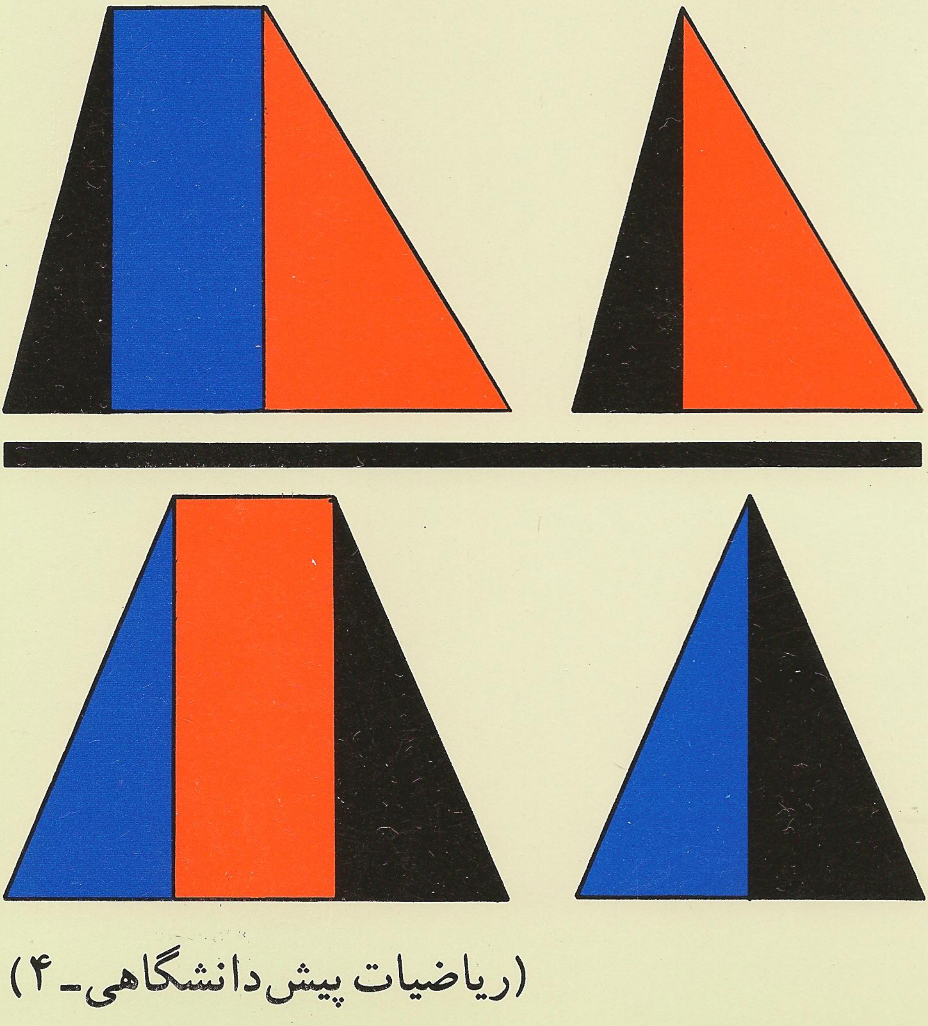
نابرابریهای هندسی

نیکولاس د. کازارینوف

ترجمهٔ محمدحسن بیژن‌زاده



(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۴)

نابرابریهای هندسی

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۴)

نیکولاس د. کازارینوف

ترجمهٔ محمدحسن بیژن‌زاده

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۷۹

مرکز نشردانشگاهی
۵۹۲

Geometric Inequalities
New Mathematical Library (4)
Nicholas D. Kazarinoff
The Mathematical Association of America, 1961

نابرابریهای هندسی
تألیف نیکولاس د. کازارینوف
ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
ویراستهٔ مهدی مدغم
مرکز نشردانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰
تعداد ۵۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: حبیبی

کازارینوف، نیکولاس د. — Kazarinoff, Nicholas D
نابرابریهای هندسی
عنوان اصلی: Geometric inequalities
۱. نامساویها. ۲. هندسهٔ مسطحه. الف. بیژن‌زاده، محمدحسن، ، مترجم. ب. مرکز نشردانشگاهی. ج. عنوان.
QA ۴۸۱ — ۵۱۶/۷

فهرست

بسم‌الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می‌کنند، عدهٔ کمی این‌توانایی را دارند که در آن زمینهٔعلمی، و با رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این‌گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشر کرده است که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده‌وهر کدام، چه درآمریکا وچه در کشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان‌دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می کنند و می‌توانند بـرای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن‌اصلی این کتابها در پیشگفتار خود ازجمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این‌مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری‌نیاز دارد. خواننده برای‌فهم‌مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی‌چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل‌ماندن روی‌بخشهای پیچیده از آنها گذشت وبعد، برای مطالعهٔ عمیق‌به‌آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش‌می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع‌مطالعه‌کرد. بهترین‌راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های‌آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخـی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل‌ملاحظـه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌انـد. به خواننده توصیه می‌شود که‌کوشش کند هرمسأله را خودحل کند وفقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یـا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل‌کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات وپیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ‌کار وگسترش این‌گونه‌فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

وقتی پدرم زنده بود، اغلب این‌حرفها را از او می‌شنیدم، «نیکی، یك مسأله برایت دارم»» و غالباً موضوع مسأله‌ای که روی تخته سیاه اطاق نشیمن نوشته مـی‌شد یك نابرابری بود. اکنون می‌خواهم فکر کنم علت آنکه هرگز راه‌حلی بـرای تقریباً هیچ یك ازمسائلی که روی تخته سیاه نوشته می‌شد نمی‌یافتم، تا حدی این بود که‌در مدرسه به‌مسائلی برنمی‌خوردم که با مسأله‌هایی که درخانه بـا آنها کلنجار می‌رفتم اندك مشابهتی داشته‌باشند. هنوز هم در برنامهٔ درسی دبیرستانهای امروزی مبحث نابرابریها جدی گرفته نمی‌شود. معهذا همهٔ ریاضیدانان می‌دانند کـه نابرابریهادر تمام شاخه‌های ریاضیات اهمیت دارند، حتی گاهی از برابریها هم‌مهمترند.

در ۱۹۵۸ مدارس دولتی ان‌آربر[1] فرصتی به‌من داد تا باگروهی‌ازجوانان پرشور، گفتگوهـای مستمری در زمینهٔ ریاضیات داشته‌بـاشم. استقبال و علاقه‌مندی این دانشجویان بودکه مشوق من در نوشتن کتاب حاضرشد. بهره‌گیری و دریافت آنان از نابرابریها مرا متقاعد ساخت که بیان دقیق پاره‌ای از این بحثها با استقبال گروههای بیشتری ازخوانندگان مواجه خواهد شد.

نابرابریهای هندسی بدین علت که احکام آنها را بـه‌آسانی می‌توان فهمید جذابیت خاصی دارند؛ درعین‌حال مقدمه‌ای بسیارخوب بـرای آشنایی بـا روح ریاضیات جدید واندیشهٔ خلاق ریاضی هستند. امتیاز دیگر نابرابریهای مقدماتی که موضوع این کتاب هستند این است که فهمیدن آنها فقط بـه‌ذهنی روشن و حداقل آموزش‌متداول ریاضیات‌نیاز دارد؛ یعنی معمولاً گذراندن یك سال جبر دبیرستانی و مبانی هندسهٔ مسطحه کفایت می‌کند. درمواردی از مثلثات نیز استفاده‌کرده‌ام. از این‌رو، بعضی از این مطالب قابل استفادهٔ دانشجویانی‌است که هندسهٔ مسطحه رادر ترم دوم می‌خوانند، درحالی که‌کل‌کتاب برای دانش‌آموزان دورهٔ اول‌و دورهٔ دوم دبیرستان قابل استفاده است.

---

1) Ann Arbor

کتاب دیگری از این مجموعه باعنوان، آشنایی با نابرابریها، تألیف ادوین بکنباخ[1] و ریچارد بلمن[2] زمینهٔ دیگری‌است برای مطالبی‌که عرضه‌کرده‌ام. به‌علاوه کتاب روان بکنباخ و بلمن‌که با شکیبایی‌زیاد فراهم شده، شامل بسیاری‌از مباحثی است‌که دراینجا عنوان شده‌اند، بعضی با نحوه‌ای مشابه و برخی بانحوه‌ای متفاوت.

از لحاظ تاریخی، مسأله‌های‌هندسی متضمن ماکسیمم مینیمم پیش‌از اختراع حسابان مورد مطالعه قرارگرفته‌اند. حسابان وسیلهٔ توانایی است‌که باآن و بدون نیروی ابتکارمی‌توان بعضی ازاین مسأله‌ها را حل کرد. بااین‌حال، حسابان تنها نمی‌تواند هرمشکلی را حل‌کند وهرکس که خواهان مطالعهٔ حسابان و یا مشغول مطالعهٔ آن باشد از مطالب فصلهای ۲ و ۳ درمی‌یابدکه حسابان درچه مباحثی می‌تواند مفید باشد یا نباشد.

به توصیه‌های ناخواسته معمولا اعتنایی نمی‌شود؛ بااین حال من می‌خواهم توصیه‌ای بکنم که امیدوارم سودمند باشد. هیچ کتاب ریاضی نمی‌تواند به‌اندازهٔ کافی مثال و فرمول داشته باشد. خوانندهٔ جدی باید همواره‌کاغذ و مداد دردسترس داشته‌باشد. این وسایل برای ترسیم شکلهایی‌که درمتن نیامده‌اند و فراهم‌کردن مراحلی‌که دربین احکام یا فرمولها حذف شده‌اند لازم‌اند. غالباً رسم قسمتی ازیك شکل متن یا بازنویسی یك فرمول پیچیدگی مسأله را روشن می‌کند. تمرینها و مسأله‌های مندرج در متن، نقش مهمی ایفا می‌کنند. خواننده‌ای‌که به‌هرمسأله یا هر تمرینی برسد روی‌آن‌کارکند، فهم خود را ازآنچه که خوانده است می‌آزمایدوآن را افزایش می‌دهد، و با آمادگی بیشتری به‌کار ادامه می‌دهد. مسأله‌ها به‌تدریج مشکل می‌شوند حتی به‌چند مسألهٔ حل‌نشده اشاره کرده‌ام. درفصل ۴ راه حل برخی ازمسائل منتخب را داده‌ام به‌این امید که وقتی خواننده‌ای روی مسأله‌ای کارکرد مقایسهٔ راه حلش با این راه‌حلها کمکی به اوکرده باشد.

نیکولاس. د. کازارینوف

ژانویهٔ ۱۹۶۱

---

1) Edvin Beckenbach 2) Richard Bellman

۱

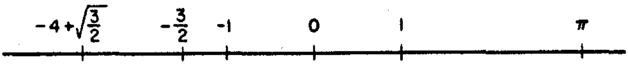
میانگینهای حسابی و هندسی

۱.۱ مفاهیم اساسی

یك خط مستقیم و نقطه‌ای مانند O بر آن اختیار می‌کنیم. با تجربیاتی که با خط کش، متر فلزی، و متر نواری داریم، می‌توانیم در ذهن خود به‌هر نقطهٔ خط یك عدد نسبت دهیم ــ عددی مثبت هر گاه نقطه سمت راست O، عددی منفی وقتی که نقطه سمت چپ O و صفر درصورتی که نقطه‌خود O باشد. این اعداد را اعداد حقیقی می‌نامیم و می‌توانیم آنها را به صورت دهدهی (اعشاری) بنویسیم. خط راستی کــه روی آن اعداد حقیقی را نمایش می‌دهیم خط حقیقی نام‌دارد. درشکلها، معمولا خط حقیقی را بــه صورت افقی ترسیم می‌کنیم و اعــداد مثبت را سمت راست صفر قــرار می‌دهیم. بــا اعــداد حقیقی نظیر ۱، ۳/۲ــ، $\sqrt{۵/۳}+۴-$، و π آشنا هستیم. همهٔ اعداد این کتاب اعداد حقیقی‌هستند. شما کاملا حق دارید اعتراض کنید وبگویید که مادر واقع عدد حقیقی را هنوز تعریف نکرده‌ایم. این اعتراض صحیح و بجاست. این گفته نیز درست است که تعریف دقیق عدد حقیقی و بحث ایــن اعــداد اساس آنالیز ریاضی است. این بحث پیچیده‌تر از آن است که در اینجا ارائه شود امــا می‌توانید آن را مثلا درکتاب درسی در ریاضیات محض تألیف هاردی[1] بیابید. از

---

1) *A course of Pure Mathematics* by G.H. Hardy (Cambridge University press, 1938)



شکل ۱.۱

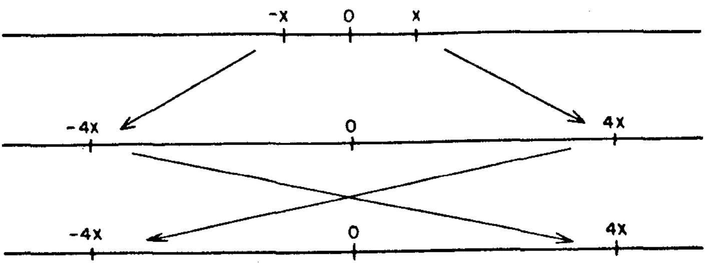
سوی‌دیگر، ایوان نیون[1] درکتاب اعداد: گویا وگنگ، که‌یکی دیگرازاین مجموعه کتا بهاست، بحثی مقدماتی وجامع مشتمل بر بعضی ویژگیهای مهم اعداد حقیقی ارائه کرده است.

وقتی کـه اعداد حقیقی را با نقاط یك خط راست متناظر می‌کنیم (همچنان که درشکل ۱.۱ انجام داده‌ایم)، به‌طور ضمنی مدعی می‌شویم کـه دستگاه اعـداد حقیقی دارای ویژگیهایی است. ازآنجاکه این ویژگیها بسیار اساسی و مهم هستند، توجهمان را بدانها معطوف می‌داریم. قبل‌ازهرچیز، قبول می‌کنیم کـه در مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای کـه آن را مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت مـی‌نامیم وجود دارد و این مجموعه (که آن را P می‌نامیم) دارای دو ویژگی زیر است:

۱. هرگاه a یك عدد حقیقی باشد، آنگاه دقیقاً یکی از این گزاره‌ها درست است: a در P است؛ $-a$ در P است؛ a صفر است.

۲. هرگاه a و b در P باشند، آنگاه $a+b$ و ab در P هستند.

چون دستگاه اعـدادحقیقی دارای چنین زیرمجموعـه‌ای است، مـی‌گوییم ایـن دستگاه مرتب است. از این ویژگی مرتب‌بودن هنگام متناظرکردن اعداد حقیقی با خط حقیقی استفاده می‌کنیم. هرگاه a نه در P باشد ونه صفر، گوییم a منفی است. می‌توان ثابت‌کرد کـه دستگاه اعداد حقیقی یك دستگاه مـرتب است. بـه‌علاوه،



شکل ۲.۱

1) Ivan Niven

به‌استناد تعریف ضرب اعداد حقیقی می‌توان نشان داد که اگر a و b منفی باشند، آنگاه ab مثبت است، و اگر a مثبت و b منفی باشد آنگاه ab منفی است. البته، حاصلضرب دو یا چند عدد حقیقی صفر است اگر و تنها اگر حداقل یکی از این اعداد صفر باشد. اگر a مثبت باشد، می‌نویسیم $a>0$.

اعمال جبری جمع وضرب روی خط حقیقی دارای تعبیرهای هندسی هستند. غالباً جمع به منزلهٔ انتقال یا جابه‌جا کردن خط حقیقی تلقی می‌شود. فرض کنیم وقتی در ذهن به خط حقیقی نگاه می‌کنیم افقی باشد، در این صورت مثلا به‌منظور اجرای عمل جمع با ۴، خط حقیقی را به‌اندازهٔ ۴واحد به‌سمت راست‌می‌لغزانیم. برای‌عمل جمع با عدد حقیقی b، خط حقیقی را به‌اندازهٔ b واحد به‌راست انتقال می‌دهیم وقتی که b مثبت باشد و به‌اندازهٔ $-b$ واحد به‌چپ انتقال می‌دهیم هرگاه b منفی باشد. البته، اگر b صفر باشد انتقالی صورت نمی‌گیرد. ضرب در یك عدد مثبت اغلب به منزلهٔ عملی کششی یا انقباضی تلقی می‌شود. مثلا، برای ضرب کردن در ۴، خط حقیقی را می‌کشیم، به‌قسمی که‌مبدأ ثابت بماند ولی فاصلهٔ هر نقطهٔ دیگر از مبدأ دقیقاً چهار برابر فاصلهٔ اولیه‌اش باشد. برای ضرب‌کردن در ۴— ابتدا کششی که از ضرب در ۴ حاصل می‌شود اجرا می‌کنیم سپس قرینهٔ هر نقطهٔ خط حاصل را نسبت به O پیدا می‌کنیم. ترتیبی که در دوعمل کشش و قرینه‌یابی اعمال می‌شود اثری ندارد. ضرب در ۱ همهٔ نقاط را ثابت نگاه می‌دارد؛ ضرب در صفر همهٔ نقاط را دریك نقطه که مبدأ است فشرده می‌کند.

تعریف ۱۰ $a>b$ (یا معادل آن $b<a$) اگر وتنها اگر $a-b>0$ یعنی، اگروتنها اگر عدد مثبتی مانند h موجود باشد که $a=b+h$.

«$a>b$» را «a بزرگتراز b است» می‌خوانیم؛
«$a<b$» را «a کوچکتر از b است» می‌خوانیم. گـزارهٔ نمادی «$a<b$» را یك نابرابری می‌نامیم. از نظر هندسی ملاحظه می‌کنیم که $a>b$ بدین معنی است که بر خط حقیقی، a سمت راست b واقع است. از ویـژگی (۱) فوق‌الذکر نتیجه می‌گیریم که برای هردوعدد حقیقی a و b، دقیقاً یکی ازگزاره‌های $a>b$، $a=b$، و $a<b$ درست است.

قضیهٔ ۱۰ رابطهٔ نابرابری، ترایا (متعدی) است؛ یعنی، اگـر $a>b$ و $b>c$، آنگاه $a>c$.

برهان. بنا بر فرض قضیه دوعدد مثبت مانند h و k وجود دارد که

$$a=b+h \quad , \quad b=c+k.$$

از این‌رو،

$$a=c+(k+h) \quad \text{یا} \quad a=(c+k)+h$$

اما چون h و k مثبت‌اند $k+h$ مثبت است. بنا بر تعریف، این بدین معنی است که $a>c$.* □

هرگاه یکی از گزاره‌های $a<b$ یا $a=b$ برقرار باشد، می‌نویسیم $a\leqslant b$، که خوانده می‌شود «a نابزرگتر از b است». مثلا

$$۱\leqslant ۱, \quad ۲\leqslant ۳,$$

زیرا درهرحال یکی از دوحالت ممکن «$<$» یا «$=$» برقرار است.

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که چگونه می‌توان نابرابریها را جمع کرد.

قضیهٔ ۲. اگر $a>b$ و $c\geqslant d$، آنگاه $a+c>b+d$.

برهان به‌همان آسانی قضیهٔ ۱ است. خودتان این برهان را می‌توانید انجام دهید.

توجه کنید که اگر $a>b$ و $c>d$، ac ممکن است بزرگتر از bd نباشد. مثلا، $۲->۱-$ و $۳->۲-$، ولی $۶<۲$. قضیهٔ زیر قواعد ضرب نابرابریهای مربوط به‌اعداد مثبت را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۳. اگر $a>b>0$ و $c\geqslant d>0$، آنگاه

$$(۱)\ ac>bd\text{،} \quad (۲)\ ac>bc\text{،} \quad (۳)\ \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

---

* علامت □ که‌در پایان بسیاری از برهانها ملاحظه می‌کنید نشانهٔ آن است که« برهان تمام شده است.»

برهان. بنا بر فرض اعداد مثبتی مانند h و k وجود دارند به‌قسمی که $a=b+h$ و $c=d+k$ در حالتی که $c=d$ بازهم برابری $c=d+k$ به‌ازای $k=0$ برقرار است. ازاین‌رو

$$ac=bd+bk+h(d+k) \quad \text{یا} \quad ac=(b+h)(d+k)$$

عدد $bk+h(d+k)$ مثبت است؛ پس، بنا برتعریف، $ac>bd$. برهان حکم دوم راخودتان کامل کنید. حکم سوم ازحکم دوم نتیجه می‌شود؛ زیرا با انتخاب $c=1/a$، نتیجه می گیریم که

$$.1>\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad a\cdot\frac{1}{a}>b\cdot\frac{1}{a}$$

بالاخره، با اعمال حکم دوم به‌نابرابری $b/a<1$، که در آن $c=1/b$ انتخاب شده است، نتیجه می گیریم

$$.\frac{1}{b}>\frac{1}{a} \quad \text{یا} \quad 1\cdot\frac{1}{b}>\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b} \qquad \square$$

قبل از بیان قضیهٔ بعدی، تعریف توان کسری یك عدد مثبت را مرور می‌کنیم. فرض کنیم p یك عددگویای مثبت و a یك عدد حقیقی مثبت باشد. (عددی گویاست که بتوان آن را به‌صورت m/n نوشت؛ که در آن m و n اعداد صحیح‌اند و $n\neq 0$.) چون p گویا و مثبت است، p را می‌توان به‌صورت m/n نوشت، که m و n اعداد صحیح مثبت‌اند. می‌دانیم نماد a^m بدین‌صورت تعریف می‌شود

$$\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{\text{عامل} \ m}$$

نماد $a^{1/n}$ عدد حقیقی مثبت x است به‌طوری که $x^n=a$. و نیز

$$a^{m/n}=(a^m)^{1/n}.$$

هرگاه q یك عددگویای منفی باشد، یعنی $q=-p$ که p مثبت است، آنگاه

$$a^q=\frac{1}{a^p}.$$

البته $a^0=1$.

در این کتاب هیچ گاه موردی پیش نمی‌آید که عددی را بخواهیم به‌توان گنگ برسانیم. با این حال قضیهٔ بعدی را درحالت کلی که در آن p محدود به‌اعداد گویا نیست، بیان می‌کنیم. وقتی اعدادی چون

$$(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}, \quad \pi^{\pi}$$

تعریف شده‌باشند، تشخیص گویا یا گنگ بودنشان مسأله‌ای بسیار مشکل است.

قضیهٔ ۴. اگر $a>b>۰$ و $p>۰$، آنگاه $a^p>b^p$؛ اگر $p<۰$، آنگاه $a^p<b^p$.

برهان. قضیه را فقط برای حالتی که p عدد صحیح مثبتی باشد ثابت و وظیفهٔ اثبات آن را برای هرعددگویای p به‌خواننده واگذارمی کنیم (برهان کاملی از این قضیه را بکنباخ و بلمن درکتابی بــا عنوان آشنایی با نابرابریها کــه ازایــن مجموعه کتابهاست ارائه کرده‌اند.) فرض کنیم p داده شده باشد. از فــرض $a>b>۰$ و قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$a^۲>b^۲.$$

درحالت $p=۲$، قضیه ثابت شده است. درغیراین‌صورت، باردیگر قضیهٔ ۳ را اما این بار درنابرابریهای

$$a>b>۰ \text{ و } a^۲>b^۲$$

به‌کارمی بریم و به نتیجهٔ

$$a^۳>b^۳$$

می‌رسیم. اگر p برابر ۳ باشد، اثبات قضیه‌تمام است. درغیراین صورت، به‌همین نحو عمل را ادامه می‌دهیم. بعد از دقیقاً $p-۱$ مرحله، نابرابری مطلوب یعنی

$$a^p>b^p$$

به‌دست می‌آید. □

قضیه‌های بالا اساس اعمال با نابرابریها را، کــه بدان محتاج خواهیم بود فراهم می‌کنند. ازاین پس غالباً بدون‌اشاره به‌این قضیه‌ها از آنها استفاده می‌کنیم. اما قبل‌ازاینکه از این قضیه‌ها درتحقیقات بعدی استفاده‌کنیم آنها را درچند حالت

ساده به‌کارمی بریم تا کاربرد فراوان و میزان اهمیت آنها روشن شود. حل مسألهٔ عددی زیر این قضیه‌ها را به‌خوبی روشن می کند.

مسأله. کدام یك از این دوعدد بزرگترند $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۷}$ یا $\sqrt{۱۷}+\sqrt{۳}$؟

یك راه حل، یافتن این اعداد در جدول ریشه‌های دوم یا صرفاً محاسبهٔ ریشه‌های دوم با چند رقم اعشار است. ما نشان خواهیم دادکه $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۷}<\sqrt{۱۷}+\sqrt{۳}$. راه‌حل با امری بدیهی شروع می‌شود و به‌کمك این قضیه‌ها ادامه می‌یابد تا به نتیجهٔ مطلوب برسد. برای ملاحظهٔ آنکه چگونه این راه‌حل کشف شده است، ترتیب استدلال را معکوس کنید. در حل مسائلی که پس از این مثال می آیند، خواهید دید طبیعی‌ترین روش این است که نابرابری مطلوب را درست فرض کنید و از آن نابرابریهای دیگری نتیجه بگیرید تا به یك نابرابری که‌می‌دانید درست است برسید. بعد باید تحقیق کنیدکه هرمرحله را می‌توان معکوس کرد. اگر موفق شدید برهانی خواهید ساخت که از نابرابری معلوم به نابرابری مطلوب می‌رسد. مثال بالا عمداً طوری انتخاب شده است که راه‌حلی طولانی داشته باشد واستفادهٔ هریك ازقضیه‌های ۱ تا ۴ را روشن سازد. به‌علاوه، چون اختلاف دوعدد $\sqrt{۱۷}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۷}$ کوچك است (حدود ۰٫۰۵) تعجب آور نیست که شخص نتواند به آسانی عدد بزرگتر را انتخاب کند.

حل. بنا برتعریف ۱، $۵۱>۴۹$ زیرا $۵۱=۴۹+۲$، و ۲ مثبت است. قضیهٔ ۴ را با $p=۱/۲$ دراین‌نابرابری به‌کارمی‌بریم $\sqrt{۵۱}>۷$ نتیجه می‌شود. ازقضیهٔ ۳، با $a=\sqrt{۵۱}$ و $b=۷$، و $c=۱۲$ به‌دست می آوریم

$$۱۲\sqrt{۵۱}>۱۲\times ۷=۸۴.$$

با جمع ۲۱۳ به‌دوطرف این نابرابری و استفاده از قضیهٔ ۲، نتیجه می‌شود

$$۲۱۳+۱۲\sqrt{۵۱}>۲۹۷.$$

اما $۴\times ۷۰=۲۸۰<۲۹۷$. بنا برقضیهٔ ۱،

$$۲۱۳+۱۲\sqrt{۵۱}>۴\times ۷۰.$$

آنگاه ملاحظه می‌کنیم که

$$۲۱۳=۹+۲۰۴=۹+۴\times ۵۱=۹+(۲\sqrt{۵۱})^{۲}$$

و

$$۲۱۳+۱۲\sqrt{۵۱}=۹+۲\times ۳\times ۲\sqrt{۵۱}+(۲\sqrt{۵۱})^{۲}$$
$$=(۳+۲\sqrt{۵۱})^{۲}$$

لذا، بنا برقضیهٔ ۴ با $p=۱/۲$، نتیجهٔ

$$۳+۲\sqrt{۵۱}>۲\sqrt{۷۰}$$

به‌دست می‌آید. این نابرابری را به‌صورت

$$۳+۱۷+۲\sqrt{۵۱}>۱۷+۲\sqrt{۷۰}$$

می‌توان نوشت؛ (قضیهٔ ۲) یا، چون $۵۱=۳\times ۱۷$ و $۷۰=۷\times ۱۰$، می‌توان آن را به‌صورت

$$(\sqrt{۳})^{۲}+۲\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۱۷}+(\sqrt{۱۷})^{۲}>$$
$$(\sqrt{۷})^{۲}+۲\sqrt{۷}\times\sqrt{۱۰}+(\sqrt{۱۰})^{۲}$$

تبدیل کرد، که با نابرابری

$$(\sqrt{۳}+\sqrt{۱۷})^{۲}>(\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰})^{۲}$$

یکی است. باردیگر بااعمال قضیهٔ ۴ با $p=۱/۲$، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۱۷}>\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰} \qquad \square$$

چنان‌که تاکنون نیز متذکر شده‌ایم اگر کسی بخواهد از نتایج پیشرفته‌تر جبر مقدماتی استفاده کند راههای بسیار کوتاهتری برای به‌دست آوردن همین نتیجه‌وجود دارد. تمرینهای زیر مثالهای مشابهی برای قضیه‌های اساسی بالا فراهم می‌کنند.

تمرین

۱. نشان دهید $۲+\sqrt{۷}<۵$

۲. نشان دهید $۲+\sqrt[۳]{۷}<۴$

۳. ثابت کنید اگر $a<۱$ آنگاه $۲-۲a>۰$.

۴. کدام یک بزرگتر است، $\sqrt{۱/۵}+\sqrt{۵/۱۲}$ یا $\sqrt{۲/۷}+\sqrt{۱/۳}$؟ حدس خود را ثابت کنید.

۵. کدام عدد بزرگتر است $۲(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$ یا $۳\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$؟ حدس خود را ثابت کنید.

در زیر مسأله‌ای آورده‌ایم که از قضایای اساسی به‌صورتی اندکی پیچیده‌تر استفاده شده است. این عدد را در نظر می‌گیریم:

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹۹۹}}+\frac{۱}{۱۰۰}.$$

این عدد چقدر بزرگ است؟ ممکن است یك حدس دقیق به‌نظر مشکل جلوه کند. اگر کامپیوتر و وقت کافی می‌داشتیم، می‌توانستیم مقدار تقریبی این عدد را تا دو رقم اعشار یا بیشتر محاسبه کنیم. با این حال، نابرابریها به ما کمك می‌کنند تا بتوانیم در مدت زمان کوتاهتری براورد خوبی ارائه دهیم. مقصودم فقط، آشنا کردن شما باکاربرد قضیه‌های اساسی است، بنابراین، ازاینکه به‌سنت کتب درسی قضیه‌را بدون مقدمه شروع می‌کنم پوزش می‌خواهم.

قضیهٔ ۵. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n،

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}.$$

اثبات این حکم خیلی مشکل نیست. قسمت مشکل آن پیدا کردن راه‌حل آن است. راه‌حل این قضیه را نمی‌توانید پیدا کنید مگر قبلا با نابرابریها کار کرده باشید. آزمودن راههای مختلف، کار معمولی ریاضیدانان است. ما راههای زیادی را می‌آزماییم، تجارب ما فقط با اعداد، اشکال هندسی و موضوعات مجرد مختلف دیگر است. تجربه‌های ما همچون تجارب دانشمندان علوم طبیعی غالباً با شکست روبه‌رو می‌شود. اما گاهی موفقیت‌آمیزند و قضیه‌ای کشف می‌کنیم. دراین صورت غالباً پیش می‌آید که برای اثبات دقیق قضیهٔ حدسی، که به‌استناد تجربه به‌درستی آن اعتقاد پیدا کرده‌ایم، به‌کار بیشتری نیاز است. نابرابری بدیهی $\sqrt{n+۱}>\sqrt{n}$

را برای کشف قضیهٔ ۵ می‌آزماییم، برهان زیر یك تجربهٔ موفقیت آمیز است.

برهان. چون $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$،

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\frac{2\sqrt{n}}{2} \qquad \text{(چرا؟)}$$

بنا بر قضیهٔ ۳،

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (1)$$

اکنون $1/\sqrt{n}$ درسمت راست مشاهده می‌شود. چون منظور براورد این مقدار است، درمرحلهٔ بعد حذف ریشه‌های دوم در مخرج سمت چپ امری طبیعی است. اتحاد

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

را به‌خاطر می‌آوریم و آن‌را به‌صورت خاص

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2$$

در نظر می‌گیریم. عبارت سمت راست این اتحاد به‌روشنی برابر با ۱ است. از این‌رو، با ضرب صورت و مخرج سمت چپ نابرابری اخیر در $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}). \qquad (2)$$

گزاره‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

که نیمهٔ قضیه‌ای است که خواهان اثبات آن هستیم. با درنظر گرفتن $\sqrt{n}>\sqrt{n-1}$

می‌توانید به‌طریقی مشابه، نیمهٔ دیگر را ثابت کنید. برای این اثبات بکوشید. کدام یك از قضیه‌های اساسی را در اثبات این قضیه به‌کار برده‌ایم؟ □

اکنون از قضیهٔ ۵ برای حل مسألهٔ مورد نظر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم نتیجهٔ این قضیه را برای ده‌هزار حالت خاص $n=۱,۲,...,۹۹۹۹,۱۰^۴$ نوشته باشیم. (درحالت $n=۱$، می‌توانیم نابرابری سمت راست را به‌برابری تبدیل کنیم زیرا ۹۹۹۹ حالتهای دیگر همه نابرابری هستند. با انجام این کار، براورد نهایی بهتری به‌دست می‌آوریم.)

$$۲\sqrt{۲}-۲<۱\leqslant ۱$$

$$۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}<\frac{۱}{\sqrt{۲}}<۲\sqrt{۲}-۱$$

$$۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}<\frac{۱}{\sqrt{۳}}<۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$۲\sqrt{۱۰^۴}-۲\sqrt{۹۹۹۹}<\frac{۱}{\sqrt{۹۹۹۹}}<۲\sqrt{۹۹۹۹}-۲\sqrt{۹۹۹۸}$$

و بالاخره

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۱}-۲\times ۱۰۰<\frac{۱}{۱۰۰}<۲\times ۱۰۰-۲\sqrt{۹۹۹۹}.$$

برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی عدد موردنظر، طرفهای متناظر این نابرابریها را یك به یك باهم جمع و ملاحظه می‌کنیم که در مجموع طرفهای چپ یعنی در

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۱}-۲\times ۱۰۰+۲\times ۱۰۰-۲\sqrt{۹۹۹۹}+\dots$$
$$+۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-۲$$

همهٔ جمله‌ها جز اولی و آخری دوبار ظاهر می‌شوند، یك‌بار باعلامت بعلاوه و یك‌بار با علامت منها. چنین وضعی برای طرفهای راست نیز برقرار است. بنابر قضیهٔ ۲ نابرابریهایی که بعداز جمع این نابرابریها به‌دست می‌آیند عبارت‌اند از

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۱}-۲<۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰}<۲\times ۱۰۰-۱.$$

چون $\sqrt{۱۰۰۰۱}>۱۰۰$، نشان داده‌ایم که

$$۱۹۸<۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰^۴}}<۱۹۹.$$

البته، این، براوردی خام است، لیکن از یك حدس صرف به‌مراتب بهتر است.

هرگاه از یك نماد مناسب استفاده کنیم، بحث پیش را به‌نحو بهتری می‌توانیم بنویسیم. این نماد نماد مجموعیابی نامیده می‌شود. $\sum\limits_{k=۱}^{k=n} a_k$ را به‌صورت

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}+a_n$$

تعریف می‌کنیم. «a_k» را می‌خوانیم «a اندیس k» و «$\sum\limits_{k=۱}^{k=n} a_k$» را می‌خوانیم «مجموع a_k از k مساوی ۱ تا k مساوی n». k را اندیس مجموعیابی می‌نامیم. برای مثال،

$$\sum_{k=۱}^{k=۴} k^۲=۱+۴+۹+۱۶\ ,\quad \sum_{j=۲}^{j=۴}\log j=\log ۲+\log ۳+\log ۴$$

و

$$\sum_{l=۱}^{l=۳}\frac{l!}{(۳+l)!}=\frac{۱!}{۴!}+\frac{۲!}{۵!}+\frac{۳!}{۶!}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۱۲۰}.$$

(بنا بر تعریف، $k!=۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times k$ که در آن k عدد صحیح مثبتی است، و $۰!=۱$. مثلاً، $۱!=۱$، $۲!=۲$، $۳!=۶$، $۴!=۲۴$، $۵!=۱۲۰$، و $۶!=۷۲۰$.)
هرگاه اندیس مجموعیابی، همچون مثالهای زیر واضح باشد، از نوشتن آن صرف نظر می‌کنیم و فقط می‌نویسیم

$$\sum_{۱}^{۴} k^۲\ ,\quad \sum_{۱}^{۴}\log j\ ,\quad \sum_{۱}^{۳}\frac{l!}{(۳+l)!}.$$

عددی که براورد کردیم برابر بود با $\sum\limits_{۱}^{۱۰^۴} ۱/\sqrt{k}$ قضیهٔ ۵ بیان می‌دارد که به ازای

$k=1, 2, \ldots$، $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<1/\sqrt{k}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$. از این‌رو بنابر قضیهٔ ۲ و این حقیقت که $2(\sqrt{2}-1)<1\leqslant 1$ (این نابرابری اکید از نابرابری $9>8$ و با استفاده از قضیه‌های قبل به‌دست می‌آید)، نتیجه‌می‌گیریم که

$$2(\sqrt{2}-1)+\sum_{2}^{10^4}2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\sum_{1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$<1+\sum_{2}^{10^4}2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

یا

$$2(\sqrt{10001}-1)\leqslant\sum_{1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\times 100-1.$$

از این نتیجه براورد نهایی به‌دست می‌آید. ازاین پس هرجا که مناسب باشد بـه استفاده از نماد مجموعیابی ادامه می‌دهیم.

مسألهٔ ۱. نشان دهید به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n

$$\frac{1}{\sqrt{4n+1}}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

آیا می‌توانید این براورد را دقیقتر کنید؟

۲.۱ قضیهٔ میانگینهای حسابی و هندسی*

این حدس را درنظر مـی‌گیریم: از بین همهٔ مستطیلهایی کـه مساحتشان یك است، مربع کوچکترین محیط را دارد. روشن است که یك مستطیل دراز و لاغر به‌مساحت یك، محیطی به‌مراتب بزرگتر از یك مستطیل چاق با همان مساحت دارد، و حدس طبیعی این است کـه مربع کوچکترین محیط را داراست زیـرا چاقترین مستطیل

* برای ملاحظهٔ چند برهان ازاین قضیه، که هرکدام با برهانی که در اینجا ارائه شده متفاوت است، می‌توانید رجوع کنید به‌فصل ۴ کتاب آشنایی با نابرابریها تألیف بکنباخ و بلمن از مجموعهٔ ریاضیات پیش دانشگاهی.

است. اکنون یك حدس باورکردنی داریم، اما چگونه آن را ثابت کنیم؟ یك راه ممکن این است که آن را به‌صورت جبری بازگو و برای اثبات حکم جبری به دست آمده کوشش کنیم. این کار را انجام می‌دهیم.

فرض کنیم مستطیلی مفروض باشد، و واحدهای اندازه گیری را چنان انتخاب کرده باشیم که مساحت آن ۱ واحد مربع باشد. هرگاه طول آن x باشد، عرض آن $۱/x$ ولذا محیط آن $[x+(۱/x)]۲$ است. محیط مربعی که مساحتش ۱ باشد ۴ است. لذا می‌توانیم حدسمان را به صورت

$$\text{اگر } x>۰\text{، آنگاه } ۲(x+۱/x)\geqslant ۴$$

بیان کنیم که برابری فقط به‌ازای $x=۱$ برقرار است؛ یا

$$\text{اگر } x>۰\text{، آنگاه } x+\frac{۱}{x}\geqslant ۲ \qquad (۳)$$

که برابری فقط به‌ازای $x=۱$ برقرار است. مسألهٔ بعدی یافتن راهی برای تبدیل این حکم به‌حکمی است که درستی آن ازقبل برای ما معلوم باشد. کاری که باید کرد این است که دوطرف نابرابری (۳) را در x ضرب کنیم. دراین صورت نابرابری به‌صورت

$$\text{اگر } x>۰\text{،} \quad x^۲+۱\geqslant ۲x$$

در می‌آید که با

$$\text{اگر } x>۰\text{،} \quad x^۲-۲x+۱\geqslant ۰$$

هم‌ارز است. به‌این ترتیب عبارت $(x-۱)^۲$ آشکارمی‌شود، و می‌توانیم نابرابری اخیررا به‌صورت

$$\text{اگر } x>۰\text{،} \quad (x-۱)^۲\geqslant ۰$$

بنویسیم. برقرار بودن این حکم روشن است زیرا مربع هرعدد حقیقی هرگز منفی نیست.

هرگاه بتوانیم استدلال را به‌ترتیب عکس انجام‌دهیم، برهانی برای(۳) کشف کرده‌ایم. بنابرقضیهٔ ۲، این واقعیت که

$$(x-۱)^۲\geqslant ۰ \quad (\text{به‌ازای هرعدد حقیقی } x)$$

هم‌ارز است با نابرابری

$$x^2+1 \geqslant 2x.$$

اگر $x>0$، می‌توانیم قضیهٔ ۳ را به‌این نابرابری با $c=1/x$ اعمال کنیم و نتیجه بگیریم که

اگر $x>0$، آنگاه $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

روشن است که برابری برقرار است اگر و تنها اگر $x=1$. □

هدف اصلی ما در این فصل تعمیم قضیهٔ ساده‌ای است که در (۳) ذکر شده‌است. نتیجهٔ (۳) بیان می‌کند که مجموع دوعدد مثبتی که حاصلضربشان ۱ است وقتی مینیمم می‌شود که باهم برابر باشند. در مورد بیش‌از دوعدد چه می‌توان گفت؟ یك تعمیم مستقیم نابرابری (۳) چنین است

قضیهٔ ۶. مجموع n عددمثبت که حاصلضربشان ۱ است همواره ناکوچکتر از n است؛ برابری برقرار است اگر و تنها اگر همهٔ اعداد برابر (با ۱) باشند. یعنی، هرگاه $a_i>0$ $(i=1,2,\dots,n)$ و هرگاه $a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_{n-1}\cdot a_n=1$، آنگاه

$$\sum_{1}^{n} a_i \geqslant n$$

که درآن برابری برقرار است اگر و تنها اگر به‌ازای هر i، $a_i=1$.

برهان این قضیه را تا صفحهٔ ۲۱ به‌تعویق می‌اندازیم.

یك تعبیر هندسی این قضیه چنین است: هرگاه حجم یك جعبهٔ n بعدی («مکعب مستطیل») برابر با ۱ باشد، مجموع طولهای یالهای آن وقتی کمترین مقدار است که مکعبی n بعدی باشد. با حالتهای $n=2$ و $n=3$ از این قضیه کاملا آشنا یید. البته، به‌آسانی نمی‌توان فضایی با بعد بزرگتراز ۳ را تجسم کرد. با این حال امروزه ریاضیدانان غالباً مسائلی را در فضاهایی با بعد بزرگتر از ۳ و حتی در فضاهایی با بعد نامتناهی بررسی می‌کنند.

این قضیه را در حالت $n=2$ می‌توان به صورت دیگری بیان کرد: اگر b_1 و b_2 مثبت باشند، آنگاه (فرض کنید $a_1=b_1/b_2$ و $a_2=b_2/b_1$)

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_1}\geqslant 2 \qquad (4)$$

که تنها وقتی برابری برقرار است که $b_1=b_2$.

مسألهٔ ۲. فرض کنیم b_1، b_2، . . .، b_n، n عدد مثبت باشند. قضیهٔ ۶ را چگونه می‌توانید به‌صورتی شبیه به نابرابری (۴) بیان کنید؟

تعریف ۲. A، میانگین حسابی n عدد a_1، . . .، a_n عبارت است از

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

غالباً میانگین حسابی گردایه‌ای از اعداد را متوسط این اعداد می‌نامند.

هرگاه درستی هریك از دو قضیهٔ مفروضی، درستی دیگری را ایجاب کند، گوییم این دو قضیه هم‌ارزند. قضیهٔ زیر با قضیهٔ ۶ هم‌ارز اما برای اثبات مناسبتر است. ابتدا آن را ثابت و سپس از آن برای اثبات قضیهٔ ۶ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۷. حاصلضرب n عدد مثبت که مجموعشان مفروض باشد وقتی بیشترین مقدار را داردکه همهٔ این‌اعداد باهم‌برابر باشند؛ یعنی، هرگاه $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ و $\sum_1^n a_i$ ثابت مثلا برابر با nA باشد، آنگاه

$$a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n\leqslant A^n \qquad (5)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

ازنظرهندسی این قضیه چنین بیان می‌شود: از میان همهٔ جعبه‌های n بعدی که مجموع طولهای یالهای آنها یکی باشد، مکعب nبعدی بیشترین حجم را داراست. بازهم یك بیان هندسی‌هم‌ارز دیگر این‌قضیه چنین است: هرگاه یك پاره خط‌راست به اجزایی به‌تعداد متناهی تقسیم شود، حاصلضرب طول این اجزا وقتی ماکسیمم است‌که باهم برابر باشند.

همچنان که در بالا قول دادیم، ابتدا قضیهٔ ۷ را ثابت می‌کنیم، سپس با استفاده ازاین قضیه، قضیهٔ ۶ را ثابت خواهیم کرد. اثبات قضیهٔ ۷ که در زیرمی‌آید

براین فکر استوار است که اگر n عدد مفروض (با متوسطشان) برابر نباشند، آنگاه می‌توانیم، دو به دو، آنهایی را که بالای متوسطاند کاهش و آنهایی راکه پایین متوسطاند افزایش دهیم تا همهٔ اعداد برابر شوند، که در هر مرحله حاصلضرب افزایش می‌یابد. عمل کردن با n عدد دریك زمان مشکل است، به‌مراتب بهتر است که درهر بار با دوعدد عمل کنیم. چون در نگاه اول برهان این قضیه اندکی پیچیده به‌نظر می‌رسد، همراه با هرمرحله مثالی روشنگر می‌آوریم.

برهان قضیهٔ ۷. اگر n عدد a_i که درآغاز داده شده‌اند هر یك با A برابر باشند، آنگاه همچنان که بیان شد برابری در (۵) برقرار است. اگر یکی از اعدادمثبت مفروض با A برابر نباشد، آنگاه حداقل یك‌عدد بزرگتر از A و یك عددکوچکتر از A وجود دارد.

دوعدد یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر انتخاب می‌کنیم، آنها را a_1 و a_2 می‌نامیم، ومی‌نویسیم

$$a_1=A-h,\quad a_2=A+k$$

البته h و k مثبت‌اند.

برای مثال، فرض کنیم $n=4$، واعداد مثبت مفروض ۲، ۳، ۵، و ۶ باشند در این صورت $A=4$، و هیچ یك از اعداد مفروض با A برابر نیستند. می‌توانیم $a_1=3$ و $a_2=6$ را انتخاب کنیم. در این صورت $a_1=4-1$ و $a_2=4+2$. دراین صورت $h=1$ و $k=2$.

اکنون a_1 و a_2 را تغییر می‌دهیم به گونه‌ای که حاصلضرب n عدد a_i افزایش یابد ولی مجموع آنها یعنی nA ثابت بماند.

فرض کنیم، $a_1'=A$، و

$$a_2'=A+k-h.$$

در این صورت

$$a_1'+a_2'=2A+k-h$$
$$=a_1+a_2\,;$$

اکنون ۳ و ۶ را تغییر می‌دهیم به‌گونه‌ای که حاصلضرب چهار عدد مفروض افزایش یابد ولی مجموع آنها $A\times 4=16$ ثابت بماند.

فرض کنیم $a_1'=4$، و قرار دهیم

$$a_2'=4+2-1=5$$

دراین‌صورت

$$a_1'+a_2'=4+(4+2-1)$$
$$=(4-1)+(4+2)$$
$$=a_1+a_2\,;$$

از این‌رو

$$a'_۱+a'_۲+a_۳+\dots+a_n = \sum_۱^n a_i = nA.$$

از این‌رو

$$۴+۵+۲+۵ = ۳+۶+۲+۵ = ۴\times ۴.$$

روشن است که $a'_۱$ و $a'_۲$ مثبت‌اند، اکنون گردایهٔ دومی از n عدد مثبت در دست داریم که مجموع آنها با مجموع n عدد اولیه یکی است.

ملاحظه می‌کنیم که

$$a'_۱a'_۲ > a_۱a_۲.$$

این به‌روشنی برقرار است، زیرا از

$$a'_۱a'_۲ = A(A+k-h) = A^۲+(k-h)A$$

و

$$a_۱a_۲ = (A-h)(A+k) = A^۲+(k-h)A-hk,$$

نتیجه می‌شود

$$a'_۱a'_۱ = a_۱a_۲+hk;$$

که‌در آن hk مثبت است. بنا بر تعریف، نتیجه می‌شود

$$a'_۱a'_۲ > a_۱a_۲.$$

لذا،

$$a'_۱a'_۲a_۳\dots a_n > a_۱a_۲a_۳\dots a_n.$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$۴\times ۵ > ۳\times ۶$$

زیرا از

$$۴\times ۵ = ۴(۴+۲-۱) = ۴^۲+(۲-۱)\times ۴$$

و

$$۳\times ۶ = (۴-۱)(۴+۲) = ۴^۲+(۲-۱)۴-۱\times ۲$$

نتیجه می‌شود

$$۴\times ۵ = ۳\times ۶+۱\times ۲$$

لذا،

$$۴\times ۵\times ۲\times ۵ > ۳\times ۶\times ۲\times ۵.$$

حال اگر $A=a'_۱=a'_۲=a_۳=\dots=a_n$، اثبات تمام است. درغیر این‌صورت، حداقل یکی از n عدد مجموعهٔ جدید $a'_۱، a'_۲، a_۳، \dots، a_n$ از A بزرگتر و حداقل

یکی‌ازآنها از A کوچکتراست آنهارا به‌ترتیب b_1 و b_2 می‌نامیم. با تکرار بحث فوق‌که درآن نقش a_1 و a_2 به b_1 و b_2 واگذار می‌شود، می‌توانیم مجموعهٔ‌دیگری متشکل از n عدد مثبت بیابیم کـه مجموع آن $n \cdot A$ وحاصلضرب آن از حاصلضرب مجموعه a'_1، a'_2، a_3، . . .، a_n بزرگتر باشد.

هرگـاه این فرایند را متوالیاً تکـرار کنیم، آنگاه‌بعداز حداکثر $n - 1$ مرحله (که شامل مرحلهٔ نخست نیز می‌شود)، مجموعـه‌ای متشکل از n عـدد مثبت ساخته‌ایم که همه‌با A برابر و مجموع آنها $n \cdot A$ است اما حاصلضرب آنها ازحاصلضرب هر nعدد مثبت دیگری کـه همان مجموع را دارند بزرگتر است.
(اینکه حداکثر به $n - 1$ مرحله نیاز است احتیاج به‌تفکر دارد.) □

در مثال مـورد بحث، اولین مجموعه $\{۳,۶,۲,۵\}$ می‌باشد. دومین مجموعه $\{۴,۵,۲,۵\}$ است. بعـد از دومین مـرحله، مجموعه تبدیل می‌شود بـه $\{۴,۴,۳,۵\}$. ($b_1 = ۲$، $b_2 = ۵$، $b'_1 = ۴$ و $b'_2 = ۳$.) بعد از مرحلـهٔ سوم که آخرین‌مرحله‌نیز هست مجموعه تبدیل می‌شود به $\{۴,۴,۴,۴\}$. متذکر می‌شویـم کـه می‌توانستیم $a_1 = ۲$ و $a_2 = ۶$ را انتخـاب بکنیم. در ایـن صورت دومین مجموعـه بـه‌صورت $\{۴,۴,۳,۵\}$وسومین‌مجموعه‌به‌صورت $\{۴,۴,۴,۴\}$ درمی‌آمد. لذا در بعضی مجموعه‌ها فرایند را باکمتر از $n - 1$ مرحله می‌توان به‌اتمام رسانید.

اکنون ازاین قضیه استفاده‌کرده، قضیهٔ ۶ را ثابت می‌کنیم.

برهان قضیهٔ ۶. داریم $a_i > ۰$ $(i = ۱,۲,\ldots,n)$ و $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = ۱$؛ می‌خواهیم ثابت‌کنیم $\sum_1^n a_i \geqslant n$ و برابری تنها وقتی برقرار است که همهٔ a_iها برابر باشند. مسأله را با روشی کـه در ریاضیات مکرراً ازآن استفاده می‌شود به مسألهٔ قبلی تبدیل می‌کنیم. یعنی، هریك از اعداد مفروض را بـه مجموع همهٔ آنها تقسیم می‌کنیم. در نتیجه n عدد جدید به‌دست می‌آیدکـه مجموع آنها برابر با ۱ است و می‌توانیم قضیهٔ ۷ را به‌کارگیریم. لذا فرض می‌کنیم

$$s = \sum_1^n a_i, \qquad b_i = \frac{a_i}{s} \cdot$$

چون میانگین حسابی b_iها عبارت است از

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{i=n} b_i=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{i=n}\frac{a_i}{s}$$

$$=\frac{۱}{n}\cdot\frac{s}{s}=\frac{۱}{n},$$

از قضیهٔ ۷ نتیجه می‌گیریم که

$$b_۱\cdot b_۲\cdot\dots\cdot b_n\leqslant\left(\frac{۱}{n}\right)^n$$

که برابری تنها وقتی برقرار است که

$$b_۱=b_۲=\dots=b_n=\frac{۱}{n}.$$

این گزاره برحسب اعداد اولیهٔ a_i می‌شود

$$\frac{a_۱\cdot a_۲\cdot\dots\cdot a_n}{s\cdot s\cdot\dots\cdot s}\leqslant\left(\frac{۱}{n}\right)^n$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که $a_۱=a_۲=\dots=a_n$. لیکن بنا بر فرض $a_۱\cdot a_۲\cdot\dots\cdot a_n=۱$. بنابراین

$$\frac{a_۱\cdot a_۲\cdot\dots\cdot a_n}{s\cdot s\cdot\dots\cdot s}=\left(\frac{۱}{s}\right)^n\leqslant\left(\frac{۱}{n}\right)^n$$

یا، بنا برقضیه‌های ۳ و ۴،

$$n\leqslant s,$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که $a_i=۱$. □

شما خود می‌توانید از قضیهٔ ۶، قضیهٔ ۷ را نتیجه بگیرید.

به‌عنوان یك کاربرد سادهٔ قضیهٔ ۶ به ازای $n=۲$، ثابت می‌کنیم که اگر $x^۲$ مثبت باشد (یعنی x عددی حقیقی و مخالف صفر باشد)، آنگاه

$$\frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}} \leqslant \frac{۱}{۲}.$$

به‌روشنی اگر $x^{۲} > ۰$،

$$\frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}} = \frac{۱}{\frac{۱}{x^{۲}}+x^{۲}};$$

اما، بنا بر قضیهٔ ۶، $۲ \leqslant (۱/x^{۲})+x^{۲}$. لذا، بنا بر قضیهٔ ۳، اگر x صفر نباشد،

$$\frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}} \leqslant \frac{۱}{۲}$$

برابری تنها وقتی برقرار است که $x=\pm ۱$. □

تبصره. با قراردادن $x=۰$ در آخرین نابرابری، ملاحظه می‌کنیم که این نابرابری به‌ازای $x=۰$ و لذا به‌ازای همهٔ xها برقرار است.

مسألهٔ ۳. نشان دهید: اگر $a>۱$، آنگاه $\log_{۱۰} a+\log_{a} ۱۰ \geqslant ۲$.

تعریف ۳. میانگین هندسی n عدد مثبت $a_{۱}, a_{۲}, \ldots, a_{n}$ که آن‌را با G نمایش می‌دهیم عبارت‌است از ریشهٔ nام حاصلضرب آنها:

$$G=\sqrt[n]{a_{۱} \cdot a_{۲} \cdot \ldots \cdot a_{n}}.$$

قضیه‌های ۶ و ۷ با قضیهٔ میانگینهای حسابی و هندسی که قضیه‌ای مفید و مشهور است هم‌ارزند:

قضیهٔ ۸. میانگین هندسی n عدد مثبت، نابزرگتر از میانگین حسابی آنهاست. دومیانگین برابرند اگر و تنها اگر این n عدد برابر باشند.

برهان. نتیجهٔ مطلوب

$$G \leqslant A$$

مستقیماً از (۵) نتیجه مــی‌شود به‌شرط آنکه قضیهٔ ۴ را با $p=1/n$ به‌کار بریم. برابری تنها وقتی برقرار است که هر $a_i=G$. □

به‌طریق مشابه، می‌توان با استفاده از هریك از سه قضیهٔ اخیر دوتای دیگر را ثابت کرد. شما این‌کار را انجام دهید.

در فصل بعد چند کاربــرد هندسی از سه قضیهٔ اخیر را شرح خــواهیم داد. درحال‌حاضر، خودمان را به‌دوکاربرد محدود می‌کنیم. نخستین کاربرد چنین است: از همهٔ جعبه‌های سه‌بعدی با مساحت‌کل مفروض، مکعب دارای بیشترین حجم است.

برهان. فرض کنیم a، b، و c طول، عرض، و ارتفاع جعبه‌ای به‌مساحت S و حجم V باشند. روشن‌است که

$$V=abc,\quad S=2\,(ab+bc+ca)\,.$$

فرض اینکه S ثابت است بدین‌معنی است‌که مجموع سه‌مقدار ab، bc و ca ثابت است. این امر استفاده از قضیهٔ ۷ یا قضیهٔ ۸ را پیشنهاد می‌کند که در نتیجه

$$(V^2)^{1/3}\leqslant\frac{S}{6}\quad \text{یا}\quad (ab\cdot bc\cdot ca)^{1/3}\leqslant\frac{ab+bc+ca}{3}$$

لذا،

$$V\leqslant\left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

برابری برقرار است اگر و تنها اگر $ab=bc=ca$. از اینجا در می‌یــابیم که حجم وقتی حداکثر است‌که $a=b=c$، یعنی، وقتی که جعبه مکعب باشد. □

دومین کاربــرد چنین است: از میان استوانــه‌های مستدیر قائم با حجم V استوانه‌ای‌کمترین مساحت را داردکه قطر آن با ارتفاعش برابر باشد.

برهان. مساحت، شعاع و ارتفاع استوانه مستدیر قــائم به‌حجم V را به ترتیب با S، r و h نشان می‌دهیم. می‌دانیم

$$S=2\pi(r^2+rh),\quad V=\pi r^2 h.$$

بنا براین،

$$S=2\pi\left(r^2+\frac{V}{\pi r}\right)$$

$$=2\pi\left(r^2+\frac{V}{2\pi r}+\frac{V}{2\pi r}\right)$$

از این رو می‌توانیم $S/(6\pi)$ را به‌صورت میانگین حسابی سه‌عدد r^2، $V/(2\pi r)$ و $V/(2\pi r)$ تلقی کنیم، بنا براین، طبق قضیهٔ ۸،

$$\frac{S}{6\pi}\geqslant\left(\frac{V^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

لیکن سمت راست این نابرابری مقداری ثابت است. بنا براین، S وقتی کمترین مقدار است که برابری برقرار باشد، و این وقتی است که

$$V=2\pi r^3 \quad \text{یا} \quad r^2=\frac{V}{2\pi r}$$

لذا، S وقتی کمترین مقدار است که $2r=h$. □

مسألهٔ ۴. ثابت کنید هرگاه a و b مثبت باشند،

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\frac{a+nb}{n+1}\qquad(n=1,2,3,\ldots)\tag{6}$$

که برابری تنها وقتی برقرار است که $a=b$.

مسألهٔ ۵. نشان دهید اگر $n\geqslant 2$،

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

مسألهٔ ۶. ثابت کنید هرگاه a، b، و c منفی نباشند، آنگاه

$$9\,abc\leqslant(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

مسألهٔ ۷. با استفاده از نابرابری (۳)ی این بخش نشان دهید که هرگاه $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$، آنگاه

$$\left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_i}\right) \geqslant n^2 .$$

در فصلهای بعد گهگاه مفهوم قدر مطلق را بهکار می‌بریم. در اینجا آن را تعریف و به‌اختصار دربارهٔ کاربرد آن بحث می‌کنیم.

تعریف ۴. قدر مطلق عدد x برابر است با x هرگاه $x \geqslant 0$ و برابر است با $-x$ هرگاه $x < 0$.

قدر مطلق x را به $|x|$ نشان می‌دهند. تعریف ۴ مبین آن است که

$$\text{هرگاه}\quad x \geqslant 0،\qquad |x| = x$$

و

$$\text{هرگاه}\quad x < 0،\qquad |x| = -x$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که $|x|^2 = x^2$ و، مهمتر از این،

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

مثلاً

$$|-6| = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 .$$

هرگاه نقاط یك خط راست را همچنان که در صفحهٔ ۳ توضیح دادیم با اعداد حقیقی مشخص کنیم، آنگاه $|x|$ درست فاصلهٔ نقطهٔ x، یا $-x$، تا مبدأ است. عدد $|x-y|$ فاصلهٔ نقطه‌های x و y خط حقیقی است. این عدد با فاصلهٔ نقطهٔ $-x$ تا نقطهٔ $-y$ نیز برابر است. به‌روشنی،

$$|x-y| = |y-x|.$$

اگر کسی وجود داشت که فاصلهٔ بین دونقطهٔ خط راست را درك نمی‌کرد، می‌توانست از نکات مذکور بالا برای تعریف مفهوم فاصله استفاده کند. در فصلهای بعد به‌خاطر راحتی، غالباً از نماد $\overline{AB}$ برای نمایش فاصلهٔ بین نقطه‌های هندسی A و B استفاده می‌کنیم.

تذکر این مطلب که یک نابرابری (قدر مطلقی) همچون

$$|x| < |y|$$

هم‌ارز با دو نابرابری است،مهم است. مثلاً، $|x| < ۳$ هم‌ارز با $-۳ < x < ۳$ است. معادلهٔ $|x| = ۳$ دارای دو ریشه است: ۳ و ۳−. بدیهی است که $|x| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

مسألهٔ ۸. نشان دهید $|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$. تعبیر هندسی این نابرابریها چیست؟

۲

قضیه‌های برابر محیطی

۱.۲ ماکسیمم و مینیمم

مسألهٔ تعیین مستطیلی با کوچکترین محیط از بین مستطیلهایی که مساحت ۱ دارند ودر بخش ۲.۱ بدان برخوردیم تنها یکی ازمسائل مربوط به‌ماکسیمم و مینیمم درهندسه به‌شمار می‌رود. قبل از تولد مسیح این نوع مسائل را هندسه‌دانهای یونانی مطالعه می‌کردند. البته، معلوم نیست ابتدا چه قومی مسائل شامل ماکسیمم ومینیمم رامطرح کردند، لیکن بسیاری از این مسائل به‌طور کاملا طبیعی پیش می‌آیند و ممکن است مردمی با فرهنگ ابتدایی با مسائلی از این نوع مواجه شده و یا هنوزهم مواجه شوند. مثلا، چه چیزی باعث می‌شود که ساقهٔ گلها، تنهٔ درختان، و بسیاری اشیاء طبیعی دیگر به‌شکل استوانهٔ مستدیر درآیند، و چرا قطرات کوچك آب و حبابهای شناور در هوا تقریباً کروی شکل هستند، و چرا وقتی یك گله آهو مورد حملهٔ گرگها واقع می‌شود افراد گله یك دایره تشکیل می‌دهند؟ باید اذعان داشت که این گونه مسائل فقط به‌طورغیرمستقیم باریاضیات سروکار دارند، لیکن می‌توانند تفکر ریاضی را برانگیزند. مسائلی وجود دارند که در حد بیشتری بـا ریاضیات ارتباط مستقیم دارند. مثلا یك قطعه زمین به‌چه‌شکل باشد تا با حصاری به‌طول معین بتوان بیشترین مساحت را محصور کرد، و ابعاد یك ظرف استوانه‌ای چقدر انتخاب شود

تا با مساحت مفروضی بیشترین گنجایش را داشته باشد؟ آیا مسأله‌های دیگری به نظرتان می‌رسد؟ یونانیها بیشتر به پدیده‌های طبیعی همچون آرایش شش ضلعی خانه‌های کندوی عسل علاقه‌مند بودند. اما با مسائل عملی نیز مواجه بودند. بسیاری از آن مسائل مانند مسألهٔ براورد اندازهٔ اردوی دشمن به‌جنگ مربوط می‌شد (دقیقاً همچنان که درجهان امروزه چنین است!). کسی مایل نبود که به هنگام سپیده دم با افرادی بسیار اندك در مجاورت دشمن باشد. تعداد افراد اردو را با اندازهٔ اردوگاه تقریباً متناسب می‌دانستند. معمولا اندازهٔاردوی دشمن را با طول محیط آن می‌سنجیدند. غالباً این‌روند نتیجه‌های گمراه‌کننده‌ای به‌بار می‌آورد، وازاین‌رو،فکر یك راه حل بهتر و نزدیکتر با روشهای ریاضی برای این مسأله به‌وجود آمد.

سؤالات ریاضی که زمینه‌ساز بسیاری از مثالهای فوق‌الذکر است دو نوع‌اند: ازمیان همهٔ اشکال هندسی‌که ویژگی معینی دارندکدام یك بزرگترین مساحت یا بزرگترین حجم را دارد؛ و از میان همهٔ اشکال با یك ویژگی معین، کدام یك محیطش کوچکتر و یا مساحت رویه‌اش کمتراست؟ تلویحاً هردو مسأله را مسأله‌های برابر محیطی می‌نامند؛ «برابر محیطی» به‌معنای «داشتن محیط برابر» است. قضیهٔ برابر محیطی مشهوری،که پس‌از کشف آن بیش‌از دوهزارسال طول کشید تا بشر به‌اثبات آن نایل شد، جواب ردهٔ بسیاری ازاین سؤالها را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۹ (قضیهٔ برابرمحیطی).

(الف) از میان همهٔ شکلهای مسطح با محیط مفروض، دایره بزرگترین مساحت را داراست.

(ب) از میان همهٔ شکلهای مسطح با مساحت‌مفروض، دایره‌کوچکترین‌محیط را داراست.

به‌زبانی‌که مقتضی با فضای ۳ بعدی باشد، این قضیه بیان می‌داردکه:

(الف) از میان همهٔ اجسامی‌که مساحت مفروضی دارند، کره بزرگترین حجم را داراست.

(ب) از میان همهٔ اجسامی که حجم مفروضی دارند، کره کوچکترین مساحت را داراست.

دراین فصل چند قضیهٔ برابرمحیطی را مورد بحث قرار خواهیم داد.

موضوع را بـا قضایـای ساده‌تـر شروع می‌کنیم و بـا بحثی درباب خود قضیهٔ برابرمحیطی خاتمه می‌دهیم. ابتدا اجازه می‌خواهم تا از تاریخ این قضیهٔ مشهور ذکرمختصری به‌میان آورم. اقلیدس که حدود ۳۰۰ سال قبل‌ازمیلاد می‌زیست، جواب مسألهٔ برابرمحیطی در مورد مستطیلها را می‌دانست؛ و احتمالا مدتها قبل از آن نیز این مسأله را می‌دانستند، زیرا بسیاری از قضیه‌های کتاب اصول اقلیدس کارابداعی اقلیدس نیستند. ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل‌ازمیلاد)، یکی از بزرگترین‌ریاضیدانان همهٔ زمانها، صورت قضیهٔ برابرمحیطی را می‌دانسته است. با شروع دورهٔ مسیحیت مطالعهٔ ماکسیمم و مینیمم در هندسه پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است. در واقع می‌دانیم که زنودوروس[1]، که زمانی بین سالهای ۲۰۰ قبل‌ازمیلاد و ۹۰ بعدازمیلاد می‌زیسته کتابـی تحت عنوان شکلهای برابر محیط نـوشته است. متأسفانـه، هیچ نسخه‌ای ازکتاب وی برای مطالعهٔ ما باقی نمانده است؛ لیکن نتایجی راکه او بـه دست آورده بود پاپوس اسکندرانی که حدود ۳۰۰ میلادی می‌زیست مجدداً بیان‌و ثابت‌کرد. البته ما نسخه‌هایی ازکارهای اورا در دست داریم.[2] البته پاپوس قضیهٔ برابر محیطی را می‌دانست و جالب توجه‌تر آنکه معتقدند وی ثابت‌کرده بود کـه مساحت دایره بزرگتراست از مساحت‌هرچند ضلعی‌که با آن محیط برابر داشته‌باشد. اثبات وی اساساً دقیق و پیگیری آن آسان است.

بعد از کار هندسه‌دانان یونانی تـا زمان سیمون لـوئیلیه[3] دانشمند سویسی اواخرقرن هیجدهم و‌پس‌ازاو‌همکار وهموطنش، یاکوب اشتاینر[4] (۱۷۹۶-۱۸۶۳) پیشرفت چندانی حاصل نشد. روشهایی راکه لـوئیلیه و اشتاینر ضمن تحقیقاتشان بسط وگسترش دادند تأثیر عظیمی بر ریاضیات داشته‌اند و هنوزهم مورد استفاده قرارمی‌گیرند. روشهای اشتاینر اساساً هندسی بودند (نه جبری یا تحلیلی)، یعنی، روشهایی ترکیبی بودند. به‌عبارت دیگر، وی بـدون ارجاع بـه‌قضیه‌های جبر و حسابان و روش هندسهٔ تحلیلی، و تنها برمبنای ویژگیهای هندسی اشکال استدلال می‌کند. (شما در مطالعهٔ هندسه مسطحه از روشهای ترکیبی استفاده‌کرده‌یامی‌کنید.) اشتاینر با روشهای خودبسیاری از مسائلی را حل کردکه حتی به‌کمک حسابان که نیوتن ولایبنیتز درقرن‌هفدهم اختراع کرده‌بودند حل نمی‌شد. اما،کاراشتاینر سبب‌رشد

1) Zenodoros

2) Pappus d' Alexandrie, *La Collection Mathèmatique*, Book V, edited by P. VerEcke, Brouwer, Paris (1933).

3) Simon Lhuilier 4) Jacob Steiner

ریاضیات تحلیلی، به‌ویژه حساب تغییرات شد. این امر به‌علت خطایی بود که در برهانهای وی از قضیهٔ برابر محیطی رخ داده بود. این خطا را کارل وایرشتراس[1] ریاضیدان آلمانی و بنیانگذار اعمال دقت، مشخصهٔ ریاضیات جدید، پیداکرده‌بود. برای پیداکردن شکافی که در برهانهای اشتاینر وجود داشت وایرشتراس مجبور به گسترش بیشتر حسابان شد. وی مجبور شد تاکل موضوع را برمبنایی منطقی و مستحکم پایه‌گذاری‌کند. کار اشتاینر دارای جذابیت بسیاری است. من کوشش کرده‌ام مباحث این فصل را با طرز تفکر اشتاینر بیان و روشهایش را درهر فرصت روشن کنم.

۲.۲ قضیه‌های برابرمحیطی در مثلثها

چند ضلعیها ساده‌ترین اشکال هندسی، و مثلثها مقدماتی‌ترین چندضلعیها هستند. بدین سبب، پایهٔ تحقیقات قضیه‌های برابر محیطی از دو قضیه دربارهٔ مثلثها تشکیل می‌شود.

قضیهٔ ۱۰.

(الف) از میان مثلثهایی که قاعدهٔ مشترك و محیط برابر دارند، مثلث متساوی‌الساقین بزرگترین مساحت را داراست.

(ب) از میان همهٔ مثلثهایی که قاعدهٔ مشترك و مساحت برابر دارند مثلث متساوی‌الساقین‌کوچکترین محیط را داراست.

همچنین از قضیه‌ای‌استفاده می‌کنم‌که با روش‌قضیهٔ ۱۰ (الف) ثابت می‌شود، ودر واقع قضیهٔ قویتری است.

قضیهٔ ۱۰ (الف). اگر دو مثلث دارای یك قاعده ویك محیط باشند، آنکه‌اختلاف دوساقش‌کوچکتراست مساحتی بزرگتردارد.

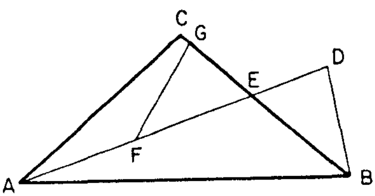
اکنون به‌سراغ اثبات قضیهٔ۱۰ (الف) می‌رویم؛ وبه‌منظورآنکه قضیه‌هرچه بیشتر فهمیده شود آن را به‌دو راه کاملا متفاوت اثبات می‌کنیم و به‌راه دیگری

1) Karl Weierstrass

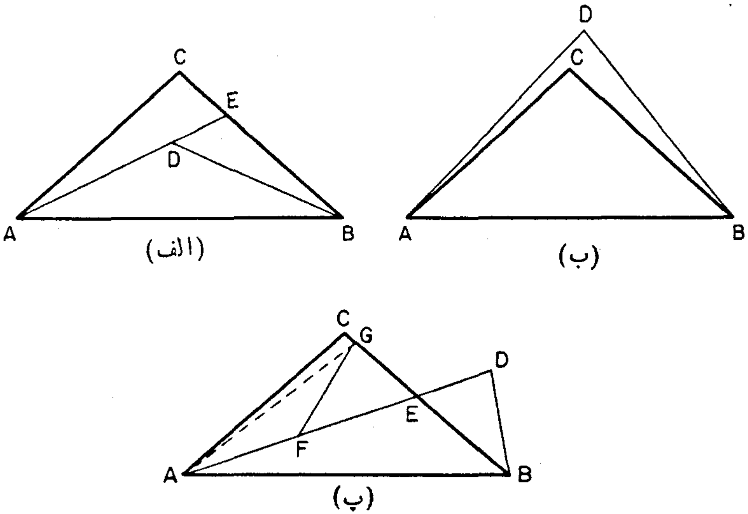
نیز اشاره می‌کنیم. درکتابهای درسی ارائهٔ چند برهان برای یك قضیه معمول نیست، اما من احساس می‌کنم که باید چنین باشد. نه فقط این روش از راه آشکار کردن روابط بین مفاهیم مختلف منجر به‌درك عمیقتر نتایج می‌شود، بلکه این واقعیت را درنظر دارد که ممکن است برهانی برای شما ساده‌تر اما برای دوست شما مشکلتر باشد، درحالی‌که وی ممکن است برهان دیگری را به‌بهترین وجه درك کند.

من قویاً به‌شما توصیه می‌کنم که به هنگام مطالعهٔ برهانهایی که ذیلا می‌آیند مرحله به مرحله شکل یا شکلهای مربوط به‌برهان را رسم کنید. شکلی که قسمت به قسمت رسم شود غالباً از شکلهای کاملی که در متن درس ملاحظه می‌شود مطلب را روشنتر می‌سازد. بهتر است به‌هر شکل که می‌رسید با شکلهای مختلف خود آن را بیازمایید؛ و ببینید کدام کارایی دارد و کدام کارایی ندارد. این راهی است که شخص طی آن برهان قضیه‌ای راکشف و یا برهانی را که روی تختهٔ سیاه ارائه می‌شود درك می‌کند.

برهان اول قضیهٔ ۱۰ (الف). فرض کنیم ABC یك مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ AB و ABD مثلث دیگری با همان قاعده و با همان محیط باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که $\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{BD}$. (نماد $\overline{XY}$ فاصلهٔ X تا Y را نشان‌می‌دهد.) چون‌محیط‌مثلث ABD بامحیط مثلث ABC مساوی‌است و $\triangle ABD$ متساوی‌الساقین نیست، باید دوضلع AD و BD چنان باشند که مثلا $\overline{AD}>\overline{AC}$ و $\overline{BD}<\overline{AC}$ (شکل ۱.۲ ملاحظه شود). همچنین AD باید BC را در نقطه‌ای مانند E، که $E\neq D$، قطع کند. اگر چنین نباشد، یا D داخل $\triangle ABC$ است یا بر مرز مثلث قرار دارد [شکل ۲.۲ (الف)] یا C داخل $\triangle ABD$ است یا بر مرز آن قرار دارد [شکل ۲.۲ (ب)]. اینکه هیچ یك از این دوحالت اتفاق نمی‌افتد از قضیه‌ای نتیجه می‌شود که بیان می‌کند مجموع طولهای دو ضلع یك مثلث بزرگتر از طول ضلع



شکل ۱.۲



شکل ۲.۲

سوم است. این استدلال ساده است ولی شاید واضح نباشد، و بنابراین آن را توضیح می‌دهیم.

ابتدا فرض کنیم D داخل $\triangle ABC$ و E تقاطع BC با امتداد AD باشد. لذا از قضیه‌ای که هم‌اکنون یادآور شدیم نابرابریهای زیر نتیجه می‌شود

$$\overline{AC}+\overline{CE}>\overline{AD}+\overline{DE}$$

و

$$\overline{DE}+\overline{EB}>\overline{BD}\,.$$

پس، بنابر قضیهٔ ۲،

$$\overline{AC}+(\overline{CE}+\overline{EB})+\overline{DE}>\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{DE}$$

یا

$$\overline{AC}+\overline{CB}>\overline{AD}+\overline{BD}\,.$$

این حکم اخیر با فرض

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{BD}$$

در تناقض است. اگر $D=E$، آنگاه استدلال فوق باز به‌تناقض بـا فرض منجر می‌شود. لذا همچنان که ادعا کردیم D خارج $\triangle ABC$ است.

اینك، فرض کنیم C داخل یا برمرز $\triangle ABD$ بـاشد. شکـل ۲.۲(ب) را ببینید. در ایـن صـورت بـا همان استـدلال قبل، مـی‌توانیم نتیجه بـگیریـم $\overline{AD}+\overline{DB}>\overline{AC}+\overline{CB}$، که باز با فرض در تناقض است. اکنون بـه برهـان قضیه می‌پردازیم.

فرض کنیم F روی AE باشد و $EF=EB$. این انتخاب F امکانپذیر است زیرا $\overline{BE}<\overline{AE}$، واقعیتی که به‌وسیلهٔ نابرابری

$$\measuredangle EAB<\measuredangle CAB=\measuredangle EBA$$

تضمین شده است. همچنین EG را روی EC (یا امتداد آن) به‌طوری جدامی‌کنیم که $\overline{EG}=\overline{ED}$. ثابت خواهیم کرد که G بین C و E قـرار دارد. بعد، ازاینکـه $\triangle EFG$ با $\triangle EBD$ قابل انطباق است، نتیجه خواهیم گرفت که مساحت $\triangle ABC$ ازمساحت $\triangle ABD$ بزرگتر است. برای اثبات اینکه G بین C و E است، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$\overline{FG}=\overline{BD} \qquad (\triangle EFG\cong\triangle EBD)$$

و

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{BD} \qquad (\text{بنا بر فرض})$$

اکنون می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\overline{AC}+\overline{BC}&=\overline{AF}+\overline{FD}+\overline{FG}\\&=\overline{AF}+\overline{BG}+\overline{FG}\\&=\overline{AF}+\overline{BC}\pm\overline{CG}+\overline{FG}\end{aligned}$$

یا

$$\overline{AC}=\overline{AF}\pm\overline{CG}+\overline{FG}.$$

اگر G بین E و C باشد از علامت منها و اگر در طرف دیگر C باشد از علامت بعلاوه استفاده می‌شود. حالت

$$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CG}+\overline{FG}$$

ممکن نیست زیرا خط مستقیم کوتاهترین فاصلهٔ بین دونقطه است؛ لذا، G بین E و C قرار دارد.

اگر مساحت مثلث XYZ را با $T(XYZ)$ نشان دهیم، داریم

$$\begin{aligned} T(ABC) &= T(ABE)+T(EFG)+[T(AFG)+T(ACG)] \\ &= [T(ABE)+T(BDE)]+[T(AFG)+T(ACG)] \\ &= T(ABD) \qquad\qquad +[T(AFG)+T(ACG)]. \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$T(ABC) > T(ABD). \qquad \square$$

قبل از آنکه به برهان دوم قضیهٔ ۱۰ (الف) بپردازیم، اجازه دهید تا درمورد چند نماد تـوافق کنیم و قضیه‌ای را از هندسهٔ مسطحه بـه‌خاطر آوریم. یك‌بار و برای همیشه توافق می‌کنیم که هرگاه ABC یك مثلث باشد، طول اضلاع آن را به a، b، و c نشان دهیم؛ یعنی

$$a=\overline{BC}, \quad b=\overline{AC}, \quad c=\overline{AB}\,.$$

همچنین قرار می‌گذاریم که مساحت آن را به T و محیط آن را به P نشان دهیم. قضیه‌ای که می‌خواهیم یادآوری کنیم از آنِ هرون[1] است.

قضیه (هرون). در هرمثلث ABC،

$$۱۶T^۲=[(a+b)^۲-c^۲][c^۲-(a-b)^۲], \qquad (۷)$$

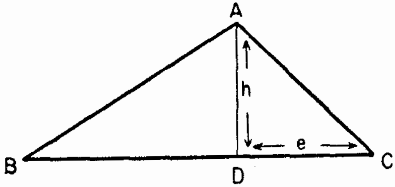
و

$$۱۶T^۲=P(P-۲a)(P-۲b)(P-۲c). \qquad (۷')$$

برهان. فرض کنیم طول ارتفاع AD (شکل ۳.۲ ملاحظه‌شود) برابر با h و $e=\overline{DC}$. در این صورت

$$c^۲-(a-e)^۲=h^۲=b^۲-e^۲.$$

1) Heron



شکل ۳.۲

لذا،

$$c^۲-a^۲+۲ae=b^۲;$$

یا، چون $a\neq ۰$،

$$e=\frac{۱}{۲a}[a^۲+b^۲-c^۲].$$

مساحت مثلث برابر بانصف حاصلضرب طولهای قاعده و ارتفاع است. با استفاده از این قضیه و برابری $b^۲-e^۲$ با $h^۲$، داریم

$$۲T=ah,$$

$$۴T^۲=a^۲h^۲=a^۲(b^۲-e^۲)=a^۲\left[b^۲-\frac{۱}{۴a^۲}(a^۲+b^۲-c^۲)^۲\right],$$

$$\begin{aligned}۱۶T^۲&=۴a^۲b^۲-(a^۲+b^۲-c^۲)^۲\\&=[۲ab+(a^۲+b^۲-c^۲)][۲ab-(a^۲+b^۲-c^۲)]\\&=[(a+b)^۲-c^۲][c^۲-(a-b)^۲].\end{aligned}$$

تا اینجا فرمول (۷) به‌اثبات رسید. اما چون هرعامل سمت‌راست تفاضل دو مربع است طرف دوم را می‌توان مجدداً تجزیه و به‌صورت زیرنوشت

$$(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

اگر به‌جای $a+b+c$ مقدار P راقرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم که (۷)را می‌توانیم به‌صورت (′۷) بنویسیم. □

شاید شما با این‌قضیه به‌شکل نه‌چندان مناسب

$$T=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$$

که در آن $s=P/2$، بیشتر آشنا باشید. این از تقسیم دو طرف ('۷) بر ۱۶ و جذر گرفتن از دوطرف برابری حاصل به‌دست می‌آید. برهان دوم قضیهٔ ۱۰ (الف) بر (۷) استوار است.

برهان دوم قضیهٔ ۱۰ (الف). با بررسی (۷)، ملاحظه‌می کنیم که $16T^2$ حاصلضرب دوعامل است. اگر P و c ثابت باشند، آنگاه $a+b$ نیز ثابت و لذا اولین عامل ثابت است. از این‌رو حاصلضرب $16T^2$ با افزایش عامل دوم افزایش می‌یابد. و این درحالتی است که $a-b$ کاهش یابد. هرگاه $a-b=0$، عامل دوم حداکثر مقدارش را می‌گیرد؛ لذا وقتی $a=b$، T حداکثر می‌شود. □

تمرین. با استفاده از استدلالی که در یکی از برهانهای قضیهٔ ۱۰ (الف) به‌کاررفته است قضیهٔ ۱۰ (الف)′ را ثابت کنید.

مسألهٔ ۹. با استفاده از قضیهٔ ۱۰ (ب) برهان سومی برای قضیهٔ ۱۰ (الف) ارائه دهید.

راهنمایی: برهان زیر را که قضیهٔ ۱۰ (ب) از قضیهٔ ۱۰ (الف) نتیجه می‌شود بخوانید.

با استفاده از فرمول هرون قضیهٔ ۱۰ (ب) را نیز می‌توان ثابت کرد.

برهان قضیهٔ ۱۰ (ب). چون بنا به‌فرض c ثابت است، P وقتی حداقل است که $a+b$ حداقل باشد. اماچون بنا برفرض، T نیز ثابت‌است، حاصلضرب $16T^2$، که مطابق (۷) متشکل از دوعامل $[(a+b)^2-c^2]$ و $[c^2-(a-b)^2]$ است، ثابت است. لذا عامل اول وقتی حداقل است که عامل دوم حداکثر باشد. اما اولین‌عامل در فرمول (۷) هرون وقتی حداقل است که $a+b$ حداقل باشد. لذا $a+b$ وقتی حداقل‌است که عامل دوم حداکثر باشد، یعنی، وقتی $a-b=0$ یا $a=b$. □

برهان‌دیگری از قضیهٔ ۱۰ (ب) را، که مستقل‌از برهان فوق‌است، می‌توان در راهنمایی پایان‌بخش ۱.۳ از فصل ۳ یافت.

همچنان‌که به‌آسانی نشان می‌دهیم قضیه‌های ۱۰ (الف) و ۱۰ (ب) هم‌ارزند. توضیح کاملی از این واقعیت که قضیهٔ اول، قضیهٔ دوم را نتیجه می‌دهد ارائه خواهیم

داد. عکس آن را به‌عنوان مسألهٔ شماره ۹ به‌خواننده واگذار کرده‌ایم.

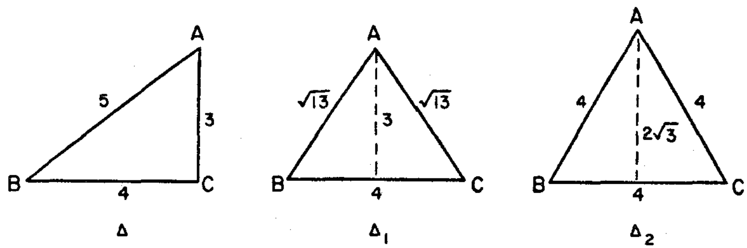
برهان اینکه قضیهٔ ۱۰ (الف) قضیهٔ ۱۰ (ب) را نتیجه می‌دهد. فرض کنیم $\triangle$ مثلثی دلخواه با مساحت T و محیط P و $\triangle_{۱}$ مثلث متساوی‌الساقینی با همان قاعده و مساحت $\triangle$ اما با محیط $P_{۱}$ باشد. ثابت می‌کنیم که $P_{۱} \geqslant P$، و برابری تنها وقتی برقرار است که $\triangle$ متساوی‌الساقین باشد.

فرض کنیم $\triangle_{۲}$ مثلث متساوی‌الساقینی با همان قاعدهٔ $\triangle$، با محیط P و مساحت $T_{۲}$ باشد. از قضیهٔ ۱۰ (الف) نتیجه می‌شود که

$$T_{۲} > T.$$

چون $\triangle_{۱}$ و $\triangle_{۲}$ دارای یك قاعده و هر دو متساوی‌الساقین هستند، نتیجه می‌شود که P، محیط $\triangle_{۲}$ (و از این‌رو P، محیط $\triangle$) از $P_{۱}$ بزرگتر است. □

به‌آسانی می‌توان برهان فوق را با یك مثال روشن کرد. فرض کنیم $\triangle$ یك مثلث قائم‌الزاویه با اضلاعی به‌طولهای ۳، ۴، و ۵ واحد باشد. دراین‌صورت $T = ۶$ و $P = ۱۲$. شکل ۴.۲ ملاحظه شود.



شکل ۴.۲

فرض کنیم $BC = ۴$ قاعدهٔ $\triangle$ باشد. در این صورت، $\triangle_{۱}$، مثلث متساوی‌الساقینی با همان‌قاعده ومساحت $\triangle$، دارای ساقهایی به‌طول $\sqrt{۱۳}$ و محیط $P_{۱} = ۴ + ۲\sqrt{۱۳}$ است. به‌روشنی $\sqrt{۱۳} < ۴$؛ از این‌رو

$$P_{۱} = ۴ + ۲\sqrt{۱۳} < ۴ + ۲ \times ۴ = ۱۲ = P.$$

حال گوییم $\triangle_۲$، مثلث متساوی‌الساقینی با همان قاعده و محیط $\triangle$، ساقهایی به‌طول ۴ دارد (درواقع، $\triangle_۲$ متساوی‌الاضلاع است)،و $T_۲ = ۴\sqrt{۳}$. چون $۶ > ۴\sqrt{۳}$، همچنانکه انتظار داشتیم، $T_۲ > T$.

یك سؤال طبیعی و خوب که ممکن است مطرح شود از این‌قرار است: آیا در ارتباط با قضیهٔ ۱۰، قضیه‌هایی وجود دارد که بتوان بیان و اثبات‌کرد؟ قبل از ادامهٔ مطالعه‌کوشش کنید چند قضیه حدس بـزنید. واضحترین قضیهٔ در ارتباط با قضیهٔ ۱۰، قضیهٔ برابر محیطی درمورد مثلثهاست؛ یعنی،

قضیهٔ ۱۱ (الف). از میان همهٔ مثلثهای بـا محیط برابـر، مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگترین مساحت را دارد.

سه‌برهان برای این قضیه ارائـه خواهیم داد، کـه هر یك مزایـای خاص خود را دارد، اولین برهان اساساً توضیحی از قضیهٔ ۷ است.صفحـهٔ ۱۸ ملاحظه شود. و لذا در واقع به‌قضیهٔ میانگینهای حسابی و هندسی وابسته می‌شود. بـرهان دوم طولانی است ولی‌روشی فوق‌العاده مهم در ریاضیات را به نمایش می‌گذارد. برهان سوم تقریباً به‌همان‌کوتاهی برهان اول است و ترکیب جبری در برهان‌قضیهٔ ۷ را به‌صورت هندسی منعکس می‌کند.

برهان ۱. فرض‌کنیم ABC یك مثلث دلخواه باشد. چون P ثابت است، فرمول(۷) بیان‌می‌دارد که $۱۶T^۲$ وقتی حداکثر است که $(p - ۲a)(P - ۲b)(P - ۲c)$ حداکثر باشد. بنا بر قضیهٔ ۷، این‌وقتی ماکسیمم می‌شود که $P - ۲a = P - ۲b = P - ۲c$، یعنی، وقتی $a = b = c$. در نتیجه T وقتی ماکسیمم است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. □

برهان ۲. این برهان از آنِ سیمون لوئیلیه است. برهان با تقریبهای متوالی سروکار دارد. از آنجاکه استفاده از این‌روش حتی در زمان‌حاضر بین ریاضیدانان متداول است، ارائهٔ آن به‌این صورت ساده برای‌شما ارزشمند خواهد بود. همچنین، به‌شما این فرصت را می‌دهد که با مفهوم حد بهتر آشنا شوید.

فرض‌کنیم $\triangle_۱$ مثلثی دلخواه ودارای محیط P و مساحت $T_۱$ باشد. همچنین برای آنکه مطلبی برای بحث باقی بماند قرار می‌گذاریم که $\triangle_۱$ متساوی‌الاضلاع

نباشد. نشان می‌دهیم که هرگاه $\triangle$ یك مثلث متساوی‌الاضلاع با مساحت T و محیط P باشد، آنگاه $T_۱ > T$. این‌کار را با ساختن دنباله‌ای نامتناهی از مثلثهای

$$\triangle_۱, \triangle_۲, \cdots, \triangle_n, \cdots,$$

که هریك دارای محیط P و جز اولی، هریك مساحتی بزرگتر از ماقبل خود داشته باشد آغاز می‌کنیم، همچنان‌که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، مثلثهای $\triangle_n$ بیشتر و بیشتر شبیه مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle$ می‌شوند، ومساحتهای آنها به‌مساحت $\triangle$ میل می‌کند. این مطلب راکمی بعد دقیقتر بیان می‌کنیم.

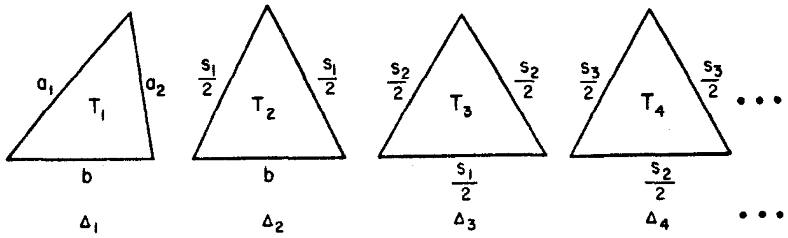
اکنون دنبالهٔ $\{\triangle_n\}$ را تعریف می‌کنیم. اولین مثلث این دنباله $\triangle_۱$ است. فرض‌کنیم قاعدهٔ آن به‌طول b وساقهای آن به‌طولهای $a_۱$ و $a_۲$ باشند. قرار می‌دهیم $s_۱ = a_۱ + a_۲$. دومین مثلث این دنباله، مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_۲$ با قاعده‌ای به‌طول b و ساقهایی به‌طول $s_۱/۲$ می‌باشد. قرار می‌دهیم

$$s_۲ = b + \frac{۱}{۲} s_۱.$$

سومین مثلث دنباله، مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_۳$ با قاعده‌ای‌به‌طول $s_۱/۲$ و ساقهایی به‌طول $s_۲/۲$ است. به‌ازای $n \geqslant ۳$، با فرض‌اینکه مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_n$ ساخته شده باشد، s_n را

$$\frac{۱}{۲}(s_{n-۲} + s_{n-۱})$$

انتخاب می‌کنیم؛ و مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_{n+۱}$ را با قاعده‌ای به‌طول $s_{n-۱}/۲$ و ساقهایی به‌طول $s_n/۲$ می‌سازیم. و این فرایند را به‌طور نامتناهی ادامه می‌دهیم.



شکل ۵۰۲

هر مثلث که در این دنباله ساخته شود دارای محیط P است زیـرا در هر مرحلهٔ تشکیل، طول یك ضلع مثلث جدید با طول یك ضلع مثلث قبلی بـرابـر است، و مجموع طولهای دوضلع دیگر ثابت نگه‌داشته می‌شود.

می‌دانیم که مسأله جواب دارد زیرا قبلا یك برهان برای قضیه ارائه‌داده‌ایم. سؤالی که اکنون با آن مواجهیم این‌است: آیا به‌صورتی منطقی‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع بـا محیط P حد دنبالهٔ $\{\triangle_n\}$ است؟ تلاش می‌کنیم قویاً از جواب مثبت دفاع کنیم. خواننده باید توجه داشته‌باشد که دنبالهٔ $\{\triangle_n\}$ ممکن است حد نداشته باشد. ما دراین حالت در بخش ۴.۲، بعد از آنکه مثالهای بیشتری را بررسی کـردیم، بحث می‌کنیم.

مساحت و محیط مثلثهای $\triangle_n$ را باید بررسی کرد. فرض کنیم مساحت$\triangle_n$ برابر با T_n باشد. چون $\triangle_n$ و $\triangle_{n+1}$ هرکدام ضلعی به‌طول $s_{n-1}/2$ دارند و محیطشان برابرند، از قضیهٔ ۱۰ (الف) نتیجه می‌شود که به‌ازای‌هرn، $T_{n+1}>T_n$.

همچنین این مثلثها بیشتر و بیشتر بـه‌مثلث متساوی‌الاضلاع نزدیك می‌شوند. برای ملاحظهٔ این امر مشاهده می‌کنیم که، به‌ازای هر n، مثلث $\triangle_n$ دوضلع به‌طول $s_{n-1}/2$ و ضلع سومی به‌طول $s_{n-2}/2$ دارد. می‌توانیم از تفاضل

$$\frac{1}{2}(s_{n-1}-s_{n-2})$$

که تفاوت بین طولهای دوضلع نابرابر است برای اندازه‌گیری انحرافی که مثلث nام از مثلث متساوی‌الاضلاع دارد استفاده کنیم. به استناد محاسبات ذیل ملاحظه می‌کنیم که وقتی n افزایش می‌یابد این تفاضل کوچکتر می‌شود و، در واقع، به‌صفر میل می‌کند.

$$\begin{aligned}
s_2-s_1 &=\left(b+\tfrac{1}{2}s_1\right) &&-s_1 &&=b-\tfrac{1}{2}s_1,\\
s_3-s_2 &=\left(\tfrac{1}{2}s_1+\tfrac{1}{2}s_2\right) &&-s_2 &&=\tfrac{1}{2}(s_1-s_2)=-\tfrac{1}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}s_1\right),\\
s_4-s_3 &=\left(\tfrac{1}{2}s_2+\tfrac{1}{2}s_3\right) &&-s_3 &&=\tfrac{1}{2}(s_2-s_3)=2^{-2}\left(b-\tfrac{1}{2}s_1\right),\\
&\ \vdots && \ \vdots && \ \vdots \\
s_n-s_{n-1} &=\left(\tfrac{1}{2}s_{n-2}+\tfrac{1}{2}s_{n-1}\right) &&-s_{n-1} &&=(-1)^{n-2}2^{-(n-2)}\left(b-\tfrac{1}{2}s_1\right),\\
s_{n+1}-s_n &=\left(\tfrac{1}{2}s_{n-1}+\tfrac{1}{2}s_n\right) &&-s_n &&=(-1)^{n-1}2^{-(n-1)}\left(b-\tfrac{1}{2}s_1\right),\\
&\ \vdots && \ \vdots && \ \vdots
\end{aligned}$$

اکنون از شما تقاضا می‌کنم که رضایت داده و به‌من اجازه دهید برای بقیهٔ برهان بــه عقل سلیم و شهود شما متوسل شوم. براوردهــای فوق برای تفاوتهای $s_{n+1}-s_n$ نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=0 .$$

این گزاره چنین خوانده می‌شود «حد تفاضل $(s_{n+1}-s_n)$، وقتی n به‌بینهایت میل می‌کند، صفر است.» این حکم را دقیقاً چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هرعدد مثبت e (هرچه‌باشد، بزرگ یا کوچك)، عدد صحیح مثبتی چون N می‌توان یافت به‌قسمی که به‌ازای همهٔ اعداد صحیح n که از N بزرگترند

$$|s_{n+1}-s_n|<e. \tag{۸}$$

امر مهمی که باید بدان توجه‌کنیم این‌است کــه e را ثابت نگه می‌داریم و به‌یافتن N می‌پردازیم. با توجه به

$$|s_{n+1}-s_n|=\frac{\left|b-\frac{1}{2}s_1\right|}{2^{n-1}}$$

و به‌علت اینکه $|b-(s_1/2)|$ مقداری ثابت است، اگر n به‌اندازهٔکافی بــزرگ اختیار شود، طرف راست به‌دلخواه‌کوچك و در نتیجه (۸) ثابت می‌شود. چون هر مثلث $\triangle_n$ دارای محیط P است، با استفاده از (۸) می‌توانیم نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{2P}{3},\qquad \lim_{n\to\infty}T_n=T. \tag{۹}$$

(بنا برتعریف، گزارهٔ $\lim_{n\to\infty}T_n=T$ بدین‌معنی‌است که نظیرهرعدد مثبت e، می‌توان عدد صحیح‌مثبتی مانند N یافت به‌قسمی که به‌ازای‌هرعدد صحیح n بزرگتر از N، $|T_n-T|<e$.) نتیجه‌های (۹) را می‌توان با استفاده از (۸) دقیقاً ثابت کرد. با این‌حال، چنین اثباتی به نظریهٔ حدود تعلق دارد و خارج از موضوع مطالعهٔ ماست. سرانجام، روشن است که چون $T_{n+1}>T_n$، بــه‌ازای هــر n، $T>T_n$ به‌ویژه $T>T_1$. □

سومین برهـان قضیهٔ ۱۱ (الف) از آن یاکوب اشتاینر است. اشتاینر بـا ترسیم هندسی جالبی از تقریبهای متوالی لوئیلیه ماهرانه اجتناب کرد.

برهان ۳. یك مثلث دلخواه $\triangle_1$ با محیط P، مساحت T_1 و اضلاعـی به‌طولهای a، b و c درنظرمی‌گیریم به‌طوری‌که $a \geqslant b \geqslant c$ و لذا $c \leqslant P/3$. به‌خاطر سادگی بحث فرض می‌کنیم‌که c از a به $P/3$ نزدیکتر باشد، و قرار می‌دهیم

$$h = \frac{P}{3} - c > 0 .$$

به‌جای‌ترسیم مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_2$ که دربرهان‌قبل انجام دادیم، یك مثلث $\triangle_2$ (شکل ۶.۲ ملاحظه شود) با قاعدهٔ b و ساقهایی به طول $P/3$ و $a-h$ می‌سازیم و مساحت آن را T_2 می‌نامیم. (شما خودتـان این ترسیم را با خط‌کش و پرگار انجام دهید.) چون

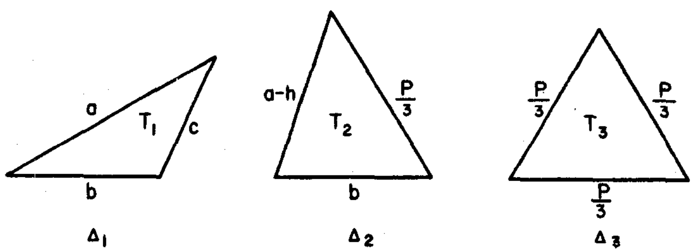
$$(a-h) + \frac{P}{3} = a + \left(\frac{P}{3} - h\right) = a + c,$$

محیط $\triangle_2$ برابر با P است. اینك توجه می‌کنیم‌که اختلاف بین طولهای a و c، ساقهای $\triangle_1$ بزرگتر از اختلاف بین طولهای ساقهای $\triangle_2$ است، یعنی،

$$a - c > (a-h) - \frac{P}{3} .$$

دلیل این نابرابری آن است‌که از نابرابری

$$c = \frac{P}{3} - h < \frac{P}{3} + h$$



شکل ۶.۲

نتیجه می‌شود

$$a-c>a-\left(\frac{P}{۳}+h\right)=(a-h)-\frac{P}{۳}.$$

اکنون از قضیهٔ ۱۰ (الف)′ در مثلثهای $\triangle_۱$ و $\triangle_۲$ استفاده می‌کنیم (صفحهٔ ۳۱ ملاحظه شود) و نتیجه می‌گیریم

$$T_۲>T_۱ .$$

درمرحلهٔ بعد یک‌مثلث متساوی‌الساقین $\triangle_۳$ با قاعدهٔ $P/۳$ وساقهایی به‌طول

$$\frac{۱}{۲}\left[\frac{P}{۳}+h+c\right]$$

می‌سازیم. چون این عدد برابر $P/۳$ است، مثلث $\triangle_۳$ متساوی‌الاضلاع می‌شود؛ و بنابرقضیهٔ ۱۰ (الف) T، مساحت آن بزرگتر از $T_۲$ است. لذا $T>T_۱$. اگر داشته باشیم

$$a-\frac{P}{۳}<\frac{P}{۳}-c$$

با استدلالی مشابه می‌توانیم همین نتیجه را به‌دست آوریم. □

همتای قضیهٔ ۱۱ (الف) چنین است

قضیهٔ ۱۱ (ب). از میان همهٔ مثلثهایی که مساحتهای متساوی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای کوچکترین محیط است.

مسألهٔ ۱۰. نشان دهید که قضیه‌های ۱۱ (الف) و ۱۱ (ب) هم ارزند.

مسألهٔ ۱۱. با استفاده از فرمول (۷) هرون، قضیهٔ ۱۱ (ب) را ثابت کنید.

مسألهٔ ۱۲. از میان همهٔ مثلثهای محیط بر دایره‌ای مفروض کدام یک کوچکترین مساحت و کدام یک کوچکترین محیط را دارد؟ حدسهای خود را ثابت کنید.
راهنمایی: از روشی که در آن هم‌ارزی قضیه‌های ۱۰ (الف) و ۱۰ (ب) نشان داده شده‌است استفاده کنید.

مسألهٔ ۱۳. از میان همهٔ مثلثهای محاط در یك دایرهٔ مفروض کدام‌یك بزرگترین مساحت وکدام‌یك بزرگترین محیط را داراست؟ حدسهای خود را ثابت کنید.

تبصره. با وجودی که نتیجه نسبتاً واضح به‌نظر می‌رسد، ارائهٔ یك برهان مقدماتی دقیق امری کاملا مشکل است.

مسألهٔ ۱۴. از میان همهٔ مثلثهای با محیط (یا مساحت) مفروض، دایرهٔ محیطی کدام‌یك کوچکتر است؟ ادعای خود را ثابت کنید.
راهنمایی: از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۳ استفاده کنید.

اینك موقع آن رسیده است که توجه خود را به حقیقتی معطوف کنیم که ممکن است تا به‌حال بدان توجه‌کرده باشید: قضیه‌های برابرمحیطی جفت‌جفت ظاهر می‌شوند. قضیه‌های ۹، ۱۰، و ۱۱ نمونه‌هایی از این پدیده‌اند. وضع از این‌قرار است. فرض‌کنیم C رده‌ای از شکلهای مسطحه باشد که برای آن قضیهٔ برابر محیطی ذیل برقرار باشد:
(*) از میان همهٔ شکلهای با محیط P در ردهٔ C، «X» دارای بزرگترین مساحت‌است.
به‌علاوه فرض‌کنیم همهٔ «Xها» مشابه باشند. در این صورت حکم زیر نیز یك قضیه است:

(**) از میان همهٔ شکلهای با مساحت A در ردهٔ C، «X» دارای کوچکترین محیط است.

به‌عنوان‌مثال، فرض کنیم C ردهٔ همهٔ مثلثها باشد، ونیز «Xها» مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند. در این‌صورت (*) قضیهٔ ۱۱ (الف) و (**)، قضیهٔ ۱۱ (ب) را به‌دست می‌دهند. این دو قضیه را قضیه‌های دوگان می‌نامیم زیرا هم‌ارزند. چیزی که توجه کرده‌ایم این است که نظریهٔ مسأله‌های برابر محیطی، ویژگی دوگانی را می‌پذیرد؛ یعنی، قضیه‌های برابرمحیطی به‌صورت جفتهای هم‌ارز ظاهر می‌شوند.

هم‌ارزی (*) و (**) با روشی که قبلا از آن به‌کرات استفاده‌شد، نشان‌داده می‌شود. مثلا، برای نشان‌دادن اینکه (**) از (*) نتیجه می‌شود، فرض‌می‌کنیم که (*) برقرار باشد و (**) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم F شکل دلخواهی در C با مساحت A و محیط P باشد، و نیز فرض می‌کنیم B_1 یك «X» در C با مساحت A و محیط P_1 و B_2 یك «X» در C با مساحت A_2 و محیط P باشند. ثابت می‌کنیم که $P \geqslant P_1$. بنابر (*)، $A_2 \geqslant A$. چون همهٔ «Xها» مشابه‌اند و

مساحت B_2 از مساحت B_1 بزرگتر است، محیط B_2 از محیط B_1 بزرگتر است. بنابراین $P_1 \geqslant P$. □ بههمین آسانی (*) از (**) نتیجه میشود.

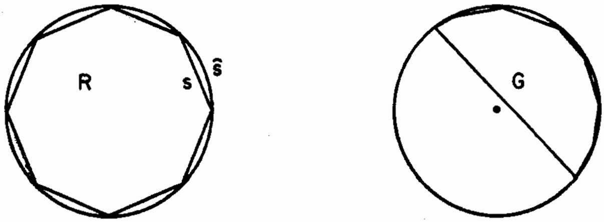
۳.۲ قضیههای برابرمحیطی در چندضلعیها

در مرحلهٔ بعد توجه خود را به چهارضلعیها ودر حالت کلی بهچندضلعیها معطوف میکنیم. جهت اختصار یك چند ضلعی با n ضلع را یك nضلعی مینامیم. nضلعی منتظم یك nضلعی با ضلعها و زوایای برابر است. چنین سؤالی طبیعی است: از میان همهٔ n ضلعیهای با محیط برابر، کدام‌یك بزرگترین مساحت را دارد؟ این حدس معقول است که n ضلعی منتظم یکی از جوابهاست. معلوم میشود که تحقیق این حدس بهدشواری اثبات قضیهٔ برابرمحیطی است. بنابراین، قبل از اثبات آن به بررسی چند سؤال سادهتر میپردازیم. مثلاً، از میان همهٔ n ضلعیهای (n ثابت) محاط در یك دایرهٔ مفروض، کدام‌یك بزرگترین مساحت را دارد؟ بهسبب تقارن میتوان حدس زد که باز هم nضلعی منتظم جواب باشد. (همان طورکه هیچ چندضلعی منتظمی وجود ندارد که تعداد ضلعهایش از هر چندضلعی دیگری بیشتر باشد، آیا میتوان گفت که بین nضلعیهای محاط در دایرهٔ مفروض هیچ n ضلعی با بزرگترین مساحت وجود ندارد؟ شهود جواب منفی بهاینسؤال میدهد و در این حالت حقیقت دارد.) حال که جواب را حدس زدیم، به اثبات آن میپردازیم. برای‌این کار از روش اشتاینرکه در برهان سوم قضیهٔ ۱۱ (الف) ارائه شد استفاده میکنیم.

قضیهٔ ۱۲. از میان همهٔ n ضلعیهای محاط در دایرهای مفروض، nضلعی منتظم دارای بزرگترین مساحت است.

برهان. اولا ملاحظه میکنیم که برهان قضیه بهازای $n=3$ در فصل ۴ بهعنوان جواب مسألهٔ ۱۳ ذکر شدهاست. در مابقی برهانقضیهٔ ۱۲ فرض میکنیم که n از ۳ بزرگتر است. ثانیاً، باید تأکید کرد که n ضلعیهای مختلفی که در دایره محاط میشوند محیطها و مساحتهای مختلف دارند.

فرض کنیم R یك n ضلعی منتظم باشد که در دایرهٔ مفروض Q بهشعاع r محاط است، طول هر ضلع آن را به s و طول کمان نظیر هر ضلع را به $\hat{s}$ نشان میدهیم [شکل ۷.۲ (الف) ملاحظه شود]. چون Q دارای محیط $2\pi r$ است،



(الف) (ب)

شکل ۷.۲

$$\hat{s}=\frac{2\pi r}{n}.$$

فرض کنیم G یک n ضلعی دلخواه محاط در Q باشد. هرگاه مرکز Q داخل G نباشد [شکل ۷.۲(ب) ملاحظه شود] از آنجا که G در یک نیمدایره قرار می‌گیرد مساحت G آشکارا از $\pi r^2/2$ کوچکتر است. اما همچنان که محاسبه نشان می‌دهد، یک nضلعی منتظم وقتی $n>3$، مساحتی بزرگتر از نصف مساحت دایرهٔ محیطی‌خود دارد. درنتیجه، قضیه برای حالتی که مرکز Q در داخل G قرار ندارد برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که مرکز Q داخل G واقع است.

مابقی برهان جزئیات بسیاری دارد. قبل از مطالعهٔ آن، بدون پرداختن به جزئیات برهان را بخوانید و به آن فکر کنید، لیکن به‌مراحل اصلی بحث توجه کنید و متقاعد شوید که اگر این مراحل درست باشد. نتیجهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید. سه مرحلهٔ اصلی وجود دارد:

(۱) مرحلهٔ ساختاری ۱، دستورالعملی برای ترسیم یک nضلعی G_1 محاط در Q است به‌قسمی که‌ضلعها و مساحت آن همان‌ضلعها و مساحت G باشد و بزرگترین ضلعش مجاور کوچکترین ضلع آن قرار گیرد؛

(۲) مرحلهٔ ساختاری ۲، دستورالعملی برای ترسیم یک nضلعی G_1' محاط در Q است که تعداد اضلاع به‌طول s آن حداقل یکی بیشتر از G است و نیز مساحت آن بزرگتر از مساحت G و G_1 است؛

(۳) تکرار این ترسیمها به‌دفعات متعدد.

طول هرضلع Gرا به a_i وکمان متناظر با آن‌را به $\hat{a}_i$ نشان می‌دهیم. اگر G منتظم نباشد، حداقل یک ضلع به‌طولی کوچکتر از s و یک ضلع به‌طولی بزرگتر از s دارد. زیرا، اگر

$$a_i \leqslant s \qquad (i=۱, \ldots, n),$$

آنگاه به‌ازای حداقل یك i، $s > a_i$، مثلا $s > a_۱$؛ چه در غیراین‌صورت G منتظم خواهد بود. اما اگر

$$a_۱ < s, \quad a_i \leqslant s, \qquad (i=۲, ۳, \ldots, n)$$

آنگاه

$$\hat{a}_۱ < \hat{s}, \quad \hat{a}_i \leqslant \hat{s} \qquad (i=۲, ۳, \ldots, n)$$

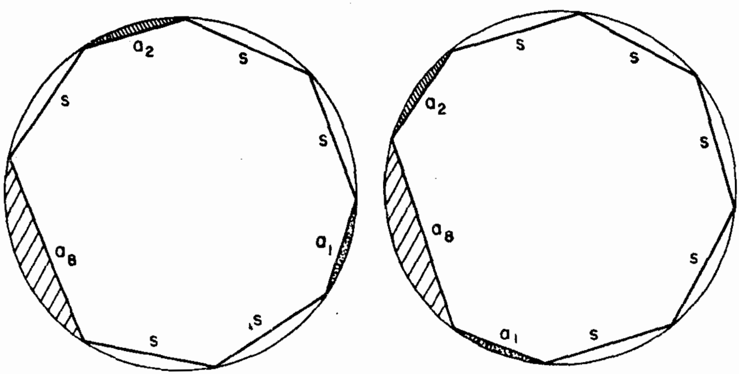
و درنتیجه،

$$\hat{a}_۱+\hat{a}_۲+\cdots+\hat{a}_n < n\hat{s} = ۲\pi r \,.$$

اما $\hat{a}_۱+\hat{a}_۲+\cdots+\hat{a}_n = ۲\pi r$، که محیط Q است. بنابراین به‌ازای هر i از ۱ تا n نمی‌توان داشت $a_i \leqslant s$. مشابهاً، برای هر i از ۱ تا n نمی‌توانیم داشته باشیم $a_i \geqslant s$.

مرحلهٔ ساختاری ۱. فرض کنیم بزرگترین ضلع G به‌طول a_n و کوچکترین ضلع آن به‌طول $a_۱$ باشد ($a_۱ < s < a_n$). صرفاً با تجدید ترتیب اضلاع G، nضلعی جدید $G_۱$ را چنان می‌سازیم که بزرگترین ضلع آن مجاور کوچکترین ضلع قرار گیرد؛ شکل ۸.۲ ملاحظه شود.

واضح است که nضلعی $G_۱$ که بدین نحو ساخته می‌شود دارای همان‌مساحت G است زیرا مساحت هرکدام مساوی تفاضل مساحت Q و قطعه‌هایی از دایره است



شکل ۸.۲

که‌در هر دوحالت یکسان‌اند (ناحیه‌هایی که درشکل ۸.۲ به‌وسیلهٔ وترها و کمانها محدودند).

در مرحلهٔ بعد nضلعی G_1' را می‌سازیم که آن نیز در Q محاط و به‌قسمی است که مساحت G_1' بزرگتر از مساحت G_1 و بنابراین بزرگتر از مساحت G است.

مرحلهٔ ساختاری ۲. کمانهای AB و BC را که به‌وسیلهٔ a_1 و a_n به‌وجود می‌آیند در نظر می‌گیریم. به‌خاطر می‌آوریم که $\hat{a}_1 < \hat{s}$ و $\hat{a}_n > \hat{s}$ و شکل ۹.۲ را به‌مثابهٔ نمایش بزرگ‌شدهٔ قسمتی از G_1 درنظر می‌گیریم که در شکل ۸.۲ دیده می‌شود. A و C را ثابت نگه می‌داریم و B را در امتداد کمان حرکت می‌دهیم تا به B' برسیم به‌قسمی که $\widehat{AB'} = \hat{s}$. n ضلعی G_1' چنان است که درتمام موارد با G_1 یکی است جز آنکه به‌جای رأس B، رأس B' قرار دارد.

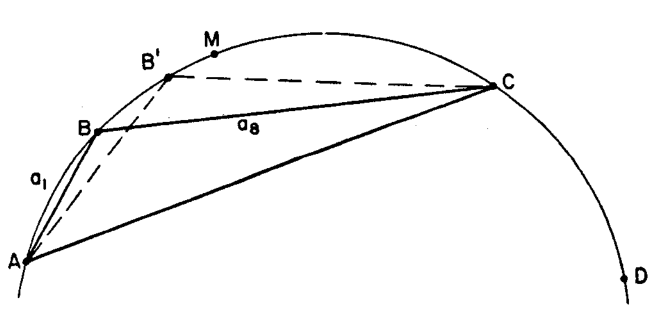
مثلثهای ABC و$AB'C$ را درنظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم ارتفاع مرسوم از B' بزرگتر از ارتفاع‌مرسوم از B است و به‌این وسیله می‌کوشیم روشن‌سازیم که مساحت $\triangle AB'C$ از مساحت $\triangle ABC$ بزرگتر است. معقول است بپذیریم که وقتی B به‌نقطهٔ میانی M نزدیك می‌شود این ارتفاع افزایش می‌یابد، بنابراین می‌توانیم به‌نشان‌دادن این امر اکتفاکنیم که B' از B به M نزدیکتر است، یا

$$\widehat{B'M} < \widehat{BM}.$$

چون $\hat{a}_1 < \hat{s}$ و $\hat{a}_n > \hat{s}$، قرار می‌دهیم

$$\hat{a}_1 = \hat{s} - h \quad \text{و} \quad \hat{a}_n = \hat{s} + k \text{، } \quad h > 0 \text{، } \quad k > 0$$

اما



شکل ۹.۲

$$\widehat{AM}=\frac{۱}{۲}(\hat{a}_۱+\hat{a}_n)$$

بنابراین

$$\widehat{BM}=\widehat{AM}-\widehat{AB}=\frac{۱}{۲}(\hat{a}_۱+\hat{a}_n)-\hat{a}_۱$$

$$=\frac{۱}{۲}(\hat{a}_n-\hat{a}_۱)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\hat{s}+k-\hat{s}+h)$$

$$=\frac{۱}{۲}(k+h),$$

و

$$\widehat{B'M}=|\widehat{AM}-\widehat{AB'}|=\frac{۱}{۲}|\hat{a}_۱+\hat{a}_n-۲\hat{s}|$$

$$=\frac{۱}{۲}|\hat{s}-h+\hat{s}+k-۲\hat{s}|$$

$$=\frac{۱}{۲}|k-h|\,.$$

چون k و h مثبت‌اند، $|k-h|<k+h$. بنابراین نشان دادیم که

$$\widehat{B'M}<\widehat{BM}.$$

اینك ممکن‌است قبول کنید که $\triangle AB'C$ ارتفاعی بزرگتر از $\triangle ABC$ و لذا مساحتی بیشتر دارد، اما باید متوجه باشید که ما آن‌را به‌طور کامل ثابت نکرده‌ایم. برهان دقیق آن از این واقعیت که $|a-c|>|\overline{CB'}-s|$ و قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید: ازدو مثلث که (AC)، قاعدهٔ آنها مشترك و زاویهٔ رأسشان برابر است ارتفاع و مساحت مثلثی بزرگتراست که تفاضل طولهای دوساقش کوچکتر باشد. (یك برهان این قضیه مشتمل برچند مرحله از حل مسألهٔ ۱۳ و تعدیلهایی از مراحل دیگراست که در فصل ۴ ارائه می‌شود.)

اکنون یك nضلعی $G_۱'$ محاط در Q (با رأسهای A، B'، C و نظایر آن)

در دست داریم که مساحتی بزرگتر از G دارد و تعداد ضلعهایی از آن که طولی برابر با s دارند از G بیشتر است (حداقل یکی بیشتر است). مساحت $G_1{}'$ بزرگتر از مساحت G_1 است زیرا مساحت $\triangle AB'C$ بزرگتر از مساحت $\triangle ABC$ است و $G_1{}'$ و G_1 جز در امتدادهای AB و BC و AB' و $B'C$ برهم منطبق‌اند. اگر $G_1{}'$ منتظم باشد، اثبات تمام است. اگر نه، ترسیمهای قبل را می‌توانیم تکرار کنیم و بعد از حداکثر $n-1$ ترسیم، یك nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ مفروض به‌دست آوریم که مساحتی بزرگتر از مساحت G دارد. □

ارائهٔ برهانی مقدماتی از قضیهٔ برابرمحیطی برای چهار ضلعیها نیز امکان‌پذیر است. (مقدماتی لزوماً به معنای کوتاه و آسان نیست ــ منظور از برهان مقدماتی برهانی است که مشتمل بر ریاضیات پیشرفته و پیچیده نباشد.)

قضیهٔ ۱۳. از میان همهٔ چهار ضلعیهای با مساحت مفروض، مربع دارای کوچکترین محیط است.

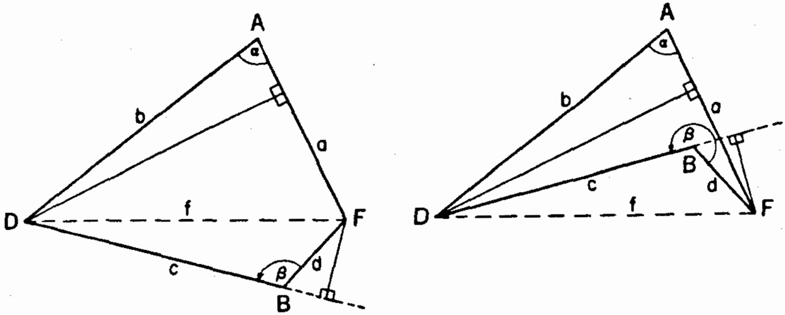
ساده‌تر آن است که ابتدا به‌اثبات قضیهٔ دوگان آن ــ از میان همهٔ چهارضلعیهای با محیط مفروض مربع دارای بزرگترین مساحت است ــ بپردازیم و سپس نتیجهٔ مطلوب را استنتاج کنیم.

برهان. ابتدا فرمول مساحت چهار ضلعی را برحسب اضلاع و دو زاویهٔ مقابلش به‌دست می‌آوریم. فرض‌کنیم طولهای اضلاع متوالی یك چهارضلعی a، b، c، و d و مساحت و محیط آن به‌ترتیب T و P باشند. همچنین فرض‌کنیم α اندازهٔ زاویهٔ دوضلع اول و β اندازهٔ زاویهٔ دوضلع دیگر و f طول قطر روبه‌رو به‌این‌دو زاویه باشد. در این صورت، چون ارتفاع مرسوم از Dی مثلث ADF دارای طول $b\sin\alpha$ و ارتفاع مرسوم از F مثلث DBF دارای طول $|d\sin\beta|$ است (وقتی $\pi<\beta<2\pi$، $\sin\beta$ منفی است، شکل ۱۰.۲ ملاحظه شود)،

$$2T = ab\sin\alpha + cd\sin\beta$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$4T = 2ab\sin\alpha + 2cd\sin\beta$$



شکل ۱۰.۲

و

$$16T^2 = 4a^2b^2\sin^2\alpha + 8abcd\sin\alpha\sin\beta + 4c^2d^2\sin^2\beta.$$

بنا بر قانون کسینوسها

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = f^2 = c^2+d^2-2cd\cos\beta$$

یا

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

و

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4a^2b^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\alpha\cos\beta + 4c^2d^2\cos^2\beta.$$

اکنون $16T^2$ و $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ را با هم جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$16T^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4a^2b^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + 4c^2d^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta) - 8abcd(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

اما

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

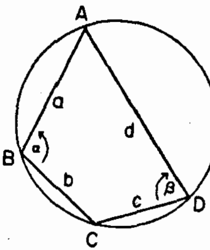
و به‌ازای هردوعدد x و y،

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

ازاین‌رو

$$16T^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)\,. \qquad (10)$$

موقتاً a، b، c، و d را ثابت فرض می‌کنیم، آنگاه با توجه به (۱۰) ملاحظه می‌کنیم که وقتی $\cos(\alpha+\beta)$ حداقل باشد، یعنی، وقتی که $\cos(\alpha+\beta)=-1$، T حداکثر می‌شود. از این‌رو، T وقتی حداکثر است که $\alpha+\beta=\pi$. اگر $\alpha+\beta=\pi$، می‌توانیم فرض کنیم که چهارضلعی با ضلعهای a، b، c و d در دایره‌ای محاط شده است (شکل ۱۱۰۲ ملاحظه شود)؛ زیرا اگر دایره‌ای را که با رأسهای A، B، و C مشخص می‌شود در نظر بگیریم، برای هر نقطهٔ D روی این دایره که روی کمان ABC نباشد، $\alpha+\beta=\pi$. اگر D داخل این دایره باشد، آنگاه $\alpha+\beta>\pi$؛ اگر D خارج دایره باشد، $\alpha+\beta<\pi$ (فرض می‌کنیم که D بر کمان ABC نیست). بنابراین قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.



شکل ۱۱۰۲

قضیهٔ ۱۴. یك چهارضلعی با ضلعهای مفروض وقتی دارای بزرگترین مساحت است که قابل محاط در یك دایره باشد.

باقی می‌ماند اتمام برهان دوگان قضیهٔ ۱۳؛ و برای این‌منظور باید نشان دهیم در میان همهٔ چهارضلعیهای با محیط مفروض P که مجموع زاویه‌های مقابل آنها برابر با π است، مربع دارای بزرگترین مساحت است. اکنون می‌گذاریم طولهای ضلعهای چهارضلعی تغییر کنند به‌قسمی که P ثابت بماند و $\alpha+\beta$ را نیز ثابت و برابر با π نگه می‌داریم. البته، این بدین‌معنی است که شعاع دایرهٔ محیطی نیز می‌تواند تغییر کند. حال وقتی $\alpha+\beta=\pi$، $\cos(\alpha+\beta)=-1$؛ و برابری (۱۰)

را به صورتهای زیرمی‌توانیم بنویسیم

$$
\begin{aligned}
۱۶T^۲ &= ۴(a^۲b^۲+c^۲d^۲)+۸abcd-(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲\\
&= ۴(ab+cd)^۲-(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲\\
&= [۲(ab+cd)+(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)]\\
&\quad \times[۲(ab+cd)-(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)]\\
&= [(a+b)^۲-(c-d)^۲][(c+d)^۲-(a-b)^۲]\\
&= [a+b+c-d][a+b-c+d]\\
&\qquad\qquad \times[c+d+a-b][c+d-a+b]
\end{aligned}
$$

یا

$$۱۶T^۲=(P-۲a)(P-۲b)(P-۲c)(P-۲d)\,. \qquad (۱۱)$$

این نتیجه به‌وضوح فرمول هرون را به‌خاطرما می‌آورد وقویاً به‌فکرمی‌افتیم که قضیهٔ میانگینهای حسابی وهندسی(قضیهٔ ۸)را به‌کار گیریم. اگرچنین کنیم، نابرابری زیر را به‌دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
&[(P-۲a)(P-۲b)(P-۲c)(P-۲d)]^{۱/۴}\\
&\qquad\leqslant\frac{P-۲a+P-۲b+P-۲c+P-۲d}{۴}
\end{aligned}
$$

یا

$$۲T^{۱/۲}\leqslant\frac{P}{۲}\,.$$

برابری وقتی برقراراست که

$$P-۲a=P-۲b=P-۲c=P-۲d,$$

یعنی اگــر و تنها اگر $a=b=c=d$. لــذا اگر P را ثابت نگه‌داریم، T وقتی حداکثر است کــه چهارضلعی محاطی، مربع باشد. همهٔ مربعها متشابه‌اند؛ لذا بنا بر

دوگانی، اگر T را ثـابت نگه‌داریم، P وقتی حداقل است کـه چهارضلعی مربع باشد. □

در بخش ۲.۱ برای اینکه نشان‌دهیم ازمیان همهٔ جعبه‌های سه‌بعدی بامساحت مفروض مکعب دارای بزرگترین حجم است ازقضیهٔ ۸ استفاده کردیم. قضیهٔ دوگان چنین است: ازمیان همهٔ منشورهای قائمی‌که قاعدهٔ مستطیل و حجم مفروضی‌دارند، مکعب دارای کوچکترین مساحت است. این قضیه وقضیهٔ ۱۳ ما را قادرمی‌کند کـه قضیهٔ کلیتری درمورد منشورهای با قاعدهٔ چهارضلعی ثابت کنیم. منشور با قـاعدهٔ چهارضلعی چنین تعریف می‌شود: فرض کنیم Q و Q' دو چهارضلعی قـابل انطباق باشندکه دردوصفحهٔ متوازی‌متمایز قراردارند،وضلعهای‌متناظر Q و Q' متوازی‌اند. منشوربا قاعدهٔ چهارضلعی جسمی‌است‌که با Q و Q' و همهٔ پاره‌خطهایی‌که نقطه‌های Q را به نقطه‌های متناظر Q' وصل می‌کنند مشخص می‌شود. اگر این پاره‌خطها بر صفحه‌هایQ و Q' عمود باشند منشور را منشورقائم و در غیراین‌صورت منشورمایل می‌نامیم. Q و Q' را قاعده‌های منشور، و فاصلهٔ بین این‌دوصفحه را ارتفاع منشور می‌نامیم.حجم منشوربرابراست با حاصلضرب مساحت‌یکی ازقاعده‌ها درارتفاع آن.

قضیهٔ ۱۵. ازمیان همهٔ منشورهای با قاعدهٔ‌چهارضلعی و با حجم مفروض،مکعب دارای کوچکترین مساحت است.

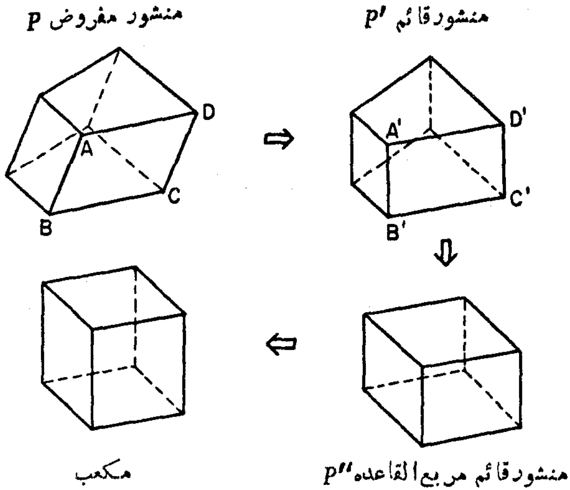
برهان. فرض‌کنیم P منشوری با قاعدهٔ چهارضلعی و با مساحت S باشد. هر تغییر در P باید حجم آن را ثابت نگه‌دارد. برهان دارای سه‌مرحلهٔ اصلی است:

(۱) با ثابت نگاه‌داشتن قاعدهٔ P، آن را به‌یك منشور قائم تبدیل مـی‌کنیم. شکل ۱۲.۲ ملاحظه شود.

(۲) درحالی که A مساحت قاعدهٔ این منشور ثابت است، آن را بـه‌منشور قائمی با قاعدهٔ مربع تبدیل می‌کنیم.

(۳) سرانجام، منشور قائم‌مربع‌القاعدهٔ حاصل را به‌یك مکعب تبدیل‌می‌کنیم.

اکنون گوییم، هرگاه یك منشورقائم ویك منشور مایل قـاعدهٔ مشترك و حجم برابرداشته‌باشند، منشورقائم مساحت‌کمتری دارد. زیـرا دومنشور دارای ارتفاعی برابر، مثلا h، هستندوهروجه جانبی منشور قائم مستطیلی است به‌ارتفاع h،درحالی که وجه متناظر ازمنشور مایل متوازی‌الاضلاعی‌است‌که ارتفاع آن‌حداقل برابر با h

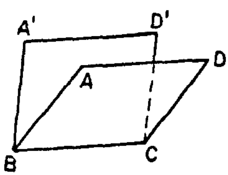


شکل ۱۲۰۲

وقاعدهٔ آن همان قاعدهٔ مستطیل است (شکل ۱۳.۲ ملاحظه شود). مساحت وجه‌های جانبی متناظر فقط وقتی دوبه‌دو برابرند که منشور مفروض P منشورقائم باشد. در این صورت طی‌مرحلهٔ (۱) مقدار S افزایش نمی‌یابد. اما اگر منشور مفروض P منشور قائم نباشد، آنگاه مرحلهٔ (۱) درواقع S راکاهش می‌دهد.

چون مساحت قاعده و ارتفاع منشورقائم ضمن مرحلهٔ (۲) هردوثابت‌می‌مانند وچون مساحت جانبی‌منشورقائم برابر باحاصلضرب محیط قاعده وارتفاع آن‌است. قضیهٔ ۱۳ نشان می‌دهدکه‌طی مرحلهٔ (۲)، نیز S افزایش نمی‌یابد. جز درحالتی که قاعدهٔ منشور قائم مربع باشد، در نتیجه مرحلهٔ-(۲)، S در واقع کاهش می‌یابد.

بالاخره، بنابرقضیهٔ دوگان مذکور درصفحهٔ ۵۵ صرفنظرازحالتی که‌منشور قائم



شکل ۱۳.۲

مربع‌القاعده، مکعب باشد، مرحلهٔ (۳)، S را افزایش نمی‌دهد بلکه درواقع از آن می‌کاهد. بنابراین، جز درحالتی که P مکعب باشد، S طی حداقل یکی از سه تبدیل P کاهش می‌یابد. □

مسألهٔ ۱۵. اگر مجموع مساحتهای پنج وجه یك جعبه معلوم باشد (مکعب مستطیلی که یك وجه آن را برداشته‌اند)، جعبه‌ای را پیدا کنید که بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

مسألهٔ ۱۶. «تنگ» یك جعبه را دو برابر مجموع عرض و ارتفاع آن تعریف می‌کنیم. از بین همهٔ جعبه‌هایی که مجموع طول و تنگ آنها بیشتر از L سانتیمتر نباشد کدام یك دارای بزرگترین حجم است؟

کسی که غالباً از بسته‌های پستی استفاده می‌کند با حل این مسأله به‌خوبی آشناست.

مسألهٔ ۱۷. مجموع یالهای یك جعبه معلوم است. نشان‌دهید از بین همهٔ این جعبه‌ها، مکعب دارای بیشترین حجم و بیشترین مساحت است.

مسألهٔ ۱۸. فرض کنیم بین‌همهٔ چهاروجهیهای با حجم V یکی با کوچکترین مساحت وجود داشته‌باشد. نشان دهید این چهاروجهی، منتظم است.

مسألهٔ ۱۹. یك هشت وجهی‌ازدوهرم قابل انطباق که درقاعده‌های مربع‌شکل‌خود به هم وصل شده‌اند تشکیل شده است ومی‌توان آن را هرم مضاعف‌مربع‌القاعده‌نامید. نشان‌دهید ازمیان همهٔ هرمهای مضاعف قائم مربع‌القاعده با حجم V، هشت وجهی منتظم دارای کمترین مساحت است. این قضیه را به‌ردهٔ همهٔ هرمهای مضاعف مربع‌القاعده تعمیم‌دهید.

اکنون که قضیهٔ برابرمحیطی را برای مثلثها وچهارضلعیها ثابت کردیم،ممکن است چنان‌امیدوارشویم که فکر کنیم می‌توانیم قضیه‌های مشابهی درمورد پنج‌ضلعیها، شش‌ضلعیها وحتی درحالت کلی برای چندضلعیها ثابت‌کنیم. متأسفانه، درحال حاضر به‌نظرمی‌رسد که این امربدون استفاده از خود قضیهٔ برابرمحیطی یا هم‌ارز آن امکانپذیر نیست.

قبل‌از ادامهٔ مطلب بجاست‌که مفهوم چندضلعی مسطح را دقیقاً تعریف کنیم. چند ضلعی مسطح از تعداد متناهی پاره‌خطهای راست که همگی در یك صفحه

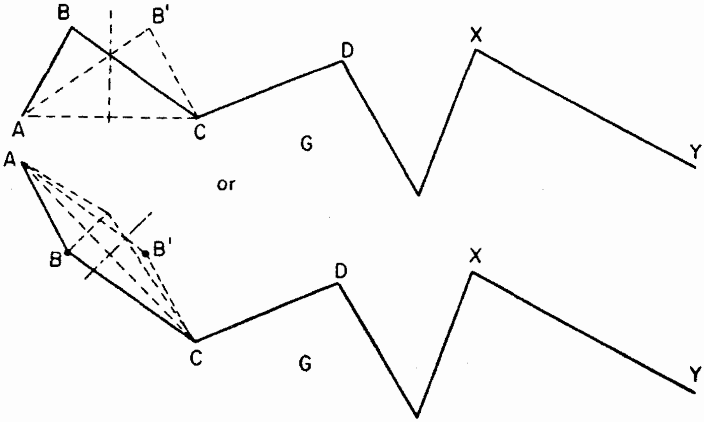
واقع‌اند تشکیل شده است. این پاره‌خطها را ضلعهای چندضلعی‌ونقاط انتهایی آنها را رأسهای چندضلعی می‌نامیم. چندضلعی مسطح با این شرط تعریف می‌شود که هر رأس آن باید نقطهٔ انتهایی حداقل دوضلع باشد و رأسها تنها نقاطی باشند که بر بیش ازیك ضلع قرار دارند. اگرهر رأس یك چندضلعی مسطح نقطهٔ انتهایی دقیقاً دوضلع باشد، آنگاه آن چندضلعی را چندضلعی مسطح ساده می‌نامیم. همهٔ چندضلعیهایی که مطالعه خواهیم کرد چندضلعیهای مسطح‌ساده هستند. همچون گذشته چندضلعی مسطح ساده را صرفاً چندضلعی می‌نامیم. قسمتی از صفحه راکه داخل یك چندضلعی واقع است درون آن چندضلعی می‌نامیم. (غالباً چندضلعی و درون آن را چند ضلعی می‌نامند.)

قضیهٔ ۱۶. اگر همهٔ ضلعهای یك n ضلعی برابر نباشند، می‌توانیم nضلعی دیگری با همان محیط بسازیم‌که همهٔ ضلعهای آن برابر و مساحت آن بیشتر باشد.

یك برهان نادرست این قضیه ذیلا ارائه می‌شود، این برهانی است که‌نویسنده طرح‌کرده و زمانی خود گمراه شده بود. این برهان برپایهٔ قضیهٔ ۱۲ استوار است. دقیقاً آن را مطالعه کنید و ببینید آیا می‌توانید دریابیدکه کجای آن نادرست یا ناتمام است.

برهان. فرض کنیم n ضلعی مفروض G دارای محیط P باشد. چون همهٔ ضلعهای آن به‌طول P/n نیستند، باید حداقل یك ضلع به‌طول بزرگتر از P/n و یك ضلع به طول کوچکتر از P/n داشته‌باشد. اولین‌کار این است که نشان دهیم می‌توانیم فرض کنیم که‌این دوضلع مجاور یکدیگرند. وقتی‌این‌امر را ثابت کردیم، با استفاده‌از برهان قضیهٔ ۱۲ که اندکی تغییر یافته است برهان راکامل می‌کنیم.

فرض‌کنیم در G هیچ دوضلع مجاوری که یکی بزرگتر از P/n ودیگری کوچکتر از آن است نباشد. در این صورت k $(k \geqslant 1)$ ضلع متوالی به‌طول P/n وجود دارندکه چنین جفتی را مجزا می‌کنند. ضلع کوچکتر را AB و ضلع بزرگتر را XY می‌گیریم. اگرضلع AC درون G باشد، می‌توانیم عمود منصف AC را به صورت یك آینهٔ دورو درنظر بگیریم و قرینهٔ مثلث ABC را درآن پیداکنیم تا nضلعی جدید ... $AB'CD$ به‌دست آید،که همان ضلعهای G را دارد ومساحتش با مساحت G برابر است (شکل ۱۴.۲ ملاحظه شود). اگر AC درون G نباشد، ابتدا قرینهٔ مثلث ABC را نسبت به‌خط AC پیدامی‌کنیم و یك nضلعی با همان ضلعهای



شکل ۱۴.۲

G ولی با مساحتی بیشتر بـه‌دست می‌آوریم. AC درون این nضلعی جدید است. اکنون همچون حالت قبل قرینه را نسبت به‌عمود منصف AC پیدا می‌کنیم. درمرحلهٔ بعد این عمل را با B'، C، و D، که به‌ترتیب نقش A، B، و C رامی‌گیرند، تکرار می‌کنیم. پس از دقیقاً k بار تکرار این مرحله، یك n ضلعی بـا همان ضلعهای G بـه‌دست خواهیم آورد کـه مساحت آن حداقـل برابر مساحت G و دارای یك جفت‌ضلعهای مجاور است کـه یکی کوچکتر از P/n و دیگری بزرگتر از P/n است. این‌ضلعها را به‌ترتیب AB و BCمی‌نامیم.می‌توانیم فرض‌کنیم که AC درون n ضلعی است.

اکنون $AB'C$ را به‌قسمی رسم می‌کنیم که $\overline{AB'} = P/n$ و

$$\overline{AB'}+\overline{B'C}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

ونشان می‌دهیم که T' مساحت $\triangle AB'C$ بیشتراز T مساحت $\triangle ABC$ است. بنا بر ترسیم می‌دانیم که

$$\overline{AB'}+\overline{B'C}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

و

$$\overline{AB}<\overline{AB'}=\frac{P}{n}<\overline{BC}.$$

ازاین‌رو

$$\overline{BC}-\overline{AB}>\overline{BC}-\overline{AB'}.$$

به‌علاوه،

$$\overline{B'C}=\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AB'}<\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AB}=\overline{BC}.$$

بالاخره

$$\overline{BC}-\overline{AB}>\overline{BC}-\overline{AB'}>\overline{B'C}-\overline{AB'}.$$

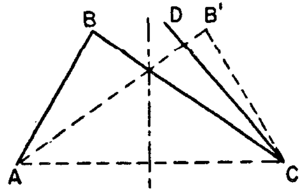
استفاده از فرمول هرون [(۷)، صفحهٔ ۳۵ ملاحظه شود]، نتیجه می‌گیریم که

$$16T^2=[(\overline{AB}+\overline{BC})^2-\overline{AC}^2]\cdot[\overline{AC}^2-(\overline{BC}-\overline{AB})^2].$$

از مقایسهٔ T و T'، ملاحظه می‌کنیم کــه عامل اول برای هــر دو مثلث یکی است در حالی‌که، مطابق نابرابری اخیر، عامل دوم در مورد مثلث $AB'C$ بزرگتر است از عامل نظیر در مــورد ABC؛ بنابــراین $T'>T$. از این رو مساحت nضلعی $AB'C\ldots$ بزرگتر از مساحت nضلعی $ABC\ldots$ است. بنابر ترسیم دو nضلعی‌دارای یك محیط هستند.

هرگاه این استدلال را حداکثر $n-1$ بار تکرار کنیم، یك n ضلعی با محیط P و با ضلعهای برابر به‌دست می‌آوریم. این n ضلعی مساحتی بزرگترازمساحت G خواهد داشت. □

خطای این «برهان» در مراحل تقارن آن است. مثلا ممکن است وقتی قرینهٔ مثلث ABC را نسبت به‌عمود منصف AC به‌دست مــی‌آوریم، AB'، CD را قطع کند (شکل ۱۵.۲ ملاحظه شود)، اتفاقی که وقوع آن به‌ارادهٔ ما نیست. این تقارن درحالتی‌که G محدب باشد بدون اشکال انجام می‌شود.

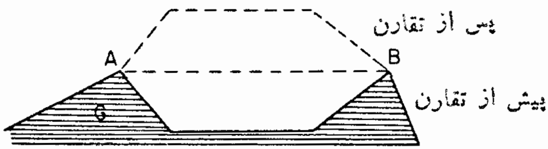


شکل ۱۵.۲

تعریف ۵. یك شکل مسطح را محدب نامیم درصورتی‌که پاره‌خطهای راستی‌که هر جفت از نقاط شکل را به‌هم‌وصل می‌کنندکاملا داخل شکل قرار گیرند.

هرگاه شکلی محدب نباشد، آنگاه حداقل یك جفت نقطهٔ متعلق به‌آن وجود دارد به قسمی که پاره‌خطی که این دونقطه را به‌هم وصل می‌کند جز درنقاط انتهایی آن درخارج شکل قرارمی‌گیرد.

هرگاه G محدب نباشد، می‌توان انتظار داشت که بتوان n ضلعی محدبی یافت‌که دارای همان ضلعها و با همان ترتیب ولی با مساحتی بزرگتر باشد؛ واین امر با تقارنهایی به‌تعداد متناهی به‌صورت زیرانجام می‌گیرد. فرض‌کنیم همهٔ نقاط پاره‌خطی‌که دو رأس غیرمجاور A و B از G را به‌هم وصل می‌کنند، جز خودنقاط A و B، خارج G باشند. یك عمل تقارن تشکیل می‌شود ازیافتن قرینهٔ قسمتی ازمرز Gکه A و B را به‌هم وصل می‌کند نسبت به AB (شکل ۱۶.۲ ملاحظه شود).



شکل ۱۶.۲

سؤال. اگریك n ضلعی G، داشته‌باشیم آیا با استفاده ازعملهای تقارن به‌تعداد متناهی می‌توانیم n ضلعی محدبی مانند G' با ضلعهایی به همان اندازه و با همان ترتیب بسازیم؟

قضیهٔ ۱۶ را می‌توان یا با نشان دادن اینکه جواب این سؤال مثبت است و یا با استفاده از استدلال زیر ثابت کرد. هرجفت از رأسهای G را با یك پاره خط به‌هم وصل می‌کنیم. پاره‌خطهایی را که درون چندضلعی واقع می‌شوند حذف می‌کنیم. پاره‌خطهای باقیمانده یك چندضلعی محدب تشکیل می‌دهند که غلاف‌محدب G نامیده می‌شود. روشن است که این چندضلعی. محیطی کوچکتر ومساحتی بزرگتر از G دارد مگراینکه‌بر G منطبق باشد. اکنون چندضلعی به‌محیط P را که باغلاف محدب G متشابه است می‌توان با استفاده‌ازاستدلالی که در برهان نادرست بالا ارائه‌شد

تبدیل وقضیهٔ ۱۶ را ثابت کرد. تنها ایرادی که ممکن است به‌این استدلال وارد باشد این است که تعداد اضلاع غلاف محدب G ممکن است کمتر باشد. دراین‌حال، با افزودن چند رأس‌کاذب بر روی ضلعها مـی‌توانیم غلاف محدب را یك n ضلعی تصور کنیم.

قضیهٔ دیگری که نمی‌توانیم به‌آسانی ثابت‌کنیم این است: مساحت n ضلعی منتظم از مساحت سایر n ضلعیهای با همان محیط که ضلعهایی برابر دارند، بزرگتر است و این جای تأسف است زیرا در استفاده از مسألـهٔ حل شدنی زیر به‌آن نیاز داریم.

مسألهٔ ۲۵ نشان دهید که اگر دایره و n ضلعی منتظم یك محیط داشته باشند، مساحت دایره از مساحت n ضلعی منتظم بزرگتر است.

راهنمایی: دایره را در یك n ضلعی منتظم محاط کنید. فـرض‌کنید شعاع دایره r و محیط nضلعی P و مساحت آن A باشد. نشان دهید

$$A=\frac{P^{2}r^{2}}{4A}<\frac{P^{2}}{4\pi}.$$

اگر این قضیه را می‌توانستیم ثابت‌کنیم، آنگاه با استفاده از مسألهٔ ۲۵، می‌توانستیم ثابت‌کنیم که: مساحت‌دایره از هر چندضلعی‌که با آن محیطی برابر دارد، بزرگتر است. واین خود کاری قابل توجه بود.

استدلال چنین است. فرض‌کنیم S یك‌چندضلعی دلخواه با محیط P ومساحت T و C دایره‌ای‌باشد که محیط آن با محیط S برابر است. بنا برقضیهٔ ۱۶، چندضلعی دیگری چون S' با محیط P می‌توان ساخت به‌قسمی کـه همهٔ ضلعهای آن برابر و T' مساحت آن بزرگتراز T مساحت S باشد. اگر یـك چندضلعی منتظم S'' کـه دارای محیط P است مساحت $T''>T'$ داشته باشد، آنگاه بنا برنتیجهٔ مسألهٔ ۲۵، مساحت C بزرگتراز T''، ولذا بزرگتراز T است؛ همچنانکه متذکر شده‌ایم، این «اگر» را در ایـن استدلال به‌آسانی نمی‌توان برداشت.

۴.۲ کوشش اشتاینر

پیش‌از آنکه به‌توصیف‌یکی از برهانهای اشتاینر درمورد قضیهٔ برابرمحیطی بپردازیم، باید بعضی نکات را مورد تأکید قراردهیم که درهریك از برهانهایی که برای قضایای

برابرمحیطی چندضلعیها ارائه کرده‌ایم وجود دارد.

دراولین مرحله، یادآور می‌شویم که ما همواره به‌گونه‌ای سازنده عمل کرده‌ایم، یعنی، در اثبات یك قضیه هیچ‌گاه این گونه استدلال نکرده‌ایم که اگر قضیه نادرست باشد، نتیجه‌ای به‌دست می‌آید که با فرض در تناقض است، و ازاین روقضیه باید درست باشد. برهانی که برچنین استدلالی استوار باشد غالباً برهان غیرمستقیم نامیده می‌شود. برهانهای غیرمستقیم برهانهای سازنده نیستند. مسألهٔ ما این بوده است که نشان دهیم شکل مشخصی درمیان رده‌ای مشخص ازشکلها اکسترمال است، یعنی، مساحت آن (یا هر ویژگی دیگری ازآن که تحت بررسی است) از مساحت هرشکل دیگر این رده بزرگتر یا کوچکتر است. با ساخت هندسی، همیشه توانسته‌ایم نشان دهیم که شکل اکسترمال حدسی ویژگی موردنظررا دارد.

درمرحلهٔ بعد، این شناخت حائزاهمیت است که ارائهٔ چنین استدلال صریحی همیشه امکانپذیر نیست. درواقع، ممکن‌است چنین پیش‌آیدکه درمیان ردهٔ مشخصی از اشکال مورد نظر اصلاشکل اکسترمال وجودنداشته باشد. صرف نشان دادن اینکه هرشکلی را به‌جزشکلی که اکسترمال فرض شده‌است می‌توان بهتر کرد، برای نشان دادن اینکه شکل اکسترمال فرض شده واقعاً اکسترمم است برهانی کامل نیست. همچنین ممکن است آن قدر هم تیزهوش نباشیم که بتوانیم جواب مسأله را حدس بزنیم اگرچه نسبت به‌پیدا کردن جواب بسیار کنجکاو باشیم. در اینجا برای‌روشن شدن این اظهارات چند مثال مشخص را بررسی می‌کنیم.

سؤال. ازکسرهایی که به‌شکل $1/n$ هستند $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ کوچکترین کسر کدام است؟

راه حل پیشنهادی. صرف‌نظر ازکسر $1/1$ به‌ازای هرکسر که به‌شکل $1/n$ باشد، کسر دیگر $1/n^2$ وجود داردکه همان شکل را دارد وازآن کوچکتر است؛ یعنی

$$\text{اگر } n > 1 ، \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$$

بنابراین در میان کسرهای مذکور $1/1$ کوچکترین کسر است. □

بدیهی است که این جواب درست نیست؛ درواقع، دراین رده کوچکترین کسروجود ندارد. ما فقط از ردهٔ مفروض عددی را یافته‌ایم که نسبت به‌عمل مربع کردن کاهش نمی‌یابد. می‌توانیم تصورکنیم که همهٔ اعمال دیگری را که می‌توانیم

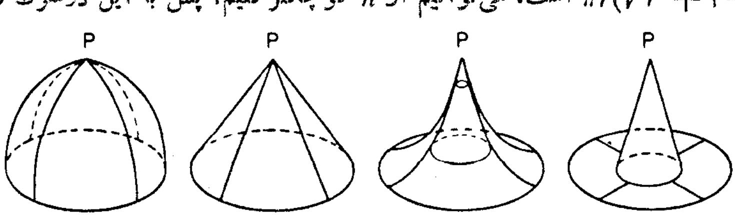
درنظر بگیریم این ویژگی را داشته باشند. اما، همچنان کـه اینك ملاحظه کردیم، برای آنکه نشان دهیم ۱ کوچکترین عدد مورد نظراست این استدلال کافی نیست.

سؤال. از رویه‌هایی که‌ویژگیهای‌زیررا دارندکدام یك کوچکترین مساحت رادارد؟
(الف) به‌وسیلهٔ محیط C از یك قرص‌مستدیر افقی به‌شعاع واحد محدودباشد.
(ب) ازنقطهٔ P که یك واحد بالای مرکز قرص است بگذرد.
(پ) به‌گونه‌ای‌باشدکه هیچ‌خط قائمی رویه‌را دربیش‌ازیك نقطه قطع نکند.
در شکل ۱۷۰۲ بعضی رویه‌های ممکن نشان داده شده‌اند. به‌خاطر داشته‌باشیدکـه قرص مستدیر جزئی ازهیچ یك ازاین شکلها نیست. ونیزمی‌دانیم مسألهٔ‌اکسترمـال ندارد. برای اثبات، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که رویهٔ مینیمال، درصورت وجود، باید مساحتی بزرگتراز π، مساحت قرص، داشته باشد. اما هررویه‌که درسه شرط‌مذکور صدق‌کند و دارای‌مساحت $S=\pi+h$ باشددرنظر بگیریم می‌توانیم رویه‌ای‌بسازیم متشکل از (۱) مخروط نازکی‌که رأس آن P و قاعدهٔ آن در قـرص محدود به C است و (۲) آن قسمت ازقرص که خارج قاعدهٔ مخروط است، به‌قسمی‌که مساحت این رویه کوچکتر از $\pi+h$ باشد [شکل ۱۷۰۲ (ت) ملاحظه شود]. برای این کار فرض‌کنیم شعاع قاعدهٔ مخروط r باشد. در این صورت مساحت این رویه بـرابـر است با

مساحت مخروط + مساحت‌طوق

$$=(\pi-\pi r^{2})+(\pi r\sqrt{r^{2}+1})=\pi-\pi r^{2}+\pi r\sqrt{r^{2}+1}$$

اگر r را بـه‌قدر کافی کوچك بگیریم $\pi r\sqrt{r^{2}+1}-\pi r^{2}$ را کـه بـرابـر بـا $\pi r(\sqrt{r^{2}+1}-r)$ است، می‌توانیم از h کوچکتر کنیم. پس با این دوشرط رویهٔ



(الف) نیمکره — (ب) قسمتی ازیك مخروط مستدیر قائم — (پ) بوق خیالی — (ت) کلاه جادوگر

شکل ۱۷۰۲

مینیمال وجود ندارد. اگر شرط (ب) را حذف کنیم، یعنی ردهٔ رویه‌های مجاز را وسیعتر کنیم، آنگاه در این ردهٔ جدید رویه‌ها یك رویهٔ مینیمال که همان قرص است وجود دارد. بدین گونه بعضی‌اوقات می‌توانیم با توسعهٔ ردهٔ شکلهای‌مجاز، مسأله‌ای را حل کنیم کـه قبل از این عمل شکل اکسترمال نداشته است (مثال بالا و نیز قضیهٔ برابرمحیطی شکلهای بـا مساحت T بـه‌جای چندضلعیهای بـا مساحت T از این نمونه‌اند)؛ گاهی نیز با محدود ساختن ردهٔ شکلهای‌مجاز همین‌کار رامی‌توانیم انجام دهیم (مثل‌حالت قضیهٔ برابرمحیطی که حالت کلی چندضلعیهایی که مساحت T دارند به‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع محدود شد).

شاید متوجه شده‌اید که من ازمسأله‌هایی که در آنها شکل اکسترمـال وجـود ندارد به‌عنوان «مسأله‌های بی‌جواب» یا «مسأله‌های بدون راه حل» یاد نمی‌کنم. در چنین حالتهایی، ترجیح می‌دهم که بگویم هیچ شکل اکسترمال از نوع مطلوب‌وجود ندارد و وقتی این مطلب دانسته شد، مسأله حل شده است.

تبصره. شاید خواننده مطلع باشدکه اگرتنهاکشش سطحی درنظر گرفته شود، حباب صابونی که بر یك قاب سیمی تشکیل می‌شود شکلی را به‌خود می‌گیردکه بین همهٔ شکلهای روی قاب حداقل‌مساحت را دارد. برای بحث جالب حبابهای صابونـی و رویه‌های مینیمال صفحه‌های ۵۲۷–۵۴۳ کتاب ریاضیات چیست؟ تألیف کورانت و رابینز، ترجمهٔ حسن صفاری، ازانتشارات خوارزمی را بخوانید.

شهود همیشه ما را درست راهنمایی نمی‌کند. فکرمی‌کنیدکه به‌سؤال زیر چه پاسخی می‌توان داد؟ قبل‌ازآنکه حدس بزنید تصویرهایی رسم کنید.

سؤال. بین همهٔ خمهای بسته‌ای که در درون آنها بتوان پاره‌خطی بـه‌طول ۱ واحد را به‌قسمی جابه‌جاکرد که یك دورکامل $360°$ طی کند، کدام یك کوچکترین مساحت را در بر می‌گیرد؟ یا به زبان عامیانه مطلوب است شکل پارکینگی که یك اتومبیل به طول واحد بتواند به‌دور خود بچرخد وکوچکتریـن مساحت را داشته باشد (یـا شکل پارکینگهایی با کوچکترین مساحت، زیـرا ممکن است شکلهای مختلفی بـا کوچکترین مساحت وجود داشته باشند).

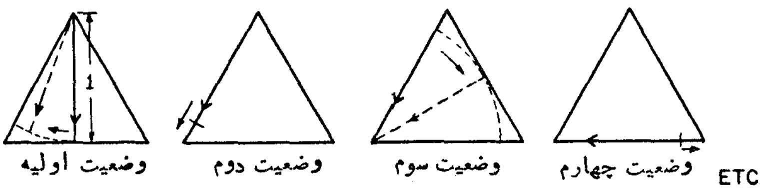
یك جواب ممکن دایره‌ای بـه‌قطر واحد است. آیا خمی کـه مساحتی کمتر در بر گیرد می‌تواند این مقصود را بر آورد؟ بسیکوویچ[1] توانست ثابت کند که چنین خم بسته‌ای باکمترین مساحت وجود ندارد. حیرت‌آورتـر آنکه وی ثابت‌کردکه

1. A. S. Besicovitch

به‌ازای هر عدد مثبت P، هرقدرهم کوچك باشد، خم بسته‌ای با ویژگی مطلوب وجود دارد که دربرگیرندهٔ مساحتی کوچکتر از P واحد سطح است. می‌توان پاره‌خطی به‌طول یك واحد را چنان جابه‌جاکرد که یك دورکامل بچرخد و دراین فرایند فقط ۱/۱۰ واحد سطح را بپیماید. اگر وسایل خارق‌العاده ظریفی‌می‌داشتیم می‌توانستیم این کار را فقط با استفاده از 10^{-10} واحد سطح انجام دهیم!

هرگاه ردهٔ شکلهای مجاز را بااعمال این شرط اضافی که شکلها باید محدب باشند محدود کنیم، آنگاه یك خم اکسترمال وجود دارد. این خم مثلث متساوی‌الاضلاع با ارتفاع یك‌واحد است (شکل ۱۸.۲ ملاحظه شود). برای‌بحث و راه‌حل این مسأله و بسیاری از مسالهٔ‌های جالب دیگر که مربوط به‌شکلهای محدب هستند، کتاب شکلهای محدب مسطح تألیف ریاضیدانان روسی یاگلوم و بولیانسکی[1] را بخوانید.

دشواری اثبات قضیهٔ برابرمحیطی ازهمان نوع موجود در مثالهای بالاست، فقط دراین‌حالت یك شکل اکسترمال وجود دارد. نسبتاً آسان است نشان دهیم که به‌ازای هر شکل مسطح غیرازدایره، شکل‌دیگری با همان محیط لیکن با مساحتی بزرگتر می‌توان یافت. این برای اثبات قضیهٔ برابرمحیطی کافی نیست. این استدلال تنها مبین‌آن است که ازبین کلیهٔ شکلهایی که محیطی برابر دارند اگر شکلی با بیشترین مساحت وجود داشته‌باشد آن شکل دایره است. به‌هرصورت می‌توان تصورکرد که چنین شکل اکسترمالی وجود نداشته‌باشد. اشتاینر باورنداشت نکته‌ای



شکل ۱۸.۲

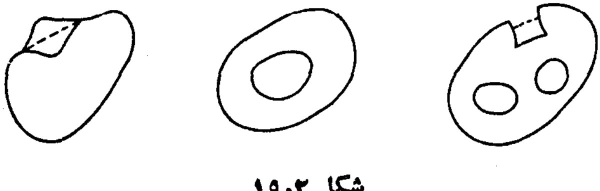
---

1. *Plane Convex Figures* by I.M. Yaglom, V.G. Boltyanskii: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin این کتاب را در سال ۱۹۵۶ به‌زبان آلمانی و Holt, Rinehart, and Winston,Inc., New York در سال ۱۹۶۱ به‌زبان انگلیسی منتشر کرده است.

که مورد بحث ماست خیلی جدی باشد. بعدازهمهٔ این بحثها، از نظرشهود هندسی واضح است که برای‌مسألهٔ‌برابرمحیطی جوابی وجود دارد واین جواب‌دایره‌است. خوشبختانه در ریاضیات مدرن، وایرشتراس توجه را به‌این نکته جلب‌کرد واعتقاد داشت‌که دربرهانهای اشتاینر در مورد قضیهٔ برابرمحیطی اشکالی جدی پیداکرده است؛ ودرواقع او براین عقیده بودکه استدلال وی برهانهای اشتاینر (ونیز برهانهای دیگر برای قضیه‌های دیگر) را نامعتبر ساخته است. اویك برهان وجودی برای جواب مسألهٔ برابرمحیطی، با روشی غیرسازنده، عرضه‌کرد و برحل اشکالی‌که خودگرفته بود فائق آمد و تاکنون هیچ‌کس استدلال هندسی ساده‌ای نیافته است که نشان دهد مساحت دایره ازمساحت هرشکل دیگری با همان محیط بزرگتراست. امیدی هم به‌یافتن چنین استدلالی وجود ندارد. همهٔ برهانهای قضیهٔ برابرمحیطی، با روشی غیرسازنده، نشان می‌دهندکه شکلی با مساحت ماکسیمم وجود دارد.

درحالی‌که اشتاینر قضیهٔ برابرمحیطی را ثابت نکرد، استدلالی‌که درراه‌پیدا کردن برهانهای خود به‌کاربرد زیبا و ابتکاری بود. اکنون یکی از این برهانها را درنظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که: بجز دایره، به‌ازای هر شکل مسطح، شکل دیگری وجود داردکه محیطش با آن برابر و مساحتش ازآن بزرگتر است.

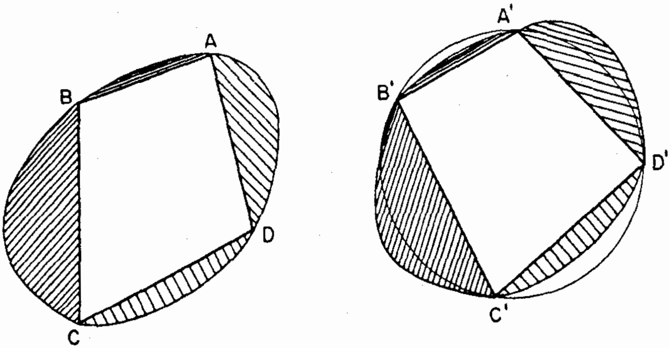
یك شکل مسطح با محیط P درنظرمی‌گیریم، وفرض می‌کنیم‌که این شکل دایره نباشد. اگر این شکل محدب نباشد، به‌طریق زیر، شکلی دیگربا محیط P می‌سازیم‌که مساحتی بزرگترداشته‌باشد. دونقطه روی مرزشکل چنان انتخاب‌می‌کنیم که پاره خط واصل آنها خارج شکل قرارگیرد، وقرینهٔ آن قسمت راکه بین شکل‌و این پاره خط واقع است نسبت به‌این پاره خط پیدا می‌کنیم (شکل ۱۹.۲ ملاحظه شود). شکل‌جدیدی را درنظر می‌گیریم، که متشکل از شکل اولیه، قسمت قرینه‌یابی شده، وقرینهٔ آن قسمت است. محیط این شکل با محیط شکل اولیه برابر است اما مساحتی بزرگتر دارد. این استدلال همهٔ حالتهای ممکن را، همچنان که نمودارهای شکل ۱۹.۲ نشان می‌دهند، به‌حساب نمی‌آورد، اما به‌آسانی می‌توان مثالهای



شکل ۱۹.۲

استثنایی نشان داده‌شده را مشمول این استدلال دانست. این کار را خودتان دنبال کنید.

اگرشکل مفروض‌محدب باشد، ازقضیهٔ ۱۴ استفاده می‌کنیم. چون شکل‌دایره نیست باید چهارنقطه برمرز آن وجود داشته‌باشدکه رأسهای یك چهارضلعی محدب قابل محاط دریك دایره نیستند. چهارضلعی محدبی راکه این چهارنقطه رأسهای آن باشند درنظرمی‌گیریم. فرض‌کنیم قسمتهایی ازشکل‌که خارج این چهارضلعی است (ناحیهٔ سایه زده شده درشکل ۲۰.۲ ملاحظه شود) از نظرشکـــل ومساحت ثابت و محکم به‌ضلعهای چهارضلعی چسبیده باشند. همچنین فرض می‌کنیم چهارضلعی‌دارای مفصلهای‌انعطاف‌پذیری در رأسها باشد. حال اگر چهارضلعی را چنان تغییر دهیم تا در یك دایره قــابل محاط شود آنگاه بنا برقضیهٔ ۱۴ مساحت آن افزایش می‌یابد. چهارضلعی جدید به‌انضمام قطعاتی ازشکل اولیه که بدان چسبیده‌اند (شکل ۲۰.۲ ملاحظه شود) شکل جدیدی‌را مشخص می‌کندکه‌دارای‌محیط P است لیکن مساحتی بزرگتراز مساحت شکل اولیه دارد. این برهان اشتاینر را کامل می‌کند.



شکل ۲۰۰۲

مسألهٔ ۲۱۰ نشان‌دهید از قضیهٔ برابرمحیطی نتیجه می‌شودکه بین همهٔ nضلعیهایی‌که اضلاعشان یکی باشند آنکه قابل محاط در دایره باشد بزرگترین مساحت رادارد.

با استفاده ازنتیجهٔ این مسأله، می‌توانیم ثابت‌کنیم که: بین همهٔ n ضلعیهایی که محیطهای برابر دارند nضلعی منتظم بزرگترین مساحت را دارد.

برهان . فرض کنیم G یك nضلعی غیرمنتظم دلخواه باشد. بنا بـر نتیجهٔ مسألهٔ ۲۱، nضلعی G'، که دارای همان ضلعهای G با همان ترتیب باشد و بتواند دریك دایره محاط شود مساحتی بزرگتر دارد. چون G' در یك دایره محاط شده‌است، می‌توانیم ضلعهای آن را به‌هر ترتیبی که بخواهیم مجدداً مرتب کنیم. با توجه به‌این واقعیت، می‌توانیم با استفاده ازنیمهٔ آخر برهان نادرست قضیهٔ ۱۶ بـه‌نتیجهٔ مطلوب برسیم. □

قضیهٔ برابرمحیطی را می‌توانیم به‌صورت دیگری هم بیان کنیم. فرض کنیم A مساحت و P محیط یك شکل مفروض را نشان دهد و دایـرهٔ به‌محیط P دارای شعاع r باشد. در این صورت این قضیه هم‌ارز نابرابری

$$A \leqslant \pi r^{۲}$$

است، و یا چون $r = P/۲\pi$،

$$\frac{۴\pi A}{P^{۲}} \leqslant ۱.$$

این نابرابری را نابرابری برابرمحیطی می‌نامیم. پولیا[1] خارج‌قسمت $۴\pi A/P^{۲}$ را خارج‌قسمت برابرمحیطی نامیده است. به‌پیروی از او «خارج‌قسمت برابرمحیطی» را به «$I.Q.$» نشان می‌دهیم وقضیهٔ برابرمحیطی را بـه‌صورت زیر بیان می‌کنیم: بین همهٔ شکلهای مسطح دایره بزرگترین $I.Q.$ را داراست.

مسألهٔ ۲۲. $I.Q.$ را در چند شکل محاسبه کنید. آیا اعداد به‌دست آمده مؤید این قضیه‌اند؟

1) G. Pólya

۳

اصل بازتاب

۱.۳ تقارن

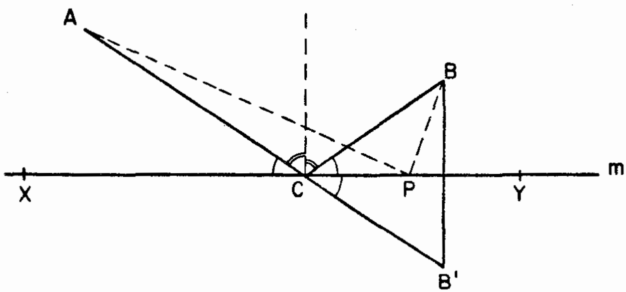
«تقارن را چه گسترده وچه محدود تعریف کنیم، ایده‌ای است که طی قرون و اعصار متمادی بشر کوشش کرده است به‌وسیلهٔ آن نظم، زیبایی و کمال را درك وخلق کند.» این عبارتی‌است که ازیکی از بزرگترین ریاضیدانان‌زمان ما، هرمان وایل نقل شده است. درواقع، استدلالهایی که برمفاهیم تقارن استوارند ازجملهٔ قویترین وبدیعترین استدلالها در ریاضیات‌اند. دراین فصل نقش ساده‌ترین نوع تقارن یك شکل، یعنی تقارن نسبت به یك خط‌را (که شکل را به‌دوجزء تقسیم می‌کند که یکی قرینهٔ‌دیگری است) در مطالعهٔ نابرابریها بررسی مــی‌کنیم. تقارن، هنر تمدنهای اولیه را شدیداً تحت‌تأثیر قرار داده است. استفادهٔ آن را در ریاضیات یونانیها شروع کردند. این مفهوم، آنها را به‌اکتشافات‌عجیبی درباب چندوجهیهای منتظم: چهاروجهی، مکعب، هشت‌وجهی، دوازده‌وجهی، وبیست‌وجهی رهنمون کرد. به‌نوبهٔ خود، تقارن چندوجهیها تا اندازه‌ای سبب خلق شاخه‌ای از ریاضیات جدید شدکه به‌توپولوژی جبری‌مشهور است. برای آشنایی بــا این نقطه نظر، قویــاً پیشنهاد می‌کنم کتاب هندسه و اندیشه

تألیف هیلبرت و کوهن-فوسن[1] را بخوانید.

تقارن از نظر زیبایی شناسی خوش‌آیند است، و بسیاری از شکلهای جالب هندسی، از جمله، چندوجهیهای منتظم، از طریق ترسیمهایی که شامل تقارن هستند به دست می‌آیند. (بحث هیلبرت و کوهن-فوسن را مطالعه کنید.) با این حال، اصل مجرد ریاضی وابسته به‌مفهوم تقارن است که ما در فرصتهای بسیاری از آن استفاده می‌کنیم. کشف این تجرید، که به اصل بازتاب مشهور است به‌هرون نسبت داده شده است. او دریافت که اشعهٔ نور بازتابیده از یك صفحه، کوتاهترین راه بین منبع و گیرنده را می‌پیماید. این اصل هم‌ارز با این واقعیت است که در بازتاب اشعه به‌توسط یك رویه مسطح، زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است. چون ممکن است با برهان این هم‌ارزی آشنا نباشید، ذیلا برهانی از آن ذکر می‌شود.

فرض کنیم A منبع نور، B گیرنده، و m بازتابندهٔ نور باشد (شکل ۱۰۳ ملاحظه شود). ابتدا فرض می‌کنیم که ACB مسیری است که در آن زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است و نشان می‌دهیم که این مسیر کوتاهترین مسیر از A به m و از m به B است. B' را قرینهٔ B نسبت به m می‌گیریم. لذا $\measuredangle ACX=\measuredangle BCY=\measuredangle B'CY$؛ و از این‌رو، ACB' یك پاره خط راست و بنابراین کوتاهترین مسیر A تا B' است. اما $\overline{BC}=\overline{B'C}$؛ و درواقع برای هر نقطهٔ P روی m، $\overline{BP}=\overline{B'P}$. یعنی،

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}>\overline{AC}+\overline{CB'}=\overline{AC}+\overline{CB}.$$



شکل ۱۰۳

1) *Geometry and the Imagination* by David Hilbert and S. Cohn-Vossen, Chelsea Press, New York, 1952.

بنابراین، ACB کوتاهترین مسیر از A به m و از m به B است. عکس این قضیه از قابلیت انطباق $\triangle B'CP \cong \triangle BCP$ و برابری $\measuredangle B'CP = \measuredangle ACX$ نتیجه می‌شود. $\square$

با وجودی‌که اصل بازتاب هم ساده وهم روشن است، وقتی در جای درستی ازآن استفاده شود مطلبی راکه مشهود نیست یا تقریباً مشهود نیست، روشن می‌کند. کوشش می‌کنم تا برای روشن شدن این واقعیت، مثالهایی ارائه دهم، اما نخست‌به بررسی ایده‌هایی می‌پردازم که برپایهٔ تقارن ساده است.

۲.۳ مسألهٔ دیدو[1]

اشتاینر از بازتاب ساده در ارتباط با قضیهٔ برابرمحیطی و نتیجه‌های آن به‌صورتی بسیار مؤثر استفاده کرد. یکی از این نتیجه‌ها جوابی بــه مسألهٔ دیدو است. دیدو دختر یکی از فرمانروایان صور بود. در افسانه آمده است‌کــه دیدو با آسرباس[2] ازدواج کرد. آسرباس به خاطر ثروتش به قتل‌رسید. پس‌ازآن،دیدو با خزانه‌دار آسرباس به‌قبرس و از آنجا به‌ساحل افریقا نزدیك سیسیل سفر کرد. وی به‌حاکم محل گفت مایل است زمینی در امتداد ساحل خــریداری‌کندکــه از قطعه‌ای که با پوست‌گاوی بتوان احاطه‌کرد بزرگتر نباشد.حاکم با این درخواست بانوی زیبا موافقت‌کرد وسخاوتمندانه برای اوپوست بزرگی تهیه کرد. دیدوی زیرك پوست را به‌نوارهای باریکی برید ونوارها را به‌هم بست وبه‌صورت ریسمانی درآورد تا بتواند باآن زمینی را به‌مراتب بزرگتر از آنچه حاکم تصورکرده بوداحاطه‌کند. با فرض اینکه ساحل خطی راست و زمین مسطح باشد، دیدو بااین‌مسأله مواجه شد: چه شکلی است‌که بایك‌پاره خط به‌هرطول و ریسمانی به‌طول مفروض محصور و مساحت آن ماکسیمم است؟ دیدو این مسألــه را حل‌کرد و تا اندازه‌ای به خاطر حل موفقیت‌آمیز این مسأله، بنیانگذار وملکهٔ شهر پیشرفتهٔ کارتاژ[3] شد.

همچنان‌که متذکر شدیم، راه حل مسألهٔ دیدو در تقارن نهفته‌است. هرگاه به ساحل دریا به‌عنوان آینه‌ای بنگریم‌که ناحیهٔ محصور به‌وسیلهٔ ریسمان پوست‌گاو درآن منعکس شود، مسألهٔ دیدو به‌ایــن شکل درمی‌آید: چه‌شکلــی است‌کــه محور تقارنی مفروض (ساحل دریا) ومحیطی مفروض (دو برابر طــول ریسمان) دارد و مساحتش ماکسیمم است؟ چون ردهٔ همه شکلهای با محیط مفروض شامل آنهایی

1. Dido 2. Acerbas 3. Carthage

می‌شود که علاوه‌بر آن محور تقارن دارند و از آنجا که دایره محور تقارن دارد، قضیهٔ برابرمحیطی تضمین می‌کند کـه شکل مطلوب با مساحت ماکسیمم دایره است. لذا جواب مسألهٔ دیدو یك نیمدایره می‌شود.

مسألهٔ ۲۳. چه شکلی است که با ریسمانی به‌طول L وچوبی به‌طول D، $L>D$ محصور شود و مساحت آن ماکسیمم باشد؟ برهان آن را نیز ارائه کنید.

مسألهٔ ۲۴. ترتیب وطول همهٔ ضلعهای یك n ضلعی جز یکی از ضلعها داده شده‌اند. کدام یك از این n ضلعیها بزرگترین مساحت را دارد؟ حدس خود را ثابت کنید.

مسألهٔ ۲۵. یك ربع صفحه مفروض است، بـه‌وسیلهٔ خمی به‌طول مفروض چه شکلی می‌توان برید که بیشترین مساحت را داشته باشد؟ نتیجهٔ خودرا تعمیم دهید.
راهنمایی: بیش از یك بار قرینه‌یابی کنید.

مسألهٔ ۲۶. مسألهٔ ۲۳ را به‌سه‌بعدیها تعمیم دهید ومسألهٔ جدید را حل کنید.

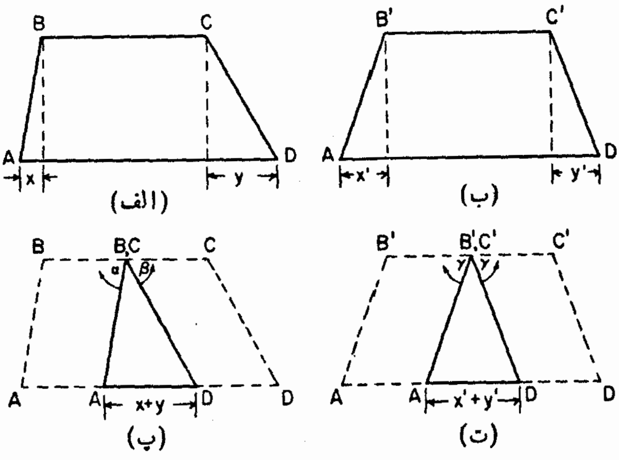
۳.۳ متقارن‌سازی اشتاینر

با فرض اینکه در شکلهایی کـه محیط مفروضی دارند شکلی بـا مساحت ماکسیمم وجود داشته باشد بااستفاده از تقارن، قضیهٔ برابرمحیطی را نیزمی‌توان ثابت کرد. اشتاینر چند برهان از این نوع ابداع کرد. یکی از ایده‌های او اثبات این حکم بود که شکل ماکسیمال باید نسبت به‌هرخطی‌که محیط را به‌دوقسمت متساوی تقسیم می‌کند متقارن باشد.

برای اثبات، ملاحظه می‌کنیم که شکل مـاکسیمال بایـد محدب باشد و لـذا ادامهٔ بحث‌را به‌اشکال محدب محدود می‌کنیم. اکنون گوییم، وتری که محیط یك‌شکل محدب را به‌دوقسمت‌برابر تقسیم می‌کندکاملا داخل شکل قراردارد. اگر چنین‌وتری مساحت شکل را به‌دو قسمت برابر تقسیم نکند، می‌توانیم نیمهٔ با مساحت کوچکتر را برداریم و به‌جای آن قرینهٔ (تصویر آینه‌ای) نیمهٔ بزرگتر را قرار دهیم. لذا شکل جدیدی با مساحت بزرگتر ولی با همان محیط شکل اولیه به‌دست می‌آوریم. اگر شکل جدید محدب نباشد می‌توان آن را محدب کرد (بخش ۴.۲ را ملاحظه کنید) به‌هرحال مساحت آن افزایش می‌یابد درحالی‌که محیط آن ثابت می‌ماند. همچنین متذکر می‌شویم وتری‌که محیط را به‌دونیمه تقسیم می‌کند ممکن‌است شکل محدب‌را به‌دونیمهٔ بامساحت‌برابر تقسیم کندکه نسبت به‌آن وتر متقارن نباشند. دراین حالت

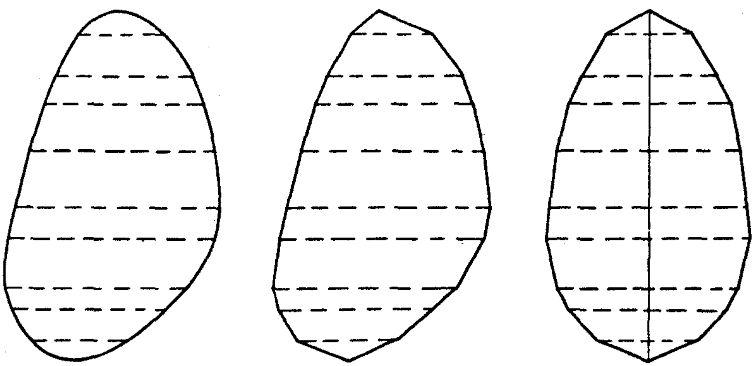
فرق نمی‌کند کدام یك از نیمه‌ها برای قرینه‌سازی انتخاب شود. در این مورد هم شکل حاصل ممکن است محدب نباشد ولی همچون قبل می‌توانیم آن را محدب سازیم. درنتیجه، شکل مسطحی با محیط مفروض و با بزرگترین مساحت درصورت وجود، نسبت به‌هرخط که محیط آن را به دونیمهٔ برابر تقسیم می‌کند متقارن است و بنابراین باید دایره باشد. (این «باید» آخری محتاج ارائهٔ برهان است.) □

یکی دیگراز برهانهای اشتاینر برای قضیهٔ برابرمحیطی با روش متفاوتی بر پایهٔ این ایده‌که شکل ماکسیمال باید در هرامتداد دارای محور تقارن باشد، استوار است. برای توصیف این ایده، ابتدا به قضیه‌ای در مورد ذوزنقه‌ها توجه می‌کنیم. فرض کنیم‌ارتفاع وقاعده‌های ذوزنقهٔ $ABCD$ و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $AB'C'D$ برابر باشند؛ یعنی، فرض می‌کنیم که $AB'C'D$ نسبت به‌عمود منصف AD متقارن باشد. اما محیط یك مثلث با قاعده و ارتفاع مفروض وقتی حداقل است که متساوی‌الساقین باشد، زیرا این‌بیانی دیگر ازاصل بازتابی است. (شکل ۲۰۳(ت) را ملاحظه کنید که درآن A منبع، D گیرنده و $B'C'$ آینه فرض می‌شود.) لذا مساحت $AB'C'D$ با مساحت $ABCD$ برابر است، درحالی‌که محیط آن از محیط $ABCD$ نابزرگتر است.



شکل ۲۰۳

اکنون شکل محدب دلخواهی را درنظر می گیریم [شکل ۳.۳ (الف)]. این شکل را به‌نوارهای باریك که ضلعهای آنها باهم موازی‌اند می‌بریم؛ وموقتاً، فرض می‌کنیم کـه هرنوار به‌شکل ذوزنقه است [شکل ۳.۳ (ب)]. این ذوزنقه‌ها را بـه ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین با همان قاعده‌ها و مساحت تبدیل و ذوزنقه‌های جدیـد را ردیف‌می‌کنیم تا شکل جدیدی حاصل شود که درآن همهٔ ذوزنقه‌ها عمود منصف مشترك داشته‌باشند [شکل ۳.۳ (پ)]. از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که شکل۳.۳ (پ) دارای‌همان مساحت شکل ۳.۳(ب) ولی با محیط کوچکتری‌است. اگرشکل محدب اولیه را [شکل ۳.۳ (الف)] بـه نوارهای باریکتر و بـاز بـاریکتر تقسیم‌کنیم، چندضلعیهای تقریب‌کننده [شکل ۳.۳ (ب)] دارای مساحتها و محیطهایی هستند که به‌مساحتها ومحیطهای شکل اولیه میل می‌کنند. (درواقع، غالباً مساحت ومحیط یك شکل مسطح را بـه‌تـرتیب حـد مساحتها و محیطهای دنبالـه‌ای از چندضلعیهای تقریب‌کننده تعریف می‌کنند.) چندضلعیهای تبدیل شده [شکل ۳.۳ (پ)] بـه شکل محدبی با یك محور تقارن میل می‌کنند. لذا، با داشتن یك شکل محدب مـی‌توان شکل محدب دیگری با همان‌مساحت، و بامحیطی نابزرگترساخت‌که محور تقارنی درامتداد مفروضی داشته باشد. (آیـا می‌توانید محدب بودن شکل متقارن شده را ثابت کنید؟) ایـن شکل محدب متقارن را می‌توان شکل حاصل از ترسیم زیر نیز تصور کرد.



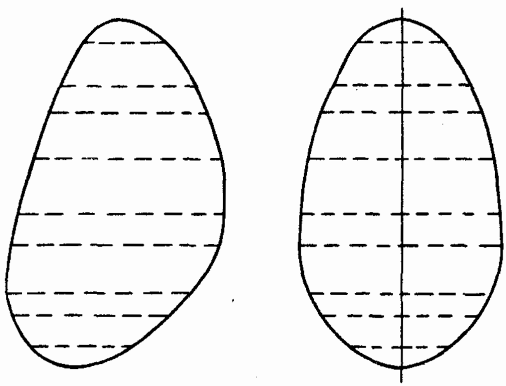
(الف) (ب) (پ)

شکل ۳.۳

قرسیم. خط راستی رسم کنید، وترهایی ازشکل محدب اولیه راکه براین خط راست عمودند درنظر بگیرید. هریك از این وترها را چنان حرکت دهیدکه خط رسم شده عمودمنصف آنها شود.

نقاط انتهایی وترهای انتقال یافته شکل متقارن جدیدی با همان مساحت‌شکل اولیه لیکن با محیط کوچکتر تشکیل می‌دهند (شکل ۴.۳). این ترسیم را متقارن‌سازی اشتاینر می‌نامند ونقش مهمی در نظریهٔ اشکال محدب ایفا می‌کند.

اکنون در وضعیتی هستیم که «برهان» خودرا دربارهٔ قضیهٔ برابرمحیطی تکمیل کنیم. با داشتن یك شکل محدب که محور تقارنی دریك امتداد نداشته باشد، متقارن‌سازی اشتاینر را نسبت به آن‌امتداد برشکل اعمال می‌کنیم وشکل محدب جدیدی با همان مساحت ولی با محیط کوچکتر به‌دست می‌آوریم. سپس شکل جدید را آنقدر بزرگ می‌کنیم تا محیطش با محیط شکل اولیه برابرشود. لذا، اگرشکلی در همهٔ امتدادها محور تقارن نداشته باشد، درمیان همهٔ شکلهایی که محیطشان برابر است بزرگترین مساحت را نخواهد داشت. بنابراین نتیجه می‌شودکه اگرشکل ماکسیمالی وجود داشته باشد، آن شکل ماکسیمال دایره است. (اثبات گزارهٔ اخیر به‌خواننده واگذار می‌شود.)



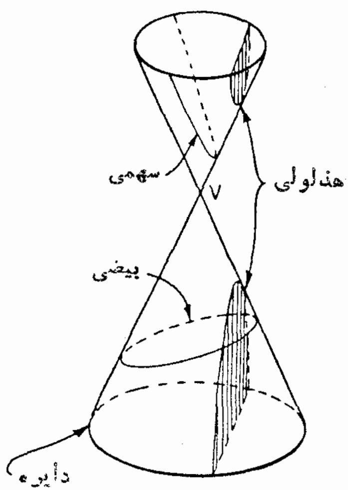
شکل ۴.۳

۴.۳ مقاطع مخروطی

در این بخش موضوع نابرابریها را موقتاً کنار می‌گذاریم و بعضی اشکال هندسی

مانند بیضی، سهمی وهذلولی را به‌خاطر خودشان بررسی می‌کنیم. این خمهای مسطح به‌مقاطع مخروطی مشهورند زیراهمگی خمهایی‌هستندکه‌از تقاطع یك‌مخروط مستدیر قائم با یك صفحه تشکیل می‌شوند. مخروط مستدیر قائم این‌طور تعریف می‌شود: فرض‌کنیم C دایره و V نقطه‌ای باشد روی خطی‌که از O مرکز دایره بر صفحهٔ دایره عمود است (شکل ۵.۳ ملاحظه شود). اگر V بر O منطبق نباشد، همهٔ خطهایی‌که از V ونقاط C می‌گذرند سطحی می‌سازندکه مخروط مستدیرقائم نامیده می‌شود. خط ماربر V و O را محور و نقطهٔ V را رأس مخروط می‌نامند.

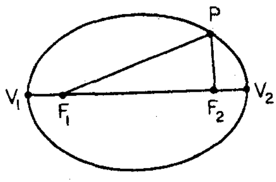
فصل مشترك مخروط با صفحه‌ای‌که بر محور آن عمود باشد به‌وضوح یك دایره است. وقتی صفحهٔ قاطع نسبت به وضعیت عمودی‌کمی شیب پیداکند، فصل مشترك دایره نیست، ولی‌باز یك خم بسته است. هرخم‌بسته‌ای‌که از تقاطع یك‌صفحه با مخروط مستدیر قائم به‌دست آید بیضی نام دارد. به‌این ترتیب دایره حالت خاصی از بیضی است. البته همهٔ بیضیها دایره نیستند. هر بیضی با ناحیهٔ داخلی آن محدب است. زیرا هر نیمهٔ یك مخروط مستدیر قائم باقسمت داخلی آن یك جسم محدب است. وقتی شیب صفحه‌های قاطع بیشترشوند، بیضیهایی که از صفحه‌های قاطع و مخروط به‌دست می‌آیندکشیده‌تر می‌شوند. هنگامی که صفحه با یکی از



شکل ۵.۳

خطهایی که سطح مخروط را تشکیل میدهند موازی شود، فصل مشترك خم بستهٔ محدب نیست بلکه خمی است با طول بینهایت به‌نام سهمی. اگرصفحه بازهم‌شیب بیشتری پیداکند فصل مشترك باز به‌طول بینهایت است اما دو شاخهٔ مجزا دارد. این مقطع مخروطی را هذلولی می‌نامند.

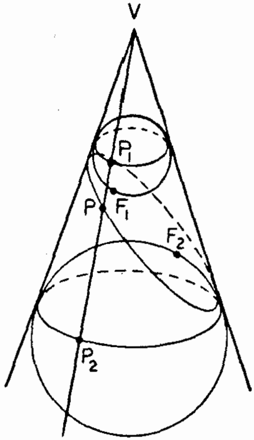
بیضی رااین‌طورنیز می‌توان مشخص کرد: بیضی خم مسطحی است‌که‌مجموع فاصله‌های هرنقطهٔ روی‌آن تا دونقطهٔ ثابت همواره ثابت باشد. لذا اگرسرنخی‌را به‌نقطهٔ F_1 و سر دیگر آن را به‌نقطهٔ F_2، که روی ورقهٔ صاف کاغذی قرار دارند، سنجاق کنیم و باحرکت دادن مداد کمانی‌رسم کنیم به‌نحوی‌که مداد نخ را همواره کشیده و روی کاغذنگاه دارد، آن کمان قسمتی ازیك‌بیضی خواهد بود. (شکل ۶.۳ ملاحظه شود.)این تعریف بیضی را با تعریف دیگر بیضی که به‌عنوان یك‌مقطع مخروطی بیان‌شد به‌آسانی می‌توان مربوط ساخت. گرچه در درسهای‌ریاضی درمبحث بیضی به‌ندرت به‌این ارتباط اشاره می‌شود، ما ثابت می‌کنیم که بیضی که به‌صورت مقطع مخروطی تعریف شد دارای ویژگی توصیف شده در شکل بالاست. بعداز آن، به‌موضوع‌نابرابریها بازمی‌گردیم و با استفاده ازاصل بازتاب، ویژگی مهم دیگری از بیضی را ثابت می‌کنیم.



شکل ۶.۳

برهان. این فکر زیبا وابتکاری از ریاضیدان بلژیکی، داندولن[1] (۱۷۹۴–۱۸۴۷) است. شکل ۷.۳ راکه درآن یك‌بیضی روی یك‌مخروط مستدیر قائم رسم‌شده است درنظر بگیرید. دوکره درون‌مخروط رسم می‌کنیم که هردوبرمخروط و صفحهٔ بیضی مماس باشند. یکی از کره‌ها بالای این صفحه و دیگری زیرآن قرار دارد. فرض کنیم‌کره‌ها باصفحه در F_1 و F_2 مماس باشند و P نقطهٔ دلخواهی بربیضی باشد. پاره‌خط VP_1PP_2 را روی سطح مخروط درنظر میگیریم، که درآن V رأس

1) Dandelin



شکل ۷.۳

مخروط و P_1 و P_2 نقاط تماس پاره‌خط با کره‌ها هستند. چون پاره‌خطهای FP_1 و PF_1 از P بر کرهٔ بالایی مماس‌اند،

$$\overline{PF_1} = \overline{PP_1}\,.$$

همچنین

$$\overline{PF_2} = \overline{PP_2}\,.$$

بنا بر این

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{P_1P} + \overline{P_2P} = \overline{P_1P_2}\,.$$

اما $\overline{P_1P_2}$ ثابت ومستقل از P است (چرا؟). از این‌رو، $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ مقداری ثابت است و می‌بینیم که بیضی مکان‌هندسی نقاطی است درصفحه که مجموع فاصله‌های آن نقاط تا دونقطهٔ ثابت صفحه‌همه باهم برابرند. □

ما دراین‌کتاب در مواردی از ویژگی زیر استفاده خواهیم‌کرد: بیضی مکان هندسی P، رأس‌مثلث F_1PF_2 با قاعدهٔ‌ثابت $\overline{F_1F_2} = 2c$ و محیط ثابت $p > 4c$ است. هرمثلث $F_1P'F_2$ که P'، رأس آن‌داخل بیضی باشد، محیطی کوچکتر از p دارد و هرمثلث $F_1P''F_2$ که P'' رأس آن خارج بیضی‌باشد، محیطی بزرگتر از p دارد.

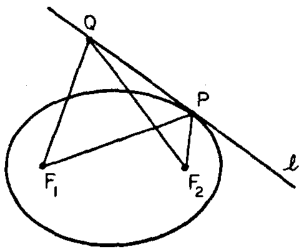
همچنین می‌توان نشان‌داد که هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که تفاضل فاصله‌های آن نقاط تا دونقطهٔ ثابت همه‌باهم برابرند (دوکرهٔ مماس دریك طرف صفحهٔ هذلولی واقع می‌شوند).

مسألهٔ ۲۷. شکلی رسم کنید که این‌ویژگی هذلولی را به‌طورکامل نشان دهد.

هریك از دونقطهٔ ثابتی که در هذلولی و بیضی ذکرشد کانون نامیده می‌شود. «کانون» معادل واژهٔ لاتین «*focus*» به‌معنای آتشدان است، بـا استفاده از اصل بازتاب معلوم می‌شود که کانون بیضی‌جایی است که اشیا درآن می‌سوزند. فرض کنیم l بر بیضی‌به‌کانونهای F_1 و F_2 مماس باشد؛ شکل ۸.۳ ملاحظه‌شود. همچنین فرض کنیم P نقطهٔ تماس و Q نقطهٔ دلخواه دیگری روی l باشد. چون Q خارج بیضی است،

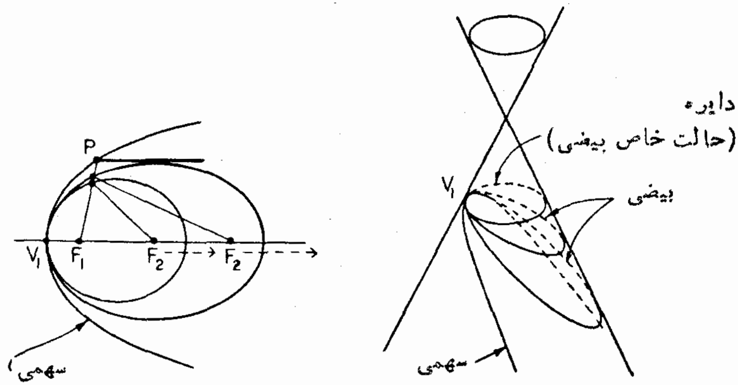
$$\overline{QF_1}+\overline{QF_2}>\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$$

بنابراین، F_1PF_2 کوتـاهترین مسیر از F_1 بـه l و ازآنجا بـه F_2 است، و اصل بازتاب مبین آن است‌که شعاعهای کانونی PF_1 و PF_2 بامماس l زاویه‌های برابر می‌سازند. یعنی اگر بیضی یك بازتابنده می‌بود، شعاعهایی کـه ازیك منبع نورانی واقع در F_1 انتشار مـی‌یافت به‌وسیلهٔ بیضی همگی در F_2 متمرکز می‌شدند؛ پس کانون یك «نقطهٔ سوزان» است.



شکل ۸.۳

رأسهای بیضی دو نقطهٔ انتهایی طولانی‌ترین وتر بیضی هستند، و این وتر از کانونهای بیضی می گذرد. هرگاه یکی‌ازکانونهای بیضی، مثلا F_1، و V_1، نزدیکترین رأس ثابت‌بماند وکانون دیگر درامتداد خط ماربر V_1 و F_1 دورتر و دورتر برود، بیضی طویلتر و طویلتر و سرانجام در حد به‌یك سهمی تبدیل می‌شود (شکل ۹.۳). درحد، شعاع‌کانونی PF_2 بامحور، یعنی خط ماربر V_1 و F_1، موازی می‌شود. از

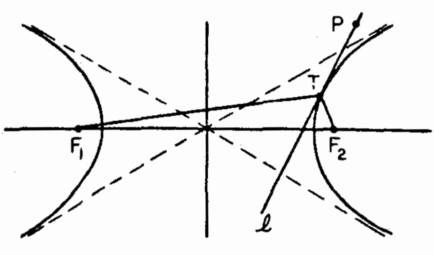


شکل ۹.۳

این ویژگی سهمی، که همهٔ شعاعهای صادر از کانون آن در یك امتداد بازمی‌تابند، در طراحی ابزار متنوعی چون رادیو تلسکوپ و چراغهای بزرگ اتومبیل استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۲۸. نشان دهید که مماس بر هذلولی زاویهٔ بین شعاعهای کانونی نقطهٔ تماس را نصف می‌کند.

راهنمایی: فرض کنید l نیمساز زاویهٔ F_1TF_2 باشد (شکل ۱۰.۳ ملاحظه شود) و نشان دهید که T تنها نقطه‌ای از l است که برهذلولی قرار دارد؛ برای این کار ثابت کنید که به‌ازای هر نقطهٔ دیگر P روی l، $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}<\overline{TF_1}-\overline{TF_2}$. از بازتاب در l استفاده کنید.



شکل ۱۰.۳

یك بیضی و یك هذلولی را وقتی همکانون نامیم که دارای کانونهای مشترك باشند.

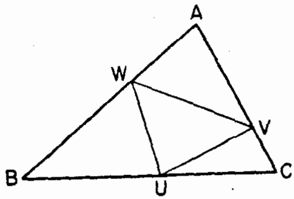
مسألهٔ ۲۹.۳ ثابت کنید هرگاه یك بیضی و یك هذلولی همکانون باشند، آنگاه دومماسی که در هر نقطهٔ تقاطع برهر یك رسم می‌شوند برهم عمودند.

۵.۳ مثلث

استدلالهایی که بر پایهٔ مفهوم هندسی تقارن استوارنـد غالباً به‌طـرزی غیرمنتظره راه‌گشایند. بسیارند مسائلی که در مقابل سخت‌ترین کوششهایی که برای حل آنها می‌شود مقاومت می‌کنند. ولی وقتی که ایدهٔ «تقارن» به‌میان می‌آید سرتسلیم فـرود می‌آورندو به‌طرز سحرآمیزی ساده‌می‌شوند. این‌موضوع‌مخصوصاًدرمورد ویژگیهای مثلثها صدق می‌کند. هزارها سال است کـه مثلثها مطالعه می‌شوند، ولی ویژگیهای جدیدی از مثلثها گاه و بیگاه ظاهر می‌شوند. بعضی از این ویژگیها حدسهایی بیش نیستند. یعنی، شواهد زیادی صحت آنها را تأیید می‌کنند، لیکن تـاکنون هیچکس قادر به‌اثبات درستی آنها نبوده است. در این بخش بعضی از ویژگیهای مثلثها را که همین‌اواخر کشف شده‌اند بررسی می‌کنیم.

با مسألهٔ فانیانو[1] شروع مـی‌کنیم (شکل ۱۱.۳ را ملاحظه کنید). مثلثی را تعیین کنید که در یـك مثلث حادهٔ مفروض محاط است وکمترین محیط را دارد؟ آیا می‌توانید جواب را حدس بزنید؟ بازتاب چـه می‌گوید؟ قدری وقت صرف کنید، بعضی از حالتهای خاص را آزمایش کنید، و ببینید آیا می‌توانید جواب مسأله را حدس بزنید.

راه‌حل‌مسألهٔ فانیانو، که در ذیل‌می‌آید، از آن فیر[2] ریاضیدان‌مشهور مجاری



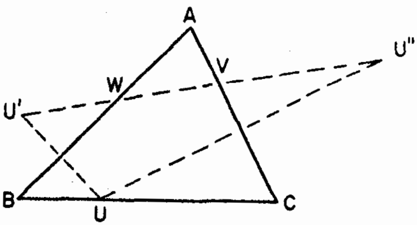
شکل۱۱.۳

1) Fagnano 2) L. Fejér

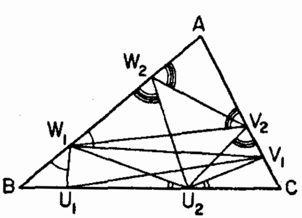
(۱۹۵۸-۱۸۸۰) است. او این راه‌حل را در ۱۹۰۰ و به‌هنگامی پیدا کرد که در برلین دانشجو بود. برای حل مسأله، دوضلع مثلث محاطی مینیمال را در نظر می‌گیریم، این دوضلع یکدیگر را روی ضلعی از مثلث مفروض قطع می‌کنند و با آن دو زاویه می‌سازند که بنابر اصل بازتاب باهم برابرند. به عبارت دیگر، رأسهای مثلث یـا مثلثهای محاطی مینیمال تنها نقطه‌هایی بر ضلعهای مثلث مفروض‌اند که یك توپ بیلیارد بعداز دقیقاً دو بازتاب به‌نقطهٔ شروع بازمی‌گردد. زیبایی استدلال فیر دراین است که به‌روشی ساده بیان می‌کند که رأسهای مثلث مینیمال را کجا باید قرار داد.

فرض‌کنیم ABC مثلث مفروض باشد. یك راه‌یافتن مثلث محاطی UVW با محیط مینیمم چنین است. (الف) دونقطهٔ U_1 و V_1را به‌ترتیب روی ضلعهای BC و AC انتخاب مـی‌کنیم و W_1 را روی AB بـه قسمی انتخاب مـی‌کنیم کـه $\overline{U_1W_1}+\overline{V_1W_1}$ حتی‌الامکان کوچك باشد (شکل ۱۲.۳ را ملاحظه کنید)؛ (ب) V_1 و W_1 را ثابت نگاه مـی‌داریم و نقطهٔ U_2 را روی BC چنان تعیین می‌کنیم کـه $\overline{W_1U_2}+\overline{V_1U_2}$ مینیمم شود؛ (پ) W_1 و U_2 را ثابت نگاه می‌داریم و V_2 را بر AC چنان تعیین می‌کنیم که $\overline{U_2V_2}+\overline{W_1V_2}$ را مینیمم سازد؛(ت) وبا U_2وV_2ی تثبیت شده، W_2 را چنان می‌یابیم که $\overline{U_2W_2}+\overline{V_2W_2}$ مینیمم شود و به‌این ترتیب ادامه می‌دهیم. این فرایند جز در حالتهای خاصی پس از مراحلی به تعداد متناهی متوقف‌نخواهد شد. به‌علاوه، مجبوریم ثابت‌کنیم که این فرایند نامتناهی به‌یك‌مثلث حدی UVW میل می‌کند.

فیر ازاین مشکل احتراز کرد. فکر او این بود کـه U را ثابت نگاه دارد و به‌صورتی زیبا یکباره بهترین وضع ممکن V و W، کـه محیط مثلث UVW را به حداقل می‌رساند، پیدا کند. به‌این منظور تصویر (یا قرینهٔ) U، نسبت به دو ضلع AB و AC، کـه به‌مثابهٔ دوآینه در نظر مـی‌گرفت به‌دست آورد. (شکل ۱۳.۳ را ملاحظه کنید.) قرینه‌های U را U' و U'' می‌نامیم. دراین صورت



شکل ۱۳.۳

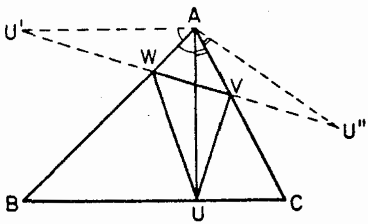


شکل ۱۲.۳

$$\overline{U'W}+\overline{WV}+\overline{VU''}=\overline{UW}+\overline{WV}+\overline{VU}.$$

اما مجموع نخست وقتی حداقل است که V و W روی خط راستی که با U' و U'' مشخص می‌شوند قرار داشته باشند. لذا با داشتن U، دونقطهٔ V و W را که محیط $\triangle UVW$ را مینیمم می‌کنند، مشخص کرده‌ایم.

اکنون نیاز داریم بهترین وضعیت U را پیدا کنیم. (شکل ۱۴.۳ ملاحظه‌شود.) چون AB و AC به‌ترتیب عمودمنصفهای UU' و UU'' هستند $\overline{AU'}=\overline{AU}=\overline{AU''}$. بنابراین $\triangle U\,AU''$ متساوی‌الساقین است. طول $U'U''$ قاعدهٔ مثلث $U'AU''$ با محیط $\triangle UVW$ برابراست. چون $\measuredangle U'AU''=۲\measuredangle BAC$، زاویهٔ $U'AU''$ مقداری است ثابت. بنابراین قاعدهٔ $\triangle U'AU''$ وقتی کوتاهترین است که ساقهای آن کوتاهترین باشند. ساقها وقتی کوتاهترین‌اند که AU کوتاهترین باشد، و AU وقتی حداقل ممکن است که AU بر BC عمود، یعنی AU ارتفاع باشد. این‌واقعیت که $\triangle ABC$ حاده است تضمین می‌کند که پای ارتفاع مرسوم از A روی‌ضلع BC قرار گیرد. لذا، ما به‌گونه‌ای یکتا مثلث‌محاطی باحداقل محیط را مشخص کرده‌ایم. به‌علاوه، روشن است که اگر $\triangle UVW$ مینیمال باشد، هر ویژگی که U نسبت به A داشته باشد، V نیز همان ویژگی را نسبت به B، و W آن را نسبت به C خواهد داشت. این مطلب از آنجا ناشی‌می‌شود که در آغاز می‌توانستیم V یا W را به‌جای U ثابت نگه‌داریم. درنتیجه قضیهٔ ذیل را ثابت کرده‌ایم.



شکل ۱۴.۳

قضیهٔ ۱۷. در یك مثلث حاده، رأسهای مثلث محاطی با کوچکترین محیط پاهای ارتفاعهای آن مثلث‌اند.

این مثلث مینیمال، مثلث ارتفاعی (پادك) نامیده می‌شود. قضیهٔ ۱۷ به‌گونه‌ای

غیرمستقیم بامسألهٔ زدن گوی، روی میز بیلیارد مثلثی سروکار دارد به‌طوری که بعداز دو بازتاب، گوی به‌محل اولیه‌اش بازگردد. قضیه نشان می‌دهد کـه اگر گوی در وضعهای خاصی قرارگرفته باشد این کار ممکن است. آیـا این کار را از هروضعی می‌توان انجام داد؟ قبل‌از تحقیق، به‌حل مسألهٔ زیر بپردازید.

مسألهٔ ۳۰. روی یك میز بیلیارد مستطیلی در چه جهت می‌توان یك گوی را زد تـا پس‌از بازتابهایی به‌تعداد متناهی به‌محل اولیه‌اش بازگردد؟ درچه جهت باید به‌یك گوی زد تا به‌گوی دیگری روی‌میز برخورد کند؟ آیا می‌توانید این دومسأله را در مورد میزهای بیلیاردی حل کنید کـه شکلهای دیگری دارند؟ هرگوی را یك نقطه فرض کنید.

راهنمایی: قرینهٔ میز وگوی را با استفاده از ضلعهای میزکـه نقش آینه را دارند به‌دست‌آورید؛ سپس قرینهٔ قرینه‌ها را بیابید؛ و به‌همین‌ترتیب ادامه دهید.

مسألهٔ ۳۱. یك nضلعی باکمترین محیط و محاط دریك nضلعی محدب مفروض در صورت وجود، چه‌ویژگی باید داشته باشد؟

حدسی که‌همین چندسال پیش‌برای اولین‌بار بیان‌شد و به‌مسأله‌ای که هم‌اکنون حل‌کردیم مربوط می‌شود چنین است:

حدس. مثلثی در مثلث مفروضی محاط است و آن را به‌چهار مثلث کوچکتر تقسیم می‌کند. محیط‌مثلث محاطی هرگزکوچکتر از محیط هریك از سه‌مثلث دیگر نیست.

تاکنون هیچ‌کس برهـانی برای این حدس پیدا نکرده است. از این مسأله، مسألهٔ دیگری باجایگزینی کلمهٔ «مساحت» به‌جای کلمهٔ «محیط» به‌دست می‌آید و با روشی حل می‌شودکه برمباحث ارائه شده در این‌کتاب استوار نیست.

در ۱۹۳۵ پاول اردوش[1] یك‌قضیهٔ بدیع وجالب دربارهٔ مثلثها حدس زد.

قضیهٔ ۱۸. (اردوش-موردل[2]) اگر P یك نقطهٔ دلخواه از مثلث ABC (داخل یا روی مرز) و p_a، p_b، و p_c فاصله‌های P ازضلعهای $\triangle ABC$ باشد [شکل ۲۲۰۳ (الف) درصفحهٔ ۹۶ ملاحظه شود]، آنگاه

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant ۲(p_a+p_b+p_c)\cdot$$

1) Paul Erdös 2) L. J. Mordell

به‌علاوه، برابری برقرار است اگر وتنها اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع و P مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد.

دوسال بعد در ۱۹۳۷ موردل و بارو[1] حدس اردوش را ثابت کردند، ولی برهان‌هیچ‌یك مقدماتی نبود. همین‌اواخر، در ۱۹۴۵ د. ك. کازارینوف[2] برهانی مقدماتی‌پیدا کردکه برایدهٔ تقارن‌استوار است. قبل‌از ارائهٔ این‌برهان، انگیزه‌هایی را که‌منجر به‌حدس اردوش‌شده‌اند ذکر و نیز قضیه‌های کمکی‌چندی راثابت‌می‌کنیم.

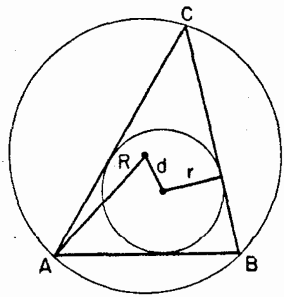
چگونه اردوش به‌این حدس رهنمون گردید؟ چه شواهدی برای پیشنهاد این ایده در دست داشت؟ یك امکان این‌است‌که وی نابرابری اویلر

$$R \geqslant 2r$$

را تعمیم داده باشد. R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است، و برابری تنها وقتی‌برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. این نابرابری نتیجهٔ قضیه‌ای است که اویلر ثابت کرده است.

قضیه (اویلر). مربع فاصلهٔ بین مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی هر مثلث برابر با $R^2 - 2Rr$ است.

زیرا از



شکل ۱۵۰۳

1) D. R. Barrow 2) D. K. Kazarinoff

$$R^2 - 2Rr \geqslant 0, \quad R > 0$$

نتیجه می‌شود

$$R - 2r \geqslant 0.$$

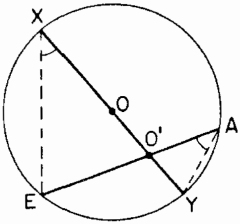
مجموع $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ با $3R$، و مجموع $p_a + p_b + p_c$ با $3r$ قابل مقایسه‌اند، از این روی، حدس اردوش حدسی معقول است. با این‌حال، وی احتمالا شواهد بیشتری داشته است.

چون نسابرابری اویلر $R \geqslant 2r$ خود یك نتیجهٔ جالب است، بحث خود را دربارهٔ نابرابری اردوش-موردل موقتاً قطع می‌کنیم و ابتدا به‌ارائهٔ دو برهان برای نابرابری $R \geqslant 2r$ می‌پردازیم. اولین برهان، قضیهٔ اویلر یعنی $d^2 = R^2 - 2Rr$ را برقرار می‌کند که در آن d فاصلهٔ بین‌مرکز دایرهٔ محاطی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دومین برهان فقط نابرابری $R \geqslant 2r$ را برقرار می‌کند و از ایدهٔ تقارن، حداقل به گونه‌ای ضمنی، استفاده می‌کند.

درجریان برهان اول از دو لم زیر استفاده خواهیم کرد.

لم ۱. فرض‌کنیم XY قطر دایرهٔ به‌مرکز O وتر AE از این‌دایره را درنقطه O' قطع کند (شکل ۱۶.۳ ملاحظه شود) در این‌صورت

$$\overline{AO'} \cdot \overline{O'E} = \overline{XO'} \cdot \overline{O'Y}.$$



شکل ۱۶.۳

برهان. مثلثهای $O'AY$ و $O'XE$ متشابه‌اند زیرا

$$\sphericalangle AO'Y = \sphericalangle XO'E, \quad \sphericalangle XEO' = \sphericalangle AYO'$$

بنا براین

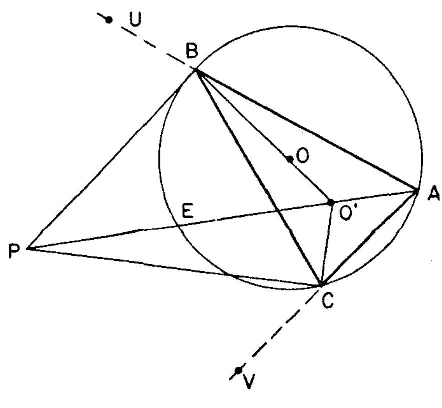
$$\frac{\overline{AO'}}{\overline{XO'}}=\frac{\overline{O'Y}}{\overline{O'E}}\,. \qquad \square$$

(اگر XY به‌جای قطر وتری باشد که AE را قطع کند، نتیجه و برهان فوق بازهم برقرار می‌ماند.)

لم ۲. فرض کنیم O' مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و E وسط کمان BC (که‌شامل A نیست) از دایرهٔ محیطی این‌مثلث باشد (شکل ۱۷.۳ ملاحظه شود) دراین‌صورت

$$\overline{EB}=\overline{EO'}=\overline{EC}\,.$$

برهان. فرض کنیم P مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مقابل به A از $\triangle ABC$ باشد، یعنی، فرض می‌کنیم P نقطهٔ تقاطع نیمساز زاویهٔ داخلی A و نیمسازهای زاویه‌های خارجی UBC و VCB (شکل ۱۷.۳) باشد. (به‌آسانی می‌توان نشان‌داد که این‌سه خط در یك نقطه متقاطع‌اند.) نیمسازهای BO' و BP برهم‌عمودند زیرا زاویه‌هایی را نصف می‌کنند که مجموعاً یك زاویهٔ نیمصفحه‌اند؛ همچنین نیمسازهای CO' و CP برهم عمودند. بنابراین PO' قطری است از یك‌دایره که از B و C می‌گذرد. مرکز این‌دایره نقطهٔ‌تقاطع قطر $O'P$ با عمودمنصف BC یکی از وترهای آن‌است. اما $AO'P$ نیمساز $\measuredangle BAC$ است. بنابراین، $AO'P$ کمان BC از دایرهٔ محیطی



شکل ۱۷.۳

$\triangle ABC$ را (که شامل A نیست) درنقطهٔ E وسط آن قطع می‌کند. این نقطهٔ وسط، نقطه‌ای از عمودمنصف BC نیز هست. درنتیجه، نقطهٔ E مرکز دایرهٔ مار بر P، C، O' و B است، و $EB = EO' = EC$. □

برهان قضیهٔ اویلر • فرض کنیم ABC مثلث مفروض، O و O' به‌ترتیب مرکز دایره‌های محیطی و محاطی، و D بر AB چنان است که $O'D$ بر AB عمود است، همچنین فرض کنید E وسط کمان BC (کمانی که شامل A نیست) و EOF و $XOO'Y$ قطرهای دایرهٔ محیطی باشند. OO' را با d نشان می‌دهیم درنتیجه

$$\overline{XO'} = R + d, \quad \overline{O'Y} = R - d \,.$$

بنابر لم ۱،

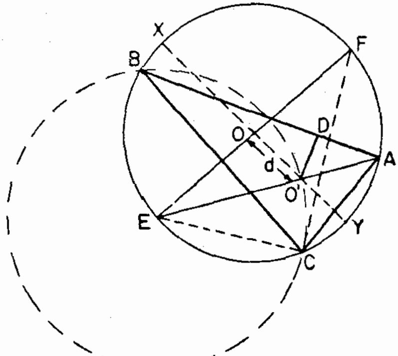
$$\overline{AO'} \,.\, \overline{O'E} = (R-d)(R+d)$$

بنابر لم ۲،

$$\overline{O'E} = \overline{EC} \,.$$

لذا

$$(R-d)(R+d) = \overline{AO'} \,.\, \overline{EC} \,.$$



شکل ۱۸.۳

* برهان دیگری از این قضیه درمسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان (ازهمین‌مجموعه) وجود دارد؛ یادداشت شماره ۲ مسألهٔ ۱۸۹۷/۲ را ملاحظه کنید. این برهان از آن ل. فیر است که در آن هنگام دانش‌آموز دبیرستان بود.

مثلثهای $AO'D$ و FEC مثلثهایی قائمه‌اند. از طرف دیگر زاویه‌های DAO' (یعنی، BAE) و CFE برابرند زیرا کمانهای برابر ($\widehat{BE}$ و $\widehat{EC}$) بردایرهٔ محیطی پدید می‌آورند. بنابراین، مثلثهای $AO'D$ و FEC متشابه‌اند. در نتیجه،

$$\frac{\overline{AO'}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{O'D}}{\overline{EC}} \quad \text{یا} \quad \overline{O'D}\cdot\overline{EF}=\overline{AO'}\cdot\overline{EC}$$

چون $\overline{O'D}=r$ و $\overline{EF}=2R$، این برابری را می‌توان به‌شکل

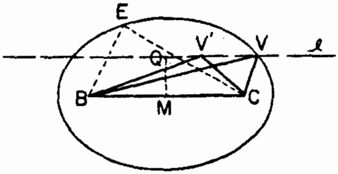
$$r\cdot 2R=(R-d)(R+d)=R^2-d^2$$

نوشت. از این روی،

$$d^2=R^2-2rR. \qquad \square$$

قبلا نشان داده بودیم‌که از $R>0$ و نابرابری اخیر نابرابری $R\geqslant 2r$ به‌دست می‌آید. درجریان برهان دوم نابرابری $R\geqslant 2r$ نیز به‌دو لم نیاز خواهیم داشت.

لم ۳. مثلثی باقاعدهٔ ثابت BC درنظر می‌گیریم‌که V رأس آن روی خط l قراردارد که با BC موازی است (شکل ۱۹.۳ ملاحظه شود). فرض کنیم MQ عمودمنصف BC باشد. در این‌صورت، وقتی V درامتداد l به‌سمت Q حرکت می‌کند، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث VBC افزایش می‌یابد.



شکل ۱۹.۳

برهان. یك بیضی باکانونهای B و C به‌قسمی می‌سازیم که هر نقطهٔ E روی آن‌در شرط

$$\overline{BE}+\overline{EC}=\overline{BV}+\overline{VC}$$

صدق کند. در این‌صورت درمورد هرنقطهٔ V' روی l که به‌ازای آن $\overline{V'Q}<\overline{VQ}$،

$$\overline{BV'}+\overline{V'C}<\overline{BV}+\overline{VC}\,.$$

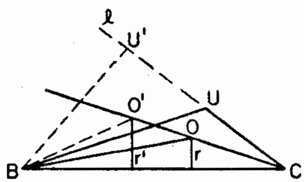
چون V' داخل بیضی است، P محیط مثلث BVC از P' محیط مثلث $BV'C$ بزرگتر است.

فرض کنیم r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث BVC، و r' شعاع دایرهٔ محاطی مثلث $BV'C$ باشد. چون مساحت این مثلثها یکی است، داریم (حل مسألهٔ ۱۲ را ملاحظه کنید)

$$T(BVC)=\frac{Pr}{۲}=T(BV'C)=\frac{P'r'}{۲}\,.$$

چون $P>P'$، نتیجه می‌شود که $r<r'$. □

لم ۴. مثلثی باقاعدهٔ ثابت BC درنظر می‌گیریم که U رأس آن روی خط l، که در C زاویهٔ ثابتی با BC می‌سازد، قرار دارد (شکل ۲۰.۳ را ملاحظه کنید). وقتی U روی l از C دور می‌شود، شعاع دایرهٔ محاطی UBC افزایش می‌یابد.



شکل ۲۰.۳

برهان. فرض کنیم $\overline{UC}<\overline{U'C}$، برای مقایسهٔ r و r' شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای UBC و $U'BC$، به‌خاطر می‌آوریم که مرکز دایرهٔ محاطی مثلث محل تلاقی سه نیمساز آن است. به‌روشنی، وقتی U روی l از C به‌طرف U' دور می‌شود، زاویهٔ B افزایش می‌یابد و O نقطهٔ تقاطع نیمسازها از C به‌سمت O' در امتداد نیمساز ثابت $\measuredangle C$ حرکت می‌کند. بنابراین $r<r'$. □

برهان دوم نابرابری $R\geqslant ۲r$. اگر مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع باشد، آنگاه

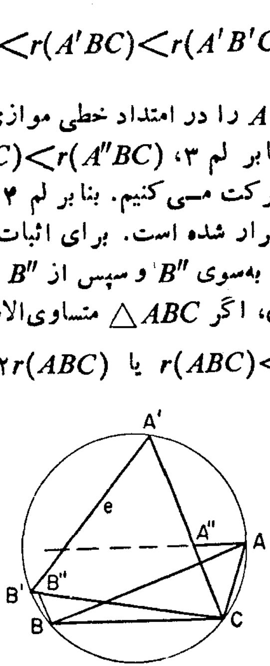
$R = ۲r$ و برابری برقرار است.

فرض کنیم مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع نباشد. رأسهای مثلث را A، B، C می‌نامیم به‌قسمی‌که AC کوتاهترین ضلع و زاویهٔ A کوچکتر از زاویهٔ C باشد (شکل ۲۱.۳). فرض کنیم R شعاع دایرهٔ‌محیطی K از مثلث ABC، و e طول‌ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی باشد که در K محاط‌می‌شود. پس $AC < e$. از A در امتداد محیط K از C دور می‌شویم تا به‌نقطه‌ای چون A' برسیم که $A'C = e$. فرض کنیم B' رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C$ باشد. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث XYZ را به $r(XYZ)$ نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که

$$r(ABC) < r(A'BC) < r(A'B'C) = \frac{R}{۲} \cdot$$

برای اثبات نابرابری‌اول، A را در امتداد خطی موازی با BC حرکت می‌دهیم‌تا به A'' روی $A'C$ برسیم. بنابر لم ۳، $r(ABC) < r(A''BC)$. اکنون از A'' به‌سوی A' در امتداد $A'C$ حرکت می‌کنیم. بنابر لم ۴، $r(A''BC) < r(A'BC)$. تا اینجا نابرابری اول برقرار شده است. برای اثبات نابرابری دوم، B را در امتداد خطی موازی با $A'C$ به‌سوی B'' و سپس از B'' در امتداد $B'C$ به‌سوی B' حرکت می‌دهیم. از این‌روی، اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع نباشد،

$$r(ABC) < R/۲ \quad \text{یا} \quad R > ۲r(ABC).$$



شکل ۲۱.۳

□

مسألهٔ ۲۲.۰ از اصل بازتاب و این نتیجه: درمیان همهٔ nضلعیهای با مساحت برابر، nضلعی منتظم دارای کوچکترین محیط است (یعنی، دوگان حکمی که بعداز مسألهٔ ۲۱ ذکر شده است) استفاده‌کنید و نشان دهید که هرگاه P داخل مثلث ABC و

مساحت این مثلث T باشد، آنگاه

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant ۲\sqrt{\sqrt{۳}T}\cdot$$

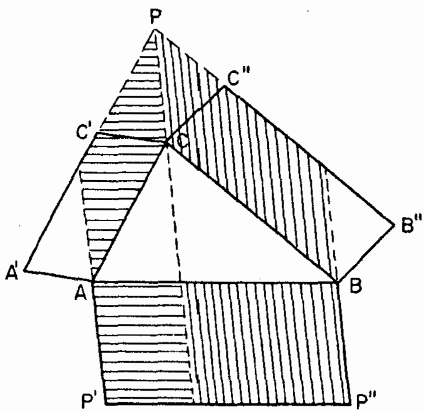
مسألهٔ ۳۳. نشان دهید که نابرابری اخیر ایجاب می‌کند که

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant ۶r=۲(r+r+r)\cdot$$

این نتیجه قضیهٔ ۱۸ را بیشتر تقویت می‌کند. مثلثی رسم و نقطهٔ P را داخل آن انتخاب کنید. فاصله‌های این نقطه را از رأسها وضلعها اندازه بگیرید. آیا نتیجه‌ای که به‌دست می‌آورید قضیه را تأیید می‌کند؟

د. ک. کازارینوف برای اثبات قضیهٔ اردوش-موردل از قضیهٔ پاپوس[1] تعمیم زیبای قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرد.

قضیهٔ ۱۹. (پاپوس) مثلث دلخواه ABC را درنظرمی‌گیریم. فرض کنیم $AA'C'C$ و $BB''C''C$ دومتوازی‌الاضلاع دلخواه باشندکه بر AC و BC ساخته شده‌اند به‌قسمی که یا هردوی آنها خارج مثلث باشند و یا هردو تماماً خارج مثلث نباشند (شکل ۲۲.۳ را ملاحظه کنید). ضلعهای $A'C'$ و $B''C''$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در



شکل ۲۲.۳

1) Pappus

P قطع کنند. متوازی‌الاضلاع سوم $ABP''P'$ را روی AB به‌قسمی می‌سازیم که AP' موازی CP باشد و $\overline{AP'}=\overline{CP}$ مساحت $\square ABP''P'$ برابرمجموع‌مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای $AA'C'C$ و $BB''C''C$ است.

برهان این قضیه را، درحالتی که متوازی‌الاضلاعها خارج مثلث باشند، در شکل ۲۲.۳ نشان داده‌ایم؛ برهان حالت دیگر نیز به‌همین آسانی است. متذکر می‌شویم که‌وقتی‌مثلث مفروض قائمه و متوازی‌الاضلاعهای مفروض‌مربع باشند، قضیهٔ پاپوس به‌قضیهٔ فیثاغورس تبدیل می‌شود.

مسألهٔ ۳۴. فرض کنید متوازی‌الاضلاعهایی که‌بردوضلع AC و BC از مثلث ABC ساخته می‌شوند در یك ضلع مشترك باشند. در این حالت قضیهٔ پاپوس را به‌حالت سه‌بعدی تعمیم دهید.

توجه‌داشته‌باشید حالتی که درمسألهٔ ۳۴ مدنظراست در واقع‌یك‌حالت خاص نیست؛ حالت کلی را همواره می‌توان به‌این حالت تبدیل کرد (شکل ۲۲.۳ را ملاحظه کنید) که درآن PC ضلع مشترك دو متوازی‌الاضلاع سایه‌دار است. بعداً، دربرهان قضیهٔ ۱۸، قضیهٔ پاپوس را دراین حالت ظاهراً خاص به‌کار می‌گیریم.

یك قضیهٔ دیگر از هندسهٔ مسطحه وجود داردکه در اثبات قضیهٔ ۱۸ ازآن استفاده خواهیم کرد. این‌قضیه مبین آن است که نابرابری

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant ۲(p_a+p_b+p_c)$$

باچه شرایطی به‌برابری تبدیل می‌شود.

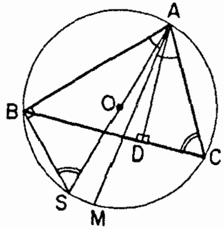
لم. مثلث ABC به‌مرکز دایرهٔ محیطی O مفروض است. نیمساز زاویهٔ A نیمساز زاویهٔ بین AO و ارتفاع مرسوم از A به‌ضلع BC نیز هست.

برهان. فرض‌کنیم AD ارتفاع، AM نیمساز $\sphericalangle A$، و AOS قطری‌از دایرهٔ‌محیطی باشد (شکل ۲۳.۳). پس $\sphericalangle ABS$ و $\sphericalangle ADC$ قائمه‌اند، به‌علاوه،

$$\sphericalangle ASB=\sphericalangle ACD,$$

زیرا اندازهٔ هریك برابر است با $\widehat{AB}/۲$. بنابراین، مثلثهای CAD و SAB متشابه‌اند، و $\sphericalangle BAS=\sphericalangle DAC$. چون AM نیمساز $\sphericalangle A$ است،

$$\sphericalangle SAM=\sphericalangle DAM.$$



شکل ۲۳.۳

□

اکنون می‌توانیم قضیهٔ ۱۸، نابرابری اردوش-موردل، را ثابت کنیم. کلید این برهان دراولین مرحلهٔ آن نهفته است کـه کاربردی از تقارن است. فرض کنیم ABC مثلثی‌مفروض و P نقطه‌ای دلخواه داخل یا روی‌مرز آن باشد. [شکل ۲۴.۳ (الف) را مـلاحظه کنید.] به‌جـای مثلث ABC مثلث جدیـد $AB'C'$ را درنظر می‌گیریم که درآن B' و C' به‌ترتیب قرینه‌هـای B و C نسبت بـه AD، نیمساز زاویهٔ A، هستند [شکل ۲۴.۳ (ب) را ملاحظه کنید]. به‌یادداشتن‌این‌نکته مهم‌است که نقطهٔ P به‌جای خود باقی است. قضیهٔ پاپوس را در $\triangle AB'C'$ به‌کار می‌بریم که درآن دو متوازی‌الاضلاع درنظرگرفته شده آنهایی هستندکه یکی با A، P، و C' و دیگری بـا A، P، و B' مشخص مـی‌شوند [شکلهای ۲۴.۳ (پ) و (ت) ملاحظه شود]. مجموع مساحتهای آنها عبارت است از

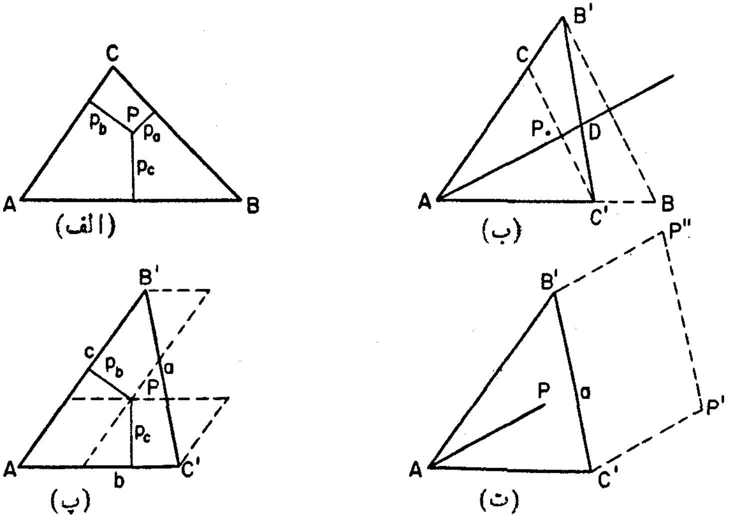
$$cp_b + bp_c \cdot$$

مساحت متوازی‌الاضلاع سوم (که قاعده‌اش $B'C'$ بـه‌طول a و ضلعهای مجاورش مساوی و موازی با PA است) نابزرگتر از $a \cdot \overline{PA}$ است، برابری برقرار است اگر وتنها اگر AP عمودبر $B'C'$ باشد. بنا برلمی که درصفحهٔ ۹۴،بیان‌شد این فقط وقتی رخ می‌دهد کـه P روی AO (O مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle ABC$ است) باشد.
لذا بنا برقضیهٔ پاپوس

$$cp_b + bp_c \leqslant a\overline{PA}$$

یا

$$\frac{c}{a}p_b + \frac{b}{a}p_c \leqslant \overline{PA} \cdot$$



شکل ۲۴.۳

همچنین،

$$\frac{a}{b}\,p_c+\frac{c}{b}p_a\leqslant\overline{PB}$$

و

$$\frac{b}{c}\,p_a+\frac{a}{c}p_b\leqslant\overline{PC}\,.$$

اگر طرفهای چپ و طرفهای راست سه‌نابرابری اخیر را به‌ترتیب باهم جمع کنیم نتیجه می‌گیریم،

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)p_a+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)p_b+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)p_c\,.$$

هریک از ضرایب طرف راست حداقل برابر ۲ است، چرا؟ (اگر باور ندارید بخش ۲.۱ را ملاحظه‌کنید.) بنابراین

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geqslant ۲(p_a+p_b+p_c)\cdot$$

برابری برقرار است اگر وتنها اگر $a=b=c$ و P روی AO، BO، و CO واقع باشد؛ یعنی، برابری برقرار است اگر وتنها اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع و P مرکز آن باشد. □

برهان مقدماتی دیگری از نابرابری اردوش-موردل را بانکوف[1] درماهنامهٔ ریاضی امریکا، مجلد ۶۵ (۱۹۵۸)، صفحهٔ ۵۲۱ عرضه کرده است.

مسألهٔ ۳۵. اگر P داخل مثلث ABC باشد، آنگاه

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\geqslant ۸p_a\cdot p_b\cdot p_c\cdot$$

برابری فقط وقتی برقرار است که مثلث، متساوی‌الاضلاع و P مرکز آن باشد.
راهنمایی: از نابرابریهای $a\overline{PA}\geqslant cp_b+bp_c$ و نظایر آن و قضیهٔ ۸ استفاده کنید.

دو مسألهٔ بعدی از آنِ پروفسور اپنهایم[2] از دانشگاه مالایاست؛ وی مسألهٔ ۳۵(ب) را به‌صورت یك مسألهٔ مشکل ارزیابی می‌کند.

مسألهٔ ۳۵ (الف). فرض می‌کنیم $q_a=p_b+p_c$، $q_b=p_a+p_c$، و

$$q_c=p_a+p_b\cdot$$

ثابت کنید

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\geqslant q_aq_bq_c\cdot$$

مسألهٔ ۳۵ (ب). ثابت کنید

$$\overline{PB}\cdot\overline{PC}+\overline{PC}\cdot\overline{PA}+\overline{PA}\cdot\overline{PB}\geqslant q_bq_c+q_cq_a+q_aq_b\cdot$$

مسألهٔ ۳۶. نابرابری اردوش-موردل درمثلثها را به فضای سه‌بعدی تعمیم دهید. متذکرمی‌شویم بااینکه تعمیم‌درست آن معلوم است؛ هیچ‌کس تاکنون برهانی برای

---

1) L. Bankoff, *American Mathematical Monthly*, Volume 65 (1958) p. 521.

2) A. Oppenheim

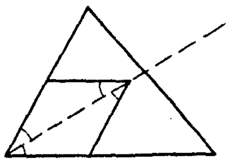
آن کشف نکرده است. نابرابریهای ممکن دیگر که متضمن فاصله‌های یك نقطهٔ Pی داخل یك چهاروجهی تا وجوه، یالها، و رأسهای آن باشند کدام‌اند؟

مسألهٔ ۳۷. در یك چهارضلعی محدب مفروض، کدام نقطه‌است که مجموع فاصله‌های آن تا رأسها مینیمم باشد. اگر چهارضلعی محدب نباشد جواب چیست؟

مسألهٔ ۳۸. در مسألهٔ پیش اگر به‌جای چهارضلعی، مثلث اختیار شود جواب چیست؟ ابتدا یك مثلث حاده را درنظر بگیرید.

مسائل گوناگون

مسألهٔ ۳۹. بزرگترین لوزی را پیدا کنید که داخل یك مثلث مفروض واقع و یك زاویهٔ آن منطبق بریکی از زاویه‌های مثلث باشد؛ شکل ۲۵.۳ را ملاحظه کنید.



شکل ۲۵.۳

مسألهٔ ۴۰. فرض کنیم ضلعهای مثلث ABC در رابطهٔ $a<b<c$ صدق کنند. اگر s_a، s_b، و s_c به‌ترتیب طول میانه‌های مرسوم از A، B، و C، و f_a، f_b، و f_c طول نیمسازهای این زاویه‌ها باشند، نشان دهید

$$s_a>s_b>s_c, \quad f_a>f_b>f_c.$$

مسألهٔ ۴۱ (اردوش). فرض کنیم P نقطه‌ای دلخواه داخل مثلث ABC و امتداد AP، BP، و CP به‌ترتیب ضلعهای مثلث را در A'، B'، و C' قطع کنند. ثابت کنید $\overline{PA'}+\overline{PB'}+\overline{PC'}$ ازطول بزرگترین ضلع مثلث کوچکتر است.

مسألهٔ ۴۲. a،b،c،و d مثبت‌اند. نشان دهید

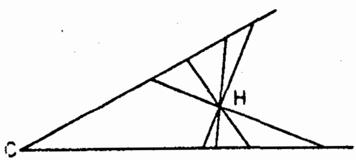
(الف) از $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ نتیجه می‌شود، $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

(ب) $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$

(پ) $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$

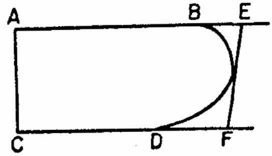
(ت) بهازای $a=۱,۲,۳,\ldots$، $\left(۱+\frac{۱}{۶a}\right)^{-a}>\frac{۵}{۶}$.

مسألهٔ ۴۳. خطهای راستی که از نقطهٔ ثابت H واقع در زاویهٔ ثابت C میگذرند با دوضلع این زاویه مثلثهایی تشکیل میدهند (شکل ۲۶.۳ ملاحظه شود) مساحت کدام یك از این مثلثها کوچکتر است؟



شکل ۲۶.۳

مسألهٔ ۴۴. فرض کنیم ناحیهٔ $ABDC$ (شکل ۲۷.۳ ملاحظهشود) محدب ونیز AB موازی با CD باشد. وضع مماس EF بر BD چگونه باشد تا مساحت $AEFC$ مینیمم‌شود؟ تذکر: پارهخط EF برخم BD مماس است هرگاه EF و BD حداقل یك نقطهٔ مشترك داشته باشند و نقاطی از BD که روی EF نیستند دریك‌طرف EF قرارگیرند.



شکل ۲۷.۳

مسألهٔ ۴۵. (فیر-توت[1]). بر رویهٔ کره، فاصلهٔ بین دونقطه عبارت است از طول کوتاهترین کمانی از یك‌دایرهٔ عظیمه که این دونقطه دوسر آن باشند. n نقطه روی یك کره درنظر مـی‌گیریم و فرض می‌کنیم S مجموع فاصله‌هـای بین همهٔ جفتهای متمایز این نقاط باشد. این سؤال مطرح است: در چـه وضعیتهایی از این n نقطه، S_n، مقدار ماکسیمم S به‌دست می‌آید؟ در حالتهای $n=2, 3, 4, 5, 6$ بـه این سؤال جواب داده شده‌است. جواب آن را به‌ازای $n=4$ ارائه دهید. آیامی‌توانید مقدارهای S_{2k} و S_{2k+1} را حدس بزنید؟ آیـا برای S_n می‌توانید یك‌نابرابری ارائه دهید؟

مسألهٔ ۴۶. کدام‌یك از وترهای یك‌مثلث که مساحت آن را نصف می‌کند کوتاهتر است؟ کدام یك بلندتر است؟
راهنمایی: ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
قضیه. اگر دو مثلث یـك زاویـهٔ مشترك و مساحتهای برابر داشته باشند قاعدهٔ مثلثی کوچکتر است که درآن تفاضل دوضلعی‌که این زاویهٔ مشترك را تشکیل می‌دهند کمتر باشد.

مسألهٔ ۴۷. «مساحت» را با «محیط» در مسألهٔ۴۶ جایگزین‌ومسألهٔ‌جدید راحل‌کنید.

مسألهٔ ۴۸. فرض کنیم Q یك‌چهارضلعی محدب بامحیط P باشد و l و m دو وتر عمود برهم باشندکه محیط Q را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنند. نشان دهید اگر L مجموع طولهای m و l باشد، آنگاه $L \geqslant P/2$ و برابری فقط درمـورد مستطیل برقرار است. این مسأله تاکنون جز در حالتهای خاص حل‌نشده است.

1) Toth

۴

راهنمایی و حل مسأله‌ها

درجواب به‌این‌سؤال کـه چگونه مسأله حل کنیم و قضیه ثابت کنیم بهترین توصیهٔ من این است: مسأله حل کنید وقضیه ثابت کنید؛ برای روشن‌شدن مسأله و راهنماییها همان‌طورکه‌درقضایای کلی عمل‌می‌شود مثالهایی بسازید؛ حالتهای‌خاص را بررسی کنید؛ حدس بزنید و ببینیدکه آیا مثالهای شما حدسهایتان را تأیید یا رد می‌کنند؛ کوشش‌کنید تا از استدلالی کـه درموقعیتهای دیگر به‌کار برده یـا با آنها برخورد کرده‌اید به‌همان‌شکل و یا پس ازجرح و تعدیل استفاده کنید. اگر به بن بست رسیدید استراحت کنید و کوششهای خود را روزدیگر ازسر گیرید؛ از مداد وکاغذ استفاده کنید؛ آنچه به‌نظرتان‌می‌رسد ثبت‌کنید. هرچه کنجکاوترشوید، تجربهٔ بیشتری کسب می‌کنید و بیشتر فرا می‌گیرید. دربارهٔ ریاضیات فکر کنید، در ریاضیات کار کنید، از ریاضیات لذت ببرید!

برای بحث‌دقیق و توضیحات بیشتردر بارهٔ توصیه‌های‌بالا وبسیاری توصیه‌های دیگرپیشنهاد می‌کنم کتابهای‌چگونه‌آن مسأله را حل‌کنیم[1] و ریاضیات و استدلالهای

---

1) ترجمهٔ احمد آرام، انتشارات کیهان، ۱۳۶۶.

پذیرفتنی (به‌خصوص، مجلد I)، تألیف پولیا[1] را بخوانید. اگر همهٔ این کوششها ثمر بخش نشد، آنگاه با وجدان راحت می‌توانید راهنماییها و راه‌حلهای زیر را بخوانید؛ اما راه‌حل را تا آنجاکه نیازدارید بخوانید و شخصاً آن‌را کامل کنید.

خوب است به‌خاطر داشته باشید که مسأله‌ها در سه‌رده قرار دارند. نمی‌توانم، فکر می‌کنم بتوانم، و می‌دانم. وقتی راه‌حلتان را کامل کردید ــ یعنی آن را طوری نوشتید که شخص‌وسواسی و منتقدی که راه‌حل را نمی‌داند بتواند بخواند و بدون نیاز به‌پرکردن جزئیاتی که در بیان آن اهمال‌کرده‌اید مطلب را بفهمد ــ آنگاه استدلال کتاب را با استدلال خودتان مقایسه کنید. وقتی دیدید چگونه یك مسأله حل و یا یك‌قضیه ثابت می‌شود، کوشش کنید برهان یا راه‌حل دیگری ارائه دهید. آیا می‌توانید راه‌حلی راکه یافته‌اید یا راه‌حلی را که در کتاب ذکر شده است اصلاح کنید؟ اگر اتفاقاً یکی از مسأله‌های حل نشدهٔ این کتاب‌را حل کردید، راه‌حل خود را به:

Editorial Committee of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N. Y. 16012 Mich 48104

یا به‌خود من:

Nicholas D. Kazarinoff, University of Michigan

بفرستید.

در این‌فصل همهٔ مسائل و تمرینهایی را که درکتاب آمده‌اند موردبحث قرار نمی‌دهیم. وقتی سؤال خاصی مطرح می‌شود، ممکن است به‌یك راهنمایی ویا قسمتی از حل آن اکتفا شود. در مواردی قضیه‌ها یا مسأله‌های دیگر نیز ذکر شده‌اند. تقریباً هر راه‌حل نیاز داردکه روی آن کار شود. در نوشتن هر راه‌حل، فرض کرده‌ام که خواننده با مسأله آشناست و برای حل آن جداً کوشش کرده است.

تمرین ۱. تعریف ۱ روشن می کند که

$$۷<۹;$$

و با استفاده از قضیهٔ ۴، وقتی $p=۱/۲$، نتیجه می‌شود

---

1) Mathematics and Plausible Reasoning, Princeon University Press, 1954.

$$\sqrt{7}<30.$$

اکنون نتیجهٔ مطلوب از قضیهٔ ۲ به‌دست می‌آید. □

تمرین ۴. $\sqrt{2/7}+\sqrt{1/3}$ بزرگتر است. به‌طریق زیر این نتیجه به‌دست می‌آید. اگر

$$\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{5}}<\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{7}}$$

آنگاه، بنابر قضیهٔ ۴ با $p=2$،

$$\frac{5}{12}+2\sqrt{\frac{5}{60}}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+2\sqrt{\frac{2}{21}}+\frac{2}{7}$$

یا

$$\frac{5}{12}+\sqrt{\frac{20}{60}}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{8}{21}}+\frac{2}{7};$$

از این روی،

$$\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{8}{21}}<\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{5}{12}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5\times 7\times 12}.$$

اما $1/3<8/21$. بنابراین، طرف چپ نابرابری فوق عددی منفی است، و این نابرابری در واقع برقرار است.

مرحله‌های فوق را به‌ترتیب عکس بنویسید و درصورت لزوم مراحلی برآن بیفزایید تا برهان دقیق به‌دست آید.

مسألهٔ ۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$\frac{2k-1}{2k}>\frac{\sqrt{4k-3}}{\sqrt{4k+1}}\quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \qquad (*)$$

با افزودن $16k^3-12k^2$ به‌دو طرف نابرابری بدیهی $1>0$، نابرابری

$$16k^3-12k^2+1>16k^3-12k^2$$

یا

$$(2k-1)^2(4k+1)>(2k)^2(4k-3)$$

به‌دست می‌آید، که بنابرقضیه‌های ۳ و ۴ با (*) هم‌ارز است. (درعمل، با فرض درستی (*) شروع می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم کـه ۰<۱، سپس بـا معکوس کردن ترتیب مرحله‌ها برهان به‌دست می‌آید.)

نابرابری (*) بـه‌ازای هر یك از اعداد صحیح ۱ تـا n بـه‌صورتهای زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\ \frac{3}{4}>\frac{\sqrt{5}}{3},\ \ldots,\ \frac{2n-3}{2n-2}>\frac{\sqrt{4n-7}}{\sqrt{4n-3}}$$

$$\frac{2n-1}{2n}>\frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}}\,.$$

حاصلضرب طرفهای چپ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\,.$$

و حاصلضرب طرفهای راست عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{4n-7}}{\sqrt{4n-3}}\cdot\frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}}=\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$$

درنتیجه، بنابرقضیهٔ ۳،

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\,.$$

برای اثبات نابرابری دوم مسألهٔ ۱، ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$\frac{2k-1}{2k}=\frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}\qquad (k=1)\,,$$

$$\frac{2k-1}{2k}<\frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}\qquad (k=2,3,\ldots,n),$$

و سپس مشابه باقسمت اول استدلال را به‌پایان می‌رسانیم.

مسألهٔ ۲.

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\frac{b_3}{b_4}+\dots+\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{b_n}{b_1}\geqslant n,$$

($i=1, 2, \ldots, n$ ،$b_i>0$) نابرابری مطلوب است. برابری فقط وقتی برقرار است که $b_1=b_2=\ldots=b_n$.

متذکر می‌شویم که

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{b_2}{b_3}\right)\cdots\left(\frac{b_n}{b_1}\right)=1.$$

مسألهٔ ۳. از تعریف $\log_{10}a$ و $\log_a 10$ نتیجه می‌شود که

$$\log_{10}a=(\log_a 10)^{-1}.$$

زیرا اگر، فرض کنیم $\log_a 10=N$. آنگاه

$$a^N=10, \quad a=10^{1/N}$$

بنابراین

$$\frac{1}{N}=\log_{10}a.$$

اکنون از قضیهٔ ۶ استفاده کنید. (اگر احتیاج به‌توضیح بیشتر دارید رابطهٔ

$$\log_{10}a+\log_a 10=\log_{10}a+\frac{1}{\log_{10}a}$$

را درنظر بگیرید و فرض کنید $\log_{10}a=x$، و از نابرابری (۳) در صفحهٔ ۱۶ استفاده کنید.) □

مسألهٔ ۴.

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{a\cdot b\cdot b\cdot\;\cdots\;\cdot b}_{\text{عامل } n+1}}\leqslant\frac{\overbrace{a+b+\dots+b}^{\text{جمله } n+1}}{n+1} \quad \text{(قضیهٔ ۸)}$$

$$=\frac{a+nb}{n+1}.$$

برابری فقط وقتی برقرار است که $a=b$. □

مسألهٔ ۵.

(قضیهٔ ۸)
$$n!=۱\cdot۲\cdot۳\cdot\ldots\cdot n<\left(\frac{۱+۲+\cdots+n}{n}\right)^n$$

اما

$$\begin{aligned}&۱+۲+۳+\cdots+n\\&=\frac{۱}{۲}\left\{\begin{matrix}۱ & + & ۲ & +۳ & +\cdots+n-۱+n\\ +n & + & n-۱ & +n-۲ & +\cdots+۲ \quad +۱\end{matrix}\right\}\\&=\frac{۱}{۲}\{(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)+(n+۱)\}\\&=\frac{n(n+۱)}{۲}.\end{aligned}$$

پس بنابرقضیهٔ ۱،

$$n!<\left[\frac{n(n+۱)}{n\times۲}\right]^n=\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n,$$

که باید ثابت می‌شد. □

مسألهٔ ۶. هرگاه a، b، و c مثبت باشند،

(قضیهٔ ۸)
$$ab+bc+ca\geqslant۳(ab\cdot bc\cdot ca)^{۱/۳}=۳(abc)^{۲/۳}$$

و

(قضیهٔ ۸)
$$a+b+c\geqslant۳(abc)^{۱/۳}$$

پس، بنابرقضیهٔ ۳، اگر a، b، و c مثبت باشند،

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant۹abc.$$

اگر $a=b=c$، برابری برقرار است. اگر از سه‌عدد a، b، و c حداقل ۲ تا صفر باشند، برابری و در همهٔ حالتهای دیگر نابرابری برقرار است.

مسألهٔ ۷. راه‌حل اول. می‌توان جمله‌های حاصلضرب را به‌صورت زیر مرتب کرد:

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad+\frac{a_n}{a_n}$$

$$+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)$$

$$+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{a_n}+\frac{a_n}{a_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$$

هرسطر ازجمله‌ها را جداگانه درنظر می‌گیریم و از نابرابری (۳) در صفحهٔ ۱۶ استفاده می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که جز سطر اول جمله‌های هرسطر بزرگتر از ۲ هستند، و از این روی

$$\left(\sum_{1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geqslant n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2+\cdots$$

$$+[n-(n-2)]\cdot 2+1\cdot 2$$

یا

$$\left(\sum_{1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geqslant 2\left[\sum_{k=1}^{n}(n-k)\right]+n=2\,\frac{n(n-1)}{2}+n=n^2\,.$$

برابری فقط وقتی برقرار است که $a_1=a_2=\dots=a_n$. □

راه‌حل دوم. به‌روش دیگری جمله‌ها را مرتب می‌کنیم

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\dots+\frac{a_1}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}$$
$$+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_2}{a_{n-1}}+\frac{a_2}{a_n}$$
$$+\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_3}{a_3}+\dots+\frac{a_3}{a_{n-1}}+\frac{a_3}{a_n}$$
$$\cdots\cdots$$
$$+\frac{a_{n-1}}{a_1}+\frac{a_{n-1}}{a_2}+\frac{a_{n-1}}{a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$+\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\frac{a_n}{a_3}+\dots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_n}{a_n}.$$

این مجموع که از n سطر وهرسطر از n جمله تشکیل شده است جمعاً n^2 جمله‌دارد. با نگاه کردن به‌سطرها و ستونها می‌بینیم که به‌ازای هر k از ۱ تا n دقیقاً n جمله دارای صورت a_k و دقیقاً n جمله دارای مخرج a_k هستند. بنابراین، حاصلضرب این n^2 کسر مثبت، ۱ می‌شود؛ از این‌روی، بنابر قضیهٔ ۶، مجموع آنها حداقل برابر n^2 است. برابری برقرار است اگر و تنها اگر همه باهم برابر باشند، یعنی، اگر و تنها اگر $a_1=a_2=\dots=a_n$. □

آیا راه‌حل دیگری نیز می‌توانید بیابید ــ یکی از آنها راه‌حلی است که متضمن نتیجهٔ مسألهٔ ۲ است وقتی بر ردیفهای قطری مجموع n^2 جملهٔ فوق اعمال می‌شود.

مسألهٔ ۸. یك طریقهٔ کشف برهان این‌مسأله در زیر ارائه می‌شود. اگر

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

آنگاه، بنابر قضیهٔ ۴،

$$|a|^2-2|a|\cdot|b|+|b|^2\leqslant|a+b|^2\leqslant|a|^2+2|a||b|+|b|^2$$

اما $|a|^2=a^2$، $|b|^2=b^2$، و $|a+b|^2=(a+b)^2$. بنابراین، اگر a^2 و b^2 را از هرسه‌عضو نابرابری اخیر کم کنیم، نتیجهٔ

$$-2|a|\cdot|b|\leqslant 2ab\leqslant 2|a|\cdot|b|$$

را به‌دست می‌آوریم. چون $|a|\geqslant a$ و $|b|\geqslant b$، داریم $|a|\cdot|b|\geqslant ab$ (چرا؟).
بنابراین، نابرابری

$$-۲|a|\cdot|b|\leqslant ۲ab\leqslant ۲|a|\cdot|b|$$

درست است.

برای تنظیم برهان، باید بتوانیم مرحله‌های فوق را به‌ترتیب‌معکوس بنویسیم. چنین کاری گاهی امکان‌پذیر نیست. مثلاً، اگر $x>y>۱$، آنگاه $x^۲>y^۲>۱$؛ اما به‌عکس اگر $x^۲>y^۲>۱$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $x>y>۱$؛ مثال $x=-۳$ و $y=-۴$ گواه این مدعاست. با این حال، در این مسأله، می‌توانیم مرحله‌ها را به‌ترتیب معکوس بنویسیم.

برهان. به روشنی $|a|^۲=a^۲$، $|b|^۲=b^۲$، $|a|\cdot|b|\geqslant ab$، و $-|a|\cdot|b|\leqslant ab$. پس، بنابرقضیهٔ ۲

$$|a|^۲-۲|a|\cdot|b|+|b|^۲\leqslant a^۲+۲ab+b^۲$$

$$\leqslant|a|^۲+۲|a|\cdot|b|+|b|^۲\,.$$

چون $|a+b|^۲=(a+b)^۲$ از نابرابری اخیر و با استفاده از قضیهٔ ۴ به‌ازای $p=۱/۲$ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. □

متذکر می‌شویم که نابرابری $|a|-|b|\leqslant|a+b|$ در واقع نابرابری $||a|-|b||\leqslant|a+b|$ را ایجاب می‌کند. (این نابرابریها به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی a و b برقرارند.)

عدد $|a+b|$ فاصلهٔ نقطهٔ a تا نقطهٔ $-b$ روی خط حقیقی است. عدد $|a|+|b|$ برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ a تا مبدأ به‌علاوهٔ فاصله نقطهٔ $-b$ تامبدأ. لذا، طرف راست نابرابری نتیجه می‌دهد که فاصلهٔ بین دو نقطه برخط حقیقی (هرجفت نقطه را بسته به‌مقادیر a و b می‌توان با a و $-b$ نشان‌داد.) نابزرگتر از مجموع فاصله‌های آنها تا مبدأ است. این حکم‌هندسی نظیر نابرابری مثلثی است، یعنی آن نابرابری که بیان می‌کند مجموع طولهای دوضلع یك مثلث بزرگتر است ازطول ضلع‌سوم. همچنین، نابرابری طرف‌چپ هم‌ارز این‌قضیه است که فاصلهٔ بین‌دونقطه برخط حقیقی ناکوچکتر از اختلاف فاصله‌های آنها تا مبدأ است که با نابرابری مثلثی مشهور دیگری متناظر است.

آیا می‌توانید نابرابریهای زیر را ثابت و تعبیر کنید؟

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b| \cdot \qquad \text{(i)}$$

$$|a-c|-|b-c| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a-c|+|b-c| \cdot \qquad \text{(ii)}$$

اگر a و b اعداد مختلط باشند، باز

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

و تعبیر هندسی این نابرابری در اعداد مختلط همان نابرابری مثلثی است که در بالا بدان اشاره شد.

مسألهٔ ۹. فرض کنیم $\triangle$ مثلثی با مساحت T و محیط P باشد. همچنین فرض کنیم $\triangle_{۱}$ مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده ومحیط $\triangle$ ولی با مساحت $T_{۱}$ باشد. بالاخره، فرض کنیم $\triangle_{۲}$ مثلث متساوی‌الساقینی‌باقاعده ومساحت $\triangle$ ولی بامحیط $P_{۲}$ باشد. بنا برقضیهٔ ۱۰(ب) که به $\triangle$ و $\triangle_{۲}$ اعمال شود،

$$P \geqslant P_{۲} \cdot$$

لذا، باوجودی‌که $\triangle_{۱}$ و $\triangle_{۲}$ هردو مثلثهایی متساوی‌الساقین باقاعدهٔ مشترك‌هستند، محیط $\triangle_{۱}$ حداقل به‌بزرگی محیط $\triangle_{۲}$ است. در نتیجه، مساحت $\triangle_{۱}$ حداقل به‌بزرگی مساحت $\triangle_{۲}$ است، یعنی $T_{۱} \geqslant T$. □

بـا مفروض بودن مثلث $\triangle$، مثلثهای $\triangle_{۱}$ و $\triangle_{۲}$ را بسازید و درستی این قضیه را عیناً ببینید.

مسألهٔ ۱۰. ثابت می‌کنیم که‌قضیهٔ ۱۱ (الف) قضیهٔ ۱۱ (ب) را نتیجه می‌دهد. فرض کنیم $\triangle$ مثلث دلخواهی بامساحت T ومحیط P و نیز $\triangle_{۱}$ مثلث متساوی‌الاضلاعی بامساحت T و محیط $P_{۱}$ باشد. بالاخره، $\triangle_{۲}$ را مثلث متساوی‌الاضلاعی بامساحت $T_{۲}$ ومحیط P می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ ۱۱ (الف) که به $\triangle$ و $\triangle_{۲}$ اعمال شود،

$$T_{۲} \geqslant T \cdot$$

حال گوییم از دومثلث متساوی‌الاضلاع آنکه مساحت بزرگتری دارد محیطش‌بزرگتر است. (و، به‌عکس، آنکه محیط بزرگتری دارد مساحتش بزرگتر است). لذا بـا مقایسهٔ $\triangle_{۱}$ و $\triangle_{۲}$ نتیجه می‌گیریم که $P_{۱} \leqslant P$. □

مسألهٔ ۱۱. با تقسیم دوطرف راست و چپ فرمول هرون $(7')$ به $16T^2$، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{P^{1/3}(P-2a)}{(16T^2)^{1/3}}\cdot\frac{P^{1/3}(P-2b)}{(16T^2)^{1/3}}\cdot\frac{P^{1/3}(P-2c)}{(16T^2)^{1/3}}=1.$$

هر عامل حاصلضرب بالا مثبت است، پس می‌توانیم قضیهٔ ۶ را به‌کار بریم و نتیجه بگیریم که مجموع این سه‌عدد که حاصلضربشان برابر بایك است وقتی حداقل است که این سه‌عدد برابر باشند. مجموع برابر است با

$$\left(\frac{P}{16T^2}\right)^{1/3}(P-2a+P-2b+P-2c)$$

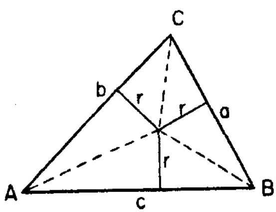
یعنی،

$$\frac{P^{4/3}}{(16T^2)^{1/3}}\cdot$$

این سه‌عدد وقتی برابرند که $P-2a=P-2b=P-2c$. این امر رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $a=b=c$. چون T ثابت است نتیجه می‌گیریم P وقتی حداقل است که $a=b=c$. □

مسألهٔ ۱۲. مثلث متساوی‌الاضلاع در هردو حالت مثلث اکسترمال است.

راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که از بین همهٔ مثلثهای بامحیط (یا مساحت) برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین دایرهٔ محاطی است.



شکل ۱۰۴

برهان. درهرمثلث ABC،

$$۲T=rP,$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی است، زیرا

$$T=a\cdot\frac{r}{۲}+b\cdot\frac{r}{۲}+c\cdot\frac{r}{۲}=(a+b+c)\frac{r}{۲}=P\cdot\frac{r}{۲}\cdot$$

قضیهٔ ۱۱ (الف) بیان می‌دارد که اگر P ثابت باشد T وقتی حداکثر است که ABC متساوی‌الاضلاع باشد. از این‌رو اگر P ثابت باشد از رابطهٔ $۲T=rP$ در می‌یابیم که r وقتی حداکثر است که ABC متساوی‌الاضلاع باشد. درحالتی که T ثابت باشد برهانی مشابه می‌توان ارائه‌کرد. □

حل قسمتی از مسألهٔ ۱۲. فرض‌کنیم $\triangle$، مثلث محیط بردایره‌ای به‌شعاع r، دارای مساحت T و محیط P باشد. مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط بر همان دایره را با $\triangle_E$ و مساحت و محیط آن را به‌ترتیب به T_E و P_E نشان‌می‌دهیم. بالاخره، فرض‌کنیم $\triangle_۱$ مثلثی متساوی‌الاضلاع بامحیط P وشعاع دایرهٔ محاطی $r_۱$ باشد. با اعمال قضیهٔ‌فوق به $\triangle$ و $\triangle_۱$، نتیجه‌می‌گیریم که $r_۱\geqslant r$. اما اگر مثلث متساوی الاضلاع $\triangle_۱$ دارای دایرهٔ محاطی بزرگتر از دیگری، $\triangle_E$، باشد، مساحت و محیط بزرگتری نیز دارد. بنابراین $P\geqslant P_E$. □

مسألهٔ ۱۳. به‌هنگام ارائهٔ برهانی‌مفصل یا استدلالی با مراحل متعدد و طولانی، بهتر است ابتدا به‌شرح کارهایی بپردازیم که می‌خواهیم انجام دهیم. راه‌حل مسألهٔ حاضر مثالی از این‌نوع‌است. جواب دوسؤالی که درمسألهٔ ۱۳ مطرح شده‌اند چنین است:

قضیهٔ (الف). از میان همهٔ مثلثهای محاط در دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین محیط است.

قضیهٔ (ب). از میان همهٔ مثلثهای محاط در دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین مساحت است.

برهانی کامل‌برای قضیهٔ نخست ارائه‌می‌دهیم و اشاره می‌کنیم قضیهٔ دوم را چگونه می‌توان ثابت کرد. برهان قضیهٔ (الف) شامل دو قسمت اساسی است. ابتدا ثابت می‌کنیم که

قضیهٔ (پ). از میان همهٔ مثلثهای با قاعدهٔ مشترک که در یک دایرهٔ مفروض محاط‌اند، مثلث متساوی‌الساقینی که ارتفاعش بزرگتر است بزرگترین محیط را دارد.

سپس ثابت خواهیم کرد که ازمیان همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین محاط در

دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین محیط است.

برهان قضیهٔ (پ). فرض کنیم ABC مثلثی محاطی با رأسهای ثابت A و B باشد زاویه‌های A، B، و C را به‌ترتیب به α، β، و γ نشان می‌دهیم. وقتی رأس C برمحیط دایره حرکت می‌کند، زاویهٔ γ ثابت می‌ماند. فرض کنیم نیمساز γ قاعدهٔ AB را در X قطع کند و AD و BE عمودهای مرسوم بر CX، یا امتداد آن، باشند (شکل ۲.۴). در این‌صورت

$$b\sin\frac{1}{2}\gamma=\overline{AD},\ a\sin\frac{1}{2}\gamma=\overline{BE}$$

و

$$(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma=\overline{AD}+\overline{BE}\,. \tag{*}$$

همچنین، درحالتی که درشکل ۲.۴ نشان داده شده است،

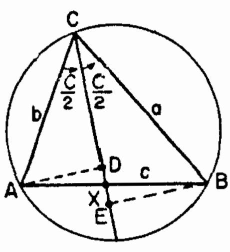
$$\sphericalangle AXD=\beta+\frac{1}{2}\gamma,$$

بنابراین

$$\sphericalangle XAD=\sphericalangle EBX=\frac{1}{2}\pi-\left(\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\left(\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,.$$



شکل ۲.۴

بنا بر این

$$\overline{AX}\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)=\overline{AD},\quad \overline{BX}\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)=\overline{BE}\cdot$$

و

$$(\overline{AX}+\overline{BX})\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)=c\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)=\overline{AD}+\overline{BE}\cdot \quad (**)$$

از (*) و (**) نتیجه می‌شود

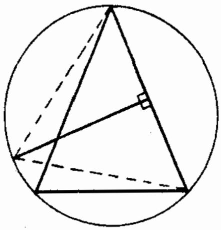
$$(a+b)\sin\frac{۱}{۲}\gamma=\overline{AD}+\overline{BE}=c\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta),$$

یا

$$a+b=\frac{c\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{۱}{۲}\gamma}\,.$$

زاویهٔ γ ثابت است، و $\cos(\alpha-\beta)/۲$ وقتی حداکثر است که $\alpha=\beta$، یعنی، وقتی که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین باشد. بنا بر این $a+b$ وقتی حداکثر است که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین باشد. صرف‌نظر از حالت $\gamma=۹۰^\circ$، برطبق آنکه C در کدام طرف ضلع AB باشد دومقدار ممکن برای γ وجود دارد. از دو مثلث متساوی‌الساقین ممکن ABC با A و Bی ثابت، مقدار کمتر γ متناظر است با مقدار بزرگتر $a+b$؛ همچنین این‌مقدار کمتر متناظر است با ارتفاع بلندتر از C بر AB. □

به‌کمک این‌قضیه به‌آسانی می‌توان نشان داد که بین همهٔ مثلثهای محاط در دایرهٔ مفروض مثلث متساوی‌الساقینی که متساوی‌الاضلاع نباشد بیشترین محیط را ندارد؛ برای این‌امر، کافی است یکی از ساقها را قاعدهٔ جدید بگیریم و مثلثی متساوی‌الساقین با این قاعده در دایره محاط کنیم (شکل ۳.۴ ملاحظه شود). بنا بر این‌قضیه، محیط مثلث‌جدید از محیط مثلث مفروض بزرگتر است. چون تا کنون نشان‌نداده‌ایم که در دایره‌ای مفروض‌مثلثی با محیط ماکسیمم وجود دارد، روش بالا



شکل ۳.۴

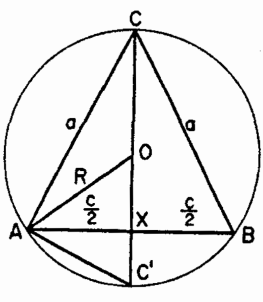
که مبتنی بر افزایش محیط یك مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع است وجود شکل ماکسیمم را اثبات نمی‌کند. بنابراین لازم است به‌قضیهٔ (الف) از راه دیگری نزدیك شویم.

اثبات قضیهٔ (الف). با توجه به‌قضیهٔ (پ)، آنچه باید ثابت شود این‌است که‌در میان همهٔ‌مثلثهای متساوی‌الساقین محاط در دایـره‌ای مفروض،مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین محیط است. فرض کنیم $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین (شکل ۴.۴)، CC' قطر عمود بر AB، و $\overline{AO}=R$ شعاع دایرهٔ مفروض باشد. نشان خواهیم داد که $۲a+c$، محیط مثلث وقتی حداکثر است که $\overline{AC'}=R$. در این‌صورت $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع و برهان قضیه کامل می‌شود.

بنا برقضیهٔ فیثاغورس،

$$a=\sqrt{۴R^۲-\overline{AC'}^۲}\,, \qquad \frac{c}{۲}=\sqrt{\overline{AC'}^۲-\overline{C'X}^۲}\,.$$

چون مثلثهای $AC'C$ و $AC'X$ متشابه‌اند،



شکل ۴.۴

$$\frac{\overline{C'X}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{AC'}}{۲R} \quad \text{یا} \quad \overline{C'X}=\frac{\overline{AC'}^{۲}}{۲R}.$$

در نتیجه،

$$\frac{c}{۲}=\sqrt{\overline{AC'}^{۲}-\left(\frac{\overline{AC'}^{۲}}{۲R}\right)^{۲}}=\frac{\overline{AC'}}{۲R}\sqrt{۴R^{۲}-\overline{AC'}^{۲}}$$

و

$$a+\frac{c}{۲}=\sqrt{۴R^{۲}-\overline{AC'}^{۲}}\left(۱+\frac{\overline{AC'}}{۲R}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲R}\sqrt{۲R+\overline{AC'}}\sqrt{۲R-\overline{AC'}}\ (۲R+\overline{AC'}).$$

ما خواهان یافتن شرایطی هستیم که در آن شرایط $P=۲(a+c/۲)$ ماکسیمم شود. چون R ثابت است، P وقتی ماکسیمم است که $۳R^{۲}P^{۲}$ ماکسیمم شود. اولا ملاحظه می‌کنیم که

$$۳R^{۲}P^{۲}=۱۲R^{۲}\left(a+\frac{c}{۲}\right)^{۲}$$

$$=(۲R+\overline{AC'})(۲R+\overline{AC'})(۲R+\overline{AC'})(۶R-۳\overline{AC'}).$$

ثانیاً، ملاحظه می‌کنیم که $۲R>\overline{AC'}$ و مجموع چهار عامل سمت راست $۱۲R$ است که به $\overline{AC'}$ بستگی ندارد. لذا می‌توانیم از قضیهٔ ۷ استفاده کنیم که می گوید حاصلضرب چهار عدد مثبت با مجموع مفروض وقتی حداکثر است که آن چهار عدد برابر باشند. مقدار $\overline{AC'}$ که همهٔ عاملها را برابر می‌سازد با برابری

$$۶R-۳\overline{AC'}=۲R+\overline{AC'}$$

مشخص می‌شود؛ در نتیجه

$$\overline{AC'}=R.$$

بنابراین، $c=a$، و $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است. □

اکنون با روشی که هم‌ارزی قضیه‌های ۱۰ (الف) و ۱۰ (ب) را نشان دادیم می‌توانیم قضیهٔ (ب) را ثابت کنیم:

بین همهٔ مثلثهای محاط در دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع حداکثر مساحت را دارد.

با این‌حال، برای اثبات این که قضیهٔ (الف) از قضیهٔ (ب) نتیجه می‌شود از این روش نمی‌توان استفاده کرد.

قضیهٔ (ب) با قضیهٔ زیر هم‌ارز است.

قضیه. حاصلضرب طولهای اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره از حاصلضرب طولهای اضلاع هرمثلث محاط درآن دایره بزرگتر است.

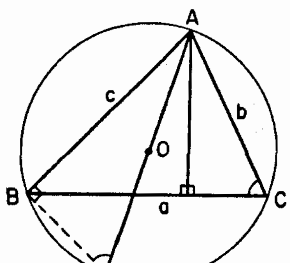
برهان. درهرمثلث ABC (شکل ۵.۴ ملاحظه شود)

$$T=\frac{ab\sin C}{۲},\quad \sin C=\frac{c}{۲R};$$

بنا براین

$$T=\frac{abc}{۴R}.$$

چون R ثابت است، نتیجه می‌گیریم که T وقتی حداکثراست که c ، b ، a حداکثر باشد، یعنی وقتی که $a=b=c$.



□ شکل ۵.۴

استدلال قبل، این پدیدهٔ عادی در ریاضیات را نمایان می‌کند: سؤالهای ساده‌ای که جواب‌دادن به‌آنها مستلزم کار فراوانی است.

مسألهٔ ۱۴. قضیه. دربین همهٔ مثلثهای با محیط مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای کوچکترین دایرهٔ محیطی است.

برهان. فرض کنیم $\triangle$ مثلثی باشعاع دایرهٔ محیطی R ومحیط P و $\triangle_E$ مثلثی متساوی‌الاضلاع باشعاع دایرهٔ محیطی R ومحیط P_E باشد. بالاخره فرض کنیم $\triangle'$ مثلثی متساوی‌الاضلاع با شعاع دایرهٔ محیطی R' و محیط P است. بنا برنتیجهٔ مسألهٔ ۱۳، $P_E \geqslant P$. بنا براین،

$$R \geqslant R' . \qquad \square$$

قضیهٔ مشابه‌در بارهٔ مساحت به‌جای‌محیط به‌همین ترتیب بیان وثابت می‌شود. کافی است در قضیهٔ اخیر و برهان آن هرجاکه محیط آمده است به‌جایش مساحت بگذاریم.

مسألهٔ ۱۵. فرض کنیم بعدهای جعبهٔ a، b، و c باشند و طرف باز آن ضلعهایی به‌طولهای a و b داشته باشد؛ مساحت و حجم آن را به‌ترتیب به S و V نشان می‌دهیم. دراین صورت،

$$S = ۲ac + ۲bc + ab \quad , \quad V = abc .$$

بنا بر قضیهٔ ۸،

$$[(۲ac)(۲bc)(ab)]^{۱/۳} \leqslant \frac{S}{۳} .$$

چون $(abc)^{۲/۳} = V^{۲/۳}$، این نابرابری هم‌ارز است با

$$V^{۲/۳} \leqslant \frac{S}{۳ \times ۲^{۲/۳}} \quad \text{یا} \quad V \leqslant \frac{S^{۳/۲}}{۲ \times ۳^{۳/۲}}$$

مقدار ماکسیمم V، یعنی $S^{۳/۲}/(۲ \times ۳^{۳/۲})$ حاصل می‌شود اگر و تنها اگر

$$۲ac = ۲bc = ab,$$

یعنی، اگر و تنها اگر

$$a=b=۲c.$$

بنابراین جعبهٔ با حجم ماکسیمم نصف‌مکعب است. □

آیا می‌توانید این مسأله را با استفاده از اصل بازتاب که در فصل ۳ مورد بحث قرار گرفت حل کنید؟

مسألهٔ ۱۶. بعدها و حجم چنین جعبه‌ای را با حروفی نشان می‌دهیم که درحل مسألهٔ ۱۵ به‌کار بردیم. دراین‌صورت تنگ جعبه $۲b+۲c$ است، و

$$a+۲b+۲c\leqslant L.$$

بنا بر قضیهٔ ۸،

$$(a\times ۲b\times ۲c)^{۱/۳}\leqslant\frac{a+۲b+۲c}{۳}\leqslant\frac{L}{۳} \quad \text{یا} \quad ۲^{۲/۳}\times V^{۱/۳}\leqslant\frac{L}{۳}.$$

بنابراین

$$V\leqslant\frac{L^۳}{۲^۲\times ۳^۳}.$$

وقتی V ماکسیمم یعنی برابر با $L^۳/(۳^۳\times ۲^۲)$ می‌شود که،

$$a=۲b=۲c.$$

بنابراین باید b و c، ارتفاع و عرض جعبه، برابر باشند و a، طول آن‌دو برابر عرض (یا دوبرابر ارتفاع) باشد.

مسألهٔ ۱۷. فرض کنیم بعدهای چنین جعبه‌ای a، b، و c باشند. دراین‌صورت L مجموع طول یالهای آن برابر است با $۴(a+b+c)$. بنا بر قضیهٔ ۸،

$$(abc)^{۱/۳}\leqslant\frac{a+b+c}{۳} \quad \text{یا} \quad V^{۱/۳}\leqslant\frac{L}{۱۲}.$$

بنابراین حجم وقتی حداکثر است که $V=(L/۱۲)^۳$ و این امر رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $a=b=c$.

Sمساحت رویهٔ جعبه برابر است با

$$۲(ab+bc+ca).$$

بنابـر قضیـهٔ ۸، $۲ab\leqslant a^۲+b^۲$، $۲bc\leqslant b^۲+c^۲$، و $۲ca\leqslant c^۲+a^۲$. ایـن نابرابریها به‌برابری تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $a=b=c$. بنابراین،

$$S\leqslant ۲(a^۲+b^۲+c^۲)=۲(a+b+c)^۲-۴(ab+bc+ca)$$
$$=۲(a+b+c)^۲-۲S$$

یا

$$۳S\leqslant ۲\left(\frac{L}{۴}\right)^۲.$$

L ثابت است. از این‌روی S وقتی ماکسیمم است که $a=b=c$. □

مسألهٔ ۱۸. راهنمایی: فرض کنیم M یك چهاروجهی با حجم V باشد. هرگاه هر وجه M مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، M چهاروجهی منتظم و مسأله ثابت شده‌است. در غیراین‌صورت، یکی از وجه‌ها راکه مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد انتخاب می‌کنیم. درحالی‌که حجم M را ثابت نگاه مـی‌داریم، این‌وجه را تغییر می‌دهیم تا به‌مثلثی متساوی‌الاضلاع و بـا همان مساحت تبدیل شود و رأس روبـه‌رو را چنان جابه‌جا می‌کنیم تابالای مرکز این مثلث قرار گیرد. با این کار سطح جانبی کاهش می‌یابد. چرا؟ آیا می‌توانید این را ثابت کنید؟. بنابراین، اگر M یك چهاروجهی منتظم با حجم V نباشد، چهار وجهی دیگری با همان حجم وجود داردکـه سطح جانبی آن کمتر است. بنابر فرض، این مسأله جواب دارد. بنابراین، چهار وجهی منتظم این جواب است.

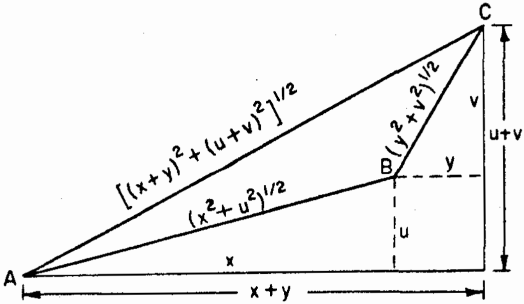
درسال ۱۸۸۴، اشتورم[1] بی‌آنکه فرض کند چهاروجهی اکسترمـال وجود دارد، برهانی برای این‌قضیه ارائه داد که بابرهان اشتاینر برای قضیهٔ برابرمحیطی مثلثها شباهت کلی داشت. گرچه این برهان مقدماتی است، اما ساده نیست.

حل. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که نابرابری

$$(x^۲+u^۲)^{۱/۲}+(y^۲+v^۲)^{۱/۲}\geqslant[(x+y)^۲+(u+v)^۲]^{۱/۲}$$

به‌ازای هرچهارعدد مثبت x، y، u و v برقرار است؛ طبق‌شکل ۶.۴ این‌نابرابری هم‌ارز است با $\overline{AB}+\overline{BC}\geqslant\overline{AC}$. همچنین، نابرابری

1) R. Sturm



شکل ۶.۴

$$(x^۲+u^۲)^{۱/۲}+(y^۲+v^۲)^{۱/۲}+(z^۲+w^۲)^{۱/۲}$$
$$\geqslant[(x+y+z)^۲+(u+v+w)^۲]^{۱/۲}$$

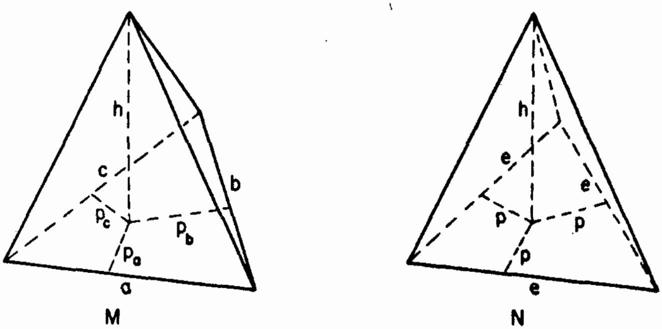
با نابرابری $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\geqslant\overline{AD}$، کـه در آن $ABCD$ یك چندضلعی است، هم‌ارز است. به‌زودی از این نـابرابری استفاده خواهیم کرد. نابرابریهای بالا و تعمیم آنها بـه مجموعهایی از n جمله را هندسه‌دان بزرگ هرمـان مینکوفسکی[۱] (۱۸۶۴–۱۹۰۹) کشف و ثابت کرد.

فرض کنیم چهاروجهی مفروض M، دارای حجم V و مساحت کل S باشد. اگر M منتظم نباشد، حداقل یك‌وجـه آن مثلث متساوی‌الاضلاع نیست و می‌توانیم این‌وجه را قاعده فرض کنیم. محیط و مساحت‌قاعده را به P و A نمایش می‌دهیم. اکنون فرض کنیم N چهاروجهی تبدیل یافته‌ای است که قاعده‌ای متساوی‌الاضلاع و ارتفاعی‌برابر با ارتفاع M دارد. دراین‌صورت N دارای حجم V، مساحت‌کل S^*، محیط قاعدهٔ $P^*<P$، و مساحت قاعدهٔ A است.

فرض‌کنیم h ارتفاع مشترك M و N (شکل ۷.۴ ملاحظه شود)، همچنین a، b، و c طول ضلعهای قاعدهٔ M، و e طول‌هرضلع قاعدهٔ N باشد. ازپای ارتفاع M بر سه‌ضلع قاعده عمود فرود می‌آوریم و طولهای این عمودها را به p_a، p_b، و p_c نمایش می‌دهیم. همچنین طول هرعمود متناظر در N را p می‌نامیم. درچهاروجهی M داریم

---

1) Hermann Minkowski



شکل ۷.۴

$$A=\frac{۱}{۲}(ap_a+bp_b+cp_c),$$

$$S=A+\frac{۱}{۲}[a(p_a{}^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}+b(p_b{}^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}+c(p_c{}^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}]$$

و

$$۲(S-A)=(a^{۲}p_a^{۲}+a^{۲}h^{۲})^{۱/۲}+(b^{۲}p_b^{۲}+b^{۲}h^{۲})^{۱/۲}+(c^{۲}p_c^{۲}+c^{۲}h^{۲})^{۱/۲}.$$

همچنین، در چهاروجهی N داریم

$$A=\frac{۱}{۲}(ep+ep+ep)=\frac{۱}{۲}(۳e)\,p=\frac{۱}{۲}P^{*}p,$$

$$S^{*}=A+\frac{۱}{۲}[e(p^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}+e(p^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}+e(p^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}]$$

$$=A+\frac{۱}{۲}P^{*}(p^{۲}+h^{۲})^{۱/۲},$$

و

$$۲(S^{*}-A)=(P^{*۲}p^{۲}+P^{*۲}h^{۲})^{۱/۲}=[(۲A)^{۲}+P^{*۲}h^{۲}]^{۱/۲}.$$

حال قرار می‌دهیم

$$ap_a=x,\ bp_b=y,\ cp_c=z;\ ah=u,\ bh=v,\ ch=w,$$

ونابرابری دوم راکه درآغاز این راه‌حل بیان‌شد به‌کار می‌بریم. به‌این‌ترتیب

$$\begin{aligned}
۲(S-A)&=(a^۲p_a^۲+a^۲h^۲)^{۱/۲}+(b^۲p_b^۲+b^۲h^۲)^{۱/۲}+(c^۲p_c^۲+c^۲h^۲)^{۱/۲}\\
&=(x^۲+u^۲)^{۱/۲}+(y^۲+v^۲)^{۱/۲}+(z^۲+w^۲)^{۱/۲}\\
&\geqslant[(x+y+z)^۲+(u+v+w)^۲]^{۱/۲}\\
&=[(ap_a+bp_b+cp_c)^۲+(ah+bh+ch)^۲]^{۱/۲}\\
&=[(۲A)^۲+p^۲h^۲]^{۱/۲}\\
&>[(۲A)^۲+P^{*۲}h^۲]^{۱/۲}\\
&=۲(S^*-A).
\end{aligned}$$

اما از $۲(S-A)>۲(S^*-A)$، نتیجه می‌شود $S>S^*$. □

مسألهٔ ۱۹. فرض‌کنیم حجم و مساحت چنین هرم مضاعفی V و S باشد. همچنین فرض‌کنیم‌دوهرمی‌که آن را تشکیل‌می‌دهنددارای‌قاعده‌هایی به‌مساحت $a^۲$ وارتفاعی به‌طول h باشند. دراین صورت،

$$V=\frac{۲a^۲h}{۳},\quad S=۴a\left[\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+h^۲\right]^{۱/۲},\quad S^۲=۴a^۲(a^۲+۴h^۲).$$

راهنمایی: $S^۲$ را به‌صورت $۴[a^۴+۲a^۲h^۲+۲a^۲h^۲]$ بنویسید، و با استفاده از قضیهٔ ۸ درحالت $n=۳$ مجموع را حداقل کنید.

برای تعمیم این قضیه به‌یك هرم مضاعف مایل Q که قاعده‌اش مربع باشد، ابتدا Q را به‌یك هرم مضاعف قائم R باهمان قاعده وحجم تبدیل کنید. هرگاه در یکی‌از هرمهای مایل تشکیل‌دهندهٔ Q، فاصلهٔ پای ارتفاع h وارد برقاعده تا ضلعهای قاعده $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ باشند، آنگاه S مساحت سطح جانبی Q برابراست با

$$۲\sum_{i=۱}^{۴}\frac{۱}{۲}a[x_i^۲+h^۲]^{۱/۲}\ .$$

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
S &= a\sum_{i=1}^{4}[x_i^2+h^2]^{1/2}\\
&\geqslant a\left[\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{4}h\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(چرا؟)}\\
&= a[(2a)^2+(4h)^2]^{1/2}\\
&= 4a\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

که مساحت کل R است.

مسألهٔ ۲۰. طبق راهنمایی عمل می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$A=n\left(r\cdot\frac{P}{2n}\right)=\frac{rP}{2}\cdot$$

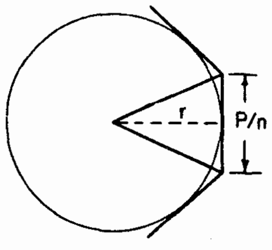
بنابراین،

$$A^2=\frac{r^2P^2}{4}\quad,\quad A=\frac{r^2P^2}{4A}\cdot$$

اما A از πr^2 که مساحت دایرهٔ محاطی است، بزرگتر است. در نتیجه، وقتی در مخرج کسر اخیر πr^2 را به‌جای A قراردهیم، نابرابری

$$A<\frac{r^2P^2}{4\pi r^2}=\frac{P^2}{4\pi}$$

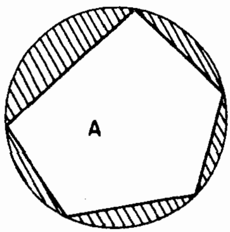
به‌دست‌می‌آید. شعاع دایره‌ای که محیطش P باشد برابر با $P/2\pi$ است؛ ازاین‌رو مساحت آن برابر با $\pi(P/2\pi)^2$ یا $P^2/4\pi$ است. لذا نشان داده‌ایم که مساحت



شکل ۸۰۴

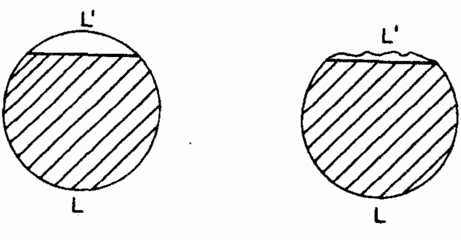
دایره‌ای بامحیط P از مساحت یك nضلعی منتظم بامحیط P بزرگتر است. □

مسألهٔ ۲۱. فرض‌کنیم nضلع nضلعی قابل محاط‌شدن در دایره به‌قسمتهایی از این دایره که خارج nضلعی است محکم چسبیده باشند، و n قسمت متحرك تشکیل دهند (شکل ۹.۴ ملاحظه شود). فرض کنیم مساحت کل این قسمتها K باشد. هرگاه این قسمتها را چنان مرتب کنیم‌که nضلعی دلخواه دیگری را باهمین ضلعها محدود کنند، آنگاه محیط‌شکل جدید برابر بامحیط دایره (یا در صورتی که قسمتهایی روی‌هم قرار گیرند کوچکتر از محیط دایره) است. فرض‌کنیم T مساحت nضلعی جدید باشد. بنا برقضیهٔ برابرمحیطی، $T+K$ مساحت کل شکل جدید (که شامل قسمتهای روی‌هم نیز هست) کوچکتر از مساحت $A+K$ی دایره است. بنابراین $T<A$.



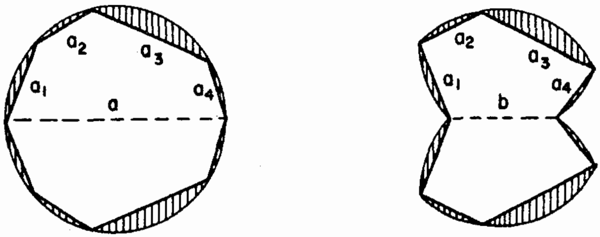
□ شکل ۹.۴

مسألهٔ ۲۳. راهنمایی: هریك از شکلهایی‌که در شکل ۱۰.۴ تصویر شده‌اند دارای محیط کل $L+L'$ هستند. کدام یك مساحت بیشتری دارد؟ چرا؟



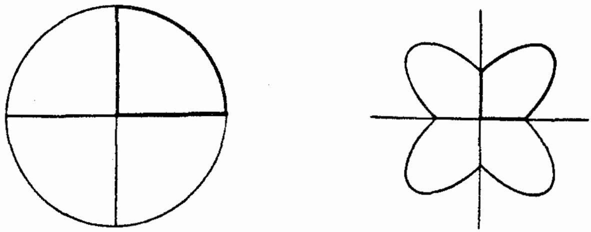
شکل ۱۰.۴

مسألهٔ ۲۴. راهنمایی: دو nضلعی که‌درشکل ۱۱.۴ تصویر وضلعهای آنها نامگذاری شده‌اند ۱ـn ضلع متناظر برابر و محیطی مساوی دارند.



شکل ۱۱.۴

مسألهٔ ۲۵. راهنمایی: روشی که به‌طور ضمنی درشکل ۱۲.۴ آمده است فقط وقتی کارایی دارد که زاویهٔ قطاع مفروض در صفحه به صورت خاص π/n باشد $n=۲,۳,...$. درسایر حالتها، ارائهٔ راه‌حل مشکل است.



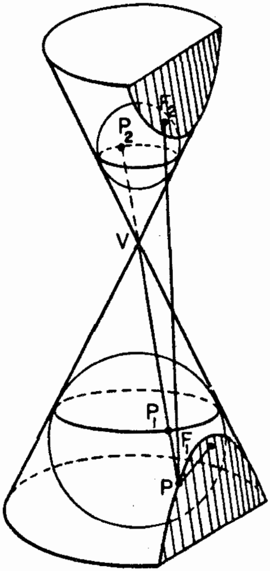
شکل ۱۲.۴

مسألهٔ ۲۶. مسأله چنین است: رویه‌ای با مساحت مفروض S چنان بیابید که قسمتی از این‌رویه قرص مستدیر ثابتی به‌مساحت A $(۲A<S)$ باشد و بزرگترین حجم را دربر گیرد.

مسألهٔ ۲۷. راهنمایی:

$$\overline{PF}_۱=\overline{PP}_۱ \quad , \quad \overline{PF}_۲=\overline{PP}_۲$$

زیرا مماسهایی که ازیك نقطهٔ خارج کره بر آن کره رسم می‌شوند طولهایی برابر دارند.



شکل ۱۳.۴

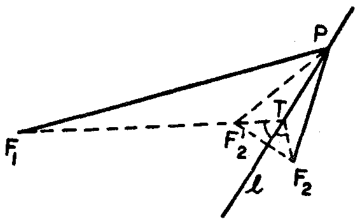
مسألهٔ ۲۸. فرض کنیم T نقطه‌ای دلخواه روی هذلولی باشد (شکل ۱۴.۴ ملاحظه شود). این نقطه را به کانونهای F_1 و F_2 وصل، و l نیمساز زاویهٔ F_1TF_2 را رسم کنید. ثابت می‌کنیم که هیچ نقطهٔ دیگر l مانند P روی هذلولی نیست و نتیجه می‌گیریم که l مماس برهذلولی است. فرض کنیم F_2' قرینهٔ F_2 نسبت به l باشد و P را به F_2، F_2' و F_1 وصل می‌کنیم. حال می‌نویسیم

$$|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}|=|\overline{PF_2'}-\overline{PF_1}|\leqslant\overline{F_1F_2'}$$
$$=|\overline{TF_2'}-\overline{TF_1}|=|\overline{TF_2}-\overline{TF_1}|,$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که نقطه‌های P، F_2'، و F_1 همخط باشند و این‌هم تنها وقتی برقرار است که P بر T منطبق باشد. لذا l هذلولی را تنها در یک نقطه قطع می‌کند، وبقیهٔ نقطه‌های این خط که به‌ازای آنها

$$|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}|<|\overline{TF_2}-\overline{TF_1}|=\text{مقدار ثابت}=k$$

در یک طرف هذلولی قرار دارند. می‌توانیم این‌طرف را «خارج» هذلولی بنامیم.



شکل ۱۴.۴

متذکر می‌شویم که «داخل» هذلولی، یعنی، همهٔ نقطه‌های Pای که به‌ازای آنها

$$|\overline{PF_{۲}}-\overline{PF_{۱}}|>k,$$

از دوناحیهٔ مجزای صفحه تشکیل شده است.

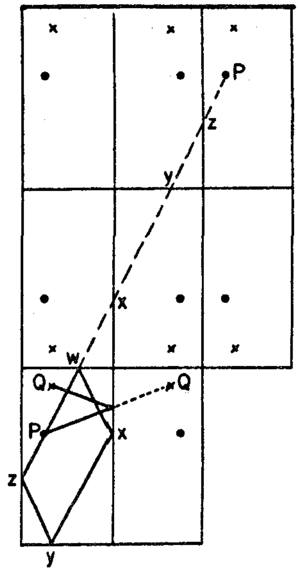
مسألهٔ ۲۹. راهنمایی: نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب برهم عمودند.

مسألهٔ ۳۰. پاره‌خط از P به P که درشکل ۱۵.۴ به‌صورت خط‌چین نمایش‌داده‌ایم تصویر یک‌مسیر روی‌میز است که از P به P می‌رود، یک نقطهٔ تقاطع این پاره‌خط با ضلعی از یکی از مستطیلها یا نقطه‌ای است که گوی از یک ضلع میز بیلیارد باز می‌تابد و یا تصویر چنین نقطه‌ای است. چنین مسیری، مثلا به‌صورت $P\rightarrow w\rightarrow x\rightarrow y\rightarrow z\rightarrow P$ رسم شده‌است. برای‌یافتن یک‌مسیر ممکن از P به Q، P را به‌هریک از تصویرهای Q که با تقارن به‌دست می‌آید وصل کنید.

مثلث متساوی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم شکلهای دیگری هستند که بی‌نهایت جواب دارند واین جوابها به‌آسانی یافت می‌شوند. آیا شکلهای دیگری‌نیز وجود دارند؟ چه‌شکلهایی قالب موزاییک چندضلعی داشته باشد تا با موزاییکهایی از این قالب بتوان‌تمام صفحه را کاملا پوشاند بدون آنکه‌قسمتی از آنها روی‌هم قرار گیرد؟

مسألهٔ ۳۱. nضلعی با کمترین محیط که قابل‌محاط شدن دریک nضلعی‌محدب مفروض باشد دارای این ویژگی است: دوضلع مجاور nضلعی مینیمال باضلعی از n ضلعی مفروض که از رأس مشترک آنها می گذرد، زاویه‌های برابر می‌سازند.

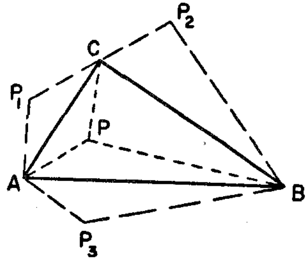
مسألهٔ ۳۲. شکل ۱۶.۴را درنظر بگیرید. شش‌ضلعی $AP_{۱}CP_{۲}BP_{۳}$ که‌ازقرینه‌های P نسبت به‌هریک از ضلعهای مثلث حاصل می‌شود، دارای مساحت $۲T$ و محیط



شکل ۱۵.۴

$۲(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ است. از حکمی که به‌دنبال مسألهٔ ۲۱ آمده است نتیجه می‌گیریم که: بین همهٔ شش‌ضلعیهای با مساحت $۲T$، شش‌ضلعی منتظم دارای کمترین محیط است. این محیط را به L نشان دهید. دراین‌صورت

$$۲(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})\geqslant L.$$



شکل ۱۶.۴

با محاسبهٔ L، محیط شش‌ضلعی منتظم برحسب مساحت آن $2T$، نشان دهید

$$L = 4\sqrt{\sqrt{3}T}.$$

مسألهٔ ۳۳. بین همهٔ مثلثهای بـا مساحت مفروض T، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بزرگترین دایرهٔ محاطی است. شعاع این دایرهٔ محاطی را به r_E نشان دهید؛ دراین صورت

$$r_E \geqslant r.$$

اما مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برحسب شعاع دایرهٔ محاطی آن عبارت است از

$$T = 3\sqrt{3}r_E^2 .$$

بنابراین

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}T} = 2\sqrt{\sqrt{3}\times 3\times\sqrt{3}r_E^2} = 6r_E \geqslant 6r . \qquad \square$$

مسألهٔ ۳۴. قضیه. فرض کنیم S یك چهاروجهی باشد. سه‌منشور مثلث‌القاعده می‌سازیم که دریك یال‌جانبی مشترك باشند و قاعدهٔ هریك یکی ازسه‌وجه S باشد و همهٔ آنها یاخارج S باشند و یا هیچ یك کاملا خارج S نباشد. دراین‌صورت، اگر منشور مثلث القاعدهٔ چهارمی بروجه دیگر S بسازیم به‌طوری‌که یالهای جانبی‌آن از انتقال یال جانبی مشترك سه‌منشور نخست به‌دست‌آمده باشد، آنگاه مجموع حجمهای سه‌منشور نخست با حجم منشور چهارم برابر است.

مسألهٔ ۳۵. از راهنمایی و قضیهٔ ۳ استفاده کنید و نابرابری زیر را به‌دست آورید

$$a\overline{PA} \cdot b\overline{PB} \cdot c\overline{PC} \geqslant (cp_b+bp_c)(ap_c+cp_a)(bp_a+ap_b),$$

سپس قضیهٔ ۸ را برای هرعامل سمت‌راست به‌کار برید.

مسألهٔ ۳۶. ابتدا یك حالت‌خاص را بررسی می‌کنیم.

قضیه. فرض‌کنیم $ABCD$ یك چهاروجهی باشد که مساحت وجه‌های‌آن باهم برابر باشند، و فرض‌کنیم P نقطه‌ای داخل‌آن باشد. دراین‌صورت

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} \geqslant 3(p_a+p_b+p_c+p_d),$$

که درآن p_a، p_b، p_c، p_d فاصله‌های P از وجه‌هـای چهاروجهی هستند. برابری

برقرار است اگر و تنها اگر چهاروجهی منتظم، و P مرکزآن باشد.

برهان. مساحت هر وجه را S می‌گیریم. بـا استفاده از تعمیم قضیهٔ پاپوس مذکور در مسألهٔ ۳۴، می‌توانیم به‌روشی مشابـه بـا آنچه کـه در برهان نابرابری اردوش-موردل در مثلثها آمده بود نشان دهیم که

$$PA.S \geqslant p_b.S + p_c.S + p_d.S \cdot \qquad (۱)$$

ملاحظه می‌کنیم که‌در اثبات (۱) ازهیچ یك از ویژگیهایی که‌یك‌رأس یا یك‌وجه چهاروجهی را از رأس یا وجه دیگری متمایز می‌کند استفاده نکرده‌ایم. بنا بر این، چون توانسته‌ایم نابرابری (۱) راکه مربوط به‌رأس A است ثابت کنیم، می‌توانیم نابرابریهای متناظر باسه‌رأس دیگر را نیز ثابت کنیم. وقتی بدانیم کـه طرف‌چپ نابرابری (۱) شامل‌فاصلهٔ P تا رأس A وطرف راست‌شامل فاصله‌های P تاسه‌وجه متقاطع در A است، با در نظر گرفتن نمادهای مربوط[1]، می‌توانیم سه‌نابرابری دیگر را چنین بنویسیم:

$$\overline{PB}.S \geqslant p_c.S + p_d.S + p_a.S, \qquad (۲)$$

$$\overline{PC}.S \geqslant p_d.S + p_a.S + p_b.S, \qquad (۳)$$

$$\overline{PD}.S \geqslant p_a.S + p_b.S + p_c.S \qquad (۴)$$

ازجمع طرفهای نظیر در چهار نابرابری بـالا، نابرابری مطلوب بـه دست می‌آید □

هرگاه این‌چهار وجهی یك چهاروجهی منتظم و نقطهٔ P مرکز کرهٔ محیطی آن باشد؛ آنگاه

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = ۳(p_a + p_b + p_c + p_d) \cdot$$

با این‌حال، آنچه‌که به‌نظر مـی‌آید تعمیم منطقی نابرابری اردوش-موردل می‌باشد،

---

۱) صرفـاً چهار حرف a، b، c، d را درنظر می‌گیریم و همهٔ جـابگشتهای دوری را انجام می‌دهیم؛ در هرنوبت نخستین حرف که رأس به‌کار رفته در هرنابرابری را مشخص مـی‌کند به‌صورت حرف‌بزرگ مـی‌نویسیم، یعنی در نـابرابریهـا حروف را به‌صورت A، b، c، d؛ B، c، d، a؛ C، d، a، b؛ D، a، b، c درنظر می‌گیریم.

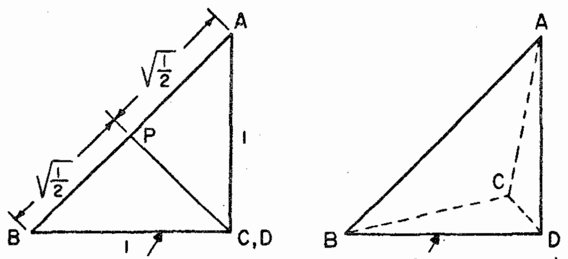
یعنی، نابرابری

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\geqslant ۳(p_a+p_b+p_c+p_d)$$

درحالت کلی برقرار نیست. به‌خصوص، این تعمیم برای چهاروجهی تباهیده‌که در شکل ۱۷۰۴ نشان داده‌ایم برقرار نیست. یک‌چهاروجهی ناتباهیده بیابید که در آن این نابرابری برقرار نباشد.

ممکن است حدس بزنید که

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}>۲\sqrt{۲}(p_a+p_b+p_c+p_d)\cdot$$



این چهاروجهی درهم فرو می‌ریزد، و به‌این چهاروجهی تبدیل می‌شود

شکل ۱۷۰۴

درستی این‌حدس درهمهٔ‌چهاروجهیهای سه‌قائمه (که سه‌وجه‌آنها دوبه‌دو متعامدند) و نیز همهٔ چهاروجهیهایی که شامل مرکز کرهٔ محیطی خود هستند تحقیق شده است. د. ك. کازارینوف[1] برهانی برای این‌نتیجهٔ کلی در دست داشت، ولی شاید به‌خاطر پیچیده‌بودن بیش‌ازحد برهان‌از افشای آن خودداری کرد. آیا می‌توانید برهانی بیابید؟

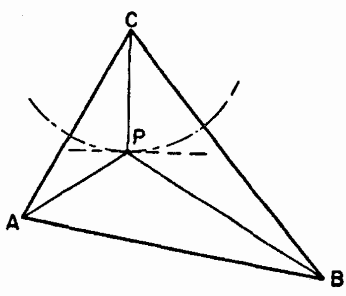
نابرابریهای شامل فواصل تا یالها و رأسها و یا فواصل تایالها و وجه‌ها را نیز می‌توان درنظر گرفت. آیا می‌توانید دراین موارد حدس بزنید؟آیـا می‌توانید قضیه‌هایی دراین باب ثابت کنید؟

مسألهٔ ۳۷. اگر چهارضلعی محدب باشد، نقطهٔ مطلوب محل تقاطع دوقطر است. این نتیجه بلافاصله از این واقعیت به‌دست می‌آید که خط راست کوتاهترین فاصلهٔ بین دونقطه است، اگر $ABCD$ محدب نباشد و D داخل ABC باشد، D نقطهٔ مطلوب است.

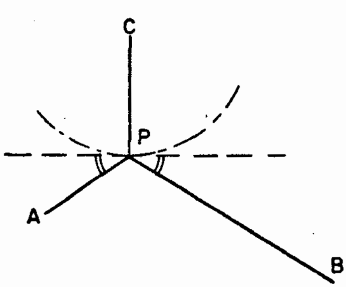
1) D. K. Kazarinoff

مسألهٔ ۳۸. راه‌حل ۱. فرض کنیم نقطهٔ P داخل ABC باشد، P را حرکت می‌دهیم به‌طوری‌که $\overline{PC}$ ثابت بماند (شکل ۱۸.۴ ملاحظه شود). دراین‌صورت بنابر اصل بازتاب، $\overline{PA}+\overline{PB}$ وقتی مینیمم است که $\sphericalangle APC=\sphericalangle BPC$، دراین حالت آینه‌ها که همان مماسهای بردایره‌ای هستند که باحرکت P نقش می‌شود جابه‌جا می‌شوند؛ برای هرآینه، P نقطهٔ تماس است، وروی دایره دقیقاً یک‌نقطه وجود داردکه درآن آینهٔ مماس، شعاعی‌را که از A صادر می‌شود به‌قسمی باز می‌تابد که شعاع بازتاب به B می‌رسد (شکل ۱۹.۴ ملاحظه شود). «هر» ویژگی که Pی مینیمم سازنده، نسبت به C داشته باشد همان ویژگی را باید نسبت به A و B نیز داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر نقطهٔ Pای را درنظر بگیریم که مجموع فاصله‌های آن از رأسهای A و B و C حداقل است، دراین نقطه باید زاویه‌های APC، BPC، APB برابر باشند. اما این‌فقط وقتی امکان‌پذیر است که هیچ زاویهٔ مثلث از $2\pi/3$ (یا 120°) بزرگتر نباشد. مثلاً، هرگاه $\sphericalangle A>120^\circ$، و $\sphericalangle APB=\sphericalangle APC=120^\circ$، آنگاه مجموع زوایای یکی ازمثلثهای PAB و PAC از π (یا 180°) بزرگتر می‌شود، که ممکن نیست. می‌توان ثابت کردکه اگر یکی از زاویه‌های مثلث حداقل $2\pi/3$ باشد، آنگاه رأس متناظر با این زاویه نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌هایش تا رأسهای مثلث حداقل است. چون نقطهٔ مینیمم‌ساز نمی‌تواند داخل‌مثلث واقع شود به‌ناچار برضلعی از مثلث واقع است؛ علاوه براین به‌آسانی می‌توان دیدکه این نقطه باید بر رأس بزرگترین زاویه منطبق باشد.

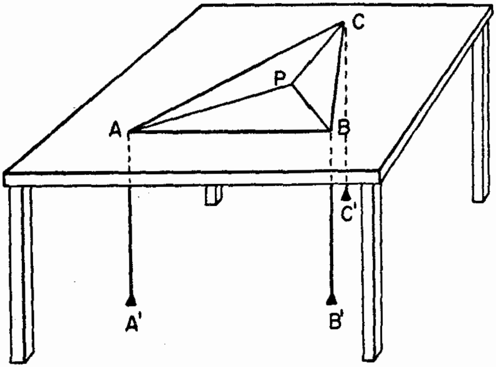
راه حل ۲. فرض کنیم سه‌سوراخ A، B، و C روی یک‌میز افقی تعبیه شده باشند و



شکل ۱۸.۴



شکل ۱۹.۴



شکل ۲۰.۴

سه‌وزنهٔ یك کیلوگرمی زیر میز با نخهایی که از سوراخها گذشته ودر نقطهٔ P بالای میز به‌هم گره زده‌ایم آویزان باشند (شکل ۲۰.۴ ملاحظه شود). نقطهٔ تعادل P نقطهٔ مطلوب است. این‌امر به‌خاطر آن است که در تعادل، وزنه‌ها به‌قسمی پایین می‌آیند که‌انرژی کل پتانسیل آنها‌حداقل‌شود، یعنی، به‌قسمی که‌مجموع $\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}$ ماکسیمم باشد. اما

$$(\overline{A'A}+\overline{AP})+(\overline{B'B}+\overline{BP})+(\overline{C'C}+\overline{CP})$$

مقداری است ثابت. بنابراین، در تعادل $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ حداقل است. حال گوییم، نیروی‌وارد برهریك از این سه‌نخ برابر است، وسه‌نیروی برابر فقط وقتی در تعادل می‌مانند که با یکدیگر زاویه‌های برابر بسازند. از این‌رو، در تعادل، زاویه‌های بین نخها درمحل گره باید برابر باشند.

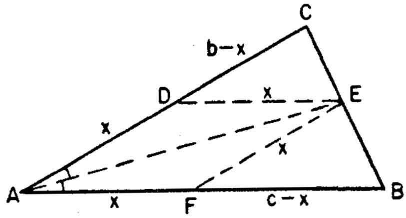
راه‌حل زیبای دیگری از این مسأله، به‌همراه روش ساده‌ای برای ترسیم نقطهٔ مطلوب P در کتاب لذات ریاضیات تألیف رادماخر و توپلیتز[1] ارائه شده است.

مسألهٔ ۳۹. (این مسأله را بارتفای[2] ارائه و کالمن[3] حل کرده است) همهٔ لوزیهای ممکن‌در $A\sphericalangle$ دارای رأسی بر نیمساز $A\sphericalangle$ هستند (شکل ۲۱.۴). بزرگترین این‌لوزیها

---

1) *The Enjoyment of Mathematics* by H. Rademacher and O. Toeplitz, Princeton University Press (1957), page 34.

2) P' Bartfai   3) G. Kalman



شکل ۲۱۰۴

رأسی بر BC دارد. لذا تنها سه‌لوزی‌وجود داردکه باید بررسی شوند. فرض کنیم T مساحت مثلث و T_a مساحت لوزی $ADEF$ و $\overline{AF}=x$ باشد. دراین‌صورت

$$T_a=T-[T(CDE)+T(BEF)];$$

وچون نسبت مساحتهای دومثلث متشابه برابر است با نسبت مربعهای دوضلع متناظر، داریم

$$T_a=T\left[1-x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]$$

اما $\frac{b-x}{x}=\frac{b}{c}$؛ از این‌رو، $x=\frac{bc}{b+c}$.

بنابراین

$$T_a=T\frac{2\,bc}{(b+c)^2}\,\cdot$$

همچنین

$$T_c=T\;\frac{2ab}{(a+b)^2}\quad \text{و}\quad T_b=T\frac{2ac}{(a+c)^2}$$

حال داریم

$$T_a-T_b=\frac{2cT}{(a+c)^2(b+c)^2}(a-b)(ab-c^2),$$

$$T_b-T_c=\frac{2aT}{(b+a)^2(c+a)^2}\,(b-c)(bc-a^2),$$

و

$$T_c - T_a = \frac{2bT}{(c+b)^2(a+b)^2}(c-a)(ca-b^2)\,.$$

هرگاه $a \leqslant b \leqslant c$، آنگاه $ab \leqslant c^2$؛ و بنابراین $T_a \geqslant T_b$. همچنین $bc \geqslant a^2$؛ از این‌رو، $T_c \geqslant T_b$. لذا از T_a و T_b و T_c بزرگترینشان یا T_a و یا T_c است. T_c بزرگتر از، برابر با، یا کوچکتر از T_a است. برطبق آنکه $ac > b^2$، $ac = b^2$، یا $ac < b^2$. □

طراح این‌مسأله و نویسندهٔ راه‌حل بالا دو دانش‌آموز دبیرستانی مجارستانی بوده‌اند.

مسألهٔ ۴۰. بنابرقانون کسینوسها

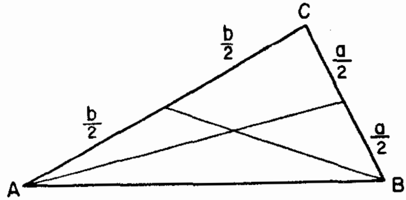
$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - ab\cos C, \quad s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab\cos C\,.$$

بنابراین،

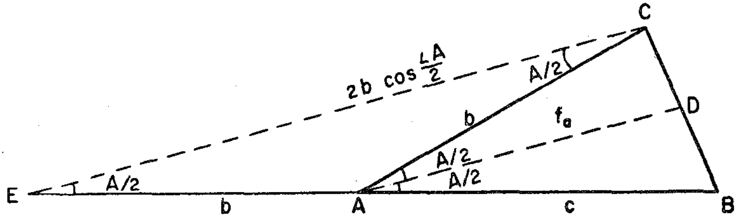
$$s_a^2 - s_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$$

(شکل ۲۲.۴ ملاحظه شود). بنابرفرض $b > a$. در نتیجه $s_a^2 > s_b^2$ یا $s_a > s_b$. مشابهاً، $s_b > s_c$.

اکنون نیمسازها را بررسی می‌کنیم (شکل ۲۳.۴ ملاحظه شود). ابتدا ضلع BA را تا نقطهٔ E امتداد می‌دهیم به‌طوری که $\overline{AE} = b$. سپس پاره‌خط EC را رسم می‌کنیم و متذکر می‌شویم که EC با AD موازی است. چون $\triangle EBC$ با $\triangle ABD$ متشابه است،



شکل ۲۲.۴



شکل ۲۳۰۴

$$\frac{2b\cos\frac{1}{2}A}{b+c}=\frac{f_a}{c}.$$

بنا بر این،

$$f_a=\frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{b+c}\text{؛ و همچنین } f_b=\frac{2ca\cos\frac{1}{2}B}{c+a}.$$

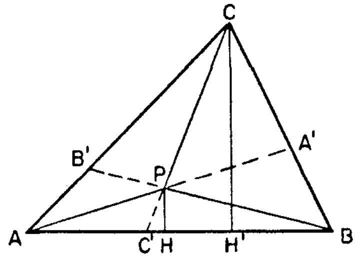
لذا

$$f_a-f_b=\frac{2c\left[\ b(c+a)\cos\frac{1}{2}A-a(b+c)\cos\frac{1}{2}B\right]}{(b+c)(c+a)}.$$

روشن است که علامت f_a-f_b باعلامت مقدار داخل کروشهٔ صورت یکی است. چون بنا بر فرض $a<b$، نتیجه‌می‌شود که $\measuredangle A<\measuredangle B$ و $\cos(A/2)>\cos(B/2)$. و چون $bc>ac$، نتیجه می گیریم که $b(c+a)>a(b+c)$. بنا بر این $f_a>f_b$. همچنین $f_b>f_c$. □

مسألهٔ ۰۴۱ راه‌حل ۱. فرض کنیم AB بزرگترین ضلع باشد؛ یعنی، $c>a$ و $c>b$. همچنین فرض کنیم PH و CH' ارتفاعهای مثلثهای APB و ABC باشند. مثلثهای متشابه $PC'H$ و $CC'H'$ را درنظر می گیریم. در این‌صورت

$$\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}=\frac{\overline{PH}}{\overline{CH'}}.$$



شکل ۲۴.۴

به‌علاوه، چون مثلثهای PAB و ABC قاعدهٔ مشترك دارند، نسبت طول ارتفاعهای آنها، PH و CH' با نسبت مساحت‌آنها برابر است. لذا

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{CH'}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}=\frac{T(PAB)}{T(ABC)}\cdot$$

اما چون AB بزرگترین ضلع $\triangle ABC$ است، $CC'<c$. بنابراین

$$\frac{\overline{PC'}}{c}<\frac{T(PAB)}{T(ABC)}\cdot$$

همچنین

$$\frac{\overline{PA'}}{c}<\frac{T(PBC)}{T(ABC)},\quad \frac{\overline{PB'}}{c}<\frac{T(PCA)}{T(ABC)}\cdot$$

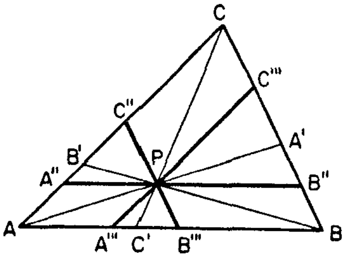
از این‌رو،

$$\overline{PA'}+\overline{PB'}+\overline{PC'}<\frac{c[T(PAB)+T(PBC)+T(PCA)]}{T(ABC)}$$

یا

$$\overline{PA'}+\overline{PB'}+\overline{PC'}<\frac{cT(ABC)}{T(ABC)}=c\cdot$$ □

راه‌حل ۲. راهنمایی: خطهای $A''B''$، $B'''C''$، و $A'''C'''$ را از P و به‌ترتیب موازی با ضلعهای AB، BC، و AC رسم کنید (شکل ۲۵.۴ ملاحظه شود). مثلثهای



شکل ۲۵.۴

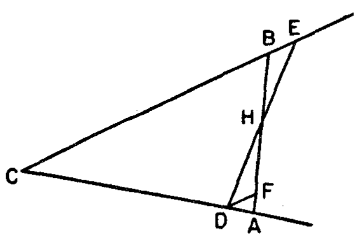
$PA''C''$، $PA'''B'''$، و $PC'''B''$ را درنظر بگیرید. نشان‌دهید $\overline{PA'}+\overline{PB'}+\overline{PC'}$ از مجموع بزرگترین ضلعهای این سه‌مثلث کوچکتر است و مجموع اخیر با طول بزرگترین ضلع $\triangle ABC$ برابر است.

مسأله‌های ۴۰ و ۴۱ را دانش‌آموزان دبیرستانی مجارستان و نیز پاول اردوش که او نیز تحصیل کردهٔ مجارستان بود مطرح کردند.

مسألهٔ ۴۳. شکل ۲۶.۴ را درنظر بگیرید. نقطهٔ H در وسط قاعدهٔ مثلثی است که مساحت آن کمترین مقدار است.

برهان. این‌مثلث را CDE می‌نامیم (شکل ۲۶.۴ ملاحظه شود). فرض کنیم ABC مثلث دیگری با این‌شرایط باشد و نقطه‌ها را چنان نام می‌گذاریم که D بین A و C قرار گیرد. DF را موازی CE رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. مثلثهای DFH و BEH قابل‌انطباق‌اند. بنابراین

$$T(CAB)=T(CDE)+T(DAF)$$



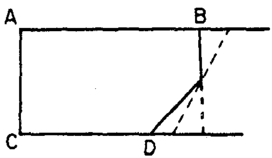
شکل ۲۶.۴

یا

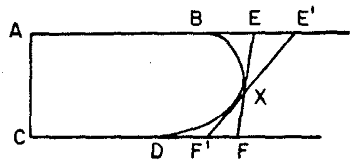
$$T(CAB)>T(CDE)\,. \quad \square$$

مسألهٔ ۴۴. راهنمایی: نقطهٔ تماس باید از AB و CD به‌یك فاصله باشد.

فرض کنیم EF مماسی باشد که نقطهٔ تماس آن از AB و CD به‌یك فاصله است. همچنین فرض کنیم $E'F'$ مماس دلخواه دیگری باشد که EF را در X قطع کند (شکل ۲۷.۴ ملاحظه شود). اگر فاصلهٔ X تا AB کمتر از فاصلهٔ آن تا CD باشد آنگاه $T(EXE')<T(FXF')$. با این‌حال، همان‌طور که شکل ۲۸.۴ نشان می‌دهد باید کمی بیشتر توضیح دهید.



شکل ۲۸.۴



شکل ۲۷.۴

مسألهٔ ۴۵. کره را به‌شعاع یك می‌گیریم. روشن است که $S_2=\pi$ و $S_3=2\pi$. برای یافتن S_4، چهار نقطه را ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌نامیم و چهار سه‌تایی متمایز ممکن از این نقطه‌ها را در نظر می‌گیریم. روشن است که درمورد هریك از این سه‌تاییها مجموع S نابزرگتر از S_3 است؛ یعنی

$$S(1,2,3)\leqslant S_3,\quad S(2,3,4)\leqslant S_3,$$
$$S(1,2,4)\leqslant S_3,\quad S(1,3,4)\leqslant S_3\,.$$

اما

$$S(1,2,3)+S(2,3,4)+S(1,2,4)+S(1,3,4)=2S(1,2,3,4)\,.$$

بنابراین

$$2S_4\leqslant 4S_3$$

یا

$$S_{۴}\leqslant ۲S_{۳}=۴\pi .$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هریک از چهارسه‌تایی متشکل از چهارنقطهٔ مفروض در وضع اکسترمال باشد، یعنی، اگر و تنها اگر چهارنقطه نسبت به‌مرکز کره متقارن باشند. مثلا، ممکن‌است هرجفت در دوسر یکی از دوقطر قرار گیرد.

می‌توان حدس زد که درحالت کلی

$$S_{۲k}=\pi k^{۲},\quad S_{۲k+۱}=\pi k(k+۱),$$

زیرا اینهامقدارهایی از Sاند که‌ازتوزیع $۲k$ یا $۲k+۱$ نقطه به‌شکل حتی‌الامکان یکنواخت درنقاط انتهایی قطرهایی ازکره و یا به‌صورت متقارن دیگری به‌دست می‌آیند. چون این مقدارهای S از یك پیکربندی نقطه‌ها به‌دست‌می‌آیند، می‌دانیم که

$$\frac{S_n}{n^{۲}}\geqslant\frac{\pi}{۴}\quad \text{یا} \quad S_n\geqslant\frac{\pi}{۴}n^{۲}$$

هرگاه‌استدلالی را که به‌وسیلهٔ آن $S_{۴}$ را از $S_{۳}$ به‌دست آوردیم برای برآورد S_n از $S_{n-۱}$ تکرار کنیم، چون n گروهٔ متمایز $n-۱$ تایی از این n نقطه وجود دارد درمی‌یابیم که

$$S_n\leqslant\frac{n}{n-۲}S_{n-۱}\quad \text{یا} \quad (n-۲)S_n\leqslant nS_{n-۱}$$

مثلا،

$$S_{۵}\leqslant\frac{۲۰}{۳}\pi .$$

بنابراین

$$S_n\leqslant\frac{n}{n-۲}\cdot\frac{n-۱}{n-۳}S_{n-۲}\leqslant\frac{n}{n-۲}\cdot\frac{n-۱}{n-۳}\cdot\frac{n-۲}{n-۴}S_{n-۳}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots ۵}{(n-۲)(n-۳)(n-۴)\cdots ۳}S_{۴}$$

یا

$$S_n \leqslant \frac{n(n-۱)}{۳} \times \pi \cdot$$

درنتیجه، به‌ازای $n = ۴, ۵, ۶, \ldots$

$$\frac{\pi}{۴} \leqslant \frac{S_n}{n^۲} \leqslant \frac{\pi}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)$$

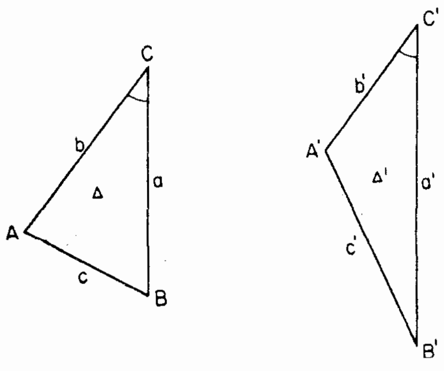
مسألهٔ ۴۶. کوتاهترین وتری که مساحت یك‌مثلث را نصف می‌کند قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویهٔ رأس آن کوچکترین زاویهٔ مثلث باشد. بزرگترین چنین وتری یك‌انتهایش رأس کوچکترین زاویهٔ مثلث است.

ابتدا قضیه‌ای را که به‌عنوان راهنمایی پیشنهاد شده است ثابت می‌کنیم.

فرض‌کنیم $\triangle$ (مثلث ABC) و $\triangle'$ (مثلث $A'B'C'$) مثلثهای مفروض با مساحت برابر و ساقهای نابرابر باشند، مثلا $a > b$، $a' > b'$. چون، بنا برفرض، $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$، برای سهولت هریك از این زاویه‌ها را می‌توانیم به C نشان دهیم. فرض‌کنیم $\triangle$ مثلثی باشد که اختلاف بین طول ضلعهایی از آن که در رأس C متقاطع‌اند کمتر است، یعنی

$$a - b < a' - b'. \qquad (۱)$$

برهان وقتی کامل می‌شود که نشان دهیم $c < c'$.



شکل ۲۹.۴

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$2T(\triangle) = ab\sin C = 2T(\triangle') = a'b'\sin C,$$

بنابراین

$$ab = a'b' \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود

$$(a-b)^2 < (a'-b')^2$$

یا

$$a^2 - 2ab + b^2 < a'^2 - 2a'b' + b'^2 .$$

با توجه به (۲)، هرگاه به‌هرطرف نابرابری اخیر $2ab$ را بیفزاییم، نتیجه می‌گیریم

$$a^2 + b^2 < a'^2 + b'^2 . \qquad (۳)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$c = \overline{AB} < c' = \overline{A'B'} .$$

بنابر قانون کسینوسها

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos C.$$

در نتیجه، به‌سبب (۲)،

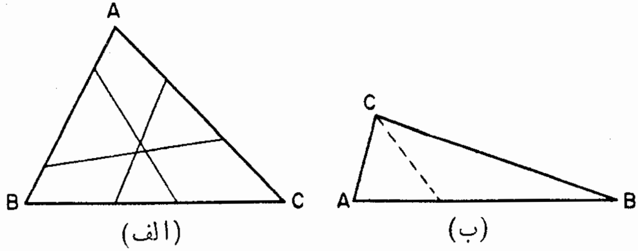
$$c'^2 - c^2 = a'^2 + b'^2 - (a^2 + b^2) .$$

از نابرابری (۳) نتیجه می‌شود که عبارت اخیر مثبت است. بنابراین

$$c'^2 > c^2 .$$

و ازاین‌رو $c' > c$، آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم. □

اکنون به‌مسألهٔ اصلی باز می‌گردیم. قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم مبین آن است که کوتاهترین وتر منصف مساحت مثلث در بین سه‌قاطعی این‌چنین که قاعده‌های مثلثهای متساوی‌الساقین هستند کوتاهترین آنهاست. شکل ۳۰.۴ (الف) ملاحظه شود. طول قاعده‌های این مثلثها را به a'، b'، و c' نشان می‌دهیم به‌طوری که قاعده‌های به‌طول a'، b'، و c' به‌ترتیب مقابل A، B و C قرار گیرند. با این



شکل ۳۰.۴

حال، ممکن است که این سه مثلث هرسه وجود نداشته باشند؛ مثلا در مثلث شکل ۳۰.۴(ب)،وتر منصف مساحتی وجود ندارد که قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی به‌رأس A باشد.

اگر $C\measuredangle$ کوچکترین زاویهٔ $\triangle ABC$ باشد، آنگاه‌چنین‌مثلث‌متساوی‌الساقینی به‌مساحت $T/۲$ که رأسش در C باشد وجود دارد. (این مثلث را $\triangle$ می‌نامیم.) حکم اخیر را اندکی بعد ثابت می‌کنیم. ابتدا، بافرض اینکه مثلث متساوی‌الساقین مطلوب $\triangle$ با قاعدهٔ به طول c' وجود دارد، متذکر می‌شویم که حتی اگر مثلثهای متساوی‌الساقین دیگری با این ویژگی وجود نداشته باشد، c' کوچکتر از طول هروتر منصف مساحت دیگری‌است. این‌ادعا را این‌طور ثابت می‌کنیم. مساحتهایی که به‌وسیلهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین ممکن به مساحت $T/۲$ از $\triangle ABC$ بریده می‌شوند عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۴}a'^{۲}\cot\frac{۱}{۲}A,\quad \frac{۱}{۴}b'^{۲}\cot\frac{۱}{۲}B,\quad \frac{۱}{۴}c'^{۲}\cot\frac{۱}{۲}C\ .$$

هرگاه $a\geqslant b\geqslant c$، آنگاه $\measuredangle A\geqslant\measuredangle B\geqslant\measuredangle C$، و

$$\cot\frac{۱}{۲}A\leqslant\cot\frac{۱}{۲}B\leqslant\cot\frac{۱}{۲}C\ .$$

چون سه‌مساحت فوق مساوی‌اند، نتیجه می‌گیریم

$$a'\geqslant b'\geqslant c'\ .$$

اما اگر، مثلاً، مثلث متساوی‌الساقین بـه مساحت $T/۲$ و بـه رأس A داخل

$\triangle ABC$ قرار نگیرد، آنگاه بنا برقضیهٔ فوق، همهٔ مثلثهای قابل قبول بـا مساحت $T/۲$ که یك رأس آنها در A است دارای قاعده‌هایی بزرگتر از a' و از این‌رو بزرگتر از c' هستند.

باقی‌می‌ماند اثبات اینکه c' وجود دارد،یعنی، همواره مثلث متساوی‌الساقینی به‌رأس C (کوچکترین زاویهٔ مثلث) وجـود دارد به‌طوری کـه قاعدهٔ آن‌یك وتر منصف مساحت باشد. فرض‌کنیم x طول هریك از دوساق مثلث متساوی‌الساقین$\triangle$ باشد کـه زاویهٔ رأس‌آن C و مساحت‌آن $T/۲$ است. اگر بتوانیم نشان دهیم که $x \leqslant b$، آنگاه‌می‌توانیم نتیجه‌بگیریم که مثلث متساوی‌الساقین مطلوب وجود دارد. زیرا نابرابری $x \leqslant a$ از نابرابری $b \leqslant a$ نتیجه‌خواهد شد و روشن‌است‌که قاعدهٔ $\triangle$ ضلعهای AC و BC را قطع می‌کند.

برای اثبات اینکه $x \leqslant b$، توجه‌کنید‌که

$$\frac{۱}{۲}T=\frac{۱}{۴}ab\sin C,\quad \frac{۱}{۲}T=\frac{۱}{۲}x^{۲}\sin C$$

بنابراین

$$x^{۲}=\frac{۱}{۲}ab\ .$$

بنابر نابرابری مثلثی،

$$a<b+c\ ;$$

و بنابر فرض،

$$c\leqslant b\ .$$

بنابراین

$$a<۲b\ ;$$

از این‌رو

$$x<b \quad \text{یا} \quad x^{۲}<\frac{۱}{۲}\times ۲b\times b=b^{۲}$$

به این‌ترتیب برهان کامل مـی‌شود. البته، در مثلث متساوی‌الساقین بـا $c=b\leqslant a$، «کوتاهترین» قاطع منصف مساحت یکتا نیست، و درمثلث متساوی‌الاضلاع سه‌قاطع با این ویژگی وجود دارد.

حالا به‌این پرسش مـی‌پردازیم: بلندترین وتر منصف مساحت کـدام است؟ قضیه‌ای که از آن برای پاسخ بـه «سؤال کـوتاهترین قاطع» استفاده کردیم نشان می‌دهد که یکی از دوانتهای بلندترین وتر منصف مساحت مثلث باید رأسی ازمثلث مفروض باشد و درنتیجه این وتر یك میانهٔ مثلث است. با محاسبه‌ای ساده (نه‌لزوماً کوتاه) می‌توان نشان داد که از سه‌حالت ممکن، بلندترین آنها میانه‌ای است که به کـوچکتریـن ضلع ختم مـی‌شود.

راهنمایی: فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه با $a \geqslant b \geqslant c$ باشد. همچنین فرض کنیم AA'، BB' و CC' وترهای منصف مساحت باشند. نشان دهید که

$$۴\overline{AA'}^{۲} = ۲c^{۲} + ۲b^{۲} - a^{۲}$$

و

$$۴\overline{CC'}^{۲} = ۲b^{۲} + ۲a^{۲} - c^{۲} ;$$

بنابراین

$$۴(\overline{CC'}^{۲} - \overline{AA'}^{۲}) = ۳(a^{۲} - c^{۲}) \geqslant ۰ ,$$

که ازآن نابرابری

$$\overline{CC'} \geqslant \overline{AA'}$$

نتیجه می‌شود. همچنین نشان دهید که $\overline{CC'} \geqslant \overline{BB'}$.

مسألهٔ ۴۷. کوتـاهترین وتر، قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است کـه هم‌رأس بـا کوچکترین زاویهٔ مثلث مفروض باشد. یکی از دوانتهای بلندترین وتر نیز درهمین رأس است.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید:

قضیه. از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ که در آنها $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ و مجموع طول ساقهای* آنها برابرند، یعنی

$$a + b = a' + b'$$

مثلثی که اختلاف بین طولهای دوساقش کمتر است قاعدهٔ کوتاهتری دارد.

برهان. با استفاده از نمادهایی که در حل مسألهٔ ۴۶ به‌کار رفت می‌خواهیم ثابت کنیم

* [می‌توان یکی از ضلعهای مثلث را قاعده و دو ضلع دیگر را ساقهای آن نامید.]

$$c' > c,$$

در حالی‌که داریم

$$a+b=a'+b' \qquad (۱)$$

$$a-b \leqslant a'-b' \,. \qquad (۲)$$

شرط (۱) با برابری

$$a'^۲+b'^۲-(a^۲+b^۲)=۲(ab-a'b')$$

هم‌ارز است و بنا برقانون کسینوسها، نتیجهٔ مطلوب $c'>c$ هم‌ارز با نابرابری

$$۲(a'b'-ab)\cos C < a'^۲+b'^۲-(a^۲+b^۲) \qquad (۳)$$

است. بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$۲(a'b'-ab)\cos C < ۲(ab-a'b') = -۲(a'b'-ab),$$

یا، هم‌ارز آن،

$$(a'b'-ab)[\cos C+۱] < ۰ \,.$$

نابرابری

$$a'b'-ab < ۰$$

از مربع کردن طرفین (۱) و (۲) و کم کردن نتیجه‌ها از یکدیگر حاصل می‌شود، ضمناً نابرابری $۱+\cos C > ۰$ هم‌ارز $\measuredangle C \neq \pi$ است که لازمهٔ وجود مثلث است. از این‌رو در واقع (۳) برقرار است، و $c'>c$. □

فهرست قضیه‌های با شماره

عنوان	صفحه

عنوان | صفحه