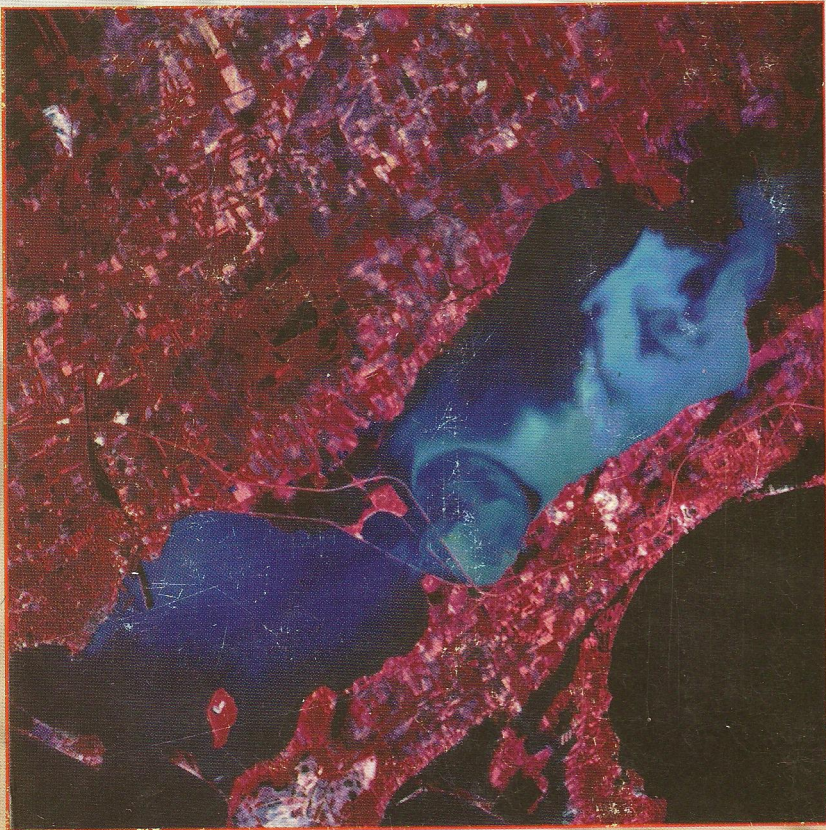


مکانیک سیالات

ویکتورال. استریتر، ای. بنجامین وایلی، کیت دلبیو. بدفورد



ترجمه مهندس بهرام پوستی



مکانیک سیالات

ویکتور ال. استریتر، ای. بنجامین وایلی، کیت دبلیو. بدفورد

ترجمه مهندس بهرام پوستی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه

عنوان

۱

پیشگفتار

قسمت اول

مبانی مکانیک سیالات و انتقال

۵	۱ خواص سیال
۵	۱-۱ پیوستار
۶	۲-۱ تعریف سیال
۹	۳-۱ ابعاد و واحدها
۱۲	۴-۱ چسبندگی
۱۶	۵-۱ جرم، وزن، و متغیرهای غلظت
۲۱	۶-۱ دما و متغیرهای ترمودینامیکی
۲۲	۷-۱ فشار و گاز کامل
۲۶	۸-۱ مدول کشسانی حجمی
۲۸	۹-۱ فشار بخار
۲۸	۱۰-۱ کشش سطحی

۳۱	مسائل
۴۰	مراجع
۴۱	۲ استاتیک سیالات
۴۱	۱-۲ نیرو، تنش، و فشار در یک نقطه
۴۷	۲-۲ معادله بنیادی استاتیک سیالات
۵۴	۳-۲ آحاد و مقیاسهای اندازه‌گیری فشار
۵۹	۴-۲ فشارسنج
۶۶	۵-۲ نیروهای وارد بر سطوح مستوی
۷۹	۶-۲ مؤلفه‌های نیرو بر سطوح خمیده
۸۷	۷-۲ نیروی شناوری
۹۱	۸-۲ پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور
۹۵	۹-۲ تعادل نسبی
۱۰۵	مسائل
۱۳۲	مراجع برای مطالعه بیشتر
۱۳۳	۳ مفاهیم شارش سیال و معادله‌های بنیادی حجم کنترل
۱۳۴	۱-۳ سینماتیک و مفاهیم شارش
۱۴۷	۲-۳ معادله پایستاری کلی حجم کنترلی
۱۵۰	۳-۳ پایستاری جرم
۱۵۴	۴-۳ معادله انرژی
۱۶۳	۵-۳ کاربرد معادله انرژی در حالت‌های شارش پایای سیال
۱۷۵	۶-۳ معادله حجم کنترلی تکانه خطی
۱۷۹	۷-۳ کاربردهای معادله تکانه
۲۰۳	۸-۳ معادله گشتاور تکانه
۲۰۸	۹-۳ انتقال گرما و انتقال جرم
۲۲۱	مسائل
۲۴۴	مراجع

- ۲۴۵ ۴ معادله‌های دیفرانسیلی بنیادی
- ۲۴۶ ۱-۴ سینماتیک، حرکت، و تغییر شکل
- ۲۵۹ ۲-۴ معادله کلی انتقال رینولدز
- ۲۶۰ ۳-۴ معادله پیوستگی
- ۲۶۲ ۴-۴ معادله تکانه
- ۲۶۸ ۵-۴ پایستاری انرژی مکانیکی و معادله برنولی
- ۲۷۶ ۶-۴ معادله انرژی
- ۲۸۰ ۷-۴ معادله دیفرانسیلی گرما
- ۲۸۲ ۸-۴ موازنه دیفرانسیل جرم در یک عنصر
- ۲۸۴ مسائل
- ۲۹۶ مراجع برای مطالعه بیشتر
- ۲۹۷ ۵ تحلیل ابعادی و تشابه دینامیکی
- ۲۹۸ ۱-۵ همگنی ابعادی و نسبت‌های بی‌بعد
- ۳۰۰ ۲-۵ ابعاد و آحاد
- ۳۰۱ ۳-۵ قضیه II: تکانه و انرژی
- ۳۱۹ ۴-۵ نظریه II: انتقال گرما و انتقال جرم
- ۳۲۴ ۵-۵ تحلیل ابعادی معادله‌های حاکم
- ۳۳۰ ۶-۵ مطالعات مدل و تشابه
- ۳۳۷ مسائل
- ۳۴۳ مراجع
- ۳۴۴ ۶ جریان چسبنده: لوله‌ها و کانالها
- ۳۴۵ ۱-۶ شارشهای لایه‌ای و متلاطم: شارشهای داخلی و خارجی
- ۳۵۰ ۲-۶ شارش لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر و پایا بین صفحات موازی
- ۳۵۶ ۳-۶ شارش لایه‌ای در لوله‌های مدور و طوقه‌های مدور
- ۳۶۲ ۴-۶ روابط شارش متلاطم
- ۳۷۵ ۵-۶ اتلافهای شارش متلاطم در مجراهای باز و بسته
- ۳۷۸ ۶-۶ شارش یکنواخت پایا در کانالهای باز

- ۳۸۲ ۷-۶ شارش تراکم‌ناپذیر پایا در شبکه‌های ساده لوله
- ۳۹۶ ۸-۶ اتلافهای جزئی
- ۴۰۴ مسائل
- ۴۱۶ مراجع
- ۴۱۸ ۷ شارشهای خارجی
- ۴۱۸ ۱-۷ نیروهای برشی و فشاری
- ۴۲۱ ۲-۷ مفاهیم لایه مرزی: ورقهای تخت
- ۴۳۱ ۳-۷ شارش و پسا: کره‌ها
- ۴۳۵ ۴-۷ تأثیر گرادینهای فشار: جدایی و وِیک
- ۴۳۹ ۵-۷ پسای مؤثر بر اجسام غوطه‌ور
- ۴۴۵ ۶-۷ نیروی برا
- ۴۴۸ ۷-۷ نیروهای ایترسی و شتاب
- ۴۵۱ مسائل
- ۴۵۴ مراجع
- ۴۵۵ ۸ شارش سیال ایدتال
- ۴۵۵ ۱-۸ لازمه‌های شارش سیال ایدتال
- ۴۵۶ ۲-۸ معادله حرکت اویلر
- ۴۵۹ ۳-۸ شارش بی‌چرخش: پتانسیل سرعت
- ۴۶۲ ۴-۸ انتگرال معادله اویلر؛ معادله برنولی
- ۴۶۶ ۵-۸ توابع جریان و شرایط مرزی
- ۴۷۱ ۶-۸ شارشهای دوبعدی
- ۴۸۵ ۷-۸ امواج آب: مسئله مرز متحرک
- ۴۹۱ مسائل
- ۴۹۵ مراجع
- ۴۹۶ ۹ انتقال بر اثر فرارفت (ادوکسیون) و پخش
- ۴۹۷ ۱-۹ پخش مولکولی و رسانش پایا

۵۱۱	۲-۹ فرارفت (ادوکسیون) و همرفت: روشهای کپهای
۵۲۳	۳-۹ انتقال لایه مرزی لایه‌ای
۵۲۸	۴-۹ رابطه‌های انتقال متلاطم
۵۳۳	۵-۹ پخش متلاطم
۵۴۷	۶-۹ پخش در کانال و پاشیدگی
۵۵۷	۷-۹ کاربردهای پخش و تکنیکهای پاشیدگی
۵۶۴	مسائل
۵۷۹	مراجع

قسمت دوم

کاربردهای مکانیک سیالات و انتقال

۵۸۲	۱۰ اندازه‌گیریها
۵۸۲	۱-۱۰ وظایف و خواص دستگاه
۵۹۱	۲-۱۰ اندازه‌گیری فشار
۵۹۴	۳-۱۰ اندازه‌گیری ارتفاع
۵۹۷	۴-۱۰ اندازه‌گیری دما
۵۹۸	۵-۱۰ اندازه‌گیری سرعت
۶۱۰	۶-۱۰ آهنگ سنجها، روزنه‌ها
۶۲۱	۷-۱۰ سنجه و نتوری، شیوره، و سایر وسایل ...
۶۲۸	۸-۱۰ سنجه‌های آهنگ در کانال باز
۶۳۸	۹-۱۰ اندازه‌گیریهای غلظت ذره
۶۴۶	۱۰-۱۰ اندازه‌گیری چسبندگی
۶۵۱	مسائل
۶۵۹	مراجع
۶۶۱	۱۱ توربوماشینها
۶۶۲	۱-۱۱ دستگاههای مشابه: سرعت ویژه

۲-۱۱ نظریه مقدماتی زنجیره

۶۷۰

۳-۱۱ نظریه توربوماشینها

۶۷۲

۴-۱۱ توربینهای واکنشی

۶۷۸

۵-۱۱ پمپها و دمندهها

۶۸۳

۶-۱۱ توربینهای ضربه‌ای

۶۹۲

۷-۱۱ حفرة زایش

۶۹۹

مسائل

۷۰۳

مراجع

۷۰۸

۱۲ شارش در مجرای بسته

۷۰۹

۱-۱۲ شارش پایا: فرمولهای نمایی اصطکاک لوله

۷۱۰

۲-۱۲ شارش پایا: خط هیدرولیکی و خط انرژی

۷۱۲

۳-۱۲ شارش پایا: سیستمهای لوله‌ای

۷۲۱

۴-۱۲ شارش پایا: شبکه‌های لوله‌ها

۷۳۳

۵-۱۲ شارش پایا: روش شناختها در شبکه‌های هیدرولیکی و پیچیده

۷۳۷

۶-۱۲ شارش پایا: مجراهای غیردایره‌ای، کهنگی لوله‌ها و مواد افزودنی

۷۴۲

۷-۱۲ شارش ناپایا: نوسان مایع در لوله U

۷۴۵

۸-۱۲ شارش ناپایا: تثبیت شارش

۷۵۷

۹-۱۲ شارش ناپایا: توصیف پدیده ضربه قوچ

۷۵۹

۱۰-۱۲ شارش ناپایا: معادله‌های دیفرانسیل برای محاسبه ضربه قوچ

۷۶۱

۱۱-۱۲ شارش ناپایا: روش حل مشخصه‌ها

۷۶۶

مسائل

۷۷۹

مراجع

۷۹۳

۱۳ شارش پایا در کانالهای باز

۷۹۴

۱-۱۳ رده‌بندی شارش

۷۹۵

۲-۱۳ بهترین سطح مقطعهای هیدرولیکی کانال

۷۹۷

۳-۱۳ شارش یکنواخت پایا در یک مسیل

۸۰۰

۴-۱۳ پرش هیدرولیکی و حوضه‌های آرامش

۸۰۱

۸۰۶	۵-۱۳ انرژی مخصوص؛ عمق بحرانی
۸۱۱	۶-۱۳ گذارها
۸۱۵	۷-۱۳ شارش تدریجاً متغیر
۸۲۲	۸-۱۳ رده بندی نمودارهای مقطع عمودی سطح
۸۲۵	۹-۱۳ مقاطع کنترل
۸۲۷	۱۰-۱۳ محاسبه کامپیوتری شارش تدریجاً متغیر
۸۳۰	۱۱-۱۳ موج ضربه‌ای مثبت بی‌اصطکاک در کانال مستطیلی
۸۳۲	۱۲-۱۳ موج ضربه‌ای منفی بی‌اصطکاک در کانال مستطیلی
۸۳۷	مسائل
۸۴۳	مراجع
۸۴۴	۱۴ کاربرد پدیده‌های انتقال
۸۴۴	۱-۱۴ انتقال مهندسی در مقایسه با انتقال زمین زیست‌محیطی
۸۴۸	۲-۱۴ شارشهای چندفازه: انتقال ذره
۸۶۷	۳-۱۴ شارش و انتقال جفت‌شده: لایه مرزی استاندارد
۸۸۱	۴-۱۴ انتقال در سطح مشترک: تبخیر
۹۰۰	۵-۱۴ واکنشگاهها و مخزنهای فرایند
۹۱۴	۶-۱۴ آمیختگی و اغتشاش متلاطم
۹۲۲	مسائل
۹۲۵	مراجع
۹۲۸	پیوست الف. سیستمهای نیرو، گشتاور و مرکز سطح
۹۳۳	پیوست ب. کمکهای برنامه‌نویسی کامپیوتری
۹۳۴	پیوست ج. خواص فیزیکی سیالات
۹۴۰	پیوست د. نمادگذاری
۹۵۰	پیوست ه. عملیات برداری و نمادگذاری
۹۵۹	پیوست و. پاسخ به مسائل زوج
۹۷۰	نمابه

پیشگفتار

در ویرایش نهم، تغییرات مهمی در حجم کتاب، ساختار مطالب، نکته‌های مهم، و پیش‌نیازها صورت گرفته است.

همچنین، دو فصل جدید برای بحث درباره انتقال گرما، انتقال جرم و کاربرد آنها در نظر گرفته شده است. فصل‌های مربوط به خواص سیالات، معادله‌های اصلی، تحلیل ابعادی، و اندازه‌گیری با تفصیل بیشتر بیان شده، و پدیده‌های انتقال نیز در آنها مورد بحث قرار گرفته است. به این ترتیب، با استفاده از این کتاب می‌توان دو دوره کامل مقدماتی را در زمینه مکانیک سیالات و پدیده‌های انتقال تدریس کرد. حذف فصل جریان‌های تراکم‌پذیر، ترکیب فصل‌های جریان پایا و غیرپایا در لوله، تفکیک معادله‌های حجم کنترلی و روش‌های پیوستگی از یکدیگر و آوردن آنها در دو فصل جداگانه، تجدید نظر فصل مربوط به روش‌های اندازه‌گیری، و افزودن ۴۰۰ مسئله جدید از تغییرات مهم دیگری است که در این ویرایش صورت گرفته است.

تغییرات دیگری هماهنگ با پیشرفت سریع روش‌های عددی و نرم‌افزارهای محاسباتی صورت گرفته است. این تغییرات ابتدا در ویرایش هشتم و در زمانی انجام شد که بیسیک و فترن زبان‌های برنامه‌نویسی بودند و محاسبات با استفاده از کامپیوترهای بزرگ انجام می‌شد. با توجه به نرم‌افزارهای محاسباتی ارزان و پر قدرت، ویرایش جدید دو تغییر دیگر را نیز شامل می‌شود. اولاً، آموزش روش‌های عددی را کنار گذاشته، و سعی کرده‌ایم کاربرد این روش‌ها را در تحلیل مسائل مورد توجه قرار دهیم. به علاوه، برنامه‌های بیسیک در ویرایش هشتم را حذف و مسائل پیچیده را با استفاده از EXCEL حل کرده‌ایم.

ثانیاً، دسترسی به اینترنت را در نظر گرفته، و به این موضوع نیز توجه داشته‌ایم که اطلاعات جدیدی که در دوره‌های آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرند به دوره‌ای خاص محدود نمی‌شوند.

قسمت اول

مبانی مکانیک سیالات و انتقال

در چهار فصل نخست قسمت ۱؛ خواص سیالات، استاتیک سیالات، و مفاهیم و تعاریف مهم دینامیک سیالات، و نیز مباحث ذی ربط انتقال حرارت و جرم بررسی می‌شود. روشهای انتگرالی منجر به معادلات حجم کنترل در فصل ۳ عرضه می‌شود، و مباحث مربوط به پیوستار که به معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی منجر می‌شود در فصل ۴ بررسی می‌شوند. سپس پارامترهای بی بعد و تحلیل مقیاس معادله معرفی می‌شود. فصلهای ۶ و ۷ به آثار اصطکاک در شارهای حقیقی در لوله‌ها و کانالها (شارهای داخلی) یا بر سطوحی چون کره (شارهای خارجی) مربوط می‌شوند. در فصل پایانی ضمن معرفی اصول انتقال حرارت و جرم مورد خاص شار بی‌اصطکاک عرضه می‌شود.

خواص سیال

علم مهندسی مکانیک سیالات از طریق فهم خواص سیال، کاربرد قوانین بنیادی مکانیک و ترمودینامیک، و آزمایشهای منظم پدید آمده است. خواص چگالی و چسبندگی در شارش کانال-باز و کانال-بسته و در شارش اطراف اشیای غوطه‌ور نقش اصلی را بازی می‌کنند. آثار پسا سطحی در تشکیل قطره‌ها، در شارش جت‌های کوچک، و در حالتی که سطح مشترک مایع-گاز-جامد یا مایع-مایع-جامد پدید می‌آید، و همچنین در تشکیل امواج مویین، اهمیت دارد. خاصه فشار بخار، که نشان‌دهنده تغییرات فاز از مایع به گاز است، در فشارهای پایین اهمیت می‌یابد.

در این فصل سیال را تعریف می‌کنیم و سیستم بین‌المللی آحاد (SI) نیرو، جرم، طول و زمان را قبل از بحث خواص و تعریف اصطلاحات بررسی می‌کنیم.

۱.۱ پیوستار

در بررسی روابط شارش سیال بر مبنای ریاضی یا تحلیلی، باید در نظر داشت که ساختار مولکولی حقیقی جای خود را به رسانه فرضی پیوسته‌ای به نام پیوستار می‌دهد. برای مثال، در رسانه مولکولی، سرعت در نقطه‌ای از فضا نامعین است، زیرا در تمام زمانها صفر است جز وقتی که مولکول دقیقاً این نقطه را اشغال کند، و بنابراین سرعت مزبور سرعت مولکول خواهد بود، نه سرعت

جرمی متوسط ذرات همجوار. اگر در نقطه‌ای سرعت را سرعت متوسط یا جرمی تمام مولکولهای اطراف نقطه، مثلاً درون کره کوچکی که شعاع آن در مقایسه با میانگین فاصله بین مولکولها بزرگ باشد، در نظر بگیریم از این معما خلاص می‌شویم. با n مولکول در سانتی‌مترمکعب، میانگین فاصله بین مولکولها از مرتبه $n^{-1/3}$ cm است. با وجود این، برای محاسبه خاصه‌های سیال (مثلاً چسبندگی)، که به حرکت‌های مولکولی مربوط‌اند، باید از نظریه مولکولی استفاده کرد، اما معادله‌های پیوستار را می‌توان با نتایج محاسبات مولکولی به کار برد.

در گازهای رقیق مانند اتمسفر در 50° مایل بالای سطح دریا، برای تشخیص نوع شارش از نسبت مسافت آزاد میانگین* به طول مشخصه جسم یا مجرا استفاده می‌کنند. در مقادیر بسیار کوچک این نسبت، رژیم شارش را دینامیک گاز می‌نامند؛ رژیم بعدی به شارش لغزش موسوم است؛ برای مقادیر بزرگ این نسبت، رژیم را شارش مولکول آزاد می‌خوانند. ما در این کتاب فقط رژیم دینامیک گاز را مطالعه می‌کنیم.

فرض می‌شود که کمیت‌های چگالی، حجم مخصوص، فشار، سرعت، و شتاب در سراسر سیال به طور پیوسته تغییر می‌کنند (یا ثابت می‌مانند).

تمرین

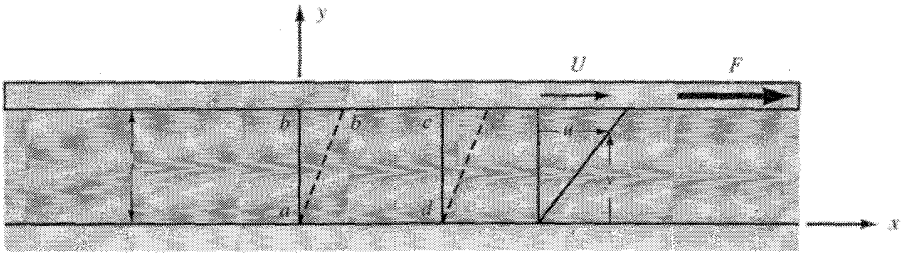
۱.۱.۱ در کدام دو رژیم شارش زیر فرض پیوستار منطقی است؟ (۱) شارش مولکول آزاد؛ (۲) شارش لغزش؛ (۳) دینامیک گاز؛ (۴) خلاصاً کامل؛ (۵) شارش مایع. الف) (۱ و ۲؛ ب) (۱ و ۴؛ ج) (۲ و ۳؛ د) (۳ و ۵؛ ه) (۱ و ۵).

۲.۱ تعریف سیال

سیال ماده‌ای است که وقتی تحت تأثیر تنش برشی (هر قدر هم کوچک) قرار می‌گیرد به طور پیوسته تغییر شکل می‌دهد. نیروی برشی عبارت است از مؤلفه نیروی مماس بر سطح، و حاصل تقسیم این نیرو بر مساحت سطح عبارت است از متوسط تنش برشی روی آن سطح. تنش برشی در یک نقطه عبارت است از مقدار حدی نیروی برشی در سطح وقتی سطح به سمت نقطه میل کند.

در شکل ۱.۱، ماده‌ای بین دو صفحه موازی نزدیک هم قرار دارد و این صفحات به قدری بزرگ‌اند که از شرایط لبه‌های آنها می‌توان صرف نظر کرد. صفحه پایینی ثابت است، و بر صفحه بالایی نیروی F وارد می‌شود و تنش برشی F/A را بر ماده بین صفحات اعمال می‌کند. A مساحت صفحه بالایی است. وقتی نیروی F موجب شود که صفحه بالایی با سرعت پایا (غیر صفر) حرکت کند، هر قدر هم کوچک باشد، می‌توان نتیجه گرفت که ماده بین دو صفحه یک سیال است.

* مسافت آزاد میانگین عبارت است از فاصله متوسطی که مولکول بین برخوردها طی می‌کند.



شکل ۱.۱ تغییر شکل ناشی از اعمال نیروی برشی ثابت.

سرعت سیالی که با مرز جامد تماس بی‌واسطه دارد با سرعت مرز یکسان است؛ یعنی هیچ لغزشی در مرز نیست [۱]*. این واقعیت تجربی در آزمایشهای بی‌شمار با انواع مختلف سیالات و مواد مرزی به اثبات رسیده است. سیال در سطح $abcd$ به مکان جدید $ab'c'd$ جریان می‌یابد، و هر ذره سیال به موازات صفحه و با سرعتی مانند U حرکت می‌کند که مقدار آن از صفر در صفحه ساکن تا U در صفحه بالایی تغییر می‌کند. آزمایش نشان می‌دهد که با ثابت بودن کمیت‌های دیگر، F با A و U نسبت مستقیم و با ضخامت t نسبت عکس دارد. به صورت معادله، داریم

$$F = \mu \frac{AU}{t}$$

که در آن μ ضریب تناسب شامل اثر سیال خاص است. اگر تنش برشی را به صورت $\tau = F/A$ بگیریم،

$$\tau = \mu \frac{U}{t}$$

نسبت U/t سرعت زاویه‌ای خط ab یا آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای سیال، یعنی آهنگ کاهش زاویه bad است. سرعت زاویه‌ای را به صورت du/dy می‌توان نوشت، چون U/t و du/dy هر دو تغییر سرعت تقسیم بر فاصله تغییر سرعت را بیان می‌کنند. اما du/dy کلی‌تر است، زیرا شامل حالت‌هایی می‌شود که سرعت زاویه‌ای و تنش برشی با y تغییر کند. گرادیان سرعت du/dy را می‌توان آهنگ حرکت یک لایه نسبت به لایه مجاور نیز دانست. به صورت دیفرانسیل داریم

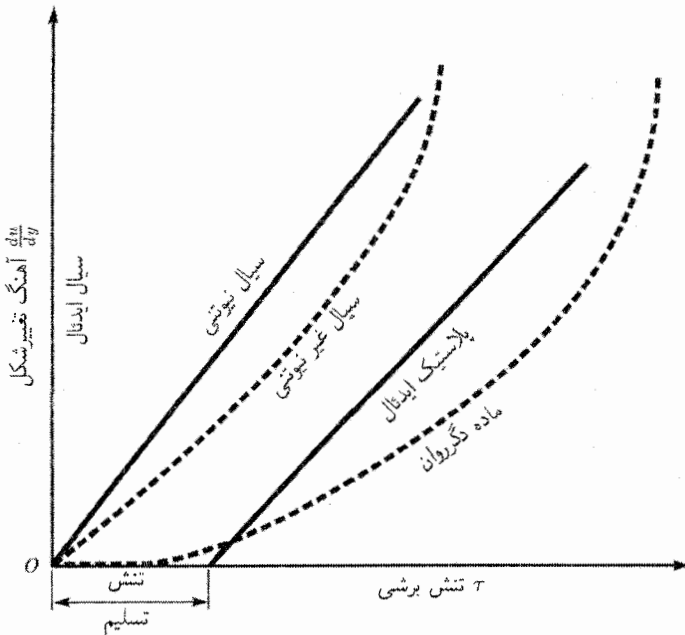
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (۱.۲.۱)$$

که رابطه بین تنش برشی و آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای در شارش یک‌بعدی سیال است. ضریب تناسب μ را چسبندگی سیال می‌گویند، و معادله (۱.۲.۱) قانون چسبندگی نیوتن است.

* مراجع شماره‌دار داخل قلاب در انتهای هر فصل آورده شده‌اند.

موادی غیر از سیالات در تعریف سیال نمی‌گنجد. مادهٔ پلاستیکی به مقداری متناسب با نیرو تغییر شکل می‌یابد، اما وقتی تنش وارد بر آن کمتر از تنش برشی تسلیم آن باشد، تغییر شکل به طور پیوسته صورت نمی‌گیرد. خلأ کامل بین صفحات باعث تغییر شکلی با آهنگ فزاینده می‌شود. اگر در بین صفحات شن ریخته شود، اصطکاک کولن ایجاد می‌کند که نیروی معین سبب حرکت پیوسته شود. از این رو، پلاستیکها و جامدات از زمرهٔ سیالات نیستند.

سیالات را می‌توان به نیوتنی یا غیرنیوتنی تقسیم کرد. در سیال نیوتنی بین مقدار تنش برشی اعمال شده و آهنگ تغییر شکل ناشی از آن یک رابطهٔ خطی وجود دارد [معادلهٔ (۱.۲.۱)] ثابت است] که در شکل ۲.۱ می‌بینید. در سیال غیرنیوتنی بین مقدار تنش اعمال شده و آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای یک رابطهٔ غیرخطی وجود دارد. پلاستیک ایدئال تنش برشی تسلیم معینی و رابطهٔ خطی ثابتی بین τ و du/dy دارد. مادهٔ دگرروان* مانند جوهر چاپ، به گونه‌ای چسبندگی دارد که به تغییر شکل زاویه‌ای بلافصل ماده وابسته است و وقتی در حال سکون باشد تمایل دارد شکل بگیرد. گازها و مایعات رقیق بیشتر از ردهٔ سیالات نیوتنی‌اند، در حالی که هیدروکربورهای زنجیره‌مدراز و غلیظ غیر نیوتنی‌اند.



شکل ۲.۱ نمودار تغییر شکل ماده.

* دگرروانی خاصیت بعضی از مواد زلاتینی است که وقتی آنها را تکان دهند به صورت محلول در می‌آیند. -م.

برای تحلیل، اغلب فرض می‌شود که سیال غیر چسبنده است. به فرض چسبندگی صفر، تنش برشی، با صرف نظر از حرکت سیال، همواره صفر است. اگر سیال را تراکم‌ناپذیر نیز در نظر گیریم آن را سیال ایدئال می‌گوییم که در شکل ۲.۱ در محور عرضها قرار می‌گیرد.

تمرینها

۱.۲.۱ سیال ماده‌ای است که الف) دائماً منبسط می‌شود تا ظرفی را پر کند؛ ب) عملاً تراکم‌ناپذیر است؛ ج) امکان ندارد تحت تأثیر نیروهای برشی قرار گیرد؛ د) امکان ندارد تحت تأثیر نیروی برشی به حالت سکون بماند؛ ه) صرف نظر از حرکتش، تنش برشی یکسانی در یک نقطه دارد.

۲.۲.۱ قانون چسبندگی نیوتن ناظر است به الف) فشار، سرعت و چسبندگی؛ ب) تنش برشی و آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای در سیال؛ ج) تنش برشی، دما، چسبندگی و سرعت؛ د) فشار، چسبندگی و آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای؛ ه) تنش برشی تسلیم، آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای و چسبندگی.

۳.۱ ابعاد و آحاد

آحاد سازگار نیرو، جرم، طول و زمان، حل مسائل را در یک مکانیک بسیار ساده می‌کنند؛ همچنین با استفاده از آحاد سازگار، بدون مراجعه به هرگونه سیستم سازگار خاصی می‌توان نتایجی گرفت. یک سیستم آحاد مکانیک را در صورتی سازگار گویند که نیروی واحد موجب شود جرم واحد شتاب واحد یابد. در سرتاسر این کتاب سیستم بین‌المللی (SI) به کار می‌رود که در اکثر کشورها پذیرفته شده است. در این سیستم، نیوتن (N) واحد نیرو، کیلوگرم (kg) واحد جرم، متر (m) واحد طول، و ثانیه (s) واحد زمان است. با در اختیار داشتن کیلوگرم، متر، و ثانیه به عنوان آحاد تعریف شده، نیوتن طوری استنتاج می‌شود که دقیقاً در قانون دوم حرکت نیوتن صدق کند

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (1.3.1)$$

در ایالات متحده، مجموعه آحاد سازگار در حال حاضر عبارت است از پوند (lb) برای نیرو، اسلاگ برای جرم، فوت (ft) برای طول و ثانیه (s) برای زمان. اسلاگ یک واحد فرعی است؛ آن واحد جرمی است که ۱ پوند نیرو به آن شتاب ۱ فوت بر مجذور ثانیه را می‌دهد، یا

$$1 \text{ lb} \equiv 1 \text{ slug} \cdot 1 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (2.3.1)$$

سیستم پوند-فوت-اسلاگ-ثانیه در این متن سیستم رایج US (USC) نامیده شده است.

بعضی از گروه‌های مهندسی حرفه‌ای در ایالات متحده از مجموعهٔ واحدهای ناسازگار پوند (lb) برای نیرو، پوند جرم (lb_m)، فوت (ft) برای طول و ثانیه (s) برای زمان استفاده می‌کنند. به هنگام استفاده از واحدهای ناسازگار در قانون دوم نیوتن، به یک ثابت تناسب نیاز داریم که معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F = \frac{m}{g_0} a \quad (۳.۳.۱)$$

وقتی یک پوند نیرو بر یک پوند جرم در گرانش استاندارد در خلا اثر کند، جرم شتاب ۳۲.۱۷۴ ft/s^2 را خواهد داشت، یا

$$1 \text{ lb} = 1 \frac{\text{lb}_m}{g_0} \cdot ۳۲.۱۷۴ \text{ ft/s}^2$$

که از آن می‌توان g_0 را به دست آورد

$$g_0 = ۳۲.۱۷۴ \text{ lb}_m \cdot \text{lb/ft} \cdot \text{s}^2 \quad (۴.۳.۱)$$

در این مجموعه واحدها مقدار ثابت بالا را دارد، خواه در شرایط استاندارد به کار رود خواه در ماه. جرم M جسم با مکان تغییر نمی‌کند، اما وزن W جسم برابر است با حاصلضرب جرم و شتاب گرانش محلی g :

$$W = Mg \quad (۵.۳.۱)$$

مثلاً، در جایی که $g = ۹.۸۰۶ \text{ m/s}^2$ ، جسمی با نیروی وزن ۱۰ N جرم $M = ۱۰/۹.۸۰۶ \text{ kg}$ را دارد. در جایی که $g = ۹.۷ \text{ m/s}^2$ ، وزن W عبارت است از

$$W = \frac{۱۰ \text{ N}}{۹.۸۰۶ \text{ m/s}^2} (۹.۷ \text{ m/s}^2) = ۹.۸۹۲ \text{ N}$$

گرانش استاندارد، که شتاب گرانش در سطح دریاست، در واحدهای SI برابر با ۹.۸۰۶ m/s^2 است. چون آنها در شکل نسبت‌های بی‌بعد برابر ۱ است، از آنها می‌توان در یک طرف معادله، به عنوان مضرب یا مقسوم‌علیه، در تبدیل واحدها استفاده کرد.

در جدول ۱.۱، ابعاد و واحدهای سیستمها و همچنین مقدار g_0 نشان داده شده‌اند. در قسمت ۶.۱ واحدهای دما، کلونین (K)* و درجهٔ رانکین ($^{\circ}R$)، بحث می‌شوند.

* در سال ۱۹۶۷ نام درجهٔ کلونین ($^{\circ}K$) به کلونین (K) تغییر یافت.

جدول ۱.۱ سیستمهای آحاد رایج و مقادیر g_0 .

سیستم	جرم	طول	زمان	نیرو	دما	g_0
SI	kg	m	s	N	K	1 kg.m/N.s^2
USC	slug	ft	s	lb	$^{\circ}\text{R}$	1 slug.ft/lb.s^2
US ناسازگار	lb_m	ft	s	lb	$^{\circ}\text{R}$	$32.174 \text{ lb}_m.\text{ft/lb.s}^2$
متریک، cgs	g	cm	s	dyn	K	1 g.cm/dyn.s^2
متریک، mks	kg	m	s	kg_f	K	$9.806 \text{ kg.m/kg}_f.\text{s}^2$

برای اصطلاحاتی مانند ساعت (h)، متر (m) و ثانیه (s) اختصار آحاد SI را با حروف کوچک می‌نویسند. وقتی واحدی به نام یک شخص خوانده شود، اختصار آن (نه صورت تلفظ شده آن) با حروف درشت نوشته می‌شود، مانند وات (W)، پاسکال (Pa) و نیوتن (N). اصطلاح L برای لیتر یک استثناست که برای وضوح در نظر گرفته شده است. مضربها و ضرایب توانهای 10^2 را با پیشوندهایی نشان می‌دهند که مختصر نیز می‌شوند. پیشوندهای رایج در جدول ۲.۱ آمده است. توجه داشته باشید که پیشوندها دوگانه نیستند: مثلاً صورت صحیح برای 10^{-6} پیشوند n است، مثلاً در نانومتر؛ ترکیباتی از قبیل میلی‌میکرو، که قبلاً به کار می‌رفت، دیگر استفاده نمی‌شود.

جدول ۲.۱ پیشوند برای توانهای 10^0 در آحاد SI.

مضرب	پیشوند SI	اختصار	مضرب	پیشوند SI	اختصار
10^9	گیگا	G	10^{-3}	میلی	m
10^6	مگا	M	10^{-6}	میکرو	μ
10^3	کیلو	k	10^{-9}	نانو	n
10^{-2}	سانتی	c	10^{-12}	پیکو	p

تمرینها

۱.۳.۱ شیئی بر یک ترازوی فنری 2 kg جرم و 19 N نیروی گرانی دارد. مقدار گرانی در این مکان، برحسب متر بر ثانیه، عبارت است از الف) 10^5 ؛ ب) ۲؛ ج) 9.5 ؛ د) 19 ؛ ه) هیچکدام.

۲.۳.۱ نیروی نامتعادل 10 N به یک جرم 2 kg وارد می‌شود و شتاب (برحسب m/s^2) زیر را موجب می‌شود: الف) 2 ؛ ب) 2 ؛ ج) 5 ؛ د) 20 ؛ ه) هیچکدام.

۳.۳.۱ نیروی گرانی جرم 3 kg بر سیاره‌ای که در آن $g = 10 \text{ m/s}^2$ است، برحسب نیوتن عبارت است از الف) 30 ؛ ب) 33 ؛ ج) 29.42 ؛ د) 30 ؛ ه) هیچکدام.

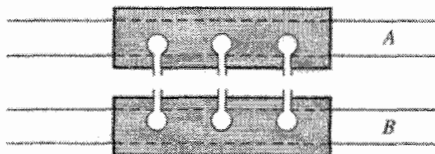
۴.۳.۱ شدت فشار 10^4 Pa را می‌توان به صورت زیر نوشت: الف) GPa ؛ ب) GPa ؛ ج) kMPa ؛ د) μPa ؛ ه) هیچکدام.

۴.۱ چسبندگی چسبندگی مطلق

چسبندگی سیال خاصیت مهمی در مطالعه شارش سیال است. طبیعت و مشخصات چسبندگی و نیز ابعاد چسبندگی مطلق و چسبندگی سینماتیکی را در این قسمت توضیح می‌دهیم. چسبندگی خاصه‌ای است از سیال که سیال به واسطه آن در برابر برش مقاومت می‌کند. قانون چسبندگی نیوتن [معادله (۱.۲.۱)] بیان می‌کند که در آهنگ معینی از تغییر شکل زاویه‌ای سیال، تنش برشی با چسبندگی نسبت مستقیم دارد. ملاس و قیر نمونه مایعات بسیار چسبنده‌اند. هوا و آب چسبندگی اندکی دارند.

چسبندگی گاز با دما افزایش می‌یابد، اما چسبندگی مایع با دما کاهش می‌یابد. با بررسی علل چسبندگی، گرایشهای تغییر دما را می‌توان توضیح داد. مقاومت سیال در برابر برش به همدوسش آن و به آهنگ انتقال تکانه مولکولی آن بستگی دارد. مایع، در مقایسه با گاز، مولکولهایی نزدیکتر به هم دارد و نیروهای همدوسی‌اش نسبت به گاز بزرگترند. به نظر می‌رسد که همدوسش علت اصلی چسبندگی مایع باشد؛ و از آنجا که همدوسش با دما کاهش می‌یابد، چسبندگی نیز کم می‌شود. اما گاز نیروهای همدوسی بسیار کوچکی دارد. بیشتر مقاومت آن در برابر تنش برشی، نتیجه انتقال اندازه حرکت مولکولی است.

به عنوان مدلی اجمالی از روشی که در آن انتقال تکانه موجب تنش برشی ظاهری می‌شود، دو واگن ایدئال را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳.۱ با آنها اسفنج است و بر ریلهای موازی قرار دارند. فرض کنید که هر واگن یک مخزن آب و یک پمپ دارد، به طوری که آب از طریق شیورهایی در جهت عمود بر ریل هدایت شود. ابتدا فرض کنید A ساکن است و B به راست حرکت می‌کند، و آب از شیوره‌های آن به A برخورد می‌کند و جذب اسفنجها می‌شود. واگن A بر اثر مؤلفه تکانه جتها که موازی ریلهاست به حرکت در می‌آید، و تنش برشی ظاهری بین A و



شکل ۳.۱ مدل نشان‌دهنده انتقال تکانه.

B را ایجاد می‌کند. اکنون اگر A با همان آهنگ، آب به داخل B پمپاژ کند کنش آن B را کند می‌سازد و در نتیجه نیروهای برشی ظاهری مساوی مخالفی به وجود می‌آید. وقتی A و B هر دو ساکن باشند یا سرعت یکسان داشته باشند، پمپاژ بر هیچکدام آنها تنش برشی اعمال نمی‌کند.

در عقب و جلوی هر سطح فرضی که در داخل سیال ترسیم شود، همیشه انتقال مولکول وجود دارد. وقتی لایه‌ای نسبت به لایه مجاور حرکت کند، انتقال مولکولی تکانه باعث می‌شود که تکانه از یک طرف به طرف دیگر برود، به طوری که تنش برشی ظاهری‌ای به وجود می‌آید که در برابر حرکت نسبی مقاومت می‌کند و می‌خواهد سرعت‌های لایه‌های مجاور را به شیوه‌ای شبیه شکل ۳.۱ مساوی هم سازد. معیار حرکت یک لایه نسبت به لایه مجاور، du/dy است.

فعالیت مولکولی باعث تنش برشی ظاهری می‌شود که مهمتر از نیروهای همدوسی است و از آنجا که فعالیت مولکولی با دما افزایش می‌یابد چسبندگی گاز نیز با دما افزایش می‌یابد.

چسبندگی در فشارهای معمولی مستقل از فشار است و فقط به دما بستگی دارد. در فشارهای خیلی زیاد، چسبندگی گازها و بیشتر مایعات به گونه‌ای نامنظم با فشار تغییر می‌کند.

در سیال ساکن، یا در سیال متحرکی که هیچ لایه‌ای از آن نسبت به لایه مجاور حرکت ندارد، هیچ‌گونه تنش برشی ظاهری پدید نمی‌آید (صرف نظر از چسبندگی) زیرا du/dy در سراسر سیال صفر است. از این رو، در مطالعه استاتیک سیالات، هیچ نیروی برشی نمی‌توان در نظر گرفت، زیرا در سیال استاتیکی چنین نیرویی پدید نمی‌آید، و تنش‌های باقیمانده فقط عبارت‌اند از تنش‌های قائم یا فشارها. این امر مطالعه استاتیک سیالات را بسیار ساده می‌کند، زیرا هر جسم آزاد سیال فقط می‌تواند شامل نیروهای گرانی و نیروهای سطحی قائم مؤثر بر آن باشد.

ابعاد چسبندگی از قانون چسبندگی نیوتن [معادله (۱.۲.۱)] تعیین می‌شود. با حل چسبندگی μ ، به دست می‌آید

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$$

و با جایگذاری ابعاد F ، L و T برای نیرو، طول و زمان، به دست می‌آید

$$\tau : FL^{-2} \quad u : LT^{-1} \quad y : L$$

معلوم می‌شود که μ ابعاد $FL^{-1}T$ دارد. با بعد نیرو برحسب جرم با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن، $F = MLT^{-2}$ ، ابعاد چسبندگی را می‌توان به صورت $ML^{-1}T^{-1}$ بیان کرد.

واحد SI چسبندگی، نیوتن-ثانیه بر متر مربع ($N \cdot s/m^2$) با کیلوگرم بر متر-ثانیه ($kg/m \cdot s$)، نامی ندارد. واحد USC چسبندگی (که آن هم نامی ندارد) $lb \cdot s/ft^2$ یا $\text{slug}/ft \cdot s$ است

(اینها با هم هم‌ارزند). یک واحد رایج واحد cgs، به نام پواز (P) است؛ آن $\text{dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$ یا $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}$ است. واحد SI 10^5 برابر بزرگتر از واحد پواز است*.

چسبندگی سینماتیکی

چسبندگی μ را اغلب چسبندگی مطلق یا چسبندگی دینامیکی می‌گویند تا با چسبندگی سینماتیکی ν که نسبت چسبندگی به چگالی جرمی است، اشتباه نشود:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4.1)$$

چسبندگی سینماتیکی کاربردهای بسیار دارد، مثلاً در عدد بی‌بعد رینولدز برای حرکت جسم در سیال، داریم ν/l ، که در آن V سرعت جسم و l معیار خطی نشان‌دهنده اندازه جسم است. ابعاد ν عبارت‌اند از $L^2 T^{-1}$. واحد SI چسبندگی سینماتیکی m^2/s است و واحد USC آن ft^2/s است. واحد cgs، به نام استوک (st)، cm^2/s است.

در واحدهای SI، برای تبدیل از ν به μ ، باید ν در ρ ، چگالی جرم برحسب کیلوگرم بر متر مکعب، ضرب شود. μ در واحدهای USC از ضرب کردن ν در چگالی (برحسب اسلاگ بر فوت مکعب) به دست می‌آید. برای تبدیل از استوک به پواز، آن را در چگالی برحسب گرم بر سانتی‌متر مکعب، که به طور عددی با گرانس ویژه برابر است، ضرب می‌کنند.

مثال ۱.۱ مایعی با چسبندگی $0.05 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ و چگالی 850 kg/m^3 را در نظر بگیرید. مطلوب است چسبندگی سینماتیکی آن (الف) در واحدهای SI، (ب) واحدهای USC، و (ج) چسبندگی در واحدهای USC.

حل

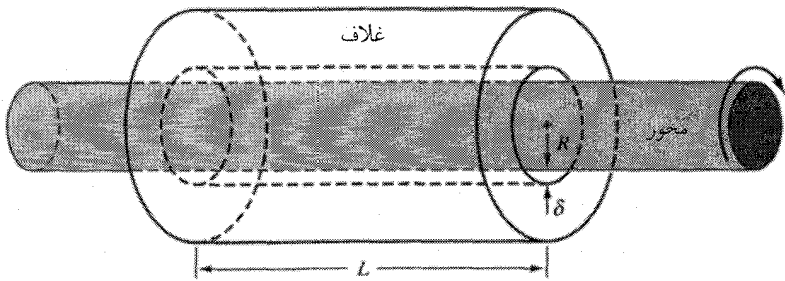
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.05 \text{ kg/m}\cdot\text{s}}{850 \text{ kg/m}^3} = 5.882 \mu\text{m}^2/\text{s} \quad (\text{الف})$$

$$\nu = (5.882 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right)^2 = 6.331 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s} \quad (\text{ب})$$

$$\mu = (0.05 \text{ kg/m}\cdot\text{s}) \frac{1 \text{ slug/ft}\cdot\text{s}}{479 \text{ kg/m}\cdot\text{s}} = 0.0001044 \text{ slug/ft}\cdot\text{s} \quad (\text{ج})$$

* تبدیل از واحد USC چسبندگی به واحد SI به صورت زیر است

$$\frac{1 \text{ واحد USC چسبندگی}}{479 \text{ واحد SI چسبندگی}} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1 \text{ slug } 14.5934 \text{ kg}}{\text{ft}\cdot\text{s}} \frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} = 479 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$$



شکل ۴.۱ محور در داخل غلاف می چرخد.

چسبندگی عملاً مستقل از فشار است و فقط به دما بستگی دارد. چسبندگی سینماتیکی مایعات و گازها در فشار معلوم، اساساً تابع دماست. برای تعیین چسبندگی مطلق سینماتیکی، نمودارهایی در پیوست ج، به ترتیب در شکل‌های ج. ۱ و ج. ۲، آمده است.

مثال ۲.۱ در شکل ۴.۱، محوری با 1200 rpm داخل یک یاتاقان غلافی هم‌مرکز می‌چرخد. لقی δ در مقایسه با شعاع R کوچک است به طوری که می‌توان توزیع سرعت خطی را در روانکار در نظر گرفت. توان لازم برای چرخاندن محور چقدر است؟ $R = 2 \text{ cm}$ ، $L = 6 \text{ cm}$ ، $\delta = 0.1 \text{ mm}$ ، و $\mu = 0.2 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$

حل

اتلاف انرژی، بر اثر نیروی برشی چسبندگی، در زمان واحد توان لازم را می‌دهد. این توان برابر است با گشتاور لازم برای چرخاندن محور ضرب در سرعت زاویه‌ای داده شده.

$$\text{توان} = T\omega$$

گشتاور اعمال شده برابر است با تنش برشی مؤثر بر مساحت سطح ضرب در بازوی گشتاوری R

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{\omega R}{\delta} = 0.2(1200) \frac{2\pi}{60} \frac{0.02}{0.0001} = 5026.5 \text{ N}/\text{m}^2$$

$$T = \tau(2\pi RL)R = (5026.5)(2\pi)(0.02)(0.06)(0.02) = 0.758 \text{ Nm}$$

$$\text{توان} = T\omega = 0.758(1200) \frac{2\pi}{60} = 95.3 \text{ W}$$

تمرینها

۱.۴.۱ ابعاد چسبندگی عبارت است از الف ($FL^{-1}T$ ؛ ب) ($FL^{-1}T^{-1}$ ؛ ج) (FLT^{-2} ؛ د) (FL^2T ؛ ه) ($FLLT^{-2}$).

۲.۴.۱ عبارت نادرست را انتخاب کنید. نیروهای برشی ظاهری الف) وقتی سیال در حال سکون است هرگز پدید نمی‌آیند؛ ب) وقتی سیال در حال سکون است بر اثر همدوسش به وجود می‌آیند؛ ج) به معاوضه مولکولی تکانه بستگی دارند؛ د) به نیروهای همدوسی بستگی دارند؛ ه) در سیال بی‌اصطکاک رخ نمی‌دهند (با صرف نظر از حرکت آن).

۳.۴.۱ احاد صحیح چسبندگی عبارت‌اند از الف) ($m.s/kg$ ؛ ب) ($N.m/s^2$ ؛ ج) ($kg.s/N$ ؛ د) ($kg/m.s$ ؛ ه) ($N.s/m$).

۴.۴.۱ چسبندگی، برحسب پواز، با ضرب کردن در الف) ($\frac{1}{\rho}$ ؛ ب) (479 ؛ ج) (ρ ؛ د) ($\frac{1}{\rho}$ ؛ ه) هیچکدام از این جوابها به واحد USC چسبندگی تبدیل نمی‌شود.

۵.۴.۱ ابعاد چسبندگی سینماتیکی عبارت‌اند از الف) ($FL^{-2}T$ ؛ ب) ($ML^{-1}T^{-1}$ ؛ ج) (L^2T^2 ؛ د) (L^2T^{-2} ؛ ه) (L^2T^{-1}).

۶.۴.۱ چسبندگی نفت در $20^\circ C$ ، از شکل ج. ۱، برحسب نیوتن بر متر مربع عبارت است از: الف) (4×10^{-5} ؛ ب) (4×10^{-2} ؛ ج) (1.93×10^{-3} ؛ د) (1.93×10^{-2} ؛ ه) (1.8×10^{-2}).

۷.۴.۱ چسبندگی سینماتیکی هوای خشک در $30^\circ C$ و 760 mm جیوه، برحسب مترمربع بر ثانیه عبارت است از الف) (1.7×10^{-5} ؛ ب) (1.7×10^{-4} ؛ ج) (1.73×10^{-6} ؛ د) (1.92×10^{-5} ؛ ه) هیچکدام از این جوابها.

۸.۴.۱ در $60^\circ C$ $\mu = 0.6 \text{ kg/m.s}$ و گرانش ویژه 0.6° ، ν برحسب استوک برابر است با الف) 2.78 ؛ ب) 1.0 ؛ ج) 0.6 ؛ د) 0.36 ؛ ه) هیچکدام.

۹.۴.۱ در $9.4.1 \text{ slug/ft.s} = 2.0 \times 10^{-2}$ ، مقدار μ برحسب پوندثانیه بر فوت مربع برابر است با الف) (1.03×10^{-2} ؛ ب) (2.0×10^{-4} ؛ ج) (6.21×10^{-4} ؛ د) (6.44×10^{-2} ؛ ه) هیچکدام.

۱۰.۴.۱ $\nu = 3 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ و $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ، μ برابر است با الف) (3.75×10^{-11} ؛ ب) (2.4×10^{-5} ؛ ج) (2.4×10^5 ؛ د) (2.4×10^{12} ؛ ه) هیچکدام.

۵.۱ جرم، وزن، و متغیرهای غلظت

مهندسان فقط نمی‌خواهند سیالات ساده را با یک ساختار مولکولی (مانند آب) تحلیل کنند بلکه مخلوطی از دو عنصر یا بیشتر را که ممکن است دارای ساختار مولکولی متفاوت اما با فاز مشابه باشند (مانند آب و روغن) یا دارای ساختار مولکولی و فاز متفاوت باشند (مانند آب و

جرم، وزن، و متغیرهای غلظت ۱۷

رسوب) نیز تحلیل کنند. اندازه‌گیرهای جرم و وزن در سیالات ساده سراسر است در حالی که در مخلوطهای دوتایی (دارای دو عنصر) یا مخلوطهای دارای چند عنصر اغلب باید از اندازه‌گیرهای اضافی مبتنی بر کسرهای جرم یا نسبتهای کسرهای جرم استفاده کرد.

سیالات ساده

چگالی ρ سیال به صورت جرم حجم واحد آن تعریف می‌شود. برای تعریف چگالی در یک نقطه، جرم Δm سیال در حجم کوچک ΔV اطراف نقطه بر ΔV تقسیم می‌شود و با میل دادن ΔV به سمت مقدار ϵ^3 ، که در آن ϵ در مقایسه با فاصله بین مولکولها هنوز بزرگ است، جلوگیری می‌شود،

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.5.1)$$

برای آب در فشار استاندارد (۷۶۰ mm جیوه) و $4^\circ C$ (۳۹٫۲° F)، $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ، یا 1.94 slug/ft^3 .

حجم مخصوص ν_s معکوس چگالی ρ است؛ یعنی، آن حجمی است که جرم واحد سیال اشغال می‌کند. از این رو

$$\nu_s = \frac{1}{\rho} \quad (2.5.1)$$

وزن مخصوص γ سیال وزن حجم واحد آن است؛ که با مکان تغییر می‌کند، و به گرانش بستگی دارد. از این رو

$$\gamma = \rho g \quad (3.5.1)$$

در بررسی استاتیک سیالات یا در بررسی مایعات با سطح آزاد، وزن مخصوص یک خاصیت مناسب است.

گرانش ویژه S ماده نسبت وزن آن به وزن آب، با حجم مساوی، در شرایط استاندارد است. آن را می‌توان به صورت نسبت چگالی ماده به چگالی آب یا نسبت وزن مخصوص ماده به وزن مخصوص آب نیز بیان کرد.

مخلوط‌های چندعنصری

فرض کنید که به جای یک سیال ساده، چند شکل دیگر جرم در مخزن سیال وجود داشته باشد. برای مثال، یک دریاچه می‌تواند شامل رده‌های مختلف رسوب، اکسیژن محلول، و شکل‌های گوناگون مولکولی نیتروژن و فسفر باشد. با تحلیل مقادیر موجود در کل مخلوط یا با تحلیل کمیتهای جرم و وزن برای هر رده یا برای هر کسر جرمی می‌توان اندازه‌گیریهای مختلفی را برای جرم و وزن انجام داد.

چگالی مخلوط به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \frac{\sum_i^n \Delta m_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon^3} \frac{\sum_i^n \rho_i \Delta V_i}{\Delta V} \quad (4.5.1)$$

در معادله (۴.۵.۱) اندیس i مربوط است به تمام مواد داخل مخلوط؛ Δm_i و ρ_i ، به ترتیب، جرم و چگالی کسر i ام هستند، و ΔV_i حجم کل کسر i ام است. کسر جرمی عنصر i ام بدون واحد است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega_i = \frac{\rho_i \Delta V_i}{\rho \Delta V} = \frac{\Delta m_i}{m} \quad (5.5.1)$$

و همان‌طور که دیده می‌شود، ω_i نمی‌تواند بزرگتر از ۱ باشد. غلظت جرمی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V} = \frac{\rho_i \Delta V_i}{\Delta V} \quad (6.5.1)$$

و دارای آحاد (M/L^3) است. غلظت حجمی به صورت $C_i = \Delta V_i / \Delta V$ تعریف می‌شود. باید متذکر شد که در حالی که چگالی هر ماده مخلوط، ρ_i ، خاصیتی از ماده است، ω_i و C_i خواص مخلوط نیستند بلکه متغیرهایی هستند که برحسب مکان و زمان تغییر می‌کنند. به هنگام مطالعه کتابهای مربوط به رشته‌های مختلف باید توجه داشت که از کدام یک از دو اندازه‌گیری نسبی استفاده شده است زیرا نمادگذاری در بین دو رشته یکسان نیست. در اینجا از نمادگذاری‌ای استفاده شده است که معمولاً مهندسان عمران و محیط زیست به کار می‌برند.

آحاد C_i بر مبنای مقدار عددی جرم عنصر نسبت به چگالی مخلوط انتخاب می‌شوند. برای مثال، در تحلیل کیفیت آب یا فاضلاب معمولاً برای غلظت از آحاد mg/L به جای kg/m^3 استفاده می‌شود؛ زیرا، مقدار غلظت برحسب kg/m^3 خیلی کوچک است و در تحلیلهای ریاضی

جرم، وزن، و متغیرهای غلظت ۱۹

مشکل ایجاد می‌کند (یعنی، مضر ب اعداد بزرگ و کوچک را وارد می‌کند). 10 mg/L محتوی اکسیژن محلول معادل است با 10^{-1} kg/L ، 10^{-4} kg/L ، و 10^{-7} kg/m^3 .

به هنگام لزوم از محاسبات کسر جرمی معین استفاده می‌شود و آنها اغلب به شکل مختصر بیان می‌شوند. برای مثال، اصطلاح جزء در هزار (ppt) یا اجزا در میلیون (ppm) مربوط به غلظت جرمی است؛ مثلاً، غلظت 24 g نمک در یک کیلوگرم مخلوط برابر است با

$$\frac{24 \text{ g}}{1 \text{ kg}} = \frac{24 \text{ g}}{1000 \text{ g}} = 24 \text{ ppt} \quad (7.5.1)$$

در حالی که کسرهای نمک یا رسوب اغلب به اندازه کافی بزرگ‌اند که از اصطلاح ppt نمی‌توان برای آنها استفاده کرد، بعضی متغیرهای کیفیتی آب مانند کسرهای ترکیبات معدنی و آلی به اندازه‌ای کوچک‌اند که باید از اصطلاح اجزا در میلیون (ppm) استفاده کرد. مثلاً، $5 \times 10^{-6} \text{ g}$ در یک کیلوگرم 5 ppt یا 5 ppm است.

رابطه بین چگالی، دما، و غلظت

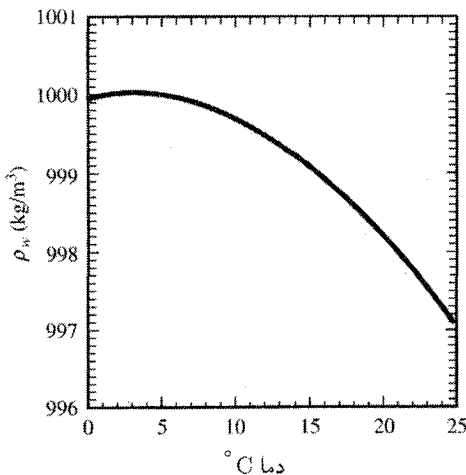
گرما دادن به حجم بیشتر سیالات چگالی را کاهش می‌دهد، ولی همان‌طور که آقیانوس‌شناسها به خوبی آگاه هستند، افزودن نمک به آب تازه، یعنی، افزودن جرم، چگالی را افزایش می‌دهد. رابطه تفصیلی بین دما و چگالی در یک گاز به حالت فشار نیز بستگی دارد، و این رابطه در بخش بعدی بررسی می‌شود.

در مایعات رابطه بین چگالی و دما یا جرم افزوده نیز کاملاً شناخته شده است. اگر توجه خود را به آب تازه معطوف کنیم، رابطه بین چگالی (kg/m^3) و دما ($^{\circ}\text{C}$) عبارت است از

$$\rho_w = 999.939900 + 4.216485(10^{-2})T - 7.097451(10^{-3})T^2 + 3.7509571(10^{-5})T^3 - 9.9037785(10^{-8})T^4 \quad (8.5.1)$$

همان‌طور که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است، حداکثر مقدار چگالی آب تازه در شرایط استاندارد در 4°C روی می‌دهد در حالی که انجماد در 0°C روی می‌دهد. این اختلاف کوچک در چگالی، یعنی،

$$\rho(T=4^{\circ}\text{C}) - \rho(T=0^{\circ}\text{C}) = (1000.00000 - 999.9399) \text{ kg/m}^3 = 0.06 \text{ kg/m}^3$$



شکل ۵.۱ چگالی آب برحسب دما.

عامل اصلی اختلاف‌های مهم فیزیکی در رفتار دریاچه‌ها، رودخانه‌ها، و دهانه‌ها در طی چرخهٔ گرما و سرمای فصلی است. در حقیقت این اختلاف‌های کوچک چگالی باعث پیچیدگی دینامیکی قابل توجه آب می‌شود. بنابراین، محاسبات چگالی باید با شش رقم اعشار انجام شود. افزودن جرم به شکل نمک با رسوب نیز می‌تواند چگالی را تغییر دهد. از انجمن اقیانوس‌شناسها، رابطهٔ تقریبی بین چگالی، دما، و شوری، s (برحسب ppt)، در مخلوطها تحت فشار کم عبارت است از [۲].

$$\rho(s, T) = \rho_w + s \{ 0.824493 - 4.0899(10^{-2})T + 7.6438(10^{-5})T^2 - 8.2467(10^{-7})T^3 + 5.3875(10^{-9})T^4 \} + s^{3/2} \{ -5.72466(10^{-2}) + 1.0227(10^{-4})T - 1.6546(10^{-6})T^2 \} + s^2 \{ 4.8314(10^{-4}) \} \quad (9.5.1)$$

افزودن نمک باعث می‌شود دمایی که در آن حداکثر مقدار چگالی روی می‌دهد و نقطهٔ انجماد آب تغییر کنند؛ البته این بحث خارج از حوزهٔ این متن است، و باید به کتابهای درسی اقیانوس‌شناسی مراجعه کرد.

همان‌طور که از شکل ۵.۱ دیده می‌شود، قسمت قابل ملاحظه‌ای از منحنی چگالی برحسب دما خطی است. اگر تحلیل به تغییرات کوچک چگالی نسبت به یک چگالی ثابت یا مرجع محدود شود، از شکل خطی این رابطه‌های چگالی می‌توان استفاده کرد

$$\rho = \rho_r (1 - \beta_t \Delta T) \quad (10.5.1)$$

$$\rho = \rho_r(1 + \beta_s \Delta s) \quad (۱۱.۵.۱)$$

$$\rho = \rho_r(1 + \beta_c \Delta C) \quad (۱۲.۵.۱)$$

در اینجا، β_s ، β_c و β_r مربوط می‌شوند به ضریبهای انبساط حجمی، به ترتیب، برای دما، غلظت نمک و رسوب؛ ρ_r مربوط است به چگالی مرجع که نسبت به آن آشفستگیهای خطی روی می‌دهد؛ و ΔT ، Δs و ΔC ، به ترتیب، مربوط می‌شوند به اختلافهای دما، غلظت نمک و رسوب که باعث تغییر چگالی می‌شوند. باید توجه داشت که ρ_r نباید نزدیک قسمت مقدار ماکزیمم چگالی در منحنی دما-چگالی باشد زیرا رابطه در این ناحیه غیر خطی است.

۶.۱ دما و متغیرهای ترمودینامیکی

محتوی گرما در حجم ΔV سیال برابر است با

$$Q_H = \rho c_p T \Delta V \quad (۱.۶.۱)$$

که در آن c_p گرمای ویژه در فشار ثابت است و T دمای مطلق است. گرما در واحدهای SI برحسب ژول (J)، در سیستم USC برحسب ft-lb و در سیستم ناسازگار US برحسب واحدهای انگلیسی گرما (Btu) اندازه‌گیری می‌شود.

دمای مطلق در سیستم SI (و cgs) دارای ابعاد کلونین (K) است و بعد دما در سیستم انگلیسی درجه رانکین ($^{\circ}R$) است. از مقیاسهای دمای نسبی، یعنی، درجه سانتی‌گراد ($^{\circ}C$) و درجه فارنهایت ($^{\circ}F$) بیشتر استفاده می‌شود. این دو سیستم به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$^{\circ}R = (^{\circ}F) + 460 \quad (۲.۶.۱)$$

$$K = (^{\circ}C) + 273 \quad (۳.۶.۱)$$

دماهای سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$^{\circ}F = \frac{9}{5} (^{\circ}C) + 32 \quad (۴.۶.۱)$$

$$^{\circ}C = \frac{5}{9} (^{\circ}F - 32) \quad (۵.۶.۱)$$

گرمای ویژه در فشار ثابت، c_p ، و همراه آن گرمای ویژه در حجم ثابت، c_v ، خواصی است که انرژی داخلی حجم، به خصوص در گازهای کامل، را توصیف می‌کنند. به طور مقدماتی آنها به عنوان ظرفیتهای گرمایی در نظر گرفته می‌شوند؛ به این ترتیب که c_p مقدار گرمایی را نشان می‌دهد که باید به جرم واحد سیال داده شود تا دمای آن را یک واحد افزایش دهد. در شرایط استاندارد، $4187 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ آب را 1 K افزایش می‌دهد در حالی که افزودن 1 Btu گرما دمای $1 \text{ lb} - \text{mass}$ آب را 1 درجه فارنهایت افزایش می‌دهد. آحاد عبارت‌اند از $\text{J/kg} \cdot \text{K}$ ، $\text{ft} - \text{lb/slug} \cdot \text{R}$ یا $\text{Btu/lb}_m \cdot \text{R}$. مقادیر مربوط برای گازهای انتخابی در پیوست ج داده شده‌اند. اگر از آحاد اسلاگ برای جرم استفاده می‌شود، باید دقت داشت که از g_0 استفاده شود. در گاز کامل، c_p و c_v به صورت زیر ارتباط دارند

$$c_p = c_v + R \quad (6.6.1)$$

و نسبت گرمای ویژه، c_p/c_v ، به صورت k تعریف می‌شود که در بیشتر گازها، مقدارش 1.4 است (به پیوست ج نگاه کنید).

دو متغیر دیگر که در ترمودینامیک به کار می‌روند عبارت‌اند از انرژی ذاتی، u^{**} ، و آنتالپی، h . انرژی ذاتی به p ، ρ و T بستگی دارد و عبارت است از انرژی جرم واحد ناشی از نیروها و فاصله‌ها در مقیاس مولکولی. آنتالپی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h = u^{**} + p/\rho \quad (7.6.1)$$

و از همین شکل استفاده شده است زیرا در محاسبات ترمودینامیکی اغلب به همین شکل وارد می‌شود.

۷.۱ فشار و گاز کامل

همان‌طور که در فصل ۲ گفته شده است فشار در یک نقطه از نیروی عمودی مؤثر بر یک صفحه واقع در یک سیال یا مؤثر بر یک سطح مستوی که سیال با آن تماس دارد ناشی می‌شود. فشار در یک نقطه عبارت است از نسبت نیروی قائم به مساحت هنگامی که مساحت به سمت یک مقدار کوچک در برگیرنده آن نقطه نزدیک شود. فشار، p ، دارای آحاد نیرو بر مساحت است، که می‌تواند نیوتن بر متر مربع، به نام پاسکال (Pa)، یا پوند بر فوت مربع (psf)، یا پوند بر اینچ مربع (psi) باشد.

مایعات معمولاً نمی‌توانند تنش کششی (یا جدا شدن) را تحمل کنند زیرا مایع بخار می‌شود. بنابراین، فشارهای مطلق که در این کتاب به کار رفته‌اند هیچ‌وقت منفی نیستند، زیرا این می‌رساند که سیال تنش کششی را تحمل می‌کند. مایعات اغلب می‌توانند نیروی فشاری زیادی را، همراه با تغییر اندک چگالی یا بدون تغییر چگالی، تحمل کنند. ولی، هیچ رابطه‌ی کلی بین فشار و چگالی در یک مایع وجود ندارد.

گاز در برابر تغییرات فشار یا نیروی تراکمی واکنش نشان می‌دهد. در گازهای کامل رابطه بین فشار و چگالی را به طور صریح می‌توان بیان کرد. گاز کامل، آن گونه که در اینجا به کار می‌بریم، ماده‌ای است که از قانون گاز کامل تبعیت می‌کند

$$pv_s = RT \quad (۱.۷.۱)$$

و گرماهای ویژه ثابت داشته باشد. p فشار مطلق، v_s حجم مخصوص، R ثابت گاز، و T دمای مطلق است. گاز کامل را باید از سیال ایدئال دقیقاً تمیز داد. سیال ایدئال بی‌اصطکاک و تراکم‌ناپذیر است. گاز کامل چسبندگی دارد و بنابراین تنشهای برشی ایجاد می‌کند و مطابق معادله (۱.۷.۱) تراکم‌پذیر است.

معادله ۱.۷.۱ حالت گاز کامل است. آن را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$p = \rho RT \quad (۲.۷.۱)$$

وقتی واحدهای دیگر معلوم باشند، از معادله فوق می‌توان واحد R را تعیین کرد. اگر p برحسب پاسکال، ρ برحسب کیلوگرم بر متر مکعب، و T برحسب درجه کلوین (K) باشد، داریم

$$R = \frac{N}{m^3} \frac{m^2}{kg \cdot K} = \frac{m \cdot K}{kg \cdot K} \quad \text{یا} \quad m \cdot N / kg \cdot K$$

$$^{\circ}R = ^{\circ}F + ۴۵۹.۶, \text{ USC}$$

$$R = \frac{lb}{ft^3} \frac{ft^2}{slug \cdot ^{\circ}R} = \frac{ft \cdot lb}{slug \cdot ^{\circ}R} \quad \text{یا} \quad ft / slug \cdot ^{\circ}R$$

با ρ برحسب پوند بر فوت مکعب

$$R = \frac{lb}{ft^3} \frac{ft^2}{lb_m \cdot ^{\circ}R} = \frac{ft \cdot lb}{lb_m \cdot ^{\circ}R} \quad \text{یا} \quad ft \cdot lb / lb_m \cdot ^{\circ}R$$

مقدار R برحسب اسلاگ $۳۲٫۱۷۴$ برابر پوند جرم است. مقادیر R برای چند گاز معمولی در جدول ج. ۳ پیوست ج داده شده‌اند.

گازهای حقیقی در پایین فشار بحرانی و در بالای دمای بحرانی گرایش به تبعیت از گاز کامل پیدا می‌کنند. وقتی فشار افزایش یابد، تمایز بیشتر می‌شود و در نزدیکی نقطه بحرانی شدت می‌گیرد. قانون گاز کامل هم شامل قانون شارل می‌شود و هم شامل قانون بویل. قانون شارل می‌گوید که در فشار ثابت، حجم جرم معینی از گاز با دمای مطلق آن تغییر می‌کند. قانون بویل (قانون تکدما) می‌گوید که در دمای ثابت، چگالی مستقیماً با فشار مطلق تغییر می‌کند. حجم \mathcal{V} جرم m واحد از گاز مساوی mv_s است؛ از این رو

$$p\mathcal{V} = mRT \quad (۳.۷.۱)$$

با نوشتن قانون گاز کامل بر مبنای مول، صورتهای ساده‌تری به دست می‌آید. یک کیلوگرم مول از گاز عبارت است از تعداد کیلوگرم جرم گاز که مساوی جرم مولکولی نسبی باشد؛ یعنی یک کیلوگرم مول اکسیژن O_2 مساوی ۳۲kg است. اگر \bar{v}_s را حجم یک مول بگیریم، قانون گاز کامل به صورت زیر در می‌آید:

$$p\bar{v}_s = MRT \quad (۴.۷.۱)$$

که M جرم مولکولی نسبی است. به طور کلی، اگر n تعداد مولهای گاز در حجم \mathcal{V} باشد، داریم

$$p\mathcal{V} = nMRT \quad (۵.۷.۱)$$

زیرا $m = nM$. از قانون آووگادرو، می‌دانیم که حجمهای مساوی از گازها در دما و فشار مطلق یکسان، تعداد مولکولهای یکسان دارند؛ از این رو، جرم آنها با جرم مولکولی نسبی‌شان متناسب است. در معادله (۵.۷.۱) دیده می‌شود که MR باید ثابت باشد، زیرا $p\mathcal{V}/nT$ برای هر گاز کاملی یکسان است. حاصل ضرب MR ، موسوم به ثابت عمومی گازها، بسته به آحاد به‌کاررفته مقداری دارد که عبارت است از

$$MR = ۸۳۱۲\text{m.N/kg.mol.K} \quad (۶.۷.۱)$$

ثابت گاز R را از رابطه زیر می‌توان تعیین کرد:

$$R = \frac{۸۳۱۲}{M}\text{m.N/kg.K} \quad (۷.۷.۱)$$

در آحاد USC،

$$R = \frac{49709}{M} \text{ft} \cdot \text{lb}/\text{slug} \cdot ^\circ\text{R} \quad (۸.۷.۱)$$

در آحاد پوند جرم،

$$R = \frac{1545}{M} \text{ft} \cdot \text{lb}/\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{R} \quad (۹.۷.۱)$$

به طوری که با دانستن جرم مولکولی نسبی، مقدار R معلوم می‌شود. در جدول ج. ۳ در پیوست ج، جرم مولکولی نسبی بعضی از گازهای معمولی آمده است. در فصل ۳، رابطه‌ها و تعریفهای اضافی که برای شارش گاز کامل به کار می‌روند آورده شده‌اند.

مثال ۳.۱ گازی با جرم مولکولی نسبی ۴۴ در فشار ۹MPa و دمای 20°C قرار دارد. چگالی آن را تعیین کنید.

حل

از معادله (۷.۷.۱)

$$R = \frac{8312}{44} = 188.91 \text{m} \cdot \text{N}/\text{kg} \cdot \text{K}$$

پس، از معادله (۲.۷.۱)

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0.9 \times 10^6 \text{N}/\text{m}^2}{(188.91 \text{m} \cdot \text{N}/\text{kg} \cdot \text{K})(273 + 20 \text{K})} = 16.26 \text{kg}/\text{m}^3$$

تمرینها

۱.۷.۱ گاز کامل الف) چسبندگی صفر دارد؛ ب) چسبندگی ثابت دارد؛ ج) تراکم ناپذیر است؛ د) در $p\rho = RT$ صدق می‌کند؛ ه) هیچکدام.

۲.۷.۱ جرم مولکولی نسبی یک گاز ۲۸ است. مقدار R برحسب مترنیوتن بر کیلوگرم کلوین عبارت است از الف) ۲۹۷؛ ب) ۲۹۷؛ ج) ۲۹۱۱؛ د) ۸۳۱۲؛ ه) هیچکدام.

۳.۷.۱ چگالی هوا در 10°C و ۱MPa مطلق در SI عبارت است از الف) ۱.۲۳۱؛ ب) ۱۲.۳۱؛ ج) ۶۵۰؛ د) ۱۱۸.۴؛ ه) هیچکدام.

۴.۷.۱ چند کیلوگرم جرم گاز مونوکسید کربن در 20°C و 200 kPa مطلق در حجم 100 L جای می‌گیرد؟ (الف) 0.23 kg ؛ (ب) 0.23 kg ؛ (ج) 3.367 kg ؛ (د) 33.67 kg ؛ (ه) هیچکدام.

۵.۷.۱ ظرفی 1 kg هوا را در 30°C و 9 MPa مطلق نگه می‌دارد. اگر 15 kg هوا به آن اضافه شود و دمای نهایی 110°C باشد، فشار مطلق نهایی عبارت است از الف) 26 MPa ؛ ب) 253 MPa ؛ ج) 734 MPa ؛ د) نامعین؛ ه) هیچکدام.

۸.۱ مدول کشسانی حجمی

در قسمت قبل، تراکم‌پذیری گاز کامل را با قانون گاز کامل تشریح کردیم. در اکثر موارد، مایعات را می‌توان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت، اما در حالتی که با فشار ناگهانی یا تغییرات زیاد فشار سروکار داریم تراکم‌پذیری مایعات اهمیت می‌یابد. نیز وقتی تغییرات دما در کار باشد، مثلاً در همرفت آزاد، تراکم‌پذیری مایع (وگاز) اهمیت می‌یابد. تراکم‌پذیری مایع را با مدول کشسانی حجمی آن بیان می‌کنند. اگر فشار حجم واحدی از مایع به اندازه dp افزایش یابد، حجم به اندازه $-dV$ کاهش می‌یابد؛ نسبت $-dp/dV$ عبارت است از مدول کشسانی حجمی K . برای هر حجم V مایع داریم

$$K = -\frac{dp}{dV/V} \quad (1.8.1)$$

از آنجا که dV/V بی‌بعد است، K بر حسب واحد p بیان می‌شود. برای آب در 20°C (جدول ج. ۱، پیوست ج) $K = 2.2\text{ GPa}$ یا از جدول ج. ۲ برای آب 60°F ، $K = 311000\text{ lb/in}^2$. برای تصور تراکم‌پذیری آب، اعمال 1 MPa (حدود یک اتمسفر) فشار را بر یک متر مکعب آب در نظر می‌گیریم

$$-dV/V = \frac{V dp}{K} = \frac{(10^{-3}\text{ m}^3)(1\text{ MPa})}{2.2\text{ GPa}} = \frac{1}{22000}\text{ m}^3$$

که حدود 45 cm^3 است. وقتی مایع متراکم شود، مقاومت آن در برابر تراکم بیشتر، افزایش می‌یابد. در 3000 اتمسفر، مقدار K برای آب دو برابر می‌شود.

مثال ۴.۱ مایع متراکم‌شده‌ای درون یک استوانه دارای حجم 1 L (1000 cm^3) در 1 MN/m^2 و دارای حجم 995 cm^3 در 2 MN/m^2 است. مدول کشسانی حجمی آن چقدر است؟

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = -\frac{(2-1)\text{ MN/m}^2}{(995-1000)/1000} = 200\text{ MPa}$$

برای بیشتر مهندسان عمران و محیط زیست، آب اساساً تراکم‌ناپذیر است؛ ولی، انجمنهای اقیانوس‌شناسی و دریاچه‌شناسی اغلب در اعماقی از آب کار می‌کنند که در آنجا تغییرات حجم ناشی از تراکم کوچک ولی مهم است. دو نتیجهٔ عملی عبارت‌اند از: تغییر چگالی با دما و نمک که باید تعدیل شوند تا فشار موضعی را شامل شوند، و تغییرات حجم باعث می‌شود که خواندن غلظت‌های اندازه‌گیری‌شده در آب عمیق نسبت به داده‌های اندازه‌گیری‌شده در روی آب غیرمعمول باشد. تصحیح تابع چگالی برای تراکم خارج از حوزهٔ این متن است و در هر کتاب درسی اقیانوس‌شناسی جدید می‌توان آن را یافت. مثالی از اندازه‌گیری غیر رایج غلظت در زیر آورده شده است.

مثال ۵.۱ با توجه به مثال ۴.۱، فرض کنید استوانه یک بطری آب باشد که برای جمع‌آوری نمونه‌های آب در یک عمق معین به کار می‌رود. در عمقهای زیاد، بطری بر اثر تراکم حجم کوچکتری را برای جمع‌آوری (۹۹۵cm^۳) دارد. فرض کنید تحلیل نشان می‌دهد که ۱۵mg رسوب جمع‌آوری شده است. اختلاف بین غلظت اندازه‌گیری‌شده در سطح آب، که فشار در آنجا اتمسفر است، و غلظت در محل جمع‌آوری نمونه چقدر است؟

حل

در سطح:

$$C_{\text{در سطح}} = \frac{15\text{mg}}{1\text{L}} = 15(10^{-2})\text{kg/m}^3$$

در محل جمع‌آوری:

$$C_{\text{در محل}} = \frac{15\text{mg}}{0.995\text{L}} = 15.07(10^{-2})\text{kg/m}^3$$

به عبارت دیگر، غلظت در محل جمع‌آوری بر اثر تراکم حجم از غلظت در سطح بیشتر است، اگرچه این اختلاف کوچک است. این موضوع وقتی مهمتر می‌شود که غلظت‌های بسیار کوچک شیمیایی، مثلاً برای اهداف تنظیمی، اندازه‌گیری شوند.

تمرینها

۱.۸.۱ مدول کشسانی حجمی K یک گاز در دمای ثابت T عبارت است از الف) p/ρ ؛ ب) RT ؛ ج) ρp ؛ د) ρRT ؛ ه) هیچکدام.

۲.۸.۱ مدول کشسانی حجمی الف) مستقل از دماست؛ ب) با فشار افزایش می‌یابد؛ ج) بعد $1/p$ دارد؛ د) وقتی سیال تراکم‌پذیرتر باشد بزرگتر است؛ ه) مستقل از فشار و چسبندگی است.

۳.۸.۱ با 7°atm افزایش فشار، چگالی آب چقدر (برحسب درصد) افزایش می‌یابد؟ الف) $\frac{1}{3}$ ؛
 ب) $\frac{1}{4}$ ؛ ج) $\frac{1}{5}$ ؛ د) $\frac{1}{6}$ ؛ ه) هیچکدام.
 ۴.۸.۱ اعمال 1MPa فشار بر 30°C مایع، باعث 6% کاهش حجم می‌شود. مدول کشسانی
 حجمی برحسب GPa عبارت است از الف) 5×10^{-5} ؛ ب) 5×10^{-6} ؛ ج) 5×10^{-7} ؛ د) 5×10^{-8} ؛ ه) هیچکدام.

۹.۱ فشار بخار

مایعات بر اثر فرار مولکولها از سطح مایع تبخیر می‌شوند. مولکولهای بخار یک فشار جزئی در فضا
 اعمال می‌کنند که به فشار بخار معروف است. اگر فضای بالای مایع محدود باشد، بعد از مدت
 زمان کافی، تعداد مولکولهای بخاری که به سطح مایع برخورد می‌کنند و تقطیر می‌شوند درست
 مساوی تعداد مولکولهایی می‌شود که در بازه زمانی فرار می‌کنند، و تعادل برقرار می‌شود. از آنجا که
 این پدیده به فعالیت مولکولی که تابعی از دماست بستگی دارد، فشار بخار سیال به دما بستگی
 دارد و با آن افزایش می‌یابد. وقتی فشار بالای مایع مساوی فشار بخار مایع باشد جوشش رخ
 می‌دهد. مثلاً اگر فشار به قدر کافی کاهش یابد، آب در دمای اتاق می‌جوشد. در 20°C فشار
 بخار آب 2.33kPa ، و فشار بخار جیوه 173Pa است.

در بسیاری از مواقع، در شارش مایعات، ممکن است در بعضی از نقاط سیستم فشارهای
 خیلی پایین به وجود آید. تحت چنین شرایطی، فشارها شاید مساوی یا کمتر از فشار بخار باشند.
 در این حالت، مایع ناگهان به بخار تبدیل می‌شود. این پدیده را حفره زایش می‌نامند. حباب بخار یا
 حفره‌ای تشکیل می‌شود که به سرعت انبساط می‌یابد و معمولاً از نقطه مبدأ خود رفته می‌شود
 و به قسمتهایی از شارش می‌رود که فشارشان بیشتر از فشار بخار است. حفره متلاشی می‌شود.
 این رشد و متلاشی حبابهای بخار بر کار پمپها و توربینهای هیدرولیکی تأثیر می‌گذارد و ممکن است
 به ساییدگی قطعات فلزی در قسمت حفره زایش بینجامد.

تمرین

۱.۹.۱ فشار بخار آب در 30°C برحسب پاسکال عبارت است از الف) 44°C ؛ ب) 18°C ؛
 ج) 223 ؛ د) 4315 ؛ ه) هیچکدام.

۱۰.۱ کشش سطحی

در سطح مشترک مایع و گاز، یا در سطح مشترک دو مایع آمیزش ناپذیر، به علت جاذبه مولکولهای
 مایع در زیر سطح، غشا یا لایه خاصی بر مایع تشکیل می‌شود. با آزمایش ساده‌ای می‌توان سوزن
 کوچکی بر سطح آرام آب قرار داد و دید که سوزن را غشا نگه می‌دارد.

جدول ۳.۱. خاصه‌های تقریبی مایعات معمولی در 20°C و فشار اتمسفر یک استاندارد.

مایع	چگالی نسبی، S	مدول کشسانی حجمی، K GPa	فشار بخار، p_v kPa	کشش سطحی*، σ N/m
الکل، اتیل	۰٫۷۹	۱٫۲۱	۵٫۸۶	۰٫۰۲۲۳
بنزین	۰٫۸۸	۱٫۰۳	۱٫۰	۰٫۰۲۸۹
کربن تتراکلرید	۱٫۵۹	۱٫۱۰	۱۳٫۱	۰٫۰۲۶۷
نفت چراغ	۰٫۸۱	۰٫۰۲۳-۰٫۰۳۲
جیوه	۱۳٫۵۷	۲۶٫۲۰	۰٫۰۰۰۱۷	۰٫۵۱
روغن:				
خام	۰٫۸۵-۰٫۹۳	۰٫۰۲۳-۰٫۰۳۸
روانکار	۰٫۸۵-۰٫۸۸	۰٫۰۲۳-۰٫۰۳۸
آب	۱٫۰۰	۲٫۲	۲٫۴۵	۰٫۰۷۴

* در تماس با هوا

تشکیل این غشا، از انرژی سطحی، یا کار مورد نیاز بر سطح واحد برای آوردن مولکولها به سطح، ناشی می‌شود. بنابراین، کشش سطحی عبارت است از نیروی کشاننده لازم برای تشکیل غشا، که از تقسیم عبارت انرژی سطحی بر طول واحد غشای در حال تعادل به دست می‌آید. کشش سطحی آب از حدود 0.074 N/m در 20°C تا 0.059 N/m در 100°C تغییر می‌کند. در جدول ۳.۱ کشش سطحی و خاصه‌های دیگری از چند مایع معمولی آمده است.

فعالیت کشش سطحی، فشار را در قطره‌های مایع یا در جت کوچکی از مایع افزایش می‌دهد. در قطره‌کروی کوچک به شعاع r ، فشار داخلی لازم p برای تعادل با نیروی کشش ناشی از کشش سطحی σ را برحسب نیروهای محاسبه می‌کنند که بر جسم آزاد نیم‌کروی اثر می‌کنند (نگاه کنید به قسمت ۶.۲)

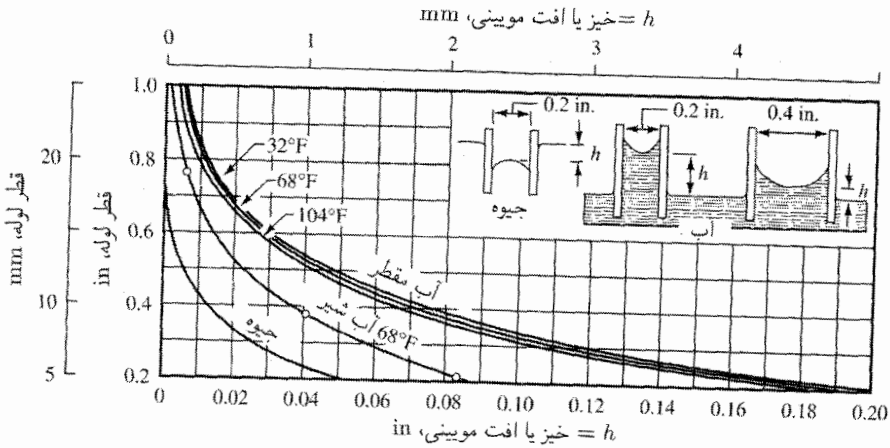
$$p = \frac{2\sigma}{r} \quad \text{یا} \quad p\pi r^2 = 2\pi r\sigma$$

برای جت استوانه‌ای مایع به شعاع r ، معادله کشش لوله‌ای به کار می‌رود [معادله ۵.۶.۲]:

$$p = \frac{\sigma}{r}$$

هر دو معادله نشان می‌دهند که در شعاعهای بسیار کوچک قطره یا استوانه، فشار افزایش می‌یابد.

بر اثر کشش سطحی، به دلیل مقدار نسبی دوشش (چسبندگی) بین مایع و جامد به همدوش



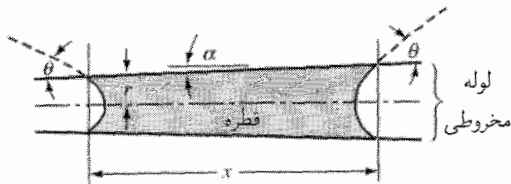
شکل ۶.۱ مویستگی در لوله‌های مدور شیشه‌ای.

مایع، جاذبه مویینی ایجاد می‌شود. دوشس مایعی که جامد را تر کند بزرگتر از همدوشس آن است. کشش سطحی در این حالت باعث می‌شود که مایع در لوله قائم کم‌قطری که اندکی در مایع غوطه‌ور باشد بالا آید. در مایعاتی که جامد را تر نمی‌کنند، کشش سطحی معمولاً سطح هلالی مایع را در لوله قائم به صورت فرورفته در می‌آورد. وقتی زاویه تماس بین مایع و جامد معلوم باشد، خیز مویینی را برای شکل هلالی مفروض می‌توان محاسبه کرد. شکل ۶.۱ خیز مویینی آب و جیوه را در لوله‌های مدور شیشه‌ای در هوا نشان می‌دهد.

مثال ۶.۱ لوله مخروطی در شکل ۷.۱ دارای محور طولی است و شامل یک قطره مایع کشیده شده است. نیرویی را پیدا کنید که گرایش دارد قطره را به سمت راست حرکت دهد زاویه‌های α بین 0° و 12° ؛ $r = 3\text{ mm}$ ، $x = 15\text{ mm}$ ، $\theta = 25^\circ$ ، و $\sigma = 0.05\text{ N/m}$.

حل

برای وجه چپ قطره در لوله مخروطی با شعاع r ، نیرو برابر است با $2\pi r\sigma$. مؤلفه نیرو در امتداد



شکل ۷.۱ قطره در لوله مخروطی.

محور طولی x برابر است با $2\pi r \sigma \cos(\theta - \alpha)$. موازنه نیرو در جهت x می‌دهد

$$F = 2\pi\sigma[(r + x \tan \alpha) \cos(\theta + \alpha) - r \cos(\theta - \alpha)]$$

برای به دست آوردن نتایج زیر می‌توان از یک حسابگر یا صفحه گسترده استفاده کرد

۱۲	۹	۶	۳	۰	α , درجه
۶۳۴	۴۹۴	۳۴۱	۱۷۶	۰	$N.F.(10^6)$

مسائل

۱.۱ اگر هوا در دما و فشار استاندارد و در هر میلی‌متر مکعب 10^{18} مولکول داشته باشد، مسیر آزاد میانگین، Δs ، را با استفاده از اطلاعات داده شده در قسمت ۱.۱ تخمین بزنید. نوع جریانی که در این کتاب مطالعه می‌شود، به نام دینامیک گازها، برای اجسام با چه طول مشخصه l صحت دارد؟ فرض کنید نسبت مناسب بزرگتر از 10^6 است.

۲.۱ ماده‌ای که آهنگهای تغییر شکل و تششهای برشی متناظر آن به صورت زیر است رده‌بندی کنید

du/dy , rad/s	۰	۱	۳	۵
τ , kPa	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰

۳.۱ مواد زیر را رده‌بندی کنید (در دمای ثابت)

(الف)

du/dy , rad/s	۰	۳	۴	۶	۵	۴
τ , lb/ft ^۲	۲	۴	۶	۸	۶	۴

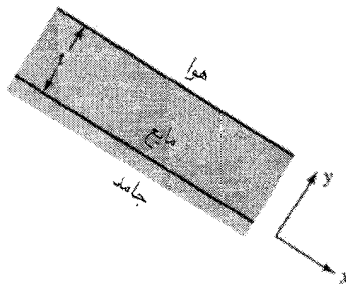
(ب)

du/dy , rad/s	۰	۰.۵	۱.۱	۱.۸
τ , N/m ^۲	۰	۲	۴	۶

(ج)

$du/dy, \text{rad/s}$	۰	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۹	۱٫۲
$\tau, \text{lb/ft}^2$	۰	۲	۴	۶	۸

۴.۱ مایعی نیوتنی در ورقه نازکی به ضخامت t بر سطح شیبدار به طرف پایین جریان دارد (شکل ۸.۱). سطح بالایی با هوا در تماس است که تقریباً مقاومتی در برابر شارش ندارد. با استفاده از قانون چسبندگی نیوتن، مقدار du/dy را در سطح بالایی محاسبه کنید، در صورتی که y عمود بر سطح شیبدار اندازه‌گیری شود. آیا انتظار تغییر خطی u با y می‌رود؟



شکل ۸.۱ مسئله ۴.۱.

۵.۱ رنگ و گریس چه نوع سیالی‌اند؟

۶.۱ در محلی با $g = 31.7 \text{ ft/s}^2$ ، وزن جرم ۳ اسلاگ را برحسب پوند به دست آورید.

۷.۱ وقتی از استاندارد و ترازو استفاده می‌شود، در محلی با $g = 31.5 \text{ ft/s}^2$ ، معلوم می‌شود که نیروی گرانی جسمی معادل دو وزن مقیاس ۱lb است. نیروی گرانی را بر یک نیروسنج فزری که درجه‌بندی صحیحی دارد (در سطح دریا)، در این محل محاسبه کنید.

۸.۱ جرمی از بنزین برابر با 45 kg در یک مخزن ذخیره شده است. وزن آن برحسب نیوتن و پوند در سطح زمین چقدر است؟ جرم و وزن آن در سطح ماه با شتاب ثقل تقریباً یک‌ششم شتاب ثقل در سطح زمین، چقدر است؟

۹.۱ در سیاره‌ای با شتاب ثقل 3 m/s^2 ، مقدار ثابت تناسب g برحسب کیلوگرم نیرو، گرم، میلی‌متر و ثانیه چقدر است؟

۱۰.۱ یک ترازوی فزری که درجه‌بندی صحیح دارد و در محلی دور از زمین وزن جسم 2 kg را 17°N نشان می‌دهد. مقدار g در این مکان چیست؟

۱۱.۱ وزن یک بسته 20 N آرد در سطح دریا جرم آرد را نشان می‌دهد یا نیرو را؟ جرم آرد برحسب کیلوگرم چقدر است؟ جرم و وزن آرد در مکانی که شتاب در آنها یک‌هفتم شتاب ثقل استاندارد زمین است. چقدر است؟

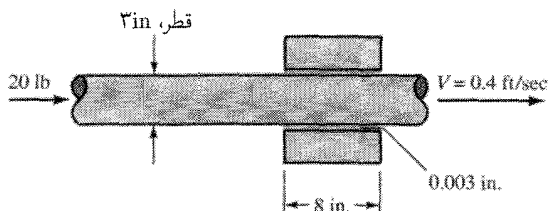
۱۲.۱ در لقی بین یک محور و یک غلاف هم‌مرکز، یک سیال نیوتنی قرار دارد. وقتی نیروی 600 N به موازات محور به غلاف وارد شود، غلاف به اندازه 1 m/s سرعت می‌گیرد. اگر نیروی 1500 N اعمال شود، غلاف چه سرعتی می‌گیرد؟ دمای غلاف ثابت می‌ماند.

۱۳.۱ 10^4 واحدهای SI چسبندگی سینماتیکی را به واحدهای USC چسبندگی دینامیکی تبدیل کنید؛ $S = 0.85$.

۱۴.۱ تنش برشی 4 N/m^2 تغییر شکل زاویه‌ای 10° rad/s را به یک سیال نیوتنی می‌دهد. چسبندگی آن چقدر است؟

۱۵.۱ صفحه‌ای به فاصله 5 mm از یک صفحه ثابت، با سرعت 25 m/s حرکت می‌کند و برای حفظ این سرعت به $2\text{ Na (N/m}^2)$ نیرو بر سطح واحد نیاز دارد. چسبندگی ماده بین دو صفحه را برحسب واحدهای SI بیابید.

۱۶.۱ چسبندگی سیال بین محور و غلاف را در شکل ۹.۱ بیابید.



شکل ۹.۱ مسئله ۱۶.۱.

۱۷.۱ شعاع ژیراسیون چرخ لنگری به وزن 600 N برابر با 300 mm است. وقتی چرخ با سرعت 600 rpm بچرخد، سرعت آن بر اثر چسبندگی سیال بین غلاف و محور 1 rpm/min کاهش می‌یابد. طول غلاف 50 mm ، قطر محور 20 mm ، و لقی شعاعی 0.5 mm است. چسبندگی سیال را تعیین کنید.

۱۸.۱ یک استوانه فولادی به قطر 25 mm و طول 300 mm بر اثر وزن خود با آهنک یکنواخت 1 m/s در درون لوله‌ای با قطر کمی بزرگتری سقوط می‌کند. بین استوانه و لوله یک غشای روغن کرچک با ضخامت ثابت قرار دارد. لقی بین لوله و استوانه را تعیین کنید. دما 38° C است. چگالی نسبی فولاد 7.85 است.

۱۹.۱ پیستونی به قطر 60 mm درون یک استوانه به قطر 60.1 mm حرکت می‌کند. اگر

روانکار از 0° به 120°C گرم شود، درصد کاهش نیروی لازم برای حرکت پیستون را تعیین کنید. از چسبندگی نفت خام در شکل ج. ۱، پیوست ج، استفاده کنید.

۲۰.۱ مکعبی به جرم 12kg بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه 30° می‌سازد به طرف پایین می‌لغزد. فیلم سیال به ضخامت 1mm ر° جسم و سطح را از هم جدا می‌کند. چسبندگی سیال $4\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ ر° است. با فرض اینکه توزیع سرعت در فیلم خطی است، سرعت حد قطعه را بیابید. مساحت تماس مکعب با فیلم 25m^2 ر° است.

۲۱.۱ چسبندگی آب در 0°C چقدر بیشتر از چسبندگی آن در 100°C است؟ چسبندگی سینماتیکی آن در همین گستره دما چقدر بیشتر است؟

۲۲.۱ سیالی با چسبندگی 6cP و چگالی $50\text{lb}_m/\text{ft}^3$ است. چسبندگی سینماتیکی آن در آحاد USC و SI چقدر است؟

۲۳.۱ گرانش ویژه سیالی 83r° و چسبندگی سینماتیکی آن $4(10)^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ است. چسبندگی آن در دستگاه واحدهای USC و SI چقدر است؟

۲۴.۱ بر سطح شیب‌دار 2ft^2 روانکاری شده‌ای که با افق زاویه 30° می‌سازد، جسمی که سطح آن صاف است با وزن 120lb می‌لغزد. برای چسبندگی $2\text{lb}\cdot\text{s}/\text{ft}^2$ ر° و سرعت جسم $3\text{ft}/\text{s}$ ، ضخامت غشای روانکار را تعیین کنید.

۲۵.۱ چسبندگی بنزین 25°C برحسب پواز چقدر است؟ از شکل ج. ۱، پیوست ج استفاده کنید.

۲۶.۱ مایعی وزن مخصوص $48\text{lb}/\text{ft}^3$ و چسبندگی دینامیکی $5\text{lb}\cdot\text{s}/\text{ft}^2$ ر° دارد. چسبندگی سینماتیکی آن چقدر است؟

۲۷.۱ ماده‌ای دارای گرانش ویژه 75r° است. حجم مخصوص آن برحسب فوت مکعب بر پوند جرم و فوت مکعب بر اسلاگ چقدر است؟

۲۸.۱ رابطه بین حجم مخصوص و وزن مخصوص چیست؟

۲۹.۱ چگالی ماده‌ای $294\text{g}/\text{cm}^3$ است. در آحاد SI، مطلوب است الف) گرانش ویژه؛ ب) حجم مخصوص؛ ج) وزن مخصوص آن.

۳۰.۱ مقدار ثابت گاز، R ، را در آحاد SI محاسبه کنید در صورتی که $R = 1545/\text{Mft}\cdot\text{lb}/\text{lb}_m\cdot^\circ\text{R}$.

۳۱.۱ برای افزایش دمای یک لیتر آب 1°C چقدر انرژی گرمایی لازم است؟

۳۲.۱ یک کیسه هوایی با 15kg ر° گاز در 50ms باد می‌شود. اگر تغییر دما در حدود 200°C باشد، توان متوسط برای انجام این کار چقدر است؟

۳۳.۱ بر سطح مربعی به ضلع 2cm در صفحه xy نیرویی اثر می‌کند که با رابطه $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

بیان می‌شود. این نیرو را به مؤلفه‌های نیروی قائم و نیروی برشی تجزیه کنید. فشار و تنش برشی چقدر است؟ محاسبات را برای $\mathbf{F} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ تکرار کنید.

۳۴.۱ از "بطری نیسکین" برای نمونه برداری آب در مکان ۳۰m بالای کف آب به عمق ۱۰۰m در خلیج مکزیک استفاده می‌شود. وقتی نمونه گرفته می‌شود، شیشه بلافاصله به سطح و به عرشه کشتی آورده می‌شود. دمای نمونه 11.6°C است. با استفاده از مقدار نوعی شوری ۳۳ppt برای آب خلیج مکزیک، چگالی آب در نقطه نمونه برداری چقدر است؟

۳۵.۱ در مسئله قبل، معلوم می‌شود که ۱۴۲g رسوب در نمونه وجود دارد. توزیع اندازه رسوب معلق با استفاده از یک تحلیلگر لیزری مبتنی بر اندازه ذره (به فصل ۹ مراجعه کنید) تعیین می‌شود و نتایج زیر به دست می‌آید

عنصر i	قطر (μm)	کسر جرمی*
۱	< ۱۰	۰.۱۶۵۰
۲	۱۸	۰.۲۱۰۰
۳	۲۵	۰.۲۶۵۰
۴	۳۰	۰.۱۵۰۰
۵	۴۰	۰.۰۸۵۰
۶	۵۰	۰.۰۴۶۵
۷	۶۰	۰.۰۲۵۰
۸	۷۰	۰.۰۲۲۰
۹	۸۰	۰.۰۱۹۵
۱۰	۹۰	۰.۰۱۲۰

$$*\sum = 1.0000$$

با تعیین جرم، حجم، و غلظت در هر عنصر نمونه (شامل عنصر آب دریا) جدول را تکمیل کنید، و چگالی مخلوط را بیابید. فرض کنید رسوب از جنس کوارتز است.

۳۶.۱ مخزن شامل دو مؤلفه مخلوط آب و رسوب است. چگالی آب ρ_w و چگالی ذرات رسوب ρ_s است. با فرض مخلوط کامل بودن، چگالی مخلوط، ρ_m ، را بیابید به شرط آنکه کسر جرمی رسوب w_s باشد.

۳۷.۱ مخزن شامل مخلوطی از آب و عناصر مختلف است. چگالی آب ρ_w و چگالی هر عنصر ρ_i است ($i = 1, 2, \dots, n$). به فرض اینکه آمیختگی کامل است، چگالی مخلوط، ρ_m (آب)

و عناصر)، را بیابید در صورتی که کسر جرمی هر عنصر w_i باشد. این تعمیم مسئله ۳۶.۱ است.
 ۳۸.۱ چگالی آب تازه به دما بستگی دارد (معادله ۱.۵.۱). نشان دهید که حداکثر چگالی آب تازه در $T = 4^\circ\text{C}$ روی می‌دهد و مقدار آن را بیابید.
 ۳۹.۱ در مخلوط n عنصر نشان دهید که

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = \rho_m$$

که در آن ρ_m چگالی مخلوط است و w_i و C_i ، به ترتیب، کسر جرمی و غلظت عنصر i است.
 ۴۰.۱ در مخلوط دوتایی عناصر A و B با $w_A/w_B = \lambda$ را طوری تعیین کنید که چگالی مخلوط (ρ_m) حداکثر شود. این مقدار حداکثر چقدر است؟
 ۴۱.۱ با تحلیل یک نمونه فاضلاب در آزمایشگاه، داده‌های زیر به دست آمدند

نمونه	حجم (mL)	جرم ذرات جامد معلق (g)
۱	۸۵	۸۵٫۴۳

اگر گرانس ویژه ذرات جامد معلق ۱٫۵۸ باشد، حجم و غلظت ذرات جامد معلق، و چگالی نمونه فاضلاب را بیابید.
 ۴۲.۱ سه نمونه فاضلاب از یک مکان در یک زمان گرفته شده‌اند، و پس از تحلیل آنها در آزمایشگاه نتایج زیر به دست آمده‌اند

نمونه	حجم (mL)	جرم ذرات جامد معلق (g)
۱	۷۵	۲۳٫۰
۲	۸۳٫۲	۳۵٫۶
۳	۸۰	ظرف شیشه‌ای شکست

سه نمونه چگالی یکسان (ρ) دارند، و نمونه اول شامل ذرات جامد با گرانس ویژه ۱٫۹۳ است. چگالی ρ و غلظت ذرات جامد معلق را در سه نمونه بیابید. کسر جرمی ذرات جامد در نمونه ۳ را متوسط دو نمونه اول بگیرید.

۴۳.۱ در یک کارخانه تولید آب میوه، مخلوط غلیظ آب پرتقال، هلو و کیوی با عبور دادن مخلوط تازه آب میوه از یک تبخیرکننده تولید می‌شود. کسر جرمی ذرات جامد موجود در مخلوط عبارت‌اند

از: درصد $۶۷ =$ اب پرتقال w ، درصد $۴۳۵ =$ هلو w ، و درصد $۷۸۳ =$ کیوی w . آب در تبخیرکننده تخلیه می‌شود و کسر جرمی کل ذرات جامد تا $۴۸۴۵\% = w_T$ افزایش می‌یابد. اگر مخلوط آب میوه تازه با آهنگ ۸۵ kg/hr ($۱۴۳ \text{ m}^3/\text{hr}$) به تبخیرکننده داده شود، مطلوب است:

(الف) غلظت آب میوه تازه پرتقال، هلو، و کیوی.

(ب) غلظت آب میوه غلیظ پرتقال، هلو، و کیوی.

(ج) چگالی آب میوه تازه.

(د) چگالی آب میوه غلیظ.

۴۴.۱ گازی در ۲۰°C و ۲ MPa مطلق حجم ۴۰ L و ثابت گاز $R = ۲۱۰ \text{ m.N/kg.K}$ را دارد. چگالی و جرم گاز را بیابید.

۴۵.۱ وزن مخصوص هوای ۴۰ kPa مطلق و ۳۰°C چقدر است؟

۴۶.۱ چگالی بخار آب ۴ MPa مطلق و ۱۵°C در احاد SI چقدر است؟

۴۷.۱ گازی با وزن مولکولی ۲۸ دارای حجم ۴ ft^3 و فشار دمای، به ترتیب (مطلق) ۲۰۰۰ psfa (lb/ft^2) و ۶۰۰°R است. حجم ویژه و وزن مخصوص آن چقدر است؟

۴۸.۱ یک کیلوگرم هیدروژن در حجم ۱۵ L و با دمای ۴۰°C - است. فشار چقدر است؟

۴۹.۱ تایلر یک اتومبیل به حجم ۲ L است و فشار و دمای هوای داخل آن، به ترتیب، ۱۸ kPa و ۲۱°C است. چگالی و وزن هوا چقدر است؟ پس از دو ساعت رانندگی، دمای تایلر ۳۰° درجه بالا رفته است. فشار تایلر را تخمین بزنید، و تمام مفروضات را بیان کنید.

۵۰.۱ هوا در یک مبدل گرما در فشار ۴۵ kPa گرم می‌شود. اگر جرم هوا ۴۳۵ kg باشد، مقدار گرمای لازم برای گرم کردن هوا از ۴۵°C تا ۲۵۰°C چقدر است؟

۵۱.۱ یک مخلوط گازی شامل ۱۵ g H_2 ، ۲۵ g NH_3 ، و ۲۱ g CO_2 است. کسرهای مولی y_{CO_2} ، y_{H_2} ، و y_{NH_3} ، و وزن مولکولی متوسط مخلوط گاز را محاسبه کنید.

۵۲.۱ حجم مخلوط گازی توصیف شده در مسئله ۵۱.۱، ۲۵°C است. چگالی مخلوط چقدر

است؟ در دمای ۳۲°C فشار مخلوط را بیابید. فشارهای جزئی p_{NH_3} ، p_{CO_2} ، و p_{H_2} چقدر است؟

۵۳.۱ یک مخزن باز محتوی آب ۲۲°C با ۳۲۷ درصد (وزنی) ذرات جامد معلق با گراننش ویژه ۲۳۲ است. اگر حجم مخلوط ۱۲ m^3 باشد، غلظت ذرات جامد بر حسب kg/m^3 و lb_m/ft^3 چقدر است؟

۵۴.۱ مدول کشسانی حجمی را بر حسب تغییر چگالی، به جای تغییر حجم، بیان کنید.

۵۵.۱ فشار یک مایع با مدول کشسانی حجمی ثابت چگونه با فشار تغییر می‌کند؟

۵۶.۱ مدول کشسانی حجمی مایعی که چگالی آن بر اثر افزایش فشار ۱۰۰۰ lb/ft^2 مقدار ۰.۲% درصد افزایش می‌یابد چقدر است؟ مسئله را برای افزایش فشار ۶۰ kPa حل کنید.

۵۷.۱ اگر مدول کشسانی حجمی آب $K = ۲۲ \text{ GPa}$ باشد، چه فشاری برای ۵° در صد تقلیل حجم آن لازم است؟

۵۸.۱ وقتی فشار داخل یک ظرف فولادی ۱۰۰۰۰ psi افزایش یابد حجم آن ۱ درصد منبسط می‌شود. در فشار استاندارد، یعنی در $P = ۱۴.۷ \text{ psi}$ مطلق، این ظرف ۵ slug° آب را با $\rho = ۱.۹۴ \text{ slug/ft}^۳$ نگه می‌دارد. وقتی ظرف پر باشد، در $K = ۳۰۰۰۰۰ \text{ psi}$ چند اسلاگ جرم آب باید اضافه کرد تا فشار به ۱۰۰۰۰ psi برسد؟ وزن آب اضافه شده چقدر است؟

۵۹.۱ برای ماده‌ای که از قانون گاز کامل پیروی می‌کند، نشان دهید که $c_p = dh/dT$ و $c_v = du/dT$ (راهنمایی: از معادله (۷.۶.۱) نسبت به T دیفرانسیل بگیرید و نتیجه را با معادله (۶.۶.۱) مقایسه کنید).

۶۰.۱ در یک گاز کامل نشان دهید که $c_p = kR/(k-1)$ و $c_v = R/(k-1)$.

۶۱.۱ مونتاز پیستون مخزن شامل گاز نیتروژن به جرم ۶.۷۳ kg ، با حجم اولیه $۳ \text{ m}^۳$ و با فشار اولیه ۴۵ kPa است. می‌دانیم که گاز علاوه بر قانون گاز کامل از قانون، ثابت $p^{-۱/۲} = \text{const}$ پیروی می‌کند. وقتی حجم گاز تا $۱۵ \text{ m}^۳$ کاهش می‌یابد، فشار داخل مخزن را بیابید. دماهای اولیه و نهایی متناظر در مخزن چقدر است؟

۶۲.۱ مدول حجمی تکدما برای هوای ۴ MPa مطلق چقدر است؟

۶۳.۱ در ورودی یک پمپ که با آب ۲۰° C کار می‌کند، در چه فشاری می‌توان انتظار حفره زایش داشت؟

۶۴.۱ در یک خط لوله روغن افقی بلند، ایستگاههای پمپاژ به فواصل ۶ km از هم قرار گرفته‌اند. اگر افت فشار در خط لوله ۱۰ kPa/km باشد، فشار هر پمپ برای جلوگیری از تبخیر روغن چقدر باید باشد؟

۶۵.۱ فشار داخل یک قطره آب به قطر ۰.۰۲ in در ۶۸° F چقدر است، در صورتی که فشار خارج قطره فشار اتمسفریک متعارف و ۱۴.۷ psi باشد؟

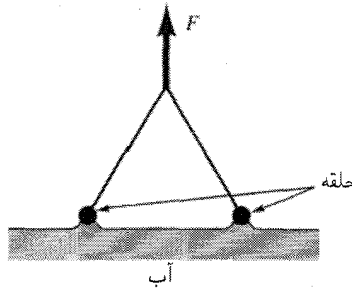
۶۶.۱ جت مدور کوچکی از جیوه به قطر ۱ mm از سوراخی خارج می‌شود. اختلاف فشار بین داخل و خارج جت در ۲۰° C چقدر است؟

۶۷.۱ خیز موئینی آب مقطر در ۱۰۴° F در لوله شیشه‌ای مدوری به قطر $1/8 \text{ in}$ چقدر است؟
۶۸.۱ قطر لازم برای یک لوله شیشه‌ای به هنگامی که آثار موئینگی بر آب درون آن از ۵ mm بیشتر نشود چقدر است؟

۶۹.۱ با استفاده از داده‌های شکل ۶.۱ خیز موئینی آب شهر را در بین دو صفحه شیشه‌ای موازی به فاصله ۲ in از هم تخمین بزنید.

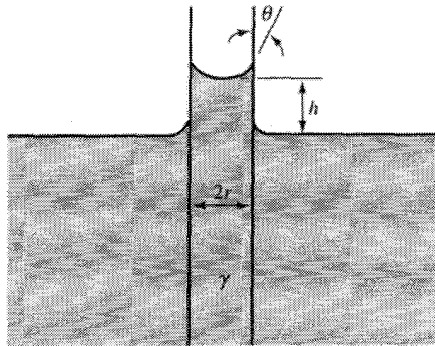
۷۰.۱ یک روش برای تعیین کشش سطحی مایع عبارت است از تعیین نیروی لازم برای کشیدن

یک حلقه سیم پلاتین از سطح (شکل ۱۰.۱). نیروی لازم را برای درآوردن حلقه‌ای به قطر ۲۰ mm از سطح آب در 20°C حساب کنید. چرا از پلاتین به عنوان ماده حلقه استفاده می‌شود؟



شکل ۱۰.۱ مسئله ۷۰.۱.

۷۱.۱ خیز موینتی h در لوله شکل ۱۱.۱ را بر حسب θ ، σ ، γ و r محاسبه کنید.



شکل ۱۱.۱ مسائل ۷۱.۱ و ۷۳.۱.

۷۲.۱ چرا یک حباب صابون رابطه زیر را دارد

$$p = \frac{4\sigma}{r}$$

در حالی که در یک قطره کوچک کروی رابطه زیر برقرار است

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

p فشار داخلی، σ کشش سطحی، و r شعاع است؟

۷۳.۱ برای نگهداری لوله شکل ۱۱.۱ چه نیروی عمودی ناشی از کشش سطحی لازم است؟ ضخامت جداره را خیلی کوچک بگیرید.

۷۴.۱ مطلوب است زاویه‌ای که غشای کشش سطحی تحت آن از یک لوله شیشه‌ای عمودی غوطه‌ور در آب خارج می‌شود در صورتی که قطر 2in و خیز موئینی 9in باشد؛ $\sigma = 0.05\text{lb/ft}$ و زاویه تماس $\theta = 0^\circ$.

۷۵.۱ فرمولی برای خیز موئینی h بین دو لوله شیشه‌ای هم‌مرکز با شعاعهای R و r و زاویه تماس θ به دست آورید.

مراجع

1. S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. II, pp. 676–680, Oxford University Press, London, 1938.
2. A. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, App. C, Academic Press, New York, 1982.

مراجع برای مطالعه بیشتر

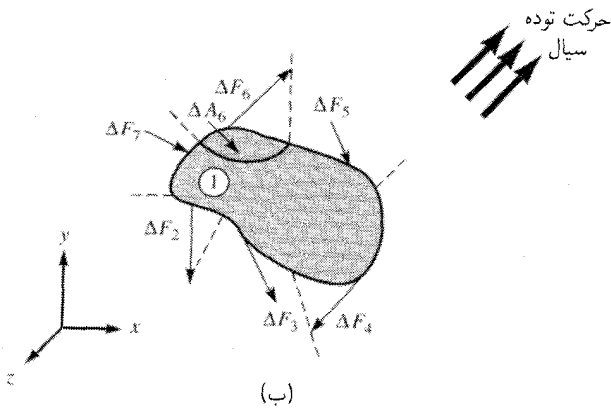
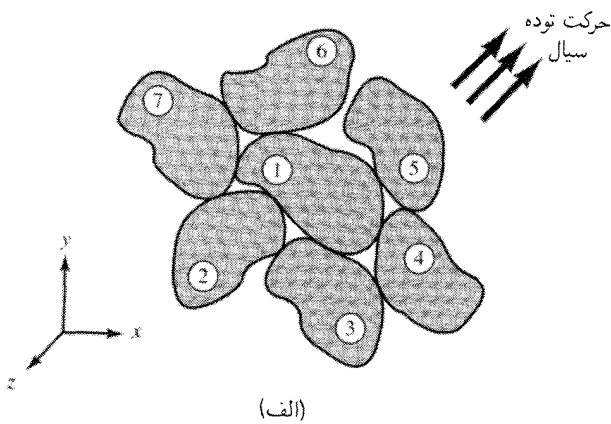
- Cohen, E. and Taylor, B.: "The Fundamental Physical Constants," *Physics Today*, pp. 9–16, August 1994.
- Lide, D.: *Handbook of Chemistry and Physics*, 74th ed., CRC Press Inc., Boca Raton, 1993.
- W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, p. 12, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1990.

استاتیک سیالات

مانند مکانیک جامدات دانش خود درباره مکانیک سیالات را ابتدا با مطالعه استاتیک و به دنبال آن با بررسی موضوع مشکلتز دینامیک شکل می‌دهیم. با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتن، یعنی، $d(mv)/dt = F$ هدف این فصل بررسی حالت $d(mv)/dt = 0$ است. این حالت وقتی برقرار است که سرعت سیال ثابت باشد یا، در حالت خیلی خاص، شتاب در تمام نقاط جریان ثابت باشد. حالت اول حالت استاتیک سیالات است، و حالت دوم حالت خاص شتاب صلب‌گونه است. فرض اصلی برای برقراری این دو حالت این است که هیچ حرکت نسبی بین لایه‌های سیال مجاور وجود ندارد، و در نتیجه تنشهای برشی (به فصل ۱ نگاه کنید) صفر است. بنابراین، فقط نیروهای عمودی با نیروهای فشاری بر سطوح سیال اثر می‌کنند. قبل از بررسی توزیع نیروی ساده فشاری، تعریفها و اصطلاحاتی برای نیروهای سیال شامل بردار نیرو، F ، به‌طور خلاصه آورده می‌شوند.

۱.۲ نیرو، تنش، و فشار در یک نقطه

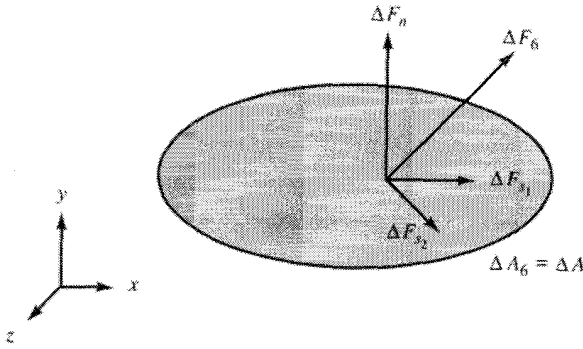
دو رده کلی نیرو بر یک توده سیال اثر می‌کند: نیروهای حجمی و نیروهای سطحی. نیروی حجمی از فاصله بر توده سیال اثر می‌کند. نیروهای الکترومغناطیس و گرانش تنها نیروهای حجمی است که



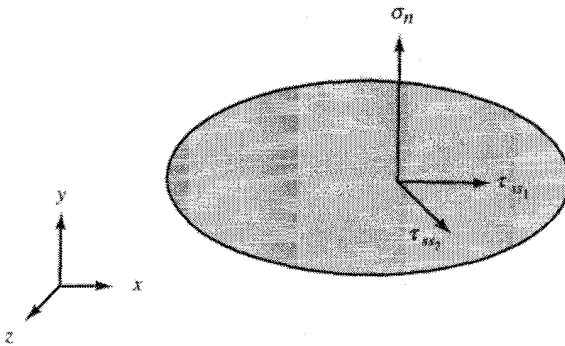
شکل ۱.۲ حرکت توده سیال و توزیع نیروی هم‌ارز.

در سیالات در نظر گرفتن می‌شوند. نیروی گرانش به وزن توده سیال مربوط می‌شود و تنها نیروی حجمی است که در این متن در نظر گرفته می‌شود.

نیروی سطحی از تماس مستقیم بین دو توده سیال ناشی می‌شود. توده‌های سیالی را در نظر بگیرید که مانند شکل ۱.۲ الف قرار گرفته‌اند؛ هر ذره سرعتی دارد که از نظر مقدار و جهت با سرعت ذرات مجاور می‌تواند تا اندازه‌ای متفاوت باشد. برای شروع تحلیل، اثر ذرات پیرامون توده مرزی را باید جایگزین کنیم با یک سیستم برابند نیروهایی که بر مساحت تماس بین ذرات مجاور و ذره مرکزی اثر می‌کند (شکل ۱.۲ ب). مسئله در اینجا این است که ابتدا اصطلاحات توزیع نیرو را



(الف)



(ب)

شکل ۲.۲ تعریف نیرو و تنش برای مساحت تماس توده جزئی.

در دستگاه مختصات کلی تعریف کنیم. در فصلهای بعد به تفصیل دیده می‌شود که این بردار نیرو چگونه با حرکت سیال ارتباط دارد.

یکی از دو سطح تماس، مثلاً بین توده‌های ۱ و ۶، را مانند شکل ۲.۲ الف در نظر بگیرید. عمود واحد بر مساحت سطح در ارتباط با صفحهٔ متشکل از بردارهای واحد s_1 و s_2 که بر نقطه تماس مماس است تعریف می‌شود. بنابراین، یک دستگاه مختصات موضعی را در صفحه محلی می‌توان مشخص کرد، و بردار نیرو، F_6 ، را به سه مؤلفه متعامد ΔF_n ، ΔF_{s_1} ، و ΔF_{s_2} تجزیه کرد. نیروی عمودی است و ΔF_{s_1} و ΔF_{s_2} نیروهای مماسی‌اند.

چون مساحت یک کمیت برداری است، و از آنجا که مساحت‌های سطح می‌چرخند و برحسب زمان تغییر می‌کنند، حفظ جهت بردار واحد خیلی مشکل است. بنابراین، مناسب است که یک

نمایش شدتی به نام تنش را تعریف کنیم. دو رده کلی تنش وجود دارند، تنش عمودی، و تنش برشی. هر دو مقادیر حدی هستند وقتی مساحت تماس افزایشی به صفر نزدیک می‌شود؛ یعنی،

$$\sigma_n = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad (1.1.2)$$

$$\tau_{ss_1} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{s_1}}{\Delta A}$$

$$\tau_{ss_2} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{s_2}}{\Delta A}$$

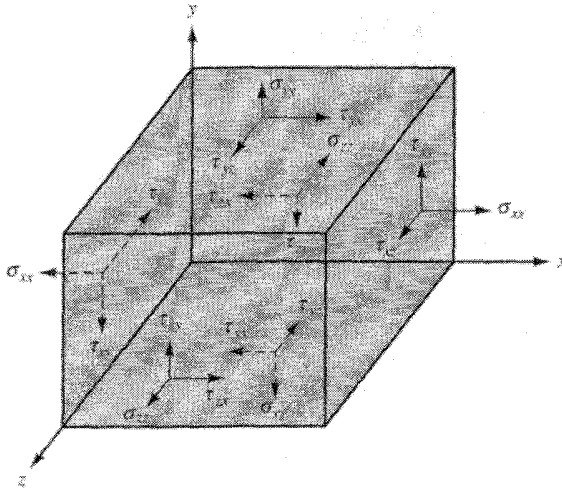
در اینجا مساحت مورد نظر در مثالمان ΔA_6 است. σ_n ، τ_{ss_1} و τ_{ss_2} به ترتیب، عبارت‌اند از تنش عمودی و دو تنش برشی که در مختصات محلی تعریف می‌شوند (شکل ۲.۲.۲.ب). بعد تنش نیرو بر مساحت است.

تعداد بسیاری صفحه (مساحت)، اگرچه نه بی‌شمار، وجود دارند که می‌توانند در یک نقطه پیوستار سیال به وجود آیند، و همانطور که قبلاً گفته شد بهتر است تحلیلهایی را که نیازمند حفظ مسیر مختصات مساحت محلی است کنار گذاشت. بنابراین، باید تنش را برحسب دستگاه نیروهای متعامد در مختصات کلی و مجموعه صفحات متعامد مربوط که از مبدأ می‌گذرند تعریف کرد. حالت تنش را می‌توان بدون ابهام با انجام این کار با حداقل تعداد مؤلفه‌ها تعریف کرد.

دستیابی به این توصیف نیازمند مشتق هندسی بسیط است که آن را می‌توان در تعدادی از کتابهای مکانیک یافت (برای مثال، مکانیک سیالات، آی. ایچ. شیمز، و فقط یک توصیف مفهومی در اینجا آورده می‌شود. با مراجعه به شکل ۳.۲، میدان تنش در مختصات محلی با دو روش در دستگاه کلی تصویر شده است. ابتدا صفحه محلی که با s_1 و s_2 تعریف می‌شود و در سه مؤلفه متعامدش که از مبدأ می‌گذرد تصویر می‌شود. سپس هر یک از سه تنش محلی σ_n ، τ_{ss_1} و τ_{ss_2} روی هر یک از صفحات متعامدی که از مبدأ می‌گذرند تصویر می‌شوند. چون سه صفحه با سه دستگاه تنش مربوط وجود دارند، کلاً ۹ مؤلفه تنش برای توصیف کامل حالت تنش در یک نقطه در یک سطح اختیاری برحسب دستگاه مختصات ثابت کلی مورد نیاز هستند. در معادله (۲.۱.۲) تانسور کامل شامل ۹ تنش لازم آورده شده است

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\tau}} \quad (2.1.2)$$

در اینجا نمادگذاری به صورت زیر است: τ_{yx} تنش برشی مؤثر بر صفحه عمود بر محور y (یعنی،



شکل ۳.۲ تعریف توزیع تنش.

صفحه xz در جهت x است، و σ_{yy} تنش عمودی مؤثر بر صفحه عمود بر محور y در جهت y است. تمام بردارهای تنش در شکل ۳.۲ به صورت مثبت تعریف می‌شوند؛ خواننده توجه کند که جهت مثبت برای تنشهای عمودی به طرف خارج سطح است و برای تعریف مقادیر مثبت تنشهای برشی از قاعده پیچ راستگرد استفاده می‌شود.

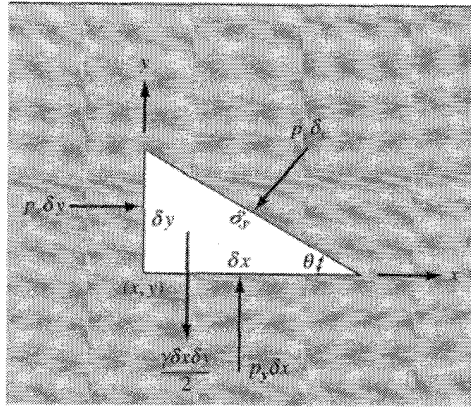
متوسط تنشهای عمودی تنش کپهای، $\bar{\sigma}$ ، نامیده می‌شود، که از آن برای تعریف فشار p استفاده می‌شود

$$p = -\bar{\sigma} = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.1.2)$$

در حالی که تنشهای عمودی به طرف خارج سطح مثبت گرفته می‌شوند، فشار به طرف مرکز جرم سطحی که بر آن اثر می‌کند مثبت گرفته می‌شود.

در یک نقطه، سیال ساکن در تمام جهتها فشار یکسان دارد. یعنی جزء δA با مساحت بسیار اندک، وقتی در سیال ساکن غوطه‌ور شود حول مرکزش به آزادی دوران می‌کند، نیرویی به مقدار ثابت دارد که بر هر طرف آن اثر می‌کند، صرف نظر از اینکه جهت جزء چه باشد.

برای اثبات این موضوع، یک جسم آزاد کوچک و گوه‌ای شکل به عرض واحد در نقطه (x, y) در یک سیال ساکن انتخاب می‌کنیم (شکل ۴.۲). از آنجا که هیچ‌گونه نیروی برشی وجود ندارد، تنها نیروهای موجود عبارت‌اند از نیروهای سطحی قائم و گرانی. بنابراین معادله‌های حرکت در



شکل ۴.۲ نمودار جسم آزاد ذره گوه‌ای شکل.

جهت‌های x و y به ترتیب عبارت‌اند از

$$\Sigma F_x = p_x \delta y - p_s \delta s \sin \theta = \frac{\delta x \delta y}{\rho} \rho a_x = 0$$

و

$$\Sigma F_y = p_y \delta x - p_s \delta s \cos \theta - \gamma \frac{\delta x \delta y}{\rho} = \frac{\delta x \delta y}{\rho} \rho a_y = 0$$

که در آن p_x و p_y و p_s فشارهای متوسط وارد بر سه وجه؛ γ نیروی گرانی واحد سیال؛ ρ چگالی آن؛ و a_x و a_y شتاب‌اند. با نزدیک کردن وجه مایل به نقطه (x, y) و ثابت نگه داشتن زاویه θ به هنگامی که جسم آزاد تا اندازه صفر کاهش می‌یابد، حدگیری می‌کنیم؛ با استفاده از رابطه‌های هندسی

$$\delta s \sin \theta = \delta y \quad \delta s \cos \theta = \delta x$$

معادله‌ها به صورت ساده زیر در می‌آیند:

$$p_x \delta y - p_s \delta y = 0 \quad p_y \delta x - p_s \delta x - \gamma \frac{\delta x \delta y}{\rho} = 0$$

آخرین جمله معادله دوم، یک بینهایت کوچک مرتبه بالاتر و می‌توان از آن صرف نظر کرد. وقتی

معادله‌ها را به ترتیب بر δy و δx تقسیم کنیم، آنها را به صورت زیر می‌توانیم ترکیب کنیم:

$$p_s = p_x = p_y \quad (۴.۱.۲)$$

از آنجا که θ یک زاویهٔ اختیاری است، این معادله نشان می‌دهد که در یک نقطهٔ سیال ساکن، فشار در تمام جهتها یکسان است. البته این اثبات برای حالت دوبعدی بود، اما با استفاده از معادله‌های تعادل چهاروجهی کوچکی از سیال که سه وجه آن صفحات مختصات و وجه چهارم آن دارای شیب اختیاری باشد، می‌توان این حکم را برای حالت سه‌بعدی نیز اثبات کرد.

اگر سیال در حرکت باشد، به طوری که یک لایه نسبت به لایهٔ مجاور حرکت کند، تنشهای برشی به وجود می‌آیند و تنشهای قائم عموماً در تمام جهتها در یک نقطه یکسان نخواهند بود. در این صورت فشار به صورت متوسط هر سه تنش فشاری قائم که در یک نقطه دوجه دو بر هم عمودند، تعریف می‌شود [معادله (۳.۱.۲)]. در یک سیال خیالی با چسبندگی صفر، یعنی در سیال بی‌اصطکاک، هیچ‌گونه تنش برشی برای هیچ‌گونه حرکت سیال به وجود نمی‌آید؛ بنابراین فشار در یک نقطه در تمام جهتها یکسان است.

تمرین

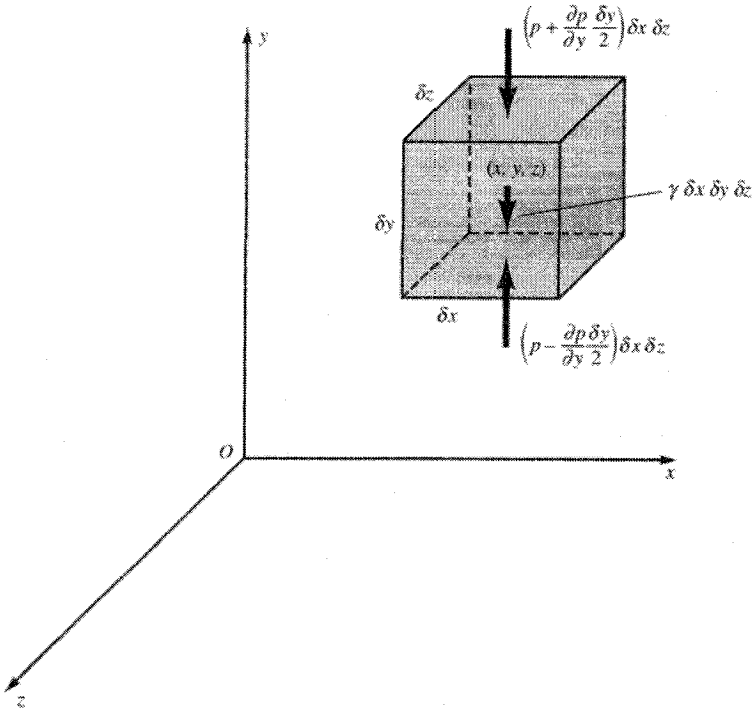
۱.۱.۲ در نقطه‌ای از یک سیال، تنش قائم در تمام جهتها فقط در صورتی یکسان است که الف) سیال بی‌اصطکاک باشد؛ ب) سیال بی‌اصطکاک و تراکم‌ناپذیر باشد؛ ج) سیال بدون چسبندگی و ساکن باشد؛ د) سیال هیچ حرکتی نسبت به لایهٔ مجاور نداشته باشد؛ ه) از حرکت یک لایهٔ سیال نسبت به لایهٔ مجاور صرف‌نظر شود.

۲.۲ معادله بنیادی استاتیک سیالات

تغییر فشار در سیال استاتیکی

نیروهای مؤثر بر یک جزء سیال شکل ۵.۲، از نیروهای سطحی و نیروهای حجمی تشکیل می‌شوند. اگر تنها نیروی حجمی مؤثرگرانی باشد، و اگر محور y را قائم و رو به بالا در نظر بگیریم، نیروی گرانی به صورت $-\gamma \delta x \delta y \delta z$ در جهت y خواهد بود، و با فشار p در مرکز آن (x, y, z) ، نیروی تقریبی وارد بر وجه عمود بر محور y در نزدیکترین حالت به مبدأ عبارت است از

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z$$



شکل ۵.۲ جزء متوازی السطوحی از سیال ساکن.

و نیروی وارد بر وجه مقابل عبارت است از

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2}\right) \delta x \delta z$$

که در آن $\delta y/2$ فاصله مرکز تا وجه عمود بر محور y است. با جمع کردن نیروهای مؤثر بر جزء در جهت y ، نتیجه می‌گیریم

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z - \gamma \delta x \delta y \delta z$$

از آنجا که هیچ نیروی حجمی اثر نمی‌کند، در جهتهای x و z داریم

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

بردار نیروی جزئی $\delta \mathbf{F}$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F} &= \mathbf{i} \delta F_x + \mathbf{j} \delta F_y + \mathbf{k} \delta F_z \\ &= - \left(\mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z - \mathbf{j} \gamma \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

اگر اندازه جزء به صفر کاهش یابد، بعد از تقسیم بر $\delta \nabla$ عبارت دقیق می‌شود

$$\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \nabla} = - \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) p - \mathbf{j} \gamma \quad \lim \delta \nabla \rightarrow 0 \quad (۱.۲.۲)$$

این نیروی برابند بر حجم واحد در یک نقطه است که برای سیال ساکن باید مساوی صفر باشد. کمیت داخل پرانتز، گرادیان موسوم به ∇ (دل)، است

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۲.۲.۲)$$

و گرادیان منفی p ، یعنی $-\nabla p$ میدان برداری \mathbf{f} نیروی فشاری سطحی در حجم واحد است

$$\mathbf{f} = -\nabla p \quad (۳.۲.۲)$$

بنابراین، قانون استاتیکی تغییر فشار سیال عبارت است از

$$\mathbf{f} - \mathbf{j} \gamma = 0 \quad (۴.۲.۲)$$

برای یک سیال غیرچسبنده متحرک، یا سیالی که طوری حرکت کند که تنش برشی در همه جای آن صفر باشد، قانون دوم نیوتن به شکل زیر در می‌آید:

$$\mathbf{f} - \mathbf{j} \gamma = \rho \mathbf{a} \quad (۵.۲.۲)$$

که در آن \mathbf{a} شتاب جزء سیال است؛ و وقتی گرانی تنها نیروی حجمی مؤثر است، $\mathbf{f} - \mathbf{j} \gamma$ برابند نیروی سیال است. برای مطالعه تعادل نسبی در بخش ۹.۲ و برای استنتاج معادله‌های اویلر در فصلهای ۴ و ۷، از معادله (۵.۲.۲) استفاده می‌شود.

صورت مؤلفه‌ای معادله‌های (۳.۲.۲) و (۴.۲.۲) عبارت‌اند از

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (۶.۲.۲)$$

مشتقات جزئی برای تغییر در جهتهای افقی، صورتی از قانون پاسکال‌اند؛ و نشان می‌دهند که دو نقطه هم ارتفاع در جرم پیوسته یک سیال ساکن، فشار یکسان دارند. از آنجا که p فقط تابع y است داریم

$$dp = -\gamma dy \quad (۷.۲.۲)$$

این معادله دیفرانسیل ساده تغییرات فشار را به نیروی گرانی واحد و تغییر ارتفاع ربط می‌دهد، و هم برای سیالات تراکم‌پذیر و هم برای سیالات تراکم‌ناپذیر اعتبار دارد.

تغییر فشار در یک سیال تراکم‌ناپذیر

در سیالاتی که بتوان آنها را همگن و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت، γ ثابت است، و معادله (۷.۲.۲) بعد از انتگرال‌گیری تبدیل می‌شود به

$$p = -\gamma y + c$$

که در آن c ثابت انتگرال است. قانون هیدروستاتیکی تغییر فشار اغلب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p = \gamma h \quad (۸.۲.۲)$$

که در آن h در جهات قائم و رو به پایین از سطح آزاد مایع اندازه‌گیری می‌شود ($h = -y$)؛ و افزایش فشار نسبت به فشار سطح آزاد است. اگر ستون قائمی از مایع را با ارتفاع متناهی h ، که سطح فوقانی آن در سطح آزاد قرار دارد، به عنوان جسم آزاد سیال در نظر بگیریم، معادله (۸.۲.۲) را می‌توان به‌دست آورد. این را به عنوان تمرین به عهده دانشجو می‌گذاریم.

مثال ۱.۲ یک اقیانوس‌شناس می‌خواهد آزمایشگاهی دریایی به ارتفاع ۵m طراحی کند که در عمق ۱۰m (از سطح دریا تا سقف آزمایشگاه) دوام بیاورد. اگر چگالی نسبی آب شور ۱.۰۲° باشد، تغییر فشار یک طرف محفظه و فشار سقف را پیدا کنید.

حل

$$\gamma = 1,020(9806\text{N/m}^3) = 10\text{kN/m}^3$$

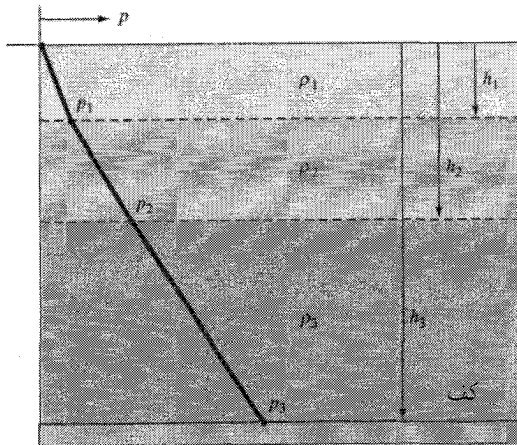
در سقف، $h = 100\text{m}$ ، و

$$p = \gamma h = 1\text{MN/m}^2 = 1\text{MPa}$$

اگر y از سقف آزمایشگاه دریایی رو به پایین اندازه‌گیری شود، تغییر فشار عبارت است از

$$p = 10(y + 100)\text{kPa}$$

اغلب بر اثر گرمایش جزئی یا وجود جرم افزوده‌ای مانند نمک یا رسوب، چگالی در یک سیال ساکن همگن تراکم‌ناپذیر می‌تواند چینه‌بندی شود یا خودش را در لایه‌ها مرتب می‌کند؛ در این لایه‌ها سیال با چگالی بیشتر در زیر سیال سبکتر قرار می‌گیرد. چگالی در هر لایه ثابت می‌ماند و با افزایش عمق ستون آب، فشار به‌طور خطی یا به‌طور هیدروستاتیکی تغییر می‌کند. در شکل ۶.۲، نمودار ایدئالی چگالی برحسب عمق در یک قسمت آب نمک با سه ناحیه چگالی ثابت نشان داده شده است. در این شکل، نمودار توزیع فشار برحسب عمق نیز نشان داده شده است و باید توجه داشت که فشار در سطوح مشترک به‌طور پیوسته است. در عمل، پخش مولکولی و تلاطم نمک سطح مشترک ناپیوسته چگالی را "به‌طور حاشیه‌ای" هموار می‌کند، اما این روش لایه‌ای برای توزیع



شکل ۶.۲ توزیع فشار در سیال ساکن با چگالی چینه‌بندی شده.

فشار در شرایط چینه‌بندی لایه‌ای یک روش تحلیل اصلی برای دریاچه‌شناسها و اقیانوس‌شناسها بیش از صد سال بوده است.

در شکل ۶.۲ چند مشخصه قابل توجه است. ابتدا فشار در هر لایه با افزایش عمق به‌طور خطی افزایش می‌یابد. بنابراین، تغییرات فشار در لایه ۱ و لایه‌های بعد عبارت‌اند از

$$p(0 < h < h_1) = p_0 + \rho_1 g(h) \quad (۹.۲.۲)$$

$$p(h_1 < h < h_2) = p_1 + \rho_2 g(h - h_1) \quad (۱۰.۲.۲)$$

یا برای لایه اختیاری n ,

$$p(h_{n-1} < h < h_n) = p_{n-1} + \rho_n g(h - h_{n-1}) \quad (۱۱.۲.۲)$$

مثال ۲.۲ در نقطه‌ای از اقیانوس با عمق کلی ۴۵۰ m ، اقیانوس‌شناسها داده‌های $h_1 = ۱۰۰\text{ m}$ ، $h_2 = ۳۰۰\text{ m}$ و $h_3 = ۴۵۰\text{ m}$ را اندازه گرفته‌اند. مقادیر گرانس ویژه آب نمک در هر لایه با چگالی ثابت، به ترتیب، ۱۰۰۱ ، ۱۰۰۲ و ۱۰۲۵ است. فشار در سطوح مشترک را بیابید. فشار در سطح را جدی بگیرد؛ یعنی، $p_0 = 0$.

حل

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g(h_1 - 0) = p_0 + S_1 \rho g h_1$$

$$= 0 + ۹۹۹۰۴(۱۰۰) = ۹۹۰۴\text{ kPa}$$

$$p_2 = p_1 + \rho_2 g(h_2 - h_1) = p_1 + S_2 \rho g(h_2 - h_1)$$

$$= ۹۹۰۴ + ۱۰۰۰(۲۰۰) = ۲۹۹۰۸\text{ kPa}$$

$$p_3 = p_2 + \rho_3 g(h_3 - h_2) = p_2 + S_3 \rho g(h_3 - h_2)$$

$$= ۲۹۹۰۸ + ۱۰۰۰(۱۵۰) = ۴۴۹۰۸\text{ kPa}$$

تغییر فشار در سیال تراکم‌پذیر

وقتی سیال، گاز کامل ساکنی در دمای ثابت باشد، از معادله (۲.۷.۱) داریم

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (۱۲.۲.۲)$$

که در آن p فشار مطلق است. اگر در معادله (۷.۲.۲)، ρg را به جای γ بگذاریم و ρ را بین معادله‌های (۷.۲.۲) و (۹.۳.۲) حذف کنیم، به دست می‌آید

$$dy = \frac{-p_0}{g\rho_0} \frac{dp}{p} \quad (۱۳.۲.۲)$$

باید به خاطر داشت اگر ρ برحسب پوند جرم بر فوت مکعب باشد، در این صورت $\gamma = g\rho/g_0$ با $g_0 = ۳۲.۱۷۴ \text{ lb}_m \cdot \text{ft}/\text{lb}_m \cdot \text{s}^2$ ، اگر وقتی $\rho = \rho_0$ داشته باشیم $p = p_0$ ، با انتگرالگیری بین حدود زیر:

$$\int_{y_0}^y dy = -\frac{p_0}{g\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}$$

نتیجه می‌شود

$$y - y_0 = -\frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (۱۴.۲.۲)$$

که در آن \ln لگاریتم طبیعی است. بنابراین

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{y - y_0}{p_0/g\rho_0}\right) \quad (۱۵.۲.۲)$$

که معادله تغییر فشار برحسب ارتفاع در گاز تک‌دماست.

اغلب فرض می‌شود که شیب دمای اتمسفر ثابت است و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$T = T_0 + \beta y \quad (۱۶.۲.۲)$$

برای اتمسفر استاندارد، نا استراتوسفرف $\beta = -۰.۰۰۳۵۷^\circ \text{F}/\text{ft}$ یا $\beta = -۰.۰۰۶۵۱ \text{K}/\text{m}$ است. با قانون گاز کامل می‌توان چگالی را برحسب فشار و ارتفاع بیان کرد

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{R(T_0 + \beta y)} \quad (۱۷.۲.۲)$$

با جایگذاری در $dp = -\rho g dy$ [معادله (۷.۲.۲)] متغیرها را می‌توان از هم جدا کرد و با انتگرالگیری p را برحسب y یافت.

مثال ۳.۲ اگر در سطح دریا $p = 10^5 \text{ Pa}$ و $\rho = 1240 \text{ kg/m}^3$ ، و در جو شرایط تکدام برقرار باشد، فشار و چگالی را در ارتفاع 2000 m محاسبه کنید.

حل

از معادله (۱۵.۲.۲)

$$p = (10^5 \text{ N/m}^2) \exp \left\{ - \frac{2000 \text{ m}}{(10^5 \text{ N/m}^2)[(9.806 \text{ m/s}^2)(1240 \text{ kg/m}^3)]} \right\}$$

$$= 78.4 \text{ kPa مطلق}$$

سپس از معادله (۱۲.۲.۲)

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p = (1240 \text{ kg/m}^3) \frac{78400}{100000} = 972 \text{ kg/m}^3$$

اگر تراکم‌پذیری یک مایع را در تعادل استاتیکی به حساب آوریم، از معادله‌های (۷.۲.۲) و (۱.۸.۱) استفاده می‌کنیم.

تمرینها

۱.۲.۲ فشار محفظه‌ی هوای بالای سطح روغن ($S = 75^\circ$) در یک مخزن 115 kPa مطلق است. فشار در 2 m پایین سطح روغن برحسب kPa عبارت است از الف) 1471 ؛ ب) 116.5 ؛ ج) 12971 ؛ د) 1341 ؛ ه) هیچکدام.

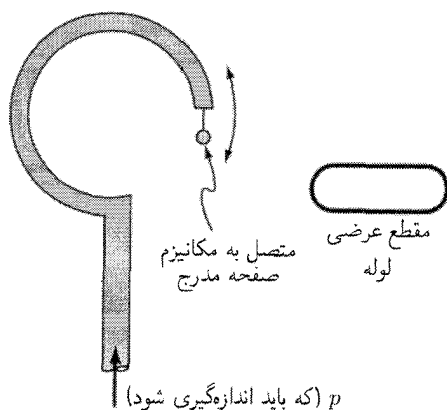
۲.۲.۲ فشار 80 mm آب به علاوه 60 mm سیال فشارسنج، $S = 294$ ، برحسب میلی‌متر جیوه عبارت است از الف) 3° ؛ ب) 188 ؛ ج) 4° ؛ د) 306 ؛ ه) هیچکدام.

۳.۲.۲ معادله دیفرانسیل تغییر فشار در یک سیال استاتیکی را به این صورت می‌توان نوشت (y به طور قائم رو به بالا اندازه‌گیری می‌شود): الف) $dp = -\gamma dy$ ؛ ب) $dp = -\gamma dy$ ؛ ج) $dp = -\rho dy$ ؛ د) $dp = -\rho dy$ ؛ ه) $dp = -y dp$.

۴.۲.۲ در اتمسفر تکدام، فشار الف) ثابت است؛ ب) با ارتفاع به طور خطی تغییر می‌کند؛ ج) با ارتفاع به صورت نمایی افزایش می‌یابد؛ د) مشابه چگالی تغییر می‌کند؛ ه) وقتی چگالی ثابت است، آن هم ثابت است.

۳.۲ آحاد و مقیاسهای اندازه‌گیری فشار

فشار را با ارجاع به هرگونه داده‌ی اختیاری می‌توان بیان کرد. داده‌های معمول عبارت‌اند از صفر



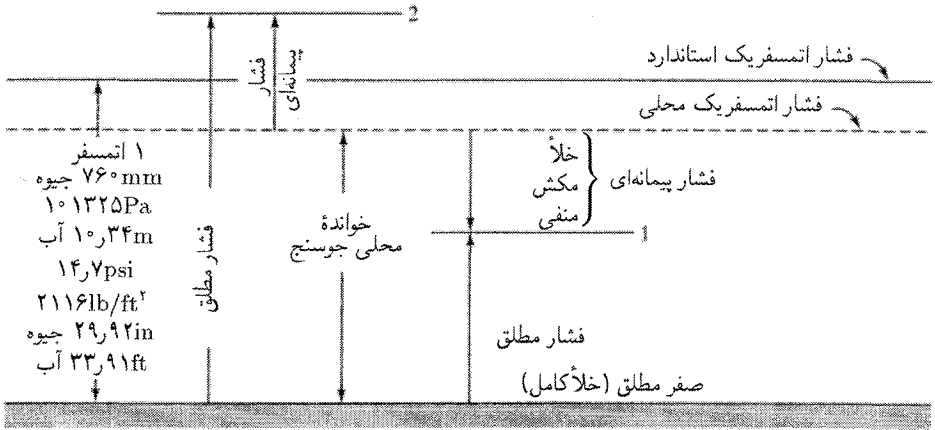
شکل ۷.۲ طرحواره لولهٔ بوردن.

مطلق و فشار اتمسفریک محلی. وقتی فشار را به صورت تفاضل مقدار آن با خلأ کامل بیان کنند، آن فشار مطلق می‌نامند. وقتی به صورت تفاضل مقدارش با فشار اتمسفریک محلی بیان شود آن را فشار پیمانه‌ای می‌گویند.

پیمانهٔ بوردن (شکل ۷.۲) نمونهٔ وسایلی است که برای اندازه‌گیری فشارهای پیمانه‌ای به کار می‌روند. عنصر فشار یک لولهٔ فلزی صاف و خمیدهٔ توخالی است، و یک انتهای آن بسته است و انتهای دیگر آن به فشاری که قرار است اندازه‌گیری شود راه دارد. وقتی فشار داخلی افزایش یابد، لوله می‌خواهد به صورت مستقیم در آید، و لذا اهرمی را که عقربه‌ای به آن متصل است به جلو می‌کشد و باعث حرکت عقربه می‌شود. وقتی فشار داخل و خارج لوله یکسان باشد، صفحهٔ مدرج صفر را نشان می‌دهد. صفحهٔ مدرج را برحسب هر واحد مناسبی، از قبیل پاسکال، پوند بر اینچ مربع، پوند بر فوت مربع، اینچ جیوه، فوت آب، سانتیمتر جیوه، و میلیمتر جیوه، می‌توان درجه‌بندی کرد. پیمانه، به خاطر ساختمان خود، فشار را نسبت به فشار محیط اطراف لوله، که اتمسفر محلی است، می‌سنجد.

شکل ۸.۲ داده‌ها و روابط آحاد رایج اندازه‌گیری فشار را نشان می‌دهد. فشار اتمسفریک استاندارد عبارت است از فشار متوسط در سطح دریا، 29.92 inHg . فشاری که برحسب طول ستون مایع بیان شود معادل نیروی وارد بر سطح واحد در قاعدهٔ این ستون است. رابطهٔ تغییر فشار با ارتفاع در یک مایع، $p = \gamma h$ [معادلهٔ (۸.۲.۲)]، رابطهٔ بین ارتفاع h ، طول ستون سیال با نیروی گرانی واحد γ ، و فشار p را نشان می‌دهد. در آحاد متناظر، p برحسب پاسکال، γ برحسب نیوتن بر متر مکعب، و h برحسب متر است. اگر نیروی گرانی واحد هر مایعی را به صورت حاصل ضرب چگالی نسبی اش S در نیروی گرانی واحد آب بیان کنیم، معادلهٔ (۸.۲.۲) تبدیل می‌شود به

$$p = \gamma_w S h \quad (۱.۳.۲)$$



شکل ۸.۲. آحاد مقیاسهای اندازه‌گیری فشار.

γ_w را برای آب می‌توان 9806 N/m^3 یا 62.4 lb/ft^3 گرفت.

وقتی می‌خواهیم فشار را برحسب پوند بر اینچ مربع بیان کنیم، هر دو طرف معادله را بر ۱۴۴ تقسیم می‌کنیم:

$$p_{\text{psi}} = \frac{62.4}{144} Sh = 0.433 Sh \quad (2.3.2)$$

که در آن h برحسب فوت است.*

فشار اتمسفریک محلی را با جوسنج جیوه‌ای (شکل ۸.۲) یا جوسنج فلزی اندازه می‌گیرند.

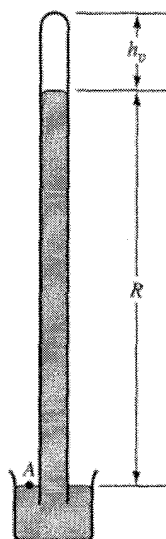
* در معادله ۲.۳.۲ فشار اتمسفریک استاندارد را برحسب پوند بر اینچ مربع می‌توان بیان کرد

$$p_{\text{psi}} = \frac{62.4}{144} (13.6) \frac{29.92}{12} = 14.7$$

که در آن برای جیوه، $S = 13.6$ و وقتی $h = 14.7$ در ۱۴۴ ضرب شود، اتمسفر استاندارد تبدیل می‌شود به 2116 lb/ft^2 . سپس ۲۱۱۶ تقسیم بر ۶۲.۴ می‌دهد: 33.91 ft آب. هر یک از این مقادیر برای اتمسفر استاندارد به کار می‌رود و می‌تواند یک اتمسفر نامیده شود اگرچه همیشه می‌دانیم که آن یک اتمسفر استاندارد است و از صفر مطلق اندازه‌گیری می‌شود. این مقادیر مختلف برای اتمسفر استاندارد (شکل ۸.۲) باهم معادل‌اند و ابزار مناسبی برای تبدیل از یک مجموعه آحاد به مجموعه دیگری است. مثلاً برای بیان 100 ft آب برحسب پوند بر اینچ مربع از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\frac{100}{33.91} (14.7) = 43.3 \text{ psi}$$

زیرا $100/33.91$ تعداد اتمسفریکهای استاندارد است و هر اتمسفر استاندارد 14.7 psi است.



شکل ۹.۲ جوسنج جیوه‌ای.

جوسنج فلزی با روشی شبیه پیمانهٔ بردن، اختلاف فشار جو را با جعبه یا لولهٔ تخلیه‌شده اندازه می‌گیرد، اما در اینجا لولهٔ تخلیه و آب‌بندی شده است.

جوسنج جیوه‌ای در واقع یک لولهٔ شیشه‌ای است که یک طرف آن بسته است؛ این لوله پر از جیوه است و طوری وارونه شده است که طرف باز آن در جیوه غوطه‌ور باشد. به‌کمک مقیاس مدرج آن می‌توان ارتفاع ستون R (شکل ۹.۲) را تعیین کرد. فضای بالای جیوه شامل بخار جیوه است. اگر فشار بخار جیوه h_v برحسب میلیمتر جیوه باشد و R نیز در همان آحاد اندازه‌گیری شود، فشار نقطهٔ A را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$h_v + R = h_A \quad \text{mmHg}$$

h_v تابع دماست، اما در دماهای اتمسفریک معمولی مقدار آن بسیار کوچک است. فشار جو بسته به محل، یعنی بسته به ارتفاع و اقلیم، تغییر می‌کند.

در شکل ۸.۲ فشار را به‌طور عمودی بر روی نمودار می‌توان پیدا کرد. این نمودار رابطهٔ فشار با صفر مطلق و فشار اتمسفریک محلی را نشان می‌دهد. اگر نقطه در پایین خط فشار اتمسفریک محلی قرار گرفته باشد، و مرجع آن دادهٔ پیمانه‌ای باشد، آن را فشار منفی، مکش یا خلأ می‌نامند. مثلاً، فشار مطلق 46°mmHg را در نقطهٔ ۱، با خواندهٔ 72°mmHg جوسنج، می‌توان به صورت

۱۱inHg مکش، یا ۱۱inHg خلا بیان کرد. باید توجه داشت که

$$p_{\text{مطلق}} = p_{\text{جو}} + p_{\text{پیمانه‌ای}}$$

برای جلوگیری از هر ابهام، در تمام کتاب قرار داد این است که فشار پیمانه‌ای است مگر اینکه قید شده باشد فشار مطلق است، به استثنای فشار اتمسفریک، که واحد فشار مطلق است.

مثال ۴.۲ آهنگ تغییر دما در اتمسفر در اثر تغییر ارتفاع را گزاردیان گرمایی آن می‌خوانند. حرکت توده هوا به چگالی آن نسبت به چگالی هوای اطراف (محیط) بستگی دارد. ولی وقتی این توده در اتمسفر صعود کند فشار هوا کاهش می‌یابد، توده منبسط می‌شود و دمای آن با آهنگی موسوم به گزاردیان گرمایی بی‌دررو خشک کاهش می‌یابد. شرکتی می‌خواهد مقدار زیادی زباله را بسوزاند. برآورد شده است که دمای دود در ۱۰m بالای زمین 11°C بیش از دمای هوای محیط باشد. در شرایط زیر چه اتفاقی برای دود می‌افتد؟ الف) گزاردیان گرمایی اتمسفریک استاندارد برابر با 11°C در هر متر [یعنی $\beta = -0.00651^{\circ}\text{C}$] و $t_0 = 20^{\circ}\text{C}$ باشد؛ ب) وقتی گزاردیان گرمایی وارونه $\beta = 0.00365^{\circ}\text{C}$ در هر متر باشد.

حل

با ترکیب معادله‌های (۷.۲.۲) و (۱۷.۲.۲)

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^y \frac{dy}{T_0 + \beta y} \quad \text{یا} \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\beta y}{T_0}\right)^{-g/R\beta}$$

رابطه بین فشار و دما برای جرمی از گاز که بدون انتقال گرما منبسط شود عبارت است از

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}$$

که در آن T_0 دمای مطلق اولیه دود و p_0 فشار مطلق اولیه دود؛ و k نسبت گرمای ویژه است که برای هوا و دیگر گازهای دو اتمی ۱٫۴ است. با حذف p/p_0 در دو معادله آخر

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\beta y}{T_0}\right)^{-[(k-1)/k](g/R\beta)}$$

چون گاز آنقدر بالا می‌رود تا دمای آن مساوی دمای محیط شود، پس

$$T = T_0 + \beta y$$

دو معادله آخر را برای y می‌توان حل کرد

$$a = \frac{-1}{(k-1)g/kR\beta + 1}$$

بنابراین

$$y = \frac{T_0}{\beta} \left[\left(\frac{T_1}{T_0} \right)^a - 1 \right]$$

(الف) به ازای $\beta = -0.0651^\circ\text{C}$ در هر متر، $R = 287\text{m.N}/(\text{kg.K})$ ، $a = 2.002$ و $y = 320.1\text{m}$ ؛ (ب) به ازای وارونگی دمای اتمسفریک، $\beta = 0.0365^\circ\text{C}$ در هر متر، $y = 809.2\text{m}$ و $a = -0.2721$

تمرینها

۱.۳.۲ عبارت صحیح کدام است؟ (الف) فشار اتمسفریک محلی همیشه پایین فشار اتمسفریک استاندارد است؛ (ب) فشار اتمسفریک محلی فقط به ارتفاع محل بستگی دارد؛ (ج) فشار اتمسفریک استاندارد عبارت است از فشار اتمسفریک متوسط محلی در سطح دریا؛ (د) جوسنج تقاضل فشار اتمسفریک محلی و استاندارد را نشان می‌دهد؛ (ه) فشار اتمسفریک استاندارد 720mmHg مطلق است.

۲.۳.۲ سه فشار معادل را انتخاب کنید: (الف) 1.0°psi ، $23.1\text{ft H}_2\text{O}$ ، 4.91in.Hg ؛ (ب) 1.0°psi ، $4.33\text{ft H}_2\text{O}$ ، 2.03in.Hg ؛ (ج) 1.0°psi ، $2.03\text{ft H}_2\text{O}$ ، 8.83in.Hg ؛ (د) 1.0°psi ، $4.33\text{ft H}_2\text{O}$ ، 2.03in.Hg ؛ (ه) 1.0°psi ، $4.33\text{ft H}_2\text{O}$ ، 8.83in.Hg .

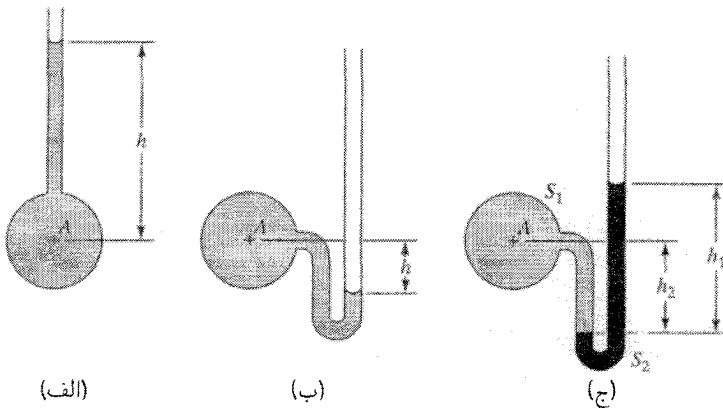
۳.۳.۲ وقتی جوسنج 730mmHg را می‌خواند، مکش 10kPa برابر است با (الف) $2\text{m H}_2\text{O}$ ؛ (ب) 75m Hg ؛ (ج) $8.9\text{m H}_2\text{O}$ مطلق؛ (د) 107kPa مطلق؛ (ه) هیچکدام.

۴.۳.۲ وقتی جوسنج 29in Hg را می‌خواند، 7°psia معادل است با (الف) 476atm ؛ (ب) 493atm ؛ (ج) مکش 7.9psi ؛ (د) 7.9psi ؛ (ه) 13.8in Hg مطلق.

۴.۲ فشارسنج

فشارسنجهای استاندارد

فشارسنج وسیله‌ای است که در آن از ستونهای مایع برای تعیین اختلاف فشار استفاده می‌شود.



شکل ۱۰.۲ فشارسنجهای ساده.

ابتدایترین فشارسنج، که معمولاً پیزومتر خوانده می‌شود، در شکل ۱۰.۲ الف نشان داده شده است. وقتی فشار داخل یک مایع بیشتر از صفر پیمانه‌ای است، این وسیله فشار آن مایع را اندازه می‌گیرد. یک لولهٔ شیشه‌ای به‌طور قائم طوری قرار گرفته است که به فضای داخل محفظه ارتباط دارد. مایع در داخل لوله بالا می‌آید تا اینکه تعادل برقرار می‌شود. سپس فشار برحسب فاصلهٔ قائم h ، از هلالی (سطح مایع) تا نقطه‌ای که فشار آن اندازه‌گیری می‌شود، برحسب آحاد طول مایع داخل ظرف به‌دست می‌آید. واضح است که پیزومتر برای فشارهای پیمانه‌ای منفی مورد استفاده ندارد، زیرا هوا از طریق لوله به ظرف جریان می‌یابد. همچنین، اندازه‌گیری فشارهای زیاد در A عملی نیست، زیرا لولهٔ قائم را باید خیلی طولی کرد. اگر چگالی نسبی مایع S باشد، فشار در A مساوی hS واحد از طول آب خواهد بود.

برای اندازه‌گیری فشارهای پیمانه‌ای کوچک منفی یا مثبت در مایع، لوله را به صورت شکل ۱۰.۲ ب می‌توان گرفت. به این ترتیب، سطح هلالی ممکن است در پایین A قرار گیرد (که در شکل می‌بینید). از آنجا که فشار در هلالی مساوی با صفر پیمانه‌ای است، و از آنجا که فشار با ارتفاع کاهش می‌یابد،

$$h_A = -hS \quad \text{واحد طول آب}$$

برای فشارهای پیمانه‌ای بزرگتر منفی یا مثبت، یک مایع ثانویه با چگالی نسبی بیشتر به کار می‌رود [شکل ۱۰.۲ ج]. این منابع نباید با سیال اول، که بهتر است گاز باشد، مخلوط شود. اگر چگالی نسبی سیال در A مساوی S_1 (نسبت به آب) و چگالی نسبی مایع فشارسنج S_2 باشد، می‌توان معادلهٔ فشار در A را نوشت، اعم از اینکه از A شروع کنیم یا از هلالی بالایی و در فشارسنج

$$h_A + h_2 S_1 - h_1 S_2 = 0$$

که در آن h_A فشار مجهول است برحسب آحاد طول آب، و h_1 و h_2 برحسب آحاد طول بیان می‌شوند. اگر A حاوی گاز باشد، S_1 معمولاً آنقدر کوچک است که از $h_2 S_1$ می‌توان چشم پوشید.

در تمام مسائل فشارسنج، روش کلی زیر را باید به کار برد:

۱. از یک طرف (اگر مدار پیوسته باشد، از هر هلالی) شروع کرد و فشار آنجا را برحسب واحد مناسب (مثلاً پاسکال)، یا اگر مجهول است برحسب نماد مناسب، نوشت.

۲. به این فشار، تغییر فشار از یک هلالی تا هلالی بعدی را برحسب همان واحد افزود (اگر هلالی بعدی پایینتر است، کاست).

۳. این کار را ادامه داد تا به طرف دیگر (یا هلالی اول) رسید و عبارت حاصل را مساوی با فشار در آن نقطه، اعم از معلوم یا مجهول، قرار داد.

عبارت به دست آمده برای فشارسنج ساده، شامل یک مجهول خواهد بود؛ یعنی برای فشارسنج تفاضلی، اختلاف فشار را به دست می‌دهد. به صورت معادله داریم

$$p_0 - (y_1 - y_0)\gamma_0 - (y_2 - y_1)\gamma_1 - (y_3 - y_2)\gamma_2 \\ - (y_4 - y_3)\gamma_3 - \dots - (y_n - y_{n-1})\gamma_{n-1} = p_n$$

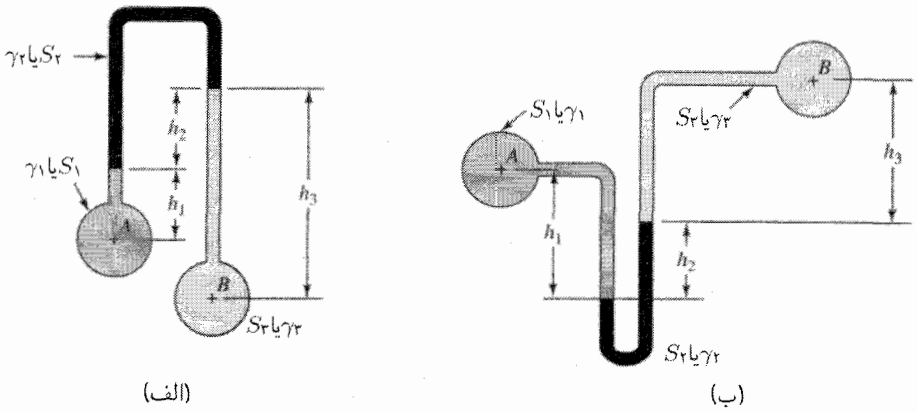
که در آن، y_0, y_1, \dots, y_n ارتفاع هر هلالی برحسب آحاد طول، و $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ نیروهای گرانی واحد ستونهای مایع‌اند. عبارت بالا جواب را برحسب نیرو بر سطح واحد می‌دهد و با استفاده از تبدیلهای شکل ۸.۲ می‌توان آن را به آحاد دیگر تبدیل کرد.

فشارسنج تفاضلی (شکل ۱۱.۲) اختلاف فشار نقاط A و B را به هنگامی که فشار حقیقی هیچ نقطه‌ای را در سیستم نتوان تعیین کرد به دست می‌دهد. با استفاده از روش فوق در شکل ۱۱.۲ الف، داریم

$$p_A - p_B = h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2 - h_3 \gamma_3 \quad \text{یا} \quad p_A - h_1 \gamma_1 - h_2 \gamma_2 + h_3 \gamma_3 = p_B$$

همچنین در شکل ۱۱.۲ ب

$$p_A - p_B = -h_1 \gamma_1 + h_2 \gamma_2 + h_3 \gamma_3 \quad \text{یا} \quad p_A + h_1 \gamma_1 - h_2 \gamma_2 - h_3 \gamma_3 = p_B$$



شکل ۱۱.۲ فشارسنجهای تفاضلی.

هیچ فرمولی را برای فشارسنجهای خاص نباید حفظ کرد. بهتر است آنها را برای هر حالت مورد نیاز از روش کلی استخراج کرد.

اگر فشارهای A و B برحسب طول ستون آب بیان شوند، نتایج فوق را برای شکل ۱۱.۲ الف می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$h_A - h_B = h_2 S_1 + h_1 S_2 - h_3 S_2 \quad \text{واحد طول آب}$$

همچنین برای شکل ۱۱.۲ ب

$$h_A - h_B = -h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_2$$

که در آن S_1 و S_2 و S_3 چگالی نسبی مایعات داخل سیستم‌اند.

مثال ۵.۲ در شکل ۱۱.۲ الف، مایع در A و B آب، و در فشارسنج روغن است. $S = ۰.۸$ ؛ $h_1 = ۳۰$ mm؛ $h_2 = ۲۰$ mm؛ $h_3 = ۶۰$ mm. الف) $p_A - p_B$ را برحسب پاسکال تعیین کنید؛ ب) اگر $p_B = ۵$ kPa و خواندهٔ جوسنج ۷۳ mmHg باشد، فشار مطلق را در A برحسب متر آب به دست آورید.

$$h_A(m \text{ H}_2\text{O}) - h_{\text{S}}S_{\text{H}_2\text{O}} - h_{\text{r}}S_{\text{غش}} + h_{\text{r}}S_{\text{H}_2\text{O}} = h_B(m \text{ H}_2\text{O}) \quad (\text{الف})$$

$$h_A - 0.3(1) - 0.2(0.8) + 0.6(1) = h_B$$

$$h_A - h_B = -0.14 \text{ m H}_2\text{O}$$

$$p_A - p_B = \gamma(h_A - h_B) = (9806 \text{ N/m}^3)(-0.14 \text{ m}) = -1373 \text{ Pa}$$

$$h_B = \frac{p_B}{\gamma} = \frac{5 \times 10^4 \text{ N/m}^2}{9806 \text{ N/m}^3} = 5.099 \text{ m H}_2\text{O} \quad (\text{ب})$$

$$h_B(m \text{ H}_2\text{O}_{\text{مطلق}}) = h_B(m \text{ H}_2\text{O}_{\text{پیمانه‌ای}}) + (0.73 \text{ m})(1.376)$$

$$= 5.099 + 0.928 = 6.027 \text{ m H}_2\text{O}_{\text{مطلق}}$$

از (الف): $h_{A_{\text{مطلق}}} = h_{B_{\text{مطلق}}} - 0.14 = 6.027 - 0.14 = 5.887 \text{ m H}_2\text{O}_{\text{مطلق}}$

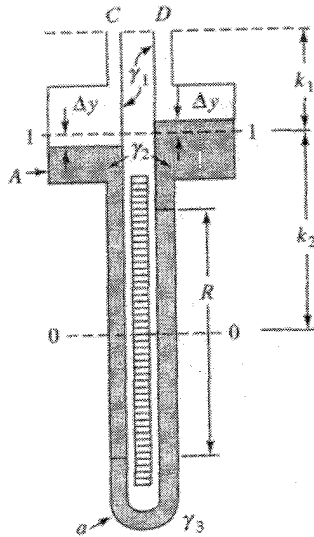
میکروفشارسنج

برای تعیین تفاضلهای بسیار کوچک فشار یا تعیین دقیق تفاضلهای بزرگ فشار، چند نوع فشارسنج در بازار یافت می‌شود. یک نوع آن اختلاف ارتفاع دو هلالی فشارسنج را به دقت اندازه می‌گیرد. با تلسکوپهای کوچکی مجهز به خطوط موین عرضی افقی که بر پایه‌ای در امتداد لوله‌ها نصب شده است که با یک باله و پیچ کند رو بالا و پایین می‌رود و خطوط موین عرضی را می‌توان به دقت تنظیم کرد، اختلاف ارتفاع هلالی (اختلاف پیمانه‌ای) را با ورنیه می‌توان خواند.

با دو مایع پیمانه‌ای که با یکدیگر مخلوط نشوند، با کوچکترین اختلاف فشار، اختلاف پیمانه‌ای زیاد R (شکل ۱۲.۲) به وجود می‌آید. مایع پیمانه‌ای که سنگینتر است و لوله U پایینی را تا $0-0$ پر می‌کند؛ سپس مایع پیمانه‌ای سبکتر به هر دو طرف اضافه می‌شود و مخزنهای بزرگتر را تا $1-1$ پر می‌کند. گاز یا مایع سیستم، فضای بالای $1-1$ را پر می‌کند. وقتی فشار C کمی بیش از فشار D باشد، هلالی همان‌طور که در شکل ۱۲.۲ می‌بینید حرکت می‌کند. حجم مایع جابه‌جا شده در هر مخزن مساوی است با جابه‌جایی در لوله U ؛ بنابراین

$$\Delta y A = \frac{R}{2} a$$

که در آن A و a مساحت سطح مقطع مخزن و لوله U اند. معادله فشارسنج را اگر از C شروع



شکل ۱۲.۲ میکروفشارسنجی با استفاده از دو مایع پیمانه‌ای.

کنیم، برحسب نیرو بر سطح واحد می‌توانیم بنویسیم

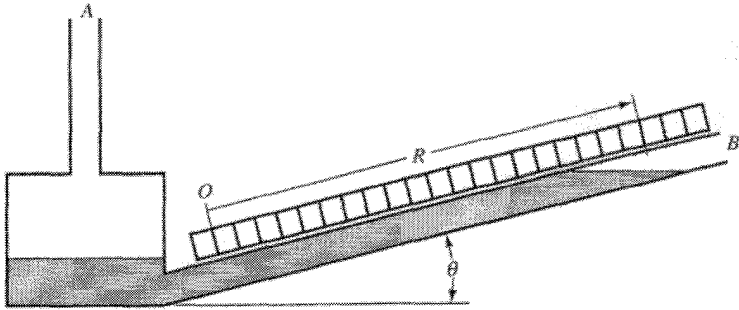
$$p_C + (k_1 + \Delta y)\gamma_1 + \left(k_2 - \Delta y + \frac{R}{2}\right)\gamma_2 - R\gamma_3 - \left(k_2 - \frac{R}{2} + \Delta y\right)\gamma_2 - (k_1 - \Delta y)\gamma_1 = p_D$$

که در آن، مانند شکل ۱۲.۲، γ_1 ، γ_2 و γ_3 نیروی گرانی واحدند. پس از ساده‌کردن و جایگزین کردن Δy به دست می‌آید

$$p_C - p_D = R \left[\gamma_3 - \gamma_2 \left(1 - \frac{a}{A}\right) - \gamma_1 \frac{a}{A} \right] \quad (۱.۴.۲)$$

برای سیالها و پیمانه‌های خاصی، مقدار داخل کروشه ثابت است؛ از این رو، اختلاف فشار نسبت مستقیم با R دارد.

مثال ۶.۲ در میکروفشارسنج شکل ۱۲.۲ اختلاف فشار را برحسب پاسکال به دست آورید. در سیستم هوا وجود دارد؛ $S_2 = 1.0$ ، $S_1 = 1.1$ ، $a/A = 0.1$ ، $R = 5 \text{ mm}$ ، $T = 20^\circ \text{ C}$



شکل ۱۳.۲ فشارسنج مایل.

و جوسنج ۷۶۰ mmHg نشان می‌دهد.

$$\rho_{\text{Hg}} = \frac{p}{RT} = \frac{(0.76 \text{ m})(13.6 \times 9806 \text{ N/m}^2)}{(287 \text{ N.m/kg.K})(273 + 20 \text{ K})} = 1205 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma_1 \frac{a}{A} = (1205 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(0.7) = 8118 \text{ N/m}^2$$

$$\gamma_2 - \gamma_2 \left(1 - \frac{a}{A}\right) = (9806 \text{ N/m}^2)(1.10 - 0.99) = 1079 \text{ N/m}^2$$

از جمله $\gamma_1(a/A)$ می‌توان صرف‌نظر کرد. با جایگذاری در معادله (۱.۴.۲) به دست می‌آید

$$p_C - p_D = (0.005 \text{ m})(1079 \text{ N/m}^2) = 5.39 \text{ Pa}$$

برای اندازه‌گیری اختلافهای اندک فشار در گاز، اغلب از فشارسنج مایل (شکل ۱۳.۲) استفاده می‌شود. وقتی A و B باز باشند، با حرکت دادن مقیاس مایل، آن را روی صفر تنظیم می‌کنند. چون در هر اختلاف فشار، لوله مایل بیش از لوله قائم باعث جابه‌جایی هلالی می‌شود، دقت بیشتر در خواندن مقیاس حاصل می‌شود.

پسا سطحی باعث صعود موئین در لوله‌های کوچک می‌شود. اگر لوله U را با هلالی در هر ساق به کار بریم آثار پسا سطحی از بین می‌رود. خیز موئین در لوله‌هایی به قطر بیش از ۱۵ mm قابل اغماض است.

تمرینها

۱.۴.۲ در شکل ۱۰.۲ ب، مایع روغن است و $S = 80^\circ$. وقتی $h = 60 \text{ cm}$ ، فشار در A را

به چه صورت می‌توان بیان کرد؟ الف) $48\text{cm H}_2\text{O}$ - مطلق؛ $48\text{cm H}_2\text{O}$ ؛ ج) $48\text{cm H}_2\text{O}$ مکش؛ د) $52\text{cm H}_2\text{O}$ (خلاً؛ ه) هیچکدام.

۲.۴.۲ در شکل ۱۰.۲ ج داخل لوله هواست، مایع فشارسنج آب است، و $h_1 = 500\text{mm}$ و $h_2 = 200\text{mm}$. فشار در A عبارت است از الف) $1.14\text{m H}_2\text{O}$ (مطلق؛ ب) $0.2\text{m H}_2\text{O}$ (خلاً؛ ج) $0.2\text{m H}_2\text{O}$ ؛ د) 1Pa ؛ ه) هیچکدام.

۳.۴.۲ در شکل ۱۱.۲ الف، $h_1 = 2\text{ft}$ ، $h_2 = 1\text{ft}$ ، $h_3 = 4\text{ft}$ ، $h_4 = 8\text{ft}$ ، $S_1 = 80^\circ$ ، $S_2 = 60^\circ$ ، و $S_3 = 10^\circ$. بنابراین $h_B - h_A$ برحسب فوت آب عبارت است از الف) 3.5 ؛ ب) 1.75 ؛ ج) 3.5 ؛ د) 6.25 ؛ ه) هیچکدام.

۴.۴.۲ در شکل ۱۱.۲ ب داریم $h_1 = 38\text{cm}$ ، $h_2 = 33\text{cm}$ ، $h_3 = 6\text{cm}$ ، $S_1 = 80^\circ$ ، $S_2 = 30^\circ$ ، و $S_3 = 10^\circ$. بنابراین $p_A - p_B$ برحسب کیلوپاسکال عبارت است از الف) 755 ؛ ب) 980 ؛ ج) 1186 ؛ د) 1932 ؛ ه) هیچکدام.

۵.۴.۲ یک فشارسنج جیوه-آب، تفاضل پیمانه‌ای (تفاضل ارتفاع هلالیها) 50mm دارد. اختلاف فشار برحسب متر آب عبارت است از الف) 5 ؛ ب) 3.6 ؛ ج) 6.8 ؛ د) 7.3 ؛ ه) هیچکدام.

۶.۴.۲ در فشارسنج مایل شکل ۱۳.۲، مخزن به قدری بزرگ است که می‌توان فرض کرد سطح آن در ارتفاع ثابتی باقی می‌ماند. $\theta = 30^\circ$. این فشارسنج به عنوان فشارسنج ساده‌ای برای اندازه‌گیری فشار هوا به کار می‌رود و حاوی آب است و $R = 40\text{cm}$. فشار در A برحسب سانتیمتر آب عبارت است از الف) 40 ؛ ب) 20 ؛ ج) 20 ؛ د) 40 ؛ ه) هیچکدام.

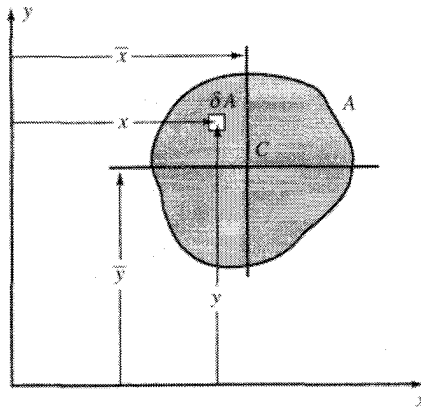
۵.۲ نیروهای وارد بر سطوح مستوی

در قسمتهای قبل، تغییرات فشار را در سراسر یک سیال بررسی کردیم. در بحث راجع به واکنشهای خارجی به سیستمهای نیرو، نیروهای توزیع شده ناشی از کنش سیال بر یک سطح متناهی را می‌توان با یک نیروی برآیند جایگزین کرد. در این قسمت، مقدار نیروی برآیند و خط حامل آن (مرکز فشار) را به کمک انتگرالگیری و فرمول نویسی و با استفاده از مفهوم منشور فشار تعیین می‌کنیم.

سطوح افقی

یک سطح مستوی در وضعیت افقی در داخل یک سیال ساکن تحت تأثیر یک فشار ثابت قرار می‌گیرد. مقدار نیروی مؤثر بر یک طرف سطح عبارت است از

$$\int p dA = p \int dA = pA$$



شکل ۱۴.۲ نماد برای تعیین خط حامل یک نیرو.

نیروهای جزئی $p dA$ که بر A اثر می‌کنند با یکدیگر موازی و همسویند؛ بنابراین، از جمع اسکالر تمام چنین اجزائی مقدار نیروی برآیند به دست می‌آید. جهت این برآیند عمود بر سطح است و اگر p مثبت باشد به طرف سطح متوجه است. برای پیدا کردن خط حامل برآیند، یعنی نقطه‌ای در سطح که گشتاور نیروی توزیع شده نسبت به هر محور ماربر آن نقطه مساوی صفر است، محورهای xy را، مطابق شکل ۱۴.۲، می‌توان انتخاب کرد. سپس، از آنجا که گشتاور برآیند باید مساوی گشتاور سیستم نیروی توزیع شده نسبت به هر محور، مثلاً محور y ، باشد

$$pAx' = \int_A xp \, dA$$

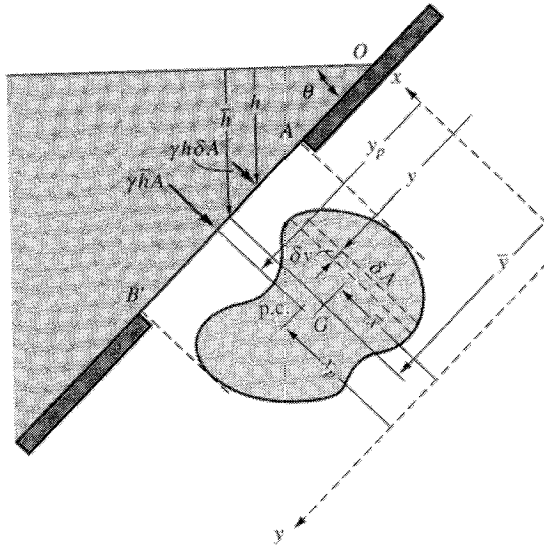
که در آن x' فاصله برآیند تا محور y است. از آنجا که p ثابت است، داریم

$$x' = \frac{1}{A} \int_A x \, dA = \bar{x}$$

که در آن \bar{x} فاصله مرکز سطح تا محور y است (نگاه کنید به پیوست الف). از این رو، برای یک سطح افقی که تحت تأثیر فشار سیال استاتیکی قرار دارد، برآیند از مراکز سطح می‌گذرد.

سطوح مایل

در شکل ۱۵.۲ یک سطح مستوی با رد $A'B'$ اش نشان داده شده است. این سطح نسبت به افق زاویه θ° دارد. فصل مشترک صفحه سطح و سطح آزاد را محور x می‌گیریم. محور y در صفحه



شکل ۱۵.۲ نماد برای نیروی مایع وارد بر یک طرف یک سطح مستوی مایل.

سطح را با مبدأ O ، مطابق شکل، در سطح آزاد می‌گیریم. صفحه xy سطح مایل اختیاری را نشان می‌دهد. می‌خواهیم مقدار و جهت، و خط حامل نیروی برآیند ناشی از مایع را که بر یک طرف سطح اثر می‌کند پیدا کنیم.

برای یک جزء به مساحت δA به صورت نواری به ضخامت δy با لبه‌های طویل افقی، مقدار نیروی δF مؤثر بر آن عبارت است از

$$\delta F = p \delta A = \gamma h \delta A = \gamma y \sin \theta \delta A \quad (۱.۵.۲)$$

از آنجا که تمام این چنین نیروهای جزئی با هم موازی‌اند انتگرال روی سطح مقدار نیروی F مؤثر بر یک طرف سطح را نتیجه می‌دهد

$$F = \int p dA = \gamma \sin \theta \int y dA = \gamma \sin \theta \bar{y} A = \gamma \bar{h} A = p_G A \quad (۲.۵.۲)$$

و از روابط شکل ۱۵.۲، $p_G = \gamma \bar{h}$ و $\bar{y} \sin \theta = \bar{h}$ ، فشار در مرکز سطح صفحه است. به بیان غیر ریاضی، مقدار نیروی مؤثر بر یک طرف یک سطح مستوی غوطه‌ور در یک مایع مساوی است با حاصل ضرب مساحت و فشار در مرکز سطح. باید توجه داشت که به این صورت، وجود سطح آزاد غیرضروری است. برای تعیین فشار در مرکز سطح راههای مختلفی وجود دارد. اگر p_G

مثبت باشد، سوی نیرو طوری است که به سطح فشار می‌آورد. از آنجا که تمام نیروهای جزئی بر سطح عمودند، خط حامل برآیند نیز بر سطح عمود است. هر سطح را حول هر محور ماربر مرکز سطحش می‌توان دوران داد بی‌آنکه مقدار برآیند تغییر کند، به شرطی که کل مساحت غوطه‌ور در مایع استاتیکی ثابت بماند.

مرکز فشار

نقطه اثر خط حامل برآیند را در سطح، مرکز فشار با مختصات (x_p, y_p) می‌نامند (شکل ۱۵.۲). مرکز فشار سطح مایل، برعکس مرکز فشار سطح افقی، در مرکز سطح قرار ندارد. برای پیدا کردن مرکز فشار، گشتاورهای برآیند $x_p F$ و $y_p F$ را به ترتیب مساوی گشتاورهای نیروی توزیع شده نسبت به محور y و محور x قرار می‌دهیم؛ از این رو

$$x_p F = \int_A x p dA \quad (۳.۵.۲)$$

$$y_p F = \int_A y p dA \quad (۴.۵.۲)$$

جزء مساحت در معادله (۳.۵.۲) باید $\delta x \delta y$ باشد، نه نواری که در شکل ۱۵.۲ نشان داده‌ایم. با حل مختصات مرکز فشار نتیجه می‌گیریم

$$x_p = \frac{1}{F} \int_A x p dA \quad (۵.۵.۲)$$

$$y_p = \frac{1}{F} \int_A y p dA \quad (۶.۵.۲)$$

در بسیاری از کاربردها، معادله‌های (۵.۵.۲) و (۶.۵.۲) را به راحتی می‌توان با انتگرال ترسیمی ارزیابی کرد؛ برای سطوح ساده می‌توان آنها را به صورت زیر در فرمولهای کلی انتقال داد (نگاه کنید به پیوست الف):

$$x_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin \theta} \int_A x \gamma y \sin \theta dA = \frac{1}{\bar{y} A} \int_A x y dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y} A} \quad (۷.۵.۲)$$

در معادله‌های (الف.۱۰) در پیوست الف، و (۷.۵.۲)

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y} A} + \bar{x} \quad (۸.۵.۲)$$

هر کدام از محورهای مرکز جرمی، $x = \bar{x}$ یا $y = \bar{y}$ ، محور تقارن سطح باشد، \bar{I}_{xy} صفر می‌شود و مرکز فشار بر $x = \bar{x}$ قرار می‌گیرد. از آنجا که \bar{I}_{xy} مثبت یا منفی است، مرکز فشار در یکی از طرفین خط $x = \bar{x}$ قرار می‌گیرد. برای تعیین y_p به کمک فرمول، و معادله‌های (۲.۵.۲) و (۶.۵.۲)، داریم

$$y_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin \theta} \int_A y \gamma y \sin \theta dA = \frac{1}{\bar{y} A} \int_A y^2 dA = \frac{I_x}{\bar{y} A} \quad (۹.۵.۲)$$

در قضیهٔ محورهای موازی برای گشتاورهای لختی داریم

$$I_x = I_G + \bar{y}^2 A$$

که در آن I_G گشتاور دوم سطح نسبت به محور مرکز جرمی افقی است. اگر I_x را از معادلهٔ (۹.۵.۲) حذف کنیم

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y} A} + \bar{y} \quad (۱۰.۵.۲)$$

یا

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y} A} \quad (۱۱.۵.۲)$$

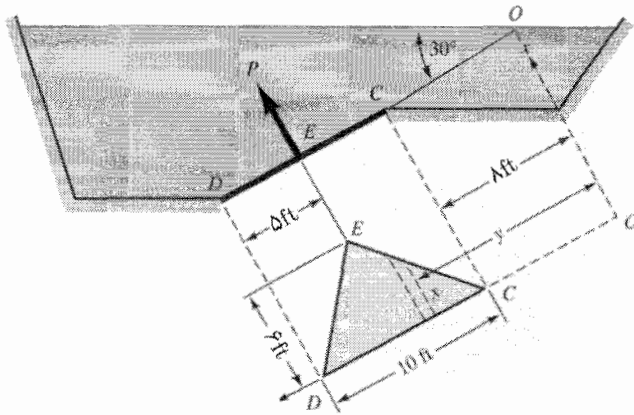
I_G همواره مثبت است. از این رو، $y_p - \bar{y}$ مثبت است و مرکز فشار در زیر مرکز سطح قرار دارد. تأکید می‌کنیم که \bar{y} و $y_p - \bar{y}$ فواصلی در صفحهٔ سطح‌اند.

مثال ۷.۲ دریچهٔ مثلثی CDE (شکل ۱۶.۲) در امتداد CD لولاشده و با نیروی عمودی P در E اثر می‌کند باز می‌شود. این دریچه روغنی با چگالی نسبی ۸ را در بالای خود نگه می‌دارد و طرف پایین آن به اتمسفر راه دارد. با صرف نظر از وزن دریچه، مطلوب است الف) مقدار نیروی وارد بر دریچه از طریق انتگرال‌گیری و با استفاده از فرمول (۲.۵.۲)؛ ب) محل مرکز فشار؛ ج) نیروی P لازم برای گشودن دریچه.

حل

الف) با انتگرال‌گیری، با توجه ب شکل ۱۶.۲

$$F = \int_A p dA = \gamma \sin \theta \int y x dy = \gamma \sin \theta \int_8^{12} x y dy + \gamma \sin \theta \int_3^8 x y dy$$



شکل ۱۶.۲ دریچه مثلثی.

وقتی $y = 8$ ، $x = 0$ ؛ وقتی $y = 13$ ، $x = 6$ به طور خطی تغییر می‌کند. از این رو

$$x = ay + b \quad 0 = 8a + b \quad 6 = 13a + b$$

که در آن مختصات را جایگزین کرده‌ایم تا x برحسب y پیدا شود. با حل الف و ب

$$a = \frac{6}{5} \quad b = -\frac{48}{5} \quad x = \frac{6}{5}(y - 8)$$

به طریق مشابه، $x = 6$ ، $y = 13$ ؛ $x = 0$ ، $y = 18$ ؛ و $x = \frac{6}{5}(18 - y)$. بنابراین

$$F = \gamma \sin \theta \frac{6}{5} \left[\int_8^{13} (y - 8)y dy + \int_{13}^{18} (18 - y)y dy \right]$$

با انتگرال‌گیری و جایگزینی برای $\gamma \sin \theta$ نتیجه می‌شود

$$F = 62.4(0.8)(0.50) \times \frac{6}{5} \left[\left(\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right)_8^{13} + \left(9y^2 - \frac{y^3}{3} \right)_{13}^{18} \right]$$

$$= 9734.4 \text{ lb}$$

از معادله (۲.۵.۲)

$$F = p_G A = (\gamma \bar{y} \sin \theta) A = 62.4(0.80)(13)(0.50)(30) = 9734.4 \text{ lb}$$

(ب) با محورهای نشان داده شده، $\bar{x} = ۲٫۰$ و $\bar{y} = ۱۳$ در معادله (۸.۵.۲)

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x}$$

به علت تقارن نسبت به محور مرکز جرمی موازی با محور x ، \bar{I}_{xy} صفر است؛ بنابراین
معادله (۱۱.۵.۲) $\bar{x} = x_p = ۲٫۰$ ft

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} = ۲ \times \frac{۱ \times ۶ \times ۵^3}{۱۲ \times ۱۳ \times ۳۰} = ۰٫۳۲ \text{ ft}$$

یعنی مرکز فشار ۰٫۳۲ ft پایین مرکز سطح در صفحه سطح قرار دارد.

(ج) وقتی گشتاورگیرها را نسبت به CD انجام دهیم و اثر روغن را با برابند جایگزین کنیم، به دست می‌آید

$$P \times ۶ = ۹۷۳۴٫۴ \times ۲ \quad P = ۳۲۴۴٫۸ \text{ lb}$$

منشور فشار

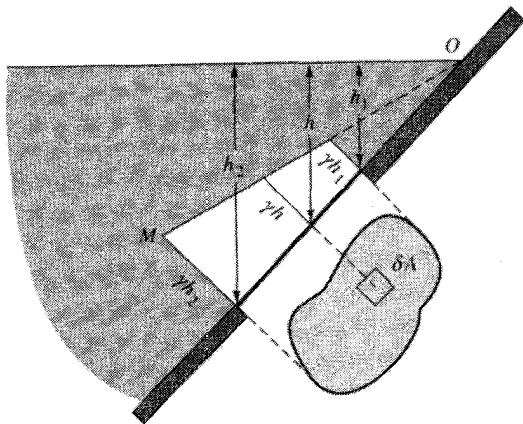
روش دیگری برای تعیین نیروی برابند خط حاصل نیروی وارد بر یک سطح مستوی، استفاده از مفهوم منشور فشار است. منشور فشار یک حجم منشوری است که قاعده آن مساحت معینی دارد و ارتفاعش در هر نقطه قاعده از رابطه $p = \gamma h$ به دست می‌آید. h فاصله قائم تا سطح آزاد (شکل ۱۷.۲) است. (اگر هیچ سطح آزاد حقیقی وجود نداشته باشد، برای تعریف h از یک سطح آزاد فرضی می‌توان استفاده کرد.) در شکل، γh را با هر مقیاس مناسبی می‌توان رسم کرد، به طوری که که رد آن OM باشد. نیروی وارد بر مساحت جزئی عبارت است از

$$\delta F = \gamma h \delta A = \delta \mathcal{F} \quad (۱۲.۵.۲)$$

که این جزء حجم منشور فشار است. بعد از انتگرال‌گیری، $F = \mathcal{F}$ ، حجم منشور فشار با مقدار نیروی برابند مؤثر بر یک طرف سطح مساوی می‌شود.

از معادله‌های (۵.۵.۲) و (۶.۵.۲)

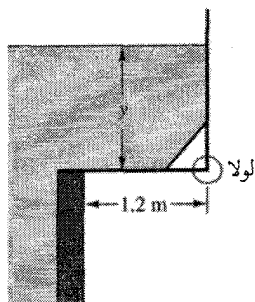
$$x_p = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} x d\mathcal{F} \quad y_p = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} y d\mathcal{F} \quad (۱۳.۵.۲)$$



شکل ۱۷.۲ منشور فشار.

که نشان می‌دهند x_p و y_p فواصل تا مرکز حجم منشور فشارند [پوست الف، معادله (الف ۵)]. بنابراین، خط حامل برآیند از مرکز حجم منشور فشار می‌گذرد. برای بعضی از سطوح ساده، استفاده از منشور فشار راحت‌تر از انتگرال‌گیری یا استفاده از فرمول است. مثلاً مساحت مستطیلی که یک لبه آن در سطح آزاد قرار داشته باشد منشور گوه‌ای شکل دارد. مرکز حجم آن در یک سوم ارتفاع از قاعده است؛ بنابراین مرکز فشار در یک سوم ارتفاع از لبه پایین منشور قرار دارد.

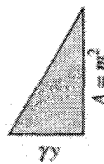
مثال ۸.۲ سازه‌ای در امتداد یک کانال طوری قرار دارد که وقتی ارتفاع آب به مقدار معین y (شکل ۱۸.۲ الف) می‌رسد آن را بیرون می‌ریزد. درجه از ورق فولادی به وزن 2500 N/m^2 ساخته شده است. ارتفاع y را تعیین کنید.



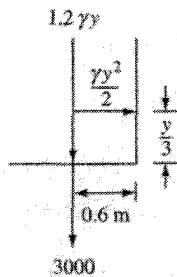
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۸.۲ آرایه آب از پهلوی کانال.

حل

با استفاده از مفاهیم منشور فشار، برای عرض واحد عمود بر صفحه کاغذ، از حجم منشور فشار به قاعده $۱٫۲\text{m}^2$ و ارتفاع ثابت $\gamma y\text{N}/\text{m}^2$ نیروی وارد بر ورق افقی (شکل ۱۸.۲ ب) تعیین می‌شود و نتیجه $F_y = ۱٫۲\gamma y\text{N}$ است که در مرکز قاعده اثر می‌کند. منشور فشار برای وجه قائم (شکل ۱۸.۲ ج) یک گوه به قاعده $y\text{m}^2$ و ارتفاع متغیر $0\text{N}/\text{m}^2$ تا $\gamma y\text{N}/\text{m}^2$ است. ارتفاع متوسط $\gamma y/2$ است، بنابراین $F_x = \gamma y^2/2\text{N}$. مرکز حجم منشور گوه‌ای در فاصله $y/3$ از لولاست. نیروی گرانی کف دریچه 3000N است که در مرکز آن اثر می‌کند. شکل ۱۸.۲ د، تمام نیروها و بازوهای گشتاور را نشان می‌دهد برای تعادل، مقدار y برای واژگونی گشتاورها حول لولا باید مساوی صفر باشد

$$M = 3000\text{N} \times 0.6\text{m} + 1.2\gamma y\text{N} \times 0.6\text{m} - \left(\frac{\gamma y^2}{2}\text{N}\right) \times \left(\frac{y}{3}\text{m}\right) = 0$$

یا

$$M = y^3 - 4r32y - 1r1014 = 0$$

این معادله فقط یک ریشه مثبت دارد، که به سهولت دیده می‌شود بین $y = 2$ و $y = 3$ است. با استفاده از روش نیوتن-رافسن (پیوست ب) داریم

$$y = y - \frac{M(y)}{M'(y)} = y - \frac{y^3 - 4r32y - 1r1014}{3y^2 - 4r32}$$

که روشی است متضمن تکرار. یک مقدار آزمونی برای y فرض می‌شود، مثلاً $y = 2.5$. با جایگذاری در طرف دست راست مقدار اصلاح شده y به دست می‌آید. با سه بار تکرار این روش، ریشه $y = 2.196\text{m}$ پیدا می‌شود. با استفاده از حسابگر قابل برنامه‌ریزی معادله درجه سه به سهولت حل شود. آماده کردن برنامه فقط به قدریک بار حل معادله با حسابگر، زحمت می‌برد. ■

آثار فشار اتمسفریک بر نیروهای وارد بر سطوح مستوی

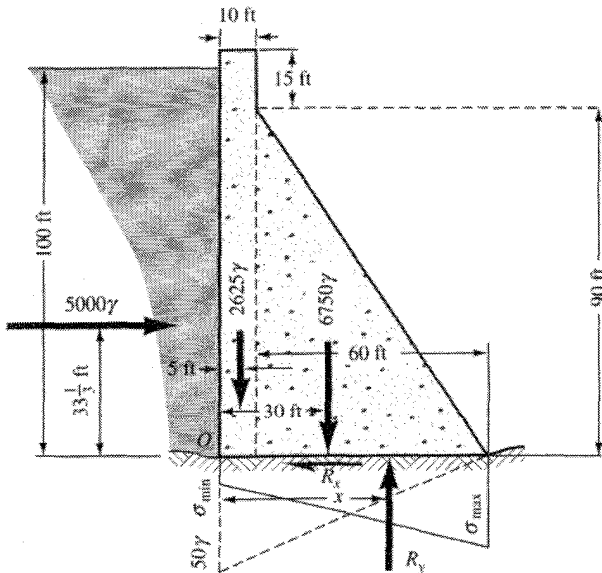
در بحث نیروها به داده فشار اشاره نشد. فشارها با رابطه $p = \gamma h$ محاسبه شدند، که در آن h فاصله قائم زیر سطح آزاد بود. بنابراین، داده عبارت بود از فشار پیمانه‌ای صفر یا فشار اتمسفریک محلی. وقتی طرف دیگر سطح به جو باز شود، نیرویی از طرف جو به آن اعمال می‌شود که مساوی است با حاصل ضرب فشار اتمسفریک p_0 در مساحت، یعنی $p_0 A$ ، که بر صفر مطلق به عنوان

داده، مبتنی است. نیروی وارد بر وجه مایع عبارت است از

$$\int (p_0 + \gamma h) dA = p_0 A + \gamma \int h dA$$

اثر $p_0 A$ جو بر هر دو طرف مساوی است و به هیچ طریق بر نیروی برآیند یا محل آن تأثیر ندارد. نا وقتی داده فشار یکسانی برای تمام وجوه یک جسم آزاد انتخاب شود، برآیند و گشتاور را با در نظر گرفتن یک سطح آزاد در فشار صفر بر مبنای این داده و با استفاده از روشهای بالا می توان تعیین کرد.

مثال ۹.۲ اعمال نیروهای فشاری بر سطوح مستوی در طراحی یک سد وزنی معلوم است. از نیروهایی که بر سد اثر می کنند ماکزیمم و مینیمم تنشهای فشاری در قاعده سد محاسبه می شوند. شکل ۱۹.۲ سطح مقطع یک سد بتونی را نشان می دهد که در آن نیروی گرانی واحد مساوی 2.5γ گرفته شده و γ نیروی گرانی واحد آب است. مقطعی یک متری از سد، جسم آزاد در نظر گرفته می شود؛ نیروها از بتون، آب، فشار فونداسیون و بالا برندگی هیدروستاتیکی ناشی می شوند. تعیین مقدار بُرا هیدروستاتیکی خارج از حوزه این بررسی است، اما فرض می شود که مقدارش



شکل ۱۹.۲ سد وزنی بتونی.

نصف ارتفاع هیدروستاتیکی در لبه فرادست جریان است و به طور خطی کاهش می‌یابد تا در لبه فرودست جریان به صفر می‌رسد. در قاعده سد، اصطکاک یا تنش برشی کافی باید به وجود آید تا با پیشرانۀ ناشی از آب که مساوی $R_x = 5000\gamma$ است متعادل شود. برآیند رو به بالای وارد بر قاعده مساوی است با تفاضل نیروی گرانی سد و برآ هیدروستاتیکی

$$R_y = 6750\gamma + 2625\gamma - 1750\gamma = 7625\text{lb}$$

محل R_y طوری است که جسم آزاد در تعادل است. برای گشتاورها حول O داریم

$$\sum M_o = 0$$

$$= R_y x - 5000\gamma(33,33) - 2625\gamma(5) - 6750\gamma(30) + 1750\gamma(23,33)$$

و

$$x = 44,8\text{ft}$$

معمولاً فرض می‌کنند که فشار فونداسیون بر قاعده سد به طور خطی تغییر می‌کند، یعنی منشور فشار یک ذوزنقه به حجم R_y است؛ از این رو

$$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \gamma_o = 7625\gamma$$

که در آن σ_{\max} ، σ_{\min} تنشهای فشاری ماکزیمم و مینیمم برحسب پوند بر فوت مربع‌اند. مرکز حجم منشور فشار نقطه‌ای است که در آن $x = 44,8\text{ft}$. برای تعیین مرکز حجم برحسب σ_{\min} و σ_{\max} نسبت به O گشتاور می‌گیریم

$$44,8 = \frac{(\sigma_{\min})\gamma_o \times \frac{\gamma_o}{2} + (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})\frac{\gamma_o}{2} \times \frac{2}{3}(\gamma_o)}{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})\frac{\gamma_o}{2}}$$

با ساده کردن نتیجه می‌شود

$$\sigma_{\max} = 11,75\sigma_{\min}$$

بنابراین

$$\sigma_{\max} = 210\gamma = 12500 \text{ lb/ft}^2 \quad \sigma_{\min} = 17.1\gamma = 10671 \text{ lb/ft}^2$$

وقتی برآیند در وسط یک سوم قاعده سد قرار می‌گیرد، σ_{\min} همیشه یک تنش فشاری است. به علت خواص کششی ضعیف بتون، طراحی خوب مستلزم این است که برآیند در حوالی نصف یک سوم قاعده واقع شود.

مثال ۱۰.۲ آب در لوله شکل ۲۰.۲ جمع می‌شود تا به عمق y برسد. در این عمق گشتاور کافی برای غلبه بر وزن و تعاونی به وجود می‌آید. با صرف نظر از وزن سازه، y را بیابید.

حل

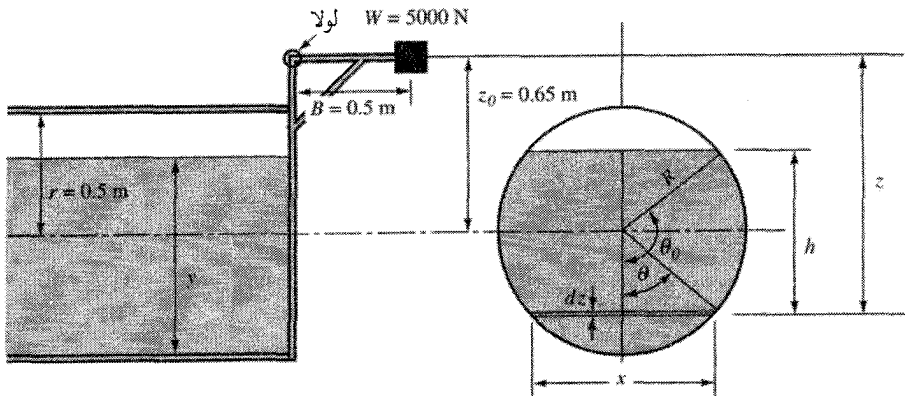
گشتاور نیروی فشاری مؤثر بر دریچه نسبت به لولا عبارت است از

$$\text{گشتاور} = -\gamma \int_{z_0+R}^{z_0+R \cos \theta_0} z h x dz = \int_0^{\theta_0} F(\theta) d\theta$$

که در آن

$$z = z_0 + R \cos \theta \quad dz = -R \sin \theta d\theta$$

$$h = R(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad x = 2R \sin \theta$$



شکل ۲۰.۲ دریچه در انتهای لوله.

بنابراین

$$F(\theta) = \gamma(z_o + R \cos \theta)R(\cos \theta - \cos \theta_o)2R^2 \sin^2 \theta$$

از روش نیمساز می‌توان استفاده کرد و θ_o را طوری تعیین کرد که گشتاور ناشی از مایع با گشتاور ناشی از وزنه برابر باشد. از آنجا که دنبال پاسخ بین $\theta_o = 0$ و $\theta_o = \pi$ هستیم، $\theta_{o, \max} = \pi$ و $\theta_{o, \min} = 0$ قرار می‌دهیم. بازه $d\theta$ عبارت است از θ_o/n ، که در آن n تعداد بازه‌هاست. بنابراین توزیع گشتاور از یک بازه عبارت است از

$$\text{گشتاور} = \frac{d\theta}{\gamma} [F(\theta) + F(\theta - d\theta)]$$

که برای n بازه جمع زده می‌شود. اگر گشتاور خیلی بزرگ باشد، θ_o بعدی بنا بر روش نیمساز کاهش می‌یابد. با استفاده از یک بهینه‌کننده یا تابع حل، از یک صفحه گسترده برای کسب نتایج می‌توان استفاده کرد:

$$\theta_o = 143.64^\circ \quad \text{عمق} = 0.9027 \text{ m}$$

تمرینها

۱.۵.۲ مقدار نیروی وارد بر یک طرف سطح مدوری به مساحت واحد، که مرکز سطح آن ۱۰ ft زیر سطح آزاد آب است، عبارت از: الف) کمتر از 10γ ؛ ب) به سمتگیری سطح بستگی دارد؛ ج) بزرگتر از 10γ ؛ د) حاصل ضرب γ در فاصله قائم از سطح آزاد تا مرکز فشار؛ ه) هیچکدام.

۲.۵.۲ در یک سطح مستطیلی ۳ m در ۴ m، لبه افقی پایینی ۳ m طول دارد و ۶ m پایین سطح آزاد روغن، $S = 0.8$ ، واقع است. سطح با افق زاویه 30° می‌سازد. نیروی وارد بر یک طرف سطح عبارت است از: الف) 38.4γ ؛ ب) 48γ ؛ ج) 51.2γ ؛ د) 60γ ؛ ه) هیچکدام.

۳.۵.۲ فاصله قائم مرکز فشار سطح در تمرین ۲.۵.۲ تا زیر سطح مایع عبارت است از: الف) 133 m ؛ ب) 51.33 m ؛ ج) 50.67 m ؛ د) 50 m ؛ ه) هیچکدام.

۴.۵.۲ مرکز فشار عبارت است از الف) مرکز سطح غوطه‌ور؛ ب) مرکز حجم منشور فشار؛ ج) مستقل از سمتگیری سطح؛ د) نقطه‌ای بر خط حامل نیروی برآیند؛ ه) همیشه بالای مرکز سطح.

۵.۵.۲ نیروی وارد بر سطح طوقه‌ای قائم در درون دایره‌های هم‌مرکز به شعاعی ۱ m و ۲ m چقدر است؟ مرکز در فاصله ۳ m زیر سطح آزاد آب است و نیروی گرانی واحد را γ می‌گیریم؛ الف) $3\pi\gamma$ ؛ ب) $9\pi\gamma$ ؛ ج) $10.25\pi\gamma$ ؛ د) $12\pi\gamma$ ؛ ه) هیچکدام.

۶.۵.۲ مرکز فشار سطح طوقه‌ای تمرین ۵.۵.۲ چقدر زیر مرکز سطح قرار دارد؟ (الف) ۰m؛ (ب) ۰.۴۲m؛ (ج) ۰.۴۴m؛ (د) ۰.۴۷m؛ (ه) هیچکدام.

۶.۵.۲ یک ضلع یک سطح قائم مثلثی شکل در سطح آزاد قرار دارد و رأس آن رو به پایین است. ارتفاع آن h است. مرکز فشار چقدر زیر سطح آزاد است؟ (الف) $h/4$ ؛ (ب) $h/3$ ؛ (ج) $h/2$ ؛ (د) $2h/3$ ؛ (ه) $3h/4$.

۶.۵.۲ یک دریچه قائم ۴m در ۴m، آبی را که سطح آزادش بالای دریچه است نگه می‌دارد. گشتاور نسبت به کف دریچه عبارت است از (الف) ۴۲٫۷۷؛ (ب) ۵۷٫۷؛ (ج) ۶۴٫۷؛ (د) ۸۵٫۳۷؛ (ه) هیچکدام.

۶.۲ مؤلفه‌های نیرو بر سطوح خمیده

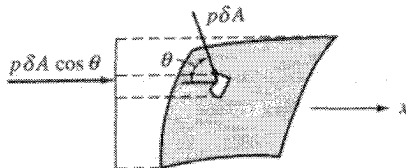
وقتی جهت نیروهای جزئی $p\delta A$ تغییر کند، مانند حالت سطوح خمیده، آنها را به صورت کمیتهای برداری باید جمع کرد؛ یعنی باید مؤلفه‌های آنها را در جهت‌های دو به دو عمود بر هم مانند اسکالرهای جمع کرد، و سپس سه مؤلفه را به صورت برداری جمع بست. با دو مؤلفه افقی عمود بر هم و یک مؤلفه قائم (که تمام آنها برای سطح خمیده به سهولت قابل محاسبه اند) برآیند را می‌توان تعیین کرد.

مؤلفه افقی نیروی وارد بر سطح خمیده

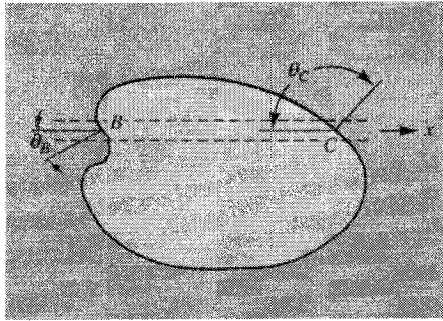
مؤلفه افقی نیروی فشاری وارد بر سطح خمیده مساوی است با نیروی فشاری وارد بر تصویر سطح خمیده. صفحه قائم تصویر بر امتداد مؤلفه عمود است. سطح شکل ۲۱.۲ را می‌توان هر سطح سه بعدی دانست. δA جزء سطح آن است؛ عمود بر این سطح با جهت منفی x زاویه θ می‌سازد. بنابراین

$$\delta F_x = p\delta A \cos \theta$$

عبارت است از مؤلفه x نیروی اعمال شده بر یک طرف δA . جمع مؤلفه‌های x نیرو بر روی سطح



شکل ۲۱.۲ مؤلفه افقی وارد بر سطح خمیده.



شکل ۲۲.۲ تصاویر اجزای سطح بر دو طرف جسم.

نتیجه می‌دهد

$$F_x = \int_A p \cos \theta dA \quad (۱.۶.۲)$$

$\cos \theta \delta A$ تصویر δA بر صفحه عمود بر x است. جزء نیروی وارد بر سطح تصویرشده مساوی $p \cos \theta \delta A$ است، که این نیز در جهت x است. تصویر کردن جزء بر صفحه عمود بر x هم‌ارز تصویر کردن کل سطح خمیده صفحه قائم است. از این رو، نیروی مؤثر بر این تصویر سطح خمیده عبارت است از مؤلفه افقی نیروی وارد بر سطح خمیده در جهت عمود بر صفحه تصویر. برای پیدا کردن مؤلفه افقی در جهت عمود بر امتداد x ، سطح خمیده را بر صفحه قائم موازی با x تصویر می‌کنیم و نیروی وارد بر تصویر را می‌یابیم.

وقتی مؤلفه افقی نیروی فشاری وارد به جسم بسته‌ای را بخواهیم پیدا کنیم، تصویر سطح خمیده بر صفحه قائم همیشه صفر است، زیرا همان‌طور که در شکل ۲۲.۲ پیداست تصاویر اجزای سطح در دو طرف جسم علامتهای مخالف دارند. فرض کنیم استوانه کوچکی به سطح مقطع δA که محور آن با محور x موازی است جسم بسته را در B و C قطع کند. اگر جزء سطح جسم که توسط منشور در B قطع می‌شود برابر با δA_B و در C برابر δA_C باشد، داریم

$$\delta A_B \cos \theta_B = -\delta A_C \cos \theta_C = \delta A$$

چون $\cos \theta_C$ منفی است. از این رو، با توجه به یکسان بودن فشار در دو سر استوانه

$$p \delta A_B \cos \theta_B + p \delta A_C \cos \theta_C = 0$$

و به طریق مشابه در تمام دیگر اجزای سطح نیز وضع به همین منوال است.

برای پیدا کردن خط حامل مؤلفه افقی نیروی وارد بر سطح خمیده، برآیند سیستم نیروی موازی، متشکل از مؤلفه‌های نیروی هر جزء سطح، ضروری است. این برآیند دقیقاً برآیند نیروی وارد بر سطح تصویر شده است، زیرا این دو سیستم نیرو توزیع یکسانی از مؤلفه‌های نیروی افقی جزئی دارند. از این رو، مرکز فشار در سطح تصویر شده قرار دارد و با روشهای بخش ۵.۲ تعیین می‌شود.

مثال ۱۱.۲ معادله بیضوی مدور غوطه‌ور در آب $x^2/4 + y^2/4 + z^2/9 = 1$ است. مرکز جسم ۲م پایین سطح آزاد است. مؤلفه‌های افقی نیروی مؤثر بر سطح خمیده را که در یک هشتم اول واقع است پیدا کنید. صفحه xz را افقی و امتداد مثبت y را رو به بالا بگیرید.

حل

تصویر-سطح بر صفحه yz مساحت $m^2(3)(2)(\pi/4)$ دارد. مرکز سطح آن در $2m \times (\pi/3) - 2$ زیر سطح آزاد قرار دارد. از این رو

$$F_x = - \left(\frac{\pi}{4} \times 6 \right) \left(2 - \frac{1}{3\pi} \right) \gamma = - (5,425 m^2) (9806 N/m^2) = -53,2 kN$$

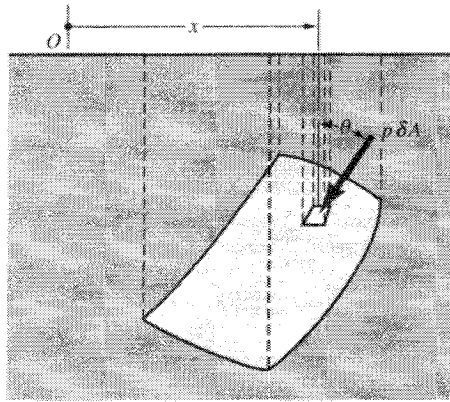
به طریق مشابه

$$F_z = - \left(\frac{\pi}{4} \times 4 \right) \left(2 - \frac{1}{3\pi} \right) \gamma = - (3,617 m^2) (9806 N/m^2) = -35,4 kN$$

مؤلفه قائم نیروی وارد بر سطح خمیده

مؤلفه قائم نیروی فشاری وارد بر سطح خمیده مساوی است با وزن مایعی که به‌طور قائم بر سطح خمیده قرار دارد و تا سطح آزاد ادامه می‌یابد. مؤلفه قائم نیروی وارد بر سطح خمیده را با جمع مؤلفه‌های قائم نیروی فشاری وارد بر سطحهای جزئی δA می‌توان تعیین کرد. در شکل ۲۳.۲ یک جزء سطح با نیروی $p\delta A$ که به‌طور عمودی بر آن اثر می‌کند نشان داده شده است. θ را زاویه بین عمود بر جزء سطح با قائم در نظر می‌گیریم بنابراین مؤلفه قائم نیروی مؤثر بر جزء سطح عبارت است از $p \cos \theta \delta A$ ، و مؤلفه قائم نیروی وارد بر سطح خمیده با رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$F_v = \int_A p \cos \theta dA \quad (2.6.2)$$



شکل ۲۳.۲ مؤلفه قائم نیروی وارد بر سطح خمیده.

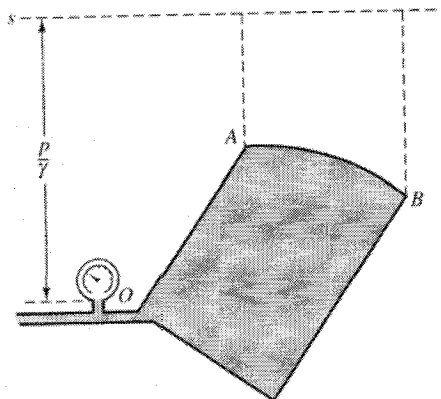
از آنجا که p با γh معادل است، که در آن h فاصله جزء سطح تا سطح آزاد است، و با توجه به اینکه $\cos\theta\delta A$ تصویر δA بر صفحه افقی است، معادله (۲.۶.۲) تبدیل می‌شود به

$$F_v = \gamma \int_A h \cos\theta dA = \gamma \int_V dV \quad (۳.۶.۲)$$

که در آن δV عبارت است از حجم منشور به ارتفاع h و قاعده $\cos\theta\delta A$ ، یا حجم مایعی که به طور قائم به جزء سطح قرار دارد. با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$F_v = \gamma V \quad (۴.۶.۲)$$

وقتی مایع در زیر سطح خمیده باشد (شکل ۲۴.۲) و مقدار فشار در نقطه‌ای مانند O معلوم باشد، یک سطح آزاد خیالی (فرضی) یا معادل آن مانند $s-s$ در فاصله p/γ بالای O می‌توان در نظر گرفت، به طوری که حاصل ضرب نیروی گرانی واحد در فاصله قائم سطح تا هر نقطه درون مخزن مساوی با فشار در آن نقطه باشد. در این صورت، حجم مایع خیالی که به طور عمودی بر سطح خمیده قرار دارد، مساوی با مؤلفه قائم نیروی فشاری وارد بر سطح خمیده است. وقتی یک سطح آزاد خیالی در نظر می‌گیریم، نیروی گرانی واحد مایع خیالی باید مساوی نیروی گرانی واحد مایعی باشد که با سطح خمیده تماس دارد. در غیر این صورت، توزیع فشار بر سطح به طور صحیح نشان داده نمی‌شود. با فرض وجود مایع خیالی بر یک سطح، فشار در یک نقطه واقع بر سطح خمیده در هر دو طرف مساوی است، اما مؤلفه‌های نیروی جزئی در جهت قائم علامتهای مخالف دارند. از این رو، وقتی سیال خیالی در بالای سطح است، جهت مؤلفه نیروی قائم وارونه



شکل ۲۴.۲ مایع با سطح آزاد معادل.

می‌شود. در بعضی حالتها مایع محبوسی ممکن است بالای سطح خمیده باشد که در این حالت برای تعیین سطح آزاد باید مایع خیالی افزود (یا کم کرد).

برای تعیین خط حامل مؤلفه قائم، گشتاورهای مؤلفه‌های قائم جزئی نسبت به یک محور مناسب را با گشتاور نیروی برابند مساوی قرار می‌دهیم. نسبت به محور در O (شکل ۲۳.۲) داریم

$$F_v \bar{x} = \gamma \int_V x dV$$

که در آن \bar{x} فاصله O تا خط حامل است. سپس، از آنجا که $F_v = \gamma V$ داریم

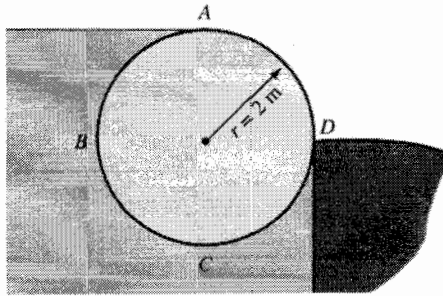
$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x dV$$

\bar{x} فاصله O تا مرکز حجم است. بنابراین، خط حامل نیروی قائم از مرکز حجم (واقعی یا خیالی) می‌گذرد که از سطح خمیده تا سطح آزاد واقعی یا خیالی گسترش دارد.

مثال ۱۲.۲ یک مانع استوانه‌ای (شکل ۲۵.۲) مطابق شکل آب را نگه می‌دارد. سطح تماس بین استوانه و دیوار صاف است. طول استوانه را ۱m در نظر می‌گیریم. مطلوب است الف) نیروی گرانی آن؛ ب) نیروی وارد بر دیوار.

حل

الف) برای تعادل، وزن استوانه باید مساوی مؤلفه قائم نیروی وارد از طرف آب بر آن باشد. (سطح



شکل ۲۵.۲ جسم نیمه شناور

آزاد خیالی برای CD در ارتفاع A است.) نیروی قائم وارد بر BCD عبارت است از

$$F_{vBCD} = \left(\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2 \right) \gamma = (2\pi + 8)\gamma$$

نیروی عمودی وارد بر AB عبارت است از

$$F_{vAB} = - \left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) \gamma = -(4 - \pi)\gamma$$

از این رو، نیروی گرانی بر هر متر طول عبارت است از

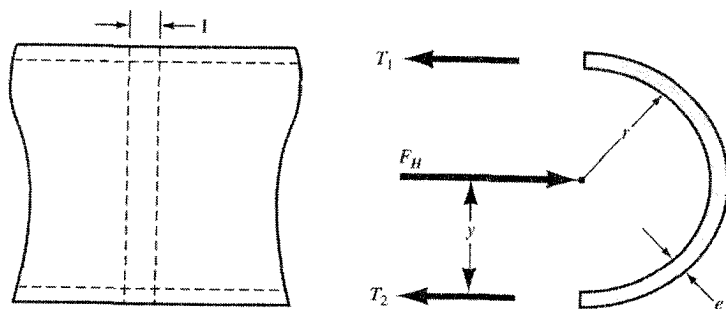
$$F_{vBCD} + F_{vAB} = (3\pi + 4)\gamma = 0.132 \text{ MN}$$

ب) نیروی وارد بر دیوار عبارت است از نیروی افقی بر ABC منهای نیروی افقی وارد بر CD . مؤلفه‌های افقی نیروی وارد بر BC و CD یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ تصویر BCD بر صفحه قائم صفر است. از این رو

$$F_H = F_{HAB} = 2\gamma = 19.6 \text{ kN}$$

زیرا مساحت تصویرشده مساوی 2 m^2 و فشار در مرکز سطح تصویرشده مساوی 9806 Pa است. ■

برای پیدا کردن واکنشهای خارجی ناشی از نیروهای فشاری، کنش سیال را با دو مؤلفه افقی و یک مؤلفه قائم که در امتداد خطوط حاملشان اثر می‌کنند می‌توان جایگزین کرد.



شکل ۲۶.۲ تنش کششی در لوله.

تنش کششی در لوله و پوسته کروی

لوله مدوری که تحت تأثیر فشار داخلی باشد در محیط خود تحت پسا قرار می‌گیرد. با فرض اینکه هیچ تنش طولی به وجود نیاید، دیواره‌ها (مطابق شکل ۲۶.۲) تحت پساند. مقطع لوله‌ای به طول واحد، یعنی حلقه‌ای بین دو صفحه عمود بر محور به فاصله واحد در نظر می‌گیریم. اگر نیمی از این حلقه را جسم آزاد بگیریم، کششهای طول واحد در بالا و پایین، مطابق شکل، به ترتیب T_1 و T_2 اند. مؤلفه افقی نیرو در مرکز فشار سطح تصویر شده اثر می‌کند و مساوی $2pr$ است که در آن p فشار در خط مرکزی و r شعاع داخلی لوله است.

برای فشارهای زیاد، مرکز فشار را می‌توان در مرکز لوله گرفت؛ بنابراین $T_1 = T_2$ ، و

$$T = pr \quad (۵.۶.۲)$$

که در آن T نیروی کششی بر طول واحد است. برای ضخامت دیواره e ، تنش کششی در دیواره لوله عبارت است از

$$\sigma = \frac{T}{e} = \frac{pr}{e} \quad (۶.۶.۲)$$

برای تغییرات بیشتر فشار بین سر و ته لوله، مرکز فشار y محاسبه می‌شود. در معادله موردنیاز است

$$T_1 + T_2 = 2pr \quad 2rT_1 - 2pry = 0$$

معادله دوم معادله گشتاور نسبت به انتهای پایین جسم آزاد است که در آن از مؤلفه قائم نیرو

صرف نظر شده است. پس از حل، به دست می‌آید

$$T_1 = py \quad T_2 = p(2r - y)$$

مثال ۱۳.۲ یک لوله فولادی به قطر داخلی ۱۰۰ mm دیواره‌ای به ضخامت ۶ mm دارد. برای تنش کششی مجاز ۷۰ MPa، ماکزیم فشار چقدر است؟

حل

از معادله (۶.۶.۲) داریم

$$p = \frac{\sigma e}{r} = \frac{(70 \text{ MPa})(0.006 \text{ m})}{0.05 \text{ m}} = 42 \text{ MPa}$$

اگر پوسته کروی نازکی تحت تأثیر فشار داخلی باشد، با صرف نظر از وزن سیال داخلی کره، و با احتساب نیروهای وارد بر جسم آزاد، متشکل از نیم‌کره‌ای که با یک صفحه قائم از کره جدا شده است، تنش در دیواره‌های پوسته کروی را می‌توان پیدا کرد. مؤلفه عمود بر صفحه نیروی سیال که بر جداره داخلی نیم‌کره اثر می‌کند مساوی $p\pi r^2$ است، که شعاع r شعاع (کره) است. تنش σ ضرب در مساحت دیواره بریده شده، یعنی $2\pi r e$ ، با نیروی سیال باید تعادل داشته باشد. ضخامت است؛ از این رو

$$\sigma = \frac{pr}{2e}$$

تمرینها

۱.۶.۲ مؤلفه افقی نیروی وارد بر سطح خمیده مساوی است با الف) نیروی گرانی مایعی که به طور قائم بر سطح قرار دارد؛ ب) نیروی گرانی مایعی که آن را سطح خمیده جابه جا می‌کند؛ ج) حاصل ضرب فشار در مرکز سطح و مساحت؛ د) نیروی وارد بر تصویر سطح خمیده روی یک صفحه قائم؛ ه) جمع اسکالر تمام مؤلفه‌های جزئی افقی.

۲.۶.۲ لوله‌ای به قطر ۵ m باید آب را در فشار ۱۴ MPa حمل کند. برای تنش کششی مجاز ۵۵ MPa، ضخامت دیواره لوله برحسب میلیمتر عبارت است از الف) ۳۲؛ ب) ۴۲؛ ج) ۶۴؛ د) ۸۰؛ ه) هیچکدام.

۳.۶.۲ مؤلفه قائم نیروی فشاری وارد بر سطح خمیده غوطه‌ور مساوی است با الف) مؤلفه افقی اش؛ ب) نیروی وارد بر تصویر قائم سطح خمیده؛ ج) حاصل ضرب فشار در مرکز سطح در مساحت سطح؛ د) نیروی گرانی مایعی که به طور قائم بر سطح خمیده قرار دارد؛ ه) هیچکدام.

۴.۶.۲ مؤلفه قائم نیروی وارد بر نیمه فوقانی یک استوانه قائم دوار در حالت افقی، به قطر ۳ft و طول ۱۰ft، و پراز آب با فشار ۴۳۳psi در مرکز، برحسب kN (عبارت است از الف) ۴۵۸lb-؛ (ب) ۳۳۳lb-؛ (ج) ۱۲۴r۸lb (د) ۱۸۷۲lb (ه) هیچکدام.

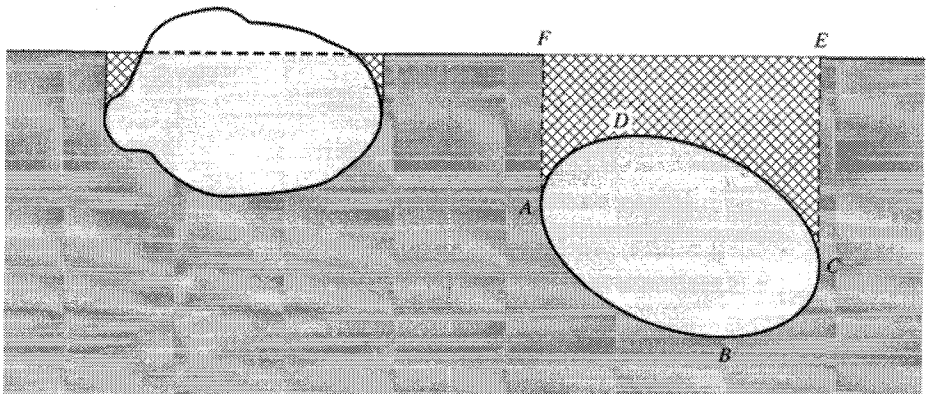
۵.۶.۲ یک بشکه چوبی استوانه‌ای با تسمه‌هایی در سر و ته نگه داشته می‌شود. وقتی بشکه پر از آب باشد، نسبت پسا ناشی از مایع در تسمه سر به پسا در تسمه ته عبارت است از الف) ۱/۲؛ (ب) ۱؛ (ج) ۲؛ (د) ۳؛ (ه) هیچکدام.

۶.۶.۲ لوله‌ای به قطر داخلی ۵۰mm و با ضخامت دیواره ۵mm، آب را در فشار ۸۹MPa حمل می‌کند. تنش کششی در دیواره لوله برحسب مگاپاسکال عبارت است از الف) ۴۹؛ (ب) ۹۸؛ (ج) ۱۹۶؛ (د) ۳۹۲؛ (ه) هیچکدام.

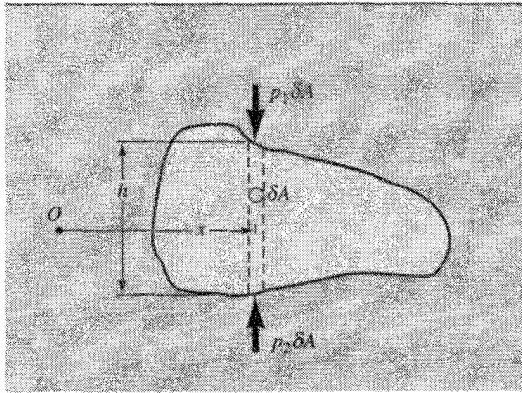
۷.۲ نیروی شناوری

نیروی برآیند وارد از سیال استاتیکی بر جسم غوطه‌ور یا شناور در آن را نیروی شناوری می‌گویند. نیروی شناوری همیشه به‌طور قائم رو به بالا اثر می‌کند. برآیند، هیچ مؤلفه افقی ندارد، زیرا تصویر جسم غوطه‌ور یا تصویر قسمت غوطه‌ور جسم شناور صفحه قائم همیشه صفر است.

نیروی شناوری وارد بر جسم غوطه‌ور عبارت است از تفاضل مؤلفه قائم نیروی فشاری وارد بر قسمت پایین جسم و مؤلفه قائم نیروی فشاری وارد بر قسمت بالایی آن. در شکل ۲۷.۲، نیروی رو به بالای وارد بر کف مساوی است با نیروی گرانی مایع (واقعی یا خیالی) که به‌طور قائم بر سطح ABC قرار دارد و با نیروی گرانی مایع درون $ABCEFA$ نشان داده می‌شود. نیروی رو به پایین وارد بر سطح بالایی مساوی نیروی گرانی مایع درون $ADCEFA$ است. تفاضل دو نیرو یک



شکل ۲۷.۲ نیروی شناوری وارد بر اجسام شناور و غوطه‌ور.



شکل ۲۸.۲ مؤلفه‌های قائم نیروی وارد بر جزء جسم.

نیروی قائم رو به بالا است که مساوی نیروی گرانی سیال $ABCD$ است (که توسط جسم جامد جابه جا می‌شود). به صورت معادله، داریم

$$F_B = \forall \gamma \quad (۱.۷.۲)$$

که در آن F_B نیروی شناوری، \forall حجم سیال جابه جا شده، و γ نیروی گرانی واحد سیال است. همین فرمول برای اجسام شناور به هنگامی که \forall حجم مایع جابه جا شده باشد صادق است. این موضوع از بررسی جسم شناور در شکل ۲۷.۲ آشکار است.

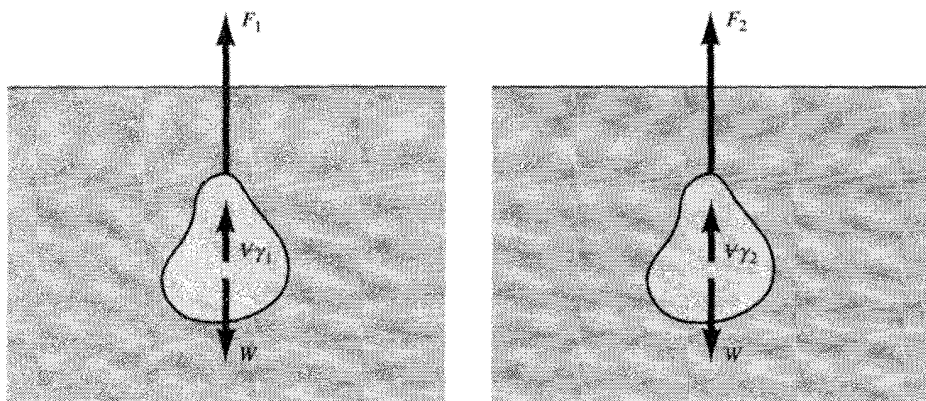
در شکل ۲۸.۲ نیروی قائم اعمال شده بر یک جزء جسم که به صورت منشور قائمی به سطح مقطع δA باشد عبارت است از

$$\delta F_B = (p_2 - p_1)\delta A = \gamma h \delta A = \gamma \delta \forall$$

که در آن \forall δ حجم منشور است. وقتی γ در سراسر حجم ثابت فرض شود، با انتگرال‌گیری روی کل جسم، به دست می‌آید

$$F_B = \gamma \int_{\forall} d \forall = \gamma \forall$$

برای پیدا کردن خط حامل نیروی شناوری، گشتاورها را نسبت به یک محور مناسب O می‌گیریم



شکل ۲۹.۲ نمودار آزاد برای جسم معلق در سیال.

و مساوی گشتاور برابند قرار می‌دهیم؛ به این ترتیب

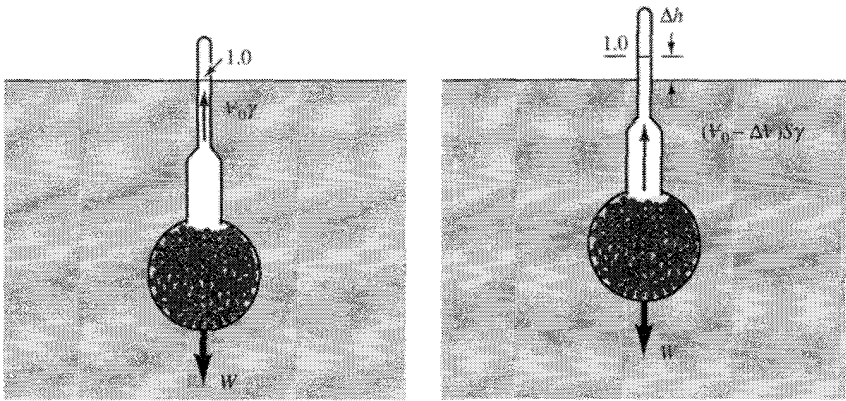
$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x dV \quad \text{یا} \quad \gamma \int_V x dV = \gamma V \bar{x}$$

که در آن \bar{x} فاصله محور تا خط حامل است. از این معادله، فاصله تا مرکز حجم به دست می‌آید. از این رو، نیروی شناوری در مرکز حجم سیال جابه جا شده اثر می‌کند. این موضوع برای اجسام غوطه‌ور و شناور صادق است. مرکز حجم سیال جابه جا شده را مرکز شناوری می‌گویند. در حل مسائل استاتیک، هنگامی که با اشیاء غوطه‌ور یا شناور سر و کار داریم، معمولاً شیء را جسم آزاد در نظر می‌گیریم و نمودار آزاد را رسم می‌کنیم. کنش سیال جای خود را به نیروی شناوری می‌دهد. نیروی گرانی شیء را (که در مرکز گرانی آن اثر می‌کند) نیز باید علاوه بر تمام نیروهای تماسی دیگر نشان داد.

تعیین نیروی گرانی وارد بر شیئی که شکل غیرمستقیم دارد و در دو سیال مختلف معلق است، اطلاعات کافی برای تعیین نیروی گرانی حجمی، نیروی گرانی واحد، و چگالی نسبی شیء به دست می‌دهد. شکل ۲۹.۲ دو نمودار آزاد را برای یک شیء معلق و نیروی گرانی که در دو سیال تعیین شده است، یعنی F_1 و F_2 ، نشان می‌دهد، γ_1 و γ_2 نیروهای گرانی واحد دو سیال اند. W و V نیروی گرانی و حجم شیء را می‌خواهیم پیدا کنیم.

معادله‌های تعادل را می‌نویسیم

$$F_1 + V \gamma_1 = W \quad F_2 + V \gamma_2 = W$$



شکل ۳۰.۲ چگالی سنج در آب و در مایع چگالی نسبی.

و حل می‌کنیم

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad W = \frac{F_1 \gamma_2 - F_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

در چگالی‌سنج از اصل نیروی شناوری برای تعیین چگالی نسبی مایعات استفاده می‌شود. شکل ۳۰.۲ یک چگالی‌سنج را در دو مایع نشان می‌دهد. چگالی‌سنج، ساقه‌ای با سطح مقطع منشوری a دارد. مایع سمت چپ آب مقطر است و $S = 1.0$ ؛ لذا چگالی‌سنج وقتی به تعادل می‌رسد که

$$V_0 \gamma = W \quad (2.7.2)$$

در این معادله V_0 حجم غوطه‌ور، γ نیروی گرانی واحد آب، و W نیروی گرانی چگالی‌سنج است. مکان سطح بر روی ساقه با 1.0 مشخص شده است تا چگالی نسبی واحد S را نشان دهد. وقتی چگالی‌سنج در مایع دیگری شناور شود، معادله تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$(V_0 - \Delta V) S \gamma = W \quad (3.7.2)$$

که در آن $\Delta V = a \Delta h$. با حل Δh از معادله‌های (۲.۷.۲) و (۳.۷.۲) به دست می‌آوریم

$$\Delta h = \frac{V_0 \cdot S - 1}{a \cdot S} \quad (4.7.2)$$

که به کمک آن می‌توان ساقه را درجه‌بندی کرد تا چگالی نسبی را خواند.

مثال ۱۴.۲ یک قطعه سنگ معدن که نیروی گرانی آن در هوا $۱۵N$ است وقتی در آب غوطه‌ور شود نیروی گرانی $۱۱N$ دارد. حجم آن برحسب سانتیمتر مکعب، و چگالی نسبی‌اش چقدر است؟

حل

از نیروی شناوری ناشی از هوا می‌توان صرف‌نظر کرد. از شکل ۲۹.۲

$$۱۵N = ۱۱N + (۹۸۰۶N/m^3) \gamma$$

$$\gamma = ۰.۰۰۰۰۴۰۸m^3 = ۴۰.۸cm^3$$

$$S = \frac{W}{\gamma \gamma} = \frac{۱۵N}{(۹۸۰۶N/m^3)(۰.۰۰۰۰۴۰۸m^3)} = ۳.۷۵$$

تمرینها

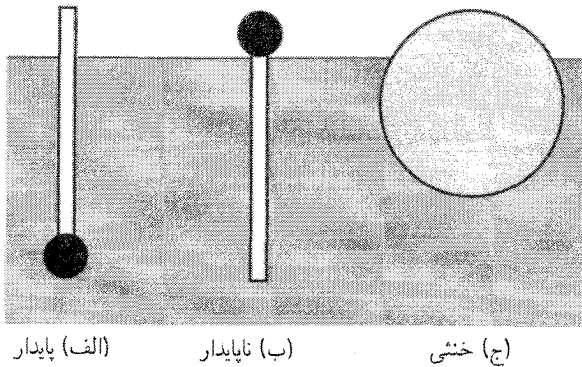
۱.۷.۲ یک تیغهٔ چوبی $۱m$ در $۱m$ در $۰.۲۵m$ ، $S = ۰.۵۰$ ، با بار $۴۰N$ در آب شناور می‌شود. حجم قسمت غوطه‌ور آن برحسب متر مکعب عبارت است از الف) ۰.۴۳ ؛ ب) ۱.۲۵ ؛ ج) ۱.۶۶ ؛ د) ۲.۹۳ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۷.۲ خط حامل نیروی شناوری از این نقطه می‌گذرد: الف) مرکزگرانی جسم غوطه‌ور؛ ب) مرکز حجم جسم شناور؛ ج) مرکز حجم سیال جابه‌جا شده؛ د) مرکز حجم سیالی که به‌طور قائم بر جسم قرار دارد؛ ه) مرکز سطح تصویر افقی جسم.

۳.۷.۲ نیروی شناوری عبارت است از الف) نیروی برآیند وارد به جسم از طرف سیال اطراف آن؛ ب) نیروی برآیند مؤثر بر جسم شناور؛ ج) نیروی لازم برای حفظ تعادل جسم غوطه‌ور؛ د) نیروی غیرقائم برای اجسام غیرمتقارن؛ ه) حجم مایع جابه‌جا شده.

۸.۲ پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور

جسمی که در سیال استاتیکی شناور است پایداری عمودی دارد. هر جابه‌جایی کوچکی در جهت بالا، حجم مایع جابه‌جا شده را کاهش می‌دهد و نیروی نامتعادلی رو به پایین به وجود می‌آورد که می‌خواهد جسم را به وضعیت اولیه‌اش برگرداند. به طریق مشابه، هر جابه‌جایی کوچکی در جهت پایین باعث نیروی شناوری بیشتری می‌شود که نیروی نامتعادلی را در جهت بالا پدید می‌آورد.

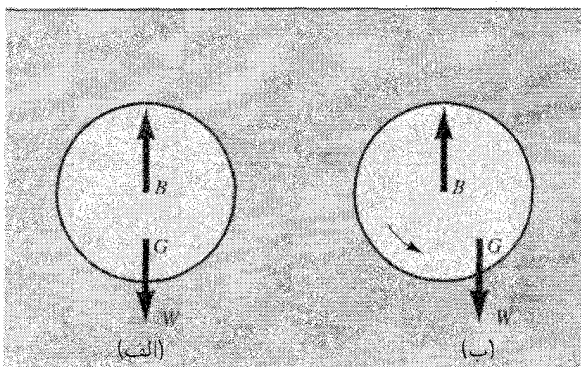


شکل ۳۱.۲ نمونه‌هایی از تعادل پایدار، ناپایدار و خنثی.

هر جسمی وقتی پایداری خطی دارد که جابه‌جایی خطی کوچکی در هر جهتی نیروهای بازگرداننده‌ای به وجود آورد که بخواهند جسم را به وضع اولیه‌اش برگردانند. جسم وقتی پایداری دورانی دارد که هر جابه‌جایی زاویه‌ای کوچکی یک گشتاور بازگرداننده به وجود آورد.

روشهای تعیین پایداری دورانی را در بحث زیر نشان می‌دهیم. جسم یا در تعادل پایدار شناور می‌شود یا در تعادل ناپایدار و یا در تعادل خنثی. وقتی جسم در تعادل ناپایدار است، هر جابه‌جایی زاویه‌ای کوچکی یک گشتاور به وجود می‌آورد که می‌خواهد جابه‌جایی زاویه‌ای را افزایش دهد. اگر جسم در تعادل خنثی باشد، جابه‌جایی زاویه‌ای کوچک هیچ گشتاوری به وجود نمی‌آورد. شکل ۳۱.۲ سه حالت تعادل را نشان می‌دهد؛ الف) قطعه چوب سبکی که در کف آن یک جرم فلزی قرار دارد پایدار است؛ ب) وقتی جرم فلزی در سر باشد جسم در تعادل است، اما هر جابه‌جایی زاویه‌ای کوچکی آن را به وضع a بر می‌گرداند؛ ج) یک کره یا استوانه قائم مدور همگن با هرگونه دوران زاویه‌ای در تعادل است، یعنی هیچ گشتاوری بر اثر جابه‌جایی زاویه‌ای به وجود نمی‌آید. شیء کاملاً غوطه‌ور فقط وقتی تعادل دورانی دارد که مرکز گرانی آن، مطابق شکل ۳۲.۲ الف، در زیر مرکز شناوری باشد. وقتی شیء، مطابق شکل ۳۲.۲ ب، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، نیروی شناوری و نیروی گرانی یک گشتاور در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به وجود می‌آورند.

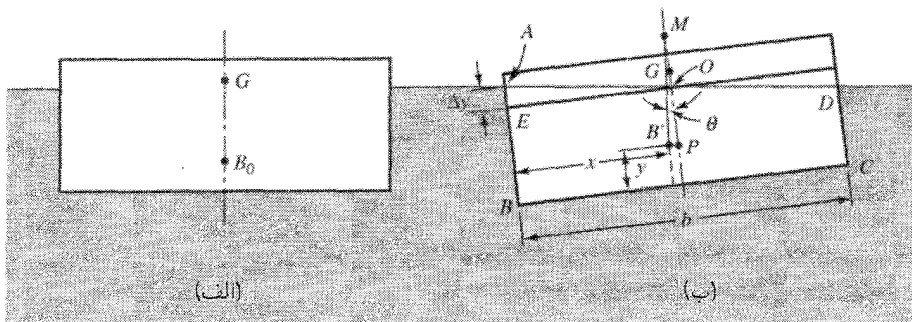
معمولاً، جسم وقتی سنگینتر از آن باشد که شناور شود، غوطه می‌خورد و رو به پایین می‌رود تا اینکه در کف به حالت سکون درآید. نیروی گرانی واحد یک مایع با افزایش عمق به‌طور جزئی افزایش می‌یابد، اما فشار بیشتر موجب می‌شود که مایع جسم را بفشارد یا در خلل و فرج مواد جامد نفوذ کند و بدین ترتیب شناوری جسم را کاهش دهد. برای مثال، کشتی به محض اینکه غوطه‌ور



شکل ۳۲.۲ جسم غوطه‌ور با تعادل دورانی.

شود، بر اثر تراکم هوای محبوس در قسمتهای مختلفش کاملاً به ته آب می‌رود. هر شیء شناوری که مرکز گرانی آن زیر مرکز شناوری‌اش (مرکز حجم جابه‌جاشده) باشد، مطابق شکل ۳۱.۲ الف، در تعادل پایدار است. ولی، بعضی از اشیاء شناور وقتی مرکز گرانی آنها بالای مرکز شناوری است در تعادل پایدارند. ابتدا پایداری اجسام منشوری را بررسی می‌کنیم، و به دنبال آن اجسام شناور کلی را در زاویه‌های کوچک واژگونی تحلیل می‌کنیم.

شکل ۳۳.۲ الف، مقطع یک جسم را با تمام مقاطع موازی دیگر نشان می‌دهد. مرکز شناوری همیشه در مرکز جرم حجم جابه‌جاشده قرار دارد، که در این حالت در مرکز جرم سطح مقطع زیر سطح مایع قرار دارد. از این رو، وقتی جسم، مطابق شکل ۳۳.۲ ب، واژگون شود، مرکز شناوری در مرکز سطح B' دوزنقه $ABCD$ قرار دارد، نیروی شناوری رو به بالا و مارِ بر B' است، و نیروی گرانی رو به پایین و مارِ بر G ، یعنی مرکز گرانی جسم، عمل می‌کند. وقتی خط قائم مارِ بر B' خط مرکزی اولیه را در بالای G و مثلاً در M قطع کند، یک گشتاور (جفت) بازگرداننده به وجود می‌آید



شکل ۳۳.۲ پایداری جسم منشوری.

و جسم در تعادل پایدار است. محل تلاقی نیروی شناوری و خط مرکزی را شبه مرکز می‌گویند و با M نشان می‌دهند. اگر M بالای G باشد، جسم پایدار است، اگر M زیر G باشد، جسم ناپایدار است؛ اگر M بر G منطبق باشد، جسم در تعادل خنثی است. فاصله MG را ارتفاع شبه مرکز می‌گویند که معیاری مستقیم برای پایداری جسم است. گشتاور (جفت) بازگرداننده عبارت است از

$$W \overline{MG} \sin \theta$$

که در آن θ جابه‌جایی زاویه‌ای و W نیروی گرانی جسم است.

مثال ۱۵.۲ در شکل ۳۳.۲ یک قایق به عرض ۲۰ ft و طول ۶۰ ft، جرم ناخالص ۲۲۵ تن (۲۰۰۰ lb) دارد. مرکز گرانی آن ۱ ft بالای سطح آب است. مطلوب است ارتفاع شبه مرکز و جفت بازگرداننده وقتی $\Delta y = ۱ ft$.

حل

عمق غوطه‌وری h در آب عبارت است از

$$h = \frac{۲۲۵(۲۰۰۰)}{۲۰(۶۰)(۶۲.۴)} = ۶ ft$$

مرکز سطح در وضعیت واژگونی با گشتاورگیری نسبت به AB و BC محاسبه می‌شود

$$x = \frac{۵(۲۰)(۱۰) + ۲(۲۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۲۰}{۳}\right)}{۶(۲۰)} = ۹.۴۶ ft$$

$$y = \frac{۵(۲۰)\left(\frac{۵}{۲}\right) + ۲(۲۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(۵\frac{۲}{۳}\right)}{۶(۲۰)} = ۳.۰۳ ft$$

در مثلث‌های متشابه AEO و $B'PM$

$$\frac{\Delta y}{b/۲} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{MP}}$$

$$\Delta y = ۱؛ b/۲ = ۱۰؛ \overline{B'P} = ۱۰ - ۹.۴۶ = ۰.۵۴ ft؛ \overline{MP} = ۱$$

$$\overline{MP} = \frac{۰.۵۴(۱۰)}{۱} = ۵.۴۰ ft$$

G به اندازه ۷۷°ft از ته فاصله دارد؛ از این رو

$$\overline{GP} = ۷۷.۰ - ۳۰.۳ = ۳۹.۷\text{ft}$$

$$\overline{MG} = \overline{MP} - \overline{GP} = ۵۲.۰ - ۳۹.۷ = ۱۲.۳\text{ft}$$

قایق پایدار است زیرا \overline{MG} مثبت است، گشتاور راست‌گرد عبارت است از

$$W\overline{MG} \sin \theta = ۲۲۵(۲۰۰۰) \frac{۱}{\sqrt{۱۰۱}} = ۶۴۰۰۰\text{lb} \cdot \text{ft}$$

تمرینها

۱.۸.۲ یک جسم با تعادل پایدار وقتی شناور می‌شود که الف) ارتفاع شبه مرکز صفر باشد؛ ب) فقط مرکزگرانی آن زیر مرکز شناوری باشد؛ ج) $(I/\overline{GB}) - (I/\overline{G})$ مثبت باشد؛ د) I/\overline{G} مثبت باشد؛ ه) شبه مرکز در بالای مرکزگرانی باشد.

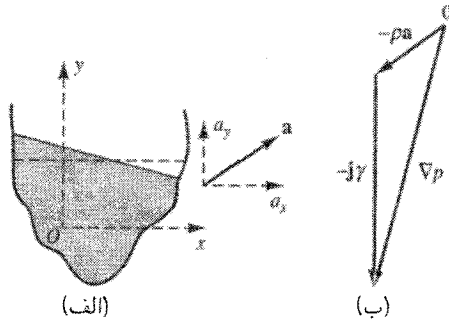
۲.۸.۲ یک جعبه فلزی مکعبی بسته به ضلع ۱m از ورق یکنواخت ساخته شده و جرم آن ۵۵kg است. وقتی در روغن، $S = 0/90$ ، قرار گیرد و وجوه آن عمود باشند، ارتفاع شبه مرکز آن عبارت است از الف) ۵۸m ؛ ب) ۷۸m ؛ ج) ۳۳m ؛ د) ۴۶۷m ؛ ه) هیچکدام.

۹.۲ تعادل نسبی

در استاتیک سیالات، تغییر فشار را به سهولت می‌توان محاسبه کرد، زیرا تنشهای برشی وجود ندارد. برای حرکتی از سیال نیز که در آن هیچ لایه‌ای نسبت به لایه مجاور حرکت نکند، تنش برشی در سراسر سیال صفر است. سیالی نیز که با سرعت یکنواخت منتقل شود از قوانین تغییر فشار استاتیکی پیروی می‌کند. وقتی سیال طوری شتاب بگیرد که هیچ لایه‌ای نسبت به لایه مجاور حرکت نکند، یعنی وقتی سیال طوری حرکت کند که گویی جامد است، هیچ تنش برشی به وجود نمی‌آید، و با نوشتن معادله مناسب حرکت جسم آزاد می‌توان تغییر فشار را حساب کرد. دو حالت مورد نظر است: یکی شتاب خطی یکنواخت و دیگری چرخش یکنواخت حول محور قائم. وقتی سیال به این طریق حرکت کند، می‌گویند سیال در تعادل نسبی است.

تعادل نسبی پدیده‌ای در استاتیک نیست، اما به علت تشابه رابطه‌ها در اینجا درباره‌اش بحث

می‌کنیم.



شکل ۳۴.۲ شتاب با سطح آزاد.

شتاب خطی یکنواخت

مطابق شکل ۳۴.۲، به مایع داخل یک ظرف باز، شتاب خطی یکنواخت a داده می‌شود. بعد از چند لحظه مایع خود را با شتاب تطبیق می‌دهد، به طوری که مانند یک جامد حرکت می‌کند (یعنی فاصله بین هر دو ذره سیال ثابت می‌ماند) و هیچ‌گونه تنش برشی به وجود نمی‌آید. اگر یک دستگاه مختصات دکارتی x و y را طوری انتخاب کنیم که بردار شتاب a در صفحه xy باشد (شکل ۳۴.۲ الف)، محور z بر a عمود می‌شود و هیچ مؤلفه شتاب در این جهت وجود ندارد. معادله (۵.۲.۲) برای این حالت به کار می‌رود

$$f - j\gamma = -\nabla p - j\gamma = \rho a \quad (5.2.2)$$

در این صورت، گرادیان فشار ∇p ، مطابق شکل ۳۴.۲ ب، عبارت است از جمع برداری $-\rho a$ و $-j\gamma$. از آنجا که ∇p در جهت تغییر ماکزیمم p (گرادیان) است، در امتداد عمود بر ∇p هیچ تغییری در p رخ نمی‌دهد. بنابراین، سطوح فشار ثابت، از جمع سطح آزاد، باید بر ∇p عمود باشند. برای به دست آوردن یک عبارت مناسب جبری در مورد تغییر p با x ، y و z ، یعنی $p = p(x, y, z)$ معادله (۵.۲.۲) را به صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم

$$\nabla p = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} = -j\gamma - \frac{\gamma}{g}(i a_x + j a_y)$$

یا

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma}{g} a_x \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \left(1 + \frac{a_y}{g} \right) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

از آنجا که p تابع مکان (x, y, z) است، دیفرانسیل کلی عبارت است از

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

با جایگذاری برای دیفرانسیلهای جزئی، نتیجه می‌شود

$$dp = -\gamma \frac{a_x}{g} dx - \gamma \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) dy \quad (1.9.2)$$

که برای سیال تراکم‌ناپذیر می‌توان از آن انتگرال گرفت

$$p = -\gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y + c$$

برای ارزیابی مقدار ثابت انتگرال c ، قرار می‌دهیم $x = 0$ ، $y = 0$ و $p = p_0$ ؛ بنابراین $c = p_0$ و

$$p = p_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y \quad (2.9.2)$$

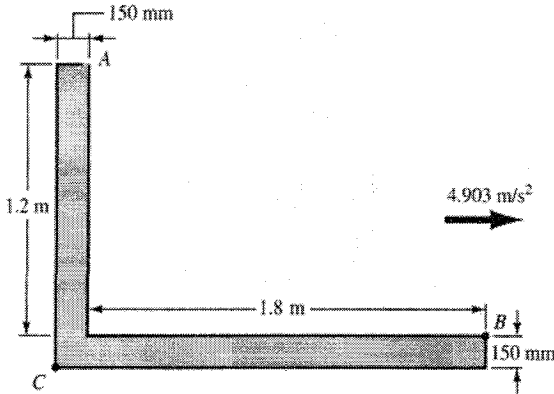
وقتی سیال تراکم‌ناپذیر شتاب گرفته دارای سطح آزاد باشد، معادله آن با قراردادن $p = 0$ در معادله (۲.۹.۲) به دست می‌آید. حل معادله (۲.۹.۲) برای y می‌دهد

$$y = -\frac{a_x}{a_y + g} x + \frac{p_0 - p}{\gamma(1 + a_y/g)} \quad (3.9.2)$$

خطوط فشار ثابت، ثابت p ، شیب $-a_x/(a_y + g)$ دارند و همگی با سطح آزاد موازی‌اند. تلاقی سطح آزاد عبارت است از

$$\frac{p_0}{\gamma(1 + a_y/g)}$$

مثال ۱۶.۲ مخزن شکل ۳۵.۲ پر از روغن با چگالی نسبی ۰.۸ است و با شتاب مشخص شده حرکت می‌کند. سوراخ کوچک A در مخزن وجود دارد. مطلوب است فشار در B و C ، و شتاب a_x لازم برای اینکه فشار در B صفر باشد.



شکل ۳۵.۲ مخزن کاملاً پراز مایع.

حل

با انتخاب نقطه A به عنوان مبدأ و با استفاده از معادله (۲.۹.۲) برای $a_y = 0$ داریم

$$p = -\gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma y = -\frac{0.8(9806 \text{ N/m}^3)(4.903 \text{ m/s}^2)}{9.806 \text{ m/s}^2} x - 0.8(9806 \text{ N/m}^3)y$$

یا

$$p = -3922.4x - 7844.8y \text{ Pa}$$

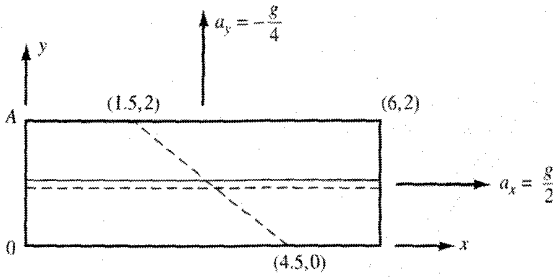
در B، $x = 1.8 \text{ m}$ ، $y = -1.2 \text{ m}$ و $p = 2.35 \text{ kPa}$ در C، $x = -0.15 \text{ m}$ ، $y = -1.35 \text{ m}$ داریم برای فشار صفر در B، از معادله (۲.۹.۲) با مبدأ A داریم

$$0 = 0 - \frac{0.8(9806 \text{ N/m}^3)}{9.806 \text{ m/s}^2} 1.8 a_x - 0.8(9806 \text{ N/m}^3)(-1.2)$$

یا

$$a_x = 6.537 \text{ m/s}^2$$

مثال ۱۷.۲ یک جعبه بسته با قاعده افقی ۶ واحد در ۶ واحد و ارتفاع ۲ واحد تا نیمه پراز مایع است (شکل ۳۶.۲). به این جعبه شتاب خطی ثابت $a_x = g/2$ و $a_y = -g/4$ داده می‌شود. معادله تغییر فشار را در امتداد قاعده جعبه بنویسید.



شکل ۳۶.۲ شتاب خطی یکنواخت ظرف.

حل

شیب سطح آزاد عبارت است از

$$\frac{-a_x}{a_y + g} = \frac{-g/2}{-g/4 + g} = -\frac{2}{3}$$

از این رو، سطح آزاد به صورتی که در شکل می بینید در می آید. اگر مبدأ را O بگیریم، معادله (۲.۹.۲) تبدیل می شود به

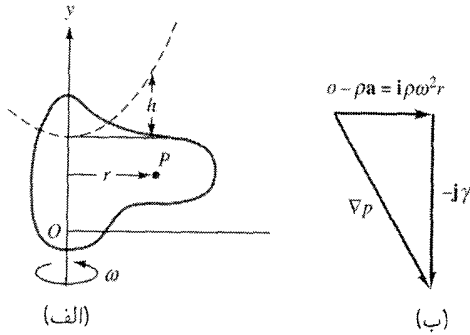
$$p = p_0 - \frac{\gamma}{4}x - \gamma \left(1 - \frac{1}{4}\right)y = p_0 - \frac{\gamma}{4} \left(x + \frac{3}{4}y\right)$$

از آنجا که $p = 0$ در نقطه $y = 0$ و $x = 4.5$. بنابراین $p_0 = 2.25\gamma$. پس برای $y = 0$ ، در امتداد کف

$$p = 2.25\gamma - 0.5\gamma x \quad 0 \leq x \leq 4.5$$

چرخش یکنواخت حول محور قائم

چرخش سیالی را که همانند جامد حرکت می کند، حول یک محور حرکت گرداب اجباری می گویند. تمام ذرات سیال سرعت زاویه ای یکسان دارند. این حرکت با حرکت گرداب آزاد تفاوت دارد. در حرکت گرداب آزاد، هر ذره سیال در مسیر دایروی و با سرعتی حرکت می کند که تغییراتش با فاصله از مرکز نسبت عکس دارد. حرکت گرداب آزاد را در فصلهای ۸ و ۱۱ بررسی می کنیم. مایع درون ظرف وقتی حول یک محور قائم با سرعت زاویه ای ثابت دوران کند، بعد از چند لحظه همانند جامد حرکت می کند. هیچ تنش برشی در مایع وجود ندارد، و تنها شتابی که به وجود می آید به طور شعاعی در جهت درون و به طرف محور دوران متوجه است. با انتخاب یک دستگاه مختصات



شکل ۳۷.۲ چرخش سیال حول محور قائم.

(شکل ۳۷.۲ الف) با بردار واحد i در جهت r و j در جهت قائم و رو به بالا، و با انتخاب y به عنوان محور دوران، برای تعیین تغییر فشار در سراسر سیال می‌توان معادله (۵.۲.۲) را به کار برد

$$\nabla p = -j\gamma - \rho a \quad (5.2.2)$$

در سرعت زاویه‌ای ثابت ω ، هر ذره سیال P شتاب $\omega^2 r$ دارد، که به‌طور شعاعی متمایل به داخل است، یعنی $a = -i\omega^2 r$. جمع برداری $-j\gamma$ و $-\rho a$ (شکل ۳۷.۲ ب) گرادیان فشار Δp را نتیجه می‌دهد. فشار در امتداد عمود بر این خط در یک نقطه تغییر نمی‌کند؛ از این رو، اگر P را در سطح در نظر بگیریم، سطح آزاد بر ∇p عمود است. از بسط معادله (۵.۲.۲) نتیجه می‌شود

$$i \frac{\partial p}{\partial r} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} = -j\gamma + i\rho\omega^2 r$$

k بردار واحد در امتداد محور z (یا جهت مماسی) است. بنابراین

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\gamma}{g}\omega^2 r \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

از آنجا که p فقط تابع y و r است، دیفرانسیل کلی dp عبارت است از

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial r} dr$$

جایگذاری برای $\partial p/\partial y$ و $\partial p/\partial r$ نتیجه می‌دهد

$$dp = -\gamma dy + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r dr \quad (4.9.2)$$

انتگرال‌گیری برای یک مایع (ثابت $\gamma \approx \gamma$) نتیجه می‌دهد

$$p = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} - \gamma y + c$$

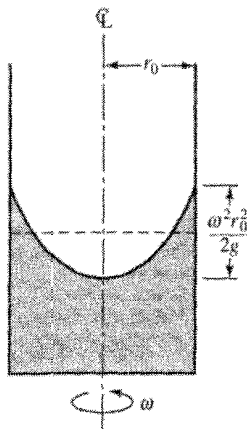
که در آن c ثابت انتگرال‌گیری است. اگر مقدار فشار در مبدأ ($y = 0, r = 0$) مساوی p_0 باشد، خواهیم داشت $c = p_0$ و

$$p = p_0 + \frac{\gamma}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} - \gamma y \quad (5.9.2)$$

وقتی صفحه افقی مخصوصی ($y = 0$) انتخاب کنیم که برای آن $p_0 = 0$ باشد و معادله (5.9.2) را بر γ تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (6.9.2)$$

که نشان می‌دهد ارتفاع، یا عمق قائم، با مربع شعاع تغییر می‌کند. سطوح هم‌فشار سهموی دوارند. اگر در طرفی که می‌چرخد یک سطح آزاد به وجود آید، حجم سیال زیر سهموی دوار همان حجم سیال اولیه است. شکل سهموی به سرعت زاویه‌ای ω بستگی دارد. در استوانه‌ای که حول محورش دوران کند (شکل 38.2) خیز مایع از رأس تا دیواره استوانه با



شکل 38.2 چرخش استوانه قائم حول محورش.

توجه به معادله (۶.۹.۲) مساوی $\omega^2 r_0^2 / 2g$ است. از آنجا که حجم سهموی دوار نصف حجم استوانه محیطی آن است، حجم مایع بالای صفحه افقی ماربر رأس عبارت است از

$$\pi r_0^2 \times \frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

وقتی مایع در حال سکون است، این مایع نیز به اندازه عمق یکنواخت زیر در بالای صفحه ماربر رأس قرار دارد

$$\frac{1}{2} \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

از این رو، مایع در دیواره‌ها به همان اندازه‌ای بالا می‌رود که مرکز پایین می‌آید؛ از این رو، وقتی ω ، r_0 و عمق قبل از دوران معلوم باشد، محل رأس را می‌توان تعیین کرد.

مثال ۱۸.۲ مایعی با چگالی نسبی $S = ۱.۲$ با ۲۰ rpm حول محور قائمی دوران می‌کند. در نقطه A واقع در سیال به فاصله ۱ m از محور، فشار ۷ kPa است. فشار در نقطه B که ۲ m بالاتر از A و در فاصله ۱.۵ m از محور است چقدر است؟

حل

اگر معادله (۵.۹.۲) را برای دو نقطه بنویسیم نتیجه می‌گیریم

$$p_A = p_0 + \gamma \frac{\omega^2 r_A^2}{2g} - \gamma y \quad p_B = p_0 + \gamma \frac{\omega^2 r_B^2}{2g} - \gamma(y + 2)$$

پس $\omega = 200(2\pi/60) = 20.95 \text{ rad/s}$ ، $\gamma = 1.2 \times 9806 = 11767 \text{ N/m}^3$ ، $r_B = 1.5 \text{ m}$ و $r_A = 1 \text{ m}$ معادله دوم را از معادله اول تفریق و مقادیر را جایگزین می‌کنیم

$$70000 - p_B = (2 \text{ m})(11767 \text{ N/m}^3) + \frac{11767 \text{ N/m}^3}{2(9.806 \text{ m/s}^2)} (20.95 \text{ /s})^2 \times [1 \text{ m}^2 - (1.5 \text{ m})^2]$$

بنابراین

$$p_B = 3756 \text{ kPa}$$

اگر ظرف بسته‌ای که هیچ سطح آزاد ندارد، یا سطح آزاد آن جزئی است، حول محور قائمی به‌طور یکنواخت دوران کند، می‌توان یک سطح آزاد خیالی در نظر گرفت؛ این سطح آزاد عبارت

تعداد نسبی ۱۰۳

است از سهموی دواری که شکل آن از معادله (۶.۹.۲) به دست می‌آید. فاصله قائم بر نقطه داخل سیال تا این سطح آزاد مساوی با ارتفاع فشار در آن نقطه است.

مثال ۱۹.۲ یک لوله مستقیم ته‌بسته و پر از آب به طول ۴ft، با محور قائم زاویه 30° می‌سازد و حول محور قائمی مابزر نقطه مرکزی با سرعت 87.2 rad/s دوران می‌کند. سهموی فشار-صفر را رسم کنید، و فشار را در ته وسط لوله به دست آورید.

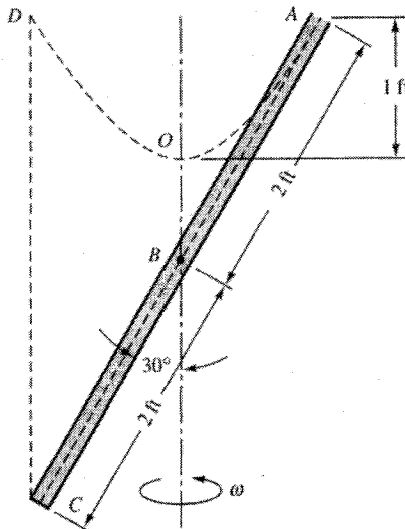
حل

در شکل ۳۹.۲، سهموی فشار-صفر از نقطه A می‌گذرد. اگر مبدأ را در رأس، یعنی $p_0 = 0$ فرض کنیم، معادله (۶.۹.۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{(87.2)^2 (2 \sin 30^\circ)^2}{64.4} = 17 \text{ ft}$$

که نشان می‌دهد رأس در O ، یعنی 17 ft زیر A ، قرار دارد. فشار در ته لوله عبارت است از $\gamma \times \overline{CD}$

$$4 \cos 30^\circ \times 62.4 = 216 \text{ lb/ft}^2$$



شکل ۳۹.۲ چرخش لوله مایل مایع محور قائم.

در نقطه وسط، $\overline{OB} = ۰٫۷۳۲\text{ft}$ و

$$p_B = ۰٫۷۳۲ \times ۶۲٫۴ = ۴۵٫۶\text{lb/ft}^2$$

نیروهای فشاری سیال در تعادل نسبی

مقدار نیروی مؤثر بر یک سطح مستوی مماس با مایعی که مانند جسم صلب شتاب می‌گیرد با انتگرال‌گیری روی سطح به دست می‌آید

$$F = \int p \, dA$$

نوع شتاب و سمت‌گیری سطح بر تغییر مخصوص p روی سطح اثر می‌گذارد. وقتی فشار بر سطح مستوی به‌طور خطی تغییر کند (شتاب خطی)، مقدار نیرو از حاصل ضرب فشار در مرکز سطح و مساحت به دست می‌آید، زیرا حجم منشور فشار مساوی pGA است. برای توزیعهای غیرخطی، مقدار و خط حامل را می‌توان با انتگرال‌گیری به دست آورد.

تمرینها

۱.۹.۲ یک جعبه مکعبی بسته، به ضلع ۱m ، تا نیمه آب دارد، و نیمه دیگر با روغن $۰٫۷۵$ پر شده است. اگر جعبه در امتداد قائم و رو به بالا به اندازه $۴٫۹۰۳\text{m/s}^2$ شتاب بگیرد، اختلاف فشار بین ته و سر برحسب کیلوپاسکال عبارت است از الف) $۴٫۹$ ؛ ب) ۱۱ ؛ ج) $۱۲٫۹$ ؛ د) $۱۴٫۷$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۹.۲ اگر جعبه تمرین ۱.۹.۲ در جهت افقی و به موازات یک وجه به اندازه $۱۶٫۱\text{ft/s}^2$ به‌طور یکنواخت شتاب بگیرد، شیب فصل مشترک عبارت است از الف) ۰° ؛ ب) $۱/۴$ ؛ ج) $۱/۲$ ؛ د) ۱ ؛ ه) هیچکدام.

۳.۹.۲ اگر فشار مینیمم در جعبه تمرین ۲.۹.۲ صفر پیمانه‌ای باشد، فشار ماکزیمم برحسب متر آب عبارت است از الف) ۹۴° ؛ ب) ۱۲۵ ؛ ج) ۱۳۱ ؛ د) $۱٫۵$ ؛ ه) هیچکدام.

۴.۹.۲ مایع داخل استوانه‌ای به‌طور ۱۰m به اندازه ۲۰gm/s^2 در امتداد محور استوانه به‌طور افقی شتاب می‌گیرد. اگر نیروی گرانی واحد باشد، اختلاف شدت فشار در دو انتهای استوانه برحسب پاسکال عبارت است از الف) ۲۰۰g ؛ ب) ۲۰۰g ؛ ج) ۲۰۰g ؛ د) ۲۰۰g ؛ ه) هیچکدام.

۵.۹.۲ وقتی مایعی حول محور قائمی همانند جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران کند، فشار الف) با مربع فاصله شعاعی کاهش می‌یابد؛ ب) با فاصله شعاعی به‌طور خطی افزایش می‌یابد؛ ج) با مربع افزایش ارتفاع در امتداد هر خط قائم کاهش می‌یابد؛ د) با ارتفاع در امتداد هر خط قائم به‌طور معکوس تغییر می‌کند؛ ه) با مربع فاصله شعاعی تغییر می‌کند.

۶.۹.۲ وقتی مایعی حول یک محور قائم مانند جسم صلبی دوران کند طوری که فشار نقاط واقع بر محور مساوی با فشار نقاطی باشد که ۲ft بالاتر و ۲ft دورتر از محور قرار دارند، سرعت زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه عبارت است از الف) ۸r^۰۲؛ ب) ۱۱r^۰۳۴؛ ج) ۶۴r^۰۴؛ د) نمی‌توان تعیین کرد؛ ه) هیچکدام.

۷.۹.۲ استوانه قائم مدوری که یک سر آن باز است بر از مایع، $S = ۱۲$ ، است و حول محور قائمش با سرعتی دوران می‌کند که نیمی از مایع بیرون می‌ریزد. فشار در مرکز ته استوانه عبارت است از: الف) صفر؛ ب) یک‌چهارم فشاری که اگر استوانه پر بود حاصل می‌شد؛ ج) به دلیل کمبود داده‌ها قابل تعیین نیست؛ د) بزرگتر از حالت مشابهی که مایع آب باشد؛ ه) هیچکدام.

۸.۹.۲ گرداب اجباری الف) در خلاف جهت گرداب آزاد می‌چرخد؛ ب) همیشه همراه با گرداب آزاد رخ می‌دهد؛ ج) سرعتی دارد که با شعاع کاهش می‌یابد؛ د) وقتی به وجود می‌آید که سیال مانند جامد دوران کند؛ ه) سرعتی دارد که با عکس شعاع کاهش می‌یابد.

مسائل

۱.۲ ثابت کنید که فشار در تمام جهتهای یک نقطه سیال استاتیکی در حالت سه‌بعدی یکسان است.

۲.۲ ساختمان امپایر استیت به ارتفاع ۱۲۵۰ft است. اختلاف فشار ستونی از آب با همان ارتفاع برحسب پوند بر اینچ مربع چقدر است؟

۳.۲ مطلوب است فشار در نقطه‌ای واقع در ۱۰m زیر سطح آزاد سیالی که چگالی متغیر، برحسب کیلوگرم بر مترمکعب، با رابطه $\rho = ۴۵۰ + ah$ دارد، که در آن $a = ۱۲\text{kg/m}^۳$ و h فاصله برحسب متر است که از سطح آزاد اندازه‌گیری می‌شود.

۴.۲ یک لوله شیشه‌ای عمودی در ساختمانی شامل گاز، $\rho = ۰.۰۰۲\text{slug/ft}^۳$ ، است و در زیرزمین، پیمانه‌ای $p = ۳.۰\text{in H}_2\text{O}$ در نوک ساختمان به ارتفاع ۸۰۰ft، مطلوب است فشار پیمانه‌ای گاز برحسب اینچ آب با این فرض که الف) گاز تا کم‌ناپذیر باشد و ب) گاز تک دما باشد. فشار جوسنجی H_2O ۳۴ft است و $t = ۷۰^\circ\text{F}$.

۵.۲ معادله‌هایی بنویسید برای تعیین فشار و چگالی در هر ارتفاعی از یک گاز استاتیکی، با فرض معلوم بودن شرایط در یک ارتفاع و گرادیان دما β .

۶.۲ با حدگیری، وقتی $\beta \rightarrow 0$ ، از نتایج مسئله ۵.۲ حالت تک‌دما را نتیجه بگیرید.

۷.۲ با استفاده از نتایج مسئله ۵.۲، فشار و چگالی را در ارتفاع الف (3000 m به دست آورید، در صورتی که $p = 100\text{ kPa}$ و $t = 15^\circ\text{C}$ ؛ ب) در ارتفاع 3000 m برای هوا، و $\beta = -0.005^\circ\text{C}/\text{m}$.

۸.۲ وقتی فشار در سطح دریا 1 MPa مطلق است، برای هوای تک‌دمای 0°C فشار و چگالی را در 4000 m به دست آورید.

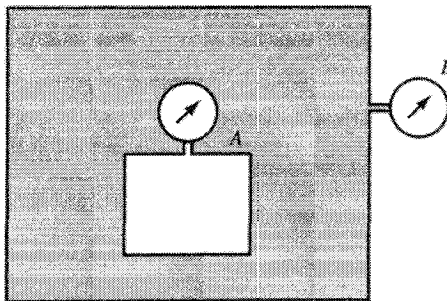
۹.۲ در هوای تک‌دمای 80°F فاصلهٔ قائم برای 10% درصد کاهش چگالی چقدر است؟

۱۰.۲ فشار 50 kPa را برحسب الف) میلی‌متر جیوه؛ ب) مترآب؛ ج) استیلن ترازبیمید، $S = 294$ ، بیان کنید.

۱۱.۲ پیمانهٔ بردن 2 psi مکش نشان می‌دهد، و جوسنج 29.5 inHg را. فشار را به دو طریق دیگر بیان کنید.

۱۲.۲ فشار 4 atm را برحسب متر پیمانه‌ای آب بیان کنید. جوسنج 750 mmHg نشان می‌دهد.

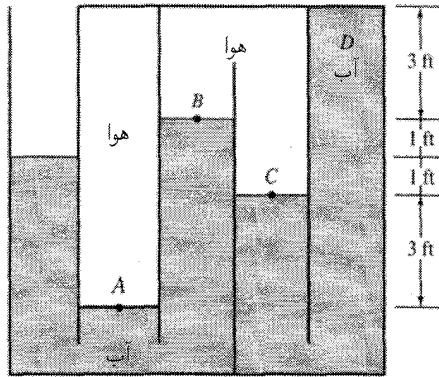
۱۳.۲ پیمانهٔ بردن A واقع در یک مخزن فشار (شکل ۴۰.۲) نشان می‌دهد. پیمانهٔ بردن دیگر B ، در خارج مخزن فشار و متصل به آب 20 psi نشان می‌دهد، و یک جوسنج فلزی 29 inHg را. فشار مطلق که A برحسب سانتیمتر جیوه اندازه می‌گیرد چقدر است؟



شکل ۴۰.۲ مسئله ۱۳.۲.

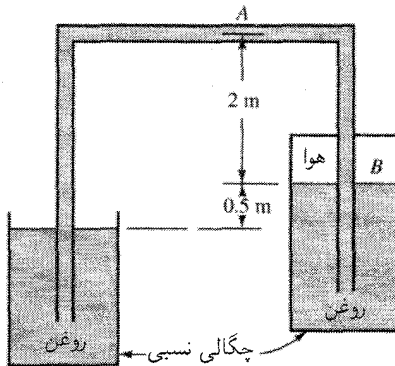
۱۴.۲ ارتفاع ستون آب، نفت 83°R ، و استیلن ترازبیمید، $S = 294$ ، معادل 300 mmHg را تعیین کنید.

۱۵.۲ طرف شکل ۴۱.۲ به صورتی که می‌بینید آب و هوا دارد. فشار در A ، B ، C و D برحسب پوند بر فوت مربع و پاسکال چیست؟



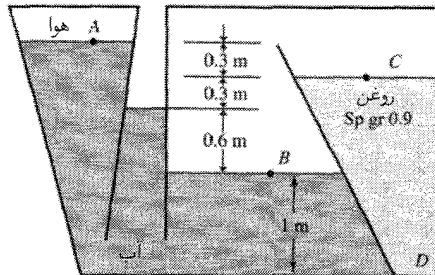
شکل ۴۱.۲ مسئله ۱۵.۲.

۱۶.۲ لوله شکل ۴۲.۲ پراز روغن است. فشار در A و B را برحسب متر آب به دست آورید.



شکل ۴۲.۲ مسئله ۱۶.۲.

۱۷.۲ فشار را در A ، B ، C و D در شکل ۴۳.۲ برحسب پاسکال محاسبه کنید.



شکل ۴۳.۲ مسئله ۱۷.۲.

۱۸.۲ در شکل ۱۰.۲ الف، برای خوانده $h = 20 \text{ in}$ ، فشار را در A برحسب پوند بر اینچ مربع بیابید. گرانش ویژه مایع 19° است.

۱۹.۲ در شکل ۱۰.۲ ب برای $p_A = 30 \text{ kPa}$ مکش، h را بیابید در صورتی که مایع نفت، 83° باشد، $S = 0.83$.

۲۰.۲ در شکل ۱۰.۲ ب، برای $h = 8 \text{ in}$ و خوانده جوسنج 29 inHg ، با آب به عنوان مایع فشارسنج، p_A مطلق را برحسب فوت آب بیابید.

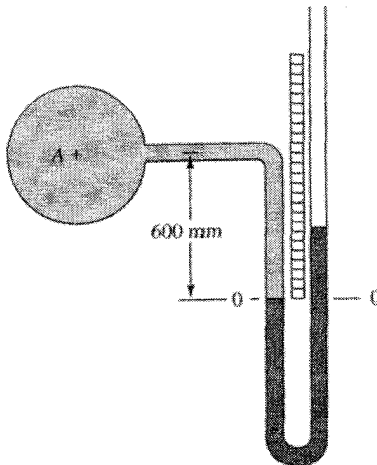
۲۱.۲ در شکل ۱۰.۲ ج، $S_1 = 0.86$ ، $S_2 = 1.0$ ، $h_1 = 150 \text{ mm}$ و $h_2 = 90 \text{ mm}$ ، p_A پیمانه‌ای را برحسب میلیمتر جیوه بیابید. اگر خوانده جوسنج 720 mmHg باشد، p_A مطلق برحسب متر آب چقدر است؟

۲۲.۲ ظرف A در شکل ۱۰.۲ ج حاوی گاز است. اگر مایع فشارسنج آب باشد و $h_1 = 75 \text{ mm}$ ، فشار در A را برحسب اینچ جیوه بیابید.

۲۳.۲ در شکل ۱۱.۲ الف، $S_1 = 1.0$ ، $S_2 = 0.95$ ، $S_3 = 1.0$ ، $h_1 = h_2 = 280 \text{ mm}$ و $h_3 = 1 \text{ m}$ را برحسب میلیمتر آب محاسبه کنید.

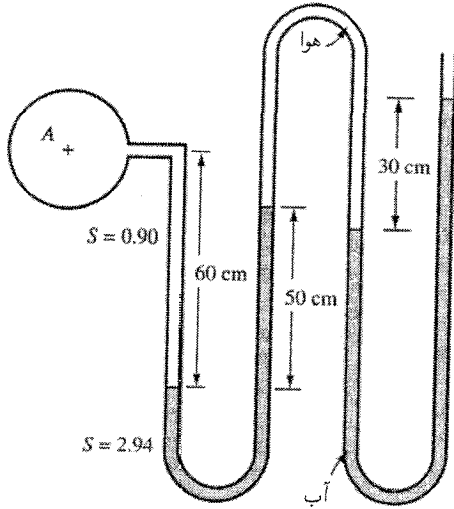
۲۴.۲ در مسئله ۲۳.۲ اختلاف پیمانه‌ای h_2 را در $350 \text{ mm H}_2\text{O}$ پیدا کنید.
 ۲۵.۲ در شکل ۱۱.۲ ب، $S_1 = S_2 = 0.83$ ، $S_3 = 1.36$ ، $h_1 = 150 \text{ mm}$ ، $h_2 = 70 \text{ mm}$ و $h_3 = 120 \text{ mm}$ (الف) اگر $p_A, p_B = 10 \text{ psi}$ را بیابید. (ب) برای $p_A = 2 \text{ psia}$ و خوانده جوسنج 720 mmHg ، p_B پیمانه‌ای را برحسب متر آب بیابید.

۲۶.۲ اختلاف پیمانه‌ای h_2 را در مسئله ۲۵.۲ برای $p_A = p_B$ پیدا کنید.
 ۲۷.۲ در شکل ۴۴.۲، A حاوی آب است و سیال فشارسنج چگالی 2.94 دارد. وقتی هلالی



شکل ۴۴.۲ مسئله ۲۷.۲.

سمت چپ روی صفر مقیاس قرار داشته باشد، $p_A = 100 \text{ mm H}_2\text{O}$ بدون تنظیم لوله U یا مقیاس، خوانده هلالی سمت راست را در $p_A = 8 \text{ kPa}$ پیدا کنید.
 ۲۸.۲ در شکل ۴۵.۲، فشار در A را برحسب پاسکال بیابید. فشار هوای داخل لوله چقدر است؟

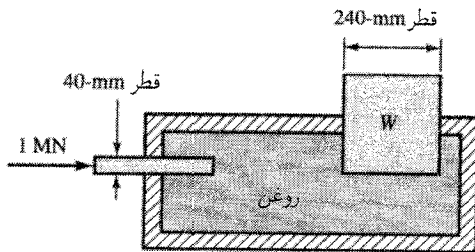


شکل ۴۵.۲ مسائل ۲۸.۲ و ۲۹.۲.

۲۹.۲ در شکل ۴۵.۲ اگر آب با جیوه جایگزین شود و اندازه‌گیریها مانند قبل باشند، فشار در A و فشار هوای داخل لوله چقدر است؟

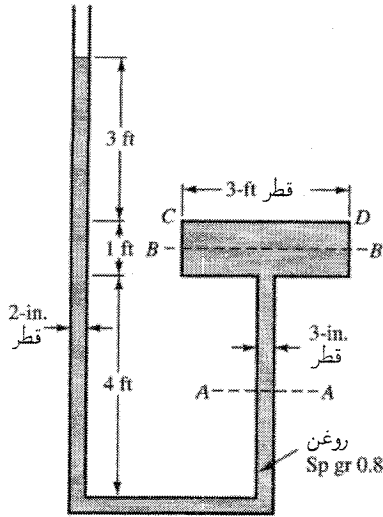
۳۰.۲ در شکل ۱۲.۲، R تفاضل پیمانه‌ای را برای اختلاف فشار گاز معادل $9 \text{ mm H}_2\text{O}$ به دست آورید. $\gamma_2 = 98 \text{ kN/m}^3$; $\gamma_3 = 105 \text{ kN/m}^3$ ؛ و $a/A = 0.1$.

۳۱.۲ فشار فشارسنج مایل شکل ۱۳.۲ وقتی A و B هم فشارند صفر را نشان می‌دهد. قطر مخزن 2 in و قطر لوله مایل $1 \frac{1}{2} \text{ in}$ است. در $\theta = 30^\circ$ ، برای سیال پیمانه‌ای با $S = 0.832$ ، مقدار $p_A - p_B$ را برپوند به اینچ مربع به صورت تابعی از خوانده پیمانه‌ای R بر فوت به دست آورید. 32.2 مطلوب است نیروی گرانی W که آن را نیروی مؤثر بر پیستون شکل ۴۶.۲ تحمل کند.



شکل ۴۶.۲ مسئله ۳۲.۲.

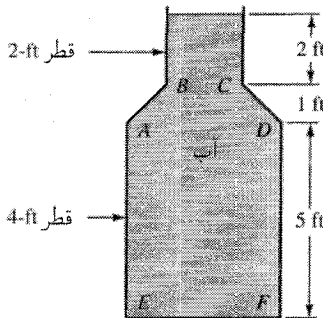
۳۳.۲ با صرف نظر از وزن ظرف (شکل ۴۷.۲)، مطلوب است الف) نیرویی که تمایل دارد سر مدور CD را بالا ببرد؛ ب) بار فشاری (تراکمی) بر دیواره لوله در $A - A$.



شکل ۴۷.۲ مسئله ۳۳.۲ و ۳۴.۲.

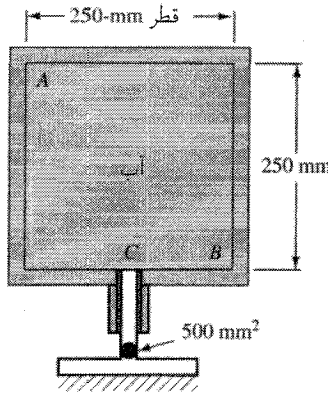
۳۴.۲ نیروی روغن را بر سطح فوقانی CD در شکل ۴۷.۲ پیدا کنید در صورتی که سطح مایع در لوله باز 1 m کاهش یابد.

۳۵.۲ ظرف شکل ۴۸.۲ مقطع دایروی دارد. نیروی رو به بالای وارد بر سطح مخروط ناقص $ABCD$ را به دست آورید. نیروی رو به پایین وارد بر صفحه EF چیست؟ آیا این نیرو مساوی نیروی گرانی سیال است؟ توضیح دهید.



شکل ۴۸.۲ مسئله ۳۵.۲.

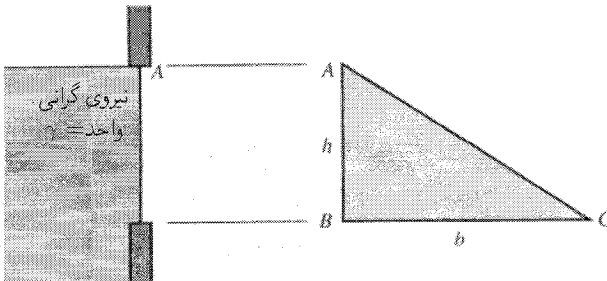
۳۶.۲ نیروی گرانی ظرف خالی استوانه‌ای در شکل ۴۹.۲ مساوی 400 N است. ظرف را پر از آب می‌کنیم و بر پیستون قرار می‌دهیم. الف) چه نیرویی بر انتهای فوقانی استوانه وارد می‌شود؟ ب) اگر نیروی گرانی اضافه‌ای به مقدار 600 N در استوانه قرار دهیم نیروی آب بر بالای استوانه چقدر افزایش می‌یابد؟



شکل ۴۹.۲ مسئله ۳۶.۲.

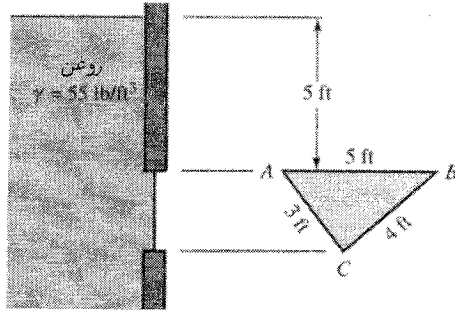
۳۷.۲ بشکه‌ای به قطر 600 mm پر از آب است و یک لوله قائم به قطر 12 mm به سر آن متصل است. با صرف نظر از تراکم پذیری، چند کیلوگرم آب باید به لوله اضافه کرد تا نیروی 4 kN بر سر بشکه وارد کند؟

۳۸.۲ رأس سطح قائمی که به شکل مثلث قائم‌الزاویه است در سطح آزاد یک مایع قرار دارد (شکل ۵۰.۲). مطلوب است نیروی وارد بر یک طرف الف) با انتگرال‌گیری؛ و ب) با فرمول.



شکل ۵۰.۲ مسائل ۳۸.۲، ۴۰.۲، ۵۰.۲، ۵۱.۲.

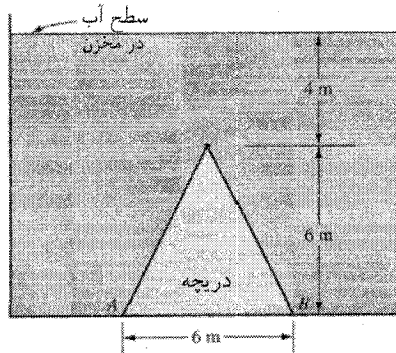
۳۹.۲ مقدار نیروی مؤثر بر یک طرف مثلث عمودی ABC را در شکل ۵۱.۲ به دست آورید (الف) با انتگرال‌گیری؛ و (ب) با فرمول.



شکل ۵۱.۲ مسائل ۳۹.۲، ۴۸.۲، ۴۳.۲، ۴۲.۲، ۳۹.۲

۴۰.۲ گشتاور نیروی مؤثر بر یک طرف سطح قائم ABC را در شکل ۵۰.۲ نسبت به ABC پیدا کنید. $\gamma = 9000 \text{ N/m}^3$.

۴۱.۲ دریچه مثلثی در جداره تنهایی قائم، یک مخزن در امتداد محور افقی AB لولا شده است (شکل ۵۲.۲). گشتاور لازم برای نگهداری دریچه در وضعیت قائم بیاید.

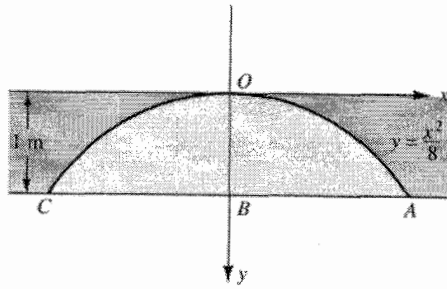


شکل ۵۲.۲ مسئله ۴۱.۲

۴۲.۲ گشتاور نیروی مؤثر بر یک طرف سطح قائم ABC را در شکل ۵۱.۲ پیدا کنید.

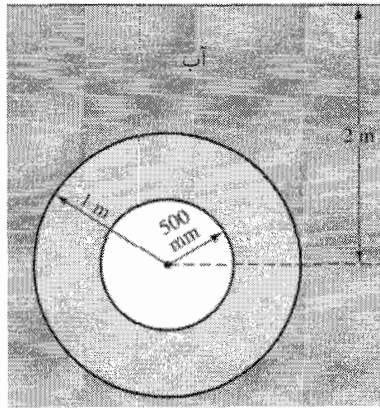
۴۳.۲ محل یک خط افقی را زیر AB در شکل ۵۱.۲ طوری تعیین کنید که مقدار نیروی فشاری وارد بر سطح قائم ABC در بالا و پایین خط مساوی باشد.

۴۴.۲ نیروی مؤثر بر یک طرف سطح قائم $OABCO$ را در شکل ۵۳.۲ تعیین کنید. $\gamma = 9 \text{ kN/m}^3$



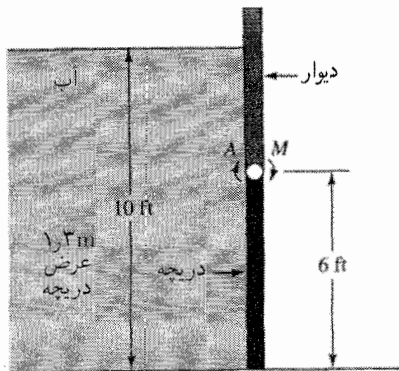
شکل ۵۳.۲ مسائل ۴۴.۲، ۵۵.۲، ۸۰.۲

۴۵.۲ نیروی آب را بر یک طرف سطوح طوقه‌ای قائم شکل ۵۴.۲ محاسبه کنید.



شکل ۵۴.۲ مسائل ۴۵.۲ و ۵۲.۲

۴۶.۲ مطلوب است گشتاور لازم در A برای نگهداری دریچه در شکل ۵۵.۲.



شکل ۵۵.۲ مسائل ۴۶.۲، ۴۷.۲، ۵۳.۲

۴۷.۲ اگر در طرف دیگر دریچه (شکل ۵۵.۲) تا A آب باشد، نیروی برآیند ناشی از آب را بر دو طرف دریچه و خط حامل آن را تعیین کنید.

۴۸.۲ با انتگرال‌گیری و با فرمول، فاصله مرکز فشار زیر سطح مایع را در سطح مثلثی ABC در شکل ۵۱.۲ به دست آورید.

۴۹.۲ با انتگرال‌گیری، محل مرکز فشار را در سطح مثلثی ABC در شکل ۵۱.۲ به طور افقی تعیین کنید.

۵۰.۲ با استفاده از منشور فشار، نیروی برآیند و محل آن را برای مثلث شکل ۵۰.۲ تعیین کنید.

۵۱.۲ با انتگرال‌گیری، مرکز فشار را در شکل ۵۰.۲ تعیین کنید.

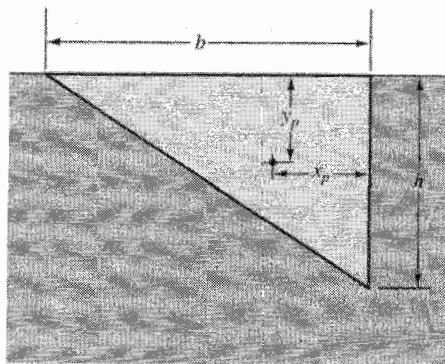
۵۲.۲ محل مرکز فشار را برای سطح طوقه‌ای در شکل ۵۴.۲ تعیین کنید.

۵۳.۲ محل مرکز فشار را برای دریچه شکل ۵۵.۲ تعیین کنید.

۵۴.۲ یک سطح مربعی قائم 6ft در 6ft طوری در آب غوطه‌ور می‌شود که ضلع بالایی آن 3ft زیر سطح آزاد قرار می‌گیرد. محل یک خط افقی را بر سطح مربع طوری تعیین کنید که الف) نیروی وارد بر قسمت بالایی مساوی نیروی وارد بر قسمت پایینی باشد؛ و ب) گشتاور نیروی ناشی از قسمت بالایی نسبت به این خط مساوی گشتاور نیروی ناشی از قسمت پایینی باشد.

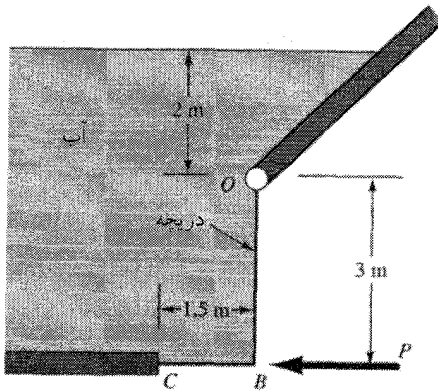
۵۵.۲ محل مرکز فشار سطح قائم $OABCD$ را در شکل ۵۳.۲ پیدا کنید.

۵۶.۲ مرکز فشار سطح قائم شکل ۵۶.۲ را تعیین کنید.



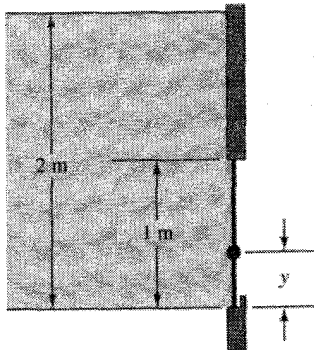
شکل ۵۶.۲ مسئله ۵۶.۲.

۵۷.۲ دریچه OBC به عرض 4m و صلب است (شکل ۵۷.۲). از وزن دریچه و از اصطکاک در لوله صرف‌نظر کنید: نیروی لازم P برای بسته نگه‌داشتن دریچه چقدر است؟

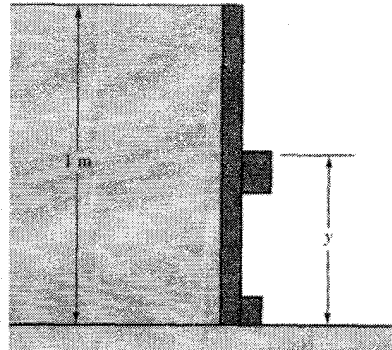


شکل ۵۷.۲ مسئله ۵۷.۲.

۵۸.۲ مقدار y را در شکل ۵۸.۲ طوری تعیین کنید که وقتی آب به بالای "سرسد" ها برسد تعادل آنها از دست نهد.



شکل ۵۹-۲ مسئله ۵۹.۲.



شکل ۵۸-۲ مسئله ۵۸.۲.

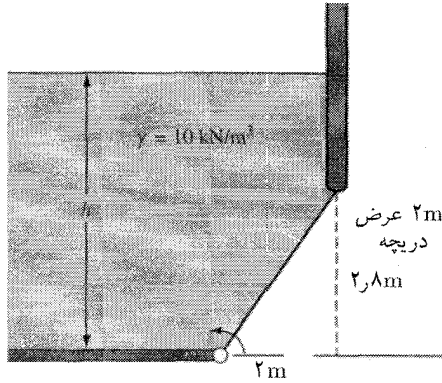
۵۹.۲ محل لولای دریچه مستطیلی شکل ۵۹.۲ یعنی y را طوری تعیین کنید که وقتی مایع به سطح نشان داده شده برسد دریچه باز شود.

۶۰.۲ با استفاده از منشور فشار، نشان دهید که وقتی عمق غوطه‌وری یک سطح افزایش یابد مرکز فشار به مرکز سطح نزدیک می‌شود.

۶۱.۲ ثابت کنید که مقدار نیروی برآیند وارد بر یک سطح مستوی کاملاً غوطه‌ور، با دوران آن حول محور ماربر مرکزش تغییر نمی‌کنند.

۶۲.۲ مثلث متساوی‌الساقینی که یک ضلع آن در سطح آب قرار دارد با زاویه 45° رو به پایین واقع شده است. محل مرکز فشار را برحسب طول ضلع b به دست آورید.

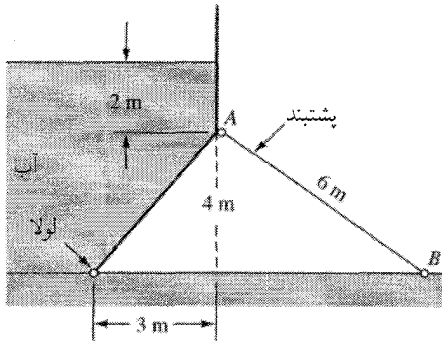
۶۳.۲ میلگردان دریچه در شکل ۶۰.۲ در گشتاور 150 kN.m می‌شکند. ماکزیمم مقدار عمق مایع h را تعیین کنید.



شکل ۶۰.۲ مسائل ۶۳.۲ و ۶۴.۲

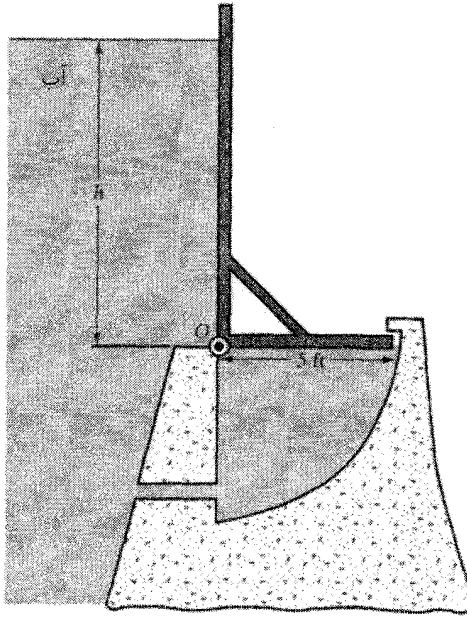
۶۴.۲ در شکل ۶۰.۲، عبارت y_p را برحسب h بیابید.

۶۵.۲ سد شکل ۶۱.۲ در هر ۶ متر یک پشتبند دارد. با صرف نظر از جرم سد، نیروی فشاری را در پشتبند تعیین کنید.



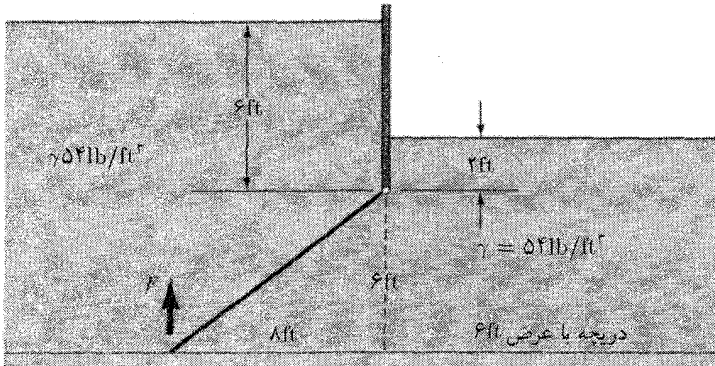
شکل ۶۱.۲ مسئله ۶۵.۲

۶۶.۲ وزن دریچه شکل ۶۲.۲ در امتداد عمود بر صفحه کاغذ 30 lb/ft است. مرکزگرانی آن در فاصله 1.5 ft از وجه چپ و در فاصله 2 ft از بالای وجه پایین است. دریچه در O لولا شده است. مطلوب است محل سطح آب برای حالتی که دریچه شروع به بالا رفتن کند. (سطح آب زیر لولا است.)



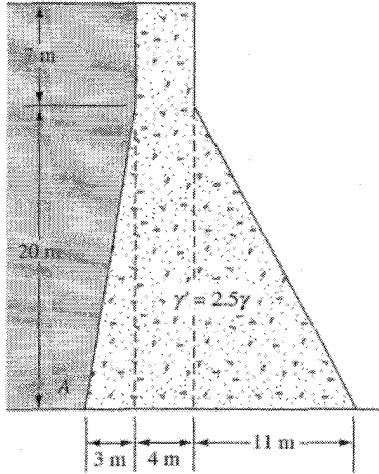
شکل ۶۲.۲ مسائل ۶۶.۲ تا ۶۸.۲ و ۱۴۹.۲.

۶۷.۲ در مسئله ۶۶.۲، برای حالتی که دریچه در موقعیت قائمی که می بینید شروع به بالا رفتن کند، h را پیدا کنید.
 ۶۸.۲ برای دریچه مسئله ۶۶.۲، مقدار h و نیروی وارد بر نگهدارنده را وقتی مقدار این نیرو ماکزیمم است تعیین کنید.
 ۶۹.۲ الف) مقدار و خط حامل نیروی وارد بر طرفین دریچه شکل ۶۳.۲ را پیدا کنید؛ ب) نیروی



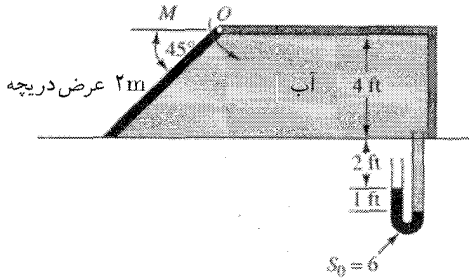
شکل ۶۳.۲ مسئله ۶۹.۲.

برایند وارد از مایع بر طرفین دریچه را پیدا کنید؛ ج) اگر دریچه یکنواخت و دارای جرم 2000 kg باشد، مطلوب است نیروی F لازم برای باز کردن دریچه.
 ۷۰.۲ برای تغییرات خطی تنش بر قاعده سد در شکل ۶۴.۲، الف) محل تلاقی برایند را با قاعده تعیین کنید؛ و ب) ماکزیمم و مینیمم تنشهای فشاری را در قاعده محاسبه کنید.



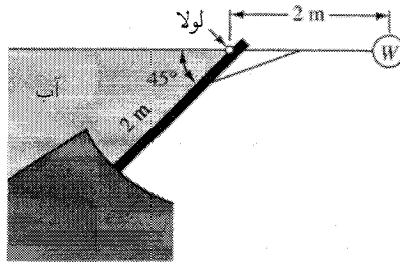
شکل ۶۴.۲ مسائل ۷۰.۲ و ۷۱.۲.

۷۱.۲ مسئله ۷۰.۲ را با این فرض اضافی حل کنید که برا هیدروستاتیکی به طور خطی از 2 m در A تا صفر در نوک سد تغییر می‌کند.
 ۷۲.۲ مطلوب است گشتاور M در O (شکل ۶۵.۲) برای بسته ماندن دریچه.



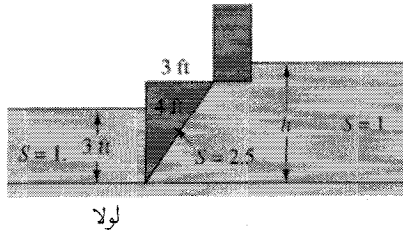
شکل ۶۵.۲ مسئله ۷۲.۲.

۷۳.۲ دریچه شکل ۶۶.۲ در تعادل است. با صرف نظر از جرم دریچه، نیروی گرانی موازنه در هر متر از عرض راه، که با W نشان می‌دهیم، محاسبه کنید.



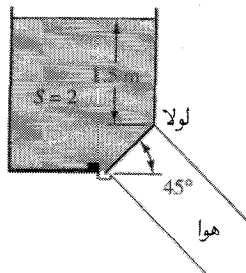
شکل ۶۶.۲ مسئله ۷۳.۲.

۷۴.۲ در شکل ۶۷.۲، آب در طرف راست تا چه ارتفاعی بالا رود (h) تا دریچه را باز کند؟ عرض دریچه ۵ft است، و جنس آن از ماده‌ای است به چگالی نسبی $S = ۲.۵$. از روش منشور فشار استفاده کنید.



شکل ۶۷.۲ مسئله ۷۴.۲.

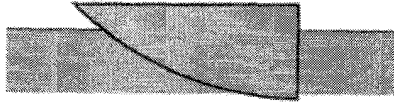
۷۵.۲ فشار هوای لازم را برای بسته نگه داشتن دریچه شکل ۶۸.۲ به قطر ۷۰۰mm محاسبه کنید. دریچه یک ورق دایروی است که نیروی گرانی آن ۱۸۰۰N است.



شکل ۶۸.۲ مسئله ۷۵.۲.

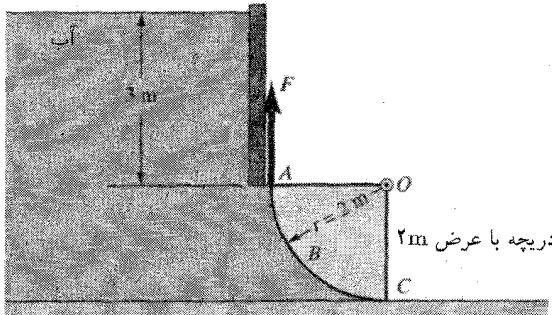
۷۶.۲ یک توپ فولادی به قطر ۲۰mm یک سوراخ را به قطر ۱۰mm در یک محفظه فشار به فشار ۳MPa می‌پوشاند. برای بالابردن توپ از دهانه چه نیرویی لازم است؟

۷۷.۲ اگر مؤلفه افقی نیروی وارد بر یک سطح خمیده مساوی نیروی وارد بر تصویر سطح در یک صفحه قائم نبود، با توجه به پیشرانش قایق (شکل ۶۹.۲) چه نتیجه‌ای می‌شد گرفت؟



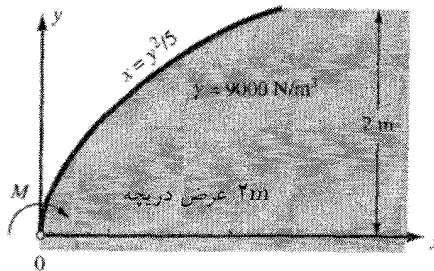
شکل ۶۹.۲ مسئله ۷۷.۲.

۷۸.۲ الف) مؤلفه افقی نیروی مؤثر بر دریچه شعاعی (شکل ۷۰.۲) و خط حامل آن را تعیین کنید؛ ب) مؤلفه قائم نیرو و خط حامل آن را تعیین کنید؛ ج) با صرف نظر از وزن دریچه، چه نیرویی مانند F برای بازکردن آن لازم است؟ د) گشتاور نسبت به محور عمود بر صفحه کاغذ و مار بر O چیست؟



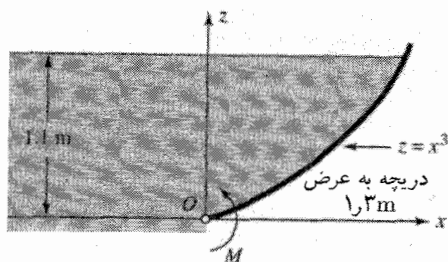
شکل ۷۰.۲ مسئله ۷۸.۲.

۷۹.۲ مؤلفه عمودی نیروی مؤثر بر دریچه خمیده شکل ۷۱.۲، و خط حامل آن را بیابید.



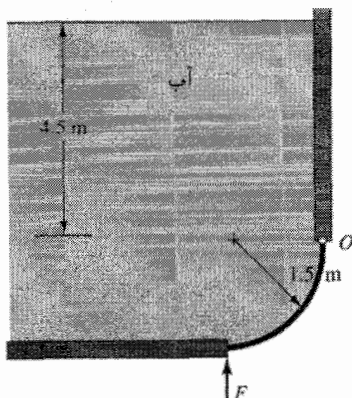
شکل ۷۱.۲ مسائل ۷۹.۲ و ۸۳.۲.

۸۰.۲ نیروی وارد بر سطحی که OA در آن در شکل ۵۳.۲ است چیست؟ طول عمود بر صفحه کاغذ ۳m است و $\gamma = 9 \text{ kN/m}^3$ است.
 ۸۱.۲ گشتاور لازم برای نگهداری دریچه در شکل ۷۲.۲ را، با صرف نظر از وزن آن، بیابید.



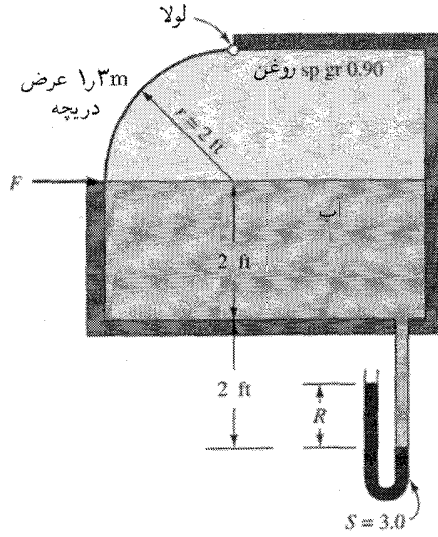
شکل ۷۲.۲ مسئله ۸۱.۲.

۸۲.۲ دریچه خمیده به طور ۲m در شکل ۷۳.۲ در O لولا شده است. مایع آب است. مؤلفه افقی نیروی مؤثر بر دریچه و خط حامل آن را بیابید. مؤلفه عمودی نیرو و خط حامل آن را پیدا کنید. با صرف نظر از وزن دریچه، چه نیرویی برای باز کردن آن لازم است؟



شکل ۷۳.۲ مسئله ۸۲.۲.

۸۳.۲ گشتاور M را برای نگهداری دریچه در شکل ۷۱.۲ بیابید. از وزن دریچه صرف نظر کنید.
 ۸۴.۲ نیروی F لازم را برای نگهداری دریچه در شکل ۷۴.۲ در وضعیت بسته وقتی $R = 2 \text{ ft}$ محاسبه کنید.

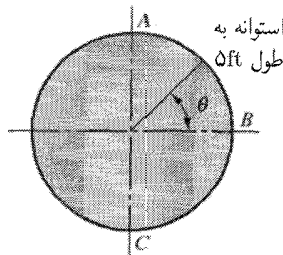


شکل ۷۴.۲ مسائل ۸۴.۲ تا ۸۶.۲

۸۵.۲ نیروی F لازم را برای باز یا بسته نگهداشتن دریچه در شکل ۷۴.۲ وقتی $R = ۱.۵ft$ است محاسبه کنید.

۸۶.۲ در شکل ۷۴.۲ در حالتی که هیچ نیروی F برای بسته یا باز نگهداشتن دریچه لازم نباشد، R چیست؟

۸۷.۲ یک استوانه قائم مدور را در شکل ۷۵.۲ می بینید. فشار ناشی از شارش اطراف استوانه برحسب پاسکال به صورت $p = 2\rho(1 - 4\sin^2\theta) + 50$ در پاره خط ABC تغییر می کند. نیروی وارد بر ABC را تعیین کنید.



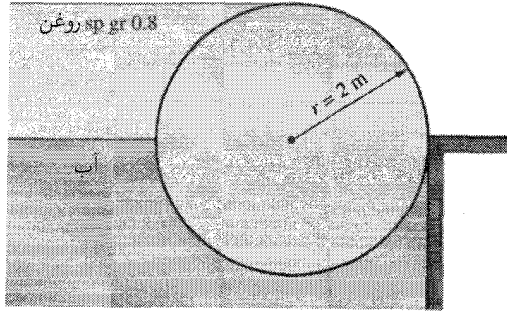
شکل ۷۵.۲ مسائل ۸۷.۲ و ۸۸.۲

۸۸.۲ اگر تغییر فشار بر استوانه شکل ۷۵.۲ به صورت

$$p = 2\rho \times [1 - 4(1 + \sin\theta)^2] + 50$$

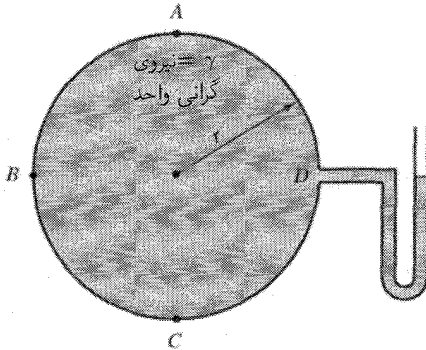
باشد، نیروی وارد بر استوانه را تعیین کنید.

۸۹.۲ یک تکه الوار آب را مطابق شکل ۷۶.۲ نگه می‌دارد. مطلوب است الف) نیرویی که هر متر الوار برسد وارد می‌کند؛ ب) نیرویی گرانی استوانه بر متر طول؛ ج) چگالی نسبی الوار.



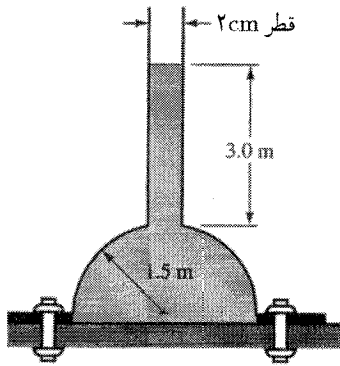
شکل ۷۶.۲ مسئله ۸۹.۲.

۹۰.۲ استوانه شکل ۷۷.۲ مطابق شکل پر از مایع است الف) مؤلفه افقی نیروی وارد بر AB در متر طول، از جمله خط حامل آن؛ ب) مؤلفه قائم نیروی وارد بر AB در متر طول و از جمله خط حامل آن.



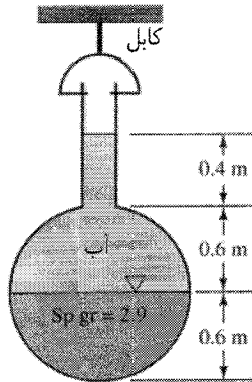
شکل ۷۷.۲ مسئله ۹۰.۲.

۹۱.۲ یک گنبد نیم‌کروی در شکل ۷۸.۲ پر از آب است. ترتیب نشان داده شده به وزن 28 kN است و با پیچهایی که پیرامون قاعده به فواصل مساوی از هم محکم شده است. نیروی کل لازم برای نگهداری گنبد را بیابید.



شکل ۷۸.۲ مسئله ۹۱.۲

۹۲.۲ یک کابل و حلقه نیم‌دایره‌ای یک محفظه کروی را توسط لوله پیزومتر کوچکی به حالت آویزان نگه داشته‌اند (شکل ۷۹.۲). نوک لوله باز است. مطلوب است الف) نیروی وارد بر نیمه پایینی کره؛ ب) نیروی وارد بر نیمه بالایی کره؛ ج) پسا کل کابل. از وزن محفظه صرف‌نظر کنید.



شکل ۷۹.۲ مسئله ۹۲.۲

۹۳.۲ مطلوب است نیروی برآیند، از جمله خط حامل آن، که بر سطح خارجی ربع اول یک پوسته کروی به شعاع 600 mm به مرکز O اثر کند. مرکز آن 1.2 m زیر سطح آب است.

۹۴.۲ حجم بیضوی که با $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ داده می‌شود $\frac{4}{3}\pi abc$ است و مساحت بیضی $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ مساوی πac است. نیروی قائم وارد بر سطح داده شده در مثال ۱۰.۲ را تعیین کنید.

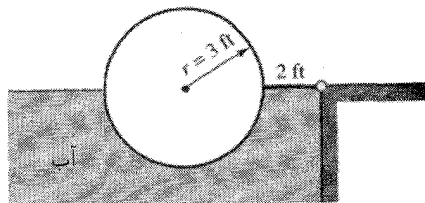
۹۵.۲ یک لوله فشار به قطر 16 ft مایعی را در فشار 200 psi حمل می‌کند. ضخامت دیواره لوله برای تحمل تنش ماکزیم 10000 psi چقدر است؟

۹۶.۲ برای به دست آوردن سطح شارش یکسان، کدام شبکه لوله کمترین فولاد را لازم دارد — یک لوله تنها با چهار لوله که قطر آنها نصف است؟ ماکزیم تنش مجاز در دیواره لوله‌ها در هر دو حالت یکسان است.

۹۷.۲ یک کره توخالی جدار نازک به قطر ۳m، گازی را در فشار ۱۵MPa در خود دارد. برای مینیم تنش مجاز ۶۰MPa ضخامت دیواره را تعیین می‌کند.

۹۸.۲ یک ظرف استوانه‌ای به ارتفاع ۷ft و قطر ۴ft، به علت پسا لوله‌ای، دو تسمه به فاصله ۱ft از هر انتها دارد. اگر ظرف از آب پر باشد، پسا ناشی از آب در هر تسمه چقدر است؟

۹۹.۲ دریچه استوانه‌ای در شکل ۸۰.۲ مشتمل است بر یک استوانه دوار و یک صفحه (ورقه) که به سد لولا شده است. با پمپ کردن آب به داخل و خارج استوانه، وضعیت دریچه کنترل می‌شود. مرکزگرانی دریچه خالی بر خط تقارن در فاصله ۴ft از لولا قرار دارد. دریچه وقتی خالی باشد در وضعیتی که می‌بینید در تعادل است. وقتی سطح آب ۳ft بالا آید، در یک متر استوانه چند متر مکعب آب باید اضافه کرد تا وضعیت دریچه برقرار بماند؟



شکل ۸۰.۲ مسئله ۹۹.۲

۱۰۰.۲ کره‌ای به قطر ۲۵۰mm با چگالی نسبی $S = ۱.۴$ در مایعی غوطه‌ور می‌شود که چگالی آن برحسب عمق h زیر سطح آزاد به صورت $\rho = ۱۰۰۰ + ۰.۳\gamma/\text{kg/m}^3$ تغییر می‌کند. محل تعادل کره را در مایع تعیین کنید.

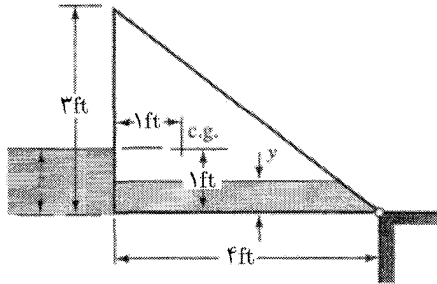
۱۰۱.۲ برای یک استوانه دوار افقی با چگالی نسبی $S = ۱.۴$ و قطر ۲۵۰mm محاسبات مسئله ۱۰۰.۲ را تکرار کنید.

۱۰۲.۲ یک مکعب به ضلع ۲ft در نیمه پایین $S = ۱.۴$ و در نیمه بالایی $S = ۰.۶$ دارد. این مکعب در یک سیال دو لایه، پایینی با $S = ۱.۲$ و بالایی با $S = ۰.۹$ ، غوطه‌ور می‌شود. ارتفاع سرمکعب را از فصل مشترک دو لایه به دست آورید.

۱۰۳.۲ مطلوب است چگالی، حجم خصوص، و حجم یک شیء که نیروی گرانی آن در آب مساوی ۳N و در روغن با $S = ۰.۸۳$ مساوی ۴N است.

۱۰۴.۲ دو مکعب هم‌اندازه به ضلع 1m^2 ، یکی با $S = 80^\circ$ و دیگری با $S = 11^\circ$ ، به وسیله یک سیم کوتاه به هم متصل شده‌اند و در آب قرار دارند. چه قسمتی از مکعب سبکتر بالای سطح آب قرار می‌گیرد و پسا سیم چقدر است؟

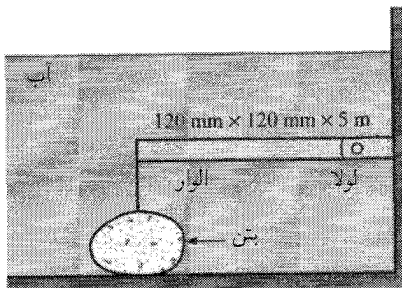
۱۰۵.۲ در شکل ۸۱.۲، وقتی $z = 1\text{ft}$ و $y = 0$ ، منشور مثلثی توخالی به صورتی که می‌بینید در تعادل است. نیروی گرانی منشور بر متر طول و z را برحسب y برای حالت تعادل پیدا کنید. هر دو مایع آب‌اند. مقدار y را برای $z = 1.5\text{ft}$ به دست آورید.



شکل ۸۱.۲ مسائل ۱۰۵.۲ و ۱۰۴.۲.

۱۰۶.۲ چند پوند بتون با $\gamma = 25\text{kN/m}^3$ را به تیری به حجم 1m^3 و $S = 65^\circ$ باید چسباند تا هر دو در آب غرق شوند؟

۱۰۷.۲ الوار در شکل ۸۲.۲ توسط یک مهار مبتنی در وضعیت افقی نگه‌داشته شده است. الوار به ابعاد $120\text{mm} \times 120\text{mm} \times 5\text{m}$ و دارای گرانش ویژه 6 ، و گرانش ویژه بتن 2.5 است. حداقل کل وزن بتن چقدر باید باشد؟



شکل ۸۲.۲ مسئله ۱۰۷.۲.

۱۰۸.۲ یک بالون کروی به قطر 15m در قسمت کف باز است و پر از هیدروژن است. برای

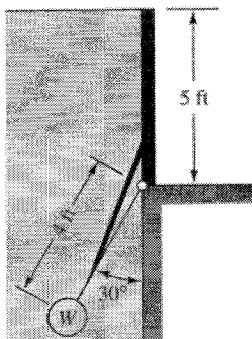
خوانده 28 in جوسنج و در 20°C ، کل نیروی وزین بالون و بار برای ساکن ماندن آن چقدر است؟

۱۰۹.۲ وزن یک بالن هوای گرم، شامل وزن بسکت، مشخص، و بالن، 60 lb است. هوای گرم داخل بالن با دمای 155°F و دمای هوای 75°F است. در داخل و خارج بالن، هر دو، فشار اتمسفر استاندارد را در نظر بگیرید. با فرض کروی بودن بالن، قطر آن چقدر باید باشد؟ اگر دمای هوای خارج 35°F باشد، اندازه بالن چقدر است؟

۱۱۰.۲ چگالی سنجی با نیروی گرانی 35 N را با ساقه‌ای به قطر 6 mm مفروض است. فاصله بین نشانه‌های چگالی نسبی 1° و 1.1° را محاسبه کنید.

۱۱۱.۲ چگالی سنجی طراحی کنید که وقتی طول مقیاس 75 mm باشد چگالیهای نسبی را در گستره 80°R تا 110°R بخواند.

۱۱۲.۲ دریچه شکل 83.2 دارای جرم 15 lb/ft عمود بر صفحه کاغذ است. دریچه مطابق شکل در تعادل است. با صرف نظر از جرم بازو و مهارتی که وزنه تعادلی (موازنه) را نگه می‌دارد، الف) W را پیدا کنید؛ و ب) تعیین کنید که دریچه در حال تعادل است یا نه. جرم W از بتون با $S = 2.5^\circ$ ساخته شده است.

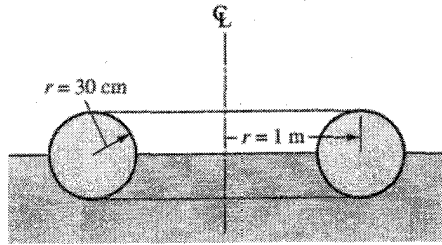


شکل ۸۳.۲ مسئله ۱۱۲.۲.

۱۱۳.۲ یک استوانه چوبی به قطر 60 mm با چگالی نسبی 0.5° به یک استوانه بتونی به طول 60 mm و به همان با چگالی نسبی 2.5° ، از انتها چسبیده است. مطلوب است طول استوانه چوبی برای اینکه سیستم در حالت تعادل پایدار با محور قائم شناور شود.

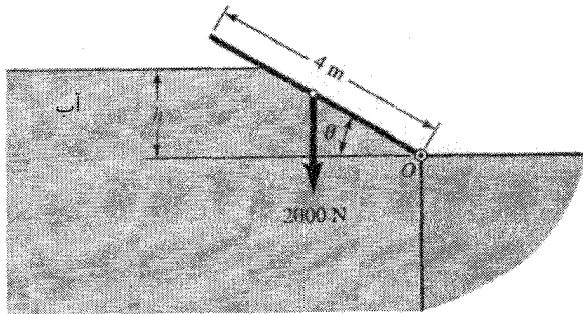
۱۱۴.۲ آیا تیری به طول 4 m با سطح مقطع مربعی، $75^\circ \text{R} = S$ ، به صورتی که دو وجه آن افقی باشد، در حالت تعادل پایدار در آب شناور می‌شود؟

۱۱۵.۲ ارتفاع شبه مرکز ثقل (چنبر) شکل 84.2 را تعیین کنید.



شکل ۸۴.۲ مسئله ۱۱۵.۲.

۱۱۶.۲ دریچه مستوی (شکل ۸۵.۲) عمود بر کاغذ وزن دارد، و مرکز گرانی آن در فاصله ۲m از لولای O است. الف) h را به صورت تابعی از θ برای تعادل دریچه پیدا کنید؛ ب) آیا دریچه به ازای تمام مقادیر θ در تعادل است؟



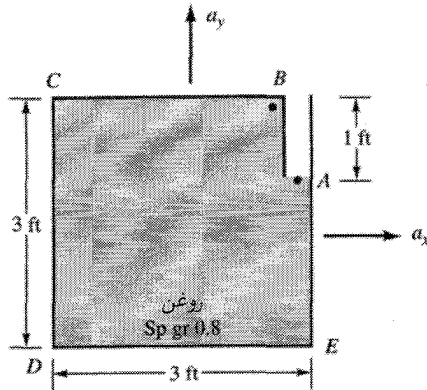
شکل ۸۵.۲ مسئله ۱۱۶.۲.

۱۱۷.۲ یک مخزن مایع $88^\circ S$ در جهت افقی به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد، به طوری که فشار داخل مایع 2 kPa/m در جهت حرکت کاهش می‌یابد. شتاب را به دست آورید.

۱۱۸.۲ مایعی در جهت افقی به طور یکنواخت شتابان می‌شود و سطح آزاد آن با افق زاویه 2° می‌سازد. شتاب چقدر است؟

۱۱۹.۲ اتومبیلی در ۵ ثانیه به طور یکنواخت تا 60 mph روی یک جاده افقی شتاب می‌گیرد. شیب سطح آزاد بنزین درون ظرف بنزین اتومبیل چقدر است؟

۱۲۰.۲ در شکل ۸۶.۲ داریم 1288 ft/s^2 ، $a_x = 0$ و $a_y = 0$. سطح آزاد خیالی مایع و فشار نقاط B, C, D و E را پیدا کنید.

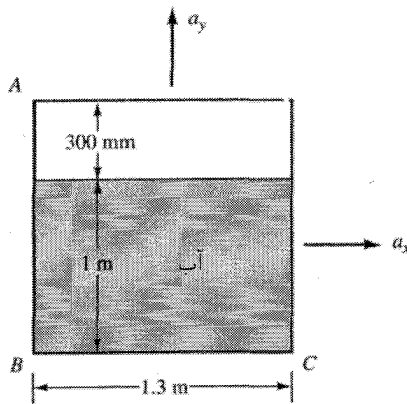


شکل ۸۶.۲ مسائل ۱۲۰.۲، ۱۲۲.۲ و ۱۲۶.۲.

۱۲۱.۲ در شکل ۸۶.۲ داریم $a_x = 0$ و $a_y = -8.05 \text{ ft/s}^2$. فشار نقاط B, C, D و E را پیدا کنید.

۱۲۲.۲ در شکل ۸۶.۲ داریم $a_x = 8.05 \text{ ft/s}^2$ و $a_y = 16.1 \text{ ft/s}^2$. سطح آزاد خیالی و فشار نقاط B, C, D و E را پیدا کنید.

۱۲۳.۲ در شکل ۸۷.۲ داریم $a_x = 9.806 \text{ m/s}^2$ و $a_y = 0$. فشار A, B و C را پیدا کنید.

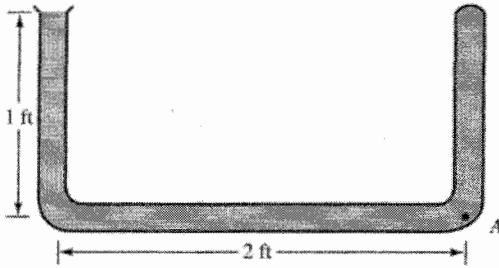


شکل ۸۷.۲ مسائل ۱۲۳.۲ و ۱۲۴.۲.

۱۲۴.۲ در شکل ۸۷.۲ داریم $a_x = 4.903 \text{ m/s}^2$ و $a_y = 9.806 \text{ m/s}^2$. فشار A, B و C را پیدا کنید.

۱۲۵.۲ یک مخزن با مقطع دایروی به عمق ۶ ft و قطر ۴ ft پر از مایع است و در جهت افقی به طور یکنواخت شتاب می‌گیرد. یک سوم مایع بیرون می‌ریزد. شتاب را تعیین کنید.

۱۲۶.۲ مطلوب است a_x و a_y در شکل ۸۶.۲ وقتی که فشار در A ، B و C یکسان است.
 ۱۲۷.۲ لوله شکل ۸۸.۲ پر از مایعی با $S = ۲٫۴$ است. وقتی لوله به طرف راست به اندازه $۸٫۵ \text{ ft/s}^2$ شتابانده شود، سطح آزاد خیالی را رسم و فشار A را تعیین کنید. برای $p_A = ۸ \text{ psi}$ خلا، a_x را تعیین کنید.



شکل ۸۸.۲ مسائل ۱۲۷.۲، ۱۳۳.۲، ۱۳۴.۲ و ۱۴۴.۲.

۱۲۸.۲ یک جعبه مکعبی به ضلع ۱m، که سرباز و تا نیمه پر از آب است، بر سطحی که با افق زاویه 3° می‌سازد قرار می‌گیرد. جعبه به تنهایی نیروی گرانی 50° N دارد و ضریب اصطکاک بین جعبه و سطح 3° است. شتاب جعبه و زاویه سطح آزاد آب را با افق تعیین کنید.
 ۱۲۹.۲ نشان دهید که در نقطه‌ای داخل مایعی که مانند یک جامد حرکت می‌کند فشار در تمام جهتها یکسان است.

۱۳۰.۲ یک جعبه بسته شامل دو مایع مخلوط‌نشده است. ثابت کنید که وقتی جعبه به طور یکنواخت در جهت x شتاب گیرد، فصل مشترک دو مایع و سطح فشار صفر موازی‌اند.

۱۳۱.۲ بیان بخش ۹.۲ را در مورد چرخش یکنواخت حول محور قائم اثبات کنید؛ طبق آن وقتی سیالی مانند جامد دوران کند هیچ تنش برشی در آن وجود ندارد.

۱۳۲.۲ ظرفی حاوی مایع $S = ۱٫۳$ ، حول محور قائم چرخانده می‌شود. فشار در نقطه‌ای در فاصله شعاعی ۶m از محور مساوی فشار در نقطه دیگری در فاصله $۱٫۲ \text{ m}$ از محور و 6° متر بالاتر از نقطه اول است. سرعت چرخش را محاسبه کنید.

۱۳۳.۲ لوله U در شکل ۸۸.۲ حول یک محور قائم که در فاصله ۶in در طرف راست A قرار دارد با سرعتی دوران می‌کند که فشار در A قرار دارد با سرعتی دوران می‌کند که فشار در A صفر پیمانه‌ای است. سرعت چرخش چیست؟

۱۳۴.۲ محل محور قائم دوران و سرعت دوران لوله U را در شکل ۸۸.۲ تعیین کنید، به طوری که فشار مایع هم در نقطه مرکزی لوله U و هم در A مساوی صفر باشد.

۱۳۵.۲ سیال تراکم‌ناپذیری به چگالی ρ که مانند یک جامد حرکت می‌کند با سرعت w حول محوری که با قائم زاویه θ می‌سازد دوران می‌کند. با معلوم بودن فشار در یک نقطه از سیال، فشار در هر نقطه دیگر را چگونه پیدا می‌کنید؟

۱۳۶.۲ یک استوانه دوار قائم به شعاع r_0 و ارتفاع h_0 که محور قائم دارد سرباز و پراز مایع است. استوانه با چه سرعتی بچرخد تا نصف سطح کف در معرض دید قرار گیرد؟

۱۳۷.۲ مایعی که مانند یک جامد حول محور افقی دوران می‌کند فشار 10 psi در محور دارد. تغییر فشار را در امتداد قائم ماربر محور به ازای چگالی ρ و سرعت w تعیین کنید.

۱۳۸.۲ معادله سطوح فشار-ثابت را برای حالت تشریح شده در مسئله ۱۳۷.۲ تعیین کنید.

۱۳۹.۲ با انتگرال‌گیری ثابت کنید که حجم سهموی دوار نصف حجم استوانه محیطی آن است.

۱۴۰.۲ مخزنی حاوی دو مایع مخلوط نشدنی حول یک محور قائم می‌چرخد. ثابت کنید که فصل مشترک به همان شکل سطح فشار صفر است.

۱۴۱.۲ یک کره توخالی به شعاع r_0 پراز مایع است و حول محور قائمش با سرعت w می‌چرخد. محل خط دایروی فشار ماکزیمم را تعیین کنید.

۱۴۲.۲ گازی از قانون ثابت $p\rho^{-n}$ پیروی می‌کند و مانند یک جامد حول محور قائمی دوران می‌کند. عبارتی برای فشار در جهت شعاعی در سرعت w ، فشار p_0 ، و چگالی ρ_0 در یک نقطه محور بنویسید.

۱۴۳.۲ یک ظرف حاوی آب با سرعت زاویه‌ای 5 rad/s حول محور قائمی دوران می‌کند. در همان لحظه ظرف شتابی رو به پایین برابر با 16.1 ft/s^2 دارد. معادله سطح فشار-ثابت چیست؟

۱۴۴.۲ لوله U در شکل ۸۸.۲ حول محور قائمی ماربر A با سرعتی دوران می‌کند که آب در لوله در انتهای بسته بالای A ، که در 70° F است، شروع به تبخیر می‌کند. سرعت زاویه‌ای چیست؟ اگر سرعت زاویه‌ای افزایش یابد چه رخ می‌دهد؟

۱۴۵.۲ یک جعبه مکعبی به ضلع 1.3 m سرباز و پراز آب است. وقتی جعبه به اندازه 2.45 m/s^2 رو به بالا شتاب گیرد، مقدار نیروی وارد از طرف آب بر یک طرف جعبه را به دست آورید.

۱۴۶.۲ مکعبی به ضلع 1 m پراز مایع با 65° R ، $S = 0.65$ است و به اندازه 2.45 m/s^2 رو به پایین شتابانده می‌شود. مطلوب است نیروی برآیند وارد بر یک طرف مکعب ناشی از فشار مایع.

۱۴۷.۲ استوانه‌ای به قطر 2 ft و طول 6 ft در امتداد محورش در یک جهت افقی به اندازه 16.1 ft/s^2 به طور یکنواخت شتابانده می‌شود. استوانه پراز مایع با $50 \text{ lb/ft}^3 = \gamma$ است و فشار آن در امتداد محورش قبل از شروع شتاب مساوی 10 psi است. نیروی خالص افقی را که به مایع استوانه وارد می‌شود پیدا کنید.

۱۴۸.۲ یک مکعب بسته به ضلع 300 mm در مرکز سرش یک سوراخ کوچک دارد. اگر مکعب پر از آب شود و حول محور قائم ماربر مرکزش با $\omega\text{ rad/s}$ به طور یکنواخت دوران کند، نیروی وارد از طرف آب را بر یک طرف مکعب برحسب ω پیدا کنید.

۱۴۹.۲ برنامه‌ای برای حل مسائل زیر بنویسید: الف) مسئله ۶۶.۲؛ ب) مسئله ۶۷.۲؛ ج) ارتفاع h در شکل ۶۲.۲ را برای شروع بسته شدن دریچه بیابید.

۱۵۰.۲ با مراجعه به مسئله ۱۰۵.۲، از صفحه گسترده برای تعیین y استفاده کنید؛ z از 10 ft تا 30 ft با نمو 5 ft افزایش می‌یابد. وزن یک فوت از طول دریچه 722 lb یوند است. همچنین z را برای نمودهای y با مقدار 5 ft بیابید.

۱۵۱.۲ در مثال ۱۰.۲، برای تعیین گشتاور مؤثر دریچه برای مقادیر آزمایش θ یا y انتگرال عددی از 0° تا θ محاسبه شد. در این مسئله از معادله گشتاور بین 0° و θ مجهول انتگرال بگیرید. نتایج مسئله ۱۰.۲ را با روش نیمسازى واریسی کنید.

مراجع برای مطالعه بیشتر

Aris, R.: *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York, 1989.

Long, R.: *Mechanics of Solids*, Prentice Hall, New Jersey, 1961.

Shames, I.: *Mechanics of Fluids*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

مفاهیم شارش سیال و معادله‌های بنیادی

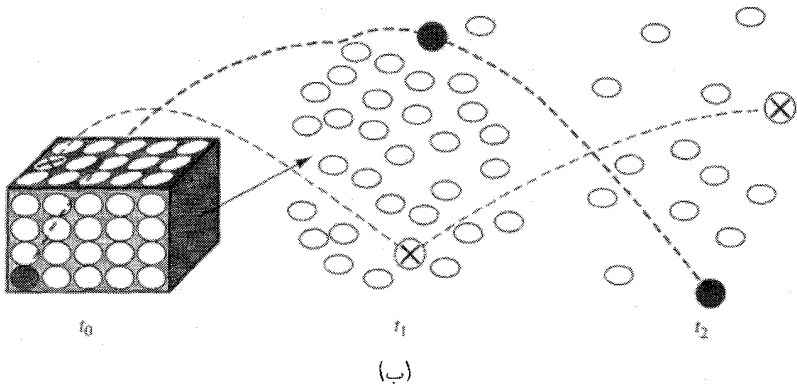
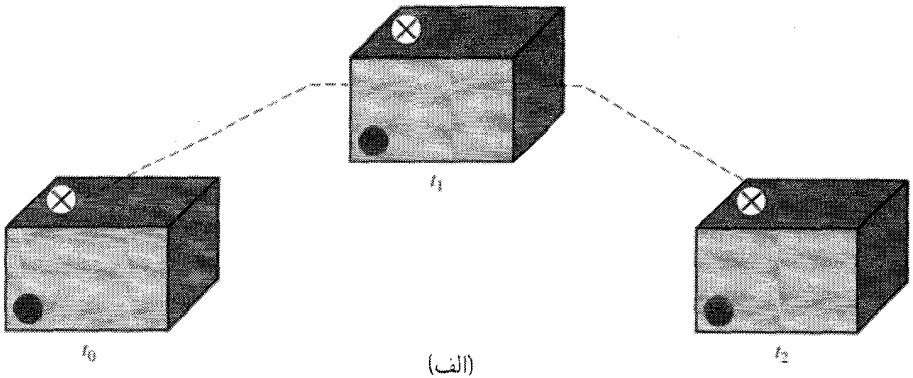
حجم کنترل

استاتیک سیالات، که در فصل قبل بررسی کردیم، به صورت یک علم دقیق در آمده است که در آن فقط کمیت نیروی گرانی واحد (یا چگالی) با آزمایش تعیین می‌شود. اما ماهیت شارش سیال حقیقی خیلی پیچیده است. در این فصل، مفاهیم لازم برای تحلیل حرکت سیال را ارائه می‌دهیم، و معادله‌های بنیادی برای پیش‌بینی رفتار سیال را بیان یا استنتاج می‌کنیم. این معادله‌ها عبارت‌اند از معادله حرکت، معادله پیوستگی و معادله تکانه، و قوانین اول و دوم ترمودینامیک بدان‌گونه که در شارش پایای گاز کامل به کار رفته‌اند. در این فصل، برای استنتاج معادله پیوستگی، معادله انرژی و معادله تکانه، از روش حجم کنترل استفاده می‌کنیم. بعد از مبحث تحلیل ابعادی در فصل ۵ آثار چسبندگی، تعیین آزمایشی اتلافها و افتها، و نمایش غیر ابعادی داده‌های افت را در فصلهای ۶ و ۷ نشان می‌دهیم. به‌طور کلی، در این فصل، نظریه شارش یک‌بعدی را با کاربردهایی منحصر به حالتهای تراکم‌ناپذیر، که در آنها آثار چسبندگی اهمیت چشمگیر ندارد، طرح می‌کنیم. در فصل ۸ به شارش دو بعدی می‌پردازیم. در این فصل، مانند فصل ۴، از نمادگذاری برداری استفاده می‌شود و برای مرور باید به پیوست ۵ مراجعه کرد.

۱.۳ سینماتیک و مفاهیم شارش

روشهای تحلیل

برای بیان قوانین مکانیک در یک شکل مفید برای مکانیک و انتقال نیایلات، دیدگاهی لازم است که با دیدگاه به کاررفته برای استنتاج این قوانین در مکانیک جامدات متفاوت است. در مکانیک جامدات روش لاگرنژی (به نام ژوزف-لوئیس لاگرانژ، ۱۷۳۶-۱۸۱۳) استفاده می‌شود که در آن معادله‌های بنیادی یک جرم معین سیال استنتاج می‌شوند. این روش مشابه است با "سیستم بسته" که در ترمودینامیک به کار می‌رود. انرژی و تکانه می‌توانند به یک سیستم یا از آن منتقل شوند و از دستگاههای مختصات ثابت یا متحرک برای استنتاج معادله‌ها می‌توان استفاده کرد. در شکل ۱.۳، یک آجر جامد در زمان t جرم معلوم m_0 دارد و در زمانهای بعدی t_1 و t_2 آجر



شکل ۱.۳ مسیره‌های جامد و توده سیال.

تغییر وضعیت، تغییر تکانه خطی و زاویه‌ای، و تغییر انرژی داده است، که تمام آنها را با قوانین ساده مکانیک جامدات می‌توان توضیح داد. همچنین توجه کنید که در جامدات، وضعیت نسبی ذرات مختلف تشکیل‌دهنده جرم ضمن حرکت بدون تغییر می‌ماند.

برای به کار بردن مفهوم لاگرانژی در سیال، در فصل ۲ از نمودار جسم آزاد برای نشان دادن نیروهایی که بر یک جرم ثابت اختیاری اعمال می‌شود استفاده کردیم. این نمونه‌ای از سیستم است. سیستم به جرم معینی از ماده گفته می‌شود و آن را از تمام مواد دیگر که محیط نامیده می‌شوند متمایز می‌سازد. مرزهای سیستم یک سطح بسته تشکیل می‌دهند. این سطح ممکن است با زمان تغییر کند، به طوری که طی تغییرات شرایطش همواره جرم یکسانی داشته باشد. برای مثال، ممکن است یک کیلوگرم گاز در استوانه‌ای محبوس و بر اثر حرکت پیستون متراکم شود؛ بنابراین سیستم که بر انتهای پیستون منطبق است با پیستون حرکت می‌کند. سیستم، بسته به انتخاب محقق، ممکن است یک جرم بینهایت کوچک یا یک جرم بزرگ متناهی از سیالات و جامدات را شامل باشد. از دیدگاه سیستمی، معادله پایستاری جرم بیان می‌کند که جرم داخل سیستم با زمان (صرف‌نظر از اثرات نسبیتی) ثابت می‌ماند. در شکل معادله‌ای

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (1.1.3)$$

که در آن m جرم کل است.

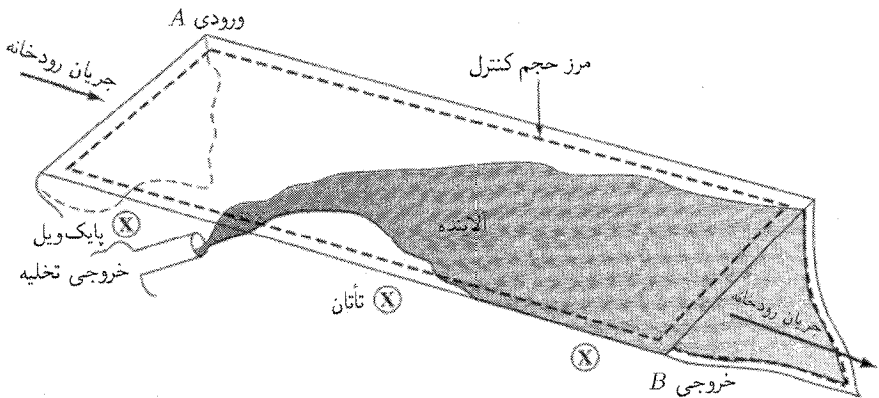
قانون دوم حرکت نیوتن در یک سیستم معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (2.1.3)$$

باید به خاطر داشت که m جرم ثابت سیستم است. $\Sigma \mathbf{F}$ برآیند تمام نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم، از جمله نیروهای بدنی، مانند گرانی، به شمار می‌رود و \mathbf{v} سرعت مرکز جرم سیستم است. البته، در اغلب حالت‌های مکانیک سیالات حیات به این اندازه منظم یافته نیست. در شکل ۱.۳ ب یک "قطعه مکعبی" هم‌اندازه با قطعه مکعبی در شکل ۱.۳ الف نشان داده شده است اما این قطعه از یک توده‌های سیال تشکیل شده است که به اندازه کافی بزرگ است که خواص معینی از نظر پیوستار داشته باشند اما در مقایسه با هندسه شارش خیلی کوچک است. وقتی حرکت توده‌های سیال روی می‌دهد، این حرکت به سرعت نامنظم می‌شود. توده‌ها تماس خود را با هم از دست می‌دهند، تغییر وضعیت و مکان می‌دهند، و به سرعت در توده‌های سیالی اطراف خود غوطه‌ور، آمیخته، و پخش می‌شوند. به این ترتیب، استفاده از یک سیستم با جرم ثابت برای استنتاج معادله‌های مکانیک سیالات، اگر غیرممکن نباشد، خیلی مشکل است.

از این رو روش اوپلری (به نام لئونارد اوپلر، ۱۷۸۳-۱۷۰۷) در اغلب تحلیلها پذیرفته شده است. در اینجا یک حجم کنترل یا نقطه ثابت در فضا در نظر گرفته می‌شود، و برای بیان تغییرات جرم، تکانه، و انرژی به هنگام عبور سیال از یک حجم یا نقطه ثابت معادله‌هایی استنتاج می‌شوند. مرز یک حجم کنترل را سطح کنترل می‌گویند. اندازه و شکل حجم کنترل کاملاً اختیاری است. اما اغلب برای سهولت قسمتهایی از آن را منطبق بر مرزهای جامد و قسمتهایی دیگر را عمود بر جهت‌های شارش در نظر می‌گیرند.

این روش اوپلری توصیف سیستم باز را می‌دهد. همانطور که در بالا گفته شد، در روشهای لاگرانژی و اوپلری دو روش ممکن برای ریاضیات محض وجود دارد. روش ماکروسکوپیکی و روش میدانی. در روش ماکروسکوپیکی، قوانین در سیستمها با جرم معین یا برای حجمهای کنترل استنتاج می‌شوند و مجموعه‌ای از مقادیر متوسط برای متغیرها محاسبه می‌شوند. این روش تحلیل هیچ اطلاعی درباره تغییر نقطه به نقطه پارامترهای درون سیستم یا حجم کنترل نمی‌دهد؛ بنابراین، این روش محض در تخمینهای اولیه مهندسی مفید است. تحلیلهای پیشرفته‌تر که تغییرات پارامترها را در تمام ناحیه می‌دهند برای حل نهایی مسئله کاملاً لازم است. مثلاً تحلیل یک تخلیه‌کننده ضایعات قرار است با حجم کنترل نشان داده شده در شکل ۲.۳ انجام شود. از دیدگاه تنظیمی، خواسته این است که توزیع آلاینده را در تمام امتداد ساحل و در تمام نقاط لبه رودخانه تعیین کنیم. در اینجا، با تحلیل حجم کنترلی فقط مقادیر متوسط غلظت در ورودی A و خروجی B سطح کنترل قابل پیش‌بینی است. به علاوه، فقط غلظت متوسط حجمی آلاینده در داخل حجم کنترل را می‌توان محاسبه کرد. تغییر نقطه به نقطه را نمی‌توان محاسبه کرد. برای محاسبه تغییر نقطه به نقطه متغیر سیال در تمام ناحیه، از روش میدانی استفاده می‌شود.



شکل ۲.۳ حجم کنترل در رودخانه و مسئله آلاینده.

با این روش اساساً می‌توان در نظر گرفت که ناحیه از تعداد زیادی حجم کنترل یا سیستم تشکیل شده است به طوری که وقتی آنها به سمت صفر میل می‌کنند مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی به دست می‌آید. این معادله‌ها به اندازه‌ای مشکل‌اند که حل عمومی برای توزیع سه‌بعدی متغیرهای مربوط به انواع شکل‌های پیچیده هندسی که در عمل با آنها مواجه می‌شویم هنوز به دست نیامده‌اند، و این کار حتی با پرتوان‌ترین فوق کامپیوترها نیز امکان‌پذیر نشده است.

تمام دینامیک سیالات و انتقال مربوط به آنها اساساً در نقطه به نقطه ناحیه فضا و لحظه به لحظه تغییر می‌کنند. این تغییرات می‌توانند خیلی سریع با کوچکترین مقیاسهای تغییر پذیری (فوق مولکولی)، تقریباً در 10^{-10} ثانیه و در مقیاس 10^{-10} cm، روی دهند. بنابراین، ترسیم یا توصیف دقیق تمام انواع ممکن فرایندهای فیزیکی که این تغییر پذیری را بدهند، و همچنین شناسایی روشهای قابل قبول برای ساده کردن پیچیدگی ریاضی بدون اینکه فرایندهای فیزیکی حاکم تغییر کنند عمل قابل تمجیدی است.

توصیف حرکت سیال

قبل از توصیف فرایندها، توضیح چند مفهوم هندسی که با آنها می‌توان میدان شارش را مجسم کرد مفید است. مفاهیم خط جریان، خط مسیر، و رگه هم برای توصیف تحلیلی و هم برای نمایش نقشهای شارش مفید است.

اگر سرعت سیال در روش اویلری در نظر گرفته شود، در این صورت بردار سرعت به صورت \mathbf{v} (یا گاهی اوقات \mathbf{q}) تعریف می‌شود که در آن

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (3.1.3)$$

در معادله (۳.۱.۳)، u ، v و w به ترتیب، سرعتها در جهتهای x و y ، و z است و هر کدام می‌توانند برحسب زمان یا فضا تغییر کنند.

خط جریان خط پیوسته‌ای است در سیال که در هر نقطه‌ای جهت بردار سرعت را دارد. در عرض خط جریان هیچ شارشی وجود ندارد. از آنجا که ذره در هر لحظه در جهت خط جریان حرکت می‌کند؛ جابه‌جایی δs ، با مؤلفه‌های δx ، δy و δz در جهت بردار سرعت \mathbf{v} با مؤلفه‌های u ، v و w به ترتیب در جهتهای x ، y و z قرار دارد. بنابراین

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{v} = \frac{\delta z}{w}$$

یعنی مؤلفه‌های نظیر متناسب‌اند و از این رو δs و v هم‌جهت‌اند. جابه‌جایی را می‌توان به صورت دیفرانسیلی زیر بیان کرد:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (۴.۱.۳)$$

که معادله‌های دیفرانسیل خط جریان به شمار می‌روند. معادله‌های (۴.۱.۳) دو معادله مستقل‌اند. هر خط پیوسته‌ای که در آنها صدق کند خط جریان است.

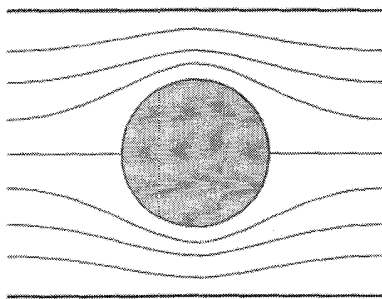
در شارش پایا، شیب خط جریان در تمام نقاط ثابت است زیرا جهت بردار سرعت در هیچ نقطه‌ای تغییر نمی‌کند. از این رو، خط جریان در فضا ثابت است. ذره همیشه مماس بر خط جریان حرکت می‌کند؛ از این رو، در شارش پایا مسیر ذره همان خط جریان است. در شارش غیرپایا، خط جریان لحظه‌به‌لحظه در فضا تغییر مکان می‌یابد زیرا جهت بردار سرعت در هر نقطه‌ای با زمان تغییر می‌کند. بنابراین ذره در این لحظه این خط جریان را و در آن لحظه آن خط جریان را طی می‌کند، به طوری که مسیر ذره به هیچ خط جریان لحظه‌ای مفروضی شباهت ندارد.

در بسیاری از موارد، رنگ یا دود سیگار به داخل سیال تزریق می‌کنند تا حرکت بعدی‌اش را ردیابی کنند؛ رد رنگ یا دود را رگه می‌نامند. رگه در شارش پایا، خط جریان در مسیر ذره است. با تزریق ذرات ریز و براق (گرد آلومینیم) در سیال، روشن کردن یک صفحه، و عکسبرداری از رگه‌ها در فاصله‌های کوتاه زمانی، می‌توان خطوط جریان را در شارش دوبعدی تشخیص داد. ردیابی خطوط پیوسته تصویر که در تمام نقاط هم‌جهت رگه‌هایند، خطوط جریان شارش پایا یا غیرپایا را نشان می‌دهد.

لوله جریان مجرابی است حاصل از عبور تمام خطوط جریانی که از منحنی بسته و کوچکی بگذرند. در شارش پایا، لوله جریان در فضا ثابت است و در دیواره‌های آن هیچ شارشی وجود ندارد، زیرا بردار سرعت هیچ مؤلفه عمود بر سطح لوله ندارد.

شکل ۳.۳ طرحواره‌ای از خطوط جریان برای شارش پیرامون یک استوانه، که میان دیواره‌های موازی قرار دارد، نشان داده شده است. خطوط طوری رسم می‌شوند که حجم شارش بین خطوط جریان مجاور، در زمان واحد، (با فرض عمق واحد) یکسان باشد. از این رو، وقتی خطوط جریان به هم نزدیک‌ترند سرعت باید بیشتر باشد و برعکس.

ترسیم و رؤیت شارش با استفاده از روشهای جدید کامپیوتری گرافیک و انیمیشن بسیار پیشرفت کرده است، و از این رو می‌توان نقشهای شارش را برای شکلهای هندسی بسیار پیچیده مشاهده کرد. قبل از آن، فقط شکلهای هندسی ساده با ریاضیات فیزیکی ساده پایا انجام عملیات آزمایشگاهی ساده امکان‌پذیر بود.



شکل ۳.۳ خطوط جریان برای شارش پایا به دور یک استوانه بین دیوارهای موازی.

توصیف فرایندهای سیال و ساده‌سازی

شارش را به روشهای مختلفی می‌توان رده‌بندی کرد، مانند متلاطم و لایه‌ای؛ حقیقی و ایدئال؛ برگشت‌پذیر و برگشت‌ناپذیر؛ پایا و غیرپایا؛ یکنواخت و غیریکنواخت؛ چرخشی و غیرچرخشی. در این قسمت و در قسمتهای بعد، انواع شارش را از هم تفکیک می‌کنیم.

در شارش لایه‌ای، ذرات سیال در مسیرهای همواری در قشرها یا لایه‌ها حرکت می‌کنند و هر لایه‌ای به‌طور یکنواخت بر لایه‌ی مجاور می‌لغزد. شارش لایه‌ای تابع قانون چسبندگی نیوتن [معادله (۱.۲.۱)] یا بسط آن به شارش سه‌بعدی است که تنش برشی را به آهنگ تغییرشکل زاویه‌ای مربوط می‌کند. در مواقعی که با ترکیبهایی از چسبندگی کم، سرعت زیاد، یا گذرگاههای بزرگ شارش سر و کار داریم، شارش لایه‌ای پایدار نمی‌ماند و به صورت شارش متلاطم در می‌آید.

در مهندسی، با شارش متلاطم، بیشتر شارشهای دیگر سر و کار داریم. در شارش متلاطم، ذرات سیال (جرمهای مولی کوچک) در مسیرهای بسیار نامنظمی حرکت می‌کنند و باعث تبادل تکانه از یک قسمت یک قسمت سیال به قسمت دیگر می‌شوند؛ این تبادل تا حدودی شبیه انتقال تکانه مولکولی است که در بخش ۴.۱ شرح داده‌ایم اما در مقیاس بزرگتری صورت می‌گیرد. اندازه سیال از بسیار کوچک (مثلاً چند هزار مولکول) تا بسیار بزرگ (هزاران مترمکعب در گرداب بزرگی در یک رودخانه یا چاه هوایی) تغییر می‌کند. در حالتی که شارش بتواند هم متلاطم باشد و هم غیرمتلاطم (لایه‌ای)، در اثر تلاطم، نیروهای برشی بزرگتری در سراسر سیال به وجود می‌آید و برگشت‌ناپذیری یا اتلافها بیشتر می‌شود. همچنین، در شارش متلاطم، اتلافها با توان حدود 10^7 تا 10^9 سرعت تغییر می‌کنند؛ در شارش لایه‌ای، اتلافها با توان اول سرعت تغییر می‌کنند.

محاسبه تنشهای برشی ناشی از شارش متلاطم، τ_t ، مسئله بسیار مهمی است. بر مبنای شباهت با شارش لایه‌ای یا قانون چسبندگی نیوتن و همچنین مفاهیم برخاسته از نظریه‌های آماری یا جنبشی دینامیک ذرات، اغلب از روش بوزینسک با درجه اطمینان منطقی استفاده می‌شود.

در اینجا

$$\tau_t = \eta \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_{xy} \quad (5.1.3)$$

که در آن η چسبندگی تلاطمی است. چسبندگی تلاطمی خاصیت سیال نیست، لحظه به لحظه و نقطه به نقطه تغییر می‌کند، و برای هر میدان شارش باید آن را پارامتر کرد (اغلب با توابع کاملاً متفاوت) این موضوع در فصل ۶ شرح داده می‌شود.

با تمایز فیزیکی تا به این اندازه واضح میان این شارشها، یک روش کمی برای رده بندی شارشها در فصل ۶ مرور می‌شود.

سیال ایدئال بی اصطکاک و تراکم ناپذیر است اما نباید آن را با گاز کامل (قسمت ۷.۱) اشتباه کرد. فرض سیال ایدئال در تحلیل حالتی از شارش که متضمن گستره‌های بزرگی از سیال است، مانند حرکت هواپیما با زیردریایی، مفید است. سیال بی اصطکاک غیر چسبنده است، و فرایندهای شارش آن برگشت پذیرند.

لایه‌ای از سیال را در همسایگی بلا فصل شارش حقیقی که نسبت به مرز تأثیر پذیرفته از تنش چسبندگی، دارای سرعت نسبی است، لایه مرزی می‌نامند. لایه‌های مرزی یا لایه‌ای اند یا متلاطم، که این عموماً به طول آنها، چسبندگی، سرعت شارش در نزدیکی آنها و زبری مرز بستگی دارد. چرخش ذره‌ای از سیال حول یک محور مفروض مانند محور z را به صورت سرعت زاویه‌ای متوسط دو جزء خط بی نهایت کوچک در ذره که بر یکدیگر و بر محور مفروض عمودند تعریف می‌کنند. اگر ذرات سیال در قسمتی از سیال حول هر محوری چرخش داشته باشند، شارش را شارش چرخشی یا شارش گردابی می‌نامند. اگر در قسمتی از سیال هیچ چرخشی وجود نداشته باشد، شارش را غیر چرخشی می‌نامند. اگر سیال ساکن و بی اصطکاک باشد، هر حرکت بعدی این سیال نیز بی چرخش است. ولی، در بیشتر حالت‌های عملی تنشهای برشی که از طریق مرزها وارد می‌شوند، شیبه‌ای چگالی، یا اغلب برهم کنشهای دیگر بین فرایندهای سیال باعث به وجود آمدن چرخش می‌شوند.

شارش بی دررو شارشی از سیال است که در آن هیچ گرمایی با سیال مبادله نشود. شارش بی دررو برگشت پذیر (بی دررو بی اصطکاک) را شارش تک‌آنتروپیک* می‌خوانند.

در اغلب مسائل سیالات سه بعدی و کاملاً متغیر با زمان، اغلب نمی‌توان حل‌های عمومی به دست آورد. بعضی رده بندیهای فضایی و زمانی وجود دارند که با آنها می‌توان روشهایی را برای ایجاد تحلیل‌های ساده ابداع کرد یا توضیح داد. با تعریف این رده بندیها این قسمت را به پایان می‌بریم.

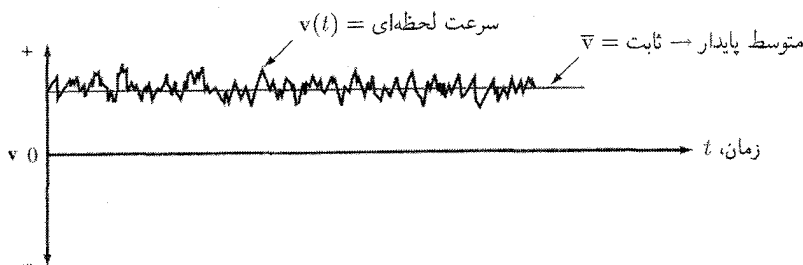
* البته، فرایند تک‌آنتروپیک می‌تواند در شارش برگشت ناپذیر با مقدار صحیحی از انتقال گرما پدید آید (تک‌آنتروپیک = آنتروپیک-ثابت).

دو رده‌بندی زمانی وجود دارد. وقتی شرایط در هیچ نقطه‌ی داخل سیال با زمان تغییر نکند، شارش پایا رخ می‌دهد. برای مثال، سرعت اگر در نقطه‌ای از شارش پایا مساوی 3 m/s در جهت $+x$ باشد، در همین جهت به‌طور نامعین مقدار خود را حفظ می‌کند. این موضوع را به صورت $\partial v / \partial t = 0$ می‌توان بیان کرد، که در آن فضا (مختصات x و y و z نقطه) ثابت می‌ماند. همچنین، در شارش پایا در هیچ نقطه‌ای تغییری در چگالی ρ ، فشار p ، دما T ، یا غلظت C با گذشت زمان به وجود نمی‌آید؛ از این رو

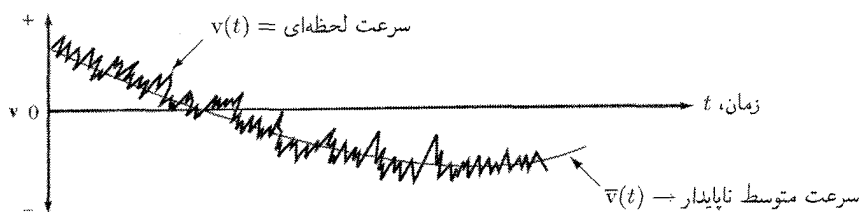
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

در شارش متلاطم، بر اثر حرکت نامنظم ذرات سیال، همیشه افت و خیزهای کوچکی در هر نقطه وجود دارد. تعریف مربوط به شارش پایا را باید تا اندازه‌ای تعمیم داد تا این افت و خیزها را نیز دربرگیرد. برای نشان دادن این موضوع، نمودار سرعت را برحسب زمان در نقطه‌ای از شارش متلاطم در شکل ۴.۳ نشان داده‌ایم. وقتی سرعت میانگین زمانی، یعنی

$$\bar{v} = \frac{1}{t_p} \int_t^{t+t_p} v dt$$



(الف)



(ب)

شکل ۴.۳ رده‌های زمانی داده‌های سرعت متلاطم و سرعت میانگین در جریان میانگین پایا و غیرپایا.

که با خط افقی در شکل مشخص شده است، با زمان تغییر نکند، شارش را پایا می‌خوانند. در اینجا t_p دوره میانگین‌گیری نامیده می‌شود. اگر در این فرمول به جای v ، چگالی فشار، دما و غیره قرار دهیم، همین تعمیم در مورد آنها نیز صادق است.

وقتی شرایط در هر نقطه‌ای با زمان تغییر کند، $\partial v / \partial t \neq 0$ ، $\partial T / \partial t \neq 0$ ، و غیره، شارش غیرپایاست. آبی که از طریق شبکه ثابتی با آهنگ ثابت پمپاژ شود، نمونه شارش پایاست. آبی که از طریق شبکه ثابتی با آهنگ فزاینده پمپاژ شود نمونه شارش غیرپایاست. در شکل ۴.۳ نیز شارش متلاطم غیرپایا، که در آن حتی $\partial \bar{v} / \partial t \neq 0$ ، نشان داده شده است.

توصیف ساختار فضایی پیچیده‌تر است زیرا شارشها می‌توانند در یک بعد، دو بعد، یا سه بعد به خوبی رفتار کنند. این تعریفها در زیر آمده‌اند.

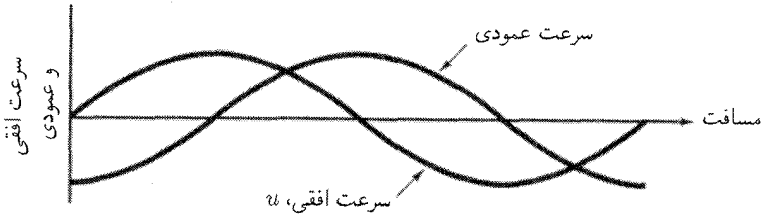
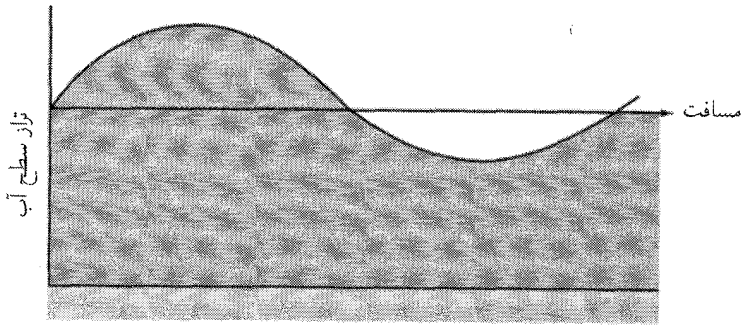
اگر بردار سرعت در هر نقطه‌ای در تمام لحظه‌ها یکسان باشد (از نظر مقدار و جهت)، شارش یکنواخت است؛ به صورت معادله یعنی $\partial v / \partial s = 0$ ، که آن زمان ثابت می‌ماند و s جابه‌جایی در هر جهتی است. معادله نشان می‌دهد که هیچ تغییری در بردار سرعت در هیچ جهتی در سراسر سیال در لحظه وجود ندارد. معادله درباره تغییر سرعت در یک نقطه برحسب زمان چیزی نشان نمی‌دهد.

شارشی که در آن بردار سرعت در هر لحظه از مکانی به مکانی دیگر تغییر کند ($\partial v / \partial s \neq 0$) شارش غیریکنواخت خوانده می‌شود. مایعی که در یک لوله مستقیم و طولیل پمپ شود شارش یکنواخت دارد. مایعی که در مقطع کاهش یابنده یا در لوله خمیده جریان یابد شارش غیریکنواخت دارد.

نمونه‌هایی از شارش پایا و غیرپایا و شارش یکنواخت و غیریکنواخت در زیر آمده‌اند:

- شارش مایع در یک لوله طولیل با آهنگ ثابت شارش یکنواخت پایاست.
- شارش مایع در یک لوله طولیل با آهنگ کاهش شارش یکنواخت غیرپایاست.
- شارش در یک لوله انبساطی با آهنگ ثابت شارش غیریکنواخت پایاست.
- شارش در یک لوله انبساطی با آهنگ افزایشی شارش غیریکنواخت غیرپایاست.

در شارش یک‌بعدی ۱D از ورودها یا تغییرات سرعت، و غیره در جهت عمود بر جهت شارش صرف نظر می‌شود. شرایط هر مقطع برحسب مقادیر متوسط سرعت، چگالی، و خاصه‌های دیگر بیان می‌شود. مثلاً شارش در لوله را معمولاً می‌توان یک بعدی دانست. بسیاری از مسائل عملی را می‌توان با این روش تحلیل، که بسیار ساده‌تر از روشهای تحلیل دوبعدی و سه‌بعدی است، بررسی کرد. در شارش دوبعدی ۲D فرض می‌شود که تمام ذرات در صفحه‌هایی موازی و در مسیرهایی همسان در تک‌تک این صفحه‌ها جریان می‌یابند؛ بنابراین، هیچ تغییری در شارش عمود بر این صفحات وجود ندارد. شکل ۵.۳ نمونه‌ای از شارش دوبعدی سرعت موج آب است. موج



شکل ۵.۳ ارتفاعهای موج آب و سرعتها.

در صفحه عمود بر "صفحه کاغذ" با تغییرات عمودی و افقی مسیر و سرعت ذره نشان داده شده است. فرض می‌شود که این تغییرات با تغییرات در صفحه‌های موازی دیگر که در جلو و عقب شکل قرار دارند یکسان است. شارش سه‌بعدی (۳D) کلیترین و پیچیده‌ترین شارش است، و نوعاً فقط مرزهای شارش ساده هندسی را می‌توان بررسی کرد.

هر کس که رودخانه‌ای را مشاهده کرده باشد به سهولت می‌گوید که شارش سه‌بعدی است و توصیف آن برحسب شارشهای یک‌بعدی و دوبعدی می‌رساند که فیزیک از فرایندهایی که فقط یک‌بعدی و دوبعدی هستند تشکیل شده است. ابزار ریاضی که اغلب با آن می‌توان شارش پیچیده سه‌بعدی را در شکل ساده شده فضایی تحلیل کرد میانگین‌گیری فضایی است. همانطور که معدل‌گیری زمانی تغییرپذیری زمانی را از بین می‌برد، میانگین‌گیری فضای پیچیدگی فضایی را "از بین می‌برد". مثلاً، میدان سرعت سه‌بعدی که به صورت $\mathbf{v}(x = x_1, y, z, t)$ بیان می‌شود را روی مقطع عرضی $A_1(x = x_1)$ می‌توان به‌طور فضایی میانگین گرفت؛ به صورت زیر

$$v_1 A_1 = \iint \mathbf{v}(x, t) dA$$

به‌طور مشابه، سرعتهای میانگین را در هر مکان x داخل جریان می‌توان مشخص کرد. بنابراین شارش حاصل را فقط یک‌بعدی، نه سه‌بعدی، می‌توان در نظر گرفت.

تعریف بالا از شارش یکنواخت را به شارشهای به‌طور فضایی میانگین‌گیری شده می‌توان بسط داد. اگر مقاطع عرضی موازی در مجرا یا رودخانه یا کانال همسان یا منشوری باشند و سرعت میانگین در هر مقطع عرضی در هر لحظه معین یکسان باشد، در این صورت شارش و انتقال یک‌بعدی نیز یکنواخت نامیده می‌شود.

خلاصه تحلیل و روشهای حل

همانطور که قبلاً گفته شد، حل‌های دقیق یا قطعی سه‌بعدی متغیر برحسب زمان معمولاً در دسترس نیستند به ویژه در شارشهایی که با شکل‌های هندسی بسیار پیچیده به‌طور طبیعی روی می‌دهند. به‌طور نوعی، مهندس یا تحلیل‌گر از یکی از روشهای ساده‌کننده تحلیل و حل استفاده می‌کند. در این کتاب سه روش ساده‌کننده مختلف نشان داده می‌شود، که تمام آنها از جهتی به ساختمان مدل فرایند و استفاده آن در حل مسئله بستگی دارند. سه روش عبارت‌اند از حل‌های ریاضی دقیق، آزمایشها یا شبیه‌سازیهای آزمایشگاهی، و حل‌های عددی یا محاسباتی. اغلب بعضی از این روشها یا هر سه آنها در مسئله به کار برده می‌شوند به امید آنکه با مشاهده پاسخهای سازگار بین روشها اعتباری برای حل پیشنهادی به دست آید. حالتی که داده‌های آزمایشگاهی با یک مدل یا یک حل دقیق مقایسه می‌شود اعتباربخش نامیده می‌شود. در مواقع دیگر برای بسط ناحیه صحت حل حاصل از یک روش می‌توان از روش دیگر استفاده کرد. این حالتی است که اغلب وقتی حل‌های دقیق با مدل‌های عددی یا شبیه‌سازی آزمایشگاهی به دست می‌آیند با آن روبه‌رو می‌شویم.

در ضمن اینکه هیچ حل سه‌بعدی وجود ندارد، هیچ‌یک از این روشها نیز یک حل کلی برای مسئله نمی‌دهند. سه راه کلی برای انتخاب اینکه از کدام روش استفاده شود وجود دارد. اول این است که درباره فرایندهای فیزیکی حاکم بر میدان شارش چقدر دانسته می‌شود و معادله‌های حاکم تا چه اندازه به درستی در نظر گرفته و پذیرفته شده‌اند؛ دوم این است که متغیرها چگونه برحسب زمان و فضا تغییر می‌کنند، سوم مربوط می‌شود به اینکه هندسه شارش پیچیده یا ساده است. به‌طور کلی، اگر هنوز برای یک هندسه یا فرایند شارش معینی می‌بایستی توابع یا معادله‌های ریاضی در نظر گرفته شوند، در این صورت به‌طور سنتی آزمایشهای آزمایشگاهی انجام می‌شوند. برای اطمینان از برقراری تشابه بین مدل آزمایشگاهی و نمونه اصلی از روشهای تحلیل غیرابعدی استفاده می‌شود. در فصل ۵ این روشها بررسی می‌شوند.

در جایی که بتوان فیزیک شارش و انتقال را به‌طور ریاضی نشان داد، از حل‌های دقیق و مدل‌های عددی استفاده می‌شود. فقط فرایندهایی که در مسئله سهم دارند به‌طور ریاضی باقی می‌مانند و مجدداً با تحلیل ابعادی شناسایی می‌شوند. به‌طور کلی، هرچه فرایندهای موجود در مسئله بیشتر باشد، تحلیل دقیق مشکلتر است و روش حل عددی روش بهینه است. به عنوان

مثال، شارش چسبنده پایای آب روی یک سطح هموار با اصطکاک و اینرسی سروکار دارد و حل دقیق آن به خوبی انجام می‌شود. در پیش‌بینی پخش یک آلاینده گرم در داخل یک رودخانه سرد در یک طوفان پارامترهای پخش متلاطم، اینرسی، چینه‌بندی، و انتشار امواج بلند وارد می‌شوند؛ این پدیده را با مدل عددی به خوبی می‌توان بررسی کرد.

در توابع مرزی یا واداشته پیچیده نیز از مدل‌بندی عددی استفاده می‌شود. شرایط پایا به‌طور ریاضی ساده است اما شرایط چنگانه یا متغیر برحسب زمان خیلی پیچیده و اغلب غیرخطی است. پیش‌بینی فرسایش کف کانال رودخانه در جریان طوفان را با استفاده از اطلاعات مربوط به تغییرات زمانی جریانها و همچنین تغییرات زمانی امواج سطحی که با باد به حرکت در می‌آیند باید حل کرد و بنابراین روش عددی مورد نیاز است.

نوع هندسه شارش تأثیر زیادی بر انتخاب یک روش حل دقیق و محاسباتی دارد. شارشها می‌توانند خارجی باشند از این نظر که روی یک جسم مانند یک کره یا ذره رسوب جریان داشته باشند؛ بنابراین هرگونه هندسه محدودکننده به قدری دور است که بر شارش محلی تأثیر نمی‌گذارد. اغلب در حالت امواج باد یا آب زیرزمینی مکان مرز موضوع حل را تشکیل می‌دهد. این مسائل سطح آزاد خیلی غیرخطی‌اند. اگر شبیه‌ای خیلی زیادی در هندسه شارش وجود نداشته باشند، در این صورت روشهای عددی پیشنهاد می‌شود. در هندسه‌های طبیعی معمولاً با تغییرات شدید در عمق یا هندسه کانال روبه‌رو می‌شویم و در محاسبات شارش و انتقال طبیعی همیشه بهتر است از مدل‌های کامپیوتری استفاده شود.

همانطور که قبلاً گفته شد، با میانگین‌گیری فضایی از معادله‌ها می‌توان ساده‌سازی فضایی را به‌دست آورد. نمونه‌هایی در این مورد عبارت‌اند از شارش در رودخانه و شارش در لوله که با روشهای یک‌بعدی با دقت حل می‌شوند. شارشها با ساختار عمودی قابل توجه که از شبیه‌ای چگالی یا چینه‌بندی با شارش مخالف ناشی می‌شوند را با روش یک‌بعدی نمی‌توان بررسی کرد. شارش در رودخانه‌ها و مصیها، یعنی، شارشهای طبیعی نمونه‌هایی از این استثناهاست.

تمرینها

۱.۱.۳ شارش یک‌بعدی عبارت است از الف) شارش یک‌نواخت پایا؛ ب) شارش یک‌نواخت؛ ج) شارشی که در آن از تغییرات در جهت عرضی صرف‌نظر شود؛ د) صرفاً شارش در خط مستقیم؛ ه) هیچکدام.

۲.۱.۳ شارش تک‌آنتروپیک عبارت است از الف) شارش بی‌دررو برگشت‌ناپذیر؛ ب) شارش گاز کامل؛ ج) شارش سیال ایدئال؛ د) شارش بی‌دررو برگشت‌پذیر؛ ه) شارش برگشت‌پذیر بی‌اصطکاک. ۳.۱.۳ در شارش متلاطم الف) ذرات سیال منظم حرکت می‌کنند؛ ب) برای ایجاد تنش برشی،

همدوسش از انتقال تکانه مؤثرتر است؛ ج) انتقال اندازه حرکت مؤثرتر است؛ د) انتقال تکانه فقط در مقیاس مولکولی صورت می‌گیرد؛ ه) یک لایه سیال به نرمی بر لایه دیگر می‌لغزد؛ و) تنشهای برشی عموماً بزرگتر از تنشهای برشی شارش لایه‌ای مشابه هستند.

۴.۱.۳ نسبت $\tau = \eta (du/dy)$ در شارش متلاطم (الف) خاصه فیزیکی سیال است؛ ب) به شارش و چگالی بستگی دارد؛ ج) چسبندگی تقسیم بر چگالی است؛ د) تابع دما و فشار سیال است؛ ه) مستقل از نوع شارش است.

۵.۱.۳ شارش متلاطم عموماً در حالتهایی پدید می‌آید که الف) سیالات بسیار چسبنده‌اند؛ ب) گذرگاههای بسیار باریک یا لوله‌های مویی وجود دارد؛ ج) حرکتها بسیار آهسته‌اند؛ د) ترکیبی از الف)، ب)، ج) و د)؛ ه) هیچکدام.

۶.۱.۳ در شارش لایه‌ای الف) برای ساده‌ترین حالتها شارش آزمایش لازم است؛ ب) قانون چسبندگی نیوتن صدق می‌کند؛ ج) ذرات سیال در مسیرهای نامنظم و اتفاقی حرکت می‌کنند؛ د) چسبندگی اهمیت ندارد؛ ه) نسبت $\tau/(du/dy)$ به شارش بستگی دارد.

۷.۱.۳ سیال ایدئال الف) بسیار چسبنده است؛ ب) از قانون چسبندگی نیوتن پیروی می‌کند؛ ج) فرضی است مفید در مسائل مربوط به شارش در مجرا؛ د) بی‌اصطکاک و تراکم‌ناپذیر است؛ ه) هیچکدام.

۸.۱.۳ کدام حکم در شارش هر سیالی، اعم از حقیقی و ایدئال، صدق می‌کند؟

۱. قانون چسبندگی نیوتن.

۲. قانون دوم حرکت نیوتن.

۳. معادله پیوستگی.

۴. $\tau = (\mu + \eta) du/dy$.

۵. سرعت در مرز نسبت به مرز باید صفر باشد.

۶. سیال نمی‌تواند در مرز نفوذ کند.

الف) ۱، ۲، ۳؛ ب) ۱، ۳، ۶؛ ج) ۲، ۳، ۵؛ د) ۲، ۳، ۶؛ ه) ۲، ۴، ۵.

۹.۱.۳ در شارش پایا الف) شرایط در هیچ نقطه‌ای با زمان تغییر نمی‌کند؛ ب) شرایط در نقاط همجوار در هر لحظه یکسان است؛ ج) شرایط با زمان به‌طور پایا تغییر می‌کند؛ د) $\partial v/\partial t$ ثابت است؛ ه) $\partial v/\partial s$ ثابت است.

۱۰.۱.۳ شارش موقعی یکنواخت است که الف) شارش پایا باشد؛ ب) $\partial v/\partial t$ در همه جا صفر باشد؛ ج) همواره بردار سرعت در نقطه‌ای ثابت بماند؛ د) $\partial v/\partial s = 0$ باشد؛ ه) در لوله خمیده‌ای با سطح مقطع ثابت، تخلیه ثابت باشد.

۱۱.۱.۳ مثال عملی صحیح شارش غیریکنواخت پایا را انتخاب کنید: الف) حرکت آب به دور

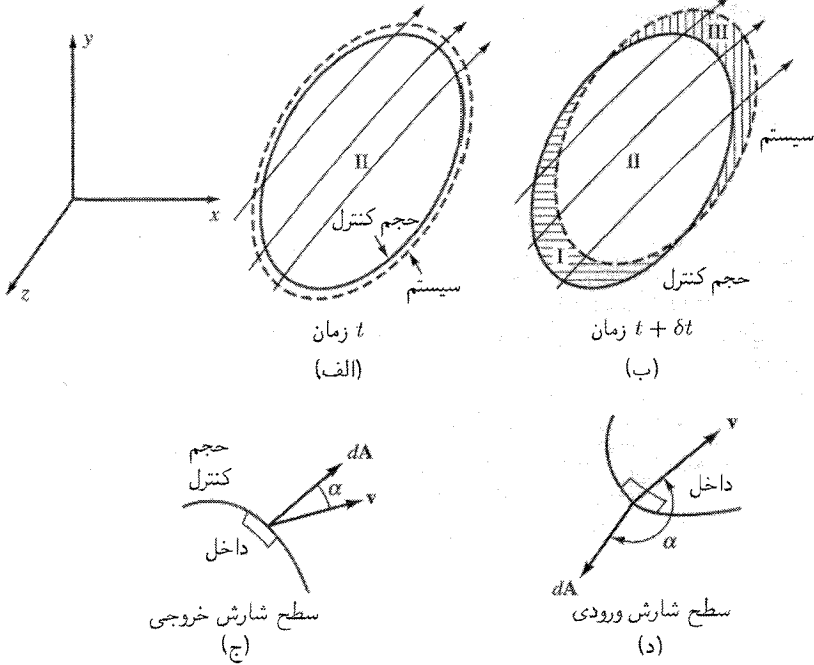
- کشتی در دریاچه؛ ب) حرکت رودخانه به دور پایه‌های پل؛ ج) شارش دائماً فزاینده در لوله؛ د) شارش دائماً کم‌شونده در مقطع کاهش یابنده؛ ه) تخلیه ثابت در لوله مستقیم طویل.
- ۱۲.۱.۳ خط جریان الف) خطی است که نقاط وسط مقاطع شارش را به هم وصل می‌کند؛ ب) فقط برای شارش یکنواخت تعریف می‌شود؛ ج) در تمام نقاط عمود بر بردار سرعت رسم می‌شود؛ د) همواره مسیر ذره است؛ ه) در شارش پایا در فضا ثابت است.
- ۱۳.۱.۳ در شارش دوبعدی به دور یک استوانه، خطوط جریان در فاصله زیادی از استوانه که سرعت $10^{\circ}ft$ است $2in$ از یکدیگر فاصله دارند. در نقطه‌ای در نزدیکی استوانه خطوط جریان از یکدیگر $15in$ فاصله دارند. سرعت متوسط عبارت است از: الف) $75ft/s$ ؛ ب) $133ft/s$ ؛ ج) $150ft/s$ ؛ د) $200ft/s$ ؛ ه) $300ft/s$.
- ۱۴.۱.۳ افت ارتفاع در شارش متلاطم در لوله الف) به‌طور مستقیم با سرعت تغییر می‌کند؛ ب) با مربع سرعت به‌طور معکوس تغییر می‌کند؛ ج) با مربع قطر به‌طور معکوس تغییر می‌کند؛ د) به سمتگیری لوله بستگی دارد؛ ه) تقریباً با مربع سرعت تغییر می‌کند.

۲.۳ معادله پایستاری کلی حجم کنترلی

- صرف‌نظر از نوع شارش، تمام حالت‌های شارش تابع روابط زیرند که به صورت تحلیلی می‌توان بیان کرد:
۱. قوانین حرکت نیوتن، که باید برای هر ذره‌ای در هر لحظه برقرار باشد؛
 ۲. رابطه پیوستگی، یعنی قانون بقای جرم؛
 ۳. پایستاری جرم مربوط به کتب طبقه‌های داخل سیال؛
 ۴. قوانین اول و دوم ترمودینامیک؛
 ۵. شرایط مرزی؛ بیان‌های تحلیلی از این قبیل که سرعت یک سیال حقیقی در مرز نسبت به مرز مساوی صفر است یا اینکه سیالات بی‌اصطکاک نمی‌توانند در یک مرز نفوذ کنند.
- روابط و معادله‌های دیگری نیز، مانند معادله حالت یا قانون چسبندگی نیوتن می‌توان وارد بحث کرد.

در استنتاج زیر، مفهوم حجم کنترل را به سیستم برحسب خاصه کلی سیستم ارتباط می‌دهیم. سپس از آن به‌طور اخص برای به‌دست آوردن رابطه‌های پیوستگی، انرژی، و تکانه خطی استفاده می‌کنیم.

برای فرمولبندی رابطه بین معادله‌هایی که در سیستم به کار می‌روند و معادله‌هایی که برای حجم کنترل به کار می‌روند، حالت کلی یک شارش را در نظر بگیرید (شکل ۶.۳) که در آن سرعت یک سیال نسبت به دستگاه مختصات xyz در دست است. در زمان t جرم معینی از سیال را



شکل ۶.۳ سیستم با حجم کنترل همسان در لحظه t در یک میدان سرعت.

در نظر بگیرید که درون یک سیستم قرار دارد؛ مرزهای سیستم با خط چین نشان داده شده است. همچنین حجم کنترلی را در نظر بگیرید که نسبت به محورهای xyz ثابت است. این حجم کنترل در زمان t دقیقاً بر سیستم منطبق است. در زمان $t + \delta t$ سیستم قدری حرکت کرده است، زیرا هر ذره‌ای از جرم با سرعتی حرکت می‌کند که به محل آن وابسته است.

فرض می‌کنیم N مقدار کل یک خاصه (جرم، انرژی، تکانه) در درون سیستم در زمان t ، و η مقدار این خاصه برای جرم واحد، در سراسر سیال باشد. حال آهنگ زمانی افزایش N را برای سیستم برحسب حجم کنترل فرمولبندی می‌کنیم.

در حالی که در $t + \delta t$ (شکل ۶.۳ ب) سیستم شامل حجمهای II و III است، در زمان t حجم II را اشغال می‌کند (شکل ۶.۳ الف). افزایش خاصه N در سیستم در زمان δt از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_{(\text{سیستم})_{t+\delta t}} - N_{(\text{سیستم})_t} = \left(\int_{\text{III}} \eta \rho dV + \int_{\text{II}} \eta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{\text{II}} \eta \rho dV \right)_t$$

که در آن $d \forall$ جزء حجم است. پس از مرتب کردن، زیاد و کم کردن

$$\left(\int_I \eta \rho d \forall \right)_{t+\delta t}$$

به طرف راست، و سپس تقسیم کردن بر δt ، نتیجه می شود

$$\frac{N_{(سیستم)_{t+\delta t}} - N_{(سیستم)_t}}{\delta t} = \frac{(\int_{II} \eta \rho d \forall + \int_I \eta \rho d \forall)_{t+\delta t} - (\int_{II} \eta \rho d \forall)_t}{\delta t} + \frac{(\int_{III} \eta \rho d \forall)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{(\int_I \eta \rho d \forall)_{t+\delta t}}{\delta t} \quad (۱.۲.۳)$$

جمله سمت چپ عبارت است از آهنگ زمانی متوسط افزایش N در سیستم در مدت δt . در حد، وقتی δt به صفر نزدیک می شود، این جمله dN/dt می شود. اگر وقتی که δt به صفر نزدیک می شود از اولین جمله سمت راست معادله حد بگیریم، دو انتگرال اول عبارت خواهند بود از مقدار N در حجم کنترل در $t + \delta t$ و انتگرال سوم عبارت خواهد بود از مقدار N در داخل حجم کنترل در زمان t . حد عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \eta \rho d \forall$$

وقتی حجم ثابت نگه داشته شود (حجم کنترل) و $\delta t \rightarrow 0$ ، مشتق جزئی لازم می شود. جمله بعد را که عبارت است از آهنگ زمانی شارش N در خروج از حجم کنترل، در حد می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\int_{III} \eta \rho d \forall)_{t+\delta t}}{\delta t} = \int_{\text{سطح جریان خروجی}} \eta \rho v \cdot dA = - \int \eta \rho v \cos \alpha dA \quad (۲.۲.۳)$$

که در آن dA (شکل ۶.۳ ج) برداری است که جزء مساحت سطح شارش خروجی را نشان می دهد. dA جهتی دارد که بر جزء مساحت سطح کنترل عمود است. جهت مثبت آن به طرف خارج سطح است؛ α زاویه بین بردار سرعت و بردار جزء سطح است. به طریق مشابه، آخرین جمله معادله (۱.۲.۳)، که عبارت است از آهنگ شارش N در ورود به حجم کنترل، در حد عبارت است از

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\int_I \eta \rho d \forall)_{t+\delta t}}{\delta t} = - \int_{\text{سطح جریان خروجی}} \eta \rho v \cdot dA = - \int \eta \rho v \cos \alpha dA \quad (۳.۲.۳)$$

علامت منها به این دلیل به کار می‌رود که $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$ (یا $\cos \alpha$) برای شارش ورودی منفی است (شکل ۶.۳ د). دوجمله آخر معادله (۱.۲.۳) را که از معادله‌های (۲.۲.۳) و (۳.۲.۳) به دست می‌آیند، در یک تک جمله می‌توان ترکیب کرد که انتگرال روی سطح (cs) کامل حجم کنترل است

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(\int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{(\int_I \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} \right) = \int_{cs} \eta \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{cs} \eta \rho v \cos \alpha dA$$

در اینجا هیچ شارش ورودی یا خروجی وجود ندارد، $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$ ؛ از این رو، معادله را بر کل سطح کنترل می‌توان ارزیابی کرد. از جمع جمله‌های مرتب شده معادله (۱.۲.۳)، به دست می‌آید

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \eta \rho dV + \int_{cs} \eta \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (۴.۲.۳)$$

معنی معادله (۴.۲.۳) این است که آهنگ زمانی افزایش N در داخل سیستم دقیقاً مساوی است با آهنگ زمانی افزایش خاصه N در داخل حجم کنترل (که نسبت به دستگاه xyz ثابت است) به علاوه آهنگ خالص شار N از مرز حجم کنترل.

در سراسر این فصل، برای تبدیل قوانین و اصول از صورت سیستمی به صورت حجم کنترل از معادله (۴.۲.۳) استفاده می‌کنیم. صورت سیستمی، که در واقع حرکت ذرات را دنبال می‌کند، به روش تحلیل لاگرانژی موسوم است؛ روش حجم کنترلی را روش تحلیل اوپلر می‌خوانند، زیرا ناظر به شارش از دستگاه مأخذی است که نسبت به حجم کنترل ثابت است.

از آنجا که به مأخذ xyz یک سرعت ثابت اختیاری می‌توان داد بی‌آنکه دینامیک سیستم و محیط آن تغییری کند، اگر حجم کنترل که اندازه و شکل آن ثابت است سرعت انتقالی یکنواختی داشته باشد، معادله (۴.۲.۳) صحت دارد.

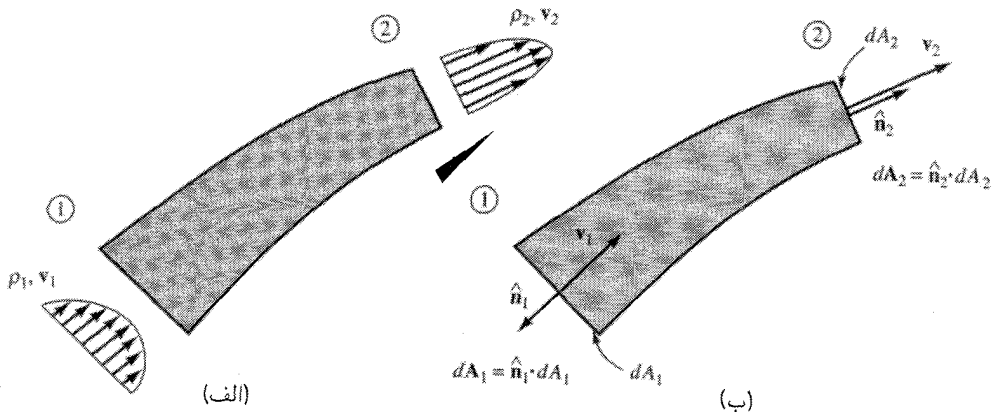
۳.۳ پایستاری جرم

شکل سیستمی پایستاری جرم عبارت است از

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

که بیان می‌کند جرم، m ، داخل سیستم در زمان ثابت می‌ماند. در معادله (۴.۲.۳) $N = m$ قرار می‌دهیم، بنابراین η جرم بر جرم واحد است، $\eta = 1$. بنابراین

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (۱.۳.۳)$$



شکل ۷.۳ نمایش حجم کنترلی شارش در یک لوله. (الف) میدان شارش؛ (ب) نمایش جسم آزاد.

معادله پایستاری جرم بیان می‌کند که آهنگ زمانی تغییر جرم در حجم کنترل به علاوه آهنگ خالص خروج جرم از سطح کنترل مساوی با صفر است.

لولهٔ استوانه‌ای در شکل ۷.۳ را در نظر بگیرید. شارش در مقطع ۱ وارد می‌شود و در مقطع ۲ خارج می‌شود. هیچ شارشی از طریق سطح جامد در برگیرنده لوله وجود ندارد. مراحل کاربرد پایستاری جرم به صورت زیر است:

۱. حجم کنترلی تعریف شده شامل تمام سیال داخل لوله، و نه دیوارهٔ جامد، و از مقطع ۱ تا مقطع ۲ است. اگر غیرممکن نباشد مقاطع داخلی و خارجی باید طوری تعریف شوند یا در ناحیه‌هایی قرار داده شوند که در آنجا خطوط جریان (یا لوله‌های جریان) به موازات مرز باشند به طوری که سرعت‌های سیال در ورودی و خروجی بر مساحت‌های مربوطه عمود باشند.

۲. اگر برخلاف بیان مسئله نباشد، مفید است شارش یا فرض شود، که در این حالت معادله (۱.۳.۳) به شکل زیر درمی‌آید

$$\dot{m} = \int_{cs} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.3.3)$$

۳. معادله (۲.۳.۳) برای هر سطح کنترل (cs) به کار می‌رود، یعنی در جایی که جرم سیال (یا در قسمتهای بعد، تکانه و انرژی سیال) وارد یا خارج شود؛ بنابراین،

$$\int_{cs1} \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \int_{cs2} \rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = 0$$

۴. اگر بردارهای سرعت ورودی و خروجی، در هر ورودی و خروجی، بر مساحت‌های

مربوطه‌شان عمود باشند، در این صورت تمام انتگرال حاصلضریبهای نقطه‌ای شارش خروجی (شکل ۶.۳ ج) به صورت $\rho_2 v_2 dA_2 = \rho_2 v_2 dA_2$ و در شارشهای ورودی به صورت $\rho_1 v_1 dA_1 = -\rho_1 v_1 dA_1$ ارزیابی می‌شوند. بنابراین،

$$\int_{cs1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{cs2} \rho_2 v_2 dA_2 \quad (3.3.3)$$

یادآوری می‌شود که ρ و v توابعی از A_1 و A_2 است. ورودی مساحت‌های مربوطه‌شان می‌توانند تغییر کنند. این حالت به خصوص برای سرعتها وجود دارد.
۵. اگر ρ_1 و ρ_2 در سطوح ورودی و خروجی تغییر نکنند، در این صورت

$$\rho_1 \int_{cs1} v_1 dA_1 = \rho_2 \int_{cs2} v_2 dA_2$$

۶. مناسبترین است که در محاسبات اولیه تغییر فضایی سرعت در نظر گرفته نشود. بنابراین، به سرعت میانگین فضایی متوسط می‌شویم تا مسئله به صورت یک بعدی درآید. از این رو،

$$V_1 A_1 = \int_{cs1} v_1 dA_1 \quad V_2 A_2 = \int_{cs2} v_2 dA_2$$

و

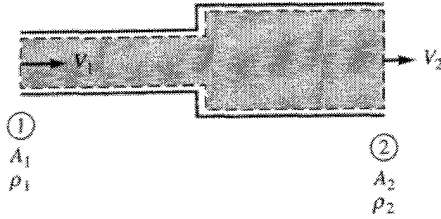
$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{m} \quad (4.3.3)$$

در اینجا \dot{m} آهنگ شارش جرم برحسب kg/sec یا slug/sec است. برای مسئله شارش پایا در اینجا، معادله پیوستگی بیان می‌کند که آهنگ شارش جرم ثابت است.
اگر تخلیه Q (که آهنگ شارش حجمی، یا شارش نیز نامیده می‌شود) با رابطه

$$Q = AV \quad (5.3.3)$$

تعریف شود، معادله پیوستگی را می‌توان به صورت زیر درآورد:

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad (6.3.3)$$



شکل ۸.۳ حجم کنترل برای شارش در لوله‌های سری.

برای شارش پایا و تراکم‌ناپذیر، داریم

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad (۷.۳.۳)$$

که شکل مفید معادله است.

برای شارش چگالی-ثابت، اعم از پایا و غیرپایا، معادله (۷.۳.۳) تبدیل می‌شود به

$$\int_{cs} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (۸.۳.۳)$$

یعنی شار خالص حجم مساوی صفر است (یعنی حجم کنترل در تمام زمانها پراز مایع است).

مثال ۱.۳ در یک شبکه لوله‌کشی آب (شکل ۸.۳) سرعت در مقطع ۱ مساوی 3 ft/s و قطر آن مساوی 2 ft است. در مقطع ۲ قطر 3 ft است. تخلیه و سرعت را در مقطع ۲ پیدا کنید.

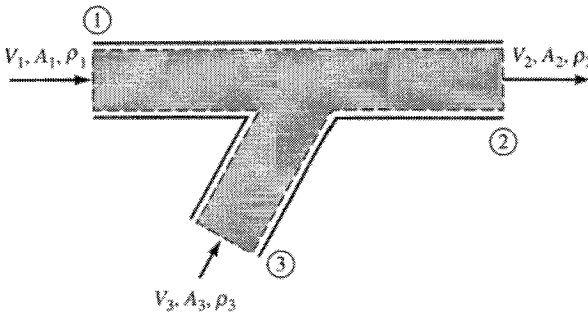
حل

از معادله (۷.۳.۳)

$$Q = V_1 A_1 = (3 \text{ ft/s}) \frac{\pi}{4} (2 \text{ ft})^2 = 9.42 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{9.42 \text{ ft}^3/\text{s}}{\pi (3 \text{ ft})^2} = 1.33 \text{ ft/s}$$

اگر ورودیها و خروجیهای متعدد وجود داشته باشند، معادله حجم کنترلی را باید بسط داد. یک مسیر متقاطع T مانند شکل ۹.۳ را در نظر بگیرید؛ شرایط در ورودیها (مقاطع ۱ و ۳) و خروجی (مقطع ۲) نیز نشان داده شده‌اند. به علاوه فرض کنید که چگالی در هر مقطع ثابت است



شکل ۹.۳ تعریف حجم کنترل در ورودی و خروجی چندگانه.

(اگرچه لزوماً با هم مساوی نیستند)، بردارهای سرعت بر سطوح مربوطه‌شان عمودند، و سرعت‌های میانگین در هر مقطع به این ترتیب مشخص‌اند. بنابراین، معادله (۲.۳.۳) به شکل زیر در می‌آید

$$-\rho_1 V_1 A_1 - \rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 V_3 A_3 = 0$$

یا

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3 \quad (۹.۳.۳)$$

در حالی که تمام چگالیها باهم برابرند

$$V_1 A_1 + V_2 A_2 = V_3 A_3 \quad (۱۰.۳.۳)$$

یا مجموع آهنگهای شارش حجمی ورودی مساوی است با مجموع آهنگهای شارش حجمی که از سطح کنترل خارج می‌شوند

۴.۳ معادله انرژی

معادله بنیادی

قانون اول ترمودینامیک در یک سیستم می‌گوید که گرمای Q_H افزوده شده به یک سیستم منهای کار W انجام شده به توسط سیستم فقط به حالت‌های ابتدایی و انتهایی بستگی دارد. اختلاف حالت‌های سیستم، که مستقل از مسیر حالت ابتدایی به حالت انتهایی است، باید خاصه سیستم

باشد. این خاصه را انرژی داخلی E می‌گویند. قانون اول به صورت معادله عبارت است از

$$Q_H - W = E_2 - E_1 \quad (۱.۴.۳)$$

انرژی داخلی جرم واحد را e می‌نامند؛ از این رو، با به کارگیری معادله (۴.۲.۳)، $N = E$ و $\eta = e$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \int_{cs} \rho e v \cdot dA \quad (۲.۴.۳)$$

یا با استفاده از معادله (۱.۴.۳)

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \int_{cs} \rho e v \cdot dA \quad (۳.۴.۳)$$

کار سیستم بر محیطش را می‌توان دویخش کرد: یکی کار W_{pr} نیروهای فشاری وارد بر مرزهای متحرک، و دیگری کار W_s نیروهای برشی مانند گشتاور مؤثر بر محور چرخان. کار نیروهای فشاری در زمان δt عبارت است از

$$\delta W_{pr} = \delta t \int p v \cdot A \quad (۴.۴.۳)$$

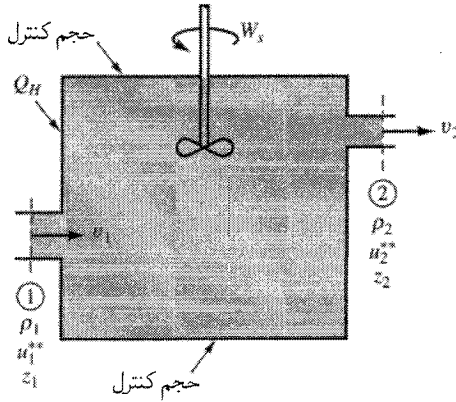
با استفاده از تعریف جمله‌های کار، معادله (۳.۴.۳) تبدیل می‌شود به

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho e dV + \int_{cr} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho v \cdot dA \quad (۵.۴.۳)$$

در غیاب آثار هسته‌ای، الکتریکی، مغناطیسی، و پسا سطحی، انرژی داخلی e یک ماده خالص عبارت است از مجموع انرژیهای پتانسیل، جنبشی و "ذاتی". انرژی ذاتی u^{**} جرم واحد از فواصل و نیروهای مولکولی ناشی می‌شود (که به p ، ρ یا T بستگی دارد).

$$e = gz + \frac{V^2}{2} + u^{**} \quad (۶.۴.۳)$$

ابعاد e برحسب آحاد کار بر جرم واحد با $[FL/M]$ است، که به ابعاد $[L^2/t^2]$ تبدیل می‌شوند. باید توجه داشت که متغیر ارتفاع، z ، در جمله انرژی پتانسیل ایجاب می‌کند یک سطح مبنا یا داده برای مسئله تعریف شود. از آنجا که تفاضل ارتفاعها موردنیاز است، لزومی ندارد سطح مبنا مطلق



شکل ۱۰.۳ حجم کنترل با شارش در عرض سطح کنترل عمود بر سطح.

یا جهانی باشد. سرعت در جمله انرژی جنبشی مقدار سرعت کل در نقطه تحت بررسی در میدان شارش است، یعنی، $V^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = u^2 + v^2 + w^2$.

برای کاربرد معادله (۵.۴.۳) در یک حجم کنترل، محفظه آمیختگی را در شکل ۱۰.۳ در نظر بگیرید. با استفاده از روشهای کاربرد حجم کنترل و ساده‌سازیهای قسمت قبل، معادله انرژی به صورت زیر استنتاج می‌شود.

۱. مرزهای حجم کنترل را در نظر بگیرید به طوری که مساحت‌های ورودی و خروجی در ناحیه‌های شارش یکنواخت قرار گیرند؛ در این ناحیه‌ها خطوط جریان به موازات دیواره ورودی است و بردارهای سرعت بر سطوح مربوطه‌شان عمود است.
۲. سطح مبنا را برای اندازه‌گیری ارتفاع در نظر بگیرید.
۳. اگر شارش سیال پایا باشد، معادله (۵.۴.۳) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \int_{cs} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (۷.۴.۳)$$

۴. سپس معادله (۷.۴.۳) برای هر سطح کنترل به کار می‌رود

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \int_{cs_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 \right) \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \int_{cs_2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + e_2 \right) \rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 \quad (۸.۴.۳)$$

۵. با بردارهای سرعت عمود بر سطوح، حاصل ضربهای نقطه‌ای مانند مرحله ۴ در قسمت

قبل معادله (۳.۳.۳) ارزیابی می‌شود

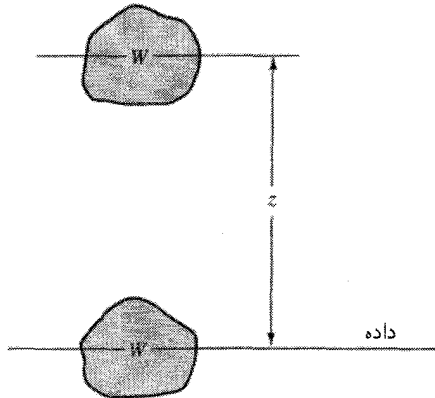
$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = - \int_{cs1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 \right) \rho_1 v_1 dA_1 + \int_{cs2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + e_2 \right) \rho_2 v_2 dA_2$$

۶. جایگذاری تعریف c در معادله بالا می‌دهد

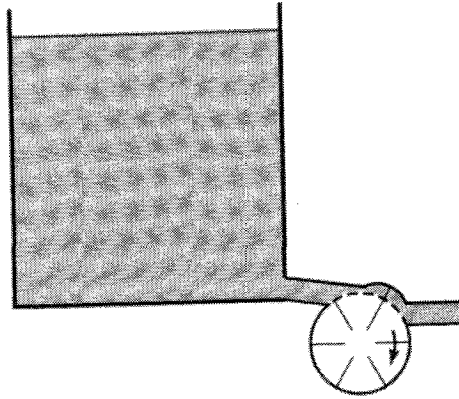
$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = & - \int_{cs1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^{**} \right) \rho_1 v_1 dA_1 \quad (9.4.3) \\ & + \int_{cs2} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^{**} \right) \rho_2 v_2 dA_2 \end{aligned}$$

ساده‌سازیهایی جمله‌های معادله (۹.۴.۳) مستلزم کمی دقت ریاضی یا بعضی مفروضات است، اما همانطور که در اینجاست، معادله (۹.۴.۳) برای محفظه آمیختگی کامل و صحیح است. در معادله (۹.۴.۳)، سه جمله $gz + v^2/2 + p/\rho$ را انرژی دسترس‌پذیر می‌گویند. جمله اول، gz ، انرژی پتانسیل جرم واحد است. با مراجعه به شکل ۱۱.۳، کار لازم برای بلندکردن W نیوتن به فاصله z متر، مساوی Wz است. جرم W نیوتن مساوی W/g kg است؛ از این رو، انرژی پتانسیل، برحسب متر-نیوتن بر کیلوگرم، عبارت است از

$$\frac{Wz}{W/g} = gz$$



شکل ۱۱.۳ انرژی پتانسیل.



شکل ۱۲.۳ کار فشار نگهداشته.

جمله بعدی، $v^2/2$ ، به صورت زیر تفسیر می‌شود. انرژی جنبشی یک ذره از جرم مساوی $\delta m v^2/2$ است. برای به دست آوردن انرژی جرم واحد، آن را بر δm تقسیم می‌کنیم؛ بدین ترتیب $v^2/2$ عبارت است از انرژی جنبشی یک کیلوگرم برحسب متر-نیوتن.

آخرین جمله، p/ρ ، کار شارش یا انرژی شارش برای جرم واحد است. کار شارش عبارت است از کار خالص جزء سیال بر محیطش وقتی در حال شارش است. برای مثال، در شکل ۱۲.۳، توربینی در نظر بگیرید که متشکل است از یک واحد پره‌دار که وقتی سیال از آن می‌گذرد دوران می‌کند، و به میل‌گردان (محور) خود گشتاور اعمال می‌کند. در چرخش کوچک، حاصل ضرب افت فشار پره و سطحی از پره که در معرض سیال قرار دارد مساوی نیروی وارد بر گرداست. اگر این نیرو را در فاصله مرکز نیرو با محور گردا ضرب کنیم گشتاور به دست می‌آید. کار جزئی عبارت است از $p\delta A ds$ در $\rho\delta A ds$ واحد جرم سیال در حال شارش، از این رو، کار جرم واحد p/ρ است.

معادله انرژی در حالت پایا

از آنجا که توزیع p ، ρ ، v و u^{**} در هر مساحت متغیر است، تحلیل مسئله مشکل است. برای شروع از معادله (۹.۴.۳) که برای محاسبات مفید است باید مراحل یا مفروضات زیر را در نظر گرفت. انرژی ذاتی، u^{**} ، در عرض هر مساحت ثابت یا یکنواخت فرض می‌شود؛ بنابراین،

$$\int_{cs} u^{**} \rho v A = u^{**} \int_{cs} \rho v dA \quad (۱۰.۴.۳)$$

برای تعیین جمله‌های فشار و انرژی پتانسیل باد کمی در مورد اصول توضیح داد. در اینجا با

در نظر گرفتن ارتفاع متوسط مساحت، z_c ، یا ارتفاع تا مرکز سطح مساحت ورودی، می‌توان جمله انرژی پتانسیل را تقریب زد. در این صورت

$$\int_{cs} gz \rho v dA = gz_c \int_{cs} \rho v dA \quad (۱۱.۴.۳)$$

برای تعیین فشار، یک توزیع فشار اختیاری را می‌توان تقریب زد و این کار با تعیین فشار متوسط مؤثر بر سطح با استفاده از روشهای فصل ۲ انجام می‌شود. البته، فرضهای ساده‌کننده‌ای وجود دارد. ابتدا اگر قطر ورودی و خروجی کوچک باشد، مانند اکثر لوله‌ها یا مجراها، در این صورت برای اغلب مقاصد عملی فرض می‌شود فشار و چگالی در عرض هر سطح کنترل به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند. در این حالت

$$\int_{cs} \frac{p}{\rho} \rho v dA = \frac{p}{\rho} \int_{cs} \rho v dA \quad (۱۲.۴.۳)$$

در سوراخهای با قطر بزرگ که در آن مؤلفه هیدروستاتیکی حاکم است فشار متوسط را با استفاده از روشهای فصل ۲ می‌توان محاسبه کرد. اگر مساحت‌های ورودی و خروجی طوری انتخاب شوند که خطوط جریان به موازات جداره لوله و عمود بر گرانث z باشند، در این صورت مجموع $p/\gamma + z$ در تمام نقاط واقع در امتداد قائم ثابت است؛ در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\int_{cs} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \rho v dA = \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \int_{cs} \rho v dA \quad (۱۳.۴.۳)$$

جمله انرژی جنبشی تا این اندازه سراسر نیست. تابع سرعت به علت وجود دیواره‌ها به‌طور قابل توجه تغییر می‌کند و، همانطور که قبلاً بحث شد، نمی‌توان آن را یکنواخت فرض کرد. ولی، برخلاف مثال پیوستگی

$$\int_{cs} \frac{v^2}{\gamma} \rho v dA = \int_{cs} \rho \frac{v^2}{\gamma} dA \neq \rho \frac{V^2}{\gamma} A$$

خاطر نشان می‌شود که حاصلضرب میانگینها با میانگین حاصلضرب مساوی نیست. سمت چپ معادله انرژی جنبشی واقعی را که از مقطع عرضی در زمان واحد می‌گذرد مشخص می‌کند، $\rho v dA$ جرم عبوری در زمان واحد از dA است و $v^2/2$ انرژی جنبشی جرم واحد است. باید ضریب تصحیح α را برای $V^2/2$ محاسبه کرد به طوری که $\alpha V^2/2$ انرژی جنبشی متوسط جرم

واحد است که از مقطع عبور می‌کند، یا

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{v^2}{V} \right) dA \quad (۱۴.۴.۳)$$

اگر بالاخره $\int \rho v dA$ به صورت \dot{m} یا $\rho V A$ تعریف شود (معادله ۶.۳.۳)، بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_H}{\delta t} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{\gamma} + u_1^{**} \right) \rho_1 V_1 A_1 \\ = \frac{\delta W_s}{\delta t} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{\gamma} + u_2^{**} \right) \rho_2 V_2 A_2 \quad (۱۵.۴.۳) \end{aligned}$$

اغلب مناسب است که جمله‌های معادله بالا بر آهنگ شارش جرم تقسیم شود؛ بنابراین، معادله به شکل زیر در می‌آید

$$q_H + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{\gamma} + u_1^{**} = w_s + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{\gamma} + u_2^{**} \quad (۱۶.۴.۳)$$

که در آن q_H گرمای داده شده در جرم واحد سیال جاری است و w_s کار شافت بر جرم واحد است. اگر روی سیال داخل حجم کنترل کار انجام شود، مانند حالتی که پمپ وجود دارد، در این صورت w_s منفی است، و اگر حجم کنترل کار انجام دهد، مانند حالت توربین، w_s مثبت است. برای اینکه قرارداد علامت به‌طور سازگار به کار رود، در این صورت مقطع ۱ فرادست و مقطع ۲ فرودست است. معادله (۱۶.۴.۳) معادله انرژی برای شارش پایا در حجم کنترل است.

معادله (۷.۴.۳) را برای حالت ورودیها و خروجیهای چندتایی می‌توان بسط داد. اگر یک ورودی دوم (مقطع ۳) وجود داشته باشد، مانند مثال پیوستگی، در این صورت برای مقاطع ۱ و ۳ به عنوان ورودی و مقطع ۲ به عنوان خروجی، معادله (۱۵.۴.۳) عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_H}{\delta t} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{\gamma} + u_1^{**} \right) \rho_1 V_1 A_1 + \left(\frac{p_3}{\rho_3} + gz_3 + \alpha_3 \frac{V_3^2}{\gamma} + u_3^{**} \right) \rho_3 V_3 A_3 \\ = \frac{\delta W_s}{\delta t} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{\gamma} + u_2^{**} \right) \rho_2 V_2 A_2 \quad (۱۷.۴.۳) \end{aligned}$$

برگشت پذیری، برگشت ناپذیری و اتلافها

فرايند را می توان مسیر حالت های متوالی سیستم، مانند تغییرات سرعت، ارتفاع، فشار، چگالی، دما، و غیره، تعريف کرد. انبساط هوا در یک استوانه، وقتی که پیستون به طرف خارج حرکت می کند و گرما از دیواره ها منتقل می شود، نمونه یک فرایند است. معمولاً فرایند باعث تغییر در محیط می شود، مانند جابه جا کردن آن یا انتقال گرما به آن یا گرما گرفتن از مرزهای آن. وقتی فرایند به گونه ای باشد که بازگردد، یعنی بدون تغییر نهایی در سیستم یا محیط آن به حالت اولیه برگردد، آن را برگشت پذیری می گویند. در هر شارش حقیقی سیال حقیقی، یا در هر تغییری در داخل یک سیستم مکانیکی آثار اصطکاک چسبیده، اصطکاک کولن، انبساط آزاد، پسماند، و غیره، مانع برگشت پذیری فرایند می شوند. البته، برگشت پذیری جنبه ایدئالی است که در طرح فرایندها برای رسیدن به آن می کوشند، و بازده فرایندها را معمولاً برحسب نزدیکی آنها به برگشت پذیری تعريف می کنند.

وقتی فرایندی فقط یک اثر بر محیطش داشته باشد که معادل بالا بردن یک جرم باشد، می گویند که فرایند بر محیط خود کار انجام داده است. هر فرایند حقیقی برگشت ناپذیر است. تفاضل مقدار کاری که ماده ای می تواند با تغییر حالت در طول یک مسیر به طور برگشت پذیر انجام دهد و کار حقیقی آن در همان مسیر، برگشت ناپذیری فرایند است. برگشت ناپذیری را برحسب کار بر جرم واحد یا کار بر زمان واحد می توان تعريف کرد. تحت شرایط معینی، برگشت ناپذیری فرایند را کار از دست رفته یعنی افت توانایی انجام کار بر اثر اصطکاک و عوامل دیگر می توان دانست. در معادله برنولی (۱۶.۴.۳) جمله های $gz + V^2/2 + p/\rho$ عبارت اند از جمله های انرژی دسترسی پذیر یا جمله های انرژی مکانیکی، چراکه به علت انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی یا فشار نگهداشته می توانند مستقیماً کار انجام دهند. در این کتاب، وقتی به اتلاف اشاره می شود، منظور برگشت ناپذیری یا کار از دست رفته، یا تبدیل انرژی دسترسی پذیر به انرژی گرمایی است.

با نگاه به معادله (۵.۴.۳) جمله هایی وجود دارند که جمله های انرژی دسترسی پذیر نیستند. این جمله ها در شکل حجم کنترلی عبارت اند از جمله کار شافت $\delta W_s/\delta t$ ، تبادل خارج گرما $\delta Q_H/\delta t$ ، و جمله تبادل انرژی ذاتی خالص.

$$\int_{cs} u^{**} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

در حالی که u^{**} در مرز سطح کنترل یکنواخت است، \mathbf{v} بر ورودی و خروجی عمود است و سرعت میانگین را می توان یافت، در این صورت برای حجم کنترل ورودی و خروجی مجموع

$$-\frac{\delta Q_H}{\delta t} + (u_1^{**} - u_2^{**}) \rho V A \quad (18.4.3)$$

اتلافات از سیستم بر اثر برگشت ناپذیری، کار اتلافی، یا تبدیل (به انرژی گرمایی) را نشان می‌دهد. در حالت‌های معینی می‌توان با متغیرهای انرژی ذاتی مستقیماً کار کرد. در کتاب‌های مربوط به ترمودینامیک لحظه‌ای یا پدیده‌های انتقال رابطه‌ای برای مایع تراکم‌ناپذیر به شکل زیر وجود دارد

$$u^{**} = c_v T \simeq c_p T \quad (۱۹.۴.۳)$$

که در آن T دمای میانگین در سطح کنترل است. بنابراین، جمله اتلاف در معادله (۱۸.۴.۳) به شکل زیر در می‌آید

$$-\frac{\delta Q_H}{\delta t} + (T_2 - T_1)c_p \rho V A$$

برای یک گاز کامل که می‌تواند متراکم شود، حالت پیچیده‌تر زیر

$$\frac{p}{\rho} + u^{**} = c_p T$$

با فشار ثابت، را داریم.

البته، برای بیشتر شارش‌ها، اتلافات دیگری روی می‌دهند که پیچیده است و خیلی ساده و پارامتری شده نیستند. تبدیل اصطکاک در جداره‌ها به گرما، تغییرات سریع در شکل هندسی شارش، و تنش‌های برشی داخلی سیال که از شتاب یا کندشوندگی سریع ایجاد می‌شوند، همه باعث افت انرژی می‌شوند. در حالی که اتلافات اصطکاک جداری صریحاً در فصل ۶ بررسی می‌شوند، جمله اتلاف تجربی برای معادله انرژی در حجم کنترل به شکل زیر وارد می‌شود

$$-\frac{\delta Q_H}{\delta t} + (u_2^{**} - u_1^{**})\rho V A = K \frac{V^2}{\gamma} \rho V A$$

یا بر مبنای جرم واحد (معادله ۱۶.۴.۳)

$$q_H + (u_2^{**} - u_1^{**}) = K \frac{V^2}{\gamma}$$

در این معادله K ضریب اتلاف نامیده می‌شود و (به استثنای اصطکاک جداري) از رابطه‌های با آزمایش‌های متعدد آزمایشگاهی به دست می‌آید. استفاده اصلی از آن در تحلیلهای حجم کنترل محدود می‌شود به توصیف اتلاف محلی که در مکان‌هایی در میدان شارش روی می‌دهد که در

آنجا هندسی شارش سریعاً تغییر می‌کند، مثلاً در پخش‌کن‌ها، زانوییها، و خروجیها. گاهی اوقات از جمله اتلاف نیز می‌توان استفاده کرد و اتلافات کلی سیستم را به شکل کپه‌ای یا توده‌ای محاسبه کرد. بنابراین، معادله (۲۰.۴.۳) را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} = w_s + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + K \frac{V^2}{2} \quad (20.4.3)$$

در اینجا V در جمله اتلاف سرعت میانگین در نقطه‌ای بین مقطع ۱ و مقطع ۲ در جایی است که اتلاف روی می‌دهد. معادله (۲۰.۴.۳) برحسب انرژی جرم واحد بیان می‌شود. با تقسیم کردن معادله (۲۰.۴.۳) بر g ، شکلی از این معادله را برحسب انرژی وزن واحد می‌توان به دست آورد،

$$\frac{p_1}{\gamma_1} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = H_s + \frac{p_2}{\gamma_2} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} \quad (21.4.3)$$

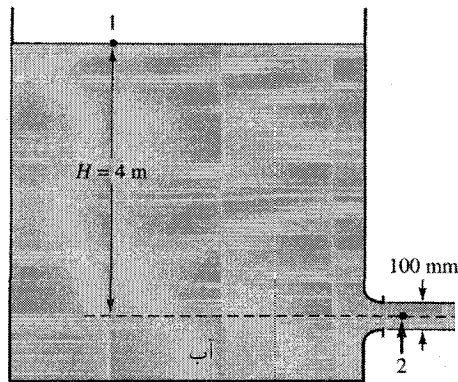
ابعاد در معادله بالا عبارت‌اند از $N \cdot m/N$ یا $ft \cdot lb/lb$ ؛ در نتیجه، بعد هر جمله به صورت طول است. این طول را "هد" نیز می‌نامند؛ مثلاً هد انرژی جنبشی $V^2/2g$ است. جمله H_s عبارت است از کار شافت، w_s ، تقسیم بر g و هد شافت نامیده می‌شود. این جمله می‌تواند هد پمپ را نشان دهد، که در اینجاست H_s منفی است، یا هد توربین نشان دهد، که در اینجاست H_s مثبت است.

۵.۳ کاربرد معادله انرژی در حالت‌های شارش پایای سیال

در زیر مجموعه‌ای از مثالها آورده شده‌اند، که مطالب بخش ۴.۳ را توضیح می‌دهد.

مخزن‌ها و منبعهای ذخیره بزرگ

شرایط ورودی-خروجی حجم کنترل که در آن معادله انرژی به‌طور خودکار به‌دست آمد شامل انرژی پتانسیل و جنبشی در ورودیها و خروجیهاست. مخزن خیلی بزرگ در شکل ۱۳.۳ را در نظر بگیرید که در آن آب از یک سوراخ کوچک (نسبت به مخزن) خارج می‌شود. در اینجا، دو سطح کنترل وجود دارد، یکی در خروجی (۲) و دیگری در "ورودی" که سطح کل مخزن در نظر گرفته می‌شود. اگر مبنا از خط مرکزی خروجی رسم شود در این صورت هد پیزومتر در ورودی $(p/\gamma + z)$ ثابت است و نقطه ۱ را اساساً در هر جایی روی سطح مخزن می‌توان در نظر گرفت. فرض اصلی این است که حجم ماده‌ای که از خروجی عبور می‌کند در مقایسه با حجم مخزن به‌قدری کوچک است



شکل ۱۳.۳ شارش در شیپوره مخزن.

که برای تمام منظورها می‌توان در نظر گرفت که سطح آب هرگز حرکت نمی‌کند و V_1 ، سرعت "ورودی"، صفر است.

مثال ۲.۳ به سؤالی زیر درباره شکل ۱۳.۳ پاسخ دهید. (الف) سرعت شار را در خروجی شیپوره واقع در دیواره مخزن بیابید. (ب) تخلیه از شیپوره را پیدا کنید.

حل

الف) جت یا جت آزاد به صورت یک استوانه با فشار اتمسفریک پیرامون به بیرون می‌جهد. در عمل، فشار در خط مرکزی جت مساوی فشار اتمسفریک است. معادله برنولی را بین یک نقطه سطح آب و یک نقطه فرودست جریان شیپوره به کار می‌بریم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

با فشار اتمسفریک محلی به عنوان داده فشار، داریم $p_1 = p_2 = 0$ ؛ با داده ارتفاع در نقطه ۲، داریم $z_1 = H$ ، $z_2 = 0$. سرعت سطح مخزن مساوی صفر است (عملاً)؛ از این رو

$$0 + 0 + H = \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0$$

$$V_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9.806 \times 4} = 8.86 \text{ m/s}$$

یعنی سرعت شار مساوی سرعت سقوط آزاد از سطح مخزن است. این موضوع را قضیه تورچلی می‌نامند.

ب) تخلیه Q عبارت است از حاصلضرب سرعت شار و سطح جریان

$$Q = A_2 V_2 = \pi (0.05 \text{ m})^2 (1.886 \text{ m/s}) = 0.0014 \text{ m}^3/\text{s} = 1.4 \text{ L/s}$$

میانگین‌گیری در سطح و ضریب تصحیح انرژی جنبشی

معادله (۱۴.۴.۳) ضریب تصحیح انرژی جنبشی را نشان می‌دهد به طوری که انرژی جنبشی که با سرعت میانگین در سطح شارش محاسبه می‌شود یکسان است با انرژی جنبشی واقعی که به طور فیزیکی در سرعت حقیقی وجود دارد. بعداً نشان داده می‌شود که در شارش لایه‌ای در یک لوله، $\alpha = 2$. در شارش متلاطم [مراجع ۱]* در لوله، α بین 1.0 و 1.1 را تغییر می‌کند.

مثال ۳.۳ توزیع سرعت در شارش متلاطم در یک لوله به طور تقریبی از قانون توان یک هفتم پرانتل به دست می‌آید

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7}$$

y فاصله از دیواره لوله و r_0 شعاع لوله است. ضریب تصحیح انرژی جنبشی را پیدا کنید.

حل

سرعت متوسط V با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\pi r_0^2 V = 2\pi \int_0^{r_0} r v dr$$

که در آن $y = r_0 - r$. با جایگذاری برای r و v داریم

$$\pi r_0^2 V = 2\pi v_{\max} \int_0^{r_0} (r_0 - y) \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7} dy = \pi r_0^2 v_{\max} \frac{98}{120}$$

یا

$$\frac{v}{V} = \frac{120}{98} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7} \quad \text{و} \quad V = \frac{98}{120} v_{\max}$$

* در انتهای این فصل، چند مرجع آورده شده است.

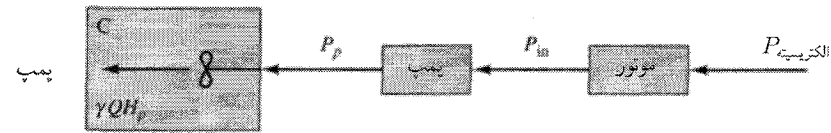
با جایگذاری در معادله (۱۴.۴.۳)، داریم

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^{r_o} 2\pi r \left(\frac{120}{98}\right)^2 \left(\frac{y}{r_o}\right)^{2/7} dr \\ &= 2 \left(\frac{120}{98}\right)^2 \frac{1}{r_o^2} \int_0^{r_o} (r_o - y) \left(\frac{y}{r_o}\right)^{2/7} dy = 1.06 \end{aligned}$$

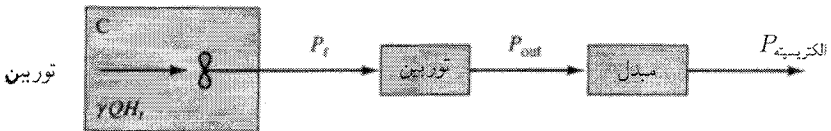
اتلافات و بازده

وقتی توربینها و مبدلها از طریق حجم کنترل تبادل انرژی می‌کنند، چندین اندازه‌گیری برای عملکرد سیستم وجود دارد. در هر دو حالت تبدیل انرژی، کار شافت (w_s) انرژی جرم واحدی را نشان می‌دهد که تیغه یا پروانه به سیال می‌دهد (پمپ) یا از سیال می‌گیرد (توربین). این مقدار هد پمپ، H_p ، یا هد توربین، H_t ، نامیده می‌شود و دارای واحدهای بر وزن، یعنی، $[F.L/F]$ یا $[L]$ است. هدهای H_t و H_p متغیرهای عملکرد ماشین‌اند. توان کل که به سیستم داده می‌شود یا از آن گرفته می‌شود، به ترتیب، γQH_t و γQH_p است.

از پروانه تا محیط خارجی، بازده سیستم تحت تأثیر دو مرحله تبدیل قرار می‌گیرد. با مراجعه به شکل ۱۴.۳ توان به شکل الکتریسیته، P_{elec} ، به پمپ داده می‌شود، P_{in} . پمپ به پروانه توان می‌دهد، P_p ، پروانه به سیال توان می‌دهد. توان داده شده به پمپ بزرگتر از توان داده شده به تیغه است، و آن هم بزرگتر از توان داده شده به سیال است. عکس آن در توربین صحت دارد. در پمپ $\gamma QH_t > P_t > P_{out} > P_{elec}$ ، در حالی که در توربین، $P_{elec} > P_{in} > P_p > \gamma QH_p$ با محاسبه نسبتهای توان در قسمتهای مختلف سیستم، نابازدهی سیستم پیدا می‌شود.

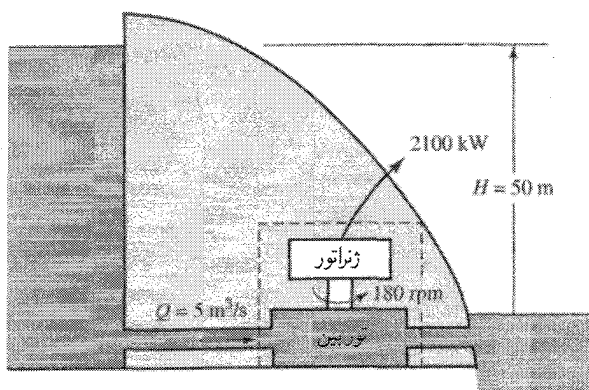


(الف)



(ب)

شکل ۱۴.۳ جریان شارش انرژی در پمپ توربین.



شکل ۱۵.۳ برگشت‌ناپذیری در کارخانه هیدروالکتریکی.

مثال ۴.۳ یک کارخانه هیدروالکتریکی (شکل ۱۵.۳) دارای اختلاف ارتفاع $H = 50\text{ m}$ از سرآب تا پای آب است و تخلیه آب آن در توربین برابر $Q = 5\text{ m}^3/\text{s}$ است. میل‌گردان توربین در 180 rpm می‌چرخد، و گشتاور روی میل‌گردان $T = 1.16 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m}$ برآورد می‌شود. توان خروجی ژنراتور 2100 kW است. مطلوب است الف) توان برگشت‌پذیر برای سیستم؛ ب) برگشت‌ناپذیری یا اتلافها در سیستم؛ ج) اتلافها و بازده در توربین و ژنراتور.

حل

الف) انرژی پتانسیل آب $50\text{ m}\cdot\text{N}/\text{N}$ است. از این رو، برای تبدیل کامل آن توان برگشت‌پذیر عبارت است از

$$\gamma QH = (9806\text{ N/m}^3)(5\text{ m}^3/\text{s})(50\text{ m}\cdot\text{N}/\text{N}) = 2451500\text{ N}\cdot\text{m}/\text{s} = 2451.5\text{ kW}$$

ب) برگشت‌ناپذیری یا توان از دست‌رفته در سیستم عبارت است از تفاضل توان ورودی و توان خروجی سیستم، یا

$$2451.5 - 2100 = 351.5\text{ kW}$$

ج) آهنگ کار توربین عبارت است از حاصل ضرب گشتاور میل‌گردان و سرعت دوران

$$T\omega = 1.16 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m} \frac{180(2\pi)}{60}\text{ s}^{-1} = 2186.5\text{ kW}$$

بنابراین، برگشت‌ناپذیری از توربین عبارت است از $2451.5 - 2186.5 = 265\text{ kW}$ ، که

وقتی به صورت کار از دست‌رفته بر وزن واحد سیال جاری بیان شود، داریم

$$(265.0 \text{ kW}) \frac{1000 \text{ N.m/s}}{1 \text{ kW}} \frac{1}{9806 \text{ N/m}^2} \frac{1}{5 \text{ m}^2/\text{s}} = 5.4 \text{ m.N/N}$$

افت توان ژنراتور مساوی $86.5 \text{ kW} = 2100 - 2186.5$ است، یا

$$\frac{86.5(1000)}{9806(5)} = 1.76 \text{ m.N/N}$$

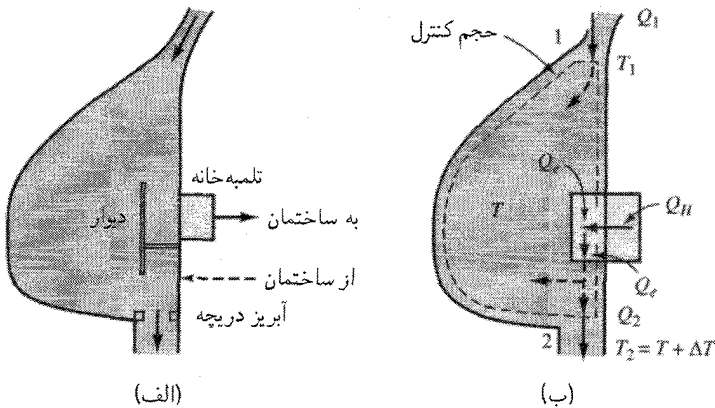
بازده توربین η_t عبارت است از

$$\eta_t = 100 \frac{50 \text{ m.N/N} - 5.4 \text{ m.N/N}}{50 \text{ m.N/N}} = 89.1\%$$

و بازده ژنراتور η_g عبارت است از

$$\eta_g = 100 \frac{50 - 5.4 - 1.76}{50 - 5.4} = 96.05\%$$

مثال ۵.۳ دستگاه آب‌سردکن یک ساختمان بزرگ بر استخر کوچکی که از یک جریان آب تغذیه می‌شود قرار دارد (شکل ۱۶.۳). شارش جریان طبق طراحی ۵ cfs است، و در این حالت تنها شارش خروجی از استخر ۵ cfs از طریق یک اسکلت دریچه‌ای در نزدیک کانال تخلیه سیستم



شکل ۱۶.۳ دستگاه آب‌سردکن.

آب سردکن است. دمای جریان آب ورودی 80°F است. آهنگ شارش سیستم آب سردکن 10 cfs است، و مبدل گرمایی ساختمان دمای آب خنک‌کننده را 10°F بالا برد. اگر این شرایط مدتی طولانی ادامه داشته باشد، دمای آب خنک‌کننده‌ای که در استخر گردش می‌کند، با صرف‌نظر از اتلاف گرمایی به اتمسفر و کف استخر، چقدر است؟

حل

حجم کنترل را در شکل ۱۶.۳ همراه با متغیرهای آهنگ شارش حجمی Q و دمای T نشان داده‌ایم. هیچ تغییری در فشار، چگالی، سرعت یا ارتفاع از مقطع ۱ تا ۲ وجود ندارد. معادله (۱۸.۴.۳) برای حجم کنترل عبارت است از

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} + u_1^{**} \rho Q_1 = u_2^{**} \rho Q_2$$

که در آن آهنگ زمانی گرمای افزوده شده توسط مبدل گرمایی است. انرژی ذاتی جرم واحد در فشار چگالی ثابت فقط تابعی از دماست؛ یعنی $u_2^{**} - u_1^{**} = c_p(T_2 - T_1)$ که در آن c_p گرمای ویژه یا گنجایش گرمای آب است. از این رو، معادله انرژی برای حجم کنترل عبارت است از

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} = c_p(T_2 - T_1)\rho Q_1$$

به طریق مشابه، گرمای افزوده شده در مبدل گرمایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} = c_p \Delta T \rho Q_e$$

که در آن $\Delta T = 10$ افزایش دماست و $Q_e = 10\text{ cfs}$ آهنگ شارش حجمی در مبدل گرماست. بدین ترتیب

$$c_p \Delta T \rho Q_e = c_p(T_2 - T_1)\rho Q_1$$

یا

$$T_2 = T_1 + \frac{\Delta T Q_e}{Q_1} = 80 + \frac{10(10)}{5} = 100^{\circ}\text{F}$$

از آنجا که $T_2 = T + \Delta T$ ، دمای استخر، T ، 90°F است. ■

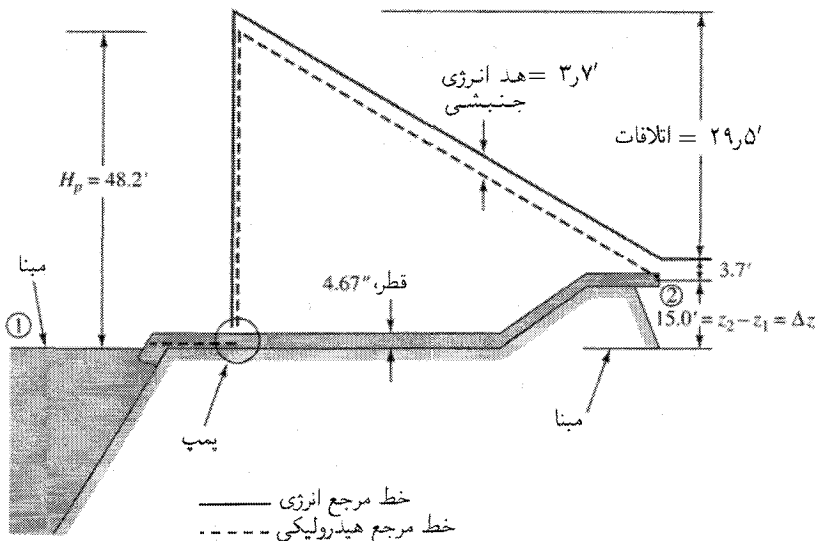
تمام جمله‌ها در معادله انرژی (۲۱.۴.۳)، به غیر از هد شافت و جمله‌های افت، انرژی دسترس‌پذیرند. در سیالاتی که در یک سیستم جریان دارند، انرژی دسترس‌پذیر در جهت فرودست

کاهش می‌یابد؛ این انرژی به هنگام عبور از توربین آبی کار انجام می‌دهد. نموداری که انرژی دسترس‌پذیر را در امتداد یک لوله جریان نشان می‌دهد خط مرجع انرژی نامیده می‌شود (به بخش ۲.۱۱ نگاه کنید). نمودار و جمله $z + p/\gamma$ در امتداد حجم کنترل هد پیزومتریک یا خط مرجع هیدرولیکی را نشان می‌دهد. در شارش سیال حقیقی، خط انرژی همیشه به طرف پایین شیب دارد، بجز در یک پمپ با منابع دیگر انرژی. کاهشهای خط مرجع انرژی نیز اتلاف هد نامیده می‌شود.

مثال ۶.۳ در شکل ۱۷.۳، پمپی با توان آب (WHP) اسمی ۱۰ hp آب را از مخزن می‌کشد و آن را برای آبیاری محصول به ارتفاع ۱۵ ft بالاتر می‌فرستد. تخلیه خروجی چقدر است؟ خط مرجع انرژی و خط مرجع هیدرولیکی را رسم کنید. اتلافات کل سیستم از پمپ تا خروجی، به‌طور پارامتری، $87^2/2g$ است، اما از ورودی مخزن تا پمپ هیچ اتلافی وجود ندارد. نظر تخلیه پمپ ۴٫۶۷ in است.

حل

شارش را پایا فرض کنید و مبنا را در سطح آب مخزن بگیرید. معادله انرژی بین سطح مخزن (۱) و خروجی (۲) به کار می‌رود. فشار در سطح مخزن اتمسفریک است، $p_1 = 0$ ، و ارتفاع معلوم است ($z_1 = 0$). حجم به اندازه‌ای بزرگ در نظر گرفته می‌شود که در طی پمپاژ حجم آب کشیده شده به قدری کوچک است که افت سطح آب صفر است و بنابراین سرعت در سطح صفر است ($V_1 = 0$). در خروجی، تنها فشار مقابله‌کننده با شارش خروجی از شیپوره به صورت جت آزاد



شکل ۱۷.۳ خط مرجع انرژی و خط هیدرولیکی در سیستم پمپاژ.

فشار اتمسفریک است؛ بنابراین، $p_2 = 0$. معادله انرژی (۲۱.۴.۳)، به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} + H_p = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + K \frac{V_2^2}{2g}$$

که در آن H_p هد پمپ است، $H_p = -H_s$ ، و $K(V_2^2/2g)$ اتلافات بین ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. شارش در سیستم ثابت است؛ بنابراین، از آنجا که نظر پمپ در همه جا ثابت است، اتلافات سیستم را برحسب سرعت ثابت خروجی، V_2 ، می‌توان بیان کرد.

$$0 + 0 + 0 + H_p = \frac{V_2^2}{2g} + 15 + 0 + 0 + 8 \frac{V_2^2}{2g}$$

از آنجا که

$$WHP = 10 = \frac{\gamma Q H_p \text{ ft. lb/s}}{550 \text{ ft. lb/s/HP}}$$

بنابراین

$$H_p = \frac{5500}{\gamma V_2 A} \text{ ft}$$

در نتیجه،

$$\frac{5500}{\gamma V_2 A} = 9 \frac{V_2^2}{2g} + 15$$

با حل ریشه حقیقی معادله درجه سوم داریم

$$V_2 = 15.4 \text{ ft/s}$$

و

$$Q = V_2 A = 1.83 \text{ ft}^3/\text{s}$$

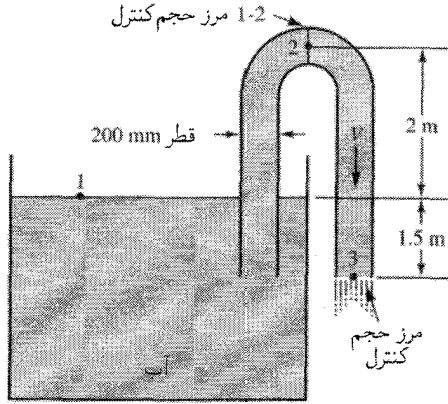
جمله‌های معادله انرژی را در آحاد وزن/انرژی یا $[F.L/F]$ یا ابعاد طول می‌توان به صورت هد معادل نوشت

$$\text{اتلاف هد} = 8 \frac{V_2^2}{2g} = 29.5 \text{ ft}$$

$$\text{هد انرژی جنبشی} = \frac{V_2^2}{2g} = 3.7 \text{ ft}$$

$$\text{هد پمپ} = H_p = 48.2 \text{ ft}$$

بنابراین، خط مرجع هیدرولیکی و خط انرژی را می‌توان رسم کرد.



شکل ۱۸.۳ سیفون.

مثال ۷.۳ سیفون شکل ۱۸.۳ پر از آب است و با 15°L/s تخلیه می‌شود. اتلافها را از نقطه ۱ تا ۳ برحسب ارتفاع سرعت $V^2/2g$ پیدا کنید. اگر دوسوم اتلافها بین نقاط ۱ و ۲ پدید آید، فشار را در نقطه ۲ پیدا کنید.

حل

معادله انرژی (۲۱.۴.۳) را ابتدا برای حجم کنترلی به کار می‌بریم که از تمام آب داخل سیستم در فرادست نقطه ۳ تشکیل می‌شود. داده ارتفاع را نقطه ۳ می‌گیریم و فشار پیمانه‌ای صفر را داده فشار.

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + (\text{اتلافهای})_{1-3}$$

یا

$$0 + 0 + 1.5 = \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0 + K \frac{V_2^2}{2g}$$

که در آن اتلافها از ۱ تا ۳ برحسب $K V_2^2/2g$ بیان شده است. از تخلیه داریم

$$V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{(15^\circ \text{L/s})}{\pi (0.1\text{m})^2 1000^\circ \text{L/m}^3} = 4.77\text{m/s}$$

و $1.16\text{m} = V_2^2/2g$. از این رو، $K = 29^\circ$ ، و اتلافها نیز

$$0.29 V_2^2/2g = 0.34\text{m} \cdot \text{N/N}$$

معادله انرژی برای حجم کنترل بین نقاط ۱ و ۲، با اتلافهای $0.23m$ ، $\frac{\gamma}{2}KV_2^2/2g = 0.23m$ عبارت است از

$$0 + 0 + 0 = 1.16 + \frac{p_2}{\gamma} + 2 + 0.23$$

■ ارتفاع فشار در نقطه ۲ مساوی $3.39mH_2O$ است، یا $p_2 = -33.2kPa$.

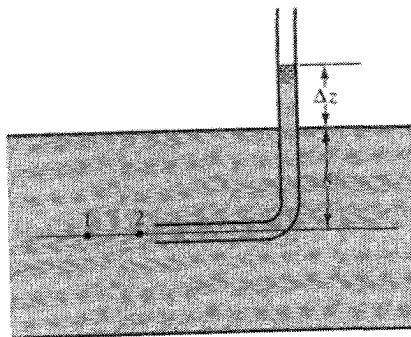
مثال ۸.۳ دستگاه شکل ۱۹.۳ به نام (لوله پیتو) برای تعیین سرعت مایع در نقطه ۱ به کار می‌رود. دستگاه لوله‌ای است که انتهای پایینی آن به طرف فرادست است و شاخه دیگر آن قائم و به اتمسفر مربوط است. برخورد مایع دهانه ۲ باعث می‌شود که مایع در شاخه قائم به ارتفاع Δz بالای سطح آزاد بالا رود. سرعت را در نقطه ۱ تعیین کنید.

حل

نقطه ۲ نقطه سکون است، یعنی جایی است که سرعت به صفر کاهش می‌یابد. این امر باعث فشار برخوردی می‌شود موسوم به فشار دینامیکی که سیال را به داخل شاخه قائم می‌راند. با نوشتن معادله انرژی بین نقاط ۱ و ۲، با صرف نظر از اتلافها که خیلی کوچک‌اند، داریم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + 0$$

با p_1/γ از ارتفاع سیال در بالای نقطه ۱ مشخص می‌شود و مساوی k ft سیال جاری است. با صرف نظر از خیز مویینی، p_2/γ از فشارسنج به صورت $k + \Delta z$ به دست می‌آید. بعد از جایگذاری



شکل ۱۹.۳ لوله پیتو.

مقادیر در معادله، داریم

$$V_1 = \sqrt{2g\Delta z} \quad \text{و} \quad \frac{V_1^2}{2g} = \Delta z$$

این لوله پیتوت به صورت ساده آن است.

مثالهای شارش تراکم‌پذیر را در فصل ۶ می‌آوریم.

تمرینها

۱.۵.۳ ضریب تصحیح انرژی جنبشی الف) در معادله پیوستگی به کار می‌رود؛ ب) واحد ارتفاع سرعت را دارد؛ ج) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right) dA$ ؛ د) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$ ؛ ه) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$.

۲.۵.۳ برای توزیع سرعت در شکل ۱.۱، ضریب تصحیح انرژی جنبشی عبارت است از الف) ۰؛ ب) ۱؛ ج) $\frac{4}{3}$ ؛ د) ۲؛ ه) هیچکدام.

۳.۵.۳ یک لوله شیشه‌ای با خم 90° در هر دو انتها باز است. آن را در جریانی از روغن، $S = 90^\circ$ قرار می‌دهند، به طوری که یک دهانه به طرف فرادست و دهانه دیگر به طرف فرودست باشد. روغن داخلی لوله 5 mm بالاتراز سطح روغن جاری است. سرعت اندازه‌گیری شده با لوله، برحسب متر بر ثانیه، عبارت است از الف) 89° ؛ ب) 99° ؛ ج) 110° ؛ د) 140° ؛ ه) هیچکدام.

۴.۵.۳ در شکل ۹.۱۰ الف) اختلاف پیمانه‌ای R' برای $v_1 = 5 \text{ ft/s}$ ، $S = 80^\circ$ ، و $S_0 = 12^\circ$ ، برحسب فوت عبارت است از: الف) 39° ؛ ب) 62° ؛ ج) 78° ؛ د) 117° ؛ ه) هیچکدام.

۵.۵.۳ سرعت نظری روغن، $S = 75^\circ$ ؛ که از روزنه مخزنی زیر ارتفاع 4 m جریان دارد، برحسب متر بر ثانیه عبارت است از الف) 67° ؛ ب) 86° ؛ ج) 118° ؛ د) با این داده‌ها قابل تعیین نیست؛ ه) هیچکدام.

۶.۵.۳ در کدامیک از حالت‌های زیر امکان دارد شارش از فشار پایین به فشار بالا برقرار شود؟ الف) شارش در مقطع همگرا؛ ب) شارش بی‌دررو و لوله افقی؛ ج) شارش مایع رو به بالا در لوله قائم؛ د) شارش هوا رو به پایین در لوله؛ ه) در مجرای مقطع ثابت امکان‌پذیر نیست.

۷.۵.۳ اگر از تمام اتلافها صرف‌نظر شود، فشار در اوج سیفون الف) مینیمم فشار در سیفون است؛ ب) فقط به ارتفاع اوج بالای مخزن فرادست بستگی دارد؛ ج) مستقل از طول شاخه فرودست است؛ د) مستقل از تخلیه سیفون است؛ ه) مستقل از چگالی مایع است.

۶.۳ معادله حجم کنترلی تکانه خطی

معادله بنیادی

از قانون دوم نیوتن به عنوان یک مبنا برای تعیین شکل حجم کنترلی معادله اندازه حرکت خطی استفاده می‌شود. از معادله (۴.۲.۳)، فرض کنید N تکانه خطی سیستم، $(m\mathbf{v})$ ، و η تکانه خطی جرم واحد، $\rho\mathbf{v}/\rho = \mathbf{v}$ ، باشد. بنابراین معادله (۴.۲.۳) به شکل زیر در می‌آید

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{v} dV + \int_{cs} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.6.3)$$

در عبارت، جمع برداری نیروهای خارجی حقیقی اعمال شده مؤثر بر حجم کنترل مساوی است با آهنگ زمانی تکانه خطی در حجم کنترل به علاوه آهنگ خالص خروج تکانه از سطح کنترل.

تحلیل معادله حالت پایدار

تحلیل این معادله، از روش به کاررفته در دو معادله قبلی استفاده می‌شود. قسمتی از لوله در شکل ۲.۰.۳ با ورودی ۱ و خروجی ۲ در نظر بگیرید.

۱. مانند قبل، حجم کنترل را مشخص کنید؛ سطوح کنترل در جایی قرار گیرند که سطح بر خطوط جریان عمود است و میدان شارش خطوط جریان موازی با دیواره مقطع شارش دارد.
۲. جریان پایا فرض می‌شود.
۳. سیستم برآیند یا نیروهای برآیند و پارامترهای شارش در حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود؛ این سیستم از نیروهای برآیند و مبادله‌های تکانه هم‌ارز در ورودی و خروجی تشکیل می‌شود.
۴. جمع برداری نیروهای خارجی حقیقی مؤلفه‌های زیر را دارد

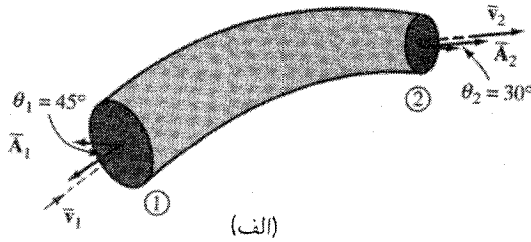
$$\mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{\tau_s} + \mathbf{F}_w \quad (2.6.3)$$

هر جمله به صورت زیر تعریف می‌شود:

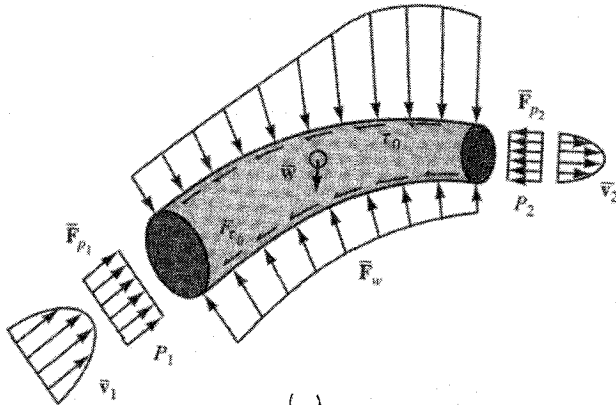
\mathbf{W} نیروی وزن است. سیال داخل حجم کنترل وزنی دارد که در امتداد گرانش اثر می‌کند، و مقدار آن مساوی است با حجم کنترل ضرب در وزن مخصوص.

\mathbf{F}_{p1} و \mathbf{F}_{p2} نیروهای فشاری انتهایی‌اند. فشار سیال در ورودی و خروجی یک نیروی فشاری را بر هر وجه وارد می‌کند. نیروی کل برابر است با

$$\mathbf{F}_p = \int_{cs} p d\mathbf{A} = \int_{cs} p \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.6.3)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۰.۳ حجم کنترل برای شارش در یک لوله.

که در آن \mathbf{n} بردار واحد عمود بر مساحت سطح است که جهت مثبت آن به طرف خارج سطح است. مانند فصل ۲، با استفاده از روشهای تعیین نیروهای عمودی و افقی، نیروی فشاری را می‌توان محاسبه کرد، یا بردار کامل \mathbf{F}_p را می‌توان محاسبه کرد. در بیشتر حالتها، فشار متوسط که بر سطح اثر می‌کند p است یا فشار ثابت است، در این صورت $\mathbf{F}_p = p\mathbf{A}$ و بردار \mathbf{F}_p بر وجه داخلی عمود است و به طرف حجم کنترلی جهت دارد.

\mathbf{F}_w و \mathbf{F}_τ ، به ترتیب، نیروهای برشی جدار و فشاری‌اند. جداره بر سیال تنشهای برشی و عمودی، هر دو را وارد می‌کند. تنش برشی جدار، τ ، بر سیال نیروی اصطکاکی وارد می‌کند و در صفحه سطح حجم کنترل اثر می‌کند و شارش را کند می‌سازد. تنش برشی تابعی از نوع جنس مرز و زبری آن، چگالی سیال و سرعت، و شکل هندسی شارش است. به طوری کلی، این تنش نقطه به نقطه در شارش تغییر می‌کند. شارش در لوله بعضی شارشها در لایه مرزی تنها شارشهایی است که می‌توان برای آنها τ و \mathbf{F}_τ را به طور دقیق محاسبه کرد (به فصلهای ۶ و ۷ مراجعه کنید). تنش عمودی، \mathbf{F}_w در جداره یا در سطح کنترل عامل اصلی حفظ هندسه میدان شارش است.

برای مثال، شارش در شکل ۲۰.۳ در خروجی ۲ خم می‌شود زیرا تنش عمودی در نوک بزرگتر است باعث انحراف شارش می‌شود. همچنین، اگر یک تنش عمودی در "زیر" شارش به وجود نیاید، شارش تحت تأثیر وزن خود "سقوط می‌کند".

جدایی نیروی تنش عمودی از \mathbf{F}_τ دائماً مشکلتر می‌شود؛ بنابراین، آنها در این نقطه ترکیب می‌شوند و بردار نیروی برآیند یا واکنشی \mathbf{F} را به وجود می‌آورد؛ این نیرو در گرانیگاه حجم کنترل اثر می‌کند. معمولاً، در حل (مسئله) جهت و شدت \mathbf{F} تعیین می‌شوند.

۵. مبادلهٔ تکانه، M_1 و M_2 ، به ترتیب، در ورودی و خروجی اکنون باید تحلیل شود. در شارش پایا، سمت راست معادله (۱.۶.۳) در ورودی و خروجی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$M_1 + M_2 = \int_{cs_1} v_1(\rho_1 v_1 \cdot d\mathbf{A}) + \int_{cs_2} v_2(\rho_2 v_2 \cdot d\mathbf{A}) \quad (۴.۶.۳)$$

اگر سرعت در سطح کنترل بر مساحت عمود باشد و روی آن به طور یکنواخت باشد، در این صورت ساده‌ترین شکل معادله ۴.۶.۳ عبارت است از

$$M_1 + M_2 = -(\rho V_1 A_1) V_1 + (\rho V_2 A_2) V_2 \quad (۵.۶.۳)$$

در اینجا علامت منفی نشان می‌دهد که تکانه وارد حجم کنترل می‌شود. از آنجا که جمله‌ها فقط نسبت به دستگاه مختصات محلی سطح کنترل تحلیل شده‌اند، بردار سرعت را باید حفظ کرد. هر جمله در معادله (۵.۶.۳) به عنوان بردار تبادل تکانه تعریف می‌شود

$$M_1 = -\rho_1 Q V_1 \quad (۶.۶.۳)$$

$$M_2 = \rho_2 Q V_2$$

بنابراین، هر سطح M بر سطح عمود است، و به طرف خارج سطح جهت دارد خواه سطح ورودی باشد خواه خروجی.

۶. شکل نهایی قانون دوم نیوتن برای حجم کنترل پایا عبارت است از

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_{p_1} + \mathbf{F}_{p_2} + \mathbf{F} = M_1 + M_2 \quad (۷.۶.۳)$$

ضریب تصحیح تکانه

در معادلهٔ انرژی حاصلضرب میانگینهای سطحی با میانگین حاصلضربها مساوی نیست. وقتی سرعت در مقطع عرضی مستوی سطح کنترل تغییر می‌کند، قبل از اینکه از سرعت میانگین بتوان

استفاده کرد ضریب تصحیح تکانه را باید وارد کرد.

$$\int_A \rho v^2 dA = \beta \rho V^2 A \quad (۸.۶.۳)$$

که در آن β بی بعد است. حل β می دهد

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA \quad (۹.۶.۳)$$

که مشابه ضریب تصحیح انرژی جنبشی، α (معادله ۱۴.۴.۳) است. در بخش ۳.۶ نشان داده می شود که در شارش لایه‌ای در یک لوله گرد مستقیم، $\beta = \frac{4}{3}$. در شارش یکنواخت $\beta = 1$ و نمی تواند مقدار کمتر از ۱ داشته باشد. معادله (۷.۶.۳) در اینجا به شکل زیر درمی آید

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F} = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 \quad (۱۰.۶.۳)$$

سطوح کنترل چندگانه

تنها با یک ورودی و یک خروجی شارش در سیستم ثابت است و

$$V_1 A_1 = Q_1 = V_2 A_2 = Q_2 = Q$$

معادله (۱۰.۶.۳)، با $\beta = 1$ ، را به شکل زیر می توان نوشت

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F} = \rho Q (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \quad (۱۱.۶.۳)$$

اگر یک ورودی اضافی، مانند مقطع ۳ در شکل ۹.۳، وجود داشته باشد، معادله (۱۱.۶.۳) ایجاب می کند که نیروی فشاری انتهایی اضافی \mathbf{F}_{p3} (که به طرف حجم کنترل جهت دارد و بر سطح کنترل ۳ عمود است) و بردار تبادل تکانه اضافی وجود داشته باشند. بنابراین معادله برداری نهایی به شکل زیر در می آید

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{p3} + \mathbf{F} = M_1 + M_2 + M_3 \quad (۱۲.۶.۳)$$

یا

$$\mathbf{W} + \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{p3} + \mathbf{F} = \rho_2 Q_2 \mathbf{V}_2 - (\rho_1 Q_1 \mathbf{V}_1 + \rho_3 Q_3 \mathbf{V}_3) \quad (۱۳.۶.۳)$$

برای خروجی اضافی در مقطع ۴ عبارت مشابهی وجود دارد

$$W + F_{p1} + F_{p2} + F_{p3} + F_{p4} + F = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \quad (۱۴.۶.۳)$$

یا

$$W + F_{p1} + F_{p2} + F_{p3} + F_{p4} + F = (\rho_1 Q_1 V_1 + \rho_4 Q_4 V_4) - (\rho_1 Q_1 V_1 + \rho_2 Q_2 V_2) \quad (۱۵.۶.۳)$$

۷.۳ کاربردهای معادلهٔ تکانه

در زیر، چند مثال آورده شده است که جنبه های مختلف استفاده از معادله تکانهٔ خطی را نشان می دهند.

مبادلهٔ بنیادی

وقتی معادلهٔ (۷.۶.۳) به شکل معادله دالامبر، که در آن تمام جمله ها در یک طرف قرار دارند، نوشته می شود، داریم

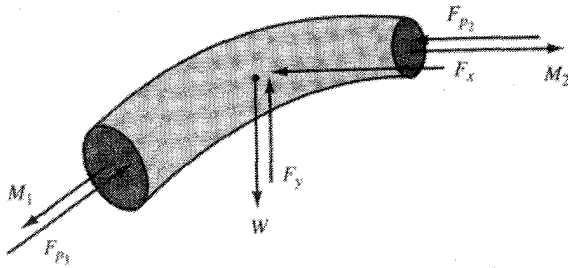
$$W + F_{p1} + F_{p2} + F - M_1 - M_2 = 0$$

تأثیر اصلی این نحوه نوشتن این است که جهت پیکانهای بردارهای تبادل تکانه برعکس می شوند به طوری که هر دو به طرف مرکز حجم کنترل جهت دارند، درست همانطور که بردارهای نیروی فشاری به طرف مرکز حجم کنترل جهت دارند.

مثال ۹.۳ در شکلهای ۲۰.۳ و ۲۱.۳ فرض کنید شرایط زیر در لوله به کار می روند: شعاعهای شارش داخلی و شارش خارجی، به ترتیب، ۲۵cm و ۱۵cm است؛ زاویه های شارش داخلی و شارش خارجی نسبت به افق $(\theta_2 \text{ و } \theta_1)$ ، به ترتیب، 45° و 30° است؛ $Q = 5 \text{ L/s}$ ؛ فشارهای متوسط در سطوح ورودی و خروجی عبارتند از 8.5 kPa و 5.83 kPa ؛ و وزن کل سیال داخل لوله 2 N است. نیروی افقی و عمودی لازم (یعنی، بردار نیروی برآیند F) برای نگهداری لوله را در محل پیدا کنید.

حل

مبادله تکانه و بردارهای نیرو در شکل ۲۱.۳ نشان داده شده اند. جهت بردارها (M و F_p) از



شکل ۲۱.۳ تعریف‌های بردار نیرو و تکانه برای حجم کنترل در شکل ۲۰.۳.

استنتاج اولیه همیشه معلوم است. جهت بردارهای واکنشی F_x و F_y معلوم نیستند، بنابراین جهت آنها به طور فرضی در نظر گرفته می‌شود و محاسبه شروع می‌شود. اگر فرض نادرست باشد، مقادیر F_x و F_y محاسبه شده منفی خواهند بود، و نشان می‌دهد که جهت‌ها باید برعکس شوند. در هر حالت، مقادیر F_x و F_y تغییر نمی‌کنند.

مقادیر F_{p1} و F_{p2} به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$F_{p1} = p_1 A_1 = (۸۵۰۰) \pi (۰٫۲۵)^2 = ۱۶۶۹٫۰ \text{ N}$$

$$F_{p2} = p_2 A_2 = (۵۸۳۰) \pi (۰٫۱۵)^2 = ۴۱۲٫۱ \text{ N}$$

مقدار M به صورت زیر محاسبه می‌شد

$$V_1 = Q/A_1 = ۰٫۲۵۵ \text{ m/s}$$

$$M_1 = \rho Q V_1 = \rho A_1 V_1 V_1 = (۱۰۰۰)(۰٫۱۹۶)(۰٫۲۵۵)^2 = ۱۲٫۷۵ \text{ N}$$

$$V_2 = Q/A_2 = Q/A_1 = ۰٫۷۰۷ \text{ m/s}$$

$$M_2 = \rho Q V_2 = \rho A_2 V_2 V_2 = (۱۰۰۰)(۰٫۰۷۱)(۰٫۷۰۷)^2 = ۳۵٫۴۸ \text{ N}$$

مؤلفه‌های F به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$-F_x - F_{p2} \cos 30^\circ + F_{p1} \cos 45^\circ = -M_1 \cos 45^\circ + M_2 \cos 30^\circ$$

$$-W + F_y - F_{p2} \sin 30^\circ + F_{p1} \sin 45^\circ = -M_1 \sin 45^\circ + M_2 \sin 30^\circ$$

جایگذاری مقادیر بالا و حل F_w و F_y می‌دهد

$$-F_x - 412,1(0,866) + 1669,0(0,707) = -12,75(0,707) + 35,48(0,866)$$

$$-2,0 + F_y - 412,1(0,500) + 1669,0(0,707) = -12,75(0,707) + 35,48(0,500)$$

یا

$$F_x = -80,14N$$

$$F_y = -963,2N$$

علامتهای منفی نشان می‌دهد که جهت‌های فرضی برای F_x و F_y نادرست است. نیروهای واقعی به سمت راست و به طرف پایین اثر می‌کنند و مقدار آنها، به ترتیب، $80,14N$ و $963,2N$ است. ■

مثال ۱۰.۳ خم کاهنده شکل ۲۲.۳ در صفحهٔ قائم قرار دارد. آب جریان دارد، $D_1 = 6ft$ ، $p_1 = 40psi$ ، $\theta = 120^\circ$ ، $z = 10ft$ ، $W = 18000lb$ ، $Q = 300cfs$ ، $D_2 = 4ft$ و $x = 6ft$ ، و اتلافها در خم مساوی $0,5V_2^2/2gft.lb/lb$ است. F_x و F_y ، و خط حامل نیروی برآیند را تعیین کنید. $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

حل

سطح داخلی خم کاهنده شامل سطح حجم کنترل برای آن قسمتی از سطح است که هیچ شارشی از آن می‌گذرد. مقاطع عمودی ۱ و ۲ سطح کنترل را کامل می‌کنند.

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{300}{\pi(6^2)/4} = 10,61ft/s \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{300}{\pi(4^2)/4} = 23,87ft/s$$

با کاربرد معادلهٔ انرژی (۲۱.۴.۳)، داریم

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + (\text{اتلافها})_{1-2}$$

$$\frac{40(144)}{62,4} + \frac{(10,61)^2}{64,4} + 0 = \frac{p_2}{62,4} + \frac{(23,87)^2}{64,4} + 10 + 0,5 \times \frac{(23,87)^2}{64,4}$$

$$p_2 = 4420 \text{ lb/ft}^2 = 307 \text{ psi}$$

برای تعیین F_x ، معادله (۷.۶.۳) نتیجه می‌دهد

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta - F_x = \rho Q (V_2 \cos \theta - V_1)$$

$$\begin{aligned} 40(144)(\pi 6^2)/4 - 4420 \frac{\pi 4^2}{4} \cos 120^\circ - F_x \\ = 1.935 \times 300(23.87 \cos 120^\circ - 10.61) \end{aligned}$$

از آنجا که $\cos 120^\circ = -0.5$ داریم:

$$162900 + 27750 - F_x = 580.5(-11.94 - 10.61)$$

$$F_x = 203740 \text{ lb}$$

در جهت y داریم

$$\Sigma F_y = \rho Q (V_{y2} - V_{y1})$$

$$F_y - W - p_2 A_2 \sin \theta = \rho Q V_2 \sin \theta$$

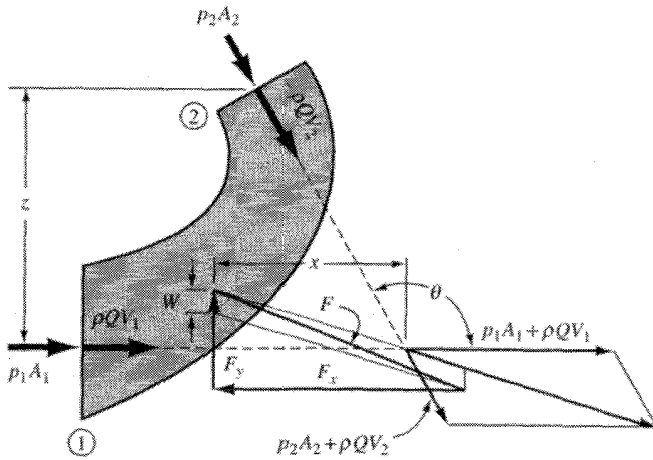
$$F_y = 18000 - 4420 \pi (4^2)/4 \sin 120^\circ$$

$$= 1.935 \times 300 \times 23.87 \times \sin 120^\circ$$

$$F_y = 78100 \text{ lb}$$

برای پیدا کردن خط حامل نیروی برآیند با استفاده از بردارهای شار تکانه (شکل ۲۲.۳)، داریم $p_2 A_2 = 55560 \text{ lb}$ ، $p_1 A_1 = 162900 \text{ lb}$ ، $\rho Q V_2 = 13860 \text{ lb}$ ، $\rho Q V_1 = 6160 \text{ lb}$ ترکیب این بردارها و نیروی گرانی W در شکل ۲۲.۳ نیروی نهایی 218000 lb را نتیجه می‌دهد که باید با F_x و F_y خنثی شود. ■

همان‌طور که در مثال ۱۰.۳ نشان داده شده است تغییر جهت خط لوله باعث اعمال نیروهایی بر خط لوله می‌شوند مگر اینکه خم یا زانویی در محل خود مهار شود. این نیروها هم ناشی از فشار استاتیکی در خط لوله و هم ناشی از واکنشهای دینامیکی در جریان گردنده سیال‌اند. در خطوط بزرگ لوله، اتصالات انبساطی قرار می‌دهند تا از تنش در لوله در جهت محوری، چه ناشی از سیال و چه ناشی از تغییر دما، جلوگیری شود. این اتصالات انبساطی راه را برای حرکت نسبتاً آزاد خط در جهت محور باز می‌گذارند، و از این رو، در خمها نیروهای استاتیکی و دینامیک پدید می‌آیند.



شکل ۲۲.۳ نیروهای وارد به زانویی کاهنده، همراه با حل برداری.

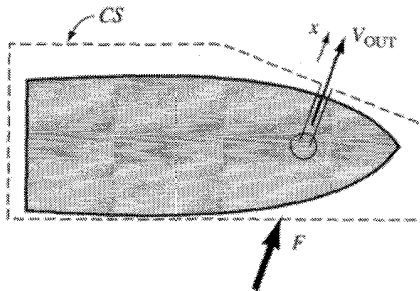
مثال ۱۱.۳ از شیپوره‌ای که بر یک قایق نصب شده است یک جت آب به قطر 8 mm با سرعت 40 m/s در جهت افقی تخلیه می‌شود. چه نیرویی لازم است تا قایق ساکن بماند؟

حل

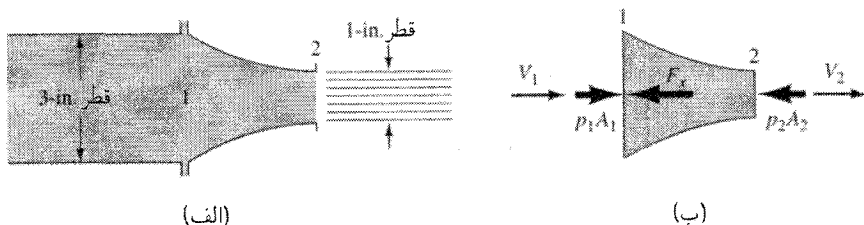
وقتی حجم کنترل را مطابق شکل ۲۳.۳ انتخاب کنیم شار خالص تکانه عبارت است از [معادله (۶.۶.۳)]

$$\rho QV_{\text{خروجی}} = (1000\text{ kg/m}^3) \frac{\pi}{4} (0.008\text{ m})^2 (40\text{ m/s})^2 = 87.0\text{ kN}$$

نیروی وارد بر قایق در جهت x مساوی 87.0 kN است.



شکل ۲۳.۳ شیپوره در قایق.



شکل ۲۴.۳ شیپوره در انتهای لوله.

مثال ۱۲.۳ مطلوب است نیرویی که شیپوره بر لوله شکل ۲۴.۳ الف وارد می‌کند. از اتلافها صرف نظر کنید. سیال روغن است، $S = ۰.۸۵$ ، $p_1 = ۱۰^۰ \text{ psi}$.

حل

برای تعیین تخلیه، معادله برنولی را برای جریان از مقطع ۱ تا انتهای فرودست شیپوره، که فشار در آن صفر است، می‌نویسیم

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{(۱۰^۰ \text{ lb/in}^2)(۱۴۴ \text{ in}^2/\text{ft}^2)}{۰.۸۵(۶۲.۴ \text{ lb/ft}^3)} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + ۰$$

از آنجا که $z_1 = z_2$ و $V_2 = (D_1/D_2)^2 V_1 = ۹V_1$ ، بعد از جایگذاری نتیجه می‌شود

$$\frac{V_1^2}{2g}(۱ - ۸۱) + \frac{(۱۰^۰ \text{ lb/in}^2)(۱۴۴ \text{ in}^2/\text{ft}^2)}{۰.۸۵(۶۲.۴ \text{ lb/ft}^3)} = ۰$$

و

$$V_1 = ۱۴.۷۸ \text{ ft/s}$$

$$V_2 = ۱۳۳ \text{ ft/s}$$

$$Q = ۱۴.۷۸ \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = ۰.۷۲۵ \text{ ft}^3/\text{s}$$

فرض می‌کنیم F_x (شکل ۲۴.۳ ب) نیرویی باشد که از شیپوره بر حجم کنترل مایع وارد می‌شود؛ بنابراین، با معادله (۷.۶.۳)،

$$(۱۰^۰ \text{ lb/in}^2) \frac{\pi}{4} (۳ \text{ in})^2 - F_x =$$

$$(۱.۹۳۵ \text{ slug/ft}^3)(۰.۸۵)(۰.۷۲۵ \text{ ft}^3/\text{s})(۱۳۳ \text{ ft/s} - ۱۴.۷۸ \text{ ft/s})$$

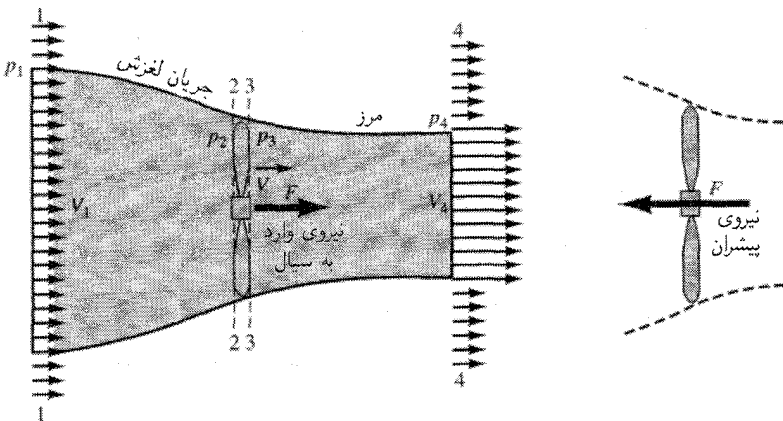
یا $F_x = 5651b$. روغن بر شیپوره نیروی $5651b$ به طرف راست وارد می‌کند، و یک نیروی کششی $5651b$ توسط شیپوره بر لوله اعمال می‌شود.

در اکثر حالتها با برنهمش یک سرعت ثابت در سیستم و محیط آن، یعنی با تغییر سرعت مرجع، مسئلهٔ شارش غیرپایا را به مسئلهٔ شارش پایا می‌توان تبدیل کرد. دینامیک سیستم و محیط آن با برنهمش یک سرعت ثابت تغییر نمی‌کند. از این رو، فشارها و نیروها تغییر نمی‌کنند. در بررسی حالت بعدی شارش از مزیت این اصل استفادهٔ بیشتری می‌کنیم.

نظریهٔ تکانه برای پیشرانها

کار پیشران عبارت است از تغییر تکانه سیالی که پیشران در آن غوطه‌ور است و در نتیجه ایجاد نیرویی که برای پیشرانش به‌کار می‌رود. پیشرانها را نمی‌توان طبق نظریهٔ تکانه طراحی کرد، هرچند بعضی از روابط حاکم بر آنها از کاربردشان روشن است. در شکل ۲۵.۳، یک پیشران را با جریان لغزشی و توزیعیهای سرعتش در دو مقطع به فاصلهٔ ثابت از آن می‌بینید. پیشران یا (۱) ساکن در یک شارش است، همان‌طور که می‌بینید یا (۲) با سرعت V_1 در سیال ساکن به چپ حرکت می‌کند، زیرا تصویر نسبی یکسان است. سیال بی‌اصطکاک و تراکم‌پذیر فرض می‌شود.

در مقطع ۱ فرادست پیشران، شارش ناآشفته است و وقتی به پیشران نزدیک می‌شود، بر اثر تقلیل فشار در فرادست پیشران، شتاب می‌گیرد. فشار سیال در عبور از پیشران افزایش می‌یابد و همین شتاب بیشتری به شارش می‌دهد و مقطع را در ۴ کوچکتر می‌کند. سرعت V در پیشران، از ۲ تا ۳ تغییر نمی‌کند. فشار در ۱ و ۴، فشار سیال ناآشفته است، که این فشار در مرز جریان لغزشی نیز هست.



شکل ۲۵.۳ پیشران در جریان سیال.

اگر در حجم کنترل در بین مقطع ۱ و ۴ و مرز جریان لغزشی شکل ۲۵.۳ از معادله (۷.۶.۳) استفاده کنیم، نیروی F پیشران تنها نیروی خارجی است که در جهت محوری اثر می‌کند، زیرا فشار در همه‌جای سطح کنترل یکسان است، بنابراین

$$F = \rho Q(V_f - V_1) = (p_2 - p_1)A \quad (۱.۷.۳)$$

که در آن A سطح فرورفته توسط تیغه‌های پیشران است. نیروی پیشران باید مساوی و مخالف نیروی وارد بر سیال باشد. بعد از جایگذاری $Q = AV$ و ساده کردن، داریم

$$\rho V(V_f - V_1) = p_2 - p_1 \quad (۲.۷.۳)$$

معادله برنولی برای جریان بین مقاطع ۱ و ۲ و مقاطع ۳ و ۴ عبارت است از

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad p_2 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_f^2$$

زیرا $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$. با حل $p_2 - p_1$ با دانستن $p_1 = p_2$ به دست می‌آید

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(V_f^2 - V_1^2) \quad (۳.۷.۳)$$

حذف $p_2 - p_1$ در معادله‌های (۲.۷.۳) و (۳.۷.۳) می‌دهد

$$V = \frac{V_1 + V_f}{2} \quad (۴.۷.۳)$$

که نشان می‌دهد سرعت در سطح پیشران عبارت است از متوسط سرعتها در فرادست و فرودست پیشران.

کار مفید پیشران در سیال آرام در زمان واحد (توان منتقل شده) عبارت است از حاصل ضرب نیروی پیشران در ساعت، یعنی

$$\text{توان} = FV_1 = \rho Q(V_f - V_1)V_1 \quad (۵.۷.۳)$$

توان ورودی توانی است که برای افزایش سرعت سیال از V_1 به V_f لازم است. از آنجا که Q آهنگ حجمی شارش است، نتیجه می‌گیریم

$$\text{توان ورودی} = \frac{\rho Q(V_f^2 - V_1^2)}{2} \quad (۶.۷.۳)$$

توان ورودی را برحسب کار مفید (توان خروجی) به علاوه انرژی جنبشی در زمان واحد که در جریان لغزشی باقی می‌ماند (افت توان) نیز می‌توان بیان کرد

$$\text{توان ورودی} = \rho Q(V_f - V_1)V_1 + \frac{\rho Q(V_f - V_1)^2}{2} \quad (۷.۷.۳)$$

بازده مکانیکی نظری e_t از نسبت‌های معادله‌های (۵.۷.۳) و (۶.۷.۳) یا (۷.۷.۳) به دست می‌آید

$$e_t = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{افت} + \text{توان خروجی}} = \frac{2V_1}{V_f + V_1} = \frac{V_1}{V} \quad (۸.۷.۳)$$

اگر $\Delta V = V_f - V_1$ افزایش سرعت جریان لغزشی باشد، با جایگذاری در معادله (۸.۷.۳) به دست می‌آید

$$e_t = \frac{1}{1 + \Delta V/2V_1} \quad (۹.۷.۳)$$

که نشان می‌دهد بازده ماکزیمم با پیشرانی حاصل می‌شود که سرعت جریان لغزشی را هرچه کمتر افزایش دهد یا وقتی که $\Delta V/V_1$ مینیمم باشد.

به علت آثار تراکم‌پذیری، بازده پیشران هواپیما در سرعت‌های بیش از 400 mi/h سریعاً تنزل می‌کند. پیشرانهای هواپیما تحت شرایط بهینه بازده‌هایی حقیقی نزدیک به بازده نظری، در حدود ۸۵ درصد، دارند. بازده‌های پیشران کشتی کمترند (حدود ۶۰ درصد)، زیرا قطر آنها محدود است. با کاربرد رابطه‌های تکان، آسیای بادی را می‌توان تحلیل کرد. در آسیای بادی، سرعت جت کاهش و قطر جریان لغزشی افزایش می‌یابد.

مثال ۱۳.۳ هواپیمایی که در هوای آرام $\gamma = 12 \text{ N/m}^3$ ، با سرعت 400 km/h حرکت می‌کند، از طریق دو پیشران خود به قطر 2.25 m ، در هر ثانیه 1000 m^3 هوا تخلیه می‌کند. مطلوب است (الف) بازده نظری؛ (ب) پیشران؛ (ج) اختلاف فشار در پیشرانها؛ و (د) توان نظری موردنیاز.

حل

$$V_1 = \frac{400 \text{ km}}{1 \text{ h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 111.1 \text{ m/s} \quad (\text{الف})$$

$$V = \frac{500 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(2.25)^2} = 125.8 \text{ m/s}$$

از معادله (۸.۷.۳)

$$e_t = \frac{V_1}{V} = \frac{111,1}{125,8} = 88,3\%$$

ب) از معادله (۴.۷.۳)

$$V_f = 2V - V_1 = 2(125,8) - 111,1 = 140,5 \text{ m/s}$$

از معادله (۱.۷.۳)، نیروی پیشرانها عبارت است از

$$F = \frac{12 \text{ N.m}}{9,806 \text{ m/s}^2} (1000 \text{ m}^3/\text{s}) (140,5 \text{ m/s} - 111,1 \text{ m/s}) = 36,0 \text{ kN}$$

ج) از معادله (۲.۷.۳)، اختلاف فشار عبارت است از

$$p_r - p_t = \frac{12 \text{ N.m}}{9,806 \text{ m/s}^2} (125,8 \text{ m/s}) (140,5 \text{ m/s} - 111,1 \text{ m/s}) = 4,52 \text{ kPa}$$

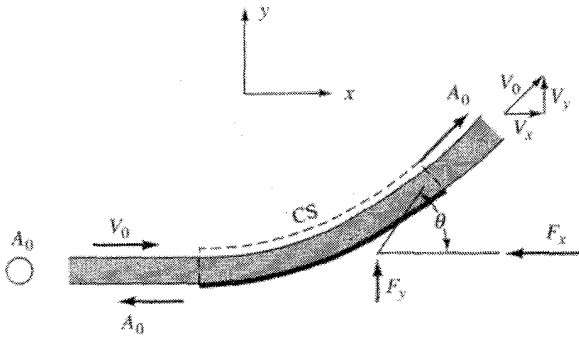
د) توان نظری عبارت است از

$$\frac{FV_1}{e_t} = (36000 \text{ N}) \frac{111,1 \text{ m/s}}{0,883} \frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ N.m/s}} = 4,53 \text{ MW}$$

پره‌های ثابت و متحرک

نظریه توربوماشینها بر روابط بین جتها و پره مبتنی است. مکانیک انتقال کار و انرژی از جتهای سیال به پره‌های متحرک را به عنوان کاربرد اصول تکانه مطالعه می‌کنند. وقتی یک جت آزاد به پره خمیده صافی برخورد کند، مانند شکل ۲۶.۳، جت منحرف می‌شود، تکانه آن تغییر می‌کند، و بر پره نیرو وارد می‌شود. فرض می‌شود که جت در جهت مماس و بدون شوک بر پره جریان یابد؛ از مقاومت اصطکاکی بین جت و پره صرف‌نظر می‌شود. فرض می‌کنیم سرعت سرتاسر جت در فرادست و فرودست پره یکنواخت باشد. از آنجا که جت در معرض هواست، فشار در هر دو سر پره یکسان است. اگر تغییر ارتفاع اندک بین دو سر پره را نادیده بگیریم، با کاربرد معادله برنولی معلوم می‌شود که مقدار سرعت در پره‌های ثابت بدون تغییر می‌ماند.

مثال ۱۴.۳ مطلوب است نیروی وارد بر یک پره ثابت وقتی یک جت که 60 l/s آب را با سرعت 5 m/s تخلیه می‌کند 5° منحرف شود.



شکل ۲۶.۳ جت آزاد در برخورد با پره ثابت صاف.

حل

با مراجعه به شکل ۲۶.۳ و کاربرد معادلهٔ (۷.۶.۳) در جهتهای x و y ، معلوم می‌شود که

$$-F_x = \rho V_0 \cos \theta V_0 A_0 + \rho V_0 (-V_0 A_0) \quad F_y = \rho V_0 \sin \theta V_0 A_0$$

از این رو

$$F_x = -(1000 \text{ kg/m}^3)(0.06 \text{ m}^2/\text{s})(50 \cos 135^\circ - 50 \text{ m/s}) = 5,121 \text{ kN}$$

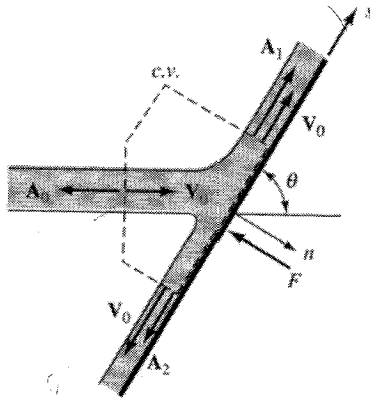
$$F_y = -(1000 \text{ kg/m}^3)(0.06 \text{ m}^2/\text{s})(50 \sin 135^\circ) = 2,121 \text{ kN}$$

■ پس مؤلفه‌های نیروی وارد به پرهٔ ثابت مساوی و مخالف F_y و F_x خواهند بود.

مثال ۱۵.۳ سیالی از یک شکاف طویل خارج می‌شود و به یک صفحهٔ تخت شیب‌دار و صاف برخورد می‌کند (شکل ۲۷.۳). با صرف‌نظر از اتلاف‌های ناشی از برخورد، تقسیم شارش و نیروی وارد بر صفحه را تعیین کنید.

حل

از آنجا که قبل و بعد از برخورد هیچ تغییری در ارتفاع یا فشار وجود ندارد، مقدار سرعت خروجی مساوی سرعت اولیهٔ جت است. با کاربرد معادلهٔ تکانه در جت s ، موازی صفحه، تقسیم شارش به Q_1 و Q_2 را می‌توان محاسبه کرد. در این جت از صفحه هیچ نیرویی بر سیال وارد نمی‌شود؛ از این رو مؤلفهٔ نهایی تکانه باید مساوی مؤلفهٔ تکانه در جهت s باشد. معادلهٔ تکانه در حالت پایا



شکل ۲۷.۳ جت دوبعدی در برخورد با یک سطح مستوی ثابت شیبدار.

در جهت s ، از معادله (۱.۶.۳)، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\Sigma F_s &= \int_{cs} \rho v_s \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = 0 \\ &= \rho V_0 V_0 A_0 + \rho V_0 \cos \theta (-V_0 A_1) + \rho (-V_0) V_0 A_2\end{aligned}$$

با جایگذاری $Q_0 = V_0 A_0$ ، $Q_1 = V_0 A_1$ ، $Q_2 = V_0 A_2$ و معادله تبدیل می‌شود به

$$Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos \theta$$

و از معادله پیوستگی داریم

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

با این دو معادله می‌توان Q_1 و Q_2 را حل کرد

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos \theta) \quad Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1 - \cos \theta)$$

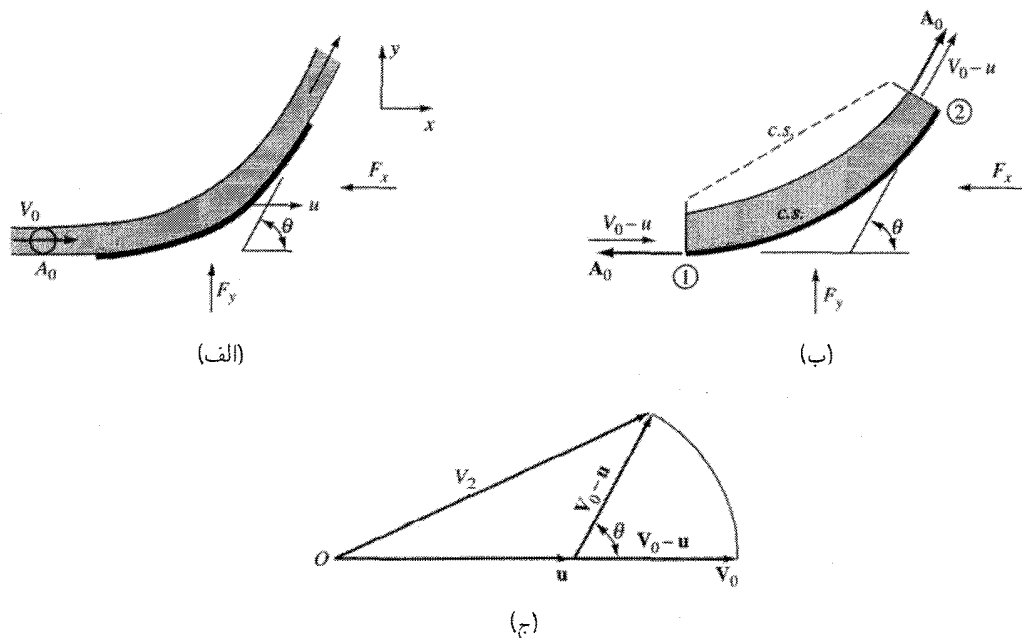
نیروی F وارد بر صفحه باید بر آن عمود باشد. برای معادله تکانه عمود بر صفحه، شکل ۲۷.۳، داریم

$$\Sigma F_n = \int_{cs} \rho v_n \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -F = \rho V_0 \sin \theta (-V_0 A_0)$$

$$F = \rho Q_0 V_0 \sin \theta$$

پره‌های متحرک

در توربو ماشینها از نیروهایی استفاده می‌شود که از حرکت سیال بر پرده‌های متحرک نتیجه می‌شوند. سیالی که بر پرهٔ ثابت جریان دارد نه کاری انجام می‌دهد و نه کاری بر آن انجام می‌شود. وقتی پره‌ها بتوانند جابه‌جا شوند، بر پره یا سیال کار انجام می‌شود. در شکل ۲۸.۳ الف یک پرهٔ متحرک با سیالی که بر آن به‌طور مماسی جریان دارد، نشان داده شده است. نیروهای وارد از پره بر سیال با F_x و F_y نشان داده شده‌اند. برای تحلیل شارش با برهم‌نهی سرعت u پره به طرف چپ (شکل ۲۸.۳ ب) هم بر پره و هم بر سیال، مسئله به حالت پایا تبدیل می‌شود. در این صورت، حجم کنترل شامل سیالی می‌شود که با پره تماس دارد، و سطح کنترل آن در مقاطع ۱ و ۲ بر شارش عمود است. شکل ۲۸.۳ ج نمودار برداری قطبی را برای شارش در پره نشان می‌دهد. بردارهای سرعت مطلق از مبدأ O ترسیم می‌شوند، و همان‌طور که نشان داده شده است بردار سرعت نسبی $\mathbf{V}_0 - \mathbf{u}$ به اندازهٔ زاویهٔ پره دوران می‌کند. V_2 سرعت مطلق نهایی خروجی از پره است. مقدار سرعت نسبی $v_r = V_0 - u$ به هنگام عبور از پره تغییر نمی‌کند. جرم زمان واحد $\rho A_0 v_r$ است



شکل ۲۸.۳ الف) پرهٔ متحرک؛ ب) شارش در پره در مسئلهٔ حالت پایا با برهم‌نهی سرعت n به طرف چپ؛ ج) نمودار برداری قطبی.

که با آهنگ جرمی تخلیه از شیپور برابر نیست. اگر مجموعه‌ای از پره‌ها، مانند پره‌های محیط یک چرخ، طوری آرایش یابند که این یا آن جت تمامی شارش خروجی از شیپوره را قطع کند و سرعت اساساً u باشد، در آن صورت جرم زمان واحد عبارت است از کل جرمی که در یک ثانیه عبور می‌کند. با کاربرد معادله (۱.۶.۳) برای حجم کنترل در شکل ۲۸.۳ ب نتیجه می‌گیریم

$$\Sigma F_x = \int_{cs} \rho v_x \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = -F_x = \rho(V_o - u) \cos \theta [(V_o - u)A_o] + \rho(V_o - u)[-(V_o - u)A_o]$$

یا

$$F_x = \rho(V_o - u)^2 A_o (1 - \cos \theta)$$

$$\Sigma F_y = \int_{cs} \rho v_y \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A} = F_y = \rho(V_o - u) \sin \theta [(V_o - u)A_o]$$

یا

$$F_y = \rho(V_o - u)^2 A_o \sin \theta$$

این روابط به یک پره واحد مربوط می‌شوند. برای مجموعه پره‌ها، داریم

$$F_x = \rho Q_o (V_o - u)(1 - \cos \theta) \quad F_y = \rho Q_o (V_o - u) \sin \theta$$

مثال ۱۶.۳ برای پره متحرک شکل ۲۹.۳ الف مؤلفه‌های نیروی ناشی از جت آب و آهنگ کار انجام شده بر پره را تعیین کنید.

حل

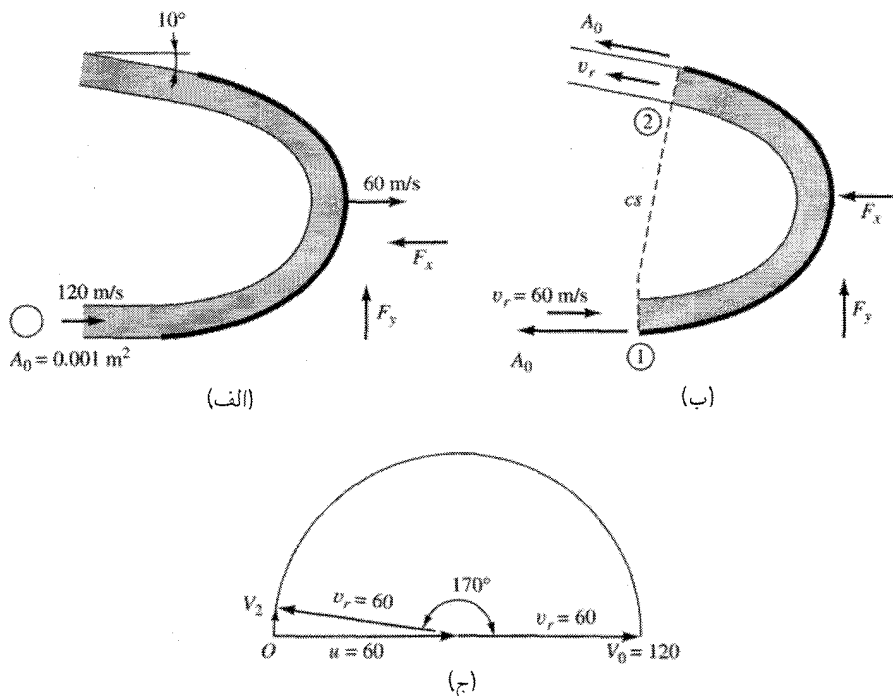
در شکل ۲۹.۳ ب تبدیل به حالت پایا با یک حجم کنترل نشان داده شده است. نمودار برداری قطبی در شکل ۲۹.۳ ج نشان داده شده است. با کاربرد معادله (۱.۶.۳) در جهتهای x و y برای حجم کنترل شکل ۲۹.۳ ب داریم

$$-F_x = (1000 \text{ kg/m}^3)(60 \text{ m/s})(\cos 17^\circ)(60 \text{ m/s})(0.700 \text{ m}^2)$$

$$+ (1000 \text{ kg/m}^3)(60 \text{ m/s})(-60 \text{ m/s})(0.700 \text{ m}^2)$$

$$F_x = 7145 \text{ kN}$$

$$F_y = (1000 \text{ kg/m}^3)(60 \text{ m/s})(\sin 17^\circ)(60 \text{ m/s})(0.700 \text{ m}^2) = 625 \text{ N}$$



شکل ۲۹.۳ جت وارد بر پره متحرک.

توان وارد بر پره عبارت است از

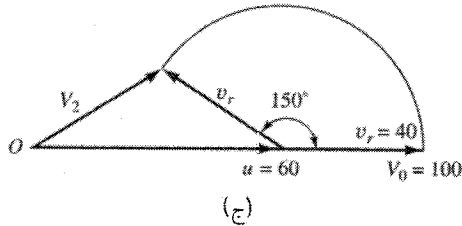
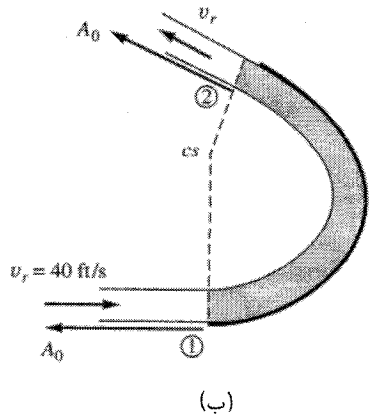
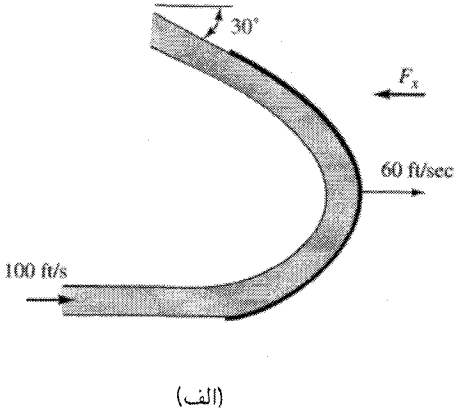
$$uF_x = (60 \text{ m/s})(7,145 \text{ kN}) = 428,700 \text{ W}$$

مثال ۱۷.۳ مطلوب است توانی که از یک مجموعه پره (شکل ۳۰.۳ الف) با خم 15° ، که با سرعت 60 ft/s از یک جت آب 3 cfs به سطح مقطع 3 ft^2 دور می‌شود، می‌توان به دست آورد. نمودار برداری قطبی را رسم و انرژی بازمانده در جت را محاسبه کنید.

حل

سرعت جت عبارت است از $V_0 = 3/0.3 = 100 \text{ ft/s}$. حجم کنترل پره حالت پایا در شکل ۳۰.۳ ب و نمودار قطبی در شکل ۳۰.۳ ج نشان داده شده است. نیروی وارد بر مجموعه پره‌ها در جهت x عبارت است از

$$F_x = (1.94 \text{ slug/ft}^3)(3 \text{ ft}^3/\text{s})(40 \text{ ft/s})(1 - \cos 15^\circ) = 434 \text{ lb}$$



شکل ۳۰.۳ شارش در پره‌های متحرک.

توان عبارت است

$$\frac{(434 \text{ lb})(60 \text{ ft/s})}{550 \text{ ft}\cdot\text{lb/s/hp}} = 47.4 \text{ hp}$$

پس با توجه به شکل ۳۰.۳ مؤلفه‌های سرعت مطلق خروج از پره عبارت‌اند از

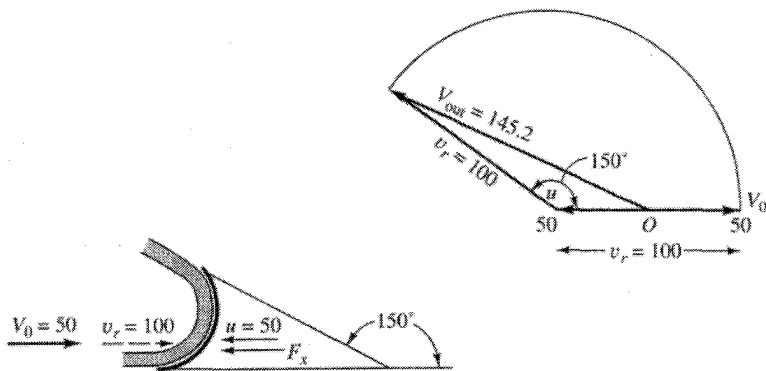
$$V_{rx} = 60 - 40 \cos 30^\circ = 25.4 \text{ ft/s} \quad V_{ry} = 40 \sin 30^\circ = 20 \text{ ft/s}$$

و ارتفاع سرعت خروجی عبارت است از

$$\frac{V_r^2}{2g} = \frac{(25.4)^2 + (20)^2}{64.4} = 16.2 \text{ ft}\cdot\text{lb/lb}$$

انرژی جنبشی بازمانده در جت، برحسب کیلووات عبارت است از

$$Q\gamma \frac{V_r^2}{2g} = (3 \text{ ft}^3/\text{s})(62.4 \text{ lb/ft}^3)(16.2 \text{ ft}) = 3030 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$$



شکل ۳۱.۳ نمودار برداری برای پره‌ای که بر جت کار انجام می‌دهد.

انرژی جنبشی دسترسی‌پذیر اولیه عبارت بود از

$$(3 \text{ft}^3/\text{s})(62.4 \text{lb}/\text{ft}^3) \frac{(100)^2}{64.4} \text{ft} = 29070 \text{ft}\cdot\text{lb}/\text{s}$$

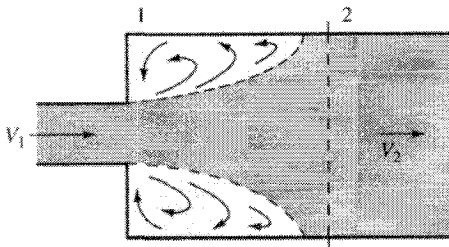
که مجموع کار انجام‌شده و انرژی بازمانده در ثانیه است.

وقتی پره یا مجموعه‌ای از پره‌ها به طرف یک جت حرکت کنند، سیستم پره بر سیال کار انجام می‌دهد و در نتیجه انرژی سیال افزایش می‌یابد. شکل ۳۱.۳ این حالت را نشان می‌دهد؛ نمودار برداری قطبی نشان می‌دهد که سرعت خروجی بزرگتر از سرعت ورودی است. در شارش متلاطم اتلافها را عموماً باید با آزمونهای تجربی در سیستم یا مدل متشابه هندسی آن تعیین کرد. در دو حالت زیر، کاربرد معادله‌های پیوستگی، انرژی و اندازه حرکت، زمینه را برای ارزیابی تحلیلی اتلافها آماده می‌کند.

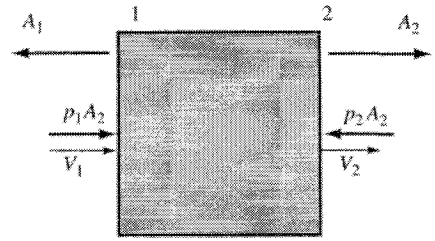
اتلافهای ناشی از انبساط ناگهانی در لوله

با معادلهٔ انرژی و معادلهٔ تکانه، اتلافهای ناشی از بزرگ شدن ناگهانی یک خط لوله را می‌توان محاسبه کرد. برای شارش پایا، تراکم‌ناپذیر و متلاطم در حجم کنترل بین مقطعیهای ۱ و ۲، در انبساط ناگهانی در شکل ۳۲.۳ الف و ب از نیروی برشی کوچک وارد بر دیواره‌های بین دو مقطع می‌توان صرف‌نظر کرد. به فرض اینکه در مقطعیهای شارش، سرعت یکنواخت باشد (فرضی که در شارش متلاطم به آن نزدیک می‌شویم)، از کاربرد معادلهٔ (۷.۶.۳) نتیجه می‌گیریم

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = \rho V_2 (V_2 A_2) + \rho V_1 (-V_1 A_1)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳۲.۳ انبساط ناگهانی در لوله.

در مقطع ۱، شتاب شعاعی ذرت سیال در گرداب کنار سطح کوچک است، و بنابراین در مقطع عموماً تغییر فشار هیدروستاتیکی رخ می‌دهد. معادله انرژی (۲۱.۴.۳) برای مقطعهای ۱ و ۲، با جمله افت h_l ، عبارت است از (برای $\alpha = 1$)

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_l$$

را در هر معادله حل می‌کنیم و نتایج را مساوی قرار دهیم

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{g} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + h_l$$

$$\text{چون } V_1 A_1 = V_2 A_2$$

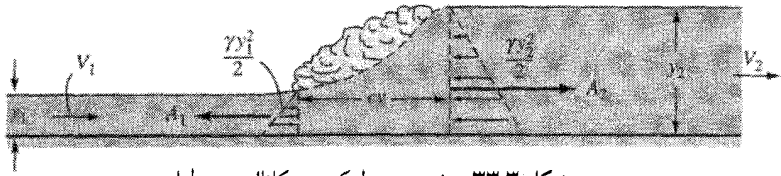
$$h_l = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (۱۰.۷.۳)$$

که نشان می‌دهد که در شارش متلاطم، اتلافها با مربع سرعت متناسب‌اند. با مراجعه به جمله اتلاف تجربی در بخش ۶.۳،

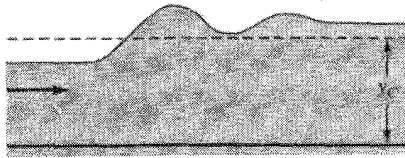
$$K = \left(1 - A_1/A_2\right)^2$$

پرش هیدرولیکی

پرش هیدرولیکی کاربرد ثانوی معادله‌های بنیادی برای تعیین اتلافهای ناشی از شارش متلاطم است. در شرایط مناسب، جریان سریع مایع در کانال باز ناگهان به جریان آهسته‌ای با سطح مقطع بیشتر



شکل ۳۳.۳ پرش هیدرولیکی در کانال مستطیلی.



شکل ۳۴.۳ موج ساکن.

و خیز ناگهانی در ارتفاع سطح مایع تبدیل می‌شود. این پدیده، موسوم به پرش هیدرولیکی، مثالی از شارش پایای غیریکنواخت است. در نتیجه، جت سریع مایع منبسط می‌شود (شکل ۳۳.۳) و انرژی جنبشی را به انرژی پتانسیل و اتلافها یا برگشت‌ناپذیرها تبدیل می‌کند. بر سطح مایع جت مایع منبسط‌شونده، خیزاب ظاهر می‌شود که هوا را به داخل مایع می‌کشد. سطح پرش بسیار ناصاف و متلاطم است، و هرچه ارتفاع پرش بیشتر باشد اتلافها بیشتر خواهند بود. در ارتفاعهای کوچک، شکل پرش به موج ساکن تبدیل می‌شود (شکل ۳۴.۳). در بخش ۴.۱۳ در مورد پرش بیشتر بحث می‌شود. با استفاده از معادله‌های پیوستگی، تکانه و انرژی رابطه‌های بین متغیرهای پرش هیدرولیکی در کانال مستطیلی افقی به سهولت به دست می‌آیند. برای سهولت، عرض کانال را واحد در نظر می‌گیریم. معادلهٔ پیوستگی (شکل ۳۳.۳) عبارت است از $(A_2 = y_2$ و $A_1 = y_1)$

$$V_1 y_1 = V_2 y_2$$

معادلهٔ تکانه عبارت است از

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \rho V_2 (y_2 V_2) + \rho V_1 (-y_1 V_1)$$

و معادلهٔ انرژی (برای نقاط واقع بر سطح مایع) عبارت است از

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + h_f$$

که در آن h_i اتلافهای ناشی از پرش است. با حذف V_2 در دو معادله اول، نتیجه می‌گیریم،

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2V_1^2 y_1}{g}} \quad (11.7.3)$$

که در آن علامت مثبت قبل از رادیکال در نظر گرفته شده است (y_2 منفی هیچ معنای فیزیکی ندارد). عمقهای y_1 و y_2 را عمقهای مزدوج می‌گویند. با حل معادله انرژی برای h_j ، و حذف V_1 و V_2 ، نتیجه می‌گیریم

$$h_i = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (12.7.3)$$

پرش هیدرولیکی که وسیله بسیار مؤثری برای ایجاد برگشت‌ناپذیرهاست، معمولاً در انتهای ناودانها یا کف آبریزها کاربرد دارد و قسمت اعظم انرژی جنبشی را در شارش از بین می‌برد. به‌خاطر برانگیختگی شدید خیزاب، پرش هیدرولیکی یک محفظه مخلوط‌کننده خوب نیز هست. اندازه‌گیریهای آزمایشی پرشهای هیدرولیکی نشان می‌دهد که معادله‌ها مقدار صحیح y_2 را با ۱ درصد خطا به‌دست می‌دهند.

مثال ۱۸.۳ اگر $12 \text{ m}^3/\text{s}$ آب در هر متر عرض به پایین یک آبریز جریان یابد و وارد کف افقی شود و سرعت 20 m/s باشد، عمق لازم فرودست را برای ایجاد پرش هیدرولیکی و اتلافهای توان ناشی از پرش را برای متر عرض به‌دست آورید

$$y_1 = \frac{12 \text{ m}^3/\text{s}}{20 \text{ m/s}} = 0.6 \text{ m}$$

حل

با جایگذاری در معادله (۱۱.۷.۳)

$$y_2 = -0.3 + \sqrt{0.3^2 + \frac{2 \times 20^2 \times 0.6}{9.806}} = 6.7 \text{ m}$$

از معادله (۱۲.۷.۳)

$$\text{اتلافها} = \frac{(6.7 - 0.6)^3}{4 \times 0.6 \times 6.7} = 14.1 \text{ m.N/N}$$

■ $\text{متر/توان} = \gamma Q(\text{اتلافها}) = (9806 \text{ N/m}^3)(12 \text{ m}^3/\text{s})(14.1 \text{ m}) = 1659 \text{ kW}$

محاسبات تغییرات بر حسب زمان

وارد کردن شرایط متغیر در زمان یا گذرا نوعاً مستلزم کاربرد معادله‌های دیفرانسیل است.

مثال ۱۹.۳ در شکل ۳۵.۳، مطلوب است هد H لازم برای شتاب دادن شارش روغن، $S = ۰.۸۵$ ، با آهنگ ۰.۵ ft/s^2 وقتی سرعت شارش ۸.۰۲ ft/s باشد. در ۸.۰۲ ft/s ، هد پایا روی لوله ۲۰ ft است. از اتلاف ورودی صرف نظر کنید اما اتلافات اصطکاکی در لوله را در نظر بگیرید.

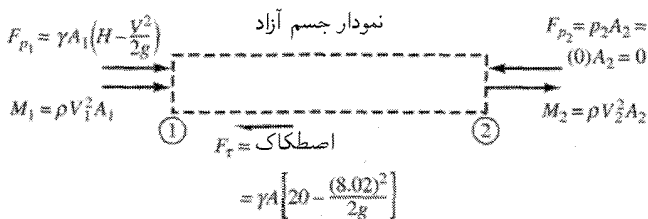
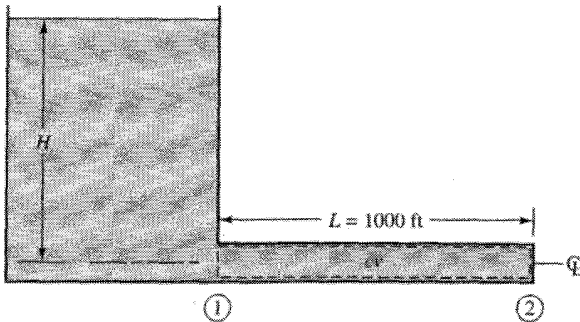
حل

می‌توان فرض کرد روغن تراکم‌ناپذیر است و به‌طور یکنواخت در خط لوله حرکت می‌کند. با کاربرد معادله انرژی اتلاف هد ناشی از اصطکاک در لوله را از رابطه زیر می‌توان یافت

$$H = \frac{V^2}{2g} + h_l$$

$$h_l = 20 - \frac{(8.02)^2}{2g}$$

یا



شکل ۳۵.۳ شتاب مایع در لوله.

اگر، برای محاسبه، طول 1000 ft در لوله خروجی به عنوان حجم کنترل تعریف شود، در این صورت معادله حجم کنترلی تکانه برای شارش غیرپایا در جهت محور لوله موازنه می‌شود. هیچ توزیع تنش جداري وجود ندارد. معادله (۱.۶.۳) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{d}{dt} \int \rho V d\mathcal{V} + F_{p1} - F_{p2} + M_1 - M_2 - F_{\tau_o} = 0$$

از معادله پیوستگی در هر لحظه، $V_1 = V_2 = V$ مساوی با یک ثابت است. بنابراین، $M_1 = M_2$

$$\frac{d}{dt} \int \rho V d\mathcal{V} + F_{p1} - F_{p2} - F_{\tau_o} = 0$$

از آنجا که شارش خروجی به صورت یک جت آزاد است، $F_{p2} = 0$ و معادله انرژی می‌دهد

$$p_1 = \gamma \left(H - \frac{V^2}{2g} \right)$$

بنابراین،

$$F_{p1} = p_1 A = \gamma A \left(H - \frac{V^2}{2g} \right)$$

نیروی برشی جداري به شکل زیر در می‌آید

$$F_{\tau_o} = \gamma A h_l = \gamma A \left(20 - \frac{(1.7 \cdot 2)^2}{2g} \right)$$

حجم سیال داخل لوله با زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین، جمله مشتق زمانی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d}{dt} \int \rho V d\mathcal{V} = \frac{d}{dt} \left(\rho V \int d\mathcal{V} \right) = \frac{d}{dt} (\rho V A L) = (\rho A L) \frac{dV}{dt}$$

مجموع تمام سهمها می‌دهد

$$\gamma A \left(H - \frac{V^2}{2g} \right) - \gamma A \left(20 - \frac{(1.7 \cdot 2)^2}{2g} \right) = (\rho A L) \frac{dV}{dt}$$

یا

$$H = 20 + \frac{1000}{32.2} (\cdot 5) = 35.52 \text{ ft}$$

کاربردهای معادلهٔ تکانه ۲۰۱

مثال ۲۰.۳ اگر مخزن مثال ۱۹.۳ مساحت A ، $A_r = 100$ داشته باشد (A مساحت لوله است)، و وقتی سرعت 8.2 ft/s است هد 35.52 ft باشد، چقدر طول می‌کشد تا هد در مخزن تا 20 ft کاهش یابد؟ فرض کنید که مقاومت اصطکاکی در لوله برحسب مربع سرعت تغییر می‌کند.

حل

مقاومت در برابر شارش لوله برابر است با

$$\text{افت هد} = \left(20 - \frac{V_0^2}{2g} \right) \left(\frac{V}{V_0} \right)^2$$

یا

$$\text{افت هد} = RV^2$$

معادله حرکت به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{dV}{dt} = \left(H - \frac{V^2}{2g} - RV^2 \right) \frac{g}{L}$$

و معادله پیوستگی عبارت است از

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{AV}{A_r} = -0.017V$$

این دو معادله با روش رانگ-کوتای مرتبهٔ دوم حل می‌شوند؛ این روش در صفحه وب* توصیف شده است. جدول ۱۰.۳ شامل الگوریتم صفحهٔ گسترده و نتایج است. توجه کنید که مراحل زمانی بین ۶۵ و ۱۶۰ ثانیه حذف شده‌اند. یک درون‌یابی خطی زمان نهایی 165.71 s را می‌دهد. ■

تمرینها

۱۰.۷.۳ برای استنتاج معادلهٔ $\Sigma F_x = \rho Q(V_{x_{\text{خروج}}} - V_{x_{\text{ورود}}})$ کدامیک از مفروضات زیر لازم است؟

۱. سرعت ثابت بر مقاطع انتهایی

۲. شارش پایا

۳. شارش یکنواخت

* صفحه وب صفحه‌ای است که کاربر در کامپیوتر با استفاده از آن می‌تواند به اصطلاحات موردنیاز دست یابد.م.

جدول ۱.۳ الگوریتم صفحه گسترده و نتایج برای مثال ۲۰.۳

	A	B	C	D	E	F	G
۱	مثال ۲۰.۳	زمان خالی شدن مخزن					
۲							
۳	VO =	۸٫۰۲	g =	۳۲٫۲			
۴	HO =	۳۵٫۵۲	dt =	۵			
۵	Hf =	۲۰	ApAt =	-۰٫۰۱			
۶	L =	۱۰۰۰	F =	۰٫۲۹۵۴۱۵	= Hf/VO ^۲ - ۱/(۲*g)		
۷							
۸	t = ۵s در	dH۱ = dt*ApAt*G۱۵					
۹	t = ۵s در	dV۱ = dt*g/L*(F۱۵ - G۱۵ ^۲ *(F + ۱/(۲*g)))					
۱۰	t = ۵s در	dH۲ = dt*ApAt*(G۱۵ + C۱۶)					
۱۱	t = ۵s در	dV۲ = dt*g/L*(F۱۵ + B۱۶ - (G۱۵ + C۱۶) ^۲ *(F + ۱/(۲*g)))					
۱۲	t = ۵s در	H = F۱۵ + ۰٫۵*(B۱۶ + D۱۶)					
۱۳	t = ۵s در	V = G۱۵ + ۰٫۵*(C۱۶ + E۱۶)					
۱۴	زمان	dH۱	dV۱	dH۲	dV۲	H	V
۱۵	۰					۳۵٫۵۲۰۰	۸٫۰۲۰۰
۱۶	۵	-۰٫۴۰۱۰	۲٫۴۹۸۷	-۰٫۵۲۵۹	۰٫۱۱۵۱	۳۵٫۰۵۶۵	۹٫۳۲۶۹
۱۷	۱۰	-۰٫۴۶۶۳	۱٫۲۸۹۱	-۰٫۵۳۰۸	-۰٫۰۷۳۰	۳۴٫۵۵۸۰	۹٫۹۳۵۰
۱۸	۱۵	-۰٫۴۹۶۷	۰٫۶۲۲۵	-۰٫۵۲۷۹	-۰٫۰۹۶۱	۳۴٫۰۴۵۶	۱۰٫۱۹۸۲
۱۹	۲۰	-۰٫۵۰۹۹	۰٫۲۷۴۷	-۰٫۵۲۳۶	-۰٫۰۹۱۷	۳۳٫۵۲۸۹	۱۰٫۲۸۹۷
۲۰	۲۵	-۰٫۵۱۴۵	۰٫۰۹۷۷	-۰٫۵۱۹۴	-۰٫۰۸۶۳	۳۳٫۰۱۱۹	۱۰٫۳۹۵۴
۲۱	۳۰	-۰٫۵۱۴۸	۰٫۰۰۸۶	-۰٫۵۱۵۲	-۰٫۰۸۳۱	۳۲٫۴۹۷۰	۱۰٫۴۵۸۱
۲۲	۳۵	-۰٫۵۱۲۹	-۰٫۰۳۶۰	-۰٫۵۱۱۱	-۰٫۰۸۱۷	۳۱٫۹۸۴۹	۱۰٫۴۹۹۳
۲۳	۴۰	-۰٫۵۱۰۰	-۰٫۰۵۸۲	-۰٫۵۰۷۱	-۰٫۰۸۱۰	۳۱٫۴۷۶۴	۱۰٫۵۱۲۹
۲۴	۴۵	-۰٫۵۰۶۵	-۰٫۰۶۹۲	-۰٫۵۰۳۰	-۰٫۰۸۰۸	۳۰٫۹۷۱۷	۱۰٫۵۵۴۷
۲۵	۵۰	-۰٫۵۰۲۷	۰٫۰۰۷۴	-۰٫۴۹۹۰	-۰٫۰۸۰۷	۳۰٫۴۷۰۰	۹٫۹۷۷۰
۲۶	۵۵	-۰٫۴۹۸۹	۰٫۰۰۷۷۴	-۰٫۴۹۵۰	-۰٫۰۸۰۷	۲۹٫۹۷۳۹	۹٫۸۹۸۰
۲۷	۶۰	-۰٫۴۹۴۹	-۰٫۰۰۷۸۸	-۰٫۴۹۱۰	-۰٫۰۸۰۷	۲۹٫۴۸۱۰	۹٫۸۱۸۲
۲۸	۶۵	-۰٫۴۹۰۹	-۰٫۰۰۷۹۴	-۰٫۴۸۶۹	-۰٫۰۸۰۷	۲۸٫۹۹۲۰	۹٫۷۳۸۲
۲۹							
۳۰	۱۶۰	-۰٫۴۱۴۶	-۰٫۰۰۸۰۱	-۰٫۴۱۰۶	-۰٫۰۸۰۷	۲۰٫۴۶۵۹	۸٫۲۱۰۹
۳۱	۱۶۵	-۰٫۴۱۰۵	-۰٫۰۰۸۰۱	-۰٫۴۰۶۵	-۰٫۰۸۰۷	۲۰٫۰۵۷۴	۸٫۱۳۰۵
۳۲	۱۷۰	-۰٫۴۰۶۵	-۰٫۰۰۸۰۱	-۰٫۴۰۲۵	-۰٫۰۸۰۷	۱۹٫۶۵۲۹	۸٫۰۵۰۱
۳۳							
۳۴							

زمان H = ۲۰ ft ، @ ۱۶۵٫۷۱ ثانیه است.

۴. سیال تراکم پذیر

۵. سیال بی اصطکاک

(الف) ۱، ۲؛ (ب) ۱، ۵؛ (ج) ۱، ۳، ۵؛ (د) ۲، ۴.

۲.۷.۳ بیان ضریب تصحیح تکانه عبارت است از

(الف) $\int_A \frac{v}{V} dA$ ؛ (ب) $\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA$ ؛ (ج) $\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA$ ؛ (د) $\int_A \left(\frac{v}{V}\right)^4 dA$ ؛ (ه) هیچکدام.

۳.۷.۳ برای توزیع در شکل ۱.۱، ضریب تصحیح تکانه عبارت است از

(الف) ۱؛ (ب) ۱؛ (ج) $\frac{4}{3}$ ؛ (د) ۲؛ (ه) هیچکدام.

۴.۷.۳ سرعت در یک سوم مقطع صفر است و در دو سوم باقیمانده سطح یکنواخت است ضریب

تصحیح تکانه عبارت است از (الف) ۱؛ (ب) $\frac{4}{3}$ ؛ (ج) $\frac{7}{4}$ ؛ (د) $\frac{1}{3}$ ؛ (ه) هیچکدام.

۵.۷.۳ مقدار نیروی برآیند لازم برای نگه داشتن زانویی 90° به قطر 200 mm تحت شرایطی که

هیچ شارشی وجود ندارد و فشار 98 MPa است، برحسب کیلونیوتن عبارت است از (الف)

۵۱٫۶؛ (ب) ۴۳٫۵؛ (ج) ۳۰٫۸؛ (د) ۱۰؛ (ه) هیچکدام.

۶.۷.۳ یک زانویی 90° به قطر 12 in آب را با سرعت متوسط 15 ft/s فشار 5 psi - انتقال

می دهد. مؤلفه لازم در جهت سرعت نزدیکی برای نگهداری زانویی. برحسب نیوتن عبارت است

از (الف) -342 ؛ (ب) 223 ؛ (ج) 565 ؛ (د) 907 ؛ (ه) هیچکدام.

۷.۷.۳ یک خم 180° به قطر 5 mm مایعی را با $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ در سرعت 6 m/s در

فشار پیمانه ای صفر انتقال می دهد. نیرویی که می خواهد خم را به طرف خارج لوله هل دهد،

برحسب نیوتن عبارت است از (الف) ۱؛ (ب) 705 ؛ (ج) 141 ؛ (د) 515 ؛ (ه) هیچکدام.

۸.۳ معادله گشتاور تکانه

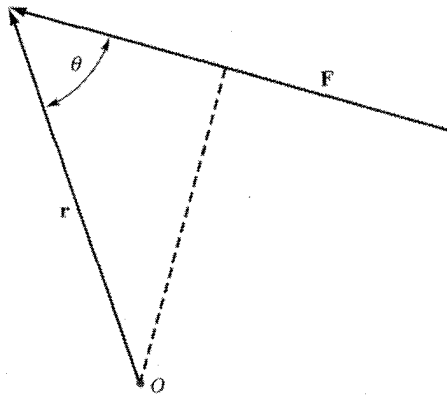
معادله عمومی تکانه خطی غیر یابا برای یک حجم کنترل، معادله (۱.۶.۳)، عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{v} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.8.3)$$

گشتاور نیروی \mathbf{F} نسبت به نقطه O (شکل ۳۶.۳) از رابطه زیر به دست می آید:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

که حاصل ضرب خارجی یا برداری \mathbf{F} در بردار مکان \mathbf{r} یک نقطه خط حامل بردار از نقطه O است. حاصل ضرب خارجی دو بردار عبارت است از برداری عمود بر صفحه که با دو بردار و



شکل ۳۶.۳ نمادهای گشتاور بردار.

مقدار زیر تعریف می‌شود:

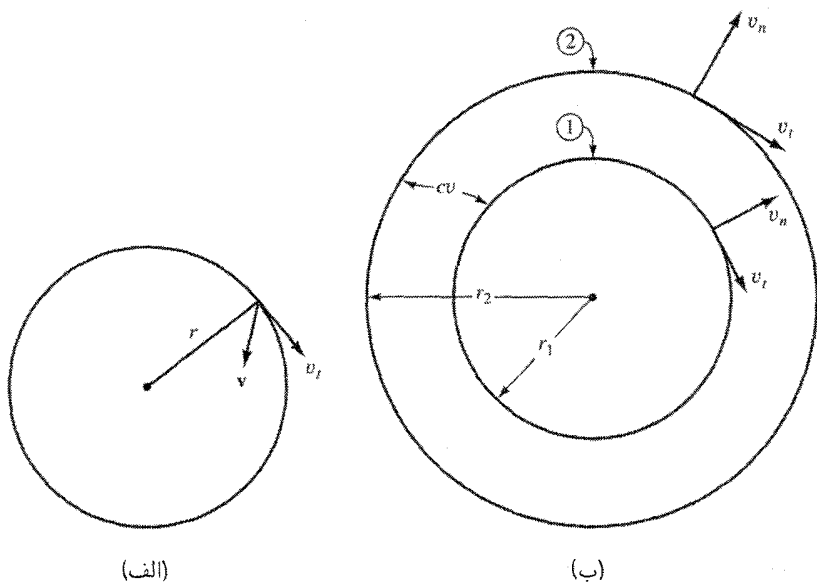
$$Fr \sin \theta$$

که حاصل ضرب F در کوتاهترین فاصله از نقطه O تا خط حامل \mathbf{F} است. سوی بردار نهایی از قاعده دست راست به دست می‌آید. در شکل ۳۶.۳ نیرو می‌خواهد دورانی خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول نقطه O ایجاد کند. اگر پیچ راست گردی بود که در این جهت می‌چرخید، بالا می‌آمد، و بنابراین بردار نیز به خارج صفحه کاغذ و رو به بالاست. اگر انگشت‌های دست راست را در جهت نیرویی بگیریم که گرایش به ایجاد دوران دارد، انگشت شست جهت یا سوی بردار را نشان می‌دهد. با $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ، و با استفاده از معادله (۱.۸.۳)، داریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV + \int_{cs} (\rho \mathbf{r} \times \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (2.8.3)$$

طرف چپ معادله گشتاور، تمام نیروهای وارد بر حجم کنترل، و جمله‌های طرف راست آهنگ تغییر گشتاور تکانه در داخل حجم کنترل به علاوه شار خالص گشتاور تکانه از حجم کنترل است. این معادله کلی گشتاور تکانه برای یک حجم کنترل است. این معادله در تحلیل بعضی از مسائل شارش ارزش بسیار دارد؛ مثلاً در توربوماشینها، که در آنها گشتاورها مهمتر از نیروهایند.

اگر برای حالتی از شارش در صفحه xy معادله (۲.۸.۳) را به کار ببریم، به فرض اینکه r کوتاهترین فاصله تا مؤلفه مماسی سرعت v_t باشد (مانند شکل ۳۷.۳ الف) و مؤلفه عمودی



شکل ۳۷.۳ شارش دوبعدی در گردای پمپ مرکزگریز

سرعت باشد، خواهیم داشت

$$F_t r = T_z = \int_{cs} \rho r v_t v_n dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho r v_t dV \quad (۳.۸.۳)$$

که در آن T_z گشتاور است. صورت مفیدی از معادله (۳.۸.۳) برای یک حجم کنترل طوقه‌ای، در شارش پایا (شکل ۳۷.۳ ب)، عبارت است از

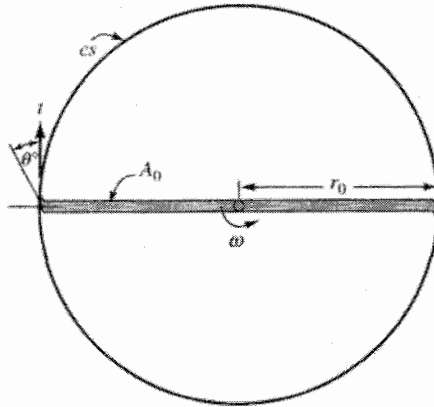
$$T_z = \int_{A_2} \rho_2 r_2 v_{t_2} v_{n_2} dA_2 - \int_{A_1} \rho_1 r_1 v_{t_1} v_{n_1} dA_1 \quad (۴.۸.۳)$$

در تقارن کامل دایروی که در آن r ، ρ و v_t و v_n در سطوح کنترل ورودی و خروجی ثابت‌اند، معادله به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$T_z = \rho Q [(r v_t)_2 - (r v_t)_1] \quad (۵.۸.۳)$$

زیرا $\int \rho v_n dA = \rho Q$ در ورودی و خروجی یکسان است.

مثال ۲۱.۳ آیفشان شکل ۳۸.۳ آب را به طرف بالا به بیرون صفحه افقی تخلیه می‌کند، به طوری که



شکل ۳۸.۳ نمای آبفشان و سطح کنترل.

وقتی بازوی آبفشان ساکن است آبفشان با محور t زاویه θ° می‌سازد. سطح مقطع شارش آبفشان ثابت و برابر A_0 و تخلیه آن q است و در $t = 0^\circ$ با $\omega = 0$ شروع به کار می‌کند. گشتاور مقاوم ناشی از یاتاقانها و کاسه نمدها ثابت و مساوی T_0 ، و گشتاور لختی سر آبفشان خالی چرخنده I_s است. معادله ω را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید.

حل

معادله (۲.۸.۳) را می‌توان به کار برد. حجم کنترل عبارت است از سطح استوانه‌ای شامل سر آبفشان چرخنده.

شارش ورودی در امتداد محور است به طوری که هیچ گشتاور تکانه ندارد؛ از این رو، گشتاور $-T_0$ ناشی از اصطکاک مساوی آهنگ زمانی تغییر گشتاور تکانه سر آبفشان و سیال داخل سر آبفشان به علاوه شار خالص گشتاور تکانه از حجم کنترل است. فرض می‌کنیم $V_r = q/2A_0$

$$-T_0 = 2 \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} A_0 \rho \omega r^2 dr + I_s \frac{d\omega}{dt} - \frac{2 \rho q r_0}{2} (V_r \cos \theta - \omega r_0)$$

از مشتق کلی می‌توان استفاده کرد. با ساده کردن نتیجه می‌شود

$$\frac{d\omega}{dt} \left(I_s + \frac{2}{3} \rho A_0 r_0^3 \right) = \rho q r_0 (V_r \cos \theta - \omega r_0) - T_0$$

برای شروع دوران، $V_r \cos \theta$ باید بزرگتر از T_0 باشد. از معادله به سهولت انتگرال می‌گیریم و ω را به صورت تابع t پیدا می‌کنیم. با قرار دادن $d\omega/dt = 0$ در معادله، مقدار نهایی ω به دست می‌آید. ■

مثال ۲۲.۳ توربینی با تخلیه $10 \text{ m}^3/\text{s}$ قرار است طوری طراحی شود که گردابی با سرعت 200 rpm ، که تمام گشتاور تکانه خروجی از سیال را جذب می‌کند، گشتاور 10 kN اعمال کند. در محیط خارجی گردا، $r = 1 \text{ m}$ است. مؤلفه مماسی سرعت در این مکان چه باید باشد؟

حل

معادله (۵.۸.۳) در این حالت عبارت است از

$$T = \rho Q (r v_t) v_{t_{\text{ورودی}}}$$

زیرا در شارش خروجی $v_t = 0$ با حل $v_{t_{\text{ورودی}}}$

$$v_{t_{\text{ورودی}}} = \frac{T}{\rho Q r} = \frac{10000 \text{ N}\cdot\text{m}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m}^3/\text{s})(1 \text{ m})} = 1000 \text{ m/s}$$

مثال ۲۳.۳ آبفشان شکل ۳۹.۳، از طریق هر شیپوره 1 cfs 90° آب تخلیه می‌کند. با صرف نظر کردن از اصطکاک، سرعت دوران آن را پیدا کنید. مساحت هر سوراخ شیپوره 1 ft^2 90° است.

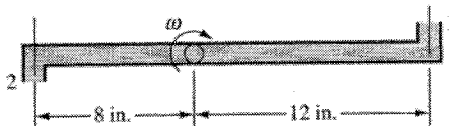
حل

سیال ورودی به آبفشان هیچ گشتاور تکانه ندارد، و هیچ گشتاور خارجی بر سیستم اعمال نمی‌شود؛ از این رو، گشتاور تکانه سیال خروجی باید صفر باشد. فرض می‌کنیم ω سرعت دوران باشد، بنابراین گشتاور تکانه خروجی عبارت است از

$$\rho Q_1 r_1 v_{t_1} + \rho Q_2 r_2 v_{t_2}$$

که در آن v_{t_1} و v_{t_2} سرعتهای مطلق اند. پس

$$v_{t_1} = v_{r_1} - \omega r_1 = \frac{Q_1}{0.7071} - \omega r_1 = 10 - \omega$$



شکل ۳۹.۳ سیستم جت چرخان.

$$v_{t_r} = v_{r_r} - \omega r_r = 10 - \frac{2}{3}\omega$$

برای اینکه گشتاور تکانه صفر باشد، باید

$$10 - \omega + \frac{2}{3} \left(10 - \frac{2}{3}\omega \right) = 0 \quad \text{یا} \quad \rho Q (r_1 v_{t_1} + r_2 v_{t_2}) = 0$$

و $\omega = 11.54 \text{ rad/s}$ یا 2 rpm را 110° .

۹.۳ انتقال گرما و انتقال جرم

قبل از اینکه به معادله‌های حجم کنترل گرما و انتقال جرم بپردازیم چند فرض را در نظر می‌گیریم. ابتدا، مهم‌ترین فرض این است که هیچ تغییر حالتی در سیال روی نمی‌دهد. اغلب، وجود گرما یا جرم در سیالی که جریان دارد ایجاد می‌کند محاسبه شارش و انتقال جفت شده انجام شود. این محاسبه، حتی با نبود تغییرات حالت، غیرخطی و پیچیده است. بنابراین، در این متن مقدماتی هیچ تغییر حالتی در نظر گرفته نمی‌شود. در کتابهای درسی مربوط به پدیده‌های انتقال درباره انتقالی که با تغییر حالت سیال همراه است به تفصیل بحث می‌شود. دوم، یک شارش چند فازه معمول بررسی می‌شود: رسوب و آب.

معادله بنیادی انتقال گرما

در کتابهای درسی پیشرفته انتقال، استنتاج معادله انتقال گرما از معادله پایستاری کل انرژی، که در بخش ۴.۳ بحث شد، شروع می‌شود. در اینجا به عنوان یک روش مقدماتی، کل محتوی گرما در جرم واحد، $c_p T$ ، را به عنوان متغیر پایستاری η در معادله (۴.۲.۳) در نظر می‌گیریم. بنابراین، معادله حجم کنترلی در گرما به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho c_p T dV + \int_{cs} c_p T \rho v \cdot dA \quad (1.9.3)$$

در عبارت، معادله (۱.۹.۳) می‌گوید که آهنگ تغییر زمانی گرما در سیستم، N مساوی است با آهنگ تغییر زمانی گرما در حجم کنترل به علاوه آهنگ خالص خروج گرما از سطح کنترل. جمله dN/dt شامل سه سهم است: رسانش، N_c ؛ تابش، N_r ؛ و اتلاف، N_Φ .

۱. رسانش گرما. هر یک از مولکولهای شارش انرژی گرمایی دارد زیرا دمای مطلق بیشتر از صفر است. در یک مقایسه دقیق با بحث چسبندگی، برخورد ذرات سیال با سطوح مختلف انرژی

گرمایی باعث انتقال خالص گرما از انرژی بالاتر (یا ذرات با دمای بالاتر) به انرژی پایینتر (با ذرات با دمای پایینتر) می‌شود. شار گرمای ناشی از این مکانیزم انتقال درون ذره‌ای، N_{cz} ، رسانش گرما نامیده می‌شود. فوریه شار گرما در مساحت واحد در امتداد x از طریق رسانش را به صورت زیر فرمولبندی کرد

$$N_{cz} = \frac{q_c}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۲.۹.۳)$$

در اینجا k رسانندگی گرمایی سیال است، که خاصیتی از سیال است و دارای ابعاد W/m.K [یا Btu/hr.ft.°R] است. یک وات، W ، به صورت ژول بر ثانیه تعریف می‌شود. متغیر q_c آهنگ انتقال گرما برحسب وات [یا Btu/hr] است؛ A مساحت عمود بر شارش گرما برحسب m^2 [یا ft^2] است؛ و $\partial T / \partial x$ گرادیان دما در امتداد x است. نسبت q_c / A شار گرما، N_{cz} ، است که ابعاد W/m^2 [یا Btu/hr.ft²] را دارد. اگر k بر ρc_p تقسیم شود [به فصل ۴ نگاه کنید]، در این صورت پخشندگی گرمایی، α ؛ تعریف می‌شود و ابعاد L^2/t را دارد. این پارامتر مشابه چسبندگی سینماتیک ν است.

شار رسانش گرما یک کمیت برداری است، یعنی می‌تواند در هر سه جهت مختصاتی متفاوت باشد؛ از این رو، عبارتهای شار مشابه با معادله (۲.۹.۳) در امتدادهای y و z نیز موردنیاز است.

مقادیر k برای سیالات مختلف در پیوست ج آورده شده‌اند، اما مقادیر k برای آب $0^\circ C$ و $100^\circ C$ ، به ترتیب، $0.569 W/m.K$ و $0.680 W/m.K$ است. در مقایسه با تغییر متناظر چسبندگی در این گستره یکسان، تغییر رسانندگی گرمایی کاملاً محدود است.

۲. تابش. تابش گرمایی تولید یا گسیل گرما در یک نقطه داخل حجم سیال بر اثر بزرگتر بودن دمای جسم از صفر است. دو جسمی که گرما تابش کنند می‌توانند تبادل گرما کنند و هیچ میدانی لازم نیست تا اجسام تابنده از طریق آن انرژی گرمایی را مبادله کنند. شار گرما از یک جسم کاملاً سیاه تابنده با رابطه زیر داده می‌شود

$$N_r = \frac{q_r}{A} = \sigma T^4 \quad (۳.۹.۳)$$

که در آن N_r شار گرمای تابشی با ابعاد N_{cz} است؛ A مساحت جسم گسیل‌دهنده تابش است؛ ولی ثابت استفان-بولتزمن، با مقدار $5.67(10^{-8}) W/m^2.K^4$ ، در این محاسبه شار باید از دمای مطلق استفاده کرد.

۳. تولید گرما بر اثر اتلاف مکانیکی. تولید اضافی گرما به اثر اصطکاک مؤلفه سوم dN/dt است. در شارشهایی که در اینجا بررسی می‌شوند این جمله در مقایسه با جمله‌های دیگر کاملاً کوچک است و از آن صرف‌نظر می‌شود.

جمله $c_p T \rho v$ آحاد شار دارد. این شار از سرعت v سیال انتقال‌دهنده گرما نتیجه می‌شود و فرارفت (ادوکسیون) یا همرفت نامیده می‌شود. فرارفت (ادوکسیون) یا همرفت واداشته گرمایی است که توسط سرعت سیالی منتقل می‌شود که خودش به توسط وسایل مکانیکی، از قبیل، اختلاف فشار یا اختلاف ارتفاع یا تنش برشی به حرکت درآمده است. همرفت طبیعی یا آزاد گرمایی است که با سرعت سیالی انتقال می‌یابد که خودش از ناپایداریهای حاصل از دمای غیرپایا یا اختلاف چگالی به دست آمده است. مثلاً وقتی سیالی از زیر گرم می‌شود، آب گرم در کف سبکتر از سیالات رویی است. بنابراین، توده‌های سیال گرمتر با سرعت معینی بالا می‌آیند و گرما را با خود انتقال می‌دهند.

انتقال و شارش جرم

از معادله حجم کنترل پاستاری رینولدز، معادله (۴.۲.۳)، برای استنتاج معادله بنیادی یک عنصر جرمی که در یک سیال متحرک حمل می‌شود. اگر کسر غلظت جرمی عنصر با W_A نشان داده شود، در این صورت

$$\frac{dN_{ca}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho w_A dV + \int_{cs} w_A \rho v_A \cdot dA \quad (4.9.3)$$

در این معادله v_A بردار سرعت عنصر است. در عمل، بردار سرعت کل v در یک نقطه غلظت جرمی برابر است با جمع‌بندی حاصلضرب غلظت هر عنصر در سرعتش تقسیم بر مجموع غلظتها،

$$v = \frac{\sum_i^n C_i v_i}{\sum_i^n C_i} \quad (5.9.3)$$

که در آن، $\sum_i^n C_i = \rho$

در بیشتر مخلوطها، کسرهای جرمی اجزای تشکیل‌دهنده در مقایسه با جرم مایع کوچک است (10^{-3} ~)، و اگر ذرات به‌طور طبیعی در مایع شناور یا حل شوند، در این صورت سرعت کسر

جرمی برای یک عنصر با سرعت کپه‌ای v مایع مساوی است. از این رو، معادله (۴.۹.۳) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{dN_{ca}}{dt} = S_{ca*} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho w_A dV + \int_{cs} w_A \rho v \cdot dA \quad (۶.۹.۳)$$

از فصل ۱، حاصلضرب ρw_a یا C_A (غلظت جرمی عنصر A) مساوی است، یعنی

$$\frac{dN_{ca}}{dt} = S_{ca} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} C_A dV + \int_{cs} C_A v \cdot dA \quad (۷.۹.۳)$$

اگر مخلوط سیال از n عنصر تشکیل شده باشد، در این صورت

$$\sum_{i=1}^n \frac{dN_{ci}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} C_i dV + \int_{cs} C_i v \cdot dA \right] \quad (۸.۹.۳)$$

که جمع آن برای تمام عناصر می‌دهد

$$\circ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho v \cdot dA$$

که معادله پیوستگی برای کل مخلوط است.

دو جمله شامل، جمله dN_{ca}/dt در معادله (۷.۹.۳) است:

۱. پخش مولکولی. در قیاس مستقیم با چسبندگی و رسانندگی گرمایی، قانون پخش فیک برای پخش مولکولی در جهت x برای عنصر A در سیال B عبارت است از

$$J_{A,x} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (۹.۹.۳)$$

که در آن \mathcal{D}_{AB} ضریب پخش دوتایی عنصر A در سیال B است. این ضریبها عبارت‌اند از خواص عنصر و سیالی که عنصر در آن غوطه‌ور است. در پیوست ج مقادیر \mathcal{D} برای عناصر مختلف داخل آب آورده شده است. اگر شار $J_{A,x}$ دارای ابعاد $[M/(L^2 t)]$ باشد، یعنی، جرم سطح واحد عمود بر x در زمان واحد، در این صورت ابعاد \mathcal{D}_{AB} عبارت‌اند از $[L^2/t]$.

۲. تبدیل شیمیایی و بیولوژیکی. به علت واکنش شیمیایی یا فعالیت بیولوژیکی، غلظت جرمی عناصر i را در داخل حجم کنترل می‌توان تغییر داد. برای توصیف تبدیل بیولوژیکی معمولاً

رابطه‌های تجربی لازم می‌شوند در حالی که برای تبدیلات شیمیایی محاسبات مولی به کار می‌روند. در معادله‌های (۶.۹.۳) یا (۷.۹.۳) این تبدیلهای نتیجه می‌دهند. $dN_{ca}/dt \neq 0$ و به‌طور تجربی با جمله چشمه یا چاه، S_{ca} ، با ابعاد $[M/L^3t]$ بیان می‌شوند.

مانند حالت گرمایی، قسمت انتگرال روی سطح کنترل دارای آحاد شار، یعنی $C_i v$ ، است. این جمله نیز شار فرارفتی (ادوکتیو) یا همرفت واداشته نامیده می‌شود در این متن، جابه‌جایی حاصل از ناپایداربهای چگالی جرم، یعنی، همرفت طبیعی یا آزاد، خیلی کمتر از حالت گرمایی مشاهده می‌شود.

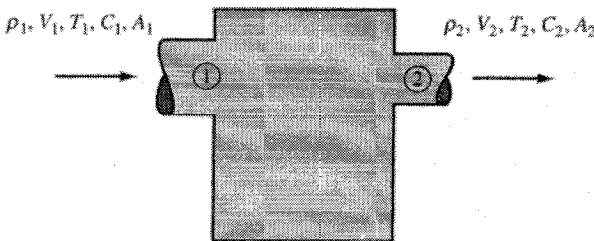
تحلیل معادله در شرایط پایا

بر مبنای روشهای کاربرد حجم کنترل که در قسمتهای قبل توضیح داده شدند تحلیل حالت پایدار شارش ورودی (۱) به شارش خروجی (۲) و حجم کنترل (شکل ۴۰.۳) دو معادله زیر برای انتقال گرما و انتقال جرم به‌دست می‌آید. یک مخلوط دوتایی در نظر می‌گیریم که در آن یک عنصر، A ، در سیال غوطه‌ور است

$$\frac{dN_T}{dt} = -\rho_1 c_p T_1 V_1 A_1 + \rho_2 c_p T_2 V_2 A_2 \quad (۱۰.۹.۳)$$

$$\frac{dN_{ca}}{dt} = -C_{A_1} V_1 A_1 + C_{A_2} V_2 A_2 \quad (۱۱.۹.۳)$$

در این معادله‌ها مقادیر یکنواخت میانگینی در سطح را برای ρ ، V ، C_A ، T و غیره به کار می‌روند. علاوه بر اینکه سطح حجم کنترل جامد فرض می‌شود، می‌توان فرض کرد که هیچ شارگرما یا جرم در امتداد عمود بر دیواره حجم کنترل وجود ندارد. این را حالت عایق شده می‌نامند و می‌رساند که هیچ شارگرما بر اثر فرارفت یا همرفت و هیچ شار جرم با گرما بر اثر پخش مولکولی وجود ندارد. بنابراین، مانند سرعت در مرز جامد، سرعت در دیواره عمود بر مرز نیز باید صفر باشد و گرادیان دما یا غلظت در امتداد عمود بر دیواره صفر است.



شکل ۴۰.۳ ورودی-خروجی حجم کنترل در محفظه مخلوط.

مثالهای کاربردی دما

دو مثال از انتقال انرژی گرمایی در زیر آورده شده‌اند.

مثال ۲۴.۳ دو جریان آب وارد محفظه مخلوط شکل ۴۱.۳ می‌شوند. اگر شرایط ورودی در نقطه ۱، $T_1 = 80^\circ\text{C}$ و $\dot{m}_1 = 80\text{ kg/s}$ و شرایط در نقطه ۲، $T_2 = 50^\circ\text{C}$ و $\dot{m}_2 = 100\text{ kg/s}$ دمای خروجی را در نقطه ۳ بیابید.

حل

از معادله پیوستگی، آهنگ کل شارش جرم به داخل محفظه باید با آهنگ کل شارش خروجی مساوی باشد. در شار پایا، معادله پیوستگی می‌دهد

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

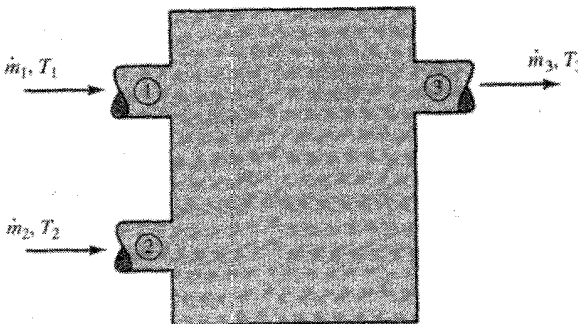
یا

$$\rho_1 V_1 A_1 + \rho_2 V_2 A_2 = \rho_3 V_3 A_3$$

$$80 + 100 = 180\text{ kg/s}$$

معادله انتقال گرما می‌دهد

$$\rho_1 c_p T_1 V_1 A_1 + \rho_2 c_p T_2 V_2 A_2 = \rho_3 c_p T_3 V_3 A_3$$



شکل ۴۱.۳ حجم کنترل هندسی با ورودی و خروجی چندتایی.

از آنجا که c_p در این مایع و در این گستره دما ثابت است و چون آهنگهای شارش جرم به دست آمده‌اند،

$$T_1 \dot{m}_1 + T_2 \dot{m}_2 = T_3 \dot{m}_3$$

$$(273 + 80)(80) + (273 + 50)(100) = T_3(180)$$

بنابراین

$$T_3 = 336\text{K} = 63,3^\circ\text{C}$$

از آنجا که با استفاده از دماهایی به غیر از دمای مطلق به همین پاسخها می‌رسیم، این محاسبات را با استفاده از مقیاسهای سانتیگراد یا فارنهایت می‌توان انجام داد. ■

تأثیر تغییر دما بر چگالی را به‌طور صریح می‌توان یافت. از پیوست ج چگالیهای متناظر در حالت ورودی-خروجی بالا عبارت‌اند از: $\rho_1 = 971,8\text{kg/m}^3$ ، $\rho_2 = 988,1\text{kg/m}^3$ و $\rho_3 = 981,5\text{kg/m}^3$. این حداکثر تغییر چگالی ۱٫۶ درصد را نشان می‌دهد که تغییر نسبتا کوچکی است. در حقیقت در آب و اغلب مایعات دیگر این تغییرات کوچک چگالی وجود دارد و چگالی کپهای سیال اغلب ثابت گرفته می‌شود. اگر گستره دماهای آب به نقاط انجماد یا جوش نزدیک شود، با در نظر گرفتن چگالیهای وابسته به دما می‌توان فرض بالا را قبل از حل واریسی کرد. محاسباتی که با هر نوع گاز یا فاز گاز-مایع سر و کار دارند همیشه باید در تغییرات چگالی وابسته به دما در نظر گرفته شوند.

در محاسبه بالا فرض شده است که هیچ گرمادهی یا گرماگیری توسط عوامل دیگر، از قبیل، انتقال گرما بر رسانش در جداره‌ها، تولید گرما بر اثر اصطکاک، یا دفع گرما از طریق لوله‌های مبدل وجود ندارد. مثال زیر دفع گرما را از طریقی غیر از فرارفتی (ادوکتیو)، یعنی توسط یک مبادله‌کن گرمایی ساده، نشان می‌دهد.

مثال ۲۵.۳ مبادله‌کن گرما وسیله‌ای است که گرما را از یک توده سیال دفع می‌کند. لوله‌ای که شامل یک سیال خیلی سرد است در مخزن غوطه‌ور است، و از آنجا که سردکننده در دمای خیلی پایین نسبت به سیال داخل مخزن قرار دارد، گرما از طریق رسانش از مخزن به سیال داخل لوله منتقل می‌شود. آهنگ شارش از طریق مبادله‌کن سپس گرما را از حجم کنترل دفع می‌کند. اگر شرایط ورودی، $\dot{m}_1 = 1,0\text{kg/s}$ و $T_1 = 90^\circ\text{C}$ را داشته باشیم، دمای خروجی چقدر است در صورتی که مبادله‌کن، گرما را با آهنگ $5\text{kJ/m}^2\cdot\text{s}$ از هر متر مربع لوله دفع کند؟ فرض کنید مبادله‌کن به طول $2,0\text{m}$ و به قطر $1,0\text{cm}$ است.

حل

از آنجا که مبادله‌کن‌های گرما از مخزن آب‌بندی شده است، شارش آن بر محاسبه مخزن تأثیر نمی‌گذارد. در شارش پایا، معادله پیوستگی می‌دهد

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad \text{یا} \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

معادله گرما به شکل زیر در می‌آید

$$c_p T_1 \rho_1 V_1 A_1 = c_p T_2 \rho_2 V_2 A_2 + q_H$$

که در آن q_H آهنگ افزایش گرما (یا در این حالت دفع گرما) با ابعاد [kJ/s] است. در محاسبه دفع گرما باید مساحت کل سطح مبادله‌کن را که با آب داخل مخزن تماس دارد بدانیم

$$q_H = LP_o(\Delta)$$

که در آن L طول لوله، و P_o محیط در تماس با سیال داخل حجم کنترل است. اگر قطر لوله ۱ cm باشد، در این صورت $P_o = 3.14 \text{ m}$ و $c_p = 4.2 \text{ kJ/kg.K}$ ؛ بنابراین،

$$T_2 = \frac{c_p T_1 \dot{m} - q_H}{c_p \dot{m}}$$

یا

$$T_2 = T_1 - \frac{(\Delta_r) LP_o}{c_p \dot{m}}$$

$$T_2 = 82.5^\circ \text{C}$$

توجه کنید که برای این مسئله ساده با افزایش طول با قطر (محیط) مبادله‌کن گرما، دما به‌طور خطی کاهش می‌یابد و دیگر اینکه دما متناسب با $1/r^2$ کاهش می‌یابد، که در آن r شعاع لوله خروجی است. ■

مثالهای کاربردی انتقال جرم

معادله‌های حجم کنترل موازنه جرم در مخزنهای واکنشگر کاربردهای زیادی دارند؛ این مخزنها با

یک ورودی، یک خروجی، و تولید یا مصرف عناصری که از فرایندهای تبدیل شیمیایی یا بیولوژیکی به دست می‌آیند مشخص می‌شوند.

پایستاری جرم برای عنصر C در شارش غیرپایا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} C d\forall = V_1 A_1 C_1 - V_2 A_2 C_2 + S \quad (۱۲.۹.۳)$$

در اینجا، S چشمه‌ها یا چاه‌های (تولید یا مصرف) C را بر اثر تبدیلهای بیولوژیکی یا شیمیایی نشان می‌دهد. اگر فرض شود که مخلوط در مخزن در سرتاسر مخزن به طور لحظه‌ای روی می‌دهد، در این صورت C مستقل از مکان است، یعنی، در حجم کنترل به طور یکنواخت توزیع یا مخلوط شده است. ساده‌سازی زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\forall \frac{dC}{dt} = V_1 A_1 C_1 - V_2 A_2 C_2 + S$$

که در آن \forall حجم مخزن است. واپاشی یا مصرف مرتبه اول C در حجم واحد را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$r_u = -kC$$

که در آن k ثابت آهنگ واکنش با ابعاد $[t^{-1}]$ است. معادله را در یک سیستم به صورت زیر می‌توان نوشت

$$S = -\forall kC$$

و

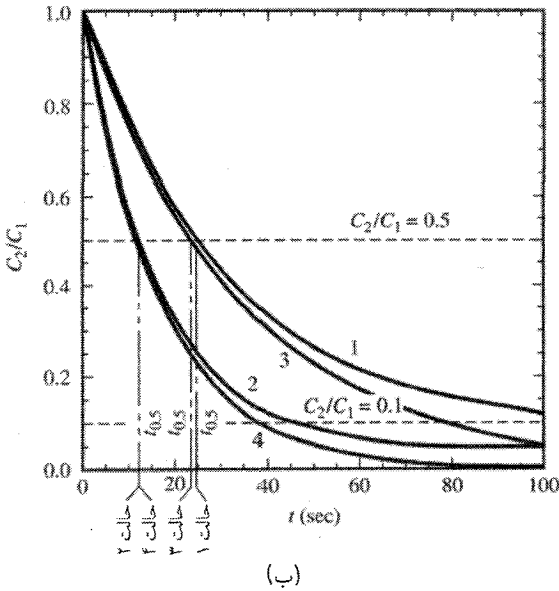
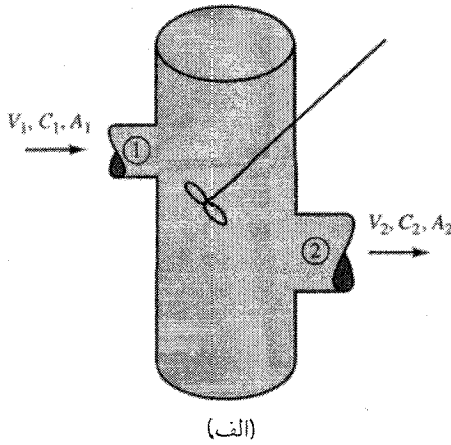
$$\forall \frac{dC}{dt} = V_1 A_1 C_1 - V_2 A_2 C_2 - \forall kC \quad (۱۳.۹.۳)$$

یک عبارت مشابه را برای تولید (جمله چشمه) نیز می‌توان نوشت، یعنی،

$$r_g = kC$$

در شارش پایا $\frac{dC}{dt} = 0$ و

$$V_1 A_1 C_1 - V_2 A_2 C_2 - \forall kC = 0 \quad (۱۴.۹.۳)$$



شکل ۴۲.۳ محفظه مخلوط، مثال ۲۶.۳.

ابعاد این معادله موازنه $[M/t]$ است. در مخزن واکنشگر با فقط یک ورودی و یک خروجی که در شکل ۴۲.۳ الف نشان داده شده است مثال زیر معادله‌های بالا را توضیح می‌دهد.

مثال ۲۶.۳ داده‌های زیر برای مخزن واکنشگری داده شده‌اند. مخزن به قطر 1 m و به ارتفاع 2 m است. قطر ورودی 15 cm ، سرعت متوسط ورودی متناظر V_1 برابر با 25 cm/s ، و غلظت

متوسط ورودی (C_1) برابر با 200 mg/L است. اگر لوله تخلیه با لوله شارش ورودی هم‌اندازه باشد، و مصرف ماده از سینتیک واکنش مرتبه اول با آهنگ کاهش 0.3 s^{-1} باشد، سرعت شارش خروجی و غلظت چقدر است؟

حل

شرایط پایا، از معادله (۱۴.۹.۳) استفاده می‌شود و، با ملاحظات زیر، می‌توان غلظت خروجی C_2 را از آن به دست آورد. این فرض که مخزن به خوبی مخلوط می‌شود به این معنی است که غلظت متوسط مخزن در معادله (۱۳.۹.۳) (یا معادله (۱۴.۹.۳) برای حالت پایا) با غلظت خروجی C_2 مساوی است. در حالی که یک بررسی کوچک آشکار می‌کند که این موضوع اغلب واقعیت ندارد؛ در عمل این فرض برای محاسبات مخزن مخلوط با طرح ساده نسبتاً صحیح است. بنابراین، حل معادله (۱۴.۹.۳) برای C_2 می‌دهد

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + k(V/Q)}$$

که در آن: آهنگ شارش حجم در سیستم $Q = VA = V_1 A_1 = V_2 A_2 =$ شارش حجم در سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Q = V_1 A_1 = (0.25 \text{ m/s}) \pi \left(\frac{0.15}{2} \right)^2 \\ = 0.0044 \text{ m}^3/\text{s} = 4.4 \text{ L/s}$$

و از معادله (۱۴.۹.۳)

$$C_2 = \frac{200}{1 + 0.3 \left(\frac{1570}{4.4} \right)} = 17.09 \text{ mg/L}$$

در یک موازنه جرم، مصرف (k_u) و تولید (k_g) هردو می‌توانند وجود داشته باشند و فرایندهای تبدیل متفاوتی را نشان می‌دهند. معادله (۱۴.۹.۳) را می‌توان نوشت و آن را برای شرایط پایا حل کرد

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + (k_u - k_g)(V/Q)} \quad (15.9.3)$$

در مهندسی فاضلاب یا کیفیت آب اغلب از معادله‌های حجم کنترلی موازنه جرم برای حالت‌های ناپایا باید استفاده کرد. مثالی از این حالت به صورت زیر است که مخزنی در شرایط غلظت

یکنواخت باشد و به‌طور ناگهانی غلظت جدید C_1 به‌طور پایدار از ورودی آن وارد شود و بخواهیم غلظت بعدی در خروجی مخزن، C_2 ، را برحسب زمان به‌دست آوریم. معادله (۱۳.۹.۳) را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\frac{dC_2}{dt} + kC_2 + \frac{V_2 A_2}{V} C_2 = \frac{V_1 A_1}{V} C_1$$

اگر α به صورت $(k + V_2 A_2 / V)$ تعریف شود، در این صورت

$$\frac{dC_2}{dt} + \alpha C_2 = \beta C_1$$

که در آن $\beta = V_1 A_1 / V$ ، α و β هر دو ضریب است. انتگرال این معادله به یکی از چند طریق^۱ انجام می‌شود. شکل کلی حل برای این مسئله با مقدار اولیه، که در آن فرض می‌شود α و β می‌توانند با زمان تغییر کنند، به صورت زیر در می‌آید

$$C_2(t) = \exp\left(\int \alpha dt\right) \left[\int \exp\left(\int \alpha dt\right) (\beta C_1) dt + \text{const} \right] \quad (۱۶.۹.۳)$$

که در آن ثابت انتگرال از شرایط اولیه به‌دست می‌آید؛ یعنی،

$$C_2(t = 0) = C_1 = \text{ثابت}$$

اگر β و α ثابت باشند، معادله (۱۶.۹.۳) به صورت زیر در می‌آید

$$C_2 = \beta \frac{C_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + C_1 e^{-\alpha t} \quad (۱۷.۹.۳ \text{ الف})$$

یا

$$C_2 = \frac{Q}{V} \frac{C_1}{(k + Q/V)} [1 - \exp\{-(k + Q/V)t\}] + C_1 \exp\{-(k + Q/V)t\} \quad (۱۷.۹.۳ \text{ ب})$$

وقتی زمان به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، معادله بالا به شکل معادله پایدار (۱۴.۹.۳) در می‌آید.

مثال ۲۷.۳ در مخزن مثال قبل، مطلوب است مدت زمانی که طول می‌کشد تا پس از ورود C_1 از ورودی، غلظت در مخزن یا در خروجی به 10% درصد غلظت اولیه برسد.

حل

از معادله (۱۷.۹.۳ الف)

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t}$$

مرتب کردن و حل زمان $t_{0.1}$ در $0.1 = C_2/C_1$ می‌دهد: $t_{0.1} = 126.2 \text{ s}$ (۲٫۱۰ دقیقه) که زمان نسبتاً سریعی است. این مقدار را نمی‌توان مقایسه کرد با زمانی که تمام حجم سیال داخل مخزن با یک حجم "تازه" در شارش ورودی جایگزین شود. زمان سکون یا نگهداشت را از رابطه زیر می‌توان تخمین زد

$$t_d = V/Q$$

و در حالت مثال (حالت ۱)، $t_d = 356.8 \text{ s}$ (۵٫۹۵ دقیقه) در اینجا ماده جدید واپاشیده نشده خیلی سریع داخل مخزن می‌شود و در نتیجه زمان برقراری تعادل با رسیدن به غلظت پایا (17.09 mg/L) از مثال قبل طولانی می‌شود.

در شکل ۴۲.۳ ب نمودار پاسخ حالت ۱ رسم شده است. دیده می‌شود که دوره اولیه واپاشی برحسب زمان تا $0.5 = C_2/C_1$ خیلی سریع است، یعنی، نیمه‌عمر، 18.1 s است. اگر هیچ شارشی در مخزن نباشد و فقط فرایندهای واپاشی روی دهد، از معادله (۱۴.۴.۳) با $Q = 0$

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

یا

$$C_2 = C_1 e^{-kt}$$

و نیمه‌عمر از رابطه

$$\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) = -kt$$

برابر با $t = 23.1 \text{ s}$ به دست می‌آید.

مثال ۲۸.۳ در مخزن بالا مطلوب است حساسیت زمان سکون، نیمه‌عمر، و واپاشی C را برحسب زمان وقتی k ، V ، و Q تغییر می‌کنند.

حل

از شرایط حالت ۱، شرایط زیر بررسی می‌شوند، و هر حالت با تغییر نموی یک متغیر از حالت قبل تمیز داده می‌شود. شرایط و نتایج در جدول ۲.۳ خلاصه شده‌اند و ضمناً شکل ۴۲.۳ ب شامل چهار نمودار C_2/C_1 برحسب زمانی است.

جدول ۲.۳ شرایط واکنشگر و نتایج

$t_{0.1}$	$t_{0.5}$	t_d	\mathcal{F}	Q	k	حالت
(sec)	(sec)	(sec)	(L)	(L/s)	(sec ⁻¹)	
۱۲۶٫۲	۲۴٫۱	۳۵۷	۱۵۷۰	۴٫۴	۰٫۰۳	۱
۴۵٫۳	۱۱٫۸	۳۵۷	۱۵۷۰	۴٫۴	۰٫۰۶	۲
۷۷٫۰	۲۳٫۱	۳٫۵۷(۱۰ ^۴)	۱۵۷۰۰	۰٫۴۴	۰٫۰۳	۳
۳۸٫۴	۱۱٫۶	۳٫۵۷(۱۰ ^۴)	۱۵۷۰۰	۰٫۴۴	۰٫۰۶	۴

به‌طور کلی، حالت‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که افزایش آهنگ واپاشی باعث شود غلظت شارش خروجی پایای نهایی پایین بیاید و زمان برقراری شرایط تعادل خیلی سریع شود و مقادیر پایین $t_{0.1}$ و $t_{0.5}$ در جدول صحت این موضوع را نشان می‌دهند. حالت‌های ۱ و ۳ نشان می‌دهند که مخزنی با حجم بزرگتر باعث می‌شود که زمان دوام در مخزن خیلی بیشتر شود، زیرا واپاشی در زمان خیلی طولانیتری ایجاد می‌شود، و همچنین باعث می‌شود غلظت شارش خروجی در حالت تعادل پایین آید. تأثیر پایین آوردن شارش Q در حالت‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود؛ در این حالت‌های زمان دوام و C_2 بیشتر پایین می‌آیند. توجه به این نکته اهمیت دارد که در این فرمول‌بندی متغیرهای پایای فیزیکی مسئله، یعنی Q و \mathcal{F} ، بر سرعت برقراری شرایط پایا تأثیر قابل توجهی ندارند ولی بر آهنگ واپاشی تأثیر دارند.

مسائل

۱.۳ در شارشی دوبعدی به دور یک استوانه مدور (شکل ۳.۳)، تخلیه بین خطوط جریان مساوی 1 cfs در هر متر عرض است. در فاصله زیاد، خطوط جریان 2.5 in از هم فاصله دارند، و در نقطه‌ای نزدیک به استوانه فاصله آنها 12 in است. مقدار سرعت را در این دو نقطه محاسبه کنید.

۲.۳ خط لوله‌ای روغن به چگالی نسبی ۰.۸۶ را در سرعت $V = ۲\text{ m/s}$ از طریق لوله‌ای به قطر داخلی ۲۰ mm انتقال می‌دهد. قطر در مقطع دیگری مساوی ۷ mm است. سرعت را در این مقطع و آهنگ جرمی شارش را برحسب کیلوگرم بر ثانیه پیدا کنید.

۳.۳ در لوله‌ای به قطر ۲ in هیدروژن با آهنگ جرمی $۳\text{ lb}_m/\text{s}$ جریان دارد. در مقطع ۱ فشار مساوی ۳ psi است و $t = ۸۰^\circ\text{F}$. سرعت متوسط چقدر است؟

۴.۳ شیپوره‌ای به قطر قاعده ۷ mm و قطر نوک ۳ mm ، تخلیه ۱ L/s دارد. عبارتی برای سرعت سیال در امتداد محور شیپوره به دست آورید. فاصله x بر امتداد محور را از صفحه قطر بزرگتر اندازه‌گیری کنید.

۵.۳ مکعبی به ضلع ۱ m به موازات محورهای مختصات در نظر بگیرید که در ربع اول دستگاه مختصات قرار دارد و یک گوشه آن در مبدأست. با استفاده از توزیع سرعت

$$\mathbf{v} = (\Delta x)\mathbf{i} + (\Delta y)\mathbf{j} + (-10z)\mathbf{k}$$

شارش در هر وجه را پیدا کنید و نشان دهید که اگر چگالی سیال ثابت باشد هیچ جرمی در داخل مکعب انباشته نمی‌شود.

۶.۳ مطلوب است شارش (بر متر در جهت z) در هر طرف مربعی با گوشه‌های $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ ناشی از

$$\mathbf{v} = (16y - 12x)\mathbf{i} + (12y - 9x)\mathbf{j}$$

و نشان دهید پیوستگی برقرار است.

۷.۳ در شارش مایعی در خط لوله، اتلافها در سرعت متوسط ۲ m/s مساوی ۳ kW و در سرعت متوسط ۳ m/s مساوی ۶ kW است. نوع شارش چیست؟

۸.۳ اگر سه برابر کردن شارش در لوله‌ای اتلافها را ۷۶۴ برابر کند اتلافها با سرعت چگونه تغییر می‌کنند و نوع شارش چیست؟

۹.۳ یک برج تعادل به قطر ۶ m و ارتفاع ۱۵ m پر از آب است. اگر داده ارتفاع را ۳ m زیر قاعده برج در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل آب چقدر است؟

۱۰.۳ در مسئله ۹.۳ اگر آب از توربینی با بازده ۱۰% درصد می‌گذشت و در یک مخزن با ارتفاع ۱۰ m زیر قاعده برج تخلیه می‌شد، آب چه مقدار کار انجام می‌داد؟

۱۱.۳ شار انرژی جنبشی $۱\text{ m}^3/\text{s}$ روغن، ۸۰°C ، که از طریق شیپوره‌ای به قطر ۳ mm تخلیه شود، برحسب متر نیوتن بر ثانیه چقدر است؟

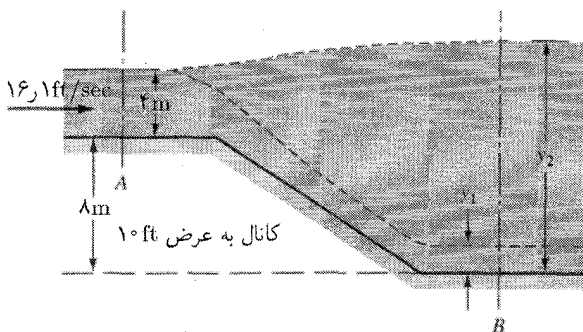
۱۲.۳ نشان دهید که کاری که مایعی بر اثر فشار خود می‌تواند انجام دهد عبارت است از $\int p dV$ که در آن V حجم مایع جابه‌جا شده است.

۱۳.۳ توزیع سرعت بین دو صفحه موازی به فاصله a از هم عبارت است از

$$u = -10 \frac{y}{a} + 20 \frac{y}{a} \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

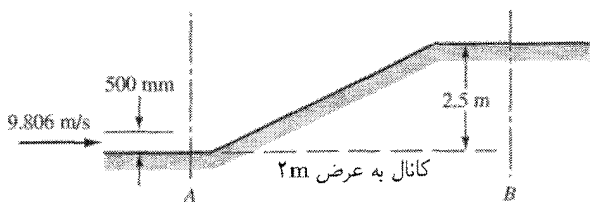
که در آن u مؤلفه سرعت به موازات صفحه است و y به صورت عمود بر صفحه پایینی اندازه‌گیری می‌شود. آهنگ حجمی شارش و سرعت متوسط را پیدا کنید. آهنگ زمانی شارش انرژی جنبشی بین صفحه‌ها چقدر است؟ انرژی جنبشی در چه جهتی جریان دارد؟

۱۴.۳ برای سرعت تشریح شده در مسئله ۵.۳، شار انرژی جنبشی از مکعب مسئله ۵.۳ چقدر است؟
 ۱۵.۳ همان‌طور که در شکل ۴۳.۳ نشان داده شده است، آب در کانالی جریان دارد. با صرف نظر از تمام اتلافها دو عمق ممکن شارش یعنی y_1 و y_2 را تعیین کنید.



شکل ۴۳.۳ مسائل ۱۵.۳، ۱۷.۳ و ۳۱.۳

۱۶.۳ آب پرسرعتی از یک سطح شیب‌دار مطابق شکل ۴۴.۳ بالا می‌رود. با صرف نظر از تمام اتلافها، دو عمق ممکن شارش را در مقطع B محاسبه کنید.

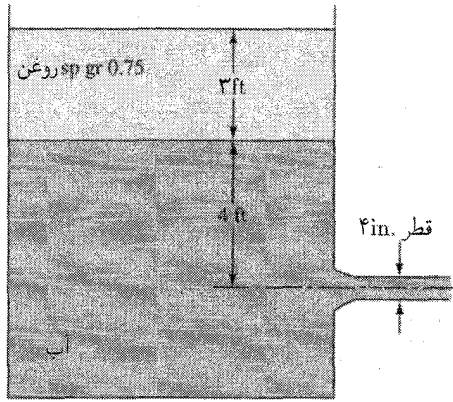


شکل ۴۴.۳ مسائل ۱۶.۳، ۳۲.۳ و ۳۳.۳

۱۷.۳ با صرف نظر از تمام اتلافها، در شکل ۴۳.۳ کانال بعد از سرازیری در مقطع B به عرض 6ft می‌رسد. برای شارش یکنواخت در مقطع B ، دو عمق ممکن شارش را تعیین کنید.

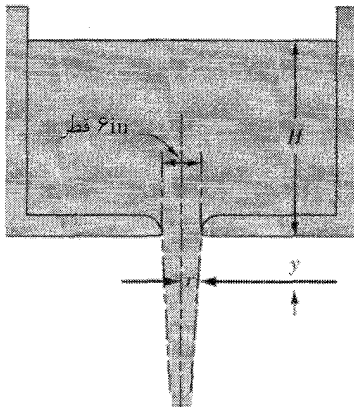
۱۸.۳ قبلاً در بعضی از لوکوموتیوهای بخاری ملاقه‌هایی نصب بود که آب را از مخزنی بین دو ریل می‌گرفتند و آن را بالا می‌بردند و به مخزن آب در عقب لوکوموتیو می‌بردند. برای 4m بالا بردن آب با ملاقه، با صرف نظر از تمام اتلافها، چه سرعتی لازم است؟ تذکر: لوکوموتیو را ساکن بگیرید و فرض کنید آب به طرف آن حرکت می‌کند، تا مسئله حالت پایا شود.

۱۹.۳ با صرف نظر از اتلافها، تخلیه را در شکل ۴۵.۳ پیدا کنید.



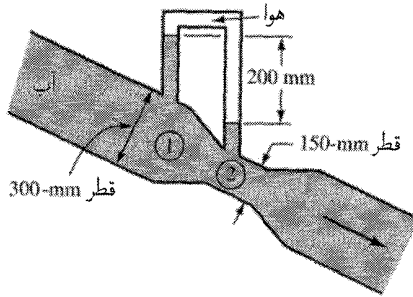
شکل ۴۵.۳ مسئله ۱۹.۳.

۲۰.۳ با صرف نظر از اتلافها و آثار پسا سطحی، معادله‌ای برای سطح آب z جت شکل ۴۶.۳ بر حسب y/H به دست آورید.



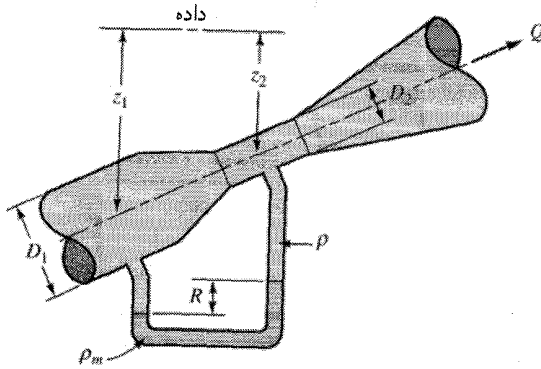
شکل ۴۶.۳ مسئله ۲۰.۳.

۲۱.۳ با صرف نظر از اتلافها، تخلیه را از سنجۀ ونتوری در شکل ۴۷.۳ پیدا کنید.



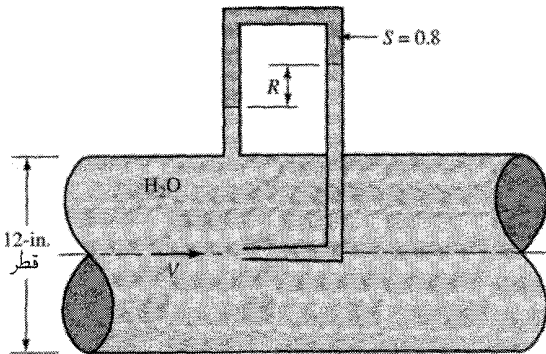
شکل ۴۷.۳ مسائل ۲۱.۳ و ۵۰.۳.

۲۲.۳ برای سنجۀ ونتوری و فشارسنج در شکل ۴۸.۳ عبارتی به دست آورید که آهنگ شارش حجمی را به خوانندۀ فشارسنج ارتباط دهد.



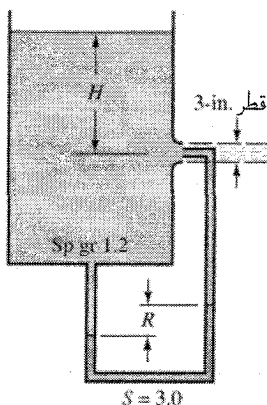
شکل ۴۸.۳ مسئله ۲۲.۳.

۲۳.۳ در شکل ۴۹.۳، مقدار V را برای $R = 12 \text{ in}$ تعیین کنید.



شکل ۴۹.۳ مسئله ۲۳.۳.

۲۴.۳ با صرف نظر از اتلافها، H را برحسب R برای شکل ۵۰.۳ محاسبه کنید.



شکل ۵۰.۳ مسائل ۲۴.۳ و ۵۲.۳

۲۵.۳ یک خط لوله از یک مخزن آب تا مخزن آب دیگری که سطح آب آن ۱۲m پایینتر است کشیده شده است. برای تخلیه $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$ ، اتلافها را برحسب متر نیوتن بر کیلوگرم و برحسب کیلووات تعیین کنید.

۲۶.۳ پمپی که بالای سطح یک استخر قرار دارد جتی از آب را به طور قائم به فاصله 50 ft رو به بالا پرتاب می‌کند. اگر با یک موتور الکتریکی 5 hp ، که در ظرفیت اسمی کار می‌کند، 50 cfs پمپ شود، بازده ترکیب موتور-پمپ چیست؟ وقتی نقطه اوج جت و سطح استخر مقایسه شوند، برگشت‌ناپذیری سیستم پمپ چقدر است؟ بعد از اینکه آب به سطح استخر سقوط کند، برگشت‌پذیری چقدر است؟

۲۷.۳ دمنده‌ای $2 \text{ m}^3/\text{s}$ هوا با $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ تحویل و فشار هوا را 150 mm آب افزایش می‌دهد. بازده آن ۷۲ درصد است. برگشت‌ناپذیری را برحسب متر نیوتن بر کیلوگرم و برحسب کیلووات تعیین کنید. اگر دمنده با 1800 rpm دوران کند، گشتاور در محور را تعیین کنید.

۲۸.۳ یک لوله فشار به قطر 6 m سرعت 3 m/s دارد. شارش بعد از عبور از یک خم کاهنده وارد لوله‌ای به قطر 5 m می‌شود. اگر اتلافها با مربع سرعت تغییر کنند، مقدار آنها در گذر از لوله 5 m چقدر بزرگتر از گذر از لوله 6 m در هر 1000 m لوله است؟

۲۹.۳ توزیع سرعت در شارش لایه‌ای در یک لوله عبارت است از

$$v = V_{\max} [1 - (r/r_0)^2]$$

سرعت متوسط و ضریب تصحیح انرژی جنبشی را پیدا کنید.
 ۳۰.۳ برای شارش بسیار متلاطم، توزیع سرعت در لوله از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/4}$$

که y فاصله از دیواره و r_0 شعاع لوله است. ضریب تصحیح انرژی را برای این شارش تعیین کنید.

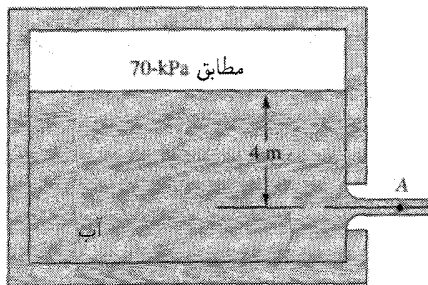
۳۱.۳ اگر اتلافها از مقطع A تا مقطع B در شکل ۴۳.۳ برابر با $1.9 \text{ ft} \cdot \text{lb} / \text{lb}$ باشند، دو عمق ممکن را در مقطع B تعیین کنید.

۳۲.۳ در شکل ۴۴.۳، بر اثر اتلافهای ناشی از شارش بین A و B ، دمای هر کیلوگرم آب به اندازه 6°C افزایش می یابد. عمق پایین شارش را در مقطع B تعیین کنید.

۳۳.۳ در شکل ۴۴.۳ عرض کانال از 2 m در مقطع A به 3 m در مقطع B تغییر می کند. برای اتلافهای $3 \text{ m} \cdot \text{N} / \text{N}$ بین مقاطع A و B ، دو عمق ممکن را در مقطع B پیدا کنید.

۳۴.۳ در نقطه A داخل خط لوله ای که آب حمل می کند، قطر 1 m ، فشار 98 kPa ، و سرعت $1 \text{ m} / \text{s}$ است. در نقطه B ، بالاتر از A ، قطر 0.5 m و فشار 20 kPa است. جهت شارش را تعیین کنید.

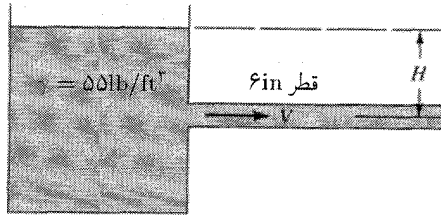
۳۵.۳ برای اتلافهای $1 \text{ m} \cdot \text{N} / \text{N}$ ، سرعت را در A در شکل ۵۱.۳ تعیین کنید. خوانده جوسنج 750 mm Hg است.



شکل ۵۱.۳ مسئله ۳۵.۳.

۳۶.۳ اتلافها در شکل ۵۲.۳ برای $H = 25 \text{ ft}$ مساوی $37^2 / 2 \text{ ft} \cdot \text{lb} / \text{lb}$ است. تخلیه چقدر

است؟

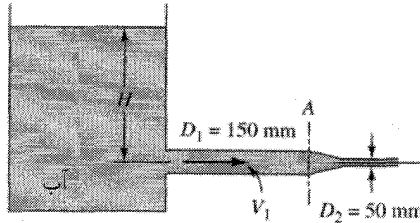


شکل ۵۲.۳ مسأله ۳۶.۳، ۳۷.۳ و ۳۸.۳

۳۷.۳ برای شارش 750 gpm در شکل ۵۲.۳، H را برای اتلافهای $10V^2/2g \text{ ft}\cdot\text{lb/lb}$ محاسبه کنید.

۳۸.۳ برای شارش 150 gpm و $H = 32 \text{ ft}$ در شکل ۵۲.۳ اتلافهای سیستم را برحسب ارتفاع سرعت، $KV^2/2g$ ، محاسبه کنید.

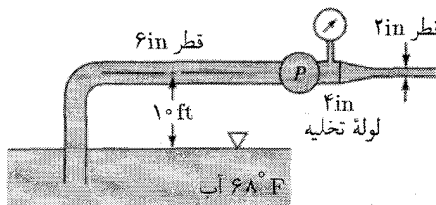
۳۹.۳ در شکل ۵۳.۳ اتلافها تا مقطع A مساوی $5V_1^2/2g$ و اتلافهای شیپوره مساوی $0.5V_2^2/2g$ است. تخلیه و فشار را در A پیدا کنید. $H = 8 \text{ m}$.



شکل ۵۳.۳ مسأله ۳۹.۳ و ۴۰.۳

۴۰.۳ برای فشار 25 kPa در شکل ۵۳.۳ با اتلافهای مسئله ۳۹.۳، تخلیه و ارتفاع H را تعیین کنید.

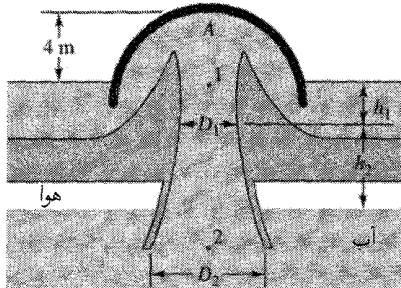
۴۱.۳ دستگاه پمپاژ شکل ۵۴.۳ وقتی حفره زایش و در ورودی پمپ آغاز شود باید فشار 5 psi را در خطوط لوله داشته باشد. طول لوله را از مخزن تا پمپ برای این شرایط به دست آورید. در صورتی که اتلاف در این لوله از رابطه $(0.3L/D)(V^2/2g)$ به دست آید، پمپ چه قدرتی



شکل ۵۴.۳ مسئله ۴۱.۳

به سیال می‌دهد؟ چند درصد از این توان صرف غلبه بر اتلاف می‌شود؟ جوسنج 30 in Hg نشان می‌دهد.

۴۲.۳ در سیفون شکل ۵۵.۳ داریم $h_1 = 1 \text{ m}$ ، $h_2 = 3 \text{ m}$ ، $D_1 = 3 \text{ m}$ ، $D_2 = 5 \text{ m}$ ، و اتلافها تا مقطع ۲ مساوی $2g \cdot 2.6V^2$ هستند، و 10% درصد اتلافها قبل از مقطع ۱ به وجود می‌آیند. تخلیه و فشار را در مقطع ۱ پیدا کنید.



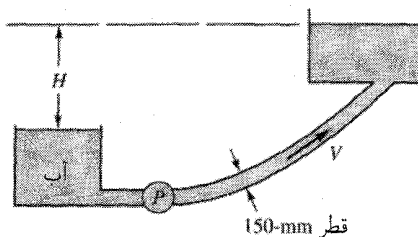
شکل ۵۵.۳ مسئله ۴۲.۳

۴۳.۳ مطلوب است فشار در نقطه A در مسئله ۴۲.۳ به شرطی که A نقطه سکون باشد (سرعت در آن صفر باشد).

۴۴.۳ سیفون شکل ۱۸.۳ شیپوره‌ای به طول 150 mm دارد که به مقطع ۳ متصل است، و قطر را به 150 mm کاهش می‌دهد. با نبود اتلافها، تخلیه و فشار را در مقاطع ۲ و ۳ محاسبه کنید.

۴۵.۳ در مسئله ۴۴.۳ با اتلافهای $1.17V^2/2g$ از ۱ تا ۲، و $0.97V^2/2g$ از ۲ تا ۳، و $0.6V^2/2g$ در شیپوره، که در آن سرعت خروجی است، تخلیه و فشار را در مقاطع ۲ و ۳ محاسبه کنید.

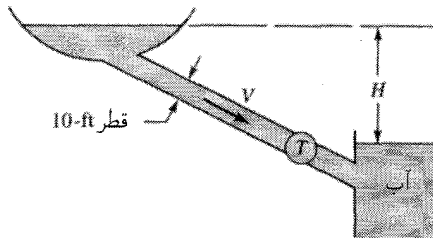
۴۶.۳ مطلوب است قدری محوری برای اینکه پمپی با بازده 80% درصد 30 L/s از طریق سیستم شکل ۵۶.۳ تخلیه کند. اتلافهای سیستم، به استثنای اتلافهای پمپ، $127^2/2g$ است. $H = 16 \text{ m}$



شکل ۵۶.۳ مسائل ۴۶.۳ و ۴۷.۳

۴۷.۳ توان حاصل سیال از پمپ شکل ۵۶.۳ مساوی $10 = \frac{Q \gamma H_p}{550}$ است. برای $H = 70 \text{ ft}$ و اتلافهای $8V^2/2g$ سیستم، تخلیه و هد آبدهی پمپ H_p را تعیین کنید. خط شیب انرژی را رسم کنید.

۴۸.۳ اگر بازده کلی سیستم و توربین در شکل ۵۷.۳ مساوی 80% باشد، توان حاصل برای $H = 200 \text{ ft}$ و $Q = 1000 \text{ cfs}$ چقدر است؟

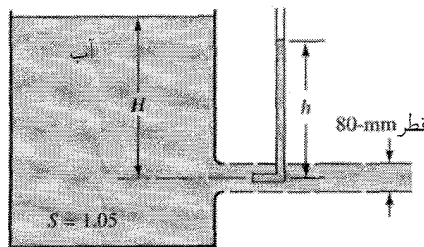


شکل ۵۷.۳ مسائل ۴۸.۳ و ۴۹.۳.

۴۹.۳ اتلافهای سیستم شکل ۵۷.۳، به استثنای توربین، $4V^2/2g$ است. بازده توربین 90% درصد است و با سرعت 240 rpm می‌چرخد. برای تولید 1000 hp در $H = 300 \text{ ft}$ ، تخلیه و گشتاور در محور توربین را تعیین کنید. خط شیب انرژی را رسم کنید.

۵۰.۳ برای اتلافهای $2V^2/2g$ بین مقاطع ۱ و ۲ در شکل ۴۷.۳، تخلیه را برحسب گالن در دقیقه محاسبه کنید.

۵۱.۳ در شکل ۵۸.۳، داریم $H = 6 \text{ m}$ و $h = 5.75 \text{ m}$. تخلیه و اتلافها را برحسب مترنیوتن بر نیوتن و برحسب وات محاسبه کنید.



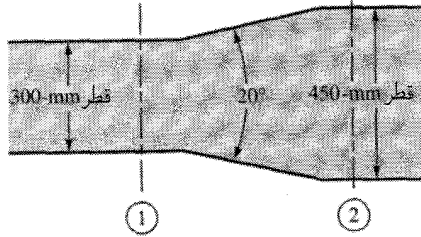
شکل ۵۸.۳ مسئله ۵۱.۳.

۵۲.۳ با اتلافهای H در شیپوره شکل ۵۰.۳، تفاضل پیمانه‌های R برحسب H چیست؟

۵۳.۳ مایعی داخل خط لوله طولی با اتلافهای N/N در هر 30 m لوله جریان دارد. شیب

خط درجه هیدرولیکی و خط درجه انرژی چقدر است؟

۵۴.۳ در شکل ۵۹.۳، 100 L/s آب از مقطع ۱ به مقطع ۲ با اتلافهای $\frac{1}{2}g(V_1 - V_2)^2$ در جریان دارد؛ $p_1 = 80 \text{ kPa}$ ، مطلوب است p_2 . خط درجه انرژی و خط شیب هیدرولیکی را در بخش کن رسم کنید.



شکل ۵۹.۳ مسئله ۵۴.۳.

۵۵.۳ در شارش برگشت پذیر تک دمایی در 200°F ، به 14 slug/s در یک حجم کنترل، 3 Btu/s گرما افزوده می شود. افزایش آنتروپی را محاسبه کنید.

۵۶.۳ در شارش تک دمایی یک سیال حقیقی در یک شبکه لوله ای، اتلافها 20 m.N/kg برای هر 100 m است، و در هر 100 m معادل 837 kJ/s گرما باید از سیال منتقل شود تا دما در 10°C بماند. برای شارش 4 kg/s تغییر آنتروپی Δs شبکه لوله برحسب متر نیوتن بر کیلوگرم بر کلین چقدر است؟

۵۷.۳ برای توزیع سرعت مسئله ۲۹.۳ ضریب تصحیح تکانه را تعیین کنید.

۵۸.۳ سرعت متوسط و ضریب تصحیح تکانه را برای توزیع سرعت در یک لوله به صورت

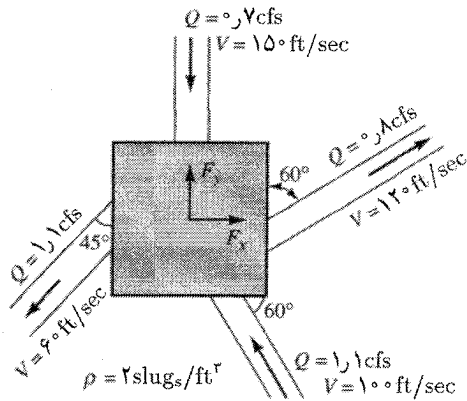
$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/n}$$

محاسبه کنید. y فاصله از دیواره و r_0 شعاع لوله است.

۵۹.۳ اگر گرانی در جهت منفی z اثر کند، مؤلفه z نیروی مؤثر بر سیال داخل مکعب مسئله ۵.۳ را برای سرعت مشخص شده در آن پیدا کنید.

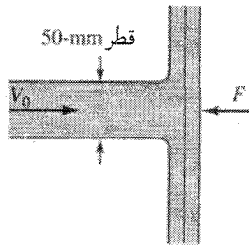
۶۰.۳ مؤلفه y نیروی مؤثر بر حجم کنترل مسئله ۶.۳ را برای سرعت داده شده در آن پیدا کنید. فرض کنید گرانی در جهت منفی y اثر می کند.

۶۱.۳ مؤلفه های نیروی F_x و F_y لازم برای ساکن ماندن جعبه سیال شکل ۶۰.۳ چقدرند؟ تمام فشارها صفر پیمانه ای اند.



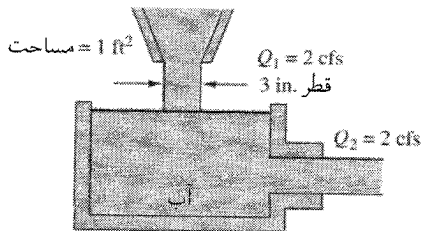
شکل ۶۰.۳ مسئله ۶۱.۳.

۶۲.۳ نیروی F (شکل ۶۱.۳) لازم برای نگه‌داشتن صفحه در شارش روغن، $S = 0.83$ ، در $V_0 = 20 \text{ m/s}$ چقدر است؟



شکل ۶۱.۳ مسئله ۶۲.۳.

۶۳.۳ نیروی گرانی ظاهری مخزن پر از آب (شکل ۶۲.۳) چقدر بر اثر شارش پایای جت به داخل مخزن افزایش می‌یابد؟



شکل ۶۲.۳ مسائل ۶۳.۳ و ۱۱۰.۳.

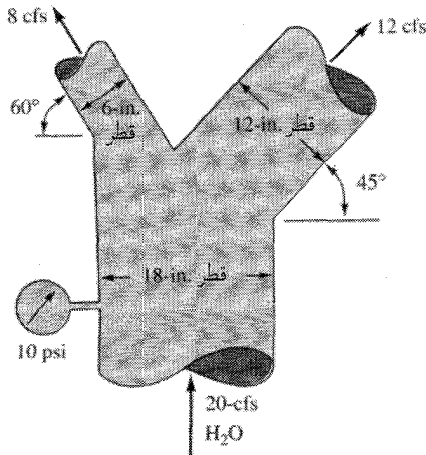
۶۴.۳ شیپوره لوله آتش‌نشانی لوله را تحت پسا قرار می‌دهد یا تحت فشار؟

۶۵.۳ اگر جت خروجی یک شیوره برای کمک به مانور یک قایق آتش نشانی به کار رود، آیا با هدایت جت به یک سطح جامد، مانند اسکله، می‌توان نیروی بیش از نیروی ناشی از تخلیه جت به داخل هوا به دست آورد؟

۶۶.۳ مثال ۱۲.۳ را با جهت معکوس شارش حل کنید و نتایج را با هم مقایسه کنید.
 ۶۷.۳ در خم کاهنده شکل ۲۲.۳، داریم $D_1 = 4\text{ m}$ ، $D_2 = 3\text{ m}$ ، $\theta = 135^\circ$ ، $Q = 50\text{ m}^3/\text{s}$ ، $z = 2\text{ m}$ ، $W = 3922\text{ kN}$ مؤلفه‌های نیرو و خط حامل نیروی را که از طرف قطعه مهار شده در برابر آن مقاومت می‌شود پیدا کرد.
 ۶۸.۳ در خط لوله‌ای به قطر 50 cm که شامل یک خم افقی 90° است، جریان 600 L/s وجود دارد. در ورود به هم، فشار 140 kPa است. مطلوب است مؤلفه‌های نیروی موازی و عمود بر سرعت نزدیکی برای نگه داشتن خم در محل. از اتلافها صرف نظر کنید.

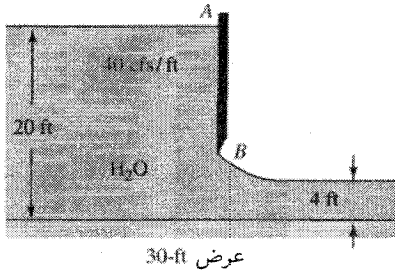
۶۹.۳ در خم 90° یک لوله که از قطر 400 mm به قطر 600 mm منبسط می‌شود، روغن با $S = 0.83$ جریان دارد. در ورود به خم، فشار مساوی 13 kPa است، و از اتلافها صرف نظر می‌شود. برای $6\text{ m}^3/\text{s}$ ، مؤلفه‌های نیرو (موازی و عمود بر سرعت نزدیکی) برای نگه داری خم را تعیین کنید.
 ۷۰.۳ مسئله ۶۹.۳ را با اتلافهای $6V_1^2/2g$ زانویی، و با سرعت نزدیکی V_1 حل کنید و نتایج را مقایسه کنید.

۷۱.۳ یک خط بخار به قطر 100 mm بخار اشباع را در سرعت 425 m/s حمل می‌کند. آب با آهنگ 1 kg/s همراه بخار است. بر اثر آب همراه، چه نیرویی لازم است تا خم 90° در محل نگه داشته شود؟
 ۷۲.۳ با صرف نظر از اتلافها، مطلوب است مؤلفه‌های x و y نیرویی که برای نگه داشتن Y (شکل ۶۳.۳) در محل لازم است. صفحه Y افقی است.



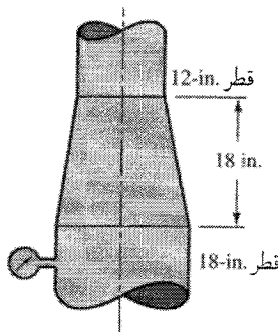
شکل ۶۳.۳ مسئله ۷۲.۳.

۷۳.۳ نیروی خالص وارد بر دریچه‌ی سد را در شکل ۶۴.۳ تعیین کنید. از اتلافها صرف‌نظر کنید. با توجه به اینکه فشار در A و B اتمسفریک است، توزیع فشار را بر سطح AB رسم کنید. آیا این توزیع هیدروستاتیکی است؟ رابطه‌ی آن با نیروی محاسبه‌شده چگونه است؟



شکل ۶۴.۳ مسئله ۷۳.۳.

۷۴.۳ مقطع کاهنده‌ی عمودی در شکل ۶۵.۳ حاوی روغن با $\rho = 86$ است که رو به بالا با آهنگ $6 \text{ m}^3/\text{s}$ جریان دارد. فشار در مقطع بزرگتر 20 kPa است. با صرف‌نظر از اتلافها، اما با در نظر گرفتن گرانی، نیروی وارد به قسمت منقبض‌شونده را تعیین کنید.



شکل ۶۵.۳ مسئله ۷۴.۳.

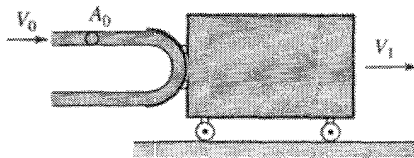
۷۵.۳ معادله‌ی تکانه و معادله‌ی انرژی را برای یک آسیای بادی به کار ببرید و آن را پیشران در نظر بگیرید. برای این کار توجه کنید جریان لغزشی به هنگام عبور از تیغه‌ها آهسته و منبسط می‌شود. نشان دهید که سرعت در صفحه‌ی تیغه‌ها عبارت است از متوسط سرعتها در جریان لغزشی مقطع فرودست و مقطع فرادست. با تعریف بازده نظری (صرف‌نظر از تمام اتلافها) به صورت توان خروجی تقسیم بر توان دسترسی‌پذیر در جت آشفته‌نشده‌ای که سطح آن در صفحه‌ی تیغه‌هاست، ماکزیمم بازده نظری یک آسیای بادی را به دست آورید.

۷۶.۳ هواپیمایی با پیشرانی به قطر ۸ft در هوای آرام ($\rho = 0.0022 \text{ slug/ft}^3$) با سرعت 200 mi/h حرکت می‌کند. سرعت هوا در صفحه پیشران نسبت به هواپیمای مساوی 280 mi/h است. (مطلوب است الف) پیشرانۀ وارد به هواپیمای؛ ب) انرژی جنبشی باقیمانده در جریان لغزشی در ثانیه؛ ج) توان نظری لازم برای راندن پیشران؛ د) بازده پیشران؛ و ه) اختلاف فشار در عرض تیغه‌ها.

۷۷.۳ قایقی که با سرعت 40 km/h حرکت می‌کند پیشرانی به قطر 50 mm دارد که با تیغه‌هایش $45 \text{ m}^3/\text{s}$ تخلیه می‌کند. نیروی پیشران وارد به قایق، بازده نظری سیستم پیشران، و توان ورودی به پیشران را تعیین کنید.

۷۸.۳ پیشران یک کشتی 60 درصد بازده نظری دارد. اگر قطر پیشران 3.2 ft باشد و کشتی با سرعت 20 mi/h حرکت کند، نیروی پیشران حاصل و توان نظری لازم چقدر است؟

۷۹.۳ در شکل ۶۶.۳ یک جت با $\rho = 2 \text{ slug/ft}^3$ به توسط یک پره به اندازه 18° منحرف می‌شود. فرض کنید گاری بدون اصطکاک و برای حرکت در جهت افقی آزاد است. وزن گاری 200 lb است. مطلوب است سرعت و مسافتی که گاری 1 s بعد از هدایت جت به پره طی می‌کند. $V_0 = 100 \text{ ft/s}$; $A_0 = 0.2 \text{ ft}^2$.



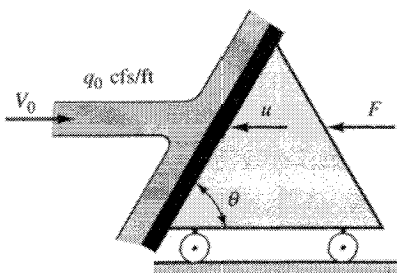
شکل ۶۶.۳ مسائل ۷۹.۳ و ۱۱۸.۳

۸۰.۳ نمودار برداری قطبی یک پره را با زاویه θ که روی یک جت کار انجام می‌دهد رسم کنید. تمام بردارها را مشخص کنید.

۸۱.۳ نیروی برآیند وارد به پره در شکل ۲۶.۳ را تعیین کنید. $A_0 = 0.1 \text{ ft}^2$; $V_0 = 100 \text{ ft/s}$ ؛ و $\theta = 60^\circ$ و $\gamma = 60 \text{ lb/ft}^3$. خط حامل را چگونه می‌توان تعیین کرد؟

۸۲.۳ در شکل ۲۷.۳، 45 درصد شارش در یک جهت منحرف می‌شود. زاویه θ صفحه چیست؟

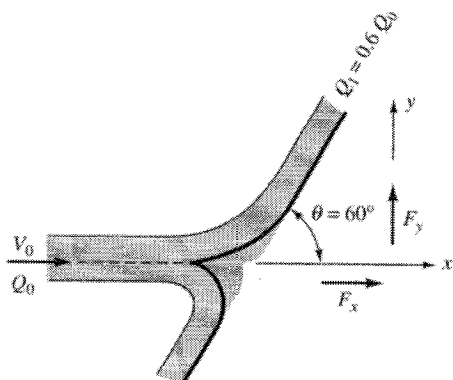
۸۳.۳ همان‌طور که در شکل ۶۷.۳ نشان داده شده است یک صفحه صاف در داخل یک جت با سرعت u حرکت می‌کند. برای قدرتی که برای حرکت صفحه لازم است عبارتی استخراج کنید.



شکل ۶۷.۳ مسائل ۸۳.۳ و ۸۴.۳

۸۴.۳ گازی شکل ۶۷.۳ با چه سرعت u باید از جت دور شود تا از طرف جت توان ماکزیمم به وجود آید؟

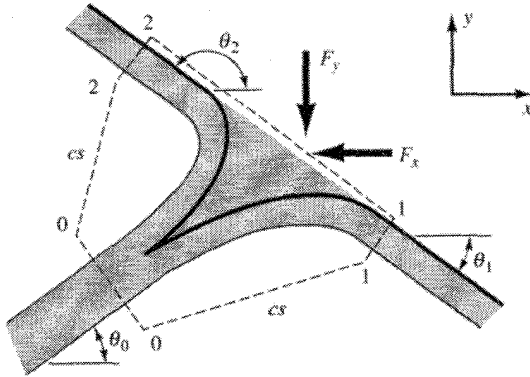
۸۵.۳ مؤلفه‌های نیروی F_x و F_y لازم را برای ساکن داشتن پره شکل ۶۸.۳ محاسبه کنید.
 $V_0 = 120 \text{ m/s}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $Q_0 = 80 \text{ L/s}$



شکل ۶۸.۳ مسائل ۸۵.۳ و ۸۶.۳

۸۶.۳ اگر پره شکل ۶۸.۳ با سرعت $u = 40 \text{ ft/s}$ در جهت x حرکت کند، برای $Q_0 = 2 \text{ ft}^3/\text{s}$ ، $\rho = 1.935 \text{ slug/ft}^3$ و $V_0 = 120 \text{ ft/s}$ ، مؤلفه‌های F_x و F_y چیستند؟

۸۷.۳ برای تقسیم شارش در شکل ۶۹.۳ مؤلفه‌های نیرو را برای شرایط زیر پیدا کنید:
 $V_0 = 10 \text{ m/s}$ ، $\theta_2 = 120^\circ$ ، $\theta_1 = 30^\circ$ ، $\theta_0 = 45^\circ$ ، $Q_1 = 3 \text{ L/s}$ ، $Q_0 = 10 \text{ L/s}$ و $\rho = 830 \text{ kg/m}^3$.



شکل ۶۹.۳ مسئله ۸۷.۳.

۸۸.۳ مسئله قبل را با روش جمع برداری به طریق ترسیمی حل کنید.

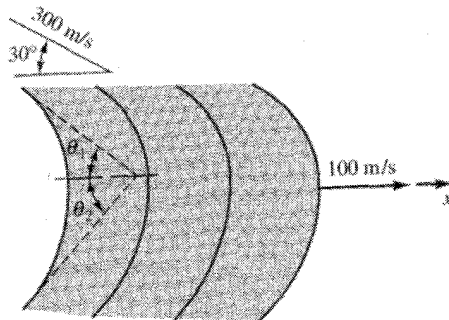
۸۹.۳ پره شکل ۲۸.۳ با چه سرعت u باید حرکت کند تا توان ماکزیمم از جت به دست آید؟ زاویه θ برای توان ماکزیمم چه باید باشد؟

۹۰.۳ برای پره متحرک شکل ۲۸.۳ نمودار برداری قطبی را در $V_0 = 30 \text{ m/s}$ ، $u = 20 \text{ m/s}$ و $\theta = 160^\circ$ رسم کنید.

۹۱.۳ برای پره متحرک شکل ۲۸.۳ نمودار برداری قطبی را در $V_0 = 40 \text{ m/s}$ ، $u = -20 \text{ m/s}$ و $\theta = 150^\circ$ رسم کنید.

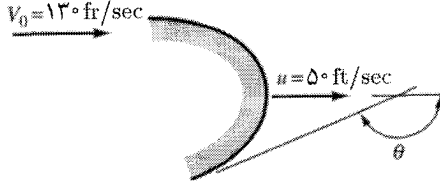
۹۲.۳ چه توانی می توان به دست آورد از الف) یک پره و ب) یک مجموعه از پره ها (شکل ۲۸.۳) در صورتی که $A_0 = 10 \text{ in}^2$ ، $V_0 = 240 \text{ ft/s}$ ، $u = 90 \text{ ft/s}$ و $Q = 173^\circ$ ، و آب جریان داشته باشد؟

۹۳.۳ مطلوب است زوایای θ_1 و θ_2 تیغه شکل ۷۰.۳ به طوری که شارش مماس بر لبه بالارونده



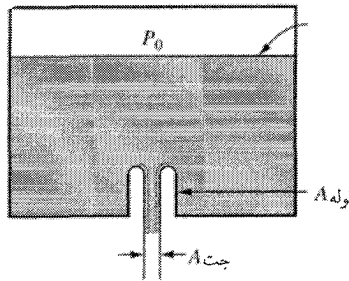
شکل ۷۰.۳ مسئله ۹۳.۳.

پره وارد شود و بدون مؤلفه x سرعت مطلق خارج شود.
 ۹۴.۳ مطلوب است زاویه لازم پره برای اینکه سرعت مطلق یک جت را به اندازه 13° منحرف کند (شکل ۷۱.۳).



شکل ۷۱.۳ مسئله ۹۴.۳

۹۵.۳ در مسئله ۱۸.۳ برای برداشت 40 L/s آب در سرعت 60 km/h لوکوموتیو، چه نیرویی به موازات ریلها اعمال می‌شود؟
 ۹۶.۳ شکل ۷۲.۳ روزنه‌ای موسوم به "دهانه بردا" را نشان می‌دهد. لوله آنقدر طویل است که سرعت سیال در نزدیکی کف تانک نزدیک به صفر می‌شود. نسبت به مساحت جت را به مساحت لوله حساب کنید.



$$A = \text{مساحت} \gg A_{\text{جت}}$$

شکل ۷۲.۳ مسئله ۹۶.۳

۹۷.۳ برای شارش $5 \text{ ft}^3/\text{s}$ مایع با $\rho = 1.6 \text{ slug/ft}^3$ در لوله‌ای که قطر آن از 1.2 in به طور ناگهانی به 2.4 in منبسط می‌شود، برگشت‌ناپذیری را برحسب متر نیوتن در هر کیلوگرم تعیین کنید.
 $g = 30 \text{ ft/s}^2$

۹۸.۳ هوا در کانالی به قطر 65 mm در $p = 7 \text{ kPa}$ ، $t = 1^\circ \text{C}$ و $V = 6 \text{ m/s}$ جریان دارد. کانال به طور ناگهانی تا قطر 80 mm منبسط می‌شود. به فرض تراکم‌ناپذیری گاز، اتلافهای هوا را برحسب متر نیوتن، و اختلاف فشار را برحسب سانتیمتر آب محاسبه کنید.

۹۹.۳ وقتی از لوله‌ای به قطر 1.5 m که در مخزنی غوطه‌ور است $4 \text{ m}^3/\text{s}$ آب تخلیه شود، اتلافها چقدرند؟

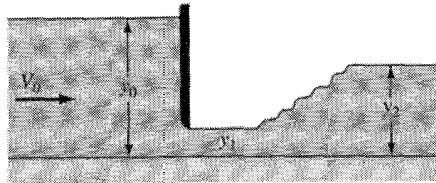
۱۰۰.۳ نشان دهید که در حالت حد وقتی در معادله (۱۱.۷.۳) داریم $y_1 = y_2$ ، رابطه $V = \sqrt{gy}$ به دست می‌آید.

۱۰۱.۳ در کانالی به عرض ۶m که $15 \text{ m}^3/\text{s}$ آب حمل می‌کند، در عمق ۳۰۰mm پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد. V_2 ، y_2 و اتلافها را برحسب متر نیوتن و برحسب کیلووات تعیین کنید.

۱۰۲.۳ برای پرش هیدرولیکی در کانالی که مقطع آن مثلث متساوی‌الاضلاع (مقارن نسبت به قائم) است عبارتی استنتاج کنید.

۱۰۳.۳ معادله (۱۲.۷.۳) را استنتاج کنید.

۱۰۴.۳ با فرض عدم افت در دریچه شکل ۷۳.۳ و با صرف نظر از $V_0^2/2g$ برای $y_0 = 2 \text{ ft}$ و $y_1 = 2 \text{ ft}$ مقدار y_2 و اتلافها را در پرورش هیدرولیکی پیدا کنید. مبنای صرف نظر کردن از $V_0^2/2g$ چیست؟

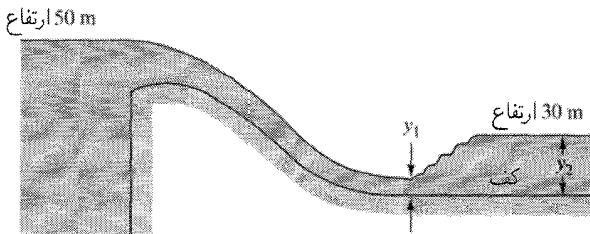


شکل ۷۳.۳ مسئله ۱۰۴.۳ تا ۱۰۶.۳.

۱۰۵.۳ در مفروضاتی یکسان با مفروضات مسئله ۱۰۴.۳، برای $y_1 = 400 \text{ mm}$ و $y_2 = 2 \text{ m}$ مقدار y_0 را تعیین کنید.

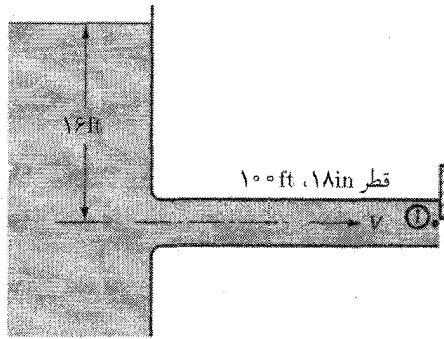
۱۰۶.۳ در مفروضاتی یکسان با مفروضات مسئله ۱۰۴.۳ با $y_0 = 2 \text{ ft}$ و $y_2 = 8 \text{ ft}$ ، تخلیه بر فوت را پیدا کنید.

۱۰۷.۳ برای اتلافهای 2 m.N/N در سراسیب آبریز شکل ۷۴.۳ و تخلیه $10 \text{ m}^3/\text{s}$ بر متر، مطلوب است ارتفاع کف برای اینکه پرش هیدرولیکی رخ دهد.



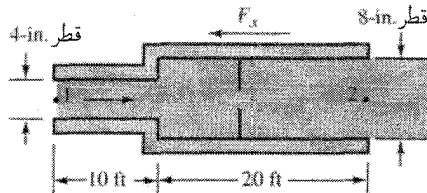
شکل ۷۴.۳ مسئله ۱۰۷.۳.

۱۰۸.۳ در لوله شکل ۷۵.۳ آب با سرعت $V = 8.2 \text{ ft/s}$ جریان دارد. اتلافها تا مقطع ۱ برابر 10 ft.lb/lb است. وقتی مانع در انتهای لوله برداشته شود، شتاب آب در لوله را محاسبه کنید.



شکل ۷۵.۳ مسئله ۱۰۸.۳.

۱۰۹.۳ شبکه لوله‌کشی در شکل ۷۶.۳ پر از آب می‌شود. در یک لحظه $p_1 = 10 \text{ psi}$ ، $p_2 = 0$ ، $V_1 = 10 \text{ ft/s}$ ، و آهنگ شارش به اندازه 3000 gpm/min افزایش می‌یابد. مطلوب است نیروی F_x لازم برای ساکن نگه داشتن سیستم لوله‌کشی.



شکل ۷۶.۳ مسئله ۱۰۹.۳.

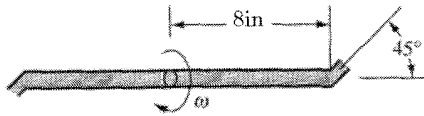
۱۱۰.۳ اگر Q_2 در شکل ۶۲.۳ مساوی 1 cfs باشد، نیروی قائم برای نگهداری مخزن چقدر است؟ فرض کنید سرریز رخ نداده است. نیروی گرانی تانک 20 lb ، و عمق آب 1 ft است.

۱۱۱.۳ در شکل ۳۷.۳ ب برای گردای پمپ مرکز گریز که $2 \text{ m}^3/\text{s}$ آب تخلیه می‌کند، $r_2 = 160 \text{ mm}$ ، $r_1 = 120 \text{ mm}$ ، $v_{t1} = 0$ و $v_{t2} = 3 \text{ m/s}$. چه گشتاوری برگردا اعمال می‌شود؟

۱۱۲.۳ در یک پمپ مرکز گریز، 25 L/s آب، گردا را که 200 mm قطر دارد با مؤلفه مماسی سرعت 10 m/s ترک می‌کند. آب در جهت شعاعی وارد گردا می‌شود. برای سرعت 1200 rpm پمپ، و با صرف نظر از تمام اتلافها، گشتاور وارد به محور پمپ، توان ورودی، و انرژی افزوده شده به شارش را برحسب متر نیوتن بر نیوتن تعیین کنید.

۱۱۳.۳ یک توربین آبی در 240 rpm ، معادل $40 \text{ m}^3/\text{s}$ تخلیه می‌کند. برای تولید 42 MW ، مؤلفه مماسی سرعت در ورود به گردا با $r = 16 \text{ m}$ چقدر باید باشد؟ وقتی آب توربین را ترک می‌کند، تمام چرخش آن گرفته می‌شود. از تمام اتلافها صرف‌نظر کنید. ارتفاع لازم برای توربین چقدر است؟

۱۱۴.۳ آبفشان متقارن شکل 77.3 تخلیه کلی 14 gpm دارد و بی‌اصطکاک است. اگر قطر نوک شیپوره‌ها 1 in باشد، rpm آبفشان را به دست آورید.



شکل ۷۷.۳ مسائل ۱۱۴.۳ تا ۱۱۷.۳.

۱۱۵.۳ چه گشتاوری لازم است تا آبفشان مسئله ۱۱۴.۳ را ساکن نگه دارد؟ شارش کلی آب 2 L/s است.

۱۱۶.۳ اگر در محور مسئله ۱۱۴.۳ گشتاور مقاوم $5 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ باشد، سرعت دوران آن چقدر است؟
 ۱۱۷.۳ برای گشتاور مقاوم 1 W در محور، سرعت دوران آن آبفشان مسئله ۱۱۴.۳ را تعیین کنید.

۱۱۸.۳ در مسئله ۷۹.۳، اگر مقاومت در برابر گاری از رابطه 57 lb به دست آید، سرعت و مسافت را پس از 6 s بیابید. از حل رانگ-کوتا (مرتبه دوم) با $H = \frac{1}{6} \text{ s}$ استفاده کنید.

۱۱۹.۳ رسانش گرمای بتن خشک 68°F برابر با $128 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ است. مقدار رسانش گرمایی آن بر حسب $^\circ \text{C}$ و W/cm بر حسب $^\circ \text{F}$ و $\text{Btu/h}\cdot\text{ft}$ چقدر است؟

۱۲۰.۳ رسانش گرمای فایبرگلاس 20°C برابر با $202 \text{ Btu/h}\cdot\text{ft}$ است. مقدار رسانش گرمای آن بر حسب وات بر سانتیمتر بر درجه سانتیگراد چقدر است؟

۱۲۱.۳ اختلاف دمای بین سطح داخلی و خارجی یک دیواره بتنی 25°C است. اگر دیواره به ضخامت 1 in و رسانش گرمای آن $98 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ باشد، اتلاف گرما از مساحت واحد دیواره چقدر است؟

۱۲۲.۳ اگر رسانش گرمایی یک مایع تابعی خطی از دما باشد، عبارت توزیع دمای پایای یک بعدی را به صورت تابعی از آهنگ انتقال گرمای q_H ، مساحت مقطع عرضی A ، و فاصله x بیابید.

۱۲۳.۳ آب 95.3°F با آب 43.4°F مخلوط می‌شود. جرم آب حاصل 10 kg و با دمای 65°F است. جرم آب 95.3°F چقدر است؟

۱۲۴.۳ ضریب تبدیل بین 1 cal و 1 Btu را بیابید.

۱۲۵.۳ یک قطعه پلاتین (Pt) با دمای اولیه T_{Pt} در یک ظرف جیوه با دمای T_{Hg} غوطه‌ور است. Pt با همین جرم در ظرف دیگری با مقدار جیوه در برابر و با دمای T'_{Hg} غوطه‌ور است. اگر دماهای نهایی پلاتین، به ترتیب، T_{Pt1} و T'_{Pt2} باشد، دمای اولیه پلاتین، T'_{Pt} ، در آزمایش دوم چقدر است؟

۱۲۶.۳ سه ظرف، به ترتیب، حاوی آب با جرم m_1 ، آب با جرم m_2 ، و گلیسیرین با جرم m_3 موجود است. به هر سه ظرف مقدار گرمای یکسان Q داده می‌شود. اگر افزایش دما در سه ظرف، به ترتیب، ΔT_1 ، ΔT_2 و ΔT_3 باشد، گرمای ویژه گلیسیرین را بیابید.

۱۲۷.۳ آب با آهنگ ثابت 685 L/min در یک مبادله‌کن گرما جریان دارد. دمای آب در ورودی 58°C است، و دمای آب خروجی 14°C است. مقدار دفع گرما در مبادله‌کن گرما در ثانیه چقدر است؟

۱۲۸.۳ یک قطعه فولاد زنگ‌نزن به جرم 95 kg و دمای 65°C در یک مبادله‌کن گرما، که شامل 4 kg آب با دمای 15°C است، انداخته می‌شود. اگر گرمای ویژه فولاد زنگ‌نزن $460 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ باشد، دمای نهایی آن چقدر است؟

۱۲۹.۳ دو ظرف، به ترتیب، حاوی آب 20°C و 92°C است. چقدر آب باید از هر ظرف خارج شود تا مخلوط آب باقیمانده به حجم 362 L و با دمای 30°C باشد؟

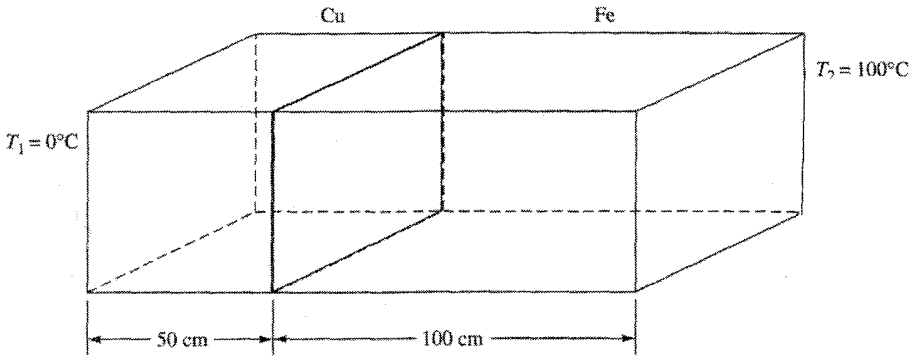
۱۳۰.۳ یک مبادله‌کن گرمای مسی به جرم 325 g شامل 4 kg روغن با دمای اولیه 20°C است. یک قطعه فولاد کرم به جرم 100 g و دمای 85°C در مخزن غوطه‌ور است. گرمای ویژه Cu برابر با $410 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ و گرمای ویژه فولاد کرم $460 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ است. اگر دمای نهایی در مبادله‌کن 28°C باشد، گرمای ویژه روغن چقدر است؟

۱۳۱.۳ در داخل گلیسیرین 15°C یک قطعه روی (Zn) 85°C انداخته می‌شود. جرم کل گلیسیرین و روی 4 kg است و دمای تعادل 22°C است. اگر دمای ویژه گلیسیرین $2428 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ و گرمای ویژه روی $94 \text{ Btu/lb}_m\cdot^\circ\text{F}$ باشد، جرم گلیسیرین و روی را بیابید.

۱۳۲.۳ دمای آب داخل یک ظرف در 200 s از 70°C به 60°C می‌رسد. چقدر طول می‌کشد تا دما از 59°C به 55°C کاهش یابد؟

۱۳۳.۳ دماسنجی که در ابتدا 82°C را می‌خواند و از ماده‌ای با گرمای ویژه $2 \text{ Btu/lb}_m\cdot^\circ\text{F}$ در سیال یک مبادله‌کن گرما با دمای 23°C و گرمای ویژه $98 \text{ Btu/lb}_m\cdot^\circ\text{F}$ غوطه‌ور می‌شود. اگر دماسنج به جرم 75 g و جرم سیال داخل مبادله‌کن 65 kg باشد، خوانده دماسنج را در دمای تعادل بیابید.

۱۳۴.۳ یک میله مسی (Cu) و یک میله آهنی (Fe) مطابق شکل ۷۸.۳ با هم تماس دارند. در انتهای سیستم، به ترتیب، در دماهای تماس $T_1 = 0^\circ\text{C}$ و $T_2 = 100^\circ\text{C}$ قرار دارند. مساحت



شکل ۷۸.۳ مسئله ۱۳۴.۳.

مقطع عرضی سیستم ۱۵cm^2 است و رسانشهای گرمایی عبارت اند از: $k_{\text{Cu}} = ۲۵۰۳۲\text{W/m.K}$ و $k_{\text{Fe}} = ۵۲\text{W/m.K}$. شار گرمایی سیستم چقدر است؟ شارش گرما در چه جهتی است؟

۱۳۵.۳ بازده دفع مخزنی واکنشگر ۷۳ درصد است و زمان سکون آن ۲۸٫۵s است. در شارش پایا و سینتیک مرتبه اول، ضریب آهنگ واکنش (k) مخزن را بیابید.

۱۳۶.۳ عملکرد مؤثر یک دستگاه فاضلاب ایجاب می‌کند که در طبقه اول فاضلاب از n واکنشگر سری با اندازه مساوی، و کاملاً مخلوط شونده عبور کند. اگر غلظت ذرات معلق در ورودی C_0 و آهنگ شارش در سیستم Q باشد، غلظت ذرات معلق در خروجی را بیابید.

۱۳۷.۳ در مخزن واکنشگری می‌دانیم که غلظت پایا در خروجی ۲۲mg/L است. اگر غلظت در ورودی ۱۰۰mg/L باشد، غلظت در خروجی را ۲٫۵ دقیقه پس از شروع فرایند بیابید. زمان سکون در واکنشگر ۸ دقیقه است.

۱۳۸.۳ در مسئله ۱۳۷.۳ حجم مخزن ۲۵m^3 است. آهنگ شارش در ورودی و زمان لازم برای برقراری حالت پایا را بیابید.

۱۳۹.۳ یک مخلوط گازی از عناصر A و B در یک لوله جریان دارند. غلظت دو عنصر، به ترتیب، C_A و C_B است، در حالی که سرعت متوسط برای کل سیال u_M است. شار کل همرفتی، N_A ، را برای عنصر A در مخلوط گاز به صورت تابعی از C_A ، C ، N_B بیابید؛ C غلظت کل است.

۱۴۰.۳ یک مخلوط گازی از عناصر A و B در یک لوله قرار گرفته است. در دو مقطع (۱) و (۲) فشارهای جزئی عنصر A ، به ترتیب، p_1 و p_2 است. عبارت شار پخش J_A را به صورت تابعی از p_1 و p_2 بیابید (شرایط را پایدار بگیرد).

۱۴۱.۳ داده‌های زیر مربوط به مخزن واکنشی کاملاً مخلوط‌شونده است

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
$C_2(\text{mg/L})$	۸,۵۰	۷,۲۰	۶,۵۰	۴,۹۵	۳,۷۸	۲,۵۰	۱,۳۲
$dC_2/dt(\text{mg/L/hr})$	۱,۹۰	۲,۶۰	۳,۷۵	۴,۱۰	۵,۰۰	۷,۰۰	۷,۴۴

که در آن C_2 غلظت در خروجی است. غلظت در ورودی 23 mg/L است. زمان سکون t_R و ضریب آهنگ واکنش، k ، را تخمین بزنید.

۱۴۲.۳ در مسئله ۱۴۱.۳ اگر شرایط پایا در بازه ۴۵ درصد برقرار شود، زمان لازم برای برقراری حالت پایا چقدر است؟

مراجع

1. V. L. Streeter, "The Kinetic Energy and Momentum Correction Factors for Pipes and Open Channels of Great Widths," *Civ. Eng.*, N.Y., vol. 12, no. 4, pp. 212-213, 1942.

مراجع برای مطالعه بیشتر

Bird, R., Stewart, W., and Lightfoot, E.: *Transport Phenomena*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

Brodkey, R. and Hershey, H.: *Transport Phenomena: A Unified Approach*, McGraw Hill Co., New York, 1988.

Eckart, E. and Drake, R.: *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw Hill Co., New York, 1972.

Kreyszig, E.: *Advanced Engineering Mathematics*, 7th ed., Wiley, New York, 1993.

Shames, I.: *Mechanics of Fluids*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

معادله‌های دیفرانسیلی بنیادی

روش حجم کنترلی در فصل ۳ روشی کارآمد است که انجمن علوم و مهندسی در محاسبات دقیق از آن استفاده می‌کند. بسیاری از سیستم‌های لوله‌کشی که در تأمین آب و جمع‌آوری فاضلاب استفاده می‌شوند با این مفهوم طراحی می‌شوند، و طرح‌های اولیه یا مطالعات انجام‌شده برای بیشتر پروژه‌های دیگر از این روش استفاده می‌کنند. ولی انجمن علوم و مهندسی به‌طور فزاینده‌ای خواهان اطلاعات درباره تغییرات نقطه به نقطه سرعت، ارتفاع، دما، یا مواد محلول است. در این نوع تحلیل، دیگر از روش حجم کنترل به‌طور انحصاری استفاده نمی‌شود.

برای توصیف نقطه به نقطه باید از قوانین پایستاری جرم، تکانه و انرژی، که در تحلیل حجم کنترل به کار می‌روند، و همچنین از روش اویلری یا روش نقطه ثابت استفاده کرد، اما سطح دشواری ریاضیات در اینجا بالا می‌رود. دوانتخاب وجود دارد. اولی مکانیک سیالات محاسباتی و روش انتقال است که در آن در نظر گرفته می‌شود که حجم کنترل یا سیستم اولیه از تعداد بسیاری حجم‌های کنترل کوچک تشکیل شده است. شارهای متغیرهای وابسته مربوط، با پیروی از قوانین مکانیک، از بین این حجم‌های کنترل عبور می‌کنند، و یک روش محاسباتی رقمی برای محاسبه متغیرها در تمام سلولها (حجم‌های کنترل) در نظر گرفته می‌شود. در مراحل بعدی این کتاب، برای روشی مسائلی که با هندسه پیچیده یا بعضی شبیه‌های تند فضایی یا زمانی غیر خطی سروکار دارند از این روش استفاده می‌شود.

در این فصل روش میدان پیوستار بسط داده می‌شود و اساساً به مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی برای هر یک از قوانین مکانیک می‌رسد که حل آنها تغییرات نقطه به نقطه متغیرها را می‌دهد. در اینجا حجم(های) کنترل و معادله‌های پایستاری مربوط اساساً به سمت یک نقطه میل داده می‌شوند و معادله‌های نقطه به نقطه به دست می‌آیند. ولی، قبل از پرداختن به معادله‌های حاصل، بعضی مفاهیم مقدماتی مرور می‌شوند. مانند فصل ۳، از نماد برداری در این فصل خیلی استفاده می‌شود و به خواننده توصیه می‌شود برای مرور به پوست ۵ مراجعه کند.

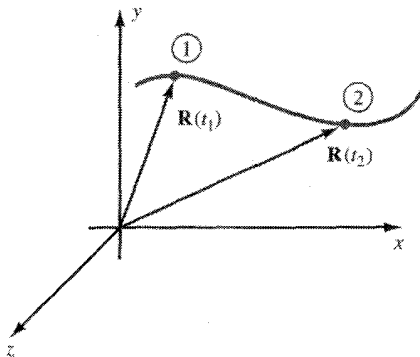
۱.۴ سینماتیک، حرکت، و تغییر شکل

به هنگام استفاده از روش اویلری در تحلیل سیالات، برای توصیف حرکت یک توده سیال و توزیعهای توده‌ای حاصل از حرکت باید دقت بیشتر به خرج داد. در این قسمت روشهای توصیف سرعت و شتاب توده سیال نشان داده می‌شوند. این روش برای مشتقهای زمانی کلی بسط داده می‌شوند و برای توصیف کیفی چهار نوع حرکت توده سیال استفاده می‌شوند.

شتاب یک نقطه

در شکل ۱.۴ یک توده سیال را که در مدت زمان dt از نقطه ۱ به نقطه ۲ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. بردار امکان \mathbf{R} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{R} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.1.4)$$



شکل ۱.۴ تعریف مختصات و سرعت.

آهنگ تغییر زمانی \mathbf{R} از مشتق کلی معادله (۱.۱.۴) به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dt} \mathbf{k} \quad (2.1.4)$$

با توجه به اینکه $\frac{dt}{dt} = 1$ و مثلاً مؤلفه سرعت توده سیال در جهت x عبارت است از $u = \frac{dx}{dt}$ بردار سرعت کل \mathbf{v} در یک نقطه به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (3.1.4)$$

توجه دارید که بردار سرعت تابعی از مکان و زمان است.

بردار شتاب از روش زیر پیدا می شود

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \frac{d\mathbf{v}(x, y, z, t)}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw}{dt} \mathbf{k}$$

با توجه به مؤلفه x ، قانون زنجیری مشتق گیری می دهد

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{du}{dt}(x, y, z, t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.1.4 \text{ الف})$$

عبارتهای مشابه برای a_y و a_z پیدا می شوند

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.1.4 \text{ ب})$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.1.4 \text{ ج})$$

با استفاده از عملیات برداری دیفرانسیل‌گیری که در پیوست ۵ جمع‌بندی شده‌اند، معادله‌های (۴.۱.۴) الف تا ج را به شکل برداری زیر می‌توان نوشت

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (5.1.4)$$

در اینجا $\mathbf{v} \cdot \nabla$ یک اپراتور برداری به شکل زیر است

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)() = u \frac{\partial ()}{\partial x} + v \frac{\partial ()}{\partial y} + w \frac{\partial ()}{\partial z}$$

مثال ۱.۴ برای بردار مکان داده شده زیر

$$\mathbf{R} = (\Delta xy t^2 + zt) \mathbf{i} + (-2r \Delta y^2 t^2 + zt + 3yt) \mathbf{j} + (-3zt + \frac{x}{4} t^2) \mathbf{k}$$

توابع سرعت و شتاب را پیدا کنید.

حل

از معادله (۲.۱.۴)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left[\frac{d}{dt} (\Delta xy t^2 + zt) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{d}{dt} (-2r \Delta y^2 t^2 + zt + 3yt) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{d}{dt} (-3zt + \frac{x}{4} t^2) \right] \mathbf{k}$$

یا

$$\mathbf{v} = (1 \circ xy t + z) \mathbf{i} + (-\Delta y^2 t + z + 3y) \mathbf{j} + (-3z + xt) \mathbf{k}$$

بردار شتاب از معادله (۵.۱.۴) پیدا می‌شود

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (1 \circ xy t + z) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + (-\Delta y^2 t + z + 3y) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + (-3z + xt) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

بررسی مشتقهای جزئی می‌دهد

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{i} \circ xy - \mathbf{j} \circ y + x\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{i} \circ yt + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \mathbf{i} \circ xt + (-\mathbf{i} \circ yt + \mathbf{j}) + \mathbf{k}$$

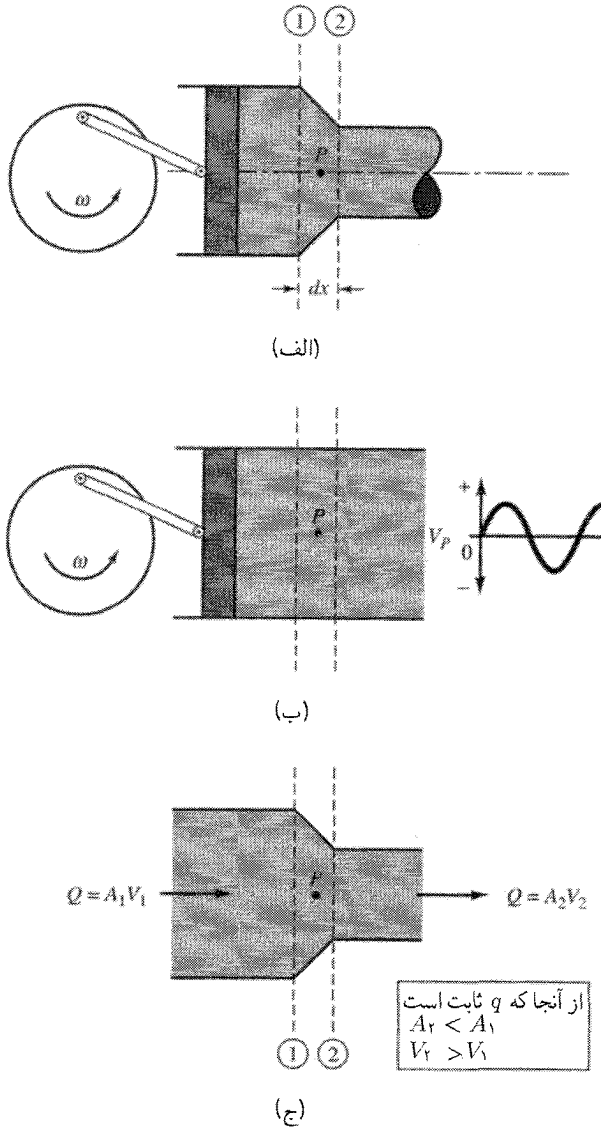
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

و جمع‌بندی تمام جمله‌ها می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (\mathbf{i} \circ xy t^2 + \mathbf{i} \circ xzt + \mathbf{i} \circ yzt + \mathbf{i} \circ xy + \mathbf{j} \circ xyt - \mathbf{j} \circ z + xt)\mathbf{i} \\ & + (\mathbf{i} \circ y^2 t^2 - \mathbf{j} \circ y^2 t - \mathbf{j} \circ yzt + \mathbf{j} \circ xt + \mathbf{j} \circ y)\mathbf{j} \\ & + (\mathbf{i} \circ xyt^2 + zt - \mathbf{j} \circ xt + x + \mathbf{j} \circ z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

بررسی معادله‌های (۴.۱.۴) و (۵.۱.۴) نشان می‌دهند که شتاب از دو نوع جمله تشکیل شده است: شتاب زمانی، یعنی شیبهای زمانی بردار سرعت؛ و جمله‌های شتاب اینرسی که از حاصلضرب سرعت و شیبهای فضایی شارش تشکیل شده‌اند. اینکه جمله‌های شامل شیبهای فضایی باید شتاب نامیده شوند یکی از نتایج استفاده از روش اولی است در حالی که شتاب در توصیف لاگرانژی فقط شامل شیبهای زمانی است. یک مثال کوتاه کیفی اختلاف بین این دو توصیف را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۴ پیستون پمپ‌کننده سیال در شیپوره شکل ۲.۴ الف و دو وضعیت ساده‌تر در شکلهای ۲.۴ ب و ۲.۴ ج را در نظر بگیرید. در شکل ۲.۴ ب قطر ثابت است و تغییر سرعت در نقطه P فقط بر اثر حرکت نوسانی پیستون است. نمودار زمانی V_p شتاب زمانی را نشان می‌دهد. شکل ۲.۴ ج یک نمونه از شارش پایا در شیپوره است که در آن، از معادله پیوستگی به کار رفته برای نقاط ۱ و ۲ پیرامون نقطه P ، یعنی، $V_2 > V_1$ ، یک تغییر سرعت متناظر با شتاب اینرسی $V_p(V_2 - V_1)/\Delta x$ روی داده است که در حد وقتی Δx به سمت صفر میل می‌کند به $u \partial u / \partial x$ تبدیل می‌شود. این شتاب صرفاً از فشردن میدان شارش، که با تغییر سریع هندسه شارش انجام می‌شود، به وجود می‌آید.



شکل ۲.۴ (الف) شتاب کلی؛ (ب) شتاب زمانی؛ (ج) شتاب اینرسی.

مشتق کلی

آهنگ تغییر زمانی کلی هر متغیر در سیستم اولبری به روش مشابه با معادله‌های (۲.۱.۴) یا (۴.۱.۴) پیدا می‌شود. هر متغیر، اسکالر یا برداری، مانند α که مقادیر آن تابعی از مکان یا زمان

است به صورت زیر مشتق‌گیری می‌شود

$$\frac{d\alpha}{dt}(x, y, z, t) = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

یا

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial\alpha}{\partial y} + w \frac{\partial\alpha}{\partial z} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha \quad (۶.۱.۴)$$

عمل بالا مشتق کلی نامیده می‌شود.

برای دسته‌بندی انواع مختلف مشتق‌های زمانی که مهندس با آنها مواجه می‌شود، در برد، استوارت، ولایت فوت (پدیده‌های انتقال، کمپانی جان وایلی، ۱۹۶۸) شرحی به صورت زیر آورده شده است:

از مهندس خواسته می‌شود آهنگ تغییر زمانی پرنده‌ها، b ، را به یکی از سه طریق زیر محاسبه رسم کند:

۱. مهندس در یک مکان ثابت بنشیند و آهنگ تغییر b را در یک نقطه مشاهده ثابت در آسمان اندازه بگیرد؛ این مشتق عبارت است از

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t}$$

۲. خلبانی در هواپیمایی که با بردار سرعت ثابت $\mathbf{v}_p = u_p \mathbf{i} + v_p \mathbf{j} + w_p \mathbf{k}$ حرکت می‌کند مهندس را بالا ببرد. مهندس آهنگ تغییر پرنده‌ها را که از پنجره از روی صندلی هواپیما مشاهده می‌شود اندازه بگیرد؛ در این صورت آهنگ تغییر زمانی b عبارت است از

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + u_p \frac{\partial b}{\partial x} + v_p \frac{\partial b}{\partial y} + w_p \frac{\partial b}{\partial z}$$

۳. بالاخره مهندس آهنگ تغییر زمانی پرنده‌ها را از یک بالن شناور اندازه بگیرد در حالی که سرعت باد محلی به صورت $\mathbf{v} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$ باشد؛ در این صورت

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w \frac{\partial b}{\partial z}$$

که شکل قابل استفاده در روش تحلیل اولیری است که در اینجا پذیرفته شده است.

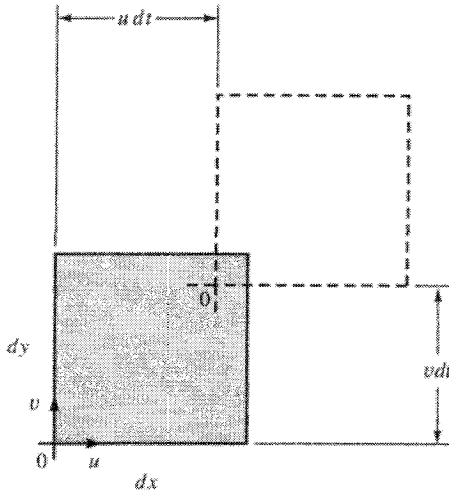
حرکت و تغییر شکل

هنگامی که یک توده سیال از یک لحظه تا لحظه دیگر حرکت می‌کند چهار نوع حرکت و/یا تغییر شکل برای توده وجود دارد. این تغییر شکلهای شامل انتقال و دوران ساده و همچنین اتساع حجم و تغییر شکل زاویه‌ای است. دو تای اول نمونه‌هایی از حرکت خطی است که در آنها شکل توده بدون تغییر می‌ماند اگرچه مکان و وضعیت آن هم می‌تواند بدون تغییر بماند. دو تای بعدی تغییر شکل مربوط به شکل اولیه را نشان می‌دهند. در اینجا یک مقدمه هندسی برای این فرایندها از طریق ارتباط دادن میدانهای سرعت به حرکت و تغییر شکل ایجاد شده را می‌آوریم. باید توجه داشت که تمام شکلهای این حرکتها می‌توانند به‌طور همزمان روی دهند، اما برای درک بهتر، هر یک را باید به‌طور جداگانه و در دو بعد در نظر گرفت. به دنبال آن، سه بعدی بررسی می‌شود.

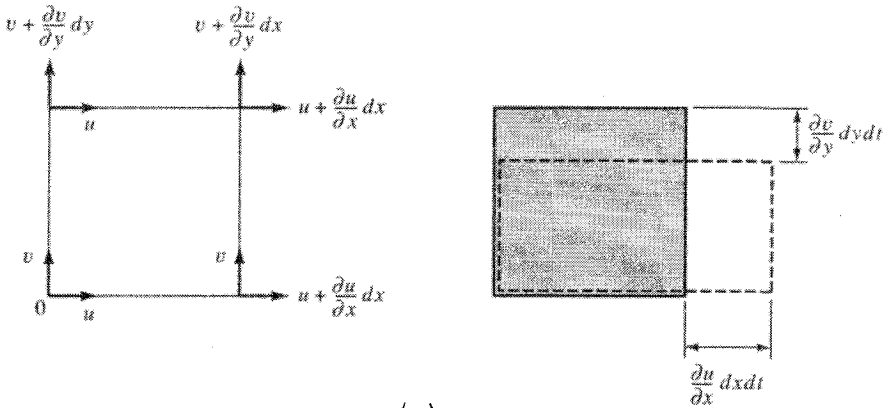
انتقال (شکل ۳.۴ الف) فقط به معنای در نظر گرفتن توده و حرکت دادن آن در یک فاصله در مدت زمان کوتاه dt است. هیچگونه چرخش یا تغییر شکل توده مجاز نیست. تغییر شکل با زاویه بین زوج خطوطی که در ابتدا بر هم عمود هستند و در فاصله زمانی dt تغییر شکل می‌دهند اندازه‌گیری می‌شود. در حالت انتقال، زاویه 90° بین هر زوج خطوط متعامد که یک صفحه را در توده مشخص می‌کنند ثابت می‌ماند. انتقال خالص، بدون هیچ تغییر شکل یا دوران دیگر، فقط در یک میدان سرعت خیلی خاص می‌تواند روی دهد؛ یعنی، شارش باید به‌طور فضایی یکنواخت باشد و هیچ گرادیان (شیب) فضایی نداشته باشد.

اتساع (شکل ۳.۴ ب) عبارت است از کشیدگی یا فشردگی توده که بر اثر شیب فضایی میدان سرعت ایجاد می‌شود. هیچ تغییر شکلی مجاز نیست؛ بلکه، فقط یک کشیدگی یا فشردگی خطی برای محورهای متعامدی که صفحه را مشخص می‌کنند مجاز است. تغییرات میدان سرعت متناظر با اتساع به‌طور مقید انجام می‌گیرد. برای مثال، در شکل ۳.۴ ب تغییر شکل تا وضعیت خط چین زاویه 90° بین تمام محورهای متعامد حفظ می‌شود اما میدان سرعت فقط در جهت محورها تغییر می‌کند. بنابراین برای شکل در جهت x ، فقط u می‌تواند تغییر کند، نه v ؛ در حالی که در جهت y فقط v می‌تواند تغییر کند نه u . اینکه تغییر شکل باعث تغییر حجم می‌شود یا نه یک سؤال خیلی مهم است. از روی شکل، حجم اولیه \mathcal{V} برابر است با $dx dy$. در شکل مرتب شده، طول نموی که در مدت dt تغییر می‌کند از بسط سری تیلور (صحیح تا مرتبه اول) به‌دست می‌آید به همان صورتی که در شکل ۳.۴ نشان داده شده است؛ بنابراین حجم در زمان dt بعدی از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{V}_{t+dt} = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right) \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \right)$$



(الف)

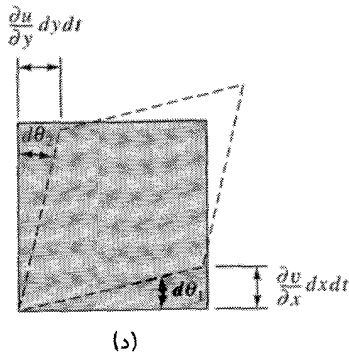
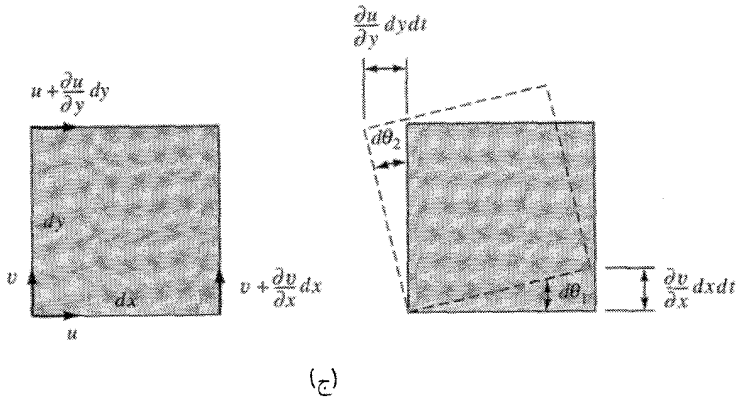


(ب)

شکل ۳.۴ (الف) انتقال؛ (ب) اتساع یک توده سیال و رابطه آن با گرادیان سرعت

پس از ضرب کردن جمله‌ها و حذف جمله‌های دوم و سوم، آهنگ تغییر زمانی حجم نسبی ∇_R را از جمله‌های میدان سرعت به صورت زیر می‌توان پیدا کرد

$$\frac{d\left(\frac{\nabla_{t+dt} - \nabla_t}{\nabla_t}\right)}{dt} = \frac{d \nabla_R}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$



شکل ۳-۴ (ادامه) (ج) دوران؛ (د) تغییر شکل توده سیال و رابطه آن با گرادیان میدان سرعت.

برحسب هر سه بعد،

$$\frac{d \nabla_R}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (7.1.4)$$

بنابراین، اتساع حجم را می‌توان مستقیماً به ساختار فضایی شبیه‌های سرعت ارتباط داد، و این رابطه همان مفهوم فیزیکی مهم معادله پیوستگی در بخش ۳.۴ را داراست. دوران به صورت سرعت زاویه‌ای متوسط دو عنصری که در ابتدا بر هم عمود هستند تعریف می‌شود. همانطور که از شکل ۳.۴ ج دیده می‌شود باید شیب فضایی در میدان سرعت و یا نیروی برشی وجود داشته باشد تا دوران در زمان dt حفظ شود. نسبت به عنصر dx ، و برای زاویه‌های کوچک،

$$\tan d\theta_1 \simeq d\theta_1 \simeq \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx dt \right) / dx$$

بنابراین،

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

برای عنصر عمودی dy

$$\tan d\theta_2 \simeq d\theta_2 \simeq -\frac{\partial u}{\partial y} dy dt$$

بنابراین،

$$\dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

متوسط دو سرعت زاویه‌ای بالا عبارت است از سرعت زاویه‌ای توده حول محور z

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (۸.۱.۴ \text{ الف})$$

دوران حول دو محور دیگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۸.۱.۴ \text{ ب})$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (۸.۱.۴ \text{ ج})$$

سرعت زاویه‌ای یک کمیت برداری است

$$\Omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

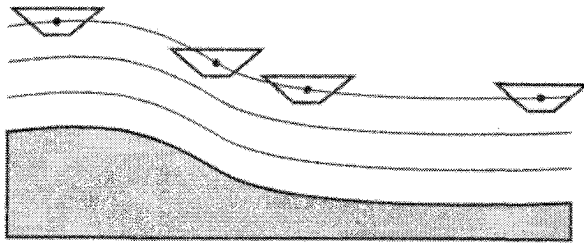
گردابی دو برابر سرعت زاویه‌ای است. بنابراین،

$$\Gamma = 2\Omega = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (۹.۱.۴)$$

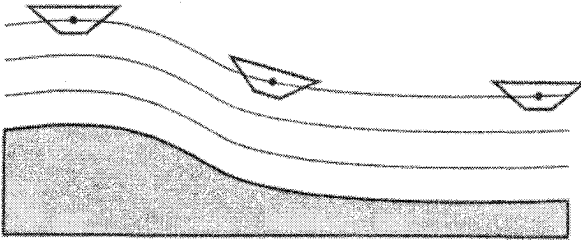
اثبات رابطه زیر به عهده خواننده گذاشته می‌شود

$$\Gamma = \nabla \times \mathbf{v} \quad (۱۰.۱.۴)$$

شارش بی‌چرخش وقتی روی می‌دهد که شیبهای عرضی سرعت (یا نیروی برشی) صفر باشند یا (در حالت کاملاً نامتمحل) یکدیگر را خنثی کنند. در شکل ۴.۴ طرحواره‌ای از توده سیال



(الف)



(ب)

شکل ۴.۴ (الف) شارش بی‌چرخش؛ (ب) شارش چرخشی.

که روی یک خط جریان به طرف پایین آبریز حرکت می‌کند نشان داده شده است. توده‌ها در شکل ۴.۴ الف در شارش بی‌چرخش حرکت می‌کنند زیرا هیچ دورانی برای زوج محورهای متعامد داخل توده وجود ندارد. شکل ۴.۴ ب قیاس چرخشی را نشان می‌دهد. تغییر شکل زاویه‌ای یا آهنگ کرنش به صورت متوسط اختلاف سرعت‌های زاویه‌ای دو عنصری که ابتدا بر هم عمودند تعریف می‌شود. مجدداً، شبیه‌های سرعت فضایی یا نیروی برشی باید موجود باشد. از شکل ۳.۴ د تغییر شکل قبلی برقرار است و برای میدان سرعت نشان داده شده در شکل،

$$\tan d\theta_1 \simeq d\theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy dt \right) / dy = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

علامت منفی در نتیجه دوران ساعتگرد منفی است. مشتق‌گیری مشابه برای θ_2 می‌دهد

$$\dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

بنابراین،

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\gamma}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{الف } ۱۱.۱.۴)$$

و در دو بعد دیگر،

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{ب } ۱۱.۱.۴)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{ج } ۱۱.۱.۴)$$

مثال ۳.۴ در یک صفحه عمودی دوبعدی، امواج آب را که به توسط باد به وجود می‌آیند با میدان سرعت خطی شده زیر می‌توان تشریح کرد

$$u = A(z) \cos \left(\frac{\gamma \pi x}{L} - \frac{\gamma \pi t}{T} \right) = A(z) \cos \Theta$$

$$w = B(z) \sin \left(\frac{\gamma \pi x}{L} - \frac{\gamma \pi t}{T} \right) = B(z) \sin \Theta$$

که در آن L طول موج است، T دوره موج است، و از فیزیک مقدماتی نسبت L/T سرعت C فاز موج است. $A(z)$ و $B(z)$ توابع دامنه‌اند که به عمق z بستگی دارند؛ z از سطح آب ساکن یا از سطح متوسط آب اندازه‌گیری می‌شود. آنها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$A(z) = \frac{h g T \cosh[\gamma \pi(z+d)/L]}{\gamma L \cosh(\gamma \pi d/L)}$$

$$B(z) = \frac{h g T \sinh[\gamma \pi(z+d)/L]}{\gamma L \cosh(\gamma \pi d/L)}$$

مسئله این است که وقتی سرعت در امتداد افق ماکزیمم است، گردابی و آهنگ کرنش در سطح آب ($z = 0$) و در عمق $z = -5\text{m}$ را پیدا کنید. فرض کنید که ارتفاع موج $H = 2\text{m}$ ، طول موج $L = 50\text{m}$ ، و دوره $T = 6\text{s}$.

حل

در صفحه xy سرعت زاویه‌ای از معادله (۸.۱.۴) ب) پیدا می‌شود و معادله (۹.۱.۴) بیان می‌کند

که گردابی برابر است با ω_y ، یعنی،

$$\Omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

از فرمول بالا برای سرعت‌های موج،

$$\Omega_y = \frac{\partial}{\partial z} \left[A(z) \cos \Theta \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[B(z) \sin \Theta \right]$$

یا

$$\Omega_y = \left[\cos \Theta \frac{\partial}{\partial z} A(z) \right] - \left[B(z) \frac{\partial}{\partial x} \sin \Theta \right]$$

پس از چند عمل جبری، عبارت نهایی گردابی (با سرعت زاویه‌ای) عبارت است از

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \left(\frac{\pi}{L} gTH \right) \cdot \frac{\sin h[\sqrt{2}\pi(z+d)/L]}{\cosh(\sqrt{2}\pi d/L)} \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi x}{L} - \frac{\sqrt{2}\pi t}{T} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\pi}{L} gTH \right) \cdot \frac{\sin h[\sqrt{2}\pi(z+d)/L]}{\cosh(\sqrt{2}\pi d/L)} \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi x}{L} - \frac{\sqrt{2}\pi t}{T} \right) \end{aligned}$$

یا $\Omega_y = 0$. به عبارت دیگر، هیچ چرخشی برای توده‌های سیال شارش وجود ندارد. در حقیقت، فرض شارش بی‌چرخش برای استنتاج میدان موج خطی در فصل ۸ یک فرضی است. آهنگ کرنش ε_y قابل توجه است

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{\sqrt{2}\pi gTH}{L} \right) \cdot \frac{\sin h[\sqrt{2}\pi(z+d)/L]}{\cosh(\sqrt{2}\pi d/L)} \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{2}\pi x}{L} - \frac{\sqrt{2}\pi t}{T} \right)$$

اگر این فرمول در شرایطی که سرعت خطی ماکزیمم است ارزیابی شود، در این صورت $\cos \Theta = 1$

و برای $z = 0$

$$\varepsilon_y = [0.295] \left[\frac{1.6}{2.36} \right] [1] = 0.2s^{-1}$$

برای $z = -5m$

$$\varepsilon_y = [0.295] \left[\frac{0.67}{2.36} \right] [1] = 0.084s^{-1}$$

۲.۴ معادله کلی انتقال رینولدز

برای استنتاج معادله‌های دیفرانسیل کلی حاکم معتبر در یک نقطه، دو انتخاب وجود دارد. در انتخاب اول، متغیرهای مربوط از طریق بسط سری تیلور حول یک حجم جزئی به‌طور ساده بسط داده می‌شود و پس از آن با میل دادن حجم به سمت یک نقطه تحلیل حدی آورده می‌شود. در روش دوم، که همان نتایج را می‌دهد، یک نمایش سیستماتیک از معادله حجم کنترل رینولدز [معادله (۴.۲.۳)]، که برای هر خاصیت پایسناری صحت دارد، به‌دست آورده می‌شود.

معادله حجم کنترلی رینولدز عبارت است از

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \eta dV + \int_{cs} \eta \rho \mathbf{v} dA$$

که در آن η جرم عنصر در جرم واحد مخلوط است. دلخواه این است که انتگرال سطحی به انتگرال حجمی تبدیل شود، و برای انجام این کار از نظریه دیورژانس گوس استفاده می‌شود. اگر بردار \mathbf{B} و مشتقهای فضایی آن وجود داشته باشند، یعنی، هیچ ناپیوستگی در این بردار و مشتقهای آن مجاز نباشد، نظریه دیورژانس می‌گوید

$$\int_{cv} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{cs} \mathbf{B} \cdot \hat{n} dA$$

در این نظریه \hat{n} بردار عمود واحد است. اثبات این نظریه را در بسیاری از کتابهای درسی مثلاً، ریاضیات مهندسی پیشرفته کری‌سیگ^۱، یا مکانیک سیالات شیمز می‌توان یافت. این معادله در شکل غیربردار می‌گوید

$$\int_{cv} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV = \int_{cs} (B_x \cos \alpha_x + B_y \cos \alpha_y + B_z \cos \alpha_z) dA$$

که در آن α_x ، α_y و α_z ، به ترتیب، زوایای عمود واحد \hat{n} با جهتهای مثبت x ، y و z است. استفاده از این نظریه در فرمولبندی حجم کنترلی می‌دهد

$$\frac{dN}{dt} = \int_{cv} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) + \nabla \cdot (\eta \rho \mathbf{v}) \right] dV \quad (۱.۲.۴)$$

N به عنوان انتگرال حجمی کمیت شدتی n (برای حجم واحد) تعریف می‌شود، یعنی،

$$N = \int_{cv} n d\forall$$

بنابراین معادله (۱.۲.۴) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} n d\forall = \int_{cv} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\eta\rho\mathbf{v}) \right] d\forall$$

با میل دادن توده به سمت یک توده بی‌نهایت کوچک (اما نه با اندازه مولکولی)، نظریه مقدار میانگین حاکم است و حذف حجم ذره $d\forall$ از طرفین می‌دهد

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \nabla \cdot (\eta\rho\mathbf{v}) \quad (۲.۲.۴)$$

معادله (۲.۲.۴) نظریه دیفرانسیلی انتقال رینولدز است.

۳.۴ معادله پیوستگی

پایستاری جرم یا معادله پیوستگی اهمیت اصلی دارد از این نظر که این اصل، با صرف نظر از هر نوع فرض ساده‌کننده، در هر میدان شارش صحت دارد. آهنگ تغییر زمانی کل جرم در حجم واحد باید مساوی با صفر باشد؛ بنابراین $dn/dt = 0$ ، و η (جرم برای جرم واحد) مساوی با ۱ است. معادله (۲.۲.۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (۱.۳.۴)$$

یا

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (۲.۳.۴)$$

این معادله برای تمام میدانهای شارش صحت دارد.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، جمله‌های دیفرانسیل‌گیری را گروه‌بندی می‌کنیم و به دست

می‌آوریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (۳.۳.۴ \text{ الف})$$

و از معادله (۵.۱.۴) دیده می‌شود که این را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{ب } ۳.۳.۴)$$

یا

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{ج } ۳.۳.۴)$$

که در آن D/Dt مشتق کلی را نشان می‌دهد.
برای سیال تراکم‌ناپذیر ρ ثابت است؛ بنابراین،

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

که می‌دهد

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۴.۳.۴)$$

رابطه بالا معادله پیوستگی برای شارش تراکم‌ناپذیر است.

مفهوم فیزیکی محدودیتی که معادله پیوستگی برای شارش قائل می‌شود از معادله (۷.۱.۴) می‌توان دید؛ این معادله نشان داد که اتساع حجم یا آهنگ زمانی تغییر حجم نسبی دارای رابطه زیر است

$$\frac{d \nabla \cdot \mathbf{r}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

مقایسه معادله (۷.۱.۴) با معادله پیوستگی سیال تراکم‌ناپذیر (معادله ۴.۳.۴) نشان می‌دهد که آهنگ تغییر زمانی حجم نسبی در یک سیال تراکم‌ناپذیر باید همیشه مساوی با صفر باشد. بردار سرعتی که معادله (۴.۳.۴) را در سیال تراکم‌ناپذیر یا معادله‌های (۳.۳.۴) الف تا ج را در سیال تراکم‌پذیر برقرار نکند صحیح نیست.

مثال ۴.۴ آیا میدان سرعت از مثال شتاب (مثال ۱.۴) معادله پیوستگی را برقرار می‌کند؟

حل

در مثال ۱.۴ بردار سرعت به صورت زیر بود

$$\mathbf{v} = (1^{\circ}xyt + z)\mathbf{i} + (-5y^2t + z + 3y)\mathbf{j} + (-3z + xt)\mathbf{k}$$

پیوستگی، $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ، را به کار می‌بریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(1 \cdot xyt + z) = 1 \cdot yt \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-\Delta y^2 t + z + 3y) = -1 \cdot yt + 3 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(-3z + xt) = -3\end{aligned}$$

با جمع کردن

$$1 \cdot yt - 1 \cdot yt + 3 - 3 = 0$$

و پیوستگی برقرار است.

برای تمرین بیشتر، از خواننده می‌خواهیم نشان دهد معادله پیوستگی دوبعدی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

با میدان سرعت موج در مثال ۳.۴ برقرار می‌شود.

۴.۴ معادله تکانه

معادله برداری بنیادی

موازنه نیرو-تکانه یک معادله دیفرانسیل برداری را می‌دهد که از سه معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی تشکیل شده است. اینها مشکلترین معادله‌ها در مکانیک سیالات است. با مراجعه به معادله (۲.۲.۴) η در اینجا تکانه در جرم واحد یا $m\mathbf{v}/m = \mathbf{v}$ است، در حالی که dn/dt با بردار نیروی برای حجم واحد، \mathbf{f} ، مساوی است. از معادله (۲.۲.۴)،

$$\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) \quad (1.4.4)$$

حاصلضرب $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$ حاصلضرب را دیدیک نامیده می‌شود و آن را با قاعده زنجیره‌ای در دیفرانسیل‌گیری و با بسط معادله (۱.۲.۴) به سهولت می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) \quad (2.4.4)$$

جمله اول داخل پرانتز معادله پیوستگی است که از معادله (۱.۳.۴) مساوی با صفر است. جمله دوم داخل پرانتز بردار شتاب \mathbf{a} از معادله (۵.۱.۴) است؛ بنابراین معادله (۲.۴.۴) به عنوان شکل اولی قانن دوم نیوتن است که بر مبنای "حجم واحد" بیان شده است. شکل مؤلفه‌ای معادله برداری عبارت است از

$$f_x = \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (\text{الف } ۴.۴.۳)$$

$$f_y = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (\text{ب } ۴.۴.۳)$$

$$f_z = \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (\text{ج } ۴.۴.۳)$$

معادله‌های (۱.۳.۴)، (۲.۴.۴)، و (۳.۴.۴) الف تا ج) یک مجموعه کامل از معادله‌های حل‌شدنی را می‌دهند. ولی، حتی اگر فرض کنیم که ρ معلوم است، هنوز چهار معادله و شش مجهول (u, v, w, f_x, f_y, f_z) وجود دارند. بنابراین، \mathbf{f} باید برحسب u, v, w یا برحسب هندسه شارش (که معلوم است) مشخص شود.

توصیف نیرو

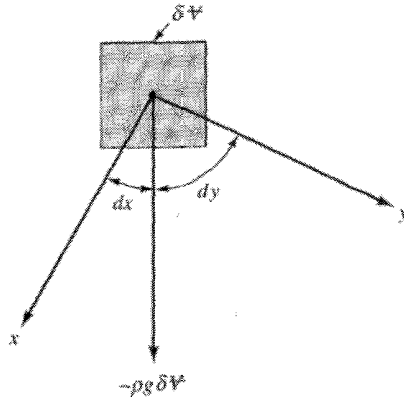
بردار نیرو به نیروی سطحی و نیروی حجمی برای حجم واحد تجزیه می‌شود

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_g$$

که در آن بردار نیروی حجمی فقط از نیروی گرانش و نیروی سطحی از تماس مستقیم ذره سیال ناشی می‌شود. حجم جزئی $\delta \mathcal{V}$ (شکل ۵.۴) در دستگاه مختصات x, y, z تعیین وضعیت می‌شود یعنی اینکه نسبت به دستگاه مختصات x, y, z به‌طور موضعی می‌چرخد به طوری که مختصه عمودی h با گرانش هم‌راستا شود. مؤلفه وزن برای حجم واحد توده (ρg) در هر جهت مختصاتی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{f}_g = \rho g (\cos \alpha_x \mathbf{i} + \cos \alpha_y \mathbf{j} + \cos \alpha_z \mathbf{k})$$

در اینجا $\delta \mathcal{V}$ از طرفین حذف شده است تا عبارتی بر مبنای حجم واحد که معادله (۳.۴.۴) ایجاد می‌کنند به دست آید. زوایای ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$) زوایایی بین محفظه عمودی h و دستگاه



شکل ۵.۴ حجم سیال جزئی.

مختصات محلی است. شکل معادل برحسب نمادگذاری برداری عبارت است از

$$\mathbf{f}_g = -\rho g \nabla h \quad (۴.۴.۴)$$

یک روش معادل مقبول برای بیان نیروی گرانشی در مختصات موضعی این است که یک میدان شتاب جدید ناشی از گرانش منطبق بر مختصات موضعی ایجاد شود

$$\mathbf{f}_g = -\rho(g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k})$$

که در آن، برای مثال،

$$g_x = g \cos \alpha_x$$

بالاخره توجه داده می‌شود که وقتی دستگاههای مختصات موضعی و کلی بر هم منطبق است،

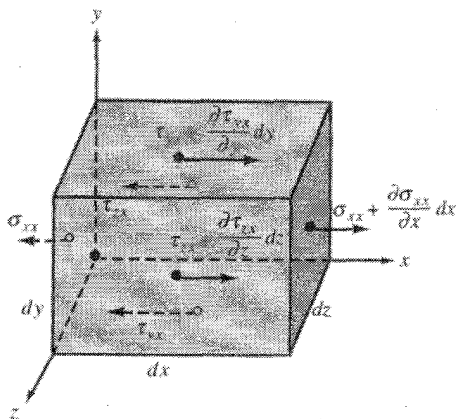
$$\alpha_x = 90^\circ \quad \alpha_y = 90^\circ \quad \alpha_z = 0^\circ$$

در این صورت

$$\cos \alpha_x = 0 \quad \cos \alpha_y = 0 \quad \cos \alpha_z = 1$$

و

$$\mathbf{f}_g = -\rho g \mathbf{k} \quad (۵.۴.۴)$$



شکل ۶.۴ مؤلفه‌های نیروی تنش در جهت x .

نیروی تنش برداری برای حجم واحد از طریق بسط سری تیلور به دست می‌آید. با استفاده از تعریف تنش از فصل ۲، یک توزیع روی مکعب مستطیل شکل ۶.۴ در نظر گرفته می‌شود. در اینجا فقط مؤلفه x نیرو بر حجم واحد به عنوان مثال به کار می‌رود. از بسط سری تیلور برای مقادیر به طور جزئی متفاوت بین دو صفحه در شکل استفاده می‌شود.

$$F_x = \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \right] - [\sigma_{xx} dydz + \tau_{yx} dx dz + \tau_{zx} dx dy]$$

بسط دادن جمله‌ها، حذف جمله‌های با پایینترین مرتبه، و تقسیم کردن بر حجم $dx dy dz$ می‌دهد

$$f_{sx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (\text{الف } ۶.۴.۴)$$

عبارت‌های مشابه برای مؤلفه‌های y و z می‌دهند

$$f_{sy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (\text{ب } ۶.۴.۴)$$

$$f_{sz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (\text{ج } ۶.۴.۴)$$

معمول است که جمله فشار از جمله تنش برشی عمودی جدا می‌شود. این کار به این صورت انجام می‌شود که جمله تنش کپه‌ای از هر یک از سه جمله تنش عمودی تفریق می‌شود و از رابطه بین تنش

کپه‌ای و فشار، یعنی $p = -\sigma$ ، استفاده می‌شود؛ بنابراین، برای مثال $\tau_{yy} + \sigma = \tau_{yy} - p = \sigma_{yy}$ و معادله‌های (۶.۴.۴ الف تا ج) به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$f_{sx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (\text{الف } ۷.۴.۴)$$

$$f_{sy} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (\text{ب } ۷.۴.۴)$$

$$f_{sz} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{ج } ۷.۴.۴)$$

این جمله‌ها را با معادله‌های (۳.۴.۴) و (۴.۴.۴) می‌توان ترکیب کرد و به شکل برداری زیر نوشت

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\rho g \nabla h - \nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}^*}} \quad (۸.۴.۴)$$

نماد $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}^*}}$ تانسور تنش را در معادله‌های (۷.۴.۴) نشان می‌دهد. ولی توجه کنید که تحلیل انجام گرفته تا به حال فقط مسئله را مشکل‌تر کرده است زیرا اکنون ۱۳ مجهول (p, w, v, u) و میدان تنش) وجود دارد در حالی که فقط چهار معادله داریم.

معادله‌های ناویراستوکس

ناویر (لوئیس ماری هنری، ۱۸۳۶-۱۷۸۵) و استوکس (جرج گابریل، ۱۹۰۳-۱۸۱۹) میدان تنش را به تغییر شکل میدانی ناشی از میدان سرعت متغیر در فضا و زمان ارتباط دادند و به این ترتیب استنتاج پایان یافت. در اینجا، به قانون چسبندگی استوکس، که تعمیمی از قانون چسبندگی نیوتنی است، متوسل می‌شویم. (برای بحث نظری، مراجعه کنید به کتاب مکانیک سیالات، شیمز^۱). اگر فرض کنیم که سیال تراکم‌ناپذیر است، در این صورت می‌توان نشان داد که رابطه‌های زیر برقرار است

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۹.۴.۴)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= 2\mu\dot{\epsilon}_z = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= 2\mu\dot{\epsilon}_y = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 2\mu\dot{\epsilon}_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (10.4.4)$$

بنابراین، وابستگی خطی تنش برشی به آهنگ تغییر شکل یا کرنش [معادله‌های (۱۱.۱.۴) الف تا ج] با ضریب تناسبی که ضریب چسبندگی نیوتن است مرکزیت رابطه تنش برشی را تشکیل می‌دهد.

با ترکیب معادله‌های (۹.۴.۴) و (۱۰.۴.۴) در معادله (۸.۴.۴) معادله‌های ناویر-استوکس به دست می‌آیند

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\rho g \nabla h - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (11.4.4)$$

یا به شکل مؤلفه‌ای،

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (12.4.4)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

در حالی که تعدادی از فصلهای بعد به حالت‌های خاص این معادله‌ها و حل آنها اختصاص شده‌اند، به دو نکته باید اشاره کرد. ابتدا، اگر تمام حرکت سیال متوقف شود ($\mathbf{v} = 0$ و $\mathbf{a} = 0$) و z به عنوان قائم رو به بالا در خط حامل گرانش انتخاب شود، معادله هیدروستاتیک به عنوان حالت

خاصی از حالت کلی حرکت کامل سیال به دست می‌آید در حقیقت، بنا به دلایل زیر، معادله‌های ناوراستوکس باید در حالت‌های خاصی، مانند شرایط خاص شارش فوق‌الذکر، حل شوند. به علت غیرخطی بودن این معادله‌ها، نتایج ممکن گوناگونی وجود دارند، و تعداد آنها به اندازه‌ای زیاد است که این معادله‌ها را هرگز نمی‌توان با یک روش تحلیلی کلی به‌طور کامل حل کرد. در حقیقت، آکادمی ملی علوم آمریکا در فهرست چالش‌های بزرگ^۱ خود، که فهرستی از مهمترین مسائلی است که آکادمی علوم باید حل کند، حل کامل معادله‌های ناوراستوکس را سرلوحه کار خود قرار داده است.

۵.۴ پایستاری انرژی مکانیکی و معادله برنولی

معادله اوپلر در امتداد یک خط جریان

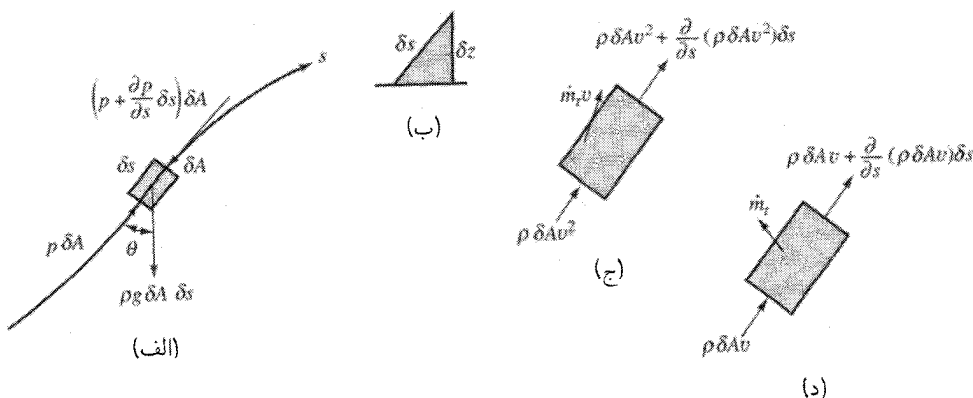
یکی از ابتداییترین روشها برای حل معادله‌های ناوراستوکس این است که جمله‌های اصطکاک در مقایسه با جمله‌های دیگر خیلی کوچک گرفته می‌شوند و از آنها صرف‌نظر می‌شود. این فرض معادله‌های حرکت اوپلر را برای میدان شارش غیرچسبنده می‌دهد. از معادله (۱۱.۴.۴)، معادله‌ها به شکل زیر در می‌آیند

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\rho g \nabla h - \nabla p \quad (1.5.4)$$

این معادله‌ها در شکل کلی سه‌بعدی معادله‌های پیچیده‌ای هستند. ولی با در نظر گرفتن حرکت در امتداد یک خط جریان، معادله‌های اوپلر در امتداد یک خط جریان را می‌توان به دست آورد. با انتگرال‌گیری از آن، معادله برنولی به دست می‌آید، که بیانی از پایستاری انرژی مکانیکی بین دو نقطه در امتداد یک خط جریان است.

در شکل ۷.۴ یک حجم کنترل منشوری با اندازه بسیار کوچک، با مساحت مقطع عرضی δA و طول δs ، انتخاب می‌شود. با توجه به تعریف خط جریان، سرعت فقط در امتداد خط جریان s است. با این فرض که چسبندگی صفر است، یا اینکه شارش بی‌اصطکاک است، تنها نیروی مؤثر بر حجم کنترل در جهت s نیروهای انتهایی و وزن است. معادله حجم کنترل تکانه برای مؤلفه s را به کار می‌بریم

$$\sum F_s = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) \delta s \delta A + \sum_{cs} \rho v v \cdot dA \quad (2.5.4)$$



شکل ۷.۴ کاربرد پیوستگی و تکانه برای شارش در یک حجم کنترل در جهت خط جریان s .

که در آن δs و δA توابعی از زمان نیستند. نیروهای مؤثر عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \sum F_s &= p\delta A - \left(p\delta A + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta A \right) - \rho g \delta s \delta A \cos \theta \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta A - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \delta s \delta A \end{aligned} \quad (۳.۵.۴)$$

زیرا، با افزایش s ، مختصه عمودی طوری افزایش می‌یابد که $\cos \theta = \partial z / \partial s$. شار خالص تکانه s باید شار از طریق سطح استوانه‌ای، \dot{m}_t ، و شار از جوه انتهایی را شامل شود (شکل ۷.۴ ج)

$$\sum_{cs} \rho v \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \dot{m}_t v - \rho \delta A v^2 + \left[\rho \delta A v^2 + \frac{\partial}{\partial s} (\rho \delta A v^2) \delta s \right] \quad (۴.۵.۴)$$

برای تعیین مقدار \dot{m}_t ، معادله پیوستگی [معادله (۲.۳.۴)] برای حجم کنترل به کار می‌رود (شکل ۷.۴ د)

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta A \delta s + \dot{m}_t + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \delta A \delta s \quad (۵.۵.۴)$$

در اینجا، حذف \dot{m}_t در معادله‌های (۴.۵.۴) و (۵.۵.۴) و ساده کردن می‌دهد

$$\sum_{cs} \rho v \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \left(\rho v \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \delta A \delta s \quad (۶.۵.۴)$$

سپس، جایگذاری معادله‌های (۳.۵.۴) و (۶.۵.۴) در معادله (۲.۵.۴) می‌دهد

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta A \delta s = 0$$

پس از تقسیم کردن بر $\rho \delta A \delta s$ و با محاسبه حد وقتی δA و δs به صفر نزدیک می‌شوند، معادله به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (7.5.4)$$

دو فرض در نظر گرفته شده‌اند: (۱) شارش در امتداد خط جریان است و (۲) شارش بی‌اصطکاک است. اگر شارش پایا نیز باشد، معادله (۷.۵.۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (8.5.4)$$

اکنون s تنها متغیر مستقل است، و مشتقات کلی جای مشتقات جزئی را می‌توانند بگیرند

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv = 0 \quad (9.5.4)$$

معادله (۹.۵.۴) معادلهٔ اوایلر در امتداد یک خط جریان است.

راه دیگری برای استنتاج معادلهٔ اوایلر به صورت زیر است: در یک نقطه داخل سیال جزء δs خط جریان را، با z در جهت قائم رو به بالا، در نظر می‌گیریم؛ در این صورت مؤلفه معادله (۵.۲.۲) در امتداد s عبارت است از

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial s} - \rho a_s \quad (10.5.4)$$

از آنجا که مؤلفه a_s شتاب ذره در امتداد خط جریان، تابعی از فاصلهٔ s در امتداد خط جریان و زمان است، مشتق کلی a_s می‌دهد

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

زیرا ds/dt آهنگ زمانی تغییر مکان ذره (سرعت v ذره) است. به سهولت دیده می‌شود که این شکلی ساده از تعریف شتاب است که در بخش ۱.۴ آمده است. پس از مرتب کردن معادله

(۱۰.۵.۴) با جایگذاری a_s ، معادله (۷.۵.۴) به دست می‌آید. در استنتاج معادله (۵.۲.۲) سیال بی‌اصطکاک فرض شد، و مؤلفه در امتداد s (خط جریان)، در معادله (۱۰.۵.۴) به دست آمد؛ از این رو، برای به دست آوردن معادله (۷.۵.۴) همان مفروضات در نظر گرفته شد.

معادله (۹.۵.۴) شکلی از معادلهٔ اوایلر است، که مستلزم سه فرض است (۱) شارش بی‌اصطکاک، (۲) حرکت در امتداد یک خط جریان، و (۳) شارش پایا. اگر ρ تابعی از p یا ثابت باشد، از آن می‌توان انتگرال گرفت. وقتی ρ ثابت است، معادله برنولی به دست می‌آید.

معادله برنولی

انتگرال‌گیری از معادله (۹.۵.۴) در چگالی ثابت معادله برنولی را می‌دهد

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (۱۱.۵.۴)$$

ثابت انتگرال (به نام ثابت برنولی) به طور کلی از یک خط جریان تا خط جریان دیگر تغییر می‌کند اما در شارش پایا، بی‌اصطکاک، تراکم‌ناپذیر در امتداد یک خط جریان ثابت می‌ماند. این چهار فرض ضروری است و به هنگام استفاده از این معادله باید آنها را به خاطر سپرد هر جمله دارای ابعاد $(L/T)^2$ یا آحاد متر-نیوتن بر کیلوگرم است.

$$\frac{\text{m.N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m.kg.m/s}^2}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

زیرا $1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m/s}^2$. بنابراین، معادله (۱۱.۵.۴) به عنوان انرژی جرم واحد تفسیر می‌شود که وقتی بر g تقسیم شود،

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \quad (۱۲.۵.۴)$$

آن را به عنوان انرژی وزن واحد، با آحاد متر-نیوتن بر نیوتن (یا فوت-پوند بر پوند)، می‌توان تفسیر کرد. این شکل به خصوص برای بررسی مسائل مایع با سطح آزاد مناسب است.

هریک از جمله‌های معادلهٔ برنولی [معادله (۱۲.۵.۴)] را به صورت شکلی از انرژی دسترس‌پذیر می‌توان تفسیر کرد. این معادله را معادله پایستاری انرژی مکانیک نیز می‌توان دانست. به خصوص مهم است توجه کنیم که این معادله انرژی از پایستاری معادلهٔ تکانه به دست آمد. ترکیب اتلافات

انرژی ناشی از اصطکاک و انتقال گرما را فقط با معادله انرژی دیفرانسیلی کامل می‌توان به دست آورد که در قسمت بعد مورد بحث قرار می‌گیرد.

با به کار بردن معادله (۱۲.۵.۴) برای دونقطه روی یک خط جریان،

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (13.5.4)$$

یا

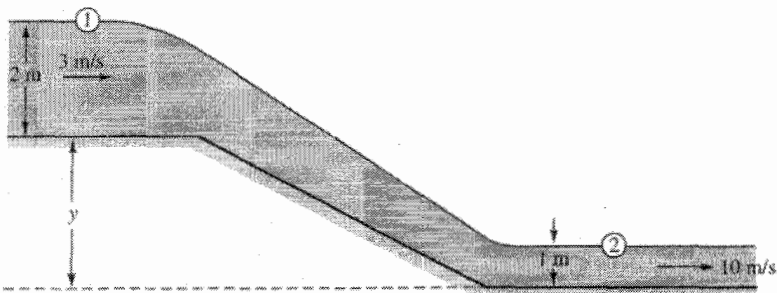
$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0$$

این معادله نشان می‌دهد که تفاضل انرژی پتانسیل، انرژی شارش، و انرژی جنبشی است که در واقع در این معادله اهمیت دارد. به این ترتیب $z_1 - z_2$ مستقل از مبنای ارتفاع است زیرا اختلاف ارتفاع بین دو نقطه است. به طور مشابه، $p_1/\gamma - p_2/\gamma$ اختلاف هدهای فشار است که برحسب آحاد طول سیال جاری بیان می‌شود و با مبنای فشار انتخابی خاص تغییر نمی‌کند. از آنجا که جمله‌های سرعت خط نیستند، مبنای آنها ثابت است.

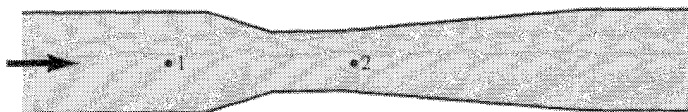
مثال ۵.۴ در یک کانال باز، آب در عمق ۲ m و با سرعت ۳ m/s جریان دارد. آب سپس به طرف پایین یک سراسیمب انقباضی به داخل کانال دیگری جریان می‌یابد؛ در اینجا عمق ۱ m و سرعت ۱۰ m/s است. با فرض شارش بی‌اصطکاک، اختلاف ارتفاع کف کانال را بیابید.

حل

سرعتها در مقاطع عرضی یکنواخت گرفته می‌شوند و فشارها هیدروستاتیکی فرض می‌شوند. نقاط ۱ و ۲ را، مطابق شکل، می‌توان روی سطح آزاد، یا در عمقهای دیگر انتخاب کرد. اگر اختلاف



شکل ۸.۴ کانال باز.



شکل ۹.۴ سنجۀ ونتوری.

ارتفاع کف کانال y باشد، معادله برنولی به صورت زیر است

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

در این صورت $p_1 = p_2 = 0$ و $V_2 = 10 \text{ m/s}$, $V_1 = 3 \text{ m/s}$, $z_2 = 1$, $z_1 = y + 2$.

$$\frac{3^2}{2(9.806)} + 0 + y + 2 = \frac{10^2}{2(9.806)} + 0 + 1$$

و $y = 3.64 \text{ m}$

مثال ۶.۴ سنجۀ ونتوری، متشکل است از یک قسمت همگرا که پس از آن قسمت گلوگاه با قطر ثابت و سپس یک قسمت تدریجاً واگرا می‌آید. از این وسیله برای تعیین آهنگ شارش در یک لوله استفاده می‌شود (شکل ۹.۴). قطر در مقطع ۱، 6 in و در مقطع ۲، 4 in است. وقتی $p_1 - p_2 = 3 \text{ psi}$ و روغن، با گرانش ویژه 90° r ، جریان دارد، تخلیه در لوله را بیابید.

حل

از معادله پیوستگی

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \frac{\pi}{16} V_1 = \frac{\pi}{36} V_2$$

که در آن Q تخلیه (حجم جاری در زمان واحد) است. با به کار بردن معادله (۱۳.۵.۴) برای

$$z_1 = z_2$$

$$p_1 - p_2 = 3(144) = 432 \text{ lb/ft}^2 \quad \gamma = 90(62.4) = 5616 \text{ lb/ft}^3$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{یا} \quad \frac{432}{5616} = \frac{Q^2}{\pi^2 2g} (36^2 - 16^2)$$

حل تخلیه می‌دهد: $Q = 2.2 \text{ cfs}$

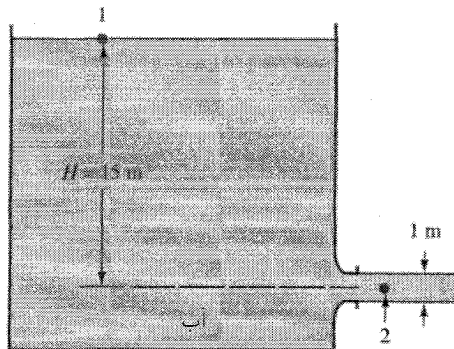
با احتیاط می‌توان چهار فرض مربوط به معادله برنولی را به‌طور تقریبی در نظر گرفت و در چهار حالت زیر از معادله استفاده کرد.

۱. وقتی تمام خطوط جریان از یک مخزن، که محتوی انرژی در همه جای آن یکسان است، منشاء می‌گیرند، ثابت انتگرال از یک خط جریان دیگر تغییر نمی‌کند و برای کاربرد معادله برنولی می‌توان نقاط ۱ و ۲ را به‌طور اختیاری، یعنی، نه لزوماً روی یک خط جریان، انتخاب کرد.
۲. در شارش یک گاز، مانند یک دستگاه تهویه، که در آن تغییر فشار فقط کسر کوچکی (چند درصد) از فشار مطلق است، می‌توان گاز را تراکم‌ناپذیر گرفت.
۳. در شارش غیرپایا با شرایط تدریجاً متغیر، مثلاً خالی شدن یک مخزن، معادله برنولی را بدون خطای قابل ملاحظه می‌توان به کار برد.
۴. در تحلیل اولیه حالت‌های سیال حقیقی، با صرف نظر از تنش چسبندگی، برای به دست آوردن نتایج از معادله برنولی استفاده می‌شود. سپس، نتایج طراحی را با استفاده از معادله انرژی به دست آمده در قسمتهای ۴.۳ و ۶.۴ می‌توان به دست آورد.

مثال ۷.۴ مخزن تأمین آب نشان داده شده در شکل ۱۰.۴ عمق متوسط 20 m دارد، مساحت سطح 20 km^2 ، و یک خروجی است که خط مرکزی آن 15 m زیر سطح آب است. اگر قطر شارش خروجی 1 m باشد، شارش خروجی و سرعت آن چقدر است؟ فرود آب (افت ارتفاع سطح آب) در دوره‌های یک هفته و یک روز چقدر است؟

حل

در شکل ۱۰.۴ مبنا در خط مرکزی ($z_2 = 0$) خروجی گرفته می‌شود و مشکل پایای معادله



شکل ۱۰.۴ شارش در یک شیوره از یک مخزن.

برنولی به کار می‌رود

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

از آنجا که فشارها در نقاط ۱ و ۲ اتمسفریک است، فشار در جمله‌های کار شارش یکدیگر را خنثی می‌کنند.

سرعت سطح آب (نقطه ۱) صفر فرض می‌شود. اگر سرعت خروجی، V_2 ، در عرض مساحت خروجی یکنواخت فرض شود، در این صورت

$$V_2 = \sqrt{2gz_1}$$

و از داده‌ها،

$$V_2 = ۱۷٫۱۵ \text{ m/s}$$

از این رو، شارش خروجی متناظر عبارت است از

$$Q = V_2 A_2 = ۱۳٫۴۶ \text{ m}^3/\text{s}$$

برای حل، از شرایط ۱ و ۳ بالا استفاده شده است. در اینجا کاربرد آنها را واری می‌کنیم. در مورد شرط ۱ باید گفت که نقطه ۱ در شکل ۱۰.۴ را می‌توان به مکانهای دیگری روی سطح آب منتقل کرد و به نتیجه یکسان رسید. شرط ۳ اساساً می‌گوید اگر شارش به‌طور ضعیف غیرپایا باشد، می‌توان آن را شارش پایا در نظر گرفت. برای واری، می‌توان حجم سیال خروجی از مخزن را در یک روز و یک هفته محاسبه کرد. حجم اتلافی در یک روز عبارت است از

$$\mathcal{V}_1 = Q(24)(3600) = ۱٫۱۶۳(۱۰^۶) \text{ m}^3$$

اتلاف حجم در هفت روز برابر است با

$$\mathcal{V}_7 = Q(7)(24)(3600) = ۸٫۱۴۱(۱۰^۶) \text{ m}^3$$

این اتلافات، به ترتیب، ۳° درصد و ۲ درصد حجم کل اولیه را تشکیل می‌دهند؛ اینها درصدهای کوچکی است. این اتلافات باعث یک افت پایا در سطح آب می‌شوند: افت در یک روز برابر است با

$$0.0003(20 \text{ m}) = 0.006 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

وافت در هفت روز ۴۲cm است. افت در هفت روز ۲۱ درصد کل ارتفاع را تشکیل می‌دهد و باعث می‌شود که سرعت خروجی از ۱۷٫۵m/s به ۱۶٫۹m/s کاهش یابد (۱٫۴-درصد تغییر). حتی فرود آب هفت‌روزه با سطح آبی که برحسب زمان تغییر می‌کند را با فرض شارش پایا می‌توان تقریب زد.

بالاخره افت پایای $6 \frac{\text{cm}}{\text{روز}}$ تبدیل می‌شود به "سرعت" زیر:

$$0.06 / (24 \times 3600) = 6.9(10^{-7}) \text{m/s}$$

به‌طور یقین، در مخزنهایی که حجم آنها در مقایسه با حجمهای تخلیه روزانه بزرگ است فرض پایا خوب کار می‌کند. ■

۶.۴ معادله انرژی

پایستاری معادله انرژی را برای چشمه‌ها، مبدلها، و اتلاف انرژی در تمام شکل‌های مختلفش باید در نظر گرفت. یک روش معمولی برای استنتاج آن به همان صورتی است که برای پیوستگی و تکانه با تعریف η و n شروع شد و تا استنتاج معادله غیرخطی سه‌بعدی کامل پیش رفت. ولی، با استنتاج ساده‌ای که در آن انرژی بین هردو نقطه در میدان شارش پایستار است قانون دوم ترمودینامیک و جمله‌های اتلاف را ساده‌تر می‌توان بررسی کرد. بنابراین، این قسمت با معادله انرژی دونقطه‌ای شروع می‌شود. برخلاف معادله برنولی، تقریب غیرچسبنده و فرض حرکت در امتداد یک خط جریان هر دو حذف می‌شوند و معادله انرژی عمومی بین دو نقطه به‌دست می‌آید.

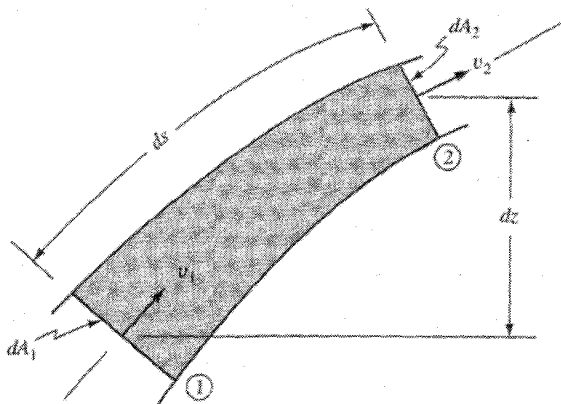
معادله انرژی دونقطه‌ای

شکل ۱۱.۴ یک لوله جریان در میدان شارش را با مساحت‌های مقطع عرضی ورودی و خروجی بی‌نهایت کوچک δA_1 و δA_2 نشان می‌دهد. طول لوله جریان δs است. با فرض شارش، معادله حجم کنترل انرژی [معادله (۱۵.۴.۳)] برای این حجم کنترل جزئی به کار می‌رود

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^{**} \right) \rho_1 v_1 \delta A_1 = \frac{\delta W_s}{\delta t} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^{**} \right) \rho_2 v_2 \delta A_2$$

تقسیم کردن بر شارش ثابت جرم در حجم جزئی، $\rho_1 v_1 \delta A_1 = \rho_2 v_2 \delta A_2$ می‌دهد

$$q_H + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1^{**} = w_s + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2^{**}$$



شکل ۱۱.۴ لوله جریان پایا.

به دست آوردن این معادله حجم کنترلی و پیدا کردن معادله دیفرانسیل معتبر در یک نقطه در میدان شارش ساده است. ابتدا معادله به صورت معادله تفاضل مرتب می‌شود (برای اینکه در اینجا کار شافت وجود ندارد)

$$\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) + (u_2^{**} - u_1^{**}) - q_H = 0$$

وقتی حجم کنترل به سمت یک نقطه میل می‌کند، معادله به شکل زیر در می‌آید

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + gdz + vdv + du^{**} - dq_H = 0 \quad (۱.۶.۴)$$

این یک شکلی از قانون اول ترمودینامیک است. با مرتب کردن آن می‌دهد

$$\frac{dp}{\rho} + gdz + vdv + du^{**} + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - dq_H = 0 \quad (۲.۶.۴)$$

در شارش بی‌اصطکاک مجموع سه جمله اول، با توجه به معادله اوپلر [(معادله ۱.۵.۴)], مساوی صفر است و سه جمله آخر برابرند با

$$dq_H = pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + du^{**} \quad (۳.۶.۴)$$

اکنون، برای شارش برگشت‌پذیر، آنتروپی، s برای جرم واحد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ds = \left(\frac{dq_H}{T} \right)_{rev} \quad (۴.۶.۴)$$

که در آن T دمای مطلق است. در کتابهای ترمودینامیک نشان داده شده می‌شود که آنتروپی خاصیتی از سیال است. در این معادله، آنتروپی می‌تواند آحاد Btu بر اسلاگ و درجه رانکین یا فوت-پوند بر اسلاگ و درجه رانکین داشته باشد، همانطور که گرما را برحسب فوت پوند می‌توان بیان کرد ($1 \text{ Btu} = 778 \text{ ft.lb}$). در آحاد SI، s برحسب ژول بر کیلوگرم-کلوین است. از آنجا که معادله (۳.۶.۴) برای سیال بی‌اصطکاک (برگشت‌پذیر) است، dq_H را از معادله‌های (۳.۶.۴) و (۴.۶.۴) می‌توان حذف کرد،

$$T ds = du^{**} + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (۵.۶.۴)$$

که یک رابطه خیلی مهم ترمودینامیکی است. اگرچه این رابطه برای یک فرایند برگشت‌پذیر به دست آمده است، از آنجا که تمام جمله‌ها با خواص ترمودینامیکی اند، این رابطه برای شارش برگشت‌ناپذیر نیز صحت دارد. در زیر یک بحث خلاصه دربارهٔ مشخصات اتلافات با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک آورده شده است.

اتلافات و قانون دوم ترمودینامیک

قانون اول ترمودینامیک باید "بسته" باشد از این جهت که جمله‌های انرژی داخلی و انتقال گرما باید برحسب متغیرهای مربوط به میدان شارش بیان شوند. از قانون دوم ترمودینامیک استفاده می‌شود. جایگذاری $du^{**} + pd(1/\rho)$ در معادله (۲.۶.۴) می‌دهد

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + vdv + g dz + T ds - dq_H = 0 \quad (۶.۶.۴)$$

در اینجا جمله کار شافت دوباره وارد می‌شود. نامسای کلوسیوس، یا قانون دوم ترمودینامیک، بیان می‌کند که

$$ds \geq \frac{dq_H}{T}$$

یا

$$T ds \geq dq_H \quad (۷.۶.۴)$$

به این ترتیب، $T ds - dq_H \geq 0$. علامت تساوی برای یک فرایند برگشت پذیر به کار می رود. اگر کمیتی به نام اتلاف یا برگشت ناپذیری به صورت زیر تعریف شود

$$d(\text{اتلافات}) \equiv T ds - dq_H \quad (۸.۶.۴)$$

دیده می شود که (اتلافات) d در شارش برگشت ناپذیر مثبت است، در شارش برگشت پذیر صفر است، و هرگز نمی تواند منفی باشد. جایگذاری معادله (۸.۶.۴) در معادله (۶.۶.۴) می دهد

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + vdv + gdz + d(\text{اتلافات}) = 0 \quad (۹.۶.۴)$$

این مهمترین شکل معادله انرژی است. به طور کلی، اتلافات باید با آزمایش تعیین شوند. از این موضوع می توان دریافت که قسمتی از انرژی دسترس پذیر در طی فرایند برگشت ناپذیر به انرژی ذاتی تبدیل می شود. اتلافات وقتی روی می دهند که انرژی دسترس پذیر در شارش سیال از طریق نیروی برشی چسبندگی یا تلاطم به انرژی گرمایی تبدیل می شود. این معادله، در غیاب کار شافت فقط در جمله اتلاف با معادله اوایلر تفاوت دارد. در شکل انتگرالی،

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + w_s + \text{اتلافات}_{1-2} \quad (۱۰.۶.۴)$$

اگر روی سیال داخل لوله جریان کار انجام شود، مثلاً توسط یک پمپ، در این صورت w_s منفی است. نقطه ۱ در فرادست، و نقطه ۲ در فرودست است:

اگر شارش تراکم ناپذیر باشد، در این صورت $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ، $\rho \neq f(p)$ و معادله (۱۰.۶.۴) به شکل زیر در می آید

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + w_s + \text{اتلافات}_{1-2} \quad (۱۰.۶.۴الف)$$

و با تقسیم کردن بر g ،

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + H_s + h_{1-2} \quad (۱۰.۶.۴ب)$$

که در آن H_s هد کار شافت است و h_{1-2} جمله اتلاف برحسب آحاد هد، یا افت هد است.

مقایسه با حجم کنترلی که فقط یک ورودی و یک خروجی دارد نشان می‌دهد که میان شکل ریاضی دو معادله تشابه زیادی وجود دارد. معمولاً شکل حجم کنترلی متشکل است از کمیتهای کپهای یا متوسط مانند سرعت متوسط یا فشار متوسط در سطوح ورودی و خروجی، در حالی که معادله‌های (۱۰.۶.۴) به علت منشأ دیفرانسیلی‌اش از کمیتهایی تشکیل شده‌اند که در یک نقطه میدان شارش صحت دارند. البته، منشأ لوله جریان در معادله (۱۰.۶.۴) می‌رساند که همپوشی قابل توجهی در این روشها وجود دارد، به خصوص وقتی حجم کنترل کوچک می‌شود دو لوله جریان بزرگتر می‌شود. تحلیل سیستمهای پمپاژ، مجرا، لوله‌کشی به علت این همپوشی معادله‌ها ساده می‌شود. آنچه که مهم است این است که لازمه‌های ریاضی شکل دیفرانسیلی و شکل حجم کنترلی باید به دقت در نظر گرفته شوند. از آنجا که شکل حجم کنترلی نیازمند داده‌های متوسط و شکل دیفرانسیلی نیازمند داده‌های نقطه‌ای است، نوع داده‌های به دست آمده از مشاهدات میدان، برای مثال، باید به خوبی معلوم باشد. در شارش یکنواخت به جای داده‌های متوسط در سطح از داده‌های نقطه‌ای می‌توان استفاده کرد. این روش را توصیه نمی‌کنیم زیرا از طریق ضریب تصحیح انرژی جنبشی [مثال ۳.۳] و همچنین در فصل ۶ نشان داده شده است که خطای قابل توجهی می‌تواند به وجود آید.

۷.۴ معادله دیفرانسیلی گرما

دو روش مختلف برای استنتاج معادله دیفرانسیلی وجود دارد. از معادله رینولدز، η به عنوان محتوی گرمایی جرم واحد، $c_p T$ ، تعریف می‌شود که در آن T دمای مطلق است. معادله دیفرانسیلی انتقال گرما به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \nabla \cdot (\rho c_p T \mathbf{v}) = \frac{dn}{dt}$$

معادله پیوستگی را با قاعده مشتق زنجیر می‌توان حذف کرد و به دست آورد

$$\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (c_p T) \right] = \frac{dn}{dt}$$

در ضمن اینکه سیالات را تراکم‌ناپذیر می‌گیریم، c_p را ثابت فرض می‌کنیم و پس از تقسیم کردن بر ρc_p ، معادله بالا به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho c_p} \frac{dn}{dt} \quad (۱.۷.۴)$$

جمله چشمه-چاه در سمت راست از چهار جزء تشکیل شده است: رسانش، تابش، تولید گرما بر اثر تنش برشی، و تبادل گرما بر اثر واکنشهای شیمیایی؛ بنابراین، معادله (۱.۷.۴) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho c_p} \left[\frac{dq}{dt} + R^* + S_\tau^* + S_c^* \right] \quad (2.7.4)$$

جمله رسانش گرما از قانون رسانش گرمای فوریه [معادله (۲.۹.۳)] استفاده می‌کند، به این ترتیب که ابتدا توجه کنیم که N_c یک بردار به شکل زیر است

$$\mathbf{N}_c = N_{cx}\mathbf{i} + N_{cy}\mathbf{j} + N_{cz}\mathbf{k} = -k \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} - k \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} - k \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

این معادله را به شکل برداری زیر می‌توان نوشت

$$\mathbf{N}_c = -k \nabla T$$

که پس از جایگذاری در معادله (۲.۷.۴) می‌دهد

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{N}_c &= \nabla \cdot (k \nabla T) = k \nabla^2 T \\ &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

آهنگ تولید گرما بر اثر اتلاف چسبندگی به صورت زیر به دست می‌آید. برای یک لحظه از جمله‌های تابش و واکنش، R^* و S_c^* صرف نظر می‌شود. اگر شرط تراکم‌ناپذیری را در نظر بگیریم، در این صورت انرژی داخلی u^{**} با $c_p T$ مساوی است و پس از عملیات جبری می‌توان نشان داد که $S_\tau^* = -\Phi$. بنابراین، معادله (۲.۷.۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \left(\frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p} + \frac{R^*}{\rho c_p} + \frac{S_c^*}{\rho c_p} \right) \quad (\text{الف } 4.7.4)$$

یا در شکل کامل

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\Phi}{\rho c_p} + R + S_c \quad (\text{ب } 4.7.4)$$

در معادله (۴.۷.۴) جملهٔ اتلاف در شکل کلی‌اش نوشته نمی‌شود و حتی اگر برای شارشهای تراکم‌ناپذیر به کار رود به ندرت در شکل کلی نوشته می‌شود. در حقیقت در بیشتر شارشهای ژئوفیزیکی این جمله حذف می‌شود زیرا در مقایسه با دیگر جمله‌های انتقال رسانش و فرارفت (ادوکسیون) کوچک است.

تا آنجا که به اصطلاحات مربوط می‌شود، جمله $\alpha \nabla^T T$ ، همانطور که قبلاً گفته شد، جملهٔ رسانش یا پخش است. جملهٔ $(\mathbf{v}, \nabla)T$ انتقال گرمای ناشی از همرفت یا فرارفت (ادوکسیون) است. همرفت طبیعی یا آزاد گرمایی است که بر اثر سرعت سیال منتقل می‌شود و این سرعت از ناپایداری دما ناشی می‌شود؛ مانند، یک سیال داغ که در زیر یک سیال گرم قرار دارد. فرارفت (ادوکسیون) یا همرفت واداشته انتقال گرما بر اثر سرعت سیال است و این سرعت از شیب فشار، ارتفاع، یا نیروی برشی مؤثر بر میدان شارش به وجود می‌آید. استفاده از کلمه همرفت بدون توصیف آن اطلاعات چندانی نمی‌دهد.

۸.۴ موازنهٔ دیفرانسیل جرم در یک عنصر

معادلهٔ نهایی میدان که در اینجا نشان داده می‌شود معادلهٔ انتقال برای هر عنصر جرم در مخلوط است. عناصر را می‌توان تجزیه کرد یا شکل اولیه شیمیایی، بیولوژیکی و فیزیکی درآورد. با شروع از معادله (۲.۲.۴)، معادلهٔ کسر i مخلوط به صورت زیر پیدا می‌شود. ابتدا، η به عنوان جرم کسر i ام بر جرم، ω_i ، تعریف می‌شود. بنابراین، معادله انتقال رینولدز به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega_i) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \omega_i) = \frac{dn}{dt} \quad (۱.۸.۴)$$

در اینجا \mathbf{v}_i بردار سرعت عنصر i ام است. با توجه به معادله (۵.۵.۱) کسر جرمی، یعنی،

$$\omega_i = C_i / \rho$$

که در آن C_i غلظت جرمی عنصر i ام و ρ چگالی مخلوط است، معادله (۱.۸.۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} C_i) = \frac{dn}{dt} \quad (۲.۸.۴)$$

که در آن dn/dt آهنگ خالص تولید (+ یا -) C_i با عوامل غیر انتقالی است. این جمله را جملهٔ چشمه-چاه برای عنصر i ام می‌نامند و با S_i نشان داده می‌شود. جمله‌های این معادله آحاد $[M/L^3/t]$ را دارد.

حاصلضرب برداری $v_i C_i$ دارای آحاد $[M/L^2/t]$ است و بردار شار، N_i ، عنصر i است. با جایگذاری N در معادله (۲.۸.۴)، قید زیر برای مخلوط N عنصری به کار می‌رود

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot N - S_i \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.8.4)$$

همانطور که در بخش ۹.۳ گفته شد دو دیدگاه وجود دارد که در تحلیل بعدی جمله شار انتقال جرم می‌توان پذیرفت. دیدگاه اول این است که مشخصه‌های خاص شار به صورت تعریف شده پذیرفته می‌شوند، و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot N_i = \frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot (v C_i) = S_i \quad (4.8.4)$$

نقص این شکل این است که اندازه‌گیری و بنابر این تعیین بردار سرعت، v_i ، هر یک از عناصر خیلی مشکل است. در بهترین حالت، فقط می‌توان سرعت متوسط مخلوط را اندازه گرفت. روش پذیرفته شده کلی این است که از قانون پخش فیک (بخش ۹.۳) استفاده می‌شود؛ این قانون بر مبنای این تعریف است که شار از دو جزء تشکیل می‌شود: شار فرارفتی (ادوکتیو) که بر مبنای سرعت متوسط مخلوط، v ، است و شار پخش که بر مبنای حرکت عنصر یکتا نسبت به سرعت متوسط است. بنابراین، شار نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J}_i = C_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \quad (5.8.4)$$

که در آن v بردار سرعت متوسط مخلوط است. جمله پخش فیک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J}_i = -\rho \mathcal{D}_{iw} \nabla \omega_i \quad (6.8.4)$$

مانند بخش ۹.۳، \mathcal{D}_{iw} ضریب پخش فیک در عنصر i ام است. از آنجا که در بیشتر مخلوطها فقط یک مایع خالص حاکم است، ضریبهای پخش نسبت به نوع مایع حاکم تعیین می‌شوند. از آنجا که آب یک مایع ابتدایی در این متن است، \mathcal{D}_{iw} باید به عنوان "ضریب پخش عنصر i ام در آب" خوانده شود.

اگر معادله (۶.۸.۴) در معادله (۵.۸.۴) جایگذاری شود و برای شار کامل حل شود، خواهیم

داشت

$$N_i = C_i v_i = \mathbf{J}_i + C_i \mathbf{v} = -\rho \mathcal{D}_{iw} \nabla \omega_i + C_i \mathbf{v} \quad (7.8.4)$$

اگر معادله (۷.۸.۴) در معادله (۴.۸.۴) جایگذار می‌شود، در این صورت معادله برحسب سرعت متوسط مخلوط از رابطه زیر پیدا می‌شود

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C_i) = \nabla \cdot (\rho \mathcal{D}_{iw} \nabla \omega_i) + S_i$$

پس از حذف ρ ها معادله نهایی به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C_i) = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{iw} \nabla C_i) + S_i \quad (۸.۸.۴)$$

چند حال خاص وجود دارد. اگر توزیع چگالی مخلوط تراکم‌ناپذیر باشد، $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ، و پس از انجام مشتق زنجیری، معادله (۸.۸.۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)C_i = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{iw} \nabla C_i) + S_i \quad (۹.۸.۴)$$

بالاخره، \mathcal{D}_{iw} اغلب ثابت است. این، مانند فرض پخش گرما، تقریباً یک حالت کلی نیست ولی اگر از داده‌ها معلوم شود که این حالت برقرار است، در این صورت

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)C_i = \mathcal{D}_{iw} \nabla^2 C_i + S_i \quad (۱۰.۸.۴ \text{ الف})$$

که آن را به شکل کامل زیر می‌توان نوشت

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} + w \frac{\partial C_i}{\partial z} = \mathcal{D}_{iw} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + S_i \quad (۱۰.۸.۴ \text{ ب})$$

مانند حالت انتقال گرما، جمله‌های $\nabla \cdot (C_i \mathbf{v}_i)$ یا $(\mathbf{v} \cdot \nabla)C_i$ به جمله‌های فرارفت (ادوکسیون) با همرفت مربوط می‌شوند در حالی که جمله $\mathcal{D}_{iw} \nabla^2 C_i$ جمله پخش نامیده می‌شود.

مسائل

۱.۴ برای هر دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، نشان دهید که

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$$

۲.۴ زاویه بین دو بردار $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

۳.۴ بردارهای $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ، $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ داده شده‌اند. مطلوب است حاصلضرب (الف) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ و (ب) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

۴.۴ بردارهای $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ داده شده‌اند. مطلوب است مقدار α به طوری که $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ عمود باشد.

۵.۴ مطلوب است حاصلضربهای (الف) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$ ، $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ ، $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ و (ب) $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$ ، $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

۶.۴ بردار $\mathbf{u} = x^2 y z^{1/2}$ داده شده است. گرادیان \mathbf{u} را بیابید.

۷.۴ بردار $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ داده شده است. دیورژانس \mathbf{u} را بیابید.

۸.۴ سرعت $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ داده شده است. (الف) حاصلضرب $\mathbf{v} \cdot \nabla$ بردار است یا عدد؟ (ب) $\mathbf{v} \cdot \nabla$ را چگونه برحسب مؤلفه‌های سرعت در مختصات دکارتی می‌توان بیان کرد؟ (ج) مفهوم فیزیکی جمله $\mathbf{v} \cdot \nabla$ چیست؟

۹.۴ میدان سرعت $\mathbf{v} = 2x^2 y\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + 8tz\mathbf{k}$ داده شده است. میدان شتاب شارش را بیابید. مقدار آن در $\mathbf{x} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ در $t = 6s$ چقدر است؟

۱۰.۴ اگر میدان سرعت با رابطه $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$ داده شده باشد، میدان شتاب شارش در $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ را بیابید.

۱۱.۴ سرعت $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ داده شده است. نشان دهید که شتاب یک ذره سیال با رابطه زیر داده شده است.

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \Gamma \times \mathbf{v}$$

که در آن Γ گردابی است.

۱۲.۴ بردار $\mathbf{v} = -105\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 45\mathbf{k}$ داده شده است. بردار واحد در جهت \mathbf{v} چیست؟

۱۳.۴ یک شارش دوبعدی را با $u = -y/b^2$ و $v = x/a^2$ می‌توان بیان کرد. نشان دهید که این شارش یک سیال تراکم‌ناپذیر است.

۱۴.۴ تابع اختیاری ψ داده شده است، به طوری که

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{و} \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

گردابی، Γ ، را برحسب ψ پیدا کنید، که در آن تابع جریان است.

۱۵.۴ نشان دهید که گردابی در هر شارش رابطه $\nabla \cdot \Gamma = 0$ را برقرار می‌کند.

۱۶.۴ آیا توزیع سرعت

$$\mathbf{v} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} + (-1^\circ z) \mathbf{k}$$

قانون پایستگی جرم را در شارش تراکم‌ناپذیر برقرار می‌کند؟

۱۷.۴ مکعبی به ضلع ۱m را در نظر بگیرید. اضلاع مکعب به موازات محورهای مختصات در ربع اول‌اند و مبدأ در یکی از گوشه‌هاست. با استفاده از توزیع سرعت مسئله ۱۶.۴، شارش از طریق هر وجه را بیابید و نشان دهید که اگر سیال با چگالی ثابت باشد، هیچ جرمی در داخل مکعب جمع نمی‌شود.

۱۸.۴ شارش (بر فوت در امتداد z) از طریق هر وجه چهارگوش و گوشه‌های $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ را بر اثر میدان سرعت زیر بیابید

$$\mathbf{v} = (16y - 12x)\mathbf{i} + (12y - 9x)\mathbf{j}$$

و نشان دهید که پیوستگی برقرار است.

۱۹.۴ نشان دهید که سرعت

$$\mathbf{v} = \frac{4x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{4y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

پیوستگی را در تمام نقاط بجز مبدأ برقرار می‌کند.

۲۰.۴ مسئله ۱۹.۴ توزیع سرعتی را توصیف می‌کند که در همه جای آن در جهت شعاعی از

مبدأ مقدار $v_r = 4/r$ برقرار است. نشان دهید که شارش در تمام دایره‌های هم‌مرکز، با مرکزیت

مبدأ، برای طول واحد در جهت z یکسان است.

۲۱.۴ با وارد کردن رابطه‌های زیر بین مختصات دکارتی و مختصات قطبی صفحه‌ای، یک شکل

از معادله پیوستگی را در مختصات قطبی صفحه‌ای به دست آورید:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \quad \frac{y}{x} = \tan \theta \quad \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad v = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

۲۲.۴ اگر در یک شارش یک‌بعدی $\mathbf{v} = u(x, t)\mathbf{j} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ و چگالی ثابت نباشد، و با رابطه

$U u(0, t) = U \rho = \rho_0 (1.5 + \cos \omega t)$ داده شده باشد، سرعت \mathbf{v} را بیابید به طوری که

یک ثابت است).

۲۳.۴ تابع اختیاری $\phi(x, y)$ داده شده است، به طوری که

$$u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{و} \quad u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

برای شارش تراکم ناپذیر نشان دهید که تابع پتانسیل معادله لاپلاس $\nabla^2 \phi = 0$ را برقرار می‌کند.
 ۲۴.۴ اگر پتانسیل شارش $\phi(x, y) = x$ باشد، سرعت‌های $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را پیدا کنید و میدان سرعت شارش را رسم کنید.

۲۵.۴ مسئله ۲۴.۴ را برای $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)/4\pi$ تکرار کنید.

۲۶.۴ سیال تراکم ناپذیر، مؤلفه‌های سرعت $u(x, y, z)$ و $w(x, y, z)$ رابطه‌های زیر را برقرار می‌کنند

$$u = (1 + xy)(a_0 + a_1x + a_2x^2) \quad \text{و} \quad w = 0 \quad 0 \leq x, y, z \leq 1$$

مؤلفه سرعت $v(x, y, z)$ را پیدا کنید. آیا این میدان شارش صحت دارد؟

۲۷.۴ در شارش تراکم ناپذیر، نشان دهید که آهنگ تغییر حجم صفر است.

۲۸.۴ میدان تنش زیر داده شده است

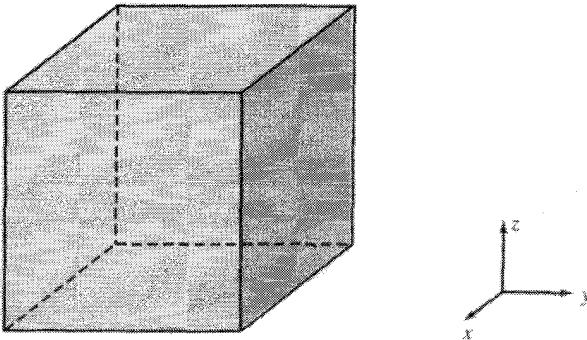
$$\tau_{xx} = 16x^2 - 8xy \quad \tau_{yy} = 16y^2 + 8xy \quad \tau_{xy} = -8x^2 \quad \tau_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

تابع تنش کپه‌ای را برحسب میدان اسکالر پیدا کنید. تنش کپه‌ای در نقطه $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ چقدر است؟

۲۹.۴ تابع $p = xy + (x + z^2) + 10$ داده شده است. نیرو برای حجم واحد را در جهت

$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ پیدا کنید.

۳۰.۴ تنشهای مؤثر بر عنصر مادی نشان داده شده در شکل ۱۲.۴ را مشخص کنید.



شکل ۱۲.۴ مسئله ۳۰.۴

۳۱.۴ توزیع تنش زیر داده شده است

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2x^2 + 4xy - 3y^2 & \tau_{xy} &= 3x^2 - 6xy - 2y^2 \\ \sigma_{yy} &= 2y^2 - 4xy + 3x^2 & \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

تعیین کنید که آیا در غیاب نیروی حجم تعادل وجود دارد یا نه.

۳۲.۴ در میدان شارش دوبعدی، می‌دانیم که نیروی حجمی وجود ندارد و میدان تنش رابطه $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ را برقرار می‌کند. نشان دهید که یک تابع اختیاری $\phi(x, y)$ وجود دارد به طوری که

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

۳۳.۴ تابع اختیاری $\phi(x, y)$ در مسئله ۳۲.۴ را برحسب $\phi = x^2 y^3 - e^{-xy}$ می‌توان بیان کرد. تانسور تنش را در $(x, y) = (2, 7)$ در غیاب نیروی حجمی پیدا کنید.

۳۴.۴ در یک سیال، توزیع فشار به صورت $p = \alpha(x^2 + y^2)$ داده شده است که در آن α ثابت است. (الف) ابعاد ثابت α چیست؟ (ب) تعداد گرادیان فشار چقدر است؟

۳۵.۴ عمل $\nabla \cdot \mathbf{v}$ را روی بردار سرعت مسئله ۱۹.۴ انجام دهید.

۳۶.۴ در یک میدان سرعت با رابطه $\mathbf{v} = 112.5(y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j})$ (m/s)، گرادیان فشار را در نقطه $(2, 125)$ بیابید. گرانش ویژه سیال ۱٫۴ است و اثرات چسبندگی قابل صرف نظر است.

۳۷.۴ آهنگ زمانی تکانه x را که از مکعب مسئله ۱۷.۴ می‌گذرد بیابید. راهنمایی: تمام شش وجه مکعب را در نظر بگیرید.

۳۸.۴ شار تکانه y را در مسئله ۱۸.۴ برای سرعت داده شده در آنجا بیابید.

۳۹.۴ اگر گرانش در جهت z منفی اثر کند، مؤلفه z نیروی مؤثر بر سیال داخل مکعب شکل ۱۷.۴ را برای میدان سرعت شده در آنجا بیابید.

۴۰.۴ مؤلفه y نیروی مؤثر بر حجم کنترل داده شده در مسئله ۱۸.۴ را برای سرعت داده شده در آنجا بیابید. فرض کنید گرانش در جهت y منفی اثر می‌کند.

۴۱.۴ نشان دهید که گرادیان در یک میدان شارش دوبعدی معادله زیر را برقرار می‌کند

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \nabla^2 \Gamma$$

۴۲.۴ در یک شارش پایای دوبعدی، تراکم ناپذیر، معادله پیوستگی را در مختصات قطبی به دست آورید.

۴۳.۴ در یک شارش پایای دوبعدی، تراکم ناپذیر معادله انتقال گرما را در مختصات قطبی به دست آورید.

۴۴.۴ با قیاس، معادله انتقال جرم را در مختصات قطبی برای شرایط مسئله ۴۳.۴ بنویسید.

۴۵.۴ در سیال داده شده در مسئله ۲۶.۴ توزیع دما به صورت زیر است

$$T = T_0 e^{-kt} \sin ax \cdot \cos by$$

که در آن k ، a و b ثابت اند. عبارت آهنگ تغییر دمای ماده (DT/Dt) را بیابید.

۴۶.۴ با استفاده از معادله‌های ناویراستوکس؛ معادله‌های شارش یک بعدی، پایا، چسبنده و تراکم ناپذیر را به دست آورید.

۴۷.۴ از معادله دیفرانسیل انتقال گرما، معادله دیفرانسیل رسانش یک بعدی، پایا از طریق یک جداره بدون تولید گرمای داخلی را به دست آورید. اگر دما در یک وجه جداره T_1 و در وجه دیگر T_2 و ضخامت جداره d باشد، توزیع دما را در جداره بیابید.

۴۸.۴ مایعی روی یک ورق نازک و تخت خاکی که کمی قابل حل است جریان دارد. در ناحیه‌ای که پخش روی می‌دهد، سرعت مایع را به موازات ورق و با رابطه $u = y^2/2$ می‌توان فرض کرد، که در آن y فاصله از ورق است و D_{Aw} ثابت است. نشان دهید که معادله انتقال جرم، با چند فرض ساده‌کننده، عبارت است از

$$D_{Aw} \left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \right) = \frac{y^2}{2} \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

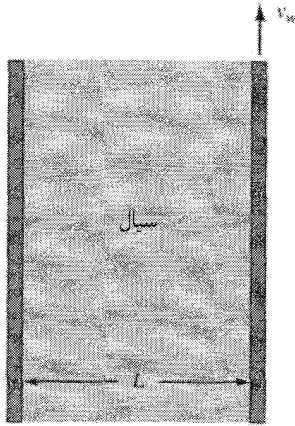
فرضهای ساده‌کننده را فهرست کنید.

۴۹.۴ هیدروژن با آهنگ جرم $31 \text{ lb}_m/\text{s}$ در لوله‌ای به قطر 2 in جریان دارد. در مقطع A فشار 3 psi و $t = 80^\circ \text{F}$. سرعت متوسط چقدر است؟

۵۰.۴ سیال در لوله بلند افقی استوانه‌ای به شعاع R جریان دارد. سیال چسبندگی μ دارد. نشان دهید که $u = C(R^2 - r^2)/4\mu$ که در آن r فاصله شعاعی از خط مرکزی لوله و C یک ثابت است.

۵۱.۴ با شرایط داده شده در مسئله ۵۰.۴، سرعت میانگین شارش را در لوله بیابید. آهنگ شارش جرم در لوله چقدر است؟

۵۲.۴ یک سیال تراکم ناپذیر دو ورق عمودی موازی محدود شده است (شکل ۱۳.۴). ورق سمت چپ ساکن است، و ورق دیگر با سرعت v_w به طرف بالا حرکت می‌کند. با فرض شارش لایه‌ای، نمایه سرعت داخل سیال را بیابید.



شکل ۱۳.۴ مسئله ۵۲.۴.

۵۳.۴ از معادله‌های ناویراستوکس و معادله پیوستگی، نمایه سرعت را در شارش سیال چسبنده تراکم‌ناپذیر بین دو ورق تخت، موازی به دست آورید.

۵۴.۴ مسئله ۴۶.۴ را (با همان شرایط) در میدان شارش دو بعدی در صفحه xy تکرار کنید.

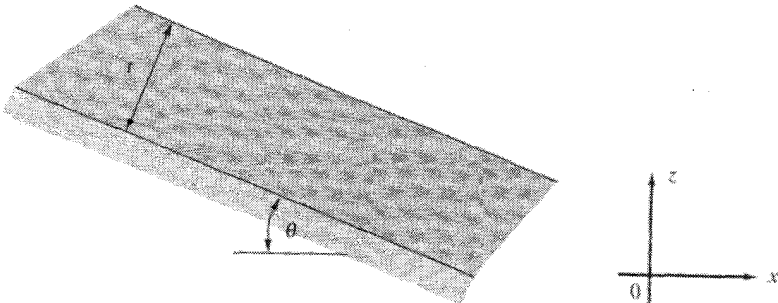
۵۵.۴ سرعت متوسط و ضریب تصحیح تکانه را در توزیع سرعت زیر در یک لوله محاسبه کنید

$$\frac{v}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/n}$$

y فاصله از دیواره و r_0 شعاع لوله است.

۵۶.۴ سیال نیوتنی به صورت ورقه‌ای نازک به ضخامت t به طرف پایین سطح شیب‌داری جریان دارد (شکل ۱۴.۴). با فرض نبود اثرات انتهایی در نمایه سرعت، معادله نمایه سرعت را به صورت

تابعی از x به دست آورید.



شکل ۱۴.۴ مسئله ۵۶.۴.

۵۷.۴ از نمایه سرعت به دست آمده در مسئله ۵۶.۴، سرعت میانگین شارش را بیابید. آهنگ شارش Q چقدر است؟

۵۸.۴ توزیع T_{xz} را از نمایه سرعت به دست آمده در مسئله ۵۶.۴ بیابید.

۵۹.۴ با استفاده از معادله برنولی، مسئله ۱۵.۳ را دوباره حل کنید.

۶۰.۴ با استفاده از معادله برنولی، مسئله ۱۶.۳ را دوباره حل کنید.

۶۱.۴ با استفاده از معادله برنولی، مسئله ۱۷.۳ را دوباره حل کنید.

۶۲.۴ با صرف نظر از مقاومت هوا، ارتفاعی را که جت عمودی آب با سرعت 60 ft/s بالا می‌رود بیابید.

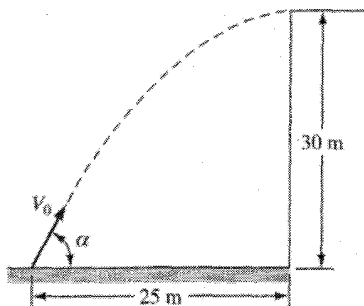
۶۳.۴ اگر جت آب مسئله ۶۲.۴ تحت زاویه 45° با افق بالا رود و از مقاومت هوا صرف نظر شود، چقدر بالا می‌رود و سرعت در بالاترین نقطه آن چقدر است؟

۶۴.۴ یک زیردریایی با سرعت 10 mph در عمق 70 ft در اقیانوس آتلانتیک حرکت می‌کند. فشار در نوک رکود روی دماغه زیردریایی چقدر است؟

۶۵.۴ ضریب تصحیح انرژی جنبشی α را برای شارش لایه‌های دوبعدی بین دو ورق تخت موازی محاسبه کنید (به مسئله ۵۲.۴ نگاه کنید).

۶۶.۴ ضریب تصحیح انرژی جنبشی α را برای شارش لایه‌ای در لوله دایره‌ای محاسبه کنید (به مسئله ۵۰.۴ نگاه کنید).

۶۷.۴ زاویه α جت چه باشد تا سرعت با سرعت مینیم V_0 در شیپوره به سقف ساختمان برسد؟ مقدار V_0 چقدر است؟



شکل ۱۵.۴ مسئله ۶۷.۴.

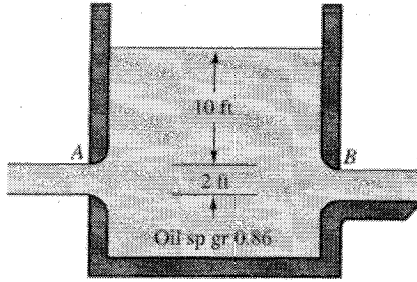
۶۸.۴ یک لوله قائم به نظر 30 ft و به ارتفاع 40 ft پُر از آب است. اگر مبنای ارتفاع 10 ft زیر

قاعده لوله قائم گرفته شود، انرژی پتانسیل در این آب چقدر است؟

۶۹.۴ در مسئله ۶۸.۴، چقدر کار از طریق یک توربین با بازده 100% درصد از آب گرفته می‌شود

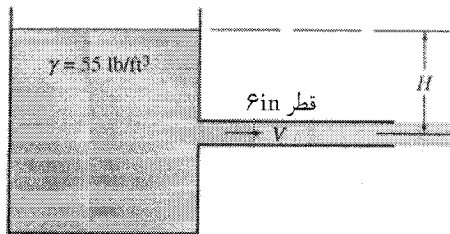
در صورتی که تخلیه توربین به داخل یک مخزن با ارتفاع 30 ft پایین قاعده لوله باشد؟

۷۰.۴ برای سرعت گفته شده در مسئله ۱۶.۴، شار انرژی جنبشی خروجی از مکعب چقدر است؟
 ۷۱.۴ در شکل ۱۶.۴، روغن از یک شکاف دوبعدی در A به هوا تخلیه می‌شود. در B ، روغن از زیر یک دریچه روی کف زمین تخلیه می‌شود. با صرف نظر از تمام اتلافات، تخلیه‌ها در A و B را برای فوت عرض بیابید. چرا آنها با هم تفاوت دارند؟



شکل ۱۶.۴ مسئله ۷۱.۴

۷۲.۴ قطر خط لوله‌ای حامل آب در نقطه A ، ۱ m و فشار در آنجا ۹۸ kPa و سرعت ۱ m/s است. در نقطه B ، بالاتر از A ، قطر ۰.۵ m و فشار ۲۰ kPa است. جت شارش را بیابید.
 ۷۳.۴ اتلافات در شکل ۱۷.۴ برای $H = ۲۵\text{ ft}$ برابر با $۳۷^۲/۲\text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{lb}$ است. تخلیه چقدر است؟
 ۷۴.۴ شارش ۷۵ gpm در شکل ۱۷.۴، H را برای اتلافات $۱۰^۲/۲\text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{lb}$ بیابید.
 ۷۵.۴ شارش ۱۵۰ gpm و $H = ۳۲\text{ ft}$ در شکل ۱۷.۴، اتلافات در سیستم را برحسب هد سرعت، $KV^۲/۲g$ ، محاسبه کنید.



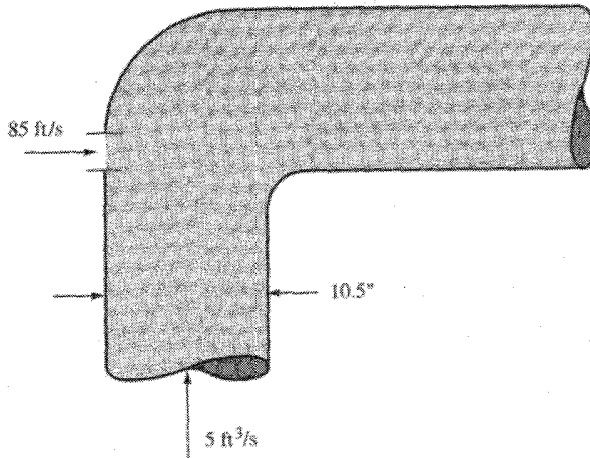
شکل ۱۷.۴ مسائل ۷۳.۴، ۷۴.۴، ۷۵.۴

۷۶.۴ در شکل ۵۴.۳ وقتی حفره‌زایی در ورودی پمپ در آستانه وقوع است، سیستم پمپاژ باید دارای فشار ۵ psi در خط تخلیه باشد. اگر اتلاف در این لوله را به صورت $(۰.۳L/D)(V^۲/۲g)$ بتوان بیان کرد، طول لوله را از مخزن تا پمپ برای این حالت کارکرد محاسبه کنید. توان پمپ برحسب اسب بخار چقدر است؟ چه درصدی از این توان صرف غلبه بر اتلاف می‌شود؟ جوسنج $۳\text{ in}\cdot\text{Hg}$ را می‌خواند.

۷۷.۴ در سیفون شکل ۵۵.۳، $D_2 = 5m$ ، $D_1 = 3m$ ، $h_2 = 3m$ ، $h_1 = 1m$ ، و اتلافات تا مقطع ۲ عبارت‌اند از $2gV_2^2/2r$ ، با 10° درصد اتلافاتی که قبل از مقطع ۱ روی می‌دهند.

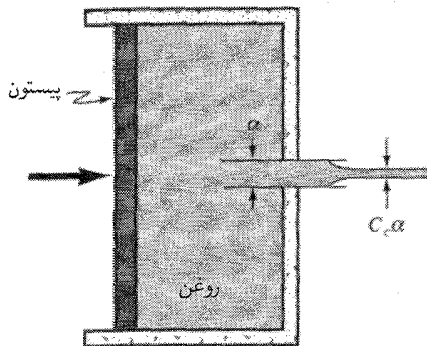
۷۸.۴ در مسئله ۷۷.۴، فشار در نقطه رکود A (سرعت مساوی با صفر) را پیدا کنید.

۷۹.۴ یک جت آب به مساحت $1ft^2$ و 90° و با سرعت $85ft/s$ است. جت یک جریان فرعی آب را که سرعت $5ft/s$ دارد به دنبال خود می‌کشد (شکل ۱۸.۴). قطر لوله $1.5in$ است. سرعت متوسط در مقطع ۲ چقدر است؟ فرض کنید در مقطع ۲، آمیختگی کامل است.



شکل ۱۸.۴ مسئله ۷۹.۴.

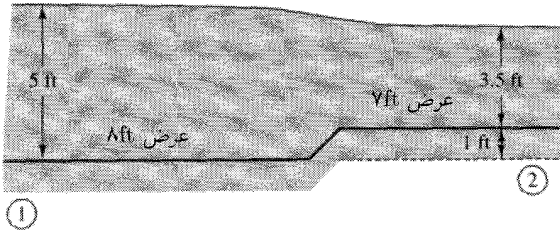
۸۰.۴ بیستون با مساحت مقطع عرضی A روغن با چگالی ρ را به طرف خارج مخزن می‌راند و آن را از طریق لوله‌ای کوچک با مساحت مقطع عرضی α در اتمسفر تخلیه می‌کند (شکل ۱۹.۴). مساحت



شکل ۱۹.۴ مسئله ۸۰.۴.

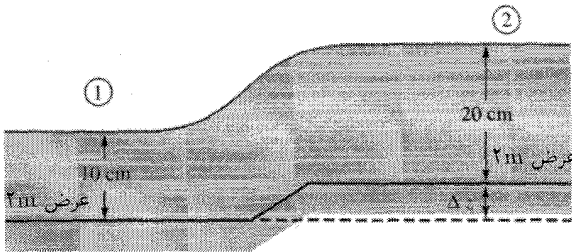
مقطع عرضی جت روغن $C_e \alpha$ است. نشان دهید که ضریب C_e با رابطه $C_e = 1/(2 - \alpha/A)$ داده می‌شود.

۸۱.۴ آب در کانال بازی مستطیلی به عرض ۸ft جریان دارد. در مقطع انقباضی در فرودست، عرض تا ۷ft کاهش می‌یابد در حالی که کف تا ۱ft بالا می‌آید (شکل ۲۰.۴). اگر عمق آب در فرادست دور ۵ft و در مقطع انقباضی ۳.۵ft باشد، آهنگ شارش را بیابید.



شکل ۲۰.۴ مسئله ۸۱.۴.

۸۲.۴ آب در کانال بازی مستطیلی، افقی به عرض ۲m در عمق ۱۰cm جریان دارد. کف کانال به تدریج به اندازه $\Delta z = 5\text{cm}$ بالا می‌آید. وقتی آب از روی کف بالا آمده کانال عبور می‌کند عمق آب به اندازه ۱۰cm افزایش می‌یابد (شکل ۲۱.۴). آهنگ شارش چقدر است؟



شکل ۲۱.۴ مسئله ۸۲.۴.

۸۳.۴ معادله

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + R$$

را در حالت توزیع یک‌بعدی با شرایط زیر حل کنید: در $x = 0$ ، $T = T_0$ و در $x = L$ ، $T = T_L$. تولید گرمای داخلی در حجم واحد (R) بر طبق $R = R_0 e^{-bx/L}$ تغییر می‌کند.

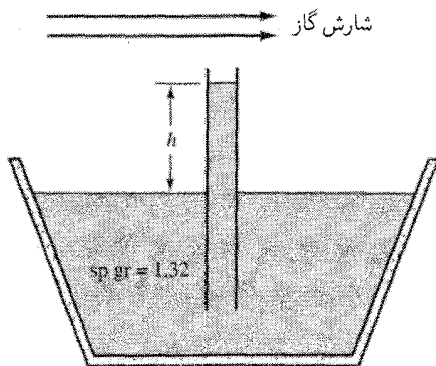
۸۴.۴ مسئله ۸۳.۴ را برای شرایط مرزی $T = T_0$ در $x = 0$ و $dT/dx = 0$ در $x = L$ حل کنید.

۸۵.۴ مسئله ۸۳.۴ را با شرایط مرزی $T = T_0$ در $x = 0$ و $dT/dx = c$ در $x = L$ حل کنید (ثابت = c).

۸۶.۴ مسئله ۴۷.۴ را با در نظر گرفتن تولید یکنواخت گرمای داخلی q_H حل کنید.

۸۷.۴ برای شرایط مسئله ۸۶.۴، دمای ماکزیمم را در جداره و مکانی که $T = T_{max}$ را بیابید.
 ۸۸.۴ یک کامیون بزرگ لجن (۱۸ = گرانش ویژه) را در داخل یک مخزن استوانه‌ای به ارتفاع ۵۰ ft و قطر ۱۰ ft حمل می‌کند. کامیون با سرعت ثابت ۵۵ mph حرکت می‌کند. فرض می‌شود آهنگ تولید باکتری در لجن با غلظت باکتری، C_0 ، متناسب است. به فرض یک فرایند پایا، معادله توزیع غلظت باکتری در مخزن را به دست آورید.

۸۹.۴ لوله‌ای با قطر کوچک در ظرفی پر از مایع با گرانش ویژه ۱.۳۲ غوطه‌ور است (شکل ۲۲.۴). یک جت گاز در دهانه لوله جریان دارد و بخارگازی مایع داخل ظرف را بیرون می‌راند. به فرض اینکه تبخیر مایع فرایندی پایاست، معادله دیفرانسیل این پدیده را به دست آورید. مفروضاتی (در صورت وجود) را که برای استنتاج این معادله لازم‌اند بیان کنید.



شکل ۲۲.۴ مسئله ۸۹.۴

۹۰.۴ تقسیم سلولی یک میکرواورگانیسم که در سیالی ساکن قرار دارد از واکنش مرتبه اول زیر پیروی می‌کند

$$M \rightarrow 2M$$

معادله دیفرانسیل نمایه غلظت میکرواورگانیسم را بنویسید.

۹۱.۴ در ایالات داخلی $L=270$ حادثه‌ای به این شرح روی می‌دهد که کامیونی بزرگ حامل علف‌کش واژگون می‌شود و علف‌کش در میدان مجاور بیرون می‌افتد. در عرض تقریباً یک ساعت پس از وقوع حادثه تبخیر سیال در داخل جو شروع می‌شود. به فرض اینکه تبخیر علف‌کش به داخل جو یک فرایند پایا باشد، معادله دیفرانسیل توضیح‌دهنده پدیده را به دست آورید.

مراجع برای مطالعه بیشتر

- Aris, R.: *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York, 1989.
- Bird, R., Stewart, W., and Lightfoot, E.: *Transport Phenomena*, John Wiley and Sons, New York, 1968.
- Brodkey, R. and Hershey, H.: *Transport Phenomena: A Unified Approach*, McGraw Hill Co., New York, 1988.
- Eckart, E. and Drake, R.: *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw Hill Co., New York, 1972.
- Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 7th ed., Wiley, New York, 1993.
- Long, R.: *Mechanics of Solids*, Prentice Hall, New Jersey, 1961.
- Shames, I.H.: *Mechanics of Fluids*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.



تحلیل ابعادی و تشابه دینامیکی

پارامترهای بی بعد بر درک ما از پدیده‌های شارش سیال می‌افزایند، مانند چک هیدرولیکی، که در آن نسبت قطرهای پیستون مشخص‌کننده مزیت مکانیکی یعنی عدد بی‌بعدی مستقل از اندازه کلی چک است. به کمک آنها می‌توان در حالت‌هایی که متضمن ابعاد فیزیکی مختلف و اغلب خواص مختلف سیال‌اند، نتایج آزمایشی محدودی به کار برد. مفاهیم تحلیل ابعادی در این فصل علاوه بر درک مکانیک نوع شارش تحت مطالعه، چنین تعمیمی از داده‌های آزمایشی را ممکن می‌سازند. نتیجه چنین تعمیمی چندگانه است، زیرا می‌توان پدیده را در کل آن تشریح کرد و به بحث درباره آزمایش خاصی مقید نماند. بدین ترتیب، برای کشف جنبه‌های نهفته مسئله و لذا صرفه‌جویی در زمان و هزینه، می‌توان آزمایش‌های کمتر (اما دست‌چین شده‌تر) انجام داد. نتایج تحقیقات را می‌توان به صورت فشرده‌تر و مفهومی‌تری که استفاده از آنها را ساده کند به مهندسان و دانشمندان دیگر نیز ارائه داد. همچنین، با این نوع نمایش قاطع و منظم اطلاعات، پژوهشگران می‌توانند صورتهای جدید و محدوده‌های ناپیدای دانش مسئله مورد بحث را کشف کنند. اگر ابزاری به نام تحلیل ابعادی در درست نبود، چنین پیشرفتی در درک ما از پدیده‌ها حاصل نمی‌شد. در فصل بعد، که عمدتاً به آثار چسبندگی می‌پردازد، پارامتر بسیار مهمی به نام عدد رینولدز مطرح می‌شود. در فصل ۱۲، که به کانالهای باز می‌پردازد، عدد فرود بیشترین اهمیت را دارد.

بسیاری از پارامترهای بی‌بعد را می‌توان به صورت نسبی از یک زوج از نیروهای سیال در نظر گرفت، که مقدار نسبی نشان‌دهنده اهمیت نسبی یکی از نیروها در قیاس با دیگری است. اگر بعضی از نیروها در یک حالت خاص شارش خیلی بزرگتر از چند نیروی دیگر باشند، اغلب می‌توان از اثر نیروهای کوچکتر چشم پوشید و با پدیده طوری برخورد کرد که گویی کاملاً تحت تأثیر نیروهای بزرگتر است؛ یعنی از روشهای ریاضی و تجربی ساده‌تر (اما نه لزوماً آسانتر) می‌توان برای حل مسئله استفاده کرد. برای حالتی که با چند نیرو با بزرگی یکسان سروکار داریم، مثلاً نیروهای لختی، چسبندگی، و گرانش، به تکنیکهای مخصوصی نیاز داریم. بعد از بحث ابعاد، تحلیل ابعادی، و پارامترهای بی‌بعد، به بررسی مدل و تشابه دینامیکی می‌پردازیم.

۱.۵ همگنی ابعادی و نسبتهای بی‌بعد

حل مسائل عملی طراحی در مکانیک سیالات معمولاً مستلزم ابداعات نظری و نتایج آزمایشی است. با گروه‌بندی کمیت‌های مهم در پارامترهای بی‌بعد، تعداد متغیرهای ظاهر شده را می‌توان کاهش داد و این نتایج فشرده (معادله‌ها یا نمودارهای داده‌ها) را برای تمام حالت‌های مشابه به صورت کاربردپذیر در آورد.

اگر برای یک ذره سیال معادله حرکت $F = ma$ را بنویسیم که شامل تمام انواع جمله‌های نیروی مؤثر باشد، مانند نیروهای گرانی، فشار، چسبندگی، کشسانی، و پسا سطحی، معادله‌ای نتیجه می‌شود که در آن مجموع نیروها مساوی ma یعنی نیروی لختی است. در تمام معادله‌های فیزیکی، همه جمله‌ها باید ابعاد یکسان داشته باشند که در این حالت نیرو است. تقسیم هر جمله معادله بر هر یک از جمله‌ها، معادله را بی‌بعد می‌کند. برای مثال، تقسیم کردن هر جمله نیروی لختی، مجموعه‌ای از پارامترهای بی‌بعد مساوی یک را نتیجه خواهد داد. اندازه نسبی هر یک از پارامترها در مقایسه با واحد، اهمیت آن را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم معادله نیرو را بر جمله دیگری، مثلاً جمله نیروی چسبنده، تقسیم کنیم، مجموعه دیگری از پارامترهای بی‌بعد به دست می‌آید. بدون آزمایش در حالت شارش، تعیین اینکه کدام یک از پارامترها مفیدترند مشکل است.

مثالی از تحلیل ابعادی و مزیت‌های آن، در نظر گرفتن پرش هیدرولیکی است که در بخش ۸.۳ بررسی شده است. معادله تکانه برای این حالت عبارت است از

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \frac{V_1 \gamma y_1}{g} (V_2 - V_1) \quad (1.1.5)$$

که می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\gamma}{2} y_1^2 \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = V_1^2 \frac{\gamma}{g} y_1 \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) \frac{y_1}{y_2}$$

واضح است که طرف راست نمایانگر نیروهای لختی و طرف چپ نمایانگر نیروهای فشارناشی از گرانی است. مقدار این دو نیرو مساوی است؛ زیرا در این معادله یکی دیگری را تعیین می‌کند. علاوه بر این، جمله $\gamma y_1^2/2$ ابعاد نیرو بر عرض واحد دارد و در یک عدد بی‌بعد، که با هندسهٔ پرش هیدرولیکی مشخص می‌شود، ضرب می‌شود.

اگر این معادله را بر جملهٔ هندسی $1 - y_2/y_1$ و عدد نمایش‌دهندهٔ نیروهای گرانی تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{V_1^2}{gy_1} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \quad (2.1.5)$$

اکنون واضح است که طرف دست چپ عبارت است از نسبت نیروی لختی و گرانی، حتی اگر بر اثر حذف جمله‌های مشترک در صورت و مخرج، نمایش نیروها صراحت خود را از دست داده باشد. این نسبت با یک پارامتر بی‌بعد، در واقع مربع عدد فرود، هم‌ارز است که بعداً در این فصل به تفصیل بیشتری درباره‌اش بحث می‌کنیم. همچنین جالب است بگوییم که به محض معلوم شدن نسبت y_2/y_1 ، نسبت نیروها نیز معلوم می‌شود، بدون توجه به اینکه مقادیر y_1 و y_2 چه باشند. از اینجا بهتر می‌توان فهمید که معادلهٔ (۲.۱.۵) موجب معادلهٔ (۱.۱.۵) می‌شود، حتی اگر یکی تغییر آرایش دیگری باشد.

برای نوشتن معادلهٔ تکانه که به معادلهٔ (۲.۱.۵) منتهی می‌شود، در بیان اولیهٔ مسئله فقط نیروهای لختی و گرانی گنجانده شده بودند. اما نیروهای دیگری مانند پسا سطحی و چسبندگی نیز حضور دارند. از این نیروها صرف‌نظر شده است زیرا در مقایسه با نیروهای گرانی و لختی کوچک‌اند. اما فقط آزمایش پدیده، یا پدیدهٔ مشابه آن، چنین ساده‌سازی اولیه‌ای را توجیه می‌کند. برای مثال، اگر از مقدار اثر چسبندگی اطلاع نداشتیم و آن را در نظر می‌گرفتیم، معادلهٔ تکانه به صورت زیر در می‌آمد:

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} - F_{\text{چسبندگی}} = V_1 y_1 \frac{\gamma}{g} (V_2 - V_1)$$

و در نتیجه

$$\frac{V_1^2}{gy_1} + \frac{F_{\text{چسبندگی}} y_2}{\gamma y_1^2 (y_1 - y_2)} = \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1} \right)$$

این عبارت از عبارت (۲.۱.۵) کاملتر است. اما آزمایش نشان می‌دهد که دومین جملهٔ طرف چپ معمولاً کسر کوچکی از جملهٔ اول است و در آزمایش‌های اولیه دربارهٔ پرش هیدرولیکی می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

در معادله آخر می‌توان نسبت y_2/y_1 را متغیر وابسته‌ای در نظر گرفت که برای هر یک از مقادیر مختلف نسبت نیروها، V_1^2/gy_1 و $\gamma y_1^2/F$ چسبیده، تعیین می‌شود. از بحث قبل روشن است که متغیر آخر در تعیین مقادیر y_2/y_1 نقش ضعیفی دارد. با وجود این، اگر مشاهده می‌شد که نسبتهای نیروها، V_1^2/gy_1 و $\gamma y_1^2/F$ چسبیده، در دو آزمون مختلف مقادیر یکسانی دارند، بر مبنای آخرین معادله می‌شد انتظار داشت که مقادیر y_2/y_1 در دو حالت یکسان باشند. اگر در دو آزمون نسبت V_1^2/gy_1 یکسان بود اما نسبت $\gamma y_1^2/F$ که تأثیر اندکی برای این حالت دارد یکسان نبود، می‌شد نتیجه گرفت که مقادیر y_2/y_1 برای دو حالت تقریباً یکسان است.

این کلید بسیاری از مطالب بعدی است. اگر در آزمایش مدل بتوان نسبتهای هندسی یکسان و نسبتهای نیروی یکسان در واحد مقیاس کامل به وجود آورد، حل غیرابعادی مدل برای نمونه اصلی نیز معتبر است. اغلب، همان‌طور که خواهیم دید، لزوماً تمام نسبتها در مدل و نمونه اصلی برابر نیستند. بنابر این بهتر است آزمایش را طوری طرح کرد که نسبتهای نیروی حاکم با هم برابر باشند. نتایج چنین مدل‌سازی غیرکاملی اغلب برای توصیف مفصل پدیده کافی است.

نوشتن معادله نیرو در حالت پیچیده ممکن است عملی نباشد؛ بنابراین، اگر کمیتهای مربوط مسئله معلوم باشند، از فرایند دیگری به نام تحلیل ابعادی استفاده می‌شود.

در یک حالت مفروض، چند نیرو ممکن است کم‌اهمیت باشند، و شاید دو یا سه نیرو با مرتبه بزرگی یکسان بر جای بمانند. با سه نیرو با مرتبه بزرگی یکسان، دو پارامتر بی‌بعد به دست می‌آید؛ یک مجموعه از داده‌های آزمایشی در مورد مدل هندسه-مشابه، روابط بین پارامترهایی را که در تمام حالتها مشابه شارش صدق می‌کنند به دست می‌دهد.

تمرین

۱.۱.۵ یک پارامتر بی‌بعد رایج در مکانیک سیالات را از این میان انتخاب کنید: الف) سرعت زاویه‌ای؛ ب) چسبندگی سینماتیکی؛ ج) چگالی نسبی؛ د) نیروی گرانی واحد؛ ه) هیچکدام.

۲.۵ ابعاد و آحاد

ابعاد در مکانیک عبارت‌اند از نیرو، جرم، طول، و زمان، که با قانون دوم حرکت نیوتن به هم مربوط می‌شوند

$$F = ma \quad (۱.۲.۵)$$

آحاد نیرو و جرم را در بخش ۲.۱ توضیح داده‌ایم. برای تمام سیستمهای فیزیکی، احتمالاً باید دو

بعد یا بیشتر که یکی به آثار الکترومغناطیسی و دیگری به آثار گرمایی مربوط می‌شود، وارد کرد. برای کار تراکم‌پذیر در این کتاب، لازم نیست واحد گرمایی وارد کرد زیرا معادله‌های حالت، فشار و چگالی و دما را به هم ربط می‌دهند.

قانون دوم حرکت نیوتن به صورت ابعادی عبارت است از

$$F = MLT^{-2} \quad (2.2.5)$$

که نشان می‌دهد فقط سه تا از ابعاد مستقل‌اند. F بعد نیرو، M بعد جرم، L بعد طول، و T بعد زمان است. یک دستگاه رایج در تحلیل ابعادی دستگاه $MLT\Theta$ است که در آن Θ بعد دماست.

جدول ۱.۵ بعضی از کمیت‌های مورد استفاده در شارش سیال را همراه با نمادها و ابعادشان نشان می‌دهد.

تمرین

۱.۲.۵ ترکیب بی‌بعد ρ ، l و Q عبارت است از

$$\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \frac{Q}{l^2} \text{ (الف)} \quad ; \quad \frac{\rho l Q}{\Delta p} \text{ (ب)} \quad ; \quad \frac{\rho l}{\Delta p Q^2} \text{ (ج)} \quad ; \quad \frac{\Delta p l Q}{\rho} \text{ (د)} \quad ; \quad \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \frac{Q}{l^2} \text{ (ه)}$$

۳.۵ قضیه II: تکانه و انرژی

قضیه II با کینگم [مراجع ۱]* ثابت می‌کند که در یک مسئله فیزیکی شامل n کمیت که در آن m بعد وجود دارد، کمیتها را می‌توان در $n - m$ پارامتر بی‌بعد مستقل مرتب کرد. فرض کنیم $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ کمیت‌های مورد بحث، مانند فشار، چسبندگی، سرعت، و غیره، باشند. تمام کمیت‌های معلوم برای حل مسئله ضروری‌اند، و از این رو یک رابطه تابعی باید وجود داشته باشد

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (1.3.5)$$

اگر Π_1, Π_2, \dots گروه‌های بی‌بعد کمیت‌های A_1, A_2, A_3, \dots را نشان دهند، با m بعد موجود معادله‌ای به صورت زیر وجود دارد

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad (2.3.5)$$

* تعدادی از مراجع در انتهای این فصل آورده شده‌اند.

جدول ۱.۵ ابعاد کمیتهای فیزیکی در مکانیک سیالات.

ابعاد (M, L, T)	نماد	کمیت
L	l	طول
T	t	زمان
M	m	جرم
MLT^{-2}	F	نیرو
LT^{-1}	V	سرعت
LT^{-2}	a	شتاب
L^2	A	سطح
L^3T^{-1}	Q	تخلیه
$ML^{-1}T^{-2}$	p	فشار
LT^{-2}	g	گرانی
ML^{-2}	ρ	چگالی
$ML^{-2}T^{-2}$	γ	نیروی گرانی واحد
$ML^{-1}T^{-1}$	μ	چسبندگی دینامیکی
L^2T^{-1}	ν	چسبندگی سینماتیکی
MT^{-2}	σ	پسا سطحی
$ML^{-1}T^{-2}$	K	مدول کشسانی حجمی
Θ	T'	دما
ML^{-2}	C	غلظت جرم
$MLT^{-2}\Theta^{-1}$	k	رسانندگی گرمایی
L^2T^{-1}	α	پخش گرمایی
L^2T^{-1}	\mathcal{D}	پخش جرم
$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	c_p	ظرفیت گرمایی
T^{-1}	k_1	نسبت واکنش

برهان قضیه II را در مراجع [۱ و ۲] می‌توان پیدا کرد. روش تعیین پارامترهای II عبارت است از انتخاب m تا از کمیتهای A ، با ابعاد مختلف، که در میان آنها m بعد وجود داشته باشد، و استفاده از آنها به عنوان متغیرهای تکرارشونده* همراه با یکی دیگر از کمیتهای A برای هر II.

* لازم است که هیچکدام از m کمیت انتخاب شده‌ای را که به عنوان متغیر تکرارشونده به کار می‌روند بتوان از متغیرهای تکرارشونده دیگری استنتاج کرد.

برای مثال، فرض می‌کنیم A_1, A_2, A_3 شامل M, L, T باشند (نه لزوماً تک تک آنها، بلکه مجموعاً). پس اولین پارامتر Π به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\Pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4 \quad (۳.۳.۵)$$

دومی به صورت

$$\Pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$$

و به همین ترتیب، تا

$$\Pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

در این معادله‌ها، نماها باید طوری تعیین شوند که هر Π بی بعد باشد. ابعاد کمیت‌های A را جایگذاری می‌کنیم، و نمادهای M, L, T را به ترتیب مساوی صفر قرار می‌دهیم. با این کار سه معادله با سه مجهول برای هر پارامتر Π به وجود می‌آید، به طوری که نماهای x, y, z و از این رو پارامتر Π را می‌توان تعیین کرد.

اگر فقط دو بعد وجود داشته باشد، دو تا از کمیت‌های A را به عنوان متغیر تکرار شونده انتخاب می‌کنیم، و دو معادله با دو نمای مجهول برای هر جمله Π به دست می‌آوریم.

در بسیاری از حالتها، گروه جمله‌های A طوری است که ترتیب غیرابعادی با بازرسی معلوم می‌شود. ساده‌ترین حالت وقتی است که دو کمیت ابعاد یکسان داشته باشند، مثل طول، و نسبت این دو جمله همان پارامتر Π خواهد بود. با چند مثال این روش را بهتر توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۵ تصور می‌شود که تخلیه در یک لولهٔ مویین افقی، به افت فشار در طول واحد، قطر، و چسبندگی بستگی داشته باشد. صورت معادله را پیدا کنید.

حل

کمیتها با ابعادشان فهرست شده‌اند:

کمیت	نماد	ابعاد
تخلیه	Q	$L^2 T^{-1}$
طول/افت فشار	$\Delta p/l$	$ML^{-1} T^{-2}$
قطر	D	L
چسبندگی	μ	$ML^{-1} T^{-1}$

پس

$$F\left(Q, \frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right) = 0$$

سه بعدی به کار می‌رود و با چهار کمیت یک پارامتر Π وجود دارد:

$$\Pi = Q^{x_1} \left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{y_1} D^{z_1} \mu$$

با جایگذاری در ابعاد، به دست می‌آید

$$\Pi = (L^3 T^{-1})^{x_1} (ML^{-2} T^{-2})^{y_1} L^{z_1} ML^{-1} T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

نماهای هر بعد در دو طرف باید یکسان باشند، ابتدا برای L

$$3x_1 - 2y_1 + z_1 - 1 = 0$$

همچنین برای M و T

$$y_1 + 1 = 0$$

$$-x_1 - 2y_1 - 1 = 0$$

که از آن $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -4$ و

$$\Pi = \frac{Q\mu}{D^4 \Delta p / l}$$

بعد از حل Q ، به دست می‌آید

$$Q = C \frac{\Delta p}{l} \frac{D^4}{\mu}$$

که از آن، تحلیل ابعادی هیچ اطلاعاتی درباره مقدار عددی ثابت غیرابعادی C به دست نمی‌دهد؛

آزمایش (یا تحلیل) نشان می‌دهد که مقدار آن $\pi/128$ است [معادله (۱۰.۳.۶) الف].

وقتی از تحلیل ابعادی استفاده می‌کنیم، متغیرهای مسئله باید معلوم باشند. در آخرین مثال، اگر

چسبندگی سینماتیکی به جای چسبندگی دینامیکی به کار رود، فرمول نادرستی به دست می‌آید. ■

مثال ۲.۵ سرریزی با شکاف V شکل تشکیل شده است از یک صفحه قائم با شکافی به زاویه ϕ که در سر آن بریده شده و در عرض یک کانال باز قرار داده می‌شود. مایع در کانال در پشت صفحه بالا می‌آید و با فشار از درون شکاف جریان پیدا می‌کند. تخلیه Q تابعی از ارتفاع H سطح مایع فرادست در بالای کف شکاف است. به علاوه، تخلیه به گرانی و سرعت نزدیکی V_0 به سرریز بستگی دارد. صورت معادله تخلیه را پیدا کنید.

حل

رابطه تابعی زیر

$$F(Q, H, g, V_0, \phi) = 0$$

را باید در پارامترهای بی بعد گروه بندی کرد؛ ϕ بی بعد است؛ از این رو، یک پارامتر Π است. فقط از دو بعد استفاده می‌شود، L و T . اگر g و H متغیر تکرارشونده باشند

$$\Pi_1 = H^{x_1} g^{y_1} Q = L^{x_1} (LT^{-2})^{y_1} L^2 T^{-1}$$

$$\Pi_2 = H^{x_2} g^{y_2} V_0 = L^{x_2} (LT^{-2})^{y_2} LT^{-1}$$

بنابراین

$$x_1 + y_1 + 3 = 0 \quad x_2 + y_2 + 1 = 0$$

$$-2y_1 - 1 = 0 \quad -2y_2 - 1 = 0$$

که از آن $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $y_1 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = -\frac{1}{4}$ و

$$\Pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{gH^{5/4}}} \quad \Pi_2 = \frac{V_0}{\sqrt{gH}} \quad \Pi_3 = \phi$$

یا

$$f\left(\frac{Q}{\sqrt{gH^{5/4}}}, \frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right) = 0$$

این را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{Q}{\sqrt{gH^{5/4}}} = f\left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi\right)$$

که در آن f و f_1 هر دو توابع مجهول‌اند. بعد از حل برای Q ، داریم

$$Q = \sqrt{g} H^{5/2} f_1 \left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi \right)$$

برای به دست آوردن اطلاعات اضافی درباره تابع f_1 ، یا آزمایش لازم است یا تحلیل. اگر H و V_0 را به جای g و H به عنوان متغیرهای تکرارشونده انتخاب کرده بودیم

$$\Pi_1 = H^{x_1} V_0^{y_1} Q = L^{x_1} (LT^{-1})^{y_1} L^2 T^{-1}$$

$$\Pi_2 = H^{x_2} V_0^{y_2} g = L^{x_2} (LT^{-1})^{y_2} LT^{-2}$$

بنابراین

$$x_1 + y_1 + 3 = 0 \quad x_2 + y_2 + 1 = 0$$

$$-y_1 - 1 = 0 \quad -y_2 - 2 = 0$$

که از آنها $x_1 = -2$ ، $y_1 = -1$ ، $x_2 = 1$ ، $y_2 = -2$ ، و

$$\Pi_1 = \frac{Q}{H^2 V_0} \quad \Pi_2 = \frac{gH}{V_0^2} \quad \Pi_3 = \phi$$

یا

$$f \left(\frac{Q}{H^2 V_0}, \frac{gH}{V_0^2}, \phi \right) = 0$$

از آنجا که هر کدام از پارامترهای Π را می‌توان معکوس کرد یا به توان رساند بدون اینکه بر حالت غیرابعادی‌شان تأثیر بگذارد، داریم

$$Q = V_0 H^2 f_2 \left(\frac{V_0}{\sqrt{gH}}, \phi \right)$$

تابع مجهول f_2 همان پارامترهای تابع f_1 را دارد، اما f_2 نمی‌تواند همان تابع باشد. صورت آخر کلاً خیلی مفید نیست، زیرا اغلب در سرریزهای دارای شکاف V شکل می‌توان از V_0 صرف‌نظر کرد. معلوم می‌شود که جمله کم‌اهمیت را نباید به عنوان متغیر تکرارشونده انتخاب کرد. ■

روش دیگر برای تعیین مجموعه‌های دیگری از پارامترهای II عبارت است از ترکیب مجدد و اختیاری مجموعه اول. اگر چهار پارامتر مستقل Π_1, Π_2, Π_3 و Π_4 معلوم باشند، جمله

$$\Pi_a = \Pi_1^{a_1} \Pi_2^{a_2} \Pi_3^{a_3} \Pi_4^{a_4}$$

با نماهای دلخواه، پارامترهای جدیدی به دست می‌دهد. سپس $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ یک مجموعه جدید تشکیل می‌دهند. این روش را می‌توان ادامه داد تا تمام مجموعه‌های ممکن پیدا شوند.

مثال ۳.۵ اتلاف $\Delta p/l$ برای طول واحد لوله در شارش متلاطم در یک لوله صاف، به سرعت V ، قطر D ، گرانی g ، چسبندگی دینامیکی μ ، و چگالی ρ بستگی دارد. با تحلیل ابعادی صورت کلی معادله زیر را تعیین کنید:

$$F\left(\frac{\Delta h}{l}, V, D, \rho, \mu\right) = 0$$

حل

اگر V, D, ρ و متغیرهای تکرارشونده باشند

$$\Pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-2})^{z_1} ML^{-1} T^{-1}$$

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0$$

$$-x_1 - 1 = 0$$

$$z_1 + 1 = 0$$

که از آن $x_1 = -1$ و $y_1 = -1$ ، $z_1 = -1$

$$\Pi_2 = V^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} \frac{\Delta p}{l} = (LT^{-1})^{x_2} L^{y_2} (ML^{-2})^{z_2} ML^{-2} T^{-2}$$

$$x_2 + y_2 - 3z_2 - 2 = 0$$

$$-x_2 - 2 = 0$$

$$z_2 + 1 = 0$$

که از آن $x_2 = -2$ ، $y_2 = 1$ و $z_2 = -1$ سپس

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{VD\rho} \quad \Pi_2 = \frac{\Delta p/l}{\rho V^2/D}$$

یا

$$F\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\Delta p/l}{\rho V^2/D}\right) = 0$$

زیرا کمیت‌های Π را در صورت لزوم می‌توان معکوس کرد. پارامتر اول، $VD\rho/\mu$ ، عدد رینولدز R است که یکی از مهمترین پارامترهای بی‌بعد در مکانیک سیالات به شمار می‌رود. اندازه عدد رینولدز نوع شارش را مشخص می‌کند. این موضوع را در بخش ۱.۶ توضیح می‌دهیم. اگر برای $\Delta p/l$ حل کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\Delta p}{l} = f_1\left(R, \frac{\rho V^2}{D}\right)$$

فرمول معمول عبارت است از

$$\frac{\Delta p}{l} = f(R) \frac{\rho V^2}{2D}$$

یا، در جمله افت ارتفاع،

$$\frac{\Delta h}{l} = f(R) \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g}$$

مثال ۴.۵ حالتی از شارش سیال، به سرعت V ، چگالی ρ ، ابعاد خطی مختلف، l ، l_1 و l_2 ، افت فشار Δp ؛ گرانی g ؛ چسبندگی μ ؛ پسا سطحی σ ؛ و مدول کشسانی حجمی K بستگی دارد. تحلیل ابعادی را برای این متغیرها به کار برید و مجموعه‌ای از پارامترهای Π پیدا کنید.

$$F(V, \rho, l, l_1, l_2, \Delta p, g, \mu, \sigma, K) = 0$$

حل

از آنجا که سه بعد در نظر گرفته‌ایم، سه متغیر تکرارشونده انتخاب می‌کنیم. در حالت‌های پیچیده،

عموماً V, ρ و l مفیدند. هفت پارامتر Π وجود دارد:

$$\Pi_1 = V^{x_1} \rho^{y_1} l^{z_1} \Delta \rho$$

$$\Pi_2 = V^{x_2} \rho^{y_2} l^{z_2} g$$

$$\Pi_3 = V^{x_3} \rho^{y_3} l^{z_3} \mu$$

$$\Pi_4 = V^{x_4} \rho^{y_4} l^{z_4} \sigma$$

$$\Pi_5 = V^{x_5} \rho^{y_5} l^{z_5} K$$

$$\Pi_6 = \frac{l}{l_1}$$

$$\Pi_7 = \frac{l}{l_2}$$

با بسط کمیت‌های Π به صورت ابعادی، داریم

$$\Pi_1 = (LT^{-1})^{x_1} (ML^{-2})^{y_1} L^{z_1} ML^{-1} T^{-2}$$

$$x_1 - 3y_1 + z_1 - 1 = 0$$

$$-x_1 \quad \quad -2 = 0$$

$$y_1 \quad \quad +1 = 0$$

که از آن $x_1 = -2, y_1 = -1, z_1 = 0$.

$$\Pi_2 = (LT^{-1})^{x_2} (ML^{-2})^{y_2} L^{z_2} LT^{-2}$$

$$x_2 - 3y_2 + z_2 + 1 = 0$$

$$-x_2 \quad \quad -2 = 0$$

$$y_2 \quad \quad = 0$$

که از آن $z_r = 1$ و $y_r = 0$ ، $x_r = -2$

$$\Pi_r = (LT^{-1})^{x_r} (ML^{-r})^{y_r} L^{z_r} ML^{-1} T^{-1}$$

$$x_r - 3y_r + z_r - 1 = 0$$

$$-x_r \quad -1 = 0$$

$$y_r \quad +1 = 0$$

که از آن $z_r = -1$ و $y_r = -1$ ، $x_r = -1$

$$\Pi_r = (LT^{-1})^{x_r} (ML^{-r})^{y_r} L^{z_r} MT^{-r}$$

$$x_r - 3y_r + z_r = 0$$

$$-x_r \quad -2 = 0$$

$$y_r \quad +1 = 0$$

که از آن $z_r = -1$ و $y_r = -1$ ، $x_r = -2$

$$\Pi_\delta = (LT^{-1})^{x_\delta} (ML^{-r})^{y_\delta} L^{z_\delta} ML^{-1} T^{-r}$$

$$x_\delta - 3y_\delta + z_\delta - 1 = 0$$

$$-x_\delta \quad -2 = 0$$

$$y_\delta \quad +1 = 0$$

$$\Pi_\delta = (LT^{-1})^{x_\delta} (ML^{-r})^{y_\delta} L^{z_\delta} ML^{-1} T^{-r}$$

که از آن $z_\delta = 0$ و $y_\delta = -1$ ، $x_\delta = -2$

$$\Pi_\lambda = \frac{\Delta p}{\rho V^r} \quad \Pi_r = \frac{gl}{V^r} \quad \Pi_r = \frac{\mu}{Vl\rho} \quad \Pi_r = \frac{\sigma}{V^r \rho l}$$

$$\Pi_\delta = \frac{K}{\rho V^r} \quad \Pi_\rho = \frac{l}{l_1} \quad \Pi_v = \frac{l}{l_r}$$

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho V^r}, \frac{gl}{V^r}, \frac{\mu}{Vl\rho}, \frac{\sigma}{V^r \rho l}, \frac{K}{\rho V^r}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_r}\right) = 0$$

می‌توان بعضی از پارامترها را معکوس کرد و از بعضی دیگر جذر گرفت

$$f_1 \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{V}{\sqrt{gl}}, \frac{Vl\rho}{\mu}, \frac{V^2 l \rho}{\sigma}, \frac{V}{\sqrt{K/\rho}}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) = 0$$

اولین پارامتر، که معمولاً به صورت $\Delta p / (\rho V^2 / 2)$ نوشته می‌شود، ضریب فشار است؛ پارامتر دوم عدد فرود F است؛ سومی عدد رینولدز R است؛ چهارمی عدد ویر W است؛ و پنجمی عدد ماخ M است. از این رو

$$f_1 \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, F, R, W, M, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) = 0$$

اگر برای افت فشار حل کنیم داریم

$$\Delta p = \rho V^2 f_2 \left(F, R, W, M, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right)$$

که در آن f_1 و f_2 باید از تحلیل یا آزمایش تعیین شوند. با انتخاب متغیرهای تکرارشونده دیگر، مجموعه دیگری از پارامترهای Π می‌توان به دست آورد. ■

شکل ۲۰.۶ نمایشی است از رابطه‌ی تابعی از نوعی که هم‌اکنون در مورد شارش در لوله‌ها به کار برده‌ایم. در اینجا از پارامترهای F, W, M به دلیل بی‌اهمیت بودن صرف‌نظر می‌شود؛ l قطر D لوله است؛ l_1 طول L لوله است، و l_2 یک بعد است که نماینده ارتفاع مؤثر زبری سطح لوله است و با ϵ نشان داده می‌شود. بدین ترتیب

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_2 \left(R, \frac{L}{D}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

اینکه افت فشار در خط لوله با طول به‌طور خطی تغییر می‌کند (یعنی دو برابر کردن طول لوله، افت فشار را دو برابر می‌کند) منطقی به نظر می‌رسد، به طوری‌که

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2 (L/D)} = f_2 \left(R, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad \text{یا} \quad \frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{L}{D} f_2 \left(R, \frac{L}{D} \right)$$

جمله دست چپ معمولاً با نماد $f/2$ ، مانند داخل شکل ۲۱.۶، داده می‌شود. در منحنیهای نشان‌داده‌شده در این شکل f و R به ترتیب مختصه عرضی و مختصه طولی‌اند، و در آنها ϵ/D

پارامتری است که مقدارش برای هر منحنی، معلوم فرض می‌شود. نوع این منحنیها با آزمایش تعیین شده است. چنین آزمایشهایی نشان می‌دهند که وقتی پارامتر R کمتر از 2000 است تمام منحنیها برای مقادیر مختلف ϵ/D در یک منحنی گرد می‌آیند. از این رو f از ϵ/D مستقل است، و نتیجه عبارت است از

$$f = f_5(R)$$

این رابطه را بر مبنای ملاحظه‌های نظری در فصل ۶ پیش‌بینی می‌کنیم، اما تحقیق تجربی این پیش‌بینی‌هاست که اعتبار روشهای نظری را ثابت می‌کند.

مثال ۵.۵ نیروی پیشران هر یک از اعضای خانواده پیشرانهای هندسه-مشابه هواپیما را می‌خواهند با آزمایش یک مدل در تونل باد تعیین کنند. با تحلیل ابعادی، پارامترهای مناسب را برای ترسیم نتایج آزمون پیدا کنید.

حل

نیروی پیشران F_T به سرعت دوران ω ، سرعت پیشروی V_0 ، قطر D ، چسبندگی هوا μ ، چگالی ρ ، و سرعت صوت c بستگی دارد. تابع

$$F(F_T, V_0, D, \omega, \mu, \rho, c) = 0$$

باید در چهار پارامتری بعد مرتب شود، زیرا هفت کمیت و سه بعد وجود دارد. ابتدا ρ ، ω ، و D را به عنوان متغیرهای تکرارشونده انتخاب می‌کنیم

$$\Pi_1 = \rho^{x_1} \omega^{y_1} D^{z_1} F_T = (ML^{-2})^{x_1} (T^{-1})^{y_1} L^{z_1} MLT^{-2}$$

$$\Pi_2 = \rho^{x_2} \omega^{y_2} D^{z_2} V_0 = (ML^{-2})^{x_2} (T^{-1})^{y_2} L^{z_2} LT^{-1}$$

$$\Pi_3 = \rho^{x_3} \omega^{y_3} D^{z_3} \mu = (ML^{-2})^{x_3} (T^{-1})^{y_3} L^{z_3} ML^{-1}T^{-1}$$

$$\Pi_4 = \rho^{x_4} \omega^{y_4} D^{z_4} c = (ML^{-2})^{x_4} (T^{-1})^{y_4} L^{z_4} LT^{-1}$$

مانند قبل، معادله‌های همزمان x_1 ، y_1 ، z_1 و غیره را می‌نویسیم و حل می‌کنیم

$$\Pi_1 = \frac{F_T}{\rho \omega^2 D^2} \quad \Pi_2 = \frac{V_0}{\omega D} \quad \Pi_3 = \frac{\mu}{\rho \omega D^2} \quad \Pi_4 = \frac{c}{\omega D}$$

با حل پارامتر نیروی پیشران نتیجه می‌گیریم

$$\frac{F_T}{\rho \omega^2 D^4} = f_1 \left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D} \right)$$

از آنجا که پارامترها را مجدداً می‌توان ترکیب کرد تا صورتهای دیگری به دست آیند، به جای دومین جمله، حاصل ضرب اولین و دومین جمله، یعنی $V_0 D \rho / \mu$ ، و به جای سومین جمله، حاصل تقسیم جمله اول بر جمله سوم، یعنی V_0 / c را قرار می‌دهیم؛ بدین ترتیب داریم

$$\frac{F_T}{\rho \omega^2 D^4} = f_2 \left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{V_0 D \rho}{\mu}, \frac{V_0}{c} \right)$$

از میان پارامترهای بی‌بعد، اولی احتمالاً مهمتر است، زیرا سرعت پیشروی را به سرعت دوران ارتباط می‌دهد. پارامتر دوم عدد رینولدز است و آثار چسبندگی را نشان می‌دهد. آخرین پارامتر، یعنی سرعت پیشروی تقسیم بر سرعت صوت، همان عدد ماخ است که برای سرعتهای نزدیک و یا بیشتر از سرعت صوت اهمیت می‌یابد. آثار رینولدز معمولاً کوچک‌اند، به طوری که ترسیم $F_T / \rho \omega^2 D^4$ بر حسب $V_0 / \omega D$ باید شامل بیشترین اطلاعات باشد. ■

مراحل تحلیل ابعادی را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد

۱. انتخاب متغیرهای مربوط. این کار مستلزم شناختی از فرایند است.

۲. نوشتن روابط تابعی، مثل

$$F(V, D, \rho, \mu, c, H) = 0$$

۳. انتخاب متغیرهای تکرارشونده. (کمیت وابسته را متغیر تکرارشونده نگیرید.) این متغیرها باید تمام m بعد مسئله را در بر بگیرند. اغلب متغیر را طوری انتخاب می‌کنند که مقیاس و شرایط سینماتیکی را مشخص کند، و در حالتی که در این فصل بیشتر مورد نظرند، متغیری که به نیروها یا جرم سیستم مربوط شود، مانند D ، V و ρ ، انتخاب می‌شود.

۴. نوشتن پارامترهای Π بر حسب نماهای مجهول، مانند

$$\Pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} ML^{-1} T^{-1}$$

۵. نوشتن معادله‌های نمایی برای هر یک از عبارتهای Π ، به طوری که مجموع نماهای هر بعد

صفر باشد.

۶. حل همزمان معادله‌ها.

۷. جایگذاری نماها در عبارتهای Π مرحله ۵ برای به دست آوردن پارامترهای بی بعد Π .

۸. در نظر گرفتن رابطه تابعی

$$f_1(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$$

یا حل صریح یکی از Π ها:

$$\Pi_2 = f(\Pi_1, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m})$$

۹. ترکیب مجدد (در صورت تمایل) برای تغییر صورت پارامترهای Π ، یا حفظ همان تعداد

پارامتر مستقل.

فرمول دیگر پارامترهای Π

در یک روش سریع برای به دست آوردن پارامترهای Π ، که هانسکر و ریتمایر ابداع کرده‌اند (و در پایان فصل ارجاع داده‌ایم)، از متغیرهای تکرارشونده به عنوان کمیت‌های اولیه استفاده می‌کنند و M ، L و T را برحسب آنها حل می‌کنند. در مثال ۳.۵ متغیرهای تکرارشونده عبارت‌اند از D ، V و ρ ؛ بنابراین

$$\begin{aligned} V &= LT^{-1} & D &= L & \rho &= ML^{-2} \\ L &= D & T &= DV^{-1} & M &= \rho D^3 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

اکنون با استفاده از معادله‌های (۴.۳.۵) داریم

$$\mu = ML^{-1}T^{-1} = \rho D^3 D^{-1} D^{-1} V = \rho DV$$

از این رو پارامتر Π عبارت است از

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{\rho DV}$$

برای پیدا کردن دیگر پارامترهای Π می‌توان مستقیماً از معادله (۴.۳.۵) استفاده کرد. برای Π_2 داریم

$$g = LT^{-2} = DD^{-2}V^2 = V^2 D^{-1}$$

$$\Pi_2 = \frac{g}{V^2 D^{-1}} = \frac{gD}{V^2}$$

این روش مستلزم حل مکرر سه معادله با سه مجهول برای تعیین هر پارامتر Π نیست.

ضریب فشار

ضریب فشار $\Delta p / (\rho V^2 / 2)$ عبارت است از نسبت فشار به فشار دینامیکی. وقتی در سطح ضرب شود، نسبت نیروی فشار به نیروی لختی به دست می‌آید، زیرا $(\rho V^2 / 2) A$ نیرویی است که برای کاهش سرعت به صفر لازم است. ضریب را با تقسیم کردن بر γ به صورت $\Delta h / (V^2 / 2g)$ نیز می‌توان نوشت. برای شارش در لوله، معادله دارسی-وایسباخ اتلافهای h_l را با ضریب اصطکاک بی‌بعدی * مثل f به طول لوله L ، قطر D ، و سرعت V مربوط می‌سازد

$$\frac{fL}{D} = \frac{h_l}{V^2 / 2g} = f_2 \left(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) \quad \text{یا} \quad h_l = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

زیرا ثابت می‌شود که fL/D مساوی ضریب فشار است (نگاه کنید به مثال ۴.۵). در شارش لوله، گرانی بر اتلافها تأثیر نمی‌گذارد؛ بنابراین، \mathbf{F} را می‌توان حذف کرد. به طریق مشابه، پسا سطحی هیچ اثری ندارد، و \mathbf{W} حذف می‌شود. برای شارش پایای سیال، تراکم‌پذیری مهم نیست، و \mathbf{M} حذف می‌شود. l را به D ؛ l_1 را به ارتفاع برجستگی زبری ϵ در دیواره لوله، و l_2 را به فاصله ϵ' می‌توان ارجاع داد. بنابراین

$$\frac{fL}{D} = f_2 \left(\mathbf{R}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D} \right) \quad (5.3.5)$$

مسائل شارش در لوله را در فصلهای ۶ و ۱۲ بررسی می‌کنیم. اگر تراکم‌پذیری مهم باشد

$$\frac{fL}{D} = f_2 \left(\mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D} \right) \quad (6.3.5)$$

با شارش از روزه، که در فصل ۱۰ مطالعه می‌کنیم، $V = C_v \sqrt{2gH}$

$$\frac{H}{V^2 / 2g} = \frac{1}{C_v^2} = f_2 \left(\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) \quad (7.3.5)$$

* چند ضریب اصطکاک کاربرد بیشتری دارند. ضریب اصطکاک دارسی-وایسباخ، چهار برابر ضریب اصطکاک فایننگ است که آن هم f نامیده می‌شود.

که در آن l را به قطر روزنه و l_1 و l_2 را به ابعاد فرادست می‌توان ارجاع داد. چسبندگی و پسا سطحی در روزنه‌های بزرگ و سیالهای کم چسبندگی بی‌اهمیت است. آثار عدد ماخ برای شارش گاز با افت فشار زیاد، یعنی با اعداد ماخ نزدیک به یک، ممکن است خیلی مهم باشد. در شارش پایا و یکنواخت در کانال باز، که در فصل ۶ بررسی می‌کنیم، فرمول سزی سرعت متوسط V ، شیب کانال S ، و شعاع هیدرولیکی سطح مقطع R (مساحت مقطع تقسیم بر محیط خیس شده) را به هم مربوط می‌کند:

$$V = C\sqrt{RS} = C\sqrt{R\frac{\Delta h}{L}} \quad (۸.۳.۵)$$

C یک ضریب است که به اندازه، شکل و زبری کانال بستگی دارد. بنابراین

$$\frac{\Delta h}{V^2/2g} = \frac{2gL}{R} \frac{1}{C^2} = f_2 \left(\mathbf{F}, \mathbf{R}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) \quad (۹.۳.۵)$$

زیرا آثار تراکم‌پذیر و پسا سطحی معمولاً بی‌اهمیت‌اند.

پسا F وارد بر جسم را با رابطه $F = C_D A \rho V^2/2$ بیان می‌کنند، که در آن A مساحت نمونه‌وار جسم است که معمولاً تصویر جسم بر روی صفحه عمود بر شارش است. بنابراین F/A هم‌ارز Δp است؛ و

$$\frac{F}{A\rho V^2/2} = C_D = f_2 \left(\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{M}, \frac{l}{l_1}, \frac{l}{l_2} \right) \quad (۱۰.۳.۵)$$

جمله \mathbf{R} به پسا اصطکاک پوستی در اثر تنش چسبیده و همچنین به پسا شکلی یا نمایه‌ای در اثر جدایی خطوط جریان شارش از جسم مربوط می‌شود؛ اگر سطح آزادی وجود داشته باشد، \mathbf{F} به پسا موجی مربوط می‌شود؛ برای اعداد بزرگ ماخ، C_D با \mathbf{M} بیشتر تغییر می‌کند تا با پارامترهای دیگر؛ نسبتهای طولی ممکن است ناظر به شکل یا زبری سطح باشند.

عدد رینولدز

عدد رینولدز $VD\rho/\mu$ عبارت است از نسبت نیروهای لختی به نیروهای چسبندگی. عدد رینولدز بحرانی رژیمهای شارش را از هم متمایز می‌کند، مانند شارش لایه‌ای یا شارش متلاطم در لوله‌ها، در لایه مرزی و یا اطراف اشیاء غوطه‌ور. مقدار خاص آن به حالت شارش بستگی دارد. در شارش تراکم‌پذیر، عدد ماخ معمولاً از عدد رینولدز مهمتر است.

عدد فرود

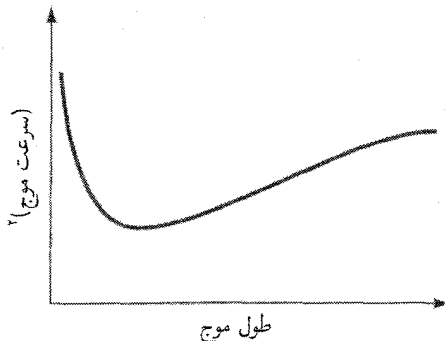
عدد فرود V/\sqrt{gl} را اگر مربع کنیم و سپس در ρA ضرب و تقسیم کنیم، نسبت نیروی دینامیکی (یا لختی) به نیروی وزن به دست می‌آید. در شارش مایع با سطح آزاد، نوع شارش (سریع* یا آرام) بستگی به این دارد که عدد فرود بزرگتر یا کوچکتر از واحد باشد. این عدد در محاسبات پرش هیدرولیکی، در طرح سازه‌های هیدرولیکی و در طراحی کشتی به کار می‌آید.

عدد وبر

عدد وبر $V^2 l \rho / \sigma$ عبارت است از نسبت‌های نیروهای لختی به نیروهای پسا سطحی (این موضوع وقتی واضحتر می‌شود که صورت و مخرج را در l ضرب کنیم). این عدد در سطح مشترک گاز-مایع یا مایع-مایع و همچنین در جایی که این سطوح مشترک با یک مرز در تماس باشند اهمیت دارد. پسا سطحی باعث امواج کوچک (مویین) و تشکیل قطره می‌شود و بر تخلیهٔ روزه‌ها و سرریزها در ارتفاعهای خیلی کوچک تأثیر می‌گذارد. اثر پسا سطحی بر انتشار موج را در شکل ۱.۵ نشان داده‌ایم. در سمت چپ نقطهٔ مینیمم منحنی، سرعت موج تحت کنترل پسا سطحی قرار دارد (این موجها را شکنج یا خیزابه می‌گویند)؛ در سمت راست مینیمم منحنی، آثار گرانی حکمفرماست.

عدد ماخ

اگر K مدول کشسانی حجم باشد، سرعت صوت در مایع در صورت $\sqrt{K/\rho}$ نوشته می‌شود (بخش ۸.۱) یا به صورت $c = \sqrt{kRT}$ نوشته می‌شود (k گرمای ویژه و T دمای مطلق گاز



شکل ۱.۵ سرعت موج برحسب طول موج امواج سطحی.

* وقتی سرعت شارش از سرعت \sqrt{gy} یک موج اولیه در مایع آرام بیشتر باشد، شارش در کانال باز در عمق y سریع است. شارش آرام وقتی رخ می‌دهد که سرعت شارش کمتر از \sqrt{gy} باشد.

کامل است). V/c یا $V/\sqrt{K/\rho}$ عدد ماخ است. عدد ماخ معیاری از نسبت نیروهای لختی به نیروهای کشسانی است. با مربع کردن V/c و ضرب صورت و مخرج در $\rho A/2$ ، صورت نیروی دینامیکی است و مخرج نیروی جنبشی شارش در شارش صوتی است. همچنین می‌توان نشان داد که عدد ماخ معیاری از نسبت انرژی جنبشی شارش به انرژی داخل سیال است. وقتی سرعتها نزدیک به سرعتهای صوتی موضعی یا بیشتر از آن باشند عدد ماخ مهمترین پارامتر در ربط دادن پارامترهاست.

تمرینها

۱.۳.۵ ترکیب مجدد نادرست از پارامترهای Π به صورت زیر

$$F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{\rho c D^2}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0 \quad \text{ب)} & F\left(\frac{c}{V_0}, \frac{\rho c D}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0 \quad \text{الف)} \\ & F\left(\frac{V_0 \mu}{\omega^2 D^2 \rho}, \frac{V_0 \rho D}{\mu}, \frac{c}{\omega D}\right) = 0 \quad \text{د)} & F\left(\frac{V_0}{\omega D}, \frac{V_0 c \rho}{\omega \mu}, \frac{\rho c D}{\mu}\right) = 0 \quad \text{ج)} \end{aligned}$$

ه) هیچکدام.

۲.۳.۵ متغیرهای تکرارشونده در تحلیل ابعادی باید الف) شامل متغیر وابسته باشند؛ ب) در صورت امکان دو متغیر با ابعاد یکسان داشته باشند؛ ج) در صورت امکان یکی از ابعاد را از هر متغیر مستثنی کنند؛ د) شامل متغیرهایی باشند که عوامل خیلی مهمی به حساب نمی‌آیند؛ ه) هیچکدام از این جوابها را بر آورده نکنند.

۳.۳.۵ کمیتی را در زیر انتخاب کنید که پارامتر بی بعد نباشد. الف) ضریب فشار؛ ب) عدد فرود؛ ج) ضریب اصطکاک دارسی و ایسباخ؛ د) چسبندگی سینماتیکی؛ ه) عدد وبر.

۴.۳.۵ چند پارامتر Π برای بیان توابع $F(a, V, t, \nu, L) = 0$ لازم است؟ الف) ۵؛ ب) ۴؛ ج) ۳؛ د) ۲؛ ه) ۱.

۵.۳.۵ کدام یک از عبارتهای زیر را می‌توان یک پارامتر Π از تابع $F(Q, H, g, V_0, \phi) = 0$ دانست، در صورتی که Q و g متغیر تکرارشونده در نظر گرفته شوند؟ الف) Q^2/gH^2 ؛ ب) V_0^2/g^2Q ؛ ج) $Q/g\phi^2$ ؛ د) Q/\sqrt{gH} ؛ ه) هیچکدام.

۶.۳.۵ کدام یک از جمله‌های زیر به صورت عدد رینولدز است؟

الف) $\frac{ul}{\nu}$ ؛ ب) $\frac{VD\mu}{\rho}$ ؛ ج) $\frac{uv}{l}$ ؛ د) $\frac{V}{gD}$ ؛ ه) $\frac{\Delta p}{\rho V^2}$

۷.۳.۵ عدد رینولدز را به کدام صورت می‌توان تعریف کرد؟ الف) نسبت نیروهای چسبندگی به نیروهای لختی؛ ب) نسبت نیروهای چسبندگی به نیروهای گرانی؛ ج) نسبت نیروهای گرانی به نیروهای لختی؛ د) نسبت نیروهای کشسانی به نیروهای فشاری؛ ه) هیچکدام.

۸.۳.۵ ضریب فشار به کدام صورت است؟

الف) $\frac{\Delta p}{\gamma H}$ ؛ ب) $\frac{\Delta p}{\rho V^2/4}$ ؛ ج) $\frac{\Delta p}{l\mu V}$ ؛ د) $\Delta p \frac{\rho}{\mu^2 l^2}$ ؛ ه) هیچکدام.

۹.۳.۵ ضریب فشار عبارت است از نسبت نیروهای فشاری به الف) نیروهای چسبندگی؛ ب) نیروهای لختی؛ ج) نیروهای گرانی؛ د) نیروهای پسا سطحی؛ ه) نیروهای انرژی کشسانی.

۱۰.۳.۵ حالتی را برگزینید که در آن نیروهای لختی بی‌اهمیت باشند: الف) شارش از بالای سرریز؛ ب) شارش در عبور از کانال باز؛ ج) امواجی که در برخورد با دیواره دریا می‌شکنند؛ د) شارش در لوله موین طولی؛ ه) شارش در شیر نیمه‌باز.

۱۱.۳.۵ کدام دو نیرو در شارش لایه‌ای بین دو صفحه موازی نزدیک به هم مهم‌ترند؟ الف) لختی، چسبنده؛ ب) فشاری، لختی؛ ج) گرانی، فشاری؛ د) چسبنده، فشاری؛ ه) هیچکدام.

۱۲.۳.۵ اگر خیز موینی Δh مایعی در یک لوله مدور با قطر D ، به پسا σ و نیروی گرانی واحد γ بستگی داشته باشد، فرمول خیز موینگی به کدام صورت است؟

الف) $\Delta h = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} F \left(\frac{\sigma}{\gamma D^2} \right)$ ؛ ب) $\Delta h = c \left(\frac{\sigma}{\gamma D^2} \right)^n$ ؛ ج) $\Delta h = cD \left(\frac{\sigma}{\gamma} \right)^n$ ؛ د) $\Delta h = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} F \left(\frac{\gamma D^2}{\sigma} \right)$ ؛ ه) هیچکدام.

۴.۵ نظریه II: انتقال گرما و انتقال جرم

روش II بوکینگ‌هام را در حالت انتقال گرما و جرم نیز می‌توان بسط داد؛ چند مثال در زیر آورده شده‌اند. در مثال ۶.۵ مبادله‌کن گرما بررسی شده است.

مثال ۶.۵ می‌خواهیم مجموعه‌ای از گروه‌های بی‌بعد را بیابیم که با آنها بتوان گرمای دفع‌شده از طریق سرعت متوسط در یک لوله مبادله‌کن را به متغیرهای دیگر ارتباط داد.

حل

فرض می‌کنیم متغیرهای مربوط عبارت‌اند از: قطر D لوله، چگالی ρ سیال، چسبندگی μ ، ظرفیت گرمایی، سرعت V ، ضریب h انتقال گرما، و رسانندگی گرمایی k . اساساً ضریب انتقال گرما یک متغیر مجهول است و ابعاد آن $[MT^{-2}\Theta]$ است. از آنجا که هفت متغیر و چهار بُعد مستقل M ، L ، T ، Θ وجود دارد، باید سه گروه بی‌بعد را پیدا کرد. اگر D ، k ، μ ، و V به عنوان تکرارکننده‌ها انتخاب شوند، در این صورت دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$\Pi_1 = D^{x_1} \mu^{y_1} V^{z_1} k^{w_1} c_p$$

$$\Pi_2 = D^{x_2} \mu^{y_2} V^{z_2} k^{w_2} \rho$$

$$\Pi_3 = D^{x_3} \mu^{y_3} V^{z_3} k^{w_3} h$$

Π_3 را مورد توجه قرار می‌دهیم و توانهای روی ابعاد را در آن بسط می‌دهیم

$$L : x_3 - y_3 + z_3 + w_3 = 0$$

$$M : -y_3 + z_3 + w_3 + 1 = 0$$

$$T : -y_3 - z_3 - 3w_3 - 3 = 0$$

$$\Theta : -w_3 - 1 = 0$$

که به سهولت حل می‌شوند و می‌دهند

$$x_3 = 1, \quad y_3 = z_3 = 0, \quad w_3 = -1$$

یا

$$\Pi_3 = \frac{hD}{k} \quad (1.4.5)$$

دو عدد دیگر را به‌طور مشابه می‌توان یافت

$$\Pi_1 = \frac{\mu c_p}{k} \quad (2.4.5)$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho DV}{\mu} = \frac{DV}{\nu} \quad (3.4.5)$$

نظریه II: انتقال گرما و انتقال جرم ۳۲۱

می‌دانیم که Π_2 عدد رینولدز است؛ گروه‌بندی جدید Π_2 عدد نوسلت، N_u ، نامیده می‌شود، و سنجش شدت همرفت رسانش در مکانیزمهای انتقال گرماست. گروه‌بندی Π_1 عدد پرانتل، P_r ، نامیده می‌شود که نسبت پخش گرما به پخش تکانه است. اگر صورت و مخرج Π_1 هر دو در ρ ضرب شوند، در این صورت Π_1 به v/k تبدیل می‌شوند، عدد پرانتل از نسبت پخشندگیهای تکانه و گرما تشکیل می‌شود. در مثال داده‌شده، اکنون باید رابطه زیر را به‌طور آزمایشی به‌دست آورد

$$N_u = f(R, P_r)$$

مثال ۷.۵ استخرهای سرد، دریاچه‌ها، مردابها در فصلهای بهار و تابستان تحت تأثیر گرمایش شدید تابشی قرار دارند. گرما به سرعت در سطح افزایش می‌یابد و سرعت القایی با دو تنش برشی گرما را در آبهای عمیقتر پخش می‌کنند. آمیختگی باد آنقدر قوی نیست که ستون آب را تا یک دمای یکنواخت به‌طور کامل مخلوط کند؛ در نتیجه چینه‌بندی با شیب دمای شدید عمودی به‌جود می‌آید. اگر فرض شود. بین چگالی و دما رابطه خطی وجود دارد [معادله (۱۰.۵.۱)]، در این صورت متغیرهای مربوط عبارت‌اند از عمق d ، چسبندگی μ ، سرعت v ، ضریب انبساط β ، اختلاف دمای $\Delta T'$ بین سطح و کف، شتاب ثقل g ، چگالی ρ ، و رسانندگی گرمایی تغییر یافته $k^* = k/c_p$. گروه‌های بی‌بعد که مقاومت چینه‌بندی را به متغیرهای مربوط ربط می‌دهند پیدا کنید.

حل

از هشت متغیر و چهار بعد چهار گروه بی‌بعد به‌دست می‌آید. اگر d, μ, β, g به عنوان متغیرهای تکراری انتخاب شوند، در این صورت گروه‌های بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Pi_1 = d^{x_1} \mu^{y_1} \beta^{z_1} g^{w_1} \rho$$

$$\Pi_2 = d^{x_2} \mu^{y_2} \beta^{z_2} g^{w_2} v$$

$$\Pi_3 = d^{x_3} \mu^{y_3} \beta^{z_3} g^{w_3} \Delta T'$$

$$\Pi_4 = d^{x_4} \mu^{y_4} \beta^{z_4} g^{w_4} k^*$$

پس از عملیات جبری، چهار گروه زیر به‌دست می‌آیند

$$\Pi_1 = \frac{d^{x_1} g^{w_1} \rho}{\mu} \quad \Pi_2 = \frac{v}{d^{1/2} g^{1/2}} = F$$

$$\Pi_3 = \beta \Delta T' \quad \Pi_4 = \frac{\mu}{k^*} = P_r$$

به سهولت دیده می‌شود که Π_2 عدد فرود است و Π_4 عدد پراتنل است. بدون از دست دادن دقت، می‌توان Π_1 را مجذور کرد و توانهای کسری را حذف کرد، و از آنجا که Π_3 بی‌بعد است، می‌توان آن را در Π_1 ضرب کرد و یک عدد جدید به نام عدد گراشف، G_r ، را به دست آورد

$$\Pi_5 = G_r = \Pi_1' \Pi_2 = \frac{\beta d^3 \rho^2 g \Delta T'}{\mu^2} \quad (۴.۴.۵)$$

عدد گراشف یک گروه بی‌بعد رایج است که در تحلیل اثر پتانسیل همرفت ناشی از اختلافهای زیاد دما یا شیب بزرگ چگالی استفاده می‌شوند. بنابراین، اگر بخواهیم رابطه‌ای بین چینه‌بندی (یعنی، $\Delta T'$) و متغیرهای مسئله را به دست آوریم، باید رابطه‌ی تابعی بین G_r ، F ، و P_r در آزمایشگاه تعیین شود، یعنی،

$$G_r = f(F, P_r)$$

مثال ۸.۵ غلظت اکسیژن محلول در کف یک مخزن تأمین آب تابعی از فرایندهای فیزیکی و شیمیایی، هر دو است. مقدار اکسیژن محلول مبادله شده بین رسوبهای نزدیک سطح، C_b و ستون آب لایه رویی، C_{wc} ، تابعی از اختلاف غلظت $C_b - C_{wc}$ است. غلظت C_{wc} نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد زیرا واپاشی، گیاهان و جانوران ریز شناور در سطح آب اکسیژن محلول را بر طبق آهنگ واکنش مرتبه اول $-k_1 C_{wc}$ مصرف می‌کنند. متغیرهای زیر برای مسئله اساسی است: عمق d ، چگالی ρ ، سرعت v ، چسبندگی سینماتیکی ν ، پخشندگی جرم \mathcal{D} ، ضریب انتقال جرم h ، و آهنگ واپاشی k_1 . رابطه‌ای بین متغیرها بیابید که اهمیت جمله چشمه‌چاه را نشان دهد.

حل

با هفت متغیر و سه بعد، چهار گروه بی‌بعد لازم می‌شوند. اگر ρ ، d و \mathcal{D} به عنوان متغیرهای تکراری به کار روند، در این صورت

$$\Pi_1 = d^{x_1} \rho^{y_1} \mathcal{D}^{z_1} \nu$$

$$\Pi_2 = d^{x_2} \rho^{y_2} \mathcal{D}^{z_2} h$$

$$\Pi_3 = d^{x_3} \rho^{y_3} \mathcal{D}^{z_3} v$$

$$\Pi_4 = d^{x_4} \rho^{y_4} \mathcal{D}^{z_4} k_1$$

حل جبری می‌دهد

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{dv}{\mathcal{D}} & \Pi_2 &= \frac{dh}{\mathcal{D}} \\ \Pi_3 &= \frac{\nu}{\mathcal{D}} & \Pi_4 &= \frac{d^2 k_1}{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

گروه Π_2 عدد شروود، S_h ، یا عدد نوسلت جرم نامیده می‌شود و، مانند حالت گرمایی، مقاومت همرفت به مقاومت انتقال پخششی را نشان می‌دهد. Π_3 عدد اشمیت، S_c ، است که پخشندگی تکانه به پخشندگی جرم را نشان می‌دهد، و اگر Π_1 بر Π_3 تقسیم شود، عدد رینولدز، R ، به دست می‌آید. بالاخره، گروه Π_4 نامی ندارد؛ ولی، اگر Π_4 بر Π_1 تقسیم شود، عدد دامکولر، D_N ، تعریف می‌شود. در این صورت چهار گروه نهایی به شکل زیر در می‌آید

$$D_N = \frac{k_1 d}{\nu} \quad (5.4.5)$$

$$S_h = \frac{dh}{\mathcal{D}} \quad (6.4.5)$$

$$S_c = \frac{\nu}{\mathcal{D}} \quad (7.4.5)$$

$$R = \frac{dv}{\nu} \quad (8.4.5)$$

عدد نوسلت و عدد شروود

S_h و N_{Gr} مقاومت نسبی فرایندهای همرفت یا فرارفت (ادوکسیون) را با پخش مولکولی گرما یا جرم مقایسه می‌کنند. آنها مشابه عدد رینولدز هستند، از این جهت که به هنگام طراحی هندسه شارش برای به دست آوردن آهنگهای مشخص مبادله گرما یا شار جرم، متغیرهای اصلی طراحی را تشکیل می‌دهند.

عدد پرائتل و عدد اشمیت

P_r و S_h خواص سیال را مقایسه می‌کنند. P_r پخشندگی تکانه به پخشندگی گرما را نشان می‌دهد و S_h پخشندگی تکانه به پخشندگی جرم را نشان می‌دهد. در حالی که آنها اعداد سهمی در طراحی فرایند شارش‌اند، اهمیت آنها در شارشهایی که به طور طبیعی روی می‌دهند در مقایسه با عوامل دیگر کم است.

تمام اعداد بالا در هر مسئله انتقال گرما یا جرم اعداد اصلی است. دو عدد زیر فرایندهای را که لزوماً عمومی نیستند توصیف می‌کنند.

عدد گرافش

G_r مقاومت‌های نسبی همرفت را در میدان شارش مقایسه می‌کند. این عدد که ابتدا در همرفت طبیعی ناشی از میدانهای دما یا چگالی ناپایا به کار رفت، در تحلیل تمام شارشها با شبیه‌های چگالی بزرگ فضایی استفاده پیدا کرده است.

عدد دامکولر

D_N مقاومت تبدیل شیمیایی یا بیولوژیکی را به تغییر غلظت جرم ناشی از فرارفت (ادوکسیون) نشان می‌دهد. در فرایند صنعتی خیلی استفاده می‌شود اما در تحلیلهای انتقال طبیعی محیطی اهمیت چندانی ندارد.

۵.۵ تحلیل ابعادی معادله‌های حاکم

بهنجارش تک‌مقیاس

همانطور که در مقدمه و قسمت قبل گفته شد، تحلیل ابعادی را با دو موضوع می‌توان در نظر گرفت: کشف شکل اولیه رابطه‌های مجهول بین متغیرها، و مقایسه اندازه یا اهمیت نسبی یک فرایند مکانیک سیالاتی یا انتقالی در برابر دیگری. هدف دوم در این قسمت فرعی در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌شود تمام اطلاعات نیز یک مسئله از طریق معادله دیفرانسیل به دست آمده در قسمت قبل قابل بیان است.

روش بر مبنای بهنجارش تمام متغیرهای وابسته و مستقل است. بهنجارش در این متن یعنی ارجاع تمام کمیتها در این معادله به مقادیر ثابتی که فرض می‌شود بیشترین مقادیری‌اند که در مسئله وجود دارند. به این طریق، تمام متغیرهای وابسته و مستقل به دست آمده مقادیری بین ± 1 تا ∞ دارند. با جایگذاری این متغیرهای جدید در معادله‌های حاکم و تلاش برای به دست آوردن سازگاری یا تشابه کامل بین معادله‌هایی که جدید تبدیل شده و معادله‌های اولیه، اندازه‌گیریهایی کمی به شکل پارامترهای بی‌بعد به دست می‌آیند. با این گروه‌ها یا اعداد بی‌بعد می‌توان اهمیت فرایندهای مختلف مسئله را مستقیماً ارزیابی کرد.

برای مثال، می‌خواهیم گرما، اکسیژن محلول، و مشخصه‌های میدان شارش مخزن تأمین آب را تعیین کنیم. طول مخزن 20 km ، دمای ماکزیم T_m ، و حداکثر غلظت اکسیژن محلول C_m است. تحلیل ابعادی با تعریف پارامترهای مقیاس‌بندی از روی ابعاد داده شده و با تعریف متغیرهای بی‌بعد جدید شروع می‌شود. متغیرهای وابسته عبارت‌اند از w, v, ρ, T, C ، که به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند: $w_* = w/u_m, v_* = v/u_m, \rho_* = \rho/\rho_{ref}, T_* = T/T_m, C_* = C/C_m$

و $C_* = C/C_m$. در اینجا، u_m سرعت مرجع است، که باید مشخص شود، و فشار مرجع p_{ref} است که آن هم باید مشخص شود. متغیرهای مستقل عبارت‌اند از x, y, z ، و t که به صورت زیر بهنجار می‌شوند: $x_* = x/L, y_* = y/L, z_* = z/L, t_* = t/t_{ref}$.

جایگذاری متغیرهای جدید در سه نوع عملکرد زیر احتیاج به کمی دقت دارد. ابتدا، مشتقها با تعریف متغیر مستقل تبدیل می‌شوند. از این رو بنا بر حساب دیفرانسیل و انتگرال، مشتق زمانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_*} \frac{\partial t_*}{\partial t} = \frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial t_*} \quad (۱.۵.۵)$$

در این معادله $\partial t_*/\partial t = 1/t_{ref}$ ، مشتقهای فضایی به طریق مشابه به دست می‌آیند، یعنی،

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_*} \frac{\partial x_*}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_*} \quad (۲.۵.۵)$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_*} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} \quad (۳.۵.۵)$$

سپس متغیرهای وابسته در این سه رده مشتق‌گیری جایگذاری می‌شوند. اگر، مثلاً از غلظت استفاده شود، مشتق زمانی عبارت است از

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{t_{ref}} \frac{\partial}{\partial t_*} (C_* C_m) = \frac{C_m}{t_{ref}} \frac{\partial C_*}{\partial t_*} \quad (۴.۵.۵)$$

در حالی که مشتقهای فضایی به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_*} (C_* C_m) = \frac{C_m}{L} \frac{\partial C_*}{\partial x_*} \quad (۵.۵.۵)$$

و

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x_*^2} (C_* C_m) = \frac{C_m}{L^2} \frac{\partial^2 C_*}{\partial x_*^2} \quad (۶.۵.۵)$$

اگر معادلهٔ دیفرانسیل حاکم اولیه [معادله (۱۰.۸.۴)] به صورت زیر باشد

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \mathcal{D} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] + S_c$$

در این صورت با استفاده از عملگرهای تبدیل در معادله‌های (۱.۵.۵) تا (۶.۵.۵) داریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C_m}{t_{ref}} \right) \frac{\partial C_*}{\partial t} + \left(\frac{u_m C_m}{L} \right) u_* \frac{\partial C_*}{\partial x_*} + \left(\frac{u_m C_m}{L} \right) v_* \frac{\partial C_*}{\partial y_*} + \left(\frac{u_m C_m}{L} \right) w_* \frac{\partial C_*}{\partial z_*} \\ & = \mathcal{D} \left[\left(\frac{C_m}{L^2} \right) \frac{\partial^2 C_*}{\partial x_*^2} + \left(\frac{C_m}{L^2} \right) \frac{\partial^2 C_*}{\partial y_*^2} + \left(\frac{C_m}{L^2} \right) \frac{\partial^2 C_*}{\partial z_*^2} \right] + (S_{mc}) S_{c*} \quad (۷.۵.۵) \end{aligned}$$

جمع کردن جمله‌ها می‌دهد

$$\left(\frac{C_m}{t_{ref}} \right) \frac{\partial C_*}{\partial t} + \left(\frac{u_m C_m}{L} \right) (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) C_* = \frac{\mathcal{D} C_m}{L^2} \nabla_*^2 C_* + (S_{mc}) S_{c*} \quad (۸.۵.۵)$$

در معادله (۸.۵.۵)، ∇_*^2 و ∇_* شکل‌های بی‌بعد اپراتورها هستند، مثلاً

$$\nabla_* = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_*} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_*} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_*} \quad (۹.۵.۵)$$

معادله‌های پیوستگی، تکانه، و انتقال گرما در یک سیال تراکم‌ناپذیر را به‌طور مشابه می‌توان تبدیل کرد. معادلهٔ پیوستگی عبارت است از

$$\left(\frac{u_m}{L} \right) \nabla_* \cdot \mathbf{v}_* = 0 \quad (۱۰.۵.۵)$$

معادلهٔ تکانه به شکل زیر است

$$\left(\frac{u_m}{t_{ref}} \right) \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + \left(\frac{u_m^2}{L} \right) (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) \mathbf{v}_* = - \left(\frac{p_{ref}}{\rho L} \right) \nabla_* p_* - g \nabla_* h_* + \left(\frac{\nu u_m}{L^2} \right) \nabla_*^2 \mathbf{v}_* \quad (۱۱.۵.۵)$$

و معادلهٔ انتقال گرما عبارت است از

$$\left(\frac{T_m}{t_{ref}} \right) \frac{\partial T_*}{\partial t} + \left(\frac{u_m T_m}{L} \right) \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* T_* = \left(\frac{\alpha T_m}{L^2} \right) \nabla_*^2 T_* + (S_{mT}) S_{T*} \quad (۱۲.۵.۵)$$

در این مرحله، هر جمله داخل پرانتز به عنوان یک ضریب مقیاس در قطر گرفته می‌شود که هر جمله دیفرانسیلی را تا مقدار اولیه‌اش در حالت تبدیل‌نشده منبسط یا منقبض می‌کند. مزیت این روش در این است که مقدار جمله‌های دیفرانسیلی از 0 تا 1 تغییر می‌کند.

دو توضیح دیگر، قبل از انجام عملیات لازم است. ابتدا، تقسیم کردن معادله پیوستگی بر u_m/L ، یک معادله پیوستگی تبدیل شده را می‌دهد که دقیقاً با معادله تبدیل‌نشده همسان است، زیرا حجم از این رو جرم، صرف‌نظر از تبدیل، باید به‌طور همسان حفظ شوند.

دوم، جمله گرانشی در معادله (۱۱.۵.۵) تبدیل شد، اما از آنجا که بی‌بعد است (جمله کسینوس)، این کار لازم نیست.

برای مقایسه اندازه یا اهمیت یک مجموعه از جمله‌های دیفرانسیلی با جمله‌های دیگر، ضریبهای مقیاس را می‌توان مقایسه کرد. یک مقایسه معمولی این است که نسبت تمام جمله‌های ضریب مقیاس داخل پرانتزها به ضریب مقیاس شتاب محلی محاسبه می‌شود. بنابراین، با تقسیم کردن معادله تکانه بر (u_m^2/L) ، معادله (۱۱.۵.۵) به شکل زیر در می‌آید

$$\left(\frac{L}{u_m t_{ref}}\right) \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) \mathbf{v}_* = - \left(\frac{p_{ref}}{\rho u_m^2}\right) \nabla_* p_* - \left(\frac{gL}{u_m^2}\right) \nabla_* h_* + \left(\frac{\nu}{u_m L}\right) \nabla_*^2 \mathbf{v}_* \quad (13.5.5)$$

چند موضوع دیگر آشکار می‌شود. ابتدا بسیار با اهمیت این است که تمام جمله‌های داخل پرانتز غیرابعادی (بی‌بعد) است. در حقیقت مقایسه با بخش ۴.۵ نشان می‌دهد که این اعداد با اعدادی که با روش Π با کینگم به‌طور تجربی به‌دست آمدند همسان‌اند. معادله (۱۳.۵.۵) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$[S_t] \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) \mathbf{v}_* = - [E] \nabla_* p_* - \frac{1}{[F]^2} \nabla_* h_* + \left(\frac{1}{[R]}\right) \nabla_*^2 \mathbf{v}_* \quad (14.5.5)$$

که در آن

$S_t = L/u_m t_{ref}$ = یک شکل از عدد اشتراک

$E = p_{ref}/\rho u_m^2$ = عدد اوایلر

$F = \sqrt{u_m^2/gL}$ = عدد فرود

$R = u_m L/\nu$ = عدد رینولدز

اساساً با این اعداد می‌توان "مقاومت" هر جمله را با جمله‌های اینرسی مقایسه کرد. مثلاً عدد اویلر نسبت جمله فشار به جمله اینرسی است، عدد رینولدز نسبت جمله اینرسی به جمله چسبندگی است، و عدد فرود نسبت جمله اینرسی به نیروی گرانی است.

با عدد اشتراک می‌توان یک پدیدهٔ تناوبی را با شتاب زمانی قوی مقایسه کرد، مثلاً موج گرانش که با باد به حرکت درمی‌آید را می‌توان مقایسه کرد با جملهٔ شتاب اینرسی که از فرایندهای کاملاً متفاوت، مثلاً گردش با محرک باد، ایجاد می‌شود. البته، این حالتی است که اغلب مبنای زمانی در عدد اشتراک، t_{ref} ، را L/u_m می‌گیرند که در این حالت $S_t = 1$ و شتاب بی‌بعد با شتاب اولیه اویلری همسان یا مشابه است.

بسیار مطلوب است که بین معادله‌های اولیه و معادله‌های هنجاریده تشابه کامل برقرار باشد. ولی، اگر تلاش کنیم مقادیری برای L و u_m انتخاب کنیم که با آنها بتوان اعداد بی‌بعد باقیمانده را به ۱ رساند. با نگاه به تعریفهای

$$\mathbf{R} = \frac{u_m L}{\nu} \quad \mathbf{E} = \frac{p_{ref}}{\rho u_m^2} \quad \mathbf{F} = \frac{u_m}{\sqrt{gL}}$$

به سهولت دیده می‌شود که \mathbf{R} و \mathbf{F} را هرگز نمی‌توان به‌طور همزمان کاهش داد زیرا \mathbf{R} با L متناسب است در حالی که $\mathbf{F} \propto \sqrt{L}$. در نتیجه، امکان کاهش ماکزیمم وقتی است که معادلهٔ نهایی برحسب \mathbf{R} یا \mathbf{F} باشد.

اکنون با مراجعه به معادله‌های انتقال گرما و غلظت، معادله‌های ضریب مقیاس، معادله‌های (۸.۵.۵) و (۱۲.۵.۵)، را نیز بر ضریب مقیاس فرارفت (ادوکسیون) تقسیم می‌کنیم، و در نتیجه معادله غلظت زیر

$$[\mathbf{S}_t] \frac{\partial C_*}{\partial t_*} + (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) T_* = \frac{1}{[\mathbf{P}_{em}]} \nabla_*^2 C_* + [\Phi_C] S_{C_*} \quad (15.5.5)$$

و معادلهٔ انتقال گرما زیر را به‌دست می‌آوریم

$$[\mathbf{S}_t] \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + (\mathbf{v}_* \cdot \nabla_*) T_* = \frac{1}{[\mathbf{P}_e]} \nabla_*^2 C_* + [\Phi_T] S_{T_*} \quad (16.5.5)$$

مجدداً عدد اشتراک در جملهٔ شیب به زمانی وارد شده است، و مانند قبل اگر t_{ref} به صورت L/U_m انتخاب شود، عدد اشتراک مساوی با ۱ است.

جملهٔ گروه‌های دوم در معادله (۱۵.۵.۵) معکوس عدد پکلت جرم، \mathbf{P}_{em} ، است که به صورت $u_m L / \mathcal{D}$ تعریف می‌شود. به‌طور مشابه، $u_m L / \alpha$ در معادله (۱۶.۵.۵) عدد پکلت، \mathbf{P}_e ، نامیده

می‌شود. هر دو عدد انتقال پخش را ارزیابی می‌کنند. عدد پکلت اغلب به صورت زیر برحسب عدد رینولدز نوشته می‌شود:

$$P_e = RP_r \quad (۱۷.۵.۵)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} P_r &= \nu/\alpha \\ P_{em} &= RS_c \end{aligned} \quad (۱۸.۵.۵)$$

که در آن،

$$S_c = \nu/\mathcal{D}$$

عدد پرانتل، P_r ، و عدد اشمیت، S_c ، به ترتیب مقاومت نسبی "پخشندگی تکانه" را، که با چسبندگی سینماتیکی پارامتری شده است، به پخش گرما و جرم نشان می‌دهند. سرانجام، گروه‌های بی‌بعد چشمه-چاه، Φ_c و Φ_T ، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Phi_c = \left[\frac{S_{mc}L}{u_m C_m} \right] = \left[\frac{S_{mctref}}{C_m} \right] \quad (۱۹.۵.۵)$$

$$\Phi_T = \left[\frac{S_{mT}L}{u_m T_m} \right] = \left[\frac{S_{mTtref}}{T_m} \right] \quad (۲۰.۵.۵)$$

البته، گروه‌های بالا در اینجا بی‌نام‌اند زیرا آنها، برحسب شکل تابعی جمله سرچشمه-چاه، شکل‌های مختلفی از Φ_c و Φ_T است. از این‌رو به تعداد شکل‌های تابعی گروه‌های نام‌دار وجود دارند. برای مثال، اگر جمله چشمه-چاه در شکل ابعادی آهنگ واکنشی مرتبه اولی باشد که با ثابت k_1 پارامتری شده است، در این صورت $S_c = k_1 C$ ، S_{mc} در معادله (۱۹.۵.۵) به $k_1 C_m$ تبدیل می‌شود، و عدد $[k_1 L/u_m]$ شکلی از عدد دامکولر است که اهمیت تولید شیمیایی C را دو برابر انتقال فرارفتی (ادوکتیو) ارزیابی می‌کند.

پهنجارش دومقیاسی: لایه مرزی

وقتی دو مقیاس طول در مسئله وجود دارد، لایه مرزی تعریف می‌شود. به‌طور نوعی، مقیاس افقی چند مرتبه مقداری بزرگتر از مقیاس عمودی است. مثالهایی در این مورد عبارت‌اند از شارش‌هایی که به‌طور طبیعی در دریاچه‌ها، رودخانه‌ها، دهانه‌ها و در اتمسفر روی می‌دهند. تمام شارش‌های مهندسی در نزدیک مرزهای جامد مانند دیواره‌های جامد، سطوح بال، یا بدنه‌های کشتی که لایه

مرزی دارند. استفاده از روشهای بهنجارش بالا با دو مقیاس طول معادله‌های لایه مرزی را می‌دهد که در فصل ۷ تحلیل می‌شوند.

۶.۵ مطالعات مدل و تشابه

طراحان معمولاً برای پیشنهاد ماشینها و سازه‌های هیدرولیکی از مطالعات مدل مدد می‌گیرند. با این مطالعات می‌توان شارش را مجسم کرد و داده‌های عددی، مثل قطر سرریزها و دریچه‌ها، ژرفای شارش، توزیعیهای سرعت، نیروی وارد بر دریچه‌ها، بازدها و ظرفیتهای پمپها و توربینها، توزیعیهای فشار و اتلافها را به‌دست آورد.

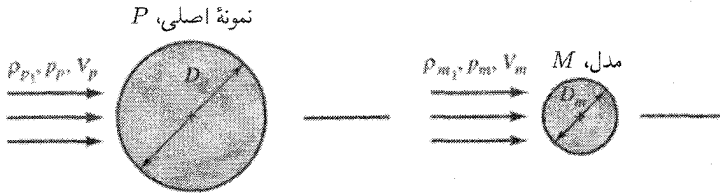
اگر بخواهیم داده‌های کمی دقیقی از مطالعه مدل به‌دست آوریم باید بین مدل و نمونه اصلی تشابه دینامیکی برقرار باشد. این تشابه مستلزم این است که (۱) تشابه دقیق هندسی وجود داشته باشد و (۲) نسبت فشارهای دینامیکی در نقاط متناظر ثابت باشد. لازمه دوم را به صورت تشابه سینماتیکی نیز می‌توان بیان کرد، یعنی اینکه خطوط جریان باید تشابه هندسی داشته باشد.

تشابه هندسی شامل زبری حقیقی سطح مدل و نمونه اصلی نیز می‌شود. اگر اندازه تمام ابعاد خطی مدل یک دهم نمونه اصلی باشد، ارتفاع برجستگیهای زبری نیز باید همین نسبت را داشته باشد. برای اینکه در نقاط متناظر مدل و نمونه اصلی، فشارهای دینامیکی به یک نسبت باشند، نسبتهای انواع مختلف نیروها در نقاط متناظر باید یکسان باشند. از این رو، برای آنکه تشابه دینامیکی کامل برقرار باشد، اعداد ماخ، رینولدز، فرود، و وبر باید در مدل و نمونه اصلی یکسان باشند.

تحقق دقیق این لازمه‌ها عموماً مشکل است، مگر در نسبت مقیاس ۱:۱. خوشبختانه در اکثر حالتها، فقط دو تا از نیروها مقدار یکسان دارند. بررسی چند حالت این موضوع را روشن می‌کند. برای درک تشابه، تحلیل آزمایشگاهی شارش روی یک کره را در نظر بگیرید؛ کره نمونه اصلی (با جهان واقعی) و کره مدل در شکل ۲.۵ نشان داده شده‌اند. اگر مدل نیز کره باشد، تشابه هندسی برقرار می‌شود. به علاوه هر بُعد خطی باید در نسبت D_m/D_p باشد.

این حتی شامل زبرهای با مقیاس کوچک نیز می‌باشد.

شرط برقراری تشابه دینامیکی این است که چندوجهی‌های "نیرو" در مدل و نمونه اصلی مشابه باشند. بر هر کره سه نیروی خالص اثر می‌کند: نیروی فشاری f_p ؛ نیروی چسبندگی یا برشی، f_r ؛ و نیروی اینرسی ناشی از شتاب، f_i . این نیروها باید یک چندوجهی بسته را تشکیل دهد مانند آنچه در شکل ۲.۵ برای نمونه اصلی رسم شده است. چندوجهی نیروی مدل مانند چندوجهی نیروی نمونه اصلی باید بسته باشد و مانند آن مقیاس خطی داشته باشد. برای برقراری چنین



تشابه هندسی



چسبندگی سینماتیکی

تشابه دینامیکی

شکل ۲.۵ تشابه هندسی و دینامیکی در شارش روی کره.

تشابه‌ی، نسبت اضلاع باید حفظ شود، یعنی

$$\left[\frac{f_p}{f_i} \right]_{\text{نمونه اصلی}} = \left[\frac{f_p}{f_i} \right]_{\text{مدل}} \quad (۱.۶.۵)$$

و

$$\left[\frac{f_\tau}{f_i} \right]_{\text{نمونه اصلی}} = \left[\frac{f_\tau}{f_i} \right]_{\text{مدل}} \quad (۲.۶.۵)$$

توجه کنید که این نسبتها از گروه‌بندیهای بی‌بعد در قسمت قبل به‌دست آمده‌اند. چندوجهی‌های نیرو متشابه‌اند اگر

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_m \quad (۳.۶.۵)$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_m \quad (۴.۶.۵)$$

به عبارت دیگر برقراری تساوی بین چندوجهی‌های نیروی مدل و نمونه اصلی با برقراری تساوی اعداد بی‌بعد بین مدل و نمونه اصلی حاصل می‌شود. تحقیق دقیق این لازمه‌ها عموماً مشکل است، مگر در نسبت مقیاس ۱:۱. در زیر چند مثال برای نشان دادن لازمه‌ها آورده شده‌اند.



شکل ۳.۵. آزمونهای تونل باد در مورد روساخت هواپیما بر مدل را وارونه و از سقف آویزان کرده‌اند. (عکسبرداری در آزمایشگاههای هوانوردی و فضاوردی دانشگاه میشیگان برای بنگاه علوم دینامیکی.)

آزمونهای تونل باد و تونل آب

برای آزمایش خطوط جریان و نیروهایی که از شارشهای سیال بر اجسام کاملاً غوطه‌ور ناشی می‌شوند، از این تجهیزات استفاده می‌کنند. نوع آزمون و دسترسی به تجهیزات تعیین می‌کند که چه نوع تونلی به کار می‌رود. چون چسبندگی سینماتیکی آب حدود یک دهم چسبندگی سینماتیکی هواست، برای مطالعات مدل در اعداد رینولدز نسبتاً بالا از تونل آب می‌توان استفاده کرد. حتی اثر پسا چترهای مختلف نجات را هم در تونل آب مطالعه کرده‌اند؛ در سرعت‌های زیاد هوا، آثار تراکم‌پذیری در نتیجه عدد ماخ را باید در نظر گرفت، و حتی شاید همین دلیل اصلی تحقیق باشد. شکل ۳.۵ مدل یک هواپیما بر نشان می‌دهد که برای مطالعه الگوی شارش در اطراف روساخت هواپیما، در تونل کم‌سرعتی آزمایش می‌شود. مدل را وارونه و از سقف آویزان کرده‌اند تا از طره‌های پشم به عنوان شاخص جهت شارش استفاده کنند. در پشت مدل وسیله‌ای برای تشخیص سرعت و جهت هوا در محل‌های مختلف مسیر پرواز هواپیما وجود دارد.

شارش در لوله

در شارش پایا در لوله، فقط نیروهای چسبندگی و لختی اهمیت خاصی دارند؛ از این رو، در تشابه دینامیکی، یکسان بودن عدد رینولدز در مدل و نمونه اصلی است که تشابه دینامیکی را تأمین می‌کند. ضرایب مختلف متناظر فشار یکسان‌اند. برای آزمون با سیالاتی که در مدل و نمونه اصلی دارای چسبندگی سینماتیکی یکسانی‌اند، حاصل ضرب VD باید یکسان باشد. این امر غالباً سرعتهای بسیار زیاد را در مدل‌های کوچک ایجاب می‌کند.

ساختارهای هیدرولیکی باز

ساختارهایی مانند آبریزها، حوضه‌های راکد، گذرگاههای کانال، و سرریزها عموماً نیروهایی ناشی از گرانی (ناشی از تغییرات ارتفاع سطح مایع) و نیروهای لختی دارند که از نیروهای چسبندگی و نیروهای برشی متلاطم بزرگترند. در این حالتها، تشابه هندسی و یکسانی عدد فرود در مدل و نمونه اصلی تقریب خوبی برای تشابه دینامیکی به دست می‌دهد؛ بدین ترتیب

$$\frac{V_m^2}{g_m l_m} = \frac{V_p^2}{g_p l_p}$$

از آنجا که گرانی ثابت است، نسبت سرعت با ریشه دوم نسبت مقیاس $\lambda = l_p/l_m$ تغییر می‌کند، و

$$V_p = V_m \sqrt{\lambda}$$

زمانهای متناظر برای وقوع رویدادها (مانند زمان عبور ذره از گذرگاه) به هم مربوط‌اند؛ بدین ترتیب

$$t_p = t_m \frac{l_p}{l_m} \frac{V_m}{V_p} = t_m \sqrt{\lambda} \quad \text{و} \quad t_p = \frac{l_p}{V_p} \quad , \quad t_m = \frac{l_m}{V_m}$$

نسبت تخلیه Q_p/Q_m عبارت است از

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{l_p^3/t_p}{l_m^3/t_m} = \lambda^{5/2}$$

نسبت نیروها، مثلاً نیروهای وارد بر دریچه‌ها، F_p/F_m عبارت‌اند از

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\gamma h_p l_p^2}{\gamma h_m l_m^2} = \lambda^2$$



شکل ۴.۵ آزمون مدل در بندرگاه (شعبه مهندسی عمران، دانشگاه میسیگان).

که در آن h ارتفاع است. به روشی مشابه، نسبتهای مربوط دیگری می توان استنتاج کرد، طوری که نتایج مدل را بتوان کارکرد نمونه اصلی دانست.

شکل ۴.۵ آزمون مدل را نشان می دهد که برای تعیین اثر موج شکن بر موج زایی یک بندرگاه انجام شده است.

مقاومت کشتی

مقاومت در برابر حرکت کشتی در آب شامل پسا فشاری، اصطکاک پوستی و مقاومت موجی است. مطالعات مدل به دلیل وجود سه نوع نیروی مهم، یعنی لختی، چسبندگی و گرانی، پیچیده اند. مطالعات اصطکاک پوستی باید بر اعداد رینولدز مساوی در مدل و نمونه اصلی مبتنی باشند، اما مقاومت موجی به عدد فرود بستگی دارد. برای برآورد کردن هر دو شرط، اندازه مدل و نمونه اصلی باید یکسان باشد.

با استفاده از مدل کوچک و اندازه‌گیری پسا کل به هنگامی که مدل کشیده می‌شود، می‌توان بر این مشکل غلبه کرد. سپس اصطکاک پوستی را که برای مدل محاسبه می‌کنند و از پسا کلی می‌کاهند. با استفاده از قانون فرود، مقدار باقیمانده را در مورد اندازه نمونه اصلی محاسبه می‌کنند؛ سپس اصطکاک پوستی نمونه اصلی را محاسبه و به آن اضافه می‌کنند تا مقاومت کل ناشی از آب به دست می‌آید. شکل ۵.۵ تغییرات چشمگیر نمایه موج را نشان می‌دهد که از یک دماغه تجزید طرح شده نتیجه شده است. با چنین آزمونهایی به کمک قانون فرود می‌توان موج‌زایی و پسا حاصل در نمونه اصلی را پیش‌بینی کرد.

ماشینهای هیدرولیکی

سرعت چرخشی ماشینهای هیدرولیکی یک متغیر اضافی را وارد می‌کند. در قسمتهای متحرک ماشینهای هیدرولیکی برای اطمینان یافتن از تشابه خطوط جریان در مدل و نمونه اصلی به پارامتر دیگری نیز نیاز داریم. این پارامتر باید شارش خروجی (تخلیه) را به سرعت قطعات متحرک مربوط سازد. در ماشینهای هندسه-مشابه، اگر نمودارهای سرعت ورود یا خروج از قطعات متحرک متشابه باشند، واحدها مشابه هستند؛ یعنی در عمل تشابه دینامیکی وجود دارد. عدد فرود چندان اهمیتی ندارد، ولی آثار عدد رینولدز (موسوم به آثار مقیاس، زیرا غیرممکن است که اعداد رینولدز را در واحدهای مشابه یکسان نگه داشت) ممکن است ۲ یا ۳ درصد اختلاف بازده بین مدل و نمونه اصلی به وجود آورد. عدد ماخ نیز در توربینهای گازی و کمپرسورهای شارش-محوری اهمیت دارد.

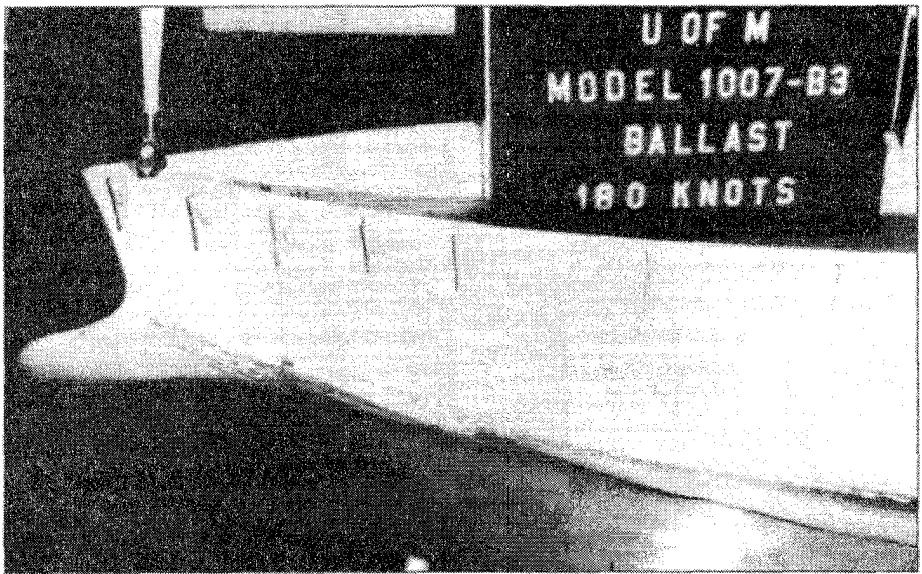
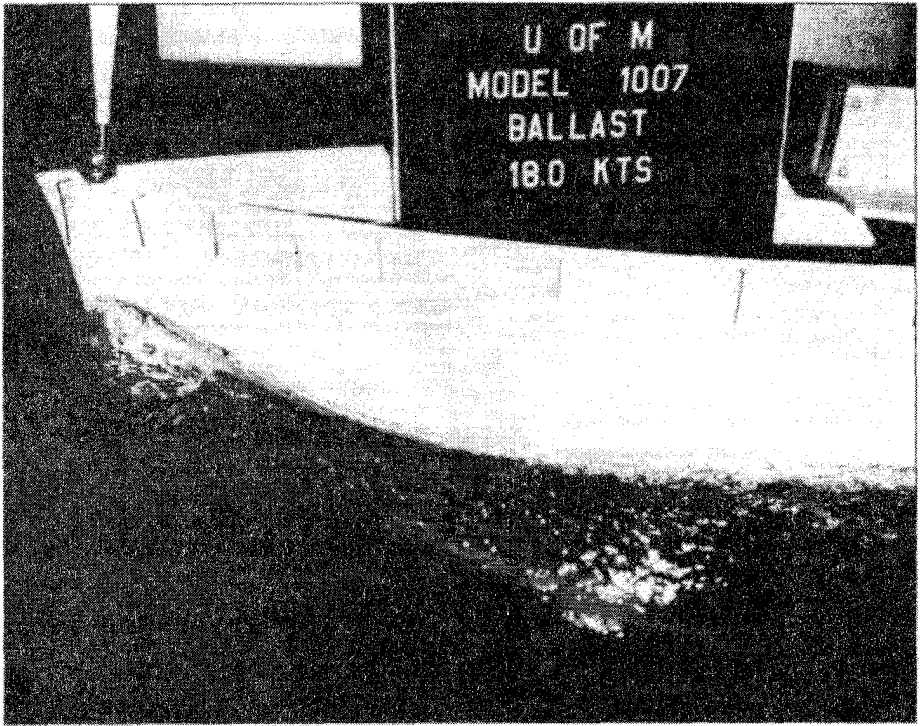
مثال ۹.۵ ضریب $K = \Delta p / (\rho V^2 / 2)$ را برای شیری به قطر 60°mm می‌خواهند از آزمونهایی با استفاده از هوای اتمسفری در 80°F با شیر هندسه-مشابهی به قطر 30°mm ، تعیین کنند. محدوده آزمونها باید برای شارش آب در 70°F از ۱ تا 2.5 متر بر ثانیه باشد. چه محدوده‌هایی از شارش هوا لازم است؟

حل

محدوده عدد رینولدز برای شیر اصلی عبارت است از

$$\left(\frac{VD}{\nu}\right)_{\min} = \frac{(1\text{m/s})(0.06\text{m})}{(1.059 \times 10^{-5}\text{ft}^2/\text{s})(0.3048\text{m}/\text{ft})^2} = 610000$$

$$\left(\frac{VD}{\nu}\right)_{\max} = 610000(2.5) = 1525000$$



شکل ۵.۵. آزمونهای مدل که تأثیر دماغه پیازی را بر موج‌زایی دماغه نشان می‌دهند. (شعبه معماری دریایی و مهندسی کشتی، دانشگاه میشیگان.)

برای آزمایش با هوا در 80°F

$$\nu = (1.8 \times 10^{-2} \text{ft}^2/\text{s})(0.3048 \text{m}/\text{ft})^2 = 1.672 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$$

بنابراین محدوده سرعت‌های هوا عبارت است از

$$\frac{(V_{\min})(0.3\text{m})}{1.672 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}} = 610000 \quad V_{\min} = 30.6 \text{m}/\text{s}$$

$$\frac{(V_{\max})(0.3\text{m})}{1.672 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}} = 1525000 \quad V_{\max} = 85 \text{m}/\text{s}$$

$$Q_{\min} = \frac{\pi}{4}(0.3\text{m})^2(30.6 \text{m}/\text{s}) = 2.16 \text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_{\max} = \frac{\pi}{4}(0.3\text{m})^2(85 \text{m}/\text{s}) = 6.0 \text{m}^3/\text{s}$$

تمرینها

۱.۶.۵ سرعت روغن $\rho = 1.6 \text{slugs}/\text{ft}^3$ و $\mu = 0.2 \text{P}$ در لوله‌ای به قطر 1in چقدر باید باشد تا با سرعت $10 \text{ft}/\text{s}$ آب 68°F در لوله‌ای به قطر 1in به طور دینامیکی مشابه باشد؟
الف) $96 \text{ft}/\text{s}$ ؛ ب) $9.6 \text{ft}/\text{s}$ ؛ ج) $4.0 \text{ft}/\text{s}$ ؛ د) $6.0 \text{ft}/\text{s}$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۶.۵ سرعت نقطه‌ای از نوک یک سد $1 \text{m}/\text{s}$ اندازه‌گیری شده است. سرعت در نمونه اصلی برای $\lambda = 25$ ، برحسب متر بر ثانیه، عبارت است از الف) ۲۵؛ ب) ۵؛ ج) ۰.۲؛ د) ۰.۴؛ ه) هیچکدام.
۳.۶.۵ ارتفاع پرش هیدرولیکی در یک حوضه راکد در یک مدل، $\lambda = 36$ ، به اندازه 4in است. ارتفاع پرش نمونه اصلی عبارت است از الف) ۱۲ft؛ ب) ۲ft؛ ج) با این داده‌ها قابل تعیین نیست؛ د) کمتر از ۴in؛ ه) هیچکدام.

۴.۶.۵ مدل یک کشتی، مقیاس ۱:۱۰۰، در سرعت طراحی اش 10N مقاومت موجی دارد. مقاومت موجی متناظر، برحسب کیلونیوتن، در نمونه اصلی عبارت است از الف) ۱۰؛ ب) ۱۰۰؛ ج) ۱۰۰۰؛ د) ۱۰۰۰۰؛ ه) هیچکدام.

۵.۶.۵ مدل یک پرتابه با مقیاس ۱:۵ در 20°r $M = 1$ دارای ضریب پسا ۳.۵ است. وقتی نمونه اصلی در عدد ماخ یکسان در هوایی با همان دما و با نصف چگالی آتش شود مقاومت آن چند برابر است؟ الف) ۳۱۲؛ ب) ۱۲؛ ج) ۱۲.۵؛ د) ۲۵؛ ه) هیچکدام.

مسائل

۱.۵ نشان دهید که معادله‌های (۱۱.۵.۴) و (۶.۵.۴) و (۱.۷.۳) همگنی ابعادی دارند.

۲.۵ گروههای زیر را در پارامترهای بی بعد مرتب کنید: الف) $\rho, \Delta p, V$ ؛ ب) ρ, g, V و F ؛ ج) $\mu, F, \Delta p$ و t .

۳.۵ به طور ذهنی گروههای زیر را در پارامترهای بی بعد مرتب کنید: الف) a, l و t ؛ ب) ν, l و t ؛ ج) A, Q, ω ؛ د) K, σ و A .

۴.۵ واحد جرم را در دستگاه آحاد اینچ و دقیقه و تن بیان کنید.

۵.۵ ابعاد رادیان، سرعت زاویه‌ای، توان کار، گشتاور و گشتاور تکانه را برحسب M, L و T تعیین کنید.

۶.۵ ابعاد کمیتهای مسئله ۵.۵ را در دستگاه FLT پیدا کنید.

۷.۵ مثال ۲.۵ را با استفاده از Q و H به عنوان متغیرهای تکرارشونده حل کنید.

۸.۵ با استفاده از $Q, D, H/l, \Delta H, \rho, \mu, g$ به عنوان متغیرهای مربوط به شارش در لوله صاف، آنها را در پارامترهای بی بعد، با Q, ρ و μ به عنوان متغیرهای تکرارشونده مرتب کنید.

۹.۵ اگر تنش برشی τ به شارش لایه‌ای یک بعدی چسبندگی و آهنگ تغییر شکل زاویه‌ای du/dy بستگی داشته باشد، صورت قانون چسبندگی نیوتن را با استدلال ابعادی تعیین کنید.

۱۰.۵ می دانیم که تغییر Δp فشار در مایعات ساکن به نیروی گرانی واحد γ و اختلاف ارتفاع Δz بستگی دارد. با استدلال ابعادی، صورت قانون تغییرات فشار هیدروستاتیکی را تعیین کنید.

۱۱.۵ تصور می‌رود که اگر از آثار چسبندگی و پسا سطحی صرف نظر شود، سرعت V شار مایع از یک مخزن به افت فشار Δp مایع و چگالی ρ آن بستگی دارد. صورت عبارت V را تعیین کنید.

۱۲.۵ تصور می‌شود که نیروی شناوری F_B وارد به یک جسم، به حجم غوطه‌ور آن \mathcal{V} و نیروی جسمی گرانشی وارد بر سیال بستگی دارد. صورت معادله نیروی شناوری را تعیین کنید.

۱۳.۵ سیالی که همچون جسم صلبی حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، افزایش فشار p در جهت شعاعی به سرعتی ω ، شعاع r ، چگالی سیال ρ بستگی دارد. صورت معادله p را به دست آورید.

۱۴.۵ در مثال ۳.۵، با ترکیب مجدد پارامترهای بی بعد داده شده دو مجموعه دیگر از پارامترهای بی بعد استخراج کنید.

۱۵.۵ پارامترهای بی بعد مثال ۴.۴ را با استفاده از $\Delta p, \rho$ و l به عنوان متغیرهای تکرارشونده، پیدا کنید.

۱۶.۵ عدد ماخ M برای شارش یک گاز کامل در یک لوله بستگی به نسبت گرمای ویژه k (بی بعد)، فشار p ، چگالی ρ ، و سرعت V دارد. با استدلال ابعادی، صورت عبارت عدد ماخ را به دست آورید.

۱۷.۵ نسبت مقیاسی را برای گشتاور T وارد بر یک دیسک به شعاع r که در سیالی به چسبندگی

- ۱۸.۵ با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، و لقی بین دیسک و صفحه ثابت y است، استخراج کنید.
- به مدل، سرعت در نقطه متناظر در نمونه اصلی در شرایط مشابه چقدر است؟
- ۱۹.۵ توان ورودی به پمپ، به تخلیه Q ، افزایش فشار Δp ، چگالی سیال ρ ، اندازه D و بازده e بستگی دارد. با استفاده از تحلیل ابعادی، عبارتی برای توان پیدا کنید.
- ۲۰.۵ گشتاور حاصل از توربین آبی به تخلیه Q ، ارتفاع H ، نیروی گرانی واحد γ ، سرعت زاویه‌ای ω و بازده e بستگی دارد. صورت معادله گشتاور را تعیین کنید.
- ۲۱.۵ مطالعات آزمایشی مسبوط برای مسئله انتقال گرمای همرفتی در میله‌های استوانه‌ای نشان داده‌اند که ضریب انتقال گرما، h_c ، به مجموعه متغیرهای فهرست شده در جدول زیر بستگی دارد:

نماد	نام	آحاد
u	سرعت	m/s
ρ	چگالی	kg/m ^۳
μ	چسبندگی	kg/m.s
d	قطر	m
k	هدایت گرمایی	kg.m/s ^۳ .K
c_p	گرمای ویژه	m ^۲ /s ^۲ .K
h_c	ضریب انتقال گرما	kg/s ^۳ .K

با استفاده از متغیرهای بالا تمام اعداد بی بعد لازم را که برای توصیف چنین شرایط فیزیکی می‌توان به کار برد پیدا کنید.

۲۲.۵ می‌خواهیم رابطه تابعی بین اعداد بی بعد به دست آمده در مسئله ۲۱.۵ را به دست آوریم. توضیح دهید که چگونه می‌توان رابطه تابعی را به طور کمی به دست آورد و برای شرایط داده شده مسئله ۲۱.۵ چه داده‌هایی لازم‌اند.

۲۳.۵ مجموعه متغیرهایی که انتقال گرمای گذرا را در تیغه‌های نامحدود، بدون تولید گرما، توصیف می‌کنند عبارت‌اند از ضریب انتقال گرمای h_c ، پخشندگی گرمایی α ، فاصله x ، رسانندگی گرمایی k ، دمای مرجع T_{ref} ، و زمان t . تمام پارامترهای بی بعد مناسب را در این مسئله بیابید.

۲۴.۵ با در نظر گرفتن یک منبع گرما (تولید گرما q_H)، مسئله ۲۳.۵ را فرمولبندی کنید.

۲۵.۵ سرمایش یک شمش کوچک (فرایند متغیر زمانی)، که از کوره با دمای یکنوخت T_f بیرون آورده شده است و به طور ناگهانی در آب سرد با دمای یکنوخت T_w غوطه‌ور شده است با ضریب متوسط انتقال گرمای \bar{h}_c ، پخشندگی گرمایی α ، رسانندگی گرمایی k ، چگالی شمش ρ ، مساحت سطح شمش A ، و در آخر طول L توصیف می‌شود. تمام پارامترهای بی بعد این مسئله را بیابید.

۲۶.۵ می‌دانیم که ضریب انتقال جرم، k_c ، به متغیرهای زیر بستگی دارد:

نماد	نام	آحاد
u	سرعت	m/s
ρ	چگالی	kg/m ^۳
μ	چسبندگی	kg/m.s
L_{ref}	طول مرجع	m
\mathcal{D}	ضریب پخش	m ^۲ /s
k_c	ضریب انتقال جرم	kg/m ^۲ .s

تمام پارامترهای بی‌بعد را بیابید.

۲۷.۵ رسوب در جداکننده‌های پالایه به مشخصه‌های ذره و محیط از قبیل قطر ذره d_s ، چگالی ذره ρ_s ، سرعت نهایی ذره w_s ، ضریب پخش ذره \mathcal{D} ، سرعت گاز u ، چگالی ρ ، چسبندگی μ ، قطر تار پالایه d_f ، و شتاب ثقل g بستگی دارد. پارامترهای بی‌بعد برای رسوب در جداکننده‌های پالایه چه هستند؟

۲۸.۵ شکل بی‌بعد دو معادله انتقال گرمای دوبعدی (در صفحه xy) را با استفاده از بهنجارش تک مقیاس به دست آورید. تمام جزئیات را نشان دهید.

۲۹.۵ در شارشهایی که از روی اجسام صلب می‌گذرند، نیروی وارده از سیال بر جسم به سرعت u سیال، چگالی ρ ، چسبندگی μ و بعد اصلی L جسم بستگی دارد. پارامترهای بی‌بعد را در شرایط داده شده بیابید؟

۳۰.۵ ضریب پسا، C_D ، نسبت تنش برشی سطحی را به انرژی جنبش جریان آزاد نشان می‌دهد. آب از روی یک سطح تخت، با ابعاد اصلی L عبور می‌کند، و تنش برشی محلی با رابطه زیر داده می‌شود

$$\tau(x) = 0.3(\rho u/x)^{1/2} U^{3/2}$$

که در آن x فاصله از لبهٔ پیشرو و U سرعت جریان آزاد است. از معادلهٔ بالا رابطه‌ای بی‌بعد را برای ضریب پسا محلی و متوسط، C_D ، به دست آورید.

۳۱.۵ پارامترهای بی‌بعد \mathbf{Pr} و \mathbf{R} را برحسب دما در آب با استفاده از طول مشخصه $L = 4.5\text{m}$ در سرعت مشخصه $U = 3.2\text{m/s}$ رسم کنید.

۳۲.۵ در شارش روی ورقهای افقی می‌دانیم که رابطه زیر برقرار است: $\text{Nu} = \alpha \mathbf{R}^\beta \mathbf{Pr}^\gamma$ که در آن اعداد بی‌بعد بر مبنای طول L ورق ارزیابی می‌شوند. برای ارزیابی بیشتر این شارش اطلاع از ثابتهای α ، β ، و λ لازم است. داده‌های آزمایش لازم را برای ارزیابی این ضرایب بیابید.

۳۳.۵ در مسئله ۳۲.۵ فرض کنید که مجموعه‌ای از داده‌های آزمایشی وجود دارد و مهندسی بخواهد مقادیر ضریبهای α ، β و γ را پیدا کند. آیا می‌توانید روشی را برای تعیین این ضریبها نشان دهید؟

۳۴.۵ رابطه زیر برای توزیع غلظت عناصر A برای استفاده در قسمتهای بزرگ آب پیشنهاد شده است

$$C_A(z, t) = \alpha C_{A0} e^{-z^2/D_z t}$$

که در آن α ضریب تصحیحی است که تغییرات دما را در نظر می‌گیرد. آیا معادله بالا به شکل بی‌بعد است؟ اگر نیست، نمایش غیرابعادی آن چگونه است؟

۳۵.۵ پارامترهای بی‌بعد $\text{Nu}_x, \text{Pr}^{1/2}, \text{Pr}^{1/3}$ را با استفاده از داده‌های زیر در آب 45°C که روی یک ورق نازک جریان دارد بیابید: $x = 25\text{ft}$ ، $c_p = 4176\text{J/kg}\cdot\text{K}$ ، $h_c = 37^\circ\text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{F}$ ، $k = 369\text{Btu/hr}\cdot\text{ft}\cdot\text{F}$ و $u = 331\text{ft/s}$.

۳۶.۵ پارامترهای بی‌بعد Pr ، R و $(\text{R}\cdot\text{Pr})^{1/2}$ را برای آبی که روی یک ورق نازک به طول 3m جریان دارد با استفاده از داده‌های زیر بیابید: $T = 8^\circ\text{F}$ ، $c_p = 997\text{Btu/lbm}\cdot\text{F}$ ، $u = 218\text{m/s}$ و $k = 615\text{W/m}\cdot\text{K}$ ، $h_c = 37^\circ\text{Btu/hr}\cdot\text{ft}^2\cdot\text{F}$.

۳۷.۵ ابعاد خطی مدل یک سنجه و نتوری یک پنجم نمونه اصلی است. نمونه اصلی در آب 2°C و مدل در آب 95°C کار می‌کند. برای گلوله‌ای به قطر 60mm و سرعت 6m/s در گلوله‌گاه نمونه اصلی، چه تخلیه‌ای در مدل برای برقراری تشابه لازم است؟

۳۸.۵ پسا F وارد بر یک پرتابه پرسرعت، به سرعت، پرتابه V ، چگالی سیال ρ ، سرعت صوت c ، قطر پرتابه D ، و چسبندگی μ بستگی دارد. عبارتی برای پسا استخراج کنید.

۳۹.۵ پسای موجی وارد بر مدل یک کشتی در سرعت 3m/s مساوی 16N است. برای نمونه اصلی که پانزده برابر طول دارد سرعت پسای موجی متناظر چه خواهد بود، در صورتی که مایع در هر دو حالت یکی باشد؟

۴۰.۵ چگالی نسبی ذرات کروی، $D = 0.13\text{mm}$ ، که در هوای 0°C با سرعت U مساوی 1m/s سقوط می‌کنند چقدر است؟ نیروی پسای وارد بر هر کره کوچکی در حرکت لایه‌ای از رابطه $3\pi\mu DU$ به دست می‌آید.

۴۱.۵ یک کره کوچک مایع به شعاع r_0 و چگالی ρ_0 با سرعت U در مایع دیگری با چگالی ρ و چسبندگی μ ته‌نشین می‌شود. آزمونها در داخل لوله‌های قائمی به شعاع r صورت می‌گیرد. با تحلیل ابعادی، مجموعه‌ای از پارامترهای بی‌بعد تعیین کنید که برای تعیین تاثیر دیواره لوله بر سرعت ته‌نشینی به کار آید.

۴۲.۵ اتلافهای یک Y را در یک شبکه لوله به قطر ۱.۲m و حامل گاز ($\rho = ۴۰\text{kg/m}^3$)، $\mu = ۰.۰۲\text{P}$ و $V = ۲۵\text{m/s}$ می‌خواهند با آزمون یک مدل با آب ۲۰°C تعیین کنند. ظرفیت آب آزمایشگاه ۷۵L/s است. از چه مقیاس مدلی باید استفاده کرد و چگالی نتایج به اتلافهای نمونه اصلی تبدیل می‌شوند؟

۴۳.۵ شکنجه سرعت انتشاری دارند که به پسا سطحی و چگالی سیال و همچنین به طول موج بستگی دارد. با تحلیل ابعادی، شکل ۱.۵ را برای طول موجهای کوچک توجیه کنید.

۴۴.۵ سرعت انتشار امواج در آب خیلی عمیق به طول موج بستگی دارد، اما در آب کم عمق مستقل از این است. سرعت پیشروی برای امواج آب کم عمق به چه متغیرهایی بستگی دارد؟ آیا شکل ۱.۵ با این مسئله تطبیق می‌کند؟

۴۵.۵ در مجرای مدور قائمی که پر از شارش نیست و با سرعت زیاد دوران می‌کند، سیال اگر رو به پایین جریان یابد به طور یکنواخت به دیواره داخلی می‌چسبد (نگاه کنید به بخش ۹.۲). در این شرایط، شتاب شعاعی سیال باعث یک میدان نیروی شعاعی می‌شود که شبیه جاذبه گرانشی است، و در داخل لوله امکان وقوع پرش هیدرولیکی وجود دارد که بر اثر ضخامت سیال ناگهان تغییر می‌کند. برای مطالعه این پرش هیدرولیکی چرخان (دوار) مجموعه‌ای از پارامترهای بی بعد را تعیین کنید.

۴۶.۵ یک قطره تقریباً کروی سیال به هنگام سقوط نوسان می‌کند. پسا سطحی نقش مهمی بازی می‌کند. برای این فرکانس طبیعی، پارامتر بی بعد معناداری تعیین کنید.

۴۷.۵ ضریبهای بالابر و پسا در یک بال در شکل ۱۷.۷ نشان داده شده‌اند. اگر طول وتر بال ۱۰ft باشد، وقتی بال با زاویه حمله صفر در عدد رینولدز $۱۰^۷ \times ۴۵$ (بر مبنای طول وتر) در هوای ۵۰°F کار می‌کند نیروی بُرا و پسا مؤثر بر یک فوت طول بال را بیابید. اگر آزمونها در هوای ۷۰°F انجام شود، نیروی وارد بر یک مدل با مقیاس $۱:۲۰$ چقدر است؟ سرعت آب چقدر است؟ درباره فواید آزمونهای مدل در آب توضیح دهید.

۴۸.۵ با آزمون مدل شبکه لوله‌کشی یک ایستگاه پمپ آب با مقیاس $۱:۵$ می‌خواهند اتلافهای کلی ارتفاع را تعیین کنند. هوا در ۲۵°C و ۱ اتمسفر در دسترس است. برای سرعت ۵۰mm/s نمونه اصلی در مقطعی به قطر ۴m ، با آب ۱۵°C ، سرعت هوا و کمیت لازم و چگونگی تبدیل اتلافهای تعیین شده برای مدل به اتلافهای نمونه اصلی را تعیین کنید.

۴۹.۵ آزمونهای بُرا و پسا وارد بر هیدروفویل (برگه آب بر) یک قایق را در تونل باد با مقیاس کامل انجام داده‌اند. قایق با سرعت ۵۵km/h در آب ۱۵°C حرکت می‌کند. سرعت هوا ($p = ۲۰^\circ\text{kPa abs}$) و $(T = ۳۲^\circ\text{C})$ چقدر باشد تا بُرا و پسا تعیین شود؟

(تذکر: ضریب بُرا C_L بی بعد است. بُرا برابر است با $C_L A \rho V^2 / 2$)

۵۰.۵ مقاومت در برابر صعود یک بالون را می‌خواهند با مطالعه صعود یک مدل با مقیاس $۱:۵۰$

در آب تعیین کنند. چنین مطالعه مدلی چگونه باید انجام شود و روش تبدیل نتایج مدل به نتایج نمونه اصلی چگونه است؟

۵۱.۵ می‌خواهند گشتاوری را که بر یک زیردریایی از سکانش وارد می‌شود با مطالعه مدل در مقیاس $1:20$ در تونل آب تعیین کنند. اگر گشتاور اندازه‌گیری شده در مدل $5N.m$ در سرعت $15m/s$ تونل باشد، گشتاور و سرعت متناظر برای نمونه اصلی چقدر است؟

۵۲.۵ برای اینکه دو ماشین هیدرولیکی مشابه باشند، باید الف) تشابه هندسی داشته باشند؛

ب) اگر آنها را روزه محسوب کنیم ضریب تخلیه یکسان داشته باشند، $Q_1/(A_1\sqrt{2gH_1}) = Q_2/(A_2\sqrt{2gH_2})$ (وج نسبت سرعت محیطی به سرعت سیال، یعنی $\omega D/(Q/A)$ ، در آنها یکسان باشد. نشان دهید که نسبتهای مقیاس را به صورت ثابت $Q/ND^2 = \text{ثابت}$ و $H/(ND)^2 = \text{ثابت}$ می‌توان بیان کرد. N سرعت دوران است.

۵۳.۵ با استفاده از نسبتهای مقیاسی مسئله ۵۲.۵ مطلوب است ارتفاع و تخلیه $1:4$ پمپ مرکز گریزی که با 240 rmp می‌چرخد و 600 L/s در ارتفاع 30 m تولید می‌کند. مدل در 1200 rpm کار می‌کند.

مراجع

1. E. Buckingham, "Model Experiments and the Form of Empirical Equations," *Trans. ASME*, vol. 37, pp. 263–296, 1915.
2. L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (translated by M. Holt), Academic Press, New York, 1959.
3. J. C. Hunsaker and B. G. Rightmire, *Engineering Applications of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1961.

مراجع برای مطالعه بیشتر

- Bridgeman, P. W.: *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, Conn., 1931. (The paperback Y-82, 1963.)
- Hansen, A.: *Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering*, Prentice Hall, New Jersey, 1964.
- Holt, M.: "Dimensional Analysis," sec. 15 in V. L. Streeter (ed.), *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- Hydraulic Models, *ASCE Man. Eng. Pract.* 25, 1942.
- Ipsen, D. C.: *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- Kline, S. J.: *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- Langhaar, H. L.: *Dimensional Analysis and Theory of Models*, John Wiley, New York, 1951.
- Seshadri, R. and Na, T. Y.: *Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems*, Springer Verlag, New York, 1985.

جریان چسبنده: لوله‌ها و کانالها

در فصلهای ۳ و ۴ دربارهٔ معادله‌های بنیادی تحلیل حالت‌های شارش سیال بحث کردیم. در این فصل به سیالات حقیقی می‌پردازیم، یعنی با حالت‌هایی مواجه‌ایم که در آنها برگشت‌ناپذیریها اهمیت دارند. چسبندگی خاصیت سیال است که در سیال متحرک باعث تنش‌های برشی می‌شود؛ همچنین از طریق چسبندگی است که برگشت‌ناپذیریها یا اتلافها ظاهر می‌شوند. در شارش‌های متلاطم حرکت‌های تصادفی سیال، که بر حرکت متوسط نهاده می‌شوند، تنش‌های برشی ظاهری را که مهمتر از تنش چسبنده‌اند به‌وجود می‌آورند. اینها عناوین اصلی این فصل را تشکیل می‌دهند. ابتدا، مفهوم عدد رینولدز را، که در فصل ۵ معرفی شد، با تفصیل بیشتر بررسی می‌کنیم. مشخصه‌هایی که شارش لایه‌ای را از متلاطم مجزا می‌کنند نشان می‌دهیم، و شارش را به داخلی و خارجی رده‌بندی می‌کنیم. در این فصل حالت‌های شارش داخلی بررسی می‌شوند. شارش‌های پایا، لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر در ابتدا بررسی می‌شوند زیرا اتلافات در آنها را به‌طور تحلیلی می‌توان محاسبه کرد. سپس مقاومت در برابر شارش پایا، یکنواخت، تراکم‌ناپذیر، و متلاطم را در مجراهای باز و بسته بررسی می‌کنیم. شارش با سطح آزاد در کانال‌های باز در نظر گرفته می‌شود و به دنبال آن شارش در لوله با تفصیل بیشتر بررسی می‌شود.

۱.۶ شارشهای لایه‌ای و متلاطم: شارشهای داخلی و خارجی

عدد رینولدز

شارش لایه‌ای شارشی است که در آن سیال به صورت لایه‌ای یا ورقه‌ای حرکت می‌کند و هر لایه‌ای به نرمی بر لایه مجاور می‌لغزد و فقط مبادلهٔ تکانه میان مولکولها صورت می‌گیرد. بر اثر نیروهای برشی چسبنده‌ای که در برابر حرکت نسبی لایه‌های مجاور سیال مقاومت می‌کنند، هر گونه گرایش به ناپایداری و تلاطم از بین می‌رود. ولی شارش متلاطم با حرکت نامنظم ذرات سیال و مبادلهٔ عرضی شدید اندازهٔ حرکت همراه است. نوع شارش، یعنی لایه‌ای بودن یا متلاطم بودن، و مکان نسبی آن در مقیاسی که اهمیت نسبی گرایشهای متلاطم به لایه‌ای را نشان می‌دهد، با عدد رینولدز مشخص می‌شود. مفهوم عدد رینولدز و تفسیر آن را در این قسمت بررسی می‌کنیم. در فصل ۴ معادله‌های حرکت به‌دست آمدند، و این معادله‌ها، معادله‌های دیفرانسیل پیچیده غیرخطی و با مشتقهای جزئی‌اند و برای آنها هیچ راه حل کلی به‌دست نیامده است. در قرن گذشته آسبورن رینولدز آنها را مطالعه کرد تا نشان دهد در حالت مختلف شارش چه وقت مشابه‌اند. [مراجع ۱]*.

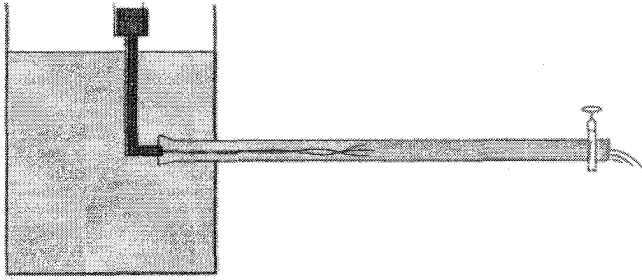
چنانچه در فصل ۵ مرور شد دو حالت شارش هنگامی تشابه دینامیکی دارند که

۱. تشابه هندسی داشته باشند، یعنی ابعاد خطی متناظر نسبت یکسانی داشته باشند.
 ۲. چندضلعیهای نیروی متناظر مشابه‌اند، یا فشارها در نقاط متناظر نسبت ثابت داشته باشند.
- رینولدز در بررسی دو حالت شارش با تشابه هندسی نتیجه گرفت که اگر معادله‌های دیفرانسیل کلی در مورد شارش آنها یکسان باشند، آنها تشابه دینامیکی خواهند داشت. رینولدز با تغییر آحاد جرم، طول و زمان در مجموعه‌ای از معادله‌ها و تعیین شرطی که یکسانی آنها را با معادله‌های اولیه برآورده کند، دریافت که گروه بی‌بعد $ul\rho/\mu$ باید در هر دو حالت یکسان باشد. از میان اینها، u سرعت مشخصه، l طول مشخصه، ρ چگالی جرمی، و μ چسبندگی است. این گروه یا پارامتر را اکنون عدد رینولدز R می‌نامند

$$R = \frac{ul\rho}{\mu} \quad (۱.۱.۶)$$

رینولدز برای تعیین اهمیت گروه بی‌بعد، آزمایشهایی دربارهٔ شارش آب در لوله‌های شیشه‌ای انجام داد که در شکل ۱.۶ نشان داده شده‌اند. او یک لولهٔ شیشه‌ای که یک سر آن در داخل یک مخزن و سر دیگر آن شیر بود، به‌طور افقی نصب کرد. یک ورودی صاف سرقیفی به انتهای فرادست متصل کرد و یک جت رنگ را طوری به کار برد که جریان نازکی از رنگ را بتوان در هر

* در انتهای این فصل چند مرجع آورده شده‌اند.



شکل ۱.۶ دستگاه رینولدز.

نقطه‌ای از جلو سرفیفی خارج کرد. رینولدز سرعت متوسط V را سرعت مشخصه، و قطر D لوله را طول مشخصه گرفت، به طوری که $R = VD\rho/\mu$.

در شارشهای کوچک، جریان رنگ به صورت یک خط مستقیم در لوله حرکت می‌کرد و نشان می‌داد که شارش لایه‌ای است. وقتی آهنگ شارش افزایش می‌یافت عدد رینولدز زیاد می‌شد، زیرا D ، ρ ، μ ثابت بودند و V با آهنگ شارش نسبت مستقیم داشت. با افزایش تخلیه وضعی پیش می‌آمد که در آن جریان رنگ موج بر می‌داشت و سپس ناگهان در هم می‌ریخت و در سراسر لوله پخش می‌شد. شارش به شارش متلاطمی با مبادله شدید اندازه حرکت تبدیل می‌شد و حرکت منظم شارش لایه‌ای کلاً به هم می‌خورد. رینولدز با مهارت و دقت کافی توانست قبل از اینکه تلاطم حاصل شود به $R = 12000$ دست یابد. محقق دیگری با استفاده از تجهیزات اولیه رینولدز، با ساکن نگه داشتن آب داخل تانک از چند روز قبل از آزمایش و ممانعت از ارتعاش آب یا وسیله آزمایش، به مقدار 40000 رسید. این اعداد، که به آنها اعداد بحرانی بالایی رینولدز می‌گویند، هیچ معنای عملی ندارند زیرا نصب لوله‌ها معمولاً بی‌نظمی‌هایی دارد که در مقدار بسیار کوچکتري از عدد رینولدز باعث تلاطم شارش می‌شود.

رینولدز در مورد شارش متلاطم در لوله شیشه‌ای دریافت که وقتی سرعت کاهش یابد و R از 2000 کمتر شود، شارش همیشه لایه‌ای می‌شود. این را عدد بحرانی پایینی رینولدز برای شارش در لوله می‌نامند و اهمیت عملی دارد. در لوله‌کشیهای رایج، در گستره اعداد رینولدز 2000 تا 4000 ، شارش از لایه‌ای به متلاطم تبدیل می‌شود. در بررسی حاضر فرض می‌شود که تغییر در $R = 2000$ پدید می‌آید. در شارش لایه‌ای اتلافها با سرعت متوسط نسبت مستقیم دارند، حال آنکه در شارش متلاطم اتلافها با توان 1.7 تا 2 سرعت متناسب‌اند.

امروزه علاوه بر اعداد رینولدز لوله‌های گرد مستقیم، از بسیاری اعداد رینولدز دیگر نیز استفاده می‌شود. برای مثال، حرکت کره در سیال را می‌توان با $UD\rho/\mu$ مشخص کرد، که در آن U سرعت کره، D قطر کره، و ρ و μ چگالی و چسبندگی سیال‌اند.

نوع شارش یک سیال تراکم‌ناپذیر را با عدد رینولدز آن مشخص می‌کنند. برای مقادیر بزرگ R یک یا کل جمله‌های صورت در مقایسه با مخرج بزرگ است. این موضوع نشانگر انبساط زیاد سیال، سرعت زیاد، چگالی زیاد، چسبندگی بسیار کم، یا تلفیقی از آنهاست. جمله‌های صورت را به نیروهای اینرسی یا نیروهایی که بر اثر شتاب مثبت یا منفی سیال به وجود می‌آیند ربط می‌دهند. جمله مخرج علت نیروهای برشی چسبنده است. بدین ترتیب، پارامتر عدد رینولدز را نسبت نیروهای لختی به نیروهای چسبندگی نیز می‌توان در نظر گرفت. R زیاد نشانگر شارش بسیار متلاطم با اتلافهایی متناسب با مربع سرعت است، تلاطم یا ریزمقیاس است و از بسیاری تلاطمهای کوچک تشکیل می‌شود که، از طریق کنش چسبندگی، انرژی مکانیکی را به سرعت برگشت‌ناپذیرها تبدیل می‌کنند؛ یا بزرگ مقیاس است، مانند گردابها و چرخشهای عظیم داخل رودخانه یا چاههای هوایی. تلاطمهای بزرگ تلاطمهای کوچکتری به وجود می‌آورند، که به نوبه خود تلاطم ریزمقیاس به وجود می‌آورند. شارش متلاطم را می‌توان شارش هموار و احتمالاً یکواختی دانست که شارش ثانویه‌ای روی آن افتاده باشد. شارش متلاطم ریزمقیاس افت و خیزهای کوچکی در سرعت دارد که با بسامد زیادی پدید می‌آیند. مقدار ریشه میانگین مربعی افت و خیزها و بسامد تغییر علامت افت و خیزها معیار کمی تلاطم‌اند. به‌طور کلی، وقتی عدد رینولدز زیاد شود، شدت تلاطم افزایش می‌یابد. در مقادیر میانی R ، آثار چسبندگی و لختی هر دو مهم‌اند، و تغییرات چسبندگی باعث تغییر توزیع سرعت و مقاومت در برابر شارش می‌شود.

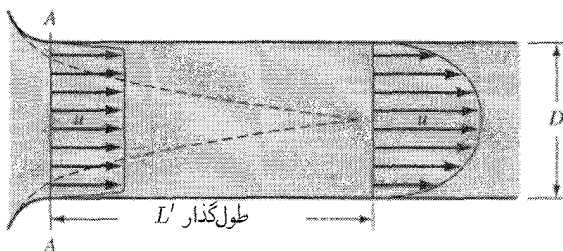
در R یکسان، دو شبکه مجزا بسته که تشابه هندسی داشته باشند (مثلاً یکی دو برابر دیگری) نسبت یکسانی از اتلافها با ارتفاع سرعت دارند. عدد رینولدز ابزار استفاده از نتایج آزمایش با یک سیال برای پیش‌بینی نتایج در مورد سیال دیگری در حالت مشابه به شمار می‌آید.

شارشهای داخلی و خارجی

روش دیگر برای رده‌بندی شارشها با بررسی هندسه میدان شارش انجام می‌شود. شارش داخلی، همانطور که از نامش بر می‌آید، شارش در یک ناحیه مقید است. شارش خارجی مشتمل است بر سیال در یک ناحیه مقیدنشده که در آن فقط به نقش شارش پیرامون جسم غوطه‌ور شده در سیال توجه می‌شود.

حرکت یک سیال حقیقی عمدتاً تحت تأثیر مرز موجود قرار می‌گیرد. ذرات سیالی که با جداره تماس دارند به‌طور ساکن باقی می‌مانند. در میدان شارش، یک شیب سرعت قوی در مجاورت جداره وجود دارد؛ به این ناحیه لایه مرزی گفته می‌شود. در لایه‌روی یک نیروی برشی ترمزی بر سیال جداره اثر می‌کند، و تشهای برشی در این ناحیه قابل توجه‌اند.

در این فصل، شارشهایی که با جداره‌ها مقید شده‌اند بررسی می‌شود؛ در این شارشها اثر



شکل ۲.۶ منطقه ورودی خط لوله.

مرزی در تمام جریان گسترش می‌یابد. تأثیر مرز در ورودی به یک لوله از مخزن به سهولت قابل رؤیت است (شکل ۲.۶). مقطع $A-A$ ، در نزدیک ورودی کاملاً گرد، نمایه سرعت در تمام مقطع عرضی تقریباً یکنواخت است. اثر تنش برشی جدارى آهسته کردن سیال نزدیک جداره است. در نتیجه پیوستگی، سرعت باید در ناحیه مرکزی افزایش یابد. پس از طول گذار L' نمایه سرعت ثابت است زیرا تأثیر مرز تا خط مرکزی لوله گسترش یافته است. طول گذار تابعی از عدد رینولدز است؛ لانگار [مرجع ۲] فرمول نظری زیر را داده است

$$\frac{L'}{D} = 0.58R \quad (۲.۱.۶)$$

که با مشاهده به خوبی تطبیق می‌دهد. در شارش متلاطم، لایه مرزی سریعتر رشد می‌کند و طول گذار خیلی کوتاهتر از طول داده شده با معادله (۲.۱.۶) است.

در شارشهای خارجی، یا جسمی که در یک سیال غیرمقید غوطه‌ور است، اثرات اصطکاکی فقط در لایه مرزی مجاور جسم وجود دارند. مثالهایی از این قبیل عبارت‌اند از: توپ گلف در حال پرواز، یک ذره رسوب، و یک قایق. وجود نمایه سرعت کاملاً فراگیر، که در شکل ۲.۶ یک شارش داخلی نشان داده شده است، در شارشهای خارجی محتمل نیست. معمولاً نیروهای پسای مؤثر بر یک جسم یا مشخصه‌های بزرگ بر اثر نقش خاص شارش روی یک جسم ظاهر می‌شوند مرکز توجه قرار می‌گیرند. این حالت‌های شارش در فصل بعد بررسی می‌شوند.

معادله‌های ناویر-استوکس

برای توصیف تغییرات پارامترهای میدان شارش در هر نقطه داخل پیوستار معادله‌های ناویر-استوکس، که در فصل ۴ معرفی شدند، به کار می‌روند. برای تکمیل مطلب، معادله‌های (۱۲.۴.۴) فهرست

می‌شوند.

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

آنچه در این فصل و فصلهای بعدی می‌آیند روشهای تحلیل برای ساده کردن این معادله و حل آنها در مسائل عملی است. در دو قسمت بعد، حالت‌های شارش لایه‌ای ساده بررسی می‌شوند.

تمرینها

۱.۱.۶ عدد بحرانی بالایی رینولدز (الف) از لحاظ طراحی اهمیت دارد؛ (ب) عددی است که در آن شارش متلاطم به شارش لایه‌ای تبدیل می‌شود؛ (ج) حدود ۲۰۰۰ است؛ (د) بیشتر از ۲۰۰۰ نیست؛ (ه) در مسائل شارش در لوله اهمیت عملی ندارد.

۲.۱.۶ عدد رینولدز شارش در لوله به صورت زیر است: (الف) VD/ν ؛ (ب) $VD\mu/\rho$ ؛ (ج) $VD\rho/\nu$ ؛ (د) VD/μ ؛ (ه) هیچکدام.

۳.۱.۶ مقدار عدد بحرانی پایینی رینولدز عبارت است از (الف) ۲۰۰؛ (ب) ۱۲۰۰؛ (ج) ۱۲۰۰۰؛ (د) ۴۰۰۰۰؛ (ه) هیچکدام.

۴.۱.۶ عدد رینولدز برای کره‌ای به قطر ۳ mm که با سرعت ۳ m/s درون روغن، $S = 90^\circ$ و $\mu = 10 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ ، حرکت می‌کند عبارت است از (الف) ۴۰۴؛ (ب) ۸۰۸؛ (ج) ۹۰۰؛ (د) ۸۰۸۰؛ (ه) هیچکدام.

۵.۱.۶ عدد رینولدز برای تخلیه ۱۰ cfs آب 68°F در لوله‌ای به قطر ۱۲ in عبارت است از (الف) ۲۴۶۰؛ (ب) ۹۸۰۰۰۰؛ (ج) ۱۱۷۸۰۰۰؛ (د) ۱۴۱۲۰۰۰۰؛ (ه) هیچکدام.

۲.۶ شارش لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر و پایا بین صفحات موازی

توزیع سرعت

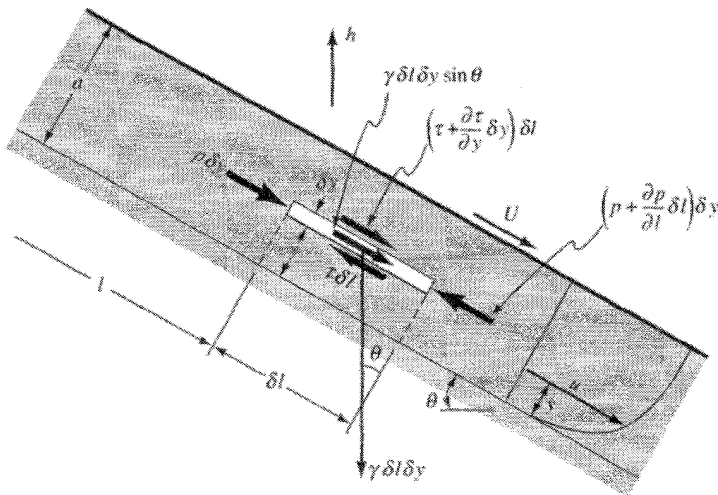
حالت کلی شارش پایا بین صفحات موازی مایل را ابتدا برای شارش لایه‌ای نشان می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که صفحه بالایی سرعت ثابت U دارد (شکل ۳.۶). شارش بین صفحات ثابت یک حالت خاص است که با $U = 0$ به دست می‌آید. در شکل ۳.۶، صفحه بالایی به موازات جهت شارش حرکت می‌کند و تغییر فشاری در جهت l وجود دارد. اگر لایه نازکی به عرض واحد به عنوان جسم آزاد در نظر بگیریم، می‌توانیم شارش را تحلیل کنیم. در شارش پایا، لایه با سرعت ثابت u حرکت می‌کند. از معادله حرکت نتیجه می‌گیریم

$$p \delta y - \left(p \delta y + \frac{\partial p}{\partial l} \delta l \delta y \right) - \tau \delta l + \left(\tau \delta l + \frac{\partial \tau}{\partial y} \delta y \delta l \right) + \gamma \delta l \delta y \sin \theta = 0$$

پس از تقسیم بر حجم جزئی، و با استفاده از $\sin \theta = -\partial h / \partial l$ و ساده کردن، نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial l} (p + \gamma h)$$

از آنجا که u فقط تابع y است، داریم $\partial \tau / \partial y = d\tau / dy$ ؛ و از آنجا که $p + \gamma h$ در جهت y تغییر نمی‌کند (هیچ شتابی نیست)، $p + \gamma h$ فقط تابع l است. از این رو $\partial (p + \gamma h) / \partial l = d(p + \gamma h) / dl$ و



شکل ۳.۶ شارش بین صفحات موازی مایل در حالتی که صفحه بالایی حرکت کند.

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (۱.۲.۶)$$

این معادله نیز از معادله‌های ناویر-استوکس در بند قبل تعیین شده بود. با انتگرال‌گیری از معادله (۱.۲.۶) نسبت به y نتیجه می‌گیریم

$$\mu \frac{du}{dy} = y \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + A$$

با انتگرال‌گیری مجدد نسبت به y نتیجه می‌شود

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$$

که در آن A و B ثابت انتگرال‌اند. برای تعیین آنها، می‌گذاریم $y = 0$ و $u = 0$ و $y = a$ و $u = U$ و به دست می‌آوریم

$$B = 0 \quad U = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^2 + \frac{Aa}{\mu} + B$$

با حذف A و B نتیجه می‌گیریم

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)(ay - y^2) \quad (۲.۲.۶)$$

برای صفحات افقی، داریم $h = C$ ؛ در نبود گرادیان (شیب) ناشی از فشار یا ارتفاع، یعنی نبود توزیع فشار هیدروستاتیکی، داریم $p + \gamma h = C$ و سرعت در خط مستقیم توزیع می‌شود. در صفحات ثابت، داریم $U = 0$ ، و توزیع سرعت سهموی است.

با انتگرال‌گیری از معادله (۲.۲.۶) نسبت به y ، تخلیه‌ای که از مقطع عرضی ثابتی می‌گذرد به دست می‌آید

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)a^3 \quad (۳.۲.۶)$$

به‌طور کلی، سرعت ماکزیمم در صفحه مرکزی قرار ندارد.

مثال ۱.۶ در شکل ۴.۶ یک صفحه نسبت به صفحه دیگر حرکت می‌کند؛ $\mu = 0.08 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ و $\rho = 850 \text{ kg}/\text{m}^3$. توزیع سرعت، تخلیه، و تنش برشی وارد بر صفحه بالایی را به دست آورید.

حل

در ورق بالایی

$$p + \gamma h = 1400 \text{ Pa} + (850 \text{ kg}/\text{m}^3)(9.806 \text{ m}/\text{s}^2)(3 \text{ m}) = 26405 \text{ Pa}$$

و در نقطه پایینی، با همان داده

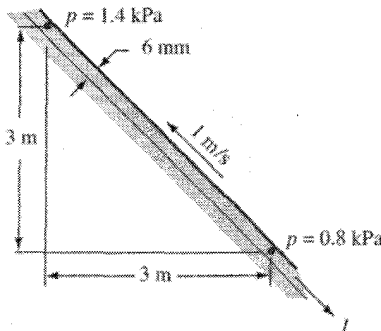
$$p + \gamma h = 800 \text{ Pa}$$

از این رو

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = \frac{800 \text{ Pa} - 26405 \text{ Pa}}{3\sqrt{2} \text{ m}} = -6035 \text{ N}/\text{m}^2$$

از شکل، $U = -1 \text{ m}/\text{s}$ و $a = 0.06 \text{ m}$ ؛ و از معادله (۲.۲.۶)

$$\begin{aligned} u &= \frac{(-1 \text{ m}/\text{s})(ym)}{0.06 \text{ m}} + \frac{6035 \text{ N}/\text{m}^2}{2(0.08 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2)}(0.06y - y^2 \text{ m}^2) \\ &= 59646y - 37718y^2 \text{ m}/\text{s} \end{aligned}$$



شکل ۴.۶ شارش بین صفحات تخت مایل.

شارش لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر و پایا بین صفحات موازی ۳۵۳

سرعت ماکزیم در جایی است که $du/dy = 0$ یا $0.00079m$ باشد، و عبارت است از $u_{max} = 0.236m/s$. سرعت ماکزیم مطلق در صفحه متحرک در جایی که $y = 0.006m$ باشد، برابر $0.1m/s$ است. تخلیه بر هر متر عرض برابر است با

$$Q = \int_0^{0.006} u dy = [29.823y^2 - 12573y^3]_0^{0.006} = -0.00164m^2/s$$

که به سمت بالاست. برای پیدا کردن تنش برشی وارد بر صفحه بالایی به طریقه زیر عمل می‌کنیم:

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0.006} = 59.646 - 75436y \Big|_{y=0.006} = -392.97s^{-1}$$

و

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0.8(-392.97) = -31.44Pa$$

این همان تنش برشی وارد بر صفحه بالایی است؛ از این رو، نیروی برشی وارد بر صفحه بالایی ۳۱.۴۴N است که در برابر حرکت صفحه مقاومت می‌کند. ■

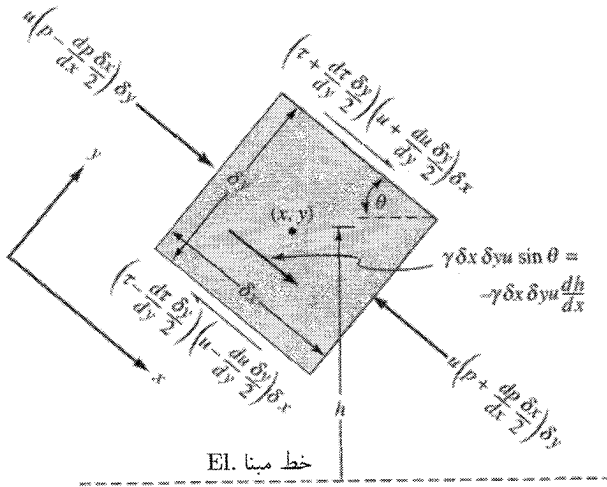
اتلاف در شارش لایه‌ای

عبارتهای مربوط به برگشت‌ناپذیریها را برای شارش یک‌بعدی، تراکم‌ناپذیر، پایا، و لایه‌ای نشان داده‌ایم. در شارش پایا در لوله، بین صفحات موازی، یا در شارش غشایی در عمق ثابت، انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند و کاهش $p + \gamma h$ نشان‌دهنده کار انجام شده بر سیال در حجم واحد است. کار انجام شده، بر اثر تنش برشی به برگشت‌ناپذیریها تبدیل می‌شود. اتلافها در طول L عبارت‌اند از $Q\Delta(p + \gamma h)$ در زمان واحد.

اگر u تابعی از y یعنی در جهت عرضی، و تغییر در $p + \gamma h$ تابعی از x در جهت شارش باشد، از مشتقهای کلی در سراسر تحول می‌توان استفاده کرد. ابتدا، از معادله (۱.۲.۶) مشتق می‌گیریم

$$\frac{d(p + \gamma h)}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \quad (4.2.6)$$

با مراجعه به شکل ۵.۶، مرکزیک ذره سیال به شکل مستطیل و به عرض واحد، در (x, y) قرار دارد که در آن تنش برشی، p فشار، و u سرعت و h ارتفاع است. ذره در جهت x حرکت می‌کند. در زمان واحد، مرزهای سطح، مطابق شکل بر آن کار انجام می‌دهند و ذره انرژی پتانسیل $\gamma \delta x \delta y u \sin \theta$ از دست می‌دهد. از آنجا که انرژی جنبشی ذره تغییر نمی‌کند، کار خالص انجام شده و افت انرژی پتانسیل



شکل ۵.۶ کار انجام شده و افت انرژی پتانسیل برای یک ذره سیال در شارش یک بعدی.

شان‌دهنده اتلافهای ناشی از برگشت‌ناپذیرها در زمان واحد است. با جمع جمله‌های شکل ۵.۶ تقسیم آن بر حجم $\delta x \delta y$ ، و حدگیری از آن وقتی $\delta x \delta y$ به سمت صفر میل می‌کند، نتیجه می‌شود

$$-u \frac{dp}{dx} - \gamma u \frac{dh}{dx} + \tau \frac{du}{dy} + u \frac{d\tau}{dy} = \frac{\text{توان ورودی خالص}}{\text{حجم واحد}} \quad (۵.۲.۶)$$

از ترکیب آن با معادله (۴.۲.۶) به دست می‌آید

$$\frac{\text{توان خالص ورودی}}{\text{حجم واحد}} = \tau \frac{du}{dy} = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \frac{\tau^2}{\mu} \quad (۶.۲.۶)$$

با انتگرالگیری از این عبارت روی طول L بین صفحات موازی، و با استفاده از معادله (۲.۲.۶) برای $U = 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \text{توان خالص ورودی} &= \int_0^a \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 L dy \\ &= \mu L \int_0^a \left[\frac{1}{2\mu} \frac{d(p + \gamma h)}{dx} (2y - a) \right]^2 dy \\ &= \left[\frac{d(p + \gamma h)}{dx} \right]^2 \frac{a^3 L}{12\mu} \end{aligned}$$

با جایگذاری مقدار Q از معادله (۳.۲.۶) به‌ازای $U = 0$ به‌دست می‌آید

$$-Q \frac{d(p + \gamma h)}{dx} L = Q \Delta(p + \gamma h) = \text{توان خالص ورودی} = \text{اتلافها}$$

که در آن $\Delta(p + \gamma h)$ عبارت است از افت $p + \gamma h$ در طول L . عبارت توان خالص ورودی بر حجم واحد [معادله (۶.۲.۶)] را برای شارش لایه‌ای در یک لوله نیز می‌توان به کار برد. وقتی du/dy بیشترین مقدار را دارد برگشت‌ناپذیرها نیز بیشترین مقدار را دارند.

تمرینها

۱.۲.۶ تنش برشی در یک سیال که بین دو صفحه ثابت موازی جریان دارد، الف) بر مقطع ثابت است؛ ب) در صفحات صفر است و تا نقطه مرکزی به‌طور خطی افزایش می‌یابد؛ ج) در مقطع به‌طور سهموی تغییر می‌کند؛ د) در صفحه مرکزی صفر است و با فاصله از صفحه مرکزی به‌طور خطی تغییر می‌کند؛ ه) هیچکدام.

۲.۲.۶ توزیع سرعت برای شارش بین دو صفحه ثابت موازی الف) بر مقطع ثابت است؛ ب) در صفحات صفر است و تا صفحه مرکزی به‌طور خطی افزایش می‌یابد؛ ج) در مقطع به‌طور سهموی تغییر می‌کند؛ د) با فاصله از نقطه مرکزی با توان دو سوم تغییر می‌کند؛ ه) هیچکدام.

۳.۲.۶ تخلیه بین دو صفحه موازی به فاصله a از یکدیگر، که سرعت یکی از آنها U و تنش برشی در صفحه ثابت صفر است، عبارت است از الف) $Ua/3$ ؛ ب) $Ua/2$ ؛ ج) $2Ua/3$ ؛ د) Ua ؛ ه) هیچکدام.

۴.۲.۶ سیال در بین دو صفحه موازی به صورت لایه‌ای حرکت می‌کند؛ یک صفحه حرکت می‌کند و تحت کنش گرادیان فشار قرار دارد به‌طوری که تخلیه در هر مقطع ثابتی صفر است. سرعت مینیمم در نقطه‌ای رخ می‌دهد که در فاصله زیر از صفحه ثابت قرار دارد، الف) $a/6$ ؛ ب) $a/3$ ؛ ج) $a/2$ ؛ د) $2a/3$ ؛ ه) هیچکدام.

۵.۲.۶ در تمرین ۴.۲.۶ مقدار سرعت مینیمم عبارت است از الف) $3U/4$ ؛ ب) $2U/3$ ؛ ج) $U/2$ ؛ د) $U/3$ ؛ ه) $U/6$.

۶.۲.۶ رابطه بین فشار و تنش برشی در شارش لایه‌ای یک‌بعدی در جهت x از این رابطه به‌دست می‌آید: الف) $(dp/dx = \mu(d\tau/dy))$ ؛ ب) $(dp/dy = d\tau/dx)$ ؛ ج) $(dp/dy = \mu(d\tau/dx))$ ؛ د) $(dp/dx = d\tau/dy)$ ؛ ه) هیچکدام.

۷.۲.۶ عبارت توان ورودی بر حجم واحد در یک سیال در حرکت لایه‌ای یک‌بعدی دو جهت x عبارت است از الف) $(\tau(du/dy))$ ؛ ب) (τ/μ^2) ؛ ج) $(\mu(du/dy))$ ؛ د) $(\tau(du/dy))^2$ ؛ ه) هیچکدام.

۸.۲.۶ وقتی مایع در حرکت لایه‌ای در عمق ثابت است و بر صفحه شیب‌داری به سمت پایین جریان دارد (y عمود بر سطح اندازه‌گیری می‌شود)، الف) برش در سراسر مایع صفر است؛ ب) در صفحه $d\tau/dy = 0$ است؛ ج) در سطح مایع $\tau = 0$ است؛ د) سرعت در سراسر مایع ثابت است؛ ه) هیچ اتفاقی وجود ندارد.

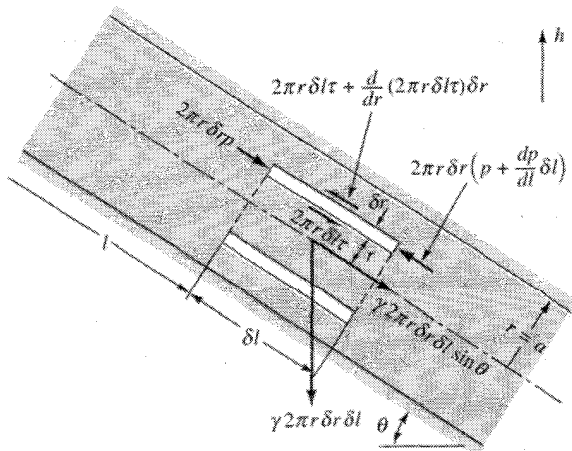
۹.۲.۶ محوری به قطر 0.6 in در یک یاتاقان بالقی شعاعی 4 in ، در 2400 rpm می‌چرخد. تنش برشی برحسب پوند بر فوت مربع در غشای روغن، $1 \text{ P} = 0.000145 \text{ psi}$ ، عبارت است از الف) 15 P ؛ ب) 175 P ؛ ج) 35 P ؛ د) 1670 P ؛ ه) هیچکدام.

۳.۶ شارش لایه‌ای در لوله‌های مدور و طوقهای مدور

لوله‌های طوقه‌شکل

در شارش پایا، تراکم‌ناپذیر، و لایه‌ای در لوله یا طوق مدور، غلاف استوانه‌ای بی‌نهایت کوچکی (شکل ۶.۶) را به عنوان جسم آزاد در نظر می‌گیریم. معادله حرکت را در جهت l ، با شتاب صفر، به کار می‌بریم. از شکل، داریم

$$2\pi r \delta r p - \left(2\pi r \delta r p + 2\pi r \delta r \frac{dp}{dl} \delta l \right) + 2\pi r \delta l \tau - \left[2\pi r \delta l \tau + \frac{d}{dr} (2\pi r \delta l \tau) \delta r \right] + \gamma 2\pi r \delta r \delta l \sin \theta = 0$$



شکل ۶.۶ نمودار جسم آزاد جزء غلاف استوانه‌ای در شارش لایه‌ای داخل لوله مایل مدور.

با قرار دادن $-dh/dl$ به جای $\sin \theta$ و تقسیم بر حجم جسم آزاد $2\pi r \delta r \delta l$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\tau r) = 0 \quad (1.3.6)$$

از آنجا که $d(p + \gamma h)/dl$ تابع r نیست، معادله را می‌توان در $r \delta r$ ضرب کرد و نسبت به r انتگرال گرفت؛ در نتیجه

$$\frac{r^2}{2} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) + \tau r = A \quad (2.3.6)$$

که در آن A ثابت انتگرال است. وقتی $r = 0$ ، این معادله برای یک لوله مدور باید برآورد شود. از این رو، برای این حالت $A = 0$. حال قرار می‌دهیم

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

می‌دهد

$$du = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) r dr - \frac{A}{\mu} \frac{dr}{r}$$

توجه کنید که علامت منها برای به‌دست آوردن علامت جمله τ در شکل ۶.۶ ضروری است. فرض می‌شود u با r کاهش یابد؛ از این رو du/dr منفی است. با انتگرال‌گیری دیگر به‌دست می‌آوریم

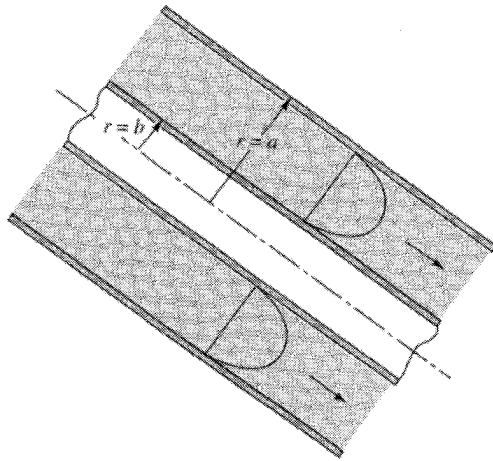
$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) - \frac{A}{\mu} \ln r + B \quad (3.3.6)$$

در حالت طوقی، برای ارزیابی A و B ، وقتی $r = b$ (شعاع داخلی لوله)، داریم $u = 0$ ؛ و وقتی $r = a$ ، داریم $u = 0$ (شکل ۷.۶). اگر A و B را حذف کنیم به‌دست می‌آید

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln(b/a)} \ln \left(\frac{a}{r} \right) \right) \quad (4.3.6)$$

و برای تخلیه در طوق (شکل ۷.۶) داریم

$$Q = \int_b^a 2\pi r u dr = -\frac{\pi}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \left[a^2 - b^2 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln(a/b)} \right] \quad (5.3.6)$$



شکل ۷.۶ شارش در طوق.

لولهٔ مدور؛ معادلهٔ هاگن-پوازویل

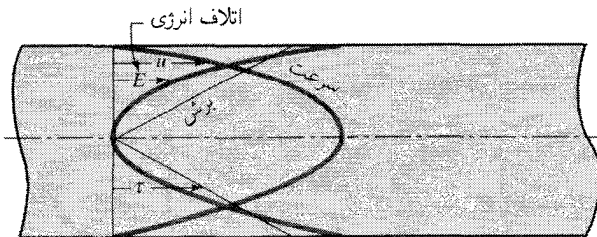
برای لولهٔ مدور، در معادلهٔ (۳.۳.۶) داریم $A = 0$ ، و برای $r = a$ داریم $u = 0$ و

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (۶.۳.۶)$$

سرعت ماکزیمم u_{max} برای $r = 0$ به صورت زیر است:

$$u_{max} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (۷.۳.۶)$$

از آنجا که توزیع سرعت سهموی دوار است (شکل ۸.۶)، حجم آن نصف حجم استوانهٔ محیطی



شکل ۸.۶ توزیع سرعت، برش، و اتلافها برای حجم واحد در لولهٔ گرد.

آن است؛ بنابراین، سرعت متوسط نصف سرعت ماکزیمم است

$$V = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (۸.۳.۶)$$

تخلیه Q مساوی است با $V\pi a^2$ ؛ بنابراین

$$Q = -\frac{\pi a^4}{4\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h) \quad (۹.۳.۶)$$

با انتگرال‌گیری از سرعت u روی سطح نیز می‌توان تخلیه را به دست آورد، یعنی

$$Q = \int_0^a 2\pi r u \, dr$$

برای لوله افقی، ثابت h ؛ افت فشار Δp را در طول L می‌نویسیم

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dl}$$

پس از جایگذاری قطر D نتیجه می‌گیریم

$$Q = \frac{\Delta p \pi D^4}{128\mu L} \quad (\text{فقط برای لوله افقی}) \quad (۱۰.۳.۶ \text{ الف})$$

برحسب سرعت متوسط، داریم

$$V = \frac{\Delta p D^2}{32\mu L} \quad (\text{فقط برای لوله افقی}) \quad (۱۰.۳.۶ \text{ ب})$$

حال معادله (۱۰.۳.۶ الف) را برای افت فشار می‌توان حل کرد، که اتلافها را در حجم واحد

نشان می‌دهد

$$\Delta p = \frac{128\mu L Q}{\pi D^4} \quad (\text{فقط برای لوله افقی}) \quad (۱۱.۳.۶)$$

دیده می‌شود که اتلافها با چسبندگی، طول و تخلیه به‌طور مستقیم و با توان چهارم قطر به‌طور معکوس تغییر می‌کنند. توجه کنید که زبری لوله وارد معادله‌ها نمی‌شود. معادله (۱۰.۳.۶ الف) به

معادلهٔ هاگن-پوازویل معروف است؛ این معادله را هاگن در سال ۱۸۳۹ به‌طور آزمایشی و پوازویل در سال ۱۸۴۰ مستقل از او به‌دست آورد. استنتاج تحلیل آن نیز در سال ۱۸۵۶ توسط ویدمان صورت گرفت.

مثال ۲.۶ مطلوب است جهت شارش در لولهٔ شکل ۹.۶، که در آن $\gamma = 8000 \text{ N/m}^3$ و $\mu = 0.4 \text{ kg/m.s}$ مقدار شارش را برحسب لیتر بر ثانیه پیدا کنید و عدد رینولدز شارش را محاسبه کنید.

حل

در مقطع ۱

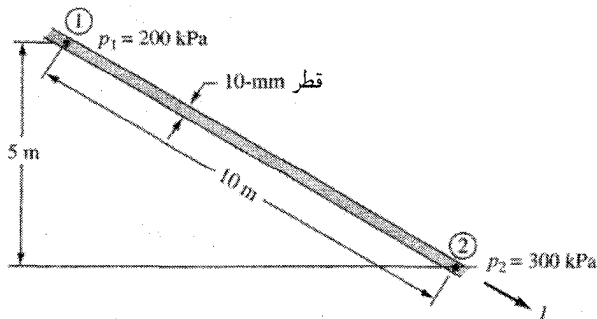
$$p + \gamma h = 200000 \text{ N/m}^2 + (8000 \text{ N/m}^3)(5 \text{ m}) = 240 \text{ kPa}$$

و در مقطع ۲

$$p + \gamma h = 300 \text{ kPa}$$

به شرطی که دادهٔ ارتفاع را در مقطع ۲ بگیریم. شارش از ۲ به ۱ است زیرا انرژی در ۲ بیشتر است تا در ۱ (در هر مقطعی، انرژی جنبشی باید یکسان باشد). برای تعیین مقدار شارش، عبارت زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = \frac{300000 - 240000}{10 \text{ m}} \text{ N/m}^2 = 6000 \text{ N/m}^2$$



شکل ۹.۶ شارش در یک لولهٔ مایل.

که l از طرف ۱ به ۲ مثبت است. با جایگذاری در معادله (۹.۳.۶) نتیجه می‌شود

$$Q = -\frac{\pi(0.005\text{m})^2}{8(0.04\text{N.s/m}^2)} 6000\text{N/m}^2 = -0.0000368\text{m}^3/\text{s}$$

$$= -0.0368\text{L/s}$$

سرعت متوسط عبارت است از

$$V = \frac{0.0000368\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0.005\text{m})^2} = 0.4686\text{m/s}$$

و عدد رینولدز (بخش ۴.۵) عبارت است از

$$R = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{(0.4686\text{m/s})(0.01\text{m})}{(0.04\text{N.s/m}^2)} \left(\frac{8000\text{N/m}^2}{9.806\text{m/s}^2} \right) = 95.6$$

اگر عدد رینولدز بیشتر از ۲۰۰۰ شده بود، معادله هاگن-پوازویل دیگر به کار نمی‌آمد (که در بخش ۱.۶ گفتیم). ■

با استفاده از معادله‌های (۶.۳.۶) و (۷.۳.۶) ضریب تصحیح α [معادله (۱۴.۴.۳)] انرژی جنبشی را برای شارش لایه‌ای می‌توان تعیین کرد

$$\frac{u}{V} = 2 \frac{u}{u_{\max}} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (12.3.6)$$

با جایگذاری برای α به دست می‌آید

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{V} \right)^2 dA = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left\{ 2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\}^2 2\pi r dr = 2 \quad (13.3.6)$$

انرژی موجود دو برابر انرژی در شارش یکنواخت با همین سرعت متوسط است. با جایگزینی نمای ۳ با نمای ۲، ضریب تصحیح تکانه به دست می‌آید، و نتیجه می‌شود $\beta = \frac{4}{3}$. توزیع تنش برشی، سرعت، و اتلافها بر حجم واحد در شکل ۸.۶ برای یک لوله گرد (مدور) نشان داده شده‌اند.

تمرینها

۱.۳.۶ تنش برشی در سیالی که در لولهٔ مدور جریان دارد (الف) بر مقطع ثابت است؛ (ب) در دیواره صفر است و تا مرکز به طور خطی افزایش می‌یابد؛ (ج) در مقطع به طور سهموی تغییر می‌کند؛ (د) در مرکز صفر است و با شعاع به طور خطی تغییر می‌کند؛ (ه) هیچکدام.

۲.۳.۶ وقتی افت فشار در لوله‌ای به قطر ۲۴ in مساوی ۱۰ psi در هر ۱۰۰ ft باشد، تنش برشی دیواره برحسب پوند بر فوت مربع عبارت است از الف) ۰؛ (ب) ۷٫۲؛ (ج) ۱۴٫۴؛ (د) ۷۲۰؛ (ه) هیچکدام.

۳.۳.۶ در شارش لایه‌ای در لولهٔ گرد، تخلیه چگونه تغییر می‌کند؟ الف) به طور خطی با چسبندگی؛ (ب) با مربع شعاع؛ (ج) به طور معکوس با افت فشار؛ (د) به طور معکوس با چسبندگی؛ (ه) با مکعب قطر.

۴.۳.۶ وقتی لوله مایل باشد، عبارت $-dp/dl$ جایگزین می‌شود با الف) $-dh/dl$ ؛ (ب) $-\gamma \frac{dh}{dl}$ ؛ (ج) $-d(p+h)/dl$ ؛ (د) $-d(p+\rho h)/dl$ ؛ (ه) $-d(p+\gamma h)/dl$.

۴.۶ روابط شارش متلاطم

میانگین‌گیری زمانی

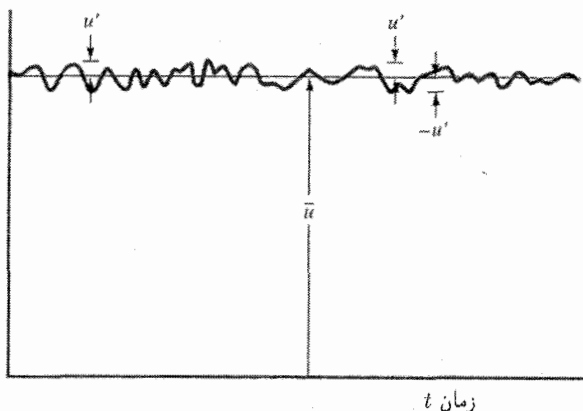
در شارش متلاطم افت و خیزهای تصادفی مؤلفه‌های سرعت و جملهٔ فشار در معادله‌های (۱۲.۴.۴) باعث می‌شوند که، حتی با روشهای عددی مشکل (اگر نه غیرممکن) بتوان تحلیل دقیق انجام داد. مناسب است که کمیتها به مقادیر میانگین یا میانگین زمانی و اجزای افت و خیزی تجزیه شوند [مرجع ۳]. مثلاً، مؤلفهٔ x سرعت u با رابطه زیر نشان داده می‌شود

$$u = \bar{u} + u' \quad (1.4.6)$$

به همان صورتی که در شکل ۱۰.۶ نشان داده شده است؛ در این شکل مقدار میانگین یک کمیت متوسط زمانی است که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\bar{u} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} u dt \quad (2.4.6)$$

حد T_0 در انتگرال دوره معدل‌گیری است، که برای هر مسئله مقدار مناسبی در نظر گرفته می‌شود و از هر دوره تغییرات متلاطم در مقیاس ظریف بزرگتر است. از شکل ۱۰.۶ و از تعریف توجه



شکل ۱۰.۶ افت و خیزهای متلاطم در جهت شارش.

می‌کنیم که مقدار میانگین افت و خیز صفر است

$$\overline{u'} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} (u - \bar{u}) dt = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad (۳.۴.۶)$$

ولی، میانگین مربعی هر افت و خیز صفر نیست

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} (u - \bar{u})^2 dt \neq 0 \quad (۴.۴.۶)$$

جزر این کمیت، یعنی، جذر میانگین مربعی مقادیر اندازه‌گیری شده افت و خیزها، سنجشی برای شدت تلاطم است. رینولدز [مرجع ۴] هر خاصیت را به متغیرهای میانگین افت و خیزی تجزیه کرد

$$v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad p = \bar{p} + p'$$

در هر حالت مقدار میانگین افت و خیز صفر است و میانگین مربعی صفر نیست. میانگین حاصلضربهای افت و خیزها مانند $u'v'$ ، $u'w'$ ، و غیره صفر نیستند.

جایگذاری اجزای افت و خیزی و میانگین متغیرها در معادله پیوستگی [معادله (۴.۳.۴)] در شارش تراکم‌ناپذیر می‌دهد

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (۵.۴.۶)$$

معادله‌های میانگین زمانی تکانه شامل حاصلضرب افت و خیزی مؤلفه‌های x ، y و z سرعت است. معادله در جهت x به شکل زیر در می‌آید

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uu}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uw}) \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)$$

میانگین زمانی جمله‌های شتاب اینرسی \overline{uv} ، \overline{vw} ، \overline{uv} و \overline{uw} به شکل ساده نیستند. این جمله‌ها را باید به شکل حاصلضربهای میانگینها، و نه به شکل میانگین حاصلضربها، نوشت؛ همانطور که در فصل ۳ اشاره شد این دو نوع میانگین مساوی هم نیستند. بنابراین، تحلیل بیشتر لازم است. رینولدز به جای پیروی از فرمول‌بندی‌هایی مانند روش ضرب تصحیح انرژی جنبشی یا تکانه، از تجزیه میانگین جمله‌های شتاب استفاده کرد؛ پس از عملیات جبری داریم

$$\overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'} \simeq \bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}$$

به‌طور مشابه

$$\overline{uv} \simeq \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$$

$$\overline{uw} \simeq \bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}$$

ترکیب این جمله‌ها در معادله قبل می‌دهد

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}) \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \mu \nabla^2 \bar{u}$$

جمله‌های $\overline{\rho u'w'}$ ، $\overline{\rho u'v'}$ ، و $\overline{\rho u'u'}$ جمله‌های به‌طور فیزیکی پیچیده‌اند. اما رینولدز برای شارشهای متلاطم ساده نشان داد (و دیگران نیز ثابت کرده‌اند) که این جمله‌ها یک اثر تنش گونه را نشان می‌دهند. در نتیجه این جمله‌ها مانند جمله‌های معادله‌های y و z تنشهای رینولدز نامیده می‌شوند. این جمله‌ها توضیح‌دهنده تبادل قابل توجه تکانه و آمیختگی زیاد در شارش متلاطم‌اند، و در شارشهای متلاطم، مقدار آنها کاملاً از مقدار جمله‌های تنش چسبنده بیشتر است. ولی باید به خاطر

داشت که این جمله‌ها ناشی از جمله‌های شتاب اینرسی‌اند و برای بسیاری از شارش‌های ژئوفیزیکی رفتار فیزیکی پیچیده‌تری نسبت به رفتار "تنش برشی مانند" دارند. بنابراین، اصطلاح "تنش رینولدز" یک توصیف جامع فیزیکی را نمی‌رساند زیرا این اصطلاح به احترام واضع این مفهوم و دیدگاه آورده شده است.

این معادله‌های پیچیده در جهت x به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) \quad (۶.۴.۶ \text{ الف})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\rho \overline{u'u'} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right\} + \left\{ -\rho \overline{u'v'} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\} + \left\{ -\rho \overline{u'w'} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right\}$$

یا

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

که در آن

$$\tau_{xx} = -\rho \overline{u'u'} + \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} \quad \text{و غیره}$$

در جهت y :

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p} + \gamma h) \quad (۶.۴.۶ \text{ ب})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\rho \overline{u'v'} + \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\} + \left\{ -\rho \overline{v'v'} + \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\} + \left\{ -\rho \overline{v'w'} + \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\}$$

یا

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

و برای جهت z :

$$\rho \frac{D\bar{w}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial}{\partial z}(\bar{p} + \gamma h) \quad (۶.۴.۶ \text{ ج})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\rho \overline{u'w'} + \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right\} + \left\{ -\rho \overline{v'w'} + \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right\} + \left\{ -\rho \overline{w'w'} + \mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\}$$

یا

$$\rho \frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial z}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

از آنجا که تنشهای رینولدز به‌طور کلی نامعلوم‌اند، از روشهای تجربی مبتنی بر منطق غیراستدلالی، تحلیل ابعادی، یا آزمایشهای فیزیکی برای کمک به تحلیل آنها استفاده می‌شود، در شارش یک‌بعدی در جهت x تنش متلاطم $-\rho\overline{u'v'}$ مهم‌ترین جمله است، و معادلهٔ تکانه خطی را با رابطهٔ زیر می‌توان تقریب زد

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \gamma h) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \simeq \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (7.4.6)$$

که در آن

$$\tau_{xy} = \tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'} \quad (8.4.6)$$

تنش برشی کل است که از مؤلفه‌های لایه‌ای τ_t و τ_l تشکیل شده است. به علت مشکل بودن ارزیابی $-\rho\overline{u'v'}$ ، پранتل [مرجع ۵] نظریهٔ طول آمیختگی را وارد کرد؛ این نظریه تنش برشی ظاهر را به توزیع سرعت میانگین زمانی ارتباط می‌دهد.

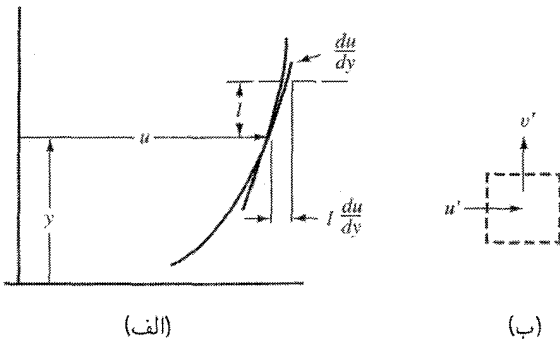
تنش برشی ظاهری در شارش متلاطم به شکل مشابه با قانون چسبندگی نیوتن بیان می‌شود، یعنی،

$$-\rho\overline{u'v'} = \tau_t = \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (9.4.6)$$

که در آن η یک ضریب تجربی به نام چسبندگی تلاطمی است. در زیر یک توضیح مختصر برای روش بستن معادله‌های شارش متلاطم آورده شده است؛ در این روش، سرعت میانگین به کمیت‌های افت و خیزی ارتباط داده می‌شود. برای جلوگیری از اشتباه با نمادگذاری برداری تمام خط‌های تیره که میانگین زمانی را نشان می‌دهند حذف شده‌اند.

طول آمیختگی پранتل

در نظریهٔ پранتل [مراجع ۶] عبارتهای u' و v' برحسب طول آمیختگی ρ و شیب سرعت du/dy به‌دست می‌آیند که در آن u سرعت متوسط لحظه‌ای در یک نقطه، و y فاصلهٔ عمود بر u است



شکل ۱۱.۶ نمادگذاری در نظریه طول آمیختگی.

که معمولاً از مرز اندازه‌گیری می‌شود. در گاز، مولکول قبل از برخورد به مولکول دیگر فاصله‌ای معروف به مسافت آزاد میانگین در گاز طی می‌کند. با استفاده از این قیاس (شکل ۱۱.۶ الف)، پیرانتل فرض کرد که یک ذره سیال قبل از اینکه تکانه آن به‌توسط محیط جدید تغییر کند به اندازه فاصله l جابه‌جا می‌شود. پس افت و خیز u' با رابطه زیر به l مربوط می‌شود:

$$u' \sim l \frac{du}{dy}$$

که به معنای این است که مقدار تغییر سرعت به تغییرات سرعت میانگین لحظه‌ای در دو نقطه به فاصله l از هم در جهت y بستگی دارد. پیرانتل از معادله پیوستگی نتیجه گرفت که باید رابطه‌ای بین u' و v' (شکل ۱۱.۶ ب) وجود داشته باشد، به طوری که v' با u' متناسب باشد

$$v' \sim u' \sim l \frac{du}{dy}$$

با جایگذاری برای u' و v' ، و با فرض اینکه l ضریب تناسب را در خود جای دهد، معادله معرف برای طول آمیختگی به دست می‌آید

$$\tau_{xy_t} = \tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (10.4.6)$$

τ همیشه در سویی عمل می‌کند که باعث توزیع سرعت یکنواخت‌تر شود. اگر معادله (۹.۴.۶) را با معادله (۱۰.۴.۶) مقایسه کنیم، در می‌یابیم که

$$\eta = \rho l^2 \frac{du}{dy} \quad (11.4.6)$$

در لایهٔ جداری چسبنده با زیرلایه لایه‌ای تنش برشی در سیال اساساً ثابت است و با تنش برشی در جداره، τ_0 ، مساوی است. توزیع سرعت از طریق قانون چسبندگی نیوتن به تنش برشی و چسبندگی مطلق در داخل ناحیه $y \leq \delta'$ ارتباط داده می‌شود

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u}{y} = \nu \frac{u}{y} \quad y \leq \delta' \quad (۱۳.۴.۶)$$

در اینجا δ' ارتفاع زیرلایه لایه‌ای است و جمله $\sqrt{\tau_0/\rho}$ همان ابعاد سرعت را دارد و سرعت u_* تنش برشی یا سرعت اصطکاکی خوانده می‌شود. از این رو،

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad y \leq \delta' \quad (۱۴.۴.۶)$$

یک رابطه خطی را بین u و y در غشای لایه‌ای نشان می‌دهد. آن تا مقدار $5 \approx u_* y / \nu$ گسترش می‌یابد، یعنی

$$\delta' = 5 \frac{\nu}{u_*} \quad (۱۵.۴.۶)$$

در لایه همپوش فرض می‌شود که تنش برشی تقریباً با تنش برشی در جداره مساوی است (شکل ۱۲.۶)، اما تلاطم حاکم است و تنش برشی چسبنده که در معادله (۱۳.۴.۶) بیان شده، ناچیز است. از این رو معادله (۹.۴.۶) به شکل زیر در می‌آید

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (۱۶.۴.۶)$$

از آنجا که l ابعاد طول را دارد و از لحاظ ابعادی با y (یعنی تنها بعد خطی حائز اهمیت) متناسب است، فرض می‌شود $l = \kappa y$. با جایگذاری در معادله (۱۶.۴.۶) و مرتب کردن، به دست می‌آوریم

$$\frac{du}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \quad (۱۷.۴.۶)$$

و پس از انتگرال‌گیری حاصل می‌شود

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + \text{ثابت} \quad (۱۸.۴.۶)$$

باید توجه داشت که این مقدار u که در معادله (۱۲.۴.۶) جایگذاری می‌شود l را نیز که با y متناسب است تعیین می‌کند (d^2u/dy^2 منفی است، زیرا شیب سرعت با افزایش y کم می‌شود). معادله (۱۸.۴.۶) با آزمایش همخوانی دارد و در حقیقت وقتی τ تابع y باشد مفید نیز هست. زیرا بیشتر تغییر سرعت در نزدیکی دیواره رخ می‌دهد که در آن اساساً ثابت است. به خوبی می‌توان این معادله را برای شارش متلاطم در لوله‌ها به کار برد.

مثال ۳.۶ با انتگرال‌گیری از معادله (۱۸.۴.۶) رابطه بین سرعت متوسط V و سرعت ماکزیم u_m را در شارش متلاطم در یک لوله پیدا کنید.

حل

وقتی $y = r_0$ ، داریم $u = u_m$ به طوری که

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0}$$

با انتگرال‌گیری از سرعت روی سطح، تخلیه $V\pi r_0^2$ به دست می‌آید

$$V\pi r_0^2 = 2\pi \int_0^{r_0 - \delta'} ur \, dr = 2\pi \int_{\delta'}^{r_0} \left(u_m + \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} \right) (r_0 - y) dy$$

انتگرال‌گیری را با $y = 0$ نمی‌توان انجام داد، زیرا معادله فقط در منطقه متلاطم صادق است. حجمی که در ثانیه در منطقه لایه‌ای جریان دارد به قدری کوچک است که از آن می‌توان صرف نظر کرد. حال

$$V = 2 \int_{\delta'/r_0}^1 \left(u_m + \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{r_0} \right) \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) d \frac{y}{r_0}$$

که در آن متغیر انتگرال‌گیری y/r_0 است. با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$V = 2 \left\{ u_m \left[\frac{y}{r_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right] + \frac{u_*}{\kappa} \left[\frac{y}{r_0} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{y}{r_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right] + \left[\ln \frac{y}{r_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right] \right\}_{\delta'/r_0}^1$$

از آنجا که δ'/r_0 بسیار کوچک است، از جمله‌هایی مانند δ'/r_0 و $\delta'/r_0 \ln(\delta'/r_0)$ می‌توان

چشم پوشید ($\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$): بدین ترتیب

$$\frac{u_m - V}{u_*} = \frac{3}{2\kappa} \quad \text{یا} \quad V = u_m - \frac{3}{2} \frac{u_*}{\kappa}$$

مثال ۴.۶ در شارش کانال باز به عمق d رابطه‌ای بین سرعت متوسط V و مقادیر نقطه‌اندازه‌گیری شده‌ی سرعت در لایه مرزی بیابید. عمقی را پیدا کنید که در آن سرعت نقطه‌ای با سرعت متوسط برابر باشد.

حل

از معادله (۱۸.۴.۶) که برای شارش با سطح آزاد به کار رود داریم

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$$

که در آن y ضریب انتگرال است و از این شرط به دست می‌آید که کف کانال، یعنی جایی که $y = y_0$ ، خیلی زبر است. در نتیجه $u = 0$ ، سرعت متوسط برابر است با

$$V = \frac{1}{d - y_0} \int_{y_0}^d \left(\frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \right) dy$$

یا، با $1 \ll d/y_0$ ، داریم

$$V = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{d}{y_0} - \frac{u_*}{\kappa}$$

قانون انحراف سرعت به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{V - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{d}{y} - \frac{1}{\kappa}$$

یا

$$u = -\frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{d}{y} + \frac{u_*}{\kappa} + V$$

با قرار دادن $u = V$ ، عمقی که در آنجا سرعت نقطه‌ای با سرعت متوسط برابر است به دست می‌آید

$$\ln \frac{y}{y_0} = \ln \frac{d}{y_0} - 1$$

$$y = 0.3679d$$

در عمل، به جای اینکه برای تعیین سرعت متوسط از اندازه‌گیری توزیع سرعت استفاده شود، اغلب سرعت نقطه‌ای در $0.4d = y$ اندازه‌گیری می‌شود و مقدار مورد استفاده سرعت متوسط است. به طریق دیگر، میانگین دو اندازه‌گیری نقطه‌ای، در $0.8d = y$ و $0.2d = y$ ، اغلب به عنوان سرعت متوسط متوسط به کار می‌روند. ■

برای تعیین ثابت معادله (۱۸.۴.۶) با پیروی از روشهای باکمتف [مرجع ۸] می‌گوییم وقتی $y = \delta'$ باشد، $u = u_w$ سرعت در دیواره است. طبق معادله (۱۴.۴.۶)، نتیجه می‌شود

$$\frac{u_w}{u_*} = \frac{u_* \delta'}{\nu} = N \quad (19.4.6)$$

که از آن استدلال می‌شود که $u_* \delta' / \nu$ باید دارای یک مقدار بحرانی N باشد که در آن شارش از لایه‌ای به متلاطم تبدیل می‌شود، زیرا این پارامتر صورت عدد رینولدز را دارد. با جایگذاری $u = u_w$ وقتی $y = \delta'$ در معادله (۱۸.۴.۶)، و با استفاده از معادله (۱۹.۴.۶)، نتیجه می‌شود

$$\frac{u_w}{u_*} = N = \frac{1}{\kappa} \ln \delta' + \text{ثابت} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{N\nu}{u_*} + \text{ثابت}$$

پس از حذف ثابت به دست می‌آید

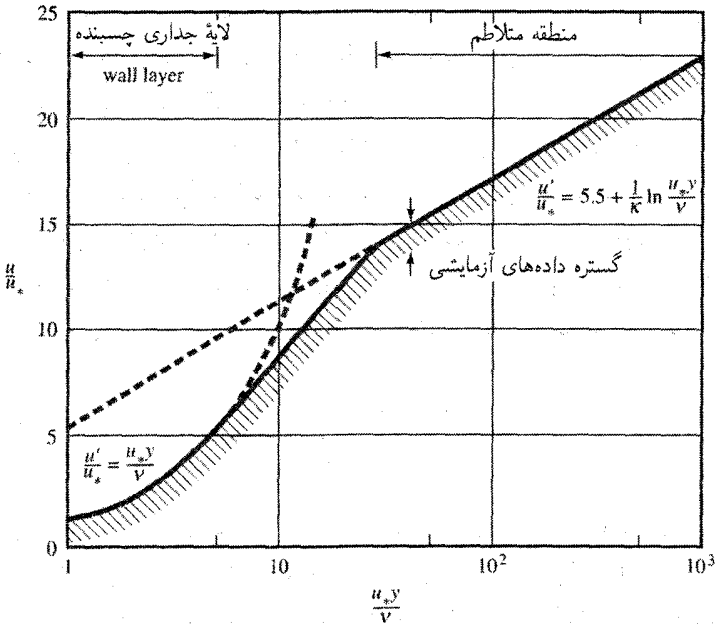
$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + N - \frac{1}{\kappa} \ln N$$

یا

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{\nu} + A \quad (20.4.6)$$

که در آن با ترسیم u/u_* بر حسب $\ln(yu_*/\nu)$ مقدار $A = N - (1/\kappa) \ln N$ به طور آزمایشی تعیین شده است. در لوله‌های دیواره صاف آزمایشهای نیکورادزه [مرجع ۹] مقادیر $\kappa = 0.40$ و $A = 5.0$ را به دست می‌دهد. شکل ۱۳.۶ توزیع لگاریتمی سرعت، معادله (۲۰.۴.۶)، را در شارش متلاطم در لوله‌های صاف، همراه با نمایش خطای آزمایشی به دست آمده از تعدادی مراجع، نشان می‌دهد.

در منطقه متلاطم خارجی (شکل ۱۲.۶) قانون انحراف سرعت به کار می‌رود. انحراف سرعت بی‌بعد $(u_m - u)/u_*$ تابعی از نسبت y به ضخامت y_0 است. برای شارش لوله $y_0 = r_0$ ؛



شکل ۱۳.۶ شارش متلاطم در لوله‌های صاف.

(r_0 شعاع لوله است). قانون انحراف سرعت در لوله‌های صاف و زیر به کار می‌رود. از معادله (۱۸.۴.۶) ارزیابی ثابت برای $u = u_m$ در $y = r_0$ می‌دهد

$$\frac{u_m - u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{r_0}{y} \quad (21.4.6)$$

در شارشها در دیواره زیر، می‌توان فرض کرد سرعت در فاصله $y_w = m\epsilon'$ از دیواره u_w است؛ ϵ' ارتفاع نوعی زبری و m ضریب شکل است که به نوع زبری بستگی دارد. جایگذاری در معادله (۲۱.۴.۶) و حذف u_m/u_* بین دو معادله می‌دهد

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon'} + \frac{u_w}{u_*} - \frac{1}{\kappa} \ln m \quad (22.4.6)$$

که در آن دو جمله آخر در سمت راست در نوع زبری، معین ثابت است.

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon'} + B \quad (23.4.6)$$

در آزمایشهای نیکوراد ذره ذرات شن با اندازه ثابت (شنهای عبور داده شده از یک غربال و باقیمانده روی غربالی ریزتر) به دیواره‌های داخلی لوله چسبانده شده بودند. اگر ϵ' قطر ذرات شن باشد، آزمایش نشان می‌دهد که $\kappa = 0.40$ و $B = 8.48$.

قانون لگاریتمی، معادله (۲۰.۴.۶)، بیشترین کاربرد را دارد زیرا در اغلب شارشها با قانون انحراف به خوبی تطبیق می‌کند. لایه جداري چسبنده به طور فیزیکی فقط قسمت بسیار کوچکی از شارش را در شارشهای متلاطم می‌پوشاند و در شارشهای دیواره زیر وجود ندارد زیرا ϵ' به طور عادی اندازه کوچک دارد و یا در شارشهای دیواره صاف با عدد رینولدز مساوی بزرگتر از δ' است. پرانتل فرمول توزیع سرعت نمایی مناسبی برای شارش متلاطم در لوله استخراج کرده است.

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^n \quad (24.4.6)$$

که در آن n با عدد رینولدز تغییر می‌کند. این معادله تجربی فقط در فاصله‌ای از دیواره صحت دارد. برای R کمتر از 100000 داریم $n = 1/7$ ؛ و برای مقادیر بزرگتر R مقدار n کم می‌شود. در معادله‌های توزیع سرعت، یعنی در معادله‌های (۲۰.۴.۶) و (۲۴.۴.۶)، خطای صفر نبودن مقدار du/dy در مرکز لوله وجود دارد.

مثال ۵.۶ عبارتی تقریبی برای توزیع طول مخلوط در شارش متلاطم در لوله با استفاده از قانون توان یک هفتم پرانتل پیدا کنید.

حل

موازنه نیرو را برای شارش پایا در یک لوله گرد (شکل ۱۴.۶) می‌نویسیم

$$\tau = -\frac{dp}{dl} \frac{r}{2}$$

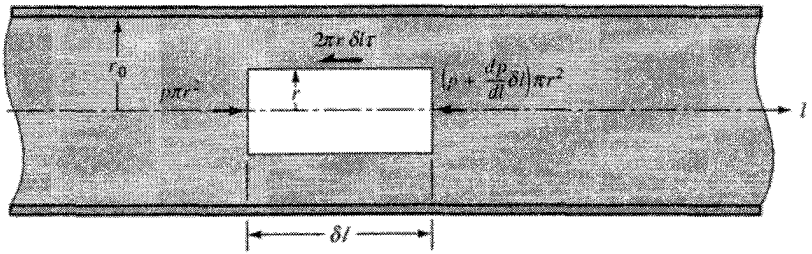
در دیواره

$$\tau_0 = \frac{dp}{dl} \frac{r_0}{2}$$

از این رو

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

اگر l را حل کنیم به دست می‌آید



شکل ۱۴.۶ نمودار جسم آزاد برای شارش پایا در لوله گرد.

$$l = \frac{u_* \sqrt{1 - y/r_0}}{du/dy}$$

از معادله (۲۴.۴.۶) داریم

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^{1/7}$$

شیب تقریبی سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{l}{r_0} = \frac{u_*}{u_m} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{6/7} \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \quad \text{و} \quad \frac{du}{dy} = \frac{u_m}{r_0} \frac{1}{7} \left(\frac{y}{r_0} \right)^{-6/7}$$

تمرینها

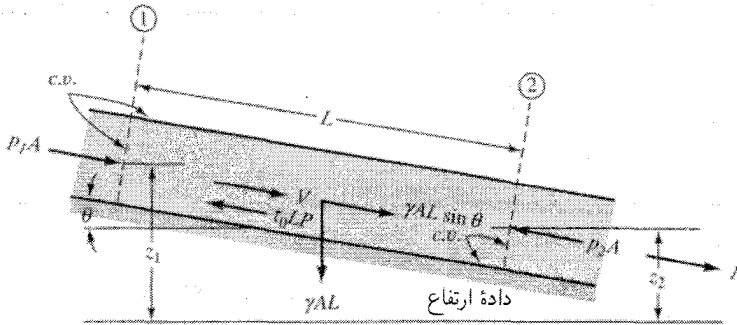
۱.۴.۶ طول مخلوط پرانتل الف) مستقل از فاصله شعاعی تا محور لوله است؛ ب) مستقل از تنش برشی است؛ ج) در دیواره لوله صفر است؛ د) ثابت عمومی است؛ ه) برای محاسبه مسافت شارش لایه‌ای سودمند است.

۲.۴.۶ سرعت متوسط تقسیم بر سرعت ماکزیمم، از قانون نمای یک هفتم، عبارت است از الف) $49/120$ ؛ ب) $1/2$ ؛ ج) $6/7$ ؛ د) $98/120$ ؛ ه) هیچکدام.

۵.۶ اتلافهای شارش متلاطم در مجراهای باز و بسته

در شارش تراکم‌ناپذیر متلاطم یکنواخت و پایا در مجراهای مقطع ثابت، تنش برشی دیواره تقریباً متناسب با مربع سرعت متوسط تغییر می‌کند

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho}{4} V^2 \quad (1.5.6)$$



شکل ۱۵.۶ نیروهای محور وارد بر حجم کنترل در یک مجرا.

که در آن λ ضریب بی‌بعد است. در کانالهای باز و مجراهای بسته غیردایروی، تنش برشی بر سطح، ثابت نیست. در این حالتها، از τ_0 به عنوان تنش برشی متوسط دیواره استفاده می‌شود. شارشهای ثانویه* در مجراهای غیردایروی باعث یکسانی تنش برشی دیواره می‌شوند.

در شکل ۱۵.۶، یک شارش یکنواخت پایا در مجرای باز یا بسته نشان داده شده است. در مجرای باز p_1 و p_2 مساوی‌اند و در نتیجه کاهش انرژی پتانسیل، $z_1 - z_2 = m.N/N$ ، شارش رخ می‌دهد. در شارش در مجرای بسته، انرژی شارش را با افت انرژی پتانسیل و همچنین با افت فشار $p_1 - p_2$ می‌توان تأمین کرد. اگر شارش در لوله عمودی و رو به پایین باشد، در جهت شارش افزایش می‌یابد، اما افت انرژی پتانسیل $z_1 - z_2$ باید بیشتر از $(p_2 - p_1)/\gamma$ باشد تا انرژی لازم برای غلبه بر تنش برشی دیواره فراهم شود.

معادله انرژی (۲۱.۴.۳) را می‌نویسیم تا اتلافها را به کاهش انرژی دسترسی‌پذیر مربوط کنیم

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + (\text{اتلافها})_{1-2}$$

از آنجا که ارتفاع سرعت، $V^2/2g$ ، یکسان است، داریم

$$(\text{اتلافها})_{1-2} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \quad (2.5.6)$$

با توجه به فرض یکنواختی، معادله تکانه خطی (۷.۶.۳) در جهت l نتیجه می‌دهد

$$\sum F_l = 0 = (p_1 - p_2)A + \gamma AL \sin \theta - \tau_0 LP$$

* شارشهای ثانویه، که کاملاً شناخته نیستند، مؤلفه‌هایی عرضی‌اند که باعث می‌شوند شارش مرکزی اصلی تاکنجها یا تا نزدیک دیواره گسترش یابد.

که در آن محیط خیس شده مجرا، یعنی قسمتی از محیط دیواره است که با سیال تماس دارد (سطح آزاد مایع مستثنی است). از آنجا که $z_1 - z_2 = L \sin \theta$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{\tau_o LP}{\gamma A} \quad (۳.۵.۶)$$

از معادله‌های (۲.۵.۶) و (۳.۵.۶)، با استفاده از معادله (۱.۵.۶)، داریم

$$(اتلافها)_{۱-۲} = \frac{\tau_o LP}{\gamma A} = \lambda \frac{\rho}{\gamma} V^2 \frac{LP}{\gamma A} = \lambda \frac{L V^2}{R \ 2g} \quad (۴.۵.۶)$$

که در آن $R = A/P$ جایگذاری شده است. R ، موسوم به شعاع هیدرولیکی مجرا، در بررسی کانالهای باز بسیار به کار می‌آید. برای یک لوله، $R = D/4$.

واحد جمله اتلاف در معادله (۴.۵.۶) متر-نیوتن بر نیوتن است و آن را h_f اتلاف ارتفاع ناشی از اصطکاک می‌نامند. اگر S را اتلافها در نیروی گرانی واحد در طول واحد کانال تعریف کنیم

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{\lambda V^2}{R \ 2g} \quad (۵.۵.۶)$$

بعد از حل V داریم

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS} \quad (۶.۵.۶)$$

ضریب λ یا ضریب C را باید از آزمایش معلوم کرد. این فرمول شری است، که ابتدا تصور می‌شد ضریب شزی C در آن برای هر اندازه مجرا یا هر شرایطی از سطح دیواره ثابت است. اکنون، فرمولهای مختلفی برای C استفاده می‌کنند.

در لوله‌ها، وقتی $\lambda = f/4$ و $R = D/4$ ، معادله داریس-وایسباخ به دست می‌آید:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D \ 2g} \quad (۷.۵.۶)$$

که در آن D قطر داخلی لوله است. این معادله را برای کانالهای باز به صورت زیر می‌توان به کار برد:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda g}{f}} \sqrt{RS} \quad (۸.۵.۶)$$

مقادیر f از آزمایشهای لوله تعیین می‌شود.

تمرینها

۱.۵.۶ شعاع هیدرولیکی عبارت است از الف) محیط خیس شده تقسیم بر مساحت؛ ب) مساحت تقسیم بر مربع محیط خیس شده؛ ج) ریشهٔ دوم مساحت؛ د) مساحت تقسیم بر محیط خیس شده؛ ه) هیچکدام.

۲.۵.۶ شعاع هیدرولیکی یک کانال باز به عرض ۶۰ mm و عمق ۱۲۰ mm، برحسب میلیمتر عبارت است از الف) ۲۰؛ ب) ۲۴؛ ج) ۴۰؛ د) ۶۰؛ ه) هیچکدام.

۶.۶ شارش یکنواخت پایا در کانالهای باز

در شارش تراکم‌ناپذیر و پایا در عمق ثابت یک کانال باز منشوری فرمول مایننگ با شیب بستر S_0 زیاد به کار می‌رود. آن را می‌توان از فرمول شزی [معادلهٔ (۶.۵.۶)] به دست آورد؛ قرار می‌دهیم

$$C = \frac{C_m}{n} R^{1/6} \quad (۱.۶.۶)$$

به طوری که

$$V = \frac{C_m}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (۲.۶.۶)$$

و این فرمول مایننگ است.

مقدار C_m در آحاد USC و SI، به ترتیب، ۱۴۹ و ۱۰ است؛ V سرعت متوسط در مقطع است؛ R شعاع هیدرولیکی است (بخش ۵.۶)؛ و S اتلافهای نیروی گرانی برای طول واحد کانال یا شیب واحد کف کانال است. در مورد شارش یکنواخت مانا به سادگی می‌توان ثابت S شیب سطح آب نیز هست که برای شارش یکنواخت مانا به موازات بستر کانال است. قبلاً تصور می‌شد که ضریب n ضریب زبری مطلق باشد، یعنی فقط به زبری سطح بستگی داشته باشد، اما این ضریب به طرز نامعلومی به اندازه و شکل مقطع کانال بستگی دارد. مقادیر ضریب n که از آزمایشهای بسیار در کانالهای حقیقی تعیین شده‌اند، در جدول ۱.۶ آمده‌اند. معادلهٔ (۲.۶.۶) باید آحاد سازگار USC یا SI داشته باشد و برای استفاده از آن، مقادیر n را در جدول ۱.۶ نشان داده‌ایم.*

* برای تبدیل معادلهٔ تجربی آحاد USC به SI، n را بی‌بعد می‌گیرند؛ در این صورت، ثابت دارای ابعاد می‌شود $(۱.۴۹ \text{ft}^{1/2}/\text{s}) (۰.۳۰۴۸ \text{m}/\text{ft})^{1/2} = ۱.۰ \text{m}^{1/2}/\text{s}$ و

جدول ۱.۶ مقادیر متوسط ضریب زبری مانینگ برای مواد مرزی مختلف*.

مواد مرزی	مانینگ n
چوب رنده شده	۰.۱۲
چوب رنده نشده	۰.۱۳
بتن پرداخت شده	۰.۱۲
بتن پرداخت نشده	۰.۱۴
چدن	۰.۱۵
آجر	۰.۱۶
فولاد پرچکاری شده	۰.۱۸
فلز مضرس	۰.۲۲
قلوه سنگ	۰.۲۵
خاک	۰.۲۵
خاک، با سنگ یا علف	۰.۳۵
شن	۰.۲۹

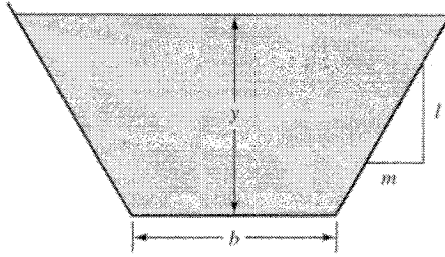
* کار اداره احیای اراضی امریکا و دیگر سازمانهای دولتی نشان می دهد که برای شعاعهای هیدرولیکی بیش از حدود ۱۰ft، ضریب زبری مانینگ باید افزایش یابد (مثلاً ۱۰ تا ۱۵ درصد) افت ظرفیت کانالهای بزرگ ناشی از زبر شدن سطوح بر اثر مرور زمان، رشد آبریان و گیاهان، نهشتهها، و افزایش پایه های پلها در اثر گسترش شبکه شاهراههاست.

وقتی معادله (۲.۶.۶) در مساحت A مقطع ضرب شود، فرمول مانینگ به صورت زیر در می آید:

$$Q = \frac{C_m}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \quad (3.6.6)$$

وقتی مساحت مقطع معلوم است، هر یک از کمیتهای دیگر را از معادله (۳.۶.۶) با حل مستقیم می توان به دست آورد.

مثال ۶.۶ تخلیه کانال دوزنقهای (شکل ۱۶.۶) را با کفی به عرض $b = 8ft$ و شیبهای جانبی ۱ به ۱ تعیین کنید. عمق $6ft$ ، و شیب کف 0.009 است. کانال، آستری از بتن پرداخت شده دارد.



شکل ۱۶.۶ نمادگذاری مقطع دوزنقه‌ای.

حل

از جدول ۱۰.۶، داریم $n = ۰.۱۲$ ، مساحت عبارت است از

$$A = ۸(۶) + ۶(۶) = ۸۴ \text{ft}^2$$

و محیط خیس شده عبارت است از

$$P = ۸ + ۲(۶\sqrt{۲}) = ۲۴.۹۶ \text{ft}$$

با جایگذاری در معادله (۳.۶.۶)

$$Q = \frac{۱.۴۹}{۰.۰۰۱۲} (۸۴) \left(\frac{۸۴}{۲۴.۹۶} \right)^{۲/۳} (۰.۰۰۰۹^{۱/۲}) = ۷۰۳ \text{cfs}$$

وقتی مساحت مقطع معلوم نیست، در مواردی از حلهای آزمونی استفاده می‌شود. عبارتهای شعاع هیدرولیکی و مساحت، هر دو شامل عمق به صورتی اند که به طور صریح نمی‌توان حل کرد.

مثال ۷.۶ چه عمقی برای شارش $۴ \text{m}^3/\text{s}$ در کانالی مستطیلی از چوب رنده شده به عرض ۲m با شیب کف ۰.۰۰۲ لازم است؟

حل

اگر عمق y باشد، داریم $A = ۲y$ ، $P = ۲ + ۲y$ و $n = ۰.۱۲$. با جایگذاری در معادله (۳.۶.۶)، داریم

$$۴ \text{m}^3/\text{s} = \frac{۱.۴۹}{۰.۰۰۱۲} ۲y \left(\frac{۲y}{۲ + ۲y} \right)^{۲/۳} ۰.۰۰۲^{۱/۲}$$

پس از ساده کردن، به دست می آید

$$f(y) = y \left(\frac{y}{1+y} \right)^{2/3} = 0.536$$

فرض کنیم $y = 1\text{ m}$ ؛ در این صورت $f(y) = 0.63$. فرض کنیم $y = 0.89\text{ m}$ ؛ در این صورت $f(y) = 0.538$. عمق صحیح حدود 0.89 m است. ■

مثال ۸.۶ مقامات اصلاح محیط از یک طراح خواسته اند که یک کانال با زا آستر بکشد تا از فرسایش آن جلوگیری شود. مقطع کانال دوزنقه ای و شیب آن 0.0009 است. عرض کف 10 ft و شیبهای جانبی ۲ به ۱ (افقی به قائم) است. اگر او برای آسترکشی از قلوه سنگ تقریباً کروی ($\gamma_s = 135\text{ lb/ft}^3$) استفاده کند، حداقل D_{50} قلوه سنگ که می توان استفاده کند چقدر است؟ شارش طراحی 1000 cfs است. فرض می کنیم تنشی که قلوه سنگ می تواند تحمل کند از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau = 0.40(\gamma_s - \gamma)D_{50}\text{ lb/ft}^2$$

که در آن γ_s نیروی گرانی واحد سنگ و D_{50} قطر متوسط سنگ برحسب فوت است.

حل

n مانینگ 0.03 برای قلوه سنگ مناسب است. برای پیدا کردن اندازه کانال، از معادله (۳.۶.۶) داریم

$$1000 = \frac{1.49}{0.03} \frac{[y(10 + 2y)]^{5/3}}{(10 + 2\sqrt{5}y)^{2/3}} 0.03$$

با حل آزمون، عمق عبارت است از $y = 8.62\text{ ft}$ و شعاع هیدرولیکی $R = 4.84\text{ ft}$. از معادله های (۴.۵.۶) و (۵.۵.۶) داریم

$$\tau_0 = \gamma R S_0 = 62.4(4.84)(0.0009) = 0.272\text{ lb/ft}^2$$

برای پیدا کردن اندازه D_{50} برای حرکت نخستین، $\tau = \tau_0$ و

$$0.40(135 - 62.4)D_{50} = 0.272$$

از این رو $D_{50} = 0.936\text{ ft}$.

حالت های کلی تر شارش در کانال باز را در فصل ۱۳ بررسی می کنیم.

تمرینها

- ۱.۶.۶ اتلافها در شارش کانال باز عموماً به صورت زیر تغییر می‌کند؛ الف) با توان اول زبری؛
 ب) با عکس زبری؛ ج) با مربع سرعت؛ د) با مربع عکس شعاع هیدرولیکی؛ ه) با سرعت.
 ۲.۶.۶ ساده‌ترین صورت محاسبه شارش کانال باز عبارت است از الف) یکنواخت پایا؛
 ب) غیریکنواخت پایا؛ ج) یکنواخت غیرپایا؛ د) غیریکنواخت غیرپایا؛ ه) به تدریج تغییرکننده.
 ۳.۶.۶ در یک کانال باز و عریض، شعاع هیدرولیکی مساوی است با الف) $y/3$ ؛ ب) $y/2$ ؛
 ج) $2y/3$ ؛ د) y ؛ ه) هیچکدام.
 ۴.۶.۶ ضریب زبری مانینگ برای بتن پرداخت‌شده عبارت است از الف) 0.02 ؛ ب) 0.020 ؛
 ج) 0.20 ؛ د) به شعاع هیدرولیکی بستگی دارد؛ ه) هیچکدام.

۷.۶ شارش تراکم‌ناپذیر پایا در شبکه‌های ساده لوله

فرمول کولبروک

موازنه نیرو برای شارش پایا (بی‌شتاب) در لوله افقی (شکل ۱۷.۶) نتیجه می‌دهد

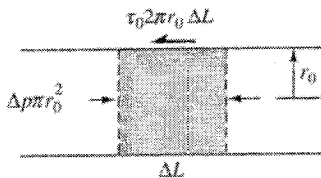
$$\Delta p \pi r_0^2 = \tau_0 \cdot 2\pi r_0 \Delta L$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tau_0 = \frac{\Delta p r_0}{\Delta L} \quad (17.6)$$

این معادله برای شارش لایه‌ای یا متلاطم است. معادله داریسی-وایسباخ (۷.۵.۶) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta p = \gamma h_f = f \frac{\Delta L}{2r_0} \rho \frac{V^2}{2}$$



شکل ۱۷.۶ شرایط تعادل برای شارش پایا در لوله.

با حذف Δp در دو معادله و ساده کردن آن نتیجه می‌گیریم

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{f}{8}} V \quad (2.7.6)$$

که تنش برشی دیواره، ضریب اصطکاک، و سرعت متوسط را به هم مربوط می‌کند. سرعت متوسط V را از انتگرال‌گیری معادله (۲۰.۴.۶) روی مقطع می‌توان به دست آورد. با جایگذاری V در معادله (۲.۷.۶) و ساده کردن آنها، معادله ضریب اصطکاک برای شارش در لوله صاف به دست می‌آید

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = A_s + B_s \ln(R\sqrt{f}) \quad (3.7.6)$$

با داده‌های نیکورادزه [مرجع ۹] برای لوله‌های صاف، معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.869 \ln(R\sqrt{f}) - 0.8 \quad (4.7.6)$$

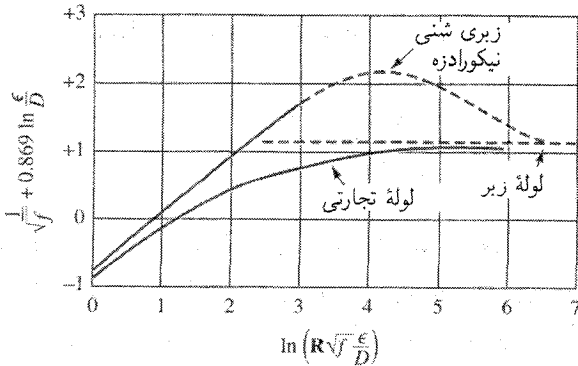
برای لوله‌های زیر در منطقه تلاطم کامل، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = F_1 \left(m, \frac{\epsilon'}{D} \right) + B_r \ln \frac{\epsilon}{D} \quad (5.7.6)$$

که در آن F_1 به‌طور کلی عبارت است از یک ثابت برای صورت داده شده و فاصله اجزای زبری برای زبری دانه‌شن، نیکورادزه (شکل ۲۰.۶)، معادله (۵.۷.۶) تبدیل می‌شود به

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 0.869 \ln \frac{\epsilon}{D} \quad (6.7.6)$$

ارتفاع زبری ϵ برای لوله‌های زبر شده با شن را به عنوان معیار زبری لوله‌های تجاری می‌توان به کار برد. اگر در منطقه تلاطم کاملاً گسترش‌یافته دیواره، یعنی جایی که اعداد رینولدز زیادند و اتلاف با مربع سرعت متناسب است، مقدار f برای یک لوله تجاری معلوم باشد، مقدار ϵ را از معادله (۶.۷.۶) می‌توان محاسبه کرد. در منطقه گذار، که f هم به ϵ/D و هم به R بستگی دارد، از لوله‌های زیر شده با شن نتایجی گرفته می‌شود که با نتایج حاصل از لوله‌های تجاری تفاوت دارند. این موضوع با نموداری آشکار می‌شود که بر معادله‌های (۴.۷.۶) و (۶.۷.۶) مبتنی است



شکل ۱۸.۶ تابع گذار کولبروک.

و نتایج آزمون لوله با شن زبر شده و لوله تجاری هر دو در آن نشان داده شده است. با مرتب کردن مجدد معادله (۶.۷.۶) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 0.869 \ln \frac{\epsilon}{D} = 1.14$$

با اضافه کردن $0.869 \ln(\epsilon/D)$ به هر دو طرف معادله (۶.۷.۶) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 0.869 \ln \frac{\epsilon}{D} = 0.869 \ln \left(R\sqrt{f} \frac{\epsilon}{D} \right) - 0.8$$

با انتخاب $1/\sqrt{f} + 0.869 \ln(\epsilon/D)$ به عنوان مختصه عرض و $\ln(R\sqrt{f}\epsilon/D)$ به عنوان مختصه طول (شکل ۱۸.۶) نمودار نتایج آزمون با لوله صاف به صورت یک خط مستقیم با شیب 0.869 است و نمودار نتایج آزمون با لوله زبر در منطقه کاملاً متلاطم به صورت یک خط افقی است. نمودار نتایج آزمون با لوله زبر شنی نیکورادزه در ناحیه گذار در امتداد خط چین است، و نمودار نتایج آزمون با لوله تجاری در امتداد خط خمیده پایینی است.

توضیح اختلاف در شکل منحنی زبری مصنوعی نیکورادزه با منحنی زبری تجاری این است که زیر لایه لایه‌ای، یا فیلم (غشاء) لایه‌ای، تمام زبری مصنوعی را می‌پوشاند و وقتی ضخامت فیلم کم شود به زبری مصنوعی اجازه می‌دهد که به‌طور یکنواخت بیرون بزند. چنانچه زبری تجاری باشد (که خیلی به‌طور غیر یکنواخت تغییر می‌کند)، وقتی ضخامت فیلم با افزایش عدد رینولدز کاهش یابد، قسمتهای کوچک ابتدا در جلو فیلم گسترش می‌یابند. کولبروک [مرجع ۱۰] یک تابع تجربی گذار برای لوله‌های تجاری در ناحیه بین لوله‌های هموار و منطقه کاملاً متلاطم ارائه کرده است

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.869 \ln \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.523}{R\sqrt{f}} \right) \quad (7.7.6)$$

که مبنایی برای نمودار مودی (شکل ۲۱.۶) است که در بخش بعدی به تفصیل توضیح داده می‌شود.

شارش در لوله

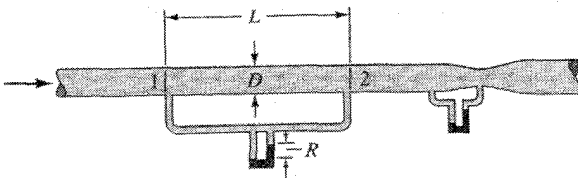
در شارش تراکم‌ناپذیر پایا در لوله، برگشت‌ناپذیریها برحسب جمله‌های افت ارتفاع، یا افت خط هیدرولیکی (بخش ۲.۱۲) بیان می‌شوند. خط هیدرولیکی به اندازه p/γ بالاتر از مرکز لوله است. و اگر z ارتفاع مرکز لوله باشد، $z + p/\gamma$ ارتفاع نقطه‌ای بر خط هیدرولیکی است. مکان هندسی مقادیر $z + p/\gamma$ در خط لوله، خط هیدرولیکی را به دست می‌دهد. اتلافها یا برگشت‌ناپذیریها، باعث می‌شوند که این خط در جهت شارش افت کند. معادله داری-وایسباخ [معادله (7.5.6)]

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

به‌طور کلی برای محاسبات شارش در لوله پذیرفته شده است. h_f افت ارتفاع، یا افت خط هیدرولیکی، در طول L لوله‌ای است که قطر داخلی D و سرعت متوسط V دارد. h_f بعد طول دارد و برحسب متر-نیوتن بر نیوتن بیان می‌شود. ضریب اصطکاک f یک ضریب بی‌بعد است که برای اینکه معادله مقدار صحیحی برای اتلافها نتیجه دهد ضروری است. تمام کمیتها را در معادله (7.5.6) به استثنای f به‌طور آزمایشی می‌توان اندازه گرفت. یک ترکیب نمونه‌وار در شکل ۱۹.۶ نشان داده شده است. با اندازه‌گیری تخلیه و قطر داخلی، سرعت متوسط را می‌توان محاسبه کرد. افت ارتفاع h_f را با فشارسنج تقاضایی اندازه می‌گیرند که به دهانه‌های پیزومتر در مقاطع ۱ و ۲ به فاصله L از یکدیگر، متصل است.

آزمایش نشان می‌دهد که در شارش متلاطم مطالب زیر صحت دارد:

۱. افت ارتفاع با طول لوله به‌طور مستقیم تغییر می‌کند.



شکل ۱۹.۶ ترکیب آزمایشی برای اندازه‌گیری افت ارتفاع در لوله.

۲. افت ارتفاع تقریباً با مربع سرعت تغییر می‌کند.
۳. افت ارتفاع تقریباً با عکس قطر تغییر می‌کند.
۴. افت ارتفاع به زبری سطح دیواره داخلی لوله بستگی دارد.
۵. افت ارتفاع به خواص چگالی و چسبندگی سیال بستگی دارد.
۶. افت ارتفاع مستقل از فشار است.

ضریب اصطکاک f را باید طوری انتخاب کرد که معادله (۷.۵.۶) افت ارتفاع را به طور صحیح نتیجه دهد؛ از این رو f نمی‌تواند ثابت باشد، بلکه باید به سرعت V ، قطر D ، چگالی ρ ، چسبندگی μ ، و بعضی مشخصه‌های زبری دیواره که با ϵ و ϵ' و m مشخص می‌شوند بستگی داشته باشد. ϵ معیاری از اندازه برجستگیهای زبری است و ابعاد طول را دارد، ϵ' معیار آرایه یا فاصله اجزای زبری است که این نیز ابعاد طول را دارد، و m یک ضریب شکلی است که به شکل تک تک اجزای زبری بستگی دارد و بی‌بعد است. عبارت f ، ثابت ساده‌ای نیست، بلکه به هفت کمیت بستگی دارد

$$f = f(V, D, \rho, \mu, \epsilon, \epsilon', m) \quad (۸.۷.۶)$$

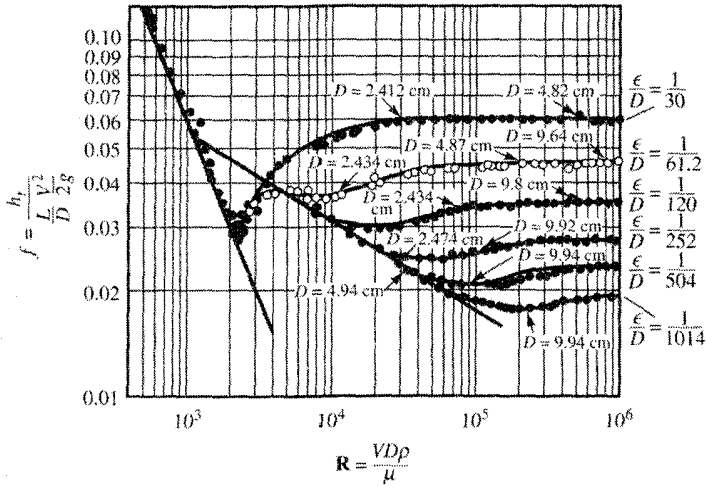
چون f ضریب بی‌بعدی است، باید به گروه‌بندی این کمیتها در پارامترهای بی‌بعد بستگی داشته باشد. برای لوله صاف داریم $m = \epsilon' = \epsilon = 0$ فقط به چهار کمیت اول بستگی پیدا می‌کند. این چهار کمیت را فقط به یک طریق می‌توان مرتب کرد که بی‌بعد شوند، یعنی به صورت $VD\rho/\mu$ که عدد رینولدز است. برای لوله‌های زبر، عبارت‌های ϵ و ϵ' را با تقسیم بر D می‌توان بی‌بعد کرد. بنابراین، به طور کلی

$$f = f\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{\epsilon'}{D}, m\right) \quad (۹.۷.۶)$$

اثبات این رابطه به عهده آزمایش است. برای لوله‌های صاف، نموداری از تمام نتایج آزمایشی نشانگر رابطه‌ای است که تابعی که تحت پراکندگی $\pm 5\%$ درصد قرار دارد. نمودار ضریب اصطکاک بر حسب عدد رینولدز در نقشه لگاریتمی-لگاریتمی را نمودار استانتن می‌گویند. بلازیوس [مرجع ۱۱] اولین کسی بود که آزمایشهای لوله صاف در شارش متلاطم را به هم مربوط ساخت. او این نتایج را با یک فرمول تجربی نشان داد که تا $R = 100000$ اعتبار دارد. فرمول بلازیوس عبارت است از

$$f = \frac{0.316}{R^{1/4}} \quad (10.7.6)$$

در لوله‌های زبر، عبارت ϵ/D را زبری نسبی می‌گویند. نیکورادزه [مرجع ۱۲] درستی مفهوم



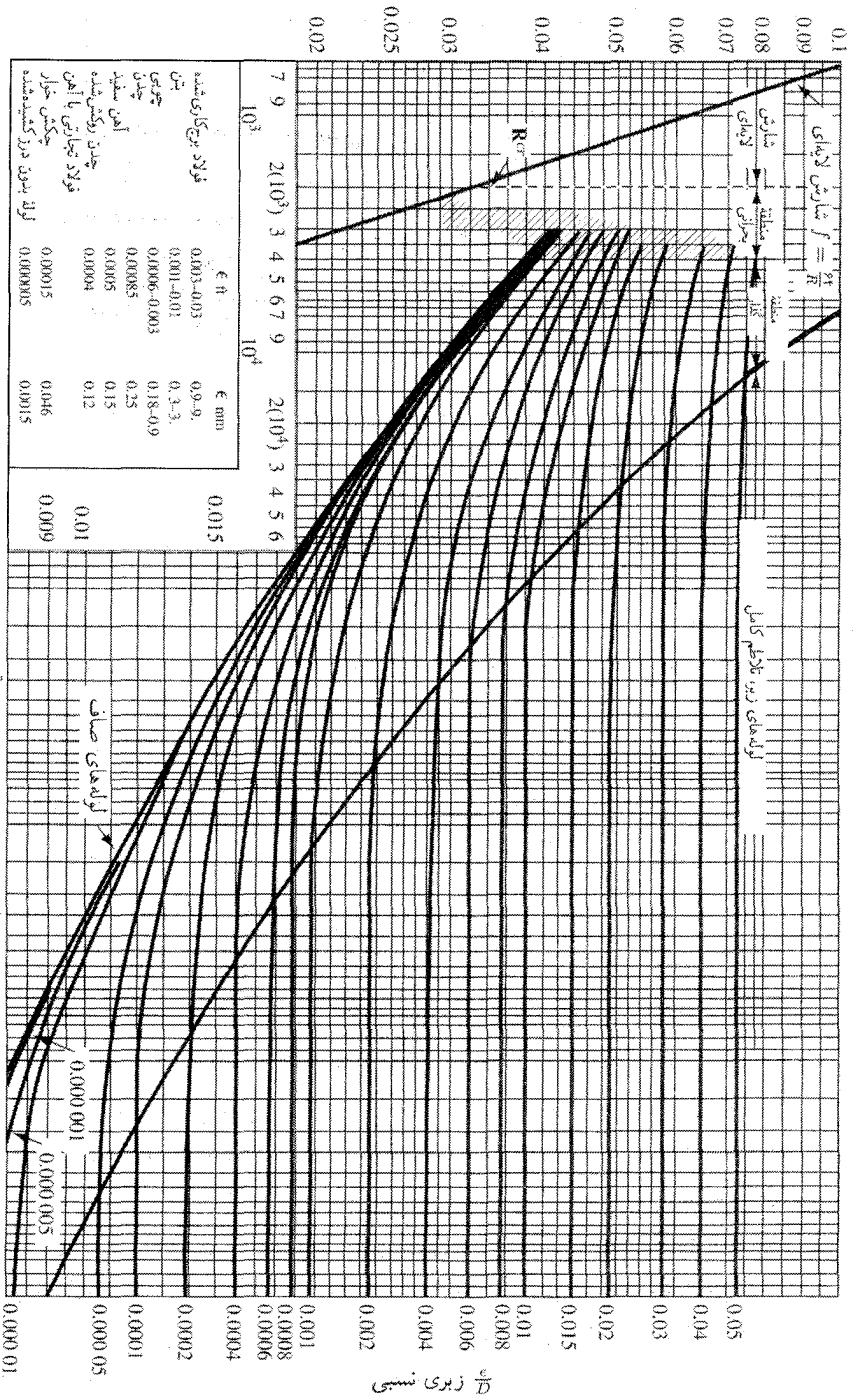
شکل ۲۰.۶ آزمایش‌های نیکورادزه روی لوله زبرشده با شن.

زبری نسبی را با آزمایشهایی روی لوله‌های زیر شده با شن نشان داد. او از لوله‌ها با سه اندازه مختلف استفاده کرد و ذرات شن (ϵ = قطر دانه‌های شن) را که اندازه آنها عملاً ثابت بود به دیواره‌های داخلی چسباند، به طوری که برای لوله‌های مختلف مقادیر یکسانی از ϵ/D به دست آورد. این آزمایشها (شکل ۲۰.۶) نشان می‌دهند که برای یک مقدار ϵ/D ، منحنی f و R به طور هموار متصل می‌شود، صرف نظر از اینکه قطر حقیقی لوله چه باشد. در این آزمایشها m یا ϵ'/D تغییر نمی‌کرد بلکه، برای یک نوع زبری، صحت معادله زیر را نشان می‌داد:

$$f = f\left(R, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

به علت پیچیدگی زیاد سطوح زبر طبیعی، اکثر پیشرفت‌ها در درک رابطه‌های بنیادی درباره آزمایشهای روی لوله‌های زبرشده مصنوعی صورت گرفته‌اند. مودی [مرجع ۱۳] برای تعیین ضرایب اصطکاک در لوله‌های تمیز تجارتي یکی از مناسبترین نمودارها را ترسیم کرده است. این نمودار، که در شکل ۲۱.۶ نشان داده شده است، مبنای محاسبات شارش در لوله در فصل حاضر است. این نمودار یک نمودار استانتن است که f را به صورت تابعی از زبری نسبی و عدد رینولدز بیان می‌کند. مقادیر زبری مطلق لوله‌های تجارتي با آزمایش تعیین می‌شوند که در آن f و R به دست می‌آیند و در فرمول کولبروک، معادله (۷.۷.۶)، که تقریباً گرایشهای طبیعی لوله را نشان می‌دهد، جایگذاری می‌شوند. این مقادیر در جدول گوشه پایین سمت چپ شکل ۲۱.۶ فهرست شده‌اند. فرمول کولبروک شکل منحنیهای ثابت ϵ/D را در ناحیه گذار به دست می‌دهد.

$$f = \frac{h_f}{L} = \frac{h_f}{\frac{V \cdot t}{g}} = \text{عامل اصطکاک } f$$



شکل ۲۱.۶ نمودار مودی.
 اتحاد سازگار $R = \frac{VD}{\epsilon}$ عدد رینولدز

خط مستقیمی که در شکل ۲۱.۶ با "شارش لایه‌ای" مشخص شده است معادله‌ی هاگن-پوازویل است. معادله (۱۰.۳.۶) ب) یعنی

$$V = \frac{\Delta p r_o^2}{4\mu L}$$

را با قرار دادن $\Delta p = \gamma h_f$ می‌توان به معادله (۷.۵.۶) تبدیل کرد

$$h_f = \frac{V 4\mu L}{\gamma r_o^2} = \frac{64\mu L V}{\rho D D^2 g} = \frac{64}{\rho D V / \mu D^2 g} V^2$$

یا

$$h_f = f \frac{L V^2}{D^2 g} = \frac{64}{R} \frac{L V^2}{D^2 g} \quad (11.7.6)$$

که از آن

$$f = \frac{64}{R} \quad (12.7.6)$$

از این معادله، که در نقشه‌ی لگاریتمی-لگاریتمی به صورت یک خط مستقیم با شیب ۱ - ظاهر می‌شود، می‌توان برای حل مسائل شارش لایه‌ای در لوله‌ها استفاده کرد. این معادله برای تمام زبریها به کار می‌رود، زیرا افت ارتفاع در شارش لایه‌ای مستقل از زبری دیواره است. عدد رینولدز بحرانی حدود ۲۰۰۰ است، و در منطقه بحرانی، که شارش یا لایه‌ای است یا متلاطم، حدود ۲۰۰۰ تا ۴۰۰۰ است.

باید گفت که با کاهش یافتن اعداد رینولدز، منحنیهای مربوط به زبری نسبی $\epsilon/D \leq 0.01$ و کمتر از آن به منحنی لوله صاف نزدیک می‌شوند. علتش وجود فیلم (غشاء) لایه‌ای در دیواره لوله است؛ وقتی عدد رینولدز افزایش یابد ضخامت فیلم کاهش می‌یابد. برای گستره‌های معینی از اعداد رینولدز در منطقه گذار، فیلم برجستگیهای کوچک زبری را به طور کامل می‌پوشاند، و ضریب اصطکاک لوله با ضریب اصطکاک لوله صاف یکسان است. در اعداد رینولدز زیادتر، برجستگیها از فیلم لایه‌ای بیرون می‌زنند و هر برجستگی باعث تلاطم اضافی می‌شود که افت ارتفاع را افزایش می‌دهد. در منطقه‌ای که با علامت "تلاطم کامل، لوله‌های زبر" مشخص شده است، از ضخامت فیلم در مقایسه با ارتفاع برجستگیهای زبری می‌توان چشم پوشید و هر برجستگی کاملاً در تلاطم

سهیم است. در این منطقه چسبندگی بر افت ارتفاع تأثیر نمی‌گذارد، زیرا ضریب اصطکاک با عدد رینولدز تغییر نمی‌کند. در این منطقه، افت از قانون V^2 پیروی می‌کند، یعنی با مربع سرعت به طور مستقیم تغییر می‌کند.

مسائل شارش در لوله ساده

منظور از "مسائل لوله ساده" لوله‌ها با خطوط لوله‌ای اند که در آنها تنها اتلاف عبارت از اصطکاک لوله است. لوله را تحت هر زاویه‌ای نسبت به افق می‌توان قرار داد. شش متغیر در مسئله وارد می‌شوند (سیال تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود): $Q, L, D, h_f, \nu, \epsilon$. به طور کلی، L, ν و ϵ طول، چسبندگی سینماتیکی سیال، و زبری مطلق، یا معلوم‌اند یا می‌توان تعیین کرد. پس مسائل لوله ساده را به سه صورت می‌توان حل کرد:

نوع	معلوم	مجهول
I	ϵ, ν, D, L, Q	h_f
II	ϵ, ν, D, L, h_f	Q
III	ϵ, ν, L, Q, h_f	D

در هریک از این حالتها از معادله داریس-وایسباخ، معادله پیوستگی، و نمودار مودی برای پیدا کردن کمیت مجهول استفاده می‌شود. به جای نمودار مودی، فرمول صریح زیر [مراجع ۱۴، ۱۵] را برای f با محدودیت‌هایی که دارد می‌توان به کار برد:

$$f = \frac{1.325}{[\ln(\epsilon/3.7D + 5.74/R^{0.9})]^2} \quad \begin{matrix} 10^{-6} \leq \frac{\epsilon}{D} \leq 10^{-2} \\ 5000 \leq R \leq 10^8 \end{matrix} \quad (13.7.6)$$

این معادله f را با ۱ درصد خطا نسبت به معادله کولبروک (۷.۷.۶) به دست می‌دهد، و از این معادله با حسابگر الکترونیکی به طور مناسبی می‌توان استفاده کرد. حل هریک از سه نوع مسئله به صورت زیر است.

نوع I: حل برای h_f . در حل نوع I، با Q, ϵ, D معلوم، داریم $R = VD/\nu = 4Q/\pi D\nu$. f را می‌توان از شکل ۲۱.۶ پیدا کرد یا از معادله (۱۳.۷.۶) به دست آورد. با جایگذاری در معادله (۷.۵.۶)، h_f را به دست می‌آوریم که عبارت است از اتلاف انرژی ناشی از شارش در لوله بر نیروی گرانی واحد سیال.

مثال ۹.۶ افت ارتفاع (انرژی) را برای شارش 140 L/s ، روغن، $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ در 400 m لوله چدنی به قطر 200 mm تعیین کنید.

حل

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4(0.14 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi(0.2 \text{ m})(1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})} = 89127$$

زبری نسبی عبارت است از $\epsilon/D = 0.25 \text{ mm}/200 \text{ mm} = 0.00125$ از شکل ۲۱.۶. با درون‌یابی، داریم $f = 0.23$. با حل معادله (۱۳.۷.۶)، به دست می‌آید. $f = 0.234$ از این رو

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = 0.23 \frac{400 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} \left[\frac{0.14}{(\pi/4)(0.2 \text{ m})^2} \right]^2 \frac{1}{2(9.806 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 46.58 \text{ m.N/N}$$

نوع II: حل برای تخلیه Q . در حالت دوم، V و f مجهول‌اند، و معادله دارسی-وایسباخ و نمودار مودی را باید همزمان به کار برد تا مقادیر آنها پیدا شوند. از آنجا که ϵ/D معلوم است، با بررسی نمودار مودی می‌توان مقدار f را فرض کرد. با جایگذاری این f آزمونی در معادله دارسی-وایسباخ یک مقدار آزمونی V به دست می‌آید، که از آن عدد رینولدز آزمونی محاسبه می‌شود. با این عدد رینولدز، مقدار اصلاح‌شده f از نمودار مودی پیدا می‌شود. وقتی f تا دور رقم اعشار پیدا شد، V متناظر به دست می‌آید و Q با حاصل ضرب سرعت در مساحت تعیین می‌شود.

مثال ۱۰.۶ آب 15°C در یک لوله فولادی پرچ شده، $\epsilon = 3 \text{ mm}$ ، به قطر 300 mm با افت ارتفاع 6 m در طول 300 متر جریان دارد. تخلیه را تعیین کنید.

حل

زبری نسبی عبارت است از $\epsilon/D = 3/300 = 0.01$ ؛ و از شکل ۲۱.۶، f آزمونی را 0.4 می‌گیریم. با جایگذاری در معادله (۷.۵.۶) داریم

$$6 \text{ m} = 0.4 \frac{300 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} \frac{(V \text{ m/s})^2}{2(9.806 \text{ m/s}^2)}$$

که از آن $V = 1.715 \text{ m/s}$. از پیوست ج داریم $\nu = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ و بنابراین

$$R = \frac{VD}{\nu} = \frac{(1.715 \text{ m/s})(0.3 \text{ m})}{1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 455000$$

از نمودار مودی $f = 0.38$ و

$$Q = AV = \pi (0.15 \text{ m})^2 \sqrt{\frac{(6 \text{ m})(0.3 \text{ m})(2)(9.806 \text{ m/s}^2)}{0.38(300 \text{ m})}} = 0.1245 \text{ m}^3/\text{s}$$

از معادله کولبروک (۷.۷.۶) و معادله دارسی-وایسباخ (۷.۵.۶) یک حل صریح برای تخلیه Q می‌توان به دست آورد. از معادله (۷.۵.۶)

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g[(\pi/4)D^2]^2} \quad (14.7.6)$$

با حل $1/\sqrt{f}$ به دست می‌آید

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{h_f} Q}{\pi \sqrt{g h_f} D^5 / L}$$

پس از جایگذاری $1/\sqrt{f}$ در معادله (۷.۷.۶) و ساده کردن، به دست می‌آید

$$Q = -0.965 D^2 \sqrt{g D h_f / L} \ln \left(\frac{\epsilon}{3.7 D} + \frac{1.784 \nu}{D \sqrt{g D h_f / L}} \right) \quad (15.7.6)$$

این معادله، که اولین بار توسط سوامی و جین [مرجع ۱۵] استنتاج شد، به همان دقت معادله کولبروک است و برای همان گستره از مقادیر ϵ/D و R صحت دارد. جایگذاری متغیرها از مثال ۱۰.۶، یعنی $D = 0.3 \text{ m}$ ، $g = 9.806 \text{ m/s}^2$ ، $h_f/L = 0.2$ ، $\epsilon/D = 0.1$ و $Q = 0.1231 \text{ m}^3/\text{s}$ نتیجه می‌دهد $\nu = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

نوع III: حل برای قطر D . در حالت سوم، که D مجهول است، در معادله (۷.۵.۶) سه مجهول وجود دارد: f ، V و D ؛ در معادله پیوستگی دو مجهول: V و D ؛ و در معادله عدد رینولدز، سه مجهول: V ، D و R . زبری نسبی نیز مجهول است. استفاده از معادله پیوستگی برای حذف سرعت در معادله (۷.۵.۶) و عبارت R ، مسئله را ساده می‌کند. معادله (۷.۵.۶) تبدیل می‌شود به

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(D^2 \pi/4)^2}$$

یا

$$D^5 = \frac{h_f L Q^2}{2g \pi^2} f = C_1 f \quad (16.7.6)$$

که در آن C_1 کمیت معلوم $8LQ^2/h_f g \pi^2$ است. از پیوستگی داریم $VD^2 = 4Q/\pi$ ، در نتیجه

$$R = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{C_2}{D} \quad (17.7.6)$$

که در آن C_2 کمیت معلوم $4Q/\pi \nu$ است. حل در اینجا با روش زیر انجام می‌شود:

۱. یک مقدار f فرض کنید.
۲. معادله (۱۶.۷.۶) را برای D حل کنید.
۳. معادله (۱۷.۷.۶) را برای R حل کنید.
۴. زبری نسبی ϵ/D را پیدا کنید.
۵. با R و ϵ/D ، یک f جدید از شکل ۲۱.۶ پیدا کنید.
۶. از f جدید استفاده و روش را تکرار کنید.
۷. وقتی مقدار f تا دو رقم اعشار تغییر نکرد، تمام معادله‌ها برآورد شده‌اند و مسئله حل شده است.

معمولاً فقط به یک یا دو آزمون نیاز است. چون اندازه لوله‌ها معمولاً استاندارد انتخاب می‌شوند، لوله را با یک درجه بزرگتر از آنچه با محاسبات به دست می‌آید در نظر می‌گیرند.

مثال ۱۱.۶ مطلوب است اندازه لوله تمیز آهن خمیری برای انتقال 4000 gpm (گالن بر دقیقه) روغن، $\nu = 0.0001 \text{ ft}^2/\text{s}$ ، با افت ارتفاع $75 \text{ ft} \cdot \text{lb}/\text{lb}$ در 10000 ft .

حل

تخلیه عبارت است از

$$Q = \frac{4000 \text{ gpm}}{44.8 \text{ gpm}/\text{cfs}} = 89.3 \text{ cfs}$$

از معادله (۱۶.۷.۶)

$$D^5 = \frac{8(10000)(89.3^2)}{75(32.2)(\pi^2)} f = 267.0 f$$

و از معادله (۱۷.۷.۶)

$$R = \frac{4(89.3)}{\pi(0.0001)D} = \frac{113800}{D}$$

و از شکل ۲۱.۶، $\epsilon = 0.00015 \text{ ft}$.

اگر $f = 0.02$ ، در این صورت $D = 1.398 \text{ ft}$ ، $R = 81400$ ، و $\epsilon/D = 0.00011$.
 از شکل ۲۱.۶، $f = 0.019$ با تکرار روش، $D = 1.382$ ، $R = 82300$ ، و $f = 0.019$.
 بنابراین، $D = 1.382(12) = 16.6 \text{ in}$ (۱.۳۸۲ ft).

با روش سوامی و جین [مرجع ۱۵]، معادله تجربی برای تعیین مستقیم قطر با استفاده از رابطه‌های غیرایعادی و روش مشابه استخراج معادله کولبروک، نتیجه زیر را می‌دهد:

$$D = 0.66 \left[\epsilon^{1.25} \left(\frac{LQ^2}{gh_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{1.48} \left(\frac{L}{gh_f} \right)^{5.2} \right]^{0.4} \quad (18.7.6)$$

حل مثال ۱۱.۶ با استفاده از معادله (۱۸.۷.۶) برای $Q = 893 \text{ cfs}$ ؛ $\epsilon = 0.00015 \text{ ft}$ ؛
 $L = 10000 \text{ ft}$ ؛ $h_f = 75 \text{ ft} \cdot \text{lb/lb}$ ؛ $\nu = 0.0001 \text{ ft}^2/\text{s}$ ؛ $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ ؛ نتیجه
 می‌دهد: $D = 1.404 \text{ ft}$.

معادله (۱۸.۷.۶) در گستره‌های زیر اعتبار دارد:

$$3 \times 10^2 \leq R \leq 3 \times 10^8$$

$$10^{-6} \leq \frac{\epsilon}{D} \leq 2 \times 10^{-2}$$

D را با ۲ درصد خطا نسبت به مقداری که از روش معادله کولبروک به دست می‌آید تعیین می‌کند.
 در هر یک از حالت‌های ملاحظه شده، اتلاف برحسب واحد انرژی بر نیروی گرانی واحد بیان
 شده است. در لوله‌های افقی، این اتلاف نشانگر کاهش تدریجی فشار در امتداد خط است. در
 حالت‌های غیرافقی، معادله انرژی (۲۰.۴.۳) برای دو مقطع انتهایی لوله به کار می‌رود، و جمله اتلاف
 را شامل می‌شود، بدین ترتیب

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \quad (20.4.3)$$

که در آن ضرایب تصحیح انرژی جنبشی را واحد در نظر گرفته‌ایم. مقطع فرادست با زیرنماد ۱ و
 مقطع فرودست با زیرنماد ۲ مشخص شده است. ارتفاع کل در مقطع ۱ مساوی مجموع ارتفاع
 کل در مقطع ۲ و تمام افت‌های ارتفاع بین دو مقطع است.

شارش تراکم‌ناپذیر پایا در شبکه‌های ساده لوله ۳۹۵

مثال ۱۲.۶ در مثال قبل، برای $D = ۱۶.۶ \text{ in}$ ، اگرگرانی ویژه ۰.۸۵ r ، $p_1 = ۴ \text{ psi}$ ، $z_1 = ۲۰ \text{ ft}$ و $z_2 = ۵۰ \text{ ft}$ ، فشار را در مقطع ۲ بیابید.

حل

در معادله (۲.۴.۳)، $V_1 = V_2$ ؛ از این رو

$$\frac{۴ \text{ psi}}{۰.۸۵(۰.۴۳۳ \text{ psi/ft})} + ۲۰ \text{ ft} = \frac{p_2 \text{ psi}}{۰.۸۵(۰.۴۳۳ \text{ psi/ft})} + ۵۰ \text{ ft} + ۷۵ \text{ ft}$$

بنابراین

$$p_2 = ۶۷.۶ \text{ psi}$$

تمرینها

۱.۷.۶ در شارش متلاطم، لولهٔ زیر ضریب اصطکاک یکسانی دارد با لولهٔ صاف الف) در منطقهٔ تلاطم کامل، لوله‌های زیر؛ ب) وقتی ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز است؛ ج) وقتی برجستگیهای زبری بسیار کوچکتر از ضخامت فیلم لایه‌ای است؛ د) در هر جای منطقهٔ گذار؛ ه) وقتی ضریب اصطکاک ثابت است.

۲.۷.۶ ضریب اصطکاک در شارش متلاطم در لوله‌های صاف بستگی دارد به الف) D ، V ، ρ ، L و μ ؛ ب) Q ، L ، μ و ρ ؛ ج) D ، V ، ρ ، p و μ ؛ د) D ، V ، μ و ρ ؛ ه) D ، L ، ρ و Q .
 ۳.۷.۶ در یک لولهٔ زیر مفروض، اتلافها بستگی دارند به الف) f و V ؛ ب) μ و ρ ؛ ج) R ؛ د) فقط Q ؛ ه) هیچکدام.

۴.۷.۶ در منطقهٔ تلاطم کامل، لوله‌های زیر، الف) لوله‌های زیر و صاف ضریب اصطکاک یکسان دارند؛ ب) فیلم لایه‌ای برجستگیهای زبری را می‌پوشاند؛ ج) ضریب اصطکاک فقط به عدد رینولدز بستگی دارد؛ د) افت ارتفاع به صورت مربع سرعت تغییر می‌کند؛ ه) ضریب اصطکاک مستقل از زبری نسبی است.

۵.۷.۶ ضریب اصطکاک برای شارش آب ۶۰° F در لوله‌های چدنی به قطر ۲ ft با سرعت ۵ ft/s عبارت است از الف) ۰.۱۳ ؛ ب) ۰.۱۷ ؛ ج) ۰.۱۹ ؛ د) ۰.۲۱ ؛ ه) هیچکدام.

۶.۷.۶ وقتی Q ، L ، D ، ν و ϵ معلوم باشند، روش حل اتلافها عبارت است از الف) فرض کرد f ، پیدا کردن R در نمودار مودی، و غیره؛ ب) فرض کردن h_f ، حل f ، بررسی مجدد R در نمودار مودی؛ ج) فرض کردن f ، حل h_f ، محاسبهٔ R ، و غیره؛ د) محاسبهٔ R ، پیدا کردن f برای ϵ/D ، حل h_f ؛ ه) فرض کردن R ، محاسبهٔ V ، پیدا کردن f ، حل h_f .

۷.۷.۶ وقتی h_f, L, D, ν و ϵ معلوم باشند، روشی که برای حل تخلیه دنبال می‌شود عبارت است از الف) فرض کردن f ، محاسبه V, R و ϵ/D ، پیدا کردن f ، و در صورت لزوم تکرار عمل؛ ب) فرض کردن R ، محاسبه f ، بررسی ϵ/D ، و غیره؛ ج) فرض کردن V ، محاسبه R ، پیدا کردن f ، محاسبه مجدد V ، و غیره؛ د) حل داریسی-وایسباخ برای V ، و محاسبه Q ؛ ه) فرض کردن Q ، محاسبه V و R ، پیدا کردن f ، و غیره.

۸.۷.۶ وقتی h_f, Q, L, ν و ϵ معلوم باشند، روشی که برای حل قطر لوله دنبال می‌شود عبارت است از الف) فرض کردن D ، محاسبه $V, R, \epsilon/D$ ، پیدا کردن f ، و تکرار عمل؛ ب) محاسبه V از پیوستگی، فرض کردن f ، و حل D ؛ ج) حذف کردن V در R و معادله داریسی-وایسباخ با استفاده از پیوستگی، فرض کردن f ، حل D و R ، پیدا کردن f و تکرار عمل؛ د) فرض کردن $R, \epsilon/D$ ، پیدا کردن f ، حل داریسی-وایسباخ برای V^2/D ، و حل همزمان با پیوستگی برای V و D ، محاسبه R جدید، و غیره؛ ه) فرض کردن V ، حل $D, R, \epsilon/D$ ، پیدا کردن f و تکرار عمل.

۸.۶ اتلافهای جزئی

اتلافهای ناشی از وجود خمها، زانوییها، اتصالها، شیرها، و غیره را در خطوط لوله اتلافهای جزئی یا موضعی می‌نامند. این اصطلاح چندان گویا نیست. زیرا در بسیاری از حالتها این اتلافها مهمتر از اتلافهای ناشی از اصطکاک لوله‌اند که قبلاً بررسی کردیم، اما اصطلاح رایج و مرسوم است. تقریباً در تمام حالتها اتلاف جزئی با آزمایش تعیین می‌شود. به هر حال یک استثنای مهم همانا افت ارتفاع در اثر انبساط ناگهانی در خط لوله است (بخش ۷.۳).

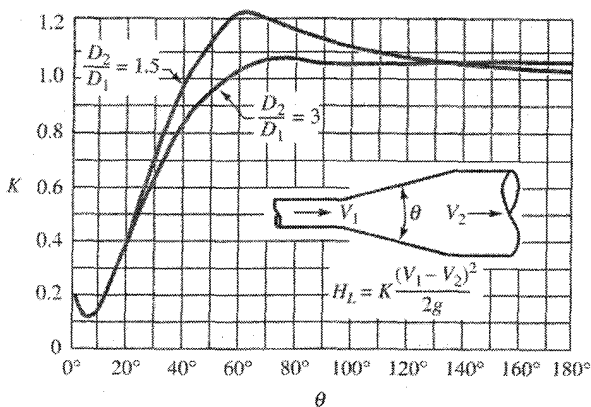
معادله (۱۰.۷.۳) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$h_e = K \frac{V_1^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \frac{V_1^2}{2g} \quad (۱.۸.۶)$$

که در آن

$$K = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (۲.۸.۶)$$

از معادله (۱.۸.۶) پیداست که افت ارتفاع با مربع سرعت تغییر می‌کند. این امر تقریباً برای تمام اتلافهای جزئی در شارش متلاطم صادق است. یک روش مناسب برای بیان اتلافهای جزئی در شارش استفاده از ضریب K است که معمولاً با آزمایش تعیین می‌شود.

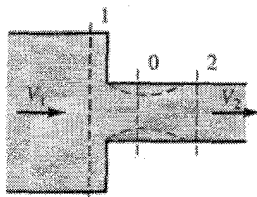


شکل ۲۲.۶ ضرایب افت در انبساطهای مخروطی.

اگر انبساط ناگهانی از لوله به مخزن باشد، $D_1/D_2 = 0$ و اتلاف مساوی $V_1^2/2g$ است؛ یعنی کل انرژی جنبشی در شارش به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود.

افت ارتفاع ناشی از انبساط تدریجی (شامل اصطکاک لوله در طول انبساط) را گیسسن [مرجع ۱۶] به‌طور آزمایشی تحقیق کرده است که نتایج آن در شکل ۲۲.۶ آمده است. لوله‌های پخش‌کن مشابه با آنچه که در شکل ۲۲.۶ آمده است معمولاً برای بازیافت فشار در سیستم‌های سیالی استفاده می‌شوند. ضریب افت واقعی و مقدار افزایش فشار در جهت جریان، همانطور که در شکل نشان داده شده است، علاوه بر اینکه تابعی از نسبت قطر و زاویه انبساط است به پارامترهای دیگری نیز بستگی دارند [مرجع ۱۷]. پارامترهایی که برای یک مقطع پخش‌کن معین اهمیت دارند عبارت‌اند از توزیع سرعت، تقارن شارش، ضخامت لایه مرزی در ورودی، و تخلیه آزاد یا لوله خروجی متصل شده در خروجی.

افت ارتفاع h_c ناشی از انقباض ناگهانی در مقطع لوله، که در شکل ۲۳.۶ نشان داده شده است، مشمول همان تحلیل انبساط ناگهانی است، به شرطی که مقدار انقباض جت معلوم باشد.



شکل ۲۳.۶ انقباض ناگهانی در خط لوله.

فرایند تبدیل ارتفاع فشار به ارتفاع سرعت، فرایندی است مؤثر؛ از این رو افت ارتفاع از مقطع ۱ تا انقباض ونا* در مقایسه با افت از مقطع ۰ تا مقطع ۲، که در آن ارتفاع سرعت مجدداً به ارتفاع فشار تبدیل می‌شود، کوچک است. با استفاده از معادله (۱۰.۷.۳) برای این انبساط، افت ارتفاع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h_c = \frac{(V_0 - V_2)^2}{2g}$$

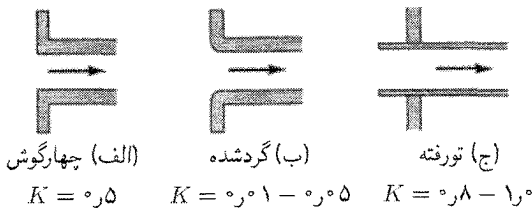
با معادله پیوستگی، $V_0 C_c A_2 = V_2 A_2$ ، که در آن C_c ضریب انقباض یعنی مساحت جت در مقطع ۰ تقسیم بر مساحت در مقطع ۲ است، افت ارتفاع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h_c = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} \quad (3.8.6)$$

ضریب انقباض C_c برای آب، که توسط وایسباخ [مرجع ۱۸] تعیین شده است در جدول آمده است.

۱ر۰	۰ر۹	۰ر۸	۰ر۷	۰ر۶	۰ر۵	۰ر۴	۰ر۳	۰ر۲	۰ر۱	A_2/A_1
۱ر۰۰	۰ر۸۹۲	۰ر۸۱۳	۰ر۷۵۵	۰ر۷۱۲	۰ر۶۸۱	۰ر۶۵۹	۰ر۶۴۳	۰ر۶۳۲	۰ر۶۲۴	C_c

افت ارتفاع در ورودی خط لوله از مخزن را معمولاً $0.5V^2/2g$ می‌گیرند، به شرطی که دهانه دارای لبه مربع باشد. در ورودیهای گردشده، افت بین $0.1V^2/2g$ و $0.5V^2/2g$ است که معمولاً از آن صرف‌نظر می‌شود. برای دهانه‌های تورفته، مانند لوله‌هایی که در داخل مخزن پیش رفته‌اند و از دیواره آن جلوتر قرار گرفته‌اند، افت را برای لوله‌های جداره نازک، شکل ۲۴.۶، برابر با $0.1V^2/2g$ می‌گیرند.



شکل ۲۴.۶ ضریب افت ارتفاع K برحسب تعداد ارتفاعهای سرعت، $0.1V^2/2g$ ، برای ورودی لوله.

* انقباض ونای مقطع بیشترین انقباض جت است.

جدول ۲.۶ ضرایب افت ارتفاع K برای اتصالات مختلف [۱۹، ۲۰].

اتصال	K
شیر کروی (کاملاً باز)	۱۰٫۰
شیر زاویه دار (کاملاً باز)	۵٫۰
شیر یکطرفه چرخان (کاملاً باز)	۲٫۵
شیر دروازه‌ای (کاملاً باز)	۰٫۱۹
اتصال زانویی برگشت	۲٫۲
سراهه استاندارد	۱٫۸
زانویی استاندارد	۰٫۹
زانویی متوسط قوسی	۰٫۷۵
زانویی بلند قوسی	۰٫۶۰

داده‌های آزمایشی تغییرات وسیعی را در ضرایب بعضی از اتصالات نشان می‌دهند. برای مثال، مقادیر K در شیر کروی کاملاً باز از ۴ تا ۲۵ تغییر می‌کند، و این به اندازه و سازنده بستگی دارد. مقادیر منتخب در جدول ۲.۶ آورده شده‌اند.

اتلافهای جزئی را می‌توان برحسب جمله‌های طول معادله L_e لوله‌ای بیان کرد که برای تخلیه یکسان دارای افت ارتفاع یکسان برحسب متر نیوتن بر نیوتن است؛ بدین ترتیب

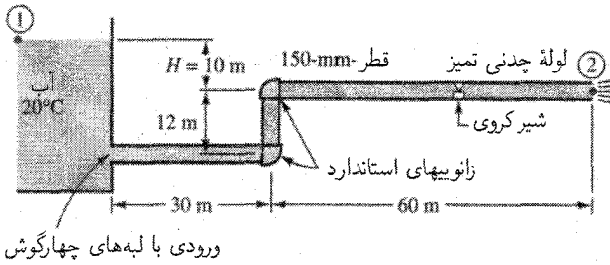
$$f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} = K \frac{V^2}{2g}$$

که در آن K ممکن است به یک افت ارتفاع یا مجموع چند افت ارتفاع برگردد. با حل L_e داریم

$$L_e = \frac{KD}{f} \quad (۴.۸.۶)$$

برای مثال، اگر اتلافهای جزئی در خط لوله‌ای به قطر ۱۲ in تا $K = ۲۰$ باشد، و اگر برای لوله $f = ۰٫۰۲۰$ باشد، طول حقیقی لوله را به اندازه $۱۰۰۰ \text{ ft} = ۲(۱/۰٫۰۲) = ۲۰$ می‌توان اضافه کرد، و این طول اضافی یا طول معادل باعث همان مقاومتی در برابر شارش می‌شود که اتلافهای جزئی.

مثال ۱۳.۶ تخلیه را در خط لوله شکل ۲۵.۶ برای $H = ۱۰ \text{ m}$ پیدا کنید و افت ارتفاع H را برای $Q = ۶۰ \text{ L/s}$ بیابید.



شکل ۲۵.۶ خط لوله با اتلافهای جزئی.

حل

معادله انرژی را بین نقاط ۱ و ۲، شامل تمام اتلافها، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$H_1 + 0 + 0 = \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{2g} + f \frac{102 \text{ m}}{0.15 \text{ m}} \frac{V_2^2}{2g} + 2(0.9) \frac{V_2^2}{2g} + 10 \frac{V_2^2}{2g}$$

که در آن ضریب اتلاف ورودی $1/2$ ، هر زانویی 0.9 ، و شیر کروی 10 است. بنابراین

$$H_1 = \frac{V_2^2}{2g} (13.3 + 680f)$$

اگر ارتفاع معلوم باشد، این مسئله به صورت نوع دوم مسئله لوله ساده حل می‌شود. اگر $f = 0.22$ ،

$$10 = \frac{V_2^2}{2g} [13.3 + 680(0.22)]$$

و $V_2 = 2.63 \text{ m/s}$. از پیوست ج $\nu = 1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ؛ $\epsilon/D = 0.0017$ ؛

$R = (2.63 \text{ m/s})(0.15 \text{ m}) / (1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}) = 391000$ از شکل ۲۱.۶،

$f = 0.23$. با تکرار این روش به دست می‌آید $V_2 = 2.60 \text{ m/s}$ ، $R = 380000$ ، و

$f = 0.23$. تخلیه عبارت است از

$$Q = V_2 A_2 = (2.60 \text{ m/s})(\pi/4)(0.15 \text{ m})^2 = 45.9 \text{ L/s}$$

برای قسمت دوم، با معلوم بودن Q حل مسئله سر راست است:

$$V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{0.06 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0.15 \text{ m})^2} = 3.40 \text{ m/s} \quad R = 505000 \quad f = 0.23$$

$$H_1 = \frac{(3.4 \text{ m/s})^2}{2(9.806 \text{ m/s}^2)} [13.3 + 680(0.23)] = 17.06 \text{ m}$$

با طولهای معادل [معادله ۴.۸.۶] مقدار f را تخمین می‌زنیم، مثلاً $0.22 = f$. مجموع اتلافهای جزئی عبارت است از $K = 13.3$ ، که در آن انرژی جنبشی در ۲ را یک اتلاف جزئی در نظر می‌گیریم،

$$L_e = \frac{13.3(0.15)}{0.22} = 9.07 \text{ m}$$

از این رو، طول کلی لوله عبارت است از $192.7 \text{ m} = 102 + 9.07$. قسمت اول مسئله با این روش حل می‌شود:

$$10 \text{ m} = f \frac{L + L_e}{D} \frac{V_f^2}{2g} = f \frac{192.7 \text{ m} (V_f \text{ m/s})^2}{0.15 \text{ m} \cdot 2g \text{ m/s}^2}$$

اگر $0.22 = f$ ، $R = 391000$ ، $V_f = 2.63 \text{ m/s}$ ، $f = 0.22$ داریم
 $L_e = 9.07 \text{ m}$ ، $V_f = 2.58 \text{ m/s}$ و $Q = 45.6 \text{ L/s}$. معمولاً لازم نیست که از f جدید برای تصحیح L_e استفاده کرد. ■

وقتی اتلافهای جزئی فقط ۵ درصد افتهای ارتفاع ناشی از اصطکاک لوله را تشکیل دهند، از آنها می‌توان صرف‌نظر کرد. ضریب اصطکاک، در بهترین حالت، حدود ۵ درصد خطا دارد، و لزومی ندارد که مقادیری تا بیش از سه رقم اعشار را برگزید. به‌طور کلی، وقتی طول بین هر اتلاف جزئی به‌طور متوسط ۱۰۰۰ برابر قطر لوله باشد، از اتلافهای جزئی می‌توان چشم پوشید. حالت‌های پیچیده شارش در لوله را در فصل ۱۲ بررسی می‌کنیم.

حل افت ارتفاع سراسر است، زیرا با معلوم بودن D ، Q ، ν ، ϵ ، L ، K می‌توان R ، ϵ/D ، A و f را محاسبه کرد، و

$$h_f = \frac{f}{D} \left(L + \frac{KD}{f} \right) \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (5.8.6)$$

حل تکراری برای تخلیه به این صورت است که با قرار دادن $L + KD/f$ به‌جای L در معادله (۱۵.۷.۶)، معادله Q برحسب مجهول f به‌دست می‌آید. فرض کنیم

$$Y = \sqrt{\frac{gDh_f}{L + KD/f}} = \sqrt{\frac{R_f}{1 + R_f/f}} \quad (6.8.6)$$

با $R_r = gDh_f/L$ و $R_f = KD/L$ سپس معادله (۱۵.۷.۶) تبدیل می‌شود به

$$Q = -0.965 D^2 Y \left[\ln \left(\frac{\epsilon}{3.7 D} + \frac{1.784 \nu}{D Y} \right) \right] = R_r Y \ln \left(R_1 + \frac{R_o}{Y} \right) \quad (7.8.6)$$

با $R_o = 1.784 \nu / D$, $R_1 = \epsilon / 3.7 D$, و $R_r = -0.965 D^2$ عدد رینولدز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} = R_o Q \quad (8.8.6)$$

با $R_o = 4 / \pi D \nu$ معادله ضریب اصطکاک (۱۳.۷.۶) تبدیل می‌شود به

$$f = \frac{R_r}{\left[\ln \left(R_1 + \frac{R_f}{R^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (9.8.6)$$

با $R_r = 1.325$ و $R_f = 5.74$, یک مقدار فرضی f را، مثلاً $f = 0.022$ ، با ثابتهای ذخیره‌شده R_o تا R_r به حسابگر می‌دهیم، و معادله‌های (۶.۸.۶) تا (۹.۸.۶) را به ترتیب حل می‌کنیم. این روش را ادامه می‌دهیم تا اینکه f تغییر نکند (تا چهار رقم اعشار)، و f و Q تعیین شوند. در مثال ۱۳.۶ بعد از سه بار تکرار به دست می‌آید $f = 0.0231$ و $Q = 45.6 L/s$. وقتی KD/f بسیار بزرگتر از L باشد، برنامه به طرز رضایتبخشی متقارب می‌شود.

حل تکراری برای قطر به این صورت است که در معادله (۱۸.۷.۶) به جای L می‌توان $L + KD/f$ قرار داد. در نتیجه،

$$R = \frac{R_o}{D} \quad (10.8.6)$$

$$f = \frac{R_r}{\left[\ln \left(R_r / D + R_r / R^{0.9} \right) \right]^2} \quad (11.8.6)$$

$$x = R_f + R_r D / f \quad (12.8.6)$$

$$D = R_o (x^{0.75} + R_1 x^{0.25})^{0.4} \quad (13.8.6)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \nu / (\epsilon^{1/25} Q^{0.1}) = R_1 & \quad \epsilon^{0.4} (Q^{1.5})^{0.04} = R_0 & \quad 5,74 = R_2 \\ \epsilon / 3,7 = R_3 & \quad K / gh_f = R_4 & \quad 4Q / \pi \nu = R_5 \\ L / gh_f = R_6 & \quad 1,325 = R_7 \end{aligned}$$

در برنامه، معادله‌های (۱۰.۸.۶) تا (۱۳.۸.۶) را بعد از وارد کردن یک D آزمایشی پشت سر هم حل می‌کند.

مثال ۱۴.۶ می‌خواهند 30°C آب 10°C را با لوله فولادی تجارتي تا 500m انتقال دهند. افت ارتفاع کل 6m است. اتلافهای جزئی $127^2/2g$ است. قطر لازم است تعیین کنید.

حل

با $\nu = 1,308 \mu\text{m}^2/\text{s}$ و $\epsilon = 46 \mu\text{m}$ ، ثابتهای معادله‌های (۱۰.۸.۶) تا (۱۳.۸.۶) تبدیل می‌شوند به $R_0 = 0,25351$ ، $R_1 = 0,38945$ ، $R_2 = 1,24332 \times 10^{-5}$ ، $R_3 = 0,20396$ ، $R_4 = 8,4982$ و $R_5 = 2920,27$ فرض می‌کنیم $D = 1\text{m}$ و سپس معادله‌ها را به ترتیب حل می‌کنیم (یا برنامه را به کار می‌اندازیم). بعد از چهار تکرار، نتیجه می‌گیریم $D = 438\text{mm}$ و $f = 0,141$. حسابگرهای دستی برای حل این چهار معادله گنجایش کافی دارند. ■

تمرینها

۱.۸.۶ اتلافهای ناشی از انقباض ناگهانی به صورت زیر است: الف) $(\frac{1}{C_c} - 1) \frac{V_1^2}{2g}$ ؛ ب) $(1 - C_c^2) \frac{V_1^2}{2g}$ ؛ ج) $(\frac{1}{C_c} - 1)^2 \frac{V_1^2}{2g}$ ؛ د) $(C_c - 1)^2 \frac{V_1^2}{2g}$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۸.۶ اتلافهای در خروجی یک لوله غوطه‌ور در مخزن عبارت‌اند از الف) تقریباً صفر؛ ب) $(V^2/2g)$ ؛ ج) $0,5(V^2/2g)$ ؛ د) $V^2/2g$ ؛ ه) هیچکدام.

۳.۸.۶ از اتلافهای جزئی معمولاً وقتی می‌توان صرف‌نظر کرد که الف) 10°ft لوله بین اتصالهای خاص وجود داشته باشد؛ ب) اتلاف آنها ۵ درصد اتلاف اصطکاک یا کمتر باشد؛ ج) بین اتلافهای جزئی، 50° برابر قطر لوله موجود باشد؛ د) هیچ شیر کروی در خط نباشد؛ ه) از لوله زبر استفاده شود.

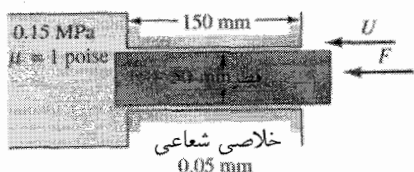
۴.۸.۶ طول لوله $(f = 0,25)$ معادل با شیر کروی، برحسب قطر عبارت است از الف) 40 ؛ ب) 200 ؛ ج) 300 ؛ د) 400 ؛ ه) هیچکدام.

مسائل

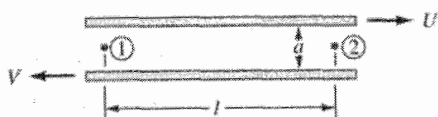
۱.۶ وقتی شیب معکوس فشار وجود دارد به طوری که $Q = 0$ ، فرمولهایی برای تنش برشی روی هر صفحه و برای توزیع سرعت در شارش شکل ۳.۶ تعیین کنید.

۲.۶ در شکل ۳.۶، با U مثبت، مطابق شکل، عبارتی برای $d(p + \gamma h)/dl$ پیدا کنید، طوری که تنش برشی در صفحه ثابت صفر شود. تخلیه برای این حالت چقدر است؟

۳.۶ در شکل ۲۶.۶ الف، $U = 0.7 \text{ m/s}$ ، مطلوب است آهنگی که با آن روغن به توسط پیستون وارد محفظه فشار می‌شود و نیروی برشی و نیروی کل F که بر پیستون وارد می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲۶.۶ مسائل ۳.۶ تا ۷.۶.

۴.۶ نیروی وارد بر پیستون شکل ۲۶.۶ الف را که ناشی از تنش برشی و نشتی محفظه فشار است در $U = 0$ تعیین کنید.

۵.۶ F و U را در شکل ۲۶.۶ الف پیدا کنید، به طوری که روغن از طریق لقی از اتاق فشار هدر نرود.

۶.۶ عبارتی برای شارش از مقطع ثابتی در شکل ۲۶.۶ ب برای شارش لایه‌ای بین دو صفحه متحرک استخراج کنید.

۷.۶ در شکل ۲۶.۶ ب برای $p_1 = p_2 = 0.1 \text{ MPa}$ ، $U = 2V = 2 \text{ m/s}$ ، $a = 1.5 \text{ mm}$ ، $\mu = 0.5 \text{ P}$ ، تنش برشی در هر صفحه را پیدا کنید.

۸.۶ ضریب تصحیح انرژی جنبشی و ضریب تصحیح تکانه را برای شارش لایه‌ای بین صفحات ثابت موازی محاسبه کنید.

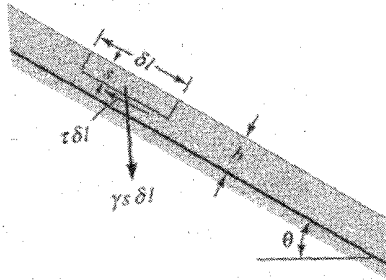
۹.۶ فرمولی برای زاویه θ در مورد صفحات ثابت موازی تعیین کنید، به طوری که شارش لایه‌ای در فشار ثابت رخ می‌دهد.

۱۰.۶ در مورد جسم آزاد، مانند شکل ۲۷.۶ با شارش یکنواخت یک لایه نازک مایع در جهت پایین سطح شیبدار، نشان دهید که توزیع سرعت عبارت است از

$$u = \frac{\gamma}{2\mu} (b^2 - s^2) \sin \theta$$

و تخلیه در عرض واحد عبارت است از

$$Q = \frac{\gamma}{3\mu} b^3 \sin \theta$$

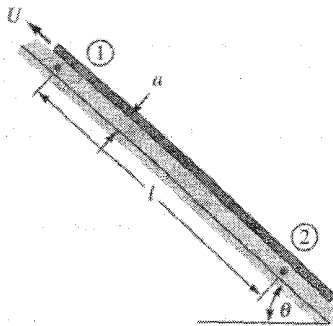


شکل ۲۷.۶ مسائل ۱۰.۶ و ۱۱.۶.

۱۱.۶ با قرار دادن این شرط که تنش برشی در سطح آزاد صفر باشد، در معادله مناسبی قبل از معادله (۲.۲.۶)، توزیع سرعت مسئله ۱۰.۶ را استنتاج کنید.

۱۲.۶ یک غشای نازک آب به طرف پایین شیب 3° جریان دارد. اگر شارش $8L/s$ بر متر عرض باشد و $\nu = 10^{-6} m^2/s$ ، عمق را پیدا کنید.

۱۳.۶ در شکل ۲۸.۶ داریم $p_2 = 8 \text{ psi}$ ، $p_1 = 6 \text{ psi}$ ، $l = 4 \text{ ft}$ ، $a = 0.06 \text{ ft}$ ، $\theta = 30^\circ$ ، $U = 4 \text{ ft/s}$ ، $\gamma = 50 \text{ lb/ft}^3$ و $\mu = 8P$. نیروی مماسی بر هر متر مربع، وارد به صفحه بالایی، و جهت آن را تعیین کنید.



شکل ۲۸.۶ مسائل ۱۳.۶ و ۱۴.۶.

۱۴.۶ برای $\theta = 90^\circ$ در شکل ۲۸.۶، چه سرعت U برای عدم تخلیه لازم است؟ $87^\circ R = S$ ،
 $\mu = 2 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ و $p_1 = p_2$ ، $a = 3 \text{ mm}$.

۱۵.۶ مطلوب است گرادیان (شیب) فشاری که در شارش بین دو ورق موازی تنش برشی صفر را در دیواره پایینی، $y = 0$ ، نتیجه دهد. ورقها به فاصله a از هم و افقی‌اند. سرعت ورق بالایی نسبت به صفحه پایینی U است.

۱۶.۶ اگر در معادله (۳.۲.۶) داشته باشیم $Q = 0$ ، آهنگ زمانی عبور اندازه حرکت و آهنگ زمانی عبور انرژی جنبشی از مقطع عمود بر شارش چقدر است؟

۱۷.۶ یک فیلم سیال به ضخامت 0.05 ft به طرف پایین یک سطح قائم ثابت با سرعت سطحی 2 ft/s جریان می‌یابد. چسبندگی سیال را تعیین کنید. $\gamma = 55 \text{ lb/ft}^2$.

۱۸.۶ ضریب تصحیح تکانه را برای شارش لایه‌ای در لوله گرد تعیین کنید.

۱۹.۶ آب در شرایط متعارفی و در لوله‌ای با فشار p_1 و قطر d_1 به‌طور لایه‌ای جریان دارد. این لوله تا قطر $2d_1$ و فشار p_2 منبسط می‌شود و در فاصله‌ای در فرودست انبساط، شارش بار دیگر با معادله (۶.۳.۶) توصیف می‌شود. مطلوب است نیروی وارد بر لوله که از انبساط ناشی می‌شود.

۲۰.۶ در چه فاصله r از مرکز لوله به شعاع r_0 سرعت متوسط در شارش لایه‌ای رخ می‌دهد؟

۲۱.۶ ماکزیمم تنش برشی دیواره را برای شارش لایه‌ای در لوله‌ای به قطر D با خواص مفروض سیال μ و ρ تعیین کنید.

۲۲.۶ نشان دهید که به‌جای شارش در طوقه‌ای با 2 درصد خطا، می‌توان شارش لایه‌ای بین صفحات موازی را مورد استفاده قرار داد به شرطی که لقی (فاصله بین ورقها) بیش از 4 درصد قطر داخلی نباشد.

۲۳.۶ در شارش جیوه 35°C در لوله‌ای به قطر 6 mm و 1600 R اتلافها برحسب کیلوگرم بر متر چه هستند؟

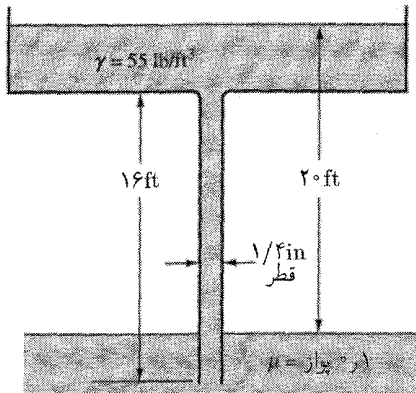
۲۴.۶ مطلوب است تنش برشی در دیواره لوله‌ای به قطر $\frac{1}{16} \text{ in}$ وقتی آب 80°F با سرعت 1.5 ft/s در آن جریان دارد.

۲۵.۶ افت فشار را برای یک متر لوله افقی به قطر داخلی 3 mm در شارش مایع 60 cP ، $\mu = 60 \text{ cP}$ ، $83^\circ \text{R} = S$ ، 150 R تعیین کنید.

۲۶.۶ گلیسرین 100°F در یک لوله افقی به قطر $\frac{1}{8} \text{ in}$ با افت فشار 5 psi/ft جریان دارد. تخلیه و عدد رینولدز را پیدا کنید.

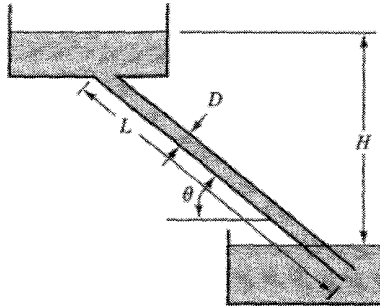
۲۷.۶ مطلوب است قطر لازم برای یک لوله قائم با شارش مایع در 1400 R ، وقتی فشار ثابت می‌ماند؛ $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

۲۸.۶ تخلیه سیستم شکل ۲۹.۶ را با صرف نظر از تمام اتلافها، به استثنای اتلاف داخل لوله، محاسبه کنید.



شکل ۲۹.۶ مسائل ۲۸.۶ و ۲۹.۶

۲۹.۶ در شکل ۳۰.۶ داریم $H = 24 \text{ m}$, $L = 40 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$, $D = 8 \text{ mm}$, $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$ و $\mu = 0.08 \text{ kg/m.s}$. افت ارتفاع را برای طول واحد لوله، و تخلیه را بر حسب لیتر بر ثانیه پیدا کنید.



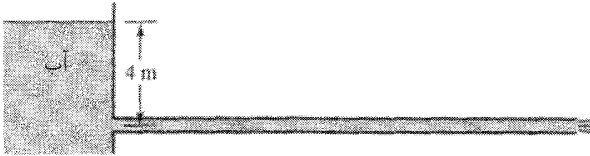
شکل ۳۰.۶ مسائل ۲۹.۶، ۳۰.۶ و ۳۰.۱.۶

۳۰.۶ در شکل ۳۰.۶ و مسئله ۲۹.۶، اگر سرعت 1 m/s باشد H را پیدا کنید. 31.6 روغن، $S = 0.85$ ، $\mu = 0.06 \text{ N.s/m}^2$ ، درون یک طوق با $a = 15 \text{ mm}$ و $b = 7 \text{ mm}$ جریان می‌یابد. اگر تنش برشی در دیواره خارجی 12 Pa باشد، مطلوب است الف) افت فشار بر متر برای یک سیستم افقی؛ ب) تخلیه بر حسب لیتر بر ساعت، و ج) نیروی محوری وارد بر لوله داخلی برای متر طول.

۳۲.۶ یک سیستم لوله‌ای طوقه‌ای طوری ترتیب داده شده است که شارش در لوله داخلی روی می‌دهد سپس از طریق طوقه برمی‌گردد، و افت فشار آن در طول واحد یکسان است. شارش لایه‌ای است، شعاع لوله داخلی 5 cm ، و ضخامت لوله 3 mm است. شعاع لوله خارجی را پیدا کنید.

۳۳.۶ عدد رینولدز شارش $3 \text{ m}^2/\text{s}$ روغن، $S = 0.86$ ، $\mu = 0.25 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ در لوله‌ای به قطر 45 mm چقدر است؟

۳۴.۶ یک لوله افقی با قطر کوچک، $D = 3 \text{ mm}$ ، $L = 4 \text{ m}$ ، مطابق شکل ۳۱.۶ به یک مخزن متصل شده است. اگر $3(10)^{-5} \text{ m}^3$ در 10 s از خروجی خارج شود، چسبندگی آب چقدر است؟



شکل ۳۱.۶ مسئله ۳۴.۶.

۳۵.۶ نشان دهید که توان ورودی در شارش لایه‌ای در یک لوله گرد با انتگرال‌گیری از معادله (۶.۲.۶) عبارت است از $Q\Delta p$.

۳۶.۶ با استفاده از قانون توان یک هفتم توزیع سرعت، $u/u_{\max} = (y/r_0)^{1/7}$ ، توزیع طول مخلوط l/r_0 را از معادله (۱۲.۴.۶) برحسب y/r_0 تعیین کنید.

۳۷.۶ با استفاده از معادله (۱۸.۴.۶) توزیع سرعت در یک لوله منحنی $\epsilon/u_* r_0$ را به صورت تابعی از y/r_0 رسم کنید.

۳۸.۶ مقدار y/r_0 را در یک لوله در جایی تعیین کنید که سرعت مساوی سرعت متوسط برای شارش متلاطم باشد.

۳۹.۶ یک لوله افقی صاف به نظر 4 cm ، $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ آب را انتقال می‌دهد. $\nu = 1(10^{-6}) \text{ m}^2/\text{s}$ و $\tau_0 = 25.3 \text{ Pa}$ (الف) سرعت برشی، u_* ، (ب) سرعت ماکزیمم، و (ج) افت فشار در 10 m طول.

۴۰.۶ در فرمول سرعت‌نمایی پرانتل، برای مقادیر n مساوی $1/7$ ، $1/8$ ، و $1/9$ نیمی‌رخهای سرعت را رسم کنید.

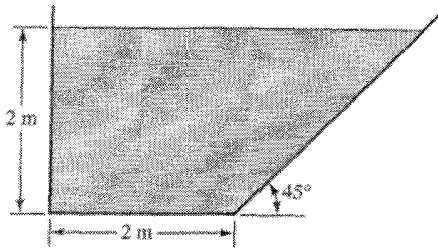
۴۱.۶ ضریب سزی برای شارش در یک کانال مستطیلی به عرضی 6 ft ، عمق 3 ft ، و با شیب کف 16 ° برابر با 127 است. تخلیه چقدر است؟

۴۲.۶ یک کانال مستطیلی به عرض 1 m ، $\lambda = 0.005$ ، $S = 0.064$ ، مایعی را با آهنگ $1 \text{ m}^3/\text{s}$ انتقال می‌دهد. سرعت را تعیین کنید.

۴۳.۶ مقدار ضریب زبری مانینگ n در مسئله ۴۲.۶ چقدر است؟

۴۴.۶ یک کانال مستطیلی با روکش آجری به عرض 6 ft و عمق 4 ft ، مایعی را با آهنگ 210 cfs انتقال می‌دهد. شیب لازم برای کانال چقدر است؟

۴۵.۶ کانالی با مقطع شکل ۳۲.۶ از چوب رنده نشده ساخته شده است و شیب آن $1:1$ است. تخلیه چقدر است؟



شکل ۳۲.۶ مسئله ۴۵.۶.

۴۶.۶ یک کانال دوزنقه‌ای، از بتن پرداخته نشده در عمق 2 m آب را انتقال می‌دهد. عرض کف آن 3 m و شیب جانبی 1 (افقی) به $1\frac{1}{2}$ (عمودی) است. برای شیب کف $4:1$ ، تخلیه چقدر است؟

۴۷.۶ یک کانال دوزنقه‌ای با شیب کف $3:1$ ، عرض کف 1.2 m ، و شیب جانبی 2 (افقی) به 1 (عمودی)، در عمق $6\text{ m}^3/\text{s}$ انتقال می‌دهد. ضریب زبری مانینگ چقدر است؟

۴۸.۶ یک کانال زمینی دوزنقه‌ای با عرض کف 8 ft و شیبهای جانبی 2 به 1 (2 افقی به 1 عمودی) قرار است برای 28 cfs بسازند. برای فرسوده نشدن، بهترین سرعت 2.8 ft/s است. شیب لازم برای کف چقدر است؟

۴۹.۶ چه قطری برای یک کانال نیم‌دایره با فلز کنگره‌دار برای حمل $2\text{ m}^3/\text{s}$ لازم است، در صورتی که شیب آن $6:1$ باشد؟

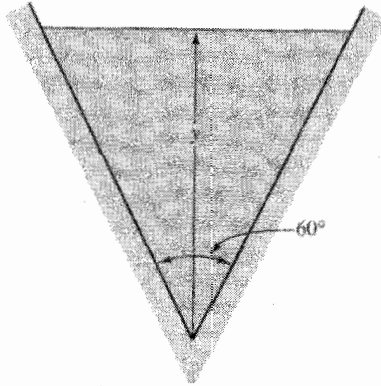
۵۰.۶ یک کانال نیم‌دایره از فلز کنگره‌دار به قطر 9 ft دارای شیب کف $4:1$ است. وقتی کانال پر از شاره باشد گنجایش آن چقدر است؟

۵۱.۶ در یک کانال دوزنقه‌ای با عرض کف 4 m ، شیبهای جانبی 3 (افقی) به 1 (عمودی) و شیب کف $9:1$ ، عمق شارش $6\text{ m}^3/\text{s}$ را محاسبه کنید.

۵۲.۶ در یک کانال مستطیلی به عرض 12 ft ، سرعت شارش 26 cfs چقدر است؟ $S = 0.049$ ، $n = 0.14$.

۵۳.۶ قرار است یک کانال دوزنقه‌ای با روکش آجری برای انتقال $35\text{ m}^3/\text{s}$ در مسافت 8 km با افت ارتفاع 5 m بسازند. عرض کف 4 m ، و شیبهای جانبی 1 به 1 است. سرعت چقدر است؟

۵۴.۶ در شکل ۳۳.۶، تخلیه با عرض چگونه تغییر می‌کند؟

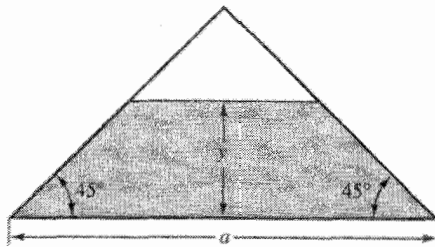


شکل ۳۳.۶ مسائل ۵۴.۶ تا ۵۶.۶.

۵۵.۶ در شکل ۳۳.۶ سرعت با عمق چگونه تغییر می‌کند؟

۵۶.۶ در شکل ۳۳.۶ عمق شارش را برای تخلیه ۱۲ cfs تعیین کنید. کانال از فولاد پرچ شده با شیب کف ۱ در ۱۰۰ ساخته شده است.

۵۷.۶ عمق y (شکل ۳۴.۶) را برای سرعت ماکزیمم در n و S مفروض تعیین کنید.



شکل ۳۴.۶ مسائل ۵۷.۶ و ۵۸.۶.

۵۸.۶ عمق y (شکل ۳۴.۶) را برای تخلیه ماکزیمم در n و S مفروض به دست آورید.

۵۹.۶ یک کانال دوزنقه‌ای (شکل ۱۶.۶) با مشخصات زیر است: $b = 4\text{ m}$ ، $m = 2$ ، $n = 0.14$ ، و $S = 0.0006$. از صفحه گسترده استفاده کنید و عمق شارش یکنواخت را برای تخلیه‌های ۶۰، ۹۰، ۱۲۰، و $150\text{ m}^3/\text{s}$ بیابید.

۶۰.۶ در آزمایش روی لوله‌ای به قطر ۳۰۰ mm با آب، اختلاف پیمانه‌ای ۲۸۰ mm در فشارسنج آب-جیوه به دست آمد؛ فشارسنج به دو حلقه پیزومتر در فاصله ۱۲۰ m از هم متصل بود. شارش $123\text{ m}^3/\text{s}$ بود. ضریب اصطکاک چقدر است؟

۶۱.۶ با استفاده از معادلهٔ بلازیوس (۱۰.۷.۶) برای تعیین ضریب اصطکاک، توان لازم بر کیلومتر را برای پمپاژ ۳ cfs در ۳۰ مایع، $\nu = 3.3 \times 10^{-4} \text{ft}^2/\text{s}$ ، $\gamma = 55 \text{lb}/\text{ft}^3$ ، در خط لوله‌ای به قطر ۱۸ in تعیین کنید.

۶۲.۶ مطلوب است افت ارتفاع در یک کیلومتر برای برقراری سرعت ۳ m/s در لوله‌ای به قطر ۱۰ mm، $\nu = 4 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$.

۶۳.۶ سیال در لوله‌ای به قطر ۱۰ mm در عدد رینولدز ۱۸۰۰ جریان دارد. در ۱۰۰ m لوله افت ارتفاع ۳۰ m است. تخلیه را برحسب لیتر بر دقیقه محاسبه کنید.

۶۴.۶ چه اندازه‌ای برای لولهٔ آهن سفید لازم است تا در $R = 3.5 \times 10^5$ "به‌طور هیدرولیکی صاف" باشد؟ لوله را به‌طور هیدرولیکی صاف گویند وقتی که در همان شرایط به عنوان لوله‌ای صافتر به کار روند همان اتلافها را داشته باشند.

۶۵.۶ در لوله‌ای به قطر ۳ m از فولاد پرچ شده، $\epsilon = 3 \text{mm}$ ، در بیشتر از چه عدد رینولدزی تخلیه مستقل از چسبندگی سیال است؟

۶۶.۶ زبری مطلق لوله‌ای را به قطر ۱ ft به ضریب اصطکاک $f = 0.3$ در $R = 10^6$ تعیین کنید.

۶۷.۶ چه قطری از لولهٔ پاکیزهٔ آهن سفید در $R = 100000$ دارای ضریب اصطکاک یکسانی با لولهٔ چدنی به قطر ۳۰۰ mm است؟

۶۸.۶ تحت چه شرایطی در لوله‌ای که به‌طور مصنوعی زبر شده است اتلافها با نمایی بیش از مربع سرعت تغییر می‌کند؟

۶۹.۶ چرا وقتی سرعت شارش لایه‌ای در لوله‌ای کم شود، ضریب اصطکاک زیاد می‌شود؟

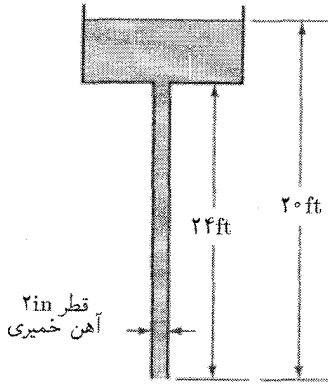
۷۰.۶ با استفاده از معادلهٔ (۱۳.۷.۶) ضریب اصطکاک را برای هوای اتمسفر در 80°F ، $V = 50 \text{ft}/\text{s}$ ، در لولهٔ آهن سفیدی به قطر ۳ ft محاسبه کنید.

۷۱.۶ می‌خواهند از طریق یک کیلومتر لولهٔ آهن خمیری به قطر ۲۰۰ mm، آب 20°C را با تخلیهٔ ۶۰ L/s پمپاژ کنند. افت ارتفاع و توان مورد نیاز را محاسبه کنید.

۷۲.۶ $16000 \text{ft}^3/\text{min}$ هوای اتمسفر در 90°F از طریق یک لولهٔ آهن خمیری به قطر ۴ ft در فاصلهٔ ۱۰۰۰ ft منتقل می‌شود. افت ارتفاع برحسب سانتیمتر آب چقدر است؟

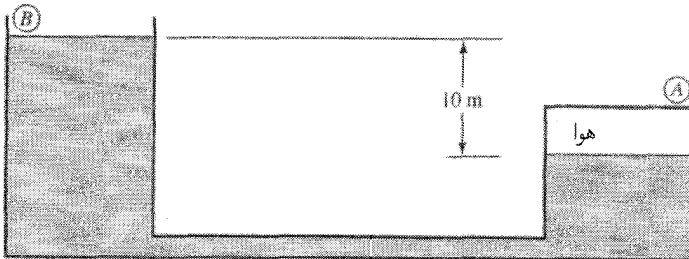
۷۳.۶ برای گردش هوای استاندارد با سرعت $50 \text{km}/\text{h}$ در یک تونل باد چه پنکه‌ای با چه قدرتی باید خرید؟ تونل حلقهٔ بسته‌ای است به طول ۶۰ m و می‌توان فرض کرد که مقطع دایروی ثابتی به قطر ۲ m دارد. لوله را صاف فرض کنید.

۷۴.۶ آیا برای سرد کردن هوا در مقطعی از تونل مسئله ۷۳.۶ باید پیش‌بینی‌هایی کرد؟ تا چه حد؟
 ۷۵.۶ $2 \text{ } ^\circ\text{C}$ روغن، $\mu = 0.16 \text{ P}$ ، $\gamma = 54 \text{ lb/ft}^3$ ، در یک خط لوله چدنی به قطر 12 in پمپ می‌شود. اگر هر پمپ 80 psi تولید کند، آنها را به چه فاصله‌ای از هم می‌توان قرار داد؟
 ۷۶.۶ یک لوله صاف به قطر 60 mm و به طول 150 m ، آب $25 \text{ } ^\circ\text{C}$ را با آهنگ 10 L/s از یک لوله اصلی $p = 1.6 \text{ MN/m}^2$ به نوک ساختمانی در 25 m بالای لوله اصلی انتقال می‌دهد. چه فشاری در نوک ساختمان می‌توان حفظ کرد؟
 ۷۷.۶ برای آب $15 \text{ } ^\circ\text{C}$ تخلیه را در لوله شکل ۳۵.۶ محاسبه کنید.



شکل ۳۵.۶ مسائل ۷۷.۶ و ۷۸.۶.

۷۸.۶ در شکل ۳۵.۶، برای پمپ کردن 16 gpm از مخزنی در کف لوله تا مخزن نشان داده شده چه قدرتی لازم است؟
 ۷۹.۶ تخلیه در لوله صاف افقی نشان داده شده در شکل ۳۶.۶ را بیابید. مایع دارای $S = 0.83$ و $\nu = 6(10)^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ است. فشار هوا در فضای بسته داخل مخزن A برابر با 162.8 kPa است، و مخزن B در معرض اتمسفر است.



شکل ۳۶.۶ مسئله ۷۹.۶.

۸۰.۶ برای تخلیه یک مخزن روغن، از یک لوله فولاد تجارتي به قطر ۱۲mm و طول ۱۵m استفاده می‌شود. وقتی سطح روغن در مخزن ۲m بالای انتهای خروجی لوله باشد، تخلیه را تعیین کنید.
 $\mu = 0.07 \text{ lb} \cdot \text{s} / \text{ft}^2$; $\gamma = 8 \text{ kN} / \text{m}^3$

۸۱.۶ دو مخزن مایع ۲۰۰ft لوله صاف به قطر ۲in به هم وصل شده‌اند. وقتی اختلاف ارتفاع ۵۰ft است آهنگ شارش چقدر است؟ $v = 0.001 \text{ ft}^2 / \text{s}$ از نمودار مودی و معادله (۱۵.۷.۶) استفاده کنید.

۸۲.۶ برای افت ارتفاع ۸۰mm آب در طول ۲۰۰m، برای شارش هوای اتمسفر $C = 15^\circ$ از طریق یک مجرا، $\epsilon = 1 \text{ mm}$ ، به قطر ۲۵m، شارش را برحسب متر مکعب در دقیقه محاسبه کنید. از نمودار مودی و معادله (۱۵.۷.۶) استفاده کنید.

۸۳.۶ گازی به جرم مولکولی ۳۷ در یک مجرای گالوانیزه (آهن سفید) به قطر ۲۴in در ۹۰psi مطابق و 100°F جریان دارد. افت ارتفاع در ۱۰۰ft از مجرا مساوی ۲in آب است. شارش برحسب کیلوگرم بر ساعت چقدر است؟ $\mu = 0.0194 \text{ cP}$

۸۴.۶ برای دمنده‌ای با بازده ۷۰ درصد چه قدرتی بر کیلوگرم لازم است تا شارش مسئله ۸۲.۶ برقرار بماند؟

۸۵.۶ $100 \text{ lb}_m / \text{min}$ هوا که برای تهویه یک معدن لازم است از طریق ۳۰۰۰ft لوله گالوانیزه به قطر ۱۲in انتقال می‌یابد. با صرف‌نظر از اتلافهای جزئی، دمنده چه ارتفاعی برحسب اینچ آب باید تولید کند تا این شارش فراهم شود؟ $p = 14 \text{ psi}$; $t = 90^\circ \text{F}$

۸۶.۶ در شکل ۳.۶، $H = 20 \text{ m}$ ، $L = 150 \text{ m}$ ، $D = 50 \text{ mm}$ ، $S = 0.85$ ، $\mu = 4 \text{ cP}$ و $\epsilon = 1 \text{ mm}$. نیوتن بر ثانیه جاری را پیدا کنید.

۸۷.۶ در یک فرایند، از طریق لوله صافی بین دو مخزن به فاصله ۳۰ft از یکدیگر و اختلاف ارتفاع ۴ft، $10000 \text{ lb} / \text{h}$ آب مقطر 70°F جریان می‌یابد. اندازه مورد نیاز لوله چقدر است؟
 ۸۸.۶ برای انتقال $400 \text{ L} / \text{s}$ آب 25°C در فاصله ۱km با افت ارتفاع ۲m چه اندازه‌ای از لوله چدنی نو لازم است؟ از نمودار مودی و معادله (۱۸.۷.۶) استفاده کنید.

۸۹.۶ از دو نوع صفحه فولادی، که زبری سطح آنها $\epsilon_1 = 0.0003 \text{ ft}$ و $\epsilon_2 = 0.0001 \text{ ft}$ است، صفحه صافتر ۱۰ درصد گرانتر است. با تنش مجاز 10000 psi در هر صفحه، کدام صفحه را باید انتخاب کرد تا در 200 psi با افت ارتفاع $6 \text{ ft} / \text{min}$ ، آب تحویل دهد؟

۹۰.۶ یک لوله کهنه به قطر ۲m، زبری $\epsilon = 30 \text{ mm}$ دارد. روکشی به ضخامت ۱۲mm زبری را تا $\epsilon = 1 \text{ mm}$ کاهش می‌دهد. برای آب 20°C با تخلیه $6 \text{ m}^3 / \text{s}$ ، در هزینه سالانه پمپاژ در هر کیلومتر چه مقدار صرفه جویی می‌شود؟ بازده پمپها و موتورها ۸۰ درصد است، و توان ۲ سنت بر

کیلووات ساعت هزینه دارد.

۹۱.۶ مطلوب است قطر یک لوله چوبی نو و مرغوب که برای انتقال ۳۰۰ cfs آب 60°F با افت ارتفاع ۱ ft بر ۱۰۰۰ ft لوله، لازم است. از نمودار مودی و معادله (۱۸.۷.۶) استفاده کنید.

۹۲.۶ دو مخزن روغن با اختلاف ارتفاع ۵m توسط ۳۰۰ m لوله از جنس فولاد تجارتي به هم متصل می‌شوند. اندازه لوله چه باشد تا 5°L/s انتقال دهد؟ $\mu = 0.5 \text{ kg/m.s}$ و $\gamma = 8 \text{ kN/m}^3$.

۹۳.۶ ۳۰۰ cfs هوا با $p = 16 \text{ psi}$ مطلق و 70°F را می‌خواهند با افت ارتفاع ۳ in آب در فاصله ۱۰۰۰ ft به یک معدن برسانند. چه اندازه‌ای از لوله گالوانیزه مورد نیاز است؟

۹۴.۶ منحنی لوله صاف در نمودار مودی را با معادله (۴.۷.۶) برای 10^5 ، 10^6 ، 10^7 مقایسه کنید.

۹۵.۶ مکان خط $\epsilon/D = 0.002$ در نمودار مودی را با معادله (۷.۷.۶) واریسی کنید.

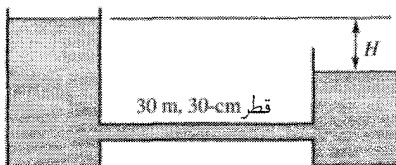
۹۶.۶ نشان دهید که وقتی $\epsilon = 0$ ، معادله (۷.۷.۶) به معادله (۴.۷.۶) تبدیل می‌شود و وقتی R خیلی بزرگ است به معادله (۶.۷.۶) تبدیل می‌شود.

۹۷.۶ معادله (۱۳.۷.۶) یک تقریب از معادله (۷.۷.۶) است. از یک صفحه گسترده استفاده کنید و خط در معادله (۱۳.۷.۶) را برای ϵ/D و عدد رینولدز داده شده بیابید. یک جدول با 10^{-2} ، 10^{-3} ، 10^{-4} ، 10^{-5} ، 10^{-6} و با اعداد رینولدز 5×10^4 ، 10^4 ، 10^5 ، 10^6 تهیه کنید.

۹۸.۶ معادله (۱۵.۷.۶) را با کامپیوتر برای مثال ۱۰.۶ حل کنید.

۹۹.۶ اتلافها را برحسب ژول بر نیوتن، در شارش $25 \text{ m}^3/\text{min}$ هوا، $p = 1 \text{ atm}$ و $t = 20^{\circ}\text{C}$ در یک انبساط ناگهانی لوله از ۳۰۰ mm به ۹۰۰ mm محاسبه کنید. با استفاده از پخش‌کن مخروطی 10° چه مقدار ارتفاع صرفه‌جویی می‌شود؟

۱۰۰.۶ در شکل ۳۷.۶، برای 125 L/s آب 15°C در لوله فولاد تجارتي مقدار H را محاسبه کنید. اتلافهای جزئی را در نظر بگیرید.



شکل ۳۷.۶ مسائل ۱۰۰.۶، ۱۰۲.۶ و ۱۰۳.۶.

۱۰۱.۶ در مسئله ۲۸.۶، اگر یک شیر کروی در خط قرار داشت تخلیه چه بود؟ فرض می‌شود لوله صاف است، ورودی آن خوب گرد شده است و $\mu = 1cP$. با استفاده از نمودار مودی و با روش تکرار و استفاده از معادله‌های (۶.۸.۶) تا (۹.۸.۶) مسئله را حل کنید.

۱۰۲.۶ در شکل ۳۷.۶ برای $H = 3m$ ، تخلیهٔ روغن با $S = 0.8$ و $\mu = 7cP$ را در یک لولهٔ صاف محاسبه کنید. اتلافهای جزئی را منظور کنید.

۱۰۳.۶ اگر در مسئله ۱۰۲.۶ یک شیر در خط بگذاریم و برای کاهش تخلیه آن را تا نیمه ببندیم، K برای شیر چقدر است و طول لولهٔ معادل آن در این حالت چیست؟

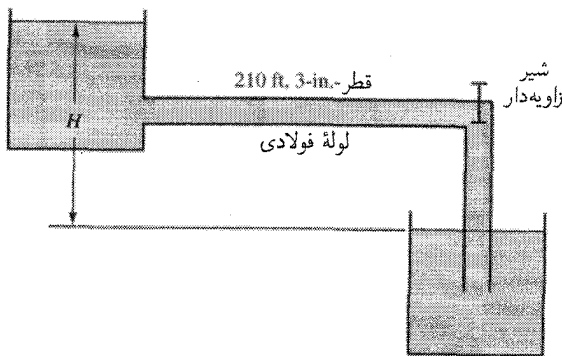
۱۰۴.۶ یک خط لولهٔ آب در بین دو مخزن $70^\circ F$ متشکل است از $5000 ft$ لولهٔ فولادی به قطر $24 in$ ، سه زانویی استاندارد، یک شیر کروی، و یک لولهٔ ورودی تورفته. برای $20 cfs$ ، اختلاف ارتفاع دو مخزن چیست؟

۱۰۵.۶ در مسئله ۱۰۴.۶ تخلیه را تعیین کنید در صورتی که اختلاف ارتفاع $40 ft$ باشد.

۱۰۶.۶ برای انتقال $200 L/s$ آب $20^\circ C$ به فاصلهٔ $5 km$ با افت ارتفاع $4 m$ چه اندازه‌ای از لولهٔ فولاد تجارتي مورد نیاز است؟ لوله‌ای که دو مخزن را به هم وصل می‌کند، یک ورودی تورفته، یک خروجی غوطه‌ور، چهار زانویی استاندارد، و یک شیر کروی دارد.

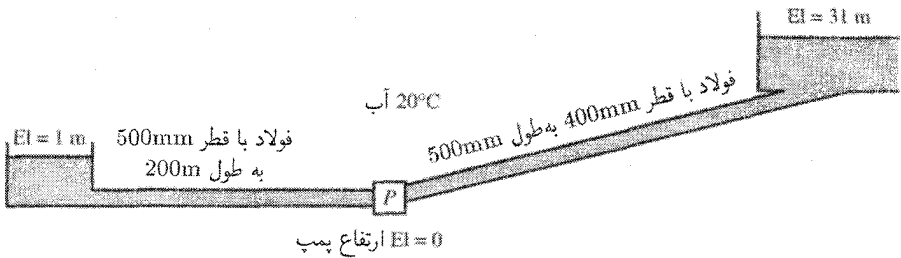
۱۰۷.۶ طول معادل لوله‌ای به قطر $2 in$ ، $f = 0.22$ ، برای الف) یک لولهٔ ورودی تورفته؛ ب) انبساط ناگهانی قطر از $2 in$ تا $4 in$ ؛ ج) یک شیر کروی و یک سه‌راههٔ استاندارد چیست؟

۱۰۸.۶ در شکل ۳۸.۶، با $200 gpm$ شارش روغن، $\mu = 0.1P$ و $\gamma = 60 lb/ft^3$ ، برای حالتی که شیر زاویه‌ای کاملاً باز است H را پیدا کنید.



شکل ۳۸.۶ مسائل ۱۰۸.۶ تا ۱۱۰.۶.

۱۰۹.۶ مطلوب است K برای شیر زاویه‌ای مسئله ۱۰۸.۶ در شارش 10 L/s ، با همان H .
 ۱۱۰.۶ تخلیه در سیستم شکل ۳۸.۶ برای آب 25°C چقدر است؟ در صورتی که $H = 8 \text{ m}$ باشد؟
 ۱۱۱.۶ سیستم پمپاژ در شکل ۳۹.۶، یک پمپ با منحنی ارتفاع-تخلیه $Q^2 = 40 - 24Q$ دارد و ارتفاع برحسب متر و تخلیه برحسب مترمکعب بر ثانیه است. طولهای لوله شامل تصحیح اتلافهای جزئی است. شارش در لوله را برحسب لیتر بر ثانیه تعیین کنید. برای سیستم پمپاژ با بازده ۷۲ درصد، توان لازم را تعیین کنید. برای اجتناب از حفره‌زایی، پمپ به ارتفاع مکش حداقل برابر با $1/2$ اتمسفر نیاز دارد. تخلیه ماکزیمم و توان مورد نیاز برای رسیدن به این ماکزیمم چقدر است؟



شکل ۳۹.۶ مسئله ۱۱۱.۶.

مراجع

1. O. Reynolds, "An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Laws of Resistance in Parallel Channels," *Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 174, 1883.
2. H. L. Langhaar, "Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube," *J. Appl. Mech.*, vol. 9, pp. 55-58, 1942.
3. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, Cambridge, MA, 1972.
4. O. Reynolds, "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion," *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, Ser. A, 186, 123, 1895.
5. L. Prandtl, *Essentials of Fluid Dynamics*, pp. 105-145, Hafner, New York, 1952.
6. L. Prandtl, "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz," *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 5, no. 2, p. 136, 1925.
7. T. von Kármán, "Turbulence and Skin Friction," *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 1, no. 1, p. 1, 1934.
8. B. A. Bakhmeteff, *The Mechanics of Turbulent Flow*, Princeton University Press, Princeton, 1941.

9. J. Nikuradse, "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren," *Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh.*, vol. 356, 1932.
10. C. F. Colebrook, "Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws," *J. Inst. Civ. Eng. Lond.*, vol. 11, pp. 133–156, 1938–1939.
11. H. Blasius, "Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten," *Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh.*, vol. 131, 1913.
12. J. Nikuradse, "Strömungsgesetze in rauhen Röhren," *Ver. Dtsch. Ing. Forschungsh.*, vol. 361, 1933.
13. L. F. Moody, "Friction Factors for Pipe Flow," *Trans. ASME*, November 1944.
14. S. W. Churchill, "Empirical Expressions for the Shear Stress in Turbulent Flow in Commercial Pipe," *A. I. Ch. E. J.*, vol. 19, no. 2, pp. 375–376, 1973.
15. P. K. Swamee and A. K. Jain, "Explicit Equations for Pipe-Flow Problems," *J. Hydr. Div., Proc. ASCE*, pp. 657–664, May 1976.
16. A. H. Gibson, "The Conversion of Kinetic to Pressure Energy in the Flow of Water through Passages Having Divergent Boundaries," *Engineering*, vol. 93, p. 205, 1912.
17. D. S. Miller, *Internal Flow Systems*, Second Edition, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Bedford, UK, 1990.
18. Julius Weisbach, *Die Experimental-Hydraulik*, p. 133, Englehardt, Freiburg, 1855.
19. Crane Company, "Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipe," *Tech. Pap.* 410, 1979.
20. *Engineering Data Book*, Hydraulic Institute, 2nd Edition, Cleveland, 1990.



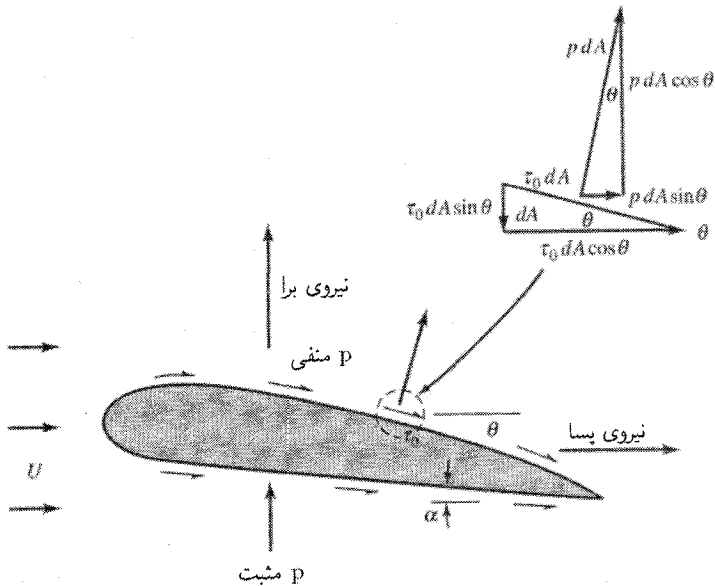
شارشهای خارجی

فصل ۶ به شارشهای مقید، و به یکی از نکات اولیه دربارهٔ اتلاف انرژی ناشی از شارش اختصاص داده شده بود. در این فصل، نیروهای وارد از یک سیال بر جسمی که در آن حرکت می‌کند بررسی می‌شود. رده‌بندیهای شارش لایه‌ای و متلاطم در اینجا نیز مهم است، و لایه مرزی و توزیع سرعت ایجادشده در مجاورت جسم با شرط نبود لغزش در سطح جسم نیز اهمیت دارند. نیروهای پسا و برا مسائل اصلی است. آنها در بسیاری از کاربردها مانند برگه‌های هواپر، اتومبیلها، ساختمانها، کشتیها اهمیت دارند، اما در مواردی از قبیل حرکت ذره، مکانیزم خوردگی، و طراحی پروانهٔ پمپ اگرچه تأثیر این نیروها کمتر محسوس است ولی همان اهمیت را دارند.

این فصل را با توصیف کیفی از نیروی پسا و برا شروع، و پس از آن بحث تفصیلی‌تر دربارهٔ لایه‌های مرزی، لایه‌ای و متلاطم، می‌کنیم. مفهوم جدایی شارش نیز به عنوان جزء لاینفک در نیروی پسا و برا مورد نیاز است. در پایان فصل دربارهٔ اثرات ناپایا (اثرات شتاب) و مفهوم جرم افزوده بحث می‌شود.

۱.۷ نیروهای برشی و فشاری

نیروی پسا و برا به عنوان مؤلفه‌های نیرویی تعریف می‌شوند که از طرف سیال متحرک، به ترتیب، به



شکل ۱.۷ نیروهای چسبندگی و فشاری مؤثر بر یک برکه هوا.

موازات با سرعت نسبی نزدیکی و عمود بر آن بر یک جسم اثر می‌کنند. تنشهای برشی و چسبنده هر دو بر یک جسم غوطه‌ور اثر می‌کنند و یکی از آنها با هر دو در نیروی برآیند سهم دارند. اثر دینامیکی سیال متحرک است که نیروی پسا و برا را به وجود می‌آورد؛ نیروهای دیگر از قبیل نیروی گرانشی یا نیروی شناوری در پسا یا برا در نظر گرفته نمی‌شوند.

شارش روی یک برکه هوا بر مثالی مقدماتی است. تنشهای برشی را به هنگام تأثیر در امتداد سطح برکه هوا بر می‌توان مشاهده کرد (شکل ۱.۷). سرعت شارش روی نوک برکه بزرگتر از سرعت جریان آزاد است؛ به این ترتیب، با کاربرد معادله برنولی، فشار روی نوک برکه کمتر از فشار جریان آزاد است. سرعت در وجه زیرین کمتر از سرعت جریان آزاد است، و در نتیجه، فشار در این قسمت بزرگتر از فشار جریان آزاد است. این گزادیان (شیب) فشار عامل اصلی نیروی برا مؤثر بر برکه هوا بر است، در حالی که نیروی پسا از اختلافهای فشار و تنشهای برشی، هر دو، ناشی می‌شود. به طور ذهنی، نیروهای پسا و برا را مستقیماً از تنشهای فشاری و چسبندگی می‌توان محاسبه کرد. در شکل ۱.۷، شارش دوبعدی واقع در صفحه کاغذ دیده می‌شود. نواری از برکه هوا بر با ضخامت واحد را در نظر می‌گیریم. با توجه به مساحت دیفرانسیلی dA (شکل ۱.۷)، نیروی پسا عبارت است از

$$d(\text{پسا}) = p dA \sin \theta + \tau_0 dA \cos \theta \quad (۱.۱.۷)$$

با انتگرالگیری مساحت سطح، با فشار مثبت زیر برگه و فشار منفی بالای برگه، نیروی پسا کل به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{پسا} = \int (p \sin \theta + \tau_0 \cos \theta) dA \quad (۲.۱.۷)$$

به طور مشابه نیروی برآزای جزئی برابر است با

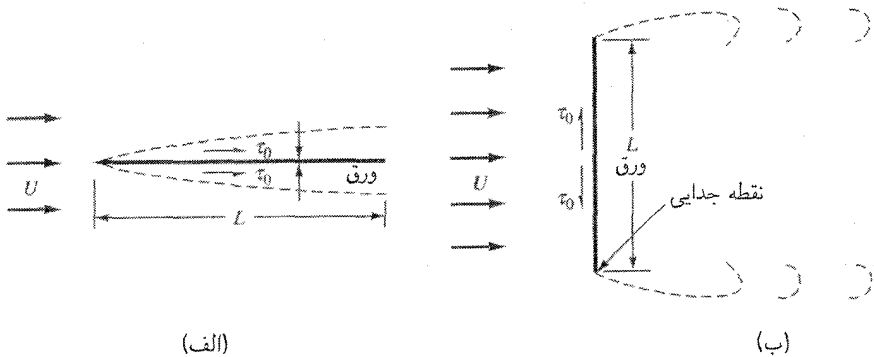
$$d(\text{برآزا}) = p dA \cos \theta - \tau_0 dA \sin \theta \quad (۳.۱.۷)$$

برآزای کل از انتگرالگیری مساحت سطح به دست می‌آید

$$\text{برآزا} = \int (p \cos \theta - \tau_0 \sin \theta) dA \quad (۴.۱.۷)$$

در برگه هواپر، تنش برشی سهم بسیار کوچکی از برآزای کل دارد و می‌توان به طور کلی از آن صرف نظر کرد. نقش شارش پیرامون جسم غوطه‌ور مقدار نیروهای پسا و برا را کنترل می‌کند، و گسترش لایه مرزی نقش مهمی در این نیروها ایفا می‌کند. متأسفانه، در اغلب اجسام نقش کامل شارش و فشار را دقیقاً نمی‌توان محاسبه کرد، و معادله‌های (۲.۱.۷) و (۴.۱.۷)، اگرچه خیلی صوری است، ارزش عملی محدودی دارند. نیروها* معمولاً با ضریبهای پسا و برا، که به طور تجربی تعیین می‌شوند، محاسبه می‌شوند.

یک ورق نازک، با ضخامت واحد در امتداد عمود بر کاغذ، برای استفاده در اینجا نشان داده شده است. وقتی ورق در جهت شارش است (شکل ۲.۷ الف)، نیروی پسا را می‌توان با معادله



شکل ۲.۷ شارش از روی یک ورق تخت

* نیروهای پسا و برا-م.

(۲.۱.۷) محاسبه کرد. با شارش متقارن روی ورق، لایه مرزی، مطابق شکل، گسترش می‌یابد و فشارهای موجود در بالا و پایین موازنه می‌شوند. جمله فشار از معادله‌های (۲.۱.۷) و (۴.۱.۷) حذف می‌شود. هیچ بالابر برآزایی بر ورق اثر نمی‌کند زیرا شارش به‌طور کلی متقارن است. وقتی ورق تحت زاویه عمود بر شارش قرار داده می‌شود (شکل ۲.۷ ب)، یک فشار مثبت بر وجه جلویی ورق اثر می‌کند در حالی که فشار بسیار کمتری در وجه جهت باد وجود دارد، و این در نتیجه جدایی است که در لبه‌های ورق روی می‌دهد. در این حالت، فقط جمله اول معادله (۲.۱.۷) علت نیروی پسای مؤثر بر ورق است. مجدداً، به علت تقارن، نیروی برا صفر است و برای تعیین نیروی پسای مؤثر بر ورق، که مطابق شکل ۲.۷ ب قرار دارد، آزمایشهایی مورد نیاز است. در اجسام گرد شده نقطه‌ای که لایه مرزی در آنجا از جسم جدا می‌شود به‌سهولت قابل پیش‌بینی نیست، و کاربرد مستقیم معادله (۲.۱.۷) را مشکل می‌کند. حالتی که در آنها محاسبات انجام‌شدنی است و ضریبهایی را برای تعیین تجربی [نیروهای پسا و برا] در بیشتر شکلهای اجسام دیگر می‌توان به‌دست آورد در قسمتهای بعد نشان داده می‌شوند.

۲.۷ مفاهیم لایه مرزی: ورقهای تخت

در سال ۱۹۰۴ برانتل [مرجع ۱] * مفهوم لایه مرزی را ارائه داد. این مفهوم ارتباط مهمی بین شارش سیال ایدئال و شارش سیال حقیقی برقرار می‌کند. در سیالاتی که چسبندگی نسبتاً کمی دارند، اثر اصطکاک درونی سیال فقط در ناحیه باریکی در اطراف مرزهای سیال قابل توجه است. با توجه به این فرض، شارش را در خارج از ناحیه باریک نزدیک مرزهای جامد می‌توان شارش ایدئال یا شارش پتانسیل در نظر گرفت. روابط درون ناحیه لایه مرزی را می‌توان از معادله‌های کلی سیالات چسبنده محاسبه کرد، اما استفاده از معادله تکانه امکان استخراج معادله‌هایی تقریبی برای رشد پسای لایه مرزی فراهم می‌کند. در این بخش لایه مرزی و معادله تکانه آن را توصیف می‌کنیم. شارش دویعدی در صفحه تخت را با روابط تکانه هم در لایه مرزی لایه‌ای و هم در لایه مرزی متلاطم مطالعه می‌کنیم. پدیده جدایی (انفصال) لایه مرزی و تشکیل رد عبور (ویک) را نیز تشریح می‌کنیم.

توصیف لایه مرزی

در سیالی که چسبندگی‌اش کم باشد، وقتی حرکت شروع شود، شارش در لحظه‌های اول اساساً بی‌چرخش است (قسمتهای ۱.۳ و ۱.۴). از آنجا که سیال در مرزها دارای سرعت صفر نسبت به مرزهاست، از مرز به شارش گردان (شیب) سرعت تند است. این شیب سرعت در سیال حقیقی در نزدیک مرز نیروهای برشی به‌وجود می‌آید که سرعت شارش را نسبت به مرز کاهش

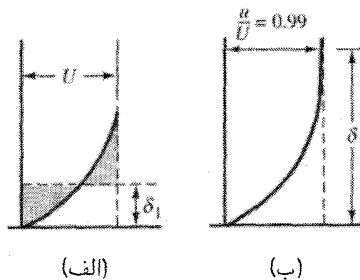
* در انتهای این فصل چند مرجع آورده شده‌اند.

می‌دهد. آن لایه سیال را که سرعتش تحت تأثیر تنش برشی مرزی قرار گرفته است لایه مرزی می‌نامند. سرعت در لایه مرزی به‌طور مجانبی به‌سرعت در شارش اصلی نزدیک می‌شود. در انتهای فرادست یک جسم که خط جریان داشته و در شارش یکنواخت به‌حالت سکون باشد، لایه مرزی خیلی نازک است. وقتی این لایه در امتداد جسم حرکت می‌کند، کنش مداوم تنش برشی گرایش دارد که ذره‌های اضافی سیال را کند سازد که باعث می‌شود ضخامت لایه مرزی با افزایش فاصله از نقطه فرادست، افزایش یابد. سیال در لایه تحت تأثیر شیب فشار، که از شارش پتانسیل تعیین می‌شود، نیز هست که اندازه حرکت لایه را افزایش می‌دهد اگر فشار در فرودست کاهش یابد، تکانه را کاهش می‌دهد و اگر فشار در فرودست افزایش یابد (عکس شیب فشار). شارش خارج از لایه مرزی نیز ممکن است به لایه تکانه بدهد.

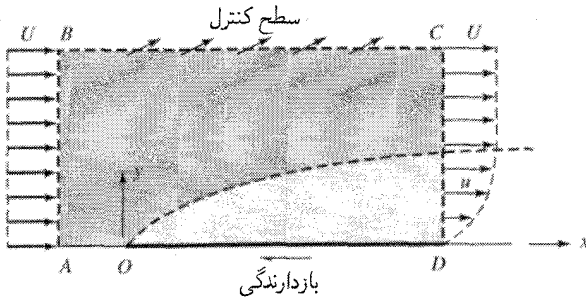
در مرزهای صاف فرادست، لایه مرزی از لایه مرزی لایه‌ای شروع می‌شود که در آن ذره‌های سیال در لایه‌های صاف حرکت می‌کنند. وقتی ضخامت لایه مرزی زیاد شود، لایه ناپایدار می‌شود و بالاخره به لایه مرزی متلاطم تبدیل می‌شود که در آن ذره‌های سیال در مسیرهای اتفاقی حرکت می‌کنند، هرچند سرعت آنها بر اثر چسبندگی در مرز کاهش می‌یابد. وقتی لایه مرزی متلاطم شده باشد، هنوز لایه بسیار نازکی در نزدیک مرز وجود دارد که حرکت لایه‌ای دارد و آن را زیر لایه لایه‌ای می‌نامند. تعریفهای مختلفی برای ضخامت لایه مرزی δ توصیه شده است. بنیادی‌ترین تعریف به جابه‌جایی شارش اصلی در اثرکند شدن ذرات سیال در منطقه مرزی مربوط می‌شود. این ضخامت δ_1 ، که به آن ضخامت جابه‌جایی می‌گویند، با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U\delta_1 = \int_0^{\delta} (U - u)dy \quad (۱.۲.۷)$$

که در آن δ مقداری است از y که در آن u مساوی U در شارش ناآشفته است. در شکل ۳.۷ الف، خط $y = \delta_1$ طوری رسم شده که سطوح سایه‌خورده با هم مساوی‌اند. این فاصله خود فاصله‌ای نیست که شدیداً تحت تأثیر مرز قرار بگیرد بلکه مقدار تغییر مکان شارش اصلی از مرز است. در



شکل ۳.۷ تعریفهای ضخامت لایه مرزی



شکل ۴.۷ حجم کنترل برای سیال جاری بر یک طرف صفحه تخت

حقیقت، این ناحیه را غالباً 3δ می‌گیرند، تعریف دیگر، که با شکل ۳.۷ بیان می‌شود، عبارت است از فاصله تا نقطه‌ای که در آن $u/U = 0.99$ باشد.

معادلهٔ تکانه برای لایهٔ مرزی

با پیروی از روش فون کارمان مرجع [۲]، اصل تکانه را می‌توان مستقیماً برای لایهٔ مرزی در شارش پایا در صفحهٔ تخت به کار برد. در شکل ۴.۷ یک حجم کنترل در نظر گرفته‌ایم که سیال بالای صفحه را در بر می‌گیرد و تا فاصلهٔ x در صفحه امتداد دارد. در جهت y ، حجم کنترل تا فاصلهٔ h گسترش دارد و بزرگی h در حدی است که سرعت در جهت x ناآشفته است، هرچند که شارشی در سطح بالایی نیز رخ می‌دهد و حجم کنترل را ترک می‌کند. معادلهٔ تکانه برای جهت x عبارت است از

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho u \, dV + \int_{cs} \rho u v \cdot dA$$

این معادله در مورد شارش پایای تراکم‌ناپذیر به کار می‌رود. تنها نیرویی که بر حجم کنترل اثر می‌کند ناشی از پسا یا برش در صفحه است، زیرا فشار در اطراف محیط حجم کنترل ثابت است. برای عرضهای واحد صفحه عمود بر صفحهٔ کاغذ، داریم

$$\text{پسا} = \rho \int_0^h u^2 \, dy - \rho U^2 h + U \rho \int_0^h (U - u) \, dy$$

اولین جمله سمت راست معادله عبارت است از شار مؤلفهٔ x تکانه از CD ، و جملهٔ دوم عبارت است از شار مؤلفهٔ x تکانه از AB . انتگرال در جمله سوم عبارت است از شار خالص حجمی

در AB و CD ، که با توجه به پیوستگی، باید دقیقاً مساوی شار حجمی در BC باشد. آن را در $U\rho$ ضرب می‌کنیم تا شار مؤلفه x تکانه در BC به دست آید. با ترکیب انتگرالها نتیجه می‌گیریم

$$\text{پسا} = \rho \int_0^h u(U - u)dy \quad (۲.۲.۷)$$

پسای $D(x)$ وارد بر صفحه، در جهت معکوس است، به طوری که

$$D(x) = -\rho \int_0^h u(U - u)dy \quad (۳.۲.۷)$$

پسای وارد بر صفحه را می‌توان به صورت انتگرال تنش برشی در صفحه نیز بیان کرد

$$D(x) = - \int_0^x \tau_0 dx \quad (۴.۲.۷)$$

با مساوی قرار دادن دو عبارت آخر و مشتقگیری نسبت به x ، نتیجه می‌گیریم

$$\tau_0 = \rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(U - u)dy \quad (۵.۲.۷)$$

که معادله تکانه برای شارش دوبعدی در صفحه تخت است.

محاسبات رشد لایه مرزی به‌طور کلی پیچیده و مستلزم عملیات پیشرفته ریاضی‌اند. با استفاده از روشهای تکانه که جزئیاتی درباره توزیع سرعت به دست نمی‌دهند، حالت‌های شارش موازی را اعم از لایه‌ای و متلاطم بر صفحه تخت به‌طور تقریبی می‌توان استخراج کرد. در حقیقت، یک توزیع سرعت باید فرض کرد. می‌توان نشان داد که این نتایج با نتایج حاصل از روش دقیقتری که از معادله‌های دیفرانسیل کلی شارش چسبنده به دست آمده‌اند به خوبی تطابق دارند.

در یک توزیع فرضی که شرایط مرزی $u = 0$ ، $u = U$ ، $y = 0$ و $y = \delta$ را برآورده کند، ضخامت لایه مرزی و نیز تنش برشی در مرز را می‌توان محاسبه کرد. فرض می‌شود که توزیع سرعت در تمام مقادیر x صورت یکسانی دارد

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{y}{\delta}\right) = F(\eta) \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

که در آن δ مجهول است.

لایه مرزی لایه‌ای

پیرانتل برای لایه مرزی لایه‌ای فرض کرد

$$F = 1 \quad \delta \leq y \quad \text{و} \quad \frac{u}{U} = F = \frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2} \quad 0 \leq y \leq \delta$$

که شرایط مرزی را برآورده می‌کند. معادله (۵.۲.۷) را می‌توان بازنویسی کرد

$$\tau_o = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} d\eta$$

$$\tau_o = \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{\eta^3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) d\eta = 0.139 \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

در مرز

$$\tau_o = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^3}{2}\right) \Big|_{\eta=0} = \frac{3\mu U}{2\delta} \quad (6.2.7)$$

با مساوی قرار دادن دو عبارت τ_o نتیجه می‌گیریم

$$\frac{3\mu U}{2\delta} = 0.139 \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

پس از مرتب کردن مجدد به دست می‌آید

$$\delta d\delta = 10.78 \frac{\mu dx}{\rho U}$$

زیرا δ در این معادله فقط تابع x است. با انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{\delta^2}{2} = 10.78 \frac{\nu}{U} x + \text{ثابت}$$

اگر در $x = 0$, $\delta = 0$ باشد، ثابت انتگرال صفر می‌شود. با حل δ/x به دست می‌آید

$$\frac{\delta}{x} = 4.65 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{4.65}{\sqrt{R_x}} \quad (7.2.7)$$

که در آن $R_x = Ux/\nu$ عدد رینولدز براساس فاصله x از لبه جلو صفحه است. این معادله ضخامت لایه مرزی را در شارش لایه‌ای نشان می‌دهد که δ به صورت ریشه دوم فاصله از لبه جلو افزایش می‌یابد.

جایگذاری مقدار δ در معادله (۶.۲.۷) نتیجه می‌شود

$$\tau_0 = 0.332 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} \quad (۸.۲.۷)$$

تنش برشی با ریشه دوم x نسبت عکس و با توان سه‌دوم سرعت نسبت مستقیم دارد. پسای وارد بر یک طرف صفحه به عرض واحد عبارت است از

$$\text{پسای} = \int_0^l \tau_0 dx = 0.664 \sqrt{\mu \rho U^3 l} \quad (۹.۲.۷)$$

انتخاب توزیعهای دیگر سرعت این نتایج را خیلی تغییر نمی‌دهند. با حل دقیق، که بلازیوس [مرجع ۱۱] از معادله‌های کلی حرکت چسبنده استخراج کرده است، ضرایب ۰.۳۳۲ و ۰.۶۶۴ به ترتیب برای معادله‌های (۸.۲.۷) و (۹.۲.۷) نتیجه می‌شود.

پسا را برحسب ضریب C_D پسا ضرب در فشار سکون $\rho U^2/2$ و مساحت صفحه l (در عرض واحد)، می‌توان بیان کرد

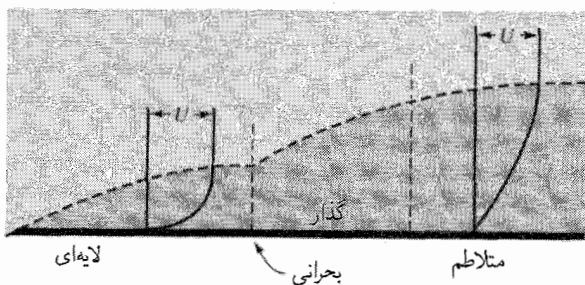
$$\text{پسا} = C_D \frac{\rho U^2}{2} l$$

که در آن، برای لایه مرزی لایه‌ای داریم

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R_l}} \quad (۱۰.۲.۷)$$

$$R_l = Ul/\nu \text{ و}$$

وقتی عدد رینولدز در صفحه به مقداری بین ۵۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ برسد، لایه مرزی متلاطم می‌شود. شکل ۵.۷ رشد و گذار از لایه مرزی لایه‌ای به متلاطم را نشان می‌دهد. عدد رینولدز بحرانی به متلاطم اولیه شارش سیال، لبه فرادست صفحه و زبری صفحه بستگی دارد.



شکل ۵.۷ رشد لایه مرزی. (مقیاس عمودی با اغراق)

لایه مرزی متلاطم

با روشی شبیه روش حل لایه مرزی لایه‌ای می‌توان از معادلهٔ تکانه برای تعیین رشد لایه مرزی متلاطم و تنش برشی در صفحه صاف استفاده کرد. قانون کلی توزیع سرعت در لوله‌های صاف، معادله (۲۰.۴.۶)، بهترین مبنا به‌شمار می‌رود، اما محاسبات پیچیده‌اند. روش ساده‌تر عبارت است از کاربرد قانون توان یک هفتم پرانتل. این قانون عبارت است از $u/u_{\max} = (y/r_0)^{1/7}$ که در آن y از دیواره لوله اندازه‌گیری می‌شود و r_0 شعاع لوله است. اگر آن را در صفحات تخت به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم

$$F = \frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} = \eta^{1/7}$$

و

$$\tau_0 = 0.0228 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad (11.2.7)$$

عبارت دوم عبارت است از تنش برشی در دیواره صفحه صاف با لایه مرزی متلاطم*. از روش به کاررفته برای محاسبه لایه مرزی لایه‌ای، به‌دست می‌آید

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (1 - \eta^{1/7}) \eta^{1/7} d\eta = \frac{7}{\sqrt{17}} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (12.2.7)$$

* معادله (۱۱.۲.۷) از معادله‌های لوله زیر به‌دست می‌آید: $\tau_0 = \rho f V^2 / 8$ ، $f = 0.316 / R^{1/4}$ (معادله بلازیوس)، $R = V 2r_0 \rho / \mu$ و $V = u_m / 1.235$. برای تبدیل به صفحه تخت، $\delta \sim r_0$ و $u_m \sim U$.

با مساوی قرار دادن عبارتهای تنش برشی، معادلهٔ دیفرانسیل ضخامت δ لایهٔ مرزی به دست می آید

$$\delta^{1/2} d\delta = 0.234 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/2} dx$$

بعد از انتگرال‌گیری، و با فرض اینکه لایهٔ مرزی بر کل طول صفحه متلاطم است، طوری که از شرایط اولیهٔ $x = 0$ و $\delta = 0$ بتوان استفاده کرد، خواهیم داشت

$$\delta^{5/2} = 0.292 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/2} x$$

با حل δ به دست می آید

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5} = \frac{0.37x}{(Ux/\nu)^{1/5}} = \frac{0.37x}{R_x^{1/5}} \quad (13.2.7)$$

در لایهٔ مرزی متلاطم، ضخامت سریعتر افزایش می‌یابد. ضخامت به صورت $x^{4/5}$ افزایش می‌یابد، اما در لایهٔ مرزی لایه‌ای، δ به صورت $x^{1/2}$ تغییر می‌کند. برای تعیین پسای وارد بر صفحهٔ صاف و تخت δ را از معادله‌های (۱۱.۲.۷) و (۱۳.۲.۷) حذف می‌کنیم، و

$$\tau_o = 0.29 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/5} \quad (14.2.7)$$

پسای وارد بر یک طرف صفحه در عرض واحد عبارت است از

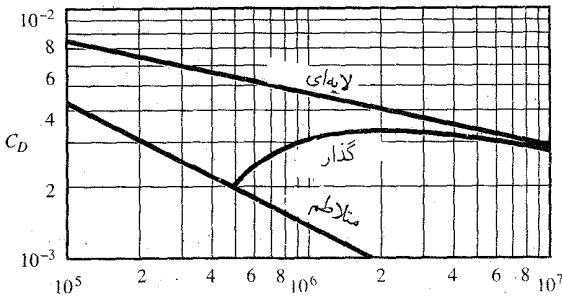
$$\text{پسا} = \int_0^l \tau_o dx = 0.36 \rho U^2 l \left(\frac{\nu}{Ul} \right)^{1/5} = \frac{0.36 \rho U^2 l}{R_l^{1/5}} \quad (15.2.7)$$

و ضریب پسا عبارت است از

$$C_D = 0.72 R_l^{-1/5} \quad (16.2.7)$$

که در آن R_l عدد رینولدز براساس طول صفحه است.

معادله‌های فوق فقط برای گستره‌ای که در آن معادلهٔ مقاومت بلازیوس صدق کند صحت دارند. برای اعداد رینولدز بیشتر در شارش لولهٔ صاف، نما در قانون توزیع سرعت کم می‌شود. در



$$C_{D \text{ متلاطم}} = \frac{0.074}{R_i^{1/5}}, \quad C_{D \text{ گذار}} = \frac{0.074}{R_i^{1/5}} - \frac{1700}{R_i}, \quad C_{D \text{ لایه‌ای}} = \frac{1.328}{\sqrt{R_i}}$$

شکل ۶.۷ قانون پسا در صفحات صاف

در $R = 4000000$ داریم $m = \frac{1}{8}$ و در $R = 40000000$ داریم $n = \frac{1}{10}$. قانون پسا، معادله (۱۵.۲.۷)، در گستره زیر صحت دارد:

$$5 \times 10^5 < R_i < 10^7$$

آزمایش نشان می‌دهد که پسا کمی بیشتر از آن مقداری است که از معادله (۱۶.۲.۷) برمی‌آید

$$C_D = 0.074 R_i^{-1/5} \quad (17.2.7)$$

در فرادست صفحه، لایه مرزی در واقع به صورت لایه‌ای است. پرانتل [مرجع ۳] پسا را از معادله انتهای فرادست صفحه تا عدد رینولدز بحرانی کسر کرد و سپس پسای حاصل از معادله لایه‌ای برای این قسمت ورق را به آن افزود، و معادله زیر را به دست آورد:

$$C_D = 0.074 R_i^{-1/5} - \frac{1700}{R_i} \quad 5 \times 10^5 < R_i < 10^7 \quad (18.2.7)$$

در شکل ۶.۷ نمودار لگاریتمی-لگاریتمی C_D بر حسب R_i گرایش ضرایب پسا نشان داده شده است. با استفاده از توزیع سرعت لگاریتمی در لوله‌ها، معادله (۱۸.۴.۶) به دست می‌آید

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_i)^{1.58}} \quad 10^6 < R < 10^9 \quad (19.2.7)$$

که در آن جمله ثابت برای بهترین تطبیق با نتایج آزمایشی انتخاب شده است.

مثال ۱.۷ یک صفحه صاف و تخت به عرض ۳m و طول ۳۰m در آب ساکن با 20°C با سرعت 6m/s کشیده می شود. پسای وارد بر یک طرف صفحه و پسای وارد بر ۳m اول صفحه را تعیین کنید.

حل

در کل صفحه

$$R = \frac{Vl}{\nu} = \frac{(6\text{m/s})(30\text{m})}{1.007 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 1.787 \times 10^8$$

از معادله (۱۹.۲.۷)

$$C_D = \frac{0.455}{[\log(1.787 \times 10^8)]^{0.58}} = 0.00196$$

پسای وارد بر یک طرف عبارت است از

$$\text{پسا} = C_D b l \rho \frac{U^2}{2} = 0.00196(3\text{m})(30\text{m})(998.2\text{kg/m}^3) \frac{(6\text{m/s})^2}{2} = 3169\text{N}$$

که در آن b عرض صفحه است، و ν و ρ از جدول ج. ۱، گرفته شده اند. اگر عدد رینولدز بحرانی در 5×10^5 حاصل شود، طول l_0 تا شروع گذار عبارت است از

$$\frac{(6\text{m/s})(l_0\text{m})}{1.007 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 5 \times 10^5 \quad l_0 = 0.084\text{m}$$

در ۳m اول صفحه داریم $R_{l_1} = 1.787 \times 10^7$ ، و با استفاده از معادله (۱۹.۲.۷) دوباره به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \text{پسا} &= C_D b l \rho \frac{U^2}{2} \\ &= \frac{0.455(3\text{m})}{[\log(1.787 \times 10^7)]^{0.58}} (3\text{m}) \times (998.2\text{kg/m}^3) \frac{(6\text{m/s})^2}{2} = 443\text{N} \end{aligned}$$

محاسبه لایه مرزی متلاطم بر صفحات زبر با روش مشابهی انجام می شود. ابتدا آزمونهایی با لوله زبر با استفاده از زبری شن انجام می دهند. در انتهای فرادست صفحه تخت، شارش ممکن است لایه ای باشد؛ سپس در لایه مرزی متلاطم، که در آن لایه مرزی هنوز نازک است و نسبت ارتفاع زبری به ضخامت لایه مرزی ϵ/δ قابل توجه است، ناحیه ای با زبری کاملاً گسترش یافته

پدید می‌آید و پسا با مربع سرعت متناسب است. در صفحات طویل، به دنبال این ناحیه، ناحیه گذار می‌آید که در آن ϵ/δ هرچه کوچکتر می‌شود، و سرانجام صفحه از لحاظ هیدرولیکی صاف می‌شود؛ یعنی اتلاف بر اثر کاهش زبری کم نمی‌شود. پراتل و شلیستینگ [مرجع ۴] این محاسبات را انجام داده‌اند که چون بسیار پیچیده‌اند در اینجا بازگو نمی‌کنیم.

تمرینها

۱.۲.۷ ضخامت جابه‌جایی لایه مرزی عبارت است از الف) فاصله‌ای از مرز که تحت تأثیر برش مرزی قرار دارد؛ ب) یک‌دوم ضخامت حقیقی لایه مرزی؛ ج) فاصله تا نقطه‌ای که در آن $u/U = 0.99$ (د) فاصله‌ای که شارش اصلی جابه‌جا می‌شود؛ ه) هیچکدام.

۲.۲.۷ تنش برشی در مرزیک صفحه تخت عبارت است از الف) $\partial p/\partial x$ ؛ ب) $\mu(\partial u/\partial y)|_{y=0}$ ؛ ج) $\rho(\partial u/\partial y)|_{y=0}$ ؛ د) $\mu(\partial u/\partial y)|_{y=\epsilon}$ ؛ ه) هیچکدام.

۳.۲.۷ کدام یک از توزیعهای سرعت u/U شرایط مرزی را برای شارش در صفحه تخت برآورده می‌کند؟ $\delta = y/\eta$ (الف) e^η ؛ ب) $(\cos(\pi\eta/2))$ ؛ ج) $(\eta - \eta^2)$ ؛ د) $(\eta - \eta^3)$ ؛ ه) هیچکدام.

۴.۲.۷ ضریب پسا در صفحه تخت عبارت است از (پسا = D) الف) $2D/\rho U^2$ ؛ ب) $\rho U l/D$ ؛ ج) $\rho U l/2D$ ؛ د) $\rho U^2 l/2D$ ؛ ه) هیچکدام.

۵.۲.۷ ضخامت لایه مرزی لایه‌ای به چه صورت تغییر می‌کند؟ الف) $1/x^{1/2}$ ؛ ب) $x^{1/2}$ ؛ ج) $x^{6/7}$ ؛ د) هیچکدام.

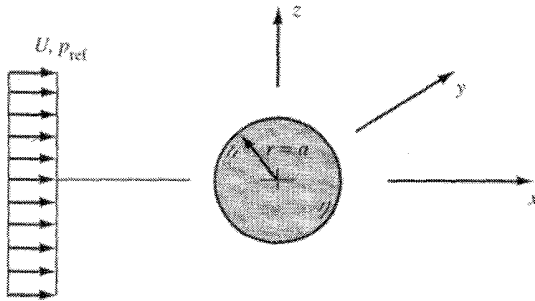
۶.۲.۷ ضخامت لایه مرزی متلاطم به کدام صورت تغییر می‌کند؟ الف) $1/x^{1/5}$ ؛ ب) $x^{1/5}$ ؛ ج) $x^{1/2}$ ؛ د) $x^{4/5}$ ؛ ه) هیچکدام.

۷.۲.۷ در شارش بر صفحه زبر، ترتیب نوع شارش از فرادست به فرودست عبارت است از الف) لایه‌ای، زبری دیواره کاملاً گسترش‌یافته، ناحیه گذار، از لحاظ هیدرولیکی صاف؛ ب) لایه‌ای، ناحیه گذار، از لحاظ هیدرولیکی صاف، زبری دیواره کاملاً گسترش‌یافته؛ ج) لایه‌ای، از لحاظ هیدرولیکی صاف، ناحیه گذار، زبری دیواره کاملاً گسترش‌یافته؛ د) لایه‌ای، از لحاظ هیدرولیکی صاف، زبری دیواره کاملاً گسترش‌یافته، ناحیه گذار؛ ه) لایه‌ای، زبری دیواره کاملاً گسترش‌یافته، از لحاظ هیدرولیکی صاف، ناحیه گذار.

۳.۷ شارش و پسا: کره‌ها

شارش افقی

شارش خارجی دیگر که اهمیت زیادی دارد شارش روی کره است. از کره به عنوان جانشین ذرات با شکل نامنظم استفاده می‌شود؛ از قبیل، انتقال رسوب، واکنشگرها با بستر شاریده، ذرات گرد و



شکل ۷.۷ شارش با سرعت کم پیرامون کره

غبار و آلاینده‌های دود که با هوا حرکت می‌کنند، و فرایندهای عملیاتی فاضلاب. محاسبات شارش و پسا متناظر با آن در ابتدا توسط استوکس در ۱۸۵۱ [مرجع ۵] انجام شد و سپس در جزئیات گزارشهای شلیشتینگ [مرجع ۱۱] در مکانیک سیالات آورده شدند. دقیقترین حل مقدماتی با فرض شارش پایا، بسیار آهسته با عدد رینولدز (UD/ν) کمتر از ۱، مبتنی بر قطر معادل کروی D (با حجم ثابت) به دست می‌آید. این فرض می‌رساند که خطوط جریانی که خیلی نزدیک سطح کره اند متصل به سطح می‌مانند یا از شکل کره پیروی می‌کنند. اگر شارش روی کره افقی باشد (شکل ۷.۷)، در این صورت نیروهای گرانش ناچیز در نظر گرفته می‌شوند و معادله‌های ناوراستوکس [معادله‌های (۱۱.۴.۴)] به شکل زیر درمی‌آیند

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (۱.۳.۷)$$

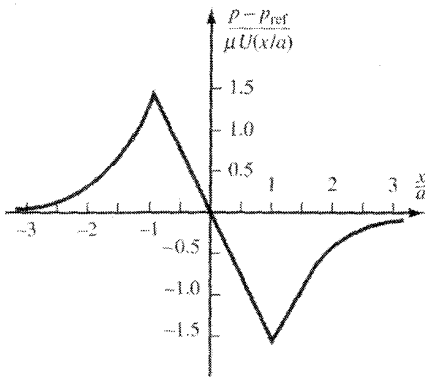
شرایط مرزی عبارت‌اند از حالت بدون لغزش در جداره $(r = a)$ و نبود شارش در امتداد عمود بر جداره $(r = a)$. میدانهای سرعت و فشار متناظر با این شرایط عبارت‌اند از

$$u = U \left[\frac{3}{4} \frac{ax^2}{r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{a}{r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) + 1 \right] \quad (الف ۲.۳.۷)$$

$$v = U \left[\frac{4}{3} \frac{axy}{r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right] \quad (ب ۲.۳.۷)$$

$$w = U \left[\frac{3}{4} \frac{axz}{r^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right] \quad (ج ۲.۳.۷)$$

$$p = p_{ref} - \frac{3}{4} \mu U \frac{ax}{r^2} \quad (د ۲.۳.۷)$$



شکل ۸.۷ توزیع فشار در شارش افقی بیرامون کره

در اینجا مبدأ محورها مرکز کره است با محور x که بر امتداد سرعت جریان آزاد، U ، منطبق است. با استفاده از معادله‌های (۲.۳.۷) الف تا د) و تعریفهای پسا [معادله‌های (۱.۱.۷) و (۲.۱.۷)] و برا [معادله‌های (۳.۱.۷) و (۴.۱.۷)]، می‌توان نشان داد که برا خالص مؤثر بر کره صفر است زیرا میدانهای شارش و فشار در بالا و پایین خط مرکزی متقارن است. پسای مؤثر بر کره با رابطه زیر داده می‌شود

$$\text{پسا} = 3\pi\mu DU = 2\mu\pi DU + \mu\pi DU = \text{پسای اصطکاک جداری} + \text{پسای فرم} \quad (۳.۳.۷)$$

از معادله (۳.۳.۷) دیده می‌شود که دو مؤلفه در پسای کل وجود دارد: پسای فرم و پسای اصطکاک جداری. پسای فرم مربوط به افت فشار کل یا شیب فشار بین جلو (فرا دست) و پشت (فرو دست) کره است. در شکل ۸.۷ نمودار میدان فشار بهنجاریده در پایین خط مرکزی کره نشان داده شده است. اختلاف فشار زیاد بین نقطه رکود در $x = r = a$ و پشت کره منشأ پسای فرم است. مؤلفه اصطکاک جداری از برش چسبیده مؤثر بر جداره کره به هنگام عبور جریان ناشی می‌شود. در حالی که نسبت پسای فرم به پسای اصطکاک جداری در کره ۱:۲ است، بیشتر شارشها طوری است که پسای فرم بر اصطکاک جداری حاکم است. شکل هندسی جسم و عدد رینولدز نسبت بالا را تعیین می‌کند.

با استفاده از مفهوم ضریب پسا که در قسمت قبل وارد شد، به سهولت دیده می‌شود که

$$\text{پسا} = 3\mu\pi DU = C_{Dp} \rho A \frac{U^2}{4} \quad (۴.۳.۷)$$

یا در شارش آهسته بر روی یک کره،

$$C_D = 24/R \quad (5.3.7)$$

که در آن عدد رینولدز بر مبنای قطر کروی ذره معادل، D ، تعریف می‌شود.

سرعت ته‌نشینی

وقتی ذره‌ای از ماده با گرانش ویژه بزرگتر از گرانش ویژه سیال جابه‌جا شده ساخته شده باشد، وزن خالص آن بزرگتر از وزن سیال جابه‌جا شده است و ذره بر اثر گرانش غرق یا ته‌نشین می‌شود. سرعت ته‌نشینی در تعیین چسبندگی سیال، طراحی حوضچه‌های ته‌نشینی که برای جداسازی ذرات جامد از سیال است، و رسوبگیری شارش رودخانه مفید واقع می‌شود. اگر سرعت ته‌نشینی، یا سرعت نهایی، w_t ، در تعریف عدد رینولدز به کار رود و اگر عدد رینولدز حاصل کمتر از یک (۱) باشد، موازنه نیروی تکانه می‌دهد

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \gamma_f + 3\mu\pi D w_t = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \gamma_s \quad (6.3.7)$$

که در آن γ_f وزن مخصوص سیال و γ_s وزن مخصوص ذره است.

فرض مقدماتی در معادله (۶.۳.۷) این است که ذره شتاب لازم را گرفته است و به سرعت

w_t رسیده است و با این سرعت به‌طور پایا حرکت می‌کند. حل w_t می‌دهد

$$w_t = \frac{D^2}{18\mu} (\gamma_s - \gamma_f) \quad (7.3.7)$$

برحسب فرمولبندی ضریب پسا

$$w_t^2 = \frac{4}{3} \frac{D}{\rho C_D} (\gamma_s - \gamma_f) \quad (8.3.7)$$

در شارش استوکس، که به صورت $C_D = 24/R$ ، $R < 1$ ، C_D تعریف می‌شود، معادله (۷.۳.۷) دقیقاً برقرار است.

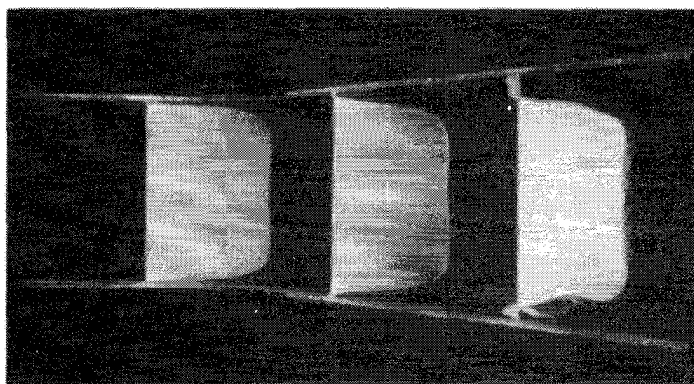
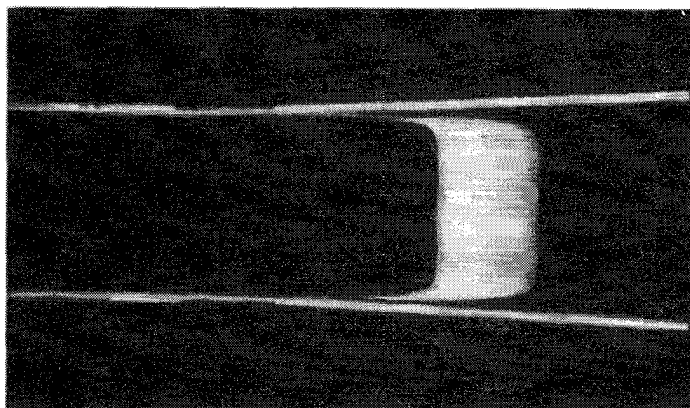
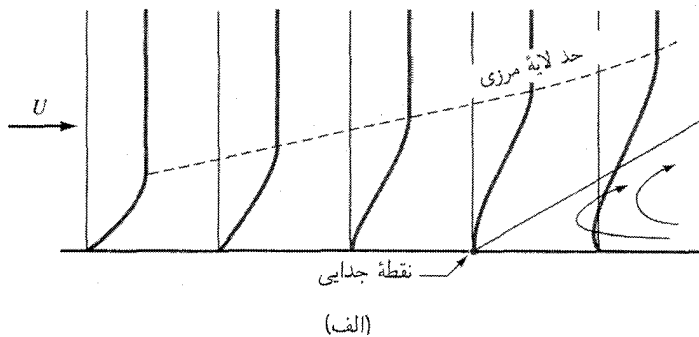
۴.۷ تأثیر گرادینهای فشار: جدایی و وِیک*

در صفحه تخت، وقتی شیب فشار صفر باقی بماند، لایه مرزی به رشد خود در جهت فرودست ادامه می‌دهد، و این امر مستقل از طول صفحه است. اگر فشار در جهت فرودست کاهش یابد، مثلاً در مقطع مخروطی کاهنده، لایه مرزی گرایش دارد که ضخامتش کاهش یابد.

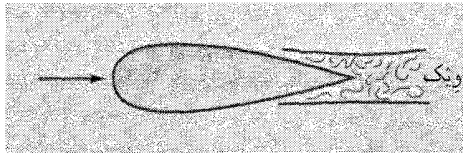
در شیبهای معکوس فشار، یعنی با افزایش فشار در جهت فرودست، لایه مرزی سریعاً ضخیم می‌شود. شیب معکوس و برش مرزی، تکانه را در لایه مرزی کاهش می‌دهند؛ هر دو اگر در فاصله کافی عمل کنند، موجب می‌شوند که لایه مرزی به سکون برسد. این پدیده را جدایی می‌گویند. شکل ۹.۷ الف این حالت را نشان می‌دهند. خط جریان مرزی باید مرز را در نقطه جدایی ترک کند، و در فرودست این نقطه، شیب معکوس فشار باعث پس‌شارش در نزدیک دیواره می‌شود. این ناحیه فرودست خط جریان که از مرز جدا می‌شود به رد عبور (ویک) معروف است. اثر جدایی عبارت است از کاهش مقدار خالص کار شارش که یک جزء سیال با از دست دادن انرژی جنبشی بر سیال محیط انجام می‌دهد؛ ماحصل اینکه بازیافت فشار ناکامل است و اتلافهای شارش (پسا) افزایش می‌یابد. شکل ۹.۷ ب و ۹.۷ ج حالت‌های شارش حقیقی را نشان می‌دهد؛ اولی با شیب معکوس خیلی کوچک فشار که باعث ضخامت لایه مرزی می‌شود، و دومی با زاویه پخش‌کننده بزرگی که باعث جدایی و پس‌شارش در نزدیکی مرزها می‌شود.

همانطور که در بخش ۱.۷ بحث شد پسا و برا دو مؤلفه دارند، پسای فرم و اصطکاک جدایی یا پسای چسبیده. جدایی در وِیک، که همراه پدیده جدایی است، بر پسای فرم مؤثر بر اجسام تأثیر زیادی دارند. اگر بتوان از جدایی شارش روی یک جسم جلوگیری کرد، لایه مرزی نازک می‌ماند و از کاهش فشار در وِیک جلوگیری می‌شود، و در نتیجه پسای فشاری به حداقل می‌رسد، گرد کردن وجه جلویی اجسام برای کاهش وقوع جدایی شارش در لبه‌های تیز مؤثر است. مهمتر این است که قسمت فرار جسم خط جریانی شود (شکل ۱۰.۷) تا نقطه جدایی تا حد امکان در فاصله دور در فرودست جسم روی دهد.

طبیعت لایه‌ای در مقابل طبیعت متلاطم لایه مرزی نیز بر مکان نقطه جدایی تأثیر می‌گذارد. انتقال تکانه بزرگتر در داخل لایه مرزی متلاطم ایجاب می‌کند که شیب فشار معکوس بزرگتری، نسبت به شیب فشار معکوس در شارش لایه‌ای منظم، جدایی را به وجود آورد. شارش پیرامون کره این موضوع را نشان می‌دهد (شکل ۱۱.۷). برای اعداد رینولدز خیلی کوچک، $UD/\nu < 1$ ، شارش در همه‌جا نامتلاطم است، و پسا را پسای تغییر شکل می‌خوانند. قانون استوکس [معادله (۴.۳.۷)] نیروی پسا را در این حالت به دست می‌دهد. در اعداد رینولدز بزرگ، شارش را



شکل ۹.۷ الف) اثر شیب معکوس فشار بر لایه مرزی-جدایی؛ ب) رشد لایه مرزی در پخش‌کننده کم‌زاویه؛ ج) جدایی لایه مرزی در پخش‌کننده پرزاویه. [ب) و (ج) برگرفته از «اصول لایه‌های مرزی» از کمیته ملی فیلمهای مکانیک سیالات و مرکز گسترش آموزش].



شکل ۱۰.۷ جسم خط جریانی.

جز در لایه مرزی و رد عبور (ویک) می‌توان پتانسیل در نظر گرفت. لایه مرزی در نقطه سکون پیشین تشکیل می‌شود و عموماً لایه‌ای است. در لایه مرزی لایه‌ای، شیب معکوس فشار سریعتر باعث جدایی می‌شود تا در لایه مرزی متلاطم، به دلیل اینکه تکانه ورودی به لایه لایه‌ای کم است. اگر جدایی در لایه مرزی لایه‌ای رخ دهد، محل آن در روی کره در فرادست‌تر است (شکل ۱۱.۷ ب) تا هنگامی که لایه مرزی ابتدا متلاطم شود و سپس جدایی رخ دهد. (شکل ۱۱.۷ ج).

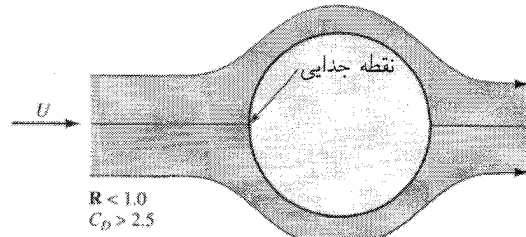
در شکل ۱۲.۷ این موضوع را با عکس دو کره که با سرعت 25 ft/s در آب سقوط کرده‌اند به طور ترسیمی نشان داده‌ایم. در الف، جدایی در لایه مرزی لایه‌ای رخ می‌دهد که در سطح صاف تشکیل می‌شود و رد عبور (ویک) بسیار بزرگی با پسای فشاری بزرگی در اثر آن به وجود می‌آورد. در شکل ۱۲.۷ ب، نوک کره، که با شنهای چسبدار زیر شده است، قبل از اینکه جدایی رخ دهد، باعث گذار اولیه به لایه مرزی متلاطم می‌شود. انتقال تکانه زیاد در لایه مرزی متلاطم، جدایی را به تأخیر می‌اندازد، طوری که رد عبور (ویک) اساساً کاهش می‌یابد، و در نتیجه پسای کلی وارد به کره کمتر از نصف پسای در شکل ۱۲.۷ الف می‌شود. با توجه به این بحث، اهمیت سطح زیر یک توپ گلف یا توپ تنیس یا شکاف روی توپ تنیس واضح می‌شود. نمودار ضریب پسا برحسب عدد رینولدز در کره در قسمت بعد نشان داده می‌شود.

تمرینها

- ۱.۴.۷ جدایی ناشی می‌شود از الف) کاهش فشار تا فشار تبخیر؛ ب) کاهش شیب فشار تا صفر؛ ج) شیب معکوس فشار؛ د) به صفر رسیدن ضخامت لایه مرزی؛ ه) هیچکدام.
- ۲.۴.۷ جدایی هنگامی رخ می‌دهد که الف) مقطع مجرا تنگ شود؛ ب) لایه مرزی به سکون برسد؛ ج) سرعت صورت حاصل شود؛ د) فشار به مینیمم برسد؛ ه) شیری بسته شود.
- ۳.۴.۷ رد عبور (ویک) الف) یک منقطه پرفشار است؛ ب) علت اصلی اصطکاک پوستی است؛ ج) همیشه وقتی رخ می‌دهد که پسای تغییر شکل حاکم است؛ د) همیشه بعد از نقطه جدایی رخ می‌دهد؛ ه) هیچکدام.



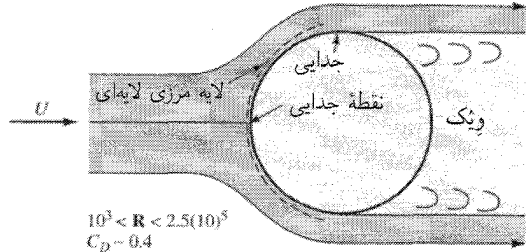
(الف)



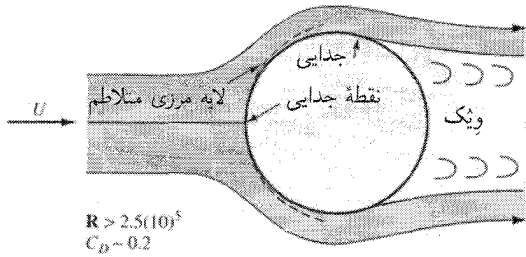
(الف)



(ب)



(ب)



(ج)

شکل ۱۲.۷ جابه‌جایی نقطه جدایی در اثر تلاطم القایی: الف) توپ ۸٫۵in بولینگ، با سطح صاف، سرعت ورود به آب ۲۵ft/s؛ ب) همان، بجز در یک تکه شن به قطر ۴in روی دماغه. (عکس نیروی دریایی امریکا در آزمایشگاه تدارکات نیروی دریایی، با افزوده پارسادنا.)

شکل ۱۱.۷ شارش پیرامون کره

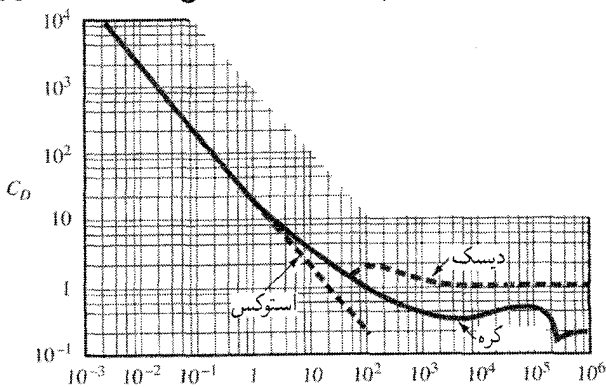
۵.۷ پسای مؤثر بر اجسام غوطه‌ور

فرمول پسا در صفحه تخت و کره با استفاده از فرضها یا محدودیتهای نسبتاً دقیق به دست آمد، همانطور که در قسمت قبل دیده شد وقتی عدد رینولدز بالاتر افزایشی با شیبهای معکوس فشار ترکیب می‌شود، جدایی روی می‌دهد و حلهای دقیق دیگر خطی نیستند یا به خوبی حل نمی‌شوند. بنابراین در این شارشهای مشکلتز، باید با استفاده از آزمایشهای آزمایشگاهی یا عددی رابطه‌های تجربی را در ارتباط دادن پسا به متغیرهای میدان شارش در نظر گرفت، و رابطه‌ها باید جمع و جور باشند تا شارشهای ساده‌تر را نیز پیش‌بینی کنند. در این مورد از روش ضریب پسا استفاده می‌شود. همانطور که در بخش ۱.۷ تعریف شد، نیروی پسا مؤلفه نیروی موازی با سرعت نسبی نزدیکی است که از سیال متحرک بر جسم اثر می‌کند. ضریب پسا با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$C_D = \frac{F_D}{\rho A U^2} \quad (1.5.7)$$

که در آن A تصویر مساحت جسم روی صفحه عمود بر شارش است.

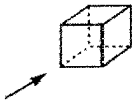
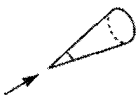
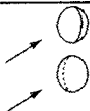
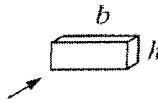
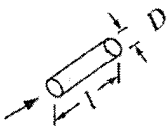
منحنیهای ضریب پسا در کره و دیسک مدور در شکل ۱۳.۷ نشان داده شده‌اند (حالتهای سه‌بعدی). ضریب پسا در معادله (۱.۵.۷) در شارش استوکس $24/R$ است. شکل ۱۳.۷ نمودار ضریب شارش استوکس را همراه با ضریب پسا برحسب عدد رینولدز در کره صاف در شارشهای لایه‌ای و متلاطم جداشده نشان می‌دهد. این شکل گذار از شارش لایه‌ای به متلاطم را در لایه مرزی نشان می‌دهد، و این موضوع از کاهش ناگهانی ضریب پسا مشهود است. عدد رینولدز دقیق در گذار ناگهانی به صافی کره و متلاطم در جریان سیال بستگی دارد. در حقیقت، در بسیاری از موارد، با تعیین عدد رینولدزی که در آن ضریب پسا 30° است، یعنی نقطه‌ای که در مرکز افت ناگهانی



$$R = \frac{UD}{\nu}$$

شکل ۱۳.۷ ضرایب پسا در کره و دیسک مدور

جدول ۱.۷ مقادیر تقریبی C_D در اجسام سه بعدی در $R > 10^4$ [مراجع ۷، ۸]

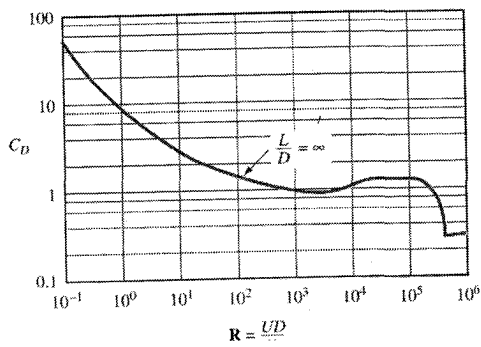
C_D	شکل جسم*
۱٫۱	مکعب 
۰٫۵	مخروط 60° 
$\frac{1.4}{0.4}$	نیم کره باز 
۱٫۱۸(۱)** ۱٫۲(۵) ۱٫۳(۱۰) ۱٫۵(۲۰) ۲٫۰(∞)	ورق مستطیلی 
۱٫۱۵(۰٫۵)*** ۰٫۹(۱) ۰٫۸۵(۲) ۰٫۸۷(۴) ۰٫۹۹(۸)	شارش در امتداد محور استوانه 

* پیکان جهت شارش را نشان می‌دهد.

** عدد داخل پرانتز مقدار b/h را نشان می‌دهد.*** عدد داخل پرانتز مقدار l/D را نشان می‌دهد.

قرار دارد (شکل ۱۳.۷)، از کره به عنوان تلاطم‌سنج استفاده می‌شود. درآیدن [مراجع ۶] با استفاده از بادسنج سیم-داغ، سطح تلاطم جریان سیال در کره در $C_D = 0.3$ به عدد رینولدز مربوط ساخته است. هرچه تلاطم جریان سیال بیشتر باشد، عدد رینولدز برای جابه‌جایی نقطه جدایی کوچکتر است. مقادیر ضریب پسا در اجسام سه بعدی دیگر در جدول ۱.۷ فهرست شده‌اند.

در شکل ۱۴.۷ ضریب پسا در استوانه مدور بی‌نهایت طویل (حالت دوبعدی) برحسب عدد رینولدز رسم شده است. مانند کره در این حالت نیز در نقطه جدایی یک جابه‌جایی ناگهانی وجود دارد. در جدول ۲.۷ ضریبهای پسای نوعی در چند استوانه نشان داده شده‌اند. به‌طور کلی، مقادیر داده شده برای اعداد رینولدز بزرگ‌اند و در آنها ضریب برحسب عدد رینولدز تغییرات اندکی دارد.



شکل ۷-۱۴ ضرایب پسا در استوانه‌های مدور

جدول ۲.۷ ضرایب نمونه‌وار پسا در استوانه‌های مختلف در شارش دوبعدی [مرجع ۸]

شکل جسم*	C_D	عدد رینولدز	
استوانهٔ مدور	۰٫۲	10^4 به $10^5 \times 10^4$	
استوانهٔ بیضی	۰٫۰۶	4×10^4	
	۰٫۴۶	10^5	
استوانهٔ بیضی	۰٫۳۲	10^5 به 2.5×10^4	
	۰٫۲۹	2.5×10^4	
استوانهٔ چهارگوش	۰٫۲۰	2×10^5	
	۰٫۲۰	3.5×10^4	
استوانه‌های مثلثی	۰٫۲۰	10^5 به 10^4	
	۰٫۷۲	10^4	
	۰٫۱۵	10^4	
	۰٫۶۰	10^4	
	۰٫۲۰	10^4	
	۰٫۳۹	10^4	
	۰٫۸	10^5	
	۰٫۱	10^5	
	نیم لوله	۰٫۳	4×10^4
	نیم لوله	۰٫۱۲	4×10^4

* بیکان جهت شارش را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۷ در عملیات لایروبی در یک رودخانه، حجم بزرگی از رسوب به دست آمده است که کوچکترین ذره آن گِل زبر به قطر ۴ میکرون ($4 \times 10^{-6} \text{ m}$) و بزرگترین ذره آن شن درشت به قطر ۱۰۰۰ میکرون (۱ mm) است. سرعت ته‌نشینی را در هر ردهٔ اندازه بیاید. $\gamma_w = 9764 \text{ N/m}^3$ ؛ $S_{ش} = 2,65$ ؛ $S_{گ} = 1,6$ ؛ و چسبندگی در 30°C برابر است با $10^{-2} \text{ N.s/m}^2 \times 0,8$.

حل

۱. ذرات گِل. ابتدا فرض می‌کنیم که عدد رینولدز ذره کمتر از ۱ است و معادله (۷.۳.۷) را برای سرعت ته‌نشینی حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} w_{t\text{گ}} &= \frac{[4(10^{-6})\text{m}]^2 [9764(1,6 - 1,0)\text{N/m}^3]}{18(0,8)(10^{-2})\text{N.s/m}^2} \\ &= \frac{16(10^{-12})(5888,4)}{14,4(10^{-2})} = 6,510(10^{-6})\text{m/s} \\ &= 6,51(10^{-4})\text{cm/s} \end{aligned}$$

سپس، می‌بینیم که آیا عدد رینولدز کمتر از یک است یا نه،

$$R_D = \frac{Dw_t}{\nu} = \frac{4(10^{-6})(6,51(10^{-6}))}{0,8(10^{-2})} = 3,25(10^{-8}) < 1$$

بنابراین، فرض استوکس درست است. سرعت ته‌نشینی ذرات گِل بی‌نهایت کوچک است؛ در حقیقت این ذره در یک روز فقط ۵۶ m ته‌نشین می‌شود.

۲. ذرات شن. با پیش‌بینی اینکه ذره بزرگتر دارای عدد رینولدز بزرگتر از یک است، از معادله (۸.۳.۷) و شکل ۱۳.۷ در روش تکرار شونده استفاده می‌کنیم. در شروع محاسبه، فرض می‌کنیم $R_D = 100$ ، بنابراین ضریب پسا از شکل ۱۳.۷ برابر با ۱ تخمین زده می‌شود و از معادله (۸.۳.۷)

$$w_t^2 = \frac{4}{3} \frac{1(10^{-2})}{(995,7)(1)} [9764(2,65 - 1)] = \frac{0,2157}{C_D}$$

یا

$$w_t = \frac{0,147}{\sqrt{C_D}}$$

برای تکرار اول،

$$w_{t_1} = 0.147 \text{ m/s}$$

با واریسی عدد رینولدز

$$R_D = \frac{Dw_t}{\nu} = 1.24(10^3)w_t$$

یا

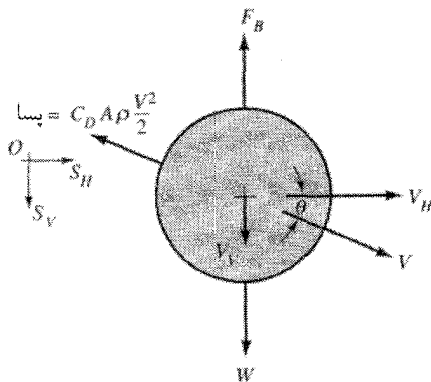
$$R_{D_1} = 1.24(10^3)(0.147) = 182$$

بنابراین، بین اعداد رینولدز فرضی و محاسبه شده تطابق خوبی وجود ندارد. پس از انتخاب عدد رینولدز دیگر و چند تکرار دیگر، عدد رینولدز تقریباً ۲۲۰ به دست می‌آید، $C_D \simeq 0.7$ و

$$w_{t_2} = 0.175 \text{ m/s}$$

ذره شن تقریباً با سرعت $10.5 \frac{\text{m}}{\text{دقیقه}}$ ته‌نشین می‌شود.

مثال ۳.۷ جسم در شکل ۱۵.۷ با $S = 60^\circ$ ، مساحت مقطع عرضی 0.25 m^2 ، و حجم 1 m^3 ضریب پسای ۱.۱ دارد. جسم با سرعت 13 m/s به طور افقی در آب کشیده می‌شود. از صفحه گسترده برای تعیین مسیر آن استفاده کنید.



شکل ۱۵.۷ نیروهای مؤثر بر جسم.

$$S_V = \text{فاصله عمودی} \quad ; S_H = \text{فاصله افقی}$$

$$V_V = \text{سرعت عمودی} \quad ; V_H = \text{سرعت افقی}$$

$$V_V = \frac{dS_V}{dt} \quad V_H = \frac{dS_H}{dt}$$

$$F_V = W - F_B - \rho C_D A \rho V^2 \sin \theta = \frac{W}{g} \frac{dV_V}{dt}$$

$$F_H = -\rho C_D A \rho V^2 \cos \theta = \frac{W}{g} \frac{dV_H}{dt}$$

$$V = \sqrt{V_H^2 + V_V^2} \quad \cos \theta = V_H/V \quad \sin \theta = V_V/V$$

روش رانگ-کوتای مرتبه دوم (که در صفحه وب* توضیح داده شده است) برای حل همزمان چهار معادله دیفرانسیل می‌توان استفاده کرد.

$$dV_{V1} = \frac{dt}{W} g (W - F_B - \rho C_d A_{RP} V_V V) \quad dS_{V1} = dt V_V$$

$$dV_{H1} = -\frac{dt}{W} g (\rho C_d A_{RP} V_H V) \quad dS_{H1} = dt V_H$$

نتایج صفحه گسترده در جدول ۳.۷ نشان داده شده‌اند. در محاسبه این نتایج، از گام زمانی، $dt = 0.05$ s در مدت ۰.۶ s ثانیه استفاده شده است و پس از این مدت گام زمانی به ۱ s تغییر یافته است. ■

تمرینها

۱.۵.۷ پسای فشاری ناشی است از الف) اصطکاک پوستی؛ ب) پسای تغییر شکل؛ ج) بروز رد عبور (ویک)؛ د) هیچکدام.

۲.۵.۷ سرعت نهایی کره کوچکی که در سیال چسبنده‌ای ته‌نشین شود به صورت زیر تغییر می‌کند: الف) با توان اول قطر؛ ب) با عکس چسبندگی سیال؛ ج) با عکس مربع قطر؛ د) عکس قطر؛ ه) مربع اختلاف نیروهای گرانی واحد جامد و سیال.

۳.۵.۷ تغییر ناگهانی در مکان نقطه جدایی در شارش پیرامون یک کره تقریباً در عدد رینولدز زیر روی می‌دهد (الف) ۱؛ (ب) ۳۰۰؛ (ج) ۳۰۰۰۰؛ (د) ۳۰۰۰۰۰۰؛ (ه) هیچکدام

* صفحه‌ای در کامپیوتر که از آنجا می‌توان به اطلاعات مورد نیاز دست یافت. م.

جدول ۳.۷ نتایج مثال ۳.۷

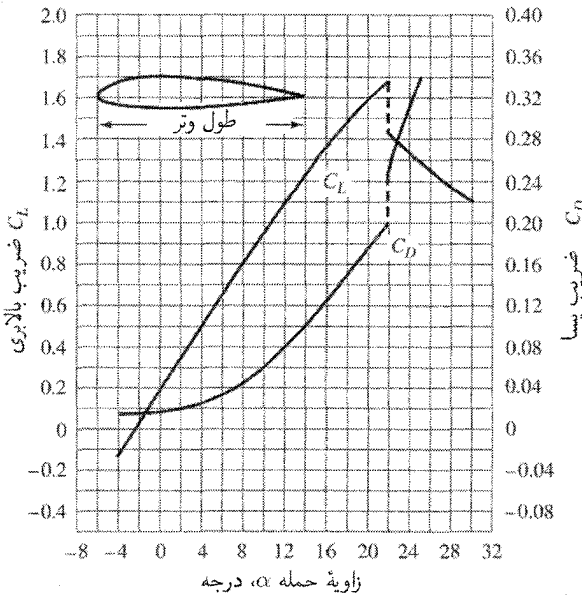
V	S_H	V_H	S_V	V_V	زمان
۱۳,۰۰	۰,۰۰	۱۳,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰
۸,۲۶	۲,۰۳	۸,۱۶	۰,۱۴	۱,۳۳	۰,۲
۶,۳۴	۳,۴۱	۵,۸۸	۰,۵۱	۲,۳۶	۰,۴
۵,۵۴	۴,۴۳	۴,۴۹	۱,۰۸	۳,۲۴	۰,۶
۵,۳۱	۵,۲۳	۳,۵۱	۱,۸۰	۳,۹۸	۰,۸
۵,۳۴	۵,۸۵	۲,۷۶	۲,۶۶	۴,۵۷	۱,۰
۵,۴۶	۶,۳۴	۲,۱۵	۳,۶۲	۵,۰۱	۱,۲
۵,۵۹	۶,۷۲	۱,۶۷	۴,۶۶	۵,۳۳	۱,۴
۵,۷۰	۷,۰۱	۱,۲۹	۵,۷۵	۵,۵۵	۱,۶
۵,۷۹	۷,۲۴	۰,۹۹	۶,۸۸	۵,۷۰	۱,۸
۵,۸۵	۷,۴۱	۰,۷۶	۸,۰۳	۵,۸۰	۲,۰
۵,۸۹	۷,۵۴	۰,۵۸	۹,۲۰	۵,۸۶	۲,۲
۵,۹۲	۷,۶۵	۰,۴۴	۱۰,۳۸	۵,۹۰	۲,۴
۵,۹۴	۷,۷۲	۰,۳۴	۱۱,۵۶	۵,۹۳	۲,۶
۵,۹۵	۷,۷۸	۰,۲۶	۱۲,۷۵	۵,۹۵	۲,۸
۵,۹۶	۷,۸۳	۰,۲۰	۱۳,۹۴	۵,۹۶	۳,۰
۵,۹۶	۷,۸۶	۰,۱۵	۱۵,۱۳	۵,۹۶	۳,۲
۵,۹۷	۷,۸۹	۰,۱۱	۱۶,۳۲	۵,۹۷	۳,۴
۵,۹۷	۷,۹۱	۰,۰۹	۱۷,۵۲	۵,۹۷	۳,۶
۵,۹۷	۷,۹۲	۰,۰۷	۱۸,۷۱	۵,۹۷	۳,۸
۵,۹۷	۷,۹۳	۰,۰۵	۱۹,۹۰	۵,۹۷	۴,۰

۶.۷ نیروی برا

همانطور که در بخش ۱.۷ تعریف شد، برا مؤلفه نیروی سیال است که در امتداد عمود بر سرعت نسبی نزدیکی بر جسم اثر می‌کند. اگر نیروی برابر بر گرانث منطبق نباشد اما بر سرعت نزدیکی عمود باشد، اغلب آن را نیروی عرضی می‌نامند. ضریب بالابر، C_L ، با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\text{بالابر} = C_L A \frac{\rho U^2}{2} \quad (۱.۶.۷)$$

در طراحی اجسام بالارو، از قبیل هیدروفویلها، برگه‌های هواپر، یا پره‌ها، موضوع [مهم] به‌وجود آوردن یک نیروی بزرگ عمود بر شارش جریان آزاد و، همزمان با آن، به حداقل رساندن پسااست.



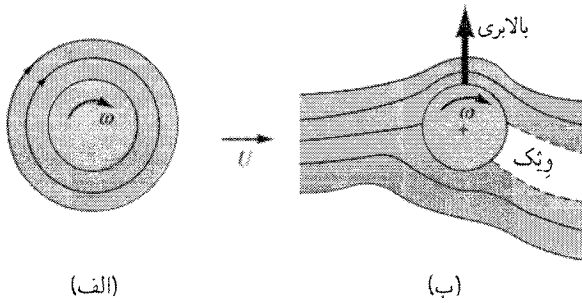
شکل ۱۶.۷ ضرایب نمونه‌وار برا و پسا در برگه‌های هوا بر C_L و C_D بر مبنای حداکثر مساحت تصویر شده بال‌اند.

شکل ۱۶.۷ ضریبهای برا و پسا را در مقطع برگه‌های هوا بر نشان می‌دهد. در محاسبه پسا و برا در معادله‌های (۴.۳.۷) و (۱۶.۶.۷) مساحت به صورت طول وتر ضرب در طول بال (حداکثر مساحت تصویر شده بال) تعریف می‌شود. این قرارداد پذیرفته شده است زیرا مساحت مقطع عرضی با زاویه حمله تغییر می‌کند، هم در جهت شارش و هم در امتداد عمود بر آن. زاویه حمله α زاویه بین وتر مقطع سطح و بردار سرعت جریان آزاد است.

در زوایای حمله کوچک، لایه مرزی به برگه می‌چسبد وقتی اگر سطوح فرار شیب معکوس فشار داشته باشند، جدایی کوچکی وجود دارد. نبود تقارن نیروی برا زاویه حمله 0° را می‌سازد. با افزایش زاویه حمله، شیب معکوس در سطح بالایی تقویت می‌شود و نقطه جدایی به طرف جلو حرکت می‌کند. در تقریباً 20° ، که بستگی به طرح برگه دارد، حداکثر برا با برگه هوا بر ایجاد می‌شود. افزایش بیشتر زاویه حمله باعث کاهش ناگهانی ضریب برا و افزایش ضریب پسا می‌شود. این حالت واماندگی نامیده می‌شود.

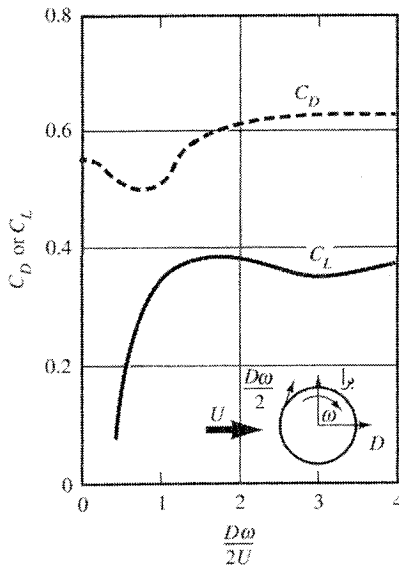
روشهای مختلفی برای بهبود مشخصه‌های برا و پسای برگه‌های هوا بر برای منظوره‌های خاصی از قبیل پرواز و فرود در دسترس‌اند. در این روشها معمولاً با استفاده از فلاپ مقطع برگه هوا بر تغییر داده می‌شود یا لایه مرزی با ایجاد شکاف کنترل می‌شود.

سطوح متحرکی که بر لایه مرزی و نقاط جدایی روی اجسام تأثیر می‌گذارند نیز در بعضی از



شکل ۱۷.۷ کره چرخان

حالت‌های رایج فیزیکی ظاهر می‌شوند. کره‌های چرخان در بسیاری از رویدادهای ورزشی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. این کره‌ها عبارت‌اند از توپهای خمیده یا توپهای پیچی در بیس‌بال یا زائده‌ها و شیارها در توپ فوتبال یا گلف. در شکل ۱۷.۷ الف سرعت‌های ایجادشده در لایه مرزی یک جسم چرخان در سیال ساکن نشان داده شده است. اگر این با یک سیال متحرک ترکیب شود، حالت نشان داده شده در شکل ۱۷.۷ ب به وجود می‌آید، که جابه‌جایی در نقاط جدایی روی جسم را، همراه با ویکی که به‌طور نامتقارن قرار دارد، نشان می‌دهد. نیروی برا در جهت نشان داده شده ایجاد می‌شود زیرا فشار در سطح بالایی کاهش می‌یابد و در سطح پایینی زیاد می‌شود. در شکل ۱۸.۷ ضرایب برا و پسا [مراجع ۹ و ۱۰] برای نسبت‌های بی‌بعد چرخش در یک کره چرخان نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۸.۷ ضرایب برا و پسا در کره چرخان، $Re \approx 10^5$

تمرینها

۱.۶.۷ برای ورود بر جسم غوطه‌ور در جریان سیال الف) ناشی از نیروی شناوری است؛ ب) همواره مخالف جهت گرانی است؛ ج) برآیند نیروی سیال بر جسم است؛ د) مؤلفهٔ نیروی دینامیکی سیال است که در امتداد عمود بر سرعت نزدیکی بر جسم اعمال می‌شود؛ ه) مؤلفهٔ نیروی دینامیکی سیال است که به موازات سرعت نزدیکی بر جسم اعمال می‌شود.

۲.۶.۷ تویی که در یک سیال ساکن با حرکت پیش‌چرخش رو به جلو حرکت می‌کند الف) به سمت راست منحرف می‌شود؛ ب) به سمت چپ منحرف می‌شود؛ ج) در خط مستقیم حرکت می‌کند؛ د) بر اثر گرانش فقط سقوط می‌کند؛ ه) بر اثر گرانش سقوط می‌کند و می‌چرخد.

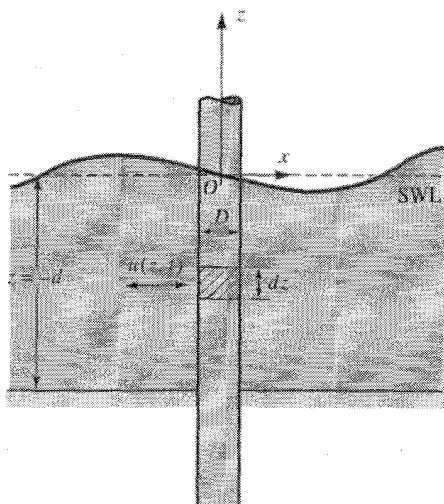
۷.۷ نیروهای اینرسی و شتاب

تمام محاسبات پسا و برا در قسمت قبل در شارش پایای یکنواخت بودند. ولی، بیشتر شارش شامل شتابهای زمانی‌اند و در آنها باید نیروی اینرسی را در نظر گرفت. اگر شارش جهت یکسان داشته باشد ولی مقدار سرعت با زمان تغییر کند، شتاب می‌تواند مستقیم‌الخط باشد، یا شارشها می‌توانند نوسانی باشند یعنی جهت و سرعت و شتاب آنها، که به‌طور پیوسته با زمان تغییر می‌کنند، به‌طور تکراری معکوس می‌شوند. نمونه‌ای از شارش نوع اول* امواج سیل رودخانه‌ای ناشی از بارش است در حالی‌که مثالی از شارش نوع دوم** امواج گرانشی ناشی از باد است. به جای شتاب گرفتن سیال در هندسه شارش، چارچوب مرجع مخالف را نیز می‌توان انتخاب کرد؛ یعنی اینکه به جسمی مانند زیردریایی، توپ فوتبال، یا هواپیما در یک سیال ساکن از حالت سکون شتاب داده می‌شود. هر دو مسئله شتاب در توزیع نیروی مؤثر بر جسم در سیال متشکل است از نیروهای پسا و برا قبلاً بحث شدند به‌علاوه نیروی لازم برای شتاب دادن سیالی که فضا را اشغال می‌کند و اکنون جسم آن را اشغال کرده است. این نیروی خارجی یا نیروی اینرسی با استفاده از مفهوم جرم افزوده محاسبه می‌شود و برای محاسبه آن باید درباره هندسه جسم در سیال و مشخصات شتاب سیال در مجاورت جسم اطلاعاتی داشت. این لازمه‌ها با محاسبه پسا و برا مقایسه می‌شوند که برای انجام آن هم باید از هندسه جسم و فقط سرعت سیال اطلاع داشت.

استوانه دوار قائم به قطر D را در شکل ۱۹.۷ در نظر بگیرید؛ این استوانه تحت تأثیر شارش نوسانی حاصل از زنجیرهٔ امواج قرار دارد. در مهندسی اقیانوس و ساحل، از این ستونها برای نگهداری لنگرگاهها، تفرجگاههای ساحلی، یا تجهیزات حفاری چاههای کم‌عمق نفت و گاز استفاده می‌شود. اگر شارش پایدار باشد، کل نیروی F_z مؤثر بر ارتفاع Δz ستون فقط متشکل است از

* شارش با شتاب مستقیم‌الخط-م.

** شارش با حرکت نوسانی-م.



شکل ۱۹.۷ نیروهای اینرسی روی استوانه مستدیر قائم

پسای فرم و اصطکاک جداری، یعنی

$$f_t = f_D = \frac{1}{4} \rho C_D A u^2 = \frac{1}{4} \rho C_D (dz D) u^2$$

که در آن A مساحت، $dz \cdot D$ در ابتدا عمود بر شارش است و از جدول ۲.۷ برای عدد رینولدز 10^4 مقدار C_D برابر با ۱٫۲ است. در شارش شتابدار نوسانی نیروی کل متشکل است از f_D به علاوه نیروی اینرسی f_i به صورت زیر

$$f_t = f_D + f_i = \frac{1}{4} \rho C_D (dz D) u^2 + \rho \frac{\pi D^2}{4} dz \frac{du}{dt} \quad (۱.۷.۷)$$

در اینجا، نیروی اینرسی به صورت جرم سیالی که فضا را اشغال می‌کند و اکنون ستون آنرا اشغال کرده است $(\rho dz \pi D^2 / 4)$ ضرب در شتاب محاسبه شده است. بنابراین، جرم افزوده $(\rho dz \pi D^2 / 4)$ است. نیروی کل وارد بر ستون با انتگرال‌گیری در طولی از ستون که با سیال تماس دارد به دست می‌آید

$$F_t = \int_{-d}^{\eta} f_D dz + \int_{-d}^{\eta} f_i dz \quad (۲.۷.۷)$$

یا برای حالت ستون

$$F_t = \frac{1}{4} \rho C_D D \int_{-d}^{\eta} u^2 dz + \rho \frac{\pi D^2}{4} \int_{-d}^{\eta} \frac{du}{dt} dz \quad (۳.۷.۷)$$


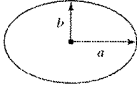
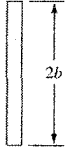
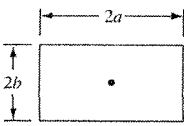
در معادله (۳.۷.۷) فرض شده است که C_D ، اگرچه تابعی از عدد رینولدز است (جدول ۲.۷)، در جهت عمودی ثابت می ماند. آزمایشهایی که ابتدا موريسن (۱۹۵۰) [مرجع ۱۲] انجام داد نشان می دهند که در گستره محدودی از اعداد رینولدز این عبارت جرم افزوده، اگرچه دقیق نیست، مناسب است. ولی، وقتی جدایی شارش و دفع گرداب روی می دهد، این عبارت با افزودن ضریب اینرسی C_i دقیقتر می شود؛ بنابراین، در معادله (۱.۷.۷)

$$f_t = \frac{1}{4} \rho C_D (dzD) w^2 + \rho C_i \frac{\pi D^2}{4} dz \frac{du}{dt} \quad (۴.۷.۷)$$

بنابراین، جرم افزوده در طول واحد $\rho C_i \pi D^2 / 4$ است. آزمایشهایی که گروه مهندسی ارتش آمریکا [مرجع ۱۳] انجام داده اند نشان می دهد که گستره C_i در ستونها ۲۵-۱۰ است و این به عدد رینولدز بستگی دارد.

در شکلهایی به غیر از آنچه در جدول ۴.۷ نشان داده شده اند، جدول ۳.۲ در

جدول ۴.۷ فرمول جرم افزوده برای شکلهای مختلف.

شکل جسم	(حرکت \longleftrightarrow) * وضعیت شارش	جرم افزوده در طول واحد
استوانه مدور		$\rho \frac{\pi D^2}{4}$
بیضی		$\rho \pi b^2$
درق		$\rho \pi b^2$
درق مستطیلی		$۱.۵۱ \rho \pi b^2 (۱)**$ $۱.۹۸ \rho \pi b^2 (۱.۵)$ $۱.۲۱ \rho \pi b^2 (۵.۰)$ $۱.۱۴ \rho \pi b^2 (۱۰)$

* تمام شارشها در جدول افقی فرض می شوند. ** عدد داخل پرانتز مقدار b/a را نشان می دهد.

سارپکایا و ایژاکسون [مرجع ۱۴] یک خلاصه جامع از توابع جرم افزوده در انواع شکلهاست.

مسائل

۱.۷ وقتی صفحه یک دیسک موازی شارش است، و وقتی عمود بر آن است، دربارهٔ مبدأ پسای وارد بر آن بحث کنید.

۲.۷ توزیع سرعت در یک لایهٔ مرزی با رابطه $u/U = 3(y/\delta) - 2(y/\delta)^2$ داده می‌شود. نشان دهید که ضخامت جابه‌جایی لایهٔ مرزی عبارت است از $\delta_1 = \delta/6$.

۳.۷ با استفاده از توزیع سرعت $u/U = \sin(\pi y/2\delta)$ ، معادله‌ای برای رشد لایهٔ مرزی لایه‌ای و برای تنش برشی در یک صفحه تخت و صاف در شارش دوبعدی تعیین کنید.

۴.۷ ضرایب پسا را که از توزیعهای سرعت مفروض در مسائل ۲.۷ و ۳.۷ با هم مقایسه کنید.

۵.۷ معادله‌های رشد لایهٔ مرزی متلاطم را براساس قانون نمایی $u/U = (y/\delta)^{1/4}$ و $f = 0.185/R^{1/5}$ استخراج کنید. ($\tau_0 = \rho f V^2/8$)

۶.۷ هوا در 20°C و 100 kPa مطلق در صفحهٔ صافی با سرعت 150 km/h جریان می‌یابد. طول صفحه چه باشد تا ضخامت لایه مرزی 8 mm به دست آید؟

۷.۷ پسای اصطکاک جداری وارد بر یک سفینه را که طول آن 100 m و قطر متوسط آن 20 m است و در هوای 90 kPa مطلق و 25°C با سرعت 130 km/h حرکت می‌کند حساب کنید.

۸.۷ گاهی اوقات دیواره‌های تونل باد را واگرا می‌سازند تا اثر لایهٔ مرزی را در کاهش مقطعی که در آن شارش سرعت ثابت دارد خنثی کنند. دیوارهٔ صفحه را با چه زاویه‌ای باید ساخت تا در فاصلهٔ بیش از 8 ft از لبهٔ جلوی دیواره، ضخامت جابه‌جایی مقطع سرعت-ثابت تونل تجاوز نکند؟ از داده‌های مسئلهٔ ۶.۷ استفاده کنید.

۹.۷ یک نشان آگهی را هواپیمای کوچکی با سرعت 35 m/s می‌کشد. ابعاد نشان $38\text{ m} \times 14\text{ m}$ است؛ $p = 1\text{ atm}$ و $t = 15^\circ\text{C}$. با فرض اینکه نشان به صورت یک ورق تخت باشد، توان لازم برای کشیدن آن را بیابید.

۱۰.۷ ترنی با سرعت زیاد 160 mi/h حرکت می‌کند. ترن به‌طور 400 ft است و می‌توان مساحت سطح آن را $28\text{ ft} \times 400\text{ ft}$ فرض کرد. پسای اصطکاک جداری و توان لازم فقط برای غلبه بر این مقاومت را تخمین بزنید. فشار را استاندارد و دما را 60°F بگیرید.

۱۱.۷ سرعت ته‌نشینی کره‌های کوچک فلزی، $S = 4\text{ r}$ ، به قطر 1 mm را در نفت خام، $S = 0.86\text{ r}$ ، در 25°C تعیین کنید.

۱۲.۷ در نتیجهٔ یک انفجار اتمی، یک ذرهٔ غبارکروی در ارتفاع 80 km رادیواکتیو است. اگر غبار

طبق قانون استوکس سقوط کند، زمانی که طول می کشد تا در زمین ته نشین شود تعیین کنید. اندازه آن $25\mu\text{m}$ است و $S = 2.5$. از آثار باد صرف نظر کنید. از اتمسفر تک دمای 18°C - استفاده کنید. 13.7 طبق قانون استوکس، چه اندازه‌ای از ذره کروی، $S = 2.5$ ، در هوای اتمسفر 20°C ته نشین می شود؟ سرعت ته نشینی چقدر است؟

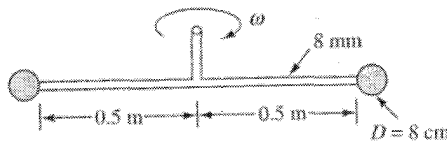
14.7 کره‌ای به قطر 120mm با چه سرعتی در آب 10°C حرکت کند تا نیروی پسای آن 5N باشد؟ 15.7 برای پایین آوردن بولدوزری با نیروی گرانی 45kN با سرعت نهایی 10m/s در هوای 10°kPa مطلق و 20°C چند چتر نجات به قطر 3m ($C_D = 1.2$) باید استفاده شود؟ 16.7 شیئی به وزن 40lb به یک دیسک مدور متصل است و از صفحه‌ای به پایین می افتد. قطر دیسک چه باشد تا شیء با 72ft/s به زمین برخورد کند. دیسک طوری متصل است که بر جهت حرکت عمود است. $p = 14.7\text{psi}$ و $t = 70^\circ\text{F}$.

17.7 یک دیسک مدور به قطر 3m عمود بر جریان هوای 10°km/h (1.1kg/m^3) $\rho =$ نگه داشته می شود. برای نگه داشتن آن به حالت سکون چه نیرویی لازم است؟

18.7 یک چتر نجات با قطعاتش به وزن 250lb است. مؤلفه عمودی سرعت فرود نباید بیشتر از 2ft/s باشد. به فرض اینکه چتر به صورت نیم کره باز باشد، مطلوب است قطر مورد نیاز چتر تا بتوان از آن در فشار استاندارد و دمای 80°F استفاده کرد.

19.7 یک جعبه مکعبی به ضلع 8mm در قسمت حمل بار در نوک واگن قرار دارد. مطلوب است توان اضافی لازم برای سرعت خودرو (الف) 8°km/h و (ب) 11°km/h .

20.7 دو فنجانک مدور به انتهاهای میله‌های دایره‌ای متصل شده‌اند (شکل 20.7). وسیله حول یک محور عمودی می چرخد تا مواد افزودنی یک ظرف پر از مایع را مخلوط کند. $\rho = 1075\text{kg/m}^3$ و $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$. سرعت چرخشی 40rpm است، و قطر میله‌ها 8mm است. توان لازم برای به حرکت درآوردن مخلوط‌کننده را بیابید. فنجانکها در جهت چرخش بازند.



شکل ۲۰.۷ مسئله ۲۰.۷

21.7 یک استوانه نیم لوله‌ای به شعاع 6in که فرادست آن مقعر است در آبی که با سرعت 3ft/s جریان دارد غوطه‌ور می شود. پسا را برای استوانه‌ای به طول 24ft محاسبه کنید. 22.7 دودکشی به قطر 18mm و ارتفاع 55m برای مقاومت در برابر باد 35m/s طراحی می شود. $C_D = 0.7$. کل نیروی وارد بر دودکش و گشتاور در پایه آن چقدر است؟

- ۲۳.۷ مطلوب است گشتاور خمشی در پایه یک آنتن استوانه‌ای به قطر ۸mm و به ارتفاع ۲m واقع بر روی اتومبیلی که با ۱۰°km/hr حرکت می‌کند.
- ۲۴.۷ سرعت نهایی یک گلوله فلزی به قطر ۲in، $S = ۳۵$ ، که در روغن، $۸۰^{\circ}\text{R} = S$ ، می‌افتد چقدر است؟ سرعت نهایی گلوله‌ای با همان اندازه اما با $۷۰^{\circ}\text{R} = S$ چقدر است؟ این نتایج با آزمایشهایی که گالیله در برج کج پیزا انجام داد چه مطابقتی دارند؟
- ۲۵.۷ یک بالون کروی که پر از هلیوم است در هوای ۱۴psi مطلق و ۴۰°F صعود می‌کند. وزن بالون و محموله آن ۳۰°lb است. بالون برای صعود ۱°ft/s چه قطری داشته باشد؟ $۲۱^{\circ}\text{R} = C_D$. اگر بالون در باد ۱°mi/h به زمین مهار شده باشد، زاویه شیب کابل نگهدارنده چقدر است؟
- ۲۶.۷ کره فولادی به قطر ۶.۵mm ($S = ۷۸$) در مخزن روغن ($S = ۸۳$) رها می‌شود. اگر سرعت حد کره ۱m/s باشد، چسبندگی روغن چقدر است؟
- ۲۷.۷ مطلوب است سرعت ته‌نشینی یک ذره شن ($S = ۲۵۵$) در آب ۲۰°C در صورتی که فرض شود ذرات کروی شکل اند. با قطر (الف) ۱mm ، (ب) ۱°mm ، (ج) ۱°mm .
- ۲۸.۷ یک نیزه نوک‌تیز به قطر ۲cm و به طول ۱۵m است. اگر نیزه با سرعت ۸m/s در آب یرتاب شود، نیروی پسا را پیدا کنید. حداکثر ضخامت لایه مرزی چقدر است؟ دمای آب را ۲۰°C بگیریید.
- ۲۹.۷ دلیل ناپیوستگی منحنیهای شکل ۱۶.۷ در زاویه حمله ۲۲° را توضیح دهید.
- ۳۰.۷ نسبت پسا به برا در مقطع برگه هوا بر در شکل ۱۶.۷ در زاویه حمله ۲° چقدر است؟
- ۳۱.۷ قایقی مجهز به هیدروفویل به وزن ۵۰۰°lb است. در سرعت ۵°ft/s ، اندازه هیدروفویل لازم برای نگهداری قایق چقدر است؟ از مشخصه‌های برازای شکل ۱۶.۷ در زاویه حمله ۴° استفاده کنید.
- ۳۲.۷ تییس‌بازی، از خط شروع، با سرعت روبه جلوی ۷°ft/s و پس چرخش ۵۰۰°rpm به توپ ضربه می‌زند. وزن توپ ۱۲۵lb و قطر آن ۲.۵۶in است. فشار استاندارد و دما را ۷۰°F بگیریید و از نیروی پسا صرف‌نظر کنید. با در نظر گرفتن برازای حاصل از پس‌چرخش، تا زمانی که توپ تا فاصله خالص ۳۹ft دور شده است چقدر سقوط کرده است؟
- ۳۳.۷ بازیکن بیس‌بال توپ خمیده‌ای را با ۵°mi/h و با سرعت چرخشی ۲۵۰°rpm ، حول یک محور عمودی، پرتاب می‌کند. توپ به وزن ۳lb و به قطر ۲.۹in است. سرعت به طرف گلوله لاستیکی، به فاصله ۶۰ft دورتر، را ثابت بگیریید؛ $p = ۱\text{atm}$ و $۸۰^{\circ}\text{F} = t$. توپ خمیده در حرکت به طرف گلوله لاستیکی چه طولی را می‌پیماید؟
- ۳۴.۷ بازیکن بیس‌بال توپ را با سرعت ۸۵mi/h و با پس‌چرخش ω rad/s، حول یک محور افقی، پرتاب می‌کند. با همان مفروضات مسئله ۳۳.۷، مقدار تقریبی ω چه باشد تا توپ در مسیر افقی حرکت کند، و بر اثر وزن خود سقوط نکند؟
- ۳۵.۷ در نتیجه دفع گرداب متناوب از یک استوانه ساکن در میدان شارش، فشار تناوبی (برا) بر

استوانه وارد می‌شود. فرایند با عدد اشتراک، $S_t = fD/V$ ، توضیح داده می‌شود که در آن f فرکانس برحسب هرتز است. در گستره وسیعی از اعداد رینولدز عدد اشتراک بحرانی تقریباً ۲×10^4 است. فرکانس نوسان حاصل از وزش باد با سرعت ۱۰°km/hr روی یک سیم ۲mm چقدر است؟ ۳۶.۷ یک توپ گلف با سرعت ۵۵m/s از مبدأ پرتاب می‌شود. توپ به وزن ۴۱۸N و به قطر ۴.۲cm است. فرض کنید توپ تحت زاویه ۳° بالا می‌رود و فرض کنید $C_D = ۰.۴۲$. از صفحه گسترده برای محاسبه فاصله‌ای که توپ (الف) بدون چرخش؛ (ب) با پس‌چرخش به طوری که $C_L = ۰.۲$ ؛ (ج) با پیش‌چرخش به طوری که $C_L = -۰.۲$ طی می‌کند استفاده کنید.

۳۷.۷ در مسئله ۳۶.۷ ، در حالت (الف)، تأثیر باد مخالف با سرعت ۲°km/hr و باد موافق با سرعت ۲°km/hr را بیابید.

مراجع

1. L. Prandtl, "Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung," *Verh. III Int. Math.-Kongr., Heidelb.*, 1904.
2. T. von Kármán, "On Laminar and Turbulent Friction," *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, pp. 235–236, 1921.
3. L. Prandtl, "Über den Reibungswiderstand strömender Luft," *Result. Aerodyn. Test Inst. Goett.*, III Lieferung, 1927.
4. L. Prandtl and H. Schlichting, "Das Widerstandsgesetz rauher Platten," *Werft, Reederei, Hafen*, p. 1, 1934.
5. G. Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 8, 1845; vol. 9, 1851.
6. H. Dryden, "Reduction of Turbulence in Wind Tunnels," *NACA Tech. Rep.* 392, 1931.
7. S. F. Hoerner, *Fluid Dynamic Drag*, 2d ed., the author, Midland Park, NJ, 1965.
8. W. F. Lindsey, *NACA Tech. Rep.* 619, 1938.
9. S. Goldstein (ed.), *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. II, Clarendon Press, Oxford, 1938.
10. H. M. Barkla and L. J. Auchterlonie, "The Magnus Effect on Rotating Spheres," *J. Fluid Mech.*, vol. 47, p. 3, 1971.
11. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1979.
12. J. R. Morison, M. P. O'Brien, J. W. Johnson, and S. A. Schaaf, "The Forces Exerted by Surface Winds in Piles," *AIME Petroleum Transactions*, vol. 189, pp. 149–157, 1950.
13. U.S. Army Corps of Engineers, *Shore Protection Manual*, vol. II, pp. 7-144–7-145, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1984.
14. T. Sarpkaya and M. Isaacson, *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*, pp. 47–51, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1981.



شارش سیال ایدئال

در فصلهای قبل بیشتر رابطه‌های شارش یک‌بعدی را به دست آوردیم. شارش یک‌بعدی شارشی است که در هر مقطع آن از سرعت متوسط استفاده می‌شود و از تغییرات در مقطع صرف نظر می‌شود. اما در بسیاری از مسائل طراحی در شارش سیال به معلومات دقیقتری درباره سرعت و توزیع فشار نیاز داریم، مانند شارش بر مرزهای خمیده در بال هواپیما، در گذرگاههای پمپ یا کمپرسور، و یا بر نوک سد. فهم شارش دوبعدی و سه‌بعدی سیال غیرچسبنده و تراکم‌ناپذیر به دانشجو دید بسیار جامعتری در بسیاری از مسائل شارش سیال حقیقی می‌دهد. شباهتهایی نیز وجود دارد که به موجب آنها می‌توان همان روشها را برای شارش در رسانه متخلخل (پر منفذ) به کار بست.

در این فصل اصول شارش بی‌چرخش سیال ایدئال را استنتاج می‌کنیم و برای حالت‌های بنیادی شارش به کار می‌بریم. بعد از اینکه لازمه‌های شارش را مشخص کردیم، معادله اویلر را استخراج و پتانسیل سرعت را تعریف می‌کنیم. از معادله اویلر انتگرال می‌گیریم و معادله برنولی را به دست می‌آوریم، و توابع جریان و شرایط مرزی را نشان می‌دهیم. سپس، حالت‌های شارش را در دو بعد مطالعه می‌کنیم.

۱.۸ لازمه‌های شارش سیال ایدئال

فرضیه پراتل، بخش ۲.۷، می‌گویند که در چسبندگی کم، آثار چسبندگی فقط در ناحیه باریکی

در اطراف مرزهای سیال قابل ملاحظه است. در حالت‌های شارش تراکم‌ناپذیر، که لایه مرزی نازک می‌ماند، نتایج سیال ایدئال را با تقریب خوبی می‌توان برای شارش [تراکم‌ناپذیر] سیال حقیقی به کار برد. شارش‌های همگرا یا شتاب‌دار عموماً لایه‌های مرزی نازکی دارند، اما در شارش کندشونده ممکن است جدایی لایه مرزی و نیز رد عبور (و یک) بزرگی پدید آید که پیش‌بینی تحلیلی‌اش مشکل باشد.

سیال ایدئال لازمه‌های زیر را باید برآورده کند:

$$۱. \text{ معادله پیوستگی، بخش } ۳.۴, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

۲. قانون دوم نیوتن در هر نقطه‌ای و در هر لحظه‌ای

۳. در هر مرز جامدی نه سیال باید در مرز نفوذ کند و نه اینکه بین سیال و مرز فاصله باشد.

اگر علاوه بر لازمه‌های ۱، ۲ و ۳، شارش را بی‌چرخش نیز فرض کنیم، حرکت سیال بسیار شبیه حرکت سیال حقیقی با چسبندگی کم، در خارج از لایه‌های مرزی خواهد بود. با استفاده از شرایط فوق، کاربست قانون دوم نیوتن برای ذره سیال، معادله اویلر را نتیجه می‌دهد، که به فرض بی‌چرخش بودن شارش می‌توان آن را انتگرال گرفت و به معادله برنولی رسید. مجهولها در شارش سیال با مرزهای مفروض عبارت‌اند از سرعت و فشار در هر نقطه. متأسفانه در بیشتر حالتها نمی‌توان مستقیماً از شرایط مرزی به معادله‌های توزیع سرعت و فشار رسید.

۲.۸ معادله حرکت اویلر

دستگاه مختصات دکارتی

معادله‌های حرکت اویلر در بخش ۵.۴ [معادله (۱.۵.۴)] با استفاده از معادله‌های تکانه و پیوستگی به دست آمدند. معادله‌های مؤلفه‌ای معادله (۱.۵.۴) عبارت‌اند از

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (۱.۲.۸)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (۲.۲.۸)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (۳.۲.۸)$$

همانطور که قبلاً گفته شد سه جمله اول در سمت راست معادله‌های جمله‌های شتاب‌آینزی است، که به تغییرات سرعت در فضا بستگی دارند. جمله آخر شتاب موضعی یا زمانی است، و به تغییر سرعت بر حسب زمان در یک نقطه بستگی دارد.

مختصات طبیعی در شارش دوبعدی

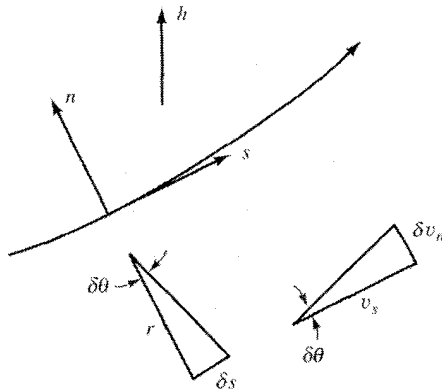
معادله‌های دوبعدی اویلر با قرار دادن $w = 0$ و $\partial/\partial z = 0$ در معادله‌های مؤلفه کلی به دست می‌آیند، بدین ترتیب

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (۴.۲.۸)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (۵.۲.۸)$$

با اتخاذ جهت‌های خاصی برای محورهای x و y معادله‌های فوق را می‌توان به صورتی ساده فهمتر درآورد. اگر محور x ، که آن را محور s می‌نامیم، به موازات بردار سرعت در یک نقطه در نظر گرفته شود (شکل ۱.۸)، این محور بر خط جریان ماز بر آن نقطه مماس است. محور y ، که آن را محور n می‌نامیم، عمود بر مختصه خط جریانی s است، که برای حالت نشان داده شده در شکل ۱.۸ به طرف مرکز انحنای خط جریان است. مؤلفه سرعت u عبارت است از v_s ، و مؤلفه سرعت v عبارت است از v_n . وقتی در نقطه‌ای مساوی صفر باشد، معادله (۴.۲.۸) تبدیل می‌شود به

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma h) = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial t} \quad (۶.۲.۸)$$



شکل ۱.۸ نمادگذاری در مختصات طبیعی.

البته v_n در نقطه (s, n) مساوی صفر است، ولی آهنگ تغییرات آن نسبت به s و t لزوماً صفر نیست. معادله (۵.۲.۸) تبدیل می‌شود به

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = v_s \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (۷.۲.۸)$$

وقتی سرعت در s و ∂s در امتداد خط جریان در نظر گرفته شود، v_n از صفر تا ∂v_n تغییر می‌کند. اگر شعاع انحناى خط جریان در s باشد، از مثلثهای مشابه (شکل ۱.۸) داریم

$$\frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{v_s}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial s}{r} = \frac{\partial v_n}{v_s}$$

با جایگذاری در معادله (۷.۲.۸) به دست می‌آید

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = \frac{v_s^2}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (۸.۲.۸)$$

در شارش پایای سیال تراکم‌ناپذیر، معادله‌های (۴.۲.۸) و (۸.۲.۸) را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma h) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_s^2}{2} \right) \quad (۹.۲.۸)$$

و

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma h) = \frac{v_s^2}{r} \quad (۱۰.۲.۸)$$

از معادله (۹.۲.۸) نسبت به s می‌توان انتگرال گرفت و معادله (۱۰.۵.۴) را به دست آورد که در آن ثابت انتگرال با m ، یعنی از یک خط به خط جریان دیگر، تغییر می‌کند. معادله (۱۰.۲.۸) نشان می‌دهد که چگونه ارتفاع فشاری در عرض خطوط جریان تغییر می‌کند. اگر v_s و r توابع معلومی از n باشند، از معادله (۱۰.۲.۸) می‌توان انتگرال گرفت.

مثال ۱.۸ یک ظرف مایع با سرعت زاویه‌ای ω حول یک محور قائم مانند جسم صلب دوران می‌کند. تغییر فشار در مایع را تعیین کنید.

حل

n فاصله شعاعی است، که به طرف داخل اندازه‌گیری می‌شود، $dn = -dr$ و $v_s = \omega r$. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۰.۲.۸) داریم

$$-\frac{1}{\rho}(p + \gamma h) = -\int \frac{\omega^2 r^2 dr}{r}$$

یا

$$\frac{1}{\rho}(p + \gamma h) = \frac{\omega^2 r^2}{2} + \text{ثابت}$$

برای تعیین ثابت انتگرال می‌گوییم اگر در $r = 0$ و $h = 0$ ، $p = p_0$ خواهیم داشت

$$p = p_0 - \gamma h + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

این رابطه نشان می‌دهد که فشار در امتداد خط قائم، هیدروستاتیکی است و برحسب مربع شعاع افزایش می‌یابد. انتگرال‌گیری از معادله (۹.۲.۸) نشان می‌دهد که در h و v_s معین، یعنی در امتداد خط جریان، فشار ثابت است. این نتایج با نتایج مربوط به حرکت دورانی در تعادل نسبی (که در بخش ۹.۲ به دست آمدند) یکسان‌اند. ■

تمرینها

۱.۲.۸ واحد معادله‌های حرکت اوپلر عبارت‌اند از الف) نیرو بر جرم واحد؛ ب) سرعت؛ ج) انرژی بر نیروی گرانی واحد؛ د) نیرو بر نیروی گرانی واحد؛ ه) هیچکدام.

۲.۲.۸ معادله‌های حرکت اوپلر بیان ریاضی این موضوع‌اند که در تمام نقاط الف) آهنگ شارش ورودی جرم مساوی آهنگ شارش خروجی جرم است؛ ب) نیرو بر جرم واحد مساوی شتاب است؛ ج) انرژی با زمان تغییر نمی‌کند؛ د) قانون سوم حرکت نیوتن برقرار است؛ ه) تکانه سیال ثابت است.

۳.۸ شارش بی چرخش: پتانسیل سرعت

در این قسمت نشان می‌دهیم که از فرض شارش بی چرخش، وجود پتانسیل سرعت نتیجه می‌شود. با استفاده از این رابطه‌ها و با فرض پایستاری نیروی حجمی، از معادله‌های اوپلر می‌توان انتگرال گرفت.

در یک سیال تراکم‌ناپذیر بی‌اصطکاک و ابتدائاً ساکن نمی‌توان تک‌تک ذره‌ها را به چرخش درآورد. اگر جسم آزاد کوچکی از سیال را به شکل کره در نظر بگیریم، این امر را بهتر می‌توانیم

مجسم کنیم. نیروهای سطحی به طور عمودی بر سطح کره اثر می‌کنند زیرا سیال بی‌اصطکاک است، و بنابراین خط اثر آنها از مرکز کره می‌گذرد. به طریقه مشابه، نیروی حجمی در مرکز جرم اثر می‌کند. از این رو، هیچ گشتاوری بر کره اعمال نمی‌شود، و کره بدون چرخش می‌ماند. برعکس، وقتی سیال ایدئال دارای چرخش باشد به هیچ وجه چرخش آن عوض نمی‌شود زیرا هیچ گشتاوری بر کره جزئی سیال اعمال نمی‌شود.

برای چرخش ذره‌ای از سیال حول محور موازی با محور z ، یک عبارت تحلیلی در قسمت ۱.۴ به دست آمد [معادله‌های (۸.۱.۴ الف تا ج)]. به فرض اینکه سیال چرخش ندارد، یعنی، بی‌چرخش است، $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ، یا از معادله‌های (۸.۱.۴ الف تا ج)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۱.۳.۸)$$

این محدودیتها بر سرعت در هر نقطه‌ای باید برقرار باشند (جز در نقاط یا خطوط خاصی). معادله اول، شرط بی‌چرخشی شارش دوبعدی در صفحه xy است. شرط بی‌چرخش یعنی اینکه عبارت دیفرانسیلی

$$u dx + v dy$$

دیفرانسیل کامل باشد

$$u dx + v dy = -d\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (۲.۳.۸)$$

علامت منها اختیاری است؛ با این قرارداد، مقدار ϕ در راستای سرعت کاهش می‌یابد. با مقایسه جملات معادله (۲.۳.۸)، داریم $u = -\partial\phi/\partial x$ و $v = -\partial\phi/\partial y$. همین دال بر وجود یک تابع ϕ در شارش دوبعدی است که مشتق منفی آن نسبت به هر راستایی، مؤلفه سرعت در آن راستاست. وجود این تابع را در شارش سه‌بعدی نیز می‌توان نشان داد. شکل برداری این تابع

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi \quad (۳.۳.۸)$$

معادل است با

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (۴.۳.۸)$$

فرض پتانسیل سرعت، معادل فرض شارش بی چرخش است، به صورت زیر،

$$\text{curl}(-\text{grad}\phi) = \nabla \times (-\nabla\phi) = 0 \quad (5.3.8)$$

چون $\nabla \times \nabla = 0$. این را با دیفرانسیل‌گیری برداری از معادله (۴.۳.۸) می‌توان نشان داد

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

و ثابت می‌شود $\partial v / \partial x = \partial u / \partial y$ و غیره. جایگذاری معادله‌های (۴.۳.۸) در معادله پیوستگی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3.8)$$

به صورت برداری داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \nabla \phi = -\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (7.3.8)$$

که به صورت $\nabla^2 \phi = 0$ نوشته می‌شود. معادله (۶.۳.۸) یا (۷.۳.۸) معادله لاپلاس است. هر تابع ϕ که در معادله لاپلاس صدق کند، حالتی ممکن از شارش بی چرخش سیال را نشان می‌دهد. از آنجا که تعداد بی‌شماری جواب برای معادله لاپلاس وجود دارد که هر کدام در مرزهای معینی از شارش صدق می‌کند، مسئله اصلی عبارت است از انتخاب تابع مناسب برای هر حالت خاص شارش.

چون ϕ در هر جمله با نمای اول ظاهر می‌شود، معادله (۶.۳.۸) یک معادله خطی است و مجموع دو جواب نیز خودش یک جواب است؛ مثلاً اگر ϕ_1 و ϕ_2 جواب معادله (۶.۳.۸) باشند، $\phi_1 + \phi_2$ هم یک جواب است؛ از این رو

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \nabla^2 \phi_2 = 0$$

بنابراین

$$\nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 \phi_2 = 0$$

به طریق مشابه، اگر ϕ_1 یک جواب باشد، و C نیز ثابت باشد، $C\phi_1$ یک جواب دیگر خواهد بود.

تمرینها

۱.۳.۸ آن مقدار ϕ را که در پیوستگی صدق می‌کند انتخاب کنید: الف) $x^2 + y^2$ ؛ ب) $\sin x$ ؛ ج) $\ln(x+y)$ ؛ د) $x+y$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۳.۸ در شارش بی‌چرخش یک سیال ایدئال الف) پتانسیل سرعت وجود دارد؛ ب) تمام ذره‌ها باید در خطوط مستقیم حرکت کنند؛ ج) حرکت باید یکنواخت باشد؛ د) شارش همیشه پایاست؛ ه) سرعت در مرز باید مساوی صفر باشد.

۳.۳.۸ تابع ϕ که در معادله لاپلاس صدق کند الف) برحسب x و y باید خطی باشد؛ ب) حالتی ممکن از شارش چرخشی سیال است؛ ج) لزوماً در معادله پیوستگی صدق نمی‌کند؛ د) حالتی ممکن از شارش سیال است؛ ه) هیچکدام.

۴.۳.۸ اگر ϕ_1 و ϕ_2 جواب معادله لاپلاس باشند، کدام یک از توابع زیر نیز جواب است؟ الف) $\phi_1 - 2\phi_2$ ؛ ب) $\phi_1\phi_2$ ؛ ج) ϕ_1/ϕ_2 ؛ د) ϕ_1^2 ؛ ه) هیچکدام.

۵.۳.۸ رابطه‌ای را که در شارش بی‌چرخش صدق کند انتخاب کنید: الف) $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0$ ؛

ب) $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ ؛ ج) $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$ ؛ د) $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$ ؛ ه) هیچکدام.

۴.۸ انتگرال معادله اوایلر؛ معادله برنولی

معادله (۱.۲.۸) را می‌توان طوری مرتب کرد که هر جمله شامل یک مشتق جزئی نسبت به x باشد. از معادله (۱.۳.۸) داریم

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v^2}{\partial x} \quad w \frac{\partial u}{\partial z} = w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w^2}{\partial x}$$

و از معادله (۴.۳.۸) داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

با جایگذاری این رابطه‌ها در معادله (۱.۲.۸)، پس از مرتب کردن نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$$

از آنجا که $q^2 = w^2 + v^2 + u^2$ * مربع سرعت است، داریم

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (۱.۴.۸)$$

به طریق مشابه، برای جهتهای y و z ، داریم

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (۲.۴.۸)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (۳.۴.۸)$$

کمیت‌های داخل پرانتزها در معادله‌های (۱.۴.۸) تا (۳.۴.۸) یکسان‌اند. معادله (۱.۴.۸) بیان می‌کند که کمیت داخل پرانتز تابعی از x نیست، زیرا مشتق آن نسبت به x مساوی صفر است. به طریق مشابه، معادله‌های دیگر نشان می‌دهند که کمیت داخل پرانتز تابع y یا z نیست. بنابراین، این کمیت فقط تابعی از t و مثلاً به صورت $F(t)$ است

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(t) \quad (۴.۴.۸)$$

در شارش پایا $\partial \phi / \partial t = 0$ و $F(t)$ به صورت ثابت E در می‌آید

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{q^2}{2} = E \quad (۵.۴.۸)$$

انرژی دسترسی‌پذیر در سراسر سیال ثابت است. این رابطه معادله برنولی در سیال بی‌چرخش است. جمله فشار را می‌توان به دو جزء تقسیم کرد. فشار هیدروستاتیکی p_s و فشار دینامیکی p_d به طوری که $p = p_s + p_d$. با جایگذاری در معادله (۵.۴.۸) به دست می‌آید

$$gh + \frac{p_s}{\rho} + \frac{p_d}{\rho} + \frac{q^2}{2} = E$$

* همانطور که در فصل ۴ گفته شد، چند حرف برای سرعت کل وجود دارد. در فصل ۴ سرعت کل با V نشان داده شد زیرا سرعت در نقطه تحت بررسی از سرعت متوسط فضایی به دست می‌آید. در اینجا از q استفاده می‌شود زیرا سرعت کل در یک نقطه را در نظر می‌گیریم که می‌تواند در تمام میدان شارش تغییر کند.

دو جمله اول را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$gh + \frac{p_s}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p_s + \gamma h)$$

که h به‌طور قائم رو به بالا اندازه‌گیری می‌شود. عبارت فوق یک ثابت است، زیرا قانون هیدروستاتیکی تغییر فشار را بیان می‌کند. این دو جمله را می‌توان در ثابت E گنجانده. بعد از حذف زیرنماد فشار دینامیکی، رابطه زیر به جا می‌ماند:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} = E \quad (۶.۴.۸)$$

اگر سرعت معلوم باشد، از معادله ساده فوق می‌توان تغییر فشار را پیدا کرد، و بالعکس. به فرض معلوم بودن سرعت q_0 و فشار دینامیکی p_0 در یک نقطه، داریم

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{q_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}$$

یا

$$p = p_0 + \frac{\rho q_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \right] \quad (۷.۴.۸)$$

مثال ۲.۸ یک زیردریایی با سرعت 30 ft/s در آب حرکت می‌کند. در نقطه A از زیردریایی در 5 ft بالای دماغه، سرعت زیردریایی نسبت به آب 50 ft/s است. اختلاف فشار دینامیکی بین این نقطه و دماغه و اختلاف فشار کل بین این دو نقطه را تعیین کنید.

حل

اگر زیردریایی ساکن باشد و آب بر آن بگذرد، سرعت در دماغه مساوی صفر و در A مساوی 50 ft/s است. با صفرگرفتن فشار دینامیکی در بی‌نهایت، از معادله (۶.۴.۸) داریم

$$E = 0 + \frac{q_0^2}{2} = \frac{30^2}{2} = 450 \text{ ft}\cdot\text{lb}/\text{slug}$$

برای دماغه

$$\frac{p}{\rho} = E = 450 \quad p = 450(1.935) = 870 \text{ lb}/\text{ft}^2$$

برای نقطهٔ A

$$p = 1.935 \left(\frac{30^2}{2} - \frac{50^2}{2} \right) = -1548 \text{ lb/ft}^2 \quad \text{و} \quad \frac{p}{\rho} = E - \frac{q^2}{2} = 450 - \frac{50^2}{2}$$

بنابراین، اختلاف فشار دینامیکی برابر است با

$$-1548 - 870 = -2418 \text{ lb/ft}^2$$

اختلاف فشار کل را با کاربرد معادلهٔ (۵.۴.۸) برای نقطهٔ A و دماغهٔ n می‌توان به دست آورد

$$gh_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{q_A^2}{2} = gh_n + \frac{p_n}{\rho} + \frac{q_n^2}{2}$$

از این رو

$$\begin{aligned} p_A - p_n &= \rho \left(gh_n - gh_A + \frac{q_n^2 - q_A^2}{2} \right) \\ &= 1.935 \left(-5g - \frac{50^2}{2} \right) = -2740 \text{ lb/ft}^2 \end{aligned}$$

می‌توان استدلال کرد که تفاوت اختلاف فشار حقیقی با اختلاف فشار دینامیکی مساوی ۵۷ است، زیرا A در ۵ft بالای دماغه است. بنابراین اختلاف فشار کل عبارت می‌شود از

$$-2418 - 5(62.4) = -2740 \text{ lb/ft}^2$$

تمرینها

۱.۴.۸ از معادله‌های حرکت اویلر وقتی می‌توان انتگرال گرفت که فرض شود الف) معادلهٔ پیوستگی برقرار است؛ ب) سیال تراکم‌ناپذیر است؛ ج) پتانسیل سرعتی وجود دارد و چگالی ثابت است؛ د) شارش چرخشی و تراکم‌ناپذیر است؛ ه) سیال غیرچسبنده است.

۲.۴.۸ معادلهٔ برنولی در حالت‌های شارش پایان سیال ایدئال حاکی است که الف) سرعت در امتداد خط جریان ثابت است؛ ب) انرژی در امتداد خط جریان ثابت است اما ممکن است از یک خط جریان به خط جریان دیگر تغییر کند؛ ج) وقتی سرعت افزایش می‌یابد، فشار افزایش

می‌یابد؛ د) انرژی در سراسر سیال ثابت است؛ ه) آهنگ خالص شارش ورودی به هر ناحیه کوچک باید مساوی صفر باشد.

۳.۴.۸ حالت غیرپایای شارش را به حالت پایای شارش می‌توان تبدیل کرد الف) بدون توجه به نوع مسئله؛ ب) وقتی دو جسم در سیال نامتناهی به طرف یکدیگر حرکت کنند؛ ج) وقتی جسم غیرمتقارنی در سیال نامتناهی دوران کند؛ د) وقتی یک جسم تنها در یک سیال نامتناهی حرکت انتقالی دارد؛ ه) تحت هیچ شرایطی.

۵.۸ توابع جریان و شرایط مرزی

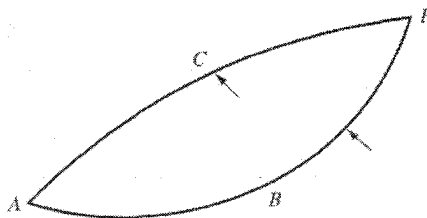
دو تابع جریان تعریف می‌کنیم: یکی برای شارش دوبعدی که در آن تمام خطوط حرکت به موازات صفحه ثابتی مانند صفحه xy هستند و شارش در تمام این صفحه‌ها همسان است، و دیگری برای شارش سه‌بعدی با تقارن محوری که یعنی تمام خطوط شارش در صفحه‌هایی اند که در یک خط یا محور همدیگر را قطع می‌کنند، و شارش در تمام این صفحات همسان است.

تابع جریان دوبعدی

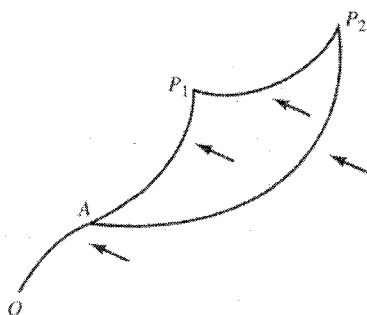
اگر A و P دو نقطه بر یکی از صفحه‌های شارش و مثلاً صفحه xy باشند (شکل ۲.۸)، و اگر صفحه دارای ضخامت واحد باشد، در صورتی که چگالی ثابت باشد و هیچ سیالی در داخل ناحیه به وجود نیاید یا از بین نرود، از پیوستگی نتیجه می‌شود که آهنگ شارش در عرض هر دو خط مانند ACP و ABP باید یکسان باشد. در اینجا، اگر A یک نقطه ثابت و P یک نقطه متحرک باشد، آهنگ شارش در عرض هر خط و اصل این دو نقطه تابعی از مکان P است. اگر این تابع را ψ بگیریم، و اگر علامت آن را طوری قرارداد کنیم که وقتی ناظر خط را از A به سمت P می‌بینید ψ آهنگ شارش از راست به چپ را نشان دهد، در آن صورت رابطه

$$\psi = \psi(x, y)$$

یک تابع جریان است.



شکل ۲.۸ ناحیه سیال که جهت مثبت شارش را در تعریف تابع جریان نشان می‌دهد.



شکل ۳.۸ شارش بین دو نقطه در یک ناحیه سیال.

اگر ψ_1 و ψ_2 به ترتیب مقادیر تابع جریان در نقاط P_1 و P_2 باشند (شکل ۳.۸)، $\psi_2 - \psi_1$ شارش در عرض P_1P_2 و مستقل از محل A است. با در نظر گرفتن نقطه دیگری مانند O به جای نقطه A ، مقادیر ψ_1 و ψ_2 به یک مقدار تغییر می‌کنند، که این مقدار تغییر عبارت است از شارش در عرض OA . بنابراین، برای یک ثابت اختیاری، مقدار ψ نامعین است.

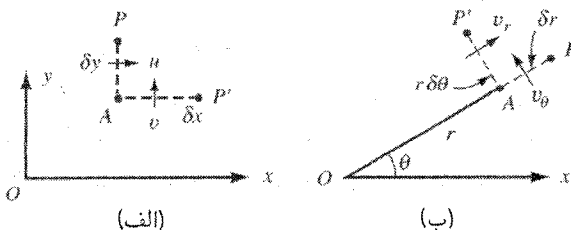
مؤلفه‌های سرعت u و v را در جهت‌های x و y از تابع جریان می‌توان به دست آورد. در شکل ۴.۸ الف، شارش $\delta\psi$ در عرض $\delta y = \overline{AP}$ ، از راست به چپ، عبارت است از $-u\delta y$ ، یا

$$u = -\frac{\delta\psi}{\delta y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (۱.۵.۸)$$

و به‌طور مشابه

$$v = \frac{\delta\psi}{\delta x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (۲.۵.۸)$$

به بیان غیرریاضی، مشتق جزئی تابع جریان نسبت به هر راستایی عبارت است از مؤلفه سرعت در راستای $90^\circ +$ (عکس حرکت عقربه ساعت) نسبت به آن راستا. از شکل ۴.۸ ب، در مختصات



شکل ۴.۸ انتخاب مسیر برای نشان دادن رابطه مؤلفه‌های سرعت با تابع جریان.

قطبی صفحه‌ای داریم

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

وقتی دو نقطه P_1 و P_2 از شکل ۳.۸ بر یک خط جریان قرار داشته باشند، $\psi_1 - \psi_2 = 0$ زیرا در عرض خط جریان هیچ شارشی وجود ندارد. از این رو، خط جریان با رابطه ثابت $\psi =$ داده می‌شود. از مقایسه معادله‌های (۴.۳.۸) با معادله‌های (۱.۵.۸) و (۲.۵.۸)، حاصل می‌شود

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۳.۵.۸)$$

که معادله‌های گوشه‌ریزان هستند.

از معادله‌های (۳.۵.۸) برای هر پتانسیل سرعت می‌توان یک تابع جریان پیدا کرد. اگر پتانسیل سرعت در معادله لاپلاس صدق کند، تابع جریان نیز در آن صدق می‌کند. از این رو، تابع جریان را می‌توان به صورت تابع پتانسیل برای حالت دیگر شارش در نظر گرفت.

تابع جریان استوکس در شارش متقارن محوری

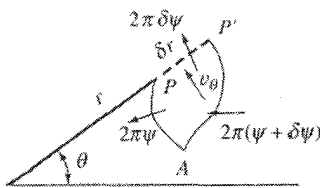
در هر یک از صفحات ماربر محور تقارن دو نقطه A و P را اختیار می‌کنیم، به طوری که A ثابت و P متغیر باشد. خط و اصل AP را رسم می‌کنیم. شارش در سطحی که از چرخش AP حول محور تقارن به وجود می‌آید تابعی از امکان P است. تابع را $2\pi\psi$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم که محور تقارن، محور x از دستگاه مختصات دکارتی باشد. بنابراین ψ تابعی از x و $\hat{\omega}$ است، که در آن

$$\hat{\omega} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

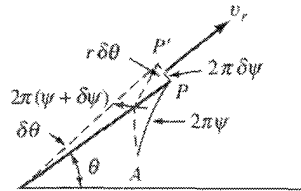
فاصله از P تا محور x است. سطوح "ثابت ψ " سطوح جریان‌اند.

برای پیدا کردن رابطه بین ψ و مؤلفه‌های سرعت u و v' که به ترتیب موازی محور x و محور $\hat{\omega}$ (عمود بر محور x) هستند، روشی مشابه روش شارش دوبعدی به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم PP' یک گام بینهایت کوچک ابتدا به موازات $\hat{\omega}$ و سپس به موازات x باشد؛ یعنی $PP' = \delta\hat{\omega}$ و سپس $PP' = \delta x$. رابطه‌های حاصل بین تابع جریان و سرعت عبارت‌اند از

$$2\pi\hat{\omega} \delta x v' = 2\pi\delta\psi \quad \text{و} \quad -2\pi\hat{\omega} \delta\hat{\omega} u = 2\pi\delta\psi$$



(الف)



(ب)

شکل ۵.۸ تغییر مکان p برای نشان دادن رابطه بین مؤلفه‌های سرعت و تابع جریان استوکس.

با حل u و v' داریم

$$u = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \quad v' = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۴.۵.۸)$$

علامت قراردادی مشابه حالت دوبعدی است.

رابطه‌های بین تابع جریان و تابع پتانسیل عبارت‌اند از

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۵.۵.۸)$$

در شارش سه‌بعدی با محور تقارن، ψ داری ابعاد $L^2 T^{-1}$ یا حجم بر زمان واحد است.

برای شارش به دور اجسام دوار که اغلب در مختصات قطبی کروی به راحتی بیان می‌شوند از تابع جریان استفاده می‌کنند. فرض می‌کنیم r فاصله از مبدأ و θ زاویه قطبی باشد؛ به علت تقارن محوری، به زاویه نصف‌النهار احتیاجی نیست. با مراجعه به شکل ۵.۸ الف و ب داریم

$$2\pi r \sin \theta \delta r v_\theta = 2\pi \delta \psi \quad - 2\pi r \sin \theta r \delta \theta v_r = 2\pi \delta \psi$$

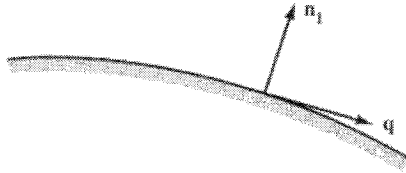
که از آن نتیجه می‌شود

$$v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (۶.۵.۸)$$

و

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (۷.۵.۸)$$

این عبارتها در بررسی شارش به دورگره‌ها، بیضویها، و دیسکها و شارش در روزه‌ها مفیدند.



شکل ۶.۸ نماد برای شرط مرزی در مرز ثابت.

شرایط مرزی

در یک مرز ثابت، مؤلفهٔ سرعت در راستای عمود بر مرز در تمام نقاط روی مرز باید مساوی صفر باشد (شکل ۶.۸)، یعنی

$$q \cdot n_1 = 0 \quad (۸.۵.۸)$$

n_1 بردار واحد عمود بر مرز است. در نمادگذاری اسکالر، این رابطه را در تمام نقاط روی مرز به سهولت می‌توان برحسب پتانسیل سرعت بیان کرد. یعنی

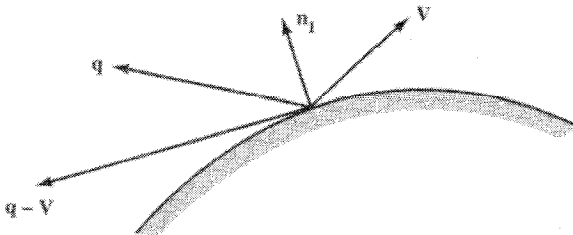
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (۹.۵.۸)$$

در مرز متحرک (شکل ۷.۸)، که سرعت نقطهٔ مرزی مساوی V است، مؤلفهٔ سرعت سیال در جهت عمود بر مرز باید مساوی سرعت مرز در جهت عمود بر مرز باشد. بدین ترتیب

$$q \cdot n_1 = V \cdot n_1 \quad (۱۰.۵.۸)$$

یا

$$(q - V) \cdot n_1 = 0 \quad (۱۱.۵.۸)$$



شکل ۷.۸ نماد برای شرط مرزی در مرز متحرک.

در حالتی که دو سیال با هم تماس دارند، به یک شرط مرزی دینامیکی احتیاج است. این شرط این است که فشار در فصل مشترک باید پیوسته باشد. سطح جریان در شارش پایا (مرزهای ثابت) شرط مرز را برآورده می‌کند و آن را می‌توان مرز جامد در نظر گرفت.

تمرینها

۱.۵.۸ محدوده کاربرد تابع جریان استوکس عبارت است از الف) تمام حالت‌های شارش سه‌بعدی سیال ایدئال؛ ب) فقط سیالات ایدئال (غیرچسبنده)؛ ج) فقط شارش بی‌چرخش؛ د) حالت‌های تقارن محوری؛ ه) هیچکدام.

۲.۵.۸ مقدار تابع جریان استوکس در مبدأ به صورت $\psi = 1$ و در $(1, 1, 1)$ به صورت $\psi = 2$ است. تخلیه در سطح بین این نقاط عبارت است از الف) ۱؛ ب) π ؛ ج) 2π ؛ د) ۴؛ ه) هیچکدام.

۳.۵.۸ تابع جریان دوبعدی الف) در امتداد سطح هم‌پتانسیل ثابت است؛ ب) در امتداد خط جریان ثابت است؛ ج) فقط برای شارش بی‌چرخش تعریف می‌شود؛ د) سرعت و فشار را به هم مربوط می‌سازد؛ ه) هیچکدام.

۴.۵.۸ در شارش دوبعدی در نقطه $(0, 2)$ داریم $\psi = 4\text{ft}^2/\text{s}$ و در نقطه $(0, 1)$ داریم $\psi = 2\text{ft}^2/\text{s}$. تخلیه بین این دو نقطه الف) از چپ به راست است؛ ب) 4π (cfs/ft) است؛ ج) 2 (cfs/ft) است؛ د) $\frac{1}{\pi}$ (cfs/ft) است؛ ه) هیچکدام.

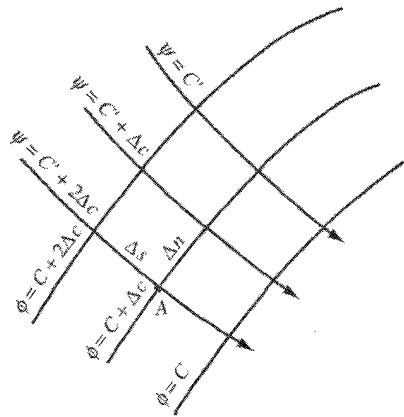
۵.۵.۸ شرط مرزی در شارش پایای سیال ایدئال این است که الف) سرعت در مرز مساوی صفر باشد؛ ب) مؤلفه سرعت در جهت عمود بر مرز صفر باشد؛ ج) مؤلفه سرعت در جهت مماس بر مرز صفر باشد؛ د) سطح مرزی ساکن باشد؛ ه) معادله پیوستگی برآورده شود.

۶.۸ شارشهای دوبعدی

شبکه شارش

به‌طور کلی، توزیع ϕ و ψ با حل معادله لاپلاس به دست می‌آید. در شکل‌های هندسی نامنظم، روش‌های عددی را، که در مرکز روش‌های تقریبی [مرجع ۱] قرار دارند، می‌توان به کار برد.

در نمونه‌های شارش داده‌شده در این قسمت، تعدادی از حل‌های دقیق در شارش‌های با شکل‌های هندسی نسبتاً ساده و شرایط مرزی را می‌توان به دست آورد. توابعی که توزیع فضایی ψ و ϕ را در هر نقطه داخل میدان شارش توصیف می‌کنند به دست می‌آیند. برای تجسم توزیع تابع جریان و تابع پتانسیل معمولاً شبکه شارش رسم می‌شود؛ این شبکه از مجموعه خطوط (یا دوره‌های)



شکل ۸.۸ اجزای شبکه شارش.

ϕ ثابت و خطوط (یا دوره‌های) ψ ثابت تشکیل شده است. یک خط (یا دوره) ϕ ثابت خط هم‌پتانسیل نامیده می‌شود، و به سهولت می‌توان نشان داد که بردار سرعت در همه جا بر خط هم‌پتانسیل عمود است. خط (یا دوره) ψ ثابت همه جا بر بردار سرعت مماس است و همیشه خط هم‌پتانسیل را تحت زوایای قائمه قطع می‌کند. به عبارت دیگر، خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل متعامداند. برای ترسیم شبکه شارش معمولاً (شکل ۸.۸) بین خطوط هم‌پتانسیل یا بین خطوط جریان متناظر تغییرات ثابتی در نظر گرفته می‌شود. سپس، با مراجعه به شکل ۸.۸، با جایگذاری مختصات مکان در توابع $\phi(x, y)$ و $\psi(x, y)$ و با مشتق‌گیری، سرعت u_s را دقیقاً می‌توان یافت. به طریق دیگر، از شبکه شارش می‌توان روابط زیر را تقریب زد

$$u_s \approx -\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = -\frac{-\Delta c}{\Delta s} = \frac{\Delta c}{\Delta s}$$

به طور مشابه در v_s

$$v_s \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta n} = \frac{\Delta c}{\Delta n}$$

در حد وقتی Δn و Δs به صفر نزدیک می‌شوند، تخمین تابعی از حل دقیق به دست می‌آید. با استفاده از معادله برنولی [معادله (۶.۴.۸)] می‌توان ارتفاع فشار دینامیکی آن را یافت.

به علت تشابه بین معادله‌های دیفرانسیل توصیف‌کننده شارش آب زیرزمینی و شارش بی‌چرخش، برای تعیین خطوط جریان و خطوط با ارتفاع پیزومتریک $(h + p/\gamma)$ ثابت در تراوش از محیط متخلخل همگن می‌توان از شبکه شارش استفاده کرد. بنابراین، حالت‌های شارش زیر را نیز می‌توان به صورت شارش بسیار چرخشی، آهسته و چسبنده بیان کرد.

ابتدا دو حالت ساده شارش را، که می‌توان آنها را شارش در امتداد مرزهای مستقیم تعبیر کرد، بررسی می‌کنیم. سپس دربارهٔ چشمه، گرداب، جفت (دوبلت)، شارش یکنواخت، و شارش دور یک استوانه، با گردش و بدون گردش، بحث می‌کنیم.

شارش به دور گوشه

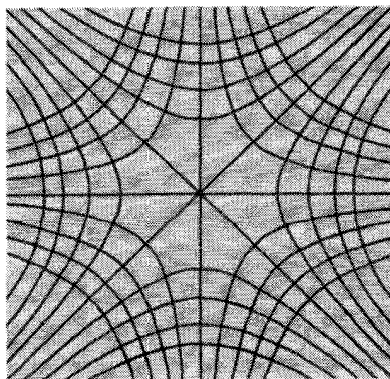
تابع پتانسیل

$$\phi = A(x^2 - y^2)$$

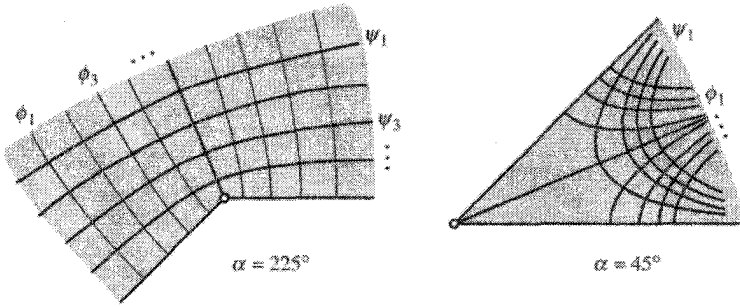
دارای تابع جریان زیر است:

$$\psi = 2Axy = Ar^2 \sin 2\theta$$

که در آن r و θ مختصات قطبی‌اند. این رابطه برای تغییرات نموی یکسان در ϕ و ψ در شکل ۹.۸ رسم شده است. شرایط در مبدأ تعریف نشده‌اند، زیرا نقطهٔ سکون است. چون هر یک از خطوط جریان را می‌توان مرز ثابتی در نظر گرفت، محورهای مثبت را می‌توان دیواره گرفت و در نتیجه شارش به گوشهٔ 90° به دست می‌آید. خطوط هم‌پتانسیل هذلولیهایی‌اند که محورهایشان بر محورهای مختصات منطبق‌اند و مجانبهایشان خطوط $y = \pm x$ هستند. خطوط جریان هذلولیهای راست گوشه‌ای‌اند که $y = \pm x$ محورهایشان، و محورهای مختصات مجانبهای آنها هستند. از صورت قطبی تابع جریان متوجه می‌شویم که دو خط $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ عبارت‌اند از خط جریان $\psi = 0$.



شکل ۹.۸ شبکهٔ شارش برای شارش به دور زانویی 90° .



شکل ۱۰.۸ شبکه شارش برای شارش در امتداد دو سطح مورب.

این حالت را می‌توان تعمیم داد تا شارش به دور یک گوشه با زاویه α به دست آید. با بررسی به دست می‌آید

$$\phi = Ar^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \quad \psi = Ar^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

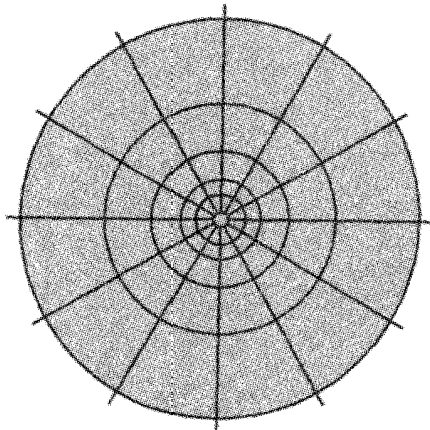
باید توجه داشت که خط جریان $\psi = 0$ در اینجا با $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$ داده می‌شود. در شکل ۱۰.۸، دو شبکه شارش برای حالت‌های $\alpha = 22.5^\circ$ و $\alpha = 45^\circ$ نشان داده شده‌اند.

چشمه و چاه

خط عمود بر صفحه xy ، که فرض می‌شود سیال از آن به‌طور یکنواخت در تمام جهتها به صورت عمود بر آن جریان می‌یابد، چشمه محسوب می‌شود. چشمه در نمودار معمول شارش دوبعدی به صورت نقطه نمایان می‌شود. شارش کل در زمان واحد بر طول واحد خط را توان یا شدت چشمه می‌گویند. چون شارش چشمه در خطوط شعاعی صورت می‌گیرد، سرعت در فاصله r از چشمه به صورت تقسیم بر سطح شارش استوانه، یا $2\pi\mu/2\pi r$ به دست می‌آید، که در آن $2\pi\mu$ توان چشمه است. سپس چون در معادله (۴.۳.۸) سرعت در هر جهتی عبارت است از منهای مشتق پتانسیل سرعت نسبت به آن جهت، داریم

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\mu}{r} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

$$\phi = -\mu \ln r$$



شکل ۱۱.۸ شبکه شارش برای چشمه یا گرداب.

پتانسیل سرعت است که \ln لگاریتم طبیعی و r فاصله از چشمه است. این مقدار ϕ در معادله دوبعدی لاپلاس صدق می‌کند.

خطوط جریان، خطوط شعاعی از چشمه‌اند، یعنی

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r}$$

از معادله دوم داریم

$$\psi = -\mu\theta$$

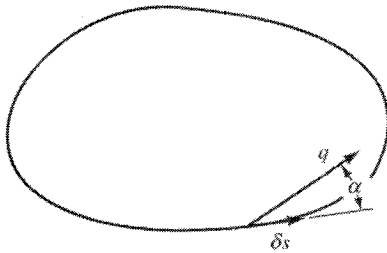
خطوط ϕ ثابت (خطوط هم‌پتانسیل) و ψ ثابت در شکل ۱۱.۸ نشان داده شده‌اند. چاه یک چشمه منفی است، یعنی خطی است که سیال به آن جریان می‌یابد.

گرداب

برای حالت شارشی که از انتخاب تابع جریان برای چشمه به عنوان پتانسیل به دست می‌آید، یعنی

$$\phi = -\mu\theta \quad \psi = \mu \ln r$$

که در معادله لاپلاس نیز صدق می‌کند، دیده می‌شود که خطوط هم‌پتانسیل خطوط شعاعی‌اند و خطوط جریان دایروی‌اند. سرعت فقط در جهت مماسی است، زیرا $\partial\phi/\partial r = 0$. سرعت در



شکل ۱۲.۸ نمادگذاری برای تعریف گردش.

امتداد شعاعی عبارت است از

$$q = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\mu}{r}$$

زیرا جزء طول در جهت مماس است.

در شکل ۱۲.۸ شارش در امتداد منحنی بسته را گردش می‌نامند. شارش در امتداد یک جزء منحنی به صورت حاصل ضرب جزء طول δs از منحنی و مؤلفه سرعت مماس بر منحنی $q \cos \alpha$ تعریف می‌شود. لذا، گردش Γ به دور مسیر بسته C عبارت است از

$$\Gamma = \int_C q \cos \alpha \, ds = \int_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s}$$

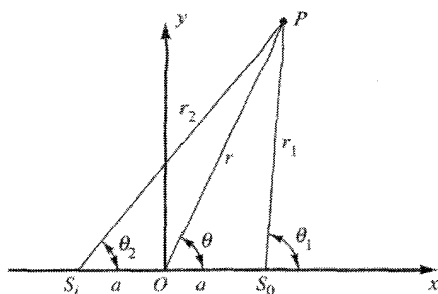
توزیع سرعت حاصل از معادله $\phi = -\mu\theta$ برای گرداب است و به گونه‌ای است که گردش به دور هر مسیر بسته‌ای که حاوی گرداب باشد ثابت است. مقدار گردش عبارت است از توان گرداب. با انتخاب یک مسیر دایروی و شعاع r برای تعیین گردش، داریم $\alpha = 0^\circ$ و $q = \mu/r$ و از این رو $ds = r d\theta$

$$\Gamma = \int_C q \cos \alpha \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{r} r d\theta = 2\pi\mu$$

در نقطه $r = 0$ ، $q = \mu/r$ بی‌نهایت می‌شود؛ از این رو این نقطه را نقطه خاص می‌گویند. شکل ۱۱.۸ خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان برای گرداب را نشان می‌دهد.

جفت

جفت دو بعدی عبارت است از حالت حدی برای وقتی که یک چشمه و چاه با توان مساوی به یکدیگر نزدیک شوند، طوری که حاصل ضرب توان و فاصله بین آنها برابر با ثابت $2\pi\mu$ باشد. μ را



شکل ۱۳.۸ نمادگذاری برای استنتاج جفت دوبعدی.

توان جفت می‌گویند. محور جفت از چاه به طرف چشمه است؛ یعنی خطی است که در امتداد آن چشمه و چاه به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

در شکل ۱۳.۸ یک چشمه در نقطه $(a, 0)$ و یک چاه با همان توان در $(-a, 0)$ قرار دارد. پتانسیل سرعت برای هر دو در نقطه‌ای مانند P عبارت است از

$$\phi = -m \ln r_1 + m \ln r_2$$

که در آن r_1 و r_2 به ترتیب فواصل چشمه و چاه از نقطه P هستند. بنابراین $2\pi m$ توان چشمه و چاه است. در $\mu = 2am$ ، برای حدگیری از ϕ وقتی a به صفر نزدیک می‌شود، صورت ϕ را باید تغییر داد. طبق قانون کسینوس، جملات r_1 و r_2 را می‌توان برحسب مختصات قطبی r و θ به صورت زیر بیان کرد:

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta = r^2 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta = r^2 \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]$$

با جایگذاری این رابطه‌ها در عبارت ϕ نتیجه می‌شود

$$\phi = -\frac{m}{\gamma} (\ln r_1^2 - \ln r_2^2) = -\frac{m}{\gamma} \left\{ \ln r^2 + \ln \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta \right] - \ln r^2 - \ln \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta \right] \right\}$$

عبارت سری

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

می دهد

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{m}{\gamma} \left\{ \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta - \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 - 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]^3 - \dots - \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta \right] \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]^3 - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2\frac{a}{r} \cos \theta \right]^5 + \dots \right\} \end{aligned}$$

بعد از ساده کردن به دست می آید

$$\phi = 2am \left[\frac{\cos \theta}{r} + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{\cos \theta}{r} - \left(\frac{a}{r} \right)^4 \frac{\cos \theta}{r} - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^6 \frac{\cos^3 \theta}{r} + \dots \right]$$

در اینجا، اگر $2am = \mu$ ، و اگر وقتی a به صفر نزدیک می شود حد بگیریم، خواهیم داشت

$$\phi = \frac{\mu \cos \theta}{r}$$

این رابطه پتانسیل سرعت برای جفت دو بعدی در مبدأ با محور در جهت $+x$ است. با استفاده از رابطه های

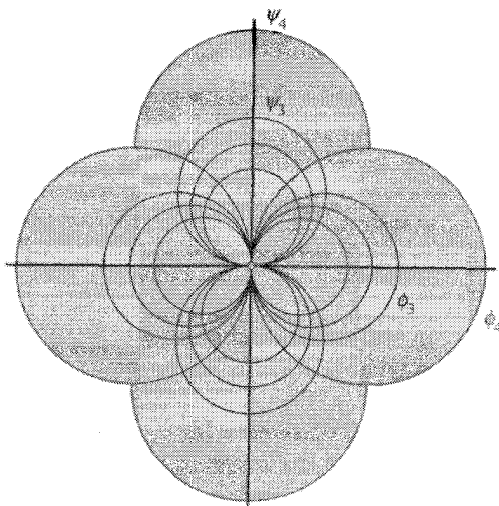
$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

برای جفت به دست می آوریم

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\mu \cos \theta}{r} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} \sin \theta$$

حال انتگرال می گیریم

$$\psi = -\frac{\mu \sin \theta}{r}$$



شکل ۱۴.۸ خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان برای جفت دو بعدی.

این رابطه، تابع جریان برای جفت است. معادله‌ها در مختصات دکارتی به صورت زیرند:

$$\phi = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \quad \psi = -\frac{\mu y}{x^2 + y^2}$$

پس از مرتب کردن نتیجه می‌گیریم

$$\left(x - \frac{\mu}{2\phi}\right)^2 + y^2 = \frac{\mu^2}{4\phi^2} \quad x^2 + \left(y + \frac{\mu}{2\psi}\right)^2 = \frac{\mu^2}{4\psi^2}$$

خطوط ϕ ثابت، دایره‌های ماربر مبدأ هستند که مراکز آنها روی محور x است؛ و خطوط جریان، دایره‌های ماربر مبدأ هستند که مراکز آنها روی محور y است. این را در شکل ۱۴.۸ نشان داده‌ایم. مبدأ یک نقطه خاص است که در آن سرعت بی‌نهایت می‌شود.

شارش یکنواخت

شارش یکنواخت در جهت $-x$ ، $u = -U$ ، با روابط زیر بیان می‌شود:

$$\phi = Ux \quad \psi = Uy$$

در مختصات قطبی داریم

$$\phi = Ur \cos \theta \quad \psi = Ur \sin \theta$$

شارش به دور استوانهٔ دوار

جمع شارش ناشی از جفت و شارش یکنواخت باعث شارش به دور استوانهٔ دوار می‌شود؛ بنابراین

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{\mu \cos \theta}{r} \quad \psi = Ur \sin \theta - \frac{\mu \sin \theta}{r}$$

چون خط جریان در شارش پایا یک مرز ممکن است، خط جریان $\psi = 0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$0 = \left(Ur - \frac{\mu}{r} \right) \sin \theta$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از π ، $\theta = 0$ و یا مقداری از r که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$Ur - \frac{\mu}{r} = 0$$

اگر این مقدار $r = a$ باشد، که یک استوانهٔ دوار است، خواهیم داشت

$$\mu = Ua^2$$

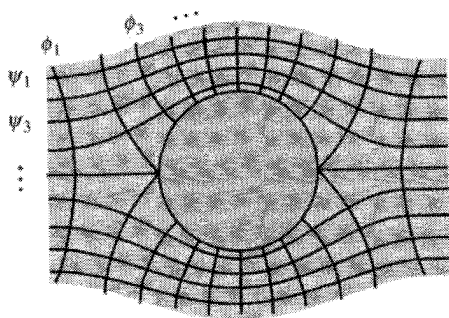
و خط جریان $\psi = 0$ عبارت است از محور x و دایرهٔ $r = a$. با جایگذاری مقدار μ ، توابع پتانسیل و جریان برای شارش یکنواخت به دور استوانهٔ دواری به شعاع a به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad \psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

که برای شارش یکنواخت در جهت $-x$ هستند. خطوط همپتانسیل و خطوط جریان را برای این حالت در شکل ۱۵.۸ نشان داده‌ایم.

سرعت هر نقطه از شارش را می‌توان یا از پتانسیل سرعت و یا از تابع جریان به دست آورد. سرعت بر سطح استوانه لزوماً مماسی است و در $r = a$ به صورت $\partial\psi/\partial r$ است؛ بدین ترتیب

$$q \Big|_{r=a} = U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \Big|_{r=a} = 2U \sin \theta$$



شکل ۱۵.۸ خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان برای شارش به دور استوانهٔ دوار.

سرعت در $\theta = 0, \pi$ ، مساوی صفر است (نقطهٔ سکون) و در $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ دارای ماکزیم مقدار $2U$ است. با صفر بودن فشار دینامیکی در بی‌نهایت، از معادلهٔ (۷.۴.۸) در $\theta = 0$ و $p_0 = U^2$ داریم

$$p = \frac{\rho}{2} U^2 \left[1 - \left(\frac{q}{U} \right)^2 \right]$$

که برای هر نقطه‌ای در صفحه بجز مبدأ صدق می‌کند. برای نقاط روی استوانه داریم

$$p = \frac{\rho}{2} U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

فشار ماکزیم، که در نقاط سکون رخ می‌دهد، مساوی $\rho U^2/2$ است؛ و فشار مینیم، که در $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ رخ می‌دهد، مساوی $-\rho U^2/2$ است. نقاط فشار دینامیکی صفر از رابطهٔ $\sin \theta = \pm 1/2$ به دست می‌آیند و عبارت‌اند از $\theta = \pm \pi/6, \pm 5\pi/6$. لولهٔ استوانه‌ای پیتوت استاتیکی را به این طریق می‌سازند که سه سوراخ در استوانه در نقاط 0° و $\pm 30^\circ$ ایجاد می‌کنند، به طوری که اختلاف فشار بین 0° و $\pm 30^\circ$ معادل فشار دینامیکی $\rho U^2/2$ باشد.

با انتگرال‌گیری از مؤلفهٔ x نیروی فشاری بر استوانه، می‌توان ثابت کرد که پسا وارد بر استوانه مساوی صفر است؛ بدین ترتیب

$$پسا = \int_0^{2\pi} p a \cos \theta d\theta = \frac{\rho a U^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = 0$$

به طریق مشابه، نیروی بر ازای وارد بر استوانه مساوی صفر است.

شارش به دور استوانه دوار با گردش

جمع گرداب با جفت و شارش یکنواخت باعث شارش به دور استوانه دوار با گردش می‌شود

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

خط جریان $\psi = (\Gamma/2\pi) \ln a$ یک استوانه دوار $r = a$ است. در فواصل زیاد از مبدأ، سرعت مساوی $u = -U$ می‌ماند، که نشان می‌دهد شارش به دور استوانه دوار با افزودن گرداب برقرار می‌ماند. بعضی از خطوط جریان در شکل ۱۶.۸ نشان داده شده‌اند. سرعت در سطح استوانه، که لزوماً بر استوانه مماس است، عبارت است از

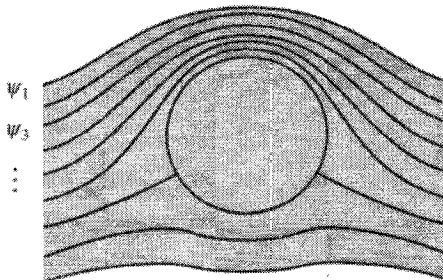
$$q = \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} = 2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

وقتی $q = 0$ ، نقاط سکون پدید می‌آیند؛ یعنی

$$\sin \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi U a}$$

وقتی گردش $4\pi U a$ است، دو نقطه سکون در $r = a$ و $\theta = -\pi/2$ برهم منطبق‌اند. برای گردشهای بزرگتر، نقطه سکون از استوانه دور می‌شود. فشار در سطح استوانه عبارت است از

$$p = \frac{\rho U^2}{2} \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right]$$



شکل ۱۶.۸ خطوط جریان برای شارش به دور استوانه دوار با گردش.

نیروی پسا بازهم صفر است، ولی نیروی برا می‌شود

$$\begin{aligned} \text{برای} &= - \int_0^{2\pi} pa \sin \theta d\theta \\ &= - \frac{\rho a U^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right] \sin \theta d\theta = \rho U \Gamma \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که برا نسبت مستقیم با چگالی سیال دارد؛ سرعت نزدیکی U و گردش Γ است. این پیشرانه، که عمود بر سرعت نزدیکی اثر می‌کند، به اثر ماگنوس موسوم است. گردای کشتی فلتزر بر اساس استفاده از این اصل طراحی شد. به این ترتیب که استوانه‌های دوار با محورهایی عمودی بر کشتی نصب می‌شوند و سپس استوانه‌ها به‌طور مکانیکی به چرخش در می‌آیند تا گردش به‌وجود آید. شارش هوا به دور گرداها باعث پیشرانه در جهت عمود بر جهت نسبی باد می‌شود. فاصله اندک خطوط جریان در امتداد وجه فوقانی شکل ۱۶.۸ نشان می‌دهد که سرعت در آنجا زیاد است و بنابراین فشار در آنجا باید کم باشد.

شارش نظری به دور استوانه دوار با گردش را می‌توان با شارش به‌دور برگه هوابری با همان گردش و برازایی آن تبدیل کرد [مرجع ۲]. برازایی برگه هوا بر اثر گردش به دورش، که ناشی از شکل آن است، به‌وجود می‌آید. می‌توان نشان داد [مرجع ۲] که برازایی هر استوانه‌ای در شارش دوبعدی مساوی $\rho U \Gamma$ است. زاویه شیب برگه هوا بر نسبت به سرعت نزدیکی (زاویه حمله) شدیداً بر گردش اثر می‌گذارد. در زوایای بزرگ حمله، شارش از پروفیل بال تبعیت نمی‌کند و نظریه نقض می‌شود. تمام حالت‌های شارش دوبعدی سیال ایدئال را می‌توان به‌طور مناسبی با نظریه متغیرهای مختلط و با دستگاه نگاشت هم‌دیس بررسی کرد. نگاشت هم‌دیس توسط یک تابع مناسب نگاشت متغیرهای مختلط، شبکه شارش را از شکلی به شکل دیگر مبدل می‌سازد.

مثال ۳.۸ یک چشمه به توان $2 \text{ m}^3/\text{s}$ و یک گرداب با توان $1 \text{ m}^2/\text{s}$ در مبدأ قرار دارند. معادله‌های پتانسیل سرعت و تابع جریان را به دست آورید. مؤلفه‌های سرعت در $x = 1 \text{ m}$ و $y = 0.5 \text{ m}$ چه هستند؟

حل

پتانسیل سرعت چشمه عبارت است از

$$\phi = - \frac{0.2}{2\pi} \ln r \quad \text{m}^2/\text{s}$$

و تابع جریان متناظر با آن

$$\psi = -\frac{v_0^2}{2\pi} \theta \quad \text{m}^2/\text{s}$$

پتانسیل سرعت گرداب عبارت است از

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \theta \quad \text{m}^2/\text{s}$$

و تابع جریان متناظر با آن

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \text{m}^2/\text{s}$$

با جمع توابع به ترتیب به دست می‌آید

$$\psi = -\frac{1}{\pi} \left(v_0 r \theta - \frac{1}{2} \ln r \right) \quad \text{و} \quad \phi = -\frac{1}{\pi} \left(v_0 r \ln r + \frac{\theta}{2} \right)$$

مؤلفه‌های شعاعی و مماسی سرعت عبارت‌اند از

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{10\pi r} \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2\pi r}$$

در نقطه $(r, \theta) = (1, 0^\circ)$ داریم $r = \sqrt{1^2 + 0.5^2} = 1.117\text{m}$ $v_r = 0.285\text{m/s}$ و $v_\theta = 0.143\text{m/s}$

مثال ۴.۸ یک استوانه مدور به قطر ۲m و به طول ۲۰m با ۱۲۰ rpm در جهت مثبت (پادساعتگرد) حول محور خود می‌چرخد. مرکز آن در مبدأ دستگاه مختصات دکارتی است. باد با ۱۰m/s در جهت مثبت x روی استوانه می‌وزد؛ $t = 20^\circ\text{C}$ و مطلق $P = 10\text{kPa}$. برا مؤثر بر استوانه را بیابید.

حل

در نقطه سکون $\psi = 0$ است. با انتخاب نمونه‌های R ، می‌توان θ را از رابطه زیر به دست می‌آورد

$$\sin \theta = \frac{-\Gamma}{2\pi U} \frac{\ln R}{R - \frac{1}{R}}$$

برا با $\rho U \Gamma L$ داده می‌شود.

تمرینها

۱.۶.۸ رابطه‌ای را انتخاب کنید که باید در شارش بی‌چرخش دوبعدی برقرار باشد:
 الف) $\partial\theta/\partial x = \partial\psi/\partial y$ ؛ ب) $\partial\phi/\partial x = -\partial\psi/\partial y$ ؛ ج) $\partial\phi/\partial y = \partial\psi/\partial x$ ؛
 د) $\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۶.۸ چشمه در شارش دوبعدی الف) نقطه‌ای است که فرض می‌شود سیال در تمام جهتها به‌طور یکنواخت از آن خارج می‌شود؛ ب) خطی است که فرض می‌شود سیال در تمام جهتها به صورت عمودی از آن به‌طور یکنواخت جریان می‌یابد؛ ج) قدرتی دارد که به صورت سرعت در شعاع واحد تعریف می‌شود؛ د) خطوط جریانی دارد که دایره‌های هم‌مرکزند؛ ه) پتانسیل سرعتی مستقل از شعاع دارد.

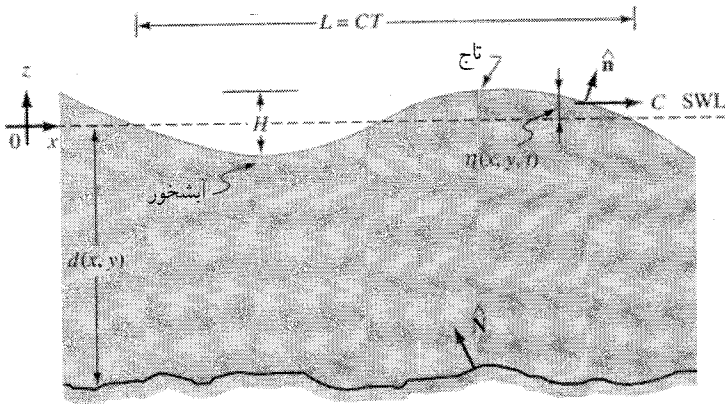
۳.۶.۸ گرداب دوبعدی الف) قدرتی دارد که با گردش به دور مسیری شامل گرداب به دست می‌آید؛ ب) خطوط جریان شعاعی دارد؛ ج) گردش به دور آن مساوی صفر است؛ د) توزیع سرعتی دارد که به‌طور مستقیم با فاصله شعاعی از گرداب تغییر می‌کند؛ ه) توزیع سرعتی به‌وجود می‌آورد که در سرتاسر سیال چرخش دارد.

۷.۸ امواج آب: مسئله مرز متحرک

همانطور که در انتهای بخش ۵.۸ گفته شد، دو فرض اصلی حل‌های دقیق در قسمت ۶.۸ می‌توانند صحت نداشته باشند. در حقیقت، نه تنها شارش می‌تواند غیر پایا باشد بلکه بسیاری از مسائل عملی با میدان شارشی مشخص می‌شوند که در آنها خود مرزها تغییر شکل می‌دهند یا برحسب زمان حرکت می‌کنند. مرزهای متحرک اغلب به ناحیه‌هایی محدود می‌شوند که در آنها گردابها (شیبهای تند چگالی، اگر نه ناپیوسته، در سیال روی می‌دهند، و اغلب این مسائل با تحلیل و پیش‌بینی امواج در سطح مشترک یا در مرکز متحرک سروکار دارند. مثالهایی در این باره عبارت‌اند از امواج آب همیشگی که در ساحل (فصل مشترک هوا-آب) دیده می‌شوند، تغییر شکل موج گونه رسوبهای شاریده واقع در کف رودخانه یا کانال در طی انتقال بار بستر، یا تپه‌های شنی در بیابانها که به توسط باد جابه‌جا می‌شوند.

روشهای اولیه برای پیش‌بینی امواج را ایری [مرجع ۳] و استوکس [مرجع ۴] ارائه کرده‌اند؛ اینها مسئله امواج آب را از طریق تابع پتانسیل متغیر زمانی فرمولبندی و حل کردند. مهندسان ساحل‌شناسی امروزه از نظریه موج خطی برای مسئله سطح آزاد خیلی استفاده می‌کنند.

در شکل ۱۷.۸ طرحواره‌ای از میدان شارش صفحه‌ای عمودی دوبعدی و اصطلاحات آن آورده شده‌اند. در حالی که به‌چگونگی تشکیل سطح موج کاری نداریم، توجه می‌کنیم که موج پیشرونده با سرعت موج یا سرعت فاز، C به سمت راست حرکت می‌کند. عمق آب از کف تا



شکل ۱۷.۸ طرحواره موج آب.

سطح آب آشفته نشده یا ساکن (SWL)، d است و در این قسمت ثابت فرض می‌شود. تشکیل سطح آزاد متغیر برحسب زمان و فضا نسبت به SWL اندازه‌گیری می‌شود و با $\eta(x, y, t)$ نشان داده می‌شود. فاصله بین ارتفاع ماکزیمم (تاج) و ارتفاع مینیمم (آبشخور) ارتفاع موج، H ، نامیده می‌شود. ناظر ثابت در مبدأ می‌بیند که شکل موج خودش را در یک دوره، T ، تکرار می‌کند و طول موج L یا فاصله بین تاجهای متوالی به صورت زیر است

$$L = CT$$

که در آن C سرعت موج است. عمودهای واحد، \mathbf{n} و \mathbf{N} ، به ترتیب متناظر با کف و سطح‌اند.

اولین و مهمترین فرض بنیادی، شارش بی‌اصطکاک یا بی‌چرخش است که در این حالت می‌توان تابع پتانسیل را با انتگرال‌گیری از معادله لاپلاس [معادله‌های (۶.۳.۸) و (۷.۳.۸)] به دست آورد، یعنی،

$$\nabla^2 \phi = 0$$

شرایط مرزی زیر لازم است. با مراجعه به معادله (۸.۵.۸) و شکل ۶.۸ ذرات سیال نمی‌توانند از مرز جامد در کف عبور کنند. بنابراین،

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial N} = 0 \quad (1.7.8)$$

مرز در سطح آزاد حرکت می‌کند و وضعیت آن را با حل مسئله می‌توان یافت؛ بنابراین، مسئله خیلی غیرخطی است. در ارتباط با معادله (۱۰.۵.۸) و شکل ۷.۸ شرط سینماتیکی مرز می‌گوید

که یک ذره سیال در سطح باید در سطح $z = \eta$ بماند، یعنی،

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \quad (۲.۷.۸)$$

این شرط مرزی را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\mathbf{q} \Big|_{z=\eta} = -\nabla\phi \Big|_{z=\eta} = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{z=\eta} \quad (۳.۷.۸)$$

دوباره توجه کنید که این شرط مرزی در سطح آزاد $z = \eta$ ، که مکان آن مجهول است، به کار می‌رود.

شرط نهایی شرط دینامیکی سطح است. در اینجا فشار مؤثر بر سطح آب فشار پیمانه‌ای صفر فرض می‌شود، و از آنجا که بردار سرعت در سطح آزاد همه جا بر آن مماس است، سطح آزاد یک خط جریان است و معادله برنولی [معادله (۴.۴.۸)] به کار می‌رود، یعنی،

$$\frac{p}{\rho} + g\eta + \frac{q^2}{2} - \frac{\partial\phi}{\partial t} = F(t)$$

اگر مبنا در سطح آزاد گرفته شود، در این صورت $F(t) = 0$ ، و اگر فشار پیمانه‌ای باشد، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{q^2}{2} + g\eta - \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (۴.۷.۸)$$

در اینجا مسئله، به علت مکان نامعلوم سطح آزاد و وجود جمله $q^2/2$ انرژی جنبشی در شرط دینامیکی سطح، خیلی غیرخطی است.

برای خطی کردن مسئله دو فرض ساده‌کننده در نظر گرفته می‌شود. ابتدا، به فرض دامنه کوچک متوسل می‌شویم که در آن η خیلی کوچکتر از طول موج L فرض می‌شود. برای انجام این کار می‌توان شرط سینماتیکی [معادله (۳.۷.۸)] را با کاربرد در $z = 0$ (SWL)، به جای سطح آزاد، تقریب زد؛ یعنی،

$$\mathbf{q} \Big|_{z=\eta} \approx \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (۵.۷.۸)$$

فرض دوم، با صرف نظر از جمله $q^2/2$ بر مبنای اندازه کوچک آن در مقایسه با جمله‌های دیگر، شرط دینامیکی را خطی می‌کند. در نتیجه،

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (۶.۷.۸)$$

در کتابهای درسی اقیانوس‌شناسی و ساحل‌شناسی این فرضها با تفصیل بیشتر مرور می‌شوند اما نشان می‌دهند که این فرضها برای $H/L \leq 1/5$ صحت دارند. تقریباً 5° درصد توزیع کامل انرژی موج در رده خطی قرار می‌گیرد.

دو شرط سطح آزاد خطی شده [معادله‌های (۵.۷.۸) و (۶.۷.۸)] را با حذف η می‌توان با هم ترکیب کرد و به دست آورد

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

که تقریباً در $z = 0$ صحت دارد. اکنون معادله (۶.۷.۸) همراه با معادله لاپلاس [معادله‌های (۷.۳.۸) و (۱.۷.۸)] انتگرال‌گیری می‌شوند و تابع پتانسیل زیر برای موج راستگرد به دست می‌آید

$$\phi(x, z, t) = \left(\frac{\pi H}{kT} \right) \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (۷.۷.۸)$$

که در آن $k = 2\pi/L$ عدد موج و $\omega = 2\pi/T$ فرکانس دایره‌ای نامیده می‌شود. با جایگذاری معادله (۷.۷.۸) در معادله (۶.۷.۸) برای موج راستگرد، همچنین وضعیت سطح آزاد پیدا می‌شود

$$\eta(x, t) = \frac{H}{\gamma} \cos(kx - \omega t) \quad (۸.۷.۸)$$

برای تعیین سرعت موج، آرگومان $(kx - \omega t)$ را به صورت $k(x - Ct)$ می‌توان نوشت که در آن C سرعت موج است. با جایگذاری معادله (۷.۷.۸) در شرط مرزی (۶.۷.۸) و با ارزیابی آن در $z = 0$ ، سرعت موج C را که برای حفظ یک مکان ثابت روی منحنی پوش موج لازم است به دست می‌آوریم. سرعت موج حاصل عبارت است از

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh kd \quad (۹.۷.۸)$$

بنابراین، سرعت موج تابعی از عمق و طول موج است. وقتی عمق نسبی $d/L > 1/2$ ، در این صورت حالت آب عمیق به دست می‌آید که در آن

$$C^2 = \frac{g}{k} \quad (10.7.8)$$

وقتی $d/L < 1/2$ ، موج آب کم عمق به دست می‌آید با

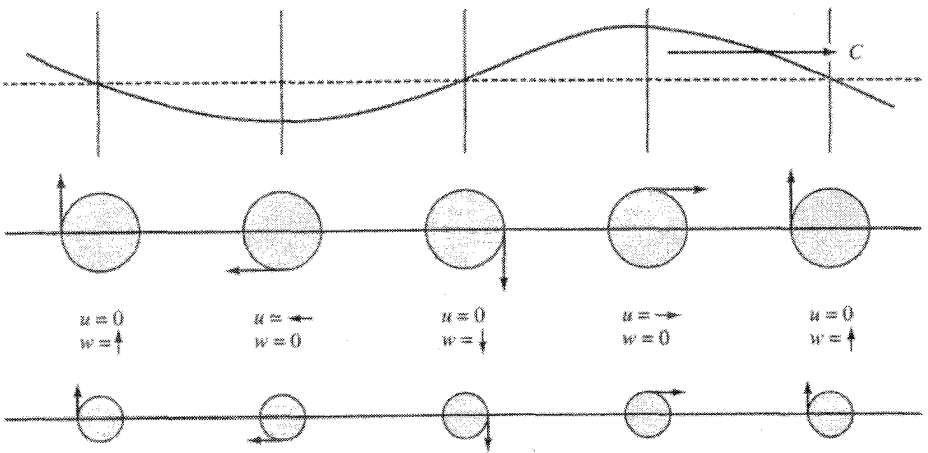
$$C^2 = gd \quad (11.7.8)$$

بالاخره، سرعتهای محلی سیال با مشتق‌گیری از تابع پتانسیل پیدا می‌شوند؛ در نتیجه

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{HgT}{2L} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \omega t) \quad (12.7.8)$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{HgT}{2L} \frac{\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (13.7.8)$$

در شکل ۱۸.۸ طرحواره‌ای از بردار سرعت کل در دو عمق در ستون آب برای مکانهای مختلف (مقادیر ثابت آرگون $kx - \omega t$) در طی یک موج کامل نشان داده شده است. همانطور که



شکل ۱۸.۸ بردارهای سرعت کل در دو عمق برحسب مکان افقی.

در مثال ۳.۴ نشان داده شد، توابع سرعت توابع متناوبی است که دامنه آنها با عمق تغییر می‌کند؛ یعنی،

$$u = A(z) \cos(kx - \omega t)$$

$$w = B(z) \sin(kx - \omega t)$$

بنابراین، در هر آرگومان یا مکان ثابت بردارهای ثابت جهت یکسان دارند اما با افزایش عمق به طرف کف مقدار آنها کاهش می‌یابد.

در هر عمق ثابت بردار سرعت کل برحسب مکان زیر موج تغییر وضعیف می‌دهد. وقتی $kx - \omega t$ برابر است با 0° یا π یا 2π رادیان، حداکثر و حداقل ارتفاعها روی می‌دهند و بردار سرعت کل افقی است، در تاج مثبت یا راست‌رو است و در تاج منفی یا چپگرد است. در $\pi/2$ یا $3\pi/2$ وقتی $0^\circ = \eta$ ، حداکثر سرعتهای عمودی به دست می‌آیند، و برای $\pi/2$ مثبت است، و برای $3\pi/2$ منفی است.

با نگاه به این شکل توجه کنید که بردارهای سرعت کل از 0° تا 2π در جهت پادساعتگرد پیش می‌روند. سپس ظاهر می‌شود مثل اینکه هیچ‌گونه حرکت توده سیال در جهت پیشروی موج وجود نداشته است. این خیالی نیست زیرا تحلیل مسیر ذره بر مبنای انتگرال‌گیری از میدان سرعت چنین نتیجه‌ای می‌دهد. وقتی موج در سیال حرکت می‌کند هیچ انتقال جرم سیال روی نمی‌دهد. تنها انتقالی که روی می‌دهد گسیل انرژی جنبشی و پتانسیل است. بحث تخصصی‌تر درباره این جنبه‌ها را در کتابهای درسی مهندسی ساحل‌شناسی یا اقیانوس‌شناسی [مراجع ۵ و ۶] می‌توان یافت.

تمرینها

۱.۷.۸ در سطح آب موج پیشرونده (الف) سطح آب یک خط جریان است؛ (ب) سرعت غیرصفر است و با شرط مرزی سینماتیکی مشخص می‌شود؛ (ج) برای مقاصد اولیه فرض می‌شود که فشار تغییر نمی‌کند؛ (د) معادله برنولی به کار می‌رود؛ (ه) تمام جوابهای بالا.

۲.۷.۸ فرضهای موج خطی‌شده، با دامنه کوچک (الف) برای 5° درصد طیف موج مهندسی صحت دارند؛ (ب) فرض می‌شود که ارتفاع سطح آزاد خیلی کمتر از طول موج است؛ (ج) فرض می‌شود که هد انرژی جنبشی در معادله برنولی که در سطح به کار می‌رود در مقایسه با جمله‌های دیگر کاملاً کوچک است؛ (د) تحلیل موج محدود شود به امواج آب با عمق کمتر از ۵ متر؛ (ه) تمام جوابهای بالا به غیر از (د).

۳.۷.۸ در ارتباط با سرعت موج الف) سرعتهای افقی و عمودی 90° اختلاف فاز دارند؛ ب) سرعت موج آب عمیق به طور خطی با طول موج متناسب است؛ ج) سرعت موج آب کم عمق متناسب با عمق است؛ د) سرعت موج آب کم عمق در عمق 2.71 m برابر کمتر از سرعت همان موج آب در عمق 3 m است؛ ه) امواج عظیم دریایی با طول موج 4000 km که در عمق 5 km ایجاد می شوند با سرعت 221 m/s به عنوان موج آب کم عمق حرکت می کنند؛ و) فقط الف) و ه).

مسائل

۱.۸ گرادیان توابع اسکالر دویبعدی زیر را محاسبه کنید:

الف) $\phi = -2 \ln(x^2 + y^2)$ ؛ ب) $\phi = Ux + Vy$ ؛ ج) $\phi = 2xy$.

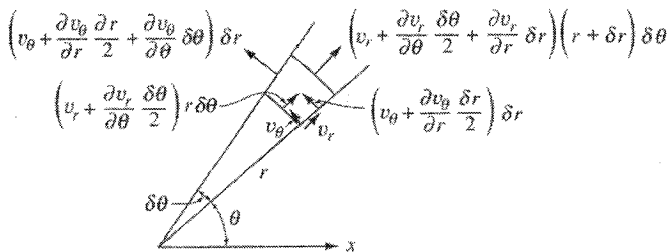
۲.۸ دیورژانس گرادینهای ϕ به دست آمده در مسئله ۱.۸ را محاسبه کنید.

۳.۸ تاو گرادینهای ϕ به دست آمده در مسئله ۱.۸ را محاسبه کنید.

۴.۸ برای $\mathbf{q} = \mathbf{i}(x+y) + \mathbf{j}(y+z) + \mathbf{k}(x^2+y^2+z^2)$ مؤلفه های دوران را در $(2, 2, 2)$ پیدا کنید.

۵.۸ با مساوی صفر قرار دادن شار خالص از یک جزء کوچک قطبی (شکل ۱۹.۸)، معادله پیوستگی را برای شارش دویبعدی در مختصات قطبی استنتاج کنید. معادله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$



شکل ۱۹.۸ مسائل ۵.۸ و ۱۰.۸.

۶.۸ مؤلفه x سرعت عبارت است از $u = x^2 + z^2 + 5$ ، و مؤلفه y عبارت است از $v = y^2 + z^2$.

مطلوب است ساده ترین مؤلفه z سرعت که در معادله پیوستگی صدق می کند.

۷.۸ پتانسیل سرعت در یک شارش دویبعدی عبارت است از $\phi = y + x^2 - y^2$. تابع جریان را برای این شارش پیدا کنید.

۸.۸ تابع جریان دوبعدی برای یک شارش عبارت است از $\psi = 9 + 6x - 4y + 7xy$. پتانسیل سرعت را پیدا کنید.

۹.۸ معادله‌های دیفرانسیل جزئی ربط‌دهنده ϕ و ψ را در مختصات قطبی صفحه‌ای بیابید.

۱۰.۸ از معادله پیوستگی در مختصات قطبی در مسئله ۵.۸، معادله لاپلاس را در همان دستگاه مختصات استنتاج کنید.

۱۱.۸ آیا تابع $\phi = 1/r$ در معادله لاپلاس دوبعدی صدق می‌کند؟ در شارش سه‌بعدی چطور؟

۱۲.۸ با استفاده از معادله‌های مسئله ۹.۸، تابع جریان دوبعدی را برای $\phi = \ln r$ پیدا کنید.

۱۳.۸ تابع جریان استوکس را برای $\phi = 1/r$ پیدا کنید.

۱۴.۸ برای تابع جریان استوکس $\psi = 9r^2 \sin^2 \theta$ ، ϕ را در مختصات دکارتی پیدا کنید.

۱۵.۸ در مسئله ۱۴.۸، تخلیه بین سطوح جریان ماربر نقاط $r = 1$ و $\theta = 0$ ، $r = 1$ و $\theta = \pi/4$ چیست؟

۱۶.۸ شرایط مرزی شارش پایا به دور یک کره به شعاع a را در سطح آن در بی‌نهایت بنویسید.

۱۷.۸ مرکز یک استوانه دوار به شعاع a در مبدأ مختصات است و استوانه با سرعت V در جهت y حرکت انتقالی دارد. شرط مرزی را در سطح آن و در بی‌نهایت برحسب ϕ بنویسید.

۱۸.۸ استوانه دواری به قطر ۸ft با سرعت ۵۰ rpm دوران می‌کند. وقتی استوانه در جریان هوا، $\rho = 0.02 \text{ slug/ft}^3$ ، با سرعت ۴۰ ft/s حرکت کند، نیروی بالا برنده بر هر متر طول استوانه چقدر است؟ بازده حصول گردش از دوران استوانه، ۹۰ درصد فرض می‌شود.

۱۹.۸ نشان دهید که اگر توابع جریان ψ_1 و ψ_2 در معادله لاپلاس صدق کنند، برای $\psi = \psi_1 + \psi_2$ خواهیم داشت $\nabla^2 \psi = 0$.

۲۰.۸ نشان دهید که اگر v_1, u_1 و v_2, u_2 مؤلفه‌های سرعت دو پتانسیل سرعت ϕ_1 و ϕ_2 که در معادله لاپلاس صدق می‌کنند باشند، مؤلفه‌های سرعت $\phi = \phi_1 + \phi_2$ عبارت‌اند از $v = v_1 + v_2$ و $u = u_1 + u_2$.

۲۱.۸ چشمه‌ای دوبعدی در $(1, 0)$ و چشمه دیگری با همان توان در $(-1, 0)$ قرار دارد. بردار سرعت را در نقاط $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(0, -1)$ ، $(0, 2)$ ، $(0, -2)$ ، $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ رسم کنید. (راهنمایی: با استفاده از نتایج مسئله ۲۰.۸، تک‌تک مؤلفه‌های سرعت مربوط به یک چشمه را که از شدت و محل آن ناشی می‌شوند در نقطه مورد بحث با هم جمع کنید، بدون اینکه چشمه دیگر را در نظر بگیرید، و به این طریق مؤلفه‌های سرعت را رسم کنید.)

۲۲.۸ پتانسیل سرعت را برای چشمه‌ای در $(1, 0)$ تعیین کنید. معادله پتانسیل سرعت را برای دستگاه چشمه مسئله ۲۱.۸ بنویسید.

۲۳.۸ مجموعه‌ای از خطوط جریان برای هریک از چشمه‌های مسئله ۲۱.۸ رسم کنید و با کمک

این نمودار خطوط جریان شارش مرکب را رسم کنید. (راهنمایی: برای هریک از چشمه‌ها خطوط جریانی رسم کنید که با یکدیگر زاویه $\pi/6$ دارند. در آخر، نقاط تلاقی خطوطی را که $\psi_1 + \psi_2$ آنها ثابت است با هم ترکیب کنید.)

۲۴.۸ آیا خط $x = 0$ در میدان شارش توصیف شده در مسئله ۲۱.۸ خطی است که در جهت عمود بر آن، مؤلفه سرعتی وجود ندارد؟ آیا این خط یک خط جریان است؟ آیا این خط می‌تواند رد یک صفحه جامد پوسته‌ای باشد که در شارش غوطه‌ور است؟ آیا پتانسیل سرعت که در مسئله ۲۲.۸ به دست آمده است شارش یک چشمه در ناحیه $x > 0$ را که در فاصله واحد از یک دیوار مسطح است توصیف می‌کند؟ جوابهای خود را توجیه کنید.

۲۵.۸ معادله سرعت روی خط $x = 0$ را برای شارش توصیف شده در مسئله ۲۱.۸ به دست آورید. معادله فشار را روی سطحی که رد آن $x = 0$ است پیدا کنید. نیروی ناشی از یک چشمه را که در فاصله واحد از این صفحه قرار دارد بر یک طرف صفحه به دست آورید. سیال آب است. ۲۶.۸ در شارش دوبعدی، نوع شارش داده شده با $\phi = \gamma x + 2 \ln r$ چیست؟

۲۷.۸ با استفاده از روشی شبیه روش پیشنهادی مسئله ۲۳.۸، خطوط پتانسیل را برای شارش داده شده در مسئله ۲۶.۸ رسم کنید.

۲۸.۸ با استفاده از توصیه مسئله ۲۳.۸، یک شبکه شارش برای شارشی مرکب از یک چشمه و یک گرداب که در مبدأ قرار دارند رسم کنید. برای چشمه و گرداب از یک μ استفاده کنید.

۲۹.۸ یک چشمه با تخلیه 20 cfs/ft در $(0, -1)$ ، و یک چاه با توان دوبرابر در $(0, 2)$ قرار دارد. اگر فشار دینامیکی در مبدأ 10° lb/ft^2 ، و $\rho = 1.8 \text{ slug/ft}^3$ باشد، سرعت و فشار دینامیکی را در $(0, 1)$ و $(1, 1)$ پیدا کنید.

۳۰.۸ توان جفت لازم را برای اینکه شارش یکنواخت 20 m/s به دور یک استوانه به شعاع 2 m را نشان دهد انتخاب کنید.

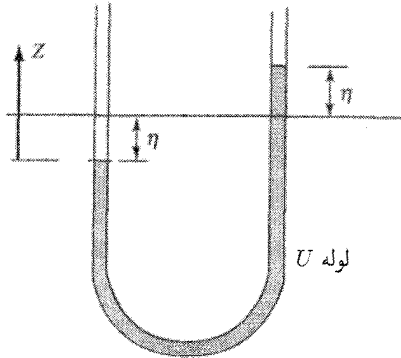
۳۱.۸ معادله‌هایی برای شارش به دور یک استوانه رانکین را نشان دهید که متشکل از یک چشمه، یک چاه با همان توان، و یک شارش یکنواخت است. اگر فاصله بین چشمه و چاه $2a$ و توان آنها $2\pi\mu$ باشد، و سرعت یکنواخت مساوی U باشد، معادله‌ای برای طول جسم بنویسید.

۳۲.۸ مختصات دکارتی نقاط تقاطع خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل را در شکل ۱۰.۸ محاسبه کنید؛ $\alpha = 225^\circ$. قرار دهید $A = 1$ و $\Delta\phi = \Delta\psi = 1$.

۳۳.۸ مختصات دکارتی تقاطع تقاطع شبکه شارش در شکل ۱۵.۸ را فقط برای ربع اول بیابید؛ $R = 1, U = 2, \psi = 0, 1, \dots, 6$ ، و $\phi = 0, 1, \dots, 6$.

۳۴.۸ نشان دهید که سرعتهای داده شده با معادله‌های (۱۲.۷.۸) و (۱۳.۷.۸) معادله پیوستگی را برقرار می‌کند.

۳۵.۸ اگر آب در لوله U (شکل ۲۰.۸) بر اثر فشار وارده بر یکی از شاخه‌های لوله نوسان کند، شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد و در شاخه دیگر را به دست آورید. فرض کنید نیروی فشاری وارد شکل سینوسی دارد.



شکل ۲۰.۸ مسئله ۳۵.۸.

۳۶.۸ به تفصیل نشان دهید که چگونه سرعت موج در معادله (۹.۷.۸) با معادله (۱۱.۷.۸) در آب کم عمق داده می‌شود. (راهنمایی: $e^{\pm kd} \approx 1 \pm kd + O(kd)^2$).

۳۷.۸ به تفصیل نشان دهید که چگونه سرعت موج داده شده در معادله (۹.۷.۸) برای آب عمیق به $C^2 = g/k$ تبدیل می‌شود.

۳۸.۸ امواج عظیم دریایی از تغییر مکان ناگهانی کف دریا بر اثر زلزله ناشی می‌شود. اگر کف دریا به ۱ft سقوط کند، و در نتیجه دامنه ۱ft برای سطح ایجاد شود، با استفاده از نظریه موج خطی سرعت موج حاصل را تخمین بزنید. فرض کنید عمق حوزه دریا ۱۵۰۰۰ft است. (راهنمایی: موج دریایی اساساً تک‌موجی با طول موج بی‌نهایت است، و همین مطلب به تعیین دوره آن کمک می‌کند).

۳۹.۸ نمودار زمانی سرعت‌های w و u را در نقطه ۲ft زیر سطح آزاد و ۲ft جلوی تاج موج، برای یک دوره، رسم کنید. از $t = 0$ استفاده کنید.

۴۰.۸ در یک مخزن موج به طول ۶۰۰ft و به عمق ۶۰ft، که تا عمق ۲۰ft از آب پر شده است، موج خطی به ارتفاع ۱ft و با دوره ۴ ثانیه با یک پره ایجاد می‌شود. سرعت موج، طول موج، عدد موج، و فرکانس موج را بیابید.

۴۱.۸ ثابت کنید که معادله (۷.۷.۸) در حقیقت حل معادله لاپلاس است.

۴۲.۸ وقتی دو موج پیشرونده، که در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند، با هم برخورد کنند یک موج ایستاده تشکیل می‌شود. در حوضچه‌ای که در آن موجی به طرف راست در حال حرکت است

و پس از انعکاس از روی دیواره سمت راست یک موج چپ رو به وجود می‌آید که با امواج راست روی در حال پیشروی برخورد می‌کنند و موج ایستاده به وجود می‌آید. موج ایستاده مدل ساده‌ای است که در دریاچه‌ها با عمق یکنواخت، مصب‌ها، و بندرگاهها استفاده می‌شود؛ در این مکانها امواج ایستاده بر اثر باد، یا احتمالاً زلزله وجود می‌آیند و به آنها موجک گفته می‌شود. از نظریه موج خطی برای به دست آوردن شکل ریاضی ساده‌ترین موج ایستاده استفاده کنید.

۴۳.۸ تابع پتانسیل $\phi(x, z, t)$ در معادله (۷.۷.۸) را بر حسب L, C و T بنویسید. سرعتها در معادله‌های (۱۲.۷.۸) و (۱۳.۷.۸) را به همان شکل بنویسید.

مراجع

1. J.H. Ferziger and M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1996.
2. V.L. Streeter, *Fluid Dynamics*, pp. 137–155, McGraw-Hill, New York, 1948.
3. G.B. Airy, "On Tides and Waves," in *Encyclopaedia Metropolitana*, vol. 5, p. 289, 1845.
4. G.G. Stokes, "On the Theory of Oscillatory Waves," in *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 8, pp. 441–455, 1847.
5. B. Kinsman, *Wind Waves, Their Generation and Propagation on the Ocean Surface*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1965.
6. U.S. Army Corps of Engineers, *Shore Protection Manual*, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1984.

انتقال بر اثر فرارفت (ادوکسیون) و پخش

میدانهای شارش که در فصلهای قبل بررسی شدند یا باعث انتقال گرما و انتقال جرم می‌شوند یا تحت تأثیر انتقالها قرار می‌گیرند. در این فصل، میدانهای ساده انتقال گرما و جرم بررسی می‌شوند، و معادله‌های متناظر از فصلهای ۳ و ۴ حل می‌شوند تا توزیعهای عملی دما و غلظت به دست آید. مانند فصلهای قبل، در این فصل فقط به توزیع جرم و گرما در مایعات، با اصول مشخص انتقال گاز که در ارتباط با تغییرات حالت از قبیل تبخیر در نظر گرفته می‌شوند، توجه می‌شود. شارشهای مقدماتی چندعنصری و چندفازه، و اثرات تفصیلی تبادل سطح مشترکی در مرزها در فصل ۱۴ بررسی می‌شوند.

در این فصل، ساده‌ترین مکانیزم انتقال بررسی می‌شود: پخش مولکولی و فرارفت (ادوکسیون) یا همرفت. از معادله‌های (۳.۷.۴) و (۸.۸.۴) پخش مولکولی گرما و جرم با پخشندگی گرمایی ($\alpha = k/\rho c_p$) و ضریب پخش (\mathcal{D})، که هر دو ابعادشان $[L^2/t]$ است، پارامتری می‌شوند. از این ساختارهای ابعادی دیده می‌شود که پخش خالص یک فرایند انتقال با مدت خیلی طولانی است، زیرا می‌توان دید که مقیاس طولی برای پخش در یک زمان معین، T_0 ، متناسب با $(\mathcal{D}T_0)^{1/2}$ است در حالی که مقیاس زمانی متناظر پخش در فاصله L_0 متناسب با L_0^2/\mathcal{D} است. به عنوان مثال، ضریب پخش نوعی برای کلر یا اکسیژن در آب از مرتبه $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ است. بنابراین مقیاس

زمانی پخش از مرتبه 10^4 ثانیه یا تقریباً ۳۲ سال است. به وضوح پخش مولکولی خیلی آهسته است، اما یک عامل انتقال مداوم است.

در مقابل، فرارفت (ادوکسیون) که انتقال ساده جرم یا گرما بر اثر سرعت سیال است، عامل انتقال بسیار پر قدرت تری است. اگر سرعت در یک کانال 14 cm/s باشد، که سرعت نوعی برای بسیاری از جریانهای رودخانه‌ای است، زمان حرکت یک ذره شناور غیر ساکن یا به طور خنثی شناور تقریباً ۷ ثانیه برای طی یک متر مسافت است. بنابراین فرارفت (ادوکسیون)، همرفت، و شارهای متلاطم حاصل از آنها عوامل انتقال بسیار مهمی است. در حالتی که سرعت صفر یا نزدیک صفر است، که شامل تمام شارشهای سیال در نزدیکی دیواره‌های جامد می‌شود، پخش مولکولی کاملاً اهمیت دارد.

۱.۹ پخش مولکولی و رسانش پایا

از معادله‌های (۴.۷.۴) و (۱۰.۸.۴) با حذف جمله‌های فرارفت (ادوکسیون) - همرفت و (در حال حاضر) با مساوی صفر قرار دادن جمله‌های چشمه و چاه، معادله‌های پخش برای انتقال گرما و جرم به دست می‌آیند. معادله‌ها به صورت زیر است

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1.1.9)$$

و

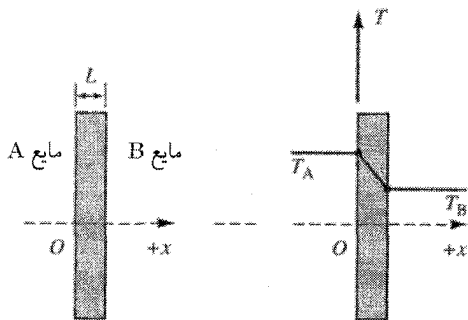
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 C = \mathcal{D} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2.1.9)$$

اگر شرایط انتقال گرما و جرم در صفحه yz عمود بر امتداد x به طور یکنواخت باشند، شکل یک بعدی زیر به دست می‌آید

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.1.9 \text{ الف})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.1.9 \text{ ب})$$

ساده‌ترین حالت ممکن پخش با حالت پایای یک بعدی است که تمام مشتقات زمانی در آن صفر است.



شکل ۱.۹ تیغه نازک فلزی که دو سیال با دماهای متفاوت را از هم جدا کرده است.

رسانش گرمای پایا

یک تیغه نازک فلزی که دو حمام مایع ساکن را از هم جدا کرده است (شکل ۱.۹) در نظر بگیرید. مایع A دمای سمت چپ تیغه را در T_A نگه می‌دارد و مایع B دمای سمت راست تیغه را در دمای ثابت T_B حفظ می‌کند. تغییرات دما در تیغه در یک دوره زمانی طولانی و شرایط مرزی پایاست. معادله (۳.۱.۹ الف) به شکل پایای زیر درمی‌آید

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (4.1.9)$$

از آنجا که تغییرات دما در صفحه yz یکنواخت فرض می‌شود و از آنجا که تنها متغیر وابسته موجود x است، این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم می‌شود. حل عبارت است از

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

از آنجا که دو ثابت انتگرال‌گیری وجود دارد، دو شرط مرزی را باید به‌کار برد: $T(x=0) = T_A$ و $T(x=L) = T_B$. بنابراین، $C_2 = T_A$ و $C_1 = (T_B - T_A)/L$ ، و

$$T(x) = \left[\frac{(T_B - T_A)}{L} \right] x + T_A \quad (5.1.9)$$

شارگرم در تیغه در مساحت واحد از معادله (۲.۹.۳) به صورت زیر به دست می‌آید

$$N_{Tx} = \frac{qT}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

و از معادله (۵.۱.۹) با

$$N_{T_x} = -k \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{T_B - T_A}{L} \right) x \right] = -k \frac{(T_B - T_A)}{L} \quad (۶.۱.۹)$$

بنابراین، شار ثابت است. اگر مساحت سطح معین باشد، مانند مساحت دیواره یک خانه، در این صورت هر دو طرف را می‌توان در مساحت ضرب کرد و شار گرمایی کل را به صورت زیر تعیین کرد

$$q_T = kA \frac{(T_A - T_B)}{L} = \frac{T_A - T_B}{R}$$

و نسبت L/kA مقاومت گرمایی، R ، نامیده می‌شود. بالاخره، اگر تیغه از m لایه، هر یک با ضخامت L_i و رسانندگی k_i تشکیل شده باشد اما هنوز تحت تأثیر اختلاف دمای کلی $T_A - T_B$ قرار داشته باشد، در این صورت شار گرمایی در هر ماده یکسان است و برابر است با

$$q_T = \frac{T_A - T_B}{\sum_{i=1}^m R_i} \quad (۷.۱.۹)$$

که در آن

$$R_i = \frac{L_i}{k_i A}$$

روشهای مشابهی برای لوله‌ها و کره‌های توخالی وجود دارند. در یک لوله با دماهای جداره داخلی و خارجی، به ترتیب، T_A و T_B ، شار گرما در جهت شعاعی r است و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{q_T}{A} = -k \frac{dT}{dr}$$

اگر مساحت مقطع عرضی عمود بر شار گرمایی با رابطه زیر داده شود

$$A = 2\pi r L$$

در این صورت

$$q_T = \frac{T_A - T_B}{R}$$

که در آن

$$R = \frac{\ln(r_B/r_A)}{2\pi k L}$$

توزیع دما با رابطه زیر داده می شود

$$T(r) = T_A - \left[\frac{T_A - T_B}{\ln(r_B/r_A)} \right] \ln \left(\frac{r}{r_A} \right) \quad (۸.۱.۹)$$

برای توزیعهای دما در کره‌های توخالی با شعاعهای r_A و r_B فرمولهای مشابهی وجود دارند [مرجع ۱]*

$$T(r) = T_A - \left[\frac{T_A - T_B}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \right] \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r} \right) \quad (۹.۱.۹)$$

و

$$q_T = \frac{4\pi k(T_A - T_B)}{\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r} \right)}$$

مثال ۱.۹ دیوارهٔ زیرزمین یک خانه مشکل است از لایه بتنی به ضخامت ۱۹.۷cm و پانل از چوب بلوط به ضخامت ۱.۲۷cm که با یک لایه عایق فایبرگلاس جدا شده است. فرض می شود دمای زمین اطراف فونداسیون ثابت و برابر با ۱۲.۷°C (۲۸۵.۷K) است، و دمای هوای راکد (غیرمتحرک) در زیرزمین ۲۲.۷°C (۲۹۵K) است. ضخامت عایق چقدر باشد تا هیچ اتلاف گرما از زیرزمین وجود نداشته باشد؟ رسانندگیهای (k) در بلوط ۰.۰۸W/m.K ، در بتن ۱.۷۶۲W/m.K ، و در عایق ۰.۳۱W/m.K است. محاسبه را برای مساحت ۱m^2 انجام دهید. دما در سطح مشترک بین عایق و قطعه بتنی چقدر است؟

حل

از معادله (۷.۱.۹) مقاومتها به صورت زیر محاسبه می شوند

$$R_{\text{متن}} = R_b = \frac{L_b}{k_b A} = \frac{۰.۰۱۹۷}{۰.۰۷۶۲(۱)} = ۰.۲۶ \text{ K/W}$$

$$R_{\text{عایق}} = R_i = \frac{L_i}{k_i A} = \frac{L_i}{۰.۰۳۱(۱)} = ۳۲.۲۶ L_i \text{ K/W}$$

$$R_{\text{پانل}} = R_p = \frac{L_p}{k_p A} = \frac{۰.۰۱۲۷}{۰.۰۲۰۸(۱)} = ۰.۰۶ \text{ K/W}$$

* در انتهای این فصل تعدادی از مراجع آورده شده‌اند.

اینها در معادله شار گرمایی متناظر جایگذاری می‌شوند

$$q_T = \frac{T_{\text{زیرزمین}} - T_{\text{زمین}}}{R_b + R_i + R_p} = \frac{(295 - 285,7)K}{(0,26 + 32,26L_i + 0,06)K/W}$$

برای نبود اتلاف گرما یا کسب گرما، شار باید صفر باشد، و معادله بالا برای ضخامت عایق، L_i ، حل می‌شود. ولی، باید توجه داشت که تنها حل قابل قبول که در آن هیچ شار گرمایی وجود ندارد حلی است که در آن دماهای داخلی و خارجی مساوی است. تمام مواد گرما را هدایت می‌کنند، و اختلاف آنها در این است که کدامیک بیشتر و کدام کمتر گرما را هدایت می‌کنند. بنابراین، اتلاف گرمای بسیار کوچک با مقدار $0,5W$ ($0,5J/s$) را فرض می‌کنیم؛ در این صورت

$$0,5 = \frac{9,3}{(0,32 + 32,26L_i)}$$

یا

$$L_i = 0,566m = 56,6cm$$

برای پیدا کردن دما در وجه داخلی قطعه استوانه‌ای بتنی، T_{ib} ، شار گرمایی $0,5W$ در هر سه ماده یکسان است. بنابراین،

$$\begin{aligned} q_T = 0,5W &= \frac{k_b A}{L_b} (T_{ib} - 285,7K) \\ &= \frac{0,762(1)}{0,197} (T_{ib} - 285,7K) \end{aligned}$$

یا

$$T_{ib} = \frac{0,5(0,197)}{0,762} + 285,7K = 285,8K$$

واضح است که قطعه بتنی عایق‌بندی کسی را ایجاد می‌کند. دما در وجه داخلی عایق $294,9K$ است. بنابراین، عایق اختلاف دمای $9,1K$ را حفظ می‌کند در حالی که ترکیب بتن و پانل اختلاف دمای $2K$ را حفظ می‌کند.

پخش جرم: غلظت پایین

قبل از پرداختن به حل پخش یک بعدی پایا، باید به خاطر داشت که مخلوطی از جرم که حداقل دو عنصر دارد، مخلوط دوتایی نامیده می‌شود. در مایعات، نه در گازها، مولکولها کاملاً نزدیک به

هم است. بنابراین، پخش فیزیکی یک عنصر در یک مایع خیلی آهسته‌تر از پخش آن در یک گاز است. بنابراین پخشندگی در مایعات اغلب تابعی از غلظت عنصر پخش شده است و نوعاً 10^4 تا 10^5 برابر پایینتر از پخشندگی در گازهاست. البته، به علت غلظت بیشتر عنصر در مایعات، مقدار شار در مایعات و گازها به هم نزدیک‌ترند.

شارها در یک مخلوط دوتایی متشکل از دو عنصر A و B از معادله‌های (۵.۸.۴) و (۷.۸.۴) پیدا می‌شوند و در جهت z ، عبارت‌اند از

$$N_{A_z} = wC_A - \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \quad (\text{الف } 10.1.9)$$

$$N_{B_z} = wC_B - \mathcal{D}_{BA} \frac{\partial C_B}{\partial z} \quad (\text{ب } 10.1.9)$$

برای مخلوط دوتایی، سرعت کل w برابر است با

$$w = \frac{1}{C} (C_A w_A + C_B w_B) = \frac{1}{\rho} (C_A w_A + C_B w_B)$$

اما از آنجا که $N_{A_z} = C_A w_A$ و $N_{B_z} = C_B w_B$ ، معادله‌های (۱۰.۱.۹ الف و ب) به شکل زیر درمی‌آیند

$$N_{A_z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{C_A}{\rho} (N_{A_z} + N_{B_z}) \quad (\text{الف } 11.1.9)$$

$$N_{B_z} = -\mathcal{D}_{BA} \frac{\partial C_B}{\partial z} + \frac{C_B}{\rho} (N_{A_z} + N_{B_z}) \quad (\text{ب } 11.1.9)$$

از معادله (۵.۵.۱)، $w_B = C_B/\rho$ و $w_A = C_A/\rho$ ،

جمله‌های اول در معادله (۱۱.۱.۹) جمله‌های پخش‌اند، و جمله‌های آخر شارهای حاصل از ادوکسیون یا شارش کپه‌ای است. بنابراین برای شروع توصیف پخش جرم در حالت پایا باید فرضهای منطقی درباره اهمیت ادوکسیون (N_{B_z} و N_{A_z}) را به عنوان عوامل انتقال در نظر گرفت. جمله انتقال کپه‌ای برای شار N_{A_z} در حالت‌های مختلف می‌تواند کوچک باشد. حالت اول وقتی است که هر عنصر سرعت فرارفت (ادوکسیون) معین w_A و w_B داشته باشد اما شارها مساوی و در خلاف همدیگرند، یعنی، $N_{A_z} = -N_{B_z}$. شار فرارفتی (ادوکتیو) خالص به دست آمده صفر است، و این حالت پخش با دو جریان مخالف است. حالت دوم وقتی است که یک عنصر، مانند B، ماده غیرمتحرکی فرض شود به طوری که $N_{B_z} = 0$. با N_{A_z} باقیمانده در جمله انتقال کپه‌ای، فرض می‌شود که $w_A = C_A/\rho$ خیلی کوچک است و جمله $w_A N_{A_z}$ (معادله ۱۱.۱.۹ الف)، در

مقایسه با جمله پخشی یا جمله گرادیان شار، بی اهمیت می شود. این فرض غلظت پایین، همراه با ماهیت غیرمتحرک صفر B، از یک معادله شار پایای ساده شده به دست می آید. از معادله های (۳.۱.۹) و (۱۱.۱.۹ الف) در جهت z،

$$N_{Az} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} N_{Az} = \frac{d}{dz} N_{Az} = -\frac{d}{dz} \left(\mathcal{D}_{AB} \frac{dC_A}{dz} \right) = \mathcal{D}_{AB} \frac{d^2 C_A}{dz^2} \rightarrow \frac{d^2 C_A}{dz^2} = 0$$

شرایط مرزی غلظت در هر انتهای حوزه z ثابت است، یعنی، $C_A(z = z_1) = C_{A1}$ و $C_A(z = z_2) = C_{A2}$. بنابراین حل به شکل زیر درمی آید

$$C_A(z) = C_1 z + C_2 \quad (الف) \quad (۱۲.۱.۹)$$

$$C_A(z) = \left[\frac{C_{A2} - C_{A1}}{z_2 - z_1} \right] z + \frac{C_{A1} z_2 - C_{A2} z_1}{z_2 - z_1} \quad (ب) \quad (۱۲.۱.۹)$$

اگر $z_1 = 0$ و $z_2 = L$ ، شکل معادله (۵.۱.۹) بازیافت می شود. شار با رابطه زیر داده می شود

$$N_{Az} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} = -\mathcal{D}_{AB} \left[\frac{C_{A2} - C_{A1}}{z_2 - z_1} \right] \quad (۱۳.۱.۹)$$

در نتیجه پخش عناصر با غلظت پایین در یک محیط غیرمتحرک در نمایه های غلظت خطی با شار ثابت به دست می آید و تبدیل می شود به یک انتقال مشابه با حالت های رسانش گرما، که در قسمت قبل بحث شدند. چلهایی که برای شکلهای هندسی مختلف در قسمت فرعی قبل بحث شدند در اینجا نیز به کار می روند.

پخش غلظت بالا در محیط غیرمتحرک

با حذف فرض غلظت پایین در قسمت فرعی قبل، اولین تأثیر همرفت-فرارفت (ادوکسیون) را می توان امتحان کرد. معادله حالت پایای یک بعدی در اینجا نیز به کار می رود، یعنی،

$$\frac{d}{dz} N_{Az} = 0$$

ولی، از معادله (۱۱.۱.۹ الف)

$$N_{Az} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dC_A}{dz} + \omega_A N_{Az}$$

یا

$$N_{A_z} = -\rho \mathcal{D}_{AB} \frac{d\omega_A}{dz} + \omega_A N_{A_z}$$

حل N_{A_z} با جمله‌های گروه‌بندی اول تشکیل می‌شود

$$N_{A_z} = -\frac{\rho \mathcal{D}_{AB}}{(1 - \omega_A)} \frac{d\omega_A}{dz}$$

و سپس، انتگرال‌گیری با استفاده از شرط مرزی قبل می‌دهد

$$\int_{z_1}^{z_2} N_{A_z} dz = -\rho \mathcal{D}_{AB} \int_{\omega_{A_1}}^{\omega_{A_2}} \frac{d\omega_A}{(1 - \omega_A)}$$

سپس، چنین به دست می‌آید

$$N_{A_z} = \frac{\rho \mathcal{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)} \ln \left[\frac{1 - \omega_{A_2}}{1 - \omega_{A_1}} \right] \quad (14.1.9)$$

نمایه‌های غلظت را با جایگذاری برگشتی در معادله انتقال و با جایگذاری می‌توان یافت

$$\frac{d}{dz} N_{A_z} = \frac{d}{dz} \left[-\frac{\rho \mathcal{D}_{AB}}{(1 - \omega_A)} \frac{d\omega_A}{dz} \right] = 0$$

دوبار انتگرال‌گیری می‌کنیم، داریم

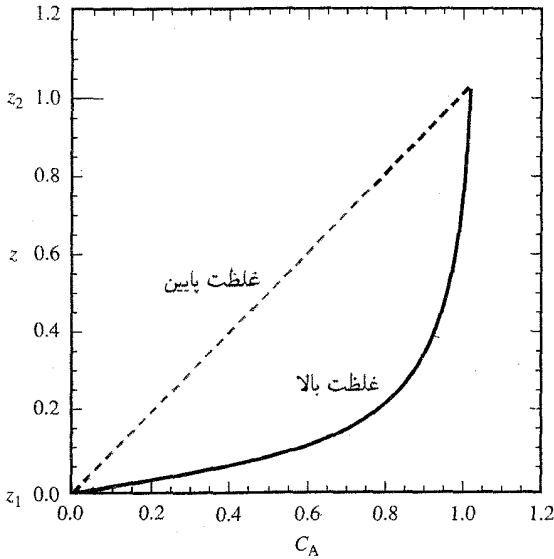
$$-\ln(1 - \omega_A) = C_1 z + C_2 \quad (15.1.9)$$

که پس از اعمال شرط مرزی چنین به دست می‌آید

$$\left[\frac{1 - \omega_A}{1 - \omega_{A_1}} \right] = \left[\frac{1 - \omega_{A_2}}{1 - \omega_{A_1}} \right]^{(z - z_1)/(z_2 - z_1)} \quad (16.1.9)$$

از آنجا که $\omega_A + \omega_B = 1$ ، از معادله (۱۶.۱.۹) به سهولت یک حل مشابه برای نمایه‌های ω_B به دست می‌آید.

مقایسه شکل‌های غلظت بالا و پایین [معادله‌های (۱۲.۱.۹) الف] و (۱۵.۱.۹) نشان می‌دهد که وقتی اثرات انتقال کپه‌ای بر فیزیک مسئله تأثیر می‌گذارد، یک نمودار لگاریتمی (شکل ۲.۹) ظاهر می‌شود. با بسط معادله (۱۵.۱.۹) به صورت سری، داریم

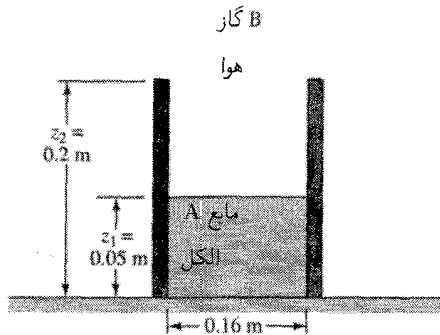


شکل ۲.۹ گذار از حل غلظت پایین (خطی) به غلظت بالا (لگاریتمی).

$$-\ln(1 - \omega_A) = \omega_A + \frac{\omega_A^2}{2} + \frac{\omega_A^3}{3} + \dots$$

دیده می‌شود که در غلظتهای بسیار پایین، جمله‌های مرتبه دوم و بالاتر قابل صرف‌نظرند و معادله (۱۵.۱.۹) به معادله (۱۲.۱.۹ الف) تبدیل می‌شود.

مثال ۲.۹ یک قوطی الکل در حالت باز داخل زیرزمین قرار دارد. از آنجا که پنجره‌ها بسته است هوا ساکن است. فرض کنید که هوا و محلول در 25°C است و هوا (شکل ۳.۹) در ابتدا فاقد الکل



شکل ۳.۹ مثال ۲.۹

است. هوای زیرزمین در فشار اتمسفر یک است ($101325 \text{ Pa} = 101.3 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$).
در مدت یک روز سطح الکل بر اثر تبخیر چقدر پایین می‌آید؟

حل

از بیوست ج، پخشندگی الکل در هوای 25°C و با فشار اتمسفریک $132 \text{ cm}^2/\text{s}$ است. مفهوم حل این است که از معادله (۱۴.۱.۹) در تمام مساحت سطح مخزن که در معرض گاز B است در دوره زمانی انتگرال گرفته شود. افت کلی جرم در زمان T_p عبارت است از

$$M = \int_t^{t+T_p} \int N_{A_z} dA dt \approx N_{A_z} A T_p = \frac{\rho A T_p \mathcal{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)} \ln \left[\frac{1 - \omega_{A_2}}{1 - \omega_{A_1}} \right]$$

در اینجا فرض می‌شود که N_{A_z} در سطح و بر حسب زمان به طور یکنواخت و ثابت است. قرار می‌دهیم $T_p = 1 \text{ hr} = 3600 \text{ s}$. برای در نظر گرفتن تمام متغیرها، $A = \pi(1^2) = 3.14 \text{ cm}^2$ ، $z_2 - z_1 = 2 \text{ m} - 0.5 \text{ m} = 1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$ ، $\omega_{A_2} = 0$ و متغیرهایی که باید محاسبه شوند عبارت‌اند از ω_{A_1} و ρ .

با استفاده از قانون دالتون به دست می‌آید. فشار بخار الکل در این شرایط دما و فشار 7.9 kPa است [مرجع ۲]. بنابراین، غلظت مولی گاز الکل در سطح مشترک عبارت است از

$$y_{A_1} = \frac{p_{v_{A_1}}}{p} = \frac{7.9 \text{ kPa}}{101.3 \text{ kPa}} = 0.078$$

بنابراین غلظت مولی هوا در سطح مشترک عبارت است از $y_{B_1} = 1 - 0.078 = 0.922$. به وضوح، برای پخش از طریق ستون هوای راکد، الکل بسیار کمی در سطح مشترک وجود دارد. چگالی مخلوط، ρ ، را باید محاسبه کرد. اگر وزن مولکولی الکل (M_A) و هوا (M_B) را به ترتیب ۴۶ و ۲۹ بگیریم، مقدار الکل موجود در یک مول در سطح مشترک عبارت است از

$$\text{مول } (y_{A_1}) = 0.078 \text{ (مول)}$$

چون که $M_A = 46$ ، جرم الکل در یک مول برابر است با

$$0.078 \text{ (مول)} \frac{(0.046 \text{ kg})}{\text{مول}} = 0.0036 \text{ kg}$$

پخش مولکولی و رسانش پایا ۵۰۷

از محاسبه مشابه برای جرم هوا در سطح مشترک استفاده می‌شود. جرم هوا در یک مول عبارت است از

$$(۰.۹۹۲)(۰.۲۹\text{kg/mol}) = ۰.۲۶۷\text{kg}$$

بنابراین، جرم کل موجود در یک مول برابر است با $۰.۳۰۳\text{kg} = ۰.۲۶۷\text{kg} + ۰.۰۳۶\text{kg}$. از آنجا که یک مول به جرم ۰.۳۰۳kg است، در این صورت وزن مولکولی باید ۳۰۳ (یا در صورت گرد شدن ۳۰) است.

با این اطلاعات از قانون گاز کامل [معادله‌های (۴.۷.۱) و (۷.۷.۱)] برای محاسبه چگالی کل، ρ ، به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(۱۰۱۳۲۵\text{N/m}^2)(۳۰)}{\left(\frac{۸۳۱۲\text{ m}\cdot\text{N}}{\text{mol}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}}\right)(۲۹۸\text{K})} = ۱.۲۳\text{kg/m}^3$$

معادله جرم کل تبخیرشده در طی مدت t_p به شکل زیر درمی‌آید

$$M = t_p \frac{(۱.۲۳\text{kg/m}^3)(۰.۲۰۱\text{m}^2)(۰.۱۳۲\text{cm}^3/\text{s}) \left(10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{cm}^2}\right) \ln \left[\frac{1 - \omega}{1 - \omega_{A_1}} \right]}{(۰.۱۵\text{m})}$$

ω_{A_1} را از y_{A_1}, M_A ، y_{B_1}, M_B و M_B به صورت زیر می‌توان یافت

$$\omega_{A_1} = \frac{y_{A_1} M_A}{y_{A_1} M_A + y_{B_1} M_B} = ۰.۱۱۸$$

بنابراین، از آنجا که $\omega_{A_1} + \omega_{B_1} = ۱$ ، بنابراین $\omega_{B_1} = ۰.۸۸۲$.

سپس با تکمیل محاسبه M در مدت یک ساعت ($t_p = ۳۶۰۰\text{s}$)، جرم کلی که از سطح مایع پخش می‌شود $۲.۷۳(۱۰^{-۷})$ است، که افت ارتفاع سیال در ظرف است،

$$h = \frac{M}{\rho A} = \frac{(۲.۷۳(۱۰^{-۷})\text{kg})}{(۱.۲۳\text{kg/m}^3)(۰.۲۰۱\text{m}^2)} = ۱.۱۰(۱۰^{-۷})\text{m}$$

این افت بسیار کوچک برابر است با ۰.۲۶۵mm در روز.

سیالات با فشارهای بخار بالاتر در این شرایط دارای شیب عمودی بسیار بالاتر و شار بالاتر و آهنگ تبخیر بالاترند. خواننده باید این محاسبه را برای آب داخل همان مخزن انجام دهد. اگر

آهنگهای تبخیر به اندازه کافی بالا باشند به طوری که آهنگ زمانی افت مایع باعث شود $z_2 - z_1$ با زمان تغییر کند، در این صورت محاسبه گذرا باید انجام شود. این حالت در کتابهای درسی با پدیده‌های انتقال پیشرفته‌تر بررسی می‌شود.

بالاخره، مثال بالا اساس سلول آرنولد را شکل می‌دهد؛ این سلول وسیله‌ای است که با اندازه‌گیری آهنگ زمانی افت مایع و با استفاده از معادله شار، پخشندگی را اندازه می‌گیرد؛ در این وسیله معادله شار به شکل معکوس به کار می‌رود تا ضریب پخش مولکولی به شکل زیر با دقت تعیین شود

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{h(T_p)(z_2 - z_1)}{T_p \ln \left[\frac{1 - \omega_{A_1}}{1 - \omega_{A_2}} \right]} \quad (17.1.9)$$

پخش با واکنش شیمیایی

در داخل حجم کنترل شامل مخلوط، واکنشهای مختلف شیمیایی می‌تواند روی دهد و در ضمن فرایند پخش پیش رود. واکنش همگن واکنشی است که در سرتاسر حجم کنترل به طور یکنواخت روی می‌دهد و واکنش چندگن نوعاً در سطح مشترک، مانند مرز جامد کنترل، روی می‌دهد. واکنشهای چندگن در مراجع پدیده‌های انتقال پیشرفته‌تر بررسی می‌شوند. در اینجا واکنش ساده همگن نشان داده می‌شود.

از معادله (۴.۸.۴) معادله پخش پایای یک‌بعدی (z)، شامل جمله چشمه‌چاه یا واکنش به صورت زیر است

$$\frac{d}{dz} \left(\mathcal{D}_{AB} \frac{dC_A}{dz} \right) + S_i = 0$$

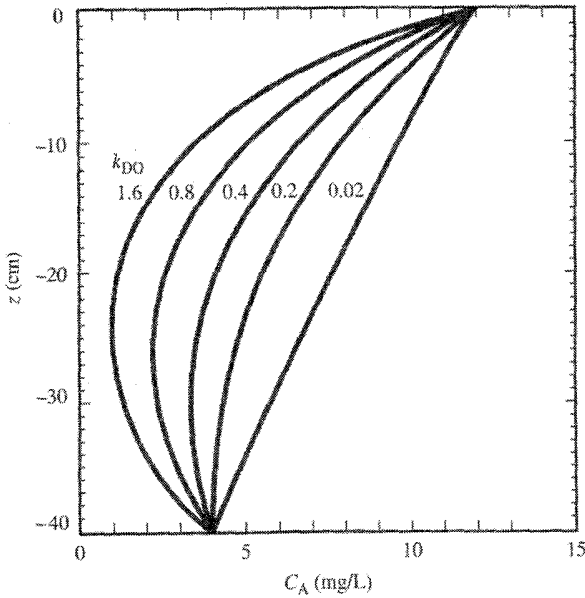
در چاه (ویرانی یا دفع) با آهنگ واکنش مرتبه اول (مثال ۲۴.۳)، $S_i = -k_A C_A$ به طوری که

$$\mathcal{D}_{AB} \frac{d^2 C_A}{dz^2} - k_A C_A = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 C_A}{dz^2} - m^2 C_A = 0$$

در اینجا، m به صورت $\sqrt{k_A / \mathcal{D}_{AB}}$ تعریف می‌شود. شکل کلی این حل به صورت زیر است

$$C_A(z) = c_1 \exp(mz) + c_2 \exp(-mz)$$

اگر شرایط مرزی به شکل $C_A(z = z_1 = 0) = C_{A_1}$ و $C_A(z = z_2 = d) = C_{A_2}$ اعمال



شکل ۴.۹ غلظت DO ناشی از پخش و تنفس جانوران ریز

شوند، نمایه غلظت به شکل زیر درمی‌آید

$$C_A(z) = C_{A_1} \operatorname{csch} md \sinh mz + C_{A_2} \operatorname{csch} md \sinh m(z-d) \quad (18.1.9)$$

شار N_{A_z} به شکل زیر درمی‌آید

$$N_{A_z}(z) = m \mathcal{D}_{AB} C_{A_1} \operatorname{csch} md \cosh mz - m \mathcal{D}_{AB} C_{A_2} \operatorname{csch} md \cosh m(z-d) \quad (19.1.9)$$

آنچه ذکر آن در اینجا اهمیت دارد این است که شار دیگر ثابت نیست و برحسب z تغییر می‌کند. شکل ۴.۹ شامل مجموعه‌ای از نمودارهاست که در آنها پخش اکسیژن محلول (DO) در لایه سطح آب به هنگام تنفس جانوران ریز شناور در سطح آب نشان داده شده است. غلظت DO در سطح ($z = 0$) 12 mg/L است، در حالی که در عمق 40 cm ، DO برابر با 4 mg/L است. مقادیر مختلف جمله چشمه k_{DO} در نمودار نشان داده شده‌اند. از مقدار $10^3 \text{ cm}^2/\text{s}$ \mathcal{D}_{AB} استفاده می‌شود. توجه کنید که آهنگ تنفس قویتر باعث می‌شود انحنای نمایه بیشتر شود و منطقه انحنا و شیب ماکزیمم در نزدیک سطح ($z_1 = 0$) قرار گیرد.

ترکیبهای دیگر شرایط مرزی

معادله پخش یک بعدی پایا که در این قسمت به کار می رود یک معادله درجه دوم است و از آن نسبت به متغیر مستقل z (یا x) باید دو بار انتگرال گرفت. بنابراین، دو ثابت انتگرال گیری به وجود می آید که برای محاسبه آنها به دو شرط مرزی نیاز است. در این قسمت از مقدار غلظت در انتهای حوزه (L) یا حالت الف زیر استفاده شده است. ترکیبهای دیگر به صورت زیر فهرست شده اند

$C(z = z_2 = z_1 + L) = C_{\text{راست}} = C_R$	$C(z = z_1) = C_{\text{چپ}} = C_L$	حالت الف
$\partial C / \partial z (z = z_2) = N_R$	$C(z = z_1) = C_L$	حالت ب
$C(z = z_2) = C_R$	$\partial C / \partial z (z = z_1) = N_L$	حالت ج
$\partial C / \partial z (z = z_2) = N_R$	$\partial C / \partial z (z = z_1) = N_L$	حالت د
$\partial C / \partial z (z = z_1) = N_L$	$C(z = z_1) = C_L$	حالت ه

بنابراین، می توان شار یا غلظت در هر انتهای حوزه را در این معادله پخش درجه دوم به دست آورد. در بعضی حالتها نادر می توان غلظت و شار در مرز فرادست را تعیین کرد. در تمام حالتها تعداد شرایط مرزی لازم که در هر جهت مختصاتی باید تعیین شود برابر است با مرتبه بالاترین مشتق در آن جهت مختصاتی و بالاترین مرتبه جمله دیفرانسیلی مجاز در شرط مرزی یکی کمتر از بالاترین مرتبه دیفرانسیلی در معادله حاکم است.

تمرینها

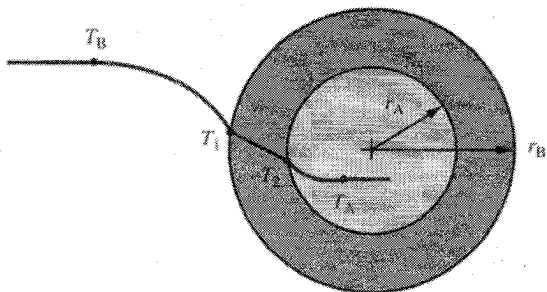
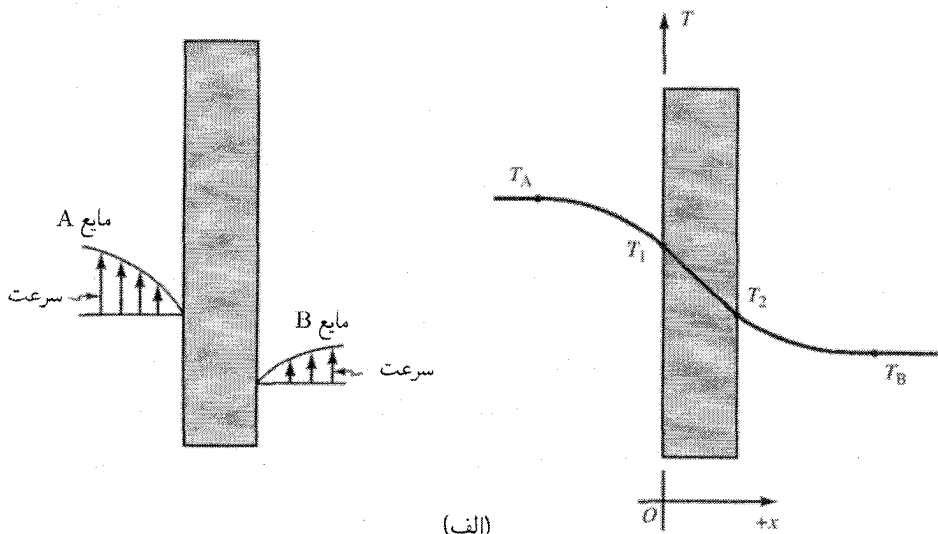
۱.۱.۹ پخش جرم مولکولی یا رسانش گرما (الف) در نتیجه سرعت سیال حامل گرما یا جرم است؛
 (ب) همیشه از دمای بالا به طرف دمای پایین است؛ (ج) شار همیشه در مختصاتی یکنواخت است؛ (د) همیشه ناشی از تغییرات غلظت خطی بین غلظت بالا و پایین در حالت پایاست؛ (ه) با آهنگهایی روی می دهد که با مرتبه انتقال فرارفتی (ادوکتیو) یکسان است.

۲.۱.۹ مقاومت گرمایی (الف) خاصیتی از ماده است؛ (ب) بر حسب طول جسمی که گرما در آن هدایت می شود به طور معکوس تغییر می کند؛ (ج) برای تأسیسات خانگی بی نهایت است؛ (د) با مساحت سطح جسم متناسب است و به طور خطی با آن تغییر می کند؛ (ه) تابعی از جنس، مساحت، و طول جسم است.

۳.۱.۹ پخش جرم پایا وقتی می تواند روی دهد که (الف) غلظتهای دو عنصر از مخلوط دوتایی بالا باشند؛ (ب) پخش دو جریان مخالف وجود داشته باشد؛ (ج) یک محیط در مخلوط ساکن باشد؛ (د) یک ماده پخشی دارای غلظت پایین باشد؛ (ه) ب و ج؛ (د) ب، ج، یا د.

۲.۹ فرارفت (ادوکسیون) و همرفت: روشهای کپهای

سیالی که با دیواره شکل ۱.۹ تماس داشت حرکت نمی‌کرد و می‌توانستیم دما را به صورت T_A و T_B به‌طور مستقل مشخص کنیم. اکنون فرض کنید سیال در یکی از طرفین حرکت کند و میله مقاومت تغییرات دمای مقطع عرضی تیغه‌ای از سیال را اندازه بگیرد. داده‌ها (به‌طور طرحواره) نشان می‌دهند که در یک ناحیه نازک سیال نزدیک دیواره (شکل ۵.۹) دمای سیال نزدیک دیوار با نزدیک شدن به دیوار تغییر می‌کند. این تغییر دمای نزدیک دیوار بر اثر همرفت یا فرارفت (ادوکسیون) ناشی از حرکت سیال روی سطح است. دو روش برای پارامتری کردن اثرات سرعت وجود دارند: روش کپهای، یا روش مکانیکی لایه مرزی. در روش اول کل آهنگ انتقال گرما یا انتقال جرم از مقادیر



شکل ۵.۹ تغییرات دما در سیالی که خیلی نزدیک به دیوار است.

متوسط میدان شارش و هندسه آن محاسبه می‌شود. در روش دوم آهنگ انتقال گرما با انتقال جرم برای یک مساحت جزئی سطح محاسبه می‌شود و سپس انتگرال‌گیری می‌شود تا آهنگ انتقال کلی یا کپهای در تمام شارش تعیین شود. در روش اولی رابطه بین متغیرهای متوسط با ضریب انتقال جرم یا انتقال گرمای همرفتی، که نوعاً با آزمایش تعیین می‌شود، بیان می‌شود. در روش دوم می‌توان ضریب را با تحلیل ریاضی مستقیم، که تأیید آزمایشی را به دنبال دارد، پیدا کرد. روشهای کپهای در این قسمت مرور می‌شوند.

انتقال گرما

در شرایط فرارفت (ادوکسیون) یا همرفت پایا، انتقال گرمای کپهای با رابطه زیر داده می‌شود

$$q_T = hA(T_s - T_f) \quad (۱.۲.۹)$$

که در آن q_T شار است؛ A مساحت مقطع عرضی است که گرما از طریق آن منتقل می‌شود (عمود بر جهت شار)؛ T_s دمای سطح محیطی است که با سیال متحرک تماس دارد؛ و T_f دمای کپهای یا متوسط نامعلوم سیال را در فاصله‌ای از سطح نشان می‌دهد. مکان T_f تابعی از هندسه کلی شارش است. اگر $T_s > T_f$ ، گرما از محیط دفع می‌شود، و اگر $T_f > T_s$ ، گرما از سیال به محیط منتقل می‌شود. متغیر h ضریب انتقال گرمای همرفتی نامیده می‌شود، و به هنگام استفاده از روش تحلیل کپهای، به آن یک مقدار کلی تنها داده می‌شود. شواهد نشان می‌دهد از آنجایی که تقریباً مقدار بیشماری میدان و هندسه شارش وجود دارد، تعداد بیشماری ضریب انتقال کپهای وجود دارد.

مسئله نشان داده شده در شکل ۵.۹ الف یک مسئله ترکیبی رسانش-همرفت است که به صورت زیر تحلیل می‌شود. در حالت شارش پایا، اصل کلیدی این است که شار عمود بر سطح در سیستم ثابت است. بنابراین،

$$q_T = -h_A A(T_1 - T_A) = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2) = h_B A(T_2 - T_B) \quad (۲.۲.۹)$$

علامت منفی در انتقال گرمای همرفتی بر طبق قرارداد علامت شار است، یعنی، شاری که به طرف سطح یا به طرف خارج از سطح باشد مثبت در نظر گرفته می‌شود. در این حالت شار در سمت چپ تیغه در جهت $+x$ است که مخالف شار مثبتی است که در جهت $-x$ به طرف خارج سطح است.

اگر معادله (۲.۲.۹) را به شکل انتقال گرمای کلی درآوریم، مانند قسمت ۱.۹، خواهیم داشت

$$q_T = \frac{T_A - T_B}{\left(\frac{1}{h_A A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_B A} \right)} = \frac{T_A - T_B}{\Sigma R} = \frac{\Delta T}{\Sigma R}$$

ضریب انتقال گرمای کلی، H_T ، در سیستم ترکیبی با فرض شکل زیر به دست می‌آید

$$q_T = H_T A \Delta T \quad (۳.۲.۹)$$

که در آن

$$H_T = \left[\frac{1}{\frac{1}{h_A} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_B}} \right] \quad (۴.۲.۹ \text{ الف})$$

و

$$\Delta T = T_A - T_B \quad (۴.۲.۹ \text{ ب})$$

همین اصل را در مجرای داده شده در شکل ۵.۹ ب می‌توان به کار برد. مجدداً شار کلی q_T با حل رسانش همرفت ترکیبی پیدا می‌شود:

$$q_T = \frac{T_A - T_B}{\Sigma R} = \frac{T_A - T_B}{\frac{1}{h_B A_B} + \frac{r_A - r_B}{k A_m} + \frac{1}{h_A A_A}} \quad (۵.۲.۹)$$

در معادله (۵.۲.۹)، $A_B = 2\pi r_B L$ که در آن L طول مجراست؛ $A_A = 2\pi r_A L$ و A_m مساحت میانگین لگاریتمی است، یعنی،

$$A_m = \frac{A_A - A_B}{\ln(A_A/A_B)}$$

ضریب کلی انتقال گرما، بر مبنای مساحت داخلی لوله، با رابطه زیر داده می‌شود

$$H_T = \frac{1}{\frac{1}{h_B} + \frac{(r_A - r_B)A_B}{k A_m} + \frac{A_B}{h_A A_A}}$$

برای H_A بر مبنای مساحت خارجی عبارت مشابهی را می‌توان یافت.

گروههای بی بعد در انتقال گرما و مشخصات پارامتری

در نگاه اول می توان دید که ضریب انتقال گرمای h را، مانند ضریبهای پخش، به سهولت می توان در یک مسئله انتخاب کرد؛ یعنی، پیشسندگیها در یک کتاب درسی مرجع یا هندبوک (مثلاً، مرجع [۲]) به سهولت پیدا می شوند، و دما یا عوامل دیگر را به طور مناسب تنظیم می کنند. البته، ضریب انتقال گرما خاصیتی از سیال نیست و بنابراین اغلب یک ثابت ساده نیست. این ضریب نقطه به نقطه در میدان شارش تغییر می کند و به هندسه مسئله، و مبدأ حرکت سیال و شدت حرکت (که به چسبندگی مربوط می شود) بستگی دارد.

از یک جهت به نظر می رسد استفاده از مقدار میانگین کلی یا کپهای h پیچیدگیهای بالا را کاهش می دهد، اما مشکلات دیگری را ایجاد می کند، به خصوص انتخاب مکان صحیح را برای به دست آوردن مقدار T_A (یا T_B) مشکل می کند. در دو مسئله نمونه فرارفت ادوکسیون-پخش، مکانها در هر شکل هندسی کاملاً متفاوت است، و شکل دمای مورد استفاده در فرمول اغلب تابعی از شکل هندسی نیز است. مثلاً، در تحلیل ورق تخت، T_f در معادله (۱.۲.۹) به عنوان دمای سیال در یک نقطه کاملاً دور ($\rightarrow \infty$) از سطح s گرفته می شود. بنابراین، در ورق $q_T = hA(T_s - T_\infty)$. در یک لوله، همرفت در جداره خارجی را به صورت یک ورق با $T_f \rightarrow T_\infty$ می توان بررسی کرد. ولی، در داخل لوله، هندسه شارش رشد لایه مرزی داخلی را محدود می کند، و T_f به عنوان دمای متوسط یا کپهای مقطع عرضی سیال مجرا در نظر گرفته می شود.

بنابراین، اکثر داده های ضریب انتقال گرما از آزمایشهای دقیق آزمایشگاهی به دست آمده اند؛ در این آزمایشها فقط از شکلهای هندسی ساده، یا شکلهایی که ارزش صنعتی و عملی دارند استفاده می شود. بنابراین، کمیتهای وسیعی از داده های h به هندسه میدان شارش مربوط می شوند و با استفاده از گروههای بی بعد در فشرده ترین شکل خود بیان می شوند (به فصل ۵ نگاه کنید). عدد رینولدز (در میان اعداد دیگر) عدد بی بعد مهمی است که مقاومت اینرسی را به اصطکاک می دهد. در معادله تکانه نشان می دهد. آیا گروه بندی بی بعد مشابهی برای انتقال گرما وجود دارد؟ اگر سیالی که در نزدیک دیواره حرکت می کند دوباره بررسی شود، با توجه به هم ارزی شارگرما در سیستم، مقاومت همرفت-فرارفت (ادوکسیون) را با رسانش می توان مقایسه کرد. بنابراین، در سطح دیواره ($x = 0$)

$$q_T = -hA(T_1 - T_A) = -kA \frac{\partial}{\partial y}(T - T_1)|_{x=0}$$

نسبت ضریب انتقال گرما به ضریب پخش به صورت زیر است

$$\frac{h}{k} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(T - T_1)|_{x=0}}{(T - T_1)}$$

نسبت بالا را با ضرب کردن در مقیاس طول L می توان بی بعد کرد، یعنی،

$$\frac{hL}{k} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(T - T_s)|_{y=0}}{(T - T_s)L} = N_u \quad (۶.۲.۹)$$

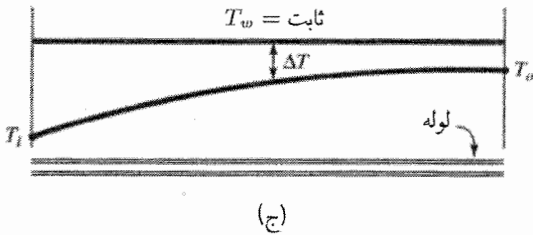
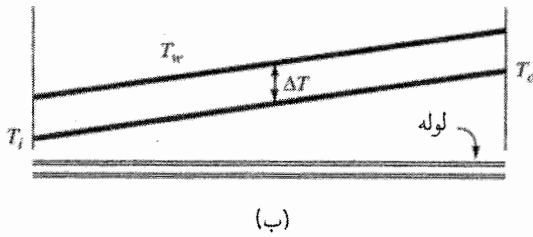
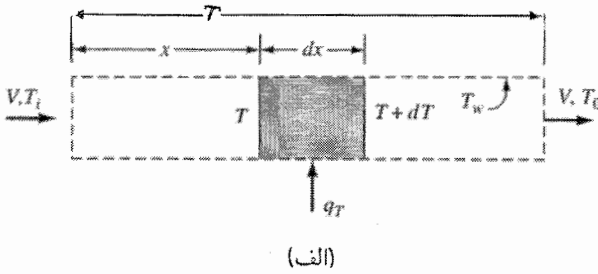
نسبت بی بعد بالا عدد نوسلت نامیده می شود (به بخش ۴.۵ نگاه کنید) و مقاومت نسبی فرارفت ادوکسیون به پخش را نشان می دهد.

از آنجا که چسبندگی، ν ، یا پخش تکانه بر اثر اصطکاک و پخشندگی گرمایی مقادیر متفاوت دارد، از عدد پرانتل برای نمایش نسبت استفاده می شود، یعنی، $P_r = \nu/\alpha$.
در مسائل همرفت واداشته یا فرارفت (ادوکسیون) عدد استانتون، S_t ، به صورت زیر تعریف می شود

$$S_t = \frac{h}{\rho v c_p} \quad (۷.۲.۹)$$

که در آن ν سرعت نوعی میدان شارش است که برای پارامتری کردن عدد رینولدز به کار می رود. این عدد از $S_t = N_u/RP_r$ نیز تشکیل می شود. در مسائل همرفت طبیعی سرعت شارش، ν ، بر اثر ناپایداریهای چگالی در شارش به وجود می آید. بنابراین اگر چگالی به طور خطی به اختلاف دمای ΔT ارتباط داده شود، در این صورت $\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T)$ (به فصل ۱، قسمت ۶ نگاه کنید) و عدد گرافش G_r (معادله ۴.۴.۵) به عنوان یک گروه بی بعد کنترل کننده در رابطه h وارد می شود. بنابراین عدد نوسلت N_u ، با استنباط آزمایشگاهی، یک گروه بی بعد است که در همرفت واداشته باید به (R, P_r) ارتباط داده شود و در همرفت طبیعی به (G_r, P_r) ارتباط داده شود. به علاوه، در حالت همرفت واداشته، عدد استانتون نیز می تواند به (R, P_r) ارتباط داده شود. بنابراین داده ها برای مقادیر مختلف h برحسب گروههای بی بعد R, P_r, N_u, G_r بیان می شوند. یک مثال برای استفاده از پارامتری کردن بی بعد، مشخصات دمای سیال را که داخل یک لوله افقی با قطر ثابت D حرکت می کند در نظر بگیرید (شکل ۶.۹). تحلیل حجم کنترل جزئی (شکل ۶.۹ الف) با طول دیفرانسیلی dx لوله نشان می دهد که شار خالص گرما (q_T) از طریق جداره های لوله با فرارفت (ادوکسیون) خالص انرژی گرمایی خروجی از لوله (که بر اثر حرکت سیال است) موازنه می شود، یعنی،

$$\rho V \frac{\pi D^2}{4} c_p [T(x + dx) - T(x)] = \rho V \frac{\pi D^2}{4} c_p dT = \pi D q dx \quad (۸.۲.۹)$$



شکل ۶.۹ توزیع دما در یک لوله افقی با قطر ثابت

شار گرمایی q_T با معادله (۱.۲.۹) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$q_T = h(T_w - T(x)) \quad (۹.۲.۹)$$

که در آن h ضریب انتقال گرمای همرفتی، T_w دمای جداره داخلی لوله، و $T(x)$ دمای متوسط مقطع عرضی سیال است که برحسب مکان x ، در امتداد لوله، تغییر می‌کند. پس از چند عمل جبری و حدگیری وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، داریم

$$\left[\frac{1}{T_w - T(x)} \right] \frac{dT}{dx} = \frac{4h}{\rho c_p V D} \quad (۱۰.۲.۹)$$

از این معادله برای دو حالت زیر می‌توان انتگرال گرفت: شار گرمایی ثابت یا دمای جداره ثابت.

فرارفت (ادوکسیون) و همرفت: روشهای کپهای ۵۱۷

حالت شار گرمای ثابت می‌رساند که جمله‌های $h, T_w - T(x)$ و q_T در معادله (۹.۲.۹) ثابت‌هاست؛ بنابراین، از معادله (۱۰.۲.۹) از ورودی $x = 0$ تا خروجی $x = L$ ($T = T_i$) تا $T = T_o$ به صورت زیر انتگرال‌گیری می‌شود

$$\frac{T_o - T_i}{T_w - T} = \frac{T_o - T_i}{\Delta T} = \int_0^L \frac{h}{D \rho c_p V_m} dx = \int_0^L S_t \frac{dx}{D} \quad (۱۱.۲.۹)$$

که در آن عدد استانتون است. نتیجه این تغییرات دما در شکل ۶.۹ نشان داده شده است. در حالت دمای ثابت، T_w ثابت است، و معادله (۱۰.۲.۹) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{T_w - T} \frac{dT}{dx} = \int_0^L \frac{S_t}{D} dx$$

با انتگرال‌گیری در تمام طول لوله،

$$\ln \left[\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o} \right] = \int_0^L \frac{S_t}{D} dx \quad (۱۲.۲.۹)$$

بنابراین، تغییرات دمای لگاریتمی در طول L روی می‌دهد (شکل ۶.۹ ج). با روش مشابه با تحلیل مقطع عرضی لوله که قبلاً گفته شد، تقاضای دمای میانگین لگاریتمی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta T_{lm} = \frac{T_o - T_i}{\ln \left[\frac{T_w - T_i}{T_w - T_o} \right]}$$

و معادله (۱۲.۲.۹) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{T_o - T_i}{\Delta T_{lm}} = \int_0^L \frac{S_t}{D} dx \quad (۱۳.۲.۹)$$

مثالهای صریحتر در پارامتری کردن طراحی بعداً آورده می‌شوند.

انتقال جرم همرفتی و فرارفتی (ادوکسیون) و گروههای بی بعد

در قیاس مستقیم با حالت انتقال گرما و با تمام مشکلات ناشی از آن، می‌توان شار جرم همرفتی یا فرارفتی (ادوکسیون) را برای عنصر A با فرمول زیر بیان کرد

$$q_{mA} = h_m A (C_{A,s} - C_{A,f}) \quad (۱.۲.۹)$$

در اینجا h_m ضریب انتقال جرم است و $C_{A,f}$ و $C_{A,s}$ ، به ترتیب، غلظتهای عنصر A در سطح فصل مشترک، s ، و در سیال میدان دوردست، f ، است. مجدداً مشخصه $C_{A,f}$ به هندسه شارش، دینامیک شارش، و خواص شارش بستگی دارد. برای مثال، در مثال لایه مرزی قبلی غلظت در میدان دوردست در خارج لایه مرزی در نظر گرفته می‌شود، یعنی، $C_{A,f} \rightarrow C_{\infty,f}$ ، که در آن مجدداً مقدار غلظت در مجرای داخلی عبارت است از غلظت کپه‌ای یا غلظت متوسط در مقطع عرضی $C_{A,s}$ مقدار غلظت در فصل مشترک جامد-سیال است که در فشار و دمای داده شده سیستم در تعادل است. مانند قسمت قبل، گروههای بی‌بعد مربوط با در نظر گرفتن نسبت مقاومت فرارفت (ادوکسیون) به پخش در یک سیستم ساده با شار ثابت به دست می‌آیند. در فصل مشترک جامد-سیال مقادیر مساوی است و

$$q_m = -h_m A (C_{A,s} - C_{A,f}) = -\mathcal{D}_{AB} A \frac{d}{dx} (C_A - C_{A,s})|_{x=0}$$

بنابراین،

$$\frac{h_m L}{\mathcal{D}_{AB}} = \frac{-\frac{d}{dx} (C_A - C_{A,s})|_{x=0}}{(C_{A,s} - C_{A,\infty})/L} \quad (14.2.9)$$

این گروه‌بندی بی‌بعد عدد شروود، S_h ، یا عدد نوسلت انتقال جرم، $N_{u_{AB}}$ ، نامیده می‌شود. نسبت پخشندگی جرم به پخشندگی تکانه، ν/\mathcal{D}_{AB} ، به عنوان عدد اشویت، S_c ، نامیده می‌شود. بنابراین، رابطه آزمایشگاهی که باید کمیت بندی شود عبارت است از $N_{u_{AB}} = S_h = f(R_e, S_c)$.

خلاصه‌ای از عبارتهای کپه‌ای رایج

در این قسمت چند ضریب انتقال گرما و انتقال جرم لازم برای پارامتری کردن اثرات همرفت-فرارفت ادوکسیون به طور خلاصه آورده می‌شوند. ساده‌ترین شکلهای هندسی عبارت‌اند از ورقهای تخت، مجراها، و کره‌ها، و در این قسمت ضریبهای کلی، برخلاف تغییرات نقطه به نقطه، پارامتری می‌شوند. ۱. ورق تخت. شارش لایه‌ای روی یک ورق صاف به طول L برای عدد رینولدز کمتر از 10^5 روی می‌دهد. تابع عدد نوسلت [مرجع ۳] عبارت است از

$$N_u = 0.664 R_L^{0.5} P_r^{0.333} \quad (15.2.9)$$

که در آن عدد رینولدز بر مبنای طول ورق است.

برای عدد رینولدز بزرگتر از 10^5 یا برای سطحی زیر با عدد رینولدز بزرگتر از 10^4 ، رابطه شارش متلاطم در نظر گرفته می شود و

$$N_w = 0.366 R_L^{0.8} P_r^{0.333} \quad (16.2.9)$$

در انتقال جرم لایه‌ای یک عنصر تنها روی یک ورق صاف [مرجع ۴]

$$S_h = 0.664 R_L^{0.5} S_c^{0.333} \quad (17.2.9)$$

برای شارش متلاطم می توان به تشابه انتقال بین جرم، تکانه و انرژی متوسل شد و بدین ترتیب

$$S_h = 0.366 R_L^{0.8} S_c^{0.333} \quad (18.2.9)$$

مفهوم قیاسهای انتقال در بسیاری از مراجع، مثلاً مرجع [۵]، مورد بحث قرار می گیرد؛ این مفهوم در پارامتری کردن مسائل جدید (از روی حل‌های موجود) که هندسه یکسان دارند ولی خاصیت انتقال متفاوت دارند مفید واقع می شود. اگر خواص سیستم ثابت باشند و هیچ انرژی یا جرم در میدان شارش نباشد، این اقتباسها پذیرفتنی است. این به معنای نبود چشمه یا چاه بر اثر تابش، واکنش بیولوژیکی و شیمیایی، یا اتلاف چسبندگی است.

۲. شارش در مجرا. شارش لایه‌ای در داخل مجرای با دمای جداره T_w ثابت برای عدد رینولدز (مبتنی بر قطر D) کمتر از 2100 وجود دارد [مرجع ۱]

$$N_w = 1.86 \left(R P_r \frac{D}{L} \right)^{0.333} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (19.2.9)$$

که در آن L طول لوله، μ_w چسبندگی در دمای جداره، و μ_b چسبندگی در دمای متوسط مقطع عرضی است. معادله برای مقدار $R P_r D/L > 10$ صحت دارد. از مرجع بالا ضریب انتقال در شارش متلاطم در لوله با رابطه زیر داده می شود.

$$N_w = 0.27 R^{0.8} P_r^{0.333} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (20.2.9)$$

که در $L/D > 60$ و اختلافهای بزرگتر بین دمای جداره و دمای کپهای (ΔT) صحت دارد. برای مقادیر کوچکتر ΔT ، اسلیشر و رز [مرجع ۶] رابطه زیر را پیشنهاد کردند

$$N_w = 0.23 R^{0.8} P_r^n \quad (21.2.9)$$

که در آن برای گرمایش، $(T_w > T)$ ، $n = 0.4$ و برای $T_w < T$ ، $n = 0.3$.
برای انتقال جرم در مجرا فرمول هاریت و هامپلتون [مرجع ۷] صحت دارد

$$S_h = 0.0096R^{0.112}S_c^{0.346} \quad (22.2.9)$$

۳. کره. انتقال گرما و انتقال جرم ناشی از شارش روی کره تنها در مراجع [۴ و ۸] مرور می‌شوند.
در کره تنها [مرجع ۹]

$$N_u = 2 + [0.4R^{0.5} + 0.6R^{0.667}]P_r^{0.4} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} \quad (23.2.9)$$

که در آن عدد رینولدز مبتنی بر قطر ذره و سرعت جریان آزاد یا سرعت ته‌نشینی است. اگر اختلاف بین دمای جداره و دمای جریان آزاد بزرگ باشد، چسبندگی جداری و چسبندگی جریان آزاد، به ترتیب، μ و μ_w مهم است. این معادله برای عدد رینولدز بزرگتر از $7.6(10^4)$ برای ذره و $3.2 \leq \mu/\mu_w < 1$ صحت دارد.

رابطه انتقال جرم در مرجع [۱۰] به صورت زیر است

$$S_h = 2 + 0.6S_c^{0.333}R^{0.5} \quad (24.2.9)$$

در هر دو حالت توجه می‌شود که اگر سیال ساکن باشد، در این صورت $R = 0$ و $N_u = S_h = 2$.

مثال ۳.۹ در مثال ۲۳.۳ دمای جداره را در خروجی (نقطه ۲) و ضریب انتقال گرما را در مبادله‌کن گرمایی محاسبه کنید. $T_1 = 90^\circ\text{C}$ ، $q = 5\text{kJ/m}^2 \cdot \text{s}$.

حل

در لوله‌ای به قطر 1.0cm ، $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 1\text{kg/s}$ سرعت متوسط برابر است با

$$V = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{1.0\text{kg/s}}{(965.3\text{kg/m}^3)\pi(0.05\text{m})^2} = 0.132\text{m/s}$$

عدد رینولدز عبارت است از

$$R = \frac{VD}{\nu} = \frac{(0.132)(0.1)}{0.328(10^{-6})} = 4(10^4)$$

و بنابراین، شارش متلاطم است. از معادله (۲۱.۲.۹)

$$N_w = \frac{hD}{k} = 0.23 R^{0.8} P_p^{0.3}$$

و بنابراین

$$h = k \frac{0.23}{0.1} [4(10^4)]^{0.8} (2)^{0.3}$$

در اینجا، از پیوست ج، عدد پرانتل را $Pr = 2.0$ انتخاب می‌کنیم و k برابر با $0.68 W/m.K$ است. بنابراین، h برابر با $925 J/m^2 \cdot s.K$ تخمین زده می‌شود.

در خروجی، دمای کپه‌ای یا دمای متوسط مقطع عرضی $82.5^\circ C$ تخمین زده شد. بنابراین، دمای جداری از فرمول انتقال گرمای همرفتی برای آخرین متر طول لوله به صورت زیر تخمین زده می‌شود

$$q(x = L = 2.0 m) = -h(T_w - T_f(x = L))$$

حلی $T_w(x = L)$ می‌دهد

$$\begin{aligned} T_w(x = L = 2.0 m) &= -\frac{q}{h} + T_f(x = L) \\ &= -\frac{5000 J/m^2 \cdot s}{925 J/m^2 \cdot s.K} + 82.5^\circ C \end{aligned}$$

بنابراین، $T_w = 77.1^\circ C$.

مثال ۴.۹ هوای خشک روی سطح یک استخر کوچک به طول $2.0 m$ و به عرض $3.5 m$ جریان دارد. فرض کنید که هوا در فشار اتمسفریک استاندارد ($101.3 kPa = 760 mmHg$) است. آب و هوا در دمای تعادل $25^\circ C$ قرار دارند، و سرعت متوسط باد $8 m/s$ است. با استفاده از تشابه انتقال متلاطم روی ورق تخت، آهنگ تبخیر یا شار بخار آب از سطح را تخمین بزنید.

حل

برای هوای خشک در فشار استاندارد ($101.3 kPa$) چسبندگی $(10^{-5}) m^2/s$ و پخشندگی جرم بخار آب در هوا $242 cm^2/s$ یا $(10^{-5}) m^2/s$ 2.42 است. فشار بخار آب در $25^\circ C$ برابر با $3227 N/m^2$ است.

عدد رینولدز در طول معادل ۲۰۰ m عبارت است از

$$R = \frac{uL}{\nu} = \frac{(۸\text{ m/s})(۲۰۰\text{ m})}{۱٫۴۶(۱۰^{-۵})\text{ m}^2/\text{s}} = ۱٫۱(۱۰^۸)$$

که عدد رینولدز نوعی برای شارش لایه مرزی ژئوفیزیکی یا طبیعی است. عدد اشمیت، ν/D_{AB} ، عدد اشمیت و از این رو عدد شروود را از معادله (۸.۲.۹) به صورت زیر می‌توان یافت

$$S_h = \frac{h_m L}{D_{AB}} = ۰٫۰۳۶۶ R_L^{۰٫۸} S_c^{۰٫۳۳۳}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} h_m &= ۰٫۰۳۶۶ \frac{D_{AB}}{L} R_L^{۰٫۸} S_c^{۰٫۳۳۳} \\ &= ۰٫۰۳۶۶ \frac{۲٫۴۲(۱۰^{-۵})\text{ m}^2/\text{s}}{۲۰۰\text{ m}} [۱٫۱(۱۰^۸)]^{۰٫۸} (۰٫۰۶)^{۰٫۳۳۳} \\ &= ۰٫۱\text{ m/s} \end{aligned}$$

با فرض اینکه $C_{A,f}$ غلظت بخار آب در فاصله دور از سطح، یعنی، $C_{A,\infty}$ است، شار تبخیر از معادله (۸.۲.۹) پیدا می‌شود. بنابراین

$$q_m = h_m A (C_{A,s} - C_{A,\infty})$$

برای هدف بحث، $C_{A,\infty}$ در اینجا مساوی با صفر فرض می‌شود. غلظت بخار آب در سطح از رابطه زیر به دست می‌آید

$$C_{A,s} = \frac{pA}{TR} = \frac{۳۲۲۷\text{ N/m}^2}{(۳۰۲\text{ K}) \left(۲۸۷ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \right)} = ۰٫۰۳۷\text{ kg/m}^3$$

بنابراین، شار از تمام سطح استخر برابر است با

$$\begin{aligned} q_m &= (۰٫۱\text{ m/s})(۲۰۰\text{ m})(۳۵\text{ m})(۰٫۰۳۷ - ۰)\text{ kg/m}^3 \\ &= ۲۵٫۹\text{ kg/s} \end{aligned}$$

از بخار آب

این معادل است با $۲۶m^۳$ °۰ آب که در یک ثانیه از تمام سطح استخر هدر می‌رود (برابر با $۳۷(۱۰^{-۶})$ m افت ارتفاع آب استخر در یک ثانیه). این مقدار کمی اغراق‌آمیز است زیرا $C_{A,∞}$ به ندرت صفر است.

تمرینها

۱.۲.۹ شار گرمای فرارفتی (ادوکتیو) (الف) در تمام جهتهای مختصات یکنواخت است؛ (ب) با اختلاف دمای بین دو نقطه متناسب است؛ (ج) یک کمیت برداری است؛ (د) خاصیتی از محیط است؛ (ه) ب و ج.

۲.۲.۹ ضریب انتقال گرما یا انتقال جرم کلی (الف) شامل انتقال گرمای ناشی از یک محیط متحرک و همچنین شامل رسانش یا پخش است؛ (ب) با ضریب انتقال گرمای همرفتی به‌طور معکوس متناسب است؛ (ج) با مساحت مقطع عرضی عمود بر شار به‌طور خطی تغییر می‌کند؛ (د) با مقاومت گرمایی یا پخشی، R ، متناسب است؛ (ه) الف و ب.

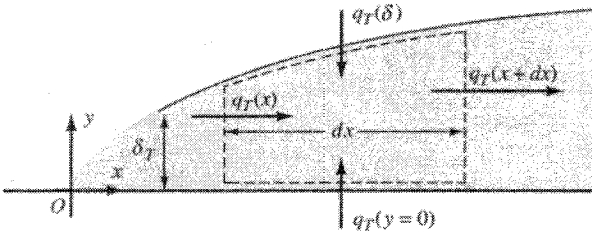
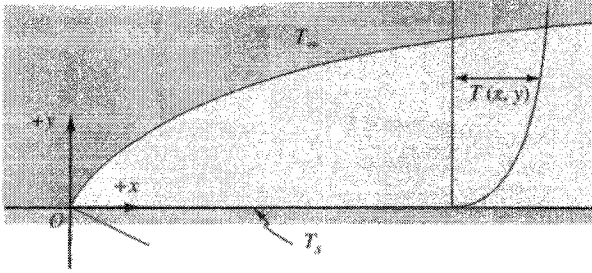
۳.۲.۹ اعداد نوسلت و شرود (الف) مقاومت فرارفت (ادوکسیون) را به شبیه‌های چگالی ارتباط می‌دهند؛ (ب) مشابه همدیگرند؛ (ج) مقاومت انتقال پخشی را به مقاومت انتقال ادوکتیو ارتباط می‌دهند؛ (د) با عدد رینولدز متناسب است؛ (ه) ب و ج.

۳.۹ انتقال لایهٔ مرزی لایه‌ای

در بخش ۲.۷ انتقال تکانه در لایه مرزی در ارتباط با تعیین مقدار دقیق تنش برشی τ_0 در سطح مشترک بین ورق تخت و میدان شارش لایه‌ای [معادله‌های (۶.۲.۷)–(۸.۲.۷)] مطالعه شد. سپس از این معادله‌ها برای تعیین نیروی کل یا پسای کل مؤثر بر ورق [معادله‌های (۹.۲.۷) و (۱۰.۲.۷)] انتگرال گرفته شد. به‌طور مشابه، حل‌های دقیق برای انتقال گرما و انتقال جرم لایه‌ای روی ورق‌های تخت وجود دارند، که آنها را نیز می‌توان تحلیل کرد و حل‌های دقیق را برای ضریب‌های انتقال جرم و انتقال گرمای همرفتی و شارهای متناظر به دست آورد. روش توصیف‌شده در بخش ۲.۷ بسط داده می‌شود تا این موضوع را دربرگیرد و به‌عنوان روش تحلیل انتگرالی ون‌کارمن دانسته می‌شود.

انتقال گرما

یک حجم کنترل در شکل ۷.۹ مشخص شده است و فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند: شارش پایا و لایه‌ای است و شامل شتاب عمودی نیست، و در خارج از لایه مرزی گرمایی δ_T ، دمای



شکل ۷.۹ تعریف حجم کنترل در انتقال گرما در لایه مرزی.

T_s ورق کمتر از دمای T_∞ جریان آزاد است. برای داشتن $T_s \rightarrow T_\infty$ همرفت آزاد را با شتاب عمودی توده‌های ناپایدار سیال وارد می‌کنیم. شرایط مرزی زیر به کار می‌روند:

$$T = T_s @ y = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 @ y = \delta_T$$

$$T = T_\infty @ y = \delta_T; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 @ y = 0$$

مجدداً، مانند لایه مرزی هیدرودینامیکی، از بسط سری نمایه دمای $T(y)$ به صورت زیر استفاده می‌شود

$$T(y) - T_s = c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3$$

که پس از اعمال شرایط مرزی به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{T(y) - T_s}{T_\infty - T_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \quad (۱.۳.۹)$$

مخالف آن، از بخش ۲.۷ نمایه سرعت با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{u(y)}{u} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (۲.۳.۹)$$

ضخامت لایه مرزی دمایی (δ_T) و ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی با عدد پراتل به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \text{Pr}^{1/2} \quad (۳.۳.۹)$$

معادله (۷.۲.۷) رشد δ را به صورت تابعی از فاصله x از لبه حمله و عدد رینولدز در فاصله x ، $\mathbf{R} = ux/\nu$ می‌دهد.

با تحلیل حجم کنترلی می‌توان ضریب انتقال گرما را ارزیابی کرد. چهار شار گرمایی مرزی باید موازنه شوند؛ بنابراین، $q_T(y=0) = q_T(x+dx) - q_T(x) - q_T(\delta)$ و

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx(1) &= \int_0^{\delta_T} \rho c_p u(x+dx, y) T(x+dx, y) dy \\ &- \int_0^{\delta_T} \rho c_p u(x, y) T(x, y) dy - dx \int_0^{\delta_T} \rho c_p u(x, y) T_\infty dy \end{aligned}$$

با فرض ثابت بودن ρc_p و با تقسیم کردن بر مساحت سطح ورق ($dx(1)$) و با حدگیری وقتی $dx \rightarrow 0$ نتیجه می‌شود

$$-\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} u(y) (T_\infty - T(y)) dy \quad (۴.۳.۹)$$

جایگذاری نمایه‌های سرعت و دما [معادله‌های (۱.۳.۹) و (۲.۳.۹)] در معادله (۴.۳.۹) معادله زیر را برای عدد نوسلت در نقطه دلخواه x در امتداد ورق می‌دهد

$$\text{Nu}_{ax} = \frac{h(x)x}{k} = 0.36 \text{Re}_x^{0.5} \text{Pr}^{0.333} \quad (۵.۳.۹)$$

با مراجعه به معادله (۴.۳.۹) تا (۵.۳.۹)، از معادله آهنگ نیوتن استفاده می‌کنیم؛ یعنی،

$$q(x, y=0) = h(x)(T_s - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

همانطور که دیده می‌شود این حل شار و ضریب انتقال گرما را در هر نقطه در امتداد ورق پارامتر می‌کند. ولی در آن باید از نمایش کپهای یا متوسط استفاده کرد که به صورت زیر می‌توان آن را به دست آورد

$$q = hA(T_s - T_\infty) = \int h(x)(T_s - T_\infty)dA$$

جایگذاری معادله (۵.۳.۹) در این معادله و انتگرال‌گیری در عرض (w) و طول (L) ورق شکل کپهای عدد نوسلت را می‌دهد

$$N_{uL} = \frac{hL}{k} = 0.72 R_L^{0.5} P_r^{0.333} \quad (۶.۳.۹)$$

توجه کنید که روش حل دقیق بر مبنای حل بلازیوس در ورق تخت [مرجع ۱۱] می‌دهد

$$N_{uL} = 0.664 R_L^{0.5} P_r^{0.333} \quad (۱۵.۲.۹)$$

این دو معادله ۹ درصد با هم اختلاف دارند. وقتی حلهای نمایه‌ای از قبل معلوم نیستند، روش تقریبی انتگرالی مفید است.

انتقال جرم

با استفاده از مجموعه یکسانی از محدودیتهای مربوط به لایه مرزی دمایی لایه‌ای، از تحلیل تقریبی انتگرال فون کارفن در تحلیل لایه مرزی غلظت (δ_c) و ضریب انتقال جرم (h_m) می‌توان استفاده کرد. یک شرط اضافی که در این تحلیل به‌کار می‌رود این است که هیچ چشمه یا چاه در داخل حجم کنترل وجود ندارد.

نمایه به شکل زیر فرض می‌شود

$$C - C_s = d_1 + d_2 y + d_3 y^2 + d_4 y^3$$

و شرایط مرزی زیر در آن برقرار است

$$\begin{aligned} C &= C_s @ y = 0; & \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 @ y = \delta_c \\ C &= C_\infty @ y = \delta_c; & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= 0 @ y = 0 \end{aligned}$$

نمایه به شکل زیر درمی آید

$$\frac{C(y) - C_s}{C_\infty - C_s} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_c} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_c} \right)^3 \quad (۷.۳.۹)$$

ضخامت لایه مرزی غلظت (δ_c) طبق رابطه زیر با ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی ارتباط دارد

$$\delta / \delta_c = S_c^{1/3} \quad (۸.۳.۹)$$

تحلیل حجم کنترلی همسان با تحلیل لایه مرزی دمایی نشان می دهد که

$$h_{mx}(C_s - C_\infty) = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} [C(x, y) - C_\infty] u(x, y) dy \quad (۹.۳.۹)$$

جایگذاری نمایه تقریبی در معادله (۹.۳.۹) و انتگرال گیری یک رابطه بی بعد را برای ضریب انتقال جرم در مکان دلخواه x در امتداد ورق می دهد

$$S_{h_x} = \frac{x h_{mx}}{\mathcal{D}} = 0.36 R_x^{0.5} S_c^{0.333} \quad (۱۰.۳.۹)$$

عدد شروود کلی یا کپه ای با انتگرال گیری در طول و عرض ورق به دست می آید و برابر است با

$$S_h = \frac{L h_m}{\mathcal{D}} = 0.72 R_L^{0.5} S_c^{0.333} \quad (۱۱.۳.۹)$$

این قسمت را با توجه به اینکه در بیشتر شارشهای ژئوفیزیکی لایه های مرزی لایه ای کاملاً نازک اند و در فواصل کوچک فضایی روی می دهند به پایان می بریم. ولی، در بیشتر فرایندهای مهندسی، مکانیک لایه مرزی لایه ای در فرایند طراحی می شود. در قسمت بعد مسئله تلاطم و نحوه پارامتری کردن تأثیرات آن بر انتقال گرما و جرم مرور می شود.

مثال ۵.۹ با مراجعه به مثال ۴.۹، فاصله فضایی لایه مرزی لایه ای بخار آب و ضخامت گذار آن از شارش لایه ای به شارش متلاطم را بیابید.

حل

لایه مرزی هیدرودینامیکی در فاصله ای که در آنجا $(10^5) 2.5 \leq R_x = Ux/\nu$ دستخوش

گذار می‌شود. با افزایش زبری سطح، عدد رینولدز بحرانی کاهش می‌یابد. از مثال قبل،

$$x = \frac{R_x \nu}{U} = \frac{2.5(10^5) 1.46(10^{-5}) \text{m}^2/\text{s}}{8 \text{m/s}} = 0.45 \text{m}$$

ضخامتهای لایه مرزی به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$\delta/\delta_c = \left(\frac{\nu}{g}\right)^{1/2} = (0.6)^{1/2} = 0.84$$

بنابراین، $\delta_c = 1.18\delta$

از معادله (۷.۲.۷)

$$\delta = \frac{4.65x}{\sqrt{R_x}} = \frac{4.65(0.45)}{\sqrt{\frac{8(0.45)}{1.46(10^{-5})}}} = 0.42(10^{-2}) \text{m} = 0.42 \text{cm}$$

بنابراین، δ_c در نقطه گذار عبارت است از

$$1.18(0.42 \text{cm}) = 0.5 \text{cm}$$

تمرین

۱.۳.۹ در تحلیل لایه مرزی لایه‌ای گرما با پخش جرم (الف) شار عمودی در دیواره، $y = 0$ ، صفر است؛ (ب) ضخامت لایه مرزی برحسب فاصله در فرودست روی یک ورق تخت خطی رشد می‌کند؛ (ج) عدد نوسلت یا عدد شروود با جذر متغیر عدد رینولدز متناسب‌اند؛ (د) نمایه غلظت یا دما یک معادله درجه دوم است که آن فاصله از جداره است؛ (ه) ضخامتهای لایه مرزی بزرگ است.

۴.۹ رابطه‌های انتقال متلاطم

همانطور که در فصل ۳ گفته شد شارش متلاطم به عنوان یک حرکت چرخشی غیر پایای سیال است که تأثیر مهمی بر توزیع اندازه حرکت، گرما و جرم دارد. همانطور که در قسمت ۴.۶ گفته شد روشهای تحلیل مبتنی بر میانگین‌گیری، که به دور از تأثیر تلاطم با مقیاس ظریف است، مجموعه پیچیده‌ای از معادله‌های رینولدز حاکم بر توزیع متغیرهای میانگین‌گیری شده را می‌دهند. کانون

بحث در فصل ۶ افت و خیزهای سرعت متلاطم در شارش لوله و کانال است. در این قسمت این مفاهیم را به انتقال گرما و جرم بسط می‌دهیم.

میانگین‌گیری از معادله‌های حاکم

معادله‌های گرما و جرم (به ترتیب، معادله‌های (۴.۷.۴) ب) و (۴.۸.۴) الف) با میانگین‌گیری رینولدز تحلیل می‌شوند. دمای متلاطم (T') و غلظت (C') که نسبت به کمیت میانگین مشخص شده با خط بار تعریف می‌شود؛

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) + T'(\mathbf{x}, t) \quad (الف \ ۱.۴.۹)$$

$$C(\mathbf{x}, t) = \bar{C}(\mathbf{x}, t) + C'(\mathbf{x}, t) \quad (ب \ ۱.۴.۹)$$

مانند قبل، میانگین به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} T(\mathbf{x}, t) dt$$

توجه کنید که حتی اگر متغیرها میانگین‌گیری شوند حالتی وجود دارد که متغیرهای میانگین شارش می‌توانند برحسب زمان و فضا تغییر کنند. تغییرات زمانی در متغیرهای میانگین شارش یک پدیده معمول در شارشهای ژئوفیزیکی است.

با حفظ معادله پیوستگی، معادله‌های انتقال گرما و جرم میانگین‌گیری می‌شوند. بنابراین، معادله گرما عبارت است از

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{T} \right] = k \nabla^2 \bar{T} + \bar{S}_T \quad (الف \ ۲.۴.۹)$$

و معادله جرم عبارت است از

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{C} = \mathcal{D} \nabla^2 \bar{C} + \bar{S}_C \quad (ب \ ۲.۴.۹)$$

قوانین میانگین‌گیری رینولدز، که در بخش ۴.۶ به کار رفت، در تجزیه جمله‌های مشابه فرارفت (ادوکسیون) در معادله (۲.۴.۹) به کار می‌روند. برای دو تابع a و b

$$\overline{ab} = \overline{(a + a')(b + b')} = \overline{ab} + \overline{a'b'} \approx \overline{ab} + \overline{a'b'}$$

بنابراین، معادله‌های انتقال گرما و انتقال جرم متلاطم، به ترتیب، به شکل زیر درمی‌آیند

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{T} + \overline{u'T'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{T} + \overline{v'T'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{T} + \overline{w'T'}) \right] = k\nabla^2 \bar{T} + \bar{S}_T^* \quad (\text{الف } ۳.۴.۹)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{C} + \overline{u'C'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}\bar{C} + \overline{v'C'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w}\bar{C} + \overline{w'C'}) = \mathcal{D}\nabla^2 \bar{C} + \bar{S}_C \quad (\text{ب } ۳.۴.۹)$$

برای حفظ تشابه این معادله‌ها با جمله‌های میانگین‌گیری نشده متناظرشان، جمله‌های همبستگی* از طرفین معادله تفریق می‌شوند، و معادله گرمای زیر

$$\rho c_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho c_p \overline{u'T'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{v'T'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho c_p \overline{w'T'} \right] + \bar{S}_T^* \quad (\text{الف } ۴.۴.۹)$$

و معادله جرم زیر

$$\frac{D\bar{C}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - \overline{u'C'} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} - \overline{v'C'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} - \overline{w'C'} \right] + \bar{S}_C \quad (\text{ب } ۴.۴.۹)$$

به دست می‌آیند. معادله‌های گرما و جرم را، به ترتیب، به شکل شار متلاطم زیر می‌توان نوشت

$$\frac{d\bar{T}}{dt} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{N}}_T = \frac{\bar{S}_T^*}{\rho c_p} = S_T \quad (\text{الف } ۵.۴.۹)$$

$$\frac{d\bar{C}}{dt} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{N}}_C = S_C \quad (\text{ب } ۵.۴.۹)$$

* مثلاً $u'T'$.

در اینجا \bar{N}_T و \bar{N}_C ، به ترتیب، شارهای کل انتقال گرما و جرم است

$$\bar{N}_T = N_{T_x} \mathbf{i} + N_{T_y} \mathbf{j} + N_{T_z} \mathbf{k} \quad (۴.۴.۹ \text{ الف})$$

$$= \left(\bar{u}T' + \overline{u'T'} - \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\bar{v}T' + \overline{v'T'} - \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\bar{w}T' + \overline{w'T'} - \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

$$\bar{N}_C = N_{C_x} \mathbf{i} + N_{C_y} \mathbf{j} + N_{C_z} \mathbf{k} \quad (۴.۴.۹ \text{ ب})$$

$$= \left(\bar{u}C' + \overline{u'C'} - \mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\bar{v}C' + \overline{v'C'} - \mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\bar{w}C' + \overline{w'C'} - \mathcal{D} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \mathbf{k}$$

در مقایسه با تنشهای رینولدز تعریف شده در فصل ۴.۶، جمله‌های همبستگی (مثلاً $\overline{u'T'}$) یا شارهای متلاطم شارهای رینولدز نامیده می‌شوند. جمله‌ها به شکل $\bar{u}T'$ ، $\bar{u}C'$ و غیره شارهای فرارفتی (ادوکتیو) است در حالی که جمله‌های شیب، مشتمل بر پخشندگی گرمایی یا جرم، شارهای پخش مولکولی است.

پخشندگیهای تلاطمی

شارهای رینولدز و تنشها باید بسته باشند. این اصطلاح فنی مربوط می‌شود به لزوم ارتباط دادن شارهای رینولدز به جمله‌هایی که شامل متغیرهای میانگین شارش (\bar{v} ، \bar{C} ، \bar{T} و غیره) است. اولین و پایدارترین نتیجه را جی-تیلور [مرجع ۱۲] ارائه کرد. تیلور استدلال کرد که در میدان تلاطم دور از مرزها می‌توان شارهای متلاطم را به شیب فضایی متغیر میانگین شارش ارتباط داد. برای مثال،

$$-\overline{u'T'} = E_{T_x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$$

$$-\overline{w'C'} = E_{C_z} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$$

E_{T_x} به عنوان پخشندگی تلاطمی گرما تعریف می‌شود و E_{C_z} پخشندگی تلاطمی جرم است. این ضریبها خواص سیال نیستند زیرا به هندسه میدان شارش، شدت تلاطم در میدان شارش، و تأثیر چینه‌بندی بستگی دارند. بنابراین، E_T و E_C متغیرهای میدان است که بر حسب زمان و فضا می‌توانند تغییر کنند.

از معادله‌های (۴.۴.۹ الف) و (۴.۴.۹ ب) و با بستن شیب پخشندگی تلاطمی، معادله‌های

گرما و جرم، به ترتیب، عبارت‌اند از

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\nabla} \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha + E_{T_x}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + E_{T_y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\alpha + E_{T_z}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] + \bar{S}_T \quad (الف \ ۷.۴.۹)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\nabla} \bar{C}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mathcal{D} + E_{C_x}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mathcal{D} + E_{C_y}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mathcal{D} + E_{C_z}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right] + \bar{S}_C \quad (ب \ ۷.۴.۹)$$

مانند معادله‌های تکانه متلاطم میانگینی، خط بار در استفاده‌های بعدی حذف می‌شود و می‌دانیم که متغیرهای میانگین در معادله وجود دارند.

مقایسه پخشندگی‌های تلاطمی با چسبندگی‌های تلاطمی عدد پراوتل متلاطم (ϵ/E_T) یا عدد اشمیت متلاطم (ϵ/E_C) را می‌دهد اما در عمل اینها فقط در شارشهای مهندسی مفید می‌باشد؛ در این شارشها پخشندگی‌های تلاطمی و چسبندگی‌های تلاطمی در مقایسه با جمله‌های متناظر ژئوفیزیکی‌شان کمتر گذرا هستند و به‌طور فضایی بیشتر یکنواخت‌اند.

در قسمتهای بعد این فصل انتقال متلاطم تحلیل می‌شود. توابع پخشندگی تلاطمی بر طبق نوع میدان تلاطم تحت بررسی باید مشخص شوند. بنابراین قسمت بعد با ساده‌ترین توصیف میدان انتقال متلاطم، یعنی، پخشندگی‌های ثابت، شروع می‌شود. نتایج توصیفهای پخش متلاطم در شارشهای پیچیده‌تر مصالح ساختمانی مفیدی است.

تمرینها

۱.۴.۹ پخشندگی‌های تلاطمی برای انتقال گرما یا انتقال جرم متلاطم (الف) خواص سیال است؛ (ب) ثابت است؛ (ج) از روش میانگین‌گیری فضایی نتیجه می‌شوند؛ (د) مرتبه بزرگی آنها تقریباً با مرتبه بزرگی چسبندگیها یکسان است؛ (ه) هیچکدام.

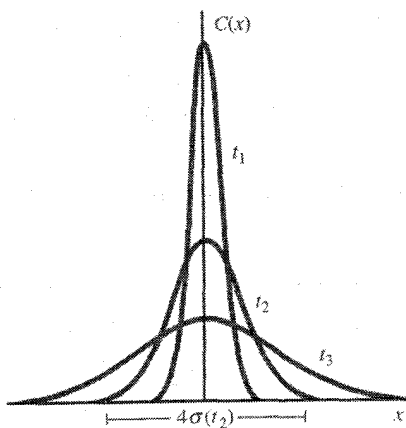
۲.۴.۹ شارهای رینولدز (الف) همیشه متلاطم است؛ (ب) از قسمتهای لایه‌ای و متلاطم هر دو تشکیل می‌شوند؛ (ج) به‌طور یکنواخت در فضا توزیع شده‌اند؛ (د) پایاست؛ (ه) در سال ۱۹۲۱ جی-تیلور آنها را تعریف کرد.

۵.۹ پخش متلاطم

همان‌طور که در قسمت قبل گفته شد، از تقریب گرادیان (شیب) پخش برای توصیف شارهای انتقال متلاطم برحسب متغیرهای میانگین شارش خیلی استفاده می‌شود. همانطوری که بسیاری اشاره کرده‌اند [مراجع ۱۳ و ۱۴] انواع دیگر بستارها موجودند اما برخلاف تقریب گرادیان پخش کاملاً پیچیده‌اند و عمدتاً در مدل‌های پیچیده کامپیوتر شارش و انتقال به‌کار می‌روند. در بررسی شارشهایی که هندسه‌های بسیار نامنظم دارند، کمیت‌های میانگین و متلاطم هر دو گذراست، و کاملاً از این جهت جفت شده‌اند که گرما یا جرم می‌تواند چینه‌بندی یا گرادیانهای چگالی قوی را در شارش وارد کند و در نتیجه نقش شارش و گردش را تغییر دهد، در این حال مجموعه این لازمه‌ها که در مدل‌های "بستن" متلاطم پیشرفته‌تر استفاده می‌شوند و شامل توصیف‌کننده‌های شارشهای ژئوفیزیکی است، و این چنین شارشها در مدل‌های پیچیده شارش و تلاطم در علوم اتمسفریک، اقیانوس‌شناسی، و حتی اختر فیزیک بررسی می‌شوند.

پخش

بحث ما متمرکز است بر روی شارشهایی که منطقاً پایاست و هندسه یکنواخت دارند. در این حالتها، تقریب گرادیان پخش یک بستار عالی است. ابتدا ساده‌ترین بستار، یعنی پخشندگی تلاطمی ثابت، بررسی می‌شود. ولی، قبل از پرداختن به پخش متلاطم، بهتر است حالت پخش مولکولی دوباره بررسی شود. در حالت یک‌بعدی جرم M ذرات علامت‌گذاری شده را که مسیرهایشان را در زمان می‌توان ردیابی کرد در نظر بگیرید. با توجه به شکل ۸.۹، در زمان $t = 0$ جرم در مبدأ قرار می‌گیرد و



شکل ۸.۹ طرحواره پخش متلاطم برحسب زمان

پخش باعث می‌شود که جرم از مبدأ در هر جهت به حرکت درآید. معادله این حرکت عبارت است از

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (۱.۵.۹)$$

و حل آن چنین است

$$C(x, t) = \frac{B}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\mathcal{D}t} \quad (۲.۵.۹)$$

در هر نقطهٔ زمانی، جرم در فرض واحد سیستم پایستار است. بنابراین، با صرف نظر کردن از توزیع فضایی در لحظهٔ دلخواه t ، داریم

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx \quad (۳.۵.۹)$$

با جایگذاری معادلهٔ (۲.۵.۹) در معادله (۳.۵.۹)، انتگرال‌گیری، و استفاده از این حقیقت که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

ضریب انتگرال‌گیری، B ، به دست می‌آید. بنابراین،

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{-x^2/4\mathcal{D}t} \quad (۴.۵.۹)$$

مفید است که جزئیات هندسی فرایند پخش، ساده‌ترین اندازه‌گیریها که عرض منحنی است، زمانی که طول می‌کشد منحنی غلظت به یک مکان معین برسد، با سرعت گسترش منحنی مشخص شود. با محاسبه واریانس، δ^2 ، توزیع حول میانگین، یعنی،

$$\sigma^2(t)M = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 C(x, t) dx \quad (۵.۵.۹)$$

می‌توان عرض یا گسترش منحنی را با یک روش ساده تشکیل داد. توجه کنید که واریانس تابعی از زمان است. برای توزیع در اینجا، $\mu = 0$ زیرا تابع متقارن است. جایگذاری معادلهٔ (۵.۵.۹) در معادله (۴.۵.۹) و تقسیم کردن طرفین بر M می‌دهد

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mathcal{D}t}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/4\mathcal{D}t} dx = 2\mathcal{D}t \quad (۶.۵.۹)$$

بنابراین، عرض، که با واریانس اندازه‌گیری می‌شود، برای فرایندهای پخش که با ضریب پخش ثابت مشخص می‌شوند برحسب زمان به‌طور خطی رشد می‌کند. همچنین توجه کنید که آهنگ زمانی تغییر یا آهنگ گسترش یا آهنگ رشد ثابت است

$$\frac{d}{dt}\sigma^2(t) = 2\mathcal{D} \quad (7.5.9)$$

در حقیقت همانطور که فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] اشاره می‌کنند معادله (۷.۵.۹) را به‌طور مستقل از شکل منحنی غلظت می‌توان به دست آورد. برای اثبات این موضوع، طرفین معادله (۱.۵.۹) را در x^2 ضرب می‌کنیم و از طرفین معادله نسبت به dx در بازه $-\infty < x < \infty$ انتگرال می‌گیریم.

از انتگرال معادله (۷.۵.۹) بین دو مدت زمانی نتیجه دیگری به دست می‌آید

$$\int_{t_1}^{t_2} d\sigma^2 = 2\mathcal{D} \int_{t_1}^{t_2} dt \implies \sigma^2_t - \sigma^2_1 = 2\mathcal{D}(t_2 - t_1) \quad (8.5.9)$$

بنابراین، اگر بتوان واریانس غلظت را در دو زمان متفاوت نمونه‌برداری کرد، ضریب پخش را به صورت زیر می‌توان تعیین کرد

$$\mathcal{D} = \frac{(\sigma^2_t - \sigma^2_1)}{2(t_2 - t_1)} \quad (9.5.9)$$

مقایسه با توزیع احتمال گاوسی

شایان ذکر است که شکل معادله (۴.۵.۹) مشابه توزیع احتمال است و این تصادفی نیست. از زمان استنتاج معادله (۴.۵.۹) توسط آلبرت اینشتین در سال ۱۹۰۵ [مرجع ۴] تا به حال به نکته بالا توجه شده است. توزیع احتمال نرمال (P) در متغیر n با رابطه زیر داده می‌شود

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-n^2/2\sigma^2}$$

بنابراین، اگر $x \rightarrow n$ ، در معادله (۵.۵.۹) $M = 1$ ، $\sigma^2 = 2\mathcal{D}t$ و میانگین توزیع حول $x = 0$ متمرکز شود، در این صورت معادله (۴.۵.۹) بهبود می‌یابد. این اطلاع در نمونه‌برداری میدانی مفید است. همانطور که تلویحاً در معادله (۹.۵.۹) اشاره شده است اندازه ابر غلظت در تعیین ضریب پخش یا بعداً در تعیین پخشندگی تلاطمی اغلب مفید واقع می‌شود. توزیع نرمال وسیله مناسبی

در اندازه‌گیری اندازه است زیرا به خوبی معلوم شده است که ۹۵ درصد مساحت کل زیر منحنی با عرض $\pm 2\sigma$ (کلاً 4σ) با متوسط منحنی اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۸.۹). از جنبه دیگر اگر ضریب پخش یا پخشندگی تلاطمی را بدانیم، اندازه (عرض) ابر، $w_c(t)$ ، در لحظه t عبارت است از

$$w_c(t) = 4\sigma = 4\sqrt{2D}t \quad (۱۰.۵.۹)$$

قیاس با توزیعهای احتمال را تا توزیع نرمال می‌توان بسط داد، اما در اینجا فقط مفهوم گشتاورهای عمومی مفید است:

$$\begin{aligned} \text{گشتاور صفرم} = M_0 &= M = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx \\ \text{گشتاور اول} = M_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} xC(x, t) dx \\ \text{گشتاور دوم} = M_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x, t) dx \end{aligned}$$

به سهولت می‌توان هر گشتاور بعدی را با افزایش توان متغیر مستقل داخل علامت انتگرال به دست آورد. در توزیع نرمال و قیاس توزیع غلظت آن در معادله (۴.۵.۹)، میانگین μ و واریانس δ^2 آن از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\mu = \frac{M_1}{M_0}$$

و

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 C(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx} = \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^2 = \frac{M_2}{M_0} - \mu^2 \quad (۱۱.۵.۹)$$

مبنای پخش متلاطم

همانطور که در بعضی جاها تأکید شده است شارهای انتقال متلاطم مختلف (مثلاً $\overline{w'C'}$ یا $\overline{u'T'}$) خواص متعددی دارند. ابتدا، آنها از نظر اندازه در گستره افت و خیزهای هندسه شارش تا کوچکترین مقیاس متلاطم، به نام مقیاس کولموگوروف، قرار دارند. دوم، آنها کاملاً گذرا و تصادفی اند از این جهت که در شارش میانگین یکسان، جزئیات افت و خیز متلاطم تکرارشدنی نیستند، ولی مشخصه‌های آماری طبیعت تصادفی تکرارشدنی است. سوم، وقتی توده‌های سیال با مشخصه‌های کاملاً متفاوت بر اثر تلاطم با هم در تماس قرار می‌گیرند طبیعت چرخش تصادفی شارش باعث ایجاد شیبهای

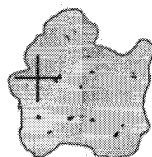
متناوب ولی بزرگ فضایی متغیرها می‌شود. چهارم، ورود پیوسته توده‌های سیال با غلظت بالا و پایین بر اثر تلاطم باعث رقیق شدن کلی ناحیه‌های با غلظت بالا از طریق آمیختگی می‌شود.

انرژی برای ایجاد تلاطم نوعاً با مقیاسهای اندازه هندسه کلی شارش وارد سیستم می‌شود (مانند، طوفان روی دریاچه یا استخر). چسبندگی عاملی است که انرژی متلاطم را به شکل گرما تلف می‌کند، و در کوچکترین مقیاس ممکن روی میدان شارش عمل می‌کند. در بین ایجاد و اتلاف مقیاسهای متلاطم یک زنجیره منظم از انرژی متلاطم وجود دارد که انرژی از طریق آن از افت و خیزها یا مقیاسهای متلاطم بزرگ به افت و خیزها یا مقیاسهای متلاطم کوچک به‌طور غیرخطی منتقل می‌شود و این عمل با تغییر پیوسته (یعنی، کاهش) زنجیره تلاطمها انجام می‌شود. در شارش میانگین پایا ایجاد انرژی متلاطم با آهنگ ویرانی در تعادل است، و بنابراین، آهنگی که با آن انرژی به کوچکترین تلاطمها منتقل می‌شود ثابت است.

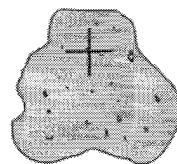
همانطور که در بالا اشاره شد، کوچکترین مقیاسهای متلاطم مقیاسهای کولموگوروف یا مقیاسهای اتلافی در طول، زمان، و سرعت نامیده می‌شوند که مقادیر آنها، به ترتیب، از مرتبه $10^1 \text{ cm} - 10^3 \text{ cm}$ و 10^1 cm/s است. اگرچه آنها مشخصه‌های قیاس مفیدی‌اند، اطلاعات خیلی مفیدی درباره مقیاس گردان آمیختگی متلاطم و نهایتاً کاربرد پخش متلاطم نمی‌دهند. اطلاع از این موارد نیازمند استفاده از اندازه‌گیرهای دیگر برای مشخص کردن برخورد و اندازه تلاطمهاست.

فرض کنید (شکل ۹.۹) جرمی از ذرات در یک نقطه داخل میدان متلاطم رها می‌شود. میدان

آزمایش شماره ۱



آزمایش شماره ۲



زمان \longrightarrow

شکل ۹.۹ پخش جرم ذرات برحسب زمان.

تلاطم، خیلی از مرزها دور است و طوری تعریف می‌شود که تمام اندازه‌گیریهای آماری پیرامون ساختار فضایی و زمانی افت و خیزها ثابت باشند. بنابراین تلاطم، همگن در نظر گرفته می‌شود، یعنی، آمار افت و خیزهای تلاطم در یک جهت خاص ثابت و همسانگرد است، یعنی، ساختار آماری فضایی در هر سه جهت ثابت است. به علاوه، افت و خیزهای تلاطم سرعت ساکن است، یعنی، آمار افت و خیزهای تلاطم با زمان تغییر نمی‌کند. در شکل ۹.۹، توده‌ای از ذرات به جرم M در مبدأ میدان تلاطم قرار دارد و در آزمایش شماره ۱ افت و خیزهای متلاطم در مقیاس بزرگ شروع به اتلاف شدن می‌کنند، و ذرات را تقسیم و پخش می‌کنند. اگر آزمایش تکرار شود، آزمایش ۲، شکل جرم M در هر مرحله زمانی کاملاً متفاوت است. ولی، برای شناخت طبیعت تصادفی میدان متلاطم میانگینهای آماری یا مجموعه جرمهای پخش‌شونده در تعدادی از آزمایشهای تکراری مهارت ریاضی لازم است. برای بحثهای تخصصی‌تر درباره فرایند میانگین‌گیری مجموعه، خواننده می‌تواند به مراجع [۴، ۱۳-۱۶] مراجعه کند.

در مراحل اولیه حرکت ذره، بعضی ذرات به طور محکم خوشه‌ای هستند، یعنی، حرکت آنها با ذرات مجاور مقید می‌شود؛ در نتیجه ذرات با میدان تلاطم تنظیم نمی‌شوند یا در تعادل با آن قرار نمی‌گیرند. در دوره‌های زمانی طولانیتر، جرم بر اثر کنش تنش برشی متلاطم پخش می‌شود، و ذرات با آن تنظیم می‌شوند، یا در تعادل با میدان متلاطم قرار می‌گیرند. این دو دوره زمانی را با استفاده از مفهوم ضریب همبستگی و مقیاسهای زمانی و طولی وابسته به آن می‌توان تعیین کرد.

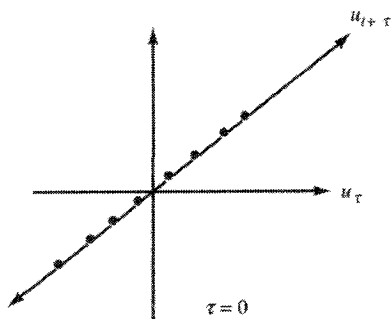
ضریب همبستگی لاگراژی، R ، برای افت و خیز w' سرعت از فرمول کلی زیر پیدا می‌شود

[مرجع ۴]

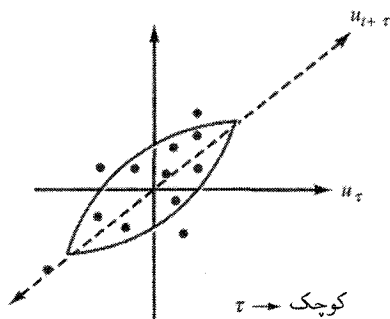
$$R_{L_x}(\tau) \frac{\overline{w'(t)w'(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{w'^2(t)}}\sqrt{\overline{w'^2(t+\tau)}}} = \frac{\langle w'(t)w'(t+\tau) \rangle}{\langle w'^2 \rangle} \quad (۱۲.۵.۹)$$

علامت $\langle \rangle$ میانگین مجموعه در تمام آزمایشها را نشان می‌دهد، خط بار میانگین زمانی را مشخص می‌ند، و L فرمولبندی لاگراژی را می‌رساند، x مختصه را نشان می‌دهد. از آنجا که سرعتها با خودشان همبسته‌اند، R_{L_x} تابع خود-همبستگی نامیده می‌شود. شکل ۱۰.۹ (که، با کمی تغییر، از مرجع [۴] گرفته شده است) گذار ضریب همبستگی را برحسب زمان از $\tau \sim 0$ ، که همبستگی ~ 1 است، تا $\tau \rightarrow \infty$ ، که هیچ همبستگی وجود ندارد، نشان می‌دهد. قسمت پایین شکل تابع خود-همبستگی نوعی، متناظر با این رفتار را نشان می‌دهد و مقیاس زمانی آن را به صورت زیر نشان می‌دهد

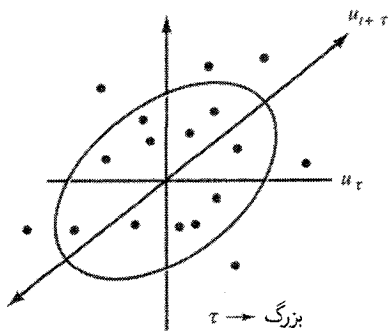
$$T_{L_x} = \int_0^{\infty} R_{L_x}(\tau) d\tau \quad (۱۳.۵.۹)$$



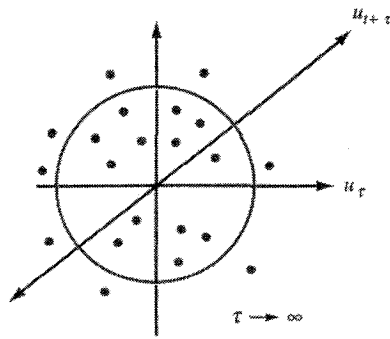
(الف)



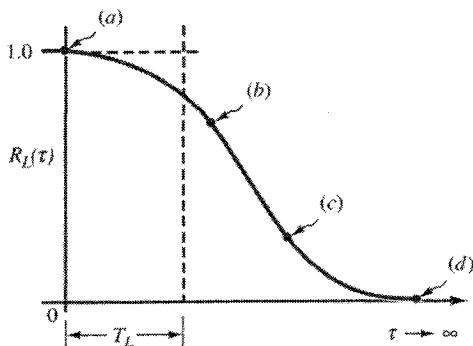
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۱۰.۹ تغییرات ضریب همبستگی بر حسب زمان. الف) همبستگی کامل؛ ب) همبستگی زیاد؛ ج) همبستگی کم؛ د) بدون همبستگی.

جدول ۱.۹ انواع واریانس پخش

ناحیه	پمعیار (زمان)	معیار (طول)	رشد واریانس
زمان کوتاه	$t \rightarrow 0, t < T_{L_x}$	$L^2 < 2l_L^2$	$\sigma_x^2(t) = \langle \overline{w'^2} \rangle t^2$
زمان طولانی	$t \rightarrow \infty, t > T_{L_x}$	$L^2 > 2l_L^2$	$\sigma_x^2(t) = 2 \langle \overline{w'^2} \rangle t T_{L_x}$

همانطور که در مرجع [۱۵]* نشان داده شده است، تحلیل جی تیلور [مرجع ۱۲] برای رشد ابر نشان می‌دهد که آهنگ رشد واریانس میانگین مجموعه ابر عبارت است از

$$\sigma_x^2(t) = 2 \langle \overline{w'^2} \rangle \int_0^t (t - \tau) R_{L_x}(\tau) d\tau \quad (۱۴.۵.۹)$$

عبارتهای مشابهی را برای جهت‌های y و z می‌توان یافت. بر مبنای بررسی در مراجع بالا یا بر مبنای تحلیل کسانادی [مرجع ۱۷]، دو رفتار متمایز را برای رفتار $\sigma_x^2(t)$ می‌توان یافت، یعنی، زمان کوچک که در آن $t \rightarrow 0$ و $t < T_{L_x}$ و زمان طولانی که در آن $t \rightarrow \infty$ و $t > T_{L_x}$. در جدول ۱.۹ نتایج خلاصه شده‌اند. بنابراین، در زمانهای کوتاه، واریانس به‌طور متناسب با t^2 سریعاً رشد می‌کند، و در زمانهای طولانی واریانس به‌طور خطی با زمان رشد می‌کند، که با حالت پخش مولکولی که قبلاً توصیف شد همسان است.

از میدان متلاطم سه‌بعدی کامل داده‌شده $3/3 = (T_{L_x} + T_{L_y} + T_{L_z})/3$ و از این مقیاس زمانی میانگین برای تعیین مقیاس طول لاگرانژی متناظر به صورت زیر می‌توان استفاده کرد

$$l_L^2 = \langle \overline{w'^2} \rangle T_L^2 \quad (۱۵.۵.۹)$$

در اینجا l_L فاصله تخمینی یک ذره سیال است که قبل از اینکه سرعت اولیه‌اش را از دست بدهد می‌پیماید. با استفاده از رابطه زمان طولانی (جدول ۱.۹) برای رشد واریانس میانگین مجموعه اندازه میانگین مجموعه ابر، $L(t)$ ، را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد

$$L^2(t) \approx 2 \langle \overline{w'^2} \rangle T_L t \quad (۱۶.۵.۹)$$

که با جایگذاری در معادله (۱۴.۵.۹) می‌توان اندازه ابر لازم برای تقریب پخش را به صورت زیر گرفت

$$L^2 > 2l_L^2 \quad (۱۷.۵.۹)$$

* مراجع متعدد دیگری علاوه بر این وجود دارند.

به طور خلاصه، تقریب پخش گرادیان تلاطم و بستار متناظر برای مواد قرار گرفته در میدان شارش در زمان طولانیتر از مقیاس لاگرانژ به کار بردنی است و اندازه آن از مقیاس طول لاگرانژی بزرگتر است.

حلهای انتخابی

حلهای انتخابی در پخش خطی یا معادله فرارفت ادوکسیون-پخش با سرعت ثابت، که کارلس لاو و جاگر [مرجع ۱۸] و کرانک [مرجع ۱۹] در کتابهایشان آورده اند، دایرةالمعارف واقعی چنین حلهایی را تشکیل می دهند. حلهایی که در اینجا نشان داده شده اند به علت کاربرد وسیع آنها در مسائل مربوط به محیط زیست انتخاب شده اند. روش ابداع حل در اصل در مراجع اولیه پیدا می شوند. ۱. شرط اولیه متغیر با زمان. معادله حاکم به کار بردنی شکل یک بعدی معادله (۷.۴.۹) ب) است

$$\frac{\partial C}{\partial t} = (\mathcal{D} + E_{C_x}) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

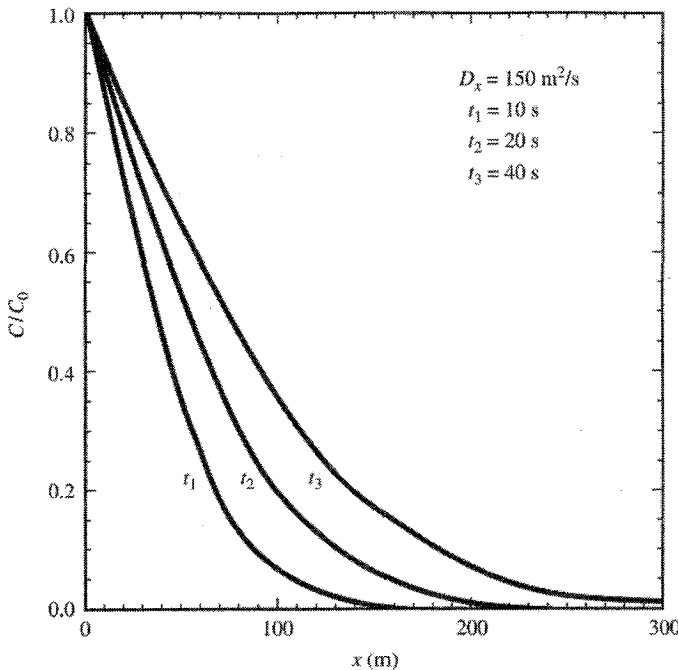
شرط اولیه در این معادله این است که غلظت در سرتاسر حوزه $0 \leq x < \infty$ در زمان $t = 0$ در زمان $t = 0$ صفر است. در زمان $t = 0$ شرط مرزی در $x = 0$ طوری است که غلظت در $x = 0$ تا C_0 افزایش می یابد، یعنی، $C(x = 0, t \geq 0) = C_0$. شرط مرزی دوم در $x \rightarrow \infty$ به کار می رود و اساساً می گوید که $C(x \rightarrow \infty, t) = 0$. با روش تبدیل مشابه با تبدیل لایه مرزی می توان حل زیر را به دست آورد

$$C(x, t) = C_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{x}{\sqrt{4D_x t}} \right] \right) \quad (18.5.9)$$

در این معادله $D_x = \mathcal{D} + E_{C_x}$ ضریب پخش متلاطم نامیده می شود. در عمل اگر مقدار آن با مقدار پخشندگی تلاطمی مساوی نباشد، مقدار آن بسته است. تابع خطا در آرگومان α به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\beta^2} d\beta \quad (19.5.9)$$

تابع خطای متمم به صورت $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ تعریف می شود. شکل ۱۱.۹ شامل طرحواره ای از رفتار حل برای مقادیر مختلف زمان افزایشی t است. توجه کنید که جرم در حوزه برحسب زمان افزایش می یابد و ناشی از این حقیقت است که شار پخشی



شکل ۱۱.۹ رفتار حل معادله (۱۸.۵.۹) برای مقادیر افزایشی زمان

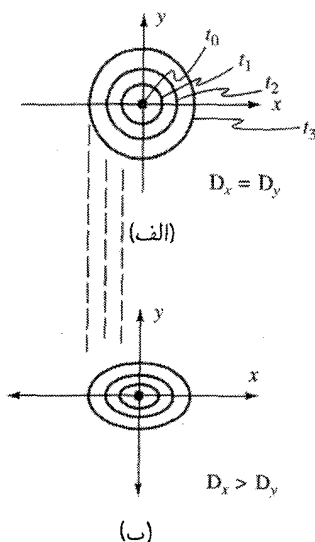
معین است. جرم کل سیستم در لحظه دلخواه t_x باید مساوی باشد با انتگرال شار از $t_x \rightarrow \infty$ ، یعنی،

$$\int_0^{t_x} N_{C_x} dt = M(t_x) = \int_0^{\infty} C(x, t_x) dx$$

۲. پخش دوبعدی و سه‌بعدی. سنگ بنای اصلی در تحلیل جتها و آلاینده‌های ناشی از مواد خروجی فاضلابها و دودکشها معادله پخش دوبعدی است که به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (۲۰.۵.۹)$$

وجود دو ضریب پخش متلاطم می‌رساند که میدان تلاطم برحسب x و y همگن است، اما همسانگرد نیست. به هنگام استفاده از تقریب پخش گزادیان این مسئله‌ای نیست مگر وقتی که ضریب پخش متفاوتی لازم باشد. شرط حل با قرار دادن جرم، M ، ماده در مبدأ دستگاه xy برقرار می‌شود. همانطور که فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] اشاره کرده است حل را با مفهوم جداسازی می‌توان یافت که در آن $C(x, y, t) = C_1(x, t)C_2(y, t)$ در معادله حاکم جایگذاری می‌شود



شکل ۱۲.۹ طرحواره رشد زمانی خط غلظت ثابت در الف) پخشندگیهای مساوی؛ ب) پخشندگیهای متفاوت.

و یک زوج معادله پخش یک بعدی به دست می آید. حل به صورت زیر است

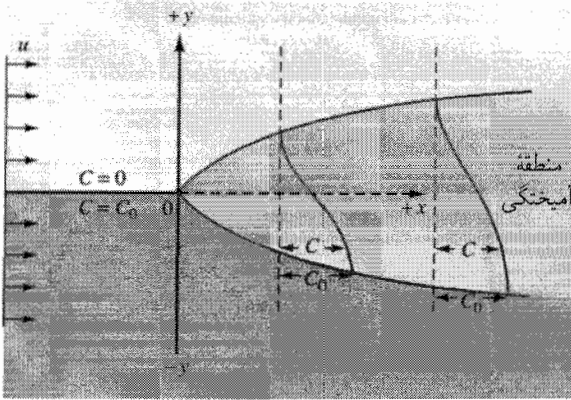
$$C(x, y, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t \sqrt{D_x D_y}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} \right\} \quad (21.5.9)$$

مقیاس سه بعدی عبارت است از

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi t \sqrt{D_x D_y D_z}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t} \right\} \quad (22.5.9)$$

شکل ۱۲.۹ شامل طرحواره‌ای از رشد زمانی خط غلظت ثابت (ایزوپلت) منطبق بر فرض $\pm 2\sigma (4\sigma)$ ابر پخشی است. توجه کنید که ضریبهای پخش نامساوی یک توزیع نامتقارن را پیرامون مبدأ می دهند.

۳. فرارفت (ادوکسیون) و پخش. سرعت ثابت u در جهت x می تواند ابر پخشی را به فرودست جابه جا کند. فرض اصلی لازم برای گسترش تحلیل پخش این است که سرعت آمار میدان تلاطم را تغییر شکل نمی دهد. برای در نظر گرفتن این فرض یک دستگاه مختصات متحرک جدید $x_* = x - ut$ را می توان تعریف کرد که معادله پخش فرارفت (ادوکسیون) را به یک معادله پخش



شکل ۱۳.۹ پخش جانبی در سطح مشترک دو جریان با غلظتهای متفاوت.

خالص تبدیل می‌کند و برای تمام حلهای پخش موجود می‌توان آنها را به کار برد. مسئله پخش جانبی زیر (شکل ۱۳.۹) را در نظر بگیرید که ابتدا فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] به تفصیل بیان کردند. دو جریان سیال با سرعت u در مبدأ $x = 0$ به هم می‌رسند؛ یکی از این جریانها هیچ غلظتی ندارد در حالی که دارای جریان دیگر غلظت C_0 است. معادله پخش فرارفت (ادوکسیون) پایا به شکل زیر درمی‌آید

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

جمله پخش افقی در نظر گرفته نشده است زیرا گرادینانها (شیبها) در جهت افقی، برخلاف گرادینانها در جهت y ، کاملاً کوچک است. شرایط مرزی عبارت‌اند از (شکل ۱۳.۹):

$$C(x=0, y) = \begin{cases} 0 & y > 0 \\ C_0 & y < 0 \end{cases}$$

$$C(x, y \rightarrow \infty) = 0$$

$$C(x, y \rightarrow -\infty) = C_0$$

حل به صورت زیر است

$$C(x, y) = \frac{C_0}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{\sqrt{2D_y x/u}} \right) \right\} \quad (23.5.9)$$

شکل ۱۳.۹ شامل طرحواره‌ای از منطقه آمیختگی سیالات است.

به جای آمیختگی دو جریان پیوسته، مانند آنچه در فرنج [مرجع ۲۰] است فرض کنید که جرم M با سرعت فرارفت (ادوکسیون) u در جهت x به داخل میدان شارش (افقی) دوبعدی با آهنگ زمانی M تزریق می‌شود. در این حالت معادله (۲۱.۵.۹) هنوز به‌کار می‌رود و حل به شکل زیر درمی‌آید

$$C(x, y) = \frac{M}{u\sqrt{4\pi x D_y/u}} \exp\left(-\frac{y^2 u}{4x D_y}\right) \quad (24.5.9)$$

۴. فرارفت (ادوکسیون) گذرا به‌علاوهٔ پخش. اکنون به حالت اولین حل دقیق [معادلهٔ (۱۸.۵.۹)] برمی‌گردیم و می‌پرسیم تأثیر ادوکسیون u بر حل چیست؟ همان شرایط مرزی و اولیه مربوط به حالت پخش خالص به‌کار می‌رود و حل [مرجع ۲۰] عبارت است از

$$C(x, y) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{\sqrt{4D_x t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x+ut}{\sqrt{4D_x t}}\right) \exp\left(\frac{ux}{D_x}\right) \right] \quad (25.5.9)$$

۵. پخش گذرا با واکنش مرتبه اول. بالاخره، همان مسئله داده شده در مثال حل اول را در نظر بگیرید، با این تفاوت که در اینجا پخش یک آهنگ واکنش مرتبه اول (در این حالت واپاشی) است که در فصل ۳ به صورت $k_1 C$ پارامتری شد. معادلهٔ حاکم به‌شکل زیر درمی‌آید

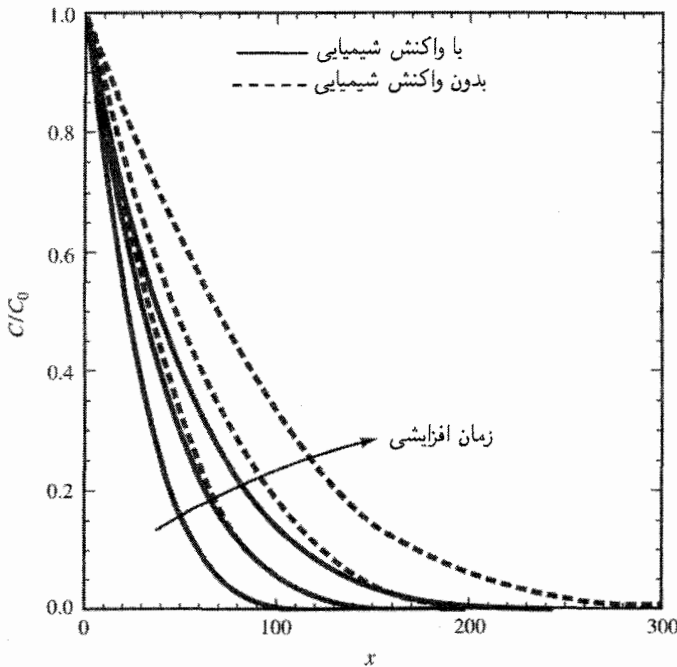
$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_1 C \quad (26.5.9)$$

شرایط مرزی و اولیه مانند حل موارد ۱ و ۴ است، $C(x=0, t) = C_0$ ، $C(x \rightarrow \infty, t) = C(x, t \leq 0) = 0$ و حل به شکل زیر است

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \exp(-x\sqrt{k_1/D_x}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D_x t}} - \sqrt{k_1 t}\right) + \frac{C_0}{2} \exp(x\sqrt{k_1/D_x}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D_x t}} + \sqrt{k_1 t}\right) \quad (27.5.9)$$

مقدار کل جرم غلظت C که با شار پخشی در $x=0$ تا زمان t_x وارد سطح واحد حوزه می‌شود (به مسئلهٔ ۱ نگاه کنید) عبارت است از

$$M(t_x) = C_0 \sqrt{D_x/k_1} \left\{ \left(k_1 t_x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{erf}(\sqrt{k_1 t_x}) + \frac{\exp(-k_1 t_x)}{\sqrt{\pi k_1 t_x}} \right\} \quad (28.5.9)$$



شکل ۱۴.۹ رفتار حل پخش گذرا با واکنش مرتبه اول و بدون آن

شکل ۱۴.۹ شامل طرحواره‌ای از نحوه رفتار حل است. این اساساً همان معادله (۱۸.۵.۹) است، که در شکل ۱۱.۹ رسم شده است، به علاوه مجموعه‌ای از حلها برای C_0 و D_x یکسان اما با واپاشی شیمیایی اضافی. همانطور که اشاره شد تأثیر آهنگ واپاشی مقید کردن شیبهای تند غلظت در ناحیه نزدیکتر به سطح یا مبدأ $x = 0$ است. با افزایش آهنگ واپاشی ناحیه کاملاً نازک می‌شود.

این مدل اهمیت تاریخی فوق‌العاده‌ای دارد زیرا مبنای نظریه نفوذ انتقال جرم فاز داخلی در مرزها به کار می‌رود.

مجموعه‌ای از مسائل در بخش ۷.۹ آورده شده است، اما قبل از شروع باید با بحث درباره طبیعت پخش متلاطم در تحت تأثیر جداره‌ها و مرزها، بحث مربوط به پخش متلاطم را کامل کرد. بنابراین، در قسمت بعد انتقال در لایه مرزی و در کانال کانون بحث را تشکیل می‌دهد.

تمرینها

۱.۵.۹ گسترش یک چشمه نقطه‌ای مواد (یا گرما) توسط پخش مولکولی (الف) توزیعهای غلظتی

را که به طور خطی با زمان تغییر می‌کنند می‌دهد؛ (ب) دارای آهنگ گسترش ثابت است؛ (ج) دارای «عرضی» است که با زمان به طور نمایی تغییر می‌کند؛ (د) دارای شکل همسان با توزیع احتمال گوسی است؛ (ه) ب و د.

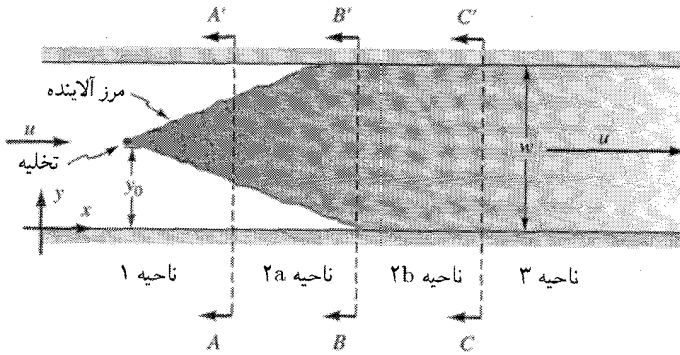
۲.۵.۹ پخش متلاطم ابری از ذرات را با تقریب گرایان پخشندگی ثابت می‌توان تعیین کرد (الف) وقتی طول زمان فرایند پخش بیشتر از تابع خود همبستگی فرایند باشد؛ (ب) وقتی با واریانس توزیع ابر به طور مستقیم ارتباط داده شود؛ (ج) وقتی طول زمان فرایند پخش طولانیتر از زمان پخش لاگرانژی، $T_{L_{0.5}}$ است؛ (د) وقتی رشد واریانس با زمان متناسب است و t بزرگتر از $T_{L_{0.5}}$ است؛ (ه) هیچکدام.

۳.۵.۹ حلهای پخش دقیق رده‌بندی شده در بخش ۵.۹ صحت دارند (الف) برای شکلهای هندسی خیلی ساده؛ (ب) برای پخشندگیهای تلاطمی ثابت؛ (ج) برای هر پخش مولکولی یا پخش متلاطم با پخشندگیهای تلاطمی ثابت؛ (د) برای شرایط پایا و گذرا هر دو؛ (ه) تمام جوابهای بالا.

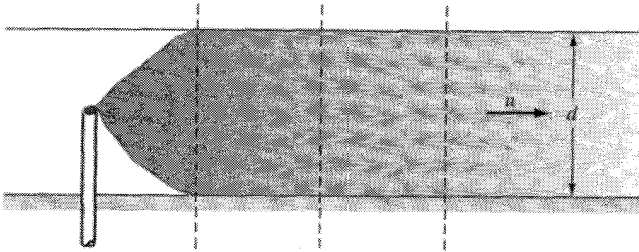
۶.۹ پخش در کانال و پاشیدگی

حلهای در بخش ۵.۹ و مثالهای منتخب در بخش ۷.۹ بر مبنای فرایند پخش است که در میدان متلاطم خاص (همسانگرد و همگن) کاملاً دور از مرزها روی می‌دهند. به استثنای جتهای آزاد مانند دود خروجی از دودکشها در اتمسفر، بیشتر شارشهای جت با مرزها برخورد کرده و تحت تأثیر آنها قرار می‌گیرند. نمونه‌ای از این حالت عبارت است از فاضلاب یا تخلیه‌های فرایند صنعتی در رودخانه‌ها، مصبها، و دریاچه‌ها. همانطور که در قسمت دیگر این کتاب تأکید شده است، وجود مرزها باعث ایجاد لایه‌های مرزی می‌شود و این لایه‌ها به نوبه خود باعث می‌شوند میدان شارش و مشخصه‌های تلاطم آن در هر سه جهت مختصاتی متفاوت باشند. بنابراین، یک تأثیر ممکن جدارها این است که باعث می‌شود تلاطم در هر یک از سه جهت همگن، اما نه همسانگرد، باشد. پیش‌بینی می‌شود که پخشندگیهای تلاطمی در هر یک از جهت‌های کانال کاملاً متفاوت باشند. بنابراین، هدف اصلی در این قسمت این است که بیاموزیم چگونه پخشندگیهای تلاطمی را در شارش متلاطم کانال و تأثیر تفاضل مقدار آنها را بر آمیختگی متلاطم در کانال پیش‌بینی کنیم.

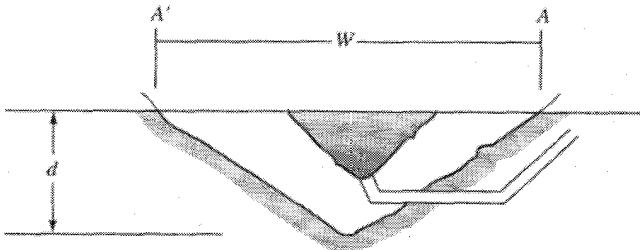
تأثیر ممکن دیگر جدارها این است که آلاینده نمی‌تواند در تمام جهتها، یعنی، عمودی، جانبی، و فرودست پخش شود. شکل ۱۵.۹ طرحواره‌ای از فرایند پخش آلاینده رودخانه‌ای را که در مرکز یک جریان تخلیه شده‌اند نشان می‌دهد. مرزهای آلاینده، که با توصیف واریانس قبلی (۴۵) مشخص می‌شوند، در واقع نه فقط کف کانال (ناحیه ۱) بلکه دیواره‌های جانبی کانال (ناحیه ۲) را نیز قطع می‌کنند. در ناحیه ۳ و جلوتر می‌توان انتقال را هنوز با مدل‌های ساده یک‌بعدی توصیف



(الف)



(ب)



بخش $A - A'$

(ج)

شکل ۱۵.۹ پاشیدگی و پخش متلاطم یک آلاینده که از مرکز آن تخلیه می‌شود. (الف) نما از بالا؛ (ب) نمای جانبی؛ (ج) مقطع عرضی کانال در یکی از نقاط ابتدایی شروع ورود آلاینده.

کرد، اما یک مکانیزم دیگر به نام پاشیدگی تعریف می‌شود که همین کار را انجام می‌دهد. ساختار آن از بسیاری جهات شبیه پخشندگیهای تلاطمی است بجز اینکه تعریف آن احتیاج به جمله‌های «بسته» دارد که، برخلاف شارهای متلاطم میانگین زمانی در فصلهای قبل، از میانگینهای فضایی ناشی می‌شوند.

پخشندگی تلاطمی عمودی

از طرحواره شکل ۱۵.۹ و با علم به اینکه $d \ll W$ ، پیش‌بینی می‌شود که شیبه‌های تکانه و انتقال در جهت عمودی تندتر از جهت عرضی است. بنابراین، منطقی است انتظار داشته باشیم که پخش تلاطم عمودی که به توسط پخشندگی تلاطمی عمودی پارامتری می‌شود در ناحیه ۱ حاکم است و اینکه آمیختگی در سرتاسر صفحه عمودی سریعتر از آمیختگی در جهت جانبی روی دهد. ادلر [مرجع ۲۱] اولین کسی بود که عبارت پخشندگی تلاطمی عمودی، E_z ، را بر مبنای حل‌های دقیق لایه مرزی در شارش متلاطم در کانال یافت. در اینجا، یک حل لایه مرزی متلاطم بی‌بعد در صفحه عمودی به شکل زیر فرض می‌شود

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \left(1 + \ln \frac{z}{d} \right) \quad (۱.۶.۹)$$

که در آن z از کف به‌طور عمودی رو به بالا اندازه‌گیری می‌شود و تا ارتفاع d بلندتر می‌شود. این شکل می‌رساند که میدان شارش به‌طور نامحدود عریض است. همانطور که در فصل ۶ اشاره شد، k ضریب فون‌کارمن و u_* سرعت اصطکاک است به‌طوری که در $z = 0$ ، $u = u_*$. با استفاده از روش به‌کار رفته در شارش لوله، توزیع تنش برشی در تمام عمق به شکل زیر است [مرجع ۲۱].

$$\tau = \rho \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{d} \right) \quad (۲.۶.۹)$$

که در آن η چسبندگی تلاطمی عمودی در لایه مرزی متلاطم است [معادله (۹.۴.۶)] و τ_0 تنش برشی در کف ($z = 0$) است. چسبندگی تلاطمی را به صورت زیر می‌توان حل کرد

$$\eta(z) = k \frac{z}{d} \left(1 - \frac{z}{d} \right) u_* d \quad (۳.۶.۹)$$

برای پیدا کردن پخشندگی تلاطمی، ادلر فرض کرد میان انتقال متلاطم تکانه و جرم تشابه وجود دارد و $\eta(z) = E_z(z)$ قرار داد. در هر دو حالت توجه کنید که برخلاف حالت پخشندگیهای ثابت در قسمت قبل، این پخشندگی مانند فرمولبندی طول آمیختگی پراتل [معادله (۱۰.۴.۶)] رفتار می‌کند و برحسب فاصله از کف تغییر می‌کند، یعنی، ثابت نیست.

ادلر برای تبدیل آن به شکل قابل استفاده‌تر به‌منظور راهنمای طراحی، یک شکل متوسط عمودی را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\overline{E_z} = \frac{1}{d} \int_0^d E_z(z) dz = k u_* d \int_0^d \frac{z}{d} \left(1 - \frac{z}{d} \right) dz = 0.067 u_* d \quad (۴.۶.۹)$$

در اینجا از نماد • — برای میانگین فضایی استفاده می‌شود تا آن را از خط‌وار مربوط به میانگین زمانی متمایز کند. دیده می‌شود که پخشندگی تلاطمی عمودی فقط تابعی از عمق و سرعت اصطکاکی است، نه تابعی از سرعت میانگین شارش در کانال. برای کانالی به عمق ۵m با سرعت اصطکاکی ۲cm/s : $134 \text{ m}^2/\text{s}$ یا $134 \text{ cm}^2/\text{s}$ در مقابل، ضریب پخش مولکولی نوعی در انواع محلولها در آب از مرتبه $(10^{-5}) \text{ cm}^2/\text{s}$ است [مرجع ۲].

چسبندگی تلاطمی عرضی

آمیختگی جانبی با پخشندگی تلاطمی عرضی، E_{ij} ، پارامتری می‌شود و مکانیزم حاکم در ناحیه ۲ است. بسط مفهوم معادله (۱۴.۵.۹) به جهت عرضی y می‌رساند که سرعت عرضی در آهنگ آمیختگی جانبی نقش ایفاء می‌کند. ولی، هیچ حل دقیق برای این توزیع سرعت موجود نیست [مراجع ۱۵ و ۲۰]. بنابراین، این اطلاعات به شکل تجربی درآورده شده است. پخشندگی تلاطمی جانبی متوسط به شکل زیر است

$$\overline{E}_y^*(y) = c_e u_* d \quad (۵.۶.۹)$$

همانطور که دو مرجع بالا اشاره می‌کنند، داده‌های میدان اصلی مربوط به آمیختگی جانبی باید تحلیل شود (و شده است) و از اطلاعات داده شده در این مراجع ضریب همبستگی c_e برای کانالهای مستطیلی مستقیم عبارت است از

$$\overline{E}_y^* = (0.15 \pm 0.075) u_* d \quad (۶.۶.۹)$$

و برای کانالهای طبیعیتر، که مرز پیچ‌وخم‌دار و زبر دارند،

$$\overline{E}_y^* = (0.60 \pm 0.30) u_* d \quad (۷.۶.۹)$$

اگر ناهمواریهای مهندسی از قبیل حفاظت کناره، لبه‌ها یا دیواره‌های دریا در مرز وجود داشته باشند، \overline{E}_y^* هنوز بزرگتر است. بدیهی است که ناهمواری و زبری هندسی \overline{E}_y^* را افزایش می‌دهند زیرا آنها با ایجاد تلاطم با مقیاس بزرگ آمیختگی قویتری را به وجود می‌آورند.

زمان برای آمیختگی کامل

مقایسه معادله‌های (۶.۶.۹) و (۷.۶.۹) با معادله (۴.۶.۹) نشان می‌دهد که \overline{E}_y^* در کانالهای مستقیم هموار تقریباً ۲۵ برابر بزرگتر از \overline{E}_y^* است در حالی که \overline{E}_y^* در کانالهای طبیعی تقریباً ۱۰

برابر بزرگتر از \bar{E}_y^* است. اگرچه پخشندگی عرضی یک عامل آمیختگی قویتر است، عمق کوچک عمودی باعث می‌شود آمیختگی در تمام عمق زودتر از آمیختگی جانبی کامل روی دهد. تخمین این مقیاس زمانی کامل را بر مبنای زمینه‌های ابعادی می‌توان یافت

$$\bar{E}_y^* \rightarrow \frac{d^2}{t_z} \quad \bar{E}_y^* \rightarrow \frac{W^2}{t_y}$$

که در آن d و W ، به ترتیب، عمق و عرض است و t_z و t_y ، به ترتیب، مقیاسهای زمانی تخمینی لازم برای آمیختگی عمودی و جانبی است، تا ماده عمق کامل (انتهای ناحیه ۱، شکل ۱۵.۹) و عرض کامل (انتهای ناحیه ۲، شکل ۱۵.۹) را فراگیرد. بنابراین، با استفاده از عبارت پخشندگیها

$$t_z \sim \frac{d}{0.67u_*} \sim 15d/u_* \quad (۸.۶.۹)$$

$$t_y \sim 1.667 \frac{W^2}{du_*}$$

اگر W در گستره 10° تا 100° برابر بزرگتر از d قرار گیرد، گستره‌ای از زمانهای آمیختگی روی می‌دهد. برای $W \sim 10^\circ d$ ← کانال باریک،

$$t_y = \frac{1.667(10^\circ)^2 d}{u_*} \quad (۹.۶.۹)$$

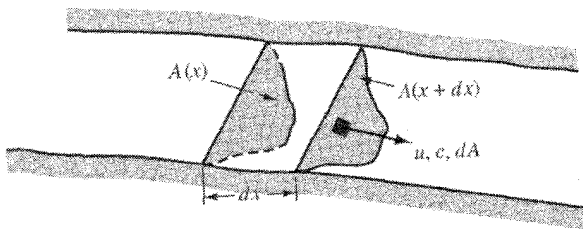
و برای $W \sim 100^\circ d$ ← کانال عریض،

$$t_y = \frac{1.667(100^\circ)^2 d}{u_*} \quad (10.۶.۹)$$

بنابراین در حالت کانال باریک، t_y تقریباً ۱۱ برابر طولانیتر از t_z است، و برای کانال عریض t_y تقریباً 1100° برابر بزرگتر از t_z است. بنابراین، آمیختگی کامل عمودی در عمق کامل زمان کمتری را نسبت به آمیختگی جانبی می‌گیرد حتی اگر پخشندگیهای جانبی 10° برابر بزرگتر باشند.

پاشیدگی

اساساً، پاشیدگی میانگین ساختگی مساحتی یا فضایی است و اولین بارتیلور [مرجع ۲۲] و آریس [مرجع ۲۳] توصیف کردند. در مراجع [۱۵، ۲۴ - ۲۵] پاشیدگی مرور می‌شود. فرمولبندی متوسط



شکل ۱۶.۹ تعریف حجم کنترل در یک کانال که در میانگین‌گیری مساحتی به کار می‌رود.

مساحت یک‌بعدی معادله انتقال، یا تکانه و گرما با علم به این موضوع به‌طور ریاضی به دست می‌آید که تغییرات عمودی و عرضی کانال در یک کانال طویل و رودخانه پیچیده (یا لوله) عوامل انتقال مهمی است. عملکرد اصلی در استنتاج این است که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم یا معادله حجم کنترلی برحسب متغیرهای میانگین مساحت ایجاد شود. این میانگین در ظاهر برای متغیر $\alpha(x, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{\alpha}_2(x, t)A(x) = \int \alpha(x, t)dA$$

این معادله خیلی آشناست زیرا جنبه اصلی استنتاج حجم کنترلی جرم، تکانه و انرژی است. در حالی که استنتاج‌های ظریفتری در نوشته‌ها وجود دارند، پاشیدگی را با مراجعه به حجم کنترل در نظر می‌گیریم.

حجم کنترل کانال رودخانه‌ای را در شکل ۱۶.۹ در نظر بگیرید. مرزهای حجم کنترل بر ساحل عمود است و شارش بر مساحت عمود است. از معادله (۸.۹.۳) و با مفروضات در بخش ۳.۳، معادله حجم کنترلی عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t}CdV + \int_{x+dx} C(x+dx, y, z, t)u(x+dx, y, z, t)dA - \int_x C(x, y, z, t)u(x, y, z, t)dA = 0$$

با استفاده از بسط سری تیلور می‌توان کمیته‌ها در $x + dx$ را به کمیته‌ها در x ارتباط داد. بنابراین،

$$\frac{\partial}{\partial t} \int CdAdx + \left[\frac{\partial}{\partial x} \int CudA \right] dx = 0$$

که در آن $d \nabla = dA dx$. با توجه به تعریف میانگین مساحت، معادله بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{C} \cdot A) dx + \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{CuA} \right] dx = 0 \quad (11.6.9)$$

پس از تقسیم کردن بر dx ، مسئله‌ای که برجای می‌ماند یکسان است با مسئله‌ای که از آن ضریب تصحیح انرژی جنبشی [معادله (۱۴.۴.۳)] و ضریب تصحیح تکانه [معادله (۸.۶.۳)] به دست می‌آیند، یعنی،

$$\overline{CuA} \neq \overline{C} \cdot \overline{u} \cdot A$$

مجدداً، نماد خط‌وار • — به خصوص مربوط است به مقدار متوسط مساحت یا فضایی که از متوسط زمانی، که با خط‌وار نشان داده می‌شود، متمایز است. البته، به جای استفاده از مفهوم ضریب تصحیح، معمول این است که از تجزیه جمله‌های غیرخطی که در معادله رینولدز در بخش ۴.۶ توصیف شد، استفاده می‌شود. بنابراین، انحرافها از میانگین فضایی تعریف می‌شوند و با زگوند نشان داده می‌شوند و برای میانگین حاصلضرب تجزیه شده حاصل به‌کار می‌روند (شکل ۱۷.۹)، یعنی،

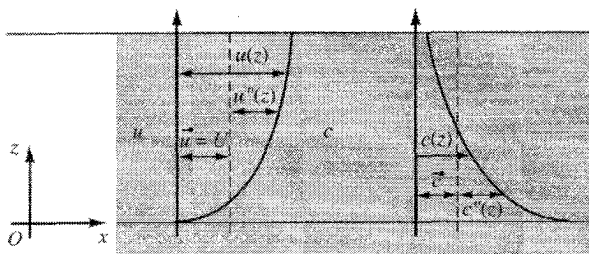
$$\alpha(x, y, z, t) = \overline{\alpha} \cdot (x, t) + \alpha''(x, y, z, t)$$

و

$$\overline{CuA} \approx \overline{C} \cdot \overline{u} \cdot A + \overline{C''u''} \cdot A \quad (12.6.9)$$

معادله (۱۲.۶.۹) در معادله (۱۱.۶.۹) جایگذاری می‌شود و به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{C} \cdot A) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{C} \cdot \overline{u} \cdot A) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{C''u''} \cdot A) = 0 \quad (13.6.9)$$



شکل ۱۷.۹ تعریف متغیرهای تجزیه میانگین‌گیری فضایی

باید به خاطر داشت که \bar{u}^* سرعت میانگین در مقطع عرضی است که در فصل ۳ با U یا V نشان داده شد. اگر معادله پیوستگی از آن تفریق شود، معادله نهایی به شکل زیر درمی آید

$$\frac{\partial \bar{C}^*}{\partial t} + \bar{u}^* \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C''u''}^*}{\partial x} = 0 \quad (۱۴.۶.۹)$$

جمله همبستگی فضایی $\overline{C''u''}^*$ نیز نیازمند بستاریا مشخصه برحسب متغیرهای شارش میانگین است. تیلور [مرجع ۲۲] و آریس [مرجع ۲۳] توانستند نشان دهند که یک بار دیگر تقریب پخش گرادیان صحت دارد؛ بنابراین،

$$\overline{C''u''}^* = -K \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x}$$

که در آن K به عنوان ضریب پاشیدگی تعریف می شود. با توجه به اینکه از فصل ۳ داریم $\bar{u}^* = U$ معادله نهایی به شکل زیر درمی آید

$$\frac{\partial \bar{C}^*}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{C}^*}{\partial x^2} = 0 \quad (۱۵.۶.۹)$$

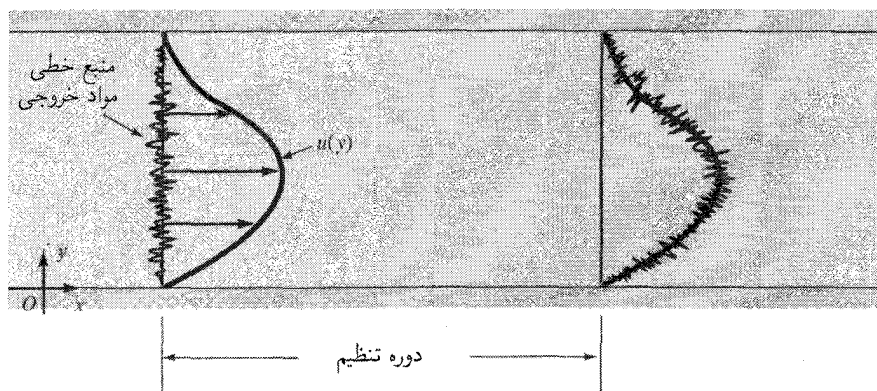
اگر اثرات پخش متلاطم و پخش مولکولی در نظر گرفته شوند، استنتاج خیلی پرزحمت می شود. ولی، نتیجه به صورت جمله پاشیدگی زیر در می آید

$$K \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x} = -\overline{C''u''}^* + (\bar{E}_x^* + \mathcal{D}) \frac{\partial \bar{C}^*}{\partial x}$$

البته، همانطور که بعداً دیده می شود K به اندازه کافی بزرگتر از \bar{E}_x^* و \mathcal{D} است، و از این اثرات اضافی نوعاً صرف نظر می شود.

دو سؤال باقیمانده مانند سؤالها در تحلیل پخشندگی تلاطمی است، یعنی، چه زمانی تقریب گرادیان برای رابطه پاشیدگی صحت دارد و K چگونه تخمین زده می شود؟

همانطور که برای سؤال اول دیده شد تقریب پخش گرادیان پس از دوره اول تنظیم به کار می رود و در نتیجه توزیعی به وجود می آید که اساساً حول متغیرهای میانگین شارش به طور نرمال توزیع شده است. این دوره تنظیم را با مقیاسهای طول لاگرانژ، l_L ، و زمان T_L پارامتری می کنیم. مراجع پاشیدگی در این قسمت به وضوح نشان می دهد که همان دوره تنظیم مورد نیاز است و اینکه تکمیل آن با شرایطی مشخص می شود که در آن افت و خیزهای متغیرهای وابسته حول میانگین فضایی



شکل ۱۸.۹ توزیع متغیرهای شارش قبل و بعد از دوره تنظیم از دید بالای کانال

به طور نرمال توزیع شده‌اند. شکل ۱۸.۹ طرحواره دوره‌های قبل از تنظیم و بعد از تنظیم را نشان می‌دهد. با دوره تنظیم کامل شده و با پخش گرادیان مناسب، همان رابطه بین واریانس و پاشیدگی برقرار است، یعنی، $d\sigma^2/dt = 2K$. رابطه‌های دیگر که برای حالت پخش متلاطم به دست می‌آیند، با جایگذاری K به جای ضریب پخش \mathcal{D} ، برای منطقه پاشیدگی نیز به کار می‌روند.

در شارش لایه‌ای، تخمین زمانی لازم برای توزیع نرمال برای به دست آوردن انتقال پاشیدگی در حوزه فضایی d تقریباً عبارت است از $t > 0.4d^2/\mathcal{D}$. زمان و طول لازم برای رسیدن به این حالت در شرایط متلاطم (ناحیه ۳، شکل ۱۵.۹) تقریباً به سراسری حالت لایه‌ای نیستند و با روش فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] تخمین زده می‌شوند. با مصالحه بین فرارفت (ادوکسیون) فرودست و شدت آمیختگی عرضی (E_y) وضع پیچیده‌تر می‌شود. اگر یک کانال مستطیلی در نظر گرفته شود و آهنگ جرم پیوسته ورودی (\dot{M}) در یک منبع خطی عمودی در خط مرکزی کانال روی دهد، حل پایای دوبعدی غلظت عبارت است از

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{(\sqrt{4\pi x^*})^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \exp[-(y^* - 2n - y_0^*)^2 / 4x^*] + \exp[-(y^* - 2n + y_0^*)^2 / 4x^*] \} \quad (16.6.9)$$

که در آن $C_0 = \dot{M}/UWd$ ؛ $x^* = xE_y/UW^2$ و $y^* = y/W$. منبع در $y = y_0$ قرار دارد. با تحلیل غلظت در پایین خط مرکزی کانال، آمیختگی کامل به عنوان فاصله‌ای در فرودست، L_m ، تعریف می‌شود که غلظت در آنجا در تمام نقاط روی مقطع عرضی با غلظت میانگین در

مقطع عرضی $\pm 5\%$ درصد اختلاف دارد. این فاصله عبارت است از

$$L_m \geq \frac{r^0 \cdot UW^2}{E_y} \quad (۱۷.۶.۹)$$

اگر تخلیه در جانب کناره قرار گیرد، $2W$ جایگزین W می‌شود و طول کانال متناظر با آمیختگی کامل برابر است با

$$L_m \geq \frac{r^0 \cdot 4UW^2}{E_y} \quad (۱۸.۶.۹)$$

روشهای بسیاری برای تخمین ضریب پاشیدگی وجود دارد؛ در هر روش مجموعه خاصی از مفروضات درباره فیزیک و هندسه شارش در نظر گرفته می‌شود. ادلر [مرجع ۲۱] یک بار دیگر تخمین اولیه‌ای را در کانالها در نظر گرفت. این تخمین بر مبنای این فرض است که فقط افت و خیزها حول میانگین عمودی عامل پاشیدگی است. با بسط تحلیل E_z که قبلاً نشان داده شد، او نشان داد که

$$K = 5.93 u_* d \quad (۱۹.۶.۹)$$

که در آن d عمق است.

فیشر [مرجع ۲۷] کاربرد کار تیلور را در کانالها با دید عمیقتری نشان داد و در واقع روشی را برای محاسبه دقیق K از کانالی که شارش آن با دقت زیاد معلوم است ابداع کرد. فرنچ [مرجع ۲۰] روش را با تفصیل نشان می‌دهد. فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] با توجه به نیاز تخمینهای سریعتر برای جریانهایی که به خوبی اندازه‌گیری نشده‌اند فرمول تجربی زیر را بر مبنای تعدادی زمینه آزمایش نشان دادند

$$K = \frac{r^0 \cdot 11U^2W^2}{u_* d} \quad (۲۰.۶.۹)$$

آنها توجه داشتند که، وقتی اندازه‌گیریهای میدان فقط تا دو رقم اعشار صحت دارند، پاسخهای حاصل از رابطه بالا تا ۴ رقم اعشار صحیح است.

اگر شرایط استفاده شده در مثال قبل، که \mathcal{D} ، E_z ، و E_y را با هم مقایسه می‌کند، در معادله (۱۸.۶.۹) برای سرعت متوسط 1 m/s به کار روند، ضریب پاشیدگی و مقیاسهای مربوطه مانند جدول ۲.۹ فهرست شده‌اند.

جدول ۲.۹ مقایسه ضریب آمیختگی

کانال عریض	شماره معادله	کانال باریک
$E_y = 0.06 m^2/s$	۷.۶.۹	$E_y = 0.06 u_* d$ $= 0.06 m^2/s$
$K = 275 m^2/s$	۲۰.۶.۹	$K = 0.11 U^2 W^2 / u_* d$ $= 275 m^2/s$
$t_y = 116 hr$		$t_y m^2 \approx 0.1 W^2 / E_y = L_m / U$ $= 116 hr$
$L_m = 42 km$	۱۷.۶.۹	$L_m m^2 \approx 0.1 U W^2 / E_y$ $= 0.42 km$

توجه کنید که ضریب پاشیدگی حتی در این کانال باریک از مرتبه بزرگی E_y بیش از یک مرتبه بزرگتر است، و قبلاً دیدیم که مرتبه بزرگی E_y از مرتبه بزرگی E_z بیشتر است و 10^5 برابر بزرگتر از \mathcal{D} است.

تمرینها

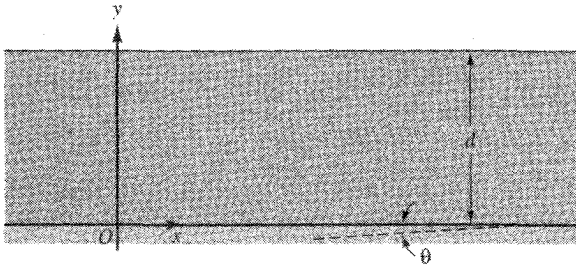
۱.۶.۹ آمیختگی عمودی مشخص می‌شود با (الف) چسبندگیها با تلاطم خیلی زیاد؛ (ب) ثابت بودن E_z در تمام عمق کانال؛ (ج) یک E_z که کوچکتر از پخشندگی تلاطمی جانبی، E_y ، است اما با آمیختگی عمودی بسیار کوتاهتر از آمیختگی جانبی؛ (د) چسبندگیهای تلاطمی میانگین‌گیری شده در عمق متناسب با تغییرات زمانی و سرعت اصطکاکی، u_* ؛ (ه) هیچکدام.

۲.۶.۹ کانالی که تمام مشخصه‌هایش با کانال دیگر برابر است ولی عرض آن 10° برابر عرض دیگری است (الف) آمیختگی جانبی آن 10° برابر بزرگتر است؛ (ب) ضریب آمیختگی آن ده برابر بزرگتر است؛ (ج) ضریب پاشیدگی آن ده برابر بزرگتر است؛ (د) آهنگ شارش آنها برابر است؛ (ه) جوابهای الف و ب.

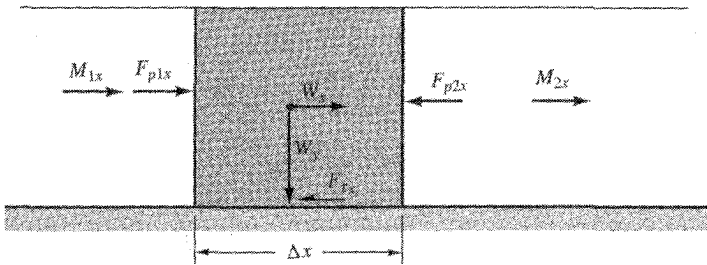
۷.۹ کاربردهای پخش و تکنیکهای پاشیدگی

تخمین سرعت اصطکاک

همانطور که در بخش ۶.۹ به‌سهولت دیده شد متغیر کلیدی در تخمین ضریبهای پاشیدگی و پخشندگیهای تلاطمی سرعت اصطکاک u_* است. در شارش پایای رو به پایین یک کانال با شیب متوسط تخمین $u_* (= \sqrt{\tau_0 / \rho})$ را می‌توان به دست آورد.



(الف)



(ب)

شکل ۱۹.۹ تعریف حجم کنترل در یک کانال با شیب متوسط

حجم کنترل یک کانال مانند شکل ۱۹.۹ را در نظر بگیرید. شیب کف کانال بی نهایت کوچک است به طوری که $S_0 \sim \tan \theta \sim \theta$. گرانش تنها نیروی حجمی مؤثر بر حجم کنترل نشان داده شده در شکل است. یک دستگاه مختصات موضعی در کف قرار دارد، و بنابراین، زاویه بین شتاب ناشی از گرانش و y نیز θ است. با شرایط پایا، شارش کانال یا سرعت متوسط در همه جا یکسان است. بنابراین، بردارهای مبادله تکانه (M_{1x} و M_{2x}) در جهت مختصه کانال، جهت x ، با هم مساوی است و یکدیگر را خنثی می کنند. نیروی فشار بر انتهای دو سر (F_{p1x} و F_{p2x}) مساوی هستند و یکدیگر را خنثی می کنند. بنابراین، موازنه نیرو در جهت x بین مؤلفه وزن سیال داخل حجم کنترل و نیروی اصطکاک مؤثر بر کف، F_{τ_x} است

$$W_x - F_{\tau_x} = 0$$

برحسب متغیرهای داده شده و با فرض عرض واحد، داریم

$$\rho g \Delta x d(\lambda) \sin \theta - \tau_0 \Delta x(\lambda)$$

(۱) $\Delta x d$ در بالا حجم است و $\Delta x(1)$ مساحت سطح تماس حجم کنترل با کف کانال است. تنش در کف برحسب شیب و عمق به شکل زیر درمی آید

$$\tau_o = \gamma d S_o \quad (1.7.9)$$

یا

$$u_* = \sqrt{g d S_o} \quad (2.7.9)$$

مثال ۶.۹ سرعت اصطکاکی در کانال به عمق ۵m قسمت قبل ۲cm/s است. این حالت با چه شیب کانال متناظر است؟

حل

از معادله (۲.۷.۹)

$$S_o = \frac{u_*^2}{g d}$$

بنابراین،

$$S_o = \frac{(0.02 \text{ m/s})^2}{(9.806 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})} = 8.2(10^{-6})$$

حالت داده شده در مثال ۶.۹ با شرایط کف تقریباً تخت متناظر است، مانند مصبها، یا محل تلاقی رودخانه و اقیانوس. شرایط شیب متوسط در رودخانه‌ها در شیبهایی به بزرگی ۰.۰۰۳ تا ۰.۰۰۴ به کار می‌روند. مقادیر خیلی بزرگتر اغلب میدانهای فشارهای هیدروستاتیکی را ایجاد می‌کنند که (برای مطالعه آن احتیاج به هیدرولیک با شیب تند است، که موضوع خارج از متن است).

ضریبهای آمیختگی

مثال ۷.۹ در طی یک طوفان قسمتی از رودخانه کایه‌هوک که به دریاچه اری، از دریاچه‌های بزرگ لاینچنر، می‌ریزد دارای شیب ۰.۰۲ و عمق ۴m است، و در شرایط آزمایشی سرعت متوسط پایای ۸m/s دارد. پخشندگیهای نلاطی جانبی و عمودی، ضریب پاشیدگی، و طول کانال تا انتهای ناحیه ۲ برای تخلیه در خط مرکزی و تخلیه در کناره جانبی، هر دو، چه باید باشند؟ عرض کانال را ۱۱۰m فرض کنید.

حل

در تمام توابع فهرست شده در جدول ۲.۹ باید سرعت اصطکاکی را تخمین زد. بنابراین

$$u_* = \sqrt{g d S_o} = 0.28 \text{ m/s}$$

مقادیر ضریبهای آمیختگی مختلف عبارت‌اند از

$$E_y = 0.6 du_* = 0.67 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$E_z = 0.67 du_* = 0.75 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K = \frac{0.11 U^2 W^2}{du_*} = 76.0 \text{ m}^2/\text{s}$$

طولهای کانال برای تکمیل آمیختگی (انتهای ناحیه ۲) برای تخلیه در خط مرکزی (c) و تخلیه در کناره جانبی (s) عبارت‌اند از

$$L_c = \frac{0.1 U W^2}{E_y} = \frac{0.1 (0.8 \text{ m/s}) (11 \text{ m})^2}{0.67 \text{ m}^2/\text{s}} = 1447 \text{ m} = 1.447 \text{ km}$$

$$L_s = 4L_c = 5790 \text{ m} = 5.79 \text{ km}$$

بالاخره تخمین زمان برای تکمیل آمیختگی از تخلیه در خط مرکزی به صورت زیر پیدا می‌شود

$$\frac{L_c}{U} = t_c = \frac{0.1 W^2}{E_y} = \frac{0.1 (11 \text{ m})^2}{0.67 \text{ m}^2/\text{s}} = 180.5 \text{ s} = 0.5 \text{ h}$$

ردیاب پایستار آلاینده و هندسه

مثال ۸.۹ همان شرایط داده شده در مسئله قبل را در نظر بگیرید و علاوه بر آن تخلیه در مرکز کانال را نیز در نظر بگیرید. مواد با آهنگ $1 \text{ m}^3/\text{s}$ تخلیه می‌شوند و غلظت آلاینده در تخلیه 450 mg/L است. غلظت آلاینده و عرض آن را در فواصل 125 m ، 250 m و 500 m در فرودست را بیابید.

حل

برای تعریف عرض داده شده در معادله (۱۰.۵.۹)، عرض آلاینده در یک نقطه در امتداد فرودست با رابطه زیر تخمین زده می‌شود

$$w_p(x) = 4\sigma = 4\sqrt{2E_y t} = 4\sqrt{\frac{2E_y x}{U}}$$

که در آن، زمان و فضا با $x/t = U$ به هم مربوط می‌شوند. بنابراین، عرضهای آلاینده در فرودست برای تخلیه در خط مرکزی عبارت‌اند از

$$w_c(125) = 4 \sqrt{\frac{2(0.67 \text{ m}^2/\text{s})(125 \text{ m})}{0.8 \text{ m/s}}} = 57.9 \text{ m}$$

$$w_c(250) = 4 \sqrt{\frac{2(0.67 \text{ m}^2/\text{s})(250 \text{ m})}{0.8 \text{ m/s}}} = 87.9 \text{ m}$$

$$w_c(500) = 115.8 \text{ m}$$

بنابراین دیده می‌شود که در $x = 500 \text{ m}$ در فرودست، آلاینده درست به جوانب کانال می‌رسد. فاصله تخمینی در فرودست، x_c ، برای اینکه آلاینده درست به دیواره‌ها برسد عبارت است از

$$\sqrt{x_c} = \frac{W}{4 \sqrt{\frac{2E_y}{U}}} = \frac{110 \text{ m}}{4 \sqrt{\frac{2(0.67 \text{ m}^2/\text{s})}{0.8 \text{ m/s}}}} \Rightarrow x_c = 451 \text{ m}$$

جالب است فاصله در فرودست که لبه اولیه تماس آلاینده با ساحل دارد و فاصله $L_c = 1447 \text{ m}$ که فاصله لازم در فرودست برای تکمیل آمیختگی در مقطع عرضی بود با یکدیگر مقایسه کنیم. توجه کنید که 996 m اضافی آمیختگی در کانال پایینی مورد نیاز است که غلظت در مقطع عرضی کانال نسبت به غلظت میانگین در مقطع عرضی کانال ۵ درصد خطا داشته باشد. بنابراین، ناحیه ۲ شامل دو زیر ناحیه است: منطقه $2a$ که آلاینده است، که بر اثر پخشندگیهای تلاطمی عرضی به‌طور عمودی آمیخته می‌شود، و منطقه $2b$ که با آلاینده مشخص می‌شود که جوانب کانال را قطع کرده است اما هنوز به شرایط لازم برای به‌کار بردن مفهوم پاشیدگی نرسیده است. از معادله (۲۴.۵.۹) حداکثر غلظت در امتداد خط مرکزی ($y = 0$) روی می‌دهد، یعنی،

$$C(x, y = 0) = C_{\max}(x) = \frac{\dot{M}}{U \sqrt{4\pi E_y/U}} \quad (3.7.9)$$

آهنگ شارش جرم $\dot{M} = Q_d C_d$ است، که در آن Q_d آهنگ شارش در لوله تخلیه و C_d غلظت تخلیه است. در شرایط داده شده

$$\dot{M} = (1 \text{ m}^3/\text{s})(450 \text{ mg/L}) \left(10^{-3} \frac{\text{kg}/\text{m}^3}{\text{mg/L}} \right) = 0.45 \text{ kg/s}$$

بنابراین، از معادله (۳.۷.۹)

$$C_{\max}(x = ۱۲۵\text{m}) = \frac{۰.۴۵\text{kg/s}}{۰.۸\text{m/s} \sqrt{\frac{۴\pi(۱۲۵\text{m})(۰.۶۷\text{m}^2/\text{s})}{۰.۸\text{m/s}}}} = ۰.۱۵۵\text{kg/m}^3$$

$$= ۱۵.۵\text{mg/L}$$

و

$$C_{\max}(x = ۲۵۰\text{m}) = ۰.۱۱\text{kg/m}^3 = ۱۱\text{mg/L}$$

همچنین سؤال می‌کنیم وقتی مرز آلاینده در $x_c = ۴۵۱\text{m}$ درست با کناره تماس می‌گیرد غلظت چقدر است. با فرض $y = ۲\sigma = w_p/۲$ در $x_c = ۴۵۱\text{m}$ و با محاسبه از معادله (۲۴.۵.۹) به صورت زیر می‌توان غلظت را تخمین زد

$$C(x_c=۴۵۱, y=۲\sigma=۵۵\text{m}) = \left[\frac{\dot{M}}{U \sqrt{\frac{۴\pi(۴۵۱\text{m})(۰.۶۷\text{m}^2/\text{s})}{۰.۸\text{m/s}}}} \right] \exp \left\{ \frac{-y^2 U}{۴(۴۵۱\text{m}) E_y} \right\}$$

$$= [C_{\max}(x_c = ۴۵۱\text{m})] \exp \left\{ \frac{(-۰.۵۵\text{m})^2 (۰.۸\text{m})}{۴(۴۵۱\text{m})(۰.۶۷\text{m}^2/\text{s})} \right\}$$

$$= (۰.۰۰۸۲\text{kg/m}^3)(۰.۱۳۵)$$

$$= ۰.۰۰۱۱\text{kg/m}^3 = ۱.۱\text{mg/L}$$

این حقیقت که در عرض متناظر با کناره جریان تا اندازه‌ای غلظت آلاینده وجود دارد ناشی از این است که عرض آلاینده ۴σ تعریف می‌شود. این فقط ۹۵ درصد جرم را در نظر می‌گیرد، و بیانگر این است که مقداری جرم آلاینده در خارج از عرض $\pm ۲\sigma$ وجود دارد. ■

دوره تنظیم اولیه

در مثال قبل فقط به ناحیه ۲ توجه شد که با آمیختگی جانبی و فرارفت ادوکسیون فرودست مشخص می‌شد، به همان صورتی که در شکل ۱۵.۹ اشاره شده است. به نظر می‌رسد که آمیختگی یک فرایند دویعدی است و پیش‌بینیها در مثال ۸.۹ بر مبنای چنین معادله‌ای انجام گرفتند. مفهوم پاشیدگی که

در بخش ۶.۹ بحث شد بیان می‌کند که از معادله پخش فرارفت (ادوکسیون) یک‌بعدی نیز برای همان ناحیه بر مبنای متغیرهای میانگین‌گیری شده مساحتی، که فقط بر حسب زمان (t) و فاصله کانال (x) تغییر می‌کنند، می‌توان استفاده کرد. بنابراین، آمیختگی دوبعدی یا سه‌بعدی یک اسکالرکنش‌پذیر را به صورت فرایند یک‌بعدی می‌توان مدل‌سازی کرد. همانطور که در بخش ۶.۹ بحث شد این تقریب پخش‌گرایان با ضریب پاشیدگی را فقط پس از دوره اولیه تنظیم می‌توان به کار برد؛ پس از این دوره افت و خیزهای متغیرها حول میانگین در مقطع عرضی در صفحه‌ای که با سرعت متوسط U حرکت می‌کند به طور طبیعی توزیع می‌شوند. سؤال این است که طول تنظیم اولیه در چه فاصله‌ای در فرودست است. چات‌وین [مرجع ۲۸] به طور تجربی استدلال کرد که برای پاشیدگی ناشی از آمیختگی لایه‌ای در یک صفحه عمودی (عمق d) که با سرعت متوسط طولی U در مقطع عرضی و ضریب پخش مولکولی \mathcal{D} مشخص می‌شود، دوره و تنظیم اولیه t_p با رابطه زیر داده می‌شود

$$t_p > \frac{0.4d^2}{\mathcal{D}} \quad (4.7.9)$$

فیشر و همکاران [مرجع ۱۵] مفهوم آمیختگی جانبی متلاطم E_y را تا عرض W گسترش داد، یعنی،

$$t_p > \frac{0.4W^2}{E_y} \quad (5.7.9)$$

با رابطه $x/t = U$ و فرمول زیر

$$x_p > \frac{0.4W^2U}{E_y} \quad (6.7.9)$$

یک فرمول بر حسب فاصله به دست می‌آید. این مقدار اغلب به شکل بی‌بعد [معادله (۱۶.۶.۹)] به صورت x_p^* بیان می‌شود

$$x_p^* = \frac{x E_y}{U W^2} > 0.4 \quad (7.7.9)$$

مثال ۹.۹ شرایط زمانی و فاصله در دوره تنظیم اولیه در مثال ۸.۹ کدام‌اند؟

حل

از دوره تنظیم،

$$t_p > \frac{0.4W^2}{E_y} = \frac{0.4(110\text{ m})^2}{0.67\text{ m}^2/\text{s}} = 7223.8\text{ s} = 2.0\text{ h}$$

در طول تنظیم کانال

$$x_p > \frac{0.4W^2U}{E_v} = \frac{0.4(110\text{m})^2(0.8\text{m/s})}{0.67\text{m}^2/\text{s}} = 5780\text{m} = 5.78\text{km}$$

در مقایسه با x_c از مثال قبل و L_c از مثال ۷.۹، دیده می‌شود فاصله‌ای که در آن عرض آلایندہ درست با خط کنار (x_c) تماس می‌گیرد نسبتاً کوتاه است (دقیقاً 1451m). طول برای آمیختگی کامل ($L_c = 1447\text{m}$) تا اندازه‌های کمتر از طول لازم کانال برای تنظیم توزیع نرمال ($x_p = 5780\text{m}$) است. باید به خاطر داشت که طول برای آمیختگی کامل یک تعریف است مبتنی بر اینکه شدت غلظت متوسط در دیواره $\pm 5\%$ درصد با غلظت میانگین در مقطع عرضی تفاوت داشته باشد. تنظیم برای حالت نرمال بودن به آمارافت و خیزهایی برمی‌گردد که حول میانگین در مقطع عرضی که با روش خاصی توزیع شده‌اند (یعنی، توزیع نرمال). اینها دو معیار متفاوت‌اند، که اغلب در عمل با هم اشتباه می‌شوند.

مسائل

۱.۹ یک قطعه شیشه پنجره با مساحت 0.5m^2 دارای رسانندگی گرمایی 0.87W/m.K است. دمای سطح خارجی 28.5°C و دمای سطح داخلی 20°C است. اگر پنجره با ضخامت 6mm باشد، آهنگ انتقال گرما را از پنجره بیابید. مقاومت گرمایی چقدر است؟

۲.۹ دمای سقف خانه‌ای 75°F و مساحت کل 420ft^2 است. دمای هوای محیط 20°F است. اگر ضریب انتقال جابه‌جایی متوسط $1.8\text{Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$ باشد، آهنگ انتقال گرما بین سقف و هوا را بیابید. انتقال گرما در چه جهتی است؟

۳.۹ جداره‌ی یک کوره از دو لایه با مواد مختلف ساخته شده است. لایه داخلی به ضخامت 10mm با $k_1 = 35\text{W/m.K}$ است و لایه خارجی به ضخامت 12cm و با $k_2 = 315\text{W/m.k}$ است. دمای سطح داخلی 950K و دمای سطح خارجی 380K است. شارگرما از طریق جداره کوره و دمای سطح مشترک دو لایه را پیدا کنید.

۴.۹ سطح خارجی دیوار بتن به ضخامت 20cm با رسانندگی گرمایی 0.65W/m.K در برابر باد سرد 45°C - با ضریب انتقال گرمای کنوکسیون $35\text{W/m}^2\text{.K}$ قرار دارد، در طرف آرام، دمای هوا 12°C و ضریب انتقال گرمای کنوکسیون $14\text{W/m}^2\text{.K}$ است. شارگرما از طریق دیوار را پیدا کنید.

۵.۹ آجرهایی به ابعاد $20 \times 10 \times 8\text{cm}$ ، در ساختمان دیواره یک کوره به‌کار می‌روند. دو نوع ماده در دسترس است. ماده‌ی اول دمای حداکثر حدی 850°C و رسانندگی گرمایی $1.25\text{Btu/h.ft}^2\text{.}^\circ\text{F}$

دارد و دمای حداکثر حدی ماده دوم 58°C و رسانندگی گرمایی آن $8\text{Btu/h}\cdot\text{ft}\cdot^{\circ}\text{F}$ است. اگر شار گرمایی مجاز در دیواره کوره $35^{\circ}\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2$ باشد، مطلوب است اقتصادترین طرح برای دیواره کوره به فرض اینکه قیمت آجرها یکسان باشد و آنها را بتوان به هر ترتیبی چید. دمای داخلی دیواره کوره 85°C است، و دمای سطح دیگر در 20°C حفظ می‌شود.

۶.۹ هوای 95°C روی ورق تخت $20 \times 80\text{cm}$ جریان دارد. دمای ورق 22°C و شار گرما 15°W است. ضریب انتقال گرمای متوسط بین هوا و ورق را پیدا کنید.

۷.۹ در ورق مسئله ۶.۹، ضریب انتقال گرما با رابطه $h_c(x) = 16.78x^{-\frac{1}{2}}\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ داده شده است که در آن x فاصله از لبه حمله ورق است. (الف) ضریب انتقال گرمای متوسط \bar{h}_c را پیدا کنید؛ (ب) شار گرمای بین ورق و هوا را بیابید.

۸.۹ گرما از داخل یک اتاق به هوای 4°C - خارج انتقال می‌یابد. سطح داخلی دیواره‌های اتاق رسانندگی سطح واحد $16.7\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ دارد و رسانندگی سطح خارجی $32.5\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ است. دیواره‌ها رسانندگی گرمایی واحد $2.35\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ دارد. (الف) دما در سطح خارجی دیواره‌ها را بیابید؛ (ب) شار گرمایی از طریق هر دیواره را پیدا کنید.

۹.۹ بخار اشباع شده با فشار 12°psi در داخل یک لوله جریان دارد. رسانندگیهای سطح واحد در سطوح داخلی و خارجی، به ترتیب، $428.5\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ و $65.4\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است. رسانندگی سطح واحد خود لوله $85.5\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است. اگر لوله در یک اتاق با دمای 82°F باشد، دمای سطح خارجی آن را بیابید.

۱۰.۹ دمای داخلی یک زیردریایی، به قطر 35ft و طول 250ft ، در 68°F باقی می‌ماند. رسانندگی سطح واحد داخلی $315\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است. وقتی زیردریایی حرکت نمی‌کند، رسانندگی سطح واحد خارجی $16.5\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است در حالی که وقتی با سرعت ماکزیم حرکت می‌کند رسانندگی سطح واحد خارجی آن $123\text{Btu/h}\cdot\text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است. در ضمن کار، دمای آب دریا از 28 تا 6°F (در سرعت ماکزیم) تغییر می‌کند. جداره زیردریایی از فولاد زنگ‌نزن به ضخامت 75in در قسمت خارجی، یک لایه عایق فایبرگلاس به ضخامت 3in ، و آلومینیم به ضخامت 25in در قسمت داخلی ساخته شده است. مطلوب است حداقل توان واحد گرمایش، برحسب kW ، برای اینکه دمای داخلی در 68°F باقی بماند.

۱۱.۹ یک میله گرمکن بلند، با مساحت مقطع عرضی 1cm^2 ، در روغن 92°C غوطه‌ور است. جریان الکتریکی که از میله می‌گذرد با آهنک یکنواخت 90kW/m^2 تولید گرما می‌کند. اگر بخواهیم دمای گرمکن زیر 180°C باشد، رسانندگی سطح واحد چقدر باید باشد؟ میله گرمکن از ماده‌ای با رسانندگی گرمایی $72\text{W/m}\cdot\text{K}$ در 180°C ساخته شده است.

۱۲.۹ بخار اشباع 105°C در داخل یک لوله مسی با قطر داخلی ۱۵m و قطر خارجی ۱۷m جریان دارد. لوله در محیط 34°C قرار دارد و ضریب انتقال گرمای سطح خارجی $19.3\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ است. (الف) اتلاف گرما از لوله مسی را بیابید؛ (ب) از عایق به ضخامت ۴cm، با $k = 0.3\text{W/m} \cdot \text{K}$ استفاده می‌شود تا اتلافات گرما در لوله مسی کاهش یابد. اتلاف گرما در لوله در این حالت چقدر است؟ (ج) درصد کاهش اتلاف گرما چقدر است؟

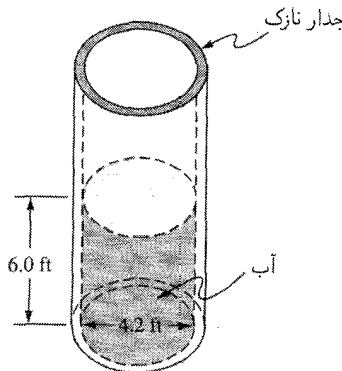
۱۳.۹ یک استوانهٔ توخالی بلند، با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 ، از ماده‌ای با رسانندگی گرمایی که با دما به طور خطی تغییر می‌کند ساخته شده است. دمای سطح داخلی T_1 است و دمای سطح خارجی T_2 است. نشان دهید که آهنگ انتقال گرما بر اثر رسانش در استوانه با رابطه زیر داده می‌شود

$$q = \bar{k}L\bar{A} \frac{T_1 - T_2}{R_1 - R_2}$$

که در آن $\bar{k} = k_o[1 + \alpha(T_1 + T_2)/2]$ ، $\bar{A} = 2\pi(R_1 - R_2)/\ln(R_2/R_1)$ استوانه، و α یک ثابت است.

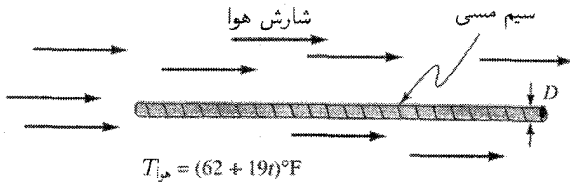
۱۴.۹ یک کره توخالی با شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 از یک لایه عایق با شعاع خارجی R_3 پوشیده شده است. آهنگ انتقال گرما از کره را برحسب R_1 ، R_2 ، R_3 ، دماها، رسانندگیهای گرما، و ضریبهای انتقال گرما را پیدا کند.

۱۵.۹ یک محفظهٔ استوانه‌ای جدار نازک، به قطر ۴.۲ft، تا عمق ۶ft از آب 78°F پر شده است (شکل ۲۰.۹). اگر محفظه به طور ناگهانی در روغن 250°F غوطه‌ور شود، مطلوب است زمان لازم برای اینکه آب از 78°F به 145°F برسد. ضریب انتقال گرمای کلی بین آب و روغن $75\text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ است.



شکل ۲۰.۹ مسئله ۱۵.۹

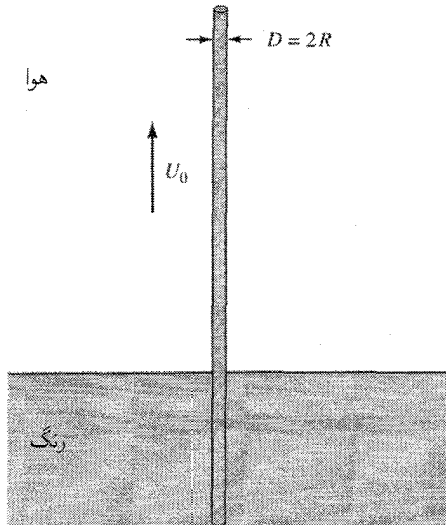
۱۶.۹ یک سیم مسی به قطر $6 \text{ in} \times 0.001$ و به طول 1 ft (شکل ۲۱.۹) در جریان هوا، با دمای $T_{\text{هو}} = (62 + 19t)$ ، برحسب $^{\circ}\text{F}$ قرار دارد؛ t زمان برحسب ثانیه است. اگر دمای اولیه سیم 42°F باشد، دمای آن را برحسب زمان از $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_f = 200 \text{ s}$ رسم کنید. رسانندگی سطح واحد بین هوا و سیم را $9.2 \text{ Btu/h.ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}$ می‌توان گرفت.



شکل ۲۱.۹ مسئله ۱۶.۹

۱۷.۹ یک سیم به شعاع R (شکل ۲۲.۹) از رنگ که دمای آن به اندازه T_0 بیشتر از دمای محیط است با سرعت U_0 خارج می‌شود. اگر طول نمایانده سیم در فرودست رنگ خیلی زیاد باشد، توزیع دمای حالت پایدار را در امتداد سیم بیابید.

۱۸.۹ هوای 29°C شامل بخار آب با فشار جزئی 3 atm روی یک استخر شنا جریان دارد. دمای استخر 21°C است. اگر مساحت استخر $10 \times 10 \text{ m}^2$ باشد، آهنگ انتقال جرم از استخر را بیابید. ضریب انتقال جرم متوسط را 34 m/s می‌توان در نظر گرفت.



شکل ۲۲.۹ مسئله ۱۷.۹

۱۹.۹ عدد رینولدز در شارش روی یک لوله را با داده‌های زیر بیابید: $U_o = ۲.۵ \text{ ft/s}$, $d = ۲ \text{ cm}$, $\rho = ۴۵ \text{ kg/m}^3$ و $\mu = ۷۵ \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{hr}$.

۲۰.۹ عدد پرانتل را با داده‌های زیر پیدا کنید: $\mu = ۱۵۲(۱۰)^{-۴} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ و $k = ۲۳۸ \text{ Btu}/\text{ft}\cdot\text{hr}\cdot^\circ\text{F}$, $c_p = ۲۰۰۰ \text{ J}/\text{kg}\cdot\text{K}$.

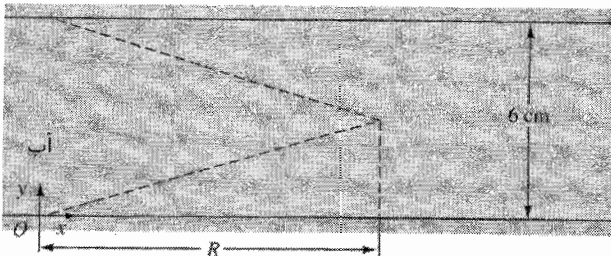
۲۱.۹ عدد نوسلت را در شارش روی یک لوله از داده‌های زیر پیدا کنید: $d = ۲ \text{ cm}$, $\bar{h} = ۳۸ \text{ Btu}/\text{hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$ و $k = ۰.۴۲ \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$.

۲۲.۹ عدد استانتون را در شارش روی یک لوله از داده‌های زیر بیابید: $d = ۲ \text{ cm}$, $U_o = ۴.۱۳ \text{ m/s}$, $\rho = ۱۵۳۰ \text{ lb}_m/\text{ft}^3$, $\mu = ۱۲.۸(۱۰)^{-۴} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$, $c_p = ۴۰۰۰ \text{ J}/\text{kg}\cdot\text{K}$ و $\bar{h} = ۴.۳۲ \text{ Btu}/\text{hr}\cdot\text{ft}^2\cdot^\circ\text{F}$.

۲۳.۹ هوا روی یک ورق تخت به طول ۳.۲ m جریان دارد، و عدد رینولدز متوسط (۱۰^6) ۴.۳۲ تخمین زده می‌شود. عدد نوسلت متوسط ۴۵۰۰ است. اگر روغن ۳۸°C روی همان ورق با همان R جریان یابد، ضریب انتقال گرمای متوسط چقدر است؟

۲۴.۹ هوای ۲۲°C در فشار ۱۲ kPa با سرعت ۴.۵ m/s روی یک ورق جریان دارد. اگر ورق به عرض ۵ cm باشد و سطح با هوای ۸۲°C در تماس باشد، کمیتهای زیر را در $x = ۴۲ \text{ cm}$ بیابید: (الف) ضریب اصطکاک موضعی؛ (ب) ضریب اصطکاک متوسط؛ (ج) نیروی پسا؛ (د) ضریب انتقال گرمای کنوکسیون موضعی؛ (ه) ضریب انتقال گرمای کنوکسیون متوسط؛ (و) آهنگ انتقال گرما. ۲۵.۹ در شارش روی یک ورق تخت، رابطه بین ضخامت لایه مرزی گرمایی و هیدرودینامیکی و عدد پرانتل را به دست آورید. توزیع سرعت و توزیع دما را در لایه مرزی خطی فرض کنید.

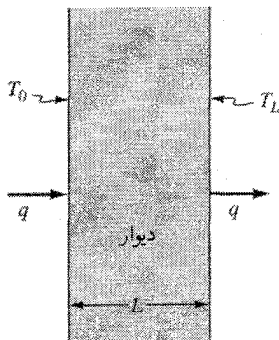
۲۶.۹ آب بین دو ورق تخت موازی، به فاصله ۶ cm از هم، با سرعت متوسط ۲.۶ m/s جریان دارد (شکل ۲۳.۹). فاصله محل تلاقی دو لایه مرزی را از ورودی، l ، پیدا کنید.



شکل ۲۳.۹ مسئله ۲۶.۹

۲۷.۹ با عبور هوا از روی یک ورقهٔ یخ، یخ آب می‌شود و در هوا تجزیه می‌شود. اگر ضریب انتقال گرمای کنوکسیون متوسط، \bar{h}_i ، برابر با $۷۲ \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ باشد، انتقال جرم کنوکسیون متوسط را پیدا کنید.

۲۸.۹ دو سطح یک دیوار سطح (شکل ۲۴.۹)، به ترتیب، در دماهای T_0 و T_L قرار دارند. اگر ضخامت دیوار L باشد و رسانندگی گرمایی آن را رابطه $k = k_0(1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2)$ داده شده باشد، شار گرمایی در دیوار را بیابید.



شکل ۲۴.۹ مسئله ۲۸.۹

۲۹.۹ مسئله ۲۸.۹ را با این فرض حل کنید که، علاوه بر شرایط قبل، مساحت مقطع عرضی از A در $x = 0$ تا A_L در $x = L$ به طور خطی کاهش یابد.

۳۰.۹ یک لوله فولادی با قطر خارجی ۱.۹in و قطر داخلی ۱.۶in آب 52°F را انتقال می‌دهد. از دو لایه عایق استفاده می‌شود: لایه منیزیم ۸۵ درصد به ضخامت ۱.۲in، دمای هوای محیط 110°F است. ضریب‌های انتقال گرمای سطوح داخلی و خارجی، به ترتیب، $135\text{Btu/h.ft}^2.\text{F}$ و $8\text{Btu/h.ft}^2.\text{F}$ (الف) اگر بخواهیم اتلاف گرما به حداقل برسد، چه ماده‌ای را به سطح لوله باید متصل کرد؟ (ب) شار گرما از سطح لوله چقدر است؟

۳۱.۹ لوله فولادی با قطر اسمی ۱in در آب 32°C غوطه‌ور است. دمای سطح خارجی لوله 180°C است. ضریب انتقال گرمای همرفت بین سطح لوله و آب $232\text{Btu/h.ft}^2.\text{F}$ است. اگر قرار باشد با افزایش عایق با رسانندگی گرمایی $0.92\text{Btu/h.ft}^2.\text{F}$ اتلاف گرما به نصف برسد، ضخامت عایق را پیدا کنید.

۳۲.۹ برای شرایط مسئله ۳۱.۹، ضریب انتقال گرما با رابطه $h_{\text{ins}} = 0.7d_{\text{ins}}^{-2/3}$ ، برحسب $\text{Btu/h.ft}^2.\text{F}$ ، تغییر می‌کند که در آن قطر خارجی عایق برحسب فوت است. مطلوب است ضخامت عایق زمانی که اتلاف گرما به نصف اتلاف گرمای ناشی از لوله بدون عایق برسد.

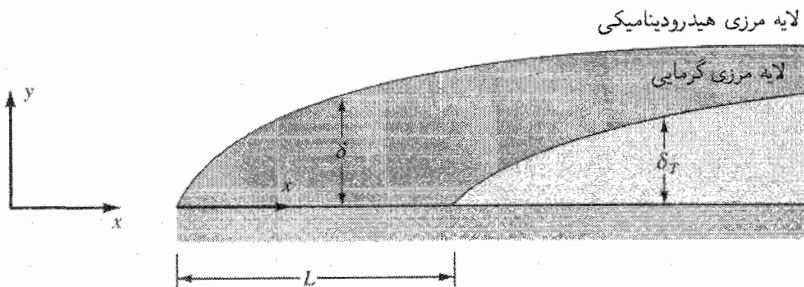
۳۳.۹ در سانس گرمای پایدار در یک استوانه توخالی که در مسئله ۱۳.۹ به دست آمد، نشان دهید که در یک عنصر استوانه‌ای توخالی، \bar{A} معادله‌های انتقال گرمای شعاعی پایدار را برقرار می‌کند.

۳۴.۹ در رسانش، گرمای پایدار در یک استوانه توخالی که در مسئله ۱۳.۹ به دست آمد، اگر به جای میانگین لگاریتمی از مساحت میانگین حسابی $\pi(R_1 + R_2)$ استفاده شود، درصد خطای حاصل را برای مقادیر R_2/R_1 برابر با ۲، ۵، و ۷ پیدا کنید.

۳۵.۹ پارامترهای زیر را در $T = 62^\circ\text{C}$ برای هوا، آب و گلیسرین ارزیابی کنید: $Lu_o \rho/\mu$ ، hL/k ، $\mu c_p/k$ ، و $h/\rho c_p u_o$. مقادیر L ، u_o ، و h را، به ترتیب، می توان ۱m، ۲۲m/s، و $52\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$ گرفت.

۳۶.۹ سیالی به موازات یک ورق صاف جریان دارد (شکل ۲۵.۹). در فاصله L از لبه حمله ورق، سیال و ورق دمای یکسان دارند، و در $x > L$ ورق دمای ثابت T_s دارد، که در آن $T_s > T_\infty$. اگر توزیع سرعت و توزیع دما در لایه های مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی، هر دو، با نمایه های درجه سوم توصیف شوند، نشان دهید که نسبت $\xi = \delta_T/\delta$ را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$\xi = \frac{\delta_T}{\delta} \approx \text{Pr}^{-1/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{L}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$$



شکل ۲۵.۹ مسئله ۳۶.۹

۳۷.۹ در شرایط توصیف شده در مسئله ۳۶.۹ نشان دهید که

$$\text{Nu}_{u_x} \approx 0.33 \frac{\text{Pr}^{1/3} \cdot \text{Re}_x^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{L}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}}$$

۳۸.۹ شارش را روی ورقی تخت با سرعت جریان آزاد ثابت در نظر بگیرید. اگر توزیع سرعت و توزیع دما در لایه های مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی هر دو با نمایه های خطی شوند، عبارت عدد نوسلت محلی، Nu_{u_x} ، را برحسب Pr و Re_x پیدا کنید.

۳۹.۹ مسئله ۳۸.۹ را با توزیعهای سرعت و دمای داده شده در زیر تکرار کنید

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 \quad T - T_s = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2$$

۴۰.۹ مسئله ۳۸.۹ را با توزیعهای سرعت و دمای داده شده در زیر تکرار کنید

$$U = \alpha_1 \sin(\beta_1 y) \quad T - T_s = \alpha_2 \sin(\beta_2 y)$$

۴۱.۹ مسئله ۳۸.۹ را با توزیعهای سرعت و دمای داده شده در زیر تکرار کنید

$$u/u_\infty = (y/\delta)^{1/4} \quad \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = (y/\delta_T)^{1/4}$$

۴۲.۹ یک مخلوط گازی شامل تجزیه این مواد است: CH_4 ، 77°C ، N_2 ، 14°C ، C_2H_6 ، 5°C ؛ و CO_2 ، 4°C . برای این مخلوط گاز مطلوب است (الف) یک کسر مولی N_2 و C_2H_6 ؛ (ب) کسر وزنی CO_2 ؛ (ج) فشارهای جزئی عناصر مخلوط گاز اگر فشار کل مخلوط گاز 1235 kPa باشد. 43.9 یک مخلوط گازی معین در ظرف 22 m^3 قرار دارد. مخلوط گاز شامل تجزیه این مواد است: H_2 ، 5% ، N_2 ، 53.4% درصد؛ و CO_2 ، 41.3% درصد. اگر فشار داخل ظرف 145°C ، 145 kPa ، و با دمای 32°C باشد، مطلوب است (الف) کسر مولی CO_2 ؛ (ب) کسر حجمی H_2 ؛ (ج) وزن مخلوط؛ (د) چگالی جرم N_2 ؛ (ه) فشارهای جزئی عناصر مخلوط گازی.

۴۴.۹ در مخلوط گاز دوتایی متشکل از عناصر A و B، نشان دهید که (الف) $\mathcal{D}_{AB} = \mathcal{D}_{BA}$ ؛ (ب) $\mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B = 0$ ؛ (ج) $\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B = \rho \mathbf{v}$ ؛ (د) $\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = c\mathbf{V}$.

۴۵.۹ در مخلوط دوتایی از عناصر A و B، نشان دهید:

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

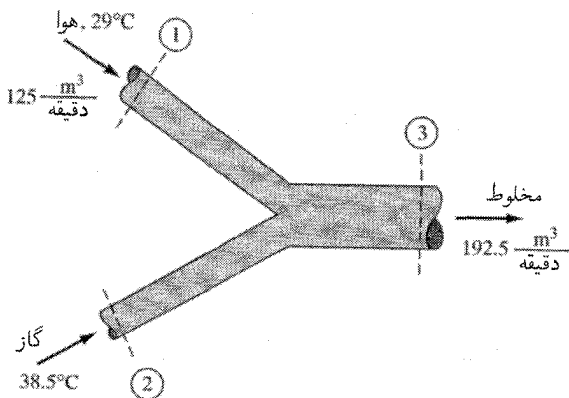
$$d\omega_A = \frac{M_A M_B dx_A}{(x_A M_A + x_B M_B)^2}$$

۴۶.۹ برای مخلوط دوتایی نمونه‌های A و B، نشان دهید که

$$x_A = \frac{\omega_A / M_A}{\omega_A / M_A + \omega_B / M_B}$$

$$dx_A = \frac{d\omega_A}{M_A M_B (\omega_A/M_A + \omega_B/M_B)^2}$$

۴۷.۹ $125 \text{ m}^3/\text{min}$ هوای خشک (O_2 , 20.95% درصد؛ N_2 , 78.08% درصد؛ CO_2 , 0.3% درصد؛ Ar , 0.93% درصد؛ و گازهای دیگر 1% درصد) با دمای 29°C با جریانی از یک مخلوط گازی با تجزیه N_2 , 32% درصد؛ O_2 , 40% درصد؛ و H_2 , 28% درصد با دمای 38.5°C مخلوط می‌شود (شکل ۲۶.۹). فشار کل در ورودیهای (۱) و (۲)، به ترتیب 1234 kPa و 980 kPa است (شکل ۲۶.۹). آمیختگی به طور بی‌دررو و پایا روی می‌دهد. اگر تخلیه شارش خروجی مطلوب باشد، $192.5 \text{ m}^3/\text{min}$ باشد، مطلوب است (الف) آهنگهای شارش جرم هوای خشک و مخلوط گاز؛ (ب) فشار در خروجی؛ (ج) تجزیه مخلوط گازی در خروجی؛ (د) دما در خروجی.



شکل ۲۶.۹ مسئله ۴۷.۹

۴۸.۹ مخلوط گازی O_2 و CO_2 در دمای 28°C و فشار کل 1450 kPa در لوله‌ای به قطر 3 m جریان دارد. اگر $x_{\text{O}_2} = 0.48$ ، $u_{\text{O}_2} = 23 \text{ m/s}$ ، $u_{\text{CO}_2} = 14 \text{ m/s}$ ، مطلوب است (الف) x_{CO_2} ؛ (ب) ρ_{CO_2} ، ρ_{O_2} ، $\rho_{\text{مخلوط}}$ ؛ (ج) c_{CO_2} ، c_{O_2} ، $c_{\text{مخلوط}}$ ؛ (د) سرعت متوسط شارش در لوله و آهنگ شارش گاز؛ (ه) J_{O_2} و J_{CO_2} .

۴۹.۹ یکی از رایجترین مواد ضد عفونی که در عملیات فاضلاب استفاده می‌شود گاز کلر (Cl_2) است. وقتی گاز کلر به آب افزوده می‌شود، واکنش زیر روی می‌دهد



زمان لازم برای پخش ۱ مول Cl_2 در غشای آب ساکن به ضخامت 6 cm و با دمای 19°C

چقدر است در صورتی که غلظت Cl_2 در یک لبه غشا 32 mol/m^2 در 0°C و در لبه دیگر صفر باشد؟
 ۵۰.۹ گلوله کروی نفتالین به قطر 2 cm در هوای ساکن معلوق است. نفتالین وزن مولکولی 128 g/mol و فشار بخار 13 kPa را در دمای 74°C دارد. فشار و دمای سیستم، به ترتیب، 100 kPa و 74°C است. مقدار نفتالین که در یک روز به گاز تبدیل می شود چقدر است؟

۵۱.۹ دو مخزن صلب، عایق شده با یک مجرای دایره ای به طول 1 m ، و به قطر 12 cm با هم ارتباط دارند. دما و فشار در هر دو مخزن، به ترتیب، 19°C و 100 kPa است. مخزن اول شامل مخلوط گاز یکنواخت 52% درصد CO_2 و 48% درصد NH_3 است و مخزن دیگر شامل مخلوط گاز یکنواخت 23% درصد CO_2 و 77% درصد NH_3 است، آهنگ انتقال NH_3 بین دو مخزن چقدر است؟ انتقال جرم را پایا فرض کنید.

۵۲.۹ مسئله ۵۱.۹ را در یک مجرای مخروطی، با قطرهای به ترتیب 6 cm و 14 cm در دو انتهای مجرا، تکرار کنید. در این حالت فرض کنید که NH_3 در جهت قطر کاهشی پخش شود.

۵۳.۹ ظرفی به طول 4 m ، که کاملاً عریض است، شامل آب تا عمق یکنواخت 2 cm است. آب با دمای 18°C است، و فشار کل مؤثر بر سیستم 1 atm است. هوا با سرعت 7 m/s روی ظرف جریان دارد. گذار از شارش لایه ای به شارش متلاطم در نزدیک $R_{\text{crit}} = 3 \times 10^5$ روی می دهد. با فرض پخشندگی جرم $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ، زمان لازم برای تبخیر تمام آب داخل ظرف را پیدا کنید. 54.9 با فرض نمایه های خطی در سرعت و غلظت در لایه مرزی لایه ای روی یک ورق تخت، رابطه بین ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی، δ ، ضخامت لایه مرزی غلظتی، δ_c ، و عدد اشمیت، S_c ، را به دست آورید.

۵۵.۹ یک جت دایره ای از آب بی رنگ با سرعت 10 ft/s و با قطر جت 4 in وارد مخزن آبی با چگالی یکسان می شود. اگر، علاوه بر تغییرات بر حسب فاصله محوری، ضریب تناسب برای حداکثر سرعت میانگین زمانی $6.2D$ باشد، حداکثر سرعت در $x = 5 \text{ ft}$ چقدر است؟

۵۶.۹ اگر از جت آب عمودی در سطح آزاد برای شستشوی رسوب از کف یک جریان استفاده شود، حداکثر قطر مجاز آب چقدر است؟ سرعت لازم برای شستشو 2 ft/s ، عمق آب 6 ft ، و تخلیه جت $5 \text{ ft}^3/\text{s}$ است. از ضریب تناسب در مسئله ۵۵.۹ استفاده کنید.

۵۷.۹ آلاینده ای در سیال ساکن داخل یک مخزن یکنواخت بلند در $x = 0$ و $t = 0$ رها می شود. مساحت مقطع عرضی مخزن 25 m^2 است، $\mathcal{D} = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ، و $M = 1000 \text{ kg}$. غلظت $x = 0$ در $t = 4$ روز و در $t = 3$ روز چقدر است؟ غلظت در $x = 1 \text{ m}$ ، و $t = 365$ روز چقدر است؟

۵۸.۹ در یک لحظه، 20 kg نمک در نهری ریخته می شود. توزیع نمک 30 دقیقه بعد چیست؟ سرعت نهر 4 m/s ، مساحت مقطع عرضی آن 10 m^2 ، و ضریب پاشیدگی $40 \text{ m}^2/\text{s}$ است.

۵۹.۹ ضریب پاشیدگی طولی، K ، در لوله آبی به قطر ۳in و با سرعت ۶ft/s را بیابید. $T = 60^\circ \text{F}$.
 ۶۰.۹ سیالی طوری به هم زده می شود که چسبندگی تلامبی سینماتیکی از صفر ($y = 0$) در کف مخزن تا $2 \text{ m}^2/\text{s}$ در $y = 600 \text{ mm}$ به طور خطی افزایش می یابد. برای ذرات یکنواخت با سرعت سقوط 300 mm/s در سیال ساکن، غلظت را در $y = 350 \text{ mm}$ بیابید در صورتی که تخلیه آن در $y = 600 \text{ mm}$ برابر با 10 لیتر باشد.

۶۱.۹ در مسئله ۵۷.۹ غلظت در $x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ cm}$ را برای بازه های ۱ روز تا 10 روز بیابید.
 ۶۲.۹ در مسئله ۵۸.۹، پس از ده دقیقه غلظت را در بازه های 4 m پیرامون قسمت حداکثر غلظت بیابید.

۶۳.۹ مسئله ۵۴.۹ را با توزیع سرعت و توزیع غلظت داده شده در زیر تکرار کنید

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 \quad C - C_s = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2$$

۶۴.۹ مسئله ۵۴.۹ را با توزیع سرعت و توزیع غلظت داده شده در زیر تکرار کنید

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 \quad C - C_s = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3$$

۶۵.۹ معادله (۶.۳.۹) را با استفاده از نمایه غلظت درجه سوم در تحلیل تقریب انتگرال فون کارمن به دست آورید.

۶۶.۹ نمایه غلظت زیر

$$C - C_s = \alpha_1 y e^{\alpha_2 y}$$

برای استفاده در تحلیل تقریبی انتگرال فون کارمن پیشنهاد می شود. آیا این پیشنهاد یک انتخاب منطقی است؟

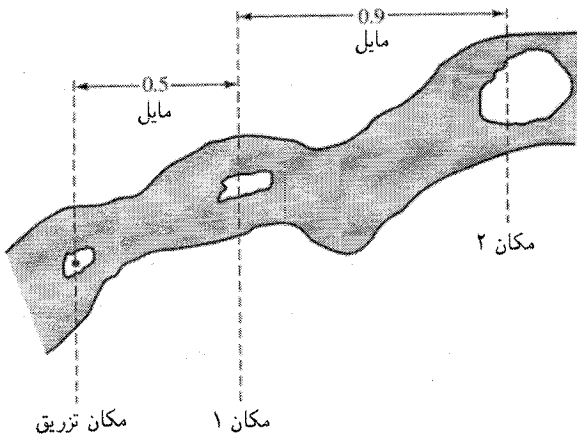
۶۷.۹ مسئله ۶۶.۹ را با نمایه غلظت زیر تکرار کنید

$$C - C_s = \alpha_1 y + \alpha_2 \sin(\alpha_3 y)$$

۶۸.۹ در شارشهای متلاطم معادله انتقال گرما، با استفاده از میانگین گیری رینولدز، برحسب زمان میانگین گیری بیان شود. چه جمله های اضافی وارد می شوند؟

۶۹.۹ یک ردیاب در رودخانه اسکیتو تزریق می شود، و آبر ردیاب حاصل (شکل ۲۷.۹) به هنگام عبور از دو مکان X_1 و X_2 در فرودست نمونه برداری می شود. دو مکان به فاصله 9 m مایل از یکدیگرند. نتایج در جدول زیر خلاصه شده اند

مکان X_2		مکان X_1	
$C(x_2, t)(\text{mg/L})$	t (دقیقه)	$C(x_1, t)(\text{mg/L})$	t (دقیقه)
۰	۵۰	۰	۰
۰٫۱۱	۵۳	۰٫۳۲	۲
۰٫۲۰	۵۶	۰٫۷۱	۴
۰٫۳۹	۵۹	۰٫۹۹	۶
۰٫۴۸	۶۲	۱٫۲۰	۸
۰٫۵۴	۶۵	۱٫۱۸	۱۰
۰٫۵۴	۶۸	۱٫۰۹	۱۲
۰٫۴۷	۷۱	۰٫۸۲	۱۴
۰٫۴۰	۷۴	۰٫۷۱	۱۶
۰٫۳۳	۷۷	۰٫۶۱	۱۸
۰٫۲۸	۸۰	۰٫۵۰	۲۰
۰٫۲۰	۸۳	۰٫۴۲	۲۲
۰٫۱۵	۸۶	۰٫۳۸	۲۴
۰٫۱۰	۸۹	۰٫۲۹	۲۶
۰٫۰۷	۹۲	۰٫۲۰	۲۸
۰٫۰۷	۹۵	۰٫۱۸	۳۰
۰٫۰۴	۹۸	۰٫۱۲	۳۲
۰٫۰۳	۱۰۱	۰٫۱۰	۳۴
۰٫۰۲	۱۰۴	۰٫۰۸	۳۶
۰٫۰۱	۱۰۷	۰٫۰۵	۳۸
۰٫۰۱	۱۱۰	۰٫۰۳	۴۰
۰	۱۱۳	۰	۴۲



شکل ۲۷.۹ مسائل ۶۹.۹ تا ۷۳.۹

برای دو مکان X_1 و X_2 غلظت را برحسب زمان رسم کنید و غلظتهای میانگین زمانی را با انتگرالگیری ترسیمی محاسبه کنید.

۷۰.۹ در داده‌های غلظت در مکانهای X_1 و X_2 داده شده در مسئله ۶۹.۹، افت و خیزهای غلظت $C''(x, t)$ را محاسبه کنید. $C''(x, t)$ را برحسب زمان رسم کنید و نشان دهید که $C''(x, t) = 0$.
۷۱.۹ در مقایسه با معادله (۹.۵.۹)، ضریب پاشیدگی K را با استفاده از داده‌های میدانی با معادله زیر می‌توان تخمین زد

$$K = \frac{0.5 \bar{u}^2 d \sigma^2}{dt}$$

با استفاده از داده‌های میدانی رودخانه اسکیتو داده شده در مسئله ۶۹.۹، مقدار ضریب پاشیدگی K را تخمین بزنید.

۷۲.۹ راه دیگر برای تخمین ضریب پاشیدگی از داده‌های میدانی بر مبنای حل معادله (۱۵.۴.۹) ردیاب ورودی پالس است. حل معادله چنین است

$$C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Kt}} \exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4Kt}\right]$$

با مرتب کردن معادله بالا و پس از لگاریتم‌گیری از طرفین معادله به دست می‌آوریم

$$\log(C\sqrt{t}) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{(x - \bar{u}t)^2}{t}$$

که در آن M وزن ردیاب، A مساحت شارش، $\alpha_0 = \log(M/A\sqrt{4\pi K})$ و $\alpha_1 = -\log(e)/4K$. اگر حل X_1 به صورت ۵ مایل در فرودست مکان تزریق باشد و زمان تزریق ۱۰ AM باشد، مقدار ضریب پاشیدگی K را از داده‌های مسئله ۶۹.۹ تخمین بزنید. سرعت شارش متوسط برای رودخانه اسکیتو ۳۵m/s است.

۷۳.۹ مسئله ۷۲.۹ را برای مکان X_2 تکرار کنید و نتایج را با نتایج مسئله ۷۲.۹ مقایسه کنید.
۷۴.۹ در شارشهای متلاطم، معادله انتقال جرم با استفاده از میانگین‌گیری رینولدز برحسب زمان میانگین‌گیری می‌شود. چه جمله‌های اضافی وارد می‌شوند؟

۷۵.۹ با استفاده از تبدیل $x = \sqrt{D_x t} \eta$ و شرایط اولیه و مرزی مشخص شده، معادله (۱۸.۵.۹) را به دست آورید. (راهنمایی: معادله انتقال جرم یک‌بعدی را به معادله دیفرانسیل معمولی با η به عنوان متغیر مستقل تبدیل کنید).

۷۶.۹ شرایط مرزی و اولیه زیر داده شده‌اند

$$C = C_0, \quad z = 0 \text{ برای تمام } t$$

$$C = C_s, \quad t = 0 \text{ برای تمام } z$$

$$C = C_0, \quad t = 0 \text{ برای } z \rightarrow \infty$$

حل معادله پخش یک‌بعدی زیر را بیابید

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

(راهنمایی: معادله بالا پخش جرم گذرا را در یک محیط نیم‌نامتناهی توصیف می‌کند).

۷۷.۹ مطلوب است حل معادله انتقال گرمای یک‌بعدی که انتقال گرما گذرا را در یک محیط

نیم‌نامتناهی توضیح می‌دهد (با مقایسه با حل به‌دست‌آمده در مسئله ۷۶.۹).

۷۸.۹ مطلوب است عمقی در خاک اشباع‌شده که در آن تغییرات سالیانه ما ۱۸٫۵ درصد تغییرات

در سطح است.

۷۹.۹ کانال مستقیمی، هموار، مستطیلی به عرض ۱۲۰ m است و شیب کف آن 2×10^{-3} است.

آب در عمق ۲٫۵ m با سرعت متوسط 56 m/s جریان دارد. اگر دمای آب 22°C باشد، تنش

برشی را در کف کانال تخمین بزنید و نوع شارش را بیابید.

۸۰.۹ در شرایط توصیف‌شده در مسئله ۷۹.۹ و با استفاده از معادله‌های مناسب، چسبندگیهای

تلاطمی عمودی و جانبی را در کانال تخمین بزنید. اگر یک منبع نقطه‌ای آلاینده در کناره کانال قرار

گیرد، زمان و طول لازم کانال را برای آمیختگی کامل بیابید.

۸۱.۹ یک واحد صنعتی شیمیایی $15 \text{ m}^3/\text{s}$ مواد زائد را که شامل 150 g/m^3 مواد شیمیایی

است تخلیه می‌کند. مواد زائد در نزدیک خط مرکزی یک کانال طبیعی عریض، پیچ‌وخم‌دار تخلیه

می‌شود. عمق متوسط آب در کانال ۹ m، شیب بستر 2×10^{-3} ، و سرعت متوسط شارش 5 cm/s

است. عرض آلاینده و حداکثر غلظت آن را در فاصله 1.4 km در فرودست نقطه تخلیه بیابید.

۸۲.۹ دو رودخانه الف و ب، که با هم از یک پیوندگاه هموار جریان می‌یابند (شکل ۲۸.۹) محتویات

شیمیایی کاملاً متفاوت دارند. در فاصله‌ای در فرودست پیوندگاه، دو رودخانه یک کانال مستطیلی

35 m با عمق آب 10 m را پوشش می‌دهند. هر دو رودخانه مقاطع عرضی مستطیلی دارند،

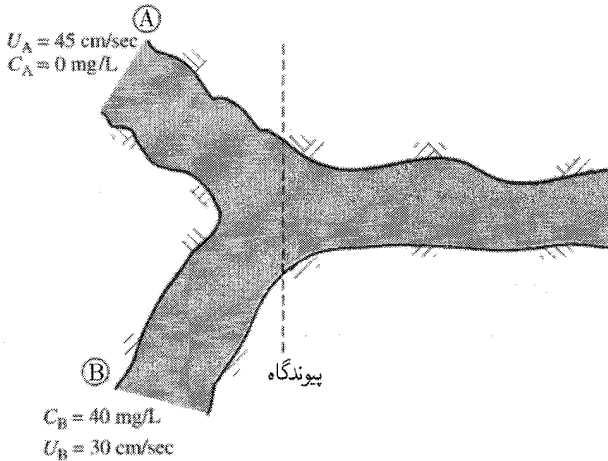
عرض رودخانه الف 250 m و عمق آب 5 m است، در عرض رودخانه ب 40 m و عمق آب

9 m است. سرعتهای شارش متوسط در رودخانه‌های الف و ب، به ترتیب، 45 cm/s و 3 cm/s

است. رودخانه الف هیچ محتوی شیمیایی ندارد در حالی که رودخانه ب شامل 40 mg/L مواد

شیمیایی است. دمای متوسط در دو رودخانه الف و ب، به ترتیب، 28°C و 20°C است. در

شرایط توصیف شده و با فرض اینکه $S_o = 0.18$ ، مطلوب است: (الف) حداکثر غلظت مواد شیمیایی در فرودست کانال از پیوندگاه، با فرض آمیختگی کامل؛ (ب) طول کانال لازم برای ایجاد آمیختگی کامل بین دو رودخانه (فرض کنید که کانال پیچ و خم ندارد)؛ (ج) دما و سرعت شارش در فاصله دور در فرودست پیوندگاه.



شکل ۲۸.۹ مسئله ۸۲.۹

۸۳.۹ ده کیلوگرم رنگ رودامین ($SG = 1.0$) روی سطح آب و در خط مرکزی، که عرض در آنجا ۱۵ ft و عمق آب ۱ ft است، ریخته می شود. اگر کانال با شیب 0.14 ° آب را با سرعت 1.5 ft/s انتقال دهد، مقدار ضریب پاشیدگی طولی را با استفاده از معادله (۲۰.۶.۹) تخمین بزنید. حداکثر غلظت و عرض آلایندة را در فاصله ۵ مایل در فرودست نقطه تزریق بیابید. آیا آمیختگی کامل در مکان مشخص شده فرودست برقرار است؟ اگر نیست، فاصله لازم از نقطه تزریق را برای آمیختگی کامل بیابید.

۸۴.۹ یک کارخانه کفش مواد زائد به طور یکدست شناور را در کناره یک کانال طبیعی با پیچ آهسته تخلیه می کند. آب در عمق ۷ ft با سرعت 3.2 ft/s در کانال جریان دارد. در نقطه ۲۰ مایل در فرودست نقطه تزریق، مشاهدات نشان می دهند که آمیختگی کامل برقرار شده است. عرض متوسط مساحت مقطع عرضی کانال و آهنگ شارش آن بر حسب ft^3/s چقدر است؟ فرض کنید $S_o = 0.13$. ۸۵.۹ در یک کانال مستطیلی با شیب 0.085 ° آب با سرعت متوسط 35 cm/s جریان دارد. سرعت اصطکاکی در کف 20 cm/s است. اگر زمانها برای کامل شدن آمیختگی عمودی و عرضی با هم برابر باشند، آهنگ شارش در کانال را بیابید. چسبندگیهای تلاطمی عمودی و عرضی چقدر است؟ ۸۶.۹ زمان و فاصله لازم را برای دوره تنظیم اولیه در شرایط توصیف شده در مسئله ۸۱.۹ پیدا کنید.

۸۷.۹ مسئله ۸۶.۹ را در شرایط توصیف شده در مسئله ۸۴.۹ تکرار کنید.
 ۸۸.۹ با طول L_m برای آمیختگی کامل، ضریب E_y آمیختگی عرضی، و ضریب K پاشیدگی طولی، عبارت عرض W کانال مستطیلی را پیدا کنید.

مراجع

1. C. Geankopolis, *Transport Processes and Unit Operation*, 3rd ed., Prentice Hall, NJ, 1993.
2. D. Lide, ed., *Handbook of Chemistry and Physics*, 14th ed., CRC Press, Florida, 1993.
3. F. Kreith and W. Black, *Basic Heat Transfer*, Harper and Row, New York, 1990.
4. T. Sherwood, R. Pickford, and C. White, *Mass Transfer*, McGraw Hill, New York, 1975.
5. J. Welty, C. Wicks, and R. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New York, 1984.
6. C. Sleicher and M. Rouse, "A Convenient Correlation for Heat Transfer to Constant and Variable Property Fluids in Turbulent Pipe Flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 18, 677-683, 1975.
7. P. Harriot and R. Hamilton, "Solid-Liquid Mass Transfer in Turbulent Pipe Flow," *Chem. Eng. Sci.*, 20, pp. 1073-1078, 1965.
8. R. Brodkey and D. Hershey, *Transport Phenomena, A Unified Approach*, McGraw Hill, New York, 1988.
9. S. Whitaker, "Forced Convection Heat Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Cylinders, Single Spheres, and for Flow in Packed Beds and Tube Bundles," *A. I. Ch. E.*, 18, pp. 361-371, 1972.
10. D. Kunii and O. Levenspiel, *Fluidization Engineering*, J. Wiley, New York, 1969.
11. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw Hill, New York, 1979.
12. G. Taylor, "Diffusion by Continuous Movements," *Proc. London Math. Soc.*, Ser. A, 20, pp. 196-211, 1921.
13. W. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford, 1990.
14. M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, 2nd ed., M. Nijhoff, Dordrecht, 1991.
15. H. Fischer, E. List, R. Koh, J. Imberger, and N. Brooks, *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, 1979.
16. H. Tennekes and J. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, MA, 1972.
17. G. Csanady, *Turbulent Diffusion in the Environment*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

18. H. Carslaw and J. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Dover, NY, 1973.
19. J. Crank, *Mathematics of Diffusion*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
20. R. French, *Open Channel Hydraulics*, McGraw Hill, New York, 1985.
21. J. W. Elder, "The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow," *J. Fluid Mech.*, 5, pp. 544-560, 1959.
22. G. Taylor, "The Dispersion of Soluble Matter in a Solvent Flowing Slowly Through a Tube," *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 219, pp. 186-203, 1953.
23. R. Aris, "On the Dispersion of a Solute in a Fluid Flowing Through a Tube," *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 235, pp. 67-77, 1956.
24. E. Holley, D. Harleman, and H. Fischer, "Dispersion in Homogeneous Estuary Flow," *J. Hydraulics Div., ASCE*, 96, pp. 1691-1709, 1970.
25. E. Holley, J. Siemons, and G. Abraham, "Some Aspects of Analyzing Transverse Diffusion in Rivers," *J. Hydraulic Res.*, 10, pp. 27-57, 1972.
26. P. Chatwin and C. Allen, "Mathematical Models of Dispersion in Rivers and Estuaries," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17, pp. 119-150, 1985.
27. H. Fischer, "The Mechanics of Dispersion in Natural Streams," *J. Hydraulics Div., ASCE*, 93, p. 187, 1967.
28. P. Chatwin, "The Approach to Normality of the Concentration Distribution of a Solute in a Solvent Flowing along a Straight Pipe," *J. Fluid Mech.*, 43, pp. 321-352, 1970.

مراجع برای مطالعه بیشتر

- Bennet, C., and J. Myers: *Momentum, Heat and Mass Transfer*, 3rd ed., McGraw Hill, New York, 1974.
- Eckart, E., and R. Drake: *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw Hill, New York, 1972.
- Hemond, H., and E. Fechner: *Chemical Fate and Transport in the Environment*, Academic Press, New York, 1994.
- Kay, J., and R. Neddeman: *Fluid Mechanics and Transfer Processes*, Cambridge U. Press, New York, 1985.

قسمت دوم

کاربردهای مکانیک سیالات و انتقال

در بخش ۱ مفاهیم و معادله‌های اصلی به دست آمدند و با مثالها و کاربردهای ساده توضیح داده شدند. در بخش ۲، پس از فصل اولیه مربوط به اندازه‌گیری و تحلیل مقدماتی داده‌ها، در فصلهای باقیمانده کاربردهای مهم توربو ماشین، شارش پایا و ناپایا در مجرای بسته، شارش در کانال باز، و پدیده‌های انتقال بررسی می‌شوند.

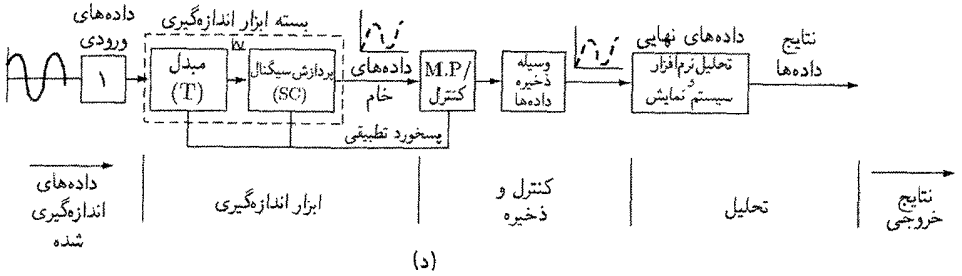
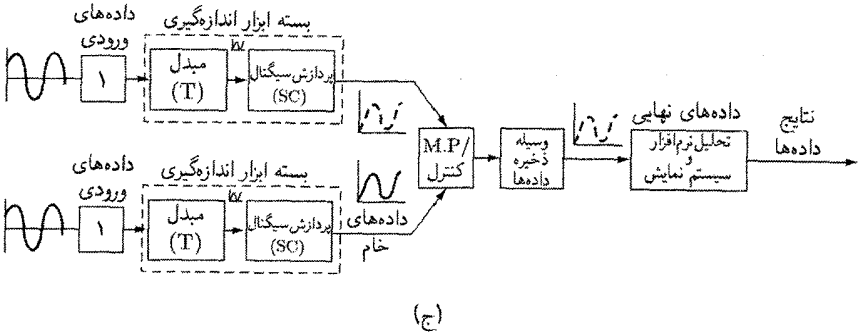
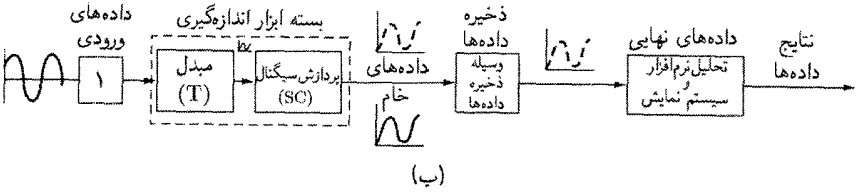
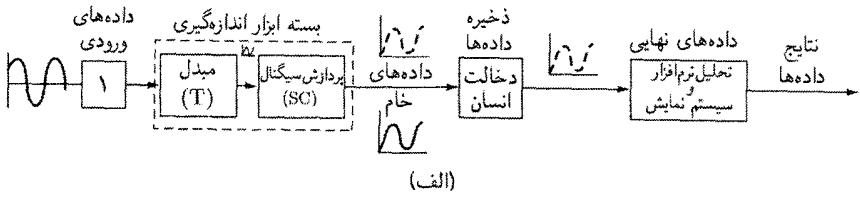
اندازه‌گیریها

اندازه‌گیریهای سیال شامل تعیین ارتفاع، فشار، سرعت، دما و غلظت است. به‌علاوه، آهنگ گرما، جرم و انتقال تکانه نیز لازم می‌شوند و نوعاً از روی داده‌های اندازه‌گیری شده، که به آنها اشاره شد، تعیین می‌شوند. با دستگاههای اندازه‌گیری جدید می‌توان داده‌های خیلی بزرگ را در آهنگهای نمونه‌برداری بالا اندازه گرفت، و بنابراین، این فصل با بحث خلاصه‌ای دربارهٔ اجزاء، وظایف، و اصطلاحات دستگاه اندازه‌گیری شروع می‌شود. در بقیه فصل، روشهای مختلف اندازه‌گیری مستقیم متغیرهایی که در بالا فهرست شدند بررسی می‌شوند، و پس از آن روشهای اندازه‌گیری مستقیم آهنگهای شارش در مجراها و کانالهای باز و روشهای غیرمستقیم برای تعیین آهنگهای شارش و شارهای جرم آورده می‌شوند.

۱.۱۰ وظایف و خواص دستگاه

متغیرهای وابسته و مستقل تعریف‌شده در نه فصل قبل باید در نقطه‌ای اندازه‌گیری می‌شدند. اندازه‌گیریها، خواه به صورت نمایشهای آزمایشگاهی نمونه اصلی باشد و خواه به صورت اندازه‌گیری خود نمونه اصلی، مبنای ارزیابی رابطه‌های بین متغیرهای سیال را در نظریه‌ها تشکیل می‌دهند یا برای در نظر گرفتن داده‌ها در آزمایشهای عددی به کار می‌روند.

وظایف و خواص دستگاه ۵۸۳



شکل ۱.۱۰ خواص سیستم اندازه‌گیری.

یک دستگاه اندازه‌گیری به طور نمونه از چهار مرحله تشکیل شده است (شکلهای ۱.۱۰ الف تا د) و هر مرحله برای عملکرد مؤثر باید دارای چند خاصیت باشد. ابتدا، دستگاه باید هدفهای دقت پروژه را برآورد و بتواند این کار را در تمام مدت کارکرد دستگاه انجام دهد. تعریف دقت شامل توان تفکیک ابزار و صحت آن است. توان تفکیک کوچکترین کمیتی است که با وسیله،

می‌توان اندازه گرفت و صحت به خطای کسری در ابزار مربوط می‌شود. این مشخصه‌های دقت برای برآوردن هدفهای پروژه تا یک سطح قابل قبول با تحلیل‌گر تعیین می‌شوند. وقتی دستگاه کار می‌کند این خواص دقت باید پایدار بمانند، یعنی، آنها نباید از حدود گستره شرایط کارکرد (دما، غیره) که درضمن کار ابزار مورد انتظارند تجاوز کنند. ابزاری که پایدار نیستند درضمن جمع‌آوری اطلاعات احتیاج به واریسی دارند؛ این عمل پرهزینه است و جمع‌آوری داده‌ها را منقطع می‌کند.

خاصیت دوم، که بسط خاصیت اول است، این است که درجه‌بندی دستگاه باید به سهولت انجام شود، و، پایدار نیز باشد. درجه‌بندی (عمل تعیین خواص دقت)، از چند مرحله تشکیل شده است، و دلخواه این است که مراحل درجه‌بندی فقط در شروع و خاتمه آزمایش، و نه درضمن آزمایش، مورد نیاز باشد. درجه‌بندی باید به وضوح خطاها و تخمینهای خطا را به‌طور کمی نشان دهد تا از آن بتوان در تحلیلهای بعدی همراه با داده‌ها استفاده کرد.

سوم، دستگاه باید قابل اعتماد باشد یعنی اینکه میدلها و تحلیل‌گر سیگنال مربوط به آنها باید داده‌ها را، بدون نقص یا جافتادگی و خطا، با دقت موردنظر، در طول کارکرد ابزار جمع‌آوری و ذخیره کنند. بیشتر روشهای تحلیل جدید نیاز به یک مجموعه زمانی داده‌ها دارند که در بازه‌های منظم درضمن کارکرد وسیله جمع‌آوری می‌شوند. هرگونه حذف داده‌ها به قابلیت انجام تحلیلهای دلخواه لطمه می‌زند. اندازه‌گیریهای جمله بلند که با مبدل مکانیکی یا الکترومکانیکی انجام می‌شوند تحت تأثیر شکست قطعات متحرک، یا گاهی اوقات نامطمئن، قرار می‌گیرند، و بنابراین اغلب به دخالت و واریسی انسان نیاز دارند. جمع‌آوری تکراری داده‌ها مستقیماً با فعالیت انسان در اندازه‌گیری جمله کوتاه کاملاً مطمئن است اما در اندازه‌گیری جمله بلند بدون زمانبندی قابل توجه گروه‌های پرسنلی پرهزینه چندان مطمئن نیست.

چهارم، و بالاخره، داده‌های جمع‌آوری‌شده دستگاه باید به شکلی باشد که در ذخیره دیجیتال، تحلیلی، و استفاده مجدد جوابگو باشد. قابلیت دسترسی به ریزپردازنده‌های ارزان‌قیمت و تکنولوژی کامپیوتر، همراه با مقدار وسیعی از داده‌های لازم در تحلیلهای دقیق، ایجاب می‌کند که از روشهای دیجیتالی و سخت‌افزاری جدید استفاده شود. تحقیقات روزمره‌ای که در آنها اعداد اندازه‌گیری شده خاصی در یک دفترچه آزمایشگاهی با شتاب یادداشت می‌شوند، حداقل در مکانیک سیالات، جمع‌آوری داده‌ها و روشهای انتقال نامطلوبی‌اند.

در شکل ۱۰ (الف) تا (د) بلوک نمودارهای دستگاههای اندازه‌گیری بسیار پیچیده نشان داده شده است. همانطور که اشاره شده است دستگاه اندازه‌گیری باید پنج مرحله را اجرا کنند. آنچه در تمام آنها مشترک است عبارت‌اند از: ورودی داده‌ها، بسته ابزار اندازه‌گیری، و تحویل‌گیرنده داده‌ها یا سیستم ذخیره. سیستم می‌تواند شامل دو جزء دیگر باشد: ریزکنترل‌کننده یا ریزپردازنده برای

کنترل چند ابزار یا نمونه برداری تطبیقی، و سیستم نمایش و تحلیل نرم افزاری در تحلیل داده‌های و ایجاد داده‌ها استنباطی.

ورودی داده‌ها

به استثنای بعضی شارش‌های لایه‌ای مهندسی، متغیرهای میدان شارش که باید اندازه‌گیری شوند در تمام میدان شارش برحسب زمان و مکان تغییر می‌کنند. مقیاسهای طول و زمان کوچکترین افت و خیزهای غیرمولکولی که باید اندازه‌گیری شوند ریزمقیاس تیلور نامیده می‌شوند، و در شارش‌های متلاطم آنها تقریباً 10^{-6} ثانیه و 1 cm است. بزرگترین مقیاسهای طول و زمان تغییرپذیری سیگنال که باید اندازه‌گیری شود با اندازه هندسه میدان شارش تعیین می‌شود.

متغیرهای مکانیک سیالات و انتقال که اندازه‌گیری شوند می‌توان به سه رده وسیع تقسیم‌بندی کرد:

۱. متغیرهای مستقیماً اندازه‌گیری شده مانند دما، سرعت، ارتفاع، یا غلظت.

۲. اندازه‌گیریهایی مجتمع مانند محتوی گرمای کل، جرم کل، با انرژی کل در یک حجم

نمونه برداری

۳. داده‌های استنباطی که از ترکیب داده‌های اندازه‌گیری شده دیگر جمع‌آوری شده‌اند.

آخرین رده‌بندی اغلب وقتی استفاده می‌شود که هیچ ابزار اندازه‌گیری در دسترس نباشد که با آن بتوان مستقیماً اندازه‌گیریهایی لازم را انجام داد؛ به عنوان مثال از اندازه‌گیری شار اداکتیو یا متلاطم رسوب با آلاینده می‌توان نام برد.

آزمایش‌کننده باید بتواند درجه تغییرپذیری دلخواه در میدان شارش را مشخص کند، زیرا دقتی را که ابزار اندازه‌گیری باید داشته باشد و فرکانس نمونه‌برداری یا آهنگ جمع‌آوری داده‌ها با ابزار را مستقیماً تعیین می‌کند. به علاوه، بزرگی مقادیر ماکزیمی که باید اندازه‌گیری شوند نیز باید از قبل معلوم باشد زیرا قابلیت‌های مقیاس کامل ابزار اندازه‌گیری باید مقادیر پیش‌بینی شده را "شامل باشد". به عنوان یک مثال خیالی از آزمایش‌کننده خواسته می‌شود نمایه ارتفاع موج را در یک نقطه نزدیک ساحل اندازه بگیرد. حداقل تناوب موج، T ، ۲ ثانیه پیش‌بینی می‌شود و داده‌های ارتفاع موج باید با دقت 1 cm \pm اندازه‌گیری شود. باید سه اندازه‌گیری مستقل با فواصل مکانی مساوی برابر با یک چهارم طول موج ($T/4$) انجام شود. بنابراین، فرکانس نمونه‌برداری ابزار اندازه‌گیری باید حداقل شش هرتز یا هر 167 ثانیه یک بار باشد. انتظار می‌رود که حداکثر ارتفاع سطح آزاد مورد انتظار در بالای سطح آب ساکن 2 m باشد؛ بنابراین، قابلیت مقیاس کامل ابزار اندازه‌گیری 2 m \pm است.

بسته‌های ابزار اندازه‌گیری

وسیله اندازه‌گیری از دو جزء تشکیل شده است: مبدل یا حس‌گر و نوعاً یک بسته پردازش سیگنال برای آماده کردن سیگنال در استفاده بعدی با تحویل‌گیرنده داده‌ها یا بازخوانش مستقیم به‌وسیله آزمایش‌کننده.

مبدل [مراجعه ۱]* عنصر اولیه حس‌کننده متغیرها در میدان شارش است. آن از میدان شارش انرژی می‌گیرد و یک خروجی می‌دهد که مستقیماً به کمیت اندازه‌گیری شده بستگی دارد. مبدلها می‌توانند فعال یا غیرفعال باشند، و تمایز آنها در این است که انرژی خروجی حس‌گر تقریباً به‌طور کامل از میدان شارش گرفته می‌شود (غیرفعال) یا از بسته الکترونیکی گرفته می‌شود (فعال). سرعت سنج یک اتومبیل که خروجی آن با چرخش چرخهای اتومبیل گرفته می‌شود نمونه‌ای از مبدل فعال است. وسیله صوتی که در زیر دریایی‌ها برای آشکارسازی زیردریایی یا دیگر وسایل زمینی غرق‌شده به کار می‌رود نمونه‌ای از مبدل فعال است.

بیشتر حس‌گرهای سنتی طبیعتاً الکترومکانیکی‌اند و مبنای آنها بستگی دارد به تبدیل انرژی از یک شکل به شکل دیگری که ساده‌تر اندازه‌گیری می‌شود. به استثنای اندازه‌گیری ارتفاع با هندسه، که مستقیماً انجام می‌شوند. تمام وسایل الکترومکانیکی غیرفعال‌اند. ابزار اندازه‌گیری اخیر که مبنای کارکرد آنها به‌جای تبدیل انرژی به انتشار انرژی بستگی دارد در حال حاضر برای اندازه‌گیریهای دقیق سرعت و غلظت در دسترس‌اند. این ابزار اندازه‌گیری مبدلهای فعال‌اند که بر مبنای تراگسیل تابشی صوتی، لیزری، یا الکترومغناطیسی کار می‌کنند.

مؤلفه سیگنال مشروط‌کننده اساساً انرژی یا انتشار انرژی را به سیگنال الکترونیکی تبدیل می‌کند. شدت تبدیل یا انتشار به ولتاژ خروجی دستگاه ارتباط داده می‌شود. خطی بودن رابطه بین ولتاژ خروجی و تبدیل یا انتشار انرژی یک هدف کاملاً مطلوب است زیرا با آن می‌توان درجه‌بندی پایدار داشت. دستگاههایی که در آنها سطوح ولتاژ خروجی و آهنگهای تبدیل به‌طور پیوسته با هم ارتباط داده می‌شوند دستگاههای قیاسی نامیده می‌شوند.

هدف دوم مؤلفه سیگنال مشروط‌کننده این است که روی سیگنال بیشترکار می‌کنند تا صحت، دقت، و مشخصه‌های گستره مشخص شده سازنده را برقرار کند. این عملیات متشکل است از تصفیه، میانگین‌گیری، برش، و فرایندهای الکترونیکی دیگر که برای مشخص کردن و واضح کردن داده‌های خام است. این مرحله با روش قیاسی با بازخوانش پیوسته نهایی در سنج‌های انجام می‌شود که تحلیل‌گر در تحقیق یا گزارش آزمایشگاهی به آن اشاره می‌کند. این سیستم ابتدایی در شکل ۱.۱۰ الف نشان داده شده است.

امروزه، بیشتر عملیات مشروط‌کننده به‌طور دیجیتال انجام می‌شود که در آن یک تبدیل قیاسی

به دیجیتالی (A به D) در سیگنال ولتاژ پیوسته با یک مدار مجتمع انجام می‌شود. در این روش، داده‌ها در بازه‌های مجزا، که فرکانسهای آنها با فرکانسهای نمونه‌برداری مورد نیاز آزمایش برابر یا از آنها بیشتر است، ذخیره می‌شوند. تمام عملیات تصفیه و میانگین‌گیری به‌طور دیجیتالی انجام می‌شوند. شکل ۱.۱۰ الف نیز این انتخاب خروجی را نشان می‌دهد.

ذخیره و کنترل

خروجی بسته ابزار اندازه‌گیری به صورت داده‌های خام قیاسی یا دیجیتالی است. طرح آزمایشها و پیشرفت ابزار اندازه‌گیری، هردو مجموعه‌های بسیار بزرگی از داده‌ها را می‌دهند. مثلاً، اندازه‌گیریهای میدانی لازم برای تحقیق پیش‌بینی به دنبال کشیدن لایه مرزی و پیش‌بینی آهنگهای لازم برای شستشوی کف ستون آب از سنگریزه‌ها را در ۵۰ مگابایت داده‌ها می‌توان به دست آورد و درست در دو روز آزمایش با آهنگ نمونه‌برداری ۴ هرتز ذخیره کرد. یک تحویل‌گیرنده داده به این هدف می‌رسد. تحویل‌گیرنده‌های داده مدرن می‌توانند داده‌ها را به شکل رقمی یا قیاسی بپذیرند؛ بنابراین، آنها قابلیت تبدیل A به D را دارند. ذخیره می‌تواند روی دیسکهای فلاپی (۲ مگابایت)، دیسکهای فلرپتیکال (۲۰ مگابایت)، دیسکهای نوری (۱ گیگابایت)، یا در چارچوب انواع نواری مختلف باشد. شکل ۱.۱۰ ب این نمودار را نشان می‌دهد. اندازه‌گیریهای چندگانه یک عمل آزمایشگاهی رایج است و تحویل‌گیرنده‌های داده می‌توانند ابزار اندازه‌گیری چندتایی را بپذیرند به همان صورتی که در شکل ۱.۱۰ ج نشان داده شده است. مثلاً، آزمایش لایه مرزی که در بالا به آن اشاره شد نیازمند اندازه‌گیری هم‌زمان و تحویل‌گیری ۴ اندازه‌گیری سرعت، ۱ اندازه‌گیری دما و فشار، و ۱۰۰ اندازه‌گیری غلظت رسوب با فرکانس نمونه‌برداری ۴ هرتز است.

تحویل‌گیرنده‌های داده جدید می‌توانند با ولتاژ AC استاندارد که در آزمایشگاهها یافت می‌شوند یا با ولتاژ DC پایین حاصل از باتریها کار کنند. که با آن می‌توان عملیات میدانی داشت. واحدهای میدانی را نیز می‌توان مجهز کرد تا از طریق ماهواره یا ارتباط تلفنی سلولوی با ایستگاه کار مرکزی ارتباط برقرار کند. ماهواره یا ارتباط تلفنی نیازمند یک منبع توان با ولتاژ بالاتر است که باتریها می‌توانند تولید کنند؛ البته پانلهای خورشیدی کارآمدترند.

خاصیت اصلی سیستم کنترل این است که نمونه‌برداری را به صورت برنامه نرم‌افزاری در می‌آورند. سیستمهای کنترل را می‌توان از مدارهای مجتمع میکرو کنترلر ساخت که استفاده از عملیات ریاضی هم‌زمان را محدود می‌کنند، یا از ریزپردازنده‌هایی که با آنها می‌توان انواع پیچیده‌تر نمونه‌برداری را شکل داده و دنبال کرد. با ریزپردازنده‌ای مانند INTEL X86 یا مدارهای بنتنوم اساساً می‌توان درجایی که فرکانسهای نمونه‌برداری در نرم‌افزار شکل می‌گیرند و داده‌ها از طریق فصل

مشترک‌های استاندارد گسیل می‌شوند و در وسایل ذخیره‌سازی ذخیره می‌شوند یک ابزار کنترل‌شونده با کامپیوتر داشت. عملیات ریاضی را در نرم‌افزار کنترل می‌توان برنامه‌ریزی کرد به طوری که ریزپردازنده می‌تواند محاسبات با داده‌ها را انجام دهد یا نمونه‌برداری شرطی یا تطبیقی را شکل می‌دهد. نمونه‌برداری شرطی وقتی روی می‌دهد که گروهی از متغیرهای اندازه‌گیری شده به مقادیر بحرانی برسند و سپس ابزار اندازه‌گیری برای نمونه شروع به کار کند. به طریق دیگر، نمونه‌برداری می‌تواند در یک فرکانس معین باشد و این اغلب وقتی است که گروه متغیرها به سطوح راه‌انداز رسیده‌اند. پردازش مستقیم داده‌های خام را در پردازش همزمان با نمونه‌برداری با عملیات ریاضی نیز می‌توان انجام داد.

میکروکنترلرها، مانند آنهایی که مربوط به سری HPC ۱۶۰۰۰ هستند، نیز سیستم‌های نرم‌افزاری قابل برنامه‌ریزی برای کنترل ابزار اندازه‌گیری‌اند و تفاوت آنها با ریزپردازنده‌ها در این است که عملیات ریاضی را به سهولت نمی‌توان انجام داد. بنابراین، داده‌ها را در ضمن آزمایش نمی‌توان مستقیماً تحلیل کرد. انواع دیگر کنترل نرم‌افزاری مجاز است.

تحلیل و نتایج

نوفاً تحلیل حداقل قسمت خودکار سیستم است، و وظیفه نهایی تحلیل داده‌های اندازه‌گیری شده یا ایجاد داده‌های جدید از روی داده‌های اندازه‌گیری شده است. تعدادی از بسته‌های نرم‌افزاری تحلیل کلی مانند Mathcad, Matlab, SAS, یا SYSTAT برای نمایش و تحلیل معمول وجود دارد. ولی، معمولاً برنامه‌های تخصصی‌تر لازم می‌شوند که تحلیل‌گر آن را تهیه می‌کند.

تخمین خطا

عمل اندازه‌گیری داده‌ها یا استفاده از داده خطا دارد؛ خطا یعنی تفاضل بین مقدار حقیقی و کمیت اندازه‌گیری شده یا کمیت استنتاج شده است. معمول این است که خطای اندازه‌گیری به صورت یک کمیت کسری نسبت به مقدار حقیقی داده می‌شود. مثلاً اگر سرعت حقیقی رودخانه، u ، 15 cm/s باشد و کمیت اندازه‌گیری شده، u_m ، 14.4 cm/s باشد، خطای مطلق، e ، 0.6 cm/s است و خطای نسبی، ε ، عبارت است از

$$\varepsilon = e/u = -0.06/15 = -0.004 \quad \text{یا} \quad \varepsilon = \text{درصد } 4$$

خطاها می‌توانند ناشی از تخمین بیش از مقدار حقیقی یا تخمین کمتر از آن باشند و در اصل سیستماتیک یا تصادفی است. خطای سیستماتیک خطایی است که قابل پیش‌بینی است و به طور

تکراری مشاهده می‌شود و بنابراین می‌توان آن را پارامتری کرد و در درجه‌بندی در نظر گرفت. نمونه‌ای از خطای سیستماتیک یک سنجه جریان است که وقتی رودخانه هیچ سرعتی ندارد و همیشه 1cm/s را می‌خواند، یعنی، خطای انحراف صفر است. خطای تصادفی خطایی است که در آن نتایج حاصل از تعدادی مشاهدات تکراری در شرایط یکسان داده‌هایی را می‌دهد که تمام آنها به‌طور جزئی با هم تفاوت دارند اما پیرامون یک میانگین قابل پیش‌بینی مجتمع شده‌اند. هدف مهندس ابزار این است که به‌طور صحیح سیستم را طراحی کند و آن را طوری درجه‌بندی کند که فقط خطاهای تصادفی وجود داشته باشند.

تخمینهای خطا در تعدادی از کتابهای درسی وجود دارد (مثلاً، به مراجع [۲، ۳] نگاه کنید). دو روش برای تعیین تخمین خطا وجود دارد. اول، عملکرد کلی ابزار اندازه‌گیری را با کاربرد در مجموعه داده‌های استاندارد یا پذیرفته‌شده می‌توان تعیین کرد. دوم، خطای ابزار اندازه‌گیری را با ارزیابی خطا در هر مرحله از فرایند اندازه‌گیری و سپس ترکیب آنها در یک مقدار تنها برای کل فرایند می‌توان تعیین کرد. روش دوم وقتی به کار می‌رود که داده‌های استاندارد شده کم باشد. به‌طور ایدئال هر دو تخمین باید سازگار باشند.

در حالی که جزئیات ریاضی را در مراجع بالا می‌توان یافت، در زیر یک عمل پذیرفته‌شده برای تخمین خطا آورده شده است. فرض کنید که نمونه‌برداری ابزار از سرعت رودخانه باید با سه عمل انجام گیرد تا نتیجه اندازه‌گیری‌شده و خطای نسبی روی داده در هر سه مرحله را به‌دست آورد. بدترین حالت خطای کلی وقتی است که خطاهای نسبی به‌طور ساده با هم جمع شوند، یعنی،

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c \quad (1.1.10)$$

بر مبنای تحلیل خطای میانگین مربعی و با فرض اینکه خطاهای نسبی همبسته نباشند، خطای انتظاری معمولاً با رابطه زیر تخمین زده می‌شود

$$\varepsilon = (\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2)^{1/2} \quad (2.1.10)$$

اگر ε_b و ε_c همبسته باشند، در این صورت

$$\varepsilon = [\varepsilon_a^2 + (\varepsilon_b + \varepsilon_c)^2]^{1/2} \quad (3.1.10)$$

برخلاف آزمایشهای آزمایشگاهی که در آنها مشاهدات یا آزمونهای تکراری را در شرایط یکسان می‌توان به‌دست آورد، داده‌های میدانی به‌ندرت تکرارشدنی‌اند. بنابراین، تخمینهای خطا

برای داده‌های میدانی باید از معادله‌های (۲.۱.۱۰) یا (۳.۱.۱۰) تخمین زده شوند. اگر مشاهدات تکراری در هر نقطه داده‌ها امکان‌پذیر باشد، در این صورت خطاهای تصادفی را از طریق تخمین محتملترین خطا می‌توان به حداقل رساند. با ادامه مثال شارش رودخانه، یک مدل آزمایشگاهی رودخانه استفاده می‌شود و سرعت رودخانه، u ، در محل پروژه در شرایط شارش و ارتفاع یکسان N بار نمونه‌برداری می‌شود. محتملترین خطای u بر مبنای فرض توزیع احتمال نرمال خطاها حول مقدار میانگین \bar{u} است.

میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت رودخانه، u_{mi} ، برابر است با

$$\bar{u}_m = \frac{\sum_{i=1}^N u_{mi}}{N} \quad (4.1.10)$$

که در آن N تعداد مشاهدات است. خطا به صورت زیر تخمین زده می‌شود

$$e_{\bar{u}} = \sum \left(\frac{1}{N^2} \right) \sigma^2 = \frac{\sigma}{N^{1/2}} \quad (5.1.10)$$

که در آن σ انحراف استاندارد است.

$$\sigma = \left[\frac{\sum (u_{mi} - \bar{u}_m)^2}{N} \right]^{1/2} \quad (6.1.10)$$

در بسیاری از حالتها مقدار میانگین جمله بلند صفر است، و خطاها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. برای تخمین انحراف در این شرایط، مقدار جذر میانگین مربعی (rms) را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد

$$e_{rms} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_{mi} - \bar{u}_m)^2 \right]^{1/2} \quad (7.1.10)$$

برای در نظر گرفتن انحراف وارد شده در معادله (۵.۱.۱۰) ناشی از این حقیقت که سرعت حقیقی رودخانه معلوم نیست، محتملترین خطا کمی به طرف بالا تنظیم می‌شود، به صورت زیر

$$e_{\bar{u}} = \frac{\sigma}{(N-1)^{1/2}} \quad (8.1.10)$$

به‌وضوح اگر مشاهدات تکراری آزمایشگاهی ممکن باشند، در این صورت هرچه مشاهدات N بیشتر باشد محتملترین خطا کوچکتر می‌شود. ولی، هر مرتبه خطا با ضریب ۱۰ کاهش می‌یابد، و تعداد خوانده‌ها با ضریب ۱۰۰ افزایش می‌یابد.

آنچه در بقیه این فصل می‌آید خلاصه‌ای از مبدل‌های مختلف برای اندازه‌گیری سرعت، فشار، آهنگهای شارش، دماها و غلظتهاست. در یک بحث تکمیلی‌تر درباره سیستمهای اندازه‌گیری به خواننده توصیه می‌کنیم به کتابهای درسی دیگر (مثلاً، مراجع [۱] و [۴]) مراجعه کنند. مرور در اینجا شامل بررسیهای تفصیلتی‌تر درباره مبدل‌های بادوام است که با توصیفهای خلاصه‌تر درباره ابزار جدید تکمیل می‌شود؛ این ابزار برای اندازه‌گیری سریعتر و دقیقتر از آنچه در شرایط عملیاتی لازم است به کار می‌روند.

تمرینها

۱.۱.۱۰ اگر انحراف صفر در یک حس‌کننده دما 20°C باشد، در این صورت الف) خطای تصادفی دو برابر مقدار خطای اندازه‌گیری است؛ ب) خطای سیستماتیک 2°C درجه است؛ ج) خطای نسبی ۲ درصد است؛ د) هیچکدام.

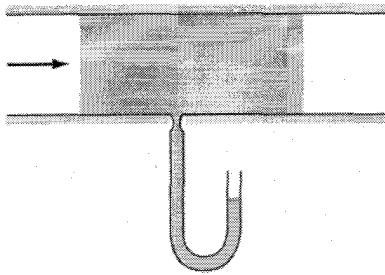
۲.۱.۱۰ اندازه‌گیریهای غلظت رسوب در شرایط تکراری در نقطه‌ای از میدان شارش انجام می‌شوند. آنها عبارت‌اند از 10.35 ، 9.96 ، 9.97 ، و 10.1mg/L . خطای تخمینی الف) مستقل از تعداد مشاهدات است؛ ب) با تعداد مشاهدات به‌طور معکوس متناسب است؛ ج) برابر با 10.7mg/L است؛ د) برابر با 10.7mg/L است؛ ه) درصد خطای تخمینی انحرافی کمتر از تخمین خطای استاندارد است.

۲.۱۰ اندازه‌گیری فشار

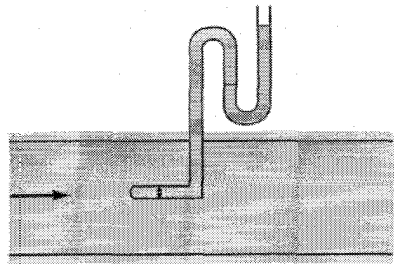
اندازه‌گیری مستقیم فشار اغلب در سیستمهای مجرای یا لوله‌ای مورد نیاز است. البته، در بیشتر کاربردهای مهندسی شهری، زیست‌محیطی، یا کشاورزی، از اندازه‌گیریهای فشار اغلب برای اندازه‌گیری ارتفاع سطح مایع یا در بیشتر وسایلی که سرعت یا آهنگ شارش جریان سیال را تعیین می‌کنند استفاده می‌شود. می‌توان برای جانشینی اندازه‌گیری ارتفاع یا سرعت، با توجه به رابطه بین این متغیرها در معادله انرژی، از اندازه‌گیری فشار استفاده کرد.

لوله پیزومتر و لوله استاتیک

فشار استاتیکی سیال متحرک عبارت است از فشار سیال زمانی که سرعت آن بر اثر اندازه‌گیری آشفته نشود. شکل ۲.۱۰ الف روشی برای اندازه‌گیری فشار استاتیکی با استفاده از دهانه پیزومتر نشان می‌دهد. وقتی شارش، مطابق شکل، موازی باشد، تغییر فشار هیدروستاتیکی و در جهت عمود بر خطوط جریان است؛ از این رو، با اندازه‌گیری فشار در دیواره، فشار در هر نقطه دیگر



(الف)



(ب)

شکل ۲.۱۰ وسایل اندازه‌گیری فشار استاتیک (الف) دهانهٔ پیزومتر؛ (ب) لوله استاتیکی.

مقطع را می‌توان تعیین کرد. باید دهانهٔ پیزومتر کوچک، طول دهانه حداقل دو برابر قطر، و عمود بر سطح باشد، و در لبه‌های آن ناصافی به چشم نخورد، زیرا تلاطمهای کوچکی تشکیل می‌شود و به اندازه‌گیری لطمه می‌زند. گرد کردن دهانه به مقدار کم مجاز است. هرگونه ناصافی یا زبری در دهانه، ولو اندک، ممکن است موجب خطاهایی در اندازه‌گیری شود؛ بنابراین بهتر است از چند دهانهٔ پیزومتری که همگی در حلقهٔ پیزومتری به هم متصل‌اند استفاده کرد. وقتی سطح در نزدیکی دهانه زبر باشد، خواننده‌ها قابل اعتماد نیست. اگر بی‌نظمی‌هایی اندک وجود داشته باشد، می‌توان سطح دور دهانه را صاف کرد. دهانه پیزومتر به یک مانومتر، میکرومانومتر، یا به انواع مختلف مبدل‌های الکترونیکی متصل می‌شود.

در سطوح زبر، می‌توان از لولهٔ استاتیکی (شکل ۲.۱۰ ب) استفاده کرد. این لوله متشکل است از لوله‌ای که در جهت فرادست قرار دارد و یک سر آن بسته است. در قسمت استوانه‌ای لوله، در فرودست نوک آن، سوراخهای شعاعی تعبیه شده است. فرض می‌شود شارش بر اثر این سوراخها طوری حرکت کند که گویی آشفته نشده است. اما، آشفته‌گی‌هایی هم بر اثر وجود نوک لوله و هم بر اثر وجود شاختهٔ قائم‌الزاویه‌ای که عمود بر شارش است، وجود دارد. لولهٔ استاتیکی باید طوری درجه‌بندی شود که مقادیر خیلی زیاد یا خیلی کم را بخواند. اگر فشار استاتیکی واقعی را نخواند، اختلاف Δh معمولاً برحسب مربع سرعت شارش ناشی از لوله تغییر می‌کند؛ یعنی

$$\Delta h = C \frac{v^2}{2g}$$

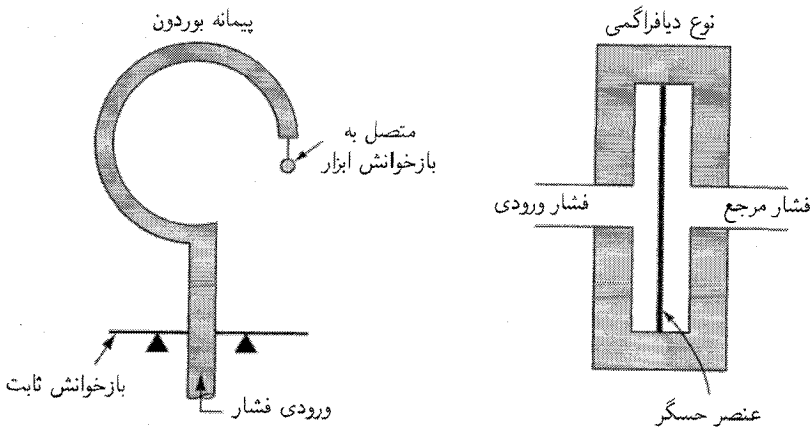
که در آن، برای تعیین C لوله را در سیال ساکن به نقطه‌ای می‌کشند که فشار و سرعت در آنجا معلوم باشند یا اینکه آن را در یک لولهٔ هموار که یک حلقهٔ پیزومتری باشد قرار می‌دهند. چنین لوله‌هایی نسبت به عدد رینولدز و اعداد ماخ کمتر از یک، نسبتاً غیرحساس‌اند. هم‌ترازی

آنها با شارش مسئله مهمی نیست، به طوری که برای هرگونه ناهم‌ترازی تا 15° ، انتظار خطا فقط به میزان چند درصد می‌رود.

مبدل‌های الاستیکی و پیزوالکتریکی

تعدادی از مبدل‌های فشاری الاستیکی که معمولاً استفاده می‌شوند بر مبنای تغییر شکل یک عنصر فلزی انعطاف‌پذیر تحت تأثیر فشاری که باید اندازه‌گیری شود کار می‌کنند. تغییر شکل می‌تواند خیلی با دقت و با سرعت اندازه‌گیری شود. انواع طرحها از قبیل دیافراگمی، لوله یا پیمانه بوردون، یا طرح ریه‌ای وجود دارند. شکل 3.10 شامل طرحواره‌ای از پیمانه‌های بوردون و دیافراگمی است. در هر دو حالت، تغییر شکل باعث حرکت وسیله فلزی می‌شود؛ انتهای آزاد لوله بوردون با افزایش فشار به شکل مستقیم در می‌آید، یا عنصر حس‌کننده گیره‌ای دیافراگم در واکنش به اختلاف فشار اعمال شده تغییر شکل می‌دهد. در حالی که لوله بوردون اغلب انتهای آزاد را به یک سیستم بازخوانش مکانیکی متصل می‌کند، از وسیله دیافراگمی می‌تواند از یک سیستم بازخوانش سنجه کرنش، که به دیافراگم متصل می‌شود، استفاده کند. تغییر شکل سنجه کرنش مقاومت دستگاه را در برابر جریان الکتریکی معین وارده تغییر می‌دهد و آن را با پل مدار و تستون می‌توان اندازه گرفت. اخیراً، از گسیل‌کننده‌های نور، یا فوتودیودهایی که درجه انحراف دیافراگم را به‌طور نوری حس می‌کنند استفاده شده است.

برای اندازه‌گیریهای دقیق و با پاسخ سریع، لزوماً برای نمونه‌برداری با آهنگهای خیلی زیاد که به دوام بالایی احتیاج است از مبدل‌های پیزوالکتریک استفاده می‌شود. ماده جامدی که به‌هنگام



شکل 3.10 طرحواره لوله بوردون و پیمانه دیافراگم.

تغییر شکل سیگنال الکتریکی ایجاد می‌کند پیزوالکتریک نامیده می‌شود، و از کریستالهای طبیعی (مثلاً کوارتز)، فرورسرامیکها (باریم)، یا مواد مصنوعی در مبدل استفاده می‌شود. مبدل پیزوالکتریک در مقایسه با وسیله دیاگرامی اندازه‌کوچکی دارد و حداقل گسیختگی میدان شارش را با انحراف کمتری در داده‌های حاصل ایجاد می‌کند.

تمرینها

۱.۲.۱۰ از دهانهٔ پیزومتر برای اندازه‌گیری الف) فشار در سیال ساکن؛ ب) سرعت در نهر جاری؛ ج) فشار کل؛ د) فشار دینامیکی؛ ه) فشار سیال نیاشفته استفاده می‌شود.

۲.۲.۱۰ از لولهٔ استاتیکی برای اندازه‌گیری الف) فشار در سیال ساکن؛ ب) سرعت در نهر جاری؛ ج) فشار کل؛ د) فشار دینامیکی؛ ه) فشار سیال نیاشفته استفاده می‌شود.

۳.۲.۱۰ از خواص پیزوالکتریکی کوارتز برای اندازه‌گیری الف) دما؛ ب) چگالی؛ ج) سرعت؛ د) فشار استفاده می‌شود؛ ه) هیچکدام.

۴.۲.۱۰ آب از خط لوله‌ای درست به مدت 10 min به یک مخزن وزنی منحرف می‌شود. جرم افزایش‌یافته در مخزن 47651 lb است. متوسط آهنگ شارش برحسب لیتر بر ثانیه برابر است با الف) 66.1 ؛ ب) 57.1 ؛ ج) 79.5 ؛ د) 13.0 ؛ ه) هیچکدام.

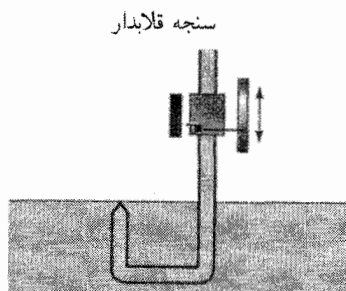
۵.۲.۱۰ یک مخزن مستطیلی به سطح مقطع 8 m^2 بر اثر شارش پایای مایع در مدت 12 min تا عمق 3 m پر می‌شود. آهنگ شارش، برحسب لیتر بر ثانیه، برابر است با الف) 14.44 ؛ ب) 867 ؛ ج) 90.1 ؛ د) 647.1 ؛ ه) هیچکدام.

۳.۱۰ اندازه‌گیری ارتفاع

یک اندازه‌گیری به ظاهر ساده ولی خیلی مهم اندازه‌گیری ارتفاع سطح آب (یا مایع) بالای یک سطح مرجع است. در حالی که در بسیاری از کاربردهایی که با معادلهٔ انرژی سر و کار دارند باید از اختلاف ارتفاع بین دو مخزن اطلاع داشت، برای اندازه‌گیریهای دیگری مانند ارتفاعهای موج، ارتفاع جذر و مدی، و ارتفاعهای ضربهٔ خیزاب باید ارتفاعهای مطلق را به دست آورد.

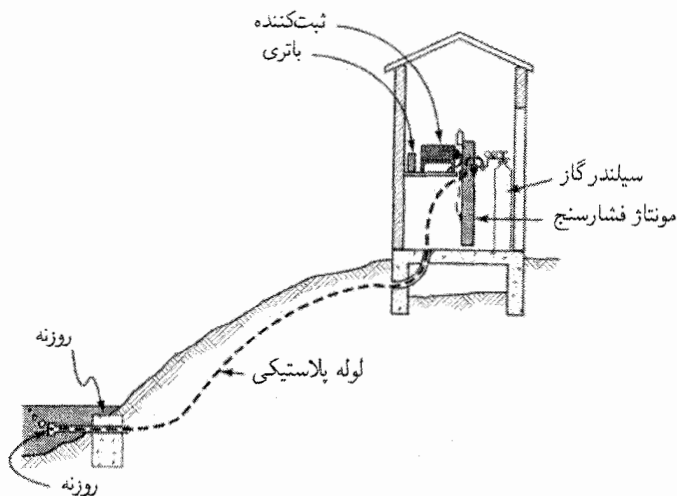
اندازه‌های مستقیم

در اندازه‌گیریهای مستقیم خاص که در آنها دقت پارامتر مهمی نیست علامتهای ساده ارتفاع در پهلوئ بدنهٔ کشتی یا علامتهای ارتفاع در خروجی یک مخزن با رنگ مشخص می‌شوند. اندازه‌گیریهای مستقیم کاملاً دقیق ارتفاع که در آزمایشهای بسیار ظریف آزمایشگاهی لازم‌اند به



شکل ۴.۱۰ سنجه قلابدار.

یک سنجه قلابدار (شکل ۴.۱۰) نیاز دارند؛ این سنجه به یک کولیس-ورنیه یا به یک سیستم بازخوانش الکترونیکی متصل است و بازخوانش دقیق تا 1mm را ایجاد می‌کند. از سنجه‌های قلابدار برای به حداقل رساندن اثرات انحراف پسا سطحی استفاده می‌کنیم، زمانی که سنجه نقطه‌ای به سادگی از بالا به طرف سطح سقوط کند به وجود می‌آیند. بیشتر آزمایشهای آزمایشگاهی در شرایط میانگین یا پایای شارش، که در آن سطح آب پایاست، انجام می‌شوند. سنجه‌های قلابدار برای چنین شرایط پایا یا شرایط با تغییرات بسیار آهسته کاملاً مناسب است. اندازه‌گیری پیوسته سطوح آب که به‌طور آهسته در میدان تغییر می‌کنند در سه فعالیت مهم دیده می‌شوند: اندازه‌گیری ارتفاعات جذر و مدی در امتداد خطوط ساحلی اقیانوس، و ارتفاعات ضربه طوفان و نوسان امواج که برای تخمین آهنگهای شارش است. شکل ۵.۱۰ طرحواره‌ای از سنجه نوعی سطح آب



شکل ۵.۱۰ تأسیسات سنجه‌ای جریان منابع طبیعی ایالات متحده.

است که در تأسیسات سنج‌های جریان منابع طبیعی ایالات متحده استفاده می‌شوند. این وسیله بر مبنای ارتفاع‌های اندازه‌گیری از طریق اندازه‌گیریهای فشار یا اندازه‌گیریهای ارتفاع مستقیم کار می‌کند.

سیستم به‌طور طبیعی برای حذف یا پالایه فیزیکی تغییرات سطح آب با فرکانس زیاد، ناشی می‌شود، معمولاً از حوضچه آرام‌کننده استفاده می‌کند، در حالی که بازخوانش به‌طور پیوسته به‌دست آورده می‌شوند، آنها نوعاً در یک ساعت میانگین‌گیری می‌شوند و مقدار میانگین ساعتی برای ثبت دائم ذخیره می‌شود. بیشتر این سنج‌ها طوری شکل داده می‌شوند تا به‌طور خودکار به یک کامپیوتر مرکزی گزارش دهند. در این روش، داده‌های مربوط به ارتفاع‌های جزر و مدی یا ضربه‌های طوفان را در خط ساحلی جمع‌آوری می‌کنند و مثلاً اداره هواشناسی آمریکا برای پیش‌بینی شرایط سیل در آن استفاده می‌کنند.

اندازه‌گیریهای مستقیم تغییرات ارتفاع با فرکانس زیاد، مثلاً داده‌های موج باد، به وسایل تخصصی‌تر به نام وسایل الکترونیکی اندازه‌گیری سطح آب نیاز دارند. این وسایل عناصر الکترونیکی است که شبیه سیم‌های با ضخامت تقریباً ۲mm است و طوری ساخته شده‌اند که خواص الکترونیکی آنها برحسب تابعی از ارتفاع آب روی عنصر تغییر می‌کند. این وسیله به‌طور عمودی در آب قرار می‌گیرد و هر انتهای آن به یک بسته مدار متصل می‌شود. این وسیله می‌تواند مقاومتی یا خازنی باشد. تغییرات سطح آب می‌تواند باعث تغییر تقریباً لحظه‌ای مقاومت یا خازن سیستم شود، و این به نوبه خود باعث تغییر ولتاژ با جریان اندازه‌پذیر در سیستم شود. البته از این وسایل می‌توان برای اندازه‌گیری نه تنها افت و خیزهای با فرکانس بالا بلکه برای انحراف‌های پایا با تغییر آهسته نیز استفاده کرد. بنابراین، آنها نه تنها نسبتاً ارزان‌اند بلکه کاربرد وسیعی دارند.

اندازه‌گیری بر مبنای فشار

هر یک از مبدل‌های فشار که در بخش ۲.۱۰ به آنها اشاره شد می‌توانند، با استفاده از معادله فشار هیدروستاتیکی، برای اندازه‌گیری سطح متوسط (پایا) آب به کار روند. از مبدل‌های فشار نوعی‌تر برای اندازه‌گیری افت و خیزهای با فرکانس بالاتر استفاده می‌شود. برای مثال، یکان مهندسی ارتش آمریکا مجموعه‌ای از سنج‌های ارتفاع و امتداد موج دائمی را در پیرامون ناحیه جزایری ایالات متحده و خلیج مکزیک گرد آورده است؛ اینها بر مبنای اندازه‌گیریهای همزمان فشار با فرکانس زیاد و سرعت افقی است. با داده‌های سرعت می‌توان جهت انتشار موج را تعیین کرد در حالی که مبدل فشار (پیزوالکتریک-کوارتز) ارتفاع موج را اندازه می‌گیرد. از نظریه موج خطی (قسمت ۷.۸) همراه با معادله برنولی برای ارتباط دادن ارتفاع سطح آب، η ، به فشار پیمانه‌ای زیر سطح استفاده می‌شود،

به صورت زیر

$$p(z^*, t) = \rho g[\eta(t)K_{z^*} - z^*] \quad (۱.۳.۱۰)$$

که در آن z^* عمق زیر سطح آب ساکن در محل اندازه‌گیری p است و K_{z^*} ضریب پاسخ فشار است

$$K_{z^*} = \frac{\cosh[\gamma\pi(z^* + d)/L]}{\cosh[\gamma\pi d/L]}$$

η از معادله (۱.۳.۱۰) به صورت زیر حل می‌شود

$$\eta(t) = \frac{C_0}{K_{z^*}} \left[\frac{p(z^*, t)}{\rho g} + z^* \right] \quad (۲.۳.۱۰)$$

اگر امواج غیرخطی باشند، در این صورت اندازه‌گیری بر مبنای نظریه موج خطی را باید بسط داد. در شرایط غیرخطی ضعیف از یک ضریب موج ساده آزمایشگاهی، C_0 ، که در سمت راست معادله (۲.۳.۱۰) ضرب می‌شود، استفاده می‌شود؛ مقدار آن در امواج خطی ۱ است و در شرایط غیرخطی بزرگتر از واحد است.

تمرینها

۱.۳.۱۰ اگر یک مبدل فشار کوارتز وسیله اندازه‌گیری سطح آب برای اندازه‌گیری همزمان ارتفاع یکسان به کار روند، در این صورت الف) سیستم مبدل چهارمرحله‌ای دارای خطای انتظاری بالاتری نسبت به وسیله اندازه‌گیری سطح آب چهارمرحله‌ای است؛ ب) سنجه فشار از وسیله اندازه‌گیری سطح آب زمان پاسخ سریعتری دارد؛ ج) زوج سنجه‌ها اگر بر مبنای یکسان مقایسه شوند باید نتایج یکسان بدهند؛ د) سیستم سنجه فشار چهارمرحله‌ای خطاهای ناهمبسته دارد؛ ه) هیچکدام.

۲.۳.۱۰ اندازه‌گیریهای سطح آب که با مبدل فشار را انجام می‌شوند الف) با فشار اندازه‌گیری شده در عمق به‌طور خطی ارتباط دارند؛ ب) برای کاهش سیگنال برحسب عمق به تنظیمهای کوچک نیاز دارند؛ ج) با استفاده از معادله برنولی به هم ارتباط داده می‌شوند؛ د) تمام جوابهای بالا.

۴.۱۰ اندازه‌گیری دما

علاوه بر دماسنج استاندارد حیایی، اندازه‌گیری دما با حسگرهای دوفلزی، ترموکوپل، یا ترمیستور انجام می‌شود. حسگرهای دوفلزی، که معمولاً در سیستمهای کنترل گرمایش به کار می‌روند، از دو

ماده مختلف باضریبهای انبساط گرمایی کاملاً متفاوت ساخته شده‌اند. حسگرهای ترموکوپلی نیز از دو ماده نامشابه، که به هم متصل شده‌اند، ساخته شده‌اند اما در این حالت یک اختلاف پتانسیل الکتریکی کوچک در عرض حسگر ایجاد می‌شود که تابعی از دماست. ولتاژ دیفرانسیلی حاصل به سهولت اندازه‌گیری می‌شود. ترموکوپلها خیلی کوچک و نسبتاً ارزان‌اند.

ترمیستورها بر مبنای رابطه بین مقاومت با جریان الکتریکی و گرمای حاصل از حسگر کار می‌کنند، شکلهای اولیه ترمیستورهای نیمه‌هادی نوع مقاومتی یک رابطه بسیار غیرخطی بین مقاومت و دما دارد و به درجه‌بندی آزمایشگاهی دقیقی نیاز دارد. اخیراً مدلها با استفاده از حسگرهای ترمیستور دiodی یا ترانزیستوری پاسخ خطی مطلوبتری می‌دهند. گستره کار کرد دما، دقت، و ظرفیتهای فرکانس نمونه‌برداری ترمیستورها خیلی بالاست و هزینه نسبتاً پایین دارد. اندازه کوچک آنها انحراف نمونه‌برداری از نقشهای شارش آشفته یا مسدود را به‌طور قابل ملاحظه کاهش می‌دهد.

۵.۱۰ اندازه‌گیری سرعت

اندازه‌گیریهای مقدار و جهت سرعت اهمیت بسیار دارد، هم به عنوان داده‌های تنها درباره شرایط در نقطه نمونه‌برداری و هم به عنوان داده‌هایی که باید در عرض یک صفحه، مانند مقطع عرضی رودخانه، برای تعیین آهنگ شارش حجم یا جرم در مقطع باید انتگرال‌گیری شوند. وسایل اندازه‌گیری آهنگ در دو قسمت بعد آورده می‌شوند. همانطور که قبلاً بحث شد گستره وسیعی از مقیاسهای افت و خیزهای سرعت در میدان شارش با آنها روبه‌رو می‌شویم، به‌خصوص در شارشهای با مقیاس ژئوفیزیکی، یک مسئله جالب در انتخاب نوع وسیله‌ای که استفاده می‌شود را نشان می‌دهد. وسایل قابل دسترسی و ارزان بسیاری وجود دارند که سرعت در یک نقطه را اندازه می‌گیرند و به سهولت می‌توانند داده‌های مربوط به شارشهای با تغییر آهسته و غیرمتلاطم یا تحت تأثیر موج غیرثقلی را تعیین کنند. دقت بیشتری لازم است تا تمام افت و خیزهای متلاطم با سرعت بالا و حاصل از موج نمونه‌برداری شوند. بیشتر کاربردهای اندازه‌گیری سرعت، که در درجه‌بندی وسیله آهنگ لازم‌اند، تنها به اولین سطح اندازه‌گیری سرعت نیاز دارند. ولی، در نتیجه اندازه‌گیری گسترده افت و خیزهای متلاطم و /یا افت و خیزهای موج، درخواست فزاینده‌ای برای پارامتری‌کردن دقیقتر انتقال آلاینده در رسوب به‌وجود آمده است.

ساده‌ترین اندازه‌گیریها، اندازه‌گیریهای نقطه‌ای است که با وسایل الکترومکانیکی انجام می‌شود که مستقیماً در میدان شارش قرار داده می‌شوند. این وسایل حسگرها یا وسایل درون‌کار نمونه‌برداری نامیده می‌شوند (که برخلاف حسگرهای برون‌کار است). وسایل درون‌کار اغلب سرعت را مستقیماً اندازه نمی‌گیرند بلکه کمیت دیگری را که به سهولت قابل اندازه‌گیری است و با سرعت ارتباط دارد

اندازه می‌گیرند. نوعاً این وسایل مقدار سرعت کل زیر

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$$

در یک نقطه و جهت بردار سرعت کل را اندازه می‌گیرند. با افزایش لازمه‌های توان تفکیک و دقت، افت درجه گسیختگی، و افزایش تقاضا برای داده‌های انحصاری سرعت u ، v و w ، هزینه دستگاه به سرعت افزایش می‌یابد. بعداً نمونه‌ای از وسایل درون‌کار مرور می‌شوند.

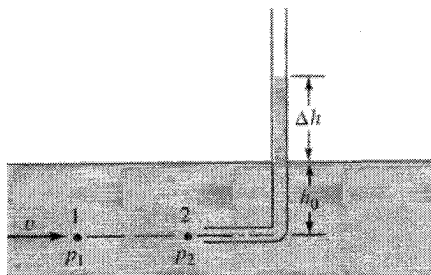
لوله پیتو

لوله پیتو یکی از دقیقترین و بادوامترین روشهای اندازه‌گیری سرعت است. در شکل ۶.۱۰ یک لولهٔ شیشه‌ای یا سوزن تزریقی با یک خم قائمه برای اندازه‌گیری سرعت v در کانال باز استفاده شده است. دهانهٔ لوله در جهت فرادست است، به طوری که سیال به داخل دهانه جریان می‌یابد تا اینکه فشار در لوله به حد کافی برسد و در برابر ضربهٔ سرعت بر لوله مقاومت کند. درست در جلوی دهانه، سیال به حالت سکون است. خط جریان از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲، موسوم به نقطهٔ سکون، یعنی جایی که سیال ساکن است، کشیده می‌شود و در آنجا منشعب می‌شود و از اطراف لوله می‌گذرد. فشار در نقطهٔ ۲، از روی ستون سیال داخل لوله معلوم است. معادلهٔ برنولی بین نقاط ۱ و ۲ نتیجه می‌دهد

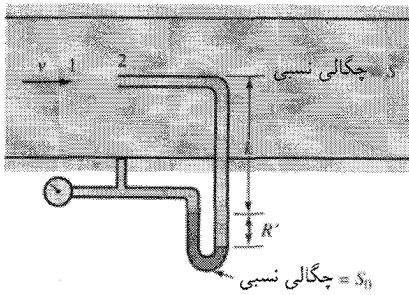
$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = h_0 + \Delta h$$

زیرا هر دو نقطه هم‌سطح‌اند. چون $p_1/\gamma = h_0$ ، معادله تبدیل می‌شود به

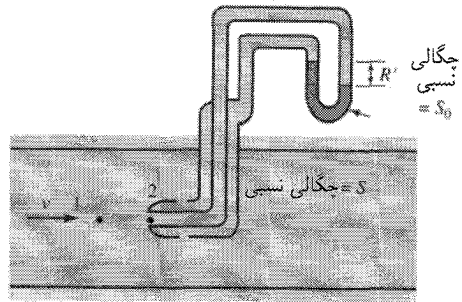
$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} = \Delta h \quad (۱.۵.۱۰)$$



شکل ۶.۱۰ لولهٔ پیتو ساده.



(الف)



(ب)

شکل ۷.۱۰ اندازه‌گیری سرعت، (الف) لوله پیتو و دهانه پیزومتر؛ (ب) لوله استاتیکی پیتو.

یا

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \quad (۲.۵.۱۰)$$

عملاً خواندن ارتفاع Δh از سطح آزاد خیلی مشکل است. لوله پیتو فشار سکون را اندازه می‌گیرد، که به آن فشار کل نیز می‌گویند. فشار کل دو جزء دارد: فشار استاتیکی h_0 و فشار دینامیکی Δh ، که برحسب طول ستونی از سیال جاری بیان می‌شود (شکل ۶.۱۰). فشار دینامیکی با معادله (۱.۵.۱۰) به هد سرعت مربوط می‌شود. با ترکیب اندازه‌گیری فشار استاتیکی و اندازه‌گیری فشار کل، یعنی اندازه‌گیری هر یک از دو سر مخالف فشارسنج تفاضلی و مرتبط کردن آنها، هد فشار دینامیکی به دست می‌آید. شکل ۷.۱۰ الف یک آرایه را نشان می‌دهد. معادله برنولی در نقطه ۱ تا ۲ عبارت است از

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \quad (۳.۵.۱۰)$$

معادله در فشارسنج، برحسب احاد طول آب، عبارت است از

$$\frac{p_1}{\gamma} S + kS + R'S_0 - (k + R')S = \frac{p_2}{\gamma} S$$

پس از ساده‌کردن به دست می‌آید

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = R' \left(\frac{S_0}{S} - 1 \right) \quad (۴.۵.۱۰)$$

با جایگذاری $(p_2 - p_1)/\gamma$ در معادله (۳.۵.۱۰) و حل v نتیجه زیر به دست می‌آید

$$v_1 = v = \sqrt{2gR' \left(\frac{S_0}{S} - 1 \right)} \quad (۵.۵.۱۰)$$

لوله پیتو نسبت به هم‌ترازی شارش نیز حساس نیست، و اگر عدم هم‌ترازی لوله کمتر از ۱۵° باشد، فقط چند درصد خطا رخ می‌دهد.

لوله استاتیکی و لوله پیتورا در ابزاری به نام لوله استاتیکی پیتو می‌توان ترکیب کرد (شکل ۷.۱۰ ب). تحلیل کردن این دستگاه با روشی مشابه روش شکل ۷.۱۰ الف نشان می‌دهد که همین رابطه‌ها معتبرند؛ معادله (۴.۵.۱۰) سرعت را بیان می‌کند، اما عدم قطعیت در اندازه‌گیری فشار استاتیکی ایجاب می‌کند که ضریب تصحیح C اعمال شود:

$$v = C \sqrt{2gR' \left(\frac{S_0}{S} - 1 \right)} \quad (۶.۵.۱۰)$$

شکل خاصی از لوله استاتیکی پیتو با نوک غیرتیز، موسوم به لوله پرائنتل، طوری طراحی شده که آشفتگیهای ناشی از نوک و شاخه از بین می‌روند، و در معادله فوق $C = 1$ می‌شود. ثابت C را برای سایر لوله‌های استاتیکی پیتو باید با درجه‌بندی تعیین کرد.

برای تعیین سرعت در شارش تراکم‌پذیر می‌توان از لوله استاتیکی پیتو استفاده کرد. در شکل ۷.۱۰ ب، کاهش سرعت از سرعت جریان آزاد در نقطه ۱ تا به صفر در نقطه ۲ بسیار سریع و بدون انتقال گرمای قابل توجهی صورت می‌گیرد. اصطکاک نقش بسیار جزئی دارد، به طوری که می‌توان فرض کرد تراکم از نوع تک آنروپیک است. با کاربرد معادله برنولی و قانون گاز کامل برای نقاط ۱ و ۲ از شکل ۷.۱۰ ب، با $V_2 = 0$ ، به دست می‌آید

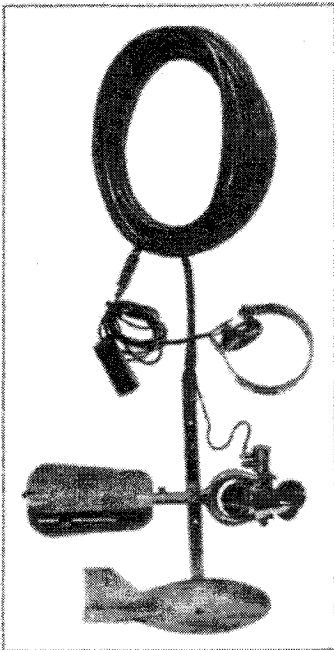
$$\frac{V_1^2}{2} = c_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} - 1 \right] = c_p T_2 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(k-1)/k} \right] \quad (۷.۵.۱۰)$$

که در آن c_p گرمای ویژه گاز در فشار ثابت است. فشار استاتیکی p_1 را از سوراخهای جانبی لوله پیتو، و فشار سکون را از دهانه برخورد که به فشارسنج ساده‌ای متصل است می‌توان به دست آورد، یا $p_2 - p_1$ را می‌توان از یک فشارسنج تفاضلی به دست آورد. اگر لوله طوری طراحی نشده باشد که فشار استاتیکی واقعی را اندازه بگیرد، باید آن را درجه‌بندی، و فشار استاتیکی واقعی را محاسبه کرد.

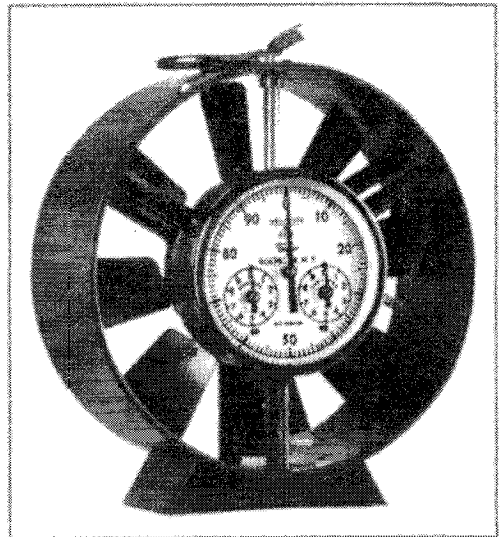
جریان‌سنج‌های الکترومکانیکی

این نوع حسگر اغلب برای اندازه‌گیری تغییرات نامتلاطم سرعت به کار می‌رود. شکل‌های ۸.۱۰ الف و ۸.۱۰ ب نمونه‌هایی از سنج‌های رایج از نوع فنجانک چرخان است. شکل ۸.۱۰ الف یک جریان‌سنج است که برای اندازه‌گیری سطح آب طراحی شده است. شکل فنجانک طوری است که با جهت تغییر می‌کند، و باعث یک چرخش نسبتاً کند می‌شود. با مدار الکتریکی و گوشیها، در تعداد ثابتی از گردشها یک سیگنال شنیدنی آشکار می‌شود. تعداد سیگنالها در یک زمان معین، تابعی از سرعت است. ابزار سنجش را با قراردادن آنها در مایع در سرعت‌های معلوم، درجه‌بندی می‌کنند. برای اندازه‌گیری شارش پرسرعت، از جریان‌سنجی مجهز به پیشران به عنوان یک جزء چرخان، استفاده می‌کنند، زیرا مقاومت کمتری در برابر شارش نشان می‌دهد.

سرعت‌های هوا بادسنج‌های ناوی با پره‌ای (پیشرانی) اندازه‌گیری می‌شوند (شکل ۸.۱۰ ب). این بادسنجها ژنراتورهایی را به حرکت درمی‌آورند که سرعت هوا را مستقیماً نشان می‌دهند، یا شمارنده‌هایی را به حرکت درمی‌آورند که تعداد گردشها را نشان می‌دهد. با طراحی پره‌ها به گونه‌ای



(الف)



(ب)

شکل ۸.۱۰ وسایل اندازه‌گیری سرعت: (الف) جریان‌سنج پرایس برای مایعات؛ (ب) بادسنج هوایی.

که لختی آنها بسیار کم باشد، و با استفاده از یاتاقانهای دقیق و دورسنجهایی نوری که عملاً قدرتی برای حرکت کردن نمی‌برند، می‌توان از بادسنجها برای خواندن سرعتهای بسیار پایین هوا استفاده کرد. بادسنجها را می‌توان چنان حساس ساخت که حتی جریانهای همرفتی هوا را که از گسیل گرمای بدن انسان به اتمسفر حاصل می‌شود اندازه بگیرند.

برای اندازه‌گیری شارش در مجرا، وسیله‌ای از نوع فنجانک چرخان، به نام سنجه با جابه‌جایی مثبت استفاده می‌شود. این وسیله پیستونها یا دیواره‌های جداکننده‌ای دارد که با شارش سیال و مکانیسم شمارنده‌ای که تعداد جابه‌جاییها را برحسب واحد مناسبی، مثل لیتر یا فوت مکعب ثبت می‌کنند، جابه‌جا می‌شود.

یک سنجهٔ رایج عبارت است از سنجهٔ دیسکی یا سنجهٔ لنگی که در بیشتر شبکه‌های توزیع آب خانگی استفاده می‌شوند. دیسک در یک گذرگاه نوسان می‌کند، به طوری که در هر نوسان، حجم معین از سیال وارد دستگاه می‌شود. یک میلهٔ عمود بر دیسک، ردیفی از دنده‌ها را به حرکت درمی‌آورد و دنده‌ها نیز یک شمارنده را به حرکت درمی‌آورند. در شرایط مناسب، خطای این وسایل تا ۱ درصد است. وقتی فرسوده شوند، خطا در شارشهای کم خیلی زیاد می‌شود، مانند خطاهایی که بر اثر شیر چکه‌کننده به وجود می‌آیند.

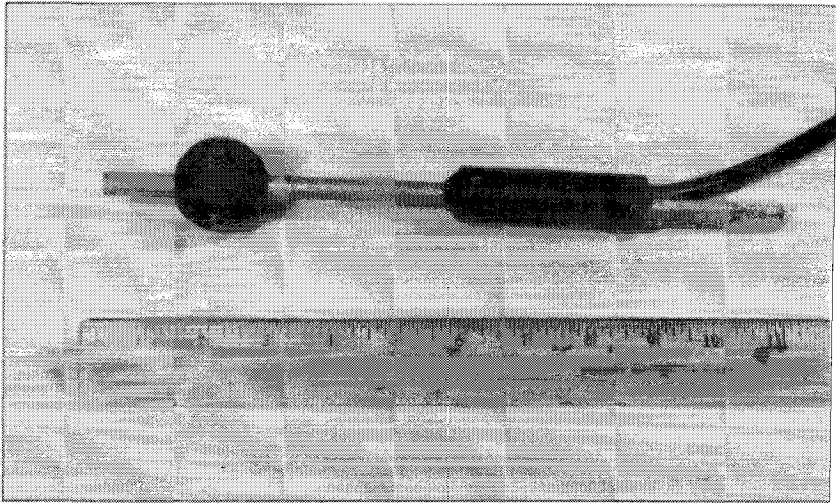
شارش گاز طبیعی با فشار کم را معمولاً با سنجه‌ای حجمی مجهز به دیوارهٔ جداکنندهٔ متحرک اندازه می‌گیرند. دیواره بر اثر ورود گاز به یک طرف محفظه‌ای که در آن کار می‌کند به حرکت درمی‌آید، و سپس، با بسته یا باز شدن شیر، به طرف مقابل محفظه جابه‌جا می‌شود. نوسانهای دیواره، مکانیسم شمارنده را به کار می‌اندازد.

شارش روغن یا گاز پرفشار در خط لوله را اغلب با سنجهٔ چرخنده اندازه می‌گیرند که در آن ناوها یا پره‌ها حول یک دهانهٔ طوقه‌ای حرکت می‌کنند و در هر گردش یک حجم ثابت سیال را جابه‌جا می‌کنند. پیستونهای شعاعی یا محوری را می‌توان طوری آرایش داد که حجم شارش پیوسته‌ای را در آنها با چرخشهای یک محور تعیین کرد.

سنجه‌های با جابه‌جایی مثبت معمولاً تجهیزات زمان‌بندی ندارند که آهنگ شارش را اندازه بگیرند. با استفاده از کروномتر برای ثبت زمان جابه‌جایی یک حجم معین از سیال، می‌توان آهنگ شارش پایا را تعیین کرد.

جریان‌سنجهای الکترومغناطیسی

وسایل جریان‌سنج الکترومغناطیسی (ECM) بر مبنای ارتباط تغییر شکل میدان مغناطیسی با سرعت متلاطم جریان عبوری از روی یک کله‌گی حسگر که شکل هندسی منظمی دارد کار می‌کنند. در شکل ۹.۱۰ تصویری از سنجهٔ عنصر کروی از مارش-ام‌سی بی‌رنی است. در کاربردهای



شکل ۹.۱۰ جریان سنج الکترومغناطیسی، مقیاس برحسب اینچ.

دریایی، وسایلی در انگلیس در انستیتو علوم اقیانوس‌شناسی تولید شده‌اند (حسگر کلبروک)، و بر مبنای کار تورپ و همکاران [مرجع ۵] کار می‌کنند، و اغلب از آنها استفاده می‌شود، از قبیل، هاترشاو [مرجع ۶] و سولزبای [مرجع ۷]. وسیله مارش-ام‌سی‌بیری دارای یک حسگر کروی به قطر 4 cm است، در حالی که حسگر دیسکی در قطر 10 cm در حسگر کلبروک استفاده می‌شود. مجموعه زیادی از آزمایشها، که توسط آبری و ترابریج [مرجع ۸] انجام شده‌اند، نشان می‌دهند که در شارش خالص پایا، تنظیم قبل و بعد از اندازه‌گیری لازم است و این به علت انحراف صفر و مسائل ناشی از رسوب بیولوژیکی است. به‌علاوه، یک رابطه خطی دوتکه‌ای بین ولتاژ و سرعت در درجه‌بندی لازم بود. با به‌خاطر سپردن این مطالب، به نتایج زیر توجه می‌کنیم:

۱. نمونه‌برداری در شارشهایی که تحت تأثیر جریان قرار دارند با خطاهای rms در مرتبه ۱ تا 5 cm/s کاملاً رضایتبخش است.

۲. معلوم شد که پاسخ به شرایط موج‌مانند یا نوسانی با خطاهای rms تا 1 cm/s تا 2 cm/s نیز رضایت‌بخش است.

۳. نتایج ترکیب موج و شارش جریان نسبت به نوع شارش حساستر بود، پاسخ جهت کسینوس یک ضربه ناگهانی را در اعداد رینولدز پایینتر ایجاد می‌کرد، و خطاهای rms دارای گستره ۱ تا 5 cm/s بود.

در تلاش برای استفاده از این وسایل برای تخمین پارامترهای لایه مرزی متلاطم مانند u_* وقتی

تلاطم جریان آزاد در مقایسه با مقدار سرعت میانگین بزرگ نباشد می‌توان به نتایج قابل قبول رسید. کله‌گی حسگر (با اندازه تقریباً ۱۳cm) از حس کردن نزدیکتر از سه برابر قطر از مرز جلوگیری می‌کند و نشان می‌دهد که کاربردهای لایه مرزی باید با احتیاط انجام شود.

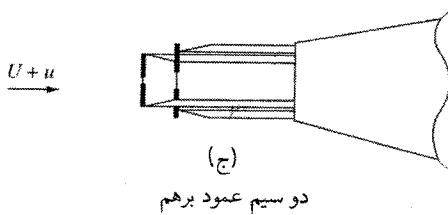
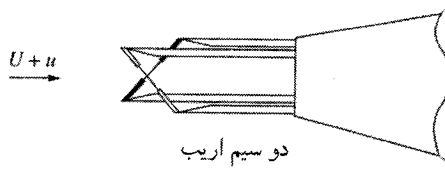
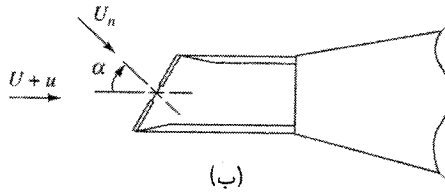
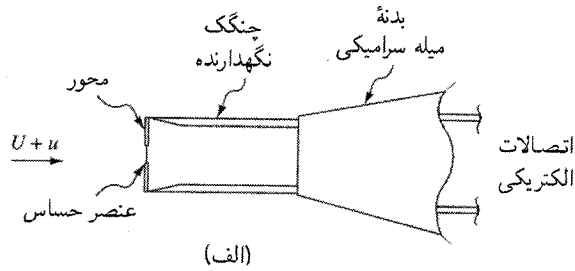
بالاخره، ECMهای موجود فقط دو مؤلفه متعامد را اندازه می‌گیرند؛ بنابراین، اگر داده‌های سرعت سه‌بعدی کامل مورد نیاز باشند، دو جریان سنج باید به‌طور عمود بر هم و در نزدیک یکدیگر قرار داده شوند. در چنین حالتی میدانهای مغناطیسی حسگرها می‌توانند برهم‌کنش داشته باشند، و در نتیجه فاصله ابزار از هم باید بزرگتر باشد. ولی، افزایش فاصله بین هدها باعث می‌شود نتوان اندازه‌گیریها در نقطه یکسان به دست آورد. تحلیل داده‌های سه‌بعدی کامل در یک نقطه با این وسایل خیلی مشکل است.

بادسنجهای سیم‌داغ و فیلم‌داغ

بررسیهای آزمایشگاهی درباره شارشهای متلاطم که مدت مدیدی است استفاده شده‌اند (یعنی، از زمان لویگ [مرجع ۹])، مشخصه‌های انتقال گرما در میله سیم نازک یا با پوشش غشای کوچک (شکل ۱۰.۱۰) را به دقت می‌توان به شارش متلاطم محلی روی میله ارتباط داد. مورد استفاده بادسنجهای سیم‌داغ عمدتاً در تونلهای باد است و این به علت ماهیت شکستنی سیم گرم شده است. استفاده دریایی از بادسنجهای سیم‌داغ ابتدا توسط گوست [مرجع ۱۰] با حسگرهای از غشای پلاتینی با پوشش کوارتز، که برای محافظت در برابر آسیب ناشی از برخورد ذره رسوب تولید می‌شوند، پیشنهاد شد. فرکانسهای جمع‌آوری 3°Hz به‌طور معمول ممکن است اما فرکانسهای ۳-۴ هرتز تمام آن چیزی است که برای تجزیه ۹ درصد انرژی جنبشی لازم است. داده‌ها با دقت 1cm/s گزارش شده‌اند. گوست و ویتزلی [مرجع ۱۱] نشان می‌دهند که از حسگرها نمی‌توان در فاصله نزدیکتر از ۵mm به مرز استفاده کرد، اما این را از بیشتر میله‌های دیگر در فاصله نزدیکتر می‌توان قرار داد و در لایه‌های مرزی پیچیده‌تر امکان جمع‌آوری داده‌ها را به‌طور مؤثر فراهم می‌آورد. ابعاد بسیار کوچک سیستم و ماهیت ظرفیت غشای عمل‌کننده اغلب ملاحظات را درباره ناهمواری شارشهای پُربار رسوب برمی‌انگیزند. در اینجا چنین ملاحظات را به‌طور کامل تجزیه و تحلیل نشده‌اند.

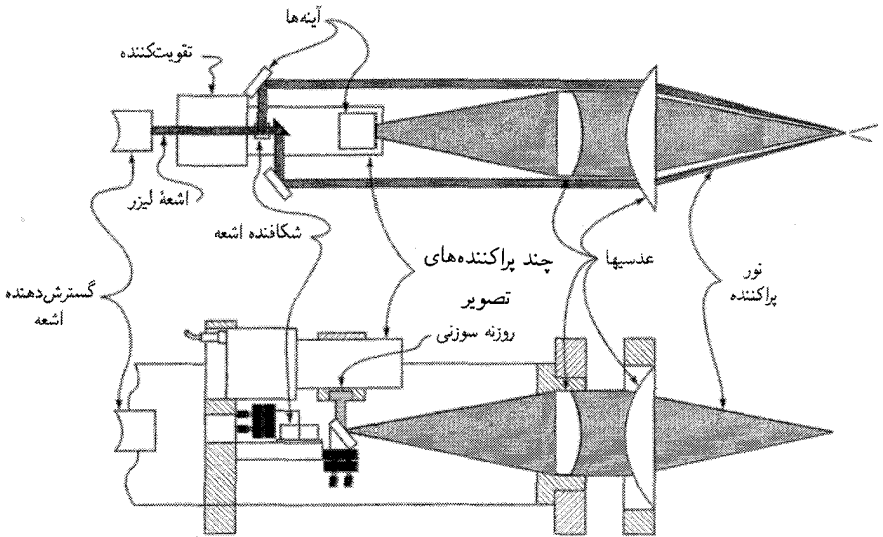
سرعت‌سنجی لیزری دوپلر

از زمان یه و کومینس [مرجع ۱۲] با مرور کاربردهای آزمایشگاهی در بوشا و همکاران [مرجع ۱۳] یا رساله ورین [مرجع ۱۴] تا به حال از تکنولوژی سرعت‌سنجی لیزری دوپلر (LDV) در مطالعات آزمایشگاهی تلاطم به خوبی استفاده شده است. سیستم کششی وت [مرجع ۱۵] یکی از اولین



شکل ۱۰.۱۰ وضعیتهای میله سیم‌داغ.

ابزار این تکنولوژی برای نمونه برداری دریایی است. قسمت قابل توجهی از کار گسترش سیستم اقیانوس شناسی توسط آگروال و همکارانش [مراجع ۱۶-۱۹] انجام گرفته است. اعتقاد بر این است که سرعت سنج لیزری دوپلر اولین سرعت سنج خودگردان، قابل غوطه‌وری در آب، و مستقل است. اصل کارکرد (شکل ۱۱.۱۰) بستگی دارد به وجود ذرات طبیعی یا پراکنده سازیهای دیگری که

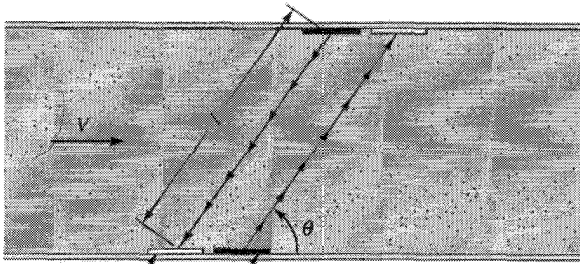


شکل ۱۱.۱۰ سرعت‌سنج لیزری دوپلر.

با سرعت سیال در میدان شارش حرکت می‌کنند. وقتی پراکنده‌سازها از محل تلاقی دو اشعه متعامد نور لیزری متصل به هم عبور می‌کنند، نور پس‌پراکنده شده حاصل به‌طور متناسب با سرعت مدوله می‌شود. وسیله را با روش پس‌پراکنده یا پیش‌پراکنده می‌توان ساخت، اما سیستم‌های فعلی شکل رو به عقب پراکنده را ترجیح می‌دهند، و این به‌خصوص به‌خاطر نمایه فیزیکی پایینی و گسیختگی کمتر میدان شارش است. اگر اوال و بلتینگ [مرجع ۱۸] قابلیت اندازه‌گیریهای آشفته‌نشده در فاصله کمتر از ۳ cm تا مرز رگزارش دادند. وسیله غیردرون کار است؛ دارای خطی بودن مطلوبی در گستره بسیار عریض پاسخ است؛ و در شرایط گوناگون کاملاً پایدار است. وقتی غلظت پراکنده‌سازها پایین است، وسیله خوب کار نمی‌کند.

وسایل اکوستیکی

با ورود مبدل‌های اکوستیکی ارزان و اطلاع بسیار ارزشمند از سرعت صوت، در آخرین دهه نسل جدیدی از وسایل سنجه شارش اکوستیک ارزان، بادوام، و دقیق رو به ازدیاد نهاده است. در یک سیال ساکن، سرعت صوت دقیقاً ناشی از دما و شوری است. زمان حرکت صوت بین دو نقطه به فاصله L در آب تازه عبارت است از $t_0 = L/C_s$ که در آن C_s سرعت صوت است. برای آب تازه، $C_s = 1500 \text{ m/s}$. اگر مقدار سرعت سیال متحرک V باشد، زمان حرکت (با استفاده



گسیل‌دهنده دریافت‌کننده

شکل ۱۲.۱۰ طرحواره شارش‌سنج فراصوتی در مجرا.

از بسط سری تیلور عبارت است از

$$t = \frac{L}{C_s + V} \approx \frac{L}{C_s} \left(1 - \frac{V}{C_s} \right) \quad (۸.۵.۱۰)$$

سرعت را از رابطه زیر می‌توان به دست آورد

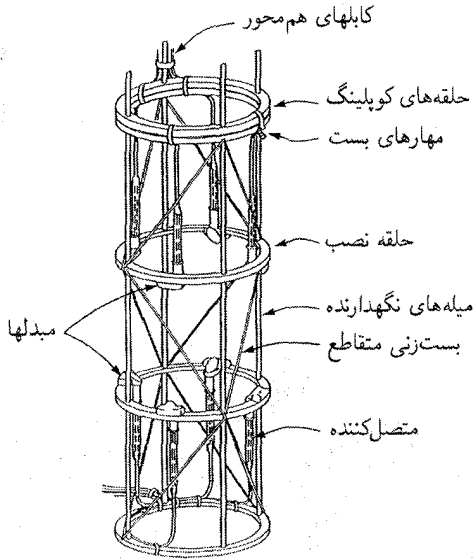
$$\Delta t = t_0 - t = \frac{LV}{C_s^2} \quad (۹.۵.۱۰)$$

بنابراین، با اندازه‌گیری زمان حرکت یک پالس اکوستیک در یک حجم نمونه‌برداری از میدان شارش و از طریق مقایسه آن زمان با زمان عبور در همان حجم از سیال ساکن، سرعت را می‌توان تعیین کرد. با کوچک بودن حجمهای نمونه‌برداری و با بزرگ بودن C_s^2 ، تخمینهای حاصل برای V در خطاهای کوچک کاملاً احساس است. در بررسی این موضوع، یک سیستم روبه جلو-روبه عقب (شکل ۱۲.۱۰) به کار برده می‌شود؛ این دستگاه اختلاف فرکانس Δf را، که به سهولت می‌توان به سرعت ارتباط داد، حس می‌کند. این دستگاه وابستگی به C_s را از بین می‌برد و خطا را کاهش می‌دهد، یعنی،

$$\Delta f = \frac{2V \cos \theta}{L}$$

که در آن θ زاویه بین جهت انتشار اکوستیک و جهت سرعت شارش، V ، است. θ برای شارش در مجرا به خوبی از قبل معلوم است، و در مواردی می‌توان از انواع شارش‌سنجها با جایگذاری در مجرا استفاده کرد.

امروزه از دستگاههایی که بر مبنای این مفهوم نمونه‌برداری اکوستیک کار می‌کنند برای اندازه‌گیری سرعت متوسط رودخانه در مقاطع کنترل رودخانه با شکلهای هندسی منظم استفاده می‌شود.



شکل ۱۳.۱۰ جریان‌سنج اکوستیک.

در تأسیسات میدانی، جهت شارش نامعلوم است زیرا دائماً تغییر می‌کند. بنابراین، قابلیت اندازه‌گیری سرعت‌های کامل سه‌بعدی اهمیت دارد. شکل ۱۳.۱۰ طرحواره‌ای از جریان‌سنج اکوستیک (ویلیامز و همکاران [مرجع ۲۰]) را نشان می‌دهد. این وسیله میدان سرعت متلاطم سه‌بعدی را با حس کردن جابه‌جاییهای فرکانس لحظه‌ای در عرض مجموعه‌هایی از چهار مسیر اشعه متعامد در حجم نمونه‌برداری اندازه می‌گیرد. مبدلها وسایل اکوستیک ۵MHz هستند که فرکانسهای نمونه‌برداری تا ۱۰Hz را با دقت $1\text{ cm/s} \pm 0.1$ اندازه می‌گیرند.

وسیله میدانی دیگر که در تأسیسات اتمسفریک و دریایی، هردو، به کار می‌رود پروفایلر جریان دوپلر اکوستیک است. به جای اندازه‌گیری در یک نقطه، نمایه کلی جریانهای سه‌بعدی از یک مبدل مرکزی نمونه‌برداری می‌شود و پردازنده در انتهای نمایه قرار داده می‌شود. به علت بهینه‌سازی توان تفکیک، لازمه‌های فرکانس اکوستیک و توان تفکیک این وسایل فقط می‌توانند جریانها را، و نه مشخصه‌های متلاطم را، نمونه‌برداری کنند. این وسایل کاملاً اقتصادی، غیردرون‌کار هستند و به علت ساختار اکوستیکی (غیرمکانیکی) خیلی مطمئن‌اند.

تمرینها

۱.۵.۱۰ لوله پیتو ساده (الف) فشار استاتیکی؛ (ب) فشار دینامیکی؛ (ج) فشار کل؛ (د) سرعت در نقطه سکون؛ (ه) اختلاف فشار کل و فشار دینامیکی را اندازه می‌گیرد.

۲.۵.۱۰ لولهٔ پیتو استاتیکی ($C = 1$) برای اندازه‌گیری سرعت‌های هوا به کار می‌رود. اگر مایع فشارسنج تقاضلی آب باشد و اختلاف پیمانه‌ای ۳in باشد، سرعت هوا با $\gamma = 0.0624 \text{ lb/ft}^3$ برحسب فوت بر ثانیه، عبارت است از الف) 140°F ؛ ب) 158°F ؛ ج) 240°F ؛ د) 270°F ؛ ه) هیچکدام.

۳.۵.۱۰ لولهٔ استاتیکی پیتو الف) فشار استاتیکی؛ ب) فشار دینامیکی؛ ج) فشار کل؛ د) اختلاف فشار استاتیکی و دینامیکی؛ ه) اختلاف فشار کل و دینامیکی را اندازه می‌گیرد.

۴.۵.۱۰ سرعت گاز جاری معلوم را با اندازه‌گیری الف) فقط فشار استاتیکی و فشار سکون؛ ب) فقط فشار و دمای استاتیکی؛ ج) فقط دمای استاتیکی و دمای سکون؛ د) فقط دمای سکون و فشار سکون می‌توان تعیین کرد؛ ه) هیچکدام.

۵.۵.۱۰ بادسنج سیمی گرم برای اندازه‌گیری الف) فشار گازها؛ ب) فشار مایعات؛ ج) سرعت‌های باد در فرودگاهها؛ د) سرعت‌های گاز؛ ه) تخلیه‌های مایع به کار می‌رود.

۶.۵.۱۰ حجم جابه‌جایی یک سنجهٔ با جابه‌جایی مثبت، از نوع پیستونی، در هر دور از محور آن 35 cm^3 است. تخلیه، برحسب لیتر بر دقیقه، در 1000 rpm عبارت است از الف) 1.87 ؛ ب) 4.6 ؛ ج) 35 ؛ د) 4034 ؛ ه) هیچکدام.

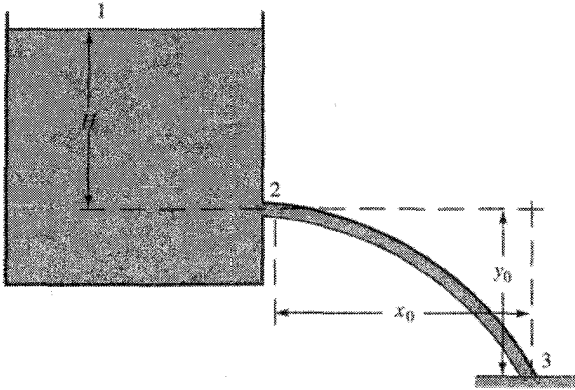
۷.۵.۱۰ سرعت در یک سیستم لوله با مجرا را با معلوم بودن هندسهٔ لوله و عوامل زیر به‌طور اکوستیکی می‌توان اندازه گرفت الف) دمای آب و سرعت صوت؛ ب) جهت انتشار اشعه اکوستیک؛ ج) فاصله بین مبدلها؛ د) استفاده از دو مبدل؛ ه) هیچکدام.

۶.۱۰ آهنگ‌سنجها، روزنه‌ها

آهنگ‌سنج وسیله‌ای است که، معمولاً با یک اندازه‌گیری، کمیتی (وزن یا حجم) را که در زمان واحد از مقطع معینی می‌گذرد اندازه می‌گیرد. نمونه‌هایی از آهنگ‌سنجها عبارت‌اند از روزنه، شیپوره، سنجهٔ ونتوری، شارش سنج (روتومتر)، و سرریز. در این قسمت دربارهٔ روزنه بحث می‌کنیم؛ سنجهٔ ونتوری، شیپوره، و بعضی وسایل مجرا بسته را در بخش ۷.۱۰ و سرریزها را در بخش ۸.۱۰ بررسی می‌کنیم.

روزنه در مخزن

از روزنه برای اندازه‌گیری آهنگ شارش خروجی از مخزن یا شارش در لوله می‌توان استفاده کرد. روزنه را می‌توان در دیواره یا کف مخزن یا منبع تعبیه کرد. روزنه دهانه‌ای است معمولاً گرد، که سیال از طریق آن جریان می‌یابد، (شکل ۱۴.۱۰). روزنه می‌تواند، مطابق شکل، به صورت لبه مربعی، یا مانند شکل ۱۳.۳ گرد باشد. سطح روزنه برابر سطح دهانه است. اگر روزنه لبهٔ مربعی باشد، جت



شکل ۱۴.۱۰ روزنه در یک مخزن.

سیال در فاصله کوتاهی حدوداً نصف قطر در فرودست دهانه منقبض می‌شود. قسمتی از شارش که در امتداد دیواره به روزنه نزدیک می‌شود نمی‌تواند یک گردش قائمه در دهانه به وجود آورد و بنابراین یک مؤلفه شعاعی سرعت را نگه می‌دارد که سطح جت را کاهش می‌دهد. مقطعی که انقباض در آن حداکثر است به انقباض ونا (شریانی) موسوم است. در این مقطع، خطوط جریان در سرتاسر جت موازی‌اند، و فشار در آنجا فشار اتمسفر است.

هد H روی روزنه را از مرکز روزنه تا سطح آزاد اندازه‌گیری می‌کنند. هد ثابت فرض می‌شود. معادله برنولی از نقطه ۱ واقع در سطح آزاد، تا مرکز انقباض ونا یعنی نقطه ۲، با فشار اتمسفر یک محلی به عنوان داده و نقطه ۲ به عنوان داده ارتفاع، و با صرف نظر از اتلافها، نوشته می‌شود

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه بالا به دست می‌آید

$$0 + 0 + H = \frac{V_2^2}{2g} + 0 + 0$$

یا

$$V_2 = \sqrt{2gH} \quad (۱.۶.۱۰)$$

این فقط سرعت نظری است، زیرا از اتلافهای بین دو نقطه صرف نظر شده است. نسبت سرعت

حقیقی V_a به سرعت نظری V_t را ضریب سرعت C_v می‌گویند؛ یعنی

$$C_v = \frac{V_a}{V_t} \quad (۲.۶.۱۰)$$

از این رو

$$V_{ra} = C_v \sqrt{2gH} \quad (۳.۶.۱۰)$$

تخلیه حقیقی Q_a از روزه عبارت است از حاصل ضرب سرعت حقیقی در انقباض ونا و مساحت جت. نسبت مساحت جت A_r در انقباض ونا به مساحت سوراخ A_o را با ضریب دیگری نشان می‌دهند که به آن ضریب انقباض C_c می‌گویند

$$C_c = \frac{A_r}{A_o} \quad (۴.۶.۱۰)$$

مساحت جت در انقباض ونا مساوی $C_c A_o$ است. بدین ترتیب، تخلیه حقیقی عبارت است از

$$Q_a = C_v C_c A_o \sqrt{2gH} \quad (۵.۶.۱۰)$$

معمولاً دو ضریب را در ضریبی، موسوم به ضریب تخلیه C_d ادغام می‌کنند

$$C_d = C_v C_c \quad (۶.۶.۱۰)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$Q_a = C_d A_o \sqrt{2gH} \quad (۷.۶.۱۰)$$

برای محاسبه اتلافها بین نقاط ۱ و ۲ هیچ راهی وجود ندارد؛ از این رو، C_v را به‌طور تجربی باید تعیین کرد. مقدار آن برای روزه با لبه تیز و گرد بین ۰.۹۵ تا ۰.۹۹ است. در بیشتر روزه‌ها، مانند روزه با لبه تیز، مقدار انقباض را نمی‌توان محاسبه کرد، و از نتایج آزمایش باید استفاده کرد. روشهای مختلفی برای به‌دست آوردن ضرایب وجود دارد. با اندازه‌گیری مساحت A_o ، هد H ، و تخلیه Q_a (با وسایل گرانی‌سنجی یا حجم‌سنجی)، C_d از معادله (۷.۶.۱۰) به‌دست می‌آید.

سپس با تعیین C_v یا C_c می‌توان ضریب دیگر را از معادله (۶.۶.۱۰) به دست آورد. چند روش را در زیر توضیح می‌دهیم:

روش مسیری. با اندازه‌گیری مکان یک نقطه بر مسیر جت آزاد در فرودست انقباض ونا (شکل ۱۴.۱۰) با صرف نظر از مقاومت هوا می‌توان سرعت حقیقی V_a را تعیین کرد. مؤلفه x سرعت تغییر نمی‌کند؛ بنابراین $V_a t = x_0$ که در آن، t مدت زمانی است که یک ذره سیال از انقباض ونا به نقطه ۳ می‌رود. مدت زمانی که ذره تحت تأثیر گرانی به اندازه y_0 سقوط می‌کند، وقتی در آن راستا سرعت اولیه نداشته باشد، با رابطه $y_0 = gt^2/2$ بیان می‌شود. بعد از حذف t در دو رابطه، داریم

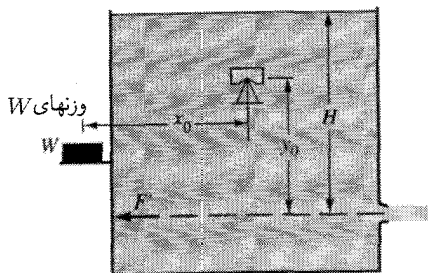
$$V_a = \frac{x_0}{\sqrt{2y_0/g}}$$

با تعیین V_{2t} از معادله (۱.۶.۱۰)، نسبت $V_a/V_t = C_v$ معلوم می‌شود.

اندازه‌گیری مستقیم V_a . با قراردادن لوله پیتو در انقباض ونا، سرعت حقیقی V_a تعیین می‌شود.

اندازه‌گیری مستقیم قطر جت. با کولیس می‌توان قطر جت را در انقباض ونا تخمین زد. این اندازه‌گیری دقیق نیست و به‌طور کلی از روشهای دیگر نامناسبتر است.

استفاده از معادله تکانه. وقتی مخزن آندر کوچک باشد که بتوان آن را بر لبه‌های چاقویی قرار داد، مانند شکل ۱۵.۱۰، تعیین نیروی F که موجب تکانه است امکان‌پذیر می‌شود. وقتی دهانه روزنه بسته باشد، مخزن را با افزودن یا کاستن جرمها می‌توان تراز کرد. وقتی روزنه در حال تخلیه است، نیرویی تکانه جت را به وجود می‌آورد و نیروی مساوی و مخالف آن F' بر مخزن اثر می‌کند. با افزودن وزنه‌های کافی W مخزن مجدداً تراز می‌شود. با توجه به شکل، $F' = Wx_0/y_0$. از



شکل ۱۵.۱۰ روش تکانه برای تعیین C_c و C_v .

معادله اندازه حرکت داریم

$$\sum F_x = \frac{Q\gamma}{g}(V_{x_{out}} - V_{x_{in}})$$

وقتی $V_{x_{in}}$ مساوی صفر و V_a سرعت نهایی است، داریم

$$\frac{Wx_o}{y_o} = \frac{Q_a\gamma V_a}{g}$$

چون تخلیه حقیقی را اندازه‌گیری می‌کنیم، V_a مجهول معادله است.

اتلافها در شارش از روزنه

با کاربرد معادله انرژی، شامل جمله اتلاف، در فاصله بین نقاط ۱ و ۲، افت هد را در شارش از روزنه می‌توان تعیین کرد (شکل ۱۴.۱۰)

$$\frac{V_{1a}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_{2a}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \text{اتلافها}$$

با جایگذاری مقادیر در این حالت به دست می‌آید

$$\text{اتلافها} = H - \frac{V_{2a}^2}{2g} = H(1 - C_v^2) = \frac{V_{2a}^2}{2g} \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \quad (۸.۶.۱۰)$$

که در آن، از معادله (۳.۶.۱۰) برای به دست آوردن اتلافها برحسب H و C_v یا V_{2a} و C_v استفاده شده است.

مثال ۱.۱۰ روزنه‌ای به قطر ۷۵mm، تحت هد ۴۸۸m، مقدار $N ۸۹۰۰$ آب را در مدت ۳۲۶s تخلیه می‌کند. با اندازه‌گیری مسیر معلوم شد که برای افت ۱٫۲۲m، $x_o = ۴۷۶m$ است. مطلوب است C_v ، C_c ، C_d ، افت هد بر نیروی گرانی واحد، و اتلاف توان.

حل

سرعت نظری V_{Te} عبارت است از

$$V_{Te} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2(۹٫۸۰۶)(۴۸۸)} = ۹٫۷۸۳m/s$$

سرعت حقیقی از مسیر به دست می‌آید. زمان لازم برای افت ۱٫۲۲m عبارت است از

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2(1,22)}{9,806}} = 0,499s$$

و سرعت با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$x_0 = V_{ra}t \quad V_{ra} = \frac{4,76}{0,499} = 9,539m/s$$

بنابراین

$$C_v = \frac{V_{ra}}{V_{rt}} = \frac{9,539}{9,783} = 0,975$$

تخلیه حقیقی Q_a عبارت است از

$$Q_a = \frac{1900}{9806(32,6)} = 0,278m^3/s$$

از معادله (۷.۶.۱۰) داریم

$$C_d = \frac{Q_a}{A_0 \sqrt{2gH}} = \frac{0,278}{\pi(0,375^2) \sqrt{2(9,806)(4,88)}} = 0,643$$

بنابراین، از معادله (۶.۶.۱۰) داریم

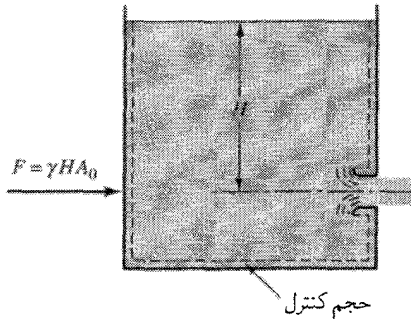
$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = \frac{0,643}{0,975} = 0,659$$

از معادله (۸.۶.۱۰)، افت h به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$افت = H(1 - C_v^2) = 4,88(1 - 0,975^2) = 0,241m.N/N$$

اتلاف توان عبارت است از

$$Q_\gamma(\text{اتلاف}) = 0,278(9806)(0,241) = 65,77W$$



شکل ۱۶.۱۰ دهانهٔ بوردا.

در مورد دهانهٔ بوردا شکل (۱۶.۱۰)، که یک لولهٔ جدار نازک و کوتاه است و طول آن حدوداً معادل قطرش است و در داخل مخزن به جلورفته (تورفته) است، می‌توان معادلهٔ تکانه را به کار برد، و رابطه‌ای بین C_d و C_v به دست آورد. سرعت در امتداد دیوارهٔ مخزن در تمام نقاط تقریباً صفر است؛ از این رو، توزیع فشار به صورت هیدروستاتیکی است. اگر مؤلفهٔ نیروی وارد از مخزن بر مایع را به موازات محور لوله در نظر بگیریم، نیروی نامتعادلی که ناشی از دهانه است به مقدار $\gamma H A_0$ به وجود می‌آید. سرعت نهایی V_{ra} است؛ سرعت اولیه صفر است؛ و Q_a تخلیهٔ حقیقی است. بنابراین

$$\gamma H A_0 = Q_a \frac{\gamma}{g} V_{ra}$$

و

$$Q_a = C_d A_0 \sqrt{2gH} \quad V_{ra} = C_v \sqrt{2gH}$$

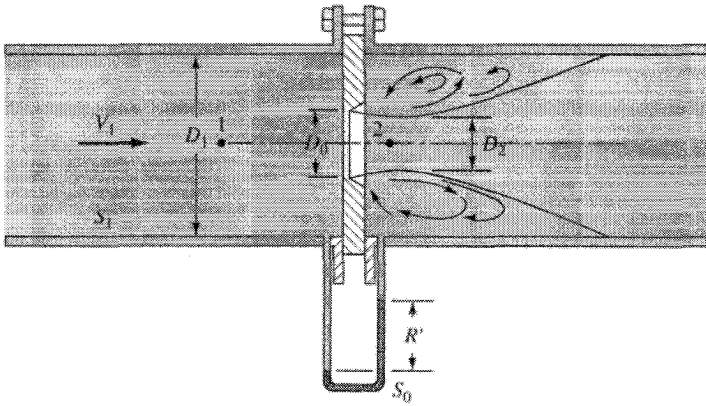
پس از جایگذاری Q_a و V_{ra} و ساده‌کردن به دست می‌آید

$$1 = 2 C_d C_v = 2 C_v^2 C_c$$

روزنه در لوله

روزنهٔ لبه-تیز در لوله (شکل ۱۷.۱۰) باعث انقباض جت در فرودست دهانهٔ روزنه می‌شود. در شارش تراکم‌ناپذیر، معادلهٔ برنولی را از مقطع ۱ تا انقباض ونا یعنی مقطع ۲ به کار می‌بریم،

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$



شکل ۱۷.۱۰ روزنه در لوله.

معادله پیوستگی، جمله‌های V_{1t} و V_{2t} را با ضریب انقباض $C_c = A_2/A_0$ به هم مربوط می‌کند

$$V_{1t} \frac{\pi D_1^2}{4} = V_{2t} C_c \frac{\pi D_0^2}{4} \quad (۹.۶.۱۰)$$

بعد از حذف V_{1t} داریم

$$\frac{V_{2t}^2}{2g} \left[1 - C_c^2 \left(\frac{D_0}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

و با حل V_{2t} نتیجه می‌شود

$$V_{2t} = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)/\gamma}{1 - C_c^2(D_0/D_1)^4}}$$

برای به دست آوردن سرعت حقیقی در انقباض ونا C_v را در V_{2t} ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$V_{2a} = C_v \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2(D_0/D_1)^4}}$$

و بالاخره، با ضرب کردن در مساحت جت، یعنی $C_c A_0$ ، تخلیه حقیقی Q نتیجه می‌شود

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - C_c^2(D_0/D_1)^4}} \quad (۱۰.۶.۱۰)$$

که در آن، $C_d = C_v C_c$. معادله (۱۰.۶.۱۰) برحسب اختلاف پیمانه‌ای R' عبارت می‌شود از

$$Q = C_d A_o \sqrt{\frac{2gR'(S_o/S_1 - 1)}{1 - C_c^2(D_o/D_1)^4}} \quad (11.6.10)$$

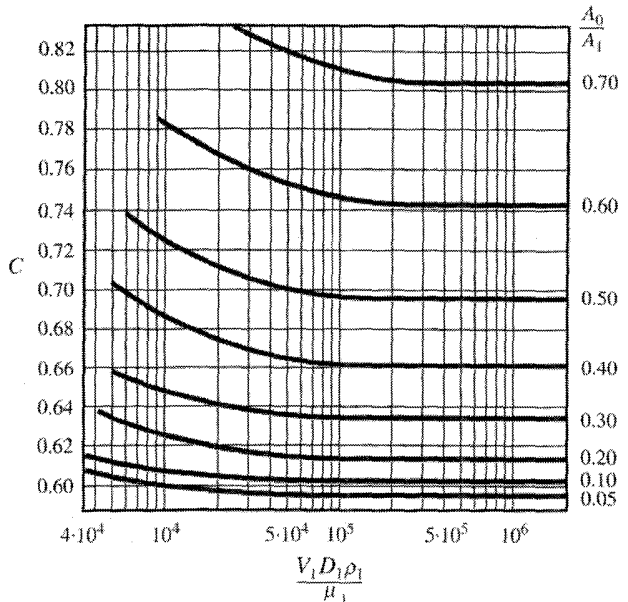
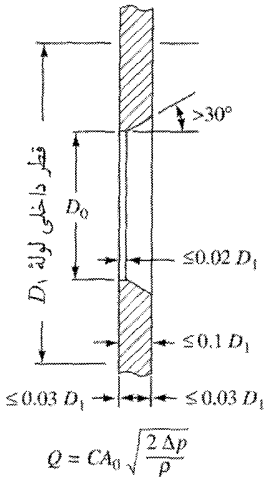
به علت مشکلات تعیین دو ضریب جداگانه، عموماً از یک فرمول ساده استفاده می‌شود.

$$Q = CA_o \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (12.6.10)$$

یا از رابطه زیر که معادل رابطه بالاست

$$Q = CA_o \sqrt{2gR' \left(\frac{S_o}{S_1} - 1 \right)} \quad (13.6.10)$$

در شکل ۱۸.۱۰ مقادیر C برای روزنه داده شده‌اند.



شکل ۱۸.۱۰ روزنه VDI و ضرایب تخلیه.

شارش ناپایا در روزنه مخزنها

در روزنه‌هایی که تابه‌حال بررسی کرده‌ایم، سطح مایع در مخزن را ثابت فرض کرده‌ایم. موردی از شارش ناپایا که در عمل اهمیت دارد عبارت است از تعیین زمان لازم برای پایین آمدن سطح مخزن تا فاصله‌ای معین. به‌طور نظری، معادلهٔ برنولی فقط برای شارش پایا به کار می‌رود؛ اما اگر پایین آمدن سطح مخزن به حد کافی آهسته باشد، از خطای ناشی از کاربرد معادلهٔ برنولی می‌توان چشم پوشید. حجم تخلیه‌شده از روزنه در زمان δt عبارت است از $Q\delta t$ ، که دقیقاً باید مساوی کاهش حجم مخزن در همان فاصلهٔ زمانی، یعنی $A_R(-\delta y)$ ، باشد (شکل ۱۹.۱۰)، که در آن، A_R مساحت سطح مایع در ارتفاع y روی روزنه است. این دو عبارت را مساوی هم قرار می‌دهیم

$$Q\delta t = -A_R\delta y$$

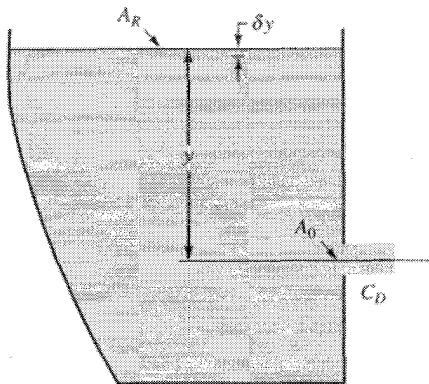
با حل δt و انتگرال‌گیر بین حدود $y = y_1$ و $y = y_2$ و $t = 0$ به دست می‌آید

$$t = \int_0^t dt = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{A_R dy}{Q}$$

تخلیهٔ Q از روزنه عبارت است از $C_d A_o \sqrt{2gy}$. بعد از جایگذاری Q داریم

$$t = - \frac{1}{C_d A_o \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} A_R y^{-1/2} dy$$

وقتی A_R به صورت تابعی از y معلوم باشد، انتگرال را می‌توان ارزیابی کرد. برای حالت خاصی



شکل ۱۹.۱۰ نمادگذاری برای کاهش هد.

که سطح مقطع مخزن ثابت است، داریم

$$t = -\frac{A_R}{C_d A_o \sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} y^{-1/2} dy = \frac{2A_R}{C_d A_o \sqrt{2g}} (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})$$

مثال ۲.۱۰ مقطع مخزنی به حالت افقی است و مساحت در ارتفاع روزنه مساوی 2 m^2 است. مساحت سطح مقطع به‌طور خطی با ارتفاع تغییر می‌کند، به‌طوری که در مقطع افقی، در 3 m بالای روزنه، مقدار آن 1 m^2 است. اگر قطر روزنه 100 mm باشد، $C_d = 0.65$. زمان لازم برای پایین آمدن سطح از 2.5 m بالای روزنه به 1 m بالای روزنه را برحسب ثانیه به‌دست آورید.

حل

$$A_R = 2 - \frac{y}{3} = \text{m}^2$$

و

$$\blacksquare \quad t = -\frac{1}{0.65\pi(0.05^2)\sqrt{2(9.806)}} \int_{2.5}^1 \left(2 - \frac{y}{3}\right) y^{-1/2} dy = 73.8\text{ s}$$

مثال ۳.۱۰ منبعی با مساحت متغیر با یک لوله کوتاه به قطر 150 mm با شیر متصل به آن، تخلیه می‌شود. شیر طوری تنظیم می‌شود که اتلاف (برحسب هد سرعت) برای سیستم لوله‌کشی عبارت است از

$$K = 1.5 + 0.4t + 0.0001t^2$$

t برحسب ثانیه است. مساحت منبع با رابطه زیر داده می‌شود

$$A = 4 + 0.1y + 0.1y^2 \text{ m}^2$$

که در آن y ارتفاع سطح مخزن روی خط مرکزی شیر است. اگر در $t = 0$ داشته باشیم $y = 20\text{ m}$ ، مطلوب است y ، A ، K و تخلیه Q در 300 s .

حل

$$Qdt = -A dy \quad y + 0 + 0 = \frac{KV^2}{2g} = \frac{KQ^2}{2gA^2}$$

$$dy = -\frac{Q}{A} dt \quad Q = A_o \sqrt{\frac{2gy}{K}}$$

$$dy = -\frac{A_o}{A} \sqrt{\frac{2gy}{K}} dt$$

سنجۀ ونتوری، شیپوره، و سایر وسایل اندازه‌گیری آهنگ شارش در مجرا ۶۲۱

برای حل معادله دیفرانسیل از یک صفحه گسترده می‌توان استفاده کرد. اگر از رانگ‌کوتای مرتبه دوم (به پیوست ب و صفحه وب * نگاه کنید) با $dt = ۷۷۵s$ استفاده شود، نتایج زیر به دست می‌آیند:

t	y	Q	A	K
۰	۲۰,۰۰۰	۰,۲۸۶	۱۰,۰۰۰	۱,۵۰۰
۱۰۵	۱۷,۹۸۲	۰,۱۲۷	۹,۰۳۲	۶,۸۰۳
۲۱۰	۱۶,۷۴۶	۰,۰۸۵	۸,۴۷۹	۱۴,۳۱۰
۳۰۰	۱۵,۹۳۹	۰,۰۶۶	۸,۱۳۴	۲۲,۵۰۰

تمرینها

۱.۶.۱۰ در شارش از یک روزنۀ مخزن، سرعت حقیقی در انقباض ونا عبارت است از الف) $C_v \sqrt{2gH}$ ؛ ب) $C_c \sqrt{2gH}$ ؛ ج) $C_d \sqrt{2gH}$ ؛ د) $\sqrt{2gH}$ ؛ ه) $C_v V_a$.

۲.۶.۱۰ یک جت سیال از روزنه‌ای به قطر ۲۰mm تخلیه می‌شود. قطر جت در انقباض ونا ۱۷,۵mm است. ضریب انقباض عبارت است از الف) ۱,۳۱؛ ب) ۱,۱۴؛ ج) ۰,۸۷۵؛ د) ۰,۷۶۶؛ ه) هیچکدام.

۳.۶.۱۰ نسبت تخلیۀ حقیقی به تخلیۀ نظری در یک روزنه عبارت است از الف) $C_c C_v$ ؛ ب) $C_c C_d$ ؛ ج) $C_v C_d$ ؛ د) C_d / C_v ؛ ه) C_d / C_c .

۴.۶.۱۰ اتلافها در شارش روزنه عبارت‌اند از: الف) $(1 - C_c^2) \left(\frac{V_{1a}^2}{2g} - \frac{V_{1b}^2}{2g} \right)$ ؛ ب) $\frac{V_{1a}^2}{2g} - \frac{V_{1b}^2}{2g}$ ؛ ج) $(1 - C_v^2) H - \frac{V_{1a}^2}{2g}$ ؛ د) $H - \frac{V_{1a}^2}{2g}$ ؛ ه) هیچکدام.

۵.۶.۱۰ برای اینکه سطح مایع با آهنگ ثابتی پایین بیاید، سطح مخزن A_R با هد y روی روزنه باید به این صورت تغییر کند. الف) \sqrt{y} ؛ ب) y ؛ ج) $1/\sqrt{y}$ ؛ د) $1/y$ ؛ ه) هیچکدام.

۶.۶.۱۰ دهانۀ بوردا به قطر ۵۰mm زیر هد ۳m تخلیۀ ۷,۶۸L/s دارد. ضریب سرعت عبارت است از الف) ۰,۹۶؛ ب) ۰,۹۷؛ ج) ۰,۹۸؛ د) ۰,۹۹؛ ه) هیچکدام.

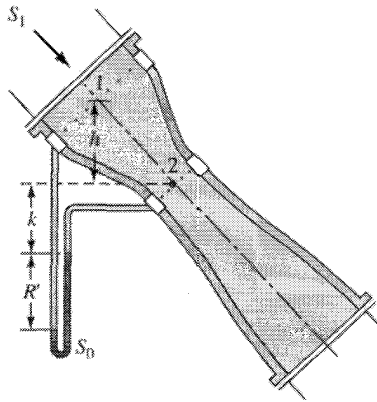
۷.۱۰ سنجۀ ونتوری، شیپوره، و سایر وسایل اندازه‌گیری آهنگ شارش

در مجرا

سنجۀ ونتوری

از سنجۀ ونتوری برای اندازه‌گیری آهنگ شارش در لوله استفاده می‌کنند. این وسیله معمولاً با روش ریخته‌گیری ساخته می‌شود (شکل ۲۰.۱۰)، (۱) متشکل است از یک مقطع فزادست که با لوله

* صفحه‌ای در کامپیوتر که کاربر از طریق آن می‌تواند به اطلاعات موردنیاز دست یابد.



شکل ۲۰.۱۰ سنجۀ ونتوری.

هم‌اندازه است؛ (۲) روکش (آستر) برنزی دارد؛ (۳) یک حلقهٔ پیزومتر که برای اندازه‌گیری فشار استاتیکی به کار می‌رود، یک مقطع مخروطی همگرا، یک گلوگاه استوانه‌ای با روکش برنزی و شامل یک حلقهٔ پیزومتر؛ (۴) یک مقطع مخروطی واگرای تدریجی که به مقطعی استوانه‌ای و هم‌اندازه با لوله ختم می‌شود. یک فشارسنج تقاضلی به دو حلقهٔ پیزومتر متصل است. اندازهٔ سنجۀ ونتوری با اندازهٔ لوله و قطر گلوگاه مشخص می‌شود؛ مثلاً یک سنجۀ ونتوری ۶ در ۴ اینچ به لوله‌ای به قطر ۶in می‌خورد و قطر گلوگاه آن ۴in است. برای کسب نتایج دقیق، طولی معادل حداقل ده برابر قطر باید قبل از سنجۀ ونتوری منظور شود. در شارش از لوله به گلوگاه، سرعت خیلی افزایش می‌یابد و فشار به همین نسبت کاهش می‌یابد. ثابت می‌شود که مقدار تخلیه در شارش تراکم‌ناپذیر تابعی از خواندهٔ فشارسنج است.

فشارها در مقطع فرادست و در گلوگاه فشارهای حقیقی‌اند، و سرعت‌های حاصل از معادلهٔ برنولی سرعت‌های نظری‌اند. اگر اتلاف‌ها را در معادلهٔ انرژی در نظر بگیریم، سرعت‌های حاصل سرعت‌های حقیقی‌اند. ابتدا، از معادلهٔ برنولی (یعنی بدون جملهٔ افت هد) سرعت نظری در گلوگاه به دست می‌آید. سپس با ضرب کردن این سرعت نظری در ضریب سرعت C_v ، سرعت حقیقی به دست می‌آید. سرعت حقیقی ضرب در مساحت حقیقی گلوگاه، تخلیهٔ حقیقی را به دست می‌دهد. از شکل ۲۰.۱۰ داریم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \quad (1.7.10)$$

دادهٔ ارتفاع در این رابطه در نقطهٔ ۲ گرفته می‌شود. V_1 و V_2 به ترتیب عبارت‌اند از سرعت‌های

متوسط در مقاطع ۱ و ۲؛ از این رو، α_1 و α_2 مساوی یک فرض می‌شوند. از معادله پیوستگی داریم $V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2$ و

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 \quad (۲.۷.۱۰)$$

این رابطه هم برای سرعت‌های حقیقی و هم برای سرعت‌های نظری صدق می‌کند. از معادله (۱.۷.۱۰) می‌توان V_{2t} را به دست آورد

$$\frac{V_{2t}^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + h$$

و

$$V_{2t} = \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \quad (۳.۷.۱۰)$$

اگر ضریب سرعت $V_{2a} = C_v V_{2t}$ را هم وارد کنیم، به دست می‌آید

$$V_{2a} = C_v \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \quad (۴.۷.۱۰)$$

بعد از ضرب کردن در A_2 ، تخلیه حقیقی Q به صورت زیر تعیین می‌شود:

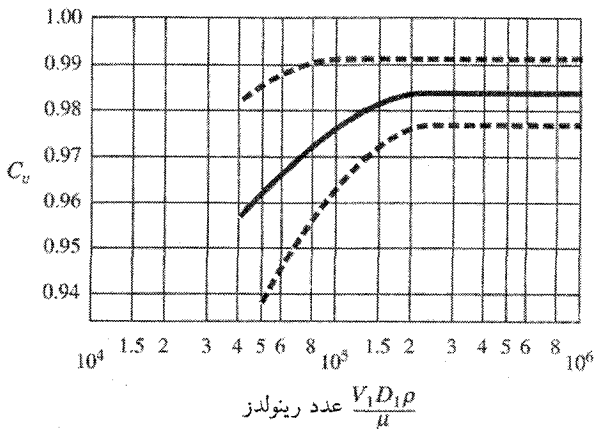
$$Q = C_v A_2 \sqrt{\frac{2g[h + (p_1 - p_2)/\gamma]}{1 - (D_2/D_1)^4}} \quad (۵.۷.۱۰)$$

در اینجا، با نوشتن معادله‌ای برای فشارسنج، اختلاف پیمانه‌ای R' را می‌توان به اختلاف فشار مربوط ساخت. برحسب آحاد طول آب داریم

$$\frac{p_1}{\gamma} S_1 + (h + k + R') S_1 - R' S_0 - k S_1 = \frac{p_2}{\gamma} S_1$$

که در آن، S_1 چگالی نسبی سیال جاری و S_0 چگالی نسبی مایع فشارسنج است. پس از ساده کردن نتیجه می‌گیریم

$$h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = R' \left(\frac{S_0}{S_1} - 1 \right) \quad (۶.۷.۱۰)$$



شکل ۲۱.۱۰ ضریب C_v در سنجه‌های ونتوری.

و با جایگذاری در معادله (۵.۷.۱۰)، به دست می‌آوریم،

$$Q = C_v A_2 \sqrt{\frac{\gamma g R' (S_o / S_1 - 1)}{1 - (D_2 / D_1)^4}} \quad (۷.۷.۱۰)$$

که معادله سنجه ونتوری برای شارش تراکم‌ناپذیر است. ضریب همگرایی مساوی یک است؛ از این رو $C_v = C_d$. توجه کنید که h از معادله حذف شده است. تخلیه به اختلاف پیمانه‌ای R' بستگی دارد و منوط به سمت و سوی سنجه ونتوری نیست؛ چه سنجه افقی باشد، چه قائم و چه مایل، معادله یکسانی برای تخلیه برقرار است.

C_v با درجه‌بندی تعیین می‌شود؛ یعنی با اندازه‌گیری تخلیه و اختلاف پیمانه‌ای و حل C_v ، که معمولاً برحسب عدد رینولدز رسم می‌شود. نتایج تجربی در سنجه‌های ونتوری در شکل ۲۱.۱۰ آمده‌اند. این نتایج برای نسبت‌های نظری D_2 / D_1 از ۰.۲۵ تا ۰.۷۵ در رواداشتهایی (تولرانس‌هایی) که با خط‌چین نشان داده شده‌اند به کار می‌روند. تا آنجا که ممکن است، سنجه ونتوری را باید طوری انتخاب کرد که ضریب آن در گستره‌ای از اعداد رینولدز سنجه ثابت باشد.

در سنجه‌های ونتوری که داخل آنها به‌طور غیرمعمولی صاف است، ضریب ممکن است کمی بزرگتر از یک باشد. منظور این نیست که هیچ اتلافی وجود ندارد، بلکه این نتیجه از صرف‌نظر کردن از ضرایب تصحیح انرژی جنبشی α_1 و α_2 در معادله برنولی به دست می‌آید. عموماً α_1 از α_2 بزرگتر است، زیرا مقطع کاهنده در جهت یکنواخت کردن توزیع سرعت در مقطع ۲ عمل می‌کند.

سنجه ونتوری، به علت گشادشدن تدریجی مقطع مخروطی، افت کلی اندکی دارد، که این

به تبدیل انرژی جنبشی زیاد موجود در گلوگاه به انرژی فشاری کمک می‌کند. مقدار افت در حدود ۱۰ تا ۱۵ درصد تغییر هد بین مقاطع ۱ و ۲ است.

سنجه و نتوری در شارش تراکم‌پذیر

شارش نظری سیال تراکم‌پذیر در سنجه و نتوری اساساً تک-آنتروپیک است و از معادله‌های (۴.۳.۴) و (۹.۵.۴) به دست می‌آید. وقتی شارش نظری در C_v یعنی در ضریب سرعت ضرب شود، آهنگ شارش جرم به دست می‌آید

$$\dot{m} = C_v A_2 \sqrt{\frac{[2k/(k-1)] p_1 \rho_1 (p_2/p_1)^{2/k} [1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}]}{1 - (p_2/p_1)^{2/k} (A_2/A_1)^2}} \quad (۸.۷.۱۰)$$

ضریب سرعت در این حالت مانند ضریب سرعت در شارش مایع است.

شیپوره شارش

شیپوره شارش ISA (انجمن ابزار آمریکا) که در اصل شیپوره VDI بوده است در شکل ۲۲.۱۰ نشان داده شده است. در هیچ جایی از شیپوره، بجز در دهانه آن، انقباض جت صورت نمی‌گیرد؛ بنابراین، ضریب انقباض مساوی یک است.

معادله‌های (۵.۷.۱۰) و (۷.۷.۱۰) هر دو در تحلیل شیپوره شارش اعتبار دارند. معادله (۵.۷.۱۰) را برای یک لوله افقی ($h = 0$) می‌توان به صورت زیر نوشت:

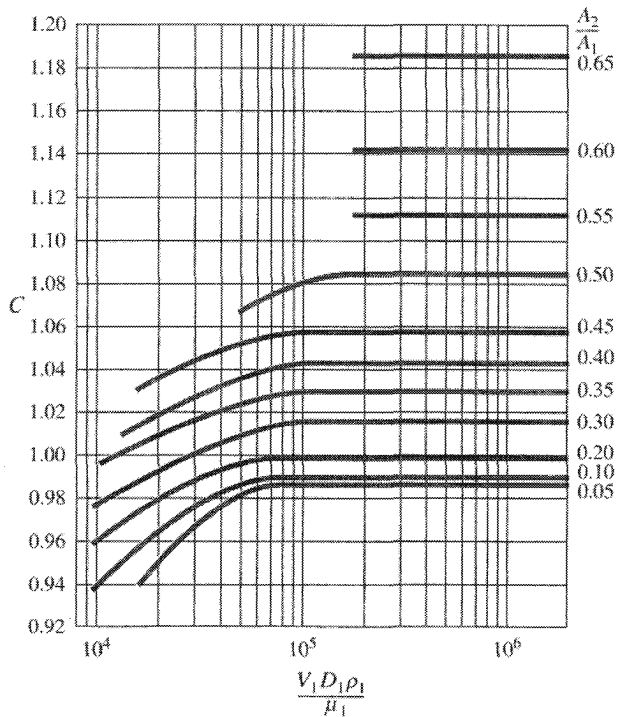
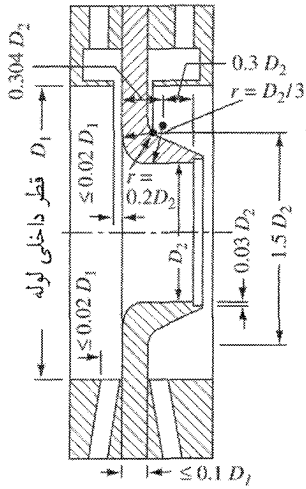
$$Q = C A_2 \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad (۹.۷.۱۰)$$

که در آن

$$C = \frac{C_v}{\sqrt{1 - (D_2/D_1)^4}} \quad (۱۰.۷.۱۰)$$

و $\Delta p = p_1 - p_2$. مقدار ضریب C در شکل ۲۲.۱۰، برای استفاده در معادله (۹.۷.۱۰) به کار می‌رود. وقتی می‌خواهیم از ضریب داده شده در شکل استفاده می‌کنیم، برای اندازه‌گیری افت فشار باید ابعاد نشان داده شده، مخصوصاً در محل دهانه‌های پیرومتر، تقریباً چسبیده به هم باشند (دو روش نشان داده شده‌اند). طولی از لوله مستقیم، معادل حداقل ده برابر قطر آن، باید قبل از شیپوره در نظر گرفت.

$$C = \frac{C_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$



شکل ۲۲.۱۰ شیپوره شارش (VDI)ISA و ضرایب تخلیه.

شیپوره شارش کم‌خرج‌تر از سنجه و نتوری است. نقص آن در مقایسه این است که به علت عدم هدایت جت در فرودست دهانه شیپوره اتلافهای آن بیشتر است.

مثال ۴.۱۰ مطلوب است شارش در یک خط لوله آب به قطر ۶in که شامل یک شیپوره شارش به قطر ۴in است. اختلاف پیمانه‌ای در فشارسنج تفاضلی جیوه-آب، مساوی ۱۰in است. دمای آب ۶۰°F است.

حل

از داده‌ها، $S_o = ۱۳.۶$ ، $S_1 = ۱.۰$ ، $R' = ۱۰/۱۲ = ۰.۸۳۳ft$ ، $A_2 = \pi/۳۶ = ۰.۰۸۷۳ft^2$ ، $\rho = ۱.۹۳۸slugs/ft^3$ و $\mu = ۲.۳۵۹ \times ۱۰^{-۵}lb.s/ft^2$ جایگذاری معادله (۷.۷.۱۰) در معادله (۷.۷.۱۰) می‌دهد

$$Q = CA_2 \sqrt{2gR' \left(\frac{S_o}{S_1} - 1 \right)}$$

از شکل ۲۲.۱۰، برای $A_2/A_1 = (4/6)^2 = 0.444$ ، فرض می‌کنیم که ناحیه افقی منحنیها صادق باشد. از این رو، $C = 1.056$ ؛ سپس شارش و عدد رینولدز را محاسبه کنید

$$Q = 1.056(0.0873) \sqrt{64.4(0.833) \left(\frac{13.6}{1.0} - 1.0 \right)} = 2.40 \text{ cfs}$$

بنابراین

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{2.40}{\pi/16} = 12.21 \text{ ft/s}$$

$$R = \frac{V_1 D_1 \rho}{\mu} = \frac{12.21(1.938)}{2(2.359 \times 10^{-5})} = 502000$$

نمودار نشان می‌دهد که مقدار C درست است؛ بنابراین، تخلیه مساوی 2.40 cfs است.

سنجۀ زانویی

سنجۀ زانویی در شارش تراکم‌ناپذیر یکی از ساده‌ترین وسایل اندازه‌گیری آهنگ شارش است. دهانه‌های پیزومتر در داخل و خارج زانویی به یک فشارسنج تقاضلی متصل‌اند. به علت وجود نیروی گریز از مرکز در خم زانویی، اختلاف فشارها به تخلیه ارتباط می‌یابند. طول مستقیم آرام‌کننده‌ای باید قبل از زانویی قرار داشته باشد، و برای کسب نتایج دقیق باید سنج را در محل درجه‌بندی کرد [۲۱]. چون بیشتر خطوط لوله زانویی دارند، از آن به‌عنوان سنج می‌توان استفاده کرد. نتایج حاصل از درجه‌بندی به اندازه نتایج حاصل از یک سنجۀ ونتوری یا شیپوره شارش قابل اعتمادند.

شارش سنج

شارش سنج، سنج‌ای است با سطح متغیر و متشکل از یک لوله شفاف گشادشونده و یک «شناور» سنجش (در واقع سنگینتر از مایع) که بر اثر شارش رو به بالای سیال در لوله، به طرف بالا جابه‌جا می‌شود. لوله را درجه‌بندی می‌کنند تا شارش به‌طور مستقیم خوانده شود. شیارهای شناور باعث چرخیدن آن می‌شوند و بدین ترتیب محل مرکزی آن را در داخل لوله حفظ می‌کنند. هرچه شارش بیشتر باشد، محل شناور بالاتر است.

تمرینها

۱۰۷.۱۰ کدامیک از این ابزار اندازه‌گیری آهنگ‌سنج است؟ (الف) جریان‌سنج؛ (ب) سنجۀ دیسکی؛ (ج) بادسنج سیمی گرم؛ (د) لوله پیتو؛ (ه) سنجۀ ونتوری.

۲۰۰۰۰۰ در عدد رینولدز 20mm در 40mm و نتوری 20mm در 40mm در عدد رینولدز 200000 عبارت است از الف) 95° ؛ ب) 96° ؛ ج) 97° ؛ د) 98° ؛ ه) 99° .

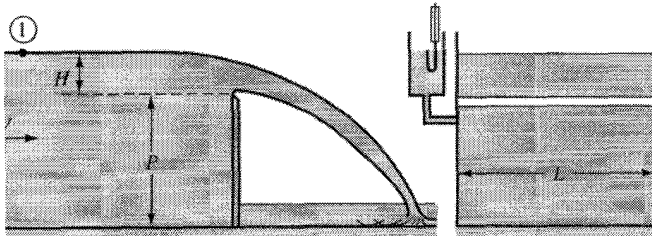
۳۰۷۰ بیان صحیح را انتخاب کنید: الف) تخلیه در سنجه و نتوری فقط به Δp بستگی دارد و مستقل از سمت و سوی سنجه است؛ ب) سنجه و نتوری با اختلاف پیمانه‌ای مفروض R' وقتی شارش به طور عمودی رو به پایین است در مقایسه با وقتی که شارش به طور عمودی رو به بالاست آهنگ تخلیه بیشتری دارد؛ ج) در اختلاف فشار مفروضی معادله‌ها نشان می‌دهند که تخلیه گاز در سنجه و نتوری وقتی تراکم‌ناپذیری را در نظر بگیریم بیشتر از وقتی است که از تراکم‌پذیری صرف‌نظر کنیم؛ د) ضریب انقباض سنجه و نتوری مساوی یک است؛ ه) در خط لوله مفروضی، چه سنجه و نتوری و چه شیوره با قطر یکسان D_2 به کار رود، افت کلی یکی است.

۸.۱۰ سنجه‌های آهنگ در کانال باز

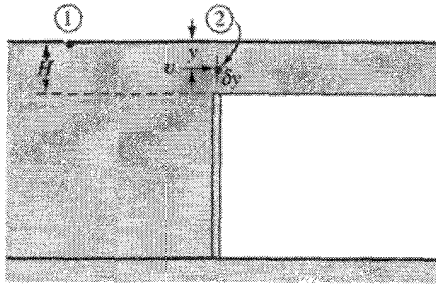
سرریزها

تعدادی از سنجه‌های شارش که بر مبنای مانع در مجرا کار می‌کنند در شارش کانال با سطح آزاد استفاده می‌شوند. برای مثال مجرای پارشال مشابه سنجه و نتوری است در حالی که سرریزها مشابه روزنه‌هاست. سرریز مانعی در کانال است که باعث می‌شود مایع در پشت آن بالا آید و از روی آن جریان پیدا کند. با اندازه‌گیری هد فرادست سطح مایع، می‌توان آهنگ شارش را تعیین کرد. سرریزها از ورقه فلزی با مواد دیگر ساخته می‌شوند. سرریزهایی که جت یا قشر آب به هنگام ترک وجه فرادست به آزادی از روی آنها می‌جهد سرریزهای نوک‌تیز خوانده می‌شوند. سرریزهای دیگر، مانند سرریز نوک‌پهن، شارش را در امتداد طولی نگه می‌دارند.

سرریز مستطیلی نوک‌تیز (شکل ۲۳.۱۰) نوک افقی دارد. قشر آب در بالا و پایین آن مطابق شکل همگرا می‌شود. اگر از همگرایی صرف‌نظر شود، معادله‌ای برای تخلیه می‌توان به دست آورد.



شکل ۲۳.۱۰ سرریز مستطیلی نوک‌تیز.



شکل ۲۴.۱۰ قشر آب سرریز بدون انقباض.

شارش بدون انقباض به صورت شکل ۲۴.۱۰ ظاهر می‌شود. قشر آب دارای خطوط جریان موازی است و فشار در سرتاسر آن فشار اتمسفر است. معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲ (شکل ۲۴.۱۰) عبارت است از

$$H + 0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + H - y + 0$$

که در آن، از همد سرعت در مقطع ۱ صرف نظر شده است. با محاسبه v داریم

$$v = \sqrt{2gy}$$

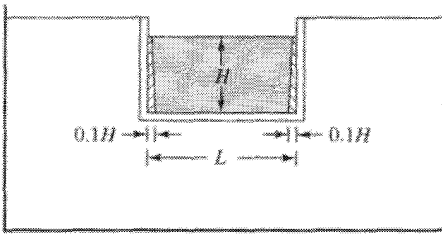
تخلیه نظری عبارت است از

$$Q_t = \int v dA = \int_0^H v L dy = \sqrt{2g} L \int_0^H y^{1/2} dy = \frac{2}{3} \sqrt{2g} L H^{3/2}$$

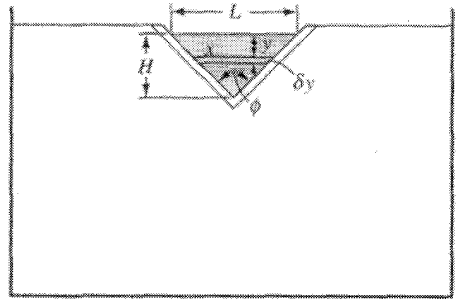
که در آن، L عرض سرریز است. آزمایش نشان می‌دهد که نمای H به قاعده است اما ضریب آن خیلی بزرگ است. انقباضها و اتلافها تخلیه حقیقی را تا ۶۲ درصد تخلیه نظری کاهش می‌دهند، یعنی

$$Q = \begin{cases} 3.33 LH^{3/2} & \text{آحاد USC} \\ 1.84 LH^{3/2} & \text{آحاد SI} \end{cases} \quad (1.8.10)$$

اگر سرریز به طور کامل در امتداد عرض کانال بسط نیابد، دارای انقباضهای انتهایی است که در شکل ۲۵.۱۰ الف نشان داده شده است. تصحیح تجربی برای کاهش شارش به این صورت



(الف)



(ب)

شکل ۲۵.۱۰ سرریزها، (الف) افقی با انقباضهای انتهایی؛ (ب) سرریز شکاف V .

است که برای هر انقباض انتهایی H را از L کسر می‌کنند. برای سرریز شکل ۲۳.۱۰ می‌گویند که انقباضهای انتهایی آن مرتفع شده است.

هد H فرادست سرریز را در فاصله‌ای کافی اندازه‌گیری می‌کنند تا از انقباض سطحی اجتناب شود. یک پیمانه چنگکی در داخل یک ظرف ساکن که به دهانه یک پیژومتر متصل است ارتفاع سطح آب را از آنجایی که هد اندازه‌گیری می‌شود تعیین می‌کند.

وقتی ارتفاع P سرریز (شکل ۲۳.۱۰) کوچک باشد، از هد سرعت در مقطع ۱ می‌توان صرف‌نظر کرد. تصحیحی بر هد می‌توان اعمال کرد

$$Q = CL \left(H + \alpha \frac{V^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (۲.۸.۱۰)$$

که در آن، V سرعت است؛ α بزرگتر از یک است (معمولاً حدود ۱.۴) و برای توزیع سرعت غیریکنواخت به کار می‌رود. معادله (۲.۸.۱۰) را برای Q باید با آزمون حل کرد، زیرا Q و V هر دو مجهول‌اند. آزمون اول، از جمله $\alpha V^2 / 2g$ می‌توان صرف‌نظر کرد تا Q به‌طور تقریبی به‌دست آید. با این تخلیه آزمونی، مقدار V محاسبه می‌شود، زیرا

$$V = \frac{Q}{L(P + H)}$$

سرریز با شکاف V به‌خصوص برای تخلیه‌های کم مناسب است. از انقباض قشر آب صرف‌نظر می‌شود، و تخلیه نظری (شکل ۲۵.۱۰ ب) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

۱. سرعت در عمق y عبارت است از $v = \sqrt{2gy}$ ، و تخلیه نظری عبارت است از

$$Q_t = \int v dA = \int_0^H v x dy$$

۲. با استفاده از مثلثهای مشابه، x را به y می‌توان ربط داد

$$\frac{x}{H-y} = \frac{L}{H}$$

۳. بعد از جایگذاری برای v و x ، داریم

$$Q_t = \sqrt{2g} \frac{L}{H} \int_0^H y^{1/2} (H-y) dy = \frac{4}{15} \sqrt{2g} \frac{L}{H} H^{5/2}$$

۴. با بیان L/H برحسب زاویه ϕ شکاف V نتیجه می‌گیریم

$$\frac{L}{2H} = \tan \frac{\phi}{2}$$

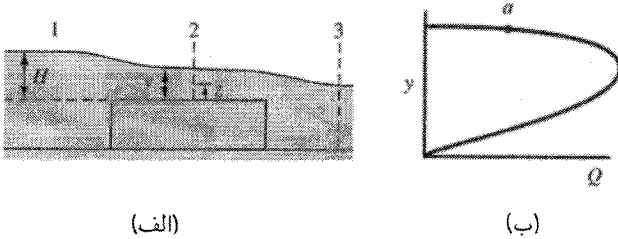
از این رو

$$Q_t = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \frac{\phi}{2} H^{5/2}$$

۵. نما در معادله تقریباً به قاعده است، اما ضریب را در حدود ۴۲ درصد باید کاهش داد زیرا از انقباض صرف نظر شده است. معادله تقریبی برای سرریز با شکاف V ، 90° ، عبارت است از

$$Q = \begin{cases} 2.5^\circ H^{2.5^\circ} & \text{آحاد USC} \\ 1.38 H^{2.5^\circ} & \text{آحاد SI} \end{cases} \quad (3.8.10)$$

آزمایشها نشان می‌دهند که با زیرشدن وجه فرادست صفحه سرریز، ضریب افزایش می‌یابد، و این باعث می‌شود که لایه مرزی ضخیمتر شود. مقدار بیشتری از مایع کم‌سرعت در نزدیک دیواره آسانتر دور می‌زند، و از این رو انقباض قشر آب کمتر می‌شود.
سرریز نوک‌پهن (شکل ۲۶.۱۰ الف) قشر آب را نگه می‌دارد، به طوری که تغییر فشار در



شکل ۲۶.۱۰ سرریز نوک‌پهن.

مقطع ۲ هیدروستاتیکی است. برای پیدا کردن سرعت v_2 در ارتفاع z ، از معادلهٔ برنولی بین نقاط ۱ و ۲ می‌توان استفاده کرد. با صرف‌نظر از سرعت نزدیکی، داریم

$$H + 0 + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + z + (y - z)$$

با حل v_2 داریم

$$v_2 = \sqrt{2g(H - y)}$$

z حذف می‌شود؛ از این رو v_2 در مقطع ۲ ثابت است. در سرریزی به‌عرض L عمود بر صفحهٔ شکل، تخلیهٔ نظری عبارت است از

$$Q = v_2 Ly = Ly\sqrt{2g(H - y)} \quad (۴.۸.۱۰)$$

نمودار Q به‌عنوان مختصهٔ طول برحسب y به‌عنوان مختصهٔ عرض، در H ثابت در شکل ۲۶.۱۰ ب داده شده است. عمق نشان داده شده عمقی است که بنا به استدلال زیر، تخلیه در آن ماکزیمم است.

دریچه یا مانع دیگری در مقطع ۳ از شکل ۲۶.۱۰ الف می‌تواند شار را در $y = H$ به‌طور کامل متوقف کند. حال، اگر بگذاریم شارشی اندک از مقطع ۳ بگذرد (H را ثابت می‌گیریم)، عمق y کمی از H کمتر می‌شود و تخلیه را می‌توان با نقطه‌ای مثل a در منحنی عمق-تخلیه نشان داد. با بالابردن بیشتر دریچه یا مانع در مقطع ۳، رابطهٔ تخلیه-عمق از قسمت بالایی منحنی تبعیت می‌کند تا به تخلیهٔ ماکزیمم برسد. در این حالت، هرچه موانع در فرودست بیشتر بالا روند، اثر کمتری بر تخلیه خواهند گذاشت، زیرا سرعت شارش در مقطع ۲ مساوی \sqrt{gy} است، که دقیقاً مساوی سرعت یک موج ابتدایی است که می‌تواند در سیال ساکنی به عمق y حرکت کند. از این رو، اثر ناشی از بیشتر پایین آوردن ارتفاع سطح فرودست نمی‌تواند به فرادست منتقل شود و بر مقدار y

بیشتر تأثیر بگذارد، و تخلیه به حد ماکزیمم خود می‌رسد. این عمق y را عمق بحرانی گویند، که در بخش ۵.۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرد. سرعت موج ابتدایی را در بخش ۱۲.۱۳ به دست می‌آوریم. با گرفتن dQ/dy و با مساوی صفر قراردادن نتیجه، در H ثابت خواهیم داشت

$$\frac{dQ}{dy} = 0 = L\sqrt{2g(H-y)} + Ly\frac{1}{2}\frac{-2g}{\sqrt{2g(H-y)}}$$

با محاسبه y داریم

$$y = \frac{2}{3}H$$

با جایگذاری مقدار H یعنی $3y/2$ در معادله سرعت، نتیجه می‌گیریم

$$v_2 = \sqrt{gy}$$

با جایگذاری مقدار y در معادله (۴.۸.۱۰) نتیجه می‌گیریم

$$Q_t = \begin{cases} 3,09 LH^{3/2} & \text{آحاد USC} \\ 1,705 LH^{3/2} & \text{آحاد SI} \end{cases} \quad (5.8.10)$$

آزمایشها نشان می‌دهند که تخلیه در لبه کاملاً گردشده فرادست عبارت است از

$$Q = \begin{cases} 3,03 LH^{3/2} & \text{آحاد USC} \\ 1,67 LH^{3/2} & \text{آحاد SI} \end{cases} \quad (6.8.10)$$

که اختلاف آن با مقدار نظری ۲ درصد است. بنابراین، شارش برای تخلیه‌ای با آهنگ ماکزیمم تنظیم می‌شود.

از آنجا که چسبندگی و پسا سطحی بر ضرایب تخلیه سرریز تأثیر کمی می‌گذارند، سرریز را باید با مایعی که اندازه‌گیری می‌شود درجه‌بندی کرد.

مثال ۵.۱۰ آزمایشها روی یک سرریز با شکاف V به زاویه 60° مقادیر زیر را برای هد H روی سرریز و تخلیه Q به دست داده‌اند:

H, ft	۰۳۴۵	۰۳۵۶	۰۴۵۶	۰۵۳۷	۰۵۶۸	۰۵۹۴	۰۶۱۹	۰۶۳۵	۰۶۵۴	۰۶۶۵
Q, cfs	۰۱۰۷	۰۱۱۰	۰۲۰۵	۰۳۰۳	۰۳۵۰	۰۴۰۰	۰۴۳۵	۰۴۶۰	۰۴۹۰	۰۵۲۰

با استفاده از نظریهٔ حداقل مربعات، ثابتها را در $Q = CH^m$ برای این سرریز به دست آورید.

حل

با لگاریتم‌گیری از طرفین معادله داریم

$$\ln Q = \ln C + m \ln H \quad \text{یا} \quad y = B + mx$$

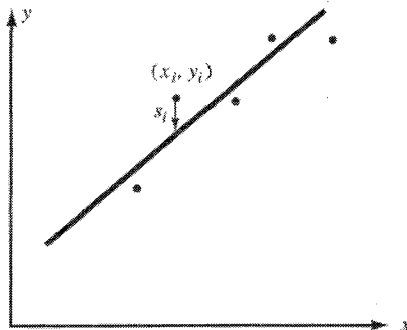
باید توجه داشت که وقتی داده‌ها را در کاغذ لگاریتمی رسم می‌کنیم، برای اینکه خط مستقیمی از آنها بگذرد، بهترین مقادیر B و m مورد نیاز هستند.

طبق نظریهٔ حداقل مربعات، بهترین خط مستقیم ماژ بر نقاط داده‌ها خطی است که مینیمم مقدار مجموع مربعات فواصل عمودی هر نقطه تا خط را به دست دهد؛ یا، از شکل ۲۷.۱۰ داریم

$$F = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (B + mx_i)]^2$$

که در آن، n تعداد نقاط آزمایشی است. برای مینیمم کردن F ، $\partial F/\partial B$ و $\partial F/\partial m$ را مساوی صفر می‌گیریم و در نتیجه دو معادله با دو مجهول B و m مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial F}{\partial B} = 0 = 2 \sum [y_i - (B + mx_i)](-1)$$



شکل ۲۷.۱۰ نمودار لگاریتمی Q برحسب H در سرریز با شکاف V .

که در آن

$$\sum y_i - nB - m \sum x_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 = 2 \sum [y_i - (B + mx_i)](-x_i)$$

و

یا

$$\sum x_i y_i - B \sum x_i - m \sum x_i^2 = 0 \quad (2)$$

از حل معادله‌های (۱) و (۲) برای m نتیجه می‌شود

$$m = \frac{\sum x_i y_i / \sum x_i - \sum y_i / n}{\sum x_i^2 / \sum x_i - \sum x_i / n} \quad B = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n}$$

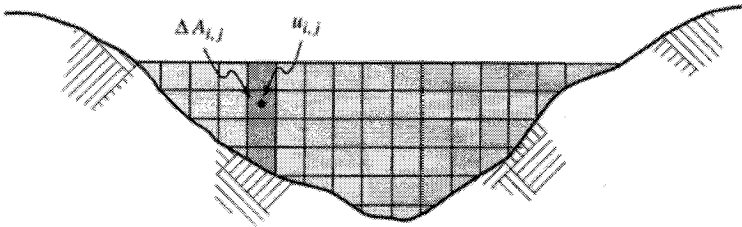
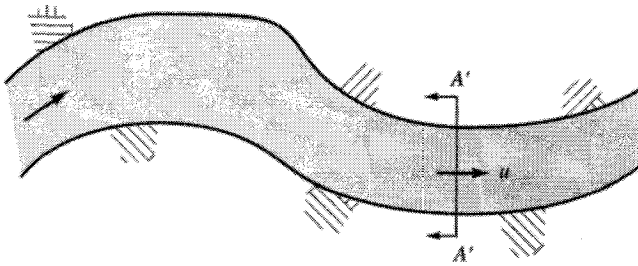
این معادله‌ها را با یک حسابگر دستی الکترونیکی که کلید Σ داشته باشد، یا با برنامه ساده‌ای که برای کامپیوتر رقمی نوشته شود، به سهولت می‌توان حل کرد. جواب این مسئله عبارت است از $m = ۲٫۴۳۷$ و $C = ۱٫۳۹۵$. ■

اندازه‌گیری شارش در رودخانه

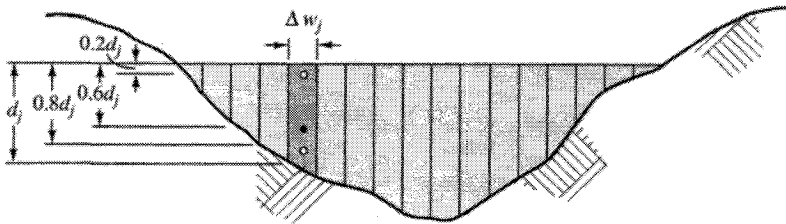
استفاده از نگاشتهای روزانه تخلیه رودخانه در دوره‌های طولانی زمان برای برنامه‌ریزی اقتصادی در بهره‌برداری از منابع آب آنها یا حفاظت در برابر سیل، ضروری است. اندازه‌گیری روزانه تخلیه از طریق تعیین توزیع سرعت در سطح مقطعی از رودخانه کار پرهزینه‌ای است. برای اجتناب از مخارج زیاد و در عین حال به‌دست آوردن نگاشتهای روزانه، مقاطع کنترل را در جایی که کانال رودخانه ثابت است، یعنی در جایی که تغییر کف یا جوانب بستر کم است، در نظر می‌گیرند. مقطع کنترل را اغلب در جایی که شیب کف رودخانه می‌شکند و شیب فرودست تندتر می‌شود در نظر می‌گیرند.

هدف مقطع کنترل عبارت است از در نظر گرفتن یک رابطه دقیق بین شارش و ارتفاع (متغیری که با سهولت بیشتر اندازه‌گیری می‌شود). آهنگ شارش حجم در یک مقطع عرضی ثابت کانال از رابطه زیر پیدا می‌شود

$$Q(t) = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int u(y, z, t) dA \quad (۷.۸.۱۰)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۸.۱۰ طرحواره تقسیم‌بندی آهنگ جریان تخلیه.

در اینجا u مؤلفه سرعت در جهت x است که بر مقطع عرضی عمود است و به طرف فرودست امتداد دارد (شکل ۲۸.۱۰ الف). بنابراین، مستقیم‌ترین داده‌ها درباره $Q(t)$ از قسمت‌بندی مقطع عرضی به تعدادی از مساحت‌های نموی با اندازه $\Delta A_{i,j}$ ، اندازه‌گیری سرعت در کانال، $u_{i,j}$ ، در هر مساحت نموی و جمع کردن آنها به دست می‌آید

$$Q = \sum_{i,j} u_{i,j} \Delta A_{i,j}$$

آنچه در این توصیف به طور ضمنی آمده این است که $u_{i,j}$ در هر مساحت نشان‌دهنده متوسط

سرعت در مقطع عرضی هر $\Delta A_{i,j}$ است. به علاوه فرض می‌شود زمانی که طول می‌کشد تا گروه جمع‌کننده داده‌ها به جمع‌آوری داده‌ها در تمام مقاطع عرضی بپردازند کمتر از زمانی است که طول می‌کشد تا هرگونه تغییر قابل توجهی در آهنگ شارش روی دهد.

با استفاده از نمایه سرعت کاملاً معلوم در کانال باز و رابطه آن با سرعت متوسط، که در مثال ۴.۶ به تفصیل بیان شد، لازمه‌های جمع داده‌ها را به‌طور قابل توجه می‌توان ساده کرد. در این مثال آموخته شد که اندازه‌گیری سرعت در $z/d = 0.4$ (اگر z از سطح تا کف اندازه‌گیری می‌شود، $z/d = 0.6$) یا متوسط دو اندازه‌گیری سرعت در $z/d = 0.2$ و در $z/d = 0.8$ سرعت متوسط \bar{u} را می‌دهد. بنابراین، مقطع عرضی (شکل ۲۸.۱۰ ب) به نمونه‌های ستون آب با عرض مساوی (Δw_j) تقسیم‌بندی می‌شود، سرعت در دو عمق هنجاریده در هر نمونه برداری می‌شود، و حاصلضربها با هم جمع می‌شوند.

$$Q = \sum_{j=1}^M dQ_j = \sum_{j=1}^M \bar{u}_j \Delta w_j d_j \quad (8.8.10)$$

$$\approx \sum_{j=1}^M \frac{1}{4} [u_j(z/d_j = 0.2) + u_j(z/d_j = 0.8)] \Delta w_j d_j$$

با استفاده از اندازه‌گیری سرعت متوسط در یک نقطه تخمین Q را به صورت زیر می‌دهد

$$Q = \sum_{j=1}^M \bar{u}_j \Delta w_j d_j \approx \sum_{j=1}^M \bar{u}_j \left(\frac{z}{d_j} = 0.6 \right) \Delta w_j d_j \quad (9.8.10)$$

معمولاً هر عرض نموی بیشتر از ۱۰ درصد عرض یک مقطع عرضی نیست.

همزمان با اندازه‌گیری شارش، یک وسیله اندازه‌گیری سطح آب با مبدل فشار، که در مقطع کنترل نصب می‌شوند، ارتفاع ستون آب را اندازه می‌گیرد. بنابراین، شارشی که با گروه نمونه برداری اندازه‌گیری می‌شود در ضمن نمونه برداری به ارتفاع آب ارتباط داده می‌شود. وقتی جریان هیچوقت آهنگ‌بندی نمی‌شود، زوجی از داده‌های شارش و ارتفاع باید جمع‌آوری شوند که پاسخ تخلیه کل جریان از شارش کم تا شارش سیل‌آسا را فراگیرند. از این داده‌ها برای در نظر گرفتن منحنی ارتفاع-تخلیه استفاده می‌شود. با منحنی ارتفاع-تخلیه می‌توان اندازه‌گیریهای سریع شارش را با ثبت ساده ارتفاع سطح آب انجام داد؛ این یک اندازه‌گیری بسیار ساده و اقتصادی است. واریسهای مکانی متوالی را باید انجام داد تا تعیین شود آیا درجه‌بندی اولیه برقرار است یا نه. اگر از یک مقطع کنترل پایدار استفاده شود، انحراف بسیار کمی در درجه‌بندی مشاهده می‌شود. در مقطع عرضی ناپایدار، درجه‌بندی در ظرف چند روزی می‌تواند تغییر کند.

در این آهنگ جسم تخمین زده شده به دو صورت خطا روی می‌دهد. اول خطاهای استاندارد ابزار در سه اندازه‌گیری u ، Δw و d است. خطای دوم در استفاده ضمنی از تقریب عددی انتگرال در معادله (۸.۱۰) با روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای است که در معادله (۸.۸.۱۰) به کار رفت. از روشهای معادله‌های (۲.۱.۱۰) و (۳.۱.۱۰) برای تخمین خطای ابزار استفاده می‌شود. کتابهای درسی درباره روشهای عددی (مثلاً، مرجع [۲۲]) نشان می‌دهند که خطای تقریب عددی برای بازه‌های با عرض مساوی از مرتبه $O(\Delta w^2)$ است. بنابراین، هرچه نوارهای ستون آب در مقطع عرضی افزایش یابند، خطای تقریب کاهش می‌یابد.

تمرینها

۱.۸.۱۰ تخلیه در سرریز با شکاف V ، به کدام صورت تغییر می‌کند؟ الف) $H^{-1/2}$ ؛ ب) $H^{1/2}$ ؛ ج) $H^{3/2}$ ؛ د) $H^{5/2}$ ؛ ه) هیچکدام.

۲.۸.۱۰ تخلیه در سرریز نوک‌تیز مستطیلی با انقباضهای انتهایی، چه مقدار کمتر از سرریزی است که انقباض آن متوقف شده است؟ الف) ۵٪؛ ب) ۱۰٪؛ ج) ۱۵٪؛ د) درصد ثابتی وجود ندارد؛ ه) هیچکدام.

۳.۸.۱۰ در قسمت‌بندی یک رودخانه برای کار کالیبراسیون ارتفاع، عرض اولیه هر قسمت ۱۰ m است. با استفاده از عرض ۵ m، دو برابر کردن تعداد قسمت‌ها الف) خطای انتظاری را کاهش می‌دهد؛ ب) خطای انتگرال عددی را چهار برابر کاهش می‌دهد؛ ج) خطای تخمینی را به علت افزایش تعداد اندازه‌گیریها افزایش می‌دهد؛ د) هیچکدام.

۹.۱۰ اندازه‌گیریهای غلظت ذره

ذرات ریز یا حل‌شده‌ای که توسط سیال متحرک حمل می‌شوند به صورت بسیار گوناگون می‌توانند ترکیب شوند، از ترکیبات پیچیده‌ای که در فرایند واحد مهندسی شیمیایی روی می‌دهند گرفته تا انتقال ساده یک قطره باران یا ذره رسوب. مرور تمام روشهای اندازه‌گیری غلظت این عناصر خسته‌کننده است. در اینجا شاخه فرعی خاصی از غلظتهایی که از ذرات حمل شده در سیال متحرک ناشی می‌شوند مورد توجه قرار می‌گیرند. حتی با این بذل توجه یک مرور کامل امکان‌پذیر نیست. ذره در اینجا به عنوان یک جرم کوچک اما همدوسی متشکل از ماده دیگر یا جرم حالت دیگر سیال تعریف می‌شود. نمونه‌هایی از شاخه فرعی غلظت خاص عبارت‌اند از شن حمل‌شده در رودخانه‌ها و نهرها یا گرد و غباری که در اتمسفر حمل می‌شود. نمونه‌هایی از ذره عبارت‌اند از قطرات باران یا ابرها در اتمسفر اشباع‌شده. در تمام حالتها متحمل است که ذرات انحصاری شامل یک حجم نمونه‌برداری شده دارای توزیع تصادفی اندازه باشد که، خوشبختانه، به سمت یک

توزیع اندازه متحمل قابل پیش‌بینی گرایش دارند. به‌علاوه، این حالت نیز وجود دارد که جرم هر ذره از جرم سیالی که ذره جابه‌جا می‌کند بیشتر است و ذرات نسبت به حرکت کپه‌ای سیال یا ساکن هستند یا حرکت می‌کنند. بنابراین، متغیرهای موردنظر در بیشتر اندازه‌گیریها عبارت‌اند از غلظت (جرم حجم واحد ذرات) و توزیع اندازه ذراتی که شامل نمونه هستند.

اندازه ذره

در زمان حال، تجهیزات بالقوه‌ای برای اندازه‌گیریهای همزمان متغیرهای اندازه و غلظت با استفاده از ابزار یکسان وجود ندارند. در عوض، نمونه‌هایی از مخلوط که غلظت آنها اندازه‌گیری می‌شود باید در نقطه اندازه‌گیری جمع‌آوری شوند و با تحلیل متوالی آزمایشگاهی رده اندازه آنها تجزیه و تحلیل شود.

توزیعهای اندازه ذره که در فعالیتهای روزمره با آنها روبه‌رو می‌شویم در گستره از $1\ \mu\text{m}$ تا $10^6\ \mu\text{m}$ (هر μm یک میکرون یعنی $10^{-6}\ \text{m}$ است) تا $10^4\ \mu\text{m}$ (۱ cm) است. کوچکترین ذرات نوعاً ذرات زغال و غبار متالوژیکی و ویروسهاست در حالی که بزرگترین ذرات شن و ماسه است که در بستر رودخانه‌ها یا سنگ معادن یافت می‌شود. شکل ۲۹.۱۰ [مرجع ۲۳] نقشه انواع مختلف ذرات، گستره اندازه آنها، و مشخصات رده‌بندی آنهاست. نمودار اندازه برحسب میکرون است. از دستگاه آحاد فی نیز استفاده شده است، که سیستم بر مبنای توان ۲ است، و تعریف آن طوری است که قطر در آحاد فی (ϕ) به قطر (d) برحسب میلیمتر به صورت زیر ارتباط دارد

$$\phi = -\log_2 d \quad (1.9.10)$$

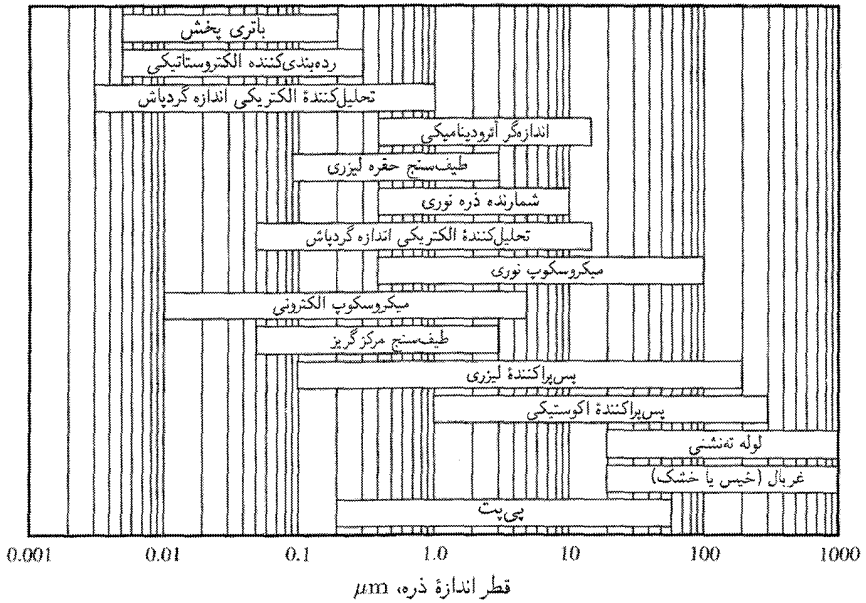
همچنین توجه کنید که بیشتر ذرات شکل بسیار نامنظمی دارند و قطر داده شده در رابطه بالا و در داخل شکل قطر کره‌ای است که حجم آن با حجم ذره با شکل نامنظم برابر است. شکل ۳۰.۱۰ نقشه انواع مختلف ابزار موجود برای اندازه‌گیری توزیع اندازه ذره است. همان‌طور که به‌سهولت دیده می‌شود، همپوشی قابل ملاحظه‌ای در گستره‌هایی است که هر وسیله می‌تواند اندازه بگیرد، و هندبوکهای مختلف روشهای اندازه‌گیری* عقیده دارند که سازگاری میان اندازه‌گیریهای ذره که با انواع مختلف ابزار انجام می‌شود برای کسب نتایج با کیفیت بالا خیلی اهمیت دارد. محدودیتهای زمانی و مالی اغلب مانع انجام چنین اندازه‌گیریهایی می‌شوند.

اصول کارکرد این ابزار به بعضی تظاهرات فیزیکی حاکم بر حرکت ذره ارتباط داده می‌شود. همان‌طور که در ابزار دیگر دیده می‌شود، به‌توصیف گسیل یا انتشار انرژی ارتباط داده می‌شود.

* مانند: Recommended Methods for Water. The National Handbook of Data Acquisition, U.S. Geological Survey, 1977

Technical definitions	Particle diameter: microns										
	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1,000	10,000	(1 cm)	
Common atmospheric dispersoids	Gas dispersoids	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
	Liquid Aerosols of International Std. Classification System adopted by Internat. Sec. Soil Sci. Since 1934	Solid	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
Typical particles and gas dispersoids	Gas										
	Solid	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
Terminal gravitational settling for spheres, sp. gr. 2.0	In Air at 25°C	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
	In Water at 25°C	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
Particle diffusion coefficient, cm ² /sec.	In Air at 25°C	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	
	In Water at 25°C	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	2 3 4 5 6 7 8	

شکل ۲۹.۱۰ نقشه انواع مختلف ذرات، اندازه‌ها در ردیفی آنها [تقسیم از مرجع ۲۳]



شکل ۳۰.۱۰ روشهای اندازه‌بندی ذره در گردپاشها و ذرات.

در یک ذره با اندازه بسیار کوچک پخش مولکولی ذره خیلی به اندازه ذره بستگی دارد. بنابراین، تعدادی از دستگاههای اندازه‌گیری اندازه ذره بر مبنای روشهای تمیز دادن مشخصات پخش کار می‌کنند. در بزرگترین مقیاسها از آهنگ ته‌نشینی دیفرانسیل یا جرم غوطه‌ور شده ذره برای تمیز دادن رده اندازه، با استفاده از لوله‌های انبارش بصری یا غربال ساده، استفاده می‌شود. در گستره‌های اندازه متوسط از انواع مختلف وسایل الکترومغناطیسی، اکوستیک، یا لیزری و نوری استفاده می‌شود. در اینجا درجه انتشار با انعکاس انرژی روی یک ذره توسط پایه ذره اندازه‌گیری می‌شود و با نظریه‌های مکانیکی تفرق به اندازه ذره ارتباط داده می‌شود.

بدون توجه به اینکه اصل کاربرد مورد استفاده چیست، هر ابزار اندازه‌گیری اساساً دارای نمودار ستونی داده‌هاست. نمودار ستونی از بازه‌های ذره با اندازه مساوی، که در گستره پیش‌بینی شده اندازه‌های نمونه قرار دارند، تشکیل می‌شود. اندازه‌گیر ذره تعداد یا جرم ذرات در هر گستره اندازه را اندازه می‌گیرد. نمودارهای ستونی کپه‌ای را از نمودارهای ستونی اندازه ذره نیز می‌توان ترسیم کرد. با اطلاعات حاصل از نمودار ستونی موجود، توصیفهای گوناگون درباره توزیع امکان‌پذیر است. ابتدا، اگر نمودار ستونی حول یک اندازه حاکم در یک گستره تنگ خوشه شده باشد، در این صورت نمونه را خوب ذخیره شده می‌گویند در حالی که گستره عریض در نمودار ستونی نمونه را خوب درجه‌بندی شده می‌گویند. قطر میانه (M_d) و قطر میانگین (M) توصیف‌کننده‌های معمولی اندازه

است. قطر میانه اندازه ذره‌ای است که به ازای آن وزن مساوی از ذرات کوچکتر و بزرگتر وجود دارد. بنابراین، قطر میانه کروی معادل به عنوان اندازه ذره d_{50} برحسب میلیمتر یا ϕ_{50} در آحاد فی گرفته می‌شود. با استفاده از آزمونهای آماری می‌توان بسیاری از نمودارهای ستونی را از مشخصه‌های توزیعشان تحلیل کرد. گستره وسیعی از نمودارهای ستونی اندازه ذره به صورتی که از توزیع اندازه نرمال لگاریتمی منشأ می‌گیرند رده‌بندی می‌شوند؛ این توزیعها با انحراف میانگین و انحراف استاندارد توزیع به‌طور کامل مشخص می‌شوند. اگر اندازه‌ای منطقاً با توزیع نرمال لگاریتمی به خوبی توصیف شود، در این صورت آمارهای زیر (بر مبنای قطر برحسب آحاد فی) معلوم است. قطر میانگین به صورت زیر به دست می‌آید

$$M_{\phi} = \frac{\phi_{16} + \phi_{50} + \phi_{84}}{3} \quad (2.9.10)$$

انحراف استاندارد عبارت است از

$$\sigma_{\phi} = \frac{\phi_{84} - \phi_{16}}{3} \quad (3.9.10)$$

و اعوجاج، که سنجشی از تقارن توزیع است، با رابطه زیر داده می‌شود

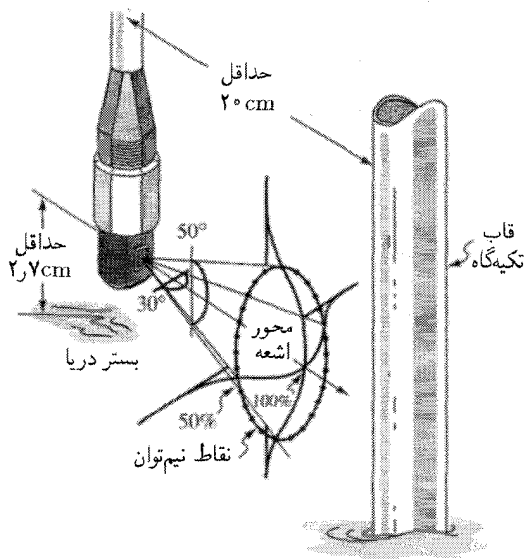
$$S_{\phi} = \frac{M_{\phi} - M_{d\phi}}{\sigma_{\phi}} \quad (4.9.10)$$

در این تعریفها ϕ_{84} قطر برحسب آحاد فی را نشان می‌دهد و بیان می‌کند که ۸۴ درصد وزنی نمونه را ذرات ریز تشکیل می‌دهند. ϕ_{84} ذره بسیار کوچک و ϕ_{16} ذره بزرگتر است. برخلاف اندازه‌گیریهای سرعت و دما، توسط حسگرهایی که در میدان شارش مستقیماً به‌طور مطلوب قرار می‌گیرند، تحلیل‌های اندازه ذره نتایج آزمایشگاهی است که به تحلیل آرام، و دقیق درباره نمونه‌هایی که از میدان یا مکان نمونه‌برداری گرفته می‌شوند نیاز دارند.

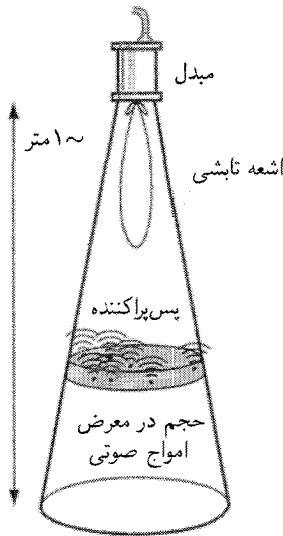
داده‌های غلظت

ابتدایی‌ترین و معمول‌ترین اندازه‌گیریهای غلظت از فعالیتهای اندازه‌بندی ذره ناشی می‌شوند. در این مشاهدات آزمایشگاهی، مخلوطی از حجم معین با تبخیر سیال، سوختن ماده آلی که می‌تواند قسمتی از نمونه اما نه قسمتی از ماده ذره باشد، و سپس وزن کردن نمونه باقیمانده تحلیل می‌شود. در این روش وزن یا جرم حجم واحد مخلوط تعیین می‌شود. این روش کاملاً وقتگیر است و با آن نمی‌توان اندازه‌گیریهای غلظت را در شرایط متلاطم سریعاً متغیر، که از مسائل محیطی است، انجام داد.

اندازه‌گیریهای مستقیم، مجموعه‌های زمانی غلظت در میدان با استفاده از وسایل نوری و صوتی انجام می‌شوند و یک‌بار دیگر می‌توان درجهٔ گسیختگی انتشار آنها را به غلظت ذره ارتباط داد و مبنای اندازه‌گیری را تشکیل داد. ابتدایی‌ترین وسایل برای اندازه‌گیری سریع غلظت آب‌برد در جای خود عبارت‌اند از ابرسنج، تراکسیل سنج یا تیرگی سنج، که یک منبع نور با توان و طیف مشخصی دارد؛ این نور در یک حجم نمونه‌برداری به طرف یک گیرنده فتودیود فرستاده می‌شود [مرجع ۲۴]. این وسایل پیش‌پراکننده کاهش انرژی را به غلظت ارتباط می‌دهند. منبع نور می‌تواند یک نوار طیف مرئی کامل باشد، و انواع جدیدتر آن از دیودهای گسیل‌کننده نور (LEDs) در نوارهای قرمز، سبز، و آبی استفاده می‌کنند تا اندازه‌گیری متمرکزتری روی اندازه‌های ذره انتخابی انجام شود. اندازه حجم نمونه‌برداری (طول مسیر ۲۵cm معمول است) باید به غلظت پیش‌بینی شده ارتباط داده شود زیرا اگر گیرنده خیلی دور باشد و غلظت خیلی زیاد باشد، در این صورت تمام نور قبل از اینکه درگیر حس شود ضعیف می‌شود. مفهوم پیش‌پراکننده مستلزم اندازه‌گیری نسبتاً کپهای و حجم نمونه‌برداری بزرگتر است. وسایل پس‌پراکننده نوری [مرجع ۲۵، ۲۶] به وجود آمده‌اند تا هم مسائل را بهبود بخشند و در نتیجه گسیختگی شارش، به خصوص نزدیک دیواره‌ها و مرزها، را کاهش دهند، و هم فرکانس نمونه‌برداری را افزایش دهند. شکل ۳۱.۱۰ طرحواره‌ای از این وسیله است. از LED مادون قرمز برای ایجاد تفکیک بهینه اندازهٔ دانه استفاده می‌شود، و از آنجا که طول مسیر کوتاه را در نزدیکی می‌توان قرار داد، تفکیک فضایی کاملاً ظریف امکان‌پذیر است.



شکل ۳۱.۱۰ وسیله نوری پس‌پراکننده.



شکل ۳۲.۱۰ وسیله پس‌پراکنندهٔ اکوستیک.

وسایل پس‌پراکنندهٔ اکوستیک (شکل ۳۲.۱۰) اخیراً برای اندازه‌گیری در جای خود وارد شده‌اند و با روش یکسان عمل می‌کنند. یک انفجار صوتی کاملاً هم‌خط (بادوام $5-10$ ثانیه) روی حجم نمونه فرستاده می‌شود و در یک ثانیه بعد رد زمانی سطح صوت منعکس شده از حجم نمونه اندازه‌گیری می‌شود. از آنجا که سرعت صوت کاملاً معلوم است و پراکندگی صوت اصولاً تحت تأثیر ذرات مجاور قرار نمی‌گیرد، انرژی صوتی دریافت شده از هر مکان در نمایه را می‌توان تعیین کرد و به غلظت ارتباط داد [مراجع ۲۷]. بنابراین، یک نمایه فضایی غلظت را با تفکیک کاملاً ظریف می‌توان اندازه‌گرفت. برای اندازه‌های منطقی رسوب، از صوت 3Mhz با حجم نمونه‌برداری 15m^3 و بازه‌های نمونه‌برداری 14cm استفاده شده است، و بنابراین، بیش از 10° اندازه‌گیری غلظت در هر نمونه‌برداری به دست آمده است. توزیعهای فضایی داده‌هایی که به‌طور لحظه‌ای جمع‌آوری شده باشند بسیار کمیاب هستند.

آهنگهای شار یا انتقال

در مقایسه مستقیم با قسمتهای قبل مربوط به وسایل آهنگ مجرا و سطح آزاد می‌توان چنین اندازه‌گیری داده‌ها را برای آهنگهای شارش یا انتقال جرم به کار برد. ولی، در اینجا نتایج، مانند

حالت روزنه یا شیوره، قابل اعتماد نیستند. دو نوع دادهٔ آهنگ انتقال وجود دارد، شکل بسیط یا آهنگ انتگرالی، و شکل شدتی یا آهنگ شار، کمیت شدتی یا آهنگ شار برای یک عنصر تنها، N ، از معادلهٔ (۷.۸.۴) برحسب بردار سرعت مخلوط، v ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N = -\mathcal{D}\nabla C + vC$$

N یک کمیت برداری است و ابعاد آن عبارت است از جرم متحرک در سطح واحد عمود بر شارش بر زمان $(M/L^2/t)$. اگر سرعت کل در امتداد خط جریان s باشد، در این صورت شار در امتداد خط جریان عبارت است از

$$N_s = -\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial s} + v_s C$$

خاصیت بسیط یا آهنگ انتگرالی اساساً جرم کل عبورکننده از سطح معین مقطع عرضی یک کانال در زمان واحد است، یعنی،

$$\dot{m} = \int N \cdot \hat{n} dA \quad (5.9.10)$$

که در آن ابعاد عبارت‌اند از (M/t) و \hat{n} بردار عمود واحد مساحت سطح است. برای مثال، اگر مقطع عرضی کانال تعریف شود و سرعت عمود بر آن در مقطع عرضی با $u(y, z)$ داده شود، در این صورت آهنگ بارگذاری کل رسوب، C ، که از مقطع عرضی می‌گذرد با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\dot{m} = \int \left(-\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial x} + uC \right) dA$$

به‌طور نوعی شار پخش مولکولی یا فیزیکی در مقایسه با مؤلفه ادوکتیو در شارشهای متلاطم خیلی کوچک است. بنابراین،

$$\dot{m} = \int uC dA \quad (6.9.10)$$

با استفاده از روشهای میانگین‌گیری رینولدز که در معادله‌های (۱.۴.۶) تا (۳.۴.۶) نشان داده شدند آهنگ بارگذاری متلاطم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\overline{\dot{m}}(t) = \int \overline{uC} dA = \int (\overline{u}\overline{C} + \overline{u'C'}) dA \quad (7.9.10)$$

و از سیمهای شار ادوکتیو و متلاطم تشکیل می‌شود.

از لحاظ تجاری هیچ ابزار اندازه‌گیری کاملی وجود ندارد که برای اندازه‌گیری شار یا تبدیل انتگرالی (هر دو) به کار رود. این داده‌ها را از اندازه‌گیریهای مستقل سرعت و غلظت باید به دست آورد؛ این اندازه‌گیریها سپس در ضمن تحلیل نرم‌افزاری ترکیب می‌شوند و قسمتی از آزمایش را نشان می‌دهند. همراه با این مشکلات، برخلاف نظریه‌های لایه مرزی هیدرودینامیکی که راهنمای نظری را برای اندازه‌گیری سرعت متوسط در ستون آب به وجود می‌آورند، هیچ نظریه لایه مرزی غلظت یکدست برای تعیین غلظت متوسط معادل با اندازه‌گیری در یک نقطه یا دو نقطه وجود ندارد. به علاوه، در شارشهای متلاطم با تکنولوژی اندازه‌گیری اغلب فقط می‌توان مؤلفه آدوکسیونی را اندازه گرفت نه شارهای رینولدز انتگرال را ($\int wC^2 dA$).

بنابراین، اندازه‌گیری داده‌های انتقال جرم خیلی مشکل است. با وجود این آنها در میان مهمترین داده‌های لازم برای مدیریت امروزه فرایند صنعتی و محیطی قرار دارند.

تمرینها

۱.۹.۱۰ ذرات خاک، دود تنباکو، احتراق، و گلبولهای قرمز خون (الف) همه سرعتهای ته‌نشینی در گستره $1(10^{-2})$ تا $5(10^0)$ cm/s دارند؛ (ب) از قطر ذره کروی معادل 10^0 تا 10^1 میکرون تغییر می‌کند؛ (ج) تمام در گستره اندازه ذره از 9ϕ تا 14ϕ واحد قرار دارند؛ (د) دارای مشخصه‌های معادل با ابر اتمسفریک و مه گردپاش هستند؛ (ه) تمام جوابهای بالا.

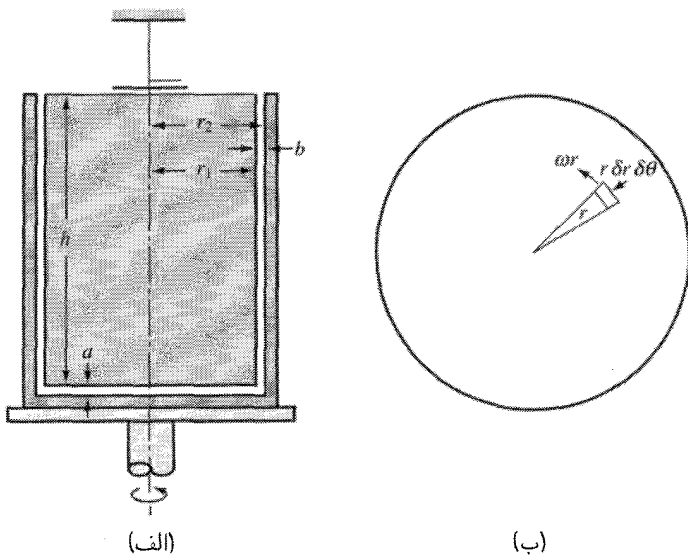
۲.۹.۱۰ برای ذرات در تمرین بالا، اندازه‌های ذره اندازه‌گیری می‌شوند با (الف) غربال‌کردن؛ (ب) پس‌پراکنده لیزری؛ (ج) رده‌بندی‌کننده الکتروستاتیکی؛ (د) میکروسکوپ الکترونی؛ (ه) ب و د. ۳.۹.۱۰ شارکل اکسیژن محلول در مقطع عرضی رودخانه (الف) تحت تأثیر شار متلاطم و پخشی قرار دارد؛ (ب) به طور خطی به سرعت متوسط مربوط می‌شود؛ (ج) در شرایط سیلاب تحت تأثیر مؤلفه‌های تلاطم و آدوکتیو قرار دارد؛ (د) به خطاهای اندازه‌گیری، در عبارتهای شار متلاطم حساس است؛ (ه) ج و د.

۱۰.۱۰ اندازه‌گیری چسبندگی

بررسی اندازه‌گیری سیال با بحث درباره تعیین چسبندگی خاتمه می‌یابد. چسبندگی را به چند طریق می‌توان اندازه گرفت: (۱) با استفاده از قانون چسبندگی نیوتن؛ (۲) با استفاده از معادله هاگن-پوازویل؛ (۳) با روشهایی که مستلزم درجه‌بندی با سیالاتی است که چسبندگی آنها معلوم باشد. با اندازه‌گیری شیب سرعت du/dy و تنش برشی τ ، طبق قانون چسبندگی نیوتن

$$[\text{معادله (۱.۲.۱)}]$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.10.10)$$



شکل ۳۳.۱۰ چسبندگی سنج استوانه‌ای هم‌مرکز.

چسبندگی دینامیکی یا چسبندگی مطلق را می‌توان محاسبه کرد. این بنیادیت‌ترین روش است، زیرا تمام کمیت‌های دیگر را در معادله معرف چسبندگی تعیین می‌کند. با استفاده از استوانه‌ای که با سرعت معلومی نسبت به یک استوانه ساکن هم‌مرکز داخلی دوران می‌کند، du/dy تعیین می‌شود. با اندازه‌گیری گشتاور وارد بر استوانه ساکن، تنش برشی را می‌توان محاسبه کرد. نسبت تنش برشی به آهنگ تغییر سرعت، چسبندگی را بیان می‌کند.

در شکل ۳۳.۱۰ الف، طرحی از یک چسبندگی سنج استوانه‌ای هم‌مرکز نشان داده شده است. وقتی سرعت چرخش N rpm و شعاع r_2 باشد. سرعت سیال در سطح استوانه خارجی $2\pi r_2 N / 60$ است. اگر لقی b باشد، داریم

$$\frac{du}{dy} = \frac{2\pi r_2 N}{60 b}$$

معادله بالا مبتنی بر $r_2 \ll b$ است. گشتاور T_c وارد بر استوانه داخلی را با یک سیم‌پیچی که استوانه از آن آویزان است اندازه‌گیری می‌کنند. با متصل کردن یک دیسک به سیم، دوران آن را با یک عقربه ثابت می‌توان تعیین کرد. اگر گشتاور ناشی از سیال زیر کف استوانه داخلی را در نظر نگیریم، تنش برشی برابر است با

$$\tau = \frac{T_c}{2\pi r_2^2 h}$$

با جایگذاری در معادله (۱.۱۰.۱۰) و محاسبه چسبندگی نتیجه می‌گیریم

$$\mu = \frac{15T_c b}{\pi^2 r_1^2 r_2 h N} \quad (2.10.10)$$

وقتی لقی a به قدری کوچک باشد که سهم کف در گشتاور قابل توجه شود، مقدار این سهم را برحسب چسبندگی می‌توان محاسبه کرد.
با مراجعه به شکل ۳۳.۱۰ ب، داریم

$$\delta T = r \tau \delta A = r \mu \frac{\omega r}{a} r \delta r \delta \theta$$

در رابطه بالا، ωr عبارت است از تغییر سرعت در فاصله a . با انتگرال‌گیری روی سطح دوار دیسک و با قراردادن $\omega = 2\pi N/60$ نتیجه می‌شود

$$T_d = \frac{\mu}{a} \frac{\pi}{360} N \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = \frac{\mu \pi^2}{a 60} N r_1^4 \quad (3.10.10)$$

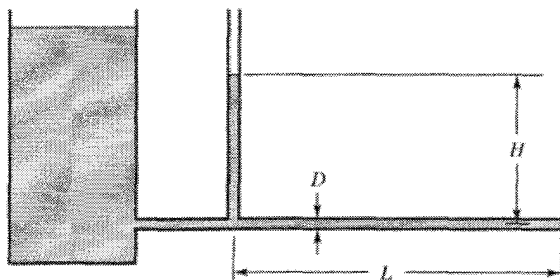
گشتاور ناشی از دیسک و استوانه باید مساوی گشتاور T در سیم‌پیچی باشند، به طوری که

$$T = \frac{\mu \pi^2 N r_1^4}{a 60} + \frac{\mu \pi^2 r_1^2 r_2 h N}{15 b} = \frac{\mu \pi^2 N r_1^2}{15} \left(\frac{r_1^2}{4a} + \frac{r_2 h}{b} \right) \quad (4.10.10)$$

که در آن، تمام کمیتها به جز μ معلوم‌اند. برای اینکه معادله‌های (۲.۱۰.۱۰) تا (۴.۱۰.۱۰) صحت داشته باشند، شارش بین سطوح باید آرام باشد.

اغلب، شکل هندسی استوانه داخلی را تغییر می‌دهند تا گشتاوری که بر سطح پایینی اثر می‌کند حذف شود. اگر سطح کف استوانه داخلی مقعر ساخته شود، مقداری هوا بین سطح کف استوانه داخلی و سیال داخل ناو چرخنده خارجی حبس می‌شود. با طراحی صحیح ناو و با استفاده از روش دقیقی در پر کردن، شرایطی به وجود می‌آید که به موجب آن گشتاور اندازه‌گیری شده متشکل می‌شود از گشتاوری که در طوق بین دو استوانه ایجاد می‌شود و یک مقدار جزئی که از اثر هوا بر سطح کف ناشی می‌شود. چسبندگی سنج طبعاً باید به یک حمام با دمای کنترل شده و یک محرک سرعت متغیر، که به دقت بتوان تنظیم کرد، مجهز باشد. چنین ظرافتهایی در طراحی برای به دست آوردن نمودارهای تغییر شکل (جلد اول، شکل ۲.۱) برای سیال تحت آزمایش ضرورت دارند.

اندازه‌گیری تمام کمیتها در معادله هاگن-پوازویل، به استثنای μ ، با آرایه‌های آزمایشی مناسب، روش بنیادی دیگری برای تعیین چسبندگی است. از آرایه مانند شکل ۳۴.۱۰ می‌توان استفاده کرد.

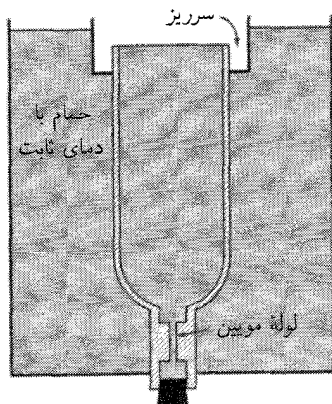


شکل ۳۴.۱۰ تعیین چسبندگی به‌توسط شارش در لوله موئین.

بعد از اینکه سیال وارد لوله شد، به فاصله‌ای نیاز است تا مشخصه توزیع سرعت آن ایجاد شود، بنابراین، هد یا فشار را در نقطه‌ای واقع در امتداد لوله باید با وسایلی اندازه‌گیری کرد. حجم \mathcal{V} شارش را در فاصله زمانی t درجایی که سطح مخزن در یک تراز ثابت نگه داشته می‌شود می‌توان اندازه گرفت. در نتیجه Q به دست می‌آید؛ و با تعیین γ ، Δp را می‌توان محاسبه کرد. سپس با معلوم بودن L و D ، از معادله (۱۰.۳.۶ الف) خواهیم داشت

$$\mu = \frac{\Delta p \pi D^4}{128 QL}$$

چسبندگی سنج سیولت (شکل ۳۵.۱۰) لوله موئین مناسبی برای مقاصد صنعتی است. از لوله موئین کوتاهی استفاده می‌شود، و زمان شارش 6 cm^3 سیال را در لوله در زیر هد سقوط اندازه‌گیری می‌کنند. سیولت زمان را برحسب ثانیه می‌خواند. این وسیله، همان‌طور که از



شکل ۳۵.۱۰ طرح یک چسبندگی‌سنج سیولت.

معادله (۱۰.۳.۶ الف) معلوم است، چسبندگی سینماتیکی را اندازه می‌گیرد. وقتی $\Delta p = \rho gh$ ،
 $Q = \frac{\nu}{t}$ ؛ و وقتی جمله‌های یکسان را بدون توجه به نوع سیال از هم جدا کنیم داریم

$$\frac{\mu}{\rho t} = \frac{gh\pi D^2}{128 \nu L} = C_1$$

هد h اگر چه در مدت آزمایش تغییر می‌کند، برای تمام مایعات در گسترهٔ یکسانی تغییر می‌کند؛
 و جملات دست راست را به عنوان ثابت یک ابزار مخصوص می‌توان در نظر گرفت. از آنجا که
 $\mu/\rho = \nu$ ، چسبندگی سینماتیکی عبارت است از

$$\nu = C_1 t$$

این رابطه نشان می‌دهد که چسبندگی سینماتیکی به‌طور مستقیم با زمان تغییر می‌کند. لولهٔ موئین
 خیلی کوتاه است، و بنابراین توزیع سرعت تثبیت نمی‌شود. شار تمایل دارد به‌طور یکنواخت وارد
 شود و بنابراین، به علت پسا‌شارهٔ چسبیده در دیواره‌ها، سرعت آن در آنجا کند می‌شود و در ناحیهٔ
 مرکزی زیاد می‌شود. یک تصحیح در معادلهٔ بالا ضروری است؛ این تصحیح به صورت C/t
 است؛ از این رو

$$\nu = C_1 t + \frac{C_2}{t}$$

رابطهٔ تقریبی زیر بین چسبندگی و ثابتهای سیبولت برقرار است:

$$\nu = 0.0022t - \frac{1.80}{t}$$

که در آن، ν برحسب استوکس و t برحسب ثانیه است.

برای اندازه‌گیری چسبندگی، بسیاری روشهای صنعتی دیگر نیز وجود دارد که عموماً برای هر
 حالت خاصی باید درجه‌بندی شوند تا به آحاد مطلق تبدیل شوند. یکی از این روشها شامل استفاده
 از چند لوله است که مایعات «استاندارد» را با چسبندگیهای معلوم درجه‌بندی شده در برمی‌گیرند،
 و در هر لوله یک ساچمهٔ فولادی قرار دارد. زمانی که طول می‌کشد تا ساچمه در لوله سقوط کند
 به چسبندگی مایع بستگی دارد. با ریختن مایع نمونهٔ آزمایشی در لوله‌ای مشابه لوله‌های دیگر،
 چسبندگی آن را در مقایسه با لوله‌های دیگر می‌توان تخمین زد.

شارش سیال در لولهٔ موئین مبنای چسبنده‌سنجهای نوع اوسوالد-سکانون-فنسکه، یا ابلود
 است. در اصل، چسبندگی‌سنج یک لولهٔ U شکل است که یک ساق آن لولهٔ موئین ظریفی

است که به‌مخزنی در بالا متصل است. لوله به‌طور عمودی نگه داشته می‌شود، مقدار معلومی از سیال را در مخزن می‌ریزند و می‌گذارند تا سیال تحت تأثیر گرانی در لوله موئین جریان یابد. زمان لازم برای اینکه سطح آزاد بین دو علامت مشخص شده پایین آید ثابت می‌کنند. در ثابت درجه‌بندی برای هر ابزار، اختلاف قطر سوراخ لوله موئین با حد استاندارد، یکنواختی سوراخ، شرایط مدخل، و ناپایایی جزئی ناشی از کاهش هد در ۱ تا ۲ دقیقه آزمایش موردنظر قرار می‌گیرد. برای گستره وسیعی از چسبندگی، اندازه‌های مختلف سوراخ را می‌توان به‌دست آورد. برای انجام آزمایشها در استانداردهای انجمن آزمون و مواد امریکا روشهای دقیقی وجود دارد.

تمرین

۱۰.۱۰.۱۰ یک چسبندگی سنج خانگی از نوع سیبولت با دو اندازه‌گیری با مایعاتی با چسبندگی سینماتیکی معلوم درجه‌بندی می‌شود. برای $t = ۰.۴۶۱ \text{ s}$ داریم $\nu = ۰.۱۸ \text{ St}$ و برای $t = ۰.۹۷ \text{ s}$ داریم $\nu = ۰.۴۶۱ \text{ St}$ در رابطه $\nu = C_1 t + C_2/t$ عبارت‌اند از

(الف) $C_1 = ۰.۰۰۰۵$; (ب) $C_1 = ۰.۰۰۴۴$

$C_2 = -۰.۲۳$; $C_2 = ۰.۳۶$

(ج) $C_1 = ۰.۰۰۴۶$; (د) $C_1 = ۰.۰۰۳۱۷$

$C_2 = ۰.۱۴۹۵$; $C_2 = ۰.۱۴۹۵$

(ه) هیچکدام.

مسائل

۱۰.۱۰ در یک کانال آزمایشگاهی، سرعت شارش در یک نقطه با دقت زیاد ۱۱.۰ cm/s است. از یک وسیله اندازه‌گیری برای به‌دست آوردن داده‌های زیر در آن نقطه استفاده شده است.

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$u(\text{cm/s})$	۱۱.۷۲	۱۱.۵۰	۱۱.۱۲	۱۰.۹۱	۱۰.۷۳	۱۰.۷۱	۱۰.۸۲	۱۰.۹۴	۱۰.۹۹	۱۱.۱۲

خطاهای مطلق، نسبی و درصدی را محاسبه کنید.

۲.۱۰ برای داده‌ها در مسئله ۱۰.۱۰، سرعت میانگین، تخمین خطا (محتملترین)، انحراف استاندارد، و خطای rms را محاسبه کنید.

۳.۱۰ یک لوله استاتیکی (شکل ۲.۱۰ ب) نشان می‌دهد که فشار استاتیکی ۱kPa برای وقتی که مایع با سرعت ۲m/s جریان دارد خیلی کم است. وقتی مایع با سرعت ۵m/s جریان دارد، تصحیحی را که برای فشار نشان داده شده باید به کار برد محاسبه کنید.

۴.۱۰ چهار دهانه پیزومترکه در یک مقطع لوله چدنی قرار دارند همزمان فشارهای زیر را می‌خوانند: ۴۳، ۴۲٫۶، ۴۲٫۴، ۳۷ میلی‌متر جیوه، کدام مقدار فشار را باید در نظر گرفت؟

۵.۱۰ برای درک بهتر رفتار ضریب پاسخ فشار، K_{z^*} ، یک تابع سینوسی را برای نشان دادن سیگنال فشار ایدئالی انتخاب کنید. از طول موج، $L = 2\pi$ ، عمق $z^* = 10^\circ$ استفاده کنید. نمودار رد زمانی فشار، $p(z^*, t)$ ، و ارتفاع سطح آب، $\eta(t)$ ، را روی یک نمودار رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید. برای این نوع موج، بهترین مقدار C_0 چقدر است؟

۶.۱۰ یک لوله پیتو ساده (شکل ۶.۱۰) در یک جریان کوچک روغن قرار می‌گیرد، $\mu = 0.065 \text{ Pas}$ ، $\gamma = 8.6 \text{ kN/m}^3$ ، $\Delta h = 38 \text{ mm}$ ، $h_0 = 125 \text{ mm}$. سرعت در نقطه ۱ است؟

۷.۱۰ جسم ساکنی در رودخانه‌ای غوطه‌ور است، و بر عمق ۵٫۴m زیر سطح آزاد، فشار ماکزیمم ۶۹kPa بر آن وارد می‌شود. سرعت رودخانه را در این عمق محاسبه کنید.

۸.۱۰ از شکل ۷.۱۰ معادله‌ای برای سرعت در نقطه ۱ استنتاج کنید.

۹.۱۰ در شکل ۷.۱۰ هوا جریان دارد ($p = 110 \text{ kPa}$ و $t = 5^\circ \text{C}$)، و در فشارسنج، آب است. در $R' = 30 \text{ mm}$ ، سرعت هوا را محاسبه کنید.

۱۰.۱۰ یک لوله استاتیکی پیتو که در امتداد جریان آب با سرعت ۴m/s قرار دارد، اختلاف پیمانه‌ای ۳۷mm را روی یک فشارسنج تفاضلی آب-جیوه نشان می‌دهد. ضریب لوله را تعیین کنید. ۱۱.۱۰ یک لوله استاتیکی پیتو، $C = 1.12$ ، وقتی در امتداد جریان آب قرار می‌گیرد، اختلاف پیمانه‌ای ۱۰mm را روی یک فشارسنج آب-جیوه نشان می‌دهد. سرعت را محاسبه کنید.

۱۲.۱۰ یک لوله استاتیکی پیتو از نوع لوله پرانتل مقادیر اختلاف پیمانه‌ای R' زیر را در فاصله شعاعی از مرکز لوله‌ای به قطر ۳ft داراست:

r , ft	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۴٫۸
R , in	۴٫۰۰	۳٫۹۱	۳٫۷۶	۳٫۴۶	۳٫۰۲	۲٫۴۰

آب جریان دارد، و چگالی نسبی سیال ۲٫۹۳ است. تخلیه را حساب کنید. ۱۳.۱۰ اختلاف پیمانه‌ای روی یک فشارسنج آب-نیتروژن در شارش نیتروژن با سرعت ۲۰۰m/s، با استفاده از یک لوله استاتیکی پیتو، چقدر است؟ فشار استاتیکی ۱۷۵kPa مطلق و دمای متناظر با آن 25°C است. فشار استاتیکی با لوله پیتو اندازه‌گیری می‌شود.

۱۴.۱۰ جابه‌جایی حجمی یک سنجه دیسکی در یک نوسان کامل 27cm^3 است. مقدار شارش را، برحسب لیتر بر دقیقه، برای 86.5 نوسان بر دقیقه محاسبه کنید.

۱۵.۱۰ یک سنجه دیسکی آبی با جابه‌جایی حجمی 40cm^3 در هر نوسان، در 47° نوسان در دقیقه 32L/s آب عبور می‌دهد و در 384° نوسان در دقیقه 2.57L/s درصد خطا یا لغزش را در سنجه محاسبه کنید.

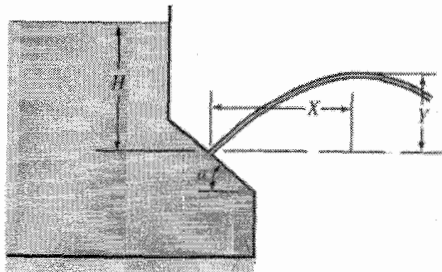
۱۶.۱۰ یک مخزن حجمی به قطر 4ft و ارتفاع 5ft در 16min و 32.4s پراز روغن شده است. تخلیه متوسط مخزن در دقیقه چقدر است؟

۱۷.۱۰ یک مخزن وزنی 75N مایع، $S = 86\text{sp gr}$ را در 14.9s دریافت می‌کند. آهنگ شارش برحسب لیتر در دقیقه چقدر است؟

۱۸.۱۰ معادله مسیر یک جت را که از سوراخ کوچکی به هد 6m و با ضریب سرعت 96m/s به‌طور افقی تخلیه می‌شود تعیین کنید. از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود.

۱۹.۱۰ سوراخی با مساحت 30cm^2 در یک صفحه قائم هد 1m از روغن، $S = 91\text{sp gr}$ را دارد. از سوراخ 6790N روغن در 79.3s تخلیه می‌شود. اندازه‌گیرهای مسیر نشان می‌دهند که $x_0 = 225\text{m}$ و $y_0 = 123\text{m}$ را تعیین کنید.

۲۰.۱۰ مطلوب است Y ، خیز ماکزیمم جت نسبت به صفحه مورب (شکل 36.10) برحسب H و α . از اتلافها صرف‌نظر شود.



شکل ۳۶.۱۰ مسائل ۲۰.۱۰، ۲۱.۱۰ و ۲۲.۱۰

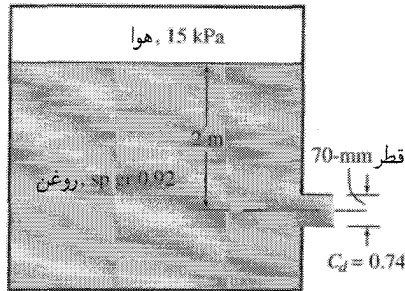
۲۱.۱۰ در شکل 36.10 در $\alpha = 45^\circ$ داریم $Y = 48H$. با صرف‌نظر از مقاومت هوای جت، C_v سوراخ را پیدا کنید.

۲۲.۱۰ نشان دهید که مکان هندسی نقاط ماکزیمم جت از شکل 36.10 ، با صرف‌نظر از اتلافها، با رابطه $X^2 = 4Y(H - Y)$ داده می‌شود.

۲۳.۱۰ یک سوراخ به قطر 75mm مقدار 18m^3 مایع، $S = 1.07$ را در 82.2s زیر هد 275m تخلیه می‌کند. سرعت در انقباض ونا توسط یک لوله استاتیکی پیتو با ضریب 1 تعیین

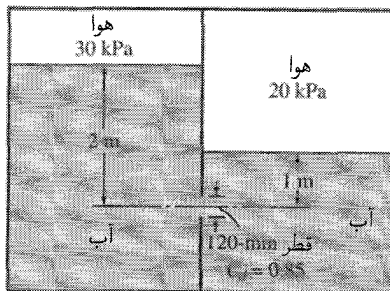
می‌شود. مایع فشارسنج استیلین تترابرمید با $S = ۲۹۶$ است، و اختلاف پیمانه‌ای عبارت است از $۱۰^{\circ}۲m$ $R' =$ مطلوب است C_v ، C_c و C_d .

۲۴.۱° از سوراخی به قطر $۱۰^{\circ}mm$ مقدار $۴۴۶L/s$ آب زیر هِد $۲۷۵m$ تخلیه می‌شود. برای مقاومت در برابر ضربه جت وارد بر صفحه صافی عمود بر جت، که درست در فرودست انقباض ونا قرار دارد نیروی $۳۲^{\circ}N$ مورد نیاز است. مطلوب است C_d ، C_v و C_c .
 ۲۵.۱° میزان تخلیه را از مخزن نشان داده شده در شکل ۳۷.۱° محاسبه کرد.



شکل ۳۷.۱° مسائل ۲۵.۱° و ۲۶.۱° .

۲۶.۱° در شکل ۳۷.۱° برای $۳۷.۹۶^{\circ} = C_v$ ، اتلافها را برحسب متر-نیوتن بر نیوتن و برحسب متر-نیوتن بر ثانیه محاسبه کنید.
 ۲۷.۱° تخلیه را از روزنه شکل ۳۸.۱° محاسبه کنید.



شکل ۳۸.۱° مسائل ۲۷.۱° ، ۲۸.۱° و ۲۹.۱° .

۲۸.۱° در شکل ۳۸.۱° برای $۳۸.۹۳^{\circ} = C_v$ ، اتلافها را برحسب ژول بر نیوتن و برحسب وات تعیین کنید.
 ۲۹.۱° در شکل ۳۸.۱° فشارهای هوا مطلق است، و شرایط تکدما در شارش برقرار است. در

سمت چپ حجم هوا برابر است با $V_1 = 1\text{m}^3$ و $A_1 = 1\text{m}^2$. در سمت راست $A_2 = 1.5\text{m}^2$. شرایط را در ۱۲s محاسبه کنید.

۳۰.۱۰ روزنه‌ای به قطر ۴in مقدار 1.6°cfs مایع را زیر هد 11.8ft تخلیه می‌کند. قطر جت در انقباض ونا با کولیس‌گذاری 3.47in تعیین می‌شود. مطلوب است C_v , C_d و C_c .
 ۳۱.۱۰ دهانهٔ بوردا به قطر 5°mm و به ضریب تخلیهٔ 0.51 مفروض است. قطر جت خروجی چقدر است؟

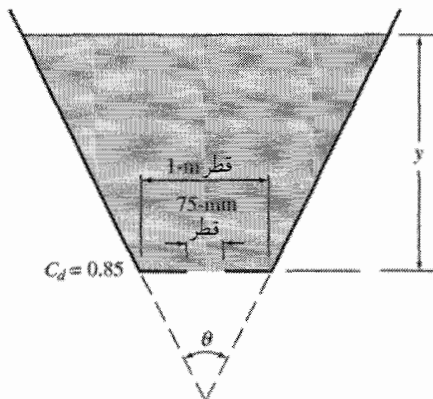
۳۲.۱۰ روزنه‌ای به قطر 75mm ، 82° ، $C_d = 0.82$ ، در کف یک مخزن قائم به قطر 1.5m قرار دارد. چه مدت طول می‌کشد تا سطح مخزن از ارتفاع 3m به 2.5m کاهش یابد.

۳۳.۱۰ اندازهٔ روزنه‌ای را انتخاب کنید که در هد 3.35m روی آن، سطح افقی مخزن به مساحت 1.5m^2 با آهنگ 16°mm/s پایین آید. $C_d = 0.63$.

۳۴.۱۰ روزنه‌ای به قطر 10°mm در سطح جانبی مخزنی به قطر 1.83m سطح مخزن را در عرض 83.7s از 2.44m بالای روزنه به 1.22m بالای روزنه می‌کشد. ضریب تخلیه را محاسبه کنید.

۳۵.۱۰ مخزنی را با چنان اندازه و شکلی انتخاب کنید که در شارش از روزنه‌ای به قطر 10°mm ، سطح مایع در مسافت 3m با آهنگ 1m/min سقوط کند. $C_d = 0.74$.

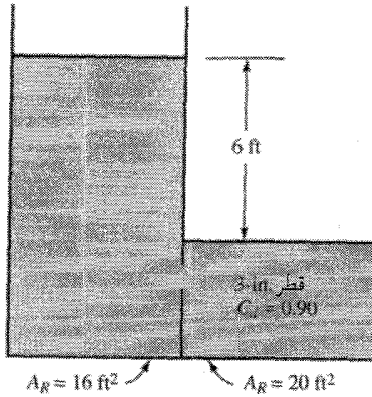
۳۶.۱۰ در شکل 39.10 ، زاویهٔ مخروط ناقص $\theta = 6^\circ$ است. چه مدت طول می‌کشد تا سطح مایع از $y = 4\text{m}$ تا $y = 1\text{m}$ پایین آید؟



شکل ۳۹.۱۰ مسئله ۳۶.۱۰

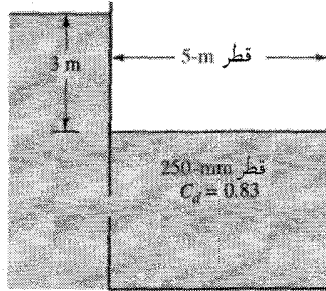
۳۷.۱۰ ابعاد یک مخزن را طوری انتخاب کنید که سرعت سطحی به‌طور معکوس با فاصله از خط مرکزی روزنه‌ای که مخزن را تخلیه می‌کند متناسب باشد. وقتی هد 30°mm است، سرعت پایین‌آمدن سطح 3°mm/s است؛ قطر روزنه 12.5mm و $C_d = 0.66$ است.

۳۸.۱۰ زمان لازم را برای بالا رفتن سطح دست راست شکل ۴۰.۱۰ به میزان ۲ft تعیین کنید.



شکل ۴۰.۱۰ مسئله ۳۸.۱۰.

۳۹.۱۰ چه مدت طول می‌کشد تا سطح آب شکل ۴۱.۱۰ به میزان ۲m بالا رود؟ سطح دست چپ یک مخزن بزرگ است که ارتفاع سطح آب آن ثابت است.



شکل ۴۱.۱۰ مسئله ۳۹.۱۰.

۴۰.۱۰ نشان دهید که در شارش تراکم‌ناپذیر اتلافها بین مقطع فرادست و گلوگاه یک سنجه و نتوری، تقسیم بر نیروی گرانی واحد سیال عبارت است از $KV^2/2g$ که در آن،

$$K = \left[\left(\frac{1}{C_v} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(1 - \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]$$

۴۱.۱۰ یک سنجه و نتوری ۴m در ۲m آب 25°C را حمل می‌کند. فشارسنج تفاضلی آب-هوا، اختلاف پیمانه‌ای ۶۰mm را نشان می‌دهد. تخلیه چقدر است؟

۴۲.۱۰ اختلاف فشار بین مقطع فرادست و گلوگاه یک سنجه و نتوری افقی ۱۵۰mm در ۷۵mm که 5 L/s آب 48°C را حمل می‌کند، چقدر است؟

۴۳.۱۰ یک سنجهٔ ونتوری ۱۲in در ۶in بر لوله‌ای قائم با شارش رو به بالا نصب می‌شود. ۲۵۰gpm روغن، $S = ۰.۸$ ، $P = ۰.۱$ ، در لوله جریان دارد. مقطع گلوگاه ۶in بالای مقطع فرادست است. $p_1 - p_2$ چقدر است؟

۴۴.۱۰ در یک سنجهٔ ونتوری به قطر گلوگاه ۳.۰mm، $C_v = ۰.۹۷$ ، که در داخل یک لوله به قطر ۵۵mm قرار دارد هوا جریان دارد. در $p_1 = ۸۳۰$ kPa و $t_1 = ۱۵^\circ\text{C}$ ، $p_2 = ۵۵۰$ kPa میزان جرم جاری در یک ثانیه را محاسبه کنید.

۴۵.۱۰ اکسیژن در $p_1 = ۲۸۰$ kPa، $t_1 = ۵^\circ\text{C}$ ، در یک سنجهٔ ونتوری $۱\text{cm} \times ۲$ با افت فشار ۴۲kPa جریان دارد. میزان جرم جاری در یک ثانیه و سرعت در گلوگاه را پیدا کنید.

۴۶.۱۰ در یک شیپورهٔ شارش ISA به قطر ۸۰mm که در داخل لوله‌ای به قطر ۱۲۰mm واقع است هوا جریان دارد. $p_1 = ۱۵۰$ kPa؛ $t_1 = ۵^\circ\text{C}$ ؛ و فشارسنج تفاضلی با مایع ۲۹۳، $S = ۲.۹۳$ ، وقتی بین دو اتصال فشار قرار می‌گیرد اختلاف پیمانه‌ای ۸m را نشان می‌دهد. آهنگ شارش جرم را محاسبه کنید.

۴۷.۱۰ یک شیپورهٔ ISA به قطر ۲.۵in برای اندازه‌گیری شارش آب ۴۰°F داخل یک لوله به قطر ۶in مورد استفاده قرار می‌گیرد. اختلاف پیمانه‌ای لازم در فشارسنج آب-جیوه در ۳۰gpm چقدر است؟
۴۸.۱۰ تخلیهٔ آب ۲۰°C را در یک خط لوله به قطر ۳۰۰mm از طریق یک روزنهٔ VDI به قطر ۱۶۰mm محاسبه کنید. اختلاف پیمانه‌ای در یک فشارسنج تفاضلی استینن تترابرومید $(S = ۲.۹۴)$ — آب مساوی ۳۰۰mm است.

۴۹.۱۰ یک روزنهٔ VDI به قطر ۱۰mm در لوله‌ای به قطر ۲۵mm نصب می‌شود. لوله حامل نیتروژن با $p_1 = ۸$ atm و $t_1 = ۵۰^\circ\text{C}$ است. اگر افت فشار در روزنه ۱۴۰kPa باشد، آهنگ شارش جرم را محاسبه کنید.

۵۰.۱۰ در یک مجرای مربعی به ضلع ۱m که روزنه‌ای با لبهٔ تیز به قطر ۵۰mm دارد، هوا در ۱atm و $t = ۲۱^\circ\text{C}$ جریان دارد. اگر افت هد در روزنه $۶۰\text{mmH}_2\text{O}$ باشد، شارش را برحسب مترمکعب در دقیقه محاسبه کنید.

۵۱.۱۰ یک روزنهٔ VDI به قطر ۶in در یک خط جریان روغن، $\mu = ۶\text{cP}$ ، $\gamma = ۵۲\text{lb/ft}^۳$ ، به قطر ۱۲in نصب می‌شود. از فشارسنج تفاضلی روغن-هوا استفاده می‌شود. در اختلاف پیمانه‌ای ۲۰in آهنگ شارش را تعیین کنید.

۵۲.۱۰ یک سرریز نوک‌تیز مستطیلی به طول ۴m با انقباضهای انتهایی متوقف شده، به ارتفاع ۱.۳m مفروض است. وقتی هد روی سرریز ۲۰۰mm است تخلیه را تعیین کنید.

۵۳.۱۰ در شکل ۲۳.۱۰، $L = ۲.۴\text{m}$ ، $P = ۰.۵۴\text{m}$ و $H = ۰.۲۴\text{m}$. تخلیه از روی سرریز را تخمین بزنید $C = ۳.۳۳$.

۵۴.۱۰ یک سرریز نوک‌تیز مستطیلی با انقباضهای انتهایی به طول ۱٫۵m مفروض است. تا چه ارتفاعی باید آن را در کانال قرار داد تا عمق فرادست را در شارش $۴۵\text{m}^3/\text{s}$ به مقدار ۲٫۲۵m نگه دارد.

۵۵.۱۰ هد روی یک سرریز با شکاف $V = ۶^\circ$ را برای تخلیه ۱۷L/s تعیین کنید.

۵۶.۱۰ آزمایشها روی یک سرریز با شکاف $V = ۹^\circ$ نتایج زیر را داده است: $H = ۱۸۰\text{mm}$,

$Q = ۱۹٫۴\text{L/s}$, $H = ۴۱۰\text{mm}$ و $Q = ۱۵۰\text{L/s}$. فرمولی برای سرریز تعیین کنید.

۵۷.۱۰ یک سرریز نوک تیز مستطیلی به طول ۳ft با انقباضهای انتهایی متوقف‌شده و یک سرریز با شکاف $V = ۹^\circ$ در یک جعبه سرریز طوری قرار دارند که رأس سرریز با شکاف $V = ۹^\circ$ در ۶in زیر نوک سرریز مستطیلی قرار دارد. مطلوب است هد روی سرریز با شکاف V (الف) وقتی تخلیه‌ها مساوی‌اند؛ (ب) وقتی تخلیه در سرریز مستطیلی نسبت به تخلیه در سرریز با شکاف V در بیشترین مقدار خود است.

۵۸.۱۰ یک سرریز نوک‌پهن به ارتفاع ۱٫۶m و طول ۳m دارای گوشه فرادست خوب گردشده‌ای است. هد لازم بر روی سرریز برای شارش $۲٫۸۵\text{m}^3/\text{s}$ چقدر است؟

۵۹.۱۰ آنالیز غربالی یک نمونه شن زوجهای داده زیر را داده است. در این داده‌ها اندازه دهانه برحسب mm و جرم نگه داشته شده برحسب گرم است. توزیع فرکانس توده‌ای را در کاغذ لگاریتمی رسم کنید و قطر میانه فی، قطر میانگین فی، انحراف فی، و چاولگی فی را بیابید.

۰٫۰۶	۰٫۰۸	۰٫۱۲۵	۰٫۱۷۷	۰٫۲۵۰	۰٫۳۵۳	۰٫۵۰۰	۰٫۷۰۷	۱٫۰۰۰	۱٫۴۱۴	۲٫۰۰۰	اندازه (mm)
۱٫۹	۵٫۰	۱۵٫۳	۱۷٫۷	۲۴٫۱	۲۷٫۸	۶٫۲	۱٫۷	۰٫۳	۰	۱	جرم (gr)

۶۰.۱۰ از مکانی واقع در ساحل شرقی آمریکا، جایی که یک خاکریز بزرگ شنی ساخته شده، دو نمونه شن گرفته شده است. گستره اندازه شن با غربال‌کردن، با استفاده از یک غربال صوتی یا تکان‌دهنده، تعیین می‌شود. نتایج آنالیز اندازه شن در جدول زیر آمده است

۴۰	۲٫۷۵	۱٫۷۵	۰٫۷۵	۰٫۲۵	۰٫۲۵	-۰٫۲۵	-۱	-۲٫۲۵	اندازه (ϕ)
۰	۴٫۴	۵٫۹۲	۳۰٫۶	۲٫۹	۱٫۴	۰٫۸	۰٫۶	۰	S۱ (%)
۰	۳٫۹	۵۲٫۸	۳۶٫۷	۳٫۸	۱٫۹	۰٫۶	۰٫۳	۰	S۲ (%)

قطر میانه و قطر میانگین، انحراف استاندارد، و چاولگی را در آحاد فی و برحسب میلیمتر بیابید. ۶۱.۱۰ لقی بین یک دیسک دوار به قطر ۱۸۰mm و یک صفحه صاف مساوی ۳mm است. وقتی این لقی شامل روغن، $\mu = ۰٫۸$ باشد، چه گشتاوری برای دوران دیسک با سرعت ۸۰۰rpm لازم است؟

۶۲.۱۰ چسبندگی سنج استوانه‌ای هم‌مرکز (شکل ۳۳.۱۰ الف) ابعاد زیر را دارد: $a = ۰.۱۲ \text{ in}$ و $b = ۰.۰۵ \text{ in}$ ، $r_1 = ۲.۸ \text{ in}$ ، $h = ۶.۰ \text{ in}$ و وقتی سرعت ۱۶۰ rpm است، گشتاور ۲.۰ lb.in است. چسبندگی چقدر است؟
 ۶۳.۱۰ در دستگاه شکل ۳۴.۱۰ داریم: $D = ۰.۵ \text{ mm}$ ، $L = ۱ \text{ m}$ و $H = ۰.۷۵ \text{ m}$ و $S = ۰.۸۳ \text{ cm}^2$ در ۱ h و ۳.۰ min تخلیه شده است. چسبندگی بر حسب پواز چقدر است؟

مراجع

1. Doebelin, E.O., *Measurement Systems*, McGraw-Hill, New York, 1992.
2. E. Rabinowicz, *An Introduction to Experimentation*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.
3. P. Bevington and D. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill, New York, 1992.
4. P. Horowitz and W. Hill, *The Art of Electronics*, Cambridge University Press, New York, 1993.
5. S. Thorpe, E. Collins, and D. Gaunt, "An Electromagnetic Current Meter to Measure Turbulent Fluctuations Near the Ocean Floor," *Deep Sea Research*, vol. 20, pp. 933-938, 1973.
6. A. Heathershaw, "Measurements of Turbulence in the Irish Sea Benthic Boundary Layer," in *The Benthic Boundary Layer*, ed. I. N. McCave, Plenum Publ. Co., New York, pp. 11-31, 1976.
7. R. Soulsby, "Measurements of the Reynolds Stress Components Close to a Marine Sand Bank," *Marine Geology*, vol. 98, pp. 7-16, 1981.
8. D. Aubrey and J. Trowbridge, "Kinematic and Dynamic Estimates from Electromagnetic Current Meter Data," *J. Geophys. Res.*, vol. 90, pp. 9137-9146, 1985.
9. Y. Ludwig, "Instrument for Measuring the Wall Shearing Stress of Turbulent Boundary Layers," *Tecn. Memo 1284*, National Advisory Commission for Aeronautics, 22 pp., 1950.
10. G. Gust, "Tools for Oceanic Small-Scale, High Frequency Flows: Metal Clad Hot Wires," *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 447-455, 1982.
11. G. Gust and G. Weatherly, "Velocities, Turbulence and Skin Friction in a Deep-Sea Logarithmic Layer," *J. Geophys. Res.*, vol. 90, pp. 4779-4792, 1985.
12. C. Yeh and H. Cummins, "Localized Fluid Flow Measurements with a Helium Neon Laser Spectrometer," *Applied Physics Letters*, vol. 4, pp. 176-178, 1964.
13. P. Buchave, W. George, and J. Lumley, "The Measurement of Turbulence with the Laser Doppler Velocimeter," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 11, pp. 443-505, 1979.
14. L. Drain, *The Laser Doppler Techniques*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1980.

15. C. Veth, "A Small Scale Velocimeter for Turbulence Studies in the Sea," in *Marine Turbulence*, ed. J. C. Nihoul, Elsevier Press, New York, pp. 303–319, 1980.
16. Y. Agrawal, "Quadrature Demodulation in Laser Doppler Velocimetry," *Applied Optics*, vol. 23, pp. 1685–1686, 1984.
17. Y. Agrawal, "A CCD Chirp-Z FFT Doppler Signal Processor for Laser Velocimetry," *Journal of Physics (Engineering)*, vol. 17, pp. 458–461, 1984.
18. Y. Agrawal and C. Belting, "Optical Aspects of Laser Doppler Velocimetry on the Sea Floor and in Surface Layers," *Ocean Optics VIII. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineering*, pp. 272–76, 1986.
19. Y. Agrawal and J. Riley, "Directional Laser Velocimetry Without Frequency Biasing: Part II," *Applied Optics*, vol. 23, pp. 57–60, 1984.
20. A. Williams III, J. Tochko, R. Koehler, et al. "Measurement of Turbulence in the Oceanic Bottom Boundary Layer with an Acoustic Current Meter Array," *J. Atmos. Oceanic Tech.*, vol. 4, pp. 312–327, 1987.
21. W. M. Lansford, "The Use of an Elbow in a Pipe Line for Determining the Rate of Flow in a Pipe," *Univ. Ill. Eng. Exp. Stn. Bull.* 289, December 1936.
22. J. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw Hill, New York, 1992.
23. C. E. Lapple, "The Little Things in Life," *Stanford Research Inst. Journal*, vol. 5, pp. 95–102, 1962.
24. R. Bartz, R. Zanewald, and H. Park, "A Transmissometer for Profiling and Mooring Observations in Water," *Society of Photo-Optical Instrument Engineers*, vol. 160, pp. 102–108, 1978.
25. J. Downing, R. Sternberg, and C. Lister, "New Instrumentation for the Investigation of Sediment Suspension Processes in the Shallow Marine Environment," *Marine Geology*, vol. 42, pp. 19–34, 1981.
26. D&A Instruments, "Optical Backscatterance Turbidity Monitor," *Instruction Manual, D&A Instruments and Engineering*, 2428 39th St. N.W., Washington, D.C. 20007, 1988.
27. C. Libicki, K. Bedford, and J. Lynch, "The Interpretation and Evaluation of a 3 MHz Acoustic Device for Measuring Benthic Boundary Layer Sediment Dynamics," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 85, pp. 1501–1511, 1989.

توربوماشینها

برای چرخاندن جریان سیال یا تغییر دادن مقدار سرعت آن لازم است که نیروهایی به کار بریم. وقتی پره متحرکی یک جت سیال را منحرف کند و تکانه آن را تغییر دهد، نیروهایی بین پره و جت اعمال می‌شود و بر اثر جابه‌جایی پره کار صورت می‌گیرد. در توربوماشینها از این اصل استفاده می‌شود: پمپها، دمنده‌ها، و کمپرسورها، اعم از محوری و مرکز‌گیز، با انجام کار مداوم بر روی سیال بر انرژی آن می‌افزایند؛ توربینهای ضربه‌ای، فرانسیس، و پیشرانه‌ای و توربینهای بخاری و گازی دائماً از سیال انرژی می‌گیرند و به گشتاور تبدیل می‌کنند، که این گشتاور بر یک محور (میل‌گردان) وارد می‌شود؛ در جفتگاه (کوپلینگ) سیال و مبدل گشتاور، که هر کدام متشکل از یک پمپ و یک توربین هستند، از سیال برای انتقال یکتواخت توان استفاده می‌شود. در طراحی توربوماشینهای کارآمد هم از نظریه و هم از آزمایش استفاده می‌کنند. با کاربرد نظریه مدلهای مقیاس‌بندی‌شده، که در بخش ۵.۴ نشان داده شد، طراحی صحیح با اندازه و سرعت مفروض را می‌توان به سهولت با سرعتهای دیگر و اندازه‌های هندسه‌مشابه دیگر سازگار کرد.

در این فصل، با در نظر گرفتن دستگاههای مشابه و سرعت ویژه، ابتدا درباره رابطه‌های تشابه بحث می‌کنیم. سپس، قبل از اینکه نظریه توربوماشینها را بررسی کنیم، نظریه مقدماتی زنجیره را مورد بحث قرار می‌دهیم. توربینهای واکنشی آبی را قبل از پمپها و دمنده‌ها بررسی می‌کنیم؛ سپس

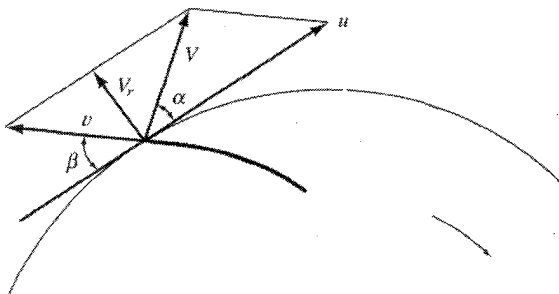
نوبت می‌رسد به توربین ضربه‌ای و کمپرسور مرکز‌گریز. سرانجام، فصل حاضر را با بحثی در مورد حفره زایش خاتمه می‌دهیم.

۱.۱۱ دستگاههای مشابه: سرعت ویژه گروه‌بندیهای بی‌بعد حاکم

برای استفاده از مدل‌های مقیاس‌بندی شده در طراحی، توربوماشینها، به تشابه هندسی و همچنین به نمودارهای برداری هندسه-مشابه سرعت در ورودی و خروجی گردا (روتور) نیاز است. متأسفانه از اثر چسبندگی باید صرف‌نظر کرد، زیرا عموماً غیرممکن است که در مدل و نمونه اصلی دو شرط فوق صدق کنند و اعداد رینولدز یکسان باشند. دو دستگاه هندسه-مشابه را که نمودارهای برداری سرعت مشابه داشته باشند دو دستگاه مشابه می‌گویند. خطوط جریان آنها نیز هندسه-مشابه‌اند.

نمودار برداری سرعت را در شکل ۱.۱۱ در خروجی گردای (روتور) پمپ می‌توان برای فرمول‌بندی شرط تشابه الگوهای خط جریان به کار برد. β زاویه تیغه است؛ u سرعت محیطی گردا (روتور) در انتهای پره یا تیغه است؛ v سرعت سیال نسبت به پره، و V سرعت مطلق خروج از گردا، که جمع برداری u و v است؛ V_r مؤلفه شعاعی V و متناسب با تخلیه است؛ α زاویه‌ای است که سرعت مطلق با u ، یعنی راستای مماسی، می‌سازد. طبق تشابه هندسی، β برای هر دو دستگاه باید یکسان باشد؛ و برای خطوط جریان مشابه، α نیز در هر حالت باید یکسان باشد.

لازم به ذکر است که با ارتباط دادن سرعت دوران N ، قطر گردا D (یا بعد مشخصه دیگری)، و آهنگ شارش Q ، α در هر مجموعه‌ای از توربوماشینها، موسوم به دستگاههای مشابه، باید یکسان باشد. در α ثابت، V_r با V متناسب است ($V_r = V \sin \alpha$) و u با V_r . از این رو، شرایط را



شکل ۱.۱۱ نمودار برداری سرعت در خروج از گردای (روتور) پمپ.

برای α ثابت در مجموعه‌ای از دستگاههای مشابه به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\frac{V_r}{u} = \text{ثابت}$$

تخلیه Q با $V_r D^2$ متناسب است، زیرا مساحت هر مقطع شارش با D^2 متناسب است. سرعت دوران N با u/D متناسب است. وقتی این مقادیر جایگذاری شوند، رابطه زیر

$$\frac{Q}{ND^2} = \text{ثابت} \quad (1.1.11)$$

شرطی را بیان می‌کند که به موجب آن، دستگاههای هندسه-مشابه، مشابه‌اند.

تخلیه Q در دستگاههای مشابه را با فرمول روزه‌ت زیر می‌توان به هد H و سرعت سطح مقطع نمونه A ارتباط داد

$$Q = C_d A \sqrt{2gH}$$

که در آن، C_d یعنی ضریب تخلیه به‌طور جزئی با عدد رینولدز تغییر می‌کند و بنابراین موجب می‌شود که در مجموعه‌های مشابه بازده با تغییر اندازه به مقدار کمی تغییر کند. تغییر تخلیه با عدد رینولدز را اثر مقیاس می‌گویند. ماشینهای کوچکتر، که شعاع هیدرولیکی گذرگاه آنها کوچکتر است، اعداد رینولدز کمتر و متناظراً ضرایب اصطکاک بزرگتری دارند؛ از این رو، بازده آنها کمتر است. تغییر بازده از مدل تا نمونه اصلی ممکن است از ۱ تا ۴ درصد باشد. البته، در نظریه مشابه، از اثر مقیاس باید صرف‌نظر کرد، و بنابراین از یک ضریب تصحیح تجربی برای تغییر بازده با اندازه استفاده می‌شود [نگاه کنید به معادله (۲.۴.۱۱)]. چون $A \sim D^2$ ، معادله تخلیه ممکن است به صورت زیر باشد:

$$\frac{Q}{D^2 \sqrt{gH}} = \text{ثابت} \quad (2.1.11)$$

با حذف Q بین معادله‌های (۱.۱.۱۱) و (۲.۱.۱۱) به دست می‌آید

$$\frac{gH}{N^2 D^2} = \text{ثابت} \quad (3.1.11)$$

معادله‌های (۱.۱.۱۱) و (۳.۱.۱۱) برای تعیین مشخصه‌های کارکرد یک دستگاه از روی دستگاه مشابهی که اندازه و سرعت متفاوتی داشته باشد، مفیدترین فرمولها هستند.

با تحلیل ابعادی می‌توان همین گروه بندیهای متغیر را به دست آورد. اگر خیز فشار در پمپ، Δp ، به عنوان متغیر وابسته در نظر گرفته شود، به آهنگ شارش تراکم‌ناپذیر، هندسه پمپ، و خواص

سیال ارتباط داده شود، در این صورت

$$\Delta p = f_1(\rho, \mu, Q, \omega, D) \quad (4.1.11)$$

که در آن ω سرعت چرخشی برحسب رادیان بر ثانیه است. با انتخاب ρ ، ω و D به عنوان متغیرهای تکراری،

$$\frac{\Delta p}{\rho \omega^2 D^2} = \phi_1 \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \right) \quad (5.1.11)$$

اگر Δp برحسب هد پمپ بیان شود، ضریب فشار در سمت چپ تبدیل می‌شود به ضریب خیز هد، $gH/\omega^2 D^2$. اگر توان شفت، $P = T\omega$ ، به عنوان متغیر وابسته در نظر گرفته شود و تحلیل ابعادی به کار رود

$$\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} = \phi_2 \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \right) \quad (6.1.11)$$

بازده، $\eta = \Delta p Q / P = \gamma H Q / P$ ، که بی‌بعد است، را به عنوان متغیر وابسته می‌توان در نظر گرفت، و به‌دست آورد

$$\eta = \phi_3 \left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho \omega D^2}{\mu} \right) \quad (7.1.11)$$

آخرین عدد بی‌بعد در هریک از این معادله‌ها عدد رینولدز چرخشی است که اثر مقیاس بحث شده در بالا را نشان می‌دهد. وقتی از این صرف‌نظر شود، هر پارامتر به ضریب شارش ارتباط داده می‌شود. برای خیز هد برحسب شارش

$$\frac{gH}{\omega^2 D^2} = \phi_1 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) \quad (8.1.11)$$

برای توان شفت برحسب شارش

$$\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} = \phi_2 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) \quad (9.1.11)$$

برای بازده برحسب شارش

$$\eta = \phi_r \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) \quad (10.1.11)$$

طبق قرارداد، سرعت چرخشی معمولاً به صورت N برحسب rpm نوشته می‌شود و چگالی و گرانس حذف می‌شوند، و در نتیجه پارامترهای رایجی که بی‌بعد نیستند به دست می‌آیند.

یک منحنی مشخصه برای پمپ به شکل بی‌بعد نمودار $Q/\omega D^3$ (به عنوان طول) برحسب $gH/(\omega^2 D^2)$ (به عنوان عرض) است. این منحنی، از آزمایشها بر روی یک واحد از مجموعه پمپها به دست می‌آید، سپس برای تمام پمپهای مشابه به کار می‌رود و آن را با انتخاب مقادیر دلخواه D و N می‌توان به منحنی مشخصه معمولی تبدیل کرد. اگر دو پمپ از مجموعه با ضریب شارش یکسان کار کنند، تشابه دینامیکی ایجاب می‌کند که

$$\left(\frac{gH}{\omega^2 D^2} \right)_1 = \left(\frac{gH}{\omega^2 D^2} \right)_2 \quad (11.1.11)$$

$$\left(\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} \right)_1 = \left(\frac{P}{\rho \omega^3 D^5} \right)_2 \quad (12.1.11)$$

$$\eta_1 = \eta_2 \quad (13.1.11)$$

بعداً در این فصل چند نمودار نمونه نشان داده می‌شوند.

استفاده دیگر از شرایط تشابه این است که عملکرد یک پمپ وقتی در سرعتهای چرخشی متفاوت کار می‌کند پیش‌بینی می‌شود. همانطور که در بالا بحث شد ناتوانی در بررسی اثرات مقیاس‌بندی منسوب به عدد رینولدز چرخشی باعث می‌شود تصحیح تجربی برای بازده در نظر گرفته شود.

مثال ۱.۱۱. آزمون نمونه اصلی یک پمپ شارش مختلط به قطر دهانه تخلیه ۲m، که با سرعت ۲۲۵rpm کار می‌کند، مشخصه‌های زیر را نتیجه داده است:

η	$Q, m^3/s$	H, m	η	$Q, m^3/s$	H, m	η	$Q, m^3/s$	H, m
۸۲	۱۱,۶۳۸	۱۰,۶۷	۸۷,۳	۹,۳۴۵	۱۴,۴۸	۶۹	۵,۶۶۳	۱۸,۳
۷۹	۱۲,۰۳۵	۹,۹۱	۸۸	۹,۷۶۹	۱۳,۷۲	۷۵	۶,۴۵۶	۱۷,۵۳
۷۵	۱۲,۴۰۳	۹,۱۴	۸۷,۴	۱۰,۲۵۱	۱۲,۹۵	۸۰	۷,۲۴۹	۱۶,۷۶
۷۱	۱۲,۷۱۴	۸,۳۸	۸۶,۳	۱۰,۸۱۷	۱۲,۱۹	۸۳,۷	۷,۹۳۰	۱۶,۰
۶۶,۵	۱۲,۹۹۷	۷,۶۲	۸۴,۴	۱۱,۲۱۳	۱۱,۴۳	۸۶	۸,۵۸۰	۱۵,۲۴

چه اندازه و سرعت همگانی (60 Hz) از یک پمپ مشابه باید به کار برد تا $596 \text{ m}^3/\text{s}$ را در هد 18.3 m در نقطهٔ بهترین بازده تولید کند؟ منحنیهای مشخصه را برای این حالت پیدا کنید.

حل

اندیس ۱ مربوط پمپ 2 m است. برای بهترین بازده 1372 ، $H_1 = 1372$ و $Q_1 = 9769$ و $\eta = 88\%$ از معادله‌های (۱.۱.۱۱) و (۳.۱.۱۱) داریم

$$\frac{H}{N^2 D^2} = \frac{H_1}{N_1^2 D_1^2} \quad \frac{Q}{ND^2} = \frac{Q_1}{N_1 D_1^2}$$

$$\frac{18.3}{N^2 D^2} = \frac{1372}{225^2 (2)^2} \quad \frac{596}{ND^2} = \frac{9769}{225(2)^2}$$

یا

بعد از حل N و D ، خواهیم داشت

$$N = 367 \text{ rpm} \quad D = 1417 \text{ m}$$

نزدیکترین سرعت همگام (360° تقسیم بر تعداد زوج قطبها) عبارت است از 360 rpm . برای برقرار ماندن هد دلخواه 18.3 m ، یک D جدید لازم است. اندازهٔ آن را به صورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$D = \sqrt{\frac{18.3}{1372} \frac{225}{360}} (2) = 1444 \text{ m}$$

بنابراین، تخلیه در بهترین بازده عبارت است از

$$Q = \frac{Q_1 N D^2}{N_1 D_1^2} = 9769 \frac{360}{225} \left(\frac{1444}{2} \right)^2 = 5883 \text{ m}^3/\text{s}$$

که کمی بیشتر از گنجایش موردنیاز است. با $N = 360$ و $D = 1444$ ، معادله‌هایی برای محاسبهٔ مقادیر متناظر H و Q برای هر بازده می‌توان به دست آورد

$$H = H_1 \left(\frac{ND}{N_1 D_1} \right)^2 = H_1 \left(\frac{360 \cdot 1444}{225 \cdot 2} \right)^2 = 1335 H_1$$

و

$$Q = Q_1 \frac{ND^2}{N_1 D_1^2} = Q_1 \left(\frac{360}{225} \right) \left(\frac{1444}{2} \right)^2 = 0.603 Q_1$$

مشخصه‌های پمپ جدید عبارت‌اند از

η	$m^3/s, Q$	m, H	η	$m^3/s, Q$	m, H	η	$m^3/s, Q$	m, H
۸۲	۷,۰۰۸	۱۴,۲۳	۸۷,۳	۵,۶۲۸	۱۹,۳۲	۶۹	۳,۴۱۰	۲۴,۴
۷۹	۷,۲۴۷	۱۳,۷۲	۸۸	۵,۸۸۳	۱۸,۳	۷۵	۳,۸۸۴	۲۳,۴
۷۵	۷,۴۶۹	۱۲,۱۹	۸۷,۴	۶,۱۷۳	۱۷,۲۸	۸۰	۴,۳۶۵	۲۲,۳۴
۷۱	۷,۶۵۶	۱۱,۱۸	۸۶,۳	۶,۵۱۴	۱۶,۲۶	۸۳,۷	۴,۷۷۵	۲۱,۳۴
۶۶	۷,۸۲۷	۱۰,۱۷	۸۴,۴	۶,۷۵۲	۱۵,۲۵	۸۶	۵,۱۶۷	۲۰,۳۳

بازده پمپ ۱,۴۴۴m ممکن است چند درصد کمتر از بازده پمپ ۲m باشد، همانطور که شعاعهای هیدرولیکی مجراهای جریان نیز کوچکترند، و بنابراین عدد رینولدز مقدار کمتری دارد. ■

مثال ۲.۱۱ در مثال ۱.۱۱، آیا قطر ۱,۴۴۴m حداقل اندازه‌ای است که حداقل $5,66 m^3/s$ را در حداقل هد ۱۸,۳m در نقطهٔ بهترین بازده ایجاد می‌کند؟

حل

چون $H = 18,3m$ برای پیدا کردن D در $36^\circ rpm$ به کار رفت و تخلیه از شارش لازم بیشتر است، از تخلیه لازم در $40^\circ rpm$ برای تعیین قطر کوچکتر می‌توان استفاده کرد (شکل ۲.۱۱)

$$D = D_1 \left(\frac{Q N_1}{Q_1 N} \right)^{1/3} = 2 \left(\frac{5,66 \cdot 225}{9,769 \cdot 400} \right)^{1/3} = 1,376m$$

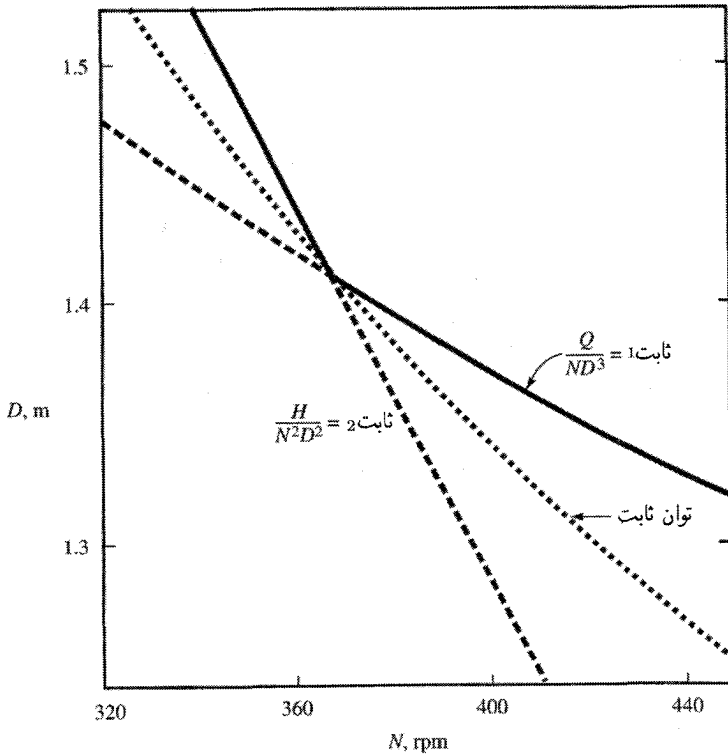
هد ایجادشده در بهترین بازده عبارت است از

$$H = H_1 \left(\frac{N D}{N_1 D_1} \right)^2 = 13,72 \left(\frac{400 \cdot 1,376}{225 \cdot 2} \right)^2 = 20,53m$$

که از هد لازم پمپ بیشتر است. توجه کنید که توان لازم برای کارکرد این واحد مشابه بیشتر از اندازه انتخابی در مثال ۱.۱۱ است (به شکل ۲.۱۱ نگاه کنید). ■

سرعت ویژه

سرعت ویژه یک دستگاه مشابه، ثابتی است که در انتخاب نوع دستگاه و طراحی مقدماتی آن وسیعاً به کار می‌رود. سرعت ویژه معمولاً برای پمپ و توربین به صورتهای مختلفی تعریف می‌شود.



شکل ۲.۱۱ مثالهای ۱.۱۱ و ۲.۱۱.

سرعت ویژه N_s یک مجموعه از پمپهای مشابه عبارت است از سرعت یکی از دستگاههای مجموعه که اندازه آن طوری باشد که تخلیه واحد را در هد واحد تحویل دهد. پس از حذف D در معادله‌های (۱.۱.۱۱) و (۳.۱.۱۱) و مرتب کردن، به دست می‌آید

$$\frac{N\sqrt{Q}}{g^{3/4}H^{3/4}} = \text{ثابت} \quad (۱۴.۱.۱۱)$$

با تعریف سرعت ویژه، ثابت رابطه فوق عبارت است از N_{sp} ، یعنی سرعت دستگاهی که در آن، $H = ۱$ و $Q = ۱$ ؛

$$N_{sp} = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (۱۵.۱.۱۱)$$

سرعت ویژه یک مجموعه معمولاً برای بهترین نقطه بازده، یعنی برای کارآمدترین سرعت، تخلیه، و هد تعریف می‌شود.

سرعت ویژه بی بعد ω_{sp} را از معادله (۱۴.۱.۱۱) می توان تعریف کرد

$$\omega_{sp} = \frac{\omega\sqrt{Q}}{g^{3/4}H^{3/2}} \quad (۱۶.۱.۱۱)$$

که در آن ω برحسب رادیان بر ثانیه است. مقدار آن برای یک حالت پمپاژ خاص ثابت است خواه برحسب واحدهای SI بیان نشود خواه برحسب واحدهای USC.

سرعت ویژه یک مجموعه از توربینهای مشابه، سرعت یکی از دستگاههای مجموعه است که اندازه آن طوری باشد که توان واحد را با هد واحد تولید کند. چون توان با QH متناسب است، داریم

$$\frac{P}{\gamma QH} = \text{ثابت} \quad (۱۷.۱.۱۱)$$

جمله های D و Q را از معادله های (۱.۱.۱۱)، (۳.۱.۱۱)، (۱۷.۱.۱۱) می توان حذف کرد و نتیجه گرفت

$$\frac{N\sqrt{P/\rho}}{g^{5/4}H^{5/2}} = \text{ثابت} \quad (۱۸.۱.۱۱)$$

ثابت معادله (۱۸.۱.۱۱) برای توان واحد و هد واحد، زمانی که جملات ρ و g حذف شوند، عبارت است از سرعت یا سرعت ویژه توربین N_{st} مجموعه، به طوری که

$$N_{st} = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/2}} \quad (۱۹.۱.۱۱)$$

سرعت ویژه بی بعد ω_{st} در توربینها، از معادله (۱۸.۱.۱۱)، عبارت است از

$$\omega_{st} = \frac{\omega\sqrt{P/\rho}}{g^{5/4}H^{5/2}} \quad (۲۰.۱.۱۱)$$

سرعت ویژه دستگاهی را که برای تخلیه و هد معینی مورد نیاز است می توان از معادله های (۱۵.۱.۱۱) و (۱۹.۱.۱۱) برآورد کرد. در پمپهایی که تخلیه های زیاد در هد های کم دارند، سرعت ویژه بزرگی به دست می آید؛ در توربینی با هد زیاد که توان نسبتاً کمی تولید کند (تخلیه کم) سرعت ویژه کم است. آزمایش نشان می دهد که در سرعت ویژه مفروض، بهترین بازده معمولاً متعلق به نوع مخصوصی از پمپ یا توربین است.

چون معادله‌های (۱۵.۱.۱۱) و (۱۹.۱.۱۱) از لحاظ بعدی صحیح نیستند (۶ و ۷ در جمله ثابت منظور شده‌اند)، مقدار سرعت ویژه به آحاد مورد بحث بستگی دارد. برای مثال، در ایالات متحده Q ، در ارتباط با سرعت ویژه پمپها، معمولاً برحسب گالن بر دقیقه، میلیون گالن در روز، یا فوت مکعب بر ثانیه بیان می‌شود.

پمپهای مرکز گریز سرعت ویژه کم دارند، $\omega_{sp} < ۱$ ؛ پمپهای شارش مختلط سرعت ویژه متوسط دارند، $۱ < \omega_{sp} < ۴$. پمپهای شارش محوری سرعت ویژه زیاد دارند، $\omega_{sp} > ۴$. توربینهای ضربه‌ای سرعت ویژه کم دارند، $\omega_{st} < ۱$ ؛ توربینهای فرانسسیس سرعت ویژه متوسط دارند، $۱ < \omega_{st} < ۷$ ؛ توربینهای پیشرانده‌ای سرعت ویژه زیاد دارند، $\omega_{st} > ۷$.

تمرینها

۱.۱.۱۱ دو دستگاه هنگامی مشابه‌اند که هندسه مشابه باشند و الف) خطوط جریان مشابه؛ ب) عدد رینولدز یکسان؛ ج) بازده یکسان؛ د) عدد فرود یکسان داشته باشند؛ ه) هیچکدام.

۲.۱.۱۱ دو رابطه زیر برای دستگاههای مشابه لازمند: الف) ثابت H/ND^2 و ثابت Q/N^2D^2 ؛ ب) ثابت Q/N^2D^2 ؛ ج) ثابت H/N^2D و ثابت $Q/D^2\sqrt{H}$ ؛ د) ثابت H/N^2D^2 ؛ ه) هیچکدام.

۳.۱.۱۱ سرعت ویژه پمپ، سرعت دستگاهی است که الف) اندازه آن مساوی واحد با تخلیه واحد در هد واحد باشد؛ ب) اندازه آن طوری باشد که برای هد واحد نیازمند توان واحد باشد؛ ج) اندازه آن طوری باشد که تخلیه واحد در هد واحد تحویل دهد؛ د) اندازه آن طوری باشد که تخلیه واحد در توان واحد تحویل دهد؛ ه) هیچکدام.

۲.۱۱ نظریه مقدماتی زنجیره

توربوماشینها بر اثر شارش سیال در مجموعه‌ای از پره‌های متحرک (و شاید هم ثابت) به طور دائم یا روی سیال کار انجام می‌دهند یا از آن کار می‌گیرند. با بررسی شارش در مجموعه‌ای از تیغه‌ها یا پره‌های شبیه هم، موسوم به زنجیره، بعضی از لازمه‌های یک سیستم کارآمد را می‌توان نشان داد. ابتدا، شارش را در سیستم زنجیره‌ای ثابت و ساده شکل ۳.۱۱ در نظر بگیرید. بردار سرعت که سیال را نشان می‌دهد بر اثر وجود سیستم زنجیره، گردشی زاویه‌ای کرده است. نیرویی بر سیال اعمال شده است، اما (با صرف نظر از آثار اصطکاک و تلاطم) هیچ کاری روی سیال انجام نمی‌شود. در قسمت ۷.۳ به نیروهای وارد بر یک پره تنها می‌پردازیم.

چون توربوماشینها دستگاههای چرخشی هستند، سیستم زنجیره را می‌توان به طور متقارن دور محیط یک دایره آرایش داد، مانند آرایشی که در شکل ۴.۱۱ الف می‌بینید. اگر سیال در راستای



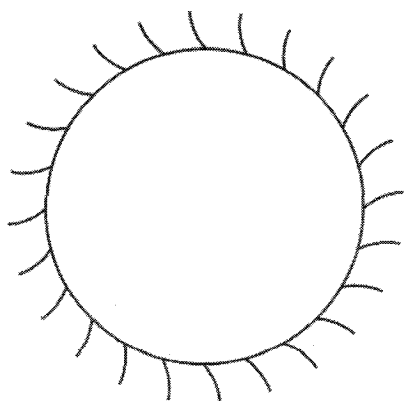
شکل ۳.۱۱ سیستم زنجیره ساده.

شعاعی به یک زنجیره ثابت نزدیک شود، لنگر اندازه حرکت آن از صفر تا مقداری وابسته به جرم در هر واحد زمانی شمارش تغییر می‌کند که با توجه به معادله (۵.۸.۳)، یعنی رابطه زیر

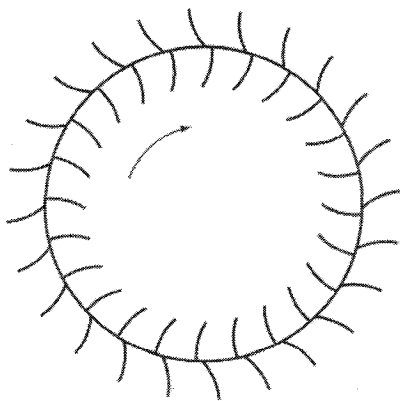
$$T = \rho Q r V_t \quad (۱.۲.۱۱)$$

به جرم جاری در زمان واحد، مؤلفه مماسی سرعت V_t ، و شعاع r بستگی دارد. در اینجا هم، هیچ کاری توسط سیستم پره‌ثابت انجام نمی‌شود.

اکنون مجموعه دیگری از پره‌ها (شکل ۴.۱۱ ب) را در نظر می‌گیریم که با سرعت ω در داخل یک سیستم پره‌ثابت می‌چرخند. برای عملکرد کارآمد سیستم مهم این است که سیال با حداقل آشفستگی، یعنی در راستای مماسی، مطابق شکل ۵.۱۱ الف، روی پره‌های متحرک جریان یابد. وقتی سرعت نسبی در ورودی، بر تیغه مماس نباشد، مطابق شکل ۵.۱۱ ب ممکن است جدایی

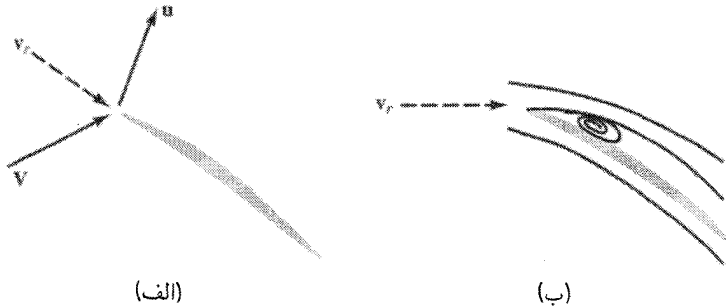


(الف)



(ب)

شکل ۴.۱۱ زنجیره پره‌ها روی محیط یک استوانه مدور: الف) پره‌های ساکن؛ ب) زنجیره چرخان در زنجیره ثابت.



(الف)

(ب)

شکل ۵.۱۱. شارش به روی تیغه‌ها: الف) شارش مماس بر تیغه؛ ب) جدایی شارش، یا شوک، با سرعت نسبی که بر لبه آزاد تیغه مماس نیست.

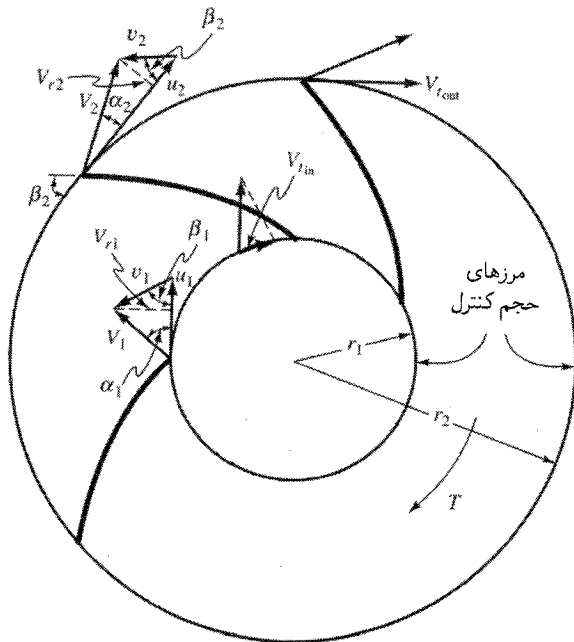
رخ دهد. با افزایش زاویه نسبت به جهت مماسی، اتلافها هم سریعاً با آن (حدوداً با مربع آن) افزایش می‌یابند، که این به‌طور جدی به بازده ماشین صدمه می‌زند. وقتی سرعت نسبی نزدیکی بر پره مماس باشد، اغلب جدایی نیز رخ می‌دهد و این ناشی از انحناهای پرها یا انبساط گذرگاههای شارش است. جدایی باعث می‌شود که لایه مرزی ضخیمتر شود و به حالت سکون برسد. این اتلافها را اتلافهای شوکی یا تلاطمی می‌گویند. وقتی سیال از زنجیره متحرک خارج می‌شود، معمولاً مقدار و راستای سرعت آن تغییر کرده است، و به موجب آن گشتاور تکانه آن نیز تغییر کرده است که یا بر روی زنجیره کار انجام داده است و یا از زنجیره متحرک کار دریافت کرده است. بهتر است که سیال در توربین پرها را بدون هیچ گشتاور تکانه ترک کند. یک ضرب‌المثل قدیمی در طراحی توربین می‌گوید که: «کاری کنید سیال بدون شوک وارد شود و بدون سرعت آن را ترک کند.»

۳.۱۱ نظریه توربوماشینها

معادله گشتاور تکانه

توربینها از انرژی سیال کار مفید می‌گیرند؛ پمپها، دمنده‌ها، و کمپرسورهای دورانی به توسط کفشکی متشکل از پره‌هایی که محکم به محوری متصل‌اند. از آنجا که پرها فقط در راستای مماسی جابه‌جا می‌شوند، کار به توسط جابه‌جایی مؤلفه‌های مماسی نیروی وارد به کفشک انجام می‌شود. مؤلفه‌های شعاعی نیروی وارد بر کفشک هیچ‌گونه جابه‌جایی در راستای شعاعی ندارند و از این رو هیچ کاری نمی‌توانند انجام بدهند.

در نظریه توربوماشینها از اصطکاک صرف نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که سیال به‌طور کامل در ماشین هدایت شود؛ یعنی ماشینی دارای تعداد بی‌شماری پره نازک، و بنابراین سرعت نسبی سیال همیشه بر پره مماس است. پس تقارن دایروی وجود دارد و در نتیجه معادله گشتاور تکانه،

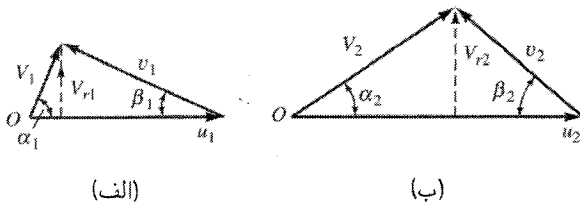


شکل ۶.۱۱ شارش پایا در حجم کنترل با تقارن دایروی.

قسمت ۸.۳، به صورت ساده معادله (۵.۸.۳) برای شارش پایا درمی آید

$$T = \rho Q [(rV_t)_{out} - (rV_t)_{in}] \quad (۱.۳.۱۱)$$

که در آن، T گشتاور مؤثر بر سیال درون حجم کنترل (شکل ۶.۱۱) است و $\rho Q (rV_t)_{out}$ و $\rho Q (rV_t)_{in}$ به ترتیب گشتاور تکانه خروجی و ورودی حجم کنترل را نشان می دهند. عموماً برای مطالعه رابطه های پره از نمودار برداری قطبی استفاده می کنند (شکل ۷.۱۱)، که زیر نماد ۱ برای سیال ورودی و زیر نماد ۲ برای سیال خروجی است. V سرعت مطلق سیال؛ u سرعت محیطی کفشک است؛ و v سرعت سیال نسبت به کفشک است. سرعت های مطلق V



شکل ۷.۱۱ نمودارهای برداری قطبی. (الف) ورودی؛ (ب) خروجی.

و u از نقطه O رسم می‌شوند، و سرعت نسبی مطابق شکل آنها را به هم متصل می‌کند. V_u را مؤلفه سرعت در راستای مماسی می‌گیریم؛ α زاویه‌ای است که سرعت مطلق V با سرعت محیطی u ؛ و β زاویه‌ای است که سرعت نسبی با $-u$ می‌سازد، یا وقتی هدایت کامل فرض شود β زاویه تیغه است. V_r مؤلفه سرعت مطلق در راستای عمود بر محیط است. معادله (۱.۳.۱۱) با این نمادگذاری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} T &= \rho Q(r_2 V_r \cos \alpha_2 - r_1 V_1 \cos \alpha_1) \\ &= \rho Q(r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) = m(r_2 V_{u2} - r_1 V_{u1}) \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

جرم جاری در زمان واحد عبارت است از $\dot{m} = \rho Q = (\rho Q)_{out} = (\rho Q)_{in}$. در این حالت، وقتی T مثبت است، گشتاور تکانه سیال در حجم کنترل افزایش می‌یابد، مثلاً در مورد پمپ. برای T منفی، گشتاور تکانه سیال کاهش می‌یابد، مانند کفشک توربین. وقتی $T = 0$ ، مانند داخل گذرگاهها که هیچ پره‌ای ندارد، داریم

$$rV_u = \text{ثابت}$$

رابطه فوق عبارت است از حرکت گرداب‌آزاد، که مؤلفه مماسی سرعت آن با شعاع نسبت عکس دارد. این حرکت را در بخش ۶.۸ مورد بحث قرار دادیم و با گرداب اجباری در قسمت ۹.۲ مقایسه کرده‌ایم.

مثال ۳.۱۱ در پیچه‌های کشویی شکل ۸.۱۱ طوری می‌گردند که شارش با خط شعاعی در مقطع ۱ زاویه 45° می‌سازد. سرعت در مقطع ۱ مساوی 4.005 m/s است. مقدار مؤلفه سرعت مماسی V_u را در مقطع ۲ پیدا کنید.

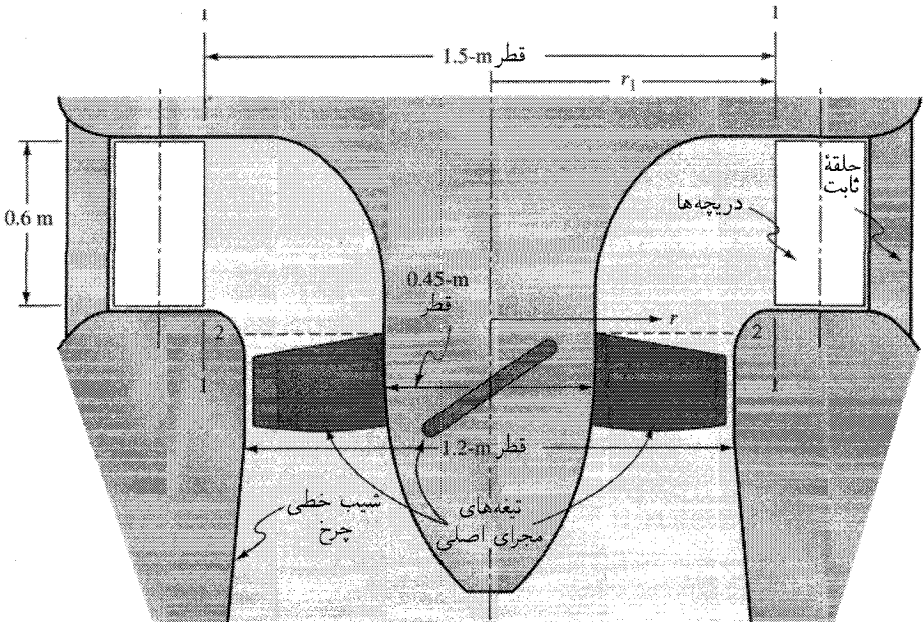
حل

از آنجا که هیچ گشتاوری بر شارش بین مقاطع ۱ و ۲ اعمال نمی‌شود، گشتاور تکانه ثابت است و حرکت از قانون گرداب‌آزاد پیروی می‌کند

$$V_u r = \text{ثابت}$$

در مقطع ۱

$$V_{u1} = 4.005 \cos 45^\circ = 2.832 \text{ m/s}$$



شکل ۸.۱۱ طرح یک توربین پیشرانهای.

بنابراین

$$V_{u1}r_1 = (2832 \text{ m/s})(0.75 \text{ m}) = 2124 \text{ m}^2/\text{s}$$

در مقطع ۲

$$V_{u2} = \frac{2124 \text{ m}^2/\text{s}}{r_2}$$

در تویی (مركز چرخ) $V_u = 2124 / 0.225 = 944 \text{ m/s}$ و در لبه خارجی $V_u = 2124 / 0.6 = 354 \text{ m/s}$.

رابطه‌های هد و انرژی

با ضرب معادله (۲.۳.۱۱) در سرعت دورانی کفشک ω (rad/s)، داریم

$$T\omega = \rho Q(\omega r_2 V_{u2} - \omega r_1 V_{u1}) = \rho Q(u_2 V_{u2} - u_1 V_{u1}) \quad (3.3.11)$$

وقتی هیچ اتلافی در کار نباشد، توان دسترسی‌پذیر از توربین عبارت است از $Q\Delta p = Q\gamma H$ ، که H هد روی کفشک است، زیرا $Q\gamma$ وزن جاری در زمان واحد و H انرژی پتانسیل وزن واحد

است. به طریق مشابه، کفشک پمپ کار $Q\gamma H$ را تولید می‌کند، که H هد پمپ است. مبادله توان عبارت است از

$$T\omega = Q\gamma H \quad (۴.۳.۱۱)$$

با استفاده از معادله (۳.۳.۱۱) T را از رابطه فوق حذف می‌کنیم، و H را از آن به دست می‌آوریم؛ نتیجه می‌شود

$$H = \frac{u_2 V_{u2} - u_1 V_{u1}}{g} \quad (۵.۳.۱۱)$$

برای توربینها علامت در معادله (۵.۳.۱۱) برعکس می‌شود. هد حقیقی H_{ap} تولیدشده در پمپها عبارت است از

$$H_{ap} = e_h H = H - H_L \quad (۶.۳.۱۱)$$

و هد حقیقی H_{at} برای توربینها عبارت است از

$$H_{at} = \frac{H}{e_h} = H + H_L \quad (۷.۳.۱۱)$$

که در آن، e_h بازده هیدرولیکی ماشین است و H_L تمام اتلافهای درونی سیال را در ماشین نشان می‌دهد. بازده کلی ماشین بر اثر اصطکاک یاتاقان، اصطکاک که از سیال بین کفشک و پوسته ناشی می‌شود، و بر اثر نشت یا شارشی که از دور کفشک می‌گذرد بی‌آنکه در آن جریان یابد، باز هم کاهش می‌یابد. این اتلافها بر رابطه‌های هد تأثیر نمی‌گذارند. بنابراین پمپها عموماً طوری طراحی می‌شوند که تکانه زاویه‌ای سیال در ورودی کفشک (گردا) مساوی صفر باشد

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} \quad (۸.۳.۱۱)$$

توربینها طوری طراحی می‌شوند که تکانه زاویه‌ای در مقطع خروجی کفشک در شرایط بهترین بازده مساوی صفر باشد؛ از این رو

$$H = \frac{u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g} \quad (۹.۳.۱۱)$$

برای نوشتن معادله انرژی یک پمپ، با معادله‌های (۵.۳.۱۱) و (۶.۳.۱۱)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
 Hp &= \left(\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) \\
 &= \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1}{g} - H_L \quad (10.3.11)
 \end{aligned}$$

که در آن، فرض می‌شود تمام خطوط جریان در پمپ دارای انرژی کل یکسان‌اند. با توجه به نمودارهای برداری (شکل ۷.۱۱) و با استفاده از قانون کسینوسها رابطه‌های زیر بین سرعت مطلق V ، سرعت v نسبت به کفشک، و سرعت u کفشک برقرار است:

$$u_1^2 + V_1^2 - 2u_1 V_1 \cos \alpha_1 = v_1^2 \quad u_2^2 + V_2^2 - 2u_2 V_2 \cos \alpha_2 = v_2^2$$

با حذف سرعتهای مطلق V_1 و V_2 در این رابطه‌ها و در معادله (۱۰.۳.۱۱) نتیجه می‌گیریم

$$H_L = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} - \frac{p_2 - p_1}{\gamma} - (z_2 - z_1) \quad (11.3.11)$$

یا

$$H_L = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \left[\left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) \right] \quad (12.3.11)$$

اتلافها عبارت‌اند از اختلاف هد مرکزگریز، یعنی $(u_2^2 - u_1^2)/2g$ ، و تغییر هد در شارش نسبی. وقتی هیچ افتی در کار نباشد، افزایش هد فشار از معادله (۱۱.۳.۱۱) عبارت است از

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (13.3.11)$$

وقتی هیچ شارشی از کفشک نگذرد، v_1 و v_2 صفر می‌شوند، و خیز هد به صورت رابطه تعادل نسبی [معادله (۶.۹.۲)] بیان می‌شود. وقتی شارش رخ دهد، خیز هد مساوی است با هد مرکزگریز منهای اختلاف هدهای سرعت نسبی. در مورد توربین نیز عیناً همین معادله‌ها به‌دست می‌آیند.

مثال ۴.۱۱ یک پمپ مرکزگریز با گردایی به قطر ۷۰۰ mm با سرعت ۱۸۰۰ rpm می‌گردد. آب بدون چرخش وارد می‌شود، و $\alpha_2 = 60^\circ$. هد حقیقی که توسط پمپ تأمین می‌شود ۱۷ m است. وقتی $V_2 = 6 \text{ m/s}$ ، بازده هیدرولیکی پمپ را پیدا کنید.

حل

از معادله (۸.۳.۱۱)، هد نظری عبارت است از

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{1800(2\pi)(0.35)(6)(0.50)}{60(9.806)} = 20.18 \text{ m}$$

هد حقیقی ۱۷ m است؛ از این رو، بازده هیدرولیکی عبارت است از

$$e_h = \frac{17}{20.18} = 84.2\%$$

تمرینها

۱.۳.۱۱ محوری ۱۵۰ kW را در ۶۰۰ rpm منتقل می‌کند. گشتاور برحسب نیوتن-متر عبارت است از الف) ۲۶۲؛ ب) ۲۵۰؛ ج) ۲۳۹۰؛ د) ۴۷۸۰؛ ه) هیچکدام.

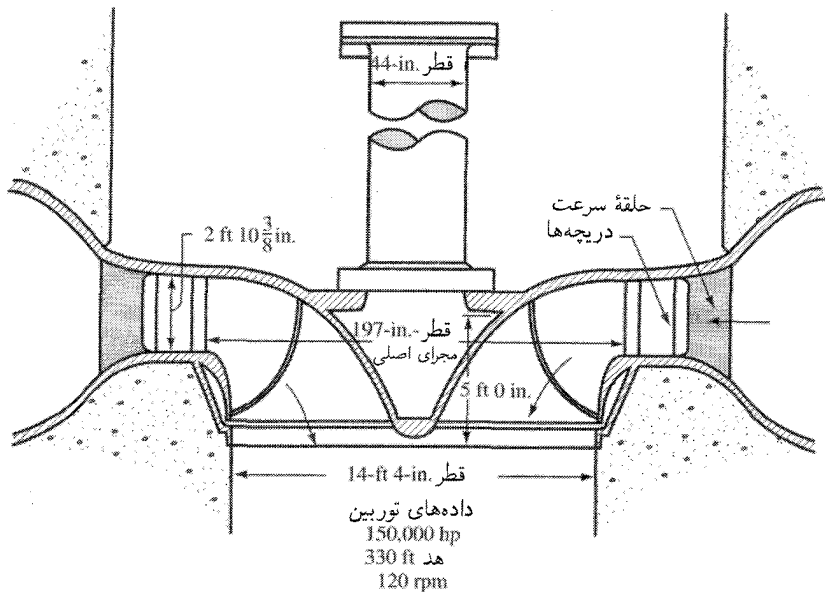
۲.۳.۱۱ چه گشتاوری لازم است تا به ۱۰۰ cfs آب طوری لنگر اندازه حرکت بدهد، که سرعت مماسی آب در فاصله ۶ ft از محور مساوی ۱۰ ft/s باشد؛ الف) ۱۱۶ lb.ft؛ ب) ۱۹۳۵ lb.ft؛ ج) ۶۰۰۰ lb.ft؛ د) ۱۱۶۱۰ lb.ft؛ ه) هیچکدام.

۳.۳.۱۱ گشتاور تکانه آب بر اثر شارش در پره‌های یک محور که با ۴۰۰ rpm می‌گردد به اندازه ۲۷۱۰۰ N.m کاهش یافته است. توان تولیدشده بر محور، برحسب کیلووات، عبارت است از الف) ۱۸۱؛ ب) ۱۱۳۴؛ ج) ۱۰۸۰۰؛ د) به علت کمبود داده‌ها، قابل تعیین نیست؛ ه) هیچکدام.

۴.۳.۱۱ مایعی که با تکانه زاویه‌ای ثابتی حرکت می‌کند، سرعت مماسی‌اش در فاصله ۱۰ ft از محور دوران ۴۰ ft/s است. سرعت مماسی در فاصله ۵ ft از محور، برحسب فوت بر ثانیه، عبارت است از الف) ۲؛ ب) ۴؛ ج) ۸؛ د) ۱۶؛ ه) هیچکدام.

۴.۱۱ توربینهای واکنشی

در توربین واکنشی بخشی از انرژی سیال قبل از ورود به کفشک، بر اثر عبور سیال از دریچه‌های قابل تنظیم کشویی (شکل ۹.۱۱) به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، و مابقی تبدیل در کفشک صورت می‌گیرد. تمام گذرگاهها پر از مایع‌اند، از جمله گذرگاهی که از کفشک تا سطح فرودست مایع ادامه دارد (لوله مکش). فشار استاتیکی سیال بر هر دو طرف پره‌ها وارد می‌شود و از این روکاری انجام نمی‌دهد. کار انجام‌شده تماماً ناشی از تبدیل انرژی جنبشی است.



شکل ۹.۱۱ توربین فرانسسیس

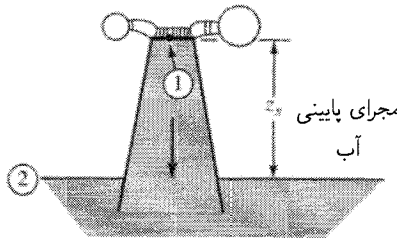
توربین واکنشی با توربین ضربه‌ای، که در بخش ۶.۱۱ بررسی می‌شود، کاملاً تفاوت دارد. در توربین ضربه‌ای تمام انرژی دسترس‌پذیر سیال به توسط شیوره‌ای (نازلی) که جت آزاد را شکل می‌دهد به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. سپس انرژی جت با شارش مناسبی در پره‌های متحرک از آن گرفته می‌شود. پره‌ها با جتی که در سراسر حرکت خود در کفشک به اتمسفر مربوط است، تا اندازه‌ای پر می‌شوند.

در مقابل، در توربین واکنشی، انرژی جنبشی وقتی که سیال پره‌ها را ترک می‌کند و وارد لوله مکش می‌شود قابل توجه است. کار لوله مکش عبارت است از تبدیل انرژی جنبشی به انرژی شارش به توسط مقطعی از شارش که به تدریج منبسط می‌شود. کاربرد معادله انرژی بین دو انتهای لوله مکش نشان می‌دهد که عمل لوله کاهش فشار در انتهای فرادست لوله به فشار کمتر از فشار اتمسفر است. و به این ترتیب، لوله مکش هد مؤثر در عرض کفشک را تا میزان اختلاف ارتفاع بین مجرای بالایی آب تا مجرای پایینی آب افزایش می‌دهد و از اتلافها می‌کاهد.

با مراجعه به شکل ۱۰.۱۱، معادله انرژی از ۱ تا ۲ عبارت است از

$$z_s + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = 0 + 0 + 0 + \text{اتلافها}$$

اتلافها شامل افت انبساطی، اصطکاک، و افت هد سرعت در خروجی لوله مکش‌اند که تمام آنها



شکل ۱۰.۱۱ لوله مکش.

خیلی کوچک اند، از این رو رابطه

$$\frac{p_1}{\gamma} = -z_s - \frac{V_1^2}{2g} + \text{اتلافها} \quad (۱۰.۴.۱۱)$$

نشان می‌دهد که خلأ قابل توجهی در مقطع ۱ به وجود می‌آید، که به طور مؤثری هد را در کفشک توربین افزایش می‌دهد. محل نصب توربین نباید خیلی بلند باشد، یا در جایی باشد که حفره زایش در کفشک و لوله مکش رخ دهد، (در بخش ۷.۱۱ می‌بینید).

مثال ۵.۱۱ یک توربین در ورود به لوله مکش سرعت 6 m/s و در خروج از آن سرعت 12 m/s دارد. اگر اتلافهای اصطکاکی 1 m^2 و مجرای پایینی آن 5 m زیر ورودی لوله مکش باشد، هد فشار در ورودی را پیدا کنید.

حل

از معادله (۱۰.۴.۱۱) داریم

$$\frac{p_1}{\gamma} = -5 - \frac{6^2}{2(9.806)} \times \frac{12^2}{2(9.806)} + 1 = -6.66 \text{ m}$$

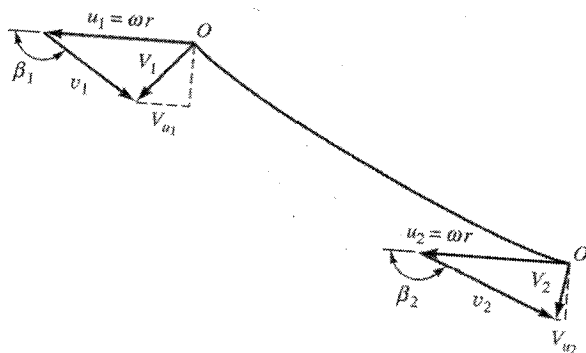
زیرا انرژی جنبشی در خروجی لوله مکش از بین می‌رود. از این رو، هد مکش 6.66 m بر اثر وجود لوله مکش پدید می‌آید. ■

دو نوع توربین واکنشی رواج دارد: توربین فرانسسیس (شکل ۹.۱۱) و توربین پشترانه‌ای (شارش-محوری) (شکل ۸.۱۱). در هر دو، تمام گذرگاهها پر از شاره‌اند، و انرژی با تغییر گشتاور تکانه مایع تماماً به کار مفید تبدیل می‌شود. شارش ابتدا از دریچه‌های کشویی عبور می‌کند. این دریچه‌ها سرعت مماسی و شعاعی درون سو به سیال می‌دهند. شاره در فضای بین دریچه‌های

کشویی و کفشک در پشت درپچه‌ها محبوس می‌شود و به صورت گرداب آزاد حرکت می‌کند، بدون اینکه گشتاور خارجی به کار رود.

در توربین فرانسیس (۹.۱۱) سیال طوری وارد کفشک می‌شود که سرعت نسبی آن بر لبه آزاد پرها مماس باشد. مؤلفه شعاعی به تدریج به مؤلفه محوری تبدیل می‌شود و وقتی سیال در عرض پره عبور می‌کند مؤلفه مماسی کاهش می‌یابد، به طوری که شارش در خروجی کفشک محوری می‌شود و چرخش (مؤلفه مماسی) بسیار کمی برای آن باقی می‌ماند. فشار به مقداری کمتر از فشار اتمسفر کاهش می‌یابد و در مدت زمانی که سیال از لوله مکش تخلیه می‌شود بیشترین قسمت انرژی جنبشی باقیمانده آن مجدداً به انرژی شارش تبدیل می‌شود. توربین فرانسیس مناسبترین توربین برای تأسیساتی با هد متوسط از ۸۰ تا ۶۰۰ ft (۲۵ تا ۱۸۰ m) است و بازده آن در تأسیسات بزرگ بین ۹۰ تا ۹۵ درصد است. توربینهای فرانسیس با گستره سرعت ویژه ۱۰ تا ۱۱۰ (ft, hp, rpm) یا ۴۰ تا ۴۲۰ (m, kW, rpm) طراحی می‌شوند و بهترین بازده آنها در گستره ۴۰ تا ۶۰ (ft, hp, rpm) یا ۱۵۰ تا ۲۳۰ (m, kW, rpm) است.

در توربینهای پیشرانه‌ای (شکل ۸.۱۱) شارش، بعد از عبور از درپچه‌های کشویی، به صورت گرداب آزاد حرکت می‌کند و مؤلفه شعاعی آن با عبور از پوسته معینی به مؤلفه محوری تبدیل می‌شود. گشتاور نکانه ثابت است، و مؤلفه مماسی سرعت با کاهش یافتن شعاع افزایش می‌یابد. تیغه‌ها کم، و نسبتاً صاف‌اند و انحنای آنها خیلی کم است؛ آنها طوری قرار می‌گیرند که شارش در ورود به کفشک بر لبه آزاد تیغه مماس باشد. سرعت نسبی زیاد است، مانند چرخ پلتون، و تغییرات آن به هنگام عبور از تیغه جزئی است. نمودارهای سرعت در شکل ۱۱.۱۱ نشان می‌دهند



شکل ۱۱.۱۱ نمودارهای برداری سرعت در ورودی و خروجی تیغه توربین پیشرانه‌ای در یک فاصله ثابت شعاعی.

که مؤلفه مماسی سرعت چگونه کاهش می‌یابد. توربینهای پیشرانده‌ای از تیغه‌هایی ساخته شده‌اند که حول مرکز چرخش می‌گردند، و بدین ترتیب زاویه تیغه را می‌توان برای گشودگیهای مختلف دریچه و هددهای مختلف تنظیم کرد. این توربینها بخصوص برای تأسیسات با هد کم، تا 3 m ، مناسب‌اند و حداکثر بازده آنها در حدود 94% درصد است. توربینهای شارش محوری برای گستره سرعت ویژه 100 تا (ft, hp, rpm) 210 یا 380 تا (m, kW, rpm) 800 طراحی می‌شوند و بهترین بازده آنها در 120 تا (ft, hp, rpm) 160 یا 460 تا (m, kW, rpm) 610 است.

آسیاب بادی نوعی توربین شارش-محوری است. از آنجا که این آسیاب پره ثابتی ندارد که به جریان هوا سرعت مماسی اولیه‌ای بدهد، این سرعت را با پره‌های متحرک به هوا می‌دهد. جریان هوا به هنگام عبور از پره‌ها منبسط می‌شود و سرعت محوری آن کاهش می‌یابد.

مثال ۶.۱۱ با فرض سرعت محوری یکنواختی در مقطع ۲ در شکل ۸.۱۱ و با استفاده از داده‌های مثال ۳.۱۱، زاویه لبه آزاد پیشران را در 6 m ، 45° ، 225° ، r به دست آورید. سرعت پیشران 240 rpm است.

حل

$$r = 225^\circ \text{ در } 6\text{ m}$$

$$u = \frac{240}{60} (2\pi)(225) = 5766\text{ m/s} \quad V_u = 9444\text{ m/s}$$

$$r = 45^\circ \text{ در } 6\text{ m}$$

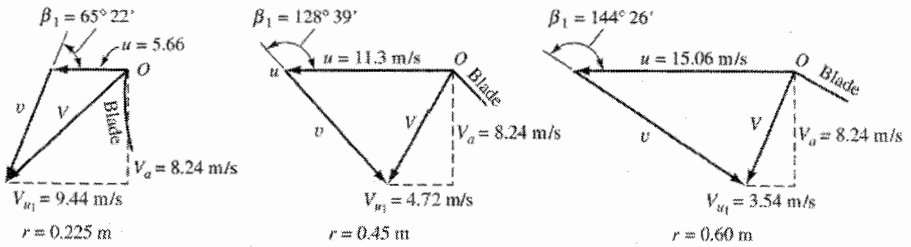
$$u = \frac{240}{60} (2\pi)(45) = 1131\text{ m/s} \quad V_u = 4772\text{ m/s}$$

$$r = 6^\circ \text{ در } 6\text{ m}$$

$$u = \frac{240}{60} (2\pi)(6) = 1506\text{ m/s} \quad V_u = 3554\text{ m/s}$$

تخلیه در توربین، از مقطع ۱، عبارت است از

$$Q = (6\text{ m})(1.5\text{ m})(\pi)(4700\text{ m/s})(\cos 45^\circ) = 8\text{ m}^3/\text{s}$$



شکل ۱۲.۱۱ نمودارهای سرعت در زاویه لبه آزاد تیغه توربین پیشرانه‌ای.

از این رو سرعت محوری در مقطع ۲ عبارت است از

$$V_a = \frac{\Delta}{\pi(0.62 - 0.225^2)} = 8.24 \text{ m/s}$$

شکل ۱۲.۱۱ زاویه اولیه پره را برای سه وضعیت نشان می‌دهد.

مودی [مرجع ۱]* فرمولی برای تخمین بازده، یک دستگاه از مجموعه توربینهای مشابه با معلوم بودن بودن بازده یکی از دستگاههای مجموعه ارائه شده است:

$$\eta = 1 - (1 - \eta_1) \left(\frac{D_1}{D} \right)^{1/2} \quad (2.4.11)$$

که در آن η_1 و D_1 معمولاً بازده و قطر مدل‌اند. استقانو [مرجع ۲] از همین معادله‌ها برای ارتباط دادن بازده‌ها در پمپ استفاده کرده است.

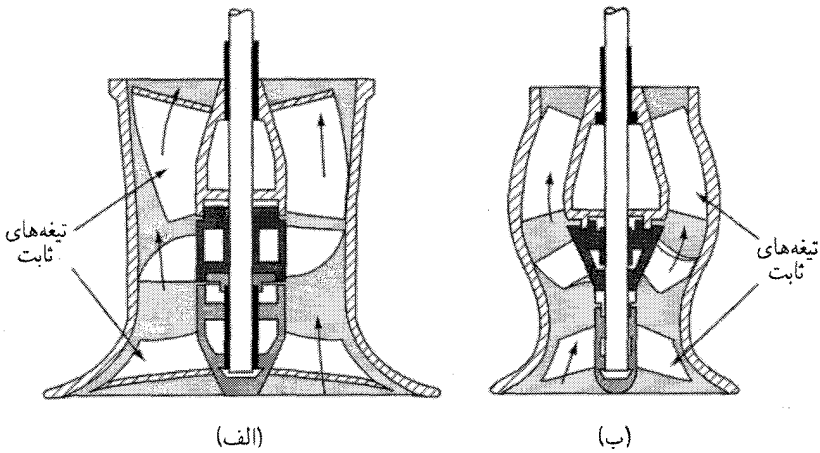
تمرین

۱.۴.۱۱ یک توربین نوع واکنشی با هد 7.5 m، $34 \text{ m}^3/\text{s}$ را تخلیه می‌کند و بازده کلی آن ۹۱ درصد است. توان تولیدشده، برحسب کیلووات، عبارت است از الف) 2750 ؛ ب) 2500 ؛ ج) 2275 ؛ د) 707 ؛ ه) هیچکدام.

۵.۱۱ پمپها و دمنده‌ها

پمپها به مایعات انرژی می‌دهند و دمنده‌ها به گازها. روش طراحی، هر دو مشابه است، بجز وقتی که چگالی به طور قابل توجهی افزایش یابد. توربوپمپها و دمنده‌های شارش-شعاعی، شارش-محوری،

* چند مرجع در انتهای این فصل آورده شده‌اند.



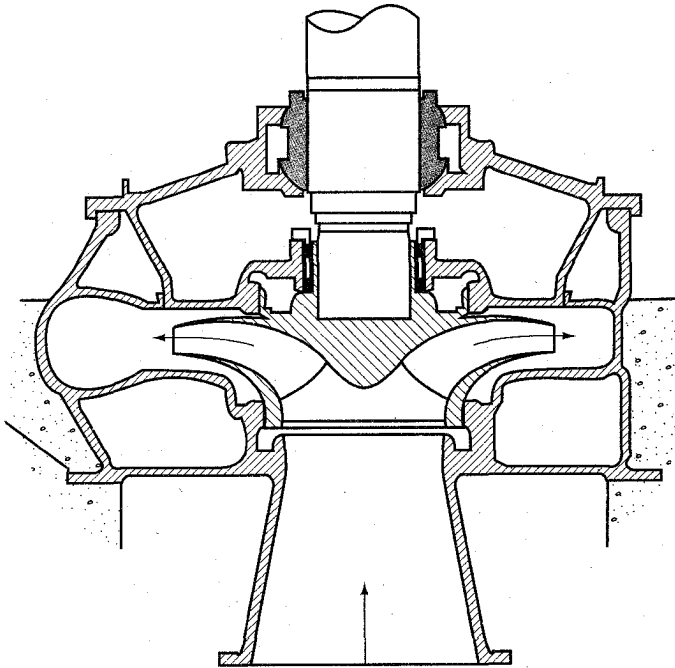
شکل ۱۳.۱۱ پمپهای چاهی: (الف) شارش-محوری؛ (ب) شارش-مختلط.

یا ترکیبی از این دو را شارش-مختلط می‌نامند. برای هدهای زیاد، پمپ شعاعی (مرکزگریز)، اغلب نوع دو طبقه یا بیشتر (دو یا تعداد بیشتری گردا در مجموعه)، مناسبترین پمپ است. برای شارشهای زیاد در ارتفاع هدهای کم، پمپ یا دمنده شارش-محوری (شکل ۱۳.۱۱ الف) بهترین نوع است. پمپ شارش-مختلط (شکل ۱۳.۱۱ ب) در هد متوسط و تخلیه متوسط مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادله‌های نشان داده شده در بخش ۳.۱۱ عیناً در پمپها و دمنده‌ها و توربینها به کار می‌رود. پمپ مرکزگریز معمولی یک لوله مکش، یا لوله ورودی، که به مرکز گردا منتهی می‌شود، یک کفشک شارش-شعاعی به طرف خارج، مطابق شکل ۶.۱۱، و یک لوله جمع‌کننده یا محفظه مارپیچی دارد که سیال را به لوله تخلیه هدایت می‌کند. معمولاً، از پره ثابتی استفاده نمی‌شود، مگر در دستگاههای چندطبقه که شارش در آنها نسبتاً کم است و اصطکاک اضافی سیال کمتر از بهره‌افزایی است که در تبدیل انرژی جنبشی به انرژی فشاری به هنگام ترک گردا به دست می‌آید.

شکل ۱۴.۱۱ مقطع ارتفاعی پمپ مرکزگریز بزرگی را نشان می‌دهد. برای هدهای کم و تخلیه‌های (نسبتاً) زیاد، گرداها مطابق شکل ۱۵.۱۱ تغییر می‌کنند، یعنی از هد زیاد در سمت چپ تا هد کم در سمت راست. سرعت ویژه از چپ به راست افزایش می‌یابد. نمودار انواع پمپهای آب با بهترین بازده در شکل ۱۶.۱۱ داده شده است.

منحنی نظری هد-تخلیه

منحنی نظری هد-تخلیه با استفاده از معادله (۸.۳.۱۱) و نمودارهای برداری شکل ۷.۱۱ به دست



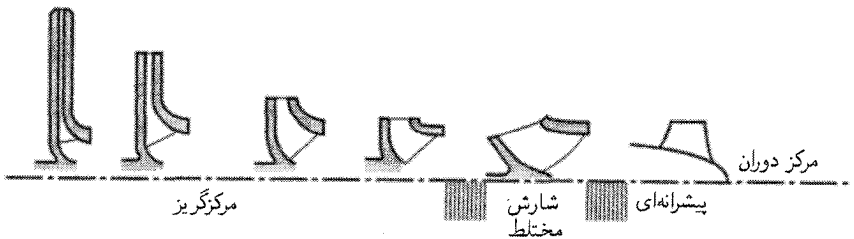
شکل ۱۴.۱۱ مقطع ارتفاعی پمپهای کوه ایگل و های فیلد، آب‌روی اصلی رودخانه کولورادو.

می‌آید. از نمودار خروجی شکل ۷.۱۱ داریم

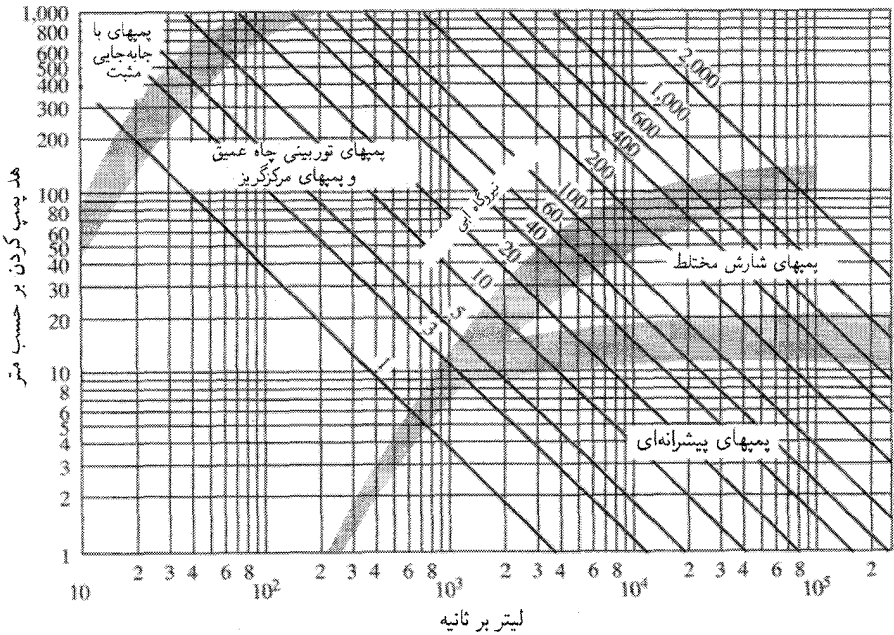
$$V_r \cos \alpha_a = V_{u_r} = u_r - V_{r_r} \cot \beta_r$$

اگر b_r عرض گردا در r_r باشد و از ضخامت پره صرف نظر شود، تخلیه عبارت است از

$$Q = 2\pi r_r b_r V_{r_r}$$



شکل ۱۵.۱۱ گردهایی که در پمپها و دمنده‌ها به کار می‌روند.

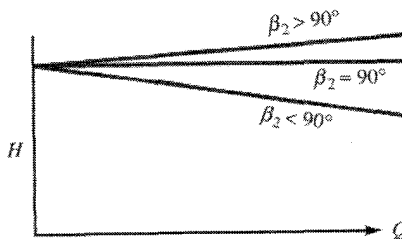


شکل ۱۶.۱۱ نمودار انتخاب پمپ.

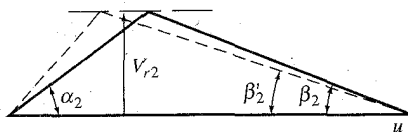
با حذف V_{r2} و جایگذاری دو معادله قبلی در معادله (۸.۳.۱۱) به دست می آید

$$H = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 Q \cot \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g} \quad (۱.۵.۱۱)$$

برای پمپی با سرعت معلوم، مطابق شکل ۱۷.۱۱، H به طور خطی با Q تغییر می کند. در طراحی معمولی پمپ مرکزگریز $\beta_2 < 90^\circ$ است که در این طرح کاهش هد همراه با افزایش



شکل ۱۷.۱۱ منحنیهای نظری هد-تخلیه.

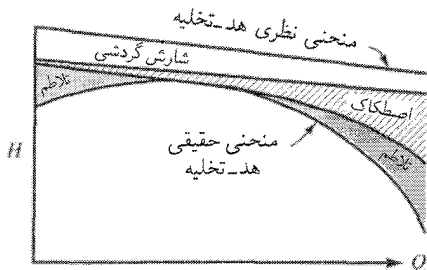


شکل ۱۸.۱۱ اثر شارش گردشی.

تخلیه است. در تیغه‌هایی که خروجی آنها شعاعی است، $\beta_2 = 90^\circ$ است، و هد نظری مستقل از تخلیه است. در تیغه‌های خمیده رو به جلو، $\beta_2 > 90^\circ$ ، و هد با تخلیه افزایش می‌یابد.

منحنی حقیقی هد-تخلیه

با کم کردن اتلافهای هد در منحنی هد-تخلیه، منحنی حقیقی هد-تخلیه به دست می‌آید. مهمترین چیزی که کم می‌شود افت حقیقی نیست؛ بلکه به دلیل عدم توانایی تعدادی از تیغه‌های با زاویه β_2 برای دادن سرعت نسبی به سیال است. سیالی که کامل هدایت نمی‌شود (مانند حالتی که تعداد تیغه‌ها بی‌نهایت است) طوری تخلیه می‌شود که گویی زاویه تیغه‌ها β_4 است که برای همان تخلیه کمتر از β_2 است (شکل ۱۸.۱۱). ناتوانی تیغه‌ها برای هدایت کامل، V_{u2} را کاهش می‌دهد و از این رو هد حقیقی به دست آمده نیز کاهش می‌یابد. این شارش که شارش گردشی نام دارد در شکل ۱۹.۱۱ نشان داده شده است. اصطکاک سیال در شارش در گذرگاههای ثابت و متحرک باعث اتلافهایی می‌شود که با مربع تخلیه متناسب‌اند. این روابط در شکل ۱۹.۱۱ نشان داده شده است. آخرین افت هدی که باید در نظر داشت افت تلاطم است، یعنی افتی که ناشی از زاویه نامناسب سرعت نسبی سیال در ورود به تیغه است. پمپ را می‌توان برای تخلیه‌ای (با سرعت مفروض) طراحی کرد، که سرعت نسبی سیال در ورود به تیغه بر تیغه مماس



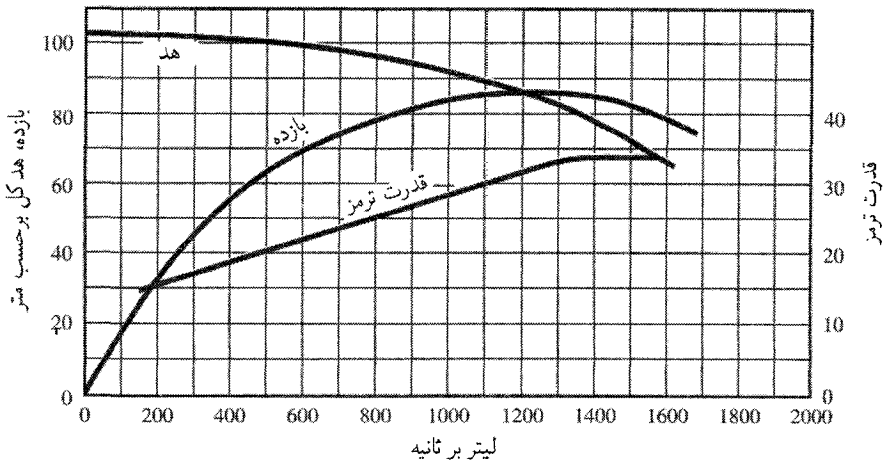
شکل ۱۹.۱۱ رابطه‌های هد-تخلیه.

باشد. این حالت نقطهٔ بهترین بازده نام دارد، و می‌توان از اتلافهای شوکی یا تلاطمی در آن نقطه صرف‌نظر کرد. در تخلیه‌های دیگر، اتلاف تقریباً به صورت مربع اختلاف زاویه‌های نزدیکی تغییر می‌کند، که در شکل ۱۹.۱۱ نشان داده شده است. بنابراین، پایینترین خط، منحنی حقیقی هد-تخلیه را نشان می‌دهد. هد بازدارنده معمولاً در حدود $u_p/2g$ ، یا نصف هد بازدارندهٔ نظری است.

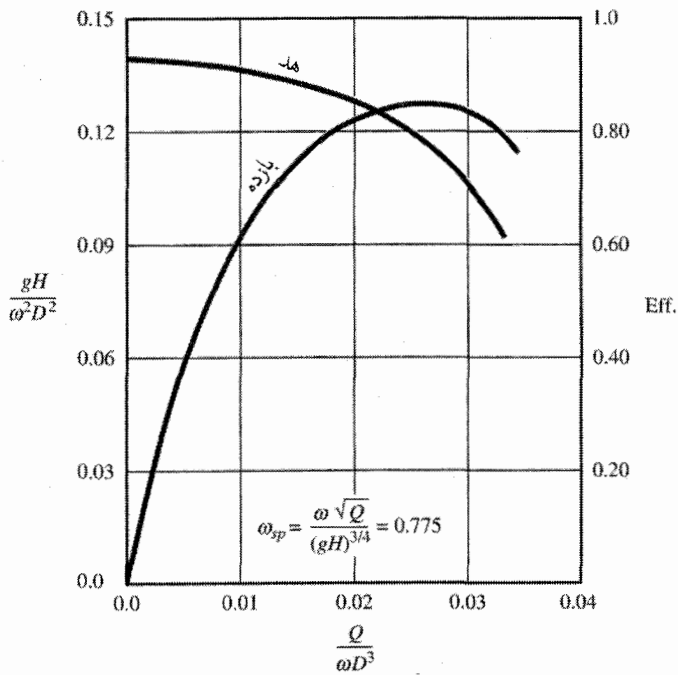
پمپها و دمنده‌ها علاوه بر اتلافها و کاهشهای هد، اتلافهای گشتاور نیز دارند که ناشی از اتلاف اصطکاکی در یاتاقان و کاسه نمدها، و اتلافهای اصطکاکی دیسک ناشی از سیال بین گردای متحرک و پوستهٔ بدنه است. نشت درونی نیز اتلاف توان مهمی است، زیرا سیالی که از گردا عبور کرده، و انرژی آن افزایش یافته است؛ از طریق فضاهای آزاد موجود بین گردا و پوستهٔ بدنه فرار می‌کند، و به طرف مکش گردا جریان می‌یابد.

منحنی مشخصه‌هایی که هد، بازده، و توان را به صورت تابعی از تخلیه نشان می‌دهند برای یک پمپ مرکزگرمز نمونه با پره‌های خمیدهٔ رو به عقب در شکل ۲۰.۱۱ نشان داده شده‌اند. پمپها، عموماً به اندازهٔ توربینها کارایی ندارند، و این موضوع به علت اتلافهای ذاتی زیادی است که از تبدیل انرژی جنبشی به انرژی شارش ناشی می‌شود.

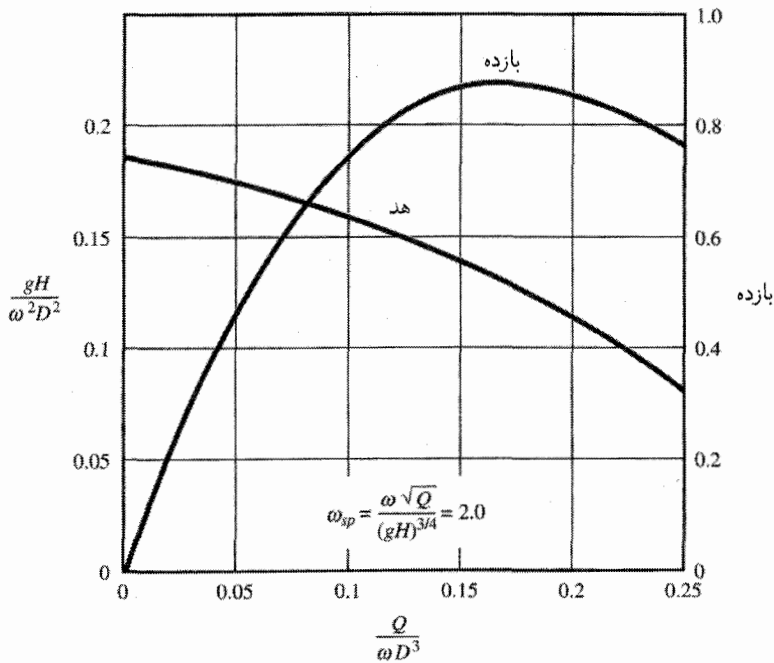
منحنیهای عملکرد نوعی برای پمپهای مرکزگرمز، شارش مختلط، و شارش محوری، به ترتیب، در شکلهای ۲۱.۱۱، ۲۲.۱۱، و ۲۳.۱۱ نشان داده شده‌اند.



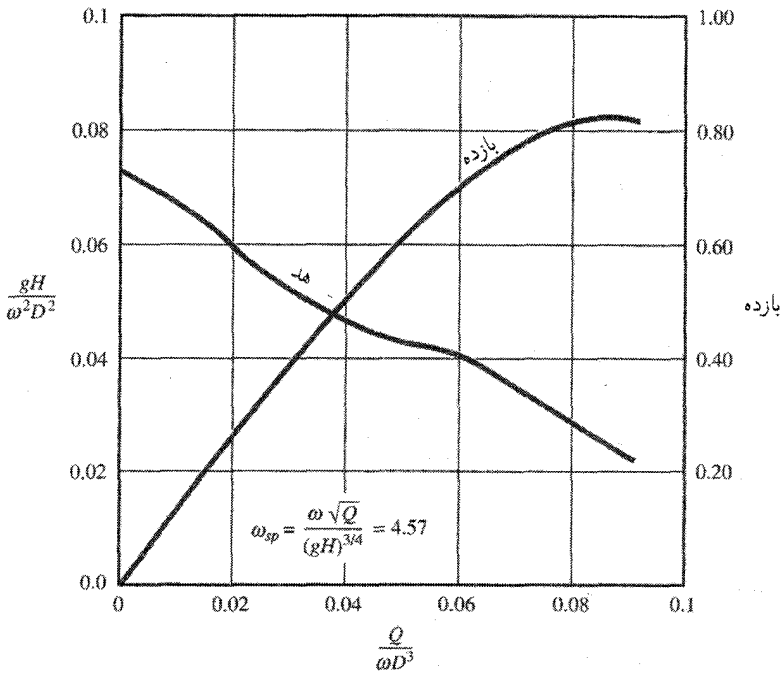
شکل ۲۰.۱۱ منحنی مشخصه‌های پمپهای مرکزگرمز معمولی؛ قطر گردا 10 in ، سرعت 1750 rpm .



شکل ۲۱.۱۱ منحنیهای تشابه بی بعد در پمپ مرکز گریز، $D = 10$ in (آحاد سازگار، ω برحسب رادیان بر ثانیه).



شکل ۲۲.۱۱ منحنیهای تشابه بی بعد در پمپ شارش مختلط (آحاد سازگار، ω برحسب رادیان بر ثانیه).



شکل ۲۳.۱۱ منحنیهای تشابه بی بعد در پمپ شارش محوری، $D = ۳۳۶\text{mm}$ (آحاد سازگار، برحسب رادیان بر ثانیه).

مثال ۷.۱۱ یک پمپ آب مرکزگر بزرگ‌رادیایی (شکل ۶.۱۱) با $r_1 = ۱۲\text{in}$ ، $r_2 = ۴\text{in}$ ، $\beta_1 = ۲^\circ$ ، $\beta_2 = ۱^\circ$ دارد. عرض گردا در $r = r_1$ مساوی ۲in و در $r = r_2$ مساوی $\frac{۲}{3}\text{in}$ است. در ۱۸۰°rpm ، صرف نظر از اتلافها و ضخامت پره، مطلوب است. الف) تخلیه برای حالت ورود بدون شوک وقتی $\alpha_1 = ۹^\circ$ ؛ ب) α_2 و هد نظری H ؛ ج) توان مورد نیاز؛ د) افزایش فشار در گردا.

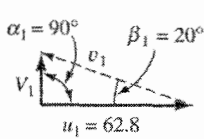
حل

الف) سرعتهای محیطی عبارت‌اند از

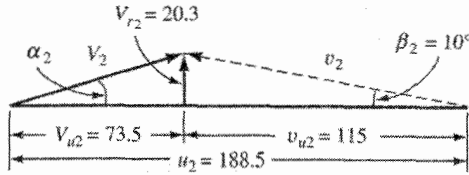
$$u_1 = \frac{۱۸۰^\circ}{۶۰} (2\pi) \left(\frac{۱}{۳} \right) = ۶۲٫۸\text{ft/s} \quad u_2 = ۳u_1 = ۱۸۸٫۵\text{ft/s}$$

نمودارهای برداری در شکل ۲۴.۱۱ نشان داده شده‌اند. با معلوم بودن u_1 و زوایای α_1 و β_1 ، سرعت ورودی را می‌توان تعیین کرد.

$$V_1 = u_1 \tan ۲^\circ = ۲۲٫۸۵\text{ ft/s}$$



(الف)



(ب)

شکل ۲۴.۱۱ نمودارهای برداری در (الف) ورودی؛ (ب) خروجی گردای پمپ.

$$Q = 22,85(\pi) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{112}\right) = 7,97 \text{ cfs}$$

(ب) سرعت شعاعی V_{r2} در خروجی عبارت است از

$$V_{r2} = \frac{7,97(12)}{2\pi(0,75)} = 20,3 \text{ ft/s}$$

با رسم u_2 (شکل ۲۴.۱۱) و رسم خطی به موازات و در فاصله V_{r2} از آن، و رسم β_2 مثلث برداری تعیین می‌شود. بدین ترتیب

$$v_{u2} = 20,3 \cot 10^\circ = 115 \text{ ft/s}$$

$$V_{u2} = 188,5 - 115 = 73,5 \text{ ft/s}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{20,3}{73,5} = 15^\circ 26'$$

$$V_2 = 20,3 \csc 15^\circ 26' = 76,2 \text{ ft/s}$$

از معادله (۸.۳.۱۱)

$$H = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} = \frac{u_2 V_{u2}}{g} = \frac{188,5(73,5)}{32,2} = 430 \text{ ft}$$

(ج) توان سیال، برای این پمپ ایدئالی، $Q\gamma H$ است و توان مورد نیاز عبارت است از

$$\text{قدرت} = \frac{Q\gamma H}{550} = \frac{7,97(62,4)(430)}{550} = 388 \text{ hp}$$

(د) با به کار بردن معادله انرژی ورودی تا خروجی گردا، که شامل جمله انرژی H افزوده شده باشد (از تغییر ارتفاع در عرض گردا صرف نظر می‌کنیم)، به دست می‌آید

$$H + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

و

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = 43.0 + \frac{22,85^2}{64.4} - \frac{76.2^2}{64.4} = 348 \text{ ft}$$

یا

$$p_2 - p_1 = 348(0.433) = 151 \text{ psi}$$

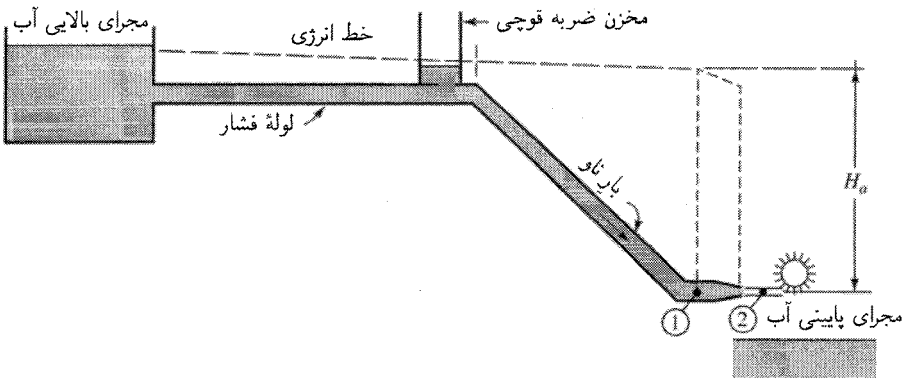
تمرینها

۱.۵.۱۱ هد پمپی با بازده هیدرولیکی ۸۰ درصد، در $u_2 = 100 \text{ ft/s}$ ، $V_2 = 60 \text{ ft/s}$ ، $\alpha_2 = 45^\circ$ ، $\alpha_1 = 90^\circ$ عبارت است از الف) ۵۲٫۶؛ ب) ۱۰۵٫۳؛ ج) ۱۳۲؛ د) ۱۶۵؛ ه) هیچکدام.

۲.۵.۱۱ رابطه‌های صحیح را برای نمودارهای برداری پمپ انتخاب کنید. الف) $\alpha_1 = 90^\circ$ ؛ ب) $v_1 = u_1 \cot \beta_1$ ؛ ج) $V_{u2} = u_2 - V_{r2} \cot \beta_2$ ؛ د) $r_1 V_1 = r_2 V_2$ ؛ ه) $\omega_2 = r_2 / u_2$ ؛ هیچکدام.

۶.۱۱ توربینهای ضربه‌ای

توربین ضربه‌ای توربینی است که در آن، قبل از اینکه سیال با تیغه‌های متحرک تماس یابد، شیوره‌ای (نازلی) تمام انرژی دسترس‌پذیر شارش را در فشار اتمسفریک به انرژی جنبشی تبدیل می‌کند. اتلافهای شارش از مخزن تا کف شیوره در لوله فشار (بار ناو) پدید می‌آیند که آنها را از داده‌های اصطکاک لوله می‌توان محاسبه کرد. انرژی دسترس‌پذیر، یا هد کل، در کف شیوره، از شکل (۲۵.۱۱)، عبارت است از



شکل ۲۵.۱۱ سیستم توربین ضربه‌ای.

$$H_a = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \quad (۱.۶.۱۱)$$

اگر ضریب شیپوره C_v باشد، سرعت V_2 جت عبارت است از

$$V_2 = C_v \sqrt{2gH_a} = C_v \sqrt{2g \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right)} \quad (۲.۶.۱۱)$$

افت هد در شیپوره عبارت است از

$$H_a - \frac{V_2^2}{2g} = H_a - C_v^2 H_a = H_a (1 - C_v^2) \quad (۳.۶.۱۱)$$

و بازده شیپوره چنین می‌شود

$$\frac{V_2^2/2g}{H_a} = \frac{C_v^2 H_a}{H_a} = C_v^2 \quad (۴.۶.۱۱)$$

جت، با سرعت V_2 ، به پیااله‌های دوناوه ضربه می‌زند (شکل‌های ۲۶.۱۱ و ۲۷.۱۱) و این پیااله‌ها شارش را منشعب می‌کنند و سرعت نسبی را به اندازه زاویه θ می‌گردانند (شکل ۲۷.۱۱). تغییر مؤلفه x تکانه به صورت زیر است (شکل ۲۷.۱۱)

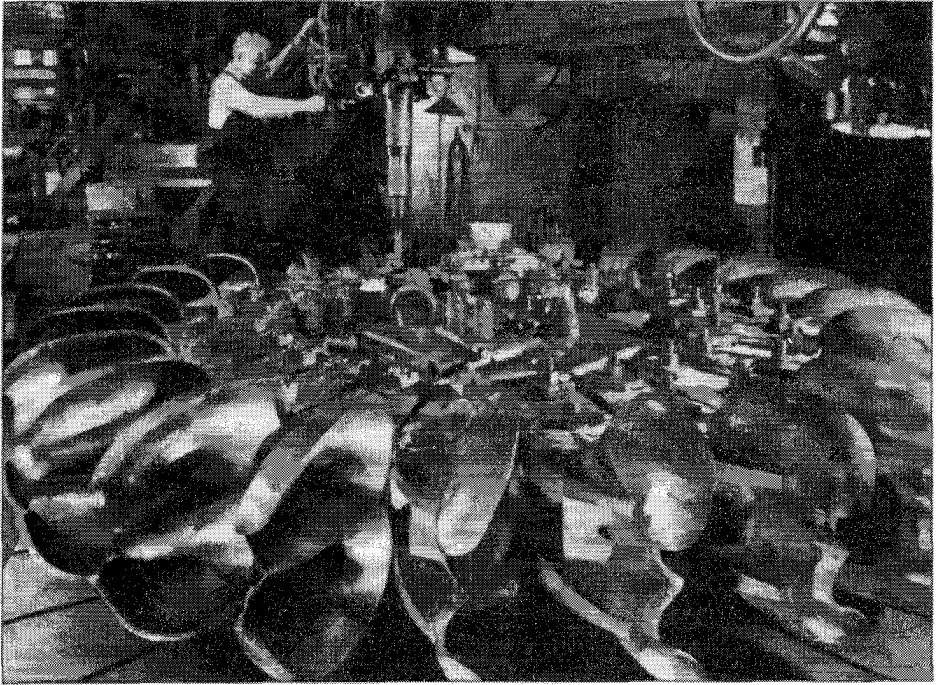
$$F = \rho Q (v_r - v_r \cos \theta)$$

و توان اعمال‌شده بر روی پره‌ها عبارت است از

$$F u = \rho Q u v_r (1 - \cos \theta) \quad (۵.۶.۱۱)$$

برای اینکه توان نظری ماکزیمم به‌دست آید، دو شرط باید برآورده شود: $\theta = 180^\circ$ و $u v_r$ باید ماکزیمم باشد؛ یعنی، $u(V_2 - u)$ باید ماکزیمم باشد. برای تعیین $(u v_r)_{\max}$ ، دیفرانسیل آن را نسبت به u گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$(V_2 - u) + u(-1) = 0$$

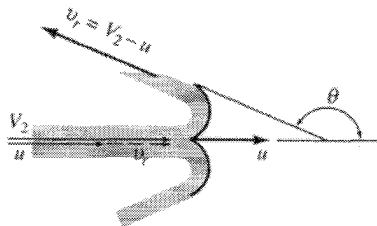


شکل ۲۶.۱۱ ادیسون کالیفرنیا، جنوبی، پیاله‌ها و دیسک جت ضربه‌ای بیگ کریک ۲A، به قطر ۸٫۵in، تحت پرقوکاری؛ ۵۶۰۰۰hp، با هد ۲۲۰۰ft، ۳۰۰rpm.

شرط ماکزیمم بودن عبارت است از $u = V_T/2$. بعد از جایگذاری این شرایط در معادله (۵.۶.۱۱)، داریم

$$F'u = \rho Q \frac{V_T}{2} \left(V_T - \frac{V_T}{2} \right) [1 - (-1)] = \gamma Q \frac{V_T^2}{2g} \quad (۵.۶.۱۱)$$

که برابر است با کل انرژی جنبشی جت. نمودار سرعت با این مقادیر نشان می‌دهد که سرعت



شکل ۲۷.۱۱ شارش در پیاله.

جدول ۱.۱۱ بستگی ϕ به سرعت ویژه*

ϕ	N_s (ft, hp, rpm)	N_s (m, kW, rpm)
۰.۴۷	۲	۷,۶۲
۰.۴۶	۳	۱۱,۴۲
۰.۴۵	۴	۱۵,۲۴
۰.۴۴	۵	۱۹,۰۵
۰.۴۳۳	۶	۲۲,۸۶
۰.۴۲۵	۷	۲۶,۶۵

* با تبدیل از مرجع [۳]

مطلق به هنگام ترک پره‌ها مساوی صفر است.

در عمل، وقتی پره‌ها بر روی محیط یک چرخ (شکل ۲۶.۱۱) نصب می‌شوند، سیال باید آندر سرعت داشته باشد تا از طریق پیاله بعدی خارج شود. بیشتر توربینهای ضربه‌ای در عمل به صورت چرخهای پلتن‌اند. جت به دو نیمه منشعب می‌شود و در یک صفحه افقی می‌گردد، و هر نیمه از یک طرف تخلیه می‌شود تا از ایجاد هرگونه نیروی رانش نامتعادلی بر روی محور اجتناب شود. اتلافهایی باعث می‌شوند که سرعتی که مقرون به صرفه‌تر است قدری کمتر از $V_2/2$ باشد. این سرعت برحسب ضریب سرعت بیان می‌شود:

$$\phi = \frac{u}{\sqrt{2gH_a}} \quad (۷.۶.۱۱)$$

پی برده‌اند که مقدار ϕ ، برای اینکه توربین با بهترین بازده کار کند، به سرعت ویژه بستگی دارد که این بستگی در جدول ۱.۱۱ نشان داده شده است. زاویه θ معمولاً بین ۱۷۳° تا ۱۷۶° است. اگر قطر جت، d و قطر چرخ از خط مرکزی پیاله، D باشد، عملاً دریافته‌اند که برای کسب بازده ماکزیم نسبت قطر D/d باید در حدود $۵۴/N_s$ (ft, hp, rpm) یا $۲۰۶/N_s$ (m, kW, rpm) باشد.

در بیشتر تأسیسات فقط از جت خاصی استفاده می‌شود؛ این جت، مطابق شکل ۲۵.۱۱ به‌طور افقی در مقابل سطح پایینی چرخ تخلیه می‌شود. سرعت چرخ برای تولید توان الکتریکی به‌دقت تنظیم می‌شود. تنظیم‌کننده از یک شیر سوزنی استفاده می‌کند که این شیر با تغییر سطح مقطع جریان، تخلیه جت را کنترل می‌کند. بنابراین V_2 عملاً در گستره وسیعی از وضعیتهای شیر سوزنی ثابت می‌ماند.

بازده تبدیل توان با تغییر هد (که با تغییر V_2 همراه است) به سرعت افت می‌کند، به طوری که با رسم توان برحسب V_2 در معادله (۵.۶.۱۱) و با یک u ثابت می‌توان، این موضوع را به وضوح دید. اگرچه چرخ توسط پوسته‌ای احاطه شده است، در هوای اتمسفر کار می‌کند. بر این اساس، چرخ در بالای سطح ماکزیمم آب در حالت مد رودخانه‌ای قرار می‌گیرد که آب توربین در آن تخلیه می‌شود. هد از شیپوره تا مجرای پایینی آب به هدر می‌رود. به علت عدم کارایی چرخهای پلتن در هد هایی به غیر از هد طراحی شده و همچنین به علت به هدر رفتن هد، آنها را معمولاً برای هد های زیاد، مثلاً از 200 m تا 1 km ، به کار می‌برند. در هد های زیاد، بازده تأسیسات کامل، از مجرای بالایی آب تا مجرای پایینی آب، ممکن است بیش از 80% درصد باشد.

مثال ۸.۱۱ یک چرخ پلتن را برای به حرکت درآوردن ژنراتوری با سرعت 600 rpm انتخاب می‌کنیم. قطر جت آن 75 mm و سرعت آن 100 m/s است. اگر زاویه تیغه 17° باشد و نسبت سرعت پره به سرعت اولیه جت 47% باشد، و از اتلافها صرف نظر شود، مطلوب است (الف) قطر چرخ از خط مرکزی پیاله‌ها (پره‌ها)؛ (ب) توان تولید شده؛ (ج) انرژی جنبشی باقیمانده در یک نیوتن سیال.

حل

(الف) سرعت محیطی چرخ عبارت است از

$$u = 0.47(100) = 47\text{ m/s}$$

بنابراین

$$\frac{600}{60} \left(2\pi \frac{D}{2} \right) = 47\text{ m/s}$$

یا

$$D = 1.495\text{ m}$$

(ب) از معادله (۵.۶.۱۱)، توان برحسب کیلووات، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} & (1000\text{ kg/m}^3) \frac{\pi}{4} (0.075\text{ m})^2 (100\text{ m/s})(47\text{ m/s})(100 - 47)\text{ m/s} \\ & \times [1 - (-0.9848)] \frac{1\text{ kW}}{1000\text{ W}} = 2184\text{ kW} \end{aligned}$$

ج) از شکل ۲۸.۳، مؤلفه‌های سرعت مطلق به‌هنگام ترک پره عبارت‌اند از

$$V_x = (100 - 47)(-0.9848) + 47 = -5.2 \text{ m/s}$$

$$V_y = (100 - 47)(0.1736) = 9.2 \text{ m/s}$$

انرژی جنبشی باقیمانده در جت عبارت است از

$$\frac{5.2^2 + 9.2^2}{2(9.806)} = 5.69 \text{ m.N/N}$$

مثال ۹.۱۱ یک چرخ ضربه‌ای کوچک قرار است ژنراتوری با توان 60 Hz را به حرکت درآورد. هد 100 m ، و تخلیه 40 L/s است. قطر چرخ از خط مرکزی پیاله‌ها و سرعت چرخ را تعیین کنید. $C_v = 0.98$ بازده را 80% درصد فرض کنید.

حل

توان عبارت است از

$$P = \gamma Q H_a e = 9806(0.040)(100)(0.80) = 3138 \text{ kW}$$

به فرض مقدار آزمونی 15 برای N_s داریم

$$N = \frac{N_s / H_a^{5/4}}{\sqrt{P}} = \frac{15 \times 100^{5/4}}{\sqrt{3138}} = 847 \text{ rpm}$$

برای توان 60 Hz باید سرعت مساوی 3600 تقسیم بر تعداد جفت قطبهای ژنراتور باشد. برای 5 جفت قطب، سرعت مساوی است با 720 rpm و برای چهار جفت قطب مساوی است با $900 \text{ rpm} = 3600/4$ سرعت نزدیکتر 900 را انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H_a^{5/4}} = \frac{900\sqrt{3138}}{100^{5/4}} = 1594$$

در $N_s = 1594$ ، از جدول ۱.۱۱، با فرض 0.448 ϕ

$$u = \phi\sqrt{2gH_a} = 0.448\sqrt{2(9.806)(100)} = 19.84 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{900}{60} 2\pi = 94,25 \text{ rad/s}$$

سرعت محیطی u و D و ω به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند

$$u = \frac{\omega D}{2} \quad D = \frac{2u}{\omega} = \frac{2(19,84)}{94,25} = 421 \text{ m}$$

قطر d جت از سرعت V_T جت به دست می‌آید؛ بدین ترتیب

$$V_T = C_v \sqrt{2gH_a} = 0,98 \sqrt{2(9,806)(100)} = 43,4 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{Q}{V_T} = \frac{0,040}{43,4} = 9,22 \text{ cm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} = \sqrt{\frac{0,000922}{0,7854}} = 34,3 \text{ mm}$$

که در آن، a مساحت جت است. از این رو، نسبت قطر D/d عبارت است از

$$\frac{D}{d} = \frac{421}{34,3} = 12,27$$

نسبت قطر موردنظر برای بهترین بازده عبارت است از

$$\frac{D}{d} = \frac{206}{N_s} = \frac{206}{15,94} = 12,92$$

بنابراین، نسبت D/d در بالا مناسب است. قطر چرخ 421 mm ، و سرعت آن 900 rpm است.

تمرینها

۱.۶.۱۱ توربین ضربه‌ای الف) همیشه در حالت غوطه‌ور عمل می‌کند؛ ب) از لوله مکش استفاده می‌کند؛ ج) مناسبترین توربین برای تأسیسات با هد کم است؛ د) هد فشار را از طریق پره‌ها به هد سرعت تبدیل می‌کند؛ ه) با تبدیل کامل انرژی اولیه به انرژی جنبشی کار می‌کند.

۲.۶.۱۱ یک چرخ پلتن به قطر 24 in با سرعت 400 rpm می‌گردد. از هدهای زیر، برحسب فوت، مناسبترین هد را برای این چرخ انتخاب کنید: الف) ۷؛ ب) ۳۰؛ ج) ۱۲۰؛ د) ۱۷۰؛ ه) ۴۸۰.

۷.۱۱ حفره زایش

اگر مایعی در ناحیه‌ای جریان یابد که فشار آن تا فشار بخار کاهش یابد، مایع می‌جوشد و حبابهای بخار در آن ظاهر می‌شود. حبابهای بخار به همراه مایع حمل می‌شوند تا به ناحیه پرفشارتری برسند، یعنی جایی که همه آنها ناگهان از بین می‌روند. این فرایند حفره زایش نام دارد. اگر وقتی که حبابهای هوا از بین می‌روند نزدیک به (یا در تماس با) یک مرز جامد باشند، نیروهایی که از طرف مایع اعمال می‌شوند به داخل حفره‌ها فشار می‌آورند و فشارهای بسیار زیاد متمرکزی به وجود می‌آورند که به سطح جامد آسیب می‌رسانند. این پدیده با نوفه (نویز) و نوسانهایی همراه است که می‌توان آن را به عبور شن از یک پمپ مرکز گریز تشبیه کرد.

در هر مایع جاری، پارامتر حفره زایش σ در مشخص کردن آمادگی سیستم برای حفره زایش مفید است. این پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\rho V^2 / 2} \quad (۱.۷.۱۱)$$

که در آن، p عبارت است از فشار مطلق در نقطه مورد نظر، p_v عبارت است از فشار بخار در مایع، ρ چگالی مایع، و V سرعت آشفته‌نشده، یا سرعت مرجع است. پارامتر حفره زایش صورتی از ضریب فشار است. دو سیستم هندسه-مشابه احتمال حفره زایش یکسانی دارند یا با مقدار معلوم σ میزان حفره زایش دو سیستم برابر است. اگر $\sigma = 0$ ، فشار تا فشار بخار کاهش می‌یابد و جوش رخ می‌دهد.

آزمایشهایی بر روی مایعاتی که از نظر شیمیایی خالص‌اند انجام شده‌اند که نشان می‌دهند این‌گونه مایعات تنشهای کششی زیاد، از مرتبه مگاپاسکال را تحمل می‌کنند. این مطلب با مفهوم تشکیل حفره‌ها به‌هنگام کاهش فشار تا فشار بخار مغایرت دارد. از آنجا که وقتی فشار به فشار بخار می‌رسد عموماً جوششی خودبه‌خود در مایعات تجارتي یا صنعتی به‌وجود می‌آید، پی می‌بریم که باید هسته‌هایی موجود باشند که حبابهای بخار دور آنها تشکیل شوند و رشد کنند. نوع هسته‌ها کاملاً معلوم نیست، اما ممکن است ذره‌های ریز گرد و غبار یا آلودگیهای دیگری باشند، که به‌طور وسیعی در سرتاسر مایعات صنعتی پراکنده‌اند.

حبابها در حفره زایش ممکن است روی هسته‌هایی تشکیل شوند، رشد کنند، و سپس به منطقه پرفشارتری حرکت کنند و از بین بروند، و تمام اینها در عرض چند هزارم ثانیه در شارش درون یک توربوماشین رخ می‌دهد. در آب گازدار شده وقتی حبابها حرکتهای نوسانی متعدد انجام می‌دهند از آنها می‌توان عکسبرداری کرد، ولی به‌نظر نمی‌رسد چنین کاری را برای مایعات گازدار نشده بتوان انجام داد. به‌نظر می‌رسد که پسا سطحی حبابهای بخار خاصیت مهمی در توجیه پالسهای پرفشاری

است که به دلیل از بین رفتن هر حباب بخار به وجود می‌آیند. آزمایشها نشان می‌دهند که توجیه فشارهای از مرتبه گیگا پاسکال مبتنی است بر تحلیل امواج کرنشی به وجودآمده در نمونه‌ای فتوالاستیک که در برابر حفره زایش قرار گرفته باشد [مرجع ۴]. با توجه به صدمه مکانیکی که بر اثر حفره زایش مشاهده می‌شود، این مقادیر فشار منطقی به نظر می‌رسد.

تشکیل شدن و از بین رفتن تعداد زیادی حباب بر روی یک سطح، آن را در معرض تنش شدید موضعی قرار می‌دهد، که به نظر می‌رسد سطح بر اثر خستگی صدمه ببیند. بعضی مواد چکش‌خوار طی دوره‌ای موسوم به دورهٔ درنگی، قبل از اینکه صدمه قابل توجه شود، در برابر خردشدن مقاومت می‌کنند، در حالی که مواد شکننده ممکن است بر اثر فرسایش، جرمشان سریعاً تلف شود. بعضی اثرهای الکتروشیمیایی، خوردگی، و گرمایی وجود دارند که زوال سطح مورد نظر را تسریع می‌کنند. رینگانز [مرجع ۵] مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌هایی را جمع‌آوری کرده است که با آزمایشهای نوسانگر-مغناطو تنگش تهیه شده‌اند و اتلافهای جرمی فلزات مختلف را که در ماشینهای هیدرولیکی استفاده می‌شوند نشان می‌دهند (جدول ۲.۱۱ را ببینید).

حفاظت در برابر حفره زایش باید با طرح هیدرولیکی سیستم شروع شود تا در صورت امکان از اعمال فشارهای پایینی اجتناب شود. در غیر این صورت، استفاده از مواد مخصوص مقاوم به حفره‌زایش یا روکش کردن ممکن است مؤثر باشد. وارد کردن مقدار کمی هوا در سیستم‌های آبی وارد به‌طور قابل توجهی از صدمهٔ حفره زایش می‌کاهد، و مطالعات اخیر نشان می‌دهند که حفاظت کاتودیک نیز مفید است.

تشکیل حفره‌های بخار، فضای مفید کانال برای مایع، و از این رو بازده ماشین هیدرولیکی را کاهش می‌دهد. حفره زایش باعث سه اثر نامطلوب می‌شود: بازده کم، صدمه به گذرگاههای شارش، نوفه (نویز) و ارتعاشها. پره‌های خمیده بخصوص در قسمت وجوه محدب خود در مقابل حفره زایش تأثیرپذیرند و ممکن است سطوح خاصی داشته باشند که حفره زایش باعث سوراخ شدن یا خرابی آنها شود. از آنجا که تمام توربوماشینها و پیشرانهای کشتی و بیشتر ساختارهای هیدرولیکی در معرض حفره زایش‌اند، در طراحی باید توجه مخصوصی به آن داشته باشیم.

شاخص حفره زایش σ در انتخاب صحیح توربوماشین و در انتخاب محل آن از نظر ارتفاع مکش یا ارتفاع مجرای پایین آب مفید است. فشار مینیمم در هر پمپ یا توربین عموماً در امتداد وجه محدب پره‌های نزدیک به جانب کم‌فشار گردا رخ می‌دهد. در شکل ۲۸.۱۱، اگر e نقطهٔ مینیمم باشد، معادلهٔ برنولی به کار رفته بین e و سطح فرودست مایع را، با صرف نظر از اتلافهای بین این دو نقطه، به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} + z_s = \frac{p_a}{\gamma} + 0 + 0 + h_l$$

جدول ۲.۱۱ اتلاف جرم موادی که در ماشینهای هیدرولیکی به کار می‌روند.

اتلاف جرم بعد از ۲h، برحسب mg	آلیاژ
۰٫۶	استلایت نوردشده*
۳٫۲	برنز آلومینیم جوش شده**
۵٫۸	برنز آلومینیم ریختگی***
۶٫۰	فولاد زنگ‌نزن جوش شده (دو لایه، ۰٫۱۷ Cr، ۰٫۷ Ni)
۸٫۰	فولاد زنگ‌نزن تهیه شده با روش نورد گرم (۰٫۲۶ Cr، ۰٫۱۳ Ni)
۹٫۰	فولاد زنگ‌نزن نوردشده سخت شده (۰٫۱۲ Cr)
۱۳٫۰	فولاد زنگ‌نزن ریختگی (۰٫۱۸ Cr، ۰٫۸ Ni)
۲۰٫۰	فولاد زنگ‌نزن ریختگی (۰٫۱۲ Cr)
۸۰٫۰	برنز منگنز ریختگی
۹۷٫۰	فولاد معمولی جوش شده
۹۸٫۰	فولاد ورق
۱۰۵٫۰	فولاد ریختگی
۱۲۴٫۰	آلومینیم
۱۵۶٫۰	برنج
۲۲۴٫۰	چدن

* این ماده علی‌رغم مقاومت زیاد آن برای کارهای معمولی مناسب نیست، زیرا قیمت آن گران و ماشین‌کاری‌اش مشکل است.

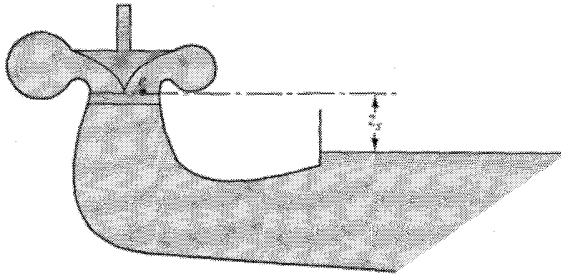
** آمپکو-ترود ۲۰۰، ۰٫۸۳ Cu، ۰٫۱۱۳ Al، ۰٫۵۸ Fe

*** آمپکو ۲۰: ۰٫۸۳ Cu، ۰٫۱۲۴ Al، ۰٫۴۱ Fe

که در آن، p_a فشار اتمسفر، و p_e فشار مطلق است. برای اینکه در e ، حفرة زایش رخ دهد، فشار باید مساوی یا کمتر از p_v ، یعنی فشار بخار، باشد. اگر $p_e = p_v$ ، رابطه زیر

$$\sigma' = \frac{V_e^2}{2gH} = \frac{p_a - p_v - \gamma z_s + \gamma h_l}{\gamma H} \quad (2.7.11)$$

عبارت است از نسبت دسترسی‌پذیر در e به انرژی کل H در دستگاه، زیرا تنها انرژی موجود انرژی جنبشی است. نسبت σ' شاخص یا عدد حفرة زایش است. مقدار بحرانی σ_c را با انجام آزمایشی بر روی مدلی از مجموعه‌های مشابه می‌توان تعیین کرد. برای اینکه دستگاه بدون حفرة زایش کار



شکل ۲۸.۱۱ نصب توربین یا پمپ.

کند، ارتفاع z_s کم فشار را برای نصب گردا باید طوری در نظر گرفت که مقدار حاصل کمی بزرگتر از پی باشد. وقتی شارش در شکل ۲۸.۱۱ برعکس شود، مانند حالت پمپ، علامت h_i تغییر می‌کند.

مثال ۱۰.۱۱ آزمایشهایی که بر روی مدل پمپی انجام شده نشان داده‌اند که $\sigma_c = 0.10$. یک دستگاه مشابه باید در محلی نصب شود که در آن، $p_a = 90 \text{ kPa}$ و $p_v = 35 \text{ kPa}$ و آب را به هد 25 m پمپ کند. اتلاف هد از مخزن مکش تا پمپ گردا 35 Nm/N است. ماکزیم هد مکش مجاز چقدر است؟

حل

با محاسبه z_s از معادله (۲.۷.۱۱) و جایگذاری مقادیر σ_c ، H ، p_a ، p_v نتیجه می‌گیریم

$$z_s = \frac{p_a - p_v}{\gamma} - \sigma' H - h_i = \frac{90000 - 35000}{9806} - 0.10(25) - 0.35 = 5.97 \text{ m}$$

هرچه مقدار z_s کمتر باشد، مقدار σ' دستگاه بزرگتر، و اطمینان در برابر حفره زایش بیشتر است. ■

هد مکش خالص مثبت (NPSH) اغلب در مشخصه شرایط مکش مینیمم یک توربوماشین مورد استفاده قرار می‌گیرد که عبارت است از

$$\text{NPSH} = \frac{V_e^2}{2g} = \frac{p_a - p_v - \gamma z_s}{\gamma} \pm h_i \quad (3.7.11)$$

که در آن علامت مثبت h_i برای توربینها و علامت منفی برای پمپهاست. با انجام آزمایشی بر روی ماشینی می‌توان مقدار ماکزیم z_s برای عملکرد ماشین را تعیین کرد به طوری که صدمه‌های

به بازده آن وارد نشود و دستگاه بدون نوفه نامطلوب و بی‌عیب کار کند. سپس NPSH را از این آزمایش و از معادله (۳.۷.۱۱) تعیین کرد. بدین ترتیب، ماشین را می‌توان در هر جایی نصب کرد، در صورتی‌که عمق مکش از z_s ، که از معادله (۳.۷.۱۱) پیدا می‌شود، کمتر باشد. یادآور می‌شویم که وقتی مخزن مکش در زیر توربوماشین باشد، مانند شکل ۲۸.۱۱، z_s مثبت است. سرعت ویژه مکش S دستگاه‌های مشابه را می‌توان فرمول‌بندی کرد. با حذف D_e در دو معادله زیر

$$\text{NPSH} = \frac{V_e^2}{2g} \sim \frac{Q^2}{D_e^5} \quad \text{و} \quad \frac{Q}{ND_e^3} = \text{ثابت}$$

S به دست می‌آید:

$$S = \frac{N\sqrt{Q}}{(\text{NPSH})^{3/4}} \quad (۴.۷.۱۱)$$

وقتی دستگاه‌های مختلف یک مجموعه در شرایط حفره زایش کار می‌کنند، مقادیر مساوی S ، حفره زایش یکسانی را نشان می‌دهند. اگر حفره زایش وجود نداشته باشد، معادله فوق صحت ندارد.

تمرینها

۱.۷.۱۱ پارامتر حفره زایش با رابطه زیر تعریف می‌شود (الف) $\left(\frac{P_u - P}{\rho V^2 / 2}\right)$ ؛ (ب) $\left(\frac{P_{atm} - P_u}{\rho V^2 / 2}\right)$ ؛ (ج) $\left(\frac{P - P_u}{\gamma V^2 / 2}\right)$ ؛

(د) $\left(\frac{P - P_u}{\rho V^2 / 2}\right)$ ؛ (ه) هیچکدام.

۲.۷.۱۱ حفره زایش بر اثر الف) سرعت زیاد؛ ب) فشار هوای کم؛ ج) فشار زیاد؛ د) فشار کم؛

ه) سرعت کم به وجود می‌آید.

مسائل

۱.۱۱ با استفاده از معادله‌های (۱.۱.۱۱) و (۳.۱.۱۱)، و با رابطه $P = \gamma QH$ ، رابطه مشابه توان را برحسب سرعت و قطر نشان دهید.

۲.۱۱ پمپ مرکز‌گریزی توسط یک موتور القایی به گرد درمی‌آید. اگر بار پمپ زیاد شود سرعت موتور کاهش می‌یابد. آزمایشی مجموعه‌های متعددی از N ، Q ، و H را برای پمپ تعیین می‌کند.

منحنی مشخصه پمپ در سرعت ثابتی که از داده‌های فوق تعیین می‌شود چگونه است؟

۳.۱۱ سرعت ویژه پمپ مثال ۱.۱۱ در نقطه بهترین بازده آن چقدر است؟

۴.۱۱ منحنی مشخصه بی‌بعد پمپ مثال ۱.۱۱ را رسم کنید. بر روی همین منحنی چندین نقطه از مشخصات پمپ جدید ($1444m$) را رسم کنید. چرا آنها دقیقاً بر روی یک منحنی قرار نمی‌گیرند؟
۵.۱۱ مطلوب است اندازه و سرعت همگام پمپ مشابه پمپ ۲m مثال ۱.۱۱ که در نقطه بهترین بازده اش $3m^3/s$ را در هد $100m$ تخلیه می‌کند.

۶.۱۱ منحنی مشخصه پمپی مشابه مجموعه‌های مثال ۱.۱۱ را که قطر دهانه تخلیه آن $42cm$ و سرعت آن $1800rpm$ است نشان دهید.

۷.۱۱ پمپی با گردابی به قطر $200mm$ در نقطه بهترین بازده خود $100L/s$ را در سرعت $1140rpm$ در هد $10m$ تخلیه می‌کند. سرعت ویژه آن چیست؟

۸.۱۱ یک جایگاه هیدرولیکی هد $100m$ و تخلیه متوسط $10m^3/s$ را داراست. اگر سرعت ژنراتور $200rpm$ باشد، توربین با چه سرعت ویژه‌ای مورد نیاز است؟ بازده را 92% فرض کنید.

۹.۱۱ توربین نمونه‌ای، $N_s = 36$ ، با گردابی به قطر $14in$ توان $72hp$ را در هد $44ft$ و با بازده 86% درصد تولید می‌کند. تخلیه و سرعت این نمونه چقدر است؟

۱۰.۱۱ چه اندازه و سرعت همگامی از یک دستگاه مشابه با دستگاه مسئله ۹.۱۱ لازم است تا $600cfs$ را در هد $260ft$ تخلیه کند؟

۱۱.۱۱ پمپی باید دبی $3m^3/s$ آب را در هد $25m$ انتقال دهد. اگر پمپ با $600rpm$ کار کند، چه نوع پمپی برای این تأسیسات مناسب است؟

۱۲.۱۱ در کاربردی که در آن سرعت پمپ $1800rpm$ و خیز فشار $900kPa$ است، چه نوع پمپی را باید انتخاب کرد؟ پمپ باید بنزین ($\rho = 680kg/m^3$) را با آهنگ شارش $2m^3/s$ پمپاژ کند؟

۱۳.۱۱ $22m^3/s$ آب در پره‌های ثابت توربینی دارای مؤلفه مماسی $2m/s$ با شعاع $125m$ است. گردا، که با سرعت $180rpm$ می‌گردد، در امتداد محوری تخلیه می‌کند. چه گشتاوری بر گردا اعمال می‌شود؟

۱۴.۱۱ در مسئله ۱۳.۱۱، با صرف نظر کردن از اتلافها، هد روی توربین چقدر است؟

۱۵.۱۱ ژنراتوری با سرعت $N = 240rpm$ قرار است با یک توربین در جایگاهی مورد استفاده قرار گیرد که در آن، $H = 120m$ و $Q = 8m^3/s$. با صرف نظر کردن از اتلافها، چه مؤلفه مماسی به توسط پره‌ها در $r = 1m$ باید به آب داده شود؟ چه گشتاوری روی گردا اعمال می‌شود؟ چه مقدار توان تولید می‌شود؟

۱۶.۱۱ دریچه‌های کشویی یک توربین تحت چه زاویه‌ای قرار گیرند تا $9MW$ از شارش $25m^3/s$ به دست آید؟ قطر دهانه درست در داخل دریچه‌های کشویی $3.5m$ ، و ارتفاع آن $1m$ است.

توربین با سرعت 20°rpm می‌گردد و شارش، کفشک را در امتداد محوری ترک می‌کند.

۱۷.۱۱ گشتاور تکانه در وضع مفروضی از دریچه‌های کشویی چگونه با تخلیه تغییر می‌کند؟

۱۸.۱۱ فرض کنید سرعت محوری ثابت درست در بالای کفشک توربین پیشرانه‌ای مسئله ۱۶.۱۱ است، مؤلفه‌های مماس سرعت را محاسبه کنید، در صورتی که شعاع توبی کفشک 30°mm و شعاع خارجی 90°mm باشد.

۱۹.۱۱ مطلوب است زوایای β_1 و β_2 پره در ورودی و خروجی توربین پیشرانه‌ای مسئله ۱۸.۱۱ به طوری که هیچ تکانه زاویه‌ای در شارش باقی نماند. (زوایا را برای شعاع داخلی، شعاع خارجی، و نقطه میانی محاسبه کنید.)

۲۰.۱۱ با صرف نظر از اتلافها، هد روی توربین مسئله ۱۶.۱۱ چقدر است؟

۲۱.۱۱ بازده هیدرولیکی توربینی ۹۵ درصد، و هد نظری آن 8m است. هد واقعی مورد نیاز چقدر است؟

۲۲.۱۱ آزمایشی بر روی یک مدل توربین با گردایی به قطر 260mm بازده 90% درصد را نشان داد. چه بازدهی از گردایی به قطر 2m انتظار می‌رود؟

۲۳.۱۱ منحنی نظری هد-تخلیه را برای پمپ مرکزگریزی با مشخصات زیر رسم کنید: $r_1 = 50\text{mm}$ ، $r_2 = 100\text{mm}$ ، $b_1 = 25\text{mm}$ ، $b_2 = 20\text{mm}$ ، $N = 1200\text{rpm}$ و $\beta_2 = 30^\circ$.

۲۴.۱۱ یک پمپ آب مرکزگریز (شکل ۶.۱۱) دارای گردایی با این مشخصات است: $r_1 = 275\text{in}$ ، $r_2 = 475\text{in}$ ، $b_1 = 17\text{in}$ ، $b_2 = 17\text{in}$ ، $\beta_1 = 30^\circ$ ، $\beta_2 = 45^\circ$ ، به ترتیب عرض گردا در r_1 و r_2 هستند). از ضخامت پرها صرف نظر کنید. در 1800rpm مطلوب است الف) طراحی تخلیه برای سیال ورودی فاقد پیش چرخش؛ ب) α_2 و هد نظری در نقطه بهترین بازده؛ ج) هد واقعی تولیدشده، اتلافها بر حسب فوت پوند بر پوند، و توان بازده هیدرولیکی 85% درصد و بازده کلی 78% درصد است.

۲۵.۱۱ یک پمپ مرکزگریز گردایی مشخصات زیر را دارد: $r_1 = 75\text{mm}$ ، $r_2 = 160\text{mm}$ ، $b_1 = 50\text{mm}$ ، $b_2 = 30\text{mm}$ ، $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$. در تخلیه 55L/s و برای ورود بدون شوک به پرها مطلوب است الف) سرعت؛ ب) هد؛ ج) گشتاور؛ د) قدرت؛ و ه) خیز فشار در گردا. از اتلافها صرف نظر کنید. $\alpha_1 = 90^\circ$.

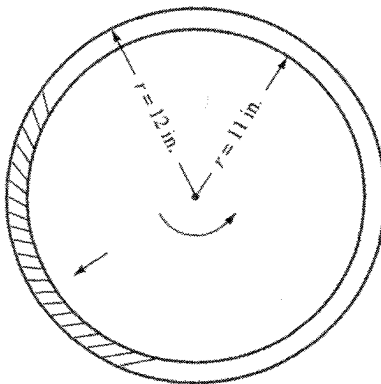
۲۶.۱۱ یک پمپ آب مرکزگریز با گردایی به ابعاد $r_1 = 2\text{in}$ ، $r_2 = 5\text{in}$ ، $b_1 = 3\text{in}$ ، $b_2 = 1.5\text{in}$ ، $\beta_2 = 60^\circ$ قرار است 5cfs را در هد 64ft تخلیه کند. مطلوب است الف) β_1 ؛ ب) سرعت؛ ج) قدرت؛ و د) خیز فشار در گردا. از اتلافها صرف نظر کنید، و فرض کنید که هیچ شوکی در ورودی نیست. $\alpha_1 = 90^\circ$.

۲۷.۱۱ مقادیری برای $\alpha_1 = 90^\circ$ ، r_1 ، β_1 ، β_2 ، b_1 و b_2 یک گردای مرکز‌گیز انتخاب کنید تا 30 L/s آب را از یک خط مکش به قطر 100 mm بگیرد و انرژی آن را به اندازه 15 m.N/N افزایش دهد. $N = 1200 \text{ rpm}$ ؛ $\alpha_1 = 90^\circ$ از اتلافات صرف‌نظر کنید.

۲۸.۱۱ مشخصات تیغه پمپی عبارت است از: $\beta_1 = \beta_2 = 25 \text{ mm}$ ؛ $b_1 = 2b_2 = 25 \text{ mm}$ ؛ $r_1 = r_2/3 = 50 \text{ mm}$ در هد نظری 30 m با تخلیه 30 L/s در نقطه بهترین بازده، زوایای تیغه و سرعت پمپ را تعیین کنید. از ضخامت پره‌ها صرف‌نظر کنید و هدایت را کامل فرض کنید. (راهنمایی: هر رابطه‌ای می‌شناسید که β_1 ، β_2 ، b_1 ، b_2 ، r_1 ، r_2 ، α_1 ، α_2 ، H_{th} ، Q ، V_{u2} ، V_{r2} ، ω و N را از دو نمودار برداری سرعت به هم ربط می‌دهد، و با جایگذاری شامل یک مجهول می‌شود یادداشت کنید.)

۲۹.۱۱ یک فشارسنج تقاضلی جیوه-آب، $R' = 700 \text{ mm}$ ، بین یک لوله مکش به قطر 100 mm و لوله تخلیه پمپی به قطر 80 mm متصل است. خط مرکزی لوله مکش 300 mm زیر لوله تخلیه است. در $Q = 60 \text{ L/s}$ آب، هد پمپ را محاسبه کنید.

۳۰.۱۱ عرض گردای دمنده‌ای (شکل ۲۹.۱۱) 18 in است. گردا دارای تیغه‌های مستقیم است و با سرعت 1200 rpm می‌گردد. برای $10000 \text{ ft}^3/\text{min}$ هوا، $\gamma = 0.08 \text{ lb/ft}^3$ ، $\gamma = 0$ مطلوب است (الف) زوایای ورودی و خروجی تیغه ($\alpha_1 = 90^\circ$)؛ (ب) هد تولیدشده، برحسب اینچ آب؛ (ج) توان نظری تولیدشده.

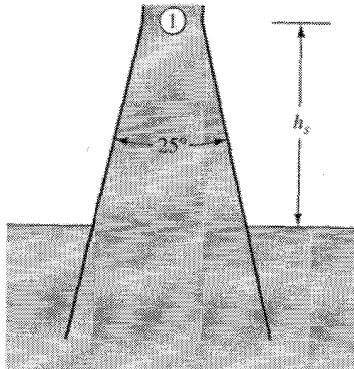


شکل ۲۹.۱۱ مسئله ۳۰.۱۱

۳۱.۱۱ یک دمنده هوا قرار است طوری طراحی شود که وقتی با سرعت 3600 rpm کار می‌کند فشاری معادل $100 \text{ mm H}_2\text{O}$ تولید کند. $\gamma = 11.7 \text{ N/m}^3$ ؛ $r_2 = 1.1r_1$ ؛ $\beta_2 = \beta_1$ ؛ عرض گردا 100 mm ؛ $\alpha_1 = 90^\circ$ است. r_1 را پیدا کنید.

۳۲.۱۱ در مسئله ۳۱.۱۱، وقتی $\beta_1 = 30^\circ$ ، تخلیه را برحسب متر مکعب در دقیقه محاسبه کنید.
 ۳۳.۱۱ یک جایگاه چرخ پلتن شارش پایای 55 L/s و سرعت شیپوره 75 m/s دارد. اگر زاویه تیغه 174° و $C_v = 0.98$ باشد، برای توان 60 Hz (مطلوب است الف) قطر چرخ؛ ب) سرعت؛ ج) قدرت؛ د) انرژی باقیمانده در آب. از اتلافات صرف نظر کنید.
 ۳۴.۱۱ یک چرخ ضربه‌ای قرار است برای تولید توان 50 Hz در جایگاهی مورد استفاده قرار گیرد که در آن، $H = 120 \text{ m}$ و $Q = 75 \text{ L/s}$. قطر چرخ و سرعت آن را تعیین کنید. $C_v = 0.97$ ؛ $e = 82\%$

۳۵.۱۱ لوله مکش توربینی (شکل ۳۰.۱۱) از قطر 6 ft تا 18 ft منبسط می‌شود. سرعت در مقطع ۱ در فشار بخار 1 ft و فشار جوی 32 فوت آب مساوی 30 ft/s است. h_s را در شرف حفره زایش (فشار مساوی فشار بخار در مقطع ۱) تعیین کنید.



شکل ۳۰.۱۱ مسئله ۳۵.۱۱

۳۶.۱۱ مطلوب است پارامتر حفره زایش در نقطه‌ای از آب جاری که در آن، $t = 20^\circ \text{ C}$ و $p = 14 \text{ kPa}$ و سرعت 12 m/s است.

۳۷.۱۱ توربینی با 0.8 قرار است در جایگاهی نصب شود که در آن، $H = 60 \text{ m}$ و یک جوسنج آبی روی 8.3 m قرار می‌گیرد. ماکزیمم ارتفاع مجاز برای نصب گردا در بالای مجرای پایینی آب چقدر است؟

۳۸.۱۱ سازنده پمپ در شارش $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$ ، NPSH مجاز را 3.5 m تعیین می‌کند. z (ارتفاع پمپ در بالای مخزن مکش) را بیابید. دمای آب 25° C ، فشار اتمسفر یک 101 kPa مطلق، و افت هد از مخزن تا پمپ 3 mN/N است. اگر فشار جوسنجی محلی 82 kPa مطلق باشد، تغییر ارتفاع چگونه است؟

مراجع

1. L. F. Moody, "The Propeller Type Turbine," *Trans. ASCE*, vol. 89, pp. 625-647, 1926.
2. A. J. Stepanoff, *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2nd ed., Wiley, New York, 1957.
3. J. W. Daily, "Hydraulic Machinery," in *Engineering Hydraulics*, H. Rouse (ed.), Wiley, New York, 1950.
4. R. T. Knapp, J. W. Daily, and F. G. Hammett, *Cavitation*, McGraw Hill, New York, 1970.
5. W. J. Rheingans, "Selecting Materials to Avoid Cavitation Damage," *Mater. Des. Eng.*, pp. 102-106, 1958.

شارش در مجرای بسته

در این فصل وسعت شارشهای پایا در لوله را، که می توان مطالعه کرد، گسترش می دهد (قسمتهای ۱.۱۲ تا ۶.۱۲) و در آن مقدمه ای برای شارش غیر پایا در لوله آورده می شود (قسمتهای ۷.۱۲ تا ۱۱.۱۲) روشهای بنیادی حل مسائل مربوط به شارش پایای تراکم ناپذیر در مجراهای بسته را در قسمتهای ۷.۶ و ۸.۶ نشان دادیم، و درباره حالتی شارش در شبکه های ساده لوله، از جمله اتلافهای ناشی از تغییر سطح مقطع یا جهت شارش، بحث کردیم. اکثریت قریب به اتفاق مسائل عملی را که به شارش متلاطم، و توزیع سرعت شارش متلاطم در لوله مربوط می شوند، در قسمت ۴.۶ بررسی کردیم. معادله داری-وایسیاخ که در فصل ۶ نشان داده شد، اتلافهای اصطکاک در لوله ها را به آهنگ شارش ارتباط داد، و ضریب اصطکاک معادله از نمودار مودی تعیین شد.

فرمولهای نمایی اصطکاک را که معمولاً در کارهای تجارتي و صنعتی کاربرد دارند در این فصل مورد بحث قرار می دهیم. کاربرد خط هیدرولیکی و خط انرژی را در حل مسائل، قبل از ارائه کاربردهای خاص دوباره تکرار می کنیم. مسائل پیچیده شارش را مانند سیستمهای هیدرولیکی، که ترکیبی از عنصرهای مختلف مانند پمپها و شبکه های لوله را به هم می آمیزد، مطالعه می کنیم. استفاده از کامپیوتر رقمی در تحلیل و طراحی به خصوص وقتی مناسب است که بخواهیم سیستمهای چند عنصری را مطالعه کنیم.

در خطوط لوله معمولاً شارش غیر پایا روی می‌دهد. در تحلیل‌گذاری هیدرولیکی در حالت عملکرد مد غیر پایا یک سیستم فشار و سرعت محاسبه می‌شوند. این حالت (گذرا) را با تنظیم یک شیر در سیستم لوله‌کش، خاموش کردن پمپ، یا تغییرات بشمار ممکن دیگر در عملکرد سیستم می‌توان ایجاد کرد. تحلیل شارش غیر پایا خیلی پیچیده‌تر از تحلیل شارش پایاست. متغیر مستقل دیگر، زمان، وارد معادله‌ها می‌شود، و معادله‌های می‌توانند به‌جای اینکه به شکل معادله‌های دیفرانسیل معمولی باشند به صورت معادله‌های دیفرانسیل جزئی باشند. ابتدا نوسان لوله U با کاربرد مفاهیم برای خطوط لوله مطالعه می‌شود و پس از آن شارش در یک سیستم تک لوله بررسی می‌شود. هریک از این شارشها غیر پایا به صورت یک جرم انباشته تحلیل می‌شود، و یک معادله دیفرانسیل معمولی را می‌دهد. سپس، معادله‌ها در حالت‌های با تغییرات شدیدتر سرعت به دست آورده می‌شوند؛ در این حالت باید تراکم‌پذیری مایع و کشسانی جداره لوله را (که معمولاً چکش آبی* یا چکش مایع نامیده می‌شود) در نظر گرفت. معادله‌های دیفرانسیل جزئی با استفاده از روشهای عددی حل می‌شوند.

۱.۱۲ شارش پایا: فرمولهای نمایی اصطکاک لوله

فرمولهای اصطکاک در لوله‌های صنعتی معمولاً تجربی و به صورت زیر است

$$\frac{h_f}{L} = \frac{RQ^n}{D^m} \quad (۱.۱.۱۲)$$

که در آن، h_f/L افت هد در طول واحد لوله (شیب خط انرژی)، Q تخلیه، و D قطر داخلی لوله است. ضریب مقاومت R فقط تابعی از زبری لوله است. معادله‌ای با نماها و ضریب مشخص R فقط برای چسبندگی سیالی معتبر است که این معادله برای آن نوشته می‌شود، و معمولاً محدود به گستره‌ای از اعداد رینولدز و قطرهایست. چنین معادله‌ای در گستره‌ی کارایی خود معادله ساده‌ای است، و اغلب از نمودگرامها برای حل مسائل استفاده می‌شود.

فرمول هازن-ویلیامز [مرجع ۱]** برای شارش آب با دمای معمولی در لوله‌ها به همین صورت است، که در آن، R از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R = \begin{cases} \frac{4.727}{C^n} & \text{در آحاد USC} & (۲.۱.۱۲) \\ \frac{1.49}{C^n} & \text{در آحاد SI} & (۳.۱.۱۲) \end{cases}$$

* ضربه قوچ-م.

** چند مرجع در انتهای فصل آورده شده‌اند.

و $n = ۱,۸۵۲$ ، $m = ۴,۸۷۰۴$ ، و C به صورت زیر به زبری بستگی دارد:

حالت	C
لوله‌های فوق‌العاده هموار، مستقیم؛ لوله‌ها از جنس سیمان نسوز	۱۴۰
لوله‌های بسیار هموار؛ لوله‌های بتنی؛ لوله‌های چدنی نو	۱۳۰
لوله‌های چوبی؛ لوله‌های فولادی جوشکاری شده نو	۱۲۰
رس لعابدار؛ فولاد پرچکاری شده نو	۱۱۰
لوله‌های چدنی بعد از چند سال استفاده	۱۰۰
لوله‌های فولاد پرچکاری شده بعد از چند سال استفاده	۹۵
لوله‌های کهنه در شرایط بد	۸۰ تا ۶۰

با استفاده از معادله داریسی-وایسباخ و ضرایب اصطکاک نمودار مودی، و یا، با استفاده از داده‌های تجربی دسترسی‌پذیر، می‌توان فرمول مشخصی را برای کاربرد خاصی به دست آورد [مرجع ۲]. فرمولهای نمایی که از نتایج تجربی به دست می‌آیند عموماً در ناحیه‌ای که داده‌ها جمع‌آوری می‌شوند خیلی مقیدند و به سهولت قابل استفاده‌اند. برون‌یابیها و تعمیم آن برای حالت‌های دیگر باید با احتیاط انجام شود.

مقایسه‌ای بین معادله هازن-ویلیامز و معادله داریسی-وایسباخ که ضریب اصطکاک آنها از نمودار مودی به دست می‌آیند در شکل ۱.۱۲ نشان داده شده است. این شکل مقادیر معادل f را برحسب عدد رینولدز برای سه مقدار زبری هازن-ویلیامز نمونه‌ای ۷۰، ۱۰۰، و ۱۴۰ نشان می‌دهد. سیال آب ۱۵°C است.

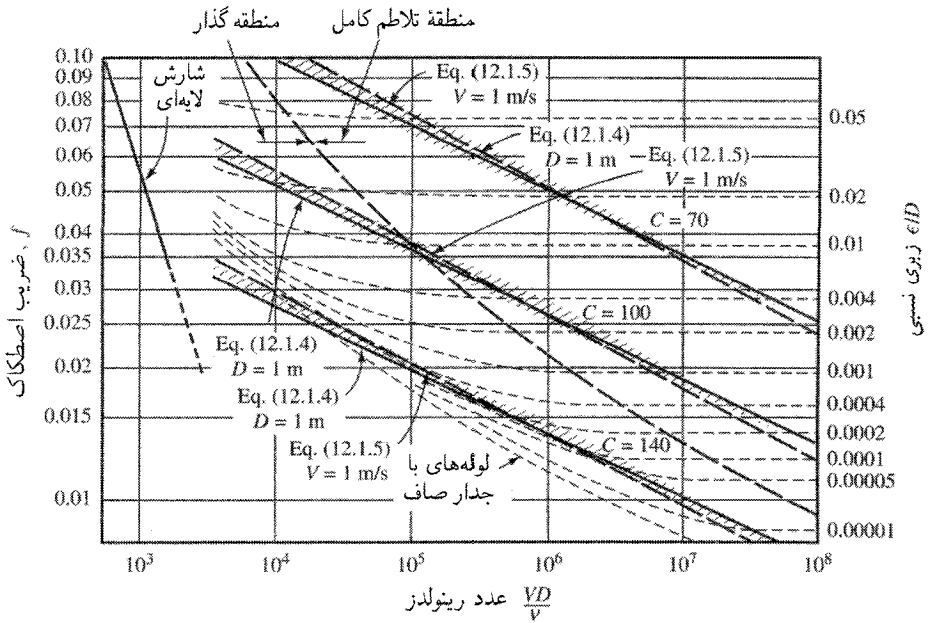
با مساوی قرار دادن شیب خط هیدرولیکی در معادله داریسی-وایسباخ،
 $h_f/L = fQ^2/2gDA^2$ ، با معادله (۱.۱۲)، و حل f ، و وارد کردن عدد رینولدز برای حذف Q ، به دست می‌آید (در SI)

$$f = \frac{10142}{C^{1.852} D^{0.184}} R^{-0.148} \quad (۴.۱.۱۲)$$

به‌ازای یک ضریب هازن-ویلیامز C و قطر D مفروض، ضریب اصطکاک با افزایش عدد رینولدز کاهش می‌یابد. جواب مشابهی برای f برحسب C ، عدد رینولدز، و V با ترکیب همان معادله‌ها و حذف D می‌توان به دست آورد

$$f = \frac{1304567 V^{0.184}}{C^{1.852}} R^{-0.1662} \quad (۵.۱.۱۲)$$

باید خاطر نشان کرد که در معادله (۴.۱.۱۲)، f به قطر لوله بستگی زیادی ندارد. همچنین، ضریب اصطکاک در معادله (۵.۱.۱۲) به سرعت بستگی زیادی ندارد.



شکل ۱.۱۲ مقایسه معادله‌های هازن-ویلیامز و دارسی-وایسباخ در نمودار مودی.

در شکل ۱.۱۲، معادله (۴.۱.۱۲) را در سه مقدار انتخابی C برای قطر معلوم 1 m ، و معادله (۵.۱.۱۲) را برای سرعت معلوم 1 m/s نشان داده‌ایم. ناحیه هاشورخورده دور هر یک از این خطوط، گستره تغییر عملی متغیرها را نشان می‌دهد ($0.25\text{ m} < D < 6\text{ m}$ ، $0.30\text{ m/s} < V < 30\text{ m/s}$).

می‌توان دید که دو فرمول دارسی-وایسباخ و هازن-ویلیامز که برای محاسبه اتلافها در یک خط لوله به کار می‌روند اختلاف فاحشی با هم دارند. می‌توان گفت معادله دارسی-وایسباخ نسبت به فرمولهای تجربی دیگر بر منطق بیشتری مبتنی است و به‌طور وسیعی مورد پذیرش قرار گرفته است. با وجود این، اگر داده‌های تجربی در دسترس باشند و فرمول نمایی مبتنی بر داده‌ها به دست آید، این فرمول بر روش عمومیت‌ر نمودار مودی ترجیح دارد. داده‌ها باید قابل اعتماد باشند، و معادله را فقط در گستره داده‌های جمع‌آوری شده می‌توان صحیح دانست.

۲.۱۲ شارش پایا: خط هیدرولیکی و خط انرژی

مفاهیم خط هیدرولیکی و خط انرژی برای تحلیل مسائل پیچیده‌تر شارش مفیدند. اگر جمله p/γ را برای هر نقطه واقع در امتداد یک سیستم لوله تعیین، و به عنوان فاصله قائم از بالای مرکز لوله

رسم کنیم، مکان هندسی این نقاط عبارت است از خط هیدرولیکی، عموماً، نمودار دو جمله زیر

$$\frac{p}{\gamma} + z$$

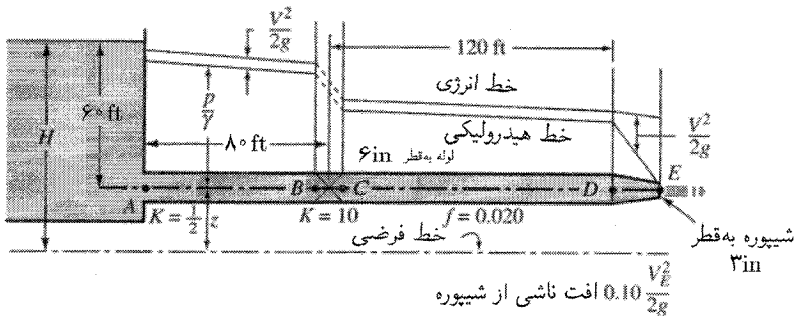
در شارش به عنوان عریض، برحسب فاصله طولی در امتداد لوله به عنوان طول، خط هیدرولیکی را نشان می‌دهد. خط هیدرولیکی یا خط هد پیزومتریک، عبارت است از مکان هندسی ارتفاعهایی که مایع تا آن ارتفاعها در لوله‌های شیشه‌ای قائم متصل به دهانه‌های پیزومتر واقع در خط لوله بالا می‌رود. وقتی فشار در خط لوله کمتر از فشار اتمسفریک است، p/γ منفی، و خط هیدرولیکی در زیر خط لوله است.

اگر انرژی دسترسی‌پذیر، برحسب نیوتن-متر بر نیوتن، برای هر نقطه واقع در امتداد خط لوله را به عنوان عرض، برحسب فاصله در امتداد خط لوله به عنوان طول، رسم کنیم و نقاط به دست آمده را به هم متصل کنیم، خط انرژی می‌آید. این خط متشکل از نمودار زیر

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$

برای تمام نقاط واقع در امتداد خط است. بنا به تعریف، خط انرژی، صرف‌نظر از ضریب تصحیح انرژی، همیشه به اندازه فاصله عمودی $V^2/2g$ در بالای خط هیدرولیکی قرار دارد.

خط هیدرولیکی و خط انرژی در شکل ۲.۱۲ برای یک خط لوله ساده نشان داده شده‌اند. این خط لوله شامل یک ورودی با لبه تیز، یک شیر، و شیپوره‌ای واقع در انتهای خط لوله است. برای ترسیم این خطوط وقتی سطح مخزن معلوم است، ابتدا لازم است که معادله انرژی از مخزن تا خروجی را که شامل تمام اتلافهای جزئی و همچنین اصطکاک لوله باشد بنویسیم، و سپس هد سرعت $V^2/2g$ را از آن به دست آوریم. سپس، برای پیدا کردن ارتفاع خط هیدرولیکی در هر



شکل ۲.۱۲ خط هیدرولیکی و خط انرژی.

نقطه، معادله انرژی از مخزن تا آن نقطه را، که شامل تمام اتلافهای بین این دو نقطه باشد بنویسیم. معادله را برای $z + p/\gamma$ حل می‌کنیم، و این عبارت را در بالای یک خط فرضی رسم می‌کنیم. برای پیدا کردن خط انرژی در همان نقطه، معادله را برای $z + p/\gamma + V^2/2g$ حل، و آن را در بالای یک خط فرضی رسم می‌کنیم.

سطح مخزن، هم خط هیدرولیکی است و هم خط انرژی. در ورودی با لبه تیز خط انرژی بر اثر اتلاف انرژی به میزان $0.5(V^2/2g)$ ، و خط هیدرولیکی به میزان $1.5(V^2/2g)$ افت می‌کند. این موضوع با به کار بردن معادله انرژی بین سطح مخزن و نقطه‌ای درست در فرودست ورودی لوله آشکار می‌شود به این ترتیب که

$$H + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} + 0.5 \frac{V^2}{2g}$$

یا محاسبه $z + p/\gamma$ به دست می‌آید

$$z + \frac{p}{\gamma} = H - 1.5 \frac{V^2}{2g}$$

این رابطه افتی برابر با $1.5(V^2/2g)$ را نشان می‌دهد. افت هد ناشی از ورودی ناگهانی واقعاً در خود ورودی رخ نمی‌دهد، بلکه در فاصله ۱۰ برابر قطر فرودست لوله یا بیشتر پدید می‌آید. رسم بر این است که این افت را در یک اتصال نشان دهند.

مثال ۱.۱۲ ارتفاع خط هیدرولیکی و خط انرژی را در نقاط A, B, C, D, E از شکل ۲.۱۲ تعیین کنید. $z = 10 \text{ ft}$.

حل

ابتدا، با به کار بردن معادله انرژی از مخزن تا E ، هد سرعت را محاسبه می‌کنیم:

$$10 + 60 + 0 + 0 = \frac{V_E^2}{2g} + 10 + 0 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{2g} + 0.20 \frac{200}{0.50} \frac{V^2}{2g} + 10 \frac{V^2}{2g} + 0.10 \frac{V_E^2}{2g}$$

از معادله پیوستگی، $V_E = 4V$. بعد از ساده‌کردن به دست می‌آید

$$60 = \frac{V^2}{2g} \left[16 + \frac{1}{2} + 8 + 10 + 16(0.1) \right] = 36.1 \frac{V^2}{2g}$$

شارش پایا: خط هیدرولیکی و خط انرژی ۷۱۵

و $V^2/2g = 1.66 \text{ft}$. با به کار بردن معادله انرژی از مخزن تا A نتیجه می‌گیریم

$$70 + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + 0.5 \frac{V^2}{2g}$$

از این رو، خط هیدرولیکی در A عبارت است از

$$\frac{p}{\gamma} + z_A = 70 - 1.5 \frac{V^2}{2g} = 70 - 1.5(1.66) = 67.51 \text{ft}$$

خط انرژی در A عبارت است از

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = 67.51 + 1.66 = 69.17 \text{ft}$$

و در B به دست می‌آید

$$70 + 0 + 0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + 0.5 \frac{V^2}{2g} + 0.2 \frac{80}{0.5} \frac{V^2}{2g}$$

و

$$\frac{p}{\gamma} + z_B = 70 - (1.5 + 3.2)(1.66) = 62.19 \text{ft}$$

خط انرژی در ارتفاع $62.19 + 1.66 = 63.85 \text{ft}$ واقع است.

خط هیدرولیکی در عرض شیر به میزان $10 V^2/2g$ ، یا 16.66ft افت می‌کند. از این رو،

خط هیدرولیکی و خط انرژی در C به ترتیب در 47.25ft و 45.59ft هستند.

در نقطه D به دست می‌آید

$$70 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \left(1.5 + 0.2 \frac{200}{0.5}\right) \frac{V^2}{2g}$$

و

$$\frac{p}{\gamma} + z_D = 70 - 19.5(1.66) = 37.6 \text{ft}$$

و خط انرژی در ارتفاع $37.6 + 1.66 = 39.26 \text{ft}$ واقع است.

در نقطه E خط هیدرولیکی در ارتفاع 10 ft ، و خط انرژی در ارتفاع

$$z + \frac{V_E^2}{2g} = 10 + 16 \frac{V^2}{2g} = 10 + 16(1.66) = 36.66\text{ ft}$$

است.

اگر مجرا افقی باشد، گرادیان هیدرولیکی عبارت است از شیب خط هیدرولیکی؛ در غیر این صورت، عبارت است از

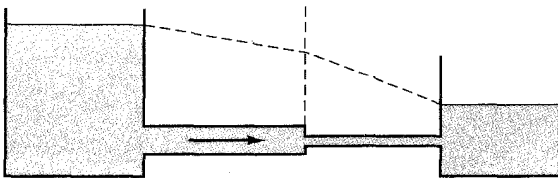
$$\frac{d(z + p/\gamma)}{dL}$$

اگر مجرا افقی باشد، گرادیان هیدرولیکی عبارت است از شیب خط هیدرولیکی؛ در غیر این صورت، عبارت است از

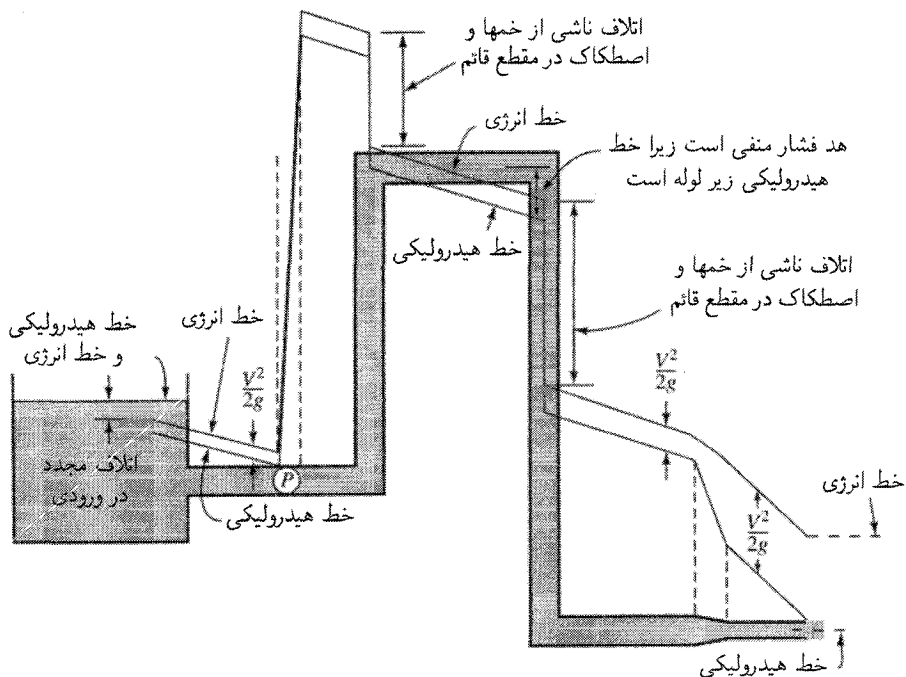
$$\frac{d(z + p/\gamma + V^2/2g)}{dL}$$

در بیشتر حالتی که با خطوط لوله طولی سر و کار داریم می‌توان از اتلافهای جزئی (در صورتی که کمتر از ۵ درصد اتلافهای اصطکاکی لوله باشند) صرف نظر کرد، یا برای حل مسائل می‌توان آنها را به صورت طولهایی معادل طول لوله در نظر گرفت و بر طول واقعی لوله افزود. برای این حالتها مقدار هد سرعت $V^2/2g$ در مقایسه با $f(L/D)V^2/2g$ کوچک است و می‌توان از آن صرف نظر کرد.

در این حالت خاص و در عین حال رایج، اگر اثرهای جزئی صرف نظر شود، خط هیدرولیکی و خط انرژی بر هم منطبق می‌شوند. تک خط نشان داده شده در شکل ۳.۱۲ خط هیدرولیکی نام دارد. هیچ تغییری در خط هیدرولیکی ناشی از اتلافهای جزئی نشان داده نمی‌شود. گرادیان هیدرولیکی برای



شکل ۳.۱۲ خط هیدرولیکی برای خطوط لوله طولی که در آنها از اتلافهای جزئی صرف نظر می‌کنیم یا آنها را به صورت طولهایی معادل طول لوله فرض می‌کنیم.



شکل ۴.۱۲ خط هیدرولیکی و خط انرژی در سیستم مجهز به پمپ و سیفون.

این حالتها با خطوط لوله طول مساوی h_f/L است که h_f با معادله دارسی-وایسباخ چنین می شود.

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad (۱.۲.۱۲)$$

یا از معادله (۱.۱.۱۲) به دست می آید. شارش (به استثنای شارش در پمپ) همیشه در امتداد خط انرژی کاهش یابنده است.

پمپها انرژی شارش را افزایش می دهند. این امر را می توان در معادله انرژی به صورت افت منفی، و یا به صورت انرژی بر وزن واحد که به صورت یک جمله مثبت به طرف فرادست معادله افزوده می شود نشان داد. خط هیدرولیکی در پمپ به تندی صعود می کند. شکل ۴.۱۲ خط هیدرولیکی و خط انرژی یک سیستم با پمپ و سیفون را نشان می دهد. شیب واقعی خطوط را فقط برای خطوط افقی می توان نشان داد.

مثال ۲.۱۲ یک پمپ به توان ۷۵kW در محور ورودی و بازده ۷% درصد به خط لوله آب حامل $۱\text{m}^3/\text{s}$ متصل است. پمپ یک لوله مکش به قطر ۱۵۰mm و یک لوله تخلیه به قطر

۱۲۰ mm دارد. لوله مکش ۱ m پایین لوله تخلیه وارد پمپ می‌شود. در فشار مکش ۷۰ kN/m^2 ، فشار در فلنج تخلیه و خیز خط هیدرولیکی در پمپ را تعیین کنید.

حل

اگر انرژی افزوده شده برحسب متر-نیوتن بر نیوتن را با E نشان دهیم، توان افزوده شده بر سیال عبارت است از

$$Q\gamma E = ۷۵۰۰(۰.۷۰) \quad \text{یا} \quad E = \frac{۷۵۰۰(۰.۷)}{۰.۱(۹۸۰۶)} = ۵,۳۵۴ \text{ m}$$

با به کار بردن معادله انرژی از فلنج مکشی تا فلنج تخلیه به دست می‌آید

$$\frac{V_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + 0 + ۵,۳۵۴ = \frac{V_d^2}{2g} + \frac{p_d}{\gamma} + 1$$

که زیر نمادهای s و d به ترتیب مربوط به شرایط مکش و تخلیه‌اند. از معادله پیوستگی داریم

$$V_s = \frac{۰.۱(۴)}{۰.۱۵۲\pi} = ۵,۶۶ \text{ m/s} \quad V_d = \frac{۰.۱(۴)}{۰.۱۲۲\pi} = ۸,۸۴ \text{ m/s}$$

با محاسبه p_d نتیجه می‌گیریم

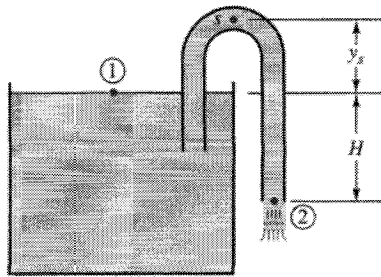
$$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{۵,۶۶^2}{۲(۹,۸۰۶)} + \frac{۷۰۰۰۰}{۹۸۰۶} + ۵,۳۵۴ - \frac{۸,۸۴^2}{۲(۹,۸۰۶)} - 1 = ۹,۱۴۱ \text{ m}$$

و $p_d = ۸۹,۶ \text{ kN/m}^2$ خیز خط هیدرولیکی عبارت است از

$$\left(\frac{p_d}{\gamma} + 1 \right) - \frac{p_s}{\gamma} = ۹,۱۴۱ + 1 - \frac{۷۰۰۰۰}{۹۸۰۶} = ۳,۰۰۲ \text{ m}$$

در این مثال بیشتر انرژی به صورت انرژی جنبشی به سیال افزوده شده است و در حالی که خیز خط انرژی $۵,۳۵۴ \text{ m}$ است، خط هیدرولیکی فقط به میزان $۳,۰۰۲ \text{ m}$ صعود می‌کند. ■

یک توربین از سیال انرژی می‌گیرد و باعث افت سریع هر دو خط انرژی و هیدرولیکی می‌شود. انرژی اخذ شده از نیروی گرانی واحد سیال را در محاسبه خطوط به عنوان یک افت می‌توان در نظر گرفت.



شکل ۵.۱۲ سیفون.

مجرای بسته‌ای، با آرایه‌ای مطابق شکل ۵.۱۲، که مایع را تا ارتفاع بالاتر از سطح آزاد بالا می‌کشد و سپس آن را در ارتفاعی پایینتر تخلیه می‌کند، سیفون نام دارد. محدودیتهایی در عملکرد سیفون وجود دارد که ناشی از فشارهای پایینی است که در نزدیکی نقطهٔ اوج s رخ می‌دهد. به فرض اینکه سیفون پراز شاره، و ستون مایع در سرتاسر آن پیوسته باشد، با به کار بردن معادلهٔ انرژی برای قسمت ۱ تا ۲ معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$H = \frac{V^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

که در آن، K مجموع ضرایب اتلافهای جزئی است. با فاکتورگیری از همدست به دست می‌آید

$$H = \frac{V^2}{2g} \left(1 + K + \frac{fL}{D} \right) \quad (2.2.12)$$

که با روشی مشابه روش حل مسائل سادهٔ نوع اول یا دوم لوله حل می‌شود. با معلوم بودن تخلیه، H به‌طور صریح حل می‌شود، اما با یک H معلوم، حل سرعت یک حل آزموننی است که با فرض یک مقدار اختیاری برای f شروع می‌شود.

با به کار بردن معادلهٔ انرژی در بین نقاط ۱ و s که بعد از حل معادلهٔ (۲.۲.۱۲) نوشته می‌شود فشار نقطهٔ اوج s به‌دست می‌آید. معادلهٔ انرژی عبارت است از

$$0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + y_s + K' \frac{V^2}{2g} + f \frac{L'}{D} \frac{V^2}{2g}$$

که در آن، K' مجموع ضرایب اتلاف جزئی بین دو نقطه، و L' طول مجرای فرادست s است. با

حل معادله برای فشار به دست می آید

$$\frac{p_s}{\gamma} = -y_s - \frac{V^2}{2g} \left(1 + K' + \frac{fL'}{D} \right) \quad (3.2.12)$$

این رابطه نشان می دهد که فشار منفی است و با افزایش y_s و $V^2/2g$ کاهش می یابد. اگر جواب معادله مقداری مانند p_s/γ باشد و این مقدار مساوی یا کمتر از فشار بخار^۱ باشد، در آن صورت معادله (۲.۲.۱۲) صحت ندارد، زیرا با تبخیر قسمتهایی از ستون مایع، فرض تراکم ناپذیری که در استنتاج معادله انرژی به کار رفت بی اعتبار می شود.

اگر چه معادله (۲.۲.۱۲) صحت ندارد، تا مادامی که y_s به علاوه فشار بخار از فشار اتمسفریک محلی که برحسب طول ستون مایع بیان می شود کمتر باشد، به طور نظری یک تخلیه وجود خواهد داشت. وقتی معادله (۳.۲.۱۲) فشاری کمتر از فشار بخار را در s نتیجه دهد، فشار در s را می توان فشار بخار در نظر گرفت. سپس، با این فشار معلوم، می توان معادله (۳.۲.۱۲) را برای $V^2/2g$ حل کرد و از آنجا تخلیه را به دست آورد. بنا به فرض، هوا در مقطع ۲ وارد سیفون نمی شود و خلأ موجود در s ، که شارش را به وجود می آورد، از بین نمی رود.

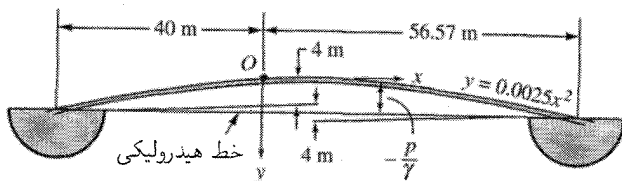
وقتی شدت فشار در نقطه اوج سیفون نزدیک به فشار بخار است، سیفون عملاً به طور رضایتبخشی کار نمی کند. در فشارهای پایین، هوا و گازهای دیگر از محلول خارج می شوند و در نقطه اوج جمع می شوند، بدین ترتیب طول ستون مایع سمت راستی که فشار پایین در نقطه اوج ایجاد می کنند کاهش می دهند. سیفونهای بزرگ که به طور دائم کار می کنند مجهز به پمپهای خلأ هستند تا گازها را از نقاط اوج خارج کنند. کمترین فشار ممکن است در نقطه اوج به وجود نیاید بلکه در فرودست آن نقطه به وجود آید، زیرا اتلافهای اصطکاکی و اتلافهای جزئی می توانند فشار را بیش از افزایش فشار ناشی از کاهش ارتفاع، کاهش دهند.

مثال ۳.۱۲ با صرف نظر از اتلافهای جزئی و با مساوی در نظر گرفتن طول لوله با فاصله افقی آن، نقطه فشار مینیمم را در سیفون شکل ۶.۱۲ تعیین کنید.

حل

اگر از اتلافهای جزئی صرف نظر کنیم، از جمله انرژی جنبشی $V^2/2g$ نیز معمولاً می توان صرف نظر کرد. در آن صورت، خط هیدرولیکی یک خط مستقیم است که دو سطح مایع را به هم متصل می کند.

۱. وقتی فشار مایعی تا فشار بخار آن کاهش یابد، می جوشد. فشار بخار یک مایع خاص تابعی از دماست. فشار بخار آب H_2O ۶۱۹ m^۳ r^۰ (۲۰۳ ft H₂O)° C در دمای ۲۰° (۳۲° F) مطلق در دمای ۲۰° C (۳۳٫۹۱ ft H₂O) ۱۰۳۳ mH₂O و (۳۲° F) مطلق در ۱۰۰° C (۲۱۲° F) است. پیوست ج را ببینید.



شکل ۶.۱۲ سیفون دو مخزن را به هم متصل می‌کند.

مختصات دو نقطهٔ واقع بر روی یک خط عبارت‌اند از

$$x = -40\text{ m}, y = 4\text{ m} \quad \text{و} \quad x = 56.57\text{ m}, y = 8\text{ m}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ $y = mx + b$ معادلهٔ خط به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$y = 0.0414x + 5.656\text{ m}$$

فشار مینیمم در جایی رخ می‌دهد که فاصلهٔ بین خط هیدرولیکی و لوله ماکزیمم باشد

$$\frac{p}{\gamma} = 0.0025x^2 - 0.0414x - 5.656$$

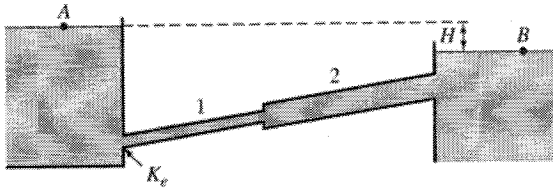
برای پیدا کردن فشار مینیمم p/γ ، می‌نویسیم $d(p/\gamma)/dx = 0$ که نتیجه می‌شود $x = 8.28$ و $p/\gamma = -5.827\text{ m}$ از سیال جاری. نقطه مینیمم وقتی رخ می‌دهد که شیب لوله و خط هیدرولیکی مساوی باشد. ■

۳.۱۲ شارش پایا: سیستمهای لوله‌ای

لوله‌های سری

وقتی دو لوله با اندازه یا زیربهای مختلف طوری به هم متصل می‌شوند که سیال ابتدا در یک لوله و سپس در لولهٔ دیگر جریان می‌یابد، می‌توان گفت آنها به‌طور سری به هم متصل شده‌اند. شکل ۷.۱۲ یک مسئلهٔ نمونهٔ لوله‌های سری را نشان می‌دهد، که در آن، هد H در یک تخلیهٔ معلوم یا تخلیه در یک H معلوم مطلوب است. با به‌کاربردن معادلهٔ انرژی از A تا B ، که شامل تمام اتلافها باشد، نتیجه می‌گیریم

$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + K_e \frac{V_1^2}{2g} + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g}$$



شکل ۷.۱۲ اتصال لوله‌های سری.

در رابطه بالا، زیرنماها به دو لوله مربوط می‌شوند. آخرین جمله عبارت است از افت هد در خروجی لوله ۲. از معادله پیوستگی داریم

$$V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2$$

با حذف V_2 از معادله‌های فوق نتیجه می‌گیریم

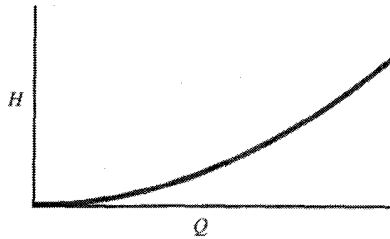
$$H = \frac{V_1^2}{2g} \left\{ K_e + \frac{f_1 L_1}{D_1} + \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 + \frac{f_2 L_2}{D_2} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 + \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right\}$$

با معلوم بودن طول و اندازه لوله‌ها رابطه فوق به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$H = \frac{V_1^2}{2g} (C_1 + C_2 f_1 + C_2 f_2) \quad (۱.۳.۱۲)$$

که در آن، C_1 ، C_2 و C_2 معلوم‌اند. با معلوم بودن تخلیه، عدد رینولدز را می‌توان به سهولت محاسبه، و f ها را از نمودار مودی پیدا کرد. سپس با جایگذاری مستقیم می‌توان H را پیدا کرد. در معادله (۱.۳.۱۲) با معلوم بودن H ، مجهولها عبارت‌اند از V_1 ، f_1 ، f_2 که با فرض کردن مقادیری برای f_1 و f_2 (آنها را می‌توان مساوی فرض کرد)، یک مقدار آزمونی برای V_1 پیدا می‌شود که از روی آن، اعداد رینولدز آزمونی تعیین می‌شوند و مقادیر f_1 و f_2 به دست می‌آیند. با این مقادیر جدید f_1 و f_2 ، از معادله (۱.۳.۱۲) V_1 دقیقتری به دست می‌آید. از آنجا که f به طور جزئی با عدد رینولدز تغییر می‌کند، حل آزمونی خیلی سریع به نتیجه می‌رسد. همین روشها برای بیش از دو لوله سری نیز به کار می‌روند.

اگر H معلوم باشد، به جای فرض f_1 و f_2 ، با استفاده از یک حل ترسیمی می‌توان مقادیر مختلفی در هر نوبت برای Q فرض، و مقادیر متناظر H را محاسبه، و مطابق شکل ۸.۱۲ برحسب Q رسم کرد. با متصل کردن نقاط به دست آمده به توسط یک منحنی هموار، به سهولت می‌توان مقدار صحیح Q را در مقدار H مفروض خواند.



شکل ۸.۱۲ نمودار H محاسبه شده برای مقادیر انتخابی Q .

مثال ۴.۱۲ در شکل ۷.۱۲، $K_e = 0.5$ ، $L_1 = 300\text{ m}$ ، $D_1 = 600\text{ mm}$ ، $\varepsilon_1 = 2\text{ mm}$ ، $L_2 = 240\text{ m}$ ، $D_2 = 1\text{ m}$ ، $\varepsilon_2 = 0.3\text{ mm}$ ، $\nu = 3 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ و $H = 6\text{ m}$. تخلیه در سیستم را تعیین کنید.

حل
از معادله انرژی داریم

$$6 = \frac{V_1^2}{2g} \left[0.5 + f_1 \frac{300}{0.6} + (1 - 0.6^2)^2 + f_2 \frac{240}{1} 0.6^4 + 0.6^4 \right]$$

بعد از ساده کردن چنین می شود

$$6 = \frac{V_1^2}{2g} (10392 + 500f_1 + 31104f_2)$$

با توجه به $\varepsilon_2/D_2 = 0.0003$ ، $\varepsilon_1/D_1 = 0.0033$ و شکل ۲۰.۶، مقادیر f برای گستره کاملاً متلاطم را به صورت زیر فرض می کنیم

$$f_1 = 0.026 \quad f_2 = 0.15$$

با محاسبه V_1 با این مقادیر به دست می آید $V_1 = 2.848\text{ m/s}$ ، $V_2 = 1.025\text{ m/s}$

$$R_1 = \frac{2.848(0.6)}{3 \times 10^{-6}} = 569600 \quad R_2 = \frac{1.025(1)}{3 \times 10^{-6}} = 341667$$

از شکل ۲۰.۶، $f_1 = 0.0265$ ، $f_2 = 0.168$. با محاسبه مجدد V_1 نتیجه می گیریم
 $Q = 0.797\text{ m}^3/\text{s}$ و $V_1 = 2.819\text{ m/s}$

لوله‌های معادل

لوله‌های معادل را با روش طولهای معادل می‌توان حل کرد. دو سیستم لوله وقتی معادل اند که افت هد یکسان، تخلیه یکسانی را در هر دو سیستم به وجود آورد. از معادله (۱۰.۲.۱۲) به دست می‌آید

$$h_{f_1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{Q_1^2}{(D_1^2 \pi^2 / 4)^2 2g} = \frac{f_1 L_1}{D_1^5} \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g}$$

و برای لوله دوم

$$h_{f_2} = \frac{f_2 L_2}{D_2^5} \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g}$$

برای اینکه دو لوله معادل باشند، باید داشته باشیم

$$h_{f_1} = h_{f_2} \quad Q_1 = Q_2$$

با مساوی قرار دادن $h_{f_1} = h_{f_2}$ و ساده کردن نتیجه می‌شود

$$\frac{f_1 L_1}{D_1^5} = \frac{f_2 L_2}{D_2^5}$$

با محاسبه L_2 به دست می‌آید

$$L_2 = L_1 \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^5 \quad (۲.۳.۱۲)$$

این رابطه مشخص می‌کند که طول لوله دوم باید با لوله اول معادل باشد. برای مثال، برای جایگزین کردن یک لوله ۳۰۰ m به قطر ۲۵۰ mm با طول معادل لوله‌ای به قطر ۱۵۰ mm ، باید مقادیر f_1 و f_2 را از طریق انتخاب یک تخلیه در گستره تخلیه لوله‌ها تخمین زد. اگر $f_1 = ۰.۰۲$ و $f_2 = ۰.۱۸$ بنا براین

$$L_2 = ۳۰۰ \frac{۰.۰۲}{۰.۱۸} \left(\frac{۱۵۰}{۲۵۰} \right)^5 = ۲۵.۹\text{ m}$$

با این فرض، ۲۵.۹ m لوله به قطر ۱۵۰ mm معادل ۳۰۰ m لوله به قطر ۲۵۰ mm است. به طور فرضی، دو یا چند لوله را که تشکیل یک سیستم می‌دهند می‌توان با لوله‌ای جایگزین کرد که به‌ازای افت هد کلی معلومی، تخلیه یکسانی دارد.

مثال ۵.۱۲. مثال ۴.۱۲ را با استفاده از لوله‌های معادل حل کنید.

حل

ابتدا، با بیان اتلافهای جزئی برحسب طولهای معادل، برای لوله ۱ داریم

$$K_1 = 0.5 + (1 - 0.6^2)^2 = 0.91 \quad L_{e1} = \frac{K_1 D_1}{f_1} = \frac{0.91(0.6)}{0.026} = 21 \text{ m}$$

برای لوله ۲:

$$K_2 = 1 \quad L_{e2} = \frac{K_2 D_2}{f_2} = \frac{1(1)}{0.015} = 66.7 \text{ m}$$

برای f_1 و f_2 مقادیری تقریبی درگستره‌ی کاملاً متلاطم انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب، مسئله به صورت لوله‌ای به طول ۳۲۱ m و قطر ۶۰۰ mm و لوله‌ای به طول ۳۰۶.۷ m و قطر ۱ m تبدیل می‌شود. با بیان لوله به قطر ۱ m برحسب طول معادل لوله به قطر ۶۰۰ mm، با استفاده از معادله (۲.۴.۱۲)، به دست می‌آید

$$L_e = \frac{f_2}{f_1} L_2 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^5 = 306.7 \frac{0.015}{0.026} \left(\frac{0.6}{1.0} \right)^5 = 13.76 \text{ m}$$

با اضافه کردن این طول به طول لوله به قطر ۶۰۰ mm، مسئله تبدیل می‌شود به محاسبه تخلیه در لوله‌ای به طول ۳۳۴.۷۶ m و قطر ۶۰۰ mm، و $\varepsilon_1 = 2 \text{ mm}$ ، و $H = 6 \text{ m}$

$$6 = f \frac{334.76 V^2}{0.026 \cdot 2g}$$

که در آن، $f = 0.026$ ، $V = 2.848 \text{ m/s}$ ، و $R = 2.848 \times 0.6 / (3 \times 10^{-6}) = 569600$ و به ازای $\varepsilon/D = 0.0033$ ، $f = 0.0265$ ، داریم، $V = 2.821$ و

$$Q = \pi (0.3^2) (2.821) = 0.798 \text{ m}^3/\text{s}$$

با استفاده از معادله (۱۵.۷.۶)، $Q = 0.781 \text{ m}^3/\text{s}$

لوله‌های موازی

ترکیبی از دو یا چند لوله که مطابق شکل ۹.۱۲ به هم متصل شده باشند، به طوری که شارش در میان لوله‌ها تقسیم شود و سپس مجدداً به هم پیوند، سیستم لوله‌های موازی نام دارد. در لوله‌های سری در تمام لوله‌ها سیال یکسانی جریان دارد و افت‌های هد با هم جمع می‌شوند، اما در لوله‌های موازی افت‌های هد در هر یک از خطوط با هم مساوی‌اند و تخلیه‌ها با هم جمع می‌شوند.

در تحلیل سیستم لوله‌های موازی، بنا به فرض، اتلاف‌های جزئی به صورت طولهای معادل، به طول هر لوله افزوده می‌شوند. با توجه به شکل ۹.۱۲ شرایطی که باید برآورده شوند عبارت‌اند از

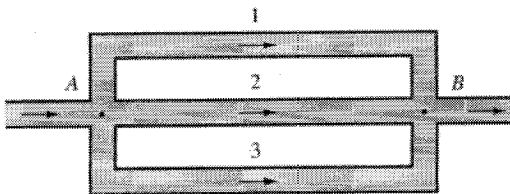
$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B \right)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (3.3.12)$$

که در آن، z_B و z_A ارتفاع نقاط B و A هستند و Q تخلیه در لوله ورودی یا لوله خروجی است. دو نوع مسئله رخ می‌دهد: (۱) با معلوم بودن ارتفاع خط هیدرولیکی در نقاط A و B ، تخلیه Q مورد نظر است؛ (۲) با معلوم بودن Q ، توزیع شارش و افت هد مورد نظر است. اندازه لوله، خواص سیال، و زیربها را معلوم فرض می‌کنیم.

در نتیجه، مسئله نوع اول عبارت است از محاسبه تخلیه در یک لوله ساده، زیرا افت هد، عبارت است از افت خط هیدرولیکی. این تخلیه‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا تخلیه کلی تعیین شود. مسئله نوع دوم پیچیده‌تر است، زیرا در هر خط لوله نه افت هد معلوم است و نه تخلیه. روش پیشنهادی به صورت زیر است:

۱. مقدار تخلیه Q'_1 را در لوله ۱ فرض کنید؛
۲. h'_{f_1} را با استفاده از تخلیه فرض شده محاسبه کنید؛
۳. با استفاده از h'_{f_1} ، Q'_2 ، Q'_3 را محاسبه کنید؛
۴. با سه تخلیه در یک افت هد یکسان، اکنون فرض کنید که Q فرض شده، در میان لوله‌ها به همان



شکل ۹.۱۲ سیستم لوله‌های موازی.

نسبت Q'_1 ، Q'_2 و Q'_3 منشعب می‌شود. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$Q_1 = \frac{Q'_1}{\Sigma Q'_i} Q \quad Q_2 = \frac{Q'_2}{\Sigma Q'_i} Q \quad Q_3 = \frac{Q'_3}{\Sigma Q'_i} Q \quad (۴.۳.۱۲)$$

۵. صحت این تخلیه‌ها را از طریق محاسبه h_{f_1} ، h_{f_2} ، h_{f_3} در Q_1 ، Q_2 ، و Q_3 محاسبه شده کنترل کنید. این روش برای هر تعداد از لوله‌ها به کار می‌رود. با انتخاب منطقی Q'_1 ، که تخمین درصدی از شارش کل سیستم که از لوله ۱ (بر مبنای قطر، طول، و زبری) باید بگذرد، به دست می‌آید، معادله (۴.۳.۱۲) مقادیری را به دست می‌دهد که چند درصد خطا دارند، که این چند درصد در گستره دقت ضرایب اصطکاک قابل قبول است.

اگر یک صفحه گسترده در دسترس باشد، نوع دوم مسئله با تابع معادل، بهینه‌کننده، یا حل‌کننده به سهولت حل می‌شود. برای شکل ۹.۱۲، سه معادله زیر برحسب شارشهای مجهول Q_1 ، Q_2 ، و Q_3 نوشته می‌شوند:

$$\frac{f_1 L_1 Q_1^2}{2g(\pi/4)^2 D_1^5} - \frac{f_2 L_2 Q_2^2}{2g(\pi/4)^2 D_2^5} = 0 \quad (۵.۳.۱۲)$$

$$\frac{f_2 L_2 Q_2^2}{2g(\pi/4)^2 D_2^5} - \frac{f_3 L_3 Q_3^2}{2g(\pi/4)^2 D_3^5} = 0 \quad (۶.۳.۱۲)$$

$$Q - Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 \quad (۷.۳.۱۲)$$

از تابع صفحه گسترده برای صفرکردن معادله (۵.۳.۱۲) می‌توان استفاده کرد و این کار با تغییر شارشهای مجهول، و با این قیود که معادله‌های (۶.۳.۱۲) و (۷.۳.۱۲) باید صفر باشند انجام می‌شود. این یک حل تکراری است به طوری که ضرایب اصطکاک را در هر تکرار می‌توان تصحیح کرد.

مثال ۶.۱۲ در شکل ۹.۱۲، $L_1 = 3000 \text{ ft}$ ، $D_1 = 1 \text{ ft}$ ، $L_2 = 1 \text{ ft}$ ، $D_2 = 1 \text{ ft}$ ، $L_3 = 4000 \text{ ft}$ ، $D_3 = 1 \text{ ft}$ ، $\epsilon_1 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $\epsilon_2 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $\epsilon_3 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $D_2 = 1 \text{ in}$ ، $L_2 = 4000 \text{ ft}$ ، $\epsilon_2 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $\epsilon_3 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $D_3 = 1 \text{ in}$ ، $L_3 = 4000 \text{ ft}$ ، $\epsilon_3 = 0.0001 \text{ ft}$ ، $\rho = 2.0 \text{ slugs/ft}^3$ ، $\nu = 0.00003 \text{ ft}^2/\text{s}$ ، $p_A = 8 \text{ psi}$ ، $z_A = 10 \text{ ft}$ ، $z_B = 8 \text{ ft}$ ، برای شارش کل ۱۲ cfs، شارش در هر لوله و فشار در B را بیابید. مسئله را با استفاده از محاسبه دستی آزمون و خطا حل کنید و با استفاده از یک صفحه گسترده نتایج را واریسی کنید.

حل

با فرض $Q'_1 = 3 \text{ cfs}$ ، در این صورت $V'_1 = 382$ ، $V'_1 = 127000$ ، $R'_1 = 382(1/0.00003) = 127000$

$$\text{و } f'_1 = 0.22, \varepsilon_1/D_1 = 0.001$$

$$h'_{f_1} = 0.22 \frac{3000 \cdot 3782^2}{1.0 \cdot 6474} = 1497 \text{ft}$$

برای لوله ۲،

$$1497 = f'_2 \frac{2000 \cdot V_2'^2}{0.667 \cdot 2g}$$

در این صورت $\varepsilon_2/D_2 = 0.00015$. فرض کنید $f'_2 = 0.20$ ، در این صورت $V_2' = 49.1 \text{ft/s}$ ، $f'_2 = 0.19$ ، $R_2' = 49.1 \left(\frac{2}{f}\right) (1/0.000003) = 89000$ و $Q_2' = 144 \text{cfs}$. برای لوله ۳،

$$1497 = f'_3 \frac{4000 \cdot V_3'^2}{1.333 \cdot 2g}$$

در این صورت $\varepsilon_3/D_3 = 0.0006$. فرض کنید $f'_3 = 0.20$ ، در این صورت $V_3' = 49.1 \text{ft/s}$ ، $f'_3 = 0.20$ ، $R_3' = 49.1 (1.333/0.000003) = 178000$. $Q_3' = 560 \text{cfs}$ و تخلیه کلی در شرایط فرضی عبارت است از

$$\Sigma Q' = 3700 + 144 + 560 = 10904 \text{cfs}$$

از این رو

$$Q_1 = \frac{3700}{10904} 12 = 3958 \text{cfs} \quad Q_2 = \frac{144}{10904} 12 = 1572 \text{cfs} \quad (8.3.12)$$

$$Q_3 = \frac{560}{10904} 12 = 6170 \text{cfs} \quad (9.3.12)$$

مقادیر h_1 ، h_2 و h_3 را به صورت زیر واریسی کنید

$$V_1 = \frac{3958}{\pi/4} = 4956 \quad R_1 = 152000 \quad f_1 = 0.21 \quad h_{f_1} = 20.4 \text{ft}$$

$$V_2 = \frac{1572}{\pi/9} = 4993 \quad R_2 = 109200 \quad f_2 = 0.19 \quad h_{f_2} = 21.6 \text{ft}$$

$$V_3 = \frac{6170}{\pi/9} = 4980 \quad R_3 = 213000 \quad f_3 = 0.19 \quad h_{f_3} = 20.4 \text{ft}$$

f_2 حدوداً وسط بین 0.18 و 0.19 است. اگر 0.18 انتخاب شود، h_2 برابر با 20.4 ft است.

برای پیدا کردن p_B

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + h_f$$

یا

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{80(144)}{64.4} + 100 - 80 - 20.8 = 178.1$$

که در آن اتلاف هد متوسط در نظر گرفته شده است. بنابراین

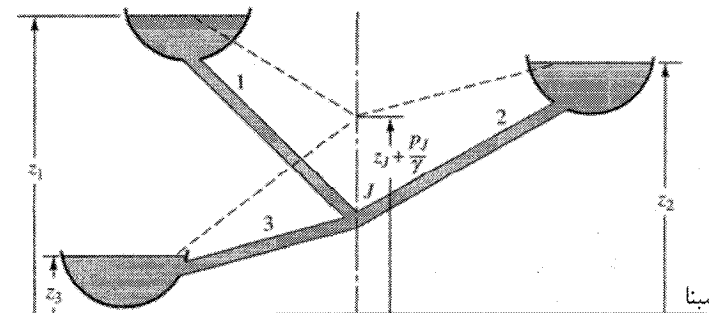
$$p_B = \frac{178.1(64.4)}{144} = 79.6 \text{ psi}$$

محاسبه با صفحه گسترده، با استفاده از معادله‌های (۵.۳.۱۲) تا (۷.۳.۱۲)، می‌دهد:

■ $h_f = 20.8 \text{ ft}$ و $Q_3 = 670.9 \text{ cfs}$ ، $Q_2 = 1718 \text{ cfs}$ ، $Q_1 = 3573 \text{ cfs}$

لوله‌های انشعابی

سیستم لوله‌ای انشعابی ساده‌ای در شکل ۱۰.۱۲ نشان داده شده است. در این حالت، اگر ارتفاع مخزنها معلوم باشد، شارش در هر لوله مورد نظر است. اندازه و نوع لوله‌ها و خواص سیال معلوم فرض می‌شوند. معادله داری-وایسباخ و معادله پیوستگی باید در هر لوله صدق کند. معادله پیوستگی به این صورت می‌شود که شارش ورودی به پیوندگاه J دقیقاً باید مساوی شارش خروجی آن باشد. شارش باید از مرتفعترین مخزن خارج، و به پایینترین مخزن وارد شود؛ از این رو، معادله



شکل ۱۰.۱۲ سه مخزن مرتبط به هم.

پیوستگی می‌تواند به یکی از دو صورت زیر باشد

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{یا} \quad Q_1 + Q_2 = Q_3$$

اگر ارتفاع خط هیدرولیکی در پیوندگاه در بالای ارتفاع مخزن میانی باشد، شارش به پیوندگاه وارد می‌شود؛ ولی اگر ارتفاع خط هیدرولیکی، در J در زیر مخزن میانی باشد، شارش از پیوندگاه خارج می‌شود. اتلافهای جزئی را می‌توان برحسب طولهای معادل بیان کرد و به طولهای واقعی لوله افزود.

با فرض مقداری برای ارتفاع خط هیدرولیکی در پیوندگاه و سپس محاسبه Q_1 ، Q_2 ، Q_3 و جایگزین کردن این مقادیر در معادله پیوستگی می‌توان مسئله را حل کرد. اگر شارش در پیوندگاه خیلی زیاد باشد، مقدار بیشتری را برای ارتفاع خط هیدرولیکی فرض می‌کنیم که با این فرض، شارش ورودی کاهش، و شارش خروجی افزایش می‌یابد.

مثال ۷.۱۲ در شکل ۱۰.۱۲، تخلیه‌های آب 20°C را در داده‌های لوله و ارتفاع مخزنهای زیر تعیین کنید: $D_2 = 0.45\text{m}$ ، $L_2 = 600\text{m}$ ؛ $\varepsilon_1/D_1 = 0.0002$ ، $D_1 = 1\text{m}$ ، $L_1 = 3000\text{m}$ ؛ $\varepsilon_2/D_2 = 0.002$ ، $D_3 = 0.6\text{m}$ ، $L_3 = 1000\text{m}$ ؛ $\varepsilon_3/D_3 = 0.001$ ، $z_1 = 30\text{m}$ ؛ $z_3 = 9\text{m}$ ، $z_2 = 18\text{m}$.

حل

فرض می‌کنیم، $z_J + p_J/\gamma = 23\text{m}$. سپس

$$7 = f_1 \frac{3000}{1} \frac{V_1^2}{2g} \quad f_1 = 0.14 \quad V_1 = 1.75\text{m/s} \quad Q_1 = 1.380\text{m}^3/\text{s}$$

$$5 = f_2 \frac{600}{0.45} \frac{V_2^2}{2g} \quad f_2 = 0.24 \quad V_2 = 1.75\text{m/s} \quad Q_2 = 0.278\text{m}^3/\text{s}$$

$$14 = f_3 \frac{1000}{0.6} \frac{V_3^2}{2g} \quad f_3 = 0.20 \quad V_3 = 2.87\text{m/s} \quad Q_3 = 0.811\text{m}^3/\text{s}$$

بنابراین، شارش ورودی به اندازه‌ی زیر از شارش خروجی بیشتر است

$$1.380 - 0.278 - 0.811 = 0.291\text{m}^3/\text{s}$$

فرض می‌کنیم $z_J + p_J/\gamma = 24.6 \text{ m}$ سپس

$$5.4 = f_1 \frac{3000}{1} \frac{V_1^2}{2g} \quad f_1 = 0.15 \quad V_1 = 1.534 \text{ m/s} \quad Q_1 = 1.205 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$6.6 = f_2 \frac{600}{0.45} \frac{V_2^2}{2g} \quad f_2 = 0.24 \quad V_2 = 2.011 \text{ m/s} \quad Q_2 = 0.320 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$15.6 = f_3 \frac{1000}{0.6} \frac{V_3^2}{2g} \quad f_3 = 0.20 \quad V_3 = 3.029 \text{ m/s} \quad Q_3 = 0.856 \text{ m}^3/\text{s}$$

شارش ورودی هنوز به اندازه $0.29 \text{ m}^3/\text{s}$ بیشتر از شارش خروجی است. با برون‌یابی خطی نتیجه می‌شود $z_J + p_J/\gamma = 24.8 \text{ m}$ ، $Q_1 = 1.183 \text{ m}^3/\text{s}$ ، $Q_2 = 0.325 \text{ m}^3/\text{s}$ ، $Q_3 = 0.862 \text{ m}^3/\text{s}$

مثال ۸.۱۲ از یک صفحه گسترده برای موازنه شارشها در سیستم مثال ۷.۱۲ استفاده کنید.

حل

برحسب نوع صفحه گسترده، از تابع معادل، بهینه‌کننده، یا حل‌کننده استفاده می‌شود. به‌هنگام موازنه، مجموع شارشها در پیوندگاه باید صفر باشد. ارتفاع خط هیدرولیکی در پیوندگاه تغییر داده می‌شود، با این شرط که این ارتفاع در گستره بین سطوح ماکزیمم و مینیمم مخزن باشد، تا شارشها موازنه شوند. طبق قرارداد، شارش ورودی به طرف پیوندگاه مثبت فرض می‌شود و وقتی شارش به طرف پیوندگاه است. اتلاف هد در لوله‌های متصل به هم مثبت گرفته می‌شود. از معادله (۱۵.۷.۶) برای محاسبه شارش در هر لوله، با به کار بردن مقدار مطلق اتلاف هد، استفاده می‌شود. جهت شارش با ضرب کردن معادله (۱۵.۷.۶) در علامت اتلاف هد مشخص می‌شود.

در مجموع، $h_J = z_J + p_J/\gamma$ ، شکل ۱۰.۱۲، تغییر داده می‌شود تا تابع زیر

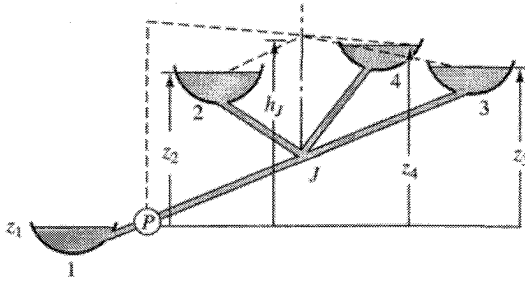
$$\Sigma Q_{in} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

برقرار شود. تنها شروط لازم عبارت‌اند از $h_J < z_1$ و $h_J > z_2$. نتایج عبارت‌اند از

$$h_J = 24.88 \text{ m} \quad Q_1 = 1.198 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = -0.3293 \text{ m}^3/\text{s} \quad Q_3 = -0.8687 \text{ m}^3/\text{s}$$

برای پمپ‌کردن از مخزنی به دو یا چند مخزن دیگر، مانند شکل ۱۱.۱۲، مشخصه‌های پمپ



شکل ۱۱.۱۲ پمپ کردن از یک مخزن به دو مخزن دیگر.

باید معلوم باشد. با فرض اینکه پمپ با سرعت ثابت می‌گردد، هد آن به تخلیه بستگی خواهد داشت. یک روش مناسب به صورت زیر است:

۱. مقداری برای تخلیه پمپ فرض کنید؛
۲. ارتفاع خط هیدرولیکی را در طرف مکش پمپ محاسبه کنید؛
۳. از روی منحنی مشخصه پمپ هد تولیدشده را پیدا کنید و آن را به ارتفاع خط هیدرولیکی مکش بیفزایید؛
۴. افت خط هیدرولیکی را تا پیوندگاه J محاسبه، و ارتفاع خط هیدرولیکی را در آنجا تعیین کنید؛

۵. در این ارتفاع، شارش در لوله‌های متصل به مخازن دیگر را محاسبه کنید؛
 ۶. اگر شارش ورودی به J مساوی شارش خروجی از J باشد، مسئله حل شده است. اگر شارش ورودی به J خیلی زیاد باشد، شارش کمتری را در پمپ فرض، و محاسبه را تکرار کنید. این روش را می‌توان به سهولت بر روی یک نمودار رسم کرد، بدین ترتیب محل تقاطع دو منحنی ارتفاع برحسب شارش جواب را نتیجه می‌دهد.
- مسائل لوله‌های انشعابی پیچیده‌تر را می‌توان با روشی مشابه با یک روش آزمون حل کرد. البته، روش تحلیل شبکه قسمتهای ۴.۱۲ و ۵.۱۲ در سیستمهای چند انشعابی و همچنین در سیستمهای چند حلقه موازی توصیه شده است.

مثال ۹.۱۲ پمپی در یک خط لوله در فاصله بین مخزن مکش تا پیوندگاه قرار دارد. به این پیوندگاه سه مخزن متصل شده‌اند (شکل ۱۱.۱۲). شیریک طرفه‌ای در پمپ وجود دارد. از صفحه گسترده برای موازنه کردن شارشها در سیستم استفاده کنید. معادله پمپ به شکل زیر است

$$H_P = A_0 + A_1 Q + A_2 Q^2 + A_3 Q^3$$

شارش پایا: شبکه‌های لوله‌ها ۷۳۳

$$\begin{aligned} & \text{که در آن، } A_0 = 100, A_1 = -0.2, A_2 = -0.3, A_3 = -0.7, A_4 = 0.7 \\ & L_1 = 10000m, L_2 = 2000m, L_3 = 2500m, L_4 = 2000m \\ & D_1 = 4.5m, D_2 = 2.0m, D_3 = 2.5m, D_4 = 2.3m \\ & \varepsilon_1 = 0.00006m, \varepsilon_2 = 0.00005m, \varepsilon_3 = 0.00008m, \varepsilon_4 = 0.00009m \\ & z_1 = 0, z_2 = 12m, z_3 = 18m, z_4 = 25m \end{aligned}$$

حل

روشهای دیگری در دسترس اند، از قبیل روشهایی که در قسمتهای بعد آورده می‌شوند. روش گفته شده در بالا وقتی خوب کار می‌کند که از تابع بهینه‌کننده یا تابع حل‌کننده همراه با صفحه گسترده استفاده شود. شارش به طرف پیوندگاه مثبت فرض می‌شود، بنابراین هدف این است که رابطه زیر برقرار شود

$$\sum Q_{in} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$$

از مقدار Q_P ، شارش در پمپ، برای پیدا کردن ارتفاع خط هیدرولیکی در J استفاده می‌شود.

$$h_J = z_1 + H_P - h_{f_1}$$

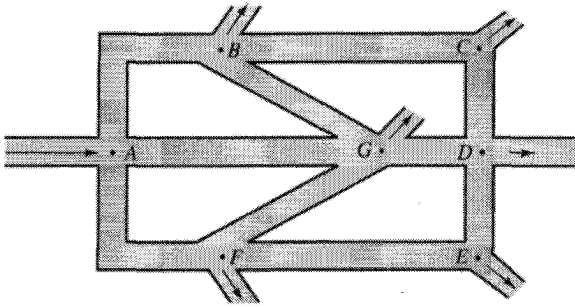
مقدار h_{f_1} از معادله دارسی-وایسباخ با $Q_P = Q_1$ به دست می‌آید، و برای محاسبه f از معادله (۱۳.۷.۶) استفاده می‌شود. با این h_J ، شارشهای Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 از معادله (۱۵.۷.۶)، با استفاده از مقادیر مطلق $(z_i - h_J)$ به عنوان h_{f_i} تعیین می‌شوند، و از علامت h_{f_i} برای تعیین جهت شارش استفاده می‌شود. با تغییر Q_P روش تکرار می‌شود تا اینکه $\sum Q_{in} = 0$ ، و شرط $h_J > z_2$ برقرار باشد.

نتایج عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} h_J &= 22.75m & Q_P &= Q_1 = 20.257m^3/s \\ \blacksquare \quad Q_2 &= -14.495m^3/s & Q_3 &= -14.761m^3/s & Q_4 &= 8.999m^3/s \end{aligned}$$

۴.۱۲ شارش پایا: شبکه‌های لوله‌ها

لوله‌های به هم متصل شده‌ای که در آنها شارش می‌تواند از چند مدار به خروجی معلومی برسد، شبکه لوله‌ها نام دارد، و شارش در آن، از خیلی جهات مشابه جریان در شبکه الکتریکی است. به‌طور کلی، مسائلی از این قبیل پیچیده‌اند و حلهای آزموننی را ایجاد می‌کنند که در این حلهای مدارهای اصلی به نوبت موازنه می‌شوند تا اینکه تمام شرایط برای شارش صدق کند.



شکل ۱۲.۱۲ شبکه لوله.

شرایط زیر در هر شبکه لوله باید صادق باشد.

۱. جمع جبری افتهای فشار دور هر مدار باید مساوی صفر باشد؛
۲. شارش ورودی به هر پیوندگاه باید مساوی شارش خروجی پیوندگاه باشد؛
۳. معادله دارسی-وایسباخ، یا فرمول نمایی اصطکاک معادل در هر لوله باید برقرار باشد؛ یعنی، رابطه صحیحی در هر لوله باید بین افت هد و تخلیه برقرار باشد.

شرط اول بیان می‌کند که افت فشار بین هر دو نقطه در مدار، مثلاً A و G (شکل ۱۲.۱۲) چه از طریق لوله AG و چه از طریق لوله $AFEDG$ باید یکسان باشد. شرط دوم معادله پیوستگی است.

از آنجا که حل مسائل شبکه به‌طور تحلیلی غیرعملی است، از روش تقریبهای متوالی استفاده می‌کنیم. در روش هاردی کراس [مرجع ۳] فرض می‌کنیم شارش در لوله‌ها طوری باشد که پیوستگی در هر پیوندگاه برقرار باشد. سپس، یک تصحیح برای شارش در هر مدار به‌نوبت محاسبه می‌کنیم و به کار می‌بریم تا مدارها به‌موازنة دقیقتری برسند.

اتلافهای جزئی در هر لوله را می‌توان به صورت طولهای معادل در نظر گرفت. معمولاً از معادله‌های نمایی، به صورت $h_f = rQ^n$ استفاده می‌شود که در آن، با توجه به معادله (۱.۱.۱۲)، مقدار $r = RL/D^m$ است. مقدار r در هر خط لوله ثابت است (مگر اینکه از معادله دارسی-وایسباخ استفاده شود) و قبل پرداختن به روش موازنه-حلقه تعیین می‌شود. جمله اصلاحی به صورت زیر به‌دست می‌آید.

برای لوله‌ای که در آن، Q_0 تخلیه اولیه فرض است، می‌نویسیم

$$Q = Q_0 + \Delta Q \quad (1.4.12)$$

که در آن، Q تخلیه صحیح و ΔQ مقدار تصحیح است. بنابراین برای هر لوله به دست می‌آید

$$h_f = rQ^n = r(Q_0 + \Delta Q)^n = r(Q_0^n + nQ_0^{n-1}\Delta Q + \dots)$$

اگر ΔQ در مقایسه با Q_0 کوچک باشد، تمام جمله‌های سری بعد از جمله دوم باید حذف شوند. اکنون برای هر مدار نتیجه می‌شود

$$\sum h_f = \sum rQ|Q|^{n-1} = \sum rQ_0|Q_0|^{n-1} + \Delta Q \sum rn|Q_0|^{n-1} = 0$$

که در آن، ΔQ از جمع خارج شده است زیرا برای تمام لوله‌های مدار یکسان است و علامتهای قدرمطلق افزوده شده‌اند تا مسیر جمع‌کردن را در مدار نشان دهند. آخرین معادله برای ΔQ در هر مدار شبکه چنین است

$$\Delta Q = -\frac{\sum rQ_0|Q_0|^{n-1}}{\sum rn|Q_0|^{n-1}} \quad (2.4.12)$$

وقتی ΔQ برای هر لوله در مدار مطابق با معادله (۱.۴.۱۲) به کار برده می‌شود، سوی شارش مهم است؛ یعنی، ΔQ به شارشی که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است افزوده می‌شود و از شارشی که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است کسر می‌شود.

مراحل روش ریاضی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

۱. بهترین توزیع شارشهایی را که با بررسی دقیق شبکه شرط پیوستگی را برآورده می‌کنند فرض کنید.

۲. افت خالص هد شبکه را برای هر لوله در مدار اصلی محاسبه و جمع کنید، $\sum h_f = \sum rQ^n$. همچنین $\sum rn|Q|^{n-1}$ را برای مدار محاسبه کنید. جمله کسری منفی در معادله (۲.۴.۱۲) مقدار تصحیح را به دست می‌دهد که باید به‌طور جبری به هر شارش در مدار برای تصحیح آن افزوده شود.

۳. همین روش را برای مدار اصلی بعدی اعمال، و روش تصحیح ۲ را تکرار کنید. این مراحل را برای تمام مدارهای اصلی ادامه دهید.

۴. مراحل ۲ و ۳ را تا حد لزوم تکرار کنید تا اینکه مقادیر تصحیح (ΔQ) تا حد مطلوبی کوچک شوند.

مقادیر r هم در صورت و هم در مخرج ΔQ هستند؛ از این رو، از مقادیر متناسب با r واقعی می‌توان استفاده کرد تا توزیع به دست آید. به‌طریق مشابه، تخصیص شارشها را به صورت درصدی

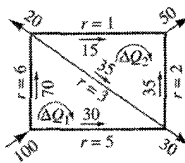
از شارهای واقعی می‌توان بیان کرد. برای پیدا کردن یک افت هد مخصوص، مقادیر واقعی Q و r بعد از تعیین توزیع سرعت باید مورد استفاده قرار گیرند.

مثال ۱۰.۱۲ توزیع شارش در شبکه شکل ۱۳.۱۲ را برای مقادیر معلوم شارش ورودی و شارش خروجی تعیین کنید. برای سهولت، مقدار n مساوی r° فرض شده است.

حل

توزیع فرضی در شکل ۱۳.۱۲ (الف) نشان داده شده است. جمله $\sum rQ_0 |Q_0|^{n-1}$ در سمت چپ بالا برای مدار پایینی شماره ۱ محاسبه شده است. سپس در سمت چپ نمودار محاسبه $\sum nr |Q_0|^{n-1}$ برای همان مدار نشان داده شده است. در سمت راست بالای شکل از همین الگو برای مدار دوم استفاده شده است. شارش تصحیح شده بعد از اولین مرحله برای لوله افقی بالا به میزان $35 + (-21.17) + (-11.06) = 2.77$ ، و برای لوله قطری به میزان $15 + 11.06 = 26.06$

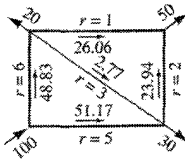
$$\begin{array}{r} 70^2 \times 6 = 29,400 \quad 2 \times 70 \times 6 = 840 \\ 35^2 \times 3 = 3,675 \quad 2 \times 35 \times 3 = 210 \\ -30^2 \times 5 = -4,500 \quad 2 \times 30 \times 5 = 300 \\ \hline 28,575 \quad 1,350 \\ \Delta Q_1 = \frac{-28,575}{1,350} = -21.17 \end{array}$$



(الف)

$$\begin{array}{r} 15^2 \times 1 = 225 \quad 2 \times 15 \times 1 = 30 \\ -35^2 \times 2 = -2,450 \quad 2 \times 35 \times 2 = 140 \\ -13.83^2 \times 3 = -574 \quad 2 \times 13.83 \times 3 = 83 \\ \hline -2,799 \quad 253 \\ \Delta Q_2 = \frac{2,799}{253} = 11.06 \end{array}$$

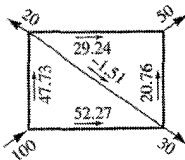
$$\begin{array}{r} 48.83^2 \times 6 = 14,308 \quad 2 \times 48.83 \times 6 = 586 \\ 2.77^2 \times 3 = 23 \quad 2 \times 2.77 \times 3 = 17 \\ -51.17^2 \times 5 = -13,090 \quad 2 \times 51.17 \times 5 = 511 \\ \hline 1,241 \quad 1,114 \\ \Delta Q_1 = \frac{-1,241}{1,114} = -1.114 \end{array}$$



(ب)

$$\begin{array}{r} 26.06^2 \times 1 = 679 \quad 2 \times 26.06 \times 1 = 52 \\ -23.94^2 \times 2 = -1,146 \quad 2 \times 23.94 \times 2 = 96 \\ -1.656^2 \times 3 = -8 \quad 2 \times 1.656 \times 3 = 10 \\ \hline -475 \quad 158 \\ \Delta Q_2 = \frac{475}{158} = 3.006 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta Q_1 = 0.0079 \\ \Delta Q_2 = 0.0013 \end{array}$$



(ج)

$$\begin{array}{l} \Delta Q_1 = 0.169 \\ \Delta Q_2 = 0.0003 \end{array}$$

شکل ۱۳.۱۲ محاسبه شارش در یک شبکه ساده.

تعیین می‌شود. شکل ۳.۱۲ (ب) شارش را بعد از یک تصحیح نشان می‌دهد. شکل ۱۳.۱۲ (ج) مقادیر را بعد از چهار تصحیح نشان می‌دهد.

شبکه‌های خیلی ساده را مانند شبکه‌ای که در شکل ۱۳.۱۲ نشان داده شده است می‌توان با یک حسابگر قابل برنامه‌ریزی کوچک یا با یک صفحه گسترده حل کرد. در شبکه‌های بزرگتر از مثال قبلی یا در شبکه‌هایی که شامل چند مخزن، پمپهای تغذیه، یا پمپهای کمکی هستند، روش موازنه حلقه هاردی‌کراس را برای حل عددی با یک کامپیوتر رقمی می‌توان برنامه‌ریزی کرد. چنین برنامه‌ای را در قسمت بعد نشان می‌دهیم.

روشهای کلیتری وجود دارند [مراجع ۴ و ۷] که عمدتاً بر طرحهای موازنه حلقه هاردی‌کراس یا موازنه کره مبتنی هستند. در روشهای کلیتر معمولاً سیستم را توسط مجموعه‌ای از معادله‌های همزمان مدلسازی می‌کنند که با روش نیوتن-رافسن حل می‌شوند. بعضی راه‌حلهای برنامه‌ریزی شده [مراجع ۵ و ۶]، به عنوان ابزار طراحی خیلی مفیدی به کار می‌روند، زیرا اگر علاوه بر فشار و شارش پیوندگاه‌ها، اندازه یا زبری لوله‌ها هم مجهول باشند می‌توان مسئله را حل کرد.

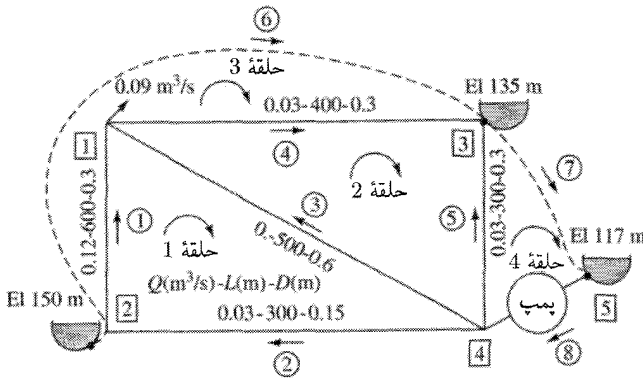
۵.۱۲ شارش پایا: روش شناختیها در شبکه‌های هیدرولیکی و پیچیده

سیستمهای هیدرولیکی را، که شامل عنصرهایی هستند که با خطوط لوله تفاوت دارند، می‌توان با جایگزینی یک طول معادل خط لوله به جای آن عنصر تغییر داد. اگر عنصر مورد نظر یک پمپ باشد، راه حل دیگری لازم است. همچنین، در سیستمهایی که شامل بیش از یک ارتفاع خط هیدرولیکی ثابت‌اند، باید ابتکار دیگری به خرج داد.

روش هاردی کراس برای موازنه حلقه

برای سیستمهای با چند ارتفاع هد فشاری ثابت، (شکل ۱۴.۱۲) شبه‌حلقه‌هایی می‌سازند تا شارشهای خروجی و ورودی مجهول در مخزن را نشان دهند و در طی موازنه شرایط پیوستگی را برآورده کنند. شبه‌حلقه با استفاده از خط لوله فرض که هر جفت تراز فشار ثابت را به هم متصل می‌کند ساخته می‌شود. خطوط لوله فرضی هیچ شارشی را حمل نمی‌کنند بلکه افت ثابت را در خط هیدرولیکی محفوظ نگه می‌دارند که این افت مساوی اختلاف ارتفاع دو مخزن است. اگر افت هد در جهت مثبت فرضی در خط لوله فرضی را مثبت در نظر بگیریم، در آن صورت تصحیح در حلقه ۳، شکل ۱۴.۱۲، عبارت است از

$$\Delta Q_3 = - \frac{150 - 135 - r_2 Q_2 |Q_2|^{n-1} - r_1 Q_1 |Q_1|^{n-1}}{nr_2 |Q_2|^{n-1} + nr_1 |Q_1|^{n-1}} \quad (15.12)$$



شکل ۱۴.۱۲ شبکه نمونه.

این تصحیح را فقط برای لوله‌های ۱ و ۴ به کار می‌بریم. اگر خطوط لوله حقیقی اضافی در یک شبه حلقه موجود باشند، هر کدام از آنها باید در طی تکرار یک موازنه حلقه متناظراً تعدیل شود. جمله‌های معادله (۱.۵.۱۲) را با ارتباط دادن با معادله (۲.۴.۱۲) به سهولت می‌توان باز شناخت. متناوباً، همان معادله را با به کار بردن روش نیوتن می‌توان به دست آورد (صفحه وب، Web، ببینید).

پمپ را در سیستم می‌توان به عنوان یک عنصر شارش در نظر گرفت که افت هد آن منفی و مساوی خیز هد شارش در پمپ است. منحنی هد برحسب تخلیه پمپ، عنصر ۸ در شکل ۱۴.۱۲، را با یک معادله درجه سوم می‌توان بیان کرد

$$H = A_0 + A_1 Q_{\lambda} + A_2 Q_{\lambda}^2 + A_3 Q_{\lambda}^3$$

که در آن؛ A_0 هد بازدارنده پمپ است. تصحیح در حلقه ۴ عبارت است از

$$\Delta Q_{\tau} = \frac{135 - 117 - (A_0 + A_1 Q_{\lambda} + A_2 Q_{\lambda}^2 + A_3 Q_{\lambda}^3) + r_{\delta} Q_{\delta} |Q_{\delta}|^{n-1}}{nr_{\delta} |Q_{\delta}|^{n-1} - (A_1 + 2A_2 Q_{\lambda} + 3A_3 Q_{\lambda}^2)} \quad (2.5.12)$$

این تصحیح برای لوله ۵ و پمپ ۸ در حلقه به کار می‌رود. معادله (۲.۵.۱۲) با به کار بردن روش نیوتن برای حلقه به دست می‌آید. برای موازنه رضایتبخش شبکه با ایستگاههای پمپ کردن، شیب منحنی هد برحسب تخلیه همیشه باید کمتر یا مساوی صفر باشد.

با استفاده از این اصول، برای تحلیل مسائل بسیار متعدد شارش مایع در لوله با حالت پایا از یک کد کامپیوتری می‌توان استفاده کرد. می‌توان شارشهای خط لوله را که با معادله هازن-ویلیامز توصیف می‌شوند یا شارشهای لایه‌ای یا متلاطم را که با معادله داریسی-وایسباخ تحلیل می‌شوند

بررسی کرد؛ مخزنهای چندگانه یا ترازهای فشار ثابت، مانند یک سیستم آفشان، را می‌توان تحلیل کرد؛ و سیستمهای مجهز به پمپهای کمکی یا پمپهای تغذیه را می‌توان حل کرد.

هر شبکه ترکیبی است که عنصرهایی که به چند پیوندگاه متصل می‌شوند. عنصرها ممکن است شامل خطوط لوله، پمپها، و عنصرهای فرضی باشند. تمام اتلافهای جزئی به صورت طولهای معادلی که به طولهای واقعی لوله افزوده می‌شوند نشان داده می‌شوند. هر عنصر در سیستم به‌طور یکتا مشخص می‌شود. یک جهت مثبت شارش به هر عنصر اختصاص داده می‌شود و مانند حل حسابی، یک شارش تخمینی به هر عنصر اختصاص داده می‌شود به‌طوری که پیوستگی در هر پیوندگاه صادق باشد. جهت مثبت اختصاص داده شده به شارش در هر پمپ باید در جهت کار عادی پمپ باشد. هر جوابی که نشان‌دهنده شارشی در خلاف جهت کار عادی پمپ باشد قابل قبول نیست. جهت شارش در عنصر فرضی‌ای که شبه‌حلقه را می‌سازد فقط جهت افت هد مثبت ثابت را نشان می‌دهد، زیرا شارش در این عنصر باید مساوی صفر باشد. هر پیوندگاه، که ممکن است پایان یک عنصر یا محل تقاطع عنصرهای زیادی را نشان دهد، نیز به‌طور یکتا مشخص می‌شود. شارش خروجی یا ورودی در یک پیوندگاه در طی تخصیص شارشهای اولیه عنصر تعریف می‌شود. بین تعداد عناصر، e ، در یک سیستم که پیوندگاهها یا گره‌ها، j ، را به هم متصل می‌کند و تشکیل l حلقه می‌دهد رابطه‌ای وجود دارد

$$e = l + j - 1 \quad (3.5.12)$$

برای مثال، در شکل ۳.۵.۱۲، $e = 8$ ، $j = 5$ ، $l = 4$ ، که معادله (۳.۵.۱۲) را برقرار می‌کند. مراحل لازم در دو بخش عمده خلاصه می‌شوند: در بخش اول، هر حلقه سیستم به ترتیب موازنه می‌شود و سپس با روشی تکراری این عمل تکرار می‌شود تا مجموع تمام تصحیحهای شارش در حلقه کمتر از رواداشت معین شود. در خاتمه این فرایند موازنه، شارشهای عنصر محاسبه می‌شوند. بخش دوم تحلیل به محاسبه ارتفاع خط هیدرولیکی در پیوندگاههای سیستم مربوط می‌شود.

حل با صفحه گسترده

صفحه گسترده دارای تابع بهینه‌کننده، تابع حل‌کننده، یا تابع معادل است که از آنها برای پیدا کردن توزیع شارش در شبکه‌های نسبتاً پیچیده می‌توان استفاده کرد. دو اصل بنیادی شبکه‌ها عبارت‌اند از (۱) مجموع جبری افتهای فشار پیرامون هر مدار باید صفر باشد؛ (۲) پیوستگی شارشها باید در هر پیوندگاه برقرار باشد.

برای مثال، در شکل ۱۳.۱۲، وقتی شارشهای فرض و جهت‌های شارش در هر خط لوله تعیین شدند، این شارشها با تابع صفحه گسترده تنظیم می‌شوند تا مجموع جبری افت فشار پیرامون هر دو مدار صفر شود. در سه پیوندگاه این شرط باید برقرار باشد که مجموع جبری شارش ورودی به پیوندگاهها (شامل شارشهای خارجی) صفر باشد. باید توجه داشت که اگر پیوستگی در سه‌تا از چهار پیوندگاه برقرار باشد، برقراری پیوستگی کلی در تمام سیستم می‌رساند که پیوستگی در گره چهارم برقرار است. باید توجه داشت که معادله (۳.۵.۱۲) پنج عنصر را در سیستم مشخص می‌کند. به این ترتیب، پنج عنصر مجهول وجود دارند، و بنابراین، فقط پنج شرط را می‌توان اعمال کرد، یعنی، دو شرط مداری و سه شرط گره‌ای.

استفاده از کد عمومی کامپیوتری برای حل توزیع شارش پایا در شبکه‌ها خیلی مزیت دارد. با استفاده از حل صفحه گسترده تمام مزایای کلی یک روش حل قوی از بین می‌رود. در روش صفحه گسترده؛ هر شبکه مسئله یکتایی را نشان می‌دهد و شبکه را با داده‌های صفحه گسترده باید به تفصیل تشریح کرد. شاید مهمترین مزیت حل صفحه گسترده سهولت کاربرد آن است، زیرا این روش اصول بنیادی را مستقیماً به کار می‌برد. بزرگترین محدودیت این است که این روش فقط برای شبکه‌های غیرپیچیده نسبتاً کوچک به کار می‌رود. مثال زیر حل‌های توزیع شارش در شبکه‌های نسبتاً پیچیده را نشان می‌دهد.

مثال ۱۱.۱۲ در شکل ۱۴.۱۲ شبکه متشکل از پنج خط لوله، یک پمپ، و سه مخزن نشان داده شده است. از یک صفحه گسترده برای موازنه‌کردن شارشها در لوله استفاده کنید، و ارتفاع هیدرولیکی در گره ۱ را پیدا کنید. ضریب ویلیام-هازن در تمام لوله‌ها ۱۰۰ است. داده‌های پمپ با ضرایب معادله درجه سوم به دست آمده، به صورت زیر هستند

$m^3/s, Q$	°	۰٫۰۳	۰٫۰۶	۰٫۰۹
m, H	۳۰	۲۹	۲۶	۲۰
A_1, \dots, A_5	۳۰	-۱۱٫۱۱	-۵۵۵٫۵	-۶۱۷۲٫۸

حل

گره‌ها، عنصرها، و حلقه‌ها در شکل ۱۴.۱۲ مشخص شده‌اند. شکل ۱۵.۱۲ یک ترتیب ممکن را برای صفحه گسترده همراه با حل، نشان می‌دهد. در این مثال، با تغییر دادن شارشها در هر شش عنصر واقعی، با این شرط که مجموع افت هد پیرامون حلقه‌های ۲، ۳، و ۴ صفر است، افت‌های هد پیرامون حلقه ۱ مساوی صفر قرار داده می‌شوند. حدسهای اولیه برای شارش در خطوط لوله

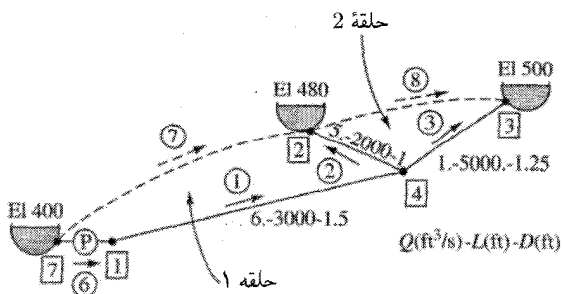
شارش پایا: روش شناختیها در شبکه‌های هیدرولیکی و پیچیده ۷۴۱

		حل صفحه گسترده در سیستم توزیع آب					
		جله‌های Q در هر عنصر برای موازنه هدها در حلقه					
با استفاده از معادله ویلیام		د برای برقراری پیوستگی در پیوندگامها					
HWC =	100	en =	0.852				
A0, A1, A2, A3 =	30		-11.111		-555.55		-6172.84
		$rr1 = 10.675 \cdot BR/(HWC \cdot 1.852 \cdot C^8 \cdot 4.8704)$					
عصر	طول	قطر		rr		m^7/s	شارش،
1	600	0.3		rr1	445.81	qq1	0.1434
2	300	0.15		rr2	6520.10	qq2	-0.0337
3	500	0.6		rr3	12.70	qq3	0.0267
4	400	0.3		rr4	297.21	qq4	0.0801
5	300	0.3		rr5	222.90	qq5	0.0939
						qq8	0.0869
shf1	-6.8E-07	$= rr1 \cdot qq1 \cdot ABS(qq1)^{en} - rr3 \cdot qq3 \cdot ABS(qq3)^{en} + rr2 \cdot qq2 \cdot ABS(qq2)^{en}$					
shf2	8.82E-07	$= rr4 \cdot qq4 \cdot ABS(qq4)^{en} - rr5 \cdot qq5 \cdot ABS(qq5)^{en} + rr3 \cdot qq3 \cdot ABS(qq3)^{en}$					
shf3	-1.4E-05	$= 150 - 135 - rr4 \cdot qq4 \cdot ABS(qq4)^{en} - rr1 \cdot qq1 \cdot ABS(qq1)^{en}$					
shf4	2.03E-06	$= 135 - 117 - (B5 + C5 \cdot qq8 + D5 \cdot qq8^2 + E5 \cdot qq8^3) + rr5 \cdot qq5 \cdot ABS(qq5)^{en}$					
sumq1	2.78E-17	$= qq1 + qq3 - qq4 - 0.09$					
sumq4	0	$= qq6 - qq2 - qq3 - qq5$					
HGL1 =	140.83	$= 150 - rr1 \cdot qq1 \cdot ABS(qq1)$					

شکل ۱۵.۱۲ مثال ۱۱.۱۲، حل صفحه گسترده در شبکه شکل ۱۴.۱۲.

۱، ...، ۵، و در پمپ ۸ در نظر گرفته می‌شوند. اگر حدسها منطقی باشند، و اگر آنها پیوستگی را در گره‌ها برقرار کنند، روش معمولاً سریعتر متناوب می‌شود.

شکل ۱۷.۱۲ حل صفحه گسترده را برای شبکه شارش نشان داده شده در شکل ۱۶.۱۲ نشان می‌دهد، و شکل ۱۹.۱۲ حل شبکه شارش نشان داده شده در شکل ۱۸.۱۲ را نشان می‌دهد.



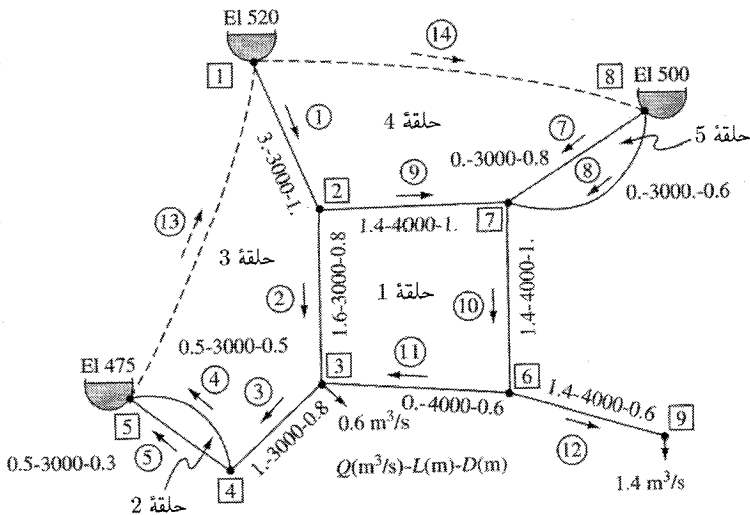
شکل ۱۶.۱۲ سیستم انشعابی با داده‌ها.

استفاده از معادله هازن-ویلیام		حلهای Q در هر عنصر برای موازنه هدها در حلقه					
HWC =	120	en =		0.852			
A0,A1,A2,A3 =	120		-0.405	-0.0918		-0.00097	
						$rr1 = 4.727 * B6 / (HWC * 1.852 * C6 * 4.8704)$	
عنصر	طول، ft	قطر، ft			rr	Flow, m ³ /s	
1	3000	1.5	rr1		0.2776	qq1	6.7260
2	2000	1	rr2		1.3334	qq2	4.7561
3	5000	1.25	rr3		1.1244	qq3	1.9699
						qq6	6.7260
shf1	2.8407E-11	$= 400 - 480 - rr1 * qq1 * ABS(qq1) * en - rr2 * qq2 * ABS(qq2) * en + (B3 + C3 * qq6 + D3 * qq6 - 2 + E3 * qq6 * 3)$					
shf2	8.2569E-11	$= 480 - 500 - rr3 * qq3 * ABS(qq3) * en - rr2 * qq2 * ABS(qq2) * en$					
sumq1	0	$= -qq1 + qq6$					
sumq4	6.8834E-15	$= qq1 - qq2 - qq3$					

شکل ۱۷.۱۲ حل صفحه گسترده شبکه شکل ۱۶.۱۲.

۶.۱۲ شارش پایا: مجراهای غیردایره‌ای، کهنگی لوله‌ها و مواد افزودنی

در این فصل تاکنون، فقط لوله‌های دایره‌ای را در نظر گرفته‌ایم. در مقطعی که غیردایره‌ای هستند، معادله داری-وایسباخ را می‌توان به کار برد به شرطی که جمله D را بتوان برحسب مقطع بیان کرد. مفهوم شعاع هیدرولیکی R این امکان را می‌دهد که تا مقاطع دایره‌ای و غیردایره‌ای را با روش یکسانی بررسی کنیم. شعاع هیدرولیکی به صورت سطح مقطع تقسیم بر محیط خیس شده



شکل ۱۸.۱۲ سیستم شبکه‌ای با سه مخزن همراه با داده‌ها.

		موازنه حلقه برای حل شبکه									
استفاده از معادله دارسی-وایسباخ						f = 1.325/(LN(D5 + 5.74/(G5 * E5) * 0.9)) * 2					
q _{eq} =	1.2E-06	eps =	0.0005	grav =	9.806	تخلیه					
لوله	طول	قطر	eps/(3.7*D)	CR _{eq}	QQ	Discharge	f	rr			
1	3000	1	0.00014	1061030	qq1=	1.9556	0.01701	rr1 =		4.218734	
2	3000	0.8	0.00017	1326288	qq2=	1.0287	0.01796	rr2=		13.5934	
3	3000	0.8	0.00017	1326288	qq3=	0.3545	0.01856	rr3=		14.04464	
4	3000	0.5	0.00027	2122061	qq4=	0.2813	0.02025	rr4=		160.6562	
5	3000	0.3	0.00045	3536768	qq5=	0.0732	0.02326	rr5=		2373.842	
7	3000	0.8	0.00017	1326288	qq7=	0.2717	0.0188	rr7=		14.2308	
8	3000	0.6	0.00023	1768384	qq8=	0.1272	0.02034	rr8=		64.87928	
9	4000	1	0.00014	1061030	qq9=	0.9270	0.0173	rr9=		5.721029	
10	4000	1	0.00014	1061030	qq10=	1.3259	0.01714	rr10=		5.667561	
11	4000	0.6	0.00023	1768384	qq11=	-0.0741	0.02118	rr11=		90.0722	
12	4000	0.6	0.00023	1768384	qq12=	1.4000	0.01898	rr12=		80.71854	
shf1	1E-08	= rr9 * qq9 * ABS(qq9) + rr10 * qq10 * ABS(qq10) + rr11 * qq11 * ABS(qq11) - rr2 * qq2 * ABS(qq2)									
shf2	-4.5E-10	= rr5 * qq5 * ABS(qq5) - rr4 * qq4 * ABS(qq4)									
shf3	7.8E-08	= rr1 * qq1 * ABS(qq1) + rr2 * qq2 * ABS(qq2) + rr3 * qq3 * ABS(qq3) + rr4 * qq4 * ABS(qq4) + 475 - 520									
shf4	1.4E-09	= rr7 * qq7 * ABS(qq7) - rr9 * qq9 * ABS(qq9) - rr1 * qq1 * ABS(qq1) + 520 - 500									
shf5	-9.4E-12	= rr8 * qq8 * ABS(qq8) - rr7 * qq7 * ABS(qq7)									
sumq2	4.4E-16	= qq1 - qq9 - qq2									
sumq3	-5.6E-16	= qq2 - qq3 + qq11 - 0.6									
sumq4	-1E-15	= qq3 - qq5 - qq4									
sumq6	3.3E-16	= qq10 - 1.4 - qq11									
sumq7	-6.7E-16	= qq9 + qq7 + qq8 - qq10									

شکل ۱۹.۱۲ حل صفحه گسترده برای شبکه در شکل ۱۸.۲.

تعریف می‌شود. از این رو، برای مقطع دایره‌ای داریم

$$R = \frac{\text{مساحت}}{\text{محیط}} = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi D} = \frac{D}{4} \quad (۱.۶.۱۲)$$

و قطر معادل $4R$ است. به فرض اینکه در معادله دارسی-وایسباخ، عدد رینولدز، و زبری نسبی $4R$ را بتوان به جای قطر قرار داد، به دست می‌آید

$$h_f = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{g} \quad R = \frac{V^4 R \rho}{\mu} \frac{\varepsilon}{D} = \frac{\varepsilon}{4R} \quad (۲.۶.۱۲)$$

مقاطع غیر دایره‌ای را با روشی مشابه می‌توان بررسی کرد. نمودار مودی به همان شکل به کار می‌رود. نمی‌توان انتظار داشت که مفروضات معادله‌های (۲.۶.۱۲) برای تمام مقطعاتی شکل‌های نامنظم صدق کنند بلکه آنها مقادیری منطقی برای مقاطع مربعی، بیضی شکل، مثلثی و انواع مقاطع مشابه را به دست می‌دهند.

مثال ۱۲.۱۲ مطلوب است افت هد، برحسب میلیمتر آب، که برای شارش $300 \text{ m}^3/\text{min}$ هوای 20°C و 100 kPa در یک مقطع مستطیلی آهن گالوانیزه به عرض 700 mm ، ارتفاع 350 mm ، و طول 70 m لازم است.

حل

$$R = \frac{A}{P} = \frac{0.7(0.35)}{2(0.7 + 0.35)} = 0.117 \text{ m} \quad \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{0.00015}{4(0.117)} = 0.00032$$

$$V = \frac{300}{60(0.7)(0.35)} = 20.41 \text{ m/s} \quad \mu = 2.2 \times 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{100000}{287(273 + 20)} = 1.189 \text{ kg/m}^3$$

$$R = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{V4R\rho}{\mu} = \frac{20.41(4)(0.117)(1.189)}{2.2 \times 10^{-5}} = 516200$$

از شکل ۲۰.۶، $f = 0.0165$

$$h_f = f \frac{L V^2}{4R 2g} = 0.0165 \frac{70}{4(0.117)} \times \frac{20.41^2}{2(9.806)} = 52.42 \text{ m هوا}$$

وزن مخصوص هوا عبارت است از $\rho g = 1.189(9.806) = 11.66 \text{ N/m}^3$ برحسب میلیمتر آب نتیجه می شود

$$\frac{52.42(11.66)(1000)}{9.806} = 62.33 \text{ mm آب}$$

کهنگی لوله ها

نمودار مودی، با مقادیر زبری مطلق نشان داده شده در نمودار، برای لوله تمیز و نو کاربرد دارد. لوله ها بعد از مدتی استفاده زبرتر می شوند که بر اثر خوردگی، پوسته شدن، و رسوب مواد بر روی دیواره لوله ها است. سرعت تغییرات ضریب اصطکاک با زمان عمدتاً به سیالی بستگی دارد که لوله آن را حمل می کند. کلبروک و وایت دریافتند که زبری مطلق ε به طور خطی با زمان افزایش می یابد

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha t$$

(۳.۶.۱۲)

که در آن، ε عبارت است از زبری مطلق سطح نو. برای تعیین α آزمایشهایی روی لوله باید انجام داد.

تغییر زمانی ضریب هازن-ویلیامز برای سیستمهای آب در هفت شهر بزرگ آمریکا به طور ترسیمی خلاصه شده‌اند [مرجع ۹]. اگرچه این تغییر یک تغییر خطی نیست، گستره مقادیر مربوط به آهنگ متوسط کاهش C ممکن است نوعاً بین ۵ و ۲ در یک سال باشد که مقادیر بزرگتر مجموعاً در سالهای اول پس از نصب به کاربردن است. تنها راه مطمئن که توسط آن بتوان ضرایب دقیقی برای لوله‌های اصلی آب کهنه‌تر به دست آورد از طریق انجام آزمایشها در تأسیسات موجود است.

کاهش اتلاف هد با مواد افزودنی

اغلب، پلیمرهای محلول به مایعات افزوده می‌شوند تا افت هد در لوله‌ها کاهش یابد. محلول را عوامل کاهش‌دهنده پسا می‌نامند. غلظتهای کم محلول پلیمر می‌تواند افت هد را تا 5° درصد در شارش متلاطم کاهش دهد، و تأثیر چندانی در شارش لایه‌ای ندارد. آزمایش نشان می‌دهد که کاهش پسا مربوط می‌شود به شارش در نزدیک جداره لوله، در زیر لایه چسبنده یا در ناحیه بافر. برمن [مرجع ۱۰]، بیٹی و دیگران [مرجع ۱۱]، و لستر [مرجع ۱۲] نموداری را برای اطلاعات آزمایشی درباره موضوع فراهم آوردند. خط لوله نفت آلاسکا برای چند سال از عوامل کاهش‌دهنده پسا استفاده کرده است و سود اقتصادی قابل توجهی کسب کرده است.

۷.۱۲ شارش ناپایا: نوسان مایع در لوله U

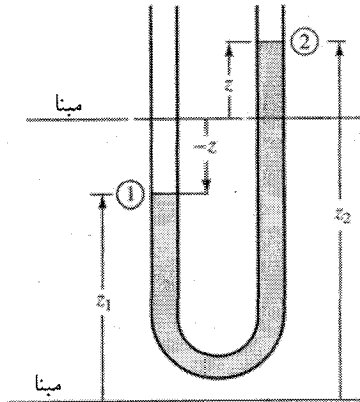
سه حالت نوسان مایع در یک لوله ساده U را بررسی می‌کنیم: (۱) مایع بی‌اصطکاک؛ (۲) مقاومت در شارش لایه‌ای؛ و (۳) مقاومت در شارش متلاطم.

مایع بی‌اصطکاک

در حالت بی‌اصطکاک، معادله حرکت اوایلر به صورت ناپایا [معادله (۶.۵.۳)] را می‌توان به کار برد. معادله عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

اگر مقاطع ۱ و ۲ را انتخاب، (شکل ۷.۱۲) و معادله را از ۱ تا ۲ برای شارش تراکم‌ناپذیر



شکل ۲۰.۱۲ نوسان مایع در لوله U.

انتگرال‌گیری کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0 \quad (۱.۷.۱۲)$$

اما $v_1 = v_2$ و $p_1 = p_2$ ؛ همچنین، $\partial v / \partial t$ مستقل از s است؛ از این رو

$$g(z_2 - z_1) = -L \frac{\partial v}{\partial t} \quad (۲.۷.۱۲)$$

که در آن، L طول ستون مایع است. با تغییر داده‌ی ارتفاع به‌مکان تعادل سطح هلالی داریم، $g(z_2 - z_1) = 2gz$ ؛ از آنجا که v فقط تابع t است، $\partial v / \partial t$ را به صورت dv/dt ، یا d^2z/dt^2 می‌توان نوشت، بنابراین

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{L}z \quad (۳.۷.۱۲)$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$z = C_1 \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2g}{L}}t$$

که در آن، C_1 و C_2 ثابتهای اختیاری انتگرال هستند. با دوبار دیفرانسیل‌گیری از جواب و جایگذاری در معادله دیفرانسیل صحت جواب را به سهولت می‌توان وارسی کرد. برای به‌دست آوردن ثابتها،

شارش ناپایا: نوسان مایع در لوله U ۷۴۷

اگر وقتی $t = 0$ است داشته باشیم $z = Z$ و $dz/dt = 0$ که در آن صورت $C_1 = Z$ و $C_2 = 0$ بنا بر این

$$z = Z \cos \sqrt{\frac{2g}{L}} t \quad (۴.۷.۱۲)$$

این معادله یک حرکت هماهنگ ساده سطح هلالی را تعریف می‌کند که دوره تناوب آن برای یک نوسان کامل $2\pi\sqrt{L/2g}$ است. سرعت ستون را با دیفرانسیل‌گیری z نسبت به t می‌توان به دست آورد.

مثال ۱۳.۱۲ یک ستون مایع بی‌اصطکاک به طول ۲٫۱۸m وقتی $z = 0.5$ m است سرعت 2 m/s را داراست. مطلوب است الف) مقدار ماکزیمم z ؛ ب) سرعت ماکزیمم؛ ج) دوره تناوب.

حل

الف) با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۴.۷.۱۲) بعد از جایگذاری L ، نتیجه می‌شود

$$\frac{dz}{dt} = -3Z \sin 3t$$

اگر t_1 زمانی باشد که در آن، $z = 0.5$ و $dz/dt = 2$ داریم

$$0.5 = Z \cos 3t_1 \quad 2 = -3Z \sin 3t_1$$

با تقسیم معادله دوم بر معادله اول به دست می‌آید

$$\tan 3t_1 = -\frac{4}{3}$$

یا $3t_1 = 5.356$ rad، $t_1 = 1.785$ s، $\sin 3t_1 = 0.8$ و $\cos 3t_1 = 0.6$ بنا بر این $Z = 0.833$ m، $Z = 0.5 / \cos 3t_1 = 0.5 / 0.6 = 0.833$ m، که مقدار ماکزیمم z است.

ب) ماکزیمم وقتی به دست می‌آید که $\sin 3t = 1$ ، یا

$$3Z = 3(0.833) = 2.499 \text{ m/s}$$

ج) دوره تناوب عبارت است از

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} = 2.094s$$

مقاومت در شارش لایه‌ای

وقتی تنش برشی τ_0 در دیواره لوله در برابر حرکت ستون مایع مقاومت می‌کند، آن را در معادله حرکت اویلر در امتداد یک خط جریان (شکل ۷.۴) می‌توان وارد کرد. مقاومت در طول δs مساوی $\tau_0 \pi D \delta s$ است. بعد از تقسیم کردن هر جرم ذره، یعنی $\rho A \delta s$ ، نتیجه می‌شود $\tau_0 / \rho D$ و معادله (۱.۷.۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (5.7.12)$$

این معادله برای مقاومت در شارش لایه‌ای، همچنین مقاومت در شارش متلاطم کاربرد دارد. بنا به فرض، مقاومت اصطکاکی در شارش ناپایا با مقاومت اصطکاکی در شارش پایا با همان سرعت، یکسان است. از معادله پوازویل تنش برشی در دیواره لوله مساوی است با

$$\tau_0 = \frac{\lambda \mu v}{D} \quad (6.7.12)$$

بعد از جایگذاری τ_0 در معادله (۵.۷.۱۲) و انتگرال‌گیری نسبت به s مانند سابق، داریم

$$g(z_2 - z_1) + L \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{32\nu v L}{D^2} = 0$$

با قرار دادن $gz = g(z_2 - z_1)$ ، تبدیل کردن به مشقات کلی، و جایگذاری dz/dt به جای v نتیجه می‌شود

$$\frac{dz}{dt} + \frac{32\nu}{D^2} \frac{dz}{dt} + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (7.7.12)$$

در نتیجه، فرض می‌شود که ستون مایع سرعت متوسط dz/dt را در هر مقطع داراست. با جایگذاری

$$z = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}$$

می‌توان نشان داد که z جواب عمومی معادله (۷.۷.۱۲) است، به شرطی که

$$b^2 + \frac{32\nu}{D^2}b + \frac{2g}{L} = 0 \quad \text{و} \quad a^2 + \frac{32\nu}{D^2}a + \frac{2g}{L} = 0$$

C_1 و C_2 ثابتهای اختیاری انتگرال هستند که با مقادیر معلوم z و dz/dt در یک زمان معلوم تعیین می‌شوند. از آنجا که معادله‌هایی که a و b را تعریف می‌کنند یکسان هستند، برای اینکه دو جواب متمایز به دست آید، در جواب معادله درجه دوم برای آنها در قبل از رادیکال علامتهای جبری ممکن را در نظر می‌گیریم؛ بدین ترتیب که

$$a = -\frac{16\nu}{D^2} + \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}} \quad b = -\frac{16\nu}{D^2} - \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

برای ساده‌کردن فرمولها، قرار می‌دهیم

$$m = \frac{17\nu}{D^2} \quad n = \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}}$$

بنابراین

$$z = C_1 e^{-mt+nt} + C_2 e^{-mt-nt}$$

با شرط اولیه $t = 0, z = 0, dz/dt = V_0$ و بعد از جایگذاری خواهیم داشت $C_1 = -C_2$ و

$$z = C_1 e^{-mt}(e^{nt} - e^{-nt}) \quad (8.7.12)$$

از آنجا که

$$\frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2} = \sinh nt$$

معادله (۸.۷.۱۲) چنین می‌شود

$$z = 2C_1 e^{-mt} \sinh nt$$

با دیفرانسیل‌گیری نسبت به t داریم

$$\frac{dz}{dt} = 2C_1(-me^{-mt} \sinh nt + ne^{-mt} \cosh nt)$$

و با قراردادن $dz/dt = V_0$ در $t = 0$ نتیجه می‌شود

$$V_0 = 2C_1 n$$

زیرا $\sin h^0 = 0$ و $\cos h^0 = 1$. بنابراین

$$z = \frac{V_0}{n} e^{-mt} \sinh nt \quad (9.7.12)$$

این معادله جابه‌جایی z هلالی ستون مایع را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد که در آن، جابه‌جایی هلالی وقتی $t = 0$ است از $z = 0$ شروع می‌شود و با سرعت V_0 بالا می‌رود. دو حالت^۱ اصلی را باید در نظر گرفت. وقتی

$$\frac{16\nu}{D^2} > \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

n عددی حقیقی است و چسبندگی به قدری زیاد است که حرکت در بخشی از یک چرخه مستهلک می‌شود و z هیچ‌وقت منفی نمی‌شود [شکل ۲۱.۱۲ ($m/n = 2$)]. زمان t برای اینکه z ماکزیمم شود با دیفرانسیل‌گیری z [معادله (۹.۷.۱۲)] نسبت به t و مساوی صفر قراردادن آن به دست می‌آید

$$\frac{dz}{dt} = 0 = \frac{V_0}{n} (-me^{-mt} \sinh nt + ne^{-mt} \cosh nt)$$

یا

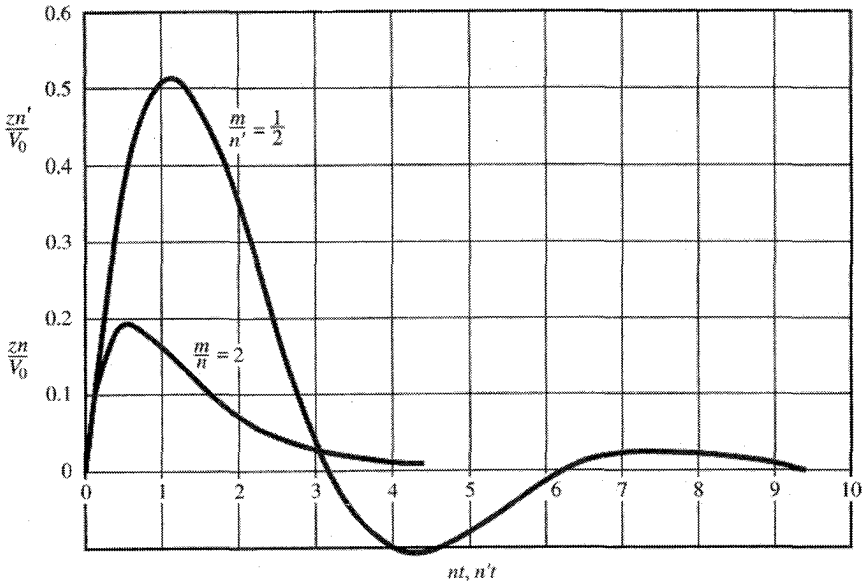
$$\tanh nt = \frac{n}{m} \quad (10.7.12)$$

با جایگذاری این مقدار t در معادله (۹.۷.۱۲) ماکزیمم جابه‌جایی Z به دست می‌آید

$$Z = \frac{V_0}{\sqrt{m^2 - n^2}} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^{m/2n} = V_0 \sqrt{\frac{L}{2g}} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^{m/2n} \quad (11.7.12)$$

۱. در حالت سوم، $\frac{16\nu}{D^2} = \sqrt{2g/L}$ که باید به‌طور جداگانه بررسی شود، نتیجه می‌شود $z = V_0 t e^{-mt}$. نوسان حاصل فقط برای بخشی از چرخه است و حالتی حدی از $\frac{16\nu}{D^2} > \sqrt{2g/L}$ است.

شارش ناپایا: نوسان مایع در لوله U ۷۵۱



شکل ۲۱.۱۲ مکان هلالی به صورت تابعی از زمان در نوسان مایع در لوله U شکل با احتساب مقاومت در شارش لایه‌ای.

حالت دوم، وقتی داریم

$$\frac{16\nu}{D^2} < \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

یک جمله منفی، در داخل رادیکال، حاصل می‌شود

$$n = \sqrt{-1 \left[\frac{2g}{L} - \left(\frac{16\nu}{D^2} \right)^2 \right]} = i \sqrt{\frac{2g}{L} - \left(\frac{16\nu}{D^2} \right)^2} = in'$$

که در آن، $i = \sqrt{-1}$ و n' عددی حقیقی است. با جایگذاری in' به جای n در معادله (۹.۷.۱۲)

تابع حقیقی زیر به دست می‌آید

$$z = \frac{V_0}{in'} e^{-mt} \sin h in't = \frac{V_0}{n'} e^{-mt} \sin n't \quad (12.7.12)$$

زیرا

$$\sin n't = \frac{1}{i} \sin h in't$$

حرکت حاصل از z یک نوسان حول $z = 0$ با دامنه کاهش یافته است که در شکل ۲۱.۱۲ برای حالت $m/n' = \frac{1}{3}$ نشان داده شده است. زمان $t = 0$ مربوط به جابه‌جایی ماکزیمم یا مینیمم از معادله (۱۲.۷.۱۲) با قراردادن $dz/dt = 0$ به دست می‌آید، که نتیجه می‌شود

$$\tan n't_0 = \frac{n'}{m} \quad (۱۳.۷.۱۲)$$

تعداد بی‌شماری از مقادیر t_0 وجود دارند که در رابطه فوق صدق می‌کنند و تمام آنها متناظر با مکانهای ماکزیمم و مینیمم هلالی‌اند. با جایگذاری t_0 در معادله (۱۲.۷.۱۲) داریم

$$Z = \frac{V_0}{\sqrt{n'^2 + m^2}} \exp\left(-\frac{m}{n'} \tan^{-1} \frac{n'}{m}\right) = V_0 \sqrt{\frac{L}{2g}} \exp\left(-\frac{m}{n'} \tan^{-1} \frac{n'}{m}\right) \quad (۱۴.۷.۱۲)$$

مثال ۱۴.۱۲ یک لوله U به قطر ۱in حاوی روغن، $\nu = 1 \times 10^{-4} \text{ft}^2/\text{s}$ ، با ستون مایعی به طول کلی ۱۲in مفروض است. با اعمال فشار هوا در یکی از لوله‌ها اختلاف پیمانه‌ای به ۱۶in می‌رسد. با حذف سریع فشار هوا، ستون مایع آزاد می‌تواند نوسان کند. سرعت ماکزیمم، عدد رینولدز ماکزیمم، و معادله مکان یکی از هلالها، z ، را برحسب زمان به دست آورید.

حل

فرض می‌کنیم که شارش لایه‌ای است و عدد رینولدز را بر این مبنا محاسبه می‌کنیم. ثابتهای m و n عبارت‌اند از

$$m = \frac{16\nu}{D^2} = \frac{16 \times 10^{-4}}{(1/12)^2} = 0.2302$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{16\nu}{D^2}\right)^2 - \frac{2g}{L}} = \sqrt{0.2302^2 - \frac{2(32.2)}{10}} = \sqrt{-6.387} = i2.527$$

یا

$$n' = 2.527$$

از معادله‌های (۱۲.۷.۱۲) تا (۱۴.۷.۱۲) برای این حالت استفاده می‌کنیم، زیرا مایع در بالای سطح واقع در زیر $z = 0$ نوسان می‌کند. نوسان از مکان ماکزیمم، یعنی $Z = 0.667 \text{ft}$ شروع می‌شود. با استفاده از معادله (۱۴.۷.۱۲) سرعت (فرضی) وقتی $z = 0$ است در زمان t قبل

از سرعت ماکزیمم به صورت زیر تعیین می‌شود

$$V_0 = Z \sqrt{\frac{2g}{L}} \exp\left(\frac{m}{n'} \tan^{-1} \frac{n'}{m}\right)$$

$$= 0.667 \sqrt{\frac{64.4}{10}} \exp\left(\frac{0.2302}{2.527} \tan^{-1} \frac{2.527}{0.2302}\right) = 1.935 \text{ ft/s}$$

$$\tan n't_0 = \frac{n'}{m} \quad t_0 = \frac{1}{2.527} \tan^{-1} \frac{2.527}{0.2302} = 0.586 \text{ s}$$

از این رو، با جایگذاری در معادله (۱۲.۷.۱۲) داریم

$$z = 0.766 \exp[-0.2302(t + 0.586)] \sin 2.527(t + 0.586)$$

که در آن، $t = 0$ داریم $z = Z$. سرعت ماکزیمم (واقعی) در $t > 0$ به دست می‌آید. با دیفرانسیل‌گیری نسبت به t برای به دست آوردن عبارت برای سرعت نتیجه می‌شود

$$V = \frac{dz}{dt} = -0.1763 \exp[-0.2302(t + 0.586)] \sin 2.527(t + 0.586)$$

$$+ 1.935 \exp[-0.2302(t + 0.586)] \cos 2.527(t + 0.586)$$

با دیفرانسیل‌گیری مجدد نسبت به t و مساوی قرار دادن آن با صفر برای به دست آوردن V ماکزیمم نتیجه می‌شود

$$\tan 2.527(t + 0.586) = -0.1837$$

جواب در ربع دوم باید مقدار ماکزیمم مورد نظر را نتیجه دهد، که عبارت است از $t = 0.584 \text{ s}$. با جایگذاری این زمان در عبارت V نتیجه می‌شود $V = -1.48 \text{ ft/s}$. عدد رینولدز متناظر عبارت است از

$$R = \frac{VD}{\nu} = 1.48 \left(\frac{1}{12} \times 10^4 \right) = 1234$$

از این رو فرض مقاومت در شارش لایه‌ای، توجیه می‌شود.

مقاومت در شارش متلاطم

در بیشتر حالت‌های عملی نوسان، یا ضربه، در سیستم‌های لوله‌ای مقاومتی از نوع مقاومت در شارش متلاطم وجود دارد. در لوله‌ها و تونلهای بزرگ عدد رینولدز نیز بزرگ است بجز برای دوره‌های زمانی‌ای که در آنها سرعت خیلی نزدیک صفر است. فرض می‌کنیم مقاومت سیال متناسب با مربع سرعت متوسط است (f ثابت). با اینکه با این فرض به دقت می‌توان شرایط حقیقی را تخمین زد مقاومت بسیار کوچک در حرکت‌های کند به وجود می‌آید که در این حالت از مقاومت تقریباً می‌توان صرف نظر کرد. همان معادله‌ها در $f = \text{ثابت}$ برای نوسان در داخل لوله U کاربرد دارند. مجدداً فرض می‌کنیم که مقاومت در شارش ناپایا مساوی مقاومت شارش پایایی است که همان سرعت را دارد.

با استفاده از معادله (۲.۷.۶) برای جایگذاری τ در معادله (۵.۷.۱۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{fv^2}{2D} = 0 \quad (15.7.12)$$

و با انتگرال‌گیری این معادله از مقطع ۱ تا مقطع ۲ (شکل ۲.۱۲)، جمله اول حذف می‌شود زیرا حدود در هر حالت عبارت است از $p = 0$ ، جمله سوم نیز حذف می‌شود زیرا $\partial v / \partial s \equiv 0$ ، و جمله‌های چهارم و پنجم مستقل از s هستند؛ از این رو

$$g(z_2 - z_1) + \frac{\partial v}{\partial t} L + \frac{fv^2}{2D} L = 0$$

از آنجا که v فقط تابعی از t است، مشتق کلی را می‌توان به جای مشتق جزئی قرار داد

$$\frac{dv}{dt} + \frac{f}{2D} v|v| + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (16.7.12)$$

علامت قدرمطلق در جمله سرعت لازم است زیرا مقاومت، چه مثبت و چه منفی، برخلاف سرعت است. با بیان کردن $v = dz/dt$ داریم

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f}{2D} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (17.7.12)$$

که یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است زیرا جمله v از درجه دوم است. آن را یک بار نسبت به t می‌توان انتگرال‌گیری کرد، اما جواب جمع وجوری برای انتگرال‌گیری دوم وجود ندارد.

اگر شرایط اولیه معلوم باشند: $z = z_0$, $t = t_0$, $dz/dt = 0$ ، معادله فوق را با روشهای رونگه-کوتا (به صفحهٔ وب* نگاه کنید) یا یک کامپیوتر رقمی به سهولت می‌توان حل کرد. البته، با محدودکردن حرکت به جهت $-z$ ، دربارهٔ معادلهٔ (۱۷.۷.۱۲) می‌توان بیشتر دانست. بدین ترتیب که

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{f}{2D} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{2g}{L} z = 0 \quad (18.7.12)$$

معادله را یک بار می‌توان انتگرال‌گیری کرد** و به دست آورد

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2gD^2}{f^2 L} \left(1 + \frac{fz}{D} \right) + C e^{fz/D} \quad (19.7.12)$$

که در آن، C ثابت انتگرال است. برای به دست آوردن مقدار ثابت، اگر در $z = z_m$ داشته باشیم $dz/dt = 0$ در آن صورت

$$C = -\frac{2gD^2}{f^2 L} \left(1 + \frac{fz_m}{D} \right) e^{-fz_m/D}$$

و

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2gD^2}{f^2 L} \left[1 + \frac{fz}{D} - \left(1 + \frac{fz_m}{D} \right) e^{f(z-z_m)/D} \right] \quad (20.7.12)$$

اگرچه این معادله را مجدداً نمی‌توان انتگرال‌گیری کرد، انتگرال عددی، حالت‌های خاص z را به صورت تابعی از t به دست می‌دهد. البته، از معادله برای تعیین بزرگی نوسانهای متوالی می‌توان استفاده

* صفحه‌ای که در کامپیوتر که کاربر با استفاده از آن به اطلاعات مورد نظر دست می‌یابد.م.

** با جایگذاری $p = dz/dt$ داریم

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dt} = p \frac{dp}{dz}$$

بنابراین

$$p \frac{dp}{dz} - \frac{f}{2D} p^2 + \frac{2gz}{L} = 0$$

این معادله را با ضرب کردن در ضرایب انتگرال $e^{-fz/D}$ می‌توان دقیق کرد. برای اطلاع از روش تفصیلی مراجعه کنید

کرد. در لحظه‌های مربوط به z ماکزیمم یا z مینیمم، مثلاً به ترتیب z_m و z_{m+1} ، $dz/dt = 0$ است، و معادله (۲۰.۷.۱۲) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\left(1 + \frac{f z_m}{D}\right) e^{-f z_m/D} = \left(1 + \frac{f z_{m+1}}{D}\right) e^{-f z_{m+1}/D} \quad (21.7.12)$$

از آنجاکه معادله (۱۸.۷.۱۲)، یعنی معادله اولیه، فقط برای z کاهش‌یابنده صدق می‌کند، z_m باید مثبت و z_{m+1} باید منفی باشد. برای پیدا کردن z_{m+2} ، هلالی دیگری را می‌توان در نظر گرفت و z_{m+1} را به عنوان یک عدد مثبت در طرف چپ معادله جایگذاری کرد تا z_{m+2} منفی، به جای z_{m+1} ، در طرف راست معادله تعیین شود.

مثال ۱۵.۱۲ یک لوله U متشکل از لوله‌ای به قطر 50 mm با 3° نوسان ماکزیمم $f = 0.3$ (شکل ۲۰.۱۲) $z_m = 6 \text{ m}$ را داراست. مکان مینیمم و ماکزیمم بعدی را پیدا کنید.

حل

از معادله (۲۱.۷.۱۲)،

$$\left(1 + \frac{0.3(6)}{0.05}\right) e^{-0.3(6)/0.05} = (1 + 0.6 z_{m+1}) e^{-0.6 z_{m+1}}$$

یا

$$(1 + 0.6 z_{m+1}) e^{-0.6 z_{m+1}} = 0.9488$$

که جواب آن عبارت است از $z_{m+1} = -4.84 \text{ m}$. با استفاده از $z_m = 4.84 \text{ m}$ در معادله (۲۱.۷.۱۲)، داریم

$$(1 + 0.6 z_{m+1}) e^{-0.6 z_{m+1}} = [1 + 0.6(4.84)] e^{-0.6(4.84)} = 0.9651$$

که جواب آن عبارت است از $z_{m+1} = -4.05 \text{ m}$. از این رو، z در سطح مینیمم آب عبارت است از $z = -4.84 \text{ m}$ و ماکزیمم بعدی عبارت است از $z = 4.05 \text{ m}$. ■

مثال ۱۶.۱۲ لوله مثال ۱۵.۱۲ به طول 1000 m است. با انتگرال عددی از معادله (۱۷.۷.۱۲)، با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه سوم (به صفحه وب نگاه کنید)، زمان برای z مینیمم اول و ماکزیمم بعدی را بیابید و نتایج مثال ۱۵.۱۲ را وارسی کنید.

حل

قرار می‌دهیم $V = dz/dt$ ، در این صورت معادله (۱۷.۷.۱۲) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{dV}{dt} = F(V, z) = -\frac{f}{2D}V|V| - \frac{\gamma g}{L}z$$

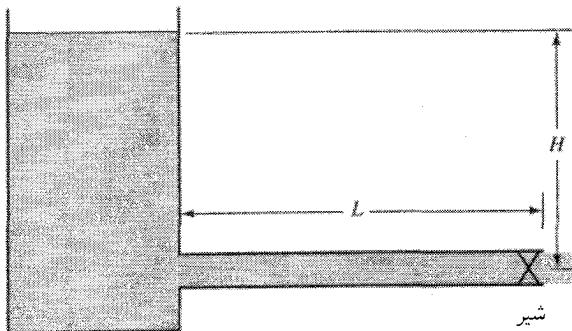
با استفاده از رانگ-کوتای مرتبه سوم با گام زمانی $\Delta t = 0.075s$ ، عبارتهای زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} V_1 &= \Delta t F(V_n, z_n) & z_1 &= \Delta t V_n \\ V_2 &= \Delta t F\left(V_n + \frac{V_1}{3}, z_n + \frac{z_1}{3}\right) & z_2 &= \Delta t \left(V_n + \frac{V_1}{3}\right) \\ V_3 &= \Delta t F\left(V_n + \frac{2}{3}V_2, z_n + \frac{2}{3}z_2\right) & z_3 &= \Delta t \left(V_n + \frac{2}{3}V_2\right) \\ V_{n+1} &= V_n + \frac{V_1}{4} + \frac{3}{4}V_3 & z_{n+1} &= z_n + \frac{z_1}{4} + \frac{3}{4}z_3 \end{aligned}$$

تغییر مکانهای مینیمم و ماکزیمم عبارت‌اند از $-4.834m$ در $22.5s$ و $4.48m$ در $45.0s$. ■

۸.۱۲ شارش ناپایا: تثبیت شارش

وقتی در خط لوله‌ای شیری به‌طور ناگهانی باز می‌شود مسئله تعیین زمان تثبیت شارش را، اگر اصطکاک و اتلافهای جزئی به حساب آیند، به سهولت می‌توان بررسی کرد. بعد از اینکه شیر باز شد (شکل ۲۲.۱۲) هد H موجود است تا به شارش در اولین لحظه‌ها شتاب دهد، اما وقتی سرعت افزایش می‌یابد، هد شتاب‌دهنده بر اثر اصطکاک و اتلافهای جزئی کاهش می‌یابد. اگر L_e طول



شکل ۲۲.۱۲ نمادگذاری برای تثبیت شارش.

معادل سیستم لوله‌ای باشد، سرعت نهایی V_0 با کاربرد معادله انرژی به صورت زیر داده می‌شود

$$H = f \frac{L_e}{D} \frac{V_0^2}{2g} \quad (۱.۸.۱۲)$$

معادله حرکت عبارت است از

$$\gamma A \left(H - f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{\gamma A L}{g} \frac{dV}{dt}$$

با محاسبه dt و دوباره مرتب‌کردن، براساس معادله (۱.۸.۱۲) به دست می‌آید

$$\int_0^t dt = \frac{LV_0^2}{gH} \int_0^V \frac{dV}{V_0^2 - V^2}$$

بعد از انتگرال‌گیری، نتیجه می‌شود

$$t = \frac{LV_0}{2gH} \ln \frac{V_0 + V}{V_0 - V} \quad (۲.۸.۱۲)$$

سرعت V به طور مجانبی به V_0 نزدیک می‌شود؛ یعنی، به طور ریاضی زمان بی‌نهایتی طول می‌کشد تا V به مقدار V_0 برسد. به طور عملی، زمان لازم برای اینکه V به $0.99V_0$ برسد عبارت است از

$$t = \frac{LV_0}{gH} \frac{1}{2} \ln \frac{1.99}{0.01} = 2.646 \frac{LV_0}{gh}$$

V_0 را با احتساب اتلافهای جزئی باید تعیین کرد، اما معادله (۲.۸.۱۲) شامل L_e نیست.

مثال ۱۷.۱۲ در شکل ۲۲.۱۲ اتلافهای جزئی $16V^2/2g$ هستند، $f = 0.30$ ، $L = 3000 \text{ m}$ ، $D = 24 \text{ m}$ و $H = 20 \text{ m}$. بعد از باز کردن ناگهانی یک شیر، زمانی را که سرعت به نه‌دهم سرعت نهایی می‌رسد تعیین کنید.

حل

$$L_e = 3000 + \frac{16 \times 24}{0.3} = 4280 \text{ m}$$

$$V_* = \sqrt{\frac{2gHD}{fL_e}} = \sqrt{\frac{19,612(20)(2,4)}{0,30(4280)}} = 2,708 \text{ m/s}$$

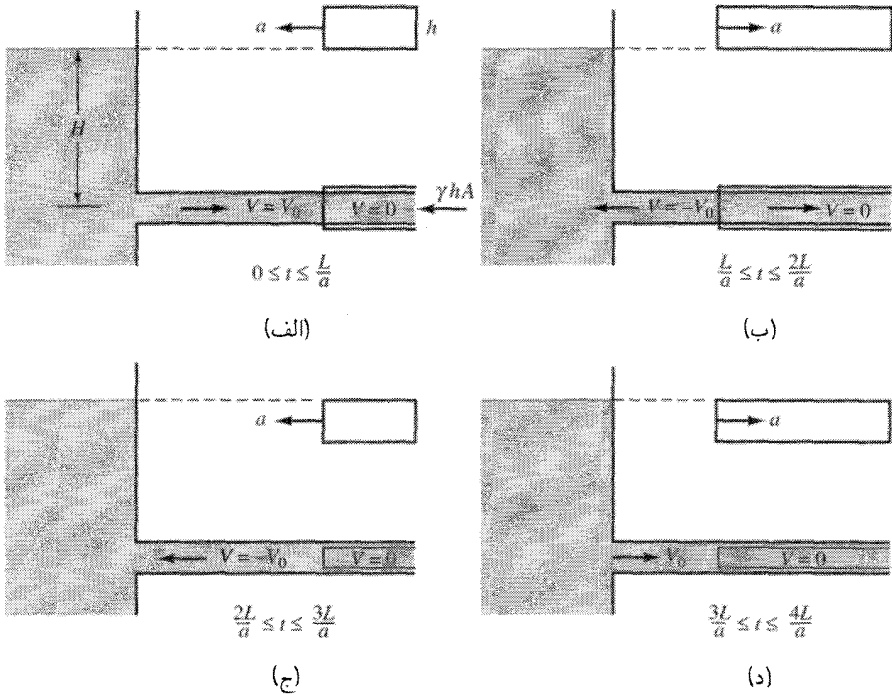
با جایگذاری $V = 0,97V$ در معادله (۲.۸.۲) نتیجه می شود

$$t = \frac{3000(2,708)}{19,612(20)} \ln \frac{1,90}{0,10} = 60,98 \text{ s}$$

۹.۱۲ شارش ناپایا: توصیف پدیده ضربه قوچ

ضربه قوچ در یک مجرای بسته بر از شاره وقتی رخ می دهد که یک پس افتادگی یا شتاب شارش وجود داشته باشد، مانند وقتی که بازشدگی یک شیر در خط لوله تغییر می کند. اگر تغییرات تدریجی باشند، محاسبه ها را با روشهای ضربه، که در آن، مایع تراکم ناپذیر و مجرا صلب در نظر گرفته می شود، می توان اجرا کرد. وقتی یک شیر در خط لوله ای به هنگام شارش سریعاً بسته شود، شارش در شیر کاهش می یابد. این موضوع هد طرف فرادست شیر را افزایش می دهد و باعث می شود یک پالس فشار بالا با سرعت صوت، a ، در فرادست منتشر شود. کار این پالس فشاری این است که سرعت شارش را کاهش می دهد. در جانب فرودست شیر فشار کاهش می یابد، و موجی با فشار کمتر با سرعت موج a در فرودست سیر می کند، که آن هم سرعت را کاهش می دهد. اگر انسداد به حد کافی سریع صورت گیرد و فشار پایا خیلی پایین باشد، یک حباب بخار در فرودست شیر می تواند تشکیل شود. وقتی این موضوع رخ دهد، حفره در نهایت فرو می ریزد و یک موج فشار بالا را در فرودست ایجاد می کند.

قبل از مشتق گیری از معادله ها برای محاسبه ضربه قوچ، توصیفی از توالی حوادثی را می آوریم که به دنبال انسداد ناگهانی شیر واقع در انتهای فرودست لوله متصل به یک مخزن ایجاد می شوند (شکل ۲۳.۱۲). در این حالت از اصطکاک صرف نظر می کنیم. در لحظه انسداد شیر ($t = 0$) نزدیکترین سیال به شیر متراکم می شود و به سکون می رسد، و دیواره لوله کش می آید (شکل ۲۳.۱۲ الف). به مجرد اینکه اولین لایه متراکم شد، همین فرایند برای لایه بعدی تکرار می شود. سیال فرادست شیر بدون نقصان سرعت به حرکت در فرودست ادامه می دهد تا اینکه لایه های بعدی که متراکم شده اند به مخزن برگردند. فشار بالا به صورت یک موج در فرادست منتقل می شود، وقتی از سیال می گذرد آن را ساکن، و متراکم می کند، و لوله را منبسط می کند. وقتی موج به انتهای فرادست لوله می رسد ($t = L/a$ s)، تمام سیال تحت هد اضافی h قرار گرفته، تمام تکانه از بین رفته، و تمام انرژی جنبشی به انرژی کشسانی تبدیل شده است.



شکل ۲۳.۱۲ توالی حوادث در چرخهٔ انسداد ناگهانی یک شیر.

حالت نامتوازنی در انتهای فرادست (مخزن) در لحظهٔ رسیدن موج فشاری وجود دارد، زیرا فشار مخزن ثابت است. سیال به طرف عقب شروع به شارش می‌کند، و این شارش برگشتی از انتهای فرادست شروع می‌شود. با این شارش فشار به مقداری می‌رسد که قبل از انسداد به طور عادی وجود داشت، دیوارهٔ لوله به حالت عادی برمی‌گردد، و سیال در سوی برگشت سرعت V_0 را دارد. این فرایند معکوس شونده با سرعت صوت در لوله، a ، در فرودست به طرف شیر سیر می‌کند. در لحظهٔ $2L/a$ موج به شیر می‌رسد، فشارها در امتداد لوله به حالت عادی برمی‌گردند، و سرعت در شارش برگشتی در همه جا مساوی V_0 است.

چون شیر بسته است، هیچ سیالی وجود ندارد که شارش را در شیر حفظ کند و بنابراین فشار پایین ظاهر می‌شود ($-h$) به طوری که سیال به سکون می‌رسد. این موج فشار پایین با سرعت a در فرادست سیر می‌کند و در همه جا سیال را به سکون می‌کشاند، به دلیل فشار پایینتر باعث انبساط آن می‌شود، و می‌گذارد که دیواره‌های لوله منقبض شوند. (اگر فشار استاتیکی در لوله آنقدر زیاد نباشد تا هد $-h$ مازاد بر فشار بخار را نگه دارد، قسمتی از مایع بخار می‌شود و تا مدتی طولانیتر به حرکت رو به عقب ادامه می‌دهد).

در لحظه‌ای که موج فشار منفی به انتهای فرادست لوله می‌رسد، یعنی $3\frac{L}{\alpha}S$ بعد از انسداد، سیال در حال سکون است اما هد آن به‌طور یکنواخت به اندازه $-h$ کمتر از مقدار قبل از انسداد است. این موضوع حالت نامتوازی را در مخزن به‌جای می‌گذارد، و سیال در لوله جریان می‌یابد، و سرعت شارش به جلو به V_0 می‌رسد و وقتی موج با سرعت a در فرودست پیشروی می‌کند لوله و سیال به حالت عادی برمی‌گردند. در لحظه‌ای که این موج به شیر می‌رسد، شرایط دقیقاً با شرایط لحظهٔ انسداد، یعنی $4\frac{L}{\alpha}S$ قبل‌تر، یکسان است.

سپس این فرایند در هر $4\frac{L}{\alpha}S$ تکرار می‌شود. اثر اصطکاک سیال و کشسانی ناکامل سیال و دیوارهٔ لوله، که تا به حال از آنها صرف‌نظر می‌کردیم، عبارت است از میراشدن ارتعاش و در نهایت باعث می‌شود که سیال برای همیشه ساکن شود. انسداد یک شیر در ظرف کمتر از $2\frac{L}{\alpha}S$ انسداد سریع نام دارد و انسداد کند مربوط به زمانهای انسداد بیشتر از $2\frac{L}{\alpha}S$ است.

توالی حوادثی را که در یک لوله به‌وقوع می‌پیوندد با توقف ناگهانی یک قطار باربری به‌هنگام برخورد موتور با شیئی بی‌حرکت می‌توان مقایسه کرد. واگن پشت موتور فنر را در جلوی جفت‌کنندهٔ خود متراکم می‌کند و همین‌طور که به‌موتور نیرو اعمال می‌کند متوقف می‌شود، و هر واگن به‌نوبت حرکت خود را با سرعت اولیه‌اش حفظ می‌کند تا اینکه واگن جلویی به‌طور ناگهانی ساکن شود. وقتی واگن آخری قطار در حال سکون است، تمام انرژی در فنرهای جفت‌کنندهٔ متراکم ذخیره می‌شود (با صرف‌نظر از اتلافها). واگن آخری قطار دارای یک نیروی نامتوازن اعمال شده است، و به‌طرف عقب شروع به حرکت می‌کند که به‌نوبهٔ خود موجب یک نیروی نامتوازن بر روی واگن بعدی می‌شود، که این نیرو واگن را به‌طرف عقب می‌راند. این کنش مانند یک موج به‌طرف موتور رهسپار می‌شود، و باعث می‌شود که هر واگن با سرعت اولیه‌اش در جهت رو به عقب به‌حرکت درآید. اگر موتور بی‌حرکت باشد، واگن بعد از آن، بر اثر نیروی کششی موجود در جفت‌کنندهٔ بین واگن و موتور متوقف می‌شود، که مانند موج فشار پایین در ضربهٔ قوچ است. این فرایند واگن به واگن تکرار می‌شود تا اینکه قطار مجدداً ساکن شود، و تمام جفت‌کننده‌ها در حال کشش باشند. سپس واگن آخری قطار تحت تأثیر نیروی کششی نامتوازن موجود در جفت‌کننده‌اش قرار می‌گیرد و رو به جلو حرکت می‌کند، به‌دنبال آن بقیه واگنها به‌نوبت به‌طرف جلو حرکت می‌کنند. وقتی این موج به موتور می‌رسد، تمام واگنها همانند قبل از برخورد اولیه در حرکت هستند. سپس مجدداً چرخه کلی تکرار می‌شود. اصطکاک اثر می‌کند تا انرژی را در چند چرخه به‌صفر برساند.

۱۰.۱۲ شارش ناپایا: معادله‌های دیفرانسیل برای محاسبه ضربهٔ قوچ

دو معادلهٔ بنیادی مکانیک که برای بخش کوچکی از سیال در یک لوله به کار می‌روند تا معادله‌های دیفرانسیل شارش‌گذرا به‌دست آیند عبارت‌اند از قانون دوم حرکت نیوتن و معادلهٔ پیوستگی. متغیرهای

وابسته عبارت‌اند از فشار p و سرعت متوسط V در یک سطح مقطع. متغیرهای مستقل عبارت‌اند از فاصله x در طول لوله که از انتهای فرادست اندازه‌گیری می‌شود و زمان t ; از این رو $p = p(x, t)$ اثر نسبت پواسون در این استنتاج به حساب نمی‌آید. در خطوط لوله با مفصلهای انبساطی اثر نسبت پواسون وارد استنتاج نمی‌شود. اصطکاک متناسب با مربع سرعت در نظر گرفته می‌شود.

معادله حرکت

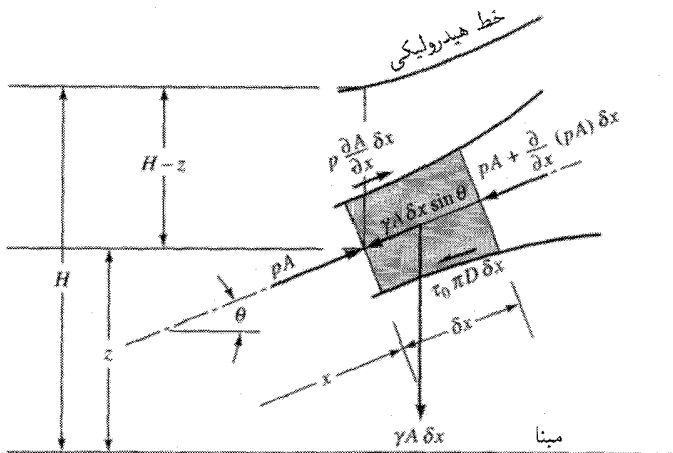
بخشی از سیال که بین دو صفحه موازی به فاصله δx از هم، عمود بر محور لوله، قرار دارد برای کاربرد قانون دوم حرکت نیوتن در جهت محوری به عنوان جسم آزاد در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲۴.۱۲). به صورت معادله داریم

$$pA - \left[pA + \frac{\partial}{\partial x}(pA)\delta x \right] + p \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \gamma A \delta x \sin \theta - \tau_0 \pi D \delta x = \rho A \delta x \frac{dV}{dt}$$

با تقسیم کردن بر جرم این بخش $\rho A \delta x$ و ساده کردن به دست می‌آید

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \theta - \frac{4\tau_0}{D} = \frac{dV}{dt} \quad (۱.۱۰.۱۲)$$

در شارش متلاطم پایا، $\tau_0 = \rho f V^2 / 8$ [معادله (۲.۷.۶)]. فرض می‌شود که ضریب اصطکاک



شکل ۲۴.۱۲ نمودار جسم آزاد برای استنتاج معادله حرکت.

شارش ناپایا: معادله‌های دیفرانسیل برای محاسبه ضربه قوچ ۷۶۳

در شارش ناپایا و پایا یکسان باشد. از این رو، معادله حرکت به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (2.10.12)$$

از آنجا که اصطکاک باید در خلاف جهت حرکت باشد، V^2 به صورت $V|V|$ نوشته شده است. با بسط جمله شتاب، داریم

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

در کاربردهای ضربه قوچ جمله $V \partial V / \partial x$ عموماً خیلی کوچکتر از $\partial V / \partial t$ است؛ از این رو، آن را حذف می‌کنند، عبارت زیر باقی می‌ماند

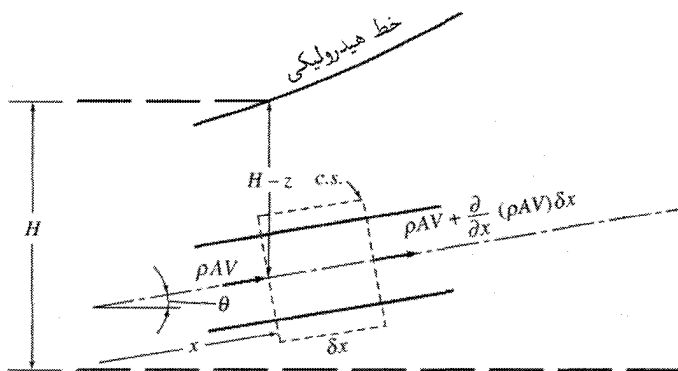
$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (3.10.12)$$

این معادله را با L_1 نشان می‌دهند تا از معادله پیوستگی L_2 ، که بعداً استخراج می‌شود، تمیز داده شود.

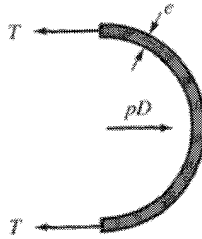
معادله پیوستگی

معادله پیوستگی ناپایا (۱.۳.۳) برای حجم کنترل شکل ۲۵.۱۲ به کار می‌رود

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho AV) \delta x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \delta x) \quad (4.10.12)$$



شکل ۲۵.۱۲ حجم کنترل برای استخراج معادله پیوستگی.



شکل ۲۶.۱۲ نیروی کششی در دیواره لوله.

که در آن، δx تابع t نیست. با بسط معادله و تقسیم کردن بر جرم $\rho A \delta x$ نتیجه می شود

$$\frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\delta x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (5.10.12)$$

دو جمله اول عبارت‌اند از مشتق کلی $(1/A)dA/dt$ ، و دو جمله بعدی عبارت‌اند از مشتق کلی $(1/\rho)d\rho/dt$ ، که نتیجه می شود

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.10.12)$$

جمله اول مربوط به کشسانی دیواره لوله و آهنگ تغییر شکل آن با فشار است، جمله دوم تراکم پذیری مایع را به حساب می آورد. در جمله کشسانی دیواره، آهنگ تغییر نیروی کششی بر طول واحد (۲۶.۱۲) عبارت است از $(D/2)dp/dt$ ؛ که وقتی بر ضخامت e دیواره تقسیم شود، آهنگ تغییر تنش واحد $(D/2e)dp/dt$ به دست می آید؛ وقتی این مقدار بر مدول یانگ کشسانی ماده دیواره تقسیم شود، آهنگ افزایش کرنش واحد، یعنی $(D/2eE)dp/dt$ ، به دست می آید. بعد از ضرب کردن این جمله در شعاع $D/2$ ، آهنگ کشیدگی شعاعی به دست می آید؛ سرانجام، با ضرب کردن در محیط πD ، آهنگ افزایش سطح به دست می آید

$$\frac{dA}{dt} = \frac{D}{2eE} \frac{dp}{dt} \frac{D}{2} \pi D$$

و از این رو

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE} \frac{dp}{dt} \quad (7.10.12)$$

از تعریف مدول کشسانی حجمی (فصل ۱) داریم

$$K = -\frac{dp}{dV/V} = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

و آهنگ تغییر چگالی تقسیم بر چگالی چنین می‌شود

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (۸.۱۰.۱۲)$$

با استفاده از معادله‌های (۷.۱۰.۱۲) و (۸.۱۰.۱۲)، معادلهٔ (۶.۱۰.۱۲) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \left(1 + \frac{K D}{E e} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (۹.۱۰.۱۲)$$

نابتهای این معادله بهتر است به صورت زیر بیان شود

$$a^2 = \frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/e)} \quad (۱۰.۱۰.۱۲)$$

معادلهٔ (۹.۱۰.۱۲) اکنون به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (۱۱.۱۰.۱۲)$$

با بسط dp/dt داریم

$$\frac{dp}{dt} = V \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{dt}$$

مجدداً، جملهٔ $V \partial p / \partial x$ در کاربردهای ضربهٔ قوج کوچکتر از $\partial p / \partial t$ است، و با صرف نظر کردن از آن نتیجه می‌شود

$$L_2 = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (۱۲.۱۰.۱۲)$$

که معادلهٔ پیوستگی مایع تراکم‌پذیر در لولهٔ کشسان است. L_1 و L_2 دو معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی V و p را برحسب متغیرهای مستقل x و t به دست می‌دهند. هیچ جواب عمومی برای این معادله‌ها وجود ندارد، اما آنها را با روش مشخصه‌ها برای حل عددی تفاضل متناهی مناسب می‌توان حل کرد.

۱۱.۱۲ شارش ناپایا: روش حل مشخصه‌ها

معادله‌های L_1 و L_2 در قسمت قبل شامل دو مجهول بودند. این معادله‌ها را با یک ضریب مجهول به صورت $L = L_1 + \lambda L_2$ می‌توان ترکیب کرد. به‌ازای دو مقدار متمایز حقیقی λ دو معادله از V و p به‌دست می‌آید که شامل تمام خواص فیزیکی مشابه معادله‌های اولیه L_1 و L_2 هستند و در هر جوابی آنها را می‌توان جایگزین کرد. اگر دو مقدار خاص برای λ پیدا شود، مسئله خیلی ساده خواهد شد. L_1 و L_2 را در معادله L ، با مرتب‌کردن دوباره می‌توان جایگذاری کرد.

$$L = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \lambda \rho a^2 + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho \lambda} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0$$

اگر $\lambda \rho a^2 = dx/dt$ جمله اول داخل پرانتز، مشتق کلی dV/dt خواهد بود، زیرا از محاسبه‌ها نتیجه می‌شود

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \lambda \rho a^2 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

به‌طریق مشابه، اگر $1/\rho \lambda = dx/dt$ ، جمله دوم داخل پرانتز، مشتق کلی dp/dt خواهد بود. برای اینکه هر دو عبارت صحیح باشند، dx/dt در هر دو باید مقدار یکسانی به صورت زیر داشته باشد

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \rho a^2 = \frac{1}{\rho \lambda} \quad \text{یا} \quad \lambda = \pm \frac{1}{\rho a} \quad (۱.۱۱.۱۲)$$

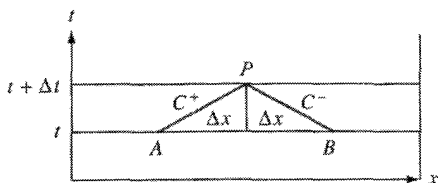
بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (۲.۱۱.۱۲)$$

اکنون معادله L به صورت زیر می‌شود

$$L = \frac{dV}{dt} \pm \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (۳.۱۱.۱۲)$$

که شرایط معادله (۲.۱۱.۱۲) در آن صدق می‌کند. بنابراین، دو مقدار متمایز حقیقی λ پیدا شده است که دو معادله دیفرانسیل جزئی را به یک جفت معادله دیفرانسیل کلی (۳.۱۱.۱۲) تبدیل می‌کند، که شرایط معادله‌های (۲.۱۱.۱۲) در آن صدق می‌کند.



شکل ۲۷.۱۲ نمودار مشخصه xt که به‌ازای آن، جواب به‌دست آمده است.

از آنجا که معادله (۳.۱۱.۱۲) فقط وقتی صحت دارد که معادله (۲.۱۱.۱۲) برآورده شود، به‌راحتی می‌توان جواب را بر روی نمودار x برحسب t ، مانند شکل ۲۷.۱۲، رؤیت کرد. می‌توان در نظر گرفت که لوله از مبدأ در فرادست تا L در انتهای فرودست آن باشد. از این رو، x مکان نقطه‌ای از خط لوله را تعیین می‌کند و t زمانی است که در آن، متغیرهای وابسته V و p باید تعیین شوند. ابتدا فرض می‌کنیم که شرایط در A معلوم است (یعنی، t_A و x_A ، p_A ، V_A)، سپس فرض می‌کنیم که معادله (۳.۱۱.۱۲) با علامت $+$ ، که آن را معادله C^+ می‌نامیم، در امتداد خط AP یا در امتداد کشیدگی خط صحت دارد. شیب خط AP عبارت است از $dt/dx = 1/a$ که در آن، a سرعت صوت در لوله است. با ضرب کردن معادله (۳.۱۱.۱۲) در $\rho a dt$ و انتگرال‌گیری از A تا P ، داریم

$$\rho a \int_A^P dV + \int_A^P dp + \int_A^P \rho a g \sin \theta dt + \int_A^P \rho a \frac{fV|V|}{2D} dt = 0$$

از آنجا که $adt = dx$ ، معادله را به صورت تفاضل-متناهی می‌توان نوشت

$$\rho a(V_P - V_A) + p_P - p_A + \rho g \sin \theta \Delta x + \frac{\rho \Delta x f |V_A| V_P}{2D} = 0 \quad (4.11.12)$$

در این معادله فرض بر این است که θ از A تا P در امتداد لوله ثابت است. انتگرال‌گیری از جمله اصطکاک به صورت تقریبی است، زیرا V از A تا P به صورت تابعی از x معلوم است. شکل زیر

$$\int_A^P V|V| dx = \Delta x |V_A| V_P$$

تقریب خوبی است و در حالت پایا، که حالت خاصی از جریان ناپایاست، به صورت دقیق درمی‌آید. به صورت مشابه، معادله سازگاری متناظر C^- به صورت زیر است

$$\rho a(V_P - V_B) - p_P - p_B + \rho g \sin \theta \Delta x + \frac{\rho \Delta x f |V_B| V_P}{2D} = 0 \quad (5.11.12)$$

زیرا $adt = -dx \cdot \Delta x$ یک عدد مثبت، طول فاصله، است. این دو معادله را می‌توان به‌طور همزمان حل کرد تا V_P و p_P تعیین شوند.
 برای حل مسائل لوله‌کشی مناسب است که از خط هیدرولیکی H و تخلیه Q به‌جای p و V استفاده کنیم. از شکل ۲۴.۱۲ داریم

$$p_P = \rho g(H_P - z_P) \quad p_A = \rho g(H_A - z_A)$$

و

$$\begin{aligned} p_P - p_A &= \rho g(H_P - H_A) - \rho g(z_P - z_A) \\ &= \rho g(H_P - H_A) - \rho g \Delta x \sin \theta \end{aligned} \quad (۶.۱۱.۱۲)$$

با جایگذاری در معادله (۴.۱۱.۱۲)، با $V = Q/A$ ، برای C^+ نتیجه می‌شود

$$H_P = H_A - \frac{a}{gA}(Q_P - Q_A) - \frac{\Delta x f Q_P |Q_A|}{2gDA^2} \quad (۷.۱۱.۱۲)$$

$$H_P = H_B + \frac{a}{gA}(Q_P - Q_B) + \frac{\Delta x f Q_P |Q_B|}{2gDA^2} \quad (۸.۱۱.۱۲)$$

معادله C^- از B تا P مشابه با روش مربوط به معادله C^+ به‌دست می‌آید. برای ساده کردن معادله، فرض می‌شود

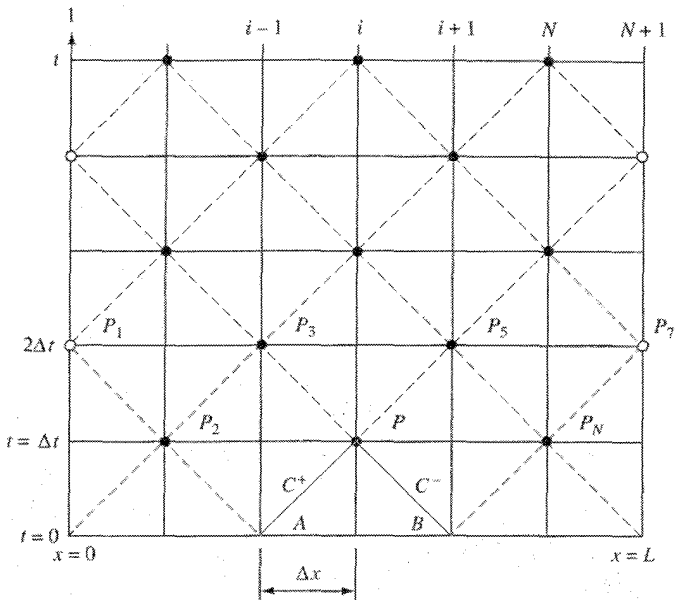
$$B = \frac{a}{gA} \quad \text{و} \quad R = \frac{f \Delta x}{2gDA^2}$$

بنابراین برای C^+

$$H_P = H_A - B(Q_P - Q_A) - RQ_P |Q_A| \quad (۹.۱۱.۱۲)$$

و برای C^-

$$H_P = H_B + B(Q_P - Q_B) + RQ_P |Q_B| \quad (۱۰.۱۱.۱۲)$$



شکل ۲۸.۱۲ شبکه $x-t$ برای حل مسائل تک‌لوله.

برای حل عددی معادله‌های گذرا (۹.۱۱.۱۲) و (۱۰.۱۱.۱۲)، با معادله‌های (۴.۱۱.۱۲) و (۵.۱۱.۱۲)، یک خط لوله تنها به تعداد زوج فاصله، N ، هر یک به طول Δx تقسیم می‌شود (شکل ۲۸.۱۲)؛ $\Delta t = \Delta x/a$ و $\Delta x = L/N$ ، خطوط مشخصه C^+ و C^- قطره‌های شبکه مستطیلی‌اند. همانطور که در شکل نشان داده شده است، یک نمادگذاری با اندیس زیرین مناسب است. برای به‌کار بردن معادله‌ها برای حل قسمت داخلی، که در آن H_i و Q_i مورد نظر هستند، شرایط در زمان قبل‌تر، یعنی، Q_{i-1} ، H_{i-1} ، Q_{i+1} ، H_{i+1} معلوم‌اند. جمع‌کردن جمله‌های معلوم معادله (۹.۱۱.۱۲) در ثابتهای C_P و B_P می‌دهد

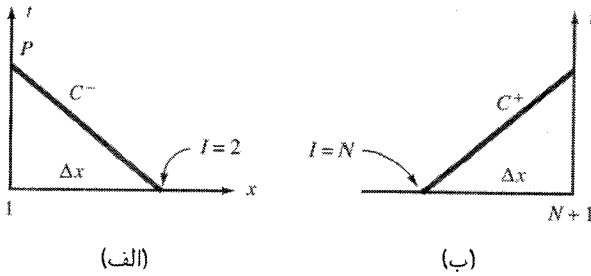
$$C_P = H_{i-1} + BQ_{i-1} \quad B_P = B + R|Q_{i-1}| \quad (۱۱.۱۱.۱۲)$$

در حالی که در معادله (۱۰.۱۱.۱۲) ثابتهای C_M ، B_M عبارت‌اند از

$$C_M = H_{i+1} - BQ_{i+1} \quad B_M = B + R|Q_{i+1}| \quad (۱۲.۱۱.۱۲)$$

اکنون معادله‌های (۹.۱۱.۱۲) و (۱۰.۱۱.۱۲) برای C^+ به شکل زیر درمی‌آیند

$$H_i = C_P - B_P Q_i \quad (۱۳.۱۱.۱۲)$$



شکل ۲۹.۱۲ شرایط مرزی. الف) انتهای فرادست؛ ب) انتهای فرودست.

و برای C^-

$$H_i = C_M + B_M Q_i \quad (۱۴.۱۱.۱۲)$$

با C_P, B_P, C_M, B_M و معلوم، حل معادله‌های (۱۳.۱۱.۱۲) و (۱۴.۱۱.۱۲) می‌دهد.

$$Q_i = \frac{C_P - C_M}{B_P + B_M} \quad H_i = C_P - B_P Q_i$$

حل تشکیل می‌شود از پیدا کردن H و Q برای نقاط شبکه‌ای یک در میان در امتداد $t = \Delta t$ سپس پیشروی به $t = 2\Delta t$ ، و به همین ترتیب، تا مدت زمان لازم طی شود. نقاط انتهایی لوله در هر گام زمانی دیگر پس از شرایط اولیه وارد می‌شوند. جمله شرط مرزی مربوط می‌شود به شرط انتهایی در هر خط لوله.

در هر انتهای یک لوله تنها فقط یکی از معادله‌های سازگاری برحسب دو متغیر در دسترس است. در انتهای فرادست، شکل ۲۹.۱۲ الف، معادله (۱۴.۱۱.۱۲) در امتداد مشخصه C^- صحت دارد، و برای انتهای فرودست، شکل ۲۹.۱۲ ب، معادله (۱۳.۱۱.۱۲) در امتداد مشخصه C^+ صحت دارد. اینها معادله‌های خطی برحسب Q_i و H_i هستند. هر معادله برای رفتار کامل مرز و پاسخ سیال در خط لوله در حالت گذرا اطلاعاتی می‌دهد. در هر حالت یک معادله کمکی مورد نیاز است، که Q, H ، یا رابطه‌ای بین آنها را مشخص می‌کند. یعنی، معادله کمکی باید اطلاعاتی درباره رفتار مرز برای خط لوله بدهد. این می‌تواند درست شرط انتهایی خط لوله باشد، یا می‌تواند یک جزء یا تسهیلات متفاوت متصل به انتهای لوله باشد. هر شرط مرزی به‌طور مستقل از مرز دیگر و به‌طور مستقل از محاسبات نقطه داخلی حل می‌شود.

سیستمهای پیچیده را به صورت ترکیبی از خطوط لوله تنها، که در بالا توصیف شدند، می‌توان دانست، با شرایط مرزی در انتهای لوله که پاسخ گذرا از یک خط لوله را به خط لوله دیگر انتقال می‌دهند و برای ایجاد برهم‌کنش با شرایط انتهایی سیستم هستند. به این ترتیب، با ترکیب حلهای معمولی مربوط به هر خط لوله، همراه با در نظر گرفتن سیستماتیک هر نقطه انتهایی و اتصال در سیستم، می‌توان یک سیستم پیچیده را حل کرد. هدف اصلی در بررسی انواع مسائل شارش گذرای مایع بررسی شرایط مرزی است [مرجع ۱۴].

مخزن در انتهای فرادست

در یک مخزن یا منبع فشار بزرگ ارتفاع خط هیدرولیکی را در طی یک مدت کوتاه گذرا معمولاً می‌توان ثابت فرض کرد. این شرط انتهایی با $H_1 = H_R$ بیان می‌شود، که در آن H_R ارتفاع سطح مخزن در بالای مبنای مرجع است. اگر سطح مخزن به طریق معلومی، مثلاً به صورت موج سینوسی، تغییر کند، شرط مرزی عبارت است از

$$H_1 = H_R + \Delta H \sin \omega t \quad (15.11.12)$$

که در آن ω فرکانس دایره‌ای و ΔH دامنه موج است. در هر لحظه از محاسبه شرط مرزی، Q_1 با حل مستقیم معادله (۱۴.۱۱.۱۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$Q_1 = \frac{H_1 - C_M}{B_M} \quad (16.11.12)$$

زیر نماد ۱ به مقطع فرادست، نقطه P در شکل ۲۹.۱۲ الف، مربوط می‌شود. مقادیر C_M و B_M ، معادله (۱۲.۱۱.۱۲)، در حالت نقطه ۲ $I = 2$ در شکل ۲۹.۱۲ الف، فقط به مقادیر معلوم حاصل از گام زمانی قبلی بستگی دارند.

شیر در انتهای فرودست

برای شارش پایا در شیر، که به صورت یک روزنه در نظر گرفته می‌شود،

$$Q_0 = (C_d A_v) \cdot \sqrt{2gH}$$

که در آن Q_0 شارش پایاست، H افت هد در شیر است، و $(C_d A_v)$ مساحت بازشدگی ضرب

در ضریب تخلیه است. برای بازشدگی دیگر، به طور کلی،

$$Q_{NS} = C_d A_v \sqrt{2gH_{NS}} \quad (۱۷.۱۱.۱۲)$$

که در آن زیر نماد $NS = N + ۱$ به مقطع فرودست در لوله مربوط می‌شود. حل معادله (۱۷.۱۱.۱۲) و معادله (۱۳.۱۱.۱۲) می‌دهد

$$Q_{NS} = -gB_P(C_d A_v)^2 + \sqrt{[gB_P(C_d A_v)^2]^2 + (C_d A_v)^2 2gC_P} \quad (۱۸.۱۱.۱۲)$$

و

$$H_{NS} = C_P - B_P Q_{NS} \quad (۱۹.۱۱.۱۲)$$

اغلب مناسب است در یک خط لوله به جای چند فاصله از یک فاصله تنها استفاده شود، به همان صورتی که در شکل ۲۸.۱۲ نشان داده شده است. انتخاب روش مناسب بر مبنای مقدار جمله اصطکاک در معادله‌های سازگاری انجام می‌شود. برای سیستمهای با اصطکاک زیاد برای به دست آوردن دقت لازم فاصله‌های کوتاه مورد نیاز است. ولی، برای سیستمهای با اصطکاک پایین فاصله‌های طولیتر نتایج دقیق می‌دهند، که در این حالت طول فاصله می‌تواند تا طول کامل لوله گسترش یابد. وقتی از یک فاصله تنها در خط لوله استفاده شود، هیچ نقطه داخلی محاسبه نمی‌شود، و شرایط انتهایی در هر گام زمانی، $\Delta t = \frac{L}{a}$ ، محاسبه می‌شوند (به شکل ۳۰.۱۲ ب نگاه کنید).

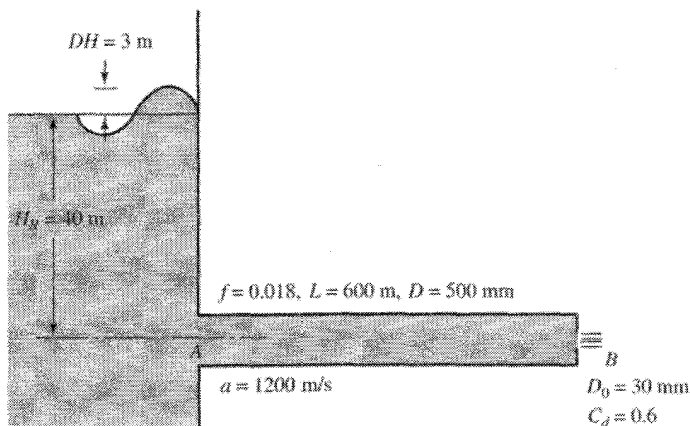
مثال ۱۸.۱۲ در شکل ۳۰.۱۲ الف سطح آب بر طبق معادله زیر تغییر می‌کند

$$H_A = H_R + \Delta H \sin \omega t$$

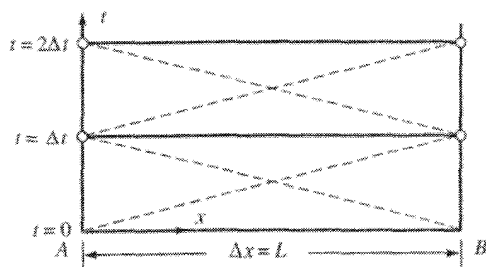
در حالی که انتهای راست لوله شامل یک روزنه کوچک است. فرکانس امواج در تناوب طبیعی لوله، $4L/a$ تنظیم می‌شود، که در نتیجه $\omega = 2\pi/(4L/a)$. حرکت سیال در لوله و افت و خیزهای هد را بیابید.

حل

همانطور که در شکل ۳۱.۱۲ نشان داده شده است، از یک صفحه گسترده برای حل استفاده



(الف)



(ب)

شکل ۳۰.۱۲ مثال ۱۸.۱۲

می‌شود. یک فاصله تنها به کار می‌رود. مقطع فرادست با معادله (۱۶.۱۱.۱۲) با $H_1 = H_A$ که تابع معلومی از زمان است، حل می‌شود. شرط مرزی فرودست معادله روزنه را همراه با معادله (۱۳.۱۱.۱۲) حل می‌کند، همانطور که در معادله (۱۸.۱۱.۱۲) با $C_v = g(C_d A)^2$ نشان داده شده است، و می‌دهد

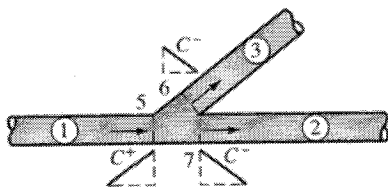
$$\blacksquare \quad Q_B = -C_v B_P + \sqrt{(C_v B_P)^2 + 2C_v C_P} \quad H_B = C_P - B_P Q_B$$

اتصال دو یا مقدار بیشتری لوله

در اتصال خطوط لوله با خواص مختلف، معادله پیوستگی در هر لحظه باید برقرار باشد، و یک ارتفاع خط هیدرولیکی مشترک را در انتهای هر لوله می‌توان در نظر گرفت. این عبارتها به‌طور

نتایج گذرا در لوله با یک فاصله تنها								
سطح نوسانی در مخزن/لوله/روزنه ثابت								
$HA = HR + DH \cdot \sin(\omega \cdot t)$								
f =	0.018	AR =	0.19635	$= 0.7854 \cdot D^2$				
L =	600.000	B =	623.244	$= a / (g \cdot AR)$				
D =	0.500	Rf =	28.567	$= f \cdot L / (2 \cdot g \cdot D \cdot AR^2)$				
a =	1200.000	Cv =	1.76E-06	$= g \cdot CdA^2$				
CdA =	4.24E-04	Q0 =	0.01188	$= \text{SQRT}(HR / (Rf + .5 / Cv))$				
HR =	40.000	H0 =	39.996	$= HR - Rf \cdot Q0^2$				
DH =	3.000	g =	9.806					
$\omega =$	3.1416			$QB = (@0.5 s) = -Cv \cdot G14 + \text{SQRT}((Cv \cdot G14)^2 + 2 \cdot Cv \cdot F14)$				
زمان	CM	BM	HA	QA	CP	BP	QB	HB
0.0			40.000	0.01188			0.01188	39.996
0.5	32.593	623.584	43.000	0.01669	47.403	623.584	0.01188	39.996
1.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	53.402	623.721	0.01267	45.499
1.5	37.603	623.606	37.000	-0.00097	47.403	623.584	0.01188	39.996
2.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	36.397	623.272	0.01029	29.987
2.5	23.576	623.538	43.000	0.03115	47.403	623.584	0.01188	39.996
3.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	62.415	624.134	0.01378	53.815
3.5	45.228	623.638	37.000	-0.01319	47.403	623.584	0.01188	39.996
4.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	28.778	623.621	0.00904	23.143
4.5	17.511	623.503	43.000	0.04088	47.404	623.584	0.01188	39.996
5.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	68.478	624.412	0.01448	59.436
5.5	50.412	623.658	37.000	-0.02150	47.403	623.584	0.01188	39.995
6.0	32.592	623.584	40.000	0.01188	23.597	623.859	0.00809	18.550
6.5	13.509	623.476	43.000	0.04730	47.404	623.584	0.01188	39.997
7.0	32.593	623.584	40.000	0.01188	72.480	624.596	0.01493	63.157
7.5	53.854	623.671	37.000	-0.02702	47.402	623.584	0.01188	39.995
8.0	32.592	623.584	40.000	0.01188	20.157	624.017	0.00740	15.537
8.5	10.923	623.456	43.000	0.05145	47.404	623.584	0.01188	39.997
9.0	32.594	623.584	40.000	0.01188	75.066	624.714	0.01521	65.565
9.5	56.086	623.679	37.000	-0.03060	47.402	623.584	0.01188	39.995
10.0	32.592	623.584	40.000	0.01188	17.927	624.119	0.00693	13.603
10.5	9.286	623.442	43.000	0.05408	47.405	623.584	0.01188	39.997
11.0	32.594	623.584	40.000	0.01188	76.703	624.789	0.01538	67.091
11.5	57.503	623.684	37.000	-0.03287	47.401	623.584	0.01188	39.994
12.0	32.591	623.584	40.000	0.01188	16.511	624.184	0.00661	12.385

شکل ۳۱.۱۲ مثال ۱۸.۱۲، صفحه گسترده.



شکل ۳۲.۱۲ پیوندگاه خط لوله.

ضمنی می‌رسانند که هیچ انبارشی در پیوندگاه وجود ندارد و همچنین از تمام اثرات جزئی صرف نظر شده است. در سیستمهای چندلوله‌ای، هر قسمت در انتهای لوله در پیوندگاه باید به طور جداگانه مشخص شود. آنها در گره i از پیوندگاه سه‌لوله‌ای در شکل ۳۲.۱۲ به طور اختیاری مشخص شده‌اند. اگر معادله‌های (۱۳.۱۱.۱۲) و (۱۴.۱۱.۱۲) به شکل زیر نوشته شوند، یک جمع‌زنی حل ساده‌ای را برای خط هیدرولیکی مشترک، H_i ، می‌دهد.

$$Q_5 = -\frac{H_i}{B_{P_1}} + \frac{C_{P_1}}{B_{P_1}}$$

$$-Q_7 = \frac{H_i}{B_{M_1}} + \frac{C_{M_1}}{B_{M_1}}$$

$$-Q_6 = \frac{H_i}{B_{M_2}} + \frac{C_{M_2}}{B_{M_2}}$$

$$\Sigma Q = 0 = -H_i \Sigma \frac{1}{B_j} + \frac{C_{P_1}}{B_{P_1}} + \frac{C_{M_1}}{B_{M_1}} + \frac{C_{M_2}}{B_{M_2}}$$

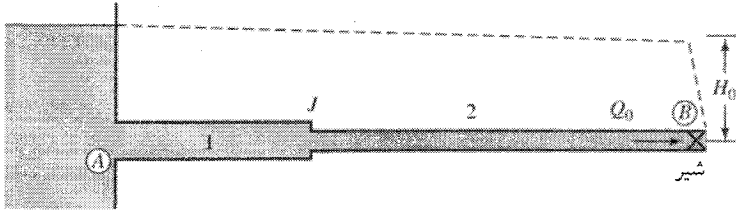
یا

$$H_i = \frac{C_{P_1}/B_{P_1} + C_{M_1}/B_{M_1} + C_{M_2}/B_{M_2}}{\Sigma(1/B_j)} \quad (20.11.12)$$

جمله $\Sigma(1/B_j)$ عبارت است از $\Sigma(1/B_{P_j}) + \Sigma(1/B_{M_j})$ که در آن j تعداد لوله‌هاست. با خط هیدرولیکی محاسبه شده، از معادله‌های بالا برای تعیین شارش در مقطع انتهایی هر لوله در پیوندگاه استفاده می‌شود.

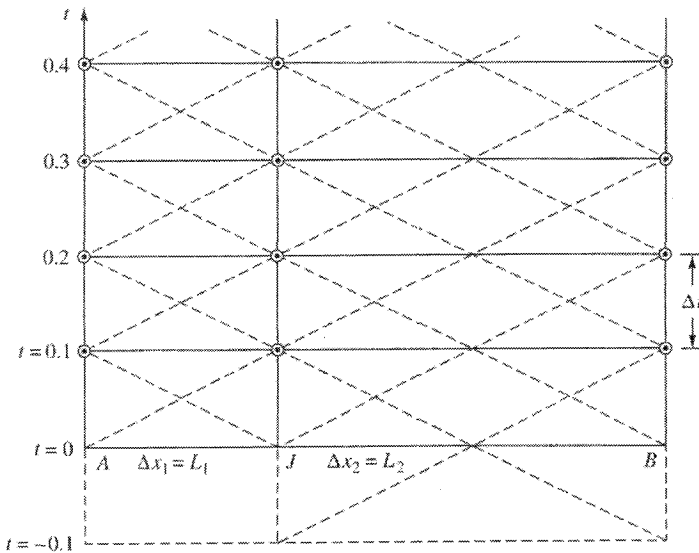
روش جبری یا روش پسگرد

در سیستمهای چندلوله باید شرایط هر پیوندگاه را در لحظه یکسان حل کرد، یعنی، در هر خط لوله باید از گام زمانی مشترک استفاده کرد. برای برآوردن این لازمه، ضمن استفاده از یک فاصله



شکل ۳۳.۱۲ مثال ۱۹.۱۲، خط لوله سری.

تنها در هر خط لوله، از روش پسگرد استفاده می‌شود. این مفهوم در شکل ۳۴.۱۲ برای سیستم سری شکل ۳۳.۱۲ نشان داده شده است. در این سیستم، طول لوله ۲ دو برابر طول لوله ۱ است، در هر دو لوله سرعت موج یکسان دارند. به این ترتیب، گام زمانی در محاسبه عبارت است از $\Delta t = L_1/a_1s$ مانند لوله‌ها در مثال ۱۸.۱۲ بررسی می‌شود، از این نظر که هر مشخصه یک گام زمانی پس می‌رود. البته، خطوط مشخصه در لوله ۲ باید دو گام زمانی پس روند تا اطلاعات مناسب از انتهای دیگر خط لوله به دست آیند، این موضوع در شکل ۳۴.۱۲ و در مثال ۱۹.۱۲ نشان داده شده است. برای روش شدن مطلب، در محاسبات در پیوندگاه دو لوله در $t = 0.1s$ از CP و BP در لوله ۱ استفاده شده است، و اطلاعات از مخزن در $t = 0.1s$ گرفته شده‌اند، و از CM و BM در لوله ۲ استفاده شده است، و اطلاعات از شیر در $t = 0.1s$



شکل ۳۴.۱۲ روش پسگرد در سیستم سری.

گرفته شده‌اند. به‌طور مشابه، در $t = ۲s$ در شیر، از اطلاعات در پیوندگاه در $t = ۰s$ برای محاسبه CP و BP در لوله ۲ استفاده شده است.

تأکید می‌شود که اگر اتلاف‌های اصطکاکی زیاد باشند، همانطور که در شکل ۲۸.۱۲ نشان داده شده است، برای کسب دقت منطقی چند فاصله لازم است. روش پسگرد برای سیستم‌های خط لوله کوتاه یا با اصطکاک کم مناسب‌ترین روش است. در واقع، این شامل حالت‌های عملی بسیار می‌شود. همانطور که در مثال قبل نشان داده شد، حل با صفحه گسترده در تک لوله خیلی مؤثر است، و آن را برای سیستم‌های چندلوله با اندازه محدود می‌توان به کار برد. ولی، وقتی تعداد بسیاری محاسبه وجود دارد، مانند سیستم‌ها با اجزای بسیار با خطوط لوله با چند فاصله، این روش خسته‌کننده است. در این حالتها، محاسبات تکراری در قسمت‌های محاسباتی با زبان رسمی کامپیوتری مانند بیسیک، فوتون، پاسکال، غیره و به سهولت برنامه‌ریزی می‌شوند، و این روش پیشنهاد می‌شود. جزئیات بیشتر آن در چند مرجع [۱۴-۱۶] قابل دسترسی‌اند.

مثال ۱۹.۱۲ سیستم شکل ۳۳.۱۲ در ابتدا دارای بازشدگی شیر $C_d A = ۰.۰۰۱۵m^2$ است. شیر با کاهش خطی $C_d A$ از ۰.۰۰۱۵ در $۰s$ تا ۰.۰۰۰۳ در $۳s$ بسته می‌شود. گذراها در سیستم را برای $۲s$ محاسبه کنید.

حل

داده‌ها برای مسئله، همراه با شناسایی متغیرها، و محاسبه ثابت‌های اولیه در شکل ۳۵.۱۲ نشان داده شده‌اند. از معادله (۱۷.۱۱.۱۲) در شیر با داده‌های خط هیدرولیکی استفاده می‌شود که از خط مرکزی شیر می‌گذرد

$$Q_B = C_d A \sqrt{2gH_B}$$

ارتفاع‌های خط هیدرولیکی برحسب متر و تخلیه‌ها برحسب متر مکعب در ثانیه داده شده‌اند. در شارش اولیه پایا معادله انرژی از مخزن تا شیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H_R - f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{Q_1^2}{2gA_{R1}^2} - f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{Q_2^2}{2gA_{R2}^2} = \frac{Q_2^2}{2g(C_d A)^2}$$

که از آن شارش پایای Q_0 به دست می‌آید. هد اولیه در شیر H_0 است، و ضریب مقاومت R_f در هر لوله عبارت است از

$$R_f = \frac{fL}{2gDA_R^2}$$

از معادله (۱۸.۱۱.۱۲) برای پیدا کردن شارش در شیر تا زمان بسته شدن، که شارش در شیر صفر

نتایج گذرا در سیستم لوله‌ای سری بر اثر بستن سریع شیر											
مخزن/لوله/تابع/لوله/شیر ثابت											
لوله	f	طول	قطر	a	AR	B = a/g*AR	Rf1	Rf2	Rf		
1	0.019	100	0.200	1000	0.031	BBB1 = 3246.1	Rf1 =		490.8		
2	0.025	240	0.100	1200	0.008	BBB2 = 15581.1	Rf2 =		49596		
g =	9.806										
CdA =	0.000150	Q0 =	0.00720	= SQRT((HR/(Rf1+Rf2+1/(2*g*CdA^2))))							
HR =	120.000	H0 =	117.405	= HR - (Rf1 + Rf2)*Q0^2							
QJ@ر@ر و HJ برای محاسبه CP و CM				CP@.2 s =			= HR + BBB1*B15		CM@.2 s =		= L14 - BBB2*K14
QJ@ر@ر و HJ برای محاسبه BM و BP				BP@.2 s =			= BBB1 + Rf1*ABS(B15)		BM@.2 s =		= BBB2 + Rf2*K14
مخزن			لوله ۱		لوله ۲			شیر			
time,s	QA	CP	BP	CM	BM	HJ	QJ	CP	BP	QB	HB
-0.1	0.00720					119.975	0.00720			0.0072	117.405
0.0	0.00720					119.975	0.00720			0.0072	117.405
0.1	0.00720	143.364	3249.6	5.256	15938	119.975	0.00720	232.123	15938	0.0054	146.469
0.2	0.00720	143.364	3249.6	5.256	15938	119.975	0.00720	232.123	15938	0.0030	184.223
0.3	0.00720	143.364	3249.6	63.089	15847	129.704	0.00420	232.123	15938	0.0000	232.123
0.4	0.00121	143.364	3249.6	137.395	15730	142.342	0.00031	232.123	15938	0.0000	232.123
0.5	-0.00657	123.939	3246.7	232.123	15581	142.594	-0.00575	195.202	15790	0.0000	195.202
0.6	-0.01270	98.680	3249.3	232.123	15581	121.706	-0.00709	147.242	15597	0.0000	147.242
0.7	-0.00760	78.790	3252.3	195.202	15581	98.893	-0.00618	53.065	15866	0.0000	53.065
0.8	0.00032	95.317	3249.8	147.242	15581	104.278	-0.00276	11.289	15933	0.0000	11.289
0.9	0.00209	121.042	3246.2	53.065	15581	109.321	0.00361	2.584	15888	0.0000	2.584
1.0	0.00690	126.768	3247.1	11.289	15581	106.853	0.00613	61.314	15718	0.0000	61.314
1.1	0.01017	142.387	3249.4	2.584	15581	118.262	0.00742	165.578	15760	0.0000	165.578
1.2	0.00795	153.026	3251.1	61.314	15581	137.193	0.00487	202.417	15885	0.0000	202.417
1.3	-0.00043	145.809	3250.0	165.578	15581	149.221	-0.00105	233.940	15949	0.0000	233.940
1.4	-0.01005	118.616	3246.3	202.417	15581	133.065	-0.00445	213.073	15823	0.0000	213.073
1.5	-0.00847	87.377	3251.0	233.940	15581	112.678	-0.00778	132.863	15633	0.0000	132.863
1.6	-0.00552	92.505	3250.2	213.073	15581	113.315	-0.00640	63.714	15802	0.0000	63.714
1.7	-0.00434	102.080	3248.8	132.863	15581	107.391	-0.00163	-8.584	15967	0.0000	-8.584
1.8	0.00225	105.916	3248.2	63.714	15581	98.636	0.00224	13.556	15899	0.0000	13.556
1.9	0.00882	127.300	3247.2	-8.584	15581	103.865	0.00722	81.919	15662	0.0000	81.919
2.0	0.01217	148.630	3250.4	13.556	15581	125.316	0.00717	133.558	15692	0.0000	133.558
2.1	0.00553	159.518	3252.0	81.919	15581	146.119	0.00412	216.315	15939	0.0000	216.315
2.2	-0.00393	137.948	3248.8	133.558	15581	137.191	0.00023	237.075	15937	0.0000	237.075
2.3	-0.00506	107.264	3248.0	216.315	15581	126.075	-0.00579	210.318	15785	0.0000	210.318
2.4	-0.00766	103.567	3248.5	237.075	15581	126.600	-0.00709	140.823	15593	0.0000	140.823

شکل ۳۵.۱۲ مثال ۱۹.۱۲، نتایج گذرا در سیستم سری.

می‌شود، استفاده می‌شود. هیچ وسیله‌ای برای شارش برگشتی در شیر تدارک دیده نشده است.

$$Q_B = -gB_P(C_dA)^2 + \sqrt{[gB_P(C_dA)^2]^2 + (C_dA)^2 g C_P}$$

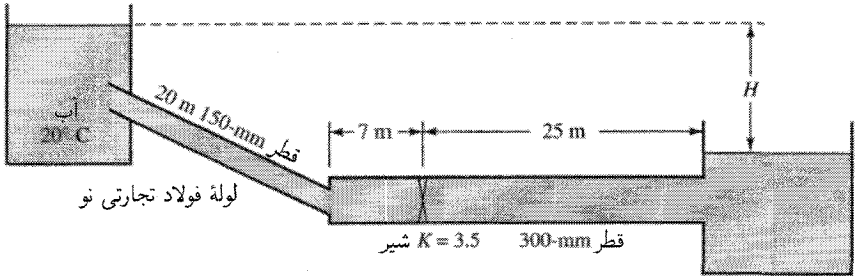
نتایج گذرا در شکل ۳۵.۱۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که شرایط اولیه در $t = 0^+ s$ مشخص

شده‌اند، و در $t = -0.1s$ نیز داده شده‌اند. شرایط در $t = +0.1s$ در لوله ۲ برای محاسبات در $t = +0.1s$ لازم هستند، زیرا باید از $0.2s$ به $0.1s$ پس رود.

مسائل *

۱.۱۲ مطلوب است اختلاف بین افت هد محاسبه شده در معادله دارسی-وایسباخ و با معادله هازن ویلیام برای آب $15^{\circ}C$ که در لوله فولادی جوشی به قطر $1m$ جریان دارد. $C = 120$ و $\epsilon = 0.2mm$. اختلاف را به صورت تابعی از عدد رینولدز، $10^4 < R < 10^7$ ، رسم کنید.

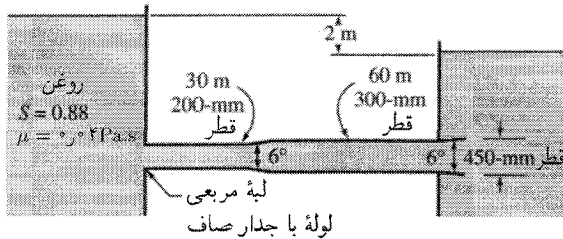
۲.۱۲ خط هیدرولیکی و خط انرژی را برای شکل ۳۶.۱۲ رسم کنید. $H = 10m$.



شکل ۳۶.۱۲ مسائل ۲.۱۲ و ۳.۱۲

۳.۱۲ مقدار K را برای شیر شکل ۳۶.۱۲ محاسبه کنید به طوری که تخلیه مسئله ۲.۱۲ به نصف برسد. خط هیدرولیکی و خط انرژی را رسم کنید.

۴.۱۲ تخلیه سیستم شکل ۳۷.۱۲ را محاسبه کنید. خط هیدرولیکی و خط انرژی را رسم کنید.



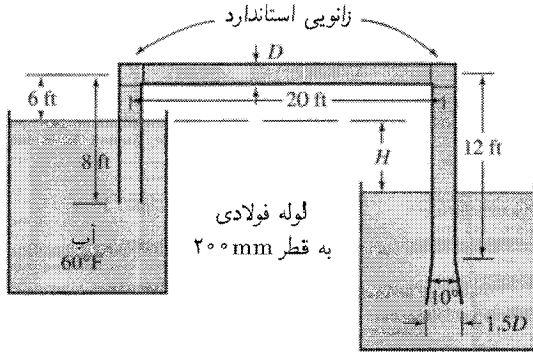
شکل ۳۷.۱۲ مسائل ۴.۱۲ و ۵.۱۲

۵.۱۲ چه هدی در شکل ۳۷.۱۲ لازم است تا تخلیه $3m^3/s$ تولید شود.

۶.۱۲ مطابق است قطر یک لوله هموار که برای تحویل دادن $1L/s$ نفت چراغ $32^{\circ}C$ در طول $150m$ با هد $5m$ لازم است. یک شیر و اتلافهای جزئی دیگری با K کلی 7.6 در خط لوله وجود دارند.

* مسائل ۱.۱۲ تا ۷۰.۱۲ برای شارش پایا و ۷۱.۱۲ تا ۱۰۰.۱۲ برای شارش ناپایاست.

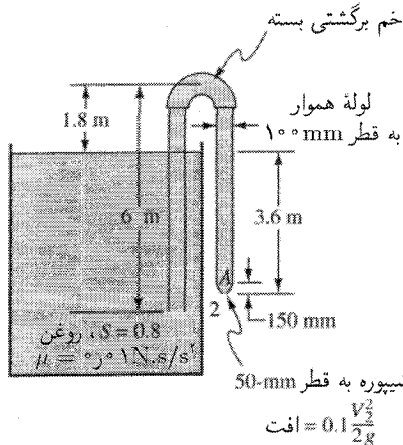
۷.۱۲ آب (۱۵°C) در یک لوله افقی چدنی به قطر ۱۲cm و به طول ۳۰m جریان دارد. لوله به یک مخزن متصل است و قسمتی از آن در فرادست به داخل مخزن فرو رفته است، و در فرودست به اتمسفر تخلیه می‌کند. خط شامل یک شیر کروی باز و سه زانویی استاندارد است. مطلوب است آهنگ شارش در صورتی که ارتفاع مخزن در بالای خروجی برابر است با الف) ۸m؛ ب) ۱۵m. ۸.۱۲ تخلیه را در سیفون شکل ۳۸.۱۲ با حذف پخش‌کن مخروطی محاسبه کنید. $H = 4\text{ft}$.



شکل ۳۸.۱۲ مسائل ۸.۱۲ و ۹.۱۲.

۹.۱۲ تخلیه را در سیفون شکل ۳۸.۱۲ برای $H = 8\text{ft}$ محاسبه کنید. فشار مینیمم در سیستم چقدر است؟

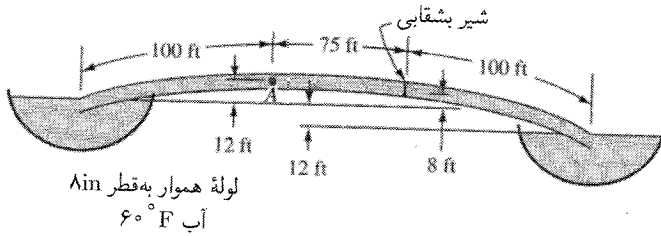
۱۰.۱۲ تخلیه را در سیفون شکل ۳۹.۱۲ پیدا کنید. فشار در A که در بالای خروجی ۱۵۰mm است، سیفون را تخمین بزنید.



شکل ۳۹.۱۲ مسئله ۱۰.۱۲.

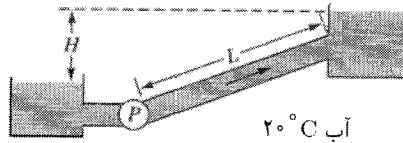
۱۱.۱۲ با صرف نظر از اتلافهای جزئی بجز شیر، خط هیدرولیکی را برای شکل ۴۰.۱۲ رسم کنید. ضرایب افت شیر بشقابی عبارت است از $K = ۴۵$.

۱۲.۱۲ ارتفاع ماکزیم نقطه A (شکل ۴۰.۱۲) بدون وجود حفره زایش چقدر است؟ خوانده جوسنج ۲۹.۵ in Hg است.



شکل ۴۰.۱۲ مسائل ۱۱.۱۲ و ۱۲.۱۲.

۱۳.۱۲ مطلوب است تخلیه سیستم شکل ۴۱.۱۲ برای $D = ۵۰۰ \text{ mm}$, $L = ۶۰۰ \text{ m}$ و $H = ۸ \text{ m}$ و $\epsilon = ۰.۵ \text{ mm}$. با مشخصات مفروض برای پمپ A .



پمپ B

e %	Q_p		H_p	
	l/s	cfs	m	ft
۰	۰	۰	۲۴.۴	۸۰
۵۴	۷۴	۲.۶۰	۲۱.۳	۷۰
۷۰	۱۱۲	۳.۹۴	۱۸.۳	۶۰
۸۰	۱۴۰	۴.۹۶	۱۵.۲	۵۰
۷۳	۱۶۱	۵.۷۰	۱۲.۲	۴۰
۶۰	۱۷۴	۶.۱۴	۹.۱	۳۰
۴۰	۱۷۷	۶.۲۴	۶.۱	۲۰

پمپ A

e %	Q_p		H_p	
	l/s	cfs	m	ft
۰	۰	۰	۲۱.۳	۷۰
۵۹	۵۶.۶	۲.۰۰	۱۸.۳	۶۰
۷۰	۷۲.۵	۲.۵۶	۱۶.۸	۵۵
۷۶	۸۵.۸	۳.۰۳	۱۵.۲	۵۰
۷۸	۹۷.۷	۳.۴۵	۱۳.۷	۴۵
۷۶.۳	۱۰۸	۳.۸۲	۱۲.۲	۴۰
۷۲	۱۱۶	۴.۱۱	۱۰.۷	۳۵
۶۵	۱۲۷	۴.۴۸	۹.۱	۳۰
۵۶.۵	۱۳۰	۴.۵۹	۷.۶	۲۵
۴۲	۱۳۴	۴.۷۳	۶.۱	۲۰

شکل ۴۱.۱۲ مسائل ۱۳.۱۲ تا ۲۰.۱۲، ۴۶.۱۲، ۴۷.۱۲، ۵۰.۱۲.

۱۴.۱۲ مطلوب است تخلیه در سیستم شکل ۴۱.۱۲ برای $L = 4000\text{ft}$ ، $D = 24\text{in}$ در لوله‌ای با جدار صاف $H = 40\text{ft}$ ، با مشخصات پمپ B .

۱۵.۱۲ یک جدول هد-تخلیه-بازده برای پمپهای A و B (شکل ۴۱.۱۲) در حالتی که به‌طور سری متصل شده باشند بکشید، (آحاد SI).

۱۶.۱۲ یک جدول هد-تخلیه-بازده برای پمپهای A و B (شکل ۴۱.۱۲) در حالتی که به‌طور موازی متصل شده باشند بکشید، (آحاد USC).

۱۷.۱۲ تخلیه را در سیستم شکل ۴۱.۱۲ برای پمپهای A و B در حالت سری، 1600m لوله چدنی نو به قطر 300mm ، $H = 30\text{m}$ پیدا کنید.

۱۸.۱۲ توان مورد نیاز برای به کار انداختن پمپهای A و B در مسئله ۱۷.۱۲ را تعیین کنید.

۱۹.۱۲ تخلیه را در سیستم شکل ۴۱.۱۲ برای پمپهای موازی A و B ؛ 2000m لوله فولادی به قطر $H = 10\text{m}$ ، 500mm پیدا کنید.

۲۰.۱۲ توان مورد نیاز برای به کار انداختن پمپها را در مسئله ۱۹.۱۲ تعیین کنید.

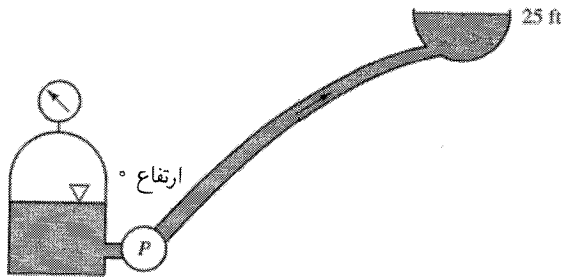
۲۱.۱۲ آب 60°F از یک مخزن فشار به‌مخزنی که 25ft بالاتر است پمپ می‌شود (شکل ۴۲.۱۲).

لوله فولادی تجارتي با طول کلی 1200ft ، و قطر 6in است. از تلافات جزئی صرف‌نظر کنید.

منحنی هد-تخلیه پمپ را با رابطه $H = 38 - 2Q^2$ داده می‌شود، با H برحسب فوت و Q

برحسب فوت مکعب در ثانیه. اگر فشار در مخزن اتمسفریک باشد، شارش در سیستم چقدر

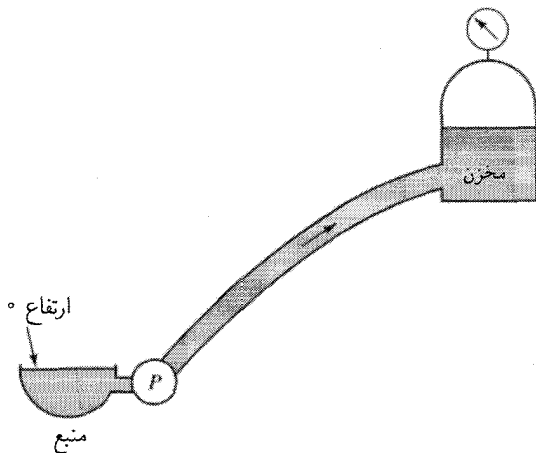
است؟



شکل ۴۲.۱۲ مسائل ۲۱.۱۲ و ۲۲.۱۲.

۲۲.۱۲ اگر فشار پیمانه‌ای در مخزن مسئله ۲۱.۱۲ برابر با 15psi باشد، آهنگ شارش در سیستم چقدر است؟ خط هیدرولیکی را برای این حالت شارش رسم کنید.

۲۳.۱۲ آب از منبع بزرگی به مخزن فشار واقع در ارتفاع بالاتر پمپ می‌شود (شکل ۴۳.۱۲). خط لوله با طول کلی 2000 ft ، قطر 8 in ، از پلاستیک هموار، و $C = 130$ ساخته شده است. از اتلافهای جزئی صرف نظر کنید. اگر منحنی پمپ به صورت $H = 48 - 2Q^2$ باشد، با H برحسب فوت و Q برحسب فوت مکعب در ثانیه، مطلوب است آهنگ شارش در سیستم وقتی فشار در مخزن 12 psi و ارتفاع آب در مخزن 10 ft است. خط هیدرولیکی را رسم کنید.



شکل ۴۳.۱۲ مسائل ۲۳.۱۲ و ۲۴.۱۲.

۲۴.۱۲ اگر ارتفاع آب مخزن در مسئله ۲۳.۱۲ برابر 35 ft باشد و در برابر هوای آزاد قرار داشته باشد، آهنگ شارش چقدر است؟

۲۵.۱۲ دو مخزن توسط سه لوله چدنی تمیز به طور سری به هم متصل شده‌اند؛ $L_1 = 300 \text{ m}$ ؛ $D_1 = 200 \text{ mm}$ ؛ $L_2 = 360 \text{ m}$ ؛ $D_2 = 300 \text{ mm}$ ؛ $L_3 = 1200 \text{ m}$ ؛ $D_3 = 450 \text{ mm}$. وقتی $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ آب 20°C است، اختلاف ارتفاع مخزنها را تعیین کنید.

۲۶.۱۲ مسئله ۲۵.۱۲ را با روش طولهای معادل حل کنید.

۲۷.۱۲ برای اختلاف ارتفاع 10 m در مسئله ۲۵.۱۲، تخلیه را با استفاده از معادله هازن-ویلیامز پیدا کنید.

۲۸.۱۲ هوا در فشار اتمسفریک و دمای 15°C در دو لوله $(\epsilon = 1.5 \text{ mm})$ افقی سری حمل می‌شود. لوله فرادست 120 m و به قطر 720 mm است، و لوله فرودست 30 m و به قطر 900 mm است. طول معادل لوله $(\epsilon = 0.76 \text{ mm})$ به قطر 450 mm را تخمین بزنید. از اتلافهای جزئی صرف نظر کنید.

۲۹.۱۲ چه افت فشاری، برحسب میلیمتر آب، برای شارش $3 \text{ m}^3/\text{s}$ در مسئله ۲۸.۱۲ لازم

است؟ اتلافهای ناشی از انبساط ناگهانی را به حساب آورید.

۳۰.۱۲ برای فروش آب به شهر قرار است یک شرکت آب تأسیس شود. این شرکت آب را با بهای $Q^*(Q + 200000 + 2000000)$ دلار خریداری می‌کند، با Q برحسب فوت مکعب در ثانیه، و آن را در یک خط لوله با ضخامت جداره ثابت تا ۲۵ مایل انتقال می‌دهد. شهر برای ۵cfs تا ۱۰cfs بهای $[(Q - 5) * 2650000 + 19000000]$ دلار را می‌پردازد. قیمت‌ها بر مبنای یک سال آورده شده‌اند. خط لوله $D * 1450000$ دلار می‌ارزد (D برحسب فوت). ضریب اصطکاک خط لوله عبارت است از $0.02 = f$. تأسیسات پمپ $(D_p^2 * 22000 + 300000)$ دلار می‌ارزد (D برحسب فوت). پمپ یکی از واحدهای مشابه با $H_1 = 200 \text{ ft}$, $Q_1 = 5 \text{ cfs}$, $D_{p1} = 1.167 \text{ ft}$, $N_1 = 1200 \text{ rpm}$ ، و با بازده $\eta = 0.84$ است. هزینه، شامل هزینه استهلاک و هزینه‌های فوق‌العاده ۱۳ درصد است، و هزینه تعمیرات و کارکرد ۱۰۰۰۰۰ دلار در سال است. فرض کنید که هزینه توان ۸ سنت برای هر کیلووات است. اندازه پمپ، قطر خط لوله، و آهنگ تخلیه که بهترین سود را برای شرکت داشته باشد انتخاب کنید.

۳۱.۱۲ پمپی آب را در یک خط لوله 14000 m به مخزن فرودست به ارتفاع 25 m بالاتر انتقال می‌دهد. مشخصه‌های پمپ با $(v/\alpha)^2 = 0.3 - 1.3$ و $h/\alpha^2 = (v/\alpha)^2 - 2.7 + 3.32v/\alpha - 1.16(v/\alpha)^2$ در نزدیک بهترین نقطه بازده داده شده است؛ در این رابطه‌ها، $h = H/H_R$ و $v = Q/Q_R$ و $\alpha = N/N_R$ و $N_R = 400 \text{ rpm}$ ، و در خط لوله $f = 0.02$. اگر سرعت اقتصادی نزدیک 1 m/s باشد، اندازه لوله بزرگتر بعدی برحسب cm ، تخلیه، و هدف پمپ، و سرعت پمپ همگام را بیابید. بازده کارکرد باید بیشتر از ۷۰ درصد باشد.

۳۲.۱۲ دو لوله به‌طور موازی بین دو مخزن متصل‌اند؛ $L_1 = 2500 \text{ m}$ ، قطر لوله چدنی کهنه $D_1 = 1.2 \text{ m}$ ، $C = 100$ ؛ $L_2 = 2500 \text{ m}$ ، $D_2 = 1 \text{ m}$ ، $C = 90$. در اختلاف ارتفاع 3.6 m شارش کل آب 20° C را تعیین کنید.

۳۳.۱۲ برای شارش $4.5 \text{ m}^3/\text{s}$ در سیستم مسئله ۳۲.۱۲ اختلاف ارتفاع سطوح مخزن را تعیین کنید. 34.12 سه لوله با جدار صاف به‌طور موازی به هم متصل‌اند: $L_1 = 40 \text{ ft}$ ، $D_1 = 1/2 \text{ in}$ ؛ $L_2 = 60 \text{ ft}$ ، $D_2 = 1 \text{ in}$ ؛ $L_3 = 50 \text{ ft}$ ، $D_3 = 3/4 \text{ in}$. برای شارش کلی 30 gpm ، روغن، $\mu = 0.065 \text{ P}$ ، $\gamma = 55 \text{ lb/ft}^3$ ، افت خط هیدرولیکی بین پیوندگاهها چقدر است؟

۳۵.۱۲ افت هد و توزیع شارش را در سیستم لوله‌های موازی زیر، که در آنها آب 15° C جریان دارد، پیدا کنید

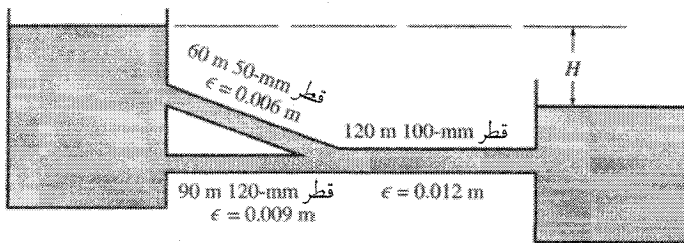
لوله	طول، m	قطر، mm	ϵ , mm
۱	۶۰۰	۱۰۰	۵
۲	۹۰۰	۱۵۰	۰٫۲
۳	۱۲۰۰	۲۰۰	۰٫۱۲

شارش کل ۷۵L/s، فشار فرادست ۵MPa، ارتفاع پیوندگاه در فرادست ۱۰۰m، و ارتفاع پیوندگاه در فرودست ۹۵m است.

۳۶.۱۲ در مسئله ۳۵.۱۲، فشار در فرودست ۴MPa، و شارش کل مجهول است. شارش در هر لوله و شارش کل را با استفاده از معادله (۱۵.۷.۶) پیدا کنید.

۳۷.۱۲ پمپ به قطر ۷۲in در مثال ۱.۱۱ توسط یک موتور با سرعت متغیر کار می‌کند. به سیستم لوله‌ای موازی ($L_1 = ۶۰۰۰m$ ، $D_1 = ۱٫۸۵m$ ، و $f_1 = ۰٫۱۸$ ؛ $L_2 = ۷۳۰۰m$ ، $D_2 = ۲٫۱m$ ، و $f_2 = ۰٫۰۲$). که به مخزنی در ارتفاع Z منتهی می‌شوند تخلیه می‌کند. مخزن مکش در ارتفاع Z است. مخزن فرودست از ارتفاع ۶m تا ۱۲m تغییر می‌کند. برای کارکرد در بهترین بازده، سرعت پمپ باید با Z تغییر کند. این رابطه را بیابید.

۳۸.۱۲ برای $H = ۱۲m$ در شکل ۴۴.۱۲، تخلیه را در هر لوله پیدا کنید، $\mu = ۸cP$ ، $\rho = ۹۰۰ \text{ sp gr}$.

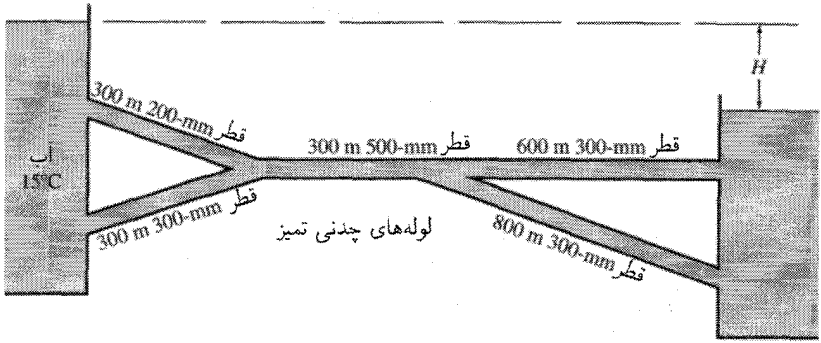


شکل ۴۴.۱۲ مسائل ۳۸.۱۲ و ۳۹.۱۲.

۳۹.۱۲ H را در شکل ۴۴.۱۲ برای شارش $۰٫۳ \text{ m}^3/\text{s}$ پیدا کنید. $\mu = ۵cP$ ؛ $\rho = ۹۰۰ \text{ sp gr}$.

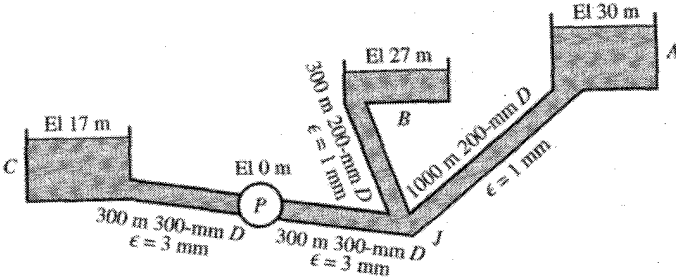
۴۰.۱۲ طول معادله لوله چدنی تمیز به قطر ۳۰۰mm را که بتوان جایگزین سیستم شکل ۴۵.۱۲ کرد پیدا کنید. در $H = ۱۰m$ ، تخلیه چقدر است؟

۴۱.۱۲ با سرعت ۱m/s در لوله به قطر ۲۰۰mm در شکل ۴۵.۱۲ شارش در سیستم و هد مورد نیاز را محاسبه کنید.



شکل ۴۵.۱۲ مسائل ۴۰.۱۲ و ۴۱.۱۲.

۴۲.۱۲ در شکل ۴۶.۱۲ شارش را در سیستم وقتی پمپ برداشته شود پیدا کنید.



شکل ۴۶.۱۲ مسائل ۴۲.۱۲ تا ۴۴.۱۲، ۴۶.۱۲ تا ۴۸.۱۲ و ۵۶.۱۲.

۴۳.۱۲ اگر پمپ شکل ۴۶.۱۲ میزان 8 L/s را به طرف J پمپ کند، شارش در A و B و ارتفاع خط هیدرولیکی در J را پیدا کنید.

۴۴.۱۲ پمپ شکل ۴۶.۱۲، 750 W توان سیال بر شارش (به طرف J) می افزاید. Q_B و Q_A را پیدا کنید.

۴۵.۱۲ از یک صفحه گسترده برای موازنه کردن شارش آب (10°C) در سیستم مخزن داده شده در جدول زیر استفاده کنید. خطوط لوله یک پیوندگاه مشترک دارند

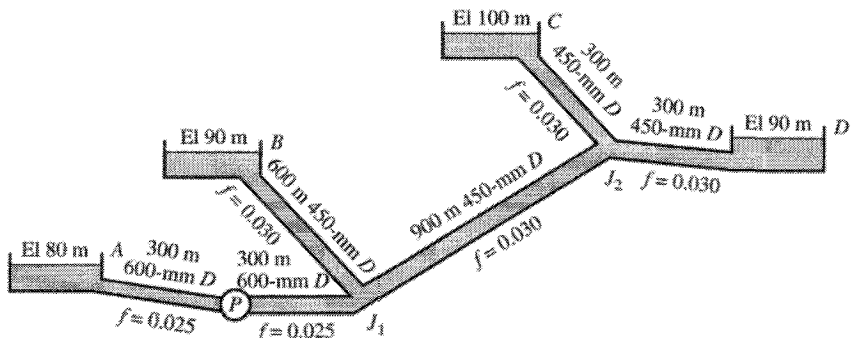
لوله	ارتفاع مخزن، m	طول، km	قطر، mm	ϵ ، mm
۱	۱۰۰	۱۲	۶۰۰	۴
۲	۸۰	۱۶	۸۰۰	۲
۳	۷۰	۸	۷۵۰	۰.۲
۴	۵۰	۱۰	۶۰۰	۰.۰۲
۵	۰	۲۰	۳۰۰	۰.۰۵

۴۶.۱۲ با استفاده از پمپ A از شکل ۴۱.۱۲ در سیستم شکل ۴۶.۱۲، Q_A ، Q_B و ارتفاع خط هیدرولیکی در J را پیدا کنید.

۴۷.۱۲ با استفاده از پمپ B از شکل ۴۱.۱۲ در سیستم شکل ۴۶.۱۲، شارش ورودی به B و ارتفاع خط هیدرولیکی در J را پیدا کنید.

۴۸.۱۲ برای شارش $3^{\circ}L/s$ به داخل B از شکل ۴۶.۱۲، هد پمپ چقدر است؟ اگر بازده پمپ 70% درصد باشد، چه قدرتی مورد نیاز است؟

۴۹.۱۲ مطلوب است شارش در سیستم شکل ۴۷.۱۲ برای وقتی که پمپ در سیستم نیست.



شکل ۴۷.۱۲ مسائل ۴۹.۱۲ و ۵۰.۱۲

۵۰.۱۲ الف) با استفاده از پمپهای A و B از شکل ۴۱.۱۲ که به طور موازی در سیستم شکل ۴۷.۱۲ متصل اند، شارش در B ، C ، و D و ارتفاع هیدرولیکی در J_1 و J_2 را پیدا کنید؛ ب) بنا به فرض، تمام لوله‌ها در شکل ۴۷.۱۲ چدنی اند، و فرض کنید ضریب اصطکاک با شارش تغییر می‌کند. از یک صفحه گسترده برای موازنه شارش استفاده کنید.

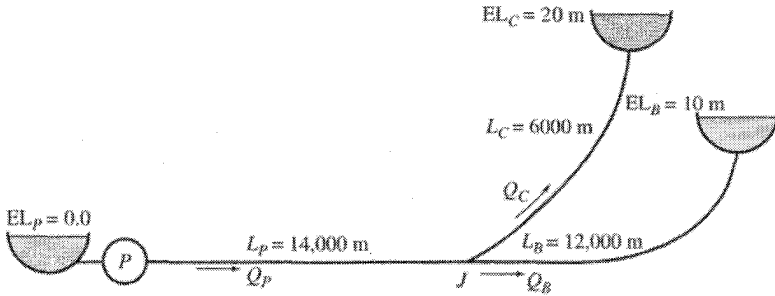
۵۱.۱۲ آب از مخزنی با ارتفاع $20^{\circ}m$ از طریق خط لوله $260^{\circ}m$ با آهنگ $1m^3/s$ تا پیوندگاه انشعاب جریان دارد؛ در پیوندگاه شارش به طور مساوی به طرف سه مخزن منشعب می‌شوند. سه لوله، به طولهای $L_A = 230^{\circ}m$ ، $L_B = 390^{\circ}m$ ، و $L_C = 120^{\circ}m$ ، به سه مخزن منتهی می‌شوند. ارتفاع مخزنها عبارت‌اند از $H_A = 145m$ ، $H_B = 150m$ ، و $H_C = 154m$. از چسبندگی سینماتیکی $\nu = 3 \times 10^{-6} m^2/s$ ، زبری لوله $\epsilon = 0.00005m$ ، و $g = 9.806 m/s^2$ استفاده کنید. فرض کنید هزینه هر متر خط لوله با مربع قطر تغییر می‌کند. مطلوب است قطر هر لوله برای اینکه سیستم اقتصادی‌ترین باشد.

۵۲.۱۲ سیستم نشان داده شده در شکل ۴۸.۱۲ قرار است آب دو مخزن را تأمین کند. شارش باید با نسبت $Q_B/Q_C = 2$ با خطای 5% درصد تأمین شود، یعنی، $0.9 < Q_B/Q_C < 1.1$. فرض کنید سرعتهای اقتصادی برای هر خط $1m/s$ است. مشخصه‌های پمپ در نزدیکی بهترین

نقطه بازده عبارت‌اند از

$$h/\alpha^2 = ۱۳ - ۰.۳(v/\alpha)^2 \quad \eta = -۰.۲۷ + ۲.۳۲v/\alpha - ۱.۱۶(v/\alpha)^2$$

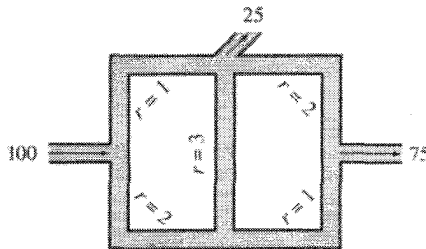
در این نقطه $\alpha = N_S/N_R$, $v = Q/Q_R$, $h = H/H_R$ شرایط اسمی پمپ عبارت‌اند از $N_R = ۴۰۰ \text{ rpm}$, $Q_R = ۰.۲ \text{ m}^3/\text{s}$, $H_R = ۱۴.۵ \text{ m}$ و در خط لوله $f = ۰.۰۲$ اندازه‌های لوله بزرگتر بعدی برحسب سانتی‌متر، تخلیه هر پمپ، هد هر پمپ، سرعت پمپ همگام با منبع توان ۶ Hz ، و توان خروجی موتور الکتریکی را بیابید. بازده پمپ باید بیشتر از ۰.۶۵ باشد.



شکل ۴۸.۱۲ مسائل ۵۲.۱۲ و ۵۳.۱۲.

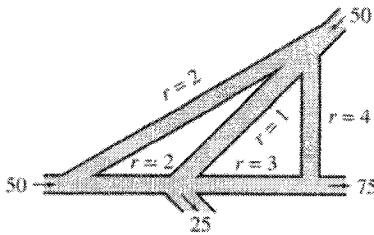
۵۳.۱۲ پمپ در سیستم شکل ۴۸.۱۲ مشخصه‌های یکسانی با پمپ مسئله ۵۲.۱۲ دارد. پمپ حدوداً ۱۵ L/s را برای دو مخزن تأمین می‌کند. سرعت اقتصادی برای هر خط در حدود ۱.۵ m/s است. شرایط اسمی پمپ عبارت‌اند از $N_R = ۴۵۰ \text{ rpm}$ ، $Q_R = ۰.۲ \text{ m}^3/\text{s}$ ، $H_R = ۱۴.۵ \text{ m}$ و در هر خط $f = ۰.۰۲$. اندازه‌های لوله بزرگتر بعدی برحسب سانتی‌متر، تخلیه هر پمپ، هد هر پمپ، سرعت پمپ همگام با منبع توان ۶ Hz ، و توان خروجی موتور الکتریکی را بیابید. بازده پمپ باید بیشتر از ۰.۶۵ باشد.

۵۴.۱۲ از محاسبه دستی برای پیدا کردن شارش در هر یک از لوله‌های شبکه نشان داده شده در شکل ۴۹.۱۲ استفاده کنید. $n = ۲$.



شکل ۴۹.۱۲ مسئله ۵۴.۱۲.

۵۵.۱۲ از محاسبه دستی برای تعیین شارش در هر خط لوله شکل ۵۰.۱۲ استفاده کنید. $n = 2$



شکل ۵۰.۱۲ مسئله ۵۵.۱۲.

۵۶.۱۲ از یک صفحه گسترده برای حل مسئله ۵۴.۱۲ استفاده کنید.

۵۷.۱۲ از یک صفحه گسترده برای حل مسئله ۵۵.۱۲ استفاده کنید.

۵۸.۱۲ مطلوب است شیب خط هیدرولیکی برای شارش هوای اتمسفریک $F = 8^\circ$ در یک مجرای مستطیلی از آهن گالوانیزه 18 in \times 6 in . $V = 3 \text{ ft/s}$.

۵۹.۱۲ مجرای مربعی با چه اندازه‌ای لازم است تا 30°C آب 30 L/s با شیب خط هیدرولیکی 0.01 m را انتقال دهد؟ $\epsilon = 1 \text{ mm}$.

۶۰.۱۲ مطلوب است تخلیه روغن، $S = 0.85$ ، $\mu = 4 \text{ cP}$ ، در 3 m مجرای 50 mm در 120 mm از جنس ورق فلزی وقتی افت هد 600 mm باشد. $\epsilon = 0.00015 \text{ m}$.

۶۱.۱۲ مجرای که سطح مقطع آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 1 ft است 6 cfs آب $F = 60^\circ$ را تحویل می‌دهد. با فرض $\epsilon = 0.003 \text{ ft}$ ، شیب خط هیدرولیکی را پیدا کنید.

۶۲.۱۲ زبری مطلق لوله آب چدنی تمیزی به قطر 700 mm بعد از 5 سال استفاده دو برابر شده است. افت هد را در 1000 m برای شارش 40 L/s وقتی لوله 25 سال کار کرده است تخمین بزنید.

۶۳.۱۲ لوله‌ای به قطر 18 in وقتی نو است برای شارش آب $F = 60^\circ$ در سرعت 5 ft/s ضریب $f = 0.020$ را داراست. بعد از 10 سال برای سرعت $V = 3 \text{ ft/s}$ ، $f = 0.029$ است. f را

در سرعت 4 ft/s در پایان 20 سال پیدا کنید.

۶۴.۱۲ خط هیدرولیکی در یک سیستم الف) همیشه در بالای خط انرژی است؛ ب) همیشه در بالای مجرای بسته است؛ ج) همواره شیئی به طرف پایین در جهت شارش دارد؛ د) هد سرعت در

زیر خط انرژی است؛ ه) به طرف بالا در جهت شارش است، وقتی لوله به طرف پایین شیب دارد.

۶۵.۱۲ دو سیستم لوله وقتی معادلند که دو کمیت زیر یکسان باشد. الف) h و Q ؛ ب) L و Q ؛ ج) L و D ؛ د) f و D ؛ ه) D و V .

۶۶.۱۲ در مسائل لوله‌های موازی الف) اتلافهای هد در هر لوله با هم جمع می‌شوند تا افت هد کلی به دست آید؛ ب) تخلیه در لوله‌ها یکسان است؛ ج) افت هد در هر لوله یکسان است؛ د) وقتی

شارش کل معلوم است شارش در هر لوله با حل مستقیم به دست می‌آید؛ (ه) حل آزمون‌ی مورد نیاز نیست.

۶۷.۱۲ مسائل لوله‌های انشعابی را می‌توان الف) به‌طور تحلیلی با استفاده از چند معادله به تعداد مجهولها؛ ب) با فرض اینکه افت هد در هر لوله یکسان است؛ ج) با طولهای معادل؛ د) با فرض توزیعی که شرط پیوستگی را برآورده کند و محاسبه یک تصحیح؛ ه) با فرض ارتفاع خط هیدرولیکی در نقطه پیوندگاه و سعی در برآورده کردن شرایط پیوستگی، حل کرد.

۶۸.۱۲ در شبکه لوله‌ها الف) افت هد دور هر مدار اصلی باید مساوی صفر باشد؛ ب) افت (توان) در تمام مدارها یکسان است؛ ج) ارتفاع خط هیدرولیکی هر پیوندگاه معلوم فرض می‌شود؛ د) لوله‌های معادل جایگزین مدارهای اصلی می‌شوند؛ ه) ضرایب اصطکاک هر لوله معلوم فرض می‌شود.

۶۹.۱۲ کمیتهای زیر با قراردادن $4R_1$ به جای مقطعی غیردایره‌ای به دست می‌آید الف) سرعت، زبری نسبی؛ ب) سرعت، افت هد؛ ج) عدد رینولدز، زبری نسبی، افت هد؛ د) سرعت، عدد رینولدز، ضریب اصطکاک؛ ه) هیچکدام.

۷۰.۱۲ تجربه نشان می‌دهد که با کهنه شدن لوله‌ها الف) ضریب اصطکاک به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد؛ ب) هر لوله‌ای بر اثر مصرف هموارتر می‌شود؛ ج) زبری مطلق به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد؛ د) هیچ گزارشی قابل توجهی نمی‌توان پیدا کرد؛ ه) زبری مطلق با زمان کاهش می‌یابد.

۷۱.۱۲ دوره نوسان لوله U شامل $5L$ در آب را بیابید. مساحت مقطع عرضی 2.4 cm^2 است. از اصطکاک صرف نظر کنید.

۷۲.۱۲ لوله U شامل الکل با حداکثر تغییر مکان 120 mm از وضع تعادل نوسان می‌کند. طول کلی ستون 1 m است. حداکثر سرعت سیال و دوره نوسان را بیابید. از اصطکاک صرف نظر کنید.

۷۳.۱۲ مایع، $\nu = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ، در لوله U به قطر 12 mm قرار دارد. طول کل ستون مایع 1.73 m است. اگر وقتی ستون ساکن است یک سطح هلالی 4 cm بالاتر از سطح دیگر باشد، مدتی را که یک سطح هلالی 3 cm از وضع تعادل خود حرکت می‌کند بیابید.

۷۴.۱۲ مطلوب است معادله حرکت یک مایع در لوله U برای مقاومت لایه‌ای وقتی $\sqrt{2g/L} = 16\nu/D^2$. پیشنهاد: قرار دهید $z = e^{-mt}(c_1 + c_2 t)$.

۷۵.۱۲ مایع داخل لوله U در هنگامی که سطوح هلالی در یک امتداد قرار دارند با سرعت 2 m/s نوسان می‌کند. زمان را که دو سطح هلالی با ارتفاع یکسان دوباره هم‌امتداد می‌شوند و همچنین سرعت در آن لحظه را بیابید؛ $\nu = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ، $D = 6 \text{ mm}$ ، و $L = 750 \text{ mm}$.

۷۶.۱۲ تونل افقی به قطر 10 ft دارای شفت عمودی به قطر 10 ft است. شفتها به فاصله 1 mi از یکدیگر قرار دارند. وقتی شیرها بسته می‌شوند و این فاصله تونل را ایزوله می‌کنند، آب تا عمق

۵۰ ft در یک شفت بالا می‌رود و در شفت دیگر تا ارتفاع ۲۰ ft بالا می‌رود. برای $f = 0.22$ ، ارتفاع دو خیز بعدی را پیدا کنید.

۷۷.۱۲ یک لوله U به قطر ۱۰ mm شامل روغن، $\nu = 5 \mu\text{m}^2/\text{s}$ ، با طول کلی ۲ m است. اگر نیم‌دامنه اولیه تغییر مکان ۲۵۰ mm باشد، اولین ۱۰ ماکزیمم و مینیمم تغییر مکان و زمانهای آنها را پیدا کنید.

۷۸.۱۲ معادله (۱۷.۷.۱۲) را برای حل با روشهای مرتبه سوم رانگ-کوتا (به صفحه وب نگاه کنید) می‌توان مرتب کرد. از یک صفحه گسترده برای انجام این حل استفاده کنید و آن را برای حالت زیر حل کنید: $d = 2 \text{ ft}$ ، $f = 0.17$ ، $L = 400 \text{ ft}$ ، $V_0 = 0$ ، $z = 12 \text{ ft}$ ، $t = 0$ و $t_{\text{max}} = 3 \text{ s}$.

۷۹.۱۲ شیری در یک لوله به طول ۱۲۰۰ m، $D = 6 \text{ cm}$ ، با شیپوره‌ای به قطر ۳ m در انتهای فرودست، به سرعت باز می‌شود. اتلافات جزئی $4V^2/2g$ است؛ V سرعت در لوله است. $f = 0.24$ ، $H = 9 \text{ m}$ ، زمان برای رسیدن تخلیه به ۹۵ درصد مقدار پایای آن را بیابید.

۸۰.۱۲ یک شیر کروی ($K = 10$) در انتهای یک لوله به طول ۲۰۰ ft به سرعت باز می‌شود. $D = 3 \text{ ft}$ ، $f = 0.18$ ، اتلافات جزئی $2V^2/2g$ ، $H = 75 \text{ ft}$ ، چقدر طول می‌کشد تا تخلیه به ۸۰ درصد حالت پایای خود برسد؟

۸۱.۱۲ یک لوله فولادی با مفصلهای انبساطی به قطر ۱ m و با ضخامت جداره ۱۰ mm است. وقتی در لوله آب جریان دارد، سرعت موج فشار را بیابید.

۸۲.۱۲ بنزن ($K = 150000 \text{ psi}$ و $S = 880$) در یک لوله فولادی با قطر داخل $\frac{3}{8}$ in و ضخامت جداره $\frac{1}{8}$ in دارد. سرعت موج فشاری را بیابید.

۸۳.۱۲ حداکثر زمان برای بستن سریع شیر را در یک خط لوله بیابید: $L = 1000 \text{ m}$ ، $D = 1.3 \text{ m}$ ، $e = 12 \text{ mm}$ ، لوله فولادی است، و آب با $V_0 = 3 \text{ m/s}$ جریان دارد.

۸۴.۱۲ شیری که در ۵ s بسته می‌شود در انتهای فرودست لوله‌ای به طول ۳۰۰ m است که آب را با 2 m/s انتقال می‌دهد. $a = 1000 \text{ m/s}$. فشار حداکثر ناشی از بستن چقدر است؟

۸۵.۱۲ در مسئله ۸۴.۱۲، طولی از لوله را که تحت تأثیر فشار حداکثر قرار می‌گیرد، بیابید.

۸۶.۱۲ شیری در انتهای فرودست یک خط لوله طوری بسته می‌شود که یک سوم خط تحت تأثیر فشار حداکثر قرار می‌گیرد. در چه کسری از زمان $2L/a$ شیر بسته می‌شود؟

۸۷.۱۲ یک لوله، $L = 2000 \text{ m}$ و $a = 1000 \text{ m/s}$ یک شیر در انتهای فرودست دارد. شیر در سه مرحله بستن، به فاصله ۱ s از هم، بسته می‌شود.

هر کاهش مساحت یک سوم بازشدگی اولیه است. فشار در دریچه و در نقطه میانی خط لوله را در بازده‌های ۱ s برای ۵ s پس از بستن اولیه پیدا کنید.

۸۸.۱۲ خط لوله‌ای، $L = 600\text{ m}$ و $a = 1200\text{ m/s}$ ، در انتهای فرودست خود شیر دارد، $V_0 = 2\text{ m/s}$ و $H_0 = 30\text{ m}$. فشار D دو شیر را بر اثر بستن زیر بیابید ($C_d = 0.6$).

A_v/A_{v_0}	۱	۰.۷۵	۰.۶۰	۰.۴۵	۰.۳۰	۰.۱۵	۰
t, s	۰	۰.۵	۱.۰	۱.۵	۲.۰	۲.۵	۳.۰

۸۹.۱۲ در مسئله ۸۸.۱۲، فشار حداکثر را در شیر برای کاهش یکنواخت مساحت در 30° بیابید.
 ۹۰.۱۲ مطلوب است حداکثر کاهش مساحت برای بازه‌های $\frac{1}{4}$ در خط لوله مسئله ۸۸.۱۲ در صورتی که قرار باشد هد در شیر حداکثر از 50 m بیشتر نشود. هد را در 1 s تا 50 m به طولی خطی افزایش دهید، و سپس ثابت بگیرید.

۹۱.۱۲ حل ضربه قوچ را با فشار p و تخلیه Q به عنوان متغیرهای وابسته با روش مشخصه به دست آورید.

۹۲.۱۲ مثال ۱۸.۱۲ را با یک سوم فرکانس موج حل کنید. آیا شرایط تشدید هنوز وجود دارند؟
 ۹۳.۱۲ مسئله ضربه قوچ در یک خط لوله تنها را، با بستن شیر در انتهای فرودست لوله و مخزن در انتهای فرادست، با استفاده از صفحه گسترده حل کنید. بستن شیر با رابطه $C_d A_v / (C_d A_v)_0 = (1 - t/t_c)^m$ داده می‌شود، که در آن t_c زمان بستن و برابر با 0.62 s است، و $V_0 = 3.6\text{ ft/s}$ ، $f = 0.19$ ، $D = 4\text{ ft}$ ، $a = 3927\text{ ft/s}$ ، $L = 5743.75\text{ ft}$ ؛ $m = 3.2$ و $H_0 = 30\text{ ft}$.

۹۴.۱۲ در مسئله ۹۳.۱۲، موجی را با دوره 1.95 s روی مخزن قرار دهید و حل را به کمک یک صفحه گسترده به دست آورید.

۹۵.۱۲ در مثال ۱۸.۱۲، H_0 را تا 20 m کاهش دهید، و قرار دهید $\omega = \frac{\pi}{4}$ ، و مسئله را تا $t = 3\text{ s}$ حل کنید.

۹۶.۱۲ خیز هد در شیر بر اثر بستن ناگهانی عبارت است از الف) $a^2/2g$ ؛ ب) $V_0 a/g$ ؛ ج) $V_0 a/2g$ ؛ د) $V_0^2/2g$ ؛ ه) هیچکدام.

۹۷.۱۲ سرعت موج فشاری در یک لوله بستگی دارد به الف) طول لوله؛ ب) هد اولیه در شیر؛ ج) چسبندگی سیال؛ د) سرعت اولیه؛ ه) هیچکدام.

۹۸.۱۲ وقتی سرعت در لوله بر اثر بستن شیر فرودست به طور ناگهانی از 3 m/s تا 2 m/s کاهش می‌یابد، برای $a = 980\text{ m/s}$ ، خیز هد بر حسب متر عبارت است از الف) 100 ؛ ب) 200 ؛ ج) 300 ؛ د) 980 ؛ ه) هیچکدام.

۹۹.۱۲ وقتی $t_c = L/2a$ ، کسری از طول لوله که تحت تأثیر هدهای ماکزیمم قرار می‌گیرد، بر حسب درصد، عبارت است از الف) 25 ؛ ب) 50 ؛ ج) 75 ؛ د) 100 ؛ ه) هیچکدام.

۱۰۰.۱۲ وقتی مقدار پایای هد در شیر 120 ft است، شیر به طور ناگهانی تا اندازه‌ای بسته می‌شود به طوری که $\Delta h = 80\text{ ft}$. هد در شیر در لحظه‌ای که موج انعکاسی برمی‌گردد عبارت است از الف) -80 ؛ ب) 40 ؛ ج) 80 ؛ د) 200 ؛ ه) هیچکدام.

1. E. F. Brater, H. W. King, J. E. Lindell, and C. Y. Wei, *Handbook of Hydraulics*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, pp. 6–28.
2. V. L. Streeter and E. B. Wylie, *Fluid Mechanics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1975, pp. 545–547.
3. H. Cross, "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors," *Univ. Ill. Bull.* 286, November 1936.
4. R. Epp and A. G. Fowler, "Efficient Code for Steady-State Flows in Networks," *J. Hydraul. Div., ASCE*, vol. 96, no. HY1, pp. 43–56, January 1970.
5. U. Shamir and C. D. D. Howard, "Water Distribution Systems Analysis," *J. Hydraul. Div., ASCE*, vol. 94, no. HY1, pp. 219–234, January 1968.
6. L. E. Ormsbee and D. J. Wood, "Hydraulic Design Algorithms for Pipe Networks," *J. Hydraul. Div., ASCE*, vol. 112, no. 12, pp. 1195–1207, December 1986.
7. D. J. Wood and A. G. Rayes, "Reliability of Algorithms for Pipe Network Analysis," *J. Hydraul. Div., ASCE*, vol. 107, no. HY10, pp. 1145–1161, October 1981.
8. C. F. Colebrook and C. M. White, "The Reduction of Carrying Capacity of Pipes with Age," *J. Inst. Civ. Eng., Lond.*, 1937.
9. W. D. Hudson, "Computerized Pipeline Design," *Transp. Eng. J., ASCE*, vol. 99, no. TE1, pp. 73–82, 1973.
10. N. S. Berman, "Drag Reduction by Polymers," *Annual Rev. of Fluid Mechanics*, vol. 10, pp. 47–64, 1978.
11. W. R. Beaty, W. Carradine, G. Hass, G. Husen, R. Johnston, and M. Mack, "New High-Performance Flow Improver Offers Alternatives to Pipelines," *Oil and Gas J.*, vol. 80, no. 32, pp. 96–102, August 9, 1982.
12. C. D. Lester, "Four-Part Series on Drag Reducing Agents," *Oil and Gas J.*, February 4 and 18, and March 4 and 11, 1985.
13. E. D. Rainville, *Elementary Differential Equations*, 3d ed., Macmillan, New York, 1964.
14. E. B. Wylie and V. L. Streeter, *Fluid Transients in Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
15. M. H. Chaudhry, *Applied Hydraulic Transients*, 2nd ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1987.
16. G. Z. Watters, *Modern Analysis and Control of Unsteady Flow in Pipelines*, 2nd ed., Butterworth, Woburn, MA, 1984.

شارش پایا در کانالهای باز

مبحث وسیعی از عناوین مربوط به شارش در کانال باز را برای این فصل انتخاب کرده‌ایم. شارش یکنواخت پایا را در بخش ۶.۶، و کاربرد معادلهٔ اندازهٔ حرکت برای پرش هیدرولیکی را در بخش ۷.۳ مورد بحث قرار دادیم. سرریزها را نیز در بخش ۸.۱۰ بررسی کردیم. در این فصل ابتدا شارش در کانال باز را رده‌بندی می‌کنیم و سپس شکل سطح مقطعهای بهینهٔ کانال را مورد بحث قرار می‌دهیم، و به دنبال آن بخشی دربارهٔ شارش در مسیل می‌آوریم. سپس، پرش هیدرولیکی و کاربرد آن برای حوضه‌های راکدکننده را بررسی می‌کنیم، و به دنبال آن بحثی دربارهٔ انرژی مخصوص و عمق بحرانی مطرح می‌کنیم که به شارش تدریجاً متغیر منتهی می‌شود. نمودار مقطع عمودی سطح آب را رده‌بندی می‌کنیم و به مقاطع کنترل کانال ارتباط می‌دهیم. در خاتمه، امواج ضربه‌به قوچ در یک کانال مستطیلی، با صرف‌نظر از اثرات اصطکاک، تحلیل می‌شوند.

مکانیک شارش در کانالهای باز، به‌علت وجود سطح آزاد پیچیده‌تر از شارش در مجرای بسته است. خط هیدرولیکی بر سطح آزاد منطبق است، و به‌طور کلی، مکان مشخصی ندارد. نیروهای گرانشی باعث شارش در سطح آزاد می‌شوند، و نیروهای برشی چسبنده همراه با محیط خیس‌شدهٔ کانال در برابر شارش مقاومت می‌کنند. عدد رینولدز و عدد فرود هر دو برای مشخص کردن شارش اهمیت دارند.

برای اینکه شارش لایه‌ای رخ دهد، سطح مقطع باید بی‌نهایت کوچک، سرعت خیلی کم، یا چسبندگی سینماتیکی بسیار زیاد باشد. لایه نازکی که از مایع که به طرف پایین یک صفحه شیبدار یا قائم جریان دارد مثالی از شارش لایه‌ای است. این حالت با روشهایی که در فصل ۶ نشان داده شدند بررسی می‌شود (مسئله ۱۰.۶ را ببینید). عدد رینولدز بحرانی پایینی برای شارش در لوله مساوی ۲۰۰۰ است، و همین مقدار را برای کانال باز می‌توان به کار برد و در آن به جای قطر D جمله $4R$ را قرار داد. شعاع هیدرولیکی است، که به صورت مساحت سطح مقطع کانال تقسیم بر محیط خیس شده تعریف می‌شود. در گستره عدد رینولدز $500 < R = VR/\nu < 2000$ ، پرمبنای R به جای D ، شارش لایه‌ای است، در $2000 < R < 500$ شارش گذرا است و ممکن است لایه‌ای یا متلاطم باشد، و در $R > 2000$ شارش معمولاً متلاطم است.

بیشتر شارشها در کانال باز متلاطم‌اند، و مایع آنها معمولاً آب است. روشهای تحلیل شارش در کانال باز را به اندازه روشهای مربوط به مجراهای بسته بسط نمی‌دهیم. در معادله‌های مورد استفاده فرض می‌کنیم تلاطم کامل برقرار است، و افت هد متناسب با مربع سرعت است. اگرچه عملاً تمام داده‌های مربوط به شارش در کانال باز از آزمایشهای انجام شده بر روی شارش آب به دست آمده‌اند، از این معادله‌ها باید مقادیر منطقی برای مایعات دیگر با چسبندگی کم را به دست آورد. موضوع این فصل فقط در مورد شارش متلاطم به کار می‌رود.

۱۰.۱۳ رده‌بندی شارش

تعریفها

شارش در کانال باز صورتهای بسیار متنوعی دارد، از شارش آب، بر روی سطح یک مزرعه شخم‌زده‌شده در طی بارانی سنگین گرفته تا شارش با عمق ثابت در یک کانال منشوری بزرگ. شارش را به صورت شارش پایا یا ناپایا، یکنواخت یا غیریکنواخت می‌توان رده‌بندی کرد. شارش یکنواخت پایا در کانالهای شیبدار خیلی بزرگ با سطح مقطع ثابت در ناحیه‌هایی صورت می‌گیرد که سرعت شارش به سرعت حد رسیده باشد؛ یعنی، در جایی که افت هد ناشی از شارش متلاطم دقیقاً با کاهش انرژی پتانسیل تأمین شود که این کاهش انرژی ناشی از کاهش یکنواخت ارتفاع کف کانال است. عمق شارش یکنواخت پایا عمق پهنجار نام دارد. در شارش یکنواخت پایا تخلیه ثابت است و عمق در همه جا در امتداد طول کانال ثابت است. معادله‌های گوناگونی برای تعیین رابطه‌های بین سرعت متوسط، شکل سطح مقطع، اندازه و زبری آن، و شیب، یا میل کف کانال مورد استفاده قرار می‌گیرد (بخش ۶.۶).

شارش غیر یکنواخت پایا در هر کانال نامنظمی که تخلیه آن با زمان تغییر نمی‌کند رخ می‌دهد؛ در کانالهای منظم نیز وقتی عمق شارش تغییر می‌کند و از این رو سرعت متوسط از سطح مقطعی تا سطح مقطع دیگر تغییر می‌کند شارش غیر یکنواخت پایا به وجود می‌آید. در تغییرات تدریجی عمق یا مقطع، موسوم به شارش تدریجاً متغیر، برای محاسبه عمقهای شارش در مقادیر معلوم تخلیه، ابعاد و زبری کانال، و شرایط معلوم در هر سطح مقطع روشهایی با استفاده از انتگرال‌گیری عددی یا مرحله به مرحله وجود دارد. در فواصلی از کانال که تغییرات مشخص سرعت و عمق در فاصله کوتاهی صورت می‌گیرد، مانند داخل یک گذار از سطح مقطعی تا سطح مقطعی دیگر، اغلب از مطالعه یک مدل نمونه استفاده می‌شود. پرش هیدرولیکی مثالی از شارش غیر یکنواخت پایاست؛ پرش هیدرولیکی را در بخش ۷.۳ و ۴.۱۳ نیز بررسی می‌کنیم.

شارش یکنواخت ناپایا به ندرت در کانال باز رخ می‌دهد. شارش غیر یکنواخت ناپایا رایج است، اما تحلیل آن مشکل است. حرکت موج مثالی از این نوع شارش است، و تحلیل آن وقتی اصطکاک را به حساب آوریم پیچیده می‌شود.

شارش را می‌توان آرام و سریع نیز رده‌بندی کرد. وقتی شارش در سرعتهای کم رخ دهد به طوری که آشفتگی کوچکی بتواند تا فرادست سیر کند و بدین ترتیب شرایط فرادست تغییر کند، آن را شارش آرام می‌نامیم ($F < 1$)؛ درباره عدد فرود F در بخش ۳.۵ تعریف و بحث شده است. شرایط فرادست تحت تأثیر شرایط فرودست است، و شارش با شرایط فرودست کنترل می‌شود. وقتی شارش در چنان سرعتهای زیادی رخ دهد که آشفتگی کوچکی، مانند یک موج ابتدایی در فرودست رفت و برگشت کند، شارش را سیل آسا یا سریع می‌نامیم ($F > 1$). تغییرات کوچک در شرایط فرودست هیچ‌گونه اثری بر تغییر شرایط فرادست نمی‌گذارد؛ از این رو، شارش با شرایط فرادست کنترل می‌شود. وقتی شارش طوری است که سرعت آن درست مساوی سرعت یک موج ابتدایی است، شارش را بحرانی می‌نامیم ($F = 1$).

عبارتهای «فرو بحرانی» و «فرا بحرانی» نیز برای رده‌بندی سرعتهای شارش مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ فرو بحرانی به شارش آرام در سرعتهای کمتر از سرعت بحرانی مربوط می‌شود، و فرا بحرانی با شارشهای سریع، وقتی سرعتها بیشتر از سرعت بحرانی هستند، متناظر است.

توزیع سرعت

سرعت در یک مرز جامد باید مساوی صفر باشد، و در شارش در کانال باز عموماً سرعت با افزایش فاصله از مرزها افزایش می‌یابد. سرعت ماکزیمم در سطح آزاد رخ نمی‌دهد بلکه معمولاً در عمقی مساوی ۰.۵ r تا ۰.۲۵ r زیر سطح آزاد رخ می‌دهد. سرعت متوسط در طول یک خط عمودی را

گاهی اوقات می‌توان با اندازه‌گیری سرعت در ۶ر عمق تعیین کرد، اما روش مطمئن‌تر این است که متوسط سرعتها را در ۲ر و ۸ر عمق، برطبق اندازه‌گیریهای اداره زمین‌شناسی امریکا محاسبه کنیم.

تمرینها

۱.۱.۱۳ در شارش در کانال باز الف) خط هیدرولیکی همیشه به موازات خط انرژی است؛ ب) خط انرژی بر سطح آزاد منطبق است؛ ج) خط انرژی و خط هیدرولیکی بر هم منطبق‌اند؛ د) خط هیدرولیکی هیچ‌وقت نمی‌تواند خیز بردارد؛ ه) خط هیدرولیکی و سطح آزاد بر هم منطبق‌اند. ۲.۱.۱۳ شارش آرام باید همیشه در الف) بالای عمق بهنجار؛ ب) زیر عمق بهنجار؛ ج) بالای عمق بحرانی؛ د) زیر عمق بحرانی؛ ه) بر روی شبیه‌های معکوس رخ دهد.

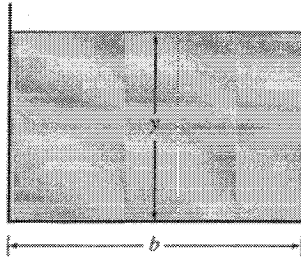
۲.۱۳ بهترین سطح مقطعهای هیدرولیکی کانال

بعضی سطح مقطعهای کانال از مقاطع دیگر کارآمدترند از این نظر که مساحت بیشتری را به ازای محیط خیس‌شده یکسانی دارا هستند. به‌طور کلی، در ساخت کانال عملیات حفاری، و احتمالاً روکش کردن آن هزینه زیادی برمی‌دارد. فرمول مانینگ نشان می‌دهد که وقتی مساحت سطح مقطع مینیمم باشد، محیط خیس شده نیز مینیمم است، و بنابراین هزینه روکش کردن و حفاری برای ابعاد یکسان کانال هم مینیمم است، و بنابراین هزینه روکش کردن و حفاری برای ابعاد یکسان کانال هم مینیمم می‌شود. بهترین سطح مقطع هیدرولیکی سطح مقطعی است که کمترین محیط خیس‌شده یا معادل آن، کمترین مساحت را برای یک نوع مقطع دارا باشد. فرمول مانینگ عبارت است از

$$Q = \frac{C_m}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \quad (۱.۲.۱۳)$$

که در آن، Q تخلیه (L^3/T) ، A مساحت سطح مقطع شارش، R (مساحت تقسیم بر محیط خیس‌شده P) شعاع هیدرولیکی، S شیب خط انرژی، n ضریب زبری مانینگ (جدول ۱.۶)، و C_m ثابت تجربی $(L^{1/2}/T)$ برابر با ۱۴۹ در آحاد USC و ۱٫۰ در آحاد SI است. با معلوم بودن Q ، n و S ، معادله (۱.۲.۱۳) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$A = cP^{2/5} \quad (۲.۲.۱۳)$$



شکل ۱.۱۳ سطح مقطع مستطیلی.

که در آن، c معلوم است. این معادله نشان می‌دهد که اگر A مینیمم باشد، P مینیمم می‌شود. برای پیدا کردن بهترین سطح مقطع هیدرولیکی برای یک کانال مستطیلی (شکل ۱.۱۳) داریم $A = by$ و $P = b + 2y$. بنابراین، با حذف b به دست می‌آید

$$A = (P - 2y)y = cP^{2/5}$$

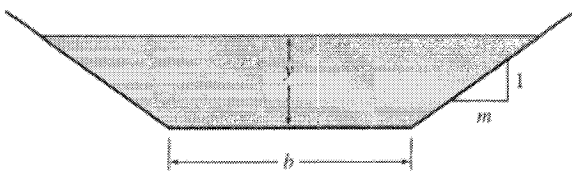
مقدار y را برای اینکه P مینیمم شود پیدا می‌کنیم. با دیفرانسیل‌گیری نسبت به y نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{dP}{dy} - 2\right)y + P - 2y = \frac{2}{5}cP^{-2/5}\frac{dP}{dy}$$

با قرار دادن $dP/dy = 0$ نتیجه می‌شود $P = 4y$ ، یا از آنجا که $P = b + 2y$ ، داریم

$$b = 2y \quad (3.2.13)$$

بنابراین، عمق برابر است با نصف عرض کف و مستقل از اندازه مقطع مستطیلی است. برای پیدا کردن بهترین مقطع دوزنقه‌ای (شکل ۲.۱۳) داریم $A = by + my^2$ و



شکل ۲.۱۳ سطح مقطع دوزنقه‌ای.

بهترین سطح مقطعهای هیدرولیکی کانال ۷۹۹

بعد از حذف b و A در این معادله‌ها و معادله (۴.۲.۱۳)، به دست می‌آید

$$A = by + my^2 = (P - 2y\sqrt{1+m^2})y + my^2 = cP^{2/5} \quad (۴.۲.۱۳)$$

بعد از ثابت گرفتن m و مشتق‌گیری نسبت به y ، $\partial P / \partial y$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب داریم

$$P = 4y\sqrt{1+m^2} - 2my \quad (۵.۲.۱۳)$$

مجدداً، با ثابت گرفتن y ، و مشتق‌گیری معادله (۴.۲.۱۳) نسبت به m ، و مساوی صفر قرار دادن $\partial P / \partial m$ نتیجه می‌شود

$$\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} = 1$$

با محاسبه m ، به دست می‌آید

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

و با جایگذاری m در معادله (۵.۲.۱۳)، خواهیم داشت

$$P = 2\sqrt{3}y \quad b = 2\frac{\sqrt{3}}{3}y \quad A = \sqrt{3}y^2 \quad (۶.۲.۱۳)$$

که نشان می‌دهد $b = P/3$ و از این رو طول جوانب شیبدار با طول کف یکسان است. از آنجا که $\tan^{-1} m = 30^\circ$ ، بهترین مقطع هیدرولیکی یک نیمه شش ضلعی است. در مقاطع دوزنقه‌ای که m (شیب ماکزیمی که دیواره خیس نسبت به امتداد قائم دارد) آنها مشخص است، برای پیدا کردن بهترین نسبت عرض کف به عمق از معادله (۵.۲.۱۳) استفاده می‌شود. نیم‌دایره بهترین مقطع هیدرولیکی کانال باز است.

مثال ۱.۱۳ مطلوب است ابعاد باصرفه‌ترین کانال دوزنقه‌ای با روکش آجری که $200 \text{ m}^2/\text{s}$ را با شیب 0.0004 ° منتقل می‌کند.

حل

از معادله (۶.۲.۱۳)، نتیجه می‌شود

$$R = \frac{A}{P} = \frac{y}{2}$$

و با جایگذاری در معادله (۱.۲.۱۳)، به دست می آید

$$200 = \frac{100}{0.016} \sqrt{3y^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2/3} \sqrt{0.0004}$$

یا

$$y^{8/3} = 14664 \quad y = 6.492 \text{ m}$$

و از معادله (۶.۲.۱۳) داریم $b = 7.85 \text{ m}$.

تمرینها

۱.۲.۱۳ بهترین سطح مقطع هیدرولیکی مستطیلی، سطح مقطعی است که در آن، الف) $y = 2b$ ؛

ب) $y = b$ ؛ ج) $y = b/2$ ؛ د) $y = b^2$ ؛ ه) $y = b/5$. (عرض کف = b ؛ عمق = y).

۲.۲.۱۳ بهترین سطح مقطع هیدرولیکی کانال طبق تعریف عبارت است از الف) کم خرج ترین

سطح مقطع کانال؛ ب) مقطعی با ضریب زبری مینیمم؛ ج) مقطعی که مساحت ماکزیمم را در

شارش معلومی دارا باشد؛ د) مقطعی که محیط آن مینیمم است؛ ه) هیچکدام.

۳.۱۳ شارش یکنواخت پایا در یک مسیل

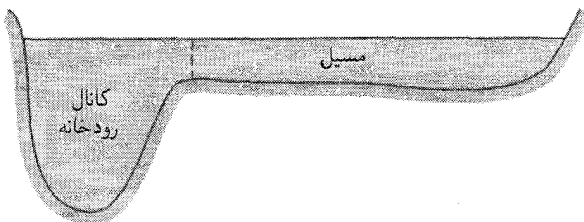
مسئله عملی مهم کانال باز عبارت است از محاسبه تخلیه در یک مسیل (شکل ۳.۱۳). به طور

کلی، مسیل خیلی ناهموارتر از کانال رودخانه، و عمق (و شعاع هیدرولیکی) آن بسیار کمتر است.

شیب خط انرژی برای هر دو قسمت باید یکسان باشد. با استفاده از خط چین شکل ۳.۱۳ به عنوان

خط جدایی دو مقطع (و نه به عنوان یک مرز واقعی)، تخلیه را در هر قسمت به طور جداگانه تعیین،

و سپس تخلیهها را با هم جمع می کنیم تا ظرفیت کل سیستم تعیین شود.



شکل ۳.۱۳ سطح مقطع مستطیل.

از آنجا که هر دو قسمت شیب یکسانی دارند، تخلیه را به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$Q_1 = K_1 \sqrt{S} \quad Q_2 = K_2 \sqrt{S}$$

یا

$$Q = (K_1 + K_2) \sqrt{S} \quad (۱.۳.۱۳)$$

که در آن، مقدار K با توجه به فرمول مانینگ عبارت است از

$$K = \frac{C_m}{n} AR^{2/3}$$

در یک کانال مشخص با زبری ثابت، K فقط تابعی از عمق است. با محاسبه K_1 و K_2 در ارتفاعهای مختلف سطح آزاد، مجموع آنها را به دست می‌آوریم و برحسب ارتفاع رسم می‌کنیم. از این نمودار به سهولت می‌توان برای یک عمق و تخلیه مفروض، شیب خط انرژی را از معادله (۱.۳.۱۳) تعیین کرد.

۴.۱۳ پرش هیدرولیکی و حوضه‌های آرامش

پرش هیدرولیکی

رابطه‌هایی که باید میان متغیرهای V_1 ، y_1 ، V_2 و y_2 برقرار باشد تا اینکه در یک کانال افقی مستطیلی پرش هیدرولیکی رخ دهد در بخش ۷.۳ نشان داده شدند. طریق دیگر برای تعیین عمقهای مزدوج در یک تخلیه مشخص عبارت است از روش $F + M$. معادله اندازه حرکت که برای جسم آزاد مایع بین y_1 و y_2 (شکل ۴.۱۳) برای عرض واحد ($V_1 y_1 = V_2 y_2 = q$) به کار می‌رود، عبارت است از

$$\frac{\gamma y_1^2}{2} - \frac{\gamma y_2^2}{2} = \rho q (V_2 - V_1) = \rho V_2^2 y_2 - \rho V_1^2 y_1$$



شکل ۴.۱۳ پرش هیدرولیکی در کانال مستطیلی.

با مرتب کردن دوباره نتیجه می‌شود

$$\frac{\gamma y_1^3}{2} + \rho V_1^2 y_1 = \frac{\gamma y_2^3}{2} + \rho V_2^2 y_2 \quad (۱.۴.۱۳)$$

یا

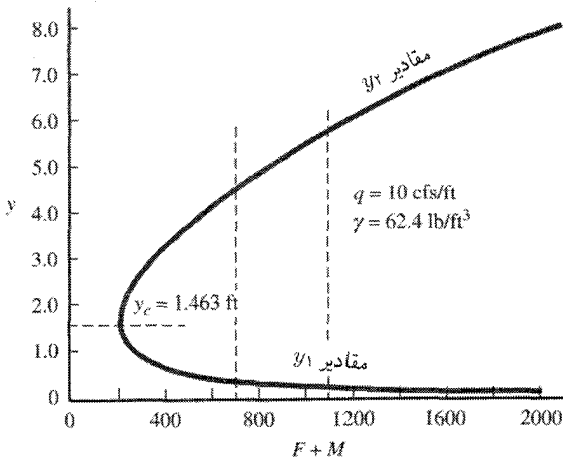
$$F_1 + M_1 = F_2 + M_2 \quad (۲.۴.۱۳)$$

که در آن، F نیروی هیدروستاتیک در مقطع است و M تکانه است که در یک ثانیه از مقطع عبور می‌کند با نوشتن $F + M$ برای یک تخلیه مشخص در عرض واحد، q ، به دست می‌آید

$$F + M = \frac{\gamma y^3}{2} + \frac{\rho q^2}{\gamma} \quad (۳.۴.۱۳)$$

در شکل ۵.۱۳، نمودار $F + M$ به عنوان طول، برحسب y به عنوان عرض برای $q = ۱۰$ cfs/ft رسم شده است. هر خط قائم، منحنی را در دو نقطه که مقدار یکسانی از $F + M$ را دارا هستند قطع می‌کند؛ از این رو، این دو نقطه عمقهای مزدوج‌اند. مقدار y برای اینکه $F + M$ مینیمم باشد با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳.۴.۱۳) نسبت به y و قرار دادن $d(F + M)/dy$ مساوی صفر عبارت است از

$$y_c = \left(\frac{q^2}{y} \right)^{1/3} \quad (۴.۴.۱۳)$$



شکل ۵.۱۳ منحنی $F + M$ برای یرش هیدرولیکی.

پرش همیشه باید از عمق کمتر به عمق بیشتر رخ دهد. این عمق عبارت است از عمق بحرانی، که در بخش بعد نشان می‌دهیم که عمق مربوط به انرژی مینیمم است. بنابراین، پرش همیشه از شارش سریع به شارش آرام رخ می‌دهد. این حقیقت که در پرش انرژی دسترسی پذیر تلف می‌شود، هرگونه امکان تغییر ناگهانی از عمق مزدوج بالاتر به عمق مزدوج پایینتر را از بین می‌برد. عمقهای مزدوج به‌طور مستقیم به اعداد فرود قبل و بعد از پرش مربوط می‌شوند:

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} \quad F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} \quad (5.4.13)$$

از معادله پیوستگی داریم

$$V_1^2 y_1^2 = gy_1^3 F_1^2 = V_2^2 y_2^2 = gy_2^3 F_2^2$$

یا

$$F_1^2 y_1^2 = F_2^2 y_2^2 \quad (6.4.13)$$

از معادله (۱.۴.۱۱) داریم

$$y_1^2 \left(1 + 2 \frac{V_1^2}{gy_1} \right) = y_2^2 \left(1 + 2 \frac{V_2^2}{gy_2} \right)$$

با جایگذاری معادله‌های (۵.۴.۱۳) و (۶.۴.۱۳) نتیجه می‌شود

$$(1 + 2F_1^2)F_1^{-2/3} = (1 + 2F_2^2)F_2^{-2/3} \quad (7.4.13)$$

مقدار F_2 برحسب F_1 از معادله پرش هیدرولیکی (۱۱.۷.۳) به دست می‌آید

$$y_2 = \frac{-y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 2 \frac{V_1^2 y_1}{g}} \quad \text{یا} \quad 2 \frac{y_2}{y_1} = -1 + \sqrt{1 + 8 \frac{V_1^2}{gy_1}}$$

با استفاده از معادله‌های (۵.۴.۱۳) و (۶.۴.۱۳) داریم

$$F_2 = \frac{2\sqrt{2}F_1}{(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1)^{2/3}} \quad (8.4.13)$$

جدول ۱.۱۳ رده‌بندی پرش هیدرولیکی به عنوان یک اتلاف‌کننده انرژی مؤثر.

توصیف	رده‌بندی	$F_1 = V_1 / \sqrt{gy_1}$
فقط یک اختلاف جزئی بین عمقها وجود دارد. در نزدیک $F_1 = 1.7$ مجموعه‌ای از خیزها ظاهر می‌شوند.	موج ساکن	۱-۱.۷
سطح آب کاملاً هموار است؛ سرعت نسبتاً یکنواخت است؛ و افت هد کم است. اگر طول مناسبی از حوضه به کار رفته باشد به هیچ دیواره‌ای نیاز نیست.	پیش پرش	۱.۷-۲.۵
عمل نوسانی جت ورودی، از کف حوضه تا سطح. هر نوسان، موج بزرگی با دوره تناوب نامنظم تولید می‌کند که می‌تواند تا فرودست سیر کند و به سواحل خاکی و سنگریزه صدمه بزند. در صورت امکان، حوضه راکدکننده از این گستره اعداد فرود اجتناب کرد.	گذار	۲.۵-۴.۵
پرش کاملاً موازنه حالت خود می‌باشد. جذب انرژی (برگشت‌ناپذیرها) در محدوده ۴۵ تا ۷۰ درصد از دیواره‌ها و تیرپایه‌ها برای کاهش دادن طول حوضه می‌توان استفاده کرد.	گستره پرشهای خوب	۴.۵-۹
اتلاف انرژی به ۸۵ درصد می‌رسد. انواع دیگر حوضه‌های راکدکننده ممکن است با صرفه‌تر باشند.	مؤثر اما زیر	۹ به بالا

از مرجع [۱]*

این معادله‌ها فقط برای مقطع مستطیلی به کار می‌روند. عدد فرود مربوط به قبل از پرش همیشه بزرگتر از یک، و بعد از پرش همیشه کمتر از یک است.

حوضه‌های راکدکننده

حوضه راکدکننده ساختاری است که برای تلف کردن انرژی دسترسی‌پذیر شارش در زیر یک آبریز، محل تقسیم آب، ساختار یک کانال، و سراسیب به کار می‌رود. بیشتر تأسیسات موجود یک پرش هیدرولیکی در داخل حوضه راکدکننده ایجاد می‌شود و به عنوان تلف‌کننده انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بحث فقط به حوضه‌های مستطیلی با کف افقی می‌پردازیم، اگرچه کفهای شیبدار نیز در بعضی حالتها برای کم شدن کار حفاری مورد استفاده قرار می‌گیرند (جدول ۱.۱۳). اغلب، قطعاتی در ورودی حوضه به کار می‌رود تا شارش چند شاخه شود، قطعات را معمولاً

* چند مرجع در انتهای این فصل آورده شده‌اند.

به‌طور منظم به فاصلهٔ حدوداً مساوی عرض قطعه از یکدیگر قرار می‌دهند. از تیر پایه‌ها، به شکل مثلثی یا دندانه‌دار، اغلب در انتهای فرودست حوضه برای حفظ پرش در حوضه استفاده می‌شود تا به توسط آنها بتوان حوضه را کمی کوتاه‌تر کرد.

حوضه باید با بتن با کیفیت بالا فرش شود تا از صدمهٔ ناشی از سایش و حفره زایش اجتناب شود. هیچ‌گونه بی‌نظمی در کف یا در دیوار بندی مجاز نیست. اگر ماده به سهولت ساییده می‌شود، طولی از پرش، حدوداً مساوی $6y_2$ ، باید در داخل حوضهٔ فرش شده، مجهز به سنگریزه‌های خوب در فرودست باشد.

مثال ۲۰۱۳ در فرودست دریاچهٔ سدی به عرض ۱۵m یک پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد. عمق ۱٫۵m، و سرعت 20 m/s است. مطلوب است الف) عدد فرود و عدد فرود متناظر با عمق مزدوج؛ ب) عمق و سرعت بعد از پرش، و ج) توان اتلاف‌شده به توسط پرش.

حل

$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy}} = \frac{20}{\sqrt{9.806(1.5)}} = 5.215 \quad (\text{الف})$$

از معادلهٔ (۸.۴.۱۳) داریم

$$F_2 = \frac{2\sqrt{2}(5.215)}{(\sqrt{1 + 8(5.215)^2} - 1)^{3/2}} = 0.2882$$

$$F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} \quad V_2 y_2 = V_1 y_1 = 1.5(20) = 30\text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{ب})$$

سپس

$$V_2^3 = F_2^3 g y_2 = F_2^3 g \frac{30}{V_2}$$

و

$$V_2 = [0.2882^3 (9.806)(30)]^{1/2} = 2.90\text{ m/s}$$

$$y_2 = 10.34\text{ m}$$

ج) از معادله (۲۴.۱۱.۳)، افت هد h_j در پرش عبارت است از

$$h_j = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} = \frac{(1.0734 - 1.50)^3}{4(1.5)(1.0734)} = 11.13 \text{ m.N/N}$$

توان اتلاف شده مساوی است با

$$\blacksquare \quad \text{توان} = \gamma Q h_j = 9806(15)(30)(11.13) = 49.1 \text{ MW}$$

تمرین

۱۴.۱۴ شارش فرا بحرانی هیچ وقت نمی تواند الف) مستقیماً بعد از پرش هیدرولیکی؛ ب) در کانالی با شیب ملایم؛ ج) در کانالی با شیب معکوس؛ د) در کانالی افقی؛ ه) در کانالی با شیب تند رخ دهد.

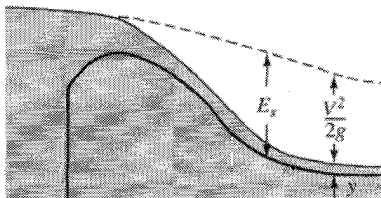
۵.۱۳ انرژی مخصوص؛ عمق بحرانی

انرژی بر وزن واحد، E_s ، وقتی کف کانال به عنوان داده ارتفاع است، انرژی مخصوص نام دارد. انرژی مخصوص کمیت مناسبی برای مطالعه شارش کانال باز است که با کمیت [مرجع ۲] در سال ۱۹۱۲ آن را مطرح کرد. انرژی مخصوص به طور عمودی در بالای کف کانال رسم می شود،

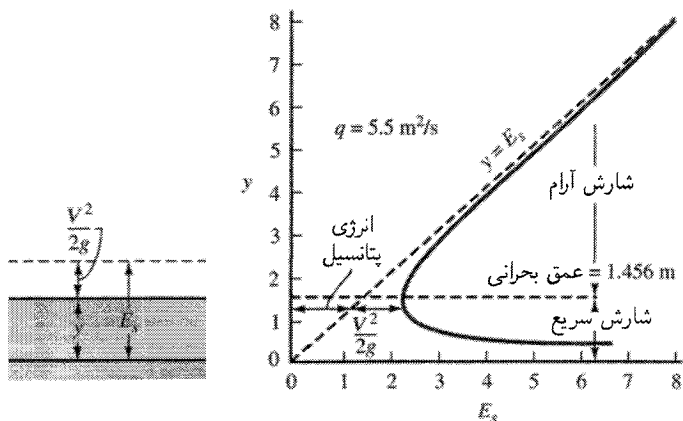
$$E_s = y + \frac{V^2}{2g} \quad (1.5.13)$$

نمودار انرژی مخصوص برای حالت خاصی در شکل ۶.۱۳ نشان داده شده است. در یک کانال مستطیلی، به فرض $Vy = q$ ، که در آن، q عبارت است از تخلیه بر عرض واحد، داریم

$$E_s = y + \frac{q^2}{2gy^3} \quad (2.5.13)$$



شکل ۶.۱۳ مثالی از انرژی مخصوص.



شکل ۷.۱۳ انرژی مخصوص لازم برای شارش یک تخلیه مشخص در عمقهای مختلف.

شایان توجه است که در یک تخلیه ثابت، انرژی مخصوص چگونه با عمق تغییر می‌کند (شکل ۷.۱۳). برای مقادیر کوچک y منحنی در امتداد محور E_s به سمت بی‌نهایت می‌رود، در حالی که برای مقادیر بزرگ y از جمله هد سرعت می‌توان صرف‌نظر کرد و منحنی $E_s = y$ به‌طور مجانبی به خط 45° نزدیک می‌شود. انرژی مخصوص دارای یک مقدار مینیمم است که به ازای مقادیر کمتر از آن، q مورد نظر به‌دست نمی‌آید. مقدار y برای E_s مینیمم با قرار دادن dE_s/dy مساوی صفر، از معادله (۲.۵.۱۳)، با ثابت گرفتن q ، به‌دست می‌آید

$$\frac{dE_s}{dy} = 0 = 1 - \frac{q^2}{gy^3}$$

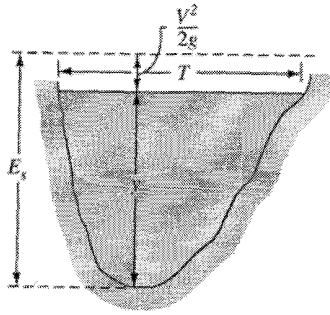
یا

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (3.5.13)$$

عمق مربوط به انرژی مینیمم، y_c ، عمق بحرانی نام دارد. با حذف q^2 در معادله‌های (۲.۵.۱۳) و (۳.۵.۱۳) به‌دست می‌آید

$$E_{s_{\min}} = \frac{3}{4} y_c \quad (4.5.13)$$

این رابطه نشان می‌دهد که عمق بحرانی مساوی دوسوم انرژی مخصوص است. با حذف E_s در



شکل ۸.۱۳ انرژی مخصوص یک مقطع غیرمستطیلی.

معادله‌های (۱.۵.۱۳) و (۴.۵.۱۳) نتیجه می‌شود

$$V_c = \sqrt{gy_c} \quad (۵.۵.۱۳)$$

سرعت شارش در حالت بحرانی، V_c ، عبارت است از $\sqrt{gy_c}$ ، که در بخش ۸.۱۰ در بحث مربوط به سرریز نوک‌پهن مورد استفاده قرار گرفت. روش دیگر رسیدن به حالت بحرانی عبارت است از تعیین ماکزیمم تخلیه q که می‌تواند در انرژی مخصوص مفروضی رخ دهد. معادله‌های حاصل مشابه معادله‌های (۳.۵.۱۳) و (۵.۵.۱۳) خواهند بود.

برای سطح مقطعهای غیرمستطیلی، مانند مقطعی که در شکل ۸.۱۳ نشان داده شده است، معادله انرژی مخصوص به صورت زیر درمی‌آید

$$E_s = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (۶.۵.۱۳)$$

که در آن، A مساحت سطح مقطع است. برای پیدا کردن عمق بحرانی می‌نویسیم

$$\frac{dE_s}{dy} = 0 = 1 - \frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy}$$

از شکل ۸.۱۳ رابطه بین dA و dy به صورت زیر بیان می‌شود

$$dA = T dy$$

که در آن، T عرض سطح مقطع در سطح آزاد است. با این رابطه، داریم

$$\frac{Q^2}{gA_c^3} T_c = 1 \quad (7.5.13)$$

عمق بحرانی باید در معادله فوق صدق کند. با حذف Q در معادله‌های (۶.۵.۱۳) و (۷.۵.۱۳) نتیجه می‌شود

$$E_s = y_c + \frac{A_c}{2T_c} \quad (8.5.13)$$

این معادله نشان می‌دهد که انرژی مینیمم وقتی رخ می‌دهد که سرعت مساوی نصف عمق متوسط A/T باشد. معادله (۷.۵.۱۳) را با حل آزمون برای مقاطع نامنظم با ترسیم رابطه زیر می‌توان حل کرد

$$f(y) = \frac{Q^2 T}{gA^3}$$

عمق بحرانی به ازای مقداری از y که $f(y) = 1$ باشد به دست می‌آید.

مثال ۳.۱۳ مطلوب است عمق بحرانی برای $10 \text{ m}^3/\text{s}$ که در یک کانال دوزنقه‌ای با عرض کف 3 m و شیبهای جانبی ۱ افقی به ۲ عمودی (۱ به ۲) جریان دارد.

حل

$$A = 3y + \frac{y^2}{2} \quad T = 3 + y$$

از این رو

$$f(y) = \frac{10^2(3+y)}{9.806(3y + y^2/2)^3} = \frac{10^2 198(3+y)}{(3y + 0.5y^2)^3} = 1.0$$

با حل آزمون داریم

y	۲.۰	۱.۲	۰.۸	۱.۰	۰.۹۹	۰.۹۸	۰.۹۸۵	۰.۹۸۴
$f(y)$	۰.۱	۰.۵۳	۱.۹۲	۰.۹۵	۰.۹۸۲	۱.۰۱۴	۰.۹۹۸	۱.۰۰۱۴

عمق بحرانی 0.984 m است. این حل آزمون با یک حسابگر قابل برنامه‌ریزی به سهولت اجرا می‌شود.

در شارش یکنواخت در کانال باز، خط انرژی به طرف پایین به موازات کف کانال شیب دارد، و از این روی کاهش پایا را در انرژی دسترسی پذیر نشان می‌دهد. مع‌هذا، انرژی به خصوص در طول کانال ثابت می‌ماند، زیرا $y + V^2/2g$ تغییر نمی‌کند. در شارش پایای غیریکنواخت، خط انرژی همیشه به طرف پایین شیب دارد، یا انرژی دسترسی پذیر کاهش می‌یابد. انرژی مخصوص ممکن است افزایش، یا کاهش یابد، که این افزایش یا کاهش به شیب کف کانال، تخلیه، عمق شارش، خواص سطح مقطع، و زبری کانال بستگی دارد. در شکل ۶.۱۳، انرژی مخصوص در طی شارش به طرف پایین قسمت سراسیب کانال افزایش، و در امتداد کف افقی کانال کاهش می‌یابد. رابطه‌های انرژی مخصوص و عمق بحرانی در مطالعه شارش تدریجاً متغیر و در تعیین مقاطع کنترل در شارش کانال باز رابطه‌های اساسی‌اند.

افت هد در پرش هیدرولیکی با ترسیم منحنی $F + M$ (شکل ۵.۱۳) و منحنی انرژی مخصوص (شکل ۷.۱۳) با مقیاس قائم یکسان در تخلیه یکسان به سهولت نشان داده می‌شود. در هر جایی که هر خط قائم معلومی منحنی $F + M$ را قطع کند عمقهای مزدوج وجود دارند. انرژی مخصوص در عمق بالایی همیشه ممکن است کمتر از انرژی مخصوص در عمق مزدوج پایینی متناظر مشاهده می‌شود.

مثال ۴.۱۳ آب با آهنگ $16 \text{ m}^3/\text{s}$ در نصف عمق بحرانی در یک کانال دوزنقه‌ای، $b = 4 \text{ m}$ و $\theta = 4^\circ$ ، قبل از وقوع پرش هیدرولیکی جریان دارد. ارتفاع پس از پرش و اتلاف انرژی برحسب کیلووات را پیدا کنید.

حل

معادله (۷.۵.۱۳) را با روش نیمساز برای y_c حل می‌کنیم. سپس نصف عمق بحرانی، y_1 ، را در نظر می‌گیریم، و در رابطه $F + M$ جایگذاری می‌کنیم

$$\frac{F + M}{\gamma} = \frac{m y^3}{3} + \frac{q^2}{g y (b + m y)}$$

اکنون این معادله را، با استفاده از روش نیمساز، برای ریشه بالای y_c ، که همان $(F + M)/\gamma$ را دارد، حل می‌کنیم.

$$\text{اتلاف} = \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} + y_1 - y_2 \quad \text{m.N/N}$$

$$\text{توان} = \frac{\gamma Q (\text{اتلاف})}{1000} \text{ kW}$$

با استفاده از تابع حل‌کننده در یک صفحه گسترده، ابتدا عمق بحرانی را و سپس عمق پس از پرش را پیدا می‌کنیم و نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$y_c = ۱۱۳۲\text{m} \quad y_2 = ۱۹۷۴\text{m}$$

$$\text{افت} = ۰.۷۲۷\text{m.N/N} \quad \text{اتلاف توان} = ۱۱۴\text{kW}$$

تمرینها

۱.۵.۱۳ شارش در عمق بحرانی وقتی الف) تغییرات مقاومت در فرادست، شرایط فرودست را تغییر دهد؛ ب) انرژی مخصوص برای یک تخلیه ماکزیمم باشد؛ ج) هر تغییری در عمق مستلزم انرژی مخصوص بیشتری باشد؛ د) عمق بهنجار و عمق بحرانی در یک کانال بر هم منطبق باشند؛ ه) سرعت با رابطه $\sqrt{2gy}$ داده شود، رخ می‌دهد.

۲.۵.۱۳ عمق بحرانی در یک کانال مستطیلی با رابطه زیر بیان می‌شود الف) \sqrt{Vy} ؛ ب) $\sqrt{2gy}$ ؛ ج) \sqrt{gy} ؛ د) $\sqrt{q/g}$ ؛ ه) $(q^2/g)^{1/3}$.

۳.۵.۱۳ عمق بحرانی در یک کانال غیرمستطیلی با رابطه زیر بیان می‌شود الف) $Q^2T/gA^3 = ۱$ ؛ ب) $QT^2/gA^2 = ۱$ ؛ ج) $Q^2A^3/gT^2 = ۱$ ؛ د) $Q^2/gA^3 = ۱$ ؛ ه) هیچکدام.

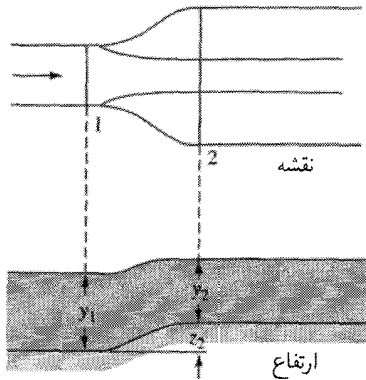
۴.۵.۱۳ انرژی مخصوص مینیمم برای شارشی که با $V = ۴.۴۳\text{m/s}$ ، $y = ۱\text{m}$ ، بیان می‌شود، برحسب متر نیوتن-بر نیوتن، عبارت است از الف) ۲؛ ب) ۳؛ ج) ۵.۴۳؛ د) ۹.۸۶؛ د) هیچکدام.

۵.۵.۱۳ انرژی مخصوص مینیمم برای یک شارش مساوی ۲.۴۷۵ft.lb/lb است. تخلیه بر فوت عرض، برحسب متر مکعب در ثانیه، عبارت است از الف) ۴.۲۶؛ ب) ۱۲.۰۲؛ ج) ۱۷؛ د) ۲۲.۱۵؛ ه) هیچکدام.

۶.۱۳ گذارها

در ورودیهای کانالها و در نقاط تغییر سطح مقطع و شیب کف، ساختاری که مایع را از مقطع فرادست تا مقطع جدید هدایت می‌کند یک گذار است. منظور از گذار تغییرشکل شارش و نمودار مقطع عمودی سطح به طریقی است که اتلافهای مینیمم حاصل شوند. در شکل ۹.۱۳ یک گذار از کانال مستطیلی به کانال دوزنقه‌ای در شارش آرام نشان داده شده است. با کاربرد معادله انرژی از مقطع ۱ تا مقطع ۲ نتیجه می‌شود

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + z_2 + E_L \quad (۱.۶.۱۳)$$



شکل ۹.۱۳ گذار از کانال مستطیلی به کانال دوزنقه‌ای در شارش آرام.

به‌طور کلی، مقاطع و عمقها با ملاحظات دیگری تعیین می‌شوند، و z مربوط به افت انرژی دسترسی‌پذیر E_e را باید تعیین کرد. با طراحی خوب، یعنی، با مخروطی کردن تدریجی دیواره‌ها و کف بدون تغییرات ناگهانی مساحت سطح مقطع، اتلافها را برای شارش شتابدار در حدود یک‌دهم اختلاف هدهای سرعت، و برای شارش تأخیری در حدود سدهم اختلاف بین هدهای سرعت می‌توان نگه داشت. در شارش سریع، برای طراحی کردن گذارها دانستن مکانیک موج ضروری است [مرجع ۳].

مثال ۵.۱۳ در شکل ۹.۱۳، 400 cfs در گذار جریان دارد؛ مقطع مستطیلی به عرض 8 ft است؛ و $y_1 = 8 \text{ ft}$. مقطع دوزنقه‌ای با عرض کف 6 ft و شیبهای جانبی $1:1$ است، و $y_2 = 7.5 \text{ ft}$. خیز z در کف گذار را تعیین کنید.

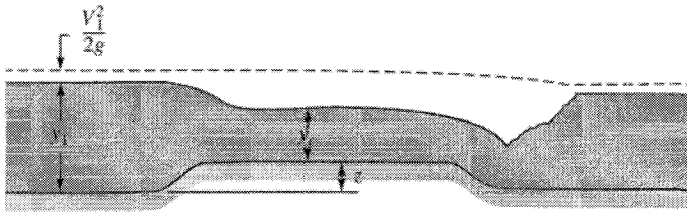
حل

$$V_1 = \frac{400}{64} = 6.25 \quad \frac{V_1^2}{2g} = 0.61 \quad A_2 = 101.25 \text{ ft}^2$$

$$V_2 = \frac{400}{101.25} = 3.95 \quad \frac{V_2^2}{2g} = 0.24 \quad E_e = 0.3 \left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \right) = 0.11$$

بعد از جایگذاری در معادله (۱.۶.۱۳)، داریم

$$z = 0.61 + 8 - 0.24 - 7.5 - 0.11 = 0.76 \text{ ft}$$



شکل ۱۰.۱۳ سنجه عمق بحرانی.

سنجه عمق بحرانی [مرجع ۴] وسیله مناسبی برای اندازه‌گیری تخلیه در کانال باز است. در یک کانال مستطیلی با عرض ثابت، شکل ۱۰.۱۳، که کف آن در فاصله‌ای از کانال به طول حدوداً $3y_c$ بالارونده است رابطه‌های مربوط به تعیین تخلیه استنتاج می‌شوند. ارتفاع کف بالارونده طوری است که مقطع محدودشده به مقطع کنترلی تبدیل می‌شود که در آن، سرعت شار به سرعت بحرانی می‌رسد. فقط با اندازه‌گیری عمق y_1 در فرادست، تخلیه در عرض واحد دقیقاً تعیین می‌شود. با کاربرد معادله انرژی از مقطع ۱ تا مقطع بحرانی (تعیین محل دقیق مهم نیست)، شامل جمله افت در گذار، به دست می‌آید

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = z + y_c + \frac{V_c^2}{2g} + 1 \left(\frac{V_c^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

از آنجا که

$$y_c + \frac{V_c^2}{2g} = E_c \quad \frac{V_c^2}{2g} = \frac{E_c}{3}$$

که در آن، E_c انرژی مخصوص در عمق بحرانی است، داریم

$$y_1 + 1 \frac{V_1^2}{2g} = z + 1 \cdot 33 E_c \quad (2.6.13)$$

از معادله (۳.۵.۱۳)، داریم

$$y_c = \frac{2}{3} E_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (3.6.13)$$

E_c را از معادله‌های (۲.۶.۱۳) و (۳.۶.۱۳) حذف، و معادله حاصل را برای q محاسبه می‌کنیم،

نتیجه می‌شود

$$q = 0.517g^{1/2} \left(y_1 - z + 1 \frac{V_1^2}{2g} \right)^{3/2}$$

از آنجا که $q = V_1 y_1$ ، V_1 را می‌توان حذف کرد. پس به دست می‌آید

$$q = 0.517g^{1/2} \left(y_1 - z + \frac{0.55 q^2}{g y_1^3} \right)^{3/2} \quad (4.6.13)$$

معادله با آزمون حل می‌شود. از آنجا که y_1 و z معلوم‌اند و جمله دست راست که شامل q است کوچک است، برای تخمین q ابتدا می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. همچنین می‌توان مقداری را که کمی بزرگتر از مقدار تقریبی q باشد در طرف راست معادله جایگزین کرد. اگر دو مقدار به دست آمده برای q یکسان باشند، معادله حل شده است. به محض اینکه z و عرض کانال معلوم شوند، نمودار یا جدولی می‌توان تهیه کرد که Q را برای هر y_1 به دست دهد. آزمایشها نشان می‌دهند که خطا فقط در حدود ۲ تا ۳ درصد است.

در شارش آرام پرش در فرودست سنجه، و در شارش سریع پرش در فرادست سنجه رخ می‌دهد.

مثال ۶.۱۳ در یک سنجه عمق بحرانی به عرض ۲ m با $z = 0.3$ m، عمق y_1 مساوی ۰.۷۵ m اندازه‌گیری می‌شود. تخلیه را پیدا کنید.

حل

با استفاده از معادله (۴.۶.۱۳)

$$q = 0.517(9.806^{1/2})(0.45^{3/2}) = 0.489 \text{ m}^2/\text{s}$$

به عنوان دومین تقریب فرض می‌کنیم q مساوی 0.5 باشد، نتیجه می‌شود

$$q = 0.517(9.806^{1/2}) \left[0.45 + \frac{0.55}{9.806} \times \left(\frac{0.5}{0.75} \right)^2 \right]^{3/2} = 0.530 \text{ m}^2/\text{s}$$

و به عنوان تقرب سوم، q را 0.535 می‌گیریم، نتیجه می‌شود

$$q = 0.517(9.806^{1/2}) \left[0.45 + \frac{0.55}{9.806} \times \left(\frac{0.535}{0.75} \right)^2 \right]^{3/2} = 0.536 \text{ m}^2/\text{s}$$

بنابراین

$$Q = 2(0.536) = 1.072 \text{ m}^3/\text{s}$$

تمرینها

۱۳.۱۶ افت در هر گذار همگرا حدوداً عبارت است از الف) $\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$ (ب) $\frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$ (ج) $\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$ (د) $\frac{(V_1^2 - V_2^2)}{2g}$ (ه) هیچکدام.

۱۳.۲۶ سنجهٔ عمق بحرانی الف) عمق را در مقطع بحرانی اندازه می‌گیرد؛ ب) همیشه یک پرش هیدرولیکی در جلوی آن است؛ ج) بلافاصله در فرادست باید یک شارش آرام داشته باشد؛ د) همیشه یک پرش هیدرولیکی در فرودست دارد؛ ه) همیشه یک پرش هیدرولیکی با آن همراه است.

۷.۱۳ شارش تدریجاً متغیر

شارش تدریجاً متغیر ردهٔ خاصی از شارش غیریکنواخت پایاست. عمق، مساحت، زبری، شیب کف، و شعاع هیدرولیکی در امتداد کانال خیلی کم تغییر می‌کند (یا هرگز تغییر نمی‌کند). فرض بنیادی ایجاب می‌کند که آهنگ افت هد در یک مقطع مفروض، بدون توجه به شیب کف، با فرمول مانینگ مربوط به همان عمق و تخلیه داده شود. با محاسبهٔ افت هد در طول واحد کانال از معادلهٔ (۱.۲.۱۳) نتیجه می‌شود

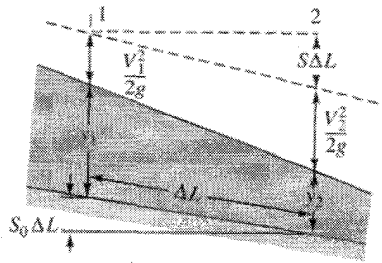
$$S = -\frac{\Delta E}{\Delta L} = \left(\frac{nQ}{C_m AR^{2/3}} \right)^2 \quad (1.7.13)$$

که در آن، S عبارت است از شیب خط انرژی، یا به‌طور مشخصتر، سینوس زاویه‌ای که خط انرژی با افق می‌سازد. در شارش تدریجاً متغیر شبیه‌های خط انرژی، خط هیدرولیکی، و کف همه با هم تفاوت دارند. محاسبه‌های شارش تدریجاً متغیر را یا با روش مرحله‌ای استاندارد و یا با انتگرال عددی می‌توان انجام داد. کانالهای افقی عریض را به عنوان حالت خاصی که می‌توان انتگرال‌گیری کرد بررسی می‌کنیم.

روش مرحله‌ای استاندارد

با کاربرد معادلهٔ انرژی بین دو مقطع به فاصله معین ΔL از هم، شکل ۱۱.۱۳، که شامل جمله افت باشد، نتیجه می‌شود

$$\frac{V_1^2}{2g} + S_0 \Delta L + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + S \Delta L \quad (2.7.13)$$



شکل ۱۱.۱۳ شارش تدریجاً متغیر.

با محاسبه طول فاصله از معادله فوق داریم

$$\Delta L = \frac{(V_1^2 - V_2^2)/2g + y_1 - y_2}{S - S_0} \quad (3.7.13)$$

اگر شرایط در مقطعی، مثلاً مقطع ۱، معلوم باشد، و عمق y_2 در فاصله دورتر ΔL مورد نظر باشد یک راه حل آزموننی لازم است. روش به صورت زیر است:

۱. یک عمق y_2 را فرض کنید؛ سپس A_2 و V_2 را محاسبه کنید.
۲. برای y_2 فرضی متوسط y ، P و A در فاصله خواسته شده [در کانالهای منشور $y = (y_1 + y_2)/2$ با A و R محاسبه شده برای این عمق را پیدا کنید و سپس S را محاسبه کنید].
۳. در معادله (۳.۷.۱۳) برای محاسبه ΔL نتیجه را جایگذاری کنید.
۴. اگر ΔL صحیح نباشد، یک y_2 جدید را فرض، و این مراحل را تکرار کنید.

مثال ۷.۱۳ در مقطع ۱ کانالی سطح مقطع به شکل ذوزنقه است، $b_1 = 10\text{ m}$ ، $m_1 = 2$ ، $y_1 = 7\text{ m}$ و در مقطع ۲، واقع در ۲۰۰ متری فرودست، کف 8 m بالاتر از مقطع ۱ است، $b_2 = 15\text{ m}$ و $m_2 = 3$ ، $Q = 200\text{ m}^3/\text{s}$ ، $n = 0.035$ ، عمق آب را در مقطع ۲ پیدا کنید.

حل

$$A_1 = b_1 y_1 + m_1 y_1^2 = 10(7) + 2(7^2) = 168\text{ m}^2 \quad V_1 = \frac{200}{168} = 1.19\text{ m/s}$$

$$P_1 = b_1 + 2y_1 \sqrt{m_1^2 + 1} = 10 + 2(7) \sqrt{2^2 + 1} = 41.3\text{ m}$$

$$S_0 = -\frac{0.08}{200} = -0.0004$$

چون کف دارای شیب معکوس است، یعنی، در طرف فرودست به سمت بالا می‌آید، و از آنجا که مقطع ۲ بزرگتر از مقطع ۱ است، y_2 احتمالاً کمتر از y_1 است. فرض می‌کنیم که $6.9\text{m} = y_2$ ؛ بنابراین

$$A_2 = 15(6.9) + 3(6.9^2) = 246\text{m}^2 \quad V_2 = \frac{200}{246} = 0.813\text{m/s}$$

و

$$P_2 = 15 + 2(6.9\sqrt{10}) = 58.6\text{m}$$

از متوسط $A = 207$ و قطر خیس شده متوسط $P = 50.0$ برای پیدا کردن شعاع هیدرولیکی در آن فاصله استفاده می‌شود، $R = 4.14\text{m}$. بنابراین

$$S = \left(\frac{nQ}{C_m A R^{2/3}} \right)^2 = \left[\frac{0.35(200)}{1.0(207)(4.14^{2/3})} \right]^2 = 0.000172$$

با جایگذاری در معادله (۳.۷.۱۳) به دست می‌آید

$$\Delta L = \frac{(1.19^2 - 0.813^2) / [2(9.806)] + 7 - 6.9}{0.000172 + 0.0004} = 242\text{m}$$

■ y_2 بزرگتری مانند 6.92m مقدار طول محاسبه شده را به طول واقعی نزدیکتر می‌کند.

روش مرحله‌ای استاندارد را با یک صفحه گسترده یا حسابگر قابل برنامه‌ریزی به سهولت می‌توان دنبال کرد. در اولین آزمون از y_2 برای ارزیابی جدید ΔL استفاده می‌کنیم. سپس یک تناسب خطی، آزمون جدیدی از جدید y_2 برای مرحله بعد را به دست می‌دهد؛ بدین ترتیب:

$$\frac{y_1 - y_2}{\Delta L_{\text{جدید}}} = \frac{y_1 - y_{2\text{جدید}}}{\Delta L_{\text{مفروض}}}$$

یا

$$y_{2\text{جدید}} = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{\Delta L_{\text{مفروض}}}{\Delta L_{\text{جدید}}}$$

با چند بار تکرار، اطلاعات کامل در مورد مقطع ۲ به دست می‌آید.

روش انتگرال‌گیری عددی

روش رضایت‌بخش‌تری بخصوص برای شارش در کانالهایی که سطح مقطعی با شکل ثابت و شیب کف ثابتی دارند، وجود دارد که عبارت است از به دست آوردن یک معادله دیفرانسیل برحسب y و

L و سپس انتگرال‌گیری به‌طور عددی. اگر ΔL را به عنوان یک بی‌نهایت کوچک در شکل ۱۱.۱۳ در نظر بگیریم، آهنگ تغییر انرژی دسترس‌پذیر مساوی است با آهنگ افت هد $-\Delta E/\Delta L$ که با معادله (۱.۷.۱۳) داده می‌شود، یعنی

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{V^3}{2g} + z_0 - S_0 L + y \right) = - \left(\frac{nQ}{C_m AR^{2/3}} \right)^2 \quad (۴.۷.۱۳)$$

که در آن، $z_0 - S_0 L$ عبارت است از ارتفاع کف کانال در L ، و z_0 ارتفاع کف در $L = 0$ است، و L در جهت فرودست با علامت مثبت اندازه‌گیری می‌شود. بعد از دیفرانسیل‌گیری داریم

$$-\frac{V}{g} \frac{dV}{dL} + S_0 - \frac{dy}{dL} = \left(\frac{nQ}{C_m AR^{2/3}} \right)^2 \quad (۵.۷.۱۳)$$

با استفاده از معادله پیوستگی $VA = Q$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dV}{dL} A + V \frac{dA}{dL} = 0$$

و با بیان کردن $dA = T dy$ ، که در آن، T عرض سطح مایع در مقطع است، چنین می‌شود

$$\frac{dV}{dL} = -\frac{VT}{A} \frac{dy}{dL} = -\frac{QT}{A^2} \frac{dy}{dL}$$

با جایگذاری برای V در معادله (۵.۷.۱۳) به دست می‌آید

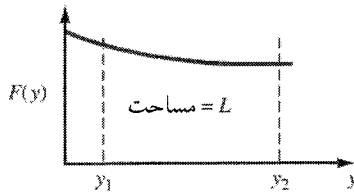
$$\frac{Q^3}{gA^2} T \frac{dy}{dL} + S_0 - \frac{dy}{dL} = \left(\frac{nQ}{C_m AR^{2/3}} \right)^2$$

و با محاسبه dL نتیجه می‌شود

$$dL = \frac{1 - Q^3 T / g A^2}{S_0 - (nQ / C_m AR^{2/3})^2} dy \quad (۶.۷.۱۳)$$

بعد از انتگرال‌گیری داریم

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1 - Q^3 T / g A^2}{S_0 - (nQ / C_m AR^{2/3})^2} dy \quad (۷.۷.۱۳)$$



شکل ۱۲.۱۳ انتگرال عددی معادله شارش تدریجاً متغیر.

که در آن، L عبارت است از فاصله بین دو مقطع به عمقهای y_1 و y_2 .
 وقتی صورت انتگرال مساوی صفر است، شارش بحرانی حاکم است؛ با تغییر y (با صرف نظر از انحنای شارش و توزیع فشار غیرهیدروستاتیکی در این مقطع) هیچ تغییری برای L وجود ندارد. از آنجا که این حالت تغییر تدریجی عمق نیست، معادله‌ها در نزدیک عمق بحرانی دقیق نیستند. وقتی مخرج انتگرال مساوی صفر است، شارش یکنواخت حاکم است و هیچ تغییری برای عمق در امتداد کانال وجود ندارد. شارش در عمق بهنجار است.
 در یک کانال با سطح مقطع منشوری، n و S_0 ثابت، انتگرال فقط تابعی از y می‌شود

$$F(y) = \frac{1 - Q^2 T / g A^3}{S_0 - (nQ / C_m A R^{2/3})^2}$$

و معادله را با ترسیم $F(y)$ به‌عنوان عرض، برحسب y به‌عنوان طول به‌طور عددی می‌توان انتگرال‌گیری کرد. مساحت زیر منحنی (شکل ۱۲.۱۳) بین دو مقدار y عبارت است از طول L بین مقاطع، زیرا

$$L = \int_{y_1}^{y_2} F(y) dy$$

مثال ۸.۱۳ یک کانال دوزنقه‌ای، $b = 3\text{m}$ ، $m = 1$ ، $n = 0.14$ ، $S_0 = 0.01$ ، $Q = 28\text{m}^3/\text{s}$ را حمل می‌کند. اگر عمق در مقطع ۱ مساوی ۳m باشد، نمودار مقطع عمودی سطح آب را در 70°m بعدی فرودست تعیین کنید.

حل

برای تعیین اینکه عمق افزایش، یا کاهش یابد، خط انرژی در مقطع ۱ را حساب می‌کنیم [با استفاده

از معادله (۱.۷.۱۳)

$$A = by + my^3 = 3(3) + 1(3^3) = 18m^3$$

$$P = b + 2y\sqrt{m^2 + 1} = 11,485m$$

و

$$R = \frac{18}{11,485} = 1,567m$$

بنابراین

$$S = \left[\frac{0,14(28)}{18(1,567^{1/3})} \right]^2 = 0,00026$$

با جایگذاری در معادله (۷.۵.۱۳) مقادیر A ، Q ، و $T = 9m$ ، $Q^3T/gA^3 = 0,12$ نشان می‌دهد که عمق بیشتر از عمق بحرانی است. با بیشتر بودن عمق از عمق بحرانی و کمتر بودن شیب خط انرژی از شیب کف کانال، انرژی مخصوص افزایش می‌یابد. وقتی انرژی مخصوص تا مقداری بیشتر از انرژی بحرانی افزایش یافت، عمق شارش افزایش می‌یابد. در آن صورت Δy مثبت است. با جایگذاری در معادله (۷.۷.۱۳) به دست می‌آید

$$L = \int_r^y \frac{1 - 79,95T/A^3}{0,001 - 0,1537/(A^3R^{1/3})} dy$$

جدول زیر جمله‌های انتگرال را تعیین می‌کند.

L	$F(y)$	مخرج $\times 10^4$	صورت	T	R	P	A	y
۰	۱۱۸۵	۷۳۹	۰,۸۷۶۶	۹	۱,۵۷	۱۱,۴۸	۱۸	۳
۲۳,۱۶	۱۱۳۱	۷۹۹	۰,۹۰۳۸	۹,۴	۱,۶۵	۱۲,۰	۱۹,۸۴	۳,۲
۴۵۴,۳	۱۰۹۶	۸۴۳	۰,۹۲۴۰	۹,۸	۱,۷۲	۱۲,۶۲	۲۱,۷۶	۳,۴
۶۷۱,۱	۱۰۷۲	۸۷۶	۰,۹۳۹۲	۱۰,۲	۱,۸۰	۱۳,۱۸	۲۳,۷۶	۳,۶
۸۸۳,۹	۱۰۵۶	۹۰۱	۰,۹۵۰۹	۱۰,۶	۱,۸۸	۱۳,۷۵	۲۵,۸۴	۳,۸

انتگرال $\int F(y)dy$ را با ترسیم منحنی و محاسبه سطح زیر آن بین $y = 3$ و مقادیر بعدی y می‌توان حل کرد. از آنجا که $F(y)$ در این مثال تغییر زیادی نمی‌کند، از متوسط $F(y)$ در

هر فاصله می‌توان استفاده کرد (دستور ذوزنقه)؛ و وقتی آن را در Δy ضرب کنیم، طول فاصله به دست می‌آید.

$$\text{بین } y = 3 \text{ و } y = 3.2 \text{ داریم}$$

$$\frac{1185 + 1131}{2} \cdot 0.2 = 231.6$$

$$\text{بین } y = 3.2 \text{ و } y = 3.4 \text{ داریم}$$

$$\frac{1131 + 1096}{2} \cdot 0.2 = 222.7$$

و الی آخر. پنج نقطه روی آن معلوم است، به طوری که سطح آب را می‌توان رسم کرد. روش دقیقتر جمع کردن $F(y)$ برای به دست آوردن L استفاده از قانون سیمپسون است، (صفحه ۷ و ببینید). روش مورد استفاده معادل حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم رونگه-کوتا است، (صفحه ۷ و ببینید). یک حسابگر قابل برنامه‌ریزی برای انجام این راه حل مورد استفاده قرار گرفته است. با فرض $\Delta y = 0.1 \text{ m}$ به جای 0.2 m تا $y = 3.6 \text{ m}$ طول مساوی 0.6 m است. ■

کانالهای افقی عریض

در کانالهای عریض شعاع هیدرولیکی مساوی عمق است؛ و در کانال با کف افقی، $S_0 = 0$ ؛ از این رو، معادله (۷.۷.۱۳) را می‌توان ساده کرد. عرض را می‌توان برابر یک در نظر گرفت؛ یعنی، $T = 1$ ، $Q = q$ و $A = y$ ؛ بدین ترتیب

$$L = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{1 - q^2 / gy^{3/2}}{n^2 q^2 / C_m^2 y^{10/3}} dy \quad (8.7.13)$$

یا، بعد از اجرای انتگرال به دست می‌آید

$$L = - \frac{3}{13} \left(\frac{C_m}{nq} \right)^2 (y^{13/3} - y_1^{13/3}) + \frac{3}{4g} \left(\frac{C_m}{n} \right)^2 (y^{4/3} - y_1^{4/3}) \quad (9.7.13)$$

مثال ۹.۱۳ آب بعد از جمع شدن در زیر دریچه یک سد، بر روی کف افقی عریضی با سرعت 15 m/s و عمق 0.7 m جریان می‌یابد. معادله‌ای برای نمودار مقطع عمودی سطح آب پیدا کنید، $n = 0.15$

حل

از معادله (۹.۷.۱۳)، که در آن، x به جای L به عنوان فاصله از مقطع ۱، جایی که $y_1 = ۰.۷$ ، قرار داده شده است، و با $q = ۰.۷(۱۵) = ۱۰.۵ \text{ m}^2/\text{s}$ ، داریم

$$x = -\frac{3}{13} \left(\frac{1}{0.7 \cdot 15(10.5)} \right)^2 (y^{13/2} - 0.7^{13/2}) + \frac{3}{4(9.7806)} \left(\frac{1}{0.7 \cdot 15} \right)^2 (y^{4/2} - 0.7^{4/2})$$

$$= -20.93 - 9.30 y^{13/2} + 34.0 y^{4/2}$$

عمق بحرانی [معادله (۳.۵.۱۳)] عبارت است از

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{10.5^2}{9.7806} \right)^{1/3} = 2.24 \text{ m}$$

عمق در فرودست باید افزایش یابد، زیرا انرژی مخصوص کاهش می‌یابد، و عمق برای انرژی مخصوص کمتر باید به مقدار بحرانی نزدیک شود. معادله در نزدیک عمق بحرانی، به علت شباهای قائمی که در استنتاج شارش تدریجاً متغیر از آنها صرف‌نظر شده است، کاربرد ندارد. اگر کانال آقدر طولی باشد که عمق بحرانی قبل از انتهای کانال به دست آید، شارش پرسرعت در فرودست دریچه ممکن است فرو نشیند و یا یک پرش رخ دهد. محاسبه سطح آب برای شارش زیر بحرانی در انتهای فرودست کانال را باید با عمق بحرانی شروع کرد. ■

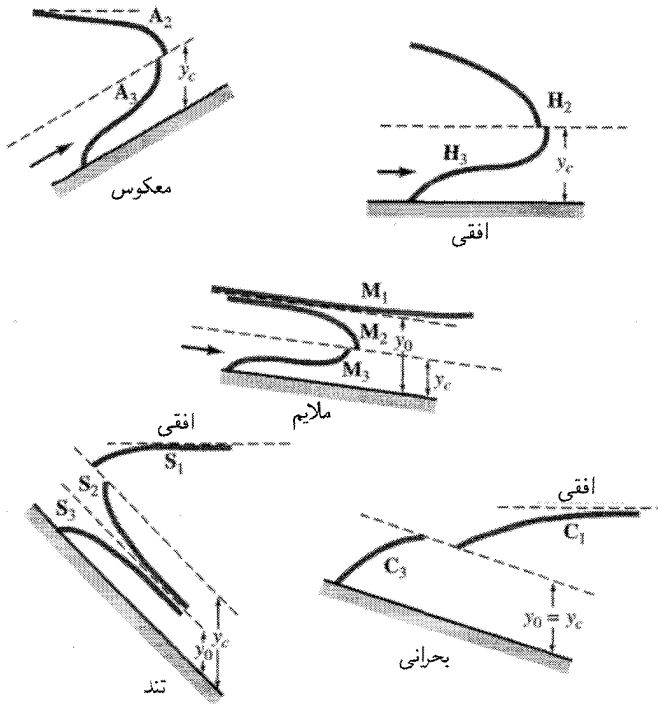
بعد از اینکه انواع مختلف نمودارهای مقطع عمودی شارش تدریجاً متغیر را رده‌بندی کردیم محاسبه نمودارهای مقطع عمودی سطح آب به کمک کامپیوتر رقمی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

تمرین

۱۰.۷.۱۳ شارش تدریجاً متغیر عبارت است از الف) شارش یکنواخت پایا؛ ب) شارش غیریکنواخت پایا؛ ج) شارش یکنواخت ناپایا؛ د) شارش غیریکنواخت ناپایا؛ ه) هیچکدام.

۸.۱۳ رده‌بندی نمودارهای مقطع عمودی سطح

بررسی معادله (۷.۷.۱۳) انواع زیادی از نمودارهای مقطع عمودی سطح را نمایان می‌سازد، که هر یک مشخصه مخصوص به خود را داراست. شیب کف به انواع معکوس، افقی، ملایم، بحرانی، و تند رده‌بندی می‌شود؛ و به‌طور کلی، شارش می‌تواند در بالای عمق بهنجار یا پایین عمق بهنجار، همچنین می‌تواند در بالای عمق بحرانی یا پایین عمق بحرانی باشد.



شکل ۱۳.۱۳ نمودارهای مقطع عمودی مختلف سطح مایع.

انواع نمودارهای مقطع عمودی در شکل ۱۳.۱۳ رسم شده‌اند؛ روشهای مورد استفاده برای هریک از این رده‌ها را در پاراگرافهای بعد مورد بحث قرار می‌دهیم. در معادله‌های تبدیل‌یافته که به دنبال می‌آیند، با فرض $R = y$ کانال از نوع خیلی عریض فرض می‌شود.

نمودارهای مقطع عمودی شیب معکوس

وقتی کف کانال در جهت شارش بالا می‌رود (S_0 منفی است)، نمودارهای مقطع عمودی حاصل سطح را معکوس می‌نامند. عمق بهنجاری وجود ندارد، بلکه شارش ممکن است در زیر عمق بحرانی یا بالای عمق بحرانی باشد. در زیر عمق بحرانی صورت منفی است، و معادله (۶.۷.۱۳) به صورت زیر است

$$dL = \frac{1 - C_1/y^3}{S_0 - C_2/y^{10/3}} dy$$

که در آن، C_1 و C_2 ثابتهای مثبت‌اند. در اینجا $F(y)$ مثبت است و عمق در فرودست افزایش

می‌یابد. این منحنی با A_3 علامت‌گذاری، و در شکل ۱۳.۱۳ نشان داده شده است. در عمقهای بیشتر از عمق بحرانی، صورت مثبت، و $F(y)$ منفی است؛ یعنی، عمق در جهت فرودست کاهش یابد. برای y خیلی زیاد، $dL/dY = 1/S_0$ که یک مجانب افقی برای منحنی است. در $y = y_c$ ، dL/dy مساوی ۰ است، و منحنی بر خط عمق بحرانی عمود است. این منحنی با A_2 علامت‌گذاری شده است.

نمودارهای مقطع عمودی شیب افقی

در کانال افقی $S_0 = 0$ ، عمق بهنجاری بی‌نهایت است و شارش ممکن است در زیر عمق بحرانی یا بالای عمق بحرانی باشد. معادله به صورت زیر است

$$dL = -Cy^{1/3}(y^2 - C_1)dy$$

برای y کمتر از بحرانی، dL/dy مثبت است، و عمق در فرودست افزایش می‌یابد. این حالت با H_2 علامت‌گذاری شده است. برای y بزرگتر از بحرانی (منحنی H_2)، dL/dy منفی است، و عمق در فرودست کاهش می‌یابد. این معادله‌ها برای کانالهای خیلی عریض به‌طور تحلیلی انتگرال‌پذیرند.

نمودارهای مقطع عمودی شیب ملایم

شیب ملایم شیبی است که شارش بهنجاری روی آن به صورت آرام است؛ یعنی، جایی که عمق بهنجاری y_c ، بیشتر از عمق بحرانی است. سه نمودار مقطع عمودی ممکن است رخ دهد، M_1 ، M_2 ، M_3 که به ترتیب برای عمق بالای بهنجاری، زیر بهنجاری و بالای بحرانی، و زیر بحرانی هستند. در منحنی M_1 ، dL/dy مثبت است و برای y خیلی بزرگ به $1/S_0$ نزدیک می‌شود؛ از این رو، منحنی دارای یک مجانب افقی در فرودست است. از آنجا که با نزدیک شدن y به y_c ، مخرج به صفر نزدیک می‌شود، عمق بهنجاری یک مجانب در انتهای فرادست منحنی است. بدین ترتیب، dL/dy در منحنی M_2 منفی است، عمق بهنجاری یک مجانب فرادست برای منحنی است، و در عمق بحرانی $dL/dy = 0$ است. منحنی M_3 ، مطابق شکل، عمقی افزایش‌یابنده در فرودست دارد.

نمودارهای مقطع عمودی شیب بحرانی

وقتی عمق بهنجاری و عمق بحرانی مساوی باشند، نمودارهای مقطع عمودی حاصل برای عمق بالای

بحرانی و زیربحرانی به ترتیب با C_1 و C_2 علامت‌گذاری می‌شوند. معادله به صورت زیر است

$$dL = \frac{1}{S_0} \frac{1 - b/y^2}{1 - b/y^{10/3}} dy$$

که صورت و مخرج هر دو در C_1 مثبت و در C_2 منفی‌اند. بنابراین، عمق در فرودست برای هر دو حالت افزایش می‌یابد. در y بزرگ، dL/dy به $1/S_0$ نزدیک می‌شود؛ از این رو، خط افقی به صورت مجانب است. مقدار dL/dy در عمق بحرانی مساوی $9/S_0$ است؛ از این رو، منحنی C_1 به طرف بالا محدب است. منحنی C_2 نیز، مطابق شکل، به طرف بالا محدب است.

نمودارهای مقطع عمودی شیب تند

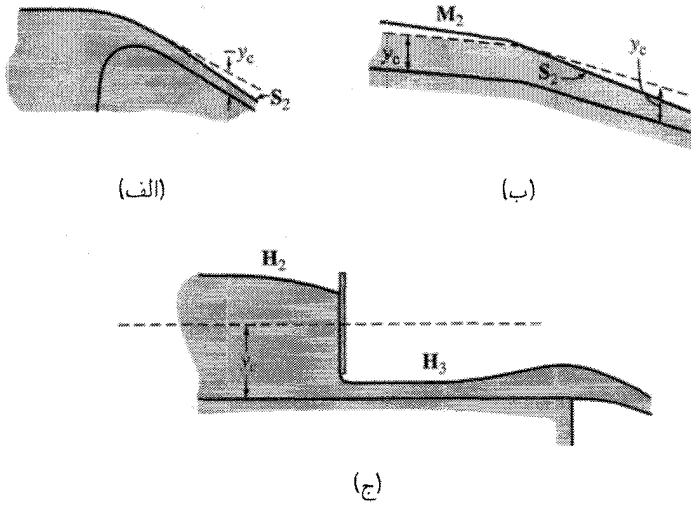
وقتی شارش بهنجار در یک کانالی سریع باشد (عمق بهنجار کمتر از عمق بحرانی است)، نمودارهای مقطع عمودی حاصل S_1 ، S_2 ، S_3 به عنوان نمودارهای مقطع عمودی شیب تند هستند: S_1 بالای عمق بهنجار و بحرانی است، S_2 بین عمق بحرانی و بهنجار است، و S_3 زیر عمق بهنجار است. در منحنی S_1 صورت و مخرج هر دو مثبت‌اند، و عمق در فرودست افزایش می‌یابد و به مجانب افقی نزدیک می‌شود. در منحنی S_2 صورت منفی، و مخرج مثبت است اما در $y = y_0$ به صفر نزدیک می‌شود. منحنی به طور مجانبی به عمق بهنجار نزدیک می‌شود. در منحنی S_3 ، dL/dy مثبت است زیرا صورت و مخرج هر دو منفی‌اند. این منحنی مطابق شکل ۱۳.۱۳ رسم می‌شود.

باید توجه داشت که یک کانال مشخص ممکن است برای تخلیه‌ای به صورت ملایم، برای تخلیه دیگری به صورت بحرانی، و برای تخلیه سوم به صورت تند رده‌بندی می‌شود، زیرا عمق بهنجار و عمق بحرانی به توابع مختلف تخلیه بستگی دارند. استفاده از نمودارهای مقطع عمودی مختلف سطح را در قسمت بعد بررسی می‌کنیم.

۹.۱۳ مقاطع کنترل

وقتی عمقی بحرانی، یا کمتر از بحرانی باشد، تغییرات کوچک در شرایط فرودست نمی‌توانند به فرادست منتقل شوند؛ از این رو، شرایط فرودست شارش را کنترل نمی‌کنند. تمام شارشهای سریع با شرایط فرادست کنترل می‌شوند، و محاسبه‌های نمودارهای مقطع عمودی سطح را باید از انتهای فرادست کانال شروع کرد.

شارشهای آرام تحت تأثیر تغییرات کوچک در شرایط فرودست‌اند و بنابراین با آنها کنترل

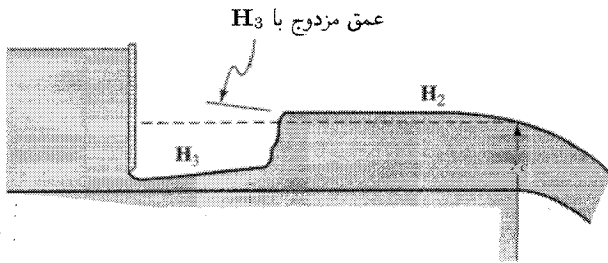


شکل ۱۴.۱۳ مقاطع کنترل کانال.

می‌شوند. محاسبه‌های شارش آرام باید از انتهای فرودست یک فاصله شروع شود و تا فرادست ادامه یابد.

مقاطع کنترل در ورودی و خروجی کانال و در تغییرات شیب کانال، تحت شرایط معینی، وجود دارند. یک دریچه می‌تواند مقطع کنترلی برای هر دو فاصله فرادست و فرودست کانال باشد. سه مقطع کنترل در شکل ۱۴.۱۳ نشان داده شده است. در (الف) شارش در ورودی به کانال از عمق بحرانی می‌گذرد، و عمق را در آنجا برای یک تخلیه مشخص می‌توان محاسبه کرد. شیب کانال تند است؛ بنابراین، محاسبات را باید از فرودست شروع کرد. در (ب) تغییر شیب کانال از ملایم به تند باعث می‌شود که شارش در محل شکستگی شیب از عمق بحرانی بگذرد. محاسبه‌ها در فرادست و فرودست مقطع کنترل واقع در شکستگی شیب را باید همزمان آغاز کرد. در (ج) دريچه‌ای در داخل کانال افقی، فرادست و فرودست خود را کنترل می‌کند. منحنیهای مختلف را باید بر طبق رده‌بندی شکل ۱۳.۱۳ علامت‌گذاری کرد.

اگر شرایط لازم برای معادله اندازه حرکت برآورده شوند پرش هیدرولیکی رخ می‌دهد. در شکل ۱۵.۱۳، از زیر دريچه‌ای در مسیر شارش سریع که در راستای یک کانال افقی است مایع خارج می‌شود. اگر کانال نسبتاً کوتاه می‌بود، شارش می‌توانست به صورت منحنی H_3 روی انتهای کانال تخلیه شود. ولی، با طولیتر بودن کانال، پرش رخ می‌دهد و نمودار مقطع عمودی حاصل شامل تکه‌های منحنیهای H_2 و H_2 با پرش بین آنها می‌شود. برای محاسبه این نمودارهای مقطع عمودی در یک تخلیه معلوم، منحنی H_3 را باید محاسبه کرد، و این



شکل ۱۵.۱۳ پرش هیدرولیکی بین دو مقطع کنترل.

محاسبه را از دریچه شروع کرد (ضریب انقباض باید معلوم باشد) و تا فرودست ادامه داد تا جایی که مشخص شود که قبل از انتهای کانال، عمق به عمق بحرانی رسیده است. سپس منحنی H_2 را محاسبه می‌کنیم، و این محاسبه از عمق بحرانی در انتهای کانال شروع می‌شود و تا فرادست ادامه می‌یابد. عمقهای مزدوج با عمقهای واقع در امتداد H_3 محاسبه، و مطابق شکل ترسیم می‌شوند. محل تلاقی منحنی عمق-مزدوج و منحنی H_2 مکان پرش را تعیین می‌کند. کانال ممکن است به قدری طویل باشد که منحنی H_2 در همه جا بیشتر از عمق مزدوج متناظر با H_3 باشد. بنابراین پرش فروکش شده رخ می‌دهد، که با H_2 ثابت تا دریچه ادامه می‌یابد.

تمام نمودارها در مختصات رسم شده‌اند که محور قائم آن با مقیاس بزرگتر و اغراق آمیزی نسبت به محور افقی رسم شده است، زیرا کانالهای معمولی شیب کف کمی دارند.

تمرین

۱.۹.۱۳ پرش هیدرولیکی همیشه از الف) منحنی M_2 به منحنی M_1 ؛ ب) منحنی H_3 به منحنی H_2 ؛ ج) منحنی S_3 به منحنی S_1 ؛ د) زیر عمق بهنجار به بالای عمق بهنجار؛ ه) زیر عمق بحرانی به بالای عمق بحرانی رخ می‌دهد.

۱۵.۱۳ محاسبه کامپیوتری شارش تدریجاً متغیر

در بخش ۷.۱۳ روشهای مرحله‌ای استاندارد و انتگرال عددی مربوط به محاسبه نمودارهای مقطع عمودی سطح آب را نشان دادیم. محاسبه تکراری روش انتگرال عددی را با یک کامپیوتر رقمی یا با استفاده از یک زبان برنامه‌ریزی استاندارد یا یک صفحه گسترده می‌توان به سهولت انجام داد. شکل ۱۶.۱۳ یک صفحه گسترده را برای محاسبه نمایه سطح آب تدریجاً متغیر

Water surface profile calculation

Q =	2.5 m ³ /s	Gamma =	9806 N/m ³
b =	2.5 m	Cm =	1
m =	0.8	g =	9.806 m/s ²
S0 =	0.0002	n =	0.012
L =	600 m	Ycont =	0.907 m

Calculate critical & normal depths

yc =	1.7802 m	1st Solver:	F = 0.0, by varying yc
F =	-1.6571E - 06 = Q ² *(b + 2*m*yc)/(g*(yc*(b + m*yc))^3) - 1	2nd Solver:	Fn = 0.0, by varying yn
yn =	3.1899 m		
Fn =	1.5921E - 10 = S0 - (n*Q*(b + 2*yn*SQRT(m ² + 1))^0.66667/(Cm*(yn*(b + m*yn))^5/3))^2		

Calculate water surface profile

dy = 0.04365768 = (yc - Ycont)/20

y	yave	dL	distance	energy	(F+M)/Gamma
0.907		0.000	0.000	4.630	23.013
0.951	0.929	19.401	19.401	4.268	21.921
0.994	0.972	19.166	38.566	3.962	20.949
1.038	1.016	18.879	57.445	3.705	20.083
1.082	1.060	18.537	75.981	3.487	19.310
1.125	1.103	18.136	94.117	3.302	18.621
1.169	1.147	17.672	111.789	3.145	18.007
1.213	1.191	17.141	128.930	3.012	17.461
1.256	1.234	16.538	145.468	2.900	16.976
1.300	1.278	15.858	161.326	2.805	16.549
1.344	1.322	15.095	176.420	2.725	16.173
1.387	1.365	14.242	190.662	2.658	15.845
1.431	1.409	13.292	203.954	2.603	15.562
1.475	1.453	12.239	216.193	2.557	15.320
1.518	1.496	11.073	227.266	2.520	15.116
1.562	1.540	9.785	237.050	2.491	14.949
1.606	1.584	8.364	245.415	2.469	14.816
1.649	1.627	6.800	252.215	2.452	14.715
1.693	1.671	5.080	257.295	2.441	14.644
1.736	1.715	3.190	260.485	2.435	14.603
1.780	1.758	1.113	261.599	2.433	14.590

شکل ۱۶.۱۳ صفحه گسترده برای نمایه‌های سطح آزاد.

پایا در کانال مستطیلی مشوری، مثلثی، یا ذوزنقه‌ای متقارن را نشان می‌دهد. برای اینکه بتوانیم از صفحه گسترده به‌خوبی استفاده کنیم، مفاهیم مقاطع کنترل فیزیکی در یک کانال را باید بدانیم.

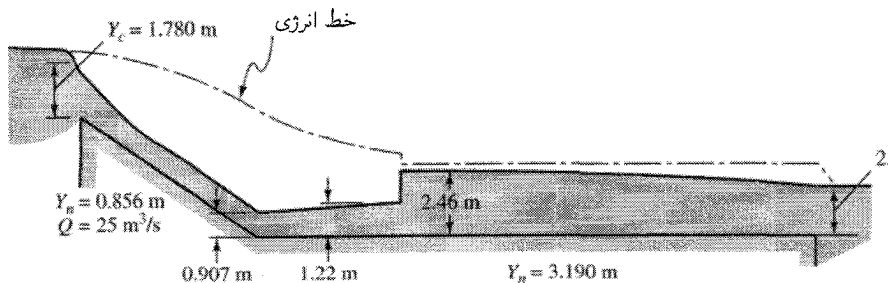
در صفحه گسترده نامهای متغیر تعریف می‌شوند تا داده‌های ورودی شامل ابعاد کانال، تخلیه، و عمق کنترل سطح آب مشخص شوند. عمق بحرانی و عمق بهنجاری (اگر وجود داشته باشد)

با استفاده از تابع حل‌کننده محاسبه می‌شوند. پس از آن محاسبه نمایه، که از مقطع کنترل شروع می‌شود و تا فرادست برای شارش فروبحرانی یا فرودست برای شارش فرابحرانی پیش می‌رود، انجام می‌شود. در ستون dL ، از عمق متوسط برای محاسبه $F(y)$ در معادله (۶.۷.۱۳) استفاده می‌شود. در صورت لزوم، انرژی و $(F + M)/\gamma$ را نیز می‌توان محاسبه کرد. داده‌های مورد استفاده مربوط به مثال زیرند.

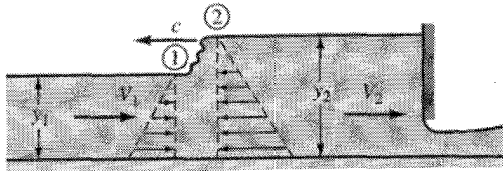
مثال ۱۰.۱۳ یک کانال دوزنقه‌ای، $b = ۲.۵\text{m}$ ، شیب جانبی $= ۸^\circ$ ، دو شیب کف دارد. در قسمت فرادست طول $S_0 = ۲۵۰.۲\text{m}$ ، در قسمت فرودست، طول $S_0 = ۶۰۰\text{m}$ ، $\theta = ۰.۲^\circ$ و $S_0 = ۰.۲^\circ$ ، تخلیه $m = ۰.۱۲$ از مخزنی واقع در انتهای فرادست به عمق بحرانی وارد می‌شود، عمق آب در انتهای فرودست سیستم مساوی ۲m است. نمایه‌های سطح آب در سرتاسر سیستم، شامل تعیین محل پرش را تعیین کنید.

حل

از صفحه گسترده شکل ۱۶.۱۳ در سه زمان استفاده می‌شود و از نتایج به دست آمده برای ترسیم حل در شکل ۱۷.۱۳ استفاده می‌شود. ابتدا عمق بحرانی و عمق بهنجار برای فرادست تند کانال محاسبه می‌شوند، سپس نمایه سطح آب که از عمق بحرانی فرادست شروع می‌شود محاسبه می‌شود. برای پیدا کردن عمق انتهایی در فاصله ۲۰۰m در فرودست، درون‌یابی لازم می‌شود. برای عمق کنترل در محاسبه بعدی، که شارش فرادست (فرابحرانی) در کانال ملایم است این عمق ۹.۷m لازم می‌شود. این داده‌ها در شکل ۱۶.۱۳ همراه با نتایج نشان داده شده‌اند. در محاسبه نهایی از عمق کنترل ۲m فرودست استفاده می‌شود و نمایه سطح آب در امتداد فرادست محاسبه می‌شود. در شکل ۱۷.۱۳، با پیدا کردن مکان معادل $F + M$ از خروجی دو مجموعه داده‌های آخر، محل پرش تعیین می‌شود.



شکل ۱۷.۱۳ جواب مثال که از صفحه گسترده به دست آمده است.



شکل ۱۸.۱۳ موج ضربه‌ای مثبت در کانال مستطیلی.

۱۱.۱۳ موج ضربه‌ای مثبت بی‌اصطکاک در کانال مستطیلی

در این قسمت موج ضربه‌ای ناشی از یک تغییر ناگهانی (بر اثر یک دریاچه یا مکانیزم دیگری) را که عمق را افزایش می‌دهد مطالعه می‌کنیم. کانال را مستطیلی فرض می‌کنیم، و از اصطکاک صرف نظر می‌کنیم. چنین وضعیتی در شکل ۱۸.۱۳ کمی بعد از انسداد ناگهانی قسمتی از یک دریاچه نشان داده شده است. مسئله را می‌توان با تبدیل آن به مسئله‌ای با حالت پایا، مانند شکل ۱۹.۱۳ تحلیل کرد. معادله پیوستگی، بر عرض واحد، چنین می‌شود

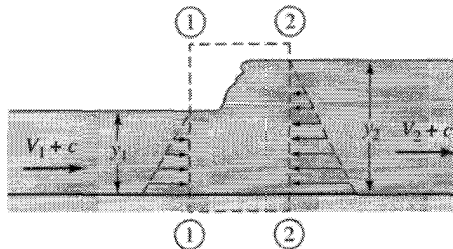
$$(V_1 + c)y_1 = (V_2 + c)y_2 \quad (۱.۱۱.۱۳)$$

و معادله اندازه حرکت برای حجم کنترل ۱-۲، با صرف نظر از تنش برشی وارد به کف، در عرض واحد، عبارت است از

$$\frac{\gamma}{4}(y_1^2 - y_2^2) = \frac{\gamma}{g}y_1(V_1 + c)(V_2 + c - V_1 - c) \quad (۲.۱۱.۱۳)$$

با حذف V_2 در دو معادله آخر، داریم

$$V_1 + c = \sqrt{gy_1} \left[\frac{y_2}{2y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1} \right) \right]^{1/2} \quad (۳.۱۱.۱۳)$$



شکل ۱۹.۱۳ مسئله ضربه که با برهم‌نهی سرعت ضربه به مسئله‌ای با حالت پایا تبدیل شده است.

موج ضربه‌ای مثبت بی‌اصطکاک در کانال مستطیلی ۸۳۱

از این صورت معادله سرعت موج ابتدایی با نزدیک کردن y_2 به سمت y_1 به صورت زیر به دست می‌آید

$$V_1 + c = \sqrt{gy} \quad (۴.۱۱.۱۳)$$

وقتی با برهم‌نهی $V = -c$ مسئله به صورت ناپایا تبدیل شود، برای انتشار داخل مایع ساکن داریم $V_1 \rightarrow 0$ و سرعت موج عبارت است از $c = \sqrt{gy}$.

به‌طور کلی، معادله‌های (۱.۱۱.۱۳) و (۲.۱۱.۱۳) را با آزمون باید حل کرد. فرمول پرش هیدرولیکی از قرار دادن $c = 0$ در دو معادله نتیجه می‌شود [معادله (۱۱.۷.۳) را ببینید].

مثال ۱۱.۱۳ تخلیه یک کانال مستطیلی به عرض ۳m و عمق ۲m، که $۱۸\text{m}^3/\text{s}$ را تخلیه می‌کند، به‌طور ناگهانی در انتهای فرودست به $۱۲\text{m}^3/\text{s}$ کاهش می‌یابد. ارتفاع و سرعت موج ضربه‌ای را محاسبه کنید.

حل

$V_1 = 3$, $y_1 = 2$, $V_2 y_2 = 4$ ، با معادله‌های (۱.۱۱.۱۳) و (۲.۱۱.۱۳)، داریم

$$6 = 4 + c(y_2 - 2) \quad \text{و} \quad y_2^3 - 4 = \frac{2(2)}{9.806}(c + 3)(3 - V_2)$$

با حذف c و V_2 نتیجه می‌شود

$$y_2^3 - 4 = \frac{4}{9.806} \left(\frac{2}{y_2 - 2} + 3 \right) \left(3 - \frac{4}{y_2} \right)$$

یا

$$\left(\frac{y_2 - 2}{3y_2 - 4} \right)^2 (y_2 + 2)y_2 = \frac{4}{9.806} = 0.407$$

بعد از تعیین y_2 با روش آزمون و خطا، $y_2 = ۲.۷۵\text{m}$ ، از این رو، $V_2 = ۴/۲.۷۵ = ۱.۴۵۵\text{m/s}$. ارتفاع موج ضربه‌ای مساوی ۰.۷۵m است، و سرعت موج عبارت است از

$$c = \frac{2}{y_2 - 2} = \frac{2}{0.75} = ۲.۶۶۷\text{m/s}$$

تمرین

۱.۱۱.۱۳ یک موج ابتدایی با سرعت زیر در فرادست یک کانال در حالی که $y = ۴\text{ft}$

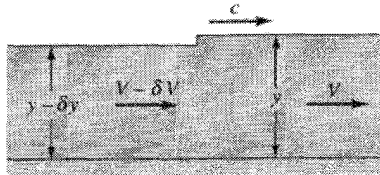
$V = 8 \text{ ft/s}$ ، می‌تواند سیر کند: الف) 3.35 ft/s ؛ ب) 11.35 ft/s ؛ ج) 16.04 ft/s ؛
 د) 19.35 ft/s ؛ ه) هیچکدام.

۱۲.۱۳ موج ضربه‌ای منفی بی‌اصطکاک در کانال مستطیلی

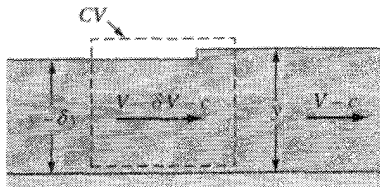
معادله‌های ضربه‌ای

موج ضربه‌ای منفی به صورت تسطیح و پایین آمدن تدریجی سطح مایع ظاهر می‌شود. این موج، برای مثال، در یک کانال در فرودست دریچه‌ای که بسته می‌شود یا در فرادست دریچه‌ای که باز می‌شود رخ می‌دهد. انتشار آن با یک سری از امواج ابتدایی منفی با سرعتی منطبق با سرعت موجود صورت می‌گیرد، هر موج با سرعتی کمتر از سرعت موج واقع در عمق بیشتر سیر می‌کند. کاربرد معادله اندازه حرکت و معادله پیوستگی در تغییرات کوچک عمق عبارتهای دیفرانسیل ساده‌ای را به دست می‌دهند که سرعت موج c ، سرعت V ، و عمق y را به هم ارتباط می‌دهند. انتگرال‌گیری از معادله‌های نمودار مقطع عمودی سطح مایع را به صورت تابعی از زمان، و سرعت را به صورت تابعی از عمق یا به صورت تابعی از مکان در امتداد کانال و زمان (x) و t) نتیجه می‌دهند. فرض می‌شود که سیال بی‌اصطکاک است، و از شتابهای عمودی صرف‌نظر می‌شود.

در شکل ۲۰.۱۳ الف یک آشفتگی ابتدایی نشان داده شده است که در آن، شارش در فرادست



(الف)



(ب)

شکل ۲۰.۱۳ موج ابتدایی.

به‌طور جزئی کاهش یافته است. برای به‌کار بردن معادله‌های اندازه حرکت و پیوستگی مناسب است که حرکت را با اعمال یک سرعت یکنواخت c به‌طرف چپ به حرکت پایا، مانند شکل ۲۰.۱۳ ب، تبدیل کرد. معادله پیوستگی عبارت است از

$$(V - \delta V - c)(y - \delta y) = (V - c)y$$

یا، با صرف‌نظر از حاصل‌ضرب کمیت‌های کوچک، داریم

$$(c - V)\delta y = y\delta V \quad (۱.۱۲.۱۳)$$

از معادله اندازه حرکت نتیجه می‌شود

$$\frac{\gamma}{2}(y - \delta y)^2 - \frac{\gamma}{2}y^2 = \frac{\gamma}{g}(V - c)y[V - c - (V - \delta V - c)]$$

بعد از ساده کردن به‌دست می‌آید

$$\delta y = \frac{c - V}{g}\delta V \quad (۲.۱۲.۱۳)$$

با مساوی قرار دادن $\delta V/\delta y$ در معادله‌های (۱.۱۲.۱۳) و (۲.۱۲.۱۳) نتیجه می‌شود

$$c - V = \pm\sqrt{gy} \quad (۳.۱۲.۱۳)$$

یا

$$c = V \pm \sqrt{gy}$$

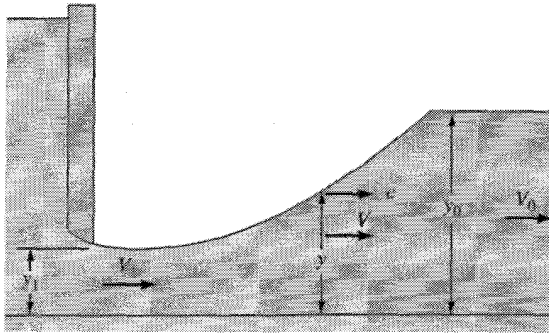
سرعت یک موج ابتدایی در مایع ساکن در عمق y عبارت است از \sqrt{gy} و موج به همراه شارش و با سرعت \sqrt{gy} نسبت به مایع جاری حرکت می‌کند.

با حذف c از معادله‌های (۱.۱۲.۱۳) و (۲.۱۲.۱۳) به‌دست می‌آید

$$\frac{dV}{dy} = \pm\sqrt{\frac{g}{y}}$$

و با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود

$$V = \pm 2\sqrt{gy} + \text{ثابت}$$



شکل ۲۱.۱۳ موج منفی بعد از انسداد دریچه.

برای یک موج منفی در فرودست یک دریچه (شکل ۲۱.۱۳)، با استفاده از علامت بعلاوه، بعد از انسداد لحظه‌ای قسمتی از دریچه، وقتی $y = y_0$ داریم $V = V_0$ و

$$V_0 = 2\sqrt{gy_0} + \text{ثابت}$$

بعد از حذف ثابت چنین می‌شود

$$V = V_0 - 2\sqrt{g}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \quad (۴.۱۲.۱۳)$$

موج در جهت $+x$ حرکت می‌کند، به طوری‌که

$$c = V + \sqrt{gy} = V_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy} \quad (۵.۱۲.۱۳)$$

اگر بسته شدن دریچه در $t = 0$ رخ دهد، مکان سطح مایع با $x = ct$ بیان می‌شود، یا

$$x = (V_0 - 2\sqrt{gy_0} + 3\sqrt{gy})t \quad (۶.۱۲.۱۳)$$

با حذف y از معادله‌های (۵.۱۲.۱۳) و (۶.۱۲.۱۳) به دست می‌آید

$$V = \frac{V_0}{3} + \frac{2x}{3t} - \frac{2}{3}\sqrt{gy_0} \quad (۷.۱۲.۱۳)$$

که سرعت برحسب x و t است.

مثال ۱۲.۱۳ در شکل ۲۱.۱۳ عدد فرود شارش آشفته نشده را پیدا کنید به طوری که وقتی دریاچه به طور ناگهانی بسته می‌شود عمق y_1 در دریاچه درست صفر باشد. $V_0 = 20 \text{ ft/s}$ ، معادله سطح مایع را پیدا کنید.

حل

لازم است که در هر لحظه بعد از $t = 0$ وقتی در $x = 0$ داشته باشیم $y_1 = 0$ ، $V_1 = 0$ باشد. در معادله (۴.۱۲.۱۳)، با $V = 0$ ، $y = 0$ داریم

$$F_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gy_0}} = 2 \quad \text{یا} \quad V_0 = 2\sqrt{gy_0}$$

در $V_0 = 20$ داریم

$$y_0 = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{20^2}{4g} = 3.11 \text{ ft}$$

از معادله (۶.۱۲.۱۳) به دست می‌آید

$$x = \left[20 - 2\sqrt{32.2(3.11)} + 3\sqrt{32.2y} \right] t = 17.02\sqrt{y}t$$

■ سطح مایع یک سهمی است که رأس آن در مبدأست و به طرف بالا مقعر است.

مثال ۱۳.۱۳ در شکل ۲۱.۱۳ در لحظه $t = 0$ قسمتی از دریاچه بسته می‌شود به طوری که تخلیه به مقدار 50% درصد کاهش می‌یابد: $V_0 = 6 \text{ m/s}$ ، $V_1 \cdot y_0 = 3 \text{ m}$ و نمایه سطح را پیدا کنید.

حل

تخلیه جدید عبارت است از

$$q = \frac{6(3)}{2} = 9 = V_1 y_1$$

از معادله (۴.۱۲.۱۳) داریم

$$V_1 = 6 - 2\sqrt{9.806(\sqrt{3} - \sqrt{y_1})}$$

سپس V_1 و y_1 از دو معادله آخر با روش آزمون و خطا پیدا می‌شود، $V_1 = 4.24 \text{ m/s}$ ، $y_1 = 2.11 \text{ m}$. معادله سطح مایع از معادله (۶.۱۲.۱۳)، عبارت است از

$$x = (6 - 2\sqrt{3g} + 3\sqrt{gy})t \quad \text{یا} \quad x = (9.39\sqrt{y} - 4.85)t$$

■ که برای گستره مقادیر y بین 2.11 m و 3 m صدق می‌کند.

شکست سد

نمایه سطح آب را در شکست سد ایدتال، شکل ۲۲.۱۳، از معادله‌های (۴.۱۲.۱۳) تا (۷.۱۲.۱۳) می‌توان به دست آورد. در یک کانال افقی بی‌اصطکاک که عمق آب آن در یک طرف درجه مساوی y_0 است و هیچ آبی در طرف دیگر نیست، اگر درجه به طور ناگهانی برداشته شود و از شتابهای عمودی صرف نظر شود، در معادله‌ها $V_0 = 0$ ، و y از y_0 تا 0 تغییر می‌کند. سرعت در هر مقطع، از معادله (۴.۱۲.۱۳)، چنین می‌شود

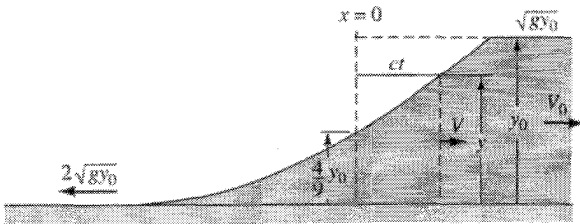
$$V = -2\sqrt{g}(\sqrt{y_0} - \sqrt{y}) \quad (۸.۱۲.۱۳)$$

و همیشه در جهت فرودست است. نمایه سطح آب، از معادله (۶.۱۲.۱۳)، عبارت است از

$$x = (3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gy_0})t \quad (۹.۱۲.۱۳)$$

در $x = 0$ ، $y = 4y_0/9$ ، عمق ثابت می‌ماند و سرعت در مقطع $x = 0$ ، از معادله (۸.۱۲.۱۳)، عبارت است از

$$V = -\frac{2}{3}\sqrt{gy_0}$$



شکل ۲۲.۱۳ نمایه شکست سد.

و مستقل از زمان نیز هست. لبه آزاد موج تا ارتفاع صفر بالا می‌رود و در فرودست با سرعت $V = c = -2\sqrt{gy}$ حرکت می‌کند. سطح آب یک سهمی است که رأس آن در لبه آزاد است و به طرف بالا مقعر است.

در شکست واقعی سد، زبری زمین یک ضربه مثبت را ایجاد می‌کند، یا اینکه موجب می‌شود دیواره آب در فرودست حرکت کند؛ یعنی حرکت لبه بالا رفته موج بر اثر اصطکاک فرو می‌نشیند.

تمرینها

- ۱.۱۲.۱۳ سرعت یک موج ابتدایی در یک مایع ساکن با رابطه زیر داده می‌شود الف) $(gy)^{1/2}$ ؛
 ب) $(2y/3)^{1/2}$ ؛ ج) $(2gy)^{1/2}$ ؛ د) (\sqrt{gy}) ؛ ه) هیچکدام.
 ۲.۱۲.۱۳ موج ضربه‌ای منفی الف) عبارت است از موج ضربه‌ای مثبتی که به طرف عقب حرکت می‌کند؛ ب) عبارت است از یک موج ضربه‌ای مثبت وارونه شده؛ ج) هرگز نمی‌تواند در فرادست سیر کند؛ د) هرگز نمی‌تواند در فرودست سیر کند؛ ه) هیچکدام.

مسائل

- ۱.۱۳ نشان دهید، برای اینکه شارش در امتداد رو به پایین یک سطح شیبدار لایه‌ای باشد، تخلیه در عرض واحد نمی‌تواند بیشتر از $50^\circ v$ باشد. (مسئله ۱۰.۶ را ببینید).
 ۲.۱۳ عمق شارش لایه‌ای آب $C = 2^\circ$ را در امتداد رو به پایین یک سطح مستوی که با افق زاویه 3° می‌سازد در عدد رینولدز بحرانی پایینی محاسبه کنید. (مسئله ۱۰.۶ را ببینید).
 ۳.۱۳ مطلوب است عمق شارش متلاطم در $R = VR/\nu = 500$ برای شارش آب $C = 2^\circ$ در امتداد رو به پایین یک سطح مستوی که با افق زاویه θ مساوی 3° می‌سازد. از فرمول مانینگ استفاده کنید. $S = \sin \theta$ ؛ $n = 0.01$.
 ۴.۱۳ آب در یک کانال دوزنقه‌ای در عمق 1.2 m جریان دارد. عرض کف 6 m است، شیبهای جانبی ۲ افقی به ۱ عمودی (۲:۱)، شیب کف 0.08 ، $n = 0.016$. مطلوب است الف) آهنگ شارش؛ ب) عدد فرود؛ ج) عمق بحرانی.
 ۵.۱۳ در یک کانال نیم‌دایره، آب در عمق شارش یکنواخت به‌طور کامل جریان دارد. این شیب را با شیب یک کانال مستطیلی از ماده یکسان، با عرض یکسان، و با مساحت مقطع عرضی یکسان که همان آهنگ شارش را در عمق شارش یکنواخت انتقال می‌دهد مقایسه کنید.
 ۶.۱۳ یک کانال مستطیلی قرار است $1.2\text{ m}^2/\text{s}$ را در شیب 0.009 حمل کند. اگر کانال با آهن گالوانیزه روکش شده باشد، $n = 0.011$ ، مینیمم متر مربع فلز لازم برای هر 100 m کانال چقدر است؟ از فضای خالی صرف‌نظر کنید.

۷.۱۳ یک کانال دوزنقه‌ای، با شیبهای جانبی ۲ بر ۱ (۲ افقی به ۱ عمودی) قرار است $20 \text{ m}^3/\text{s}$ را با شیب کف 0.009 حمل کند. عرض کف، عمق، و سرعت برای بهترین مقطع هیدرولیکی را تعیین کنید. $n = 0.025$.

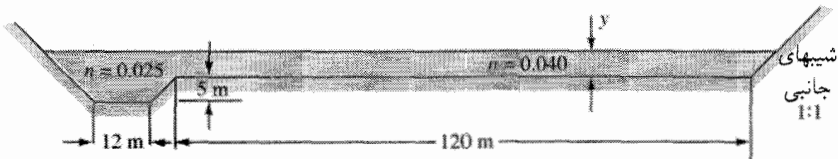
۸.۱۳ یک کانال دوزنقه‌ای ساخته شده از آجر، با عرض کف ۶ft و با شیب کف 0.001 ، قرار است 600 cfs را حمل کند. شیبهای جانبی و عمق کانال چه باشند تا تعداد آجرها حداقل باشد؟ 9.13 شعاع کانال فلزی آجدار نیم‌دایره‌ای لازم برای حمل $25 \text{ m}^3/\text{s}$ به فاصله 1 km با افت هد 2 m چقدر است؟ آیا می‌توانید مقطع دیگری پیدا کنید که محیط کمتری را ایجاد کند.

۱۰.۱۳ بهترین مقطع هیدرولیکی دوزنقه‌ای برای تحویل $85 \text{ m}^3/\text{s}$ با شیب کف 0.002 را تعیین کنید. روکش از جنس بتن پرداخت شده است.

۱۱.۱۳ تخلیه در کانال و مسیل شکل 23.13 برای شارش یکنواخت پایا، با $S = 0.0009$ و $y = 8 \text{ ft}$ را تعیین کنید.

۱۲.۱۳ برای شارش $200 \text{ m}^3/\text{s}$ در شکل 23.13 وقتی عمق روی مسیل 1.2 m است، گرادیان انرژی را محاسبه کنید.

۱۳.۱۳ برای شارش 25000 cfs در مقطع شکل 23.13 ، عمق شارش در مسیل را وقتی شیب خط انرژی 0.0004 است پیدا کنید.



شکل ۲۳.۱۳ مسائل ۱۱.۱۳، ۱۲.۱۳، ۱۳.۱۳

۱۴.۱۳ منحنی $F + M$ را برای $25 \text{ m}^3/\text{s}$ بر متر عرض رسم کنید.

۱۵.۱۳ منحنی انرژی مخصوص را برای $25 \text{ m}^3/\text{s}$ بر متر عرض در همان نمودار مسئله ۱۴.۱۳ رسم کنید. افت انرژی در پرشی که عمق فرادست آن 5 m است چقدر است؟

۱۶.۱۳ نمودار معادله $(7.4.13)$ را تهیه کنید.

۱۷.۱۳ به فرض $q = 100 \text{ cfs/ft}$ و $F_1 = 3.5$ ، مطلوب است، V_1 ، y_1 ، و عمق مزدوج y_2 .

۱۸.۱۳ دو عمق را تعیین کنید که انرژی مخصوص 2 m برای شارش $1 \text{ m}^3/\text{s}$ بر متر عرض را دارا باشند.

۱۹.۱۳ آب با آهنگ $150 \text{ m}^3/\text{s}$ در عمق 1.4 m در یک کانال مستطیلی به عرض 5.6 m جریان دارد. عمق بحرانی، انرژی ویژه، عدد فرود، $F + M$ ، و عمق مزدوج را بیابید.

۲۰.۱۳ در مسئله ۱۹.۱۳، اگر $n = 0.13$ ، چه شیبی برای حفظ شارش یکنواخت لازم است؟

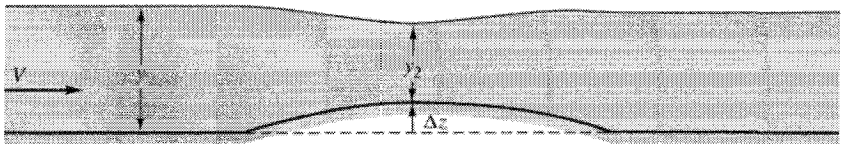
۲۱.۱۳ عمق بحرانی برای شارش $1.5 \text{ m}^2/\text{s}$ در یک متر عرض چقدر است؟

۲۲.۱۳ عمق بحرانی برای شارش $3 \text{ m}^2/\text{s}$ در یک کانال مثلثی با زاویه رأس 60° چقدر است؟

۲۳.۱۳ عمق بحرانی را برای شارش $8.5 \text{ m}^2/\text{s}$ در یک کانال دوزنقه‌ای با عرض کف 2.5 m و شیبهای جانبی ۱ بر ۱ تعیین کنید.

۲۴.۱۳ عمق بحرانی را برای شارش $4 \text{ m}^2/\text{s}$ در یک کانال دوزنقه‌ای با عرض کف 1.5 m و شیبهای جانبی 45° پیدا کنید.

۲۵.۱۳ آب در یک کانال عریض از بتن پرداخت‌نشده ($n = 0.14$) و شیب 0.002 در عمق یکنواخت جریان دارد. یک برآمدگی 9 cm در عرض کانال باعث می‌شود یک فرورفتگی جزئی در سطح آب به وجود آید (شکل ۲۴.۱۳). اگر عمق روی برآمدگی 5 m باشد، آهنگ شارش در یک متر عرض و سرعت روی برآمدگی را محاسبه کنید. از اتلافات اصطکاک در برآمدگی صرف نظر کنید.



$$S_0 = 0.0002$$

شکل ۲۴.۱۳ مسائل ۲۵.۱۳ و ۲۶.۱۳.

۲۶.۱۳ در مسئله ۲۵.۱۳، ارتفاع برآمدگی را برای ایجاد عمق بحرانی روی برآمدگی پیدا کنید.

۲۷.۱۳ سرعت متوسط آب در یک کانال مستطیلی در عمق 1.8 m برابر با 2.4 m/s است. مطلوب است تغییر عمق الف (برای افت هموار 15 cm در کف کانال؛ ب) برای خیز هموار 15 cm در کف کانال.

۲۸.۱۳ آب با شارش یکنواخت $1.5 \text{ m}^2/\text{s}$ در یک کانال مستطیلی به عرض 3 m جریان دارد. شیب کف 0.11 ، و $n = 0.16$. برای انقباض عرض به 1.6 m ، عمق در انقباض و درست در فرادست انقباض چقدر است؟ از اتلافات محلی صرف نظر کنید.

۲۹.۱۳ در مسئله ۲۸.۱۳، اگر انقباض عرض 8 m باشد، همان دو عمق را پیدا کنید.

۳۰.۱۳ گذار از یک مقطع دوزنقه‌ای، به عرض کف 8 ft ، شیبهای جانبی ۱ بر ۱، و عمق 4 ft به یک مقطع مستطیلی، به عرض 6 ft ، برای شارش 25 cfs را طراحی کنید. طول گذار باید 20 ft باشد، و افت یک‌دهم اختلاف بین هدهای سرعت است. نمودار مقطع عمودی کف را نشان دهید، و هیچ‌گونه تغییر ناگهانی در مساحت سطح مقطع ندهید.

۳۱.۱۳ گذار از یک کانال مستطیلی، به عرض ۲.۶ m و عمق ۲ m ، به یک کانال دوزنقه‌ای، به عرض کف ۴ m و شیبهای جانبی ۱ بر ۲ ، به عمق ۱.۳ m دارای افتی مساوی چهار دهم اختلاف بین هدهای سرعت است. تخلیه $۵.۶\text{ m}^3/\text{s}$ است. اختلاف بین ارتفاع کفهای کانال را تعیین کنید. ۳۲.۱۳ یک سنجۀ عمق بحرانی به عرض ۱.۶ ft خیز $۲\text{ r}^\circ\text{ft}$ در کف داراست. برای عمق فرادست ۳.۵۲ ft شارش در سنجه را تعیین کنید.

۳۳.۱۳ به فرض اینکه شارش با سرعت ۶ m/s و عدد فرود ۳ ، به جایگاه یک سنجۀ عمق بحرانی نزدیک شود، مقدار مینیمی که کف باید بالا رود چقدر است؟

۳۴.۱۳ یک کانال مستطیلی از جنس بتن پرداخت‌نشده به عرض ۱۲ ft شیب ۰.۰۰۰۹ را داراست. این کانال ۴۸ cfs را حمل می‌کند و عمق آن در هر مقطعی مساوی ۷ ft است. با استفاده از روش مرحله‌ای و به کار بردن فقط یک مرحله، عمق را در ۱۰۰ ft فرودست محاسبه کنید.

۳۵.۱۳ مسأله ۳۴.۱۳ را با به کار بردن دو مرحله مناسب حل کنید. نمایه این سطح آب در کدام رده قرار دارد؟

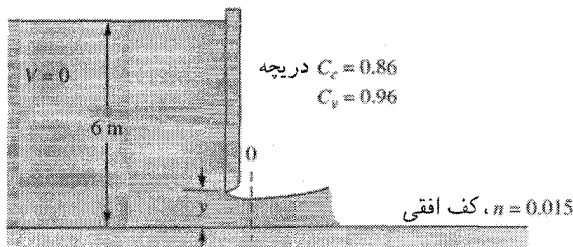
۳۶.۱۳ آب از دریچه خیلی عریضی (شکل ۲۵.۱۳) وارد یک کانال افقی می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع فشار هیدروستاتیک در مقطع ۰ ، عمق در مقطع ۰ و تخلیه بر متر عرض را وقتی $۱.۰\text{ m} = y$ محاسبه کنید.

۳۷.۱۳ اگر عمق در مقطع ۰ از شکل ۲۵.۱۳ مساوی ۶۰۰ mm و تخلیه بر متر عرض $۶\text{ m}^2/\text{s}$ باشد، منحنی سطح آب در فرودست دریچه را محاسبه کنید.

۳۸.۱۳ منحنی عمقهای مزدوج برای نمایه سطح مسأله ۳۷.۱۳ را رسم کنید.

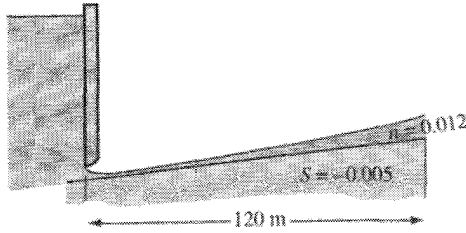
۳۹.۱۳ اگر کانال خیلی عریض در شکل ۲۵.۱۳ تا ۷۰۰ m در فرودست ادامه یابد و سپس یک توقف ناگهانی داشته باشد، پایه شارش در فرادست انتهای کانال را برای $q = ۶\text{ m}^2/\text{s}$ با انتگرال‌گیری معادله شارش تدریجاً متغیر محاسبه کنید.

۴۰.۱۳ با استفاده از مسائل ۳۸.۱۳ و ۳۹.۱۳، مکان پرش هیدرولیکی در کانال را تعیین کنید.



شکل ۲۵.۱۳ مسائل ۳۶.۱۳ و ۴۰.۱۳.

۴۱.۱۳ الف) در شکل ۲۶.۱۳ عمق فرودست درجه مساوی m و سرعت 12 m/s است. در یک کانال خیلی عریض، عمق در انتهای فرودست شیب معکوس را محاسبه کنید؛ ب) قسمت الف) را با استفاده از صفحه گسترده در شکل ۱۶.۱۳ حل کنید.

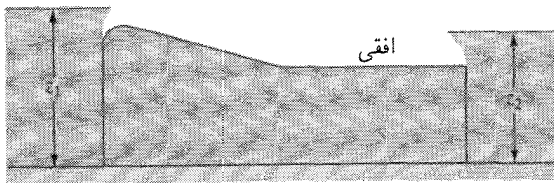


شکل ۲۶.۱۳ مسئله ۴۱.۱۳.

۴۲.۱۳ تمام نمایه‌های سطح مایع را که از شکل ۲۷.۱۳ با تغییر z_1 و z_2 و طولهای کانال در $z_2 < z_1$ می‌توان به دست آورد طراحی کنید (بدون محاسبه) و علامت بزنید. فرض می‌شود شیب کانال تند است.

۴۳.۱۳ در شکل ۲۷.۱۳ ترکیبات ممکن مقاطع کنترل برای مقادیر مختلف z_1 ، z_2 و طولهای مختلف کانال در $z_1 > z_2$ را تعیین کنید. فرض می‌شود شیب کانال در تمام حالتها تند است.

۴۴.۱۳ نمایه‌های مختلف سطح مایع و مقاطع کنترل مختلف در شکل ۲۷.۱۳ را که با تغییر طول کانال در $z_2 > z_1$ به دست می‌آیند طراحی کنید.



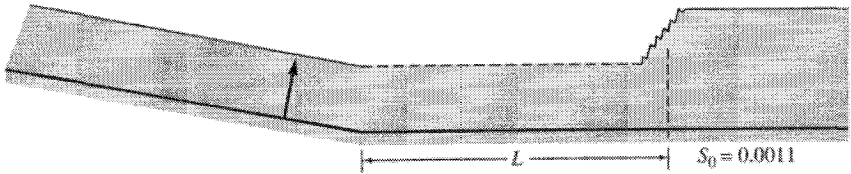
شکل ۲۷.۱۳ مسائل ۴۲.۱۳ تا ۴۴.۱۳.

۴۵.۱۳ مثالی از یک کانال را نشان دهید که شیب آن برای یک تخلیه ملایم، و برای تخلیه دیگر تند است. چه تخلیه‌ای لازم است تا شیب کانال برای آن بحرانی باشد؟

۴۶.۱۳ با استفاده از صفحه گسترده شکل ۱۶.۱۳ یا برنامه مشابهی که نوشته‌اید محل پرش هیدرولیکی در یک کانال مثلی 90° به طول 5 km را که حامل شارش $1\text{ m}^3/\text{s}$ است تعیین کنید. $m = 0.15$ ، $n = 0.01$ ، $S_0 = 0.001$ و عمق فرادست 2 m و عمق فرودست 8 m است.

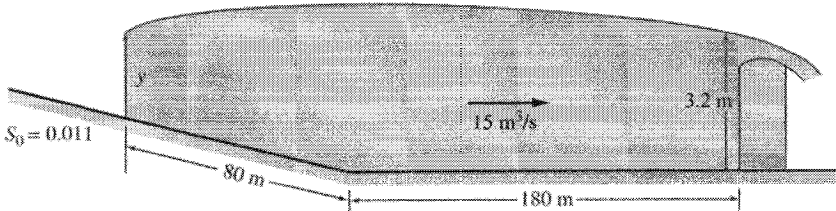
۴۷.۱۳ شکل ۲۸.۱۳ نمایه یک کانال مستطیلی، به عرض 4.5 m ، با تغییر شیب را نشان می‌دهد.

کانال در فرودست دارای شیب $n = 0.011$ ، 0.018 و 0.011 است. الف) مطلوب است عمق قبل از پرش برای اینکه پرش هیدرولیکی در شرایط شارش یکنواخت پایان گیرد؛ ب) مطلوب است فاصله تا پرش در صورتی که عمق شارش یکنواخت در فرادست کانال 0.62m باشد؛ ج) نمایه سطح آب و خط انرژی را محاسبه و رسم کنید.



شکل ۲۸.۱۳ مسئله ۴۸.۱۳.

۴۸.۱۳ یک سرریز عمق 3.2m را در کانال مستطیلی افقی به عرض 5m به وجود می‌آورد (شکل ۲۹.۱۳). در فاصله 180m فرادست، شیب به 0.011 تغییر می‌کند. عمق را در فاصله 80m فرادست محاسبه کنید در صورتی که شارش $15\text{m}^3/\text{s}$ باشد؛ $n = 0.029$.



شکل ۲۹.۱۳ مسئله ۴۹.۱۳.

۴۹.۱۳ یک کانال مستطیلی 5 cfs بر فوت عرض را در عمق 1 ft انتقال می‌دهد که در این هنگام تخلیه در فرادست به طور ناگهانی تا 7 cfs/ft افزایش می‌یابد. سرعت و ارتفاع موج ضربه‌ای را بیابید.

۵۰.۱۳ در یک کانال مستطیلی که جریان با سرعت 2m/s در عمق 2m برقرار است، یک موج ضربه‌ای به ارتفاع 3m در فرادست حرکت می‌کند. سرعت موج چقدر است، و کاهش تخلیه در یک متر عرض چقدر است؟

۵۱.۱۳ یک کانال مستطیلی به عرض 3m و به عمق 2m ، $28\text{m}^3/\text{s}$ را تخلیه می‌کند که در این هنگام شارش با بستن یک دریچه در فرودست به طور کامل متوقف می‌شود. ارتفاع و سرعت موج ضربه‌ای مثبت حاصل را محاسبه کنید.

۵۲.۱۳ در مسئله ۵۱.۱۳، عمق در فرودست دریچه را پس از بستن آن بیابید.

۵۳.۱۳ در مسئله ۵۱.۱۳، سطح آب در فرودست را ۳s پس از بستن پیدا کنید.
۵۴.۱۳ سطح آب را ۲s پس از شکست ایدئال سد بیابید. عمق اولیه ۳۰m است.
۵۵.۱۳ یک صفحه گسترده تهیه کنید با یک برنامه بنویسید که گذار از یک کانال مستطیلی یا کانال دوزنقه‌ای را به یک کانال دوزنقه‌ای طراحی کند. آهنگ تغییر مساحت، عرض کف، و شیب جانبی در هر انتها صفر گرفته می‌شوند. نتایج را برای هر یک‌دهم فاصله به شکل جدولی تهیه کنید، و سپس مسئله ۳۱.۱۳ را با استفاده از برنامه حل کنید.

مراجع

1. U.S. Bureau of Reclamation, "Research Study on Settling Basins, Energy Dissipators, and Associated Appurtenances, Progress Report II," *U.S. Bur. Reclam. Hydraul. Lab. Rep.*, Hyd-399, Denver, June 1, 1955.
2. B. A. Bakhmeteff, *O Neravnomernom Dvizhenii Zhidkosti v Otkrytum Rusle* (Varied Flow in Open Channel), St. Petersburg, Russia, 1912.
3. A. T. Ippen, "Channel Transitions and Controls," in H. Rouse, (ed.), *Engineering Hydraulics*, Wiley, New York, 1950.
4. E. F. Brater, H. W. King, J. E. Lindell, and C. Y. Wei, *Handbook of Hydraulics*, 7th ed., pp. 12.22–12.25, McGraw-Hill, New York, 1996.

مراجع برای مطالعه بیشتر

- Bakhmeteff, B. A.: *Hydraulics of Open Channels*, McGraw-Hill, New York, 1932.
Chow, V. T.: *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1959.
French, R. H., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1985.
Henderson, F. M.: *Open Channel Flow*, Macmillan. New York, 1966.

کاربرد پدیده‌های انتقال

هدف این فصل این است که اصول بنیادی پدیده‌های انتقال از طریق توصیف زمینه‌های مختلف کاربرد آنها به‌طور کامل بیان می‌شود. کاربردهایی که در اینجا انتخاب شده‌اند آمیزه‌ای از مسائل میدان شارش مهندسی و طبیعی را نشان می‌دهند و عناصر چندفازه و انتقال در سطح مشترک، واکنشگرهای فرایند، و تکان دادن و آمیختگی را مورد توجه قرار می‌دهند.

۱.۱۴ انتقال مهندسی در مقایسه با انتقال زمین زیست‌محیطی

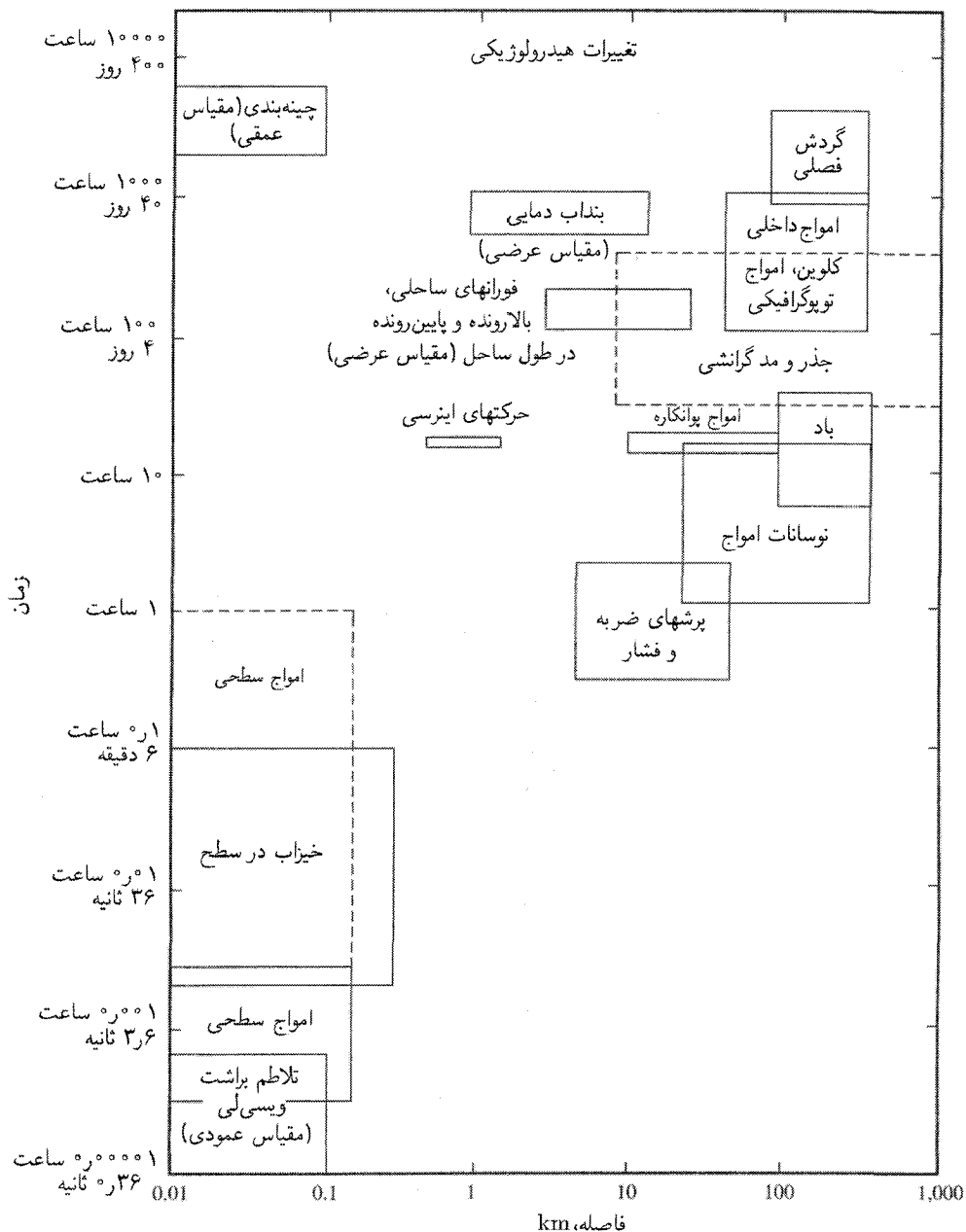
در موارد زیر باید به اختلافها توجه داشت (۱) میدانهای شارش و انتقال مهندسی که برای استنباط یک رفتار خاص طراحی می‌شوند؛ (۲) شارشی که به‌طور طبیعی روی می‌دهد و انتقالی که از فرایندهای تصادفی گوناگون شامل، مثلاً آب و هوا و باد و باران وابسته به آن نتیجه می‌شود. روشهایی که در این متن آورده می‌شوند را برای درده مسائل می‌توان به کاربرد برای هر کدام کاملاً متفاوت است. انتقال ناشی از فرایندهای طبیعی و مقیدشده توسط آنها انتقال زمین زیست‌محیطی نامیده می‌شود در حالی که به فرایندهایی که برای نتایج پیش‌بینی شده‌ای طراحی می‌شوند انتقال مهندسی گفته می‌شود.

روشهای مختلفی برای مطالعه شارش و انتقال زیست‌محیطی وجود دارند. از قبیل

اقیانوس‌شناسی، هواشناسی، و آب‌شناسی در زمینه‌های پیچیده‌تری مانند آتشفشان‌شناسی (مطالعه آتشفشان)، تکنیک صفحه‌ای (حرکت پوسته‌ای زمین)، و اختر فیزیک (حرکت و فیزیک ستاره‌ها و غیرو) از قوانین اصلی مکانیک سیالات پدیده‌های انتقال که در مسائل زمین (زیست) محیطی به کار می‌روند استفاده می‌شود.

در حالی که شاید ساده‌کردن بیش از حد باشد، یکی از اختلاف‌های اصلی بین شارش‌های زمین محیطی و مهندسی این است که میدان‌های شارش طبیعی هنوز به‌طور کامل شناخته نشده‌اند. بنابراین، روش‌های نشان داده شده در این متن برای شناخت و توصیف انواع مختلف میدان‌های شارشی که به‌طور طبیعی روی می‌دهند استفاده می‌شود. توصیف علمی و درک کامل این شارش‌ها باید تکمیل شود. پیچیدگی میدان‌های شارش مانع اصلی درک علمی آنهاست. منابع خارجی و داخلی، هر دو، باعث پیچیدگی شارش طبیعی می‌شوند. هندسه شارش بسیار متغیر و شرایط بسیار متغیر مرزی از منابع خارجی هستند.

پیچیدگی میدان شارش داخلی را ابتدا با مشخص کردن یک حجم کنترل به‌طور ساده و فهرست کردن تمام فرایندهای مکانیک سیالات و انتقال در میدان شارش و مقیاس‌های طولی و زمانی وابسته به آنها می‌توان توصیف کرد. شکل ۱.۱۴ شامل یک نمودار ساده فضال-زمانی فرایندهاست. به سهولت دیده می‌شود که فرایندهای بسیار گوناگونی وجود دارند که هر کدام می‌توانند به‌طور همزمان روی دهند و هر یک گستره وسیعی از مقیاس‌های طولی و زمانی را می‌پوشانند. وقوع فرایندهای داخلی مستقیماً از جفت‌شدگی با سیستم‌های خارجی پیچیده دیگر از طریق بارگذارهای مرزی (و شرایط مرزی ریاضی همانند آنها) نتیجه می‌شوند. برای مثال، دریاچه‌ای بر اثر نیروی برشی باد که بر سطح آن اثر می‌کند به حرکت در می‌آید؛ این نیرو از سیستم‌های آب و هوای تصادفی، شارگرم از خورشید که با هوای ابری کاهش می‌یابد، و شارش ورودی و خروجی فرعی ناشی می‌شود. تمام این بارگذارهای مرزی خیلی متغیر هستند از این جهت که گرادانها (شیبها) بزرگ زمانی یا فضایی روی می‌دهند، و گاهی اوقات حوادثی از قبیل طوفانها را به وجود می‌آورند. وقتی بارگذارهای مرزی خیلی شدید هستند، بیشترین تعداد فرایند انتقال داخلی مشاهده می‌شود. پیچیدگی خارجی دیگر، یعنی هندسه شارش، نقش شارش و انتقال طبیعی را پیچیده‌تر می‌کند. هندسه میدان‌های شارش طبیعی نیز کاملاً متغیر است، از زبری با مقیاس کوچک گرفته تا زبریها با مقیاس بزرگ؛ مانند، شارش رودخانه در کانالهای پیچ و خم‌دار یا شارش اتمسفر یک درکوهستانها. در حالی که این کلیت دارد، بی‌نظمی هندسی بر شارش اتمسفر یک زمین روی سطح زمین حداقل تأثیر را دارد در حالی که شارش و انتقال محلولها در سیستم آب زمینی کاملاً تحت تأثیر هندسه قرار دارند. در مقایسه با تأثیر بارگذاری مرزی، می‌توان گفت که هرچه تغییرات هندسه سریعتر و شدیدتر باشند، پیچیدگی شارش و انتقال پدیده‌های ایجادشده بیشتر خواهد بود.



شکل ۱.۱۴ مقیاسهای فضا و زمان در شارشهای طبیعی، در این حالت یک دریاچه خیلی بزرگ.

روش تحلیلی در شارشهای طبیعی دقیق نیست زیرا روشهای سنتی پردازش فرضهای ساده‌کننده و ایجاد یک حل دقیق و قطعی تقریباً غیرممکن است. همانطور که قبلاً گفته شد چنین حلهای دقیق فقط در شرایط به خوبی کنترل‌شونده با فرایندهای اندک ممکن است. به جای تحلیلهای قطعی، روش مدل‌سازی یا شبیه‌سازی کامپیوتری شارش و انتقال طبیعی ترجیح داده می‌شود. در اینجا معادله‌های (۶.۴.۶ الف-ج) ناولر-استوکس متلاطم و معادله گرمای متناظر [معادله (۷.۴.۹) الف] و انتقال جرم [معادله (۷.۴.۹) ب]] متناظر با روشهای تفاضل محدود یا عنصر محدود [مراجع ۱] * با تقریب بیان می‌شوند تا حل کامپیوتری برای بارگذاریها و هندسه مناسب مرز به دست آید. متغیرهای محاسبه‌شده حاصل فرایندهای میدان شارش را در شرایط داده شده ایجاد یا شبیه‌سازی می‌کنند.

در نقطه مقابل میدانهای شارش مهندسی، میدانی است که مهندس می‌خواهد در قسمتی از آن روی فرایند شارش و انتقال تقریباً کنترل کامل داشته باشد. حداقل لازمه‌های کنترل عبارت‌اند از رفتار کامل و قابل پیش‌بینی بارگذاریهای مرزی، هندسه، و پاسخ شارش و انتقال داخلی. با چنین شرایط و وابسته‌ای میدانهای انتقال شارش طراحی می‌توانند به نتایج دلخواه هیدرولیکی، تبادل گرما، یا طرحهای فرایند برسند. بنابراین چنین طرحهایی را برای استفاده در هر تعداد از شرایط مشابه می‌توان برحسب ظرفیت و بارگذاریهای مرزی مقیاس‌بندی کرد. این مشخصه‌ها کانون مهندسی شیمی را، که در آن فرایندهای واحد طراحی می‌شوند و برای استفاده صنعتی مقیاس‌بندی می‌شوند، تشکیل می‌دهند. هر فرایند برای رسیدن به نتیجه دلخواه به طور نوعی به یک فرایند انتقال قابل پیش‌بینی حاکم بستگی دارد؛ مثلهایی در این مورد عبارت‌اند از خشک‌کردن با تبخیر، مبادله‌کنهای گرمایی، تخمیر، ظرفهای ته‌نشینی و جداکننده‌ها، و فیلتراسیون. امروزه، مفهوم شارش و انتقال مهندسی یا طرح فرایند تا ایجاد تخمیرات برای کنترل محیطی گسترش یافته است. مثلهایی در این مورد عبارت‌اند از مخزنهای ته‌نشینی و ظرفهای خنک‌کن، واحدهای تصفیه و لخته‌سازی، کوره‌های زباله‌سوز، گازشورها. در عمل، فرایند کامل چه دستی باشد و چه صنعتی نوعاً با اتصال دادن مجموعه‌ای از فرایندهای مختلف برای کسب نتیجه مطلوب انجام می‌شود.

سیستمهای انتقال مهندسی باید به دقت طراحی شوند تا پایدار و قابل اطمینان باشند. بارگذاریهای مرزی نوعاً پایدار هستند با عناصر و غلظتهایی که در طی فرایند معلوم است، و هندسه میدان شارش کاملاً ساده گرفته می‌شود، یعنی، لوله‌های دایره‌ای، ورقهای تخت، کره‌ها، یا استوانه‌ها. همانطور که در قسمت اولیه این متن دیده شد گستره وسیعی از حلهای دقیق برای توزیعها، آهنگهای شارش، و تغییرات فاز متغیرهای طراحی برای این هندسه‌ها شناخته شده‌اند. بنابراین طرحهای فرایند بر مبنای هندسه و شرایط مرزی هستند، یعنی، شرایطی که برای استنباط

* چند مرجع در انتهای این فصل آورده شده‌اند.

این رفتارهای حل دقیق مورد نیاز هستند. این کاملاً مغایر است با حالت شارش طبیعی که در آن نتیجه به‌ندرت مشاهده می‌شود حتی اگر از قبل معلوم باشد.

آنچه به دنبال می‌آید مجموعه‌ای از کاربردهایی است که برای بسط بعضی مفاهیم انتقال که قبلاً نشان داده شدند، و همچنین برای راهنمایی خواننده در استفاده از مفاهیم پدیده‌های انتقال برای حل مسائل مهم عملی آورده می‌شوند. چند کاربرد در شروع فصل بر مبنای شارش چندفازه و انتقال در سطح مشترک است. این کاربردها شامل سایش انتقال ذره در سطح مشترک بستر ذره، و تبخیر در سطح مشترک هوا-آب است. هر دو فرآیند را با حلهای لایه مرزی می‌توان توصیف کرد و هر دو مخلوطهایی هستند که چگالی آنها اثرات طبقه‌بندی در میدان شارش را ایجاد می‌کند. بقیه کاربردها دربارهٔ مخزنها و واکنشگرهاست. تمام کاربردها مصداقهایی در شارشهای طبیعی و مهندسی دارند.

۲.۱۴ شارشهای چندفازه: انتقال ذره

شارش و انتقال چندفازه مشتمل است بر پیش‌بینی توزیع یک فاز از ماده‌ای که با فاز دیگر، از همان ماده یا از ماده دیگر، منتقل می‌شود. مثالهایی در این مورد عبارت‌اند از انتقال ذرات با آئروسولها* به توسط آب یا هوا، یا انتقال حبابهای هوا در مایعات. اغلب تبادل در سطح مشترک بین دو محیط می‌تواند منشأ مادی در انتقال چندفازه باشد. دو نمونه موجود عبارت‌اند از (۱) سایش و خودبری ذرات رسوب از کف یک رودخانه، دریاچه، یا کانال به‌خارج؛ (۲) تشکیل طوفانهای گرد و غبار اتمسفریک در نزدیک مناطق صحرایی. در هر دو نمونه، سطحی از ذرات تشکیل می‌شود که خیلی سخت‌اند، و بنابراین، در بسیاری موارد مانند یک سطح جامد عمل می‌کنند. شارش سیال روی کف تنش برشی کافی را بر ذرات سطحی وارد می‌کند و آنها را از جای خود حرکت می‌دهند، و تشهای متلاطم در لایه مرزی رویی ذرات را از کف انتقال می‌دهند. ذرات به‌طور طبیعی شناور نیستند. بنابراین، آنچه در مقابل انتقال متلاطم از کف به بالا قرار دارد ته‌نشینی ثابت ذرات به طرف کف است.

توانایی برای پارامتری کردن تبادل، انتقال، و شدتهای شار به ویژه در نزدیک کف زمین یا سطح جامد اهمیت عملی زیادی دارد. لارویی، پایداری فونداسیون، و فعالیتهای ساخت همگی تحت تأثیر سایش قرار دارند. توجه محیطی اخیر بر تبادل سطح مشترکی ذره از وجود مواد سمی در رسوب که باید از بندرگاه لارویی شوند ناشی می‌شود. مسائل مشابه در ذراتی که توسط هوا منتقل می‌شوند وجود دارند. برای مثال، مقاله‌های علمی اخیر نشان می‌دهند که سایش از مناطق صحرایی ابرهای شدیدی از آئروسول را به‌وجود می‌آورند که اگر در نظر گرفته نشوند تخمینها برای گرمایش آب و هوای جهانی خطا خواهند داشت.

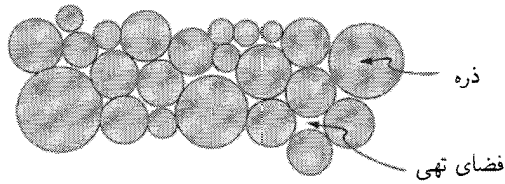
* تعلیق مایع با جسم به صورت گرد و گاز در هوا.

پارامترهای دلخواه در این مسئله چندفازه عبارت‌اند از: (۱) توزیع غلظت ذره با ارتفاع بالای کف؛ (۲) ته‌نشینی، کشیده‌شدن، و شار عمودی خالص ذرات از فاز جامد زمین؛ (۳) جرم، وزن، یا ضخامت ماده فرسود شده از فاز جامد در زمان واحد؛ (۴) شار جرم افقی ماده در محل. گستره وسیعی از روشهای حل لایه مرزی برای تخمین مقدار این متغیرها مورد استفاده قرار گرفته‌اند، و در این قسمت یکی از مدل‌های مفیدتر بادوام نشان داده می‌شود.

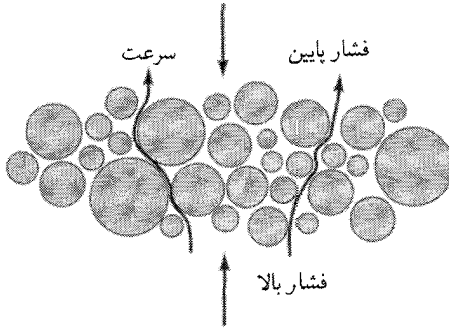
شکل‌های مخلوط

ترکیبی از ستون آب-زمین (یا هوا-زمین) را به عنوان یک پیوستار می‌توان در نظر گرفت که فقط با شدت نسبی ذرات در حجم واحد، که با حجم سیال در حال انتقال قابل مقایسه است، مشخص می‌شود. توصیف تفصیلی هر حالت را در مراجع [۲-۷] می‌توان یافت. از جمله محتویات این مراجع عبارت‌اند از بحث گسترده‌ای درباره بنیادترین روشهای فرمول‌بندی توصیف‌های پیوستار حرکت ذرات گسسته تا حل‌های تقریبی مهندسی برای تعدادی از شارشهای صنعتی یا طبیعی. قبل از پرداختن به معادله‌ها برای حل مسئله، ابتدا گستره سیستم‌های ممکن ذره-سیال خلاصه می‌شوند. در سرتاسر این قسمت فرض می‌شود که ذرات بی‌همدوسی هستند که با همدوسی مخالفت می‌کنند. سطح ذره به‌طور الکتروشمیایی خنثی فرض می‌شود و بنابراین نمی‌تواند توسط هیچ عاملی به‌غیر از جاذبه به ذرات مجاور "بچسبد". ذرات خاک رس چسبیده‌اند اما شن و گل و لای چسبیده نیستند. بنابراین بحث به این ذرات و ذرات غیر واکنشی بزرگتر محدود می‌شود.

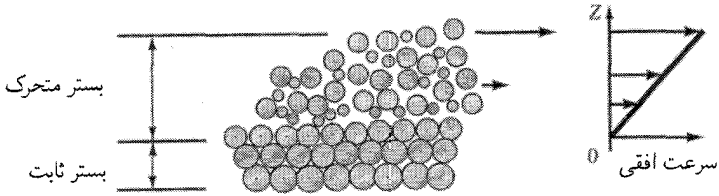
بستر جامدشده. با مراجعه به شکل ۲.۱۴ الف، حالت جامدشده وضعیتی است که در آن تمام ذرات به‌طور محکم تجمع کرده‌اند زیرا هندسه و وزن آنها این وضع را ایجاد کرده است. وزن ذرات به علاوه وزن ماده یکپارچه روی یک بستر خاص برای غلبه بر هر گونه فشار داخلی سیال موجود کفایت می‌کند. فواصل فضایی معین بین ذرات وجود دارد، و سیال می‌تواند از طریق این مسیرهای بالقوه نامنظم منتقل شود. تداخل بستر جامدشده عبارت است از نسبت حجم فضای تهی به حجم کل بستر. به علت طبیعی پیچایی مسیر، فاصله‌ای که توده سیال بین دو نقطه می‌پیماید بزرگتر از فاصله آن دو نقطه روی یک خط مستقیم است (در بعضی حالتها این اختلاف قابل توجه است). خمیدگی را، که یک سنجش برای بی‌نظمی است، برای یک بستر جامدشده می‌توان تعریف کرد اما در حوزه مهندسی ژئوتکنیکی است و خارج از مطالب این کتاب است. به‌طور کلی ذرات در سطح مشترک به‌طور محکم تجمع کرده‌اند و برای جداکردن آنها از هم یک نیروی برشی یا عمودی اضافه بر وزن ذره باید اعمال کرد.



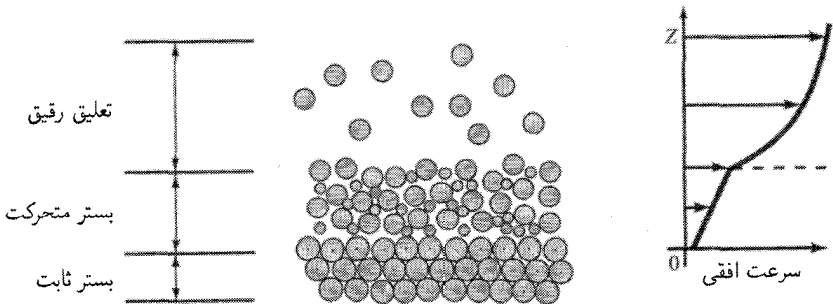
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

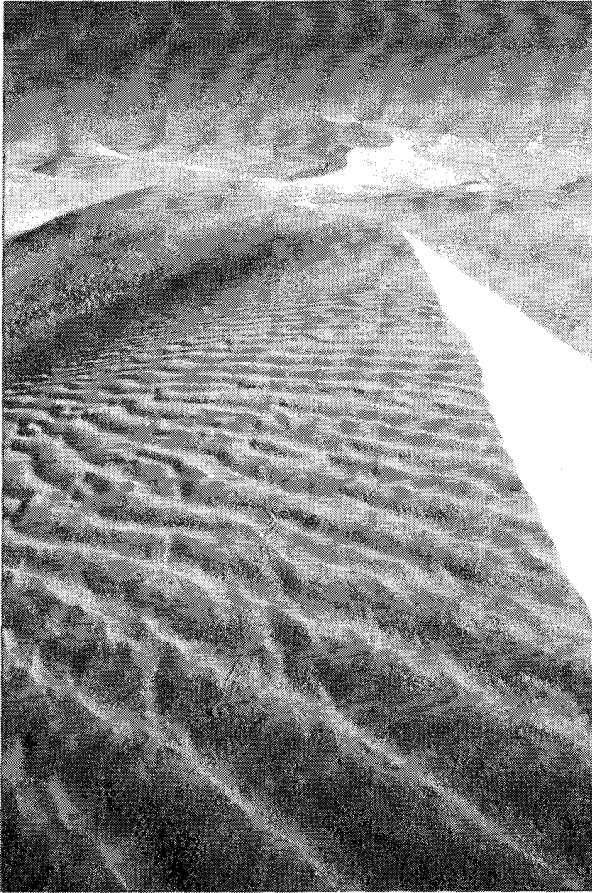
شکل ۲.۱۴ شکلهای مخلوط ترکیبی: (الف) بستر جامدشده، بدون حرکت ذره؛ (ب) بستر شاره، بدون حرکت ذره؛ (ج) بستر شاره متحرک؛ (د) تعلیق رقیق.

بستر شاره. خواه از طریق اعمال یک شیب فشار طراحی باشد، مانند آنچه برای یک واکنشگر تجارتي روی می‌دهد، خواه از طریق وقوع طبیعی شیب فشار، فشار در منفذ داخلی می‌توان به اندازه کافی باشد تا بر وزن ذره و بار احتمالی غلبه کند (شکل ۲.۱۴ ب). در این حالت، ذرات می‌توانند، اگر نه آنقدر نزدیک که به ذرات مجاور خود بچسبند، اما خیلی نزدیک به هم باشند؛ اما نیروهای برشی و عمودی مقاومت خیلی کمی را در برابر حرکت ذرات دارند خواه حرکت یک ذره تنها باشد خواه به شکل توده‌ای. مشخصه فرایند شاریدن عبارت است از تبدیل به یک ترکیب ذره‌ای که در آن هر ذره خاص تحت تأثیر شارش خارجی است و به آن پاسخ می‌دهد. بر اثر جدایی ذره، علی‌رغم حالت جامدشده یا انباشته‌شده، بستر شاره منبسط می‌شود. بسترهای شاره برای به دست آوردن انتقال گرما یا جرم و یا واکنشهای شیمیایی خاصی در یک فرایند صنعتی یا تجارتي طرح می‌شوند؛ گیداسپاو [مراجع ۲] در یک کتاب درسی بسیار خوب این مفاهیم را بسط داده است.

بسترهای شاره متحرک. این رده به حالتی مربوط است که در آن تمام جرم ذرات بستر شاره در پاسخ به یک شیب فشار و لیزری برشی وارد بر آن به حرکت در می‌آید (شکل ۲.۱۴ ج). هر ذره می‌تواند نسبت به این حرکت کپهای به طور تصادفی حرکت کند. برخلاف دو حالت قبل، حرکت کپهای بعدی را با مکانیک سیالات — بر مبنای معادله‌های پیوستار که، البته، به طور قطعی بر مبنای نمایشی چسبندگی نیوتن نیستند — می‌توان توضیح داد. نسبت حجم جامد به حجم کل یا غلظت حجمی مخلوط خیلی بالاست، و از این رو، این شارشها را فراغلیظ یا دوغاب می‌گویند. از آنجا که ذرات در شارش به حالت تعلیق‌اند و شارش خاص و میدان نیروی خاصی دارند که بر آنها اثر می‌کند. این شارشها نیز تعلیق یا در این حالت تعلیق نامیده می‌شوند.

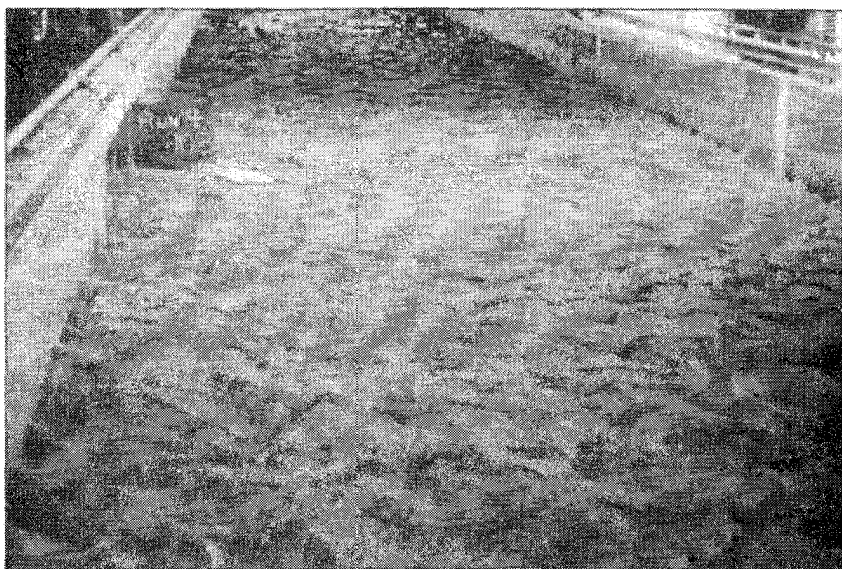
همانطور که در بخش ۷.۸ گفته شد امواج آب تغییر شکل سطح مشترک چگالی دو سیال متحرک، هوا و آب، است. در آبهای سطحی (یا شارشهای اتمسفریک روی سطح زمین) آب (یا هوا) و رسوبهای شاره متحرک، هر دو، به عنوان سیال در نظر گرفته می‌شوند. این نیز یک سطح مشترک بسیار چگال را نشان می‌دهد، و انتظار می‌رود امواج در لایه بستر متحرک تشکیل شوند. در حالت اتمسفریک، توده شنی "مواج شنی" هستند که با نیروی برشی باد به حرکت در می‌آیند (شکل ۳.۱۴). در آبهای سطحی، به ویژه در رودخانه‌های با جریان سریع، امواج شن در سطح مشترک تشکیل می‌شوند (شکل ۴.۱۴). رسوبهای بستر متحرک را بار بستر می‌گویند و تحلیل‌های بسیاری برای پیش‌بینی آهنگ انتقال جرم رسوبهای بار بستر ارائه شده‌اند. (مراجع [۸ و ۹]).

این لایه به ویژه یک لایه مهم است زیرا گذار بین توصیف بستر را از دیدگاههای لاگرانژی (جامد) و اوپلری (سیال) نشان می‌دهد (بخش ۲.۳). تحلیل این ناحیه مهم است زیرا معادله‌های پیوستار هنوز از طرف انجمن علمی در عمل پذیرفته نشده است.



شکل ۳.۱۴ میدان توده‌ی شیء در بیابان.

تعلیقهای رقیق. این حالت وقتی روی می‌دهد که فواصل ذرات داخلی به اندازه کافی بزرگ باشند که تمام میدان شارش روی هر ذره باکره، مانند قسمت ۳.۷، بتواند گسترش یابد (شکل ۲.۱۴ د). اگر ذره بتواند بدون مانع، مانند این حالت، حرکت کند، در این صورت سرعت ذره با سرعت انتقال سیال متفاوت می‌شود فقط به این دلیل که ذره نسبت به سرعت سیال در امتداد موازی با گرانش ته‌نشین می‌شود [مرجع ۱۰]. در غیراین صورت، سرعت افقی ذرات با سرعت سیال یکسان است. تعدادی از ساده‌سازیه‌ها به تحلیل تعلیق رقیق افزوده می‌شوند، و خوشبختانه گستره وسیعی از شارشهای مهندسی و طبیعی را می‌توان به این ترتیب تحلیل کرد. بنابراین تحلیل ما با روش لایه مرزی تعلیق رقیق شروع می‌شود.

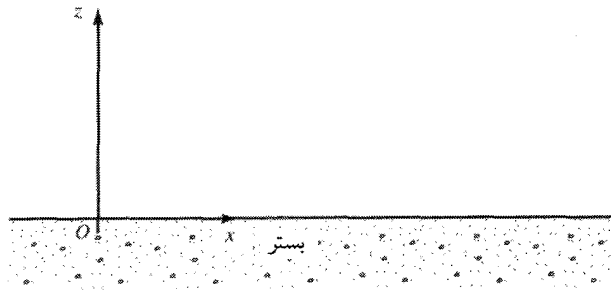


شکل ۴.۱۴ امواج شنی در کانال رودخانه.

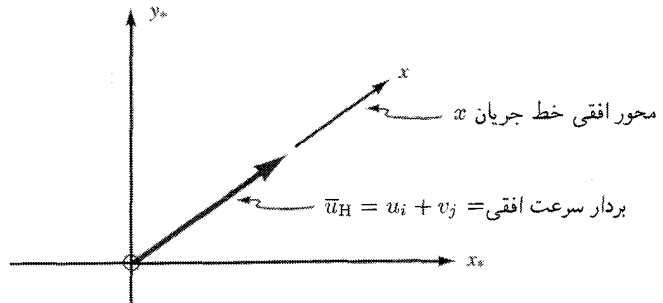
فرمول‌بندی معادله

با توجه به شکل ۵.۱۴ الف، دستگاه مختصات در سطح مشترک جامد-سیال قرار دارد، با محور z که در امتداد خارج از کف مثبت گرفته می‌شود. برای به دست آوردن حل لایه مرزی دوبعدی (z, x) ، از دستگاه مختصات خط جریانی زیر استفاده می‌شود؛ در این دستگاه سرعت افقی در معادله‌ها در حقیقت مجموع برداری دو سرعت افقی است که از حالت میدانی یا آزمایشی ناشی می‌شوند (شکل ۵.۱۴ ب). در حالت میدانی، یا طبیعی، این می‌تواند پردردسر باشد زیرا امتداد دو بردار سرعت افقی $(v_H^2 = v^2 + v^2)$ با زمان تغییر می‌کند.

به مرور زمان، این معادله‌های بنیادی از یک فرمول‌بندی عددی ساده به یک روش نظری قوی مخلوط تکامل یافته‌اند. اولین بار هانت [مراجع ۱۱] نظریه مخلوط را به کار برد. با استفاده از فرمول‌بندی مخلوط، صحت معادله را تا غلظت‌های خیلی بالا می‌توان بسط داد، و در نتیجه، گستره انتظاری غلظت‌ها را تا به بستر گسترش داد. برای اهداف این بحث، بستر یک منبع مادی برای تعلیق است اما حرکت نمی‌کند. بنابراین، تأثیر بستر به عنوان یک شرط مرزی (در ابتدا) اعمال می‌شود. همانطور که در لومیلی [مراجع ۱۰] اشاره شده است دو امکان فرمول‌بندی وجود دارد: اولی نیاز به فرمول‌بندی معادله پایستاری برای هر رده اندازه دانه درشت در مخلوط ذره دارد، و دومی یک معادله موازنه جرم را برای غلظت متوسط مخلوط و سرعت ته‌نشینی متناظر در هر نقطه از میدان را می‌دهد. در اولی هر رده اندازه دانه سرعت ته‌نشینی ثابت دارد. در دومی سرعت ته‌نشینی



(الف)



(ب)

شکل ۵.۱۴ دستگاه مختصات در سطح مشترک ذره سیال در الف) صفحه عمودی؛ ب) صفحه افقی (پرسپکتیو).

متوسط مخلوط نقطه به نقطه و برحسب زمان در داخل میدان تغییر می‌کند زیرا توزیع اندازه دانه متغیر است. در حالی که دومی فقط "یک" معادله انتقال را حل می‌کند، تعداد معادله‌های اضافی لازم برای مشخص کردن سرعت ته‌نشینی مخلوط اساساً در هر فرمول‌بندی، که در آنها باید معادله یکسانی را حل کرد، به دست می‌آیند.

معادله چگالی. اگر c غلظت کسری حجمی ذره در مخلوط باشد، چگالی جرم مخلوط با معادله زیر داده می‌شود

$$\rho = \rho_w(1 - c) + \rho_s c \quad (1.2.14)$$

در اینجا ρ_w و ρ_s ، به ترتیب، چگالی $[M/L^3]$ آب و ذرات است. موازنه‌های جرم آب، جرم رسوب، و جرم کل مخلوط با معادله‌های زیر داده می‌شوند.

معادله‌های موازنه جرم. برای فاز آب

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_w(1-c)] + \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{v}_w(1-c)] = 0 \quad (۲.۲.۱۴)$$

برای فاز ذره

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c) + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}_s c) = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{sw} \nabla(\rho_s c)) \quad (۳.۲.۱۴)$$

برای مخلوط کل (به معادله (۱.۲.۱۴) نگاه کنید)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (۴.۲.۱۴)$$

در این معادله‌ها \mathbf{v}_w ، \mathbf{v}_s و \mathbf{v} ، به ترتیب، بردارهای سرعت فاز آب، فاز ذره، و مخلوط است. برای غلظت‌های بالا یا انتقال با ذرات بزرگ این نتیجه قابل صرف نظر نیست که بردارهای سرعت مذکور مساوی هستند. مجموع معادله‌های (۲.۲.۱۴) و (۳.۲.۱۴) معادله (۴.۲.۱۴) است. معادله میدان تکانه مخلوط. با توجه به صحت رابطه چسبندگی نیوتن، معادله موازنه تکانه مخلوط به صورت زیر است [معادله‌های (۸.۴.۴) و (۱۲.۴.۴)]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\rho g \nabla h + (\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}^*}}) \quad (۵.۲.۱۴)$$

معادله‌های تعلیق رقیق

اگر کسر حجمی ذرات پایین باشد ($0 < c < 1$)، در این صورت $1 - c \approx 1$ و معادله (۴.۲.۱۴) به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}_w) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_w) = 0 \quad (۶.۲.۱۴)$$

و معادله (۳.۲.۱۴) باقی می‌ماند همانطور که معادله (۵.۲.۱۴) بر جای می‌ماند.

میدان سرعت ذره و شکل غلظت حجمی

برای دستگاه مختصات نشان داده شده، سرعت‌های فاز ذره و آب، به ترتیب، \mathbf{v}_w و \mathbf{v}_s با این فرض که مؤلفه‌های افقی همسان‌اند، یعنی، $u_w = u_s = u$ و $v_w = v_s = v$ همسان می‌شوند.

فقط سرعت‌های عمودی با هم تفاوت دارند زیرا ذره با سرعت w_t [معادله (۷.۳.۷)] نسبت به سرعت سیال ته‌نشین می‌شود. بنابراین، w برای تعلق رهیق [معادله (۶.۲.۱۴)] به شکل زیر درمی‌آید

$$w_s = w = w_w - w_t \quad (۷.۲.۱۴)$$

معادله غلظت جرمی ذره [معادله (۳.۲.۱۴)] به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c) + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}c) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w_t c) = \nabla \cdot [\mathcal{D}_{sw} \nabla(\rho_s c)] \quad (۸.۲.۱۴)$$

و معادله تکانه به صورت معادله (۵.۲.۱۴) باقی می‌ماند. باید توجه داشت که برای دستگاه‌های مختصات محلی (z^*, x^*) (مانند کانالهای رودخانه) با شیبهای بسیار ملایم، w_s ، S_o به یک مؤلفه در هر امتداد مختصه محلی تجزیه می‌شود، یعنی، $w_{tz^*} = w_t S_o$ و $w_{tz^*} = w_t(1 - S_o)$ برای شیبهای بسیار کم نزدیک صفر، $S_o \sim 0$ و مؤلفه کل در امتداد x قابل صرف‌نظر است، $w_{tz^*} \approx w_t$. از این فرض تا به حال بیشترین استفاده برای مدل‌سازی رودخانه شده است. کانالهای با شیب تند در آب پخشانه‌های کوهسان به این خوبی تحلیل نشده‌اند.

شکل غلظت جرمی

همانطور که در فصلهای ۱، ۳، و ۴ بحث شده است، اغلب از غلظت جرمی در معادله حاکم استفاده می‌شود زیرا ابزار اندازه‌گیری رسوب داده‌ها را به شکل غلظت جرمی می‌دهد. از این رو $C = \rho_s c$ ، و معادله (۸.۲.۱۴) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}C) - \frac{\partial}{\partial z}(w_t C) = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{sw} \nabla C) \quad (۹.۲.۱۴)$$

شکل متلاطم

معادله (۹.۲.۱۴) و همچنین معادله‌های پیوستگی و تکانه را می‌توان معادل‌گیری رینولدز کرد، و شکل متلاطم را به دست آورد. معادله (۹.۲.۱۴) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}}\bar{C}) - \frac{\partial}{\partial z}(w_t \bar{C}) = \nabla \cdot [(\mathcal{D}_{sw} + E_s) \nabla \bar{C}] \quad (۱۰.۲.۱۴)$$

که در آن E_s چسبندگی تلامپی است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\overline{u'C'} = -E_{sx} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \quad \overline{v'C'} = -E_{sy} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} \quad \overline{w'C'} = -E_{sz} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \quad (۱۱.۲.۱۴)$$

شکل‌های شار

معادله‌های (۱۰.۲.۱۴) و (۱۱.۲.۱۴) را به شکل شار می‌توان نوشت

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{N} = 0 \quad (۱۲.۲.۱۴)$$

که در آن

$$\overline{N}_x = \overline{u}\overline{C} + \overline{u'C'} - \mathcal{D}_{sw} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = \overline{u}\overline{C} - (\mathcal{D}_{sw} + E_{sw}) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \quad (\text{الف } ۱۳.۲.۱۴)$$

و در جهت عمودی،

$$\begin{aligned} \overline{N}_z &= \overline{w}\overline{C} + \overline{w'C'} - w_t \overline{C} - \mathcal{D}_{sw} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \\ &= (\overline{w} - w_t) \overline{C} - (\mathcal{D}_{sw} + E_{sz}) \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \quad (\text{ب } ۱۳.۲.۱۴) \end{aligned}$$

شارهای مؤلفه‌ای به صورت زیر مشخص می‌شوند: $\overline{w}\overline{C}$ شار فرارفتی (عمودی) است، $w_t \overline{C}$ شار ته‌نشینی است، $\overline{w'C'}$ شار تلاطم (عمودی) است، و $\mathcal{D}_{sw} \partial \overline{C} / \partial z$ شار پخش مولکولی است. در کف $N_z(z=0) = N_{z0}$ و شار فرارفتی صفر است زیرا در کف $\overline{w} = 0$ ، یعنی،

$$N_z(z=0) = N_{z0} = -w_t \overline{C} - \mathcal{D}_{sw} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + E_o \quad (۱۴.۲.۱۴)$$

در کف، شارهای قبلاً تعریف شده به علت تبادل در سطح مشترک نامهای جدید می‌گیرند. در اینجا $-w_t \overline{C}$ شار ته‌نشینی نامیده می‌شود و اتلاف ماده کاملاً خارج از میدان را نشان می‌دهد، در حالی که E_o شار با خودبری نامیده می‌شود و انتقال ماده جدید را در عرض سطح مشترک از بستر به داخل میدان در نتیجه تنش برشی نشان می‌دهد.

وقتی $N_{z0} > 0$ ، یک جرم خالص از بستر به داخل میدان سیال وجود دارد و (با صرف نظر از پخش فیکسی) کشیده شدن بزرگتر از ته‌نشینی است؛ بنابراین $N_{z0} > 0$ سایش یا

تعلیق مجدد نامیده می‌شود. اگر $N_{z_0} = 0$ و $w_t \bar{C} = E_{z_0}$ ، شار در تعادل است. اگر $N_{z_0} < 0$ ، یعنی، ته‌نشینی بزرگتر از کشیده‌شدن باشد، شار ته‌نشینی نامیده می‌شود. اگر شار فرسایشی باشد، به مرور زمان اتلاف ماده بستر وجود دارد به طوری که برای مساحت A ، ارتفاع h_B بستر، اتلاف در مدت زمان T برابر است با

$$\rho_s h_B A = A \int_t^{t+T} N_{z_0} dt \quad \Rightarrow \quad h_B = \frac{1}{\rho_s} \int_t^{t+T} N_{z_0} dt \quad (15.2.14)$$

انتگرال‌گیری مشابه در شرایط ته‌نشینی، افزایش ارتفاع بستر را بر اثر ته‌نشینی خالص می‌دهد.

نمایه‌های غلظت حاصل از جریان با تلاطم یکنواخت

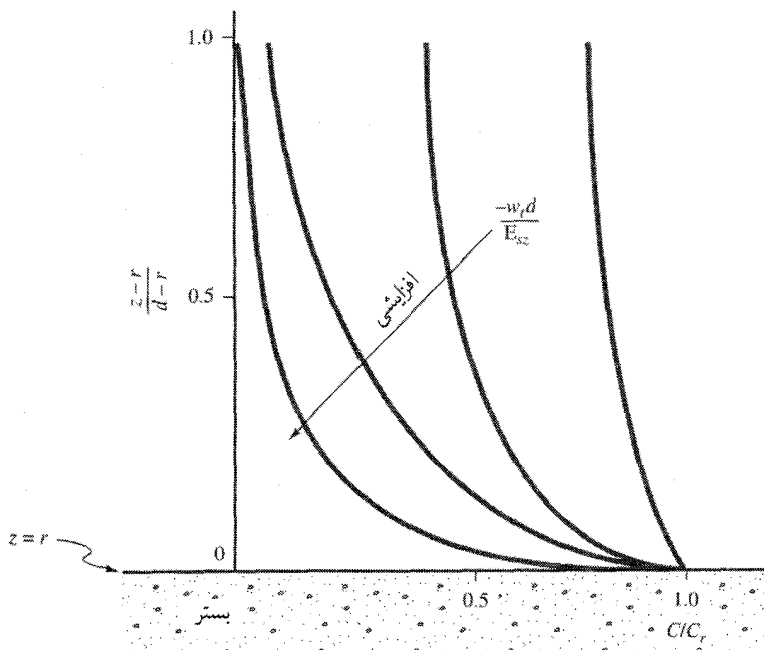
مقدم‌تیرین حل برای معادله (۱۰.۳.۱۴) با این فرض پیدا شد که پخشندگی تلاطمی ثابت است و شار عمودی در تعادل است، یعنی،

$$w_t \bar{C} + E_{sz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = 0 \quad (16.2.14)$$

انتگرال‌گیری از معادله (۱۶.۲.۱۴) نشان می‌دهد که

$$\frac{C}{C_r} = \exp \left\{ -\frac{w_t}{E_{sz}} (z - z_r) \right\} \quad (17.2.14)$$

در اینجا C_r غلظت ذره مرجع است که باید در ارتفاع مرجع $z = z_r$ معلوم باشد. نمایه غلظت به دست آمده به صورت کاهش نمایی برحسب فاصله از کف است. اگرچه میدان تلاطم برای لایه‌های مرزی خیلی ساده شده است، شکل نمایه اصلی که از مقاومت‌های نسبی ته‌نشینی برحسب شار متلاطم به دست می‌آید واضح است. شکل ۶.۱۴ طرحواره‌ای از نمایه را برای مقادیر مختلف نسبت بی‌بعد مقاومت شار ($w_t d / E_{sz}$) نشان می‌دهد، که شکلی از عدد رینولدز است. در اینجا توجه می‌شود که وقتی شناسه بی‌بعد افزایش می‌یابد ته‌نشینی حاکم است و غلظت‌های خیلی بالا در نزدیکی ناحیه کف قرار می‌گیرند. شار متلاطم به اندازه کافی قوی نیست که ذرات را در سرتاسر ستون مایع مخلوط کند. وقتی آمیختگی حاکم است، $w_t d / E_{sz}$ کوچک می‌شود و ذرات در سرتاسر ستون مخلوط می‌شوند، و یک نمایه یکنواخت‌تر بر جای می‌ماند.



شکل ۶.۱۴ طرحواره نمایه بی‌بعد غلظت برای مقادیر مختلف نسبت بی‌بعد مقاومت شار.

غلظت حاصل از جریان در لایهٔ مرزی

همانطور که در فصل ۶ بحث شد، میدان متلاطم نزدیک جداره برحسب فاصله از جداره، آنطور که در بالا فرض شد، به‌طور یکنواخت توزیع نمی‌شود. بنابراین از فرمولبندیهای طول آمیختگی برای محاسبه دقیقتر نمایه استفاده می‌شود. اسمیت [مرجع ۱۲] یکی از این حلهای لایه مرزی بادوامتری را ارائه داده است؛ این حل بر مبنای توزیع تنش برشی ای است که از شارش پایای جریان روی کف زیر ناشی می‌شود. معادلهٔ موازنه جرم ذره برای هر ردهٔ اندازهٔ ذره، n ، نوشته می‌شود. بنابراین، در شکل غلظت حجمی $\sum c_n = c_s = c$ که غلظت حجمی کل ذرات است. چسبندگی تلاطمی از اندازهٔ ذره مستقل است اما برحسب z خیلی تغییر می‌کند. اسمیت و مک‌لین [مرجع ۱۳] یک ستون آب با عمق معین d را در نظر گرفتند. در این حالت، مؤلفین از داده‌های کلبانف [مرجع ۱۴] و تاونزند [مرجع ۱۵] برای استنتاج تابع کلی تغییرات چسبندگی تلاطمی در شارش کانال استفاده کرده‌اند. داده‌ها، که به شکل تابع تشابه $f(\xi)$ نشان داده می‌شوند، به صورت زیر است

$$\frac{\mu(\xi)}{ku_* d} \approx \frac{E_{sz}}{ku_* d} = \frac{E_{sz}}{E_{sz0}} = f(\xi) \quad (۱۸.۲.۱۴)$$

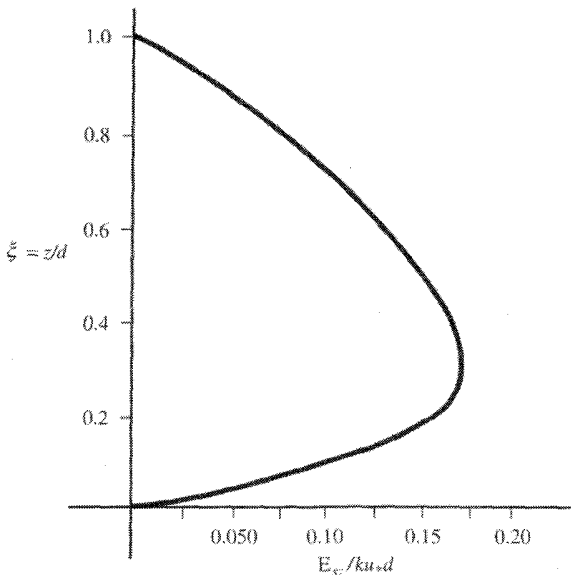
که در آن k ضریب فون کارمن است ($k = ۰.۴$)، $\xi = z/d$ ارتفاع بی‌بعد بالای کف است، و η چسبندگی تلاطمی است. همانطور که معمولاً فرض می‌شود، $E_{sz} = ku_* d$ و $\eta \approx E_{sz}$ چسبندگی تلاطمی مرجع بر مبنای پارامترهای کلی میدان شارش است. دو تابع $f(\xi)$ همسان‌اند. برای $۰ \leq \xi \leq ۰.۳$

$$f(\xi) = (\xi + ۱.۳۲۸۹۲\xi^2 - ۱۶.۸۶۳۲۱\xi^3 + ۲۵.۲۲۶۶۳\xi^4) \quad (\text{الف } ۱۹.۲.۱۴)$$

برای $۰.۳ \leq \xi \leq ۱$

$$f(\xi) = (۰.۱۶۰۵۵۲ + ۰.۷۵۶۰۵\xi - ۰.۱۳۰۵۶۱۸\xi^2 - ۰.۱۰۵۵۹۴۵\xi^3) \quad (\text{ب } ۱۹.۲.۱۴)$$

شکل ۷.۱۴ شامل طرحواره‌ای از معادله‌های (الف) و (ب) است. به سهولت دیده می‌شود که در $\xi < ۰.۲$ چسبندگی تلاطمی بر حسب ارتفاع به‌طور خطی افزایش می‌یابد. این نتیجه مستقیم از وجود لایه مرزی با تنش ثابت است که از فرضیه طول آمیختگی پراوتل به‌دست



شکل ۷.۱۴ طرحواره معادله (۱۹.۲.۱۴).

آمد (به بخش ۴.۶ نگاه کنید). بنابراین، در این لایه

$$\eta \approx E_{sz} = ku_* z = ku_* \xi d = E_{szo} \xi \quad (20.2.14)$$

برای یک اندازه دانه تنها یا متوسط با سرعت ته‌نشینی ثابت w_t ، شکل متلاطم معادله موازنه جرم ذره [معادله (۸.۲.۱۴)] برای شارش پایای به‌طور افقی یکنواخت تبدیل می‌شود. به این بیان که گرادیان شار عمودی صفر است یا اینکه شار عمودی ثابت است. ثابت می‌تواند به معنای شار تعلیق مجدد ثابت، شار ته‌نشینی ثابت، یا به معنای نبود شار (حالت تعادل) باشد. برای حالت تعادل و با توجه به اینکه برای یک اندازه دانه $c_n = c_s = c$ ، شار عمودی عبارت است از

$$w_t \bar{c}(1 - \bar{c}) + E_{sz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0 \quad (21.2.14)$$

با جایگذاری عبارت E_{sz} [معادله (۲۱.۲.۱۴)] و با توجه به اینکه رابطه برای $z > z_0$ صحیح ندارد، از معادله (۲۱.۲.۱۴) می‌توان انتگرال گرفت و به‌دست آورد

$$\frac{\bar{c}(z)}{1 - \bar{c}(z)} = \frac{\bar{c}(z_r)}{1 - \bar{c}(z_r)} \left(\frac{z_r}{z} \right)^{(w_t/ku_*)} \quad (22.2.14)$$

باید توجه داشت که وقتی $z \rightarrow z_r$ ، در این صورت $c(z) \rightarrow c(z_r)$. بحث در قسمت فرعی بعدی و همچنین تعیین غلظت مرجع مربوط در $z = z_r$ خواهد آمد.

این حل نمایه برای برنامه کامپیوتری، کارکردن، و ترسیم کاملاً سر راست است و از این رو یک حل اصولی است زیرا تغییرات چسبندگی-پخشندگی تلاطمی خطی است. به علاوه، نمایه سرعت و نمایه غلظت ذره مستقل از هم یا جفت نشده هستند از این جهت که برای محاسبه نمایه غلظت احتیاجی به اطلاع از نمایه سرعت نیست و برعکس. محاسبه نمایه، برای $z > z_0$ یا محاسبه نمایه‌هایی که در آنها غلظت زیاد رسوب در نزدیک کف باعث تغییر میدان سرعت از طریق طبقه‌بندی چگالی می‌شود احتیاج به حل عددی پیچیده‌تری دارد، که در قسمت فرعی بعدی به تفصیل آورده می‌شود.

اتمام این محاسبه احتیاج به مشخصه‌های z_r ، $c(z_r) = c_r$ ، و w_t دارد. بنابراین، این داده‌ها به‌طور خلاصه آورده می‌شوند.

سرعت ته‌نشینی

در معادله (۷.۳.۷) فرمولی برای سرعت حد ته‌نشینی از فرض شارش پایا و عدد رینولدز ذره (R_D) کمتر از واحد به دست آمد. در اینجا، یک فرمول کلی برای سرعت ته‌نشینی به صورت کسری از ضریب پسا C_D از معادله (۸.۳.۷) به صورت زیر تکرار می‌شود

$$w_t^2 = \frac{4}{3} \frac{D}{\rho C_D} (\gamma_s - \gamma_f) \quad (۲۳.۲.۱۴)$$

برای گستره استوکس $1 < R_D < 24/C_D$ و بیشتر شارشهای $R_D > 1$ و تعیین C_D پیچیده است زیرا C_D تابعی از عدد رینولدز است. کتابهای مرجعی وجود دارد که نحوه تغییرات C_D را با عدد رینولدز به طور پارامتری نشان می‌دهند و بازبینی‌هایی را در سو [مراجع ۵ و ۶] می‌توان یافت. اچ. راوس (مرجع [۸])، ابتدا مجموعه‌ای از داده‌های آزمایشگاهی را دربارهٔ این رابطه گردآوری کرد که استاندارد بالفعلی برای ذرات کروی شده است. سو داده‌های جامعتری را همراه با داده‌های راوس ارائه کرد تا تغییرپذیری وارد شده با شرایط غیراستاندارد مانند شارش در لوله، شاره‌شدن، و ذرات غیرکروی را نشان دهد. البته، ضمن تأکید بر شکلهای محاسباتی، مطلوب این است که یک شکل متناسب با محاسبه کامپیوتری داشته باشیم. نظریه آشفستگی بهبود زیادی در شکل استوکس داده است. البته جامعترین شکل در سو [مراجع ۶] پیدا می‌شود که برای $R_D \leq 100$ به کار می‌رود و عبارت است از

$$C_D = \frac{24}{R_D} \left[1 + 0.0975 R_D - 0.636 (10^{-2}) R_D^2 \right] \quad (۲۴.۲.۱۴)$$

برای $2(10^5) < R_D < 700$ ضریب پسا مقدار ثابت $C_D = 0.44$ دارد. ناحیه بین $700 < R_D < 100$ بر اثر پدیده دفع گرداب پیچیده است، و خواننده برای مقادیر خاص R_D باید به داده‌ها در مراجع مراجعه کند. خوشبختانه، بیشتر مسائل ته‌نشینی آئروسول و رسوب که در اینجا بررسی می‌شوند در ناحیه‌ای که با معادله (۲۴.۲.۱۴) بیان می‌شود قرار دارند.

محاسبه w_t به این ترتیب انجام می‌شود که یک مقدار برای عدد رینولدز فرض می‌شود، C_D از معادله (۲۴.۲.۱۴) تخمین زده می‌شود، w_t از معادله (۲۳.۲.۱۴) تخمین زده می‌شود، و واریسی می‌شود که آیا R_D با مقدار w_t یا مقدار فرضی R_D مساوی است یا نه. تکرار ادامه می‌یابد تا آنها، با یک تولرانس مشخص، با هم مساوی شوند.

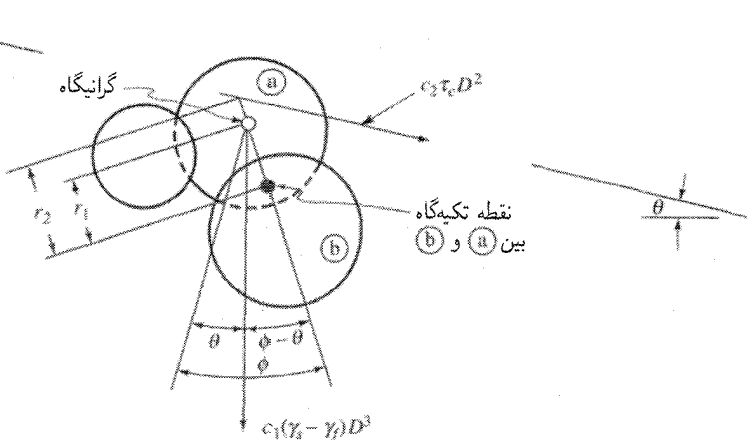
بالاخره، باید توجه داشت که در اینجا چند حالت ساده برای این تصویر منطقاً سراسرست وجود دارد. وجود دیواره‌های عمودی می‌تواند با ایجاد حرکت چرخشی و عرضی ناشی از نیروی

برشی مانع ته‌نشینی شود. ایجاد غلظت‌های زیاد در نزدیکی "کف" می‌توان از طریق همدوسش افزایش یافته با ذرات مانع ته‌نشین شود. همچنین، ذرات با شکل نامنظم می‌توانند بچرخند و حرکت تصادفی داشته باشند و در نتیجه w_t خالص را کاهش دهند. این عوامل در سو [مراجع ۶] مرور می‌شوند.

غلظت مرجع و تنش برشی بحرانی

شرایط مرزی برای معادله‌های (۱۷.۲.۱۴) و (۲۲.۲.۱۴) نیاز به مشخصات غلظت مرجع $[c(z = z_r) = c_r]$ در ارتفاع مرجع z_r دارند. کسب این اطلاعات به‌ظاهر ساده بسیار مشکل است زیرا مقدار c_r فعالیت کامل لایه نازک ولی پیچیده باربستر را درکف نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً اشاره شد، مستقیم‌ترین و ضمناً مشکل‌ترین روش این است که معادله‌های کامل پیوستار برای ناحیه‌های بار تعلیقی، باربستر، و بار جامدشده نوشته شوند و تغییر شکل و حرکت بعدی آنها حل شوند. در اینجا این مدل‌های چندفازه را بررسی می‌کنیم.

قبل از پرداختن به بحث c_r و نقطه اثر آن (z_r) ، نتایج مثال ۸.۶ را که شرط آغازش حرکت را نشان می‌دهند دوباره مورد تأیید قرار می‌دهیم. ذراتی که درکف می‌نشینند تحت تأثیر تنش برشی ناشی از پسا، نیروی بالابر، و گرانش قرار می‌گیرند. بنابراین، زاویه پاسخ ذرات در بستر، ϕ ، و شیب کانال، θ ، متغیرهای کلیدی هستند همانطور که قطر ذره، D ، و وزن مخصوص ذره سیال نیز متغیرهای کلیدی هستند. شکل ۸.۱۴ موقعیت ذرات کروی را نشان می‌دهد. نیروی وزن با $c_1(\gamma_s - \gamma_f)D^3$ داده می‌شود که در آن c_1 ضریب شکل است که برای کره برابر با $\pi/6$ است. وقتی ذره در حالت



شکل ۸.۱۴ موازنه نیرو در یک ذره ساکن.

بحرانی است، یعنی، حالتی که ذره درست در آغاز چرخش برای ته‌نشین نشدن قرار دارد، نیروی برشی بحرانی که باید مقدار آن افزایش یابد برابر با $c_2 \tau_c D^2$ است، که در آن تنش بحرانی است و c_2 ضریبی است که بی‌نظمی مساحت سطح ذره را در نظر می‌گیرد. اگر موازنه گشتاور در شرایط بحرانی [مرجع ۸] انجام شود، در این صورت تنش برشی بحرانی که باید برای وقوع حرکت بر آن غلبه کرد عبارت است از

$$\tau_c = \frac{c_1 \tau_1}{c_2 \tau_2} (\gamma_s - \gamma_f) D \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta) \quad (25.2.14)$$

که برای بستر تخت ($\theta = 0$) به شکل زیر در می‌آید

$$\tau_c = \frac{c_1 \tau_1}{c_2 \tau_2} (\gamma_s - \gamma_f) D \tan \phi \quad (26.2.14)$$

بنابراین، در مثال ۸.۶ دیده می‌شود که

$$\frac{c_1 \tau_1}{c_2 \tau_2} \tan \phi = 0.40 \quad (27.2.14)$$

داده‌های آزمایشی اولیه از وایت [مرجع ۱۶] نشان می‌دهد که این تعداد در انتهای پایینی گستره مشاهده شده، با گستره بالایی ۰.۲، قرار دارد.

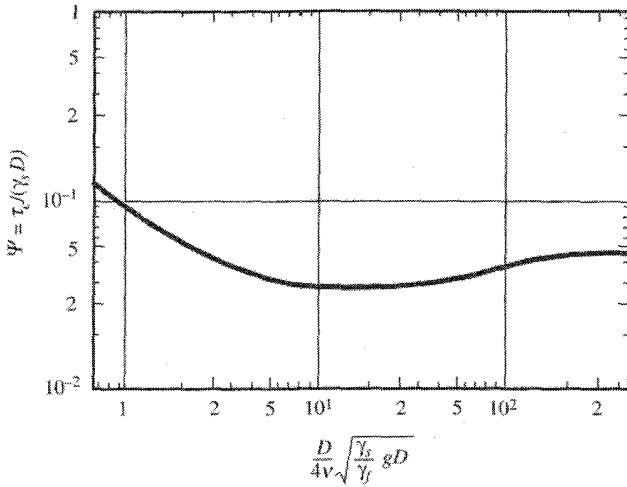
معیار برای آغاز حرکت این است که تنش برشی سیال، τ_{fb} ، در بستر مساوی با τ_c یا بزرگتر از آن باشد. این را برحسب اندازه ذرات فرسوده شده از بستر می‌توان بیان کرد. از آنجا که در این صورت رابطه در معادله (۲۶.۲.۱۴) نشان می‌دهد که

$$u_*^2 \sim D_c$$

از آنجا که حجم ذره، و بنابراین وزن آن، متناسب با D^3 است، بنابراین

$$u_{*c}^6 \rightarrow D_c^3$$

این حقیقت که حجم ذره فرسوده شده در حالت بحرانی با توان ششم سرعت اصطکاکی (سرعت در نزدیک بستر) متناسب است یک تکیه‌گاه تجربی برای این واقعیت است که با افزایش تخلیه یا سرعت فرسایش هندسی به شدت افزایش می‌یابد.



شکل ۹.۱۴ نمودار تغییر یافته شیلدز.

وسیعترین داده‌های آزمایشگاهی دربارهٔ مقادیر τ_c در ابتدا توسط الف. شیلدز [مرجع ۸]، شکل ۴۳.۲) جمع‌آوری شد و در طی سالها به آنها افزوده شده است. شکل ۹.۱۴، از گِلین و گرانث [مرجع ۱۷]، شامل نمودار تغییر یافته شیلدز است. با داده‌های τ_c از نمودار، S_τ ، تنش برشی هنجاریده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_\tau = \frac{\bar{\tau}_{fb} - \bar{\tau}_c}{\bar{\tau}_c} \quad (۲۸.۲.۱۴)$$

خط تیره روی حرف میانگین زمانی و دوره زمانی میانگین رینولدز مربوط به آن را نشان می‌دهد. در تعلیق انواع حرکت‌های ذره می‌تواند روی دهد؛ اصولاً ذرات از بستر متحرک دفع می‌شوند و با میدان تلاطم در بار معلق به طرف خارج رانده می‌شوند. ذرات از کف می‌توانند دفع شوند اما قبل از برگشت به بستر فقط به ارتفاع کوچکی می‌رسند. این حرکت جست‌وخیز نامیده می‌شود و این نوع حرکت ذره تصویر بنیادی فیزیکی است که از آن c_r و z_r پارامتری می‌شوند. گارسیا و پارکر [مرجع ۱۸] پارامتری کردن تجربی c_r را مرور و انواع مختلف آنها را با هم مقایسه کردند، به نظر می‌رسد که مدل اسمیت [مرجع ۱۲] قابل قبولترین مدل باشد.

غلظت مرجع c_r کسری از غلظت ذرات (c_b) در لایه بستر تخمین زده شده است

$$c_r = \frac{\gamma_0 c_b S_\tau}{1 + \gamma_0 S_\tau} \quad (۲۹.۲.۱۴)$$

که در آن c_b به صورت $1-p$ تعریف می‌شود، p تخلخل ماده بستر، و γ_0 ضریب تجربی است که از آن آزمایشها با مقدار $(10^{-3}-10^{-4})$ تعیین شده است. در عمل از $0.65 \sim c_b$ برای دانه‌های کوارتز استفاده می‌شود. بدیهی است اگر $S_r < 1$ ، در این صورت $c_r = 0$ ، در حالی که وقتی $S_r \rightarrow \infty$ ، $c_b \sim 0.65 \rightarrow c_r$.

سؤال نهایی در تجزیه و تحلیل مربوط می‌شود به تعیین نقطه اثر c_r ، یعنی، z_r چیست؟ اگر بستر با ذرات شن غیرمتحرک ثابت باشد (حالت جدی در شارش خیلی آهسته است)، در این صورت ارتفاع مؤثر c_r ارتفاع زبری نیکورادس خواهد بود (ϵ' ، معادله (۲۲.۴.۶)). ولی، بستر متحرک باعث ایجاد تغییر شکلهای کف با مقیاس بزرگتر، به ویژه خیزابها، می‌شود و z_r از ϵ' به‌طور مؤثر بلندتر است.

اُون [مرجع ۱۹] در تحلیل انتقال بار بستر ائولیان (رسوبی که توسط هوا جابه‌جا می‌شود) فرض کرد که زبری مؤثر، z_0 ، اساساً با ضخامت بار بستر متناسب است. سپس، اسمیت و مک‌کلین [مراجع ۱۳ و ۲۰] z_r را در z_0 قرار دارند. در ارتباط با لایه مرزی هیدرودینامیکی، z_0 نیز ارتفاعی است که در آنجا حالت نبود لغزش به‌طور مؤثر به کار می‌رود. ارتفاع مؤثر z_0 بر مبنای کار لازم برای بلندکردن ذره تا ارتفاع ماکزیمم جست‌وخیزی است و پس از عملیات جبری

$$z_0 = \begin{cases} \alpha_0 \frac{(\tau_{fb} - \tau_c)}{(\gamma_s - \gamma_f)} + \epsilon' & \text{برای } \tau_{fb} > \tau_c \\ \epsilon' & \text{برای } \tau_{fb} < \tau_c \end{cases} \quad (30.2.14)$$

ضریب همبستگی تجربی، α_0 ، از مرتبه 0.26 تعیین شده است. داده‌های رودخانه کلمبیا مقدار 0.263 را داده است در حالی که داده‌های معادل ائولیان مقدار 0.224 را می‌دهند.

تمرینها

۱.۲.۱۴ (بستر شماره الف) حالت ذره‌ای است که با فشار پایین آب در سوراخ داخلی و وزن زیاد بار مشخص می‌شود؛ (ب) به عنوان اولین مدل مونتاژ ذره عمل می‌کند که با آن هر ذره می‌تواند به‌طور مستقل به شارش پاسخ دهد؛ (ج) تحت تأثیر طبقه‌بندی چگالی قرار دارد؛ (د) از فرمول‌بندی لاگرانژ که در فصل ۳ توصیف شد به‌دست می‌آید؛ (ه) هیچکدام.

۲.۲.۱۴ در شارشهای رودخانه پُر از رسوب با شیب کف خیلی ملایم (الف) از معادله نظر به آمیختگی کامل می‌توان استفاده کرد؛ (ب) غلظتهای کسری حجمی باید پایین باشند؛ (ج) سرعت ته‌نشینی را فقط در مختصه عمودی باید در نظر گرفت؛ (د) شار افقی متلاطم رسوب ضعیف است؛ (ه) تمام جوابهای بالا.

۳.۲.۱۴ حل‌های دقیق لایه مرزی ساده برای نمایه‌های غلظت الف) برای شرایط تعادل عمودی شار وجود دارند؛ ب) برای توزیع تلاطم عمودی یکنواخت وجود دارند؛ ج) به‌طور نمایی یا با قانون توان نمایی برحسب ارتفاع کاهش می‌یابند؛ د) تابعی از غلظت مرجع هستند؛ ه) تمام جوابهای بالا. ۴.۲.۱۴ پخشندگی تلاطمی برای مدل لایه مرزی غلظت ذره الف) به‌طور نمایی با ارتفاع کاهش می‌یابد؛ ب) به‌طور معکوس با سرعت اصطکاکی متناسب است؛ ج) به‌طور تقریبی با چسبندگی تلاطمی مساوی است؛ د) به‌طور خطی با عمق افزایش می‌یابد ($z \leq 0.2d$)؛ ه) ج و د.

۵.۲.۱۴ فرمول سرعت ته‌نشینی الف) غیرخطی است زیرا ضریب پسا تابعی از w است؛ ب) به وزن مخصوص ذره بستگی ندارد؛ ج) برای اعداد رینولدز تا اعداد رینولدز دفع گرداب صحت دارد؛ د) سرعت ته‌نشینی استوکس را برای $R_D < 1$ تعیین می‌کند؛ ه) الف، ج و د.

۶.۲.۱۴ معیار آغازش حرکت الف) نشان می‌دهد که حجم فرسوده‌شده برحسب توان ششم سرعت اصطکاکی افزایش می‌یابد؛ ب) وقتی برقرار است که تنش برشی سیال در کف کمتر از تنش برشی فرسایش بحرانی است؛ ج) نمودار شیلدز را می‌دهد؛ د) تمام جوابهای بالا.

۳.۱۴ شارش و انتقال جفت‌شده: لایه مرزی استاندارد

وجود غلظتهای بالای گرما و / یا جرم می‌تواند تأثیر عمیقی بر میدان شارش و انتقال ناشی از تغییر میدان چگالی داشته باشد. اکنون میدان چگالی تحت این شرایط می‌تواند نقطه به نقطه در داخل میدان شارش تغییر کند و باعث ترتیب دوباره توزیع سرعت و تلاطم وابسته به آن شود. تا اینجا، میدان چگالی در همه جا ثابت فرض شده است، و به‌طور ضمنی می‌رساند که گرما و جرم افزوده کاملاً پایین هستند و چگالی تغییر بسیار کمی دارد. بنابراین، تأثیر این فرض این است که محاسبه سرعت را از محاسبه دما یا جرم واجفت می‌کند.

بسیاری از شارشهای مهندسی یا طبیعی کمیتهای کافی جرم یا گرمای افزوده که باعث می‌شود مقادیر چگالی موجود در ناحیه‌های مختلف میدان شارش خیلی متفاوت باشند. برای مثال، در دوغابهای زغال‌سنگ شماره ذرات ته‌نشین شونده زغال با کمیت زیاد درست در نزدیک کف جمع می‌شوند و باعث می‌شوند غلظت در کف از مرتبه بزرگی ۳ تا ۴ افزایش یابد و اساساً چگالی مخلوط افزایش یابد (مثلاً ۱۵ درصد). در این حالت سیال با چگالی بیشتر در نزدیک کف قرار می‌گیرد و بنابراین پایدار است. در اینجا، به‌طور شهودی می‌گوییم که ماده با چگالی بیشتر طبیعتاً در زیر سیال با چگالی کمتر قرار می‌گیرد و گرایش دارد به مکانی برگردد که یک سیال با چگالی کمتر به‌طور لحظه‌ای به آنجا حرکت می‌کند. با این تعریف ساده دیده می‌شود که توزیع چگالی در مثال ۳.۳ نیز پایدار است.

در مقابل، یک توزیع چگالی ناپایدار وقتی روی می‌دهد که توده سیال با چگالی مشخص به

داخل یک محیط که چگالی آن بیشتر از چگالی توده است به طرف بالا حرکت کند. در این حالت توده سیال سرعت عمودی به دست می‌آورد زیرا شناوری ذره را دائماً به طرف بالا شتاب می‌دهد. حرکت سیال ناشی از این مکانیسم ناپایداری چگالی همرفتی نامیده می‌شود، و در زندگی روزمره نمونه‌های بسیاری از همرفت روی می‌دهد. معمولیترین شکل همرفت جوشاندن آب روی بخاری است. در اینجا ظرف آبی از دمای پایین تا دمای بالا گرم می‌شود. چگالی لایه سیال گرم شده در کف ظرف کمتر از چگالی سیال در نوک ظرف است. در طی مراحل گرمایش اولیه قسمت بالایی سیال سردتر و چگالتر باقی می‌ماند. آب گرم با سرعتی که با اختلاف دمای بین کف ظرف، T_B و نوک ظرف، T_T ، تعیین می‌شود به طرف سطح جابه‌جا می‌شود (یا شناور می‌شود). پس از مقدار معینی آمیختگی همرفتی اختلاف دمای $(T_B - T_T)$ به صفر نزدیک می‌شود. رویدادهای تصادفی کنوکسیون اغلب در هواشناسی روی می‌دهند و فرایند مرکزی در تشکیل رگبارها، گردبادها، طوفانها، و انواع مختلف ابرهاست.

توزیع چگالی متغیر برحسب فضا را باید با معادله‌های حرکت ترکیب کرد؛ بنابراین می‌رساند که حل آنها با حل معادله انتقال گرما و جرم جفت شده است. بنابراین، در این قسمت معیار شروع ناپایداری چگالی جمع‌بندی می‌شود زیرا برای جفت کردن معادله‌ها خیلی به کار می‌رود. به عنوان مثال، از حل لایه مرزی غلظت طبقه‌بندی شده پایدار ذره استفاده می‌شود. مسئله رطوبت و تبخیر که در قسمت بعد مرور می‌شود جفت‌شدگی پایدار و ناپایدار بررسی می‌شوند.

معیارهای پایداری

از فصل ۲ (به مراجع [۲۱، ۲۲]) نیز نگاه کنید) نیروی خالص مؤثر بر یک توده برابر است با وزن سیال جابه‌جاشده توسط توده، یعنی

$$F = (m - m_p)g \quad (۱.۳.۱۴)$$

در اینجا m جرم سیال محیط و m_p جرم توده است. قانون دوم نیوتن (در شکل لاگرانژی) بیان می‌کند که شتاب ذره عبارت است از

$$m_p \frac{d^2 z}{dt^2} = (m - m_p)g \quad (۲.۳.۱۴)$$

یا

$$a_z = \left(\frac{\rho - \rho_p}{\rho_p} \right) g = \frac{\Delta \rho}{\rho_p} g \quad (۳.۳.۱۴)$$

به این ترتیب، اگر $\Delta\rho = (\rho - \rho_p) > 0$ در این صورت شتاب عمودی مثبت است و سرعت افزایشی و چگالی ناپایدار را نشان می‌دهد. اگر $\Delta\rho = (\rho - \rho_p) < 0$ در این صورت توده شتاب منفی یا سرعت کاهش و چگالی ناپایدار دارد.

با استفاده از بسط سری تیلور بین چگالی و ارتفاع (ρ, z) و حالت اولیه $(\rho_p = \rho_o, z_o)$ داده‌های تغییر مکان خاصتری را می‌توان به دست آورد

$$\rho = \rho_o + \left. \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|_o (z - z_o) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right|_o (z - z_o)^2 + \dots$$

بنابراین از معادله (۳.۳.۱۴)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} (z - z_o) = \frac{d^2 \xi}{dt^2} \approx \frac{g}{\rho_o} \left. \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|_o (z - z_o) + \dots \approx g \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_o (z - z_o) \quad (۴.۳.۱۴)$$

اگر حل به شکل $\xi = c_1 e^{st}$ فرض شود، در این صورت معادله به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_o \xi = 0 \quad (۵.۳.۱۴)$$

و معادله مشخصه به شکل زیر در می‌آید

$$s^2 - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_o = 0$$

جمله $\left(-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_o$ فرکانس برانت-فی-زی لی، N_B ، نامیده می‌شود و بعد آن t^{-1} است.

برای معادله (۵.۳.۱۴) دو حل وجود دارد. اگر $\partial \rho / \partial z < 0$ ، حل حرکت ذره $\xi = z_o = 0$ و $d\xi/dt = w_o$ ، سرعت عمودی توده کوچک) به صورت زیر است

$$\xi = \frac{w_o}{N_B} \sin N_B t \quad (۶.۳.۱۴)$$

یعنی، در نبود اصطکاک یک توده جابه‌جا شده در میدان چگالی پایدار سعی دارد به مکان سیال هم چگالی با خود برگردد و اما از آن مکان فراتر می‌رود (شکل ۱۰.۱۴). ادامه فرآجست متوقف می‌شود زیرا نیروی شناوری بر شتاب غلبه می‌کند و سعی دارد آن را به وضع تعادلش برگرداند. به مرور زمان، اصطکاک باعث میرایی فرآجست می‌شود.

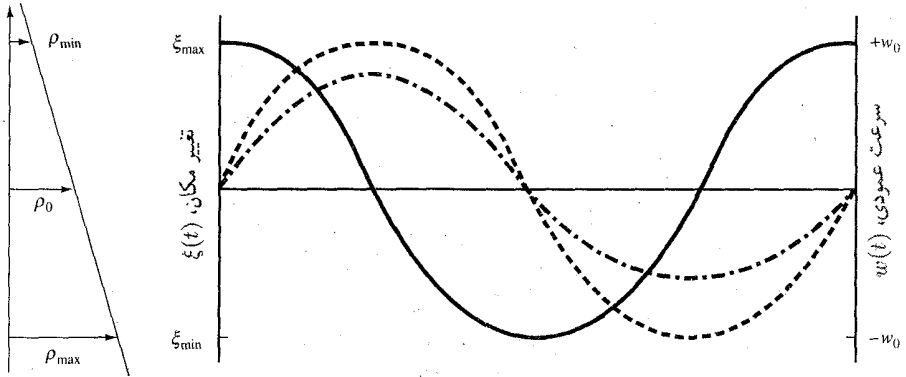
برای حالت گرادیان چگالی ناپایدار $\partial \rho / \partial z > 0$ حل تغییر مکان [مرجع ۲۱] نشان می‌دهد که تغییر مکان برحسب زمان به‌طور نمایی رشد می‌کند.

نامیرا، بدون اصطکاک $\xi(t)$ -----

نامیرا، بدون اصطکاک $w(t)$ —————

میرایی بر اثر چسبندگی $\eta(t)$ - - - - -

$$\xi_{\max} = \frac{w_0}{N_B} = \left(\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{1/2}$$



شکل ۱۰.۱۴ شتاب ذره برحسب زمان در میدان چگالی طبقه‌بندی شده پایدار.

تأثیر نیروی برشی بر پایداری

توصیف بالا برای پایداری دارای قید سیال بی حرکت بی اصطکاک است. اکثر شارشها با سیالات متحرکی مشخص می‌شوند که در آنها اصطکاک باعث می‌شود نیروی برشی به عنوان یک متغیر اضافی در پارامتری کردن کردن شارشهای پایدار یا ناپایدار وارد می‌شود. یک استنتاج قوی برای این اثر در روش تحلیل اغتشاش که در دو تون [مرجع ۲۱] پیدا می‌شود آورده شده است. قبلاً دیدیم که N_B ابعاد $[1/t]$ یا ابعاد فرکانس دارد. تنش برشی، و بنابراین، اصطکاک با گرادیان سرعت میانگین عمودی، $\partial u / \partial z$ ، متناسب است؛ این گرادیان نیز ابعاد $[1/t]$ دارد. بنابراین، مقاومت نسبی میدان چگالی به تنش برشی با نسبت بی بعد زیر بیان می‌شود

$$Ri = \frac{N_B^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} = \frac{-g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-2} \quad (۷.۳.۱۴)$$

که عدد گرادیان ریچاردسون نامیده می‌شود. گرادیان سرعت در معادله (۷.۳.۱۴) از سرعت افقی متوسط خط جریانی، یعنی، $(u^2 + v^2)^{1/2}$ به دست می‌آید.

در تحلیل پایداری اولیه توسط بوزینکس در سال ۱۹۰۳ فرض شد که میدان چگالی شارش برای $\frac{1}{3} > Ri$ ناپایدار است. مجدداً وقتی شارش ناپایاست ذره کوچکی که از محیط خود جابه‌جا می‌شود بدون محدودیت تغییر مکان خود را رشد می‌دهد. وقتی $\frac{1}{3} < Ri$ ، تغییر مکانهای کوچک ذره از بین می‌روند. حرکت با پایای توده نوعاً باعث آشفته‌کردن قابل ملاحظه سیال می‌شود و آمیختگی قابل توجهی روی می‌دهد.

معادله‌های حاکم

معادله‌های حاکم در شکلهای لایه‌ای یا متلاطم قبلاً به‌طور یک‌راهه جفت شدند از این جهت که برای تعیین دقیق انتقال گرما و جرم باید میدان سرعت معلوم باشد. جفت‌شدگی دو راهه با تغییرات چگالی ناشی از غلظت‌های زیاد گرما و جرم می‌تواند به دو طریق روی دهد. ابتدا، وجود گرادیان چگالی انرژی و تکانه را از میدان متلاطم جذب می‌کند تا پیشرفت توده سیال حفظ شود. سپس، یک گرادیان چگالی اساساً پایدار تلاطم را از بین می‌برد، و فرمول‌بندی بسته برای پخشندگی و چسبندگی تلاطمی باید این اثر را منعکس کند. دوم، میدان چگالی که میدان تکانه حسن می‌کند باعث تنظیم‌مهای توزیع سرعتی می‌شود که از میدان سرعت در حالت طبقه‌بندی نشده کاملاً متفاوت است.

از بحث بوزینکس، و تکرار آن در بسیاری موارد [مراجع ۲۲]، می‌توان بر مبنای زمینه‌های ابعادی گفت که تمام تغییرات چگالی در معادله تکانه به اندازه کافی کوچک‌اند. که از آنها صرف‌نظر شود بجز تغییرات در جمله گرانش. بنابراین، از معادله‌های (۱۲.۴.۴)، معادله‌های تکانه افقی x و z را، به ترتیب، به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد

$$\rho_o \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (\text{الف } ۸.۳.۱۴)$$

$$\rho_o \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla^2 w \quad (\text{ب } ۸.۳.۱۴)$$

در اینجا $\rho(x, t) = \rho_o + \rho'(x, t)$ که در آن چگالی مرجع است و ρ' انحراف از چگالی مرجع است که با گرما و جرم وارد می‌شود. از معادله‌های (۱۰.۵.۱) تا (۱۲.۵.۱) معادله چگالی را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\rho = \rho_o(1 - \beta_T \Delta T + \beta_C \Delta C) \quad (۹.۳.۱۴)$$

قراردادن این فرمول در معادله‌های (۸.۳.۱۴ الف) و (۸.۳.۱۴ ب) و تقسیم‌کردن بر ρ_o برای x می‌دهد

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \nabla^2 u \quad (\text{الف } ۱۰.۳.۱۴)$$

و برای z

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial z} - (1 - \beta_T \Delta T + \beta_C \Delta C)g + \nu \nabla^2 w \quad (\text{ب } ۱۰.۳.۱۴)$$

طبقه‌بندی ناشی از ذرات و مدل لازم

در این قسمت حل همگن لایه مرزی ذره از قسمت قبل برای در نظر گرفتن اثرات طبقه‌بندی بسط داده می‌شود. غلظت حجمی ذرات، c ، بر چگالی کل ρ ، که به صورت زیر بیان می‌شود، تأثیر می‌گذارد

$$\rho = \rho_w + (\rho_s - \rho_w)c \quad (۱۱.۳.۱۴)$$

این جفت‌شدگی چگالی و غلظت ذره از طریق روشهای اسمیت و مک‌کلین [مراجع ۱۳ و ۲۰] در مدل مرزی متحرک با جریان، که در قسمت قبل نشان داده شد، ترکیب می‌شوند در اینجا مانند قسمت قبل فرض اصلی این است که شارهای عمودی در تعادل هستند و جفت‌شدگی اصلی از میدان چگالی تا میدان تکانه بر مبنای فرو نشاندن شار متلاطم است زیرا از طریق ضریبهای چسبندگی تلاطمی و پخش اعمال می‌شود، یعنی، همان اثر جفت‌شدگی اولیه که در قسمت فرعی قبل به آن اشاره شد. همانطور که قبلاً گفته شد منبع طبقه‌بندی چگالی انباشت اضافی ذره در کف ستون سیال است: منطقه‌ای که طبق گفته‌های قبل میدان سرعت لایه مرزی ضعیفی دارد. بنابراین، شدت تلاطم موجود برای آمیختگی و پخش ذرات نزدیک کف و اثر مخلوط ذره با چگالی افزایشی باید در پخشندگی و چسبندگی تلاطمی منعکس شود. یکی از روشهای بادوام‌تر که در پارامتری‌کردن این مبادله به کار می‌رود فرمول‌بندی عددی ریچاردسون است. ابتدایی‌ترین شکل‌های پارامتری توسط روس‌بای و مونتگامری [مراجع ۲۳] استفاده شد؛ اینها چسبندگی عمودی در شرایط طبقه‌بندی، $\eta(z)$ ، را به چسبندگی تلاطمی در شرایط خنثی (طبقه‌بندی‌نشده)، η_o ، به صورت زیر ارتباط دارند

$$\frac{\eta(z)}{\eta_o} = (1 + c_1 \text{Ri})^{-1} \quad (۱۲.۳.۱۴)$$

در اینجا Ri عدد گرادیان ریچاردسون است که در معادله (۷.۳.۱۴) تعریف شده است. متأسفانه، شکلهای مختلفی برای این رابطه در طی سالها به کار رفته است، که هر کدام از شرایط آزمایشگاهی و میدانی کاملاً متفاوت به دست آمده است. اما، متأسفانه، هر نتیجه در کاربرد عملی با نتایج دیگر ترکیب شده است. مانک و اندرسن [مرجع ۲۴] یک فرمول کاملاً تجربی به صورت زیر ارائه دادند

$$\frac{\eta(z)}{\eta_0} = \frac{1}{(1 + \beta Ri)^\alpha} \quad (۱۳.۳.۱۴)$$

بنابراین، در شکل روس‌بای و مونتگامری $\alpha = 1$. مانک و آندرسون نشان دادند که $\beta = ۱۰^۰$ و $\alpha = ۰.۵$. فرنج [مرجع ۲۵]، جدول (۷.۱۰) خلاصه‌ای از مقادیر α و β را از یازده آزمایش مختلف نشان دادند.

در مسئله ذره چگالی مخلوط، ρ ، از معادله (۱۱.۳.۱۴) تعریف می‌شود، و بنابراین عدد گرادیان ریچاردسون برابر است با

$$Ri = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{-g \left[\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho} \right] \frac{\partial c}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} \quad (۱۴.۳.۱۴)$$

بنابراین بدیهی است که گرادیان غلظت رسوب در تعیین غلظت و نمایه‌های سرعت به دست آمده نقش مرکزی را ایفا می‌کند. انجمن هواشناسی (مثلاً، مراجع [۲۶، ۲۷]) از بسط این روش، که بر مبنای روشهای تشابه است، در تحلیل شارشهای لایه مرزی مرتب استفاده می‌کند، و این روش در مدل اسمیت و مک‌کلین [مراجع ۱۳ و ۲۰] پذیرفته شده است.

تنش برشی بی‌بعد، ϕ_m ، در لایه مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\tau}{\rho u_*^2} = \phi_m = \frac{\eta}{u_*^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (۱۵.۳.۱۴)$$

یا اینکه

$$\phi_m = \frac{kz}{u_*} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) \quad (۱۶.۳.۱۴)$$

در حالت لایه‌های مرزی طبقه‌بندی‌شده پایا [مراجع ۲۸] تنش برشی بی‌بعد به صورت زیر است

$$\phi_m = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = (1 + \beta Pr_t Ri)^{-1} \quad (۱۷.۳.۱۴)$$

که در آن Pr_t عدد پراتل متلاطم، E_{sz}/η است و β توسط بوسینگر و دیگران [مرجع ۲۸] 0.5 ± 4.7 انتخاب شده است.

معادله (۱۲.۲.۱۴) هنوز معادله بنیادی حاکم، حتی در شرایط طبقه‌بندی‌شده، است. مجدداً، این بیانی از شار عمودی در حال تعادل است. ولی برخلاف بخش ۲.۱۴، در اینجا، $\eta(z)$ و $E_{sz}(z)$ با ارتفاع تغییر می‌کنند و انتگرال‌گیری از معادله (۱۲.۲.۱۴) و تکانه متناظر آن را با روش دقیقی مانند فصل ۶ یا بخش ۲.۱۴ نمی‌توان انجام داد. معادله (۱۲.۲.۱۴) و تکانه متناظر آن در اینجا باید تا هر سطحی که در آنجا $c(\xi)$ معین است به‌طور عددی انتگرال‌گیری شوند، یعنی،

$$\frac{\bar{c}(\xi)}{1 - \bar{c}(\xi)} = \frac{c_r}{1 - c_r} \exp \left\{ -p \int_{\xi_0}^{\xi} \left[1 + \beta_* \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right)^{-2} \right]^{-1} \frac{d\xi}{f(\xi)} \right\} \quad (18.3.14)$$

و

$$u(\xi) = \frac{u_*}{k} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(1 - \xi)}{f(\xi)} \left[1 + \beta_* \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right)^{-2} \right]^{-1} d\xi \quad (19.3.14)$$

در اینجا $p = (w_t/k u_*)$ و ξ_0 در مختصات بی‌بعد برابر با z_0/d است. β_* به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta_* = gd\beta\alpha \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right) \quad (20.3.14)$$

بنابراین محاسبه به تکرار غیرخطی تبدیل می‌شود و انتگرال‌گیری عددی نقطه میانی ساده‌ی انتگرالها تمام آن چیزی است که برای تکمیل محاسبه لازم است.

برنامه کامپیوتری

برای حل ذره خنثی یا طبقه‌بندی‌شده و لایه مرزی هیدرودینامیکی که در قسمتهای ۲.۱۴ و ۳.۱۴ بیان شدند برنامه کامپیوتری وجود دارد. کد منبع در صفحهٔ وب وجود دارد.

به‌طور کلی، مدل با هر مجموع آحاد سازگار اجرا می‌شود؛ آحاد داده‌های خروجی با آحاد داده‌های ورودی یکسان است. غلظت در برنامه همیشه برحسب آحاد غلظت حجمی است، و حاصلضرب آن در چگالی ذره غلظت جرمی را می‌دهد. جدول ۱.۱۴ شامل فهرستی از متغیرهای برنامه است. سه رده از متغیرها وجود دارد، متغیرهای میدان شارش، متغیرهای ذره، و متغیرهای محاسبه، و در جدول ۲.۱۴ فهرست شده است تا نشان دهد که کدام یک به عنوان ورودی برای برنامه

جدول ۱.۱۴ پارامترهای ورودی و پارامترهای مدل.

D_n (cm)	FRAC	NCLASS	مقدار متغیر	متغیر
۰.۳۰۷۷	۱.۰۰۰۰	۱	۴۷۵۲ cm/s ۱۶۲۰ cm	u_* h
۰.۵۰۵۰	۰.۱۵۵۰	۳	۱.۰ g/cm ^۳ ۰.۱۳۱ cm ^۲ /s	ρ_w ν
۰.۲۷۷۵	۰.۶۸۵۰		۹۸۰ cm/s ^۲	g
۰.۱۵۰۳	۰.۱۶۰۰		۲.۶۵	SG _{quartz}
۰.۵۹۵۰	۰.۲۵۰۰	۱۰	۱.۰	SCF
۰.۵۰۰۰	۰.۴۵۰۰		۲۰	NSTEP
۰.۴۲۰۰	۰.۰۸۵۰		۲۶.۳	α_o
۰.۳۵۴۰	۰.۱۳۰۰		۴.۷	β
۰.۲۹۷۰	۰.۲۱۰۰		۱.۰	α
۰.۲۵۰۰	۰.۱۹۵۰		۰.۴	κ
۰.۲۱۰۰	۰.۱۵۰۰		۰.۰۲۴	γ_o
۰.۱۷۷۰	۰.۰۹۵۰		۰.۶	c_b
۰.۱۴۹۰	۰.۰۵۰۰		۰.۱	TOLERANCE
۰.۱۲۵۰	۰.۰۱۵۰		۱۰۰	ITSTEP

لازم‌اند. ضمن سراسر بودن، چند محدودیت وجود دارد. شماره رده‌های ذره (NCLASS) که یک مخلوط برحسب آن تقسیم‌بندی می‌شود ۱۰ است و حداقل شماره پیشنهادی سه است. به‌هنگام وارد کردن کسر غلظت حجمی در هر اندازه ذره باید مطمئن بود که مجموع آنها ۱ است. اگر تحلیل‌کننده بخواهد، می‌توان (همانطور که در متجاوز از ۱۰۰ سال انجام شده است) مخلوط را به صورت یک اندازه ذره متوسط تنها با سرعت ته‌نشینی منفرد تحلیل کرد. مقایسه محاسبات از هر نظر آموزنده است. مقادیر γ_o و c_b بر مبنای استنتاج اولیه c_T ، به ترتیب، (10^{-3}) و ۰.۶ است. محاسبه، اگرچه سراسر است، تکرار می‌خواهد.

با تخمین مقدار β_* [معادله (۱۸.۳.۱۴)] و سپس محاسبه عدد ریچاردسون [معادله (۷.۳.۱۴)] و چسبندگی تلاطمی بی‌بعد تکرار شروع می‌شود. سپس $\partial \bar{u} / \partial z$ و $\partial \bar{u} / \partial z$ با تکرار محاسبه می‌شوند و بالاخره معادله‌های (۱۶.۳.۱۴) و (۱۷.۳.۱۴) به‌طور عددی انتگرال‌گیری می‌شوند تا نمایه تخمینی به‌دست آید. نتایج به شکل جدولی و ترسیمی نشان داده شده‌اند.

جدول ۲.۱۴ فهرست متغیرها برای مدل لایه مرزی ذره.

متغیر	کد متغیر	توصیف
D_n	D(NCLASS)	قطر دانه ذره، رده $\ln m^*$
w_{tn}	WF(NCLASS)	سرعت حد سقوط ذره، رده $\ln m$ [معادله (۲۳.۲.۱۴)]
s_n	S(NCLASS)	گرانش ویژه ذره*
τ_{cn}	TAUCRIT(NCLASS)	تنش برشی بحرانی برای آغاز حرکت ذره [معادله (۲۸.۲.۱۴)]
S_*	SSTAR(NCLASS)	$\frac{D_n}{r_{\nu}} [(S_n - 1)gD_n]^{1/2}$ ، عرضهای بی‌بعد در شکل (۱۰.۱۴)
ν	NU	چسبندگی سینماتیکی سیال*
	SCF(NCLASS)	ضریب تصحیح نمودار شیلد*
Q_c	SHLDC(NCLASS)	پارامتر بحرانی شیلد
	WSGD(NCLASS)	$w_{tn} [(S_n - 1)gD_n]^{1/2}$
S_n	SN(NCLASS)	اصطکاک جداری اضافی هنجاریده؛ [معادله (۲۸.۲.۱۴)]
c_{bn}	CBED(NCLASS)	غلظت ذره در بستر؛ [معادله (۲۹.۲.۱۴)]*
z_{on}	Z ^o (NCLASS)	طول زبری ناشی از رده n ذره
c_{rn}	CREF(NCLASS)	غلظت مرجع در z_o ؛ [معادله (۲۹.۲.۱۴)]
c_m	CMT(NSTEP)	غلظت میانگین
u	U(NSTEP)	سرعت میانگین
z	Z(NSTEP)	ارتفاع بالای کف
g	G	شتاب ثقل*
ρ	FDENSITY	چگالی سیال*
π	PI	نسبت محیط دایره به قطر آن
γ_o	GAMMA	متغیر در پارامتر محاسبه c_r [معادله (۲۹.۲.۱۴)]*
τ_b	TAUBED	تنش برشی بستر
u_*	USTAR	سرعت برشی*
h	DEPTH	عمق میدان شارش*
	DEL	انتگرال ارزیابی شده عددی
	NCLASS	شماره رده‌های ذره*

ادامهٔ جدول ۲.۱۴

توصیف	کد متغیر	متغیر
تعداد مراحل انتگرال‌گیری عددی*	NSTEP	
تعداد مراحل تکرار*	ITSTEP	
کسر هر رده ذره*	FRAC(NCLASS)	i_n
۲۶۳؛ پارامتر محاسبه طول ذره	ALPHA°	α_o
۴۷؛ پارامتر محاسبه عدد ریچاردسون	BETA	β
۱°؛ نسبت ضریب پخش ذره به ضریب پخش تکانه	ALPHA	α
طول زبری متوسط وزنی؛ [معادله (۲.۱۴).۳۰]	AVEZ°	z_o
گرانرش ویژه متوسط وزنی ذره	AVES	s
$w_{tn}/\kappa u_*$	PN(NCLASS)	p_n
z/h ؛ ارتفاع هنجاریده بالای کف	E(NSTEP)	ξ_1
چسبندگی تلاطمی هنجاریده	F2(NSTEP)	$f_2(\xi)$
نسبت ضریب	SIBE	$\sigma/2\beta$
خطای مجاز در روش تکرار*	TOLERANCE	
$\rho \kappa u_* h / \tau_b$	DKUH	
$\alpha\beta(s - \rho)gh/\rho$	BETASTAR	β_*
گرادیان (شیب) سرعت	DUDE(NSTEP)	$du/d\xi_1$
گرادیان غلظت	DCDE(NSTEP)	$dc_m/d\xi_1$
تخمین $du/d\xi$	DUGUESS	
تخمین $dc_m/d\xi$	DCGUESS	
خطای نسبی در تکرار $dc_m/d\xi_1$	ERROR1	
خطای نسبی در تکرار $du/d\xi_1$	ERROR2	
عدد ریچاردسون	RICH(NSTEP)	Ri_n

* داده ورودی را نشان می‌دهد.

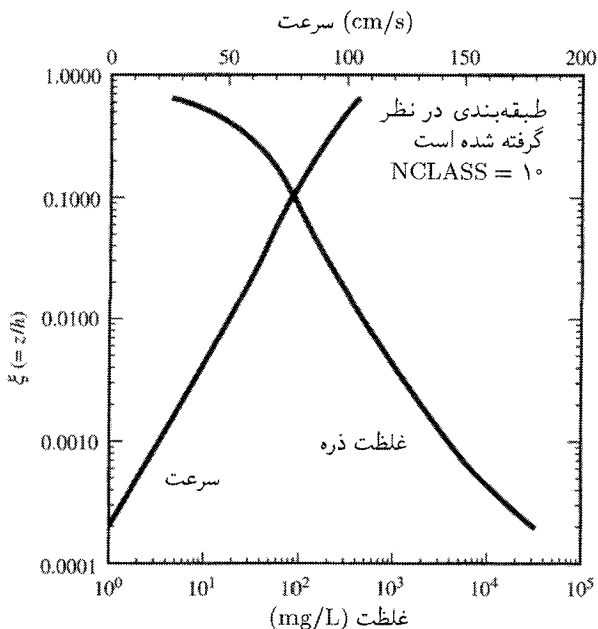
مثال ۱.۱۴. جدول ۱.۱۴ شامل پارامترهای ورودی برای محاسبه غلظت ذره و سرعت در فاصله $16.2m$ بالای کف است. همانطور که در دو ستون اول جدول ۳.۱۴ نشان داده شده است ده کسر اندازه در نظر گرفته شده‌اند، بقیه پارامترهای ورودی محاسبه شده در جدول ۳.۱۴ در نظر گرفته شده‌اند. جدول ۴.۱۴ شامل مقادیر محاسباتی برای ۲۰ نمونه در داخل ستون آب است و شکل ۱۰.۱۴ نمودار نمایه‌های حاصل را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۱۴ پارامترهای ذره با رده (NCLASS = ۱۰).

τ_{cn}		c_{rn}	$z_o(\text{cm})$	i_n	D_n, cm
(dyne/cm ²), Eq.(۱۴.۲.۲۸)	$w_{tn}(\text{cm/s})$ Eq.(۱۴.۲.۲۳)	Eq.(۱۴.۲.۲۹)	Eq.(۱۴.۲.۳۰)		
۳,۱۷۵	۸,۱۶۴	۰,۱۹۳۱E-۳	۰,۳۴۰۲	۰,۰۲۵۰	۰,۰۵۹۵
۲,۷۹۹	۶,۶۱۴	۰,۴۰۲۰E-۳	۰,۳۳۶۸	۰,۰۴۵۰	۰,۰۵۰۰
۲,۵۵۳	۵,۲۵۲	۰,۸۴۳۰E-۳	۰,۳۳۲۸	۰,۰۸۵۰	۰,۰۴۲۰
۲,۳۳۲	۴,۱۹۰	۰,۱۴۲۶E-۳	۰,۳۲۹۸	۰,۱۳۰۰	۰,۰۳۴۵
۲,۱۳۲	۳,۳۲۲	۰,۲۵۴۳E-۳	۰,۳۲۷۳	۰,۲۱۰۰	۰,۰۲۹۷
۲,۰۲۸	۲,۶۳۹	۰,۲۴۹۴E-۳	۰,۳۲۴۳	۰,۱۹۵۰	۰,۰۲۵۰
۱,۹۲۸	۲,۰۸۷	۰,۲۰۲۶E-۳	۰,۳۲۱۹	۰,۱۵۰۰	۰,۰۲۱۰
۱,۸۳۵	۱,۶۵۸	۰,۱۳۵۴E-۳	۰,۳۲۰۲	۰,۰۹۵۰	۰,۰۱۷۷
۱,۷۷۴	۱,۳۱۵	۰,۷۳۸۶E-۳	۰,۳۱۸۳	۰,۰۵۰۰	۰,۰۱۴۹
۱,۷۹۳	۱,۰۳۸	۰,۲۱۹۱E-۳	۰,۳۱۵۶	۰,۰۱۵۰	۰,۰۱۲۵

جدول ۴.۱۴ پارامترهای محاسبه شده توسط ارتفاع.

$-w'C'$	$-w_t C'_m$	E	u	C'_n	z	n
(mg/cm ² /s)	(mg/cm ² /s)	(cm ² /s)	(cm/s)	(mg/L)	(cm)	
۱۳۶,۲۴	-۱۰,۵۶۳	۰,۵۹	۰,۰۰	۳۲۴۳,۱۸۵	۰,۳۳	۱
۴۱,۲۷	-۶,۱۱۴	۰,۹۰	۴,۹۵	۱۸۷۷۲,۶۶	۰,۵۰	۲
۱۷,۴۶	-۳۷,۲۳	۱,۳۸	۹,۹۰	۱۱۴۳۱,۷۴	۰,۷۶	۳
۸,۵۶	-۲۳,۵۷	۲,۱۲	۱۴,۸۵	۷۲۳۵,۷۳	۱,۱۷	۴
۴,۵۷	-۱۵,۳۸	۳,۲۴	۱۹,۸۰	۴۷۲۲,۲۵	۱,۷۹	۵
۲,۵۹	-۱۰,۲۹	۴,۹۶	۲۴,۷۴	۳۱۶۰,۲۲	۲,۷۴	۶
۱,۵۴	-۷,۰۴	۷,۶۰	۲۹,۶۷	۲۱۶۰,۰۵	۴,۱۹	۷
۰,۹۴	-۴,۹۰	۱۱,۶۵	۳۴,۵۹	۱۵۰۳,۴۸	۶,۴۱	۸
۰,۵۹	-۳,۴۶	۱۷,۸۸	۳۹,۴۹	۱۰۶۳,۲۵	۹,۸۱	۹
۰,۳۸	-۲,۴۸	۲۷,۴۵	۴۴,۳۶	۷۶۲,۶۳	۱۵,۰۲	۱۰
۰,۲۵	-۱,۸۰	۴۲,۲۰	۴۹,۲۰	۵۵۲,۰۳	۲۲,۹۹	۱۱
۰,۱۷	-۱,۳۳	۶۴,۹۴	۵۳,۹۹	۴۰۷,۱۷	۳۵,۱۸	۱۲
۰,۱۲	-۰,۹۸	۹۹,۹۱	۵۸,۷۰	۳۰۲,۳۰	۵۳,۸۴	۱۳
۰,۰۸	-۰,۷۴	۱۵۳,۰۲	۶۳,۳۳	۲۲۶,۲۲	۸۲,۳۹	۱۴
۰,۰۶	-۰,۵۵	۲۳۰,۹۶	۶۷,۸۹	۱۶۹,۷۸	۱۲۶,۰۹	۱۵
۰,۰۴	-۰,۴۱	۳۳۵,۴۹	۷۲,۴۱	۱۲۶,۳۳	۱۹۲,۹۷	۱۶
۰,۰۲	-۰,۳۰	۴۴۵,۶۴	۷۷,۰۷	۹۰,۵۷	۲۹۵,۳۲	۱۷
۰,۰۲	-۰,۱۹	۴۹۵,۱۷	۸۲,۳۴	۵۷,۹۶	۴۵۱,۹۶	۱۸
۰,۰۱	-۰,۰۹	۴۷۱,۰۰	۸۸,۸۸	۲۸,۹۷	۶۹۱,۶۸	۱۹
۰,۰۰	-۰,۰۳	۳۶۵,۳۸	۹۶,۹۹	۷,۹۰	۱۰۵۸,۵۵	۲۰



شکل ۱۱.۱۴ نمایه‌های محاسبه شده عمودی سرعت و غلظت ذره که با شرایط داده شده در جدولهای ۳.۱۴ و ۴.۱۴ تعیین شده‌اند.

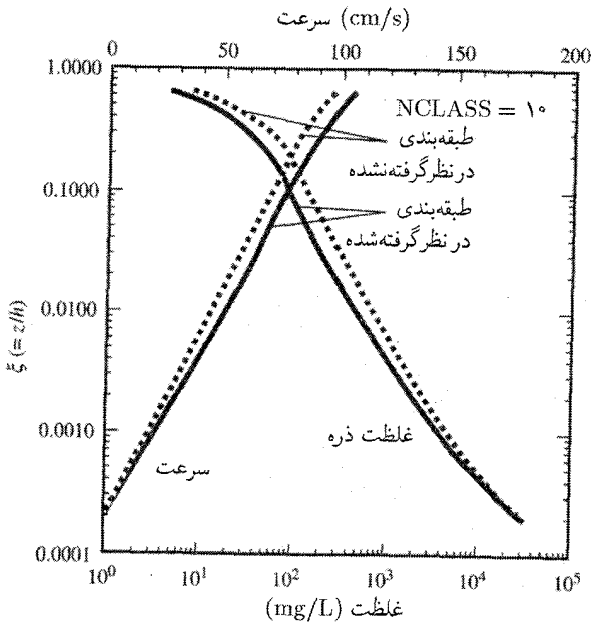
حل

در شکل ۱۱.۱۴ غلظت‌های هر یک از ۱۰ رده اندازه دانه جمع شده‌اند تا غلظت‌های ترسیم شده، C_m ، در هر سطح داخل نمودار به دست آیند (به جدول ۴.۱۴ نیز نگاه کنید). در مرور مجدد نمودار توجه کنید که نمایه غلظت شامل غلظت‌های زیاد در نزدیک کف است. بزرگی غلظت در قسمت بالایی نمایه سه مرتبه افت می‌کند.

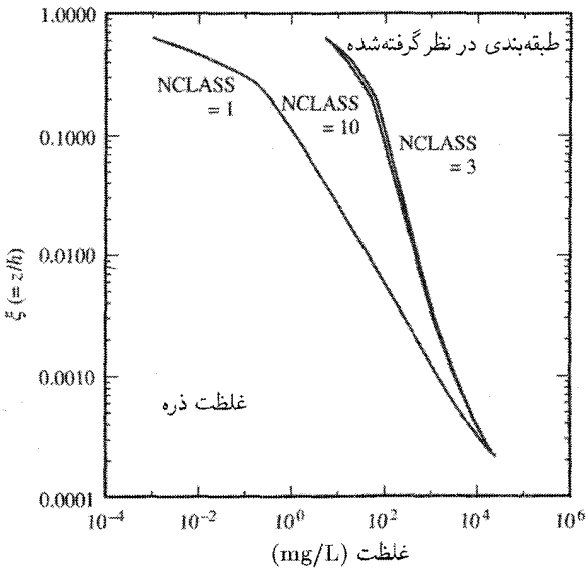
حساسیت نتایج

با مطالعه حساسیت به چندین سؤال درباره رفتار این نمایه‌ها و تأثیر مؤلفه‌های مختلف مدل می‌توان پاسخ داد. شکل‌های ۱۲.۱۴ و ۱۳.۱۴ نمایه‌های محاسبه شده را نشان می‌دهند؛ هر یک از این نمایه‌ها از تغییر دادن یک متغیر و مقابله کردن نتایج با محاسبه قبل به دست آمده‌اند. موضوع اصلی قابل توجه در اینجا مقایسه اثرات طبقه‌بندی با حالتی است که این اثرات در نظر گرفته نمی‌شوند (شکل ۱۲.۱۴)، و همچنین شماره رده‌های اندازه‌ای است که در محاسبه به کار می‌رود.

شکل ۱۲.۱۴ نشان می‌دهد که در نظر گرفتن اثر طبقه‌بندی بر بخشندگی‌های تلاطمی انتقال متلاطم ذرات را در فاصله‌های بالایی ستون کاهش می‌دهد. ستون آب با غلظت کلی پایین در



شکل ۱۲.۱۴ نمایه‌های محاسبه‌شده عمودی غلظت و سرعت ذره که تأثیر در نظر گرفتن تصحیح‌های طبقه‌بندی را مقایسه می‌کنند.



شکل ۱۳.۱۴ نمایه‌های محاسبه‌شده غلظت ذره که حساسیت محاسبه را برای شماره رده‌های اندازه‌دانه (NCLASS) در محاسبه نشان می‌دهد.

ستون آب باعث افزایش انحرافهای بین فرمول‌بندی طبیعی ($Ri = 0$) و طبقه‌بندی می‌شود. با جرم بیشتری که در حالت طبیعی در ستون آب بالایی انتقال می‌یابد نمایه سرعت در مقایسه با نمایه حالت طبقه‌بندی شده کاهش می‌یابد.

بالاخره با اهمیت اندازه دانه که در بحثهای قبل به آن اشاره شده آخرین موضوع قابل توجه این است که چندگستره اندازه دانه باید توزیع را فراگیرد. شکل ۱۳.۱۴ نمایه‌ها را برای NCLASS برابر با رده‌های اندازه ۱، ۳ و ۱۰ نشان می‌دهد. بدیهی است نمایش میانگین هنگرد، $NCLASS = 1$ ، نمایه‌های غلظت ذره را در قسمت بالایی ستون خیلی کم تخمین می‌زند. ولی $NCLASS = 1$ ، نمایه‌های غلظت ذره را در قسمت بالایی ستون خیلی کم تخمین می‌زند. ولی $NCLASS = 3$ و $NCLASS = 10$ ، نمایه‌های تقریباً همسان را می‌دهند. $NCLASS = 1$ نمی‌تواند ذرات با مقیاس ظریفتر را که در ارتفاع بالاتر در ستون منتشر می‌شوند در نظر بگیرد. سه رده اندازه حداقل تعداد رده‌هاست ولی قابل قبول است از این نظر که گستره اندازه در بالا و پایین رده اندازه‌ای است که متوسط مخلوط را شامل می‌شود.

تمرینها

۱۳.۱۴ برخلاف حرکت توده در یک گرادیان چگالی پایدار، حرکت توده در گرادیان چگالی ناپایدار (الف) نوسان سینوسی توده سیال با چگالی ثابت را می‌دهد؛ (ب) با فرکانس برانت-ویسی لاکنترل می‌شود؛ (ج) می‌تواند با عدد گرادیان ریچاردسون پارامتری شود؛ (د) برای $Ri < \frac{1}{4}$ روی می‌دهد؛ (ه) ج و د.

۲.۳.۱۴ برای مدل لایه مرزی طبقه‌بندی شده اندازه ذره چند دانه‌ای (الف) حداقل سه رده اندازه دانه برای محاسبه دقیق قابل قبول است؛ (ب) تأثیر در نظر گرفتن چینه‌بندی ذره این است که انتقال متلاطم به داخل فاصله‌های بالایی ستون را از بین می‌برد؛ (ج) با افزایش فاصله از کف، غلظت کاهش می‌یابد؛ (د) جوابهای بالا؛ (ه) الف و ج.

۴.۱۴ انتقال در سطح مشترک: تبخیر

تغییر حالت از مایع به بخار تبخیر نامیده می‌شود در حالی که متناظر با آن، یعنی تغییر حالت از بخار به مایع، تقطیر نامیده می‌شود. نمونه‌هایی از هر دو در پدیده‌های انتقال در طبیعت و در انتقال مهندسی به سهولت یافت می‌شوند. در صنایع غذایی و شیمیایی، فرایندها برای خشک کردن (تبخیر) قسمت مهمی از فرایند مسافت‌اند یا مبنای برجهای خنک‌کن را، که برای کاهش اتلاف بارگرمای وسایل مصرف‌کننده توان به کار می‌روند، تشکیل می‌دهند. تبخیر و تقطیری که به‌طور طبیعی روی می‌دهند وجهه اصلی چرخه هیدرولوژی و عامل تعیین‌کننده وضعیت آب و هواست. به عنوان مثال دریاچه یری در دریاچه‌های بزرگ لارنتین امریکای شمالی را در نظر بگیرید. از آنجا که آب در مقایسه با اتمسفر

جدول ۵.۱۴. تعریف و محاسبه گرماهای نهان آب.

وابستگی به دما، $T(^{\circ}C)$ یا $L(cal/g)$	تعریف و جذب (+) با دفع (-) انرژی	حالت ۲	حالت ۱
$L_e = 597.3 - 0.057T$	گرمای نهان تبخیر (+)	بخار	مایع
$L_c = -L_e$	گرمای نهان تقطیر (-)	مایع	بخار
$L_s = 677 - 0.07T$	گرمای نهان تصعید (+)	بخار	یخ
$L_m = 79.7$	گرمای نهان ذوب (+)	مایع	یخ
$L_f = -L_m$	گرمای نهان انجماد (-)	یخ	مایع

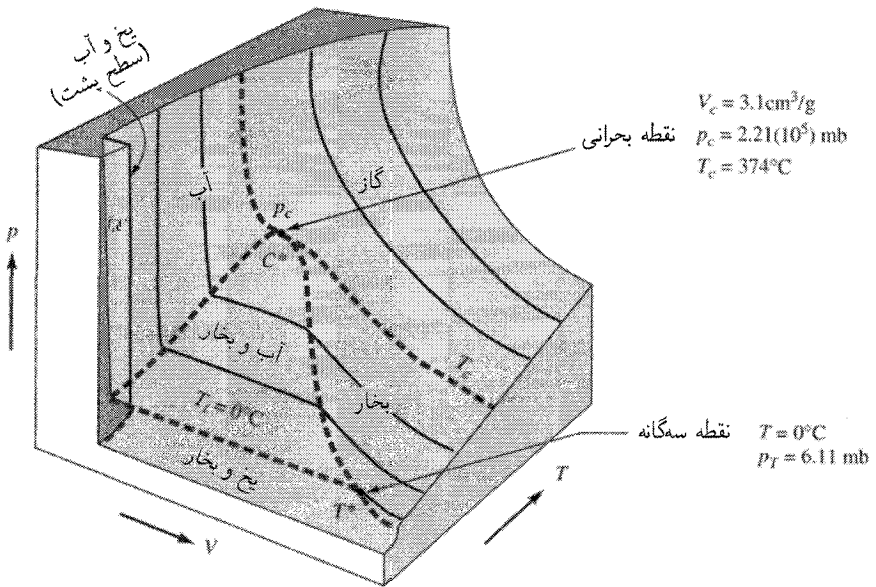
گرما را کمتر انتقال می‌دهد، دمای دریاچه‌ها تا ژانویه در بالای انجماد می‌ماند. زمین خیلی سریعتر گرما را انتقال می‌دهد و در نتیجه دمای آن در اوایل زمستان سریعتر از دمای دریاچه پایین می‌آید. تندبادی که در دسامبر و ژانویه از روی دریاچه‌ها عبور می‌کند کمیتهای قابل توجهی رطوبت تبخیری را از دریاچه‌ها جذب می‌کند. وقتی باد هوای مرطوب را به ساحل سردتر منتقل می‌کند، دمای هوا افت می‌کند و رطوبت تقطیر می‌شود و به صورت برف فرو می‌ریزد. در مناطق نزدیک ساحل مانند کیولند، اهایو، اری، و پنسیلوانیا در مدتی به نام برفهای دریاچه به اندازه ۸ اینچ برف در ساعت باریده است. موضوع این قسمت این است که پدیده‌های انتقال را بر مبنای پارامتری کردن آهنگهای تبخیر و شار بررسی کند. فرایندهای متناظر که شامل این پدیده انتقال هستند در کتابهای مهندسی شیمی (مانند، گینکوپولیس [مرجع ۲۹]) به طور کامل توضیح داده شده‌اند. بالاخره، در اینجا فقط آب بررسی می‌شود.

حالت‌های آب

حالت‌های مختلف آب در کتابهای درسی هوشناسی [مرجع ۳۰]، آب‌شناسی [مرجع ۳۱]، آب و هوشناسی [مرجع ۲۶]، ترمودینامیک [مرجع ۳۲]، یا مهندسی شیمی [مرجع ۳۳] به خوبی شرح داده شده‌اند و خواننده برای توضیحات تفصیلی می‌تواند به این کتابها مراجعه کنند.

تغییر از یک حالت به حالت دیگر احتیاج به جذب یا دفع انرژی دارد. مقدار گرمای جذب شده یا دفع شده برای جرم واحد گرمای نهان نامیده می‌شود که دارای آحاد $kg/ژول$ یا $g/کالری$ است. در جدول ۵.۱۴، که آمیزشی از ایگلزن [مرجع ۳۴] و براس [مرجع ۳۱] است، تعریفهای گرمای نهان لازم برای تبدیل از حالت ۱ به حالت ۲ به طور خلاصه آورده شده است.

تبدیل بین مایع، بخار، و یخ تابعی از دما، فشار، و چگالی است. در مطالعات اقیانوس‌شناسی باید به‌خاطر داشت که چگالی تابعی از دما و شوری است. تعداد نمودارهایی که رابطه بین فازها (حالتها) را نشان می‌دهد بسیار زیاد است. شکل ۱۴.۱۴ که بر مبنای طرحواره‌ای در آیربارن و



شکل ۱۴.۱۴ نمودار P, V, T برای آب.

گادسن [مرجع ۳] است یک شکل نوعی است. خطوط مرزی خطوط دمای ثابت‌اند. دو نقطه‌ای را مشخص شده‌اند نقاط قابل توجه‌اند. نقطه بحرانی C^* ، تنها نقطه‌ای را مشخص می‌کند که در آنجا مایع، گاز، و بخار با هم وجود دارند. در بالای خط دمای ثابت، T_c ، که در نقطه C^* عبور می‌کند، حالت گاز وجود دارد. در مرزهای دمایی پایین C^* ، آب به صورت بخار خالص، مخلوط آب و بخار، یا آب می‌تواند وجود داشته باشد. منحنی خط چین زنگوله شکل ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که در آنجا حالت‌های مایع و بخار با هم وجود دارند. نقطه T^* نقطه سه‌گانه‌ای است که در آنجا بیخ، آب، و بخار با هم وجود دارند. مقدار فشار، مقدار دما، و مقدار حجم مخصوص در نقاط T^* و C^* در شکل مورد توجه قرار گرفته‌اند.

متغیرهای ترمودینامیکی و رطوبت

از قانون گاز کامل دالتن در شیمی به خوبی می‌دانیم که فشار کل هوای خشک و بخار حاصل از تبخیر برابر است با مجموع فشارهای جزئی گازها، یعنی،

$$p = p_{\text{dry}} + p_v \quad (۱۴.۱۴)$$

در اینجا p_v فشار بخار و p_{dry} فشار هوای خشک است. چگالی بخار، ρ_v ، از قانون گاز کامل

به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_v = \frac{p_v}{R_v T} \quad (۲.۴.۱۴)$$

ثابت گاز بخار به صورت زیر به ثابت گاز ایدئال، R ، ارتباط داده می‌شود

$$R_v = \frac{R}{M_v} = \frac{M_{\text{dry}}}{M_v} R_{\text{dry}} \quad (۳.۴.۱۴)$$

در اینجا M_{dry} و M_v به ترتیب، وزن مولکولی بخار آب و هوای خشک است. با استفاده از مقادیر داده شده در پیوست ج، $M_{\text{dry}}/M_v = ۱۶۱$ ؛ بنابراین،

$$\rho_v = \frac{p_v}{\left[\frac{M_{\text{dry}}}{M_v} R_{\text{dry}} T \right]} = \frac{p_v}{۱۶۱ R_{\text{dry}} T} = ۰.۶۲۲ \frac{p_v}{RT} \quad (۴.۴.۱۴)$$

چگالی بخار به عنوان رطوبت مطلق تعریف می‌شود.

برای تعریف انواع دیگر غلظتهای نم یا رطوبت، باید چگالی مخلوط ρ را با استفاده از معادله (۱.۴.۱۴) تعریف کرد

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\text{dry}} + \rho_v s = \frac{p - p_v}{R_{\text{dry}} T} + ۰.۶۲۲ \frac{p_v}{R_{\text{dry}} T} \quad (۵.۴.۱۴) \\ &= \frac{p}{R_{\text{dry}} T} \left(۱ - ۰.۳۷۸ \frac{p_v}{p} \right) \end{aligned}$$

نکته جالب در این رابطه این است که نشان می‌دهد چگالی هوای مرطوب (ρ) کمتر از چگالی هوای خشک (ρ_{dry}) است.

رطوبت نسبی به صورت نسبت چگالی بخار به چگالی بخار اشباع تعریف می‌شود. اشباع به عنوان حالتی از هوای مرطوب تعریف می‌شود که در آن، برای یک دمای معین (نه فشار)، حداکثر جرم بخار آب در مخلوط نگه داشته می‌شود. بنابراین، رطوبت نسبی عبارت است از

$$r(\%) = ۱۰۰ \frac{\rho_v}{\rho_s} = ۱۰۰ \frac{p_v}{p_s} \quad (۶.۴.۱۴)$$

رطوبت مخصوص، در آحاد کسر حجمی، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$c_q = \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{۰.۶۲۲ p_v}{p - ۰.۳۷۸ p_v} \approx ۰.۶۲۲ \frac{p_v}{p} \quad (۷.۴.۱۴)$$

نسبت آمیختگی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma = \frac{\rho_v}{\rho_{dry}} = \frac{0.622 p_v}{p - p_v} \quad (۸.۴.۱۴)$$

تخمین متغیرهای رطوبت

بر مبنای انواع اندازه‌گیری‌های میدانی، فشار بخار اشباع روی آب را با فرمول تجربی بوسن [مرجع ۳۵] به صورت زیر می‌توان تعریف کرد

$$p_s \approx 3363.9 \left[(0.00738T + 0.8072)^8 - 0.000019(1.8T + 48)1.8T + 0.001316 \right] \quad (۹.۴.۱۴)$$

که در آن p_s بر حسب N/m^2 دمای نقطه شبنم بر حسب درجه سانتیگراد است. از براس [مرجع ۳۱]، معادله (۳۳.۳) دمای نقطه شبنم را با خطای $3^\circ C$ با رابطه زیر می‌توان تقریب زد

$$T - T_d \approx (14.55 + 0.114T)x + [(2.5 + 0.007T)x]^2 + (15.9 + 0.117T)x^{1.4} \quad (۱۰.۴.۱۴)$$

که در آن $x = 1 - r/100$ گستره کاربرد از $40^\circ C$ تا $50^\circ C$ است. بالاخره رطوبت نسبی را با فرمول بوسن [مراجع ۳۶] می‌توان تخمین زد

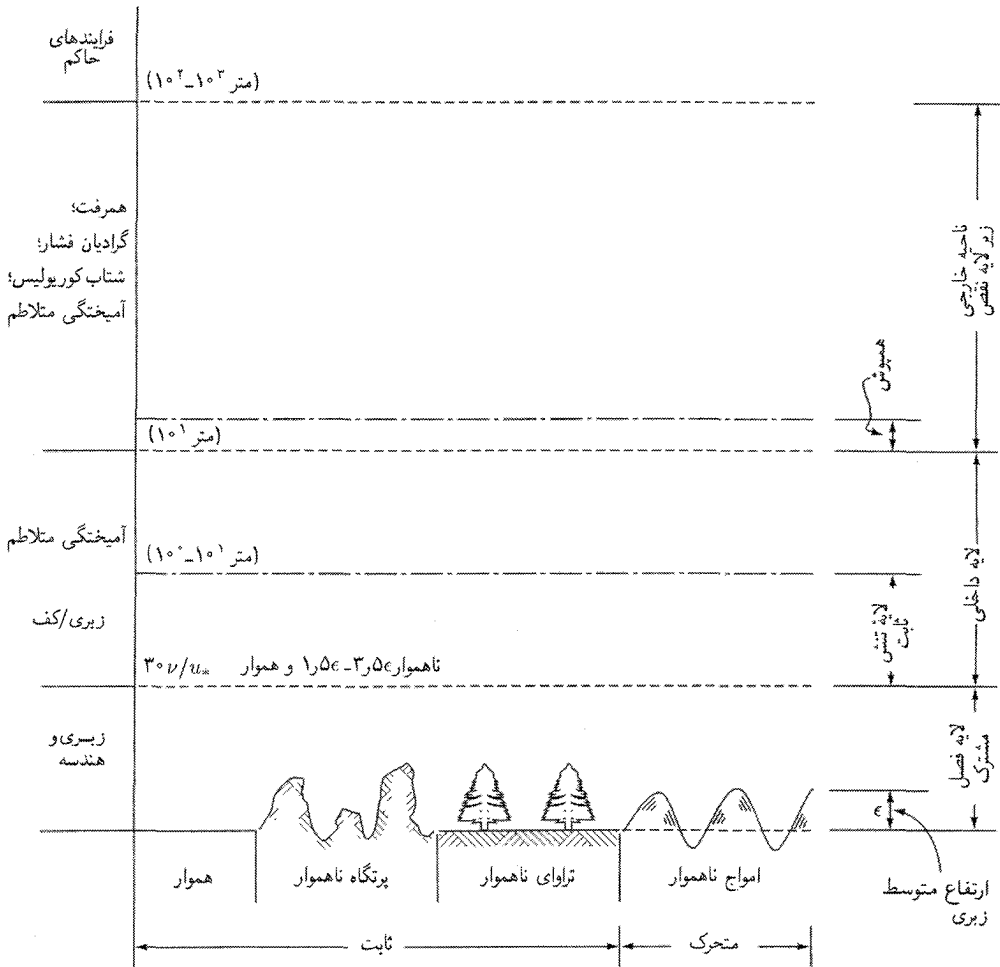
$$r = 100 \left(\frac{112 - 0.1T + T_d}{112 + 0.9T} \right) \quad (۱۱.۴.۱۴)$$

که در آن دماها بر حسب درجه سانتیگراد است.

آنچه در زیر می‌آید مروری بر روشهای پیش‌بینی نمایه‌های رطوبت و شارهای تبخیر است.

نمایه‌های رطوبت و لایه مرزی

مجدداً مانند مسئله لایه مرزی تکانه، شار در فصل مشترک بین زمین یا آب و اتمسفر باید پارامتری شود. مانند قبل، ابتدا از روشهای لایه مرزی برای ایجاد و نمایه‌های رطوبت (و همچنین دما و سرعت) استفاده می‌کنیم و سپس این اطلاعات را با اعداد بی‌بعد تقریبی به صورت نمایشهای کپه‌ای پارامتری شده خلاصه می‌کنیم. تبخیر مایعات دیگر در اتمسفر با گازهای دیگر سراسر است.



شکل ۱۵.۱۴ طرحواره لایه مرزی اتمسفریک.

همانطور که قبلاً گفته شد مسائلی که به این طریق حل می‌شوند دستخوش پیچیدگی هندسی و جفت‌شدگی غیرخطی تر بین مؤلفه‌های شارش و انتقال می‌شوند. شکل ۱۵.۱۴ (اقتباس از براتسرت [مرجع ۲۶]) طرحواره‌ای از ساختار لایه مرزی اتمسفریک را که روی یک مرز جامد یا مرز سیال جریان دارد نشان می‌دهد. اساساً این همان تصویری است که برای لایه مرزی ذره

رسم می‌شود. اختلافهای فیزیکی مشخص‌ترند. ناحیه خارجی یا ناحیه نقص مجدداً لایه‌ای است که فیزیک آن تحت تأثیر طبیعت و مشخصه کف قرار نمی‌گیرند. لایه داخلی یا جداری تحت تأثیر هندسه کف قرار می‌گیرد. در نزدیکی کف زیر لایهٔ فصل مشترکی یا چسبندگی قرار دارد. لایه داخلی شامل دو ناحیه است، ناحیه همپوش بین لایه داخلی و لایه نقص و لایه برش ثابت که شامل نمایه‌های لگاریتمی متغیرهاست. لایه برشی ثابت با شارهای ثابت تکانه، جرم، و انتقال گرما مشخص می‌شود. همانطور که براسرت [مرجع ۲۶] و اشتال [مرجع ۲۷] اشاره کرده‌اند لایه خارجی در لایه مرزی اتمسفریک ناحیه‌ای است که در آن، همانطور که مکرراً گفته شده است، اثرات همرفت طبیعی قوی است، و بر نمایه‌های مختلف پیش‌بینی شده تأثیر می‌گذارد. این برخلاف لایه مرزی نسبتاً پایدار ذره در کف است که در قسمت قبل بحث شد.

اگر کف به‌طور هیدرودینامیکی هموار باشد، لایه فصل مشترک را (همانطور که در فصل ۶ گفته شد) زیر لایه چسبنده می‌گویند. ولی، دو نوع حالت به‌طور هیدرودینامیکی زیر در کف می‌توانند روی دهند که زیر لایه زبر را تشکیل می‌دهند. ابتدا، همانطور که در فصل ۶ و در قسمتهای ۲.۱۴ و ۳.۱۴ قبل بحث شد، شرایط به‌طور هیدرودینامیکی زیر می‌تواند وجود داشته باشد که باعث از بین رفتن زیر لایه چسبنده و گسترش لایه تنش ثابت تا ارتفاع زبری کف، z_0 می‌شود. نکته مهم این است که در این نوع زبری شارش بین (یا از میان) عناصری که باعث زبری می‌شوند، مانند، دانه‌های شن، وارد روابط نمی‌شود. برای مثال، در لایه مرزی اتمسفریک عناصری که زبری را تشکیل می‌دهند می‌توانند از عناصر پراکنده اما بلند تشکیل شده باشد به‌طوری که شارش از میان عناصر باعث کاهش قابل توجه تکانه می‌شود. مثالهایی در این مورد عبارت‌اند از غلات، درختان، بوته‌ها، امواج باد روی سطوح آب، و ساختمانها.

مانند قسمتهای قبل ابتدا به لایه با تنش ثابت و شار ثابت توجه می‌کنیم، به‌خصوص از این نظر که پاسخهای آن از نتایج لایه مرزی تکانه از طریق تشابه به‌دست می‌آید. آن همچنین یک روش ساده (روی دو نقطه) را برای اندازه‌گیری شار فراهم می‌آورد. در این قسمت عمدتاً از کار جامع براسرت [مرجع ۲۶] پیروی شده است.

نمایه‌ها در شرایط خنثی

به فرض اینکه c_q غلظت حجمی بخار آب است معادله پایستاری متلاطم زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial \bar{c}_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v} \bar{c}_q) = \mathcal{D}_v \nabla^2 \bar{c}_q - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'c'_q}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'c'_q}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'c'_q}) \right] \quad (۱۲.۴.۱۴)$$

در اینجا \mathcal{D}_v ضریب پخشندگی مولکولی برای بخار آب در هواست. با استفاده از فرضهای لایه مرزی، این معادله سریعاً به شکل زیر در می‌آید

$$\mathcal{D}_v \frac{\partial^2 \bar{c}_q}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'c'_q}) = 0 \quad (13.4.14)$$

اگر جمله پخش مولکولی در مقایسه با شار متلاطم خیلی کوچک باشد (که نوعاً در این حالت این‌طور است)، در این صورت

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'c'_q}) = \frac{d}{dz} (\overline{w'c'_q}) = 0 \quad \implies \quad \overline{w'c'_q} = \text{ثابت} \quad (14.4.14)$$

همین منطق برای معادله شار گرما به کار می‌رود؛ یعنی، با فرض نبود اثرات تشعشع یا چشمه‌ها و چاه‌های دیگر، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho C_p \overline{w'T'}) = \frac{d}{dz} (\rho C_p \overline{w'T'}) = 0 \quad \implies \quad \overline{w'T'} = \text{ثابت} \quad (15.4.14)$$

برای در نظر گرفتن جفت‌شدگی بین محتوی گرمایی که تحت تأثیر جفت‌شدگی با فشار و محتوی رطوبت قرار می‌گیرد [معادله (۵.۴.۱۴)]، تعریف دمای پتانسیل، θ ، مفید است، و آن دمایی است که هرگاه هوای مرطوب (شامل حالت خاص هوای خشک) به‌طور بی‌دررو تا فشار مرجع استاندارد، که نوعاً $p_o = 1000$ میلی‌بار یا $10^5 N/m^2$ است، به‌دست آید. بنابراین، دمای پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\theta = T \left(\frac{p}{p_o} \right)^\kappa \quad (16.4.14)$$

در اینجا κ برابر است با

$$\kappa = \frac{R_{\text{dry}}}{C_p} (1 - 0.23 C_q) \quad (17.4.14)$$

که اساساً نسبت اختلاف گرمای ویژه است

$$\kappa = \frac{C_p - C_v}{C_p}$$

در هوای خشک $\kappa = 1/1.41$ ، اما در معادله (۱۶.۴.۱۴) سازش با محیط برای اثرات رطوبت در نظر گرفته شده است.

از معادله (۱۵.۴.۱۴) شارش گرمایی محسوس به صورت یک ثابت تعریف می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho C_p \overline{w'\theta'}) = \frac{d}{dz}(\rho C_p \overline{w'\theta'}) = 0 \implies \overline{w'\theta'} = \text{ثابت} \quad (18.4.14)$$

حل نمایه‌های سرعت، دمای پتانسیل، و رطوبت از روشهای تشابه به دست می‌آید، تشابه در اینجا مانند قبل مربوط به این موضوع می‌شود که فرایندهای تلاطمی که هر سه نمایه را می‌دهند از فرایندهای متلاطم مشابه نتیجه می‌شوند. با توجه به این فرضیه، نمایه سرعت با تابع لگاریتمی زیر داده می‌شود

$$\bar{u}_2(z = z_2) - \bar{u}_1(z = z_1) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \quad (19.4.14)$$

یا

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_{om}} \right) \quad (20.4.14)$$

که در آن z_{om} ارتفاع زبری تکانه است. خطا در پارامتری کردن و جایگزینی z_{om} در فصل ۶ و قسمت‌های ۲.۱۴ و ۳.۱۴ بحث شدند، و پارامتری کردن در این مسئله به‌طور کامل به کار می‌رود. اغلب در فرمول‌بندی از فاصله جابه‌جایی d_o استفاده می‌شود تا این خطاها برای موانع زیر بزرگتر کاهش یابد

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z - d_o}{z_{om}} \right) \quad (21.4.14)$$

بنابراین، d_o نمایه را نقل مکان می‌دهد تا اثرات زبری را بهتر در نظر بگیرد.

برای نمایه بخار یا رطوبت، معادله نمایه [معادله (۱۴.۴.۱۴)] انتگرال‌گیری می‌شود و به دست

می‌آید

$$\bar{c}_{q1}(z = z_1) - \bar{c}_{q2}(z = z_2) = \frac{E}{a_v \rho k u_*} \ln \left(\frac{z_2 - d_o}{z_1 - d_o} \right) \quad (22.4.14)$$

یا به شکل جابه‌جایی با مرجع سطح، $c_{qo}(z = z_{ov})$

$$c_{qo} - \bar{c}_q(z) = \frac{E}{a_v \rho k u_*} \ln \left(\frac{z - d_o}{z_{ov}} \right) \quad (23.4.14)$$

در این دو معادله: ضریب فون کارمن بخار آب $k_v = a_v k = a_v$ که برای بیشتر مقاصد عملی خیلی نزدیک ۱ است، (یعنی، (1 ± 0.1)). $a_v = 1$ مناسب است، مگر اینکه شرایط کاملاً پایدار یا ناپایدار برقرار باشد. ارتفاع زیری بخار، z_{ov} ، اصولاً با z_{om} مساوی نیست زیرا در محتوی گرما یا رطوبت پخش مولکولی در سطح مشترک اهمیت دارد. چنین حالتی در تکانه وجود ندارد. ارتفاع جابه‌جایی در تکانه، رطوبت، و گرما مساوی است. بالاخره، E آهنگ تبخیر است که شار رطوبت $[M/L^2/t]$ در سطح مشترک بین زمین (با آب) با هواست. اساساً، آن ثابت انتگرال‌گیری در معادله شار است.

برای دمای پتانسیل رابطه به شکل زیر درمی‌آید

$$\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = \frac{H}{a_h \rho C_p k u_*} \ln \left(\frac{z_2 - d_o}{z_1 - d_o} \right) \quad (24.4.14)$$

یا به صورت جابه‌جایی با دمای پتانسیل θ_o در سطح به عنوان مرجع،

$$\theta_o - \bar{\theta}(z) = \frac{H}{a_h \rho C_p k u_*} \ln \left(\frac{z - d_o}{z_{oh}} \right) \quad (25.4.14)$$

در اینجا H شار انتقال گرما در سطح مشترک است.

اثر طبقه‌بندی و شناوری

در لایه داخلی تنش ثابت یا شار ثابت، شناوری فرایند سهمی نیست. در لایه داخلی بالای لایه تنش ثابت و شار ثابت، شناوری فرایند سهمی است. بیشتر راه حل به کار رفته در روش لایه مرزی ذره از حالت پیچیده‌تر لایه مرزی اتمسفریک گرفته شد. بنابراین، با بیشتر مطالب در بخش ۳.۱۴ آشنا هستیم. لایه مرزی در بخش ۳.۱۴ پایدار بود. در اینجا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. مختصه لایه مرزی بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\xi = \frac{z - d_o}{L} \quad (26.4.14)$$

که در آن d_o ارتفاع جابه‌جایی و L طول مومین-ایوکوف است. این طول سنجش دیگری از پایداری ستون هواست که اخیراً در نظر کارشناسان اتمسفریک بیشتر از عدد ریچاردسون [معادله (۱۲.۳.۱۴)] کاربرد پیدا کرده است. برای ستون هوای مرطوب، معادله‌های (۵.۴.۱۴) و (۷.۴.۱۴) را با معادله

(۳.۳.۱۴) می‌توان ترکیب کرد و شتاب عمودی توده هوای مرطوب را به دست آورد

$$a_z = \frac{g}{T} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} + {}^{\circ}r_6 \backslash T_A \frac{\partial C_q}{\partial z} \right) \quad (\text{الف } 27.4.14)$$

که در لایه داخلی با شارهای نسبتاً ثابت می‌توان آن را با شرایط سطحی به صورت زیر تقریب زد

$$a_z = \frac{g}{\rho T} \left(\frac{H}{C_p} + {}^{\circ}r_6 \backslash TE \right) \quad (\text{ب } 27.4.14)$$

این شتاب ناشی از شناوری را با کار انجام شده توسط نیروی برشی متلاطم $(\rho u_*^2) u_*$ می‌توان مقایسه کرد و نسبت دارای آحاد طول است

$$L = \frac{-\rho u_*^2}{gk \left[\frac{H}{TC_p} + {}^{\circ}r_6 \backslash E \right]} \quad (28.4.14)$$

برای میدانهای چگالی پایدار L مثبت است، برای میدانهای ناپایدار L منفی است، و برای میدانهای خنثی مخرج به صفر نزدیک می‌شود و $L \rightarrow \infty$.

از معادله (۲۱.۴.۱۴) در شرایط خنثی (با دیفرانسیل‌گیری برای پیدا کردن $\frac{d\bar{u}}{dz}$)

$$\frac{k(z - d_o) d\bar{u}}{u_* dz} = 1$$

و عبارتهای مشابه را از معادله‌های (۲۳.۴.۱۴) و (۲۵.۴.۱۴) بخار و دمای پتانسیل می‌توان به دست آورد.

برای اثرات شناوری

$$\frac{k(z - d_o) d\bar{u}}{u_* dz} = \Phi_m(\xi) \quad (\text{الف } 29.4.14)$$

$$-\frac{ku_*(z - d_o) d\bar{c}_q}{E dz} = \Phi_v(\xi) \quad (\text{ب } 29.4.14)$$

$$-\frac{ku_*(z - d_o) \rho c_p d\bar{\theta}}{H dz} = \Phi_h(\xi) \quad (\text{ج } 29.4.14)$$

در اینجا توابع پایداری تکانه، بخار، و دمای پتانسیل، به ترتیب، Φ_m ، Φ_v و Φ_h اثرات طبقه‌بندی را در نظر می‌گیرند. برای شرایط خنثی $\Phi_m = 1$ ، $\Phi_v = \alpha_v^{-1}$ و $\Phi_h = \alpha_h^{-1}$.

از براتسرت [مرجع ۲۶] شکلهای انتگرالی این معادله‌ها را به شکل زیر می‌توان بیان کرد

$$\bar{u}_r - \bar{u}_l = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{\xi_r}{\xi_l} \right) - \Psi_m(\xi_r) - \Psi_m(\xi_l) \right] \quad (\text{الف } ۳۰.۴.۱۴)$$

$$\bar{c}_{q,r} - \bar{c}_{q,l} = \frac{E}{a_v k u_* \rho} \left[\ln \left(\frac{\xi_r}{\xi_l} \right) - \Psi_v(\xi_r) - \Psi_v(\xi_l) \right] \quad (\text{ب } ۳۰.۴.۱۴)$$

$$\bar{\theta}_r - \bar{\theta}_l = \frac{H}{a_h k u_* \rho C_p} \left[\ln \left(\frac{\xi_r}{\xi_l} \right) - \Psi_h(\xi_r) - \Psi_h(\xi_l) \right] \quad (\text{ج } ۳۰.۴.۱۴)$$

که در آن

$$\Psi_m(\xi) = \int_{(z_{om}/L)}^{\xi} [1 - \Phi_m(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{الف } ۳۱.۴.۱۴)$$

$$\Psi_v(\xi) = \int_{(z_{ov}/L)}^{\xi} [1 - \Phi_v(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{ب } ۳۱.۴.۱۴)$$

$$\Psi_h(\xi) = \int_{(z_{oh}/L)}^{\xi} [1 - \Phi_h(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (\text{ج } ۳۱.۴.۱۴)$$

در این فرمولها ζ یک متغیر گنگ انتگرال‌گیری است. با استفاده از شرایط سطح مشترکی مانند حالت خنثی، معادله‌های (الف) تا (ج) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \left[\ln \left(\frac{z - d_o}{z_{om}} \right) - \Psi_m(\xi) \right] \quad (\text{الف } ۳۲.۴.۱۴)$$

$$c_{q,o} - \bar{c}_q(z) = \frac{E}{a_v k u_* \rho} \left[\ln \left(\frac{z - d_o}{z_{ov}} \right) - \Psi_v(\xi) \right] \quad (\text{ب } ۳۲.۴.۱۴)$$

$$\theta_o - \bar{\theta}(z) = \frac{H}{a_h k u_* \rho C_p} \left[\ln \left(\frac{z - d_o}{z_{oh}} \right) - \Psi_h(\xi) \right] \quad (\text{ج } ۳۲.۴.۱۴)$$

سؤالی که باقی می‌ماند این است که توابع نمایه شار $\Psi(\xi)$ برای میدانهای چگالی پایدار و ناپایدار شبیه چیست؟

شکلهای مختلفی برای توابع Ψ و Φ به دست آمده‌اند و برحسب متغیرهای ξ و Ri ، هر دو فرمول‌بندی شده‌اند. در حال حاضر $\Phi_v(\xi)$ و $\Phi_h(\xi)$ مساوی هم فرض می‌شوند. از براتسرت [مرجع ۲۶] شکلهای زیر در شرایط پایا و ناپایا به کار می‌روند.

در شرایط ناپایا ($\xi < 0$)

$$\Phi_v = \Phi_m = \Phi_h = (1 - 16\xi)^{-1/2} \quad (33.4.14)$$

$$\Psi_m(\xi) = 2 \ln \left[\frac{1 + \chi}{2} \right] + \ln \left[\frac{1 + \chi^2}{2} \right] - 2 \arctan(\chi) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{الف } 34.4.14)$$

$$\Psi_v = \Psi_h = 2 \ln \left[\frac{1 + \chi^2}{2} \right] \quad (\text{ب } 34.4.14)$$

$$\chi = (1 - 16\xi)^{1/2}$$

در شرایط پایا ($\xi > 0$)

$$\Phi_v = \Phi_m = \Phi_h = \begin{cases} (1 + 5\xi) & 0 < \xi < 1 \\ 6 & \xi > 1 \end{cases} \quad (35.4.14)$$

در شرایط پایای ضعیف ($0 < \xi < 1$)

$$\Psi_m = \Psi_v = \Psi_h(\xi) = -5\xi \quad (\text{الف } 36.4.14)$$

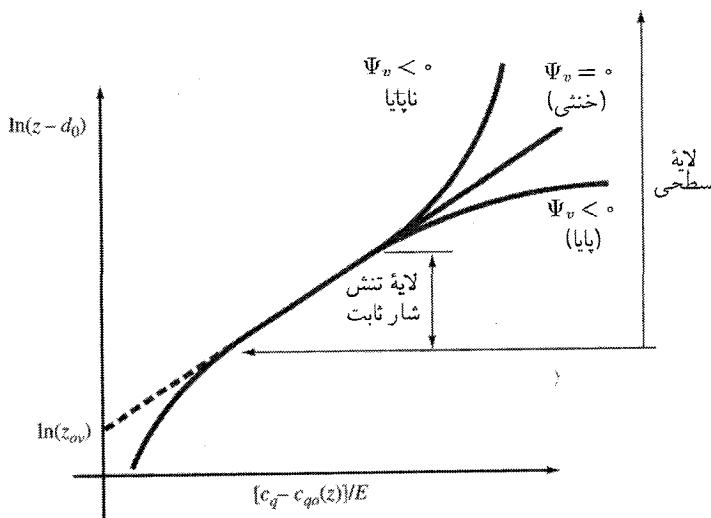
در حالی که شرایط پایای قوی ($\xi > 1$)

$$\Psi_m = \Psi_v = \Psi_h(\xi) = -5(\ln \xi + 1) \quad (\text{ب } 36.4.14)$$

شکل ۱۶.۱۴ طرحواره‌ای از نمایه‌های رطوبت ویژه در شرایط خنثی، پایا، ناپایاست.

پارامتری کردن شار کپه‌ای در سطح مشترک

همانطور که در بخش ۲.۹ گفته شد شار کلی گرما یا جرم را برحسب تفاضل بین دو دما یا غلظت به سهولت اندازه‌گیری شده و ضریب کلی انتقال گرما یا جرم می‌توان بیان کرد. ضریب کلی انتقال کپه‌ای شامل اثر ترکیبی پخش مولکولی و انتقال متلاطم است. مثال ۴.۹ در بخش ۲.۹ همبستگی تجربی انتقال جرم را برای تبخیر، که از آزمایشهای لایه مرزی به دست می‌آید، نشان داد. این قسمت را با یک مبحث تفصیلاتیتر درباره این روش به پایان می‌بریم.



شکل ۱۶.۱۴ طرحواره نمایه‌های رطوبت ویژه در شرایط خنثی، پایا و ناپایا.

دو عدد بی بعد بحرانی که در بسیاری از این فرمول‌بندیها وارد می‌شوند عبارت‌اند از عدد استانتون

$$S_t = \frac{H}{\rho C_p u_{zh} (\theta_o - \bar{\theta}_{zh})} \quad (۳۷.۴.۱۴)$$

و عدد دالتون

$$D_a = \frac{E}{\rho u_{zh} (c_{qo} - \bar{c}_{qzh})} \quad (۳۸.۴.۱۴)$$

در این معادله‌ها $\bar{\theta}_{zh}$ ، \bar{c}_{qzh} عبارت‌اند از سرعت، دمای پتانسیل، و غلظت رطوبت در ارتفاع $z = h$ بالای سطح مشترک. پسا متناظر در سطح مشترک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C d_h = \frac{u_*^2}{\bar{u}_{zh}^2} \quad (۳۹.۴.۱۴)$$

معادله انتقال کپه‌ای در تبخیر و تبادل گرمای محسوس از مرتب‌کردن دوباره معادله‌های (۳۷.۴.۱۴) و (۳۸.۴.۱۴) به دست می‌آید، یعنی،

$$E = \rho u_{zh} D_a (c_{qo} - \bar{c}_{qzh}) \quad (۴۰.۴.۱۴)$$

$$H = \rho C_p u_{zh} St(\theta_o - \bar{\theta}_{zh}) \quad (۴۱.۴.۱۴)$$

معادله (۴۰.۴.۱۴) معادله دالتون برای تبخیر نامیده می‌شود و موضوع بررسی دقیق آزمایش میدانی و آزمایشگاهی قرار گرفته است. برای نمایش نتایج عدد دالتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$D_a = \frac{Cd_h^{1/2}}{\left[(a_v B)^{-1} + a_v^{-1} Cd_h^{-1/2} \right]} \quad (۴۲.۴.۱۴)$$

مقدار B را به صورت ترکیبهای بی‌بعد عدد اشمیت، S_c ، و عدد زبری رینولدز، $R_{z_o}(u_* z_o / \nu)$ می‌توان نشان داد. در سطوح هموار: ($R_{z_o} < ۱۳$)

$$(a_v B)^{-1} = ۱۳.۶ S_c^{2/3} - ۱۳.۵ \quad (۴۳.۴.۱۴)$$

و برای سطوح زبر با اجزای یخ ($R_{z_o} > ۲$) ($S_c < ۶$)

$$(a_v B)^{-1} = ۷.۳ R_{z_o}^{1/4} S_c^{1/2} - ۵ \quad (۴۴.۴.۱۴)$$

براسرت [مرجع ۲۶] دو فرمول بالا را ارائه کرده است. هلفریش و دیگران [مرجع ۳۷] بیش از ۱۰۰ معادله تجربی تبخیر را مرور کرده است که پیشنهاد شده است از آنها استفاده شود (برای یک جمع‌بندی خلاصه به جدول ۳.۵ در [مرجع ۳۱] نگاه کنید). چون اندازه‌گیری فشار بخار ساده‌تر است، شکل‌های معادله دالتون اغلب برحسب p_v ، به جای c_q ، بیان می‌شوند. یادآوری می‌شود که فشار بخار و رطوبت ویژه c_q با معادله $c_q = ۰.۶۲۲ p_v / p$ [معادله (۷.۴.۱۴)] به هم ارتباط دارند.

بالاخره، جدول ۶.۱۴ از ایگالسون [مرجع ۳۴] ارتفاعهای زبری (z_o) را برای انواع مختلف سطوح هموار، پرتگاه، و نفوذپذیر خلاصه کرده است. این داده‌ها از روی آزمایشهای میدانی با این سطوح به دست آمده‌اند و با تخمینهای z_o که با نظریه لایه مرزی خنثی [معادله (۱۹.۴.۱۴)] و انجام اندازه‌گیریهای سرعت در ۲m بالای سطح تکمیل شده‌اند.

مثال ۲.۱۴ یک ایستگاه میدانی موقتی در دشتهای شنی داکوتای شمالی شرایط را در قطعه زمینی که اخیراً آبیاری شده است اندازه‌گیری می‌کند. در ۱m و ۱۰m بالای سطح

جدول ۶.۱۴ مقادیر ارتفاع زبری

نوع	زبری، z_0 (cm)	نوع	زبری، z_0 (cm)
آب باز	۰.۰۰۱	یونجه (۳۰-۲۰ cm)	۱.۴
گل هموار	۰.۰۰۱	ذرت (۱۷۰ cm)	۹.۵
برف هموار	۰.۰۰۵	خاشاک (۱۳۵ cm)	۱۴.۰
بیابان	۰.۰۳	باغ مرکبات (۳۵۰ cm)	۵۰.۰
خاک خیس	۰.۰۲	جنگل خزان‌پذیر (۱۷۰۰ cm)	۲۷۰
چمن (۱.۵ cm)	۰.۲	جنگل کاج (۲۷۰۰ cm)	۳۰۰

* اقتباس از [مرجع ۳۴].

سرعت‌های باد، به ترتیب، ۱.۲ m/s و ۲.۵ m/s اندازه‌گیری می‌شوند و دماها $(z_1 = ۱\text{ m})$ ۲۵°C و $(z_2 = ۱۰\text{ m})$ ۲۰°C خوانده می‌شوند. یک رطوبت‌سنج رطوبت ویژه در ۱ m بالای سطح را ۰.۰۲ اندازه می‌گیرد، و به خاطر آماده‌سازی برای آبیاری زمینهای شیب‌دار شخم‌زده شده‌اند. می‌خواهیم آهنگ تبخیر E را برحسب شار جرم و آهنگ معادل آب تلف‌شده از سطح کانال آبیاری محاسبه کنیم. سرویس آب و هوایی فشار جوی محلی ۱۰۱.۳۲۵ kPa را گزارش می‌دهد.

حل

حل این مسئله بستگی به استفاده از معادله دالتون، معادله $(۴۰.۴.۱۴)$ دارد که آن هم مستلزم اطلاع از چگالی مخلوط، ρ ؛ سرعت باد در ارتفاع مرجع، $u_1 = u_{zh}(z = z_1 = h = ۱\text{ m})$ ؛ عدد دالتون، D_a ؛ رطوبت در سطح، c_{q0} ؛ در رطوبت در ارتفاع مرجع، $\bar{c}_{q1} = \bar{c}_{qzh}(z = z_1 = h = ۱\text{ m})$ ؛ ابتدا عدد دالتون بررسی می‌شود:

۱. عدد دالتون. از معادله $(۴۲.۴.۱۴)$

$$D_a = \frac{C d_h^{1/2}}{\left[(a_v B)^{-1} + a_v^{-1} C d_h^{-1/2} \right]}$$

ابتدا باید سرعت اصطکاکی، u_* ، را محاسبه کرد. با فرض شرایط خشتی، سرعتها در دو ارتفاع در لایه با تنش ثابت به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$u_2(z_2) - u_1(z_1) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z_2}{z_1} \right)$$

$$u_* = \frac{k(u_2 - u_1)}{\ln(z_2/z_1)} = \frac{0.4(2.5 - 1.2)m/s}{\ln(10/1)}$$

$$= 0.23m/s$$

از جدول ۶.۱۴ زمین شنی و زیر متناظر است با زبری $z_o = 0.1cm$ و بنابراین، از معادله (۴.۴.۱۴) عدد رینولدز زبری، R_{z_o} عبارت است از

$$R_{z_o} = \frac{u_* z_o}{\nu} = \frac{(0.23m/s)(0.1cm)(0.01m/cm)}{1.5(10^{-5})m^2/s}$$

$$= 18.6$$

و

$$(a_v B)^{-1} = 7.3 R_{z_o}^{1/2} S_c^{1/2} - 5.0 = 7.3(18.6)^{1/2} \left(\frac{\nu}{D_v}\right)^{1/2} - 5.0$$

$$= 7.3(2.08) \left(\frac{1.5(10^{-5})}{2.42(10^{-5})}\right)^{1/2} - 5.0$$

$$= 12.0 - 5.0$$

$$= 7.0$$

عدد دالتون نیز نیازمند مقدار Cd_h است؛ بنابراین، از معادله (۳۹.۴.۱۴)

$$Cd_h = \frac{u_*^2}{u_{zh}^2(z = z_1)} = \frac{(0.23m/s)^2}{(1.2m/s)^2} = 0.54$$

اکنون عدد دالتون را می‌توان محاسبه کرد

$$D_a = \frac{Cd_h^{1/2}}{(a_v B)^{-1} + a_v^{-1} Cd_h^{1/2}} = \frac{(0.54)^{-1/2}}{[(7.0) + (1)(0.54)^{-1/2}]} = 0.21$$

۲. چگالی مخلوط. از معادله (۵.۴.۱۴) چگالی مخلوط به صورت زیر پیدا می‌شود

$$\rho = \rho_m = \frac{p}{RT} \left(1 - 0.378 \frac{p_v}{p}\right)$$

در اینجا R ثابت گاز کامل برای هوای خشک است ($R = 287 \text{ m.N/kg.K}$). بنابراین،

$$\rho_m = \frac{10.173(10^3) \text{ N/m}^2}{(287 \text{ m.N/kg.K})(298 \text{ K})} \left[1 - 0.378 \frac{3.17(10^3) \text{ N/m}^2}{10.173(10^3) \text{ N/m}^2} \right]$$

فشار بخار برای 25°C گرفته می‌شود که در اینجا از $z = 1 \text{ m}$ تا سطح ثابت فرض می‌شود. پس از محاسبه، چگالی مخلوط به صورت زیر پیدا می‌شود

$$\rho_m = 1.17 \text{ kg/m}^3 = 1.17(10^{-3}) \text{ g/cm}^3$$

۳. رطوبتها. اگر چگالی مخلوط معلوم باشد، در این صورت چگالی بخار، ρ_v ، از معادله (۲.۴.۱۴) به سهولت به صورت زیر پیدا می‌شود

$$\begin{aligned} \rho_v &= \frac{p_v}{1.61 R_{\text{dry}} T} = \frac{3.17(10^3) \text{ N/m}^2}{(1.61)(287 \text{ m.N/kg.K})(298 \text{ K})} \\ &= 0.23 \text{ kg/m}^3 = 0.23(10^{-3}) \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\rho_m = \rho_{\text{خشک}} + \rho_v$$

$$\rho_{\text{خشک}} = \rho_m - \rho_v = 1.17 - 0.23 = 0.94 \text{ kg/m}^3 = 0.94(10^{-3}) \text{ g/cm}^3$$

رطوبت ویژه در سطح با رابطه زیر پیدا می‌شود

$$c_{q0} = \rho_v / \rho_m = \frac{0.23}{1.17} = 0.2$$

با پیدا کردن فشار بخار اشباع، ρ_s ، رطوبت نسبی، یعنی معادله (۶.۴.۱۴)، را می‌توان واریسی کرد

$$r(\%) = \frac{\rho_v}{\rho_s}(100) = 1(100) = 100\%$$

چون مقدار اشباع را برای ρ_v در سطح (3.17 kPa) فرض کرده‌ایم، پیش‌بینی می‌شود که $r = 100$ ولی، یک فرمول تجربی برای ρ_s ، فشار بخار اشباع، را از براس [مرجع ۳۱]، معادله (۳۱.۳)

می‌توان به دست آورد که در آن T برحسب درجه سانتیگراد و p_s برحسب میلی‌بار است

$$p_s \approx 33.8639 [(0.00738 + 0.8072)^8 - 0.000019] - 0.000019(1.8T + 48) + 0.00136 \quad (45.4.14)$$

با استفاده از داده‌های این مسئله، معادله (۴۵.۴.۱۴) مقدار $p_s = 31.66$ میلی‌بار یا 316 kPa را می‌دهد. این مقدار قابل پیش‌بینی است زیرا فشار بخار اشباع را انتخاب می‌کنیم. چون مقادیر با خطای 1 kPa است اندازه‌گیری نیز کمی خطا دارد.

۴. تخمین تبخیر. با مراجعه به معادله تبخیر

$$\begin{aligned} E(\text{kg/m}^2\text{s}) &= \rho u_{zh}(z = z_1) D_a (c_{q0} - \bar{c}_{qzh}(z = z_1)) \\ &= (1.17 \text{ kg/m}^3)(1.2 \text{ m/s})(0.21)(0.20 - 0.18) \\ &= 0.3(10^{-5}) \text{ kg/m}^2\text{s} \end{aligned}$$

در مساحت سطح ۱ متر مربع، کل جرم تبخیرشده در یک روز (86400 ثانیه) عبارت است از

$$M_{\text{روز}} = (0.3(10^{-5}) \text{ kg/m}^2\text{s})(1 \text{ m}^2)(86400 \text{ sec/روز}) = 458 \text{ kg}$$

مانند مثال ۴.۹ ارتفاع معادله سطح آب، h_w ، که از یک متر مربع در یک روز تلف می‌شود عبارت است از

$$M_{\text{روز}} = 458 \text{ kg} = \rho_w h_w A \quad \Rightarrow \quad h_w = \frac{M_{\text{روز}}}{\rho_w A}$$

بنابراین

$$h_w = \frac{458 \text{ kg}}{(997.1 \text{ kg/m}^3)(1 \text{ m}^2)} = 0.0459 \text{ m/روز} = 4.6 \text{ cm/روز}$$

بنابراین، $h_w = 4.6 \text{ cm}$ آب از یک متر مربع سطح در روز تلف می‌شود.

۵. گرمای محسوس. از جدول ۵.۱۴ گرمای نهان تبخیر L_e از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L_e = 597.3 - 0.57(25^\circ \text{C}) = 583.05 \text{ cal/g}$$

این را به ژول بر ثانیه می‌توان تبدیل کرد

$$L_e(\text{J/g}) = L_e(\text{cal/g}) 4.186 \text{ J/g} = 2440.6 \text{ J/g}$$

در یک روز 4.6 kg جرم از یک متر مربع تبخیر می‌شود؛ بنابراین، کل گرمای داده شده به جرم آب معادل عبارت است از

$$Q_e = (4.6 \text{ kg})(2440 \text{ J/g})(1000 \text{ g/kg}) = 11.2(10^6) \text{ J}$$

تمرینها

۱.۴.۱۴ در حالی که گرمای نهان تقطیر گرمایی است که یک گرم جرم آب به هنگام تبدیل از حالت بخار به مایع از دست می‌دهد، گرمای نهان تصعید الف) به دما بستگی دارد؛ ب) ثابت است؛ ج) گرمای جذب شده به هنگام تبدیل بخار به یخ را در نظر می‌گیرد؛ د) گرمای جذب شده به هنگام تبدیل یخ به بخار را در نظر می‌گیرد؛ ه) تمام جوابهای بالا.

۲.۴.۱۴ نقطه سه‌گانه نقطه‌ای است روی نمودار فشار، حجم ویژه، دما الف) که نشان می‌دهد در کجا آب می‌تواند به صورت بخار خالص یا مخلوطی از بخار و آب وجود داشته باشد؛ ب) تنها نقطه در نمودار p - V - T است که در آنجا یخ، آب، و بخار با هم وجود دارند؛ ج) در مقدار 0°C روی می‌دهد؛ د) در مقدار 611 میلی‌بار روی می‌دهد؛ ه) ب، ج، و د.

۳.۴.۱۴ رطوبت نسبی الف) همیشه کمتر از چگالی بخار اشباع یا مساوی با آن است؛ ب) با دمای نقطه شبنم به طور معکوس متناسب است؛ ج) مساوی است با $100 \times (\rho_v / \rho_s)$ درصد؛ د) نسبت ρ_v ضرب در رطوبت مطلق ضرب در 100 است؛ ه) تمام جوابهای بالا.

۴.۴.۱۴ در مقایسه با لایه مرزی که در فصل ۶ بحث شد، لایه مرزی اتمسفریک الف) با یک لایه خارجی مشخص می‌شود که در آن اثرات همرفت طبیعی مهم است؛ ب) یک لایه با تنش ثابت نیز دارد؛ ج) شامل اجزای زبر بزرگ کاملاً پراکنده است؛ د) شامل هیچ زیرلایه چسبنده به طور هیدرودینامیکی هموار نیست؛ ه) تمام جوابها به غیر از د).

۵.۴.۱۴ روشهای حل تشابهی در حلهای سرعت، رطوبت، و دما در لایه مرزی خنثی، چینه‌بندی نشد، الف) نتیجه می‌دهند که تمام حلها برحسب فاصله از جداره به طور لگاریتمی تغییر می‌کنند؛ ب) نتیجه می‌دهند که تمام حلها از ارتفاعهای زیری و تغییر مکان یکسان استفاده می‌کنند؛ ج) نتیجه می‌دهند تمام حلها توابعی از عدد ریچاردسون هستند؛ د) نتیجه می‌دهند که حلها نمایه‌های شار متلاطم و به طور خطی افزایشی دارند؛ ه) هیچکدام.

۵.۱۴ واکنشگاهها و مخزنهای فرایند

همانطور که در قسمت اول این فصل بحث شد تحلیل‌گر به طور مستدل شارشهای مهندسی و میدانهای انتقال را در نظر می‌گیرد تا به هدف یا نتیجه خاصی دست یابد. نتیجه باید قابل پیشگویی

باشد و وقتی به طور عملیاتی استفاده می شود باید اقتصادی، مطمئن، و بادوام باشد. اغلب، می توان سلسله ای از فرایندها یا تبدیلهای را طی کرد تا به نتیجه مطلوب رسید. برای مثال، برای درست کردن آبجو باید بیش از ۲۰ فرایند روی ترکیب آب، جو، رازک، و مخمر صورت گیرد. از مسائل مربوط به مهندس عمران یا محیط زیست تبدیل زباله های شهرداری به آب تمیز است که بتوان در نهرهای طبیعی یا آب زمینی روان ساخت. برای این تبدیل واحدهای عملیاتی فاضلاب ۷۰ عمل فرایندی را انجام می دهند [۳۸].

بعضی از این فرایندها، مانند خشک کردن لجن، خیلی ساده است و به قدری خشک کردن و تبخیر کم است که روشهای مکانیک سیالات و پدیده های انتقال می توانند به کمیت بندی کمک کنند. ولی، بیشتر فرایندها با مکانیک سیالات، پدیده های انتقال، و تبدیلهای بیولوژیکی و شیمیایی مربوط بیان می شوند. دستگاههای فیزیکی در بردارنده فرایندها، که طرح هندسی آنها طوری است که میدانهای دقیق شارش را می دهند، مخزنهای واکنشگاه، ظرفها، یا حوضچه های فرایند نامیده می شوند. مخزنها و ظرفها منبع کاملاً بسته ای است که دسترسی به آنها فقط از طریق مجراهایی است که به خوبی قرار گرفته اند. تفاوت حوضچه ها با مخزنها فقط در این است که سطح سیال در حوضچه ها وسیع است و در برابر اتمسفر قرار دارد و بنابراین تحت تأثیر باد، تشعشع، همرفت، و اثرات تبخیر اتمسفریک قرار دارد.

هدف در قسمت بعدی این است که در زمینه مکانیک سیالات ظرف واکنشی را که بر طرح و انتخاب آنها تأثیر می گذراند مرور کند. زمینه اول رابطه بین نوع شارش در واکنشگاه، فرایند واکنشگاه، و اندازه مورد نیاز ظرف است؛ و زمینه دوم درباره آمیختگی و اغتشاش در ظرف است.

انواع فرایند واکنشگاه و تحلیل آنها

همانطور که در بسیاری از کتابهای درسی درباره طراحی واحدهای عملیات با فرایندهای صنعتی فاضلاب (مثلاً [مرجع ۲۹، ۳۸ - ۴۰]) دیده می شود شش نوع واکنشگاه فرایند وجود دارد. شکل ۱۷.۱۴ شامل طحرواره ای از انواع مختلف است. چهار نوع (A-D) کاربرد نسبتاً کلی دارند و برای تعدادی از فرایندها می توان آنها را به کار برد. واکنشگاههای پر شده و شار بستر (E) و (F) وظایف کاملاً اختصاصی انجام می دهند، و اگرچه آنها به خاطر مکانیک سیالات و انتقال پیچیده شان قابل توجه اند، تحلیل آنها معمولاً به دوره های پیشرفته تر واگذار می شود.

در زیر توصیف خلاصه ای از پاسخ واکنشگاههای A-D آورده شده است. روش بنیادی موازنه جرم برای واکنشگاه در بخش ۹.۳ از دیدگاه حجم کنترلی بحث شد. مثالهای ۲۴.۳ تا ۲۶.۳ بر مبنای اصول واکنشگاه که دائماً تکان داده می شود و تحت آهنگ واپاشی مرتبه اول قرار

نوع واکنشگر	طرحواره	مشخصه های نسبت داده شده	پاسخ غلظت خروجی، C_2 ، به زمان ورود پیوسته (شکل ۱۸.۱۴ الف)	پاسخ غلظت خروجی، C_2 ، به زمان ورودی ضربه ای (شکل ۱۸.۱۴ ب)
الف) ناپیوسته		<ol style="list-style-type: none"> ۱. محتوی مخزن، V، ثابت فرض می شود. تعادل غلظت به خوبی مخلوط می شود. ۲. ناپیوسته، جدید با کم V در ورودیهای A و B وارد می شود؛ سپس واکنش دوباره پیش می رود. ۳. نبرد واکنش یا آمیختگی در زمان پر شدن یا خالی شدن. 	<p>بیکار نمی رود</p>	
ب) شارش تویبی		<ol style="list-style-type: none"> ۱. فراگذشت پیوسته شارش و ماده غلیظ شده ۲. نسبت طول به عرض و ارتفاع بالا، آمیختگی و پراکنندگی خیلی کم ۳. بنابراین، یک جرم غلیظ شده چسبیده (یا تویبی) به هنگام عبور در واکنشگاه دست نخورده باقی می ماند 		
ج) شارش پیوسته		<ol style="list-style-type: none"> ۱. ورود پیوسته ماده به داخل واکنشگاه ۲. واکنش نیز به طور پیوسته انجام می شود ۳. تکان دادن باعث می شود واکنش و زمان رسیدن به غلظت شارش خروجی طرح تسریع شود ۴. مبنای مثالهای ۲۶.۳ تا ۲۶.۴ 		
د) شارش آمیخته		<ol style="list-style-type: none"> ۱. ورودی و خروجی پیوسته ۲. ترکیب شارش تویبی و واکنشگاه آمیخته ۳. آمیختگی بر اثر هندسه شارش ایجاد می شود 		
ه) بستر آنتاشته شده		<ol style="list-style-type: none"> ۱. نوعاً مبنای فیلترها ۲. عملیات می تواند پیوسته یا دوره ای باشد ۳. تبدیل ماده غلیظ شده بر اثر تماس با سطح ماده بستر واکنش شیمیایی حاصل 	بیکار نمی رود	بیکار نمی رود
و) بستر شاره		<ol style="list-style-type: none"> ۱. شارش رویه بالای پیوسته در واکنشگاه ۲. تخلخل بستر که با شارش عبوری کنترل می شود ۳. تبدیل ماده غلیظ شده بر اثر تماس با سطح ماده بستر و واکنش شیمیایی حاصل 	بیکار نمی رود	بیکار نمی رود

شکل ۱۸.۱۴ انواع فرایند و رفتار واکنشگاه (از [مرجع ۳۸]).

جدول ۷.۱۴ شکل جمله‌های واکنش.

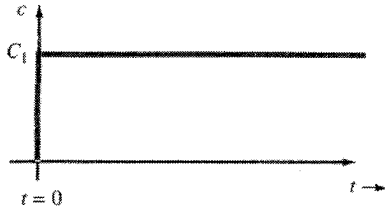
مرتبۀ واکنش	شکل معادله آهنگ	شکل انتگرالی	زمان مرجع (نیمه‌عمر)
صفرم	$\forall \frac{dC}{dt} = S = -\forall k_0$	$C = C_0(t = 0) - k_0 t$	$t_r = \frac{C_0}{2k_0}$
اول	$\forall \frac{dC}{dt} = S = -\forall k_1 C$	$\frac{C}{C_0} = \exp(-k_1 t)$	$t_r = \frac{1}{k_1} \ln 2$
دوم	$\forall \frac{dC}{dt} = S = -\forall k_2 C^2$	$\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = k_2 t$	$t_r = \frac{1}{k_2 C_0}$

دارد حل شدند. معادله (۱۲.۹.۳) معادلهٔ بنیادی حجم کنترلی در سیستم با یک ورودی، یک خروجی است و در اینجا برای حالت یک ورودی (۱) و یک خروجی (۲) با مقادیر متوسط غلظت و سرعت در مقطع عرضی تکرار می‌شود. \forall حجم مخزن و S جمله چشمه-چاه است.

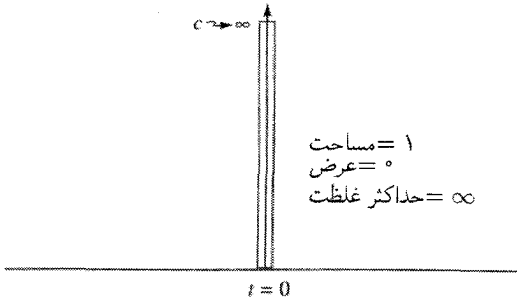
$$\forall \frac{dC}{dt} = V_1 A_1 C_1 - V_2 A_2 C_2 + S \quad (۱.۵.۱۴)$$

در حالت ساده‌تر، جمله چشمه-چاه برای واکنشهای مختلف را معمولاً از سه شکل فهرست‌شده در جدول ۷.۱۴ می‌توان انتخاب کرد. مشخصات واکنش مرتبهٔ صفرم، اول و دوم اساساً به نمای متغیر غلظت در سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مربوط می‌شوند. پارامترهای k_1 ، k_0 و k_2 ضریبهای آهنگ یا ضریبهای آهنگ k با ابعاد متمایز یعنی، به ترتیب، $[t^{-1}]$ ، و $[L^3/Mt]$ است. مجدداً برای محاسبه تفصیلی بر مبنای سینتیک واکنش مرتبهٔ اول برای واپاشی و تولید، هر دو، باید به مثالهای ۲۴.۳ تا ۲۶.۳ مراجعه کرد.

شکل ۱۷.۱۴ شامل خلاصه‌ای از مشخصات مختلف هر وسیله است. دو ستون آخر در شکل ۱۷.۱۴ که نمودار زمانی غلظت را در خروجی سیستم توضیح می‌دهند مورد توجه خاص هستند. در رابطه با شکل ۱۸.۱۴ دو ورودی ممکن ایجاد می‌شوند تا این تفاوت‌های واکنشگاه، بارگذاری پیوسته و ضربه‌ای، نشان داده شوند. بارگذاری پیوسته اساساً در زمان صفر شروع می‌شود و تا ماده ورودی به مخزن با شارشها و غلظتهای قابل پیش‌بینی (یا معلوم) پیش می‌رود. یک یا چند ورودی را می‌توان پذیرفت. در حالت ضربه‌ای اساساً جرم معین ماده (که به داخل سطح معینی در نمودار منتقل می‌شود) به‌طور لحظه‌ای وارد سیستم می‌شود. توصیف تابعی این رفتار تابع دلتای کرونکر است. دو شکل دربارهٔ چگونگی تغییر غلظت داخل مخزن چیزی نمی‌گویند تا این رفتارهای خارجی تعیین شوند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۸.۱۴ حالت غلظت ورودی واکنشگاه: (الف) بارگذاری پیوسته؛ (ب) بارگذاری ضربه‌ای.

واکنشگاه ناپیوسته

واکنشگاه پیمانه‌ای از دیدگاه انتقال به ساده‌ترین وجه تحلیل می‌شود زیرا هیچ سیستم انتقال وجود ندارد. ماده جدید وارد مخزن می‌شود، مخزن آب‌بندی شده است، و ماده برای مدت زمان لازم به هم زده می‌شود تا غلظت مطلوب سیال به دست آید. ماده داخل مخزن تا این غلظت یکنواخت در سرتاسر مخزن مخلوط شود. زمان توقف، یا زمان اقامت، t_d (شکل ۱۷.۱۴)، زمانی است که سیال در داخل مخزن باقی می‌ماند، و این زمان لازم برای آمیختگی یا واکنش شیمیایی و/یا بیولوژیکی برای تعیین غلظت مطلوب است.

معادله (۱.۵.۱۴) برای واکنشگاه ناپیوسته کاملاً ساده است، یعنی،

$$V = \frac{dC}{dt} = S$$

بنابراین، واکنشگاه ناپیوسته فقط تحت تأثیر حجم مخزن، نوع واکنش، و آهنگهای واکنش قرار دارد. نتایج در جدول ۷.۱۴ برای واکنشگاه ناپیوسته مستقیماً به کار می‌روند. اغتشاش مکانیکی ناشی از به هم زدن برای اطمینان از این موضوع است که تمام محتوی مخزن حداکثر تبدیل شیمیایی یا بیولوژیکی حاصل از آهنگ واکنش را به دست آورند. شکل ۱۷.۱۴، ستون ۵، شامل طرحواره‌ای

از رفتار غلظت در خروجی است، اساساً یک حجم معلوم (V_t) ماده با غلظت به طور یکنواخت توزیع شده رها می شود. بنابراین رفتار خروجی به صورت غلظت به خوبی مخلوط شده است که در مدتی که لازم است تا حجم مخزن تخلیه شود دوام می آورد.

واکنشگاه شارش پیوسته

این حالت در مثالهای ۲۴.۳ تا ۲۶.۳ تا اندازه ای بررسی شده است. منحنیهای پاسخ خروجی در شکل ۱۷.۱۴، ستون ۴، را، با فرض نبود واکنش شیمیایی یا بیولوژیکی ($k = k_1 = 0$) و با محاسبه مجدد ضرایب با استفاده از شرط اولیه غلظت خروجی $C_2(t=0) = 0$ ، می توان عنوان حالت معادله (۱۶.۹.۳) به دست آورد. با این شرط اولیه، پاسخ خروجی بر حسب زمان عبارت است از

$$C_2(t) = C_1[1 - e^{-t(Q/V_t)}] = C_1(1 - e^{-t/t_d}) \quad (2.5.14)$$

در اینجا از زمان بازداری هیدرولیکی، t_d ، استفاده شده است و به صورت Q/V_t تعریف شده است که در آن Q شارش خالص از مخزن و V_t حجم مخزن است. طرحواره تغییرات زمانی در ستون ۴ نشان داده شده است. اگر فرایند معکوس شود $C_2(t=0) = C_1$ ، در این صورت حالت پاکسازی وجود دارد و حل معادله (۱۶.۹.۳) می دهد

$$C_2(t) = C_1 e^{-t/t_d} \quad (3.5.14)$$

واکنشگاه شارش تویی

واکنشگاه شارش تویی ایدئال اساساً تفسیرکننده معادله انتقال در لوله یا کانال در مساحت متوسط [معادله (۱۵.۴.۹)] است با ضریب پاشیدگی بسیار کوچکی که از آن می توان صرف نظر کرد. واکنشگاه شارش تویی در امتداد فرآورده هیدرولیکی خیلی طویل است و مساحت مقطع عرضی ثابت دارد. اگر x در امتداد کانال بلند باشد، از معادله (۱۵.۴.۹)

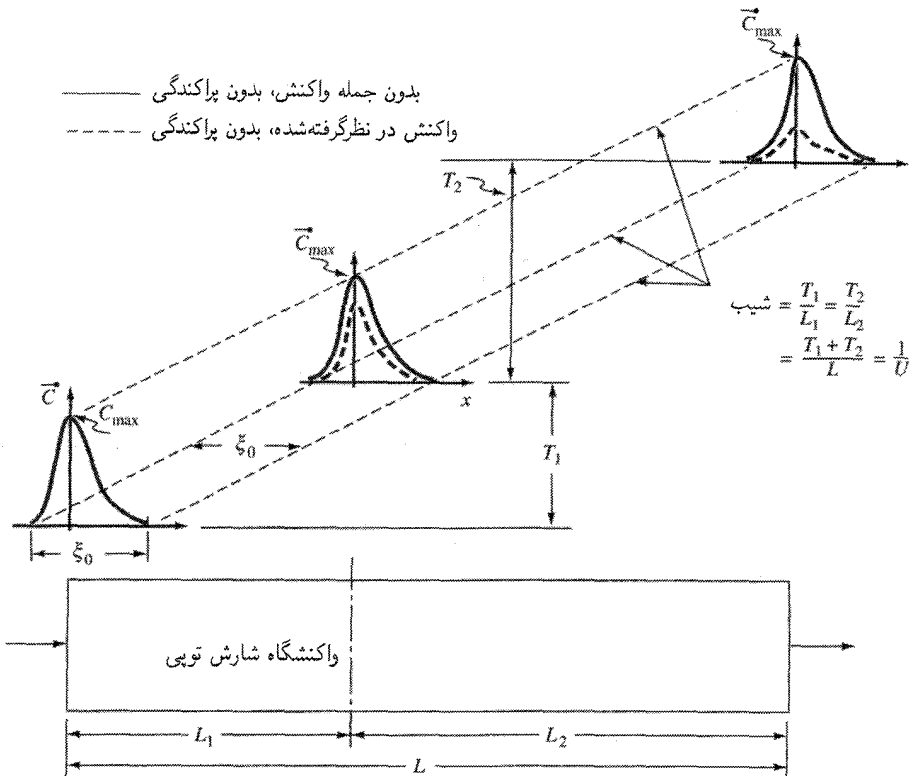
$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} \quad (4.5.14)$$

مجدداً نماد \bullet — متوسط مقطع عرضی مربوط می شود و U به صورت Q/ρ تعریف می شود. واکنشگاه شارش تویی در نبود اثرات پراکندگی طرح می شود. بنابراین، جمله پراکندگی صفر است.

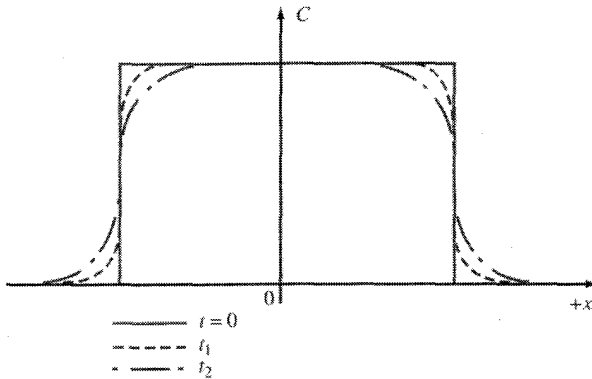
به علاوه، در تحلیل این معادله بهتر است معادله (۶.۱.۴) مرور شود؛ این معادله رابطه بین مشتق کلی dC/dt و متناظر اویلری اش را نشان می‌دهد. بنابراین، معادله غلظت را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{d\bar{C}}{dt} = 0 \quad (5.5.14)$$

مفهوم فیزیکی این عبارت این است که $\bar{C}(x, t)$ یک تابع نامتغیر است از این جهت که هر شکل یا تابعی که توزیع غلظت اولیه در زمان $t = 0$ داشته باشد، آن شکل خود را حفظ می‌کند. معنی دیگر آن این است که جرم به طور کامل پایستار است. شکل ۷.۱۴ این وضعیت را در ستونهای ۴ و ۵ نشان می‌دهد. تنها حرکت مجاز عبارت است از فرارفت ساده توزیع غلظت اولیه به طرف پایین کانال. شکل ۱۹.۱۴ این نکته را برای بارگذاری غلظت نامتقارنی که با سرعت U به طرف



شکل ۱۹.۱۴ پیشروی توزیع غلظت در یک واکنشگاه شارش تویی.



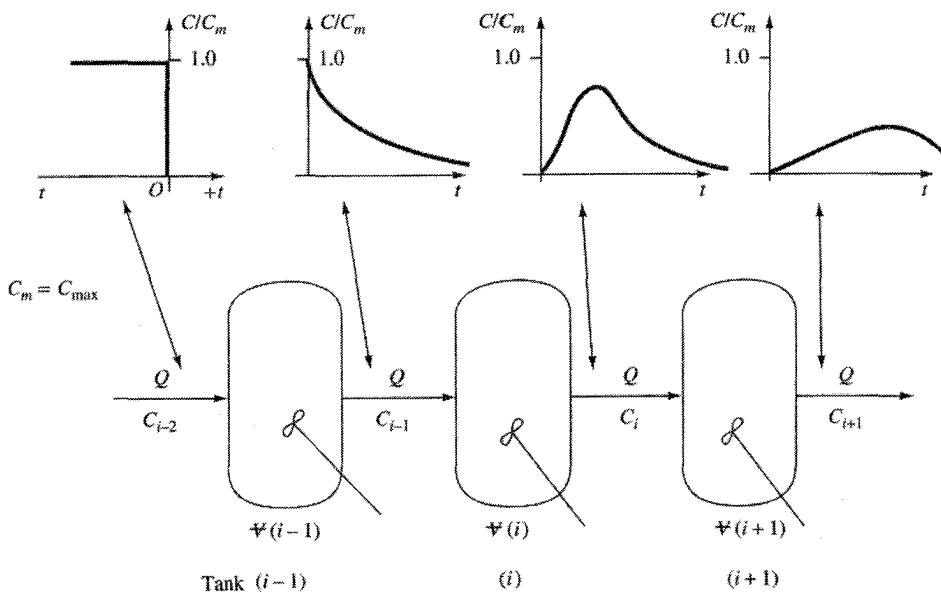
شکل ۲۰.۱۴ تغییر غلظت شارش توپی غیرایده‌آل برحسب زمان.

پایین واکنشگاه جابه‌جا می‌شود نشان می‌دهد. توزیع در سه نقطهٔ مختلف در امتداد واکنشگاه به صورت خط‌چین با شیب ثابت ($1/U$ = شیب) مورد توجه قرار گرفته‌اند؛ این خط‌چینها توزیع برحسب زمان را نیز نشان می‌دهند. به‌طور کلی معادلهٔ دیفرانسیل dC/dt ، حلهایی با شکل ثابت $G(x - Ut) = 0$ دارد به‌طوری که اگر توزیع در هر جایی از شارش را که معادله (۵.۵.۱۴) برقرار است همراه با سرعت بتوان اندازه گرفت، در این صورت حل را برحسب زمان به عقب یا جلو می‌توان کشید. این تکنیکها مبنای روش مشخصه‌ها را تشکیل می‌دهد و برای ایجاد روشهایی به منظور ردیابی جریان آلاینده در رودخانه به طرف عقب برحسب فضا و زمان برای تعیین مبدأ آلاینده استفاده می‌شوند.

فرض اولیه برای نظریه واکنشگاه شارش توپی این است که هیچ پراکندگی وجود ندارد. بیشتر واکنشگاههای شارش توپی واقعی که پراکندگی و در نتیجه توزیعهای اولیه با شیبهای تند دارند در طول واکنشگاه بر اثر پراکندگی هموار شده‌اند. شکل ۲۰.۱۴ این رفتار را در توزیع اولیه مستطیلی فرضی نشان می‌دهد. شکل به‌طور قابل ملاحظه تغییر می‌کند اما یادآوری می‌شود که جرم در طول واکنشگاه پایستار است. حلهای پخش داده‌شده در فصل ۹ در شرایط شارش توپی غیرایده‌آل مستقیماً به کار می‌روند.

مخزنهای سری با تکان دائم

با پیروی از [مرجع ۳۸]، اغلب بهتر است واکنشگاه خیلی بزرگ را با مجموعه‌ای از مخزنهای واکنشگاه کوچکتر جایگزین کرد. شکل ۲۱.۱۴ طرحواره‌ای از ترتیب و تعریفهای شاخص متغیر را نشان می‌دهد. در این مثال حجم تمام مخزنها با هم مساوی است، $V_{i-1} = V_i = V_{i+1}$ ، و شارش در سیستم ثابت است، $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$. پیش‌بینی می‌شود چون غلظت ورودی



شکل ۲۱.۱۴ طرحواره واکنشگاههای سری.

توسط هر مخزن پرداخت می‌شود غلظت ماکزیمم در هر مرحله کاهش می‌یابد، و برای حالت واکنش شیمیایی یا بیولوژیکی، جرم کاهش می‌یابد. با ادامه حالت جمله واکنش، معادله (۱۲.۹.۳) را برای مخزن m با حجم V/n به صورت زیر می‌توان نوشت، که در آن n تعداد کل واکنشگاههاست

$$\left(\frac{V}{n}\right) \frac{dC_i}{dt} = V_i \frac{dC_i}{dt} = V_{i-1} A_{i-1} C_{i-1} - V_i A_i C_i \quad (\text{الف } ۶.۵.۱۴)$$

برای ثابت $Q = A_i V_i$ ، معادله حجم کنترلی به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{dC_i}{dt} + \left(\frac{nQ}{V}\right) C_i = \left(\frac{nQ}{V}\right) C_{i-1} \quad (\text{ب } ۶.۵.۱۴)$$

از معادله (۳.۵.۱۴) در یک سیستم پاکسازی، غلظت ورودی C_{i-1} را به صورت زیر می‌توان مشخص کرد

$$C_{i-1}(t) = C_{i-1} e^{-n(Q/V)t} = C_{i-1} e^{-nt/t_d} \quad (\text{۷.۵.۱۴})$$

باید توجه داشت که زمان توقف، t_d ، هنوز زمان توقف کل سیستم، یعنی، $\sum_{i=1}^n V_i$ است و به زمان توقف مخزن خاصی مربوط می‌شود، اگرچه ساده است که معادله‌ها از این دیدگاه

دوباره تعریف شوند. در این صورت معادله (۶.۵.۱۴) ب) به شکل زیر درمی آید

$$\frac{dC_i}{dt} + \left(\frac{nQ}{V}\right) C_i = \left(\frac{nQ}{V}\right) C_{i-1} e^{-n(Q/V)t}$$

رابطه بالا به شکلی است که حل عمومی، معادله (۱۶.۹.۳)، به کار می رود. پس از اعمال شرایط مرزی

$$C_i(t) = C_{i-1} \left(n \frac{Q}{V} t\right) e^{-n(Q/V)t} = C_{i-1} \left(\frac{nt}{t_d}\right) e^{-nt/t_d} \quad (۸.۵.۱۴)$$

اگر $C_o(t)$ نمودار غلظت ورودی اولیه را برحسب زمان نشان دهد (یعنی، $i = 1$ و $i - 1 = 0$)، در این صورت غلظت خروجی در مخزن i با رابطه زیر به غلظت ورودی ارتباط داده می شود

$$C_i(t) = \frac{C_o(t)}{(n-1)!} \left(\frac{nt}{t_d}\right)^{i-1} e^{-nt/t_d} \quad (الف \ ۸.۵.۱۴)$$

یا برحسب متغیرهای اولیه

$$C_i(t) = \frac{C_o(t)}{(n-1)!} \left(\frac{ntQ}{V}\right)^{i-1} e^{-nt/t_d} \quad (ب \ ۸.۵.۱۴)$$

شکل ۲۱.۱۴ همچنین شامل طرحواره پاسخ غلظت برحسب زمان در مکانهای مختلف میان مخزنی است. همانطور که گفته شد شرط ورودی پاکسازی است، یعنی: $C_o(t < 0) = C_{max}$ و $C(t \geq 0) = 0$.

تأثیر سینتیکی واکنش بر عملکرد شارش تویی

واکنشگاه شارش تویی با جمله چشمه-چاه به صورت زیر تحلیل می شود. معادله (۵.۵.۱۴) در اینجا شامل جمله چشمه-چاه است؛ بنابراین،

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = -k\bar{C} \quad (۹.۵.۱۴)$$

این را دوباره به شکل مشتق کلی زیر می توان نوشت

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = -k\bar{C} \quad (۱۰.۵.۱۴)$$

شرط اولیه عبارت است از $\bar{C}_o^*(x, t \geq 0) = C_o(x)$ و معادله (۱۰.۵.۱۴) چنین حل می‌شود

$$\bar{C}^*(x - Ut) = C_o(x)e^{-kt}$$

و این بدان معنی است که حالت اولیه با سرعت $U = U(t)$ (معمولاً ناپایا) در فرودست جابه‌جا می‌شود و تحت تأثیر افت انرژی نمایی ناشی از جمله واکنش مرتبه اول قرار می‌گیرد. شکل ۱۹.۱۴ اثر افت انرژی نمایی را برحسب زمان نشان می‌دهد. در حالت پایا مسئله ساده‌تر است از این جهت که $\partial \bar{C}^* / \partial t = 0$ و پس از کمی دستکاری، معادله حاصل به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{d\bar{C}^*}{dx} = -k \frac{A}{Q} \bar{C}^* \Rightarrow \frac{d\bar{C}^*}{\bar{C}^*} = -k \frac{A}{Q} dx$$

با انتگرال‌گیری، حل به شکل زیر در می‌آید

$$\int \frac{d\bar{C}^*}{\bar{C}^*} = -k \frac{A}{Q} \int_0^L dx \Rightarrow \frac{\bar{C}^*}{C_o} = e^{-kta} \quad (۱۱.۵.۱۴)$$

بنابراین بدیهی است در حالت پایا حجم واکنشگاه، شارش در آن، و آهنگ واکنش غلظت شارش خروجی را در یک مقدار پایا ثابت نگه دارند.

مخزنهای دائماً همزده با واکنش

در حالی که واکنشگاههای تنها، دائماً همزده با واکنش قبلاً بررسی شدند، در حالت سری با واکنش بررسی نشدند. مانند قبل [معادله (۶.۵.۱۴)] روش قبل معادله حجم کنترلی زیر را برای واکنشگاه n ام و واکنشگاه می‌دهد

$$\frac{\forall}{n} \frac{dC_i}{dt} = V_{i-1} A_{i-1} C_{n-1} - V_i A_i C_i - k \frac{\forall}{n} C_i$$

$$\frac{dC_i}{dt} + \left[\frac{nQ}{\forall} + \frac{\forall}{n} k \right] C_i = \left(\frac{nQ}{\forall} \right) C_{i-1} \quad (۱۲.۵.۱۴)$$

شکل حل را با حل عمودی در معادله (۱۷.۹.۳) ب) برای زدایش به علاوه حالت واکنش می‌توان یافت. بنابراین، معادله (۱۷.۹.۳) ب) در معادله (۱۲.۵.۱۴) جایگذاری می‌شود و نتیجه انتگرال‌گیری می‌شود. این انتگرال‌گیری خیلی مشکل است و معادله دیفرانسیل زیر را می‌دهد

$$\frac{dC_i}{dt} + [D]C_i = [R]C_{i-2} \quad (۱۳.۵.۱۴)$$

که در آن،

$$D = \left[\frac{nQ}{V} + \frac{V}{n} k \right]$$

$$R = [E](F + Ge^{-\alpha t})$$

$$E = \left[\frac{nQ}{V} \right] \quad F = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \quad G = \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right)$$

در اینجا β و α در معادله (۱۶.۹.۳) تعریف شده‌اند. حل به شکل معادله‌های (۱۶.۹.۳) و (۱۷.۹.۳ الف) نیز درمی‌آید، یعنی،

$$C_i(t) = \left(\frac{R}{D} \right) C_{i-r}(1 - e^{-Dt}) + C_{i-r}e^{-Dt} \quad (۱۴.۵.۱۴)$$

با کمی دستکاری به شکل زیر درمی‌آید

$$C_i(t) = \left[\frac{R}{D} + \left(\frac{R}{D} + 1 \right) e^{-Dt} \right] C_{i-r} \quad (۱۴.۵.۱۴)$$

این تسلسل برای n مخزن به‌طور متوالی ادامه می‌یابد.

شکل حالت پایا نیز مفید است. معادله (۵.۹.۳) را برای هر جفت مرحله متوالی می‌توان نوشت و رابطه زیر را به‌دست آورد

$$C_i = C_i \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{kV}{nQ} \right)} \right] \quad (۱۳.۵.۱۴)$$

کاربردی تکرار معادله (۱۳.۵.۱۴) بین ورودی ($C_{o,i} = 0$) و مرحله خروجی (C_n) می‌دهد

$$C_n = C_o \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{kV}{nQ} \right)^n} \right] \quad (۱۴.۵.۱۴)$$

حجم کلی مخزن لازم برای اینکه فرایند به $C_n \rightarrow C_o$ تغییر کند با حل معادله (۱۴.۵.۱۴) می‌توان محاسبه کرد

$$V = \frac{nQ}{k} \left[\left(\frac{C_o}{C_n} \right)^{1/n} - 1 \right] \quad (۱۵.۵.۱۴)$$

مثال ۳.۱۴ علاوه بر مثالهای ۲۴.۳ تا ۲۶.۳ محاسبات زیر مفاهیم داده شده در اینجا را نشان می‌دهد. باکتری به‌طور طبیعی به مرور زمان می‌میرد، فرایندی که با سینتیک واکنش مرتبه اول قابل توصیف است. جدولی تهیه کنید که مقدار مخزنها، حجم آنها، شارش از طریق آنها، و آهنگهای واکنش را به صورت تابعی از بازده حذف نشان دهد. بازده حذف، r_t ، به صورت $(100)(1 - C_n/C_0)$ تعریف می‌شود.

حل

معادله (۱۵.۵.۱۴) را به صورت حجم بی‌بعد زیر می‌توان نوشت

$$V_* = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{ref}} = n \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{r_t}{100}} \right)^{1/n} - 1 \right] \quad (16.5.14)$$

در اینجا حجم مرجع به صورت (Q/k) تعریف می‌شود. در جدول ۸.۱۴ بین V_* و n ، r_t مقایسه شده است.

جالب است توجه کنیم که حجمهای (\mathcal{F}^*) لازم برای اینکه واکنشگاه شارش تویی بازده‌های دفع داده شده از جدول ۸.۱۴ را به دست آورد عبارت‌اند از 1.9° را برای بازده دفع ۸۵ درصد و 3.9° برای بازده دفع ۹۵ درصد. به علاوه توجه کنید که وقتی تعداد مخزنها در یک بازده دفع معین افزایش می‌یابد، حجم کل لازم به حجم نظری لازم برای واکنشگاه شارش تویی نزدیک می‌شود. صرفه‌جویی اقتصادی افزایش می‌یابد زیرا تعداد مخزنهای کوچکتر می‌تواند هزینه کلی ساخت کمتر از یک سیستم شارش تویی یکپارچه داشته باشد. به علاوه، در تعداد معینی واکنشگاه، افزایش قابل توجهی در حجم مخزن لازم است تا وقتی بخواهیم بازده‌ها بیشتر از 90° درصد باشند افزایش کوچکی در بازده دفع به وجود آید. می‌توان حجم در بازده 98° درصد را با حجم در بازده 95° درصد مقایسه کرد و می‌توان افزایش حجم (برای دو بازده مذکور) را با افزایش حجم در بین بازده‌های 85° درصد و 90° درصد مقایسه کرد.

جدول ۸.۱۴ مقایسه مشخصه‌های واکنشگاه

حجم بی‌بعد مخزن، \mathcal{F}^*					بازده دفع، درصد	
۲.۰۹	۲.۱۴	۲.۲۳	۲.۴۲	۳.۱۶	۵.۶۷	۸۵
۳.۵۰	۳.۶۳	۳.۸۸	۴.۴۶	۶.۹۴	۱۹.۰	۹۵

۱. برای ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، و ۱۰ مخزن تکان خورنده سری.

مثال ۴.۱۴ چهار مخزن واکنشگاه به طور سری به هم متصل شده‌اند تا غلظت بیماریزایی را 90° درصد کاهش دهند. اگر آهنگ واکنش 1.125 در روز باشد و آهنگ شارش 1 میلیون گالن در روز (mgd) باشد، بازده دفع را برای افزایش Q تا 1.45 mgd محاسبه کنید.

حل

از مبادله (۱۵.۵.۱۴) حجم چهار مخزن سری از رابطه زیر به دست می‌آید

$$V = \frac{nq}{k} \left[\left(\frac{C_o}{C_n} \right)^{1/n} - 1 \right] = \frac{nQ}{k} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{r_t}{100}} \right)^{1/n} - 1 \right]$$

چون $Q = 1 \text{ mgd} = 1.55 \text{ ft}^3/\text{s}$ ، $k = 1.3(10^{-5}) \text{ s}^{-1} = 1.3(\text{روز})^{-1}$ و $n = 4$ بنابراین

$$V = \frac{4(1.55 \text{ ft}^3/\text{s})}{1.35(10^{-5}) \text{ sec}^{-1}} (1.77 - 1) = 3.53(10^5) \text{ ft}^3$$

یعنی اینکه حجم هر مخزن $0.88(10^5) \text{ ft}^3$ است.

برای افزایش شارش تا 1.45 mgd ، از معادله (۱۴.۵.۱۴) برای محاسبه بازده جدید به صورت

زیر استفاده می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{C_n}{C_o} &= \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{kV}{nQ} \right)^n} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{1.3(10^{-5}) 3.53(10^5)}{4(1.55)} \right]^4} \right\} = 1.77 \end{aligned}$$

بنابراین، بازده دفع جدید عبارت است از

$$r_t \left(1 - \frac{C_n}{C_o} \right) 100 = (0.23) 100 = 23 \text{ درصد}$$

بدیهی است که شارش بیشتر باعث می‌شود که حجم در هر مخزن زمان کمتری باقی بماند تا بر اثر واکنش افت انرژی پیدا کند.

تمرینها

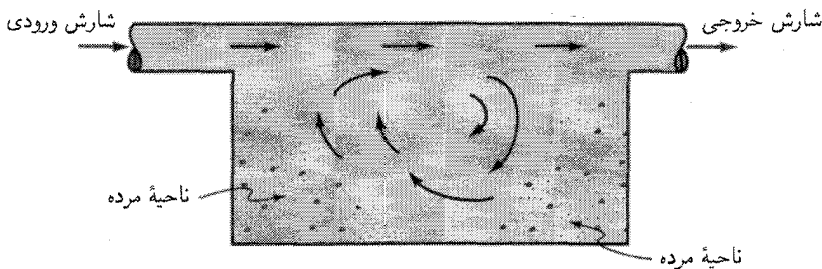
۱.۵.۱۴ در مخزن با شارش پیوسته الف) ماده در یک عمل داخل مخزن می‌شود؛ ب) به صورت $1 - \exp(-t/t_d)$ به غلظت نهایی فرایند نزدیک شود؛ ج) وقتی در مجموعه‌ای از مخزنهای کوچک فرایند انجام گیرد، در مقایسه با یک مخزن بزرگ، بازده کمتر است؛ د) در مقایسه با واکنشگاه پیمانه‌ای با حجم مساوی زمان توقف کوچکتر دارد؛ ه) هیچکدام.

۲.۵.۱۴ یک واکنشگاه شارش تویی الف) می‌تواند با معادله فرارفت پراکندگی در کانال و حل‌های داده‌شده در فصل ۹ تحلیل شود؛ ب) می‌تواند با روش مشخصه‌ها که در فصل ۱۲ بحث شد تحلیل شود؛ ج) واپاشی نمایی را برای آهنگ واکنش مرتبه اول در حالت پایا به دست می‌آورد؛ د) شامل شارش خیلی طبقه‌بندی شده است؛ ه) تمام جوابها به غیر از ج و د.

۳.۵.۱۴ فرایند آهنگ واکنش مرتبه دوم در یک مخزن مربوط است به الف) بالاترین درجه مشتق زمانی در معادله حاکم مخزن؛ ب) بالاترین درجه مشتق فضایی در معادله حاکم؛ ج) تعداد مخزنها در مجموعه‌ای از ظرفهای واکنشگاه؛ د) نما یا توان متغیر وابسته در جمله چشمه-چاه در معادله مخزن؛ ه) تمام جوابهای بالا.

۶.۱۴ آمیختگی و اغتشاش متلاطم

تمام ظرفهای واکنشگاه و حوضچه‌های مهندسی رویداد یک نتیجه مطلوب را تسریع می‌کنند. در قسمت قبل برای تحلیل پاسخهای ساده واکنشگاه از تحلیل حجم کنترلی که شامل جمله زمانی dC/dt بود استفاده شد. برای اجتناب از پیچیدگیهای ناشی از شارش پیچیده داخلی مخزن و نقشهای انتقال، دو ساده‌سازی برای این جمله به کار می‌روند: یا حالت پایا فرض می‌شود به طوری که جمله مساوی صفر می‌شود، یا C (غلظت حجمی متوسط) با غلظت خروجی مساوی گرفته می‌شود. این فرض دوم در بخش ۹.۳ بحث شد و بدیهی است که این فرض، اگرچه به طور تحلیلی مناسب است، خیلی بفرنج است به ویژه اگر شارشهای ورودی و خروجی برحسب زمان متغیر باشند. حتی در شرایط ورودی و خروجی پایا این فرض پیچیده است به ویژه اگر تبادل تکانه بین ورودی و خروجی تنها منبع انرژی لازم برای آمیختگی در مخزن باشد. همانطور که در شکل ۲۲.۱۴ دیده می‌شود کاملاً می‌توان نواحی مرده یا گردشی کوتاه را در مخزن ایجاد کرد؛ این نواحی باعث می‌شوند فقط قسمتی از محتویات مخزن تا غلظت یکنواختی که برای استناد به این فرض لازم است مخلوط شوند.



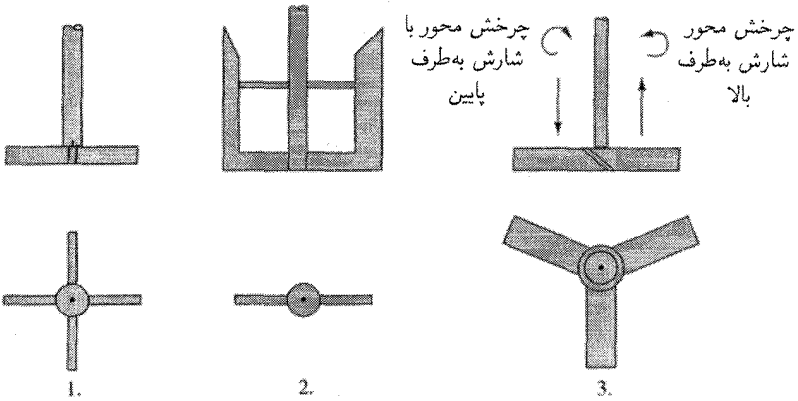
شکل ۲۲.۱۴ طرحواره نواحی گردشی کوتاه و مرده در مخزن.

تکان دهنده‌ها و اغتشاش‌کننده‌های مکانیکی اغلب برای ایجاد شرایط یکنواخت در مخزن به کار می‌روند. فرایندهایی که احتیاج به این آمیختگی دارند مشتمل بر آمیخته‌شدن دو سیال، پراکندگی گازها در مایع، حل‌شدن جامدات (مانند نمک) در مایعات، توزیع ذرات در سرتاسر مخزن (لخته‌شدن)، یا تسریع انتقال گرماست.

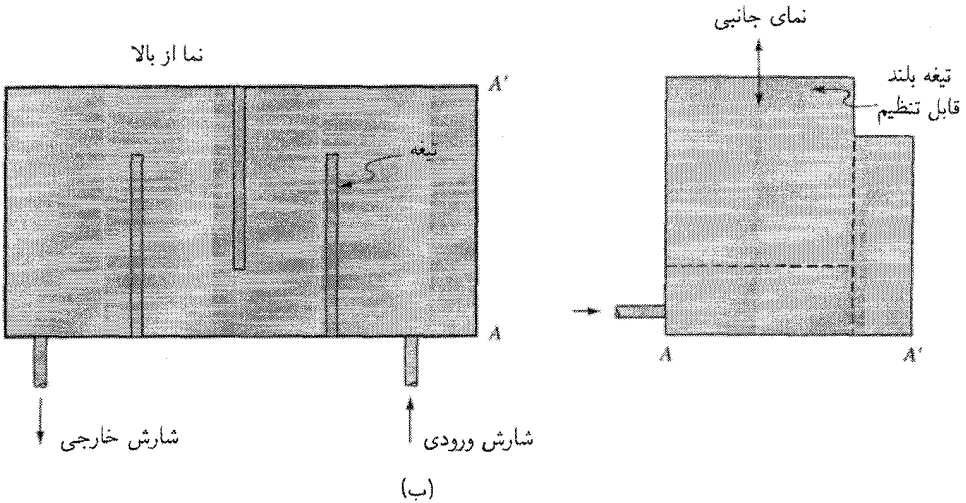
انواع همزن

وسایل مکانیکی می‌توانند دو نوع باشند: وسایل فعال که با انرژی خارجی ورودی به پیشران تیغه‌دار عمل مخلوط را انجام می‌دهند، و همزنها یا وسایل انفعالی که توسط آن مسیرهای شارش نامنظم، و از این رو آمیختگی تقویت شده، در داخل ظرف طراحی می‌شوند. شکل ۲۳.۱۴ الف شامل طرحواره همزنهای چندتیغه است، و شکل ۲۳.۱۴ ب شامل وسیله انفعالی متشکل از دیوارک (مانع) داخلی است. وسایل طبیعی یا تیغه‌دار برای افزایش زمان توقف به کار می‌روند و از این رو عمل دوگانه را انجام می‌دهند.

در شکل ۲۳.۱۴ الف از همزنهای پره‌دار (۱ و ۲) برای حالت‌های با سرعت کم استفاده می‌شود و نوعاً تیغه‌های زوج (۲، ۴، و غیره) دارد. در سرعت‌های چرخشی بالاتر نامیزانی به وجود می‌آید و تیغه‌ها با تعداد فرد (۳، ۵، و غیره) مورد نیازند. این تیغه‌ها برای اشغال ۶۰ تا ۷۰ درصد عرض ظرف به کار می‌روند و عرض هر تیغه $\frac{1}{8}$ تا $\frac{1}{6}$ طول مخزن است [مرجع ۲۹]. از تیغه‌های جداری با سرعت‌های کمی بالاتر استفاده می‌شود (شکل‌های ۲۴.۱۴ و ۲۵.۱۴). آشفته‌کننده پدالی هرگونه شارش عمودی را نمی‌دهد و از این رو مخلوط‌کننده ضعیفی است، اما تنش برشی بالایی لازم برای معلق نگه داشتن ذرات را می‌دهد. نمونه‌هایی در باره وسایل غیرصنعتی عبارت‌اند از مخلوط‌کننده‌های رنگ خانگی که به مته‌های الکتریکی متصل شده‌اند یا مخلوط‌کننده‌های الکتریکی خانگی برای مخلوط‌کردن



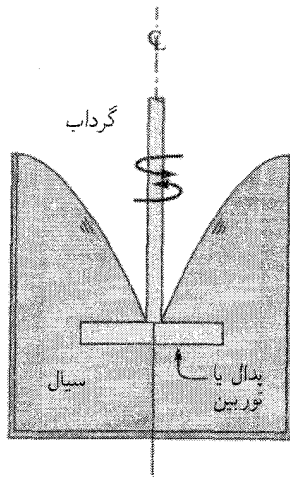
(الف)



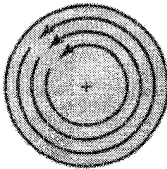
(ب)

شکل ۲۳.۱۴ وسایل آشفته‌کننده (الف) وسایل فعال-آشفته‌کننده‌ها؛ (ب) وسایل انفعالی-تیغه‌ها.

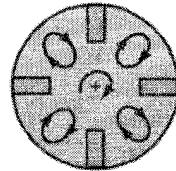
مایه کیک و شیرینی‌پزی. آشفته‌کننده پیشرانی یا توربینی با آهن‌گهای سرعت بالاتر می‌چرخند. آشفته‌کننده توربینی سیستم‌های تیغه‌ای دارند، که با دوران در دقیقه (rpm) بالاتر کار می‌کنند. یک نمونه خانگی پنکه سقفی است که حتی در زمستان با کارکردن در حالت شارش رو به پایین برای مخلوط‌کردن هوای گرم محبوس شده در سقف شارش گرما را به وجود می‌آورد یا در تابستان با کارکردن در حالت شارش رو به بالا برای مخلوط‌کردن هوای سرد و محبوس شده در کف توزیع یکنواختی از هوای سرد را ایجاد می‌کند.



(الف)



خطوط جریان بدون تیغه



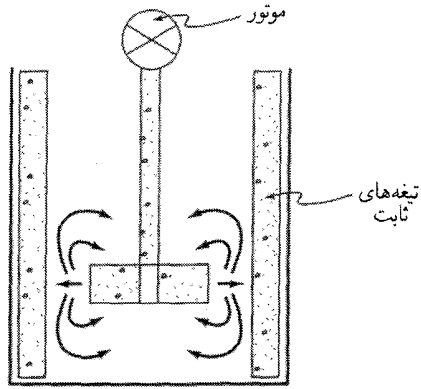
خطوط جریان با تیغه

(ب)

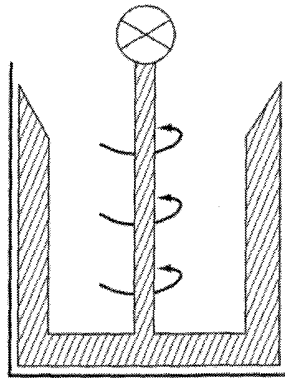
شکل ۲۴.۱۴ (الف) یک مخزن استوانه‌ای تکان خورنده ایدئال؛ (ب) شارش با تیغه و بدون تیغه.

نقشهای گردش

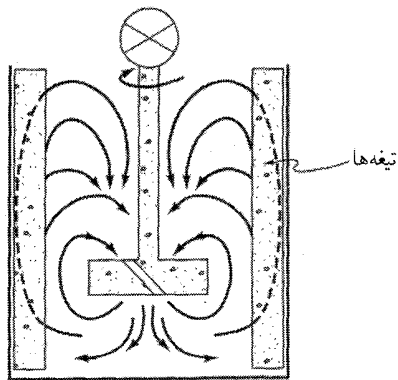
از برودکی و هرسی [مرجع ۴۱] و گینکو پولیس [مرجع ۲۹] طرحواره‌های میدانهای گردش در مخزنهای تکان خورنده در شکل ۲۵.۱۴ گردآوری شده‌اند. شکل ۲۴.۱۴ الف شامل طرحواره رفتار سیال در مخزن بدون تیغه است. ساده‌ترین مخزن استوانه‌ای که با آشفته‌کننده چرخ پدال واقع در پایین خط مرکزی مخزن آشفته می‌شود به مرور زمان شارش ایدئال را می‌دهد که با نظریه شارش ساده پتانسیل در مختصات استوانه‌ای می‌توان آن را توصیف کرد. شتاب مرکزگیز مشخصه اصلی سیستم است و هیچ آمیختگی یا همزنی به دست نمی‌آید (شکل ۲۴.۱۴ ب). برای حل این مشکل در مخزن مطابق شکل‌های ۲۴.۱۴ ب و ۲۵.۱۴ قرار داده می‌شوند. بدون دیوارکها می‌توان با قراردادن مخلوط‌کننده همزن به دور از مرکز مخزن آمیختگی خوبی را به دست آورد.



(الف)

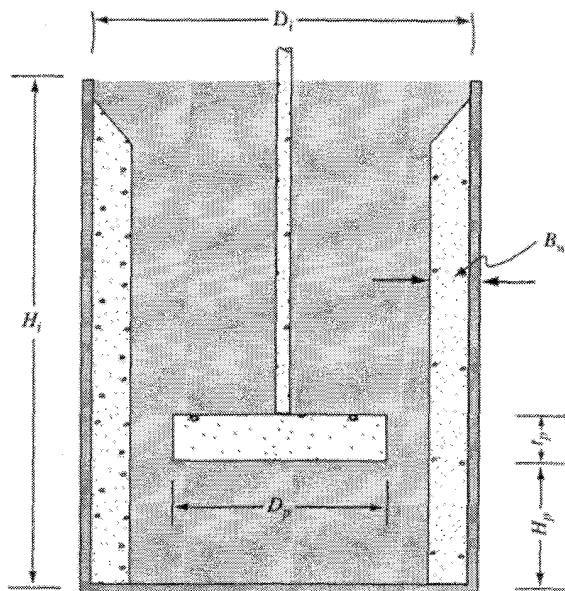


(ب)



(ج)

شکل ۲۵.۱۴ میدانهای گردشی برای آشفته‌کننده‌های مختلف. الف) پدال یا توربین تیغه‌ای تخت؛ ب) لنگر، گردش شارش مماسی؛ ج) تیغه گام‌دار، شارش محوری.



شکل ۲۶.۱۴ تعریف ابعاد مقیاس‌بندی مخزن.

نسبتهای مقیاس و اندازه‌بندی

در طراحی مخزنهای همزن‌دار برای ایجاد نسبتهای بی‌بعد جهت مقیاس‌بندی و اندازه‌بندی از پارامترهای زیر استفاده می‌شود (شکل ۲۶.۱۴): قطر داخلی مخزن، D_i ؛ و ارتفاع H_i ؛ قطر D_p ؛ ضخامت t_p پیشران؛ ارتفاع پیشران بالای کف مخزن، H_p ؛ و عرض تیغه، B_w ؛ فرض می‌شود که چهار تیغه در هر مخزن وجود دارد. در جدول ۹.۱۴ نسبتهای طراحی برای اندازه‌بندی یک مخزن ساده خلاصه شده است.

برای حفظ تشابه بین آزمون فرایند مدل و نمونه اصلی، از این نسبتها نیز به عنوان عوامل مقیاس‌بندی اولیه بین مدل، m ، و نمونه اصلی، p ، به صورت زیر می‌توان استفاده کرد

$$\left. \frac{D_p}{D_i} \right|_m = \left. \frac{D_p}{D_i} \right|_p \quad \left. \frac{B_w}{D_i} \right|_m = \left. \frac{B_w}{D_i} \right|_p$$

$$\left. \frac{H_p}{D_i} \right|_m = \left. \frac{H_p}{D_i} \right|_p \quad \left. \frac{H_w}{D_i} \right|_m = \left. \frac{H_i}{D_i} \right|_p \quad \left. \frac{t_p}{D_p} \right|_m = \left. \frac{t_p}{D_p} \right|_p \quad (۱.۶.۱۴)$$

جدول ۹.۱۴ نسبت‌های طراحی برای اندازه‌بندی یک مخزن ساده.

$$0.2 < D_p/D_i < 0.5 \quad (\text{شارش متلاطم})$$

$$0.7 < D_p/D_i < 1.0 \quad (\text{شارش لایه‌ای})$$

$$B_w/D_i = \frac{1}{14}$$

$$H_p/D_i = \frac{1}{4}$$

$$H_i/D_i = 1$$

$$t_p/D_p = \frac{1}{8}$$

اقتباس از [مرجع ۲۹، ۴۱، ۴۲]

لازمه‌های توان و زمانهای آمیختگی

تعدادی از گروه‌های بی‌بعد برای ایجاد همبستگیهای طراحی استنتاج می‌شوند. گروه‌های اصلی عبارت‌اند از: عدد رینولدز در مخزن، Re_T ، عدد توان در مخزن، و زمان آمیختگی. عدد رینولدز و عدد توان در مخزن یا پروانه به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$R_T = \frac{D_p^2 N \rho}{\eta} \quad N_p = P_o = \frac{P_o}{\rho N^3 D_p^5} \quad (2.6.14)$$

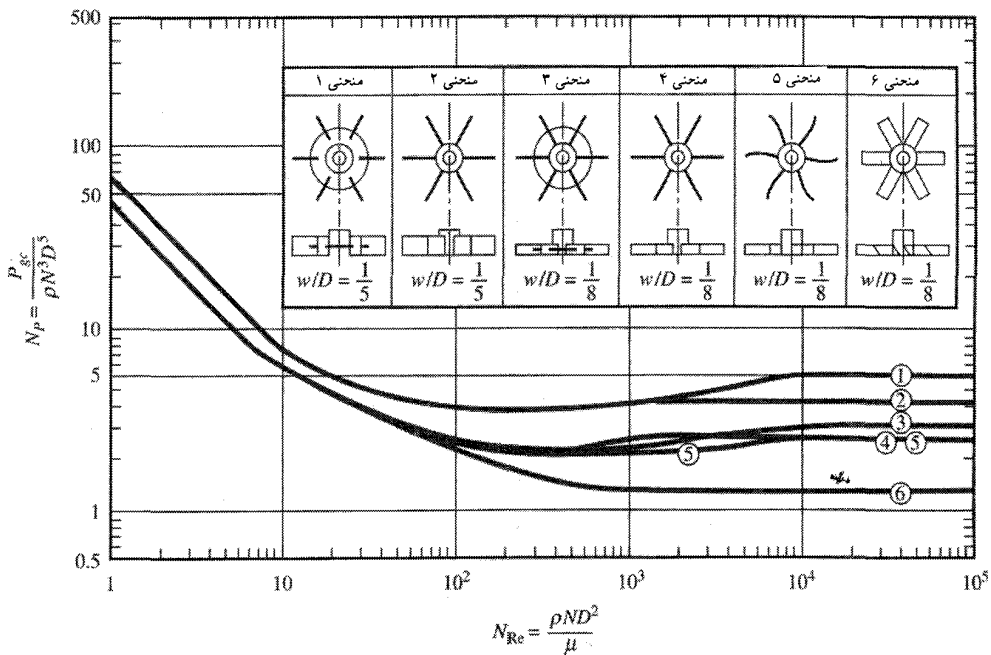
که در آن N سرعت چرخشی برحسب دوران در ثانیه است و P_o توان برحسب ثانیه / ژول یا وات است. رابطه بین این دو عدد برای انواع مختلف تیغه به‌دست آمده‌اند [مرجع ۴۲]، و شکل ۲۷.۱۴ همبستگی را نشان می‌دهد:

زمان آمیختگی یا زمان مخلوط، θ_T ، با عدد رینولدز در پروانه از طریق عدد آمیختگی بی‌بعد، M_t ، به صورت زیر ارتباط داده شده است [مرجع ۴۳]

$$M_t = \frac{\theta_T (ND_p^2)^{1/2} g^{1/6} D_p}{H_i^{1/2} D_i^{2/3}} \quad (3.6.14)$$

داده‌های همبستگی نشان می‌دهند که برای $M_t > 1000$ ثابت است. با کمی عملیات جبری می‌توان نشان داد که زمانهای آمیختگی بین مدل و نمونه اصلی با توان یکسان در حجم واحد به صورت زیر با هم ارتباط دارند

$$\frac{\theta_T|_p}{\theta_T|m} = \left(\frac{D_p|_p}{D_p|m} \right)^{11/18} \quad (4.6.14)$$



شکل ۲۷.۱۴ همبستگی عدد توان رینولدز در سیالات نیوتنی برای طرحهای مختلف پروانه توربین (از بیس، فاندی، و کوربشتین [مرجع ۴۲]).

برای حفظ زمانهای آمیختگی یکسان، نسبت به شکل زیر درمی آید

$$\frac{P/\sqrt{V}|_p}{P/\sqrt{V}|_m} = \left(\frac{D_p|_p}{D_p|_m} \right)^{11/4} \quad (۵.۶.۱۴)$$

از این رو، برای ثابت نگه داشتن θ_T ، توان در حجم واحد برای مخزن نمونه اصلی بزرگتر اساساً افزایش می یابد.

بررسی تفصیلات در مراجع تاترسون [مراجع ۴۴، ۴۵] در دسترس اند.

تمرینها

۱.۶.۱۴ هدف از تیغه های مخزن این است که الف) بازده آمیختگی افزایش یابد؛ ب) از نواحی مرده جلوگیری شود؛ ج) از گردش کوتاه جلوگیری می شود؛ د) واکنش شیمیایی تسریع شود؛ ه) تمام جوابهای بالا.

۲.۶.۱۴ عدد آمیختگی الف) یک تابع خطی اندازه تانک است؛ ب) با عدد رینولدز در پروانه به‌طور معکوس متناسب است؛ ج) برای عدد رینولدز در تانک بزرگتر از ۱۰۰۰ ثابت است؛ د) به‌نظر پروانه به‌طور خطی وابسته است؛ ه) ج و د.

مسائل

۱.۱۴ سرعت ته‌نشینی ذرات شن $500 \mu\text{m}$ را در آب 10°C محاسبه کنید.

۲.۱۴ با استفاده از معادله (۲۳.۲.۱۴) برای سرعت حد ته‌نشینی ذره، معادله‌ای که سرعت ته‌نشینی ذره را در گستره استوکس بدهد به‌دست آورید. معادله را برحسب قطر ذره، چگالی ذره، و چگالی و چسبندگی دینامیکی محیط سیال بیان کنید.

۳.۱۴ در کانالی که آب در آن جریان دارد، آزمایشی انجام می‌شود به طوری که تلاطم را می‌توان یکنواخت در نظر گرفت. دمای آب 10°C است و کف کانال از ذرات شن کاملاً منظم شده با $D_{50} = 0.5 \text{ mm}$ ساخته شده است. غلظت در بالای کف 23.5 mg/L و در 5 cm بالایی کف 21.6 mg/L است. پخشندگی تلاطمی رسوب در آب را بیابید.

۴.۱۴ شکل متلاطم معادله انتقال جرم [معادله (۱۰.۲.۱۴)] را با استفاده از پخشندگی تلاطمی تعریف‌شده در معادله (۱۱.۲.۱۴) و قوانین میانگین‌گیری مناسب رینولدز به‌دست آورید.

۵.۱۴ پخشندگی تلاطمی را برای شن $300 \mu\text{m}$ در کانالی به عمق 1.5 m پر از آب 20°C محاسبه کنید. کانال به‌طور جزئی شیب‌دار است تا جریانی که تنش برشی 1000 N/m^2 را برکف وارد می‌کند به‌وجود آید. پخشندگی را در 10 ، 15 ، 20 ، 40 ، 60 ، 100 ، و 120 cm تعیین کنید.

۶.۱۴ یک مخزن به عمق 3 m با آب 15°C طوری قرار داده شده است که جریان تنش برشی 2500 N/m^2 را برکف وارد می‌کند. کف مخزن از شن کاملاً منظم شده به قطر $D_{50} = 300 \mu\text{m}$ ساخته شده است. غلظت شن در 5 cm بالایی کف 964 g/L است. غلظت را در 10 و 50 cm محاسبه کنید.

۷.۱۴ یک مخزن مستطیلی ساده ته‌نشین باید طوری طرح شود قبل از شارش مایع در مخزن ذرات بزرگتر از 1 mm در کف جمع شوند. پیش‌بینی می‌شود آهنگ شارش به 14 میلیون گالن در روز برای سرریز شارش اضافی در مخزن برسد. با استفاده از نسبت طول به عرض 4 ، طول مخزن چقدر است؟ فرض کنید که دمای مایع $T = 70^\circ\text{F}$ است.

۸.۱۴ غلظت مرجع (برحسب g/L) در بالای بستر شنی با دانه‌های شن یکنواخت به قطر 6 mm را برای گستره سرعت‌های برشی (ناشی از جریان یکنواخت) از 1 m/s تا 1 m/s تخمین بزنید. همچنین طول مؤثر، α_0 ، را محاسبه کنید. از $\alpha_0 = 26$ ، $\epsilon' = 2D$ ، $\gamma_0 = 0.0024$ و $c_b = 0.65$ استفاده کنید.

۹.۱۴ یک میدان شارش متلاطم با جریان القایی تعلیق رقیقی از شن با قطر میانه $300 \mu\text{m}$ را حمل

می‌کند. با استفاده از پخشندگی تلامبی $1 \text{ m}^2/\text{s}$ ، غلظت شن را در 6 cm بالای کف محاسبه کنید در صورتی که بدانی غلظت در 5 cm بالای کف 131 mg/L است. دمای مخلوط 20°C است. 10.14 در شرایط اندازه‌تک دانه داده شده در مسئله 8.14 ، از برنامه کامپیوتری برای محاسبه متغیرهای مسئله و نمایه غلظت استفاده کنید. نتایج را رسم کنید.

11.14 با استفاده از برنامه کامپیوتری، نمایه‌های غلظت و پارامترهای مختلف را با استفاده از شرایط داده شده در مثال 1.14 محاسبه کنید. به علاوه، سرعت برشی (یا تنش برشی) را نصف و دو برابر کنید، و سه نتیجه را مقایسه کنید. نمایه‌های مختلف را در نمودار یکسان رسم کنید.

12.14 در نوک قله لانگ در کوهستان راکی الف) اگر جوشش ظرف حاوی تخم مرغ (بدون درپوش) در 190°F روی دهد، فشار بخار چقدر است؟ ب) ثابت گاز ایدئال برای بخار چقدر است؟ ج) چگالی بخار متناظر با شرایط بالا چقدر است؟

13.14 فشار کل در سطح آب جوشان در مسئله 12.14 چقدر است؟ (راهنمایی: از معادله تغییر دما-فشار ثابت که در فصل ۲ برای گاز ایدئال به دست آمد استفاده کنید و فشار خشک، p ، را پیدا کنید. فرض کنید قله لانگ به ارتفاع 12000 ft است و در سطح دریا $T = 80^\circ \text{F}$ و $\rho = 1.24 \text{ kg/m}^3$).

14.14 در شرایط داده شده در مسائل 12.14 و 13.14 ، چگالی را محاسبه کنید.

15.14 در ویکزبرگ، می‌سی‌سی‌پی، شرایط تابستانی با رطوبتهای نسبی کاملاً بالای حدوداً 85% درصد یا بالاتر مشخص می‌شوند. در دمای 35°C بعد از ظهر چگالی اشباع و دمای نقطه اشباع متناظر با $t^* = 85$ چقدر است؟

16.14 وقتی مه مستقیماً روی میدان برف تشکیل می‌شود، توضیح دهید که چرا برف زودتر از وقتی آب می‌شود که هیچ مه وجود نداشته باشد.

17.14 معادلهای دمای پتانسیل دمای هوا در مسائل 12.14 و 15.14 چیست؟

18.14 در مثال 2.14 عدد دالتن، عدد رینولدز زبری، و عدد اشمیت چگونه تغییر می‌کند در صورتی که زبری z_0 از نوع علف هرز باشد (جدول 6.14).

19.14 در ادامه مسئله 18.14 ، آهنگ تبخیر برای شارش از روی علف هرز چقدر است؟ جرم کل رطوبت تبخیر شده از یک متر مربع در یک روز چقدر است؟

20.14 با مراجعه به سرعت مرجع، $u_w(z = 10 \text{ m})$ که در مثال 2.14 مشخص شده است ارتفاع تغییر مکان، d_0 ، برای زمین شخم زده ($z_0 = 1 \text{ cm}$) و برای علف هرز در مسئله 18.14 چقدر است؟

21.14 با استفاده از داده‌های دما در مثال 2.14 ، شارگرمای H را در سطح تخمین بزنید.

22.14 با محاسبه شتاب عمودی رطوبت و طول مونین اوبوکوف در شرایط مثال 2.14 ، تعیین کنید که آیا شارش شناور، خنثی، یا پایاست.

۲۳.۱۴ قرار است آب آلوده در مجموعه‌ای از محفظه‌های تماسی کاملاً آمیخته تحت عملیات قرار گیرد. غلظت باکتری در آب باید از ۱۰۰۰۰۰ ارگانیزم در یک میلی‌لیتر به ۱۰ ارگانیزم در میلی‌لیتر کاهش یابد. زمان توقف در محفظه‌ها ۴۲.۵min است. به فرض سینتیک مرتبه اول با ضریب آهنگ $^{-1} 5.8 \times 10^5$ ، تعداد محفظه‌های لازم برای کاهش باکتری به ۱۰ ارگانیزم در میلی‌لیتر را پیدا کنید.

۲۴.۱۴ فرض کنید که لخته‌سازی ذرات رسوب معلق با واکنش مرتبه اول تعریف شود و زمان مرجع ۲h باشد. در زمان $t = 43 \text{ min}$ ، غلظت رسوب معلق ۹۸ ذره در هر میلی‌لیتر است. غلظت اولیه ذرات معلق و ضریب آهنگ متناظر را بیابید. زمان لازم برای اینکه غلظت تا ۱۰ درصد غلظت اولیه کاهش یابد چقدر است؟

۲۵.۱۴ تعدادی مخزن واکنشگاه به طور سری به هم متصل شده‌اند تا غلظت بیماری‌زایی کاهش یابد. حجم هر مخزن 2000 m^3 است. اگر آهنگ شارش $1.32 \text{ m}^3/\text{s}$ و آهنگ واکنش $^{-1} 12 \text{ hr} \cdot 10^6$ باشد، تعداد واکنشگاههای لازم برای بازده دفع ۷۳ درصد را بیابید.

۲۶.۱۴ زمان لازم برای دفع ۹۰ درصد باکتری را به فرض واکنش مرتبه دوم پیدا کنید.
۲۷.۱۴ حالت پایا، که با دفع ۹۰ درصد تعریف می‌شود، در یک واکنشگاه شارش پیوسته در ۱۸۵ ساعت پس از شروع فرایند برقرار می‌شود. اگر حجم واکنشگاه 1650 m^3 باشد، آهنگ شارش را برحسب m^3/s بیابید.

۲۸.۱۴ به جای واکنشگاه شارش پیوسته در مسئله ۲۵.۱۴، از یک واکنشگاه شارش تویی استفاده می‌شود. با فرض واکنش مرتبه اول و شرایط توصیف شده در مسئله، مقدار ضریب آهنگ را بیابید.
۲۹.۱۴ در عمل پالایش با حالت پایا دیده شده است که شیب فضا بی‌غلظت را به صورت $dC/dx = -kC$ می‌توان ارزیابی کرد. اگر غلظت در $x = 0$ برابر با C_0 باشد، مطلوب است فاصله x در جایی که غلظت $0.7C_0$ است.

۳۰.۱۴ آهنگ تولید باکتری در یک ظرف بسته با سینتیک مرتبه دوم خیلی خوب توصیف می‌شود. عبارت غلظت باکتری را به صورت تابعی از زمان و ضریب آهنگ بیابید. زمان برای دو برابر شدن تعداد باکتری چقدر است؟

۳۱.۱۴ محتویات مخزنی دایره‌ای به قطر ۳۰ft قرار است با پروانه توربینی به قطر ۸ft، که ۶ تیغه تخت دارد، مخلوط شود. پروانه ۸ft بالای کف مخزن به ارتفاع ۳۰ft قرار دارد و با 5 rev/min می‌چرخد. دمای مخلوط 40°C است. با استفاده از خواص آب مخلوط عدد رینولدز مخزن را بیابید. اگر عدد توان مخزن 4° باشد، توان برحسب وات چقدر است؟

۳۲.۱۴ در شرایط توصیف شده در مسئله ۳۱.۱۴، آهنگ شارش در مخزن را برحسب m^3/s پیدا کنید در صورتی که افت هد بین ورودی و خروجی ۱۲ft باشد.

1. E. Oran and J. Boris, *Numerical Simulation of Reactive Flow*, Elsevier, New York, 1987.
2. D. Gidaspow, *Multiphase Flow and Fluidization*, Academic Press, Boston, MA, 1994.
3. R. Meyer, *Theory of Dispersed Multiphase Flow*, Academic Press, New York, 1983.
4. G. Papanicolaou, *Hydrodynamic Behavior of Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.
5. S. Soo, *Particulates and Continuum*, Hemisphere Pub. Co., New York, 1989.
6. S. Soo, *Multiphase Fluid Dynamics*, Glower Technical, Alersshot-Brookfield, 1990.
7. T. Tadros, *Solid/Liquid Dispersions*, Academic Press, New York, 1987.
8. V. Vanoni, *Sedimentation Engineering*, Amer. Soc. Civil Engrs., New York, 1975.
9. M. Yalin, *Mechanics of Sediment Transport*, 2nd ed., Pergammon Press, U.K., 1977.
10. J. Lumley, "Two-Phase and Non-Newtonian Flows," in *Turbulence*, ed. P. Bradshaw, Springer Verlag, Berlin, pp. 290–324, 1976.
11. J. Hunt, "The Turbulent Transport of Sediment in Open Channels," *Proc. Royal Soc. of London*, 224A, pp. 322–335, 1954.
12. J. Smith, "Modeling of Sediment Transport on Continental Shelves," in *The Sea*, Vol. 6, ed. E. Goldberg, I. McCave, J. O'Brien and J. Steele, Wiley Interscience, New York, p. 539, 1976.
13. J. Smith, and S. McClean, "Spatially Averaged Flow over a Wavy Surface," *J. Geophys Res.*, 82, pp. 1735–1746, 1977.
14. P. Klebanoff, *Natl. Adv. Comm. Aeronautical Technical Notes*, Rept. No. 3178.
15. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1976.
16. C. White, "The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream," *Proc. Royal Soc. London*, Ser. A, 174, pp. 322–338, 1940.
17. S. Glenn and W. Grant, "A Suspended Sediment Stratification Correction for Combined Wave and Current Flows," *J. Geophysical Research*, 92, pp. 8244–8264, 1986.
18. M. Garcia and G. Parker, "Entrainment of Bed Sediment into Suspension," *J. Hydraul. Eng.*, 117, pp. 414–435, 1991.
19. P. Owen, "Saltation of Uniform Grains in Air," *J. Fluid Mech.*, 20, pp. 225–242, 1964.

20. J. Smith and S. McClean, "Boundary Layer Adjustments to Bottom Topography and Suspended Sediments," in *Bottom Turbulence*, ed. J. Nihoul, Elsevier, New York, pp. 123-151, 1977.
21. J. Dutton, *The Ceaseless Wind, An Introduction to Meteorology*, McGraw-Hill, New York, 1976.
22. J. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge Univ. Press, U.K., 1973.
23. C. Rossby and R. Montgomery, "The Layers of Frictional Influence in Wind and Ocean Currents," Mass. Inst. Tech./Woods Hole Ocean. Inst., *Papers in Physical Oceanography and Meteorology*, 3, No. 3, 1935.
24. W. Munk and E. Anderson, "Notes on the Theory of the Thermocline," *J. Marine Res.*, 1, pp. 276-295, 1948.
25. R. French, *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1985.
26. W. Brutsaert, *Evaporation into the Atmosphere*, D. Reidel Pub. Co., Holland, 1982.
27. R. Stull, *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer Pub. Co., Boston, MA, 1988.
28. J. Businger, J. Wyngaard, Y. Izumi, and E. Bradley, "Flux Profile Relationships in the Atmospheric Surface Layer," *J. Atmos. Science*, 28, pp. 181-189, 1971.
29. C. Geankopolis, *Transport Operations and Unit Operations*, 3rd ed., Prentice Hall, New Jersey, 1993.
30. J. Iribarne and W. Godson, *Atmospheric Thermodynamics*, J. Wiley and Sons, New York, 1981.
31. R. Bras, *Hydrology*, Addison-Wesley, New York, 1990.
32. M. Moran and H. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, D. Reidel Pub. Co., Holland, 1992.
33. C. Bennet and J. Meyers, *Momentum, Heat and Mass Transfer*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.
34. P. Eagleson, *Dynamic Hydrology*, McGraw-Hill, New York, 1970.
35. J. Bosen, "A Formula for Approximation of the Saturation Vapor Pressure over Water," *Monthly Weather Review*, 88, p. 275, 1960.
36. J. Bosen, "An Approximation Formula to Compute Relative Humidity from Dry Bulk and Dew Point Temperatures," *Monthly Weather Review*, 86, p. 486, 1958.
37. K. Helfrich, E. Adams, A. Godbey, and D. Harleman, *Evaluation of Models for Predicting Evaporative Water Loss in Cooling Ponds*, Electric Power Resources Inst., Palo Alto, CA, 1982.
38. Metcalf and Eddy, Inc., revised by G. Tchobanoglous and F. Burton, *Wastewater Engineering*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
39. J. Clark, W. Viessman Jr., and M. Hammer, *Water Supply and Pollution Control*, 3rd ed., Harper and Row Publ., New York, 1977.

40. G. Fair, J. Geyer, and D. Okun, *Elements of Water Supply and Wastewater Disposal*, 2nd ed., J. Wiley and Sons, New York, 1971.
41. R. Brodkey and H. Hershey, *Transport Phenomena: A Unified Approach*, McGraw-Hill, New York, 1988.
42. R. Bates, P. Fondy, and R. Corpstein, *I and EC*, Design Development, 2, p. 310, 1963.
43. K. Norwood, and A. Metzner, *AIChEJ*, 6, p. 432, 1960.
44. G. Tatterson, *Scaleup and Design of Industrial Mixing Processes*, McGraw-Hill, New York, 1994.
45. G. Tatterson, *Fluid Mixing and Gas Dispersion in Agitated Tanks*, McGraw-Hill, New York, 1991.

پیوست الف

سیستمهای نیرو، گشتاور و مرکز سطح

مطالبی که در این پیوست گردآوری کرده‌ایم، در کار با سیستمهای نیرو به‌کار می‌آید. ابتدا سیستمهای ساده نیرو را به‌طور خلاصه مرور می‌کنیم سپس، گشتاورهای اول و دوم، شامل حاصل ضرب لختی را مورد بحث قرار می‌دهیم، و در آخر، مراکز سطح و محورهای مرکز جرمی را تعریف می‌کنیم.

الف. سیستمهای ساده نیرو

نمودار جسم آزاد یک شیء یا قسمتی از یک شیء، کنش تمام اجسام دیگر را بر آن شیء نشان می‌دهد. کنش زمین بر یک شیء، به‌نام نیروی گرانی، متناسب با جرم شیء است. به‌علاوه، نیروها و جفتها می‌توانند از طریق تماس مستقیم با سطح یک شیء بر آن اثر کنند. وقتی جسم آزاد در حال سکون است و یا با سرعت یکنواخت در خط مستقیم حرکت می‌کند، جسم در تعادل است. بنابر قانون دوم نیوتن، از آنجا که جسم آزاد هیچ‌گونه شتابی ندارد، مجموع تمام مؤلفه‌های نیرو در هر راستا باید مساوی صفر باشد و مجموع تمام گشتاورها حول هر محور نیز باید مساوی صفر باشد. دو سیستم نیرو هم‌ارزند اگر مجموع نیروهایشان در هر راستا مقدار یکسانی باشد و مجموع گشتاورهایشان نیز حول تمام محورها یکسان باشد. ساده‌ترین سیستم نیروی هم‌ارز را برابند سیستم نیرو می‌گویند. سیستمهای نیروی هم‌ارز همیشه حرکت (یا نبود حرکت) یکسانی را در یک جسم آزاد ایجاد می‌کنند.

برایند سیستمهای نیروی هم صفحه، یا نیرو است یا جفت. برایند سیستمهای نیروی موازی غیر هم صفحه، نیرو و یا جفت است. برایند سیستمهای کلی غیر هم صفحه ممکن است نیرو، جفت، و یا نیرو و جفت باشد.

کنش سیال بر هر سطح را می توان با سیستم نیروی برابری جایگزین ساخت که حرکت خارجی یا واکنش یکسان را با سیستم نیروی توزیع شده سیال موجب شود. در این حالت می توان فرض کرد که سیال کاملاً حذف شده و به جای آن برایند عمل می کند.

الف. ۲. گشتاورهای اول و دوم؛ مراکز سطح

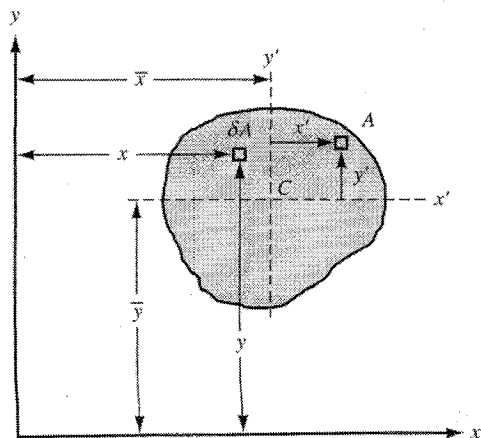
گشتاور سطح، حجم، یا جرم را می توان با یک روش همانند یعنی روش تعیین گشتاورهای یک نیرو حول یک محور تعیین کرد.

گشتاورهای اول

گشتاور سطح A حول محور y (شکل الف. ۱) با رابطه زیر بیان می شود

$$\int_A x dA$$

که در آن، انتگرال روی سطح اجرا می شود. برای تعیین گشتاور حول یک محور موازی مثلاً $x = k$.



شکل الف. ۱. نمادگذاری برای گشتاورهای اول و دوم.

رابطه به صورت زیر می شود

$$\int_A (x - k) dA = \int_A x dA - kA \quad (\text{الف. ۱})$$

گشتاور رابطه بالا نشان می دهد که همیشه یک محور موازی $x = k = \bar{x}$ وجود دارد، که گشتاور حول آن مساوی صفر است. این محور که محور مرکز جرمی نام دارد از مساوی صفر قرار دادن معادله (الف. ۱) و حل \bar{x} به دست می آید

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad (\text{الف. ۲})$$

محور مرکز جرمی دیگری را می توان به موازات محور x تعیین کرد.

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (\text{الف. ۳})$$

نقطه تقاطع محورهای مرکز جرمی را مرکز سطح می گویند. با دوران محورها، به سهولت می توان نشان داد که گشتاور اول سطح حول هر محور ماربر مرکز سطح مساوی صفر است. وقتی سطحی محور تقارن دارد، این محور تقارن، محور مرکز جرمی است زیرا گشتاورهای جزء سطحهای متناظر در هر طرف محور از نظر بزرگی با هم مساوی و از نظر علامت مخالفاند. وقتی محل مرکز سطح معلوم باشد، گشتاور اول حول هر محور را بدون انتگرال گیری و فقط با ضرب کردن مساحت در فاصله مرکز سطح از آن محور می توان به دست آورد

$$\int_A z dA = \bar{z} A \quad (\text{الف. ۴})$$

محور مرکز جرمی یک مثلث، که به موازات یک ضلع آن است، در فاصله یک سوم ارتفاع آن ضلع قرار دارد؛ مرکز سطح یک نیم دایره به شعاع a در فاصله $4a/3\pi$ از قطر قرار دارد. با گرفتن گشتاور اول حجم \forall حول یک صفحه، مثلاً yz ، فاصله تا مرکز سطح آن به طریق مشابه تعیین می شود

$$\bar{x} = \frac{1}{\forall} \int_{\forall} x d\forall \quad (\text{الف. ۵})$$

مرکز جرم یک جسم با همان روش تعیین می‌شود

$$x_m = \frac{1}{M} \int_M x dm \quad (\text{الف. ۶})$$

که در آن، dm جزء جرم و M جرم کل جسم است. برای منظوره‌های عملی در مهندسی، مرکز گرانی را جسم منطبق بر مرکز جرم آن می‌گیریم.

گشتاورهای دوم

گشتاور دوم سطح A (شکل الف. ۱) حول محور y عبارت است از

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (\text{الف. ۷})$$

I_y را گشتاور لختی سطح گویند و همیشه مثبت است، زیرا dA را همیشه مثبت در نظر می‌گیریم. بعد از انتقال محور به یک محور موازی و ماربر مرکز سطح C ، داریم

$$I_c = \int_A (x - \bar{x})^2 dA = \int_A x^2 dA - 2\bar{x} \int_A x dA + \bar{x}^2 \int_A dA$$

زیرا

$$\int_A x dA = \bar{x}A \quad \int_A x^2 dA = I_y \quad \int_A dA = A$$

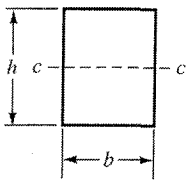
بنابراین

$$I_y = I_c + \bar{x}^2 A \quad \text{یا} \quad I_c = I_y - \bar{x}^2 A \quad (\text{الف. ۸})$$

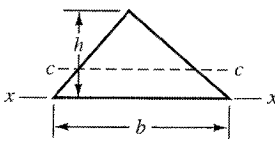
به بیان دیگر، گشتاور لختی سطح حول هر محور عبارت است از مجموع گشتاور لختی حول یک محور موازی ماربر مرکز سطح و حاصل ضرب مساحت در مربع بین محورها. شکل الف. ۲. گشتاورهای لختی را برای چهار سطح ساده نشان می‌دهد.

حاصل ضرب لختی I_{xy} سطح، با نمادگذاری شکل الف. ۱. با رابطه زیر بیان می‌شود

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\text{الف. ۹})$$

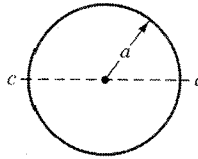


$$I_c = \frac{1}{12}bh^3$$

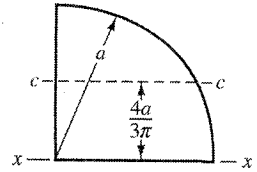


$$I_c = \frac{1}{36}bh^3$$

$$I_{x-x} = \frac{1}{12}bh^3$$



$$I_c = \frac{\pi a^4}{4}$$



$$I_c = 0.0546a^4$$

$$I_{x-x} = \frac{\pi a^4}{16}$$

شکل الف. ۲. گشتاورهای لختی سطوح ساده حول محورهای مرکز جرمی.

حاصل ضرب لختی می‌تواند مثبت یا منفی باشد. با نوشتن یک عبارت برای حاصل ضرب لختی حول محورهای xy ، برحسب \bar{x} و \bar{y} ، شکل الف. ۱، داریم

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A (\bar{x} + x')(\bar{y} + y')dA \\ &= \bar{x}\bar{y}A + \int_A x'y'dA + \bar{x} \int_A y'dA + \bar{y} \int_A x'dA = \bar{x}\bar{y}A + \bar{I}_{xy} \quad (\text{الف. ۱۰}) \end{aligned}$$

\bar{I}_{xy} عبارت است از حاصل ضرب لختی حول محورهای مرکز جرمی موازی با محورهای xy . هر وقت هرکدام از محورها محور تقارن سطح باشد، حاصل ضرب لختی مساوی صفر است. حاصل ضرب لختی I_{xy} مثالی به اضلاع b و h در جهت مثبت محورهای مختصات عبارت است از $b^2h^2/24$.

پیوست ب

کمک‌های برنامه‌نویسی کامپیوتری

ویرایش‌های قبلی این متن در ردیف اولین کتابهای درسی در مکانیک جامدات یا مکانیک سیالات بودند که روشهای عددی و کامپیوتری را به‌طور کامل در حل مسائل مورد استفاده قرار دارند. وقتی در ویرایشهای قبل برای اولین بار روشهای کامپیوتری وارد شدند فقط کامپیوترهای بزرگ وجود داشتند. آنها فقط موضوعات گروهی را اجرا می‌کردند و بیسیک و فورترن تنها زبانهایی بودند که به‌طور وسیع استفاده می‌شدند. توافق کمی در این مورد وجود داشت که چه مفاهیم ریاضی باید در مرکز یک حل عددی خاص قرار گیرد. با دسترسی کامل به PCهای پرتوان و ارزان، روشهای حل عددی به قدری مقبول و عادی شده‌اند که به یک دگمه روی حسابگرهای دستی (مثلاً، حل‌های رانگ-کوتا در معادله‌های دیفرانسیل معمولی) یا به یک شمایل در بسته‌های ریاضی تبدیل شده‌اند. البته، آنچه مهمتر است این است که برخلاف دوران مربوط به ویرایش قبل، دوره‌های تحلیل عددی، اگرچه مورد نیاز نباشند، در برنامه‌های مهندسی و علوم به‌طور وسیع در دسترس هستند، و بنابراین، لزومی ندارد روشهای عددی موضوع تعلیم در این متنها باشد. البته، هنوز به مطالب مربوط به این پیوست در ویرایش قبل اهمیت داده می‌شود زیرا آنها مبنای بعضی محاسبات انجام‌شده در این ویرایش را تشکیل می‌دهند. برای مرجع، آنها در صفحه‌های وب قرار داده شده‌اند، و برخلاف معمول، آنها در دوره‌های قبل آموزش داده می‌شوند و در صورت لزوم می‌توان آنها را در همان‌جا مرور کرد.

پیوست ج

خواص فیزیکی سیالات

جدول ج.۱. خواص فیزیکی آب در سیستم واحدهای USC.

مدول رسانندگی	کشسانی حجمی	هد فشار مطلق بخار	کشش سطحی	چسبندگی سینماتیک	چسبندگی موی	چگالی	وزن مخصوص	دما
$k, \text{W/m.K}$	$\text{K} \times 10^{-7}$	ρ_v / γ^* , m	$\sigma \times 10^2$, N/m	$\nu \times 10^6$, m^2/s	$\mu \times 10^3$, N.s/m^2	ρ , kg/m^3	γ , N/m^3	$^{\circ}\text{C}$
۰٫۵۶۱	۲۰۴	۰٫۰۶	۷٫۶۲	۱٫۷۹۲	۱٫۷۹۲	۹۹۹٫۹	۹۸۰۶	۰
۰٫۵۷۱	۲۰۶	۰٫۰۹	۷٫۵۴	۱٫۵۱۹	۱٫۵۱۹	۱۰۰۰٫۰	۹۸۰۷	۵
۰٫۵۸۰	۲۱۱	۰٫۱۲	۷٫۴۸	۱٫۳۰۸	۱٫۳۰۸	۹۹۹٫۷	۹۸۰۴	۱۰
۰٫۵۸۹	۲۱۴	۰٫۱۷	۷٫۴۱	۱٫۱۴۱	۱٫۱۴۰	۹۹۹٫۱	۹۷۹۸	۱۵
۰٫۵۹۸	۲۲۰	۰٫۲۵	۷٫۳۶	۱٫۰۰۷	۱٫۰۰۵	۹۹۸٫۲	۹۷۸۹	۲۰
۰٫۶۰۷	۲۲۲	۰٫۳۳	۷٫۲۶	۰٫۸۹۷	۰٫۸۹۴	۹۹۷٫۱	۹۷۷۸	۲۵
۰٫۶۱۵	۲۲۳	۰٫۴۴	۷٫۱۸	۰٫۸۰۴	۰٫۸۰۱	۹۹۵٫۷	۹۷۶۴	۳۰
۰٫۶۲۳	۲۲۴	۰٫۵۸	۷٫۱۰	۰٫۷۲۷	۰٫۷۲۳	۹۹۴٫۱	۹۷۴۹	۳۵
۰٫۶۳۰	۲۲۷	۰٫۷۶	۷٫۰۱	۰٫۶۶۱	۰٫۶۵۶	۹۹۲٫۲	۹۷۳۰	۴۰
۰٫۶۳۷	۲۲۹	۰٫۹۸	۶٫۹۲	۰٫۶۰۵	۰٫۵۹۹	۹۹۰٫۲	۹۷۱۱	۴۵
۰٫۶۴۳	۲۳۰	۱٫۲۶	۶٫۸۲	۰٫۵۵۶	۰٫۵۴۹	۹۸۸٫۱	۹۶۹۰	۵۰
۰٫۶۴۹	۲۳۱	۱٫۶۱	۶٫۷۴	۰٫۵۱۳	۰٫۵۰۶	۹۸۵٫۷	۹۶۶۶	۵۵
۰٫۶۵۴	۲۲۸	۲٫۰۳	۶٫۶۸	۰٫۴۷۷	۰٫۴۶۹	۹۸۳٫۲	۹۶۴۲	۶۰
۰٫۶۵۹	۲۲۶	۲٫۵۶	۶٫۵۸	۰٫۴۴۴	۰٫۴۳۶	۹۸۰٫۶	۹۶۱۶	۶۵
۰٫۶۶۳	۲۲۵	۳٫۲۰	۶٫۵۰	۰٫۴۱۵	۰٫۴۰۶	۹۷۷٫۸	۹۵۸۹	۷۰
۰٫۶۶۷	۲۲۳	۳٫۹۶	۶٫۴۰	۰٫۳۹۰	۰٫۳۸۰	۹۷۴٫۹	۹۵۶۰	۷۵
۰٫۶۷۰	۲۲۱	۴٫۸۶	۶٫۳۰	۰٫۳۶۷	۰٫۳۵۷	۹۷۱٫۸	۹۵۳۰	۸۰
۰٫۶۷۳	۲۱۷	۵٫۹۳	۶٫۲۰	۰٫۳۴۷	۰٫۳۳۶	۹۶۸٫۶	۹۴۹۹	۸۵
۰٫۶۷۵	۲۱۶	۷٫۱۸	۶٫۱۲	۰٫۳۲۸	۰٫۳۱۷	۹۶۵٫۳	۹۴۶۶	۹۰
۰٫۶۷۷	۲۱۱	۸٫۶۲	۶٫۰۲	۰٫۳۱۱	۰٫۲۹۹	۹۶۱٫۹	۹۴۳۳	۹۵
۰٫۶۷۹	۲۰۷	۱۰٫۳۳	۵٫۹۴	۰٫۲۹۶	۰٫۲۸۴	۹۵۸٫۴	۹۳۹۹	۱۰۰

$*\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$.

جدول ۲. ج. خواص فیزیکی آب در سیستم واحدهای USC.

رسانندگی گرمایی k But/(hr. °F, ft)	مدول کشسانی		کشش سطحی $\sigma \times 10^2$, lb/ft	چسبندگی سینماتیکی $\nu \times 10^5$, ft ² /s	چسبندگی $\mu \times 10^5$, lb.s/ft ²	چگالی ρ , slug ^r	وزن مخصوص γ , lb/ft ^r	دما $^{\circ}$ F
	هد فشار مطلق بخار P_v/γ^* , ft	حجمی $K \times 10^{-3}$ lb/in ^r						
۱٫۰۰۶	۲۹۳	۰٫۲۰	۰٫۵۱۸	۱٫۹۳۱	۳٫۷۴۶	۱٫۹۴۰	۶۲٫۴۲	۳۲
۱٫۰۲۱	۲۹۴	۰٫۲۸	۰٫۵۱۴	۱٫۶۶۴	۳٫۲۲۹	۱٫۹۴۰	۶۲٫۴۲	۴۰
۱٫۰۳۹	۳۰۵	۰٫۴۱	۰٫۵۰۹	۱٫۴۱۰	۲٫۷۳۵	۱٫۹۴۰	۶۲٫۴۲	۵۰
۱٫۰۵۸	۳۱۱	۰٫۵۹	۰٫۵۰۴	۱٫۲۱۷	۲٫۳۵۹	۱٫۹۳۸	۶۲٫۳۵	۶۰
۱٫۰۷۵	۳۲۰	۰٫۸۴	۰٫۵۰۰	۱٫۰۵۹	۲٫۰۵۰	۱٫۹۳۶	۶۲٫۲۹	۷۰
۱٫۰۹۳	۳۲۲	۱٫۱۷	۰٫۴۹۲	۰٫۹۳۰	۱٫۷۹۹	۱٫۹۳۴	۶۲٫۲۲	۸۰
۱٫۱۰۹	۳۲۳	۱٫۶۱	۰٫۴۸۶	۰٫۸۲۶	۱٫۵۹۵	۱٫۹۳۱	۶۲٫۱۳	۹۰
۱٫۱۲۴	۳۲۷	۲٫۱۹	۰٫۴۸۰	۰٫۷۳۹	۱٫۴۲۴	۱٫۹۲۷	۶۲٫۰۰	۱۰۰
۱٫۱۳۸	۳۳۱	۲٫۹۵	۰٫۴۷۳	۰٫۶۶۷	۱٫۲۸۴	۱٫۹۲۳	۶۱٫۸۷	۱۱۰
۱٫۱۵۱	۳۳۳	۳٫۹۱	۰٫۴۶۵	۰٫۶۰۹	۱٫۱۶۸	۱٫۹۱۸	۶۱٫۷۱	۱۲۰
۱٫۱۶۲	۳۳۴	۵٫۱۳	۰٫۴۶۰	۰٫۵۵۸	۱٫۰۶۹	۱٫۹۱۳	۶۱٫۵۵	۱۳۰
۱٫۱۷۲	۳۳۰	۶٫۶۷	۰٫۴۵۴	۰٫۵۱۴	۰٫۹۸۱	۱٫۹۰۸	۶۱٫۳۹	۱۴۰
۱٫۱۸۲	۳۲۸	۸٫۵۸	۰٫۴۴۷	۰٫۴۷۶	۰٫۹۰۵	۱٫۹۰۲	۶۱٫۱۹	۱۵۰
۱٫۱۹۰	۳۲۶	۱۰٫۹۵	۰٫۴۴۱	۰٫۴۴۲	۰٫۸۳۸	۱٫۸۹۶	۶۱٫۰۰	۱۶۰
۱٫۱۹۷	۳۲۲	۱۳٫۸۳	۰٫۴۳۳	۰٫۴۱۳	۰٫۷۸۰	۱٫۸۹۰	۶۰٫۸۱	۱۷۰
۱٫۲۰۳	۳۱۳	۱۷٫۳۳	۰٫۴۲۶	۰٫۳۸۵	۰٫۷۲۶	۱٫۸۸۳	۶۰٫۵۸	۱۸۰
۱٫۲۰۸	۳۱۳	۲۱٫۵۵	۰٫۴۱۹	۰٫۳۶۲	۰٫۶۷۸	۱٫۸۷۶	۶۰٫۳۶	۱۹۰
۱٫۲۱۳	۳۰۸	۲۶٫۵۹	۰٫۴۱۲	۰٫۳۴۱	۰٫۶۳۷	۱٫۸۶۸	۶۰٫۱۰	۲۰۰
۱٫۲۱۷	۳۰۰	۳۳٫۹۰	۰٫۴۰۴	۰٫۳۱۹	۰٫۵۹۳	۱٫۸۶۰	۵۹٫۸۴	۲۱۲

* $\gamma = ۶۲٫۴۱$ lb/ft^r

جدول ۳. خواص گازها در فشارهای پایین و دمای 26.67°C (80°F) در واحدهای SI.

نسبت گرمايي	گرمايي		دما		رسانندگي گرمايي $k \times 10^3$, W/m.K	وزن مولکولي	گاز
	ويژه	kJ/kg.K	ثابت گاز و	در فشار			
۱٫۲۴	۱٫۳۳۷	۱٫۷۰۳	—	—	—	۲۶٫۰	C_2H_2 , استيلن
۱٫۴۰	۰٫۷۱۶	۱٫۰۰۴	۲۸۷	—	۲۶٫۲	۲۹٫۰	هوا
۱٫۳۱	—	۲٫۰۶۱	۵۱۹٫۵	-۳۳٫۶	۲۴٫۴	۱۶٫۰	NH_3 , آمونياک
۱٫۴۰	۰٫۷۴۵	۱٫۰۴۳	۲۹۷	-۱۹۱٫۵	۲۵٫۰	۲۸٫۰	کربن مونوکسيد
۱٫۲۹	۰٫۶۶۱	۰٫۸۵۰	—	—	—	۴۶٫۰	CO_2 , کربن ديوکسيد
۱٫۱۳	—	۱٫۴۱۹	۱۸۰٫۷	۷۸٫۴	۱۴٫۴	۴۶٫۰۷	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, الکل
۱٫۶۶	۳٫۱۵۳	۵٫۲۳۳	۲۰۷۷	-۲۶۸٫۶	۱۵۶٫۷	۴٫۰۰	هليم
۱٫۴۰	۱۰٫۲۱۶	۱۴٫۳۶۱	۴۱۲۱	-۲۵۲٫۵	۱۸۶٫۹	۲٫۰۲	H_2 , هيدروژن
۱٫۶۲	۱٫۳۸۱	۲٫۲۳۸	۵۱۹٫۵	-۱۶۱٫۵	۳۴٫۱	۱۶٫۰۴	CH_4 , متان
۱٫۴۰	۰٫۷۴۱	۱٫۰۳۸	۲۹۷	-۱۹۵٫۸	۲۶٫۰	۲۸٫۰	N_2 , نيتروژن
۱٫۴۰	۰٫۶۵۷	۰٫۹۱۷	۲۶۰	-۱۸۲٫۹	۲۶٫۳	۳۲٫۰	O_2 , اکسيژن
۱٫۳۳	۱٫۴۰۳	۱٫۸۶۳	۴۶۲	۱۰۰٫۰	۱۸٫۷	۱۸٫۰	H_2O , بخار آب

جدول ۴. خواص گازها در فشارهای پایین و دمای 80°F (26.67°C) در آحاد USC.

نسبت گرمايي	گرمايي		دما		رسانندگي گرمايي k Btu/ft.s. $^{\circ}\text{R}$	وزن مولکولي	گاز
	ويژه	Btu/lb.m. $^{\circ}\text{R}$	ثابت گاز	در فشار			
۱٫۲۴	—	—	—	—	—	۲۶٫۰	C_2H_2 , استيلن
۱٫۴۰	۱٫۱۷۱	۰٫۲۴۰	۵۳٫۳	—	۱۳٫۶	۲۹٫۰	هوا
۱٫۳۱	—	۰٫۴۹۳	۹۶٫۶	-۲۸٫۵	۱۴٫۷	۱۶٫۰	NH_3 , آمونياک
۱٫۴۰	۰٫۱۷۸	۰٫۲۴۹	۵۵٫۲	-۳۱۲٫۳	۱۳٫۰	۲۸٫۰	کربن مونوکسيد
۱٫۲۹	—	—	—	—	—	۴۶٫۰	CO_2 , کربن ديوکسيد
۱٫۱۳	—	۰٫۳۳۹	۳۳٫۶	۱۷۳٫۱	۷٫۵	۴۶٫۰۷	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, الکل
۱٫۶۶	۰٫۷۵۳	۱٫۲۵	۳۸۶٫۰	-۴۵۱٫۵	۸۱٫۵	۴٫۰۰	هليم
۱٫۴۰	۲٫۴۴	۳٫۴۳	۷۶۶٫۰	-۴۲۲٫۵	۹۷٫۲	۲٫۰۲	H_2 , هيدروژن
۱٫۶۲	۰٫۳۳۰	۰٫۵۳۵	۹۶٫۶	-۲۵۸٫۷	۱۷٫۷	۱۶٫۰۴	CH_4 , متان
۱٫۴۰	۰٫۱۷۷	۰٫۲۴۸	۵۵٫۲	-۳۲۰٫۴	۱۳٫۵	۲۸٫۰	N_2 , نيتروژن
۱٫۴۰	۰٫۱۵۷	۰٫۲۱۹	۴۸٫۳	-۲۹۷٫۲	۱۳٫۷	۳۲٫۰	O_2 , اکسيژن
۱٫۳۳	۰٫۳۳۵	۰٫۴۴۵	۸۵٫۸	۲۱۲٫۰	۹٫۷	۱۸٫۰	H_2O , بخار آب

جدول ج. ۵ رسانندگیهای گرمایی، k ، مایعات و جامدات.

k (W/m.K) برای مایعات 25°C

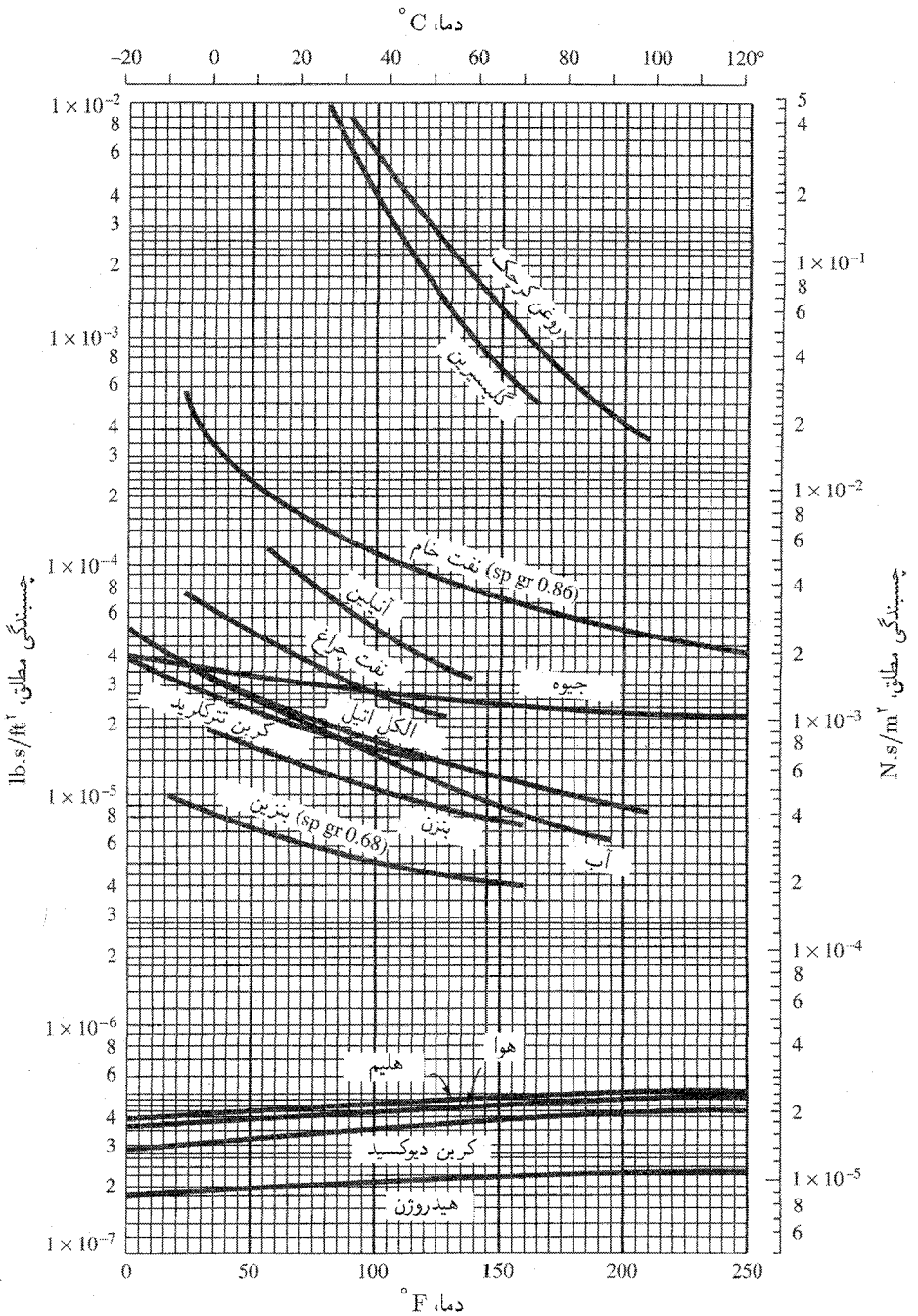
۰٫۱۶۱	استون	۰٫۶۰۷	آب
۰٫۱۴۱	بنزن	۸٫۲۵	جیوه
۰٫۱۳۱	تولوئن	۰٫۲۰۰	متان
۰٫۱۲۶	فوران	۰٫۱۶۹	الکل
۰٫۲۹۲	گلیسرین	۰٫۲۵۶	اتیلن گلیکول

k (W/m.K) در جامدات ($\leq 27^{\circ}\text{C}$)

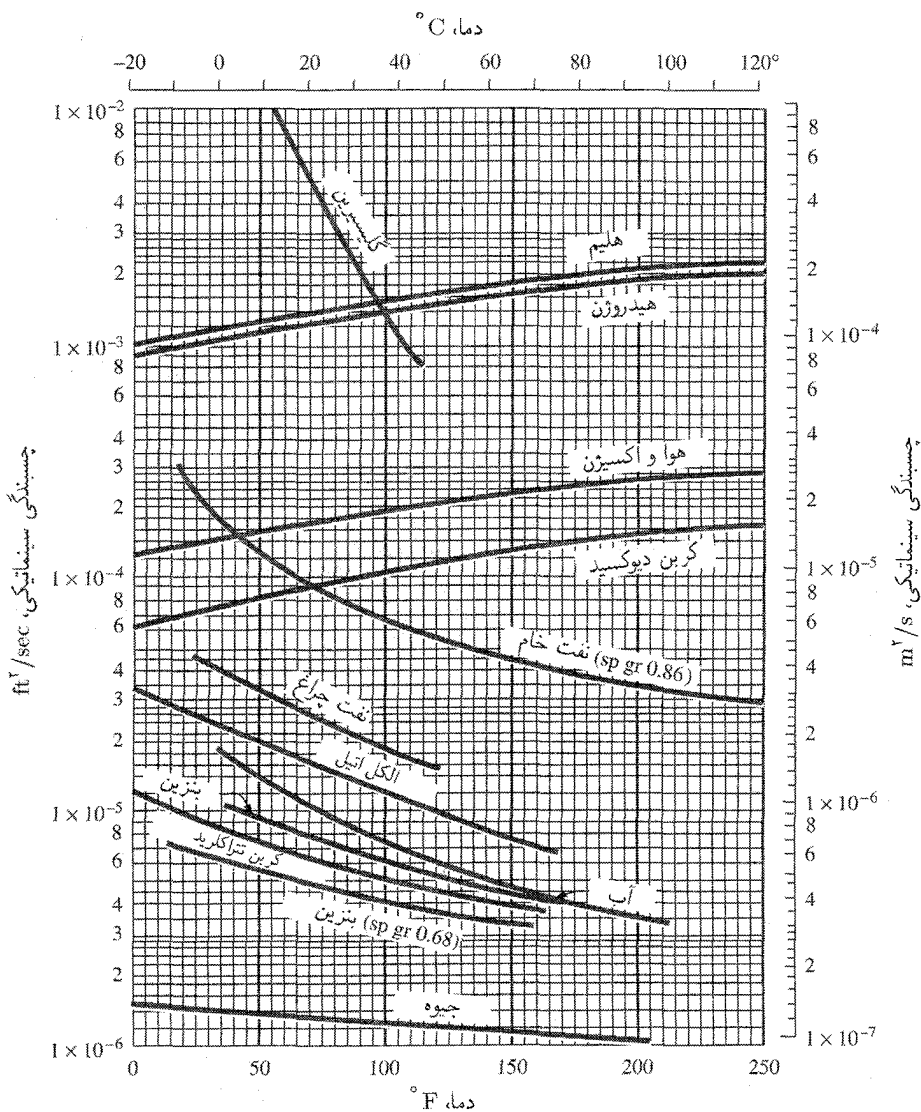
۰٫۰۹	پنبه نسوز (0°C)	$200(10^2)$	کلسیم
۱٫۰	پنبه نسوز (100°C)	$237(10^2)$	آلومینیوم
۰٫۰۴	آجر، خشک	$401(10^2)$	مس
۱٫۰	آجر، نسوز (400°C)	$802(10^2)$	آهن
۰٫۵۵	ملات سیمانی (90°C)	$353(10^2)$	سرب
۰٫۸	بتن	$834(10^2)$	جیوه
۱٫۴	باکلیت	$141(10^2)$	سدیم
۰٫۰۶	کف اورتان	۱٫۰	سنگ آهک
۱٫۲۵	شیشه، پیرکس (100°C)	۱٫۳	سنگ ریگی
۱٫۴۰	شیشه، سیلیکا (50°C)	۰٫۱۶	برف
		۰٫۰۶	خاکاره
		۰٫۱۱	چوب، تخته سه‌لا
		۰٫۱۶	چوب بلوط
		$116(10^2)$	روی

جدول ج. ۶ ضرایب پخش مخلوطهای دوتایی در هوا یا آب.

مخلوط	ضریب پخش، \mathcal{D} (cm^2/s)	مخلوط	ضریب پخش، \mathcal{D} (cm^2/s)
CO در هوا	۰٫۲۰۸	استون در آب	$1.28(10^{-5})$
CO ₂ در هوا	۰٫۱۶۰	بنزن در آب	$1.02(10^{-5})$
H ₂ O در هوا	۰٫۲۴۲	الکل در آب	$1.24(10^{-5})$
H ₂ در هوا	۰٫۶۲۷	گلیسرین در آب	$1.05(10^{-5})$
		متان در آب	$1.49(10^{-5})$
		تولوئن در آب	$1.85(10^{-5})$



شکل ج ۱. چسبندگی مطلق بعضی از گازها و مایعات.



شکل ج. ۲. جتسندگی سینماتیکی بعضی گازها و مایعات. گازها در فشار استانداردند.

پیوست د

نمادگذاری

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
LT^{-1}	m/s	ft/s	ثابت، تندی موج پالس	a
LT^{-2}	m/s^2	ft/s^2	شتاب	a
LT^{-2}	m/s^2	ft/s^2	بردار شتاب	\mathbf{a}
LT^{-2}	m/s^2	ft/s^2	مؤلفه‌های شتاب	a_z, a_y, a_x
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت	a^*
L^2	m^2	ft^2	مساحت	A
	—	—	شیب معکوس	A
L	m	ft	فاصله	b
			ثابت	b
			ثابت	B
L	m	ft	عرض موج‌گیر	B_w
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت موج ضربه‌ای	c
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت صوت	c
	J/kg.k	ft.lb/slug.R°	ظرفیت گرمای ویژه، فشار ثابت	c_p

ابعاد	SI	USC	واحد	کمیت	نماد
	—	—		رطوبت ویژه	c_q
	J/kg.k	ft.lb/slug. °R		ظرفیت گرمای ویژه، حجم ثابت	c_v
$ML^{-۲}$	kg/m ^۳	slug/ft ^۳		غلظت (جرم)	C
$LT^{-۱}$	m/s	ft/s		سرعت موج	C
	—	—		ضریب	C
$ML^{-۲}$	kg/m ^۳	slug/ft ^۳		غلظت بستر	C_b
	—	—		ضریب پسا	CD
$ML^{-۲}$	kg/m ^۳	slug/ft ^۳		غلظت جرم، مؤلفه نام	C_i
	—	—		ضریب لختی	C_i
	—	—		ضریب بالابر	CL
$L^{\frac{1}{2}}T^{-۱}$	m ^{$\frac{1}{2}$} /s	ft ^{$\frac{1}{2}$} /s		ثابت تجربی	C_m
$ML^{-۲}$	kg/m ^۳	slug/ft ^۳		غلظت مرجع	C_r
Φ	K	°R		نقطه بحرانی	C^*
	—	—		شیب بحرانی	C
L	m	ft		عمق آب	d
$L^۳$	m ^۳	ft ^۳		جابه‌جایی حجمی	D'
L	m	ft		قطر	D
$L^۲T^{-۱}$	m ^۲ /s	ft ^۲ /s		ضریب پاشیدگی	Dd
L	m	ft		قطر داخلی مخزن	D_i
$L^۲T^{-۱}$	m ^۲ /s	ft ^۲ /s		ضریب پخش جرمی	\mathcal{D}
	—	—		عدد دامکوهلر	D_N
	—	—		عدد دالتون	D_a
	—	—		بازده	e
$L^۲T^{-۲}$	J/kg	ft.lb/slug		انرژی داخلی بر جرم واحد	e
				خطای مطلق	e
$ML^۲T^{-۲}$	J	ft.lb		انرژی داخلی	E
L	m.N/N	ft.lb/lb		انرژی مخصوص	E
L	m.N/N	ft.lb/lb		اتلافها بر نیروی گرانی واحد	E
$ML^{-۱}T^{-۲}$	Pa	lb/ft ^۲		مدول کنسنسانی	E
$ML^{-۲}T^{-۱}$	m ^۲ /s	ft ^۲ /s		پخشندگی تلاطمی	E
$ML^{-۲}T^{-۱}$	kg/m ^۲ .s	slug/ft ^۲ .s		شار همراهبری رسوب درکف	E_o

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
	—	—	ضریب اصطکاک	f
MLT^{-2}	N	lb	نیرو	F
MLT^{-2}	N	lb	بردار نیرو	\mathbf{F}
	—	—	عدد فرود	F
MLT^{-2}	N	lb	نیروی شناوری	F_B
LT^{-2}	m/s^2	ft/s^2	شتاب گرانی	g
	$kg.m/N.s^2$	$lb_m.ft/lb.s^2$	ثابت گرانش	g_0
$ML^{-2}T^{-1}$	$kg/s.m^2$	$slug/s.ft^2$	آهنگ شارش جرم بر سطح واحد	G
	—	—	عدد گراشهوف	G_r
L	m	ft	ارتفاع، فاصله قائم	h
L^2T^{-2}	J/kg	ft.lb/slug	آنتالپی بر جرم واحد	h
$MT^{-2}\Theta^{-1}$	$J/m^2.s/K$	$Btu/ft^2.s/^{\circ}R$	ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی	h
LT	m.s	ft.s	ضریب انتقال جرم	h_m
L	m	ft	هد، ارتفاع خط هیدرولیکی	H
L	m	ft	ارتفاع موج	H
L	m	ft	ارتفاع مخزن	H_i
L	m	ft	هد پمپ	H_p
L	m	ft	هد توربین	H_t
$MT^{-2}\Theta^{-1}$	$J/m^2.s/K$	$Btu/ft^2.s/^{\circ}R$	ضریب کلی انتقال گرما	H_T
	—	—	شیب افقی	\mathbf{H}
	—	—	اسب بخار	HP
L^2	m^2	ft^2	گشتاور لختی	I
	—	—	نقطه پیوندگاه	J
T^{-1}	\backslash/s	\backslash/s	ضرایب آهنگ واپاشی	k_1, k
l^{-1}	\backslash/m	\backslash/ft	عدد موج	k
$MLT^{-2}\Theta^{-1}$	$J/m.s/K$	$Btu/ft.s/^{\circ}R$	رسانندگی گرمایی	k
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	lb/ft^2	مدول کشسانی حجمی	K
	—	—	ضریب افت جزئی	K
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	ضریب پاشیدگی	K
L	m	ft	طول، طول آمیختگی	l

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
L	m	ft	مقیاس طول لاگرانژ	l_L
L	m	ft	طول	L
L^3	m^3	—	لیتر	L
MLT^{-2}	N	lb	بِرا	L
L	m	ft	طول اینون-ابوکف	L
L	m	ft	طول موج	L
$L^2 T^{-2}$	J/kg	Btu/slug	گرمای نهان	L
—	—	—	لگاریتم طبیعی	ln
M	kg	slug	جرم	m
—	—	—	ضریب شکل، ثابت	m
$L^3 T^{-1}$	m^3/s	ft^3/s	توان چشمه	m
MT^{-1}	kg/s	slug/s	شارش جرم بر زمان واحد	\dot{m}
—	—	—	وزن مولکولی	M
M	kg	slug	جرم کل	M
—	—	—	عدد آمیختگی	M_t
L	m	ft	قطر متوسط، آحاد ϕ	M_ϕ
MLT^{-2}	N	lb	شار تکانه	M
—	—	—	کمیت نشانگرها	M
—	—	—	شیب ملایم	M
—	—	—	عدد ماخ	M
L	m	ft	ارتفاع شبه مرکز	\overline{MG}
—	—	—	نما، ثابت	n
—	—	—	راستای قائم	n
—	—	—	ضریب زبری مانینگ	n
—	—	—	تعداد مول	n
—	—	—	عمود واحد بر سطح	n
—	—	—	بردار واحد قائم	n_1
T^{-1}	$1/s$	$1/s$	سرعت دوران	N
—	—	—	خاصیت حجم کنترلی	N

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
	—	—	بردار شار	N
	—	—	عمود واحد برکف	N
T^{-1}	\backslash/s	\backslash/s	فرکانس برانتمویس لی	N_b
	—	—	عدد توان	N_p
	—	—	عدد نوسلت	N_u
L	m	ft	ارتفاع مکس مثبت خالص	$NPSH$
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	lb/ft ²	فشار	p
MLT^{-2}	N	lb	نیرو	p
L	m	ft	ارتفاع سرریز	P
$T^{-1}L^{-2}$	$\backslash/s.m^2$	$\backslash/s.ft^2$	آهنگ انتقال بر مساحت واحد	P
L	m	ft	محیط خیس شده	P
	—	—	توزیع احتمال	P
	—	—	عدد پکلت	P_e
	—	—	عدد پکلت جرم	P_{em}
	—	—	عدد توان	P_o
L	m	ft	محیط لوله	P_o
	—	—	عدد پرانتل	P_r
L^2T^{-1}	m ² /s	ft ² /s	تخلیه بر عرض واحد	q
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت	q
LT^{-1}	m/s	ft/s	بردار سرعت	q
L^2T^{-2}	J/kg	ft.lb/slug	انتقال گرما بر جرم واحد	q_H
L^2T^{-1}	m ² /s	ft ² /s	تخلیه	Q
ML^2T^{-2}	J	ft.lb	محتوی گرما	Q_H
			ضریب	r
L	m	ft	فاصله شعاعی	r
L	m	ft	بردار مکان	r
L	m	ft	بردار مکان	R
L	m	ft	شعاع هیدرولیکی	R
	J/kg.K	ft.lb/slug. °R	ثابت گاز	R
$ML^{-2}T^2\Theta$	s.K/J	s. °R/Btu	مقاومت گرمایی	R

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
L	m	ft	تفاضل پیمانه‌ای	R, R'
	—	—	ضریب همبستگی لاگرانژی	R_L
	—	—	عدد رینولدز	R
	—	—	عدد ریچاردسون	R_i
	—	—	شیب	s
$ML^{-۳}$	kg/m ^۳	slug/ft ^۳	غلظت نمک	s
L	m	ft	مختصه خط جریانی	s
	J/kg.K	ft.lb/slug.°R	آنتروپی بر جرم واحد	S
	J/K	ft.lb/°R	آنتروپی	S
	—	—	گرانش ویژه، شیب	S
$ML^{-۱}$	kg/s	slug/s	جمله چشمه‌چاه	S
L	m	ft	فاصله	S
	—	—	شیب تند	S
	—	—	شیب کف	S_o
	—	—	شانز، در آحاد ϕ	S_ϕ
	—	—	تنش برشی هنجاریده	S_T
	—	—	عدد اشمیت	S_c
	—	—	عدد شروود	S_h
	—	—	عدد اشتراال	S_t
	—	—	عدد استاتون	S_t
T	s	s	زمان	t
L	m	ft	فاصله، ضخامت	$t' t$
T	s	s	زمان توقف	t_d
L	m	ft	ضخامت پیشران	t_p
T	s	s	زمان میانگین‌گیری	T
	K	°R	دما	T
$ML^۲T^{-۲}$	N.m	lb.ft	گشتاور	T
$MT^{-۲}$	N/m	lb/ft	طول واحد/نیروی کششی	T
L	m	ft	عرض واحد	T
T	s	s	مقیاس زمان لاگرانژی	T_L

واحد

ابعاد	SI	USC	کمیت	نماد
T	s	s	زمان میانگین‌گیری	T_o
Θ	K	°R	نقطه سه‌گانه	T^*
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت، مؤلفهٔ سرعت	u
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت محیطی	u
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت تنش برشی	u_*
L^2T^{-2}	J/kg	ft.lb/slugs	انرژی ذاتی	u^{**}
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت	U
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت، مؤلفهٔ سرعت	v
$M^{-1}L^3$	m ³ /kg	ft ³ /slug	حجم مخصوص	v_s
L^3	m ³	ft ³	حجم	∇
L^3	m ³	ft ³	حجم	\mathcal{V}
LT^{-1}	m/s	ft/s	بردار سرعت	v
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت	V
LT^{-1}	m/s	ft/s	مؤلفهٔ سرعت	w
L^2T^{-2}	J/kg	ft.lb/slugs	کار بر جرم واحد	w
LT^{-1}	m/s	ft/s	سرعت حد ته‌نشینی	w_t
ML^2T^{-2}	J/s	ft.lb/s	کار بر زمان واحد	W
ML^2T^{-2}	m.N	ft.lb	کار انبساط	W
L	m	ft	عرض کانال	W
L	m	ft	عرض شاتول	W_c
ML^2T^{-2}	m.N	ft.lb	کار شفت	W_s
MLT^{-2}	N	lb	وزن	W
			بردار وزن	\mathbf{W}
	—	—	عدد وبر	\mathbf{W}
L	m	ft	فاصله	x
L	m	ft	مختصه، بردار مکان	\mathbf{x}
L	m	ft	فاصله تا مرکز فشار	x_p
LT^{-2}	N/kg	lb/slugs	مؤلفه نیروی حجمی بر جرم واحد	X
L	m	ft	فاصله، عمق	y
L	m	ft	فاصله تا مرکز فشار	y_p

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
	—	—	ضریب انبساط	Y
LT^{-2}	N/kg	lb/slug	مؤلفه نیروی حجمی بر جرم واحد	Y
L	m	ft	فاصله قائم	z
L	m	ft	طول زبری تکانه	z_{om}
L	m	ft	طول زبری بخار	z_{ov}
L	m	ft	طول زبری رطوبت	z_{oh}
L	m	ft	فاصله قائم	Z
LT^{-2}	N/kg	lb/slug	مؤلفه نیروی حجمی بر جرم واحد	Z
	—	—	ضریب تصحیح انرژی جنبشی	α
	—	—	زاویه، ضریب	α
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	پخشندگی گرمایی	α
	—	—	ضریب تصحیح تکانه	β
	—	—	زاویه تیغه	β
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	گردش	Γ
T^{-1}	$1/s$	$1/s$	گردابی	Γ
	—	—	رطوبت نسبی	Γ
	—	—	نسبت آمیختگی	Γ
L^{-1}	$1/m$	$1/ft$	بردار عملگر	∇
$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^2	lb/ft^2	وزن مخصوص	γ
L	m	ft	ضخامت لایه مرزی	δ
L	m	ft	ضخامت زیر لایه لایه‌ای	δ'
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	چسبندگی تالاطمی سینماتیکی	ϵ
L	m	ft	ارتفاع زبری	ϵ
T^{-1}	$1/s$	$1/s$	آهنک کرنش	ϵ
			خاصیت حجمی کنترلی (N) بر جرم واحد	η
$ML^{-1}T^{-1}$	$N.s/m^2$	$lb.s/ft^2$	چسبندگی تالاطمی	η
	—	—	نسبت هد	η
			بازده	η
L	m	ft	ارتفاع سطح آزاد	η

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
	—	—	زاویه	θ
	رادیان	رادیان	تغییر مکان زاویه‌ای	θ
Θ	K	$^{\circ}\text{R}$	دمای پتانسیل	θ
	—	—	نسبت گرماهای ویژه	κ
	—	—	ثابت عمومی	κ
	—	—	نسبت مقیاس، ضریب نامعین	λ
$ML^{-1}T^{-1}$	$\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$	$\text{lb}\cdot\text{s}/\text{ft}^2$	چسبندگی	μ
	—	—	ثابت	μ
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	چسبندگی سینماتیکی	ν
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	پتانسیل سرعت	ϕ
	—	—	تابع	ϕ
	—	—	فی، آحاد قطر ذره	ϕ
	—	—	تنش بی‌بعد	ϕ_m
	—	—	تابع پایداری	Φ
	—	—	ثابت	π
	—	—	پارامتر بی‌بعد	Π
ML^{-2}	kg/m^2	slug/ft^2	چگالی	ρ
ML^{-2}	kg/m^2	slug/ft^2	چگالی آب	ρ_w
ML^{-2}	kg/m^2	slug/ft^2	چگالی بخار، رطوبت مطلق	ρ_v
MT^{-2}	N/m	lb/ft	کشش سطحی	σ
	—	—	شاخص حفره‌زایی	σ
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	lb/ft^2	تنش عمودی	σ
L	m	ft	انحراف استاندارد، آحاد ϕ	σ_ϕ
	—	—	انحراف	σ^2
$ML^{-1}T^{-2}$	Pa	lb/ft^2	تنش برشی	τ
$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2	lb/ft^2	تنش برشی جداری	τ_o
$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2	lb/ft^2	تنش برشی بحرانی فرسایشی	τ_c
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	تابع جریان، دوبعدی	ψ
L^2T^{-1}	m^2/s	ft^2/s	تابع جریان استوکس	ψ
	—	—	تابع نمایه شار	Ψ

ابعاد	واحد		کمیت	نماد
	SI	USC		
T^{-1}	1/s	1/s	سرعت زاویه‌ای	Ω
T^{-1}	rad/s	rad/s	سرعت زاویه‌ای	ω
	—	—	کسر جرم، مؤلفه θ ام	ω_i
T^{-1}	1/s	1/s	فرکانس موج	ω
			ارتفاع بی بعد	ξ

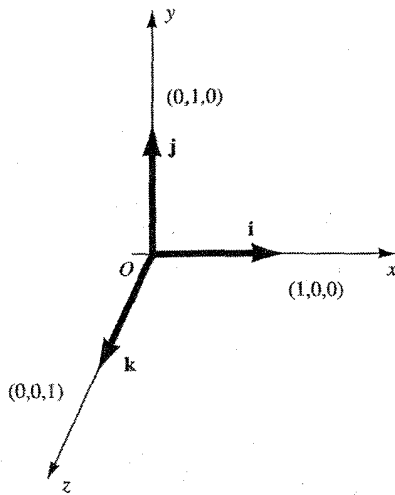
پیوست ۵

عملیات برداری و نمادگذاری

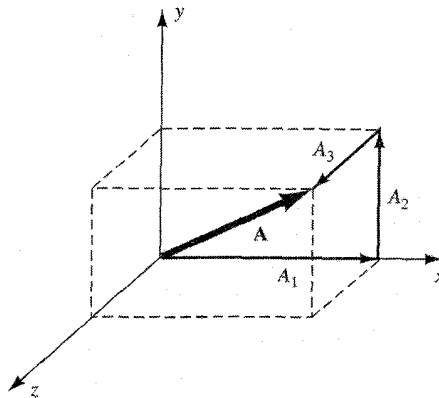
در این پیوست، تعاریفها و عملیات بنیادی بردارها مرور می‌شوند. موضوعی که در اینجا مرور می‌شود برای کمک به عملیاتی است که در متن به کار می‌روند و به صورت عملیات برداری خسته‌کننده در نظر گرفته نمی‌شوند.

۱.۵ نماد و تعریفها

برداری کمیته است که مقدار و جهت، هر دو، را دارد. در مقابل، اسکالر کمیته است که فقط مقدار دارد و جهت ندارد. سرعت و نیرو مثالهای از بردارند؛ جرم، طول، و زمان مثالهایی از اسکالرنند. در این متن بردار، A ، با حرف بزرگ و سیاه نشان داده می‌شود؛ در بسیاری از کتابهای دیگر بردار با خط روی حرف، \vec{A} ، یا خط زیر حرف، \underline{A} ، نشان داده می‌شود. چون خط روی حرف اغلب میانگین‌گیری را در مکانیک سیالات نشان می‌دهد، خیلی باید دقت کرد و نمادگذاری مؤلف را برای بردار با میانگین‌گیری از قبل دانست. کمیت اسکالر با یک حرف تنها، مثلاً m ، نشان داده می‌شود. در مختصات دکارتی سه‌بعدی تمام بردارها را به صورت ترکیبهای خطی سه بردار واحد، که با i ، j ، و k نشان داده می‌شوند، می‌توان بیان کرد. مانند شکل ۱.۵ بردارهای واحد دو به دو در مبدأ مختصات برهم عمودند، و با طول واحد ۱ است. مکان مختصاتی نوک بردارهای واحد در شکل نشان داده شده‌اند. این سه بردار واحد توابع اصلی نامیده می‌شوند. هر سه بردار ابعادی در



شکل ۱.۵ تعریفهای بردار واحد.



شکل ۲.۵ مؤلفه‌های بردار A.

فضای دکارتی را با ترکیبی از این توابع اصلی می‌توان نشان داد، برای مثال،

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad (۱.۵)$$

$$B = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad (۲.۵)$$

شکل ۲.۵ بردار A و مؤلفه‌های آن را، که به‌طور هندسی جمع شده‌اند و بردار کل A را داده‌اند، نشان می‌دهد.

طول یا مقدار A ، که با $|A|$ نشان داده می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (۳. ۵)$$

این بسطی از موضوع کاملاً شناخته شده‌ای است که اگر مکان یک نقطه در فضا با (x_1, y_1, z_1) مشخص شود، در این صورت شعاع یا فاصله مبدأ تا این نقطه با رابطه زیر داده می‌شود

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (۴. ۵)$$

بردارها نه تنها از اعداد تشکیل می‌شوند و به جای اعداد عمل می‌کنند، بلکه می‌توانند شامل عملیات ریاضی نیز باشند. یک عمل ریاضی برداری که اغلب به کار می‌رود دیفرانسیل‌گیری از بردار است که با نماد ∇ تعریف می‌شود و معادل است با

$$\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial()}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial()}{\partial z} \mathbf{k} \quad (۵. ۵)$$

∇ خودش یک بردار است.

۲. ۵ جبر برداری

دو بردار A و B برابرند اگر مقدار و جهت یکسان داشته باشند و در این مورد مکان مبدأ آنها اهمیت ندارد. مجموع یا تفاضل دو بردار با روش "رأس به انتها" یا روش متوازی‌الاضلاع انجام می‌شود؛ $A + B = C$. اگر $A - B = 0$ ، در این صورت بردار صفر که مقدار و جهت صفر دارد به دست می‌آید.

اگر m اسکالر باشد، در این صورت قوانین زیر به کار می‌روند

$$A + B = B + A$$

$$mA = \Lambda m$$

$$(m + n)A = mA + nA \quad (۶. ۵)$$

$$m(A + B) = mA + mB$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

۳.۵ عملیات برداری

ضرب نقطه‌ای عبارت است از تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر. با مراجعه به شکل ۳.۵، ضرب نقطه‌ای A و B به صورت $A \cdot B$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta = AB \cos \theta \quad (۷.۵)$$

ضرب نقطه‌ای دو بردار همیشه یک کمیت اسکالر است. ضرب نقطه‌ای بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_1i + A_2j + A_3k) \cdot (B_1i + B_2j + B_3k) \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \end{aligned} \quad (۸.۵)$$

$$A \cdot A = |A|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (۹.۵)$$

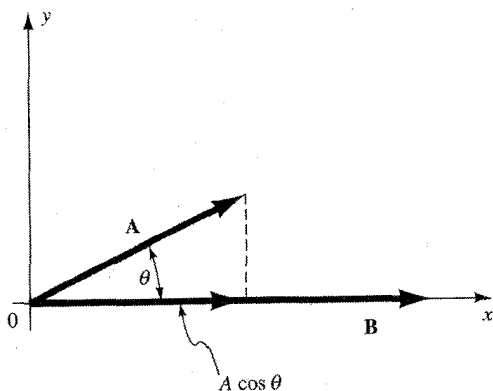
کاربرد ضرب نقطه‌ای برای بردارهای واحد روابط زیر را می‌دهد: اگر

$$i = 1, 0, 0$$

$$j = 0, 1, 0$$

در این صورت

$$i \cdot i = (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 1 \quad (۱۰.۵)$$



شکل ۳.۵ نمایش هندسی A و B .

یا

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$$

به علاوه،

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0 \quad (11.5)$$

یا

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}| |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

از تعریف هندسی \mathbf{i} و \mathbf{j} می‌دانیم که آنها بر هم عمودند، و بنابراین دیده می‌شود که ضرب نقطه‌ای این دو بردار متعامد صفر است. این یک حالت کلی است که اگر ضرب نقطه‌ای هر دو بردار صفر باشد آنها بر هم عمودند.

ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (12.5)$$

یا

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \mathbf{i} - (A_1 B_3 - A_3 B_1) \mathbf{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{k} \quad (13.5)$$

ضربهای خارجی بردارهای واحد به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \end{aligned} \quad (14.5)$$

اگر \mathbf{A} و \mathbf{B} بردارهای صفر نباشند، در این صورت اگر $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ ، بردار موازی است.

۴. ۵ عمودهای واحد و صفحات

تقاطع دو بردار (مثلاً A و B) یک سطح مسطح را مشخص می‌کنند و بردار عمود بر سطح را با ضرب خارجی $A \times B$ می‌توان پیدا کرد. برای مثال، اگر

$$A = 2i - 6j - 3k \quad \text{و} \quad B = 4i + 3j - k$$

در این صورت بردار عمود بر سطح به صورت زیر پیدا می‌شود

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15i - 10j + 30k$$

همانطور که در فصل ۳ اشاره شد بردار واحد یا عمود بر صفحه‌ای که با A و B مشخص شده است را توسط هنجارش C با طول یا مقدار C می‌توان یافت. بنابراین،

$$n = \frac{C}{|C|} = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{15i - 10j + 30k}{[15^2 + 10^2 + 30^2]^{1/2}} = \frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k \quad (۱۵. ۵)$$

یک واریسی سریع از مقدار n نشان می‌دهد که بردار بالا "طول" واحد دارد. بنابراین بردار n جهت بردار واحد عمود بر سطح تعریف شده با A و B را می‌دهد. بردار مساحت A [مثلاً معادله (۲.۲.۳)] به صورت مساحت اسکالر سطح ضرب در عمود واحد تعریف می‌شود، یعنی،
 $A = An$

۵. ۵ عملیات مشتق‌گیری

اگر A و B توابع برداری مشتق‌پذیر اسکالر s باشند و ϕ تابع مشتق‌پذیر اسکالر s باشد، قوانین زیر را می‌توان به کار برد:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(A + B) &= \frac{dA}{ds} + \frac{dB}{ds} \\ \frac{d}{ds}(A \cdot B) &= A \cdot \frac{dB}{ds} + B \cdot \frac{dA}{ds} \\ \frac{d}{ds}(A \times B) &= A \times \frac{dB}{ds} + \frac{dA}{ds} \times B \\ \frac{d}{ds}(\phi A) &= \phi \frac{dA}{ds} + \frac{d\phi}{ds} A \end{aligned} \quad (۱۶. ۵)$$

اگر \mathbf{A} بردار مشتق‌پذیر باشد، $d\mathbf{A}$ به صورت $d\mathbf{A} = dA_1\mathbf{i} + dA_2\mathbf{j} + dA_3\mathbf{k}$ تعریف می‌شود و عملیات مشتق‌گیری زیر به کار می‌رود

$$d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$d(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

اگر \mathbf{A} تابعی از x, y و z باشد، در این صورت

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz$$

و اگر این را به زمان بسط دهیم

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt$$

که پس از تقسیم‌کردن بر dt مشتق کلی زیر را می‌دهد

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \end{aligned} \quad (۱۷. ه)$$

از عملکرد اپراتور ∇ در معادله (۵.ه) برای فشرده‌کردن و سازمان دادن عملیات مختلف آنالیز برداری می‌توان استفاده کرد.

گرادیان یک تابع اسکالر مشتق‌پذیر، ϕ ، به صورت زیر داده می‌شود

$$\nabla \phi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (۱۸. ه)$$

و خودش بردار است. مؤلفه این گرادیان در جهت \mathbf{n} با $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ داده می‌شود. واگرایی میدان برداری مشتق‌پذیر، \mathbf{A} ، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \end{aligned} \quad (۱۹. ه)$$

و یک کمیت اسکالر است.

لاپلاسی به صورت واگرایی تابع اسکالر مشتق‌پذیر، ϕ ، تعریف می‌شود و با رابطه زیر داده می‌شود

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (۲۰. ه)$$

تاو میدان برداری مشتق‌پذیر، \mathbf{A} ، یک میدان برداری را می‌دهد و با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (۲۱. ه) \end{aligned}$$

با کمی عملیات جبری می‌توانید نشان دهید که برای اسکالر ϕ و بردار \mathbf{A} ،

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (۲۲. ه الف)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (۲۲. ه ب)$$

بالاخره اگر معادله (۱۷. ه) به صورت زیر مرتب شود

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{A}$$

و به جمله‌های مشتق فضایی توجه شود، مستقیماً می‌توان نشان داد که آنها را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) &= (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

با مراجعه به معادله (۱۷. ه) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (۲۳. ه)$$

توصیه می‌شود نشان دهید که (۷.۷) و (۷.۷) یکسان نیستند. اولی یک نتیجه اسکالر را می‌دهد؛ دومی مشتق‌گیری را می‌دهد که باید روی یک تابع اسکالریا تابع برداری انجام شود. رابطه کلی در معادله (۲۳.۵) در معادله‌های (۳.۳.۴) ب، (۲.۴.۴)، (۱۱.۴.۴)، (۱.۷.۴)، و (۱۰.۸.۴) الف استفاده می‌شود.

پیوست و

پاسخ به مسائل زوج

فصل ۱

- $2,044 \text{ ft}^2/\text{s}$ ۲۶.۱
 $v_s = \frac{g}{\gamma}$ ۲۸.۱
 $\frac{8312 \text{ mN}}{M \text{ kgK}}$ ۳۰.۱
 $602,4 \text{ kW}$ ۳۲.۱
 $1025,243 \text{ kg/m}^3$ ۳۴.۱
 $= \rho_s / [\omega_s + (1 - \omega_s)\rho_s / \rho_w]$ ۳۶.۱
 $999,975 \text{ kg/m}^3$ ۳۸.۱
 $2\rho_A\rho_B / (\rho_A + \rho_B) : \lambda = 1$ ۴۰.۱
 $\rho = 1147,3 \text{ kg/m}^3$ ۴۲.۱
 $C_1 = 306,7 \text{ kg/m}^3$
 $C_2 = 427,9 \text{ kg/m}^3$
 $C_3 = 367,27 \text{ kg/m}^3$
 $0,13 \text{ kg}, 3,2504 \text{ kg/m}^3$ ۴۴.۱
 $2,006 \text{ kg/m}^3$ ۴۶.۱
 $6,39 \text{ MN/m}^2$ ۴۸.۱
 $895,32 \text{ kJ}$ ۵۰.۱

- $\tau_y = 15 \text{ kPa}$ ، پلاستیک ایدئال، ۲.۱
 $y = t \frac{du}{dy} = 0$ به متغیر غیرخطی ۴.۱
 $95,1 \text{ lb}$ ۶.۱
 $W = 45,89 \text{ N} = 10,32 \text{ lb}$ ، $m = 450 \text{ kg}$ ۸.۱
 $W = 275,3 \text{ N}$ ، $m = 450 \text{ kg}$
 $8,5 \text{ m/s}^2$ ۱۰.۱
 $2,5 \text{ m/s}$ ۱۲.۱
 $0,4 \text{ N.s/m}^2$ ۱۴.۱
 $0,2387 \text{ lb.s/ft}^2$ ۱۶.۱
 $0,582 \text{ mm}$ ۱۸.۱
 $6,12 \text{ mm/s}$ ۲۰.۱
 $8,059(10^{-5}) \text{ ft}^2/\text{s}$ ۲۲.۱
 $7,488(10^{-2})$ استوک
 $2,51(10^{-2}) \text{ in}$ ۲۴.۱

۵۸٫۹kN (ب) : ۵۱٫۰۸kN (الف) ۳۶.۲

$\gamma bh^3/3$ ۳۸.۲

۱۱۲۵۵^۲h^۲Nm ۴۰.۲

۱۶۳۶٫۵lb.ft ۴۲.۲

۲۰٫۳۶kN ۴۴.۲

۳۵۹۴۷lb.ft ۴۶.۲

۵٫۸۵۵ft ۴۸.۲

A از $\frac{3}{4}h$ ۵۰.۲

۲٫۱۵۶m ۵۲.۲

۶٫۵ft (ب) ، ۶٫۷۰۸ft (الف) ۵۴.۲

b/۲ .h/۲ ۵۶.۲

۰٫۳۳۳۴m ۵۸.۲

۰٫۴۳۳b ۶۲.۲

$$y_P = \frac{12,25}{3(\Delta h - \gamma)} + \frac{\Delta h - \gamma}{4} \quad ۶۴.۲$$

۲۱۱۶ft ۶۶.۲

F = ۴۳۰lb .h = ۵ft ۶۸.۲

A از ۱۱٫۵۸۸in (الف) ۷۰.۲

$\sigma_{max} = ۶۹٫۴۴\gamma$ ، $\sigma_{min} = ۵٫۱۲\gamma$ (ب)

۹۹۸۴lb.ft ۷۲.۲

۴٫۲۲۷ft ۷۴.۲

۲٫۳۵۷kN ۷۶.۲

۱٫۰۸۳m ، ۴٫۰۸۳m ، ۱۵۶٫۹kN (الف) ۷۸.۲

۰ (د) : ۰ (ج) : ۰٫۹۴۸m ، ۱۷۹٫۳kN (ب)

۲۸٫۸۱kN ۸۰.۲

(۰ از) $y_P = ۰٫۷۸۶$ ، $F_H = ۱۵۴٫۴kN$ ۸۲.۲

(۰ از) $x_P = ۰٫۷۷۴$ ، $F_V = ۱۶۷٫۱kN$

F = ۱۶۷٫۱kN ۸۳.۲

۵۴۹٫۱lb ۸۴.۲

۱٫۶۳۳ft ۸۶.۲

۰lb ، -۴۰rπlb ۸۸.۲

$p_{NH_r} = ۱۴٫۹۱MPa$ ؛ $p_{مخلوط} = ۹۵٫۸MPa$ ۵۲.۱

$p_{H_r} = ۷۶٫۰۶MPa$ ؛ $p_{CO_r} = ۴٫۸۴MPa$

$K = \rho \frac{dp}{d\rho}$ ۵۴.۱

۳۰۰MPa ؛ ۳۴۷۲۲psi ۵۶.۱

۰٫۶۹۷lb ؛ ۰٫۲۱۷slug ۵۸.۱

۰٫۴MPa abs ۶۲.۱

۶۰۰۰kPa ۶۴.۱

۱۰٫۲۷kPa ۶۶.۱

D = ۱۳mm برای شیر آب ۶۸.۱

۰٫۰۰۹۱۹N ۷۰.۱

$\theta = ۶۷٫۰۳^\circ$ ۷۴.۱

فصل ۲

۵۴۱٫۷psi ۲.۲

۰٫۳۷۶ft ؛ ۰٫۳۸۵ft ۴.۲

۰٫۷۷۳kg/m^۳ ؛ ۶۰٫۶kPa ۸.۲

۱٫۷۳۴m ؛ ۵٫۰۹۹m ؛ ۳۷۴٫۹mm ۱۰.۲

۳۱٫۱۴m ۱۲.۲

۴٫۹۲m ؛ ۴٫۰۸۲m H_۲O ۱۴.۲

۱٫۳۸۹m استیلین تترابرومید

-۰٫۴۲۵m ، -۲٫۱۲۵m ۱۶.۲

۱٫۳۷۲psi ۱۸.۲

۳۲٫۲۰ft ۲۰.۲

Hg از ۰٫۲۱۷۶ ۲۲.۲

-۱٫۸m ۲۴.۲

-۲٫۶mm ۲۶.۲

۲۹۴۲Pa ؛ ۱۲۰۶۰Pa ۲۸.۲

۱۱۰٫۵۳mm ۳۰.۲

۳۶MN ۳۲.۲

-۴۴۱N ۳۴.۲

$$\frac{2(p-p_0)}{\rho\omega^2} + \frac{g}{\omega^2} = x^2 + \left(y - \frac{g}{\omega^2}\right)^2$$

$$p = \left[p_0^{(n-1)/n} + \frac{n-1}{n} \frac{\rho\omega^2 r^2}{2p_0^{1/n}} \right]^{n/(n-1)}$$

۱۳۶.۲ $2\sqrt{gh_0}/r$

۱۳۸.۲

۱۴۲.۲

۱۴۴.۲ $220/\delta \text{ rpm}$

۱۴۶.۲ $2,390.7 \text{ kN}$

۱۴۸.۲ $132,38(1 + 0.0102\omega^2)$

۹۰.۲ (الف) $y_p = 2r/3, \gamma r^2/2$ (بالای BD)

(ب) $-\gamma\pi r^2/4$

(از چپ AC) $x_p = 4r/3\pi$

۹۲.۲ (الف) $23,95 \text{ kN}$ (ب) $6,654 \text{ kN}$

(ج) $17,3 \text{ kN}$

۹۴.۲ $30,806 \text{ kN}$

۹۶.۲ معادل

۹۸.۲ $2242 \text{ lb}, 815,4 \text{ lb}$

۱۰۰.۲ $12,3 \text{ m}$

۱۰۲.۲ $1,234 \text{ ft}$

۱۰۴.۲ $98,4 \text{ N}, 0,1 \text{ m}$

۱۰۶.۲ $126,96 \text{ lb}$

۱۰۸.۲ $18,207 \text{ kN}$

۱۱۰.۲ $11,5 \text{ mm}$

۱۱۲.۲ (الف) $10,83 \text{ lb}$ (ب) پایدار

۱۱۴.۲ نه

۱۱۶.۲ (الف) $1,348(\sin^2\theta \cos\theta)^{1/2} \text{ m}$

(ب) $2,19^\circ \leq \theta \leq 54,74^\circ$

۱۱۸.۲ $11,71 \text{ ft/s}^2$

۱۲۰.۲ $p_C = 0,69 \text{ psi}, p_B = 0,347 \text{ psi}$

$p_E = 0,693 \text{ psi}, p_D = 1,109 \text{ psi}$

۱۲۲.۲ $p_C = -0,26 \text{ psi}, p_B = -0,52 \text{ psi}$

$p_E = 1,04 \text{ psi}, p_D = 1,30 \text{ psi}$

۱۲۴.۲ $p_B = 22,8 \text{ kPa}, p_A = 0$

$p_C = 16,42 \text{ kPa}$

۱۲۶.۲ $a_y = -g, a_x = 0$

۱۲۸.۲ $a_x = 2,0394 \text{ m/s}^2$

$\theta = 13,3^\circ, a_y = -1,178 \text{ m/s}^2$

۱۳۲.۲ $31,52 \text{ rpm}$

۱۳۴.۲ (از چپ A) $541,16 \text{ rpm}, 0,5 \text{ ft}$

فصل ۳

۳.۳ $54,04 \text{ kg/s}, 16,33 \text{ m/s}$

۴.۳ $\frac{1,273}{(0,7 - 0,4x/L)^2}$

۶.۳ بله

۸.۳ $n = 1,85$ متلاطم

۱۰.۳ $72,78 \text{ kJ}$

۱۲.۳ $F ds = pAdx - pdV$

۱۴.۳ $-250 \text{ pmN/s (J/s یا W)}$

۱۶.۳ $2,74 \text{ m}$ یا $y = 0,755 \text{ m}$

۱۸.۳ $8,857 \text{ m/s}$

۲۰.۳ $r = \frac{1}{4(1+y/H)^{0,25}}$

۲۲.۳ $Q = A_2 \left[\frac{2gR(\rho_m/\rho - 1)}{(1 - (D_2/D_1)^4)^{1/2}} \right]^{1/2}$

۲۴.۳ برای همه $R = 0, H$

۲۶.۳ $88,14 \text{ ft.lb/lb}, 28,14 \text{ ft.lb/lb}, 68,1\%$

۲۸.۳ $10,7,4\%$ بزرگتر

۳۰.۳ $1,037$

۳۲.۳ $0,82 \text{ m}$

۳۴.۳ B \neq A

۳۶.۳ $3,94 \text{ cfs}$

۳۸.۳ $6,11$

۴۰.۳ $2,731 \text{ m}, 0,136 \text{ m}^2/\text{s}$

$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 - 3V_1^2 y_1^2 (y_1 + y_2) / y_2^2 = 0 \quad ۱۰۲.۳$$

$$\text{اتلاف} = ۸,۳۶ \text{ ft.lb/lb } , y_2 = ۱۱,۰ \text{ ft} \quad ۱۰۴.۳$$

$$V_1^2 / 2g < y_1 \quad ۸,۷۵ \text{ hp} \quad ۴۶.۳$$

$$۳۲,۸۷ \text{ cfs/ft} \quad ۱۰۶.۳$$

$$۰,۱۶۱ \text{ ft/s}^2 \quad ۱۰۸.۳$$

$$۲۴۲,۱ \text{ lb} \quad ۱۱۰.۳$$

$$\text{توان} = ۳۱۴۱,۶ \text{ W} , T = ۲۵ \text{ mN} \quad ۱۱۲.۳$$

$$\text{انرژی افزوده} = ۱۲,۸۲ \text{ mN/N} \quad ۱۱۴.۳$$

$$۴۶۳ \text{ rpm} \quad ۱۱۶.۳$$

$$۲۸۵ \text{ rpm} \quad ۱۱۸.۳$$

$$s = ۶,۰ \text{ ft} , V = ۱۱,۲۲۹ \text{ ft/s} \quad ۱۲۰.۳$$

$$۰,۰۰۳۴۹۵ \text{ W/cm}^2 \cdot ^\circ\text{C} \quad ۱۲۲.۳$$

$$\frac{1}{4} \alpha_1 T^2 + \alpha_0 T = \quad ۱۲۴.۳$$

$$\frac{1}{4} \alpha_1 T^2 + \alpha_0 T - q_H(x/A) \quad ۱۲۶.۳$$

$$۱ \text{ Btu} = ۲۵۱,۹۰۶ \text{ cal} \quad ۱۲۸.۳$$

$$۱۲۶.۳$$

$$c_p^G = c_p^W [m_1 \Delta T_1 (\Delta T_2 - \Delta T_1) + m_2 \Delta T_2$$

$$(\Delta T_1 - \Delta T_2)] / [m_2 \Delta T_2 (\Delta T_1 - \Delta T_2)] \quad ۱۳۰.۳$$

$$۲۵,۳۴^\circ\text{C} \quad ۱۳۲.۳$$

$$c_p^{\text{دشمن}} = ۴۸۶,۲۵ \text{ J/kg.K} \quad ۱۳۴.۳$$

$$۸۰ \text{ s} \quad ۱۳۶.۳$$

$$\text{از گرم به سرد} : ۲۵۶۵,۴ \text{ W/m}^2 \quad ۱۳۸.۳$$

$$C_n = C_0 \{ \beta / \alpha + (1 - \beta / \alpha) e^{-\alpha t} \}^n \quad ۱۴۰.۳$$

$$۲,۰۴۴ \text{ min} ; ۰,۰۵۲۱ \text{ m}^2/\text{s} \quad ۱۴۲.۳$$

$$J_A = D_{AB} (p_1 - p_2) / RT \Delta x \quad ۱۴۴.۳$$

$$۲,۳۴ \text{ hr} \quad ۱۴۶.۳$$

$$-۷۷,۰۹ \text{ kPa} , ۹۱,۶۶ \text{ m}^2/\text{s} \quad ۴۲.۳$$

$$۹,۵۹ \text{ kN/m}^2 , -۲۴,۷۳ \text{ kN/m}^2 , ۱,۰۱ \text{ L/s} \quad ۴۴.۳$$

$$۸,۷۵ \text{ hp} \quad ۴۶.۳$$

$$۱۸۱۵۲ \text{ hp} \quad ۴۸.۳$$

$$۵۶۸,۶ \text{ gpm} \quad ۵۰.۳$$

$$۰,۰۶۶۷ \text{ H} \quad ۵۲.۳$$

$$۸۰,۶۸ \text{ kPa} \quad ۵۴.۳$$

$$-۰,۰۰۳۳ \text{ mN/kg.K} \quad ۵۶.۳$$

$$v_{max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad ۵۸.۳$$

$$\frac{(2n+1)^2(n+1)}{4n^2(n+2)}$$

$$F_y = ۶۲,۴ \text{ lb} \quad ۶۰.۳$$

$$F_x = ۰,۶۵۲ \text{ kN} , F_y = ۰ \quad ۶۲.۳$$

$$\text{تنش} \quad ۶۴.۳$$

$$\text{بدون تغییر، بازگشت پذیر} \quad ۶۶.۳$$

$$F_x = F_y = ۲۹,۳ \text{ N} \quad ۶۸.۳$$

$$F_y = ۳۸۳۵۵ \text{ N} , F_x = ۱۸۷۱۳,۹ \text{ N} \quad ۷۰.۳$$

$$F_y = -۱۴۵۰,۴ \text{ lb} , F_x = -۶۸۲,۷ \text{ lb} \quad ۷۲.۳$$

$$\text{به طرف پایین} , F_y = -۱۶۸۵۹ \text{ N} \quad ۷۴.۳$$

$$۱,۲۵۱۷۰۰ \text{ ft.lb/s} \text{ (ب)} , ۱۰۶۶۲ \text{ lb} \text{ (الف)} \quad ۷۶.۳$$

$$۲۱۲,۲ \text{ psf} \text{ (ه)} , ۰,۷۱,۴ \text{ (د)} , ۷۹۶۱ \text{ hp} \text{ (ج)} \quad ۷۸.۳$$

$$\text{توان} = ۳۱۶۵ \text{ hp} , F = ۳۵۶۰۶ \text{ lb} \quad ۷۸.۳$$

$$\theta = ۸۴,۲۶^\circ \quad ۸۲.۳$$

$$u = -V_0/3 \quad ۸۴.۳$$

$$F_y = ۳۵,۷۵ \text{ lb} , F_x = -۱۸۵,۸ \text{ lb} \quad ۸۶.۳$$

$$F_y = ۲۰,۸۲ \text{ N} , F_x = ۶۶,۱۸ \text{ N} \quad ۸۸.۳$$

$$۱۵۷۷,۳ \text{ hp} \text{ (ب)} , ۹۸۵,۸ \text{ hp} \text{ (الف)} \quad ۹۲.۳$$

$$\theta = ۱۵۸,۶۷^\circ \quad ۹۴.۳$$

$$A_J/A_T = \frac{1}{4} \quad ۹۶.۳$$

$$۷,۱\text{-cm} \text{ (آب)} , ۲,۱,۲۲\text{-m} \text{ (هوا)} \quad ۹۸.۳$$

فصل ۴

$$۲,۸۸^\circ \quad ۲.۴$$

$$\rho(u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y) = -\partial p/\partial y + \mu \nabla^2 v$$

$$g \sin \alpha (t^2 - x^2) / 2\nu \quad ۵۶.۴$$

$$\rho g x \sin \alpha \quad ۵۸.۴$$

$$۵۵,۹ \text{ft} \quad ۶۲.۴$$

$$۵۰.۸ \text{lb/ft}^2 \quad ۶۴.۴$$

$$۲ \quad ۶۶.۴$$

$$۵۲,۹(۱۰^۶) \text{ft-lb} \quad ۶۸.۴$$

$$-۲۵۰ \rho W \quad ۷۰.۴$$

$$B \neq A \quad ۷۲.۴$$

$$۱۲,۳۸۶ \text{ft} \quad ۷۴.۴$$

$$/۵۱,۱۵.۳, ۱۵ \text{hp}, ۲۵۲۸ \text{ft} \quad ۷۶.۴$$

$$-۳۹,۲۳ \text{kPa} \quad ۷۸.۴$$

$$۰,۱۶ \text{m}^2/\text{s} \quad ۸۲.۴$$

$$T(x) - T_0 = \quad ۸۴.۴$$

$$R_0 L^2 (1 - b \frac{x}{L} - e^{-bx/L}) / \alpha b^2$$

$$T(x) = \quad ۸۶.۴$$

$$- \frac{1}{\gamma} q_H x^2 + (T_1 + \frac{1}{\gamma} q_H d^2)(x/d) + T_2$$

$$\nabla^2 C_b = -\frac{k}{D_b} C_b \quad ۸۸.۴$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_M}{\partial r} \right) + k C_M \quad ۹۰.۴$$

فصل ۵

$$:Fg^2 / (\rho V^2) \text{ (ب)} ; \rho V^2 / \Delta p \text{ (الف)} \quad ۲.۵$$

$$t \Delta p / \mu \text{ (ج)}$$

$$۸۶,۴(۱۰^۶) \text{lb.s}^2/\text{ft} \quad ۴.۵$$

$$FLT, FL, FL, FLT^{-1}, T^{-1} \text{ بدون بعد,} \quad ۶.۵$$

$$f \left(\frac{\Delta h}{t}, \frac{\mu D}{Q_p}, \frac{Q^2 \rho^0 g}{\mu^2} \right) = ۰ \quad ۸.۵$$

$$\Delta p = c' \gamma \Delta z \quad ۱۰.۵$$

$$F_B = c' \sqrt{\rho g} \quad ۱۲.۵$$

$$-\frac{1}{29} \quad ۴.۴$$

$$(2xyz)^{1/2} \mathbf{i} + (x^2 z^{1/2}) \mathbf{j} + (\frac{1}{\sqrt{y}} x^2 y z^{-1/2}) \mathbf{k} \quad ۶.۴$$

$$: u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \text{ اسکالر؛} \quad ۸.۴$$

آهنگ تغییر ناشی از حرکت

$$-۳۸ \mathbf{j} - ۵۵۲۰ \mathbf{k} \quad ۱۰.۴$$

$$-۰,۲۶۷۲ \mathbf{i} + ۰,۵۳۴۶ \mathbf{j} - ۰,۸۰۱۹ \mathbf{k} \quad ۱۲.۴$$

$$-(\nabla^2 \psi) \mathbf{k} \quad ۱۴.۴$$

$$\text{بله} \quad ۱۶.۴$$

$$\text{بله} \quad ۱۸.۴$$

$$U + \omega x \sin \omega t / (1/\delta + \cos \omega t) \quad ۲۲.۴$$

$$v = ۰ ; u = 1 \quad ۲۴.۴$$

$$\text{بله} ; \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{3}{4} \right) \quad ۲۶.۴$$

$$\text{واحد} ; ۱۰,۶۷۷ ; \bar{\sigma} = \frac{16}{3} (x^2 + y^2) \quad ۲۸.۴$$

$$2\alpha \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (ب)} ; FL^{-2} \text{ (الف)} \quad ۳۴.۴$$

$$-۹,۸۴(۱۰^۵) \mathbf{i} - ۱۵,۷۵(۱۰^۵) \mathbf{j} \quad ۳۶.۴$$

$$-۰,۱۴(۱۰^۵) \text{kN/m}^2$$

$$۰ \quad ۳۸.۴$$

$$۶۲,۴ \text{lb} \quad ۴۰.۴$$

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \partial u_\theta / \partial \theta = ۰ \quad ۴۲.۴$$

$$u_r \frac{\partial C}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial C}{\partial \theta} = \quad ۴۴.۴$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial C}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{|r^2|} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}$$

$$du/dx = ۰ \quad ۴۶.۴$$

$$\rho u \, du/dx = -dp/dx + \mu d^2 u/dx^2$$

$$v(x) = \frac{x}{L} v_w - \frac{\rho g}{2\mu} \frac{\partial y}{\partial y} (Lx - x^2) \quad ۵۲.۴$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = ۰ \quad ۵۴.۴$$

$$\rho(u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y) = -\partial p/\partial x + \mu \nabla^2 u$$

$U = -0.064 \text{ m/s}$ (به طرف بالا) ۱۴.۶

$0.02857 \rho U^2 a, 2 \rho U^2 a / 15$ ۱۶.۶

$\frac{4}{3}$ ۱۸.۶

$0.707r$ ۲۰.۶

0.0412 lb/ft^2 ۲۴.۶

$122.6, 4.21(10^{-2}) \text{ ft}^2/\text{s}$ ۲۶.۶

$0.00152 \text{ ft}^2/\text{s}$ ۲۸.۶

$\lambda \text{ m}$ ۳۰.۶

93 mm ۳۲.۶

$6.5(10^{-2}) \text{ N s/m}^2$ ۳۴.۶

$\frac{y}{\rho} \kappa \frac{y}{r}$ ۳۶.۶

0.223 ۳۸.۶

2.39 m/s ۴۲.۶

0.004326 ۴۴.۶

$41.97 \text{ m}^2/\text{s}$ ۴۶.۶

0.000482 ۴۸.۶

$234 \text{ ft}^2/\text{s}$ ۵۰.۶

10.11 ft/s ۵۲.۶

$Q \sim y^{8/3}$ ۵۴.۶

1.997 ft ۵۶.۶

$0.538a$ ۵۸.۶

0.06 ۶۰.۶

3916 m ۶۲.۶

50 ft ۶۴.۶

0.005 ft ۶۶.۶

0.0146 ۷۰.۶

0.34 in. ۷۲.۶

1.096 MW به ۷۴.۶

1.121 MPa ۷۶.۶

15.6 hp ۷۸.۶

$M = f \left(\frac{V}{\sqrt{p/\rho}}, k \right)$ ۱۴.۵

2.162 m/s ۱۸.۵

$\gamma H^2 f \left(\frac{\omega H^2}{Q}, e \right)$ ۲۰.۵

$\alpha t/x^2; h_c x/k; x^2 q_H/kT$ ۲۴.۵

$kL_{ref}/\rho \mathcal{D}; uL_{ref}/\mathcal{D}; \mu/\rho \mathcal{D}$ ۲۶.۵

$DT_*/Dt_* = \frac{1}{\text{Pe}} \nabla^2 T_* + (L/U_m T_m) S$ ۲۸.۵

$0.16 \text{ Re}_L^{-1/2} x_*^{-1/2}; 1.2 \text{ Re}_L^{-1/2};$ ۳۰.۵

$x_* = x/L$

$C_A(z, t)/C_{A0} = \alpha e^{-z^2/Dz^2 t}$ خیر؛ ۳۴.۵

$\text{Pr} = 5.98; \text{Re} = 7.4(10^6)$ ۳۶.۵

$(\text{Re.Pr})^{1/2} = 6652$

$\rho V^2 D^2 f'(R, M)$ ۳۸.۵

0.195 ۴۰.۵

۴۲.۵ اندازه مدل $\frac{1}{75}$ یا کمتر از اندازه مدل اولیه را

برگزینید

اتلاف $p =$ اتلاف $m \left(\frac{D_m \nu_p}{D_p \nu_m} \right)$

به d, g ۴۴.۵

$\omega D^{3/2} \rho_f^{1/2} / \sigma^{1/2}$ ۴۶.۵

$18.59 \text{ m}^2/\text{s}, 36.98 \text{ m/s}$ ۴۸.۵

بر حسب هد سرعت بیان شدند همان طور خواهند بود.

فصل ۶

$Ua/3, 2\mu U/a^2$ ۲.۶

$0.59 \text{ N}, 1.636(10^{-8}) \text{ m}^2/\text{s}$ ۴.۶

$Q = \frac{(p_2 - p_1)}{2\mu l} \frac{2}{3} a^3 - Va + \frac{U+V}{2} a$ ۶.۶

$\beta = 1.20, \alpha = 1.543$ ۸.۶

2.0 mm ۱۲.۶

$$۳,۵۹ft \quad ۳۲.۷$$

$$۱۱۸۲ \text{ rpm} \quad ۳۴.۷$$

$$۱۱۳m, ۱۱۶m, ۱۱۵m \quad ۳۶.۷$$

فصل ۸

$$۰, ۰, ۰ \quad ۲.۸$$

$$\omega_z = -۰,۵, \omega_y = -۲, \omega_x = ۱,۵ \quad ۴.۸$$

$$\omega = -۲z(x+y) \quad ۶.۸$$

$$\phi = -۴x + \frac{y}{4}(x^2 - y^2) - ۶y + c \quad ۸.۸$$

$$\psi = \theta + c \quad ۱۲.۸$$

$$\phi = ۱۸x + c \quad ۱۴.۸$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = V_r, \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = ۰ \quad ۱۶.۸$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=\infty} = V_\theta$$

$$۳۷۹۰lb \quad ۱۸.۸$$

$$\phi = -\frac{\mu}{4} \ln\{[(x-1)^2 + y^2][(x+1)^2 + y^2]\} \quad ۲۲.۸$$

$$\text{نیم تنه} \quad ۲۶.۸$$

$$۸۰m^2/s \quad ۳۰.۸$$

$$۶۹۵ft/s \text{ یا } ۴۷۰mi/hr \quad ۳۸.۸$$

$$۰, ۰, ۸۲۵ft^{-1}; ۷۶,۲ft; ۱۹,۰ft/s \quad ۴۰.۸$$

$$۱,۵۷s^{-1}$$

$$۴۲.۸$$

$$w_s = \frac{g^{HT} \cosh[k(z+d)]}{L \cos(kd)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

فصل ۹

$$\text{از زمین تا آسمان} \quad ۴۱۵۸۰ \text{ Btu/hr} \quad ۲.۹$$

$$۴۰,۴۷W/m^2 \quad ۴.۹$$

$$۱۲,۸۴W/m^2 \cdot K \quad ۶.۹$$

$$۵۰,۳۷W/m^2 \text{ (ب) } \quad ۸.۹ \text{ (الف) } \quad -۲,۴۵^\circ C$$

$$۴۹۰,۵kW \quad ۱۰.۹$$

$$۰,۰۵۴L/s \quad ۸۰.۶$$

$$۱۴۵۶m^3/min \quad ۸۲.۶$$

$$۸۶,۲kW \quad ۸۴.۶$$

$$۲۶,۲N/s \quad ۸۶.۶$$

$$۰,۶۵۴m \quad ۸۸.۶$$

$$۱۹۶km, \$۶۲۹۰.۶$$

$$۰,۲۱۱۷m \quad ۹۲.۶$$

$$۰,۵۲m \quad ۱۰۰.۶$$

$$۰,۳۰۶m^2/s \quad ۱۰۲.۶$$

$$۲۹,۷۳ft \quad ۱۰۴.۶$$

$$۰,۵۹m \quad ۱۰۶.۶$$

$$۳۷,۹۱ft \quad ۱۰۸.۶$$

$$۱۲,۰۵L/s \quad ۱۱۰.۶$$

فصل ۷

$$۰,۳۳۲m \quad ۶.۷$$

$$۰,۹۰ \quad ۸.۷$$

$$۵۲۸,۴hp, ۱۲۳۸,۴lb \quad ۱۰.۷$$

$$۴روز + ۱۱,۷h \quad ۱۲.۷$$

$$۱,۲۹۲m/s \quad ۱۴.۷$$

$$۸,۹۲ft \quad ۱۶.۷$$

$$۲۲,۳۱ft \quad ۱۸.۷$$

$$\text{توان cups} = ۸۷,۵W \quad ۲۰.۷$$

$$\text{توان rods} = ۱۱,۸۴W$$

$$\text{مجموع توان} = ۹۹,۳۸W$$

$$M = ۱۴۰۶kNm, F = ۵۱,۱kN \quad ۲۲.۷$$

$$۱۱,۷۸ft/s, ۷,۵۹ft/s \quad ۲۴.۷$$

$$۱,۶۰۴N.s/m^2 \quad ۲۶.۷$$

$$۸,۵۷N \quad ۲۸.۷$$

$$۲۱,۲۵ \quad ۳۰.۷$$

٤٨.٩ الف) ٥٢،٠:

ب) $٢,٣٢١ \text{ kg/m}^3$; $٠,٩٣٢٣ \text{ kg/m}^3$:

$١,٣٨٩ \text{ kg/m}^3$

ج) $٠,٦ \text{ mole/m}^3$; $٢٤,٤ \text{ mole/m}^3$:

$٣٦,٣٢ \text{ mole/m}^3$

د) $٠,١٧٦٢ \text{ m/s}$; $٠,١٢٤٤ \text{ m}^2/\text{s}$:

ه) $١,٣١٣ \text{ mole/m}^2 \cdot \text{s}$:

$-١,٣١٥ \text{ mole/m}^2 \cdot \text{s}$

$٢,٣٥٢ \text{ g } ٥٠.٩$

$-٤,٠٥٢٣ (١٠^{-٥}) \text{ lb. mole/hr } ٥٢.٩$

$\xi = \delta_c / \delta$; $\xi^2 = 1/Sc$ ٥٤.٩

$\xi = \delta_c / \delta$; $\xi^2 [١,٦٢ - ٠,١٢٤^2] = 1/Sc$ ٦٤.٩

٦٦.٩ خیر

$١٣,٠٦ \text{ m}^2/\text{s}$ یا $١٤٠,٦ \text{ ft}^2/\text{s}$ ٧٢.٩

$(C_s - C)/(C_s - C_0) = \text{erf}(z/\sqrt{4Dt})$ ٧٦.٩

$٦,٨ \text{ m } ٧٨.٩$

$\bar{E}_z = ٠,٠٣٧١ \text{ m}^2/\text{s}$ ٨٠.٩

$\bar{E}_y = ٠,٠٨٣١ \text{ m}^2/\text{s}$

$٩٧١١٠,٧ \text{ m}$; $٤٨,١٧ \text{ hr}$

الف) ٨٢.٩ الف) $٢٦,٣٠ \text{ mg/L}$ ب) $٩١,٣٤ \text{ km}$

ج) $٢٢,٧٤٠^\circ\text{C}$

$٦١٣٣,٥٧ \text{ ft}^2/\text{s}$; $٢٧٣,٨٢ \text{ ft}$ ٨٤.٩

$٧,٠٣ \text{ km}$; $٣,٩١ \text{ hr}$ ٨٦.٩

$CL_m (E_y/K)^{1/2}$ ٨٨.٩

طرف $C = ٠,٢٠٣$; خط مرکزی $C = ٠,٤٠٦$

فصل ١٥

$\sigma = ٠,٠٦ \text{ cm/s}$; $\bar{u} = ١١,٠٦ \text{ cm/s}$ ٢.١٠

$e_{rms} = ٠,٣١ \text{ cm/s}$; $e_{\bar{u}} = ٠,٠٢ \text{ cm/s}$

$٤٢,٦٧ \text{ mm } ٤.١٠$

الف) ١٢.٩ الف) $١٢١,٩٧ \text{ W/m}$ ب) $٢٣٤,٠٦ \text{ W/m}$

ج) $٦٧,٥٨\%$

١٤.٩

$$q = \frac{\pi(T_1 - T_r)}{\frac{1}{k_s} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{1}{k_r} \left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_r} \right)}$$

١٤.٩

$$T(t) = -٣٨٦,٩٦ + ١٩t + ٤٢٨,٩٦ e^{-٠,٠٣٨٧t}$$

$٠,٠٦٧٣ \text{ kg/s } ١٨.٩$

$٠,٧٤$ ٢٠.٩

$٢,١٨ (١٠^{-٤})$ ٢٢.٩

الف) ٢٤.٩ الف) ١٩٧ ب) ٣٩٤ $٠,٠٠٠$

ج) $٠,٠٠٠٩٧٥ \text{ N}$

د) $٠,٠٨٨ \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

ه) $١٢,١٧٦ \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

و) $١٥٣,٤٢ \text{ W}$

$١٠٨٠,٤ \text{ m } ٢٦.٩$

$$\frac{k_0}{L} [(T_0 - T_L) + \frac{\alpha_1}{\gamma} (T_0^2 - T_L^2)] + \frac{\alpha_2}{\gamma} (T_0^2 - T_L^2)$$

الف) فایبرگلاس؛ ب) $٥,٥ \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$ ٣٠.٩

$٣,٧ \text{ in}$ یا $٠,٣٠٨٣ \text{ ft}$ ٣٢.٩

$٢٩,٧٣\%$; $٢٠,٧١\%$; $٣,٩٧\%$ ٣٤.٩

$$\left[\frac{\text{Pr}}{1 - \left(\frac{L}{x} \right)^{3/4}} \right]^{1/2} \text{Re}_x^{1/2}$$

٢٨.٩

$٠,٣٢٧ \text{ Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/2}$ ٤٠.٩

الف) $٠,٠٥$; $٠,١٤$ ب) $٠,٠٩٠$ ٤٢.٩

ج) $١٧٢,٩ \text{ kPa}$; $٩٥٠,٩٥ \text{ kPa}$; $٥١,٧٥ \text{ kPa}$

$٤٩,٦ \text{ kPa}$

۶۰.۱۰

۰,۸۶۳m/s ۶.۱۰

$$S_1 : 0,92\phi(0,53\text{mm})0,95\phi(0,52\text{mm}) \times$$

۱,۲۲۳ ۱۰.۱۰

$$0,36\phi(0,78\text{mm})0,8$$

۴۰,۵۴ft^۲/s ۱۲.۱۰

$$S_2 : 0,85\phi(0,55\text{mm})0,92\phi(0,53\text{mm}) \times$$

۲,۲۳۶L/min ۱۴.۱۰

$$0,34\phi(0,79\text{mm})0,21$$

۲۸,۴۲gpm ۱۶.۱۰

$$0,0069\text{slug/ft.s} = 3,31 \text{ پواز } 62.10$$

$y = 0,0452x^2$ ۱۸.۱۰

$y = H \cos^2 \alpha$ ۲۰.۱۰

فصل ۱۱

$C_v = 0,977, C_d = 0,773$ ۲۴.۱۰

$$H_c = (H/N^2)n^2, Q_c = (Q/N)n$$
 ۲.۱۱

$C_c = 0,791$

n = تصحیح شده c = سرعت ثابت

۶۲,۴N.m/s, ۰,۲۸۷m.N/N ۲۶.۱۰

۴.۱۱ همزمان سازی دقیق نیست

۱۶۳,۳W, ۰,۲۷۳J/N ۲۸.۱۰

$$H = 2,822H_1, Q = 0,7049Q_1$$
 ۶.۱۱

$C_c = 0,7762, C_v = 0,8847$ ۳۰.۱۰

۸.۱۱ (مینا در وات) ۱۹۰۰

$C_d = 0,687$

۳۰۰rpm, ۸۹in ۱۰.۱۱

۳۲,۲۴s ۳۲.۱۰

۱۲.۱۱ پمپ گریز از مرکز

۰,۸۲۷ ۳۴.۱۰

۴,۸۱m ۱۴.۱۱

۱۳,۰۴° ۱۶.۱۱

۱۳۸۴s ۳۶.۱۰

۵۷,۳m/s, ۱۹,۱m/s ۱۸.۱۱

۶۱,۴۴s ۳۸.۱۰

۳۶,۷۱m ۲۰.۱۱

۶۱,۳۶kPa ۴۲.۱۰

۹۳,۱۸٪ ۲۲.۱۱

۱,۳۲۹kg/s ۴۴.۱۰

۹۳,۹۳ft, ۳۳,۱۷°, ۴,۱۲cfs ۲۴.۱۱

۱,۳۸۹kg/s ۴۶.۱۰

۴۷,۸۵hp, ۱۴,۰۹ft.lb/lb, ۷۹,۸۴ft

۴۲,۹۳L/s ۴۸.۱۰

۳۶,۳hp, ۱۱۴۶rpm, ۴۳,۶۸° ۲۶.۱۱

۱۷,۱۵psi

۲۶۰,۳m^۲/min ۵۰.۱۰

۱۲۳۸,۲rpm, ۳۰,۵۱° ۲۸.۱۱

۰,۶۵۵m^۲/s ۵۲.۱۰

$\beta_2 = 25,31^\circ, \beta_1 = 9,51^\circ$ ۳۰.۱۱

۱,۹۴m ۵۴.۱۰

۸,۳۶hp, ۵,۳۰۵in.H_۲O

$Q = 1,36H^{2,48}$ ۵۶.۱۰

۲۲۹,۸۷m^۲/min ۳۲.۱۱

۰,۶۸۷m ۵۸.۱۰

۷۵۰rpm, ۵۵۳mm ۳۴.۱۱

$3,44kW, 12,53m \ 48.12$

$0,1604 \ 36.11$

$Q_C = 0,368L/s, Q_B = 0,2375L/s \ 50.12$

$4,9m, 6,18m \ 38.11$

$h_{j1} = 94,55m, Q_D = 0,336L/s$

$h_{j2} = 94,555m$

فصل ۱۲

$D_B = 36cm, D_P = 47cm \ 52.12$

$V_2 = 1,746m/s, V_1 = 6,971m/s \ 2.12$

$H_P = 96,98m, 400rpm, D_C = 25cm$

$0,1026m^2/s \ 4.12$

$43,85, 31,15, 2,36, 41,49, 58,51 \ 54.12$

$0,0822m \ 6.12$

$0,392 \ 58.12$

$2,57cfs \ 8.12$

$5,59L/s \ 60.12$

$-26,48kPa, 23,47kPa, 13,62L/s \ 10.12$

$2,044m \ 62.12$

سطح مخزن ست چپ $30,47ft \ 12.12$

$1,419s, 0,5314m/s \ 72.12$

$5,6ft^2/s \ 14.12$

$z = V_0 te^{-mt} \ 74.12$

$e : 78,3\%, Q : 7,99cfs, H : 50ft \ 16.12$

$14,371ft, 14,682ft \ 76.12$

$45,68kW \ 18.12$

$12,9s \ 80.12$

$44,1kW \ 20.12$

$3509ft/s \ 82.12$

$1,627cfs \ 22.12$

$2MPa \ 84.12$

$2,005cfs \ 24.12$

$2/3 \ 86.12$

$19,66m \ 26.12$

$h_{max} = 98,44 \ 3,0s \ 88.12$

$13,42m \ 28.12$

مدت عمل $7,0s \ 90.12$

$8,76cfs, 2,049ft, 1,685ft \ 30.12$

$2,046m^2/s \ 32.12$

$56,91ft \ 34.12$

فصل ۱۳

$84,0L/s, 51,1, 26,4, 6,53 \ 36.12$

$0,677mm \ 2.13$

$Q_2 = 8,44L/s, Q_1 = 1,018L/s \ 38.12$

$1,707m, 1,63, 56,35m^2/s \ 4.13$

$Q_2 = 9,46L/s$

$175,1m^2/100m \ 6.13$

$159,3L/s, 357,8m \ 40.12$

$y = 7,775ft, m = 0,686 \ 8.13$

$Q_B = 46,23L/s, Q_A = 31,69L/s \ 42.12$

$m = 1/\sqrt{3}, b = 3,6103m \ 10.13$

$Q_C = 77,84L/s$

$0,000173 \ 12.13$

$Q_B = 39,12L/s, Q_A = 9,81L/s \ 44.12$

$1,667m, 1,987 \ 18.13$

$Q_B = 45L/s, Q_A = 15,64L/s \ 46.12$

$0,0000583 \ 20.13$

$h_j = 32,02m$

$$\partial \bar{c} / \partial t + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{c}) - \partial (w_t \bar{c}) / \partial z \quad ۴.۱۴$$

$$= \nabla \cdot [(\mathcal{D}_{sw} + E_s) \nabla \bar{c}]$$

$$۸۸۲ \text{ g/L} ; ۹۳۹ \text{ g/L} \quad ۶.۱۴$$

$$u_w (\text{m/s}) : ۰,۰۱ \quad ۰,۰۲ \quad ۰,۰۴ \quad ۸.۱۴$$

$$۰,۰۸ \quad ۰,۱۶ \quad ۰,۳۲ \quad ۰,۶۴ \quad ۱,۰$$

$$z_w (\text{mm}) : ۱,۲ \quad ۱,۲ \quad ۱,۲ \quad ۱,۲ \quad ۱,۲$$

$$۱,۲۰۰۱ \quad ۱,۲۰۰۷ \quad ۱,۲۰۵۹$$

$$C_w (\text{g/L}) : ۰,۰۷۳ \quad ۱۵,۱۹ \quad ۷۶,۸۳ \quad ۲۶۰,۶۶$$

$$۱۲۴۰,۶۸ \quad ۱۹۳۵۱ \quad ۹۷۹۲۳$$

$$۶,۶۴ \text{ hr} ; ۰,۳۴۷ \text{ hr}^{-1} ; \text{ذره/mL} \quad ۱۲۶ \quad ۲۴.۱۴$$

$$q t_r \quad ۲۶.۱۴$$

$$۰,۰۰۱۷۸ \text{ s}^{-1} \quad ۲۸.۱۴$$

$$t = \frac{1}{k_r} k_r C_w : 1/C_w - 1/C = k_r t \quad ۳۰.۱۴$$

$$۵,۵۶ \text{ m}^2/\text{s} \quad ۳۲.۱۴$$

$$۰,۵۶ \text{ m} \quad ۲۲.۱۳$$

$$۰,۱۸۵ \text{ m} \quad ۲۴.۱۳$$

$$۰,۲۲۷ \text{ m} \quad ۲۶.۱۳$$

$$۱,۰۵۱۲ \text{ m} , ۱,۰۱۹۶ \text{ m} \quad ۲۸.۱۳$$

$$۹۲,۰ \text{ cfs} \quad ۳۲.۱۳$$

$$۷,۳۹ \text{ ft} \quad ۳۴.۱۳$$

$$۸,۲۸۹ \text{ m}^2/\text{s} , ۰,۸۶ \text{ m} \quad ۳۶.۱۳$$

$$۲,۴۲۱ \text{ m} \quad ۴۸.۱۳$$

$$۰,۸۷۷ \text{ m}^2/\text{s} , c = ۲,۹۲۴ \text{ m/s} \quad ۵۰.۱۳$$

$$y = ۰,۰۱۱۳۳ \left(\frac{x}{t} + ۴,۱۹۰۴ \right)^2 \quad ۵۲.۱۳$$

$$y = ۰,۰۱۳۳ \left(\frac{x}{3} + ۴,۱۹۰۴ \right)^2 \quad ۵۴.۱۳$$

به مدت ۳ ثانیه

فصل ۱۴

$$\frac{d^2}{18\mu} (\rho_s - \rho) g \quad ۲.۱۴$$

نمایه

- آب عمیق، ۴۸۸، ۴۸۹
آب، خواص فیزیکی، ۹۳۵
آبری، دی، ۶۰۴
آبریز، ۱۹۸
آب‌شناسی، ۸۴۵
آشفشان‌شناسی، ۸۴۵
آثار جریان چسبنده، ۴۰۳-۳۴۴
آثار مقیاس، ۳۳۵، ۶۶۳
آحاد،
سیستم بین‌المللی، ۹
نیرو و جرم، ۹، ۱۱، ۳۰۰، ۳۰۲
آریس، آر، ۵۵۴، ۵۵۱
آزمونهای تونل باد، ۳۳۲
آسیای بادی، ۱۸۷
آگراوال، ۶۰۷
آلاینده،
آمیختگی، ۵۴۹
پایستاری، ۵۶۰
پخش، ۵۴۷
عرض، ۵۶۰
ی مرزی، ۵۴۸
آمیختگی،
تنظیم اولیه، ۵۵۴
کامل، ۵۵۵
منطقه، ۵۴۴
نسبت، ۸۸۵
آنتالپی، ۲۲
آنتروپی، ۲۷۸
آهنگ تنفس، ۵۰۹
آهنگ گسترش، ۵۳۵
آهنگ سنج، ۶۱۰
آئروسول‌ها، ۸۴۸
ابعاد، ۹
اتصال لوله‌ای، ۷۳۱، ۷۷۵
اتصالها، افتها، ۳۹۹

اشباع، ۸۸۴	اتلاف، ۲۰۸، ۵۳۷
اصطکاک پوستی (جداری)، ۳۱۶، ۴۳۳	اتلافها،
اصطکاک نمایی در لوله، ۷۱۱	~ در شارش از روزنه، ۶۱۴
اقیانوس شناسی، ۸۴۵	~ در شارش لایه‌ای، ۳۵۳
الدر، چی، ۵۴۹	~ ی اتصالات، ۳۹۹
انبساط مخروطی، ۳۹۷	~ ی انبساط مخروطی، ۳۹۶
انبساط ناگهانی، ۱۹۵، ۳۹۶	~ ی جزئی، ۳۹۶، ۷۱۶
انتقال جرم، ۲۰۸، ۵۱۷، ۵۲۶	~ ی ناشی از انبساط ناگهانی، ۱۹۵، ۳۹۶
انتقال گرما، ۲۰۸، ۵۲۳	~ ی ناشی از انقباض ناگهانی، ۳۹۷
ضریب ~، ۵۱۳	~ ی ورودی، ۳۹۸
~ ی کلی، ۵۱۳	اتلافهای انبساط،
انتگرال‌گیری عددی، ۸۱۸	~ مخروطی، ۳۹۷
اندازه ذره، ۶۳۹	~ ناگهانی، ۱۹۶، ۳۹۶
اعوجاج ~، ۶۴۲	اتلافهای جزئی، ۳۹۶، ۷۱۶
انحراف استاندارد ~، ۶۴۲	طول معادله ~، ۳۹۹
انحراف میانگین ~، ۶۴۲	اتمسفر، ۵۵
توزیع ~، ۶۴۲	آثار بر سطوح مستوی، ۷۴
خوب درجه‌بندی شده ~، ۶۴۱	استاندارد، ۵۵
خوب ذخیره شده ~، ۶۴۱	محلی، ۵۵
ضریب پخش ~، ۶۴۱	اثر ماکنوس، ۴۸۳
نمودارهای ستونی ~، ۶۴۲	اختر فیزیک، ۸۴۵
اندازه‌گیری ارتفاع، ۵۹۴	ارتفاع شبه‌مرکز، ۹۴
اندازه‌گیری سرعت، ۶۰۵	ارتفاع-تخلیه، ۶۳۷
اندازه‌گیری سطح آب، ۶۹۶	استاتیک سیالات، ۱۰۴-۴۱
اندازه‌گیری فشار، ۵۹۱	معادله بنیادی ~، ۴۷
آحاد و مقیاسهای ~، ۵۴	استوانه،
اندازه‌گیریها، ۶۶۰-۵۸۲	~ دوار، ۴۸۲
~ ی ارتفاع، ۵۹۴	ضریب پسا برای ~، ۴۴۲
~ ی تخلیه رودخانه، ۶۳۵	استوانه دوار جریان به دور، ۴۸۲
~ ی تلاطم، ۵۳۸	استوک (آحاد)، ۱۴
~ ی چسبندگی، ۶۴۶	اسمیت، چی، ۶۰-۸۵۹

- ۶۷۶ ~ هیدرولیکی،
 ۳۷۲ باکمتف، بی. ای.،
 ۳۰۱ باکینگم،
 ۴۴۶ برا و پسای هواپر،
 ۸۸۲ براس، ار.،
 بردار،
 ۹۵۲ جبر ~ ی،
 ۹۵۵ ضرب خارجی ~،
 ۹۵۳ ضرب نقطه‌ای ~،
 ۹۵۰-۵۵ عملیات ~ ی،
 ۹۵۲ نماد ∇ ~،
 ۶۷۳، ۶۶۲ نمودار ~ ی،
 ۹۵۰ ~ واحد،
 ۱۶۱ برگشت‌پذیری،
 ۱۶۱ برگشت‌ناپذیری،
 ۸۵۱ بستر شاره،
 ۳۸۶ بلازیوس، اچ.،
 ۱۳۹ بوزینسک،
 ۷۹۷ بهترین سطح مقطعه‌های هیدرولیکی کانال،
 ۳۲۴ بهنجارش،
 ۷۴۵ بیٹی، دبلیو. ار.،
 ۸۴۹ بی‌همدوسی،
 ۶۹۹ پارامتر حفره زایش،
 پارامترها،
 ۳۰۱، ۲۹۷ ~ ی بی‌بعد،
 ۶۹۹ ~ ی حفره،
 ۹۵۹ پاسخ به مسائل با شماره‌های زوج،
 ۲۲ پاسکال (آحاد)،
 ۵۵۱، ۵۴۷ پاشیدگی،
 ۹۰۵ پاکسازی،
 ۵۹۷ ~ ی دما،
 ۵۹۸ ~ ی سرعت،
 ۵۸۲-۶۶۱ ~ ی سیال،
 ۶۱۰ ~ ی شارش،
 ۶۲۵ ~ تراکم‌پذیر،
 ۶۳۸ ~ ی غلظت ذره،
 ۵۹۱ ~ ی فشار استاتیکی،
 ۸۷۳ اندرسن، ای.،
 انرژی،
 ۸۰۴ اتلاف‌کننده ~،
 ۱۵۷ ~ پتانسیل،
 ۱۵۸ ~ جنبشی،
 ۱۵۵ ~ داخلی،
 ۱۷۰، ۱۶۱، ۱۵۷ ~ دسترس‌پذیر،
 ۱۵۵ ~ ذاتی،
 ۱۵۸ ~ شارش،
 ۸۰۶ ~ مخصوص،
 ۱۶۱ ~ مکانیکی،
 ۱۵۸ ~ و فشار،
 ۳۹۸ انقباض ونا،
 ۴۹۵، ۲۸۵ ایری، جی. بی.،
 ۴۵۱ ایزاک سون، ام.،
 ۶۰۵ بادسنج،
 ۶۰۵ ~ سیم داغ،
 ۶۰۵ ~ فیلم داغ،
 ۶۰۵ بادسنج‌های سیم داغ،
 ۸۵۱، ۴۸۵ بار بستر،
 ۸۶۵ بار معلق،
 ۱۶۶ بازده،
 ۶۷۶ ~ کلی،

- پایداری، ۹۱
 ~ دورانی، ۹۳
 پایستاری انرژی، ۱۵۴-۶۱
 پایستاری جرم، ۱۵۰
 پتانسیل، سرعت، ۴۵۹
 پخش، ۴۹۶-۵۶۳
 ~ با دو جریان مخالف، ۵۰۲
 ~ جانبی، ۵۴۴
 ~ در یک زمان، ۴۹۶
 ضریب ~، ۲۱۱
 ~ تلاطم، ۵۳۳
 ~ مولکولی، ۴۹۷، ۴۹۶، ۲۱۱
 پخش با دو جریان مخالف، ۵۰۲
 پخش مولکولی، ۲۱۱
 پخشندگی،
 ~ تلاطمی، ۵۴۹، ۵۳۱
 ~ جرم، ۵۰۱
 ~ گرمایی، ۴۹۶، ۲۰۹
 پدیده‌های انتقال، ۴۹۶-۵۸۰
 پراشتل، ال.، ۳۶۶
 پرش هیدرولیکی، ۲۹۸، ۱۹۶
 پره‌ها،
 مجموعه‌ای از ~، ۱۹۲
 ~ ی ثابت، ۱۸۸
 ~ ی متحرک، ۱۸۸
 پسا، ۴۲۰
 ~ اصطکاک پوستی، ۴۳۳، ۳۱۶
 ~ در استوانه، ۴۴۱
 ~ در برگه هواپر، ۴۴۶
 ~ در دیسک مذور، ۴۳۹
 ~ در صفحه تخت، ۴۲۴
 ~ در کره، ۴۳۱
 ~ شکل (فرم)، ۴۳۳، ۳۱۶
 ~ ی تغییرشکل، ۴۳۵
 پسا شکلی (پسای فرم)، ۴۳۳، ۳۱۶
 پس‌پراکننده،
 ~ ی اکوستیک، ۶۴۴
 ~ ی نوری، ۶۴۳
 پلاستیک ایدئال، ۸
 پمپ شارش-مختلط، ۶۸۴، ۶۸۹
 پمپ یا دمنده شارش محوری، ۶۸۸، ۶۸۴
 پمپها، ۱۶۶، ۶۸۳
 سرعت ویژه ~، ۶۶۹
 ~ ی شارش-شعاعی، ۶۸۳
 ~ ی شارش-مختلط، ۶۸۹
 منحنی نظری هد-تخلیه ~، ۶۸۴
 منحنیهای مشخصه ~، ۶۶۲
 نمودار انتخاب ~، ۶۸۶
 ~ ی شارش محوری، ۶۹۰
 ~ ی مرکزگرین، ۶۸۴
 پواز، ۱۴
 پواز (آحاد)، ۱۴
 پیرومتر، ۶۰، ۵۹۱
 پیشران،
 نظریه تکانه برای ~، ۱۸۵-۸۸
 پیمانه (سنجه)،
 ~ ی بوردون، ۵۵، ۵۹۳
 ~ ی خازن، ۵۹۶
 پیمانه دیافراگم، ۵۹۳
 پیوستار، ۶
 تابش، ۲۰۸

- تابش گرمایی، ۲۰۹
 تابع تشابه، ۸۵۹، ۸۷۳، ۸۸۹
 تابع جریان، ۴۶۶
 تابع جریان استوکس، ۴۶۸
 تابع خطا، ۵۴۱
 تانژسون، جی، ۹۲۱
 تاو، ۹۵۷
 تبادل انرژی، ۱۶۱
 تبادل شار ته نشینی، ۸۵۷
 تبخیر، ۵۰۶، ۵۲۱، ۸۸۱
 تثبیت شارش، ۷۵۷
 تحلیل ابعادی، ۳۰۲-۳۰
 تخلخل، ۸۴۹
 تراپریچ، جی، ۶۰۴
 تراکم پذیری،
 ~ گازها، ۲۳
 ~ مایعات، ۲۶
 ترمودینامیک،
 قانون اول، ~، ۱۵۴، ۲۷۷
 قانون دوم، ~، ۲۷۸
 ترموکوپل، ۵۹۷
 ترمیستور، ۵۹۷
 تشابه، ۵۳۰
 تشابه انتقال، ۵۱۹
 تشابه دینامیکی، ۲۹۷، ۳۳۰
 تعادل، ۹۲۸
 تعادل نسبی، ۹۵
 چرخش یکنواخت در، ~، ۹۹
 شتاب خطی یکنواخت در، ~، ۹۶
 نیروهای فشار در، ~، ۱۰۴
 تعلیق، ۸۵۱
 تعلیق مجدد شار ته نشینی، ۸۵۸
 تعیین چسبندگی در لوله موین، ۶۴۹
 تغییر شکل زاویه‌ای، ۷، ۲۵۸، ۲۶۰
 تغییر فاز،
 تبخیر، ~، ۵۰۶، ۵۲۱، ۸۸۲
 شرایط، ~، ۸۸۱
 تغییر فشار، ۴۷
 ~ تراکم‌پذیر، ۵۲
 ~ تراکم‌ناپذیر، ۵۰
 تغییر شکل، توده، ۲۵۶
 تفاضل محدود، ۸۴۷
 تکنیک، ۵۸۳
 تقطیر، ۸۸۱
 تکانه،
 انتقال مولکولی، ~، ۱۲
 ~ خطی، ۹۰-۱۷۵، ۲۰۳
 ~ غیر پایا، ۲۰۳
 ضریب تصحیح، ~، ۱۷۷، ۳۶۱
 گشتاور، ~، ۲۰۳
 ~ ی زاویه‌ای، ۸-۲۰۳
 ~ جریان پایا، ۱۷۵
 تلاطم، ۳۶۲
 اندازه‌گیری، ~، ۵۳۸
 ~ بزرگ‌مقیاس، ۳۴۷
 ~ ریزمقیاس، ۳۴۷
 ~ ساکن، ۵۳۸
 سطح، ~، ۶۶-۳۶۲
 ~ همسانگرد، ۵۳۸
 ~ همگن، ۵۳۸
 تنش برشی، ۴۴
 ~ بحرانی، ۶۸۴، ۸۶۳

- توزیع ~، ۳۵۸
 ~ سرعت، ۳۶۸
 ~ متلاطم، ۳۶۲
 تنش عمودی، ۴۴
 تنش کششی،
 ~ در پوسته کروی، ۸۵
 ~ در لوله، ۸۵
 تنشهای رینولدز، ۳۶۴
 توابع واداشته، ۱۴۵
 توربوماشینها، ۶۶۱-۷۰۸
 توربوماشینها، نظریه، ۶۷۰-۶۹۲
 توربین پیشرفته‌ای، ۶۷۵
 توربین فرانسیس، ۶۷۹
 توربینها، ۱۶۶
 سرعت ویژه در ~، ۶۶۹
 ~ ی پلتن، ۶۹۵
 ~ ی پیشرانده‌ای، ۶۸۱، ۶۷۵
 ~ ی ضربه‌ای، ۶۹۷، ۶۹۲
 ~ ی فرانسیس، ۶۸۱، ۶۷۹
 ~ ی واکنشی، ۶۷۸
 توزیع احتمال نرمال، ۵۳۵
 توزیع سرعت، ۱۶۵، ۳۵۰، ۳۶۸، ۷۹۶
 ته‌نشینی استوکس، ۸۶۲
 تیلور، جی.، ۵۳۱، ۵۵۱، ۵۵۴
 ثابت استفان-بولتزمن، ۲۰۹
 ثابت عمومی، ۲۴، ۳۶۸
 ثابت عمومی گازها، ۲۴
 ثابت گاز، ۲۳
 جت آزاد، ۱۲۵
 جدایی، ۳۷-۴۳۵، ۶۷۲
 جرم افزوده، ۴۴۸
 جرم، آحاد، ۹
 جریان لایه مرزی، ۱۴۰، ۴۲۱
 جریان سنج،
 ~ اکوستیک، ۶۰۷
 ~ الکترومغناطیسی، ۶۰۳
 ~ سیم داغ، ۶۰۵
 ~ فیلم داغ، ۶۰۵
 ~ و سرعت سنج لیزری دوپلر، ۶۰۶
 جست‌وخیز، ۸۶۵
 جسم خط جریان، ۴۳۷
 جفت دوبردی، ۴۷۶
 جوسنج،
 ~ جیوه‌ای، ۵۶
 ~ فلزی، ۵۶
 چاه، ۴۷۴
 چاه/چشمه، ۲۱۲، ۴۷۴
 چرخش،
 ~ در سیال، ۱۴۰
 ~ یکنواخت، ۹۹
 چرخه هیدرولوژیک، ۸۸۱
 چسبندگی، ۹۳۴، ۷۳۹، ۹، ۱۶-۱۲
 آحاد ~، ۱۳
 اندازه‌گیری ~، ۶۴۶
 ~ تلاطمی، ۱۴۰، ۳۶۶
 ~ تلاطمی سینماتیکی، ۳۶۸
 ~ سینماتیکی، ۱۴، ۹۳۹
 ~ ~ آب، ۹۳۴
 قانون نوتون و ~، ۷
 چسبندگی سنج،

- ۵۹۰ ~ محتملترین ~
 ۵۸۹ ~ ی انتظاری،
 ۵۸۸ ~ ی اندازه‌گیری،
 ۵۸۸ ~ ی سیستماتیک یا تصادفی،
 ۵۸۹ ~ ی میانگین مربعی،
 ۵۸۸ ~ ی نسبی،
 ۸۴۹ خمیدگی،
 ۹۳۴، ۲-۴۰ خواص سیال،
 خواص فیزیکی،
 ~ آب، ۹۳۵
 ~ سیالات، ۶-۲۸، ۹۳۳-۳۹
 قضیه، ۳۰۱-۱۹
 ~ گازها، ۹۳۶
 خواص گازها، ۹۳۶
 خواص، فیزیکی،
 ~ آب، ۹۳۵
 ~ سیالات، ۶-۲۸
 ~ قضیه، ۳۰۱
 ~ گازها، ۹۳۶
 خود-همبستگی، ۵۳۸
 داده‌ها،
 ۵۸۶ تحویل‌گیرنده ~،
 ۵۸۵ ~ ی استنباطی،
 ۶۰ ~ ی اندازه‌گیری مستقیم،
 ۵۸۵ ~ ی مجتمع،
 ۴۴۰ دراپیدن اج. ال.،
 ۲۱ درجهٔ رانکین،
 ۵۸۴ درجه‌بندی،
 دستگاه اندازه‌گیری،
 ۶۴۷ ~ استوانه‌ای هم‌مرکز،
 ۶۴۹ ~ سیولت،
 ۶۴۹ ~ لولهٔ موئین،
 ۶۵۰ چسبنده‌سنج‌های نوع اسوالد-کانون-فنسکه،
 ۴۷۴ چشمه/چاه، ۲۱۲،
 ۱۸ چگالی،
 ۹۰ چگالی سنج،
 ۹۳۱ حاصل‌ضرب لختی،
 ۲۳ حالت، معادله،
 ۴۷۱ حالت‌های شارش،
 ۱۸ حجم کسر،
 ۱۳۳ حجم کنترل،
 ۱۷ حجم مخصوص،
 ۶۳۴ حداقل مربعات،
 حرکت ذره،
 ~ اتولیان، ۸۶۶
 ~ بار معلق، ۸۶۵
 ~ جست و خیز، ۸۶۵
 حرکت، معادله، ۷۶۲
 ~ اوپلر، ۴۵۶
 حفرةٔ زایش، ۶۹۹-۷۰۳
 حل مشخصه‌ها، ۷۶۶
 حلقهٔ پیزومتری، ۵۹۲
 حوضه‌های راکدکننده، ۸۰۴
 ۴۷۲، ۱۳۷ خط جریان،
 ۱۷۲، ۱۷۰ خط مرجع انرژی،
 ۷۱۲، ۳۸۵، ۱۷۰ خط مرجع هیدرولیکی،
 ۱۳۷ خط مسیر،
 ۴۷۲ خط هم‌پتانسیل،
 خطا،

- پایداری ~، ۵۸۴
 توان تفکیک ~، ۵۸۳
 دقت ~، ۵۸۳
 ~ دیجیتالی، ۵۸۴
 صحت ~، ۵۸۳
 ~ قیاسی، ۵۸۶
 دستگاه رینولدز، ۳۴۶
 دستگاههای قیاسی، ۵۸۶
 دستگاههای مشابه، ۶۶۲
 دقت، ۵۸۳، ۵۸۴
 دل (Δ)، ۴۹
 دما، پتانسیل، ۸۸۸
 دما، حسگرها،
 ~ ترموکوپل، ۵۹۷
 ~ ترمیستور، ۵۹۷
 ~ دوفلزی، ۵۹۷
 دمای پتانسیل، ۸۸۸
 دمنده‌ها، ۶۸۴
 دوره تنظیم، ۵۵۵، ۵۶۲
 دوره میانگین‌گیری، ۱۴۲
 دوغاب، ۸۵۱
 دهانه بردا، ۶۱۶
 دیسک،
 پسا در ~، ۴۳۹
 گشتاور وارد بر ~، ۶۴۷
 دیسک مدور، ضریب پسا، ۴۳۹
 دینامیک گازها، ۶
 رابطه‌های گرما و انرژی، ۳۷۶
 رایت، سی، ۷۴۴
 رد عبور (ویک)، ۴۳۵
 رده‌بندی،
 ~ شارش در کانال باز، ۷۹۵
 ~ نیمرخهای سطح، ۸۱۵
 رسانش گرما، ۲۰۸
 رسانش، گرما، ۲۰۸، ۴۹۷
 رسانندگی گرمایی، ۲۰۹، ۳۷-۳۴
 رسانندگی، گرمایی، ۲۰۹، ۵۰۰، ۹۳۴
 رشد ابر، ۵۴۰
 رطوبت، ۸۸۳
 ~ مخصوص، ۸۸۴
 ~ مطلق، ۸۸۴
 نسبت آمیختگی ~، ۸۸۵
 ~ نسبی، ۸۸۴
 رگه (رد رنگ یا دود)، ۱۳۸
 روزنه،
 اتلافها در شارش از ~، ۶۱۴
 تعیین ضریبهای ~، ۶۱۲
 ~ در لوله، ۶۱۶
 ~ در مخزن، ۶۱۰
 ~ و شیپوره VDI، ۶۲۵
 ~ و کاهش هد، ۶۱۹
 روزنه VDI، ۶۱۸
 روش اویلری، ۱۳۶
 روش پسگرد، ۷۷۵
 روش جبری، ۷۷۵
 روش حل مشخصه‌ها، ۷۶۶
 روش رانگ-کوتای، ۷۵۶
 روش مسیر، ۶۱۳
 روش هاردی گراس، ۴۲-۳۴
 ریزپردازنده، ۵۸۴
 ریزکنترل‌کننده، ۵۸۴

- ریزمقیاس تیلور، ۵۸۵
 رین‌گاز، دبلو، جی، ۷۰۰
 ریولدز، آسبورن، ۳۴۵
 زبری نسبی، ۳۸۶
 زمان حرکت، ۴۹۷
 زمان سکون، ۲۲۰
 زمان مخلوط، ۹۲۰
 زمان نگهداشت، ۲۲۰
 ساختارهای هیدرولیکی، ۳۳۳
 سایش، ۸۴۸، ۸۵۷
 سد وزنی، ۷۵
 سرریز با شکاف ۷، ۳۰۵، ۶۳۰
 سرریز نوک‌پهن، ۶۲۸
 سرریزها،
 ~ شکاف ۷، ۶۳۰
 ~ ی نوک‌پهن، ۶۲۸
 ~ ی نوک‌تیز، ۶۲۸
 سرعت،
 ~ در دیواره، ۳۷۲
 ~ میانگین زمانی، ۱۴۱
 ~ نهایی، ۴۳۴
 سرعت اصطکاکی، ۵۵۷، ۳۶۹
 سرعت ته‌نشینی، ۴۳۴
 سرعت در دیواره، ۳۷۲
 سرعت فاز، ۴۸۵
 سرعت نهایی، ۴۳۴
 سرعت ویژه، ۶۶۷
 سرعت ویژه مکش، ۷۰۳
 سرعت‌سنجی لیزری دوپلر، ۶۰۵
 سطح آب آشفته‌نشده یا ساکن، ۴۸۶
 سطح آزاد، ۱۴۵، ۴۸۵، ۸۳۶-۷۹۴
 سطح آزاد خیالی، ۱۰۲
 سطح کنترل، ۱۳۶
 سطوح جریان، ۴۶۸
 سطوح خمیده،
 مؤلفه افقی نیروی وارد بر ~، ۷۹
 مؤلفه قائم نیروی وارد بر ~، ۸۱
 مؤلفه‌های نیرو بر ~، ۷۹
 سلول آرنولد، ۵۰۸
 سنج،
 ~ با جابه‌جایی مثبت، ۶۰۳
 ~ ی جریان (جریان‌سنج)، ۶۰۳
 ~ ی دیسکی، ۶۰۳
 ~ ی روزنه‌ها، ۶۱۰
 ~ ی زانویی، ۶۲۷
 ~ ی شارش گاز، ۶۰۳
 ~ ی ظرفیت خازن، ۵۹۶
 ~ ی عمق بحرانی، ۸۱۳
 ~ ی کرنش، الکتریکی، ۵۹۳
 ~ ی گازی، ۶۰۳
 ~ ی لنگی، ۶۰۳
 ~ ی وتوری، ۲۷۳، ۶۲۵
 سنج با جابه‌جایی مثبت، ۶۰۳
 سنج‌های سیال، ۲۷-۶۰۳
 سو، اس، ۸۶۲
 سهموی دوار، ۱۰۱
 سیال،
 تعریف ~، ۶
 تغییر شکل ~، ۷
 سیال ایدئال، ۹، ۱۴۰
 سیال غیرنیوتنی، ۸

- سیال نیوتنی، ۸
 سیستم، ۱۳۴
 ~ باز، ۱۳۶
 ~ بسته، ۱۳۴
 سیستم بین‌المللی (SI) آحاد، ۹
 سیستم توزیع، ۷۳۴
 سیستمهای دیجیتال، ۵۸۶
 سیستمهای نیرو، ۹۲۸
 سیفون، ۷۱۹
 شاخص حفره زایش، ۷۰۰
 شار
 ~ با خودبری، ۸۵۷، ۸۴۸
 ~ بخش مولکولی، ۸۵۷
 ~ ته‌نشینی، ۸۵۷
 ~ جرم، ۵۳۱، ۲۱۲
 ~ در تعادل، ۸۵۸
 ~ سایش، ۸۵۷
 ~ فرارفتی، ۸۵۷
 ~ گرما، ۵۳۱، ۵۱۵، ۲۰۹
 شارش
 ~ آرام، ۸۰۶، ۷۹۶، ۳۱۷
 اندازه‌گیری ~، ۶۱۰
 انواع ~، ۱۳۸-۴۴
 ~ باگردش، ۴۸۲
 ~ به دور استوانهٔ دوار، ۴۸۲
 ~ بی‌اصطکاک، ۱۴۰
 ~ بی‌چرخش، ۴۵۹
 ~ بی‌دررو، ۱۴۰
 ~ بی‌دررو برگشت‌پذیر، ۱۴۰
 ~ بین صفحات موازی، ۳۵۴
- ~ پایا، ۷۰۹، ۳۷۶، ۱۴۰
 ~ پتانسیل، ۴۵۵-۹۵
 ~، تثبیت، ۷۵۷
 ~ تدریجاً متغیر، ۷۹۵
 ~ تک‌آنزیمیک، ۱۴۰
 ~ داخلی، ۳۴۷، ۳۴۵، ۱۴۰
 ~ در امتداد صفحه تخت، ۴۲۳
 ~ در طوقها، ۳۵۶
 ~ در کانالهای باز، ۷۹۴، ۳۷۸
 ~ در لوله، ۷۰۹، ۳۸۵، ۳۷۶، ۳۳۰
 ~ در لوله‌های مدور، ۳۵۶
 ~ در مجرای بسته، ۷۰۹-۹۳
 ~ در مسیل، ۸۰۰
 ~ دوبعدی، ۴۷۱، ۱۴۲
 رده‌بندی ~، ۷۹۵
 ~ سریع، ۷۹۶
 ~ سه‌بعدی، ۱۵۵، ۱۴۳، ۱۴۰
 ~ سیال ایدئال، ۴۵۵، ۱۴۰
 ~ سیل آسا، ۷۹۶
 ضریب ~، ۶۶۴
 ~ غیریکتواخت، ۷۹۵، ۱۴۲
 ~ گذار، ۸۱۱، ۳۴۸
 ~ لایهٔ مرزی، ۴۲۱، ۱۴۰
 ~ لایه‌ای، ۳۴۵، ۱۴۰
 ~ لغزش، ۶
 ~ متقارن محوری، ۴۶۸
 ~ متلاطم، ۳۶۲، ۳۴۵
 ~ ناپایا، ۷۹۵
 ~ و جدایی، ۴۳۵-۳۷
 ~ های خارجی، ۴۱۸، ۳۴۷، ۳۴۵، ۱۴۰
 ~ یک‌بعدی، ۱۴۲

- ~ یکنواخت، ۱۴۲، ۳۷۸-۸۱، ۴۷۹، ۷۹۵، ۸۰۰
 شارش استوکس، ۴۳۹
 شارش تدریجاً متغیر، ۷۹۶، ۸۱۵
 روش انتگرال‌گیری در ~، ۸۱۷
 روش مرحله‌ای استاندارد ~، ۸۱۵
 شارش تراکم‌پذیر، اندازه‌گیری، ۶۲۵
 شارش تک‌آتروپیک، ۱۴۰
 ~ در شیوره‌ها، ۶۲۵
 شارش چرخشی (گردابی)، ۱۴۰
 شارش در رودخانه،
 اندازه‌گیری ~، ۶۳۵
 ~ به شکل یکنواخت، ۷۹۵
 شارش طبیعی کانال باز، ۳۷۸-۸۲
 شارش فرابحرانی، ۷۹۶
 شارش فروبحرانی، ۷۹۶
 شارش کانال-باز، ۳۷۸-۷۹۴، ۳۷۸، ۶۲۸
 رده‌بندی ~، ۷۹۵
 صورتهای متنوع ~، ۷۹۵
 گذارها در ~، ۸۱۱
 ~ یکنواخت پایا، ۷۹۵
 شارش گرمایی محسوس، ۸۸۹
 شارش گوشه، ۴۷۳
 شارش لایه‌ای، ۱۳۹، ۳۴۵
 اتلاف در ~، ۳۵۳
 ~ بین صفحات موازی، ۳۵۰
 ~ در طوقه، ۳۵۶
 ~ در لوله‌ها، ۳۵۶
 شارش متقارن محوری، ۴۶۸
 شارش مولکول آزاد، ۶
 شارش ناپایا (غیرپایا)، ۱۴۲، ۶۱۹
 ~ در کانال باز، ۷۹۵
 ~ در مجراهای بسته، ۷۹-۷۴۵
 ~ در مخزنها، ۶۱۹
 شارش نازل، ۶۲۵
 شارش سنج، ۶۲۷
 شارشهای خارجی، ۱۴۵، ۳۴۷، ۵۱-۴۱۸
 شارشهای داخلی، ۱۴۵، ۳۴۷
 شارهای رینولدز، ۵۳۱
 شبکه شارش، ۴۷۱
 شبکه‌های لوله‌ها، ۷۳۳
 شبه‌حلقه، ۷۳۷
 شبه‌مرکز، ۹۴
 شتاب، ۲۴۹
 شرایط مرزی، ۴۷۰، ۷۷۰
 ~ دینامیکی، ۴۸۷
 ~ سینماتیکی، ۴۸۶
 شرط دینامیکی سطح، ۴۸۷
 شرط سینماتیکی مرز، ۴۸۶
 شعاع هیدرولیکی، ۳۷۷، ۷۴۲
 شعاع، هیدرولیکی، ۳۷۷، ۷۴۲
 شلیستینگ، ا.ج.، ۴۳۱
 شبیه‌های معکوس فشار، ۴۳۵
 شیوره،
 ~ شارش VDI، ۶۲۵
 شارش تک‌آتروپیک ~، ۶۲۵
 نیروی وارده از ~، ۱۸۴
 ~ ی شارش، ۶۲۵
 شیوره شارش VDI، ۶۲۵
 شیر در انتهای فرودست، ۷۷۱
 صفحات موازی، ۳۵۰

- صفحه گسترده، ۷۷۲، ۷۴۳، ۷۳۹-۴۲
- صفحه تخت،
- شارش در ~، ۴۲۳
- ضریب پسا در ~، ۴۲۶-۳۱
- ضخامت جابه جایی، ۴۲۲
- ضرایب افت ارتفاع، ۳۹۹
- ضرب خارجی، ۹۵۵
- ضربه قوچ، ۷۵۹-۷۹
- معادله های دیفرانسیل برای محاسبه ~، ۷۶۱
- ~ و انسداد سریع شیر، ۷۶۱
- ~ و انسداد کند شیر، ۷۶۱
- ~ و روش پسرگرد، ۷۷۵
- ~ و روش جبری، ۷۷۵
- ~ و روش حل مشخصه ها، ۷۶۶
- ~ و شرایط مرزی، ۷۷۰
- ضریب،
- ~ اتصالها، ۳۹۹
- ~ افت ارتفاع، ۳۹۹
- ~ انقباض، ۶۱۲، ۳۹۷
- ~ پاشیدگی، ۵۵۴
- ~ پخش، ۶۴۰
- ~ تخلیه، ۶۱۲
- ~ سرعت، ۶۹۵، ۶۲۴، ۶۱۲
- ضریب اتلاف، ۱۶۲
- ضریب اصطکاک، ۳۸۳-۸۹
- ضریب اصطکاک فانینگ، ۳۱۵
- ضریب تصحیح انرژی جنبشی، ۳۶۱، ۱۶۵
- ضریب زبری مانینگ، ۳۷۹
- ضریب شیر، ۳۳۵
- ضریب فشار، ۶۶۴، ۳۱۵
- ضریبهای انبساط، ۲۱
- طبقه بندی، ۸۶۶، ۸۴۸، ۸۶۱
- ~ پایدار، ۸۶۷
- ~ در شرایط خشتی، ۸۷۲
- ~ ناپایدار، ۸۶۸
- طول آمیختگی پراتنل، ۳۶۶
- طول، گذار، ۳۴۸
- طولهای معادل، ۷۲۵
- عایق شده، ۲۱۲، ۵۰۰
- عدد استاتون، ۵۱۵
- عدد اشتراک، ۳۲۷، ۳۲۸
- عدد اشمیت، ۳۲۳، ۵۱۸
- عدد اویلر، ۳۲۷
- عدد پراتنل، ۳۲۳، ۳۲۹، ۵۱۵، ۵۳۲
- عدد دامکولر، ۳۲۴، ۳۲۹
- عدد رینولدز، ۳۱۶، ۳۲۷، ۳۴۵
- ~ در کانالهای باز، ۷۹۴
- ~ و اعداد بحرانی بالایی، ۳۴۶
- ~ و اعداد بحرانی پایینی، ۳۴۶
- عدد شروود، ۳۲۳، ۵۱۸، ۵۲۷
- عدد فرود، ۳۱۷، ۳۲۷، ۸۰۳
- عدد گردیان ریچاردسون، ۸۷۰
- عدد گراشف، ۳۲۲، ۳۲۴، ۵۱۵
- عدد ماخ، ۳۱۷
- عدد موج، ۴۸۸
- عدد نوسلت، ۳۲۳، ۵۱۵، ۵۱۸
- عدد نوسلت انتقال جرم، ۵۱۸
- عدد وبر، ۳۱۷
- عمق بحرانی، ۸۰۳، ۸۰۶
- عمق بهنجار، ۷۹۵

- فرمول شزی، ۳۷۷
 فرمول کولبروک، ۳۸۲
 فرمول مانتینگ، ۳۷۸، ۷۹۷
 فرمول هازن-ویلیامز، ۷۱۰
 فرنیچ، ار. اچ.، ۵۴۵
 فشار،
 ~ استاتیکی، ۴۷، ۶۰۰
 ~ بخار، ۵۰۷، ۷۰۳-۶۹۹، ۷۲۰
 ~ پیمانهای، ۵۵، ۵۸
 ~ ثابت، ۲۱
 ~ دینامیکی، ۶۰۰
 ~ سکون، ۶۰۰
 ~ کل، ۶۰۰
 ~ مطلق، ۵۵
 فشار استاتیکی، ۴۷، ۶۰۰
 اندازه‌گیری ~، ۶۰
 فشار بخار، ۵۰۷، ۷۰۳-۶۹۹، ۷۲۰
 ~ آب، ۲۹، ۹۳۵، ۹۳۶
 فشارسنج،
 ~ تقاضلی، ۶۱
 ~ ساده، ۶۰
 ~ مایل، ۶۵
 فواصل، ۸۴۹
 فون کارمان، تی.، ۳۶۸، ۲۲۳
 فیشر، اچ. بی.، ۵۳۵، ۵۴۴
 قابلیت اعتماد، ۵۸۴
 قانون آوگادرو، ۲۴
 قانون انحراف سرعت، ۳۷۲
 قانون بویل (قانون تکدام)، ۲۴
 قانون پخش فیک، ۲۱۱
- عمق مزدوج، ۱۹۸، ۸۰۱
 عمودهای واحد، ۹۵۵
 عنصر محدود، ۸۴۷
 غلظت،
 ~ جرمی، ۱۸، ۲۱۰، ۵۰۱
 ~ حجمی، ۱۸
 ~ مرجع، ۸۶۳، ۸۶۵
 ~ مولی، ۵۰۶
 ~ نمک، ۱۹
 غلظت، اندازه‌گیری،
 ~ ابرسنج، ۶۴۳
 ~ تراگسیل سنج، ۶۴۳
 ~ تیرگی سنج، ۶۴۳
 فرارفت (ادوکسیون)، ۲۱۰، ۲۱۲، ۴۹۶، ۵۱۱، ۵۴۵
 فراغلیظ، ۸۵۱
 فرایند، ۱۶۱
 فرایندهای واحد، ۸۴۷، ۹۰۱
 ~ تخمیر، ۸۴۷
 ~ جداکننده‌ها، ۸۴۷
 ~ فیلتراسیون، ۸۴۷
 ~ کوره‌های زباله‌سوز، ۸۴۷
 ~ گازشورها، ۸۴۷
 ~ مبادله‌کنهای گرمایی، ۸۴۷
 ~ مخزنهای ته‌نشینی، ۸۴۷
 فرضیه پراتنل، ۴۵۵
 فرکانس برانت-فی زی لی، ۸۶۹
 فرکانس دایره‌ای، ۴۸۸
 فرمول بلازیوس، ۳۸۶
 فرمول دارسی-وایسباخ، ۳۷۷، ۹۵-۳۸۵، ۷۱۱

- قانون توان یک هفتم، ۱۶۵، ۳۷۴، ۴۲۶
 قانون توان یک هفتم پراتنل، ۱۶۵، ۳۷۴، ۴۲۷
 قانون چسبندگی استوکس، ۲۶۶
 قانون چسبندگی نیوتن، ۷
 قانون دالتون، ۵۰۶
 قانون شارل، ۲۴
 قانون گاز کامل، ۲۳
 قضیه تورچلی، ۱۶۵
 کار شارش، ۱۵۸
 کار شافت، ۱۶۱
 کارلس لاور، اچ، ۵۴۱
 کاهش اتلاف هد، ۷۴۵
 کرانک، جی، ۵۴۱
 کسانادی، جی، ۵۴۰
 کسر جرمی، ۱۸، ۲۱۰
 کشسانی، مدول حجمی، ۲۶، ۷۶۴، ۹۳۴
 کشش سطحی، ۲۸، ۹۳۴، ۹۳۵
 ~ آب، ۲۸، ۹۳۴، ۹۳۵
 کشیده شدن، ۸۴۸
 کلیانف، پی، ۸۵۹
 کمکهای برنامه نویسی کامپیوتری، ۹۳۳
 کولبروک، ۳۸۴
 کومینس، اچ، ۶۰۵
 کهنگی لوله ها، ۷۴۴
 گاز سیاه، ام، ۸۶۵
 گاز کامل،
 رابطه کلی، ~، ۲۳
 قانون، ~، ۲۳
 گذارها، ۱۵-۸۱۱
 گردایان، ۴۹
 گردایان گرمایی، ۵۸
 گرانش ویژه، ۱۷
 گرانش، ویژه، ۱۷
 گرداب، ۹۹، ۴۷۵، ۶۷۴
 گرداب-آزاد، ۹۹، ۶۷۴-۴۸۲
 گرداب-اجباری، ۹۹
 گردای کشتی فلتنر، ۴۸۳
 گردای کشتی، فلتنر، ۴۸۳
 گردش، ۴۷۶، ۴۸۲
 گردشی کوتاه، ۹۱۴
 گرما، ویژه، ۲۲، ۲۳، ۹۳۶
 گرمای نهان، ۸۸۲
 ~ انجماد، ۸۸۲
 ~ تبخیر، ۸۸۲
 ~ تصعید، ۸۸۲
 ~ تقطیر، ۸۸۲
 ~ ذوب، ۸۸۲
 گرمای ویژه، ۲۲
 گروه مهندسی ارتش آمریکا، ۴۵۰
 گشتاور
 ~ اول، ۵۳۶، ۹۲۹
 ~ تکانه، ۲۰۳، ۶۷۲
 ~ دوم، ۵۳۶، ۹۳۱
 ~ دیسک، ۶۴۷
 ~ صفرم، ۵۳۶
 ~ لختی، ۹۳۱
 ~ گوست، جی، ۶۰۵
 لایپلاسی، ۹۵۷
 لاگرانژی، ۱۳۴
 ضریب همبستگی، ~، ۵۳۸

لوله‌ها،	مقیاس زمانی، ~، ۵۳۸
تنش کششی در، ~، ۷۶۴	مقیاس طولی، ~، ۵۳۸
شبکه‌های، ~، ۷۳۳	لايه،
طول معادله، ~، ۳۹۹	ارتفاع زیرلایه لایه‌ای، ~، ۳۶۹
کهنگی، ~، ۷۴۴	~ ی جداری چسبنده، ۳۶۹
مقاومت اصطکاکی در، ~، ۳۸۵	~ ی همپوش، ۳۶۹
~ ی انشعابی، ۷۲۹	لایه جداری، ۳۶۹
~ ی سری، ۷۲۱	لایه مرزی، ۱۴۰، ۴۲۱
~ ی موازی، ۷۲۶	~ چسبندگی، ۸۸۷
لوله‌های زبر مصنوعی، ۳۷۳، ۶-۳۸۲	~ در صفحات تخت، ۴۲۳
لوله‌های مدور، شارش در، ۳۵۶	~ در صفحات زیر، ۴۳۱
ماده دگرروان، ۸	~ غلظت، ۵۲۷
ماشینهای هیدرولیکی، ۳۳۵	~ گرمایی، ۵۲۳
مانک، دبلیو، ۸۷۳	~ لایه‌ای، ۴۲۲، ۵۲۳
مبادله‌کن گرما، ۲۱۵	~ متلاطم، ۴۲۲، ۴۲۶
مبدل،	معادله تکانه برای، ~، ۴۲۳
~ الاستیکی، ۵۹۳	مفهوم، ~، ۴۲۱
~ پیزوالکتریکی، ۵۹۳	~ و عدد رینولدز بحرانی، ۴۲۶
~ غیرفعال، ۵۸۶	~ و ناحیه نقص، ۸۸۷
~ فعال، ۵۸۶	لایه مرزی گرمایی، ۵۲۳
متلاطم،	لختی،
پخش، ~، ۵۳۳، ۵۴۱	ضرب، ~، ۹۳۱
شارش، ~، ۱۳۹، ۳۷۵	گشتاور، ~، ۹۳۱
عدد اشمیت، ~، ۵۳۲	لستر، سی، دی، ۷۴۵
عدد پرانتل، ~، ۵۳۲	لوله استاتیکی، ۵۹۲
معادله‌های انتقال گرمای، ~، ۵۳۰	لوله استاتیکی پیتو، ۶۰۱
مجرا، خیس شده، ۳۷۷، ۷۴۲	لوله پرانتل، ۶۰۱
مجراها، غیردایره‌ای، ۷۴۲	لوله پیتو، ۵۹۹
مجراهای غیردایره‌ای، ۷۴۲	لوله جریان، ۱۳۸
مجموعه زمانی، ۵۸۴	لوله مکش، ۶۷۹

معادلهٔ برنولی، ۲۷۶، ۴۶۲
 معادلهٔ پوازویل، ۳۵۸، ۳۶۰، ۳۸۹، ۶۴۸
 معادلهٔ پیوستگی، ۱۵۲، ۷۶۳
 معادلهٔ تکانه، ۱۷۵
 ~ لایهٔ مرزی، ۴۲۱
 معادلهٔ حرکت اویلر، ۴۵۶، ۴۶۲
 معادلهٔ لاپلاس، ۴۶۲
 معادلهٔ هاگن-پوازویل، ۳۵۸، ۳۸۹، ۶۴۸
 معادله‌های،
 ~ انرژی، ۱۵۴، ۱۶۰
 ~ اویلر، ۴۶۲
 ~ برنولی، ۴۶۲
 ~ پیوستگی، ۷۶۳
 ~ تکانه، ۱۷۵
 ~ لایهٔ مرزی، ۴۲۳
 ~ حالت، ۲۳
 ~ حرکت، ۷۶۲
 ~ لاپلاس، ۴۶۲
 ~ ناویر-استوکس، ۳۴۸
 ~ هاگن-پوازویل، ۳۵۸، ۳۸۹
 معادله‌های کوشی-ریمان، ۲۶۸
 معادله‌های ناویر-استوکس، ۳۴۸
 متعدل‌گیری، ۳۶۲
 مفاهیم شارش سیال، ۴۷-۱۳۳
 مقاطع کنترل، ۶۳۵
 مقاومت سیال، ۴۰۳-۳۴۵
 مقاومت کششی، ۳۳۴
 مقاومت گرمایی، ۴۹۹
 مقیاسهای کولموگوروف، ۵۳۷
 مکانیک سیالات محاسباتی، ۲۴۶
 مناظرو، مرده، ۹۱۴

محیط خیس شدهٔ مجرا، ۳۷۷، ۷۴۲
 مختصات طبیعی، ۴۵۷
 مخزن در انتهای فرادست، ۷۷۱
 مخزن واکنشگاه، ۲۱۷
 مخزنها، ۱۶۳، ۷۷۱
 روزنه در ~، ۶۱۰
 شارش ناپایا در ~، ۶۱۹
 مخلوط،
 چگالی ~، ۱۷
 ~ چندفازه، ۶۷-۸۴۸
 ~ دوتایی، ۵۰۲
 ~ های چندعنصری، ۱۸
 مدل عددی، ۷۶۹
 مدلها (روشها)،
 ~ از آزمایشگاهی، ۱۴۴
 ~ ی تفاضل محدود، ۸۴۷
 ~ ی ریاضی، ۱۴۴
 ~ ی عددی (محاسباتی)، ۱۴۴
 ~ ی عنصر محدود، ۸۴۷
 ~ ی محاسباتی (عددی)، ۱۴۴
 مدل‌های هیدرولیکی، ۳۷-۳۳۰
 مدول کشسانی حجمی، ۲۶، ۹۳۴
 مرکز سطح، ۷۰، ۳۱-۹۲۸
 مرکز فشار، ۶۹
 مسافت آزاد میانگین، ۳۶۷
 مسیر ذره، ۱۳۸
 مسیل، شارش در، ۸۰۰
 مصرف، ۲۱۸
 مطالعات مدل، ۳۳۲
 معادلهٔ انتقال کپهای، ۵۱۲
 معادلهٔ انرژی، ۱۵۴، ۱۶۰، ۴-۲۸۳

- منحنی $F + M$ ، ۸۰۲
 منحنی شکست سد، ۸۳۶
 منشور فشار، ۷۲
 مواد افزودنی، ۷۴۵
 موازنه حلقه، ۷۳۷
 موج،
 ارتفاع ~، ۴۸۶
 ~ پیشرونده، ۴۸۵
 دوره ~، ۴۸۶
 ~ ساکن، ۱۹۷
 سرعت موج یا سرعت فاز، ۴۸۵
 طول ~، ۴۸۶
 عدد ~، ۴۸۸
 مونتگامری، ار، ۸۷۳
 موبینگگی، ۳۰
 میانگین،
 ~ زمانی، ۱۴۰، ۳۶۲
 ~ سطح، ۱۶۵
 ~ فضایی، ۱۴۳، ۵۴۸
 ~ کلی، ۱۴۳
 میکروفشارسنج، ۶۳
 نسبت گرمای ویژه، ۶۶۷
 نظریه تکانه برای پیشرانها، ۱۸۵
 نظریه زنجیره، ۵۳۷، ۶۷۰
 نظریه طول آمیختگی، ۳۶۷
 نظریه نفوذ، ۵۴۶
 نقطه بحرانی، ۸۸۳
 نقطه سه‌گانه، ۸۸۳
 نمادگذاری، ۴۹-۹۴۰
 نمودار استانتن، ۳۸۶
 نمودار برداری قطبی، ۱۹۱، ۶۷۳
 نمودار تغییر شکل ماده، ۸
 نمودار مقطع عمودی سطح آب، ۸۱۹
 نمونه برداری،
 ~ تطبیقی، ۵۸۸
 ~ شرطی، ۵۸۸
 فرکانس ~، ۵۸۵
 نوسان مایع در لوله U، ۵۷-۷۴۵
 ~ بدون اصطکاک، ۷۴۵
 ~ و مقاومت در شارش لایه‌ای، ۷۴۸
 ~ و مقاومت در شارش متلاطم، ۷۵۴
 نیرو،
 ~ ی برشی، ۴۱۸
 ~ ی شناوری، ۸۷
 نیروها،
 ~ بر زانویها، ۱۸۸
 ~ بر سد وزنی، ۷۵
 ~ بر سطوح خمیده، ۷۹
 ~ بر سطوح مستوی، ۶۶، ۶۷
 نیروهای اینرسی، ۳۴۷، ۴۴۸
 نیروی برا، ۴۱۹، ۴۴۵، ۴۸۳
 نیروی حجمی، ۴۱
 نیروی سطحی، ۴۱
 نیروی سیال استاتیکی، ۶۷
 نیروی شناوری، ۸۷
 نیروی عرضی، ۴۴۵
 نیکورادزه، چی، ۳۷۲، ۳۸۳، ۳۸۶
 نیمه عمر، ۲۲۰
 نیوتن (آحاد)، ۹
 واحدهای مشابه یکسان، ۳۳۵

- واکنش شیمیایی،
 ~ چندگن، ۵۰۸
 ~ همگن، ۵۰۸
 واکنشگاه،
 ~ پرشده، ۹۰۱
 ~ دوشاخه، ۹۰۲
 زمان توقف، ~، ۹۰۴
 ~ شار بستر، ۹۰۱
 ~ شارش پیوسته، ۹۰۵
 ~ ناپیوسته، ۹۰۴
 واگرایی، ۹۵۶
 واماندگی، ۴۴۶
 وزن مخصوص، ۱۷
 ویلیامز، ای، ۶۰۹
 واتر شاو، ای، ۶۰۴
 هاردی کراس، ۴۱-۷۳۴
 هاریت، ۵۲۰
 هامیلتون، ار، ۵۲۰
 هانت، ۸۵۳
 هد پمپ، ۱۶۶
 هد پیرومتریک، ۱۷۰، ۷۱۳
 هد توربین، ۱۶۶
 هد مکش خالص مثبت (NPSH)، ۷۰۲
 هلفریش، کی، ۸۹۵
 همبستگی،
 ضریب، ~، ۵۳۸
 ~ فضایی، ۵۵۴
 ~ گاوسی، ۵۳۵
 ~ لاگراتزی، ۵۳۸
 همدوسی، ۸۴۹
 همرفت،
 ~ آزاد، ۲۱۲
 ~ طبیعی، ۲۱۲، ۵۱۵
 ~ واداشته، ۲۱۰، ۲۱۲، ۵۱۵
 همرفت طبیعی، ۵۱۵
 همرفت واداشته، ۵۱۵
 همزن ها، ۹۱۵
 ~ ی انفعالی، ۹۱۵
 ~ ی پدالی، ۹۱۵
 ~ ی پیشرانی، ۹۱۶
 ~ ی توربینی، ۹۱۶
 ~ ی دیوارک دار، ۹۱۵
 ~ ی فعال، ۹۱۵
 هواشناسی، ۸۴۵
 هیدروستاتیک، ۵۹-۴۷
 یه، سی، ۶۰۵