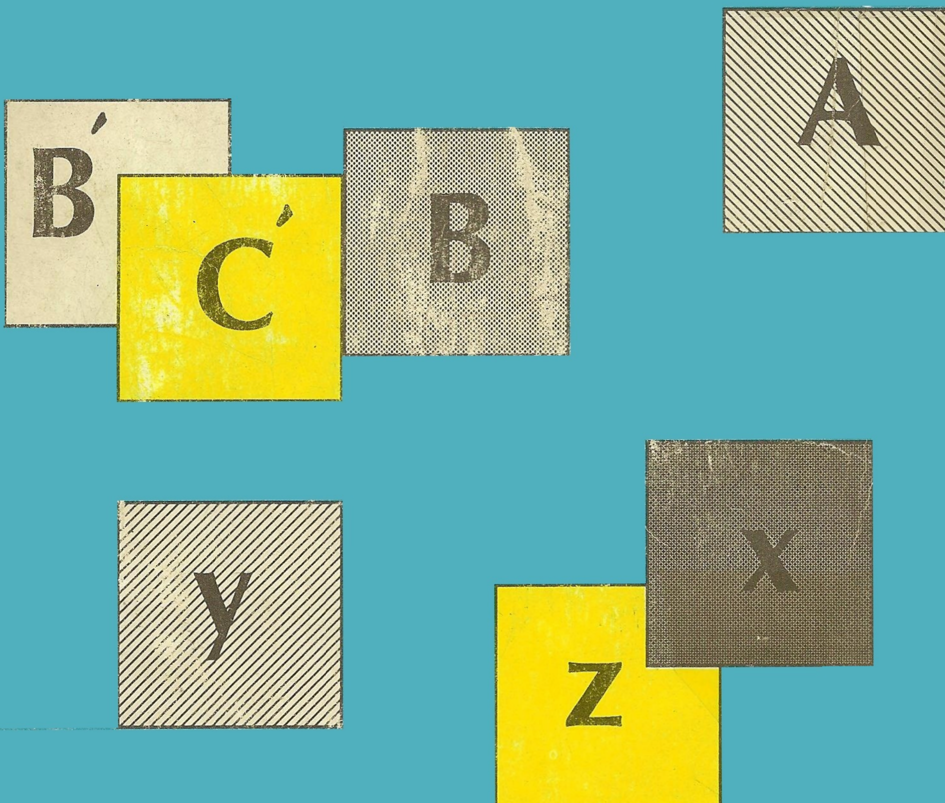
نابرابری‌ها

تألیف پرویز شهریاری



نابرابری‌ها

نوشتهٔ

پرویز شهریاری

تهران، ۱۳۷۲

انتشارات فردوس: خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ تلفن: ۳۱۲۴۵۳۳

انتشارات مجید: ده‌متری ثقفی، شمارهٔ ۲۸ تلفن: ۵۴۴۸۵۹

نابرابری ها

پرویز شهریاری

امور فنی: حسن نیک‌بخت

چاپ اول، ۱۳۷۲

چاپ: چاپخانه تابش

تیراژ: ۲۵۰۰ نسخه

فهرست

مقدمه

۱. بسیاری از مؤلفان کتاب های ریاضی، برابری را «معادله» می‌نامند و، آن وقت، تعریف می‌کنند: معادله بردوگونه است، معادلهٔ اتحادی و معادلهٔ غیراتحادی. درکتاب‌های فارسی معمول است که معادلهٔ اتحادی را اتحاد، و معادلهٔ غیراتحادی رامعادله می‌نامند (که ماهم دراین کتاب، ازهمین نام‌گذاری اخیر، استفاده کرده‌ایم).

به‌همین ترتیب، تقریباً درهمهٔ کتاب‌های بیگانه، هررابطه‌ای راکه با یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ مشخص شده باشد، «نابرابری» می‌خوانند و آن‌ها را به دو گروه «نابرابری اتحادی» و «نابرابری غیراتحادی» تقسیم می‌کنند.

دراین کتاب، همان طورکه در بیشترکتاب‌های فارسی معمول است، به جای «نابرابری اتحادی» اصطلاح «نابرابری» و به‌جای اصطلاح «نابرابری غیراتحادی»، اصطلاح «نامعادله» را به‌کار برده‌ایم.

۲. درآغاز نظر براین بودکه، دراین‌کتاب، هم ازنابرابری‌ها صحبت شود وهم از نامعادله‌ها؛ ولی به‌دلیل حجم بزرگی‌که‌کتاب به خود می‌گرفت، نامعادله‌ها به‌جلد دیگری ازکتاب موکول شد.

۳. همان طورکه روال کار من درتهیهٔ این‌گونه‌کتاب‌هاست، دراین جا هم، خیلی از مفهوم‌ها یا قضیه‌ها را ضمن حل تمرین‌ها آورده‌ام و، بنابراین، برای استفادهٔ‌کامل ازکتاب، باید به‌حل تمرین‌ها هم توجه شود.

۴. اگرضمن مرورکتاب، به‌مسأله‌ها یا قضیه‌های دشواری برخوردید،

می‌توانید، دردوراول، از آن‌ها صرف‌نظر کنید و، بعد، در دوردوم، دوباره به آن‌ها بپردازید؛ ولی درهرحال، تلاش کنید، ابتدا خودتان تمرین‌ها را حل کنید، و بعد ــ چه به‌نتیجه رسیده‌اید یا نرسیده‌اید ــ به بخش حل مراجعه و کار خود را مورد ارزیابی قرار دهید. ادعا نمی‌شودکه، راه حل‌های این کتاب برای تمرین‌ها، بهترین راه حل‌هاست و، چه‌بسا، شما بتوانید راه حل‌های زیباتری پیداکنید.

۵. کتاب را ازروی یادداشت‌های جداگانه‌ای‌که درطول سال‌ها تهیه شده بودند، آماده‌کرده‌ام و، به‌همین مناسبت، ضمن، آخرین بازدید مطالب، متوجه شدم، تعداد اندکی ازمسأله‌ها، درجاهای مختلف تکرارشده‌اند. ولی از آن جاکه، این وضع، هیچ لطمه‌ای به‌کار وارد نمی‌کرد، از حذف آن‌ها خودداری کردم.

۶. کتاب وقتی می‌تواند کامل وجامع شودکه مورد عنایت همکاران و دانش‌آموزانی قرارگیرم‌که بایادآوری‌ها خود، مرا برای چاپ‌های بعدی کتاب راهنمائی‌کنند.

مؤلف

نخستین آشنائی‌ها

۱. می‌دانیم عدد π برابراست با نسبت طول محیط دایره برطول قطر آن. ولی طول محیط دایره راچگونه باید محاسبه کرد؟ ارشمیدس، ریاضی‌دان یونانی باانتخاب ۹۶ ضلعی منتظم محاط دردایره به‌جای خود دایره، نتیجه گرفت که عدد π بین دوعدد $\frac{۲۲۳}{۷۱}$ و $\frac{۲۲}{۷}$ است، یعنی

$$\frac{۲۲۳}{۷۱} < \pi < \frac{۲۲}{۷} \Longrightarrow ۳/۱۴۰۸۳ < \pi < ۳/۱۴۲۸۵$$

و $\frac{۲۲}{۷} = ۳\frac{۱}{۷}$ را تقریب خوبی برای عدد π می‌دانست. نابرابری‌های ارشمیدس برای عدد π درست است و از آن می‌توان نتیجه گرفت که عدد π تا دو رقم بعد از ممیز برابر است با ۳/۱۴.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی همین روش را در پیش می‌گیرد و با آغاز از شش ضلعی‌های محاطی و محیطی، خود را به ۳×۲^{۲۸} ضلعی (یعنی ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی) منتظم محاطی و محیطی می‌رساند، و، در نتیجه، عدد π را تا ۱۷ رقم درست بعداز ممیز به‌دست می‌آورد. کاشانی، برای محیط دایره، واسطهٔ حسابی محیط های ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاطی و ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محیطی را درنظر می‌گیرد.

همچنین ابوالوفا بوزجانی، ریاضی‌دان دیگر ایرانی، برای محاسبهٔ

سینوس نیم درجه، با استفاده از نابرابری‌های

$$\frac{2}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{18}{32}\right)^\circ<\sin 30'<\frac{4}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$$

واسطهٔ حسابی مقدارهای دوطرف را به‌دست می‌آورد.

۴. اکنون به‌این مسأله از «حساب» توجه کنیم.

می‌خواهیم تعدادی دانش‌آموز را، برای بازدید ازشهری باستانی، با اتوبوس به‌سفر ببریم. اگر اتوبوس‌های باظرفیت ۸۰ نفـر را انتخاب‌کنیم، در یکی‌از اتوبوس‌ها چند صندلی خالی باقی‌می‌ماند. اگر ازاتوبوس‌های ۶۰ نفری استفاده‌کنیم، باید ۸ اتوبوس بیشتردرنظربگیریم، درضمن، بازهم یکی ازاتوبوس‌ها باظرفیت کامل پرنمی‌شود. ولی اگر با اضافه کـردن ۵ اتوبوس دیگر از اتوبوس‌های با ظرفیت ۵۰ نفر استفاده کنیم، همـهٔ اتوبوس‌ها پـر می‌شوند و صندلی خالی باقی نمی‌ماند، آیا می‌توانید تعداد دانش‌آموزان را پیدا کنید؟

حل مسأله دشوار نیست ولـی، ضمـن آن، ناچاریـم از نابرابری و ویژگی‌های آن استفاده‌کنیم. تعداد اتوبوس‌های ۵۰ نفـری را n می‌گیـریم ($n\in\mathbf{N}$؛ یعنی n، عددی درست ومثبت است). بنابراین، تعداد دانش‌آموزان برابر است با $50n$.

تعداد اتوبوس‌های ۶۰ نفری، ۵ واحد ازتعداداتوبوس‌های ۵۰ نفری کمتر وبرابر $(n-5)$ است. چون دراین حالت، یکی‌ازاتوبوس‌هاکاملاً پر نشده است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$60(n-5)>50n \quad \text{و} \quad 60(n-6)<50n$$

ازاین دونابرابری، به‌سادگی به دست می‌آید: $30<n<36$؛ یعنی n برابر با یکی‌از عددهای درست از ۳۱ تا ۳۵ است.

باتوجه به‌صورت مسأله، تعداد اتوبوس‌های ۸۰ نفری برابراست بـا $n-13$؛ وچون یکی‌از اتوبوس‌ها پرنمی‌شود، باید داشته باشیم:

$$80(n-13)>50n \quad , \quad 80(n-14)<50n$$

ازاین دونابرابری به دست می‌آید $\frac{۱۱۲}{۳} > n > \frac{۱۰۴}{۳}$ و یا

$$۳۴\frac{۲}{۳} < n < ۳۷\frac{۱}{۳}$$

وچون n، عددی درست است، بنابراین می‌تواند یکی‌از سه عدد ۳۵، ۳۶ یا ۳۷ باشد. ولی قبلاً دیدیم که n نمی‌تواند از ۳۵ بزرگتر باشد وتنها $n = ۳۵$ قابل‌قبول‌است. تعداد دانش‌آموزان برابر ۳۵ × ۵۰ یعنی ۱۷۵۰ نفراست.

۰۳ می‌دانیم وقتی درتابع های مثلثاتی، نامی از واحد کمان نبرند، به ـ معنای آن‌است‌که باواحد«رادیان»سروکارداریم: $tg\,۵$، یعنی‌تانژانت ۵ رادیان و $\sin\left(\cos\frac{\pi}{۳}\right)$، یعنی سینوس نیم‌رادیان (زیرا $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$، در ضمن واحد اندازه‌گیری در دایرهٔ مثلثاتی، شعاع دایره است، پس $\frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ شعاع وطول $\frac{۱}{۲}$ شعاع، وقتی برکمان دایره منتقل شود، برابر $\frac{۱}{۲}$ رادیان است). اکنون این مسأله را حل‌کنید.

کدام بزرگترند: $\cos\sin ۱$ یا $\sin\cos ۱$؟

یك رادیان برابر است با $\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه، یعنی‌کمان یك رادیان‌ازکمان ۶۰ درجه‌کوچکتر است (یك رادیان، اندکی بیشتراز ۵۷ درجه است)، پس

$$\sin ۱ < \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کسینوس، درربع اول دیرهٔ مثلثاتی نزولی است، بنابراین

$$\cos\sin ۱ > \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲} > \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\cos ۱ > \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

سینوس، در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی صعودی است، بنابراین

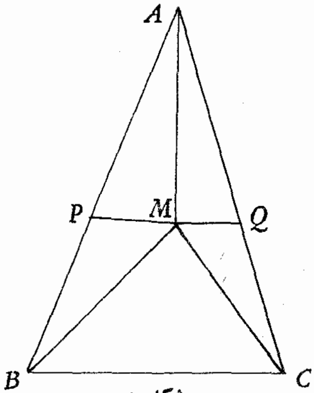
$$\sin\cos 1 < \sin\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

به‌این ترتیب باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\cos\sin 1 > \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin\cos 1 < \frac{1}{2}$$

یعنی $\cos\sin 1 > \sin\cos 1$. [درتمرین ۱۶۰۹، حالت کلی این مساله را خواهید دید.]

۴. در آغاز هندسه دیده‌ایم که، اگر نقطه‌ای در درون مثلث انتخاب و از آن‌جا به‌سه رأس مثلث وصل کنیم، مجموع طول‌های سه پاره خط راست حاصل، از مجموع طول‌های سه ضلع مثلث کوچکتر است. ولی در واقع، می‌توان حکم قوی‌تری را ثابت کرد: مجموع طول‌های سه پاره خط راست حاصل، نه‌تنها ازمجموع طول‌های سه ضلع، بلکه ازمجموع طول‌های دوضلع بزرگتر مثلث، کوچکتر است.



شکل ۱

درمثلث ABC (شکل ۱) می‌دانیم:

$$|BC| < |AC| < |AB|$$

M نقطه‌ای دردرون‌مثلث‌است. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$|MA| + |MB| + |MC| < |AB| + |AC|$$

در شکل ۱، PQ را که از M گذشته‌است، موازی با BC (ضلع کوچکتر مثلث) رسم کرده‌ایم. مثلث APQ بامثلث ABC متشابه است و بنابراین

$$|PQ| < |AQ| < |AP| \qquad (1)$$

اگر درمثلثی، ازیك رأس به‌نقطه‌ای از ضلع روبه‌رو وصل کنیم، پاره -

خط راستی که به‌دست می‌آید، نمی‌تواند ازهر دوضلعی که به‌این رأس رسیده‌اند بزرگتر باشد (چرا؟) و، دست‌کم، ازضلع بزرگتر، کوچکتراست، یعنی

$$|AM|<|AP| \qquad (۲)$$

درضمن، ازنابرابری‌های (۱) داریم:

$$|PM|+|MQ|<AQ \qquad (۳)$$

درستی دونابرابری زیرهم روشن‌اند:

$$|MC|<|MQ|+|QC| \qquad (۴)$$

$$|MB|<|BP|+|PM| \qquad (۵)$$

اکنون، از مجموع نابرابری‌های (۲) تا (۵)، بعدازساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$|MA|+|MB|+|MC|<|AB|+|AC|$$

۵. درسال ۱۳۷۱ به سرمی‌بریم (سال تألیف ایـن کتاب کوچك). در دایره‌ای به‌شعاع یك متر، ۱۳۷۱ نقطه به‌صورتی دلخواه قرارداده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم یك مثلث بارأس‌های سه‌نقطه ازاین ۱۳۷۱ نقطه وجود دارد، به‌نحوی‌که مساحت آن‌کمتراز ۱۵ سانتی‌متر مربع باشد.

محیط دایره را به ۶۸۵ بخش برابر، تقسیم وازنقطه‌های تقسیم به‌مرکز دایره وصل می‌کنیم؛ ۶۸۵ قطاع برابر به‌دست می‌آید. مساحت دایره، برابر یك متر مربع یا ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع است، بنابراین، مساحت هریك از این قطاع‌ها، برابر است با

$$۱۰۰۰۰:۶۸۵=۱۴/۵۹\ldots<۱۵ \text{ (سانتی‌مترمربع)}$$

دست‌کم یك قطاع پیدا می‌شودکه شامل سه نقطه (دردرون یـا روی مرزهای آن) باشد، زیرا اگرهیچ قطاعی شامل بیش‌از دونقطه نباشد، آن‌وقت تعدادکل‌نقطه‌ها از ۲×۶۸۵، یعنی ۱۳۷۰ تجاوزنمی‌کند، درحالی‌که تعداد نقطه‌های ما برابر ۱۳۷۱ می‌باشد. اکنون اگر سه نقطه‌ای راکه متعلق به یك قطاع هستند، راس‌های یك مثلث به‌حساب آوریم، روشن است‌که مساحت آن

از مساحت قطاع کوچکتر و، بنابراین از ۱۵ سانتی‌متر مربع کمتر می‌شود.

۶. ممکن است تصور شود که دست‌کم برای حل معادله‌ها، نیازی به‌استفادهٔ ازنابرابری نداریم. اکنون به‌این مسأله توجه کنید.

چه مقدارهایی از x، دراین معادله صدق می‌کنند:

$$\left[\frac{x-۳}{۲}\right]=\left[\frac{x-۲}{۳}\right] \qquad (۱)$$

منظور از $[a]$، بخش درست عدد a است.

شرط لازم برای‌این‌که بخش‌های درست دوعدد با هم برابر باشند، این است‌که قدرمطلق تفاضل آن‌ها، از واحدکوچکتر باشد:

$$\left|\frac{x-۳}{۲}-\frac{x-۲}{۳}\right|<۱ \qquad (۲)$$

این نامعادله به سادگی حل می‌شود و به جواب $-۱<x<۱۱$ می‌رسد. یعنی جواب‌های معادلهٔ (۱) را باید در بین عددهایی جست وجو کرد که در بازهٔ $(-۱،۱۱)$ قرار دارند.

ولی شرط (۲)، برای معادلهٔ (۱) کافی‌نیست. علاوه‌برشرط (۲)، برای برقراری معادلهٔ (۱)، باید بخش درست عددهای $\frac{x-۳}{۲}$ و $\frac{x-۲}{۳}$ یکی باشد، یعنی درفاصلهٔ بین آن‌ها، عدد درستی واقع نباشد. قدرمطلق تفاضل دو عدد ۲/۱ و ۱/۷ یادوعدد $-۴/۱$ و $-۳/۵$ از واحدکوچکتر است، در حالی‌که بخش درست آن‌ها، یکی نیست. دوحالت درنظرمی‌گیریم:

۱) $\frac{x-۲}{۳}<\frac{x-۳}{۲}$. ازاین نامعادله به‌دست می‌آید $x<۵$. با توجه به‌جواب نامعادلهٔ(۲)، باید روشن کنیم، درحالت $-۱<x<۵$ به‌ازای چه مقدارهایی از x، عدد درستی بین دوعدد $\frac{x-۳}{۲}$ و $\frac{x-۲}{۳}$ قرار می‌گیرد؟ $k\in \mathbf{Z}$ می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$\frac{x-۳}{۲}<k\leqslant\frac{x-۲}{۳}$$

که از آن، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$۳k+۲\leqslant x<۲k+۳ \qquad (۳)$$

ازنابرابری $۳k+۲<۲k+۳$ نتیجه می‌شود $k<۱$ و با در نظر گرفتن $x\in(-۱ ، ۵)$، به‌دست می‌آید: $k=۰$ یا $k=-۱$. به‌ازای‌این مقدارهای k، به‌ترتیب، از (۳) نتیجه می‌شود:

$$۲\leqslant x<۳ \quad \text{و} \quad -۱<x<۱$$

یعنی بازه‌های [۲،۳) و (۱،۱-) را باید از جواب نامعادلهٔ (۲) کنار گذاشت.

۲) $\frac{x-۳}{۲}<\frac{x-۲}{۳}$، که از آن به دست می‌آید $x>۵$. بنابراین باید روشن کنیم، درحالت $۵<x<۱۱$، به ازای چه مقدارهایی از x، عدد درستی بین دوعدد $\frac{x-۲}{۳}$ و $\frac{x-۳}{۲}$ قرار می‌گیرد! با استدلالی شبیه حالت قبل، معلوم می‌شود که‌بازه‌های [۷،۸) و (۹،۱۱] بایدازجواب نامعادلهٔ (۲)کنارگذاشته شوند.

به‌این‌ترتیب، مجموعهٔ جواب معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$[۱،۲)\cup[۳،۷)\cup[۸،۹)$$

۰۷ پی‌بردن به‌ویژگی‌های چندضلعی‌ها، نه‌تنها در خود ریاضیات، بلکه درضمن، دربسیاری ازکارهای عملی وصنعتی اهمیت دارد؛ وبسیاری از این ویژگی‌ها را با نابرابری می‌توان نشان داد. به‌این مسأله توجه‌کنید.

ثابت‌کنید، درهر چندضلعی، دست‌کم دوضلع به‌طول‌های a و b وجود دارد، به‌نحوی‌که

$$۱\leqslant\frac{a}{b}<۲$$

طول ضلع‌های n ضلعی‌را، نه به‌ردیف قرارگرفتن آن‌ها، بلکه‌به‌ردیف اندازهٔ طول‌های آن‌ها، برابر $a_۱$، $a_۲$، ....، a_n می‌گیریم:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض را براین می‌گیریم که، برای $i = 1, 2, \ldots, n-1$، داشته باشیم: $\frac{a_i}{a_{i+1}} \geqslant 2$. در این صورت خواهیم داشت:

$$a_2 \leqslant \frac{1}{2}a_1, \quad a_3 \leqslant \frac{1}{4}a_1, \quad \ldots, \quad a_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

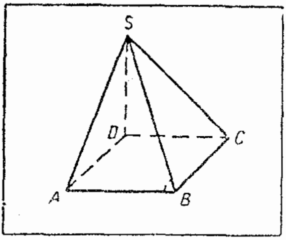
که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < a_1$$

که نمی‌تواند درست باشد (درهر چند ضلعی، طول یك ضلع، از مجموع طول‌های ضلع‌های دیگر، کوچکتر است).

۸. از ویژگی‌های نابرابری‌ها، برای حل مسأله‌های مربوط به‌ماکزیمم و می‌نیمم هم می‌توان استفاده کرد (چه درجبر وچه درهندسه). به‌این مسألهٔ هندسی توجه کنید:

درهرم $SABCD$، یال SD برصفحهٔ قاعدهٔ $ABCD$ عمود است؛ $ABCD$ یك مستطیل‌است وداریم: $|BC| = |SC| = 1$ و $\widehat{SBA} = \alpha$. به‌ازای چه مقداری از α، حجم هرم به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد؟



شکل ۲

بنابرفرض، $[SD]$ ارتفاع هرم است (شکل ۲) و همهٔ وجه‌ها، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌اند (قائم‌الزاویه‌بودن‌وجه‌های SDA و SDC واضح است؛ از طرف دیگر، چون $[SD] \perp [DC]$ و $[BC] \perp [DC]$، پس بنابرقضیهٔ سه عمود $[SC] \perp [BC]$ و به همین ترتیب $[SA] \perp [AB]$ ووجه‌های SBC و SAB قائم‌الزاویه‌اند). چون

$$|AB| = |DC| < |SC| = 1 \quad \text{و} \quad |SB| = \sqrt{2}$$

بنا بر این $\cos\alpha = |AB| : |SB| < ۱ : \sqrt{۲}$ و $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$.

حجم هرم برابر است با $V = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \cos\alpha \sqrt{۱ - ۲\cos^۲\alpha}$ (محاسبه کنید!).

به‌این‌ترتیب، برای این‌که حجم هرم به‌حداکثر مقدار خود برسد، باید $\cos\alpha \sqrt{۱ - ۲\cos^۲\alpha}$ ویا $\cos^۲\alpha(۱ - ۲\cos^۲\alpha)$ ماکزیمم شود. داریم:

$$\cos^۲\alpha(۱ - ۲\cos^۲\alpha) = -۲\left(\cos^۴\alpha - \frac{۱}{۲}\cos^۲\alpha\right) =$$

$$= -۲\left(\cos^۲\alpha - \frac{۱}{۴}\right)^۲ + \frac{۱}{۸} \leqslant \frac{۱}{۸}$$

حداکثر $\cos\alpha \sqrt{۱ - ۲\cos^۲\alpha}$ به‌ازای $\cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴}$، یعنی $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ بـه دست می‌آیدکه، دراین صورت، حجم هرم برابر $\frac{۱}{۶}$ واحد مکعب می‌شود.

مسأله را، بدون محاسبهٔ حجم‌هرم هم می‌توان حل کرد. حجم‌هرم برابر است با

$$V = \frac{۱}{۳}|BC| \cdot |DC| \cdot |SD| = \frac{۱}{۳}|DC| \cdot |SD|$$

حاصل ضرب $|DC| \cdot |SD|$ دو برابرمساحت مثلث SDC است. برای وتـر این مثلث، داریم: $|SC| = ۱$. بنا بر این، مساحت آن وقتی به‌حداکثر مقـدار خود می‌رسدکه مثلث متساوی‌الساقین باشد:

$$|SD| = |DC| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ودراین حالت به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = |AB| : |SB| = \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۹. از نابرابری‌ها، برای تعریف حد ومحاسبهٔ آن نیز می‌توان استفاده کرد. نمونه‌ای برای آن می‌آوریم:

ثابت کنید $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}\right)=۱$

مقدار درون پرانتز را A_n می‌نامیم:

$$A_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}$$

باید ثابت کنیم، مقدار A_n، با بزرگ شدن n، به واحد نزدیك می‌شود، به‌نحوی که می‌توان n راطوری پیدا کرد که تفاضل $(۱-A_n)$ ازهرعدد کوچك ودلخواه ازپیش تعیین شده‌ای، کمتر باشد. مثلاً ببینیم، n را چگونه انتخاب کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$۱-A_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$$

باتوجه به محاسبهٔ مجموع حدها درتصاعد هندسی داریم:

$$A_n=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۱}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲^{n+۱}}\,;\ ۱-A_n=\frac{۱}{۲^{n+۱}}$$

بنابراین، باید داشته باشیم: $\frac{۱}{۲^{n+۱}}<\frac{۱}{۱۰^۶}\Longrightarrow ۲^{n+۱}>۱۰^۶$

و چون $۲^{۲۰}=۱۰۲۴^۲>۱۰۰۰^۲=۱۰^۶$، بنابراین اگر $۲^{n+۱}$ از $۲^{۲۰}$ بزرگتر ویا برابر باآن باشد، به‌خودی خود از $۱۰^۶$ بزرگترمی‌شود:

$$۲^{n+۱}\geqslant ۲^{۲۰}\Longrightarrow n+۱\geqslant ۲۰\Longrightarrow n\geqslant ۱۹$$

وبه‌ازای $n=۱۹$ داریم:

$$۱-A_{۱۹}=\frac{۱}{۲^{۲۰}}=\frac{۱}{۱۰۴۸۵۷۶}<\frac{۱}{۱۰^۶}$$

□

باهمین نمونه‌ها، روشن می‌شودکه پهنهٔ کاربرد نابرابری‌ها تاچه حد

گسترده‌است. حقیقت این است که، نابرابری‌ها، درهمهٔ شاخه‌های ریاضیات و ریاضیات کاربردی (نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات، برنامه‌ریزی خطی، هندسه، نظریهٔ احتمال، معادله‌های دیفرانسیلی، نظریهٔ تابع‌ها،...) کاربردی گسترده دارد و، بنابراین، آشنایی با آن‌ها و نحوهٔ استفاده از آن‌ها، برای هرکسی که با ریاضیات کار می‌کند، ضروری است.

دراین کتاب کوچك، با اثبات مهم‌ترین نابرابری‌ها و ذکر روش حل برخی نامعادله‌ها، تکیهٔ اصلی بر حل مسأله‌هاست، زیرا درحل مسأله، در هر ـ مورد خاص، باید راه حل خاص آن‌را جست وجوکرد و، جز درمورد برخی نابرابری‌های سنتی، نمی‌توان راه حلی کلی پیداکردکه برای اثبات هر ـ نابرابری دلخواه قابل استفاده باشد. همچون دیگرکتاب‌های کوچك ریاضی دراین کتاب هم، بسیاری ازنکته‌ها واشاره‌ها، ضمن حل مسأله‌ها آمده‌است‌و، به همین جهت، به‌خواننده پیشنهاد می‌شودکه ابتدا، خود تلاش کندتا مساله‌ها را، بدون مراجعه به‌راه‌حل آنها درپایان کتاب، حل کند، ولی درهرحال، برای بازرسی راه حل خود، به‌راه حلی هم که دراین کتاب آمده است مراجعه وراه حل خود را با آن مقایسه‌کند. هیچ ادعائی نداریم، که راه حل های این کتاب بهترین وزیباترین آنها باشد وچه بسا، خواننده بتواند راه‌حل‌های زیباتری پیداکند.

ازذکرویژگیهای سادهٔ مربوط به نابرابری‌ها، که درهمهٔ کتاب‌های درسی موجودند، صرف‌نظرکرده‌ایم ودراین جا، تنها به مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱) دوطرف یك نابرابری را می‌توان درعددی مخالف صفر ضرب یا برعددی مخالف صفرتقسیم کرد، به‌شرطی‌که در حالت منفی‌بودن عدد، جهت نابرابری را تغییردهیم.

۲) اگرعددهای واقع دردوطرف علامت نابرابری، هردومثبت یاهر ـ دو منفی باشند، می‌توان دوطرف نابرابری را به‌توان‌عددی طبیعی‌رساند، به ـ شرطی‌که درحالت منفی بودن عددها وتوان‌های زوج، جهت علامت‌نابرابری را عوض‌کنیم.

درحالتی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری، یکی مثبت ودیگری

منفی باشد، نمی‌توان دوطرف را به‌توان عددی زوج رساند.

۳) ازدوطرف نابرابری می‌توان ریشهٔ فردگرفت، ولی بـرای گرفتن ریشهٔ زوج، باید عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت باشند.

۴) ازدوطرف نابرابری می‌توان لگاریتم گرفت، به‌شرطی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت ومبنای لگاریتم بزرگتراز واحـد باشد. در حالتی‌که عددهای دوطرف علامت نابرابری مثبت ومبنای لگاریتم، عـددی مثبت وکوچکتراز واحد باشد، بالگاریتم‌گرفتن ازدوطرف، جهت نابرابری عوض می‌شود.

تمرین

۰۱ کدام بزرگترند:

۱) $۱۷^{۱۴}$ یا $۳۱^{۱۱}$ ؛ ۲) $۲\sqrt{۵۰۰}$ یا $\sqrt{۵۰۱}+\sqrt{۴۹۹}$؛

۳) $\frac{۱۰^{۱۳۶۹}+۱}{۱۰^{۱۳۷۰}+۱}$ یا $\frac{۱۰^{۱۳۷۰}+۱}{۱۰^{۱۳۷۱}+۱}$؛

۴) $۲\sqrt[۳]{۵۰۰}$ یا $\sqrt[۳]{۵۰۱}+\sqrt[۳]{۴۹۹}$؛

۵) $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۶}$ یا $\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۷}$؛

۶) $\frac{۲}{۲۰۱}$ یا $\ln\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$ [$\ln a$، یعنی $log_e a$ که لگاریتم طبیعی عدد a نامیده می‌شود؛ $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\approx ۲/۷۱۸$؛ فصل اول را ببینید]؛

۷) $۲\sqrt{۱}+۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۷}+۲\sqrt{۹}$ یا
$۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۴}+۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۸}+\sqrt{۱۰}$؛

۸) $\sqrt[۷]{۱۷}$ یا $log_{۱۷}۷۱$ ؛ ۹) $tg۵۵^\circ$ یا $\frac{۷}{۵}$

۱۰) $cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}-sin\frac{۱}{۲}$ یـا $\frac{۱}{۸}$ ؛ ۱۱) $\sqrt[۸]{۸}$ یا $\sqrt[۹]{۹}$؛

۱۲) x یا $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x(\sqrt{x}-۱)}$ (باشرط $x>۱$)؛

۱۳) 99^n+100^n یا 101^n؛ ۱۴) 100^{300} یا $300!$؛

۱۵) $\frac{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\dots+a^n}$ یا

$\frac{1+b+b^2+\dots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\dots+b^n}\ (a>b>0)$؛

۱۶) $\sin\cos x$ یا $\cos\sin x$؛ ۱۷) $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}$ یا ۲؛

۱۸) $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}$ یا ۲؛

۱۹) $\alpha-\sin\alpha$ یا $\beta-\sin\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$؛

۲۰) $tg\alpha-\alpha$ یا $tg\beta-\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$؛

۲۱) $\frac{1}{\alpha}tg\alpha$ یا $\frac{1}{\beta}tg\beta\ \left(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$؛

۲۲) $\alpha-\sin\alpha$ یا $tg\alpha-\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$؟

۰۲ این عددها را به‌ردیف صعودی (از کوچکتر به بزرگتر) بنویسید:

۱) $\frac{5}{6}$، $\frac{55}{69}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{511}{655}$، $\frac{627}{727}$؛

۲) $\sin 1$، $\sin 2$، $\sin 3$، $\sin 4$، $\sin 5$، $\sin 6$، $\sin 7$؛

۳) $\sqrt[3]{43}$، $\sqrt[3]{44}$، $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}$.

۰۳ به‌کمك رقم‌های از ۰ تا ۹، پنج عدد دورقمی درست کنید، به‌نحوی که حاصل ضرب آن‌ها، حداکثر مقدارممکن باشد (ازهررقم، تنهـا یك بـار استفاده کنید).

۰۴ در بسط $(\sqrt{30}+\sqrt{4320})^{102}$، بزرگترین جمله را پیدا کنید.

۵. a، b و c طول ضلع‌های یک مثلث و p برابر نصف محیط آن است، ثابت کنید:

$$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leqslant\sqrt{3p}$$

۶. a، b و c سه عدد مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$$

۷. برای $t>1$ ثابت کنید: $\frac{t^3+1}{t-1}>2(2+\sqrt{3})$.

۸. حاصل ضرب چهار عدد مثبت a، b، c و d برابر واحد است. ثابت کنید:

$$\sum a^2+\sum ab\geqslant 10$$

۹. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با شرط‌های $a_0=a_n=0$ و

$$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n-1)$$

مفروض است. ثابت کنید، عددهای a_1، a_2، ...، a_{n-1} غیرمثبت‌اند.

۱۰. به‌شرط غیرمنفی‌بودن a و b و c، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

۱۱. با فرض $a^3+b^3=2$، ثابت کنید: $a+b\leqslant 2$.

۱۲. می‌دانیم $a>c$ و $b>d$. ثابت کنید:

$$(a+b+c+d)^2>8(ad+bc)$$

۱۳. در اردوی دانش‌آموزان، که روی هم ۱۸ نفر بودند، دو گروه تشکیل شد. در طول سه شبانه روزی که اردو برپا بود، همیشه یک نفر نگهبانی می‌داد. گروه اول، دوشبانه روز اول را نگهبانی دادند که این زمان را به‌طور برابر بین خود تقسیم کرده بودند. در گروه دوم، سه دختر بود که هر کدام تنها یک ساعت نگهبانی دادند و بقیهٔ ساعت‌های نگهبانی، به‌طور برابر، بین بقیه تقسیم شد. اگر مجموع ساعت‌های نگهبانی هر پسر از گروه دوم و هر عضو از گروه اول، از ۹ ساعت کمتر باشد، در هر گروه چند نفر بوده‌اند؟

۱۴. دردوجعبه بیش‌از ۲۹ قطعهٔ یکسان وجود دارد. اگـر ۲ عدد از قطعه‌های جعبهٔ اول را برداریم. آن‌چه می‌ماند، ازسه برابرقطعه‌های جعبهٔ دوم بیشتر است. اگر به دوبرابر قطعه‌های جعبهٔ دوم ۶۰ قطعه اضافه‌کنیم، تعـداد آن‌ها از سه‌برابر تعدادقطعه‌های جعبهٔ اول بیشتر می‌شود. درهر جعبه چند قطعه وجود دارد؟

۱۵. قدرت تولید کارخانهٔ اتومبیل سازی اول، از ۹۵۰ اتومبیـل در شبانه‌روز تجاوز نمی‌کند. قدرت کارخانهٔ دوم، ابتدا، برابر ۹۵ درصد قدرت تولید کارخانهٔ اول بود، ولی بعداز به‌راه افتادن خط تازهٔ تولیـد درکارخانهٔ دوم، قدرت تولیدآن به‌اندازهٔ ۲۳ درصد قدرت تولیدکارخانهٔ اول بیشترشد و به‌بیش‌از ۱۰۰۰ اتومبیل درشبانه روز رسید. قبل‌از بازسازی‌کارخانهٔ دوم، هریك ازکارخانه‌ها، چند اتومبیل درشبانه روز تولید می‌کرده‌اند؟ فرض بر-این‌است‌که تعداد اتومبیل‌های تولیدی هرکارخانه درشبانه‌روز، عددی‌درست است.

۱۶. سه‌آلیاژ داریم. آلیاژ اول شامل ۳۰٪ نیکل و ۷۰٪ مس، آلیاژ دوم شامل ۱۰٪ مس و ۹۰٪ منگنزوآلیاژسوم شامل ۱۵٪ نیکل، ۲۵٪ مس و ۶۰٪ منگنز است. می‌خواهیم ازاین سه‌آلیاژ، آلیاژ تـازه‌ای درست‌کنیم که شامل ۴۰٪ منگنز باشد. حداقل و حداکثر درصد مس، درآلیاژ تـازه، چقدر می‌توانند باشد؟

۱۷. می‌نیمم تابع $f(x)=x^{۲}-۲x|x-۲|$ را در بازهٔ $[۰،۳]$ و، همچنین، حداکثرمقدارتابع رادرهمین بازه پیداکنید.

۱۸. O را مرکزدایرهٔ محاطی مثلث ABC و R راشعاع دایرهٔ محیطی مثلث مـی‌گیریم. اگـر $R_{۱}$، $R_{۲}$ و $R_{۳}$، بـه ترتیب، شعاع دایره‌های محیطی مثلث‌های BOC، COA و AOB باشند، ثابت‌کنید:

$$R_{۱}^{۲}+R_{۲}^{۲}+R_{۳}^{۲}\geqslant ۳R^{۲}$$

۱۹. بخش درست هریك ازاین عددها را پیداکنید:

$$۱)\quad A=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۶}};$$

$$۲)\ B=۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}};$$

$$۳)\ C=۵۰\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}\right)$$

۲۰. کوچکترین عدد طبیعی n را پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{۳}{۱۰}<\{\sqrt{n}\}<\frac{۱}{۳}$$

[$\{x\}=x-[x]$، بخش کسری عدد x است].

۲۱. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۲n}<\frac{۳}{۴};$$

$$۲)\ ۱<\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۳n+۱}<۲;$$

$$۳)\ ۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\dots+\frac{۱}{n^۲}<۱\frac{۳}{۴};$$

$$۴)\ \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\dots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{۱۰};$$

$$۵)\ \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\dots\frac{۲n-۱}{۲n}<\frac{۱}{\sqrt{۳n+۱}};$$

$$۶)\ ۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{m}<\frac{۱}{\sqrt{m}}+\frac{۱}{\sqrt{m+۱}}+\dots+$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

m و n عددهایی طبیعی‌اند و، درضمن $m<n$.

۲۲. (مسألهٔ بنوموسی در کتاب «مساحت شکل‌هـای مسطح و کروی»).
در دایرهٔ به‌مرکز O وقطر $|AB| = ۲R$، C را نقطهٔ برخورد دایره با شعاعی می‌گیریم که برقطر AB عمود شده است. کمان BC رابه سه‌بخش برابر تقسیم می‌کنیم و نقطه‌های تقسیم را F و H می‌نامیم. وترکمان HC (یك سوم کمان BC) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد امتداد آن را با امتداد قطـر AB، D می‌نامیم. از نقطه‌های F و H، وترهای FE و HG را موازی قطر AB واز نقطهٔ O (مرکز دایره) عمود OM را بروتر HC رسم می‌کنیم. ثابت‌کنید:

۱) $|OD| = |EF| + |GH| + R$؛

۲) $|OM|^۲ < \frac{۱}{۲}|HC| \cdot |OD| < R^۲$.

۲۳. دریك چهاروجهی، طول یکی وتنها یکی‌ازیال‌ها ازواحدبزرگتر است. ثابت‌کنید، حجم چهاروجهی، از $\frac{۱}{۸}$ تجاوز نمی‌کند.

۲۴. دنبالهٔ غیرصعودی عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مفروض است. می‌دانیم

$$a_۱ + a_۲ + \dots + a_n = ۱$$

وبزرگترین جملهٔ دنباله، برابر $\frac{۱}{۲k}$ است ($k \in \mathbf{N}$). ثابت کنید، می‌تـوان k عدد متوالی‌از دنباله را طـوری انتخاب کرد که، کوچکترین آن‌ها، از نصف بزرگترین آن‌ها، بزرگتر باشد.

۲۵. بخش درست این عدد را پیداکنید:

$$A = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{۶}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

۲۶. درمجمـوع $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots + \frac{۱}{n}$، همهٔ کسرهایی را کـه در مخرج خود، رقم ۹ دارند، حذف کرده‌ایم. ثابت‌کنید مجموع کسرهای باقی‌مانده، به‌ازای هرمقدار $n \in \mathbf{N}$ از ۸۰ کوچکتراست.

۴۷. می‌دانیم

$$a_1-4a_2+3a_3\geqslant 0$$
$$a_2-4a_3+3a_4\geqslant 0$$
$$a_3-4a_4+3a_5\geqslant 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{98}-4a_{99}+3a_{100}\geqslant 0$$
$$a_{99}-4a_{100}+3a_1\geqslant 0$$
$$a_{100}-4a_1+3a_2\geqslant 0$$

به‌شرط $a_1=10$، مقدارهای a_2، a_3، ...، a_{100} راپیداکنید.

۴۸. ۱) در مثلث ABC، می‌دانیم $\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}=m$ $(m>0)$

زاویه‌های B و C را، بر حسب زاویهٔ A پیداکنید.

۲) ثابت کنید، درهر مثلث ABC، داریم:

الف) $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ ؛

ب)

$$\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin^2\frac{\hat{B}}{2}+\sin^2\frac{\hat{C}}{2}\geqslant\frac{3}{4} \quad و \quad \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}$$

۴۹. می‌دانیم $0<x<\frac{\pi}{2}$. ثابت کنید:

$$\sin x>tg x-\frac{1}{2}tg^3 x$$

۵۰. α، β و γ زاویه‌هایی حاده و مثبت به مجموع $\frac{\pi}{2}$ هستند. ثابت کنید:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\alpha+tg\beta+tg\gamma>\pi$$

فصل اول

عدد نپر

قضیهٔ ۱. ثابت کنید، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant ۲$ همیشه داریم:

$$۲<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n<۳ \qquad (۱)$$

اثبات. از آن‌جا که n عددی طبیعی است، با استفاده از قانون بسط دو جمله‌ای داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۱+n\cdot\frac{۱}{n}+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\dots=$$

$$=۲+\frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\dots>۲$$

(همهٔ جمله‌های بعد از ۲، عددهایی مثبت‌اند). نابرابری سمت چپ ثابت شد. برای اثبات نابرابری سمت راست، همان بسط دوجمله‌ای را دوباره در نظر می‌گیریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=۲+\frac{۱}{۲!}\cdot\frac{n(n-۱)}{n^۲}+\frac{۱}{۳!}\cdot\frac{n(n-۱)(n-۲)}{n^۳}+\dots$$

چون کسرهای $\frac{n(n-1)}{n^2}$، $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}$، ... از واحد کوچکترند، بنابراین:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots<3$$

به‌این‌ترتیب، برای $n>2$، می‌توان نوشت:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\leqslant n \qquad (2)$$

مسالهٔ ۰۱ در تمرین ۱۱۰۱) ثابت کردیم $\sqrt[9]{9}<\sqrt[8]{8}$. اکنون ثابت کنید، برای $n\in\mathbb{N}$ و $n\geqslant 3$، همیشه داریم: $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$.

حل. به‌ازای $n=3$ باید ثابت کنیم: $\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$ یا $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ (که‌درضمن، نشان می‌دهد، نابرابری موردنظر، برای $n=2$ برقرار نیست). اگر دوطرف این نابرابری رابه توان ۶ برسانیم، به‌نابرابری روشن $9>8$ می‌رسیم.

اکنون $n>3$ می‌گیریم. نابرابری مطلوب را می‌توان این‌طورنوشت:

$$(n+1)^n<n^{n+1}$$

اگر دوطرف آن را بر n^n تقسیم کنیم، به نابرابری $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$ می‌رسیم که، بنابر (۲) درست است.

یادداشت. $\sqrt[3]{3}$ از واحد بزرگتر است و، درضمن، دنبالهٔ عددهای

$$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ \ldots$$

دنباله‌ای نزولی است و اگر توجه کنیم که: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$، آن وقت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\frac{n-1}{n}}}=1$$

مسألهٔ ۲. ثابت‌کنید، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n>1$، معادلهٔ $x^n=x+n$، یك ریشه و تنها یك ریشه دربازهٔ $[1, 2]$ دارد وتحقیق‌کنید، دنبالهٔ این‌ریشه‌ها، وقتی n دنبالهٔ عددهای طبیعی را بپیماید، دنباله‌ای نزولی است و به‌سمت واحد میل می‌کند.

حل. فرض می‌کنیم $f_n(x)=x^n-x-n$ $(n=2, 3, 4, \ldots)$. داریم:

$$x^n-x=x(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+1)$$

یعنی، هر تابع $f_n(x)$، به‌ازای $x>1$ صعودی است [می‌توانستیم با استفاده‌ازمشتق‌تابع $f_n(x)$، یعنی $f_n'(x)=nx^{n-1}-1$، قانع‌شویم که برای $x>1$: $f_n'(x)>0$ و درنتیجه $f_n(x)$ صعودی است]. درضمن داریم:

$$f_n(2)=2(2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1)-n\geqslant 0;$$

$$f_n(1)=-n<0$$

[به یاری استقرای ریاضی هم، می‌توان به سادگی ثابت کرد $2^n\geqslant n+2$ برای $n>1$]. به این ترتیب، معادلهٔ $f_n(x)=0$ دربازهٔ $[1, 2]$ تنها یك ریشه دارد، این ریشه را x_n می‌نامیم.

برای بخش دوم مساله، ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n}\qquad(n>2)\qquad(3)$$

روشن است که $\sqrt[n]{n}>1$، $\sqrt[n]{n-1}>1$، یعنی $1-\sqrt[n]{n+1}<0$. ازطرف دیگر

$$f_n(\sqrt[n]{n+1})=(n+1)-\sqrt[n]{n+1}-n=1-\sqrt[n]{n+1}<0$$

نابرابری سمت چپ (۳) ثابت شد (زیرا تابع $f_n(x)$ در بازهٔ $[1, 2]$ صعودی است و، بنابراین، وقتی $f_n(\sqrt[n]{n+1})<f_n(x_n)$، آن وقت

$\sqrt[n]{n+1}<x_n$).

برای اثبات نابرابری سمت راست (۳)، ابتدا نابرابری (۲) را در نظر می‌گیریم:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<n-1, \quad (n\geqslant 3)$$

این نابرابری را، به‌ترتیب، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{n}{n-1}<\sqrt[n-1]{n-1}\Leftrightarrow(n-1)\sqrt[n-1]{n-1}-n>0$$

و به‌طور طبیعی $(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n>0$. ازطرف دیگر داریم:

$$f(\sqrt[n-1]{n})=\sqrt[n-1]{n^n}-\sqrt[n-1]{n}-n=(n-1)\sqrt[n-1]{n}-n>0$$

بنابراین $x_n<\sqrt[n-1]{n}$. نابرابری سمت راست (۳) هم ثابت شد. به این ترتیب، باتوجه به (۳) می‌توان نوشت:

$$\dots<\sqrt[n+1]{n+2}<x_{n+1}<\sqrt[n]{n+1}<x_n<\sqrt[n-1]{n}<\dots$$

یعنی، دنباله ریشه‌های x_n، دنباله‌ای نزولی است و چون (یادداشت مسألهٔ ۱ را ببینید)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-1]{n}=1$$

پس $\lim_{n\to\infty}x_n=1$. درضمن، چون $x_2=2$، بنابراین نتیجه می‌گیریم که x_n از $x=2$ (به‌ازای $n=2$) آغاز می‌کند و به‌تدریج، با بزرگ شدن n، به‌سمت واحد میل می‌کند.

□

قضیهٔ ۲. ثابت‌کنید، دنبالهٔ عددهای $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، دنباله‌ای صعودی

است، یعنی

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \qquad (4)$$

اثبات. بسط هریك از دوجمله‌ای‌ها را، به‌این صورت درمی‌آوریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=2+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^{3}}+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^{n}}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

به‌همین ترتیب

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

اگر جمله‌های نتیجهٔ این دو بسط را باهم مقایسه‌کنیم، روشن می‌شود که

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

به‌این‌ترتیب

$$(۱+۱)^{۱}<\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}<\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)^{۳}<\cdots<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<\cdots<۳$$

روشن است که، این قضیه را، می‌توان به‌صورت کلی‌تری بیان کرد:

اگر m و n دوعدد طبیعی و $m>n$، آن وقت

$$\left(۱+\frac{۱}{m}\right)^{m}>\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$$

یادداشت. با روشی مشابه، می‌توان ثابت کرد که، دنبالهٔ عددهای $\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{n}$ هم، وقتی n عددهای طبیعی $n>۱$ را می‌پیماید، دنباله‌ای صعودی است، یعنی

$$\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}>\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{n} \qquad (۵)$$

قضیهٔ ۳. ثابت‌کنید، دنبالهٔ عددهای $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$، دنباله‌ای نزولی است، یعنی با بزرگ شدن n، کوچک می‌شود:

$$\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۲}<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} \qquad (۶)$$

اثبات. به ترتیب داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}=\left(\frac{n+۱}{n}\right)^{n+۱}=\frac{۱}{\left(\frac{n}{n+۱}\right)^{n+۱}}=\frac{۱}{\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}}$$

عددهای $\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}$، دنباله‌ای صعودی را تشکیل می‌دهند (یادداشت قضیهٔ ۲ را ببینید)، بنابراین، عکس این عددها، دنباله‌ای نزولی را خواهند ساخت.

اثبات این قضیه را، به‌طریق دیگری هم می‌توان داد. نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n-1)^{n}}{n^{2n+1}}=$$

$$=\frac{(n+1)^{n}(n-1)^{n}(n+1)}{n^{2n+1}}=\left(\frac{n^{2}-1}{n^{2}}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

برای عامل اول این نتیجه داریم:

$$\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)^{n}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n^{3}}-\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^{3}}+$$

$$+\cdots\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3}}+\cdots$$

درضمن روشن است که

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{4}}<1$$

به‌این‌ترتیب $\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$، یعنی $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}<1$

و

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

این قضیه راهم، می‌توان به‌صورت کلی‌تری بیان کرد:

به شرط طبیعی بودن عددهای m و n و $m>n\geqslant 2$، همیشه داریم:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

□

درقضیهٔ (۱) ثابت‌کردیم:

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3\quad,\quad n>1$$

درضمن، روشن شدکه دنبالهٔ عددهای

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}, \left(۱+\frac{۱}{۳}\right)^{۳}, \left(۱+\frac{۱}{۴}\right)^{۴}, \ldots, \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}, \ldots \qquad (۷)$$

دنباله‌ای صعودی است. بنابراین $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$ دارای حدی است که بین ۲ و ۳ قراردارد. این‌حد را، که به عدد نپر معروف‌است باحرف e نشان می‌دهند:

$$e=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}$$

درضمن $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n} < e < ۳$.

همچنین، باتوجه به‌نابرابری (۶)، دنبالهٔ عددهای

$$\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۳}, \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۴}, \left(۱+\frac{۱}{۴}\right)^{۵}, \ldots, \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}, \ldots \qquad (۸)$$

دنباله‌ای نزولی است و، در ضمن، هرجملهٔ دنبالهٔ (۸)، بابزرگ شدن n، به‌سمت جملهٔ نظیرخود در دنبالهٔ (۷) میل می‌کند. یعنی دنبالهٔ (۸) هم به سمت همان عدد e میل می‌کند. درواقع

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)=e\cdot۱=e$$

در ضمن $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱} > e$. مثلاً ازآن‌جاکه

$$\left(۱+\frac{۱}{۵}\right)^{۵}=۲/۴۸۸۳۲ \quad \text{و} \quad \left(۱+\frac{۱}{۵}\right)^{۶}=۲/۹۸۸۹۸۴$$

بنابراین $۲/۴۸۸۳۲ < e < ۲/۹۸۸۹۸۴$.

e، عددی است گنگ وغیرجبری، یعنی نمی‌تواند ریشهٔ معادله‌ای با ضریب‌های گویا باشد. این‌عدد، که به‌تقریب برابراست با $e\approx ۲/۷۱۸۲۸۱۸$، نقشی بسیار اساسی در ریاضیات دارد. مثلاً مبنای لگاریتم طبیعی عددها، همین عدد e است که با نماد ln نشان داده می‌شود: $\ln x=\log_e x$.

$f(x)=e^x$، تنها تابعی‌است که مشتقی برابر خود دارد: $f'(x)=e^x$.
عدد e را، می‌توان ازمجموع

$$e=۲+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}+\cdots \qquad (۹)$$

به‌دست‌آورد، درضمن

$$\ln ۲=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\cdots \qquad (۱۰)$$

جواب مثبت هریك‌ازدومعادلهٔ درجه دوم زیر، مقدارتقریبی عدد e رامی‌دهد:

$$۲۷x^۲-۵۵x-۵۰=۰, \quad (x\approx ۲/۷۱۸۲۹)$$

$$۳۵x^۲-۸۳x-۳۳=۰, \quad (x\approx ۲/۷۱۸۲۸۵۲)$$

جون رنج و دانیل شکس، درسال ۱۹۶۱ و به‌کمك کامپیوتر، توانستند مقدار عدد e را تا ۱۰۰ هزار رقم به‌دست‌آورند.

تمرین

۳۱. ثابت کنید: الف) $\left(\frac{n}{۳}\right)^n<n!<\left(\frac{n}{۲}\right)^n$ به‌شرط $n\geqslant ۶$؛

ب) $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ به‌شرط $n>۶$.

۳۲. کدام بزرگترند:

۱) $(۱/۰۰۰۰۰۱)^{۱۰۰۰۰۰۰}$ یا ۲؛ ۲) $۱۰۰۰^{۱۰۰۰}$ یا $۱۰۰۱^{۹۹۹}$؛

۳) $۹۹۷^{۹۹۹}$ یا $۹۹۹^{۹۹۷}$؟

۳۳. ثابت کنید $\left(۲-\frac{۱}{n}\right)^n\geqslant n$.

۳۴. ثابت کنید اگرداشته باشیم:

$$f(x)=\sqrt[n]{(x+۱)(x-۲)\cdots(x+n)}$$

(بین دو جملهٔ هرپرانتز زیررادیکال که درردیف فرد قرار دارد، علامت منفی

را در نظر بگیرید)، که در آن، n عددی است فرد، آن‌وقت $|f'(0)|>\frac{12}{55}$.

۳۵. آیا می‌توان از برابری تقریبی $\sin\alpha^\circ \approx \frac{n\alpha}{180}$، برای تشکیل جدول سه‌رقمی مقدار سینوس زاویه‌ها، تا ۱۰ درجه استفاده کرد؟

۳۶. کدام بزرگترند:

الف) e^π یا π^e؛ ب) a^b یا b^a ($a>1$ و $b>1$)؟

۳۷. n عددی است طبیعی؛ ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\leqslant 2\sqrt[n]{n}$$

۳۸. برای هر عدد حقیقی x_1، دنبالهٔ عددهای

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

با شرط $x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$ ($n>1$)، تشکیل داده‌ایم. ثابت کنید، تنها یک مقدار، x_1 وجود دارد که، به‌ازای آن، برای هر n داشته باشیم:

$$0<x_n<x_{n+1}<1$$

۳۹. a و b عددهایی مثبت‌اند، ثابت کنید:

$$(a+b)^2(a^2+b^2)^2(a^3+b^3)^2\ldots(a^n+b^n)^2\geqslant(a^{n+1}+b^{n+1})^n$$

۴۰. کدام بزرگترند:

الف) $A=\frac{2/00000000004}{(1/00000000004)^2+2/00000000004}$ یا

$B=\frac{2/000000000002}{(1/000000000002)^2+2/000000000002}$؛

ب) $B_1=\frac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ یا

$A_1=\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\ldots+a^n}$، باشرط $a>b>0$؟

۴۱. برای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant ۲$، ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>\frac{3n}{2n+1}$.

۴۲. با شرط $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید (نابرابری هیوگنس):

$$2\sin\alpha+tg\alpha>3\alpha$$

۴۳. طول ضلع‌های یك چهارضلعی را a، b، c و d می‌نامیم. ثابت کنید، در هر حال داریم:

$$a^2+b^2+c^2>\frac{1}{3}d^2$$

۴۴. ثابت کنید، به‌شرط $\hat{C}\geqslant 90°$، درمثلث ABC داریم:

$$|CD|+|AB|>|AC|+|BC|$$

D، پای ارتفاع وارد از راس C برقاعدهٔ AB است.

۴۵. برای عددهای مثبت α، β، a و b، می‌دانیم:

$$\alpha<\beta،\ \ \alpha+\beta<\pi،\ \ a+b<\pi،\ \ \frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ثابت کنید: $a<b$.

۴۶. یال‌های دو به‌دو متنافر یك چهاروجهی، به‌ترتیب دارای طول‌های a، a_1 و b، b_1 و c، c_1 هستند. درضمن می‌دانیم ازمجموع‌های $a^2+a_1^2$، $b^2+b_1^2$ و $c^2+c_1^2$، مجموع $c^2+c_1^2$ ازدومجموع دیگر بزرگتراست. ثابت کنید:

$$a^2+a_1^2+b^2+b_1^2>c^2+c_1^2$$

۴۷. این دستگاه دومعادلهٔ دو مجهولی راحل کنید.

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=xy،\ \ x^\alpha+y^\alpha=8(xy)^{\frac{\alpha-3}{2}}\ ,\ (\alpha\in\mathbf{R})$$

۴۸. a و b و c، عددهایی مثبت وحقیقی‌اند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}$$

۴۹. ثابت کنید، درهرچهارضلعی محدب، مجموع طول‌های دوقطر از

محیط چهارضلعی کوچکتر و از نصف محیط آن بزرگتر است.

۵۰. به‌شرط $a+b>2$، ثابت کنید $a^4+b^4>2$.

۵۱. a و b و c طول‌های سه ضلع یك مثلث‌اند. ثابت کنید، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n\geqslant 2$، عددهای $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ هم می‌توانند طول‌های سه ضلع یك مثلث باشند.

۵۲. O نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث ABC و p نصف محیط مثلث است. ثابت کنید:

$$|OA|\cdot\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}+|OB|\cdot\cos\frac{\widehat{CBA}}{2}+|OC|\cdot\cos\frac{\widehat{ACB}}{2}\geqslant p$$

علامت برابری، درچه حالتی پیش می‌آید؟

۵۳. به‌شرط $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{n(n+1)}<\frac{1}{2}$.

۵۴. نقطه‌های C_1، A_1، B_1 را، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC، CA ازمثلث ABC انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$|AC_1|:|C_1B|=|BA_1|:|A_1C|=|CB_1|:|B_1A|=1:3$$

اگر P محیط مثلث ABC و p محیط مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}P<p<\frac{3}{4}P$$

۵۵. x و y عددهایی مثبت‌اند ودرمعادلهٔ $x^3+y^3=x-y$ صدق می‌کنند. ثابت کنید: $x^2+y^2<1$.

۵۶. دربارهٔ عددهای a و b می‌دانیم که‌نامعادلهٔ

$$a\cos x+b\cos 3x>1$$

جواب ندارد، ثابت کنید: $|b|\leqslant 1$.

۵۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} tg x_1 + 3 cotg x_1 = 2 tg x_2 \\ tg x_2 + 3 cotg x_2 = 2 tg x_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ tg x_{n-1} + 3 cotg x_{n-1} = 2 tg x_n \\ tg x_n + 3 cotg x_n = 2 tg x_1 \end{cases}$$

۵۸. ثابت کنید: $\int_0^1 \frac{x}{\cos x} dx < \ln 2$.

۵۹. دایره‌ای به‌شعاع R مفروض‌است. محیط n ضلعی منتظم محاط در این دایره را p_n و محیط n ضلعی منتظم محیط بـر آن را P_n می‌نامیم. ثابت کنید: $\frac{1}{2}(p_n + P_n) > 2\pi R$؛ یعنی واسطهٔ عددی محیطهای n ضلعی‌هـای منتظم محاطی و محیطی، ازمحیط دایره بزرگتراست.

۶۰. تحقیق‌کنید $e^6 > \pi^4 + \pi^5$. بزرگترین عدد طبیعی n را پیداکنید که درنابرابری $e^6 - \pi^4 - \pi^5 < 10^{-n}$. صـدق کند. (منظورتحقیق به‌کمك ماشین حساب است، ولی ماشین حسابی رادرنظر بگیریدکه تنها ۸ رقم عدد رامی‌تواند نشان دهد. دراین‌ماشین‌حساب، عدد π به‌صورت ۳/۱۴۱۵۹۲۶ وعدد e به‌صورت ۲/۷۱۸۲۸۱۸، یعنی‌تا ۷ رقم بعدازممیزوباتقریب‌نقصانی نشان داده می‌شود.)

فصل دوم

نابرابری‌های مربوط به‌واسطه‌ها

§۱. واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی، واسطهٔ توافقی وواسطهٔ مربعی دوعدد

قضیهٔ ۱. برای دوعدد مثبت a و b، واسطهٔ حسابی ازواسطهٔ هندسی کوچکتر نیست یعنی

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab} \qquad (۱)$$

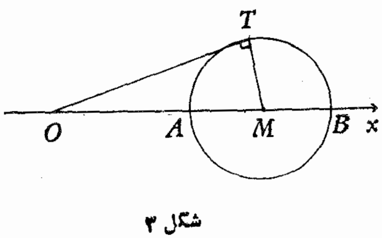
درضمن، حالت برابری، تنها برای $a=b$ پیش می‌آید.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. نابرابری به سادگی بـه نابرابری روشن

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geqslant ۰$$

منجر می‌شود که در حالت $a=b$، بایك برابری سروکارخواهیم داشت.

این نابرابری را به سادگی می‌توان تعبیر هندسی کرد. روی نیم‌خط Ox (شکل ۳) فرض می‌کنیم:



شکل ۳

$|OA|=a$ و $|OB|=b$. روشن است که اگر M را وسط دونقطهٔ A و B بگیریم، داریم:

$$|OM|=\frac{|OA|+|OB|}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$

دایرهٔ به‌قطر AB رادرنظرمی‌گیریم OT را بر آن مماس می‌کنیم (T، نقطهٔ تماس‌است) داریم:

$$|OT|^{۲}=|OA|\cdot|OB|=ab \Longrightarrow |OT|=\sqrt{ab}$$

به‌این‌ترتیب، طول پاره خط راست OM برابر واسطهٔ حسابی دو عدد a و b و طول پاره خط راست OT برابر واسطهٔ هندسی این دوعدد است و روشن است‌که $|OM|\geqslant|OT|$) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT، OM وتر و OT یکی‌از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ است). حالت برابری، مربوط به زمانی است‌که A و B برهم، منطبق باشندکه، دراین صورت نقطه‌های M و T هم بر آن‌ها منطبق می‌شوند.

نتیجه ۱. برای هرعدد حقیقی $x>۰$، مجموع $x+\frac{۱}{x}$ همیشه از ۲ بزرگتر و یا با ۲ برابر است.

درواقع، بنابرنابرابری (۱) داریم:

$$x+\frac{۱}{x}\geqslant ۲\sqrt{x\cdot\frac{۱}{x}}=۲$$

حالت برابری، برای $x=\frac{۱}{x}$، یعنی $x=۱$ است.

یادداشت. درحالت $x<۰$ به‌دست‌می‌آید: $x+\frac{۱}{x}\leqslant -۲$ و،بنابراین، نتیجه ۱ را می‌توان به‌این صورت بیان‌کرد: مجموع هرعدد حقیقی با عکس خود، ازلحاظ قدرمطلق، از ۲ کوچکتر نیست: $\left|x+\frac{۱}{x}\right|\geqslant ۲$.

نتیجهٔ ۲. اگرمجموع دوعدد مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصلضرب آن‌ها، وقتی به حداکثر خود می‌رسدکه این دوعدد با هم برابر باشند.

برای دو عدد مثبت x و y فرض می‌کنیم: $x+y=a$ (a، مقداری است‌ثابت). دراین صورت، بنابرنابرابری (۱) داریم:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{۲} = \frac{a}{۲} \Longrightarrow xy \leqslant \frac{a^۲}{۴}$$

حداکثر مقدار xy برابر با $\frac{a^۲}{۴}$ است و به‌ازای $x=y$ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۴. (*تعمیم نتیجهٔ۱*). اگر دوعدد مثبت، حاصل‌ضرب ثابتی‌داشته باشند، مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه این دو عدد با هم برابر باشند.

برای دوعدد مثبت x و y فرض می‌کنیم $xy=p$. دراین صورت، بنا بر (۱)

$$\frac{x+y}{۲} \geqslant \sqrt{xy} = \sqrt{p} \Longrightarrow x+y \geqslant ۲\sqrt{p}$$

حداقل‌مقدار $x+y$ برابراست با $۲\sqrt{p}$ ووقتی به دست می‌آیدکه داشته باشیم $x=y$.

مسأله ۱. ثابت‌کنید، برای هر $a>۱$ داریم

$$\log a + \log_a ۱۰ \geqslant ۲$$

($\log a$ یعنی $\log_{۱۰} a$).

حل. می‌دانیم $\log_B A \cdot \log_A B = ۱$. بنابراین $\log_a ۱۰ = \frac{۱}{\log_a}$ و

$$\log a + \log_a ۱۰ = \log a + \frac{۱}{\log a} \geqslant ۲$$

حالت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $a=۱۰$.

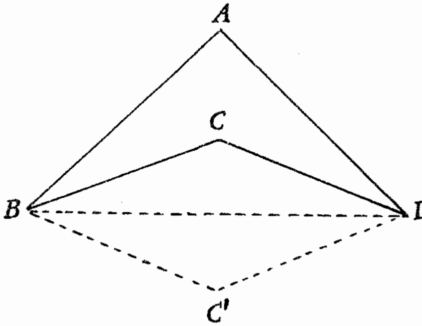
مسأله ۲. قطعه زمینی مستطیل شکل بامحیط برابر $۲p$ طوری انتخاب کنیدکه مساحت آن، حداکثر مقدارممکن باشد.

حل. طول و عرض زمین را a و b می‌گیریم، باید داشته باشیم: $a+b=p$ وبنا برنابرابری (۱) داریم:

$$S = ab = (\sqrt{ab})^۲ \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ = \frac{p^۲}{۴}$$

حداکثر مساحت زمین برابر $\frac{p^2}{4}$ است ووقتی به‌این مساحت می‌رسد که داشته باشیم $a=b=\frac{p}{2}$. یعنی زمین را مربعی انتخاب کنیم.

یادداشت. مسأله را می‌توان به‌صورتی کلی‌تر طرح وحل کرد: ازبین چهارضلعی‌های بامحیط برابر $2p$، مساحت کدامیك حداکثرمقدارممکن‌است؟



شکل ۴

روشن است که چهار ضلعی باید محدب باشد، زیرا برای چهار-ضلعی‌مقعر $ABCD$ می‌توان (باپیدا کردن قرینهٔ خط شکستهٔ BCD نسبت به خط راست BD) چهار-ضلعی محدب $ABC'D$ را باهمان محیط پیدا کرد که مساحتی بزرگتر داشته باشد.

درچهارضلعی محدب $ABCD$ فرض می‌کنیم:

$$|AB|=a,\ |BC|=b,\ |CD|=c,\ |DA|=d,\ S_{ABCD}=S$$

روشن است که

$$2S=ab\sin\hat{B}+cd\sin\hat{D}\leqslant ab+cd,$$

$$2S=ad\sin\hat{A}+bc\sin\hat{C}\leqslant ad+bc$$

علامت‌های برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$$

ازمجموع این دونابرابری به‌دست می‌آید:

$$4S\leqslant ab+cd+ad+bc=(a+c)(b+d)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{(a+b)+(b+d)}{2}\right]^2=p^2$$

یعنی $S\leqslant\frac{p^2}{4}$ و حالت برابری وقتی پیش می‌آید که در مستطیل $ABCD$

داشته باشیم $a+c=b+d$، یعنی وقتی که مربع باشد.

مسألهٔ ۳. a و b عددهایی مثبت‌اند، حداقل $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ چقدر است؟

حل. بنابر نابرابری (۱) داریم:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

که ازضرب آن‌ها دریکدیگر به‌دست می‌آید: $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$؛ در ضمن، به‌این حداکثر درحالت $a=b$ می‌رسیم.

مسألهٔ ۴. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

($\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ را واسطهٔ توافقی درعدد a و b گویند).

حل. نابرابری مفروض به‌سادگی به‌این صورت در می‌آید: $\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \geqslant 1$. که درستی آن روشن است (درسمت راست نابرابری، بنابر (۱)، صورت ازمخرج بزرگتر نیست).

به‌این ترتیب، برای واسطهٔ‌حسابی، واسطهٔ هندسی وواسطهٔ توافقی دو عدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (2)$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$. ($\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ را

واسطهٔ مربعی دوعدد a و b گویند).

حل. اگر دوطرف نابرابری مفروض را مجذور کنیم و همه جمله‌ها را به‌سمت چپ نابرابری بیاوریم، به‌سادگی به‌نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{4}(a-b)^2 \geqslant 0$$

به‌این ترتیب، برای هردوعدد مثبت a و b، همیشه داریم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (3)$$

که برای $a=b$، همهٔ نابرابری‌ها، به‌برابری تبدیل می‌شوند.

مسألهٔ ۶. ابتدا ثابت کنید، برای‌عددهای مثبت a_1، a_2، b_1، b_2 داریم

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \qquad (4)$$

سپس، بااستفاده ازنابرابری (۴)، از بین مثلث‌های باقاعدهٔ مشترك AB که ارتفاعی برابر h داشته باشند، آن را پیداکنیدکه محیط آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

حل. اگر دوطرف نابرابری (۴) را مجذورکنیم، بعدازساده‌کردن به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} \geqslant a_1a_2+b_1b_2$$

دوباره دوطرف نابرابری را مجذور می‌کنیم، پس‌ازساده‌کردن، به نابرابری روشن زیرمی‌رسیم:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 \geqslant 0$$

علامت برابری وقتی به‌دست می‌آیدکه $a_1b_2=a_2b_1$ یا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

اکنون به حل مسألهٔ هندسی می‌پردازیم. پای ارتفاع وارد از رأس C برقاعدهٔ AB را H می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $|AB|=c$، $|CH|=h$، $|AH|=x$ و $BH=y$. باتوجه به نابرابری (۴) می‌توان نوشت:

$$|CA|+|CB|=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{(x+y)^2+4h^2}=\sqrt{c^2+4h^2}$$

یعنی حداقل محیط برابر $c+\sqrt{c^2+4h^2}$ است ووقتی به‌دست می آیدکه داشته باشیم $y=x$، یعنی وقتی‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد.

مسألهٔ ۷. ثابت‌کنید:

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2 \qquad (5)$$

حل. با بازکردن پرانتزها، به‌نابرابری روشن زیرمی‌رسیم:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$$

دراین‌جا هم، حالت برابری وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

§۲. نابرابری کوشی

درنابرابری (۱) بند قبل دیدیم $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$، یعنی‌واسطهٔ حسابی دوعدد مثبت، ازواسطهٔ هندسی آن‌هاکوچکتر نیست. این حکم برای n عدد مثبت هم درست است، یعنی اگر برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n فرض‌کنیم:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},\quad G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

آن وقت $A_n\geqslant G_n$ و درحالت $a_1=a_2=\dots=a_n$ به دست می‌آید $A_n=G_n$.

نابرابری $A_n\geqslant G_n$ (که نابرابری کوشی نامیده می‌شود)، یکی از مهم‌ترین نابرابری‌هاست ودراغلب شاخه‌های ریاضی کاربرد دارد. دراین‌جا روش‌های‌گوناگونی رابرای اثبات این‌نابرابری می‌آوریم واین، بیشتر بدان جهت است‌که خواننده، باشیوه‌های مختلف اثبات نابرابری‌ها آشنا شود. علاوه‌براین، دربخش‌های بعدی (ومثلاً در بخش کاربرد مشتق برای اثبات نابرابری‌ها) هم، باروش‌های اثبات دیگری آشنا خواهیم شد.

اثبات اول (بر اساس یک منطق ساده). ابتدا یک حقیقت ساده را ثابت می‌کنیم: اگر مجموع دوعدد مثبت، مقداری ثابتی باشد، هرچه دوعدد به هم نزدیکتر باشند، حاصل ضرب آن‌ها بزرگتر است.

این قضیه، درواقع، تعمیمی از نتیجهٔ ۲ بند قبل واثبات دیگری برای آن است.

a و b را دو عدد مثبت و $a<b$ می‌گیریم. اگر فرض کنیم $0<\varepsilon<b-a$، آن وقت

$$(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)=ab+\varepsilon(b-a-\varepsilon)>ab$$

دوعدد a و b راطوری تغییر دادیم که، بدون تغییر مجموع آن‌ها، به‌هم نزدیکتر شوند، دراین صورت، حاصل ضرب آن‌ها بزرگتر شد.

اکنون ثابت می‌کنیم (a_1، a_2، ...، $a_n>0$):

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G_n \qquad (6)$$

اگر همهٔ عددهای a_i باهم برابر باشند، به سادگی به دست می‌آید $A_n=G_n$. بنابراین فرض می‌کنیم، بین این عددها، عددهای نابرابر وجود داشته باشد. اگر مثلاً a_1 را کوچکترین و a_2 را بزرگترین عدد، در بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n، بگیریم، روشن است که $a_1<A_n$ و $a_2>A_n$.

به جای a_1، عدد A_n و به جای a_2 عدد $a_1+a_2-A_n$ را درنظر می‌گیریم؛ دراین‌صورت، بدون‌این که مجموع آنها تغییر کند، به‌هم نزدیک‌تر شده‌اند. بنابراین، واسطهٔ حسابی A_n تغییر نمی‌کند، درحالی‌که واسطهٔ هندسی G_n بزرگتر می‌شود. اگر بازهم، دربین عددهای جدید، عددهای نابرابر وجود داشته باشد، همین عمل‌را تکرار می‌کنیم. از آن‌جاکه درهرگام، تعداد عددهای برابر A_n، افزایش می‌یابد، بعداز چندگام (که تعداد آن‌ها محدود است)، همهٔ عددها با هم برابر (وبرابر A_n) می‌شوند وبه حالتی می‌رسیم که، واسطهٔ‌حسابی آن‌ها، باواسطهٔ هندسی آن‌ها برابرمی‌شود. ولی‌درهرگام، واسطهٔ حسابی عددها بی‌تغییرمی‌ماند، درحالی‌که‌واسطهٔ هندسی آن‌ها بزرگترمی‌شود،

یعنی در انتخاب نخستین عددها، واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی بزرگتر است.

یادداشت. همین استدلال، درواقع، قضیهٔ دیگری راهم ثابت می کندکه درواقع، تعمیم نتیجهٔ ۲ از بند قبل است: اگر مجموع n عدد مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسدکه همهٔ این عددها، باهم برابر باشند.

اثبات دوم (براساس استقرای ریاضی*). ابتدا یك پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش قضیه. اگرحاصل‌ضرب n عدد مثبت، برابر واحد باشد، مجموع آن‌ها از n کمتر نیست (واین، درواقع تعمیمی‌ازنتیجهٔ ۱ بند قبل است).

پیش قضیه، برای $n=۲$ درست است (نتیجهٔ ۱ بند قبل را ببینید). فرض می‌کنیم، برای $n=k$ وباشرط $a_۱a_۲ \cdots a_k=۱$ داشته باشیم:

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_k \geqslant k$$

(فرض‌استقرا) وثابت می‌کنیم،دراین‌صورت، باشرط $a_۱a_۲ \cdots a_ka_{k+۱}=۱$ داریم :

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_k+a_{k+۱} \geqslant k+۱$$

اگر همهٔ عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، $a_{k+۱}$ برابر باشند:

$$a_۱=a_۲=\cdots=a_k=a_{k+۱}=۱$$

آن وقت، مجموع آنها برابر $k+۱$ می‌شود وپیش‌قضیه درست است.

حالتی را درنظر می‌گیریم که، در بین عددهای از $a_۱$ تا $a_{k+۱}$، عددهای نابرابروجود داشته باشد، دراین‌صورت، در بین‌این عددها، دست‌کم یك عدد کوچکتر از واحد و یك عدد بزرگتر از واحد پیدا می‌شود (چرا؟). فرض می‌کنیم، مثلاً، $a_۱<۱$ و $a_{k+۱}>۱$. داریم:

$$(a_۱a_{k+۱})\cdot a_۲a_۳ \cdots a_k=۱$$

---

*) برای آشنایی بیشتر بااین‌روش، «روش‌استقرای‌ریاضی»را درشمارهٔ ۸ «کتاب‌های کوچك‌ریاضی» ببینید.

اگر a_1a_{k+1} را یك عدد به‌حساب آوریم، بنا بر فرض استقرا باید داشته باشیم:

$$a_1a_{k+1}+a_2+a_3+\cdots+a_k \geqslant k$$

ازاین‌جا می‌توان نوشت:

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=$$
$$=(a_1a_{k+1}+a_2+a_3+\cdots+a_k)+a_{k+1}-a_1a_{k+1}+a_1 \geqslant$$
$$\geqslant k+a_{k+1}-a_1a_{k+1}+a_1=(k+1)+a_{k+1}-a_1a_{k+1}+$$
$$+a_1-1=(k+1)+(a_{k+1}-1)(1-a_1)>k+1$$

زیرا $a_{k+1}>1$ و $a_1<1$ و بنابراین $(a_{k+1}-1)(1-a_1)>0$. پیش‌قضیه ثابت شد.

اکنون به‌اثبات حکم اصلی می‌پردازیم. داریم: $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ یعنی

$$1=\sqrt[n]{\frac{a_1}{G_n}\cdot\frac{a_2}{G_n}\cdots\frac{a_n}{G_n}} \Longrightarrow \frac{a_1}{G_n}\cdot\frac{a_2}{G_n}\cdots\frac{a_n}{G_n}=1$$

حاصل ضرب n عدد مثبت، برابر واحد شده‌است، بنابراین طبق پیش‌قضیه‌ای که ثابت کردیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\cdots+\frac{G_n}{G_n} \geqslant n$$

یعنـی $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant G_n$ یا $A_n \geqslant G_n$. و روشن است که علامت برابری، وقتی برقرار است که

$$\frac{a_1}{G_n}=\frac{a_2}{G_n}=\cdots=\frac{a_n}{G_n} \Longrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$$

اثبات سوم (بازهـم به کمك استقـرای ریاضی). وقتی نابـرابـری $A_n \geqslant G_n$ برای $n=2$ برقرار باشد، برای $n=4$ هم برقراراست، زیـرا

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: اگر $A_k\geqslant G_k$، آن‌وقت $A_{2k}\geqslant G_{2k}$.
بنابراین نابرابری $A_n\geqslant G_n$ برای هر عدد n که توانی از ۲ باشد، برقرار است.

در حالت کلی فرض می‌کنیم $n+p=2^m$، دراین صورت، برای هر $n+p$ عدد، نابرابری کوشی برقرار است. ازاین $n+p$ عدد لازم، n عدد را a_1، a_2، ...، a_n؛ و p عدد دیگر را برابر یکدیگر و برابر A_n می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+pA_n}{n+p}\geqslant\sqrt[n+p]{a_1a_2\dots a_n\cdot A_n^p}$$

که به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{nA_n+pA_n}{n+p}=A_n\geqslant\sqrt[n+p]{G_n^n\cdot A_n^p}$$

که اگر دو طرف نابرابری را به‌توان $n+p$ برسانیم، بعداز ساده‌کردن به‌دست می‌آید:

$$A_n^n\geqslant G_n^n\Longrightarrow A_n\geqslant G_n$$

اثبات چهارم (اثبات یك نابرابری قوی‌تر از نابرابری کوشی). ثابت می‌کنیم:

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1}\geqslant\left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \qquad (۷)$$

روشن است که از نابرابری (۷) می‌توان نابرابری (۶) (یعنی نابرابری کوشی) را، باردیف نابرابری‌های زیر به‌دست آورد:

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \geqslant \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1} \geqslant \dots \geqslant \frac{A_1}{G_1} = 1$$

(طبق تعریف $A_1 = a_1$ و $G_1 = a_1$، در واقع، $A_1 = \frac{a_1}{1} = a_1$ و $G_1 = (a_1)^{\frac{1}{1}} = a_1$).

برای اثبات (۷)، ابتدا توجه می‌کنیم که $A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}$ و $G_{k+1}^{k+1} = G_k^k a_{k+1}$. به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1} = \left(\frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{G_k^k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}} \left(\frac{k + \frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right)^{k+1}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{a_{k+1}}{A_k}$، دراین صورت

$$\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{\alpha - 1}{k+1}\right)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)\frac{\alpha - 1}{k+1} = \alpha$$

(از نابرابری روشن $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ استفاده کرده‌ایم). بنابراین

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1} = \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k+a}{k+1}\right)^{k+1} \geqslant \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k$$

اثبات پنجم (استفاده از استقرای ریاضی به‌طور مستقیم). نابرابری $A_n \geqslant G_n$ برای $n = 2$ برقرار است. فرض می‌کنیم $A_k \geqslant G_k$ $(k > 2)$ و ثابت می‌کنیم، دراین صورت $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

با استفاده از نابرابری کوشی برای k عدد مثبت داریم:

$$A = \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_{k+1} \cdot A_{k+1}^{k-1}} = G$$

یادآوری می‌کنیم که، با توجه به برابری سمت چپ داریم:

$A_{k+1}=\frac{A_k+A}{2}$ درنتیجه

$$A_{k+1}=\frac{A_k+A}{2}\geqslant\sqrt{A_k\cdot A}\geqslant\sqrt{G_k\cdot G}=$$

$$=\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}\cdot A_{k+1}^{k-1}}\geqslant\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}\cdot G_{k+1}^{k-1}}=G_{k+1}$$

اثبات ششم (به‌کمك بسط دوجمله‌ای). فرض می‌کنیم نابرابری کوشی برای $n=m$ برقرار باشد، یعنی $A_m\geqslant G_m$. اکنون $m+1$ عدد a_1a_2، …، a_m، a_{m+1} رادرنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم a_{m+1}، بزرگترین آن‌ها باشد (ازبین این $m+1$ عدد، آن راکه ازهمه بزرگتر است a_{m+1} می‌نامیم). چون

$$A_{m+1}=\frac{mA_m+a_{m+1}}{m+1} \quad \text{و} \quad a_{m+1}=A_m+b \quad (b>0)$$

پس $A_{m+1}=A_m+\frac{b}{m+1}$، یعنی

$$A_{m+1}^{m+1}=\left(A_m+\frac{b}{m+1}\right)^{m+1}\geqslant A_m^{m+1}+(m+1)A_m^m\cdot\frac{b}{m+1}=$$

$$=A_m^m(A_m+b)=a_m^m\cdot a_{m+1}\geqslant G_m^m\cdot a_{m+1}=G_{m+1}^{m+1}$$

اثبات هفتم (استقرای ریاضی). فرض می‌کنیم $a_i=x_i^n$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. دراین صورت، فرض استقرا، یعنی

$$a_1+a_2+\ldots+a_m\geqslant m\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}$$

به صورت $x_1^m+x_2^m+\ldots+x_m^m\geqslant mx_1x_2\ldots x_m$ درمی‌آید و باید ثابت کنیم:

$$x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\ldots+x_{m+1}^{m+1}\geqslant(m+1)x_1x_2\ldots x_{m+1}$$

با توجه به‌نابرابری روشن $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geqslant 0$ برای دو عدد مثبت a و b داریم:

$$a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1} \qquad (*)$$

برای هر دو عدد x_i و x_j ($1 \leqslant i < j \leqslant m+1$)، نابرابری (*) را به‌ازای $n=m+1$ می‌نویسیم، و، سپس، نابرابری‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$m(x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\dots+x_{m+1}^{m+1}) \geqslant x_1(x_2^m+x_3^m+\dots+x_{m+1}^m)+$$
$$+x_2(x_1^m+x_3^m+\dots+x_{m+1}^m)+\dots+x_{m+1}(x_1^m+x_2^m+\dots+$$
$$+x_m^m) \geqslant x_1 \cdot m x_2 x_3 \dots x_{m+1}+x_2 \cdot m x_1 x_3 \dots x_{m+1}+\dots+$$
$$+x_{m+1} \cdot m x_1 x_2 \dots x_m = m(m+1)x_1 x_2 \dots x_{m+1}$$

که از آن جا، به‌نابرابری موردنظر می‌رسیم.

مسألهٔ ۸. ثابت کنید نابرابری $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 4$ برای $x \in \mathbf{R}$ همیشه برقرار است.

حل. کسر سمت چپ نابرابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \times \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}}=2 \times 2=4$$

علامت برابری، وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Longleftrightarrow x^2=3 \quad \text{یا} \quad x=\pm\sqrt{3}$$

مسألهٔ ۹. حداکثر مقدار کسر $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ را برای $x>0$ پیدا کنید.

حل. داریم:

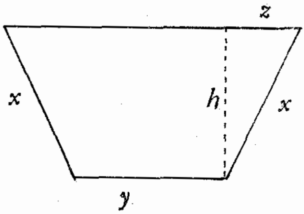
$$\frac{x^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{\frac{1}{x^n}+x^n}$$

که با توجه به‌نابرابری $x^n+\frac{1}{x^n} \geqslant 2$، به‌دست می‌آید $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant \frac{1}{2}$

(علامت برابری، برای ۱ = x است).

مسألهٔ ۵۰. از بین ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی که، در آن‌ها، مجموع طول‌های دوساق وقاعدهٔ کوچکتر مقداری ثابت است، کدامیك حداکثر مساحت را دارد؟

حل. طول هر یك از ساق‌ها را x و طول قاعدهٔ کوچکتر را y می‌گیریم. بنا بر فرض مسأله، مجموع $۲x+y$ مقدار ثابتی است، آن را a می‌نامیم:



شکل ۵

$$۲x+y=a$$

اگر تفاوت طول‌های دو قاعده را z، ارتفاع ذوزنقه را h ومساحت آن را S بنامیم، داریم:

$$۴S^۲=[y+(y+۲z)]^۲\cdot h^۲=(۲y+۲z)^۲(x^۲-z^۲)=$$

$$=۴(y+z)^۲(x+z)(x-z)=\frac{۴}{۳}(y+z)(y+z)(x+z)(۳x-۳z)$$

چهار عامل عبارت اخیر، مجموع ثابتی دارند:

$$(y+z)+(y+z)+(x+z)+(۳x-۳z)=۲(۲x+y)=۲a$$

بنابراین، حاصل ضرب آنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد (یادداشت اثبات اول را ببینید)، که با هم برابر باشند. از آن جا به سادگی به دست می‌آید: $x=y=۲z$. با توجه به‌مقدار z معلوم می‌شود که، هریك از زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه برابر ۱۲۰ درجه می‌شود، یعنی ذوزنقه عبارت است از نیمی از یك شش ضلعی منتظم.

یادداشت. ضمن حل مسأله ازاین قضیه استفاده کردیم که: حاصل‌ضرب چند عدد مثبتی که مجموعی ثابت داشته باشند، وقتی به حداکثر خود می‌رسد که این عددها باهم برابر باشند. در واقع برای عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n همیشه داریم (نابرابری کوشی):

$$a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{A}{n}\right)^n$$

(مجموع عددها را A گرفته‌ایم). حاصل‌ضرب عددها، همیشه از $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ کوچکتر است وتنها درحالت برابری عددها با آن برابر می‌شود: حداکثر حاصل‌ضرب برابراست با $\left(\frac{A}{n}\right)^n$ ووقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

عکس این قضیه هم درست است: اگرحاصل ضرب چند عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها وقتی به حداقل مقدارخود می‌رسدکه این عددها باهم برابر باشند.

در واقـع ، اگـر حاصل ضرب n عـدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را q بگیریم، داریم:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = n\sqrt{p}$$

حداقل مجموع برابر $n\sqrt{p}$ است و وقتی به دست می‌آیدکـه a_i ها با هم برابر باشند.

مسألهٔ ۱۱. ثابت کنید، برای عددهـای مثبت a_1، a_2، ...، a_n همیشه داریم:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

که ازضرب آن‌هادر یکدیگر، به نابرابری مورد نظر می‌رسیم (حالت برابری ،

موقعی پیش می‌آید که همهٔ عددهای a_1، ...، a_n با هم برابر باشند).

مسألهٔ ۱۲. حداکثر مقدار تابع $y=x(۹-x)^۲$ را، با شرط $۹>x>۰$ پیدا کنید.

حل. داریم: $۲y=۲x(۹-x)(۹-x)$. عامل‌های $۲x$، $۹-x$ و $۹-x$، با توجه به‌شرط مسأله، مقدارهایی مثبت‌اند ومجموعی ثابت دارند:

$$۲x+(۹-x)+(۹-x)=۱۸$$

بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثر مقدارخود می‌رسدکه این‌عامل‌ها باهم برابر باشند:

$$۲x=۹-x \Longrightarrow x=۳$$

تابع y دربازهٔ $(۰ ، ۹)$، به‌ازای $x=۳$ به حداکثرمقدار خود می‌رسد و این حداکثر برابر است با ۱۰۸.

مسألهٔ ۱۳. به‌شرط $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{sin^۲\alpha}+\frac{۱}{sin^۲\beta}+\frac{۱}{sin^۲\gamma}\geqslant ۱۲$$

حل. درتمرین ۲۸ ثابت‌کردیم، به شرط، $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$sin\alpha sin\beta sin\gamma\leqslant\frac{۱}{۸}\Longrightarrow\frac{۱}{sin^۲\alpha sin^۲\beta sin^۲\gamma}\geqslant\frac{۱}{۶۴}$$

وباتوجه به نابرابری‌کوشی به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{sin^۲\alpha}+\frac{۱}{sin^۲\beta}+\frac{۱}{sin^۲\gamma}\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{sin^۲\alpha sin^۲\beta sin^۲\gamma}}\geqslant ۳\sqrt[۳]{۶۴}=۱۲$$

در حالت $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۶}$، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود.

مسألهٔ ۱۴. بااستفاده از نابرابری‌کوشی، درستی نابرابری‌های نپر را ثابت‌کنید (قضیهٔ ۱ فصل اول را ببینید).

$$۲<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n<۳, \quad n=۲, ۳, ۴, \ldots$$

حل. نابرابری‌های کلی‌تری را ثابت می‌کنیم که نابرابری‌های نپــر نتیجه‌ای از آن‌هاست:

به‌شرط $k \leqslant n$، $k\in\mathbf{N}$ و $n\in\mathbf{N}$، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^k \leqslant \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n < \left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k+۱} \qquad (*)$$

ابتدا، نابرابری سمت چپ راثابت می‌کنیم. این n عدد را درنظرمی‌گیریم:

$$\underbrace{۱+\frac{۱}{k}, ۱+\frac{۱}{k}, \ldots, ۱+\frac{۱}{k}}_{k \text{ مرتبه}}, \quad \underbrace{۱, ۱, \ldots, ۱}_{(n-k) \text{ مرتبه}}$$

ونابرابری کوشی را دربارهٔ آن‌ها می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^k \cdot ۱^{n-k}} \leqslant \frac{k\left(۱+\frac{۱}{k}\right)+n-k}{n}$$

ویا بعداز ساده‌کردن

$$\sqrt[n]{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^k} \leqslant ۱+\frac{۱}{n} \Rightarrow \left(۱+\frac{۱}{k}\right)^k \leqslant \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

برای اثبات نابرابری سمت راست $(*)$، نابرابری کوشی را بــرای $n+k+۱$ عدد

$$\underbrace{\frac{k}{k+۱}, \frac{k}{k+۱}, \ldots, \frac{k}{k+۱}}_{(k+۱) \text{ مرتبه}}, \quad \underbrace{۱+\frac{۱}{n}, ۱+\frac{۱}{n}, \ldots, ۱+\frac{۱}{n}}_{n \text{ مرتبه}}$$

می‌نویسیم که به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[k+n+1]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}<\frac{(k+1)\frac{k}{k+1}+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{k+n+1}=1$$

یعنی

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

که برای عددهای طبیعی ودلخواه k و n برقرار است.

اکنون، اگر درنابرابری سمت چپ (*)، فرض‌کنیم $k=2$، به دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>2\ ,\quad n=2,3,4,\ldots$$

واگر درنابرابری سمت راست (*)، $k=5$ بگیریم:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{6}{5}\right)^{6}<3\ ,\quad n\in\mathbf{N}$$

وچون $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$، باتوجه به‌این نابرابری‌ها، خواهیم داشت:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}\ ,\quad k\in\mathbf{N}$$

مثلا بافرض $k=200$، بااستفاده ازجدول‌های لگاریتمی پنج رقمی، به‌دست می‌آید:

$$2/718<e<2/719$$

مسألهٔ ۱۵. وجه‌های یك چهار وجهی، هم‌ارزند (مساحت‌هایی برابر دارند). اگر زاویه‌های دووجهی مجاور به‌یکی‌از وجه‌ها را، α، β، و γ بنامیم ثابت کنید:

$$1)\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{27}\ ,\quad 2)\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{1}{3}$$

حل. تصویر رأس D ازچهاروجهی $ABCD$ دابروجه ABC باحرف $D_۱$ نشان می‌دهیم و مثلث‌های $BCD_۱$، $CAD_۱$، $ABD_۱$ را درنظر می‌گیریم. بنابرفرض داریم:

$$S_{BCD_۱}=S_{BCD}\cos\alpha \text{ ، } S_{CAD_۱}=S_{CAD}\cos\beta \text{ ، } S_{ABD_۱}=S_{ABD}\cos\gamma$$

ازمجموع این سه برابری، باتوجه به‌این‌که چهاروجه این‌چهاروجهی مساحت‌هایی برابر دارند، به دست می‌آید:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=۱$$

(اگر مساحت مثلث‌های جهت‌دار $BCD_۱$، $CAD_۱$ و $ABD_۱$ را در نظر بگیریم، تصویر نقطهٔ D، یعنی $D_۱$، به‌هر وضعی باشد، این برابری درست‌است).

اگر α، β و γ، زاویه‌هایی‌حاده‌باشند، آن‌وقت $\cos\alpha>۰$، $\cos\beta>۰$، $\cos\gamma>۰$، وبااستفاده ازنابرابری‌کوشی به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\leqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

یعنی $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{۱}{۲۷}$.

درحالت منفرجه بودن یکی‌اززاویه‌های α، β، و γ، درستی‌نابرابری روشن‌است، زیرا سمت چپ نابرابری منفی می‌شود.

برای اثبات درستی نابرابری دوم، ابتدا ثابت می‌کنیم، بـرای هرسه عدد مثبت a، b و c همیشه داریم:

$$\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳}}\geqslant\frac{a+b+c}{۳}\qquad (**)$$

(یعنی واسطهٔ مربعی سه‌عدد مثبت، ازواسطهٔ حسابی آن‌ها، کوچکتر نیست). اگر دوطرف‌نابرابری (**) رامجذورکنیم وهمهٔ جمله‌هارابه‌سمت چپ نابرابری بیاوریم، سرانجام به‌نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲\geqslant۰$$

که حالت تساوی برای $a=b=c$ پیش می‌آید.

با توجه به نابرابری (**) می‌توان نوشت:

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}=\frac{1}{3}$$

و یا $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{1}{3}$.

اگر مثلاً $\gamma>90^\circ$، آن‌وقت

$\cos\alpha+\cos\beta+(-\cos\gamma)=1-2\cos\gamma$ و

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{3}}>\frac{\cos\alpha+\cos\beta+(-\cos\gamma)}{3}=$$

$$=\frac{1-2\cos\gamma}{3}>\frac{1}{3}$$

از آن‌جا که نقطهٔ D_1 برمحل برخورد سه ارتفاع مثلث $A_1B_1C_1$ ــ که از گستردهٔ چهاروجهی مفروض به‌دست می‌آید ــ قرار دارد و از آن‌جا که این گسترده تنها می‌تواند مثلثی با زاویه‌های حاده باشد، بنابراین، بین زاویه‌های α، β و γ، نمی‌تواند دو زاویهٔ منفرجه وجود داشته باشد. درحالت خاصی‌هم که یکی‌ازسه زاویهٔ دووجهی قائمه باشد، هردو نابرابری برقرارند.

§ ۳. واسطه‌های دیگر

اگر دوعدد حقیقی a و b $(a<b)$ را درنظر بگیریم، بی‌نهایت عـدد حقیقی x وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $a<x<b$. هریك از ایـن عددهای x، واسطه‌ای برای دوعدد a و b به‌شمارمی‌روند. به‌طورکلی: برای n عددحقیقی a_1، a_2، ...، a_n، هرمقداری که بین کوچکترین وبزرگترین این عددها باشد، واسطهٔ آن‌ها گویند (که البته، این واسطه درحالت خاص، می‌تواند بر یکی‌ازاین n عدد وازجمله، کوچکترین یا بزرگترین آن‌ها هم منطبق باشد). اگر دربین این n عدد، دست‌کم دوعدد مختلف وجود داشته‌باشد، تعداد واسطه‌ها بی‌نهایت می‌شود. ولی در بیـن این بی‌نهایت عـدد واسطه، آن‌هایی اهمیت دارندکه ضمن انجام عمل‌هایی روی خود n عدد به دست آیند. مشهورترین

این واسطه‌ها، واسطهٔ توانی است که با این دستور معین می‌شود:

$$C_\alpha = C_\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

که در آن، α عددی است حقیقی ومخالف صفر.

حالت‌های خاصی‌ازواسطهٔ توانی، نسبت به‌بقیه، به‌علت‌کاربردهای‌خود، شهرت بیشتری پیداکرده‌اند وآن‌ها را واسطه‌های کلاسیك می‌نامند. مثلاً

$$C_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad C_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

ازجملهٔ واسطه‌های‌کلاسیك‌اندکه، به ترتیب، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ توافقی و واسطهٔ مربعی نامیده می‌شوند. یکی دیگرازواسطه‌های‌کلاسیك مشهور، واسطهٔ هندسی است‌که‌آن را با C_0 نشان می‌دهند و این، به‌دلیل آن است‌که

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \text{حد}_{\alpha \to 0}\, C_\alpha$$

اثبات درستی این حد دشوارنیست، تنها به‌این شرط‌که مشتق تابع‌های a^x، $\ln u$ رابدانیم:

$$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = \ln u \Longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

اکنون اگر ازرابطهٔ C_α لگاریتم بگیریم (درمبنای طبیعی) بــه دست می‌آید:

$$\ln C_\alpha = \frac{\ln(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha) - \ln n}{\alpha}$$

وقتی α به‌سمت صفر میل کند، این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید که می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، از آن رفع ابهام کرد. داریم:

$$\underset{\alpha\to 0}{\text{حد}} \ln C_\alpha = \underset{\alpha\to 0}{\text{حد}} \frac{a_1^\alpha \ln a_1 + a_2^\alpha \ln a_2 + \cdots + a_n^\alpha \ln a_n}{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} =$$

$$= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n)$$

و بنابراین $\underset{\alpha\to 0}{\text{حد}} C_\alpha = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

مقدارهای واسطه‌ای اغلب وضمن حل بسیاری ازمسأله‌های ریاضی، فیزیك وسایر دانش‌ها، حتی در تازه‌ترین دانش‌های امروزی پدید می‌آیند. دربارهٔ واسطهٔ حسابی، بسیار برخورد کرده‌اید: معدل نمره‌های امتحانی، میانگین درجهٔ حرارت،... دراین‌جا، چند موردی‌را نام می‌بریم که، درآن‌ها، باواسطهٔ توافقی برخورد می‌کنیم.

۱) اگر از محل برخورد دوقطر ذوزنقه‌ای خط راستی موازی دوقاعدهٔ آن رسم کنیم تادوساق ذوزنقه رادر نقطه‌های M و N قطع کند، آن وقت

$$|MN| = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

که درآن، a و b را طول دوقاعدهٔ ذوزنقه گرفته‌ایم.

درضمن می‌دانید، اگر وسط دوساق رابه هم وصل می‌کردیم، پاره خط راستی به دست می‌آمد که طول آن، برابر واسطهٔ حسابی طول‌های دو قاعده می‌شد.

۲) اگراتومبیلی فاصلهٔ از A تا B راباسرعت ثابت v_1 و در برگشت فاصلهٔ از B تا A را با سرعت ثابت v_2 بپیماید، آن وقت سرعت متوسط حرکت اتومبیل برابر است با

$$\frac{۲}{\frac{۱}{v_۱}+\frac{۱}{v_۲}}$$

۳) اگر تراکتور اول، زمینی را درمدت $t_۱$ ساعت و تراکتور دوم، همان زمین رادرمدت $t_۲$ ساعت شخم کند، آن‌وقت به‌اندازهٔ

$$t=\frac{۲}{\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}}$$

ساعت وقت لازم است تا دوتراکتور، ضمن کار هم زمان، بتوانند زمین را شخم بزنند.

۴) دووزنه به‌وزن‌های $m_۱$ و $m_۲$ به‌وسیلهٔ نخی به هم وصل شده‌اند، نخ را ازروی قرقره‌ای گذرانده‌ایم. اگر نخ کش‌دار نباشد، آن وقت نیروی کشش نخ به‌همان اندازه‌ای است که دردوسر آن وزنه‌های برابر، قرار داشته باشد، به نحوی که وزن هروزنه برابر باواسطهٔ توافقی $m_۱$ و $m_۲$ باشد.

۵) جداری ازدو تیغهٔ با ضخامت برابر ومماس برهم تشکیل شده‌است. جنس تیغه‌ها، متفاوت و ضریب قابلیت هدایت گرما در آن‌ها، به‌ترتیب، برابر $k_۱$ و $k_۲$ است. دراین صورت، ضریب قابلیت هدایت گرما در جدار برابر است با $\frac{۲}{\frac{۱}{k_۱}+\frac{۱}{k_۲}}$.

□

اکنون به‌مقایسهٔ واسطه‌های مختلف می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱. ثابت کنید، به‌شرط $\alpha\leqslant\beta$ داریم $C_\alpha\leqslant C_\beta$. درضمن برابری $C_\alpha=C_\beta$ وقتی، وتنها وقتی برقراراست که داشته باشیم $a_۱=a_۲=\dots=a_n$ (a_iها، عددهایی مثبت‌اند).

اثبات. قضیه را درسه حالت جداگانه ثابت می‌کنیم.

حالت اول: $\alpha<۰$ و $\beta>۰$. واسطهٔ هندسی n عدد مثبت، از واسطهٔ حسابی آن‌ها، بزرگتر نیست، یعنی

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \qquad (*)$$

دوطرف این نابرابری را به توان $\frac{1}{\alpha}$ می‌رسانیم؛ از آن‌جا که $\frac{1}{\alpha}<0$، بنابراین

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = C_\alpha$$

اکنون نابرابری (*) را برای β می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{a_1^\beta a_2^\beta \cdots a_n^\beta} \leqslant \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}$$

β عددی است مثبت، بنابراین، اگر دو طرف این نابرابری را به توان $\frac{1}{\beta}$ برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = C_\beta$$

به‌این‌ترتیب، برای $\alpha<0$ و $\beta>0$، C_α از واسطهٔ هندسی کوچکتر و C_β از واسطهٔ هندسی بزرگتر است، یعنی $C_\alpha \leqslant C_\beta$.

حالت دوم: $0<\alpha<\beta$. ثابت می‌کنیم $\frac{C_\beta}{C_\alpha} \geqslant 1$. داریم:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left[\frac{\left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\beta}{n}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

که اگر فرض کنیم: $t_1 = \left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\alpha$ ، $t_2 = \left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\alpha$، ....، $t_n = \left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\alpha$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left(\frac{t_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + t_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad (\mathrm{I})$$

از طرف دیگر داریم:

$$\left(\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[\frac{\left(\frac{a_1}{C_\alpha}\right)^\alpha+\left(\frac{a_2}{C_\alpha}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{a_n}{C_\alpha}\right)^\alpha}{n}\right]^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{C_\alpha}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{C_\alpha}\cdot C_\alpha=1$$

بنابراین $t_1+t_2+\cdots+t_n=n$. اگر فرض کنیم:

$$t_1=1+x_1,\ t_2=1+x_2,\ \ldots,\ t_n=1+x_n$$

با توجه به برابری $t_1+t_2+\cdots+t_n=n$ نتیجه می‌شود:

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. چون $\frac{\beta}{\alpha}>1$ و $x_i>-1$، بنابراین (یادداشت را در پایان اثبات ببینید):

$$(*)\qquad \begin{cases} t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_1 \\ t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant 1+\frac{\beta}{\alpha}x_n \end{cases}$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$t_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+t_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots+t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}\geqslant n+\frac{\beta}{\alpha}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n \qquad (\mathrm{II})$$

اکنون از (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha}\geqslant\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}=1\Longrightarrow C_\beta\geqslant C_\alpha$$

حالت سوم: $\alpha < \beta < ۰$. استدلال کاملاً شبیه حالت دوم است، تنها دراین جا به دلیل $۱ < \frac{\beta}{\alpha} < ۰$، نابرابری‌های (*) درجهت عکس برقرارند و، بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$t_۱^{\frac{\beta}{\alpha}} + t_۲^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + t_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqslant n$$

وازآن‌جا، باتوجه به‌منفی بودن β:

$$\frac{C_\beta}{C_\alpha} = \left(\frac{t_۱^{\frac{\beta}{\alpha}} + t_۲^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + t_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{۱}{\beta}} \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{۱}{\beta}} = ۱ \Longrightarrow C_\beta \geqslant C_\alpha$$

ازقضیه‌ای که ثابت کردیم، نتیجه می‌شود:

$$C_{-۱} \leqslant C_۰ \leqslant C_۱ \leqslant C_۲$$

مثلاً، برای دوعدد مثبت a و b وبا شرط $a \leqslant b$، همیشه داریم:

$$a \leqslant \frac{۲}{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{۲} \leqslant \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲}{۲}} \leqslant b$$

که درحالت $a = b$، نابرابری‌ها، به‌برابری تبدیل می‌شوند.

یادداشت. ضمن اثبات قضیه، ازنابرابری‌های(*) ونابرابری‌های‌مشابه آن استفاده‌کردیم که نیاز به اثبات دارند. مسألهٔ زیر، این نیاز را برطرف می‌کند.

مسألهٔ ۱۶. بافرض $x \geqslant -۱$ ثابت‌کنید، به شرط $۰ < \alpha < ۱$ داریم:

$$(۱+x)^\alpha \leqslant ۱ + \alpha x$$

وبه شرط $\alpha < ۰$ یا $\alpha > ۱$ داریم:

$$(۱+x)^\alpha \geqslant ۱ + \alpha x$$

علامت برابری، درهردوحالت، برای $x = ۰$ است.

حل. ابتدا $\alpha=\frac{m}{n}$ و m و n را عـددهایـی طبیعـی و $1\leqslant m<n$ می‌گیریم. باتوجه به‌شرط $1+x\geqslant 0$ داریم:

$$(1+x)^{\alpha}=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^m}=$$

$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{m \text{ مرتبه}}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdots 1}_{n-m \text{ مرتبه}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+1+\cdots+1}{n}=$$

$$=\frac{m(1+x)+n-m}{n}=\frac{n+mx}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+\alpha x$$

و علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آیدکـه داشته باشیم: $1+x=1$ یـا $x=0$.

به حالتی می‌پردازیم که α عددی گنگ باشد و $0<\alpha<1$. دنبـالهٔ عددهای گویای

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

را باشرط $0<r_i<1$، طوری درنظرمی‌گیریم که حدی برابر α داشته‌باشد. چون r_n عددی گویاست، بنابراین

$$(1+x)^{r_n}\leqslant 1+r_nx \quad , \quad (x\geqslant -1, \ n=1, 2, 3, \ldots)$$

درنتیجه

$$(1+x)^{\alpha}=\lim_{r_n\to\alpha}(1+x)^{r_n}\leqslant\lim_{r_n\to\alpha}(1+r_nx)=1+\alpha x$$

دراین‌جا، برای‌کامل بودن اثبات، هنوز باید ثابت‌کنیم، اگر α عددی گنگ، $0<\alpha<1$ و $x\neq 0$، آن‌گاه $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$ (کـه درایـن

صورت علامت برابری تنها برای $x=0$ باقی می‌ماند. عدد گویای r را بـا شرط $\alpha<r<1$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$(1+x)^{\alpha}=[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}]^{r}$$

چون $0<\frac{\alpha}{r}<1$، به‌ترتیب داریم:

$$(1+x)^{\alpha}=[(1+x)^{\frac{\alpha}{r}}]^{r}\leqslant\left[\left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)\right]^{r}<$$

$$<1+r\cdot\frac{\alpha}{r}x=1+\alpha x$$

اکنون باید بخش دوم مسأله را حل کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $\alpha>1$ یا $\alpha<0$.

اگر $1+\alpha x<0$، آن‌وقت نابرابری $(1+x)^{\alpha}\geqslant1+\alpha x$، برای هردوحالت $\alpha<0$ و $\alpha>1$ روشن‌است. بنابراین باید به‌حالت $1+\alpha x\geqslant0$ یا $\alpha x\geqslant-1$ بپردازیم.

اگر $\alpha>1$، آن وقت باتوجه به‌بخش قبلی مسأله داریم:

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x=1+x$$

که اگردوطرف آن‌را به‌توان α برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(1+x)^{\alpha}\geqslant1+\alpha x$$

اگر $\alpha<0$ آن‌وقت عدد طبیعی n را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $-\frac{\alpha}{n}<1$. دراین‌صورت، باتوجه به‌بخش‌اول مسأله داریم:

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leqslant1-\frac{\alpha}{n}x،$$

دوطرف این‌نابرابری را معکوس می‌کنیم، باتوجه به‌نابرابری روشن

$1-\frac{\alpha^۲}{n^۲}\geqslant ۱$، به‌دست می‌آید:

$$(۱+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geqslant\frac{۱}{۱-\frac{\alpha}{n}x}\geqslant ۱+\frac{\alpha}{n}x$$

که اگر دو طرف آن را به‌توان n برسانیم، به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم:

$$(۱+x)^{\alpha}\geqslant\left(۱+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n}\geqslant ۱+n\cdot\frac{\alpha}{n}x=۱+\alpha x$$

و در همهٔ این موردها، علامت برابری تنها به‌ازای $x=۰$ برقرار است.

□

کلاس دیگری از مقدارهای واسطه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که، به‌نوبهٔ خود، کمتر از کلاس C_α جالب نیست و، به‌ویژه، در رابطهٔ با آن، می‌توان به‌نتیجه‌های جالبی رسید. این کلاس، با این دستور داده می‌شود:

$$d_\alpha=d_\alpha(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)=\frac{a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{a_۱^{\alpha-۱}+a_۲^{\alpha-۱}+\ldots+a_n^{\alpha-۱}}$$

که در آن، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عددهایی مثبت‌اند و $\alpha\in\mathbf{R}$. در ضمن، توجه می‌کنیم که

$$d_۱=\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{n}=C_۱,$$

$$d_۰=\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\ldots+\frac{۱}{a_n}}=C_{-۱}$$

ابتدا باید ثابت کنیم که d_α، درواقع یك مقدار واسطه است؛ یعنی اگر $a_۱$ کوچکترین و a_n بزرگترین عدد از بین عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n باشند، داریم:

$$a_۱\leqslant\frac{a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{a_۱^{\alpha-۱}+a_۲^{\alpha-۱}+\ldots+a_n^{\alpha-۱}}\leqslant a_n$$

که به‌دلیل سادگی، اثبات آن‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مثل C_α، کلاس واسطه‌های d_α هم، دارای ویژگی یکنوائی‌است، یعنی قضیهٔ ۴. با شرط $\alpha<\beta$، نابرابری $d_\alpha \leqslant d_\beta$ برقرار است؛ در ضمن علامت برابری وقتی، وتنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 \cdots = a_n$$

اثبات. چون $\beta - \alpha > 0$ ، بنابراین به شرط $a_i \neq a_j$، تفاضل‌های $a_i - a_j$ و $a_j^{\beta-\alpha} - a_i^{\beta-\alpha}$، علامت مختلفی دارند ودر نتیجه

$$(a_i \cdot a_j)^{\alpha-1}(a_i - a_j)(a_j^{\beta-\alpha} - a_i^{\beta-\alpha}) \leqslant 0$$

که از آن به‌دست‌می‌آید: $a_i^\alpha a_j^{\beta-1} + a_j^\alpha a_i^{\beta-1} \leqslant a_i^\beta a_j^{\alpha-1} + a_j^\beta a_i^{\alpha-1}$

بنابراین $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^\alpha a_j^{\beta-1} + a_j^\alpha a_i^{\beta-1}) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i^\beta a_j^{\alpha-1} + a_j^\beta a_i^{\alpha-1}$

که درواقع، به‌معنای درستی نابرابری زیر است:

$$(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)(a_1^{\beta-1} + a_2^{\beta-1} + \cdots + a_n^{\beta-1}) \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta)(a_1^{\alpha-1} + a_2^{\alpha-1} + \cdots + a_n^{\alpha-1})$$

از آن جا نتیجه می‌شود: $d_\alpha \leqslant d_\beta$ و علامت برابری برای $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

قضیهٔ ۳. اگر $\alpha \leqslant 0$، آن وقت $d_\alpha \leqslant C_{\alpha-1}$؛ اگر $0 < \alpha < 1$، آن وقت $C_{\alpha-1} \leqslant d_\alpha \leqslant C_\alpha$؛ اگر $\alpha > 1$، آن وقت $C_\alpha \leqslant d_\alpha$. علامت‌های برابری، وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که یا $\alpha = 0$، یا $\alpha = 1$ و یا $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

اثبات. این دو برابری واضح‌اند:

$$\frac{(C_\alpha)^\alpha}{(C_{\alpha-1})^{\alpha-1}} = d_\alpha \quad \text{و} \quad \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1} \cdot C_\alpha = d_\alpha$$

بنابرقضیهٔ ۱، $0 < C_{\alpha-1} \leqslant C_\alpha$، یا $\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}} \geqslant 1$. ازآن جا

اگر $\alpha < 1$، آن وقت $1 \geqslant \left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1} > 0$ وبنابراین $C_\alpha \geqslant d_\alpha$؛

اگر $\alpha>1$، آن‌وقت $\left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha-1}\geqslant 1$ و بنابراین $C_\alpha\leqslant d_\alpha$.

علاوه‌براین، اگر $\alpha<0$ آن‌وقت $1\geqslant\left(\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}\right)^{\alpha}>0$ و از آن‌جا

$$\frac{(C_\alpha)^\alpha}{(C_{\alpha-1})^{\alpha-1}}\leqslant C_{\alpha-1}\Longrightarrow d_\alpha\leqslant C_{\alpha-1};$$

و اگر $\alpha>0$، با استدلال مشابهی به دست می‌آید: $d_\alpha\leqslant C_{\alpha-1}$. در همهٔ حالت‌ها، علامت برابری، تنها برای موردهایی پیش می‌آید که درصورت قضیه آمده است.

ازهمین قضیه می‌توان نتیجه گرفت که عدد ε، با شرط $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$، وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم $d_\varepsilon=C_0$. مثلاً، برای حالت $n=2$ داریم: $d_{\frac{1}{2}}=C_0$.

اکنون، باتوجه به‌قضیه‌هایی که ثابت کردیم، برای حالت $n=2$، این رشته نابرابری‌ها را خواهیم داشت:

$$d_{-1}\leqslant C_{-2}\leqslant C_{-1}=d_0\leqslant d_{\frac{1}{2}}=C_0\leqslant d_1=C_1\leqslant$$
$$\leqslant C_2\leqslant d_2\leqslant d_3\cdots$$

یعنی، برای عددهای مثبت a و b و باشرط $a\leqslant b$ داریم:

$$a\leqslant\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}\leqslant\frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\frac{a^2+b^2}{a+b}\leqslant\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\leqslant b\qquad(7)$$

قضیهٔ ۴. ثابت کنید، برای هر α و هر دوعدد مثبت a و b داریم:

$$d_{\alpha+1}+d_{1-\alpha}=a+b\text{ ، }d_{\alpha+1}\cdot d_{-\alpha}=ab\text{ ، }C_\alpha\cdot C_{-\alpha}=ab$$

اثبات ساده است وخودتان آن رابه دست بیاورید.

□

به‌جز C_α و d_α، می‌توان دستورهای دیگری هم، برای محاسبهٔ مقدار واسطه‌ها پیداکرد. یکی‌از این دستورها را می‌آوریم. فرض‌کنید:

$$f_{\alpha,\beta}=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

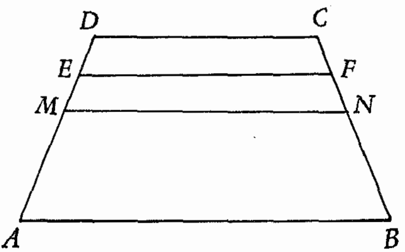
که درآن $\alpha\neq\beta$ و a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت‌اند. به سادگی می‌توان ثابت‌کرد (وازخواننده می‌خواهیم، این اثبات را پیداکند) که: ۱) $f_{\alpha,\beta}$، کلاسی ازواسطه‌هاست، یعنی‌اگر a_1 کوچکترین و a_n بزرگترین عدد از بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n باشند، آن‌وقت $a_1\leqslant f_{\alpha,\beta}\leqslant a_n$؛ ۲) کلاس‌های C_α و d_α حالت‌های خاصی از کلاس $f_{\alpha,\beta}$ هستند؛ ۳) $f_{\alpha,\beta}$ نسبت به α (باثابت بودن β) ونسبت به β (باثابت بودن α)، تابعی یکنوا (مونوتون) است.

۴§. تعبیرهندسی

نابرابری‌های (۷) را می‌توان تعبیر هندسی‌کرد. نمونه‌ای از تعبیر هندسی نابرابری $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ را دیدیم، ودراین‌جا به‌بقیهٔ نابرابری‌های (۷) می‌پردازیم.

ابتدا این‌مسألهٔ سادهٔ هندسی را حل‌کنید:

مساله. پاره‌خط‌های راست EF و MN را در درون ذوزنقهٔ $ABCD$، محدود به‌دوساق وموازی با قاعده‌های AB و CD رسم کرده‌ایم.



شکل ۶

ثابت‌کنید: ۱) شرط لازم وکافی، برای متشابه بودن ذوزنقهٔ $ABFE$ و $MNCD$ و، همچنین، تشابه دو ذوزنقهٔ $ABNM$ و $EFCD$ این است‌که

داشته باشیم:

$$|EF|\cdot|MN|=|AB|\cdot|CD|$$

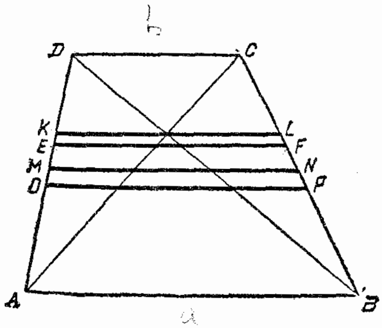
۲) شرط لازم وکافی برای برابری فاصلهٔ بین $[AB]$ و $[EF]$ با فاصلهٔ بین $[MN]$ و $[CD]$ این است که داشته باشیم:

$$|EF|+|MN|=|AB|+|CD|$$

اکنون به تعبیر هندسی نابرابری‌های (۷) می‌پردازیم. برای نابرابری‌های

$$\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}\leqslant\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} \qquad (۸)$$

اغلب از روش زیر استفاده می‌کنند. ذوزنقهٔ $ABCD$ را با قاعده‌های $|AB|=a$ و $|CD|=b$ درنظر می‌گیریم (شکل ۷). اگر پاره‌خط راست EF را موازی با قاعده‌های ذوزنقه، طوری رسم کنیم که دو ذوزنقهٔ متشابه به‌دست آید، آن‌وقت



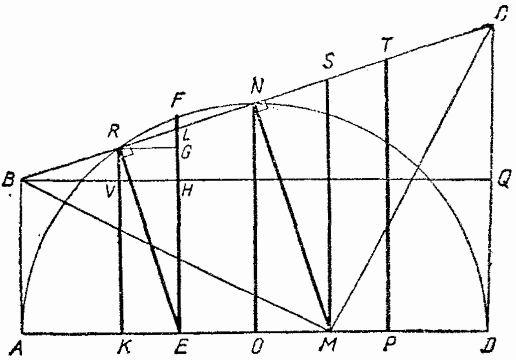
شکل ۷

$$|EF|\cdot|EF|=ab \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |EF|=\sqrt{ab}$$

سپس، اگر M و N، به ترتیب، وسط ساق‌های AD و BC باشند، آن وقت $|MN|=\frac{a+b}{۲}$. اگر پاره‌خط راست KL را موازی دوقاعده از محل برخورد قطرها بگذارانیم، داریم: $|KL|=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ (چرا؟). چون $|MN|\cdot|KL|=ab$، بنابراین، دو زوج ذوزنقهٔ متشابه به دست می‌آید و، در نتیجه، $[EF]$ بین $[MN]$ و $[KL]$ قرار می‌گیرد. سرانجام، پاره خط راست OP را موازی دو قاعده طوری می‌رسانیم که داشته باشیم

$|OP|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. پاره خط راست OP، ذوزنقه را به دو ذوزنقهٔ هم‌ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند (چرا؟)، بنابراین $[OP]$ بین $[MN]$ و $[AB]$ واقع می‌شود. به این ترتیب است که رشتهٔ نابرابری‌های (۸) به‌دست می‌آید.

اکنون کوشش می‌کنیم، همهٔ رشتهٔ نابرابری‌های (۷) را بسازیم.



شکل ۸

ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ را با قاعده‌های $|AB|=a$ و $|CD|=b$ $(a<b)$ و ارتفاع $|AD|=a+b$ درنظر می‌گیریم (شکل ۸). فرض کنید $|AE|=a$ و $|AO|=|OD|=\frac{a+b}{2}$. (ON) را عمود بر (AD) و $|ON|=\frac{a+b}{2}$ را رسم می‌کنیم (پاره خط راستی که وسط دوساق را به هم وصل می‌کند). به این ترتیب، نقطه‌های A، N و D روی محیط دایره‌ای به شعاع $\frac{a+b}{2}$ و به مرکز O واقع‌اند. R را نقطهٔ برخورد دوم این دایره با خط راست BC می‌گیریم. این ساختمان‌ها را، پشت سرهم، انجام می‌دهیم:

$$(EF)\perp(AD),\ (RK)\|(EF),\ [DP]\cong[AK],$$
$$|DM|=|AE|=a,\ (MS)\perp(AD),\ (PT)\|(MN),\ [MN],\ [ER]$$

و این برابری‌ها را ثابت می‌کنیم:

$$|KR|=d_{-1}\text{،}\ |ER|=C_{-2}\text{،}\ |EL|=d_0\text{،}\ |EF|=d_{\frac{1}{2}}\text{،}$$

$$|ON|=d_1\text{،}\ |MN|=C_2\text{،}\ |MS|=d_2\text{،}\ |PT|=d_3\text{،}$$

$$\widehat{ERL}=\widehat{MNS}=90^\circ$$

برای اثبات، (RG) و (BQ) را موازی (AD) رسم می‌کنیم. برابری $|ON|=d_1$، از خود ساختمان آن نتیجه می‌شود. به‌جز آن

$$|BN|=|NC|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}\sqrt{|BQ|^2+|QC|^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$|AB|^2=|BN|\cdot|BR|$$

از آنجا $|BR|\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=a^2$ و بنابراین $|BR|=\dfrac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$.

با توجه به تشابه مثلث‌های BRV و BCQ

$$\frac{|KR|-|KV|}{|CQ|}=\frac{|BR|}{|BC|}\Longrightarrow\frac{|KR|-a}{b-a}=\frac{\dfrac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

در نتیجه $d_{-1}=\dfrac{ab(a+b)}{a^2+b^2}=|KR|$.

به همین ترتیب، از تشابه دو مثلث BLH و BCQ به‌دست می‌آید:

$$\frac{|EL|-|EH|}{|BH|}=\frac{|CQ|}{|RQ|}\Longrightarrow\frac{|EL|-a}{a}=\frac{b-a}{a+b}$$

از آن‌جا $d_0=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}=|EL|$.

سپس، با توجه به تشابه مثلث‌های RLG و BCQ نتیجه می‌شود:

$$\frac{|LG|}{|RG|}=\frac{|CQ|}{|BQ|}\Longrightarrow\frac{d_0-d_{-1}}{|RG|}=\frac{b-a}{a+b}$$

از آن‌جا $|RG|=\dfrac{ab(b-a)}{a^2+b^2}$. چون $|RG|=|KE|$، بنابراین

$$|ER|=\sqrt{|KR|^2+|KE|^2}=\frac{ab}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}=C_{-2}$$

ازمثلث ONM به‌دست می‌آید:

$$|MN|=\sqrt{|ON|^2+|OM|^2}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=C_2$$

از تعبیر هندسی، به‌یاد می‌آوریم که

$$|EF|=\sqrt{|AE|\cdot|ED|}=\sqrt{ab}=d_{\frac{1}{2}}$$

با توجه به قضیهٔ ۴ ومسألهٔ هندسی آغاز § ۴، نتیجه می‌شود:

$$|MS|=d_2 \text{ و } |PT|=d_3$$

برابری مربوط بـه زاویه‌ها راثابت می‌کنیم. چون دومثلث ABM و DMC برابرند (در دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه)، پس $|BM|=|MC|$، یعنی دو مثلث BMN و CMN (در سه ضلع) بـرابـرنـد و بنـا بـراین $\widehat{MNB}=\widehat{MNC}=90^\circ$. سپس، چون $\dfrac{|KR|}{|KE|}=\dfrac{|RE|}{|EF|}$ (کـه بـا محاسبهٔ مستقیم تایید می‌شود) و $\widehat{KRE}=\widehat{REF}$، بنابراین دومثلث KRE و REL متشابه‌اند ودراین‌صورت

$$\widehat{LRE}=\widehat{RKE}=90^\circ$$

به‌این ترتیب، با توجه به‌شکل ۸، همهٔ مقدارهای زنجیرهٔ نابرابری‌های (۷) ودرستی آن‌ها، نشان داده شد.

توجه به‌این نکته هم جالب است که، روی شکل ۸، چهارضلعی $ABRE$ باچهارضلعی‌های $ABNM$ و $MNCD$ (که با هم برابرند) متشابه است (چرا؟). علاوه‌براین، دراین شکل می‌توان چند زوج ذوزنقه‌های متشابه هم پیداکرد (پیداکنید!).

تمرین

۶۱. از بین مکعب مستطیل‌هایی که، مجموع سه یال دوبه دو عمودبرهم درآن‌ها، مقداری ثابت باشد، کدامیك حداکثرحجم رادارد؟

۶۲. a و b عددهایی مثبت‌اند و $a\neq b$. ثابت کنید:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}<\frac{a+nb}{n+1}$$

۶۳. برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n ثابت کنید:

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}$$

۶۴. برای عددهای مثبت x و y می‌دانیم $x^3+y^3=a$. حداکثر هر یك ازمقدارهای x^2+y^2 و $x+y$ چقدر است؟

۶۵. برای عددهای مثبت x و y و z می‌دانیم: $x+y+z=6$. حداقل مقدار $x^2+y^2+z^2$ را پیداکنید.

۶۶. a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید به‌شرط $\alpha\geqslant 1$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha\leqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)$$

وبه شرط $0\leqslant\alpha\leqslant 1$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha\geqslant n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)$$

۶۷. x و y و z عددهایی مثبت‌اند و می‌دانیم $x^3+y^3+z^3=81$. ثابت کنید:

$$x+y+z\leqslant ۹$$

۶۸. به شرط $-۱<\alpha<۰$ ثابت کنید:

$$\frac{(n+۱)^{\alpha+۱}-n^{\alpha+۱}}{\alpha+۱}<n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+۱}-(n-۱)^{\alpha+۱}}{\alpha+۱}$$

۶۹. حداقل مقدار تابع $x^{\alpha}-ax$ را با شرط $a>۰$، $x\geqslant ۰$ و $\alpha>۱$ پیدا کنید.

۷۰. برای $x\in\mathbf{R}$ ثابت کنید: $\sin x\sin ۲x\leqslant\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}$.

۷۱. حداقل مقدار تابع $x^{\alpha}+ax$ را با شرط $a>۰$، $x>۰$ و $\alpha<۰$ پیدا کنید.

۷۲. حداکثر تابع $x^{\alpha}-ax$ را با شرط $a>۰$، $x\geqslant ۰$ و $۰<\alpha<۱$ پیدا کنید.

۷۳. کدام بزرگترند: $\sqrt[n]{n}$ یا $۱+\frac{۲}{\sqrt{n}}$؟ (n عددی طبیعی است).

۷۴. به شرط طبیعی بودن n، کدام بزرگترند: $\frac{۱}{\sqrt{n}}$ یا $\sqrt{n+۱}-\sqrt{n-۱}$؟

۷۵. زاویه‌های یك مثلث را α، β و γ می‌نامیم. ثابت کنید، به شرط حاده‌بودن همهٔ زاویه‌ها، داریم:

$$۱)\qquad tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha\geqslant ۹$$

$$۲)\qquad cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

۷۶. x و y و z عددهایی مثبت‌اند، ثابت کنید:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geqslant ۸$$

۷۷. a و b و c را طول ضلع‌ها، S را مساحت و R و r را به ترتیب طول شعاع دایره‌های محیطی ومحاطی مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 8S(2R-r)$$

۷۸. a_1، a_2، …، a_n عددهایی‌طبیعی‌اند، ثابت کنید:

$$|a_1+a_2+\dots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$$

۷۹. A، B و C را سه زاویهٔ حادهٔ یك مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$tg^n A+tg^n B+tg^n C > 3+\frac{3n}{2} \qquad (n\in \mathbf{N})$$

۸۰. می‌دانیم $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۸۱. a و b و c راطول ضلع‌ها و S رامساحت مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$ab+bc+ca \geqslant 4S\sqrt{3}$$

۸۲. آیا عددهای a، b و c وجود دارند، به نحوی‌که داشته باشیم:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} > \sqrt{c(ab+1)}$$

۸۳. ضریب‌های a و b و c را درچندجمله‌ای

$$x^5-10x^4+ax^3+bx^2+cx-32$$

طوری پیدا کنید که همهٔ ریشه‌های آن حقیقی ومثبت باشند.

۸۴. ثابت کنید درهر مثلث ABC، داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

که در آن، S مساحت، R شعاع دایـرهٔ محیطی و h_a و h_b و h_c ارتفاع‌های مثلث‌اند.

۸۵. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ را پیدا کنید به شرطی که

$$\overline{xyz}=xyz(x+y+z)$$

۸۶. n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}+\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}\leqslant 2\sqrt[n]{n}$$

۸۷. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k}\leqslant 1 \qquad (k\in\mathbf{N})$$

۸۸. محلول یك نمك را در دو ظرف مختلف ریخته‌ایم: در ظرف اول ۵ کیلوگرم و در ظرف دوم ۲۰ کیلوگرم. ضمن بخارشدن آب، درصد نمك در ظرف اول p برابر و در ظرف دوم q برابر شده است و می‌دانیم $pq=9$. حداکثر چه مقدار آب ممکن است از این دو ظرف بخارشده باشد؟

۸۹. $C_\alpha(a, b)$ را واسطهٔ توانی بین دو عدد مثبت a و b می‌گیریم. ثابت کنید:

$$1)\ C_\alpha(a, b)\cdot C_{-\alpha}(a, b)=C_0^2(a, b);$$

$$2)\ C_\alpha(a, b):C_\alpha\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)=C_0^2(a, b)$$

۹۰. ۱) به شرط $x\geqslant 1$ و $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید:

$$x^n\geqslant nx-n+1;$$

۲) به شرط $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$، برای $1<k\leqslant n$ داریم:

الف) $A_{k-1}\leqslant A_k$؛ ب) $A_n\leqslant a_n$؛ ج) $a_k\leqslant\frac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}$

که در آن‌ها $n\in\mathbf{N}$، $k\in\mathbf{N}$ و A_n به معنای واسطهٔ حسابی بین n عدد از a_1 تا a_n است.

۳) اگر G_n را واسطهٔ هندسی بین n عدد مثبت $a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$

بگیریم، ثابت کنید، برای $1 < k \leqslant n$ داریم:

الف) $G_{k-1} \leqslant G_k$؛ ب) $G_n \leqslant a_n$؛ ج) $kG_k - (k-1)G_{k-1} \leqslant a_k$

۴) اگر a_1، a_2، …، a_n عددهایی غیرمنفی و r_1، r_2، …، r_n عددهایی گویا و بزرگتر از واحد و $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = 1$، ثابت کنید:

$$\frac{a_1^{r_1}}{r_1} + \frac{a_2^{r_2}}{r_2} + \dots + \frac{a_n^{r_n}}{r_n} \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$$

فصل سوم

نابرابری‌های دیگر

۱. نابرابری دیگری از کوشی. در فصل دوم، § ۱، مسألهٔ ۷ ثابت کردیم:

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

این نابرابری را می‌توان تعمیم داد و برای n عدد حقیقی a_1، a_2، ...، a_n و n عدد حقیقی b_1، b_2،...، b_n نوشت:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2$$

این نابرابری را هم، برای نخستین بـار، کوشی ثابت‌کرد و، به‌همین مناسبت، نام اورا برخود دارد. نـابرابری کوشی را می‌توان بـه‌این ترتیب تنظیم کرد:

قضیهٔ ۱. اگر a_i و b_i عددهایی حقیقی باشند $(i=1,2,\dots,n)$، ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \qquad (1)$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

یعنی وقتی‌که a_i ها با b_i ها متناسب باشند.

اثبات. درمسألهٔ ۷ فصل اول دیدیم‌که نابرابری

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\geqslant 0$$

به‌نابرابری روشن زیرمنجرمی‌شود: $(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant 0$

وعلامت برابری، برای $a_1b_2=a_2b_1$ یا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ پیش می‌آید.

اگر $n=3$ بگیریم، بازهم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\geqslant 0$$

وبرای این‌که علامت برابری برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$a_1b_2-a_2b_1=a_1b_3-a_3b_1=a_2b_3-a_3b_2=0$$

ویا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

درحالت‌کلی هم،با اندکی محاسبه ودقت، به‌دست می‌آید:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\dots$$
$$\dots+a_nb_n)^2\ \dots+a_nb_n)^2-(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2+\dots$$
$$=(a_1a_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\dots+$$
$$+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$$

در پرانتزهای مجذورکامل سمت راست برابری، باید همهٔ حالت‌هـای ممکن انتخاب و دواندیس مختلف را درنظرگرفت. این تعداد بـرابـر است بـا $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$؛ یعنی درسمت راست برابری، به‌تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ مجذور کامل‌وجود دارد. روشن است‌که این مجموع همیشه مثبت است، مگر وقتی‌که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

مسألهٔ ۱۷. نقطهٔ $M(x,y)$ را روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ طوری پیدا کنیدکه مقدار $12x+5y$ بهحداکثرمقدارخود ویا بهحداقل مقدارخود برسد.

حل. درواقع، مسأله میخواهد بهشرط $x^2+y^2=1$، حداکثر و حداقل مقدار $12x+5y$ را پیداکند.

نابرابریکوشی را برای $n=2$ در نظرمیگیریم وفرض میکنیم: $a_1=12$، $a_2=5$، $b_1=x$، $b_2=y$. دراین صورت داریم:

$$(12^2+5^2)(x^2+y^2)\geqslant(12x+5y)^2 \Longrightarrow (12x+5y)^2\leqslant 169$$

که ازآنجا بهدست میآید: $-13\leqslant 12x+5y\leqslant 13$.

حداکثرمقدارممکن برای $12x+5y$ برابر ۱۳ وحداقل ممکن برای آن برابر ۱۳− است؛ ومیدانیم، این حداکثر یا حداقل، وقتی بهدست میآیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{5}$$

که باتوجه بهمعادلهٔ $x^2+y^2=1$ بهدست میآید:

$$M_1\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right), M_2\left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$$

حداکثر مقدار $12x+5y$ روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ درنقطهٔ M_1 وحداقل آن درروی دایره، درنقطهٔ M_2 خواهد بود.

۲. درمسألهٔ ۶ فصل اول ثابتکردیم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geqslant\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

اکنون آن را برای n عدد a_i و n عدد b_i تعمیم میدهیم.

قضیهٔ ۲. ثابتکنید، برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n همیشه داریم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

که درآن $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$ و $b=b_1+b_2+\cdots+b_n$. علامت برابری، تنها برای وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

اثبات. خط شکستهٔ $A_0A_1\cdots A_n$ را روی صفحه ودردستگاه محورهای قائم‌مختصات طوری‌درنظر می‌گیریم که بردار $\overrightarrow{A_0A_1}$ بـه مختصات (a_1,b_1)، بـردار $\overrightarrow{A_1A_2}$ به‌مختصات (a_2,b_2)، و به‌طورکلی، بردار $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ بـه مختصات (a_i,b_i) باشد. درضمن، روشن است که

$$\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

یعنی‌مختصات بردار $\overrightarrow{A_0A_n}$ چنین است:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n\ ,\ b_1+b_2+\cdots+b_n)=(a,b)$$

طول بردارها را محاسبه می‌کنیم:

$$|A_0A_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\ ,\ |A_1A_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2},\ldots,$$

$$|A_{n-1}A_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ;\ |A_0A_n|=\sqrt{a^2+b^2}$$

می‌دانیم طول یك خط شکسته ازطول پاره خط راستی‌که دوانتهای آن را به هم وصل می‌کند، بزرگتر است، یعنی

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\geqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

درضمن، علامت برابری، تنهـا وقتی برقرار است کـه بردارهـای $\overrightarrow{A_0A_1}$، $\overrightarrow{A_1A_2}$، ...، $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ هم جهت باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

یادداشت. اگر $i=\sqrt{-1}$ و $x+iy$ را عدد مختلط در نظر بگیریم، می‌دانیم

$$|x+iy|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

به‌این ترتیب، می‌توانیم نابرابری قضیهٔ ۲ را به‌این صورت بنویسیم:

$$|a_{1}+ib_{1}|+|a_{2}+ib_{2}|+\cdots+|a_{n}+ib_{n}|\geqslant$$
$$\geqslant|(a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})+i(b_{1}+b_{2}+\cdots+b_{n})|$$

۳. دو نابرابری دیگر

قضیهٔ ۳. برای عددهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n و با فرض $a=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}$ ، $b=b_{1}+b_{2}+\cdots+b_{n}$ داریم:

$$\sqrt{a_{1}b_{1}}+\sqrt{a_{2}b_{2}}+\cdots+\sqrt{a_{n}b_{n}}\leqslant\sqrt{ab} \qquad (3)$$

وعلامت برابری، تنها برای $\frac{a_{1}}{b_{1}}=\frac{a_{2}}{b_{2}}=\cdots=\frac{a_{n}}{b_{n}}$.

اثبات. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$\frac{a_{1}}{a}+\frac{b_{1}}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_{1}b_{1}}{ab}}$$
$$\frac{a_{2}}{a}+\frac{b_{2}}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_{2}b_{2}}{ab}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_{n}}{a}+\frac{b_{n}}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_{n}b_{n}}{ab}}$$

اکنون اگر $a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}=a$ و $b_{1}+b_{2}+\cdots+b_{n}=b$ بگیریم، ازمجموع این نابرابری‌ها، به‌همان نابرابری (۳) می‌رسیم. درضمن، برای این‌که همه‌جا علامت برابری داشته باشیم، باید

$$\frac{a_{1}}{b_{1}}=\frac{a_{2}}{b_{2}}=\cdots=\frac{a_{n}}{b_{n}}=\frac{a}{b}$$

قضیهٔ ۴. با همان شرطهای قضیه ۳، ثابت کنید

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\dots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}\leqslant\frac{ab}{a+b} \qquad (۴)$$

و برابری برای $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$.

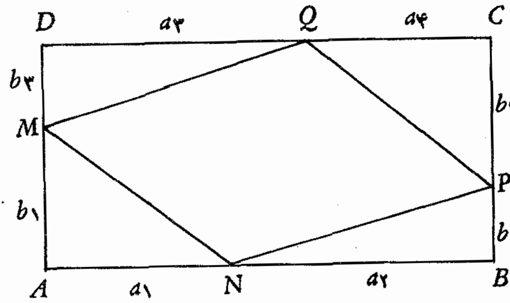
راهنمایی. این نابرابری به‌ازای $n=۲$ به‌صورت

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}\leqslant\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{a_1+a_2+b_1+b_2}$$

درمی‌آید که منجر به‌نابرابری روشن $(a_1b_2-a_2b_1)^2\geqslant ۰$ می‌شود. برای اثبات درحالت کلی، می‌توانید از روش استقرای ریاضی استفاده کنید.

مسألهٔ ۱۸. درمستطیلی که طول قطر آن برابر است با d، یك چهارضلعی محاط کنید که حداقل ممکن محیط را داشته باشد.

حل. فرض می‌کنیم، چهارضلعی $MNPQ$ را در مستطیل $ABCD$ محاط کرده باشیم (شکل ۹). پاره خط‌های راستی که به‌وسیلهٔ رأس‌های چهارضلعی، روی‌ضلع‌های مستطیل پدید می‌آید، مطابق شکل، نام‌گذاری می‌کنیم. اگر طول مستطیل را a وعرض آن را b بگیریم، داریم:



شکل ۹

$$a_1+a_2=a_3+a_4=a \quad ، \quad b_1+b_3=b_2+b_4=b\ ;$$
$$a_1+a_2+a_3+a_4=۲a \quad ، \quad b_1+b_2+b_3+b_4=۲b$$

اگرمحیط چهارضلعی را با P نشان دهیم، روشن است که

$$P=\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}+\sqrt{a_4^2+b_4^2}$$

وبنابراین، باتوجه به‌نابرابری (۲) داریم:

$$P \geqslant \sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(b_1+b_2+b_3+b_4)^2}=$$
$$=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=2\sqrt{a^2+b^2}=2d$$

یعنی حداقـل محیط چهارضلعی محاطی برابر $2d$ است ووقتی به‌این حداقل می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{a_4}=\frac{a}{b}$$

به‌این ترتیب، هرچهارمثلث واقع درگوشه‌های مستطیل باهم وبا مثلث ABC متشابه می‌شوند، یعنی ضلع‌های روبه‌رو درچهارضلعی $MNPQ$ باهم موازی و، درنتیجه، چهارضلعی $MNPQ$ يك متوازی‌الاضلاع می‌شود.

اگر بخواهیم چهارضلعی را باحداقل محیط درمستطیل به‌قطر d محاط کنیم، باید چهارضلعی را به‌صورت متوازی‌الاضلاع درنظر بگیریم.

۴. نابرابری چه بیشف.

قضیهٔ۴. مـی‌دانیم: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n$ و $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_n$ ثابت‌کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (5)$$

علامت برابری برای $n=1$ یا $x_1=x_2=\dots=x_n$ ویا $y_1=y_2=\dots=y_n$.

اثبات. در واقع، باتوجه به‌شرطهای قضیه، باید ثابت‌کنیم:

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)(y_1+y_2+\dots+y_n)$$

درحالت $n=1$ بـه‌برابری $x_1y_1=x_1y_1$ ودرحالت برابری x_iها وبرابری y_iها به برابری $nx_1y_1=nx_1y_1$ می‌رسیم. در ضمن، در حـالت خاص $n=2$ به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$x_1y_1+x_2y_2 \geqslant \frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

که بعد ازتبدیل‌های لازم، به‌نـابرابری روشن $(x_1-x_2)(y_1-y_2) \geqslant 0$

منجر می‌شود.

برای اثبات نابرابری (۵) درحالت‌کلی، توجه می‌کنیم که برای واسطهٔ حسابی عددهای x_1، x_2، ...، x_n، داریم: $x_1 \geqslant A_n \geqslant x_n$ که در آن

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

بنابراین، مقدار A_n درجایی بین x_1 و x_n قرار دارد:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k \geqslant A_n \geqslant x_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant x_n$$

از این‌جا می‌توان نتیجه‌گرفت

$$(x_i - A_n)(y_i - y_k) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

(اگر $i<k$، آن‌وقت $x_i > A_n$ و $y_i > y_k$ واگر $i>k$، آن وقت $x_i < A_n$ و $y_i < y_k$).

اگر درنابرابری (*)، i را به ترتیب برابر ۱، ۲، ...، n بگیریم و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - A_n)(y_i - y_k) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - A_n \sum_{i=1}^{n} y_i + n A_n y_k - y_k \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$$

ازطرف دیگر داریم:

$$n A_n y_k = y_k (x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$
$$y_k \sum_{i=1}^{n} x_i = y_k (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

یعنی $n A_n y_k = y_k \sum_{i=1}^{n} x_i$ و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - A_n \sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant 0$$

که‌باتوجه به‌مقدار A_n به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

روشن است که حالت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $x_i - A_n = 0$ و یا $y_i - y_k = 0$ که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad \text{یا} \quad y_1 = y_2 = \cdots = y_n$$

یادداشت. درفرض نابرابری چه‌بیشف، می‌توان فرض کرد:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \quad \text{و} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$$

که دراین صورت، بازهم نابرابری به‌قوت خود باقی است.

وقتی‌که دودنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ چنان باشندکه به‌شرط $i<j$ داشته باشیم $x_i \geqslant x_j$ و $y_i \geqslant y_j$ یا $x_i \leqslant x_j$ و $y_i \leqslant y_j$، آن وقت، دودنباله را، متشابه‌الترتیب گویند. بنابراین درشرط نابرابریِ چه‌بیشف، تنها باید دودنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متشابه‌الترتیب باشند. اگر نابرابری چه‌بیشف را، برای دو دنباله‌ای ازعددها بنویسیم که متقابل‌الترتیب باشند (یعنی با فرض $i<j$ داشته باشیم $x_i > x_j$ و $y_i < y_j$ یا $x_i < x_j$ و $y_i > y_j$)، آن‌وقت ممکن است به یك نابرابری نادرست برسیم.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید، برای $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$2n(6^n - 1) \geqslant 5(2^n - 1)(3^n - 1)$$

حل. فرض می‌کنیم $x_i = 2^i$ و $y_i = 3^{i-1}$ و این دودنبالهٔ محدود را درنظر می‌گیریم:

$$2, 4, 8, \ldots, 2^n$$

$$1, 3, 9, \ldots, 3^{n-1}$$

که دودنبالهٔ متشابه‌الترتیب‌اند. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (*)$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2+12+72+\ldots+2^n \cdot 3^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{3}(6+6^2+\ldots+6^n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6(6^n-1)}{6-1} = \frac{2}{5}(6^n-1);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2+4+\ldots+2^n = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2(2^n-1);$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1+3+\ldots+3^{n-1} = \frac{3^n-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^n-1);$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \cdot 2(2^n-1) \cdot \frac{1}{2}(3^n-1) = \frac{(2^n-1)(3^n-1)}{n}$$

واگر مقدارهای حاصل را در نابرابری چه‌بیشف (*) قرار دهیم، به نابرابری مطلوب می‌رسیم. علامت برابری، تنها برای $n=1$ به‌دست می‌آید.

۵. یك نابرابری درمثلث. در مثلث نابرابری‌های زیادی وجود دارد که بعضی از آن‌ها را، ضمن مسأله‌ها و تمرین‌ها آورده‌ایم. ولی یکی از این نابرابری‌ها، تاریخچه جالبی دارد و، به‌همین مناسبت، از آن، دراین بند، به‌طور مستقل یاد می‌کنیم.

قضیهٔ۵. ثابت کنید، درهرمثلث، نابرابری زیر برقرار است:

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3} \qquad (6)$$

که درآن، a، b و c طول ضلع‌ها و S مساحت مثلث است. علامت برابری برای مثلث متساوی‌الاضلاع پیش می‌آید.

اثبات. مثلث غیرمشخص ABC را، با شرط $|BC|=a$، $|AC|=b$ و $|AB|=c$؛ $\hat{A}=\alpha$، $\hat{B}=\beta$ و $\hat{C}=\gamma$ ومساحت S درنظرمی‌گیریم. خط راست AB، صفحه را بـه‌دو نیم صفحه تقسیم می‌کند. روی ضلع AB ودر نیم صفحه‌ای که شامل رأس C است، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC_1 را می‌سازیم. درهر حال خواهیم داشت:

$$|CC_1|^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta-60^\circ)=$$
$$=a^2+c^2-ac(\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta)\ ;$$

که اگر از برابری‌های $\cos\beta=\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ و $\sin\beta=\frac{2S}{ac}$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|CC_1|^2=a^2+c^2-\frac{a^2-b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}=$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}$$

که از آن‌جا، با توجه به‌غیرمنفی بودن طول $|CC_1|$ نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$$

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید، درهرمثلث بازاویه‌های α، β و γ داریم:

$$\cot g\alpha+\cot g\beta+\cot g\gamma\geqslant\sqrt{3}$$

حل. باتوجه به‌برابری‌های $bc=\frac{2S}{\sin\alpha}$، $ac=\frac{2S}{\sin\beta}$ و $ab=\frac{2S}{\sin\gamma}$ داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=b^2+c^2-4S\cot g\alpha,$$
$$b^2=c^2+a^2-4S\cot g\beta\ \ ,\ \ c^2=a^2+b^2-4S\cot g\gamma$$

که ازمجموع آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a^2+b^2+c^2=4S(\cot g\alpha+\cot g\beta+\cot g\gamma)$$

بنابراین، با توجه به‌نابرابری (۶)

$$4S(\cot g\alpha+\cot g\beta+\cot g\gamma)\geqslant 4S\sqrt{3}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\cot g\alpha+\cot g\beta+\cot g\gamma\geqslant\sqrt{3}$$

علامت برابری برای $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع.

□

نابرابری (۶) را می‌توان دقیق‌تر کرد. درسال ۱۹۳۸، دوریاضی‌دان، فینسلر و هادویگر ثابت کردند:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\geqslant ۴S\sqrt{۳}+Q \qquad (۷)$$

که درآن $Q=(a-b)^{۲}+(b-c)^{۲}+(c-a)^{۲}$. این نابرابری را ثابت می‌کنیم.

اثبات نابرابری(۷). مرکز دایره‌های محاطی بیرونی مثلث ABC را I_a، I_b و I_c ومساحت مثلث $I_aI_bI_c$ را S' می‌نامیم (I_a، مرکز دایرهٔ مماس برضلع a (یعنی BC) وامتداد ضلع‌های AB و AC است وغیره).

می‌خواهیم نابرابری (۶) را برای مثلث $I_aI_bI_c$ بنویسیم. برای این منظور، باید مقدارهای S' و $|I_aI_b|^{۲}+|I_bI_c|^{۲}+|I_cI_a|^{۲}$ را پیداکنیم.

اگر ازنقطهٔ I_a، عمود I_aD را برخط راست AB فرودآوریم، روشن است که

$$|AD|=p \quad \text{و} \quad |AI_a|=\frac{p}{\cos\frac{A}{۲}}$$

($p=\frac{a+b+c}{۲}$، نصف محیط مثلث ABC است). ازطرف دیگرتوجه می‌کنیم، دایره‌ای که ازسه رأس مثلث ABC می‌گذرد، همان دایرهٔ ۹ نقطه برای مثلث $I_aI_bI_c$ است، یعنی اگرشعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $I_aI_bI_c$ برابر $۲R$ است. بنابراین، با توجه به‌رابطهٔ سینوس‌ها درمثلث $I_aI_bI_c$ داریم:

$$|I_bI_c|=۴R\sin\widehat{I_cI_aI_b}=۴R\sin\left(۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}\right)=۴R\cos\frac{A}{۲}$$

اگر درمثلث $I_aI_bI_c$، قاعده را I_bI_c بگیریم، پاره خط راست AI_a ارتفاع آن می‌شود، درنتیجه

$$S'=|I_bI_c|\cdot\frac{۱}{۲}|AI_a|=۴R\cos\frac{A}{۲}\cdot\frac{p}{۲\cos\frac{A}{۲}}=۲pR=\frac{۲SR}{r};$$

از طرف دیگر داریم:

$$r_b+r_c=p\left(tg\,\frac{B}{۲}+tg\,\frac{C}{۲}\right)=\frac{p\sin\frac{B+C}{۲}}{\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}}=\frac{۴\,p\cos^۲\frac{A}{۲}}{۴\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}}=$$

$$=\frac{۲(a+b+c)\cos^۲\frac{A}{۲}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{۴R(a+b+c)\cos^۲\frac{A}{۲}}{a+b+b}=۴R\cos^۲\frac{A}{۲}$$

به‌این ترتیب، با توجه به‌مقداری‌که برای $|I_bI_c|$ پیدا کرده‌ایم، داریم:

$$|I_bI_c|^۲=۱۶R^۲\cos^۲\frac{A}{۲}=۴R.۴R\cos^۲\frac{A}{۲}=۴R(r_b+r_c)$$

که اگر مقدارهای مشابه دوضلع‌دیگر مثلث $I_aI_bI_c$ را هم درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$|I_aI_b|^۲+|I_bI_c|^۲+|I_cI_a|^۲=۸R(r_a+r_b+r_c)$$

اکنون می‌توانیم نابرابری (۶) را برای مثلث $I_aI_bI_c$ بنویسیم:

$$|I_aI_b|^۲+|I_bI_c|^۲+|I_cI_a|^۲\geqslant ۴S'\sqrt{۳}$$

از آن‌جا

$$۸R(r_a+r_b+r_c)\geqslant\frac{۸SR\sqrt{۳}}{r}\Longrightarrow ۴r(r_a+r_b+r_c)\geqslant ۴S\sqrt{۳}$$

مقدار سمت چپ نابرابری اخیر را، باتوجه به‌دستورهای

$$r=\frac{S}{p}\ ,\ r_a=\frac{S}{p-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{p-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{p-c}$$

محاسبه می‌کنیم:

$$۴r(r_a+r_b+r_c)=۴\left[\frac{S^۲}{p(p-a)}+\frac{S^۲}{p(p-b)}+\frac{S^۲}{p(p-c)}\right]=$$

$$=۴[(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)]=$$

$$=4[p^2-(b+c)p+bc+p^2-(a+c)p+ac+p^2-$$
$$-(a+b)p+ab]=-4p^2+4ab+4bc+4ca=$$
$$=-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca=a^2+b^2+c^2-$$
$$-[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

از آن‌جا، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

(علامت برابری، برای $a=b=c$) که همان نابرابری فینسلر- هادویگر است.

۶. محاسبهٔ حداکثر. در یادداشت پایان اثبات اول نابرابری کوشی (§ ۲ از فصل دوم) دیدیم: اگر n عدد مثبت، مجموعی ثابت داشته باشند، حداکثر حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به‌دست می‌آید که این عددها باهم برابر باشند. خود این مقدار حداکثر را، به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد. درواقع، اگر برای مقدارهای مثبت a_1، a_2، ...، a_n داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=A$$

(A، مقداری است ثابت)، آن وقت، بنابرنابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی

$$a_1a_2\cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^n=\frac{A^n}{n^n}$$

یعنی حداکثر حاصل‌ضرب، بر $\frac{1}{n^n}A^n$ است.

این قضیه را می‌توان تعمیم داد:

قضیهٔ ۶. اگر برای کمیت‌های مثبت a_1، a_2، ...، a_n داشته باشیم:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=A$$

(A مقداری ثابت است)، آن وقت حداکثر مقدار $a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \dots a_n^\gamma$ وقتی به‌دست می‌آید که کمیت‌های a_1، a_2، ...، a_n با توان‌های خود متناسب باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\dots=\frac{a_n}{\gamma}$$

اثبات. مقدارهایی از a_1، a_2، ...، a_n که حاصل‌ضرب $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_n^{\gamma}$ را به‌حداکثر برسانند، حاصل‌ضرب $\frac{a_1^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{a_2^{\beta}}{\beta^{\beta}}\dots\frac{a_n^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}}$ را هم به‌حداکثر خود می‌رسانند و برای عبارت اخیر، باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های هندسی و حسابی داریم:

$$\frac{a_1^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{a_2^{\beta}}{\beta^{\beta}}\dots\frac{a_n^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}}=\underbrace{\frac{a_1}{\alpha}\cdot\frac{a_1}{\alpha}\dots\frac{a_1}{\alpha}}_{\text{مرتبه } \alpha}\cdot\underbrace{\frac{a_2}{\beta}\cdot\frac{a_2}{\beta}\dots\frac{a_2}{\beta}}_{\text{مرتبه } \beta}\dots$$

$$\dots\underbrace{\frac{a_n}{\gamma}\cdot\frac{a_n}{\gamma}\dots\frac{a_n}{\gamma}}_{\text{مرتبه } \gamma}\leqslant\left(\frac{\alpha\cdot\frac{a_1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{a_2}{\beta}+\dots+\gamma\frac{a_n}{\gamma}}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=\left(\frac{A}{\alpha+\beta+\dots+\gamma}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\gamma}=M$$

به‌این ترتیب، حداکثرمقدار $a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\dots a_n^{\gamma}$ برابر $M\cdot\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\dots\gamma^{\gamma}$ است و وقتی به‌این حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}=\dots=\frac{a_n}{\gamma}$$

مسألهٔ ۲۱. به‌شرط $x\geqslant -1$، حداکثرمقدار $y=(13-x)^3\sqrt{1+x}$ را پیداکنید.

حل. داریم $y=(13-x)^3(1+x)^{\frac{1}{2}}$. مجموع پایه‌ها برابر $14=(13-x)+(1+x)$ مقداری است ثابت، بنابراین عبارت y وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{13-x}{3}=\frac{1+x}{\frac{1}{2}}\Longrightarrow x=1 \text{ و } y_{Max}=12\sqrt[3]{4}$$

مسألهٔ ۲۲. ازصفحه‌ای دایره‌ای‌شکل،قطاعی با زاویهٔ مرکزی α درجه جداکرده و با باقی‌ماندهٔ دایره، مخروطی ساخته‌ایم. α را چند درجه بگیریم تا حجم مخروط حاصل، حداکثرمقدارممکن باشد.

حل. طول کمان قطاع بزرگتر، که مخروط را با آن ساخته‌ایم، x می‌گیریم. این کمان، محیط قاعدهٔ مخروط را تشکیل می‌دهد، بنابراین شعاع قاعدهٔ مخروط، برابر $\frac{x}{2\pi}$ وارتفاع مخروط، برابر $\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}$ یا $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2-x^2}$ می‌شود (R، شعاع دایرهٔ اصلی و، درضمن، مولد مخروط است). به‌این ترتیب، مقدار V، حجم مخروط، برابر است با

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2-x^2}=\frac{1}{24\pi^2}\ x^2(4\pi^2R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

واین مقدار، با توجه به‌ثابت بودن مجموع x^2 و $4\pi^2R^2-x^2$، وقتی به حداکثرخود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{1}=\frac{4\pi^2R^2-x^2}{\frac{1}{2}} \quad \text{یا} \quad x=2\pi R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

به‌این ترتیب، زاویهٔ α باید برابر $2\pi R\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ رادیان ویا، به تقریب، برابر ۶۶ درجه و۳۰ دقیقه انتخاب شود.

۷. محاسبهٔ حداقل. اگر a_1، a_2، ...، a_n کمیت‌هایی مثبت باشند و،در ضمن، حاصل‌ضرب آن‌ها، مقداری ثابت باشد:

$$a_1a_2\cdots a_n=P$$

(P مقدارثابتی است)،آن وقت باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=n\sqrt[n]{P}$$

یعنی با شرط ثابت بودن حاصل‌ضرب چندکمیت مثبت، حداقل مجموع آن‌ها برابر $n\sqrt[n]{P}$ است ووقتی به‌دست می‌آید که‌داشته‌باشیم: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

مسألهٔ ۲۳. می‌خواهیم یك لوزی، بر دایره‌ای بـه‌شعـاع R محیط کنیم. لوزی را چگونه بگیریم تا مساحت آن، حداقل مقدارممکن باشد؟

حل. اگر قطرهای لوزی محیطی را رسم کنیم، چهارمثلث قائم‌الزاویهٔ بامساحت‌های برابر به‌دست می‌آید. برای این‌که مساحت لوزی حداقل باشد، باید مساحت یکی از این مثلث‌ها، به‌حداقل خود برسد. وتر این مثلث، ضلع لوزی است‌که به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس به‌دوپاره خط راست تقسیم شده است. اگر این دوپاره خط راست را به‌طول‌هـای x_1 و x_2 و زاویه‌ای ازلوزی راکـه مجاور x_1 است با 2α نشان دهیم، داریم:

$$x_1 = R\, cotg\alpha \quad , \quad x_2 = R\, tg\alpha$$

بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ با وتر $x_1 + x_2$ چنین است:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (tg\alpha + cotg\alpha)$$

حاصل‌ضرب $tg\alpha\, cotg\alpha$، مقداری ثابت وبرابرواحد است، بنابراین مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه داشته باشیم: $tg\alpha = cotg\alpha$ که، با توجه به‌شرط $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$، به‌دست می‌آید $\alpha = \frac{\pi}{4}$ یا $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. یعنی لوزی باید به‌صورت‌یك مربع درآید.

قضیه‌ای راکـه دربالا، دربارهٔ حداقل مجموع، آوردیم، می‌توان تعمیم داد.

قضیهٔ ۷. به شرط مثبت بودن کمیت‌های a_1، a_2، ...، a_n وبه‌شرطی کـه حاصل‌ضرب $a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\gamma$ مقداری ثابت باشد، مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{\alpha} = \frac{a_2}{\beta} = \dots = \frac{a_n}{\gamma}$$

اثبات. $a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n^\gamma$، همزمان با $\left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{a_2}{\beta}\right)^\beta \dots \left(\frac{a_n}{\gamma}\right)^\gamma$، مقداری

ثابت است. ولی حاصل‌ضرب اخیر شامل α عامل $\frac{a_1}{\alpha}$، β عامل $\frac{a_2}{\beta}$، ...، γ عامل $\frac{a_n}{\gamma}$ است که مجموع آن‌ها، چنین است

$$\alpha \cdot \frac{a_1}{\alpha}+\beta \cdot \frac{a_2}{\beta}+ \dots +\gamma \cdot \frac{a_n}{\gamma}=a_1+a_2+ \dots +a_n$$

یعنی این مجموع، وقتی حداقل می‌شود که آن عامل‌ها باهم برابر باشند:

$$\frac{a_1}{\alpha}=\frac{a_2}{\beta}= \dots =\frac{a_n}{\gamma}$$

مسألهٔ ۲۴. از بین مخروط‌های با حجم ثابت، سطح جانبی کدامیک، کمترین مقدار ممکن است؟

حل. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را x بگیریم، ارتفاع آن برابر $\frac{3V}{\pi x^2}$ می‌شود و برای مولد آن (l) داریم:

$$l^2=x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4} \Longrightarrow l=\sqrt{x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4}}$$

(V را حجم ثابت مخروط گرفته‌ایم). بنابراین، سطح جانبی مخروط چنین است:

$$S=2\pi x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{9V^2}{\pi^2 x^4}} \Longrightarrow S^2=\pi^2 x^4+\frac{9V^2}{x^2}$$

چون حاصل‌ضرب $\pi^2 x^4 \cdot \left(\frac{9V^2}{x^2}\right)^2$، مقداری است ثابت، بنابراین S^2 (و در نتیجه، S) وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\pi^2 x^4=\frac{9V^2}{2x^2} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

۸. نابرابری ین‌سن. نابرابری ین‌سن، در اساس، برای نابرابری‌های مثلثاتی است. ولی پیش‌از آن‌که به آن بپردازیم، نابرابری‌های ساده‌ای از مثلثات را یادآوری می‌کنیم.

قضیهٔ ۸. درستی نابرابری‌های زیر را ثابت‌کنید:

$$۱)\quad \sin\alpha+\sin\beta\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ,\ (۰\leqslant\alpha\ ،\ \beta\leqslant\pi)$$

$$۲)\quad \cos\alpha+\cos\beta\leqslant ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ,\ \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant\alpha\ ،\ \beta\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$۳)\quad tg\alpha+tg\beta\geqslant ۲tg\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ,\ \left(۰\leqslant\alpha\ ،\ <\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$۴)\quad cotg\alpha+cotg\beta\geqslant ۲cotg\frac{\alpha+\beta}{۲}\ ,\ \left(۰<\alpha\ ،\ \beta\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

اثبات. ۱) وقتی $۰\leqslant\alpha\ ،\ \beta\leqslant\pi$، آن وقت $-\frac{\pi}{۲}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant\frac{\pi}{۲}$ ودر نتیجه $\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\geqslant ۰$. داریم:

$$\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

زیرا $۰\leqslant\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant ۱$. روشن است‌که علامت برابری، برای $\alpha=\beta$ پیش می‌آید.

۲) کافی است درنابرابری $\sin\alpha+\sin\beta\leqslant ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}$، به جای α و β به‌ترتیب، $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ و $\frac{\pi}{۲}-\beta$ قرار دهیم تا به نابرابری $\cos\alpha+\cos\beta\leqslant ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$ برسیم.

دراین جا باید نابرابری های $\frac{\pi}{۲}-\alpha\leqslant\pi$ و $\frac{\pi}{۲}-\beta\geqslant ۰$ برقرار

باشند که، در نتیجه، به شرط $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha ، \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ می‌رسیم.

۳) $\alpha > \beta$ و $\lambda = \frac{\alpha+\beta}{2}$ می‌گیریم، یعنی $\alpha - \lambda = \lambda - \beta$ و

$$\sin\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda = \sin\lambda\cos\beta - \cos\lambda\sin\beta \qquad (*)$$

از شرط $\alpha > \beta$ نتیجه می‌شود $\cos\alpha < \cos\beta$ و

$$\cos\alpha\cos\lambda < \cos\beta\cos\lambda \Longrightarrow \frac{1}{\cos\alpha\cos\lambda} > \frac{1}{\cos\beta\cos\lambda} \qquad (**)$$

ازضرب رابطه‌های (۱) و (۲) در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$tg\alpha - tg\lambda > tg\lambda - tg\beta \Longrightarrow tg\alpha + tg\beta > ۲tg\lambda = ۲tg\frac{\alpha+\beta}{2}$$

۴) کافی است درنابرابری $tg\alpha + tg\beta \geqslant ۲tg\frac{\alpha+\beta}{2}$، مقدارهای α و β را به‌ترتیب، به $\frac{\pi}{2} - \alpha$ و $\frac{\pi}{2} - \beta$ تبدیل کنیم.

با آزمایش روشن می‌شود که در هر چهار نابرابری قضیهٔ ۸، علامت برابری، برای $\alpha = \beta$ پیش می‌آید.

قضیهٔ ۸ را می‌توان تعمیم داد و ما دربارهٔ سینوس‌ها، به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.

قضیهٔ ۹. به‌شرط $0 \leqslant \alpha_1 ، \alpha_2 ، \ldots ، \alpha_n \leqslant \pi$ ثابت‌کنید:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n \leqslant n\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \qquad (۸)$$

برابری تنها برای $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

اثبات. اثبات را بااستقرای ریاضی وشبیه استدلالی که کوشی برای نابرابری واسطه‌های حسابی وهندسی آورده بود (اثبات سوم، § ۲ ازفصل دوم) می‌آوریم.

نابرابری (۸)، برای $n = ۲$ درست است (قضیهٔ ۸)؛ ثابت می‌کنیم ،

برای $n=۴$ هم برقرار است. به‌ترتیب داریم:

$$\sin\alpha_۱+\sin\alpha_۲+\sin\alpha_۳+\sin\alpha_۴\leqslant ۲\left(\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}+\sin\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}\right)\leqslant$$

$$\leqslant ۴\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴}{۴}$$

درواقع، به‌این‌مناسبت توانستیم ازنابرابری قضیهٔ ۸، برای دوزاویهٔ $\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}$ و $\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}$ استفاده کنیم که شرط $\pi\geqslant\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}, \frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}\geqslant ۰$ برقرار است (چرا؟).

باهمین روش می‌توان ثابت کرد: اگر نابرابری (۸) برای n برقرار باشد، برای $۲n$ هم برقرار است و، درنتیجه، برای $n=۲^m$ (یعنی وقتی که n برابر توانی از ۲ باشد) برقراراست.

اکنون ثابت می‌کنیم، نابرابری (۸) برای هر n درست است. اگر n برابر توانی از ۲ باشد، حکم ثابت است. درحالتی‌که n برابر توانی از ۲ نیست، کوچکترین توان ۲ را که از n بزرگتر باشد ۲^m می‌نامیم و فرض می‌کنیم $n+q=۲^m$.

n زاویهٔ $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n را باشرط $\pi\geqslant\alpha_i\geqslant ۰$ و q زاویهٔ برابر α را باشرط $\alpha=\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_n}{n}$ درنظر می‌گیریم؛ درضمن توجه می‌کنیم که

$$\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_n+q\alpha}{n+q}=\frac{(n+q)\alpha}{n+q}=\alpha=\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots+\alpha_n}{n}$$

نابرابری (۸) را، برای $n+q=۲^m$ زاویهٔ $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n، $\overbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}^{q \text{ مرتبه}}$ می‌نویسیم:

$$\sin\alpha_۱+\sin\alpha_۲+\cdots+\sin\alpha_n+q\sin\alpha\leqslant$$

$$\leqslant (n+q)\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+q\alpha}{n+q}=(n+q)\sin\alpha$$

که اگر از دوطرف نابرابری، مقدار $q\sin\alpha$ را حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n\leqslant n\sin\alpha=n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n}$$

درضمن، روشن است که علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$$

ازخواننده می‌خواهیم، با همین روش، سه نابرابری دیگر قضیهٔ ۸ را تعمیم دهد وثابت کند:

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\dots+\cos\alpha_n\leqslant$$

$$\leqslant n\cos\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n},\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha_i\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$tg\alpha_1+tg\alpha_2+\dots+tg\alpha_n\geqslant n\,tg\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n},\ \left(0\leqslant\alpha_i<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cotg\alpha_1+cotg\alpha_2+\dots+cotg\alpha_n\geqslant$$

$$\geqslant n\,cotg\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n},\ \left(0<\alpha_i\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

(درهمهٔ موردها، علامت برابری، تنها برای $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n$).

ازاین نابرابری‌ها، به‌سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت که درهرمثلث ABC

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3}=3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ودرهرمثلث بازاویه‌های حاده

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2};\ tg A+tg B+tg C\geqslant 3\sqrt{3};$$

$$cotg A+cotg B+cotg C\geqslant\sqrt{3}$$

(علامت برابری، درهر چهار حالت، برای مثلث متساوی‌اضلاع).

مسالهٔ ۲۵. اگر a، b، و c، طول‌ضلع‌های یك‌مثلث باشند، ثابت کنید:

$$۲abc<(a^۲+b^۲+c^۲)(a+b+c)-۲(a^۳+b^۳+c^۳)\leqslant ۳abc$$

حل. ابتدا چند حکم لازم را ثابت می‌کنیم.

۱) اگر α و β مجموعی برابر یاکوچکتراز $\frac{\pi}{۲}$ داشته باشند، آن‌وقت

$$\sin\alpha\sin\beta\leqslant\frac{۱}{۲}$$

$\sin\alpha$ و $\sin\beta$، مقدارهایی مثبت‌اند، بنابراین باتوجه به نابرابری بین واسطه‌های هندسی وتوافقی داریم:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱}{\sin\beta}}\leqslant\frac{۱}{۲}(\sin\alpha+\sin\beta)\Longrightarrow\sin\alpha\sin\beta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{۱}{۴}(\sin\alpha+\sin\beta)^۲=\frac{۱}{۴}\left(۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)^۲=$$

$$=\sin^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos^۲\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant\sin^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}\leqslant\frac{۱}{۲}$$

۲) نابرابری $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{۳}{۲}$ درهرمثلثی برقرار است (یعنی لازم نیست، هرسه زاویهٔ مثلث حاده باشند). یکی‌از زاویه‌های مثلث ABC، ومثلاً زاویهٔ C را قائمه یامنفرجه می‌گیریم داریم:

$$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\cos A+$$

$$+\cos B-\cos A\cos B+\sin A\sin B=۱+\sin A\sin B-$$

$$-(۱-\cos A)(۱-\cos B)<۱+\sin A\sin B\leqslant\frac{۳}{۲}$$

(چون $\hat{A}+\hat{B}\leqslant ۹۰^\circ$، پس $\sin A\sin B\leqslant\frac{۱}{۲}$ ؛ بخش ۱) را در حل همین مسأله ببینید) . بنابراین ، برای درستی نابرابری

$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$ ، شرط حاده بودن همهٔ زاویه‌های مثلث، لازم نیست.

۳) درهر مثلث، مقدار $\cos A + \cos B + \cos C$، می‌تواند به‌دلخواه بـه واحد نزدیك شود، ولی برابر واحـد (وبه طور طبیعی، کوچکتر از واحد) نمی‌شود، یعنی درهر مثلث‌داریم: $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.

خود نابرابری به سادگی به‌دست می‌آید. درواقع داریم:

$$\cos A + \cos B - (1 - \cos C) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$$

درضمن، اگر فرض‌کنیم $\hat{C} = 90^\circ$، آن وقت $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$ وهرچه زاویهٔ A راکوچکتر بگیریـم، مقدار $\cos A + \cos B + \cos C$ به‌واحدنزدیکتر می‌شود، ولی‌چون زاویهٔ A نمی‌تواندبرابر صفر باشد، این مجموع هم هرگز برابر واحد نمی‌شود.

اکنون به‌حل مسألهٔ ۲۵ می‌پردازیم. درنابرابری‌های

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$$

که درهرمثلث ABC برقرار است، قراردهید (قضیهٔ کسینوس‌ها):

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

بااندکی عمل، نابرابری‌های موردنظر به‌دست می‌آید.

□

حالا دیگر، همه چیز برای بیان واثبات نابرابری پی‌سن آماده‌است .

ابتدا، یك تعریف را ازهندسهٔ تحلیلی به‌یاد می‌آوریم.

تعریف. تابع $f(x)$ را دربازهٔ $[a, b]$ محدب (یادقیق‌تر، با تحدبی به‌سمت yهای مثبت) گویند، وقتی‌که برای هردومقدار α و β ازایـن بازه، داشته باشیم

$$f(\alpha)+f(\beta)\leqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

درحالت عکس، یعنی‌وقتی‌که برای هردومقدار α و β ازبازهٔ $[a, b]$ داشته باشیم:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geqslant ۲f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

تابع $f(x)$ را در این بازهٔ مقعر (یاباتحدبی به‌سمت yهای منفی) گویند.

درهردوحالت، برابری برای $\alpha=\beta$.

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ ین‌سن). اگر $f(x)$ تابعی محدب دربـازهٔ $[a, b]$، و $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n عددهایی حقیقی ازاین بازه باشند، آن وقت

$$f(\alpha_۱)+f(\alpha_۲)+\dots+f(\alpha_n)\leqslant nf\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{n}\right)$$

و در حالت مقعر بودن تابع $f(x)$:

$$f(\alpha_۱)+f(\alpha_۲)+\dots+f(\alpha_n)\geqslant nf\left(\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\dots+\alpha_n}{n}\right)$$

درهردوحالت، علامت برابری، برای $\alpha_۱=\alpha_۲=\dots=\alpha_n$.

اثبات این قضیه را می‌توان بااستقرای ریاضی وکاملا شبیه اثبات قضیهٔ ۹ انجام داد.

به‌کمك نابرابری ین‌سن می‌توان نابرابری‌های زیادی‌رابه‌دست آورد. به‌این چند مثال توجه‌کنید.

مثال ۱. تابع $y=x^۲$ درتمامی نقطه‌های محورعددی مقعراست، زیرا ازنابرابری $f(a)+f(b)\geqslant ۲f\left(\frac{a+b}{۲}\right)$، به‌دست می‌آید:

$$a^۲+b^۲\geqslant ۲\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲\Longrightarrow (a-b)^۲\geqslant ۰$$

که درستی آن روشن است و، درضمن، علامت برابری، تنها برای $a=b$ است.

بنابراین، با توجه به نابرابری ین‌سن برای تابع مقعر، نابرابری زیر، برای عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n درست است:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$$

مثال ۲. تابع $y=\sqrt{x}$، برای $x\geqslant 0$ محدب است (چرا؟). بنابراین برای $a_i\geqslant 0$، این نابرابری درست است:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\leqslant n\sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$$

مثال ۳. تابع $y=\log x$، برای $x>0$ محدب است (چرا؟). بنابراین

$$\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n\leqslant n\log\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right),\ a_i>0$$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت

$$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n,\ a_i>0$$

واین در واقع، همان نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی n عدد مثبت است.

تمرین

۹۱. اندازه‌های یك استخر روباز باحجم V چقدر باشد تا برای رنگ‌کردن دیواره‌ها وکف آن، حداقل رنگ مصرف شود؟

۹۲. از بین همهٔ مکعب مستطیل‌هایی که قطری به‌طول d دارند، کدامیك سطح جانبی بیشتری دارد؟

۹۳. ذوزنقه‌ای بر یك دایره محیط است. ثابت کنید طول قطر دایره، ازواسطهٔ هندسی طول‌های دوقاعدهٔ ذوزنقه تجاوز نمی‌کند. باچه شرطی، طول قطر دایره، باواسطهٔ هندسی طول‌های دوقاعدهٔ ذوزنقه برابرمی‌شود؟

۹۴. از بین همهٔ چهاروجهی‌های $ABCD$، با قاعدهٔ مشترك ABC و

ارتفاع مفروض DH، آن‌را پیدا کنید که مساحت کل آن، حداقل مقدار ممکن باشد.

۹۵. ازدونقطهٔ A و B که در دوطرف خط راست d (واقع برصفحهٔ دونقطه) قرار دارد، دایره‌ای بگذرانید که ازخط راست d، وتری باحداقل طول ممکن جدا کنند.

۹۶. مستطیلی باحداکثرمساحت، دریك بیضی مفروض محاط کنید.

۹۷. روی ضلع‌های مستطیلی بامحیط ثابت، نیم دایره‌هایی به قطر ضلع‌ها و دربیرون مستطیل رسم کرده‌ایم. حداقل مساحت شکل حاصل، برای کدام مستطیل است؟

۹۸. مثلث ABC مفروض است. از رأس A، خط راست d را چنان بگذرانید که مجموع فاصله‌های ازدو رأس B و C تا d، حداقل یا حداکثر مقدار ممکن باشد.

۹۹. زاویهٔ به‌رأس A واندازهٔ α مفروض است. می‌خواهیم دونقطهٔ B و C را روی ضلع‌های زاویه طوری انتخاب کنیم که مساحت مثلث ABC برابر مقدار مفروض S وطول ضلع BC، حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۰۰. a_1، a_2، ...، a_n را عددهایی می‌گیریم که قدرمطلق هرکدام از آن‌ها، ازواحد بزرگتر باشد. ($|a_i|>1$). حداقل مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی این عددها چقدر می‌تواند باشد؟

۱۰۱. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث اند. حداقل $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$ چقدر است؟

۱۰۲. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$$

۱۰۳. می‌دانیم $0^\circ<\alpha، \beta<180^\circ$. حداکثر این عبارت را پیدا کنید:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$$

۱۰۴. A و B برمحیط دایره‌ای مفروض‌اند. نقطهٔ C را روی محیط

دایره چگونه انتخاب کنیم که اولاً مساحت، ثانیاً محیط مثلث ABC حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۰۵. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. مطلوب است حداقل تابع

$$y=\sqrt{x^{۲}+a}+\sqrt{(c-x)^{۲}+b}$$

۱۰۶. برای عددهای مثبت m، n، p و q می‌دانیم: $p<q$ و $m<n$.
حداقل مقدار تابع $y_{۱}=\sqrt{x^{۲}-۲mx+n^{۲}}+\sqrt{x^{۲}-۲px+q^{۲}}$ و
حداکثر مقدار تابع $y_{۲}=\sqrt{x^{۲}+۲mx+n^{۲}}-\sqrt{x^{۲}-۲px+q^{۲}}$ را
پیدا کنید.

۱۰۷. برای عدد مثبت a، ثابت کنید: $۹۹a+۱\geqslant ۱۰۰\sqrt[۱۰۰]{a^{۹۹}}$.

۱۰۸. ثابت کنید:

$$۱)\quad ۲\times۴\times۶\times\ldots\times(۲n)<(n+۱)^{n},$$

$$۲)\quad ۱\times۳\times۵\times\ldots\times(۲n-۱)<n^{n}$$

فصل چهارم

روش‌ها و کاربردها

§ ۱. روش‌های اثبات نابرابری‌ها

همان طور که تا این‌جا دیده‌ایم، از همهٔ روش‌ها و ابزارهای ریاضی می‌توان برای اثبات درستی نابرابری‌ها سود جست. مهم‌ترین و نیرومندترین این‌روش‌ها عبارت‌اند از: روش استقرای ریاضی، برهان‌خلف، روش مجذورهای کامل، روش هندسی، روش‌های هندسهٔ تحلیلی، مشتق، انتگرال،... درمساله‌ها و تمرین‌های گذشته، کم و بیش، از بیشتر این‌روش‌ها استفاده کرده‌ایم. دراین‌جا، تنها به ذکر نمونه‌هایی می‌پردازیم که برای اثبات درستی نابرابری‌ها، از مشتق یا انتگرال استفاده می‌شود.

□

یکی از ساده‌ترین کاربردهای مشتق در اثبات نابرابری‌ها، به ویژگی تابع‌های صعودی یا نزولی و علامت مشتق آن‌ها مربوط می‌شود. قضیهٔ لاگرانژ می‌گوید: اگر تابع f، در هرنقطهٔ بازهٔ I، مشتقی مثبت (منفی) داشته باشد، آن‌وقت f، دراین بازه صعودی (نزولی) است.

نتیجهٔ روشن این قضیه (که درضمن، تعمیم آن است) چنین‌است:

I. اگر دربازهٔ $(a \,،\, b)$، نابرابری $f'(x)<g'(x)$ برقرار باشد؛ در ضمن، تابع‌های f و g درنقطهٔ a پیوسته‌باشند وداشته‌باشیم $f(a)\leqslant g(a)$، آن وقت دربازهٔ $(a \,،\, b)$ داریم: $f(x)<g(x)$.

قضیهٔ اخیر را هم می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

II. اگر در بازهٔ (a, b) داشته باشیم: $f^{(n)}(x)<g^{(n)}(x)$ و، در ضمن، تابع‌های f و g و مشتق‌های متوالی آن‌ها تا مرتبهٔ $(n-1)$، در نقطهٔ a پیوسته باشند و داشته باشیم:

$$f(a)\leqslant g(a),\ f'(a)\leqslant g'(a),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(a)\leqslant g^{(n-1)}(a)$$

آن‌وقت در بازهٔ (a, b) داریم: $f(x)<g(x)$.

این قضیه، به خصوص، برای اثبات نابرابری‌هایی که، ضمن تبدیل تابع‌هایی مثل $\sin x$، $\cos x$، e^{-x}، $\ln(1+x)$ به‌رشتهٔ توانی، به‌دست‌می‌آیند، مفید است.

مثال ۱. ثابت کنید، معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$2x^4-4x^3+3x^2+4x+1=0$$

برای $x>0$ جواب ندارد.

حل. چندجمله‌ای سمت چپ برابری را $f(x)$ می‌نامیم. داریم:

$$f(x)=2x^4-4x^3+3x^2+4x+1,$$

$$f'(x)=8x^3-12x^2+6x+4,$$

$$f''(x)=24x^2-24x+6=6(2x-1)^2\geqslant 0$$

چون $f''(x)$ غیرمنفی است، بنابراین $f'(x)$ صعودی است؛ درضمن $f'(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و داریم $f'(0)=4>0$، بنابراین $f'(x)$، به ازای مقدارهای مثبت x، همیشه مثبت است. یعنی $f(x)$، در بازهٔ $[0, \infty)$ صعودی است و چون $f(0)=1>0$، پس $f(x)$، برای همهٔ مقدارهای مثبت x، مثبت است:

$$2x^4-4x^3+3x^2+4x+1>0 \quad (x>0)$$

ومعادلهٔ $f(x)=0$، ریشهٔ مثبت ندارد.

مثال ۲. به شرط $x>0$، درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg} x$$

حل. فرض می‌کنیم $f(x)=x-\frac{x^3}{3}$ و $g(x)=\operatorname{arctg} x$. داریم:

$$f'(x)=1-x^2,\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

برای $x>0$ داریم $1-x^2<\frac{1}{1+x^2}$، زیرا به‌سادگی منجر به نابرابری روشن $x^4>0$ می‌شود. چون $f'(x)<g'(x)$ و چون $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته‌اند، بنابراین، دربازهٔ $(0, \infty)$ داریم: $f(x)<g(x)$.

□

در § ۲ فصل دوم، هفت روش اثبات، برای درستی نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی آوردیم. اکنون چند اثبات دیگر، که براساس استفاده ازویژگی‌های مشتق قراردارند و، همچنین، اثبات تازه‌ای برای نابرابری ین‌سن، با استفادهٔ ازمشتق می‌آوریم.

۱. اثبات‌هایی برای درستی نابرابری واسطه‌های حسابی و هندسی.

اثبات هشتم. قبلا دونکته را یادآوری کنیم. تابع $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$، برای $x>0$ معین است و درنقطهٔ $x=e$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در واقع داریم:

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x\ ;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

چون $f(x)>0$، پس اگر $f'(x)=0$، آن وقت $\ln x=1$، یعنی $x=e$. در ضمن اگر $x<e$، آن‌وقت $f'(x)>0$ واگر $x>e$، آن وقت $f'(x)<0$.

چون به‌ازای $x=e$، به حداکثر مقدار تابع $f(x)$ می‌رسیم، می‌توان نوشت:

$$f(e)\geqslant f(x)\Longrightarrow e^{\frac{1}{e}}\geqslant x^{\frac{1}{x}}\Longrightarrow e^{x}\geqslant x^{e}\qquad (*)$$

n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n را در نظر می‌گیریم و، طبق معمول، واسطهٔ حسابی آن‌ها را A_n و واسطهٔ هندسی آن‌ها را G_n می‌نامیم. اکنون، در نابرابری (*)، به جای x، به ترتیب $\frac{a_1 e}{G_n}$، $\frac{a_2 e}{G_n}$، ...، $\frac{a_n e}{G_n}$ قرار می‌دهیم. از حاصل‌ضرب نابرابری‌های حاصل، به‌دست می‌آید:

$$e^{\frac{a_1 e}{G_n}+\frac{a_2 e}{G_n}+\dots+\frac{a_n e}{G_n}} \geqslant \left(\frac{a_1 e}{G_n}\cdot\frac{a_2 e}{G_n}\dots\frac{a_n e}{G_n}\right)^e \qquad (**)$$

از آن‌جا که $a_1+a_2+\dots+a_n=nA_n$ و $a_1a_2\dots a_n=G_n^n$، بنابراین، نابرابری (**) به‌این صورت درمی‌آید:

$$e^{\frac{neA_n}{G_n}} \geqslant \left(\frac{e^n G_n^n}{G_n^n}\right)^e = e^{ne}$$

یعنی $\frac{neA_n}{G_n} \geqslant ne$ و از آن‌جا $G_n \geqslant A_n$. علامت برابری تنها وقتی برقرار است که همهٔ مقدارهایی که به‌جای x در (*) گذاشته‌ایم، برابر e باشند، یعنی

$$\frac{a_1 e}{G_n}=\frac{a_2 e}{G_n}=\dots=\frac{a_n e}{G_n}=e \Longrightarrow a_1=a_2=\dots=a_n$$

اثبات نهم. همان طور که در اثبات هشتم دیدیم، برای به‌کار گرفتن ویژگی‌های مشتق در اثبات نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی، باید از یك تابع کمکی یاری گرفت. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{1}{n}G_n\left[\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^x+\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^x+\dots+\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^x\right]=$$

$$=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x$$

روشن است که، در این صورت داریم:

$$f(1)=\frac{1}{n}G_n\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{G_n}\right)=$$

$$=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=A_n;$$

$$f(0)=\frac{1}{n}G_n(1+1+\dots+1)=G_n$$

به‌این ترتیب، باید ثابت کنیم: $f(1)\geqslant f(0)$.

از تابع $f(x)$، دوبار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{1}{n}G_n\left[\left(\frac{a_1}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_1}{G_n}\right)+\left(\frac{a_2}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_2}{G_n}\right)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_n}{G_n}\right)\right]=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x\ln\left(\frac{a_i}{G_n}\right)\right];$$

$$f''(x)=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x\cdot\ln^2\left(\frac{a_i}{G_n}\right)\right]$$

بنابراین روشن است که

$$f'(0)=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{a_i}{G_n}\right)=\frac{1}{n}G_n\ln\frac{a_1a_2\dots a_n}{G_n^n}=$$

$$=\frac{1}{n}G_n\ln 1=0;\quad f''(x)\geqslant 0$$

چون f'' دربازهٔ $[0,\infty)$ غیرمنفی است، بنابراین f' دراین بازه، صعودی است؛ ولی $f'(0)=0$، یعنی $f'(x)$ در بازهٔ $[0,\infty)$ غیرمنفی است و این، به‌معنای آن است که تابع $f(x)$، دراین بازه صعودی است و باید داشته باشیم: $f(1)\geqslant f(0)$.

۴. اثبات نابرابری ین‌سن به‌کمک مشتق

$f(x)$ را تابعی می‌گیریم که دربازهٔ (a,b) تقعری به‌سمت yهای منفی داشته باشد، یعنی دراین‌بازه داشته باشیم $f''(x)<0$. بنابراین $f(x)$ در بازهٔ (a,b) نزولی است. اکنون، بافرض $a<x_i<b$ و $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ،

این تابع رادرنظرمی‌گیریم:

$$g(x)=f(x)-xf'(A)$$

برای مشتق این تابع داریم: $g'(x)=f'(x)-f'(A)$. چون $f'(x)$ نزولی است، $g'(x)$ هم نزولی می‌شود؛ درضمن در نقطهٔ $x=A$ داریم $g'(A)=0$، یعنی $g(x)$ در نقطهٔ $x=A$ به حداکثر مقدار خود، دربازهٔ (a, b)، می‌رسد. به‌این ترتیب

$$f(x)-xf'(A)\leqslant f(A)-Af'(A)$$

اکنون، اگر دراین نابرابری، به‌ترتیب، مقدارهای x_1، x_2، ...، x_n را به‌جای x قرار دهیم $(a<x_i<b)$ ونابرابری‌های حاصل راباهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)-(x_1+x_2+\dots+x_n)f'(A)\leqslant$$
$$\leqslant nf(A)-nAf'(A)$$

که باتوجه به برابری $x_1+x_2+\dots+x_n=nA$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)$$

۳. یاری انتگرال به‌اثبات نابرابری‌ها

استفادهٔ از مفهوم انتگرال در اثبات نابرابری‌ها، براساس قضیهٔ ساده وروشن زیراست.

تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ دربازهٔ $[a, b)$ پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم، همه جا، دراین بازه داشته باشیم: $f(x)\leqslant g(x)$. دراین صورت، به شرط $x\in[a, b)$ داریم:

$$\int_a^x f(t)dt\leqslant\int_a^x g(t)dt$$

اگر بدانیم، برای مقداری مثل x_0 از بازهٔ $[a, b)$، نابرابری اکید $f(x_0)<g(x_0)$ برقرار باشد، آن وقت برای $x>x_0$ و $x\in[a, b)$،

خواهیم داشت.

$$\int_a^x f(t)dt < \int_a^x g(t)dt$$

بنابراین، اگر قرار باشد، نابرابری $F(x) \leqslant G(x)$ $(a \leqslant x < b)$ را ثابت کنیم، می‌توان، ابتدا نابرابری متناظر آن را برای $f(x) = F'(x)$ و $g(x) = G'(x)$ ثابت کرد که، دراین صورت، خواهیم داشت:

$$\int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$$

سمت چپ وسمت راست نابرابری اخیر یا، به ترتیب، منطبق بر $F(x)$ و $G(x)$ هستند، و یا با آن‌ها در مقدار ثابتی اختلاف دارند. به‌مثال بپردازیم.

مثال. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱ - \frac{x^۲}{۲!} \leqslant \cos x \leqslant ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!}$$

حل. می‌دانیم، برای $۰ \leqslant x < \infty$ داریم $\sin x \leqslant x$. بنابراین

$$\int_۰^x \sin t dt \leqslant \int_۰^x t dt$$

که از آن جا به‌دست می‌آید:

$$-\cos t \Big|_۰^x \leqslant \frac{۱}{۲} t^۲ \Big|_۰^x \Rightarrow -\cos x + ۱ \leqslant \frac{x^۲}{۲}$$

یعنی $\cos x \leqslant ۱ - \frac{x^۲}{۲}$. نابرابری سمت چپ ثابت شد.

اگر ازهمین نابرابری،که ثابت کردیم، استفاده کنیم، باید داشته باشیم:

$$\int_۰^x \cos t dt \geqslant \int_۰^x \left(۱ - \frac{t^۲}{۲}\right) dt$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $\sin x \geqslant x - \frac{x^۳}{۳!}$ (که خود، یك نابرابری جالب

است). با توجه به نابرابری اخیر، داریم:

$$\int_{\circ}^{x} \sin t\,dt \geqslant \int_{\circ}^{x}\left(t-\frac{t^{3}}{3!}\right)dt \Longrightarrow \cos x \leqslant 1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}$$

§۲. کاربردها

نیازی به بحث طولانی دربارهٔ کاربرد نابرابری‌ها نیست. ضمن مساله‌ها، مثال‌ها، وتمرین‌ها دیدیم که، به‌کمك نابرابری‌ها، می‌توان کمیت‌هارا ارزیابی کرد، حداکثر یاحداقل تابع‌ها رابه‌دست آورد، ضریب‌های معادله را به‌دست آورد، وجود یا عدم وجود ریشه را برای معادله‌ها پیش‌بینی کرد، در حل مساله‌های هندسی توانا‌تر بود،...

مثال ۱. ثابت کنید: $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

حل. به‌کمك این‌نابرابری، می‌توان مقدار بعضی لگاریتم‌هارا ارزیابی کرد. مثلاً، برای $\ln 1/01$ به‌دست می‌آید: $\frac{1}{101}<\ln 1/01<\frac{1}{100}$.

برای اثبات، ازنابرابری

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(فصل اول را ببینید) استفاده می‌کنیم. ازاین‌نابرابری، با لگاریتم گرفتن به‌دست می‌آید:

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

که از نابرابری سمت چپ آن بـه دست می‌آیـد $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ واز نابرابری سمت راست آن $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$، یعنی

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

مثال۲. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را با این تعریف در نظر می‌گیریم:

$$a_1=1+\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6},$$

$$a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\ \dots,\ a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$$

مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

حل. از نابرابری سمت راست مثال قبلی، به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

واز نابرابری سمت چپ آن، با تبدیل n به $n-1$:

$$\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$$

به‌این ترتیب: $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$.

اگر در این نابرابری‌ها، n را به ترتیب بـه $n+1$، $n+2$، ...، $2n$ تبدیل کنیم، این نابرابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1}$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2}<\frac{1}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}$$

ازمجموع این نابرابری‌ها، باتوجه به ویژگی مجموع لگاریتم‌هــا (مجموع لگاریتم‌های چند عدد برابر است بــا لگاریتم حاصل‌ضرب آن‌ها) ، پس از ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{۲n+۱}{n}<a_n<\ln\frac{۲n}{n-۱}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{۲n+۱}{n}=۲\quad,\quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{۲n}{n-۱}=۲$$

درنتیجه، روشن است‌که $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ a_n=\ln ۲$ یا

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}+\dots+\frac{۱}{۲n}\right)=\ln ۲$$

مثال۳. این مجموع را محــاسبه‌کنید (مجموع جمله‌هــای یك رشتــهٔ نامتناهی):

$$S=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\dots+(-۱)^{n-۱}\cdot\frac{۱}{n}+\dots$$

حل. مجموع‌های جزئی این رشته را درنظرمی‌گیریم:

$$x_۱=۱\ ,\ x_۲=۱-\frac{۱}{۲}\ ,\ x_۳=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\ ,\dots$$

$$\dots,\ x_n=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$$

به‌این ترتیب: $S=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ x_n$. به‌ترتیب داریم:

$$x_{۲n}=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n}=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{۱}{۲n}\right)-۲\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\dots+\frac{۱}{۲n}\right)=\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲n}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

بنابراین، $x_{2n}=a_{2n}-\frac{1}{n}$ که، در آن

$$a_{2n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

که باتوجه به‌مثال ۲، به‌دست می‌آید $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\ln 2$. به‌همین ترتیب

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$$

بنابراین $S=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2$.

مجموع S، یك رشتهٔ متقارب را تشکیل می‌دهد، زیرا حدآن برابر مقدار معین $\ln 2$ است.

یادداشت. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که رشتهٔ توافقی، یعنی

$$\sum_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

متباعد است، یعنی وقتی $n\to\infty$، به‌سمت حد معینی میل نمی‌کند. درواقع، اگر درنابرابری

$$\frac{1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}$$

(مثال ۲ را ببینید)، به‌ترتیب عددهای ۱، ۲،...، n را به‌جای n قراردهیم و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\sum_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$$

ودرنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_n>\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$.

تمرین

درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱۰۹. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ $(x>a>0)$.

۱۱۰. $(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}\geqslant 2$ ($|x|<1$ و $0\leqslant\alpha\leqslant 1$).

۱۱۱. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n}<\frac{a^{n}+b^{n}}{2}$ ($a>b>0$ و $a\neq b$).

۱۱۲. $\ln(1+x)<x$ $(x>0)$.

۱۱۳. $e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$ $(0<x<1)$.

۱۱۴. $1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ $(x>0)$.

۱۱۵. $e^{-x}>1-x$ $(x<0)$.

۱۱۶. $x+\frac{x^{3}}{3}<tg\,x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

۱۱۷. $x-\frac{x^{3}}{3!}<\sin x<x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}$ $(x>0)$.

۱۱۸. $x-\frac{x^{2}}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}$ $(x>0)$.

۱۱۹. ثابت کنید: $\int_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x}dx>\frac{8}{9}$.

۱۲۰. ثابت کنید، به‌شرط $\alpha>1$، این رشته متقارب است

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\dots$$

۱۲۱. برای $x\geqslant 0$ ثابت کنید: $\ln(1+x)\geqslant\frac{2x}{x+2}$.

۱۲۲. برای $x \geqslant 0$ ثابت کنید: $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

۱۲۳. برای $n \in \mathbf{Z}$، مطلوب است n، به‌شرطی‌که داشته باشیم:

$$2n + 3 < \ln(n^3 + 9)$$

۱۲۴. آیا برای x در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ می‌توان مقداری پیدا کرد که در نابرابری زیر صدق کند:

$$3x - tg\,x > \frac{7}{4}$$

۱۲۵. کدام بزرگترند:

۱) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ یا $2\sqrt[3]{3}$؛

۲) $\log_4 5$ یا $\log_5 6$؛

۳) 1000^{1001} یا 1001^{1000}؛

۴) $\cos 1370$ یا $1 + \cos 1371$؛

۵) $4 tg 5^\circ tg 9^\circ$ یا $3 tg 6^\circ tg 10^\circ$؛

۶) $\sin^3 1^\circ + \sin^3 4^\circ$ یا $\sin^3 2^\circ + \sin^3 3^\circ$؟؛

۷) محیط مثلث یا مجموع میانه‌های آن؛

۸) $7^7 \sin^4\alpha \cos^{10}\alpha$ یا 12500 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$؛

۹) 21^{23} یا 23^{21}

۱۰) 555^{553} یا 553^{555}؛

۱۱) $e^e \pi^\pi$ یا $e^{2\pi}$؛

۱۲) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ یا $\sqrt{x}$؛

۱۳) $\frac{tg\,x}{x}$ یا $\frac{x}{\sin x}$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$؛

۱۴) $tg11^\circ$ یا $\frac{1}{5}$

۱۵) $\int_{-2}^{3} \operatorname{arc} tg x dx$ یا $\int_{-3}^{2} \operatorname{arc} tg x dx$

۱۲۶. به‌شرط $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید:

$$x - \sin x \leqslant 1 - \cos x \leqslant x\sqrt{2} - \sin x$$

۱۲۷. به‌شرط $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$، ثابت کنید:

$$\ln(2\sin x) > \frac{1}{2}x(\pi - x) - \frac{5}{72}\pi^2$$

۱۲۸. به‌شرط $x \geqslant 0$ ، ثابت کنید:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant$$
$$\leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

۱۲۹. به‌شرط $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$، ثابت کنید:

$$\ln \cos x \leqslant -\frac{1}{2}x^2$$

۱۳۰. به‌شرط $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$، ثابت کنید:

$$\sin x \leqslant \frac{1}{2}x(\pi - x)$$

۱۳۱. به‌شرط $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$، ثابت کنید:

$$\cos x + \ln \cos x \leqslant 1 - x^2$$

۱۳۲. می‌دانیم $a<\sqrt{N}<a+1$. ثابت کنید:

$$\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}<\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۱۳۳. می‌دانیم $a<\sqrt[3]{N}<a+1$. ثابت کنید:

$$\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}<\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{2(a+1)^3+N}$$

۱۳۴. می‌دانیم دو ریشه ازمعادلهٔ با ضریب‌های درست

$$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\dots+A_1x+A_0=0$$

$x_1=1$ و $x_2=2$ است. ثابت کنید، دست کم یکی از ضریب‌های A_i $(i=0,1,2,\dots,n)$ از ۲ — تجاوز نمی‌کند.

۱۳۵. به‌شرط $x\geqslant 0$، ثابت کنید:

$$\frac{2x}{x+2}\leqslant \ln(x+1)\leqslant\frac{2(x+1)}{x+3}$$

۱۳۶. عددی طبیعی، دارای دومقسوم‌علیه اول است؛ درضمن با نصف مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های خود، برابرشده است. همهٔ این‌گونه عددها را پیدا کنید.

۱۳۷. ثابت کنید، برای عدد طبیعی $n\geqslant 2$، داریم:

$$\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdots\frac{n^3+1}{n^3-1}<\frac{3}{2}$$

۱۳۸. می‌دانیم a_0، a_1، ...، a_{2n}، a_{2n+1} عددهایی مثبت‌اند و، در ضمن، به‌همین ردیف، تشکیل یك تصاعد حسابی صعودی می‌دهند. ثابت کنید:

$$\frac{n}{a_1a_{2n+1}}<\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\frac{n}{a_0a_{2n}}$$

۱۳۹. حداقل حجم مخروطی را پیدا کنید که برکرهٔ مفروضی محیط شده است.

۱۴۰. درهرم $SABC$ می‌دانیم: $|AB|=|AC|=|SB|=|SC|$ و $|SA|=|BC|$. مساحت مثلث ABC، برابر است با ۱. زاویهٔ $\widehat{BAC}$ چقدر باشد تاحجم هرم، به‌حداکثرمقدارخود برسد؟

۱۴۱. درهرم منتظمی بـا قاعدهٔ مثلثی، هریال جانبی برابر ۱، وزاویهٔ دو وجهی مجاورقاعده، برابر α است. بـه‌ازای چه مقداری از α، حجم هرم به‌حداکثرمقدارخود می‌رسد؟

۱۴۲. درهرم $SABCD$، یـال SD برقـاعدهٔ $ABCD$ عمود است، می‌دانیم $ABCD$ یك مستطیل است و $|BC|=|SC|=۱$ و $\widehat{SBA}=\alpha$. حداکثر حجم هرم به‌ازای چه مقداری از α به‌دست می‌آید؟

۱۴۳. درچهـار وجهـی $SABC$ مـی‌دانـیـم: $|AB|=|BC|$، $\widehat{ABC}=۲\alpha$. هریال جانبی هرم، با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α می‌سازد وطولی برابر ۱ دارد. به‌ازای چـه مقداری از α، حداکثرحجم برای چهار-وجهی به‌دست می‌آید؟

۱۴۴. درمثلث قائم‌الزاویـهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$ می‌دانیم $\hat{A}=۶۰^\circ$. مثلث متساوی‌الاضلاعی دراین‌مثلث محاط کنیدکه طول ضلع آن، حداقل‌مقدار ممکن‌باشد (رأس‌های‌مثلث‌محاطی، روی‌ضلع‌های‌مختلف مثلث ABC است).

۱۴۵. می‌دانیم $\log_{\frac{۱}{۲}} a \cdot \log_{\frac{۱}{۲}} b = ۱$ و $۰<a، b<۱$. حداقـل و حداکثرمقدار ab چقدرمی‌تواند باشد؟

۱۴۶. می‌دانیـم $x+y+z=۲$ و $xy+xz+yz=۱$. ثـابت کنید، هریك ازعددهای x، y و z به‌بازهٔ $\left[۰، \frac{۴}{۳}\right]$ تعلق دارند.

۱۴۷. مطلوب است حداقل تابع $y=\dfrac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($a>b>۰$ و $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$).

۱۴۸. مطلوب است حـداکثـر تـابـع $y=a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}$ ($a، b>۰$ ؛ $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$).

۱۴۹. مطلوب است حداقل مقدار تابع $f(x,y)=\frac{y}{x}$ در مجموعهٔ نقطه‌های (x,y)، که در معادلهٔ $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$ صدق کنند.

۱۵۰. با شرط $x^4+y^4=1$، به ازای چه عددهای x و y، مقدار x^9+y^9 به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۱۵۱. مطلوب است حداقل مقدار تابع $y=ax^m+\frac{b}{x^n}$، برای عددهای مثبت x ($a,b>0$؛ m و n عددهایی طبیعی).

۱۵۲. می‌دانیم $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=1$، $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i=1$ و $a_i>0$ ، $b_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. ثابت کنید $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 1$

۱۵۳. مسیرهای AB و CB درنقطهٔ B به‌هم رسیده‌اند وباهم زاویه‌ای برابر β ساخته‌اند؛ درضمن $|AB|=a$. متحرکی از A به‌طرف B با سرعت v_1، و همزمان با او، متحرك دیگری از B به طرف C با سرعت v_2 به‌راه افتادند. بعدازچه مدت، فاصلهٔ بین آن‌ها، به‌حداقل مقدارخود می‌رسد؟

۱۵۴. مقطع عرضی یك کانال آب، به‌شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی است که مساحتی برابر S و زاویهٔ مجاورقاعدهٔ بزرگتر برابر α دارد. عمق کانال چقدر باشد تا مقاومت اصطکاك جدارکانال درمقابل آب، حداقل مقدارممکن باشد؟

۱۵۵. n عددی طبیعی است؛ مطلوب است حداقل مقدار تابع

$$f(x)=\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n+\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n$$

۱۵۶. می‌دانیم: $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}<\cdots<a_n$. ثابت کنید:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n}{n-k}$$

۱۵۷. می‌دانیم $x+y+z=a$ و $xy+xz+yz=b$. ثابت کنید:

$$\max(x, y, z)-\min(x, y, z)\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{a^2-3b}$$

۱۵۸. ثابت کنید، برای $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{2}{\alpha}(1-\cos\alpha)<(2-\sqrt{2})\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha$$

۱۵۹. ثابت کنید: $\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\leqslant\frac{1}{2}(\cot g^2\alpha+\cot g^2\beta)$

۱۶۰. مطلوب است، حداقل مقدار تابع

$$y=(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)+9$$

۱۶۱. با فرض $0<x<\frac{\pi}{2}$، ماکزیمم ومی‌نیمم تابع $y=\frac{tg3x}{tg^3x}$ را پیدا کنید.

۱۶۲. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث وزاویه‌هایی حاده‌اند. ثابت کنید:

$$1)\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{8};\quad 2)\ \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geqslant 6;$$

$$3)\ tg^2\alpha+tg^2\beta+tg^2\gamma\geqslant 9$$

۱۶۳. روی صفحهٔ مختصاتی، نقطه‌های با مختصات درست را علامت گذاشته‌ایم. مربعی‌که شامل هیچ‌کدام از این نقطه‌ها نباشد، حداکثر چه مساحتی دارد؟

۱۶۴. باروش استقرای ریاضی ثابت کنید ($n\in\mathbf{N}$):

۱) $2^n>n^2$ $(n\geqslant 5)$؛ ۲) $2^n>n^3$ $(n\geqslant 10)$؛

۳) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n>1)$؛

۱۶۵. قطاعی ازدایرهٔ به‌شعاع R مفروض است. اگرزاویهٔ مرکزی این

قطاع برابر α باشد، مستطیلی در آن محاط کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

۱۶۶. a، b و c طول ضلع های یك مثلث غیرمشخص‌اند. ثابت کنید:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$$

علامت برابری مربوط به‌چه مثلثی است؟

۱۶۷. یك چهارضلعی درعین حال می‌تواند دریك دایـره محاط بـر دایرهٔ دیگری محیط شود. اگر p نصف محیط و S مساحت آن باشد، ثـابت کنید $p^2\geqslant 4S$.

۱۶۸. α، β و γ زاویه های یك مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\leqslant \cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

۱۶۹. باشرط $0<x<\frac{\pi}{2}$، ثابت کنید: $2^{\sin x}+2^{tg x}\geqslant 2^{x+1}$.

۱۷۰. باشرط $b>a>1$ و $h>0$ ثابت کنید:

$$\log_a b>\log_{a+k}(b+k)$$

۱۷۱. نقطهٔ C روی پاره‌خط راست AB داده شده‌است. نیم‌دایره‌هایی دریك‌طرف خط‌راست AB و، به‌ترتیب، به‌قطرهای $|AB|$، $|AC|$ و $|CB|$ رسم کرده‌ایم. اگرشعاع دایره‌ای راکه براین سه نیم دایـره مماس است، R بگیریم، ثابت کنید: $R\leqslant\frac{1}{6}|AB|$.

۱۷۲. شرط لازم و کافی، برای این‌که هرسه زاویهٔ مثلث ABC حـاده باشند، این است‌که داشته باشیم: $tg\hat{A}tg\hat{B}>1$.

۱۷۳. n عددی است طبیعی، ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n}+\dots+\sqrt[2n-1]{n}\geqslant\sqrt[n]{n^2}$$

۱۷۴. برای متغیرهای x، y، z و t می‌دانیم:

$$1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant t \leqslant 100$$

حداقل مقدار $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ چقدر است؟

۱۷۵. x، y و z عددهایی دلخواه و مثبت، و α، β، γ زاویه‌های یک مثلث‌اند. ثابت کنید:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2yx\cos\gamma$$

۱۷۶. چهاروجهی $ABCD$ درکره‌ای به‌مرکز O وشعاع برابر R محاط شده‌است. خطهای راست AO، BO، CO و DO را رسم کرده‌ایم تا وجه‌های متناظر رادرنقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 قطع کنند، ثابت کنید:

$$|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1| \geqslant \frac{16}{3}R$$

۱۷۷. تابع $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\dots+a_n\sin nx$ داده شده‌است ومی‌دانیم، $a_i\in\mathbf{R}$ $(i=1, 2, \dots, n)$، $n\in\mathbf{N}$ و $|f(x)| \leqslant |\sin x|$ (برای هر $x\in\mathbf{R}$). ثابت کنید: $|a_1+2a_2+\dots+na_n| \leqslant 1$.

۱۷۸. a_1، a_2، ...، a_n عددهایی مثبت و b_1، b_2، ...، b_n ترتیب دلخواهی ازهمان عددهاست. ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n} \geqslant n$$

۱۷۹. ازیك صفحهٔ کاغذ مربعی شکل به‌ضلع برابر a، گستردهٔ هرم منتظمی باقاعدهٔ مربعی را بریده‌ایم، به‌نحوی‌که باروی هم قراردادن رأس‌های مربع اصلی، رأس هرم به‌دست آید. ضلع قاعدهٔ هرم را چقدر انتخاب کنیم تاحجم آن حداکثر مقدارممکن باشد؟

۱۸۰. a، b، c، d و e، عددهایی حقیقی ودلخواهند. ثابت کنید.

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$$

۱۸۱. برای عددهای غیرمنفی x، y، z و t می‌دانیم $x+z=1$ و $y+t=1$. اگر a و b، عددهای مثبت ثابتی باشند، حداقل وحداکثر مقدار

این تابع را پیدا کنید:

$$f(x, y, z, t)=\frac{ax^{۲}+by^{۲}}{ax+by}+\frac{az^{۲}+bt^{۲}}{az+bt}$$

۱۸۲. معادلهٔ $x^{۳۷}+x^{۸}+۱=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱۸۳. به ازای چه مقدارهایی از عددهای طبیعی a و b، عدد $a^{۲}+۷b^{۲}+۸۱۱$ بر عدد $۴ab+۲۲a+۴۷b$ بخش‌پذیر است؟

۱۸۴. دو وتر AB و CD را، به‌ترتیب، به‌طول‌های $۲a$ و $۲b$ و موازی با یکدیگر، در دایره‌ای رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ بین این دو وتر برابر است با d. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که مرکز دایره: ۱) در درون ذوزنقهٔ $ABCD$؛ ۲) در بیرون آن باشد.

۱۸۵. a و b عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید:

$$۲\sqrt[a+b]{a^{۲b}b^{۲a}}\leqslant a^{۲}+b^{۲}$$

۱۸۶. در مثلث ABC داریم: $|BC|=a$، $|CA|=b$، $|AB|=c$. M نقطه‌ای دلخواه از فضاست و فرض می‌کنیم: $|MA|=a_{۱}$، $|MB|=b_{۱}$، $|MC|=c_{۱}$. ثابت کنید:

$$a\cdot a_{۱}^{۲}+b\cdot b_{۱}^{۲}+c\cdot c_{۱}^{۲}\geqslant abc$$

۱۸۷. R و r را، به‌ترتیب، شعاع کرهٔ محیطی و شعاع کرهٔ محاطی هرم منتظمی با قاعدهٔ مثلثی می‌گیریم. ثابت کنید $R\geqslant ۳r$.

۱۸۸. برای $n\in \mathbf{N}$ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{n+۱}\left(۱+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)>\frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲n}\right)$$

۱۸۹. با چه شرطی، نابرابری $a^{۴}+b^{۴}\geqslant ۲ab^{۳}$ برقرار است؟

۱۹۰. برای $n\in \mathbf{N}$ و $n\geqslant ۲$ ثابت کنید:

$$log_{n!}^{۲}n+log_{n!}^{۲}(n-۱)+log_{n!}^{۲}(n-۲)!>\frac{۱}{۳}$$

۱۹۱. درستی نابرابری‌های ابوالوفا راثابت‌کنید:

$$\frac{۲}{۳}\sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}+\frac{۱}{۳}\sin\left(\frac{۱۸}{۳۲}\right)^{\circ}<\sin\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\circ}<\frac{۴}{۳}\sin\left(\frac{۱۵}{۳۲}\right)^{\circ}-\frac{۱}{۳}\sin\left(\frac{۱۲}{۳۲}\right)^{\circ}$$

۱۹۲. به‌ازای چه مقدارهایی از $a\in\mathbf{R}$، این معادله جواب دارد:

$$\sqrt{x+۲}+\sqrt{۸-۲x}=a$$

۱۹۳. با بررسی تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۲}-\sqrt{۲x-۱}$، ثابت‌کنید، معادلهٔ $f(x)=۴$، تنها یك جواب دارد.

۱۹۴. این معادله را حل‌کنید: $|۶x-۵|=۴\sin\frac{\pi}{۳}x$.

۱۹۵. به‌ازای چه مقدارهایی از $a\in\mathbf{R}$، این نامعادله جواب دارد:

$$\sqrt{۲x-۱}\geqslant x+a$$

۱۹۶. D، E و F را پای نیمسازهای داخلی مثلث ABC می‌گیریم. ثابت‌کنید: $S_{DEF}\leqslant\frac{۱}{۴}S_{ABC}$.

حل تمرین‌ها

۱) به‌ترتیب داریم:

$$۳۱^{۱۱} < ۳۲^{۱۱} = ۲^{۵۵} < ۲^{۵۶} = ۱۶^{۱۴} < ۱۷^{۱۴}$$

پاسخ $۱۷^{۱۴}$ از $۳۱^{۱۱}$ بزرگتراست.

۲) $A = ۲\sqrt{۵۰۰}$ و $B = \sqrt{۵۰۱} + \sqrt{۴۹۹}$ می‌گیریم. به ترتیب داریم:

$$\begin{cases} A^{۲} = ۲۰۰۰ \\ B^{۲} = ۱۰۰۰ + ۲\sqrt{۵۰۱ \times ۴۹۹} \end{cases};\quad \begin{cases} \dfrac{A^{۲} - ۱۰۰۰}{۲} = ۵۰۰ \\ \dfrac{B^{۲} - ۱۰۰۰}{۲} = \sqrt{۵۰۱ \times ۴۹۹} \end{cases};$$

$$\left(\frac{A^{۲} - ۱۰۰۰}{۲}\right)^{۲} = ۲۵۰۰۰۰$$

$$\left(\frac{B^{۲} - ۱۰۰۰}{۲}\right)^{۲} = ۲۴۹۹۹۹$$

پاسخ. $۲\sqrt{۵۰۰}$ از $\sqrt{۵۰۱} + \sqrt{۴۹۹}$ بزرگتراست.

۳) اگرصورت و مخرج کسر $\dfrac{۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{۱۰^{۱۳۷۰} + ۱}$ را در $۱ + ۱۰^{۱۳۷۱}$ ضرب کنیم، درستی ردیف عمل‌های زیر، به‌سادگی روشن می‌شود:

$$\frac{۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{۱۰^{۱۳۷۰} + ۱} = \frac{۱۰^{۱۳۶۹+۱۳۷۱} + ۱۰^{۱۳۷۱} + ۱۰^{۱۳۶۹} + ۱}{(۱۰^{۱۳۷۰} + ۱)(۱۰^{۱۳۷۱} + ۱)} =$$

$$=\frac{10^{2\times 1370}+10^{1370}\left(10+\frac{1}{10}\right)+1}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}>$$

$$>\frac{10^{2\times 1370}+2\times 10^{1370}+1}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}=\frac{(10^{1370}+1)^2}{(10^{1370}+1)(10^{1371}+1)}=$$

$$=\frac{10^{1370}+1}{10^{1371}+1}$$

پاسخ. کسر $\frac{10^{1369}+1}{10^{370}+1}$ بزرگتر است.

۴) در این‌جا نمی‌توانیم از روشی‌که برای حل تمرین (۱، ۲) آوردیم، استفاده‌کنیم (آزمایش‌کنید!) مساله را در حالت‌کلی حل می‌کنیم:

اگر $k>1$ و $n\in \mathbf{N}$، ثابت کنید $2\sqrt[n]{k}>\sqrt[n]{k+1}+\sqrt[n]{k-1}$.

دوراه حل برای این مسأله می‌آوریم:

راه حل اول. نابرابری را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[n]{k}-\sqrt[n]{k-1}>\sqrt[n]{k+1}-\sqrt[n]{k} \qquad (1)$$

درهرطرف نابرابری، عبارتی به‌صورت $a-b$ وجود دارد؛ آن‌ها را به‌عنوان کسری بامخرج واحد درنظر می‌گیریم و درهرطرف، صورت ومخرج را در $a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}$ ضرب می‌کنیم، نابرابری (۱) به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{k^{n-1}}+\sqrt[n]{k^{n-2}(k-1)}+\dots+\sqrt[n]{(k-1)^{n-1}}}>$$

$$>\frac{1}{\sqrt[n]{(k+1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(k+1)^{n-2}\cdot k}+\dots+\sqrt[n]{k^{n-1}}}$$

در مخرج هریك ازکسرها n جمله وجود دارد و، به سادگی دیده می‌شود که، هر جمله‌ازمخرج کسرسمت چپ، از جملهٔ نظیرخود درمخرج کسر سمت‌راست،

کوچکتر است؛ درضمن، از بین دو کسر، آن که مخرج کوچکتری دارد، بزرگتر است. درستی نابرابری (۱) و، درنتیجه، درستی نابرابری موردنظر ثابت شد. مثلاً، نابرابری تمرین ۴۰۱)، منجر به نابرابری روشن زیر می‌شود:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۰۰^۲}+\sqrt[۳]{۵۰۰\times۴۹۹}+\sqrt[۳]{۴۹۹^۲}}>$$

$$>\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۰۱^۲}+\sqrt[۳]{۵۰۱\times۵۰۰}+\sqrt[۳]{۵۰۰^۲}}$$

راه حل دوم. تابع $f(x)=\sqrt[n]{x+۱}-\sqrt[n]{x}$، برای مقدارهای مثبت x، تابعی نزولی است، زیرا برای مشتق آن داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{n\sqrt[n]{(x+۱)^{n-۱}}}-\frac{۱}{n\sqrt[n]{x^{n-۱}}}<۰$$

(مخرج کسر اول، ازمخرج کسر دوم بزرگتر است). اکنون اگر فرض کنیم $x_۱=k-۱$ و $x_۲=k$ $(k>۱)$، چون $x_۲>x_۱$، پس $f(x_۲)<f(x_۱)$، یعنی

$$\sqrt[n]{k+۱}-\sqrt[n]{k}<\sqrt[n]{k}-\sqrt[n]{k-۱}\Longrightarrow\sqrt[n]{k+۱}+\sqrt[n]{k-۱}<۲\sqrt[n]{k}$$

که اگر $k=۵۰۰$ و $n=۳$ بگیریم، به‌جواب مسالهٔ ۴۰۱) می‌رسیم:

$$\sqrt[۳]{۵۰۱}+\sqrt[۳]{۴۹۹}<۲\sqrt[۳]{۵۰۰}$$

۵) درهمان تابع نزولی $y=\sqrt[n]{x+۱}-\sqrt[n]{x}$ $(x>۰)$ ازمسألهٔ قبل $x_۱=۴$ و $x_۲=۶$ می‌گیریم. چون $x_۱<x_۲$، پس $f(x_۱)>f(x_۲)$، یعنی به‌ازای $n=۳$ داریم:

$$\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۴}>\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۶}\Longrightarrow\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۶}>\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۷}$$

درضمن، مسأله را باراه حل اول مسألهٔ قبل هم می‌توان حل کرد (چگونه؟).

۶) تابع $f(x)=\ln(۱+x)-\frac{۲x}{x+۲}$ را، که برای $x>-۱$ معین

است، درنظر می‌گیریم. مشتق این تابع چنین است:

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x}-\frac{۴}{(x+۲)^۲}=\frac{x^۲}{(x+۱)(x+۲)^۲}$$

که به‌ازای $x>-۱$ مثبت است، یعنی $f(x)$، برای مقدارهای قابل قبول x، تابعی صعودی است. $x_۱=۰$ و $x_۲=\frac{۱}{۱۰۰}$ می‌گیریم. چون $x_۲>x_۱$ پس $f(x_۲)>f(x_۱)$، یعنی

$$\ln\left(۱+\frac{۱}{۱۰۰}\right)-\frac{۲}{۲۰۱}>۰ \Longrightarrow \ln\frac{۱۰۱}{۱۰۰}>\frac{۲}{۲۰۱}$$

۷) در نابرابری روشن زیر (حل تمرین ۴۰۱) را ببینید):

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-۱}>\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}$$

به‌ترتیب عددهای ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ را به‌جای n قرار دهید و نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنید، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{۱}+۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۷}+۲\sqrt{۹}>$$
$$>۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۴}+۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{۸}+\sqrt{۱۰}$$

۸) ثابت می‌کنیم: $\sqrt[۷]{۱۷}<\frac{۳}{۲}<\log_{۱۷}۷۱$. نابرابری اول را می‌توان، به‌ترتیب، به‌این صورت نوشت:

$$۲\sqrt[۷]{۱۷}<۳ \Longrightarrow ۲^۷\times ۱۷<۳^۷ \Longrightarrow ۲۱۷۶<۲۱۸۷$$

ونابرابری دوم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۱۷^{\frac{۳}{۲}}<۷۱ \Longrightarrow ۱۷^۳<۷۱^۲ \Longrightarrow ۴۹۱۳<۵۰۴۱$$

پاسخ. $\sqrt[۷]{۱۷}<\log_{۱۷}۷۱$

۹) داریم:

$$tg55^\circ = tg(45^\circ + 10^\circ) = \frac{1 + tg10^\circ}{1 - tg10^\circ}$$

ازطرف دیگر $tg10^\circ = tg\frac{\pi}{18} > \frac{\pi}{18} > \frac{1}{6}$؛ وچون تابع $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$، تابعی صعودی است، بنا براین

$$tg55^\circ > \frac{1+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{7}{5}$$

۱۰) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ رادیان و $\frac{1}{2}$ رادیان، هردو،کمان‌هایی بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ هستند و برای هرکمان x که بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ باشد، داریم $\sin x < x$؛ بنا براین

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \sin\frac{1}{2} > 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

پاسخ. $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$.

۱۱) ثابت می‌کنیم $\sqrt[8]{8} > \sqrt[9]{9}$. اگردوطرف نابرابری رابه‌توان ۷۲ برسانیم، به‌نابرابری $8^9 > 9^8$ یا $2^{27} > 3^{16}$ می‌رسیم که هم‌ارز نابرابری اصلی است. داریم:

$$2^{27} = (2^9)^3 = 512^3 > (2 \times 243)^3 = 8 \times 3^{15} > 3 \times 3^{15} = 3^{16}$$

۱۲) ثابت می‌کنیم: $x > \sqrt{x-1} + \sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ دو نابرابری

$$\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1} \text{ و } \frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x(\sqrt{x}-1)} \qquad (1)$$

همیشه (به‌ازای $x > 1$) برقرارند، زیرا، منجر به‌این دونابرابری واضح می‌شوند.

$$(x-2)^2 \geqslant 0 \text{ و } (\sqrt{x}-2)^2 \geqslant 0 \qquad (2)$$

درضمن، اولی به‌ازای $x=2$ و دومی به‌ازای $x=4$، بـه برابری تبـدیل می‌شود. از مجموع دونابرابری (۱)، باتوجه به‌این‌که‌علامت‌های برابری در (۲) به‌طورهم‌زمان پیش نمی‌آید، نتیجه می‌شود:

$$x>\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$$

۱۳) در واقع باید ببینیم، از دو عدد 100^n و 101^n-99^n کـدام بزرگترند؟ این نسبت را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{101^n-99^n}{100^n}=\frac{(100+1)^n-(100-1)^n}{100^n}=$$

$$=\frac{2C_n^1\cdot100^{n-1}+2C_n^3\cdot100^{n-3}+\dots}{100^n}=$$

$$=2\left(\frac{n}{100}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!100^3}+\dots\right)$$

ثابت می‌کنیم، این نسبت، به‌ازای $n=49$ بزرگترازواحد وبه‌ازای $n=48$ کوچکترازواحد است (که دراین صورت، به‌ازای هرعدد $n>49$ ازواحد بزرگتر وبه‌ازای هرعدد $n<48$ ازواحدکوچکترمی‌شود). به‌ازای $n=49$ داریم:

$$2\left(\frac{49}{100}+\frac{49\times48\times47}{3!\cdot100^3}+\dots\right)>2\left(\frac{49}{100}+\frac{18424}{100^2}\right)>$$

$$>2\left(\frac{49}{100}+\frac{100^2}{100^3}\right)=1$$

وبه‌ازای $n=48$:

$$2\left(\frac{48}{100}+\frac{48\times47\times46}{3!\cdot100^3}+\frac{48\times47\times46\times45\times44}{5!\cdot100^5}+\dots\right)<$$

$$<2\left(\frac{48}{100}+\frac{48^3}{3!\cdot100^3}+\frac{48^5}{(3!)^2\cdot100^5}+\frac{48^7}{(3!)^3\cdot100^7}+\dots\right)=$$

$$=۲\times\frac{\frac{۴۸}{۱۰۰}}{۱-\frac{۱}{۶}\left(\frac{۴۸}{۱۰۰}\right)^۲}=\frac{۹۶۰۰}{۹۶۱۶}<۱$$

پاسخ. عدد $۱۰۰^n+۹۹^n$، برای $n\leqslant ۴۸$ از ۱۰۱^n بزرگتر و برای $n>۴۸$ از ۱۰۱^n کوچکتر است.

۱۴) دنبالهٔ n عدد درست متوالی را درنظر می‌گیریم:

$$a، a+۱، a+۲، \ldots، a+n-۱$$

دوجمله ازاین دنباله‌که به فاصلهٔ k از دوانتهای دنباله باشند (یعنی kامین جمله از ابتدا به‌انتها و kامین جمله ازانتها به‌ابتدا)، چنین‌اند:

$$a+k-۱ \text{ و } a+n-k$$

حاصل ضرب این دوعدد رابه‌دست می‌آوریم:

$$(a+k-۱)(a+n-k)=a^۲+an-a+(k-۱)(n-k)\geqslant$$
$$\geqslant a^۲+an-a=a(a+n-۱)$$

(برابری، تنها برای $k=۱$ و $k=n$ پیش می‌آید). بنابراین، حاصل ضرب دوعدد $a+k-۱$ و $a+n-k$ (که در حالت فرد بودن n، ممکن است برابرهم باشند)، ازحاصل ضرب دوجملهٔ اول وآخر دنباله (کوچکترین و بزرگترین جملهٔ دنباله)،کمتر نیست. به این ترتیب، برای حاصل ضرب همهٔ جمله‌های دنباله، داریم:

$$a(a+۱)\ldots(a+n-۱)\geqslant [a(a+n-۱)]^{\frac{n}{۲}}=\sqrt{a^n(a+n-۱)^n}$$

(برابری، تنها برای $n=۱$ و $n=۲$ پیش می‌آید). یعنی

پیش قضیه. برای $n>۲$، حاصل ضرب n عدد درست متوالی، همیشه ازریشهٔ دوم حاصل‌ضرب توان nام کوچکترین و بزرگترین عدد، بزرگتراست.

بااستفاده ازاین پیش‌قضیه، ثابت می‌کنیم: $۱۰۰^{۳۰۰}<۳۰۰!$. باتوجه به پیش قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، داریم:

$$1\times 2\times 3\times \dots \times 25>\sqrt{25^{25}}=5^{25};$$

$$26\times 27\times \dots \times 50>(\sqrt{26\times 50})^{25}>35^{25};$$

$$51\times 52\times \dots \times 100>(\sqrt{51\times 100})^{50}>70^{50};$$

$$101\times 102\times \dots \times 200>\sqrt{100^{100}}\cdot\sqrt{200^{100}}=10^{200}\cdot 2^{50};$$

$$201\times 202\times \dots\times 300>\sqrt{200^{100}\cdot 300^{100}}=10^{200}\cdot 2^{50}\cdot 3^{50}$$

که ازضرب آنها به‌دست می‌آید:

$$300!>5^{25}\cdot 35^{25}\cdot 70^{50}\cdot 10^{400}\cdot 2^{100}\cdot 3^{50}=$$

$$=10^{500}\cdot 21^{25}\cdot 42^{25}\cdot 14^{25}>10^{500}\cdot 20^{25}\cdot 40^{25}\cdot 14^{25}=$$

$$=10^{550}\cdot 2^{25}\cdot 4^{25}\cdot 14^{25}=10^{550}\cdot 112^{25}>10^{600}=100^{300}$$

۱۵) اگرعبارت‌های مفروض را A و B بنامیم، داریم:

$$\frac{1}{A}=\frac{(1+a+\dots+a^{n-1})+a^{n}}{1+a+\dots+a^{n-1}}=1+\frac{a^{n}}{1+a+\dots+a^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1}{\frac{1}{a^{n}}+\frac{1}{a^{n-1}}+\dots+\frac{1}{a}};\ \frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^{n}}+\frac{1}{b^{n-1}}+\dots+\frac{1}{b}}$$

به این ترتیب (باتوجه به‌شرط $a>b>0$) روشن است که

$$\frac{1}{A}>\frac{1}{B} \text{ یا } B>A$$

۱۶) درمسألهٔ ۳ (صفحهٔ ۹)، این تمرین را، برای حالت خاص $x=1$ حل کردیم. در این‌جا، باحالت کلی آن وبرای x دلخواه سروکارداریم. روشن است، راه حلی‌که برای این حالت کلی مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای هرحالت خاص هم می‌تواند کاربرداشته باشد. داریم:

$$\cos\sin x-\sin\cos x=\cos\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sin x\right)=$$

$$=\text{۲}\cos\frac{\frac{\pi}{\text{۲}}+\cos x+\sin x}{\text{۲}}\cos\frac{\frac{\pi}{\text{۲}}+\cos x-\sin x}{\text{۲}}$$

ازطرف دیگر روشن است که

$$|\sin x+\cos x|=\sqrt{\text{۲}}\left|\cos\left(\frac{\pi}{\text{۴}}-x\right)\right|\leqslant\sqrt{\text{۲}} \text{ و } |\sin x-\cos x|\leqslant\sqrt{\text{۲}}$$

(برابری درحالت اول برای $x=k\pi+\frac{\pi}{\text{۴}}$ و در حالت دوم برای $x=kn-\frac{\pi}{\text{۴}}$ پیش می‌آید). درضمن $\frac{\pi}{\text{۲}}\approx\text{۱/۵۷}$ و $\sqrt{\text{۲}}\approx\text{۱/۴۱}$، یعنی $\frac{\pi}{\text{۲}}>\sqrt{\text{۲}}$ و

$$\text{۰}<\frac{\frac{\pi}{\text{۲}}+\cos x+\sin x}{\text{۲}}<\frac{\pi}{\text{۲}} \text{ و } \text{۰}<\frac{\frac{\pi}{\text{۲}}+\cos x-\sin x}{\text{۲}}<\frac{\pi}{\text{۲}}$$

به‌این ترتیب $\cos\sin x-\sin\cos x>\text{۰}$ و $\cos\sin x>\sin\cos x$.

۱۷) اگر فرض کنیم $a=\log_{\text{۲}}\pi$ و $b=\log_{\pi}\text{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\text{۲}^a=\pi\\ \pi^b=\text{۲}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\text{۲}^a=\pi\\ \text{۲}^{\frac{\text{۱}}{b}}=\pi\end{cases}\Longrightarrow a=\frac{\text{۱}}{b}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\frac{\text{۱}}{\log_{\text{۲}}\pi}+\frac{\text{۱}}{\log_{\pi}\text{۲}}=\frac{\text{۱}}{a}+\frac{\text{۱}}{\frac{\text{۱}}{a}}=\frac{\text{۱}}{a}+a=\frac{a^{\text{۲}}+\text{۱}}{a}>\text{۲}$$

($\log_{\text{۲}}\pi\neq\text{۱}$، یعنی $a\neq\text{۱}$).

پاسخ. $\frac{\text{۱}}{\log_{\text{۲}}\pi}+\frac{\text{۱}}{\log_{\pi}\text{۲}}>\text{۲}$.

۱۸) بافرض $a=\log_{\text{۲}}\pi$ و $b=\log_{\text{۵}}\pi$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲^a = \pi \\ ۵^b = \pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi^{\frac{۱}{a}} = ۲ \\ \pi^{\frac{۱}{b}} = ۵ \end{cases} \Longrightarrow \pi^{\frac{۱}{a}} \times \pi^{\frac{۱}{b}} = ۱۰$$

به این ترتیب

$$\frac{۱}{log_۲ \pi} + \frac{۱}{log_۵ \pi} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} > ۲$$

زیرا $\pi^{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} = ۱۰$ و $\pi^۲ < ۱۰$.

۱۹) ثابت می‌کنیم، با شرط $۰ < \alpha < \beta < \frac{\pi}{۲}$، نابرابری $sin\beta - sin\alpha > \beta - \alpha$ برقرار است. با توجه به این‌که در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی $x < sin x < ۰$ و $۱ < cos x < ۰$، داریم:

$$sin\beta - sin\alpha = ۲\, sin\frac{\beta-\alpha}{۲} cos\frac{\beta+\alpha}{۲} < ۲ \cdot \frac{\beta-\alpha}{۲} \cdot ۱ = \beta - \alpha$$

پاسخ: $\alpha - sin\alpha > \beta - sin\beta$.

۲۰) ثابت می‌کنیم

$\beta - \alpha < tg\beta - tg\alpha$.

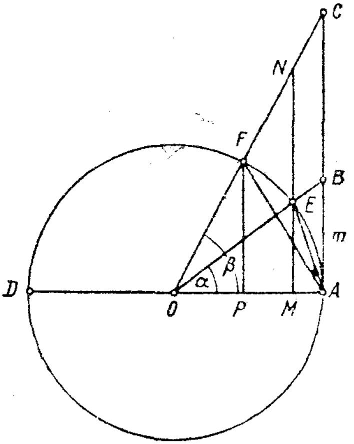
در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی داریم

$x < tg x$، درنتیجه، با توجه به‌شرط $۰ < \alpha < \beta < \frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\beta - \alpha < tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{۱ + tg\beta\, tg\alpha} < tg\beta - tg\alpha$$

پاسخ: $tg\beta - \beta > tg\alpha - \alpha$.

۲۱) باتوجه‌به‌نام‌گذاری‌های



شکل ۱۵

شکل ۱۰ داریم:

$$\widehat{AE}=\alpha, \quad \widehat{AF}=\beta,$$

$$|AB|=tg\alpha, \quad |AC|=tg\beta$$

M و N، به ترتیب، نقطه‌های برخورد خط‌های راست OA و OC با عمودی است که از E بر (OA) رسم شده‌است. این برابری‌ها روشن است:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}tg\alpha, \quad S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}tg\beta, \quad S_{\text{قطاع}\, OAE}=\frac{1}{2}\alpha, \quad S_{\text{قطاع}\, OAF}=\frac{1}{2}\beta$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}}=\frac{tg\alpha}{\alpha}, \qquad \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع}\, OAF}}=\frac{tg\beta}{\beta}$$

از طرف دیگر، با استفاده از تشابه مثلث‌های OAB و OME و، همچنین، مثلث‌های OAC و OMN، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OME}}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}} \qquad (1)$$

درضمن

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}}<\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OME}}, \qquad \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\, OEF}}>\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}}<\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\, OEF}} \Longrightarrow \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}}<\frac{S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}+S_{\text{قطاع}\, OEF}}$$

یعنی $\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{قطاع}\, OAE}}<\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{قطاع}\, OAF}}$ یا $\frac{tg\alpha}{\alpha}<\frac{tg\beta}{\beta}$.

یادداشت. در اثبات تمرین ۲۱۰۱) از این قضیهٔ مربوط به نابرابری‌ها استفاده کردیم: اگر a، b، c و d عددهایی مثبت باشد و برای آن‌ها داشته باشیم $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌وقت نابرابری $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ برقرار است.

برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}=k$، در ایـن صورت $\frac{c}{d}=k+\alpha$

($\alpha>0$)، زیرا $\frac{c}{d}$ از $\frac{a}{b}$ بزرگتر است. بنابراین

$$a=bk, \quad c=dk+d\alpha$$

ازمجموع این دوبرابری به‌دست می‌آید:

$$a+c=(b+d)k+d\alpha \Longrightarrow \frac{a+c}{b+d}=k+\frac{d\alpha}{b+d}>k$$

یعنی $k=\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$.

۲۲) ثابت می‌کنیم $2\alpha<\sin\alpha+tg\alpha$. داریم:

$$\sin\alpha+tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

روشن است که $1-tg^4\frac{\alpha}{2}<1$، درضمن $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$، بنابراین $0<tg^4\frac{\alpha}{2}<1$

و $1-tg^4\frac{\alpha}{2}>0$. اگر دوطرف نابرابری $1-tg^4\frac{\alpha}{2}<1$ را معکوس کنیم به

نابرابری $\frac{1}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}}>1$ می‌رسیم. درنتیجه، باتوجه به (۱):

$$\sin\alpha+tg\alpha>4tg\frac{\alpha}{2}>4\times\frac{\alpha}{2}=2\alpha$$

پاسخ: $tg\alpha-\alpha>\alpha-\sin\alpha$.

۲۰۱) البته، بامخرج مشترك گرفتن می‌توان کسرها راباهم مقایسه‌کرد. ولی بامقایسهٔ دوبه‌دوی کسرها هم می‌توان به نتیجه رسید. ابتدا یك پیش‌قضیه

را ثابت می‌کنیم.

پیش قضیه. اگر به صورت و مخرج یک کسر، عددی مثبت اضافه‌کنیم، کسر مفروض به واحد نزدیک‌تر می‌شود، یعنی درحالتی که کسر بزرگتر از واحد باشد، کوچکتر ودرحالتی که کوچکتر از واحد باشد، بزرگتر می‌شود.

باید ثابت کنیم، برای $0<a<b$ و $m>0$ داریم: $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$.

اگر کسر سمت راست را، به سمت چپ نابرابری ببریم، بعد از تبدیل به یک مخرج به دست می‌آید:

$$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{(a-b)m}{b(b+m)}<0$$

($a<b$، یعنی $a-b<0$).

به همین ترتیب، برای حالت $a>b>0$، می‌توان به نتیجه رسید.

اکنون به مقایسهٔ کسرها می‌پردازیم.

$\frac{۵}{۶}$ را با $\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$ مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵۰۰}{۶۰۰}<\frac{۵۰۰+۱۲۷}{۶۰۰+۱۲۷}=\frac{۶۲۷}{۷۲۷}\Longrightarrow\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

می‌دانیم، اگر مخرج کسری را بزرگ کنیم، مقدار کسر کوچکتر می‌شود، بنابراین

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۵\times۱۱}{۶\times۱۱}=\frac{۵۵}{۶۶}>\frac{۵۵}{۶۹}$$

به‌این ترتیب تا این‌جا ثابت شد:

$$\frac{۵۵}{۶۹}<\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

برای کسر $\frac{۵۱۱}{۶۵۵}$ داریم:

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵}<\frac{۵۱۱+۳۹}{۶۵۵+۳۹}=\frac{۵۵۰}{۶۹۴}<\frac{۵۵۰}{۶۹۰}=\frac{۵۵}{۶۹}$$

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵}<\frac{۵۵}{۶۹}<\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$$

وسرانجام

$$\frac{۵۱۱}{۶۵۵}>\frac{۵۱۱-۱۱}{۶۵۵-۱۱}=\frac{۵۰۰}{۶۴۴}>\frac{۵۰۰}{۷۰۰}=\frac{۵}{۷}$$

پاسخ: $\frac{۵}{۷}<\frac{۵۱۱}{۶۵۵}<\frac{۵۵}{۶۹}<\frac{۵}{۶}<\frac{۶۲۷}{۷۲۷}$

۲) اگر یك رادیان را به تقریب، برابر ۵۷ درجه و ۱۷ دقیقه و ۴۵ ثانیه بگیریم، به‌ترتیب داریم:

کمان ۲ رادیان $=۱۱۴^\circ\cancel{۳۵}'۳۰''=۱۸۰^\circ-(۶۵^\circ۲۴'۳۰'')$،

کمان ۳ رادیان $=۱۷۱^\circ۵۳'۱۵''=۱۸۰^\circ-(۸^\circ۶'۴۵'')$،

کمان ۴ رادیان $=۲۲۹^\circ۱۱'۰''=۱۸۰^\circ+(۴۹^\circ۱۱'۰'')$،

کمان ۵ رادیان $=۲۸۶^\circ۲۸'۴۵''=۳۶۰^\circ-(۷۳^\circ۳۱'۱۵'')$،

کمان ۶ رادیان $=۳۴۳^\circ۴۶'۳۰''=۳۶۰^\circ-(۱۶^\circ۱۳'۳۰'')$،

کمان ۷ رادیان $=۴۰۱^\circ۴'۱۵''=۳۶۰^\circ+(۴۱^\circ۴'۱۵'')$

ودیگر روشن است که

$$\sin ۵<\sin ۴<\sin ۶<\sin ۳<\sin ۷<\sin ۱<\sin ۲$$

۳) با فرض $x=\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۹}$ داریم:

$$x^۳=(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۹})^۳=۱۲+۳\sqrt[۳]{۲۷}(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۹})=۱۲+۹x$$

یعنی $\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۹}$، ریشهٔ عبارت درجهٔ سوم $f(x)=x^۳-۹x-۱۲$ است. درضمن

$$f(\sqrt[۳]{۴۳})=۳۱-۹\sqrt[۳]{۴۳}<۰$$

درواقع، داریم:

$$(۹\sqrt[۳]{۴۳})^۳=۷۲۹\times۴۳>۷۰۰\times۴۳=۳۰۱۰۰>۲۹۷۹۱>۳۱^۳$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $f(\sqrt[3]{44})>0$، $f(x)$ در بازهٔ [۳، ۴] صعودی است وچون $f(\sqrt[3]{43})<f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})<f(\sqrt[3]{44})$، بنابراین

$$\sqrt[3]{43}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{44}$$

۳. روشن است که در این پنج عدد، باید رقم دهگان هرعدد از رقم یکان آن بزرگتر باشد، زیرا، درصورت عکس، با عددکوچکتری سروکار پیدا می‌کنیم. بنابراین رقم ۹، درعدد مربوط به خودش، رقم دهگان عدد است. ثابت می‌کنیم، رقم یکان این‌عدد باید صفر باشد. رقم یکان این عدد را، برابر $a\neq 0$ می‌گیریم وصفر را رقم یکان‌عددی فرض می‌کنیم که، دهگان‌آن، برابر b است. حاصل‌ضرب این دو عدد، چنین می‌شود:

$$(90+a)(10b+0)=900b+10ab \qquad (1)$$

ولی‌اگر صفر رایکان عددی‌بگیریم که، دهگان‌آن، برابر ۹ است، برای‌حاصل‌ضرب دوعدد داریم:

$$(90+0)(10b+a)=900b+90a \qquad (2)$$

(۱)و(۲) رامقایسه‌می‌کنیم.چون $b<9$، پس $10b>90$ و $10ab<90a$. به‌این‌ترتیب، عدد (۱) از عدد (۲) کوچکتراست وبرای این‌که حاصل‌ضرب عددها، حداکثرباشد، باید برای دهگان ۹، رقم یکان را برابرصفرگرفت.

اکنون باید به‌کمك رقم‌های از ۱ تا ۸، چهار عدد دو رقمی بسازیم‌که حاصل‌ضربی ماکزیمم داشته باشند. شبیه حالت قبل، می‌توان ثابت‌کرد که، یکی ازاین عددها برابر ۸۱ است وغیره.

پاسخ: ۹۰، ۸۱، ۷۲، ۶۳، ۵۴.

۴. داریم:

$$(\sqrt{30}+\sqrt{4320})^{103}=[\sqrt{30}(1+\sqrt{144})]^{103}=$$

$$=30^{\frac{103}{2}}(1+12)^{103}$$

بنابراین، باید بزرگترین جمله را در بسط $(1+12)^{103}$ پیداکنیم،جملهٔ $(k+1)$ام بسط را، T_{k+1} می‌نامیم وآن را بزرگترین جملهٔ بسط می‌گیریم.

باید داشته باشیم:

$$T_{k+1}\geqslant T_{k+2} \text{ و } T_{k+1}\geqslant T_k$$

که ما را به این دونابرابری می‌رساند:

$$\begin{cases}\dfrac{103!}{k!(103-k)!}\cdot 12^k\geqslant \dfrac{103!}{(k+1)!(102-k)!}\cdot 12^{k+1}\\[2mm] \dfrac{103!}{k!(103-k)!}\cdot 12^k\geqslant \dfrac{103!}{(k-1)!(104-k)!}\cdot 12^{k-1}\end{cases}$$

که بعد ازساده‌کردن، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{103-k}\geqslant\dfrac{12}{k+1}\\[2mm] \dfrac{12}{k}\geqslant\dfrac{1}{104-k}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}k\geqslant 95\\ k\leqslant 96\end{cases}\Longrightarrow 95\leqslant k\leqslant 96$$

یعنی جمله‌های ۹۶ام و ۹۷ام باهم برابرند و بزرگترین جمله‌های بسط را تشکیل می‌دهند.

۵. فرض می‌کنیم $\sqrt{p-a}=x$، $\sqrt{p-b}=y$ و $\sqrt{p-c}=z$. در این صورت، باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<x+y+z\leqslant\sqrt{3x^2+3y^2+3z^2}$$

زیرا

$$x^2+y^2+z^2=(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-2p=p$$

نابرابری سمت چپ، منجر به‌نابرابری $2(xy+yz+xz)>0$ می‌شود که روشن است (x و y و z، مقدارهایی مثبت‌اند). نابرابری سمت راست هم، منجر به‌این نابرابری اتحادی می‌شود:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$$

علامت برابری، برای $x=y=z$، یعنی $a=b=c$ (مثلث‌متساوی‌الاضلاع) پیش می‌آید.

۶. فرض می‌کنیم $a\geqslant b\geqslant c>0$. اگر داشته باشیم $a\geqslant b+c$، درستی نابرابری روشن است، زیرا سمت راست نابرابری عددی مثبت و سمت چپ آن عددی غیرمثبت می‌شود بنابراین، حالتی را درنظر می‌گیریم که $a<b+c$. دراین حالت، همهٔ عامل‌های سمت چپ نابرابری غیرمنفی‌هستند وداریم:

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)=$$

$$=\sqrt{(b-c+a)(c+a-b)(c-a+b)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$$

$$=\sqrt{[a^2-(b-c)^2][b^2-(c-a)^2][c^2-(a-b)^2]}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{a^2b^2c^2}=abc$$

۷. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{t^3+1}{t-1}-4-2\sqrt{3}=$$

$$=\frac{(t-1)^2+[3t^2-2(3+\sqrt{3})t+5+2\sqrt{3}]}{t-1}>0$$

زیرا، درصورت کسر ودرداخل کروشه، عبارت دوجه دومی با مبین منفی‌قرار دارد وبا توجه به‌شرط $t>1$، مخرج کسرهم مثبت است. بنابراین

$$\frac{t^3+1}{t-1}>2(2+\sqrt{3})$$

۸. روشن است که $a^2+b^2\geqslant 2ab$ و $c^2+d^2\geqslant 2cd$. همچنین، مجموع دوعدد عکس هم، وقتی مثبت باشند، از ۲ کوچکتر نیست، یعنی برای $x>0$ داریم: $x+\frac{1}{x}\geqslant 0$.

اکنون می‌نویسیم:

$$\sum a^2+\sum ab=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+$$
$$+bd+cd\geqslant 3\,(ab+cd)+(ac+bd)+(ad+bc)=$$
$$=3\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(ad+\frac{1}{ad}\right)\geqslant 6+2+2=10$$

(از برابری $abcd=1$ استفاده کردیم).

۰۹ از برهان خلف استفاده می‌کنیم و a_k را نخستین جمله‌ای از آن می‌گیریم که مثبت باشد:

$$a_k>0 \text{ ، } a_i\leqslant 0\ (i<k)$$

بنا بر فرض داریم:

$$a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\geqslant 0$$

یعنی $a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}>0$ (a_{k-1} غیر مثبت و a_k مثبت است، بنا براین تفاضل a_k-a_{k-1} مثبت می‌شود)؛ که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a_{k+1}>a_k$، یعنی a_{k+1} هم باید مثبت باشد. با آغاز از a_{k+1} می‌توان نتیجه گرفت که a_{k+2} مثبت است. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، نتیجه می‌شود:

$$a_n>a_{n-1}>\cdots>a_{k+1}>a_k>0$$

درحالی‌که بنا برفرض داریم $a_n=0$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۰۱۰ از نابرابری روشن $a^2+b^2\geqslant 2ab$ به دست می‌آید: $a^2-ab+b^2\geqslant ab$. باضرب دوطرف نابرابری اخیر در $a+b$، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، دونابرابری مشابه (۱) به‌دست می‌آید:

$$b^3+c^3\geqslant b^2c+c^2b \qquad (2)$$

$$c^3+a^3\geqslant c^2a+a^2c \qquad (3)$$

وازمجموع نابرابری‌های (۱) و(۲) و (۳):

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant$$
$$\geqslant 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab}$$

(از نابرابری روشن $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$، برای x و y مثبت، استفاده کردیم).
به‌این ترتیب

$$a^3+b^3+c^3\geqslant a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$$

علامت برابری، برای حالت $a=b=c$ پیش می‌آید.

۱۱. اگر $a=1+\alpha$ و $b=1+\beta$ بگیریم، برابری $a^3+b^3=2$، به صورت

$$\alpha^3+\beta^3+3(\alpha+\beta)+3(\alpha^2+\beta^2)=$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2+3)+3(\alpha^2+\beta^2)=0$$

درمی‌آید که در آن، جملهٔ $3(\alpha^2+\beta^2)$ غیرمنفی است و، بنابراین، باید جملهٔ

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2+3)=(\alpha+\beta)\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3\beta^2}{4}+3\right]$$

غیرمثبت باشد؛ ولی مقدار داخل کروشه مثبت است، یعنی باید داشته باشیم:

$$\alpha+\beta\leqslant 0\Longrightarrow(a-1)+(b-1)\leqslant 0\Longrightarrow a+b\leqslant 2$$

۱۲. این سه جمله‌ای درجه دوم را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=2x^2-(a+b+c+d)x+(ad+bc)$$

به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$f(a)=(a-b)(a-c)\ ,\ f(b)=(b-a)(b-d)$$

از آن‌جا

$$f(a)f(b)=-(a-b)^2(a-c)(b-d)$$

وچون بنابرفرض $a>c$ و $b>d$، بنابراین

$$f(a)\,f(b)\leqslant ۰$$

یعنی سه جمله‌ای درجه دوم $f(x)$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است ومبین آن باید مثبت باشد:

$$(a+b+c+d)^۲>۸\,(ad+bc)$$

۱۳. تعداد دانش‌آموزان گروه اول را x می‌گیریم. بنابراین تعداد دانش‌آموزان پسر درگروه دوم برابر $۱۵-x$ می‌شود. گروه اول روی هم ۴۸ ساعت و، بنابراین، هردانش‌آموزگروه‌اول $\frac{۴۸}{x}$ ساعت نگهبانی داده است. دانش‌آموزان پسرگروه دوم روی هم ۲۱ ساعت و، بنابراین، هرنفر $\frac{۲۱}{۱۵-x}$ ساعت به‌نگهبانی مشغول بوده است. بنابرشرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\frac{۲۱}{۱۵-x}+\frac{۴۸}{x}<۹ \implies \frac{(x-۸)(x-۱)}{x(۱۵-x)}<۰$$

که به‌جواب $x<۰$ یا $۸<x<۱۰$ یا $x>۱۵$ می‌رسد. تعداد دانش‌آموزان گروه اول نمی‌تواند منفی یا بزرگتر از ۱۵ باشد، پس $۸<x<۱۰$ وچون x عددی‌درست است، بنابراین $x=۹$. درهرگروه ۹ دانش‌آموز بوده است.

۱۴. اگرتعداد قطعه‌های جعبهٔ اول را x وتعداد قطعه‌های جعبهٔ دوم را y بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x+y>۲۹ \quad ، \quad x-۲>۳y \quad ، \quad ۲y+۶۰>۳x$$

که می‌توان آن‌ها را این‌طورنوشت:

$$x>۲۹-y \quad ، \quad x>۳y+۲ \quad ، \quad \frac{۲}{۳}y+۲۰>x \qquad (۱)$$

یعنی $\frac{۲}{۳}y+۲۰>۲۹-y$ و $\frac{۲}{۳}y+۲۰>۳y+۲$، که جواب مشترك آن‌ها به‌صورت $۵\frac{۲}{۵}<y<۷\frac{۵}{۷}$ درمی‌آید و چون y عددی درست

است، می‌تواند برابر ۶ یا ۷ باشد. $y=6$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن، از نامعادله‌های (۱) به‌دست می‌آید $x>23$، $x>20$ و $x<24$ که، در نتیجه، برای x، عدد درستی پیدا نمی‌شود. پس $y=7$. و در این صورت، از نامعادله‌های (۱) خواهیم داشت:

$$x>22 \ ,\ x>23 \ ,\ x<24\frac{2}{3}$$

که تنها $x=24$ جواب مشترک آن‌هاست.

پاسخ: جعبهٔ اول شامل ۲۴ قطعه و جعبهٔ دوم شامل ۷ قطعه است.

۱۵. تعداد اتومبیل‌های کارخانهٔ اول را در هر شبانه روز x می‌گیریم. تعداد اتومبیل‌های تولیدی کارخانهٔ دوم، قبل از بازسازی $\frac{95x}{100}$ و بعد از بازسازی $\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}$ می‌شود. بنابراین

$$x\leqslant 950 \ ,\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}>1000$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $847\frac{27}{59}<x\leqslant 950$. عددهای $\frac{23x}{100}$ و $\frac{95x}{100}$ باید عددهای درستی باشند، یعنی x بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است. بنابراین $x=900$.

پاسخ: کارخانهٔ اول ۹۰۰ و کارخانهٔ دوم ۸۵۵ اتومبیل.

۱۶. فرض می‌کنیم، در آلیاژ جدید که ۴۰ درصد منگنز دارد، x کیلوگرم از آلیاژ اول، y کیلوگرم از آلیاژ دوم و z کیلوگرم از آلیاژ سوم مصرف شده باشد. بنابراین، با توجه به‌فرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$0/9y+0/6z=0/4(x+y+z)\Longrightarrow 4x=5y+2z \qquad (1)$$

در آلیاژ جدید $(0/7x+0/1y+0/25z)$ کیلوگرم مس و در هر کیلوگرم آن به‌اندازهٔ

$$M=\frac{0/7x+0/1y+0/25z}{x+y+z}$$

کیلوگرم مس وجود دارد که، با توجه به (۱) به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{۱۳y+۸z}{۳۰y+۲۰z}$$

دراین رابطه، y و z می‌توانند مقدارهای دلخواه غیرمنفی را، به‌شرط $y^۲+z^۲\neq ۰$، اختیار کنند. سه حالت درنظرمی‌گیریم:

الف) $y=۰$ و $z\neq ۰$؛ دراین صورت $M=\frac{۲}{۵}$؛

ب) $y\neq ۰$ و $z=۰$، دراین‌صورت $M=\frac{۱۳}{۳۰}$؛

ج) $y\neq ۰$ و $z\neq ۰$، دراین صورت

$$M=\frac{۱۳+\frac{۸z}{y}}{۳۰+\frac{۲۰z}{y}}=\frac{۱۲+\frac{۸y}{z}}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}+\frac{۱}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}=$$

$$=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳۰+\frac{۲۰y}{z}}$$

که از آن نتیجه می‌شود: $\frac{۲}{۵}<M<\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳۰}=\frac{۱۳}{۳۰}$

پاسخ: حداکثر مقدارمس در آلیاژ جدید $۴۳\frac{۱}{۳}$ درصد وحداقل آن ۴۰ درصد می‌تواند باشد.

۱۷. دوحالت درنظرمی‌گیریم:

الف) $۰\leqslant x\leqslant ۲$، یعنی $|x-۲|=-x+۲$ و

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-۴x\,;\quad f'(x)=۳x^۲+۴x-۴$$

$f'(x)=۰$ دوجواب دارد: $x=-۲$ و $x=\frac{۲}{۳}$، که تنها $x=\frac{۲}{۳}$ در بازهٔ $[۰ , ۲]$ واقع است.

$f'(x)$ درنقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ تغییرعلامت می‌دهد وازمنفی به مثبت می‌رود،

بنابراین $f(x)$ درنقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ می‌نیمم است.

ب) $۲<x\leqslant ۳$، یعنی $|x-۲|=x-۲$ و

$$f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+۴x,\quad f'(x)=۳x^{۲}-۴x+۴>۰$$

$f(x)$ دربازهٔ [۲،۳] می‌نیمم نسبی ندارد.

برای پیداکردن حداکثرمقدار تابع در بازهٔ [۰، ۳]، بایـد مقدارهای تابع را درنقطه‌های مرزی مقایسه‌کنیم:

$$f(۰)=۰,\quad f(۲)=۸,\quad f(۳)=۲۱$$

حداکثر مقدارتابع دراین بازه، برابر ۲۱ است.

۱۸. چون O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است، بنابراین پاره خطهـای راست OA، OB و OC، نیمسازهای زاویه‌های مثلث‌اند ومثلاً

$$\widehat{AOB}=۱۸۰^{\circ}-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$

می‌دانیم، درهر مثلث، نسبت طول یك ضلــع برسینوس زاویهٔ روبه‌روی آن، برابر باقطر دایرهٔ محیطی مثلث است. به‌این ترتیب، در مثلث‌هــای ABC و ABO داریم:

$$|AB|=۲R\sin\hat{C}=۴R\sin\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲},$$

$$|AB|=۲R_{۳}\sin\left(۱۸۰^{\circ}-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}\right)=۲R_{۳}\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=۲R_{۳}\cos\frac{\hat{C}}{۲}$$

از آن جا $۲R_{۳}\cos\frac{\hat{C}}{۲}=۴R\sin\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}$، یعنی $R_{۳}=۲\sin\frac{\hat{C}}{۲}$. به همیـن ترتیب: $R_{۲}=۲R\sin\frac{\hat{B}}{۲}$ و $R_{۱}=۲R\sin\frac{\hat{A}}{۲}$. درنتیجه

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=4R^2\left(\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin^2\frac{\hat{B}}{2}+\sin^2\frac{\hat{C}}{2}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 4R^2\times\frac{3}{4}=3R^2$$

(برای اثبات نابرابری $\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin^2\frac{\hat{B}}{2}+\sin^2\frac{\hat{C}}{2}\geqslant\frac{3}{4}$، تمرین ۲۰۲۸) وحل آن را ببینید).

۱۰۱۹ ۱) جذرتقریبی نقصانی و جذرتقریبی اضافی هریك از جمله‌های A را، تا ۰/۱ تقریب، محاسبه می‌کنیم:

$$1=1،\ 0/7<\frac{1}{\sqrt{2}}<0/8،\ 0/5<\frac{1}{\sqrt{3}}<0/6،$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}}=0/5،\ 0/4<\frac{1}{\sqrt{5}}<0/5،\ 0/4<\frac{1}{\sqrt{6}}<0/5$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $3/5<A<3/9$ وبنابراین $[A]=3$.

۲) این تمرین، با تمرین قبل تفاوت اساسی ندارد، باوجود این، بــه علت زیادی تعداد جمله‌ها، نمی‌توان با محاسبهٔ مستقیم به‌نتیجه رسید. ابتــدا یك پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش‌قضیه. فرض می‌کنیم:

$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$. ثابت کنید:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1} \qquad (1)$$

$$2\sqrt{n}-2<x<2\sqrt{n}-1 \qquad (n>1) \qquad (2)$$

اثبات. درستی نابرابری‌های (۱) به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۲}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}},$$

$$۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}=۲(\sqrt{n}-\sqrt{n-۱})=$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{n}+\sqrt{n-۱}}>\frac{۲}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

برای اثبات نابرابری‌های (۲)، درنابرابری‌های (۱)، به‌جای n، به ترتیب، عددهای ۲، ۳، ۴، ...، n را قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}<\frac{۱}{\sqrt{۲}}<۲\sqrt{۲}-۲$$

$$۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}<\frac{۱}{\sqrt{۳}}<۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$$

$$۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۴}}<۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}$$

. . . .

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<۲\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{-۱}$$

که ازمجموع آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}<x-۱<۲\sqrt{n}-۲$$

یا، با اضافه‌کردن یك واحد به همهٔ جمله‌ها

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}+۱<x<۲\sqrt{n}-۱$$

چون $۳>۲\sqrt{۲}$ و $\sqrt{n+۱}>\sqrt{n}$، ازنابرابری‌های اخیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$۲\sqrt{n}-۲<x<۲\sqrt{n}-۱$$

پیش‌قضیه ثابت شد.

اکنون، اگردرنابرابری‌های (۲)، قرار دهیم $n=۱۰۰۰۰۰۰$، به-

دست می‌آید:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۲<B<۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۱$$

ویا $۱۹۹۹>B>۱۹۸۸$، یعنی $[B]=۱۹۹۸$.

۳) درپیش‌قضیه‌ای‌که هم‌اکنون درحل تمرین ۲۰۱۹) آوردیم، دیدیم:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}$$

این بستگی را می‌توان، بـه مفهومی، تعمیم داد $m<n$ می‌گیـریم و در این نابرابـری‌ها، به ترتیب n را بـرابر m، $m+۱$، $m+۲$، ...، n فـرض می‌کنیم و، سپس نابرابری‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{m}<\frac{۱}{\sqrt{m}}+\frac{۱}{\sqrt{m+۱}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<$$
$$<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

اکنون‌اگر، $m=۱۰۰۰۰$ و $n=۱۰۰۰۰۰۰$ بگیریم،خواهیم‌داشت:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}-۲\sqrt{۱۰۰۰۰}<\frac{C}{۵۰}<۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۲\sqrt{۹۹۹۹}$$

وچون داریم:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}>۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}=۲۰۰۰،$$
$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰}=۲۰۰،\ ۲\sqrt{۹۹۹۹}=\sqrt{۳۹۹۹۶}>۱۹۹/۹۸$$

به‌دست می‌آید:

$$۱۸۰۰<\frac{C}{۵۰}<۱۸۰۰/۲$$

وسرانجام، باضرب همهٔ جمله‌هادر ۵۰، خواهیم داشت:

$$۹۰۰۰۰<C<۹۰۰۰۱$$

یعنی $[C]=۹۰۰۰۰$.

۲۰. می‌گیریم که $\sqrt{n}=k+\alpha$، درآن، k عددی است درست و $0\leqslant\alpha<1$. داریم:

$$\{\sqrt{n}\}=\sqrt{n}-[\sqrt{n}]=\sqrt{n}-k$$

نابرابری‌های فرض، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$\frac{3}{10}<\sqrt{n}-k<\frac{1}{3}\Longleftrightarrow\frac{3}{10}+k<\sqrt{n}<\frac{1}{3}+k$$

همهٔ جمله‌ها مثبت‌اند ومی‌توان آن‌ها را مجذور کرد:

$$k^2+\frac{3}{5}k+\frac{9}{100}<n<k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}$$

اگر k را برابر ۰، ۱، ۲ بگیریم، برای n عدد درستی به دست نمی‌آید. به‌ازای $k=3$ داریم:

$$10+\frac{89}{100}<n<11+\frac{1}{9}\Longrightarrow n=11$$

$n=11$ کوچکترین عدد طبیعی است که درشرط مسأله صدق می‌کند.

۲۱. ۱) داریم:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

نابرابری سمت چپ ثابت شد. برای نابرابری سمت راست، به ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-2}\right)+\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\right.$$

$$+\frac{۳n}{۲n^۲+۲(n-۱)}+\dots+\frac{۳n}{۲n^۲}\Big]<$$

$$<\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳n}{۲n^۲}+\frac{۳n}{۲n^۲}+\dots+\frac{۳n}{۲n^۲}\right)=\frac{۱}{۴}(n+۱)\frac{۳}{n}=$$

$$=\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴n}<\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{n}$$

بنابراین $\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۲n}<\frac{۳}{۴}$.

۲) این نابرابری روشن است:

$$\frac{۱}{۳n}+\frac{۱}{۳n+۱}<\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{n}$$

برای نابرابری سمت راست داریم:

$$\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۳n-۱}+\left(\frac{۱}{۳n}+\frac{۱}{۳n+۱}\right)<$$

$$<\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}+\dots+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}=\frac{۲n}{n}=۲$$

و برای نابرابری سمت چپ، به‌ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\dots+\frac{۱}{۳n+۱}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{۳n+۱}\right)+\left(\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{۳n}\right)+\right.$$

$$\left.+\dots+\left(\frac{۱}{۳n+۱}+\frac{۱}{n+۱}\right)\right]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۴n+۲}{(۲n+۱)^۲-n^۲}+\frac{۴n+۲}{(۲n+۱)^۲-(n-۱)^۲}+\right.$$

$$\left.+\dots+\frac{۴n+۲}{(۲n+۱)^۲-n^۲}\right]>\frac{۱}{۲}\left[\frac{۴n+۲}{(۲n+۱)^۲}+\frac{۴n+۲}{(۲n+۱)^۲}+\dots\right.$$

$$\cdots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}\Big]=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1$$

۳) با توجه به برابری روشن $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ داریم:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1$$

اکنون، برای نابرابری مفروض می‌توان نوشت:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\times 3}+$$

$$+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1\frac{3}{4}-\frac{1}{n}<1\frac{3}{4}$$

۴) فرض می‌کنیم:

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100},\ \ b=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101}$$

روشن است که $a<b$، زیرا هرعامل a از عامل متناظر خود در b کوچکتر است:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \frac{5}{6}<\frac{6}{7},\ \ldots,\ \frac{99}{100}<\frac{100}{101}$$

بنابراین $a^2<ab$ و

$$a^2<ab=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}$$

یعنی $a^2<\frac{1}{101}$ و $a<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}$.

۵) نابرابری را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. نابرابری به‌ازای $n=1$ به‌برابری تبدیل می‌شود: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$، و به ازای $n=2$

درست است:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۷}} \Longrightarrow \frac{۳}{۸}<\frac{۱}{\sqrt{۷}} \Longrightarrow \frac{۹}{۶۴}<\frac{۱}{۷} \Longrightarrow \frac{۹}{۶۴}<\frac{۹}{۶۳}$$

اکنون فرض می‌کنیم، نابرابری به‌ازای $n=k$ درست باشد:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۴}{۵}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}$$

باضرب دوطرف این‌نابرابری در $\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$$

بنابراین، کافی است ثابت‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۴}}$$

اگردوطرف این نابرابری رادر $(۲k+۲)\sqrt{۳k+۱}\cdot\sqrt{۳k+۴}$ضرب وسپس، دوطرف را مجذورکنیم، بعداز ساده‌کردن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۱۲k^۳+۲۸k^۲+۱۹k+۴<(۱۲k^۳+۲۸k^۲+۱۹k+۴)+k$$

که درستی‌آن روشن است.

یادداشت. درتمرین ۴۰۲۱) ثابت‌کردیم:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{۱۰}$$

این نابرابری را می‌توان قوی‌ترکرد. اگردرنابرابری تمرین ۵۰۲۱) قرار دهیم $n=۵۰$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{\sqrt{۱۵۱}}<\frac{۱}{\sqrt{۱۴۴}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۶) درتمرین ۲۰۱۹) ثابت‌کردیم (صفحهٔ۱۵۳):

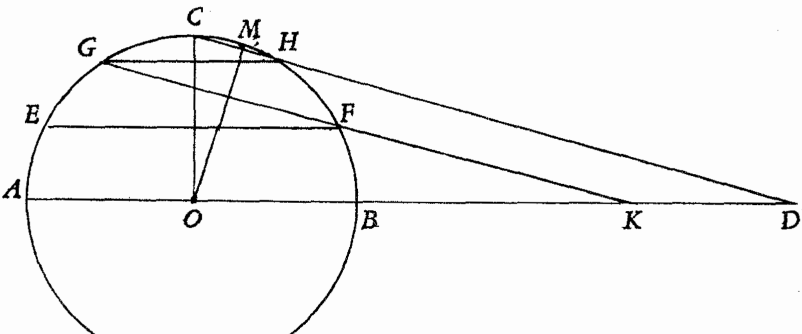
$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱} \qquad (۱)$$

اکنون، اگر در(۱)، مقدار n را، به‌ترتیب، برابر m، $m+۱$، $m+۲$، ...، n بگیریم و، سپس، نابرابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{m}<\frac{۱}{\sqrt{m}}+\frac{۱}{\sqrt{m+۱}}+\dots+$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

۰۲۲ ۱) نقطهٔ برخورد خط راست GF را با $[OD]$ با حرف K نشان می‌دهیم و E را بـه B وصـل می‌کنیم . به سادگـی می‌تـوان ثابت کـرد: $[EB]||[GF]||[CH]$ (شکل ۱۱ را ببینید). درنتیجه



شکل ۱۱

$$|EF|=|BK| \text{ و } |GH|=|KD|$$

وبنابراین $$|OD|=|EF|+|GH|+R$$

درکتاب «مساحت شکل‌های مسطحه وکروی»، فرزندان موسی‌بن‌شاکر (که درزمان مأمون خلیفهٔ عباسی می‌زیسته‌اند)، ایـن قضیه را برای حالتـی ثابت کرده‌اندکه، ربع دایرهٔ BC، به‌سه بخش برابر تقسیم شده باشد (همان-

طورکه دراین‌جا ثابت شده است). ولی، همان طورکه بنوموسی یادآوری می‌کنند، این قضیه درحالت کلی، وقتی‌که ربع دایرهٔ BC بـه n بخش برابر تقسیم شده باشد، درست است و همیشه باهمین روش استدلال می‌توان ثابت کرد که:

$$|OD| = (\text{مجموع طول های وترهای موازی}) + (\text{طول شعاع دایره})$$

۲) مثلث های قائم الـزاویهٔ OCM و OMD متشابه‌انـد (چـرا؟) و بنابراین

$$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|CM|}{|OM|} \Longrightarrow |OM|\cdot|OC| = |CM|\cdot|OD| \qquad (۱)$$

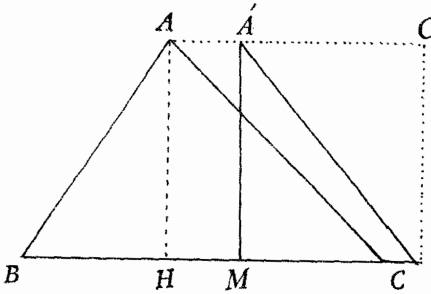
$|OM| < |OC| = R$ وبنابراین

$$|OM|^۲ < |OM|\cdot|OC| < R^۲$$

اگر دراین نابرابری‌ها، به‌جای $|OM|\cdot|OC|$ ازرابطهٔ (۱) قراردهیم، باتوجه به $|CM| = \frac{۱}{۲}|CH|$ به‌دست می‌آید:

$$|OM|^۲ < \frac{۱}{۲}|HC|\cdot|OD| < R^۲$$

یادداشت. بنوموسی، براساس‌این دوقضیه وقضیهٔ دیگری (که نتیجه‌ای ازاین دوقضیه است)، ثابت کرده‌اندکه : الف) سطح کره برابراست باچهار برابرمساحت دایرهٔ عظیمهٔ آن‌و ب) حجم‌کره برابراست باحاصل‌ضرب شعاع دریك‌سوم سطح آن.



شکل ۱۲

۲۳. چهاروجهی $SABC$ را می‌گیریم وفرض می‌کنیم، طول همهٔ یال‌های آن، به جز SA، از واحـد تجاوز نکنند. ارتفاع AH در مثلث ABC (قاعدهٔ چهاروجهی) را $h_۱$ می‌نامیم وازنقطهٔ M، وسط پاره‌خط راست BC، عمودی به طول $h_۱$ بر

BC اخراج می‌کنیم (شکل ۱۲). روشن است که $|CA'|\leqslant|CA|$، بنا بر این

$$|CA'|^۲\leqslant|CA|^۲ \Longrightarrow h_۱^۲+\frac{a^۲}{۴}\leqslant b^۲ \Longrightarrow h_۱^۲\leqslant ۱-\frac{a^۲}{۴}$$

($a=|BC|$، $b=|AC|$ گرفته‌ایم؛ در ضمن، درمثلث قائم‌الزاویهٔ $A'MC$ به‌دست می‌آید: $|CA'|^۲=h_۱^۲+\frac{a^۲}{۴}$؛ نا برابری آخر به‌دلیل $b\leqslant ۱$ درست است). از این جا $h_۱\leqslant\sqrt{۱-\frac{a^۲}{۴}}$. به‌همین ترتیب اگر درمثلث SBC، طول ارتفاع وارد از رأس S بر ضلع BC را $h_۲$ بنامیم، خواهیم داشت $h_۲\leqslant\sqrt{۱-\frac{a^۲}{۴}}$ (درمثلث SBC هم، هیچ ضلعی ازواحد تجاوز نمی‌کند). درضمن، درحالتی‌که مثلث‌های ABC و SBC متساوی‌الاضلاع باشند، به‌برابری های $h_۱=\sqrt{۱-\frac{a^۲}{۴}}$ و $h_۲=h_۱$ می‌رسیم.

اکنون، اگر ارتفاع چهاروجهی‌را، که ازرأس S بر صفحهٔ قاعدهٔ ABC فرود آمده است، h بگیریم، روشن است که $h\leqslant h_۲$ و برای V، حجم چهار-وجهی داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}h\cdot S_{ABC}\leqslant\frac{۱}{۳}h_۲\cdot\left(\frac{۱}{۲}ah_۱\right)\leqslant\frac{۱}{۶}a\left(۱-\frac{a^۲}{۴}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۶}a\left(۱+\frac{a}{۲}\right)\left(۱-\frac{a}{۲}\right)\leqslant\frac{۱}{۶}a\cdot\frac{۳}{۲}\left(۱-\frac{a}{۲}\right)=\frac{۱}{۸}(۲a-a^۲)=$$

$$=\frac{۱}{۸}[۱-(a-۱)^۲]\leqslant\frac{۱}{۸}$$

علامت برابری، وقتی به‌دست می‌آید که، اولاً $a=۱$، ثانیاً $h=h_۲$ باشد، یعنی وقتی‌که همهٔ یال‌های چهاروجهی، به‌جز SA، برابر واحد باشند و در ضمن، صفحهٔ SBC برصفحهٔ ABC عمود باشد.

۲۴. چون دنباله غیرصعودی است، بنا براین $a_۱=\frac{۱}{۲k}$ وچون‌مجموع

همهٔ عددهای دنباله برابرواحد است، بنابراین تعداد ایـن عددها نمی‌تواند کمتراز $2k$ باشد. فرض می‌کنیم در k عدد اول دنباله، کوچکترین عدد، از نصف بزرگترین عدد، بزرگتر نباشد، یعنی $a_k \leqslant \frac{1}{2}a_1$؛ همچنین برای k عدد a_k، a_{k+1}، ...، a_{2k-1} داشته بـاشیم $a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2}a_k \leqslant \frac{1}{4}a_1$؛ به‌همین ترتیب، اگر $n \geqslant 3k-1$ باشد، بـرای k عدد از a_{2k-1} تـا a_{3k-2}، نابرابری

$$a_{3k-2} \leqslant \frac{1}{2}a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{8}a_1$$

برقرارمی‌شودوغیره. بنابراین

$$a_1+a_k+a_{2k-1}+a_{3k-2} \leqslant \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)a_1 < 2a_1$$

به‌همین ترتیب، اگر k عدد متوالی را، از a_2 آغازکنیم، به‌دست می‌آید:

$$a_2+a_{k+1}+a_{2k}+a_{3k-1}+\cdots < 2a_2 < 2a_1$$

وباآغاز از a_2، a_4، ...،

$$a_3+a_{k+2}+a_{2k+1}+a_{3k}+\cdots < 2a_1$$

$$a_4+a_{k+3}+a_{2k+2}+a_{3k+1}+\cdots < 2a_1$$

. . . .

$$a_{k-1}+a_{2k-2}+a_{3k-3}+\cdots < 2a_1$$

ازمجموع همهٔ این نابرابری‌ها (به تعداد $k-1$) نتیجه می‌شود:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n < k \times 2a_2 = 2k \cdot \frac{1}{2k} = 1$$

که شرط مسأله رانقض می‌کند. بنابراین، دست‌کم، دریکی‌از ایـن k جملهٔ متوالی، بایدکوچکترین عدد، ازنصف بزرگترین عدد، بزرگترباشد.

۲۵. ابتدا این نابرابری‌ها را، برای $n \in \mathbf{N}$، ثابت می‌کنیم:

$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \text{ و } \left(1-\frac{2}{3n}\right)^3>\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (1)$$

داریم:

$$\left(1+\frac{2}{3n}\right)^3=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{3n^2}+\frac{8}{27n^3},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$$

که در دوجملهٔ اول برابرند و، درضمن، $\frac{4}{3n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n^2}$. نابرابری سمت راست (۱) هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

از نابرابری سمت چپ (۱) به دست می‌آید $1+\frac{2}{3n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$، که اگر دوطرف آن را در $n^{\frac{2}{3}}$ ضرب کنیم:

$$n^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3n^{\frac{1}{3}}}>(n+1)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$$

وباروشی مشابه، ازنابرابری سمت راست (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$$

به‌این ترتیب:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right) \qquad (2)$$

بنابراین، ازیك طرف، باتوجه به نابرابری سمت راست (۲) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}>\frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+$$

$$+(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2})]+\dots+(\sqrt[3]{1000001^2}-\sqrt[3]{1000000^2})=$$

$$=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000001^2}-\sqrt[3]{16})>\frac{3}{2}\times 10000-\sqrt[3]{64}=$$

$$=15000-4=14996$$

وازطرف دیگر، باتوجه به‌نابرابری سمت راست (۲):

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}<\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1000000^2}-\sqrt[3]{9})<$$

$$<\frac{3}{2}(10000-2)=14997$$

و درنتیجه $[A]=14996$.

۲۶. تعداد عددهای k رقمی راکه شامل رقم ۹ نباشند، n_k می‌گیریم. روشن است‌که $n_1=8$ (صفر را به حساب نیاورده‌ایم، زیـرا نمی‌تواند در مخرج قرارگیرد) و $n_2=8\times 9$، زیرا درسمت راست هرعدد یك رقمی‌از ۱ تا ۸، تنها ۹ رقم از ۰ تا ۸ را می‌توان قرارداد و باعدد یك رقمی ۹ هم، نمی‌توان عدد دورقمی درست‌کرد (به‌یادداشته باشیم‌که، درعددهای ما، نباید رقم ۹ وجودداشته‌باشد). به‌طورکلی، اگر $10^k\leqslant a<10^{k+1}$ باشد، برای تعداد عددهای a (بدون رقم ۹) داریم:

$$n_{k+1}=9n_k$$

زیرا، اگر یکی‌ازعددهای $10^{k-1}\leqslant b<10^k$ را،که بدون رقم ۹ است، در نظر بگیریم، تنها باگذاشتن یکی‌از رقم‌های ۰ تـا ۸ در سمت راست آن، می‌توان به‌یکی‌از عددهای a رسید.

اکنون به‌مجموع موردنظر می‌پردازیم وکسرها را تا $n<10^{m+1}$ در نظرمی‌گیریم. ازاین‌کسرها، آن‌هایی راکه درمخرج خود، رقم ۹ دارند،کنار می‌گذاریم وبقیه رابه‌این صورت می‌نویسیم:

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{888}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^m+1}+\right.$$

$$+\underbrace{\frac{۱}{۸۸\ldots۸۸}}_{m+۱\text{مرتبه}}\Big)\leqslant ۱\times n_۱+\frac{۱}{۱۰}\cdot n_۲+\frac{۱}{۱۰۰}\cdot n_۳+\ldots+$$

$$+\frac{۱}{۱۰^{m-۱}}\cdot n_m+\frac{۱}{۱۰^m}n_{m+۱}$$

(روشن است که مقدار هر پرانتز، ازحاصل‌ضرب بزرگترین جمله درتعداد جمله‌های آن کوچکتر است). ازطرف دیگرداریم:

$$۱\times n_۱+\frac{۱}{۱۰}\times n_۲+\frac{۱}{۱۰۰}\times n_۳+\ldots+\frac{۱}{۱۰^m}\cdot n_{m+۱}=$$

$$=۸\left(۱+\frac{۹}{۱۰}+\frac{۹^۲}{۱۰^۲}+\ldots+\frac{۹^m}{۱۰^m}\right)=$$

$$=۸\times\frac{۱-\frac{۹^{m+۱}}{۱۰^{m+۱}}}{۱-\frac{۹}{۱۰}}<۸\times\frac{۱}{۱-\frac{۹}{۱۰}}=۸۰$$

۴۷. اگرهمهٔ نابرابری‌ها را با هم جمع کنیم، سمت چپ نابرابری، برابرصفرمی‌شودو، بنابراین به‌ناچار، دستگاه نابرابری‌ها به‌دستگاه برابری‌ها تبدیل می‌شود:

$$a_۱-۴a_۲+۳a_۳=۰،\ \ldots،\ a_{۱۰۰}-۴a_۱+۳a_۲=۰$$

که می‌توان آن‌هارا به‌این صورت نوشت:

$$a_۱-a_۲=۳(a_۲-a_۳)،\ a_۲-a_۳=۳(a_۳-a_۴)،\ \ldots$$

$$\ldots،\ a_{۹۹}-a_{۱۰۰}=۳(a_{۱۰۰}-a_۱)،\ a_{۱۰۰}-a_۱=۳(a_۱-a_۲)$$

یعنی

$$a_۱-a_۲=۳(a_۲-a_۳)=۳^۲(a_۳-a_۴)=\ldots=۳^{۱۰۰}(a_۱-a_۲)$$

برابری $a_۱-a_۲=۳^{۱۰۰}(a_۱-a_۲)$، تنها با شرط $a_۱=a_۲$ برقرار است. ولی دراین صورت، با توجه به برابری $a_۱-a_۲=۳(a_۲-a_۳)$ به دست

می‌آید: $a_2=a_3$ ... تا آخر. دستگاه تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a_1=a_2=a_3=\dots=a_{100}=10$$

۱۰۲۸) از برابری فرض، با تبدیل حاصل‌ضرب دوسینوس به تفاضل دوکسینوس، به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}$$

اگر $2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}=\cos\alpha$ و $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ بگیریم (چون

$$\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}<\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

بنابراین، α زاویه‌ای‌است حاده (که البته، برابرصفرهم می‌تواندباشد)، داریم:

$$\hat{B}-\hat{C}=2\alpha,\ \hat{B}+\hat{C}=\pi-\hat{A}$$

ازآنجا $\hat{B}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}+\alpha$ و $\hat{C}=\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}-\alpha$.

برای این‌که مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$2m+\sin\frac{A}{2}\leqslant 1$ در ضمن از نابرابری $\alpha<\frac{\pi}{2}-\frac{\hat{A}}{2}$ به دست می‌آید: $\cos\alpha>\sin\frac{\hat{A}}{2}$. به‌این ترتیب، به‌نابرابری‌های زیرمی‌رسیم:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}<2m+\sin\frac{\hat{A}}{2}\leqslant 1$$

واز نابرابری سمت راست، شرط وجود جواب به‌دست می‌آید:

$$m\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)\qquad(1)$$

۲) الف) اگر درشرط (۱) از مسألهٔ بالا، به جای m، مقدار آن

$\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$ را قراردهیم، به نابرابری $\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)$ می‌رسیم. اگر دوطرف این نابرابری را درمقدار مثبت $\sin\frac{\hat{A}}{2}$ ضرب کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\hat{A}}{2}-\sin^2\frac{\hat{A}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)^2\right]\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

یعنی $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$؛ علامت برابری برای مثلث متساوی‌الاضلاع است (چرا؟).

ب) داریم:

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=$$

$$=1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$=1-\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4};$$

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=3-\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

۲۹. نابرابری موردنظر را می‌توان، به‌ترتیب چنین نوشت:

$$2(tg\,x-\sin x)<tg^3x \Longleftrightarrow 2\,tg\,x(1-\cos x)<tg^3x \Longleftrightarrow$$

$$2(1-\cos x)<\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x} \Longleftrightarrow 2\cos^2x<1+\cos x$$

واین نابرابری، بـرای $0<x<\frac{\pi}{2}$، همیشه برقرار است، زیرا دراین بازه همیشه داریـم $\cos^2x<\cos x$ و $\cos^2x<1$.

۳۰. باتوجه به‌نابرابری $tg\,x>x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ داریم:

$$\sin\alpha+tg\,\alpha=\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\,tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}}>4\,tg\frac{\alpha}{2}>2\alpha$$

به‌همین ترتیب $\sin\beta+tg\,\beta>2\beta$ و $\sin\gamma+tg\,\gamma>2\gamma$. از مجموع ایـن سه نابرابری به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma>2(\alpha+\beta+\gamma)=\pi$$

۳۱. الف) به‌ازای $n=6$، نابرابری‌ها برقرارند:

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6=64،\ \ 6!=720،\ \ \left(\frac{6}{2}\right)^6=729$$

اثبات را با استقرای ریاضی می‌دهیم. فرض می‌کنیم نابرابری‌ها به‌ازای $n=k$ برقرار باشند و ثابت می‌کنیم:

$$\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}<(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

از تقسیم جمله‌های ایـن نابـرابـری برجمله‌هـای نظیـر در نابـرابـری $\left(\frac{k}{3}\right)^k<k!<\left(\frac{k}{2}\right)^k$ به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}:\left(\frac{k}{3}\right)^{k}<k+1<\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}:\left(\frac{k}{2}\right)^{k}$$

و یا $(k+1)\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}{2}<k+1<(k+1)\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}{3}$؛ و بعد از تقسیم همهٔ جمله‌ها بر $(k+1)$:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}{3}<1<\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}{2}$$

که با توجه به نابرابری‌های $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ درست است (قضیهٔ ۰۱ را ببینید).

ب) این نابرابری‌ها هم، با روش استقرای ریاضی ثابت می‌شوند. نابرابری به‌ازای $n=1$ برقرار است. فرض می‌کنیم نابرابری سمت چپ به ازای $n=k$ برقرار باشد و ثابت می‌کنیم، در این‌صورت، به‌ازای $n=k+1$ هم برقرار است، یعنی

$$(k+1)!>\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \qquad (*)$$

به‌ترتیب داریم (از نابرابری $1<\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$ که نتیجه‌ای از نابرابری $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e$ است، استفاده کرده‌ایم؛ درمتن درس این فصل ثابت کردیم $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$؛ صفحهٔ ۳۲ را ببینید):

$$(k+1)!=(k+1)\cdot k!>\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\cdot(k+1)=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\times$$

$$\times\frac{k^{k}\cdot e}{(k+1)^{k}}=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\cdot\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}>\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$$

اکنون به اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم. نابرابری $n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$ به ازای $n=۷$ برقرار است. در واقع باید ثابت کنیم $۷!<۷\left(\frac{۷}{e}\right)^۷$ یا $۶!<\left(\frac{۷}{e}\right)^۷$. از دوطرف نابرابری، در مبنای e، لگاریتم می‌گیریم:

$$\ln ۶!=\ln ۷۲۰\approx ۶/۵۸<\ln\left(\frac{۷}{e}\right)^۷=۷(\ln ۷-۱)\approx ۶/۶۲$$

برای اثبات نابرابری (*) ، ضمن استفاده از نابرابری $\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}}<۱$ به‌ترتیب داریم:

$$(k+۱)!=(k+۱)\cdot k!<(k+۱)\cdot k\left(\frac{k}{e}\right)^k=$$

$$=(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\cdot\frac{k^{k+۱}\cdot e}{(k+۱)^{k+۱}}=$$

$$=(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}\cdot\frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k+۱}}<(k+۱)\left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}$$

یادداشت. نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ ب) دقیق‌تر از نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ الف) است، یعنی مقدار $n!$ را دقیق‌تر معین می‌کند. مثلاً اگر مقدار e را درنابرابری سمت چپ ۲/۷۲ ($e<۲/۷۲$) و درنابرابری سمت راست ۲/۷۱ ($e>۲/۷۱$). بگیریم، به دست می‌آید:

$$\left(\frac{n}{۲/۷۲}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{۲/۷۱}\right)^n$$

به‌کمك همین نابرابری‌های مسألهٔ ۳۱۰ ب) می‌توان ثابت کرد:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (**)$$

برابری تقریبی (**)، وقتی n بزرگتر باشد، دقیق‌تر می‌شود به‌نحوی که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

۱۰۳۴) ۱) با توجه به‌نابرابری $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2$ داریم:

$$(1/000001)^{1000000} = \left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} > 2$$

۲) نسبت دوعدد را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001} <$$

$$< 3 \times \frac{1}{1001} < 1$$

به‌این ترتیب: $1000^{1000} > 1001^{999}$.

۳) مسأله‌ای کلی‌تر رادرنظرمی‌گیریم وثابت می‌کنیم، برای $n \in \mathbf{N}$ و $n > 2$، داریم:

$$(n+2)^n < n^{n+2} \qquad (*)$$

نابرابری (*) را می‌توان به‌صورت $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n < n^2$ نوشت. با بسط دو-جمله‌ای سمت چپ این نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n +$$

$$+ n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+\cdots<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\cdots=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1\right]<$$

$$<n\left[3\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=n\left(2+\frac{3}{n}\right)<n\cdot n=n^{2}$$

(ضمن عمل، از نابرابری $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ استفاده کردیم). به این ترتیب $(n+2)^{n}<n^{n+2}$؛ که اگر $n=997$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$999^{997}<997^{999}$$

۳۳. نابرابری به ازای $n=1$، به برابری تبدیل می‌شود و به‌ازای $n=2$ داریم:

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}=2/25 \quad \text{و} \quad 2/25>2$$

چون دنبالهٔ $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$، به‌ازای $n\in\mathbf{N}$، صعودی است (به‌شرط $n>1$ داریم $2-\frac{1}{n}>1$، بنابراین با بزرگ شدن n، از یک طرف، مقدار $2-\frac{1}{n}$ بزرگتر می‌شود و، ازطرف دیگر مقدار $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$ افزایش می‌یابد)، بنا بر این، اگر فرض کنیم $\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}>n$ [فرض استقرا] ،داریم:

$$\left(2-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)>$$

$$>n\left(2-\frac{1}{n}\right)>\frac{3}{2}n>n+1$$

زیرا، برای $n>2$، اولاً $2-\frac{1}{n}>\frac{3}{2}$ وثانیاً $\frac{3}{2}n>n+1$. به این ترتیب ،

به ازای مقدارهای $n\geqslant ۲$ داریم $\left(۲-\frac{۱}{n}\right)^n>n$ و به ازای $n=۱$:

$\left(۲-\frac{۱}{n}\right)^n=n$.

۳۴. ابتدا $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{n}[(x+۱)(x-۲)\cdots(x+n)]^{\frac{۱}{n}-۱}\times$$
$$\times[(x+۱)(x-۲)\cdots(x+n)]'$$

بنابراین، با توجه به‌فرد بودن n، به‌دست می‌آید:

$$f'(۰)=\frac{۱}{n}(n!)^{\frac{۱}{n}-۱}\cdot\left(n!-\frac{n!}{۲}+\frac{n!}{۳}-\cdots+\frac{n!}{n}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{n}\right)>\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\ln ۲$$

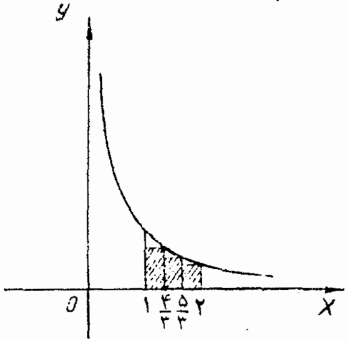
(دستور (۱۰) رادرهمین فصل ببینید). از طرف دیگر، درتمرین ۳۱.ب) ثابت کردیم:

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n\Longrightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}>\frac{۱}{e}\qquad(*)$$

$\ln ۲$ را می‌توان، به تقریب، از جدول لگاریتم‌های طبیعی به دست آورد:

$$\ln ۲\approx ۰/۶۹۳>\frac{۳}{۵}$$

ولی، بدون استفاده از جدول هم، می‌توان مقدار $\ln ۲$ را ارزیابی کرد. با توجه به‌شکل ۱۳ داریم:



شکل ۱۳

$$\ln ۲ = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{x} dx > \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳۷}{۶۰} > \frac{۳}{۵}$$

درنتیجه داریم:

$$f'(۰) > \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \ln ۲ > \frac{۱}{e} \cdot \frac{۳}{۵} > \frac{۳}{۲/۷۵ \times ۵} = \frac{۱۲}{۵۵}$$

۳۵. فرض کنیم بخواهیم جدول سینوس‌ها را از ۰ درجه تا ۱۰ درجه، تا سه رقم بعد از ممیز محاسبه کنیم. α درجه برابر $\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}$ رادیان است و، بنابراین، اگر نابرابری

$$\left|\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}\right| < ۰/۰۰۰۵$$

در بازهٔ $\alpha \in [۰، ۱۰]$ برقرار باشد، چنین جدولی را می‌توان تشکیل داد، ولی تابع $f(x) = x - \sin x$ در بازهٔ $\left[۰، \frac{\pi}{۱۸}\right]$ صعودی است (مشتق آن مثبت است)، بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{\pi}{۱۸} - \sin\frac{\pi}{۱۸} < ۰/۰۰۰۵$$

و این نابرابری درست نیست و می‌توان ثابت کرد:

$$\sin\frac{\pi}{۱۸} < \frac{\pi}{۱۸} - ۰/۰۰۰۵$$

اگر عدد π را با رقم‌های بیشتری درنظر بگیریم، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\frac{\pi}{۱۸} > ۰/۱۷۴۵$، بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\sin\frac{\pi}{۱۸} < ۰/۱۷۴ \qquad (*)$$

اگر در برابری $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$ قرار دهیم

$\alpha=\frac{\pi}{۱۸}$، معلوم مــی‌شود که $sin\frac{\pi}{۱۸}$ ریشهٔ معــادلــهٔ درجــه ســوم

$۸x^۳-۶x+۱=۰$ است،که با انتخاب $y=۲x$، به این معادله می‌رسیم:

$$y^۳-۳y+۱=۰$$

ریشهٔ این معادلــه، برابر است با $y_۰=۲sin\frac{\pi}{۱۸}$.

بــه سادگــی (و مثــلا بــه کمك مشتــق) روشن می‌شود کــه تابــع $f(y)=y^۳-۳y+۱$ دربازهٔ $[۰،۱]$ نزولــی است و، بنابراین، بــرای اثبات نابرابری (*) کافی‌است ثابت کنیم $f(۰/۳۴۸)<۰$. ودرستی ایــن نابرابری، به‌طورمستقیم به‌دست می‌آید.

۳۶. می‌دانیم $۲<e<۳<\pi<۴$. اگرمرز پایین عددهای e و π را درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید $۳^۲<۲^۳$؛ ولی‌اگرمرز بالای آن‌ها را به‌حساب آوریم، به نابرابری $۴^۳>۳^۴$ می‌رسیم. به‌ایــن ترتیب، ناچاریم دقیق‌تــر محاسبه کنیم.

برای این منظور، تابــع $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ رادرنظر می‌گیریم. مشتق‌این تابــع $f'(x)=\frac{۱-\ln x}{x^۲}$، برای $x>e$ منفی است، یعنــی $f(x)$ درایــن بازه نزولی است وچون $e<\pi$، پس

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\Longrightarrow e^\pi>\pi^e$$

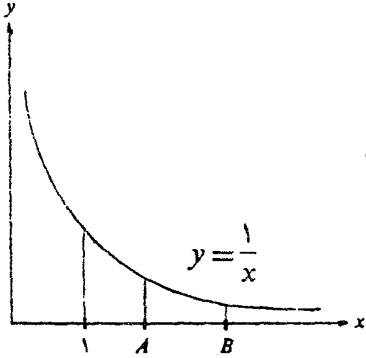
یادداشت. خودتان این دوبرابری راثابت کنید:

$$[\pi]+[\pi^e]=[e]+[e^\pi] \text{ و } [\pi]^{[e]}+[e]=[e]^{[\pi]}+[\pi]$$

$[x]$ یعنی بخش درست عدد x.

ب) $a<b$ می‌گیریم و ثـابت می‌کنیم، در حـالت $e\leqslant a<b$ داریم $a^b>b^a$ و درحالت $۱<a<b\leqslant e$ برعکس $b^a>a^b$.

از این قضیه استفاده می‌کنیم که مساحت زیرمنحنی $y=\frac{1}{x}$، درفاصلهٔ $1\leqslant x\leqslant p$، برابر است با $\ln p$. به این ترتیب، اگر نقطه‌های A و B را، به‌ترتیب، با طول‌های a و b، روی محور xx' انتخاب کنیم (شکل ۱۴)، داریم:



شکل ۱۴

$$(b-a)\cdot\frac{1}{b}<\ln b-\ln a<(b-a)\cdot\frac{1}{a}$$

یا

$$\frac{b-a}{b}+\ln a<\ln b<\frac{b-a}{a}+\ln a \quad (*)$$

حالت اول $a\geqslant e$. دراین‌حالت $b-a\leqslant(b-a)\ln a$ ونابرابری سمت راست (*) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a\ln b<(b-a)\ln a+a\ln a$$

و پس‌ازساده‌کردن

$$a\ln b<b\ln a\Longrightarrow b^a<a^b$$

حالت دوم $b\leqslant e$. دراین‌حالت $b-a\geqslant(b-a)\ln b$ ونابرابری سمت چپ (*) به‌این صورت درمی‌آید:

$$(b-a)\ln b+b\ln a<b\ln b$$

و بعد ازساده‌کردن

$$b\ln a<a\ln b\Longrightarrow a^b<b^a$$

یادداشت. تمرین ۳.۳۲) حالت خاصی ازتمرین ۳۶.ب)است. در آن جا $a=۹۹۷$ و $b=۹۹۹$ وچون $a>e$، پس $۹۹۷^{۹۹۹}>۹۹۹^{۹۹۷}$.

۳۷. $x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$ و $y=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$ مـی‌گیریـم. درایـن صورت، نابرابری مورد نظر، چنین می‌شود:

$$\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}\Longrightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{2}\quad(*)$$

اثبات را به‌کمك استقرای ریاضی می‌دهیم. نابرابری (*)، به‌ازای $n=1$ و $n=2$ درست است (خودتان تحقیق‌کنید). فرض می‌کنیم، نابرابری (*) به ازای $n=k$ درست باشد:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^k\leqslant\frac{x^k+y^k}{2}$$

اگر دوطرف این نابرابری را در $\frac{x+y}{2}$ ضرب‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1}\leqslant\frac{x^k+y^k}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$$

و برای این‌که، نابرابری مورد نظر، به‌ازای $n=k+1$ برقرار باشد، کافی است ثابت‌کنیم:

$$\frac{x^k+y^k}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\leqslant\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}$$

ولی نابرابری اخیر، به‌سادگی، به‌نابرابری روشن زیر تبدیل می‌شود:

$$(x^k-y^k)(x-y)>0$$

۳۸. با فرض $f_1(x)=x$، برای $n\in\mathbf{N}$ و $n>1$ تعریف می‌کنیم:

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)\left(f_n(x)+\frac{1}{n}\right)$$

که اگر آن را با دنبالهٔ مورد نظر مسألـه مقایسه‌کنیم، به‌معنای $f_n(x)=x_n$ است درواقع، اگر $x_1=f_1(x)=x$ بگیریم، داریم:

$$x_2=f_2(x)=f_1(x)\left(f_1(x)+\frac{1}{n}\right)=x\left(x+\frac{1}{n}\right)=x^2+\frac{1}{n}x;$$

$$x_3=f_3(x)=\left(x^2+\frac{1}{n}x\right)\left(x^2+\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(x^2+\frac{1}{n}x\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{n}x\right);\quad \dots$$

درضمن، تابع $f_n(x)$، دارای این ویژگی‌هاست:

۱) یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ 2^{n-1} است، که مقدارثابت ندارد؛

۲) ضریب‌هـای همهٔ جمله‌های آن مثبت و، بنابراین، برای $x \geqslant 0$، تابعی صعودی است وجهت تحدب آن به‌سمت yهای منفی است؛

۳) $f_n(0)=0$ و $f_n(1)\geqslant 1$.

درجست وجوی مقداری از x $(x=f_1(x)=x_1)$ هستیم کــه، برای آن داشته باشیم: $0<x_n<x_{n+1}<1$، شرط $x_{n+1}>x_n$ به‌این صورت درمی‌آید:

$$x_{n+1}-x_n=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)-x_n=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}-1\right)>0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_n>1-\frac{1}{n}$$

به‌این ترتیب، باید ثابت کنیم که، مقدارمنحصر به‌فردی برای t وجود دارد، به نحوی که، به‌ازای هرمقدار n، داشته باشیم:

$$1-\frac{1}{n}<f_n(t)<1 \qquad (1)$$

(که درضمن، مثبت بودن $f_n(t)$ هم تأمین می‌شود).

تابع $f_n(t)$، برای $0\leqslant t\leqslant 1$، پیوسته وصعودی است ومقدارهای از صفر تا عددی بزرگتر ازواحد را می‌پذیرد. دوعدد a_n و b_n را طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$a_n<b_n \;,\quad f_n(a_n)=1-\frac{1}{n} \;,\quad f_n(b_n)=1$$

روشن است که a_n و b_n منحصر به‌فردند؛ درضمن داریم:

$$f_{n+1}(a_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]=1-\frac{1}{n};$$

$$f_{n+1}(a_{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$$

یعنی $a_n<a_{n+1}$. به‌همین ترتیب، چون $f_{n+1}(b_n)=1+\frac{1}{n}$ و $f_{n+1}(b_{n+1})=1$، پس $b_n>b_{n+1}$. به‌این ترتیب

$$a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$$

اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ فرض کنیم، روشن است که $a_n\leqslant b_n$. ثابت می‌کنیم $a=b$؛ f_n تابعی است محدب وچون $f_n(0)=0$ و $f_n(b_n)=1$، به ازای $0\leqslant x\leqslant b_n$ داریم: $f_n(x)\leqslant\frac{x}{b_n}$، یعنی $F_n(a_n)=1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$. ازنابرابری $1-\frac{1}{n}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$ نتیجه می‌شود $b_n-a_n\leqslant\frac{b_n}{n}$ وچون $b_n\leqslant 1$ پس $b_n-a_n<\frac{1}{n}$، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ وبنابراین $a=b$.

دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و دنبالهٔ $\{b_n\}$ نزولی است وهردو به‌سمت عدد منحصربه‌فرد a (یا b) میل می‌کنند وعدد $x_1=a$ همان عددی است که در جست‌وجوی آن بودیم.

۳۹. اگر n عددی زوج باشد $(n=2k)$، به‌ترتیب داریم:

$$(a+b)^2(a^n+b^n)^2=(a^{n+1}+b^{n+1}+ab^n+a^nb)^2<$$

$$(a^{n+1}+b^{n+1})^2(a^2+b^2)^2(a^{n-1}+b^{n-1})^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^2$$

. . . .

$$(a^k+b^k)^2(a^{n+1-k}+b^{n+1-k})^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^2$$

$$\cdots\cdots$$

تعداد این نابرابری‌ها، برابر $\frac{n}{2}$ است وازضرب آن‌ها به دست می‌آید:

$$\prod_{m=1}^{n}(a^m+b^m)^2<(a^{n+1}+b^{n+1})^{2\times\frac{n}{2}}=(a^{n+1}+b^{n+1})^n$$

درحالت فرد بودن $n\,(n=2k+1)$ هم، می‌توان به‌همین ترتیب عمل کرد. در این حالت $\frac{n-1}{2}$ نابرابری، شبیه نابرابری‌های بالا و، به جز آن، نابرابری

$$\left(a^{\frac{n+1}{2}}+b^{\frac{n+1}{2}}\right)^2<a^{n+1}+b^{n+1}$$

به‌دست می‌آید که از ضرب آن‌ها در یکدیگر، به همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۴۰. الف) $a=1/00000000004$ و $b=1/00000000002$ می‌گیریم. باید ببینیم، از دو عدد $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ و $\frac{1+b}{1+b+b^2}$ کدام بزرگترند $(a>b)$. داریم:

$$\frac{1+a}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\quad<\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}=\frac{1+\beta}{\beta^2}\Longrightarrow\frac{a^2}{1+a}>\frac{b^2}{1+b};$$

$$\frac{1+a+a^2}{1+a}=1+\frac{a^2}{1+a}>1+\frac{b^2}{1+b}=\frac{1+b+b^2}{1+b}$$

وبنابراین $\frac{1+a}{1+a+a^2}<\frac{1+b}{1+b+b^2}$، یعنی $A<B$.

ب) روشن است که

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a+\dots+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+\dots+\frac{1}{a}};$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\dots+\frac{1}{b}}$$

چون $a>b$، پس $\frac{1}{a^k}<\frac{1}{b^k}$ و $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$، یعنی $A<B$.

۴۱. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{k}{2k+1}-\frac{k-1}{2k-1}$. در ضمن، برای $k>1$ داریم $3k^2<4k^2-1$، یعنی $\frac{1}{3k^2}>\frac{1}{4k^2-1}$.

اکنون درنابرابری

$$\frac{1}{3k^2}>\frac{k}{2k+1}-\frac{k-1}{2k-1}$$

به‌ترتیب، عددهای از ۱ تا n را قرار می‌دهیم و نابرابری حاصل را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)>\frac{n}{2n+1}$$

ویا $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$.

۴۲. تابع $f(x)=2\sin x+tg x-3x$، تابعی صعودی است، زیرا

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{\cos^2 x}\geqslant 0$$

(زیرابرای $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ داریم $2\cos x+1>0$). بنابراین، اگر

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، آن‌وقت

$$f(\alpha)>f(0) \Longrightarrow 2\sin\alpha+tg\alpha-3\alpha>0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2\sin\alpha+tg\alpha>3\alpha$$

۴۳. چهارضلعی را $ABCD$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{BC}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{CD}=\mathbf{c},\ \overrightarrow{DA}=\mathbf{d};$$
$$|\overrightarrow{AB}|=a,\ |\overrightarrow{BC}|=b,\ |\overrightarrow{CD}|=c,\ |\overrightarrow{DA}|=d$$

بنا بر قاعدهٔ جمع بردارها داریم:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{d}$$
$$\mathbf{d}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=a^2+b^2+c^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

که از آن‌جا به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$3(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2)=d^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{c})^2+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^2$$

یعنی $3(a^2+b^2+c^2)>d^2$ و $a^2+b^2+c^2>\frac{1}{3}d^2$.

۴۴. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $\hat{C}=90°$. این برابری‌ها روشن‌اند:

$$|CD|\cdot|AB|=|AC|\cdot|BC|\ ;\ \ |AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$$

اکنون، به‌ترتیب داریم:

$$(|CD|+|AB|)^2=|CD|^2+2|CD|\cdot|AB|+|AB|^2=$$
$$=|CD|^2+2|AC|\cdot|BC|+|AC|^2+|BC|^2=$$
$$=|CD|^2+(|AC|+|BC|)^2>(|AC|+|BC|)^2$$

و بنابراین $|CD|+|AB|>|AC|+|BC|$.

اکنون فرض می‌کنیم $\hat{C}>90°$. خط راست l را از نقطهٔ C، عمود بر (BC) رسم می‌کنیم. چون زاویهٔ C از ۹۰ درجه بزرگتر است، خط راست

l، پاره خط راست AB را درنقطه‌ای مثل F قطع می‌کند. بنابر آن چه در مورد مثلث FBC داریم:

$$|CD|+|FB|<|BC|+|CF|$$

درضمن درمثلث AFC داریم:

$$|AC|-|FC|<|AF|$$

ازمجموع این دونابرابری، به‌نابرابری موردنظر می‌رسیم.

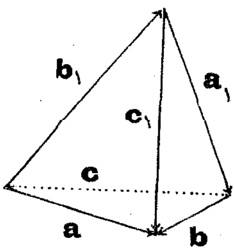
۴۵. با توجه به شرطهای $\alpha+\beta<\pi$ و $\alpha>0$ و $\beta>0$، می‌توان نتیجه‌گرفت که شرط $\alpha<\beta$، به‌معنای $\sin\alpha<\sin\beta$ است. این حکم، برای $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ روشن است. در حالت $\beta>\frac{\pi}{2}$، می‌توان نوشت $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi-\alpha$. درحالت $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$، تابع $y=\sin x$ نزولی است و چون $\beta<\pi-\alpha$، پس $\sin\beta>\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. عکس این حکم هم درست است وباشرطهای $\alpha+\beta<\pi$، $\alpha>0$، $\beta>0$، $\sin\alpha<\sin\beta$، به‌سادگی نتیجه می‌شود $\alpha<\beta$ (مثلا، با برهان خلف).

اکنون به اثبات حکم تمرین می‌پردازیم. بنابرفرض، α و β مثبت‌اند و، در ضمن، $\alpha<\beta$ و $\alpha+\beta<\pi$، بنابراین $0<\sin\alpha<\sin\beta$ و $0<\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1$، به‌این‌ترتیب:

$$\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1 \iff \frac{\sin a}{\sin a}<1 \iff a<b$$

(درواقع، چون $0<b<\pi$، داریم $\sin b>0$).

۴۶. بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{c}_1$ رادرنظرمی‌گیریم (شکل ۱۵)، بنابه‌قانون جمع بردارها داریم:



شکل ۱۵

$$\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_1+\mathbf{b}+(-\mathbf{a})=0$$

$$\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1+(-\mathbf{b})+\mathbf{c}=0،$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{c}_1)+\mathbf{a}_1+\mathbf{c}=0$$

که آن‌ها را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}_1=\mathbf{b}+\mathbf{b}_1،\ \mathbf{b}-\mathbf{b}_1=\mathbf{c}+\mathbf{c}_1،\ \mathbf{c}-\mathbf{c}_1=-\mathbf{a}-\mathbf{a}_1$$

هریك ازاین‌سه برابری رامجذور و، سپس، مجموع دوبرابری حاصل ازاولی وسومی را ازبرابری حاصل ازدومی‌کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{a}_1)^2+(\mathbf{c}-\mathbf{c}_1)^2-(\mathbf{b}-\mathbf{b}_1)^2=$$
$$=(\mathbf{b}+\mathbf{b}_1)^2+(\mathbf{a}+\mathbf{a}_1)^2-(\mathbf{c}-\mathbf{c}_1)^2$$

باتوجه به‌این‌که مجذور اسکالر یك‌بردار، برابراست بامجذورطول آن، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{c}^2+\mathbf{c}_1^2-(\mathbf{b}^2+\mathbf{b}_1^2)=2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1$$

از طرف دیگر $\mathbf{a}^2+\mathbf{a}_1^2 \geqslant a\cdot a_1 > 2aa_1\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{a}_1}) = 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1$.
بنابراین

$$(c^2+c_1^2)-(b^2+b_1^2)<a^2+a_1^2 \Leftrightarrow a^2+a_1^2+b^2+b_1^2>c^2+c_1^2$$

۴۷. از نابرابری $(a-b)^2\geqslant 0$ به دست می‌آید $a^2+b^2\geqslant 2ab$، بااستفاده ازنابرابری اخیرداریم:

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geqslant 2\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{xy}}}=2\sqrt[4]{xy}$$

وچون، بنابرمعادلهٔ اول دستگاه $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=xy$، بنابراین

$$xy\geqslant 2\sqrt[4]{xy} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^3y^3}\geqslant 2 \Leftrightarrow xy\geqslant\sqrt[3]{16} \qquad (*)$$

به‌همین ترتیب، بااستفاده ازهمان نابرابری $a^2+b^2\geqslant 2ab$ داریم:

$$x^\alpha+y^\alpha\geqslant 2\sqrt{x^\alpha y^\alpha}=2\sqrt{(xy)^\alpha}$$

وچون، بنا به‌معادلهٔ دوم دستگاه $x^\alpha+y^\alpha=8(xy)^{\frac{\alpha-3}{2}}$، به‌دست می‌آید:

$$8(xy)^{\frac{\alpha-3}{2}} \geqslant 2\sqrt{(xy)^{\alpha}} \Longleftrightarrow xy \leqslant \sqrt[3]{16} \qquad (**)$$

به‌این ترتیب، از $(*)$ و $(**)$ نتیجه‌می‌شود: $xy=\sqrt[3]{16}$؛ وچون علامت برابری در نابرابری $a^2+b^2 \geqslant 2ab$، تنهـا در حالت $a=b$ پیش می‌آید، بایـد داشته باشیم:

$$x=y=\sqrt[3]{4}$$

آزمایش نشان می‌دهد که، این جواب، درمعادله‌های دستگاه صدق می‌کند.

۴۸. باتوجه به‌مثبت بودن a و b داریم:

$$(a+b)(a-b)^2=(a+b)[(a^2-ab+b^2)-ab]=$$
$$=a^3+b^3-ab(a+b) \geqslant 0$$

یعنی $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b)$ (علامت برابری برای $a=b$) و

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{1}{ab(a+b+c)}$$

برای هریك ازدوکسردیگرسمت چپ نابرابری هم، رابطهٔ مشابهی بـه دست می‌آید. درنتیجه

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

۴۹. راهنمایی. نابرابری‌های مثلثی را، ابتـدا درمثلث‌هـای ABD، BCD، ABC و ACD و، سپس، در مثلث‌هـای ABO، BCO، CDO و DAO بنویسید (O، محل برخورد قطرهای چهارضلعی است).

۵۰. به‌ترتیب داریم:

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\right]^2 \geqslant \frac{1}{8}(a+b)^4 > \frac{1}{8}\times 16 = 2$$

۵۱. داریم:

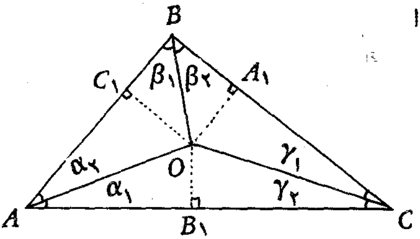
$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n = a+b+\cdots > a+b > c = (\sqrt[n]{c})^n$$

یعنی $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}$. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{a}،\ \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{b}$$

بنابراین، $\sqrt[n]{a}$، $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ می‌توانند طول ضلع‌های یک مثلث باشند.

۵۲. این نام گذاری‌ها را می‌پذیریم (شکل ۱۶):



شکل ۱۶

$$\widehat{OAC}=\alpha_1،\ \widehat{OAB}=\alpha_2،$$

$$\widehat{OBA}=\beta_1،\ \widehat{OBC}=\beta_2،$$

$$\widehat{OCB}=\gamma_1،\ \widehat{OCA}=\gamma_2،$$

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha،\ \beta_1+\beta_2=\beta،\ \gamma_1+\gamma_2=\gamma$$

اگر عمود OA_1 را بر ضلع BC وارد کنیم، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OA_1B و OCA_1 داریم:

$$|CA_1|=|OC|\cos\gamma_1،\ |BA_1|=|OB|\cos\beta_2$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید $a=|BC|=|OC|\cos\gamma_1+|OB|\cos\beta_2$.

به‌همین ترتیب

$$b=|OC|\cos\gamma_2+|OA|\cos\alpha_1،\ c=|OA|\cos\alpha_2+|OB|\cos\beta_1$$

بنابراین

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=|OA|(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)+$$

$$+|OB|(\cos\beta_1+\cos\beta_2)+|OC|(\cos\gamma_1+\cos\gamma_2)=$$

$$=|OA|\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}+|OB|\cos\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta_۱-\beta_۲}{۲}+$$

$$+|OC|\cos\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma_۱-\gamma_۲}{۲}\leqslant|OA|\cos\frac{\alpha}{۲}+|OB|\cos\frac{\beta}{۲}+|OC|\cos\frac{\gamma}{۲}$$

۵۳. تابع $y=\sin x$ رادرنظرمی‌گیریم وسطح بین نمودار منحنی و محور طول رادرفاصلهٔ [۰، ۱] با S نشان می‌دهیم. این فاصله رابه‌ترتیب به ۲، ۳، ۴، ... و k بخش برابر تقسیم می‌کنیم و مستطیل‌هایی رادرنظرمی‌گیریم که قاعدهٔ آن‌ها درفاصلهٔ $\left[\frac{۱}{k+۱},\frac{۱}{k}\right]$ وارتفاع آن‌ها برابر $\frac{۱}{k+۱}$ باشد (مستطیل‌های به قاعده‌های $۱-\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}$، ...، $\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}$ وارتفاع‌های $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ...، $\frac{۱}{k+۱}$). اگرمجموع مساحت‌های این‌مستطیل‌ها را S_k بنامیم، روشن است که $S_k<S$. ازطرف دیگر

$$S_n=\sum_{k=۱}^{n}\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)\sin\frac{۱}{k+۱}=\sum_{k=۱}^{n}\frac{\sin\frac{۱}{k+۱}}{k(k+۱)};$$

$$S_n<S=\int_۰^۱\sin x\,dx=۱-\cos ۱<\frac{۱}{۲}$$

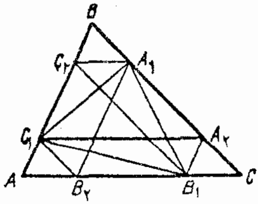
(زیرا $\cos ۱>\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$). وسرانجام

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\frac{۱}{n+۱}}{n(n+۱)}=\lim_{n\to\infty}S_n\leqslant S<\frac{۱}{۲}$$

۵۴. نقطه‌های $C_۲$، $B_۲$ و $A_۲$ را، به‌ترتیب، روی‌ضلع‌های AB، AC و BC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم (شکل ۱۷):

$$\frac{|AC_۲|}{|C_۲B|}=\frac{|BA_۲|}{|A_۲C|}=\frac{|CB_۲|}{|B_۲A|}=۳$$

اگرمحیط شش ضلعی $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ را P_1 بنامیم، روشن است که $P_1=\frac{3}{4}P$ (از مثلث های متشابه استفاده کنید: مثلاً $|A_1C_2|=\frac{1}{4}|AC|$ و $|B_1B_2|=\frac{1}{2}|AC|$). در ضمن، با توجه به نابرابری‌های مثلثی $p<P_1$، بنابراین $p<\frac{3}{4}P$.



شکل ۱۷

برای اثبات نابرابری سمت چپ، یعنی $p>\frac{1}{2}P$، پاره‌خط‌های راست A_1B_2، B_1C_2 و C_1A_2 را رسم می‌کنیم. باتوجه به عکس قضیهٔ تالس به‌دست می‌آید:

$$(A_1B_2)\|(AB),\ (C_1A_2)\|(AC),\ (B_1C_2)\|(BC)$$

ازآن جا: $\frac{|A_1B_2|}{|AB|}=\frac{|C_1A_2|}{|AC|}=\frac{|B_1C_2|}{|BC|}=\frac{3}{4}$، درضمن باتوجه به‌نابرابری‌ها درمثلث‌ها

$$|A_1C_1|+|C_1B_2|>|A_1B_2|,\ |C_1B_1|+|B_1A_2|>|C_1A_2|,$$
$$|A_1B_1|+|A_1C_2|>|B_1C_2|$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $p+\frac{1}{4}P>\frac{3}{4}P$ یا $p>\frac{1}{2}P$.

۵۵. روشن است که $x>y>0$. از معادلهٔ فرض نتیجه می‌شود: $\frac{x^3+y^3}{x-y}=1$. اکنون، به روشنی داریم:

$$x^2+y^2<x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}<\frac{x^3+y^3}{x-y}<1$$

۵۶. اگر $f(x)=a\cos x+b\cos 3x-1$ بگیریم، چون $f(x)>0$ جواب ندارد، همیشه داریم $f(x)\leqslant 0$. بنابراین

$$f(\pi)=-a-b-1\leqslant 0 \Longleftrightarrow -a-b\leqslant 1$$

$$2f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a-2b-2\leqslant 0 \Longleftrightarrow a-2b\leqslant 2$$

ازمجموع دونابرابری اخیر به‌دست می‌آید: $-3b\leqslant 3$، یعنی $-b\leqslant 1$.
ازطرف دیگرداریم:

$$f(2\pi)=a+b-1\leqslant 0 \Longleftrightarrow a+b\leqslant 1$$

$$2f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-a+2b-2\leqslant 0 \Longleftrightarrow -a+2b\leqslant 2$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می‌آید: $3b\leqslant 3$ و $b\leqslant 1$. به‌این ترتیب، باتوجه به دونابرابری $-b\leqslant 1$ و $b\leqslant 1$ داریم: $|b|\leqslant 1$.

۵۷. روشن است که اگر $tg x_1$ مقداری مثبت باشد، $tg x_2$ وسپس $tg x_3$ و غیره هم مثبت می‌شوند. برای دو عدد مثبت a و b همیشه داریم $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$ یا $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (علامت برابری، برای $a=b$).
بنابراین

$$\frac{tg x_n+3 cotg x_n}{2}\geqslant\sqrt{tg x_n\cdot 3 cotg x_n}=\sqrt{3}$$

ولی، بنابرمعادلهٔ آخردستگاه $tg x_1=\frac{tg x_n+3 cotg x_n}{2}$، بنابراین

$$tg x_1\geqslant\sqrt{3}\Longleftrightarrow tg^2 x_1\geqslant 3\Longleftrightarrow tg x_1\geqslant 3 cotg x_1$$

اکنون، باتوجه به‌معادلهٔ اول دستگاه داریم:

$$tg x_2=\frac{1}{2}(tg x_1+3 cotg x_1)\geqslant\frac{1}{2}(tg x_1+tg x_1)=tg x_1$$

واگر، به‌همین ترتیب، به‌سراغ معادله‌های دیگردستگاه برویم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$tg x_1\leqslant tg x_n\leqslant tg x_{n-1}\leqslant\ \cdots\ \leqslant tg x_3\leqslant tg x_2\leqslant tg x_1$$

واین، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$tg\,x_1 = tg\,x_2 = tg\,x_3 = \dots = tg\,x_n = \sqrt{3}$$

یعنی $x_i = k_i\pi + \frac{\pi}{3}$ که، در آن n ،... ،۲ ،۱ ،۰ $= i$ و $k \geqslant 0$.

به‌همین‌ترتیب، درحالت $tg\,x_1 < 0$ نتیجه می‌شود: $x'_i = k'_i\pi - \frac{\pi}{3}$

که، در آن، $k'_i \leqslant 0$ و n ،... ،۲ ،۱ ،۰ $= i$.

۵۸. دربازهٔ (۰، ۱) داریم $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ یا $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$ و یا $\frac{1-\cos x}{2} < \frac{x^2}{4}$، از آن جا $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$. به‌این‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos x}dx < \int_0^1 \frac{2x}{2-x^2}dx = -\ln(2-x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

۵۹. می‌دانیم:

$$p_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n},\quad P_n = 2Rn\,tg\,\frac{\pi}{n}$$

به‌این ترتیب

$$\frac{1}{2}(p_n + P_n) = Rn\left(\sin\frac{\pi}{n} + tg\,\frac{\pi}{n}\right) > Rn \times \frac{2\pi}{n} = 2\pi R$$

(ضمن حل تمرین ۳۰ ثابت کردیم $\sin x + tg\,x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$، در ضمن، چون $n \geqslant 2$، پس $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6}$).

۶۰. ماشین‌های حساب معمولی، نتیجهٔ محاسبه‌ها را به تقریب می‌دهند و، بنابراین، اگر با یك رشته عمل حسابی سروکار داشته باشیم، نمی‌توانیم به‌نتیجهٔ کار اطمینان کنیم، چراکه، نتیجهٔ حاصل از اشتباه‌های ناشی از تقریب، ممکن‌است منجر به‌جوابی‌نادرست بشود. مثلا فرض‌کنید، بخواهیم باماشین‌حساب‌معمولی، نابرابری تمرین ۶۰، یعنی $e^6 > \pi^4 + \pi^5$ را مورد تحقیق

قراردهیم. به‌دست می‌آید:

$$\pi^{۴}\approx ۹۷/۴۰۹۱،\ \pi^{۵}\approx ۳۰۶/۰۲،\ e^{۶}\approx ۴۰۳/۴۲۹،$$

$$\pi^{۴}+\pi^{۵}\approx ۴۰۳/۴۲۹۱$$

ومارا به‌نتیجهٔ نادرست $e^{۶}>\pi^{۴}+\pi^{۵}$ می‌رساند. این نتیجهٔ نادرست، ناشی ازجمع شدن خطاهای محاسبه‌است. درضمن، باچنین ماشین‌حسابی،نمی‌توانیم دقت محاسبه را ازتعداد محدودی رقم‌ها، بالاتر ببریم.

اکنون محاسبه رابا همین ماشین حساب که π و e راتا ۷ رقم می‌دهد، به طریق دیگری انجام می‌دهیم:

$$\pi^{۲}=\pi\times\pi\approx ۹/۸۶۹۶۰۴،\ \pi^{۴}=\pi^{۲}\cdot\pi^{۲}\approx ۹۷/۴۰۹۰۸۳،$$

$$\pi^{۵}=\pi^{۴}\cdot\pi\approx ۳۰۶/۰۱۹۶۵،\ \pi^{۴}+\pi^{۵}\approx ۴۰۳/۴۲۸۷۳،$$

$$e^{۲}=e\cdot e\approx ۷/۳۸۹۰۵۵۹،\ e^{۴}=e^{۲}\cdot e^{۲}\approx ۵۴/۵۹۸۱۴۷،$$

$$e^{۶}=e^{۲}\cdot e^{۴}\approx ۴۰۳/۴۲۸۷۶،\ ۰<e^{۶}-(\pi^{۴}+\pi^{۵})<$$

$$<۰/۰۰۰۰۴<۱۰^{-۴}$$

آیا به‌این نتیجه‌گیری باید قانع شد؟ آیا حداکثر مقدار n برابر ۴ است؟ نه. هنوز نمی‌دانیم، خطاهای ناشی ازمحاسبه‌های تقریبی، چه تأثیری برنتیجهٔ کار داشته‌اند! بنابراین، به این نتیجه، نمی‌توان اعتمادکرد و باید راهی مطمئن‌تر جست وجوکرد، ابتدا تلاش می‌کنیم مسألهٔ زیر را حل‌کنیم:

اگر یك ماشین حساب بتواند عمل‌های حسابی‌را تنها روی عددهای دورقمی انجام دهد، چگونه می‌توان دوعدد n رقمی را $(n>۲)$، به‌کمك‌آن درهم ضرب‌کرد؟

برای این منظور، هریك ازدوعدد را به‌صورت یك چند جمله‌ای از توان‌های ۱۰۰ می‌نویسیم. مثلا عدد ۱۳۵۷۶۹ را به‌این صورت

$$۱۳۵۷۶۹=۱۳\times ۱۰۰^{۲}+۵۷\times ۱۰۰+۶۹$$

بعد، دوعددی راکه باید درهم ضرب‌کنیم، طبق قانون ضرب چند جمله‌ای‌ها، درهم ضرب می‌کنیم، ضرب‌هارا می‌توان باماشین حسابی‌که دردسترس داریم

انجام داد. فرض کنید بخواهیم حاصل ضرب دو عـدد ۱۷۲۱ و ۲۴۱۵ را پیدا کنیم:

$$۱۷۲۱ \times ۲۴۱۵ = (۱۷ \times ۱۰۰ + ۲۱)(۲۴ \times ۱۰۰ + ۱۵) =$$
$$= ۴۰۸ \times ۱۰۰^{۲} + (۵۰۴ + ۲۵۵) \times ۱۰۰ + ۳۱۵$$

عددهای حاصل را زیرهم می‌نویسیم و باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۴۰۸۵۰۰۰۰ \\ ۵۰۳۰۰ \\ ۲۵۵۰۰ \\ ۳۱۵ \\ \hline ۴۱۵۶۲۱۵ \end{array}$$

اکنون برای حل مسألهٔ اصلی، عددهای تقریبی π و e را تا ۱۵ رقـم بعداز ممیز درنظر می‌گیریم:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳ \ldots$$

$$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵ \ldots$$

ازمساله‌ای که هم‌اکنون حل کردیم، استفاده می‌کنیم و درهرگام، خطای حاصل را تخمین می‌زنیم. برای سادگی کار، مقدارهای تقریبی π و e را (تا ۱۵ رقم بعدازممیز)، π' و e' می‌نامیم.

چون $e = e' + \delta_۱$ $(۰ < \delta_۱ < ۱۰^{-۱۵})$، بنابراین

$$e^{۶} = (e')^{۶} + \delta_۲$$

و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد کـه $۰ < \delta_۲ < ۱۰^{-۱۲}$. e' را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$e' = ۲/۷۱۸ + ۲/۸۱۸ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۸۴۵ \times ۱۰^{-۸} +$$
$$+ ۹/۰۴۵ \times ۱۰^{-۱۲}$$

به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$(e')^{۲} = ۷/۳۸۹۰۵۶۰۹۸۰۶۰۵ + \delta_۳$$

$(۰ < \delta_۳ < ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۴}$؛ ۱۳ رقم بعدازممیز دقیق است)؛

$$(e')^{۴}=۵۴/۵۹۸۱۵۰۰۳۲۷۷۸+\delta_{۴}$$

($۰<\delta_{۴}<۳\times ۱۰^{-۱۲}$؛ ۱۰ رقم بعدازممیز دقیق است)؛

$$(e')^{۶}=۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲۷+\delta_{۵}$$

($۰<\delta_{۵}<۲\times ۱۰^{-۱۰}$؛ ۹ رقم بعداز ممیز دقیق است)، بنا بر این، مقدار $e^{۶}$ تا ۹ رقم بعداز ممیز چنین است: ۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲.

به همین ترتیب می‌توان، مقدار تقریبی $\pi^{۵}+\pi^{۴}$ را، تا ۹ رقم بعداز ممیز به‌دست آورد:

$$۴۰۳/۴۲۸۷۷۵۸۱۹$$

یعنی $۰<e^{۶}-\pi^{۵}-\pi^{۴}<۰/۰۰۰۰۲<۱۰^{-۴}$ و، بنابراین، حداکثر عدد n، همان ۴ است.

برای مقایسه، نتیجهٔ محاسبهٔ باماشین‌های محاسبهٔ دقیق‌تر را می‌آوریم:

$$(e')^{۶}=۴۰۳/۴۲۸۷۹۳۴۹۲۷۳۷۴،$$

$$(\pi')^{۵}+(\pi')^{۴}=۴۰۳/۴۲۸۷۷۵۸۱۹۲۸۳۵$$

۶۱. طول‌های سه بعد مکعب مستطیل را a، b و c می‌نامیم و $a+b+c=m$ می‌گیریم. دراین صورت، حجم مکعب مستطیل $V=abc$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt[۳]{V}=\sqrt[۳]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{۳}=\frac{m}{۳}\Longrightarrow V\leqslant\frac{m^{۳}}{۲۷}$$

حداکثر حجم برابر $\frac{m^{۳}}{۲۷}$ است ووقتی به دست می‌آیدکه داشته باشیم $a=b=c$، یعنی وقتی‌که بامکعب سروکار داشته باشیم.

۶۲. داریم

$$\sqrt[n+۱]{ab^{n}}=\sqrt[n+۱]{a\cdot\underbrace{bb\cdots b}_{n\text{ مرتبه}}}\leqslant\frac{a+\overbrace{b+b+\cdots+b}^{n\text{ مرتبه}}}{n+۱}=\frac{a+nb}{n+۱}$$

علامت برابری، برای $a=b$ پیش می‌آید.

این نابرابری می‌تواند تقریب اضافی برخی از ریشه‌ها را به‌ما بدهد. مثلاً

$$\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{3\times 2^2}\leqslant\frac{3+2\times 2}{3}\approx 2/3$$

و $\sqrt[3]{12}$ تا سه رقم بعداز ممیز برابر ۲/۲۸۹ است.

۶۳. به‌ترتیب داریم:

$$a_1a_2\cdots a_n=\sqrt[n]{a_1^na_2^n\cdots a_n^n}\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}$$

۶۴. باتوجه به‌نابرابری‌های (۷) (صفحهٔ ۶۹» داریم:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leqslant\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{a}{x^2+y^2}$$

بامجذورکردن دو طرف این نابرابری و تبدیل‌های لازم به‌دست می‌آید:

$$(x^2+y^2)^3\leqslant 2a^2\Longrightarrow x^2+y^2\leqslant\sqrt[3]{2a^2}$$

حداکثر مقدار x^2+y^2 برابر $\sqrt[3]{2a^2}$ است‌که به‌ازای $x=y=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ به‌دست می‌آید.

برای پیداکردن حداکثر $x+y$، از همان نابرابری‌های (۷) استفاده می‌کنیم:

$$x+y\leqslant 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{2}}=\sqrt[3]{4a}$$

حداکثر $x+y$ برابر $\sqrt[3]{4a}$ است‌که به‌ازای $x=y=\sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ به‌دست می‌آید.

۶۵. واسطهٔ حسابی ازواسطهٔ مربعی تجاوز نمی‌کند:

$$\frac{x+y+z}{3}\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\Longrightarrow x^2+y^2+z^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}=12$$

حداقل $x^2+y^2+z^2$ برابر ۱۲ است و برای $x=y=z=2$ بـه دست می‌آید.

۶۶. راهنمـائـی. بـه ازای $\alpha>1$ داریـم $C_\alpha\geqslant C_1$ و بـه ازای $0<\alpha<1$: $C_\alpha<C_1$.

۶۷. می‌دانیم $C_1\leqslant C_3$، یعنی

$$\frac{x+y+z}{3}\leqslant\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{81}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=3\Longrightarrow x+y+z\leqslant 9$$

۶۸. چون $0<\alpha+1<1$، داریم (مسألهٔ **۱۶** را ببینید):

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}<1+\frac{\alpha+1}{n},\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}<1-\frac{\alpha+1}{n}$$

که اگر، این دونابرابری رادر $n^{\alpha+1}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{\alpha+1}<n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^\alpha,\quad (n-1)^{\alpha+1}<n^{\alpha-1}-(\alpha+1)n^\alpha$$

وازآن‌ها، نابرابری‌های مطلوب نتیجه می‌شود.

۶۹. باتوجه به مسألهٔ **۱۶** وشرط $\alpha>1$ داریم:

$$(1+t)^\alpha\geqslant 1+\alpha t,\quad t\geqslant -1$$

(علامت برابری، تنها برای $t=0$). اگر $y=t+1$ بگیریم، نابرابری بالا به‌این صورت درمی‌آید:

$$y^\alpha\geqslant 1+\alpha(y-1)\Longrightarrow y^\alpha-\alpha y\geqslant 1-\alpha\quad(y\geqslant 0)$$

(برابری تنها برای $y=1$). m را عـددی مثبت می‌گیـریم و دو طـرف نابرابری اخیررا در m^α ضرب می‌کنیم، چنین می‌شود:

$$(my)^\alpha-\alpha m^{\alpha-1}(my)\geqslant(1-\alpha)m^\alpha,\quad y\geqslant 0$$

اکنون اگر $x=my$ و $m=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ بگیریم (یعنی $a=\alpha m^{\alpha-۱}$) نتیجه می‌شود:

$$x^{\alpha}-ax\geqslant(۱-\alpha)m^{\alpha}=(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

(برابری، برای $y=۱$ یا $x=m$، یعنی $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$).

به‌این ترتیب، باشرطهای $\alpha>۱$، $x\geqslant ۰$ و $a>۱$، تابع

$$f(x)=x^{\alpha}-ax$$

درنقطهٔ $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ به حداقل‌مقدارخودمی‌رسد واین حداقل برابراست با

$$(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

مثلا درحالت خاص $\alpha=۲$، حداقل‌مقدار $x^{۲}-ax$درنقطهٔ $x=\frac{a}{۲}$ به‌دست می‌آیدکه برابر است با $-\frac{a^{۲}}{۴}$. همچنین، حداقل مقدار $x^{۳}-۲۷x$ در نقطهٔ $x=۳$ به‌دست می‌آید وبرابر است با -۵۴.

در ضمن روشن است‌که اگر با تابع $\varphi(x)=ax-x^{\alpha}$، بـا همـان شرطهای $\alpha>۱$، $a>۰$ و $x\geqslant ۰$، سروکار داشته بـاشیم، در همـان نقطهٔ $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ به حداکثر مقدار خود ، یعنـی $(\alpha-۱)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$ می‌رسد .

۷۰. $\cos x=t$ می گیریم. داریم:

$$\sin x\sin ۲x=۲\sin^{۲}x\cos x=۲(۱-\cos^{۲}x)\cos x=۲(t-t^{۳})$$

روشن است که $-1 \leqslant t \leqslant 1$. درحالت $-1 \leqslant t \leqslant 0$ مقدار

$$\sin x \sin 2x = 2t(1-t^2)$$

غیرمثبت و، بنابراین، ازمقدار مثبت $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ کوچکتر است. در حالت $0 < t \leqslant 1$، با توجه به نتیجهٔ مسألهٔ قبل، تابع $t - t^3$ در نقطهٔ $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ به‌حداکثرمقدار خود می‌رسد که برابر است با

$$2t(1-t^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

یعنی درهرحال $\sin x \sin 2x \leqslant \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

۷۱. راه‌حل شبیه راه‌حل مسألهٔ **۶۹** است. چون $\alpha < 0$، بنابراین

$$(1+t)^\alpha \geqslant 1+\alpha t$$

(برابری تنها برای $t=0$). $1+t=y$ می‌گیریم:

$$y^\alpha \geqslant 1+\alpha(y-1), \quad y \geqslant 0$$

(برابری، برای $y=1$). با ضرب دو طرف نابرابری در m^α $(m>0)$ به‌دست می‌آید:

$$(my)^\alpha - \alpha m^{\alpha-1}(my) \geqslant (1-\alpha)m^\alpha$$

وبافرض $x=my$ و $a=-\alpha m^{\alpha-1}$

$$x^\alpha + ax \geqslant (1-\alpha)m^\alpha = (1-\alpha)\left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

(برابری، برای $x = m = \left(-\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$).

مثلاً تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}+۲۷x$ $(x>۰)$ درنقطهٔ $x=\frac{۱}{۲۷}$ به‌حداقل مقدارخود می‌رسد واین مقدارحداقل برابر ۴ می‌شود.

۷۲. راهنمائی. بافرض $y=x^{\alpha}$ به تابع $a\left(\frac{۱}{a}y-y\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$ می‌رسیم که، درآن، $a>۰$ و $\frac{۱}{\alpha}>۱$ و $y\geqslant ۰$؛ درنتیجه، با توجه به‌حل مسألهٔ ۶۹ قابل حل است.

پاسخ: حداکثر مقدار تابع برابراست با $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}(۱-\alpha)$.

۷۳. $\sqrt[n]{n}=۱+\alpha_n$ می‌گیریم که در آن $\alpha_n>۰$ و دو طرف آن را به‌توان n می‌رسانیم:

$$n=(۱+\alpha_n)^n=\left[(۱+\alpha_n)^{\frac{n}{۲}}\right]^۲$$

به‌شرط $n\geqslant ۲$، یعنی $\frac{n}{۲}\geqslant ۱$، باتوجه به‌مسألهٔ ۱۶ داریم:

$$(۱+\alpha_n)^{\frac{n}{۲}}>۱+\frac{n}{۲}\alpha_n\ ;$$

$$n>\left(۱+\frac{n}{۲}\alpha_n\right)^۲=۱+n\alpha_n+\frac{n^۲}{۴}\alpha_n^۲>\frac{n^۲}{۴}\alpha_n^۲$$

از آن‌جا $\alpha_n^۲<\frac{۴}{n}$ و $\alpha_n<\frac{۲}{\sqrt{n}}$. به‌این ترتیب

$$\sqrt[n]{n}=۱+\alpha_n<۱+\frac{۲}{\sqrt{n}}$$

این نابرابری را، به کمك بسط دوجمله‌ای، می‌توانیم قوی‌تر کنیم. داریم:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n=1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}+\dots$$

$$\dots>1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=n$$

که از آن‌جا به دست می‌آید $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n}}$.

۷۴. به‌ترتیب داریم:

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2=2n+2\sqrt{n^2-1}<2n+2\sqrt{n^2}=4n$$

یعنی $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$ و بنابراین

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}$$

درنتیجه $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

۷۵. درآغاز، این دستور مثلثاتی را به‌یاد می‌آوریم:

$$tg(A+B+C)=\frac{tg\,A+tg\,B+tg\,C-tg\,A\,tg\,B\,tg\,C}{1-tg\,A\,tg\,B-tg\,B\,tg\,C-tg\,C\,tg\,A}=$$

$$=\frac{cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A-1}{cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C-cotg\,A-cotg\,B-cotg\,C}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$A+B+C=k\pi\Longrightarrow\begin{cases}tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\,tg\,B\,tg\,C,\\ cotg\,A\,cotg\,B+cotg\,B\,cotg\,C+cotg\,C\,cotg\,A=1\end{cases}$$

$$A+B+C=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}cotg\,A+cotg\,B+cotg\,C=cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C,\\ tg\,A\,tg\,B+tg\,B\,tg\,C+tg\,C\,tg\,A=1\end{cases}$$

۱) چون $\alpha+\beta+\gamma=\pi$، پس

$cotg\alpha cotg\beta+cotg\beta cotg\gamma+cotg\gamma cotg\alpha=1$ و داریم:

$$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha=$$

$$=(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha)(cotg\alpha cotg\beta+cotg\beta cotg\gamma+$$

$$+cotg\gamma cotg\alpha)=(tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha)\left(\frac{1}{tg\alpha tg\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{tg\alpha tg\gamma}+\frac{1}{tg\gamma tg\alpha}\right)\geqslant 9$$

(مسألهٔ **۱۱** را ببینید).

۲) $y=cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma$ می‌گیریم، پس

$$y^2=(cotg\alpha cotg\beta)(cotg\beta cotg\gamma)(cotg\gamma cotg\alpha)$$

مجموع این‌سه پرانتز برابرواحد است (زیرا $\alpha+\beta+\gamma=\pi$) ومی‌دانیم: اگرمجموع سه عامل مثبت، مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌هـا وقتی به حداکثرمقدارخود می‌رسدکه این عامل‌ها باهم برابرباشند:

$$cotg\alpha cotg\beta=cotg\beta cotg\gamma=cotg\gamma cotg\alpha \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$$

وبه‌این ترتیب، حداکثرمقدار y، به‌ازای $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ به دست می‌آید:

$$y_{Max}=\left(cotg\frac{\pi}{3}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

یعنـی $cotg\alpha cotg\beta cotg\gamma\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$.

یادداشت. دراستدلال بالا، زاویه‌های α، β و γ را حاده گرفتیم، ولی اگریکی‌از زاویه‌ها منفرجه‌باشد،بازهم نابرابری۲)درست است، زیرا مقدار سمت چپ آن منفی می‌شود و ازهرمقدار مثبتی کوچکتراست.

۷۶. نابرابری قوی‌تری را درنظرمی‌گیریم و ثابت می‌کنیم، بـرای n

عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n همیشه داریم:

$$\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant 2^n$$

نابرابری‌های زیر روشن‌اند:

$$a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2},\ \ a_2+a_3\geqslant 2\sqrt{a_2a_3},\ \ldots,$$

$$a_{n-1}+a_n\geqslant 2\sqrt{a_{n-1}a_n},\ \ a_n+a_1\geqslant 2\sqrt{a_na_1}$$

که ازضرب آن‌ها دریکدیگر به‌دست می‌آید:

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)\geqslant 2^n a_1a_2\cdots a_n$$

ودرحالت خاص $n=3$ و $a_1=x$، $a_2=y$، $a_3=z$ داریم:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 2^3xyz \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geqslant 8$$

۷۷. $A=a^3+b^3+c^3-16SR+8Sr$ می‌گیریم. در ضمن می‌دانیم

$$R=\frac{abc}{4S},\ r=\frac{2S}{a+b+c}$$

دراین صورت به‌ترتیب داریم:

$$A=a^3+b^3+c^3-4abc+\frac{16S^2}{a+b+c}=$$

$$=a^3+b^3+c^3-4abc+(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)=$$

$$=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-9abc=$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc=$$

$$=abc\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9\right]\geqslant 0$$

(مسألهٔ ۱۱ را ببینید). بنابراین $a^3+b^3+c^3\geqslant 8S(2R-r)$.

علامت برابری، بـرای $a=b=c$، یعنـی وقتی که مثلث مفـروض، متساوی‌الاضلاع باشد.

۷۸. اگر همهٔ عددهای a_1، a_2، ....، a_n هم علامت باشند، روشن است که، قدرمطلق مجموع آن‌ها، بامجموع قدرمطلق‌های آن‌ها برابر می‌شود، ولـی اگر در بین عددهای a_i، بعضی مثبت و بعضی منفی باشند، قدرمطلق مجمـوع عددهای مثبت را A وقدرمطلق مجموع عددهای منفی‌را B می‌گیریم. روشن است که مقدارسمت چپ برابر $||A|-|B||$ ومقدارسمت راست بـرابـر $|A|+|B|$ می‌شود، یعنی سمت چپ نابرابری ازسمت راست آن کوچکتر است.

۷۹. درتمرین ۷۵ دیدیم، برای زاویه‌های هرمثلث داریم:

$$cotg\,A\,cotg\,B\,cotg\,C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$$

چون A و B و C، زاویه‌هایی حاده‌اند، همهٔ تابع‌های مثلثاتی آن‌ها مثبت‌اند وبه‌دست می‌آید:

$$tg\,A\,tg\,B\,tg\,C\geqslant\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3$$

اکنون، باتوجه به‌رابطهٔ بین واسطه‌های حسابی وهندسی و استفاده از مسألـهٔ ۱۶ داریم:

$$tg^n A+tg^n B+tg^n C\geqslant 3\sqrt[3]{(tg\,A\,tg\,B\,tg\,C)^n}\geqslant 3(\sqrt{3})^n>$$

$$>3\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\geqslant 3+\frac{3n}{2}$$

۸۰. باتوجه به‌شرط مساله،کسرها مثبت‌اند، بنابراین

$$\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}+\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{2}{\cos 2\alpha-\cos 120^\circ}}=2\sqrt{\frac{4}{2\cos 2\alpha+1}}\geqslant\frac{2\times 2}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

۸۱. باتوجه به‌نابرابری‌های $\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ و $\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$، که درهر مثلث برقرارند، داریم:

$$ab+bc+ca=2S\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 6S\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}=$$

$$=\frac{3S}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3S}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}}}=\frac{3S}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=4S\sqrt{3}$$

۸۲. بردار **u** را بامختصات $(\sqrt{x-1}\,،\,1)$ و بردار **v** را بامختصات $(1\,،\,\sqrt{y-1})$ درنظر می‌گیریم:

$$\mathbf{u}=(\sqrt{x-1}\,,\,1),\quad \mathbf{v}=(1\,,\,\sqrt{y-1})$$

بنابراین $|\mathbf{u}|=\sqrt{x}$ و $|\mathbf{v}|=\sqrt{y}$. می‌دانیم اگر دو بردار دارای مختصات $(x_1\,،\,y_1)$ و $(x_2\,،\,y_2)$ باشند، حاصل‌ضرب عددی (اسکالر) آن‌ها برابر $x_1x_2+y_1y_2$ می‌شود [کتاب محاسبهٔ برداری از رشته‌کتاب‌های کوچك ریاضی، شمارهٔ ۱۵، صفحهٔ ۳۹ را ببینید]، یعنی

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$$

وچون $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}\leqslant|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$، بنابراین

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}\leqslant\sqrt{xy} \qquad (*)$$

اکنون بااستفاده ازاین نابرابری به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{ab}+\sqrt{c-1}\leqslant\sqrt{(ab+1)c}$$

یادداشت. درستی نابرابری (*) رابه طور مستقیم هم می‌توان ثابت کرد. برای سادگی بیشتر، نابرابری زیر را، که هم‌ارز نابرابری(*) است، ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{t}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{(t+1)(z+1)},\ t\geqslant 0,\ z\geqslant 0 \qquad (**)$$

بامجذورکردن دوطرف نابرابری (**)، به سادگی، به‌نابرابری روشن زیر می‌رسیم:

$$(\sqrt{zt}-1)^2\geqslant 0$$

وروشن است که علامت برابری برای $zt=1$ است.

۸۳. بااستفاده ازقضیهٔ ویت دربارهٔ رابطهٔ بین ریشه‌ها و ضریب‌های چندجمله‌ای وباتوجه به‌نابرابری بین واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی چند عدد مثبت، داریم:

$$10=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geqslant 5\sqrt[5]{x_1x_2x_3x_4x_5}=5\sqrt[5]{32}=10$$

چون واسطهٔ حسابی با واسطهٔ هندسی برابرشده است، باید داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=2$$

یعنی چندجمله‌ای باید به صورت $(x-2)^5$ باشد، که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a=40,\ b=-80,\ c=80$$

۸۴. با توجه به دستورهای $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ و با استفاده از نابرابری کوشی داریم:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+b+c}{2S}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc}{8S^3}}=\sqrt[3]{\frac{R}{2S^2}}$$

(از برابری $abc=4RS$ استفاده کردیم).

۸۵. مسأله منجر به حل معادلهٔ زیر، در مجموعهٔ عددهای درست $0<x<10$، $0<y<10$ و $0<z<10$ می‌شود:

$$100x+10y+z=xyz(x+y+z) \Longrightarrow$$
$$9(11x+y)=(x+y+z)(xyz-1)$$

دراین معادله باید: یاهریك از عددهای $x+y+z$ و $xyz-1$ بر ۳ ویا یکی‌از آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر باشد. درحالت اول، به‌سادگی معلوم می‌شود که باید هرسه رقم x و y و z، درتقسیم بر ۳ به باقی ماندهٔ واحد برسند، ولی دراین صورت $11x+y$ هم بر ۳ بخش پذیر و برابری ناممکن می‌شود. بنابراین، باید یکی‌از دوعدد $x+y+z$ یا $xyz-1$ بر ۹ بخش پذیر باشد، اگر $x+y+z>17$، آن‌وقت $xyz \geqslant 72$ (چرا؟) و

$$xyz(x+y+z)>1000$$

یعنی $\overline{xyz}$، نمی‌تواند عددی سه رقمی باشد. بنابراین، اگر $x+y+z$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم $x+y+z=9$ و

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}=3 \Longrightarrow xyz \leqslant 27$$

وقتی $x+y+z=9$، آن وقت $xyz=11x+y$ و، بنابراین، x تنها می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد، زیرا در غیراین صورت به دست می‌آید $xyz>72$. درحالت $x=2$، به‌این‌دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=7،\ 2yz=y+23$$

که جواب های درست ندارد. $x=1$ را آزمایش می‌کنیم. به این دستگاه می‌رسیم:

$$y+z=7،\ 11+y=yz-1$$

این دستگاه جواب‌دارد وسرانجام به‌دوعدد ۱۳۵ و ۱۴۴ می‌رسیم که باشرط مسأله سازگارند.

اکنون باید به حالتی بپردازیم‌که $xyz-1$ بر ۹ بخش پذیر باشد.

اگر $xyz-1=9$، آن‌وقت با توجه به‌معادلهٔ اصلی، بــه برابری $z=10x$ می‌رسیم که ممکن نیست.

$xyz-1$ برابر ۱۸، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۷۲، ۸۱ یا ۹۰ هــم نمی‌تواند باشد، زیرا درهریك از این موردها، عدد xyz برابرعددی می‌شودکه عامل اولی بزرگتر از ۱۰ دارد.

برای $xyz-1=27$ به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$8x=2y+3z، \quad xyz=28$$

که برای مسألهٔ ما، جواب مناسبی ندارد.

به همین ترتیب در حــالت $xyz-1=63$ هــم ، جوابی بــه دست نمی‌آید.

اگر $xyx-1=9k$ $(k>10)$، آن وقت:

$$11x+y<k(x+y+z)$$

به‌این ترتیب، تنها جواب‌های مسأله، عددهای ۱۳۵ و ۱۴۴ است.

۸۶. اگر $x=\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n}}$ و $y=\sqrt[n]{n-\sqrt[n]{n}}$ بگیریم نابرابری مورد نظر، به صورت $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}$ درمی‌آیـد کــه درستی آن روشن است، زیرا برای دوعدد yx، داریم $C_1\leqslant C_n$.

نابرابری $\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}$ را به طــور مستقیم هم می‌تــوان ثابت کرد. باید ثابت‌کنیم، برای $x>0$ و $y>0$، همیشه داریم

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\left(\frac{x^n+y^n}{2}\right) \qquad (*)$$

این نابرابری، به‌ازای $n=1$، به‌برابری‌تبدیل می‌شود ودرستی‌آن بر $n=2$ به‌سادگی به‌دست می‌آید: از روش استقرای ریاضی استفاده مــی‌کنیم و ثابت می‌کنیم، به‌فرض درستی (*)، داریم:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} \qquad (**)$$

اگر دوطرف نابرابری (*) رادر $\frac{x+y}{2}$ ضرب کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{x^n+y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$$

وبنابراین، کافی است ثابت کنیم: $\frac{x^n+y^n}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}$
و درستی این نابرابری روشن است، زیرا به نابرابری واضح $(x^n-y^n)(x-y) \geqslant 0$ تبدیل می‌شود.

۸۷. چون $\sin^2 x \leqslant 1$ و $\cos^2 x \leqslant 1$ و $k \geqslant 1$، بنابراین

$$(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k} \leqslant \sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

برای اثبات نابرابری سمت چپ، فرض می‌کنیم $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ واز نابرابری $\frac{a^k+b^k}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$ استفاده می‌کنیم (مسألهٔ قبل را ببینید)؛ به دست می‌آید:

$$(\sin x)^{2k}+(\cos x)^{2k} \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

۸۸. فرض می‌کنیم، درظرف‌های اول ودوم، به ترتیب m کیلوگرم و n کیلوگرم نمك ومقدارآب بخارشده دراین‌ظرف‌ها، به‌ترتیب، x کیلوگرم و y کیلوگرم باشد. فرض مسأله می‌گوید:

$$\frac{m}{5-x} : \frac{m}{5} = \frac{5}{5-x} = p, \quad \frac{n}{20-y} : \frac{n}{20} = \frac{20}{20-y} = q$$

که از آن‌ها به‌دست‌می‌آید: $x=5-\frac{5}{p}$ و $y=20-\frac{20}{q}$. بنابراین مقدار آب بخارشده دردوظرف براب‌راست با

$$x+y=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\right) \leqslant 25-2\sqrt{\frac{5}{p} \cdot \frac{20}{q}} =$$

$$=۲۵-۲\sqrt{\frac{۱۰۰}{pq}}=۲۵-\frac{۲۰}{۳}=۱۸\frac{۱}{۳}$$

به این ترتیب، حداکثر آبی که می‌تواند بخـار شده باشد، بـرابـر $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم است واین، به‌شرطی است کـه داشته باشیم $\frac{۲۰}{q}=\frac{۵}{p}$ که، با توجه به $pq=۹$، به‌دست می‌آید: $p=\frac{۳}{۲}$ و $q=۶$.

درنتیجـه $x=۵-\frac{۵}{p}=\frac{۵}{۳}$ و $y=۲۰-\frac{۲۰}{q}=\frac{۵۰}{۳}$.

حداکثرمقدارآبی‌که‌می‌تواندبخارشود برابر $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم است که باید $۱\frac{۲}{۳}$ کیلوگرم‌آن ازظرف اول و $۱۶\frac{۲}{۳}$ کیلوگرم بقیه ازظرف دوم بخار شده باشد.

۱۰۸۹) به‌ترتیب داریم:

$$C_\alpha(a، b)=\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{۲}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

$$C_{-\alpha}(a، b)=\left(\frac{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}}{۲}\right)^{-\frac{۱}{\alpha}}=\left(\frac{۲}{\frac{۱}{a^\alpha}+\frac{۱}{b^\alpha}}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}=ab\left(\frac{۲}{a^\alpha+b^\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

از آن‌جا

$$C_\alpha(a، b)\cdot C_{-\alpha}(a، b)=ab=(\sqrt{ab})^۲=C_۰^۲(a، b)$$

مثلاً، اگر واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b را بـا $A(a، b)$، واسطهٔ هندسی را با $G(a، b)$ وواسطهٔ توافقی بین‌آن‌ها را با $H(a، b)$ نشان دهیم، ازبرابری بالا به‌ازای $\alpha=۱$ به دست می‌آید:

$$A(a، b)\cdot H(a، b)=G^۲(a، b)$$

(آزمایش‌کنید: به‌ازای $\alpha=\frac{۱}{۲}$، چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟).

۲) راهنمایی. تحقیق کنید $C_{-\alpha}=\dfrac{1}{C_\alpha\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right)}$.

به‌این‌ترتیب، نسبت واسطهٔ حسابی دوعدد بر واسطهٔ حسابی عکس آن دوعدد برابر است با حاصل‌ضرب دوعدد. همین‌گزاره را می‌توان برای واسطهٔ مربعی یا واسطهٔ توافقی هم به‌کار برد.

۰۹۵. ۱) با توجه به مسألهٔ ۱۶ داریم

$$x^n=[1+(x-1)]^n\geqslant 1+n(x-1)=nx-n+1$$

۲) الف) به‌ترتیب داریم:

$$k(k-1)(A_k-A_{k-1})=(k-1)(a_1+a_2+\dots+a_k)-k(a_1+$$
$$+a_2+\dots+a_{k-1})=(k-1)a_k-(a_1+a_2+\dots+a_{k-1})=$$
$$=(a_k-a_1)+(a_k-a_2)+\dots+(a_k-a_{k-1})\geqslant 0$$

یعنی $A_{k-1}\leqslant A_k$.

ب) داریم:

$$n(a_n-A_n)=na_n-(a_1+a_2+\dots+a_n)=(a_n-a_1)+$$
$$+(a_n-a_2)+\dots+(a_n-a_{n-1})\geqslant 0\Longrightarrow A_n\leqslant a_n$$

ج) با توجه به آن‌چه در بخش ۱) و بخش ۲)، الف) همین مسأله ثابت کردیم، داریم:

$$\frac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}=A_{k-1}\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k\geqslant A_{k-1}\left(k\cdot\frac{A_k}{A_{k-1}}-k+1\right)=$$

$$=kA_k-(k-1)A_{k-1}=a_k\Longrightarrow a_k\leqslant\frac{A_k^k}{A_{k-1}^{k-1}}$$

۳). الف) به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^{k(k-1)}=\frac{(a_1a_2\dots a_k)^{k-1}}{(a_1a_2\dots a_{k-1})^k}=\frac{a_k^{k-1}}{a_1a_2\dots a_{k-1}}=$$

$$=\frac{a_k}{a_1}\cdot\frac{a_k}{a_2}\cdots\frac{a_k}{a_{k-1}}\geqslant 1\Longrightarrow G_{k-1}\leqslant G_k$$

ب) داریم:

$$\left(\frac{a_n}{G_n}\right)^n=\frac{a_n^n}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{a_n}{a_1}\cdot\frac{a_n}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqslant 1$$

از آن‌جا $G_n\leqslant a_n$.

ج) با توجه به آن چه هم‌اکنون ثابت کردیم، یعنی $\frac{G_k}{G_{k-1}}\geqslant 1$ [بخش ۳)، الف) از همین مسأله]، و با توجه به نابرابری بخش ۱) همین مسأله، داریم:

$$a_k=\frac{a_1a_2\cdots a_k}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}=\frac{G_k^k}{G_{k-1}^{k-1}}=G_{k-1}\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^k\geqslant$$

$$\geqslant G_{k-1}\left(k\cdot\frac{G_k}{G_{k-1}}-k+1\right)=kG_k-(k-1)G_{k-1}$$

یعنی $kG_k-(k-1)G_{k-1}\leqslant a_k$.

یادداشت. این نابرابری را، با روش دیگری هم می‌توان ثابت کرد. داریم:

$$G_{k-1}^{k-1}=a_1a_2\cdots a_{k-1}\Longrightarrow G_k^k=G_{k-1}^{k-1}\cdot a_k$$

یعنی

$$G_k=\sqrt[k]{G_{k-1}\cdot G_{k-1}\cdots G_{k-1}\cdot a_k}\leqslant\frac{(k-1)G_{k-1}+a_k}{k}$$

از آن جا $kG_k-(k-1)G_{k-1}\leqslant a_k$.

۴) چون $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}=1$، بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$\frac{1}{r_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \frac{1}{r_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{1}{r_n}=\frac{m_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

که در آن‌ها، m_1، m_2، …، m_n، عددهایی طبیعی‌اند. اکنون، با توجه به نابرابری $A_n \geqslant G_n$ به‌ترتیب داریم:

$$\frac{a_1^{r_1}}{r_1}+\frac{a_2^{r_2}}{r_2}+\dots+\frac{a_n^{r_n}}{r_n}=\frac{m_1a_1^{r_1}+m_2a_2^{r_2}+\dots+m_na_n^{r_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}=$$

$$=\frac{1}{m_1+m_2+\dots+m_n}\Big(\underbrace{a_1^{r_1}+a_1^{r_1}+\dots+a_1^{r_1}}_{\text{مرتبه } m_1}+$$

$$+\underbrace{a_2^{r_2}+a_2^{r_2}+\dots+a_2^{r_2}}_{\text{مرتبه } m_2}+\dots+\underbrace{a_n^{r_n}+a_n^{r_n}+\dots+a_n^{r_n}}_{\text{مرتبه } m_n}\geqslant$$

$$\geqslant\left(a_1^{m_1r_1}\cdot a_2^{m_2r_2}\dots a_n^{m_nr_n}\right)^{\frac{1}{m_1+\dots+m_n}}=a_1a_2\dots a_n$$

در تبدیل آخر، از این برابری‌ها استفاده کردیم:

$$m_1+m_2+\dots+m_n=m_1r_1=m_2r_2=\dots=m_nr_n$$

این نابرابری را، می‌توان به‌صورتی کوتاه، این‌طور نشان داد:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{r_i}}{r_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_i,\ \left(a_i\geqslant 0,\ r_i>1,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}=1\right)$$

علامت برابری، برای $a_1^{r_1}=a_2^{r_2}=\dots=a_n^{r_n}$، پیش می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که، این نابرابری، می‌تواند به عنوان مبنائی برای اثبات بسیاری از نابرابری‌های مهم (مثل نابرابری‌های هولدر، کوشی و مینکووسکی) مورد استفاده قرار گیرد.

۹۱. طول و عرض مستطیل کف استخر را x و y و عمق استخر را z می‌گیریم. اگر مجموع مساحت دیواره‌ها و کف استخر را S بنامیم، داریم.

$$S=xy+2xz+2yz\geqslant 3\sqrt[3]{(xy)(2xz)(2yz)}=3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}=$$

$$=3\sqrt[3]{4(xyz)^2}=3\sqrt[3]{4V^2}$$

حداقل مقدار S برابر است با $3\sqrt[3]{4V^2}$ و وقتی برابر این مقدار است که داشته

باشیم:

$$xy = ۲xz = ۲yz \Longrightarrow x = y = ۲z = \sqrt[۳]{۲V}$$

یعنی استخر باید درکف خود مربع شکل باشد و، درضمن، عمقی برابر نصف ضلع کف داشته باشد، تاهزینهٔ رنگ‌کردن آن، به حداقل برسد.

۹۲. می‌دانیم واسطهٔ مربعی دو عدد، از واسطهٔ حسابی آن‌ها کوچکتر نیست، یعنی

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}} \geqslant \frac{x+y}{۲} \Longrightarrow x^۲+y^۲ \geqslant \frac{(x+y)^۲}{۲}$$

اگر به‌دوطرف این نابرابری، مقدار $z^۲$ را اضافه‌کنیم وسپس از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی دوعدد استفاده‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x^۲+y^۲+z^۲ \geqslant \frac{(x+y)^۲}{۲}+z^۲ \geqslant ۲\sqrt{\frac{(x+y)^۲z^۲}{۲}} =$$

$$= \sqrt{۲}(x+y)z \qquad (*)$$

اکنون، اگرطول وعرض و ارتفاع مکعب مستطیل را، به ترتیب، x و y و z ومساحت سطح جانبی‌آن را S بنامیم، خواهیم داشت:

$$S = ۲(x+y)z \text{ و } d^۲ = x^۲+y^۲+z^۲$$

وباتوجه به نابرابری (*)، یعنی $\sqrt{۲}(x+y)z \leqslant x^۲+y^۲+z^۲$، به دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}S \leqslant d^۲ \Longrightarrow S \leqslant \sqrt{۲}d^۲$$

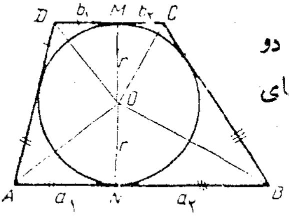
علامت برابری وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$y = x \text{ و } \frac{(x+y)^۲}{۲} = z^۲ \Longrightarrow x = y \text{ و } z = x\sqrt{۲}$$

یعنی وقتی‌که قاعدهٔ مکعب مستطیل ومقطع قطری‌آن، مربع باشند.

۹۳. نقطه‌های M و N، نقطه‌های تماس دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ $ABCD$ با دایره، قاعده‌ها رابه‌پاره‌خط‌های راستی به‌طول‌های $a_۱$، $a_۲$ و $b_۱$، $b_۲$ تقسیم

می‌کنند (شکل ۱۸)، به نحوی که $a_1+a_2=a$ و $b_1+b_2=b$.



شکل ۱۸

دو مثلث AON و ODM و همچنین، دو مثلث BON و COM باهم متشابه‌اند (زاویه‌های DOA و BOC قائمه‌اند)، بنابراین

$$\frac{r}{a_1}=\frac{b_1}{r} \text{ و } \frac{r}{a_2}=\frac{b_2}{r}$$

یعنی $r=\sqrt{a_1b_1}=\sqrt{a_2b_2}$ و $2r=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}$ و با توجه به‌قضیهٔ ۳ فصل سوم (نابرابری (۳)):

$$2r=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}\leqslant\sqrt{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}=\sqrt{ab}$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقراراست که $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$، یعنی وقتی‌که ذوزنقهٔ مفروض، متساوی‌الساقین باشد.

۹۴. ابتدا به یاد می‌آوریم که با توجه به نابرابری (۲) از فصل سوم (قضیهٔ ۲)، برای عددهای مثبت a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3، همیشه داریم:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2} \qquad (*)$$

اکنون به حل مسأله می‌پردازیم.

فاصله‌های جهت‌دار از نقطهٔ H تا خط‌های راست AC، AB و BC را، به‌ترتیب، x، y و z می‌نامیم (اگر نقطه‌های H و A در یک طرف خط راست BC باشند $z>0$ ودرغیراین صورت $z<0$). طول ضلع‌های مثلث ABC، نصف محیط ومساحت آن را، به ترتیب، a، b، c، p و S می‌نامیم. در نتیجه، نقطهٔ H درهروضعی باشد (نسبت به‌مثلث ABC)، داریم:

$$2S=ax+by+cz \qquad (**)$$

سطح جانبی چهاروجهی را S_1 و $|DH|=h$ می‌گیریم، با توجه به ـ

نابرابری (*) و برابری (**) داریم:

$$۲S_۱ = a\sqrt{h^۲+x^۲}+b\sqrt{h^۲+y^۲}+c\sqrt{h^۲+z^۲}=$$

$$=\sqrt{a^۲h^۲+a^۲x^۲}+\sqrt{b^۲h^۲+b^۲y^۲}+\sqrt{c^۲h^۲+c^۲z^۲}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(ah+bh+ch)^۲+(ax+by+cz)^۲}=\sqrt{۴p^۲h^۲+۴S^۲}$$

از آن جا $S_۱\geqslant\sqrt{p^۲h^۲+S^۲}$.

علامت برابری وقتی به‌دست‌می‌آید که داشته باشیم $x=y=z$، یعنی وقتی‌که پای ارتفاع DH برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC منطبق باشد.

۹۵. نقطهٔ برخورد خط راست AB راباخط راست d، بـا M نشان می‌دهیم. طول پاره‌خطهای راست $|MA|$ و $|MB|$، مقدارهایی ثابت‌اند: $|MA|=a$ و $|MB|=b$.

فرض می‌کنیم دایره‌ای‌که از دونقطهٔ A و B می‌گذرد، خـط راست d رادرنقطه‌های C و D قطع‌کند. می‌خواهیم طول وتر CD، حداقل‌مقدارممکن باشد. داریم:

$$|CD|=|MC|+|MD|\geqslant ۲\sqrt{|MC|\cdot|MD|}=$$

$$=۲\sqrt{|MA|\cdot|MB|}\geqslant ۲\sqrt{ab}$$

حداقل‌طول وتر CD برابر $۲\sqrt{ab}$ می‌شود ووقتی‌به‌این‌حداقل‌می‌رسد که داشته باشیم:

$$|MC|=|MD|=\sqrt{ab}$$

برای رسم دایره، کافی است ازنقطهٔ M (محل برخورد خط راست AB بـا d) روی‌خط راست d به‌اندازهٔ $\sqrt{ba}$ جداکنیم، تا نقطهٔ C بـه دست آیـد؛ دایره‌ای‌که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذارد، دایرهٔ مطلوب است.

۹۶. مرکز بیضی را منطبق‌برمبداء مختصات، قطر بزرگتر آن رامنطبق برمحور $x'x$ می‌گیریم. دراین صورت، معادلهٔ بیضی چنین می‌شود:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱ \qquad (*)$$

که در آن، a و b، نیم قطرهای بزرگتر وکوچکتر بیضی‌اند وقتی که یك مستطیل در بیضی محاط باشد، محورهائی موازی بامحورهای بیضی خواهد داشت؛ بنا بر این اگرمختصات رأسی ازمستطیل که درربع اول دستگاه محورهای مختصات قراردارد $(x، y)$ باشد، S، یعنی مساحت مستطیل برابر $۴xy$ می‌شود: $S=۴xy$.

اکنون، می‌توان نوشت:

$$۱=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\geqslant ۲\sqrt{\frac{x^۲}{a^۲}\cdot\frac{y^۲}{b^۲}}=\frac{۲xy}{ab}=\frac{S}{۲ab}$$

از آن جا $S\leqslant ۲ab$. حداکثر مساحت مستطیل محاط در بیضی باقطرهای $۲a$ و $۲b$، برابر $۲ab$ ووقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ که، با توجه به معادلهٔ بیضی، یعنی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، به‌دست می‌آید: $x=\frac{a}{\sqrt{۲}}$، $y=\frac{b}{\sqrt{۲}}$.

۹۷. محیط مستطیل مفروض را $۲p$ وطول یك ضلع آن را x می‌گیریم (ضلع دوم: $p-x$). اگر مساحت شکل حاصل را S بنامیم، داریم:

$$S=x(p-x)+\frac{\pi}{۴}x^۲+\frac{\pi}{۴}(p-x)^۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x^۲-px+\frac{p^۲\pi-۴S}{۲(\pi-۲)}=۰ \qquad (*)$$

شرط وجود ریشه‌های حقیقی، برای این معادله چنین است

$$p^۲-\frac{۲(p^۲\pi-۴S)}{\pi-۲}\geqslant ۰\Longrightarrow S\geqslant\frac{۱}{۸}p^۲(\pi+۲)$$

حداقل مقدار S، برابر $\frac{۱}{۸}p^۲(\pi+۲)$ است ووقتی به این مقدار می‌رسدکه

معادلهٔ (*)، دارای ریشهٔ مضاعف باشد، یعنی $x=\frac{p}{2}$. برای این که مساحت شکل حاصل به حداقل خود برسد، باید مستطیل مفروض به‌شکل مربع باشد.

۹۸. D را یکی از نقطه‌های واقع بر پاره خط راست BC می‌گیریم. روشن است که: ۱) درمثلث با دوزاویهٔ حاده B و C، حداقل طول AD وقتی است که D، بر نقطهٔ H، پای ارتفاع AH منطبق باشد؛ وحداکثر طول AD وقتی است که، به‌شرط $|AC|>|AB|$، نقطهٔ D بر نقطهٔ B قرارگیرد؛ ۲) اگرزاویهٔ C منفرجه یاقائمه باشد، حداقل طول AD درحالت انطباق D بر C وحداکثر آن درحالت انطباق D بر B پیش می‌آید:

اکنون، اگر D را واقع برضلع BC فرض کنیم و BB' و CC' را برخط راست AD عمودکنیم (B' و C'، روی خط راست AD)، روشن است که

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|BB'|+\frac{1}{2}|AD|\cdot|CC'|$$

یعنی $|BB'|+|CC'|=\frac{2S_{ABC}}{|AD|}$. بنابراین، مجموع فاصله‌های از B و C تاخط راست AD وقتی به‌حداقل خود می‌رسدکه $|AD|$ حداکثر باشد، و وقتی به‌حداکثرخود می‌رسدکه $|AD|$ حداقل باشدکه، باتوجه‌به‌آن‌چه دربارهٔ حداقل وحداکثرطول $[AD]$ گفتیم، می‌توان جواب مسأله را درهمهٔ حالت‌ها پیدا کرد.

۹۹. فرض می‌کنیم $|AB|=x$ و $|AC|=y$. دراین‌صورت، درمثلث ABC داریم:

$$|BC|^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha=(x-y)^2+2xy(1-\cos\alpha)\geqslant$$

$$\geqslant 4xy\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}xy\sin\alpha\times 4tg\frac{\alpha}{2}=4S\,tg\,\frac{\alpha}{2}$$

S و α مقدارهایی ثابت‌اند، بنابراین حداقل $|BC|$ وقتی به دست می‌آیدکه داشته باشیم: $x=y$ و، دراین‌صورت $|BC|=2\sqrt{S\,tg\,\frac{\alpha}{2}}$.

۱۰۰. ثابت می‌کنیم، هریك ازعددهای x_i را می‌توان به ۱ یا ۱ — تبدیل کرد، بدون این که، مجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها، بزرگ شود.

a_1 را وقتی به ۱ — تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیهٔ ۱ — n عدد غیرمنفی باشد و وقتی به ۱ + تبدیل می‌کنیم که مجموع بقیه غیرمثبت باشد. دراین صورت، حاصل $a_1(a_2+a_3+\dots+a_n)$ و، درنتیجه، مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دو، بزرگتر نمی‌شود. همین‌عمل را دربارهٔ a_2، a_3، ...، a_n هم تکرار می‌کنیم. به این ترتیب، مثل این‌است که با عددهایی برابر ۱ یا ۱ — سروکار داریم و می‌خواهیم حداقل مجموع حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها را پیدا کنیم.

اکنون عددهای b_1، b_2، ...، b_n را درنظرمی‌گیریم، به‌نحوی که هریك از آن‌ها را بتوان برابر ۱ یا ۱ — گرفت. اگرمجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها را s بنامیم، داریم:

$$s=\frac{1}{2}[(b_1+b_2+\dots+b_n)^2-(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)]$$

روشن است که

$$(b_1+b_2+\dots+b_n)^2\geqslant 0,\quad -(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)\geqslant -n$$

یعنی مجموع s نمی‌تواند از $-\frac{n}{2}$ کمتر باشد.

ولی درحالت فرد بودن n، عدد $-\frac{n}{2}$ عددی درست نیست؛ دراین حالت باید $s\geqslant -\frac{n-1}{2}$ در نظر گرفت.

پاسخ. درحالت زوج بودن n، باید نیمی ازعددها را منفی و نیم دیگر را مثبت گرفت که، دراین صورت $s=-\frac{n}{2}$ حداقل مقدارممکن است. در حالت فرد بودن n، باید $\frac{n+1}{2}$ عددها را مثبت و $\frac{n-1}{2}$ آن‌ها را منفی

گرفت که، در این صورت، $s=-\frac{n-1}{2}$ حداقل مقدار ممکن است.

۱۵۱. با استفاده از نابرابری ین‌سن و با توجه به مقعر بودن تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ (وقتی x بین صفر و ۱۸۰ درجه باشد) داریم:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geqslant 3\times\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}=\frac{3}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$$

حداقل مقدار $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$ (α، β و γ، زاویه‌های یک مثلث)، برابر است با $2\sqrt{3}$.

۱۵۲. ضمن حل تمرین ۷۵ گفتیم، به‌شرط $x+y+z=\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=1$$

α، β و γ زاویه‌های یک مثلث‌اند، یعنی $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$، بنابراین

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$$

حاصل ضرب $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ را p می‌نامیم. داریم:

$$P^2=\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

مجموع این سه پرانتز، مقداری است ثابت، بنابراین، حاصل ضرب آن‌ها (روشن است که هر پرانتز، مقداری‌است مثبت)، وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Longrightarrow\alpha=\beta=\gamma$$

که دراین‌صورت، مقدار $tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}$، برابر $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۳}$، یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ می‌شود.

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}\leqslant\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

ومقدار $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$، برای مثلث متساوی‌الاضلاع.

۱۰۳. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی داریم:

$$sin\alpha sin\beta\leqslant\left(\frac{sin\alpha+sin\beta}{۲}\right)^{۲}=sin^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲}cos^{۲}\frac{\alpha-\beta}{۲}\leqslant sin^{۲}\frac{\alpha+B}{۲}$$

که علامت برابرای، برای $\alpha=\beta$ پیش می‌آید. در ضمن، می‌توان تنها برای حالتی صحبت کرد که داشته باشیم $\alpha+\beta<۱۸۰^{\circ}$؛ زیرا برای $\alpha+\beta\geqslant۱۸۰^{\circ}$، مقدار $sin(\alpha+B)$، منفی یاصفر می‌شود و نمی‌توان مقدار حداکثر رادرآن‌جا جست وجو کرد، داریم:

$$sin\alpha sin\beta sin(\alpha+\beta)\leqslant sin^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲}sin(\alpha+\beta)$$

اگر فرض‌کنیم $x=\frac{\alpha+\beta}{۳}$، باید حداکثر مقدار $sin^{۲}x sin ۲x$ را، با شرط $۰^{\circ}<x<۹۰^{\circ}$، پیداکنیم. می‌نویسیم:

$$(sin^{۲}x sin۲x)^{۲}=(۲sin^{۳}x cos x)^{۲}=۴sin^{۶}x cos^{۲}x=$$

$$=\frac{۴}{۳}(sin^{۲}x)(sin^{۲}x)(sin^{۲}x)(۳-۳sin^{۲}x)$$

باچهارعامل مثبت سروکار داریم‌که مجموعی ثابت دارند، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثرمقدارخود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$sin^{۲}x=۳-۳sin^{۲}x\Longrightarrow x=۶۰^{\circ}$$

حداکثرمقدار $sin^{۲}x sin۲x$ (که‌همان‌حداکثرمقدار $sin\alpha sin\beta sin(\alpha+\beta)$ است)، به ازای $x=۶۰^{\circ}$ به دست می‌آید، به‌این ترتیب، با شرط

$0^\circ < \alpha$ و $\beta < 180^\circ$، داریم:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

که به‌ازای $\alpha=\beta=60^\circ$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴. اگر AB را قاعدهٔ مثلث ABC بگیریم، برای این‌کـه مساحـ مثلث ABC به‌حداکثرمقدار خود برسد، با توجه به ثابت بودن طـول AB باید طول ارتفاع وارد از C بر AB، بزرگترین مقدارممکن باشد واین، صورتی است که نقطهٔ C، وسط کمان بزرگتر AB قرارگیرد.

برای محیط مثلث ABC، طول ضلع‌های روبه‌رو به‌رأس‌هـای A، و C را به‌ترتیب a، b و c و زاویه‌های این رأس‌ها را α، β و γ می‌گیر داریم

$$2p = 2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

(p نصف محیط و R شعـاع دایرهٔ محیطـی مثلث است). R و γ مقدارهایی ثابت‌اند، بنابراین، حداکثرمحیط همراه با حداکثر $\alpha+\sin\beta$ است ومی‌دانیم:

$$\sin\alpha+\sin\beta \leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

که علامت برابری، برای $\alpha=\beta$ است. حداکثر محیط هـم، وقتی بـه د می‌آیدکه نقطهٔ C، وسط‌کمان بزرگتر AB باشد.

۱۰۵. حالت خاص قضیهٔ ۲ (فصل سوم)، برای دوعدد مثبت a_1 و حاکی است‌که:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

(مسألهٔ ۶ فصل اول راهم ببینید)؛ علامت برابری، برای $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

با توجه به‌این نابرابری داریم:

$$y=\sqrt{x^2+(\sqrt{a})^2}+\sqrt{(c-x)^2+(\sqrt{b})^2} \geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{(x+c-x)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

حداکثرمقدار y، برابر $\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ است ووقتی به‌این مقدار می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{c-x}{\sqrt{b}}\Longrightarrow x=\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۱۰۶. برای پیدا کردن حداقل y_1، ازهمان نابرابری (*) تمرین قبل استفاده می‌کنیم:

$$y_1=\sqrt{(x-m)^2+(n^2-m^2)}+\sqrt{(p-x)^2+(q^2-p^2)}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(p-m)^2+(\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2})^2}$$

واین مقدارحداقل، وقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x-m}{p-x}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}\Longrightarrow x=\frac{p\sqrt{n^2-m^2}+m\sqrt{q^2-p^2}}{\sqrt{n^2-m^2}+\sqrt{q^2-p^2}}$$

برای پیدا کردن حداکثر y_2، ازاین نابرابری استفاده می‌کنیم (که برای مقدارهای مثبت a_1، a_2، b_1، b_2 همیشه برقرار است (چرا؟)):

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_2^2+b_2^2}\leqslant\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

دراین‌صورت داریم:

$$y_2=\sqrt{(x+m)^2+(n^2-m^2)}-\sqrt{(x-p)^2+(q^2-p^2)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(m+p)^2+(\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2})^2}$$

واین مقدار حداکثروقتی به‌دست می‌آیدکه داشته باشیم:

$$\frac{x+m}{x-p}=\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{q^2-p^2}}\Longrightarrow x=\frac{m\sqrt{q^2-p^2}+p\sqrt{n^2-m^2}}{\sqrt{n^2-m^2}-\sqrt{q^2-p^2}}$$

درهردوتمرین مربوط به y_1 و y_2، می‌توان به‌جای شرط مثبت بودن m، n، p، q، $m<n$ و $p<q$، تنها شرط $|m|<|n|$ و $|p|<|q|$ رادر نظر گرفت.

۱۰۷. کافی است از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی، برای ۱۰۰ عدد a، a، ...، a، ۱ استفاده کنیم. علامت برابری، برای $a=1$.

۱۰۸. ازنابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی، ۱) دربارهٔ n عدد ۲، ۴، ...، $2n$ و ۲) دربارهٔ n عدد ۱، ۳، ...، $2n-1$ استفاده کنید.

۱۰۹. راهنمائی. تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x-a}$، برای $x>a>0$ نزولی است (چرا؟)؛ درضمن $f(a)=0$، بنابراین $f(x)<0$.

۱۱۰. فرض می‌کنیم $f(x)=(1+x)^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}-2$ و $0\leqslant x<1$ می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}+\alpha(1-x)^{\alpha-1}=$$

$$=\frac{\alpha}{(1+x)^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{(1-x)^{1-\alpha}}\geqslant 0$$

بنابراین $f(x)$ تابعی صعودی است وچون $f(0)=0$، بنابراین $f(x)\geqslant 0$.
ازطرف دیگر، $f(x)$ تابعی است زوج، پس، برای $-1<x\leqslant 0$ داریم $f(-x)=f(x)\geqslant 0$.

۱۱۱. بسادگی تحقیق می‌شود که نابرابری، برای $n=2$ برقرار است. فرض می‌کنیم، نابرابری برای $n=k$ برقرار باشد، یعنی $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k<\frac{a^k+b^k}{2}$. دراین صورت

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\cdot\frac{a+b}{2}<\frac{a^k+b^k}{2}\cdot\frac{a+b}{2}=$$

$$=\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4} \qquad (*)$$

ازطرف دیگر به‌سادگی ثابت می‌شود $ab^k+a^kb<a^{k+1}+b^{k+1}$، زیرا اگرهمهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ علامت نابرابری منتقل کنیم، باتوجه به‌شرط $a>b$، به‌نابرابری روشن $(a^k-b^k)(b-a)<0$ می‌رسیم. به این ترتیب، با توجه به (*) داریم:

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{k+۱}<\frac{a^{k+۱}+b^{k+۱}+a^{k+۱}+b^{k+۱}}{۴}=\frac{a^{k+۱}+b^{k+۱}}{۲}$$

درستی نابرابری، با روش استقرای ریاضی ثابت شد.

۱۱۲. تابع $f(x)=\ln(۱+x)-x$ $(x>۰)$، تابعی نزولی است (چرا؟) و درضمن $f(۰)=۰$، بنابراین، برای $x>۰$ داریم $f(x)>۰$.

۱۱۳. اگر ازدوطرف نابرابری، درمبنای e، لگاریتم بگیریم، به این نابرابری می‌رسیم:

$$۲x<\ln(۱+x)-\ln(۱-x)$$

تابع $f(x)=۲x-\ln(۱+x)+\ln(۱-x)$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=۲-\frac{۱}{۱+x}-\frac{۱}{۱-x}=-\frac{۲x^۲}{۱-x^۲}<۰$$

تابع $f(x)$ نزولی‌است و درضمن $f(۰)=۰$. بنابراین، برای $۰<x<۱$ داریم:

$$f(x)<۰\Longrightarrow ۲x<\ln\frac{۱+x}{۱-x}\Longrightarrow e^{۲x}<\frac{۱+x}{۱-x}$$

۱۱۴. $f(x)=۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۸}-\sqrt{۱+x}$ می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}=\frac{(۲-x)\sqrt{۱+x}-۲}{۴\sqrt{۱+x}}$$

صورت این کسر، برای $x>۰$ همیشه منفی است، زیرا به‌ازای $x\geqslant ۲$، صورت‌کسر منفی می‌شود و برای $x<۲$ می‌توان ثابت کرد $(۲-x)\sqrt{۱+x}<۲$. درواقع، درحالت $x<۲$ می‌توان دوطرف را مجذور کرد که، بعد از ساده‌کردن، به‌نابرابری $x-۳<۰$ می‌رسدکه درست است.

چون $f'(x)<۰$، پس $f(x)$ برای $x>۰$ نزولی است ودرضمن $f(۰)=۰$، پس برای $x>۰$ داریم $f(x)<۰$، یعنی

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}$$

نابرابری سمت راست هم، باهمین روش وبا سادگی بیشتری، ثابت می‌شود.
مثلاً اگر $x=0/02$ بگیریم، باتوجه به‌این‌نابرابری به‌دست می‌آید:

$$1/00995<\sqrt{1/02}<1/01$$

۱۱۵. درواقع، باید برای $x>0$ ثابت‌کنیم $e^x>1+x$. تابع

$$f(x)=e^x-x-1 \quad , \quad (f'(x)=e^x-1)$$

صعودی است ودرضمن $f(0)=0$، پس $f(x)>0$.

۱۱۶. راهنمایی. تابع $f(x)=tgx-x-\frac{x^3}{3}$، برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ صعودی است.

۱۱۷. نابرابری‌سمت‌چپ را، ضمن‌حل مثال مربوط به‌کاربرد انتگرال ثابت‌کردیم. برای اثبات نابرابری سمت راست، ازنابرابری $\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$، که درهمان مثال ثابت‌کردیم، استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^x cost\,dt\leqslant\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}\right)dt$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $\sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$. علامت برابری برای $x=0$ است وبنابراین، برای $x>0$:

$$\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

۱۱۸. دشوارنیست.

۱۱۹. درمثال ۲ از § ۱ فصل چهارم ثابت‌کردیم. برای $x\geqslant 0$:

$$arctg\,x\geqslant x-\frac{x^3}{3}$$

درضمن می‌دانیم $sin x \leqslant x$ $(x \geqslant 0)$. بنابراین

$$\int_0^1 \frac{arctg x}{sin x} dx > \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3}}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{8}{9}$$

۱۲۵. n جملهٔ اول این رشته را x_n می‌نامیم:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$$

و ثابت می‌کنیم، x_n، برای هرمقدار دلخواه n، همیشه از مقدار ثابتی کوچکتر است، دراین‌صورت، از آن‌جا که x_n، با بزرگ شدن n، بزرگ می‌شود، به‌معنای آن‌است که x_n، بامیل x به سمت بی‌نهایت، به سمت حدی میل می‌کند. فرض می‌کنیم:

$$z_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

روشن است که $z_{2n} < 1$، زیرا

$$z_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

(عدد داخل هرپرانتز، مثبت است). z_{2n} را می‌توان این‌طور نوشت:

$$z_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

به‌این ترتیب $z_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n$.چون $x_{2n} > x_n$ و $z_{2n} < 1$، داریم:

$$1 > z_{2n} > x_n - \frac{3}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n \Longrightarrow x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$$

یعنی x_n، به‌ازای $\alpha > 1$، مقداری است محدود و از $\frac{2}{2^\alpha - 2}$ تجاوز

نمی‌کند. مثلاً، برای $\alpha = 2$، داریم: $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2} = 2$، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \leqslant 2$$

ثابت می‌کنند، حد x_n، برای $\alpha = 2$، برابر است با $\frac{\pi^2}{6}$.

۱۴۱۰. تابع $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ را در بازهٔ $[0, +\infty)$ درنظرمی‌گیریم. روشن که، برای مقدارهای واقع دردرون این بازه، داریم:

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)} > 0$$

و بنابراین، تابع f، در بازهٔ $(0, \infty)$ صعودی است. f تابعی است پیوسته، درنتیجه، حداقل مقدارخود رادرانتهای چپ این بازه به‌دست می‌آورد، یعنی به ازای $x = 0$. به زبان دیگر، برای هرمقدار $x \geqslant 0$، نابرابری $f(x) \geqslant f(0) = 0$ برقراراست.

یادداشت. در برنامهٔ کنونی دبیرستانی، دربارهٔ تابع‌های لگاریتمی و ویژگی‌های آن‌ها بحث نشده‌است. دراین‌مسأله، به‌مشتق‌تابع $y = \ln(1+x)$ احتیاج داشتیم. مشتق این تابع، $y' = \frac{1}{1+x}$ و، به طور کلی، مشتق تابع $y = \ln u$ به‌صورت $y' = \frac{u'}{u}$ است که ما بدون اثبات، از آن استفاده کردیم.

همچنین، در برنامهٔ دبیرستانی، دانش‌آموزان با بررسی دقیق تابع‌ها در یك بازهٔ بسته، یعنی نقش تابع‌های پیوسته (حتی تابع‌هایی‌که ازیك طرف، پیوستگی‌دارند) آشنا نمی‌شوند. بدون مراجعه به‌ویژگی‌های تابع‌های پیوسته

حتی نمی‌توان ازاین استدلال ساده استفاده کرد که: یك تابع پیوسته ویکنوا (یعنی تابعی که تنها صعودی یا تنها نزولی است) دریك بازهٔ باز، دردوانتهای بازه به‌اکسترمم‌های خود می‌رسد. ولی توجه دقیق به این ویژگی‌های دقیق منطقی وفرورفتن در ریزه‌کاری‌های استدلالی، به خصوص دردورهٔ دبیرستانی ازنظر آموزشی مناسب نیست. دراین موردها کافی است، رفتار تابع را به‌صورت عینی وبامراجعه به‌نمودار آن درنظر بگیریم وازبررسی صوری رفتار تابع صرف نظر کنیم. درغیراین صورت، دانش‌آموز، دربحث‌های فرمولی وصوری منطقی گم می‌شود وخلاقیت خودرا ازدست می‌دهد. برای دانش‌آموز دبیرستانی، تصور شهودی دربازهٔ مفهوم پیوستگی کافی است و براساس آن می‌تواندکارخودرا ادامه دهد. لزومی نداردکه دانش‌آموز، برای درك مفهوم دقیق پیوستگی، به سراغ «ریاضیات عالی» برود؛ عمل و نیازهای شخصی، همراه باا‌ندکی معرفت شهودی، همهٔ آن چه را که لازم است، دراختیار او می‌گذارد.

ازاین گذشته، دربررسی این مسأله، وبسیاری از مسأله‌های مشابه آن، می‌توان این دشواری را به‌نحوی برطرف کرد وبه‌استدلال کامل ودقیق رسید. برای‌این منظور، بایدتابع f رادربازهٔ بازی درنظرگرفت‌که شامل ۰ باشد، مثلا دربازهٔ $(-۱, +\infty)$. در این صورت، نقطهٔ ۰، یك نقطهٔ درونی این بازه می‌شود، وچون تابع f، دراین بازهٔ‌گسترده‌ترهم صعودی‌است، بنابراین نابرابری $f(x)>f(۰)$، به‌طور مستقیم، ازصعودی بودن تابع دراین بازهٔ باز، نتیجه می‌شود. باوجود این، ازآن جاکه دربعضی موردها، نمی‌توانیم دامنه یاحوزهٔ تعریف تابع راگسترش دهیم، باید دقت رادرهمان حد شهودی وعینی آن، پذیرفت.

۱۲۲. تابع $f(x)=e^x-۱-x-\frac{x^۲}{۲}$ رادرنظر می‌گیریم. دراین صورت

$$f'(x)=e^x-۱-x;\ f''(x)=e^x-۱.$$

ازآن‌جاکه دربازهٔ $(۰, +\infty)$ داریم $f''(x)=e^x-۱>۰$، بنابراین تابع $f'(x)$ دراین بازه صعودی است و، درنتیجه، باتکیه برپیوستگی تابع

$f'(x)$ دراین بازه، باید داشته باشیم: $f'(x)>f'(0)=0$؛ ولی دراین صورت ، در بازهٔ $(0, \infty)$، تابع $f(x)$ صعودی است، به نحوی که $f(x)>f(0)=0$.

یادداشت. دراین مسأله هم، از قانونی استفاده کرده‌ایم که در برنامهٔ دبیرستانی نیامده است: مشتق تابع $y=e^x$ عبارت است از $y'=e^x$. تابع $f(x)=e^{x+a}$ (a، عددی ثابت است)، تنها تابعی‌است که مشتق آن باخودش برابرمی‌شود. به‌طورکلی، برای تابع $f(x)=e^u$ (u تابعی‌از x است) داریم $f'(x)=u'\cdot e^u$.

درضمن دراین مسأله، ازمشتق دوم هم استفاده کردیم. گاهی ممکن‌است برای اثبات درستی نابرابری، به‌مشتق‌های مرتبهٔ بالاترهم نیاز داشته باشیم، مثلا برای اثبات درستی نابرابری‌های

$$e^x \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120};$$

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\quad (x\geqslant 0);$$

$$1-\frac{x^2}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

درمسألهٔ ۱۲۲، اگر نابرابری را ساده‌تر می‌گرفتیم و می‌خواستیم درستی‌نابرابری $e^x>1+x$ رابرای $x\geqslant 0$ ثابت‌کنیم، تنها به مشتق اول نیاز داشتیم.

جالب‌است‌که ازنابرابری $e^x>1+x$ می‌توان برای‌اثبات‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده‌کرد.

این نابرابری رابا تبدیل x به $x-1$، به‌صورت $e^{x-1}\geqslant x$ می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم، برای هر $x\in\mathbf{R}$ برقرار است. اگر فرض کنیم $f(x)=e^{x-1}-x$، آن‌وقت به‌دست می‌آید: $f'(x)=e^{x-1}-1$ که برای $x<1$ منفی و برای $x>1$ مثبت‌است، یعنی $f(x)$، درنقطهٔ $x=1$ به‌می‌نیمم خود می‌رسد و برای هرمقدار $x\in\mathbf{R}$ داریم $f(x)\geqslant f(1)=0$.

اکنون n عدد مثبت $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n رادرنظر می‌گیریم و فرض می کنیم:

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}=A$$

اگر در نابرابری $x \leqslant e^{x-۱}$، به جای x، به‌ترتیب، عددهای مثبت $\frac{x_۱}{A}$، $\frac{x_۲}{A}$، ...، $\frac{x_n}{A}$ قرار دهیم، به‌این نابرابری‌ها می‌رسیم:

$$e^{\frac{x_۱}{A}-۱}\geqslant\frac{x_۱}{A}$$

$$e^{\frac{x_۲}{A}-۱}\geqslant\frac{x_۲}{A}$$

$$\cdots\cdots$$

$$e^{\frac{x_n}{A}-۱}\geqslant\frac{x^n}{A}$$

که ازضرب آن‌ها دریکدیگر، نتیجه می‌شود:

$$e^{\frac{x_۱+x_۲+\cdots+_n}{A}-n}\geqslant\frac{x_۱\cdot x_۲\cdots x_n}{A^n}$$

ولی $n=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{A}$ و، بنابراین، نابرابری اخیر بـه صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x_۱x_۲\cdots x_n}{A^n}\leqslant ۱\Longrightarrow\sqrt[n]{x_۱x_۲\cdots x_n}\leqslant\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$$

۱۲۳. تابع $f(x)=۲x+۳-\ln(x^۳+۹)$ و دامنهٔ آن

$$D(f)=(-\sqrt[۳]{۹}، +\infty)$$

رادرنظر می‌گیریم. از آن‌جا که

$$f'(x)=۲-\frac{۳x^۲}{x^۳+۹}=\frac{۲x^۳-۳x^۲+۱۸}{x^۳+۹}$$

واز آن‌جا که $x^۳+۹$ در بازهٔ $(-\sqrt[۳]{۹},+\infty)$ مثبت است، به‌شرطی $f'(x)$ مثبت است که $۲x^۳-۳x^۲+۱۸$ مثبت باشد. اگر فرض کنیم:

$$g(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱۸ \qquad (x\in D(f))$$

به‌دست می‌آید $g'(x)=۶x^۲-۶x$ که به‌ازای $x>۱$ مثبت‌است؛ پس تابع $f'(x)$ برای $x>۱$ صعودی و چون $f'(۱)=۱/۷$، بنابراین بـه‌ازای $x>۱$ داریم $f'(x)>۱$، یعنی $f(x)$ برای $x>۱$ صعودی است وچون

$$f(۱)=۵-\ln ۱۰>۰$$

درنتیجه، به‌ازای $x>۱$ داریم $f(x)>۰$ و

$$۲x+۳>\ln(x^۳+۹)$$

به‌این ترتیب، نـابرابری $۲n+۳<\ln(n^۳+۹)$ ، برای $n\geqslant ۱$ برقرار نیست. دربازهٔ $(-\sqrt[۳]{۹},۱)$ تنها سه‌عدد درست باقی‌می‌ماند: ۰، ۱ — و ۲ — . با آزمایش معلوم می‌شودکه تنها $n=-۱$ و $n=-۲$ درنابرابری‌مفروض صدق می‌کند.

۱۲۴. $f(x)=۳x-tg\,x$ را در بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=۳-\frac{۱}{cos^۲x}\ ,\ f'(x)=۰\Longrightarrow x=arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

(جواب $f'(x)=۰$ را تنها دربازهٔ موردنظر بـه دست آوردیم). داریم :

$$۰<x<\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Longrightarrow f'(x)>۰$$

$$\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}<x<\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow f'(x)<۰$$

یعنی $f(x)$، درنقطهٔ $x=arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ به‌ماکزیمم خود می‌رسد. ثابت می‌کنیم،

این حداکثر مقدار تـابع، از $\frac{۷}{۴}=۱/۷۵$ کمتر است. $\alpha=\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

می‌گیریم، یعنی $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، پس $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ و $tg\alpha=\sqrt{۲}$؛ در ضمن $\sqrt{۲}>۱/۴۱$. ازطرف دیگر

$$\alpha=\arccos\frac{۱}{\sqrt{۳}}<\arccos\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۳}<۱/۰۵$$

به‌نحوی که

$$f(\alpha)=۳\alpha-tg\alpha<۳/۱۵-۱/۴۱<۱/۷۵$$

به‌این‌ترتیب، نامعادلهٔ مفروض، دربازهٔ $\left[۰،\frac{\pi}{۲}\right]$، جواب ندارد.

۱۰۱۲۵) ۱) تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۱+x}+\sqrt[۳]{۱-x}$ را دربازهٔ $(-۱،۱)$ درنظرمی‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱+x)^۲}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}$$

$f'(x)$ به‌ازای $x=۰$ برابر صفر، بـه‌ازای $x<۰$ مثبت وبه‌ازای $x>۰$ منفی‌است. بنابراین،تابع $f(x)$ دربازهٔ $(-۱،۱)$، درنقطهٔ $x=۰$، بیشترین مقدار را دارد وداریم:

$$f\left(\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}\right)=\sqrt[۳]{۱+\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}}+\sqrt[۳]{۱-\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}}<f(۰)=۲$$

که اگر، دوطرف آن را در $\sqrt[۳]{۳}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[۳]{۳+\sqrt[۳]{۳}}+\sqrt[۳]{۳-\sqrt[۳]{۳}}<۲\sqrt[۳]{۳}$$

۲) تابع $f(x)=log_x(x+۱)$ را دربازهٔ $(۱،+\infty)$ درنظرمی‌گیریم. داریم:

$$f(x)=\frac{\ln(x+۱)}{\ln x};$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$$

برای $x>1$ داریم: $0<x<x+1$ ، یعنی $0<\ln x<\ln(x+1)$، از این‌جا

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

یعنی، برای $x>1$، نابرابری $f'(x)<0$ برقرار و $f(x)$ نزولی‌است، به این ترتیب، $f(4)>f(5)$ و $\log_4 5>\log_5 6$.

یادداشت. ضمن حل این مسأله، ثابت‌کردیم

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

این‌اثبات‌را می‌توانستیم به‌کمک مشتق‌تابع $g(x)=x\ln x$ بدهیم. درواقع

$$g'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x=\ln x+1>0\quad(x>1)$$

بنابراین تابع $g(x)$، برای $x>1$، صعودی است، یعنی $g(x)>g(x+1)$ و

$$x\ln x<(x+1)\ln(x+1)$$

خود نابرابری $\log_4 5>\log_5 6$ را هم، می‌توانستیم، به‌صورتی زیباتر وبدون استفاده ازمشتق ثابت‌کنیم. باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$\sqrt{\log_5 4\cdot\log_5 6}<\frac{\log_5 4+\log_5 6}{2}=\frac{\log_5 24}{2}<1\ ;$$

از آن‌جا

$$\log_5 4\cdot\log_5 6<1\Longrightarrow\log_5 6<\frac{1}{\log_5 4}=\log_4 5$$

۳) تابع‌های $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ و $g(x)=\ln f(x)=\frac{\ln x}{x}$ را درنظر

می‌گیریم. روشن است که تابع g درهرمجموعه‌ای صعودی (یا نزولی) باشد، تابع f هم درهمان مجموعه صعودی (یا نزولی) است و برعکس. داریم:

$$g'(x)=\frac{۱-\ln x}{x^۲}$$

که به‌ازای $x>e$ منفی‌است. پس تابع g، و در نتیجه تابع f، برای $x>e$ نزولی است، یعنی

$$f(۱۰۰۰)>f(۱۰۰۱)\Longrightarrow ۱۰۰۰^{\frac{۱}{۱۰۰۰}}>۱۰۰۱^{\frac{۱}{۱۰۰۱}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ۱۰۰۰^{۱۰۰۱}>۱۰۰۱^{۱۰۰۰}$$

۴) تابع $f(x)=x+\cos x$ را در نظر می‌گیریم. مشتق آن $f'(x)=۱-\sin x$ غیرمنفی و، بنابراین، تابع f غیرنزولی است. درواقع، نمودار تابع $f(x)$ درنقطه‌هایی‌که ریشهٔ معادلهٔ $\sin x=۱$، یعنی در نقطه‌های $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$، ازنقطه‌های‌عطف خود می‌گذرد (نقطه‌هایی‌که مماس درآن‌ها برنمودار، موازی با محور طول است) و، درنتیجه، برای $x\in\mathbf{R}$ صعودی است؛ یعنی

$$f(۱۳۷۰)<f(۱۳۷۱)\Longrightarrow ۱۳۷۰+\cos ۱۳۷۰<۱۳۷۱+\cos ۱۳۷۱$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\cos ۱۳۷۰<۱+\cos ۱۳۷۱$.

یادداشت. نابرابری $\cos ۱۳۷۰<۱+\cos ۱۳۷۱$ را، با روش ساده‌تری هم می‌توانستیم ثابت کنیم. می‌دانیم، برای $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ داریم $\sin x<x$ ومثلاً $\sin\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲}$. اکنون، با استفاده‌ازهمین نابرابری، می‌توان نوشت:

$$|\cos ۱۳۷۰-\cos ۱۳۷۱|=\left|۲\sin\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲۷۴۱}{۲}\right|=$$

$$=۲\left|\sin\frac{۱}{۲}\right|\cdot\left|\sin\frac{۲۷۴۱}{۲}\right|<۱$$

۵) تابع $f(x)=\frac{tg\,x}{x}$ را در بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۴}\right)$ درنظرمی‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}-tg\,x=\frac{x-\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2\cos^2 x}>0$$

زیرا برای $2x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ داریم $2x>\sin 2x$. بنابراین $f(x)$ در بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ صعودی است ومی‌توان نوشت:

$$\frac{tg\,\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}}<\frac{tg\,\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}\Longrightarrow 6tg5^\circ<5tg6^\circ\ ;$$

$$\frac{tg\,\frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}}<\frac{tg\,\frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}}\Longrightarrow 10tg9^\circ<9tg10^\circ$$

وازضرب این دونابرابری دریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$60tg5^\circ\,tg9^\circ<45tg6^\circ\,tg10^\circ\Longrightarrow 4tg5^\circ\,tg9^\circ<3tg6^\circ\,tg10^\circ$$

۶) تابع $f(x)=\sin^3(x+\alpha)-\sin^3 x$ را دربازهٔ $(0,5\alpha)$ وبا فرض $\alpha=\frac{\pi}{180}$ درنظرمی‌گیریم. دراین صورت داریم:

$$f'(x)=3\sin^2(x+\alpha)\cos(x+\alpha)-3\sin^2 x\cos x$$

اکنون تابع $g(x)=\sin^2 x\cos x$ را دربازهٔ $(0,5\alpha)$ درنظرمی‌گیریم:

$$g'(x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x(2-3\sin^2 x)$$

چون $5\alpha<\frac{\pi}{4}$، پس دربازهٔ مورد نظر

$$2-3\sin^2 x>2-3\times\frac{1}{2}>0$$

به‌نحوی‌که $g'(x)>0$ و، بنابراین، $g(x)$ تابعی صعودی است. ولی دراین صورت، دربازهٔ $(0,4\alpha)$، داریم:

$$f'(x)=۳[g(x+\alpha)-g(x)]>۰$$

درنتیجه تابع $f(x)$ دربـازهٔ $(۰،۴\alpha)$ صعودی است و $f(۳\alpha)>f(۲\alpha)$، یعنی

$$\sin^۳۴^\circ-\sin^۳۳^\circ>\sin^۳۲^\circ-\sin^۳۱^\circ\implies$$

$$\implies\sin^۳۳^\circ+\sin^۳۲^\circ<\sin^۳۴^\circ+\sin^۳۱^\circ$$

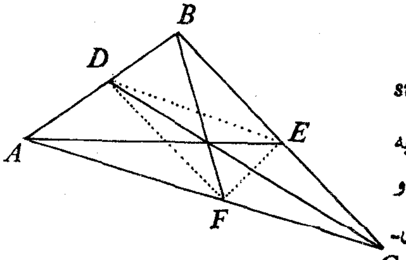
یادداشت. در واقع، می‌توان این نـابرابری را، بـا بـررسی تـابع $f(x)=\sin^۳x$، دربازهٔ $(۰ ، ۵\alpha)$ به‌دست آوردکه، در آن $\alpha=\frac{\pi}{۱۸۰}$. داریم:

$$f'(x)=۳\sin^۲x\cos x\ ;\ f''(x)=۳\sin x\,(۲-۳\sin^۲x)$$

هم $f'(x)$ وهم $f''(x)$ دربازهٔ $(۰،۵\alpha)$ مثبت‌اند. ازمثبت بودن $f''(x)$ نتیجه می‌گیریم‌که تابع صعودی $f(x)$ [$f(x)$ صعودی است، چون $f'(x)>۰$] دربازهٔ $(۰،۵\alpha)$، تقعری به‌سمت yهای مثبت دارد، یعنی نقطهٔ وسط وتری که دونقطه به‌طول‌های α و ۴α را بـه‌هم وصل‌کرده است، در بـالای نقطهٔ وسط وتری قرارداردکه دوانتهای آن به‌طول‌های ۲α و ۳α هستند، یعنی

$$\frac{f(\alpha)+f(۴\alpha)}{۲}>\frac{f(۲\alpha)+f(۳\alpha)}{۲}\implies$$

$$\implies f(\alpha)+f(۴\alpha)>f(۲\alpha)+f(۳\alpha)$$



شکل ۱۹

واز آن‌جا

$$\sin^۳۱^\circ+\sin^۳۴^\circ>\sin^۳۲^\circ+\sin^۳۳^\circ$$

۷) نقطه‌های D، E و F را، به ترتیب، وسط ضلع‌هـای AB ، BC و CA می‌گیریم (شکل ۱۹)، نابرابری‌های زیر، روشن‌اند:

$$|AE|<|AF|+|FE|=\frac{۱}{۲}|AC|+\frac{۱}{۲}|AB|$$

$$|BF|<|BD|+|DF|=\frac{۱}{۲}|AB|+\frac{۱}{۲}|BC|$$

$$|CD|<|CE|+|ED|=\frac{۱}{۲}|BC|+\frac{۱}{۲}|AC|$$

ازمجموع این سه نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$|AE|+|BF|+|CD|<|AB|+|AC|+|BC|$$

پاسخ. محیط یك‌مثلث، ازمجموع طول‌های میانه‌های‌آن بزرگتراست.

۸) باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی (برای ۷ عدد مثبت) داریم:

$$sin^{۴}\alpha cos^{۱۰}\alpha=۲^{۲}.۵^{۵}\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)^{۵}=$$

$$=۱۲۵۰۰\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)\cdot\left(\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}\right)\times\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\left(\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\right)\leqslant۱۲۵۰۰\left(\frac{۲\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}+۵\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}}{۷}\right)^{۷}=\frac{۱۲۵۰۰}{۷^{۷}}$$

بنابراین

$$۷^{۷}sin^{۴}cos^{۱۰}\alpha\leqslant۷^{۷}\cdot\frac{۱۲۵۰۰}{۷^{۷}}=۱۲۵۰۰$$

علامت برابری، برای وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{sin^{۲}\alpha}{۲}=\frac{cos^{۲}\alpha}{۵}\Longrightarrow\alpha=\mathrm{arc}tg\sqrt{\frac{۲}{۵}}$$

۹) و ۱۰) حل مسأله ۳۲، ۳) را ببینید.

پاسخ. $۲۱^{۲۳}>۲۳^{۲۱}$ ؛ $۵۵۳^{۵۵۵}>۵۵۵^{۵۵۳}$.

۱۱) تابع $f(x)=x-\pi\ln x$ را دربازهٔ $(۰, +\infty)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f'(x)=1-\frac{\pi}{x}=\frac{x-\pi}{x}$$

$f'(x)$ درنقطهٔ $x=\pi$ تغییر علامت می‌دهد و ازمنفی به‌مثبت می‌رود، بنا براین، در $x=\pi$ به‌حداقل مقدارخود می‌رسد، یعنی $f(e)>f(\pi)$ یا

$$e-\pi>\pi-\pi\ln\pi \Longrightarrow e+\pi\ln\pi>2\pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln e^{e}+\ln\pi^{\pi}>\ln e^{2\pi} \Longrightarrow e^{e}\cdot\pi^{\pi}>e^{2\pi}$$

۱۲) روشن است که برای حقیقی بودن رادیکال‌ها، باید داشته باشیم: $x\geqslant 1$.

ثابت می‌کنیم: $x>\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$ و بـرای این منظور ثابت می‌کنیم:

$$\frac{x}{2}\geqslant\sqrt{x-1}\ ,\ \frac{x}{2}\geqslant\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$$

درضمن، روشن می‌کنیم، این دونـابرابری، به‌طورهم‌زمان، به‌برابری تبدیل نمی‌شوند.

نابرابری اول به $(x-2)^{2}\geqslant 0$ ونابرابری دوم به $(\sqrt{x}-2)^{2}\geqslant 0$ تبدیل می‌شوندکه درستی آن‌هـا واضح است. درضمن، اولی به‌ازای $x=2$ ودومی به‌ازای $x=4$ بـه‌برابری تبدیل می‌شوند. حکم مورد نظر ثابت شد:

$$.\ x>\sqrt{x-1}+\sqrt{x(\sqrt{x}-1)}$$

۱۳) بـا تـوجـه بـه شـرط $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم: $x<tg\,x$ و $0<1-tg^{4}\frac{x}{2}<1$. بنا براین

$$\frac{tg\,x}{x}-\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{x\sin x}\left(\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^{2}\frac{x}{2}}\cdot\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^{2}\frac{x}{2}}-x^{2}\right)>$$

$$>\frac{1}{x\sin x}\left(\frac{2x}{2}\cdot\frac{2x}{2}-x^2\right)=0$$

به‌این ترتیب: $\frac{tg x}{x}>\frac{x}{\sin x}$.

۱۴) α را زاویه‌ای مثبت وحاده و $tg\alpha=\frac{1}{5}$ می‌گیریم. دراین صورت

$$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{5}{12}\ ,\quad tg 4\alpha=\frac{120}{119}>1$$

یعنی $tg 4\alpha>tg 45^\circ$ و $4\alpha>45^\circ$ یا $\alpha>11^\circ$، پس

$$tg 11^\circ<tg\alpha=\frac{1}{5}$$

۱۵) آرك تانژانت تابعی فرد است، بنابراین

$$\int_{-2}^{2}\mathrm{arc}tg x dx=0;$$

$$\int_{2}^{3}\mathrm{arc}tg x dx=\int_{-2}^{3}\mathrm{arc}tg x dx>0;$$

$$\int_{-3}^{-2}\mathrm{arc}tg x dx=\int_{-3}^{2}\mathrm{arc}tg x dx<0$$

در نتیجه: $\int_{-2}^{3}\mathrm{arc}tg x dx>\int_{-3}^{2}\mathrm{arc}tg x dx$.

۱۲۶. روشن است که

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$$

بنابراین، برای $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$1\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$$

که، با توجه به‌قضیه‌ای که‌در بند ۳ از فصل چهارم آوردیم، می‌توان از جمله‌های

این نابرابری‌ها، درفاصلهٔ ۰ تا x $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$ انتگرال گرفت:

$$\int_0^x dt \leqslant \int_0^x (\sin t + \cos t)\, dt \leqslant \int_0^x \sqrt{2}\, dt$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x \leqslant \sin x - \cos x + 1 \leqslant \sqrt{2}x$. و اگر $\sin x$ را ازهمه جمله‌های این نابرابری‌ها کم کنیم:

$$x - \sin x \leqslant 1 - \cos x \leqslant x\sqrt{2} - \sin x$$

۱۲۷. درنابرابری روشن $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$، $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$ می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{cotg} x > \frac{\pi}{2} - x \qquad (*)$$

این نابرابری برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ و بـه‌طور بدیهی برای $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ درست است. اگر ازدوطرف‌نابرابری(*)، درفاصلهٔ $\frac{\pi}{6}$ تا x $\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ انتگرال بگیریم:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \operatorname{cotg} t\, dt > \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$$

به‌دست می‌آید:

$$\ln \sin t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x} > \left(\frac{\pi}{2} t - \frac{1}{2} t^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x};$$

$$\ln \sin x - \ln \frac{1}{2} > \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} x^2\right) - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)$$

که بعدازتبدیل‌های ساده، به‌همان نابرابری مورد نظرمسأله می‌رسیم.

۱۲۸. ببینیم، آیا نابرابری دوگانه‌ای که‌ازراه مشتق‌جمله‌های نابرابری

دوگانهٔ موردنظر به‌دست می‌آید، درست است یا نه (به‌ازای $x \geqslant 0$):

$$1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n} - x^{2n+1} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant$$
$$\leqslant 1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n}$$

عبارت‌های سمت چپ وسمت راست این نابرابری دوگانه، به‌تصاعد هندسی‌اند وقابل جمع کردن:

$$\frac{1 - x^{2n+2}}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1 + x^{2n+1}}{1+x} \quad (x \geqslant 0)$$

که درستی آن روشن است. اکنون اگر ازهمهٔ جمله‌های این دونابرابری، در فاصلهٔ از 0 تا x $(x > 0)$ انتگرال بگیریم، به‌همان نابرابری مورد نظر می‌رسیم.

۱۲۹. راهنمائی. از دوطرف نابرابری روشن $tg x > x$، درفاصلهٔ از 0 تا x انتگرال بگیرید $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

۱۳۰. راهنمائی. ابتدا درستی نابرابری متناظرنابرابری مفروض‌را، با مشتق گرفتن ازدوطرف آن، ثابت کنید. یادآوری می‌کنیم که، نابرابری اخیر، با توجه به‌نابرابری روشن $sin\alpha < \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ثابت می‌شود.

۱۳۱. ازمشتق این نابرابری به دست می‌آید: $sin x + tg x \geqslant 2x$ که درست است $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. درواقع، اگریکباردیگر ازاین نابرابری‌مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$cos x + \frac{1}{cos^2 x} \geqslant 2$$

چون دربازهٔ $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ داریم $0 < cos x \leqslant 1$، باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی

$$cos x + \frac{1}{cos^2 x} \geqslant 2\sqrt{cos x \cdot \frac{1}{cos^2 x}} = 2\sqrt{\frac{1}{cos x}} \geqslant 2$$

۱۳۲. روشن است که

$$0<(\sqrt{N}-a)^3=N\sqrt{N}-3aN+3a^2\sqrt{N}-a^3$$

بنابراین $\sqrt{N}(3a^2+N)>a^3+3aN$، یعنی $\sqrt{N}>\dfrac{a(a^2+3N)}{3a^2+N}$؛

به‌همین ترتیب

$$0>[\sqrt{N}-(a+1)]^3=N\sqrt{N}-3(a+1)N+$$
$$+3(a+1)^2\sqrt{N}-(a+1)^3;$$
$$\sqrt{N}[3(a+1)^2+N]<[(a+1)^3+3(a+1)N;$$
$$\sqrt{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۱۳۳. از نابرابری $(\sqrt[3]{N}-a)^2>0$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{N^2}+a^2>2a\sqrt[3]{N} \qquad (*)$$

درضمن از نابرابری $\sqrt[3]{N}>a$ نتیجه می‌شود: $\sqrt[3]{N^2}-a^2>0$. دوطرف نابرابری (*) رادرمقدارمثبت $\sqrt[3]{N^2}-a^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{N^4}-a^4>2a\sqrt[3]{N}(\sqrt[3]{N^2}-a^2)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[3]{N}(N+2a^3)>a(a^3+2N)\Longrightarrow\sqrt[3]{N}>\frac{a(a^3+2N)}{2a^3+N}$$

به همین ترتیب از نابرابری $[\sqrt[3]{N}-(a+1)]^2>0$ داریم:

$$\sqrt[3]{N^2}+(a+1)^2>2(a+1)\sqrt[3]{N}$$

که اگر دوطرف آن را درمقدارمنفی $\sqrt[3]{N^2}-(a+1)^2$ ضرب کنیم، بعداز عمل‌های ساده نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[3]{N}<\frac{(a+1)[(a+1)^3+2N]}{2(a+1)^3+N}$$

۱۳۴. چندجمله‌ای $f(x)$ سمت چپ معادله بر $(x-1)(x-2)$ یعنی بر x^2-3x+2 بخش‌پذیر است. بنا بر این

$$f(x)=(x^2-3x+2)(a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+\dots$$
$$\dots+a_2x^2+a_1x+a_0)$$

از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، همهٔ ضریب‌های A_i از -2 بزرگتر باشند، یعنی داشته باشیم: $A_i \geqslant -1$. در این صورت

$$A_0=2a_0>-1;\ A_1=2a_1-3a_0\geqslant-1;$$
$$A_k=2a_k-3a_{k-1}+a_{k-2}\geqslant-1 \qquad (2\leqslant k\leqslant n-2);$$
$$A_{n-1}=-3a_{n-2}+a_{n-3}\geqslant-1;\ A_n=a_{n-2}\geqslant-1$$

از نابرابری اول نتیجه می‌شود: $a_0\geqslant-\frac{1}{2}$ یا $a_0\geqslant0$ (زیرا ضریب‌ها، عددهایی درست اند). از نابرابری دوم به دست می‌آید: $a_1\geqslant a_0+\frac{1}{2}(a_0-1)$. اگر $a_0=0$ آن وقت $a_1\geqslant-\frac{1}{2}$، یعنی $a_1\geqslant a_0=0$، و اگر $a_0>0$ یعنی $a_0\geqslant1$، آن‌وقت $a_1\geqslant a_0$. به‌این ترتیب در هر دو حالت داریم: $a_1\geqslant a_0\geqslant0$. فرض کنید، به‌همین ترتیب، به دست آورده باشیم:

$$a_{k-1}\geqslant a_{k-2}\geqslant\dots\geqslant a_1\geqslant a_0\geqslant0$$

در این‌صورت، از $A_k\geqslant-1$ نتیجه می‌شود: $2a_k\geqslant3a_{k-1}-a_{k-2}-1$، یا

$$a_k\geqslant a_{k-1}+\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_{k-2})-\frac{1}{2}$$

از آن‌جا، با توجه به‌این که $a_{k-1}-a_{k-2}\geqslant0$ به‌دست می‌آید:

$$a_k\geqslant a_{k-1}-\frac{1}{2}\Longrightarrow a_k\geqslant a_{k-1}$$

(زیرا a_k عددی درست است). بنا بر این

$$a_{n-2}\geqslant a_{n-3}\geqslant a_{n-4}\geqslant\dots\geqslant a_2\geqslant a_1\geqslant a_0\geqslant0$$

از نابرابری مربوط به A_{n-1}، یعنی $-3a_{n-2}+a_{n-3}\geqslant-1$ داریم:

$$۲a_{n-۲} \leqslant ۱-(a_{n-۲}-a_{n-۲})$$

یا $a_{n-۲} \leqslant \frac{۱}{۲}$، یعنی $a_{n-۲} \leqslant ۰$. با توجه‌های به نابرابری مربوط به A_n، یعنی $a_{n-۲} \geqslant -۱$ نتیجه می‌شود: $a_{n-۲}=۰$. ولی‌در‌این‌صورت، همهٔ a_iها وهمهٔ A_iها برابرصفر و چندجمله‌ای مفروض $f(x)$ متحد باصفرمی‌شود.

به‌این ترتیب، اگر چندجمله‌ای $f(x)$ متحد با صفر نباشد، دست‌کم یکی‌از ضریب‌های‌آن، از ۲ ــ تجاوز نمی‌کند.

۱۳۵. تابع $f(x)=\ln(x+۱)-\frac{۲x}{x+۲}$ را درنظر می‌گیریم $(۰<x<+\infty)$ داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲(x+۲)-۲x}{(x+۲)^۲}=\frac{x^۲}{(x+۱)(x+۲)^۲}>۰$$

بنابراین، f تابعی صعودی است و برای هر $x>۰$، نابرابری $f(x)>f(۰)=۰$ برقرار است. به این ترتیب، یکی‌از نابرابری‌ها ثابت شد. نابرابری دوم هم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

۱۳۶. اگرعدد موردنظر را a بگیریم، بنابرشرط مسأله، باید داشته باشیم: $a=p^m q^n$ که، درآن، p و q عددهایی‌اول‌اند. مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد عبارتنداز همهٔ حاصل ضرب دوبه‌دوی عددهای

$$۱، p، p^۲، \ldots، p^m \text{ و } ۱، q، q^۲، \ldots، q^n$$

ودرنتیجه، بنابرشرط دیگرمسأله، باید داشته‌باشیم:

$$(۱+p+p^۲+\cdots+p^m)(۱+q+q^۲+\cdots+q^n)=۲q^m q^n \quad (۱)$$

توجه می‌کنیم‌که یا عامل اول سمت چپ برابری (۱) از $\sqrt{۲}p^m$ و یا عامل دوم از $\sqrt{۲}q^n$ کوچکتر نیست، زیرا درغیراین‌صورت سمت چپ‌برابری از $۲p^m q^n$ کوچکترمی‌شود. برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$۱+p+p^۲+\cdots+p^m \geqslant \sqrt{۲}p^m$$

باتوجه به‌این‌که، درسمت چپ این نابرابری مجموع $(m+۱)$ جمله ازیك تصاعد هندسی قرار دارد، داریم:

$$\frac{p^{m+1}-1}{p-1} \geqslant \sqrt{2}\,p^m \Longrightarrow (\sqrt{2}-1)p^{m+1} \leqslant \sqrt{2}\,p^m - 1 < \sqrt{2}\,p^m$$

از آن جا: $p < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2+\sqrt{2}$، یعنی $p \in \{2, 3\}$.

ابتدا $p=3$ رادرنظرمی‌گیریم. برابری(۱)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(3^{m+1}-1)(1+q+\dots+q^n) = 4\cdot 3^m q^n$$

چون $1+q+\dots+q^n$ بر q و $3^{m+1}-1$ بر ۳ بخش‌پذیر نیستند، از این برابری نتیجه می‌شودکه باید یکی از سه‌دستگاه زیر برقرارباشد:

$$\begin{cases} 3^{m+1}-1 = 4q^n \\ 1+q+\dots+q^n = 3^m \end{cases};\quad \begin{cases} 3^{m+1}-1 = 2q^n \\ 1+q+\dots+q^n = 2\times 3^m \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3^{m+1}-1 = q^n \\ 1+q+\dots+q^n = 4\times 3^m \end{cases}$$

به دستگاه اول می‌پردازیم. ازمعادلهٔ اول آن داریم: $3^m = \frac{4q^n+1}{3}$ که بعداز قراردادن درمعادلهٔ دوم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{4q^n+1}{3} \Longrightarrow q^{n+1} = 4q^n - q - 2 < 4q^n$$

یعنی $q<4$ ویا $q=2$ یا $q=3$. ولی $q \neq p$، پس $q=2$.

اگردستگاه دوم یادستگاه سوم را هم مورد بررسی قراردهیم، به‌همان جواب $q=2$، می‌رسیم. بنابراین، اگر $p=3$، آن وقت $q=2$. به این ترتیب، یکی‌از مقسوم علیه‌های عدد مجهول، باید برابر۲ باشد.

$p=2$ را درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$(1+2+2^2+\dots+2^m)(1+q+\dots+q^n) = 2^{m+1}q^n \quad (2)$$

چون عامل اول سمت چپ، عددی فرد است، وعامل دوم بر q بخش پذیر نیست، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 1+2+\dots+2^m = q^n \\ 1+q+\dots+q^n = 2^{m+1} \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول این دستگاه، به‌دست می‌آید: $۲^{m+۱}=۱+q^n$، که اگر در معادلهٔ دوم قراردهیم:

$$۱+q+\cdots+q^n=۱+q^n$$

که تنها به ازای $n=۱$ برقرار است.

به این ترتیب، عدد مجهول باید به صورت $۲^m q$ باشد که، در آن $q=۲^{m+۱}-۱$ عددی اول است. آزمایش هم نشان می‌دهدکه، چنین عددی باهمهٔ شرطهای مسأله می‌سازد. یکی‌از این عددها $۶=(۲^۲-۱)۲$ و یکی دیگر $۲۸=(۲^۳-۱)۲^۲$ وجواب سوم برابر $(۲^۵-۱)۲^۴$، یعنی ۴۹۶ است. به‌همین ترتیب، می‌توان جواب‌های دیگری به‌دست آورد.

۱۳۷. سمت چپ نابرابری را P می‌نامیم. روشن است که $P=P_۱\times P_۲$، به‌شرطی‌که

$$P_۱=\frac{(۲+۱)(۳+۱)\cdots(n+۱)}{(۲-۱)(۳-۱)\cdots(n-۱)}=\frac{۳\times۴\times\cdots\times(n+۱)}{۱\times۲\times\cdots\times(n-۱)}=$$

$$=\frac{n(n+۱)}{۲};$$

$$P_۲=\frac{۲^۲-۲+۱}{۲^۲+۲+۱}\cdot\frac{۳^۲-۳+۱}{۳^۲+۳+۱}\cdots\frac{n^۲-n+۱}{n^۲+n+۱}=$$

$$=\frac{۳\cdot۷\cdot۱۳\cdot۲۱\cdot۳۱\cdots(n^۲-۳n+۱)(n^۲-n+۱)}{۷\cdot۱۳\cdot۲۱\cdot۳۱\cdots(n^۲-n+۱)(n^۲+n+۱)}=\frac{۳}{n^۲+n+۱}$$

به‌این ترتیب داریم:

$$P=P_۱\cdot P_۲=\frac{۳}{۲}\cdot\frac{n^۲+n}{n^۲+n+۱}<\frac{۳}{۲}$$

۱۳۸. قدرنسبت تصاعد را d ودوبرابر بخش وسط این نابرابری دوگانه را $۲S$ می‌نامیم. داریم:

$$۲S=\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+\cdots+\frac{۱}{a_{۲n-۱}a_{۲n}}+$$

$$+\frac{۱}{a_{۲n-۱}a_{۲n}}<\frac{۱}{a_۰a_۱}+\frac{۱}{a_۱a_۲}+\frac{۱}{a_۲a_۳}+\frac{۱}{a_۳a_۴}+\cdots$$

$$\dots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}=\frac{1}{d}\left(\frac{a_1-a_0}{a_0a_1}+\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{a_{2n-1}-a_{2n-2}}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{2n-2}}-\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=\frac{2n}{a_0a_{2n}}\Longrightarrow s<\frac{n}{a_0a_{2n}}$$

نابرابری سمت راست ثابت شد. نابرابری سمت چپ هم، به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۱۳۹. اگر شعاع کرهٔ مفروض را R بگیریم و فرض کنیم، زاویهٔ بین مولد و صفحهٔ قاعدهٔ مخروطی که بر کره محیط شده‌است، برابر φ باشد، شعاع قاعدهٔ مخروط برابر $R\,cotg\frac{\varphi}{2}$ و ارتفاع مخروط، برابر $R\,tg\varphi\,cotg\frac{\varphi}{2}$ می‌شود. بنابراین، حجم چنین مخروطی، برابراست با

$$V_1=\frac{1}{3}\pi R^3 tg\varphi\, cotg^3\frac{\varphi}{2}$$

و چون حجم کره برابر است با $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$، در نتیجه، برای نسبت حجم مخروط محیطی به حجم کره، خواهیم داشت:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\,cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi$$

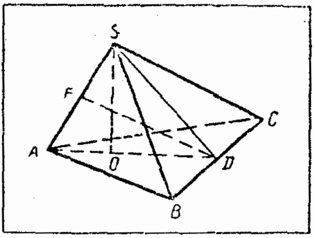
برای این‌که، مخروط محیطی دارای حداقل حجم باشد، باید $cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi$ به‌کمترین مقدارممکن خود برسد داریم:

$$cotg^3\frac{\varphi}{2}tg\varphi=\frac{cotg^3\frac{\varphi}{2}\cdot 2tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{2}{\left(1-tg^2\frac{\varphi}{2}\right)tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

باید حاصل ضرب دوعامل مثبت $\left(۱-tg^۲\frac{\varphi}{۲}\right)$ و $tg^۲\frac{\varphi}{۲}$، که مجموع ثابتی دارند، حداکثر مقدار ممکن باشد، یعنی داشته باشیم: $۱-tg^۲\frac{\varphi}{۲}=tg^۲\frac{\varphi}{۲}$ یا $tg^۲\frac{\varphi}{۲}=\frac{۱}{۲}$ که، در این صورت

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۱}{۴}cotg^۳\frac{\varphi}{۲}tg\varphi=\frac{۲}{۴\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲\Longrightarrow V_۱=۲V_۲$$

کمترین حجم برای مخروط محیط برکرهٔ مفروض، برابراست با دو برابر حجم کره، و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم: $tg^۲\frac{\varphi}{۲}=\frac{۱}{۲}$ یا $\varphi=\arccos\frac{۱}{۳}$.



شکل ۲۵

۱۴۰. $[SO]$ را ارتفاع هرم و $[AD]$ را عمود بر $[BC]$ می‌گیریم (شکل ۲۵). در این صورت

$$|BD|\cdot|AD|=۱ \text{ و } O\in[AD]$$

اگر فرض کنیم: $|BC|=|AS|=۲x$، آن وقت $|BD|=x$ و $|AD|=|SD|=\frac{۱}{x}$.

معادلهٔ $|AD|\cdot|SO|=|AS|\cdot|DF|$ را تشکیل می‌دهیم که، در آن $[DF]$ بر $[AS]$ عمود است. از این معادله نتیجه می‌شود:

$$|SO|=۲x^۲\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-x^۲}=۲x\sqrt{۱-x^۴}$$

عبارت $x\sqrt{۱-x^۴}$، هم‌زمان با عبارت $f(x)=x^۲(۱-x^۴)$ به حداکثر مقدار

خود می‌رسد. ولی تابع $f(x)=(x^{4})^{\frac{1}{2}}(1-x^{4})$، باتوجه به ثابت بودن مجموع x^{4} و $1-x^{4}$، وقتی به بیشترین مقدارخود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$\frac{x^{4}}{\frac{1}{2}}=1-x^{4} \Longrightarrow x^{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

[می‌توانستیم ازمشتق تابع $f(x)$ استفاده کنیم. $f'(x)=2x-6x^{5}$ به‌ازای $x=0$ و $x^{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$، برابرصفرمی‌شود.] به‌این‌ترتیب،ارتفاع هرم، وهمزمان باآن، حجم‌هرم، به‌ازای $x^{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد. از طرف دیگر، داریم:

$$tg\,\widehat{ABC}=\frac{1}{x^{2}}=\sqrt{3} \Longrightarrow \widehat{ABC}=60^{\circ}$$

یعنی، مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است.

۱۴۱. حجم چنین هرمی برابر است با $V=\frac{\sqrt{3}\,tg\alpha}{(4+tg^{2}\alpha)^{\frac{3}{2}}}$.

درواقع، اگرطول ضلع قاعدهٔ هرم رابرابر $2x$ بگیریم وطول ارتفاع SO را یکبار ازرابطهٔ فیثاغورث درمثلث SDO ($[SD]\perp[AC]$) ویکبار درهمان مثلث، برحسب $tg\alpha$ به‌دست‌آوریم، طول ضلع مثلث قاعده، برابر $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+tg^{2}\alpha}}$ می‌شود. بنابراین، مساحت قاعدهٔ هرم، برابر $\frac{3\sqrt{3}}{4+tg^{2}\alpha}$ و ارتفاع هرم، برابر $\frac{tg\alpha}{\sqrt{4+tg^{2}\alpha}}$ و، در نتیجه، حجم آن، برابر $\frac{\sqrt{3}\,tg\alpha}{\sqrt{(4+tg^{2}\alpha)^{3}}}$ است.

به سادگی روشن می‌شود که، به ازای $\alpha\to 0$ و $\alpha\to\frac{\pi}{2}$، مقدار حجم به‌سمت صفرمیل می‌کند، فرض می‌کنیم:

$$tg^{2}\alpha=x \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x}{(4+x)^{3}}$$

از آن جا $f'(x)=\frac{۴-۲x}{(۴+x)^۴}$ که به‌ازای $x=۲$ برابر صفرمی‌شود، یعنی برای این‌که هرم مفروض، دارای حجمی حداکثر باشد، باید داشته باشیم:

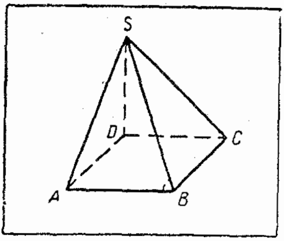
$$tg^۲\alpha=۲ \Longrightarrow tg\alpha=\sqrt{۲} \Longrightarrow \alpha=\operatorname{arc} tg\sqrt{۲}$$

۱۴۲. طبق فرض، $[SD]$ ارتفاع هرم است (شکل ۲۱) و همهٔ وجه‌های جانبی، مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌اند (چرا؟). چون $|SB|=\sqrt{۲}$ و

$$|AB|=|DC|<|SC|=۱$$

پس

$$cos\alpha=|AB|:|SB|<۱:\sqrt{۲}$$



شکل ۲۱

و $\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$. حجم هرم چنین می‌شود:

$$V=\frac{\sqrt{۲}}{۳}cos\alpha\sqrt{۱-۲cos^۲\alpha}$$

حجم هرم،هم‌زمان با $۲cos^۲\alpha(۱-۲cos^۲\alpha)$ به‌حداکثرمقدار خود می‌رسد و چون مجموع دومقدار مثبت $۲cos^۲\alpha$ و $۱-۲cos^۲\alpha$، ثابت است، حداکثر حاصل ضرب آن‌ها، وقتی است که باهم برابر باشند:

$$۲cos^۲\alpha=۱-۲cos^۲\alpha \Longrightarrow ۴cos^۲\alpha=۱ \Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{۳}$$

که به‌ازای آن داریم: $V=\frac{۱}{۶}$.

یادداشت. مسأله را می‌توانستیم، بدون محاسبهٔ حجم هرم حل کنیم. درواقع

$$V=\frac{۱}{۳}|BC|\cdot|DC|\cdot|SD|=\frac{۱}{۳}|DC|\cdot|SD|$$

حاصل ضرب $|DC|\cdot|SD|$، عبارت است از دوبرابر مساحت مثلث SDC و چون وتر این مثلث، برابر واحد است، مساحت آن به ازای

$|SD|=|DC|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ به‌حداکثرخود‌می‌رسد. دراین حالت

$$\cos\alpha=|AB|:|SB|=۱:۲ \text{ و } \alpha=\frac{\pi}{۳}$$

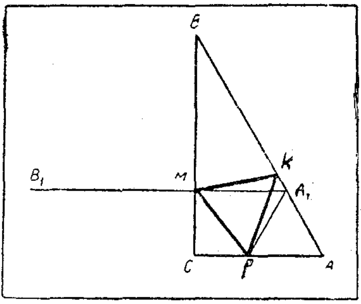
۱۴۳. حجم هرم به‌سادگی به‌دست می‌آید (خودتان پیدا کنید):

$$V=\frac{۴}{۳}\sin^{۲}\alpha\cos^{۵}\alpha=\frac{۴}{۳}(\sin^{۲}\alpha)^{۱}(\cos^{۲})^{\frac{۵}{۲}}$$

چون مجموع دومقدارمثبت $\sin^{۲}\alpha$ و $\cos^{۲}\alpha$، برابر واحد و ثـابت است، پس حاصل ضرب توان‌هایی از آن‌ها، وقتی به حداکثر خود می‌رسد‌که، ایـن دو مقدار، باتوان‌هایشان متناسب باشند:

$$\frac{\sin^{۲}\alpha}{۱}=\frac{\cos^{۲}\alpha}{\frac{۵}{۲}}\Longrightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۵}{۷}\Longrightarrow\alpha=\arccos\sqrt{\frac{۵}{۷}}$$

۱۴۴. فـرض کنید، مثلث متساوی‌الاضلاع PMK را، آن‌طور که در شکل ۲۲ می‌بینید، در مثلث ABC محاط کرده باشیم $|AC|=۱$ و $|CP|=x$ می‌گیریم. نقطـهٔ M را می‌توان ازنقطهٔ K، ضمن دوران به‌اندازهٔ ۶۰ درجه دورنقطهٔ P بـه دست آورد. چون M روی ضلـع BC و K روی ضلـع AB است،



شکل ۲۲

بنابراین M را می‌توان، به عنوان نقطهٔ برخـورد پاره‌خط‌های راست BC و $A_۱B_۱$ به‌دست آورد‌که، در آن، $[B_۱A_۱]$ عبارت است از نتیجهٔ دوران $[BA]$ دور P و به‌اندازهٔ ۶۰ درجه. چون $\hat{A}=۶۰^\circ$، پس $A_۱\in[AB]$؛ مثلث $PAA_۱$ متساوی‌الاضلاع است و $(AC)||(A_۱B_۱)$. بنابراین $|MC|=\frac{(۱-x)\sqrt{۳}}{۲}$

وطول ضلع مثلث محاطی، چنین می‌شود:

$$|PM|=\sqrt{x^۲+(۱-x)^۲\cdot\frac{۳}{۴}}$$

تابع $f(x)=x^۲+\frac{۳}{۴}(۱-x)^۲=\frac{۱}{۴}(۷x^۲-۶x+۳)$، به‌ازای $x=\frac{۳}{۷}$، به حداقل مقدار خود می‌رسد، به‌این ترتیب اگر $|CP|:|PA|=۳:۴$، آن وقت، مثلث PMN، مثلث مورد نظر است.

۱۴۵. با توجه به‌فرض وهمچنین نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی دوعدد مثبت داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(ab)=\log_{\frac{۱}{۲}}a+\log_{\frac{۱}{۲}}b\geqslant ۲\sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}}a\cdot\log_{\frac{۱}{۲}}b}=۲$$

بنابراین $ab\leqslant\frac{۱}{۴}$؛ درضمن، علامت برابری برای $a=b=\frac{۱}{۲}$ پیش‌می‌آید:

ab حداقل مقدار ندارد، زیرا شرط مسأله برای $a=\frac{۱}{۲^n}$ و $b=\frac{۱}{\sqrt[n]{۲}}$ برقرار است‌که، دراین‌صورت $ab=۲^{-n-\frac{۱}{n}}$، برای $n\to\infty$، به سمت صفر میل می‌کند، یعنی می‌تواند هرعدد مثبت به دلخواه‌کوچکی باشد.

۱۴۶. اگر برابری‌های فرض را به‌صورت دستگاه زیر بنویسیم:

$$\begin{cases}y+z=۲-x\\ y\cdot z=۱-x(۲-x)\end{cases}$$

معلوم می‌شودکه y و z، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیرهستند:

$$t^۲-(۲-x)t+۱-x(۲-x)=۰$$

این معادله، باید ریشه‌های حقیقی داشته باشد وبنابراین

$$(۲-x)^۲-۴+۴x(۲-x)\geqslant ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\frac{۴}{۳} \geqslant x \geqslant ۰$؛ درنتیجه، باتوجه به تقارن، y و z هم، درهمین شرط صدق می‌کنند.

۱۴۷. به‌ترتیب داریم:

$$y^۲=\left(\frac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^۲=\frac{a^۲}{\cos^۲\alpha}+b^۲tg^۲\alpha-\frac{-۲ab\sin\alpha}{\cos^۲\alpha}=$$

$$=\left(\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^۲+(a^۲-b^۲)(۱+tg^۲\alpha)-(a^۲-b^۲)tg^۲\alpha=$$

$$=\left(\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^۲+a^۲-b^۲\geqslant a^۲-b^۲$$

یعنی $y\geqslant\sqrt{a^۲-b^۲}$؛ y وقتی به‌حداقل خود، یعنی $\sqrt{a^۲-b^۲}$ می‌رسد که داشته باشیم: $b-a\sin\alpha=۰$، یعنی به ازای $\sin\alpha=\frac{b}{a}$.

یادداشت. برای حل بسیاری از مسأله‌های مربوط به‌حداکثر وحداقل، می‌توان ازروش ضریب‌های نامعین و به‌طریق زیر استفاده کرد: مجذور تابع مورد مطالعه را، به یاری ضریب کمکی، به صورت مجموع جبری دوتابع می‌نویسیم، به‌نحوی که یکی‌ازآن‌ها مجذورکامل ودومی تابعی ساده‌ترازتابع مفروض باشد (که درحالت خاص، تابع دوم ممکن است برابر مقدار ثابت شود). مقدار ضریب را طوری انتخاب می‌کنیم که هردو تابع، به ازای یك مقدار متغیر به‌اکسترمم خود برسند. مثلا، برای حل مسألهٔ **۱۴۷**، می‌توانستیم بنویسیم:

$$\left(\frac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^۲=\left(\frac{\frac{a}{\lambda}-\lambda b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^۲+$$

$$+\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\left[a^۲-\frac{a^۲}{\lambda^۲}+b^۲(۱-\lambda^۲)\sin^۲\alpha\right]$$

که درآن، جملهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\frac{a^2}{b^2\lambda^2}-\sin^2\alpha\right)\frac{(\lambda^2-1)b^2}{\cos^2\alpha}$$

$\frac{a}{b}=\lambda$ می‌گیریم، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\frac{a^2}{b^2\lambda^2}-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a-b\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\left(\frac{b-a\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+a^2-b^2\geqslant a^2-b^2$$

علامت برابری، برای $b-a\sin\alpha=0$ ، یعنی $\sin\alpha=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

۱۴۸. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، برای a و b مثبت و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، حداکثرمقدار تابع $y=a\sin\alpha+b\cos\alpha$ برابراست با $\sqrt{a^2+b^2}$ زیرا با فرض $tg\varphi=\frac{a}{b}$ به‌ترتیب داریم:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=b(tg\varphi\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{b}{\cos\varphi}\cos(\alpha-\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

(با فرض $tg\varphi=\frac{a}{b}$، به دست می‌آید: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$)،علامت برابری برای $\alpha=\varphi$.

اکنون، باروشی که دریادداشت مسألهٔ قبل‌از آن صحبت‌کردیم، به حل مسألهٔ خود می‌پردازیم. داریم:

$$y^2=-\left(a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\frac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha}\right)^2+a^2(1+\lambda^2)\sin\alpha+$$

$$+\frac{b^{2}}{\lambda^{2}}(1+\lambda^{2})\cos\alpha$$

حداکثر تابع اول برابر صفر است، یعنی وقتی‌که

$$a\lambda\sqrt{\sin\alpha}-\frac{b}{\lambda}\sqrt{\cos\alpha}=0 \Longrightarrow tg\alpha=\frac{b^{2}}{a^{2}\lambda^{4}}$$

و تابع دوم، با توجه به مقداری‌که برای حداکثر $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ به دست آوردیم، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:
$tg\alpha=\frac{a^{2}\lambda^{2}}{b^{2}}$.

λ را طوری پیدا می‌کنیم که، حداکثر دو تابع، به ازای یك مقدار α به دست آید. برای این منظور، باید داشته باشیم:

$$\frac{b^{2}}{a^{2}\lambda^{4}}=\frac{a^{2}\lambda^{2}}{b^{2}} \Longrightarrow \lambda=\sqrt[3]{\frac{b^{2}}{a^{2}}} \text{ و } tg\alpha=\sqrt[3]{\frac{a^{2}}{b^{2}}}$$

و به‌این ترتیب، سرانجام خواهیم داشت:

$$a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}\leqslant\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

یادداشت. روشن است که ماکزیمم عبارت $a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}$ را به کمك مشتق هم می‌توان به‌دست آورد:

$$f(\alpha)=a\sqrt{\sin\alpha}+b\sqrt{\cos\alpha}\ ,$$

$$f'(\alpha)=\frac{a\sqrt{\cos^{3}\alpha}-b\sqrt{\sin^{3}\alpha}}{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

وجواب $f'(\alpha)=0$ عبارت است از $tg\alpha=\sqrt[3]{\frac{a^{2}}{b^{2}}}$.

۱۴۹. روشن است که نقطهٔ (x, y) که در آن $x>2$ یا $y>2$، در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند و، بنابراین، نقطه‌هایی در این معادله صدق

می‌کنندکه، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$۱\leqslant x\leqslant ۲ \quad ، \quad ۱\leqslant y\leqslant ۲$$

به‌این ترتیب $f(x،y)=\frac{y}{x}\geqslant\frac{۱}{۲}$. علاوه براین، نقطهٔ $(۲،۱)$ با شرط‌های مسأله سازگار است، یعنی حداقل مقدار $\frac{y}{x}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۵۰. با توجه به‌شرط $x^۴+y^۴=۱$ داریم $|x|\leqslant ۱$ و $|y|\leqslant ۱$ وبنابراین

$$x^۹\leqslant x^۴ \quad \text{و} \quad y^۹\leqslant y^۴$$

درنتیجه $x^۹+y^۹\leqslant ۱$. درضمن، علامت‌برابری وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$x^۹=x^۴ \quad \text{و} \quad y^۹=y^۴$$

وروشن است‌که این شرط، برای $x=۱$، $y=۰$ یا $x=۰$، $y=۱$ برقرار است.

۱۵۱. با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی می‌توان نوشت:

$$y=n\frac{ax^m}{n}+m\,\frac{b}{mx^n}\geqslant(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n\left(\frac{b}{mx^n}\right)^m}=$$

$$=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^nb^m}{m^mn^n}} \qquad (۱)$$

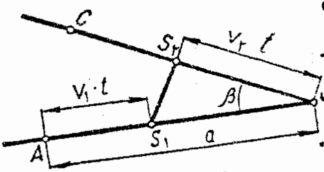
علامت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $\frac{ax^m}{n}=\frac{b}{mx^n}$، یعنی‌برای $x=\sqrt[m+n]{\frac{nb}{ma}}$. به‌این ترتیب، حداقل مقدارعبارت مفروض، برابرمقدارسمت راست (۱) است.

۱۵۲. ازنابرابری روشن $(a_i-b_i)^۲\geqslant ۰$ به‌دست می‌آید:

$$a_i^2-2a_ib_i+b_i^2\geqslant 0 \Longrightarrow \frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2a_i-b_i$$

$(i=1,2,\dots,n)$. از آن‌جا

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=2\times 1-1=1$$



شکل ۲۳

۱۵۳. تابع مورد بررسی عبارت‌است از طول پاره خط‌است S_1S_2 که، در آن، S_1 و S_2، به‌ترتیب موضع متحرک‌ها، بعد از گذشت زمان t روی مسیرهای مربوط به‌خود می‌باشند. درمثلث S_1S_2B داریم:

$$|S_1S_2|^2=|S_1B|^2+|S_2B|^2-$$
$$-2|S_1B|\cdot|S_2B|\cdot\cos\beta.(0<\beta<\frac{\pi}{2})$$

با توجه به‌برابری‌های $|S_2B|=v_2t$ و $|AS_1|=v_1t$، خواهیم داشت:

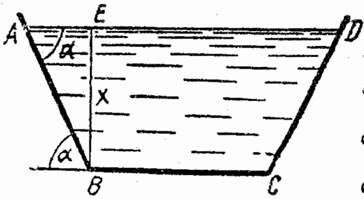
$$f(t)=|S_1S_2|^2=(a-v_1t)^2+(v_2t)^2-2(a-v_1t)(v_2t)\cdot\cos\beta$$

$f(t)$ نسبت به t ازدرجه دوم با ضریب درجهٔ دوم

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta$$

است که مقداری مثبت است $(v_1>0 ،v_2>0 ،\cos\beta>0)$. بنابراین $f(t)$ دارای حداقلی است که به‌ازای جواب مشتق آن به‌دست می‌آید:

$$f'(t)=0 \Longrightarrow t=\frac{a(v_2\cos\beta+v_1)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\beta}$$



شکل ۲۴

۱۵۴. باید بخشی راکه زیر آب است ، یعنی خط شکسته $|AB|+|BC|+|CD|$ را به‌عنوان تابع مورد بررسی‌درنظر بگیریم. عمق کانال را x می‌نامیم. روشن است‌که

$|AB|=\frac{x}{\sin\alpha}$ و به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$|BC|=\frac{S}{x}-\frac{x}{tg\alpha}$$

به‌این ترتیب، تابعی‌که باید مورد بررسی قرارگیرد، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{۲x}{\sin\alpha}+\frac{S}{x}-\frac{x}{tg\alpha},$$

$$f'(x)=\frac{۲}{\sin\alpha}-\frac{۱}{tg\alpha}-\frac{S}{x^{۲}}$$

بنابراین، برای $f'(x)=۰$ به‌دست‌می‌آید: $x=\sqrt{\frac{S\cdot\sin\alpha}{۲-\cos\alpha}}$. و $f(x)$ درهمین نقطه، به‌حداقل خود می‌رسد (چرا؟)

۱۵۵. چون $\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}>۰$ و $\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}>۰$، با توجه به‌نابرابری روشن

$$\frac{۱}{۲}(a^n+b^n)\geqslant\left(\frac{a+b}{۲}\right)^n\ ,\qquad(a>۰\ ,\ b>۰)$$

می‌توان به‌ترتیب نوشت:

$$f(x)=\left(\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}\right)^n+\left(\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}\right)^n\geqslant$$

$$\geqslant\frac{۲\left(\frac{۱+\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}+\frac{۱+\cos^{۲}x}{\cos^{۲}x}\right)^n}{۲^n}=\frac{۱}{۲^{n-۱}}\left(۲+\frac{۱}{\sin^{۲}x}+\frac{۱}{\cos^{۲}x}\right)^n=$$

$$=۲^{۱-n}\left(۲+\frac{۴}{\sin^{۲}۲x}\right)^n\geqslant۲^{۱-n}(۲+۴)^n=۲^{۱-n}\cdot۶^n=۲\times۳^n$$

کمترین مقدار $f(x)$ برابر است با ۲×۳^n که به ازای $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ به‌دست‌می‌آید.

۱۵۶. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \qquad (1)$$

اگر جمله‌های شامل a_1، a_2، ...، a_k را ازسمت راست به‌سمت چپ ببریم، نابرابری (۱) چنین می‌شود:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)<\frac{a_{k+1}}{k+1}$$

یا $\frac{ka_{k+1}}{k}=a_{k+1}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ که درستی آن روشن است.

بنابراین، واسطهٔ حسابی

$$S_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$$

از k جملهٔ اول دنبالهٔ صعودی (a_n)، تابعی است صعودی نسبت به k. بنابراین، برای $k<n$ داریم: $S_k<S_n$. و این، همان نابرابری سمت چپ مورد نظر است.

برای اثبات نابرابری دوم، دنبالهٔ صعودی

$$-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_1$$

را درنظر می‌گیریم. بنابرآن چه ثابت کردیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{(-a_n)+(-a_{n-1})+\cdots+(-a_{k+1})}{n-k}<$$

$$<\frac{(-a_n)+(-a_{n-1})+\cdots+(-a_1)}{n}$$

که ازآن‌جا، درستی نابرابری دوم نتیجه می‌شود.

۱۵۷. چون عبارت‌های فرض، نسبت به x و y و z متقارن‌اند، بدون این‌که به‌کلی بودن‌مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان‌فرض کرد: $x\leqslant y\leqslant z$. دراین صورت، نابرابری مورد نظر (که باید ثابت شود) به‌این صورت در می‌آید:

$$z-x\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

که بعد ازمجذورکردن دوطرف وتبدیل عبارت سمت راست، به‌این صورت در می‌آید:

$$9(z-x)^2\leqslant 8[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

ویا $$(z-x)^2\leqslant 8[(x-y)^2+(y-z)^2]\quad (*)$$

روشن است که برای هردوعدد حقیقی m و n داریم:

$$2(m^2+n^2)\geqslant(m+n)^2$$

اگرفرض‌کنیم: $m=x-y$ و $n=y-z$، به‌دست می‌آید:

$$(z-x)^2\leqslant 2[(x-y)^2+(y-z)^2]$$

که از آن‌جا، نسابرابری مطلوب نتیجه می‌شود. علامت برابری $x=y=z$ است.

۱۵۸. چون $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ و $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\sin\frac{\alpha}{2}>0$

با ساده‌کردن دوطرف نابرابری به $2\sin\frac{\alpha}{2}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}<1+\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

چون $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}<1$ و $\cos\frac{\alpha}{2}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$، نابرابری اخیر درست است.

۱۵۹. اگرعدد ۱ را به دوطرف نابرابری مفروض اضافه‌کنیم، به‌این صورت‌درمی‌آید:

$$\frac{2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)$$

و یا

$$(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)^2 \geqslant 4\sin^2\alpha\,\sin^2\beta \Longrightarrow (\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^2 \geqslant 0$$

۱۶۰. به‌ترتیب داریم:

$$y=(x-2)(x-5)(x-1)(x-6)+9=$$
$$=(x^2-7x+10)(x^2-7x+6)+9=(x^2-7x)^2$$
$$+16(x^2-7x)+69=(x^2-7x+8)^2+5\geqslant 5$$

حداقل مقدار y برابر است با ۵ که به ازای $x=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{7})$ بـه دست می‌آید.

۱۶۱. با توجه به‌فرض $x\neq\frac{\pi}{6}$ و $x\neq 0$ داریم:

$$y=\frac{3\,tg\,x-tg^3x}{(1-3tg^2x)tg^3x}=\frac{3-tg^2x}{(1-3tg^2x)tg^2x} \qquad \left(x\neq\frac{\pi}{6}\right)$$

که با فرض $tg^2x=z$، به‌این معادله می‌رسیم:

$$3yz^2-(y+1)z+3=0$$

این معادله، وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که داشته باشیم:

$$(y+1)^2-36y\geqslant 0 \Longrightarrow y\geqslant 17+12\sqrt{2} \quad \text{یا} \quad y\leqslant 17-12\sqrt{2}$$

بنابراین $y_{max}=17-12\sqrt{2}$ که به‌ازای $z=3+2\sqrt{2}$ یا $x=\frac{3\pi}{8}$ به دست مـی‌آیـد؛ و $y_{min}=17+12\sqrt{2}$ (بـه ازای $z=3-2\sqrt{2}$ یـا $x=\frac{\pi}{8}$).

یادداشت. توجه‌کنید، دراین مسأله، با نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیمم در روی نمودارتابع، یعنی با ماکزیمم ومی‌نیمم نسبی تابع سروکار داشتیم، نه با حداکثر وحداقل مقدارآن. روشن است، اگر $x\to\frac{\pi^-}{6}$، آن‌وقت $y\to+\infty$

واگر $x \to \frac{\pi^+}{6}$، آن وقت $y \to -\infty$؛ درواقع، نمودار تابع، در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ دارای خط راست مجانب $\frac{\pi}{6}$ است.

۱۶۲. ۱) فرض می‌کنیم: $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = z$. داریم:

$$z = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos^2\gamma + \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma)$$

از آن‌جا

$$\cos^2\gamma - \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma + 2z = 0$$

این‌معادله، باید نسبت به‌مجهول $\cos\gamma$، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، یعنی

$$\cos^2(\alpha-\beta) - 8z \geqslant 0 \Longrightarrow z \leqslant \frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta) \leqslant \frac{1}{8}$$

۲) با استفاده از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی و، سپس، نابرابری همین مسأله دربخش ۱) داریم:

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 6$$

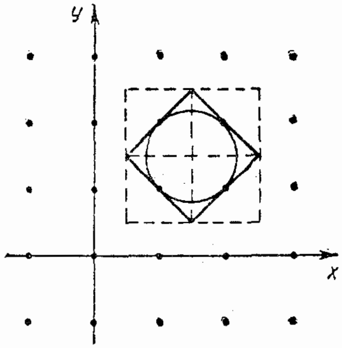
۳) به‌ترتیب داریم:

$$tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{1-\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} - 3 \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}} - 3 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}} - 3 = 9$$

(از نابرابری $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$ استفاده کردیم).



شکل ۲۵

۱۶۳. درصورت مسأله، دراین باره سکوت شده است که، آیا نقطه‌های با مختصات درست می‌توانند روی محیط مربع قرارگیرند یا نه! اگر این نقطه‌ها نتوانند روی محیط مربع باشند، آن وقت نمی‌توان مربعی با مساحت حداکثر پیدا کرد: اگرمربعی را درنظر بگیریم که دردرون آن وروی محیط آن، نقطه‌ای از نقطه‌های نشان‌دار، واقع نباشد، همیشه می‌توان مربع دیگری درنظر گرفت که، ولو به‌مقداری اندك، از آن بزرگتر و، درنتیجه، مساحتی بیشتر داشته باشد.

بنابراین به‌حالتی می‌پردازیم که، مربع مجهول بتواند، نقطه‌های با مختصات درست را، روی محیط خود داشته باشد. قبل ازحل، یادآوری می‌کنیم، مربعی که درشکل ۲۵ نشان داده شده است، مساحتی برابر ۲ دارد و دایرهٔ محاطی این مربع، به‌شعاع $\frac{d}{2}$ است (d، طول ضلع مربع). به‌این ترتیب، حداکثرمساحت مربع، از ۲ کمتر نیست.

ازطرف دیگر، اگرمربعی با مساحت بیشتر از ۲ وجود داشته باشد، به معنای آن است که باید دایره‌ای پیدا شود که دردرون خود شامل نقطه‌های نشان‌دار نباشد وفاصلهٔ مرکز آن ازهمهٔ نقطه‌های نشان‌دار، بزرگتر از $\frac{d}{2}$ باشد، که ممکن نیست.

۱۶۴. ۱) به‌ازای $n=5$ داریم: $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

اکنون فرض می‌کنیم، برای $n=k+4$ $(k \in \mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$2^{k+4} > (k+4)^2 = k^2 + 8k + 16$$

دراین صورت داریم:

$$۲^{k+۵}=۲^{k+۴}\cdot ۲>(k^۲+۸k+۱۶)\cdot ۲=۲k^۲+۱۶k+۳۲>$$
$$>k^۲+۱۰k+۲۵=(k+۵)^۲$$

۲) به‌ازای $n=۱۰$ داریم: $۲^{۱۰}=۱۰۲۴>۱۰۰۰=۱۰^۳$.
فرض می‌کنیم، به‌ازای $n=k+۹$ $(k\in\mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$۲^{k+۹}>(k+۹)^۳=k^۳+۲۷k^۲+۲۴۳k+۷۲۹$$

دراین صورت داریم:

$$۲^{k+۱۰}=۲^{k+۹}\cdot ۲>(k^۳+۲۷k^۲+۲۴۳k+۷۲۹)\cdot ۲=$$
$$=۲k^۳+۵۴k^۲+۴۸۶k+۱۴۵۸>k^۳+۳۰k^۲+۳۰۰k+$$
$$+۱۰۰۰=(k+۱۰)^۳$$

۳) به‌ازای $n=۲$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}}>\frac{۱+۱}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

اکنون فرض می‌کنیم، به‌ازای $n=k+۱$ $(k\in\mathbf{N})$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{k+۱}}>\sqrt{k+۱}$$

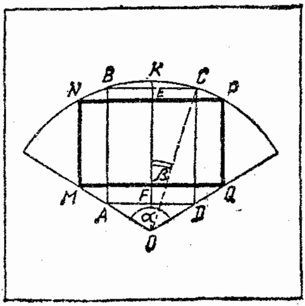
دراین صورت خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{k+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{k+۲}}>\sqrt{k+۱}+\frac{۱}{\sqrt{k+۲}}=$$
$$=\frac{\sqrt{k+۱}\cdot\sqrt{k+۲}+۱}{\sqrt{k+۲}}>\frac{\sqrt{k+۱}\cdot\sqrt{k+۱}+۱}{\sqrt{k+۲}}=$$
$$=\frac{k+۲}{\sqrt{k+۲}}=\sqrt{k+۲}$$

۱۶۵. حالت اول: $0^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

$ABCD$ را مستطیل محاط در قطاع می‌گیریم (شکل ۲۶). زاویهٔ بین OK ـ نیمساز زاویهٔ مرکزی قطاع ـ و شعاع OC را β می‌نامیم:

$$0^\circ < \beta < \frac{1}{2}\alpha \leqslant 90^\circ$$



شکل ۲۶

اگر مساحت مستطیل $ABCD$ را S بنامیم، داریم:

$$S = |BC| \cdot |CD| = 2|EC| \cdot |EF| = 2R\sin\beta \cdot |EF| =$$
$$= 2R\sin\beta\,(|OE| - |OF|) = 2R\sin\beta\,(R\cos\beta - |OF|)$$

ولی درمثلث OFD داریم:

$$|OF| = |FD| \cdot \cot g\frac{\alpha}{2} = |EC| \cdot \cot g\frac{\alpha}{2} = R\sin\beta \cdot \cot g\frac{\alpha}{2}$$

بنابراین، برای مساحت مستطیل $ABCD$ به‌دست می‌آید:

$$S = 2R\left(\sin\beta \cdot R \cdot \cos\beta - R\sin^2\beta\cot g\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= R^2\left(\sin 2\beta - 2\sin^2\beta\cot g\frac{\alpha}{2}\right)$$

S را به‌عنوان تابعی از β درنظرمی‌گیریم و نقطه‌های بحرانی‌آن را جست‌وجو می‌کنیم:

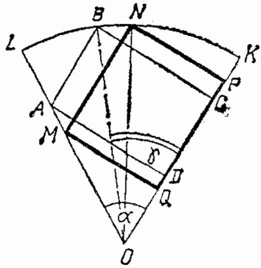
$$S'(\beta) = R^2\left(2\cos 2\beta - 2\sin 2\beta\cot g\frac{\alpha}{2}\right)$$

اگر $S'(\beta) = 0$، آن وقت $\cot g\,2\beta = \cot g\frac{\alpha}{2}$، یعنی $\beta = \frac{\alpha}{4}$. به سادگی می‌توان روشن کرد که $S(\beta)$ دراین نقطه، به‌حداکثرمقدارخود می‌رسد:

$$S_1 = \max_{[0^\circ,\frac{\alpha}{2}]} S(\beta) = S\left(\frac{\alpha}{4}\right) = R^2 tg\,\frac{\alpha}{4} \qquad (1)$$

به‌این‌ترتیب، بیشترین مساحت را مستطیلی دارد که دورأس آن بر کمان قطاع، به نحوی واقع باشد که همراه با زاویهٔ مرکزی قطاع، کمان را بـه ۴ بخش برابـر تقسیم کرده بـاشند (مستطیل $MNPQ$ را روی شکل ۲۶ ببینید). این نتیجه بـه ما امکان می‌دهد که مستطیل مورد نظر را، به‌کمك خط‌کش و پرگار رسم کنیم.

حـالت دوم: $90^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.



شکل ۲۷

$ABCD$ را مستطیل محاط در قطاع می‌گیریم (شکل ۲۷). زاویـهٔ بین شعاع‌های OB و OK را γ می‌نامیم ($0^\circ < \gamma \leqslant 90^\circ$). دراین‌صورت، برای مساحت مستطیل داریم:

$$S = S(\gamma) = |BC| \cdot |AB| = R\sin\gamma \cdot |AB|$$

ولی $\widehat{AOB} = \alpha - \gamma$، $\widehat{BAO} = 180^\circ - \alpha$؛ بنابراین درمثلث ABO

$$\frac{|AB|}{\sin(\alpha - \gamma)} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} \Longrightarrow |AB| = \frac{R\sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha}$$

به‌این ترتیب: $S(\gamma) = \dfrac{R^2 \sin\gamma \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha}$.

ابتدا نقطه‌های بحرانی $S(\gamma)$ را در بازهٔ $[0^\circ, \alpha]$ پیدا می‌کنیم:

$$S'(\gamma) = \frac{R^2}{\sin\alpha}[\cos\gamma\sin(\alpha - \gamma) - \sin\gamma\cos(\alpha - \gamma)] =$$

$$= \frac{R^2}{\sin\alpha}\sin(\alpha - 2\gamma)$$

که به ازای $\sin(\alpha - 2\gamma) = 0$ برابرصفرمی‌شود؛ یعنی $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$. بـه سادگی ثابت می‌شود که مقدار $S(\gamma)$ به ازای $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$، حداکثرمقدارممکن است:

$$S_2 = \max_{[0^\circ, \alpha]} S(\gamma) = S\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} R^2 tg\,\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

نتیجهٔ این حالت هم جالب است: از مستطیل‌های محاط درقطاع (به طریقی‌که بررسی‌کردیم)، حداکثرمساحت متعلق به مستطیلی است‌که رأسی‌در وسط‌کمان قطاع داشته باشد (مستطیل $MNPQ$ را در شکل ۲۷ ببینید). در این حالت هم، می‌توان مستطیل مورد نظر را، به‌کمك خط‌کش و پرگار رسم کرد.

هنوز مطلبی مانده است‌که باید روشن‌کنیم: درحالتی‌که زاویهٔ مرکزی قطاع دربازهٔ $[0^\circ, 90^\circ]$ است،‌کدامیك ازدوحالت مستطیل محاطی، حداکثر مساحت را می‌دهد؟ باید مقدارهای S_1 و S_2 را در برابری (۱) و (۲) با هم مقایسه‌کنیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2 tg\,\frac{\alpha}{4}}{\frac{1}{2} R^2 tg\,\frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{4} : \frac{tg\frac{\alpha}{4}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{4}} = 1 - tg^2\frac{\alpha}{4} < 1$$

یعنی $S_1 < S_2$. به‌این ترتیب، سرانجام می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری‌کرد:

اگر برای زاویهٔ مرکزی قطاع داشته باشیم: $0 < \alpha \leqslant 90^\circ$، آن وقت حداکثرمساحت برای مستطیلی است‌که یك ضلع آن روی شعاع دایره ویك رأس آن در وسط کمان قطاع باشد؛ در حالت $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$، حداکثر مساحت، متعلق به مستطیلی است که ضلع آن موازی با وتر قطاع باشد و رأس‌های آن، دونیمهٔ کمان قطاع را نصف کرده باشند.

۱۶۶. c را کوچکترین ضلع می‌گیریم (می‌توانستیم، به جای c، یکی از دوضلع دیگر، یعنی a یا b راکوچکترین ضلع بگیریم؛ روش‌کار تفاوتی نداشت). فرض می‌کنیم:

$$a - c = \alpha, \ b - c = \beta \ (\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0)$$

مقدار عبارت سمت چپ نابرابری فرض را A می‌نامیم، دراین‌صورت می‌توانیم عبارت A را، بر حسب c و α و β بنویسیم و، سپس، نسبت به c

منظم کنیم:

$$A=(c+\alpha)^{2}(c+\beta)(\alpha-\beta)+(c+\beta)^{2}c\beta+c^{2}(c+\alpha)(-\alpha)=$$
$$=(\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta)c^{2}+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2})c+\alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)$$

این عبارت در حالت $\alpha\geqslant\beta$ غیرمنفی است، زیرا

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta=(\alpha-\beta)^{2}+\alpha\beta,$$
$$\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2}=\alpha^{3}+\beta(\alpha-\beta)^{2}$$

وروشن است وقتی برابرصفرمی‌شودکه داشته باشیم:

$$\alpha^{2}+\beta^{2}-\alpha\beta=0,\ \alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2}=0,\ \alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)=0$$

که‌تنهادرحالت $\alpha=\beta=0$، یعنی $a=b=c$ (مثلث متساوی‌الاضلاع)ممکن است.

اکنون فرض می‌کنیم $\alpha<\beta$. از نابرابری $b<a+c$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\beta<c+\alpha \Longrightarrow \alpha-\beta>-c \text{ و } c>\beta-\alpha$$

با توجه به دو نابرابری اخیر، مقدار A را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$A=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+\alpha\beta c.c+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-2\alpha\beta^{2})c+$$
$$+\alpha^{2}\beta(\alpha-\beta)\geqslant(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+\alpha\beta(\beta-\alpha)c+(\alpha^{3}+\beta^{3}+\alpha^{2}\beta-$$
$$-2\alpha\beta^{2})c-\alpha^{2}\beta c=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+(\alpha^{3}+\beta^{3}-\alpha^{2}\beta-\alpha\beta^{2})c=$$
$$=(\alpha-\beta)^{2}c^{2}+(\beta^{2}-\alpha^{2})(\beta-\alpha)>0$$

۱۶۷. اگرطول ضلع‌های چهارضلعی را a، b، c و d بگیریم، وقتی‌که چهارضلعی، درعین حال، محیطی ومحاطی باشد، برای مساحت آن داریم: $S=\sqrt{abcd}$ (چرا؟). بنابراین، باتوجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی، می‌توان نوشت:

$$\frac{p}{2}=\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{S}\Longrightarrow p^{2}\geqslant 4S$$

یادداشت: می‌توان ثابت کرد که، نابرابری $4S \leqslant p^2$، دربارهٔ هر چهارضلعی دلخواه درست است (چگونه؟).

۱۶۸. ابتدا یك اتحاد و یك نابرابری را درمثلث ثابت می‌کنیم:

$$tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)=\cos\beta+\cos\gamma \qquad (1)$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha\right) \qquad (2)$$

برای اثبات اتحاد (۱)، به‌ترتیب داریم:

$$tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)=2\,cotg\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\cos\beta+\cos\gamma$$

وبرای اثبات نابرابری (۲)

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta\, tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha}\leqslant\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha\right)$$

اکنون، بااستفاده از اتحاد (۱) و نابرابری (۲)، و رابطه‌های مشابه آن‌ها درمثلث، داریم:

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}\sin\beta+tg\frac{\beta}{2}\sin\alpha+tg\frac{\beta}{2}\sin\gamma+tg\frac{\gamma}{2}\sin\beta+tg\frac{\gamma}{2}\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+tg\frac{\alpha}{2}\sin\gamma\right)=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2}(\sin\beta+\sin\gamma)+$$

$$+\frac{1}{2}tg\frac{\beta}{2}(\sin\alpha+\sin\gamma)+\frac{1}{2}tg\frac{\gamma}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin^2\frac{\alpha}{2}+$$

$$+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

۱۶۹. با توجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$2^{\sin x}+2^{tg x}\geqslant 2\sqrt{2^{\sin x+tg x}}$$

وبنابراین، نابرابری مفروض را، در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$، می‌توان این طور نوشت:

$$2\sqrt{2^{\sin x+tg x}}\geqslant 2^{x+1}\Longrightarrow f(x)=\sin x+tg x-2x\geqslant 0$$

برای $f'(x)$، مشتق $f(x)$ داریم:

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>\cos x+\frac{1}{\cos x}-2>0$$

زیرا اولاً $\frac{1}{\cos^2 x}>\frac{1}{\cos x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ وثانیاً برای مقدارمثبت $\cos x\neq 1$ داریم: $\cos x+\frac{1}{\cos x}>2$. به‌این ترتیب $f(x)$، دربازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ صعودی است و چون $f(0)=0$، پس برای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$ بایـد داشته باشیـم $f(x)>0$. علامت برابری، تنها برای $x=0$ است واگر $x\neq 0$، نابرابری به‌صورت اکید خود برقراراست.

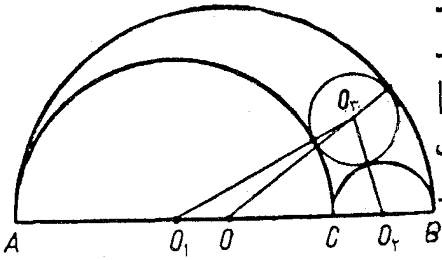
۱۷۰. برای $b>a>0$ و $k>0$ داریم: $\frac{b}{a}>\frac{b+k}{a+k}$ (پیش قضیـه رادرحل تمرین ۲، صفحهٔ ۱۴۱ ببینید). بنابراین، باتوجه به‌ویژگی‌های لگاریتم، می‌توان نوشت:

$$\log_a \frac{b}{a} > \log_a \frac{b+k}{a+k} > \log_{a+k} \frac{b+k}{a+k}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\log_a b - ۱ > \log_{a+k}(b+k) - ۱ \Longrightarrow \log_a b > \log_{a+k}(b+k)$$

۱۷۱. O، $O_۱$ و $O_۲$ را، به‌ترتیب، مرکز نیم دایره‌های به‌قطرهای $|AB|$، $|AC|$ و $|CB|$ می‌گیریم (شکل ۲۸). دایرهٔ مماس بر این سه نیم‌دایره را رسم ومرکز آن را $O_۳$ می‌نامیم.



شکل ۲۸

درهندسهٔ مسطحه، قضیه‌ای داریم، به‌نام قضیهٔ ستووارت* که بنابر آن: اگر D راروی ضلع BC ازمثلث ABC (درهر نقطهٔ دلخواه آن) بگیریم، آن وقت برابری زیر برقرار است:

$$|AD|^۲\cdot|BC| = |AB|^۲\cdot|CD| + |AC|^۲\cdot|BD| -$$
$$-|BC|\cdot|BD|\cdot|CD|$$

اکنون، اگر قضیهٔ ستووارت رادرمثلث $O_۱O_۲O_۳$ درنظر بگیریم، داریم:

$$|O_۳O|^۲\cdot|O_۱O_۲| = |O_۱O_۳|^۲\cdot|OO_۲| + |O_۲O_۳|^۲\cdot|OO_۱| -$$
$$-|OO_۱|\cdot|OO_۲|\cdot|O_۱O_۲|$$

ازطرف دیگر، روشن است که (x و y، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$):

$$|O_۳O| = x+y-R، |O_۱O_۲| = x+y، |O_۱O_۳| = x+R،$$
$$|O_۲O_۳| = y+R$$

---

*) ستووارت ($M.\ Stuart$)، ریاضی‌دان انگلیسی سدهٔ ۱۸، برای نخستین‌بار، این‌قضیه را درکتاب خود «برخی قضیه‌های عمومی» (سال ۱۷۴۶، ادین‌بورو) ثابت کرد. از این قضیه، می‌توان برای محاسبهٔ طول میانه یا نیمساز درمثلث، استفاده کرد.

بنابراین، رابطهٔ ستوارت، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x+y-R)^2(x+y)=(x+R)^2\cdot x+(y+R)^2\cdot y-xy(x+y)$$

از آن جا $R=\dfrac{xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}$. چون $x^2+y^2\geqslant 2xy$، بنابراین

$$R\leqslant\frac{xy(x+y)}{3xy}=\frac{x+y}{3}=\frac{1}{6}|AB|$$

۱۷۲. یك مثلث نمی‌تواند دو زاویهٔ منفرجه داشته باشد، بنابراین، $tg\hat{A}$ و $tg\hat{B}$ هردومثبت‌اند و $\hat{A}<90^\circ$، $\hat{B}<90^\circ$. درضمن

$$tg\hat{A}tg\hat{B}=\frac{\sin\hat{A}\sin\hat{B}}{\cos\hat{A}\cos\hat{B}}<1\Longrightarrow\cos(\hat{B}+\hat{A})<0$$

یعنی $\cos\hat{C}>0$ و $\hat{C}<90^\circ$. با همین روش می‌توان عکس قضیه را هم ثابت کرد.

۱۷۳. ازنابرابری بین واسطه های حسابی و هندسی، دوبار استفاده می‌کنیم ؛ در ضمن ، توجه داشته باشید که: $n\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{n+1}}$، $n\sqrt[n+1]{n}=\sqrt[n+1]{n^{n+2}}$ وغیره:

$$\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n}+\dots+\sqrt[2n-1]{n}=$$

$$=\frac{\sqrt[n]{n^{n+1}}+\sqrt[n+1]{n^{n+2}}+\dots+\sqrt[2n-1]{n^{2n}}}{n}\geqslant$$

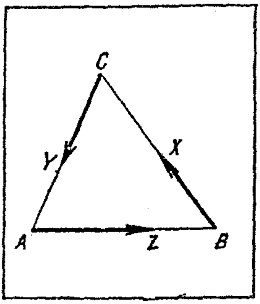
$$\geqslant\left(\sqrt[n]{n^{n+1}}\cdot\sqrt[n+1]{n^{n+2}}\dots\sqrt[2n-1]{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(n^{\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\dots+\frac{2n}{2n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(n^{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\dots\frac{2n}{2n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}=(n^2)^{\frac{1}{n}}=(n)^{\sqrt[n]{2}}$$

۱۷۴. چون $\frac{x}{y}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}$ و $\frac{z}{t}\geqslant\frac{z}{100}$، بنابراین

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}\geqslant\frac{1}{z}+\frac{z}{100}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{100}}=\frac{1}{5}$$

حداقل مقدار $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ برابراست با $\frac{1}{5}$ که به‌ازای $x=1$، $y=z=10$ و $t=100$ به‌دست می‌آید.



شکل ۲۹

۱۷۵. مثلثی با زاویه‌های α، β و γ می‌سازیم که طول ضلع‌های آن، به ترتیب، از x، y و z بزرگتر باشند (شکل ۲۹). پاره خط‌های راست BX، CY و AZ را با طول‌هایی، به‌ترتیب، برابر x، y و z، روی BC، CA و AB جدا می‌کنیم. داریم:

$$(\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ})^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

درضمن روشن است که

$$(\widehat{\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{CY}})=180^\circ-\gamma \Longrightarrow \cos(180^\circ-\gamma)=-\cos\gamma$$

ودورابطهٔ مشابه‌آن. اکنون، اگر پرانتز سمت چپ رادرنابرابری (۱) بازکنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos\alpha-2zx\cos\beta-2xy\cos\gamma \geqslant 0$$

باتوجه به (۱)، علامت نابرابری وقتی به‌برابری‌تبدیل‌می‌شودکه داشته‌باشیم:

$$\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{0}$$

یعنی، وقتی به برابری می‌رسیم که، مثلث انتخابی ABC، ضلع‌هایی به طول برابر x، y و z وزاویه‌هایی برابر α، β و γ داشته باشد.

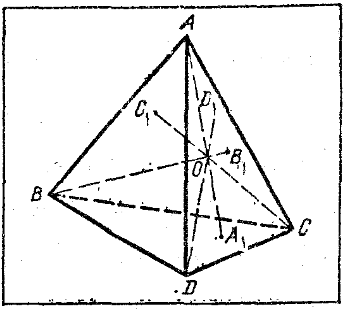
۱۷۶. روشن است که (شکل ۳۰)

$$V_{ABCD}=V_{OABC}+V_{OBCD}+V_{OCDA}+V_{ODAB}$$

درضمن می‌دانیم، حجم دوهرم باقاعده‌های هم‌ارز، به‌نسبت ارتفاع‌های دو هرم است. بنابراین

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}+\frac{|OB_1|}{|BB_1|}+\frac{|OC_1|}{|CC_1|}+\frac{|OD_1|}{|DD_1|}=1$$

که به ترتیب، می‌توان آن را این‌طورنوشت:



شکل ۳۵

$$\frac{|AA_1|-R}{|AA_1|}+\frac{|BB_1|-R}{|BB_1|}+\frac{|CC_1|-R}{|CC_1|}+\frac{|DD_1|-R}{|DD_1|}=1;$$

$$\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}=\frac{3}{R}$$

از طرف دیگر، این نابرابری واضح است (مسألهٔ ۱۱ را در داخل متن فصل دوم ببینید):

$$(|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|)\times\left(\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}\right)\geqslant 4^2$$

بنابراین $|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|\geqslant\frac{16}{3}R$.

۱۷۷. به‌ترتیب داریم:

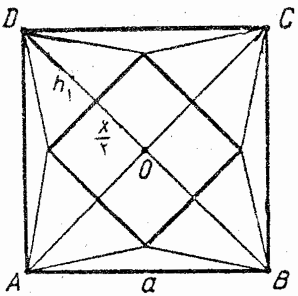
$$|a_1+2a_2+\dots+na_n|=|f'(0)|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\leqslant 1$$

۱۸۷. اگر از نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده کنیم، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\dots\frac{a_n}{b_n}}=n$$

۱۷۹. طول ضلع قاعدهٔ هرم را x و طول ارتفاع آن را h می‌گیریم (شکل ۳۱). دراین‌صورت



شکل ۳۱

$$h=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

و برای حجم هرم خواهیم داشت:

$$V=\frac{1}{3}x^2h=\frac{1}{3}x^2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}=\frac{16}{3}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{4}\right)^4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)}$$

این حجم وقتی حداکثر می‌شود که تابع $f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^4\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)$ به ماکزیمم خود برسد. روشن است که

$$f(x)=\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-x\right)$$

مجموع پنج عامل ضرب مقدار ثابتی است، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به‌حداکثر خود می‌رسد که این عامل‌ها باهم برابر باشند: $\frac{x}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}-x$ یا $x=\frac{2a\sqrt{2}}{5}$. به‌این ترتیب، حجم هرم، وقتی حداکثر مقدار ممکن است که طول ضلع قاعدهٔ آن، برابر $\frac{2}{5}$ طول قطر مربع باشد و دراین‌صورت، حجم هرم برابر $\frac{8a^3}{75\sqrt{10}}$ می‌شود.

۱۸۰. داریم:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-(ab+ac+ad+ae)=$$

$$=\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\geqslant 0$$

علامت برابری، برای $\frac{a}{2}=b=c=d=e$.

۱۸۱. به‌ترتیب داریم:

$$f(x, y, z, t)=1+\left(\frac{ax^2+by^2}{ax+by}-1\right)+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}=$$

$$=1+\frac{-axz-byt}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}=1+\frac{ab(z-t)(zy-xt)}{(ax+by)(az+bt)}=$$

$$=1+\frac{ab(z-t)[z(1-t)-t(1-z)]}{(ax+by)(az+bt)}=1+$$

$$+\frac{ab(z-t)^2}{(ax+by)(az+bt)}$$

عبارت اخیر نشان می‌دهد که، حداقل‌مقدار $f(x, y, z, t)$ برابر است با ۱، که به‌ازای $z=t$ به‌دست می‌آید.

از شرطهای‌مسأله نتیجه می‌شود که $0 \leqslant x, y, z, t \leqslant 1$ و از آن‌جا

$$ax^2 \leqslant ax ,\ by^2 \leqslant by ,\ az^2 \leqslant az ,\ bt^2 \leqslant bt$$

یعنی $ax^2+by^2 \leqslant ax+by$ و $az^2+bt^2 \leqslant az+bt$. درنتیجه

$$f(x, y, z, t) \leqslant 2$$

برابری، به‌ازای $x=t=0$ و $y=z=1$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $1 \leqslant f(x, y, z, t) \leqslant 2$.

۱۸۲. $y=-x$ می‌گیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$y^{37}-y^8-1=0 \qquad (1)$$

اگر $1 \leqslant y$، آن وقت $f(y)=y^{37}-y^8-1>0$، یعنی $f(y)=0$، برای $1 \leqslant y$ ریشه‌ای ندارد. $y<1$ می‌گیریم. داریم:

$$f(y)+1=y^{37}-y^8=y^8(y^{29}-1)$$

که برابر است با حاصلضرب دو تابع صعودی مثبت، در بازهٔ $y<1$؛ یعنی تابع $f(y)$ تابعی یکنوا (یا صعودی و یا نزولی) است و معادلهٔ (۱) نمی‌تواند

بیش از یك ریشه داشته باشد. از طرف دیگر، معادلهٔ مفروض درجه‌ای فرد دارد ومی‌دانیم، هرمعادلهٔ ازدرجهٔ فرد، دست‌کم یك ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۸۳. برای‌این‌که عدد $4ab+22a+47b$ بر a^2+7b^2+811 بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$4ab+22a+47b\geqslant a^2+7b^2+811$$

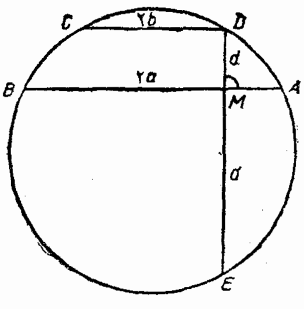
$$a^2-2(2b+11)a+7b^2-47b+811\geqslant 0 \qquad (1)$$

و برای این‌که، سه جمله‌ای درجه دوم سمت چپ نابرابری، ریشه‌های حقیقی داشته باشد:

$$-3b^2+91b-690\geqslant 0 \Longrightarrow 15\leqslant b\leqslant 15\frac{1}{3}$$

چون b عددی طبیعی است، پس $b=15$، از آن‌جا $a=41$. به‌ازای این مقدارهای a و b، نابرابری (۱) به‌برابری تبدیل می‌شود ودرنتیجه:

$$4ab+22a+47b=a^2+7b^2+811$$



شکل ۳۲

۱۸۴. راه حل اول.

$|AD|>|CD|$ می‌گیریم وفرض‌می‌کنیم وتر DE درنقطهٔ M بر وتر AB عمود باشد (شکل ۳۲). طبق فرض $|AB|=2a$ ، $|CD|=2b$ و $|DM|=d$؛ بنابراین

$$|AM|=\frac{1}{2}(|AB|-|CD|)=$$

$$=a-b\ ;\ |BM|=a+b$$

چون $|AM|\cdot|MB|=|DM|\cdot|EM|$؛ پس بافرض $|EM|=d'$

$$d\cdot d'=a^2-b^2$$

اگر وترهای AB و CD دریك طرف مرکز دایره باشند، بایدداشته باشیم:

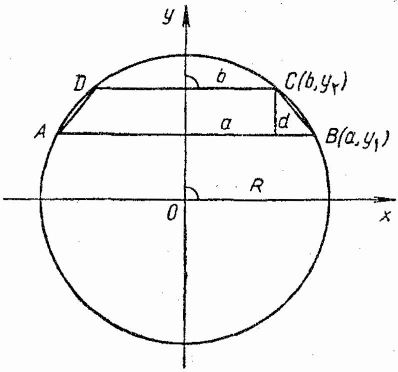
$$d<d' \text{ و } d^2<a^2-b^2 \quad (a>b)$$

واگر وترهای AB و CD دردوطرف مختلف مرکز دایره باشند:

$$d>d' \text{ و } d^2>a^2-b^2 \quad (a>b)$$

عکس قضیه هم درست است: به‌ازای $a>b$، از برابری $d \cdot d' = a^2-b^2$ ونـابرابری $d^2<a^2-b^2$ نتیجه می‌شود $d<d'$؛ و ازهمان برابری ونابرابری $d^2>a^2-b^2$ به‌دست می‌آید: $d>d'$.

راه‌حل دوم. مبداءمختصات را درمرکز دایره ومحور طول را موازی باوترهای AB و CD درنظر می‌گیریم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

فرض می‌کنیم: $B(a, y_1)$ و $C(b, y_2)$. طبق فرض $|y_2-y_1|=d$؛ به جز آن، نقطه‌های B و C به‌دایرهٔ مفروض تعلق دارند:

$$a^2+y_1^2=b^2+y_2^2=R^2$$

وازآن‌جا

$$a^2-b^2=y_2^2-y_1^2 \text{ ، } |a^2-b^2|=|y_2-y_1| \cdot |y_2+y_1|$$

یعنی $|y_2+y_1|=\dfrac{|a^2-b^2|}{d}$.

برای این‌که مرکز دایره، درداخل ذوزنقه $ABCD$ باشد، لازم وکافی است‌که y_1 و y_2، علامت‌های متفاوتی داشته باشند. دراین حالت

$$|y_2+y_1|<|y_2-y_1|=d$$

یعنی $|a^2-b^2|<d^2$.

درحالتی‌که مرکز دایره در بیرون ذوزنقهٔ $ABCD$ قرارگیرد، y_1 و y_2 هم علامت‌اند و

$$|y_2+y_1|>|y_2-y_1|$$

یعنی $|a^2-b^2|>d^2$.

۱۸۵. با توجه بـه نابرابری بین واسطه‌هـای حسابی وهندسی (برای $a+b$ عدد مثبت) داریم:

$$2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}=2\sqrt[a+b]{\underbrace{a^2a^2\dots a^2}_{b\ \text{مرتبه}}\cdot\underbrace{b^2b^2\dots b^2}_{a\ \text{مرتبه}}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\times\frac{\overbrace{a^2+a^2+\dots+a^2}^{b\ \text{مرتبه}}+\overbrace{b^2+b^2+\dots+b^2}^{a\ \text{مرتبه}}}{a+b}=$$

$$=\frac{2(a^2b+ab^2)}{a+b}=2ab\leqslant a^2+b^2$$

یادداشت. شرط طبیعی‌بودن دو عدد a و b لازم نیست؛ کافی است دو عدد a و b مثبت باشند.

برای دوعدد مثبت a و b، همیشه داریم $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$. در واقع، اگر $a>b$، آن وقت $\frac{a}{b}>1$ و $a-b>0$؛ واگر $a<b$، آن وقـت $\frac{a}{b}<1$ و $a-b<0$؛ و در هردوحالت $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$. سپس داریم:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab=2\sqrt[a+b]{a^{a+b}\cdot b^{a+b}}=2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}$$

۱۸۶. اگر M_0 را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC بگیریم، می‌دانیم

$$a\overrightarrow{M_0A}+b\overrightarrow{M_0B}+c\overrightarrow{M_0C}=\overrightarrow{0}$$

گزارهٔ عکس هم درست است. بنابراین، برای هرنقطهٔ M ازفضا، به شرطی

که بر M_0 منطبق نباشد

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\mathbf{s}\neq 0$$

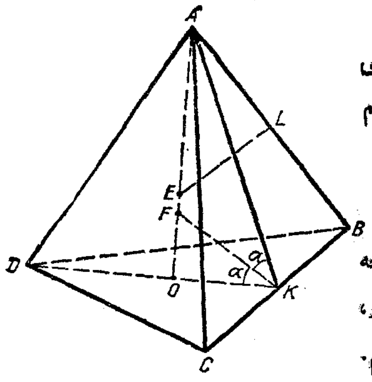
درنتیجه $0 \geqslant {}^{2}(a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC})=\mathbf{s}^2$، که بعدازبازکردن پرانتز

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2+ab(a_1^2+b_1^2-c_1^2)+bc(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+$$
$$+ca(c_1^2+a_1^2-b_1^2)\geqslant 0\ ;$$
$$a_1^2(a^2+ab+ac)+b_1^2(b^2+ba+bc)+c_1^2(c^2+ca+cb)\geqslant$$
$$\geqslant abc\cdot 2p$$

که اگر دوطرف را به $2p=a+b+c$ ساده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$aa_1^2+bb_1^2+cc_1^2\geqslant abc$$

علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که، نقطهٔ M، بـرمرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC منطبق باشد.



شکل ۳۴

۱۸۷. E را مرکزکرهٔ محیطی و F را مرکزکرهٔ محـاطی می‌گیریم (شکل ۳۴). دراین صورت

$$|AE|=R\ ،\ |OF|=r$$

زاویهٔ دووجهی بین قاعده ووجه جانبی‌هرم را 2α می‌نامیم واز نقطهٔ E، عمود EL را بریال AB رسم می‌کنیم. دومثلث ALE و AOB متشابـه‌اند و

$$|AL|=\frac{1}{2}|AB| \text{ و}$$

$$|AE|:|AL|=|AB|:|AO|\ ،\ 2|AE|\cdot|AO|=|AB|^2،$$

$$2|AE|\cdot|AO|=|AO|^2+|BO|^2 \qquad (1)$$

ولی $(KF]$ نیمساز زاویهٔ AKO است، بنابراین

$$|AO|=|KO|\ tg\,2\alpha=|OF|\ cotg\alpha\ tg\,2\alpha=r cotg\alpha\ tg\,2\alpha \quad (2)$$

چون $|BO|=2|KO|$، پس

$$|BO|=2|KO|=2|OF|\ cotg\alpha=2r cotg\alpha \qquad (3)$$

(۲) و(۳) را در (۱) قرارمی‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$2R cotg\alpha\ tg\,2\alpha=r^2 cotg^2\alpha\ tg^2 2\alpha+4r^2 cotg^2\alpha$$

که بعدازتبدیل‌های ساده خواهیم داشت:

$$\frac{r}{R+r}=tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)=\frac{1}{4}-\left(tg\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$$

یعنی $4r\leqslant R+r$ یا $R\geqslant 3r$.

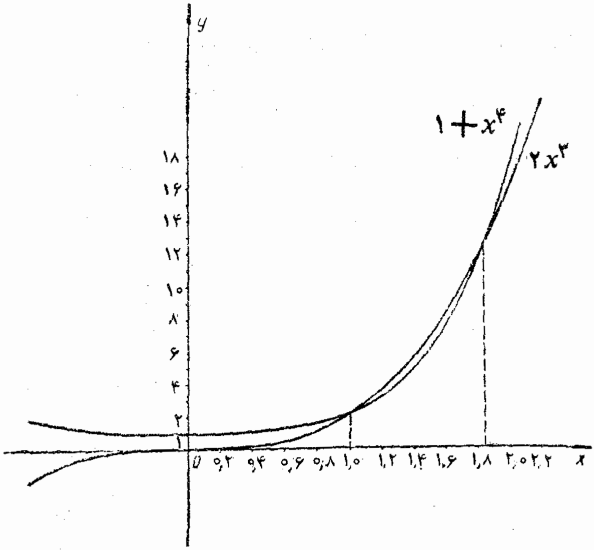
۱۸۸. فرض می‌کنیم: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=S_n$. اگر دوطرف نابرابری مورد نظر را در $n+1$ ضرب کنیم، می‌توانیم آن را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$S_{2n}-\frac{1}{2}S_n>\frac{n+1}{2n}S_n \Longrightarrow S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}S_n$$

ازآن‌جا: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}+\dots+\frac{1}{2n^2}$. و این نابرابری درست است، زیرا هرجملهٔ سمت چپ، ازجملهٔ نظیر خود در سمت راست بزرگتر است.

۱۸۹. برای $ab\leqslant 0$، نابرابری برقرار است، زیرا اگر $ab<0$، آن وقت سمت چپ نابرابری مثبت وسمت راست آن منفی می‌شود؛ درحالتی‌که تنها یکی از دومقدار a یا b صفر باشد، بازهم نابرابری برقرار است و در حالت $a=b=0$، نابرابری به‌برابری تبدیل می‌شود.

اکنون فرض‌می‌کنیم $ab>0$. دوطرف‌نابرابری را بر a^4 (که مقداری مثبت‌است) تقسیم می‌کنیم و $\frac{b}{a}$ را x می‌نامیم. چون a و b هم علامت‌اند، پس



شکل ۳۵

$x>0$. به‌این ترتیب، به‌نابرابری $2x^3 \leqslant 1+x^4$ می‌رسیم. نمودار تابع‌های $y=1+x^4$ و $y=2x^3$ را رسم می‌کنیم (شکل ۳۵؛ در این شکل، برای روشن‌تر بودن نقطه‌هـای برخورد دومنحنی، واحد محور طول را ۱۰ برابر واحد محور عرض گرفته‌ایم). علامت برابری در دو حالت پیش می‌آید: به‌ازای $x_1=1$ و به‌ازای x_2 که مقداری است بین ۱/۸ و ۱/۹. مقدار تقریبی x_2 را می‌توان محاسبه کرد: $x_2 \approx 1/84$ (اگر دقیق‌تر محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید: $x_2 \approx 1/839237$ که، به‌ازای آن، مقدار $1+x^4$ وهم‌مقدار $2x^3$، به تقریب برابر ۱۲/۴۴۴۵ می‌شوند). روی شکل روشن است که، برای $x<1$ و $x>x_2$، داریم $1+x^4>2x^3$ و برای $1<x<x_2$ داریم: $1+x^4<2x^3$.

پاسخ. نابرابری $a^4+b^4 \geqslant 2ab^3$ وقتی برقرار است که: ۱) a و b علامت‌های مختلف داشته باشند؛ ۲) یکی از آن‌ها برابر صفر و دیگری دلخواه

باشد؛ ۳) $\frac{b}{a} \geqslant 1$، یعنی $0 < b \leqslant a$ یا $a \leqslant b < 0$؛ ۴) $\frac{b}{a} \geqslant k$ که در آن $k \approx 1/84$، یعنی $b \geqslant ka > 0$ یا $b \leqslant ka < 0$.

۱۹۰. قرار می‌گذاریم: $log_{n!} n = x$ ، $log_{n!}(n-1) = y$، $log_{n!}(n-2)! = z$. دراین‌صورت

$$x + y + z = log_{n!} n(n-1)(n-2)! = log_{n!} n! = 1 \qquad (*)$$

اکنون بردارهای $\mathbf{a}(x, y, z)$ و $\mathbf{e}(1, 1, 1)$ را درنظر می‌گیریم. بنا بر $(*)$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = 1$ چون $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})^2$، پس

$$1 \leqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

ولی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{e}$ هم راستا نیستند، بنابراین $x^2 + y^2 + z^2 > \frac{1}{3}$.

۱۹۱*. ضمن محاسبه، همهٔ کمان‌ها را برحسب درجه درنظر گرفته‌ایم، ولی علامت درجه را برای سهولت‌کار نگذاشته‌ایم. ازنابرابری روشن $tg\frac{1}{64} < 3tg\frac{27}{64}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{sin\frac{1}{64}}{cos\frac{1}{64}} < \frac{3\,sin\frac{29}{64}}{cos\frac{27}{64}} \Longrightarrow sin\frac{1}{64}cos\frac{27}{64} < 3\,sin\frac{29}{64}cos\frac{1}{64}$$

دوطرف نابرابری را در $2\,sin\frac{1}{64}$ ضرب و،سپس طرف بزرگتررا به‌تفاضل دوکسینوس تبدیل می‌کنیم:

$$3\,cos\frac{27}{64} - 3\,cos\frac{31}{64} > 4\,sin^2\frac{1}{64}cos\frac{27}{64},$$

---

*) همهٔ محاسبه‌های این مسأله را، همکار محترم آقای محمد رضا هاشمی موسوی انجام داده‌اند.

$$3\cos\frac{31}{64} < 3\cos\frac{27}{64} - 4\sin^2\frac{1}{64}\cos\frac{27}{64}$$

دوباره دوطرف را در $\sin\frac{1}{64}$ ضرب می‌کنیم:

$$3\sin\frac{1}{64}\cos\frac{31}{64} < \cos\frac{27}{64}\left(3\sin\frac{1}{64} - 4\sin^3\frac{1}{64}\right) = \cos\frac{27}{64}\sin\frac{3}{64}$$

که با تبدیل دوطرف به‌مجموع، به‌دست می‌آید:

$$3\sin\frac{1}{2} - 3\sin\frac{15}{32} < \sin\frac{15}{32} - \sin\frac{12}{32}$$

که از آن، نابرابری اول ابوالوفا نتیجه می‌شود:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ < \frac{4}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{12}{32}\right)^\circ$$

اکنون به‌نابرابری دوم ابوالوفا می‌پردازیم. این نابرابری واضح است:

$$\cos\frac{1}{64}\sin\frac{32}{64} + \sin\frac{2}{64}\sin\frac{33}{64} > 0$$

که با تبدیل به‌مجموع، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\cos\frac{31}{64} > \frac{1}{2}\left[\cos\frac{33}{64} + \cos\frac{35}{64}\right]$$

و یا

$$\cos\frac{31}{64} > \cos\frac{1}{64}\cos\frac{34}{64}$$

دوطرف را در $2\sin\frac{1}{64}$ ضرب، وسپس، به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$2\sin\frac{32}{64} - 2\sin\frac{30}{64} > \sin\frac{36}{64} - \sin\frac{32}{64}$$

وازآن‌جا نابرابری مورد نظر به‌دست می‌آید:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)^\circ > \frac{2}{3}\sin\left(\frac{15}{32}\right)^\circ - \frac{1}{3}\sin\left(\frac{18}{32}\right)^\circ$$

یادداشت. به‌کمک نابرابری‌های ابوالوفا، برای $sin ۳۰'$ به‌دست‌می‌آید:

$$۰/۰۰۸۷۲۴ < sin ۳۰' < ۰/۰۰۸۷۲۸$$

یعنی مقدار $sin ۳۰'$ تا پنج رقم بعدازممیز برابر است با ۰/۰۰۸۷۲

۱۹۲. فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۸-۲x}$ که در بازهٔ $[۲،۴]$ معین است. داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۸-۲x}}=\frac{\sqrt{۸-۲x}-۲\sqrt{x-۲}}{۲\sqrt{(x-۲)(۸-۲x)}}$$

که به‌ازای $x=\frac{۸}{۳}$ برابر صفر، به‌ازای $x<\frac{۸}{۳}$ مثبت و به‌ازای $x>\frac{۸}{۳}$ منفی است؛ یعنی تابع f در نقطهٔ $x=\frac{۸}{۳}$، در بازهٔ $(۲،۴)$ به‌ماکزیمم خودمی‌رسد. چون

$$f(۲)=۲ \text{ ، } f(۴)=\sqrt{۲} \text{ ، } f\left(\frac{۸}{۳}\right)=\sqrt{۶}$$

بنا بر این، حداکثرمقدار f در نقطهٔ $x=\frac{۸}{۳}$ وحداقل آن در نقطهٔ $x=۴$ به‌دست می‌آید. تابع f پیوسته است، درنتیجه، بردآن عبارت است از بازهٔ $[\sqrt{۲}،\sqrt{۶}]$. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، وقتی جواب داردکه داشته باشیم: $\sqrt{۲}\leqslant a\leqslant\sqrt{۶}$.

یادداشت. درحل این‌مسأله، ازقضیه‌ای‌استفاده کرده‌ایم که‌یکی‌ازمهم‌ترین قضیه‌ها، دربارهٔ تابع‌های پیوسته است. این قضیه (قضیهٔ بولتسانو ـ کوشی) می‌گوید: اگرتابع f دربازهٔ $[a،b]$ پیوسته باشد وداشته باشیم $f(a)=A$ و $f(b)=B$ و $A<C<B$، آن وقت عدد $c\in(a،b)$ وجود دارد، به نحوی که برای‌آن داشته باشیم: $f(c)=C$. ولی اثبات دقیق این قضیه، از برنامهٔ دبیرستانی تجاوزمی کند. با وجوداین، می‌توان‌درستی آن را به‌کمک‌نمودار، به سادگی‌درک کرد و، به‌همین‌مناسبت، هیچ‌اشکالی دراستفادهٔ از آن وجودندارد.

۱۹۳. دامنهٔ تابع f عبارت است از بازهٔ $\left[\frac{۲}{۳}، +\infty\right)$. دربازهٔ

داریم: $\left(\frac{۲}{۳} , +\infty\right)$

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۲x-۱}}=\frac{۳\sqrt{۲x-۱}-۲\sqrt{۳x-۲}}{۲\sqrt{(۳x-۲)(۲x-۱)}}$$

و روشن است که برای $x>\frac{۲}{۳}$ داریم $f'(x)>۰$. تابع f در بازهٔ $\left(\frac{۲}{۳} , +\infty\right)$ صعودی‌است و، بنابراین، معادلهٔ $f(x)=۴$ نمی‌تواند بیش از یک‌جواب داشته باشد.

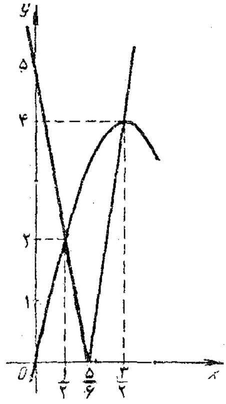
از طرف دیگر، اگرعدد «بزرگی» مثل $x=۲۰۰$ را درنظر بگیریم، داریم:

$$f(۲۰۰)=\sqrt{۵۹۸}-\sqrt{۳۹۹}>۲۴-۱۹>۴$$

f، تابعی است پیوسته وچون $f(۱)=۰$، بنابراین همهٔ مقدارهای بین $f(۱)=۰$ و $f(۲۰۰)>۴$، ومنجمله $f(x)=۴$ را قبول می‌کند. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، درست یک جواب دارد.

۱۹۴. $f(x)=|۶x-۵|$ و

$$g(x)=۴\sin\frac{\pi}{۳}x$$



شکل ۳۶

می‌گیریم. با رسم نمودارهای f و g، بلافاصله متوجه می‌شویم که، معادلهٔ مفروض، جوابی در بازهٔ $\left[۰,\frac{۵}{۶}\right]$ وجوابی بزرگتر از $\frac{۵}{۶}$ دارد (شکل ۳۶).

صورت مسأله، به‌ما تلقین می‌کندکه باید این‌جواب‌ها، «عددهای خوبی» باشند، زیرا درغیراین‌صورت، نخواهیم توانست آن‌ها را، با دقت پیداکنیم. آزمایش مستقیم نشان می‌دهدکه

$x_۱=\frac{۱}{۲}$ و $x_۲=\frac{۳}{۲}$ و تنها این می‌ماندکه ثابت‌کنیم، معادلهٔ مفروض، جواب دیگری‌ندارد. به‌این‌نکته توجه می‌کنیم‌که، معادلهٔ مفروض، تنها وقتی‌می‌تواند جواب داشته باشدکه داشته باشیم:

$$|۶x-۵|\leqslant ۴ \Longrightarrow \frac{۱}{۶}\leqslant x\leqslant \frac{۳}{۲}$$

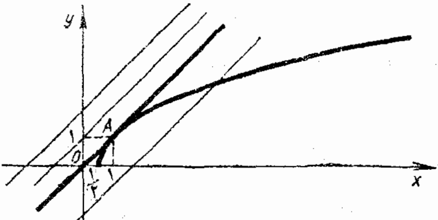
بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}, \frac{۳}{۲}\right]$ را به‌دو بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}, \frac{۵}{۶}\right]$ و $\left(\frac{۵}{۶}, \frac{۳}{۲}\right]$ تقسیم می‌کنیم.

در بازهٔ $\left[\frac{۱}{۶}, \frac{۵}{۶}\right]$، تابع f نزولی و تابع g صعودی است (چرا؟)، به‌نحوی که معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نمی‌تواند بیش از یک‌جواب در این بازه داشته باشد. در بازهٔ $\left(\frac{۵}{۶}, \frac{۳}{۲}\right]$، هر دو تابع صعودی‌اند. بنابراین، اثبات منجر به‌این می‌شود که توجه کنیم، در این بازه، تابع g کندتر از تابع f ترقی می‌کند. به‌زبان دقیق‌تر $g'(x)<f'(x)$ و، درنتیجه، $f(x)-g(x)$ تابعی صعودی است. برای $x\in\left(\frac{۵}{۶}, \frac{۳}{۲}\right]$ داریم:

$$f'(x)-g'(x)=۶-\frac{۴\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۳}x\geqslant ۶-\frac{۴\pi}{۳}>۰$$

بنابراین، $f-g$ تابعی صعودی است. بنابراین، حداکثر مقدار خود را در انتهای سمت راست بازهٔ مورد نظر پیدا می‌کند:

$$h_{max}=h\left(\frac{۳}{۲}\right)=۰$$



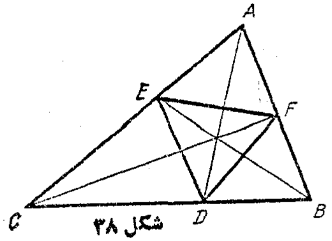
شکل ۳۷

به نحوی که در بازهٔ $\left(\frac{۵}{۶}, \frac{۳}{۲}\right)$، داریم $h(x)<۰$، یعنی $f(x)<g(x)$ و معادلهٔ اصلی، جوابی در این بازه ندارد.

۱۹۵. نمودار تابع $y=\sqrt{۲x-۱}$ را رسم و توجه می‌کنیم که معادلهٔ مفروض وقتی جواب ندارد که خط راست $y=x+a$، همه‌جا در بالای نمودار f باشد، یعنی وقتی‌که این خط راست در بالای خط راست مماس بر نمودار (با ضریب زاویهٔ برابر ۱) قرار گیرد. بنابراین، مسأله به‌این‌جا منجر می‌شود که مماسی باضریب زاویهٔ

واحد برمنحنی نمودار رسم کنیم. معادلهٔ این مماس $x=y$ ومختصات نقطهٔ تماس، $A(1،1)$ می‌شود؛ این خط راست متناظر است با مقدار $a=0$.

به‌این ترتیب، نامعادلهٔ مفروض، برای $a\leqslant 0$ جواب دارد.



شکل ۳۸

۱۹۶. با توجه به‌شکل۳۸داریم:

$$S_{DEF}=S_{ABC}-S_{AFE}-$$
$$-S_{BDF}-S_{CED} \qquad (1)$$

ازطرف دیگر: $S_{AFE}=\frac{|AE|\cdot|AF|\cdot \sin\hat{A}}{2}$. فرض‌می‌کنیم $|BC|=a$، $|AC|=b$، $|AB|=c$. با توجه به‌ویژگی نیمساز داخلی مثلث:

$$|AE|=\frac{bc}{a+c}\ ,\ |AF|=\frac{bc}{a+b}$$

بنابراین

$$S_{AFE}=\frac{b^2c^2\sin\hat{A}}{2\,(a+b)(a+c)}=\frac{bc\,S_{ABC}}{(a+b)(a+c)} \qquad (2)$$

به‌همین ترتیب

$$S_{BDF}=\frac{ac\,S_{ABC}}{(b+c)(a+b)}\ ,\ S_{CED}=\frac{ab\,S_{ABC}}{(a+c)(b+c)} \qquad (3)$$

به‌این ترتیب، باتوجه به (۱) و (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$S_{DEF}=\frac{2abc\,S_{ABC}}{(a+b)\,(b+c)(a+c)}$$

ازطرف دیگر، با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی داریم:

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bc}=8abc$$

بنابراین $S_{DEF}\leqslant\frac{S_{ABC}}{4}$. علامت برابری، وقتی پیش می‌آیدکه داشته‌باشیم: $a=b=c$، یعنی برای مثلث متساوی‌الاضلاع.

(پایان)