابع مکان ذره بر حسب زمان را به‌دست آوریم:

$$a = A\sin(\omega t)$$
$$v = \int a dt = \int A\sin(\omega t)dt = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t) + c_1$$
$$v_0 = 0 \Rightarrow -\frac{A}{\omega} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{A}{\omega} \Rightarrow v = \frac{A}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$$
$$x = \int v dt = \frac{A}{\omega}\int (1 - \cos(\omega t))dt = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) + c_2$$
$$x_0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$ تابع مکان ذره:



شکل ۱-۱۸۵

نتیجه‌ی فوق نشان می‌دهد که تابع مکان ـ زمان ذره حاصل تفریق دو تابع $f(t) = \frac{At}{\omega}$ و $g(t) = \frac{A\sin(\omega t)}{\omega^2}$ می‌باشد:

$$f(t) = \frac{At}{\omega}$$
$$g(t) = \frac{A}{\omega^z}\sin(\omega t)$$
$$x(t) = f(t) - g(t) = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)$$

لذا گزینه (الف) صحیح است.

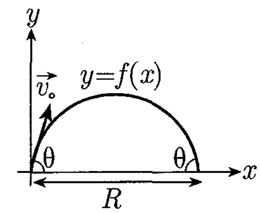
۷۱ سرعت متوسط یک متحرک رابطه مستقیم با میزان جابه‌جایی و رابطه معکوس با زمان جابه‌جایی دارد در نتیجه با مقایسه نقاط مشخص شده در شکل (۱ـ۱۱۱) داریم:

$$\Delta x_n = x_n - x_0 \ , \ \Delta t_n = t_n - t_0$$
$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_3 > \Delta x_1 = \Delta x_5 > \Delta x_2 = \Delta x_4 \\ \Delta t_1 < \Delta t_2 < \Delta t_3 < \Delta t_4 < \Delta t_5 \\ \bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{v}_1 > \bar{v}_2 > \bar{v}_4 \ , \ \bar{v}_1 > \bar{v}_5$$

از مقایسات فوق نتیجه می‌شود که $\bar{v}_1$ از $\bar{v}_2$، $\bar{v}_4$ و $\bar{v}_5$ بزرگ‌تر می‌باشد اما با کمی دقت بیشتر در نمودار شکل (۱ـ۱۱۱) می‌توان دریافت که مقدار $\bar{v}_1$ از $\bar{v}_3$ نیز بزرگ‌تر است زیرا شیب نمودار در بازه‌های زمانی $(t_1 - t_0)$ و $(t_3 - t_2)$ تقریباً برابر می‌باشد و اگر این شیب در بازه‌ی زمانی $(t_2 - t_1)$ نیز حفظ می‌شد می‌توانستیم نتیجه بگیریم که $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_3$ با یکدیگر برابر می‌باشند اما با

توجه به شکل (۱ـ۱۱۱) شیب نمودار در بازه‌ی $(t_۲ - t_۱)$ منفی شده است و در نتیجه سرعت متوسط کاهش یافته است. لذا گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۷۲ مسیر حرکت این ذره در شکل (۱ـ۱۸۶) نمایش داده شده است. برای به‌دست آوردن مساحت قسمت هاشورخورده باید از معادله مسیر حرکت پرتابه در محدوده‌ی برد پرتابه $۰ < x < R$ انتگرال گرفت.



شکل ۱ـ۱۸۶

$$v_x = v_۰ \cos\theta \;\rightarrow\; x = (v_۰ \cos\theta)t \;\rightarrow\; t = \frac{x}{v_۰ \cos\theta}$$

$$v_y = v_۰ \sin\theta - gt \;\rightarrow\; y = \int v_y dt = (v_۰ \sin\theta)t - \frac{g}{۲}t^۲ + c_۱$$

$$y_۰ = ۰ \;\rightarrow\; c_۱ = ۰ \;\rightarrow\; y = (v_۰ \sin\theta)t - \frac{g}{۲}t^۲$$

$$y = (v_۰ \sin\theta) \times \left(\frac{x}{v_۰ \cos\theta}\right) - \frac{g}{۲}\left(\frac{x}{v_۰ \cos\theta}\right)^۲ = x\tan\theta - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲ \cos^۲\theta}$$

$$y = ۰ \;\rightarrow\; x\tan\theta = \frac{g}{۲} \times \frac{x^۲}{v_۰^۲ \cos^۲\theta} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = R = \dfrac{v_۰^۲ \sin ۲\theta}{g} \end{cases}$$

$$\text{مساحت زیر نمودار} : S = \int_۰^R f(x)dx = \int_۰^R \left(x\tan\theta - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲ \cos^۲\theta}\right) dx$$

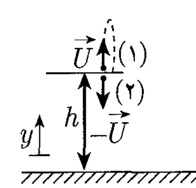
$$\Rightarrow S = \frac{R^۲}{۲}\tan\theta - \frac{R^۳}{۳} \times \frac{g}{۲v_۰^۲ \cos^۲\theta} = \frac{۲v_۰^۴ \sin^۳\theta \cos\theta}{g^۲} - \frac{۴v_۰^۴ \sin^۳\theta \cos\theta}{۳g^۲}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۲}{۳} \times \frac{v_۰^۴}{g^۲} \times \cos\theta \times \sin^۳\theta$$

در نتیجه گزینه (ج) صحیح است.

۷۳ بیشترین اختلاف زمان میان رسیدن دو ذره به زمین پس از انفجار وقتی اتفاق می‌افتد که یکی از دو ذره در جهت منفی محور y (کمترین زمان لازم برای رسیدن به زمین) و دیگری در جهت مثبت محور y (بیشترین زمان لازم برای رسیدن به زمین) شروع به حرکت کنند.

به شکل (۱ـ۱۸۷) توجه کنید. فرض کنید ذره‌ی (۱) با سرعت U در جهت مثبت محور y و ذره‌ی (۲) با سرعت U در جهت منفی محور y شروع به حرکت کنند. با کمی دقت می‌توان نتیجه گرفت هنگامی که ذره‌ی (۱) به سمت بالا رفته و به ارتفاع h باز می‌گردد با صرف‌نظر از مقاومت هوا، این ذره دارای همان سرعت U اما در جهت پایین خواهد بود یعنی شرایطی که ذره‌ی (۲) در لحظه‌ی $t = ۰$ دارا می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت از این لحظه به بعد زمان رسیدن ذره‌ی (۱) به زمین برابر با زمان لازم برای رسیدن ذره‌ی (۲) به زمین از لحظه‌ی $t = ۰$ است و اختلاف زمان میان رسیدن این دو ذره همان زمان رفت و برگشت ذره‌ی (۱) به ارتفاع h است.



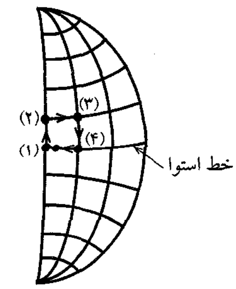
شکل ۱ـ۱۸۷

$$\text{ذره‌ی (۱)} : v_y = U - gt$$

$$U - gt = -U \;\rightarrow\; t = \frac{۲U}{g}$$

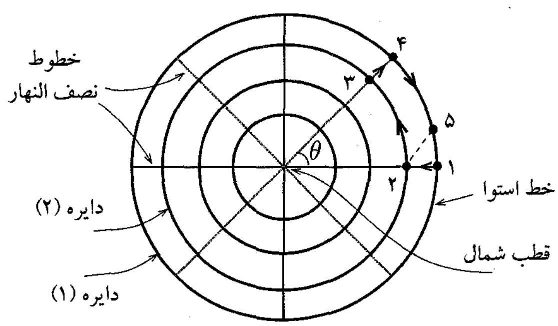
در نتیجه گزینه (الف) صحیح است.

۷۴ در شکل (۱ـ۱۸۸) شمای کلی حرکت این هواپیما نشان داده شده است. در اینجا این سؤال پیش می‌آید که با وجود طی شدن مسافت‌های برابر در هر جهت جغرافیایی چه دلیلی برای تفاوت میان نقاط شروع و پایان حرکت وجود دارد؟



شکل ۱-۱۸۸

دلیل این تفاوت کروی بودن زمین می‌باشد. اگر این هواپیما روی یک سطح صاف مانند سطح یک مستطیل حرکت می‌کرد به وضوح نقاط شروع و پایان حرکت دقیقاً بر هم منطبق بودند. اما با دقت در شکل (۱ـ۱۸۸) متوجه می‌شویم که در حالت کلی با حرکت از خط استوا به سمت دو قطب شمال یا جنوب فاصله‌ی طولی میان دو نصف‌النهار کاهش می‌یابد و این در حالی است که زاویه‌ی میان این دو ثابت می‌ماند. برای درک بهتر این پدیده به شکل (۱ـ۱۸۹) دقت کنید. شمای کلی حرکت هواپیما در شکل (۱ـ۱۸۹) نیز نمایش داده شده است و به دلیل کروی بودن زمین فاصله نقطه ۱ تا نقطه ۴ روی سطح زمین بیشتر از فاصله نقطه‌ی ۲ تا نقطه‌ی ۳ می‌باشد و در نتیجه هواپیما روی نقطه شروع حرکت (نقطه ۱) فرود نمی‌آید. اختلاف فاصله‌ی $\widehat{۱۴}$ و $\widehat{۲۳}$ برابر با فاصله‌ی میان نقاط شروع و پایان حرکت هواپیما یا همان $\widehat{۱۵}$ است.



شکل ۱-۱۸۹

برای یافتن فاصله‌ی $\widehat{۱۵}$ ابتدا باید طول قطاع $\widehat{۱۴}$ را بیابیم و برای این منظور به اندازه شعاع دایره‌ی (۲) نیاز داریم تا با استفاده از آن اندازه‌ی زاویه‌ی θ در شکل (۱ـ۱۸۹) را به‌دست آوریم. به شکل (۱ـ۱۹۰) دقت کنید:

$$\widehat{۱۲} = ۵۰۰۰\,\mathrm{km}$$

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{۵۰۰۰}{۴۰۰۰۰} \rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

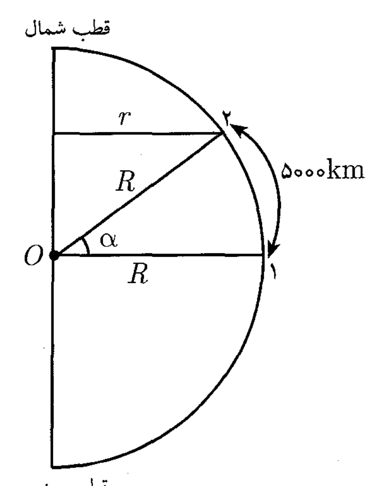
$$r = R\cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}R$$

$$۲\pi R = ۴۰۰۰۰ \rightarrow R = \frac{۲۰۰۰۰}{\pi}\mathrm{km}$$

$$\frac{\theta}{۳۶۰} = \frac{۵۰۰۰}{۲\pi r} \rightarrow \theta = \frac{۵۰۰۰}{۲۰۰۰۰\sqrt{۲}} \times ۳۶۰ = ۶۳{,}۶۴^\circ$$

$$\widehat{۱۴} = ۲\pi R \times \frac{\theta}{۳۶۰} = ۴۰۰۰۰ \times ۰{,}۱۷۷ = ۷۰۸۰\,\mathrm{km}$$

$$\widehat{۱۵} = \widehat{۱۴} - \widehat{۲۳} = ۲۰۸۰\,\mathrm{km} = ۲۰{,}۸ \times (۱۰۰\,\mathrm{km})$$



شکل ۱-۱۹۰

جواب مسأله «۲۰٫۸» می‌باشد.

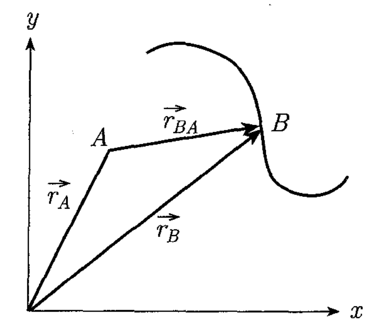
حل سؤالات دوره تابستانی

۷۵ بردار مکان یوزپلنگ را با $\vec{r_A}$ و بردار مکان خرگوش را با $\vec{r_B}$ نشان می‌دهیم (شکل ۱ـ۱۹۱).
بنابراین

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$$

بنابراین رابطه‌ی بین سرعت‌ها عبارت است از:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v_B} - \vec{v_A} \qquad (۱)$$



شکل ۱-۱۹۱

که در آن $\vec{v_B}$ سرعت خرگوش و $\vec{v}_A$ سرعت یوزپلنگ در دستگاه ثابت xy است و $\vec{v}_{BA}$ سرعت خرگوش نسبت به یوزپلنگ است. چون سرعت یوزپلنگ همواره به طرف خرگوش است، $\vec{v_A}$ در راستای $\vec{r}_{BA}$ است. اگر v قدرمطلق سرعت یوزپلنگ باشد، داریم:

$$\vec{v}_A = v\frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}} = v\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \qquad (۲)$$

همچنین $\vec{v_B}$ و $\vec{v}_{BA}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{v_B} = \dot{x}_B\hat{i} + \dot{y}_B\hat{j} \qquad (۳)$$

$$\vec{v}_{BA} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \qquad (۴)$$

با جایگذاری روابط (۲)، (۳) و (۴) در رابطه‌ی (۱)، داریم:

$$\dot{x} = \dot{x_B} - v\frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \quad , \quad \dot{y} = \dot{y}_B - v\frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

که جواب‌های مورد نظر هستند.

۷۶ الف) شتاب ناشی از نیروی اصطکاک همواره مخالف جهت سرعت جسم است. بنابراین هنگام بالا رفتن جسم، این شتاب به سمت پایین (هم‌جهت با g) و در موقع پایین آمدن به سمت بالا (مخالف جهت g) است. بنابراین حرکت جسم در جهت x و در جهت y به‌صورت زیر است:

$$x \text{ جهت} : x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + V_{\circ x}t \qquad (۱)$$

$$y \text{ جهت} : \text{بالا رفتن} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(g+a)t^۲ + V_{\circ y}t \qquad (۲)$$

$$\text{پایین آمدن} \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(g-a)t^۲ + H \qquad (۳)$$

که در آن $H = \frac{V_{\circ y}^۲}{۲(g+a)}$، ارتفاع اوج جسم است. زمان اوج جسم نیز برابر $t_۱ = \frac{V_{\circ y}}{g+a}$ است. بنابراین اگر t را بر حسب x و $V_{\circ x}$ از معادله (۱) به‌دست آورده و در معادلات (۲) و (۳) قرار دهیم، تابع $y = f(x)$ به‌دست می‌آید. از معادله (۱) داریم:

$$at^۲ - ۲V_{\circ x} + ۲x = \circ \Rightarrow t = \frac{V_{\circ x} \pm \sqrt{V_{\circ x}^۲ - ۲ax}}{a}$$

روشن است که در رابطه اخیر علامت منفی قابل‌قبول است. بنابراین معادلات (۲) و (۳) به‌صورت زیر درمی‌آیند.

بالا رفتن

$$y = -\frac{۱}{۲}(g+a)\left(\frac{V_{\circ x}\sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right)^{۲}$$

$$+ V_{\circ y}\left(\frac{V_{\circ x} - \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right) \qquad t \le \frac{V_{\circ y}}{g+a}$$

پایین آمدن

$$y = -\frac{۱}{۲}(g-a)\left(\frac{V_{\circ x} - \sqrt{V_{\circ x}^{۲} - ۲ax}}{a}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{V_{\circ y}^{۲}}{۲(g+a)} \qquad \frac{V_{\circ y}}{g+a} \le t \le \frac{V_{\circ x}}{a}$$

$t \le \frac{V_{\circ y}}{g+a}$ معادل با نامساوی

$$x \le -\frac{۱}{۲}a\left(\frac{V_{\circ y}}{g+a}\right)^{۲} + V_{\circ x}\left(\frac{V_{\circ y}}{g+a}\right)$$

است. همچنین $t = \frac{V_{\circ x}}{a}$ زمانی اتفاق می‌افتد که سرعت جسم در راستای افقی صفر می‌شود. در ضمن زمان پایین آمدن جسم از نقطه اوج به سطح زمین $(y = ۰)$ برابر با $t = \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^{۲} - a^{۲}}}$ می‌باشد. در اینجا فرض شده است که $t_۱ + t_۲ \le \frac{V_{\circ x}}{a}$ است، یعنی قبل از رسیدن به زمین، جسم در راستای افقی متوقف نمی‌شود.

ب) برای به‌دست آوردن برد جسم، t را در معادله (۱) برابر $t_۱ + t_۲$ قرار می‌دهیم. بنابراین

$$R = -\frac{۱}{۲}a\left(\frac{V_{\circ y}}{g+a} + \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^{۲} - a^{۲}}}\right)^{۲}$$

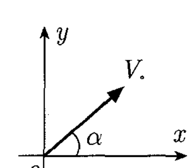
$$+ V_{\circ x}\left(\frac{V_{\circ y}}{g+a}\right) + \frac{V_{\circ y}}{\sqrt{g^{۲} - a^{۲}}} \qquad (۴)$$

با فرض $a \ll g$:

$$\frac{۱}{g+a} \approx \frac{۱}{g}(۱ - \frac{a}{g})$$

$$\frac{۱}{\sqrt{g^{۲} - a^{۲}}} \approx \frac{۱}{g}$$

بنابر شکل (۱ـ۱۹۲) که نشان‌دهنده لحظه شروع حرکت پرتابه است، داریم



شکل ۱-۱۹۲

$$V_{\circ x} = V_{\circ} \cos\alpha$$

$$V_{\circ y} = V_{\circ} \sin\alpha$$

بنابراین با جایگذاری روابط فوق در معادله (۴)، R به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$R = -\frac{1}{2}aV_{\circ y}^2\left[\frac{1}{g}(1-\frac{a}{g})+\frac{1}{g}\right]^2 + V_{\circ x}V_{\circ y}\left[\frac{1}{g}(1-\frac{a}{g})+\frac{1}{g}\right]$$

$$R = -\frac{1}{2}a\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{g^2}(2-\frac{a}{g})^2 + \frac{V_\circ^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}(2-\frac{a}{g})$$

برای به‌دست آوردن برد ماکزیمم، مشتق R بر حسب α را مساوی صفر قرار داده و مقدار α موردنظر را می‌یابیم.

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{a}{g^2}V_\circ^2\sin 2\alpha(2-\frac{a}{g})^2 + \frac{V_\circ^2\cos 2\alpha}{g}(2-\frac{a}{g}) = 0$$

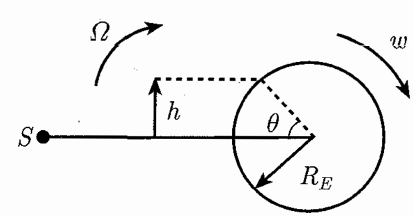
$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2g}{a(2-\frac{a}{g})}\ ,\ a \ll g \Rightarrow \tan 2\alpha = (\frac{g}{a}+\frac{1}{2})$$

بنابراین زاویه‌ای که به ازای آن برد ماکزیمم به‌دست می‌آید برابر است با:

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{g}{a}+\frac{1}{2}\right)$$

واضح است که این مقدار به ازای $a = 0$، برابر $\alpha = 45^\circ$ خواهد بود که با دانسته‌های قبلی ما مطابقت دارد.

۷۷ الف) فرض کنید جابه‌جایی زمین در مدارش به دور خورشید در مدت کسوف قابل صرف‌نظر است. همچنین فرض کنید جابه‌جایی در مدت کسوف آن قدر کم است که بردار جابه‌جایی آن بر خط واصل خورشید و زمین عمود باشد. داریم:



شکل ۱-۱۹۳

$$\sin\theta = \frac{h}{R_E}\ \ ,\ \ h = v_M t = R_M\Omega t$$

که در آن h فاصله‌ایست که ماه در مدت t طی کرده است و v_M و Ω به ترتیب سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای ماه به دور زمین می‌باشند. بنابراین

$$\sin\theta = \frac{R_M\Omega t}{R_E} \ \Rightarrow\ \theta = \sin^{-1}(\frac{R_M\Omega t}{R_E})$$

بنابراین اگر زمین حرکت وضعی نمی‌داشت، سرعت لکه روی زمین برابر $v_\theta = R_E\dot\theta$ می‌شد. اما با توجه به حرکت وضعی زمین، سرعت حرکت لکه با توجه به جهت چرخش یکسان زمین با جهت چرخش ماه به دور زمین برابر می‌شود با:

$$v = v_\theta - R_E\omega = R_E\dot\theta - R_E\omega = R_E\left[\frac{R_M\Omega}{R_E\sqrt{1-(\frac{R_M\Omega t}{R_E})^2}}\right.$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای زمین به دور خورشید است. پس

$$R_E = ۶/۴ \times ۱۰^{۶}\text{km} \qquad R_M = ۶۰ R_E = ۳/۸ \times ۱۰^{۸}\text{m}$$
$$\omega = \frac{۲\pi}{۸۶۴۰۰} = ۷/۳ \times ۱۰^{-۵}\text{s}^{-۱} \quad \Omega = ۲/۵ \times ۱۰^{-۶}\text{s}^{-۱}$$

تا زمان $t < \frac{R_E}{R_M \Omega}$، لکه‌ی روی زمین بوده و تا همین زمان رابطه‌ی مربوط به v برقرار است. در نتیجه:

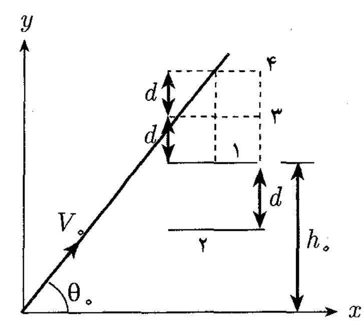
$$v \approx \left[\frac{۹۰۰}{\sqrt{۱ - (\frac{t}{۶۹۰۰})^۲}} - ۴۶۵\right] \text{m/s}$$

ب) چون $R_E\omega$ همواره کوچک‌تر از سرعت دوران ماه است، پس جهت حرکت سایه به طرف شرق می‌باشد.

۷۸ ابتدا فرض می‌کنیم که صفحه‌ها ساکن‌اند و سرعت عمودی ذره جمع مؤلفه‌ی عمودی سرعت ذره و سرعت صفحه‌ها است. بنابراین فرض سرعت ذره به صورت زیر است:

$$v_x = v_\circ \cos\theta_\circ \quad , \quad v_y = v_\circ \sin\theta_\circ + v_۱$$

مسیر حرکت ذره در این دستگاه قبل از برخورد، مسیر نشان داده شده در شکل (۱ـ۱۹۴) است که خط مستقیمی به معادله‌ی $y = kx$ می‌باشد که در آن $k = \frac{v_y}{v_x}$ است. حال بر اساس این رابطه سه شرط زیر را بیان می‌کنیم:



شکل ۱-۱۹۴

شرط اول: این ذره باید هنگام رسیدن به طول $l_۱$ چنان yای داشته باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$h_\circ - d < kl_۱ < h_\circ \qquad (۱)$$

یعنی زمانی که مؤلفه‌ی x ذره به لبه‌ی صفحه‌ها می‌رسد، مؤلفه‌ی y ذره در فاصله‌ی بین صفحه‌ها باشد.

شرط دوم: وقتی ذره به ارتفاع $h_\circ$ می‌رسد، طول آن باید در شرط زیر صدق کند.

$$l_۱ < \frac{h_\circ}{k} < l_۱ + l_۲ \qquad (۲)$$

یعنی زمانی که مؤلفه‌ی y ذره به لبه‌ی صفحه‌ی بالایی می‌رسد، مؤلفه‌ی x ذره در محدوده‌ی دو صفحه باشد.

شرط سوم: ذره باید بعد از برخورد به سطح ۲ دیگر با صفحات برخورد نکند. فرض می‌کنیم که برخوردها مجازی‌اند و باعث انحراف ذره نمی‌شوند. می‌دانیم که برخورد ذره با صفحه‌ها کشسان است. بنابراین برخورد با صفحه‌ی ۲ پس از برخورد با صفحه‌ی ۱ معادل این است که ذره پس از برخورد مجازی با صفحه‌ی ۱ ادامه‌ی مسیر دهد و به صفحه‌ی ۳ برسد و برخورد دوباره با صفحه‌ی ۱ معادل با ادامه‌ی مسیر تا برخورد مجازی با صفحه‌ی ۴ است. چون می‌خواهیم ذره

دوباره به صفحات برخورد نکند، نباید با صفحه‌ی ۴ برخورد مجازی داشته باشد. بنابراین طول x آن باید در شرط زیر صدق کند.

$$\frac{h_0 + 2d}{k} > l_1 + l_2 \qquad (3)$$

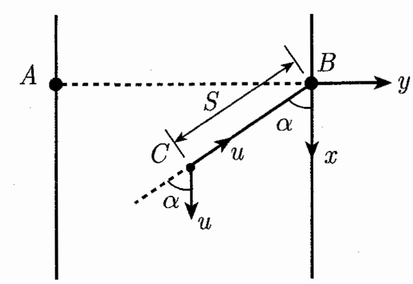
یعنی زمانی که ذره به ارتفاع مجازی $h_0 + 2d$ می‌رسد از لبه‌ی انتهایی صفحات عبور کرده باشد. در نتیجه سه شرط (۱)، (۲) و (۳) با هم این امر را میسر می‌سازد.

۷۹ الف) مطابق شکل (۱ـ۱۹۵) سرعت قایق در نقطه‌ی C شامل سرعت قایق نسبت به آب u در جهت $\overrightarrow{CB}$ و سرعت آب u در جهت محور x است. پس

$$CB \text{ راستای} : v_{CB} = u - u\cos\alpha$$

$$x \text{ راستای} : v_x = u - u\cos\alpha$$

$$y \text{ راستای} : v_y = u\sin\alpha$$



شکل ۱ـ۱۹۵

ب) همان‌طور که می‌بینید مؤلفه‌ی سرعت قایق در راستای x و راستای CB برابرند و مؤلفه‌ی سرعت قایق در راستای CB برابر $-\dot{S}$ در نظر گرفته شده است. پس

$$v_x = -\dot{S} = u - u\cos\alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{ds}{dt}$$

با حذف dt و انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، داریم:

$$x = -s + c$$

ثابت c را از شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم. در لحظه‌ی اولیه $x = 0$ و $S = l$ است، بنابراین $c = l$ می‌باشد. همچنین بنابر شکل (۱ـ۱۹۵) $x = S\cos\alpha$ است. در نتیجه:

$$S\cos\alpha = -S + l \Rightarrow S = \frac{l}{1+\cos\alpha}$$

بنابراین $x = \frac{l}{1+\cos\alpha}\cos\alpha$ است. وقتی که قایق به طرف دیگر رودخانه می‌رسد $\alpha = 0$ است. در نتیجه قایق در نقطه‌ی $x = \frac{l}{2}$ به سمت دیگر رودخانه می‌رسد.

ج) بنابر قسمت (الف) مؤلفه‌های سرعت قایق عبارتند از:

$$v_x = u - u\cos\alpha \quad , \quad v_y = u\sin\alpha$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{u\sin\alpha}{u - u\cos\alpha} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad (1)$$

همچنین داریم:

$$x = \frac{l\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{l-x} \qquad (2)$$

با راهی مشابه با قسمت (ب) برای y، داریم:

$$y = -\frac{l\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow y = -x\tan\alpha \Rightarrow y = -x\frac{\sin\alpha}{(x/l-x)}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{y}{l-x} \qquad (3)$$

با جایگذاری مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ از روابط (۲) و (۳) در رابطه‌ی (۱)، داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y/(l-x)}{1-\big(x/(l-x)\big)}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{l-2x}$$
$$\Rightarrow\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x-l}$$

با انتگرال‌گیری معین از رابطه‌ی فوق داریم:

$$\ln(y)\big|_{-l}^{y}=\frac{1}{2}\ln|2x-l|\big|_{0}^{x}\ \Rightarrow\ 2\ln\frac{y}{l}=\ln\frac{l-2x}{l}$$
$$\Rightarrow\frac{y^2}{l^2}=\frac{l-2x}{l}\ \Rightarrow\ y^2=l(l-2x)$$

در نتیجه مسیر یک سهمی است.

د) برای محاسبه‌ی $\alpha=\frac{d\alpha}{dt}$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}x=S\cos\alpha\\ y=-S\sin\theta\end{cases}$$

با مشتق‌گیری از روابط فوق، داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dot{S}\cos\alpha-S\dot{\alpha}\sin\alpha\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dot{S}\sin\alpha-S\dot{\alpha}\cos\alpha\end{cases}$$

همچنین بر اساس قسمت (الف) $\frac{dx}{dt}=u(1-\cos\alpha)$ و $\frac{dy}{dt}=u\sin\alpha$ است. بنابراین

$$\begin{cases}u(1-\cos\alpha)=\dot{S}\cos\alpha-S\dot{\alpha}\sin\alpha\\ u\sin\alpha=-\dot{S}\sin\alpha-S\dot{\alpha}\cos\alpha\end{cases}$$

با حل معادلات فوق بر حسب $\dot{\alpha}$، داریم:

$$-S\dot{\alpha}=u\sin\alpha\ \Rightarrow\ \dot{\alpha}=-\frac{u\sin\alpha}{S}$$

بر اساس قسمت (الف) $S=\frac{l}{1+\cos\alpha}$ است. در نتیجه

$$\dot{\alpha}=-\frac{u}{l}\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$

ه) با استفاده از معادله‌ی مربوط به $\dot{\alpha}$ در قسمت (د)، می‌توانیم زمان رسیدن به طرف دیگر رودخانه را بیابیم.

$$\dot{\alpha}=-\frac{u}{l}\sin\alpha(1+\cos\alpha)\ \Rightarrow\ -\frac{l}{u}\frac{d\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=dt$$

$$\Rightarrow -\frac{l}{u}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\int_{0}^{T}dt$$
$$\Rightarrow T=-\frac{l}{u}\left[\frac{1}{2}\ln(\tan\frac{\alpha}{2})+\frac{1}{4}\tan^{2}\frac{\alpha}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

همان‌طور که می‌بینید زمان رسیدن به طرف دیگر رودخانه به بی‌نهایت میل می‌کند.

۸۰ الف) با توجه به قانون کپلر که در صورت سؤال بیان شده، داریم:

$$\frac{T_E^2}{T_J^2}=\frac{R_E^3}{R_J^3}\Rightarrow(\frac{T_E}{T_J})^{\frac{2}{3}}=\frac{R_E}{R_J}$$

که در آن اندیس E مربوط به زمین و اندیس J مربوط به مشتری است. بنابراین

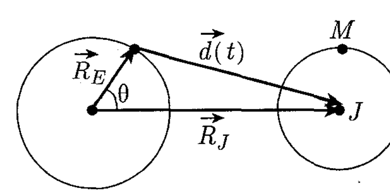
$$R_J=R_E(\frac{T_J}{T_E})^{\frac{2}{3}}\Rightarrow R_J=149{,}6\times10^{6}(\frac{11{,}9}{1})^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow R_J=779{,}8\times10^{6}\text{km}$$

ب) سرعت زاویه‌ای نسبی زمین نسبت به دستگاه خورشید ـ مشتری برابر سرعت زاویه‌ای زمین در دستگاه ثابت خورشید منهای سرعت زاویه‌ای مشتری در دستگاه ثابت خورشید است. پس

$$\omega=\omega_E-\omega_J\Rightarrow\omega=2\pi(\frac{1}{T_E}-\frac{1}{T_J})$$
$$\Rightarrow\omega=2\pi(\frac{1}{365}-\frac{1}{11{,}9\times365})$$
$$\Rightarrow\omega\approx0{,}0157\text{rad/day}$$

ج) با توجه به شکل (۱ـ۱۹۶)، داریم:

$$\vec{d}(t)=\vec{R}_J-\vec{R}_E$$



شکل ۱-۱۹۶

بر اساس قانون کسینوس‌ها، $d(t)$ را به‌دست می‌آوریم. پس

$$d(t)=(R_J^2+R_E^2-2R_ER_J\cos\omega t)^{\frac{1}{2}}\approx R_J\big(1-\frac{R_E}{R_J}\cos\omega t\big)$$
$$\Rightarrow d(t)\approx R_J-R_E\cos\omega t \qquad (1)$$

که در آن $\theta=\omega t$ است و جواب نهایی تا تقریب مرتبه اول نسبت به $\frac{R_E}{R_J}$ است. خطای این جواب از مرتبه‌ی $(\frac{R_E}{R_J})^2\approx\%4$ است.

بنابر رابطه‌ی (۱) در دو رصد متوالی از طلوع قمر مشتری، اختلاف فاصله‌ی مشتری تا زمین عبارتست از:

$$\Delta d(t)=d(t+T_0)-d(t)=R_E\big(\cos\omega t-\cos\omega(t+T_0)\big)$$
$$\Rightarrow\Delta d(t)=R_E\big(\cos\omega t-\cos\omega t\cos\omega T_0+\sin\omega t\sin\omega T_0\big)$$

چون $\omega T_\circ \approx ۰/۰۳$ کوچک است، $\sin\omega T_\circ \approx \omega T_\circ$ و $\cos\omega T_\circ \approx ۱$ در نظر می‌گیریم. بنابراین عبارت فوق به صورت زیر در می‌آید.

$$\Delta d(t) \approx R_E\big(\cos\omega t - \cos\omega t + \omega T_\circ \sin\omega t\big)$$

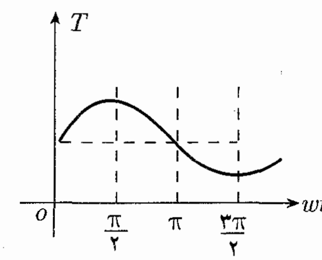
$$\Rightarrow \quad \Delta d(t) \approx R_E\omega T_\circ \sin\omega t \qquad (۲)$$

د) تفاوت زمان تناوب رصد شده از قمر مشتری مربوط به اختلاف فاصله‌ای است که قمر از زمین پیدا می‌کند. این اختلاف فاصله تقریباً همان اختلاف فاصله‌ی مشتری تا زمین است. بنابراین

$$T - T_\circ \approx \frac{\Delta d(t)}{c}$$

بر اساس رابطه‌ی (۲)، معادله‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید. در نتیجه

$$T \approx T_\circ + \frac{R_E\omega T_\circ \sin\omega t}{c}$$



شکل ۱-۱۹۷

که در آن c سرعت نور است. نمودار T بر حسب ωt (مکان زمین) در شکل (۱ـ۱۹۷) ترسیم شده است. وقتی دوره‌ی تناوب بیشینه است که $\omega t = \frac{\pi}{۲}$ باشد، پس

$$T_{\max} = T_\circ + \frac{R_E\omega T_\circ}{c}$$

وقتی دوره‌ی تناوب کمینه است که $\omega t = \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، پس

$$T_{\min} = T_\circ - \frac{R_E\omega T_\circ}{c}$$

در حالت تناوب واقعی، $\omega t = ۰, \pi$ است.

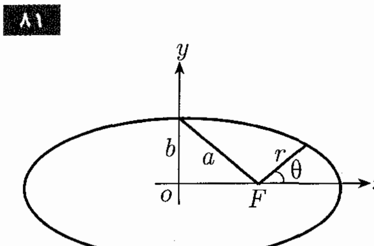
ه) با توجه به تناوب بیشینه گفته شده که $(T + ۱۵)\mathrm{s}$ است، داریم:

$$T_{\max} = T_\circ + \frac{R_E\omega T_\circ}{c} = T_\circ + ۱۵ \;\Rightarrow\; \frac{R_E\omega T_\circ}{c} = ۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{(۱۴۹/۶ \times ۱۰^{۶})(\frac{۰/۰۱۵۷}{۲۴\times ۳۶۰۰})(۱۵۲۸۹۶)}{c} = ۱۵ \;\Rightarrow\; c = ۲/۷۷ \times ۱۰^{۵}\mathrm{km/s}$$

۸۱ بیضی موردنظر در صورت سؤال که نشان‌دهنده مسیر حرکت جسم است، ثابت می‌باشد، بنابراین مرکز آن (نقطه o) نیز ثابت است. در نتیجه کافی است که سرعت و شتاب جسم در دستگاه اولیه را در دستگاه مختصات دکارتی نشان داده شده در شکل (۱ـ۱۹۸) تصویر کنیم.

برای تحلیل مسأله و به‌دست آوردن سرعت و شتاب نسبت به دستگاه مختصات جدید، باید مکان ذره را در دستگاه جدید بر حسب زمان به‌دست آوریم. پس



شکل ۱-۱۹۸

$$x = r\cos\theta + \sqrt{b^۲ - a^۲} \quad , \quad y = r\sin\theta$$

که عبارت $\sqrt{b^۲ - a^۲}$ در سمت راست رابطه اول، بیانگر فاصله OF است. r را از عبارت $r = \dfrac{a}{۱ - \epsilon\cos\theta}$ که $\theta = \omega t$ می‌باشد، در روابط فوق جایگذاری می‌کنیم تا بتوانیم به راحتی از آنها نسبت به زمان مشتق بگیریم. پس

$$x = \frac{a\cos\omega t}{۱ - \epsilon\cos\omega t} + \sqrt{b^۲ - a^۲} \quad , \quad y = \frac{a\sin\omega t}{۱ - \epsilon\cos\omega t}$$

حال با مشتق‌گیری از روابط فوق نسبت به زمان، مؤلفه‌های سرعت در راستای محورهای x و y را به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{-a\omega\sin\omega t(۱ - \epsilon\cos\omega t) - \epsilon\omega\sin\omega t(a\cos\omega t)}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
&= \frac{-۲a\omega\epsilon\sin\omega t\cos\omega t - a\omega\sin\omega t}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
&\Rightarrow \dot{x} = \frac{-a\omega\epsilon\sin ۲\omega t - a\omega\sin\omega t}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
\dot{y} &= \frac{a\omega\cos\omega t(۱ - \epsilon\cos\omega t) - \epsilon\omega\sin\omega t(a\sin\omega t)}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
&= \frac{-a\omega\epsilon(\cos^۲\omega t + \sin^۲\omega t) + a\omega\cos\omega t}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
&\Rightarrow \dot{y} = \frac{-a\omega\epsilon + a\omega\cos\omega t}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲} \\
\vec{V} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \\
&\Rightarrow \vec{V} = \frac{-a\omega}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲}[(\epsilon\sin^۲\omega t + \sin\omega t)\hat{i} + (\epsilon - \cos\omega t)\hat{j}]
\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از عبارت‌های به‌دست آمده برای مؤلفه‌های سرعت، شتاب جسم را به‌دست می‌آوریم. پس

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{-a\omega}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۴}\{(۲\omega\epsilon\cos ۲\omega t + \omega\cos\omega t)(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲ \\
&\qquad - ۲(۱ - \epsilon\cos\omega t)(\epsilon\omega\sin\omega t)(\epsilon\sin ۲\omega t + \sin\omega t)\} \\
\Rightarrow \ddot{x} &= \frac{-a\omega}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۳}\{(۲\omega\epsilon\cos ۲\omega t + \omega\cos\omega t)(۱ - \epsilon\cos\omega t) \\
&\qquad - ۲\epsilon\omega(\epsilon\sin ۲\omega t + \sin\omega t)\} \\
\ddot{y} &= a\omega\frac{-\omega\sin\omega t(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۲ - ۲(۱ - \epsilon\cos\omega t)(\epsilon\omega\sin\omega t)(\cos\omega t - \epsilon)}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۴} \\
&\Rightarrow \ddot{y} = a\omega\frac{-\sin\omega t(۱ - \epsilon\cos\omega t) - ۲(\epsilon\omega\sin\omega t)(\cos\omega t - \epsilon)}{(۱ - \epsilon\cos\omega t)^۳} \\
\vec{a} &= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}
\end{aligned}$$

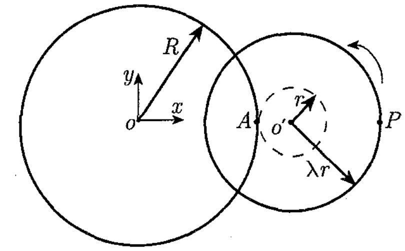
۸۲ ابتدا فرض می‌کنیم که در لحظه $t = 0$، P، O' و O هم‌راستا باشند، (شکل ۱ـ۱۹۹).

الف) بنابر تعریف شعاع انحنای مسیر، باید سرعت ذره v و مؤلفه عمود بر مسیر شتاب $a_\perp$ را بیابیم.

برای به‌دست آوردن این کمیت‌ها، نقطه P را در لحظه دلخواه t در نظر می‌گیریم.

برای به‌دست آوردن سرعت و شتاب نقطه P، ابتدا مؤلفه‌های x و y مکان نقطه P را بر حسب زمان به‌دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا، مؤلفه‌های x' و y' نقطه P نسبت به دستگاه مختصات متحرک $x'y'$ را می‌یابیم. پس

$$x' = \lambda r \cos\theta_2 \quad , \quad y' = \lambda r \sin\theta_2$$



شکل ۱-۱۹۹

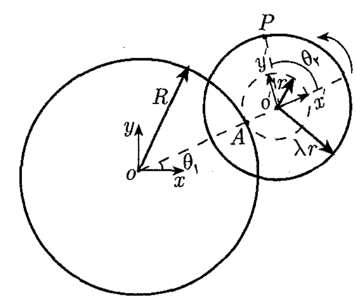
حال بنابر شکل (۱ـ۲۰۱) مؤلفه‌های x و y مکان نقطه P نسبت به دستگاه مختصات دکارتی ثابت چسبیده به مرکز محور را به‌دست می‌آوریم.

$$x = (R + r + x')\cos\theta_1 - y'\sin\theta_1$$

$$\Rightarrow x = (R + r + \lambda r\cos\theta_2)\cos\theta_1 - \lambda r\sin\theta_2\sin\theta_1 \qquad (1)$$

$$y = (R + r + x')\sin\theta_1 + y'\cos\theta_1$$

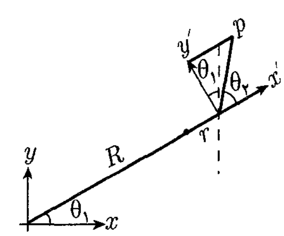
$$\Rightarrow y = (R + r + \lambda r\cos\theta_2)\sin\theta_1 + \lambda r\sin\theta_2\cos\theta_1 \qquad (2)$$



شکل ۱-۲۰۰

می‌دانیم که $\theta_1 = \omega t$ است. پس کافی است که θ_2 را بر حسب زمان به‌دست آوریم تا x و y بر حسب زمان به‌دست آیند. چون چرخ بر روی محور نمی‌لغزد، مسافتی که نقطه تماس چرخ و محور بر روی چرخ و محور طی می‌کند با هم برابر است. بنابراین

$$R\theta_1 = r\theta_2 \;\Rightarrow\; R(\omega t) = r(\omega' t) \;\Rightarrow\; R\omega = r\omega' \;\Rightarrow\; \omega' = \frac{R}{r}\omega$$



شکل ۱-۲۰۱

مشخص است که $\theta_2 = \omega' t$ می‌باشد. بنابراین با جایگذاری $\theta_1 = \omega t$ و $\theta_2 = (\frac{R}{r}\omega)$ در روابط (۱) و (۲) x و y بر حسب زمان به‌دست می‌آیند. پس

$$x = (R + r + \lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t))\cos(\omega t) - \lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t)$$

$$y = (R + r + \lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t))\sin(\omega t) + \lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t)$$

با مشتق‌گیری از روابط فوق نسبت به زمان، مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y ($\dot{x}$ و $\dot{y}$) به‌دست می‌آیند. پس

$$\begin{aligned}\dot{x} = &-(\frac{R}{r}\omega)\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t)\\ &-\omega\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t) - (R + r)\omega\sin(\omega t)\\ &-(\frac{R}{r}\omega)\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t) - \omega\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} = &-(\frac{R}{r}\omega)\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t)\\ &+\omega\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t) + (R + r)\omega\cos(\omega t)\\ &+(\frac{R}{r}\omega)\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t) - \omega\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t)\end{aligned}$$

با فاکتورگیری از روابط فوق، داریم:

$$\dot{x} = -\omega\lambda(r+R)[\sin(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t)$$
$$+\cos(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t)] - (R+r)\omega\sin(\omega t)$$
$$\Rightarrow\ \dot{x} = -\omega\lambda(r+R)\sin(\frac{R+r}{r}\omega t) - (R+r)\omega\sin(\omega t)$$
$$\dot{y} = \omega\lambda(r+R)[\cos(\frac{R}{r}\omega t)\cos(\omega t)$$
$$-\sin(\frac{R}{r}\omega t)\sin(\omega t)] + (R+r)\omega\sin(\omega t)$$
$$\Rightarrow\ \dot{y} = \omega\lambda(r+R)\cos(\frac{R+r}{r}\omega t) + (R+r)\omega\cos(\omega t)$$
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های سرعت ($\dot{x}$ و $\dot{y}$)، مؤلفه‌های شتاب ($\ddot{x}$ و $\ddot{y}$) به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$\ddot{x} = -\omega\lambda(R+r)(\frac{R+r}{r}\omega)\cos(\frac{R+r}{r}\omega t) - (R+r)\omega^{۲}\cos(\omega t)$$
$$\Rightarrow\ \ddot{x} = -\lambda\frac{(R+r)^{۲}\omega^{۲}}{r}\cos(\frac{R+r}{r}\omega t) - (R+r)\omega^{۲}\cos(\omega t)$$
$$\ddot{y} = -\omega\lambda(R+r)(\frac{R+r}{r}\omega)\sin(\frac{R+r}{r}\omega t) - (R+r)\omega^{۲}\sin(\omega t)$$
$$\Rightarrow\ \ddot{y} = -\lambda\frac{(R+r)^{۲}\omega^{۲}}{r}\sin(\frac{R+r}{r}\omega t) - (R+r)\omega^{۲}\sin(\omega t)$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

جهت مماس بر مسیر، همان جهت بردار سرعت $\vec{v}$ است. بنابراین مؤلفه در راستای مسیر شتاب $a_{\shortparallel}$ برابر است با:

$$a_{\shortparallel} = \frac{\vec{a}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\ \Rightarrow\ a_{\shortparallel} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{v}$$

حال می‌توانیم مؤلفه عمود بر مسیر شتاب $a_{\perp}$ را بیابیم. پس

$$a_{\perp}^{۲} + a_{\shortparallel}^{۲} = a^{۲} \Rightarrow\ a_{\perp} = \sqrt{a^{۲} - a_{\shortparallel}^{۲}}\ \Rightarrow\ a_{\perp} = \sqrt{(\ddot{x}^{۲} + \ddot{y}^{۲}) - \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})^{۲}}{(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲})}}$$
$$\Rightarrow\ a_{\perp} = \frac{\sqrt{\dot{x}^{۲}\ddot{y}^{۲} + \dot{y}^{۲}\ddot{x}^{۲} - ۲\dot{x}\dot{y}\ddot{x}\ddot{y}}}{v}\ \Rightarrow\ a_{\perp} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{v}$$

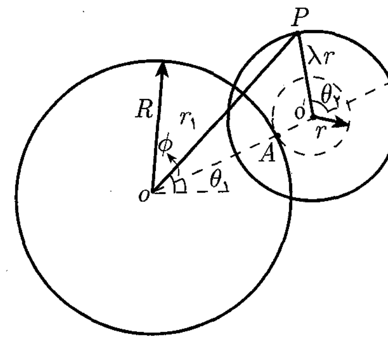
در نتیجه شعاع انحنای مسیر عبارتست از:

$$\rho = \frac{v^{۲}}{a_{\perp}}\ \Rightarrow\ \rho = \frac{v^{۳}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}\ \Rightarrow\ \rho = \frac{(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$
$$\Rightarrow\ \rho = \frac{[\omega^{۲}(R+r)^{۲}(\lambda^{۲} + ۱ + ۲\lambda\cos(\frac{R}{r}\omega t))]^{\frac{۳}{۲}}}{[\lambda^{۲}\frac{(R+r)^{۳}\omega^{۳}}{r} + (\lambda(R+r)^{۲}\omega^{۳} + \lambda\frac{(R+r)^{۳}\omega^{۳}}{r})\cos(\frac{R}{r}\omega t) + (R+r)^{۲}\omega^{۳}]}$$

این سؤال را با استفاده از دستگاه مختصات متحرک (دستگاه واسط) نیز می‌توانید حل کنید.

ب) برای این‌که تمام نمادها با هم اشتباه نشوند، مؤلفه شعاعی مکان نقطه P را با $r_1(t)$ نشان می‌دهیم. (شکل ۱ـ۲۰۲)

بر اساس شکل (۱ـ۲۰۱) و (۱ـ۲۰۲)، داریم:



شکل ۱-۲۰۲

$$\tan(\phi-\theta_1)=\frac{\lambda r\sin\theta_2}{R+r+\lambda r\cos\theta_2}$$

$$\Rightarrow\ \tan(\phi-\theta_1)=\frac{\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)}{R+r+\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)}$$

$$\Rightarrow\ \phi-\theta_1=\ \mathrm{Arctan}[\frac{\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)}{R+r+\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)}]$$

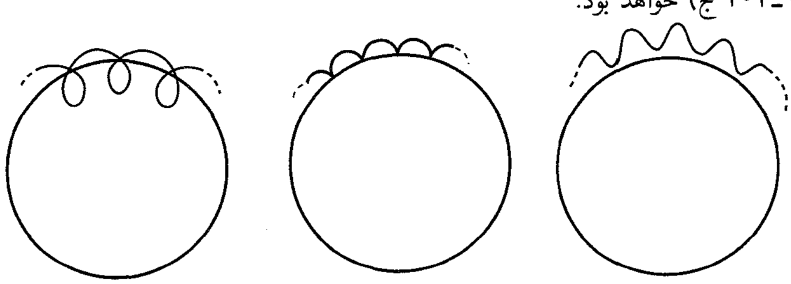
$$\Rightarrow\ \phi(t)=\ \mathrm{Arctan}[\frac{\lambda r\sin(\frac{R}{r}\omega t)}{R+r+\lambda r\cos(\frac{R}{r}\omega t)}]+\omega t$$

برای یافتن $r_1(t)$، از قانون کسینوس‌ها در مثلث $\Delta OO'P$ استفاده می‌کنیم. پس

$$r_1^2=(\lambda r)^2+(R+r)^2-2\lambda r(R+r)\cos(\pi-\theta_2)$$

$$\Rightarrow\ r_1(t)=\sqrt{(\lambda r)^2+(R+r)^2+2\lambda r(R+r)\cos(\frac{R}{r}\omega t)}$$

ج) مسیر حرکت نقطه P به صورت‌های نشان داده شده در شکل (۱ـ۲۰۳) می‌باشد که عامل تعیین‌کننده آن ضریب λ می‌باشد. به صورتی که اگر $\lambda > 1$ باشد، مسیر به‌صورت شکل (۱ـ۲۰۳ الف)، اگر $\lambda = 1$ باشد، به‌صورت شکل (۱ـ۲۰۳ ب)، و اگر $\lambda < 1$ باشد، به‌صورت شکل (۱ـ۲۰۳ ج) خواهد بود.

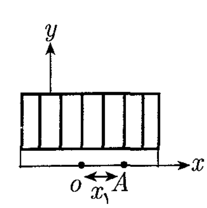


$\lambda>1$ (الف) — $\lambda=1$ (ب) — $\lambda<1$ (ج)

شکل ۱-۲۰۳

این شرایط را می‌توانید با توجه به این‌که $\phi(t)$ نباید منفی باشد نیز به‌دست آورید. در نتیجه برای این که مسیر نقطه P خودش را قطع نکند، باید $\lambda \leq 1$ باشد.

۸۳ ابتدا فرض می‌کنیم که قطره آب در زمان $t=t_1$ از نقطه A به فاصله x_1 در سمت راست مرکز آبپاش از آبپاش خارج شده است. (شکل ۱ـ۲۰۴)



شکل ۱-۲۰۴

چون از گرانش صرف‌نظر کرده‌ایم، حرکت قطره پس از خارج شدن از آبپاش، حرکتی با سرعت ثابت خواهد بود که مؤلفه‌های سرعت آب عبارتند از:

$$v_x=u_0\sin\omega t_1\qquad,\qquad v_y=v_0$$

بنابراین مکان قطره در زمان $t = T$ عبارت است از:

$$x = v_x t + x_۱ + x_۰ \Rightarrow x = u_۰ \sin(\omega t_۱)(T - t_۱) + x_۱ + x_۰ \qquad (۱)$$

که $x_۰$ بیانگر محل مرکز آبپاش (نقطه O) در زمان $t = t_۱$ است.

$$y = v_۰ t \Rightarrow y = v_۰(T - t_۱) \qquad (۲)$$

حال باید $x_۰$ را بیابیم. برای این کار، از عبارت $v_x = u_۰ \sin \omega t$ نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم. پس

$$x_۰ = \int_۰^{t_۱} u_۰ \sin(\omega t) dt \Rightarrow x_۰ = -\frac{u_۰}{\omega}(\cos \omega t_۱ - ۱)$$
$$\Rightarrow x_۰ = \frac{u_۰}{\omega}(۱ - \cos \omega t_۱) \qquad (۳)$$

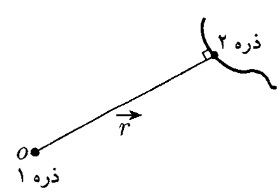
حال با جایگذاری $x = a$ و $y = b$ در روابط (۱) و (۲) و با توجه به رابطه (۳) برای $x_۰$ داریم:

$$a = u_۰ \sin(\omega t_۱)(T - t_۱) + x_۱ + \frac{u_۰}{\omega}(۱ - \cos \omega t_۱)$$
$$\Rightarrow x_۱ = a - u_۰ \sin(\omega t_۱)(T - t_۱) - \frac{u_۰}{\omega}(۱ - \cos \omega t_۱) \qquad (۴)$$
$$b = v_۰(T - t_۱) \Rightarrow t_۱ = T - \frac{b}{v_۰} \qquad (۵)$$

با جایگذاری مقدار $t_۱$ از رابطه (۵) در رابطه (۴)، نقطه‌ای که قطره آب از آبپاش خارج شده است $x_۱$ به‌دست می‌آید. پس

$$x_۱ = a - u_۰(\frac{b}{v_۰}) \sin(\omega(T - \frac{b}{v_۰})) - \frac{u_۰}{\omega}\Big(۱ - \cos\big(\omega(T - \frac{b}{v_۰})\big)\Big)$$

۸۴ ابتدا بردار مکان ذرات ۱ و ۲ را بر اساس روابط حرکت با سرعت ثابت، به‌دست می‌آوریم.

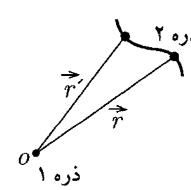


شکل ۱-۲۰۵

$$\vec{r}_۱ = \vec{r}_{۱i} + \vec{v}_۱ t \quad , \quad \vec{r}_۲ = \vec{r}_{۲i} + \vec{v}_۲ t$$

اگر حرکت را به‌صورت نسبی در نظر بگیریم، یعنی بر روی یکی از ذرات نشسته و ذره دیگر را نگاه کنیم، مانند این است که ذره اول ساکن است و بردار مکان ذره دوم $\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱$ و سرعت آن $\vec{v} = \vec{v}_۲ - \vec{v}_۱$ است.

همان‌طور که در شکل (۱ـ۲۰۵) نشان داده شده است، کمترین فاصله زمانی اتفاق می‌افتد که بردار مکان بر راستای مسیر یا به عبارتی سرعت ذره در آن نقطه عمود باشد، زیرا اگر این دو بر هم عمود نباشند، در زمان Δt قبل یا بعد از این لحظه، ذره در مکان $\vec{r}'$ قرار خواهد داشت که مقدار آن کمتر از مقدار بردار مکان $\vec{r}$ است. (شکل ۱ـ۲۰۶) حال شرط عمود بودن بردار اختلاف مکان دو ذره $\vec{r}$ بر اختلاف سرعت آنها $\vec{v}$ را می‌نویسیم تا لحظه‌ای که این نزدیک‌ترین فاصله اتفاق می‌افتد را بیابیم. بنابراین ضرب داخلی بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{v}$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.



شکل ۱-۲۰۶

$$\vec{r} . \vec{v} = ۰ \Rightarrow (\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱).(\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱) = ۰$$

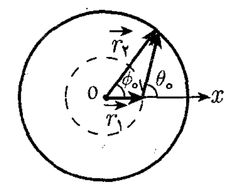
$$\Rightarrow\ \Big((\vec r_{2i}+\vec v_2 t)-(\vec r_{1i}+\vec v_1 t)\Big).(\vec v_2-\vec v_1)=0$$
$$\Rightarrow\ (\vec r_{2i}-\vec r_{1i}).(\vec v_2-\vec v_1)+|\vec v_2-\vec v_1|^2 t=0$$
$$\Rightarrow\ t=\frac{(\vec r_{1i}-\vec r_{2i}).(\vec v_2-\vec v_1)}{|\vec v_2-\vec v_1|^2} \qquad (1)$$

حال با جایگذاری t از رابطه (۱) در رابطه $r=|\vec r_2-\vec r_1|$، کمترین فاصله دو ذره را به‌دست می‌آوریم.

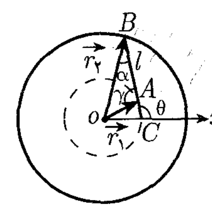
$$r=|\vec r_2-\vec r_1|=|(\vec r_{2i}+\vec v_2 t)-(\vec r_{1i}+\vec v_1 t)|$$
$$|(\vec r_{2i}-\vec r_{1i})+(\vec v_2-\vec v_1)\frac{(\vec r_{1i}-\vec r_{2i}).(\vec v_2-\vec v_1)}{|\vec v_2-\vec v_1|^2}|$$

برای این‌که دو ذره با یکدیگر برخورد کنند، واضح است که $\vec r=\vec r_{2i}-\vec r_{1i}$ و $\vec v=\vec v_{2i}-\vec v_{1i}$ باید هم‌راستا و مختلف‌الجهت باشند تا پس از گذشت زمان لازم $\vec r$ به صفر برسد و دو ذره با یکدیگر برخورد کنند.

۸۵ شکل (۱ـ۲۰۷) نشان‌دهنده مکان دو سیاره و اطلاعات و پارامترهای ذکر شده در صورت سؤال است.



شکل (۱)



شکل (۲)

شکل ۱ـ۲۰۷

برای این‌که بتوانیم مسأله را حل کنیم، باید سیستم را در یک لحظه دلخواه $t=t_1$ در نظر بگیریم. زاویه $\vec r_2$ و $\vec r_1$ با محور x را به‌ترتیب ϕ_2 و ϕ_1 می‌گیریم که عبارتند از:

$$\phi_1=\omega_1 t \quad , \quad \phi_2=\phi_0+\omega_2 t$$

l را برابر با $|\vec r_2-\vec r_1|$ در نظر می‌گیریم. بر اساس قضیه کسینوس‌ها در مثلث ΔOAB داریم:

$$l^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\phi_2-\phi_1)$$
$$\Rightarrow\ l^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)$$
$$\Rightarrow\ l=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)}$$

حال قضیه سینوس‌ها را در مثلث ΔOAB می‌نویسیم.

$$\frac{l}{\sin(\phi_2-\phi_1)}=\frac{r_1}{\sin\alpha}\Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{r_1}{l}\sin\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)$$
$$\Rightarrow\ \alpha=\text{Arcsin}[\frac{r_1}{l}\sin\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)]$$

θ زاویه خارجی مثلث ΔOBC است. بنابراین:

$$\theta=\alpha+\phi_2\ \Rightarrow\ \theta=\text{Arcsin}[\frac{r_1}{l}\sin\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)]+\omega_2 t+\phi_0$$

حال از عبارت فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

$$\dot\theta=\frac{\frac{r_1}{l}(\omega_2-\omega_1)\cos\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)}{\sqrt{1-[\frac{r_1}{l}\sin\Big((\omega_2-\omega_1)t+\phi_0\Big)]^2}}+\omega_2$$

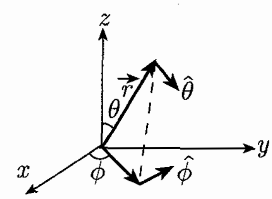
عبارت فوق به ازای حالت خاص $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{\theta} = \omega_2$$

۸۶ یک دستگاه مختصات دکارتی فرضی در نظر بگیرید. (شکل ۱ـ۸ـ۲۰۸)

بر این اساس می‌توانیم $\hat{n}_\circ$ و $\hat{n}$ را در دستگاه مختصات دکارتی بازنویسی کنیم. پس

$$\hat{n_\circ} = \sin\theta_\circ \cos\phi_\circ \hat{i} + \sin\theta_\circ \sin\phi_\circ \hat{j} + \cos\theta_\circ \hat{k}$$
$$\hat{n} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$



شکل ۱-۸-۲۰۸

با جایگذاری $\hat{n}_\circ$ و $\hat{n}$ از روابط فوق در رابطه $\vec{v} = r\omega\hat{n}_\circ \times \hat{n}$، $\vec{v}$ را به‌دست می‌آوریم. پس

$$\vec{v} = (\sin\theta_\circ \sin\phi_\circ \cos\theta - \sin\theta\sin\phi\cos\theta_\circ)\hat{i}$$
$$+ (\sin\theta\cos\phi\cos\theta_\circ - \sin\theta_\circ \sin\phi_\circ \cos\theta)\hat{j}$$
$$+ (\sin\theta_\circ \cos\phi_\circ \sin\theta\sin\phi - \sin\theta_\circ \sin\phi_\circ \sin\theta\cos\phi)\hat{k}$$

برای به‌دست آوردن $\frac{d\theta}{dt}$ و $\frac{d\phi}{dt}$ به‌ترتیب از روابط $\vec{v}\cdot\hat{\theta} = r\dot{\theta}$ و $\vec{v}.\hat{\phi} = r\sin\theta\dot{\phi}$ استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از این روابط، لازم است $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ را در مختصات دکارتی به‌دست آوریم. پس

$$\hat{\theta} = \cos\phi\cos\theta\hat{i} + \sin\phi\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$
$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

بنابراین

$$\vec{v}.\hat{\theta} = v_x\cos\phi\cos\theta + v_y\sin\phi\cos\theta - v_z\sin\theta$$
$$\Rightarrow\ r\dot{\theta} = v_x\cos\phi\cos\theta + v_y\sin\phi\cos\theta - v_z\sin\theta$$
$$\Rightarrow\ \dot{\theta} = \frac{v_x\cos\phi\cos\theta + v_y\sin\phi\cos\theta - v_z\sin\theta}{r}$$
$$\vec{v}.\hat{\phi} = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi$$
$$\Rightarrow\ r\sin\theta\dot{\phi} = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi$$
$$\Rightarrow\ \dot{\phi} = \frac{-v_x\sin\phi + v_y\cos\phi}{r\sin\theta}$$

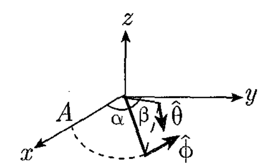
البته اگر جواب را به‌صورت بسط داده نشده و بر حسب $\hat{n}_\circ$ و $\hat{n}$ به‌دست آوریم، روابط فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{\theta} = \frac{\vec{v}.\hat{i}\cos\phi\cos\theta + \vec{v}.\hat{j}\sin\phi\cos\theta - \vec{v}.\hat{k}\sin\theta}{r}$$
$$\Rightarrow\ \dot{\theta} = \omega[(\hat{n}_\circ \times \hat{n}).\hat{i}\cos\phi\cos\theta$$
$$+ (\hat{n}_\circ \times \hat{n}).\hat{j}\sin\phi\cos\theta - (\hat{n}_\circ \times \hat{n}).\hat{k}\sin\theta]$$

$$\dot{\phi} = \frac{-(\vec{v}.\hat{i})\sin\phi + (\vec{v}.\hat{j})\cos\phi}{r\sin\theta}$$
$$\Rightarrow\ \dot{\phi} = \frac{\omega}{\sin\theta}[-(\hat{n}_\circ \times \hat{n}).\hat{i}\sin\phi + (\hat{n}_\circ \times \hat{n}).\hat{j}\cos\phi]$$

اگر ناظر نیز همراه زمین حرکت کند، ماهواره را ساکن می‌بیند، زیرا که ماهواره نیز با همان ω در حال حرکت است. بنابراین نسبت به این دستگاه $\frac{d\theta'}{dt}$ و $\frac{d\phi'}{dt}$ برابر صفر است.

۸۷ الف) بر اساس راهنمایی موجود در صورت سؤال، با داشتن r، θ و ϕ می‌توان x، y و z را در دستگاه قطبی تعیین کرد. در این قسمت نقطه‌ای در فاصله $r = 1$ از مختصات $(1, 0, 0)$ در دستگاه دکارتی به اندازه α در جهت بردار یکه $\hat{\phi}$ و سپس به اندازه β در خلاف جهت بردار یکه $\hat{\theta}$ می‌چرخد (شکل ۱ـ۲۰۹).



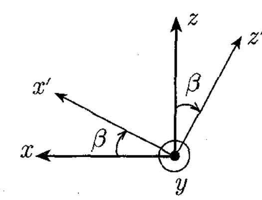
شکل ۱-۲۰۹

بنابراین $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ عبارت است از:

$$\vec{r}_1 = (r\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)\cos\alpha, r\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)\sin\alpha, r\cos(\frac{\pi}{2} - \beta))$$

چون $r = 1$ است، داریم

$$\vec{r}_1 = (\cos\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha, \sin\beta)$$



شکل ۱-۲۱۰

ب) حرکت ذره پس از رسیدن به نقطه C بر روی دایره عظیمه‌ای است که از C می‌گذرد و بر دایره عظیمه گذرنده از C و قطب شمال عمود است. بنابراین مختصات نهایی ذره با مختصات نهایی آن در حالت (الف) متفاوت است.

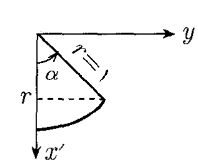
می‌توان مسأله را از دید دیگری نیز بررسی کرد. بدین‌ترتیب به جای این‌که فرض کنیم دستگاه مختصات دکارتی ثابت است و ذره به میزان β روی دایره عظیمه گذرنده از قطب شمال و نقطه A دوران می‌کند، فرض می‌کنیم که ذره روی محور x ثابت است و صفحه xz حول محور y به میزان β دوران می‌کند تا ذره به نقطه C برسد. حال در دستگاه مختصات جدید، ذره به میزان α در صفحه xy دوران می‌کند تا به مختصات نهایی برسد. بنابراین مختصات نهایی ذره در دستگاه جدید، عبارت است از:

$$\vec{r'} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, 0)$$

تابع تبدیل $\vec{r'}$ به $\vec{r}$ یک ماتریس 3×3 بر حسب زاویه دوران محورهای x, z است، که برابر است با

$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

با ضرب این ماتریس در $\vec{r'}$، $\vec{r}$ به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که $r = 1$ است، داریم



شکل ۱-۲۱۱

$$\vec{r}_2 = T \times \vec{r'} \Rightarrow \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = (\cos\beta\cos\alpha, \sin\alpha, \sin\beta\cos\alpha)$$

ج) بر اساس بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ به‌دست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) داریم:

$$\vec{\Delta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{\Delta} = (\cos\beta\cos\alpha, \sin\alpha, \sin\beta\cos\alpha) - (\cos\beta\cos\alpha, \cos\beta\sin\alpha, \sin\beta)$$
$$\Rightarrow \vec{\Delta} = (0, \sin\alpha(1-\cos\beta), \sin\beta(\cos\alpha - 1))$$

د) در اینجا لازم است که عبارت به‌دست آمده برای $\vec{\Delta}$ در (ج) را تا مرتبه دوم کوچکی بسط دهیم. بنابراین

$$\vec{\Delta} = (0, \alpha(1-(1-\frac{\beta^2}{2})), ((1-\frac{\alpha^2}{2})-1))$$
$$\Rightarrow \vec{\Delta} = (0, \frac{\alpha\beta^2}{2}, -\frac{\beta\alpha^2}{2})$$

در نتیجه $\vec{\Delta}$ از مرتبه دوم کوچکی برابر صفر است. یعنی

$$\vec{\Delta} = (0, 0, 0)$$

۸۸ در این مسأله باید منحنی گذرنده از نقاط رنگی که توسط اسفنج آغشته به رنگ در مبدأ، رنگی شده است، را بیابیم. برای رسیدن به معادله منحنی باید مکان نقطه‌ای رنگی که در زمان فرضی $t_1 < T$ از مبدأ به خارج پرتاب شده است را در زمان T به‌دست آوریم. بنابراین سرعت اولیه افقی و عمودی قطره در لحظه پرتاب برابر است با:

$$v_x = u_0 \sin\omega t_1 \quad , \quad v_y = v_0$$

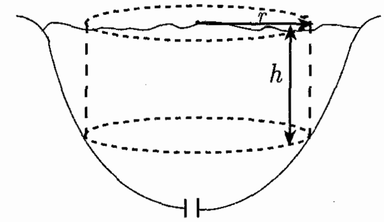
در نتیجه قطره، در بازه زمانی $(T - t_1)$ در حال حرکت است. بنابراین مکان قطره در زمان T عبارت است از:

$$y = v_y(T - t_1) \Rightarrow y = v_0(T - t_1) \quad (1)$$
$$x = v_x(T - t_1) \Rightarrow x = u_0 \sin\omega t_1 (T - t_1) \quad (2)$$

حال با جایگذاری t_1 از رابطه (۱) در رابطه (۲)، معادله منحنی موردنظر $f(x,y) = 0$ به‌دست می‌آید. پس

$$t_1 = T - \frac{y}{v_0} \Rightarrow x = u_0 \sin\left(\omega(T - \frac{y}{v_0})\right)\left(\frac{y}{v_0}\right)$$
$$\Rightarrow f(x,y) = x - u_0\frac{y}{v_0}\sin\left(\omega(T - \frac{y}{v_0})\right)$$

۸۹ الف) سیستم موردنظر به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که آب به طرف سوراخ تنها حرکت شعاعی داشته باشد. (شکل ۱ـ۲۱۲) یعنی سرعت آب بر سطح جانبی هر استوانه فرضی (مانند شکل ۱ـ۲۱۲) عمود است. چون مایع پیوسته است، دبی ورودی به هر استوانه باید با استوانه‌های دیگر برابر باشد. بنابراین رابطه ($Av =$ ثابت) که A سطح جانبی استوانه است، برقرار می‌باشد.



شکل ۱-۲۱۲

در نتیجه $\text{۲}\pi rhv =$ ثابت

خواسته مسأله، ثابت بودن v بر حسب تغییر r است. پس

$$\text{۲}\pi rh = c \;\Rightarrow\; h = \frac{c}{\text{۲}\pi r} \;\Rightarrow\; h = \frac{k}{\text{۲}}$$

که k یک ثابت بر حسب مشخصه‌های سیستم می‌باشد.

۹۰ این مسأله مشابه مسأله ۷۷ است، با این تفاوت که در آن مسأله اسفنج در مبدأ مختصات قرار داشت ولی در این مسأله در مرکز آبپاش قرار دارد. بنابراین سیر حل مسأله ۷۷ را در اینجا نیز تکرار می‌کنیم. قطره‌ای را در نظر بگیرید که در لحظه $t_\text{۱}$ از مرکز آبپاش خارج می‌شود. ابتدا مکان اولیه آن که مختصات مرکز آبپاش در لحظه $t_\text{۱}$ است را به‌دست می‌آوریم. آبپاش با سرعت $u_\circ \sin\omega t$ حرکت می‌کند. پس

$$\frac{dx}{dt} = u_\circ \sin\omega t \Rightarrow dx = u_\circ \sin\omega t dt \;\Rightarrow\; \int_\circ^{x_\text{۱}} dx = \int_\circ^{t_\text{۱}} u_\circ \sin\omega t dt$$

$$\Rightarrow\; x_\text{۱} = \frac{u_\circ}{\omega}(\text{۱} - \cos\omega t_\text{۱})$$

سپس مؤلفه‌های سرعت قطره در دو راستای x و y را به‌دست می‌آوریم. پس

$$v_x = u_\circ \sin\omega t_\text{۱} \quad , \quad v_y = v_\circ$$

حال می‌توانیم مکان این قطره را در لحظه $t = T$ بیابیم. در نتیجه

$$x = v_x t + x_\text{۱} \;\Rightarrow\; x = u_\circ \sin\omega t_\text{۱}(T - t_\text{۱}) + \frac{u_\circ}{\omega}(\text{۱} - \cos\omega t_\text{۱}) \qquad (\text{۱})$$

$$y = v_y t \;\Rightarrow\; y = v_\circ(T - t_\text{۱}) \qquad (\text{۲})$$

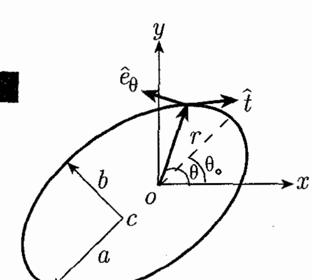
حال $t_\text{۱}$ را از رابطه (۲) در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم تا معادله منحنی نقاط رنگی $f(x,y) = \circ$ به‌دست آید.

پس

$$x = u_\circ(\frac{y}{v_\circ})\sin\left(\omega(T - \frac{y}{v_\circ})\right) + \frac{u_\circ}{\omega}\left(\text{۱} - \cos\left(\omega(T - \frac{y}{v_\circ})\right)\right)$$

$$\Rightarrow\; f(x,y) = x - \frac{yu_\circ}{v_\circ}\sin\left(\omega(T - \frac{y}{v_\circ})\right) + \frac{u_\circ}{\omega}\left(\text{۱} - \cos\left(\omega(T - \frac{y}{v_\circ})\right)\right) = \circ$$

۹۱ ابتدا شکل بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم تا دید بهتری نسبت به مسأله داشته باشیم (شکل ۱-۲۱۳)



شکل ۱-۲۱۳

الف) همان‌طور که می‌دانید، راستای مماس بر منحنی $\hat{t}$ را می‌توانیم با مقدار $\frac{dy}{dx}$ که بیانگر تانژانت زاویه راستای مماس بر منحنی با محور x است، تعیین می‌کنیم. پس ابتدا باید مختصات نقاط منحنی را در دستگاه دکارتی نشان داده شده بیابیم.

$$x = r\cos\theta \;\Rightarrow\; x = \frac{a(\text{۱} - \epsilon^\text{۲})}{\text{۱} + \epsilon\cos(\theta - \theta_\circ)}\cos\theta \qquad (\text{۱})$$

$$y = r\sin\theta \;\Rightarrow\; y = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)}\sin\theta \qquad (2)$$

زاویه راستای مماس بر منحنی با محور x را γ می‌نامیم. پس

$$\tan\gamma = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \tan\gamma = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

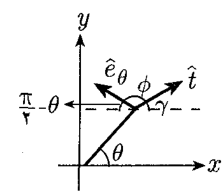
حال $\frac{dy}{d\theta}$ و $\frac{dx}{d\theta}$ را از روابط (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\epsilon^2)\frac{-\sin\theta\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\cos\theta}{\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)^2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(1-\epsilon^2)\frac{\cos\theta\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\sin\theta}{\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)^2}$$

$$\Rightarrow\; \tan\gamma = \frac{\cos\theta\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\sin\theta}{-\sin\theta\Big(1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\cos\theta} \qquad (3)$$

در شکل (۱ـ۲۱۴) $\hat{t}$ و $\hat{e}_\theta$ و زاویه آنها را با راستای افق نشان داده‌ایم. بنابراین



شکل ۱-۲۱۴

$$\phi = \pi - \Big((\frac{\pi}{2}-\theta)+\gamma\Big) \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2}-(\theta-\gamma)$$

$$\Rightarrow\; \tan\phi = \tan\Big(\frac{\pi}{2}-(\theta-\gamma)\Big) \;\Rightarrow\; \tan\phi = \frac{1}{\tan(\theta-\gamma)}$$

$$\Rightarrow\; \tan\phi = \frac{1+\tan\theta\tan\gamma}{\tan\theta-\tan\gamma}$$

$$\Rightarrow\; \tan\phi = \frac{1+\tan\frac{\cos\theta+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta+\sin\theta)}{-\sin\theta+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos(\theta-\sin\theta)}}{\tan\theta-\frac{\cos\theta+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta+\sin\theta)}{-\sin\theta+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta-\sin\theta)}} \qquad (4)$$

با گرفتن مخرج مشترک از صورت و مخرج رابطه (۴) داریم $\tan\phi = \frac{A}{B}$ که

$$A = -\sin\theta+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta-\sin\theta)$$
$$+\sin\theta+\epsilon\tan\theta\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$B = -\sin\theta\tan\theta+\epsilon\tan\theta\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta-\sin\theta)$$
$$-\cos\theta-\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)(\cos\theta+\sin\theta)$$

پس از آماده‌سازی رابطه فوق، داریم:

$$\tan\phi = -\frac{\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)}{1+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)} \qquad (5)$$

ب) ابتدا ϵ را صفر در نظر می‌گیریم. در این‌صورت معادله فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\tan\phi = 0$$

بنابراین باید حداقل ϵ را تا مرتبه اول نگه داریم. حال معادله (۵) را تا مرتبه اول ϵ بسط می‌دهیم. بنابراین:

$$\tan\phi = -\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big(\text{۱}-\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big)$$
$$\Rightarrow\ \tan\phi = -\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) \qquad (\text{۶})$$

ج) معادله بیضی ذکر شده در صورت سؤال را تا اولین مرتبه نسبت به ϵ بسط می‌دهیم. پس

$$r = \frac{a(\text{۱}-\epsilon^{\text{۲}})}{\text{۱}+\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)}\ \Rightarrow\ r = a\Big(\text{۱}-\epsilon\cos\left(\theta-\theta_\circ\right)\Big)$$

د) ابتدا معادله دو بیضی را بر اساس دو معادله فوق در نظر بگیرید.

$$r = a\Big(\text{۱}-\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big) \qquad r' = a\Big(\text{۱}-\epsilon'\cos(\theta-\theta'_\circ)\Big)$$

حال باید این دو رابطه برای r و r' را به ازای زاویه θ برابر قرار دهیم تا شرط موردنظر به‌دست آید. پس

$$a\Big(\text{۱}-\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)\Big) = a\Big(\text{۱}-\epsilon'\cos(\theta-\theta'_\circ)\Big)$$
$$\Rightarrow \epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) = \epsilon'\cos(\theta-\theta'_\circ)$$

ه) معادله فوق را به ازای $\epsilon' = \epsilon+\delta\epsilon$ و $\theta'_\circ = \theta_\circ+\delta\theta_\circ$ را با فرض $\delta\epsilon \ll \epsilon$ و $\delta\theta_\circ \ll \delta\epsilon$ بسط می‌دهیم.

در نتیجه:

$$\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) = (\epsilon+\delta\epsilon)\cos\Big(\theta-(\theta_\circ+\delta\theta_\circ)\Big)$$
$$\Rightarrow \epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) = \epsilon\cos(\theta-\theta_\circ-\delta\theta_\circ)+\delta\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)$$
$$\Rightarrow \epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) = \epsilon[\cos(\theta-\theta_\circ)+\delta\theta_\circ\sin(\theta-\theta_\circ)]+\delta\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ)$$
$$\Rightarrow \epsilon\delta\theta_\circ\sin(\theta-\theta_\circ)+\delta\epsilon\cos(\theta-\theta_\circ) = \circ$$
$$\Rightarrow \delta\theta_\circ = -\frac{\delta\epsilon}{\epsilon}\cot(\theta-\theta_\circ) \qquad (\text{۷})$$

و) در این قسمت باید رابطه (۶) را به ازای تغییر ϕ به اندازه $\delta\phi \ll \delta\epsilon$ است، به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\phi+\delta\phi) = -(\epsilon+\delta\epsilon)\cos\Big(\theta-(\theta_\circ+\delta\theta_\circ)\Big)$$
$$\Rightarrow \frac{\tan\phi+\delta\phi}{\text{۱}-\delta\phi\tan\phi} = -(\epsilon+\delta\epsilon)\cos(\theta-\theta_\circ-\delta\theta_\circ)$$

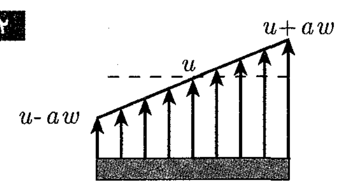
چون $\delta\epsilon \ll \delta\phi$ است، معادله فوق را تا مرتبه دوم نسبت به $\delta\theta_{۰}$ و $\delta\epsilon$ بسط می‌دهیم. پس

$$
\begin{aligned}
&(\tan\phi + \delta\phi)(۱ + \delta\phi\tan\phi) = -(\epsilon + \delta\epsilon)[\cos(\theta - \theta_{۰})\cos\delta\theta_{۰} \\
&\qquad + \sin(\theta - \theta_{۰})\sin\delta\theta_{۰}] \\
&\Rightarrow \tan\phi + \delta\phi(۱ + \tan^{۲}\phi) \\
&\qquad = -(\epsilon + \delta\epsilon)[(۱ - \frac{\delta\theta_{۰}^{۲}}{۲})\cos(\theta - \theta_{۰}) + \delta\theta_{۰}\sin(\theta - \theta_{۰})] \\
&\Rightarrow \tan\phi + \delta\phi(۱ + \tan^{۲}\phi) \\
&\qquad = -\epsilon[(۱ - \frac{\delta\theta_{۰}^{۲}}{۲})\cos(\theta - \theta_{۰}) + \delta\theta_{۰}\sin(\theta - \theta_{۰})] \\
&\qquad\quad - \delta\epsilon[\cos(\theta - \theta_{۰}) + \delta\theta_{۰}\sin(\theta - \theta_{۰})]
\end{aligned}
$$

با توجه به رابطه‌های (۶) و (۷) معادله فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

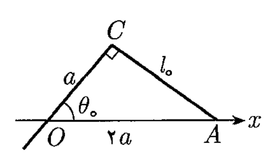
$$
\begin{aligned}
\delta\phi(۱ + \tan^{۲}\phi) &= \frac{\delta\epsilon^{۲}}{۲\epsilon}\cot^{۲}(\theta - \theta_{۰})\cos(\theta - \theta_{۰}) + \frac{\delta\epsilon^{۲}}{\epsilon}\cos(\theta - \theta_{۰}) \\
\Rightarrow \delta\phi(۱ + \tan^{۲}\phi) &= \frac{\delta\epsilon^{۲}}{۲\epsilon}[\frac{\cos(\theta - \theta_{۰})(۱ + \sin^{۲}(\theta - \theta_{۰}))}{\sin^{۲}(\theta - \theta_{۰})}] \\
\Rightarrow \delta\epsilon^{۲} &= \frac{۲\delta\phi\epsilon\sin^{۲}(\theta - \theta_{۰})(۱ + \tan^{۲}\phi)}{\cos(\theta - \theta_{۰})\big(۱ + \sin^{۲}(\theta - \theta_{۰})\big)}
\end{aligned}
$$

۹۲ چون پس از خارج شدن آب از آبپاش نیرویی به آن وارد می‌شود، قطرات آب روی خط مستقیم حرکت می‌کنند (از گرانش صرف‌نظر کرده‌ایم). بنابراین قطره‌ای به نقطه A می‌رسد که جهت حرکت آن رو به نقطه A باشد، سرعت تمام قطرات عمود بر راستای آبپاشی است که مقادیر آن بر حسب فاصله از مرکز آبپاشی به‌صورت نشان داده شده در شکل (۱ـ۲۱۵) تغییر می‌کند.



شکل ۱-۲۱۵

اولین قطره‌ای که رو به نقطه A حرکت می‌کند، از لبه سمت چپ آبپاشی از آن جدا می‌شود (شکل ۱ـ۲۱۶)



شکل ۱-۲۱۶

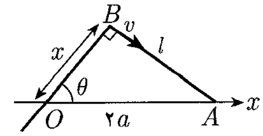
حال زمان رسیدن قطره‌ای که از یک نقطه دلخواه روی آبپاش از آن جدا می‌شود و به نقطه A می‌رسد، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱ـ۲۱۷)

در مثلث ΔAOB داریم:

$$
l = ۲a\sin\theta \qquad , \qquad x = ۲a\cos\theta
$$

سرعت قطره‌ای که در فاصله x در سمت چپ مرکز آبپاشی از آنها رها می‌شود، بر اساس شکل (۱ـ۲۱۵) عبارتست از

$$
v = u - x\omega
$$



شکل ۱-۲۱۷

برای این‌که اولین قطره‌ای که به نقطه A می‌رسد را بیابیم، باید زمان رسیدن هر قطره به A را با اختلاف زمانی رها شدن آن و رها شدن اولین قطره به سوی A جمع کنیم و زمان کل به‌دست

آمده را برای قطرات مختلف با یکدیگر مقایسه کرده و حداقل آن را به‌دست آوریم. برای اختلاف زمانی رها شدن قطرات، داریم:

$$t_\circ = \frac{\theta - \theta_\circ}{\omega}$$

که زاویه $\theta_\circ$ بر اساس روابط هندسی در شکل (۱ـ۲۱۶) عبارت است از

$$\cos\theta_\circ = \frac{a}{۲a} \Rightarrow \cos\theta_\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta_\circ = \frac{\pi}{۳}$$

بنابراین
$$t_\circ = \frac{\theta - \frac{\pi}{۳}}{\omega}$$

و زمان رسیدن قطره به نقطه A عبارت است از:

$$t_۱ = \frac{l}{u - x\omega} \Rightarrow t_۱ = \frac{۲a\sin\theta}{u - ۲a\omega\cos\theta}$$

در نتیجه زمان کل موردنظر برابر است با:

$$t = t_\circ + t_۱ \Rightarrow t = \frac{\theta - \frac{\pi}{۳}}{\omega} + \frac{۲a\sin\theta}{u - ۲a\omega\cos\theta} \qquad (۱)$$

حال از رابطه فوق نسبت به θ مشتق می‌گیریم تا کمترین زمان که معادل با اولین قطره‌ای است که به A می‌رسد، به‌دست آید. پس

$$\frac{dt}{d\theta} = \circ \Rightarrow \frac{۱}{\omega} + \frac{۲a\cos\theta(u - ۲a\omega\cos\theta) - ۲a\omega\sin\theta(۲a\sin\theta)}{(u - ۲a\omega\cos\theta)^۲} = \circ$$

$$\Rightarrow \frac{-۴a^۲\omega^۲ + ۲au\omega\cos\theta + (u - ۲a\omega\cos\theta)^۲}{\omega(u - ۲a\omega\cos\theta)^۲} = \circ$$

$$\Rightarrow -۴a^۲\omega^۲ - ۲au\omega\cos\theta + ۴a^۲\omega^۲\cos^۲\theta = \circ$$

$$\Rightarrow \cos^۲\theta - \frac{u}{۲a\omega}\cos\theta + \frac{u^۲ - ۴a^۲\omega^۲}{۴a^۲\omega^۲} = \circ$$

$$\Rightarrow \cos\theta_۱ = \frac{u}{۴a\omega} + \sqrt{۱ - \frac{۳}{۱۶}\frac{u^۲}{a^۲\omega^۲}} \qquad (۲)$$

با جایگذاری $\theta_۱$ از رابطه فوق در رابطه (۱)، زمانی که طول می‌کشد تا اولین قطره به A برسد، نسبت به مبدأ زمانی در نقطه C در شکل (۱ـ۲۱۶)، به‌دست می‌آید.

الف) بر اساس خواسته مسأله، زمان حداقل به‌دست آمده باید کمتر از زمان رسیدن آبپاش به فاز ۲π که به معنای یک دورکامل است، باشد. زمان رسیدن آبپاش به فاز ۲π نسبت به مبدأ زمانی در نقطه C در شکل (۱ـ۲۱۶) برابر است با:

$$t'_۱ = \frac{۲\pi - (\theta_\circ + \pi)}{\omega} \Rightarrow t' = \frac{\pi - \frac{\pi}{۳}}{\omega} \Rightarrow t'_۱ = \frac{۲\pi}{۳\omega} \qquad (۳)$$

بر اساس روابط (۱) و (۳)، نامساوی موردنظر عبارت است از:

$$t < t'_۱ \Rightarrow \frac{\theta_۱ - \frac{\pi}{۳}}{\omega} + \frac{۲a\sin\theta_۱}{u - ۲a\omega\cos\theta_۱} < \frac{۲\pi}{۳\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_1-\pi}{\omega}+\frac{2a\sin\theta_1}{u-2a\omega\cos\theta_1}<0$$

$$\Rightarrow \frac{(\theta_1-\pi)(u-2a\omega\cos\theta_1)+2a\omega\sin\theta_1}{\omega(u-2a\omega\cos\theta_1)}<0$$

$$\Rightarrow u(\theta_1-\pi)+2a\omega(\sin\theta_1-(\theta_1-\pi)\cos\theta_1)<0$$

$$\Rightarrow u_{\min}=\frac{2a\omega(\sin\theta_1+(\pi-\theta_1)\cos\theta_1)}{\pi-\theta_1}$$

ب) بر اساس خواسته مسأله، زمان حداقل به‌دست آمده باید بیشتر از زمان رسیدن آبپاش به فاز 6π که به معنای سه دور کامل است، باشد. زمان رسیدن آبپاش به فاز 6π نسبت به مبدأ زمانی در نقطه C در شکل (۱ـ۲۱۶)، برابر است با:

$$t'_2=\frac{6\pi-(\theta_0+\pi)}{\omega}\ \Rightarrow\ t'_2=\frac{5\pi-\frac{\pi}{3}}{\omega}\ \Rightarrow\ t'_2=\frac{14\pi}{3\omega} \qquad (4)$$

بر اساس رابطه‌های (۱) و (۴)، نامساوی موردنظر عبارت است از:

$$t>t'_2\Rightarrow \frac{\theta_1-\frac{\pi}{3}}{\omega}+\frac{2a\sin\theta_1}{u-2a\omega\cos\theta_1}>\frac{14\pi}{3\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_1-5\pi}{\omega}+\frac{2a\sin\theta_1}{u-2a\omega\cos\theta_1}>0$$

$$\Rightarrow \frac{(\theta_1-5\pi)(u-2a\omega\cos\theta_1)+2a\omega\sin\theta_1}{\omega(u-2a\omega\cos\theta_1)}>0$$

$$\Rightarrow u(\theta_1-5\pi)+2a\omega(\sin\theta_1-(\theta_1-5\pi)\cos\theta_1)>0$$

$$\Rightarrow u_{\max}=\frac{2a\omega(\sin\theta_1+(5\pi-\theta_1)\cos\theta_1)}{5\pi-\theta_1}$$

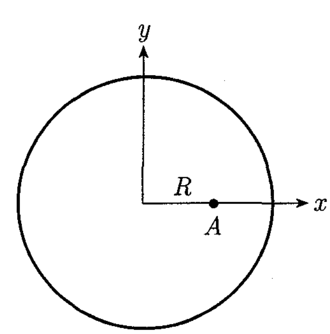
۹۳ الف) ابتدا مکان یک قطره دلخواه که در زمان t_1 از آبپاش خارج می‌شود در زمان T به‌دست می‌آوریم. مختصات اولیه قطره $A:(R,0,0)$ است (شکل ۱ـ۲۱۸)

سرعت آبپاش دارای مؤلفه u در جهت محور z و مؤلفه $R\omega$ در جهت محور y است. با توجه به این‌که شتاب قطرات پس از جدا شدن صفر است، داریم:

$$x=x_0+v_xt\ \Rightarrow\ x=R \qquad (1)$$

$$y=y_0+v_yt\ \Rightarrow\ y=R\omega(T-t_1) \qquad (2)$$

$$z=z_0+v_zt\ \Rightarrow\ z=u(T-t_1) \qquad (3)$$



شکل ۱-۲۱۸

بر اساس رابطه (۱)، منحنی قطرات رنگی شده یک منحنی صفحه‌ای در صفحه $x=R$ است. با تقسیم رابطه‌های (۲) و (۳) بر یکدیگر، معادله منحنی را در این صفحه به‌دست می‌آوریم. بنابراین

$$\frac{y}{z}=\frac{R\omega}{u}\ \Rightarrow\ z=\frac{u}{R\omega}y$$

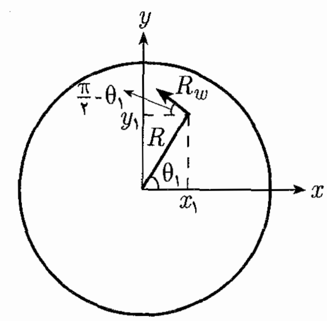
ب‌ـ۱) ابتدا مکان قطره‌ای که در زمان t_1 از آبپاش جدا شده است را در زمان T به‌دست می‌آوریم. قطره در زمان t_1 در مختصات $A:(x_1,y_1,0)$ قرار داشته است (شکل ۱ـ۲۱۹).

$$\theta_1=\omega t_1$$

$$x_{\text{۱}} = R\cos\theta_{\text{۱}} \;\Rightarrow\; x_{\text{۱}} = R\cos(\omega t_{\text{۱}})$$

$$y_{\text{۱}} = R\sin\theta_{\text{۱}} \;\Rightarrow\; y_{\text{۱}} = R\sin(\omega t_{\text{۱}})$$

مؤلفه‌های سرعت قطره با توجه به شکل (۱ـ۲۱۹) عبارت است از:



شکل ۱-۲۱۹

$$v_x = -R\omega\cos(\frac{\pi}{\text{۲}} - \theta_{\text{۱}}) \;\Rightarrow\; v_x = -R\omega\sin(\omega t_{\text{۱}})$$

$$v_y = -R\omega\sin(\frac{\pi}{\text{۲}} - \theta_{\text{۱}}) \;\Rightarrow\; v_y = R\omega\cos(\omega t_{\text{۱}})$$

$$v_z = u$$

با توجه به این‌که شتاب قطره پس از جدا شدن از آبپاش صفر است، داریم:

$$x = x_{\text{۱}} + v_x t \;\Rightarrow\; x = R\cos(\omega t_{\text{۱}}) - R\omega(T - t_{\text{۱}})\sin(\omega t_{\text{۱}}) \qquad (\text{۱})$$

$$y = y_{\text{۱}} + v_y t \;\Rightarrow\; y = R\sin(\omega t_{\text{۱}}) - R\omega(T - t_{\text{۱}})\cos(\omega t_{\text{۱}}) \qquad (\text{۲})$$

$$z = z_{\text{۱}} + v_z t \;\Rightarrow\; z = u(T - t_{\text{۱}}) \qquad (\text{۳})$$

حال $t_{\text{۱}}$ را از رابطه (۳) یافته و در رابطه‌های (۱) و (۲) جایگذاری می‌کنیم. پس

$$t_{\text{۱}} = T - \frac{z}{u}$$

بنابراین

$$x = R\cos\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - R\omega(\frac{z}{u})\sin\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) \qquad (\text{۴})$$

$$y = R\sin\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - R\omega(\frac{z}{u})\cos\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) \qquad (\text{۵})$$

ب ـ۲) ابتدا رابطه اولیه $\tan\phi = \frac{y}{x}$ را با استفاده از رابطه‌های (۴) و (۵) به‌دست می‌آوریم. پس

$$\tan\phi = \frac{R\sin\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - R\omega(\frac{z}{u})\cos\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right)}{R\cos\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - R\omega(\frac{z}{u})\sin\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right)}$$

صورت و مخرج سمت راست رابطه فوق را بر $\cos\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right)$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین

$$\tan\phi = \frac{\tan\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - \omega(\frac{z}{u})}{\text{۱} - \omega(\frac{z}{u})\tan\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right)}$$

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{Arctan}\left[\frac{\tan\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right) - \omega(\frac{z}{u})}{\text{۱} - \omega(\frac{z}{u})\tan\left(\omega(T - \frac{z}{u})\right)}\right]$$

با در نظر گرفتن $\tan\alpha = \frac{\omega z}{u}$ داریم:

$$\phi = \operatorname{Arctan}[\tan\left(\omega(T - \frac{z}{u}) - \alpha\right)]$$

$$\Rightarrow \ \phi = \omega(T - \frac{z}{u}) - \alpha$$
$$\Rightarrow \ \phi = \omega(T - \frac{z}{u}) - \ \mathrm{Arctan}(\omega\frac{z}{u})$$

به ازای z بزرگ، رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

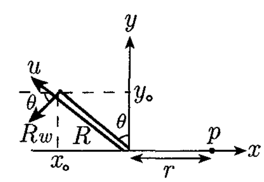
$$\phi = \omega(T - \frac{z}{u}) - \frac{\pi}{۲} \qquad (۶)$$

توجه کنید که با وجود بزرگ بودن z، $\frac{z}{u} = t_۱ < T$ است.

ب ـ ۳) اگر در رابطه (۶) به جای ϕ مقدار ۲π را قرار دهیم، مقدار z به‌دست می‌آید پس

$$۲\pi = \omega(T - \frac{z}{u}) - \frac{\pi}{۲} \ \Rightarrow \ z = u(T - \frac{۵\pi}{۲\omega})$$

۹۴ حالتی مانند شکل (۱ـ۲۲۰) را در نظر می‌گیریم و θای را که به ازای آن قطره آب به نقطه P می‌رسد را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۱-۲۲۰

بر اساس شکل (۱ـ۲۲۰)، مختصات اولیه قطره و مؤلفه‌های سرعت آن عبارتند از:

$$x_\circ = -R\sin\theta \quad , \quad y_\circ = R\cos\theta$$
$$v_x = -R\omega\cos\theta - u\sin\theta \quad , \quad v_y = u\cos\theta - R\omega\sin\theta$$

قطره باید به مختصات $P : (r, \circ)$ برسد. با توجه به این‌که شتاب قطره صفر است، داریم:

$$x = x_\circ + v_x t \ \Rightarrow \ r = -R\sin\theta - (R\omega\cos\theta + u\sin\theta)t \qquad (۱)$$
$$y = y_\circ + v_y t \ \Rightarrow \ \circ = R\cos\theta + (u\omega\cos\theta - R\omega\sin\theta)t \qquad (۲)$$

با حذف t از رابطه‌های (۱) و (۲)، رابطه‌ای برای θ می‌یابیم. پس

$$\frac{r + R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{R\omega\cos\theta + u\sin\theta}{u\cos\theta - R\omega\sin\theta}$$
$$\Rightarrow \ ru\cos\theta - rR\omega\sin\theta = R^۲\omega$$
$$\Rightarrow \ R\omega\sin\theta = u\cos\theta - \frac{R^۲\omega}{r}$$

دو طرف معادله فوق را به توان ۲ می‌رسانیم. پس

$$R^۲\omega^۲\sin^۲\theta = u^۲\cos^۲\theta + \frac{R^۴\omega^۲}{r^۲} - ۲u\frac{R^۲\omega}{r}\cos\theta_۱$$
$$\Rightarrow \ R^۲\omega^۲(۱ - \cos^۲\theta) = u^۲\cos^۲\theta + \frac{R^۴\omega^۲}{r^۲} - ۲u\frac{R^۲\omega}{r}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \ (u^۲ + R^۲\omega^۲)\cos^۲\theta - ۲u\frac{R^۲\omega}{r}\cos\theta + \frac{R^۴\omega^۲}{r^۲} - R^۲\omega^۲ = \circ$$
$$\Rightarrow \ \cos\theta = \frac{u\frac{R^۲\omega}{r} \pm \sqrt{(uR^۲\frac{\omega}{r})^۲ - (R^۴\frac{\omega^۲}{r^۲} - R^۲\omega^۲)(u^۲ + R^۲\omega^۲)}}{(u^۲ + R^۲\omega^۲)}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{uR^2\omega - \sqrt{(r^2R^4\omega^4 + r^2R^2\omega^2u^2 - R^6\omega^4)}}{r(u^2+R^2\omega^2)} \qquad (3)$$

که t بر اساس رابطه (۲) برابر است با:

$$t_1 = \frac{R\cos\theta}{R\omega\sin\theta - u\cos\theta} \qquad (4)$$

به ازای $u \gg R\omega$، $\cos\theta_1$ را از رابطه (۳) تا مرتبه اول نسبت به $\frac{R\omega}{u}$ بسط می‌دهیم. پس

$$\cos\theta_1 = \frac{uR^2\omega - \sqrt{r^2R^2\omega^2u^2(1+R^2\frac{\omega^2}{u^2}) - R^6\omega^4}}{ru^2(1+R^2\frac{\omega^2}{u^2})}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{uR^2\omega - rR\omega u}{ru^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{R^2\omega - rR\omega}{u} = (R-r)\frac{R\omega}{u}$$

$$\sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} \Rightarrow \sin\theta_1 = \sqrt{1-(R-r)^2(\frac{R\omega}{u})^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = -1$$

چون باید $\frac{3\pi}{2} > \theta_1 > \pi$ باید تا قطره به P برسد، $\sin\theta_1 = -1$ است.
در نتیجه برای زمان، از رابطه (۴) داریم:

$$t_1 = \frac{R(R-r)\frac{R\omega}{u}}{-R\omega - (R-r)R\omega} \Rightarrow t_1 = \frac{R(R-r)/u}{-1-(R-r)}$$

به ازای $u \ll R\omega$، $\cos\theta_1$ را از رابطه (۳) تا مرتبه صفر نسبت به $\frac{u}{R\omega}$ بسط می‌دهیم. پس

$$\cos\theta_1 = \frac{R^3\omega^2 - rR^2\omega^2}{rR^2\omega^2} \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{R-r}{r}$$

$$\sin\theta_1 = \sqrt{1-\cos^2\theta_1} \Rightarrow \sin\theta_1 = \sqrt{1-(\frac{R-r}{r})^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2rR-R^2}}{r}$$

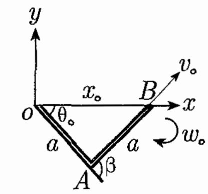
در نتیجه برای زمان، از رابطه (۴) داریم:

$$t_1 = \frac{\cos\theta}{\omega\sin\theta} \Rightarrow t_1 = \frac{(R-r)/r}{\omega\sqrt{2rR-R^2}/r}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{R-r}{\omega\sqrt{2rR-R^2}}$$

۹۵ الف) با توجه به این‌که پس از خروج قطره آب از سر فواره، شتاب آن صفر است. معادله مسیر قطره آب یک خط صاف خواهد بود. بنابراین کافی است که مختصات اولیه قطره آب، هنگام خروج از

فواره و جهت سرعت آن را به‌دست آوریم. در شکل (۱ـ۲۲۱) سیستم را در زمان صفر نشان داده‌ایم.



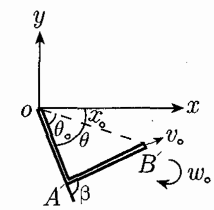
شکل ۱-۲۲۱

چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، $\theta_0 = \frac{\beta}{2}$ می‌باشد و بر اساس قانون کسینوس‌ها در شکل (۱ـ۲۲۱) داریم:

$$x_0 = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos\beta}$$

$$\theta = \omega_0 T + \theta_0 \Rightarrow \theta = \frac{v_0 \tan(\beta/2)}{(2a)} T + \frac{\beta}{2}$$

حال مختصات $B' : (x, y)$ را به‌دست می‌آوریم.



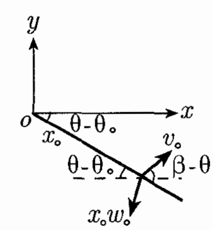
شکل ۱-۲۲۲

$$x_1 = x_0 \cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow x = x_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2a^2(1 + \cos\beta)} \cos(\omega T) \qquad (1)$$

$$y_1 = -x_0 \sin(\theta - \theta_0) \Rightarrow y_1 = -\sqrt{2a^2(1 + \cos\beta)} \sin(\omega T) \qquad (2)$$

در شکل (۱ـ۲۲۳) سرعت‌های v_0 و $x_0\omega_0$ قطره آب را نشان داده‌ایم.



شکل ۱-۲۲۳

$$v_x = v_0 \cos(\beta - \theta) - x_0\omega_0 \sin(\theta - \theta_0) \qquad (3)$$

$$v_y = v_0 \sin(\beta - \theta) - x_0\omega_0 \cos(\theta - \theta_0) \qquad (4)$$

بنابراین معادله خط مسیر قطره آب عبارت است از:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \frac{(y + \sqrt{2a^2(1 + \cos\beta)} \sin(\omega T))}{(x - \sqrt{2a^2(1 + \cos\beta)} \cos(\omega T))}$$

$$= \frac{v_0 \sin(\beta - \theta) - x_0\omega_0 \cos(\theta - \theta_0)}{v_0 \cos(\beta - \theta) - x_0\omega_0 \sin(\theta - \theta_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{(y + x_0 \sin(\omega_0 T))}{(x - x_0 \cos(\omega_0 T))} = \frac{v_0 \sin(\frac{\beta}{2} - \omega_0 T) - x_0\omega_0 \cos(\omega_0 T)}{v_0 \cos(\frac{\beta}{2} - \omega_0 T) - x_0\omega_0 \sin(\omega_0 T)} \qquad (1)$$

ب) ابتدا مکان قطره‌ای که در زمان t_1 از فواره خارج شده است را در زمان T به‌دست می‌آوریم. بنابر رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$$x = x_1 + v_x t$$

$$\Rightarrow x = x_0 \cos(\omega_0 t_1) + [v_0 \cos(\frac{\beta}{2} - \omega_0 t_1) - x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t_1)](T - t_1)$$

$$y = y_1 + v_y t$$

$$\Rightarrow y = -x_0 \sin(\omega_0 t_1) + [v_0 \sin(\frac{\beta}{2} - \omega_0 t_1) - x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t_1)](T - t_1)$$

۹۶ مفهوم شرط گفته شده در صورت سؤال این است که وقتی توپ به زمین می‌رسد، فاصله افقی آن از نقطه پرتاب در محدوده $R < x < R + d$ باشد. همین‌طور برای این‌که توپ بتواند به طرف دیگر تور برسد، باید ارتفاع آن به ازای $x = R$ بیشتر از h باشد.

ابتدا شرط اول را بررسی می‌کنیم. رابطه‌های حرکت را در دو جهت x و y می‌نویسیم. (مبدأ مختصات را در محل پرتاب گذاشته و دستگاه مختصات دکارتی را به‌صورت معمول در نظر می‌گیریم.) پس

$$\text{حرکت در جهت } y : y_\circ = \circ \quad , \quad v_{\circ y} = v_\circ \sin\theta$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t + y_\circ$$

$$\Rightarrow -h = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ \sin\theta t + \circ$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_\circ \sin\theta + \sqrt{v_\circ^۲ \sin^۲\theta + ۲gh}}{g}$$

$$\text{حرکت در جهت } x : x_\circ = \circ \quad , \quad v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta$$

$$x = v_{\circ x}t + x_\circ \Rightarrow x = v_\circ \cos\theta t$$

$$\Rightarrow x = v_\circ \cos\theta \frac{v_\circ \sin\theta + \sqrt{v_\circ^۲ \sin^۲\theta + ۲gh}}{g}$$

حال x را در نامساوی $R < x < R + d$ صدق می‌دهیم. پس

$$R < v_\circ \cos\theta \frac{v_\circ \sin\theta + \sqrt{v_\circ^۲ \sin^۲\theta + ۲gh}}{g} < R + d \qquad (۱)$$

حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم.

$$\text{حرکت در جهت } y : y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_{\circ y}t$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}g\left(\frac{R}{v_\circ \cos\theta}\right)^۲ + v_\circ \sin\theta t$$

$$\text{حرکت در جهت } x : x = v_{\circ x}t \Rightarrow R = v_\circ \cos\theta t \Rightarrow t = \frac{R}{v_\circ \cos\theta}$$

حال y را در نامساوی $y > h$ صدق می‌دهیم. پس

$$-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{R}{v_\circ \cos\theta}\right)^۲ + \tan\theta > h \qquad (۲)$$

نامساوی (۲) بیانگر شرط لازم بین d، h، R و θ برای وجود محدوده سرعت موردنظر است. حال نامساوی (۱) را به دو نامساوی چپ و راست تبدیل می‌کنیم تا محدوده موردنظر را به‌دست آوریم.

پس

$$\text{نامساوی چپ} : (Rg - v_\circ^۲ \sin\theta\cos\theta) < v_\circ \cos\theta\sqrt{v_\circ^۲ \sin^۲\theta + ۲gh}$$

دو طرف نامساوی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow R^۲g - ۲Rv_\circ^۲ \sin\theta\cos\theta - ۲hv_\circ^۲ \cos^۲\theta < \circ \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow\ R^{2}g < v_{\circ}^{2}(R\sin 2\theta + 2h\cos^{2}\theta)$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{R^{2}g}{R\sin 2\theta + 2h\cos^{2}\theta}} < v_{\circ}$$

نامساوی راست : $v_{\circ}\cos\theta\sqrt{v_{\circ}^{2}\sin^{2}\theta + 2gh}$

$$< \Big((R+d)g - v_{\circ}^{2}\sin\theta\cos\theta\Big)$$

دو طرف نامساوی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow\ -(R+d)^{2}g + 2(R+d)v_{\circ}^{2}\sin\theta\cos\theta + 2ghv_{\circ}^{2}\cos^{2}\theta < \circ \qquad (2)$$

دو طرف نامساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم. پس

$$v_{\circ}^{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{(d+2R)}{2}g < \circ\ \Rightarrow\ v_{\circ} < \sqrt{\frac{(d+2R)g}{\sin 2\theta}}$$

در نتیجه محدوده $v_{\circ}$ عبارتست از:

$$\sqrt{\frac{R^{2}g}{R\sin 2\theta + 2h\cos^{2}\theta}} < v_{\circ} < \sqrt{\frac{(d+2R)g}{\sin 2\theta}}$$

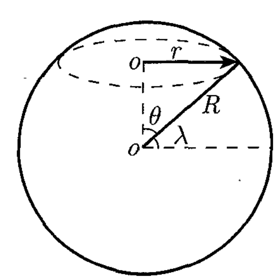
۹۷ الف) واضح است که اگر هواپیما ساکن باشد، T و τ برابرند. بنابراین اختلاف زمانی بین T و τ ناشی از چرخش زمین است. دایره‌ای که هواپیما روی آن به طرف شرق یا غرب حرکت می‌کند، در عرض جغرافیای λ قرار دارد. (شکل ۱ـ۲۲۴)

بنابراین

$$40000 = 2\pi R\ \Rightarrow\ R = 6366\text{km}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

$$r = R\sin\theta\ \Rightarrow\ r = R\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)\ \Rightarrow\ r = R\cos\lambda$$



شکل ۱-۲۲۴

با توجه به این‌که زمین به طرف شرق می‌گردد، مسأله را در دو حالت حرکت به سمت شرق و حرکت به سمت غرب بررسی می‌کنیم. در این مسأله می‌توان از اصل برهم‌نهی استفاده کرد.

ابتدا حرکت به سمت شرق را بررسی می‌کنیم. بنابر اصل برهم‌نهی، فرض می‌کنیم که ابتدا زمین ساکن است و هواپیما مسافت s را می‌پیماید که معادل با گردش به اندازه زاویه ϕ بر روی دایره موردنظر است. اگر مسافت طی شده را با l نشان دهیم، داریم:

$$l = vT\ ,\ \ \phi_{1} = \frac{l}{r}\ \Rightarrow\ \phi_{1} = \frac{vT}{r}$$

$$\Rightarrow \phi_{1} = \frac{vT}{R\cos\lambda}\ \Rightarrow\ \phi_{1} = \frac{\frac{900}{3/6}T}{6366\times 1000\cos\lambda}\ \Rightarrow\ \phi_{1} = \frac{3/9\times 10^{-5}T}{\cos\lambda}$$

سپس هواپیما را ساکن در نظرگرفته و زمین را به اندازه $\phi_{\circ}$ می‌چرخانیم، به‌صورتی که

$$\phi_{\circ} = \omega_{e}T\ \Rightarrow\ \phi_{\circ} = \frac{2\pi}{d}T$$

این دو حرکت هم‌زمان اتفاق می‌افتند، در نتیجه تغییر طول جغرافیایی که بیانگر زمان τ خواهد بود، عبارت است از:

$$\phi = \phi_۱ - \phi_۰ \Rightarrow \phi = \frac{۳/۹ \times ۱۰^{-۵} T}{\cos \lambda} - ۲\pi(\frac{T}{d})$$

از طرف دیگر زاویه ۲π معادل با زمان d است. پس

$$\tau = \frac{\phi}{۲\pi} d \Rightarrow \frac{\tau}{d} = \frac{\phi}{۲\pi} \Rightarrow \frac{\tau}{d} = \frac{۳/۹ \times ۱۰^{-۵} T}{۲\pi \cos \lambda} - (\frac{T}{d}) \qquad (۱)$$

در حالتی که هواپیما به سمت غرب پرواز کند، محاسبات مانند حالت قبل است، با این تفاوت که زاویه کل $\phi = \phi_۱ + \phi_۰$ است.

پس

$$\phi = \frac{۳/۹ \times ۱۰^{-۵} T}{\cos \lambda} + ۲\pi(\frac{T}{d})$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{d} = \frac{۳/۹ \times ۱۰^{-۵} T}{۲\pi \cos \lambda} + (\frac{T}{d}) \qquad (۲)$$

بنابراین رابطه‌های (۱) و (۲) را با داخل کردن s می‌توانیم به یک معادله تبدیل کنیم.

$$\frac{\tau}{d} = \frac{۳/۹ \times ۱۰^{-۵} T}{۲\pi \cos \lambda} - s(\frac{T}{d})$$

۲

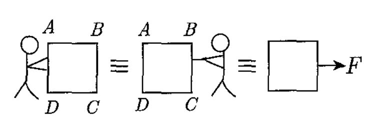
نیروشناسی (دینامیک)

در فصل گذشته آموختیم که چگونه حرکت یک جسم را بدون توجه به عوامل ایجاد کننده‌ی حرکت بررسی کنیم و توانستیم با تعریف کمیت‌هایی چون مکان، زمان، جابه‌جایی، سرعت و شتاب حرکت یک جسم را به زبان ریاضی بیان و پیش‌بینی کنیم. در این فصل با عوامل ایجاد کننده‌ی تحرک در اجسام آشنا می‌شویم و خواهیم دید که این عوامل چه تأثیری در مشخصات سینماتیکی یک جسم خواهد داشت.

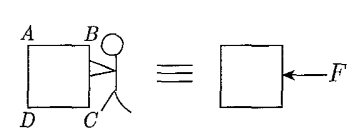
ایزاک نیوتون

حتماً تا به حال نام ایزاک نیوتون را زیاد به گوش خود شنیده‌اید. نیوتون یکی از بزرگترین دانشمندانی است که تاریخ بشریت به خود دیده است و در واقع او بنیان‌گذار علم فیزیک کلاسیک و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. نیوتون فکری باز و روحیه‌ای کنجکاو داشت و با نگاه به پدیده‌های طبیعی همواره به دنبال علت وقوع این پدیده‌ها و چگونگی بیان آنها به زبان ریاضی بود و به این دلیل بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال را پایه‌گذاری کرد و تحولی در علم ریاضی و فیزیک ایجاد نمود.

نیروها



شکل ۲-۱



شکل ۲-۲

همه‌ی ما در هر لحظه از زندگی خود تحت تأثیر نیروهای مختلفی قرار داریم و به اجسام مختلفی نیرو اعمال می‌کنیم. نیوتون این نیروها را شناخت و آن‌ها را به زبان ریاضی بیان کرد و چگونگی تأثیر آنها بر مشخصات سینماتیکی حرکت یک جسم را توضیح داد. در واقع نیروها همان عوامل ایجاد کننده‌ی تحرک در اجسام هستند. به شکل (۲ـ۱) دقت کنید، اگر شما یک جعبه‌ی ساکن را که روی زمین قرار دارد از طریق وجه AD به سمت راست هل دهید باعث ایجاد سرعت در جعبه به سمت راست خواهید شد. در این فرآیندشما به جعبه نیرویی به سمت راست وارد کرده‌اید. حال اگر شما همان جعبه را از سمت مقابل آن یعنی وجه BC به سمت راست بکشید باز هم همان حرکت در جعبه ایجاد خواهد شد و در این حالت نیز نیرویی به سمت راست به جعبه وارد شده است. تنها تفاوت بین این دو فرآیند نحوه‌ی اعمال نیرو است که تأثیری بر چگونگی حرکت

جعبه ندارد. حال اگر شما مانند شکل (۲ـ۲) جعبه را از طریق وجه BC به سمت چپ هل دهید مشاهده می‌کنید که جعبه نیز به سمت چپ حرکت خواهد کرد و در این حالت شما نیرویی به سمت چپ به جعبه وارد کرده‌اید.

با توجه به این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که نیرو یک کمیت برداری است و مانند سرعت و شتاب علاوه بر مقدار، جهت اعمال آن نیز در حرکت جسم مؤثر است. حال اگر جعبه با سرعت ثابت یا شتاب ثابت و یا حتی شتاب متغیر به حرکت خود ادامه دهد، شما می‌توانید با استفاده از روابط سینماتیکی حرکت آن را تحلیل کنید. اما چه تضمینی وجود دارد که جعبه با سرعت و یا شتاب ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. این سؤال از جمله سؤالاتی است که چگونگی اعمال نیروها به جعبه پاسخ آن را روشن می‌کند و بدون آشنایی با علم نیروها نمی‌توان به آن پاسخ داد.

با توجه به توضیحاتی که داده شد نتیجه می‌شود که نیرو یک کمیت برداری است و در آن جهت و اندازه‌ی نیرو، هر دو مؤثر می‌باشند، در واقع این کمیت فیزیکی عامل تغییر در وضعیت حرکتی جسم است. در فیزیک این کمیت را با نماد $\vec{F}$ نمایش می‌دهند.

قوانین نیوتون

نیوتون نخستین کسی بود که پدیده‌های طبیعی را به صورت گسترده به زبان ریاضی بیان کرد و به وسیله‌ی شرح قوانین سه‌گانه‌ی خود چگونگی ارتباط نیروها با حرکت اجسام را توضیح داد. اکنون به بیان این قوانین می‌پردازیم.

قانون اول نیوتون

نیوتون در قانون اول خود می‌گوید یک جسم در حال حرکت با سرعت ثابت تا زمانی که تحت اثر نیروی خالصی قرار نگیرد (یعنی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد) با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد. واضح است که یک جسم ساکن نیز سرعتی ثابت و برابر با صفر دارد و تا زمانی که تحت اثر نیروی خالصی قرار نگیرد حالت سکون خود را حفظ می‌کند. نکته‌ی مهم اینجاست که وقتی صحبت از ثابت بودن سرعت می‌شود باید توجه داشت که سرعت یک کمیت برداری است که از دو مشخصه‌ی جهت و اندازه تشکیل شده است و ثابت بودن سرعت به معنای ثابت بودن هر دو مشخصه‌ی جهت و اندازه است. برای مثال حرکت خودرویی که با سرعت $10\,\mathrm{m/s}$ در یک مسیر دایروی می‌چرخد، حرکتی با سرعت متغیر است زیرا جهت سرعت در هر لحظه در حال تغییر است در نتیجه برآیند نیروهای وارد بر خودرو نمی‌تواند صفر باشد. برآیند نیروهای وارد بر یک جسم یعنی جمع برداری تمام نیروهای وارد بر جسم، برای مثال وقتی شما و دوستتان یک جعبه را از دو سمت مقابل و با یک قدرت هل دهید مشاهده می‌کنید که جعبه حالت سکون خود را از دست نمی‌دهد زیرا دو نیروی هم اندازه ولی خلاف جهت به آن وارد شده است که جمع برداری آنها صفر می‌شود یعنی نیروی خالصی به جعبه وارد نمی‌شود.

قانون دوم نیوتون

قانون دوم نیوتون بیان کننده‌ی رابطه‌ی کلی بین نیروها و کمیت‌های سینماتیکی به صورت ریاضی می‌باشد. در قانون اول بیان شد که در صورت عدم وجود نیروی خالص سرعت حرکت جسم

ثابت می‌ماند. نیوتون مشاهده کرد که به محض اعمال نیرو به جسم، سرعت حرکت جسم دچار تغییر می‌شود و هر چند نیرو بزرگتر باشد، تغییر در سرعت نیز بزرگتر و مشهودتر است. همچنین مشاهدات نیوتون نشان داد اگر یک نیروی یکسان را به دو جسم با جرم‌های متفاوت وارد کنیم، جسمی که جرم کمتری دارد دچار تغییرات بیشتری در سرعت خود خواهد بود. نیوتون به وسیله‌ی این مشاهدات تجربی قانون دوم خود را به شکل زیر بیان کرد:

برآیند نیروهای وارد بر یک جسم شتابی در آن جسم ایجاد می‌کند که با بردار برآیند نیروها نسبت مستقیم و با جرم جسم نسبت معکوس دارد.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

همان طور که رابطه بیان می‌کند نیرو حاصل ضرب یک کمیت اسکالر (جرم) در یک کمیت برداری (شتاب) است که از نظر ریاضی نیز بردار بودن نیرو را تأیید می‌کند.

با توجه به رابطه‌ی نیوتون می‌توان واحد نیرو را به شکل زیر تعیین کرد:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \ : \ (\mathrm{kg} \times \mathrm{m/s^۲}) \Rightarrow \text{واحد نیرو} = \mathrm{kg.m/s^۲}$$

به احترام نیوتون واحد نیرو را با N (نیوتون) نیز نمایش می‌دهند: $۱\mathrm{N} = ۱\frac{\mathrm{kg.m}}{\mathrm{s^۲}}$

یک نیوتون نیرویی است که به جسمی به جرم $۱\mathrm{kg}$ شتابی برابر با $۱\mathrm{m/s^۲}$ می‌بخشد.

رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی تجربی است که نیوتون به وسیله‌ی آزمایش‌های متعدد و شهود بی‌نظیر خود آن را به‌دست آورد. این رابطه پایه‌ی تحلیل مسائل دینامیکی است.

جرم و اینرسی: جرم یا اینرسی یا لختی یک جسم که آن را با m نمایش می‌دهیم، خاصیتی است که میزان مقاومت جسم در برابر تغییر وضعیت حرکتی یا تغییر سرعت را نشان می‌دهد. برای مثال یک خودروی ساکن را با اعمال نیروی بسیار زیادی می‌توان از حالت سکون خارج کرد و به سرعت‌های بالاتر رساند اما یک توپ فوتبال را می‌توان به وسیله‌ی نیروی بسیار کمتری مانند ضربه‌ی پا از حال سکون خارج کرد و به آن سرعت بخشید. نیوتون نیز در قانون دوم خود چگونگی تأثیر جرم یا اینرسی یک جسم را بر کمیت‌های سینماتیکی آن جسم نشان می‌دهد. به‌طور کلی در طبیعت اجسام تمایل دارند حرکت یکنواخت خود را حفظ کنند. حرکت یکنواخت بدین معناست که بردار سرعت هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت ثابت بماند که حالت سکون نیز نوعی حرکت یکنواخت با $\vec{V} = ۰$ است. به این تمایل، **لختی** گفته می‌شود.

قانون سوم نیوتون

طبق قانون سوم نیوتون هنگامی که جسم A نیرویی مانند $\vec{F}_۱$ را به جسم B وارد می‌کند، جسم B نیز نیرویی به همان اندازه ولی در خلاف جهت $\vec{F}_۱$ به جسم A وارد می‌کند. (شکل ۲ـ۳)

$$\boxed{A}\boxed{B} : \boxed{A} \longleftarrow -\vec{F}_۱ \quad \vec{F}_۱ \longrightarrow \boxed{B}$$

شکل ۲-۳

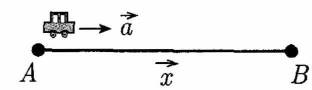
این قانون به قانون عمل و عکس‌العمل معروف است که نیوتون به وسیله‌ی تفکر عمیق خود با مشاهده به پدیده‌های طبیعی به وجود آن پی برد. برای مثال هنگامی که شما دوستتان را به سمت جلو هل می‌دهید در واقع به او نیرویی به سمت جلو وارد می‌کنید و مشاهده می‌کنید که خودتان به سمت عقب هل داده می‌شوید و این به دلیل نیروی عکس‌العملی است که از طرف دوستتان و

به سمت عقب به شما وارد می‌شود یا هنگامی که به دیوار مشت می‌زنید دیوار نیرویی به دست شما وارد می‌کند که همان عکس‌العمل نیروی شماست و همین نیروست که باعث ایجاد درد در دست شما می‌شود.

اکنون به وسیله‌ی دو مثال قوانین نیوتون را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

مثال ۱

فرض کنید می‌خواهید جعبه‌ای به جرم m_1 را که حاوی اسناد بسیار مهمی است در مدت زمانی کمتر از t ثانیه از مبدأ A به مقصد B برسانید و همچنین فرض کنید موتور خودروی شما در تمام طول مسیر AB نیرویی ثابت و برابر با F_1 به خودرو وارد می‌کند ($\vec{F_1}$ در جهت $\overrightarrow{AB}$ است) و هیچ نیروی دیگری به خودرو وارد نمی‌شود. کمترین مقدار F_1 را برای اینکه این جابه‌جایی در زمان خواسته شده صورت گیرد بر حسب دیگر پارامترهای مسئله بیابید. (جرم خودرو: m_2، جرم شما: m_3)



شکل ۲-۴

حل. ابتدا باید حداقل شتاب لازم را برای وقوع این جابه‌جایی بیابیم:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} \;\;,\;\; \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V}_0 t$$

حداقل شتاب لازم برای جابه‌جایی:

$$\vec{V}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{2\vec{x}}{t^2}$$
$$\Rightarrow\; \vec{a} \geq \frac{2\vec{x}}{t^2}$$
$$\sum \vec{F} = \vec{F_1} = m\vec{a}$$

از آنجایی که نیروی F_1 باعث ایجاد شتاب در هر سه جرم m_1، m_2 و m_3 شده است پس باید نوشت:

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

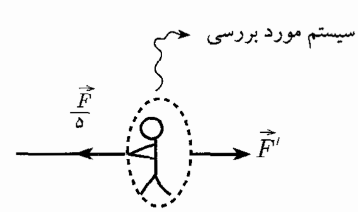
حداقل نیروی لازم:

$$\Rightarrow \vec{F_1} = (m_1 + m_2 + m_3)(\frac{2\vec{x}}{t^2})$$
$$\Rightarrow \vec{F_1} \geq (m_1 + m_2 + m_3)(\frac{2\vec{x}}{t^2})$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید واحد نیرویی $\vec{F_1}$ نیز به شکل $\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}$ به‌دست آمده است که همان واحد نیرو است.

مثال ۲

در یک مسابقه‌ی طناب‌کشی دو گروه ۵ نفره در حال رقابت با یکدیگر هستند اگر طناب تحت اثر نیروی کششی بیشتر از F قرار گیرد پاره می‌شود. حال اگر تمام ۱۰ نفر شرکت کننده، جرمی برابر با m داشته باشند و همه نیرویی مساوی به طناب وارد کنند درست در لحظه‌ی پاره شدن طناب شتاب نسبی افراد گروه اول نسبت به افراد گروه دوم چقدر است؟



شکل ۲-۵

حل. در لحظه‌ی پاره شدن، طناب از دو طرف توسط نیروی F کشیده می‌شود پس نیروی وارده توسط هر نفر برابر است با:

$$\vec{F_1} = \frac{\vec{F}}{5}$$

حال در هنگام مسابقه و کشیدن طناب شرکت کنندگان در حال سکون هستند و شتابی ندارند. این بدین معناست که برآیند نیروهای وارد بر هر شرکت کننده برابر با صفر است و برای درک بهتر، نیروهای وارد بر هر شخص را روی شکل (۲ـ۵) نشان می‌دهیم. (دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر هر شخص را رسم می‌کنیم)

چون هر شخص طناب را با نیرویی برابر با $\frac{F}{5}$ می‌کشد، طناب نیز نیروی عکس‌العملی برابر با $\frac{F}{5}$ و در خلاف جهت به شخص وارد می‌کند مانند شکل (۲ـ۵)

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F'} + \frac{\vec{F}}{5} = 0 \Rightarrow \vec{F'} = -\frac{\vec{F}}{5} \Rightarrow |\vec{F'}| = |\frac{\vec{F}}{5}|$$

برای آنکه برآیند نیروهای وارد بر هر شخص برابر با صفر شود باید یک نیروی F' برابر با $\frac{F}{5}$ و در خلاف جهت آن به شخص وارد شود. منشأ این نیرو اصطکاکی است که در ادامه‌ی فصل با آن آشنا می‌شویم. هنگامی که طناب پاره می‌شود از حالت کشش خارج می‌شود و نیروی $\frac{F}{5}$ از بین می‌رود و تنها نیروی F' به اشخاص وارد می‌شود:

$$\sum \vec{F} = \vec{F'} = -\frac{\vec{F}}{5} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\vec{F}}{5m}$$

شتاب $\vec{a}$، شتابی است که هر شخص در لحظه‌ی پاره شدن طناب دارا خواهد بود و با توجه به اینکه جهت نیروی $\vec{F}$ برای دو گروه اول و دوم که در دو طرف طناب قرار دارند مخالف یکدیگر است پس شتاب آنها نیز خلاف جهت هم خواهد بود و شتابی نسبی آنها برابر است با:

$$\overset{\text{گروه اول}}{\vec{F_1}} = -\overset{\text{گروه دوم}}{\vec{F_2}} \Rightarrow \vec{a_1} = -\vec{a_2}$$

شتاب گروه اول نسبت به گروه دوم:

$$\vec{a}_{12} = \vec{a_1} - \vec{a_2} = 2\vec{a_1} = -\frac{2\vec{F_1}}{5m}$$

انواع نیروها

نیروها بر اساس نحوه‌ی اعمالشان به دو دسته‌ی عمده تقسیم می‌شوند:

نیروهای تماسی

این نوع نیروها بر اثر تماس بین دو جسم بوجود می‌آیند و به محض قطع شدن تماس بین دو جسم از بین می‌روند. ضربه زدن، کشیدن، فشردن و بسیاری دیگر از نیروها از این نوع هستند. اصولاً دو جسم که در تماس با یکدیگر هستند به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند هر چند که این نیرو اندک باشد و تا زمانی که دو جسم در آستانه‌ی جدایی قرار نگیرند نیروی بین آنها برابر با صفر نخواهد شد.

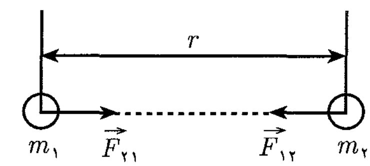
نیروهای غیرتماسی

این دسته از نیروها ماهیتاً با نیروهای تماسی متفاوتند و عامل ایجاد کننده‌ی آنها تماس بین دو جسم نیست بلکه برخی خصوصیات طبیعی مواد است مانند نیروی جاذبه‌ی بین دو جسم یا نیروی جاذبه‌ی بین آهن و آهن‌ربا که ماهیت و دلیل وجود این نیروها بسیار پرسش برانگیز است و امروزه نیز تلاش‌های بسیاری برای حل بیشتر این موضوعات صورت می‌گیرد.

اکنون به شناخت برخی از نیروهای بسیار پرکاربرد و مورد استفاده می‌پردازیم:

نیروی گرانش و قانون گرانش نیوتون

حتماً تا به حال داستان افتادن سیب از درخت و کشف قانون گرانش توسط نیوتون را شنیده‌اید. نیروی گرانش بین دو جسم به معنای نیرویی است که این دو جسم را به سمت یکدیگر جذب می‌کند بنابراین جهت این نیرو برای هر جسم هم‌راستا با خط واصل بین دو جسم و به سمت جسم دیگر خواهد بود (شکل ۲_۶).



شکل ۲-۶

اینکه هر دو جسم این نیرو را به یکدیگر وارد می‌کنند خود تأییدی بر قانون سوم نیوتون یعنی قانون عمل و عکس‌العمل است. نیروی گرانش یک نیروی غیرتماسی است و ماهیت آن امروزه نیز برای دانشمندان مبهم است. شواهد بسیار زیادی وجود نیروی گرانش را تأیید می‌کند. مثلاً جاری شدن رودخانه‌های کوهستانی به سمت پایین به دلیل وجود نیروی گرانش بین زمین و آب این رودخانه‌هاست و یا اینکه ما می‌توانیم روی زمین حرکت کنیم بدون آنکه در فضا معلق شویم به دلیل وجود نیروی گرانشی است که زمین به ما وارد می‌کند و یا جذر و مد آب دریاها به دلیل نیروی جاذبه‌ایست که ماه به آب دریا وارد می‌کند و باعث بوجود آمدن اختلاف ارتفاع در سطح دریا می‌شود. نیوتون ابتدا به وجود این نیرو پی برد و نشان داد که دو جسم همواره به یکدیگر نیروی جاذبه‌ی گرانشی وارد می‌کنند و سپس به وسیله‌ی آزمایش و مشاهدات خود رابطه‌ی این نیرو را به زبان ریاضی بیان کرد. او در آزمایشگاه خود مشاهده کرد هنگامی که جرم هر یک از دو جسم تغییر می‌کند مقدار نیروی گرانش نیز به همان نسبت تغییر می‌کند پس نتیجه گرفت نیروی جاذبه‌ی بین دو جسم با جرم هر دو جسم متناسب است. او در مرحله‌ی بعد فاصله‌ی بین دو جسم را تغییر داد و مشاهده کرد رابطه‌ی نیرو و فاصله خطی نیست و هر چه فاصله بیشتر شود نیرو به صورت محسوسی کاهش می‌یابد. نیوتون پس از چند بار آزمایش توانست نمودار نیرو بر حسب فاصله را به صورت تجربی رسم کند و متوجه شد که مقدار نیروی جاذبه بین دو جسم با مجذور فاصله آنها نسبت عکس دارد.

$$\vec{F}_{۲۱} = -\vec{F}_{۱۲}$$

$$|\vec{F}_{۲۱}| = |\vec{F}_{۱۲}| = F$$

$$F\alpha m_۱ \ , \ F\alpha m_۲ \ , \ F\alpha\frac{۱}{r^۲}$$

$$F\alpha\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲} \Rightarrow F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲} \ , \ G\text{: ضریب تساوی}$$

نیوتون پس از آنکه کمیت‌های مؤثر در نیروی گرانش را معرفی کرد و رابطه‌ی بین آنها را بیان کرد، ضریبی به نام ثابت جهانی گرانش تعریف کرد که به وسیله‌ی آن رابطه‌ی تناسب بین نیرو و

کمیت‌های بیان شده تبدیل به تساوی می‌شود:

$$F\alpha\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲} \Rightarrow F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲}$$

$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\frac{\mathrm{N.m^۲}}{\mathrm{kg^۲}}$$: ثابت جهانی گرانش

برای به‌دست آوردن واحد ثابت جهانی گرانش می‌توان نوشت:

$[G]$: بیانگر واحد ثابت G

$$\mathrm{N} = [G]\left(\frac{\mathrm{kg.kg}}{\mathrm{m^۲}}\right) \Rightarrow [G] = \frac{\mathrm{N.m^۲}}{\mathrm{kg^۲}}$$

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg.m}}{\mathrm{s^۲}} \Rightarrow [G] = \frac{\mathrm{m^۳}}{\mathrm{kg \cdot s^۲}}$$

قانون گرانش عمومی نیوتون

دو جسم همواره به یکدیگر نیروی جاذبه وارد می‌کنند که مقدار آن با حاصل‌ضرب جرم دو جسم نسبت مستقیم و با مجذور فاصله‌ی بین دو جسم نسبت معکوس دارد.

اکنون شاید این سؤال برایتان مطرح شود که برای دو جسم که دارای ابعاد حقیقی هستند و نمی‌توان آنها را ذره در نظر گرفت فاصله‌ی بین دو جسم چگونه تعریف می‌شود و فاصله‌ی بین کدام دو نقطه از اجسام مدنظر است. برای پاسخ به این سؤال باید با مفهومی به نام مرکز جرم آشنا شویم. مرکز جسم، نقطه‌ی اثر نیروی گرانش وارد بر یک جسم است. از آنجایی که نیروی گرانش یک نیروی حجمی است و به تمام قسمت‌های یک جسم وارد می‌شود، هر محدوده‌ای از جسم را که در نظر بگیریم تحت اثر نیروی گرانش، متناسب با جرم آن محدوده خواهد بود و نمی‌توان یک نیروی متمرکز گرانشی برای کل جسم در نظر گرفت. مرکز جرم نقطه‌ای است که می‌توان برآیند تمام نیروهای گرانشی وارد به نواحی مختلف یک جسم را به صورت متمرکز در آن نقطه در نظر گرفت، یعنی نیروهای حجمی پخش شده در تمام محدوده‌ی جسم را به وسیله‌ی یک نیروی متمرکز و برابر با برآیند تمام نیروهای حجمی در مرکز جرم جایگزین کرد. مرکز جرم اشکال متقارنی چون کره، مکعب یا مکعب مستطیل، مرکز آنها است اما محاسبه‌ی مرکز جرم اشکال پیچیده‌تر را در آینده خواهید آموخت.

مثال ۳ شخصی به جرم $۷۰\mathrm{kg}$ در فاصله‌ی نیم متری یک خودرو به جرم $۲۰۰\mathrm{kg}$ ایستاده است. نیروی گرانش بین آنها را بیابید.

حل.

$$F = G\frac{m.m_۲}{r^۲} = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times \frac{۲۰۰ \times ۷۰}{(\frac{۱}{۲})^۲} = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}\mathrm{N}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید نیروی جاذبه‌ی بین شخص و خودرو که اجسام نسبتاً سنگینی نیز هستند بسیار کم است و به این دلیل است که وقتی شما و دوستتان در کنار یکدیگر ایستاده‌اید نیروی گرانش بین یکدیگر را احساس نمی‌کنید و به سمت هم جذب نمی‌شوید.

نیروی وزن

نیروی وزن یک جسم نیروی گرانشی است که از طرف زمین به جسم وارد می‌شود. شتاب حاصل از این نیرو در سطح زمین را با g نمایش می‌دهند و برای تمام اجسام با جرم‌های مختلف این شتاب در سطح زمین برابر با g است. اکنون به وسیله‌ی مثالی نشان می‌دهیم که چرا این شتاب در سطح زمین برای همه‌ی اجسام برابر با g است و اختلاف ارتفاعات جزئی یعنی اختلاف فاصله‌ی جسم از زمین تأثیری روی آن ندارد.

مثال ۴ شخصی به جرم ۷۰kg روی سطح زمین ایستاده است:

الف) نیروی وزن این شخص را به وسیله‌ی قانون گرانش نیوتن محاسبه کنید.

ب) اگر این شخص به هوا بپرد چه شتابی توسط زمین به او اعمال می‌شود.

ج) شتابی که این شخص به زمین اعمال می‌کند چقدر است؟

د) اگر این شخص به بالای برج میلاد به ارتفاع ۴۵۰m برود و خود را به سمت پایین رها کند در این حالت زمین چه شتابی به او اعمال می‌کند؟ ($r_e = ۶/۴ \times ۱۰^{۶}\text{m}$ ، $m_e = ۶ \times ۱۰^{۲۴}\text{kg}$ و $h = ۴۵۰\text{m}$)

ه) نمودار شتاب بر حسب فاصله از سطح زمین را برای این شخص رسم کنید.

حل. الف)

$$F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r_e^۲} = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times \frac{۷۰ \times ۶ \times ۱۰^{۲۴}}{(۶/۴ \times ۱۰^{۶})^۲} = ۶۸۳/۹\text{N}$$

ب)

$$F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r_e^۲} = m_۱ a \Rightarrow a = G\frac{m_e}{r_e^۲} = ۹/۸۱\text{m/s}^۲$$

عدد به‌دست آمده همان مقدار g است و همان طور که از رابطه مشاهده می‌کنید عوامل مؤثر در این شتاب ثابت جهانی گرانش، جرم زمین و شعاع زمین می‌باشند که همگی ثابت هستند پس g برای تمام اجسام با جرم‌های مختلف یکسان است.

ج)

$$F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r_e^۲} = m_e a' \Rightarrow a' = \frac{G \cdot m_۱}{r_e^۲} = ۱۱/۴ \times ۱۰^{-۲۳}\text{m/s}^۲$$

همان طور که مشاهده می‌کنید شتابی که به زمین اعمال می‌شود بسیار ناچیز است و علاوه بر این به دلیل تقارن هندسی زمین نیروهای گرانشی وارد شده بر زمین در جهات مختلف تقریباً یکدیگر را خنثی می‌سازند.

د)

$$F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲} \quad , \quad r = (r_e + h)$$

$$F = G\frac{m_۱ \cdot m_۲}{(r_e + h)^۲} = m_۱ a \Rightarrow a = G\frac{m_e}{(r_e + h)^۲} = ۹/۷۷\text{m/s}^۲ \simeq g$$

$$۹/۸۱ - ۹/۷۷ = ۰/۰۴ \quad , \quad \frac{۰/۰۴}{۹/۸۱} \cong ۴ \times ۱۰^{-۳}$$

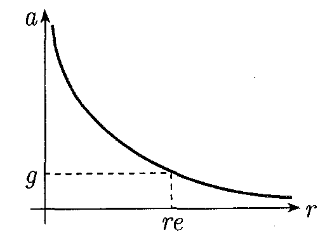
$$\Rightarrow \text{error} = ۴ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۲} = \%۰/۴$$

همان طورکه محاسبات نشان می‌دهند شتاب ایجاد شده توسط زمین در بالای برج میلاد نیز بسیار نزدیک به این شتاب در سطح زمین یعنی عدد g می‌باشد و خطای اختلاف این شتاب از g بسیار کم است. علت وقوع این پدیده بسیار بزرگ بودن شعاع زمین در مقایسه با اختلاف ارتفاعات در سطح زمین است به گونه‌ای که این اختلافات ارتفاع در شتاب حاصل تغییر چندانی ایجاد نمی‌کند.

ه)
$$a = \frac{F}{m_1} = \frac{G.m_e}{(r_e+h)^2} \quad , \quad r = r_e + h$$

ابتدا نمودار $(a-r)$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار $(a-h)$ را از روی نمودار $(a-r)$ به‌دست می‌آوریم:

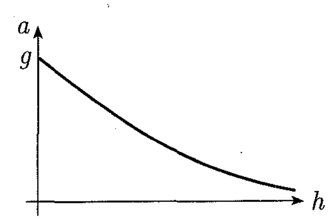
$$a \alpha \frac{1}{r^2}$$



شکل ۲-۷

اگر محور شتاب را از نقطه‌ی $(r=0)$ به نقطه‌ی $(r=r_e)$ انتقال دهیم نمودار $(a-r)$ تبدیل به نمودار $(a-h)$ می‌شود.

$$\lim_{r\to 0} a = \infty$$
$$\lim_{r\to\infty} a = 0$$



شکل ۲-۸

همان طورکه از نمودار $(a-r)$ مشخص است هر چه مقدار r افزایش می‌یابد شیب نمودار کمتر می‌شود یعنی تغییرات شتاب کندتر صورت می‌گیرد و چون شعاع زمین عدد بزرگی است تغییرات شتاب در سطح زمین بسیار کندتر خواهد بود.

مثال ۵

اختلاف شتاب گرانش را بین نقطه‌ای روی سطح آب دریاها و نقطه‌ای روی قله‌ی اورست به‌دست آورید. (ارتفاع قله‌ی اورست: $h = 8850\,\mathrm{m}$)

حل.

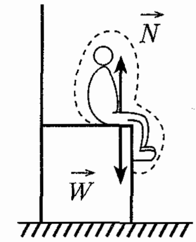
$$\left.\begin{array}{l} \text{سطح دریا} \quad a_1 = G\dfrac{m_e}{r_e^2} = g = 9{,}81\mathrm{m/s^2} \\ \text{قله‌ی اورست} \quad a_2 = G\dfrac{m_e}{(r_e+h)^2} = 9{,}74\mathrm{m/s^2} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 - a_2 = 0{,}07$$

$$\left(\frac{a_1-a_2}{g}\right) \simeq 0{,}007 \Rightarrow \text{error} = \%0{,}7$$

نیروی تکیه‌گاه و نیروی اصطکاک

هنگامی که شما بر روی یک صندلی نشسته‌اید و در حال سکون هستید، سرعت شما با گذشت زمان دچار تغییر نمی‌شود و تا زمانی که شما حالت سکون خود را حفظ کنید شتابی برابر با صفر خواهید داشت. به شکل (۲ـ۹) دقت کنید، طبق قانون دوم نیوتون در این بازه‌ی زمانی نیروی خالصی به شما وارد نخواهد شد ولی می‌دانیم که شما تحت اثر نیروی وزن خود قرار دارید پس برای اینکه قانون دوم نیوتون برقرار باشد باید نیروی دیگری وجود داشته باشد تا نیروی وزن شما را

خنثی کند. این نیرو همان نیروی تکیه‌گاه است که از طرف صندلی به شما وارد می‌شود و مقدارش برابر با وزن شما ولی جهتش خلاف آن یعنی رو به بالا است.



شکل ۲-۹

$$\vec{W} = m\vec{g}\ ,\ \sum \vec{F} = m\vec{a} = ۰$$

$$\sum \vec{F} = \vec{W} + \vec{N} = ۰ \ \rightarrow\ \vec{N} = -\vec{W} \ \rightarrow\ |\vec{N}| = |\vec{W}|$$

قابل ذکر است که در روابط بالا معادلات نیرو برای شما نوشته شده است و در واقع شما به عنوان یک سیستم در نظر گرفته شده‌اید. همین معادلات را می‌توان برای صندلی نیز نوشت:

$\vec{W}_۱ = m_۱\vec{g}$: نیروی وزن صندلی

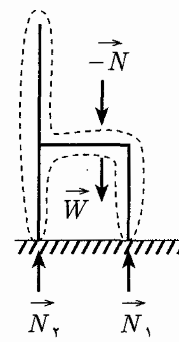
$-\vec{N}$: عکس‌العمل نیروی تکیه‌گاه

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\ ,\ \vec{a} = ۰ \ \rightarrow\ \sum \vec{F} = ۰$$

$$\sum \vec{F} = -\vec{N} + \vec{W}_۱ + \vec{N}_۱ + \vec{N}_۲ = ۰ \ \rightarrow\ \vec{N}_۱ + \vec{N}_۲ = \vec{N} - \vec{W}_۱$$

$\vec{N}_۱\ ,\ \vec{N}_۲$: نیروهای تکیه‌گاهی وارده از طرف زمین به صندلی

$$\vec{N} = -\vec{W} \ \rightarrow\ \vec{N}_۱ + \vec{N}_۲ = -(\vec{W} + \vec{W}_۱)$$



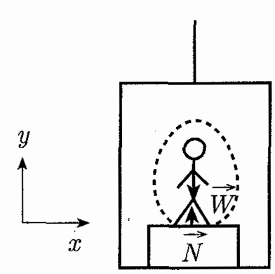
شکل ۲-۱۰

واضح است که نیروی تکیه‌گاهی یک نیروی تماسی است. اصولاً هر دو جسمی که با هم در تماس هستند به یکدیگر نیرویی وارد می‌کنند که این نیرو در مرز جدایی دو جسم برابر با صفر می‌شود. در مثال گفته شده بر پایه‌ی قانون دوم نیوتون صندلی مجبور است نیرویی برابر با وزن شما به شما وارد کند، حال اگر شما کتابی در دستتان داشته باشید نیروی تکیه‌گاهی باید وزن کتاب را نیز تحمل کند تا قانون دوم نیوتون اجرا شود پس مقدار این نیرو از حالت قبل بیشتر می‌شود. در واقع نیروی تکیه‌گاهی توسط قانون دوم نیوتون محاسبه می‌شود.

مثال ۶

طرز کار یک ترازو به گونه‌ای است که وقتی شخصی روی این ترازو می‌ایستد، نیرویی که از طرف پاهای شخص به ترازو اعمال می‌شود تقسیم بر شتاب g می‌شود و عدد حاصل بر روی صفحه‌ی ترازو به نمایش درمی‌آید. اگر شخصی به جرم $۸۰\,\mathrm{kg}$ درون یک آسانسور بر روی این ترازو بایستد و آسانسور با شتاب تند شونده $۴\,\mathrm{m/s^۲}$ به سمت بالا به حرکت درآید، عددی را که ترازو در این حالت به نمایش در می‌آورد محاسبه کنید.

حل. نیرویی که از طرف پاهای شخص به ترازو وارد می‌شود همان عکس‌العمل نیروی تکیه‌گاهی وارده از طرف ترازو به شخص می‌باشد.



شکل ۲-۱۱

اکنون به نوشتن معادلات نیرو و قانون دوم نیوتون می‌پردازیم: (دستگاه مختصات انتخابی در شکل نشان داده شده است)

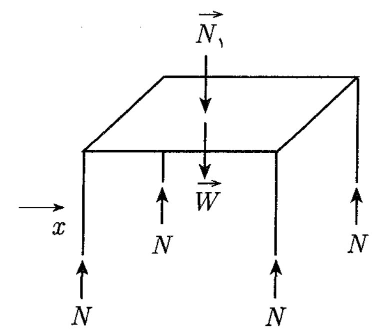
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \ \rightarrow\ \sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{W} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} = -(۸۰ \times ۹{,}۸۱)\vec{j}\ ,\ \vec{a} = ۴\vec{j}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = N\vec{j} - ۷۸۴{,}۸\vec{j} = ۳۲۰\vec{j} \ \rightarrow\ N = ۱۱۰۴{,}۸\mathrm{N}$$

$$\rightarrow m' = \frac{N}{g} = \frac{۱۱۰۴{,}۸}{۹{,}۸۱} = ۱۱۲{,}۶۲\mathrm{kg}\ ,\ m' \ :\ \text{جرم ظاهری شخص}$$

مثال ۷ کودکی به جرم ۴۵kg از روی یک نردبان بر روی یک میز چهار پایه با پایه‌های ۴۵cm می‌پرد. حداقل نیرویی که باعث شکست در پایه‌های میز می‌شود ۱۹۰N است. اگر از زمانی که پای کودک با میز تماس پیدا می‌کند تا زمانی که کودک به‌طور کامل می‌ایستد، میز نیروی ثابتی به کودک وارد کند و همچنین نیروی تکیه‌گاهی به‌طور مساوی بین چهار پایه‌ی میز تقسیم شود، حداکثر ارتفاعی را بیابید که در صورت پریدن کودک از آن ارتفاع میز دچار شکست نمی‌شود. (بازه زمانی توقف کودک: $\Delta t = ۰/۳s$، وزن میز: $\vec{W} = ۳۰۰N$) (کودک در لحظه‌ی پریدن تنها مؤلفه‌ی افقی سرعت را داراست.)



شکل ۲-۱۲

حل. در این مثال سیستم مورد بررسی، میز ۴ پایه است پس باید دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر میز را رسم کنید.

$\vec{W}$: وزن میز

$\vec{N}$: نیروی تکیه‌گاهی وارده از طرف زمین به پایه‌ها

$\vec{N}_۱$: نیروی وارده از طرف کودک به میز

قانون دوم نیوتون برای میز : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = ۰ \rightarrow \sum \vec{F} = ۰$$

$$\sum \vec{F} = ۴\vec{N} + \vec{W} + \vec{N}_۱$$

$$\sum \vec{F} = (۴N - N_۱ - W)\vec{j} = ۰ \rightarrow ۴N = W + N_۱$$

معادله‌ی بالا یک معادله با دو مجهول است. برای محاسبه‌ی نیروی $N_۱$ قانون دوم نیوتون را در بازه‌ی زمانی توقف برای کودک می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_۲} - \vec{v_۱}}{t_۲ - t_۱} = \frac{۰ - \vec{v_۱}}{۰/۳}$$

مقدار سرعت کودک در اولین لحظه‌ی تماس با میز : $v_۱$

$$= -۳/۳۳(-v_۱)\vec{j} = ۳/۳۳ v_۱ \vec{j}$$

برای محاسبه‌ی مقدار $v_۱$ فاصله‌ی بین سطح میز و ماکزیمم ارتفاع کودک در لحظه‌ی پریدن را h در نظر می‌گیریم:

$$\Delta h\vec{j} = \left(-\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰ t\right)\vec{j} \ , \ \ v_۰\vec{j} = ۰$$

ارتفاع پایه میز: $h_۲$ و ارتفاع نردبان: $h_۱$

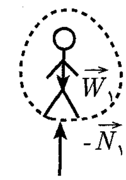
$$\Delta h = h_۲ - h_۱ = -(h_۱ - h_۲) = -h$$

$$\rightarrow -h\vec{j} = -\frac{۱}{۲}gt^۲\vec{j}$$

$$\rightarrow t^۲ = \frac{۲h}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{۲h}{g}}$$

در رابطه‌ی بالا t فاصله‌ی زمانی بین آغاز پرش کودک و رسیدن او به سرعت ماکزیمم است.

$$-v_۱\vec{j} = -g\vec{j} \times t \rightarrow v_۱ = g\sqrt{\frac{۲h}{g}} = \sqrt{۲gh}$$
$$\rightarrow \vec{a} = ۳/۳۳\sqrt{۲gh}\vec{j} = ۱۴/۷۵\sqrt{h}\vec{j}$$



شکل ۲-۱۳

اکنون قانون دوم نیوتون را برای کودک می‌نویسیم:

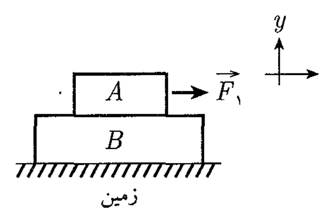
$\vec{W}_۱$: وزن کودک

$-\vec{N}_۱$: نیروی عمودی تکیه‌گاه

$$\sum \vec{F} = -\vec{N}_۱ + \vec{W}_۱ = m\vec{a}$$
$$N_۱\vec{j} - W_۱\vec{j} = ۱۴/۷۵\sqrt{h}\vec{j}$$
$$\rightarrow N_۱ = (۴۴۱/۴۵ + ۱۴/۷۵\sqrt{h})$$
$$\rightarrow N = \frac{۴۴۱/۴۵ + ۱۴/۷۵\sqrt{h} + ۳۰۰}{۴} = ۱۸۵/۳۶ + ۳/۶۹\sqrt{h} < ۱۹۰$$
$$\rightarrow ۳/۶۹\sqrt{h} < ۴/۶۴ \rightarrow \sqrt{h} < ۱/۲۵۷ \rightarrow h < ۱/۵۸۱\text{m}$$
$$h_۱ = h + h_۲ = h + ۰/۴۵ \rightarrow h_۱ < ۲/۰۳۱\text{m}$$

نیروی اصطکاک

نیروی اصطکاک یکی دیگر از انواع نیروهای تماسی است. این نیرو در اثر حرکت دادن جسمی به روی جسم دیگر ایجاد می‌شود. در زیر برای فهم چگونگی ایجاد نیروی اصطکاک آزمایشی را طرح می‌کنیم. به شکل (۲ـ۱۴) دقت کنید:



شکل ۲-۱۴

مطابق شکل جسم A را روی جسم B قرار می‌دهیم و سپس نیروی افقی $\vec{F}_۱$ را به جسم A وارد می‌کنیم. اگر تنها نیروی عمودی تکیه‌گاه بین دو جسم A و B ایجاد شود معادلات قانون دوم برای اجسام A و B به شکل زیر در می‌آید:

$$A : \sum \vec{F} = m\vec{a} \;,\; \sum \vec{F} = F_۱\vec{i} + m_A g(-\vec{j}) + N_۱\vec{j}$$

راستای x : $\sum \vec{F}_x = m_A\vec{a}_x \rightarrow F_۱\vec{i} = m_A a_x\vec{i} \rightarrow a_x = \frac{F_۱}{m_A}$

راستای y : $\vec{a}_y = ۰ \rightarrow \sum \vec{F}_y = ۰$

$$\rightarrow (N_۱ - m_A g)\vec{j} = ۰ \rightarrow N_۱ = m_A g$$

چون سرعت جسم A در راستای y برابر با صفر است و تغییر نمی‌کند: $\vec{a}_{yA} = ۰$

$$B : \sum \vec{F} = m\vec{a} \;, \quad \sum \vec{F} = N_۲\vec{j} - N_۱\vec{j} - m_B g\vec{j}$$

راستای x : $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad \sum \vec{F}_x = ۰ \rightarrow \vec{a}_x = ۰$

راستای y : $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad \sum \vec{F}_y = m \times (۰) = ۰$

$$(N_۲ - N_۱ - m_B g) = ۰ \rightarrow N_۲ = N_۱ + m_B g = (m_A + m_B)g$$

سرعت جسم B نیز در راستای y صفر و بدون تغییر است پس: $\vec{a}_{y_B} = \circ$
$\vec{N}_{۲}$ نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد از طرف زمین بر جسم B است.

اعداد به‌دست آمده از محاسبات بالا، اعداد حاصل از نتیجه‌ی تئوری می‌باشند اما از مشاهدات آزمایش و اعداد حاصل از آن نتیجه می‌شود که شتاب افقی جسم A کمتر از شتاب به‌دست آمده از محاسبات تئوری است و همچنین جسم B نیز در نتیجه‌ی آزمایش حرکتی شتابدار را در راستای محور x آغاز می‌کند که با نتایج محاسبات تئوری در تناقض است.

نتایج به‌دست آمده از آزمایش:

$$A \;:\; \vec{a_x} < \frac{\vec{F}_{۱}}{m_A} \;\rightarrow\; \sum \vec{F}_x < m_A \frac{\vec{F}_{۱}}{m_A} \;\rightarrow\; \sum \vec{F}_x < \vec{F}_{۱}$$

$$B \;:\; \vec{a_x} \neq \circ \;\rightarrow\; \sum \vec{F}_x \neq \circ$$

نتایج حاصل از آزمایش نشان می‌دهند که نقصی در محاسبات تئوری وجود دارد و طبق قانون دوم نیوتون باید نیروهای دیگری به جز $\vec{F}_{۱}$ در راستای محور افقی به اجسام A و B وارد شود. علاوه بر این اعداد به‌دست آمده از آزمایش نشان می‌دهد که به استثنای نیروی $F_{۱}$ بقیه‌ی نیروهای وارد بر جسم A در راستای محور x برابر با نیروهای وارد بر جسم B در این راستا ولی در خلاف جهت آن است:

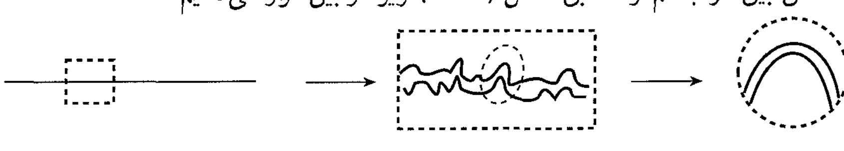
$$\vec{F}_A \;:\; A \text{ نیروهای وارد بر } \quad , \quad \vec{F}_B \;:\; B \text{ نیروهای وارد بر }$$

$$\text{نتایج آزمایش} \;:\; A : \sum \vec{F}_x < \vec{F}_{۱} = F_{۱}\vec{i} - F_A\vec{i}$$

$$B : \sum \vec{F}_x = F_B\vec{i} \neq \circ \quad , \quad \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

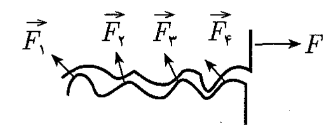
اکنون به شرایط جسم A دقت کنید، تنها عاملی که می‌تواند نیروی افقی $\vec{F}_A$ را به این جسم وارد کند، جسم B می‌باشد که این کار از طریق سطح مشترک بین دو جسم صورت می‌گیرد و طبق قانون سوم نیوتون عکس‌العمل این نیرو از طرف جسم A به جسم B وارد می‌شود که همان $\vec{F}_B$ می‌باشد.

برای اینکه بتوانیم بیشتر با نیروی اصطکاک آشنا شویم و ماهیت آن را بشناسیم باید ناحیه‌ی اعمال این نیرو یعنی سطح تماس مشترک بین دو جسم را مورد بررسی قرار دهیم. برای این کار سطح تماس بین دو جسم را مطابق شکل (۲ـ۱۵) زیر ذره‌بین قرار می‌دهیم.



شکل ۲-۱۵

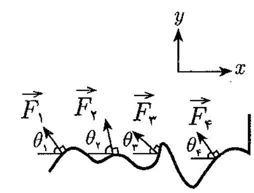
در شکل (۲ـ۱۵) سه تصویر از سطح تماس بین دو جسم نشان داده شده است. در تصویر شماره‌ی «۱» بزرگ‌نمایی ذره‌بین برابر با یک است یعنی همان تصویری که با چشم غیرمسلح قابل ملاحظه است نمایان شده است. در تصویر شماره‌ی «۲» بزرگ‌نمایی ذره‌بین برابر با ۱۰ می‌باشد بدین معنی که ناحیه‌ی مشخص شده با خط‌چین مستطیلی در تصویر شماره‌ی «۲» ۱۰ برابر



شکل ۲-۱۶

بزرگ‌تر از شِمای همین ناحیه در تصویر شماره‌ی «۱» است. تصویر شماره‌ی «۲» نشان می‌دهد که سطوح اجسام مختلف دارای ناهمواری‌های بسیار ریزی هستند که هر چه سطح جسم صیقلی‌تر باشد از میزان این ناهمواری‌ها کاسته می‌شود و به همین دلیل است که شما می‌توانید بازتاب عکس خود را در آینه مشاهده کنید زیرا آینه یک جسم کاملاً صیقلی است و میزان ناهمواری‌های سطح آن تقریباً برابر با صفر است در نتیجه نور با برخورد به سطح آن به صورت منظم منعکس خواهد شد و تصویری واضح در آینه تشکیل می‌شود. در تصویر شماره‌ی «۳» بزرگ‌نمایی ذره‌بین برابر با ۲۰ می‌باشد. با توجه به این تصویر می‌توان رابطه‌ی بین ناهمواری‌های موجود در سطح و نیروی اصطکاک به وجود آمده را توضیح داد. ناهمواری‌های سطح تماس بین دو جسم در برخی نقاط در یکدیگر فرو می‌روند و هنگامی که شما می‌خواهید جسم بالایی را به حرکت درآورید نیرویی بین این ناهمواری‌ها به وجود می‌آید که با حرکت جسم بالایی مخالفت می‌کند.

تعداد نیروهای به وجود آمده بین ناهمواری‌های سطوح دو جسم بسیار زیاد و غیرقابل شمارش است و در واقع این نیرو نوعی نیروی گسترده روی سطح تماس بین دو جسم است مانند نیروی تکیه‌گاه. نکته‌ی جالب توجه اینجاست که هر یک از F_iهای نشان داده شده در شکل عمود بر سطح ناهمواری مربوط به خود هستند و در نتیجه هر کدام در جهتی خاص هستند. برآیند کل نیروهایی که از طرف جسم پایین به جسم بالا وارد می‌شود برابر با مجموع تمام $\vec{F}_i$ها است که مؤلفه‌ی عمودی این نیرو برابر با نیروی عمودی تکیه‌گاه و مؤلفه‌ی افقی آن برابر با اصطکاک خواهد بود (شکل ۲-۱۷).



شکل ۲-۱۷

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ , \ \ n \to \infty$$

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_s$$

نیروی عمودی تکیه‌گاه : $\vec{N} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\theta_i (\vec{j})$

نیروی اصطکاک : $\vec{F}_s = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i (-\vec{i})$

همان طور که می‌بینید اگر جسم کاملاً صیقلی باشد تمام θ_iها برابر با 90° می‌شوند و $\cos\theta_i$ برابر با صفر خواهد بود.

نحوه‌ی محاسبه‌ی نیروی اصطکاک

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای برای به‌دست آوردن نیروی اصطکاک بین دو جسم بیابیم. برای این کار باید عوامل تأثیرگذار در این نیرو را مشخص کنیم:

۱. اولین عامل مؤثر در این نیرو میزان ناهمواری‌های سطح بین دو جسم است. هر چه این ناهمواری‌ها بیشتر باشد نیروی اصطکاک نیز بیشتر خواهد بود. تأثیر این عامل را به وسیله‌ی ضریبی نشان می‌دهیم که بیانگر میزان ناهمواری‌های موجود در سطح تماس بین دو جسم است. این ضریب را با نماد μ نامگذاری می‌کنیم.

۲. عامل دوم، میزان قرارگیری ناهمواری‌های سطح دو جسم در یکدیگر، در سطح تماس مشترک بین دو جسم است. هر چه دو جسم با نیروی بیشتری به یکدیگر فشرده شوند ناهمواری‌های

سطح دو جسم نیز بیشتر در یکدیگر قرار می‌گیرند و اما نیرویی که نشان دهنده‌ی میزان فشردگی دو جسم به یکدیگر است همان نیروی عمودی تکیه‌گاه خواهد بود. زیرا هر چه دو جسم با نیروی بزرگ‌تری به یکدیگر فشرده شوند نیروی عمودی تکیه‌گاه نیز باید به همان نسبت بزرگ‌تر باشد تا بتواند نیروی فشردگی را خنثی کند و در واقع هنگامی که نیروی عمودی تکیه برابر با صفر شود تماس بین دو جسم نیز از بین رفته است.

با توجه به توضیح عوامل مؤثر در مقدار نیروی اصطکاک می‌توان رابطه‌ای به شکل زیر برای این نیرو بیان کرد:

$$F_s \alpha \mu \ , \ F_s \alpha N \ \rightarrow \ F_s \alpha \mu N$$

از آنجایی که ضریب μ در آزمایشگاه و با انجام آزمایش تعیین می‌شود می‌توان با انتخاب مقدار مناسب برای آن رابطه‌ی تناسب بالا را به تساوی تبدیل نمود. همان طور که از رابطه نیز مشخص است ضریب μ یک ضریب بدون واحد است.

$$F_s = \mu N \ \rightarrow \ (N) = (\mu \text{ واحد}) \times (N) \ \rightarrow \ \mu \ : \ \text{بدون واحد}$$

ضریب اصطکاک μ خود به دو نوع تقسیم می‌شود:

۱ـ ضریب اصطکاک ایستایی ۲ـ ضریب اصطکاک جنبشی

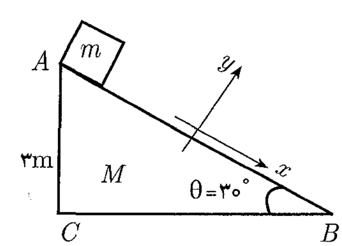
ضریب اصطکاک ایستایی برای زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که دو جسم نسبت به هم ساکن باشند، زیرا در این حالت سطح تماس مشترک بین دو جسم ناحیه‌ی ثابتی از سطوح دو جسم خواهد بود و با گذشت زمان ناهمواری‌های موجود در این ناحیه به میزان خوبی در یکدیگر قرار می‌گیرند اما زمانی که اجسام حرکت نسبی داشته باشند ناحیه‌ی سطح تماس مشترک بین آنها متغیر خواهد بود و به همین دلیل فرصت لازم برای قرارگیری کامل ناهمواری‌ها در یکدیگر به‌دست نمی‌آید. بنابراین مقدار ضریب اصطکاک ایستایی بیشتر از مقدار ضریب اصطکاک جنبشی خواهد بود.

ضریب اصطکاک ایستایی را با μ_s و ضریب اصطکاک جنبشی را با μ_k نمایش می‌دهیم.

اکنون به حل چند مثال از نیروی اصطکاک می‌پردازیم:$(\mu_s > \mu_k)$

مثال ۸

جسمی به جرم 5kg را بر روی یک سطح شیبدار قرار می‌دهیم. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیب‌دار $\mu_s = ۰/۳۵$ و ضریب اصطکاک جنبشی برابر $\mu_k = ۰/۲۵$ باشد. با توجه به اطلاعات داده شده در شکل، زمان لازم برای پایین آمدن جسم از سطح شیب‌دار را محاسبه کنید. $(v_\circ = ۰ ، \theta = ۳۰^\circ ، AC = ۳\text{m} ، \mu_s = ۰/۳۵ ، \mu_k = ۰/۲۵ ، m = 5\text{kg})$



شکل ۲-۱۸

حل. برای حل این مسأله از دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل استفاده می‌کنیم:

برای محاسبه‌ی زمان پایین آمدن، ابتدا باید شتاب جسم را بیابیم. برای این کار برآیند نیروهای وارد بر جسم را توسط دیاگرام آزاد جسم نمایش می‌دهیم.

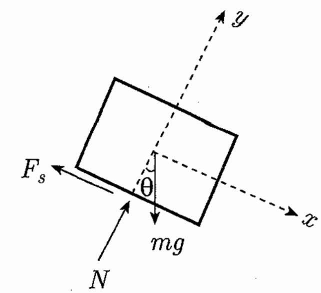
$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \overrightarrow{mg} + \vec{F_s}$$

$$\sum \vec{F} = N\vec{j} - F_s\vec{i} - mg\cos\theta\vec{j} + mg\sin\theta\vec{i}$$

$$v_y = ۰ \ , \ a_y = ۰$$

$$\sum \vec{F_y} = ۰ \ \rightarrow \ (N - mg\cos\theta)\vec{j} = ۰ \ \rightarrow \ N = mg\cos\theta$$

اما از آنجایی که مسئله زمان لازم برای پایین رفتن جسم را مورد سؤال قرار داده ابتدا باید بررسی شود که جسم اصولاً پایین می‌رود یا خیر. در نتیجه در مرحله‌ی اول از اصطکاک ایستایی استفاده می‌کنیم:



شکل ۲-۱۹

$$\sum \vec{F_x} = (mg\sin\theta - F_s)\vec{i} = (mg\sin\theta - N\mu_s)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F_x} = (mg\sin\theta - mg\cos\theta\mu_s)\vec{i}$$

$$\sum \vec{F_x} > ۰ \quad : \quad \text{شرط حرکت جسم}$$

$$\sum \vec{F_x} > ۰ \;\Rightarrow\; (mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)) > ۰$$

$$\Rightarrow \sin\theta > \mu_s\cos\theta \;\Rightarrow\; \mu_s < \tan\theta$$

نامساوی بالا شرطی است که اگر برقرار نباشد جسم بر روی سطح شیب‌دار ثابت می‌ماند و اصلاً به سمت پایین حرکت نمی‌کند. نکته‌ی جالب توجه اینجاست که این شرط به جرم جسم ارتباطی ندارد و تنها خصوصیات هندسی سطح شیب‌دار و ضریب اصطکاک بین دو جسم در آن مؤثر است.

$$\theta = ۳۰^\circ \;\rightarrow\; \tan\theta = ۰/۵۷۷ \;\rightarrow\; \mu_s = ۰/۳۵ < \tan(۳۰^\circ)$$

جسم شتاب می‌گیرد و به حرکت درمی‌آید.

اکنون که از به حرکت درآمدن جسم مطمئن شدیم برای یافتن شتاب جسم از ضریب اصطکاک جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$\sum \vec{F_x} = (mg\sin\theta - mg\cos\theta\mu_k)\vec{i} = m\vec{a_x}$$

$$\vec{a_x} = \frac{mg}{m}(\sin\theta - \cos\theta\mu_k)\vec{i} = ۲/۸\vec{i}(\mathrm{m/s^۲})$$

$$(\Delta x)\vec{i} = \frac{۱}{۲}\vec{a_x}(\Delta t)^۲ + v_\circ t \;\rightarrow\; AB = \frac{۱}{۲} \times (۲/۸) \times t^۲$$

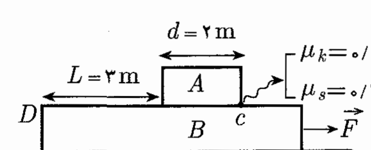
$$AB\sin\theta = AC \;\rightarrow\; AB = \frac{۳}{\frac{۱}{۲}} = ۶\mathrm{m}$$

$$\rightarrow\; t^۲ = ۶ \times ۲ \times \frac{۱}{۲/۸} = ۴/۲۸s^۲ \;\rightarrow\; t = ۲/۰۷\mathrm{s}$$

مثال ۹

دو جسم A و B را مطابق شکل (۲-۱۹) روی یکدیگر قرار داده‌ایم. اگر ضریب اصطکاک بین جسم B و زمین برابر با صفر باشد مدت زمان لازم برای جدا شدن جسم A از جسم B را برای حالات زیر محاسبه کنید: ($\mu_k = ۰/۲$ ،$\mu_s = ۰/۳$ ،$m_B = ۹\mathrm{kg}$ ،$m_A = ۳\mathrm{kg}$)

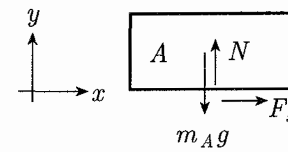
الف) $F = ۳۰\mathrm{N}$ ب) $F = ۵۰\mathrm{N}$ پ) رابطه‌ی کلی زمان جدایش بر حسب نیروی F را بیابید.



شکل ۲-۲۰

حل. هنگامی که انتهای سمت راست جسم A (نقطه‌ی C) به انتهای سمت چپ جسم B (نقطه‌ی D) برسد امر جدایش دو جسم اتفاق می‌افتد. این پدیده زمانی اتفاق می‌افتد که جسم A نسبت به جسم B به مقدار $(L + d)$ به سمت چپ جابه‌جا شود. برای محاسبه‌ی میزان جابه‌جایی

نسبی دو جسم باید شتاب نسبی جسم A نسبت به جسم B را بیابیم در نتیجه باید شتاب هر دو جسم را به‌طور جداگانه از طریق قانون دوم نیوتون محاسبه کنیم. از آنجایی که جسم B تمایل به حرکت به سمت راست دارد نیروی اصطکاک وارده از طرف جسم A به جسم B به سمت چپ خواهد بود و عکس‌العمل این نیرو به جسم A به سمت راست وارد خواهد شد.



شکل ۲-۲۱

$$A:\sum \vec{F}=m_A\vec{a} \Rightarrow N\vec{j}-m_Ag\vec{j}+F_s\vec{i}=m_A(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})$$

سرعت در راستای y صفر است و تغییر نمی‌کند.

$$a_y=\circ \Rightarrow \sum F_y=\circ \Rightarrow N-m_Ag=\circ \Rightarrow N=m_Ag$$

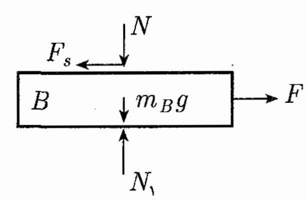
$$\sum F_x=m_Aa_x \Rightarrow F_s=m_Aa_x$$

$$B:\sum \vec{F}=m_B\vec{a} \Rightarrow (N_\backslash-N-m_Bg)\vec{j}+(F-F_s)\vec{i}$$

$$=m_B(a_y\vec{j}+a_x\vec{i})$$

$$a_y=\circ \Rightarrow N_\backslash=N+m_Bg=(m_A+m_B)g$$

$$\sum F_x=F-F_s=m_Ba_x$$



شکل ۲-۲۲

همان طورکه در روابط بالا مشاهده می‌کنید در طی حل مسئله به جای نیروی اصطکاک F_s مقدار $N\mu_s$ یا $N\mu_k$ را قرار نداده‌ایم. دلیل این امر آن است که مقدار $N\mu_s$ بیشترین مقداری است که نیروی اصطکاک ایستایی می‌تواند داشته باشد اما هیچ دلیلی وجود ندارد که این نیرو همواره برابر با $N\mu_s$ باشد. در واقع نیروی اصطکاک با تغییر سطح تماس مشترک بین دو جسم مخالفت می‌کند و تا زمانی که نیروی لازم برای این کار کمتر از $N\mu_s$ باشد نیروی اصطکاک نیز برابر با همین مقدار نیروی لازم و کمتر از $N\mu_s$ خواهد بود اما در حالتی که دو جسم نسبت به یکدیگر حرکت داشته باشند، یعنی سطح تماس مشترک بین دو جسم در حال تغییر باشد مقدار نیروی اصطکاک جنبشی همواره برابر با $N\mu_k$ خواهد بود. در حل این مسئله ابتدا باید بررسی شود که در چه محدوده‌ای از نیروی خارجی F نیروی اصطکاک F_s مانع از ایجاد حرکت نسبی بین دو جسم می‌شود.

دو جسم حرکت نسبی نداشته باشند:

$\vec{a_A}=\vec{a_B} \rightarrow \vec{a}_{A/B}=\vec{a_A}-\vec{a_B}=\circ$: شتابی نسبی

$$A:\vec{a_A}=a_{xA}\vec{i}=\frac{F_s}{m_A}\vec{i}$$

$$B:\vec{a_B}=a_{xB}\vec{i}=\frac{(F-F_s)}{m_B}\vec{i}$$

$$\vec{a_A}=\vec{a_B} \rightarrow (\frac{F_s}{m_A})\vec{i}=\left[\frac{(F-F_s)}{m_B}\right]\vec{i} \rightarrow (\frac{m_B}{m_A}+\backslash)F_s=F$$

$$\max(F_s)=N\mu_s \rightarrow \max(F)=(\backslash+\frac{m_B}{m_A})N\mu_s=(\frac{m_A+m_B}{m_A})m_Ag\mu_s$$

$\Rightarrow F\leq(m_A+m_B)g\mu_s \Rightarrow$ دو جسم A و B نسبت به یکدیگر حرکت نخواهند کرد.

الف) $F = ۳۰\text{N} \leq (۳+۹) \times ۱۰ \times ۰/۳\text{N}$

در حالت «الف» دو جسم هیچ حرکتی نسبت به یکدیگر ندارند و هر دو با یک شتاب به سمت جلو حرکت می‌کنند در نتیجه پدیده‌ی جدایش هیچگاه اتفاق نمی‌افتد.

ب)

$F = ۵۰\text{N} > (m_A + m_B)g\mu_s = ۳۶\text{N} \Rightarrow$ پدیده‌ی جدایش اتفاق می‌افتد.

$$A : \sum \vec{F_A} = m_A\vec{a_A} \Rightarrow (N - m_Ag)\vec{j} + F_s\vec{i} = m_A(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})$$

$$a_y = ۰ \Rightarrow N = m_Ag$$

$$F_s = N\mu_K = m_Ag\mu_K = m_Aa_{xA} \Rightarrow a_{xA} = g\mu_k = ۲\text{m/s}^۲$$

$$B : \sum \vec{F_B} = m\vec{a_B} \Rightarrow (N_۱ - N - m_Bg)\vec{j} + (F - F_s)\vec{i} = m_B(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})$$

$$a_y = ۰ \Rightarrow N_۱ = (m_A + m_B)g$$

$$F - F_s = m_Ba_{xB} \Rightarrow a_{xB} = \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B} \Rightarrow a_{xB} = ۴/۹\text{m/s}^۲$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a_A} - \vec{a_B} = (۲ - ۴/۹)\vec{i} = (-۲/۹)\vec{i}\text{m/s}^۲$$

مقدار جابه‌جایی نسبی برابر با $L + d$ در جهت منفی محور xها است.

$$\overrightarrow{\Delta x} = -(L+d)\vec{i} = -۵\vec{i}(\text{m})$$

$$\overrightarrow{\Delta x} = \frac{۱}{۲}\vec{a}(\Delta t)^۲ \Rightarrow (-۵)\vec{i} = \frac{۱}{۲}(-۲/۹\vec{i})t^۲$$

$$\Rightarrow t^۲ = ۳/۴۵\text{s}^۲ \Rightarrow t = ۱/۸۶\text{s}$$

پ) برای رابطه‌ی کلی باید مقدار t را به صورت پارامتری بر حسب نیروی F بیابیم.

$$F \leq (m_A + m_B)g\mu_s \Rightarrow \vec{a}_{A/B} = ۰ \Rightarrow t = \infty$$

$$F > (m_A + m_B)g\mu_s \Rightarrow a_{xA} = g\mu_k \;,\; a_{xB} = \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B}$$

$$\vec{a}_{A/B} = \left(g\mu_k - \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B}\right)$$

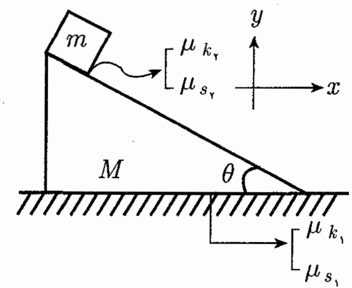
$$-(L+d) = \frac{۱}{۲}\left(g\mu_k - \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B}\right)t^۲$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{-۲(L+d)}{g\mu_k - \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F \leq (m_A + m_B)g\mu_s \Rightarrow t = \infty \\ F > (m_A + m_B)g\mu_s \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{-۲(L+d)}{g\mu_k - \frac{F - m_Ag\mu_k}{m_B}}} \end{cases}$$

مثال ۱۰ مثال (۸) را در نظر بگیرید. در مثال (۸) ما فرض کردیم سطح شیب‌دار ثابت باشد اما نمی‌توان به صورت قطعی گفت که در طی پایین آمدن جسم m سطح شیب‌دار ساکن می‌ماند. با فرض

اینکه سطح شیب‌دار روی زمین قرار دارد، شرط لازم برای ساکن ماندن سطح شیب‌دار را بیابید. سپس با توجه به اطلاعات داده شده در شکل، μ_{s_1} را طوری بیابید که سطح شیب‌دار ساکن بماند.
($\mu_{s_1} =?$ ،$\mu_{k_1} =?$ ،$\mu_{s_2} = 0/35$ ،$\mu_{k_2} = 0/25$ ،$M = 20\text{kg}$ ،$m = 5\text{kg}$)

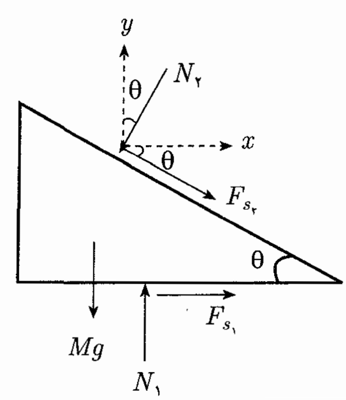


شکل ۲-۲۳

حل. برای ساکن ماندن سطح شیب‌دار باید برآیند نیروهای وارد بر آن برابر با صفر باشد. برای بررسی تعادل سطح شیب‌دار با انتخاب دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل دیاگرام آزاد جسم m و سطح شیب‌دار را رسم می‌کنیم.

هنگامی که جسم m به سمت پایین سطح شیب‌دار حرکت می‌کند طبق اصل پایستگی تکانه‌ی سیستم (که بعداً با آن آشنا خواهید شد) سطح شیب‌دار M می‌خواهد به سمت چپ حرکت کند در نتیجه نیروی اصطکاک وارده از طرف زمین به سطح شیب‌دار به سمت راست خواهد بود. همچنین نیروی اصطکاک F_{s_2} عکس‌العمل نیروی اصطکاک وارده از طرف سطح شیب‌دار به جسم m است در نتیجه در خلاف جهت آن و به سمت پایین سطح شیب‌دار است.

$$\text{شرط تعادل} : \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = N_1\vec{j} - M_g\vec{j} + F_{s_1}\vec{i}$$
$$+ F_{s_2}(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) - N_2(\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{i})$$
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow (1)\ \vec{F_x} = 0 ,\ (2)\ \vec{F_y} = 0$$
$$(1) : F_{s_1} + F_{s_2}\cos\theta - N_2\sin\theta = 0$$
$$(2) : N_1 - Mg - F_{s_2}\sin\theta - N_2\cos\theta = 0$$



شکل ۲-۲۴

با توجه به دیاگرام آزاد جسم m در مثال (۸) و با استناد به اینکه حالت تعادل سطح شیب‌دار مورد بررسی است می‌توان نیروهای به‌دست آمده برای جسم m را باز هم به کار برد.
مسئله را برای دو حالت ساکن ماندن و حرکت‌کردن جسم m روی سطح شیب‌دار تفکیک می‌کنیم.

$$N_2 = mg\cos\theta$$
$$(1)\ \mu_{s_2} > \tan\theta \qquad \text{جسم } m \text{ ساکن می‌ماند}$$
$$\text{(1) شرط سکون} \Rightarrow F_{s_2} = mg\sin\theta\ ,\ N_2 = mg\cos\theta$$
$$\text{سطح شیب‌دار} : \sum \vec{F} = (N_1 - Mg - mg\sin^2\theta - mg\cos^2\theta)\vec{j}$$
$$(F_{s_1} + mg\sin\theta\cos\theta - mg\cos\theta\sin\theta)\vec{i}$$
$$a_y = 0 \Rightarrow N_1 = Mg + mg(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (m+M)g$$
$$a_x = 0 \Rightarrow F_{s_1} = 0$$

در حالت $\mu_{s_2} \geq \tan\theta$، تعادل سطح شیب‌دار همواره برقرار خواهد بود که به صورت شهودی نیز قابل قبول است.

$$(2)\ \mu_{s_2} < \tan\theta \Rightarrow \text{جسم } m \text{ حرکت خواهد کرد}$$
$$\Rightarrow F_{s_2} = N_2\mu_{k_2} = mg\cos\theta\mu_{k_2}$$
$$\text{سطح شیب‌دار} \Rightarrow \sum \vec{F} = (N_1 - Mg - mg\cos\theta\sin\theta\mu_{k_2} - mg\cos^2\theta)\vec{j}$$

$$+ (F_{s_1} + mg\cos^2\theta\mu_{k_2} - mg\cos\theta\sin\theta)\vec{i}$$

$$a_y = 0 \Rightarrow N_1 = g(M + m\cos^2\theta + \frac{m}{2}\sin 2\theta\mu_{k_2})$$

$$a_x = 0 \Rightarrow F_{s_1} = mg\frac{\sin 2\theta}{2} - mg\cos^2\theta\mu_{k_2}$$

بیشترین مقداری که F_{s_1} می‌تواند دارا باشد $N_1\mu_{s_1}$ می‌باشد، در نتیجه مقدار عبارت به‌دست آمده برای F_{s_1} از طریق قانون دوم نیوتون باید از $N_1\mu_{s_1}$ کمتر یا مساوی با آن باشد.

$$F_{s_1} = mg(\frac{\sin 2\theta}{2} - \cos^2\theta\mu_{k_2}) \le N_1\mu_{s_1}$$

$$N_1\mu_{s_1} = g(M + m\cos^2\theta + \frac{m}{2}\sin 2\theta\mu_{k_2})\mu_{s_1}$$

$$\Rightarrow \mu_{s_1} \ge \frac{mg(\frac{\sin 2\theta}{2} - \cos^2\theta\mu_{k_2})}{g(M + m\cos^2\theta + \frac{m}{2}\sin 2\theta\mu_{k_2})}$$

با قرار دادن اطلاعات مربوط به پارامترها داریم:

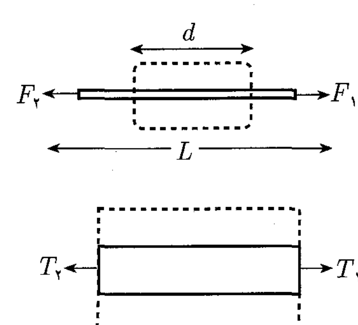
$\mu_{s_1} \ge 0/05 \Rightarrow$ سطح شیب‌دار ساکن می‌ماند.

کشش طناب و قرقره

هنگامی که یک طناب تحت کشیدگی قرار می‌گیرد نیرویی در طول آن ایجاد می‌شود که آن را با $\vec{T}$ نمایش می‌دهیم و به آن **نیروی کشش طناب** می‌گویند. نیروی $\vec{T}$ همواره در جهت طول طناب است زیرا یک طناب به دلیل خاصیت انعطاف‌پذیری و ارتجاعی خود نمی‌تواند در راستای عمود بر طولش نیرویی اعمال کند و همچنین هنگامی که تحت فشردگی قرار بگیرد نیز به دلیل انعطاف‌پذیری بالا تنها تغییر شکل می‌دهد، اما نیرویی در آن به وجود نمی‌آید. هنگامی که جرم طناب کم و قابل صرف‌نظرکردن باشد می‌توانیم نیروی به وجود آمده را در تمام طول طناب ثابت در نظر بگیریم، اما هنگامی که جرم طناب قابل ملاحظه باشد و حرکت طناب شتاب‌دار باشد طبق قانون دوم نیوتون برآیند نیروهای وارد به طناب برابر با $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ خواهد بود و اگر این رابطه را برای قسمتی از طناب بنویسیم اختلاف به وجود آمده در نیروی کشش موجود در طناب به‌دست می‌آید.

m : جرم کل طناب

T_1 , T_2 : کشش به‌وجود آمده در طناب در اثر نیروهای خارجی



شکل ۲-۲۵

قانون دوم نیوتون برای کل طناب:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow (F_1 - F_2)\vec{i} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = (\frac{F_1 - F_2}{m})\vec{i}$$

قانون دوم نیوتون برای قسمتی از طناب که داخل خط‌چین مستطیلی است.

$$\sum \vec{F} = m'\vec{a} \Rightarrow (T_1 - T_2)\vec{i} = m'(\frac{F_1 - F_2}{m})\vec{i}$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{d}{L} \Rightarrow m' = (\frac{d}{L})m \Rightarrow (T_۱ - T_۲) = (\frac{d}{L})(F_۱ - F_۲)$$

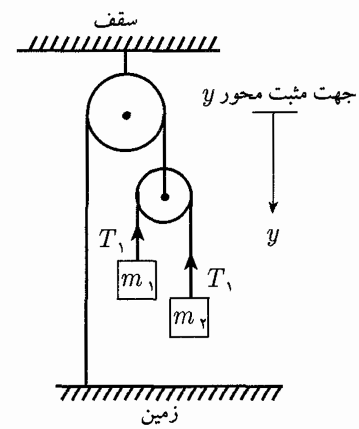
با توجه به رابطه‌ی به‌دست آمده و دلخواه بودن d نیروی کشش طناب را به‌صورت تابعی از فاصله از ابتدای طناب می‌نویسیم:

$$\text{ابتدای طناب} \Rightarrow T_۲ = F_۲ \Rightarrow T_۱ = (\frac{x}{L})(F_۱ - F_۲) + F_۲$$

در اغلب مسائل از جرم طناب صرف‌نظر می‌کنیم و نیروی کشش $\vec{T}$ را در طول طناب ثابت در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۱

مطابق شکل (۲_۲۶)، دو جسم به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را به وسیله‌ی قرقره از طنابی آویخته‌ایم. نیروی کشش به‌وجود آمده در طناب‌های متصل به زمین و سقف را بیابید. (از جرم قرقره‌ها و طناب‌ها صرف‌نظر کنید.)



شکل ۲-۲۶

حل. ابتدا نیروی کشش موجود در طناب متصل به اجسام $m_۱$ و $m_۲$ را می‌یابیم. قابل ذکر است که به دلیل متصل بودن دو جسم $m_۱$ و $m_۲$ به یکدیگر شتاب حرکت آنها با هم برابر ولی در خلاف جهت هم است.

$$m_۱ : \sum \vec{F} = m_۱\vec{a_۱} \Rightarrow (m_۱g - T_۱)\vec{j} = m_۱\vec{a_۱}$$

$$m_۲ : \sum \vec{F} = m_۲\vec{a_۲} = m_۲(-\vec{a_۱}) \Rightarrow (m_۲g - T_۱)\vec{j} = m_۲(-\vec{a_۱})$$

با کم کردن رابطه‌ی پایین از رابطه‌ی بالا داریم:

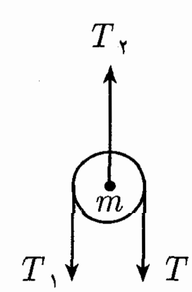
$$\Big(m_۱g - T_۱ - [m_۲g - T_۱]\Big)\vec{j} = m_۱\vec{a}_۱ + m_۲\vec{a}_۱$$

$$\rightarrow (m_۱ - m_۲)g\vec{j} = (m_۱ + m_۲)\vec{a}_۱ \rightarrow \vec{a}_۱ = \left[\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲}g\vec{j}\right]$$

$$m_۱g - T_۱ = m_۱(\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲})g$$

$$\rightarrow T_۱ = m_۱g\left[۱ - (\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲})\right] = \frac{۲m_۱m_۲g}{m_۱ + m_۲}$$

اکنون به نوشتن قانون دوم نیوتون برای قرقره‌ی کوچک می‌پردازیم: (شکل ۲_۲۷)



شکل ۲-۲۷

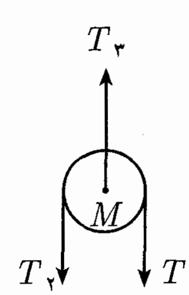
$$\sum \vec{F} = (۲T_۱ - T_۲ + mg)\vec{j} = m\vec{a} \;,\; \text{قرقره ساکن} \rightarrow \vec{a} = ۰$$

$$\text{خیلی کوچک } m \rightarrow mg \ll T_۱ \;,\; mg \ll T_۲$$

$$\rightarrow ۲T_۱ - T_۲ = ۰$$

$$\rightarrow T_۲ = ۲T_۱ = \frac{۴m_۱m_۲g}{m_۱ + m_۲}$$

اکنون به نوشتن قانون دوم نیوتون برای قرقره‌ی بزرگ می‌پردازیم: (شکل ۲_۲۸)



شکل ۲-۲۸

$$Mg \ll T_۳, T_۲ \Rightarrow T_۳ = ۲T_۲ = ۴T_۱$$

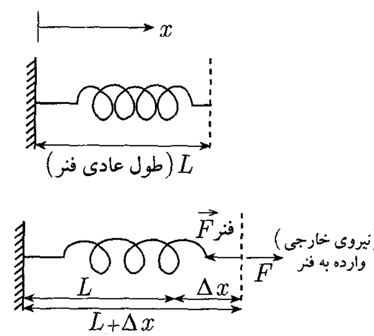
$$\Rightarrow T_۳ = \frac{۸m_۱m_۲g}{m_۱ + m_۲}$$

نیروی فنر

فنر وسیله‌ای است که مانند طناب هنگامی که تحت کشش قرار می‌گیرد نیرویی در طول آن ایجاد می‌شود و همچنین فنر نیز در راستای عمود بر طولش نیرویی اعمال نمی‌کند. تفاوت موجود میان فنر و طناب در حالت فشردگی این دو نمایان می‌شود زیرا در این حالت باز هم در طول فنر نیرو ایجاد می‌شود که در طناب ایجاد نمی‌شود. به‌طورکلی نیروی به وجود آمده در فنر متناسب است با مقدار تغییر طول فنر نسبت به طول عادی آن (یعنی زمانی که تحت نیروی خارجی قرار نداشته باشد).

$$|\vec{F}_{\text{فنر}}| \alpha |\overrightarrow{\Delta x}|$$

با توجه به شکل (۲ـ۲۹) مقدار و جهت این نیرو را تعیین می‌کنیم.



شکل ۲-۲۹

$$|\vec{F}_{\text{فنر}}| \alpha |\overrightarrow{\Delta x}| \ \rightarrow \ |\vec{F}_{\text{فنر}}| = k|\overrightarrow{\Delta x}|$$

ضریب k را ضریب سختی فنر می‌نامند و به جنس فنر بستگی دارد. با توجه به شکل واضح است که جهت $\vec{F}_{\text{فنر}}$ و $\overrightarrow{\Delta x}$ مخالف یکدیگر هستند در نتیجه:

$$\vec{F}_{\text{فنر}} = -k\overrightarrow{\Delta x}$$

که در حالت کشیدگی Δx مثبت و در حالت فشردگی منفی خواهد بود.

یکای ضریب k به صورت زیر مشخص می‌شود:

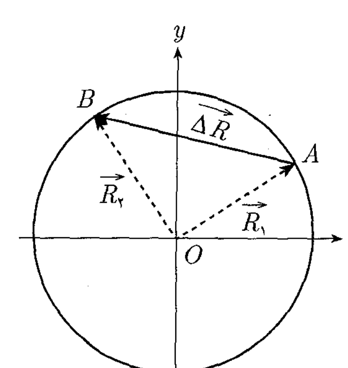
$$\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta x} \ \rightarrow \ (\text{N}) = (k \text{ واحد})(\text{m}) \ \rightarrow \ k \text{ واحد} \ : \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$(\text{N}) = (\text{kg})(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \ \rightarrow \ k \text{ واحد} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

حرکت دایره‌ای

در این قسمت به تجزیه و تحلیل دینامیکی نوع خاصی از حرکت یعنی حرکت بر روی مسیر دایروی می‌پردازیم. این حرکت نوعی خاص از حرکت بر روی مسیرهای منحنی‌الخط می‌باشد که در آن مسیر حرکت محیط یک دایره خواهد بود. برای مثال حرکت زمین به دور خورشید حول یک مسیر دایروی صورت می‌گیرد و یا در برخی وسایل خانگی مانند ماشین لباس‌شویی، آب میوه‌گیری و . . . اجسام درون آنها در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند. در این قسمت ابتدا به بررسی کمیت‌های سینماتیکی موجود در حرکت دایره‌ای می‌پردازیم.

۱. **جابه‌جایی:** همان‌طور که می‌دانید جابه‌جایی برداری است که نقطه‌ی ابتدای حرکت را به نقطه‌ی انتهای آن وصل می‌کند. در حرکت بر روی مسیرهای منحنی‌الخط بردار جابه‌جایی به‌صورت یک خط و مسافت پیموده شده به‌صورت یک منحنی خواهد بود و در نتیجه این دو هیچگاه بر یکدیگر منطبق نمی‌باشند. بردار جابه‌جایی برای حرکت دایره‌ای را می‌توان مطابق شکل (۲ـ۳۰) نشان داد.



شکل ۲-۳۰

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

بردار جابه‌جایی از A به B

$$\rightarrow\ \Delta\vec{R} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

۲. سرعت متوسط: به شکل (۲ـ۳۰) دقت کنید. با فرض اینکه جسم مسافت بین نقاط A تا B را در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ طی کرده باشد خواهیم داشت:

$$\vec{\bar{V}}\ :\ \text{سرعت متوسط} = \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{\vec{R}_۲ - \vec{R}_۱}{t_۲ - t_۱}$$

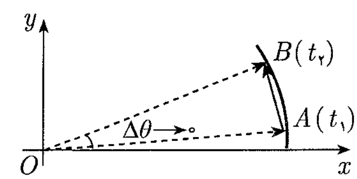
$$\Rightarrow \vec{\bar{V}} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{t_۲ - t_۱} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}\ :\ \text{هم‌جهت با بردار جابه‌جایی}$$

۳. سرعت لحظه‌ای: همان‌طورکه در فصل حرکت‌شناسی بیان شد برای به‌دست آوردن سرعت جسم در هر لحظه‌ی دلخواه می‌توان Δt را در رابطه‌ی سرعت متوسط به سمت صفر میل داد تا سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی بی‌نهایت نزدیک به هم $t_۱$ و $t_۲$ به‌دست آید. با این روش سرعت به‌دست آمده برابر با سرعت در لحظه‌ی $t_۱$ خواهد بود. (به شکل ۲ـ۳۱ دقت کنید).

$$\Delta t\ \rightarrow\ ۰\ :\ t_۲ - t_۱\ \rightarrow\ ۰\ :\ t_۲\ \rightarrow\ t_۱$$

$$\overrightarrow{\Delta R} = \vec{R}_۲ - \vec{R}_۱ = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\bar{V}} = \vec{V}_A = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}$$



شکل ۲-۳۱

با توجه به تعریف مشتق یک تابع، سرعت لحظه‌ای جسم برابر است با مشتق تابع مکان بر حسب زمان برای جسم متحرک:

$$\vec{R}\ :\ \text{بردار مکان}\ \rightarrow\ \vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}\ ,\ x = f(t)\ ,\ y = g(t)$$

$$\vec{R} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad ,\quad \vec{V} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\vec{R}_۲ - \vec{R}_۱}{(t + \Delta t) - t}$$

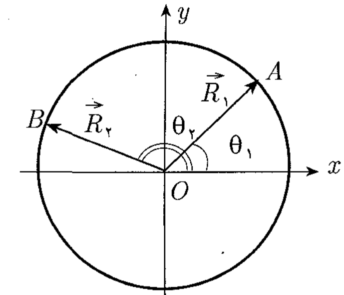
$$\vec{R}_۱ = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad ,\quad \vec{R}_۲ = f(t + \Delta t)\vec{i} + g(t + \Delta t)\vec{j}$$

$$\rightarrow\ \vec{V} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\big(f(t + \Delta t) - f(t)\big)\vec{i} + \big(g(t + \Delta t) - g(t)\big)}{\Delta t} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}$$

از رابطه‌ی بالا می‌توان سرعت لحظه‌ای اجسام را در حرکت بر روی مسیر منحنی‌الخط (حرکت در دو بعد) به‌دست آورد.

۴. مکان و جابه‌جایی زاویه‌ای: به شکل (۲ـ۳۲) توجه کنید. به زاویه‌ی $\theta_۱$ مکان زاویه‌ای متحرک در نقطه‌ی A و به زاویه‌ی $\theta_۲$ مکان زاویه‌ای متحرک در نقطه‌ی B می‌گوییم. با این تعریف جابه‌جایی زاویه‌ای متحرک از A تا B برابر است با:

$$\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$$



شکل ۲-۳۲

۵. سرعت زاویه‌ای متوسط: حال فرض کنید متحرک مورد نظر مسافت بین A تا B را در بازه‌ی زمانی $(\Delta t = t_۲ - t_۱)$ طی کند. در این حالت سرعت زاویه‌ای متوسط متحرک را به

شکل زیر تعریف می‌کنیم و آن را با ω نمایش می‌دهیم:

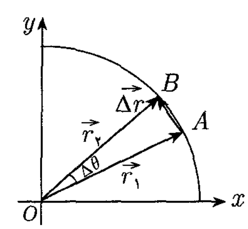
$$\text{سرعت زاویه‌ای متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی زاویه‌ای}}{\text{زمان}} \rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_۲ - \theta_۱}{t_۲ - t_۱}$$
$$\rightarrow \Delta\theta = \overline{\omega}\Delta t$$

یکای سرعت زاویه‌ای، رادیان بر ثانیه $(\frac{\text{rad}}{\text{s}})$ است و از آنجایی که زاویه در فیزیک یک کمیت بی‌بعد تلقی می‌شود می‌توان واحد ω را به صورت $(\frac{۱}{\text{s}})$ نیز بیان کرد.

۶. سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای: برای به‌دست آوردن سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای مقدار Δt را در رابطه‌ی سرعت زاویه‌ای متوسط به سمت صفر میل می‌دهیم:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{t_۲\to t_۱} \frac{\theta_۲ - \theta_۱}{t_۲ - t_۱}$$
$$\theta \ : \ \text{مکان زاویه‌ای}\ ,\ \theta = f(t) \rightarrow \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ای میان سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در حرکت بر مسیر دایروی بیابیم. به شکل (۲ـ۳۳) توجه کنید.



شکل ۲-۳۳

$$(r_۱, t_۱)\ ,\ (r_۲, t_۲)$$
$$\Delta t = (t_۲ - t_۱) \rightarrow ۰$$
$$\vec{V}_A = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$
$$\text{قانون کسینوس‌ها} \ : \ |AB| = \sqrt{OA^۲ + OB^۲ - ۲(OA)(OB)\cos\Delta\theta}$$
$$OA = OB = R \rightarrow |AB| = |\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{۲R^۲ - ۲R^۲\cos(\Delta\theta)}$$

* از آنجایی که $\Delta\theta$ در بازه‌ی زمانی Δt رخ داده بی‌نهایت کوچک خواهد بود و می‌توان از روابط حدی کسینوس برای آن استفاده کرد:

$$\Delta\theta \rightarrow ۰ \begin{cases} \cos\Delta\theta \simeq ۱ - \frac{\Delta\theta^۲}{۲} \\ \sin\Delta\theta \simeq \Delta\theta \end{cases}$$
$$\rightarrow |\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{۲R^۲\frac{\Delta\theta^۲}{۲}} = R\Delta\theta$$

اکنون با تقسیم کردن طرفین رابطه بر Δt خواهیم داشت:

$$\frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t} = R(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}) \rightarrow |\vec{V}| = \frac{|\overrightarrow{\Delta r}|}{\Delta t}$$
$$\rightarrow |\vec{V}| = R(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}) = R\omega \rightarrow V = R\omega$$

در رابطه‌ی فوق V اندازه‌ی سرعت خطی متحرک و ω سرعت زاویه‌ای آن است.

شتاب در حرکت دایره‌ای

بحث شتاب در حرکت دایره‌ای را با یک مثال آغاز می‌کنیم. فرض کنید دوچرخه‌سواری یک مسیر دایره‌ای به شعاع R را می‌پیماید. اگر اندازه‌ی سرعت خطی دوچرخه سوار ثابت باشد آیا حرکت او شتابدار خواهد بود؟

پاسخ: برای پاسخ به این پرسش باید درک صحیحی از مفهوم بردار داشته باشیم. اگرچه اندازه‌ی سرعت متحرک ثابت است اما جهت بردار سرعت آن در هر لحظه در حال تغییر است بنابراین سرعت این متحرک در واقع متغیر است اما این تغییر تنها در جهت سرعت شکل می‌گیرد. با توجه به تعریف شتاب می‌توان گفت که حرکت این متحرک شتابدار است. برای محاسبه‌ی کمیت‌های سینماتیکی متحرکی که حول یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد حالات زیر را جداگانه بررسی می‌کنیم:

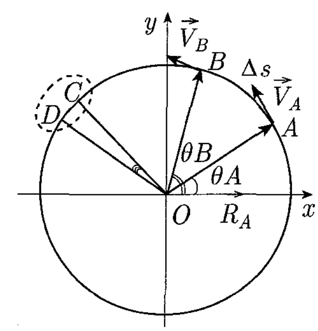
حرکت با سرعت زاویه‌ای ثابت

روابط حاکم بر سینماتیک حرکت دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت:

$$\omega = \text{cte} \;\rightarrow\; \overline{\omega} = \omega \;\rightarrow\; \Delta\theta = \omega \times \Delta t$$

$$|\vec{V}| = V = R \times \omega$$

R, ω : cte $\rightarrow$ $V = \text{cte}$ اندازه‌ی سرعت خطی ثابت است



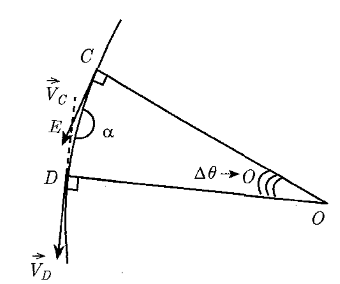
* همان‌طور که در فصل حرکت‌شناسی اشاره شد بردار سرعت یک متحرک در هر نقطه بر مسیر حرکت آن مماس است در نتیجه بردار سرعت در حرکت دایره‌ای مماس بر مسیر دایره خواهد بود بنابراین طول قطاع پیموده شده از دایره در بازه‌ی زمانی Δt برابر خواهد بود با:

$$\Delta S = V \times \Delta t$$

$$\Delta S = R\Delta\theta = V \times \Delta t \;\rightarrow\; V = R \times (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}) = R\omega$$

محاسبه‌ی شتاب : $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{V}_B - \vec{V}_A}{\Delta t}$

به شکل (۲ـ۳۴) توجه کنید. در این شکل دو نقطه‌ی C و D بی‌نهایت نزدیک به یکدیگر انتخاب شده‌اند به‌طوری که شتاب متوسط بین این دو لحظه، برابر با شتاب لحظه‌ای نقطه‌ی C در نظر گرفته می‌شود. اکنون با توجه به تعریف شتاب باید بردار $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_D - \vec{V}_C$ را مشخص کنیم. با توجه به شکل (۲ـ۳۴) زاویه‌ی بین بردار $\vec{V}_C$ و امتداد بردار $\vec{V}_D$ را برابر با α در نظر می‌گیریم و با کمک زاویه‌ی α مقدار زاویه‌ی بین ابتدای دو بردار β را می‌یابیم زیرا همان‌طور که می‌دانید زاویه‌ی بین دو بردار برابر با زاویه‌ی بین ابتدای دو بردار در نظر گرفته می‌شود. (شکل ۲ـ۳۵)



شکل ۲-۳۴

در چهارضلعی $OCDE$: $۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \alpha + \Delta\theta = ۳۶۰^\circ$

$(I) : \alpha + \Delta\theta = ۱۸۰^\circ$

طبق شکل ۳۵ : $(II) : \alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$

$(I), (II) \;\rightarrow\; \beta = \Delta\theta$

$$|\vec{V}_D - \vec{V}_C| = \sqrt{|\vec{V}_C|^۲ + |\vec{V}_D|^۲ - ۲|\vec{V}_C||\vec{V}_D|\cos\beta} \quad : \text{قانون کسینوس‌ها}$$

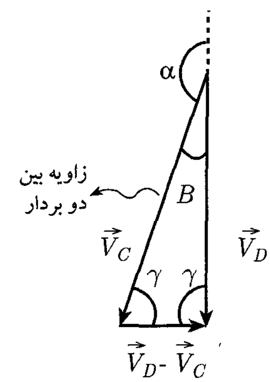
$$\beta = \Delta\theta \to ۰ \ , \ |\vec{V}_C| = |\vec{V}_D| = V = R\omega$$

$$\to |\vec{V}_D - \vec{V}_C| = \sqrt{۲R^۲\omega^۲ - ۲R^۲\omega^۲ \times (۱ - \frac{\Delta\theta^۲}{۲})}$$

$$\to |\vec{V}_D - \vec{V}_C| = \sqrt{۲R^۲\omega^۲\frac{\Delta\theta^۲}{۲}} = R\omega\Delta\theta$$

$$|\vec{a}_C| = \lim_{\Delta t\to ۰} \frac{|\vec{V}_D - \vec{V}_C|}{\Delta t} = \frac{R\omega\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega(\frac{\Delta\theta}{\Delta t})$$

$$= R\omega^۲ = R(\frac{V}{R})^۲ = \frac{V^۲}{R}$$



شکل ۲-۳۵

رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد اندازه‌ی شتاب متحرک در نقطه‌ی C برابر با $R\omega^۲$ می‌باشد اما از آنجایی که C به صورت دلخواه انتخاب شد و در حرکت دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت تمام نقاط شرایط یکسانی دارند اندازه‌ی شتاب در تمام نقاط برابر با $R\omega^۲$ خواهد بود. اکنون به بررسی جهت شتاب به‌دست آمده می‌پردازیم:

با توجه به شکل (۲ـ۳۵) زاویه‌ای که بردار $\vec{a}$ با بردارهای $\vec{V}_C$ و $\vec{V}_D$ می‌سازد برابر است با:

$$\vec{a} || \overrightarrow{\Delta V} = (\vec{V}_D - \vec{V}_C)$$

$$\to (\vec{V}_D \text{ و } \vec{V}_C \text{ با } \vec{a} \text{ زاویه‌ی}) \ : \ \gamma = \frac{۱۸۰ - \beta}{۲}$$

$$\beta = \Delta\theta \to \gamma = \lim_{\Delta\theta\to ۰} \frac{۱۸۰ - \Delta\theta}{۲} \simeq ۹۰^\circ$$

در نتیجه بردار $\vec{a}$ عمود بر سرعت خطی یعنی در راستای شعاع دایره خواهد بود و با توجه به اینکه این بردار از انتهای $\vec{V}_C$ به انتهای $\vec{V}_D$ رسم می‌شود جهتش همواره به سمت مرکز دایره خواهد بود.

به صورت کلی می‌توان گفت در حرکت روی مسیر دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω اندازه‌ی شتاب برابر با $R\omega^۲$ یا $\frac{V^۲}{R}$ و جهتش به سمت مرکز دایره خواهد بود.

ب) حرکت با سرعت زاویه‌ای متغیر: این نوع حرکت پیچیده‌تر از حالت قبل می‌باشد زیرا شتاب در این نوع حرکت علاوه بر مؤلفه در راستای شعاع، مؤلفه‌ای در راستای مماس بر مسیر دایره یعنی هم‌جهت با بردار سرعت نیز دارد. اما به خاطر داشته باشید هنگامی که یک متحرک مسیر دایروی با شعاع ثابت را می‌پیماید مؤلفه‌ی شعاعی شتاب آن در هر لحظه برابر با $R\omega^۲$ و در جهت مرکز دایره خواهد بود که در این رابطه ω نیز خود تابعی از زمان خواهد بود. حرکت دایروی با شتاب متغیر به‌طور مفصل در قسمت المپیاد مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

تحلیل دینامیکی حرکت بر روی دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت

پس از تحلیل کمیت‌های سینماتیکی موجود در حرکت دایره‌ای و محاسبه‌ی شتاب این نوع حرکت می‌توانیم نیروهای حاکم بر این حرکت را شناسایی کنیم. طبق قانون دوم نیوتون برآیند نیروهای وارد بر یک جسم برابر است با جرم جسم ضرب در بردار شتاب کلی جسم. این قانون بر تمامی

حرکت‌ها اعم از حرکت دایره‌ای حاکم است و از آنجایی که ما بردار شتاب در حرکت دایره‌ای را محاسبه کرده‌ایم می‌توانیم برآیند نیروهای وارد بر جسم متحرک حول دایره را نیز به‌دست آوریم. از این پس جهت شعاعی به سمت مرکز دایره را به وسیله‌ی بردار یکه‌ی $\vec{e}_r$ نشان می‌دهیم، یعنی بردار $\vec{e}_r$ برداری است با طول واحد و جهتی به سمت مرکز دایره و در نتیجه طول بردار $\vec{e}_r$ ثابت می‌باشد اما جهتش تابعی از زمان است و در هر نقطه به سمت مرکز دایره‌ی حرکت خواهد بود.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \;\rightarrow\; \sum \vec{F} = m(R\omega^{2})\vec{e}_r$$

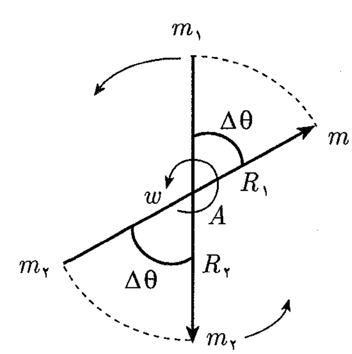
رابطه‌ی روبه‌رو نشان می‌دهد به جسمی به جرم m که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد باید برآیند نیرویی به اندازه‌ی $mR\omega^{2}$ و در جهت مرکز دایره وارد شود. برخی به اشتباه فکر می‌کنند این نیرو خودبه‌خود در اثر حرکت روی مسیر دایروی ایجاد می‌شود که این طرز تفکر اشتباه می‌باشد. هر نیرویی منشائی دارد که می‌تواند تماسی و یا غیرتماسی باشد. برای مثال در حرکت دایره‌ای زمین به دور خورشید منشأ این نیرو غیرتماسی و به صورت نیروی جاذبه‌ای است که خورشید به زمین وارد می‌کند و برای لباس‌های موجود در ماشین لباس‌شویی منشأ این نیرو تماسی و به صورت نیروی عمودی تکیه‌گاهی است که از طرف دیواره‌ی محفظه‌ی داخلی ماشین لباس‌شویی به لباس‌ها وارد می‌شود. رابطه‌ی به‌دست آمده تنها می‌گوید باید برآیند تمام نیروهای وارده به جسم برابر با $mR\omega^{2}$ و به سمت مرکز دایره باشد.

مثال ۱۲

دو شخص دو سر طنابی به طول $l = 6\text{m}$ را گرفته‌اند و حول یک نقطه روی طناب می‌چرخند. شِمای این مسئله از دید بالا در شکل (۲ـ۳۶) نشان داده شده است. اگر نسبت جرم اشخاص به یکدیگر برابر با $\frac{m_1}{m_2} = 1/2$ باشد نقطه‌ای را که طناب حول آن دوران می‌کند بیابید. (سرعت زاویه‌ای حرکت ثابت و برابر با ω است.)

حل. از آنجایی که هر دو شخص حول مسیر دایروی می‌چرخند برآیند نیروی وارد بر آنها برابر است با:

$$m_1 : \sum \vec{F}_1 = m_1 R_1 \omega_1^{2} \vec{e}_{r_1} \quad , \quad m_2 : \sum \vec{F}_2 = m_2 R_2 \omega_2^{2} \vec{e}_{r_2}$$



شکل ۲-۳۶

و اما نیروهایی که به اشخاص وارد می‌شود نیروهای وزن، عمودی تکیه‌گاه و کشش طناب است که از این سه نیرو تنها کشش طناب است که در جهت مرکز دایره است و نیروهای وزن و عمودی تکیه‌گاه هیچ مؤلفه‌ای در جهت مرکز دایره‌ی حرکت یعنی نقطه‌ی A ندارند پس باید یکدیگر را خنثی کنند.

$$\sum \vec{F}_1 = (N_1 - m_1 g)\vec{j} + T\vec{e}_{r_1} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 (R_1 \omega_1^{2})\vec{e}_{r_1}$$

$$\rightarrow N_1 - m_1 g = 0 \;\rightarrow\; N_1 = m_1 g \;,\; T = m_1 R_1 \omega_1^{2} \qquad (I)$$

$$\sum \vec{F} = (N_2 - m_2 g)\vec{j} + T\vec{e}_{r_2} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 (R_2 \omega_2^{2})\vec{e}_{r_2}$$

$$\rightarrow N_2 - m_2 g = 0 \;\rightarrow\; N_2 = m_2 g \;,\; T = m_2 R_2 \omega_2^{2} \qquad (II)$$

$$(I),(II) \;\rightarrow\; m_1 R_1 \omega_1^{2} = m_2 R_2 \omega_2^{2} = T$$

مطابق شکل (۲ـ۳۶) مشاهده می‌کنید هنگامی که شخص با جرم m_2 زاویه‌ی $\Delta\theta$ را طی می‌کند شخص با جرم m_1 نیز همین زاویه را طی می‌کند در نتیجه ω_1 و ω_2 برابر هستند.

$$\omega_1 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \;,\; \omega_2 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \;\rightarrow\; \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\rightarrow\ m_1R_1\omega^2 = m_2R_2\omega^2 \rightarrow m_1R_1 = m_2R_2$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1R_1 = m_2R_2 \\ R_1 + R_2 = L \end{array}\right\} \frac{m_1}{m_2}R_1 + R_1 = L$$

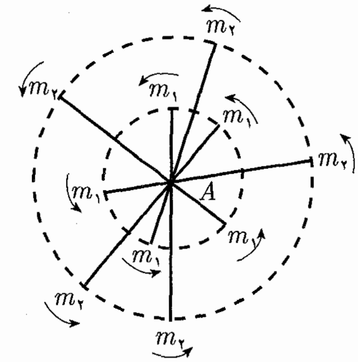
$$\rightarrow\ R_1 = \frac{L}{1+\frac{m_1}{m_2}} = (\frac{m_2}{m_1+m_2})L$$

$$\rightarrow\ R_2 = L - R_1 = (\frac{m_1}{m_1+m_2})L$$

$$\frac{m_1}{m_2} = 1.2\ \rightarrow\ m_1 = 1.2m_2$$

$$\rightarrow\ R_1 = (\frac{m_2}{1.2m_2+m_2})L = (\frac{1}{2.2})L = 2.73\mathrm{m}$$

شِمای کلی این حرکت مطابق شکل (۲ـ۳۷) است.

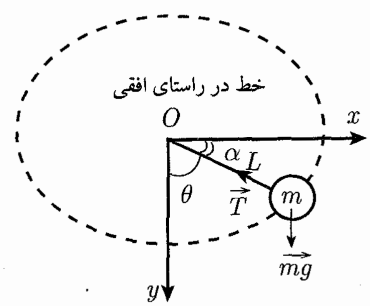


شکل ۲-۳۷

مثال ۱۳

پسر بچه‌ای تیله‌ای به جرم m را به انتهای طنابی بسته و بالای سر خود در صفحه‌ای افقی می‌چرخاند اگر تیله با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران کند و طول طناب نیز L باشد، نیروی وارده از طرف طناب به‌دست پسر بچه را بیابید.

حل. از آنجایی که تیله‌ی m با سرعت زاویه‌ای ω حول یک مسیر دایروی می‌چرخد برآیند نیروهای وارد بر آن باید برابر با $mR\omega^2$ و به سمت مرکز دایره‌ی حرکت باشد و اما نیروی کشش طناب و نیروی وزن تنها نیروهایی هستند که به تیله‌ی m وارد می‌شوند و نیروی وزن نیز بر شعاع دایره‌ی حرکت عمود می‌باشد در نتیجه طناب با سطح افقی زاویه‌ای پیدا می‌کند تا بتواند وزن را خنثی کند.



شکل ۲-۳۸

$$\sum \vec{F} = mR\omega^2\vec{e}_r$$

$$\sum \vec{F} = (T\sin\alpha - mg)\vec{j} + T\cos\alpha\vec{e}_r$$

$$T\sin\alpha - mg = 0\ \rightarrow\ \sin\alpha = \frac{mg}{T}\ \rightarrow\ \cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{mg}{T})^2}$$

$$\sum \vec{F} = T\cos\alpha\vec{e}_r = mR\omega^2\vec{e}_r$$

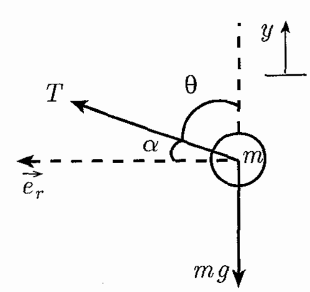
$$\rightarrow T = \frac{mR\omega^2}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} R = L\cos\alpha \\ \sin\alpha = \frac{mg}{T} \end{array}\right. \rightarrow\ T = \frac{mL\cos\alpha\omega^2}{\sqrt{1-(\frac{mg}{T})^2}}$$

$$\rightarrow T^2\left(1-(\frac{mg}{T})^2\right) = (mL\cos\alpha\omega^2)^2$$

$$\rightarrow T^2\left(1-(\frac{mg}{T})^2\right) = m^2\omega^4L^2\left(1-(\frac{mg}{T})^2\right)\ \rightarrow\ T = mL\omega^2$$

نیروی به‌دست آمده نیروی کشش طناب است که با توجه به ناچیز بودن جرم طناب آن را در طول طناب ثابت در نظر می‌گیریم و نیروی وارد به دست پسربچه نیز برابر با همین نیرو است.



شکل ۲-۳۹

مباحث المپیاد

در این بخش سعی بر آن داریم تا مسائل متنوع دینامیکی را با استفاده از ابزارهایی همچون مشتق و انتگرال حل نماییم و چگونگی تحلیل این مسائل در دستگاه مختصات قطبی را بررسی نماییم.

همان‌طور که در قسمت‌های قبل گفته شد کلید حل مسائل دینامیک، قوانین سه‌گانه‌ی نیوتن می‌باشد و برای کسب توانایی لازم در حل مسائل دینامیکی تنها کافی است که به این قوانین تسلط کافی پیدا کرده باشیم. برای ایجاد این تسلط بهترین و مؤثرترین راه، حل مسائل متنوع دینامیکی است که در این قسمت به این موضوع خواهیم پرداخت.

ابتدا رابطه‌ی اصلی نیرو یا همان قانون دوم نیوتن را با استفاده از مفاهیم مشتق و انتگرال در دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نشان خواهیم داد:

۱. دستگاه مختصات دکارتی: (سه بعد)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \rightarrow \sum \vec{F} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{bmatrix} \rightarrow \sum \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{v}_x = \ddot{x} \\ \dot{v}_y = \ddot{y} \\ \dot{v}_z = \ddot{z} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) \rightarrow \left[\begin{array}{l} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{array} \right.$$

* در روابط فوق پارامترهای x، y و z هر سه تابعی از زمان هستند.

می‌توان با طی کردن مسیر عکس فرآیند فوق و با استفاده از مفهوم انتگرال، با در اختیار داشتن تابع نیرو ـ زمان متحرک تابع مکان ـ زمان متحرک را به‌دست آورد:

$$\sum \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \int \vec{a}dt$$

$$= \int (\frac{F_x}{m})\vec{i}dt + \int (\frac{F_y}{m})\vec{j}dt + \int (\frac{F_z}{m})\vec{k}dt$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_x = \int (\frac{F_x}{m})dt \\ \dot{y} = v_y = \int (\frac{F_y}{m})dt \\ \dot{z} = v_z = \int (\frac{F_z}{m})dt \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \int \vec{v}dt = \int \dot{x}\vec{i}dt + \int \dot{y}\vec{j}dt + \int \dot{z}\vec{k}dt$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \int \left[\int (\frac{F_x}{m})dt\right] dt \\ y = \int \left[\int (\frac{F_y}{m})dt\right] dt \\ z = \int \left[\int (\frac{F_z}{m})dt\right] dt \end{cases}$$

روابط فوق نشان می‌دهند که با در اختیار داشتن تابع نیرو ـ زمان یک متحرک می‌توانیم تابع مکان ـ زمان آن متحرک را در حالت کلی بیابیم و برای یافتن تابع مکان دقیقی برای این متحرک نیاز به شرایط مرزی به تعداد کافی داریم تا بتوانیم با استفاده از این شرایط مرزی ثوابت حاصل در انتگرال‌گیری را مشخص کنیم. برای درک بهتر مفاهیم گفته شده در ادامه‌ی فصل مثال‌های متنوعی آورده شده است.

در حل مسائل دوبعدی با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی یکی از محورهای x، y و z حذف خواهد شد:

$$\sum \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = m\ddot{x}\vec{i} + m\ddot{y}\vec{j}$$

$$x = \int \left[\int (\frac{F_x}{m})dt\right] dt \ \ , \ \ y = \int \left[\int (\frac{F_y}{m})dt\right] dt$$

۲. دستگاه مختصات قطبی: (دوبعد)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = ma_r\vec{e_r} + ma_\theta\vec{e_\theta} = F_r\vec{e_r} + F_\theta\vec{e_\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \ \rightarrow \ F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \ \rightarrow \ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + m(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

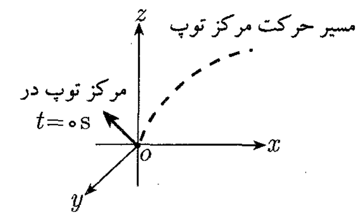
با استفاده از معادلات گفته شده توانستیم نیروی وارد بر یک متحرک را بر حسب مشتقات کمیت پایه‌ی مکان به‌دست آوریم و این بدان معنی است که اگر تابع مکان یک متحرک را در اختیار داشته باشیم می‌توانیم نیروی وارد بر آن متحرک را در هر لحظه به‌دست آوریم. در ادامه‌ی این بخش به حل مسائل گوناگون دینامیکی خواهیم پرداخت و روش حل این مسائل را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱۴ معادله‌ی حرکت یک توپ فوتبال به جرم $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ در بازه‌ی زمانی $0\,\mathrm{s} < t < 0.5\,\mathrm{s}$ به صورت زیر می‌باشد. اگر در این بازه‌ی زمانی یک بازیکن در حال ضربه زدن به توپ باشد با

صرف‌نظر کردن از نیروی مقاومت هوا، نیرویی را که از طرف پای این بازیکن به توپ وارد می‌شود در لحظات $t = \circ s$، $t = \circ/\text{۲}s$ و $t = \circ/\text{۵}s$ به‌دست آورید (دستگاه مختصات انتخابی در شکل (۲ـ۴۰) نشان داده شده است). ($g = \text{۹/۸}m/s^{\text{۲}}$)

(**راهنمایی:** تمامی جرم توپ را به صورت متمرکز در مرکز توپ در نظر بگیرید.)

$$\vec{r} = (\text{۵}\tan^{\text{۲}} t)\vec{i} + (\frac{t}{\text{۱۰}})\vec{j} + (t^{\text{۲}})\vec{k}$$



شکل ۲-۴۰

حل. به وسیله‌ی دو بار مشتق گرفتن از تابع مکان توپ می‌توانیم تابع شتاب آن را بر حسب زمان به‌دست آوریم:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \left[\text{۵} \times (\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t) \times \text{۲}\tan t\right]\vec{i} + (\frac{\text{۱}}{\text{۱۰}})\vec{j} + (\text{۲}t)\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\left[(\text{۱۰}\tan t + \text{۱۰}\tan^{\text{۳}} t)\vec{i}\right]}{dt} + \circ\vec{j} + \text{۲}\vec{k}$$

$$\frac{d\left[(\text{۱۰}\tan t + \text{۱۰}\tan^{\text{۳}} t)\vec{i}\right]}{dt} = \text{۱۰}\vec{i}\left[(\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t) + (\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t) \times \text{۳}\tan^{\text{۲}} t\right]$$

$$\rightarrow \vec{a_x} = \text{۱۰}(\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t)(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}} t)\vec{i}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \text{۱۰}(\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t)(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}} t)\vec{i} + \text{۲}\vec{k}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\left[\text{۱۰}(\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t)(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}} t)\vec{i} + \text{۲}\vec{k}\right]$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{\text{foot}}} + m\vec{g} \;,\; \vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{F_f} - mg\vec{k} = m\vec{a}$$

$$\rightarrow \vec{F_f} = m\left[\text{۱۰}(\text{۱} + \tan^{\text{۲}} t)(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}} t)\vec{i} + (\text{۲} + g)\vec{k}\right]$$

$$t = \circ \;:\; \vec{F_f} = \left[\text{۱۰}(\text{۱} + \circ)(\text{۱} + \circ)\vec{i} + (\text{۲} + \text{۹/۸})\vec{k}\right]$$

$$= (\text{۱۰}\vec{i} + \text{۱۱/۸}\vec{k})(\text{N})$$

$$t = \circ/\text{۲}s \;:\; \vec{F_f} = \left[\text{۱۰}(\text{۱} + \tan^{\text{۲}}\left(\frac{\circ/\text{۲} \times \text{۱۸۰}}{\pi}\right))\right.$$

$$\left.\left(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}}(\frac{\circ/\text{۲} \times \text{۱۸۰}}{\pi})\right)\vec{i} + \text{۱۱/۸}\vec{k}\right] = (\text{۱۱/۶}\vec{i} + \text{۱۱/۸}\vec{k})(\text{N})$$

$$t = \circ/\text{۵}s \;:\; \vec{F_f} = \left[\text{۱۰}\left(\text{۱} + \tan^{\text{۲}}(\frac{\circ/\text{۵} \times \text{۱۸۰}}{\pi})\right)\right.$$

$$\left.\left(\text{۱} + \text{۳}\tan^{\text{۲}}(\frac{\circ/\text{۵} \times \text{۱۸۰}}{\pi})\right)\vec{i} + \text{۱۱/۸}\vec{k}\right] = (\text{۲۴/۶}\vec{i} + \text{۱۱/۸}\vec{k})(\text{N})$$

در این مثال توانستیم با دو بار مشتق‌گیری از تابع مکان توپ، تابع نیروی آن بر حسب زمان را به‌دست آوریم.

مثال ۱۵

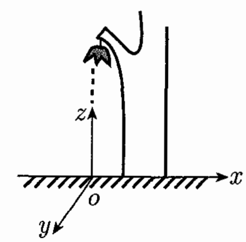
در فصل پاییز یک برگ زرد به جرم $m = \text{۵۰}gr$ و ارتفاع $h = \text{۳}m$ از درختی به پایین می‌افتد و به دلیل شکل هندسی خاص این برگ معادله‌ی نیرویی که از طرف هوا به این برگ وارد می‌شود

به شکل زیر است:

$$\vec{F}_a = (\frac{\cos t}{۱۰۰۰})\vec{i} + ۰/۴۵\vec{k}$$

معادله‌ی مسیر حرکت این برگ را از لحظه‌ی جدا شدن از شاخه تا لحظه‌ی رسیدن به زمین به‌دست آورید و زمان برخورد با زمین را تعیین کنید.

(مبدأ دستگاه مختصات را بر روی زمین و زیر برگ قرار دهید) $(g = ۹/۸\text{m/s})$



شکل ۲-۴۱

حل. با استفاده از قانون دوم نیوتن تابع شتاب برگ را بر حسب زمان به‌دست می‌آوریم و سپس از آن انتگرال می‌گیریم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}_a + m\vec{g} = m\vec{a} \;,\; \vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_a}{m} - g\vec{k} \;,\; m = ۵۰\text{gr} = ۰/۰۵\text{kg}$$

$$\rightarrow \vec{a} = (\frac{\cos t}{۵۰})\vec{i} + \left(\frac{۰/۴۵}{۰/۰۵} - ۹/۸\right)\vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} = (\frac{\cos t}{۵۰})\vec{i} - ۰/۸\vec{k} \rightarrow a_x = \frac{\cos t}{۵۰} \;,\; a_y = ۰ \;,\; a_z = -۰/۸$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v_x = \int a_x dt = \int (\frac{\cos t}{۵۰})dt = \frac{\sin t}{۵۰} + c_۱$$

* همان طور که می‌بینید پس از انتگرال‌گیری از رابطه a_x ثابت $c_۱$ ظاهر شده است که برای به‌دست آوردن این ثابت باید از شرایط مرزی مسئله استفاده کنیم. اولین شرط مرزی این مسئله این است که سرعت در لحظه‌ی جدا شدن برگ از شاخه یعنی در $t = ۰\text{s}$ برابر با صفر است و از این لحظه به بعد نیروهایی که به برگ وارد می‌شوند باعث ایجاد سرعت در آن خواهند شد:

$$t = ۰\text{s} \rightarrow v_x = v_y = v_z = ۰$$

$$v_x = ۰ \rightarrow \frac{\sin ۰}{۵۰} + c_۱ = ۰ \rightarrow c_۱ = ۰ \rightarrow v_x = \frac{\sin t}{۵۰}$$

$$v_y = \int a_y dt = \int ۰ dt = c'_۱$$

$$t = ۰\text{s} \rightarrow v_y = ۰ \rightarrow c'_۱ = ۰ \rightarrow v_y = ۰$$

$$v_z = \int a_z dt = \int (-۰/۸)dt = (-۰/۸)t + c''_۱$$

$$t = ۰ \rightarrow v_z = ۰ \rightarrow (-۰/۸) \times ۰ + c''_۱ = ۰$$

$$\rightarrow c''_۱ = ۰ \rightarrow v_z = (-۰/۸)t$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = \int v_x dt = \int (\frac{\sin t}{۵۰})dt = (-\frac{\cos t}{۵۰}) + c_۲$$

* برای پیدا کردن $c_۲$ باید از شرط مرزی دوم مسئله استفاده کنیم که می‌توان این شرط را به وسیله مکان برگ در لحظه‌ی $t = ۰\text{s}$ بیان نمود:

$$t = ۰\text{s} \rightarrow \vec{r} = ۰\vec{i} + ۰\vec{j} + ۳\vec{k}$$

$$t = ۰\text{s} \rightarrow x = ۰ \rightarrow (-\frac{\cos ۰}{۵۰}) + c_۲ = ۰$$

$$\rightarrow c_۲ - \frac{۱}{۵۰} = ۰ \rightarrow c_۲ = \frac{۱}{۵۰} = ۰/۰۲\text{m}$$

$$x = ۰/۰۲ - \frac{\cos t}{۵۰}$$

$$y = \int v_y dt = \int ۰ \, dt = c'_۲$$

$$t = ۰ \rightarrow y = ۰ \rightarrow c'_۲ = ۰$$

$$z = \int v_z dt = \int (-۰/۸) t dt = (-۰/۸)\frac{t^۲}{۲} + c''_۲$$

$$t = ۰ \rightarrow z = ۳ \rightarrow ۰ + c''_۲ = ۳ \rightarrow c''_۲ = ۳\text{m} \rightarrow z = ۳ - ۰/۴t^۲$$

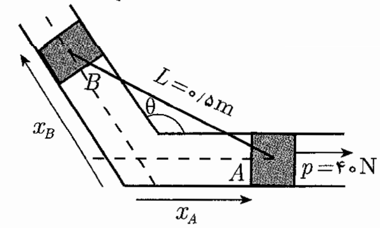
لحظه برخورد برگ با زمین : $z = ۰ \rightarrow (۳ - ۰/۴t^۲) = ۰$

$$\rightarrow t^۲ = \frac{۳}{۰/۴} = ۷/۵ \rightarrow t = ۲/۷۴\text{s}$$

مثال ۱۶ لغزنده‌های A و B توسط میله‌ی صلب سبکی به طول $L = ۰/۵\text{m}$ به یکدیگر متصل شده و با اصطکاک ناچیزی در شیارهای نشان داده شده در شکل (۲-۴۲) حرکت می‌کنند. در موقعیت $x_A = ۰/۴\text{m}$ سرعت لغزنده‌ی A برابر با $v_A = ۰/۹\text{m/s}$ و به طرف راست می‌باشد. شتاب هر یک از لغزنده‌ها و نیروی موجود در میله را برای هر دو حالت «الف» و «ب» به‌دست آورید:

الف) $\begin{cases} \theta = ۹۰^\circ \\ x_A = ۰/۴\text{m} \end{cases}$ ب) $\begin{cases} \theta = ۱۵۰^\circ \\ x_A = ۰/۴\text{m} \end{cases}$

$$\begin{cases} m_A = ۲\text{kg} \\ m_B = ۳\text{kg} \end{cases}$$



شکل ۲-۴۲

حل. الف) $\theta = ۹۰^\circ$

$$\theta = ۹۰^\circ \rightarrow x_A^۲ + x_B^۲ = L^۲ = \text{cte}$$

عبارت فوق نشان می‌دهد که حاصل جمع مجذور عبارات x_A و x_B در هر لحظه برابر با عددی ثابت است و از آنجایی که x_A و x_B هر دو تابعی از زمان می‌باشند با مشتق‌گیری از طرفین تساوی فوق خواهیم داشت:

$$\frac{d(x_A^۲ + x_B^۲)}{dt} = \frac{d(L^۲)}{dt} = ۰ \rightarrow ۲x_A\dot{x}_A + ۲x_B\dot{x}_B = ۰$$

$$\rightarrow \dot{x}_B = -(\frac{x_A}{x_B})\dot{x}_A$$

$$x_A^۲ + x_B^۲ = L^۲ \rightarrow x_B = \sqrt{(۰/۵)^۲ - (۰/۴)^۲} = ۰/۳\text{m}$$

$$\rightarrow \dot{x}_B = v_B = -(\frac{۰/۴}{۰/۳}) \times ۰/۹ = -۱/۲\text{m/s}$$

برای به‌دست آوردن شتاب دو لغزنده بار دیگر از تساوی مورد نظر مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$\frac{d(x_A\dot{x}_A + x_B\dot{x}_B)}{dt} = \frac{d(۰)}{dt} = ۰$$

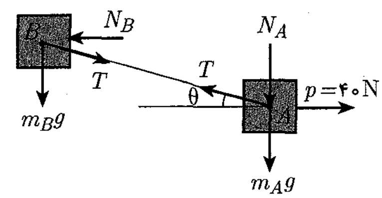
$$\rightarrow\ \dot{x}_A^{\,۲} + x_A\ddot{x}_A + \dot{x}_B^{\,۲} + x_B\ddot{x}_B = ۰$$

$$\rightarrow\ \ddot{x}_B = \frac{-\dot{x}_B^{\,۲} - \dot{x}_A^{\,۲} - x_A\ddot{x}_A}{x_B}$$

$$\rightarrow\ \ddot{x}_B = \frac{-(-۱/۲)^۲ - (۰/۹)^۲ - ۰/۴\ddot{x}_A}{۰/۳}$$

$$= -۷/۵ - \frac{۴}{۳}\ddot{x}_A \ \rightarrow\ a_B = -۷/۵ - \frac{۴}{۳}a_A$$

در معادله‌ی فوق هر دو پارامتر a_A و a_B مجهول هستند و برای دستیابی به مقدار این پارامترها نیاز به یک معادله‌ی دیگر داریم که این معادله‌ی اضافی را از طریق نوشتن قانون دوم نیوتن برای لغزنده‌های A و B در راستای شیارهای حرکتشان به‌دست می‌آوریم. دیاگرام آزاد دو لغزنده‌ی A و B در شکل (۲ـ۴۳) نشان داده شده است.



شکل ۲-۴۳

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\begin{cases} A : (P - T\cos\theta) = m_Aa_A \\ \rightarrow\ (۴۰ - ۰/۸T) = ۲a_A \qquad (I) \\ B : (-m_Bg - T\sin\theta) = m_Ba_B \\ \rightarrow\ (۳\times ۹/۸ + ۰/۶T) = -۳a_B \qquad (II)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(I)\times\frac{۱۰}{۸}\ \rightarrow\ (۵۰ - T) = ۲/۵a_A \\ (II)\times\frac{۱۰}{۶}\ \rightarrow\ (۴۹ + T) = -۵a_B\end{array}\right\}\ ۹۹ = ۲/۵a_A - ۵a_B$$

$$a_B = -۷/۵ - \frac{۴}{۳}a_A\ \rightarrow\ ۹۹ = ۲/۵a_A + ۳۷/۵ + ۶/۶۶a_A$$

$$\rightarrow\ a_A = ۶/۷\text{m/s}^۲\ \rightarrow\ a_B = -۱۶/۴۳\text{m/s}^۲$$

ب) $\theta = ۱۵۰^\circ$

طبق قانون کسینوس‌ها : $L^۲ = x_A^۲ + x_B^۲ - ۲x_Ax_B\cos ۱۵۰$ $\qquad (I)$

$$L = ۰/۵\text{m}\ ,\ x_A = ۰/۴\text{m}\ \rightarrow\ x_B^۲ + ۰/۷x_B = ۰/۰۹$$

$$\rightarrow\ x_B = \frac{-۰/۷ \pm \sqrt{(-۰/۷)^۲ - ۴\times ۱\times(-۰/۰۹)}}{۲}$$

$$\rightarrow\ x_B = \begin{cases} ۰/۱۱\text{m} \\ -۰/۸۱\text{m}\end{cases}\quad ,\ x_B > ۰\ \rightarrow\ x_B = ۰/۱۱\text{m}$$

اکنون از طرفین رابطه‌ی (I) مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$۲L\dot{L} = ۲x_A\dot{x}_A + ۲x_B\dot{x}_B - ۲\cos ۱۵۰^\circ(x_A\dot{x}_B + \dot{x}_Ax_B)$$

$$\dot{x}_A = v_A\ ,\ \dot{x}_B = v_B$$

$$\rightarrow\ ۰ = ۰/۸v_A + ۰/۲۲v_B + ۱/۷۳(۰/۴v_B + ۰/۱۱v_A)$$

$$= ۰/۹۹v_A + ۰/۹۱v_B$$

$$v_A = ۰/۹\mathrm{m/s} \;\rightarrow\; v_B = \frac{-۰/۹۹ \times ۰/۹}{۰/۹۱} = -۰/۹۸\mathrm{m/s}$$

برای بار دوم از رابطه‌ی (I) مشتق می‌گیریم:

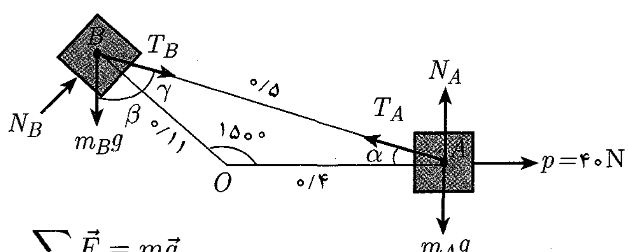
$$۰ = \dot{x_A}^۲ + x_A\ddot{x_A} + \dot{x_B}^۲ + x_B\ddot{x_B}$$
$$- \cos ۱۵۰ (\dot{x_A}\dot{x_B} + x_A\ddot{x_B} + \dot{x_A}\dot{x_B} + \ddot{x_A}x_B)$$

$$\ddot{x_A} = a_A \;\;,\;\; \ddot{x_B} = a_B$$

$$\rightarrow\; ۰ = v_A^۲ + ۰/۴a_A + v_B^۲ + ۰/۱۱a_B$$
$$+ ۰/۸۷(v_Av_B + ۰/۴a_B + v_Av_B + ۰/۱۱a_A)$$

$$\rightarrow\; a_A = -\left(\frac{۰/۴۶a_B + ۰/۲۳}{۰/۵}\right) \qquad (II)$$

باز هم به یک معادله با دو مجهول برخوردیم و نیاز به یک معادله‌ی اضافی داریم. مانند قسمت «الف» از نوشتن قانون دوم برای دو لغزنده این معادله‌ی اضافی حاصل خواهد شد: (شکل ۲ـ۴۴)



شکل ۲-۴۴

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$A : (p - T_A \cos\alpha) = m_A a_A$$

$$x_B^۲ = L^۲ + x_A^۲ - ۲Lx_A\cos\alpha$$

$$\rightarrow\; \cos\alpha = \frac{۰/۵^۲ + ۰/۴^۲ - ۰/۱۱^۲}{۲ \times ۰/۵ \times ۰/۴} = ۰/۹۹۵ \simeq ۱$$

$$\rightarrow\; ۴۰ - T = ۲a_A \qquad (III)$$

$$B : (-m_Bg\cos\beta - T_B\cos\gamma) = m_Ba_B$$

$$\beta = ۱۵۰ - ۹۰ = ۶۰^\circ \;\;,\;\; \gamma = ۱۸۰ - ۱۵۰ - \alpha$$

$$\alpha = \mathrm{Arccos}\,(۰/۹۹۵) = ۵/۹^\circ \;\rightarrow\; \gamma = ۲۴/۱^\circ$$

$$\rightarrow\; (-۳ \times ۹/۸ \times ۰/۵ - T_B \times ۰/۹) = ۳a_B$$

$$\rightarrow\; ۱۴/۷ + ۰/۹T = -۳a_B \qquad (IIII)$$

$$\begin{cases} \frac{۱۰}{۹} \times (IIII) \rightarrow\; ۱۶/۳۳ + T = -۳/۳۳a_B \\ (III) \;\rightarrow\; ۴۰ - T = ۲a_A \end{cases}$$

$$\rightarrow\; ۵۶/۳۳ = ۲a_A - ۳/۳۳a_B$$

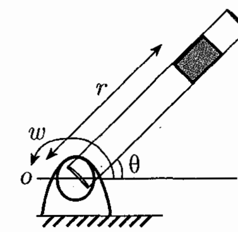
$$(II) \;\rightarrow\; a_A = -۰/۹۲a_B - ۰/۴۶$$

$$\rightarrow 56/33 = -1/84a_B - 0/92 - 3/33a_B$$

$$\rightarrow a_B = -11/07 \mathrm{m/s^2}$$

$$\rightarrow a_A = 10/64 \mathrm{m/s^2}$$

مثال ۱۷ یک لوله‌ی توخالی در نقطه O حول محور افقی مفصل شده و در صفحه‌ی قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = 3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. اگر لغزنده‌ی ۲ کیلوگرمی در داخل لوله با سرعت $3\mathrm{m/s}$ نسبت به لوله از نقطه‌ی O دور شود، در حالتی که $\theta = 30^\circ$ می‌باشد نیروی عمودی N که از طرف لوله به لغزنده وارد می‌شود و همچنین فاصله‌ی r را محاسبه کنید.



شکل ۲-۴۵

حل. برای حل این مسئله با توجه به اطلاعاتی که در صورت مسئله در اختیار ما قرارگرفته است دستگاه مختصات قطبی مناسب‌ترین ابزار برای حل مسئله است:

$$\dot{r} : \text{سرعت نسبی لغزنده نسبت به لوله} \rightarrow \dot{r} = 3\mathrm{m/s} = \mathrm{cte} \rightarrow \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = 3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \mathrm{cte} \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

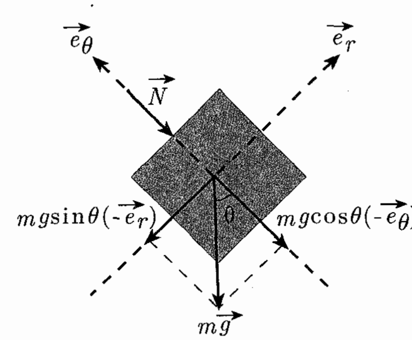
اکنون برآیند نیروهای وارده به لغزنده را در دو جهت شعاعی و مماسی و با استفاده از قانون دوم نیوتن به‌دست خواهیم آورد:

$$\sum \vec{F} = F_r\vec{e_r} + F_\theta\vec{e_\theta} = m(a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta})$$

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = (0 - r(3)^2) = -9r(\mathrm{m/s^2})$$

$$a_\theta = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = (2 \times 3 \times 3 + 0) = 18(\mathrm{m/s^2})$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = 2 \times (18\vec{e_\theta} - 9r\vec{e_r}) = F_r\vec{e_r} + F_\theta\vec{e_\theta}$$



شکل ۲-۴۶

در این قسمت دیاگرام آزاد لغزنده را رسم می‌کنیم و تمامی نیروهای وارده بر آن را نمایش می‌دهیم:

$$\vec{F_r} = -mg\sin\theta\vec{e_r}$$

$$\vec{F_\theta} = -(N + mg\cos\theta)\vec{e_\theta}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = -mg\sin\theta\vec{e_r} - (N + mg\cos\theta)\vec{e_\theta} = 36\vec{e_\theta} - 18r\vec{e_r}$$

$$F_r = -mg\sin\theta = -18r$$

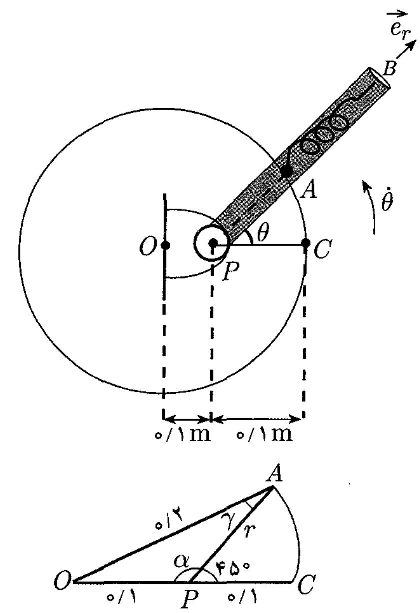
$$\rightarrow r = \frac{2 \times 9/8 \times \sin 30^\circ}{18} = 0/504\mathrm{m}$$

$$F_\theta = -N - mg\cos\theta = 36$$

$$\rightarrow N = -36 - (2 \times 9/8 \times \cos 30^\circ) = -52/97\mathrm{N}$$

$$\rightarrow \vec{N} = (-52/97)(-\vec{e_\theta}) = 52/97\vec{e_\theta}(\mathrm{N})$$

مثال ۱۸ بازوی شیاردار PB در صفحه‌ی افقی حول نقطه‌ی P از یک بادامک ثابت دایره‌ای شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = ۱۵\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ می‌چرخد. فنر دارای سختی $۵\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ بوده و به ازای $\theta = ۰$، فشردگی ندارد. غلتک صیقلی A دارای جرم $۰/۵\text{kg}$ می‌باشد. مقدار نیروی عمودی N وارد به غلتک از طرف بادامک و همچنین نیروی اعمال شده‌ی R از لبه‌ی شیاردار به A را در $\theta = ۴۵^\circ$ به‌دست آورید. تمام سطوح صیقلی هستند و از قطر کوچک غلتک و نیروی وزن آن صرف‌نظر کنید.



شکل ۲-۴۷

حل.

$$OA = OC = ۰/۲\text{m}$$

$$OPA : OA^۲ = AP^۲ + OP^۲ - ۲AP \times OP \times \cos\alpha$$

$$\alpha = ۱۸۰ - ۴۵ = ۱۳۵^\circ$$

$$\to (۰/۲)^۲ = r^۲ + (۰/۱)^۲ - ۲ \times (۰/۱) \times r \times \cos ۱۳۵$$

$$\to ۰/۰۳ = r^۲ + ۰/۱۴r$$

$$\to r = \frac{-۰/۱۴ \pm \sqrt{(۰/۱۴)^۲ - ۴ \times ۱ \times (-۰/۰۳)}}{۲} = \begin{cases} ۰/۱۱۷\text{m} \\ -۰/۲۶ < ۰ \end{cases}$$

$$\vec{F}_{\text{فنر}} = -k\Delta x(\vec{e_r})$$

$$\theta = ۰ \to \Delta x = ۰$$

$$\theta = ۴۵^\circ \to \Delta x = r - ۰/۱ = ۰/۰۱۷\text{m}$$

$$\to \vec{F}_{\text{فنر}} = -۵ \times ۰/۰۱۷\vec{e_r} = -۰/۰۸۵\vec{e_r}(\text{kN}) = -۸۵\vec{e_r}(\text{N})$$

برای به‌دست آوردن نیروی $\vec{N}$ ابتدا باید بردار شتاب غلتک را در $\theta = ۴۵^\circ$ بیابیم تا با استفاده از قانون دوم نیوتن به نیروی $\vec{N}$ دسترسی پیدا کنیم. برای پیدا کردن بردار شتاب غلتک از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲)\vec{e_r} + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$OPA \;:\; r^۲ + (۰/۱)^۲ - ۲(۰/۱)r\cos(\pi - \theta) = (۰/۲)^۲$$

$$\to r^۲ - ۰/۲r\cos(\pi - \theta) = ۰/۰۳ \qquad (I)$$

از طرفین رابطه‌ی (I) مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$۲r\dot{r} - ۰/۲\Big(\dot{r}\cos(\pi - \theta) + r\dot{\theta}\sin(\pi - \theta)\Big) = ۰$$

$$\theta = \frac{\pi}{۴} = ۴۵^\circ \;,\; \dot{\theta} = ۱۵\frac{\text{rad}}{\text{s}} \;,\; r = ۰/۱۱۷\text{m}$$

$$\to ۰/۲۳۴\dot{r} + ۰/۱۴\dot{r} - ۰/۲۴۸ = ۰ \to \dot{r} = ۰/۶۶(\text{m/s})$$

برای بار دوم از طرفین رابطه‌ی (I) مشتق می‌گیریم:

$$r\dot{r} - ۰/۱\Big(\dot{r}\cos(\pi - \theta) + r\dot{\theta}\sin(\pi - \theta)\Big) = ۰$$

$$r\ddot{r}+\dot{r}^{۲}-۰/۱\Big(\ddot{r}\cos(\pi-\theta)+\dot{r}\dot{\theta}\sin(\pi-\theta)$$
$$+\dot{r}\dot{\theta}\sin(\pi-\theta)+r\ddot{\theta}\sin(\pi-\theta)-r\dot{\theta}^{۲}\cos(\pi-\theta)\Big)=۰$$

$$\dot{\theta}=۱۵\frac{\text{rad}}{\text{s}}=\text{cte}\ \rightarrow\ \ddot{\theta}=۰\ \ ,\ \ r=۰/۱۱۷\text{m}$$

$$\theta=\frac{\pi}{۴}(\text{rad})=۴۵^\circ\ \ ,\ \ \dot{r}=۰/۶۶$$

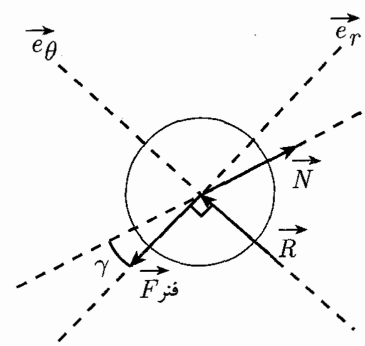
از حل معادله‌ی فوق داریم : $\ddot{r}=۱۵/۰۵(\text{m/s}^{۲})$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^{۲}=-۱۱/۲۷۵(\text{m/s}^{۲})$$

$$a_\theta=۲\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=۱۹/۸(\text{m/s}^{۲})$$

$$\rightarrow\ \sum\vec{F}=ma_r\vec{e_r}+ma_\theta\vec{e_\theta}=-۵/۵۶\vec{e_r}+۹/۹\vec{e_\theta}$$

اکنون دیاگرام آزاد را برای غلتک رسم می‌کنیم:



شکل ۲-۴۸

$$\vec{F_r}=(N\cos\gamma-F_{\text{فنر}})\vec{e_r}$$

$$\vec{F_\theta}=(R-N\sin\gamma)\vec{e_\theta}$$

طبق قانون سینوس‌ها : AOP : $\dfrac{۰/۱}{\sin\gamma}=\dfrac{۰/۲}{\sin(۱۳۵)}$

$$\rightarrow\ \sin\gamma=۰/۳۵\ \rightarrow\ \gamma=۲۰/۷^\circ$$

$$\rightarrow\ F_r=(N\cos\gamma-F_{\text{فنر}})=۰/۹۳۵\text{N}-۸۵=-۵/۵۶$$

$$\rightarrow\ N=۸۴/۹۶(\text{N})$$

$$\rightarrow\ F_\theta=(R-N\sin\gamma)=R-۳۰=۹/۹\ \rightarrow\ R=۳۹/۹(\text{N})$$

$$\rightarrow\ \vec{R}=۳۹/۹\vec{e_\theta}(\text{N})$$

$$\rightarrow\ \vec{N}=(N\cos\gamma\vec{e_r}-N\sin\gamma\vec{e_\theta})$$

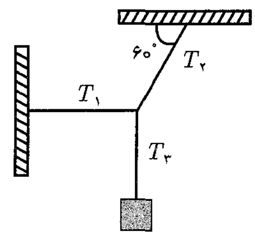
$$=(۷۹/۵\vec{e_r}-۳۰\vec{e_\theta})(\text{N})$$

مسائل نمونه فصل ۲

قانون اول نیوتون (تعادل)

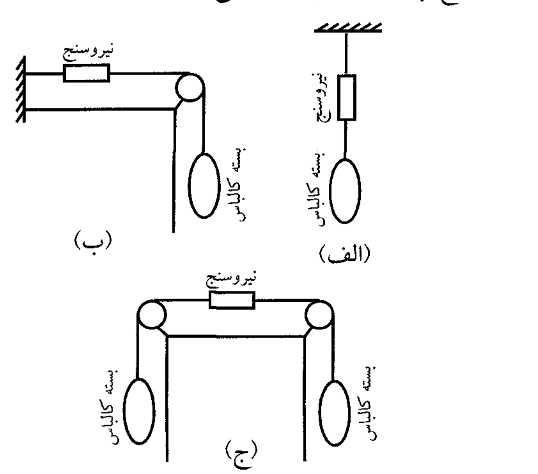
۱ . یک دسته مگس را در شیشه در بسته‌ای قرار داده‌ایم. شیشه‌ی مگس را روی ترازو می‌گذاریم. آیا وزنی که ترازو نشان می‌دهد به موقعیت مگس‌ها بستگی دارد؟ اگر دارد، چگونه؟

۲ . در شکل زیر نیروی کشش T_1 و T_2 را به‌دست آورید.



شکل ۲-۴۹

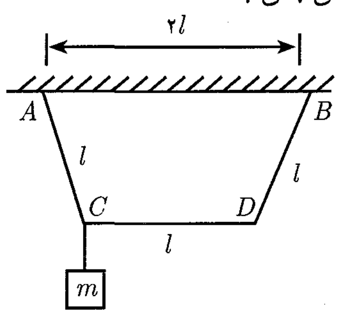
۳ . الف) یک بسته کالباس به جرم $11{,}0\,\mathrm{kg}$ به وسیله ریسمانی به یک نیروسنج وصل شده و نیروسنج نیز با ریسمان دیگری از سقف آویخته شده است (شکل ۲ـ۵۰ الف). نیروسنج که بر حسب یکاهای وزن مدرج شده است، چه عددی را نشان می‌دهد؟ ب) در شکل (۲ـ۵۰ ب) بسته کالباس از طریق ریسمانی که از روی قرقره‌ای عبور کرده به نیروسنج وصل شده است. سر دیگر نیروسنج با ریسمان دیگری به دیوار متصل است. در این حالت نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ ج) در شکل (۲ـ۵۰ ج) نیرو سنج به جای دیوار در طرف چپ به یک بسته کالباس ۱۱٫۰ کیلوگرمی دیگر وصل شده است و دستگاه در حال سکون است. در این حالت، نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟



شکل ۲-۵۰

۴ . در جایی از زمین که در آن $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ است، وزن یک جسم $22\,\mathrm{N}$ است. در جایی که در آن $g = 4{,}9\,\mathrm{m/s^2}$ است، الف) وزن، ب) جرم جسم چقدر است؟ اگر جسم به جایی که در آن $g = 0$ است، برود، ج) وزن، د) جرم جسم چقدر است؟

۵ . سه میله‌ی بدون جرم با طول l را در نظر بگیرید که دو تا از آنها در نقاط A و B لولا شده‌اند و از پایین به‌طور متقارن به میله‌ی سوم که افقی است، در نقاط C و D لولا شده‌اند (شکل ۲ـ۵۱). طول AB برابر $2l$ است. باری به جرم m از نقطه‌ی C آویزان است. حداقل نیروی وارد بر لولای D یعنی $F_{\min}$ را طوری پیدا کنید که میله‌ی وسط افقی باقی بماند.

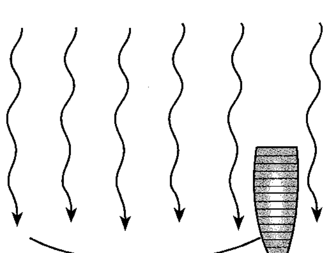


شکل ۲-۵۱

قانون دوم نیوتون (حرکت یک‌بعدی)

۶ . در داخل لوله‌ای که انتهای آن به صورت یک حلقه پیچ‌خورده است، آب جریان دارد. آب به چه صورتی از لوله خارج می‌شود؟ (از اثر نیروی گرانش صرف‌نظر کنید.)

۷ . همه قایق‌سواری را دوست دارند، مخصوصاً وقتی که باد می‌وزد. فرض کنید در قایقی با بادبان کاملاً برافراشته نشسته‌اید و مستقیماً در جهت وزش باد حرکت می‌کنید. سرعت باد $30\,\mathrm{km/h}$ است و کاملاً عمود بر بادبان می‌وزد (شکل ۲ـ۵۲). حداکثر سرعتی که قایق می‌تواند به‌دست آورد، چقدر است؟



نمای قایق بادبانی از بالا
شکل ۲-۵۲

۸ . کیسه‌ی سیب‌زمینی به جرم ۴kg را به طنابی بسته و نگه داشته‌ایم. اگر کشش طناب ۳۹٫۲N باشد، حرکت کیسه چگونه است؟ وقتی کیسه با شتاب $۱٫۸\mathrm{m/s^۲}$ به طرف بالا حرکت می‌کند، کشش طناب را به‌دست آورید.

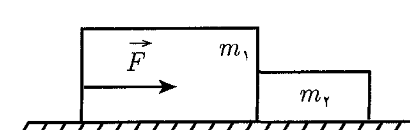
۹ . تیر چوبی به‌طور قائم از سقف آویزان است. یک بچه گربه روی تیر می‌پرد. در این موقع طناب‌آویز پاره می‌شود و تیر سقوط می‌کند. شتاب تیر را در موقع سقوط معلوم کنید. در حالی که در زمان سقوط تیر، گربه از آن طوری بالا می‌رود که ارتفاع گربه از کف اتاق ثابت می‌ماند. جرم گربه m و جرم چوب M است.

۱۰ . جرم هر یک از وزنه‌های ماشین آتوودی، M است. وزنه‌ای اضافی به جرم m بر روی یکی از آنها قرار می‌دهیم. از جرم نخ و قرقره و مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. الف) شتاب وزنه‌ها، ب) نیروی کشش نخ، ج) نیروی فشار وارد بر محور قرقره، د) نیروی فشار وزنه m بر جرم M را تعیین کنید.

۱۱ . به نخی که می‌تواند $F = ۱۰\mathrm{N}$ نیرو را تحمل کند وزنه ۵ نیوتونی آویزان است. مقاومت هوا در مقابل حرکت وزنه به‌طور متوسط یک نیوتون است. حداکثر ارتفاعی که می‌توان وزنه را در مدت یک ثانیه بالا برد، تعیین کنید.

۱۲ . یک سورتمه موشکی آزمایشی در مدت ۱٫۸ ثانیه با آهنگ ثابت می‌تواند از حال سکون به سرعت ۱۶۰۰km/h برسد. اگر جرم سورتمه ۵۰۰kg باشد. بزرگی نیروی برآیند لازم چقدر است؟

۱۳ . دو جسم روی میز بدون اصطکاکی با هم تماس دارند. یک نیروی افقی، مطابق شکل (۲ـ۵۳)، به جسم بزرگ‌تر وارد می‌شود. الف) به ازای $m_۱ = ۲٫۳\mathrm{kg}$، $m_۲ = ۱٫۲\mathrm{kg}$ و $F = ۳٫۲\mathrm{N}$، بزرگی نیروی تماسی میان دو جسم را پیدا کنید. ب) نشان دهید که اگر همان نیرو با بزرگی F به جسم کوچک‌تر در جهت مخالف وارد شود، بزرگی نیروی میان دو جسم ۲٫۱N می‌شود، که با مقدار به‌دست آمده در قسمت (الف) مساوی نیست. دلیل این اختلاف را توضیح دهید.



شکل ۲-۵۳

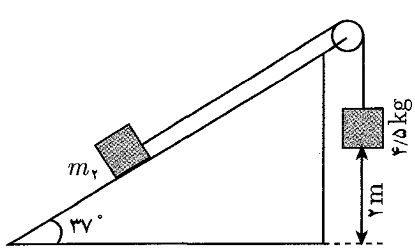
۱۴ . شخصی به جرم ۸۰kg به وسیله چتر نجات با شتاب رو به پایین $۲٫۵\mathrm{m/s^۲}$ در حال پایین آمدن است. جرم چتر ۵٫۰kg است. الف) نیروی رو به بالایی که از سوی هوا به چتر نجات باز شده وارد می‌شود، چیست؟ ب) نیروی رو به پایینی که شخص به چتر وارد می‌کند چقدر است؟

۱۵ . زنجیری که پنج حلقه دارد و جرم هر حلقه ۰٫۱۰۰kg است، با شتاب ثابت $۲٫۵۰\mathrm{m/s^۲}$ به طرف بالا کشیده می‌شود. نیرویی که هر کدام از حلقه‌ها به یکدیگر وارد می‌کنند را تعیین کنید. سپس بزرگی نیروی $\vec{F}$ که شخص بالا برنده‌ی زنجیر به حلقه‌ی بالایی وارد می‌کند را تعیین کنید.

۱۶ . یک فیل و یک پَر از روی درخت بلندی هم‌زمان سقوط می‌کنند. نیروی مقاومت هوا بر روی کدام‌یک بیشتر است؟

۱۷ . شخصی داخل آسانسور، روی ترازویی ایستاده است. وقتی آسانسور ساکن است، ترازو عدد ۱۲۵lb را نشان می‌دهد. در هر یک از حالات زیر، ترازو چه عددی را نشان می‌دهد؟ وقتی شتاب آسانسور: الف) $۴\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s^۲}}$ به طرف بالاست. (ب) $۴\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s^۲}}$ به طرف پایین است.

۱۸ . در شکل زیر، دستگاه ساکن است و جرم ۴٫۵kg، ۲m بالاتر از سطح زمین است. سیستم رها می‌شود و ۱٫۵s بعد، جرم ۴٫۵kg به زمین برخورد می‌کند. وقتی جرم ۴٫۵ کیلوگرمی در حال حرکت است، جرم $m_۲$ و کشش نخ را به‌دست آورید.

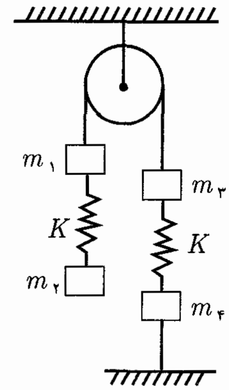


شکل ۲-۵۴

۱۹ . نخی از روی قرقره ثابتی که به آسانی می‌چرخد عبور کرده است. بر یک طرف نخ وزنه‌ای به جرم M آویزان است. از طرف دیگر نخ حلقه‌ای با شتاب ثابت a' نسبت به نخ می‌لغزد. اگر جرم حلقه m باشد، شتاب وزنه M را تعیین کنید. نیروی اصطکاک حلقه با نخ چقدر است؟

۲۰ . با توجه به سیستم ساکن نشان داده شده در شکل (۲ـ۵۵)،

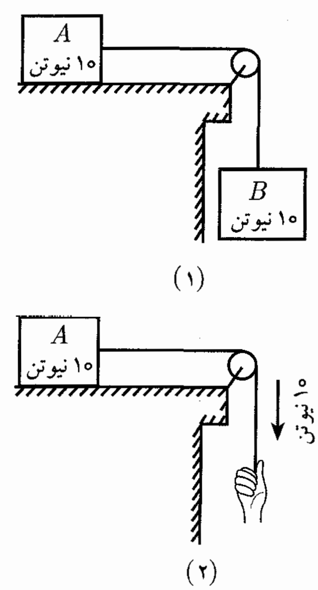
شتاب وزنه‌ها را بلافاصله پس از پاره شدن نخ پایینی محاسبه کنید. از جرم نخ، قرقره و فنرها صرف‌نظر کنید.



شکل ۲-۵۵

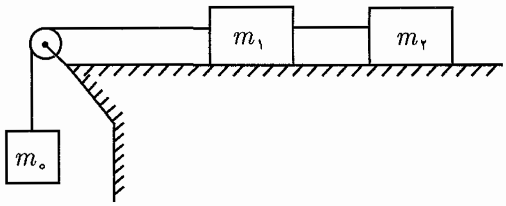
قانون دوم نیوتون (حرکت دوبعدی)

۲۱ . در حالت‌های (۱) و (۲) که در شکل (۲ـ۵۶) دیده می‌شوند، یک نیروی خالص ۱۰ نیوتونی جسم A را به سمت قرقره شتاب می‌دهد. شتاب جسم در کدام حالت بیشتر است؟ (از اصطکاک صرف‌نظر کنید)



شکل ۲-۵۶

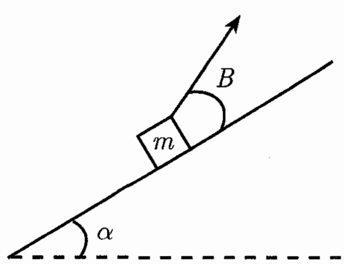
۲۲ . در شکل (۲ـ۵۷) جرم‌های $m_\circ$، m_1 و m_2 برابرند و از جرم نخ‌ها و قرقره و همچنین از اصطکاک بین نخ و قرقره می‌توان صرف‌نظر کرد. اگر ضریب اصطکاک بین جرم‌ها و سطح k باشد، شتاب جرم $m_\circ$ و کشش نخ بین جرم‌های m_1 و m_2 را تعیین کنید.



شکل ۲-۵۷

۲۳ . جسم سربی به جرم ۲۰۰gr توسط میله نازکی از سقف اتومبیلی، آویزان است. در جاده‌ی افقی، شتاب اتومبیل $۳/۶\text{m/s}^2$ است. کشش میله را به‌دست آورید.

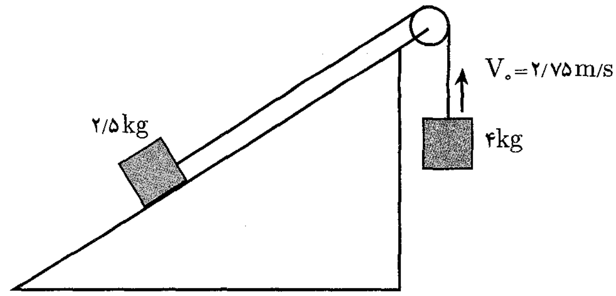
۲۴ . میله‌ای به جرم m بر روی سطح شیبداری که با افق زاویه‌ی α می‌سازد قرار دارد و توسط یک ریسمان کشیده می‌شود (شکل ۲ـ۵۸). ضریب اصطکاک برابر μ است. زاویه‌ی β را که ریسمان باید با سطح شیبدار بسازد تا کشش آن حداقل شود را بیابید.



شکل ۲-۵۸

۲۵ . جعبه‌ای روی سطح شیبداری قرار دارد که می‌توان زاویه‌ی آن را تغییر داد. وقتی زاویه‌ی سطح به تدریج زیاد می‌شود، جعبه در حال سکون باقی می‌ماند. وقتی زاویه به ۴۸° می‌رسد، جعبه شروع به حرکت می‌کند. نقطه شروع حرکت جعبه از انتهای سطح شیبدار ۳/۲m فاصله دارد. فرض کنید ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح، نصف ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و سطح باشد. ضریب اصطکاک ایستایی سطح و سرعت جعبه را در پایین سطح به‌دست آورید.

۲۶ . در شکل (۲ـ۵۹)، جرم ۴kg ابتدا با سرعت ۲/۷۵m/s بالا می‌رود و پس از مدتی با سرعت ۱/۴۵m/s از نقطه شروع حرکتش می‌گذردو به طرف پایین می‌رود. ضریب اصطکاک جنبشی بین جرم ۲/۵ کیلوگرمی و سطح را به‌دست آورید. وقتی که جرم ۴kg به طرف بالا و پایین می‌رود، کشش نخ را به‌دست آورید.



شکل ۲-۵۹

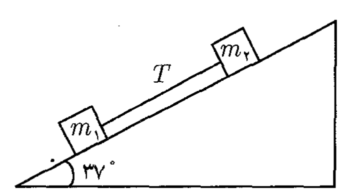
۲۷ . جعبه‌ای به جرم ۲۰kg روی کف کامیونی، به فاصله ۶m از عقب آن، قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جعبه و کف کامیون به ترتیب ۰/۴ و ۰/۲۵ است:

الف) حداکثر شتاب کامیون که‌بدون جابه‌جا شدن جعبه، می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟

ب) فرض کنید به مدت ۱s شتاب رو به جلوی کامیون، برابر $5m/s^2$ باشد و سپس با سرعت ثابت ۵m/s به حرکت خود ادامه دهد. رفتار جعبه را به‌طور کمی توضیح دهید.

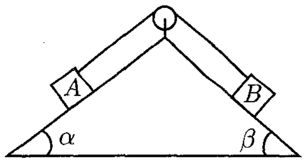
ج) فرض کنید به مدت ۴s شتاب رو به جلوی کامیون، برابر $5m/s^2$ باشد. آیا جعبه از عقب کامیون بیرون می‌افتد؟ چند ثانیه پس از شتاب گرفتن کامیون جعبه بیرون می‌افتد؟

۲۸ . در شکل زیر، دو جرم m_1 و m_2 توسط میله نازک و بدون جرمی به هم متصل هستند. این دو جرم از سطح شیبداری با زاویه‌ی °۳۷ به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک بین m_1 و سطح μ_1 و بین m_2 و سطح μ_2 است. کشش میله را به‌دست آورید. ($m_1 = ۴kg$، $m_2 = ۵kg$، $\mu_1 = ۰/۴$ و $\mu_2 = ۰/۶$)



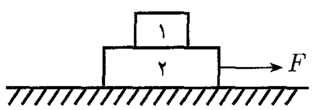
شکل ۲-۶۰

۲۹ . دو جسم A و B که دارای جرم یکسانی هستند، مطابق شکل (۲-۶۱) به هم وصلند. ضریب اصطکاک μ_1 و μ_2 و زوایای شیب α و β است. اگر جسم B به طرف پایین بیاید، شتاب وزنه‌ها را تعیین کنید.



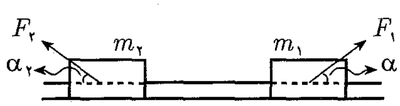
شکل ۲-۶۱

۳۰ . مطابق شکل (۲-۶۲) دو وزنه بر روی سطح افقی قرار دارند. حداکثر چه نیرویی بر جسم دوم می‌توان وارد کرد تا وزنه‌ی اول حرکت متشابه‌التغییر تند شونده پیدا کند. ضریب اصطکاک اولی $\mu_1 = ۰/۱$ و دومی $\mu_2 = ۰/۲$، وزنه‌ی بالایی $P_1 = ۱۰N$ و وزنه‌ی پایینی $P_2 = ۲۰N$ است. (شتاب حرکت دو جسم یکی است.)



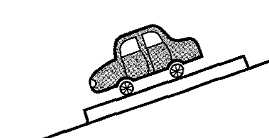
شکل ۲-۶۲

۳۱ . بر دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 که بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارند، دو نیروی F_1 و F_2 مطابق شکل (۲-۶۳) وارد می‌شود. این نیروها با افق زوایای α_1 و α_2 تشکیل می‌دهند. شتاب حرکت دستگاه را معلوم کنید.



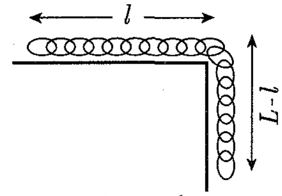
شکل ۲-۶۳

۳۲ . اتومبیلی به جرم m روی صفحه‌ای به جرم M قرار دارد. اتومبیل با چه شتابی روی صفحه به طرف پایین حرکت کند تا صفحه به‌طور یکنواخت بالا برود (شکل ۲-۶۴). ضریب اصطکاک اتومبیل با صفحه μ_1 و صفحه با سطح شیبدار μ_2 و همچنین زاویه‌ی شیب سطح α است.


شکل ۲-۶۴

۳۳ . جرم زنجیر انعطاف‌پذیری به طول L برابر M است. زنجیر طوری روی میز افقی بدون اصطکاک قرار گرفته که طول l آن روی

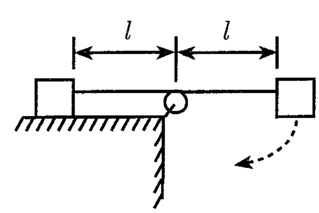
میز و طول $L-l$ آن آزادانه از لبه‌ی میز آویزان است (شکل ۲ـ۶۵). زنجیر رها می‌شود و شروع به لغزیدن روی میز می‌کند. شتاب زنجیر را به صورت تابعی از x به‌دست آورید. x مسافتی است که انتهای زنجیر پیموده است.



شکل ۲-۶۵

۳۴ . دو توپ سنگین به‌طور هم‌زمان از دو تفنگ فنری اسباب‌بازی که در فاصله‌ی $s = ۱۰\,\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند، شلیک می‌شوند. توپ اول با سرعت اولیه‌ی $V_1 = ۱۰\,\mathrm{m/s}$ به‌طور عمودی به بالا پرتاب می‌شود در حالی که دومی با سرعت اولیه $V_2 = ۲۰\,\mathrm{m/s}$ با زاویه‌ی α نسبت به افق پرتاب می‌شود. علاوه بر نیروی وزن، نیروی مقاومت هوا نیز با رابطه $F = \mu V$ (که در آن $\mu = ۰/۱\,\mathrm{gr/s}$ است)، بر توپ‌ها وارد می‌شود. زاویه‌ی α چقدر باشد که گلوله‌ها در هوا به یکدیگر برخورد کنند؟

۳۵ . یک بلوک توسط ریسمانی بدون جرم و غیرکشسان به طول $۲l$ که از روی یک قرقره‌ی بدون جرم رد شده است به بلوک مشابه دیگری وصل شده است. در ابتدا بلوک سمت راست نیز در همان ارتفاع نگه داشته شده است، به‌طوری که ریسمان نه کشیده شده و نه شکم داده باشد. بعد از رها کردن این بلوک، کدام‌یک از بلوک‌ها زودتر به قرقره می‌رسد؟



شکل ۲-۶۶

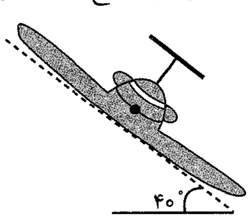
۳۶ . اتومبیلی از پل محدبی که شعاع انحنای آن ۴۰ متر است عبور می‌کند. چه شتاب حداکثری در بالاترین نقطه‌ی در امتداد افق بر اتومبیل اثر خواهد کرد. در صورتی که سرعت اتومبیل در بالاترین نقطه‌ی مسیر $۵۰/۴\,\mathrm{km/h}$ و ضریب اصطکاک چرخ‌ها با پل $۰/۵۷$ است.

۳۷ . میله‌ی صلبی به طول l تحت زاویه‌ی ϕ به محور قائمی نصب شده است و به اتفاق محور با سرعت زاویه‌ای ω می‌گردد. در قسمت پایین میله گلوله‌ای به جرم m نصب شده است. نیروی وارد از طرف میله بر گلوله را بیابید.

۳۸ . دوچرخه‌سواری یک بار در سطح افقی و یک بار در سطح شیبداری که شیب عرضی آن α است با سرعت یکسانی دایره‌ای به شعاع R را دور می‌زند. ضریب اصطکاک در هر دو حالت μ است. نسبت سرعت دوچرخه‌سوار را در دو حالت بیابید.

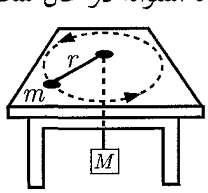
۳۹ . در آونگ مخروطی ایده‌آل، جرم M توسط ریسمان بدون جرمی به طول L از نقطه ثابتی آویزان است. دوره تناوب T معادل زمان یک دور گردش جرم M است که در صفحه افقی در مسیر دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. دوره تناوب T را به‌دست آورید. دوره تناوب آونگ مخروطی $۱/۲\,\mathrm{s}$ و شعاع آن $۰/۲۵\,\mathrm{m}$ است. طول آونگ L را به‌دست آورید.

۴۰ . هواپیمایی با تندی $۴۸۰\,\mathrm{km/h}$ در روی یک دایره افقی پرواز می‌کند. اگر زاویه بال‌های هواپیما نسبت به افق ۴۰° باشد، شعاع دایره پرواز هواپیما چقدر است؟ (شکل (۲ـ۶۷) را ببینید) فرض کنید نیروی لازم برای نگه داشتن هواپیما به‌طور کامل توسط یک «نیروی بالابرنده آیرودینامیک» عمود بر سطح بال تأمین می‌شود.



شکل ۲-۶۷

۴۱ . قرصی به جرم m از طریق ریسمانی که از سوراخ وسط میزی عبور کرده و به استوانه‌ای به جرم M وصل شده است، بر روی سطح بدون اصطکاک میز می‌لغزد (شکل ۲ـ۶۸). قرص با چه تندیی باید بچرخد تا استوانه در حال سکون باقی بماند؟



شکل ۲-۶۸

۴۲ . نیروی فنر ایده‌آل از رابطه $F = -kx$ به‌دست می‌آید. k

ثابت فنر و x تغییر طول فنر نسبت به حالت تعادل است. وقتی جرم $۰٫۳\text{kg}$ به فنر به طول $L_{۰} = ۱۸\text{cm}$ آویخته می‌شود، فنر $۱٫۴۵\text{cm}$ باز می‌شود. یک طرف فنر به وسیله میخی روی میز بدون اصطکاکی ثابت می‌شود. جرم با سرعت زاویه‌ای $۸٫۶۴\text{rad/s}$ می‌چرخد. شعاع مدار دایره‌ای را به‌دست آورید.

۴۳ . از یک مهندس راه خواسته‌اند پیچ بزرگراهی را طوری طراحی کند که اگر سطح جاده، پوشیده از یخ باشد، اتومبیل ساکن به پایین سُر نخورد و اتومبیلی که با سرعت ۴۰km/h حرکت می‌کند به بیرون پیچ نلغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک‌ها و جاده یخ‌زده $۰٫۱$ است. شیب عرضی پیچ و شعاع انحنای آن را به‌دست آورید.

۴۴ . پیچی به شعاع ۱۲۰m دارای شیب عرضی ۱۲° است. اتومبیلی به جرم ۱۰۰kg با سرعت ۴۰km/h بدون لغزش از پیچ می‌گذرد. اندازه و جهت نیروی اصطکاک را به‌دست آورید.

۴۵ . ذره‌ای به جرم m در صفحه p، در اثر نیروی F که مقدارش ثابت است و بردار آن با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در همان صفحه می‌چرخد، حرکت می‌کند. فرض کنید که ذره در $t = ۰$ ساکن بوده است.

الف) سرعت آن را بر حسب زمان بیابید.

ب) فاصله طی شده به وسیله ذره، بین دو توقف، و سرعت متوسط آن در این زمان را به‌دست آورید.

۴۶ . دوچرخه‌سواری بر روی دایره‌ای افقی به شعاع R حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک بین دوچرخه و سطح، تنها به فاصله r از مرکز o صفحه بستگی دارد: $\mu = \mu_{۰}(۱ - \frac{r}{R})$، که $\mu_{۰}$ ثابت است. شعاعی را بیابید که دوچرخه‌سوار می‌تواند حداکثر سرعت ممکن را داشته باشد. این سرعت چقدر است؟

۴۷ . قرقره‌ای ثابت یک طناب بدون جرم را که دو انتهای آن وزنه‌های $m_{۱}$ و $m_{۲}$ وصل است را حمل می‌کند. بین قرقره و ریسمان اصطکاک وجود دارد، به گونه‌ای که وقتی نسبت $\frac{m_{۲}}{m_{۱}} = \eta_{۰}$ باشد، ریسمان شروع به لغزش می‌کند.

الف) ضریب اصطکاک را بیابید. ب) شتاب جرم‌ها را وقتی که $\frac{m_{۲}}{m_{۱}} = \eta > \eta_{۰}$ باشد، به‌دست آورید.

۴۸ . ذره‌ای در صفحه تحت اثر نیرویی که همیشه عمود بر بردار سرعت آن است و به فاصله ذره از نقطه ثابتی در صفحه به صورت $\frac{۱}{r^n}$ بستگی دارد (که n ثابت است)، حرکت می‌کند. در چه مقداری از n حرکت ذره بر یک دایره ثابت منطبق است؟

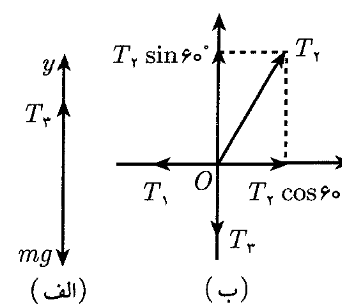
۴۹ . میله صاف افقی AB با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = ۲۰۰\text{rad/s}$ حول محور عمودی گذرنده از انتهای A می‌چرخد. مهره‌ای بدون اصطکاک به جرم $m = ۰٫۵۰\text{kg}$ با سرعت اولیه $v_{۰} = ۱٫۰۰\text{m/s}$ در طول میله از نقطه A شروع به حرکت می‌کند. نیروی کوریولیس مؤثر بر مهره را در لحظه‌ای که مهره در فاصله $r = ۵۰\text{cm}$ از محور چرخش قرار می‌گیرد، به‌دست آورید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۲

قانون اول نیوتون (تعادل)

۱. وقتی مگس‌ها از ته شیشه بلند می‌شوند یا بر آن فرود می‌آیند ممکن است وزن آنها اندکی تغییر کند. اما اگر در داخل شیشه در بسته در حال پرواز باقی بمانند یا در ته آن نشسته باشند، وزن شیشه تغییر نمی‌کند. وزن شیشه بستگی دارد به جرم داخل آن که تغییر نمی‌کند. اما چگونه وزن یک مگس در حال پرواز به ته شیشه منتقل می‌شود؟ به وسیله جریان هوا، مخصوصاً جریان‌های رو به پایینی که بال مگس‌ها تولید می‌کنند. اما آن جریان‌های رو به پایین باید به طرف بالا هم برگردند. آیا ممکن است نیروی جریان‌های هوا بر ته ظرف با همین نیرو بر در ظرف برابر باشد؟ خیر. اثر این جریان‌ها بر ته ظرف بیشتر است. چه چیز سبب کند شدن سرعت جریان‌های هوا می‌شود؟ اصطکاک. اگر اصطکاک نبود مگس نمی‌توانست پرواز کند.

۲. نمودار جسم آزاد جسم در شکل (۲ـ ۶۹ الف) و نیروهای وارد بر نقطه O در شکل (۲ـ۶۹ ب) نشان داده شده است.



شکل ۲-۶۹

جسم، ساکن است پس $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T_۳ - mg = ۰ \Rightarrow T_۳ - ۴ \times ۹/۸ = ۰$$
$$\Rightarrow T_۳ = ۳۹/۲\text{N}$$

دستگاه ساکن است پس $a_y = a_x = ۰$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T_۲ \sin ۶۰^\circ - T_۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۰/۸۷T_۲ - ۳۹/۲ = ۰ \Rightarrow T_۲ = ۴۵/۱\text{N}$$
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T_۲ \cos ۶۰^\circ - T_۱ = ۰$$
$$\Rightarrow ۰/۵(۴۵/۱) - T_۱ = ۰ \Rightarrow T_۱ = ۲۲/۵\text{N}$$

۳. الف) نمودار جسم آزاد بسته کالباس در شکل (۲ـ۷۰) نشان داده شده است. واضح است که برای متعادل ماندن بسته کالباس، T باید Mg را خنثی کند. در نتیجه عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر وزن بسته کالباس است که برابر است با:

شکل ۲-۷۰

$$F = Mg \Rightarrow F = ۱۱(۹/۸۱) \Rightarrow F = ۱۰۸\text{N}$$

ب) نمودار جسم آزاد بسته کالباس مانند قسمت قبل است، با این تفاوت که یک قرقره بین نیروسنج و بسته قرارگرفته است. ولی چون نخ بدون جرم بوده و کشش در طول آن ثابت است، کشش نخ در سمت راست نیروسنج برابر وزن بسته کالباس است. در نتیجه $F = ۱۰۸\text{N}$ است.

دقت کنید که در این دو قسمت که بررسی کردیم، سر دیگر نیروسنج به دیوار متصل است و بنابراین نیرویی برابر با وزن بسته کالباس به طرف دیگر نیروسنج نیز وارد می‌شود تا نیروسنج در تعادل باقی بماند.

ج) در این قسمت هیچکدام از دو سر نیروسنج به دیوار وصل نیست. برای متعادل ماندن هر کدام از بسته‌های کالباس، نیروی کشش نخ باید برابر وزن بسته‌ها باشد. بنابراین اگر یکی از بسته‌ها را برداریم و به جای آن دیوار بگذاریم، تفاوتی حاصل نمی‌شود، زیرا در هر دو حالت به دو سر نیروسنج، نیرویی برابر با وزن بسته‌های کالباس وارد می‌شود. در نتیجه عددی که نیروسنج نشان می‌دهد برابر با $F = ۱۰۸\mathrm{N}$ است.

۴. الف) رابطه بین وزن، جرم و شتاب جاذبه عبارت است از

$$W = mg \qquad (۱)$$

بنابراین با نصف شدن شتاب جاذبه، وزن جسم نیز نصف می‌شود. در نتیجه در جایی که $g = ۴/۹\mathrm{m/s^۲}$ است، وزن جسم نصف مقدار آن در جایی است که $g = ۹/۸\mathrm{m/s^۲}$ است. پس

$$W = \frac{۱}{۲}(۲۲) \ \Rightarrow\ W = ۱۱\mathrm{N}$$

ب) بنابر رابطه (۱)، داریم

$$W = mg \ \Rightarrow\ ۲۲ = m(۹/۸) \ \Rightarrow\ m = ۲/۲۴\mathrm{kg}$$

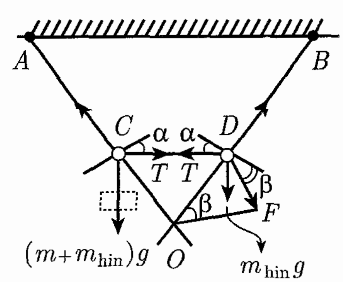
ج) بر اساس رابطه (۱) اگر $g = ۰$ باشد، وزن جسم نیز برابر صفر است.

د) جرم جسم یک خاصیت ذاتی است و با تغییر مقدار g، تغییری نمی‌کند. یعنی وزن جسم می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد ولی جرم جسم همیشه ثابت است. در نتیجه

$$m = ۲/۲۴\mathrm{kg}$$

۵. از آنجایی که لولای C در تعادل است، مجموع نیروهای وارد بر آن صفر است. با نوشتن مؤلفه‌ی نیروها در جهت عمود بر AC (شکل ۲ـ۷۱)، به‌دست می‌آوریم:

$$(m + m_{\mathrm{hin}})g\sin\alpha = T\cos\alpha \qquad (۱)$$



شکل ۲-۷۱

که در آن m_{hin} جرم لولا می‌باشد. به‌طور مشابه برای حالت تعادل لولای D و با استفاده از اینکه میله‌ی وسط، افقی است، داریم:

$$T\cos\alpha = F\cos\beta + m_{\mathrm{hin}}\cdot g\sin\alpha \qquad (۲)$$

با حل هم‌زمان معادلات (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$F = \frac{T\cos\alpha - m_{\mathrm{hin}}g\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\beta} \geq mg\sin\alpha$$

بنابراین کمترین مقدار نیرو $F_{\min}$ برای اینکه میله‌ی وسط افقی بماند، عبارتست از:

$$F_{\min} = mg\sin\alpha = \frac{mg}{۲}$$

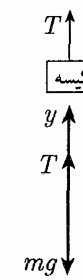
که در جهت عمود بر میله‌ی BD است.

قانون دوم نیوتون (حرکت یک‌بعدی)

۶. آب پس از جاری شدن از لوله در خط مستقیم جریان می‌یابد. برای اینکه مسیر آب خمیده شود اعمال نیرو لازم است. هنگامی که آب داخل لوله جریان دارد، این نیرو از طرف دیواره لوله به آب وارد می‌شود و سبب می‌شود که در مسیر خمیده حرکت کند. اما در خارج از لوله نیرویی به آب وارد نمی‌شود. هر جسمی که هیچ نیرویی بر آن وارد نشود در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.

۷. در صورتی که اصطکاک آب در مقابل حرکت قایق صفر باشد، سرعتی که قایق می‌تواند به‌دست بیاورد همان سرعت باد است و هیچگاه تندتر از باد حرکت نخواهد کرد. چرا؟ زیرا اگر قایق با سرعت باد حرکت کند، باد دیگر به بادبان آن نیرو وارد نمی‌کند. بنابراین سرعت قایق تغییر نخواهد کرد و همان ۳۰km/h می‌ماند. حال اگر سرعت قایق بیش از ۳۰km/h باشد، باد در جهت مخالف به آن نیرو وارد می‌کند تا سرعت آن به ۳۰km/h یا کمتر از آن برسد.

۸. بر اساس نمودار جسم آزاد جسم در شکل (۲ـ۷۲) و با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:



شکل ۲-۷۲

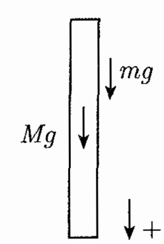
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T - mg = ma$$

$$\Rightarrow ۳۹{,}۲ - ۴ \times ۹{,}۸ = ۴ \times a \Rightarrow a = ۰$$

بنابراین کیسه یا ساکن است یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند. کیسه با شتاب $۱{,}۸\mathrm{m/s^۲}$ به طرف بالا حرکت می‌کند. با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow T - ۴ \times ۹{,}۸ = ۴ \times ۱{,}۸$$

$$\Rightarrow T - ۳۹{,}۲ = ۷{,}۲ \Rightarrow T = ۴۶{,}۴\mathrm{N}$$

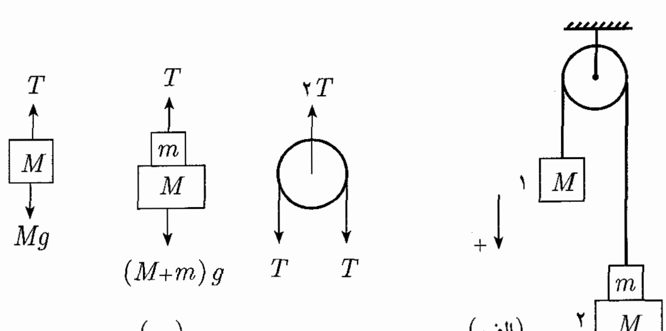


شکل ۲-۷۳

۹. چون ارتفاع گربه از کف اتاق تغییر نکرده، نسبت به کف اتاق ساکن است و برآیند نیروهای وارده به آن نسبت به کف اتاق صفر است تا گربه را در حال تعادل نگه دارد. یعنی از طرف تیر بر گربه نیرویی برابر وزنش (mg) به طرف بالا اثر می‌کند. بنابر قانون سوم نیوتون، بر تیر نیروی mg در خلاف جهت حرکت گربه وارد خواهد شد. معادله حرکت تیر بر اساس نمودار جسم آزاد شکل (۲ـ۷۳) عبارت است از:

$$\sum F = ma \Rightarrow Mg + mg = ma \Rightarrow a = \frac{M+m}{M}g$$

۱۰. الف) سیستم بیان شده در شکل (۲ـ۷۴ الف) نشان داده شده است. برای شروع حل مسئله ابتدا نمودار جسم آزاد را برای اجزای سیستم رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۷۴ ب).



شکل ۲-۷۴

در این قسمت جرم‌های m و M را با هم به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم. حال معادلات حرکت را برای جرم ۱ و مجموعه ۲ می‌نویسیم:

$$۱ : Mg - T = -Ma \qquad (۱)$$

$$۲ : (M+m)g - T = (M+m)a \qquad (۲)$$

برای به‌دست آوردن شتاب وزنه‌ها دو رابطه فوق را از هم کم می‌کنیم. پس

$$mg = (۲M+m)a \Rightarrow a = \frac{mg}{۲M+m} \qquad (۳)$$

ب) برای به‌دست کشش نخ کافی است مقدار a را از رابطه (۳) در رابطه (۱) جایگذاری کنیم. بنابراین

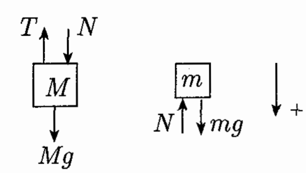
$$Mg - T = -M\left(\frac{mg}{۲M+m}\right) \Rightarrow T = Mg + \frac{mMg}{۲M+m}$$

$$\Rightarrow T = ۲M\frac{M+m}{۲M+m}g \qquad (۴)$$

ج) همان‌طور که در شکل (۲ـ۷۴ ب) نشان داده شده است، نیروی فشار وارد بر قرقره‌ها دو برابر نیروی کشش نخ است. پس

$$F = ۴M\frac{M+m}{۲M+m}g$$

د) نخ در مجموعه ۲ به جرم M متصل است. بنابراین نمودار جسم آزاد جرم‌های m و M در مجموعه ۲ به صورت شکل (۲ـ۷۵) است.



شکل ۲-۷۵

که N نیروی فشاری بین جرم‌های m و M در مجموعه ۲ است. حال معادلات حرکت این دو جرم را می‌نویسیم.

$$m \text{ جرم} : mg - N = ma \qquad (۵)$$

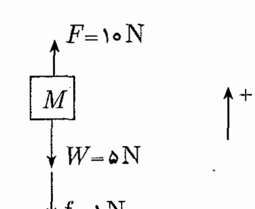
$$M \text{ جرم} : Mg + N - T = Ma$$

کافی است مقدار a را از رابطه (۳) در معادله (۵) جایگذاری کنیم تا مقدار N به‌دست آید. در نتیجه

$$mg - N = m\frac{mg}{۲M+m} \Rightarrow N = mg - \frac{m^۲g}{۲M+m}$$

$$\Rightarrow N = \frac{۲Mm}{۲M+m}g$$

۱۱. چون می‌خواهیم وزنه را بالا ببریم پس شتاب آن رو به بالا است. در نتیجه نیروی F نیز باید به سمت بالا به آن وارد شود. همان‌طور که می‌دانید نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت به جسم وارد می‌شود. بنابراین نمودار جسم آزاد وزنه به صورت روبه‌رو است. (نیروی مقاومت هوا با f نشان داده شده است.)



شکل ۲-۷۶

حال معادلات حرکت وزنه را می‌نویسیم. (g را برابر با $۹/۸\mathrm{m/s^۲}$ در نظر می‌گیریم)

$$F - W - f = Ma \qquad M = \frac{W}{g}$$

$$\Rightarrow\ ۱۰ - ۵ - ۱ = \frac{۱۰}{۹/۸}a\ \Rightarrow\ a = ۳/۹۲\mathrm{m/s^۲}$$

بنابر معادله مسافت در حرکت با شتاب ثابت، حداکثر ارتفاعی که می‌توان وزنه را در مدت یک ثانیه بالا برد، می‌یابیم. در نتیجه

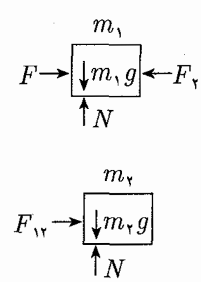
$$s = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t\ \Rightarrow\ s = \frac{۱}{۲}(۳/۹۲)(۱)^۲ + \circ\ \Rightarrow\ s = ۱/۹۶\mathrm{m}$$

۱۲. برای اینکه بتوانیم نیروی برآیند وارد بر سورتمه را به‌دست آوریم، ابتدا باید شتاب آن را بیابیم. چون سرعت‌های اولیه و نهایی و زمان داده شده است، از معادله سرعت در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$v = at + v_\circ\ \Rightarrow\ (\frac{۱۶۰۰}{۳/۶}) = a(۱/۸)\ \Rightarrow\ a = ۲۴۷\mathrm{m/s^۲}$$

چون نیروی برآیند لازم برای رسیدن به این شتاب (یعنی نیروی در جهت شتاب) را می‌خواهد، نیازی به رسم نمودار جسم آزاد نداریم. با استفاده از معادله حرکت داریم

$$F = ma\ \Rightarrow\ F = ۵۰۰(۲۴۷)\ \Rightarrow\ F = ۱۲\mathrm{kN}$$



شکل ۲-۷۷

۱۳. الف) نمودار جسم آزاد دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ در شکل (۲ـ۷۷) نشان داده شده است. با توجه به اینکه دو جسم با هم حرکت می‌کنند و در نتیجه شتاب یکسانی دارند، داریم

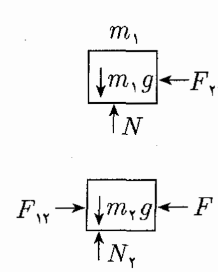
$$\begin{aligned} m_۱\ \text{جرم}\ &:\ F - F_{۲۱} = m_۱ a \\ m_۲\ \text{جرم}\ &:\ F_{۱۲} = m_۲ a \end{aligned} \qquad (۱)$$

بر اساس قانون سوم نیوتون می‌دانیم که $F_{۱۲} = F_{۲۱}$ است. پس با جمع کردن دو رابطه فوق، داریم

$$F(m_۱ + m_۲)a\ \Rightarrow\ ۳/۲ = (۲/۳ + ۱/۲)a\ \Rightarrow\ a = \circ/۹\mathrm{m/s^۲} \qquad (۲)$$

حال با جایگذاری مقدار شتاب از رابطه (۲) در معادله (۱)، داریم

$$F_{۱۲} = ۱/۲(\circ/۹)\ \Rightarrow\ F_{۱۲} = ۱/۱\mathrm{N}$$



شکل ۲-۷۸

ب) با توجه به اینکه در این قسمت، نیرو به جرم $m_۲$ وارد می‌شود، نمودار جسم آزاد دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ را رسم کرده‌ایم (شکل ۲ـ۷۸).

حال معادلات حرکت را برای دو جسم می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} m_۱\ \text{جرم}\ &:\ F_{۲۱} = m_۱ a \\ m_۲\ \text{جرم}\ &:\ F - F_{۱۲} = m_۲ a \end{aligned} \qquad (۱)$$

با افزودن دو رابطه فوق به هم، داریم

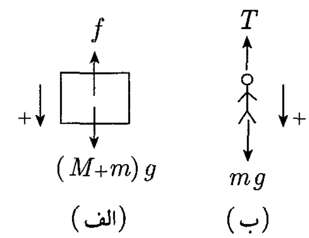
$$F = (m_۱ + m_۲)a \Rightarrow ۳/۲ = (۲/۳ + ۱/۲)a \Rightarrow a = ۰/۹\mathrm{m/s^۲} \qquad (۲)$$

با جایگذاری مقدار a از رابطه (۲) در معادله (۱)، داریم

$$F_{۲۱} = ۲/۳(۰/۹) \Rightarrow F_{۲۱} = ۲/۱\mathrm{N}$$

اگر دقت کنید، معادله‌های مورد استفاده در دو قسمت تنها در ضریب a اختلاف دارند که در قسمت (الف) این ضریب، $m_۲$ و در قسمت (ب) $m_۱$ است. این تفاوت به این دلیل است که در یک حالت نیرو به جرم $m_۱$ و در حالت دیگر به جرم $m_۲$ وارد می‌شود.

۱۴. الف) ابتدا نمودار جسم آزاد مجموعه شخص و چتر را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۷۹ الف). حال معادله حرکت را برای مجموعه چترباز و چتر می‌نویسیم.



شکل ۲-۷۹

$$(M + m)g - f = (M + m)a$$

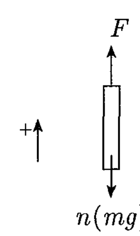
$$\Rightarrow (۸۰ + ۵)(۹/۸۱) - f = (۸۰ + ۵)(۲/۵) \Rightarrow f = ۶۲۱/۴\mathrm{N}$$

ب) با فرض اینکه نیروی مقاومت هوای مؤثر بر چترباز ناچیز باشد و با توجه به شکل (۲ـ۷۹ ب) که بیان کننده نمودار جسم آزاد چترباز است، داریم

$$Mg - T = Ma \Rightarrow ۸۰(۹/۸۱) - T = ۸۰(۲/۵) \Rightarrow T = ۵۸۴/۸\mathrm{N}$$

۱۵. ابتدا نمودار جسم آزاد را برای n زنجیر از کل پنج زنجیر رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۸۰). بنابراین معادله حرکت این مجموعه عبارت است از

$$F - n(mg) = n(ma) \Rightarrow F = nm(g + a) \qquad (۱)$$



شکل ۲-۸۰

حال می‌توانیم به راحتی نیروی بین تمام حلقه‌ها را بیابیم.

$$F_{۲۱} : n = ۱ \Rightarrow F_{۲۱} = m(g + a)$$

$$\Rightarrow F_{۲۱} = ۰/۱(۹/۸۱ + ۲/۵۰) \Rightarrow F_{۲۱} = ۱/۲۳\mathrm{N}$$

$$F_{۳۲} : n = ۲ \Rightarrow F_{۳۲} = ۲m(g + a)$$

$$\Rightarrow F_{۳۲} = ۰/۲(۹/۸۱ + ۲/۵۰) \Rightarrow F_{۳۲} = ۲/۴۶\mathrm{N}$$

$$F_{۴۳} : n = ۳ \Rightarrow F_{۴۳} = ۳m(g + a)$$

$$\Rightarrow F_{۴۳} = ۰/۳(۹/۸۱ + ۲/۵۰) \Rightarrow F_{۴۳} = ۳/۶۹\mathrm{N}$$

$$F_{۵۴} : n = ۴ \Rightarrow F_{۵۴} = ۴m(g + a)$$

$$\Rightarrow F_{۵۴} = ۰/۴(۹/۸۱ + ۲/۵۰) \Rightarrow F_{۵۴} = ۴/۹۲\mathrm{N}$$

نیروی $\vec{F}$ که شخص بالابرنده زنجیر به حلقه بالایی وارد می‌کند، معادل با نیروی وارده از طرف حلقه‌ای دیگر به پنج حلقه فعلی است. یعنی می‌توانیم با قرار دادن $n=۵$ در رابطه (۲) مقدار آن را بیابیم. بنابراین

$$F = ۵m(g+a) \;\Rightarrow\; F = ۰/۵(۹/۸۱ + ۲/۵۰) \;\Rightarrow\; F = ۶/۱۶\mathrm{N}$$

۱۶. اگر چه اثر مقاومت بر روی پر محسوس‌تر است اما نیروی مقاومت هوا در برابر فیل چندین برابر بزرگ‌تر از نیروی مقاومت هوا در برابر پر است. همچنین فیل سنگین در هوا تندتر سقوط می‌کند و سطح مقطع آن نیز بیشتر است و مقاومت هوا در برابر آن باز هم بیشتر می‌شود. پر خیلی سبک است (در حدود چند گرم) و قبل از آنکه نیروی هوا با وزنش برابر شود، سرعتش چندان زیاد نمی‌شود. پس از آن پر به سرعت حد می‌رسد. از این لحظه به بعد، شتاب صفر می‌شود و هم سرعت و هم نیروی مقامت هوا تا پایان مدت سقوط ثابت باقی می‌ماند. از طرف دیگر، نیروی مقاومت هوا در برابر فیل مثلاً تا ۲۰ نیوتون افزایش می‌یابد. این نیرو نسبت به نیروی مقاومت هوا در مقابل پر خیلی زیاد است اما در مقایسه با وزن یک فیل ۲ تنی که با سرعت فزاینده به طرف زمین سقوط کند قابل چشم‌پوشی است.

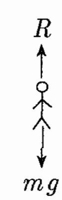
۱۷. ابتدا جرم جسم را به‌دست می‌آوریم:

$$g = ۳۲\mathrm{ft/s}^۲ \qquad W = mg \;\Rightarrow\; ۱۲۵ = m(۳۲) \;\Rightarrow\; m = ۳/۹\mathrm{slug}$$

الف) نمودار جسم آزاد شخص داخل آسانسور به صورت زیر است که در آن R نشان دهنده نیروی وارده از طرف تراز به شخص می‌باشد.

جهت مثبت را رو به بالا می‌گیریم و معادله حرکت را برای او می‌نویسیم. پس

$$F = ma \Rightarrow\; R - mg = ma \;\Rightarrow\; R - ۱۲۵ = ۳/۹(۴)$$
$$\Rightarrow\; R = ۱۴۰/۶\mathrm{lb}$$



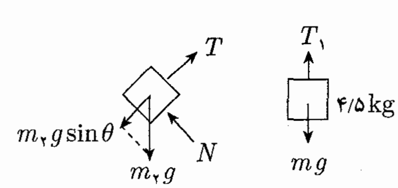
شکل ۲-۸۱

ب) نمودار جسم آزاد فرد در این حالت نیز مانند شکل (۲-۸۱) است. ولی در این قسمت جهت مثبت را رو به پایین می‌گیریم و معادله حرکت را برای او می‌نویسیم. پس

$$F = ma \Rightarrow\; mg - R = ma \;\Rightarrow\; ۱۲۵ - R = ۳/۹(۴)$$
$$\Rightarrow\; R = ۱۰۹/۴\mathrm{lb}$$

۱۸. ابتدا شتاب سیستم را بر اساس اطلاعات داده شده درباره حرکت جرم $۴/۵\mathrm{kg}$ به‌دست می‌آوریم. بر اساس رابطه تغییر مکان در حرکت با شتاب ثابت (اگر جهت را رو به پایین بگیریم)، داریم:

$$s = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \;\Rightarrow\; ۲ = \frac{۱}{۲}a(۱/۵)^۲ \;\Rightarrow\; a = ۱/۷۸\mathrm{m/s}^۲$$

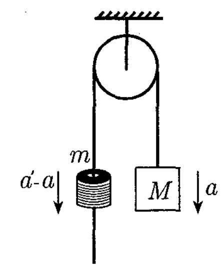


شکل ۲-۸۲

برای بررسی دینامیکی حرکت سیستم، نمودار جسم آزاد جرم‌ها را رسم می‌کنیم.

حال معادله‌های حرکت دو جسم را می‌نویسیم:

$$\text{جرم } ۴{,}۵\text{kg} : mg - T = ma$$
$$\Rightarrow ۴{,}۵(۹{,}۸۱) - T = ۴{,}۵(۱{,}۷۸)$$
$$\Rightarrow T = ۳۶{,}۱\text{N}$$
$$\text{جرم } m_۲ : T - m_۲ g \sin\theta = m_۲ a \quad \theta = ۳۷^\circ$$
$$\Rightarrow ۳۶{,}۱ - m_۲(۹{,}۸۱)\sin ۳۷^\circ = m_۲(۱{,}۷۸)$$
$$\Rightarrow m_۲ = ۴{,}۷\text{kg}$$



شکل ۲-۸۳

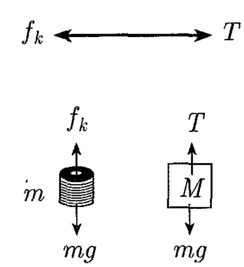
۱۹. سیستم گفته شده در صورت سؤال در شکل (۲ـ۸۳) رسم شده است. برای بررسی سیستم، نمودار جسم آزاد جرم‌های M و m و نخ در شکل (۲ـ۸۴) نشان داده شده است.

حال قانون دوم نیوتون را برای هر کدام از آنها می‌نویسیم.

$$\text{جرم } m : mg - f_k = m(a' - a) \qquad (۱)$$

دقت داشته باشید که a' شتاب حلقه نسبت به نخ است.

$$\text{جرم } M : T - Mg = -Ma \qquad (۲)$$



شکل ۲-۸۴

با توجه به اینکه نخ بدون جرم است، شتاب آن و در نتیجه برآیند نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد.

$$\text{نخ} : f_k - T = ۰ \Rightarrow f_k = T \qquad (۳)$$

ابتدا روابط (۱) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم تا f_k از معادلات فوق حذف شود. پس

$$mg = T + m(a' - a) \qquad (۴)$$

حال با جمع کردن معادلات (۲) و (۴)، شتاب جرم M، a، به‌دست می‌آید. پس

$$mg - Mg = ma' - (m+M)a \Rightarrow a = \frac{(M-m)g + ma'}{M+m} \qquad (۵)$$

حال مقدار شتاب را از رابطه (۵) در معادله (۱) جایگذاری می‌کنیم تا f_k به‌دست آید.

پس

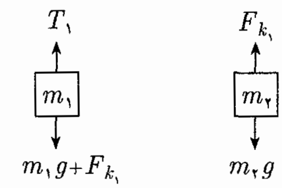
$$mg - f_k = m\left[a' - \frac{(M-m)g + ma'}{M+m}\right]$$
$$\Rightarrow f_k = mg - ma' + \frac{(M-m)g + ma'}{M+m}$$
$$\Rightarrow f_k = \frac{M}{M+m}(۲mg - ma')$$

۲۰. نخ تنها می‌تواند نیروی کششی تحمل کند. بنابراین باید رابطه‌ی $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$ برقرار باشد تا نخ عاملی برای متعادل نگه داشتن سیستم باشد. در غیر این صورت امکان تعادل وجود ندارد. ابتدا نمودار جسم آزاد جرم‌های m_1 و m_2 را می‌کشیم (شکل ۲ـ۸۵)

$$\text{جرم } m_2 : \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{k_1} - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{k_1} = m_2 g \qquad (1)$$

$$\text{جرم } m_1 : \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 - m_1 g - F_{k_1} = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1 g + m_2 g \qquad (2)$$

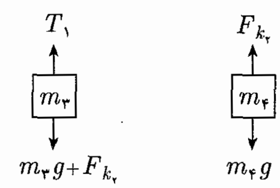


شکل ۲-۸۵

که در آن F_{k_1} نیروی فنر سمت چپ و T_1 نیروی طناب رد شده از روی قرقره است. حال نمودار جسم آزاد جرم m_3 و m_4 را رسم کرده (شکل ۲ـ۸۶) و قانون دوم نیوتون را برای m_3 می‌نویسیم.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 - m_3 g - F_{k_2} = 0$$

$$\Rightarrow F_{k_2} = (m_1 + m_2 - m_3) g \qquad (3)$$



شکل ۲-۸۶

بعد از پاره شدن طناب پایینی، نیروهایی که در بالا به‌دست آوردیم، به‌طور ناگهانی نمی‌توانند تغییر کنند. بنابراین قانون دوم نیوتون برای هر کدام از جرم‌ها به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{جرم } m_1 : m_1 g + F_{k_1} - T_1 = m_1 a_1$$

$$\text{جرم } m_2 : m_2 g - F_{k_1} = m_2 a_2$$

$$\text{جرم } m_3 : m_3 g + F_{k_2} - T_1 = m_3 a_3$$

$$\text{جرم } m_4 : m_4 g - F_{k_2} = m_4 a_4$$

که در معادلات فوق، شتاب‌ها را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم.

حال با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده برای F_{k_1}، F_{k_2} و T_1 از روابط (۱)، (۲) و (۳) در معادلات فوق، شتاب‌ها به‌دست می‌آیند. بنابراین:

$$m_1 g + m_2 g - (m_1 + m_2) g = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

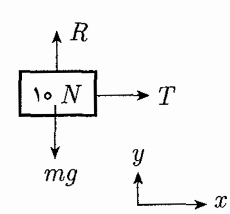
$$m_2 g - m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$m_3 g + (m_1 + m_2 - m_3) g - (m_1 + m_2) g = m_3 a_3 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$m_4 g - (m_1 + m_2 - m_3) g = m_4 a_4 \Rightarrow a_4 = \frac{(m_3 + m_4 - m_1 - m_2) g}{m_4}$$

قانون دوم نیوتون (حرکت دوبعدی)

۲۱. کشش نخ در دو حالت یکسان نیست. زیرا در حالتی که با دست نخ را می‌کشیم، نیروی ۱۰N عیناً به نخ منتقل می‌شود که نخ نیز این نیرو را به جسم A به وزن ۱۰N منتقل می‌کند، (شکل ۲ـ۸۷). بنابراین شتاب جسم در این حالت عبارت است از



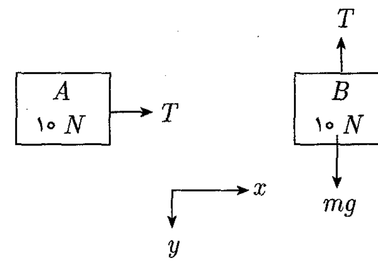
شکل ۲-۸۷

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow T = m a \Rightarrow 10 = \frac{10}{g} a \Rightarrow a = g$$

توجه دارید که چون جسم A روی میز قرار دارد، شتابی در راستای y ندارد. حال نمودار جسم آزاد اجسام A و B در حالت (۱) را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۸۸). بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم:

$$A \text{ جسم } : \sum F_x = ma_x \Rightarrow T = \frac{10}{g} a_{Ax}$$

$$B \text{ جسم } : \sum F_y = ma_y \Rightarrow 10 - T = \frac{10}{g} a_{By}$$



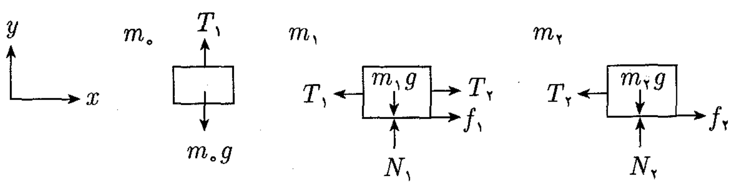
شکل ۲-۸۸

چون در طول حرکت طناب شل نمی‌شود، $a_{By} = a_{Ax}$ است. بنابر روابط (۱) و (۲)، داریم

$$10 = 2 \times \frac{10}{g} a \Rightarrow a = \frac{g}{2}$$

در نتیجه شتاب جسم در حالت (۲) در شکل رسم شده در صورت سؤال بیشتر است.

۲۲. ابتدا نمودار جسم آزاد جرم‌های m_0، m_1 و m_2 را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۸۹)



شکل ۲-۸۹

شتاب m_0 را رو به پایین در نظر می‌گیریم. بنابراین شتاب جرم‌های m_1 و m_2 به سمت چپ است. در نتیجه معادلات حرکت این اجرام عبارتند از:

$$m_0 \text{ جرم } : m_0 g - T_1 = m_0 a \qquad (1)$$

$$m_1 \text{ جرم } : T_1 - T_2 - f_1 = m_1 a$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = mg$$

$$f_1 = kN_1 \Rightarrow f_1 = km_1 g$$

$$\Rightarrow T_1 - T_2 - km_1 g = m_1 a \qquad (2)$$

$$m_2 \text{ جرم } : T_2 - f_2 = m_2 a$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$$

$$f_2 = kN_2 \Rightarrow f_2 = km_2 g$$

$$\Rightarrow T_2 - km_2 g = m_2 a \qquad (3)$$

با جمع کردن معادله‌های (۲) و (۳)، داریم:

$$T_1 - k(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \qquad (4)$$

با افزودن معادلات (۱) و (۴) به هم، داریم:

$$m_0 g - k(m_1 + m_2)g = (m_0 + m_1 + m_2)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g \qquad (5)$$

با جایگذاری مقدار شتاب از رابطه (۵) در معادله (۱)، داریم

$$m_\circ g - T_\text{۱} = m_\circ \frac{m_\circ - k(m_\text{۱} + m_\text{۲})}{m_\circ + m_\text{۱} + m_\text{۲}} g$$

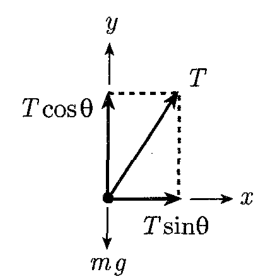
$$\Rightarrow\ T_\text{۱} = \frac{m_\circ (m_\text{۱} + m_\text{۲})(\text{۱} + k)}{m_\circ + m_\text{۱} + m_\text{۲}} g$$

با جایگذاری مقدار شتاب از رابطه (۵) در معادله (۳)، داریم

$$T_\text{۲} - k m_\text{۲} g = m_\text{۲} \frac{m_\circ - k(m_\text{۱} + m_\text{۲})}{m_\circ + m_\text{۱} + m_\text{۲}} g$$

$$\Rightarrow\ T_\text{۲} = \frac{m_\circ m_\text{۲} (\text{۱} + k)}{m_\circ + m_\text{۱} + m_\text{۲}} g$$

۲۳. ابتدا نمودار آزاد جسم سربی را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۹۰). معادله حرکت جسم را در دو راستای x و y می‌نویسیم. پس



شکل ۲-۹۰

$$x \text{ راستای } :\ \sum F_x = m a_x \ \Rightarrow\ T\sin\theta = ma$$

$$\Rightarrow\ T\sin\theta = \circ/\text{۲}(\text{۳}/\text{۶})$$

$$\Rightarrow\ T\sin\theta = \circ/\text{۷۲} \qquad (\text{۱})$$

$$y \text{ راستای } :\ \sum F_y = m a_y \ \Rightarrow\ T\cos\theta - mg = \circ$$

$$\Rightarrow\ T\cos\theta - \circ/\text{۲}(\text{۹}/\text{۸}) = \circ$$

$$\Rightarrow\ T\cos\theta = \text{۱}/\text{۹۶} \qquad (\text{۲})$$

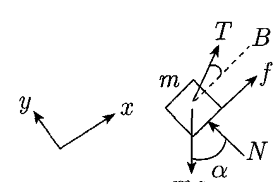
با تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲)، داریم

$$\tan\theta = \frac{\circ/\text{۷۲}}{\text{۱}/\text{۹۶}} \ \Rightarrow\ \tan\theta = \circ/\text{۳۷} \ \Rightarrow\ \theta = \text{۲}\circ^\circ \qquad (\text{۳})$$

حال با جایگذاری مقدار θ از رابطه‌ی (۳) در رابطه (۱)، T را می‌یابیم. بنابراین

$$T\sin \text{۲}\circ^\circ = \circ/\text{۷۲} \ \Rightarrow\ T = \text{۲}/\text{۱N}$$

۲۴. ابتدا نمودار آزاد میلَه را که در حالت تعادل قرار دارد، رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۹۱). حال معادلات تعادل میله را در دو راستا می‌نویسیم.



شکل ۲-۹۱

$$\sum F_x = \circ \Rightarrow\ T\cos\beta + f - mg\sin\alpha = \circ$$

$$\Rightarrow\ T\cos\beta = mg\sin\alpha - f$$

$$f = \mu N \Rightarrow\ T\cos\beta = mg\sin\alpha - \mu N \qquad (\text{۱})$$

$$\sum F_y = \circ \Rightarrow\ N + T\sin\beta - mg\cos\alpha = \circ$$

$$\Rightarrow\ T\sin\beta = mg\cos\alpha - N \qquad (\text{۲})$$

مجهولات معادلات (۱) و (۲) N، T و β است. بنابراین برای اینکه حداقل T را بیابیم باید N را از معادلات فوق حذف کنیم و از معادله جدید به‌دست آمده نسبت به β مشتق بگیریم. N بنابر رابطه (۲) برابر است با

$$N = mg\cos\alpha - T\sin\beta \qquad (۳)$$

حال N را از رابطه (۳) در معادله (۱) جایگزین می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned} T\cos\beta &= mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - T\sin\beta) \\ &\Rightarrow T(\cos\beta - \mu\sin\beta) = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \\ &\Rightarrow T = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \qquad (۴) \end{aligned}$$

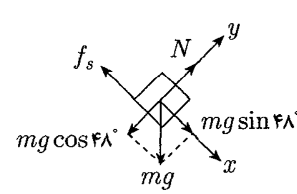
حال از رابطه (۴) نسبت به β مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا β را که به ازای آن T حداقل می‌شود را بیابیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\beta} = ۰ \;&\Rightarrow\; mg - \frac{(-\sin\beta - \mu\cos\beta)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\beta - \mu\sin\beta)^{۲}} = ۰ \\ &\Rightarrow\; \sin\beta + \mu\cos\beta = ۰ \;\Rightarrow\; \tan\beta = -\mu \qquad (۵) \end{aligned}$$

حال β را از رابطه (۵) در رابطه (۴) جایگذاری می‌کنیم تا $T_{\min}$ به‌دست آید. پس

$$\begin{aligned} T_{\min} = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta(۱ - \mu\tan\beta)} \;&\Rightarrow\; T_{\min} = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{(۱+\mu^{۲})\sqrt{۱+\mu^{۲}}} \\ &\Rightarrow\; T_{\min} = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sqrt{۱+\mu^{۲}}} \end{aligned}$$

۲۵. ابتدا نمودار جسم آزاد جعبه را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۹۲). دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که مؤلفه x آن موازی سطح شیبدار باشد.



شکل ۲-۹۲

جعبه حرکتی در راستای y ندارد، پس $a_y = ۰$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون:

$$\begin{aligned} F_y = ma_y \;&\Rightarrow\; N - mg\cos ۴۸^\circ = ۰ \;\Rightarrow\; N - m(۹٫۸\cos ۴۸^\circ) = ۰ \\ &\Rightarrow\; N - ۶٫۶m = ۰ \;\Rightarrow\; N = ۶٫۶\mathrm{m} \end{aligned}$$

جعبه تا زاویه ۴۸° حرکت نمی‌کند، پس نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع اصطکاک ایستایی است. بنابراین

$$f_s = \mu_s N \;\Rightarrow\; f_s = \mu_s(۶٫۶m) \;\Rightarrow\; f_s = ۶٫۶\mu_s\mathrm{m}$$

تا زمانی که جعبه حرکتی ندارد $a_x = ۰$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم

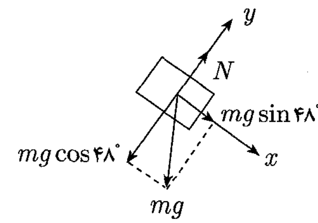
$$F_x = ma_x \;\Rightarrow\; mg\sin ۴۸^\circ - f_s = ۰$$

$$\Rightarrow\ m(۹/۸\sin ۴۸^\circ) - ۶/۶\mu_s m = ۰\ \Rightarrow\ \mu_s = ۱/۱$$

$$\mu_k = ۰/۵\mu_s\ \Rightarrow\ \mu_k = ۰/۵(۱/۱)\ \Rightarrow\ \mu_k = ۰/۵۵$$

چون جسم حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است. پس

$$f_k = \mu_k N\ \Rightarrow\ f_k = ۰/۵۵(۶/۶\mathrm{m})\ \Rightarrow\ f_k = ۳/۶\mathrm{m}$$



شکل ۲-۹۳

نمودار جسم آزاد جعبه در این حالت به صورت روبه‌رو است.
قانون دوم نیوتون را در راستای محور x می‌نویسیم.

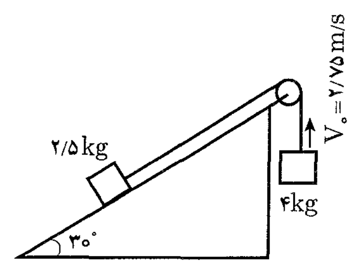
$$F_x = ma_x\ \Rightarrow\ mg\sin ۴۸^\circ - f_k = ma_x$$

$$\Rightarrow\ m(۹/۸\sin ۴۸^\circ) - ۳/۶\mathrm{m} = ma\ \Rightarrow\ a = ۳/۷\mathrm{m/s^۲}$$

بر اساس رابطه مستقل از زمان، سرعت جسم v در پایین سطح را به‌دست می‌آوریم.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲as\ \Rightarrow\ v^۲ - ۰ = ۲(۳/۷)(۳/۲)\ \Rightarrow\ v = ۴/۸\mathrm{m/s}$$

۲۶. ابتدا باید قسمتی از حرکت را که در آن جرم $m_۱ = ۴\mathrm{kg}$ بالا می‌رود بررسی کنیم (شکل ۲ـ۹۴). نمودار جسم آزاد جرم‌ها را در شکل (۲ـ۹۵) رسم کرده‌ایم.
دقت کنید که برای هر کدام از جرم‌ها دستگاه مختصات جداگانه‌ای انتخاب کرده‌ایم. حال قانون دوم نیوتون را برای هر کدام از جرم‌ها می‌نویسیم



شکل ۲-۹۴

$$m_۲\ \text{جرم}\ :\ F_y = ma_y\ \Rightarrow\ N - m_۲ g\cos ۳۰^\circ = ۰$$

$$\Rightarrow\ N - ۲/۵(۹/۸)\cos ۳۰^\circ = ۰$$

$$\Rightarrow\ N - ۲۱/۲ = ۰\ \Rightarrow\ N = ۲۱/۲\mathrm{N}$$

چون $m_۲$ در حال حرکت است، نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است. پس

$$f_k = \mu_k N\ \Rightarrow\ f_k = \mu_k(۲۱/۲)\ \Rightarrow\ f_k = ۲۱/۲\mu_k$$

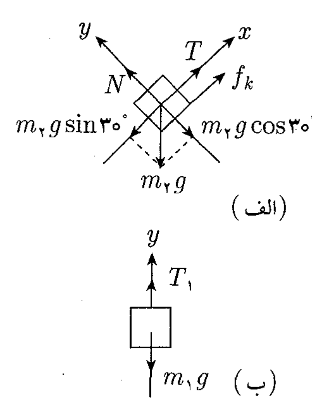
$$F_x = ma_x\ \Rightarrow\ m_۲ g\sin ۳۰^\circ - T_۱ - f_k = m_۲ a$$

$$\Rightarrow\ ۲/۵(۹/۸)\sin ۳۰^\circ - T_۱ - ۲۱/۲\mu_k = ۲/۵a_۱$$

$$۱۲/۲۵ - T_۱ - ۲۱/۲\mu_k = ۲/۵a_۱ \qquad (۱)$$

$$m_۲\ \text{جرم}\ :\ F_y = ma_y\ \Rightarrow\ T_۱ - m_۲ g = m_۲ a$$

$$\Rightarrow\ T_۱ - ۴(۹/۸) = ۴a_۱\ \Rightarrow\ T_۱ - ۳۹/۲ = ۴a_۱ \qquad (۲)$$



شکل ۲-۹۵

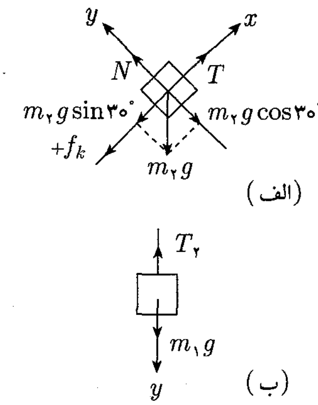
برای محاسبه شتاب حرکت، روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم. پس

$$۱۲/۲۵ - T_۱ - ۲۱/۲\mu_k + T_۱ - ۳۹/۲ = ۲/۵a_۱ + ۴a_۱$$

$$\Rightarrow a_۱ = -(۴/۱۵ + ۳/۳\mu_k)$$

بر اساس رابطه مستقل از زمان، داریم

$$v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a_{۱}(y - y_{۰}) \Rightarrow ۰ - (۲٫۷۵)^{۲} = -۲(۴٫۱۵ + ۳٫۳\mu_k)y$$
$$\Rightarrow y = \frac{۷٫۶}{۸٫۳ + ۶٫۶\mu_k}$$



شکل ۲-۹۶

حال قسمتی از حرکت را که در آن جرم $m_{۱} = ۴\mathrm{kg}$ در حال پایین آمدن است، بررسی می‌کنیم. نمودار جسم آزاد هر کدام از جرم‌ها در شکل (۲-۹۶) رسم شده است.

در این حالت نیز ابتدا قانون دوم نیوتون را برای هر کدام از جرم‌ها می‌نویسیم

$$m_{۲} \text{ جرم } : F_x = ma_x \Rightarrow T_{۲} - m_{۲}g\sin ۳۰^{\circ} - f_k = m_{۲}a$$
$$\Rightarrow T_{۲} - ۲٫۵(۹٫۸)\sin ۳۰^{\circ} - ۲۱٫۲\mu_k = ۲٫۵a_{۲}$$
$$\Rightarrow T_{۲} - ۱۲٫۲۵ - ۲۱٫۲\mu_k = ۲٫۵a_{۲} \qquad (۳)$$
$$m_{۱} \text{ جرم } : F_y = ma_y \Rightarrow m_{۱}g - T_{۲} = m_{۱}a_{۲}$$
$$\Rightarrow ۴(۹٫۸) - T_{۲} = ۴a_{۲} \Rightarrow ۳۹٫۲ - T = ۴a_{۲} \qquad (۴)$$

برای محاسبه شتاب حرکت، روابط (۳) و (۴) را با هم جمع می‌کنیم. پس

$$۳۹٫۲ - T_{۲} + T_{۲} - ۱۲٫۲۵ - ۲۱٫۲\mu_k = ۶٫۵a_{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۶٫۹۵ - ۲۱٫۲\mu_k = ۶٫۵a_{۲}$$
$$\Rightarrow a_{۲} = ۴٫۱۵ - ۳٫۳\mu_k$$

وقتی جسم به نقطه شروع حرکت می‌رسد با استفاده از رابطه مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a_{۲}(y - y_{۰})$$
$$\Rightarrow (۱٫۴۵)^{۲} - ۰ = ۲(۴٫۱۵ + ۳٫۳\mu_k)\frac{۷٫۶}{۸٫۳ + ۶٫۶\mu_k}$$
$$\Rightarrow ۲٫۱(۸٫۳ + ۶٫۶\mu_k) = (۸٫۳ + ۶٫۶)۷٫۶$$
$$\Rightarrow ۱۷٫۴ + ۱۳٫۹\mu_k = ۶۳٫۱ - ۵۰٫۲\mu_k$$
$$\Rightarrow ۱۳٫۹\mu_k + ۵۰٫۲\mu_k = ۶۳٫۱ - ۱۷٫۴$$
$$\Rightarrow ۶۴٫۱\mu_k = ۴۵٫۷ \Rightarrow \mu_k = ۰٫۷$$

با جایگذاری $\mu_k = ۰٫۷$، شتاب $a_{۱}$ و $a_{۲}$ به‌دست می‌آید

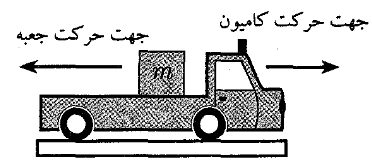
$$a_{۱} = -(۴٫۱۵ + ۳٫۳\mu_k) \Rightarrow a_{۱} = -(۴٫۱۵ + ۳٫۳ \times ۰٫۷)$$
$$\Rightarrow a_{۱} = -(۴٫۱۵ + ۲٫۳۱) \Rightarrow a_{۱} = -۶٫۵\mathrm{m/s^{۲}}$$

$$a_۲ = ۴/۱۵ - ۳/۳\mu_k \Rightarrow a_۲ = ۴/۱۵ - ۳/۳ \times ۰/۷$$
$$\Rightarrow a_۲ = ۴/۱۵ - ۲/۳۱ \Rightarrow a_۲ = ۱/۸\text{m/s}^۲$$

شتاب فوق را در روابط (۳) و (۴) جاگذاری می‌کنیم تا کشش‌های $T_۱$ و $T_۲$ به‌دست آید.

$$T_۱ - ۳۹/۲ = ۴a_۱ \Rightarrow T_۱ - ۳۹/۲ = ۴(-۶/۵) \Rightarrow T_۱ = ۱۳/۲\text{N}$$
$$۳۹/۲ - T_۲ = ۴a_۲ \Rightarrow ۳۹/۲ - T_۲ = ۴ \times ۱/۸ \Rightarrow T_۲ = ۳۲\text{N}$$

۲۷. در شکل (۲ـ۹۷) کامیون و جعبه روی آن و جهت حرکت هرکدام، نشان داده شده است. با توجه به شکل روبه‌رو و با استفاده از تعریف شتاب نسبی می‌توان نوشت:



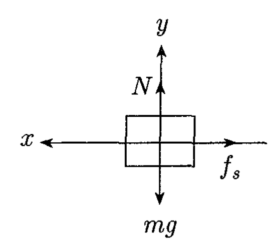
شکل ۲-۹۷

$$\vec{a}_x = \vec{a}_b + \vec{A} \Rightarrow a_x = a_b - A$$

که در آن A شتاب کامیون، a_b شتاب حرکت جعبه نسبت به کامیون در صورت وجود حرکت جعبه و a_x شتاب حرکت جعبه نسبت به زمین است.

الف) نمودار جسم آزاد جعبه در شکل (۲ـ۹۸) نشان داده شده است.

جعبه حرکتی ندارد. بنابراین $a_y = ۰$ است و با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم



شکل ۲-۹۸

$$F_y = ma_y \Rightarrow N - mg = ۰ \Rightarrow N - ۲۰ \times ۹/۸ = ۰$$
$$\Rightarrow N = ۱۹۶\text{N}$$

جعبه نسبت به کامیون حرکتی ندارد، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع نیروی اصطکاک ایستایی است.

$$f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = ۰/۴ \times ۱۹۶ \Rightarrow f_s = ۷۸/۴\text{N}$$

جعبه نسبت به کامیون حرکتی ندارد. پس $a_b = ۰$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم

$$F_x = ma_x \Rightarrow -f_s = m(a_b - A) \Rightarrow -۷۸/۴ = ۲۰(۰ - A)$$
$$\Rightarrow -۷۸/۴ = -۲۰A \Rightarrow A = ۳/۹۲\text{m/s}^۲$$

ب) نمودار جسم آزاد جعبه مانند شکل (۲ـ۹۸) است، با این تفاوت که به جای f_s، f_k خواهیم داشت. شتاب حرکت کامیون بیش‌تر از مقدار محاسبه شده در قسمت (الف) است. پس جعبه شروع به حرکت می‌کند. بنابراین نیروی اصطکاک وارد بر جعبه از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است. پس

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = ۰/۲۵ \times ۱۹۶ \Rightarrow f_k = ۴۹\text{N}$$

بر اساس قانون دوم نیوتون در راستای محور x، داریم

$$F_x = ma_x \Rightarrow -f_k = m(a_b - A)$$
$$\Rightarrow -۴۹ = ۲۰(a_b - ۵) \Rightarrow a_b = ۲/۵۵\text{m/s}^۲$$

$x_۱$ جابه‌جایی جعبه در مدت ۱s با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان به‌دست می‌آید.

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}a_b t^۲ + v_\circ t \;\Rightarrow\; x_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵۵(۱)^۲ \;\Rightarrow\; x_۱ = ۱/۲۷\text{m}$$

بر اساس رابطه‌ی سرعت ـ زمان، سرعت جعبه را پس از زمان ۱s می‌یابیم

$$v_۱ = a_b t + v_\circ \;\Rightarrow\; v_۱ = ۲/۵۵ \times ۱ \;\Rightarrow\; v_۱ = ۲/۵۵\text{m/s}$$

وقتی کامیون با سرعت ثابت، حرکت می‌کند، $A = \circ$ است. بنابراین قانون دوم نیوتون به صورت زیر درمی‌آید.

$$-f_k = m(a_b - A) \;\Rightarrow\; -۴۹ = ۲\circ(a'_b - \circ)$$
$$\Rightarrow\; -۴۹ = ۲\circ a'_b \;\Rightarrow\; a'_b = -۲/۴۵\text{m/s}^۲$$

علامت منفی، نشان دهنده حرکت کند شونده است.

$x_۲$ جابه‌جایی جعبه در طی حرکت با سرعت ثابت، با استفاده از رابطه مستقل از زمان به‌دست می‌آید.

$$v^۲ - v_۱^۲ = ۲a'_b x_۲ \;\Rightarrow\; \circ - (۲/۵۵)^۲ = ۲ \times (-۲/۴۵)x_۲$$
$$\Rightarrow\; -۶/۵ = -۴/۹x_۲ \;\Rightarrow\; x_۲ = ۱/۳۲\text{m}$$

x جابه‌جایی کل جعبه عبارتست از

$$x = x_۱ + x_۲ \;\Rightarrow\; x = ۱/۲۷ + ۱/۳۲ \;\Rightarrow\; x = ۲/۵۹\text{m}$$

در نتیجه جعبه طی مسافت ۲/۵۹m می‌ایستد.

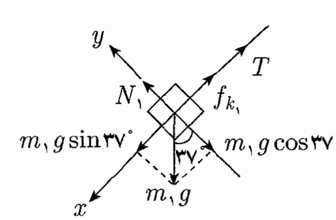
ج) جابه‌جایی جعبه در مدت ۵s با استفاده از نتایج قسمت (ب) و رابطه مکان ـ زمان به‌دست می‌آید.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \;\Rightarrow\; x = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵۵(۵)^۲ \;\Rightarrow\; x = ۳۱/۸۷\text{m}$$

پس جعبه از عقب کامیون می‌افتد.

t، زمان بیرون افتادن جعبه، با استفاده از رابطه مکان ـ زمان به‌دست می‌آید.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \;\Rightarrow\; ۶ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵۵ \times t^۲ \;\Rightarrow\; t = ۲/۱۷\text{s}$$



شکل ۲-۹۹

۲۸. نیروهای وارد بر $m_۱$ در نمودار جسم آزاد شکل (۲-۹۹)، نشان داده شده است.

جرم $m_۱$ حرکتی ندارد، بنابراین $a_y = \circ$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم

$$F_y = ma_y \;\Rightarrow\; N_۱ - m_۱ g \cos ۳۷^\circ = \circ$$
$$\Rightarrow\; N_۱ - m_۱(۹/۸)\cos ۳۷^\circ = \circ \;\Rightarrow\; N_۱ = ۷/۸m_۱$$

حال قانون دوم نیوتون را در راستای محور x مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون جرم $m_۱$ حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است. پس

$$f_{k_۱} = \mu_{k_۱} N_۱ \;\Rightarrow\; f_{k_۱} = \mu_۱(۷/۸m_۱) \;\Rightarrow\; f_{k_۱} = ۷/۸\mu_۱ m_۱$$

$$F_x = ma_x \;\Rightarrow\; m_۱ g\sin ۳۷^\circ - T - f_{k_۱} = m_۱ a$$

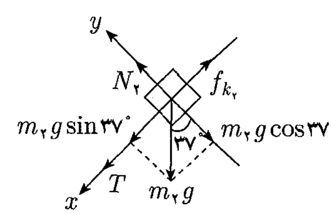
$$\Rightarrow\; m_۱(۹/۸)\sin ۳۷^\circ - T - ۷/۸\mu_۱ m_۱ = m_۱ a$$

$$\Rightarrow\; ۵/۹m_۱ - T - ۷/۸\mu_۱ m_۱ = m_۱ a \qquad (۱)$$

نیروهای وارد بر جرم $m_۲$ در نمودار جسم آزاد شکل (۲ـ۱۰۰) آمده است. جرم $m_۲$ حرکتی ندارد. بنابراین $a_y = ۰$ است و قانون دوم نیوتون در راستای محور y به صورت زیر است.

$$F_y = ma_y \;\Rightarrow\; N_۲ - m_۲ g\cos ۳۷^\circ = ۰$$

$$\Rightarrow\; N_۲ - m_۲(۹/۸)\cos ۳۷^\circ = ۰ \;\Rightarrow\; N_۲ = ۷/۸m_۲$$



شکل ۲ـ۱۰۰

حال قانون دوم نیوتون را در راستای محور x بررسی می‌کنیم. نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع جنبشی است. پس

$$f_{k_۲} = \mu_{k_۲} N_۲ \;\Rightarrow\; f_{k_۲} = \mu_۲(۷/۸m_۲) \;\Rightarrow\; f_{k_۲} = ۷/۸\mu_۲ m_۲$$

$$F_x = ma_x \;\Rightarrow\; T + m_۲ g\sin ۳۷^\circ - f_{k_۲} = m_۲ a$$

$$\Rightarrow\; T + m_۲(۹/۸)\sin ۳۷^\circ - ۷/۸\mu_۲ m_۲ = m_۲ a$$

$$\Rightarrow\; T + ۵/۹m_۲ - ۷/۸\mu_۲ m_۲ = m_۲ a \qquad (۲)$$

برای به‌دست آوردن شتاب، روابط (۱) و (۲) را با.هم جمع می‌کنیم. پس

$$۵/۹m_۱ - T - ۷/۸\mu_۱ m_۱ + T + ۵/۹m_۲ - ۷/۸\mu_۲ m_۲ = (m_۱ + m_۲)a$$

$$\Rightarrow ۵/۹(m_۱ + m_۲) - ۷/۸(\mu_۱ m_۱ + \mu_۲ m_۲) = (m_۱ + m_۲)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{۵/۹(m_۱ + m_۲) - ۷/۸(\mu_۱ m_۱ + \mu_۲ m_۲)}{(m_۱ + m_۲)}$$

$$\Rightarrow a = ۵/۹ - \frac{۷/۸(\mu_۱ m_۱ + \mu_۲ m_۲)}{m_۱ + m_۲}$$

حال مقادیر داده شده را در رابطه فوق جایگذاری می‌کنیم تا مقدار شتاب به‌دست آید.

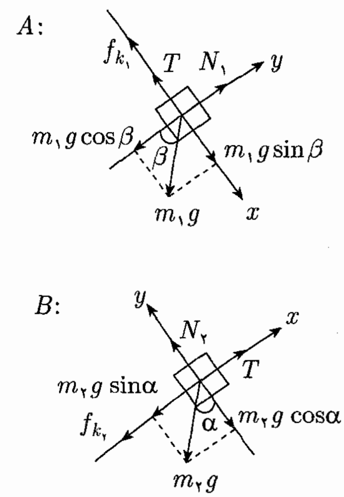
$$a = ۵/۹ - \frac{۷/۸(۰/۴ \times ۴ + ۰/۶ \times ۵)}{۴ + ۵}$$

$$\Rightarrow\; a = ۵/۹ - \frac{۷/۸ \times ۴/۶}{۹}$$

$$\Rightarrow\; a = ۵/۹ - ۴ \;\Rightarrow\; a = ۱/۹\mathrm{m/s^۲}$$

حال شتاب به‌دست آمده را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم تا T را بیابیم. بنابراین

$$\begin{aligned} &۵/۹m_۱ - T - ۷/۸\mu_۱ m_۱ = m_۱ a \\ &\Rightarrow ۵/۹ \times ۴ - T - ۷/۸ \times ۰/۴ \times ۴ = ۴ \times ۱/۹ \\ &\Rightarrow ۲۳/۶ - T - ۱۲/۵ = ۷/۶ \\ &\Rightarrow ۲۳/۶ - ۱۲/۵ - ۷/۶ = T \Rightarrow T = ۳/۵\text{N} \end{aligned}$$



شکل ۲-۱-۱۰۱

۲۹. ابتدا نمودار جسم آزاد اجسام A و B را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱ـ۱۰۱).
حال قانون دوم نیوتون را برای هر کدام از اجرام در هر دو راستای x و y می‌نویسیم. با توجه به اینکه جرم آنها برابر است، داریم

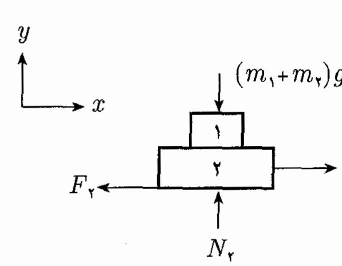
$$\begin{aligned} m_۱ \text{ جرم } &: F_y = ma_y \Rightarrow N_۱ - mg\cos\beta = ۰ \Rightarrow N_۱ = mg\cos\beta \\ &f_{k_۱} = \mu_۱ N_۱ \Rightarrow f_{k_۱} = \mu_۱ mg\cos\beta \\ &F_x = ma_x \Rightarrow mg\sin\beta - T - f_{k_۱} = ma \\ &\qquad \Rightarrow mg\sin\beta - T - \mu_۱ mg\cos\beta = ma \qquad (۱) \\ m_۲ \text{ جرم } &: F_y = ma_y \Rightarrow N_۲ - mg\cos\alpha = ۰ \Rightarrow N_۲ = mg\cos\alpha \\ &f_{k_۲} = \mu_۲ N_۲ \Rightarrow f_{k_۲} = \mu_۲ mg\cos\alpha \\ &F_x = ma_x \Rightarrow T - mg\sin\alpha - f_{k_۲} = ma \\ &\qquad \Rightarrow T - mg\sin\alpha - \mu_۲ mg\cos\alpha = ma \qquad (۲) \end{aligned}$$

با جمع کردن معادلات (۱) و (۲)، شتاب وزنه‌ها به‌دست می‌آید. پس

$$\begin{aligned} &mg\sin\beta - \mu_۱ mg\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu_۲ mg\cos\alpha = ۲ma \\ &\Rightarrow a = \frac{۱}{۲} g(\sin\beta - \sin\alpha - \mu_۱\cos\beta - \mu_۲\cos\alpha) \end{aligned}$$

۳۰. شتاب دو جسم یکی در نظر گرفته شده است، یعنی دو جسم با هم حرکت می‌کنند. بنابراین برای بررسی حرکت آنها نمودار جسم آزاد دو جسم را با هم رسم می‌کنیم. (شکل ۲ـ۲ـ۱۰۲).

$$\begin{aligned} &\sum F_y = ۰ \Rightarrow N_۲ - (m_۱ + m_۲)g = ۰ \Rightarrow N_۲ = (m_۱ + m_۲)g \\ &\qquad \Rightarrow N_۲ = ۱۰ + ۲۰ \Rightarrow N_۲ = ۳۰\text{N} \\ &f_۲ = \mu_۲ N_۲ \Rightarrow f_۲ = (۰/۲)(۳۰) = ۶\text{N} \end{aligned}$$



شکل ۲-۲-۱۰۲

چون دو جسم را با هم در نظر گرفته‌ایم، نیروی اصطکاک وارده، ناشی از اصطکاک بین جسم ۲ و زمین است.

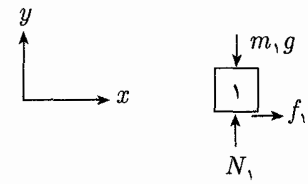
$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma \Rightarrow F - f_۲ = (m_۱ + m_۲)a \\ &\qquad \Rightarrow F - ۶ = (m_۱ + m_۲)a \qquad (۱) \end{aligned}$$

حال باید شرط لازم برای اینکه دو جسم با هم حرکت کنند را بیابیم. بنابراین لازم است نمودار جسم آزاد جسم ۱ را جداگانه رسم کنیم (شکل ۲ـ۱۰۳).

$$\sum F_y = \circ \Rightarrow N_۱ - m_۱ g = \circ \Rightarrow N_۱ = m_۱ g$$

$$f_۱ = \mu_۱ N_۱ \Rightarrow f_۱ = \circ/۱(۱\circ) = ۱\text{N}$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow f_۱ = m_۱ a \Rightarrow ۱ = m_۱ a \qquad (۲)$$



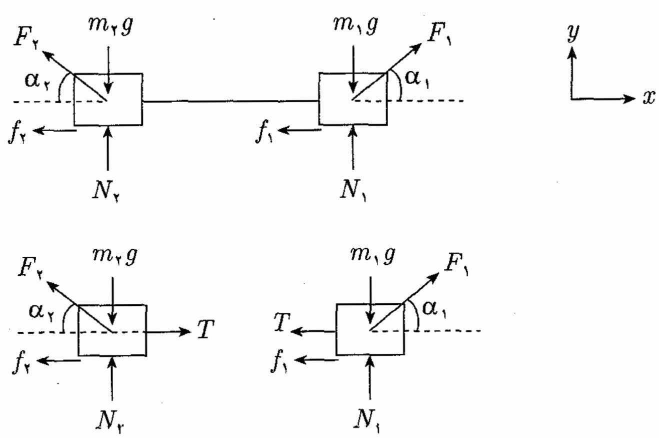
شکل ۲-۱۰۳

حال با تقسیم روابط (۱) و (۲) بر همدیگر مقدار F را به‌دست می‌آوریم. پس

$$\frac{F-۶}{۱} = \frac{m_۱ + m_۲}{m_۱} \Rightarrow F - ۶ = ۳ \Rightarrow F = ۹\text{N}$$

از آنجایی که نیروهای اصطکاک را در حداکثر میزان خود در نظر گرفته‌ایم، $F = ۹\text{N}$ حداکثر نیرویی است که می‌توان به جسم ۱ وارد کرد تا هر دو جسم با شتاب یکنواخت تند شونده‌ی مساوی حرکت کنند.

۳۱. ابتدا نمودار جسم آزاد جسم‌های $m_۱$ و $m_۲$ و کل سیستم را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱۰۴).



شکل ۲-۱۰۴

نمودار جسم آزاد شکل (۲ـ۱۰۴) بر اساس این فرض که شتاب سیستم به سمت راست است، رسم شده‌اند. ابتدا قانون دوم نیوتون را برای اجسام $m_۱$ و $m_۲$ برای به‌دست آوردن نیروهای اصطکاک $f_۱$ و $f_۲$ می‌نویسیم. پس

$$m_۲ \text{ جرم } : \sum F_y = \circ \Rightarrow N_۲ - m_۲ g + F_۲ \sin\alpha_۲ = \circ$$

$$\Rightarrow N_۲ = m_۲ g - F_۲ \sin\alpha_۲$$

$$f_۲ = \mu N_۲ \Rightarrow f_۲ = \mu(m_۲ g - F_۲ \sin\alpha_۲)$$

$$m_۱ \text{ جرم } : \sum F_y = \circ \Rightarrow N_۱ - m_۱ g + F_۱ \sin\alpha_۱ = \circ$$

$$\Rightarrow N_۱ = m_۱ g - F_۱ \sin\alpha_۱$$

$$f_۱ = \mu N_۱ \Rightarrow f_۱ = \mu(m_۱ g - F_۱ \sin\alpha_۱)$$

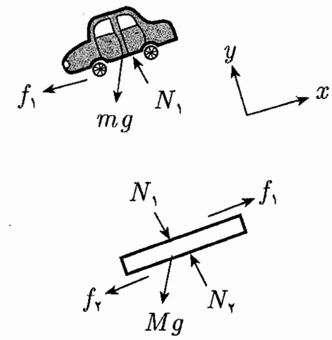
حال قانون دوم نیوتون را در راستای x برای کل سیستم می‌نویسیم. پس

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 - f_1 - f_2 - F_2\cos\alpha_2 = (m_1 + m_2)a$$

$$\Rightarrow F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2$$
$$- \mu(m_1 g + m_2 g - F_1\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2) = (m_1+m_2)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{m_1+m_2}\Big(F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2$$
$$- \mu(m_1 g + m_2 g - F_1\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2)\Big)$$

۳۲. ابتدا نمودار جسم آزاد اتومبیل و صفحه را به‌طور جداگانه رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱۰۵). قانون دوم نیوتون را برای اتومبیل و صفحه می‌نویسیم.



شکل ۲-۱۰۵

اتومبیل : $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = mg\cos\alpha$

با توجه به اینکه اصطکاک بین چرخ اتومبیل و صفحه از نوع ایستایی است، نمی‌توان مقدار دقیق آن را تعیین کرد.

$$\sum F_x = ma \Rightarrow -f_1 - mg\sin\alpha = -ma$$
$$\Rightarrow f_1 = -mg\sin\alpha + ma \qquad (1)$$

که در آن a را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم.

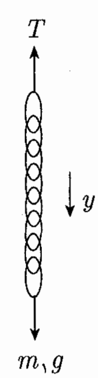
صفحه : $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 - Mg\cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow N_2 = (m+M)g\cos\alpha$$
$$f_2 = \mu_2 N_2 \Rightarrow f_2 = \mu_2(m+M)g\cos\alpha$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_1 - f_2 - Mg\cos\alpha = 0$$
$$\Rightarrow f_1 = f_2 + Mg\sin\alpha \qquad (2)$$

رابطه (۱) را در (۲) جایگذاری می‌کنیم تا a به‌دست آید. پس

$$ma - mg\sin\alpha = \mu_2(m+M)g\cos\alpha + Mg\sin\alpha$$
$$\Rightarrow a = g(1+\frac{M}{m})(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha)$$

۳۳. ابتدا نمودار جسم آزاد قسمت آویزان زنجیر را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱۰۶).



شکل ۲-۱۰۶

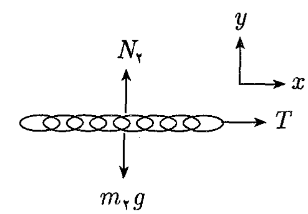
$\lambda = \frac{M}{L}$ جرم واحد طول زنجیر است. m_1 جرم قسمت آویزان زنجیر وقتی به اندازه x پایین می‌رود، عبارتست از:

$$m_1 = \lambda(l+x) \Rightarrow m_1 = \frac{M}{L}(l+x)$$

قانون دوم نیوتون را برای این قسمت از زنجیر در راستای محور y می‌نویسیم. پس

$$Fy = ma_y \Rightarrow \ mg - T = ma$$
$$\Rightarrow \ \frac{M}{L}(l+x)g - T = \frac{M}{L}(l+x)a \qquad (۱)$$

حال نمودار جسم آزاد قسمتی از زنجیر که روی میز قرار دارد را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱۰۷). $m_{۲}$ جرم قسمتی که روی میز است و به اندازه x از طول آن کم شده است، عبارتست از:



شکل ۲-۱۰۷

$$m_{۲} = \lambda(L - l - x) \ \Rightarrow \ m_{۲} = \frac{M}{L}(L - l - x)$$

قانون دوم نیوتون برای این قسمت از زنجیر عبارتست از:

$$F_x = ma_x \ \Rightarrow \ T = m_{۲}a \ \Rightarrow \ T = \frac{M}{L}(L - l - x)a \qquad (۲)$$

برای محاسبه شتاب، روابط (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم. بنابراین:

$$\frac{M}{L}(l+x)g = \frac{M}{L}(l+x)a + \frac{M}{L}(L-l-x)a$$
$$\Rightarrow \ \frac{M}{L}(l+x)g = \frac{M}{L}La \ \Rightarrow \ a = \frac{l+x}{L}g$$

۳۴. در حل بعضی مسائل به جای حل دقیق بهتر است که جواب را با حل حالت خاص مسئله تخمین بزنیم. در این مسئله نیز جواب را با حالت خاص بدون مقاومت هوا تخمین می‌زنیم. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا وجود ندارد. پس در این حالت اگر مؤلفه عمودی سرعت توپ‌ها برابر باشد، به یکدیگر برخورد می‌کنند. یعنی:

$$v_{۱} = v_{۲} \sin\alpha$$

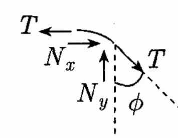
در نتیجه $\sin\alpha = \frac{v_{۱}}{v_{۲}} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha = ۳۰^\circ$ و زمان حرکت توپ‌ها قبل از برخورد برابر است با:

$$t = \frac{s}{v_{۲}\cos\alpha} = \frac{۱۰}{۲۰\cos ۳۰^\circ} \simeq ۰/۶\mathrm{s}$$

چون توپ‌ها سنگین هستند، نقش نیروی مقاومت هوا را به سادگی می‌توان تخمین زد. حرکت طبیعی توپ اول (در نبود مقاومت هوا) به‌طور چشم‌گیری تغییر نمی‌کند، چون حداکثر شتاب ایجاد شده در اثر مقاومت هوا در حالتی که سرعت توپ اول را $۱۰\,\mathrm{m/s}$ (بیشترین مقدار ممکن) و جرم آن را $۱۰\,\mathrm{gr}$ (بسیار کمتر از آنچه مدنظر این مسئله است) در نظر بگیریم، شتاب حرکت فقط $۱\,\mathrm{m/s^۲}$ خواهد بود. این شتاب بیشترین خطایی که در محاسبه‌ی زمان حرکت ایجاد می‌کند، کمتر از ۱٪ می‌باشد. نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت سرعت است، بنابراین اگر مؤلفه‌ی عمودی سرعت اولیه‌ی دو جسم برابر باشد، برخورد اتفاق می‌افتد. زیرا نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت عمودی آنها یکسان می‌شود و در نتیجه سرعت

عمودی آنها در طی حرکت با هم برابر خواهد بود. بنابراین برای اینکه برخورد اتفاق بیفتد، باید گلوله‌ی دوم را با زاویه‌ی $\alpha = ۳۰^\circ$ نسبت به افق پرتاب نماییم.

۳۵. تنها نیروی وارد شده به مرکز جرم سیستم، شامل بلوک‌ها و نخ، توسط قرقره می‌باشد. اگر نمودار جسم آزاد مقداری از طناب که روی قرقره قرار دارد را رسم کنیم (شکل ۲ـ۱۰۸)، می‌توانیم نیروی وارد شده از طرف قرقره را بیابیم. N_x و N_y به ترتیب مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد شده از طرف قرقره است. چون طناب را بدون جرم در نظر گرفته‌ایم، شتاب آن را در راستای قائم و افق صفر می‌گیریم. بنابراین قانون دوم نیوتون برای تکه‌ای از طناب که نمودار جسم آزاد آن را در شکل (۲ـ۱۰۸) رسم کرده‌ایم، به صورت زیر در می‌آید:



شکل ۲-۱۰۸

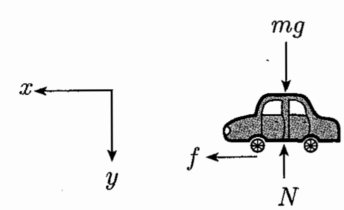
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow N_x + T\sin\phi - T = ۰$$
$$\Rightarrow N_x = T(۱ - \sin\phi)$$

به دلیل اینکه در لحظه‌ی اولیه، مرکز جرم در حال سکون و درست در محل قرقره است، در طی حرکت، به دلیل وجود نیروی N_x که از طرف قرقره وارد می‌شود، به سمت راست جابه‌جا می‌شود. بنابراین بلوک سمت چپ باید قبل از بلوک سمت راست به قرقره برسد. در غیر این صورت مرکز جرم در لحظه‌ی برخورد در سمت چپ قرقره قرار خواهد داشت که امکان ندارد.

۳۶. ابتدا بر اساس اطلاعات سینماتیکی داده شده، شتاب مرکزگرا و سپس شتاب کل قائم را در بالای پل به‌دست می‌آوریم و با استفاده از آن شتاب افقی جسم را می‌یابیم.

$$v = ۵۰/۴\text{km/h} \Rightarrow v = ۱۴\text{m/s}$$

نمودار جسم آزاد اتومبیل در بالاترین نقطه‌ی پل به صورت زیر است.
حال قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم.



شکل ۲-۱۰۹

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - N = m\frac{v^۲}{R}$$
$$\Rightarrow N = m(g - \frac{v^۲}{R})$$

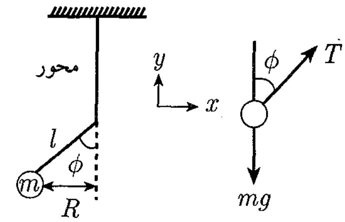
که در آن $\frac{v^۲}{R}$ شتاب مرکزگرای اتومبیل در بالای پل است. بنابراین:

$$N = m(۹/۸۱ + \frac{(۱۴)^۲}{۴۰}) \Rightarrow N = ۱۴/۷\text{m}$$
$$f = \mu N \Rightarrow f = ۰/۵۷ \times ۱۴/۷\text{m} \Rightarrow f = ۸/۳۸\text{m}$$
$$\sum F_x = ma \Rightarrow f = ma \Rightarrow ۸/۳۸\text{m} = ma \Rightarrow a = ۸/۳۸\text{m/s}^۲$$

۳۷. سیستم موردنظر در شکل (۲ـ۱۱۰) نشان داده شده است. نمودار جسم آزاد گلوله را نیز در کنار آن نشان داده‌ایم. بنابراین قانون دوم نیوتون برای گلوله به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T\cos\phi - mg = ۰ \Rightarrow T\cos\phi = mg \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T\sin\phi = mR\omega^{۲} \Rightarrow T\sin\phi = m(l\sin\phi)\omega^{۲} \qquad (۲)$$

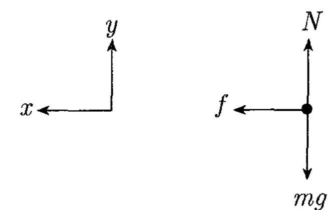


شکل ۲-۱۱۰

از عبارت (۲) می‌توان T را مستقل از زاویه‌ی ϕ به‌دست آورد که مورد نظر این مسئله است. پس

$$T = ml\omega^{۲}$$

۳۸. نمودار جسم آزاد دوچرخه، وقتی در سطح افقی حرکت می‌کند، در شکل (۲ـ۱۱۱) رسم شده است. قانون دوم نیوتون را برای دوچرخه (به همراه سوار) می‌نویسیم.



شکل ۲-۱۱۱

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N - mg = ۰ \Rightarrow N = mg$$

$$f = \mu N \Rightarrow f = \mu mg$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow f = m\frac{v_۱^۲}{R} \Rightarrow v_۱ = \sqrt{\mu Rg} \qquad (۱)$$

حال نمودار جسم آزاد دوچرخه، وقتی روی سطح شیب‌دار حرکت می‌کند را رسم کرده (شکل ۲ـ۱۱۲) و معادلات حرکت را در این حالت می‌نویسیم

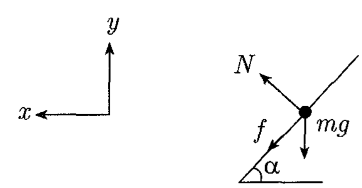
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N\cos\alpha - mg = ۰ \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$f = \mu N \Rightarrow f = \mu\frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow f\cos\alpha + N\sin\alpha = m\frac{v_۲^۲}{R}$$

$$\Rightarrow \mu\frac{mg}{\cos\alpha} + mg\tan\alpha = m\frac{v^۲}{R}$$

$$\Rightarrow v_۲ = \sqrt{\mu Rg}\sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad (۲)$$

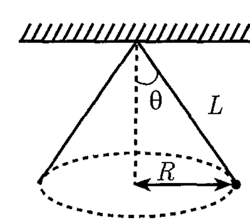


شکل ۲-۱۱۲

حال نسبت سرعت دوچرخه را در دو حالت، با تقسیم روابط (۱) و (۲) بر یکدیگر به‌دست می‌آوریم. پس

$$\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\sqrt{\mu Rg}\sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}}}{\sqrt{\mu Rg}} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

۳۹. نیروی کشش میله تأمین کننده‌ی نیروی جانب مرکز است. با توجه به شکل (۲ـ۱۱۳)، داریم.



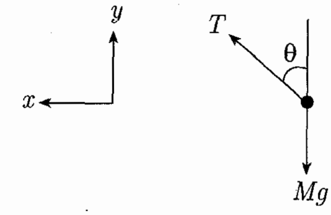
شکل ۲-۱۱۳

$$R = L\sin\theta$$

نمودار جسم آزاد جرم در شکل (۲ـ۱۱۴) رسم کرده‌ایم. حال قانون دوم نیوتون را برای جرم M می‌نویسیم.

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T\sin\theta = M\frac{v^۲}{R} \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T\cos\theta - Mg = ۰ \Rightarrow T\cos\theta = Mg \qquad (۲)$$



شکل ۲-۱۱۴

با تقسیم روابط (۱) و (۲) بر یکدیگر، داریم

$$\tan\theta = \frac{Mv^۲}{MgR} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^۲}{Rg} \Rightarrow \tan\theta = \frac{R}{g}(\frac{۴\pi^۲}{T^۲})$$

$$\Rightarrow T^۲ = \frac{۴\pi^۲ R}{g\tan\theta} \Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}}$$

$$\Rightarrow T = ۲\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}} \Rightarrow ۱/۲ = ۲\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{۹/۸}}$$

$$\Rightarrow L\cos\theta = ۰/۳۶$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که $L\cos\theta = \sqrt{L^۲ - R^۲}$ است. بنابراین رابطه‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt{L^۲ - R^۲} = ۰/۳۶ \Rightarrow \sqrt{L^۲ - (۰/۲۵)^۲} = ۰/۳۶$$

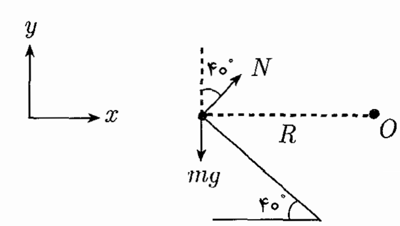
$$\Rightarrow L^۲ - ۰/۶ = ۰/۱۳$$

$$\Rightarrow L = ۰/۴۴\text{m} \Rightarrow L = ۴۴\text{cm}$$

۴۰. با توجه به اطلاعات موجود در صورت مسئله، نمودار جسم آزاد هواپیما به صورت شکل (۲ـ۱۱۵) درمی‌آید. که N نیروی بالا برنده‌ی آیرودینامیک وارد بر بال‌های هواپیما و O مرکز دایره‌ی پرواز است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N\cos ۴۰^\circ - mg = ۰ \Rightarrow N\cos ۴۰^\circ = mg \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N\sin ۴۰^\circ = m\frac{v^۲}{R} \qquad (۲)$$



شکل ۲-۱۱۵

با تقسیم روابط (۱) و (۲) بر یکدیگر، R را به‌دست می‌آوریم. پس

$$\tan ۴۰^\circ = \frac{\frac{v^۲}{R}}{g} \Rightarrow R = \frac{v^۲}{g\tan ۴۰^\circ}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(\frac{۴۸۰}{۳/۶})^۲}{۹/۸۱\tan ۴۰^\circ} \Rightarrow R = ۲۱۶۰\text{m}$$

که ضریب $\frac{۱}{۳/۶}$ در صورت معادله‌ی مربوط به R برای تبدیل سرعت از km/h به m/s است.

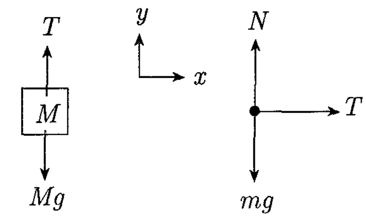
۴۱. نمودار جسم آزاد جرم‌های m و M در شکل (۲ـ۱۱۶) رسم شده است. قانون دوم نیوتون را بر این اساس که جرم M حرکت نکند و جرم m روی مسیری دایروی حرکت کند، می‌نویسیم.

$$M \text{ جرم} : \sum F = ۰ \Rightarrow T - Mg = ۰ \Rightarrow T = Mg \qquad (۱)$$

$$m \text{ جرم} : \sum F_x = ma_x \Rightarrow T = m\frac{v^۲}{r} \qquad (۲)$$

حال مقادیر T را از روابط (۱) و (۲) برابر قرار می‌دهیم. پس

$$Mg = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow v^۲ = \frac{Mgr}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$$



شکل ۲-۱۱۶

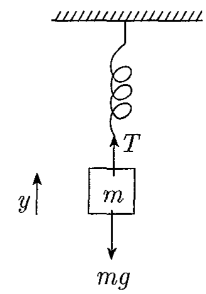
۴۲. وقتی جرم ۰٫۳kg به فنر به طول $L_\circ = ۱۸\text{cm}$ آویخته می‌شود، فنر ۱٫۴۵cm باز می‌شود (شکل ۲ـ۱۱۷). نیروهای وارد به جرم m را نیز در شکل (۲ـ۱۱۷) نشان داده‌ایم.

$$x = ۱٫۴۵\text{cm} \Rightarrow x = ۱٫۴۵ \times ۱۰^{-۲}\text{m}$$

جرم m حرکتی ندارد، پس $a_y = ۰$ است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow kx - mg = ۰ \Rightarrow kx = mg$$

$$\Rightarrow k(۱٫۴۵ \times ۱۰^{-۲}) = ۰٫۳(۹٫۸۱) \Rightarrow k = ۲۰۲٫۸\text{N/m}$$



شکل ۲-۱۱۷

در حالت دوم، نیروی فنر، تأمین کننده‌ی نیروی جانب مرکز است (شکل ۲ـ۱۱۸).

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F = mR\omega^۲ \Rightarrow kx = m(L_\circ + x)\omega^۲$$

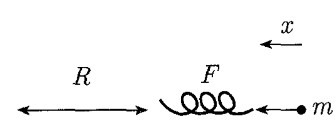
$$\Rightarrow x(k - m\omega^۲) = mL_\circ\omega^۲$$

$$\Rightarrow x = \frac{mL_\circ\omega^۲}{k - m\omega^۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۰٫۳ \times ۰٫۱۸(۸٫۶۴)^۲}{۲۰۲٫۸ - ۰٫۳(۸٫۶۴)^۲}$$

$$\Rightarrow x = ۰٫۰۲۲۳\text{m} \Rightarrow x = ۲٫۲۳\text{cm}$$

$$R = L_\circ + x \Rightarrow R = ۱۸ + ۲٫۲۳ \Rightarrow R = ۲۰٫۲۳\text{cm}$$

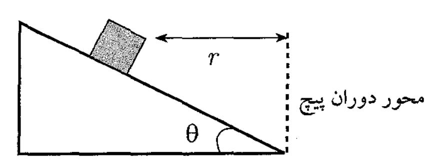


شکل ۲-۱۱۸

۴۳. ابتدا حالتی که اتومبیل روی سطح پیچ ساکن است، بررسی می‌کنیم. نمودار جسم آزاد جسم را در این حالت، در شکل (۲ـ۱۱۹) نشان داده‌ایم.

قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N - mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow N = mg\cos\theta$$



شکل ۲-۱۱۹

اتومبیل حرکتی ندارد، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع اصطکاک ایستایی شکل (۲ـ۱۲۰) است. پس

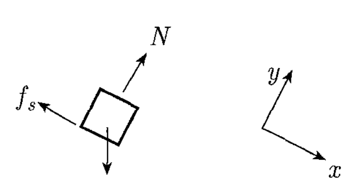
$$f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = \mu_s mg\cos\theta$$

اتومبیل حرکتی ندارد، پس $a_x = ۰$ است.

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow mg\sin\theta - f_s = ۰ \Rightarrow mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta = ۰$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \mu_s$$

$$\Rightarrow \tan\theta = ۰٫۱ \Rightarrow \theta = ۵٫۷^\circ$$



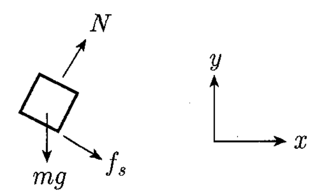
شکل ۲-۱۲۰

حال اتومبیل متحرک روی سطح پیچ را در نظر می‌گیریم. نمودار جسم آزاد جسم در شکل (۲ـ۱۲۱) آمده است. اتومبیل نمی‌لغزد، پس نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع ایستایی است.

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow N\sin\theta + f_s\cos\theta = m\frac{v^۲}{r}$$
$$\Rightarrow N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\frac{v^۲}{r}$$
$$\Rightarrow N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = \frac{mv^۲}{r} \qquad (۱)$$

اتومبیل حرکتی ندارد، پس $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N\cos\theta - f_s\sin\theta - mg = ۰$$
$$\Rightarrow N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta = mg$$
$$\Rightarrow N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg \qquad (۲)$$



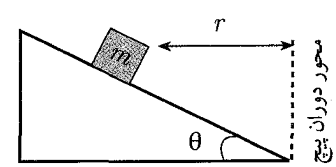
شکل ۲-۱۲۱

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم. بنابراین

$$\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{mv^۲}{mgr} \Rightarrow \frac{\sin(۵/۷^\circ) + ۰/۱\cos(۵/۷^\circ)}{\cos(۵/۷^\circ) - ۰/۱\sin(۵/۷^\circ)} = \frac{(۱۱/۱۱)^۲}{r\times ۹/۸}$$
$$\Rightarrow \frac{۰/۰۹۹ + ۰/۰۹۹}{۰/۹۹ - ۰/۰۱} = \frac{۱۲/۶}{r} \Rightarrow r = ۶۳\text{m}$$

۴۴. سیستم مورد نظر در شکل (۲ـ۱۲۲) نشان داده شده است.

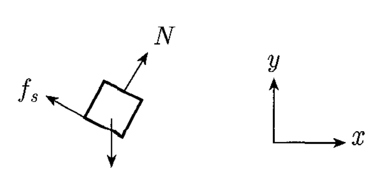
$$v = ۴۰\text{km/h} \Rightarrow v = ۱۱/۱۱\text{m/s}$$



شکل ۲-۱۲۲

نمودار جسم آزاد جسم در شکل (۲ـ۱۲۳) آمده است. قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم.

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow N\sin\theta - f_s\cos\theta = m\frac{v^۲}{r}$$
$$\Rightarrow N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = m\frac{v^۲}{r}$$
$$\Rightarrow N(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) = m\frac{v^۲}{r} \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N\cos\theta + f_s\sin\theta - mg = ۰$$
$$\Rightarrow N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg$$
$$\Rightarrow N(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) = mg \qquad (۲)$$



شکل ۲-۱۲۳

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم. پس

$$\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{v^۲}{rg} \Rightarrow \frac{\sin(۱۲^\circ) - \mu_s\cos(۱۲^\circ)}{\cos(۱۲^\circ) + \mu_s\sin(۱۲^\circ)} = \frac{(۱۱/۱۱)^۲}{۱۲۰\times ۹/۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۰٫۲۱ - ۰٫۹۸\mu_s}{۰٫۹۸ + ۰٫۲۱\mu_s} = ۰٫۱۰۵$$

$$\Rightarrow ۰٫۲۱ - ۰٫۹۸\mu_s = ۰٫۱ + ۰٫۰۲\mu_s \Rightarrow \mu_s = ۰٫۱۱$$

مقدار به‌دست آمده را در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین

$$N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow N(۰٫۲۱ + ۰٫۱۱ \times ۰٫۹۸) = \frac{۱۰۰۰(۱۱٫۱۱)^۲}{۱۲}$$

$$\Rightarrow N = ۳۲۱۴٫۴\mathrm{N}$$

با توجه به رابطه‌ی $f_s = \mu_s N$، داریم:

$$f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = ۰٫۱ \times ۳۲۱۴٫۴ \Rightarrow f_s = ۳۲۱٫۴۴\mathrm{N}$$

جهت نیروی اصطکاک به سمت خارج جاده است.

۴۵. نمودار جسم آزاد ذره را در زمان t که زاویه‌ی نیروی F با افق برابر $\theta = \omega t$ است رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۱۲۴). در این مسئله گرانش را در نظر نمی‌گیریم.

شکل ۲-۱۲۴

الف) $v_x = v\cos\theta \quad , \quad v_y = v\sin\theta$

حال قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای آن می‌نویسیم.

$$F_x = ma_x \Rightarrow F\cos\theta = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow F\cos\omega t = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow F\cos\omega t dt = m dv_x$$

$$F_y = ma_y \Rightarrow F\sin\theta = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow F\sin\omega t = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow F\sin\omega t dt = m dv_y$$

با انتگرال‌گیری از روابط فوق، v_x و v_y را بر حسب زمان به‌دست می‌آوریم. پس

$$\int_۰^t F\cos\omega t dt = \int_۰^{v_x} m dv_x \Rightarrow \frac{F}{\omega}\sin\omega t = mv_x$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{F}{m\omega}\sin\omega t \qquad (۱)$$

$$\int_۰^t F\sin\omega t dt = \int_۰^{v_y} m dv_y \Rightarrow -\frac{F}{\omega}(\cos\omega t - ۱) = mv_y$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{F}{m\omega}(۱ - \cos\omega t) \qquad (۲)$$

حال می‌توانیم اندازه‌ی سرعت را بر حسب زمان بیابیم. پس

$$|v| = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} \Rightarrow |v| = \sqrt{(\frac{F}{m\omega}\sin\omega t)^۲ + (\frac{F}{m\omega}(۱ - \cos\omega t))^۲}$$

$$\Rightarrow |v| = \frac{F}{m\omega}\sqrt{(۲ - ۲\cos\omega t)}$$

$$\Rightarrow\ |v| = \frac{F}{m\omega}\sqrt{۲(۲\sin^۲\frac{\omega t}{۲})}$$

$$\Rightarrow\ |v| = (\frac{۲F}{m\omega})\left|\sin(\frac{\omega t}{۲})\right| \qquad (۳)$$

(ب) ابتدا باید بازه‌ی زمانی اول که در دو سر آن سرعت ذره صفر است را بیابیم. بنابراین رابطه‌ی (۳) را برابر صفر قرار می‌دهیم تا زمان‌های مورد نظر به‌دست آید. پس

$$\frac{۲F}{m\omega}\left|\sin(\frac{\omega t}{۲})\right| = ۰\ \Rightarrow\ \frac{\omega t}{۲} = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{۲}{\omega}(n\pi)\ ,\ n = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

بنابراین بازه‌ی اول بین زمان‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = \frac{۲\pi}{\omega}$ قرار دارد.

حال روابط (۱) و (۲) را بر حسب تغییرات x و y بر حسب زمان بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m\omega}\sin\omega t\ \Rightarrow\ dx = \frac{F}{m\omega}\sin\omega t dt$$

$$\Rightarrow\ \int_۰^x dx = \int_{t_۱}^{t_۲}\frac{F}{m\omega}\sin\omega t dt$$

$$\Rightarrow\ x = -\frac{F}{m\omega^۲}(\cos\omega t_۲ - \cos\omega t_۱)\ \Rightarrow\ x = ۰$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{F}{m\omega}(۱-\cos\omega t)\ \Rightarrow\ dy = \frac{F}{m\omega}(۱-\cos\omega t)dt$$

$$\Rightarrow\ \int_۰^y dy = \int_{t_۱}^{t_۲}\frac{F}{m\omega}(۱-\cos\omega t)dt$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{F}{m\omega}(t - \frac{۱}{\omega}\sin\omega t)\Big|_۰^{\frac{۲\pi}{\omega}}$$

$$\Rightarrow\ \Delta y = \frac{۲\pi F}{m\omega^۲}$$

بنابراین فاصله‌ی طی شده به وسیله‌ی ذره تنها در راستای y و برابر $\frac{۲\pi F}{m\omega^۲}$ خواهد بود. در نتیجه سرعت متوسط ذره در این بازه برابر است با:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ \Rightarrow\ \overline{v} = \frac{\Delta y}{t_۲ - t_۱}\ \Rightarrow\ \overline{v} = \frac{\frac{۲\pi F}{m\omega^۲}}{\frac{۲\pi}{\omega}}$$

$$\Rightarrow\ \overline{v} = \frac{F}{m\omega}$$

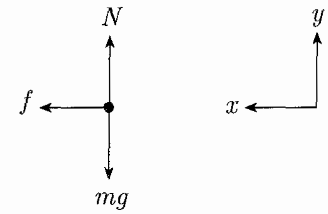
۴۶. نمودار جسم آزاد دوچرخه (به همراه دوچرخه‌سوار) در شکل (۲ـ۱۲۵) نشان داده شده است. بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ۰\ \Rightarrow\ N - mg = ۰\ \Rightarrow\ N = mg$$

$$f = \mu N\ \Rightarrow\ f = \mu_۰(۱ - \frac{r}{R})mg$$

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; \mu_۰(۱-\frac{r}{R})mg = m\frac{v^۲}{r}$$

$$\Rightarrow\; v^۲ = \mu_۰ rg(۱-\frac{r}{R}) \qquad (۱)$$



شکل ۲-۱۲۵

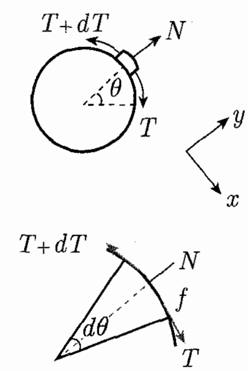
اگر از رابطه‌ی (۱) بر حسب r مشتق بگیریم و $\frac{dv}{dr}$ را برابر صفر قرار دهیم، شعاعی که به ازای آن دوچرخه‌سوار می‌تواند حداکثر سرعت ممکن را داشته باشد، به‌دست می‌آید.

$$۲v\frac{dv}{dr} = \mu_۰ g(۱-\frac{۲r}{R}) = ۰ \;\Rightarrow\; \frac{۲r}{R} = ۱ \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{۲}$$

حال مقدار r را از رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم. پس

$$v_{\max}^۲ = \mu_۰ \frac{R}{۲}g(۱-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow v_{\max}^۲ = \mu_۰\frac{R}{۴}g \Rightarrow v_{\max} = \frac{\sqrt{\mu_۰ Rg}}{۲}$$

۴۷.الف) مطابق شکل (۲ـ۱۲۶) یک المان دیفرانسیلی از طناب را که بر روی قرقره قرار دارد، در نظر گرفته و نیروهای وارد بر آن را رسم می‌کنیم. چون طناب بدون جرم است، نیروی وزن آن را در نظر نمی‌گیریم.



شکل ۲-۱۲۶

بر اساس قانون دوم نیوتون، داریم:

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; N-(۲T+dT)\sin\frac{d\theta}{۲} = ۰ \;\Rightarrow\; N = Td\theta$$

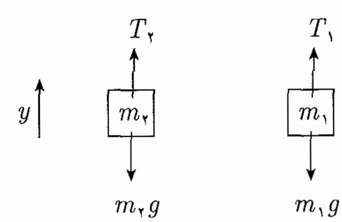
$$f = \mu N \;\Rightarrow\; f = \mu T d\theta$$

$$\sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; -f+(T+dT)\cos\frac{d\theta}{۲} - T\cos\frac{d\theta}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow\; f = dT \;\Rightarrow\; dT = \mu T d\theta \;\Rightarrow\; \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

$$\Rightarrow\; \int_{T_۱}^{T_۲}\frac{dT}{T} = \int_۰^{\pi}\mu d\theta \;\Rightarrow\; \ln\frac{T_۲}{T_۱} = \mu\pi \qquad (۱)$$

انتگرال‌گیری بالا بر اساس این فرض که طناب به‌طورکامل در زاویه‌ی بین ۰ تا π با قرقره در تماس است، گرفته شده است.



شکل ۲-۱۲۷

حال $T_۱$ و $T_۲$ که نیروهای کشش طناب در دو طرف قرقره می‌باشد را از تعادل جرم‌های آویزان در دو طرف قرقره به‌دست می‌آوریم. نمودار جسم آزاد دو جرم در شکل (۲ـ۱۲۷) نشان داده شده است.

اجرام در حال تعادل هستند، بنابراین:

$$\text{جرم } m_۲ : \sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; T_۲ - m_۲ g = ۰ \;\Rightarrow\; T_۲ = m_۲ g$$

$$\text{جرم } m_۱ : \sum F_x = ۰ \;\Rightarrow\; T_۱ - m_۱ g = ۰ \;\Rightarrow\; T_۱ = m_۱ g$$

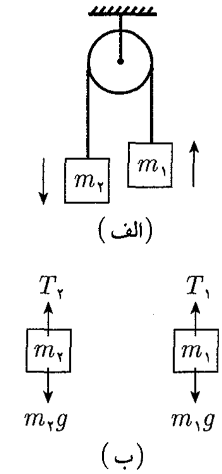
با تقسیم دو رابطه‌ی فوق بر یکدیگر نسبت $\frac{T_۲}{T_۱}$ که در رابطه‌ی (۱) آمده است، به‌دست می‌آید. پس

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \frac{m_۲ g}{m_۱ g} \;\Rightarrow\; \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} = \eta_۰ \qquad (۱)$$

حال نسبت $\frac{T_2}{T_1}$ را از رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین

$$\ln\frac{m_2}{m_1} = \pi\mu \;\Rightarrow\; \mu = \frac{\ln(\eta_0)}{\pi}$$

ب) وقتی $m_2 > m_1$ باشد، m_2 رو به پایین و m_1 رو به بالا حرکت خواهد کرد (شکل ۲ـ۱۲۸). نمودار جسم آزاد جرم‌های m_1 و m_2 را در شکل (۲ـ۱۲۸) نشان داده‌ایم.



شکل ۲-۱۲۸

حال قانون دوم نیوتون را برای هر کدام از اجرام می‌نویسیم. پس

$$\text{جرم } m_2 \;:\; \sum F = ma \;\Rightarrow\; m_2 g - T_2 = m_2 a \;\Rightarrow\; T_2 = m_2(g-a)$$
$$\text{جرم } m_1 \;:\; \sum F = ma \;\Rightarrow\; T_1 - m_1 g = m_1 a \;\Rightarrow\; T_1 = m_1(g+a)$$

دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم. بنابراین

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2(g-a)}{m_1(g+a)}$$

چون طناب بدون جرم است، $\frac{T_2}{T_1}$ باید از رابطه‌ی (۱) تبعیت کند. در نتیجه

$$\eta_0 = \eta\frac{(g-a)}{(g+a)} \;\Rightarrow\; a = g\frac{\eta-\eta_0}{(\eta+\eta_0)}$$

۴۸. چندجمله‌ای شتاب را برای ذره می‌نویسیم (با فرض حرکت در مسیر دایروی).

$$\vec{F} = m(\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

چون نیرو در راستای r است، شتاب در راستای $\hat{\theta}$ باید صفر باشد. پس

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; r\ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \omega = \text{const}$$

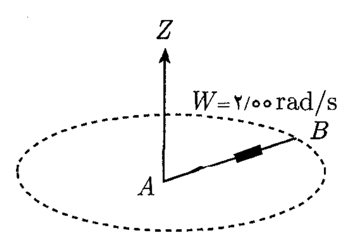
بنابراین سرعت زاویه‌ای ثابت است. حال معادله‌ی حرکت در راستای $\hat{r}$ را بررسی می‌کنیم.

پس

$$k\frac{1}{r^n} = m(\ddot{r} - r\omega^2)\;,\; \ddot{r} = 0 \;\Rightarrow\; k\frac{1}{r^n} = -m\frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow\; v^2 = -\frac{k}{m}r^{1-n}$$

که در آن $\frac{k}{r^n}$ نیروی وارده به ذره است که عمود بر سرعت می‌باشد. بر اساس رابطه‌ی فوق و اینکه سرعت به ازای rهای بزرگ‌تر باید افزایش یابد، رابطه‌ی $1 - n > 0$ باید برقرار باشد. در نتیجه $n < 1$ است.

۴۹. سیستم موردنظر در شکل (۲ـ۱۲۹) نشان داده شده است. چون محور بدون اصطکاک است، در راستای میله نیرویی نداریم، بنابراین



شکل ۲-۱۲۹

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{r} = r\omega^2$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را در $\dot{r}$ ضرب می‌کنیم. پس:

$$\ddot{r}\dot{r} = r\omega^{۲}\dot{r} \Rightarrow \dot{r}d\dot{r} = r\omega^{۲}dr \Rightarrow \int_{v_{۰}}^{\dot{r}} \dot{r}d\dot{r} = \int_{۰}^{r} r\omega^{۲}dr$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{r}^{۲} - v_{۰}^{۲}}{۲} = \frac{r^{۲}\omega^{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^{۲} = v_{۰}^{۲} + r^{۲}\omega^{۲} \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{v_{۰}^{۲} + r^{۲}\omega^{۲}}$$

حال نیروی کوریولیس را به‌دست می‌آوریم.

$$F_{\text{cor}} = m(۲\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow F_{\text{cor}} = ۲m\omega\sqrt{v_{۰}^{۲} + r^{۲}\omega^{۲}}$$

$$\Rightarrow F_{\text{cor}} = ۲mr\omega^{۲}\sqrt{۱ + (\frac{v_{۰}}{r\omega})^{۲}} = ۲/۸\text{N}$$

تمرینات فصل ۲

■ قانون اول نیوتون (تعادل)

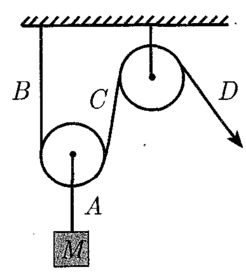
۱ . یدک‌کشی دو سکو را می‌کشد، برای این کار نیروی کشش آن به ۸۰۰ نیوتن می‌رسد. جرم سکوی اول ۱۲ تن و سکوی دوم ۸ تن است. کشش طنابی را که سکوها به آن وصلند را معلوم کنید.

جواب: ۳۲۰ نیوتن

۲ . طنابی به طول ۱۲ متر، دارای وزن ۶۰N است و طوری روی یک قرقره قرارگرفته است که طول یک طرف آن ۸ متر است. اگر طناب را رها کنیم تا آزادانه بر روی قرقره بلغزد، کشش طناب را در وسط آن (در لحظه اولیه) بیابید. اصطکاک طناب با قرقره ناچیز است.

جواب: ۲۰ نیوتن

۳ . از دستگاه زیر برای بلند کردن اشیای سنگین استفاده می‌شود. $M = ۶۴\text{kg}$ و با سرعت ثابت $۰٫۰۵\text{m/s}$ و به طرف بالا حرکت می‌کند. کشش طناب را در نقاط A، B، C و D تعیین کنید.



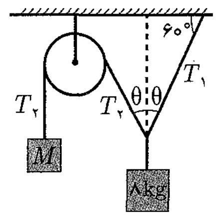
شکل ۲-۱۳۰

جواب: $T_A = ۴۵۰\text{N}$ ،$T_B = T_C = T_D = ۲۲۵\text{N}$

٤ . بندبازی به جرم ۶۰kg از روی سیمی به طول ۳۰ متر عبور می‌کند که در ارتفاع زیادی از سطح زمین بسته شده است. وقتی بندباز به وسط سیم می‌رسد، سیم ۰٫۸m زیر سطح تکیه‌گاه خود خم می‌شود. کشش سیم در محل اتصال به دیوار را در این لحظه به‌دست آورید.

جواب: $T = ۵۴۳۶٫۵\text{N}$

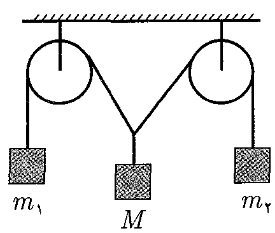
۵ . در سیستم متعادل نشان داده شده در شکل (۲ـ۱۳۱) زاویه θ و جرم M را به‌دست آورید.



شکل ۲-۱۳۱

جواب: $\theta = ۳۰٫۰^\circ$ ،$M = ۴٫۶\text{kg}$

۶ . سه بار به جرم‌های m_1، m_2 و M مطابق شکل (۲ـ۱۳۲) از ریسمانی که از دو قرقره رد شده است، آویزان هستند. قرقره‌ها در یک فاصله از نقطه آویز قرار دارند. نسبت بین جرم بارها را طوری پیدا کنید که سیستم در حالت تعادل باشد. آیا این شرایط می‌تواند همیشه برقرار باشد؟ از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



شکل ۲-۱۳۲

جواب: $m_1 < M+m_2$ ،$m_2 < M+m_1$ و $M < m_1+m_2$

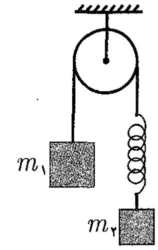
■ قانون دوم نیوتون (حرکت یک‌بعدی)

۷ . دو وزنه به جرم‌های ۵ و ۳ کیلوگرم به دو طرف نخی بسته شده‌اند. نخ از قرقره ثابتی عبورکرده است. وزنه کوچک یک متر پایین‌تر از وزنه بزرگ قرار دارد. وزنه‌ها را رها می‌کنیم تا تحت اثر نیروی ثقل حرکت کنند. تعیین کنید که پس از چه مدت وزنه‌ها در یک سطح قرار می‌گیرند.

جواب: $t = ۰٫۹\text{s}$

۸ . دستگاهی مطابق شکل (۲ـ۱۳۳) داده شده است. $m_1 = ۵۰\text{gr}$ و $m_2 = ۳۰\text{gr}$ و فنر و نخ بی‌وزن می‌باشند. طول نخ نیز ثابت است. فنر نوسان نمی‌کند. طول فنر در حال سکون ۱۰cm است. طول آن را در حال حرکت، در حالی که بدانیم فنر در ازای نیروی ۰٫۱ نیوتن، ۲ سانتی‌متر دراز می‌شود، تعیین کنید. از

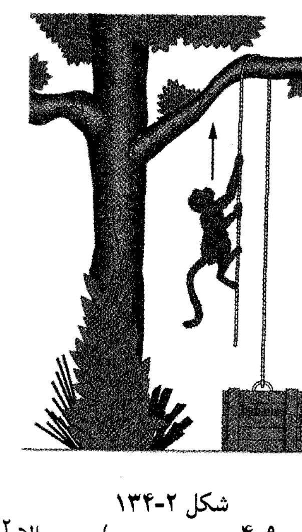
وزن قرقره و اصطکاک صرف‌نظر کنید.



شکل ۲-۱۳۳

جواب: $L = ۱۷/۴\text{cm}$

۹ . میمونی به جرم ۱۰kg از روی طناب بدون جرمی که از روی شاخه بدون اصطکاک درختی عبور کرده است، بالا می‌رود (شکل ۲ـ۱۳۴). سر دیگر طناب به صندوقی به جرم ۱۵kg که روی زمین قرار دارد وصل شده است. الف) بزرگی کمترین شتاب میمون چقدر باید باشد تا صندوق از زمین بلند شود؟ اگر پس از بلند شدن صندوق، میمون از بالا رفتن دست بکشد و طناب را همچنان نگه دارد: ب) بزرگی و جهت شتاب میمون را تعیین کنید. ج) کشش طناب را به‌دست آورید.



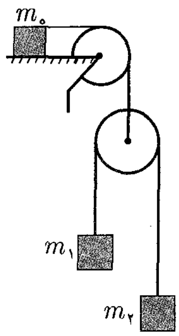
شکل ۲-۱۳۴

جواب: الف) $a_{\min} = ۴/۹\text{m/s}^۲$، ب) رو به بالا $a = ۲/۰\text{m/s}^۲$، ج) $T = ۱۲۰\text{N}$

۱۰ . یک قرص هاکی به جرم ۱۱۰gr به اندازه ۱۵m روی یخ می‌لغزد و توسط نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. الف) اگر تندی آغازی قرص $۶/۰\text{m/s}$ باشد، بزرگی نیروی اصطکاک چقدر است؟ ب) ضریب اصطکاک میان قرص و یخ چقدر است؟

جواب: الف) $f = ۰/۱۳\text{N}$، ب) $\mu = ۰/۱۲$

۱۱ . در سیستم نشان داده شده در شکل (۲ـ۱۳۵) جرم اجسام $m_۰$، $m_۱$ و $m_۲$ است. اصطکاک نداریم و جرم نخ‌ها و قرقره‌ها نیز قابل صرف‌نظر کردن است. شتاب جسم $m_۱$ را بیابید. موارد ممکن را بررسی کنید.



شکل ۲-۱۳۵

جواب: $a_۱ = \dfrac{۴m_۱m_۲ + m_۰(m_۱ - m_۲)}{۴m_۱m_۲ + m_۰(m_۱ + m_۲)}g$

۱۲ . یک مأمور آتش‌نشانی که ۷۲N وزن دارد، با شتاب $۳/۰\text{m/s}^۲$ از یک تیر قائم به پایین می‌لغزد. بزرگی و جهت نیروهای قائمی را که تیر به آتش‌نشان و آتش‌نشان به تیر وارد می‌کند، معین کنید.

جواب: رو به بالا $F_۱ = ۴۹۴\text{N}$، رو به پایین $F_۲ = ۴۹۴\text{N}$

۱۳ . آسانسوری با بارش در مجموع ۱۶۰۰kg جرم دارد. در حالی که آسانسور با سرعت ۱۲m/s به طرف پایین حرکت می‌کند، تحت اثر یک شتاب ثابت قرار می‌گیرد و پس از پیمودن مسافت ۴۲m متوقف می‌شود. در این حالت نیروی کشش کابل نگهدارنده آسانسور را پیدا کنید.

جواب: $T = ۱/۸ \times ۱۰^۴\text{N}$

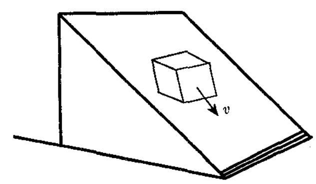
۱۴ . جسمی به جرم $۸/۴\text{kg}$، توسط سیم نازکی از سقف آسانسوری آویزان است. کشش سیم چقدر است اگر: الف) آسانسور ساکن باشد. ب) شتاب رو به بالای $۳/۷\text{m/s}^۲$ داشته باشد. ج) شتاب رو به پایین $۳/۷\text{m/s}^۲$ داشته باشد.

جواب: الف) $T = ۸۲/۳\text{N}$، ب) $T = ۱۱۳/۴\text{N}$، ج) $T = ۵۱/۲\text{N}$

۱۵ . دو جسم به جرم‌های $m_۱ = ۵۰\text{gr}$ و $m_۲ = ۱۰۰\text{gr}$ با نخی به هم وصلند و روی سطح افقی صیقلی قرار دارند. حداکثر کششی که نخ می‌تواند تحمل کند ۵ نیوتن است. بر جسم اولی چه نیروی حداکثری وارد سازیم تا نخ پاره نشود. اگر این نیرو بر جسم دوم وارد شود وضع فرق می‌کند یا نه؟

جواب: $F = ۷/۵\text{N}$. اگر نیرو بر دومی وارد شود $F = ۱۵\text{N}$ لازم است.

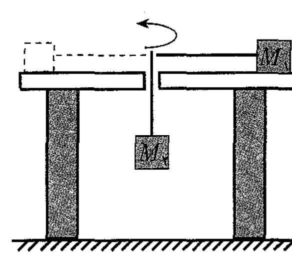
۱۶ . بلوکی که در شکل (۲ـ۱۳۶) نشان داده شده است، می‌تواند در جهت‌های مختلف روی سطح شیبدار حرکت کند. اگر سرعت اولیه v، در امتداد سطح شیبدار رو به سمت پایین به آن داده شود، بلوک با شتاب کند شونده یکنواختی پس از طی جابه‌جایی $l_۱$ می‌ایستد. اگر به بلوک همان سرعت به سمت بالا داده شود، پس از جابه‌جایی $l_۲$ متوقف می‌شود. در پایین سطح شیبدار میله‌ی بدون اصطکاکی قرار گرفته است. اگر همان سرعت به طور افقی به بلوک داده شود، میزان جابه‌جایی آن (l) را در امتداد میله به‌دست آورید.



شکل ۲-۱۳۶

جواب: $l = \dfrac{۲l_۱l_۲}{l_۱ + l_۲}$

۱۷ . در شکل (۲ـ۱۳۷) ریسمان بدون جرم و سطح میز بدون اصطکاک است. جرم $M_۲$ با سرعت زاویه‌ای ثابت حول سوراخ، دوران می‌کند. شعاع مسیر دایره‌ای $M_۱$ را بیابید.



شکل ۲-۱۳۷

جواب: $R = \dfrac{M_۲g}{M_۱w^۲}$

۱۸ . یک میله بدون جرم و افقی که دو گلوله یکسان به جرم‌های m می‌توانند بدون اصطکاک در طول آن حرکت کنند، حول یک محور عمودی، با سرعت زاویه‌ای ثابت w دوران می‌کنند. این دو گلوله توسط فنری بدون جرم و سختی k و طول فشرده نشده $l_۰$، به هم وصل شده‌اند. گلوله‌ای که به محور چرخش نزدیک‌تر است نیز با فنری مشابه به محور متصل است. طول هر یک از فنرها را مشخص کنید. تحت شرایطی مسیر حرکت این گلوله‌ها دایره‌ای خواهد شد؟

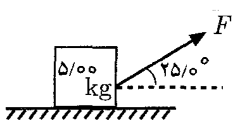
جواب: $L_۱ = \dfrac{L_۰}{۱ - \frac{۳mw^۲}{k} + (\frac{mw^۲}{k})^۲}$،

$$L_۲ = \frac{(۱ - \frac{mw^۲}{k})L_۰}{۱ - \frac{۳mw^۲}{k} + (\frac{mw^۲}{k})^۲}$$

$$w < \sqrt{\frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}\frac{k}{m}} \text{ و } ۰ < x < \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

■ قانون دوم نیوتون (حرکت دوبعدی)

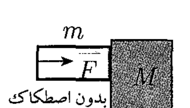
۱۹ . در شکل (۲ـ۱۳۸) یک جسم ۵ کیلوگرمی به وسیله ریسمانی که نیروی $F = ۱۲/۰\text{N}$ را تحت زاویه‌ی $\theta = ۲۵/۰^\circ$ وارد می‌کند، روی یک سطح افقی بدون اصطکاک کشیده می‌شود. الف) بزرگی شتاب جسم چقدر است؟ ب) بزرگی نیروی $\vec{F}$ را به تدریج افزایش می‌دهیم. مقدار این نیرو درست پیش از بلند شدن (کامل) از روی سطح چقدر است؟ ج) بزرگی شتاب جسم درست پیش از بلند شدن (کامل) آن از روی سطح، چقدر است؟



شکل ۲-۱۳۸

جواب: الف) $a = ۲/۱۸\text{m/s}^۲$ ب) $F = ۱۱۶\text{N}$ ج) $a = ۲۱/۰\text{m/s}^۲$

۲۰ . دو جسم نشان داده در شکل (۲ـ۱۳۹) (به جرم‌های $m = ۱۶\text{kg}$ و $M = ۸۸\text{kg}$) به هم نچسبیده‌اند. ضریب اصطکاک ایستایی میان اجسام $\mu_s = ۰/۳۸$ و سطح زیر جسم بزرگ‌تر بدن اصطکاک است. بزرگی کمینه نیروی افقی $\vec{F}$ چقدر باید باشد تا جسم کوچک‌تر از کنار جسم بزرگ‌تر به پایین نلغزد؟

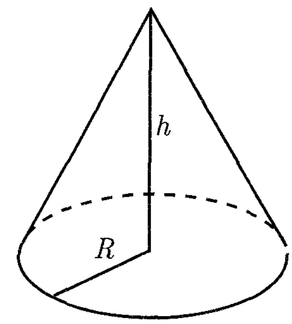


شکل ۲-۱۳۹

جواب: $F = ۴۹۰\text{N}$

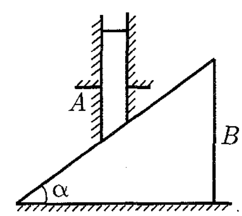
۲۱ . کارگری می‌خواهد مخروطی از شن روی قاعده‌ی دایره‌ای انباشته کند. شعاع قاعده دایره R است و هیچ دانه شنی در خارج از پیرامون این دایره ریخته نمی‌شود (شکل ۲ـ۱۴۰). اگر μ_s ضریب اصطکاک ایستایی میان هر لایه شن در راستای شیب و لایه زیر آن

(که ممکن است بر روی آن بلغزد) باشد، نشان دهید که بیشترین حجم شن، که به این ترتیب می‌تواند انباشته شود، $\pi\mu_s\dfrac{R^3}{3}$ است.



شکل ۲-۱۴۰

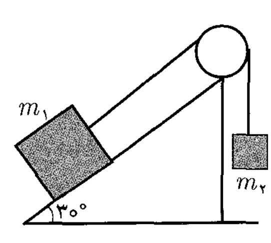
۲۲ . شتاب گوه B و میله A را در شکل (۲ـ۱۴۱) بیابید، در صورتی که نسبت جرم گوه به میله η باشد و از اصطکاک بین همه سطوح بتوان صرف‌نظر کرد.



شکل ۲-۱۴۱

جواب: $a_A = \dfrac{g}{(1+\eta\cot^2\alpha)}$, $a_B = \dfrac{g}{(\tan\alpha+\eta\cot\alpha)}$

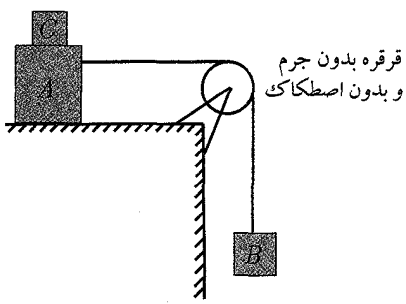
۲۳ . جسمی به جرم $m_1 = 3{,}70\,\text{kg}$ روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک با زاویه‌ی شیب $30{,}0$ درجه (شکل ۲ـ۱۴۲) قرار دارد. این جسم از طریق ریسمان عبورکرده از روی یک قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک به جسم دیگری به جرم $m_2 = 2{,}30\,\text{kg}$، که به طور قائم آویخته شده، وصل شده است. الف) بزرگی شتاب هر جسم را تعیین کنید. ب) جهت شتاب جسم آویخته، چیست؟ ج) نیروی کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۲-۱۴۲

جواب: الف) $a = 0{,}735\,\text{m/s}^2$، ب) به سمت پایین، ج) $T = 20{,}8\,\text{N}$

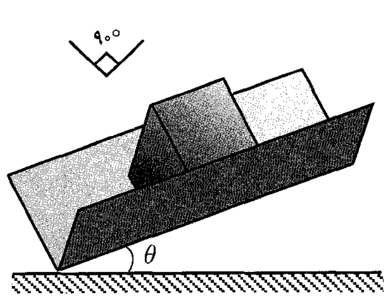
۲۴ . در شکل (۲ـ۱۴۳) وزن اجسام A و B، به ترتیب ۴۴N و ۲۲N است. الف) اگر μ_s میان جسم A و میز ۰٫۲۰ باشد، کمترین مقدار وزنه C را طوری معین کنید که جسم A نلغزد. ب) جسم C را ناگهان از روی جسم A برمی‌داریم. اگر μ_k میان جسم A و میز ۰٫۱۵ باشد، شتاب جسم A چقدر خواهد بود؟



شکل ۲-۱۴۳

جواب: الف) $W_1 = 66\,\text{N}$، ب) $a = 2{,}3\,\text{m/s}^2$

۲۵ . در شکل (۲ـ۱۴۴) صندوقی در داخل سطح شیبدار ناودانی با زاویه °۹۰ به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و ناودان μ_k است. شتاب صندوق بر حسب μ_k، θ و g چیست؟



شکل ۲-۱۴۴

۲۶ . جسم سربی به جرم $200\,\text{gr}$ توسط میله نازکی از سقف اتومبیلی آویزان است. اتومبیل از تپه‌ای با شیب °۱۲ بالا می‌رود و شتابش $2{,}25\,\text{m/s}^2$ است. کشش میله را به‌دست آورید.

جواب: $T = 2{,}1\,\text{N}$

۲۷ . بر جسمی به جرم m که بر روی سطح افقی قرار دارد، نیروی F تحت زاویه α با افق اثر کرده و سبب می‌شود که جسم با

شتاب a روی سطح بلغزد. مقدار این نیرو را محاسبه کنید. ضریب اصطکاک k است.

جواب: $F = \dfrac{m(a+kg)}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$

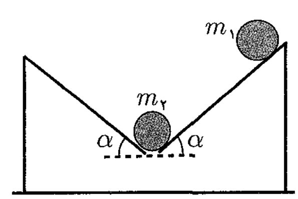
۲۸ . جسمی به طور آزاد از روی سطح شیبداری می‌لغزد. زاویه سطح ۳۰ درجه و ضریب اصطکاک $k = ۰٫۰۵$ است. ارتفاع سطح شیبدار $h = ۱۰\text{m}$ است. سرعت جسم را در انتهای مسیر و زمان حرکت را تعیین کنید.

جواب: $t = ۳\text{s}$ ،$v = ۱۴\text{m/s}$

۲۹ . سرعت بلوکی که روی سطح افقی یک تسمه نقاله بلند در حال حرکت است، نسبت به زمین برابر $v_۰ = ۵\text{m/s}$ و خلاف جهت حرکت تسمه نقاله می‌باشد. پس از $t = ۴\text{s}$ سرعت بلوک با تسمه نقاله برابر می‌شود. ضریب اصطکاک بین بلوک و تسمه نقاله $\mu = ۰٫۲$ است. سرعت تسمه نقاله (v) را بیابید.

جواب: $v = ۳\text{m/s}$

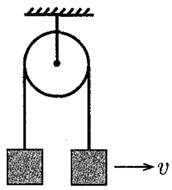
۳۰ . دو توپ مطابق شکل (۲ـ۱۴۵) روی پایه‌ی بی‌وزنی که از دو سطح شیبدار بدون اصطکاک با زاویه α تشکیل شده، قرار دارند. پایه می‌تواند بدون اصطکاک روی سطح افقی حرکت می‌کند. توپ بالایی که جرم آن $m_۱$ است، رها می‌شود. شرایطی را بیابید که تحت آن، توپ پایینی که جرم آن $m_۲$ است شروع به بالا رفتن از روی پایه بنماید.



شکل ۲-۱۴۵

جواب: $m_۲ < m_۱ \cos ۲\alpha$

۳۱ . دو بار با جرم مساوی به دو سر یک ریسمان بدون جرم و غیرکشسان که از روی یک قرقره بدون جرم رد شده است، گره زده شده‌اند. در ابتدا سیستم در حال سکون است و بارها در یک ارتفاع قرار دارند (شکل ۲ـ۱۴۶). سپس بار سمت راست، یک سرعت ناگهانی افقی (v) در صفحه شکل پیدا می‌کند. کدامیک از بارها در لحظات بعد پایین‌تر خواهد بود؟



شکل ۲-۱۴۶

جواب: بار سمت راست

۳۲ . هواپیمایی با سرعت ۱۲۰۰km/h دایره‌ای به شعاع ۳۶۰۰ متر را در صفحه قائم بر زمین، دور می‌زند. بیشترین و کمترین شتاب وارد بر خلبان را به‌دست آورید.

جواب: $a_{\max} = ۴٫۱۵g$ ،$a_{\min} = ۲٫۱۵g$

۳۳ . گلوله‌ای به جرم $۰٫۸\text{kg}$ از ریسمانی به طول $۱٫۵\text{m}$ از نقطه ثابتی، آویزان است. گلوله به یک طرف، کشیده می‌شود که ریسمان با خط قائم زاویه ۳۰° می‌سازد. گلوله از حال سکون، رها می‌شود. سرعت و سرعت زاویه‌ای گلوله و کشش ریسمان را در پایین‌ترین نقطه به‌دست آورید.

جواب: $T = ۹٫۹\text{N}$ ،$\omega = ۱٫۳۲\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$ ،$v = ۱٫۹۸\text{m/s}$

۳۴ . شعاع انحنای پیچ جاده‌ای بدون شیب عرضی ۷۵m است. در یک روز زمستانی، برف سطح جاده را پوشانده است و ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک‌ها و جاده ۰٫۲۳ است. حداکثر سرعت اتومبیل برای عبور بی‌خطر از پیچ چقدر است؟

جواب: $v = ۴۶٫۸\text{km/h}$

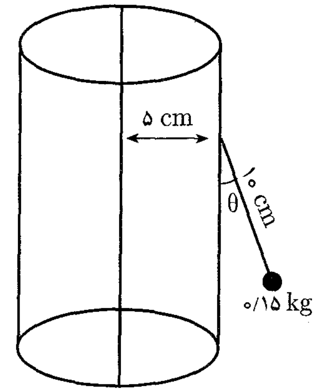
۳۵ . پیچی با شعاع ۱۶۰m دارای شیب عرضی ۹° است. اتومبیل به جرم ۹۰۰kg با سرعت ۷۵km/h بدون لغزش در این پیچ حرکت می‌کند.

الف) نیروی عکس‌العمل عمودی بین اتومبیل و جاده را به‌دست آورید.

ب) نیروی اصطکاکی وارد بر چهار چرخ را به‌دست آورید. جهت آن چیست؟

جواب: الف) $R = ۸۹۷۲٫۹\text{N}$، ب) $f_s = ۱۰۱۳٫۹\text{N}$ (به طرف داخل جاده)

۳۶ . دستگاه شکل (۲ـ۱۴۷) برای اندازه‌گیری سرعت میل گردان، استفاده می‌شود. زاویه θ بین ریسمان و محور قائم معیاری برای سرعت چرخش میل گردان است. سرعت چرخشی میل گردان را به‌دست آورید.



شکل ۲-۱۴۷

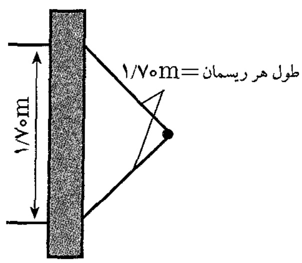
جواب: $\omega = ۷/۵ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

۳۷ . گلوله‌ای به جرم ۱/۳۴kg با دو ریسمان با جرم ناچیز به یک میله قائم در حال چرخش، مطابق شکل (۲ـ۱۴۸) وصل شده است. ریسمان‌ها به میله محکم بسته شده و به حالت کشیده‌اند. نیروی کشش در ریسمان بالایی ۳۵N است.

الف) نیروی کشش ریسمان پایینی را به‌دست آورید.

ب) نیروی برآیند وارد بر گلوله چقدر است؟

ج) تندی گلوله را بیابید.



شکل ۲-۱۴۸

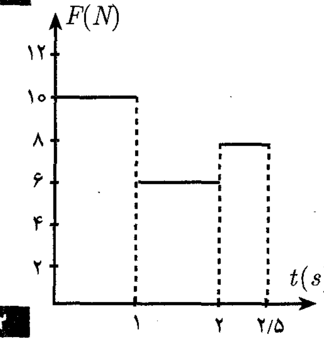
سؤال‌های المپیاد فصل ۲

۱ شکل (۲ـ۱۴۹) نمودار تغییرات نیروی وارد بر جسمی به جرم 5kg را نسبت به زمان نشان می‌دهد. اگر تحت اثر این نیرو جسم از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت آن پس از ۲/۵ ثانیه چند m/s می‌باشد؟

الف) ۴ ب) ۶

ج) ۸ د) ۱۰

«مرحله‌ی اول اولین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳»



شکل ۲-۱۴۹

۲ شتاب سنگی که در شرایط خلأ به طرف بالا پرتاب می‌شود:

الف) بزرگ‌تر از شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

ب) برابر شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

ج) کوچک‌تر از شتاب سنگی است که به طرف پایین رها می‌شود.

د) برابر g است تا آنکه جسم به بالاترین نقطه‌ی حرکت برسد و در آنجا صفر می‌شود.

«مرحله‌ی اول اولین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۵»

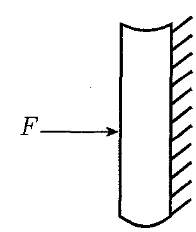
۳ با دست کتابی را محکم به یک دیوار قائم فشار می‌دهیم (شکل ۲ـ۱۵۰). بعد آهسته آهسته فشار را کم می‌کنیم تا سرانجام کتاب در آستانه‌ی حرکت قرار گیرد. اگر نیرویی که بر کتاب وارد کرده‌ایم، با F نشان داده شود:

الف) مقدار اصطکاک در هر لحظه برابر است با $f = \mu F$، یعنی با کم شدن نیروی دست، اصطکاک هم کم می‌شود.

ب) اصطکاک همواره برابر وزن کتاب است.

ج) فقط به هنگام شروع حرکت کتاب، اصطکاک برابر وزن کتاب است.

د) نیروی اصطکاک برابر است با μmg.

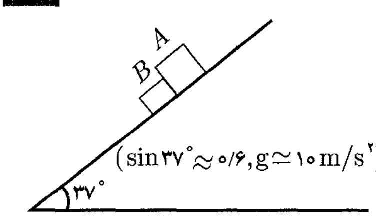


شکل ۲-۱۵۰

«مرحله‌ی اول اولین المپیاد فیزیک ایران ـ سؤال ۷»

۴ دو جسم A و B به جرم‌های 5kg و 2kg مطابق شکل (۲ـ۱۵۱) بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی 37° می‌سازد به طرف پایین می‌لغزند. بین جسم A با سطح شیب‌دار، اصطکاکی وجود ندارد، اما بین جسم B و سطح، اصطکاک وجود دارد و در این مورد ضریب اصطکاک (۰/۲) است. شتاب حرکت را حساب کنید و نیرویی را که A بر B و B بر A وارد می‌کند، به‌دست آورید. همچنین تعیین کنید که پس از طی مسافت 50m چند کالری گرما در اثر اصطکاک ایجاد شده است.

«مرحله‌ی اول اولین المپیاد فیزیک ایران ـ مسئله ۲»



شکل ۲-۱۵۱

۵ داخل اتومبیلی که پنجره‌های آن کاملاً بسته است، مگسی وجود دارد و اتومبیل با سرعت ثابت در حرکت است. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

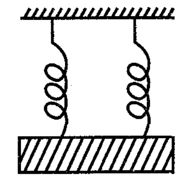
الف) مگس می‌تواند مانند حالتی که اتومبیل ساکن است، داخل آن پرواز کند.

ب) مگس ناچار است روی شیشه عقب اتومبیل قرار گیرد تا بتواند همراه آن حرکت کند.

ج) فشار هوا در قسمت عقب اتاقک اتومبیل، مگس را به ناحیه‌ی جلوی آن می‌راند.

د) مگس باید جایی بنشیند، چون اگر به پرواز درآید نمی‌تواند با سرعت اتومبیل حرکت کند.

«مرحله‌ی اول دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

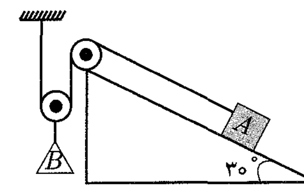


شکل ۲-۱۵۲

۶ جسمی را مطابق شکل (۲ـ۱۵۲) به دو فنر مشابه که به سقف بسته شده‌اند می‌آویزیم. بر اثر این کار، طول هر یک از فنرها ۴cm اضافه می‌شود. حال اگر فنرها را دنبال هم قرار دهیم و وزنه را به فنر پایینی بیاویزیم، هرکدام از دو فنر چقدر کشیده می‌شوند؟

الف) ۲cm   ب) ۴cm   ج) ۸cm   د) ۱۶cm

«مرحله‌ی اول دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲»



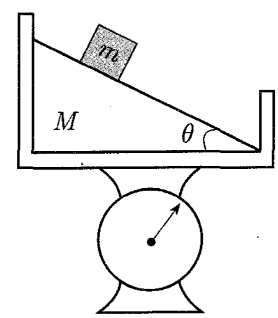
شکل ۲-۱۵۳

۷ در شکل (۲ـ۱۵۳) وزن جسم A برابر ۳۰۰N و وزن جسم B برابر ۴۵۰N و دستگاه ساکن است. نیروی اصطکاک سطح شیب‌دار چند نیوتون است؟

الف) ۵۰   ب) ۷۵

ج) ۱۰۰   د) ۱۲۵

«مرحله‌ی اول دومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۷»



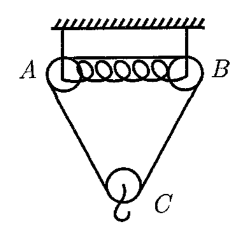
شکل ۲-۱۵۴

۸ جسمی به جرم m، روی سطح شیب‌داری به جرم M قرار دارد. سیستم را مطابق شکل (۲ـ۱۵۴) روی کفه‌ی ترازوی فنری قرار داده‌ایم. به فرض آنکه اصطکاک بین جسم و سطح شیب‌دار ناچیز باشد، ترازو چه عددی را بر حسب m، M و θ نشان می‌دهد؟ (θ زاویه‌ی سطح شیب‌دار با سطح افق است)

«مرحله‌ی اول چهارمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۱»

۹ دستگاه شکل (۲ـ۱۵۵) تشکیل شده است از: سه قرقره که شعاع هرکدام ۵cm است، یک فنر به ثابت ۲۰۰N/cm که طول آن در حالت تعادل ۶۰cm است، قطعه‌ای طناب که دور قرقره‌ها بسته شده است. قرقره‌های A و B می‌توانند در راستای افقی جابه‌جا شوند. طول طناب چقدر باشد تا اگر وزنه‌ی ۱۰۰ نیوتونی به قلاب آویزان کنیم، قرقره‌ها در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گیرند. فرض می‌شود که فنر به حالت افقی است و وزن‌های فنر، طناب، قرقره‌ها، قلاب و نیز نیروی اصطکاک ناچیز است.

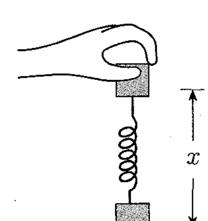
«مرحله‌ی اول ششمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۱»



شکل ۲-۱۵۵

۱۰ یک قطار می‌تواند حداکثر با شتاب $0{,}2\,m/s^2$ بر سرعت خود بیفزاید و بیشترین شتاب ترمز آن $0{,}8\,m/s^2$ است. کمترین زمان ممکن که این قطار می‌تواند فاصله‌ی ۳٫۲km میان دو ایستگاه را بپیماید چقدر است؟

«مرحله‌ی اول هفتمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۱»

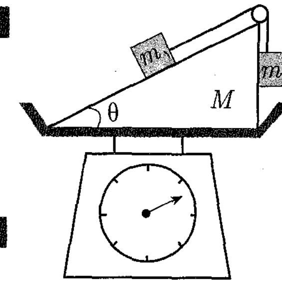


شکل ۲-۱۵۶

۱۱ شکل (۲ـ۱۵۶) دو قطعه‌ی یکسان را نشان می‌دهد که به وسیله‌ی فنری به هم متصل هستند. قطعه‌ی بالایی را با دست نگه می‌داریم. پس از برقراری تعادل، فاصله‌ی دو جسم x می‌شود. در این حالت دستگاه را رها می‌کنیم. بلافاصله پس از رها شدن دو قطعه، فاصله‌ی دو جسم:

الف) کاهش می‌یابد.   ب) افزایش می‌یابد.   ج) ثابت می‌ماند.

«مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»



شکل ۲-۱۵۷

۱۲ مطابق شکل (۲ـ۱۵۷) جرم m_1 که روی سطح شیب‌داری به زاویه‌ی θ و جرم M قرار دارد، توسط یک نخ، به جرم m_2 وصل شده است. دستگاه را روی نیروسنجی قرار داده و از حال سکون رها می‌کنیم. نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد. از جرم نخ، و اصطکاک بین اجزای دستگاه صرف‌نظر کنید.
«مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۱»

۱۳ دو جسم A و B مطابق شکل (۲ـ۱۵۸) درکنار یکدیگر از یک نقطه با سرعت اولیه v_0 به طرف دره‌ای راه می‌افتند. پس از طی مسافتی، جسم A همان مسیر افقی را از طریق پل ادامه می‌دهد و از روی دره عبور می‌کند، ولی جسم B مسیر دره را می‌پیماید.

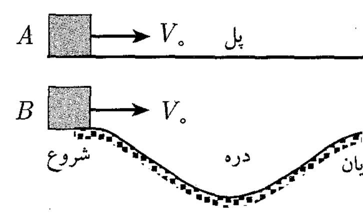
فرض می‌کنیم که دره هموار است و جسم B هیچ‌گاه از مسیر جدا نمی‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که تمام طول هر دو مسیر بدون اصطکاک است و هیچکدام از دو مسیر به چپ و راست نمی‌پیچد.

الف) به‌طور کیفی نمودار مؤلفه‌ی افقی نیروی سطح وارد بر دو جسم A و B را بر حسب زمان رسم کنید.

ب) به‌طور کیفی نمودار مؤلفه‌ی افقی سرعت بر حسب زمان را برای دو جسم A و B رسم کنید.

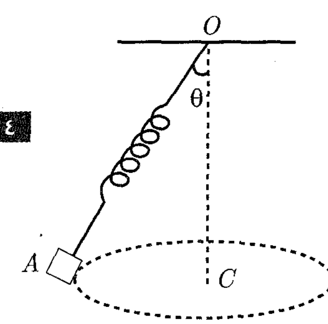
ج) به‌طور کیفی نمودار افقی فاصله‌ی جسم از نقطه‌ی شروع حرکت بر حسب زمان را برای دو جسم A و B رسم کنید.

د) با استفاده از نتایج بالا شرح دهید که کدامیک از دو جسم A و B زودتر به نقطه‌ی پایانی می‌رسند.
«مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۲»



شکل ۲-۱۵۸

۱۴ جسمی به جرم $m = 2\text{kg}$ را مطابق شکل (۲ـ۱۵۹) به انتهای فنری با طول عادی $l_0 = 0/3\text{m}$ و ثابت $k = 250\text{N/m}$ بسته و سر دیگر فنر را به نقطه‌ی ثابت O بسته‌ایم. جسم را روی دایره‌ی افقی به‌طور یکنواخت به گردش در می‌آوریم و در نتیجه فنر سطح یک مخروط را جاروب می‌کند. اگر زاویه‌ی فنر با خط قائم $\theta = 37^\circ$ باشد، دوره‌ی گردش جسم را به‌دست آورید.
«مرحله‌ی اول هشتمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۳»



شکل ۲-۱۵۹

۱۵ چهار وزنه‌ی مشابه ۲ کیلوگرمی را با ۳ فنر مشابه سبک به ثابت فنر 20N/cm طوری به یکدیگر می‌بندیم که میان هر دو وزنه‌ی متوالی یک فنر باشد. وقتی دستگاه را روی یک میز افقی بدون اصطکاک به حالت تعادل می‌خوابانیم، طول کل دستگاه 36cm است. اگر دستگاه را از سقف بیاویزیم، طول آن چند سانتی‌متر می‌شود.

الف) ۳۹ ب) ۴۲ ج) ۳۶ د) ۴۵ هـ) ۴۶

«مرحله‌ی اول نهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

۱۶ واگنی با سرعت ثابت v_0 در حال حرکت است. در بالای سطح شیب‌دار دو طرفه‌ای که مطابق شکل (۲ـ۱۶۰) به وسط کف واگن چسبیده است دو گلوله‌ی کوچک یکسان قرار دارند. این دو گلوله هم‌زمان از بالای سطح شیب‌دار و از حالت سکون نسبت به واگن رها می‌شوند. اختلاف زمان رسیدن گلوله‌ها به نقاط A و B عبارتست از:

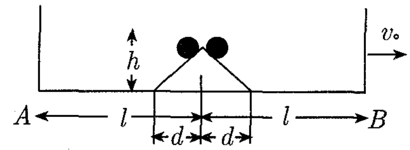
الف) $\frac{\sqrt{2ghl}}{v_0^2 - 2gh}$ ب) $\frac{\sqrt{2gh}(l-d)}{v_0^2 - 2gh}$ ج) صفر د) $\frac{\sqrt{2gh}(l-d)}{v_0^2}$

۱۷ شخصی به جرم $M = ۵۰\text{kg}$ در حالی که سر فنر سبکی به ثابت $k = ۴۰۰\text{N/m}$ را در دست گرفته است، روی یک ترازوی فنری ایستاده است. به سر دیگر فنر جرم $m = ۲$ کیلوگرم آویخته شده است: $(g = ۱۰\text{m/s}^۲)$

الف) اگر وزنه‌ی m در حال تعادل و شخص بی‌حرکت باشد، ترازوی فنری چه مقداری را نشان می‌دهد؟ حال این شخص با دست دیگرش وزنه‌ی m را به اندازه‌ی $d = ۵\text{cm}$ پایین می‌کشد و سپس آن را رها می‌کند. با این کار وزنه‌ی m در دو طرف وضع تعادل به اندازه‌ی d بالا و پایین می‌رود.

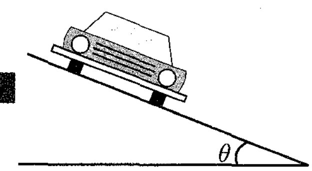
ب) حداقل و حداکثر مقداری که ترازوی فنری نشان می‌دهد، چقدر است؟

«مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۳»



شکل ۲-۱۶۰

۱۸ در جاده‌ای با شیب عرضی θ و ضریب اصطکاک μ، اتومبیلی مطابق شکل (۲ـ۱۶۱) مسیر دایره‌ای به شعاع r را می‌پیماید. حداقل و حداکثر سرعت اتومبیل را برای اینکه سُر نخورد، به‌دست آورید.



شکل ۲-۱۶۱

۱۹ نیروی متوسط لازم برای متوقف کردن یک گلوله در حال سقوط ...

الف) بیشتر از وزن گلوله است. ب) کمتر از وزن گلوله است. ج) برابر وزن گلوله است.

«مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۹»

۲۰ شخصی به وزن W روی ترازویی ایستاده است. او گلوله‌ای به وزن $W_۰$ را به ریسمان سبکی بسته است و می‌چرخاند. به‌طوری که صفحه‌ی حرکت گلوله افقی است. در این ترازو وزن $W_۱$ را نشان می‌دهد. کدام گزینه درست است؟

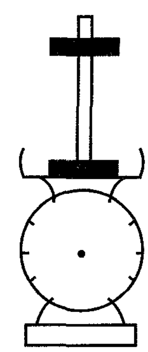
الف) $W_۱ > W + W_۰$ ب) $W_۱ < W + W_۰$ ج) $W_۱ = W + W_۰$

«مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۳»

۲۱ در شکل (۲ـ۱۶۲) پایه‌ای به جرم $۱/۵\text{kg}$ بر روی ترازویی فنری قرار دارد. مهره‌ی m به جرم $۰/۵\text{kg}$ از میله‌ی متصل به پایه عبور داده شده است. اگر مهره رها شود، با شتاب $۲\text{m/s}^۲$ به پایین می‌لغزد. ترازو هنگام لغزیدن میله به پایین چند نیوتون را نشان می‌دهد؟ $(g = ۱۰\text{m/s}^۲)$

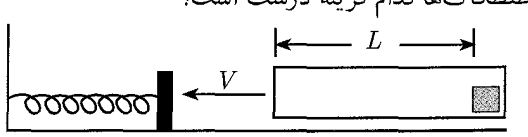
الف) ۱۵ ب) ۱۹ ج) ۲۴ د) ۱۶ هـ) ۲۰

«مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۴»



شکل ۲-۱۶۲

۲۲ مطابق شکل (۲ـ۱۶۳) داخل یک جعبه جسمی به جرم m و به فاصله‌ی L از یک انتهای آن قرار دارد. جعبه همراه با جسم درون آن با سرعت v به سمت فنری در حرکت است. انتهای آزاد فنر را قبل از برخورد جعبه با آن مبدأ مختصات می‌گیریم. بعد از برخورد جعبه با فنر و بازگشت آن، جسم برای نخستین بار در نقطه‌ای به مختصه‌ی x، با انتهای جعبه برخورد خواهد کرد. با چشم‌پوشی از کلیه‌ی اصطکاک‌ها کدام گزینه درست است؟

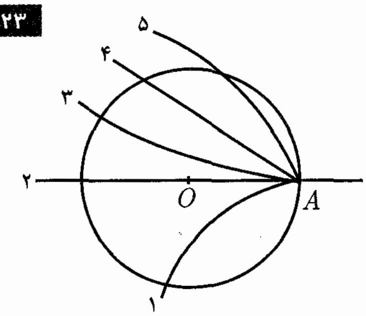


شکل ۲-۱۶۳

الف) $x = \frac{L}{۲}$ ب) $x > \frac{L}{۲}$ ج) $x = \frac{L}{۲}$

«مرحله‌ی اول دهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۵»

۲۳ بر روی یک میز ساکن افقی، تپانچه‌ای مطابق شکل (۲ـ۱۶۴) در یک مسیر دایره‌ای به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند. جهت لوله‌ی تپانچه همواره به سمت مرکز دایره است و دوران آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. در لحظه‌ای که تپانچه از نقطه‌ی A می‌گذرد، گلوله‌ای از آن شلیک می‌شود. کدام یک از مسیرهای مشخص شده در شکل می‌تواند مسیر حرکت گلوله بعد از شلیک باشد؟

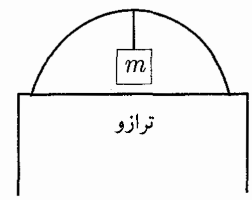


شکل ۲-۱۶۴

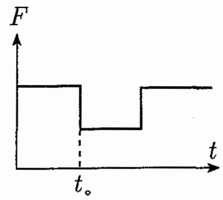
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

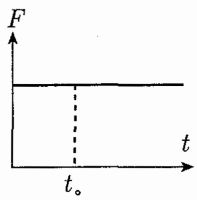
«مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۸»

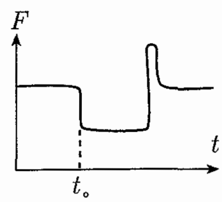
۲۴ وزنه‌ی m مطابق شکل (۲ـ۱۶۵) از سقف یک ظرف شیشه‌ای که روی یک ترازو قرار گرفته آویزان است. در لحظه‌ی $t = t_0$ نخ نگه دارنده‌ی وزنه پاره می‌شود. ترازو نیروی F را نشان می‌دهد. کدامیک از نمودارهای زیر، به‌طور کیفی نشان دهنده‌ی تغییرات نیروی F بر حسب زمان است؟

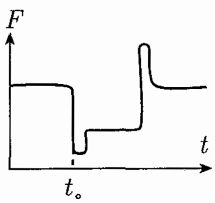


شکل ۲-۱۶۵

الف) 

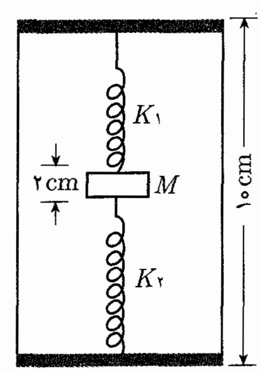
ب) 

ج) 

د) 

«مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۷»

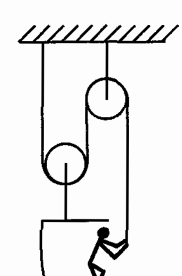
۲۵ دو فنر ایده‌آل بسیار سبک، ثابت‌های $k_1 = 20\,\mathrm{N/m}$ و $k_2 = 12\,\mathrm{N/m}$ دارند و طول عادی هر کدام ۵cm است. جسم M به جرم ۴۰gr و ضخامت ۲cm را مطابق شکل (۲ـ۱۶۶) میان دو فنر قرار می‌دهیم و آنها را به‌طور قائم در جعبه‌ای به طول ۱۰cm می‌گذاریم، به‌طوری که قاعده‌ی A بالا قرار گیرد. اگر جعبه را برگردانیم تا قاعده‌ی A در پایین قرار گیرد، جسم M چند میلی‌متر نسبت به قاعده‌ی A جابه‌جا خواهد شد؟



شکل ۲-۱۶۶

«مرحله‌ی اول یازدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۵»

۲۶ یک کارگر ساختمانی به وزن W برای بالا رفتن از ساختمانی، ابزاری مطابق شکل (۲ـ۱۶۷) به کار می‌برد. او حداقل با چه نیرویی باید طناب را به پایین بکشد تا بتواند خود را بالا ببرد؟ از جرم نخ و قرقره‌ها صرف‌نظر کنید.

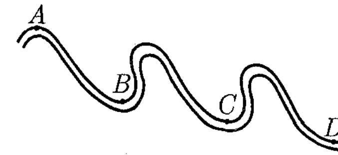

شکل ۲-۱۶۷

الف) W ب) $\frac{W}{2}$

ج) $\frac{W}{3}$ د) $\frac{W}{4}$

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۷»

۲۷ اتومبیلی روی یک مسیر افقی مارپیچی، که در شکل (۲ـ۱۶۸) نشان داده شده است، حرکت می‌کند. اندازه‌ی سرعت اتومبیل ثابت است. شتاب اتومبیل در کدامیک از نقاط زیر بیشترین



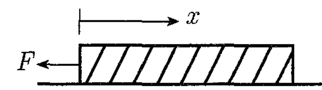
شکل ۲-۱۶۸

مقدار است؟

الف) A ب) B ج) C د) D

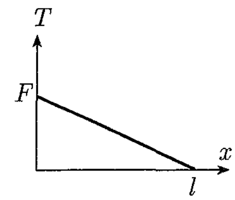
«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۱»

۲۸ مطابق شکل (۲ـ۱۶۹) ریسمانی همگن به طول l و جرم m روی سطحی افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. به یک سر آن نیرویی به اندازه‌ی F $(F > \mu mg)$ وارد می‌کنیم. نمودار نیروی کشش نخ بر حسب x کدامیک از شکل‌های زیر است؟

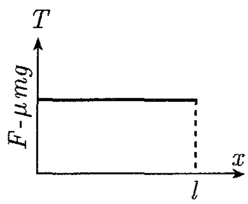


شکل ۲-۱۶۹

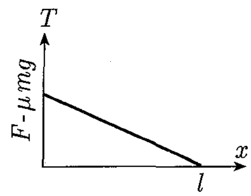
الف)



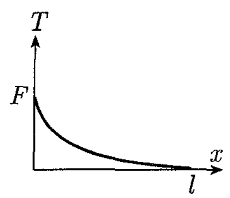
ب)



ج)



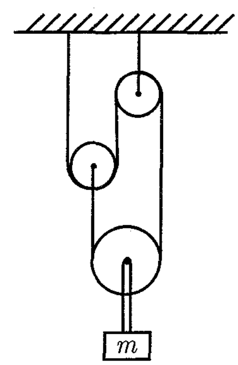
د)



«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۴»

۲۹ در شکل (۲ـ۱۷۰) از وزن قرقره‌ها و نخ چشم بپوشید. در این صورت جرم m با چه شتابی سقوط می‌کند؟

الف) $\frac{g}{۲}$ ب) $\frac{g}{۳}$ ج) $\frac{g}{۴}$ د) g



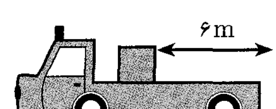
شکل ۲-۱۷۰

«مرحله‌ی اول دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۵»

۳۰ مطابق شکل (۲ـ۱۷۱) جعبه‌ای روکف یک تریلی و در فاصله‌ی ۶ متری از عقب آن قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه وکف تریلی ۰٫۳ و ضریب اصطکاک جنبشی آن ۰٫۱۵ است. تریلی با سرعت ۳m/s در یک جاده‌ی افقی مستقیم حرکت می‌کند.

الف) بیشترین شتاب تریلی بدون آنکه جعبه بلغزد چقدر است؟

ب) اگر تریلی به مدت ۲s با شتاب تند کننده‌ی $۴\text{m/s}^۲$ حرکت کند، و پس از آن سرعت تریلی ثابت بماند، با چه سرعتی نسبت به زمین، تریلی را ترک می‌کند؟

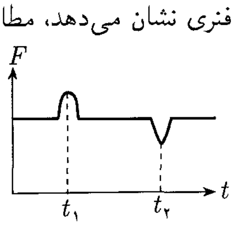


شکل ۲-۱۷۱

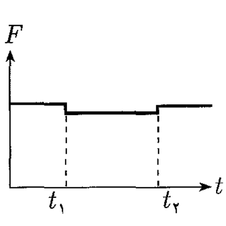
«مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۴»

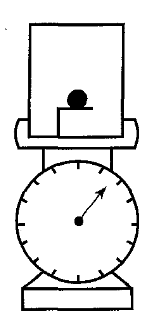
۳۱ مطابق شکل (۲ـ۱۷۲)، گلوله‌ای در لحظه‌ی $t_۱$ به سمت بالا شلیک می‌شود. ارتفاع محفظه از ارتفاع گلوله کمتر است به‌طوری که گلوله در لحظه‌ی $t_۲$ به سقف محفظه برخورد می‌کند. نیرویی که ترازوی فنری نشان می‌دهد، مطابق کدام نمودار است؟

الف)

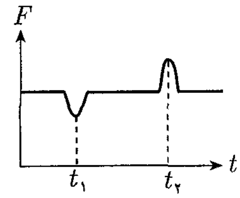


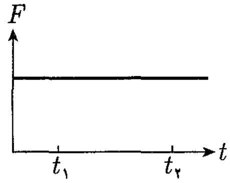
ب)





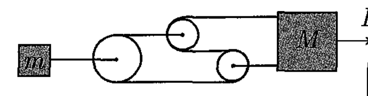
شکل ۲-۱۷۲

ج) 

د) 

«مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۰»

۳۲ جرم‌های m و M مطابق شکل (۲ـ۱۷۳) روی سطح افقی قرار دارند. از اصطکاک اجسام با سطح افقی و جرم قرقره‌ها و نخ‌ها چشم‌پوشی کنید. جرم M با نیروی افقی F کشیده می‌شود. اندازه‌ی شتاب نسبی دو جسم m و M چقدر است؟



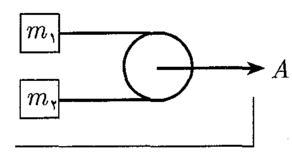
شکل ۲-۱۷۳

الف) $\frac{F}{M}-\frac{F}{3m}$ ب) $\frac{F}{m}-\frac{F}{M}$ ج) $\frac{F}{M}$

د) صفر ه) $\frac{F}{M+m}-\frac{F}{3m+M}$

«مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۵»

۳۳ جرم‌های m_1 و m_2 مطابق شکل (۲ـ۱۷۴) روی سطح افقی قرار دارند. از جرم قرقره، نخ و اصطکاک m_1 و m_2 با سطح افق چشم‌پوشی کنید. قرقره با شتاب A کشیده می‌شود. شتاب جسم m_1 چقدر است؟



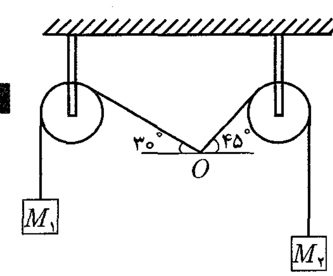
شکل ۲-۱۷۴

الف) $\frac{2Am_2}{m_1+m_2}$ ب) $\frac{2Am_1}{m_1+m_2}$

ج) $\frac{2A(m_1-m_2)}{m_1+m_2}$ د) A

«مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۶»

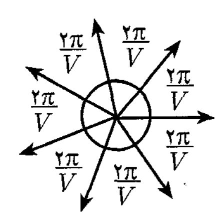
۳۴ در شکل (۲ـ۱۷۵) ریسمان را در نقطه‌ی O نگه داشته‌ایم. وزن M_1 برابر ۱۰ نیوتون و وزن M_2 برابر ۲۰ نیوتون است. اندازه‌ی نیرویی که در نقطه‌ی O به ریسمان وارد کرده‌ایم تا دستگاه در حالت تعادل بماند، چند نیوتون است؟ (از جرم ریسمان و اصطکاک قرقره‌ها چشم بپوشید.)



شکل ۲-۱۷۵

«مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۵»

۳۵ مطابق شکل (۲ـ۱۷۶) جسمی به جرم ۲kg تحت تأثیر هفت نیروی مساوی که در یک صفحه واقعند، در حالت تعادل قرار دارد. اندازه‌ی هر یک از نیروها ۱۰N است. اگر نیروی F_1 را ناگهان حذف کنیم، اندازه‌ی شتاب جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟



شکل ۲-۱۷۶

الف) $10\cos(\frac{2\pi}{7})$ ب) $10\cos(\frac{4\pi}{7})$

ج) $10\sin(\frac{4\pi}{7})$ د) صفر

«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

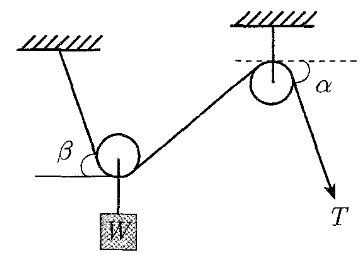
۳۶ شخصی به جرم $m = 60\,\mathrm{kg}$ روی یک باسکول ایستاده است. این شخص سر یک فنر بدون جرمی را در دست دارد که سر دیگر آن به کف باسکول بسته شده است. ثابت فنر $1000\,\mathrm{N/m}$ است. اگر این شخص فنر را در راستای قائم نگه دارد و آن را طوری بکشد که طول آن ۲۰cm

افزایش یابد، باسکول چند نیوتون را نشان می‌دهد؟

الف) ۴۰۰ ب) ۶۰۰ ج) ۸۰۰

«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۶»

۳۷ در شکل (۲ـ۱۷۷) قرقره‌ها سبک‌اند و اتلاف اصطکاکی‌شان ناچیز است. مجموعه در میدان گرانشی زمین است. نیروی کششی T چنان است که دستگاه در حال تعادل باشد. رابطه‌ی T با دو زاویه‌ی α و β چگونه است؟



شکل ۲-۱۷۷

الف) T نسبت به β نزولی است و به α بستگی ندارد.

ب) T نسبت به β و α هر دو صعودی است.

ج) T نسبت به β صعودی و نسبت به α نزولی است.

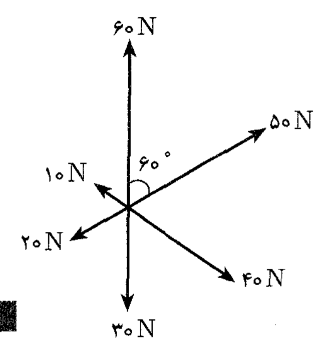
د) T نسبت به β نزولی و نسبت به α صعودی است.

هـ) T نسبت به β نزولی و به α بستگی ندارد.

و) T نسبت به β و α هر دو نزولی است.

«مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۲»

۳۸ به جسمی به جرم ۴kg مطابق شکل (۲ـ۱۷۸) شش نیروکه در یک صفحه‌ی افقی قرار دارند وارد می‌شوند. زاویه‌ی میان هر نیرو با دو نیروی مجاور ۶۰° است. بزرگی و جهت شتاب جسم چیست؟



شکل ۲-۱۷۸

الف) $۱۲/۵\,\mathrm{m/s^2}$ و در جهت نیروی ۵۰ نیوتونی

ب) $۱۵\,\mathrm{m/s^2}$ و در جهت نیروی ۵۰ نیوتونی

ج) $۱۵\,\mathrm{m/s^2}$ و در جهت نیروی ۶۰ نیوتونی

د) $۱۲/۵\,\mathrm{m/s^2}$ و در جهت نیروی ۶۰ نیوتونی

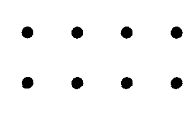
«مرحله اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳»

۳۹ یک گلوله در هوا سقوط می‌کند. نیروی مقامت هوا بر این گلوله با مجذور شعاع آن و مجذور سرعت آن متناسب است. سرعت حد گلوله سرعتی است که در آن حرکت گلوله یکنواخت (با سرعت ثابت) می‌ماند. برای گلوله‌های همگن از یک جنس، سرعت حد گلوله با چه توانی از شعاع آن متناسب است؟

الف) صفر ب) ۰/۵ ج) ۱ د) ۲

«مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۳»

۴۰ نواری به پهنای W و طول L از یک ماده‌ی کشسان را در نظر بگیرید. وقتی این نوار را در راستای طولی می‌کشیم، طول آن زیاد و پهنای آن کم می‌شود. افزایش طول را Δx، کاهش عرض را Δy، و نیروی کشش را F می‌نامیم. برای تغییر طول‌های کم، Δx و Δy با F متناسب‌اند. $P_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\dfrac{L}{W}$ را نسبت پواسون و $Y_s = \dfrac{F}{W}\dfrac{L}{\Delta x}$ را مدول یانگ سطحی می‌نامیم.


شکل ۲-۱۷۹

مطابق شکل (۲ـ۱۷۹) برای نوار این مدول را در نظر می‌گیریم. در حالت تعادل، یک شبکه‌ی مربعی منتظم داریم که روی هر رأس آن یک اتم قرار دارد. روی هر ضلع هر مربع فنری باثابت فنر k است، که اتم‌های دو رأس آن ضلع را به هم وصل می‌کند. روی هر قطر هر مربع هم یک فنر با ثابت k' است، که اتم‌های دو سر آن قطر را به هم وصل می‌کند. طول ضلع هر مربع در حالت تعادل l است. فرض کنید نوار را در راستای طول با نیروی F بکشیم (نیروی F به‌طور

یکنواخت در عرض نوار توزیع شده است). در اثر این کار، مربع‌ها به مستطیل تبدیل می‌شود. طول هر مستطیل را $l + a$ و عرض هر مستطیل را $l - b$ بگیرید.

الف) طول قطر مستطیل در این حالت چقدر است؟

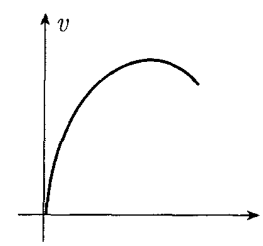
(**راهنمایی:** اگر ϵ خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد، آنگاه $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$ است.) فرض کنید a و b خیلی کوچک‌تر از l باشد. در به‌دست آوردن طول جدید از جمله‌های درجه‌ی ۲ نسبت به a و b چشم بپوشید. یکی از اتم‌های لبه‌ی طولی (لبه‌ای که نیرو به آن وارد نمی‌شود) را در نظر بگیرید. از تغییر زاویه‌ی قطر هر مستطیل با طول و عرض آن چشم بپوشید.

ب) نسبت $\frac{a}{b}$ را چنان تعیین کنید که اتم در حالت تعادل باشد. از اینجا P_s را به‌دست آورید.

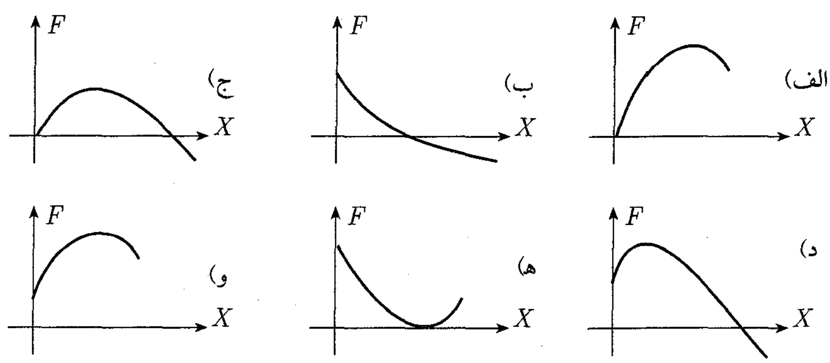
ج) یکی از اتم‌های لبه‌ی عرضی را در نظر بگیرید و با استفاده از شرط تعادل آن، نسبت $\frac{a}{b}$ را حساب کنید و از اینجا Y_s را به‌دست آورید.

«مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۲»

۴۱ نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک مطابق شکل (۲ـ۱۸۰) است. نمودار نیروی وارد بر متحرک بر حسب مکان کدام است؟



شکل ۲-۱۸۰



«مرحله اول شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۹»

۴۲ در شکل (۲ـ۱۸۱)، کتابی با نیروی افقی F_1 ساکن می‌ماند، بانیروی افقی F_2 در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد، و با نیروی افقی F_3 با سرعت ثابت به طرف پایین می‌آید. نیروی اصطکاک در این سه حالت به ترتیب f_1، f_2 و f_3 است. کدام گزینه درست است؟

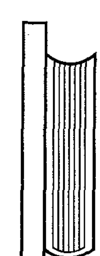
الف) $F_1 = F_2 = F_3$ و $f_1 = f_2 = f_3$

ب) $F_1 < F_2 < F_3$ و $f_2 > f_1 > f_3$

ج) $F_1 < F_2 < F_3$ و $f_1 = f_3 < f_2$

د) $F_3 < F_1 < F_2$ و $f_3 < f_1 = f_2$

ه) $F_1 > F_2$, $F_3 > F_2$ و $f_3 = f_2 = f_1$



شکل ۲-۱۸۱

«مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۹»

۴۳ ستونی از یک ماده به‌طور عمودی روی زمین گذارده شده است. این ستون به خاطر وزن خودش فشرده می‌شود. فاصله‌ی هر نقطه از این ستون تا سطح زمین در حالت فشرده نشده را با x نشان

می‌دهیم. فاصله‌ی همین نقطه تا سطح زمین در حالت فشرده شده را با $z(x)$ نشان می‌دهیم. ستون را می‌شود به شکل N فنر متوالی در نظر گرفت، که طول فشرده نشده‌ی هر یک $\Delta x = \frac{L}{N}$، و ثابت فنر هر یک Nk است. L طول ستون است در حالی که فشرده نشده باشد. هر چه N بزرگ‌تر باشد، این مدل به واقعیت نزدیک‌تر می‌شود.

الف) نیروی کششی یکی از فنرها را بر حسب Δx (طول فنر در حالت عادی) و Δz (طول فنر در حالت فشرده شده) به‌دست آورید.

ب) N را به سمت بی‌نهایت میل دهید و کشش در نقطه‌ی x را به‌دست آورید.

فرض کنید چگالی طولی ستون یکنواخت است، یعنی وزن بخشی از ستون به طول کشیده نشده‌ی D برابر است با Dw، که w ثابت است.

ج) شرط تعادل را برای قسمتی از ستون که بالای نقطه‌ی x است بنویسید، و z را بر حسب x به‌دست آورید.

د) تغییر طول فنر را در اثر فشردگی حساب کنید.

هـ) به جای ستون، فنر بدون جرم قائمی با ثابت k را در نظر بگیرید، که روی آن باری به وزن wL (وزن ستون قبلی) گذاشته‌اند. تغییر طول این فنر در اثر این بار چقدر است؟

«مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۳»

۴۴ جسمی به جرم 1kg روی سطحی افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی $0/8$ و ضریب اصطکاک جنبشی $0/5$ است. در مرحله‌ی اول، از زمان $t = 0\text{s}$ تا $t = 20\text{s}$، نیروی متغیر F به جسم وارد می‌شود و داریم $F = \alpha t$، که در آن $\alpha = 0/5\text{N/s}$ است. در مرحله‌ی دوم، نیرویی با اندازه‌ی ثابت یک نیوتون در همان جهت نیروی اول وارد می‌شود. $(g = 10\text{m/s}^2)$

الف) نمودار نیروی اصطکاک بر حسب زمان، و نمودار شتاب جسم بر حسب زمان را تا پایان مرحله‌ی اول بکشید.

ب) با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر با تغییر سرعت متحرک است، سرعت جسم در پایان مرحله‌ی اول حرکت چقدر است؟

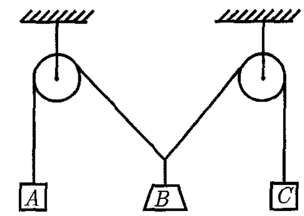
«مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴»

۴۵ مطابق شکل (۲ـ۱۸۲)، یک سیستم با دو قرقره‌ی ثابت و سه وزنه‌ی آویزان در حال تعادل است. جرم دو وزنه‌ی A و B یکسان است. نخ‌ها سبک‌اند و اصطکاک قرقره‌ها با محورشان قابل چشم‌پوشی است. اگر وزنه‌ی C را به طرف پایین بکشیم و سپس رها کنیم، چه رخ می‌دهد؟

الف) وزنه‌ی C در همان وضعیت می‌ماند.

ب) وزنه‌ی C شروع به حرکت به سمت بالا می‌کند.

ج) وزنه‌ی C شروع به حرکت به سمت پایین می‌کند. «مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱»

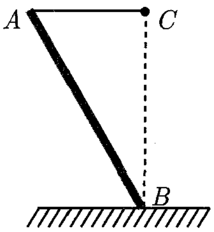


شکل ۲-۱۸۲

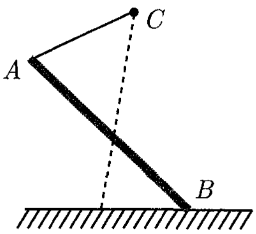
۴۶ میله‌ی AB از سر A توسط نخی با جرم ناچیز به نقطه‌ی C وصل شده است. سر B ی میله روی سطحی با اصطکاک ناچیز قرار دارد و سیستم در حال تعادل است. با توجه به اینکه شرط لازم برای تعادل یک جسم، صفر بودن برآیند نیروهای خارجی وارد بر آن است، کدام‌یک از گزینه‌های

زیر، شکل صحیح حالت تعادل را نشان می‌دهد؟

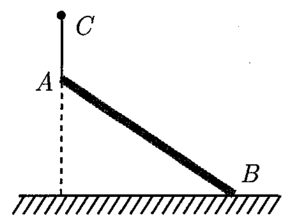
الف)



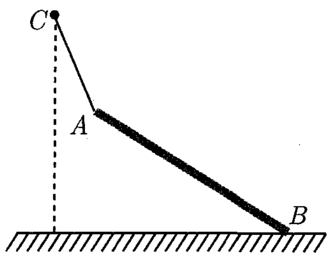
ب)



ج)

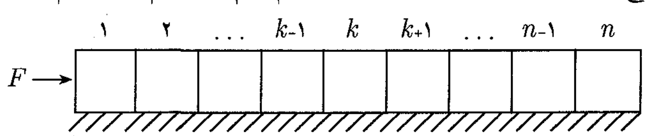


د)



«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۰»

۴۷ مطابق شکل (۲ـ۱۸۳)، n جسم با جرم‌های یکسان m روی سطحی افقی قرار دارند. به جسم ۱ نیروی افقی ثابت F وارد می‌شود و سیستم با شتاب شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جسم iام با سطح μ_i است. نیروی وارد از طرف جسم kام به جسم $k+۱$ام چقدر است؟



شکل ۲-۱۸۳

الف) $$F_k = \frac{۱}{n}\left[(n-k)F - mg\left(\sum_{i=۱}^{k} n\mu_i - \sum_{i=۱}^{n} k\mu_i\right)\right]$$

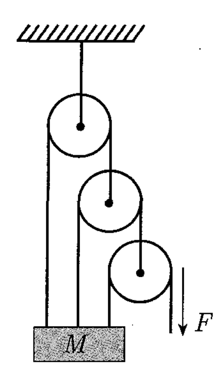
ب) $$F_k = \frac{۱}{n}\left[(n-k)F - mg\left(\sum_{i=۱}^{n} n\mu_i - \sum_{i=۱}^{k} k\mu_i\right)\right]$$

ج) $$F_k = \frac{۱}{n}\left[(n-k)F - mg\sum_{i=۱}^{n} \mu_i\right]$$

د) $$F_k = \frac{۱}{n}\left[(n-k)F - mg\sum_{i=۱}^{k} \mu_i\right]$$

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۰»

۴۸ جرم M در شکل (۲ـ۱۸۴) در حالت تعادل آویزان است. کشش نخ بالایی، T، چقدر است؟ (از جرم قرقره‌ها، نخ‌ها و نیز اصطکاک چشم‌پوشی کنید.)



شکل ۲-۱۸۴

الف) F ب) $\frac{۸}{۷}F$ ج) $\frac{۴}{۳}F$

د) $۴F$ ه) $۷F$ و) $۸F$

«مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۴»

۴۹ خودرویی به جرم $۱۰۰۰\,\text{kg}$ مجهز به دنده‌ی اتوماتیک است. هنگام حرکت خودرو در جاده‌ی افقی، دو نیروی پیش‌ران و مقاوم در راستای جاده بر آن اثر می‌کند. در زمان درگیری شدن دنده‌ی nام $(n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵)$ نسبت نیروی موتور به نیروی پیش‌ران خودرو n است. سرعت خودرو،

v، با αnb برابر است، که b تعداد دور موتور بر واحد زمان و α عدد ثابتی برابر $0/2\text{m}$ است. جعبه‌ی دنده طوری ساخته شده است که با افزایش سرعت خودرو، هرگاه $b = b_0$ شود، دنده‌ی n به دنده‌ی $n+1$ می‌رود. b_0 بیشترین تعداد دور موتور بر واحد زمان است و مقدار آن ۳۰۰۰ دور بر دقیقه است. نیروی مقاوم در برابر حرکت این خودرو مقدار ثابت 2000N است. هنگامی که $b < b_0$ باشد، حداکثر نیروی موتور 12000N است.

الف) حداکثر سرعت این خودرو در سطح افقی ($v_{\max}$) چقدر است؟

ب) در حالت الف، نیروی موتور چقدر است؟

ج) برای رکوردگیری، راننده با فشردن پدال گاز، موتور را با حداکثر نیرو به کار می‌اندازد. زمان رسیدن خودرو از حالت سکون به سرعت 100km/h چقدر است؟

«مرحله‌ی دوم هفدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۴»

۵۰ جسمی از یک فنر عمودی آویزان است و حول نقطه‌ی تعادلش نوسان می‌کند. هنگامی که جسم به بالاترین نقطه‌ی حرکتش می‌رسد، تکه‌ای از آن بدون تأثیر بر بقیه‌ی جسم، از آن جدا می‌شود. اندازه‌ی شتاب کل جسم درست پیش از لحظه‌ی جدا شدن را a_1 و اندازه‌ی شتاب باقیمانده‌ی جسم درست بعد از لحظه‌ی جدا شدن را a_2 می‌نامیم. در این صورت:

الف) حتماً $a_1 > a_2$

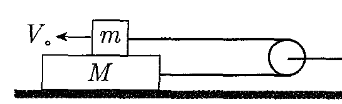
ب) حتماً $a_1 < a_2$

ج) حتماً $a_1 = a_2$

د) حالت‌هایی است که $a_1 > a_2$، حالت‌هایی است که $a_1 < a_2$ و حالت‌هایی هست که $a_1 = a_2$.

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۳»

۵۱ مطابق شکل (۲ـ۱۸۵) جسمی به جرم m را روی جسم دیگری به جرم M $(M > m)$ می‌کشیم. هنگامی که سرعت m برابر V_0 شد، آن را رها می‌کنیم. اندازه‌ی شتاب m، درست پس از رها شدن چقدر خواهد شد؟ ضریب اصطکاک بین جسم‌ها μ است. (اصطکاک بین M و زمین، جرم نخ، جرم قرقره، و اصطکاک نخ و قرقره ناچیز است.)

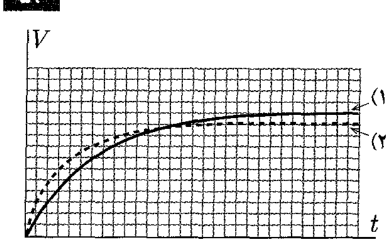


شکل ۲-۱۸۵

الف) $\frac{2\mu mg}{M+m}$ ب) μg ج) ۰ د) $\frac{\mu mg}{M+m}$

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۷»

۵۲ به جسمی که با سرعت کوچک v درون مایعی حرکت می‌کند، نیروی مقاومی برابر با kv و در جهت عکس حرکت آن وارد می‌شود. ضریب k به اندازه و شکل جسم و نوع مایع بستگی دارد. دو جسم ۱ و ۲ با جرم‌های m_1 و m_2 را درون مایعی می‌گذاریم و با نیروهای ثابت F_1 و F_2 می‌کشیم (از نیروی وزن صرف‌نظر کنید). ضریب k برای این دو جسم به ترتیب k_1 و k_2 است. این دو جسم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کنند و نمودار سرعت ـ زمان آن به شکل (۲ـ۱۸۶) است. اگر $\frac{m_2}{m_1} = 2$ باشد، $\frac{k_2}{k_1}$ چقدر است؟



شکل ۲-۱۸۶

«مرحله اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۸»

۵۳ یک مکعب به جرم M روی یک سطح افقی است. یک جسم به جرم m روی این مکعب است. ضریب اصطکاک بین مکعب و سطح افقی μ_1، و ضریب اصطکاک بین دو جسم μ_2 است.

مکعب و جسم ساکن‌اند. با اعمال یک نیروی افقی به جسم بالایی، این جسم شروع به حرکت می‌کند. کدام گزینه درست است؟

الف) مکعب در هیچ حالتی حرکت نمی‌کند.

ب) اگر $\mu_1 < \mu_2$ باشد، مکعب حتماً حرکت می‌کند.

ج) اگر $\mu_1 < \mu_2$ باشد، و m از حد معینی بیش‌تر باشد، مکعب حرکت می‌کند. اگر m از آن حد بیشتر نباشد، مکعب حرکت نمی‌کند.

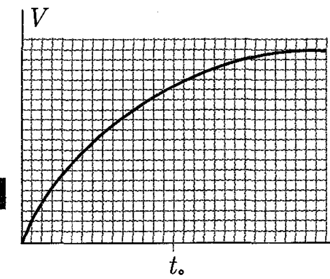
د) اگر $\mu_1 < \mu_2$ باشد، و m از حد معینی کمتر باشد، مکعب حرکت می‌کند. اگر m از آن حد کمتر نباشد، مکعب حرکت نمی‌کند.

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۹»

۵۴ یک توپ فلزی به جرم $۰/۴\text{kg}$ در جو سقوط می‌کند. منحنی سرعت آن بر حسب زمان به صورت شکل (۲ـ۱۸۷) است. در $t = t_0$ نیروی اصطکاک هوای وارد بر توپ چقدر است؟

الف) ۱N ب) ۲N ج) ۳N د) ۴N

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۴»

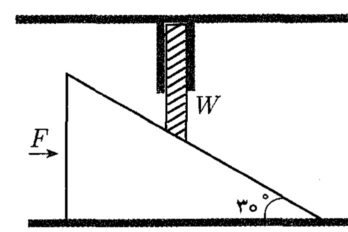


شکل ۲-۱۸۷

۵۵ مطابق شکل (۲ـ۱۸۸) وزنه‌ای به وزن W داخل غلافی قرار دارد و امکان جابجایی افقی ندارد. انتهای این وزنه روی سطح شیبداری قرار دارد. زاویه‌ی این سطح شیبدار ۳۰ درجه است. اصطکاک سطح شیبدار با سطح زیر آن و نیز اصطکاک وزنه با غلاف و سطح شیبدار قابل چشم‌پوشی است. نیروی F به صورت افقی به سطح شیبدار وارد می‌شود. $\frac{F}{W}$ چقدر باشد تا سطح شیبدار ثابت بماند؟

الف) ۲ ب) $\sqrt{3}$ ج) ۱ د) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ هـ) $\frac{1}{2}$

«مرحله‌ی اول هجدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۵»



شکل ۲-۱۸۸

۵۶ یک جسم روی یک سطح افقی است (و به آن نچسبیده است). سطح افقی در راستای قائم حرکت می‌کند و معادله‌ی حرکت آن $y = A\cos\omega t$ است، که y ارتفاع و t زمان است و A و ω ثابت‌اند. نیروی مقاومت هوای وارد بر این جسم $-mb\frac{dy}{dt}$ است، که m جرم جسم و b مقداری ثابت است. شتاب گرانش g است. A حداکثر چقدر باشد تا جسم از سطح جدا نشود؟

الف) $\frac{g}{\omega\sqrt{b^2+\omega^2}}$ ب) $\frac{g}{\omega^2}$ ج) $\frac{g}{\omega(b+\omega)}$ د) $\frac{g}{\omega b}$

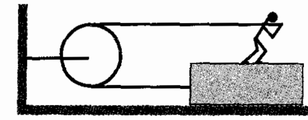
«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۶»

۵۷ یک گاری و یک جعبه روی آن، روی یک سطح افقی ساکن‌اند. در زمان صفر گاری به حرکت درمی‌آید و از زمان صفر تا T با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در زمان T گاری ساکن می‌شود و از آن پس ساکن می‌ماند. جعبه‌ی روی گاری در زمان t متوقف می‌شود. فرض کنید فقط گاری و زمین به جعبه نیرو وارد می‌کنند و جعبه از گاری بیرون نمی‌افتد. کدام گزینه درست است؟

الف) $t > 2T$ ب) $t = 2T$

ج) $t < 2T$ د) مواردی هست که $t = 2T$، و مواردی هست که $t < 2T$ باشد.

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۳»

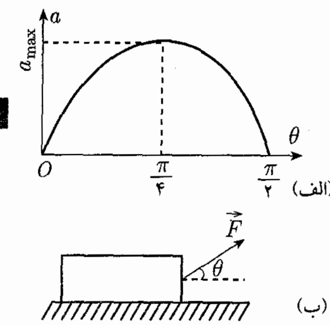


شکل ۲-۱۸۹

۵۸ فردی به جرم m روی جسمی به جرم 1m ایستاده است (شکل ۲ـ۱۸۹). اصطکاک بین جسم و زمین را ناچیز بگیرید. ضریب اصطکاک بین پای این فرد و جسم μ است. فرض کنید همواره حداقل یکی از پاهای او روی جسم است. او حداکثر با چه شتابی نسبت به زمین می‌تواند حرکت کند؟ (g شتاب گرانش زمین است.)

الف) μg ب) $2\mu g$ ج) $3\mu g$ د) $4\mu g$

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۷»

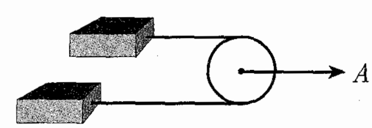


شکل ۲-۱۹۰

۵۹ شکل (۲ـ۱۹۰) جعبه‌ای را نشان می‌دهد که با نیروی $\vec{F}$ روی سطح افقی اصطکاک‌داری کشیده می‌شود. اندازه‌ی $\vec{F}$ را ثابت نگه می‌داریم ولی جهت آن را تغییر می‌دهیم. شتاب جعبه تغییر می‌کند. نمودار شتاب جعبه بر حسب θ رسم شده است. $a_{\max}$ چقدر است؟ (g شتاب گرانش زمین است.)

الف) g ب) $\sqrt{2}g$ ج) $(\sqrt{2}-1)g$ د) $(\sqrt{2}+1)g$

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۸»



شکل ۲-۱۹۱

۶۰ دو جرم m_1 و m_2 ($m_2 > m_1$) مطابق شکل (۲ـ۱۹۱) توسط نخی که از روی قرقره‌ای گذشته است به هم وصل شده‌اند. مطابق شکل (۲ـ۱۹۱) قرقره و جرم‌ها روی یک سطح افقی هستند و مرکز قرقره با شتاب A کشیده می‌شود. شتاب m_1 نسبت به زمین a_1 و شتاب m_2 نسبت به زمین a_2 می‌شود. از اصطکاک بین جرم‌ها و زمین، بین نخ و قرقره و همچنین جرم نخ چشم‌پوشی کنید. کدام گزینه راجع به شتاب جرم‌ها درست است؟

الف) $a_1 > A > a_2$ ب) $a_1 < A < a_2$

ج) $a_1 = A = a_2$ د) $a_1 > a_2 > A$

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۹»

۶۱ دو فنر جرم‌دار یکسان داریم. طول کشیده نشده‌ی هر یک از آنها 12cm است. وقتی یکی از فنرها را از نقطه‌ی ثابت می‌آویزیم، طولش 15cm می‌شود. اگر دو فنر را به هم وصل کنیم و سپس از نقطه‌ی ثابتی بیاویزیم، طول فنر مرکب حاصل چند سانتی‌متر است؟

(**راهنمایی:** کشیدگی یک فنر جرم‌دار آویزان به جرم m، برابر است با کشیدگی یک فنر بی‌جرم آویزان که به انتهای آن جسمی به جرم $\frac{m}{2}$ بسته شده است.)

«مرحله‌ی اول نوزدهمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۳»

۶۲ یک جسم به جرم m روی یک خط راست حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک وارد بر این جسم $(-m\alpha v)$ است، که v سرعت جسم و α یک ثابت است. سرعت جسم در زمان صفر را با v_i و سرعت جسم در زمان t را با v_f نمایش می‌دهیم. برای tهای کوچک، یک تقریب خوب برای بررسی حرکت این جسم آن است که شتاب آن را ثابت و برابر میانگین شتاب در زمان صفر و در زمان t بگیریم. با این تقریب، کدام گزینه درست است؟

الف) $v_f = v_i(1-\alpha t)$ ب) $v_f = v_i\frac{1}{1+\alpha t}$ ج) $v_f = v_i\frac{1-(\frac{\alpha t}{2})}{1+(\frac{\alpha t}{2})}$

د) $v_f = v_i\sqrt{1 - 2\alpha t}$ ه) $v_f = v_i\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha t}}$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک - سؤال ۸»

۶۳ در حرکت اجسام درون شاره‌ها، در وضعیت‌های خاصی $\vec{v}$ (بردار سرعت) برابر است با $\alpha\vec{F}$، که $\vec{F}$ بردار نیرو و α یک ثابت است. فرض کنید این وضعیت برقرار است و $\vec{F}$ در هر نقطه در راستای بردار مکان آن نقطه (نسبت به یک مبدأ ثابت) است. کدام گزینه درست است؟

الف) حرکت این جسم حتماً روی یک خط راست است. این خط ممکن است از مبدأ بگذرد یا نگذرد.

ب) حرکت این جسم حتماً روی یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد.

ج) حرکت این جسم حتماً روی یک دایره به مرکز مبدأ است.

د) هم حرکت دایره‌ای و هم حرکت روی خط راست برای این جسم ممکن است.

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک - سؤال ۱۰»

۶۴ یک جسم به جرم m روی یک سطح افقی است. این جسم از طریق یک ریسمان به یک دیوار متصل است. به این ریسمان در نقطه‌ی A یک نیروی قائم F رو به بالا وارد می‌شود. بخشی از ریسمان که بین A و دیوار است افقی است، و بخشی دیگر که بین A و جسم است با راستای قائم زاویه‌ی θ می‌سازد. از سطح افقی به جسم یک نیروی عمود بر سطح وارد می‌شود، که آن را با N نشان می‌دهیم. فرض کنید جسم روی سطح می‌ماند. شتاب گرانش g است. N چقدر است؟

الف) $mg - F\cos^2\theta$ ب) $mg - F\cos\theta$ ج) $mg - F$

د) $mg - \dfrac{F}{\cos\theta}$ ه) $mg - \dfrac{F}{\cos^2\theta}$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک - سؤال ۱۴»

۶۵ یک آدم به جرم M به یک طناب وصل است. طناب از روی قرقره ثابتی گذشته و به یک وزنه به جرم m وصل است. این آدم نقطه‌ای از طناب بین قرقره و وزنه را با نیروی T به‌طور قائم به طرف پایین می‌کشد. شتاب گرانش g است. T چقدر باشد تا آدم با شتاب a بالا برود؟

الف) $\dfrac{M(a+g) + m(a-g)}{2}$ ب) $M(a+g) + m(a-g)$

ج) $M(a+g)$ د) $(M+m)(a+g)$

ه) $\dfrac{(M+m)(a+g)}{2}$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک - سؤال ۱۶»

۶۶ حرکت یک نوار نقاله به این صورت است که نوار به مدت T_1 ساکن است، به مدت T_2 با سرعت v حرکت می‌کند، و این روند تکرار می‌شود. نوار افقی است. روی این نوار یک جسم هست که تنها نیروی افقی‌ای که به آن وارد می‌شود نیروی اصطکاک با نوار است. جسم و نقاله از حالت سکون شروع به حرکت می‌کنند. دیده می‌شود پس از زمان طولانی، سرعت این جسم نسبت به زمین یک تابع دوره‌ای از زمان می‌شود و در این وضعیت، این سرعت هرگز صفر نمی‌شود. بیشینه این سرعت را v می‌نامیم. کدام گزینه درست است؟

الف) $T_2 \leq T_1\ ,\ V < v$ ب) $T_2 \geq T_1\ ,\ V < v$

ج) $T_2 \le T_1 \,,\; V = v$ د) $T_2 \ge T_1 \,,\; V = v$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۲»

۶۷ وقتی می‌خواهیم سیمی را با قیچی ببریم، می‌بینیم سیم اول روی تیغه‌های قیچی سُر می‌خورد و وقتی زاویه‌ی بین تیغه‌های قیچی θ شود متوقف می‌شود. از گرانش صرف‌نظر کنید. ضریب اصطکاک ایستایی بین تیغه و سیم چقدر است؟

الف) $\tan\theta$ ب) $\cot\theta$ ج) $\tan\frac{\theta}{2}$ د) $\cot\frac{\theta}{2}$

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۶»

۶۸ یک جسم روی یک دایره حرکت می‌کند. اندازه‌ی نیروی وارد بر جسم را با F، و جهت آن را با n نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

الف) همیشه F ثابت است و n به طرف مرکز دایره است.

ب) همیشه F ثابت است، اما مواردی هست که n به طرف مرکز دایره نیست.

ج) همیشه n به طرف مرکز دایره است، اما مواردی هست که F ثابت نیست.

د) مواردی هست که F ثابت نیست و مواردی هست که n به طرف مرکز دایره نیست.

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۲»

۶۹ یک جسم روی یک سطح افقی ساکن است. محورهای x، y و z را عمود بر هم می‌گیریم، چنان که محور z قائم است. این جسم با سطح اصطکاک دارد. یک نیروی غیرصفر به اندازه‌ی F_1 در راستای محور x به جسم وارد می‌شود و دیده می‌شود جسم روی سطح ساکن می‌ماند. وقتی علاوه بر این نیرو یک نیرو با اندازه‌ی F_2 در راستای محور y هم به جسم وارد می‌شود، جسم به حرکت درمی‌آید. در این صورت:

الف) حرکت جسم در راستای محور y است.

ب) حرکت جسم در راستای محور x است.

ج) حرکت جسم نه در راستای محور x است و نه در راستای محور y.

د) مواردی هست که حرکت جسم در راستای مخور x است، مواردی هست که حرکت جسم در راستای محور y است، و مواردی هست که حرکت جسم نه در راستای محور x است و نه در راستای محور y .

«مرحله‌ی اول بیستمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۶»

۷۰ یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی و در میدان گرانشی زمین حرکت می‌کند. اندازه‌ی میدان الکتریکی ثابت است، اما جهت آن ممکن است رو به بالا یا رو به پایین باشد. اندازه‌ی نیروی الکتریکی وارد بر ذره تقسیم بر جرم آن a_0، و شتاب گرانش زمین g است. a_0 کوچک‌تر از g است.

یک ذره با سرعت اولیه‌ای با اندازه‌ی v_0 و زاویه‌ی θ نسبت به افق، در زمان صفر از زمین به بالا پرتاب می‌شود. نیروی الکتریکی وارد بر ذره، از زمان صفر تا t_0 رو به پایین و پس از آن رو به بالاست.

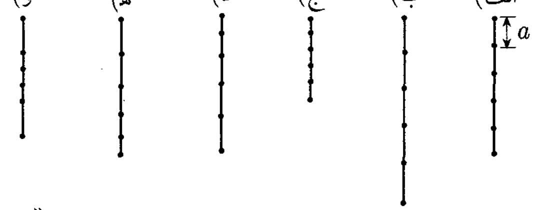
الف) شرط این را به‌دست آورید که تغییر جهت میدان الکتریکی پیش از زمانی باشد که ذره به زمین می‌رسد.

ب) با فرض این‌که شرط (الف) برقرار است، برد این ذره (فاصله نقطه فرود تا نقطه پرتاب) را حساب کنید.

ج) با فرض این‌که شرط (الف) برقرار است، ارتفاع اوج این پرتابه را حساب کنید.

«مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۸»

۷۱ مهره‌های یکسانی به جرم m در فواصل مساوی a روی یک کش بسیار سبک دوخته شده‌اند. در ابتدا و انتهای کش نیز دو مهره قرار گرفته است. اگر کش را از یکی از مهره‌های انتهایی آویزان کنیم، شکل حالت تعادل کدام است؟



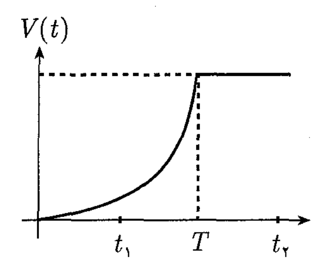
«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد ـ سؤال ۸»

۷۲ خودرویی در لحظه‌ی $t = 0$ از حالت سکون روی مسیری مستقیم شروع به حرکت می‌کند. اندازه‌ی سرعت خودرو به صورتی که در نمودار مشخص شده تغییر می‌کند. در بازه‌ی $0 \leq t \leq T$ سرعت به شکل $v(t) = bt^2$ است که در آن b ثابت است. در کف خودرو جعبه‌ای قرار دارد که تا لحظه‌ی t_1 نسبت به خودرو ساکن است. جعبه در لحظه‌ی t_1 شروع به سُر خوردن می‌کند، و در لحظه‌ی t_2 در خودرو ساکن می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی جعبه با کف خودرو چقدر است؟

الف) $\frac{b}{g}(t_2 + t_1)$ ب) $\frac{b(T^2 - t_1^2)}{g(t_2 - t_1)}$

ج) $\frac{b}{g}(t_2 - t_1)$ د) $\frac{b}{g}(T + t_1)$

ه) $\frac{b}{g}(T - t_1)$ و) $\frac{b(t_2^2 - t_1^2)}{g(t_2 - T)}$



شکل ۲-۱۹۲

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۱۴»

۷۳ یک جسم در هوا سقوط می‌کند. به خاطر مقاومت هوا، پس از مدتی سرعت این جسم ثابت می‌شود. به این سرعت ثابت سرعت حد می‌گویند. فرض کنید سرعت حد برای دو قرص نازک به شعاع‌های R_1 و R_2، به ترتیب v_1 و v_2 است. سقوط این قرص‌ها چنان است که همیشه صفحه قرص افقی می‌ماند. دو قرص را به هم می‌چسبانیم، چنان که مرکز و صفحه‌ی دو قرص یکسان شود. دیده می‌شود برای سقوط این قرص چنان که صفحه‌ی آن همیشه افقی بماند، سرعت حد v است. با فرض $R_1 < R_2$، کدام گزینه درست است؟

الف) حتماً $v > v_2$، و حالت‌هایی هست که $v < v_1$

ب) حتماً $v > v_2$ و $v > v_1$

ج) حتماً v بین v_1 و v_2 است.

د) حتماً $v < v_2$، و حالت‌هایی هست که $v > v_1$

ه) حتماً $v < v_2$ و $v < v_1$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۶»

۷۴ کش سبک ۱ به یک قلاب ثابت وصل است. از سر دیگر آن جرم m آویزان است. از سر دیگر

جرم m هم کش سبک ۲ آویزان است. شتاب گرانش g است. کش ۲ را با نیروی $T_۲$ به سوی پایین می‌کشیم، چنان که جرم m با شتاب a به سوی پایین حرکت کند. در این حالت کشش کش ۱ برابر $T_۱$ می‌شود. کدام گزینه درست است؟

الف) $T_۱ < T_۲$

ب) $T_۱ = T_۲$

ج) $T_۱ > T_۲$

د) مواردی هست که $T_۱ < T_۲$ و مواردی هست که $T_۱ > T_۲$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۶»

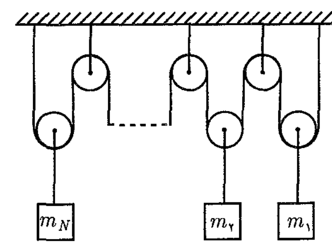
۷۵ مطابق شکل (۲ـ۱۹۳)، $(N-۱)$ قرقره ثابت به سقف بسته شده است. N قرقره‌ی متحرک داریم که به آنها جرم‌های $m_۱$، $m_۲$، ... و m_N بسته شده است. M با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{۱}{M} = \frac{۱}{m_۱} + \frac{۱}{m_۲} + \cdots + \frac{۱}{m_N}$$

از جرم قرقره‌ها و نخ چشم‌پوشی کنید.

کشش نخی که از همه‌ی قرقره‌ها می‌گذرد چقدر است؟

الف) NMg ب) $\frac{۱}{۲}NMg$ ج) $۲NMg$ د) Mg



شکل ۲-۱۹۳

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۷»

۷۶ جسمی روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، چنان که جابه‌جایی افقی آن مقدار ثابت d است. زمان این حرکت به زاویه‌ی سطح شیبدار با افق بستگی دارد. کمترین مقدار این زمان چقدر است؟

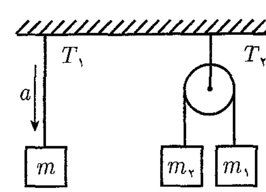
الف) $۲\sqrt{\frac{d}{g}}$ ب) $\sqrt{\frac{d}{g}}$ ج) $\sqrt{\frac{۲d}{g}}$ د) $\sqrt{\frac{d}{۲g}}$

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۹»

۷۷ در دستگاهی که در شکل کشیده شده است از جرم قرقره‌ها و نخ‌ها چشم بپوشید. سقف با شتاب a پایین می‌آید. m چقدر باشد تا $T_۱ = T_۲$ باشد؟

الف) $m_۱ + m_۲$ ب) $(m_۱ + m_۲)(\frac{g-a}{g})$

ج) $\frac{۴m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}$ د) $\frac{۴m_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}(\frac{g-a}{g})$



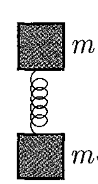
شکل ۲-۱۹۴

«مرحله‌ی اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴۱»

۷۸ جسم $m_۲$ به کمک فنری از جسم $m_۱$ آویزان است و جسم $m_۱$ را نگه داشته‌ایم. جسم $m_۱$ را رها می‌کنیم. بلافاصله پس از رها شدن اندازه شتاب جسم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را به ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ می‌گیریم. کدام گزینه در مورد $a_۱$ و $a_۲$ درست است؟ g شتاب گرانش است.

الف) $a_۲ = a_۱ = g$ ب) $a_۲ = a_۱ < g$

ج) $a_۲ = ۰$ و $a_۱ > g$ د) $a_۲ = ۰$ و $a_۱ < g$



شکل ۲-۱۹۵

«مرحله اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۹»

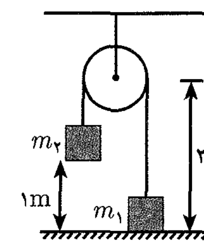
۷۹ سطح آینه‌ای با افق زاویه θ می‌سازد. در زمان $t = 0$، گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 و با زاویه ϕ نسبت به سطح آینه پرتاب می‌شود. مسیر حرکت در صفحه عمود بر تقاطع آینه و سطح افق است. در چه زمانی فاصله گلوله از تصویرش در آینه، بیشترین مقدار است؟

الف) $\dfrac{v_0 \sin(\phi+\theta)}{g\cos\theta}$ ب) $\dfrac{v_0 \sin\phi}{g\cos\theta}$ ج) $\dfrac{v_0 \sin\phi}{g\cos(2\theta)}$ د) $\dfrac{v_0 \sin(2\phi)}{2g\cos(\phi+\theta)}$

«مرحله اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۲»

۸۰ دو وزنه کوچک به جرم‌های $m_1 = 2\text{kg}$ و $m_2 = 3\text{kg}$ به دو سر نخی بسته شده‌اند و نخ از بالای قرقره بدون اصطکاکی مطابق شکل (۲ـ۱۹۶)، عبور داده شده است. هنگامی که وزنه m_1 روی زمین است، نخ کاملاً کشیده شده و وزنه m_2 را در ارتفاع 1m نگه می‌داریم. وزنه m_2 را رها می‌کنیم. وزنه m_1 تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

الف) $1/0\,\text{m}$ ب) $1/2\,\text{m}$ ج) $1/5\,\text{m}$ د) $1/7\,\text{m}$



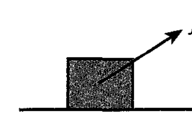
شکل ۲-۱۹۶

«مرحله اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۷»

۸۱ جسمی به جرم m روی یک سطح افقی ساکن است و با نیروی F آن را می‌کشیم. ضریب اصطکاک بین سطح افقی و جسم μ_s است.

کمترین اندازه نیرویی که جسم را در آستانه حرکت قرار می‌دهد چقدر است؟ شتاب گرانش را g بگیرید.

الف) $\dfrac{\mu_s mg}{1+\mu_s}$ ب) $\mu_s mg$ ج) $\dfrac{\mu_s mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$ د) $\dfrac{mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$

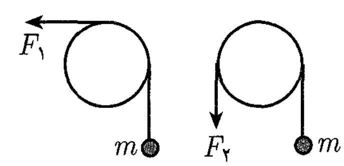


شکل ۲-۱۹۷

«مرحله اول بیست و یکمین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۱»

۸۲ مطابق شکل به یک سر نخی که از روی قطعه چوبی به شکل یک استوانه رد شده وزنه m آویخته و به سر دیگر نخ نیروی F_1 وارد شده است به طوری که وزنه در حالت تعادل و در آستانه بالا آمدن است. نخ با چوب اصطکاک دارد به طوری که $F_1 - mg = f_1$. فرض کنید نخ را $90°$ دیگر روی چوب می‌اندازیم، به طوری که نیروی F_2 در راستای قائم و رو به پایین قرار گیرد. در این حالت $F_2 - mg = f_2$ و جسم در آستانه بالا آمدن است. نسبت $\dfrac{f_2}{f_1}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) بیش از ۲

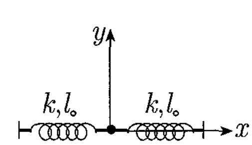


شکل ۲-۱۹۸

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲»

۸۳ مطابق شکل، جسمی به دو فنر مشابه با ثابت k و طول آزاد l_0 متصل است. طرف دوم هر یک از فنرها به دیوارهای ثابت متصل است. فاصله دو دیواره $2l_0$ است. این مجموعه در صفحه xy افقی است. جسم را در امتداد محور y به اندازه a جابه‌جا می‌کنیم، طوری که a بسیار کوچک‌تر از l_0 است ($a \ll l_0$). اندازه برآیند نیروی وارد بر جسم کدام است؟ (**راهنمایی** اگر $|\epsilon|$ خیلی کوچک‌تر از ۱ باشد، داریم: $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

الف) ka ب) $\dfrac{k}{l_0}a^2$ ج) $\dfrac{k}{l_0^2}a^3$ د) $\dfrac{k}{l_0^3}a^4$



شکل ۲-۱۹۹

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۴»

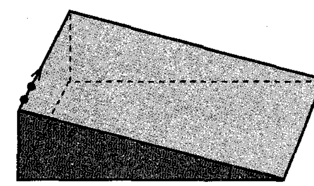
۸۴ جسمی از حال سکون روی یک سطح شیب‌دار به طرف پایین حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک

بین جسم و سطح شیب‌دار μ است. زاویه سطح θ است. $\tan 2\theta$ چقدر باشد تا جسم فاصله افقی d را در کوتاه‌ترین زمان طی کند؟

الف) $-\frac{1}{\mu}$ ب) $-\frac{1}{2\mu}$ ج) μ د) -2μ

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۵»

۸۵ دو ذره مشابه را کنار هم روی سطح شیب‌داری با شیب θ و ارتفاع h قرار داده‌ایم. ذره ۱ را رها می‌کنیم و هم‌زمان ذره ۲ را با سرعت اولیه افقی v_0، مطابق شکل (۲ـ۲۰۰) پرتاب می‌کنیم. ضریب اصطکاک بین این ذرات و سطح شیب‌دار μ، ($\mu < \tan\theta$)، بگیرید. کدام گزینه در مورد زمان رسیدن این دو ذره به پایین سطح شیب‌دار درست است؟



شکل ۲ـ۲۰۰

الف) ذره‌ی ۱ حتماً زودتر می‌رسد.

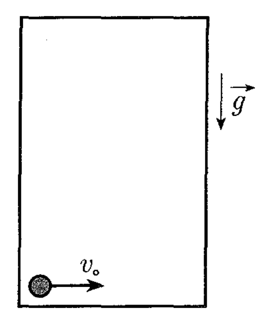
ب) ذره‌ی ۲ حتماً زودتر می‌رسد.

ج) دو ذره حتماً هم‌زمان می‌رسند.

د) در صورتی که $v_0 < \sqrt{2gh}$ باشد (g شتاب گرانش است) ذره‌ی ۱، و در غیر این صورت ذره‌ی ۲ حتماً زودتر می‌رسد.

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۱»

۸۶ آسانسوری با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. جسم کوچکی با سرعت اولیه v_0 روی کف آسانسور به حرکت درمی‌آید. به علت اصطکاک، این جسم پس از پیمودن مسافتی می‌ایستد. اگر شتاب آسانسور رو به پایین باشد، جسم پس از پیمودن مسافت s_1 می‌ایستد، و اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد و همین آزمایش را تکرار کنیم، جسم پس از پیمودن مسافت s_2 می‌ایستد. کدام گزینه مقدار a را نشان می‌دهد؟ (g شتاب گرانش و μ ضریب اصطکاک است.)



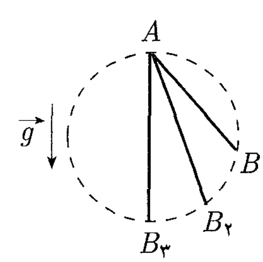
شکل ۲ـ۲۰۱

الف) $a = g\left(\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}\right)$ ب) $a = \mu g\left(\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}\right)$

ج) $a = g\left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\right)$ د) $a = \mu g\left(\frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\right)$

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۲۷»

۸۷ سه میله باریک AB_1، AB_2 و AB_3 را مطابق شکل (۲ـ۲۰۲) در نظر بگیرید. نقاط A، B_1، B_2 و B_3 روی یک دایره قائم هستند و A بالاترین نقطه دایره است. سه مهره، مثل مهره‌های تسبیح، هم‌زمان از نقطه A روی این سه میله شروع به سُر خوردن می‌کنند. اصطکاکی در کار نیست. این سه مهره در زمان‌های T_1، T_2 و T_3 به نقاط B_1، B_2 و B_3 می‌رسند. کدام گزینه درست است؟

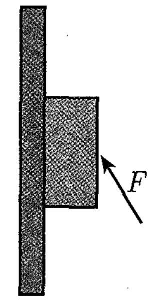


شکل ۲ـ۲۰۲

الف) $T_3 < T_2 < T_1$ ب) $T_1 = T_2 = T_3$ ج) $T_1 < T_2 < T_3$

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ سؤال ۳۰»

۸۸ کتابی به جرم $2\,\mathrm{kg}$ را با نیروی F به دیوار قائمی فشار می‌دهیم به طوری که کتاب نه به پایین و نه به بالا بلغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین کتاب و دیوار ۰٫۷۵ و شتاب گرانش $10\,\mathrm{m/s^2}$



شکل ۲-۲۰۳

است. کمترین مقدار نیروی F چند نیوتون است؟

«مرحله اول بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ مسأله ۶»

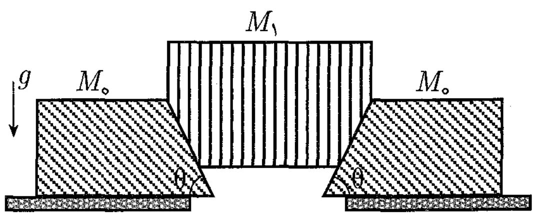
۸۹ حلقه‌ای به جرم ۰٫۲kg دور یک استوانه به جرم ۱٫۰kg است. اصطکاک جنبشی بین این حلقه و استوانه ۱N است. استوانه چنان قرار گرفته که محور آن قائم است و فاصله قاعده پایینی آن تا سطح زمین ۱٫۸m است. در حالی که حلقه و استوانه نسبت به هم ساکن‌اند، مجموعه را رها می‌کنیم. استوانه با همان سرعتی که به زمین می‌رسد به سمت بالا برمی‌گردد. بعد از برخورد استوانه با زمین، حلقه شروع به سُر خوردن روی استوانه می‌کند. بعد از چند ثانیه حلقه نسبت به استوانه ساکن می‌شود؟ ($g = ۱۰\,\mathrm{m/s^۲}$)

۹۰ دو جرم مشابه $M_۰$ مطابق شکل (۲ـ۲۰۴) روی دو سطح افقی قرار دارند. فرض کنید که این جرم‌ها از سطح بلند نمی‌شوند. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی آنها با سطح افقی را μ بگیرید. جرم $M_۱$ را روی آن‌ها قرار می‌دهیم. اصطکاک بین $M_۰$ و $M_۱$ قابل چشم‌پوشی است.

الف) اگر $M_۱$ با شتاب a پایین بیاید، اندازه شتاب جرم‌های $M_۰$ چقدر است؟

ب) با μ و $M_۰$ معین، به ازای مقادیر مختلف θ، چه شرطی روی $M_۱$ باشد تا دستگاه ساکن بماند؟

ج) فرض کنید جرم $M_۱$ حرکت کند. شتاب آن را به‌دست آورید.

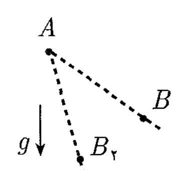


«مرحله دوم بیست و سومین المپیاد فیزیک ـ مسئله‌ی ۲»

شکل ۲-۲۰۴

سؤالات دوره تابستانی

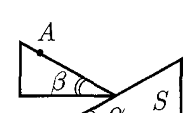
۹۱ ذره‌ای را در نقطه‌ی A در میدان گرانش در نظر بگیرید. سطح شیبداری با اصطکاک ناچیز که شیب آن را به دلخواه می‌توان تغییر داد در اختیار داریم. در زمان $t = ۰$ ذره را از نقطه‌ی A رها می‌کنیم. در زمان $t = T$ ذره به نقطه‌ی $B_۱$ می‌رسد. اگر شیب سطح شیبدار مقدار دیگری بود، ذره به نقطه‌ی $B_۲$ می‌رسید.



شکل ۲-۲۰۵

الف) اگر با تغییر شیب سطح شیبدار نقاط $B_۳$، $B_۴$ و ...را به‌دست آوریم، این نقاط روی چه منحنی قرار دارند؟

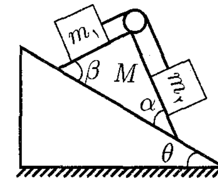
ب) سطح شیبدار s را مطابق شکل (۲ـ۲۰۶) در نظر بگیرید. ذره را روی سطح شیبدار دیگری که اصطکاک آن ناچیز است و از نقطه‌ی A می‌گذرد قرار می‌دهیم. زاویه‌ی شیب، β را به گونه‌ای تعیین کنید که زمان رسیدن ذره به سطح شیبدار s کوتاه‌ترین مقدار باشد.



شکل ۲-۲۰۶

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۷ ـ مسئله‌ی ۳»

۹۲ در شکل (۲ـ۲۰۷) سطح شیبدار با زاویه‌ی شیب θ ثابت است. گوه‌ای به جرم M و زوایای α و β مطابق شکل روی سطح شیبدار قرار دارد و جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ به وسیله‌ی قرقره‌ای به یکدیگر



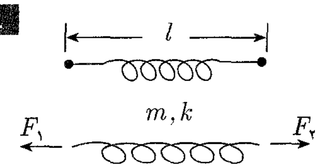
شکل ۲-۲۰۷

متصلند. معادلاتی را بنویسید که با استفاده از آنها بتوان شتاب‌های m_1 و m_2 و گوه (M) را به‌دست آورد. (حل معادلات لازم نیست.) تمام سطوح بدون اصطکاک است.

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۸ ـ مسئله‌ی ۱»

۹۳ محور یک استوانه‌ی چوبی به شعاع R در جهت $\hat{z}$ است. یک طناب را به‌طور مارپیچ حول استوانه پیچیده‌ایم طوری که محور $\hat{z}$ در هر نقطه با مماس بر طناب زاویه‌ی ثابت α می‌سازد. با در نظر گرفتن اینکه ضریب اصطکاک ایستایی میان استوانه و طناب μ باشد، وقتی یک طرف طناب را می‌کشیم و طناب در آستانه‌ی لغزیدن قرار می‌گیرد، کشش در طناب را بر حسب z پیدا کنید.

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۸ ـ مسئله‌ی ۲»



شکل ۲-۲۰۸

۹۴ فنری به جرم m، ثابت k و طول اولیه‌ی l داریم. این فنر از دو طرف با نیروهای F_1 و F_2 کشیده می‌شود. $(F_2 > F_1)$

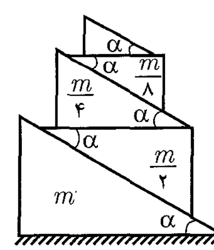
الف) مقدار کشیدگی فنر را به صورت تابعی از فاصله‌ی x به‌دست آورید. (فاصله‌ی x از سمتی که نیروی F_1 وارد شده در نظر گرفته می‌شود.)

ب) مقدار کشیدگی کل فنر چقدر است؟

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۸ ـ مسئله‌ی ۳»

۹۵ یک ذره با سرعت اولیه v_0 به سمت بالا پرتاب می‌شود. نیروی مقاومت هوای وارد بر این ذره $-m\alpha\vec{v}|\vec{v}|$ است. زمان رسیدن ذره به ارتفاع اوج، ارتفاع اوج و زمان برگشتن ذره به محل پرتاب را تا مرتبه‌ی یک نسبت به α به‌دست آورید.

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ ـ مسئله‌ی ۵»



شکل ۲-۲۰۹

۹۶ مطابق شکل (۲ـ۲۰۹)، سطح شیبداری به جرم m و زاویه‌ی α بر روی سطح افقی قرار گرفته، سطح شیبدار دیگری نیز به جرم $\frac{m}{2}$ و زاویه‌ی α به‌طور بر عکس روی آن قرار گرفته است. سطح شیبدار دیگری به جرم $\frac{m}{4}$ و زاویه‌ی α روی سطح قبلی و سطح دیگری به جرم $\frac{m}{8}$ و زاویه‌ی α روی آن قرار گرفته و همین طور تا بی‌نهایت ... .

فرض کنید در هیچ سطحی اصطکاک نداریم، می‌خواهیم شتاب سطح شیبدار پایینی (m) را بیابیم.

الف) معادلات حرکت لازم را برای دو سطح شیبدار پایینی بنویسید (در هر دو راستا).

می‌بینید که تعداد معادلات یکی کمتر از تعداد مجهولات است. بنابراین به یک معادله‌ی دیگر نیاز داریم.

ب) حال مجموعه‌ی سطوح شیبدار منهای دو سطح پایینی $(\frac{m}{2}, m)$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید این مجموعه با مجموعه‌ی کل سطوح شیبدار چه تفاوت‌هایی دارد؟ (چه پارامترهایی را باید تغییر دهیم تا به همان مجموعه‌ی کل سطوح شیبدار برسیم؟)

پ) با توجه به قسمت بالا یک معادله‌ی جدید بنویسید. (رابطه‌ای بین نیروی عکس‌العمل سطح بین زمین و m و نیروی عکس‌العمل سطح بین $\frac{m}{2}$ و $\frac{m}{4}$.)

ت) با معادلات قبلی و معادله‌ی جدیدی که به‌دست آوردید، شتاب سطح شیبدار پایینی (m) را بیابید.

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ ـ مسئله‌ی ۱»

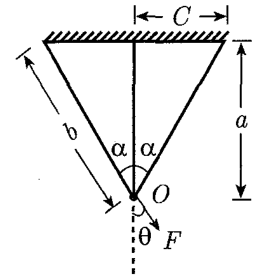
۹۷ الف) مطابق شکل (۲ـ۲۱۰)، دو میله را در نظر بگیرید. نیروی ثابت F با زاویه‌ی θ نسبت به خط عمود به نقطه‌ی اتصال دو میله وارد می‌شود. نیروی کشش دو میله را حساب کنید.

در تمام قسمت‌های مسئله از جرم میله‌ها صرف‌نظر کنید و فرض کنید تمام اتصال میله‌ها با دیوار و با یکدیگر لولاهای بدون اصطکاک است.

ب) میله‌ی دیگری مطابق شکل (۲ـ۲۱۰) به دستگاه اضافه می‌شود، به‌طوری که وقتی نیرویی به نقطه‌ی O وارد نشود، کشش هر سه میله صفر است. معادلات نیرو را برای دستگاه جدید بنویسید و نشان دهید که این معادلات برای به‌دست آوردن کشش سه میله کافی نیست.

پ) برای حل مسئله فرض می‌کنیم هر کدام از میله‌ها به مقدار بسیار کمی تغییر طول پیدا می‌کنند. ثابت کشسانی میله‌ی وسط k_1 و ثابت کشسانی دو میله‌ی دیگر k است. با فرض اینکه نقطه‌ی تماس O به اندازه‌ی کوچکی جابه‌جا شود، تغییر طول و در نتیجه کشش هر میله را بر حسب جابه‌جایی نقطه‌ی تماس سه میله به‌دست آورید. معادلات به‌دست آمده را به همراه معادلات قسمت (ب) حل کنید و کشش هر میله را بر حسب α، θ و $\eta = \dfrac{k_1}{k}$ به‌دست آورید.

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ ـ مسئله‌ی ۲»



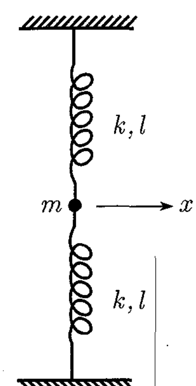
شکل ۲-۲۱۰

۹۸ ذره‌ای به جرم m بین دو فنر یکسان هر یک به ضریب k مطابق شکل (۲ـ۲۱۱) روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. فنرها در وضعیت نشان داده شده در شکل (۲ـ۲۱۱) در حالت آزاد هستند و طول آزاد هر فنر l است. جرم m را کمی از حالت تعادل در جهت محور x جابه‌جا می‌کنیم.

الف) نیروی وارد بر جرم m را به‌دست آورید و در حالت دامنه‌های کوچک نشان دهید که این نیرو به صورت $F \approx -hx^3$ است. مقدار h را بر حسب k و l تعیین کنید. دیمانسیون h را نیز به‌دست آورید.

ب) با استفاده از تحلیل ابعادی، زمان تناوب مربوط به این نیرو را تعیین کنید. توجه کنید که غیر از کمیت‌هایی که در نظر می‌گیرید، دامنه‌ی حرکت نیز مهم است.

«آزمون پنجم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ ـ مسئله‌ی ۱»



شکل ۲-۲۱۱

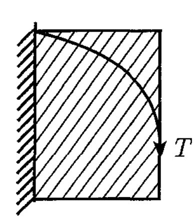
۹۹ قطعه‌ی سیمی که بر روی یک قطعه یخ قرار دارد، از یک سو به دیوار متصل است. حال از سوی دیگر با نیروی T سیم را به سمت پایین می‌کشیم. به مرور سیم در اثر فشار، یخ را ذوب می‌کند و در یخ فرو می‌رود و هر قسمت تا زمانی در یخ فرو می‌رود که فشار در آن قسمت از یک حد معینی بیشتر شود.

الف) فرض کنید به هر جزء از سیم مانند Δl نیروی عمود بر آن جزء و برابر $\lambda \Delta l$ وارد می‌شود (شکل ۲ـ۲۱۳). شکل تعادل سیم در نهایت به چه صورتی خواهد بود؟

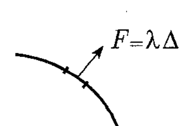
ب) فرض کنید سیم اصطکاکی با یخ نیز دارد که ضریب اصطکاک آن μ می‌باشد. در این حالت فرض کنید در تمام نقاط سیم می‌توان نوشت $F_f = \mu N$. حال معادله‌ی منحنی سیم را به‌دست آورید. (برای این منظور θ را به صورت تابعی از طول سیم، l، به‌دست آورید.)

پ) فرض کنید که یخ زمانی ذوب می‌شود که نیروی عمود بر سطح واحد طول سیم برابر $\lambda_{\max}$ باشد. در قسمت (الف) مقدار λ را بر حسب $\lambda_{\max}$ تخمین بزنید.

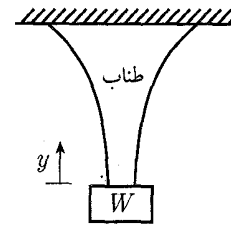
«آزمون نهایی دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۷۹ ـ مسئله‌ی ۴»



شکل ۲-۲۱۲



شکل ۲-۲۱۳



شکل ۲-۲۱۴

۱۰۰ طنابی داریم با سطح مقطع دایروی شکل که اندازه‌ی مساحت سطح مقطع آن تابعی از y می‌باشد. چگالی طناب یکنواخت و برابر ρ است. در هر مقطع از طناب پارامتر s به گونه‌ای تعریف می‌شود که داریم: $s = \dfrac{T}{A}$. که پارامترهای T (کشش طناب) و A (مساحت سطح مقطع) هر دو مربوط به آن محل می‌باشد. اگر مقدار s از مقدار حدی s_m بیشتر شود طناب پاره می‌شود. اگر وزنه‌ای به وزن W به انتهاب طناب آویزان باشد به گونه‌ای که $W = s_m A_\circ$، ($A_\circ = A(y=\circ)$) معادله‌ی $A(y)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که داشته باشیم: $s(y) = s_m$.

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۰ ـ مسئله‌ی ۲»

۱۰۱ معادله مسیر یک ذره در صفحه، $y = ax^n$ است. x و y مختصات دکارتی ذره و a و n دو ثابت هستند. $x(t)$ را طوری تعیین کنید تا نیروی وارد بر این ذره شعاعی باشد.

راهنمایی: $\ddot{x}(t)$ را بر حسب $\dot{x}(t)$ و $x(t)$ به‌دست آورید. سپس تابعی از $x(t)$ را در این معادله ضرب کنید تا معادله به‌صورت $\dfrac{d}{dt}(\cdots)$ درآید.

«آزمون پنجم دوره تابستانی سال ۱۳۸۰ ـ مسئله‌ی ۴»

۱۰۲ بر اساس یک افسانه علمی، گالیله برای این‌که نشان دهد سرعت سقوط اجسام به وزنشان بستگی ندارد، دو وزنه متفاوت را از بالای برج کج پیزا رها کرد و حاضران مشاهده کردند که این دو وزنه با هم به زمین می‌رسند. می‌خواهیم ببینیم این افسانه تا چه حد واقعی است.

گلوله‌ای با سرعت اولیه صفر از ارتفاع h رها می‌شود. نیروی مقاومت هوا برای این گلوله $m\alpha v^۲$ است، که در آن m جرم گلوله و v سرعت آن است. α کمیتی است که به جنس گلوله و اندازه آن بستگی دارد.

$$\alpha = \frac{\rho'}{\rho R}$$

در اینجا ρ' چگالی هوا، ρ چگالی گلوله و R اندازه گلوله ($\frac{۴}{۳}$ برابر شعاع گلوله) است.

الف) معادله دیفرانسیل حرکت گلوله را بنویسید و از روی آن $y(t)$ را تا مرتبه یک نسبت به α به‌دست آورید. y ارتفاع گلوله و t زمان است.

ب) زمان رسیدن گلوله به زمین در نبود مقاومت هوا را $T_\circ$ بنامید. همین زمان با وجود مقاومت هوا را T بنامید. $\dfrac{T - T_\circ}{T_\circ}$ را تا مرتبه یک نسبت به α به‌دست آورید.

ج) پس از زمان $T_\circ$، گلوله در نزدیکی زمین است. $H = y(t)$ را تا مرتبه یک نسبت به α به‌دست آورید.

ارتفاع برج پیزا تقریباً $۵۰\,\mathrm{m}$، چگالی هوا از مرتبه $۱\,\mathrm{kg/m^۳}$، چگالی سرب از مرتبه $۱۰^۴\,\mathrm{kg/m^۳}$ و چگالی چوب از مرتبه $۱۰^۳\,\mathrm{kg/m^۳}$ است.

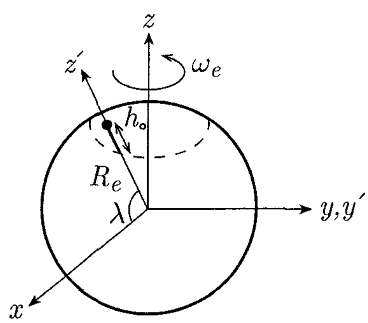
د) یک گلوله سربی به اندازه $۱۰\,\mathrm{cm}$ و یک گلوله سربی به اندازه $۵\,\mathrm{cm}$ را هم‌زمان از بالای برج پیزا رها می‌کنیم. (این کار با دست بسیار دشوار است، چون جرم گلوله بزرگ و نزدیک $۲۰\,\mathrm{kg}$ است!) اختلاف زمان رسیدن این دو گلوله به زمین چقدر است؟ فاصله دو گلوله از هم در نزدیکی زمین چقدر است؟

ه) یک گلوله سربی و یک گلوله چوبی را هم‌زمان از بالای برج پیزا رها می‌کنیم. اندازه هر دو

گلوله 10cm است. اختلاف زمان رسیدن دو گلوله به زمین چقدر است؟ فاصله دو گلوله از هم در نزدیکی زمین چقدر است؟

«آزمون نهایی دوره تابستانی سال ۱۳۸۰ ـ مسأله ۱»

۱۰۳ فرض کنید سرعت زاویه‌ای زمین به دور خودش ω_e و در امتداد z است. جسمی به جرم m از بالای برجی به ارتفاع $h_\circ$ در عرض جغرافیایی λ با سرعت اولیه‌ی $\overrightarrow{v_\circ}$ به سمت بالا (در امتداد z' مطابق شکل (۲ـ۲۱۵)) پرتاب می‌شود. (می‌دانیم در این حرکت کمیت $\vec{r}\times\vec{v}$ در کل حرکت ثابت است، که در آن $\vec{r}$ بردار فاصله از مرکز زمین است و $\vec{v}$ سرعت جسم در هر لحظه است.)



شکل ۲-۲۱۵

الف) با توجه به ثابت بودن کمیت $\vec{r}\times\vec{v}$ در طول حرکت جسم (یا هر روش دیگری که بلد هستید)، سرعت زاویه‌ای جسم را در لحظه‌ای که در ارتفاع h از سطح زمین است، به‌دست آورید. اگر $1 \gg \frac{h_\circ}{R_E}$ و $1 \gg \frac{h}{R_E}$ باشند، تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{h}{R_E}$، این سرعت زاویه‌ای را تعیین کنید. (R_E شعاع زمین است.)

ب) با فرض اینکه $1 \gg \frac{h}{R_E}$ است، یعنی برای حرکت در نزدیکی سطح زمین، معادله‌ی حرکت شعاعی جسم را نوشته و با صرف‌نظرکردن از جملات $r\dot{\theta}^2$ در مقابل $g_\circ$ زمین ($\frac{R_E W_E^2}{g_\circ} = 0{,}34\%$)، و با توجه به قسمت (الف)، زاویه‌ی θی دوران یافته در صفحه‌ی $y'z'$ را بر حسب زمان به‌دست آورید.

ج) با توجه به چرخش زمین، محل افتادن جسم روی سطح زمین چقدر از بالای برج فاصله دارد؟ فرض کنید سرعت اولیه‌ی پرتاب در این حالت نسبت به زمین صفر است یعنی جسم را رها کرده‌ایم.

د) اگر جسم را از سطح زمین ($h_\circ = 0$) با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ به سمت بالا پرتاب کرده باشیم، فاصله‌ی جسم موقع برگشت به سطح زمین از مبدأ پرتاب چقدر است؟

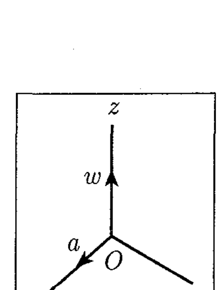
هـ) فرض کنید در ارتفاع $h_\circ$ جسم را با سرعت $v_\circ$ به سمت بالا پرتاب کنیم. به ازای چه مقدار از $v_\circ$، جسم درست از پای برج عبور خواهد کرد؟

و) اگر برج مورد نظر 100m ارتفاع داشته باشد، سرعت $v_\circ$ چقدر است؟

راهنمایی: در مختصات قطبی $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ و $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$، مقدار $g_\circ = 10\,\text{m/s}^2$ است.

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسئله‌ی ۳»

۱۰۴ صفحه‌ی بزرگی حول محور z که بر صفحه عمود است و از نقطه‌ی O می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. جسم کوچکی به جرم m را روی این سطح و در فاصله‌ی a از نقطه‌ی O قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک m با صفحه‌ی μ است. بردار مکان ذره را تا رتبه‌ی دوم μ به‌دست آورید. تا این رتبه جسم به مبدأ نزدیک می‌شود و یا از آن دور می‌شود؟



شکل ۲-۲۱۶

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسئله‌ی ۳»

۱۰۵ جسمی به جرم m روی سطحی که می‌توان از اصطکاکش چشم بپوشید، حرکت می‌کند. در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) معادله‌ی سطح به صورت $r = r(z)$ است. می‌دانیم شتاب در

دستگاه استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2})\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

الف) معادله‌ی حرکت جسم را به‌دست آورید. (تنها معادلات دیفرانسیل حرکت را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.)

ب) با ساده کردن معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده در قسمت (الف)، نشان دهید که معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\ddot{z}f_{1}(r,r',r'') + \dot{z}^{2}f_{2}(r,r',r'') = f_{3}(r,r',r'') \qquad (1)$$

که در آن $r' = \frac{dr}{dz}$ و $r'' = \frac{d^{2}r}{dz^{2}}$ است. توابع f_1، f_2 و f_3 را معین کنید.

ج) فرض کنید حرکت جسم نزدیک به یک دایره است. یعنی فرض کنید $z = z_{0} + \epsilon \sin \omega t$ است که در آن $z_{0} \gg \epsilon$. حال $r(z)$ را حول z_0 بسط تیلور دهید و $r(z)$ و $r'(z)$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به ϵ به‌دست آورید. با گذاشتن این مقادیر در معادله‌ی (۱) نشان دهید که

$$\omega^{2} = \Omega^{2} f_{4}(r_{0}, r'_{0}, r''_{0})$$

است که در آن $r_{0} = r(z_{0})$، $r'_{0} = r'(z_{0})$ و $r''_{0} = r''(z_{0})$ و $\Omega = \frac{J}{mr_{0}^{2}}$ است که در آن ($J = mr^{2}\dot{\theta} =$ ثابت) است. تابع f_4 را به‌دست آورید.

د) اگر $\omega^{2} < 0$ باشد، مدار ناپایدار است. نشان دهید این شرط به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{1}{r^{2}}\right)''_{0} < 0$$

که مشتق‌گیری نسبت به z است و در نقطه‌ی r_0 محاسبه می‌شود.

ه) کدام‌یک از سطوح زیر پایدار و کدام ناپایدار است.

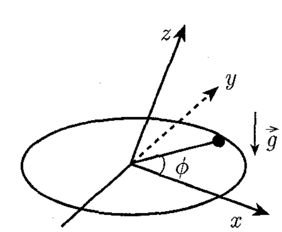
۱) $r = -\frac{k}{z}$ (k ثابت است)، ۲) $r^{2} - z^{2} = R^{2}$ (R ثابت است)

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۲ ـ مسئله‌ی ۳»

۱۰۶ میله‌ای به شکل دایره (به شعاع R) در نظر بگیرید. فرض کنید صفحه‌ی حلقه با صفحه‌ی افق زاویه α بسازد. این یعنی بردار عمود بر حلقه با راستای قائم زاویه α می‌سازد.

فرض کنید ذره مقید است که روی این حلقه حرکت کند. اصطکاک ناچیز است. دستگاه مختصه‌ها را این‌طور بگیرید: z عمود بر صفحه‌ی حلقه، به طرف بالا. مبدأ در مرکز حلقه. محور x طوری که شتاب گرانش، $\vec{g}$، در صفحه xz باشد، امتداد مثبت x از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر بگذرد. دستگاه xyz راستگرد است، یعنی $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$.

نیرویی را که حلقه بر ذره وارد می‌کند، به صورت تابعی از اندازه‌ی سرعت ذره، v، و زاویه‌ای که بردار مکان ذره با محور x می‌سازد، که آن را ϕ می‌نامیم، به‌دست آورید.



شکل ۲-۲۱۷

«آزمون دوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۵»

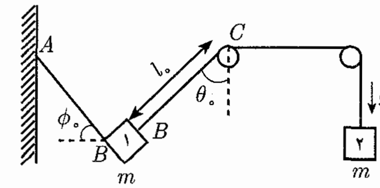
۱۰۷ دو جرم یکسان m توسط نخی که از دو طرف دو قرقره رد شده مطابق شکل (۲ـ۲۱۸) به هم وصل شده‌اند. جرم ۱ توسط نخی به دیوار وصل شده است. از جرم نخ‌ها، جرم قرقره‌ها و از اصطکاک قرقره‌ها صرف‌نظر کنید. نخ AB با افق زاویه‌ی ϕ_0 و نخ BC با محور قائم زاویه‌ی θ_0 می‌سازد.

الف) این سیستم در حال تعادل است. کشش در هر یک از نخ‌ها چقدر است؟

اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ_0 را بر حسب m و θ_0 به‌دست آورید.

ب) نخ AB را با قیچی می‌بُریم. شتاب جرم ۲ را درست پس از بریدن نخ به‌دست آورید.

ج) $\ddot{\theta}$ را درست پس از بریدن نخ به‌دست آورید. طول نخ BC در زمان بریدن نخ l_0 است.



شکل ۲-۲۱۸

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۳»

۱۰۸ مانند شکل (۲ـ۲۱۹)، $n+1$ جسم با جرم‌های یکسان m به n قرقره‌ی بی‌جرم و بدون اصطکاک آویزان هستند. شتاب گرانش را g بگیرید و کشش بالاترین نخ را $T = m\beta$ بنامید. جهت مثبت را رو به پایین بگیرید.

همچنین شتاب جرم kام را a_k و شتاب قرقره‌ی kام را b_k بنامید.

الف) کشش طناب kام ($1 \le k \le m$)، یعنی طنابی که به جسم kام متصل است را بر حسب β بیابید.

ب) شتاب جرم kام ($1 \le k \le n+1$) را بر حسب β و g به‌دست آورید.

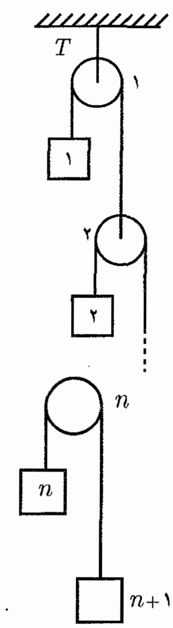
ج) به خاطر ثابت بودن طول طناب‌ها، قیدهایی روی شتاب جرم‌ها و قرقره‌ها وجود دارد. این قیدها را بنویسید. (یعنی رابطه‌ای بین a_k، b_k و b_{k+1} به‌دست آورید.)

د) با استفاده از روابط بالا، b_k را بر حسب b_1 به‌دست آورید.

هـ) کشش نخ بالایی (T) را به‌دست آورید. جوابتان را به ازای $n = 1$ بررسی کنید.

و) شتاب جسم kام چقدر است؟

ز) در حد nهای بسیار بزرگ، کشش نخ بالایی و شتاب جرم اول به چه عددهایی میل می‌کنند؟



شکل ۲-۲۱۹

«آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۵»

۱۰۹ دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 با فنری به ثابت k به هم وصل شده‌اند. طول کش‌نیامده‌ی فنر L است. مختصه‌ها را چنان می‌گیریم که محور x قائم، و جهت مثبت آن به طرف پایین باشد.

الف) قانون دوم نیوتون را برای این دو ذره (وقتی در حال سقوط‌اند) بنویسید. (حرکت یک‌بعدی است.)

ب) هر دو جسم ۱ و ۲ را با دست می‌گیریم، طوری که ذره‌ی ۱ در $x = 0$ و ذره‌ی ۲ در $x = L$ باشد. در لحظه‌ی ۰ هر دو را ول می‌کنیم. $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به دست آورید.

ج) جسم ۱ را در $x = 0$ با دست می‌گیریم، طوری که جسم ۲ آویزان باشد. در این حالت جسم ۱ و ۲ هر دو ساکن‌اند. در لحظه‌ی ۰ جسم ۱ را ول می‌کنیم که در نتیجه جسم ۱ و ۲ هر دو می‌افتند. مختصه‌های X و u را این طور تعریف می‌کنیم.

$$X = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$u = x_2 - x_1$$

معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر $X(t)$ و $u(t)$ را به‌دست آورید و کلی‌ترین حل آنها را بنویسید.

د) $x_1(t)$ و $x_2(t)$ (مربوط به قسمت ج) را به‌دست آورید.

ه) برای مقادیر زیر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را (با ضریب‌های عددی ساده شده) بنویسید و نمودار آن را بکشید.

$$m_1 = 1\text{kg}\ ,\ m_2 = 2\text{kg}\ ,\ k = 10^3\text{Nm}^{-1}\ ,\ L = 10^{-1}\text{m}$$

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۱»

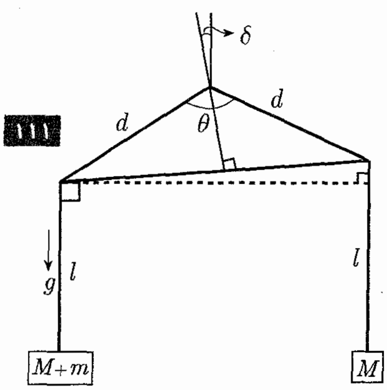
۱۱۰ دانه‌ی تسبیحی مقید است که روی مارپیچی حرکت کند. محور مارپیچ در راستای جاذبه‌ی زمین است و بردار مماس بر هر نقطه از مارپیچ همواره با صفحه‌ی عمود بر مارپیچ زاویه‌ی θ می‌سازد. تصویر این مارپیچ روی صفحه‌ای که بر محور مارپیچ عمود است، دایره‌ای به شعاع r است. ضریب اصطکاک بین دانه تسبیح و مارپیچ، ثابت و مساوی μ است. دانه‌ی تسبیح تحت اثر جاذبه سقوط می‌کند.

الف) اندازه‌ی شتاب دانه را به عنوان تابعی از سرعت آن و سایر پارامترهای مسئله بیابید.

ب) سرعت چقدر باشد تا اندازه‌ی آن در طول زمان تغییر نکند؟

«آزمون چهارم دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۴»

۱۱۱ با استفاده از یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس θ و طول ساق d، یک ترازوی دوکفه‌ای ساخته‌ایم. فرض کنید همه‌ی اجزای ترازو بدون جرم باشند. وزنه‌ها توسط نخ‌هایی به طول l از قلاب‌هایی که به مثلث ترازو وصل شده آویزان هستند. اگر وزنه‌ای به جرم M را در یک کفه و وزنه‌ای به جرم $M+m$ را در کفه‌ی دیگر قرار دهیم، ترازو در حالت شکل (۲ـ۲۲۰) به تعادل می‌رسد. m را بر حسب δ و M و پارامترهای مسئله به‌دست آورید.



شکل ۲-۲۲۰

«آزمون نهایی دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۱»

۱۱۲ حلقه‌ای به شعاع R، در آزمایشگاه لخت S با سرعت زاویه‌ای ω به دور محور قائم z می‌چرخد. مرکز حلقه ثابت است. مهره‌ای به جرم m مقید است که همواره روی حلقه باشد. اصطکاکی در کار نیست. در این مسئله می‌خواهیم با استفاده از قانون‌های نیوتن، دینامیک این حلقه را بررسی کنیم. مختصه‌های قطبی ـ کروی (r,θ,ϕ) را این‌طور تعریف می‌کنیم.

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

با محاسبه می‌توان نشان داد که بردارهای یکه در جهت خم‌های مختصاتی r، θ و ϕ عبارتند از:

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

الف) بردار سرعت را در مختصات قطبی ـ کروی بر حسب $\dot{r}$، $\dot{\theta}$، $\dot{\phi}$، $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ بنویسید.

ب) عبارتی را که به‌دست آورده‌اید، برای ذره‌ای که مقید است روی حلقه‌ی چرخان حرکت کند ساده کنید. (شعاع حلقه R و سرعت زاویه‌ای حلقه ω است. R و ω ثابت‌اند.)

ج) با مشتق‌گیری از این عبارت، عبارتی برای شتاب مهره بر حسب R، ω، θ، $\hat{r}$، $\hat{\theta}$، $\hat{\phi}$، $\dot{r}$، $\dot{\theta}$، $\ddot{\theta}$ و $\ddot{r}$ به‌دست آورید.

د) نیروی وزن را بر حسب θ، $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ بنویسید.

هـ) نیرویی را که حلقه بر مهره وارد می‌کند $\vec{N}$ می‌نامیم. این $\vec{N}$ را می‌توان بر حسب $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ نوشت. شرط صفر بودن اصطکاک را بنویسید.

و) قانون دوم نیوتون برای این ذره سه معادله‌ی دیفرانسیل است. این ۳ معادله را بنویسید.

ز) تعریف می‌کنیم

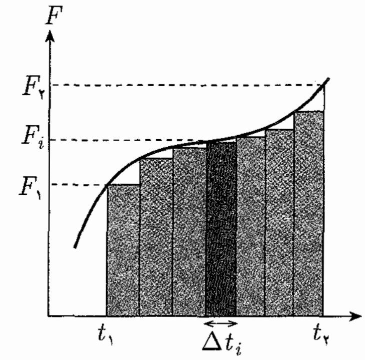
$$h = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

h تابعی است از θ و $\dot{\theta}$، و این دو خود تابع‌هایی از tاند. پس h تابعی از t است. مشتق h نسبت به t را به‌دست آورید و آن را ساده کنید.

«آزمون نهایی دوره‌ی تابستانی سال ۱۳۸۳ ـ مسئله‌ی ۴»

پاسخ سؤال‌های المپیاد فصل ۲

۱ در شکل (۲ـ۲۲۱) نمودار تغییرات نیروی وارد بر یک جسم نسبت به زمان نشان داده شده است. که طبق این نمودار در لحظه‌ی $t_۱$ مقدار نیروی وارده $F_۱$ و در لحظه‌ی $t_۲$ مقدار نیروی وارده $F_۲$ است. مدت زمان بین $t_۱$ و $t_۲$ را به بازه‌های زمانی کوچک به طول Δt تقسیم کرده و همان طور که در شکل (۲ـ۲۲۱) مشاهده می‌شود، می‌توان مقدار F را در طول هر بازه ثابت فرض کرد. با این فرض مجموع طول هر ستون ضرب در عرض آن که Δt است، به‌طور تقریبی برابر با مساحت زیر نمودار می‌شود. هر چه Δtها را کوچک‌تر بگیریم، مساحت زیر نمودار دقیق‌تر به‌دست می‌آید.

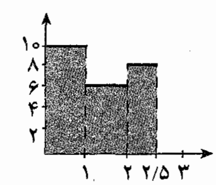


شکل ۲-۲۲۱

حال مساحت یکی از ستون‌های زیر نمودار را به‌دست می‌آوریم. برای ستون مشخص شده در شکل عرض ستون برابر Δt_i و ارتفاع آن برابر F_i است، می‌توان چنین نوشت:

$$S_i\ (\text{مساحت}) = F_i \times \Delta t_i = ma_i\Delta t_i = m\frac{\Delta v_i}{\Delta t_i}\Delta t_i = m\Delta v_i$$

$$\text{مجموع } S_i = m\Delta v\ (\text{در بازه‌ی بین } t_۱ \text{ تا } t_۲)$$



شکل ۲-۲۲۲

پس برای این سؤال داریم:

$$S = ۱ \times ۱۰ + ۱ \times ۶ + ۰/۵ \times ۸ = ۲۰$$

$$m\Delta v = ۲۰ \text{ kgm/s}$$

برای این جسم $m = ۵\text{kg}$ است، پس تغییر سرعت چنین می‌شود:

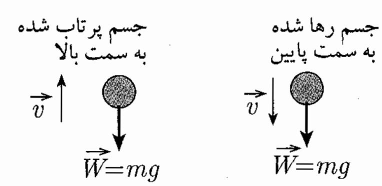
$$\Delta v = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \text{ m/s}$$

پس گزینه (الف) صحیح است.

۲ در شرایط خلأ وقتی جسم را به سمت بالا پرتاب می‌کنیم فقط نیروی وزن در راستای پایین به جسم اثر می‌کند در حالی که سرعت جسم به سمت بالاست. در همین شرایط به جسم رها شده هم فقط نیروی وزن وارد می‌شود با این تفاوت که سرعت جسم این بار به سمت پایین است.

پس در مورد هر دو حالت می‌توان قانون دوم نیوتن را چنین نوشت:

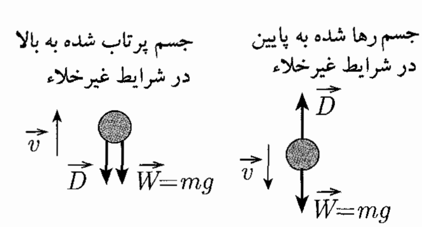
$$F = ma\ ,\ W = mg\ \Rightarrow\ ma = mg\ \Rightarrow\ a = g$$



شکل ۲-۲۲۳

مشاهده می‌شود که شتاب جسم در هر دو حالت با هم برابر است پس گزینه‌های (الف) و (ج) صحیح نیستند. گزینه‌ی «د» هم غلط است، چون در تمام طول مسیر نیروی وزن تنها نیروی مؤثر بر جسم است. پس شتاب جسم همواره ثابت و برابر با مقدار g می‌باشد.

اگر شرایط مسئله خلأ نمی‌بود، هوا به جسم نیروی اصطکاکی به نام نیروی مقاومت هوا وارد می‌کرد. این نیرو همواره در جهت خلاف حرکت جسم بر آن وارد می‌شود پس در طی مسیر رفت و برگشت جسم این نیرو یک بار هم جهت نیروی وزن و یک بار خلاف جهت آن بر جسم وارد می‌شود. در شکل روبه‌رو این نیرو با $\vec{D}$ نشان داده شده است. همان طور که در شکل (۲ـ۲۲۴)



شکل ۲-۲۲۴

مشاهده می‌شود، در حالت پرتاب نیروی بیشتری بر جسم وارد می‌شود پس شتاب بیشتری نسبت به حالت رها شدن دارد.

با توجه به توضیحات بالا گزینه‌ی «ب» صحیح است.

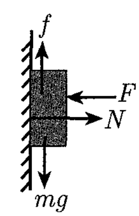
۳ همان طور که می‌دانیم دو نوع نیروی اصطکاک وجود دارد:

الف) نیروی اصطکاک ایستایی (سکون): وقتی به جسمی که روی سطح قرار دارد نیرویی وارد بشود، نیروی از سمت سطح در خلاف جهت نیروی وارده به جسم وارد می‌شود که مانع به حرکت افتادن جسم می‌شود. مقدار این نیرو در هر لحظه برابر با مقدار نیروی وارد شده بر جسم است و با افزایش مقدار نیروی وارد شده، نیروی اصطکاک هم افزایش می‌یابد تا آنکه به مقداری که آن را بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s,\max}$ می‌نامند برسد و در این لحظه با افزوده شدن مقدار نیرو دیگر اصطکاک نمی‌تواند مانع به حرکت افتادن جسم روی سطح بشود و جسم شروع به حرکت می‌کند.

مقدار بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با: $f_{s,\max} = \mu_s N$.

N نیروی عمودی سطح است که در سطح افقی برابر با وزن جسم می‌باشد و μ_s ضریب اصطکاک سکون نامیده می‌شود پس همواره: $f_s \leq \mu_s N$.

ب) نیروی اصطکاک جنبشی: هنگامی که جسم به راه می‌افتد، باز هم نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم بر آن اثر می‌کند که این نیرو را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند. آزمایش نشان می‌دهد که این نیرو با نیروی عمودی سطح متناسب است، یعنی: $f_k = \mu_k N$. که در این رابطه μ_k ضریب اصطکاک جنبشی نام دارد.



شکل ۲-۲۲۵

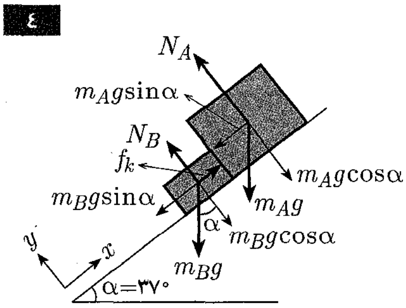
در شکل (۲ـ۲۲۵) نیروهای وارد بر کتاب نمایش داده شده است. برای ساکن ماندن کتاب باید برآیند نیروهای وارد بر آن در راستای افقی و قائم صفر باشد: $mg = f_s <$ در راستای قائم

$F = N$ در راستای افقی $\qquad \mu_s N$

ضریب اصطکاک حالت سکون کتاب با دیوار مقدار معینی است. بنابراین برای اینکه نیروی اصطکاک به اندازه‌ی وزن شود، F باید حداقلی داشته باشد. پس از آن زیاد کردن F، تأثیری در نیروی اصطکاک ندارد و نیروی اصطکاک همواره برابر با وزن است.

پس گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۴ برای حل این مسئله می‌توان دو جسم را با هم در نظر بگیریم و نیروهای خارجی وارد بر مجموعه‌ی اجسام را در نظر بگیریم. در این حالت نیروی بین دو جسم یک نیروی داخلی فرض می‌شود و در معادلات نیروی مجموعه‌ی جسم‌ها وارد نمی‌شود:



شکل ۲-۲۲۶

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow \begin{cases} A: N_A - m_A g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_A = m_A g\cos\alpha \\ B: N_B - m_B g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_B = m_B g\cos\alpha \\ f_k = \mu_k N_B = \mu_k m_B g\cos\alpha \end{cases}$$

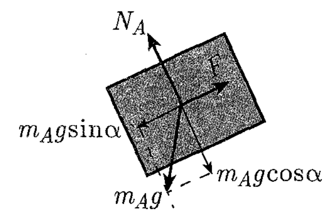
$$\sum F_x = ma_x$$

برای مجموعه‌ی A و B

$$f_k - m_A g\sin\alpha - m_B g\sin\alpha = (m_A + m_B)a_x$$

$$\rightarrow a_x = \frac{\mu_k m_B g \cos\alpha - m_A g \sin\alpha - m_B g \sin\alpha}{m_A + m_B}$$
$$\rightarrow a_x = \frac{۰/۲ \times ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ - ۵ \times ۱۰ \times ۰/۶ - ۲ \times ۱۰ \times ۰/۶}{۲ + ۵}$$
$$\rightarrow a_x = -۵/۵۴ \text{ m/s}^۲$$

بنابراین شتاب جسم‌ها در راستای منفی محور انتخابی x است و در حال پایین آمدن از سطح هستند. بین دو جسم A و B یک نیروی F وجود دارد که طبق قانون سوم نیوتن با هم برابر ولی در خلاف جهت هم هستند. نمودار جسم آزاد را برای A رسم می‌کنیم.



شکل ۲-۲۲۷

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F - m_A g \sin\alpha = m_A a_x$$
$$\rightarrow F = ۵(-۵/۵۴) + ۵ \times ۱۰ \times ۰/۶ = ۲/۲۹ \text{ N}$$

پس بین دو جسم A و B نیرویی برابر ۲/۲۹N وجود دارد که به جسم A در راستای محور x و به جسم B در راستای منفی محور x وارد می‌شود.

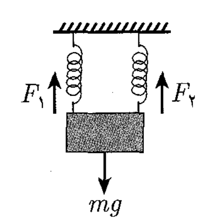
هنگامی که جسم B پایین می‌آید نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد و کار آن به گرما تبدیل می‌شود. اندازه‌ی کار نیروی اصطکاک چنین است:

$$W_f = f_k l = \mu_k m_B g \cos\alpha l = ۰/۲ \times ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ \times ۵۰ = ۱۶۰ \text{J}$$
$$W_f = ۱۶۰ \text{J} \times \frac{۱ \text{ cal}}{۴/۱۸۶ \text{J}} = ۳۸/۲ \text{ cal}$$

۵ وقتی اتومبیل در حال حرکت است، هوای موجود در قسمت‌های جلویی اتاقک ماشین نسبت به قسمت‌های عقبی آن فشرده‌تر می‌شود و فشار بالا می‌رود. در صورت باز بودن پنجره‌های اتومبیل به علت اختلاف فشار هوای موجود در اتاقک با هوای بیرون، جابه‌جایی هوا بین بیرون و درون رخ می‌دهد و جریان ایجاد می‌شود، که این جریان موجب اخلال در حرکت مگس در هوا می‌شود. اما در صورت بسته بودن پنجره‌ها، هوا در داخل ماشین به حرکت نمی‌افتد پس در این حالت حرکت مگس در هوا با حرکت در ماشین ساکن تفاوتی نخواهد داشت.

با توجه به توضیحات بالا گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۶ مطابق شکل (۲ـ۲۲۸) دو نیروی F با هم برابرند چون فنرها یکسان بوده و میزان تغییر طولشان نیز برابر است. بنابراین طبق معادله‌ی تعادل نیروها در راستای y می‌توان گفت:



شکل ۲-۲۲۸

$$mg = ۲F \qquad (۱)$$

طبق قانون هوک مقدار نیروی فنر برابر با حاصل‌ضرب ضریب سختی فنر در میزان افزایش یا کاهش طول فنر است، یعنی:

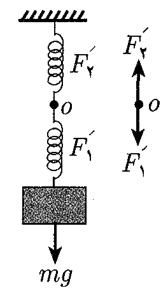
$$F = k\Delta x = k(۰/۰۴) = ۰/۰۴k\text{N} \qquad (۲)$$

حالت اولیه‌ی قرارگیری فنرها را که در شکل (۲ـ۲۲۸) نشان داده شده، حالت «موازی» می‌نامند که شرط اولیه برای این حالت یکسان بودن تغییر طول فنرهاست. (توجه کنید قرارگیری

آنها به صورت موازی و در کنار هم، نشان دهنده‌ی موازی بودن آنها نیست بلکه باید دو یا چند فنر به صورتی قرار بگیرند که تغییر طول‌شان یکسان باشد.)

در شکل (۲ـ۲۲۹) حالت ثانویه‌ی قرارگیری فنرها نشان داده شده است. در این حالت که فنرها پی‌درپی قرار گرفته‌اند، به آنها «سری» می‌گویند. در حالت قرارگیری سری اگر برآیند نیروها را برای نقطه اتصال دو فنر بنویسیم و با توجه به اینکه می‌توان از جرم فنر صرف‌نظر کرد، چنین می‌نویسیم:

$$F'_2 - F'_1 = 0 \;\Rightarrow\; F'_1 = F'_2$$



شکل ۲-۲۲۹

بنابراین در حالت سری، نیروی تمام فنرهای سری با هم برابر خواهد بود. برای جسم می‌توان تعادل نیروها را چنین نوشت:

$$F' - mg = 0 \;\Rightarrow\; F' = mg \qquad (3)$$

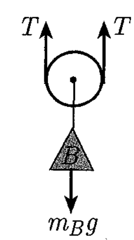
از معادله‌ی (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$F' = 2F = 2(0.04)k \;\Rightarrow\; F' = (0.08)\,k \qquad (4)$$

از آنجایی که F' نیروی کشسان درون فنرهای ۱ و ۲ با ضریب سختی k است، از معادله‌ی (۴) می‌توان گفت که تغییر طول هر یک از دو فنر برابر است با ۸cm.

بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۷ ابتدا نمودار نیروهای وارد بر قرقره‌ی متحرک را رسم می‌کنیم. چون دستگاه ساکن است، برآیند نیروهای وارد بر جسم B (یا قرقره) صفر می‌شود.



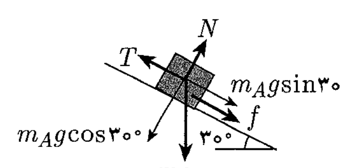
شکل ۲-۲۳۰

$$2T - m_B g = 0 \;\Rightarrow\; 2T = m_B g = 450\,\mathrm{N} \;\rightarrow\; T = \frac{450}{2} = 225\,\mathrm{N}$$

نیروی کشش نخ در تمام طول یک نخ بدون جرم ثابت می‌ماند، پس نیروهای وارد بر جسم روی سطح شیب‌دار چنین می‌شود:

$$T - m_A g \sin 30^\circ - f = 0 \Rightarrow 225 - 300 \times \sin 30^\circ - f = 0$$

$$\Rightarrow\; f = 75\,\mathrm{N}$$



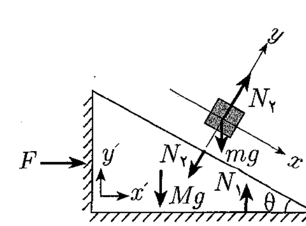
شکل ۲-۲۳۱

بنابراین گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۸ نمودار نیروهای وارد بر سطح شیب‌دار و مکعب روی آن در شکل (۲ـ۲۳۲) رسم شده است. تعادل نیروها برای مکعب در راستای y وجود دارد.

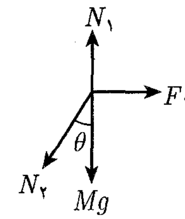
$$m : \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_2 - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = mg\cos\theta \qquad (1)$$

برای مکعب، تعادل نیرو در راستای x نداریم، چون جسم در حال سُر خوردن روی سطح شیب‌دار است. حال برای سطح شیب‌دار تعادل نیروها را در راستای قائم می‌نویسیم. چون سطح ترازو با وارد کردن نیروی N_1 مانع حرکت سطح شیب‌دار در راستای قائم می‌شود، داریم



شکل ۲-۲۳۲

$$M : \sum F_{y'} = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - Mg - N_2\cos\theta = 0$$



شکل ۲-۲۳۳

$$(1) \Rightarrow N_1 = Mg + mg\cos^2\theta$$

واکنش نیروی N_1، نیرویی است که سطح شیب‌دار بر ترازو وارد می‌کند و آنچه ترازوی فنری نشان می‌دهد، همین نیرو است. چون اندازه دو نیروی کنش و واکنش با هم برابرند پس N_1 همان عددی است که ترازو نشان می‌دهد.

۹ در شکل (۲ـ۲۳۴ـ۱) سیستم نشان داده شده است. از آنجایی که قرقره‌ی C در حال تعادل است پس باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد طبق شکل (۲ـ۲۳۴ـ۲) می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲T\cos ۳۰^\circ - W = ۰ \Rightarrow T = \frac{W}{۲\cos ۳۰^\circ}$$

حال می‌توان با توجه به شکل (۲ـ۲۳۴ـ۳) تعادل نیروها را برای قرقره‌ی A نیز نوشت:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow T + T\cos ۶۰^\circ - F = ۰ \Rightarrow F = \frac{۳W}{۴\cos ۳۰^\circ} = ۸۶/۶\ \mathrm{N}$$

F نیرویی است که فنر به قرقره‌ی A وارد می‌کند پس نیرویی که قرقره به فنر اعمال می‌کند که همان نیروی کشش فنر می‌باشد، نیرویی به اندازه F ولی در جهت مخالف آن است. با توجه به جهت نیروی کشش فنر، فنر فشرده شده و کاهش طول خواهد داشت. طبق قانون هوک داریم:

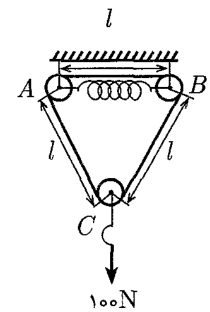
$$F = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{۸۶/۶}{۲۰۰} = ۰/۴۳۳\ \mathrm{cm}$$

اگر طول هر ضلع از مثلث را همان طول که در شکل (۲ـ۲۳۴ـ۱) نشان داده شده است، با l نشان دهیم داریم:

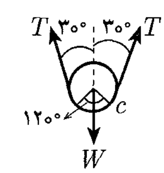
$$l = l_\circ - \Delta x = ۶۰ - ۰/۴۳۳ = ۵۹/۵۶۷\ \mathrm{cm}$$

همان طورکه از شکل‌های (۲ـ۲۳۴ـ۲) و (۲ـ۲۳۴ـ۳) نمایان است $\frac{۱}{۳}$ محیط هر قرقره توسط طناب پوشیده شده است و در مجموع سه قرقره داریم. با توجه به این توضیحات طول کل طناب چنین خواهد بود:

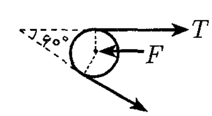
$$l = ۳l_\circ + ۲\pi r = ۳ \times ۵۹/۵۶۷ + ۲ \times ۳/۱۴ \times ۵ = ۲۱۰/۱۱۷\ \mathrm{cm}$$



(۱)



(۲)

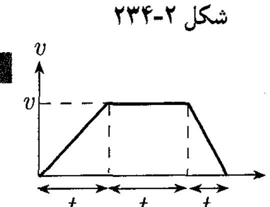


(۳)

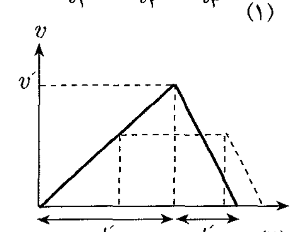
شکل ۲-۲۳۴

۱۰ ساده‌ترین راه‌حل این مسئله استفاده از نمودار $V - t$ است. همان طور که می‌دانیم مساحت زیر این نمودار در بین هر بازه‌ی زمانی برابر با جابه‌جایی متحرک در همان بازه است. فرض می‌کنیم قطار به مدت t_1 با شتاب $۰/۲\mathrm{m/s^2}$ بر سرعتش افزوده تا سرعت به مقدار V رسیده است. پس از این به مدت t_2 با سرعت یکنواخت V حرکت می‌کند. پس از آن ترمز کرده و پس از گذشت زمان t_3 متوقف می‌شود. نمودار $V - t$ برای این حرکت در شکل (۲ـ۲۳۵ـ۱) نشان داده شده است. مساحت زیر این نمودار برابر با جابه‌جایی که ۳/۲km است، می‌باشد. برای کاهش مدت زمان حرکت باید ذوزنقه‌ی شکل (۲ـ۲۳۵ـ۱) تبدیل به مثلث با همان مساحت تبدیل شود. با توجه به شکل (۲ـ۲۳۵ـ۲) مساحت زیر نمودار را این گونه به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} V' &= a_1 t'_1 = ۰/۲t'_1 \\ V' &= a_2 t'_2 = ۰/۸t'_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow t'_1 = ۴t'_2$$



(۱)



(۲)

شکل ۲-۲۳۵

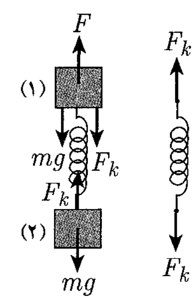
$$S = \frac{۱}{۲}V'(t'_۱ + t'_۲) = ۳۲۰۰\,\mathrm{m} \rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۰٫۸t'_۲(۴t'_۲ + t'_۲) = ۳۲۰۰\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow t'_۲ = ۴۰\,\mathrm{s}\ ,\ t'_۱ = ۱۶۰\,\mathrm{s}$$

حداقل زمان برای طی کردن $۳۲۰۰\,\mathrm{m}$ چنین خواهد بود:

$$t = t'_۱ + t'_۲ = ۱۶۰ + ۴۰ = ۲۰۰\,\mathrm{s}$$

۱۱ وقتی قطعه‌ی بالایی را در دست نگه داشته‌ایم، نمودار نیروهای وارد بر دو جسم یکسان چنین خواهد شد (شکل ۲_۲۳۶):



شکل ۲-۲۳۶

$$\text{جسم (۲)} : \sum F_y = ۰ \rightarrow F_k - mg = ۰ \Rightarrow F_k = mg \qquad (۱)$$

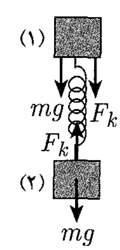
$$\text{جسم (۱)} : \sum F_y = ۰ \Rightarrow F - mg - F_k = ۰ \overset{(۱)}{\Rightarrow} F = mg + F_k = ۲mg$$

هنگامی که جسم بالایی رهایی می‌شود نیروی F روی جسم (۱) برداشته می‌شود. بلافاصله پس از رها شدن چون هنوز تغییر طولی در فنر رخ نداده است میزان F_k تغییر نکرده، پس نمودار نیروهای وارد بر دو جسم بلافاصله پس از رها شدن چنین می‌شود:

$$\text{جسم (۱)} : \sum F_y = ma_۱ \rightarrow mg + F_k = ma_۱ \overset{(۱)}{\rightarrow} a_۱ = ۲g$$

$$\text{جسم (۲)} : \sum F_y = ma_۲ \rightarrow F_k - mg = ma_۲$$

$$\Rightarrow mg - mg = ۰ = ma_۲ \Rightarrow a_۲ = ۰ \qquad (۲)$$



شکل ۲-۲۳۷

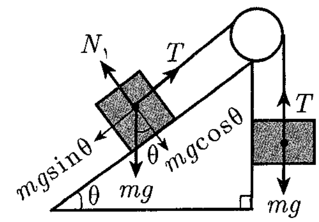
از رابطه‌ی (۲) برداشت می‌شود در مدت زمان بسیار کوتاهی پس از رها کردن جسم بالایی، قطعه‌ی پایینی تقریباً در جای خود می‌ماند در حالی که قطعه‌ی بالایی پایین می‌آید. پس فاصله‌ی بین دو جسم کمتر می‌شود. می‌توانستیم اینگونه تحلیل کنیم که در سقوط آزاد با شتاب g، فنر هیچ نیرویی به دو جسم وارد نمی‌کند پس باید به طول اولیه‌ی خود برسد، بنابراین باید فاصله‌ی بین دو قطعه کاهش یابد. با توجه به توضیحات بالا گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۱۲ در شکل (۲_۲۳۸) نیروهای وارد بر دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ نشان داده شده است (از جرم نخ و اصطکاک بین اجزای دستگاه صرف‌نظر شده است). فرض می‌کنیم که جرم $m_۲$ با شتاب a به سمت پایین حرکت می‌کند چون دو جسم با نخ به هم متصل‌اند پس شتاب دو جرم یکسان خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m_۲g - T = m_۲a_۲ \\ T - m_۱g\sin\theta = m_۱a_۱ \end{cases} \xrightarrow{a_۱ = a_۲} a = a_۱ = a_۲ = \frac{m_۲ - m_۱\sin\theta}{m_۱ + m_۲}g \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_۱m_۲(۱ + \sin\theta)}{m_۱ + m_۲}g \qquad (۲)$$

چون جرم m_1 در راستای عمود بر سطح شیب‌دار حرکتی ندارد، باید نیروهای وارد بر آن در راستای عمود بر سطح صفر باشد، یعنی:

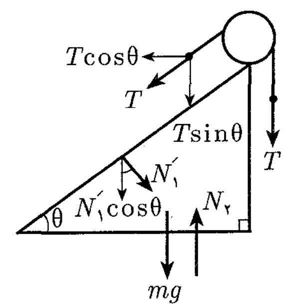


شکل ۲-۲۳۸

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 - m_1 g\cos\theta = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\theta$$

در شکل (۲-۲۳۹) نیروهای وارد بر سطح شیب‌دار نشان داده شده است که در آن N'_1 نیروی عکس‌العمل جسم m_1 بر سطح شیب‌دار است که طبق قانون سوم نیوتن برابر است با N_1. از آنجایی که سطح شیب‌دار در راستای قائم روی ترازو حرکت ندارد پس برآیند نیروهای وارد بر آن در راستای قائم صفر است، پس:

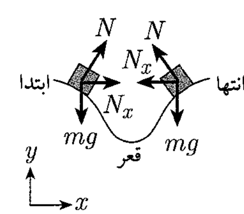
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 - T - T\sin\theta - Mg - N'\cos\theta = 0$$
$$\Rightarrow N_2 = Mg + N'\cos\theta + T(1+\sin\theta)$$
$$\Rightarrow N_2 = Mg + m_1 g\cos^2\theta + \frac{m_1 m_2(1+\sin\theta)^2}{m_1+m_2}g$$



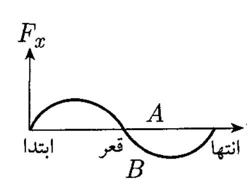
شکل ۲-۲۳۹

واکنش N_2 نیرویی است که سطح شیب‌دار برکفه‌ی نیروسنج وارد می‌کند پس نیروسنج عددی برابر با N_2 نشان می‌دهد. در ابتدای حل مسئله فرض کردیم که جرم m_2 با شتاب a پایین بیاید و جرم m_1 با همین شتاب روی سطح شیب‌دار بالا برود. در معادله‌ی (۱) مشاهده می‌شود که اگر $m_2 > m_1\sin\theta$ باشد، این فرض برقرار می‌شود. ولی در غیر این صورت جرم m_1 روی سطح شیب‌دار پایین رفته و جرم m_2 بالا می‌آید. در این حالت باز مقدار T برابر با همان مقدار به‌دست آمده در معادله‌ی (۲) می‌شود، بنابراین در نهایت مقدار N_2 هم تغییری نمی‌کند. البته این امر که مثبت یا منفی بودن شتاب، تغییری در نیروی N_2 ایجاد نمی‌کند، بدیهی است زیرا در نیروی N_2 غیر از نیروهای مشخص دیگر تنها نیروی T دخالت دارد و این نیرو نیز به کوچک یا بزرگ بودن m_1 و m_2 نسبت به همدیگر بستگی ندارد.

۱۳ الف) در مورد جسم A چون از اصطکاک با سطح زمین صرف‌نظر می‌شود پس سطح نیرویی بر جسم A در راستای افقی وارد نمی‌کند. جسم B در سه نقطه‌ی ابتدای مسیر،نقطه‌ی قعر و نقطه‌ی انتها در حالت افقی قرار می‌گیرد که در این نقاط نیروی افقی توسط سطح بر جسم B اعمال نمی‌شود. اما در سایر نقاط با توجه به شکل (۲-۲۴۰) می‌توان گفت که از ابتدای مسیر تا قعر مؤلفه‌ی افقی نیروی عمودی سطح در راستای مثبت محور x است و از قعر تا انتهای مسیر مؤلفه‌ی افقی نیروی عمودی سطح در راستای منفی محور x است. تغییرات میزان نیروی افقی هم در این دو بازه به صورت خطی نبوده و بنابراین نمودار تغییرات مؤلفه‌ی افقی نیروی عمودی سطح تقریباً سینوسی شکل است.



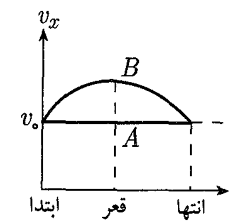
شکل ۲-۲۴۰



شکل ۲-۲۴۱

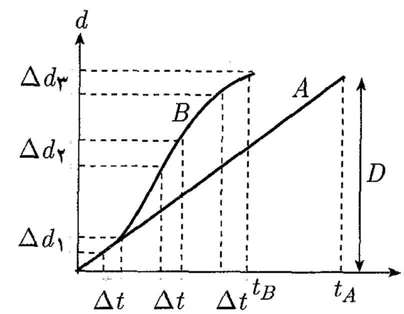
ب) مؤلفه‌ی افقی سرعت جسم A همواره برابر با سرعت اولیه باقی می‌ماند و تغییری در طی مسیر نمی‌کند، چون نیرویی بر جسم A در راستای افقی در تمام طول مسیر وارد نمی‌شود. اما در مورد جسم B از ابتدای مسیر تا رسیدن به قعر مقدار نیروی افقی وارد بر جسم مثبت بوده و بنابراین بر اندازه سرعت می‌افزاید. اما پس از قعر تا انتهای مسیر نیروی افقی منفی بر جسم B وارد می‌شود که در نتیجه میزان سرعت جسم کاسته می‌شود. بنابراین بیشترین میزان سرعت جسم

B در قعر مسیر است. قابل ذکر است که در انتهای مسیر سرعت جسم به مقدار سرعت اولیه باز می‌گردد، چون به ارتفاع اولیه بازگشته است. بنابراین نمودار کیفی سرعت افقی دو جسم A و B مانند شکل (۲ـ۲۴۲) می‌شود.



شکل ۲-۲۴۲

ج) فاصله افقی جسم از نقطه‌ی شروع حرکت در واقع همان میزان جابه‌جایی افقی متحرک است که همان طور که می‌دانیم مساحت زیر نمودار $v_x - t$ را شامل می‌شود. چون جسم A تمام مسیر را با سرعت یکنواخت $v_\circ$ می‌پیماید، فاصله‌ی افقی آن از نقطه‌ی شروع حرکت به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند. ولی جسم B در نیمه‌ی اول مسیر دائماً بر مؤلفه‌ی افقی سرعتش اضافه می‌شود بنابراین در یک فاصله‌ی زمانی یکسان فاصله‌ی افقی که می‌پیماید، افزوده می‌شود و در نیمه‌ی دوم این میزان در حال کاسته شدن است. بنابراین نمودار کیفی فاصله‌ی افقی جسم از نقطه‌ی شروع برای این دو جسم چنین می‌شود (شکل ۲ـ۲۴۳):



شکل ۲-۲۴۳

د) جسم A و B هر دو باید فاصله‌ی یکسانی را تا رسیدن به پایان مسیر بپیماید ولی چون طبق شکل (۲ـ۲۴۳) سرعت افقی جسم B در تمام طول مسیر از سرعت افقی جسم A بیشتر است، جسم B زودتر به پایان مسیر می‌رسد. از شکل (۲ـ۲۴۳) نیز مشاهده می‌شود که جسم B یک فاصله‌ی افقی معین مثل D را در مدت زمان t_B طی می‌کند که این زمان از t_A که در طی آن A، همان فاصله‌ی افقی معین را طی نموده، کمتر است.

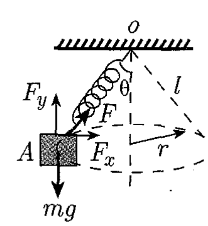
۱۴ در شکل (۲ـ۲۴۴) نیروهای وارد بر جسم m نشان داده شده است. نیروی F همان نیروی کشسانی فنر و mg نیروی وزن است که به جسم وارد می‌شوند. چون جسم روی یک دایره با حرکت یکنواخت می‌چرخد پس شتابی مرکزگرا دارد که حاصل همین نیروی F_x است که در هر لحظه در جهت شعاعی به سمت مرکز دایره قرار می‌گیرد، یعنی:

$$F_x = F\sin\theta = mrw^۲ \qquad (۱)$$

از طرفی جسم در راستای عمودی تعادل نیرویی دارد، پس:

$$F_y = F\cos\theta = mg \qquad (۲)$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{۲\times ۱۰}{\cos ۳۷^\circ} = \frac{۲\times ۱۰}{۰/۸} = ۲۵\text{N}$$



شکل ۲-۲۴۴

این نیرو سبب افزایش طول فنر شده که طبق قانون هوک این افزایش طول برابر است با:

$$F = k\Delta L \ \Rightarrow\ \Delta L = \frac{F}{k} = \frac{۲۵}{۲۵۰} = ۰/۱\text{m}$$

از آنجایی که طول اولیه‌ی فنر $l_\circ = ۰/۳\text{m}$ بوده است، هنگامی که فنر به اندازه‌ی ΔL کش آمده است، طول ثانویه چنین می‌شود:

$$l = l_\circ + \Delta l = ۰/۳ + ۰/۱ = ۰/۴\text{m}$$

حال طبق معادله‌ی (۱) می‌توانیم میزان w را به‌دست آوریم:

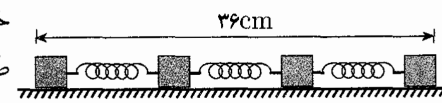
$$F\sin\theta = mrw^۲ = m(l\sin\theta)w^۲ \ \Rightarrow\ w^۲ = \frac{F\sin\theta}{ml\sin\theta}$$

$$\Rightarrow w^۲ = \frac{۲۵\times ۰/۶}{۲\times ۰/۴\times ۰/۶} = ۳۱/۲۵\ (\text{rad/s})^۲ \Rightarrow w = ۵/۵۹\ \text{rad/s}$$

با داشتن w، دوره‌ی حرکت جسم چنین می‌شود:

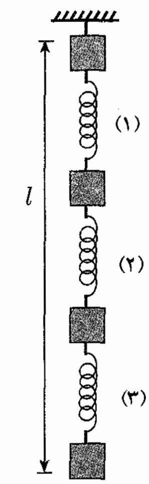
$$T = \frac{۲\pi}{w} = \frac{۲ \times ۳/۱۴}{۵/۵۹} = ۱/۱۲\text{s}$$

۱۵ وقتی وزنه‌ها و فنرهای بین آنها را روی میز افقی بدون اصطکاک می‌گذاریم، فنرها در طول اولیه‌ی خود هستند و هیچ کشیدگی یا فشردگی ندارند. طول کل دستگاه که ۳۶cm است، برابر است با طول عادی سه فنر و پهنای چهار وزنه.



شکل ۲-۲۴۵

وقتی سیستم از سقف آویزان شود، فنرها کش می‌آیند. با توجه به شکل (۲-۲۴۶) مشاهده می‌شود که به فنر اول نیرویی معادل وزن سه وزنه‌ی پایینی، به فنر دوم نیرویی معادل وزن دو وزنه‌ی پایینی و به فنر سوم نیرویی معادل وزن پایین‌ترین وزنه اعمال می‌شود. افزایش طول تک‌تک فنرها را محاسبه می‌کنیم:



شکل ۲-۲۴۶

افزایش طول فنر اول $\Delta x_۱ = \frac{۳mg}{k} = \frac{۳ \times ۲ \times ۱۰}{۲۰} = ۳\text{cm}$

افزایش طول فنر دوم $\Delta x_۲ = \frac{۲mg}{k} = \frac{۲ \times ۲ \times ۱۰}{۲۰} = ۲\text{cm}$

افزایش طول فنر سوم $\Delta x_۳ = \frac{mg}{k} = \frac{۲ \times ۱۰}{۲۰} = ۱\text{cm}$

افزایش طول کل سیستم برابر است با: $\Delta x_t = ۳ + ۲ + ۱ = ۶\text{cm}$

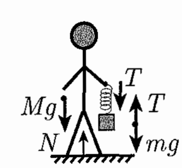
بنابراین طول ثانویه‌ی دستگاه چنین خواهد بود: $l = l_۰ + \Delta x_t = ۳۶ + ۶ = ۴۲\text{cm}$

به این ترتیب گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۱۶ همان‌طور که در تمام مسائل میزان سرعت حرکت زمین را در نظر نمی‌گیریم، در این مسئله هم، به علت ثابت بودن سرعت حرکت واگن، می‌توان آن را ساکن فرض کرد. علت این امر آن است که در دستگاه مختصاتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، مقادیر اندازه‌گیری شده با مقادیر اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصات ثابت، یکسان است و کسی که در دستگاه مختصات متحرک قرار دارد، حرکت واگن برای او مشهود نیست. چون دو سطح شیب‌دار در وسط واگن قرارگرفته‌اند و حرکت گلوله‌ها به طرف دو دیواره واگن کاملاً یکسان است. بنابراین زمان رسیدن گلوله‌ها به نقاط A و B یکسان است و اختلاف زمانی ندارند.

پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۱۷ الف) در شکل (۲-۲۴۷) نیروهای وارد بر فرد و بر وزنه نمایش داده شده است. از تعادل نیروهای عمودی وارد بر وزنه داریم:



شکل ۲-۲۴۷

$$m : \sum F_y = ۰ \Rightarrow T - mg = ۰ \Rightarrow T = mg$$

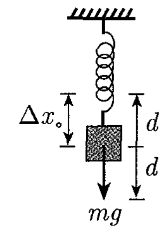
$$M : \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - Mg - T = ۰$$

$$\overset{(۱)}{\Rightarrow} N = Mg + T = Mg + mg$$

$$\Rightarrow N = (۵۰ + ۲) \times ۱۰ = ۵۲۰\text{N}$$

پس در حالت تعادل وزنه ترازو مقدار N را که $۵۲۰\mathrm{N}$ است، نشان می‌دهد.

ب) وقتی وزنه‌ی $۲۵\mathrm{kg}$ را از فنر می‌آویزیم برای آنکه به حالت تعادل درآید، فنر مقداری کش می‌آید که این تغییر طول اولیه را $\Delta x_\circ$ می‌نامیم. می‌توان نوشت:



شکل ۲-۲۴۸

$$F = k\Delta x \;\Rightarrow\; mg = k\Delta x_\circ \;\rightarrow\; \Delta x_\circ = \frac{mg}{k} = \frac{۲۰}{۴۰۰} = ۰/۰۵\mathrm{m}$$

وقتی وزنه را به اندازه‌ی $d = ۵\mathrm{cm}$ پایین می‌کشیم، وزنه در فاصله‌ی d از $\Delta x_\circ$ نوسان می‌کند و بالا و پایین می‌رود. بنابراین حداکثر و حداقل تغییر طول فنر نسبت به طول اولیه‌ی آن چنین خواهد بود:

$$\min(\Delta l) = \Delta x_\circ - d = ۰/۰۵ - ۰/۰۵ = ۰\mathrm{m}$$

$$\max(\Delta l) = \Delta x_\circ + d = ۰/۰۵ + ۰/۰۵ = ۰/۱\mathrm{m}$$

می‌توان طبق قانون هوک حداقل و حداکثر نیروی فنر را مشخص کرد:

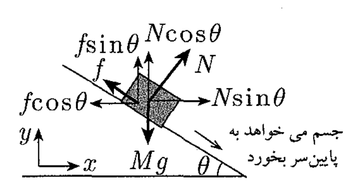
$$\min(T) = k\Delta l_{\min} = ۰\mathrm{N} \;,\; \max(T) = k\Delta l_{\max} = ۴۰۰ \times ۰/۱ = ۴۰\mathrm{N}$$

حال می‌توان طبق رابطه (۱) حداقل و حداکثر نیروی عمودی سطح وارد بر فرد را به‌دست آورد.

$$(۱) \;\rightarrow\; N = mg + T \;\Rightarrow\; \begin{cases} \min(N) = mg + T_{\min} = ۵۰۰\mathrm{N} \\ \max(N) = mg + T_{\max} = ۵۴۰\mathrm{N} \end{cases}$$

N همان نیرویی است که ترازو نشان می‌دهد.

۱۸ وقتی سرعت حرکت اتومبیل کم باشد مقدار مؤلفه‌ی افقی N بیشتر از نیروی مرکزگرای $m\frac{v^۲}{r}$ خواهد بود. در این صورت اتومبیل به سمت مرکز دایره‌ی حرکت، منحرف می‌شود تا با کاهش شعاع حرکت خود نیروی مرکزگرا به مقدار مؤلفه‌ی افقی N برسد، یعنی در این صورت اتومبیل به سمت پایین سطح شیب‌دار منحرف می‌شود. بنابراین نیروی اصطکاک f، همان طورکه در شکل (۲-۲۴۹) نشان داده شده است با حرکت اتومبیل مخالفت می‌کند. اگر نیروی اصطکاک به حدی باشد که اتومبیل سُر نخورد، متحرک حرکت دایره‌ای خود را با شعاع ثابت r ادامه می‌دهد. پس در این حالت می‌توان قانون دوم نیوتن را در راستای x و y چنین نوشت:



شکل ۲-۲۴۹

$$f = \mu N \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; N\cos\theta + f\sin\theta = Mg$$

$$\xrightarrow{(۱)} N(\cos\theta + \mu\sin\theta) = Mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{Mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

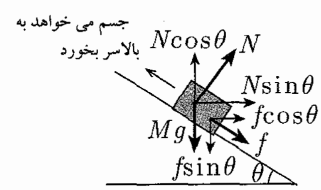
$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; N\sin\theta - f\cos\theta = M\frac{v^۲}{r}$$

$$\overset{(1)}{\rightarrow} N(\sin\theta - \mu\cos\theta) = M\frac{v^{2}}{r}$$
$$\Rightarrow v^{2} = \frac{rg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{rg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$$

این v، حداقل مقدار سرعت است که برای حرکت دایره‌ای با شعاع ثابت r مورد نیاز است.

در صورت افزایش مقدار سرعت به حدی می‌رسیم که مقدار مؤلفه‌ی افقی N از نیروی مرکزگرای $m\frac{v^{2}}{r}$ کمتر می‌شود. در این حالت متحرک به سمت بالای سطح شیب‌دار سُر می‌خورد تا با افزوده شدن شعاع حرکت دایره‌ای خود، میزان نیروی مرکزگرا را بکاهد. نیروی اصطکاک با سُر خوردن مخالفت کرده و در جهتی عکس حالت قبل بر جسم اثر می‌کند. در شکل (۲ـ۲۵۰) نیروهای وارد بر اتومبیل نشان داده شده است. اگر نیروی اصطکاک به حدی باشد که اتومبیل سُر نخورد، متحرک حرکت دایره‌ای خود را با شعاع ثابت r ادامه می‌دهد. قانون دوم نیوتن برای این متحرک چنین بیان می‌کند که:

$$f = \mu N \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\theta - Mg - f\sin\theta = 0$$
$$\overset{(1)}{\rightarrow} N(\cos\theta - \mu\sin\theta) = Mg$$
$$\Rightarrow N = \frac{Mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N\sin\theta + f\cos\theta = M\frac{v^{2}}{r}$$
$$\overset{(1)}{\rightarrow} N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = M\frac{v^{2}}{r}$$
$$\Rightarrow v^{2} = \frac{rg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{rg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$$



شکل ۲-۲۵۰

این v، حداکثر مقدار سرعت است که برای حرکت دایره‌ای با شعاع ثابت r مورد نیاز است.

۱۹ فرض کنید گلوله‌ای از ارتفاع h رها شده یا با سرعت اولیه‌ی v_0 به سمت زمین پرتاب شده است. در این حالت زمانی به عنوان مثال به اندازه‌ی t باید بگذرد تا گلوله به سطح زمین برسد. به علت شتاب گرانش سرعت گلوله افزایش یافته و به مقدار v که برابر است با $\sqrt{v_0^{2} + 2gh}$ در مدت زمان $t = \frac{v - v_0}{g}$ می‌رسد.

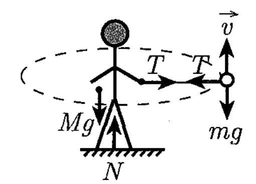
در این لحظه گلوله طی بازه‌ی زمانی بسیار کوچکی چون Δt (این بازه‌ی زمانی در سرعت‌های معمول برای شلیک گلوله در حد ۰٫۰۵ ثانیه است). به اندازه‌ای (مثلاً Δx) در زمین فرو می‌رود تا سرانجام می‌ایستد. فرض می‌کنیم در این بازه‌ی زمانی کوچک نیروی ثابتی توسط زمین بر گلوله وارد می‌شود. از آنجایی که طی بازه‌ی Δt سرعت گلوله از v به صفر می‌رسد، میزان شتاب وارد

برگلوله در این بازه چنین است:

$$a = \frac{v - ۰}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}$$

مسلماً میزان شتاب a از شتاب گرانش بسیار بیشتر است، چون سرعتی را که شتاب g طی زمان t از مقدار $v_۰$ به v می‌رساند، شتاب a طی بازه‌ی زمانی کوچک Δt به صفر می‌رساند. به گونه‌ای دیگر هم می‌توان این مسئله را تحلیل نمود. اگر در لحظه‌ای که سرعت گلوله v است نیرویی معادل وزن و در خلاف جهت آن به گلوله وارد شود، برآیند نیروهای وارد برگلوله صفر شده و شتاب گلوله صفر می‌شود. در این حالت گلوله با همان سرعت ثابت به سقوط خود ادامه می‌دهد، در حالی که برای متوقف شدن گلوله باید شتابی رو به بالا داشته باشد تا سرعت آن را از v به صفر برساند. یعنی نیرویی بیشتر از نیروی وزن نیاز است. بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۲۰ از آنجایی که وزنه‌ی چرخان در دست فرد حرکت صفحه‌ای افقی دارد پس در راستای عمودی تنها نیروی وزن برگلوله وارد می‌شود. بر فرد هم تنها نیروی وزن وارد می‌شود. نیروهای وارد بر اجسام در شکل (۲ـ۲۵۱) نشان داده شده است. طبق رابطه‌ی تعادل نیروها در راستای عمودی داریم:



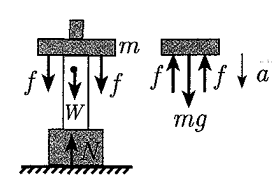
شکل ۲-۲۵۱

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; N - Mg - mg = ۰ \;\rightarrow\; N = (M+m)g = W + W_۰$$

N همان نیرویی است که میزانش را ترازو نشان می‌دهد. پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲۱ در شکل (۲ـ۲۵۲) نیروهای وارد بر پایه و نیروهای وارد بر مهره نشان داده شده است. برآیند نیروهای وارد بر مهره را در راستای عمودی به‌دست می‌آوریم:

$$mg - f = ma \;\rightarrow\; f = m(g-a) = ۰/۵ \times (۱۰ - ۲) = ۴\mathrm{N}$$



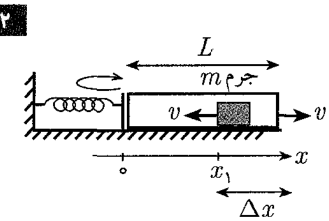
شکل ۲-۲۵۲

عکس‌العمل نیروی اصطکاکی که به مهره وارد می‌شود به میله وارد می‌شود. حال تعادل نیروها را برای پایه در راستای عمودی می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; N - W - f = ۰$$
$$N = f + W = ۴ + ۱۵ = ۱۹\mathrm{N}$$

عکس‌العمل نیروی N بر ترازو وارد می‌شود که همان عدد نشان دهنده‌ی ترازو است. در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

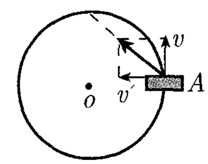
۲۲ قبل از رسیدن جعبه به انتهای آزاد فنر در انتهای سمت راست جعبه قرار گرفته و با سرعت v همراه با جعبه به سمت چپ حرکت می‌کند. پس از برخورد جعبه به انتهای آزاد فنر، به علت نیروی کشسانی فنر با فشرده شدن فنر جعبه کند شده ولی جرم m با همان سرعت ثابت v به سمت چپ در حال حرکت است. از ابتدای شروع فشردگی فنر تا بیشینه فشردگی و بازگشت به طول اولیه‌ی فنر، جرم m به سمت چپ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. میزان جابه‌جایی جرم m در این بازه‌ی زمانی با $x_۱$ در شکل (۲ـ۲۵۳) نشان داده شده است. وقتی فنر به طول اولیه‌ی خود باز می‌گردد، به سرعت اولیه‌ی تماس با فنر برمی‌گردد، بنابراین وقتی فنر به طول اولیه‌ی خود



شکل ۲-۲۵۳

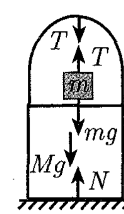
باز می‌گردد جعبه با سرعت v به سمت راست و جرم m در حالی که در فاصله‌ی $x_۱$ از انتهای سمت چپ جعبه قرار دارد، با سرعت v به سمت چپ حرکت می‌کند. چون جرم m با سرعت v به سمت چپ و جعبه با سرعت v به سمت راست حرکت می‌کند، در نصف فاصله‌ی $x_۱$ جسم به انتهای چپ جعبه برخورد می‌کند. چون $x_۱ < L$ است، پس $\frac{x_۱}{۲} < \frac{L}{۲}$ خواهد بود و گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲۳ در شکل روبه‌رو مسیر حرکت تپانچه نشان داده شده است. در نقطه‌ی A تپانچه سرعت یکنواخت v را در راستای مماس بر مسیر دارد. در حالی که گلوله‌ی شلیک شده سرعت یکنواخت v' به سمت مرکز دایره دارد. بردار v'' برآیند این دو بردار سرعت است که مسیر حرکت گلوله را مشخص می‌کند. بنابراین گزینه «د» صحیح است.



شکل ۲-۲۵۴

۲۴ وقتی جرم m از سقف ظرف شیشه‌ای آویزان است نمودار نیروهای وارد بر جرم m و ظرف شیشه‌ای مانند شکل (۲ـ۲۵۵) خواهد بود.



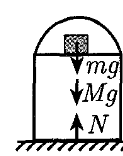
شکل ۲-۲۵۵

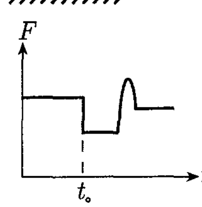
معادله‌ی برآیند نیروها در راستای قائم به صورت زیر است:

$$m : \sum F_y = ۰ \Rightarrow T - mg = ۰ \Rightarrow T = mg$$
$$M : \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - T - Mg = ۰ \Rightarrow N = T + Mg = (m + M)g$$

وقتی نخ نگه دارنده پاره می‌شود، از نمودار نیروهای وارد بر ظرف، مقدار T حذف می‌شود. بنابراین داریم:

$$M : \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - Mg = ۰ \Rightarrow N = Mg$$





شکل ۲-۲۵۶

بنابراین در لحظه‌ی پاره شدن طناب میزان نیروی نشان دهنده توسط ترازو به اندازه‌ی mg کاهش می‌یابد. هنگامی که جرم m بر روی ظرف شیشه‌ای می‌افتد، تغییر ناگهانی در اندازه‌ی سرعت جرم m داریم، که این تغییر ناگهانی را ضربه می‌نامیم. طی یک ضربه، همان طورکه در پاسخ سؤال ۱۹ مطرح شد، در یک بازه‌ی زمانی کوچک باید نیروی نسبتاً زیادی بر جسم برخورد کننده وارد شود تا در زمانی کوتاه، سرعتش از v که سرعت اولیه‌ی برخورد است، به سرعت صفر برسد. بنابراین در زمانی کوچک نیرویی زیاد بر جسم و بر ظرف شیشه‌ای وارد می‌شود. سپس سیستم به تعادل رسیده و با توجه به شکل روبه‌رو، می‌توان معادلات نیرو را در این حالت چنین نوشت:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N - Mg - mg = ۰ \Rightarrow N = (M + m)g$$

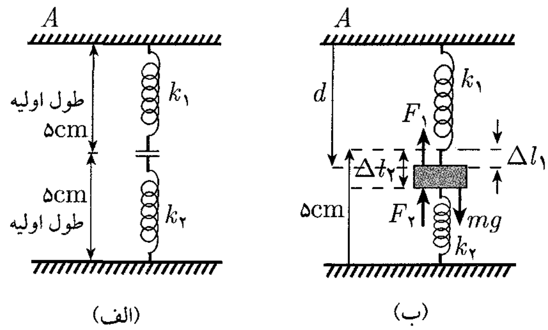
بنابراین با توجه به توضیحات فوق نمودار تغییرات کیفی نیروی F بر حسب زمان مانند شکل (۲ـ۲۵۶) است.

پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲۵ ابتدا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که فنر $k_۱$ بالا و فنر $k_۲$ پایین است. اگر فرض کنیم فقط فنر $k_۲$ وجود داشته باشد و وزنه را روی آن قرار دهیم میزان فشردگی فنر $k_۲$ در این حالت بیشتر از

ضخامت جسم است:

$$\Delta x = \frac{mg}{k_۲} = \frac{۰/۰۴ \times ۱۰}{۱۲} = ۰/۰۳۳\text{m} = ۳/۳\text{cm} > ۲\text{cm}$$



شکل ۲-۲۵۷

با توجه به این مسئله وضعیت فشردگی دو فنر مانند حالت نشان داده شده در شکل (۲ـ۲۵۷ ب) می‌باشد. معادله‌ی نیروها را در راستای عمودی برای وزنه‌ی M می‌نویسیم.

$$\Delta l_۲ = \Delta l_۱ + ۰/۰۲\text{m} \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; F_۱ + F_۲ = Mg$$

$$\Rightarrow k_۱\Delta l_۱ + k_۲(\Delta l_۱ + ۰/۰۲) = Mg$$

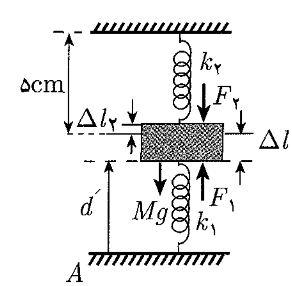
$$\Rightarrow \Delta l_۱ = \frac{Mg - ۰/۰۲k_۲}{k_۱ + k_۲} = \frac{۰/۴ - ۰/۰۲ \times ۱۲}{۲۰ + ۱۲}$$

$$\Rightarrow \Delta l_۱ = ۰/۰۰۵\text{m} = ۰/۵\text{cm}$$

حال مجموعه را برگردانده و قاعده‌ی A را روی زمین می‌گذاریم. اکنون اگر فرض کنیم که فقط فنر $k_۱$ وجود دارد و وزنه را روی آن قرار داده‌ایم میزان فشردگی این فنر در این حالت مساوی ضخامت جسم است:

$$\Delta x = \frac{mg}{k_۱} = \frac{۰/۰۴ \times ۱۰}{۲۰} = ۰/۰۲\text{m} = ۲\text{cm}$$

با توجه به این مسئله وضعیت فشردگی دو فنر مانند حالت نشان داده شده در شکل (۲ـ۲۵۸) می‌باشد. معادله‌ی نیروها را در راستای عمودی برای وزنه‌ی M می‌نویسیم:



شکل ۲-۲۵۸

$$\Delta l_۱ + \Delta l_۲ = ۰/۰۲\text{m} \qquad (۲)$$

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; F_۱ = Mg + F_۲$$

$$\Rightarrow\; k_۱\Delta l_۱ = Mg + k_۲(۰/۰۲ - \Delta l_۱)$$

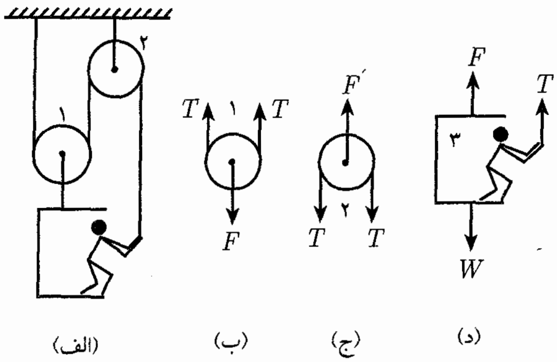
$$\Rightarrow\; \Delta l_۱ = \frac{Mg + ۰/۰۲k_۲}{k_۱ + k_۲} = \frac{۰/۴ + ۰/۰۲ \times ۱۲}{۲۰ + ۱۲} = ۰/۰۲\text{m} = ۲\text{cm}$$

$$d' = ۰/۰۵ - \Delta l_۱ = ۰/۰۵ - ۰/۰۲ = ۰/۰۳\text{m} = ۳\text{cm}$$

جابه‌جایی جسم M نسبت به قاعده‌ی A همان اختلاف d و d' خواهد بود:

$$\Delta d = d - d' = ۰/۰۵۵ - ۰/۰۳ = ۰/۰۲۵\text{m} = ۲۵\text{mm}$$

۲۶ در متن سؤال منظور از وزن W، مجموع وزن کارگر و وزن کابین بالابر است. در شکل (۲ـ۲۵۹) نمودار نیروهای وارد بر این مجموعه را مشاهده می‌کنید:



شکل ۲-۲۵۹

در شکل (۲ـ۲۵۹ ب) نیروهای وارد بر قرقره‌ی ۱ نشان داده شده است. چون قرقره بدون اصطکاک بوده و نخ را بدون جرم در نظر می‌گیریم پس نیروی کشش نخ در دو طرف قرقره و همچنین در کل طول نخ ثابت است. بنابراین نیروی کشش نخ را در تمام طول آن T می‌نامیم. تعادل نیروها را برای قرقره ۱ و ۲ می‌توانیم چنین بنویسیم:

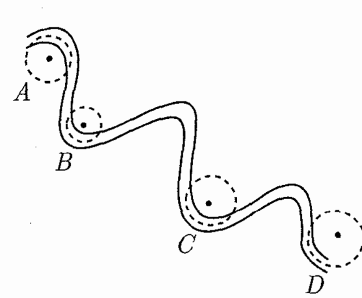
$$۱:\ \sum F_y = ۰ \ \Rightarrow\ T + T - F = ۰ \ \Rightarrow\ F = ۲T \qquad (۱)$$
$$۲:\ \sum F_y = ۰ \ \Rightarrow\ F' - T - T = ۰ \ \Rightarrow\ F' = ۲T$$

حال می‌توان تعادل نیروها را در راستای عمودی برای فرد و کابین بنویسیم:

$$۳:\ \sum F_y = ۰ \ \Rightarrow\ F + T - W = ۰$$
$$\overset{(۱)}{\Rightarrow}\ ۲T + T - W = ۰ \ \Rightarrow\ T = \frac{W}{۳}$$

ما برای حل مسئله فرض کرده‌ایم که تعادل نیروها را در راستای قائم برای تک‌تک اجزای مجموعه داریم، بنابراین حرکت رو به بالای کابین یک حرکت یکنواخت خواهد بود. در حالی که با افزایش مقدار T توسط فرد، کابین می‌تواند با شتاب بالا برود. بنابراین مقدار $T = \frac{W}{۳}$ حداقل نیروی لازم برای بالا رفتن کابین است که طی آن حرکتی یکنواخت به سمت بالا خواهد داشت. پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۲۷ شتاب نشان دهنده‌ی تغییرات بردار سرعت نسبت به زمان است. این تغییرات هم شامل تغییر طول بردار سرعت و هم شامل تغییر جهت بردار سرعت است. در مورد این مسئله اندازه‌ی سرعت اتومبیل ثابت است ولی در یک مسیر خمیده حرکت می‌کند پس جهت سرعت تغییر نکرده و در نتیجه حرکت اتومبیل شتاب‌دار است. چهار نقطه‌ی A، B، C و D پیچ‌های جاده هستند. حرکت اتومبیل را در این پیچ‌ها می‌توان قسمت کوچکی از یک دایره در نظر گرفت که هر چه پیچ تندتر باشد، شعاع دایره کوچک‌تر است. شتاب در یک مسیر دایره‌ای به شعاع r با سرعت ثابت v، برابر با $\frac{v^۲}{r}$ و به سمت مرکز دایره است. با توجه به ثابت بودن v در تمام مسیر، در هر پیچ که شعاع r کوچک‌تر است، شتاب اتومبیل بزرگ‌تر خواهد بود. از روی شکل پیداست که این نقطه‌ی B است

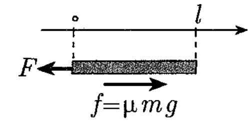


شکل ۲-۲۶۰

که کمترین شعاع و در نتیجه اتومبیل در آن بیشترین شتاب را دارد. پس گزینه‌ی «ب» صحیح است.

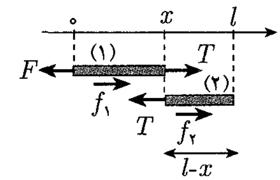
۲۸ برای این ریسمان می‌توانیم کمیتی به نام چگالی طولی تعریف کنیم، که برابر است با نسبت جرم به طول ریسمان.

$$\lambda = \frac{m}{l} \qquad \text{(چگالی طولی)}$$



شکل ۲-۲۶۱

بنا به فرض مسئله $F > \mu mg$ است پس برآیند نیروهای افقی وارد بر ریسمان شتابی در جهت نیروی F به ریسمان می‌دهد. اگر در نقطه‌ای به فاصله‌ی x از محور در ریسمان برشی بزنیم، دو تکه ریسمان بر یکدیگر نیرویی وارد می‌کنند که این نیرو همان نیروی کشش نخ است. جرم هر تکه از ریسمان از حاصل‌ضرب چگالی طولی ریسمان در طول آن تکه به‌دست می‌آید.

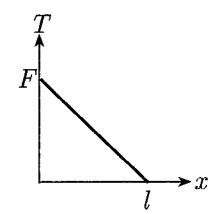


شکل ۲-۲۶۲

$$m_1 = \lambda x = \frac{x}{l}m \;\;,\;\; m_2 = \lambda(l-x) = \frac{l-x}{l}m$$

نیروی عمودی سطح وارد بر هر تکه برابر با وزن آن تکه است:

$$N_1 = m_1 g = \frac{x}{l}mg \;\;,\;\; N_2 = m_2 g = \frac{l-x}{l}mg$$



شکل ۲-۲۶۳

حال معادله‌ی نیروهای افقی وارد بر دو قطعه را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}(1): T + f_1 - F = m_1 a \;\Rightarrow\; T + \mu\frac{x}{l}mg - F = \frac{x}{l}ma \\ (2): f_2 - T = m_2 a \;\Rightarrow\; \mu\frac{l-x}{l}mg - T = \frac{l-x}{l}ma\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\; a = \frac{\mu mg - F}{m} \qquad (1)$$

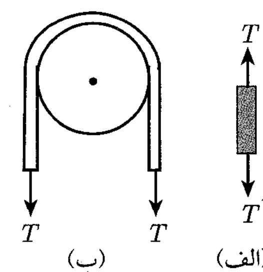
$$\Rightarrow\; T = F\left(\frac{l-x}{l}\right) \qquad (2)$$

طبق فرض مسئله $F > \mu mg$ است، پس مقدار شتاب به‌دست آمده در معادله‌ی (۱) همواره منفی است. علت این امر آن است که جهت سمت راست محور x را مثبت در نظر گرفته‌ایم، در حالی که طناب به سمت چپ شتاب دارد. طبق معادله‌ی (۲) نمودار T بر حسب x شبیه شکل (۲ـ۲۶۳) می‌شود.

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۲۹ در شکل (۲ـ۲۶۴ الف) تکه‌ای نخ در نظر گرفته‌ایم که به دو سر آن نیروی T و T' وارد می‌شود. قانون دوم نیوتن را برای این تکه نخ می‌نویسیم:

$$\sum F = ma \;\Rightarrow\; T - T' = ma \;\overset{m=0}{\Longrightarrow}\; T = T'$$



شکل ۲-۲۶۴

پس برای نخی که جرمی ندارد T در تمام طول نخ ثابت است.

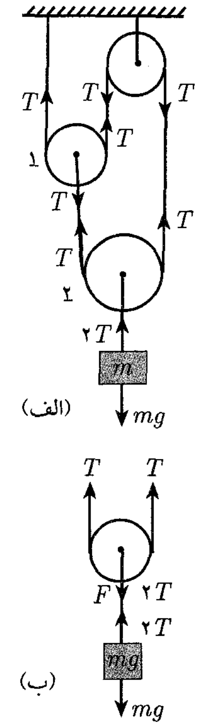
در شکل (۲ـ۲۶۴ ب) تکه نخی از روی قرقره گذشته است. در صورتی که بین نخ و قرقره اصطکاک وجود نداشته باشد، نیروی T در دو طرف قرقره برابر خواهد بود.

با توجه به این توضیحات نیروی کشش در تمام طول نخ در شکل (۲ـ۲۶۵ الف) یکی بوده که آن را با نماد T نشان می‌دهیم. از جرم قرقره طبق فرض مسئله صرف‌نظر می‌کنیم. برآیند نیروها را برای قرقره‌ی ۱ می‌نویسیم:

$$\sum F_y = ma \Rightarrow ۲T - T - mg = ma \overset{m=a}{\Rightarrow} ۲T = T \rightarrow T = ۰$$

حال برآیند نیروها را بر قرقره ۲ می‌نویسیم:

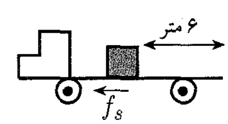
$$\sum F_y = ma = ۰ \Rightarrow T + T - F = ۰ \Rightarrow F = ۲T = ۰$$
$$\sum F_y = ma \Rightarrow ۲T - mg = ma \overset{T=۰}{\Rightarrow} a = -g$$



شکل ۲-۲۶۵

معادله‌ی نیروهای وارد بر جرم m به صورت فوق می‌باشد. پس بنابراین گزینه‌ی «د» صحیح است.

۳۰ الف) وقتی جعبه روی کف تریلی نلغزد یعنی بین جعبه و کف تریلی اصطکاک ایستایی داریم. در این حالت فقط نیروی اصطکاک ایستایی است که بر جرم در راستای افقی وارد می‌شود و باعث می‌شود که جسم با شتابی برابر با شتاب تریلی هم جهت با آن حرکت کند بنابراین نیروی اصطکاک به سمت چپ بر جسم وارد می‌شود. تعیین جهت نیروی f_s با توجه به جهت حرکت نسبی جسم به کف کامیون هم قابل تعیین است به این صورت که، جسم در صورت لغزیدن روی سطح کامیون به سمت راست می‌لغزد در حالی که نیروی اصطکاک همواره مخالف جهت حرکت نسبی دو جرم است. پس بر جسم روی کف کامیون به سمت چپ وارد می‌شود. قانون دوم نیوتن را برای جسم روی کف کامیون می‌نویسیم:



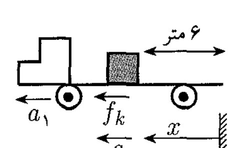
شکل ۲-۲۶۶

$$\sum F = ma \Rightarrow f_s = ma \Rightarrow \mu_s mg = ma$$
$$\Rightarrow a = \mu_s g = ۰/۳ \times ۱۰ = ۳\mathrm{m/s^۲}$$

این شتاب بیشترین شتابی است که تریلی می‌تواند داشته باشد تا جسم بر روی کف تریلی نلغزد.

ب) وقتی تریلی با شتاب $۴\mathrm{m/s^۲}$ حرکت می‌کند، چون از حداکثر شتاب مجاز گذشته است، جسم بر روی کف تریلی شروع به لغزیدن می‌کند پس بنابراین بین جسم و کف کامیون در این وضعیت نیروی اصطکاک جنبشی وجود دارد. در این حالت شتاب جسم برابر است با:

$$\sum F = ma \Rightarrow f_k = ma \Rightarrow \mu_k mg = ma$$
$$\Rightarrow a = \mu_k g = ۰/۱۵ \times ۱۰ = ۱/۵\mathrm{m/s^۲}$$



شکل ۲-۲۶۷

شتاب نسبی جسم به کف کامیون از تفاضل شتاب‌ها به‌دست می‌آید.

$$a_{\text{جسم نسبت به کامیون}} = a_{\text{جسم}} - a_{\text{کامیون}} = a - a_۱ = ۱/۵ - ۴ = -۲/۵\mathrm{m/s^۲}$$

علامت منفی شتاب نسبی نشان دهنده‌ی جهت شتاب است بدین گونه که جسم نسبت به کامیون به سمت راست شتاب دارد. حال می‌خواهیم محاسبه کنیم که جسم نسبت به کف کامیون در این ۲ ثانیه چه مقدار جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta x_{\text{جسم نسبت به کامیون}} = \frac{۱}{۲} a_{\text{جسم نسبت به کامیون}} t^{۲} = \frac{۱}{۲} \times (-۲/۵) \times ۴ = -۵\text{m}$$

پس جسم به اندازه‌ی ۵ متر روی کف کامیون عقب می‌آید. در این لحظه شتاب تریلی صفر شده ولی چون جسم نسبت کف کامیون سرعت دارد بر روی آن می‌لغزد. ابتدا سرعت جسم را در $t = ۲\text{s}$ به‌دست می‌آوریم:

$$V_{\text{جسم نسبت به کامیون}} = a_{\text{جسم نسبت به کامیون}} t = (-۲/۵) \times ۲ = -۵\text{m/s}$$

وقتی شتاب تریلی صفر می‌شود، شتاب جسم نسبت به تریلی برابر با شتاب جسم نسبت زمین می‌شود. سرعت جعبه نسبت به تریلی هنگام رسیدن به انتهای تریلی چنین می‌شود:

$$v_۱^۲ - v^۲_{\text{جسم نسبت به کامیون}} = ۲a\Delta x \Rightarrow v_۱^۲ - (-۵)^۲ = ۲ \times ۱/۵ \times (۰ - ۱)$$

$$\Rightarrow v_۱ = -۴/۷\text{m/s}$$

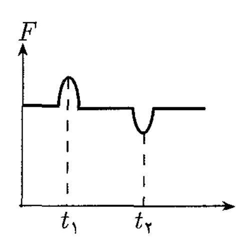
علامت منفی نشان دهنده‌ی آن است که حرکت جعبه بر کف تریلی به سمت چپ است.

برای پیدا کردن سرعت جعبه نسبت به زمین ابتدا سرعت تریلی را به‌دست آورده و سپس سرعت جعبه نسبت به تریلی را با آن جمع می‌کنیم.

$$v_۲ = v_۰ + at = ۳ + ۴ \times ۲ = ۱۱\text{m/s}$$

$$v_f = v_۲ + v_۱ = ۱۱ - ۴/۷ = ۶/۳\text{m/s}$$

۳۱ پیش از شلیک گلوله به سمت بالا، ترازو نیرویی برابر با وزن گلوله و محفظه نشان می‌دهد. برای آنکه گلوله به سمت بالا شلیک شود، باید از کف محفظه نیرویی بیشتر از وزن گلوله به طرف بالا بر آن وارد شود. عکس‌العمل این نیرو که بیشتر از وزن گلوله است بر کف محفظه و به طرف پایین وارد می‌شود. پس یک افزایش ناگهانی در عددی که ترازو نشان می‌دهد در لحظه شلیک گلوله وجود دارد. در مدتی که گلوله از کف جدا شده و هنوز به سقف نرسیده، ترازو فقط وزن محفظه را نشان می‌دهد که از آنچه پیش از شلیک نشان می‌داده به اندازه‌ی وزن گلوله کمتر است. هنگامی که گلوله به سقف محفظه برخورد می‌کند، برای کند شدن حرکت رو به بالای گلوله سقف محفظه باید نیرویی رو به پایین بر گلوله وارد کند که عکس‌العمل این نیرو توسط گلوله بر محفظه به طرف بالا وارد می‌شود. پس هنگام برخورد گلوله با سقف یک کاهش ناگهانی در عددی که ترازو نشان می‌دهد داریم که از آنچه پیش از شلیک گلوله نشان می‌داده کمتر است. با این توضیحات نمودار نیرویی که ترازو می‌دهد نسبت به زمان مانند شکل (۲ـ۲۶۸) است.

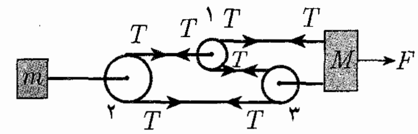


شکل ۲ـ۲۶۸

پس گزینه «الف» صحیح است.

۳۲ همان‌طور که در سؤال‌های قبل اشاره کردیم، اگر از جرم نخ و اصطکاک بین نخ و قرقره صرف‌نظر کنیم نیروی کشش نخ در طول نخ ثابت می‌ماند. بنابراین نیروهای وارد بر مجموعه مانند شکل روبه‌رو خواهد بود:

از جرم قرقره‌ها صرف‌نظر شده است. اگر نیروهای وارد بر قرقره‌ی ۱ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



شکل ۲-۲۶۹

$$\sum F_x = ma \overset{m=۰}{\Rightarrow} \sum F_x = ۲T - T = ۰ \;\Rightarrow\; ۲T = T \;\rightarrow\; T = ۰$$

پس بر جرم M تنها نیروی F و بر جرم m هیچ نیرویی وارد نمی‌شود. بنابراین جرم M شتابی برابر با $\frac{F}{M}$ و جرم m شتابی برابر با صفر به‌دست می‌آورد. پس اندازه‌ی شتاب نسبی دو جرم m و M برابر است با $\frac{F}{M}$.

با توجه به توضیحات بالا، گزینه‌ی «ج» صحیح است.

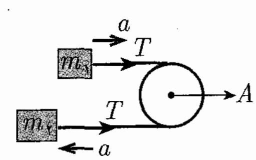
۳۳ نیروهای وارد بر مجموعه طبق شکل (۲ـ۲۷۰) می‌باشد. کل مجموعه شتاب A به سمت راست دارد، جسم $m_۱$ نسبت به مجموعه شتاب a به سمت راست و جسم $m_۲$ نسبت به مجموعه شتاب a به سمت چپ دارد. پس می‌توانیم قانون دوم نیوتن را برای دو جرم $m_۱$ و $m_۲$ به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum F = ma \;\Rightarrow\; T = m_۱(A+a) \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{T}{m_۱} = A + a$$

$$\sum F = ma \;\Rightarrow\; T = m_۲(A-a) \;\Rightarrow\; \frac{T}{m_۲} = A - a$$

$$\Rightarrow \frac{T}{m_۱} + \frac{T}{m_۲} = ۲A$$

$$\Rightarrow T = \frac{۲A}{\frac{۱}{m_۱} + \frac{۱}{m_۲}} = \frac{۲Am_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}$$



شکل ۲-۲۷۰

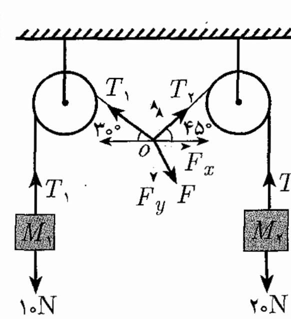
طبق معادله‌ی (۱) شتاب جرم m همان $A+a$ است که از تقسیم T بر $m_۱$ به‌دست خواهد آمد.

$$a_{m_۱} = \frac{T}{m_۱} = \frac{۲Am_۲}{m_۱ + m_۲}$$

پس گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۳۴ با توجه به شکل (۲ـ۲۷۱) نیروهای وارد بر مجموعه و نیروهای داخلی مجموعه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون در نقطه o بر نخ نیرو وارد شده است، پس کشش نخ در دو طرف نخ یکسان نمی‌باشد.

این دو نیرو را $T_۱$ و $T_۲$ نامیده‌ایم. چون سیستم در حال تعادل است، پس برآیند نیروهای وارد بر $M_۱$ و $M_۲$ صفر خواهد بود.



شکل ۲-۲۷۱

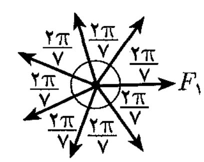
$$M_۱ \;:\; \sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; T_۱ - ۱۰\mathrm{N} = ۰ \;\Rightarrow\; T_۱ = ۱۰\mathrm{N}$$

$$M_۲ \;:\; \sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; T_۲ - ۲۰\mathrm{N} = ۰ \;\Rightarrow\; T_۲ = ۲۰\mathrm{N}$$

در نقطه‌ی o هم باید برآیند نیروهای وارده برابر با صفر باشد.

$$\sum F_{x,o} = 0 \Rightarrow T_2 \cos 45^\circ + F_x - T_1 \cos 30^\circ = 0$$
$$\Rightarrow F_x = T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 45^\circ$$
$$= 10 \times \cos 30^\circ - 20 \cos 45^\circ = -5/5\text{N}$$
$$\sum F_{y,o} = 0 \Rightarrow T_2 \sin 45^\circ + T_1 \sin 30^\circ - F_y = 0$$
$$\Rightarrow F_y = T_2 \sin 45^\circ + T_1 \sin 30^\circ$$
$$= 20 \times \sin 45^\circ + 10 \sin 30^\circ = 19\text{N}$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 19/91 \simeq 20\text{N}$$

۳۵ هفت نیروی مساوی که با زوایای مساوی بر جرم وارد می‌شوند، دارای تقارن بوده و جسم در حال تعادل خواهد بود. در حالت تعادل نیرو در یک جسم هر یک از نیروهای وارد بر جسم مخالف برآیند سایر نیروها بوده تا تعادل برقرار شود. بنابراین در مورد این مثال هر یک از هفت نیروی متقارن مخالف برآیند شش نیروی باقی‌مانده است. پس اگر یکی از نیروها، مثلاً نیروی F_1 در شکل (۲ـ۲۷۲) برداشته شود، برآیند سایر نیروها، نیرویی برابر با F_1 ولی در جهت مخالف با آن است.



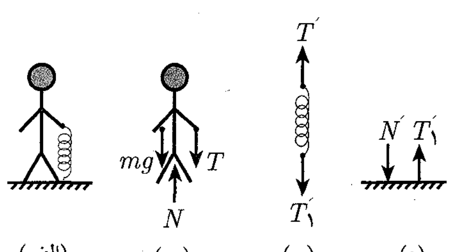
شکل ۲-۲۷۲

پس نیروی برآیندی که بر جسم وارد می‌شود برابر با 10N خواهد بود، پس شتاب وارده بر جرم چنین می‌شود:

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{10}{2} = 5\text{m/s}^2$$

بنابراین گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

۳۶ برای حل این مسئله، دو روش را به کار می‌بریم: ابتدا فرد و فنر را به صورت یک مجموعه در نظر می‌گیریم، تنها نیرویی که بر مجموعه‌ی شخص و فنر از سمت زمین وارد می‌شود، نیروی وزن شخص است، چون فنر را بی‌وزن در نظر گرفته‌ایم. پس ترازو نیروی وزن این مجموعه را 600N نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲۷۳

روش دوم، رسم نمودار جسم آزاد اجسام و تحلیل نیروهای وارده بر آنهاست. ابتدا تعادل نیروها را برای فرد و سپس سطح زمین در راستای y می‌نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - T = 0 \Rightarrow N = mg + T \quad (1)$$
$$T' - T_1 = 0 \Rightarrow T' = T_1 \quad (2)$$
$$\sum F_y = N'' \rightarrow N'' = N' - T'_1 \quad (3)$$

نیروی T' عکس‌العمل نیروی T و نیروی T_1' عکس‌العمل نیروی T_1 است. نیروی N' هم عکس‌العمل نیروی N است. طبق رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$T = T' = T_1 = T_1' \qquad (4)$$

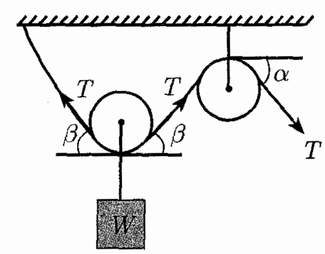
از رابطه (۱) و (۳) داریم:

$$N = mg + T \quad , \quad N'' = N' - T_1' = mg + T - T_1' = mg$$

پس N'' برابر با mg می‌باشد. عکس‌العمل N'' همان عددی است که ترازو نشان می‌دهد. پس ترازو همان ۶۰۰ نیوتن را که وزن شخص است، نشان می‌دهد. بنابراین گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۳۷ با چشم‌پوشی از اصطکاک قرقره و نخ و همچنین جرم نخ نیروی کشش نخ در تمام طول آن ثابت خواهد بود. چون نخ با قرقره اصطکاک ندارد، قرقره آویخته به آسانی روی نخ می‌لغزد و جایی قرار می‌گیرد که زاویه‌ی دو طرف نخ با افق یکسان باشد. تعادل نیروها برای وزنه‌ی W چنین خواهد بود:

$$2T\sin\beta - W = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{W}{2\sin\beta}$$



شکل ۲-۲۷۴

به علت آنکه W ثابت است، با افزایش β، $\sin\beta$ نیز افزایش یافته و در نتیجه T کاهش می‌یابد، پس T نسبت به β نزولی است. در حالی که انتهای نخ را می‌توان با هر راستایی کشید، یعنی در ایجاد تعادل اندازه‌ی α تأثیرگذار نیست. پس گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۳۸ ابتدا برآیند نیروهای هم‌راستا را به‌دست می‌آوریم. حاصل به صورت شکل (۲ـ۲۷۵) خواهد بود. محور x را در راستای نیروی F_5 و محور y را در راستای عمود بر آن قرار می‌دهیم. حال نیروهای F_4 و F_6 را در راستای x و y تجزیه می‌کنیم. برآیند نیروها را در راستای x و y می‌نویسیم:

$$\sum F_y = F_6\sin 60^\circ - F_4\sin 60^\circ = 30\sin 60^\circ - 30\sin 60^\circ = 0$$

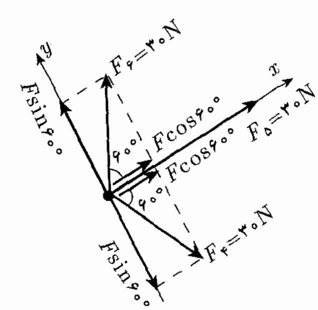
$$\sum F_x = F_5 + F_4\cos 60^\circ + F_6\cos 60^\circ$$

$$= 30 + 30 \times \frac{1}{2} + 30 \times \frac{1}{2} = 60\mathrm{N}$$

پس برآیند نیروها برابر با $60\mathrm{N}$ و در راستای نیروی F_5 است.

$$\sum F = ma \;\Rightarrow\; 60 = 4a \;\Rightarrow\; a = 15\mathrm{m/s^2}$$

بنابراین گزینه‌ی «ب» صحیح است.

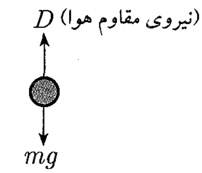


شکل ۲-۲۷۵

۳۹ دو نیرو به گلوله‌ای که در هوا سقوط می‌کند وارد می‌شوند. نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا، که با سقوط جسم مخالفت می‌کند. گلوله وقتی به سرعت حد می‌رسد که دیگر شتاب نداشته باشد، یعنی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود.

$$D - mg = 0 \;\Rightarrow\; D = mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم که نیروی مقاوم هوا متناسب با مجذور سرعت و شعاع گلوله است.



شکل ۲-۲۷۶

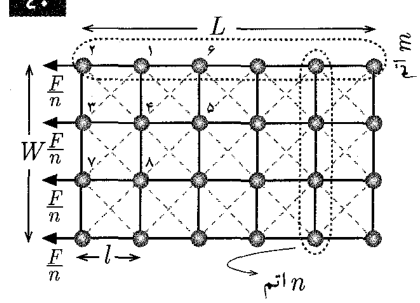
$$\left.\begin{array}{l} D\alpha v^{۲} \\ D\alpha R^{۲} \end{array}\right\} \rightarrow D\alpha R^{۲}v^{۲} \Rightarrow D = kv^{۲}R^{۲} \qquad (۲)$$

در معادله (۲)، k یک ضریب ثابت است که باعث برقراری رابطه‌ی تساوی می‌شود. مقدار D را از معادله‌ی (۱) در (۲) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\rho g = kv^{۲}R^{۲} \Rightarrow v^{۲} = \frac{۴}{۳}\frac{\pi R\rho g}{k} \Rightarrow v = ۲\sqrt{\frac{\pi\rho g}{۳k}R}$$

برای گلوله‌هایی از یک جنس مقدار ρ و k یکسان خواهد بود، پس سرعت حد متناسب با جذر شعاع است. بنابراین گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۴۰ فرض می‌کنیم در طول نوار m اتم و در عرض آن n اتم قرار دارد. بنابراین تعداد فنرهای طولی $m - ۱$ و تعداد فنرهای عرضی $n - ۱$ خواهد بود. طول اولیه‌ی فنر عرضی یا طولی بین اتم‌ها l و طول اولیه‌ی فنر قطری $\sqrt{۲}l$ می‌باشد.



شکل ۲-۲۷۷

الف) فرض می‌کنیم پس از وارد شدن نیروی F در راستای طولی، طول هر مربع به اندازه‌ی a زیاد و عرض آن به اندازه‌ی b کم شود. طول اولیه‌ی قطر که برابر با $\sqrt{۲}l$ است، با d و طول ثانویه‌ی قطر را با d' نشان می‌دهیم.

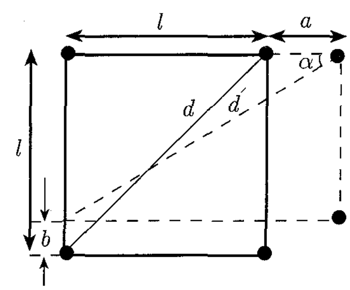
$$d' = \sqrt{(l+a)^{۲} + (l-b)^{۲}} = \sqrt{l^{۲} + ۲al + a^{۲} + l^{۲} - ۲bl + b^{۲}}$$

از جمله‌های درجه ۲ نسبت به a و b چشم‌پوشی می‌کنیم.

$$d' = \sqrt{۲l^{۲} + ۲l(a-b)} = (\sqrt{۲}l)\sqrt{۱ + \frac{a-b}{۲l}}$$

$$\Rightarrow d' \approx (\sqrt{۲}l)\left(۱ + \frac{a-b}{۲l}\right) = \sqrt{۲}l + \frac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین طول قطر مستطیل به اندازه‌ی $\frac{a-b}{\sqrt{۲}}$ افزایش یافته است.

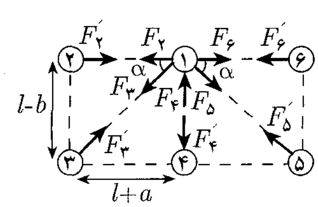


شکل ۲-۲۷۸

ب) اتم شماره‌ی (۱) و ۵ اتم اطراف آن را در نظر می‌گیریم. اتم (۱) در حال تعادل است. طبق فرض مسئله از تغییر زاویه‌ی قطر هر مستطیل با طول و عرض آن صرف‌نظر می‌کنیم. این فرض کاملاً موجه است زیرا:

$$\tan\alpha = \frac{l-b}{l+a} \quad l \gg a\,,\, l \gg b \Rightarrow \tan\alpha \approx ۱ = \tan(۴۵^{\circ})$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



شکل ۲-۲۷۹

حال تعادل نیروهای وارد بر اتم (۱) را در راستای x و y می‌نویسیم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_۶ + F_۵\cos\alpha - F_۳\cos\alpha - F_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ka + k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} - k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ka = ۰$$

$$\sum F_y = \circ \Rightarrow F_۴ - F_۵ \sin\alpha - F_۳ \sin\alpha = \circ$$

$$\Rightarrow kb - k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \circ$$

$$\Rightarrow kb - k'(a-b) = \circ \Rightarrow b(k+k') = ak'$$

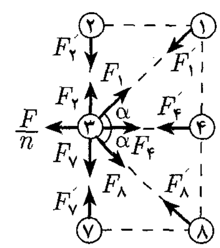
$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{k'}{k+k'} \qquad (۱)$$

حال می‌خواهیم نسبت پواسون را محاسبه کنیم. وقتی m اتم در طول داریم، بنابراین طول کل نوار L برابر است با حاصل‌ضرب $m-۱$ در طول اولیه‌ی فنر (l). برای عرض نوار هم می‌توانیم چنین بگوییم. پس داریم:

$$L = (m-۱)l \ , \ W = (n-۱)l$$

$$\Delta x = (m-۱)a \ , \ \Delta y = (n-۱)b$$

$$P_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{L}{W} = \frac{(n-۱)b}{(m-۱)a} \times \frac{(m-۱)l}{(n-۱)l} = \frac{b}{a} = \frac{k'}{k+k'}$$



شکل ۲-۲۸۰

ج) در سؤال فرض شده است که نیروی F به‌طور یکنواخت در عرض نوار توزیع شده است. بنابراین چون n اتم در عرض نوار وجود دارد، پس نیروی $\frac{F}{n}$ بر هر اتم وارد می‌شود. اتم شماره‌ی (۳) و ۵ اتم اطراف آن را در نظر می‌گیریم. حال تعادل نیروهای وارد بر اتم (۳) را در راستای x و y می‌نویسیم:

$$\sum F_x = \circ \Rightarrow F_۴ + F_۱ \cos\alpha + F_۸ \cos\alpha - \frac{F}{n} = \circ$$

$$\Rightarrow ka + k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + k'\left(\frac{a-b}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - \frac{F}{n} = \circ$$

$$\Rightarrow ka + k'(a-b) - \frac{F}{n} = \circ \Rightarrow ka + k'(a-b) = \frac{F}{n} \qquad (۲)$$

حال معادله‌ی (۲) را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$k + k'\left(۱ - \frac{b}{a}\right) = \frac{F}{n \times a} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{F}{a} = n(k+k')\left(۱ - \frac{k'}{k+k'}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{F}{a} = n\left(\frac{k^۲ + ۲kk'}{k+k'}\right)$$

حال به محاسبه‌ی مدول‌یانگ می‌پردازیم:

$$Y_s = \frac{F}{W}\frac{L}{\Delta x} = \frac{F}{(n-۱)l}\frac{(m-۱)l}{(m-۱)a} = \frac{F}{(n-۱)a}$$

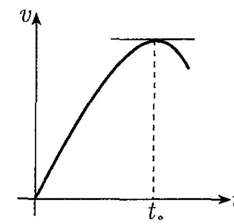
$$= \frac{n}{n-۱}\left(\frac{k^۲ + ۲kk'}{k+k'}\right)$$

از آنجایی که تعداد اتم‌ها در راستای طول و عرض نوار بسیار زیاد است، پس نسبت $\frac{n}{n-۱}$ برابر با یک خواهد بود:

$$n \to \infty \ : \ \frac{n}{n-۱} \to ۱ \Rightarrow Y_s = \frac{k^۲ + ۲kk'}{k+k'} = k + \frac{kk'}{k+k'} = k(۱ + P_s)$$

۴۱ می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان یک متحرک برابر شتاب متحرک می‌باشد، حال با توجه به شکل (۲ـ۲۸۱) شتاب متحرک در $t = 0$ مخالف صفر و در $t = t_0$ برابر صفر می‌باشد. حال با توجه به قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ می‌توان گفت در شروع حرکت نیروی وارده مخالف صفر و در مکان متناظر با زمان $t = t_0$، نیروی وارده برابر صفر خواهد بود، با توجه به این توضیحات داده شده گزینه‌های «الف»، «ج» و «د» نمی‌توانند صحیح باشند.

از طرف دیگر پس از شروع حرکت، با گذشت زمان، شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان کاهش می‌یابد، در نتیجه شتاب متحرک و نیروی وارده بر آن نیز کاهش می‌یابند، در حالی که در گزینه «د» پس از شروع حرکت، نیروی وارده بر متحرک افزایش می‌یابد، لذا این گزینه هم نمی‌تواند پاسخ صحیح باشد.



شکل ۲-۲۸۱

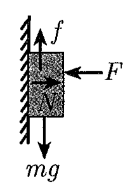
در نهایت پس از زمان $t = t_0$، شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان منفی می‌شود، در نتیجه شتاب متحرک و نیروی وارده بر آن نیز منفی خواهد شد. در حالی که درگزینه «هـ» نیروی F هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

در نتیجه گزینه «ب» صحیح است.

۴۲ ابتدا نمودار جسم آزاد را برای کتاب رسم می‌کنیم. وقتی جسم ساکن باشد یا در آستانه‌ی حرکت بوده و یا با سرعت ثابت به سمت پایین بیاید، در هر سه حالت جسم به علت نداشتن شتاب قائم، در راستای قائم تعادل نیرویی دارد. پس در هر سه حالت می‌توان نوشت که:

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ f - mg = 0 \ \Rightarrow \ f = mg$$

پس در این سه حالت می‌توان نوشت:



شکل ۲-۲۸۲

$$f_1 = f_2 = f_3 = mg$$

وقتی جسم در آستانه‌ی حرکت قرار دارد، مقدار نیروی اصطکاک ایستایی به حداکثر مقدار خود که برابر با $\mu_s N$ است، می‌رسد. از طرفی همان طور که بیان شد نیروی اصطکاک برابر با mg است. پس:

$$\left.\begin{array}{l} f_{s,\max} = \mu_s N = mg \\ N = F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ F_2 = \frac{mg}{\mu_s}$$

وقتی جسم ساکن است، نیروی اصطکاک ایستایی است، ولی به حد بیشینه‌ی خود نرسیده است، بنابراین می‌توان گفت که f_s کمتر از $\mu_s N$ است:

$$f_s < \mu_s N \ , \ N = F_1 \ , \ f_s = mg \ , \ mg < \mu_s F_1 \ \Rightarrow \ \frac{mg}{\mu_s} < F_1$$

پس نیرویی که بر جسم وارد می‌کنیم تا جسم ساکن بماند باید بیشتر از نیروی وارده در حالت آستانه‌ی حرکت باشد، یعنی $F_1 > F_2$.

وقتی جسم با سرعت ثابت به سمت پایین حرکت می‌کند بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود که مقدار آن برابر است با $f_k = \mu_k N$ که در این رابطه μ_k کوچک‌تر از μ_s است،

زیرا $f_{s,\max} > f_k$. پس می‌توان نوشت:

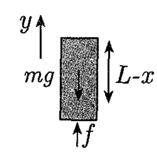
$$f_k = \mu_k N = mg \quad , \quad N = F_3 \;\Rightarrow\; F_3 = \frac{mg}{\mu_k}$$
$$\mu_k < \mu_s \;\Rightarrow\; \frac{mg}{\mu_k} > \frac{mg}{\mu_s} \;\Rightarrow\; F_3 > F_2$$

با توجه به توضیحات فوق گزینه‌ی «هـ» صحیح است.

۴۳ الف) هر فنر دارای ضریب سختی Nk می‌باشد، که در حالت عادی طول Δx و در حالت فشرده طول Δz دارد. بنابراین نیروی کشش هر فنر برابر خواهد بود با:

$$F = Nk(\Delta x - \Delta z)$$

ب) نمودار جسم آزاد قسمتی از ستون را که بالای ارتفاع x قرار دارد را رسم کرده‌ایم. (شکل ۲ـ۲۸۳)



شکل ۲-۲۸۳

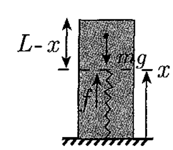
معادله تعادل را برای این قسمت از ستون می‌نویسیم.

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; f - mg = 0 \;\Rightarrow\; f = mg$$
$$m = \frac{L-x}{L}m \;\Rightarrow\; f = \frac{L-x}{L}mg$$

ج) به قسمتی از ستون که بالای نقطه‌ی x قرار دارد، نیروی وزن و نیروی کشسانی ناشی از فنرهای زیرین وارد می‌شود.

$$mg = W(L-x) \quad , \quad f = k\Delta L \quad , \quad \sum F_y = 0$$

k ضریب سختی n فنر سری است که تا فاصله‌ی x قرار گرفته‌اند. تعداد n از یک تناسب ساده به‌دست می‌آید.



شکل ۲-۲۸۴

$$\frac{N}{L} = \frac{n}{x} \;\Rightarrow\; n = N\frac{x}{L}$$

ضریب سختی برآیند برای چند فنر سری از رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید:

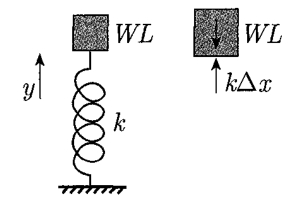
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots$$
$$\frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{Nk} + \frac{1}{Nk} + \cdots + \frac{1}{Nk}}_{N\frac{x}{L}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{k} = N\frac{x}{L}\left(\frac{1}{Nk}\right) \;\Rightarrow\; K = k\frac{l}{x}$$

طول ثانویه برای طول x را با $z(x)$ نشان می‌دهیم، پس تغییر طول برای قسمت زیر نقطه‌ی x برابر است با: $\Delta L = x - z(x)$.

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; f - mg = 0 \;\Rightarrow\; k\Delta L - W(L-x) = 0$$
$$k\frac{L}{x}\big(x - z(x)\big) - W(L-x) = 0 \;\Rightarrow\; z(x) = \left(\frac{w}{kL}\right)x^2 + \left(1 - \frac{W}{k}\right)x$$

د) اگر مکان ثانویه‌ی نقطه‌ی بالایی ستون را که در آن $x = L$ است، به‌دست آوریم و حاصل را از L کم کنیم، تغییر طول ستون را به‌دست آورده‌ایم:

$$x = L \rightarrow z(L) = \frac{W}{kL}L^{۲} + (۱ - \frac{W}{k})L$$

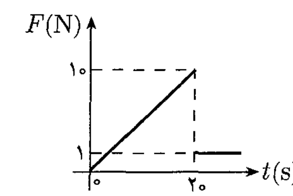


شکل ۲-۲۸۵

ه) سیستم مورد نظر را در شکل (۲-۲۸۵) نشان داده‌ایم. معادله‌ی تعادل جرم مورد نظر عبارتست از:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow k\Delta x - WL = ۰ \Rightarrow \Delta x = \frac{WL}{k}$$

۴۴ در بازه‌ی زمانی صفر تا ۲۰ ثانیه، نیروی متغیر $F = ۰/۵t$ بر جسم وارد می‌شود و از ثانیه‌ی بیستم به بعد، نیروی ثابت یک نیوتن بر جسم وارد می‌شود. نمودار تغییرات این نیرو بر حسب زمان به صورت شکل (۲-۲۸۶) است.



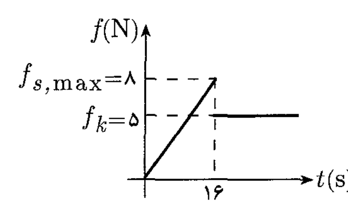
شکل ۲-۲۸۶

نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه برابر خواهد بود با:

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s mg = ۰/۸ \times ۱ \times ۱۰ = ۸\text{N}$$

وقتی نیروی وارد بر جسم کمتر از ۸N است، جسم در حالت ساکن باقی می‌ماند. در این حالت نیروی F که متغیر بوده بر آن وارد می‌شود، در حالی که جسم در راستای افقی تعادل نیرویی دارد. پس نیروی اصطکاک ایستایی تا وقتی که $F < ۸\text{N}$ است، برابر با F متغیر است. وقتی نیروی وارد بر جسم ۸N است، جسم در آستانه‌ی حرکت می‌باشد. با بیشتر شدن این نیرو، جسم شروع به حرکت کرده و پس از آن نیروی اصطکاک جنبشی داریم که برابر است با:

$$f_k = \mu_k N = ۰/۵ \times ۱۰ = ۵\text{N}$$

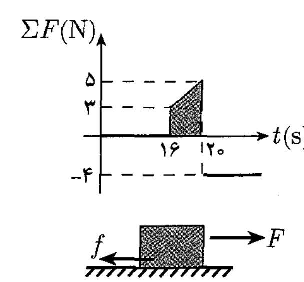


شکل ۲-۲۸۷

پس از ثانیه‌ی ۲۰ با وجود کم شدن نیروی وارد بر جسم چون جسم دارای سرعت است به حرکت خود ادامه می‌دهد. در این حالت همچنان بر جسم نیروی اصطکاک جنبشی وارد می‌شود، تا جایی که این نیروی مخالف باعث ایستادن جسم شود. پس نمودار تغییرات نیروی اصطکاک بر حسب زمان مانند شکل روبه‌رو است:

نیروی برآیند که از تفریق دو نیروی F و f به‌دست می‌آید، مانند شکل (۲-۲۸۸) نسبت به زمان تغییر می‌کند.

$$\sum F = ma$$



شکل ۲-۲۸۸

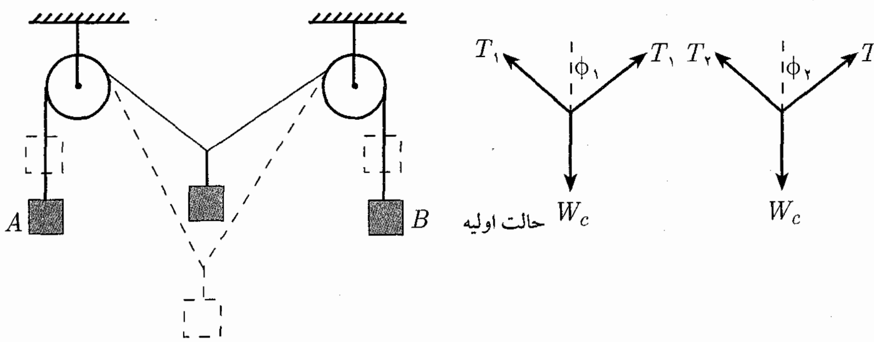
از آنجایی که $m = ۱\text{kg}$ است پس می‌توان گفت که نمودار شتاب وارد بر جسم، همان نمودار $\sum F$ خواهد بود. سرعت جسم در پایان مرحله‌ی اول مساحت زیر نمودار تا ثانیه‌ی ۲۰ می‌باشد.

$$S = \frac{۳ + ۵}{۲} \times (۲۰ - ۱۶) = ۱۶$$

$$\Delta v = v - v_۰ = v = ۱۶\text{m/s}$$

۴۵ هرگاه سیستم ساکن باشد، نیروی کشش نخ‌های متصل به وزنه‌های A و B به ترتیب برابر وزن وزنه‌های A و B خواهد بود. در حالت اولیه که سیستم دارای تعادل می‌باشد، برآیند نیروهای کشش

نخ در نقطه‌ی C با وزن وزنه‌ی C برابر می‌باشد، در واقع یکدیگر را خنثی خواهند کرد. در این حالت زاویه‌ی بین دو نخ در نقطه‌ی C را مطابق شکل (۲ـ۲۸۹) برابر $\phi_۱$ در نظر می‌گیریم. در حالت ثانویه که وزنه C را به طرف پایین کشیده‌ایم، با توجه به هندسه‌ی مسئله زاویه‌ی بین دو نخ در نقطه‌ی C کاهش می‌یابد. زاویه‌ی بین دو نخ در نقطه‌ی C در حالت ثانویه را با $\phi_۲$ نشان می‌دهیم.



شکل ۲-۲۸۹

توجه کنید که نیروی نخ‌ها در حالت ثانویه ($T_۲$)، برابر نیروی نخ‌ها در حالت اولیه ($T_۱$) نمی‌باشد، زیرا در حالت ثانویه سیستم از حالت تعادل خارج شده است و وزنه‌های A و B نیز تعادل نخواهند داشت. اما ما صرفاً برای تعیین جهت حرکت جسم C، مجاز خواهیم بود که وزنه‌های A و B را در حال تعادل فرض کنیم، آنگاه وضع تعادلی C را بررسی کنیم، به این صورت که اگر برآیند نیروهای وارد بر C به سمت بالا بود نتیجه می‌گیریم که جسم C به سمت بالا حرکت خواهد کرد و اگر برآیند نیروهای وارد بر C به سمت پایین بود، نتیجه می‌گیریم که جسم C به سمت پایین حرکت می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم که $T_۱ = T_۲ = T$ است. برای برقراری تعادل در حالت اولیه، داریم

$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; W_C - ۲\cos\frac{\phi_۱}{۲} = ۰ \;\Rightarrow\; W_C = ۲T\cos\frac{\phi_۱}{۲}$$

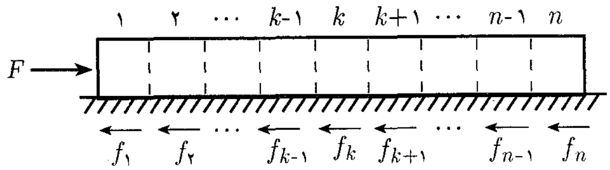
حال برآیند نیروهای وارد بر جسم C در حالت ثانویه به سمت بالا را به‌دست می‌آوریم.

$$F = ۲T\cos\frac{\phi_۲}{۲} - W_C \;\Rightarrow\; F = ۲T\cos\frac{\phi_۲}{۲} - ۲T\cos\frac{\phi_۱}{۲}$$
$$\Rightarrow\; F = ۲T\left(\cos\frac{\phi_۲}{۲} - \cos\frac{\phi_۱}{۲}\right) > ۰$$

با توجه به اینکه $\phi_۱ > \phi_۲$ می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $\cos\frac{\phi_۲}{۲} > \frac{\cos\phi_۱}{۲}$ خواهد بود و در نتیجه F مثبت بوده و C به سمت بالا حرکت خواهد کرد. در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۴۶ از آنجایی که اصطکاک سطح ناچیز است پس سطح تنها نیروی N را در راستای y به جسم وارد می‌کند و در راستای افقی بر جسم نیرویی وارد نمی‌شود. نیروی افقی دیگری هم بر جسم وارد نمی‌شود پس نیروی کشش طناب نباید مؤلفه‌ای در راستای x داشته باشد یعنی باید طناب در راستای قائم بر جسم نیرو وارد کند. بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۴۷ ضریب اصطکاک جسم iام با سطح μ_iاست. جرم قطعات با هم برابر است. نیروی عمودی سطح برای همه‌ی اجسام برابر است با $N = mg$. پس نیروی اصطکاک برای جسم iام برابر است با: $f_i = \mu_i mg$.

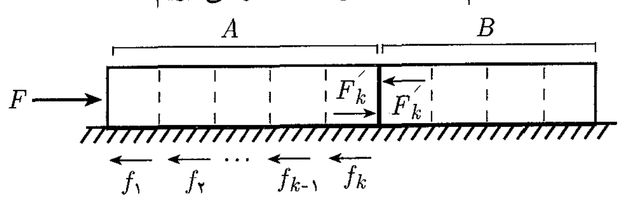


شکل ۲-۲۹۰

ابتدا نیروی برآیند وارد بر کل مجموعه را حساب می‌کنیم تا شتاب مجموعه به‌دست آید:

$$\sum F_x = (\sum m_i)a_x \Rightarrow F - (f_۱ + f_۲ + \cdots + f_n) = nma_x$$
$$\Rightarrow F - (\mu_۱ mg + \mu_۲ mg + \cdots + \mu_n mg) = nma_x$$
$$\Rightarrow F - mg\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = nma_x$$
$$\Rightarrow a_x = \frac{۱}{n}\left(\frac{F}{m} - g\sum_{i=۱}^{n}\mu_i\right) \qquad (۱)$$

حال برای محاسبه‌ی نیرویی که جسم kام به جسم $k+۱$ام وارد می‌کند، تمام اجسام ۱ تا k را یک مجموعه و بقیه‌ی اجسام را یک مجموعه در نظر می‌گیریم.



شکل ۲-۲۹۱

F'_k نیرویی است که مجموعه‌ی B از طریق جسم $k+۱$ بر مجموعه‌ی A از طریق جسم k وارد می‌کند. نیروی F_k عکس‌العمل این نیرو، در واقع نیرویی است که جسم k بر جسم $k+۱$ وارد می‌کند. حال معادله‌ی برآیند نیروهای وارد بر مجموعه‌ی A را می‌نویسیم.

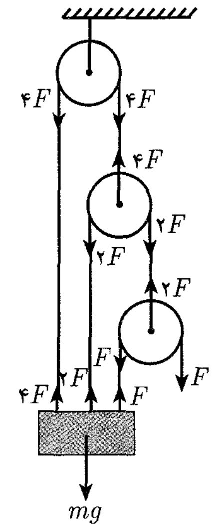
$$\sum F_x = \left(\sum_{i=۱}^{k} m\right)a_x \Rightarrow F - (f_۱ + f_۲ + f_۳ + \cdots + f_k) - F'_k = kma_x$$

مجموعه‌ی A که بخشی از مجموعه‌ی کلی شامل n جعبه است، به همراه مجموعه با شتاب رابطه‌ی (۱) در حال حرکت است پس:

$$F - mg\sum_{i=۱}^{k}\mu_i - F'_k = km\left(\frac{۱}{n}\Big(\frac{F}{m} - g\sum_{i=۱}^{n}\mu_i\Big)\right)$$
$$F'_k = F_k = F - mg\sum_{i=۱}^{k}\mu_i - \frac{k}{n}\Big(F - mg\sum_{i=۱}^{n}\mu_i\Big)$$
$$= \frac{۱}{n}\Big(nF - nmg\sum_{i=۱}^{k}\mu_i - kF + kmg\sum_{i=۱}^{n}\mu_i\Big)$$

$$F_k = \frac{1}{n}\Big((n-k)F + mg\big(\sum_{i=1}^{n} k\mu_i - \sum_{i=1}^{k} n\mu_i\big)\Big)$$

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.



شکل ۲-۲۹۲

۴۸ مجموعه در حال تعادل است. در صورت صرف‌نظر از جرم نخ و اصطکاک با قرقره، کشش در طول یک نخ ثابت می‌ماند. بنابراین از آنجایی که قرقره‌ها وزن ندارند، نیروها درون این مجموعه به صورت شکل (۲ـ۲۹۲) خواهند بود.

به دو طرف قرقره‌ی بالایی نیروی $\sum F$ وارد می‌شود پس کشش نخ بالایی برابر با $8F$ می‌باشد. پس گزینه‌ی «و» صحیح است.

۴۹ الف) سرعت خودرو برابر است با: $v = \alpha n b$.

در این رابطه α عددی ثابت و برابر با $0{,}2\mathrm{m}$، n تعداد دنده‌های گیربکس است که حداکثر ۵ می‌باشد و b تعداد دور موتور است که حداکثر مقدار آن ۳۰۰۰ دور بر دقیقه (rpm) است. حداکثر سرعت خودرو وقتی است که حداکثر مقادیر n و b را دارا باشد.

$$v_{\max} = \alpha n b = (0{,}2\mathrm{m}) \times 5 \times 3000\ \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}}$$
$$= (0{,}2\mathrm{m}) \times 5 \times 3000\ \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}} \times \frac{\text{دقیقه}}{60\mathrm{s}} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

مسلماً در آخرین دنده رسیدن به حداکثر دور موتور عاقلانه نیست، اما این حداکثر سرعتی است که این خودرو می‌تواند به‌دست آورد.

ب) در حداکثر سرعت خودرو، شتاب خودرو صفر است و در نتیجه نیروی برآیند وارد بر آن صفر است. یعنی نیروی موتور با نیروی مقاوم $f = 2000\mathrm{N}$ برابر است.

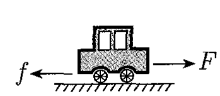
ج) چون در تمام طول حرکت راننده با فشردن پدال گاز حداکثر نیروی موتور را به کار می‌بندد پس در تمام حرکت F_m را برابر با $12000\mathrm{N}$ باید در نظر گرفت. ابتدا اتومبیل در دنده‌ی ۱ بوده نیروی پیشران برابر است با: $F = \frac{F_m}{n} = 12000\mathrm{N}$. برای رسیدن به دنده‌ی ۲، دور موتور باید به ۳۰۰۰ دور بر دقیقه برسد. در این حالت سرعت برابر است با:

$$v = \alpha n b_\circ = 0{,}2 \times 1 \times \frac{3000}{60} = 10\mathrm{m/s}$$

$$f = 2000\mathrm{N} = \mathrm{cte}\ ,\ \sum F_x = ma_x \Rightarrow F - f = ma_x$$

$$\Rightarrow 12000 - 2000 = 10000 = 1000 a_x \Rightarrow a_x = 10\mathrm{m/s^2}$$

$$v = at + v_\circ \Rightarrow 10 = 10t \Rightarrow t = 1\mathrm{s}$$



شکل ۲-۲۹۳

پس در طی یک ثانیه به سرعت $10\mathrm{m/s}$ رسیده و به دنده‌ی ۲ می‌رود. نیروی پیشران برابر است با:

$$F = \frac{F_m}{n} = \frac{12000}{2} = 6000\mathrm{N}$$

سرعت مورد نیاز برای دنده‌ی ۳:

$$v = \alpha n b_\circ = 0{,}2 \times 2 \times \frac{3000}{60} = 20\mathrm{m/s}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - f = ۶۰۰۰ - ۲۰۰۰ = ۱۰۰۰a_x$$
$$\Rightarrow a_x = ۴\mathrm{m/s^۲}$$
$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۲۰ = ۴t + ۱۰ \Rightarrow t = ۲/۵\mathrm{s}$$

پس در طی ۲/۵ ثانیه به سرعت $۲۰\mathrm{m/s}$ رسیده و به دنده‌ی ۳ می‌رود. نیروی پیشران برابر است با:

$$F = \frac{F_m}{n} = \frac{۱۲۰۰۰}{۳} = ۴۰۰۰\mathrm{N}$$

سرعت مورد نیاز برای رسیدن به دنده‌ی ۴:

$$v = \alpha n b_\circ = ۰/۲ \times ۳ \times \frac{۳۰۰۰}{۶۰} = ۳۰\mathrm{m/s}$$

در حالی که اتومبیل می‌خواهد به $۱۰۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ که معادل $۲۷/۷\mathrm{m/s}$ است برسد. پس به دنده‌ی ۴ نمی‌رسد.

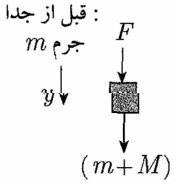
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - f = ۴۰۰۰ - ۲۰۰۰ = ۱۰۰۰a_x$$
$$\Rightarrow a_x = ۲\mathrm{m/s^۲}$$

زمان رسیدن به سرعت $۲۷/۷\mathrm{m/s}$:

$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۲۷/۷ = ۲t + ۲۰ \Rightarrow t = ۳/۸۹\mathrm{s}$$
$$t_{\text{کل}} = ۱ + ۲/۵ + ۳/۸۹ = ۷/۳۹\mathrm{s}$$

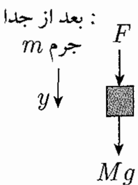
پس در نهایت طی ۷/۳۹ ثانیه به سرعت $۱۰۰\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ می‌رسد.

۵۰ جرم تکه جدا شده را با m و جرم بقیه جسم را با M نشان می‌دهیم. هرگاه در بالاترین نقطه حرکت جسم، نیروی فنر را با F نشان دهیم، داریم:



شکل ۲-۲۹۴

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F + (M+m)g = (M+m)a_۱$$
$$\Rightarrow a_۱ = \frac{F + (M+m)g}{M+m} \Rightarrow a_۱ = \frac{F}{M+m} + g$$
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F + Mg = Ma_۲$$
$$\Rightarrow a_۲ = \frac{F + Mg}{M} \Rightarrow a_۲ = \frac{F}{M} + g$$



شکل ۲-۲۹۵

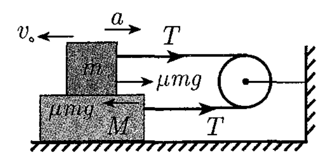
اگر F را مثبت در نظر بگیریم، $\frac{F}{M} > \frac{F}{M+m}$ است و در نتیجه $a_۲ > a_۱$ است. اما آیا همیشه F مثبت است؟ لازم است به یک نکته ظریف توجه کنیم که در بالاترین نقطه حرکت جسم، ممکن است فنر، طولی بزرگ‌تر، مساوی یا کوچک‌تر از طول آزاد خود را داشته باشد. هرگاه طول فنر در بالاترین نقطه حرکت جسم از طول آزادش کمتر باشد، یعنی فنر فشرده است و نیروی اعمالی از فنر به جسم (F) به سمت پایین و مثبت می‌باشد و $a_۲ > a_۱$ است و هرگاه طول فنر در بالاترین نقطه حرکت جسم از طول آزادش بیشتر باشد، فنر کشیده است و نیروی اعمالی از فنر

به جسم F به سمت بالا و منفی می‌باشد و در نتیجه $a_۱ > a_۲$ است و هرگاه فنر در بالاترین نقطه حرکت جسم طول آزاد خود را داشته باشد، $F = ۰$ بوده و $a_۱ = a_۲$ است. بنابراین حالت‌هایی هست که $a_۲ > a_۱$، حالت‌هایی هست که $a_۱ > a_۲$ و حالت‌هایی هست که $a_۱ = a_۲$ می‌باشد. در نتیجه گزینه‌ی «د» صحیح است.

۵۱ نیروهای وارد بر دو جسم به صورت شکل (۲ـ۲۹۶) هستند.

چون دو جسم با نخ به هم وصل هستند پس شتاب یکسانی دارند ولی با جهت‌های مختلف.

قانون دوم نیوتن را برای دو جسم می‌نویسیم:



شکل ۲-۲۹۶

$$\begin{cases} T + \mu mg = ma \\ \mu mg - T = Ma \end{cases} \Rightarrow ۲\mu mg = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{۲\mu mg}{m+M}$$

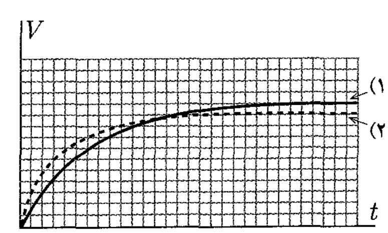
بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۵۲ مطابق نمودار $v - t$، دو جسم پس از گذشت زمان کافی به سرعت ثابت رسیده‌اند، یعنی در این هنگام نیروی اعمالی به آنها $(F_۲, F_۱)$ برابر نیروی مقاوم مایع می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{l} F_۱ = k_۱ v_۱ \\ F_۲ = k_۲ v_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲} = \frac{k_۱}{k_۲} \times \frac{v_۱}{v_۲}$$

پس از گذشت زمان کافی و ثابت شدن سرعت‌ها، نسبت $\frac{v_۱}{v_۲}$ به راحتی از روی نمودار به‌دست می‌آید، $v_۱$ برابر ۱۱ واحد و $v_۲$ برابر ۱۰ واحد است، لذا $\frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۱۱}{۱۰}$ می‌باشد.

$$\frac{F_۱}{F_۲} = \frac{k_۱}{k_۲} \times \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۱۱k_۱}{۱۰k_۲} \qquad (۱)$$



شکل ۲-۲۹۷

از طرف دیگر می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی $v - t$ برابر شتاب جسم می‌باشد. در لحظه $(t = ۰)$ نسبت $\frac{a_۱}{a_۲}$ را به کمک نمودار به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{\frac{۱۵}{۷}}{\frac{۱۵}{۵}} = \frac{۵}{۷}$$

می‌دانیم در $t = ۰$ سرعت اجسام صفر می‌باشند، لذا هیچ نیروی مقاومی از طرف مایع به آنها وارد نمی‌شود.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{F_۱/m_۱}{F_۲/m_۲} = \frac{۵}{۷}$$

$$\frac{F_۱}{F_۲} \times \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲} \times ۲ = \frac{۵}{۷}$$

$$\Rightarrow \frac{F_۱}{F_۲} = \frac{۵}{۱۴} \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{11k_1}{10k_2}=\frac{5}{14}\Rightarrow\frac{k_1}{k_2}=\frac{10\times 5}{11\times 14}\Rightarrow\frac{k_2}{k_1}=\frac{154}{50}=3/08$$

در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

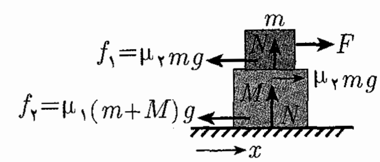
۵۳ نیروی عمودی سطحی که مکعب بر جسم m وارد می‌کند برابر وزن جسم است.

$N=mg\ ,\ f_1=\mu_2 mg$ از طرف مکعب بر جسم m وارد می‌شود.

$f'_1=\mu_2 mg$ از طرف جسم بر مکعب وارد می‌شود.

نیروی عمودی سطحی که بر مکعب از سمت زمین وارد می‌شود برابر با وزن جسم و مکعب است.

$N=(m+M)g\ \ ,\ \ f_2=\mu_1(m+M)g$ از طرف زمین بر مکعب وارد می‌شود.



شکل ۲-۲۹۸

برای حرکت کردن مکعب از حالت سکون باید برآیند نیروهای وارد بر آن غیرصفر باشد. سمت راست را جهت مثبت محور x در نظر گرفته و برآیند نیروهای وارد بر جسم M را در نظر می‌گیریم:

$$\sum F_x=Ma_x\ \Rightarrow\ \mu_2 mg-\mu_1(m+M)g=Ma_x$$

در صورتی که جسم در راستای مثبت محور x حرکت کند، نیروی اصطکاک بین مکعب و زمین به سمت چپ بر مکعب وارد می‌شود (همان طور که در شکل نشان داده شده است) در این حالت برای مثبت شدن a_x باید داشته باشیم:

$$\mu_2 mg-\mu_1(m+M)g>0\ \Rightarrow\ \mu_2 m>\mu_1(m+M)$$

برای برقراری این نامساوی فقط شرط $\mu_2>\mu_1$ کافی نیست. فرض کنیم:

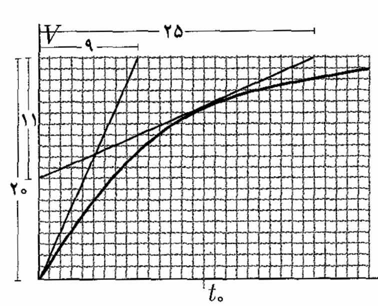
$$\mu_2=\mu_1+\mu'$$

$$\Rightarrow \mu_2 m>\mu_1(m+M)\ \Rightarrow\ \mu_1 m+\mu' m>\mu_1 m+\mu M$$

$$\Rightarrow \mu' m>\mu M\ \Rightarrow\ m>\frac{\mu M}{\mu'}$$

پس باید m از حد خاصی بزرگ‌تر باشد. بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

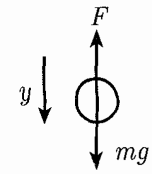
۵۴ همان‌طور که می‌دانید شیب خط مماس بر منحنی سرعت ـ زمان برابر شتاب متحرک است. می‌دانیم در لحظه $t=0$ متحرک ساکن است لذا نیروی اصطکاک هوا در این لحظه صفر است و شتاب جسم برابر g می‌باشد. با ترسیم خط مماس در $t=0$، شیب این خط از روی نمودار شکل (۲ـ۲۹۹) $g=\frac{20}{9}$ به‌دست می‌آید. همچنین شتاب در لحظه $t=t_0$ با ترسیم خط مماس در این لحظه و یافتن شیب آن، برابر $a=\frac{11}{25}$ است.



شکل ۲-۲۹۹

البته مقادیر a و g بر حسب واحدهای نشان داده شده در نمودار شکل (۲ـ۲۹۹) به‌دست آمده است و لازم است که آنها را به واحد متر بر مجذور ثانیه تبدیل کنیم. می‌دانیم که $g=10\,\mathrm{m/s^2}$ است. بنابراین

$$\frac{a}{g}=\frac{11/25}{20/9}=\frac{99}{500}\Rightarrow a=\frac{99}{500}\times 10\approx 2\,\mathrm{m/s^2}$$



شکل ۲-۳۰۰

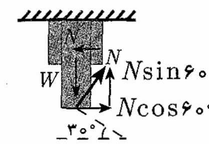
نمودار جسم آزاد ذره در لحظه $t = t_۰$ را در شکل (۲ـ۳۰۰) نشان داده‌ایم.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - F = ma$$

$$\Rightarrow ۰/۴(۱۰) - F = ۰/۴(۲) \Rightarrow F = ۳/۲\text{N}$$

توجه کنید که مقدار به‌دست آمده یک مقدار تقریبی است. در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

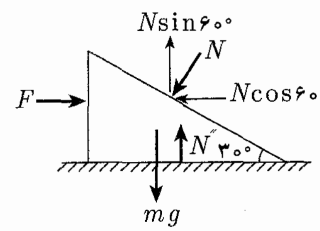
۵۵ از طرف سطح شیب‌دار به وزنه‌ی W نیرویی تماسی N که در راستای عمود بر سطح تماس‌شان است وارد می‌شود. پس نمودار جسم آزاد وزنه‌ی W به صورت شکل (۲ـ۳۰۱) است.



شکل ۲-۳۰۱

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N \sin ۶۰^\circ = W \Rightarrow N = \frac{W}{\sin ۶۰^\circ}$$

نیروهای وارد بر سطح شیب‌دار به صورت شکل (۲ـ۳۰۲) است.



شکل ۲-۳۰۲

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F - N\cos ۶۰^\circ = ۰ \Rightarrow F - \frac{W}{\sin ۶۰^\circ}\cos ۶۰^\circ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{F}{W} = \cot ۶۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه گزینه «د» صحیح است.

۵۶ به جسم وقتی در آستانه‌ی جدایی از سطح است، دیگر نیروی عمودی سطح وارد نمی‌شود. اما جسم با همان شتاب حرکت سطح، به سمت بالا می‌رود چون هنوز از سطح جدا نشده است.

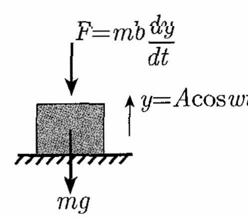
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -F - mg = m\frac{d^۲y}{dt^۲} \Rightarrow -b\frac{dy}{dt} - g = \frac{d^۲y}{dt^۲}$$

$$y = A\cos\omega t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\omega t \Rightarrow \frac{d^۲y}{dt^۲} = -A\omega^۲\cos\omega t$$

$$+ bA\omega\sin\omega t - g = -A\omega^۲\cos\omega t$$

$$\Rightarrow A = \frac{g}{\omega(b\sin\omega t + \omega\cos\omega t)} \qquad (۱)$$

در این رابطه t متغیر است. برای پیدا کردن حداکثر میزان A از رابطه (۱) نسبت به زمان مشتق گرفته برابر با صفر می‌گذاریم:



شکل ۲-۳۰۳

$$\frac{dA}{dt} = ۰ \Rightarrow \frac{-wg(bw\cos\omega t - \omega^۲\sin\omega t)}{w^۲(b\sin\omega t + w\cos\omega t)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -wg(bw\cos\omega t - w^۲\sin\omega t) = ۰$$

$$\Rightarrow b\cos\omega t - w\sin\omega t = ۰ \Rightarrow \tan\omega t = \frac{b}{w} \Rightarrow \sin\omega t = \frac{b}{\sqrt{b^۲ + w^۲}}$$

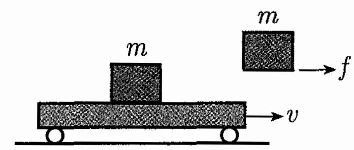
$$\cos\omega t = \frac{w}{\sqrt{b^۲ + w^۲}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{g}{w\left(b(\frac{b}{\sqrt{b^۲+w^۲}})\right) + w\left(\frac{w}{\sqrt{b^۲+w^۲}}\right)}$$

$$= \frac{g}{w\left(\frac{b^۲+w^۲}{\sqrt{b^۲+w^۲}}\right)} \Rightarrow A = \frac{g}{w\sqrt{b^۲+w^۲}}$$

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۵۷ گاری در بازه زمانی ۰ تا T با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. می‌دانیم جعبه که در زمان صفر ساکن بوده است، مطابق شکل (۲ـ۳۰۴) در این لحظه بر اثر حرکت گاری، شتاب افزاینده‌ای برابر $\frac{f}{m}$ پیدا می‌کند، در این لحظه f نیروی اصطکاک بین جعبه و گاری می‌باشد.

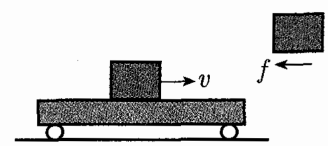


شکل ۲-۳۰۴

در مورد سرعت جعبه در زمان T دو حالت می‌توان وجود داشته باشد:

حالت اول: جعبه قبل از زمان T به سرعت v رسیده است، که این زمان را با T' نشان می‌دهیم. بنابراین جعبه نسبت به گاری ساکن می‌شود و نیروی اصطکاک میان جعبه و سطح از بین می‌رود و جعبه از زمان T' تا T با سرعت ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد $(T' < T)$.

حالت دوم: جعبه تا زمان T به سرعت v نرسیده است. در این صورت جعبه در زمان T به حداکثر سرعت خود که کمتر از v است می‌رسد، این سرعت را با v' نشان می‌دهیم $(v' < v)$.



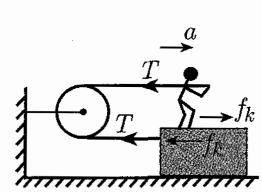
شکل ۲-۳۰۵

از زمان T به بعد، گاری ساکن است اما در لحظه T، جعبه دارای سرعت می‌باشد، بنابراین مطابق شکل (۲ـ۳۰۵) جعبه شتاب کاهنده‌ای برابر $\frac{f}{m}$ خواهد داشت. توجه کنید که مقدار شتاب کاهنده در این مرحله با مقدار شتاب افزاینده در مرحله قبل برابر است. به هر حال در این مرحله، شتاب کاهنده‌ی مذکور سبب کاهش سرعت جسم و در نهایت توقف آن می‌شود. حال اگر در مرحله قبل حالت اول رخ داده باشد، جعبه در مدت زمان T' متوقف می‌شود و اگر حالت دوم رخ داده باشد، جعبه در مدت زمان T متوقف خواهد شد. بنابراین برای محاسبه کل مدت زمان توقف جعبه t، داریم:

$$\text{حالت اول} : t = T + T' < ۲T$$
$$\text{حالت دوم} : t = T + T = ۲T$$

بنابراین مواردی هست که $t = ۲T$، و مواردی هست که $t < ۲T$ باشد. در نتیجه گزینه «د» صحیح است.

۵۸ فرد با پای خود نیرویی افقی بر جسم زیرین وارد می‌کند که این نیروی اصطکاک است. فرد نیرویی به سمت چپ بر جسم وارد می‌کند تا با استفاده از عکس‌العمل این نیرو به سمت راست حرکت کند. فرد طناب را با نیروی T به سمت راست می‌کشد در حالی که طناب نیروی T به سمت چپ بر فرد وارد می‌کند. از آنجایی که فرد و جسم با طناب به هم وصل هستند شتاب یکسانی دارند ولی در جهت مخالف.



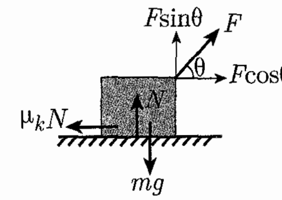
شکل ۲-۳۰۶

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیروهای وارد بر فرد} : f_k - T = ma \Rightarrow \mu mg - T = ma \\ \text{نیروهای وارد بر جسم} : T + f_k = ma \Rightarrow T + \mu mg = ma \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow ۲\mu mg = ۲ma \Rightarrow a = \mu g$$

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۵۹ از روی نمودار مشخص است که $a_{\max}$ در $\theta = ۴۵^\circ$ به‌دست می‌آید. وقتی F با زاویه‌ی θ بر جسم وارد می‌شود، معادله‌ی نیروهای وارد بر جسم چنین خواهد بود:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N + F\sin\theta - mg = ۰ \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$$



شکل ۲-۳۰۷

از آنجایی که جسم روی سطح اصطکاک‌دار در حال حرکت و کشیده شدن است باید از نیروی اصطکاک جنبشی استفاده کرد.

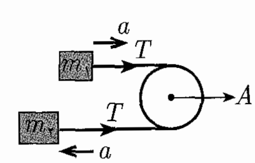
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F\cos\theta - \mu_k N = ma$$
$$\Rightarrow F\cos\theta + F\mu_k\sin\theta - \mu_k mg = ma$$
$$\Rightarrow a(\theta) = \frac{F}{m}(\cos\theta + \mu_k\sin\theta) - \mu_k g$$

نمودار نشان داده شده در شکل (۲ـ۳۰۷)، نمودار معادله‌ی $a(\theta)$ است. $a(\theta)$ در $\theta = ۰$ برابر با صفر و در $\theta = ۴۵^\circ$، حداکثر شده است.

$$a(\theta = ۰) = \frac{F}{m}(\cos ۰^\circ + \mu_k \sin ۰^\circ) - \mu_k g = ۰ \Rightarrow F = \mu_k mg \quad (۱)$$
$$\left.\frac{da}{d\theta}\right|_{\theta=۴۵^\circ} = ۰ \Rightarrow \frac{da}{d\theta} = \frac{F}{m}(-\sin\theta + \mu_k\cos\theta) = ۰$$
$$\Rightarrow \mu_k = \left.\tan\theta\right|_{\theta=۴۵^\circ} = ۱ \xrightarrow{(۱)} F = mg$$
$$a_{\max} = a(\theta = ۴۵^\circ) = \frac{F}{m}(\cos ۴۵^\circ + \mu_k \sin ۴۵^\circ) - \mu_k g$$
$$= g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - g = g(\sqrt{۲} - ۱)$$

پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶۰ فرض می‌کنیم جرم $m_۱$ نسبت به قرقره شتاب a به سمت راست و جرم m نسبت به قرقره شتاب a به سمت چپ دارد. علت برابر بودن این شتاب‌ها وصل بودن دو جسم با طناب به هم است. نیروهای وارد بر اجسام مانند شکل (۲ـ۳۰۸) است.



شکل ۲-۳۰۸

$$\left.\begin{array}{l} T = m_۱(a + A) \Rightarrow \dfrac{T}{m_۱} = a + A \\ T = m_۲(A - a) \Rightarrow \dfrac{T}{m_۲} = A - a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T}{m_۱} + \frac{T}{m_۲} = ۲A$$
$$\Rightarrow T = \frac{۲A}{\frac{۱}{m_۱} + \frac{۱}{m_۲}} = \frac{۲Am_۱m_۲}{m_۱ + m_۲}$$

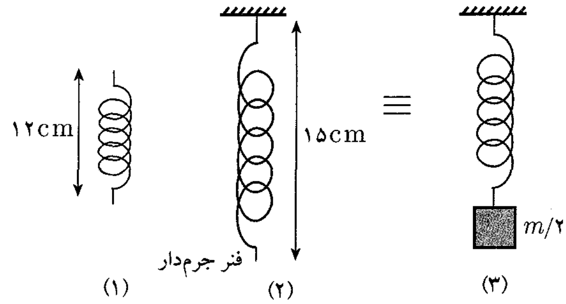
از تقسیم T بر $m_۱$ شتاب جرم $m_۱$ و از تقسیم T بر $m_۲$ شتاب جرم $m_۲$ به‌دست می‌آید.

$$a_۱ = \frac{T}{m_۱} = \frac{۲Am_۲}{m_۱ + m_۲} \quad , \quad a_۲ = \frac{T}{m_۲} = \frac{۲Am_۱}{m_۱ + m_۲}$$

چون $m_۲ > m_۱$ پس می‌توان گفت: $a_۱ > A > a_۲$.

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

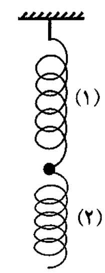
۶۱ با استفاده از راهنمایی سؤال، شکل (۲ـ۳۰۹) حاصل می‌شود.



شکل ۲-۳۰۹

فرض می‌کنیم که جرم هر یک از فنرها m باشد پس مطابق شکل (۲ـ۳۰۹) می‌توانیم فنر آویزان را شبیه‌سازی کنیم. حال در شکل (۲ـ۳۰۹ـ۳) فنر بدون جرمی داریم که وزنه‌ی $\frac{m}{2}$ را تحمل می‌کند و $15 - 12 = 3\text{cm}$ افزایش طول داده است پس برای سختی فنر داریم:

$$k = \frac{m/2}{3} = \frac{m}{6}$$

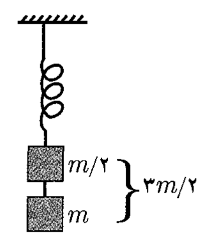


شکل ۲-۳۱۰

حال دو فنر را سری می‌کنیم مطابق شکل (۲ـ۳۱۰) فنر پایینی دقیقاً شبیه فنری است که از نقطه‌ای آویزان شده باشد یعنی همان شکل (۲ـ۳۰۹ـ۲) و (۲ـ۳۰۹ـ۳)، پس ۳cm افزایش طول می‌دهد $\Delta x_2 = 3\text{cm}$ اما به فنر دوم علاوه بر نیروی ناشی از وزن خود که معادل وزنه‌ای به جرم $\frac{m}{2}$ است نیروی وزن فنر (۲) یعنی m نیز وارد می‌شود. (مطابق شکل (۲ـ۳۱۰))

$$\Delta x_1 = \frac{\frac{3m}{2}}{k} = \frac{\frac{3m}{2}}{\frac{m}{6}} = 9\text{cm}$$

$$\Delta x_{\text{total}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 9 + 3 = 12\text{cm}$$



شکل ۲-۳۱۱

۶۲ نیروی اصطکاک وارده برابر است با $f_k = -m\alpha v$. در نتیجه شتاب ناشی از آن برابر است با:

$$a_k = -\alpha v$$

حال اگر بخواهیم شتاب ذره بین لحظات ۰ و t (t کوچک است) را بررسی کنیم طبق گفته‌ی صورت سؤال می‌توانیم از تقریب زیر استفاده کنیم و در واقع شتاب را در این بازه‌ی زمانی ثابت فرض کنیم:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_k(t) + a_k(t=0)}{2} \\ &= \frac{-\alpha v(t) - \alpha v(t=0)}{2} = \frac{-\alpha v_f - \alpha v_i}{2} = a \qquad (1) \end{aligned}$$

باید رابطه‌ای بین v_i و v_f بیابیم (طبق گزینه‌ها) پس با فرض a ثابت داریم:

$$v(t) = v(t=0) + at \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow v_f = v_i + \frac{1}{2}\big(-\alpha(v_i + v_f)\big)t$$

$$2v_f = 2v_i - \alpha v_i - \alpha v_f$$

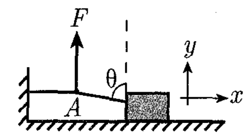
$$\Rightarrow v_f = \left(\frac{۲ - \alpha t}{۲ + \alpha t}\right) v_i \Rightarrow v_f = \left(\frac{۱ - \frac{\alpha t}{۲}}{۱ + \frac{\alpha t}{۲}}\right) v_i$$

در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶۳ سرعت و شتاب این جسم همواره در راستای بردار مکان یعنی به‌صورت شعاعی هستند، در نتیجه جسم روی همان شعاع حرکت می‌کند. یعنی جسم روی خط راستی که از مبدأ می‌گذرد، حرکت خواهد کرد.

در نتیجه گزینه «ب» صحیح است.

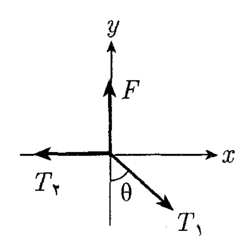
۶۴ با توجه به توضیحات صورت سؤال شکل را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۳۱۲).



شکل ۲-۳۱۲

فرض کنید کشش در ریسمان سمت راست A را با $T_۱$ و در ریسمان سمت چپی را $T_۲$ در نظر بگیریم. اگر نقطه‌ی A را در نظر بگیریم و نمودار جسم آزاد آن را رسم کنیم خواهیم داشت:
چون نقطه‌ی A بدون جرم است پس داریم:

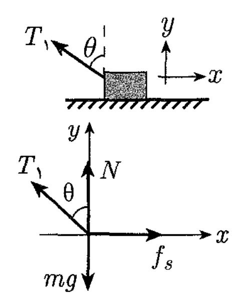
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow T_۱ \sin\theta = T_۲$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F = T_۱ \cos\theta$$
$$\Rightarrow T_۱ = \frac{F}{\cos\theta} \qquad (۱)$$



شکل ۲-۳۱۳

(با صرف‌نظر کردن از وزن ریسمان) نیروی ریسمان در هر بخش ثابت است. پس بخش سمت راست ریسمان نیروی $T_۱$ را به جسم وارد می‌کند.
برای تعادل جسم لازم است که نیروی دیگری نیز در راستای افق اعمال شود که همان اصطکاک ایستایی است.

$$\sum F_x = ۰ \rightarrow f_s = T_۱ \sin\theta \qquad \text{جسم ساکن است}$$
$$\sum F_y = ۰ \rightarrow N + T_۱\cos\theta = mg \rightarrow N = mg - T_۱\cos\theta \qquad (۲)$$
$$(۱),(۲) \rightarrow N = mg - F$$

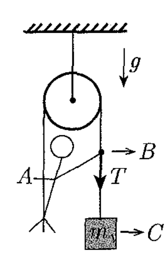


شکل ۲-۳۱۴

پس گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶۵ ابتدا شکل را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۳۱۵).
با توجه به اینکه فرد در نقطه‌ی B نیرویی به طناب وارد می‌کند پس دیگر **نمی‌توان** گفت که نیروی کششی داخل طناب در فاصله‌ی A تا C ثابت است. اگر برای نقطه‌ی B از طناب (نقطه‌ی اعمال نیروی فرد) نمودار جسم آزاد رسم کنیم داریم:
T_{AB}: نیروی کششی در طول بخش AB طناب که ثابت است. (طناب بدون جرم و قرقره بدون جرم و اصطکاک).
T_{BC}: نیروی کششی در طول بخش BC طناب که ثابت است.
جرم نقطه‌ی B از طناب **صفر** است پس داریم:

$$\sum F_{B_y} = ma_{B_y} = ۰$$
$$T + T_{BC} = T_{AB} \qquad (I)$$



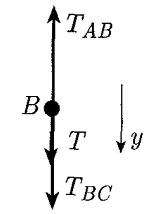
شکل ۲-۳۱۵

حال نیروهای وارده بر فرد را بررسی می‌کنیم. تمام نیروها در راستای قائم می‌باشد.

۱. نیروی کشش طناب در بخش AB که به سمت بالاست.

۲. وزن فرد

۳. طبق قانون سوم نیوتن اگر فرد طناب را با T به سمت پایین بکشد در نتیجه طناب نیز به‌دست فرد نیروی به همان اندازه و در خلاف جهت (بالا) وارد می‌کند.

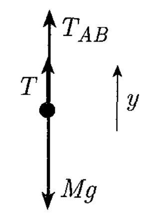


شکل ۲-۳۱۶

نمودار جسم آزاد فرد را می‌کشیم.

$$\sum F_y = Ma_y \Rightarrow T_{AB} + T - Mg = Ma \qquad (II)$$

(شتاب فرد (a) به سمت بالا است.)

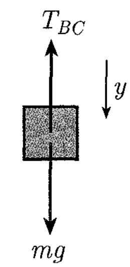


شکل ۲-۳۱۷

از طرفی اگر فرد با شتاب a بالا برود پس جرم m با شتاب a پایین می‌آید. برای جرم m داریم:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - T_{BC} = ma \qquad (III)$$

از معادلات (I)، (II) و (III)، T به‌دست می‌آید.



شکل ۲-۳۱۸

$$(II) + (III) \rightarrow mg - Mg + T + T_{AB} - T_{BC} = (m+M)a \qquad (۱)$$

$$I \rightarrow T_{AB} - T_{BC} = T \qquad (۲)$$

$$۱,۲ \rightarrow T = \frac{۱}{۲}((m+M)a + (M-m)g)$$

$$T = \frac{M(a+g) + m(a-g)}{۲}$$

پس گزینه‌ی «الف» صحیح است.

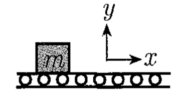
۶۶ فرض می‌کنیم ضریب اصطکاک سطح تسمه و جسم μ باشد.

شتاب قائم جسم صفر است.

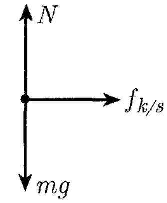
$$\sum F_y = ma_y = ۰ \Rightarrow N = mg$$

پس نیروی اصطکاک جنبشی (در صورت حرکت جسم نسبت به تسمه) برابر خواهد بود با:

$$f_k = \mu N = \mu mg$$



حرکت جسم را بررسی می‌کنیم. وقتی که تسمه در حال حرکت با سرعت v است جسم اگر سرعتش کمتر از v باشد نسبت به تسمه می‌لغزد و در نتیجه نیروی اصطکاک لغزشی به جسم رو به جلو (در جهت v) وارد می‌شود که می‌خواهد سرعت جسم را افزایش دهد در صورتی که زمان حرکت تسمه ($T_۲$) به قدر کافی بزرگ باشد در نهایت سرعت جسم و تسمه برابر خواهد شد پس V می‌تواند برابر با v شود. پس گزینه‌های «ج» و «د» می‌توانند جواب باشند. فرض می‌کنیم اینگونه باشد، در این صورت در پایان زمان $T_۲$ (حرکت تسمه) دقیقاً در لحظه‌ای که تسمه می‌ایستد سرعت جسم v است. پس جسم نسبت به تسمه می‌لغزد و در نتیجه نیروی اصطکاک خلاف



شکل ۲-۳۱۹

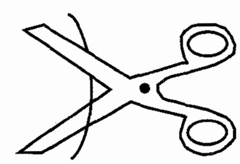
جهت حرکت جسم به آن وارد می‌شود که باعث کاهش سرعت آن می‌شود. بنابراین سرعت جسم در پایان زمان T_1 برابر است با (این سرعت حداقل سرعت جسم است که باید از صفر بیشتر باشد):

$$V_{\min} = v - \mu g T_1 > 0$$

بعد از این مرحله تسمه دوباره با سرعت v حرکت می‌کند و چون سرعت جسم $V_{\min}$ کمتر از v تسمه است نیروی اصطکاک لغزشی به جسم رو به جلو وارد می‌شود در این صورت سرعت جسم در لحظه‌ی t، $(t \leq T_2)$، برابر v می‌شود. پس داریم:

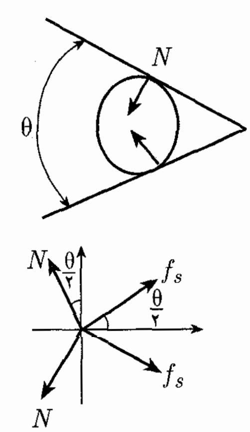
$$v = V_{\min} + \mu g t = v - \mu g T_1 + \mu g t$$
$$\rightarrow t - T_1 = 0 \;\rightarrow\; t = T_1$$

و با توجه به اینکه $t \leq T_2$ است، $T_1 \leq T_2$ می‌باشد.
بنابراین گزینه‌ی «د» صحیح است.



شکل ۲-۳۲۰

۶۷ از کنار به قیچی نگاه می‌کنیم و مقطعی از سیم را که بین تیغه‌های قیچی است در نظر می‌گیریم (شکل (۲-۳۲۱)).
نمودار جسم آزاد سیم را رسم می‌کنیم.
نیروی عمودی تکیه‌گاه، عمود بر لبه‌ی تیغه و نیروی اصطکاک مماس بر لبه‌ی تیغه بر سیم وارد می‌شود. به دلیل تقارن اندازه نیروهای تیغه‌ی بالایی و پایینی با هم برابر است. نیروی اصطکاک در جهتی اعمال می‌شود که از حرکت نسبی بین جسم و قیچی جلوگیری کند.



شکل ۲-۳۲۱

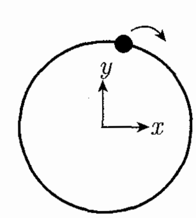
$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; N\cos\frac{\theta}{2} + f_s\sin\frac{\theta}{2} = N\cos\frac{\theta}{2} + f_s\sin\frac{\theta}{2} \;\Rightarrow\; 0 = 0$$
$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; 2N\sin\frac{\theta}{2} = 2f_s\cos\frac{\theta}{2} \;\rightarrow\; f_s = N\tan\frac{\theta}{2} \qquad (I)$$

در صورتی که این نیروی اصطکاک، حداکثر نیروی اصطکاک ایستایی باشد:

$$f_{s_{\max}} = \mu N \qquad (II)$$
$$(I),(II) \;\rightarrow\; N\tan\frac{\theta}{2} = \mu N \;\rightarrow\; \mu = \tan\frac{\theta}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۶۸ دستگاه مختصات را روی مرکز دایره قرار می‌دهیم (مطابق شکل (۲-۳۲۲)). با استفاده از دستگاه قطبی معادلات حرکت را می‌نویسیم:



شکل ۲-۳۲۲

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\begin{cases} \sum F_r = m a_r \;\rightarrow\; F_r = -m r\dot{\theta}^2 & (I) \\ \sum F_\theta = m a_\theta \;\rightarrow\; F_\theta = m r\ddot{\theta} & (II) \end{cases}$$
$$\rightarrow \vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$$

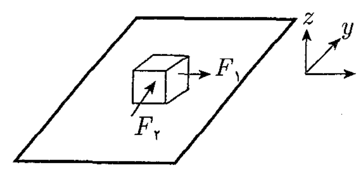
$$\hat{r} = -\hat{n} \;\rightarrow\; \vec{F} = -F_r\hat{n} + F_\theta\hat{\theta} \qquad (III)$$

$$(I),(II),(III) \;\rightarrow\; \vec{F} = mr\dot{\theta}^2\hat{n} + mr\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{(mr\dot{\theta}^2)^2 + (mr\ddot{\theta})^2} = mr\sqrt{\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2}$$

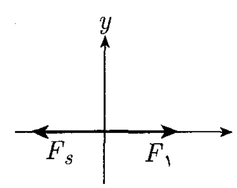
در حالت کلی اگر سرعت چرخش ذره روی دایره ثابت نباشد یعنی $\dot{\theta}$ ثابت نباشد، پس $\ddot{\theta}$ نیز مخالف صفر است. جهت $\vec{F}$ الزاماً رو به مرکز نمی‌باشد و مقدار F نیز ثابت نیست. پس گزینه‌ی «د» صحیح می‌باشد.

۶۹ ابتدا به جسم نیروی F_1 در راستای x وارد شده است ولی جسم حرکت نکرده است. در واقع اصطکاک ایستایی بین سطح و جسم مانع از حرکت جسم شده است. نمودار جسم آزاد جسم در این حالت مطابق شکل (۲ـ۳۲۴) است:



شکل ۲-۳۲۳

$$\text{سکون} : \sum F_x = 0 \;\rightarrow\; F_1 = f_s \qquad (1)$$



شکل ۲-۳۲۴

از طرفی f_s حداکثر می‌تواند برابر با μN شود که N نیروی عمودی سطح می‌باشد. اگر در راستای قائم نیز قانون نیوتن را برای جسم بنویسیم داریم:

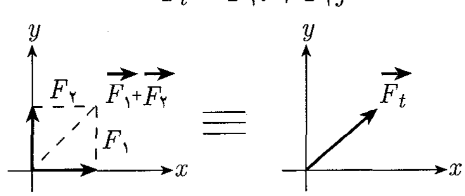
$$\sum F_z = 0 \;\Rightarrow\; N - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = mg$$

$$f_{s_{\max}} = \mu N = \mu mg \qquad (2)$$

$$(1),(2) \;\rightarrow\; f_s < f_{s_{\max}} \;\Rightarrow\; F_1 < f_{s_{\max}}$$

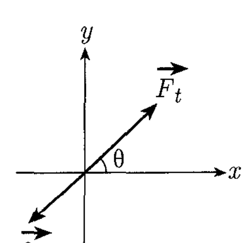
حال نیروی F_2 نیز به جسم اعمال می‌شود. نمودار جسم آزاد را دوباره رسم می‌کنیم:

$$\vec{F}_t = F_1\hat{i} + F_2\hat{j}$$



شکل ۲-۳۲۵

برآیند دو نیروی $F_1\hat{i}$ و $F_2\hat{j}$ نیروی $\vec{F}_t$ است پس می‌توان به جای دو نیرو یک نیرو (همان $\vec{F}_t$) را در نظر گرفت پس حل مسئله این است که جسمی داریم روی یک سطح با اصطکاک و جسم حرکت می‌کند. می‌خواهیم جهت حرکت را بدانیم. جهت نیروی اصطکاک در جهتی است که با حرکت مخالفت کند یعنی در خلاف جهت $\vec{F}_t$ نمودارجسم آزاد را می‌کشیم:

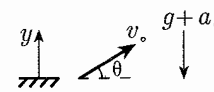


شکل ۲-۳۲۶

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \;\rightarrow\; \vec{F}_t - \vec{f}_k = m\vec{a} \;\rightarrow\; \vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F}_t - \vec{f}_k)$$

پس جسم در جهت نیروی $\vec{F}_t$ حرکت می‌کند. حرکت جسم نه در راستای محور x و نه در راستای y است. بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۷۰ طبق گفته‌ی مسئله از لحظه‌ی 0 تا t_0 جهت نیروی الکتریکی رو به پایین است. از طرفی جهت نیروی گرانش نیز که همواره رو به پایین است. پس از لحظه‌ی 0 تا t_0 جسم با شتاب $(a_0 + g)$ رو به پایین، حرکت می‌کند. می‌خواهیم قبل از برخورد ذره به زمین جهت نیروی الکتریکی عوض شود. ابتدا فرض می‌کنیم که t_0 بزرگتر از زمان برخورد ذره است. در این حالت زمان برخورد (T) را به‌دست می‌آوریم. حال برای ارضای خواسته‌ی مسئله باید $t_0 < T$ باشد.



شکل ۲-۳۲۷

از روابط حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \\ a_y = -(g + a_0) \end{cases}$$

در لحظه‌ی برخورد ذره به زمین $y = 0$

$$0 = 0 + v_0 \sin\theta \times t - \frac{1}{2}(g + a_0)t^2$$

$$t \neq 0 \;\rightarrow\; v_0 \sin\theta = \frac{1}{2}(g + a_0)T \;\rightarrow\; T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g + a_0}$$

برای ارضای خواسته مسئله:

$$t_0 < T \;\rightarrow\; t_0 < \frac{2v_0 \sin\theta}{g + a_0}$$

ب) فرض می‌کنیم که $t_0 < T$. می‌خواهیم برد ذره را حساب کنیم.

حرکت ذره از لحظه‌ی 0 تا t_0 با شتاب $-(a_0 + g)$ و از لحظه‌ی t_0 تا لحظه‌ی برخورد برابر $-(g - a_0)$ می‌باشد. حرکت را به دو بخش تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{cases} 1) \quad 0 \text{ تا } t_0 \\ 2) \quad t_0 \text{ تا لحظه‌ی برخورد} \end{cases}$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

ذره هیچ شتاب افقی ندارد پس سرعت افقی ثابتی دارد.

جابه‌جایی افقی ذره با شتاب $-(a_0 + g)$ از لحظه‌ی 0 تا t_0 عبارتست از:

$$\Delta x_1 = v_0 t_0 \cos\theta$$

برای به‌دست آوردن Δx_2 باید بدانیم پس از لحظه‌ی t_0 ذره چه مدت به حرکت خود ادامه می‌دهد. برای این کار ارتفاع و سرعت قائم ذره در لحظه‌ی t_0 را حساب می‌کنیم.

$$y(t = t_0) = v_0 t_0 \sin\theta - \frac{1}{2}(g + a)t_0^2$$

$$v_y(t = t_0) = v_0 \sin\theta - (g + a_0)t_0$$

پس هدف مسئله به‌دست آوردن زمان برخورد ذره‌ای به زمین است که در لحظه‌ی صفر دارای سرعت‌های $\begin{cases} v_x = v_\circ \cos\theta \\ v_y = v_y(t = t_\circ) \end{cases}$ و ارتفاع $y(t = t_\circ)$ می‌باشد. همچنین دارای شتاب قائم ثابت $-(g - a_\circ)$ است.

برای زمان برخورد مطابق قسمت الف عمل می‌کنیم.

$$y = y_\circ + v_{\circ y} \times t + \frac{۱}{۲} a_y t^{۲}$$

$$\begin{cases} y_\circ = y(t = t_\circ) \\ v_\circ y_\circ = v_y(t = t_\circ) \\ a_y = -(g - a_\circ) \end{cases}$$

برای برخورد، داریم:

$$\begin{aligned} \circ &= v_\circ t_\circ \sin\theta - \frac{۱}{۲}(g + a_\circ)t_\circ^{۲} + (v_\circ \sin\theta \\ &\quad - (g + a_\circ)t_\circ)t - \frac{۱}{۲}(g - a_\circ)t^{۲} \\ t &= \frac{۱}{(g - a_\circ)}\Big\{(v_\circ \sin\theta - (g + a_\circ)t_\circ) \\ &\mp \sqrt{[v_\circ \sin\theta - (g + a_\circ)t_\circ]^{۲} + ۲(g - a_\circ)(v_\circ t_\circ \sin\theta - \tfrac{۱}{۲}(g + a_\circ)t_\circ^{۲})}\Big\} \end{aligned}$$

در اینجا ۲ مقدار برای t به‌دست می‌آید یکی منفی و دیگری مثبت است. زمان منفی صرفاً یک جواب ریاضی است که قابل قبول نیست. از آنجایی که مخرج مثبت است پس t با علامت + جواب مورد نظر ماست.

$$\Delta x_{۲} = v_\circ t \cos\theta \;\rightarrow\; \Delta x_{\text{کل}} = v_\circ \cos\theta (t + t_\circ)$$

که t مطابق رابطه‌ی به‌دست آمده است.

ج) محاسبه ارتفاع موج:

در اینجا دو حالت پیش می‌آید:

۱. ممکن است که وقتی ذره به ارتفاع اوج می‌رسد هنوز شتاب عوض نشده باشد یعنی زمان اوج کمتر از $t_\circ$ باشد در این حالت برای زمان اوج داریم:

$$v_{y(\text{اوج})} = \circ \;\rightarrow\; t = ?$$

$$v_y = v_{\circ y} + a_y t \;\rightarrow\; \circ = v_\circ \sin\theta - (g + a_\circ)t$$

$$\Rightarrow t_{\text{اوج}} = \frac{v_\circ \sin\theta}{(a_\circ + g)}$$

۲. حالتی که قبل از اینکه ذره به اوج برسد شتاب عوض شود یعنی زمان اوج بیشتر از $t_\circ$ باشد. در این حالت حرکت را به دو بخش تقسیم می‌کنیم، یکی از لحظه‌ی $\circ$ تا $t_\circ$ و دیگری از $t_\circ$ تا

لحظه‌ی رسیدن به نقطه‌ی اوج.

$$\Delta t = \Delta t_۱ + \Delta t_۲ \quad , \quad h = h_۱ + h_۲$$

$\Delta t_۱$ همان $t_\circ$ است که به وسیله آن می‌توانیم $h_۱$ (ارتفاعی که ذره تا لحظه‌ی $t_\circ$ بالا آمده) را حساب کنیم:

$$h_۱ = v_\circ t_\circ \sin\theta - \frac{۱}{۲}(g + a_\circ)t_\circ^۲$$

از این لحظه به بعد ذره با شتاب قائم $-(g - a_\circ)$ حرکت می‌کند. سرعت انتهای این بخش از حرکت (نقطه‌ی اوج) صفر است. سرعت ابتدای حرکت را هم حساب می‌کنیم.

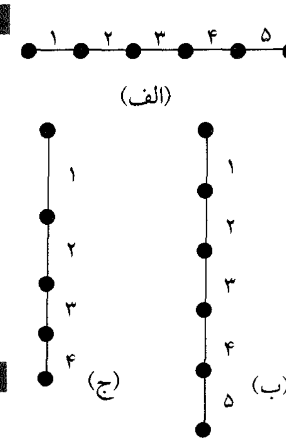
$$v_y(t = t_\circ) = v_\circ \sin\theta - (g + a_\circ)t_\circ$$

حال از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$v^۲_{y\,(\text{اوج})} - v^۲_{y(t=t_\circ)} = ۲h_۲\big(-(g - a_\circ)\big)$$
$$\rightarrow h_۲ = \frac{[v_\circ \sin\theta - (g + a_\circ)t_\circ]^۲}{(g - a_\circ)}$$
$$\rightarrow \text{ارتفاع اوج} = h_۱ + h_۲$$

۷۱ وقتی کش را آویزان می‌کنیم به دلیل نیروی وزن مهره‌ها افزایش طول می‌دهد. این کش را می‌توانیم مجموعه‌ای از چند کش (مثلاً ۵) در نظر بگیریم که هر یک بین دو مهره قرارگرفته‌اند. مطابق شکل کش اول باید وزن ۴ مهره را تحمل کند، کش دوم وزن ۳ مهره و . . .کش آخر باید وزن فقط یک مهره را تحمل کند. از طرفی همانند فنر هر چه نیروی کش بیشتر باشد طول کش بیشتر افزایش می‌یابد پس در نتیجه بالاترین کش بیشترین طول را پیدا می‌کند و پایین‌ترین کش کمترین طول را دارد. پس هر چه از بالا به پایین می‌آییم طول کش‌ها **کاهش** می‌یابد.

بنابراین گزینه‌ی «هـ» صحیح می‌باشد.



شکل ۲-۳۲۸

۷۲ از لحظه‌ی ۰ تا لحظه‌ی $t_۱$ جعبه نسبت به خودرو ساکن است یعنی سرعتش نسبت به زمین (دستگاه اینرسی) با سرعت خودرو برابر است پس در لحظه‌ی شروع لغزش سرعت جعبه $v_۱$ برابر است با:

$$t_۱ < T \;\rightarrow\; v_۱ = bt_۱^۲$$

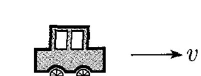
نیروی اصطکاک در مدت زمان لغزش (از $t_۱$ تا $t_۲$) مقداری ثابت دارد. زیرا نیروی N (عمودی سطح) که به جسم وارد می‌شود ثابت می‌ماند.

$$\sum F_y = ۰ \;\rightarrow\; N = mg \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = ma_x \;\rightarrow\; f_k = ma_x \qquad (۲)$$

$$f_k = \mu_k N \qquad (۳)$$

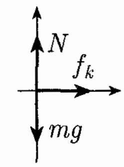
$$۱, ۲, ۳ \;\rightarrow\; a_x = \mu_k g = \text{const}$$



شکل ۲-۳۲۹

پس حرکت با شتاب **ثابت** است. در لحظه‌ی t_2 جسم از لغزش می‌ایستد و دوباره سرعتش با خودرو برابر می‌شود.

$$T < t_2 \;\rightarrow\; v_2 = bT^2$$



شکل ۲-۳۳۰

پس در بازه‌ی زمانی $t_2 - t_1$ سرعت جعبه در اثر شتاب ثابت $\mu_k g$ از v_1 به v_2 رسیده است. بنابراین:

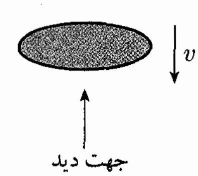
$$\begin{aligned} & v_2 = v_1 + a\Delta t \\ & \Rightarrow bT^2 = br_1^2 + \mu_k g(t_2 - t_1) \\ & \Rightarrow \mu_k = \frac{b(T^2 - t_1^2)}{g(t_2 - t_1)} \end{aligned}$$

پس گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۷۳ نیروی مقاوم هوا که در اثر سقوط به جسم وارد می‌شود به چندین عامل بستگی دارد. مهمترین این عوامل سرعت حرکت جسم در هوا و دیگری سطح مقطع مؤثر جسم می‌باشد. سطح مقطع مؤثر در واقع سطحی است که جریان می‌بیند یعنی اگر در جهت هوا به جسم بنگریم دیده می‌شود. مثلاً برای قرص‌های کاملاً افقی همان πR^2 می‌باشد. پس داریم:

$$f_{\text{هوا}} \;\propto\; A_e \times v^n \qquad (1)$$

($\propto$ همان علامت تناسب است.)
که در آن n عددی **مثبت** است.



شکل ۲-۳۳۱

از طرفی وقتی جسمی در حالت سقوط به سرعت حدی می‌رسد دیگر سرعتش ثابت می‌ماند مگر اینکه نیروی دیگری آن را تغییر دهد. پس برای حالتی که جسم به سرعت حدی رسیده است، داریم:

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; f_{\text{هوا}} - mg = 0 \;\rightarrow\; f_{\text{هوا}} = mg$$

پس سرعت حد سرعتی است که در آن نیروی اصطکاک هوا با وزن جسم برابر می‌شود. برای دیسک ۱ داریم:

$$\begin{aligned} & f_{\text{هوا}\,(1)} = m_1 g = \pi R_1^2 t.\rho g && (2) \\ & (1),(2) \;\rightarrow\; A_e v^n \;\propto\; \pi R_1^2 t\rho g \\ & \qquad \Rightarrow \pi R_1^2 v^n \;\propto\; \pi R_1^2 t\rho g \\ & \qquad \Rightarrow v_1^n \alpha \rho g t && (I) \end{aligned}$$

در روابط فوق R_1 شعاع و t ضخامت دیسک است.
حال برای دیسک (۲):

$$\begin{aligned} & f_{\text{هوا}\,(2)} = m_2 g = \pi R_2^2 t\rho g \\ & \Rightarrow v_2^2 \;\propto\; \rho g t && (II) \end{aligned}$$

حال برای دو دیسک چسبیده به هم

$$f_{\text{هوا }(۳)} = (m_۱ + m_۲)g$$

(سطح مقطع مؤثر به دلیل $R_۲ > R_۱$ برابر با $\pi R_۲^۲$ است.)

$$v_۳^n \alpha \left(\frac{R_۱^۲ + R_۲^۲}{R_۲^۲}\right) \rho g t$$

$$\Rightarrow v_۳^n \alpha \left(۱ + (\frac{R_۱}{R_۲})^۲\right) \rho g t \qquad (III)$$

$$(I), (II), (III) \Rightarrow v_۳^n > v_۱^n, v_۲^n$$

$$\Rightarrow v_۳ > v_۱ \;,\; v_۳ > v_۲$$

پس گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۷۴ دیاگرام آزاد جرم را رسم می‌کنیم.

$$\sum F_y = m a_y$$

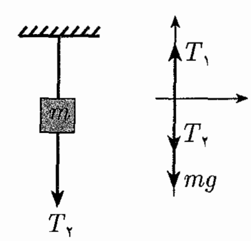
$$a_y = -a$$

$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ - mg = -ma$$

$$\Rightarrow T_۱ = m(g-a) + T_۲$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a < g \rightarrow T_۱ > T_۲ \\ a = g \rightarrow T_۱ = T_۲ \\ a > g \rightarrow T_۱ < T_۲ \end{cases}$$

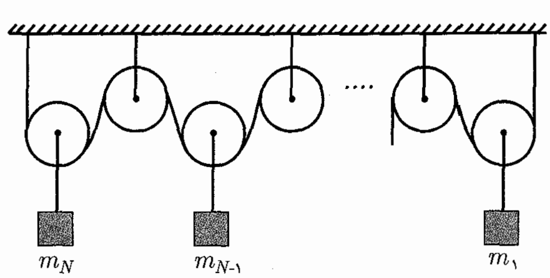


شکل ۲-۳۳۲

پس هر سه حالت ممکن است اما در حالت دوم همان سقوط آزاد است که در آن $T_۱ = T_۲ = ۰$ می‌باشد پس این حالت قابل قبول نیست.

بنابراین گزینه‌ی «د» صحیح است.

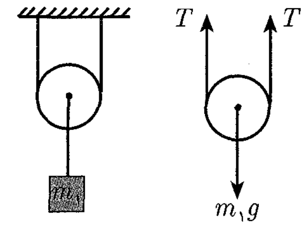
۷۵ چون قرقره‌ها و نخ بدون جرم فرض شده‌اند در نتیجه نیروی کشش نخ در تمام طول آن ثابت است.



شکل ۲-۳۳۳

سؤال هیچ عددی برای N مشخص نکرده است. می‌توانیم N را ۱ بگیریم آنگاه شکل به صورت شکل (۲-۳۳۴) درمی‌آید:

$$\frac{۱}{M} = \frac{۱}{m_۱} \Rightarrow M = m_۱$$



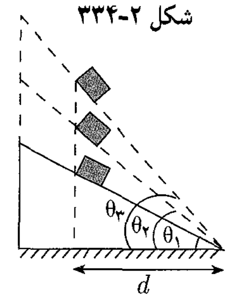
شکل ۲-۳۳۴

نمودار جسم آزاد قرقره را رسم می‌کنیم:
کل سیستم ساکن است:

$$\sum F_y = ma_y = ۰ \;\Rightarrow\; ۲T = mg \;\Rightarrow\; T = \frac{۱}{۲}m_۱ g = \frac{۱}{۲}Mg$$

تنها گزینه‌ی درست، گزینه‌ی «ب» می‌باشد.

۷۶ ابتدا زمانی که طول می‌کشد جسم مسافت افقی d را طی کند را حساب می‌کنیم.



شکل ۲-۳۳۵

نمودار جسم آزاد را رسم می‌کنیم.

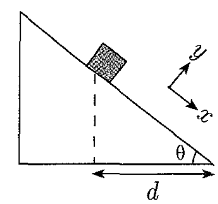
$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; mg\sin\theta = ma_x$$

$$\Rightarrow a_x = g\sin\theta = \text{ثابت}$$

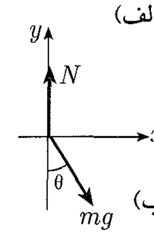
اگر جسم بخواهد مسافت افقی d را طی کند باید در راستای x مسافت $\Delta x = \dfrac{d}{\cos\theta}$ را طی نماید. از روابط حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x = v_{۰x}t + \frac{۱}{۲}a_x t^۲$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\cos\theta} = \frac{۱}{۲}g\sin\theta t^۲ \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{۴d}{g\sin ۲\theta}}$$



(نیروی اصطکاک هم نداریم)
(الف)



(ب)

شکل ۲-۳۳۶

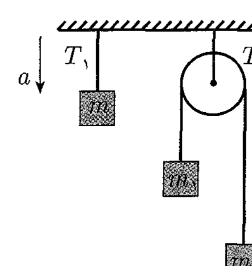
حال تابع t بر حسب θ را داریم به ازای $\sin ۲\theta = ۱$، t کمترین مقدار می‌شود.

$$\sin ۲\theta = ۱ \;\rightarrow\; ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \;\rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{۴} \;\text{(قابل قبول)}$$

$$\Rightarrow\; t_{\min} = ۲\sqrt{\frac{d}{g}}$$

در نتیجه گزینه‌ی «الف» صحیح می‌باشد.

۷۷ به دنبال جرم m می‌گردیم به‌طوری که $T_۱ = T_۲$ شود.



شکل ۲-۳۳۷

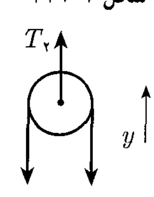
چون از جرم قرقره و طناب‌ها صرف‌نظر شده است پس نیروی طناب واصل $m_۱$ و $m_۲$ در تمام طول آن ثابت است (مثلاً آن را T می‌گیریم) برای قرقره نمودار جسم آزاد رسم می‌کنیم:

$$\sum F_y = ma_y = ۰ \;\Rightarrow\; T = \frac{T_۲}{۲} \qquad (۱)$$

حال نمودار جسم آزاد جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ را رسم می‌کنیم.

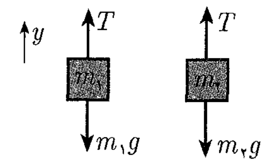
$$\sum F_y = m_۱ a_{y(۱)} \;\Rightarrow\; T - m_۱ g = m_۱ a_۱ \qquad (۲)$$

$$\sum F_y = m_۲ a_{y(۲)} \;\Rightarrow\; T - m_۲ g = m_۲ a_۲ \qquad (۳)$$



شکل ۲-۳۳۸

حال اگر یک ناظر روی قرقره قرار بگیرد و حرکت جرم‌های ۱ و ۲ را نگاه کند خواهد دید که با همان سرعت و شتابی که جرم $m_۱$ به آن **نزدیک** یا از آن **دور** می‌شود. جرم $m_۲$ از آن **دور** یا به آن **نزدیک** می‌شود. در واقع **اندازه‌ی** شتاب نسبی اجرام ۱ و ۲ نسبت به قرقره با هم برابر است.



شکل ۲-۳۳۹

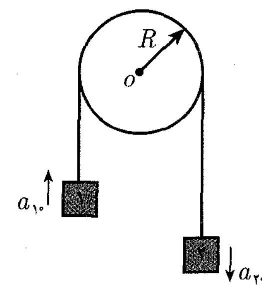
از طرفی قرقره دارای شتاب a است. پس برای $a_{۲۰} = a_{۱۰}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{۱۰} &= a_۱ + a \\ a_{۲۰} &= -a_۲ - a \end{aligned} \qquad (۴)$$

$$\rightarrow a_۱ + a = -a_۲ - a \;\rightarrow\; a_۱ + a_۲ = -۲a \qquad (۵)$$

$$۲,۳,۴ \;\rightarrow\; T = \frac{m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲}(۲g - ۲a) \qquad (۶)$$

$$۱,۶ \;\rightarrow\; T_۲ = \frac{۲m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲}(۲g - ۲a)$$



شکل ۲-۳۴۰

حال $T_۱$ را حساب می‌کنیم. ابتدا دیاگرام آزاد جرم m

$$\sum F_y = m a_y \;\Rightarrow\; T_۱ - mg = -ma \;\Rightarrow\; T_۱ = m(g - a)$$

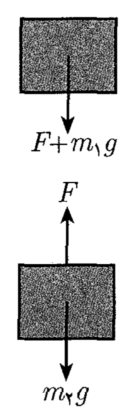
حال باید $T_۱ = T_۲$ قرار داده و m را بیابیم.

$$T_۱ = m(g - a) \;\;,\;\; T_۲ = \frac{۲m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲}(۲g - ۲a)$$

$$\Rightarrow m = \frac{۴m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲}$$

در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۷۸ زمانی که جسم $m_۱$ را نگه داشته‌ایم، تنها نیرویی که به جسم $m_۲$ وارد می‌شود تا نیروی وزن آن را خنثی کرده و جسم در حالت تعادل باقی بماند، نیروی فنر است. بنابراین نیروی فنر برابر وزن جسم $m_۲$ است. بلافاصله پس از رها شدن جسم $m_۱$، فنر فرصتی برای باز شدن یا جمع شدن ندارد. بنابراین $F = m_۲ g$ است. در نتیجه $a_۲ = ۰$ است، ولی با توجه به این‌که F و mg در یک جهتند $a_۱ = \frac{F + m_۱ g}{m_۱}$ است و بنابراین $a_۱ > g$ است.
در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.



شکل ۲-۳۴۱

۷۹ زمانی فاصله گلوله از تصویرش در آینه به بیشترین مقدار خود می‌رسد که فاصله عمودی ذره تا آینه، h، (شکل ۲-۳۴۲) به حداکثر مقدار خود برسد. همان طور که می‌دانید با استفاده از ضرب خارجی دو بردار، می‌توان فاصله عمودی رأس یکی از آنها نسبت به دیگری را به‌دست آورد. $\overrightarrow{OA}$ را به گونه‌ای فرض می‌کنیم که $|\overrightarrow{OA}| = ۱$ باشد. بنابراین

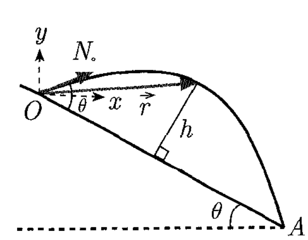
$$h = \frac{|\vec{r} \times \overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|} \;\Rightarrow\; h = \frac{|(x\hat{i} + y\hat{j}) \times (\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j})|}{۱}$$

$$\Rightarrow\; h = |x\sin\theta + y\cos\theta| \qquad (۱)$$

حال حرکت گلوله در دو جهت x و y را بررسی می‌کنیم تا x و y را به‌دست آوریم.

$$x \text{ جهت } : \; x = v_۰ \cos(\phi - \theta)t \qquad (۲)$$

$$y \text{ جهت } : \; y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰ \sin(\phi - \theta) \qquad (۳)$$



شکل ۲-۳۴۲

حال x و y را از روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین

$$h = |v_\circ \cos(\phi - \theta)\sin\theta t + (-\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_\circ \sin(\phi - \theta)t)\cos\theta|$$

زمانی که h حداکثر مقدار خود را داشته باشد، مشتق آن نسبت به t صفر است. در نتیجه

$$\frac{dh}{dt} = \circ \;\Rightarrow\; v_\circ \cos(\phi - \theta)\sin\theta + (-gt + v_\circ \sin(\phi - \theta))\cos\theta = \circ$$

$$\Rightarrow gt\cos\theta = v_\circ\big(\sin\theta\cos(\phi - \theta) + \cos\theta\sin(\phi - \theta)\big) \;\Rightarrow\; t = \frac{v_\circ \sin\phi}{g\cos\theta}$$

در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

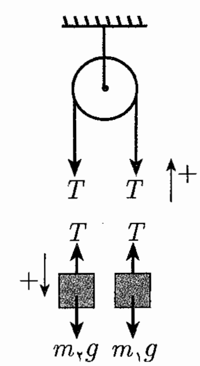
۸۰ تا زمانی که $m_۲$ به زمین نرسیده است، نخ کاملاً کشیده شده است. معادله حرکت را برای دو جسم می‌نویسیم تا شتاب آنها به‌دست آید.

$$m_۱ \text{ جسم } : \sum F = ma \;\Rightarrow\; T - m_۱ g = m_۱ a \qquad (۱)$$

$$m_۲ \text{ جسم } : \sum F = ma \;\Rightarrow\; m_۲ g - T = m_۲ a \qquad (۲)$$

با جمع کردن معادلات (۱) و (۲)، شتاب دو جسم به‌دست می‌آید. بنابراین

$$a = \frac{m_۲ - m_۱}{m_۲ + m_۱}g \;\Rightarrow\; a = \frac{g}{۵}$$



شکل ۲-۳۴۳

با استفاده از رابطه مستقل از زمان سرعت جسم $m_۱$ را هنگامی که $m_۲$ به زمین می‌رسد که معادل با رسیدن $m_۱$ به ارتفاع $h_۱ = ۱\text{m}$ است، به‌دست می‌آوریم.

$$v_۱^۲ - v_\circ^۲ = ۲ah_۱ \;\Rightarrow\; v_۱^۲ - \circ = ۲(\frac{g}{۵})(۱) \;\Rightarrow\; v_۱^۲ = \frac{۲(۹/۸۱)}{۵} \;\Rightarrow\; v_۱ = ۱/۹۸\text{m/s}$$

پس از رسیدن $m_۱$ به ارتفاع $h_۱ = ۱\text{m}$، این جسم با شتاب $a = -g$ حرکت می‌کند تا متوقف شود.

$$v^۲ - v_۱^۲ = -۲g(h - h_۱) \;\Rightarrow\; \circ - (۱/۹۸)^۲ = -۲(۹/۸۱)(h - ۱) \;\Rightarrow\; h = ۱/۲\text{m}$$

در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

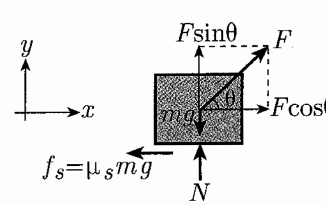
۸۱ معادلات تعادل نیرو در دو جهت x و y را برای جسم می‌نویسیم.

$$\sum F_y = \circ \;\Rightarrow\; N + F\sin\theta - mg = \circ \;\Rightarrow\; N = mg - F\sin\theta$$

$$f_s = \mu_s \;\Rightarrow\; f_s = \mu_s(mg - F\sin\theta)$$

$$\sum F_x = \circ \;\Rightarrow\; F\cos\theta - f_s = \circ \;\Rightarrow\; F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin\theta) = \circ$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu_s ng}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} \qquad (۱)$$



شکل ۲-۳۴۴

مشتق F نسبت به θ را برابر صفر قرار می‌دهیم تا کمترین اندازه نیرویی که جسم را در آستانه حرکت قرار می‌دهد، به‌دست آوریم.

$$\frac{dF}{d\theta}=\circ \;\Rightarrow\; \frac{-\mu_s mg(-\sin\theta+\mu_s\cos\theta)}{(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)^{۲}}=\circ$$

$$\Rightarrow\; \tan\theta=\mu_s \;\Rightarrow\; \begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\mu_s}{\sqrt{۱+\mu_s^{۲}}}\\[2mm] \cos\theta=\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\mu_s^{۲}}}\end{cases} \qquad (۲)$$

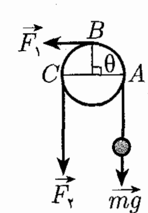
حال $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را از رابطه (۲) در رابطه (۱) قرار می‌دهیم. بنابراین

$$F=\frac{\mu_s mg}{\frac{۱}{\sqrt{۱+\mu_s^{۲}}}+\frac{\mu_s^{۲}}{\sqrt{۱+\mu_s^{۲}}}} \;\Rightarrow\; F=\frac{\mu_s mg}{\sqrt{۱+\mu_s^{۲}}}$$

در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۸۲ با توجه به صورت سؤال در هر دو حالتِ شکل (۲ـ۱۹۸) جسم m در آستانه‌ی بالا آمدن قرار دارد. در نتیجه می‌توان فرض کرد که نیروی کشش طناب در شکل (۲ـ۳۴۵) در نقطه‌ی B هنگامی که زاویه θ برابر با ۹۰° می‌شود همان $\vec{F}_۱$ باشد، زیرا با وجود این نیرو است که جسم در آستانه‌ی بالا آمدن قرار می‌گیرد.

$$\theta=۹۰^\circ \;\Rightarrow\; \vec{F}_B=\vec{F}_۱$$



شکل ۲-۳۴۵

با استفاده از توضیحات فوق نتیجه می‌شود نیروی اصطکاک میان نخ و قرقره در محدوده‌ی AB همان $\vec{f}_۱$ می‌باشد. عوامل مؤثر در تعیین مقدار نیروی اصطکاک عبارتند از نیروی عمودی تکیه‌گاه N و ضریب اصطکاک μ. ضریب اصطکاک μ در هر دو محدوده‌ی AB و BC یکسان است زیرا جنس سطوح تماس در این دو محدوده تغییر نمی‌کند. عامل مؤثر دیگر در نیروی اصطکاک، نیروی عمودی سطح می‌باشد که این نیرو به صورت گسترده در تمامی محدوده‌ی AC روی سطح قرقره پخش شده است و در نقطه‌ی B دارای مقدار ماکزیمم و در دو نقطه‌ی A و C دارای مقدار مینیمم می‌باشد در نتیجه برای یافتن مقدار دقیق نیروی اصطکاک باید محدوده‌ی AC را به المان‌های طولی بسیار کوچک تقسیم کنیم و در هر قسمت نیروی اصطکاک را با توجه به نیروی عمودی سطح آن المان محاسبه نماییم. اما برای حل این سؤال نیازی به مقدار دقیق نیروی اصطکاک نیست و می‌گوییم مقدار نیروی اصطکاک در یک محدوده‌ی طولی مانند AB یا BC متناسب با برآیند نیروهای عمودی سطح در آن محدوده می‌باشد.

نیروهای عمودی سطح در المان‌های بسیار کوچک طولی: dN، $f_{\text{اصطکاک}} \propto \sum dN$

از آنجایی که طراح سؤال برای نخ جرمی قائل نشده است می‌توانیم از جرم نخ صرف‌نظر کنیم و با نوشتن قانون دوم نیوتون برای نخ برآیند نیروهای عمودی سطح را در دو محدوده‌ی AB و BC روی سطح قرقره بیابیم:

سطح AB:

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}\;,\; m=\circ \Rightarrow \sum\vec{F}=\circ$$

$$\Rightarrow\; \vec{N}_{AB}=-(\vec{F}_۱+\vec{mg}+\vec{f}_{AB})$$

$\vec{f}_{AB}$ نیروی اصطکاک در محدوده‌ی AB می‌باشد و در نتیجه موازی با سطح و عمود بر نیروی $\vec{N}_{AB}$ است، پس تأثیری در مقدار نیروی $\vec{N}_{AB}$ نخواهد داشت، زیرا مؤلفه‌ای در راستای نیروی $\vec{N}_{AB}$ ندارد.

$$|N_{AB}| \propto \sqrt{mg^۲ + F_۱^۲}$$

سطح BC:

$$\sum \vec{F} = ۰ \Rightarrow \vec{N}_{BC} = -(\vec{F}_۲ + \vec{F}_۱ + \vec{f}_{BC})$$

$$\Rightarrow |N_{BC}| \propto \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲}$$

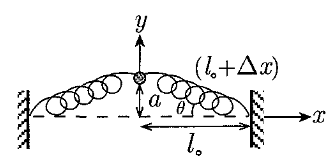
جسم m در آستانه‌ی بالا آمدن

$$\Rightarrow F_۲ > F_۱ > mg \Rightarrow N_{BC} > N_{AB} \Rightarrow f_{BC} > f_{AB}$$

$$f_۲ = f_{BC} + f_{AB} > ۲f_{AB} \Rightarrow f_۲ > ۲f_۱$$

گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۸۳ از آنجایی که صفحه‌ی xy یک صفحه‌ی افقی می‌باشد برآیند نیروهای وارد بر جسم تنها از طرف دو فنر می‌باشد و نیروی وزن در صفحه‌ی افقی ظاهر نمی‌شود. برای یافتن نیروی فنرها باید میزان تغییر طول در فنر را به‌دست آوریم. به شکل (۲ـ۳۴۶) دقت کنید.



شکل ۲-۳۴۶

$$(۱+\epsilon)^\alpha \simeq ۱ + \alpha\epsilon$$

$$a^۲ + l_۰^۲ = (l_۰ + \Delta x)^۲$$

$$\to l_۰ + \Delta x = \left(l_۰^۲\left(۱ + (\frac{a}{l_۰})^۲\right)\right)^{۱/۲}$$

$$\to l_۰ + \Delta x = l_۰\left(۱ + (\frac{a}{l_۰})^۲\right)^{۱/۲} \quad , \quad (\frac{a}{l_۰})^۲ \ll ۱$$

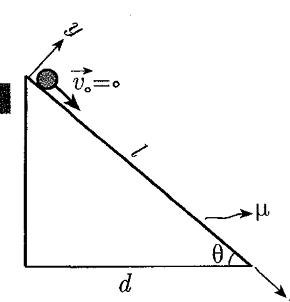
$$\to l_۰ + \Delta x = l_۰\left(۱ + \frac{۱}{۲}(\frac{a^۲}{l_۰^۲})\right) \to \Delta x = \frac{a^۲}{۲l_۰}$$

$$F_{\text{فنر}} = k\Delta x = \frac{ka^۲}{۲l_۰}$$

$$\sum F = (۲F_{\text{فنر}} \sin\theta) = \frac{ka^۲}{l_۰} \times \frac{a}{(l_۰ + \Delta x)} \simeq k\frac{a^۳}{l_۰^۲}$$

در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۸۴ دستگاه مختصات را مانند شکل (۲ـ۳۴۷) انتخاب می‌نماییم.



شکل ۲-۳۴۷

زمان موردنیاز جهت پیمودن مسافت افقی d را به شکل تابعی از زاویه‌ی θ به روش زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y = ۰ \Rightarrow \vec{N} - (mg\cos\theta)\vec{j} = ۰ \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\sum \vec{F}_x = (mg\sin\theta)\vec{i} - (N\mu)\vec{i}$$

$$= mg[(\sin\theta)\vec{i} - (\mu\cos\theta)\vec{i}] = m\vec{a}_x$$

$$\Rightarrow a_x = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \ , \ v_0 = 0$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{2}a_x t^2 \ , \ d = l\cos\theta \ \Rightarrow \ l = \frac{d}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\cos\theta} = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2d}{g} \times \frac{1}{\cos\theta(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

اکنون با مشتق‌گیری از عبارت فوق بر حسب کمیت θ و برابر قرار دادن آن با صفر مقدار مینیمم را برای t^2 و در نتیجه t به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d(t^2)}{d\theta} = \frac{2d}{g} \times \frac{d[\cos\theta(\sin\theta - \mu\cos\theta)^{-1}]}{d\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-[-\sin^2\theta + \mu\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \mu\sin\theta\cos\theta]}{[\cos\theta(\sin\theta - \mu\cos\theta)]^2} = 0$$

$$\Rightarrow (\cos 2\theta + \mu\sin 2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = -\frac{1}{\mu}$$

بنابراین گزینه‌ی «الف» صحیح است.

۸۵ با توجه به شکل (۲ـ۳۴۸) با انتخاب دستگاه مختصات مناسب و تجزیه مؤلفه‌های شتاب و سرعت در راستای محور دستگاه مختصات می‌توانیم زمان رسیدن دو مهره به پایین سطح شیب‌دار را با یکدیگر مقایسه کنیم:

ذره ۱ : $a_x = g\sin\theta - g\mu\cos\theta \ , \ a_z = 0 \ , \ a_y = 0$

$$v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$$

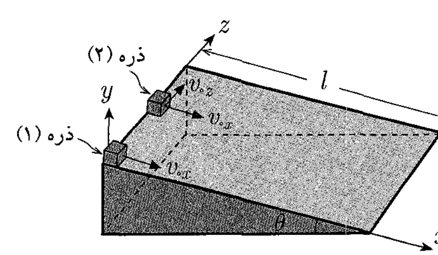
$$l = \frac{1}{2}a_x t_1^2 + v_{0x}t \ \to \ t_1^2 = \frac{2l}{a_x} = \frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

ذره ۲ : $a_x = g\sin\theta - g\mu\cos\theta \ , \ a_z = -g\mu\cos\theta \ , \ a_y = 0$

$$v_{0x} = v_{0y} = 0 \ , \ v_{0z} = v_0$$

$$l = \frac{1}{2}a_x t_2^2 + v_{0x}t \ \to \ t_2^2 = \frac{2l}{a_x} = \frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = t_1^2$$

$$\to t_2 = t_1$$



شکل ۲-۳۴۸

در نتیجه گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۸۶ با استفاده از قانون دوم نیوتون به تحلیل حرکت جسم در هر دو حالت می‌پردازیم.

حالت اول: آسانسور با شتاب ثابت a به سمت پایین حرکت می‌کند در نتیجه جسم هم همین شتاب را در راستای حرکت آسانسور یعنی محور y دارا خواهد بود.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y = m\vec{a} = m(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$$

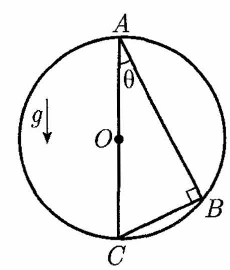
$$\sum \vec{F}_y = (N - mg)\vec{j} = m\vec{a}_y = -ma(\vec{j}) \Rightarrow N = m(g-a)$$
$$\sum \vec{F} = -(N\mu)\vec{i} = -m\mu(g-a)\vec{i} = ma_x(\vec{i}) \Rightarrow a_x = (a-g)\mu$$
$$v_x^{۲} - v_{\circ x}^{۲} = ۲a_x s_۱ \Rightarrow s_۱ = -\frac{v_{\circ x}^{۲}}{۲\mu(a-g)} \qquad (I)$$

حالت دوم:

$$\sum \vec{F}_y = (N - mg)\vec{j} = ma(\vec{j}) \Rightarrow N = m(a+g)$$
$$\sum \vec{F}_x = -(N\mu)\vec{i} = -m\mu(a+g)\vec{i} = ma_x(\vec{i}) \Rightarrow a_x = -(a+g)\mu$$
$$v_x^{۲} - v_{\circ x}^{۲} = ۲a_x s_۲ \rightarrow s_۲ = -\frac{v_{\circ x}^{۲}}{۲\mu(a+g)} \qquad (II)$$
$$(I),(II) \rightarrow \frac{s_۲}{s_۱} = \frac{۲\mu(a-g)}{۲\mu(a+g)} \rightarrow a(s_۲ - s_۱) = -g(s_۲ + s_۱)$$
$$\rightarrow a = g\left(\frac{s_۱ + s_۲}{s_۱ - s_۲}\right)$$

بنابراین گزینه‌ی «ج» صحیح است.

۸۷ یک مسیر دلخواه مانند AB را در نظر بگیرید که با قطر AC زاویه‌ی θ بسازد (مانند شکل (۲ـ۳۴۹)). زمان رسیدن یک مهره از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تحت نیروی جاذبه به صورت زیر قابل محاسبه است.



شکل ۲-۳۴۹

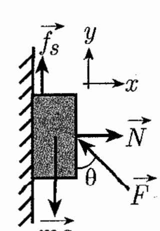
$$AC = ۲r \Rightarrow AB = ۲r\cos\theta$$
$$AB = ۲r\cos\theta = \frac{۱}{۲}at^{۲} \quad , \quad a = g\cos\theta$$
$$\Rightarrow ۲r\cos\theta = \frac{۱}{۲}g\cos\theta t^{۲} \Rightarrow t^{۲} = \frac{۴r}{g}$$

نتیجه‌ی به‌دست آمده نشان می‌دهد که زمان رسیدن مهره از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی دلخواه B تابعی از زاویه‌ی θ نیست .

در نتیجه گزینه‌ی «ب» صحیح است.

۸۸ قانون دوم نیوتون را برای کتاب می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x = \circ \Rightarrow (N - F\sin\theta)\vec{i} = \circ \rightarrow N = F\sin\theta$$
$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y = \circ \Rightarrow (f_s + F\cos\theta - mg)\vec{j} = \circ$$
$$f_s = N\mu_s = F\sin\theta\mu_s$$
$$\Rightarrow F(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}$$



شکل ۲-۳۵۰

برای به‌دست آوردن کمترین مقدار نیروی F باید از عبارت به‌دست آمده بر حسب θ مشتق بگیریم و برابر با صفر قرار دهیم:

$$\frac{dF}{d\theta} = \circ \rightarrow mg\left(\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{(\cos\theta + \mu_s\sin\theta)^{۲}}\right) = \circ$$

$$\rightarrow (\sin\theta - \mu_s \cos\theta) = ۰ \ \rightarrow \ \tan\theta = \mu_s = ۰{,}۷۵ \ \rightarrow \ \theta = ۳۶{,}۸۷^\circ$$

$$F_{\min} = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} = \frac{۲ \times ۹{,}۸۱}{۰{,}۸ + ۰{,}۷۵ \times ۰{,}۶} = ۱۵{,}۷\mathrm{N}$$

۸۹ هنگامی که مجموعه‌ی حلقه و استوانه را از حال سکون رها می‌کنیم شتاب و سرعت حلقه نسبت به یکدیگر صفر می‌باشد زیرا هر دو دارای سرعت مطلق صفر و شتاب مطلق $\vec{g}$ (نسبت به ناظر) متصل به زمین می‌باشند و در نتیجه هیچ حرکت نسبی میان حلقه و استوانه به وجود نخواهد آمد. پس از برخورد استوانه با زمین بردار سرعت استوانه معکوس می‌شود و در نتیجه یک سرعت نسبی میان حلقه و استوانه ایجاد می‌شود که این سرعت نسبی باعث به وجود آمدن یک حرکت نسبی میان این دو می‌شود و در نتیجه‌ی این حرکت نسبی، نیروی اصطکاک جنبشی میان حلقه و استوانه پدیدار می‌شود. با نوشتن معادلات نیرو از زمان برخورد استوانه با زمین، می‌توان سرعت و شتاب نسبی این دو را نسبت به یکدیگر محاسبه نمود.

$$\text{حلقه} : \sum \vec{F} = m\vec{a}_۱ \ \Rightarrow \ m\vec{g} + \vec{f}_s = m\vec{a}_۱$$

$$\Rightarrow (۰{,}۲ \times ۹{,}۸۱)(-\vec{j}) + ۱(\vec{j}) = ۰{,}۲ \times a_۱(\vec{j}) \ \Rightarrow \ a_۱ = -۴{,}۸۱\mathrm{m/s^۲}$$

$$\text{استوانه} : \sum \vec{F} = M\vec{a}_۲ \ \rightarrow \ M\vec{g} - \vec{f}_s = M\vec{a}_۲ \ , \ (-\vec{f}_s) : \vec{f}_s \ \text{عکس‌العمل نیروی}$$

$$\Rightarrow (۱ \times ۹{,}۸۱)(-\vec{j}) - ۱(\vec{j}) = ۱ \times a_۲(\vec{j}) \ \Rightarrow \ a_۲ = -۱۰{,}۸۱\mathrm{m/s^۲}$$

اکنون سرعت حلقه و استوانه را پس از برخورد با زمین به‌دست آوریم:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰ t \ \Rightarrow \ ۱{,}۸ = \frac{۱}{۲} \times ۹{,}۸۱ \times t^۲ \ \rightarrow \ t = ۰{,}۶\mathrm{s}$$

سرعت حلقه و استوانه یک لحظه قبل از برخورد با زمین:

$$\vec{v}_y = \vec{g} \times t = -۵{,}۹(\vec{j})\mathrm{m/s}$$

$$\rightarrow \text{سرعت پس از برخورد با زمین} : \begin{cases} \vec{v}_{\text{استوانه}} = ۵{,}۹(\vec{j})\mathrm{m/s} \\ \vec{v}_{\text{حلقه}} = -۵{,}۹(\vec{j})\mathrm{m/s} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{\text{حلقه , استوانه}} = \vec{v}_{\text{حلقه}} - \vec{v}_{\text{استوانه}} = -۱۱{,}۸(\vec{j})\mathrm{m/s}$$

$$\vec{a}_{\text{حلقه , استوانه}} = \vec{a}_{\text{حلقه}} - \vec{a}_{\text{استوانه}} = ۶(\vec{j})\mathrm{m/s^۲}$$

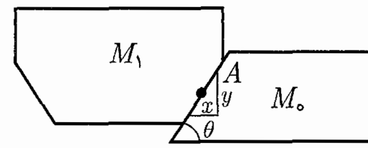
$$\Delta\vec{v} = \vec{a} \times \Delta t \ \rightarrow \ (۰ - (-۱۱{,}۸)) = ۶ \times \Delta t \ \rightarrow \ \Delta t = ۱{,}۹۷\mathrm{s}$$

پس از ۱٫۹۷ ثانیه سرعت حلقه و استوانه باز هم نسبت به یکدیگر صفر می‌شود و در نتیجه نسبت به هم ساکن خواهند بود.

۹۰ الف) اگر نقطه‌ای مانند A در محل اتصال جرم $M_۱$ و $M_۰$ را در نظر بگیریم (شکل ۲ـ۳۵۱)، چون ارتباط بین دو جسم قطع نمی‌شود و بر هم مماس باقی می‌مانند، رابطه قیدی بین x و y وجود دارد. بدین ترتیب اگر نقطه A به میزان y پایین بیاید باید به میزان x به سمت راست برود که

رابطه بین x و y عبارتست از

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad (۱)$$



شکل ۲-۳۵۱

بنابراین اگر $M_۱$ با شتاب a پایین بیاید، اندازه شتاب جرم‌های $M_۰$ برابر $a\tan\theta$ است.

ب) نمودار جسم آزاد جسم‌ها را رسم می‌کنیم (شکل ۲ـ۳۵۲) و بر اساس آن معادلات تعادل جسم‌ها را می‌نویسیم.

$$M_۱ \text{ جرم } : \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲N\cos\theta - M_۱ g = ۰ \Rightarrow N = \frac{M_۱ g}{۲\cos\theta}$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow N\sin\theta - N\sin\theta = ۰$$

$$M_۰ \text{ جرم } : \sum F_y = ۰ \Rightarrow N_۱ - M_۰ g - N\cos\theta = ۰$$

$$\Rightarrow N_۱ = M_۰ g + \frac{M_۱ g}{۲}$$

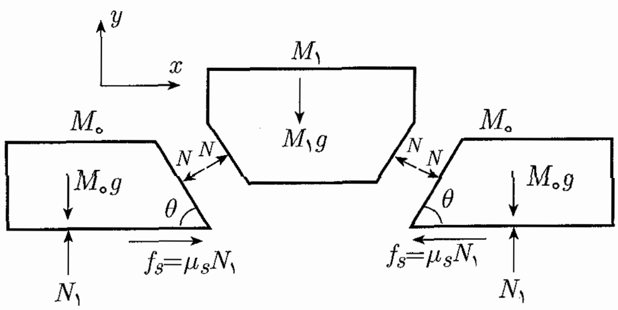
$$f_s = \mu N_۱ \Rightarrow f_s = \mu\left(M_۰ g + \frac{Mg}{۲}\right)$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow N\sin\theta - f_s = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{M_۱ g}{۲}\tan\theta - \mu\left(M_۰ g + \frac{M_۱ g}{۲}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{M_۱ g}{۲}(\tan\theta - \mu) = \mu M_۰ g$$

$$\Rightarrow M_۱ = \frac{۲\mu M_۰}{\tan\theta - \mu} = ۰$$



شکل ۲-۳۵۲

بنابراین لازم است که $M_۱ < \dfrac{۲\mu_s M_۰}{\tan\theta - \mu_s}$ باشد تا دستگاه ساکن بماند.

توجه داشته باشید که اگر $\tan\theta < \mu$ باشد، هیچ‌گاه دستگاه ساکن نمی‌ماند.

ج) با فرض این‌که جرم $M_۱$ حرکت می‌کند، با توجه به شکل (۲ـ۳۵۲) و معادله (۱)، معادلات حرکت اجزای دستگاه را می‌نویسیم.

$$M_۱ \text{ جرم } : \sum F_y = ma_y \Rightarrow ۲N\cos\theta - M_۱ g = -M_۱ a$$

$$\Rightarrow N = \frac{M_۱(g-a)}{۲\cos\theta}$$

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow N\sin\theta - N\sin\theta = ۰$$

$$M_0 \text{ جرم } : \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 - M_0 g - N\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; N_1 = M_0 g + \frac{M_1(g-a)}{2}$$

$$f = \mu N \;\Rightarrow\; f = \mu\left(M_0 g + \frac{M_1(g-a)}{2}\right)$$

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; N\sin\theta - f = M_0(a\tan\theta)$$

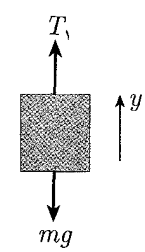
$$\Rightarrow \frac{M_1(g-a)}{2}\tan\theta - \mu\left(M_0 g + \frac{M_1(g-a)}{2}\right) = M_0 a\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{M_1 g}{2}\tan\theta - \mu M_0 g - \mu\frac{M_1 g}{2}$$

$$= \left(M_0\tan\theta - \mu\frac{M_1}{2} + \frac{M_1}{2}\tan\theta\right)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{M_1 g}{2}(\tan\theta - \mu) - \mu M_0 g}{\frac{M_1}{2}(\tan\theta-\mu) + M_0\tan\theta}$$

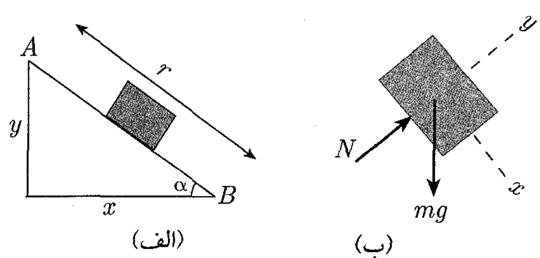
سؤال. به ازای $\tan\theta = \mu$، پاسخ‌های سه قسمت مسئله را بررسی کنید.



شکل ۲-۳۵۳

حل سؤالات دوره تابستانی

۹۱ الف) ابتدا نمودار جسم آزاد جسمی را که روی سطح شیبداری با زاویه α قرار دارد رسم می‌کنیم (شکل (۲-۳۵۴)).



شکل ۲-۳۵۴

حال قانون دوم نیوتن را در دستگاه مختصات $x-y$ می‌نویسیم.

$$\sum F_x = ma_x \;\Rightarrow\; mg\sin\alpha = ma_x \;\Rightarrow\; a_x = g\sin\alpha$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -mg\cos\alpha + N = 0 \;\Rightarrow\; N = mg\cos\alpha$$

اگر جسم را از نقطه‌ی A (شکل (۲-۳۵۴) الف) رها کنیم، بر اساس معادله حرکت با شتاب ثابت، داریم

$$r = \frac{1}{2}a_x T^2 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)T^2$$

بنابراین جابه‌جایی افقی و قائم ذره برابر است با:

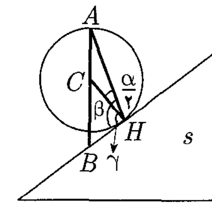
$$x = r\cos\alpha \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}gT^2\sin\alpha\cos\alpha \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{4}gT^2\sin 2\alpha \qquad (1)$$

$$y = -r\sin\alpha \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}gT^2\sin^2\alpha = -\frac{1}{4}gT^2(1-\cos 2\alpha)$$

$$\Rightarrow y + \frac{۱}{۴}gT^{۲} = \frac{۱}{۴}gT^{۲}\cos ۲\alpha \qquad (۲)$$

اگر طرفین روابط (۱) و (۲) را به توان ۲ برسانیم و با هم جمع کنیم، داریم:

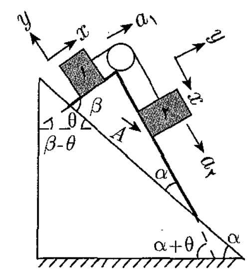
$$x^{۲} + (y + \frac{۱}{۴}gT^{۲})^{۲} = (\frac{۱}{۴}gT^{۲})^{۲}$$



شکل ۲-۳۵۵

بنابراین مکان هندسی این نقاط دایره‌ای به مرکز $(۰, -\frac{۱}{۴}gT^{۲})$ و شعاع آن $\frac{۱}{۴}gT^{۲}$ است.

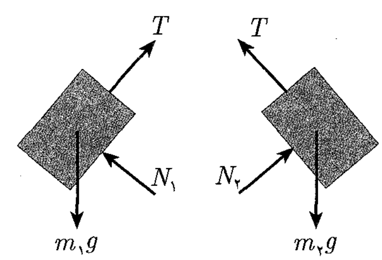
ب) با توجه به قسمت (الف) اگر در امتداد قائم AB (شکل (۲ـ۳۵۵)) نقطه C را طوری انتخاب کنیم که دایره‌ی رسم شده به مرکز C، در نقطه‌ی H بر سطح شیبدار S مماس شود، مسیر AH کمترین زمان را خوهد داشت. بنابراین مقدار $\beta = \gamma + \frac{\alpha}{۲}$ است که در آن $\gamma = \frac{\pi}{۲} - \alpha$ می‌باشد. در نتیجه $\beta = \frac{\pi - \alpha}{۲}$ است.



شکل ۲-۳۵۶

۹۲ مطابق شکل (۲ـ۳۵۶)، سطوحی که جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ روی آنها واقعند به ترتیب با افق زاویه‌ی $(\beta - \theta)$ و $(\alpha + \theta)$ می‌سازند. نمودار جسم آزاد هرکدام از اجسام ۱ و ۲ را در شکل (۲ـ۳۵۷) رسم کرده‌ایم. اگر A شتاب گوه و $a_۱$ و $a_۲$ به ترتیب شتاب $m_۱$ و $m_۲$ باشند، شتاب مطلق $m_۱$ و $m_۲$ در دستگاه مختصات نشان داده شده برای هر کدام از آنها (شکل (۲ـ۳۵۶)) عبارتست از

$$A_{۱x} = a_۱ + A\cos\beta \quad A_{۱y} = -A\sin\beta$$
$$A_{۲x} = a_۲ + A\cos\alpha \quad A_{۲y} = A\sin\alpha$$



شکل ۲-۳۵۷

حال معادلات حرکت را برای هر کدام از جرم‌های ۱ و ۲ می‌نویسیم.

جسم ۱:

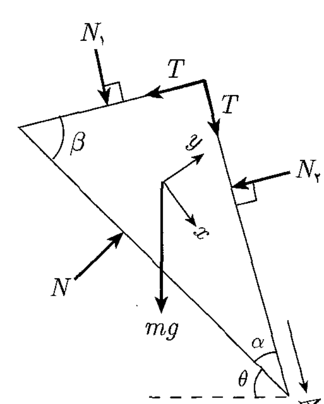
$$\begin{cases} \sum F_x = m_۱A_{۱x} \Rightarrow T - m_۱g\sin(\beta - \theta) = m_۱(a + A\cos\beta) \\ \sum F_y = m_۱A_{۱y} \Rightarrow N_۱ - m_۱g\cos(\beta - \theta) = m_۱(-A\sin\beta) \end{cases}$$

جسم ۲:

$$\begin{cases} \sum F_x = m_۲A_{۲x} \Rightarrow m_۲g\sin(\alpha + \theta) - T = m_۲(a_۲ + A\cos\alpha) \\ \sum F_y = m_۲A_{۲y} \Rightarrow N_۲ - m_۲g\cos(\alpha + \theta) = m_۲(A\sin\alpha) \end{cases}$$

نمودار جسم آزاد گوه در شکل (۲ـ۳۵۸) نشان داده شده است.

حال معادله‌ی حرکت را برای گوه نیز می‌نویسیم.

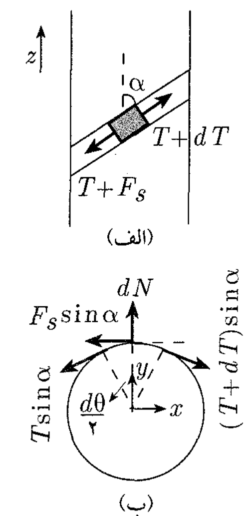


شکل ۲-۳۵۸

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \Rightarrow Mg\sin\theta + N_۱\sin\beta - N_۲\sin\alpha \\ \qquad +T(\cos\alpha - \cos\beta) = MA \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow N - Mg\cos\theta - T(\sin\alpha + \sin\beta) \\ \qquad -N_۱\cos\beta - N_۲\cos\alpha = ۰ \end{cases}$$

همچنین قید روی m_1 و m_2 ایجاب می‌کند که $a_1 = a_2$ باشد. با استفاده از ۵ معادله اول می‌توان a_1، a_2، T، N_1، N_2 و A را با توجه به رابطه قیدی $a_1 = a_2$ به‌دست آورد.

۹۳ نمودار جسم آزاد قسمت کوچکی از طناب را در شکل (۲ـ۳۵۹ ب) رسم کرده‌ایم. چون طناب در آستانه لغزش قرار دارد و هنوز حرکت نکرده است، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است. بنابراین



شکل ۲-۳۵۹

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow\ dN - \big[(T+dT)+T\big]\sin\alpha \sin\frac{d\theta}{2} = 0$$

با توجه به کوچک بودن $d\theta$ و با استفاده از تقریب $\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$، داریم

$$dN = T\sin\alpha d\theta \ \ ,\ \ F_s = \mu dN \ \Rightarrow\ F_s = \mu T\sin\alpha d\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow\ \big[(T+dT)-T\big]\sin\alpha\cos\frac{d\theta}{2} - F_s\sin\alpha = 0$$

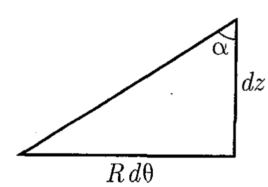
با استفاده از تقریب $\cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$، داریم

$$F_s = dT \qquad (2)$$

با برابر قرار دادن روابط (۱) و (۲)، داریم

$$dT = \mu T\sin\alpha d\theta \qquad (3)$$

بر اساس شکل (۲ـ۳۶۰) رابطه‌ی بین z و θ عبارتست از:



شکل ۲-۳۶۰

$$\tan\alpha = \frac{Rd\theta}{dz} \ \Rightarrow\ d\theta = \frac{dz\tan\alpha}{R} \qquad (4)$$

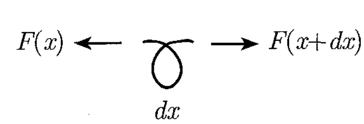
با جایگذاری $d\theta$ از رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳)، داریم:

$$dT = \mu T\sin\alpha\frac{dz\tan\alpha}{R} \ \Rightarrow\ \frac{dT}{T} = \frac{\mu\sin^2\alpha}{R\cos\alpha}dz$$

$$\Rightarrow \int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} = \int_0^z \frac{\mu\sin^2\alpha}{R\cos\alpha}dz \ \Rightarrow\ \ln\frac{T}{T_0} = \frac{\mu\sin^2\alpha z}{R\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow T = T_0 e^{\frac{\mu\sin^2\alpha}{R\cos\alpha}z}$$

۹۴ الف) عنصری از فنر به طول اولیه‌ی dx را که به فاصله‌ی x از انتهای سمت چپ فنر قرار دارد در نظر بگیرید (شکل (۲ـ۳۶۱)). نیرویی که به این عنصر وارد می‌شود $F(x)$ است. اگر فنر را به صورت فنرهایی سری به طول dx تصور کنیم، ثابت هر کدام از این فنرهای کوچک $k\frac{l}{dx}$ خواهد بود، که l طول اولیه‌ی کل فنر است. بنابراین با توجه به قانون هوک داریم



شکل ۲-۳۶۱

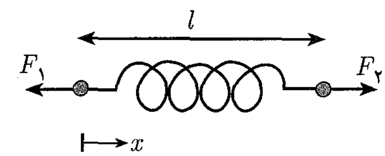
$$F(x) = kl\frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

برای به‌دست آوردن کشیدگی کلی فنر، لازم است شتاب آن را به‌دست آوریم. بنابراین

$$\sum F_x = ma \ \Rightarrow\ F_2 - F_1 = ma \ \Rightarrow\ a = \frac{F_2 - F_1}{m}$$

حال با نوشتن معادله‌ی حرکت برای بخشی از فنر که در فاصله‌ی ۰ تا x قرار دارد، داریم

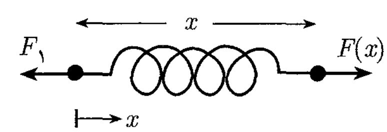
$$\sum F_x = ma \Rightarrow F(x) - F_۱ = (m\frac{x}{l})a$$
$$\Rightarrow F(x) - F_۱ = (\frac{mx}{l})(\frac{F_۲ - F_۱}{m})$$
$$\Rightarrow F(x) = (F_۲ - F_۱)\frac{x}{l} + F_۱ \qquad (۲)$$



شکل ۲-۳۶۲

ب) با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه‌ی (۲)، داریم

$$kl\frac{dy}{dx} = (F_۲ - F_۱)\frac{x}{l} + F_۱$$



شکل ۲-۳۶۳

با انتگرال‌گیری معین از رابطه فوق، $y(x)$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین

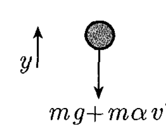
$$y(x) - y(۰) = (\frac{F_۱}{k})\frac{x}{l} + \left(\frac{F_۲ - F_۱}{۲k}\right)(\frac{x}{l})^۲$$

یعنی افزایش طول تابعی درجه دوم بر حسب x است.
افزایش طول کل فنر بر اثر نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ به ازای $x = l$ به‌دست می‌آید. در نتیجه

$$y(l) - y(۰) = \frac{۱}{۲k}(F_۱ + F_۲)$$

۹۵ نمودار جسم آزاد ذره وقتی به سمت بالا می‌رود را رسم کرده‌ایم (شکل (۲ـ۳۶۴)). بنابراین معادله حرکت ذره عبارتست از

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow -mg - m\alpha v^۲ = ma \Rightarrow -g - \alpha v^۲ = \dot{v} \qquad (۱)$$



شکل ۲-۳۶۴

اگر v را تا مرتبه اول نسبت به α بنویسیم، داریم:

$$v = v^{(۰)} + \alpha v^{(۱)}$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۱)، داریم:

$$\dot{v}^{(۰)} + \alpha\dot{v}^{(۱)} = -g - \alpha\left(v^{(۰)۲} + \alpha^۲ v^{(۱)۲} + ۲\alpha v^{(۰)}v^{(۱)}\right)$$

با برابر قرار دادن مرتبه‌های صفر و یک در طرفین رابطه‌ی فوق، داریم:

$$\begin{cases} \dot{v}^{(۰)} = -g \\ \dot{v}^{(۱)} = -v^{(۰)۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv^{(۰)}}{dt} = -g & (۲) \\ \dfrac{dv^{(۱)}}{dt} = -v^{(۰)۲} & (۳) \end{cases}$$

با ضرب dt در دو طرف رابطه‌ی (۲) و انتگرال‌گیری از دو طرف آن، داریم

$$v^{(۰)} = v_۰ - gt \qquad (۴)$$

حال با جایگذاری $v^{(\circ)}$ از رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳) و ضرب dt در دو طرف آن و سپس انتگرال‌گیری از طرفین رابطه، داریم:

$$v^{(1)} = -v_\circ^2 t - \frac{g^2}{3}t^3 + v_\circ g t^2$$

بنابراین

$$v = (v_\circ - gt) + \alpha\left(-v_\circ^2 t - \frac{g^2}{3}t^3 + v_\circ g t^2\right) \qquad (5)$$

با یک بار انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه‌ی فوق (با توجه به $v = \frac{dy}{dt}$)، داریم

$$y(t) = v_\circ t - \frac{1}{2}gt^2 - \alpha\left(\frac{v_\circ^2}{2}t^2 + \frac{g^2}{12}t^4 - v_\circ g\frac{t^3}{3}\right) \qquad (6)$$

در نقطه‌ی اوج، سرعت ذره صفر است. بنابراین برای پیدا کردن زمان رسیدن ذره به نقطه‌ی اوج، t_f، v را در رابطه‌ی (۵) صفر می‌گذاریم. پس

$$\circ = (v_\circ - gt_f) + \alpha\left(-v_\circ^2 t_f - \frac{g^2}{3}t_f^3 + v_\circ g t_f^2\right) \qquad (7)$$

چون t_f را تا مرتبه‌ی اول نسبت به α می‌خواهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$t_f = t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)}$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۷)، داریم

$$\circ = \left[v_\circ - g(t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)})\right] - \alpha\Big[v_\circ^2(t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)})$$
$$+ \frac{g^2}{3}(t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)})^3 - v_\circ g(t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)})^2\Big]$$

ضریب کروشه‌ی دوم در طرف راست رابطه‌ی فوق α است. بنابراین در جملات داخل این کروشه، تنها جملاتی را حفظ می‌کنیم که از مرتبه‌ی صفر نسبت به α باشند. در نتیجه

$$\circ = \left[v_\circ - g(t^{(\circ)} + \alpha t^{(1)})\right] - \alpha\left[v_\circ^2 t^{(\circ)} + \frac{g^2}{3}t^{(\circ)3} - v_\circ g t_{(\circ)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_\circ - gt^{(\circ)} = \circ \\ -gt_{(1)} = v_\circ^2 t^{(\circ)} + \frac{1}{3}g^2 t^{(\circ)3} - v_\circ g t^{(\circ)2} \end{cases}$$

از معادله‌ی اول $t^{(\circ)} = \frac{v_\circ}{g}$ است. با جایگذاری $t^{(\circ)}$ به‌دست آمده در معادله‌ی دوم در رابطه‌ی فوق، داریم:

$$-gt^{(1)} = v_\circ^2\left(\frac{v_\circ}{g}\right) + \frac{1}{3}g^2\left(\frac{v_\circ}{g}\right)^3 - v_\circ g\left(\frac{v_\circ}{g}\right)^2 \Rightarrow t^{(1)} = -\frac{1}{3}\frac{v_\circ^3}{g^2}$$

در نتیجه t_f برابر است با:

$$t_f = \frac{v_\circ}{g} + \alpha\left(-\frac{1}{3}\frac{v_\circ^3}{g^2}\right)$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{v_\circ}{g}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\frac{v_\circ^2}{g}\right) \;\Rightarrow\; t_f = t_\circ\left(1 - \frac{\alpha}{3}gt_\circ^2\right)$$

ارتفاع اوج را می‌توان با قرار دادن $t = t_f$ در معادله‌ی (۶) به‌دست آورد. بنابراین

$$H = v_\circ t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 - \alpha\left(\frac{v_\circ^2}{2}t_f^2 + \frac{g^2}{12}t_f^4 - \frac{v_\circ g}{3}t_f^3\right)$$

با در نظر گرفتن $t_f = t_\circ - \frac{\alpha}{3}gt_\circ$ و $H = H^{(\circ)} + \alpha H^{(1)}$، داریم

$$H^{(\circ)} + \alpha H^{(1)} = v_\circ\left(t_\circ - \frac{\alpha}{3}gt_\circ^3\right) - \frac{g}{2}\left(t_\circ^2 - \frac{2}{3}\alpha g t_\circ^4\right) - \alpha\left(\frac{v_\circ^2}{2}t_\circ^2 + \frac{g^2}{12}t_\circ^4 - \frac{v_\circ g}{3}t_\circ^3\right)$$

که در آن تنها جملات تا مرتبه اول α حفظ شده است. با قرار دادن $t_\circ = \frac{v_\circ}{g}$، داریم:

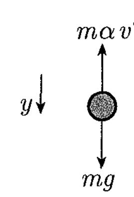
$$H^{(\circ)} + \alpha H^{(1)} = v_\circ\left(\frac{v_\circ}{g} - \frac{\alpha}{3}\frac{v_\circ^2}{g^2}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_\circ^2}{g^2} - \frac{2\alpha}{3}\frac{v_\circ^4}{g^3}\right) - \alpha\left(\frac{v_\circ^4}{2g^2} + \frac{v_\circ^4}{12g^2} - \frac{v_\circ^4}{3g^2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H^{(\circ)} = \frac{v_\circ^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_\circ^2}{g} = \frac{v_\circ^2}{2g} \\ H^{(1)} = -\frac{1}{3}\frac{v_\circ^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{v_\circ^4}{g^2} - \frac{1}{4}\frac{v_\circ^4}{g^2} = -\frac{1}{4}\frac{v_\circ^4}{g^2} \end{cases}$$

بنابراین ارتفاع اوج ذره تا مرتبه‌ی اول نسبت به α عبارتست از:

$$H = H^{(\circ)} + \alpha H^{(1)} = \frac{v_\circ^2}{2g} - \alpha\frac{v_\circ^4}{4g^2} \;\Rightarrow\; H = \frac{v_\circ^2}{2g}\left(1 - \alpha\frac{v_\circ^2}{2g}\right)$$

نمودار جسم آزاد ذره هنگام برگشتن به محل پرتاب در شکل (۲-۳۶۵) نشان داده شده است.



شکل ۲-۳۶۵

$$\sum F_y = ma_y \;\Rightarrow\; mg - m\alpha v^2 = ma \;\Rightarrow\; \dot{v} = g - \alpha v^2$$

با قرار دادن $v = v^{(\circ)} + \alpha v^{(1)}$ در رابطه فوق، داریم:

$$\dot{v}^{(\circ)} + \alpha\dot{v}^{(1)} = g - \alpha\left(v^{(\circ)^2} + \alpha^2 v^{(1)^2} + 2\alpha v^{(\circ)}v^{(1)}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{v}^{(\circ)} = g \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} v^{(\circ)} = gt \\ \dot{v}^{(1)} = -v^{(\circ)^2} = -g^2t^2 \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری}} v^{(1)} = -g^2\frac{t^3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) = gt - \alpha g^2\frac{t^3}{3}$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی فوق، داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{\alpha}{12}g^2t^4$$

زمان برگشتن، T_2، با برابر قرار دادن $y(T_1) = H = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \alpha\frac{v_0^2}{2g}\right)$ به‌دست می‌آید.
T_r را هم به صورت $T^{r(0)} + \alpha T^{r(1)}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \alpha\frac{v_0^2}{2g}\right) = \frac{1}{2}g\left(T^{r(0)^2} + 2\alpha T_{r(0)}T^{r(1)}\right) - \frac{\alpha}{12}g^2\left(T^{r(0)^4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}gT^{t(0)^2} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow T^{r(0)} = \frac{v_0}{g} \\ -\frac{v_0^4}{4g^2} = gT^{r(0)}T^{r(1)} - \frac{g^2}{12}T^{r(0)^4} \quad \Rightarrow v_0T^{r(1)} = \frac{g^2}{12}\left(\frac{v_0}{g}\right)^4 - \frac{v_0^4}{4g^2} \\ \qquad\qquad \Rightarrow T^{r(1)} = -\frac{1}{6}\frac{v_0^4}{g^2} \end{cases}$$

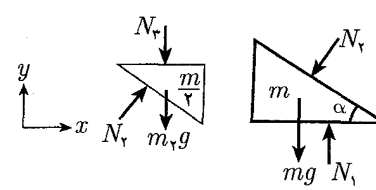
بنابراین

$$T_r = T^{r(0)} + \alpha T^{r(1)} = \frac{v_0}{g} - \frac{\alpha}{6}\frac{v_0^3}{g^2}$$

در نتیجه زمان رفت و برگشت ذره برابر است با:

$$t = T_r + t_f \Rightarrow t = \frac{2v_0}{g} - \frac{1}{2}\alpha\frac{v_0^3}{g^2}$$

۹۶ الف) مطابق شکل (۲ـ۳۶۶) نمودار جسم آزاد جرم‌های m و $\frac{m}{2}$ را رسم می‌کنیم.
معادلات حرکت برای این دو سطح شیبدار عبارتست از



شکل ۲-۳۶۶

$$m \text{ جرم} : \begin{cases} \sum F_x = ma_x \Rightarrow -N_2\sin\alpha = m\ddot{x}_1 \\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow N_1 - mg - N_2\cos\alpha = m\ddot{y}_1 \end{cases}$$

چون جرم m روی زمین قرار دارد، $\ddot{y}_1 = 0$ است.

$$\frac{m}{2} \text{ جرم} : \begin{cases} \sum F_x = \frac{m}{2}a_x \Rightarrow N_2\sin\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_2 \\ \sum F_y = \frac{m}{2}a_y \Rightarrow N_2\cos\alpha - \frac{m}{2}g - N_3 = \frac{m}{2}\ddot{y}_2 \end{cases}$$

چون شتاب جرم $\frac{m}{2}$ نسبت به جرم m موازی سطح تماس بین آنهاست، $\tan\alpha = -\left(\frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}\right)$ است. در نتیجه ۶ معادله با ۷ مجهول N_1، N_2، N_3، $\ddot{x}_1$، $\ddot{y}_1$، $\ddot{x}_2$ و $\ddot{y}_2$ داریم. بنابراین برای حل مسئله به یک معادله دیگر نیاز داریم.

ب) این مجموعه مشابه مجموعه کل سطوح شیبدار است با این تفاوت که جرم‌ها $\frac{1}{4}$ شده است.

پ) حال چون نیروهای عکس‌العمل نسبت مستقیم با نیروی گرانشی وارد بر مجموعه‌ها دارند، نسبت $\frac{N_3}{N_1}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{4}\frac{g + \ddot{y}_2}{g}$ نوشت.

ت) بر اساس معادلات قسمت (الف) به معادلات زیر دست می‌یابیم.

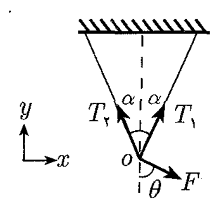
$$N_۲ = -\frac{m}{\sin\alpha}\ddot{x}_۱ \quad N_۱ = mg - m\ddot{x}_۱\cot\alpha$$
$$\ddot{x}_۲ = -۲\ddot{x}_۱ \qquad N_۳ = -m\ddot{x}_۱\cot\alpha - \frac{m}{۲}g - \frac{m}{۲}(۳\ddot{x}_۱)\tan\alpha$$
$$\ddot{y}_۲ = ۳\ddot{x}_۱\tan\alpha$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله‌ای که در قسمت (پ) به‌دست می‌آوریم، داریم

$$\frac{N_۳}{N_۱} = \frac{۱}{۴}\frac{g+\ddot{y}_۲}{g}$$
$$\Rightarrow -۴mg\ddot{x}_۱\cot\alpha - ۲mg^۲ - ۶mg\ddot{x}_۱\tan\alpha$$
$$= m(g-\ddot{x}_۱\cot\alpha)(g+۳\ddot{x}_۱\tan\alpha)$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_۱^۲ - \ddot{x}_۱ g(۳\tan\alpha+\cot\alpha) - g^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_۱ = \frac{g}{۲}\left[۳\tan\alpha+\cot\alpha \pm\sqrt{(۳\tan\alpha+\cot\alpha)^۲+۴}\right]$$

۹۷ در شکل (۲ـ۳۶۷) نیروهای وارد به لولای o را رسم کرده‌ایم. با نوشتن معادلات تعادل در دو راستای x و y داریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F\sin\theta + (T_۱ - T_۲)\sin\alpha = ۰$$
$$\Rightarrow F\sin\theta = (T_۲ - T_۱)\sin\alpha \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -F\cos\theta + (T_۱ + T_۲)\cos\alpha = ۰$$
$$\Rightarrow F\cos\theta = (T_۱ + T_۲)\cos\alpha \qquad (۲)$$



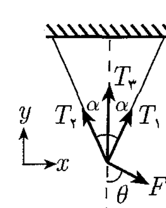
شکل ۲-۳۶۷

با حل همزمان معادلات (۱) و (۲)، داریم

$$T_۲ = \frac{F}{۲}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) = F\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin ۲\alpha}$$
$$T_۱ = \frac{F}{۲}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}-\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right) = F\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin ۲\alpha}$$

ب) نیروهای وارده به لولای o را در شکل (۲ـ۳۶۸) نشان داده‌ایم. با نوشتن معادلات تعادل در دو راستای x و y، داریم:

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F\sin\theta + (T_۱ - T_۲)\sin\alpha = ۰$$
$$\Rightarrow F\sin\theta = (T_۲ - T_۱)\sin\alpha \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -F\cos\theta + T_۳ + (T_۱ + T_۲)\cos\alpha = ۰$$
$$\Rightarrow F\cos\theta = T_۳ + (T_۱ + T_۲)\cos\alpha \qquad (۲)$$

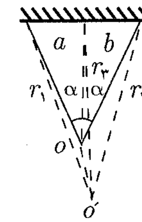


شکل ۲-۳۶۸

در نتیجه ۲ معادله و ۳ مجهول داریم. بنابراین $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ به‌دست نمی‌آید.

پ) طول $oo' = l$ است. زاویه‌ی راستای oo' با راستای قائم γ است. طول‌های $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ به ترتیب عبارتند از:

$$r_۱ = \left(b^۲ + l^۲ + ۲bl\cos(\alpha+\gamma)\right)^{\frac{۱}{۲}} \approx b + l\cos(\alpha+\gamma)$$
$$r_۲ = \left(b^۲ + l^۲ + ۲bl\cos(\alpha-\gamma)\right)^{\frac{۱}{۲}} \approx b + l\cos(\alpha-\gamma)$$
$$r_۳ = \left(a^۲ + l^۲ + ۲al\cos\gamma\right)^{\frac{۱}{۲}} \approx a + l\cos\gamma$$



شکل ۲-۳۶۹

این روابط با کوچک در نظر گرفتن l و بسط معادلات تا مرتبه‌ی اول به‌دست آمده است. بنابراین نیروهای کشش $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ برابر می‌شوند با:

$$T_۱ = k\Delta r_۱ = kl\cos(\alpha+\gamma)$$
$$T_۲ = k\Delta r_۲ = kl\cos(\alpha-\gamma)$$
$$T_۳ = k'\Delta r_۳ = k'l\cos\gamma$$
$$\Rightarrow \begin{cases} T_۱ = \dfrac{k}{k'}\cdot\dfrac{T_۳}{\cos\gamma}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) \\ T_۲ = \dfrac{k}{k'}\cdot\dfrac{T_۳}{\cos\gamma}(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma) \end{cases}$$

با جمع کردن دو معادله‌ی فوق، داریم:

$$T_۱ + T_۲ = \frac{۲T_۳\cos\alpha}{\eta}\ ,\ \eta = \frac{k'}{k} \qquad (۳)$$

فرض می‌کنیم با وجود عوض شدن جهت میله‌ها، روابط قبلی تا مرتبه اول نسبت به $\dfrac{l}{b}$ درست باشند. بنابراین

$$T_۱ + T_۲ = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{T_۳}{\cos\alpha} = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\eta}{۲}\cdot\frac{(T_۱+T_۲)}{\cos^۲\alpha}$$
$$\Rightarrow (T_۱+T_۲)\left(۱ + \frac{\eta}{۲\cos^۲\alpha}\right) = \frac{F\cos\theta}{\cos\alpha} \qquad (۴)$$

همچنین از رابطه‌ی (۲)، داریم:

$$T_۲ - T_۱ = \frac{F\sin\theta}{\sin\alpha} \qquad (۵)$$

اگر دو معادله‌ی (۴) و (۵) را با هم حل کنیم، $T_۱$ و $T_۲$ به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$T_۱ = \frac{F}{۲}\left[\frac{۲\cos\alpha\cos\theta}{۲\cos^۲\alpha+\eta} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$
$$T_۲ = \frac{F}{۲}\left[\frac{۲\cos\alpha\cos\theta}{۲\cos^۲\alpha+\eta} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right]$$

با جایگذاری $T_۱$ و $T_۲$ از روابط فوق در معادله‌ی (۳)، داریم:

$$T_۳ = \frac{\eta}{۲}\cdot\frac{T_۱+T_۲}{۲} \ \Rightarrow\ T_۳ = \eta\frac{F\cos\theta}{۲\cos^۲\alpha+\eta}$$

۹۸ الف) نیروهای وارد بر جرم m را وقتی که به اندازه‌ی x به سمت راست می‌کشیم، در شکل (۲ـ۳۷۰) نشان داده‌ایم.

$$F_x = -2T\sin\theta$$

$$T = k\Delta l = k\left(\sqrt{l^2+x^2}-l\right)$$

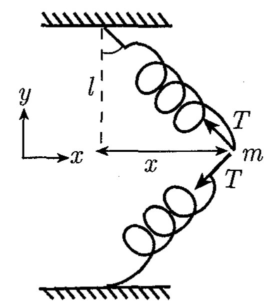
$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}} \Rightarrow F_x = -2k\left(\sqrt{l^2+x^2}-l\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$\Rightarrow F_x = -2k\left[x - xl(l^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -2k\left[x - \frac{xl}{l}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}+\cdots\right)\right] \Rightarrow F_x = -\frac{k}{l^2}x^3+\cdots$$

که برای دامنه‌های کوچک $F \approx \frac{k}{l^2}x^3$ است. بنابراین مقدار $h = \frac{k}{l^2}$ است. دیمانسیون h برابر است با:

$$[h] = (MT^{-2})(L^{-2}) \Rightarrow [h] = ML^{-2}T^{-2}$$



شکل ۲-۳۷۰

ب) کمیت‌های مربوطه، A (دامنه حرکت)، τ (زمان تناوب)، h و m هستند. بنابراین کمیت بدون بعد Q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = h^\alpha m^\beta \tau^\gamma A^\theta \Rightarrow [Q] = (ML^{-2}T^{-2})^\alpha M^\beta T^\gamma L^\theta = 1$$

حال هر کدام از ابعاد را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$[M] \rightarrow \alpha+\beta = 0$$

$$[L] \rightarrow -2\alpha+\gamma = 0$$

$$[T] \rightarrow -2\alpha+\theta = 0$$

با حل همزمان سه معادله‌ی فوق، داریم:

$$\theta = \gamma = -2\beta = 2\alpha$$

بنابراین کمیت بدون بعد Q را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q = h^\alpha m^{-\alpha}\tau^{2\alpha}A^{2\alpha} = \left(\frac{n\tau^2A^2}{m}\right)^\alpha \qquad (1)$$

بنابراین تابع ریاضی $f\left(\frac{h\tau^2A^2}{m}\right) = 0$ این کمیت‌ها را به هم مربوط می‌کند. جواب این تابع بر اساس رابطه‌ی (۱) به صورت زیر است:

$$\frac{h\tau^2A^2}{m} = c \Rightarrow \tau = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{mc}{h}}$$

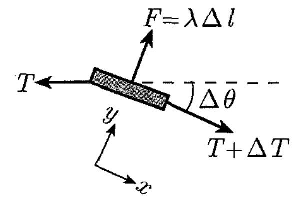
که در آن c یک عدد ثابت است. این عبارت نشان می‌دهد که زمان تناوب نسبت عکس با دامنه‌ی حرکت ذره دارد.

۹۹ الف) در شکل (۲ـ۳۷۱) نمودار جسم آزاد المانی از سیم را نشان داده‌ایم. معادله‌ی تعادل برای این المان در راستای y عبارتست از

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - T\sin\Delta\theta = 0 \Rightarrow \lambda\Delta l - T\Delta\theta = 0$$

در رابطه‌ی فوق به دلیل کوچک بودن $\Delta\theta$، از تقریب $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ استفاده کرده‌ایم.

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{T}\Delta l \Rightarrow d\theta = \frac{\lambda}{T}dl \rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^l \frac{\lambda}{T}dl \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{T}l$$



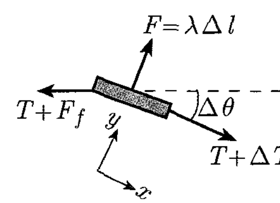
شکل ۲-۳۷۱

چون T در سراسر طول طناب ثابت است، شکل منحنی دایره‌ای به شعاع $\frac{T}{\lambda}$ است.

ب) نمودار جسم آزاد المان قسمت قبل را با در نظر گرفتن نیروی اصطکاک مجدداً رسم کرده‌ایم (شکل (۲ـ۳۷۲)). معادله تعادل را در دو راستا می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T + \Delta T - (T + F_f)\cos\Delta\theta = 0 \Rightarrow \Delta T \approx F_f \qquad (1)$$

در رابطه‌ی فوق از تقریب $\cos\Delta\theta \approx 1$ استفاده کرده‌ایم.



شکل ۲-۳۷۲

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - (T + F_f)\sin\Delta\theta = 0 \Rightarrow F - (T + \Delta T)\Delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow F \approx T\Delta\theta \Rightarrow \lambda\Delta l = T\Delta\theta \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \Delta T = F_f = \mu F \Rightarrow \Delta T = \mu\lambda\Delta l$$

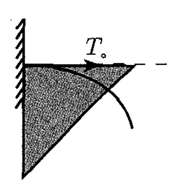
$$\xrightarrow{(2)} \Delta T = \mu T\Delta\theta$$

$$\Rightarrow dT = \mu T d\theta \Rightarrow \frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

$$\rightarrow \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu d\theta$$

$$\Rightarrow \ln\frac{T}{T_0} = \mu\theta \Rightarrow T = T_0 e^{\mu\theta}$$

که T_0 کشش طناب در نقطه‌ی $\theta = 0$ است (شکل (۲ـ۳۷۳)).
بنابر رابطه‌ی (۲)، $\Delta\theta = \frac{\lambda}{T}\Delta l$ است. بنابراین:



شکل ۲-۳۷۳

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{T_0 e^{\mu\theta}}\Delta l \Rightarrow e^{\mu\theta}d\theta = \frac{\lambda}{T_0}dl$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta e^{\mu\theta}d\theta = \int_0^l \frac{\lambda}{T_0}dl$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}e^{\mu\theta}\Big|_0^\theta = \frac{\lambda}{T_0}l \Rightarrow e^{\mu\theta} - 1 = \frac{\lambda}{T_0}\mu l$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{\lambda\mu l}{T_0}\right)$$

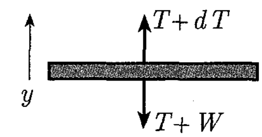
پ) با توجه به اینکه هر تکه از سیم که بخواهد داخل یخ فرو رود، باید نیروی بر واحد سطح از λ_{max} بیشتر باشد، پس λ تقریباً همان λ_{max} خواهد بود.

۱۰۰ برای حل این مسئله ابتدا نمودار جسم آزاد المانی از طناب در فاصله دلخواه y از پایین طناب را رسم می‌کنیم (شکل (۲ـ۳۷۴)). می‌خواهیم s در تمام مقاطع یکسان باشد.

$$\left.\begin{aligned} T+dT &= s_m(A+dA) \\ T &= s_m A \end{aligned}\right\} \Rightarrow dT = s_m dA \qquad (۱)$$

حال معادله تعادل را برای المان مورد نظر می‌نویسیم.

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T+dT-T-W=۰ \Rightarrow dT = W \qquad (۲)$$



شکل ۲-۳۷۴

با توجه به اینکه وزن المان مورد نظر برابر $W=\rho gAdy$ است، طرف راست روابط (۱) و (۲) را برابر قرار می‌دهیم در نتیجه:

$$\rho gAdy = s_m dA \Rightarrow \frac{\rho g}{s_m}dy = \frac{dA}{A}$$
$$\Rightarrow \int_۰^y \frac{\rho g}{s_m}dy = \int_{A_۰}^{A}\frac{dA}{A}$$
$$\Rightarrow \ln\frac{A}{A_۰} = \frac{\rho g y}{s_m} \Rightarrow A = A_۰ e^{\frac{\rho g y}{s_m}}$$

بنابر اطلاعات صورت سؤال، $A_۰ = \dfrac{W}{s_m}$ است. بنابراین

$$A = \frac{W}{s_m}e^{\frac{\rho g y}{s_m}}$$

۱۰۱ اگر نیروی وارد بر یک ذره شعاعی باشد، یعنی مؤلفه مماسی ندارد و در نتیجه بنابر قانون دوم نیوتون $F_\theta = ma_\theta$، شتاب مماسی آن نیز صفر است. رابطه بین شتاب مماسی a_θ و مؤلفه‌های شتاب در دستگاه دکارتی a_x و a_y عبارت است از:

$$a_\theta = a_y\cos\theta - a_x\sin\theta \Rightarrow a_\theta = \ddot{y}\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta \qquad (۱)$$

بر اساس رابطه داده شده بین y, x داریم

$$y = ax^n \Rightarrow \dot{y} = anx^{n-۱}\dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = an(n-۱)x^{n-۲}\dot{x}^۲ + anx^{n-۱}\ddot{x} \qquad (۲)$$

$$(۲),(۱) \rightarrow (an(n-۱)x^{n-۲}\dot{x}^۲ + anx^{n-۱}\ddot{x})\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta = ۰$$

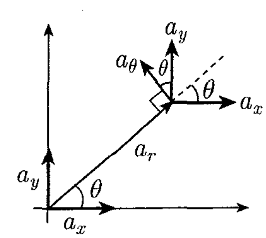
$$\Rightarrow an(n-۱)x^{n-۲}\dot{x}^۲ + anx^{n-۱}\ddot{x} - \ddot{x}\tan\theta = ۰ \qquad (۳)$$

$$y = ax^n\ ,\ \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = ax^{n-۱} \qquad (۴)$$

$$(۴),(۳) \Rightarrow an(n-۱)x^{n-۲}\dot{x}^۲ + anx^{n-۱}\ddot{x} - ax^{n-۱}\ddot{x} = ۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)x^{n-۲}\dot{x}^۲ + (n-۱)x^{n-۱}\ddot{x} = ۰$$

$$\Rightarrow n\dot{x}^۲ + x\ddot{x} = ۰$$



شکل ۲-۳۷۵

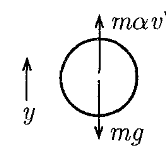
جواب معادله دیفرانسیل به‌دست آمده، به‌صورت $x = At^r$ می‌باشد. با جایگذاری این رابطه در معادله فوق، داریم

$$n(Art^{r-1})^2 + A^2 t^r r(r-1)t^{r-2} = 0$$
$$\Rightarrow nr^2 + r(r-1) = 0 \;\Rightarrow\; nr + r - 1 = 0 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{1+n}$$

در نتیجه $x(t)$ برابر است با

$$x(t) = At^{\frac{1}{1+n}}$$

۱۰۲ الف) ابتدا نمودار جسم آزاد گوی را هنگام سقوط رسم می‌کنیم. (شکل ۲ـ۳۷۶)
حال قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم



شکل ۲-۳۷۶

$$\sum F_y = ma_y \;\Rightarrow\; -mg + m\alpha v^2 = ma_y \;\Rightarrow\; -g + \alpha v^2 = a_y$$
$$v = \dot{y}\,,\; a_y = \ddot{y} \;\Rightarrow\; -g + \alpha\dot{y}^2 = \ddot{y} \qquad (1)$$

حال y را به‌صورت مجموع دو جمله در نظر می‌گیریم که بیانگر رابطه $y(t)$ تا مرتبه یک نسبت به α است، یعنی

$$y = y^{(0)} + \alpha y^{(1)} \qquad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در معادله (۱)، داریم

$$-g + \alpha(\dot{y}^{(0)} + \alpha\dot{y}^{(1)})^2 = \ddot{y}^{(0)} + \alpha\ddot{y}^{(1)}$$

با ساده کردن معادله فوق تا مرتبه یک نسبت به α، داریم

$$-g + \alpha\dot{y}^{(0)^2} = \ddot{y}^{(0)} + \alpha\ddot{y}^{(1)}$$

حال جملات مرتبه صفر و مرتبه یک نسبت به α را جداگانه برابر هم قرار می‌دهیم. بنابراین

$$-g = \ddot{y}^{(0)} \Rightarrow \dot{y}^{(0)} = -gt + v_0$$
$$\Rightarrow y^{(0)} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

مبدأ مختصات را روی زمین در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به این‌که سرعت اولیه گوی صفر است، داریم

$$y^{(0)} = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$
$$\alpha\dot{y}^{(0)^2} = \alpha\ddot{y}^{(1)} \;\Rightarrow\; \dot{y}^{(0)^2} = \ddot{y}^{(1)}$$
$$\Rightarrow (gt)^2 = \ddot{y}^{(1)} \;\Rightarrow\; \ddot{y}^{(1)} = g^2t^2 \Rightarrow \dot{y}^{(1)} = g^2\frac{t^3}{3}$$
$$\Rightarrow y^{(1)} = g^2\frac{t^4}{12}$$

بنابراین $y(t)$ تا مرتبه یک نسبت به α برابر است با

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\alpha g^2}{12}t^4 + h \qquad (3)$$

ب) زمانی که گلوله به زمین می‌رسد، $y = h$ است، بنابراین

$$\alpha = 0 : y = -\frac{1}{2}gT_0^2 + h \Rightarrow h = \frac{1}{2}gT_0^2 \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\alpha \neq 0 : y = -\frac{1}{2}gT^2 + \frac{\alpha g^2}{12}T^4 + h \Rightarrow \frac{\alpha g^2}{12}T^4 - \frac{1}{2}gT^2 + h = 0$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{\frac{g}{2} \pm \sqrt{(\frac{g}{2})^2 - \frac{\alpha g^2 h}{3}}}{\frac{\alpha}{6}g^2} = \frac{\frac{g}{2} \pm \frac{g}{2}\sqrt{1 - \frac{4\alpha h}{3}}}{\frac{\alpha}{6}g^2}$$

چون مخرج از مرتبه اول نسبت به α است، صورت را تا مرتبه دو نسبت به α بسط می‌دهیم. بنابراین (توجه کنید که علامت مثبت در صورت معادله فوق قابل‌قبول نیست)

$$T^2 = \frac{\frac{g}{2} - \frac{g}{2}(1 - \frac{2\alpha h}{3} - \frac{2\alpha^2 h^2}{3})}{\frac{\alpha}{6}g^2} \Rightarrow T^2 = \frac{\frac{\alpha h}{3} + \frac{\alpha^2 h^2}{3}}{\frac{\alpha}{6}g}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{2h + 2\alpha h^2}{g} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h + 2\alpha h^2}{g}}$$

حال معادله فوق را تا مرتبه یک نسبت به α بسط می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + \frac{\alpha h}{2}) \\ T_0 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + \frac{\alpha h}{2}) - \sqrt{\frac{2h}{g}}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\alpha h}{2} \qquad (4)$$

ج) بر اساس رابطه (۳) برای $y(t)$، داریم

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\alpha g^2}{12}t^4 + h$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2}gT_0^2 + \frac{\alpha g^2}{12}T_0^4 + h$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2}g(\frac{2h}{g}) + \frac{\alpha g^2}{12}(\frac{2h}{g})^2 + h$$

$$\Rightarrow H = \frac{\alpha}{3}h^2 \qquad (5)$$

د)

$$R = 5\text{cm} : \alpha = \frac{\rho'}{\rho R} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{10^4(0{,}05)} \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}002$$

$$R = 10\text{cm} : \alpha = \frac{\rho'}{\rho R} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{10^4(0{,}1)} \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}001$$

بنابر رابطه (۴)، اختلاف زمان رسیدن دو گلوله تا زمین به‌دست می‌آید. بنابراین

$$T - T_\circ = \frac{\alpha h}{۲} T_\circ$$
$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ = (T_۱ - T_\circ) - (T_۲ - T_\circ) = \frac{\alpha_۱ h}{۲} T_\circ - \frac{\alpha_۲ h}{۲} T_\circ$$
$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{h}{۲} T_\circ (\alpha_۱ - \alpha_۲) \Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{h}{۲}\sqrt{\frac{۲h}{g}}(\alpha_۱ - \alpha_۲)$$
$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{۵\circ}{۲}\sqrt{\frac{۲(۵\circ)}{۹/۸۱}}(\circ/\circ\circ۲ - \circ/\circ\circ۱) \Rightarrow T_۱ - T_۲ = \circ/\circ۸\circ \mathrm{s}$$

همچنین با استفاده از رابطه (۵)، فاصله دو گلوله به‌دست می‌آید. بنابراین

$$H_۱ - H_۲ = \frac{h^۲}{۳}(\alpha_۱ - \alpha_۲)$$
$$\Rightarrow H_۱ - H_۲ = \frac{(۵\circ)^۲}{۳}(\circ/\circ\circ۲ - \circ/\circ\circ۱) \Rightarrow H_۱ - H_۲ = \circ/۸۳\mathrm{m}$$

ه) مانند قسمت قبل، مراحل حل را می‌نویسیم

گلوله چوبی: $\alpha = \frac{\rho'}{\rho R} \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{۱}{۱\circ^۳(\circ/۱)} \Rightarrow \alpha_۱ = \circ/\circ۱$

گلوله سربی: $\alpha = \frac{\rho'}{\rho R} \Rightarrow \alpha_۲ = \frac{۱}{۱\circ^۴(\circ/۱)} \Rightarrow \alpha_۲ = \circ/\circ\circ۱$

$$T_۱ - T_۲ = (T_۱ - T_\circ) - (T_۲ - T_\circ) \Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{h}{۲} T_\circ (\alpha_۱ - \alpha_۲)$$
$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{h}{۲}\sqrt{\frac{۲h}{g}}(\alpha_۱ - \alpha_۲)$$
$$\Rightarrow T_۱ - T_۲ = \frac{۵\circ}{۲}\sqrt{\frac{۲(۵\circ)}{۹/۸۱}}(\circ/\circ۱ - \circ/\circ\circ۱) \Rightarrow T_۱ - T_۲ = \circ/۷۲\mathrm{s}$$
$$H_۱ - H_۲ = \frac{h^۲}{۳}(\alpha_۱ - \alpha_۲) \Rightarrow H_۱ - H_۲ = \frac{(۵\circ)^۲}{۳}(\circ/\circ۱ - \circ/\circ\circ۱)$$
$$\Rightarrow H_۱ - H_۲ = ۷/۵\mathrm{m}$$

۱۰۳ الف) ابتدا کمیت $\vec{r} \times \vec{v}$ را وقتی که جسم در ارتفاع صفر (سطح زمین) و در عرض جغرافیایی λ نگه داشته شده است، حساب می‌کنیم. از مختصات استوانه‌ای برای محاسبات استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_۱ = R_e \cos\lambda \hat{r} + R_e \sin\lambda \hat{z} \\ \vec{v}_۱ = R_e \sin\lambda w_e \hat{\theta} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \vec{r}_۱ \times \vec{v}_۱ = -(R_e + h_\circ)^۲ w_e \sin^۲\lambda \hat{r}$$
$$+ (R_e + h_\circ)^۲ w_e \sin\lambda \cos\lambda \hat{z} \qquad (۱)$$

در لحظه‌ای که جسم در ارتفاع h از سطح زمین قرار دارد، داریم:

$$\vec{r_۲} = (R_e + h)\cos\lambda\hat{r} + (R_e + h)\sin\lambda\hat{z}$$
$$\vec{v_۲} = u\cos\lambda\hat{r} + (R_e + h)\sin\lambda w_e\hat{\theta} + u\sin\lambda\hat{z}$$

که u سرعت جسم در راستای z' است. بنابراین

$$\vec{r_۲} \times \vec{v_۲} = -(R_e + h)^۲ w\sin^۲\lambda\hat{r} + (R_e + h)^۲ w\sin\lambda\cos\lambda\hat{z} \qquad (۲)$$

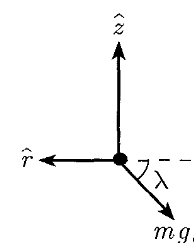
با برابر قرار دادن روابط (۱) و (۲)، w به‌دست می‌آید. بنابراین

$$(R_e + h)^۲ w = (R_e + h_\circ)^۲ \Rightarrow w = \frac{(R_e + h_\circ)^۲}{(R_e + h)^۲} \Rightarrow w = w_e\frac{(۱ + \frac{h_\circ}{R_e})^۲}{(۱ + \frac{h}{R_e})^۲}$$

با فرض $\frac{h}{R_e} \ll ۱$، سرعت زاویه‌ای w به‌دست آمده را تا مرتبه اول نسبت به $\frac{h}{R_e}$ بسط می‌دهیم. پس

$$w = w_e\left(۱ - ۲\frac{(h - h_\circ)}{R_e}\right) \qquad (۳)$$

ب) با توجه به اینکه نیروی گرانش یک نیروی جانب مرکز است و مؤلفه‌ای در راستای $\hat{\theta}$ ندارد، نمودار جسم آزاد را در شکل رسم کرده‌ایم.



شکل ۲-۳۷۷

حال معادلات حرکت را می‌نویسیم:

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -mg_o\cos\lambda = ma_r \Rightarrow -g_o\cos\lambda = \ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ \qquad (۴)$$
$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow -mg_\circ\sin\lambda = ma_\theta \Rightarrow -g_o\sin\lambda = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \qquad (۵)$$

با صرف‌نظر کردن از $r\dot{\theta}^۲$ در مقابل g_o در معادله‌ی (۳)، داریم

$$-g_o\cos\lambda = \ddot{r} \Rightarrow -g_o\cos\lambda = \frac{d\dot{r}}{dt} \Rightarrow -g_o\cos\lambda dt = d\dot{r}$$
$$\Rightarrow \int_\circ^t -g_o\cos\lambda dt = \int_{v_\circ\cos\lambda}^{\dot{r}} d\dot{r}$$
$$\Rightarrow -g_o\cos\lambda t = \dot{r} - v_\circ\cos\lambda \Rightarrow \dot{r} = (v_\circ - gt)\cos\lambda \quad (۶)$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = (v_\circ - gt)\cos\lambda \Rightarrow dr = (v_\circ - gt)\cos\lambda dt$$
$$\Rightarrow \int_{(R_e+h_\circ)\cos\lambda}^{t} dr = \int_\circ^t (v_\circ - gt)\cos\lambda dt$$
$$\Rightarrow r - (R_e - h_\circ)\cos\lambda = \left(v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲}\right)\cos\lambda$$
$$\Rightarrow r = \left(R_e + h_\circ + v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲}\right)\cos\lambda \qquad (۷)$$

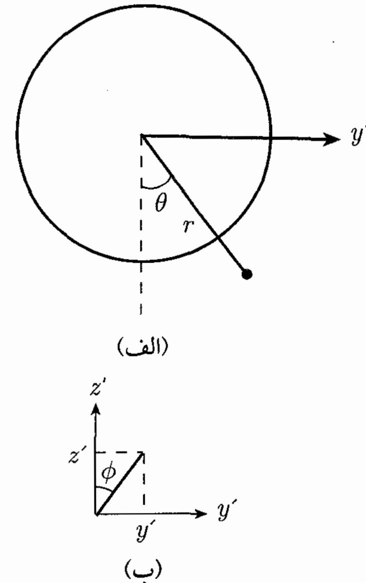
با توجه به اینکه $h - h_\circ = \dfrac{r}{\cos\lambda} - R_e$ است، از معادلات (۳) و (۷) داریم:

$$w = w_e\left(۱ - ۲\frac{(v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲})}{R_e}\right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = w_e\left(۱ - ۲\frac{(v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲})}{R_e}\right)$$

$$\Rightarrow d\theta = w_e\left(۱ - ۲\frac{(v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲})}{R_e}\right)dt$$

$$\Rightarrow \int_\circ^\theta d\theta = \int_\circ^t w_e\left(۱ - ۲\frac{v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲}}{R_e}\right)dt$$

$$\Rightarrow \theta = w_e\left(t - \frac{۲}{R_e}\left(\frac{v_\circ t^۲}{۲} - \frac{gt^۳}{۶}\right)\right) \qquad (۸)$$



شکل ۲-۳۷۸

حال با انتقال مختصات به‌دست آمده در مختصات xyz به مختصات $x'y'z'$ که x' محور عمود بر صفحه $y'z'$ است، زاویه‌ی θی دوران یافته در صفحه $y'z'$ را بر حسب زمان به‌دست می‌آوریم. برای اینکه نماها اشتباه نشود، این زاویه را ϕ می‌نامیم.

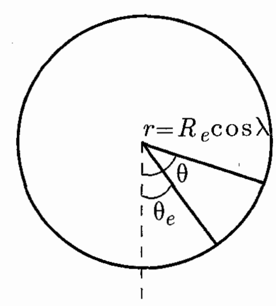
بنابر شکل (۲ـ۳۷۸ الف)، داریم:

$$y' = r\sin\theta \ , \ z' = \frac{r\cos\theta}{\cos\lambda}$$

بر اساس شکل (۲ـ۳۷۸ ب)، داریم:

$$\tan\phi = \frac{z'}{y'} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\frac{\cos\theta}{\cos\lambda}}{\sin\theta} = \frac{\cot\theta}{\cos\lambda} \Rightarrow \phi = \text{Arctan}(\frac{\cot\theta}{\cos\lambda})$$

که θ را نیز در رابطه (۸) آورده‌ایم.



شکل ۲-۳۷۹

ج) زمانی را که طول می‌کشد تا جسم رها شده و به زمین برسد را از رابطه‌ی (۷) به‌دست می‌آوریم.

$$r = R_e\cos\lambda \Rightarrow R_e\cos\lambda = \left(R_e + h_\circ + v_\circ t - \frac{gt^۲}{۲}\right)\cos\lambda$$

$$\Rightarrow -\frac{gt^۲}{۲} + h_\circ = \circ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{۲h_\circ}{g}}$$

حال θ را از رابطه (۸) می‌یابیم.

$$\theta = w_e lt - \frac{۲}{R_e}(\circ - \frac{gt^۳}{۶}) \ , \ \theta_e = w_e t$$

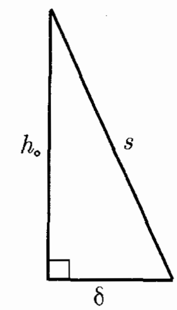
$$\Rightarrow \theta - \theta_e = \frac{۲w_e gt^۳}{۶R_e} \Rightarrow \theta - \theta_e = \frac{w_e g(\frac{۲h_\circ}{g})^{\frac{۳}{۲}}}{۳R_e}$$

در نتیجه فاصله‌ی بین جسم و پای برج که از رابطه‌ی $\delta_۱ = R_e\cos\lambda(\theta - \theta_e)$ به‌دست می‌آید عبارتست از:

$$\delta_۱ = \frac{\cos\lambda w_e g}{۳}(\frac{۲h_\circ}{g})^{\frac{۳}{۲}}$$

با کوچک در نظرگرفتن δ می‌توان δ را عمود بر راستای برج در نظرگرفت (شکل (۲ـ۳۸۰)).
بنابراین فاصله جسم از بالای برج برابر است با:

$$s^2 = \delta^2 + h_\circ^2 \;\Rightarrow\; s = \sqrt{\delta_1^2 + h_\circ^2}$$
$$\Rightarrow\; s = \sqrt{\left(\frac{\cos\lambda w_e g}{3}\right)^2 \left(\frac{2h_\circ}{g}\right)^3 + h_\circ^2}$$



شکل ۲ـ۳۸۰

د) در رابطه‌ی (۷)، فرض می‌کنیم که $h_\circ = 0$ و $r = R_e\cos\lambda$ است. بنابراین

$$R_e\cos\lambda = \left(R_e + v_\circ t - \frac{gt^2}{2}\right)\cos\lambda \Rightarrow v_\circ t - \frac{gt^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v_\circ}{g} \quad (9)$$

θ نیز از رابطه‌ی (۸)، به‌دست می‌آید.

$$\theta = w_e\left(t - \frac{2}{R_e}\left(\frac{v_\circ t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)\right) \quad , \quad \theta_e = w_e t$$

حال فاصله‌ی بین جسم و مبدأ پرتاب که از رابطه‌ی $\delta_2 = R_e\cos\lambda(\theta_e - \theta)$ به‌دست می‌آید، عبارتست از:

$$\delta_2 = R_e\cos\lambda w_e\left(+\frac{2}{R_e}\left(\frac{v_\circ t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)\right) = w_e\cos\lambda\left(-\frac{gt^3}{3} + v_\circ t^2\right)$$

حال t را از رابطه (۹) در معادله‌ی فوق جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه

$$\delta_2 = w_e\cos\lambda\left(-\frac{g(\frac{2v_\circ}{g})^3}{3} + v_\circ\left(\frac{2v_\circ}{g}\right)^2\right) \;\Rightarrow\; \delta_2 = \frac{1}{3}w_e\cos\lambda v_\circ\left(\frac{2v_\circ}{g}\right)^2$$

هـ) برای اینکه جسم درست از پای برج عبور کند، باید $\theta = \theta_e$ باشد. بنابراین

$$\theta = \theta_e \;\Rightarrow\; w_e\left(t - \frac{2}{R_e}\left(\frac{v_\circ t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)\right) = w_e t$$
$$\Rightarrow\; \frac{2}{R_e}\left(\frac{gt^3}{6} - \frac{v_\circ t^2}{2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow\; \frac{gt^3}{3} = v_\circ t^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{3v_\circ}{g}$$

حال t را از رابطه فوق در رابطه (۷) جایگذاری می‌کنیم.

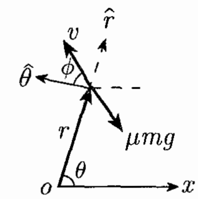
$$R_e\cos\lambda = \left(R_e + h_\circ + v_\circ\frac{3v_\circ}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{3v_\circ}{g}\right)^2\right)\cos\lambda$$
$$\Rightarrow\; \frac{3}{2}\frac{v_\circ^2}{g} = h_\circ \;\Rightarrow\; v_\circ = \sqrt{\frac{2gh_\circ}{3}}$$

و) اگر $h_\circ = 100\,\mathrm{m}$ باشد، $v_\circ$ بنابر رابطه‌ی فوق عبارتست از

$$v_\circ = \sqrt{\frac{2(10)(100)}{3}} \;\Rightarrow\; v_\circ = 25{,}82\,\mathrm{m/s}$$

۱۰۴ نمودار جسم آزاد جسم را در لحظه‌ی t بعد از قرار دادن آن بر روی صفحه در شکل (۲ـ۳۸۱) رسم کرده‌ایم. ابتدا r و θ را به صورت توابعی تا مرتبه دوم μ در نظر می‌گیریم.

$$r = r^{(0)} + \mu r^{(1)} + \mu^2 r^{(2)} \quad , \quad \theta = \theta^{(0)} + \mu\theta^{(1)} + \mu^2\theta^{(2)}$$



شکل ۲-۳۸۱

بنابر شکل (۲ـ۳۸۱)، داریم:

$$\tan\phi = \frac{dr}{rd\theta} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{rd\theta}{dt}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}$$

بنابراین

$$\sin\phi = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}} \qquad (1)$$

$$\cos\phi = \frac{r\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}} \qquad (2)$$

معادله‌ی حرکت جسم در دو راستای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ عبارتست از

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -\mu mg\sin\phi = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (3)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow -\mu mg\cos\phi = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \qquad (4)$$

چون $\sin\phi$ و $\cos\phi$ در روابط (۳) و (۴) دارای ضریب μ هستند، عبارت معادل آنها بر اساس روابط (۱) و (۲) را تنها تا مرتبه اول μ بسط می‌دهیم.

$$\sin\phi = \frac{\dot{r}^{(0)} + \mu\dot{r}^{(1)}}{\sqrt{\left(\dot{r}^{(0)} + \mu\dot{r}^{(1)}\right)^2 + \left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)} + \mu(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)})\right)^2}}$$

که با استفاده از بسط تیلور، داریم:

$$\sin\phi = \frac{\dot{r}^{(0)} + \mu\dot{r}^{(1)} - \mu\dot{r}^{(0)}\frac{r^{(0)}\dot{r}^{(1)} + r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)}\left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)}\right)}{\dot{r}^{(0)2} + \left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)}\right)^2}}{\sqrt{\dot{r}^{(0)2} + \left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)}\right)^2}} \qquad (5)$$

همچنین برای $\cos\phi$، داریم:

$$\cos\phi = \frac{r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)} + \mu\left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)}\right)}{\sqrt{\left(\dot{r}^{(0)} + \mu\dot{r}^{(1)}\right)^2 + \left(\dot{r}^{(0)}\dot{\theta}^{(0)} + \mu\left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)}\right)\right)^2}}$$

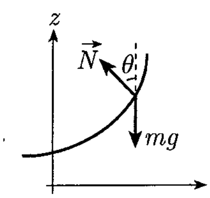
که با استفاده از بسط تیلور، داریم:

$$\cos\phi = \frac{r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)} + \mu\left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)}\right)}{\sqrt{\dot{r}^{(0)2} + (r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)})^2}} - \frac{\mu r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)}\frac{r^{(0)}\dot{r}^{(1)} + r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)}\left(r^{(0)}\dot{\theta}^{(1)} + r^{(1)}\dot{\theta}^{(0)}\right)}{\dot{r}^{(0)2} + (r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)})^2}}{\sqrt{\dot{r}^{(0)2} + (r^{(0)}\dot{\theta}^{(0)})^2}} \qquad (6)$$

در روابط فوق تنها جملات تا مرتبه‌ی اول μ برای $\sin\phi$ و $\cos\phi$ نگه داشته شده است.
برای ادامه‌ی حل مسئله لازم است حالت بدون اصطکاک را که r و θ آن با $r^{(\circ)}$ و $\theta^{(\circ)}$ مشخص می‌شود بررسی کنیم تا بتوان روابط به‌دست آمده در حالتی که سطح اصطکاک دارد را ساده کرد. برای راحتی حل مسئله فرض می‌کنیم که صفحه ثابت است و جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت w حول z شروع به حرکت می‌کند. زمانی که سطح اصطکاک ندارد، هیچ نیرویی بین جسم و سطح وجود ندارد تا به جسم شتاب دهد و آن را وادار به حرکت کند. بنابراین جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

$$r^{(\circ)} = a \ , \ \theta^{(\circ)} = \circ$$

۱۰۵ الف و ب) نیروهایی که به جسم وارد می‌شود نیروی وزن و نیروی عمود بر سطح $\vec{N}$ است.



شکل ۲-۳۸۲

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = -mg\hat{z} - N\sin\theta\hat{r} + N\cos\theta\hat{z}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -N\sin\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲})m \\ N\cos\theta - mg = m\ddot{z} \\ \circ = r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m(r\dot{\theta}^{۲} - \ddot{r})\cot\theta - mg = m\ddot{z} \\ \dfrac{d(r^{۲}\dot{\theta})}{dt} = \circ \end{array}$$

$$\tan\theta = \frac{dz}{dr} \Rightarrow \cot\theta = r'$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = (r\dot{\theta}^{۲} - \ddot{r})r' - g$$

$$\dot{r} = \frac{dr(z)}{dt} = r'\dot{z} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{d(r'\dot{z})}{dt} = \frac{dr'}{dz}\frac{dz}{dt}\dot{z} + r'\ddot{z} = r''\dot{r}^{۲} + r'\ddot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = (r\dot{\theta}^{۲} - r''\dot{z}^{۲} - r'\ddot{z})r' - g \Rightarrow \ddot{z}(۱ + r'^{۲}) + \dot{z}^{۲}r'r'' = rr'\dot{\theta}^{۲} - g$$

$$\Rightarrow f_{۱} = ۱ + r'^{۲} \ , \ f_{۲} = r'r'' \ , \ f_{۳} = rr'\dot{\theta}^{۲} - g$$

ج)

$$z(t) = z_\circ + \epsilon\sin\omega t$$

$$r(z(t)) = r(z_\circ) + (\epsilon\sin\omega t)r'(z_\circ) + \frac{(\epsilon\sin\omega t)^{۲}}{۲}r''(z_\circ) + \cdots$$

$$\Rightarrow r(z(t)) \approx r(z_\circ) + r'(z_\circ)\epsilon\sin\omega t$$

$$r'(z(t)) = r'(z_\circ) + (\epsilon\sin\omega t)r''(z_\circ) + \frac{(\epsilon\sin\omega t)^{۲}}{۲}r'''(z_\circ) + \cdots$$

$$\Rightarrow r'(z(t)) = r'(z_\circ) + \epsilon\sin\omega t \times r''(z_\circ)$$

اگر این مقادیر را در توابع قرار دهیم داریم

$$f_{۱} = ۱ + (r'_\circ + \epsilon\sin\omega t r''_\circ)^{۲} = ۱ + r'^{۲}_\circ + ۲r'_\circ r''_\circ\epsilon\sin\omega t$$

$$f_{۲} = r'_\circ r''_\circ$$

$$f_3 = (r_\circ + r'_\circ \epsilon \sin \omega t)(r'_\circ + r''_\circ + r''_\circ \epsilon \sin \omega t)\dot{\theta}^2 - g$$
$$= \left[r_\circ r'_\circ + \epsilon \sin \omega t (r_\circ r''_\circ + r'^2_\circ)\right]\dot{\theta}^2 - g$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱) و نگه داشتن جملات مرتبه صفر و یک داریم:

$$(-\epsilon\omega^2 \sin \omega t)(1 + r'^2_\circ) = \epsilon \sin \omega t (r_\circ r''_\circ + r'^2_\circ)\dot{\theta}^2 + r_\circ r'_\circ \dot{\theta}^2 - g$$
$$\dot{\theta} = \frac{J}{mr^2} = \frac{J}{m(r_\circ + r'_\circ \epsilon \sin \omega t)^2} = \frac{J}{mr_\circ^2}\left(1 - \frac{2r'_\circ}{r_\circ}\epsilon \sin \omega t\right)$$
$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{J^2}{m^2 r_\circ^4}\left(1 - \frac{4r'_\circ}{r_\circ}\epsilon \sin \omega t\right)$$
$$\Rightarrow (-\epsilon\omega^2 \sin \omega t)(1 + r'^2_\circ) = \epsilon \sin \omega t (r_\circ r''_\circ + r'^2_\circ)\frac{J^2}{m^2 r_\circ^4}$$
$$+ \frac{r_\circ r'_\circ J^2}{m^2 r_\circ^4} + \frac{r_\circ r'_\circ J^2}{m^2 r_\circ^4} \times \frac{-4r'_\circ}{r_\circ}\epsilon \sin \omega t - g$$

تا مرتبه صفر داریم که

$$J^2 = \frac{m^2 r_\circ^3 g}{r'_\circ}$$

و تا مرتبه یک نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$-\omega^2(1 + r'^2_\circ) = (r_\circ r''_\circ + r'^2_\circ)\frac{J^2}{m^2 r_\circ^4} - \frac{4r'^2_\circ J^2}{m^2 r_\circ^4}$$
$$\Rightarrow -\omega^2(1 + r'^2_\circ) = (r_\circ r''_\circ - 3r'^2_\circ)\Omega^2 \;\Rightarrow\; \omega^2 = \Omega^2 f_4(r_\circ, r'_\circ, r''_\circ)$$
$$f_4 = \frac{3r'^2_\circ - r_\circ r''_\circ}{1 + r'^2 - \circ}$$

د)

$$\left(\frac{1}{r^2}\right)' = \frac{-2r}{r^3} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r^2}\right)'' = -2\left(\frac{r''r - 3r'^2}{r^4}\right) = \frac{2 \times (3r'^2 - r''r)}{r^4}$$
$$\omega^2 < \circ \;\Rightarrow\; f_4 < \circ \;\Rightarrow\; 3r'^2_\circ - r_\circ r''_\circ < \circ$$
$$\Rightarrow \frac{2(3r'^2_\circ - r''_\circ r_\circ)}{r_\circ^4} < \circ \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r^2}\right)'' < \circ$$

ه) سطح اول

$$r = \frac{-k}{z} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2} = \frac{z^2}{k^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r^2}\right)' = \frac{2z}{k^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{r^2}\right)'' = \frac{2}{k^2} > \circ$$

بنابراین $\omega^2 > \circ$ می‌باشد. پس این سطح پایدار است.

سطح دوم

$$r^2 - z^2 = R^2 \;\Rightarrow\; r^2 = R^2 + z^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2 + z^2}$$

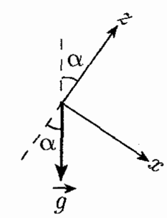
$$(\frac{1}{r^2})' = \frac{-2z}{(R^2+z^2)^2} \Rightarrow (\frac{1}{r^2})'' = -2 \times \frac{(R^2+z^2) - 2\times 2z^2}{(R^2+Z^2)^3}$$
$$= -2 \times \frac{R^2+z^2-4z^2}{(R^2+z^2)^3} = \frac{6z^2-2R^2}{(R^2+z^2)^3}$$

اگر $2R^2 < 6z^2$ باشد یعنی $z > \frac{\sqrt{3}}{3}R$، این سطح پایدار خواهد بود و اگر $z < \frac{\sqrt{3}}{3}R$ باشد، این سطح ناپایدار خواهد بود.

۱۰۶ چون اصطکاک بین ذره و حلقه ناچیز است، نیرویی در راستای مماس بر حلقه، بر ذره وارد نمی‌شود. بنابراین نیروی وارد شده از طرف حلقه بر ذره را به دو مؤلفه در راستای z و در راستای بردار شعاعی $\vec{r}$ تقسیم کرد. حال ذره را در زاویه دلخواه ϕ نسبت به محور x در نظر بگیرید شکل (۲ـ۲۱۷). بردار یکه $\hat{r}$ بر حسب بردار یکه‌های دکارتی عبارتست از

$$\hat{r} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}$$

همچنین بردار شتاب گرانش $\vec{g}$ بر حسب مؤلفه‌هایش در دستگاه مختصات دکارتی (شکل (۲ـ۳۸۳)) عبارتست از



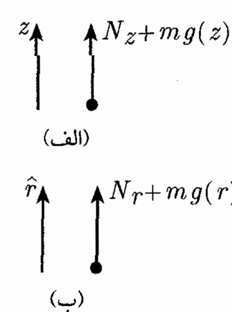
شکل ۲-۳۸۳

$$\vec{g} = g\sin\alpha\hat{i} - g\cos\alpha\hat{k}$$

بنابراین تصویر بردار شتاب $\vec{g}$ در دو راستای $\hat{k}$ و $\hat{r}$ عبارتند از

$$g(\hat{k}) = -g\cos\alpha$$
$$g(\hat{r}) = \vec{g}\cdot\hat{r} = (g\sin\alpha\hat{i} - g\cos\alpha\hat{k})\cdot(\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j})$$
$$\Rightarrow\ g(\hat{r}) = g\sin\alpha\cos\phi$$

نمودار جسم آزاد ذره در دو صفحه xz و xy در شکل (۲ـ۳۸۴) (الف) و (ب) نشان داده شده است. چون ذره نمی‌تواند عمود بر صفحه حلقه حرکت کند، باید در راستای z تعادل داشته باشد. بنابراین



شکل ۲-۳۸۴

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow N_z + mg(\hat{k}) = 0 \Rightarrow N_z = -mg\cos\alpha$$

همچنین با فرض سرعت ثابت که مورد نظر سؤال است، معادله حرکت در راستای شعاعی عبارتست از

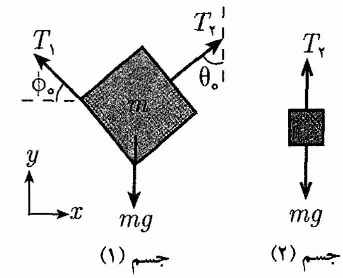
$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow N_r + mg(r) = -m\frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow N_r + mg\sin\alpha\cos\phi = -m\frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow N_r = -mg\sin\alpha\cos\phi - m\frac{v^2}{r}$$

در نتیجه مقدار کل نیروی وارده از طرف حلقه بر ذره عبارتست از

$$N = \sqrt{N_r^2+N_z^2} \Rightarrow N = \sqrt{(mg\sin\alpha\cos\phi + m\frac{v^2}{r})^2 + (mg\cos\alpha)^2}$$

۱۰۷ الف) ابتدا نمودار جسم آزاد هر دو جسم را رسم می‌کنیم (شکل (۲ـ۳۸۴)).

حال معادلات تعادل را برای هر کدام از جرم‌ها می‌نویسیم و با حل آنها کشش نخ‌ها و زاویه‌ی ϕ_0 را به‌دست می‌آوریم. بنابراین



شکل ۲-۳۸۵

$$\text{جسم (۱)}:\ \sum F_x = 0 \Rightarrow T_2 \sin\theta_0 - T_1 \cos\phi_0 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 \cos\theta_0 + T_1 \sin\phi_0 - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\text{جسم (۲)}:\ \sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - mg = 0 \Rightarrow T_2 = mg$$

با جایگذاری T_2 از رابطه فوق در معادلات (۱) و (۲)، داریم

$$\begin{cases} mg\sin\theta_0 - T_1\cos\phi_0 = 0 \Rightarrow T_1\cos\phi_0 = mg\sin\theta_0 & (3) \\ mg\cos\theta_0 + T_1\sin\phi_0 - mg = 0 \Rightarrow T_1\sin\phi_0 = mg - mg\cos\theta_0 & (4) \end{cases}$$

با تقسیم معادلات (۳) و (۴) بر یکدیگر، ϕ_0 به‌دست می‌آید. پس

$$\tan\phi_0 = \frac{mg - mg\cos\theta_0}{mg\sin\theta_0} \Rightarrow \tan\phi_0 = \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$$

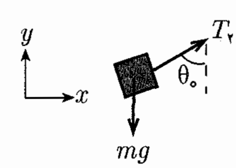
$$\Rightarrow \tan\phi_0 = \tan\frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\theta_0}{2}$$

با جایگذاری ϕ_0 از رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۳)، T_1 به‌دست می‌آید. بنابراین

$$T_1\cos\frac{\theta_0}{2} = mg\sin\theta_0 \Rightarrow T_1 = mg\frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

$$\Rightarrow T_1 = 2mg\sin\frac{\theta_0}{2}$$

ب) با بریدن نخ AB، بقیه‌ی پارامترها مانند θ_0، کشش نخ و طول نخ به‌طور ناگهانی نمی‌توانند تغییر زیادی داشته باشند. بنابراین با در نظر گرفتن مقادیر اولیه پارامترهای مسئله و اینکه درست پس از بریده شدن نخ AB، سرعت جسم (۱) با تقریب خوبی صفر است، نمودار جسم آزاد جسم (۱) را رسم می‌کنیم (شکل (۲ـ۳۸۶)) و معادلات حرکت آن را بررسی می‌کنیم.



شکل ۲-۳۸۶

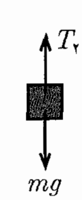
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T_2\sin\theta_0 = ma_x \Rightarrow mg\sin\theta_0 = ma_x$$

$$\Rightarrow a_x = g\sin\theta_0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T_2\cos\theta_0 - mg = ma_y$$

$$\Rightarrow mg\cos\theta_0 - mg = ma_y \Rightarrow a_y = g(\cos\theta_0 - 1)$$

نمودار جسم آزاد جرم (۲) نیز مطابق شکل (۲ـ۳۸۷) رسم شده است. معادلات حرکت برای این جرم، عبارتند از



شکل ۲-۳۸۷

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow a_x = 0$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow T_2 - mg = ma_y \Rightarrow a_y = 0$$

ج) چون شتاب جرم (۲) در لحظه‌ی اول صفر است، می‌توان c را به عنوان نقطه‌ای بدون شتاب در نظر گرفت و معادلات حرکت جرم (۱) را نسبت به مبدأ c نوشت.

$$\theta = ۹۰^\circ - \theta_\circ$$

با توجه به شکل (۲ـ۳۸۸)، داریم

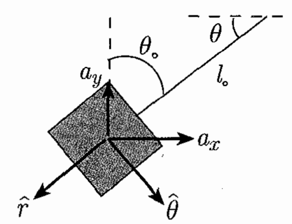
$$a_r = -a_x \sin\theta_\circ - a_y \cos\theta_\circ \;\Rightarrow\; a_r = -g\sin^۲\theta_\circ - g(\cos\theta_\circ - ۱)\cos\theta_\circ$$

$$\Rightarrow\; a_r = -g + g\cos\theta_\circ$$

$$\Rightarrow\; a_r = g(\cos\theta_\circ - ۱)$$

$$a_\theta = a_x \cos\theta_\circ - a_y \sin\theta_\circ \;\Rightarrow\; a_\theta = g\sin\theta_\circ\cos\theta_\circ - g(\cos\theta_\circ - ۱)\sin\theta_\circ$$

$$\Rightarrow\; a_\theta = g\sin\theta_\circ$$



شکل ۲-۳۸۸

از طرف دیگر بر اساس معادلات شتاب در مختصات قطبی، داریم

$$a_\theta = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \;\Rightarrow\; g\sin\theta_\circ = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

همان طور که ذکر شد، سرعت جسم درست پس از بریدن نخ AB را می‌توان صفر گرفت.

در نتیجه

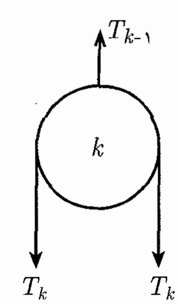
$$g\sin\theta_\circ = r\ddot{\theta} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = \frac{g\sin\theta_\circ}{r}$$

۱۰۸ الف) با توجه به اینکه قرقره‌ها بدون جرم هستند، برآیند نیروی وارد بر هرکدام از آنها باید برابر صفر باشد. بنابراین کشش طناب kام، نصف کشش طناب $k-۱$ام است (شکل (۲ـ۳۸۹)).

$$T_k = \frac{۱}{۲}T_{k-۱}$$

بنابراین T_k بر حسب T عبارتست از

$$T_k = (\frac{۱}{۲})^{k-۱}T \;\Rightarrow\; T_k = (\frac{۱}{۲})^{k-۱}m\beta \qquad (۱)$$

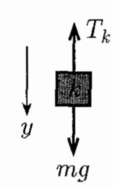


شکل ۲-۳۸۹

ب) نمودار جسم آزاد جرم kام را رسم می‌کنیم (شکل (۲ـ۳۹۰)). معادله حرکت را برای جرم kام می‌نویسیم.

$$\sum F_y = ma_y \;\Rightarrow\; mg - T_k = ma_k \;\Rightarrow\; a_k = g - \frac{T_k}{m}$$

$$\Rightarrow\; a_k = g - (\frac{۱}{۲})^{k-۱}\beta \qquad (۲)$$



شکل ۲-۳۹۰

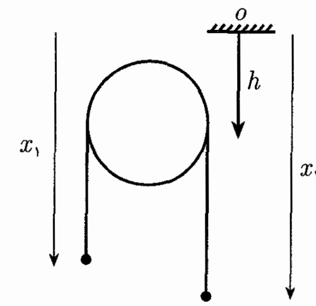
ج) طول طناب kام و طول قسمتی از این طناب که دور قرقره kام پیچیده است نیز ثابت است. بنابراین طول باقیمانده طناب که آن را l می‌نامیم نیز ثابت است. بنابر شکل (۲ـ۳۹۱) که در آن O یک مبدأ ثابت است.

$$l = (x_۲ - h) + (x_۱ - h) \;\Rightarrow\; l = x_۱ + x_۲ - h$$

$$\dot{l}=\ddot{l}=0 \ \Rightarrow\ \ddot{x}_1+\ddot{x}_2-2\ddot{h}=0$$

$$\ddot{x}_1=a_k\ ,\ \ddot{x}_2=b_{k+1}\ ,\ \ddot{h}=b_k$$

$$\Rightarrow\ a_k+b_{k+1}-2b_k=0\ \Rightarrow\ b_{k+1}=2b_k-a_k \qquad (۳)$$



شکل ۲-۳۹۱

د) بر اساس رابطه‌ی (۳)، b_k بر حسب b_{k-1} و a_{k-1}، b_{k-1} بر حسب b_{k-2} و a_{k-2} و ...به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$b_k=2b_{k-1}-a_{k-1}\ ,\ b_{k-1}=2b_{k-2}-a_{k-2}\ ,\ \cdots\ ,\ b_2=2b_1-a_1$$

$$\Rightarrow\ b_k=2^{k-1}b_1-a_{k-1}-2a_{k-2}-\cdots-2^{k-2}a_1\ ,\ b_1=0$$

$$\Rightarrow\ b_k=-\left[2^{k-2}a_1+2^{k-3}a_2+\cdots+2a_{k-2}+a_{k-1}\right] \qquad (۴)$$

ه) با توجه به اینکه دو جرم یکسان به قرقره‌ی آخر (قرقره‌ی nام) آویزان است، $a_{n+1}=a_n$ است و بنابر رابطه‌ی (۳)، داریم

$$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\ \Rightarrow\ b_n=a_n=a_{n+1}$$

بر اساس رابطه‌ی (۲)، $a_n=g-(\frac{1}{2})^{n-1}\beta$ است. حال b_n را بر اساس رابطه‌ی (۴) نیز به‌دست می‌آوریم و دو جواب حاصل را با هم برابر قرار می‌دهیم. پس

$$b_n=-\left[2^{n-2}a_1+2^{n-3}a_2+\cdots+2a_{k-2}+a_{k-1}\right]=a_n$$

$$\Rightarrow\ 2^{n-2}a_1+2^{n-3}a_2+\cdots+2a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=0$$

$$\Rightarrow\ 2^{n-2}(g-\beta)+2^{n-3}(g-\frac{1}{2}\beta)+\cdots+2(g-(\frac{1}{2})^{n-3}\beta)$$

$$+\,(g-(\frac{1}{2})^{n-2}\beta)+(g-(\frac{1}{2})^{n-1}\beta)=0$$

$$\Rightarrow\ g(2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1+1)$$

$$=\beta(2^{n-2}+2^{n-4}+\cdots+2^{4-n}+2^{2-n}+2^{1-n})$$

$$\Rightarrow\ \beta=g\frac{2+\sum_{i=1}^{n-2}2^i}{2^{1-n}+2^{2-n}+2^{4-n}+\cdots+2^{n-4}+2^{n-2}} \qquad (۵)$$

$$T=m\beta\ \Rightarrow\ T=mg\frac{2+\sum_{i=1}^{n-2}2^i}{2^{1-n}+2^{2-n}+2^{4-n}+\cdots+2^{n-4}+2^{n-2}} \qquad (۶)$$

به ازای $n=1$، $T=2mg$ خواهد بود. با رسم نمودار جسم آزاد سیستم مورد نظر (شکل ۲-۳۹۲) به بررسی این رابطه می‌پردازیم. چون جرم‌ها با هم برابرند، شتاب آنها صفر است، بنابراین

$$\text{جرم } m\ :\ \sum F_y=0\ \Rightarrow\ mg-T_1=0\ \Rightarrow\ T_1=mg$$

$$\text{قرقره}\ :\ \sum F_y=0\ \Rightarrow\ 2T_1-T=0\ \Rightarrow\ T=2mg$$

بنابراین رابطه‌ی به‌دست آمده برای T از معادله‌ی (۵) به ازای $n = ۱$، درست است.

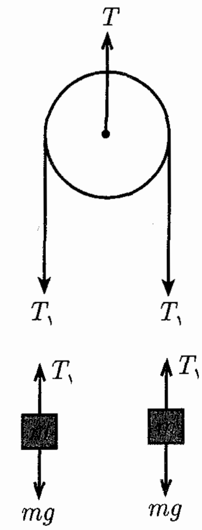
و) a_k را بر اساس رابطه‌ی (۲) و با جایگذاری β از رابطه (۵) بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه

$$a_k = g - (\frac{۱}{۲})^{k-۱} g \frac{۲ + \sum_{i=۱}^{n-۲} ۲^i}{۲^{۱-n} + ۲^{۲-n} + ۲^{۴-n} + \dots + ۲^{n-۴} + ۲^{n-۲}}$$

ز) برای به‌دست آوردن T و $a_۱$ در حد nهای بسیار بزرگ، لازم است β را در این شرایط به‌دست آوریم. β را از رابطه (۵) بازنویسی می‌کنیم.

$$\beta = g \frac{۲ + \sum_{i=۱}^{n-۲} ۲^i}{۲^{۱-n} + ۲^{۲-n} + ۲^{۴-n} + \dots + ۲^{n-۴} + ۲^{n-۲}}$$

در نتیجه به ازای nهای بسیار بزرگ، β و در نتیجه مقادیر T و $a_۱$ بسیار بزرگ شده و به بی‌نهایت میل می‌کند.

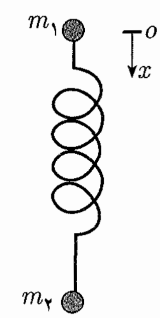


شکل ۲-۳۹۲

۱۰۹ الف) سیستم مورد نظر در شکل (۲ـ۳۹۳) نشان داده شده است. با رسم نمودار جسم آزاد جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ (شکل (۲ـ۳۹۴))، معادلات حرکت را برای آنها می‌نویسیم.

$$\sum F_{۱x} = m_۱ a_{۱x} \ \Rightarrow \ T + m_۱ g = m_۱ a_{۱x} \qquad (۱)$$

$$\sum F_{۲x} = m_۲ a_{۲x} \ \Rightarrow \ m_۲ g - T = m_۲ a_{۲x} \qquad (۲)$$



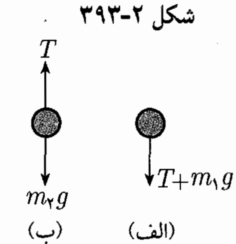
شکل ۲-۳۹۳

ب) چون هر دو جسم را در ابتدا گرفته‌ایم، کشش فنر صفر است. زمانی که مجموعه را رها می‌کنیم نیز شتاب هر دو جسم یکسان (برابر g) است.

بنابراین کشش فنر صفر خواهد ماند و هرکدام از جرم‌ها با شتاب ثابت g سقوط آزاد خواهد کرد. در نتیجه

$$\text{جسم (۱)} \ : \ x_۱(t) = \frac{۱}{۲} g t^۲$$

$$\text{جسم (۲)} \ : \ x_۲(t) = \frac{۱}{۲} g t^۲ + L$$



شکل ۲-۳۹۴

ج) با توجه به اینکه T نیروی کشش فنر است، T در هر لحظه برابر است با

$$T = k(x_۱ - x_۱ - L) \qquad (۳)$$

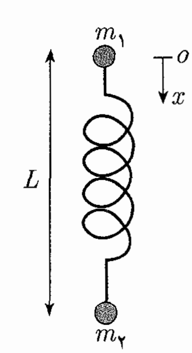
که $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب مختصات $m_۱$ و $m_۲$ در لحظه‌ی t می‌باشد. در لحظه‌ی $t = ۰$، T باید برابر $m_۲ g$ باشد تا جسم (۲) در حال تعادل باشد. بنابراین

$$m_۲ g = k(x_۲ - ۰ - L) \ \rightarrow \ x_۲ = L + \frac{m_۲ g}{k}$$

حال با توجه به رابطه‌ی (۳)، معادلات (۱) و (۲) را بازنویسی می‌کنیم.

$$(۱) \ \Rightarrow \ k(x_۲ - x_۱ - L) + m_۱ g = m_۱ \ddot{x}_۱ \qquad (۴)$$

$$(۲) \ \Rightarrow \ m_۲ g - k(x_۲ - x_۱ - L) = m_۲ \ddot{x}_۲ \qquad (۵)$$



شکل ۲-۳۹۵

دو طرف معادلات (۴) و (۵) را بر $(m_۱ + m_۲)$ تقسیم کرده و با هم جمع می‌کنیم.

$$\frac{k(x_۲ - x_۱ - L) + m_۱ g}{m_۱ + m_۲} + \frac{m_۲ g - k(x_۲ - x_۱ - L)}{m_۱ + m_۲}$$
$$= \frac{m_۱ \ddot{x}_۱}{m_۱ + m_۲} + \frac{m_۲ \ddot{x}_۲}{m_۱ + m_۲} \Rightarrow g = \ddot{x} \Rightarrow g = \frac{d\dot{x}}{dt}$$
$$\Rightarrow \int g dt = \int d\dot{x} \Rightarrow gt = \dot{x} - c_۱$$
$$\Rightarrow gt + c_۱ = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int (gt - c_۱) dt = \int dx$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{۱}{۲} g t^۲ + c_۱ t + c_۲$$
$$t = ۰ \ : \ \dot{x} = ۰ \Rightarrow c_۱ = ۰$$
$$t = ۰ \ : \ x = \frac{m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} \Rightarrow c_۲ = \frac{m_۲ (L + \frac{m_۲ g}{k})}{m_۱ + m_۲}$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{۱}{۲} g t^۲ + \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲} (L + \frac{m_۲ g}{k}) \qquad (۶)$$

حال معادله حاکم بر $u(t)$ را به‌دست می‌آوریم. برای به‌دست آوردن این معادله، از معادلات (۴) و (۵) استفاده می‌کنیم، به این صورت که معادله (۴) را در $m_۲$ و معادله‌ی (۵) را در $m_۱$ ضرب کرده و معادله جدید (۴) را از معادله‌ی جدید (۵) کم می‌کنیم. بنابراین

$$[m_۱ m_۲ g - m_۱ k(x_۲ - x_۱ - L)] - [m_۲ k(x_۲ - x_۱ - L) + m_۱ m_۲ g]$$
$$= m_۱ m_۲ (\ddot{x}_۲ - \ddot{x}_۱)$$
$$\Rightarrow k(L - u)(m_۱ + m_۲) = m_۱ m_۲ \ddot{u}$$
$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{k(m_۱ + m_۲)}{m_۱ m_۲} u = \frac{kL(m_۱ + m_۲)}{m_۱ m_۲}$$

با توجه به اینکه جواب معادله دیفرانسیل فوق به صورت هارمونیک مثلثاتی است، داریم.

$$u = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + C \ , \ \omega = \sqrt{\frac{k(m_۱ + m_۲)}{m_۱ m_۲}} \ , \ C = L$$

در $t = ۰$، $\dot{x}_۱ = \dot{x}_۲ = ۰$ است و بنابراین $\dot{u}(۰) = ۰$ است. پس

$$\dot{u} = Aw \cos(\omega t) - Bw \sin(\omega t) \overset{t=۰}{\rightarrow} \dot{u} = Aw = ۰ \Rightarrow A = ۰$$

در $t = ۰$، $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = L + \frac{m_۲ g}{k}$ است. پس

$$B + c = L + \frac{m_۲ g}{k} \Rightarrow B + L = L + \frac{m_۲ g}{k} \Rightarrow B = \frac{m_۲ g}{k}$$

بنابراین

$$u = \frac{m_۲ g}{k} \cos(\omega t) + L \qquad (۷)$$

د) روابط (۶) و (۷) را با توجه به تعاریف x و u بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$(۶) \rightarrow \frac{m_۱x_۱}{m_۱+m_۲}+\frac{m_۲x_۲}{m_۱+m_۲}=\frac{۱}{۲}gt^۲+\frac{m_۲}{m_۱+m_۲}\left(L+\frac{m_۲g}{k}\right) \quad (۸)$$

$$(۷) \rightarrow x_۲-x_۱=\frac{m_۲g}{k}\cos(\omega t)+L \quad (۹)$$

حال رابطه (۹) را در $\frac{m_۲}{m_۱+m_۲}$ ضرب کرده و از معادله‌ی (۸) کم می‌کنیم تا $x_۱(t)$ به‌دست آید. بنابراین

$$\frac{m_۱x_۱}{m_۱+m_۲}+\frac{m_۲x_۱}{m_۱+m_۲}=\frac{۱}{۲}gt^۲+\frac{m_۲}{m_۱+m_۲}\left(L+\frac{m_۲g}{k}\right)$$
$$-\frac{m_۲^۲}{k(m_۱+m_۲)}g\cos(\omega t)-\frac{m_۲L}{m_۱+m_۲}$$
$$\Rightarrow x_۱(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+\frac{m_۲^۲}{k(m_۱+m_۲)}g\big(۱-\cos(\omega t)\big) \quad (۱۰)$$

حال $x_۱(t)$ را از رابطه فوق در رابطه‌ی (۹) جایگذاری می‌کنیم تا $x_۲(t)$ به‌دست آید. بنابراین

$$x_۲(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+\frac{m_۲^۲}{k(m_۱+m_۲)}g\big(۱-\cos(\omega t)\big)+\frac{m_۲g}{k}\cos(\omega t)+L$$
$$\Rightarrow x_۲(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+\frac{m_۱m_۲g}{k(m_۱+m_۲)}\cos(\omega t)+\frac{m_۲^۲g}{k(m_۱+m_۲)}+L \quad (۱۱)$$

ه) برای مقادیر عددی داده شده در صورت سؤال، روابط (۱۰) و (۱۱) که به ترتیب مربوط به $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ هستند را بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$\omega=\sqrt{\frac{k(m_۱+m_۲)}{m_۱m_۲}} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۱۰^۳(۱+۲)}{۱(۲)}} \Rightarrow \omega=۳۸/۷\mathrm{s}^{-۱}$$

$$x_۱(t)=\frac{۱}{۲}(۹/۸۱)t^۲+\frac{(۲)^۲}{۱۰^۳(۱+۲)}(۹/۸۱)\big(۱-\cos(۳۸/۷t)\big)$$
$$\Rightarrow x_۱(t)=۴/۹t^۲+۰/۰۱۳۱\big(۱-\cos(۳۸/۷t)\big)$$
$$x_۲(t)=\frac{۱}{۲}(۹/۸۱)t^۲+\frac{۱(۲)(۹/۸۱)}{۱۰^۳(۱+۲)}\cos(۳۸/۷t)+\frac{(۲)^۲(۹/۸۱)}{۱۰^۳(۱+۲)}+۰/۱$$
$$\Rightarrow x_۲(t)=۴/۹t^۲+۶/۵۴\times۱۰^{-۳}\cos(۳۸/۷t)+۰/۱۱۳$$

۱۱۰ الف) شتاب دانه دارای دو مؤلفه‌ی مماس بر مسیر و عمود بر مسیر است. مؤلفه‌ی مماس بر مسیر را با استفاده از نیروشناسی و مؤلفه‌ی عمود بر مسیر را با استفاده از شتاب شناسی به‌دست می‌آوریم.

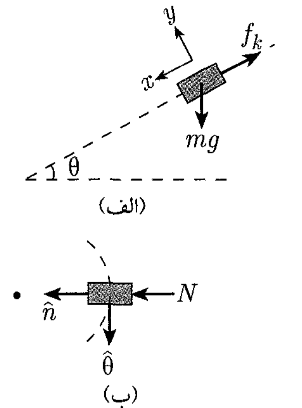
$$\sum F_x=ma_x \Rightarrow mg\sin\theta-f_k=ma_x \Rightarrow mg\sin\theta-\mu_kN=ma_x$$
$$\Rightarrow a_x=g\sin\theta-\frac{\mu_kN}{m} \quad (۱)$$

$$\sum F_y=ma_y=۰$$

شتاب در راستای عمود بر مسیر همان شتاب مرکزگرای دانه است. پس

$$\sum F_n = ma_n \;\;,\;\; a_n = \frac{v_\theta^۲}{r} = \frac{(v\cos\theta)^۲}{r}$$

$$\Rightarrow\; N = m\frac{(v\cos\theta)^۲}{r} \qquad (۲)$$



شکل ۲-۳۹۶

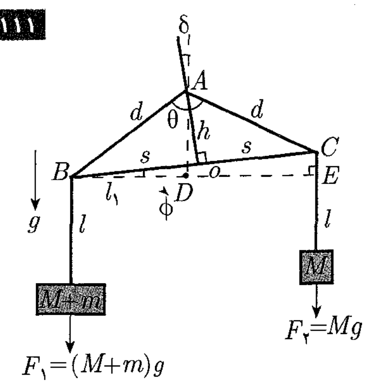
با جایگذاری N از رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱)، داریم

$$a_x = g\sin\theta - \mu\frac{(v\cos\theta)^۲}{r} \qquad (۳)$$

ب) سرعت را باید به گونه‌ای تعیین کنیم که شتاب مماسی $a_x = ۰$ شود. با استفاده از رابطه‌ی (۳) سرعتی را که به ازای آن $a_x = ۰$ می‌شود، می‌یابیم.

$$a_x = ۰ \;\Rightarrow\; g\sin\theta - \mu\frac{(v\cos\theta)^۲}{r} = ۰ \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{g\sin\theta r}{\mu\cos^۲\theta}}$$

۱۱۱ برای اینکه مجموعه در حال تعادل باشد، برآیند گشتاور وارد بر سیستم حول نقطه A (شکل (۲-۳۹۷)) باید صفر باشد. بنابراین



شکل ۲-۳۹۷

$$\sum M_o = ۰ \;\Rightarrow\; Mgl_۲ = (M+m)gl_۱ \;\Rightarrow\; \frac{M}{M+m} = \frac{l_۱}{l_۲} \qquad (۱)$$

پس لازم است که نسبت $\frac{l_۱}{l_۲}$ را بیابیم.

در شکل (۲-۳۹۷) s نصف طول قطع BC، یعنی فاصله بین نقطه O (وسط ضلع BC) تا هر کدام از رأس‌های B و C است. x نیز فاصله‌ی بین نقطه O و خط قائم گذرنده از A، روی ضلع BC است. بنابراین

$$s = d\sin\frac{\theta}{۲} \;\;,\;\; h = d\cos\frac{\theta}{۲}$$

$$\frac{x}{h} = \tan\delta \;\Rightarrow\; x = h\tan\delta \;\Rightarrow\; x = d\cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta$$

با استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث BCE، داریم

$$\frac{l_۱}{l_۲} = \frac{s-x}{s+x} \;\Rightarrow\; \frac{l_۱}{l_۲} = \frac{d\sin\frac{\theta}{۲} - d\cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}{d\sin\frac{\theta}{۲} + d\cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}$$

$$\Rightarrow\; \frac{l_۱}{l_۲} = \frac{\sin\frac{\theta}{۲} - \cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}{\sin\frac{\theta}{۲} + \cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}$$

$$(۱),(۲) \;\rightarrow\; \frac{M}{M+m} = \frac{\sin\frac{\theta}{۲} - \cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}{\sin\frac{\theta}{۲} + \cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}$$

$$\Rightarrow\; m = \frac{M(۲\cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta)}{\sin\frac{\theta}{۲} - \cos\frac{\theta}{۲}\tan\delta}$$

۱۱۲ الف)

$$\vec{r} = r\hat{r} \;\;,\;\; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \qquad (۱)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{i}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi) + \hat{j}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi) - \hat{k}\dot{\theta}\sin\theta$$

در نتیجه بنابر تعاریف بردارهای یکه، داریم

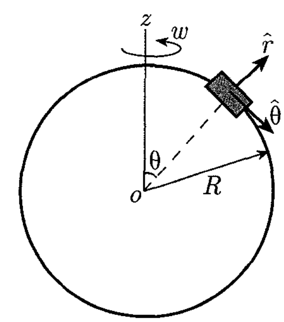
$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \qquad (۲)$$

حال با جایگذاری $\frac{d\hat{r}}{dt}$ از رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱)، $\frac{d\vec{r}}{dr}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}) \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \qquad (۳)$$

ب) مهره بر روی یک حلقه قرار دارد که مرکز آن ثابت است. بنابراین $\dot{r} = 0$ و $r = R$ است. همچنین w در جهت $\dot{\phi}$ است، بنابراین $w = \dot{\phi}$ می‌باشد. با این اطلاعات رابطه‌ی (۳) را بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + Rw\sin\theta\hat{\phi} \qquad (۴)$$



شکل ۲-۳۹۸

ج) از رابطه‌ی (۴) نسبت به t مشتق می‌گیریم تا شتاب مهره به‌دست آید.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dR\dot{\theta}}{dt}\hat{\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} + \frac{d(Rw\sin\theta)}{dt}\hat{\phi} + Rw\sin\theta\frac{d\hat{\phi}}{dt}$$
$$\Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} + Rw\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi} + Rw\sin\frac{d\hat{\phi}}{dt} \qquad (۵)$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$
$$\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{i}(-\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi - \dot{\phi}\cos\theta\sin\phi) + \hat{j}(-\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\phi) - \hat{k}\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r} + w\cos\theta\hat{\phi}$$
$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \Rightarrow \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\hat{i}\dot{\phi}\cos\phi - \hat{j}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$\Rightarrow \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -w(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta)$$

بر اساس روابط فوق برای $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ و $\frac{d\hat{\phi}}{dt}$، رابطه‌ی (۵) برای بردار شتاب $\vec{a}$ را بازنویسی می‌کنیم. بنابراین

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r} + w\cos\theta\hat{\phi}) + Rw\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi}$$

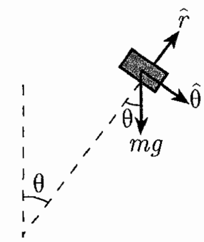
$$+ Rw\sin\theta(-\hat{r}w\sin\theta - \hat{\theta}w\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-R\dot{\theta}^۲ - Rw^۲\sin^۲\theta)\hat{r} + (R\ddot{\theta} - Rw^۲\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + ۲Rw\dot{\theta}\cos\theta\hat{\phi}$$

د)

$$\vec{w} = -mg\cos\theta\hat{r} + mg\sin\theta\hat{\theta}$$

ه) صفر بودن نیروی اصطکاک می‌تواند در دو حالت اتفاق بیفتد. اولین حالت زمانی است که جسم تمایلی به حرکت در راستای مماسی (در اینجا در راستای حلقه یعنی $\hat{\theta}$) ندارد که در اینجا معادل با $\dot{\theta} = ۰$ است. حالت دوم نیز زمانی است که در رابطه $f = \mu N$ یکی از دو جمله μ یا N صفر شود و چون $\mu \neq ۰$ است باید $N = ۰$ باشد. توجه داشته باشید که $\vec{N}$ مؤلفه‌ای در راستای مماس بر حلقه یعنی $\hat{\theta}$ ندارد. پس $\vec{N} = N_r\hat{r} + N_\phi\hat{\phi}$.



شکل ۲-۳۹۹

و) بر اساس روابط به‌دست آمده برای شتاب $\vec{a}$، نیروی وزن $\vec{w}$ و نیروی عمودی $\vec{N}$، سه معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به قانون دوم نیوتن را می‌نویسیم.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum F_r = ma_r \Rightarrow N_r + W_r = ma_r$$

$$\Rightarrow N_r - mg\cos\theta = m(-R\dot{\theta}^۲ - Rw^۲\sin^۲\theta)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \Rightarrow w_\theta = ma_\theta$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta = m(R\ddot{\theta} - Rw^۲\sin\theta\cos\theta)$$

$$\sum F_\phi = ma_\phi \Rightarrow N_\phi = ma_\phi \Rightarrow N_\phi = m(۲R\dot{\theta}w\cos\theta)$$

ز)

$$h = \frac{۱}{۲}mR^۲\dot{\theta}^۲ - \frac{۱}{۲}mR^۲w^۲\sin^۲\theta + mgR\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{۲}mR^۲\frac{d\dot{\theta}^۲}{dt} - \frac{۱}{۲}mR^۲w^۲\frac{d\sin^۲\theta}{dt} + mgR\frac{d\cos\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{۱}{۲}mR^۲(۲\dot{\theta}\ddot{\theta}) - \frac{۱}{۲}mR^۲w^۲(۲\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta) - mgR\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = mR^۲\dot{\theta}\ddot{\theta} - mR^۲w^۲\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - mgR\dot{\theta}\sin\theta$$