دانش پژوهان جوان
ناشر کتابهای المپیاد

نامساوی های قدیم و جدید

تیتو آندرسکو

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

محمد شریفی
(نقره کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰)

نامساوی‌های قدیم و جدید

Old and New Inequalities

مولف:

Titu Andreescu

مترجم:

محمد شریفی

برنده دو مدال نقره کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰

سر شناسنامه	: آندرسکو، تیتو، ۱۹۵۶- م. Andreescu, Titu
عنوان و نام پدید آورنده	: نامساوی های قدیم و جدید/مولف تیتو آندرسکو؛ مترجم محمد شریفی؛ ویراستار مرتضی محمدآبادی.
مشخصات نشر	: تهران: دانش پژوهان جوان، ۱۳۸۸
مشخصات ظاهری	: ۱۲۸ ص.
شابک	: ۲۰۰۰۰ ریال: ۷-۰۱-۵۲۳۰-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا.
یادداشت	عنوان اصلی: Old and New Inequalities
موضوع	: المپیادها (ریاضیات)
موضوع	: ریاضیات—مسائل، تمرین ها و غیره
موضوع	: ریاضیات—مسابقه ها
موضوع	: نامساوی ها
موضوع	: ریاضیات—آزمون ها و تمرین ها
شناسه افزوده	: شریفی، محمد، ۱۳۶۱، مترجم.
رده بندی کنگره	: ۱۳۸۸ ۲ن۸۵آ/۲۴/LB۳۰۶۰
رده بندی دیویی	: ۳۷۳/۲۳۸
شماره کتابشناسی ملی	: ۱۷۱۷۹۷۰

نامساوی‌های قدیم و جدید

مولف	تیتو آندرسکو
مترجم	محمد شریفی
ویراستار	مرتضی محمدآبادی
ناشر	دانش پژوهان جوان
قطع	وزیری
تیراژ	۵۰۰۰ نسخه
چاپ چهارم	۱۳۸۹
قیمت	۲۵۰۰ تومان
شابک	۹۷۸-۶۰۰-۵۲۳۰-۰۱-۷

دانش پژوهان جوان

ناشر کتابهای المپیاد

خیابان انقلاب- خیابان وحید نظری – بین فروردین و اردیبهشت – پلاک ۱۰۵ – واحد ۱۱

صندوق پستی: ۱۳۱۴۵-۱۷۱۳ فروشگاه اینترنتی: www.irOlympiad.com

تلفن: ۶۶۴۹۸۹۹۸– ۶۶۴۹۶۳۶۳ دورنگار: ۶۶۹۵۳۲۵۰

«به نام آن‌که فکرت آموخت»

می‌خواهم المپیادی شوم!

مجموعه‌ای است خودآموز که زیر نظر برترین اساتید کلاس‌های المپیاد که خود از مدال‌آوران سال‌های گذشته المپیادهای کشوری و جهانی می‌باشند، تألیف شده است.

در حال حاضر این مجموعه شامل سه سری «الفبا»، «استراتژی» و «کارگاه» می‌باشد که در المپیاد ریاضی در چهار سرفصل ترکیبیات، هندسه، جبر و نظریه اعداد به زودی به زیور طبع آراسته می‌شوند.

- «سری الفبا» (کتاب‌های فیروزه‌ای): در این کتاب‌ها مباحث مقدماتی برای شرکت در مرحله‌ی اول المپیادها آموزش داده شده است و در روند آموزش سعی شده است از سؤالات تستی ایران و سایر کشورها استفاده شود. در پایان هر فصل نیز تمرینات حل نشده‌ای پیدا می‌کنید که حل بسیاری از آن‌ها را می‌توانید در سری کتاب‌های کارگاه بیابید.

- «سری استراتژی» (کتاب‌های بنفش): در این کتاب‌ها مباحث و ایده‌های مورد نیاز برای مراحل اول و دوم المپیادها به‌طور مبسوط آموزش داده شده است. خواندن این سری کتاب‌ها بعد از خواندن سری کتاب‌های «الفبا» و به منظور آمادگی بیشتر برای شرکت در مرحله‌ی اول و دوم المپیادها توصیه می‌شود.

- «سری کارگاه» (کتاب‌های سبز): در این کتاب‌ها سؤالات تستی المپیادهای ایران و سایر کشورها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده است و در هر بخش سعی شده است سؤالات از آسان به سخت مرتب شوند. خواندن این کتاب‌ها را پس از خواندن سری کتاب‌های «الفبا» به منظور آمادگی هر چه بیشتر برای شرکت در مرحله‌ی اول المپیادها به شما توصیه می‌کنیم.

در پایان جا دارد از هم‌فکری و راهنمایی‌های آقایان محمد زائری امیرانی (برنده مدال طلای کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و مدال برنز کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۸) و محمد شریفی (برنده دو مدال نقره کشوری المپیاد ریاضی ۱۳۷۹ و ۱۳۸۰) که اینجانب را در نظارت بر تألیف این کتاب‌ها یاری نمودند، تشکر نمایم.

مدیر برنامه‌ریزی و تألیف
مرتضی محمدآبادی

به نام خدا

مقدمه

در شاخه‌ی جبر، بحث نابرابری‌های جبری، بحث آشنایی برای علاقه‌مندان به ریاضیات است. مقایسه‌ی دو عبارت جبری و یا پیدا کردن حداقل و حداکثر یک عبارت جبری، خاستگاه بحث نابرابری‌هاست.

در این کتاب، مسائلی در حوزه‌ي نابرابری‌ها مطرح و حل شده است. مجموعه‌ی مسائل مطرح شده، می‌تواند تمرینی خوب برای افزایش توانایی شما در حل نابرابری‌های جبری باشد. مسائل، از آسان به سخت مرتب شده‌اند. بنابراین بهتر است مطالعه‌ی کتاب را از سؤالات نخست شروع کنید. در حل مسائل، از نابرابری‌های مختلفی استفاده شده است، که صورت نابرابری‌های به‌کار رفته را می‌توانید در بخش واژه‌نامه‌ی انتهای کتاب ببینید. بعضی از سؤالات با روش‌های مختلفی حل شده‌اند، که هریک از راه‌حل‌ها در نوع خود، جالب و آموزنده است. کاربرد ماهرانه‌ی نابرابری‌ها در حل مسائل، نقطه‌ی قوت این کتاب است. مسائل آخر، جزء مسائل دشوار نابرابری به شمار می‌آیند، که برخی از آن‌ها در رقابت‌های ریاضی مطرح شده‌اند و برخی دیگر، تألیفی‌اند. راه‌حل نابرابری‌های از این دست، شاید به‌ظاهر طولانی باشد، اما هر بخش از راه‌حل، حاوی ایده‌ها و نکات جالبی است.

برای خواندن این کتاب، لازم است نابرابری‌های ساده‌ای نظیر نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی و نابرابری کوشی – شوارتز را خوب بلد باشید. در عین حال می‌توانید کاربرد این نابرابری‌ها و نابرابری‌های دیگر را در راه‌حل مسائل ببینید.

در پایان جا دارد از مسئولین محترم انتشارات دانش‌پژوهان جوان، که با نشر کتاب‌های علمی، قدمی بلند در جهت رفع نیازهای علمی دانش‌آموزان برداشته‌اند، تشکر ویژه نمایم.

محمد شریفی
بهار ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

فصل ۱

مسائل

۱. ثابت کنید نابرابری

$$\sqrt{a^۲+(۱-b)^۲}+\sqrt{b^۲+(۱-c)^۲}+\sqrt{c^۲+(۱-a^۲)}\geq\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

برای هر سه عدد حقیقی و دلخواه a، b و c برقرار است. (مجله‌ی Kömal)

۲. اگر $a,b,c\in(۰,۱)$، ثابت کنید:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(۱-a)(۱-b)(۱-c)}<۱$$

(انتخابی تیم رومانی، ۲۰۰۲ — سطح مقدماتی)

۳. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند و $abc=۱$. ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+۳$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۴. نشان دهید اگر معادله‌ی $x^۴+ax^۳+۲x^۲+bx+۱=۰$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، آن‌گاه $a^۲+b^۲\geq ۸$. (تورنمنت شهرها، ۱۹۹۳)

۵. اگر به‌ازای اعداد حقیقی x، y و z داشته باشیم $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، حداکثر مقدار عبارت $x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz$ را به‌دست آورید.

۶. فرض کنید a، b، c، x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که $x+y+z=1$. ثابت کنید:

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \le a+b+c$$

(اکراین، ۲۰۰۱)

۷. اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$$

۸. فرض کنید $a,b,c \ge 0$. ثابت کنید:

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}$$
$$\ge a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۹. اگر a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت باشند به‌نحوی که $abc=2$، ثابت کنید:

$$a^3+b^3+c^3 \ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

تساوی چه زمانی اتفاق می‌افتد؟

(پیشنهادی به المپیاد ریاضی بالکان ۲۰۰۲ — سطح مقدماتی)

۱۰. فرض کنید $x,y,z>0$. نشان دهید:

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} \le \frac{1}{7^4}$$

حالت تساوی را نیز مشخص کنید.

(مجله‌ی ریاضیات)

۱۱. a، b و c اعدادی مثبت‌اند و $a+b+c=1$. ثابت کنید:

$$5(a^2+b^2+c^2) \le 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

۱۲. فرض کنید $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$، $n \ge 2$ و $a>0$، به‌نحوی که:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a \qquad \text{و} \qquad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \le \frac{a^2}{n-1}$$

ثابت کنید برای هر اندیس $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ داریم $x_i \in \left[0, \frac{2a}{n}\right]$.

۱۳. ثابت کنید برای هر سه عدد $a,b,c \in (۱,۲)$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{b\sqrt{a}}{۴b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{۴c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{۴a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \geq ۱$$

۱۴. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c که $abc \leq ۱$، ثابت کنید:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq a+b+c$$

۱۵. فرض کنید a، b، c، x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که:

$$a+b+c=x+y+z \qquad \text{و} \qquad a+x \geq b+y \geq c+z$$

ثابت کنید $ay+bx \geq ac+xz$.

۱٦. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌طوری که $abc=۱$. ثابت کنید:

$$۱+\frac{۳}{a+b+c} \geq \frac{٦}{ab+bc+ca}$$

(انتخابی تیم رومانی، ۲۰۰۳ — سطح مقدماتی)

۱۷. a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲} \geq \frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{c}+\frac{c^۲}{a}$$

(پیشنهادی به المپیاد ریاضی بالکان، ۲۰۰۲— سطح مقدماتی)

۱۸. اگر $x_۱,x_۲,\ldots,x_n$ اعدادی مثبت با حاصل‌ضرب ۱ باشند و $n>۳$، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱+x_۱+x_۱x_۲}+\frac{۱}{۱+x_۲+x_۲x_۳}+\cdots+\frac{۱}{۱+x_n+x_nx_۱} > ۱$$

(روسیه، ۲۰۰۴)

۱۹. فرض کنید x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند که در شرط

$$x^۲+y^۲+z^۲+۲xyz=۱$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

الف) $xyz \leq \frac{۱}{۸}$

ب) $x+y+z \leq \frac{۳}{۲}$

ج) $xy+yz+zx \le \frac{۳}{۴} \le x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$

د) $xy+yz+zx \le \frac{۱}{۲}+۲xyz$

۲۰. برای اعداد حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ داریم $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۰$. ثابت کنید:

$$|\cos x_۱|+|\cos x_۲|+|\cos x_۳|+|\cos x_۴|+|\cos x_۵| \ge ۱$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۲۱. ثابت کنید اگر اعداد مثبت x، y و z در رابطه‌ی $x+y+z=xyz$ صدق کنند، آن‌گاه:

$$xy+xz+yz \ge ۳+\sqrt{x^{۲}+۱}+\sqrt{y^{۲}+۱}+\sqrt{z^{۲}+۱}$$

۲۲. برای هر سه عدد حقیقی $x,y,z>-۱$ ثابت کنید:

$$\frac{۱+x^{۲}}{۱+y+z^{۲}}+\frac{۱+y^{۲}}{۱+z+x^{۲}}+\frac{۱+z^{۲}}{۱+x+y^{۲}} \ge ۲$$

(المپیاد ریاضی بالکان، ۲۰۰۳– سطح مقدماتی)

۲۳. فرض کنید $a,b,c>۰$ و $a+b+c=۱$. نشان دهید:

$$\frac{a^{۲}+b}{b+c}+\frac{b^{۲}+c}{c+a}+\frac{c^{۲}+a}{a+b} \ge ۲$$

۲۴. a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی‌اند، به‌نحوی که $a^{۴}+b^{۴}+c^{۴} \le ۲(a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲})$. ثابت کنید:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \le ۲(ab+bc+ca)$$

(مجله‌ی کوانتوم، ۱۹۸۸)

۲۵. فرض کنید $n \ge ۲$ و $x_۱,x_۲,\ldots,x_n$ اعدادی حقیقی و مثبت‌اند که در رابطه‌ی

$$\frac{۱}{x_۱+۱۹۹۸}+\frac{۱}{x_۲+۱۹۹۸}+\cdots+\frac{۱}{x_n+۱۹۹۸}=\frac{۱}{۱۹۹۸}$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}}{n-۱} \ge ۱۹۹۸$$

(ویتنام، ۱۹۹۸)

۲۶. برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z داریم:

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = xyz$$

نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $xyz \geq ۲۷$

ب) $xy + yz + zx \geq ۲۷$

ج) $x + y + z \geq ۹$

د) $xy + yz + zx \geq ۲(x + y + z) + ۹$

۲۷. فرض کنید x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت با مجموع ۳ اند. نشان دهید:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

(روسیه، ۲۰۰۲)

۲۸. a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{a}{۲a+b+c} + \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{b}{۲b+c+a} + \frac{c+a}{a+b} \cdot \frac{c}{۲c+a+b} \geq \frac{۳}{۴}$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۲۹. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c نشان دهید نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a}$$

(هند، ۲۰۰۲)

۳۰. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{a^{۳}}{b^{۲} - bc + c^{۲}} + \frac{b^{۳}}{c^{۲} - ac + a^{۲}} + \frac{c^{۳}}{a^{۲} - ab + b^{۲}} \geq \frac{۳(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

(پیشنهادی به المپیاد ریاضی بالکان)

۳۱. اعداد صحیح و دوبه‌دو متمایز $x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n$ را در نظر بگیرید $(n \geq ۲)$. ثابت کنید:

$$x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} + \cdots + x_n^{۲} \geq x_{۱}x_{۲} + x_{۲}x_{۳} + \cdots + x_n x_{۱} + ۲n - ۳$$

۳۲. فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n$ اعدادی حقیقی و نامنفی با مجموع ۱ اند و نیز $n > ۲$. حداکثر مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$x_۱^۲ x_۲ + x_۲^۲ x_۳ + \cdots + x_{n-۱}^۲ x_n + x_n^۲ x_۱$$

(مجله‌ی Crux Mathematicorum)

۳۳. دنباله‌ی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ از اعداد حقیقی مثبت در شرط زیر صدق می‌کند:

$$x_{k+۱} \geq x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k; \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

کم‌ترین مقدار ثابت c را بیابید، به‌نحوی که نابرابری

$$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq c\sqrt{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}$$

به‌ازای همه‌ی مقادیر n برقرار باشد. (پیشنهادی به المپیاد جهانی ریاضیات، ۱۹۸۶)

۳۴. اعداد حقیقی و مثبت a، b، c، x، y و z در رابطه‌ی

$$a + x = b + y = c + z = ۱$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$(abc + xyz)\left(\frac{۱}{ay} + \frac{۱}{bz} + \frac{۱}{cx}\right) \geq ۳$$

(روسیه، ۲۰۰۲)

۳۵. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$\frac{ab}{a+b+۲c} + \frac{bc}{b+c+۲a} + \frac{ca}{c+a+۲b} \leq \frac{۱}{۴}(a+b+c)$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۳۶. a، b، c و d اعدادی حقیقی‌اند و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۱ است. حداکثر مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$a^۳(b+c+d) + b^۳(c+d+a) + c^۳(d+a+b) + d^۳(a+b+c)$$

۳۷. فرض کنید x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq ۱$$

(مجله‌ی Crux Mathematicorum)

۳۸. فرض کنید $n \geq ۲$ و $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ اعدادی حقیقی‌اند. نشان دهید:

$$a_۱ a_۲^۴ + a_۲ a_۳^۴ + \cdots + a_n a_۱^۴ \geq a_۲ a_۱^۴ + a_۳ a_۲^۴ + \cdots + a_۱ a_n^۴$$

(ایران، ۱۹۹۹)

۳۹. a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq ۴\Big(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\Big)$$

۴۰. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n > ۱$ اعدادی طبیعی‌اند. ثابت کنید حداقل یکی از اعداد

$$\sqrt[a_۱]{a_۲},\ \sqrt[a_۲]{a_۳}, \ldots,\ \sqrt[a_{n-۱}]{a_n},\ \sqrt[a_n]{a_۱}$$

کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt[۳]{۳}$ است. (برگرفته از یک مسئله‌ی مشهور)

۴۱. اعداد حقیقی و مثبت x، y و z در شرط

$$xy + yz + zx + ۲xyz = ۱$$

صدق می‌کنند. نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $xyz \leq \frac{۱}{۸}$

ب) $x + y + z \geq \frac{۳}{۲}$

ج) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \geq ۴(x+y+z)$

د) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} - ۴(x+y+z) \geq \frac{(۲z-۱)^۲}{z(۲z+۱)}$، که $z = \max\{x, y, z\}$.

۴۲. ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x، y و z داریم:

$$۳(x^۲y + y^۲z + z^۲x)(xy^۲ + yz^۲ + zx^۲) \geq xyz(x+y+z)^۳$$

۴۳. a، b و c اعدادی حقیقی‌اند، به‌نحوی که $\max\{a,b,c\} - \min\{a,b,c\} \leq ۱$. نشان دهید:

$$۱ + a^۳ + b^۳ + c^۳ + ٦abc \geq ۳a^۲b + ۳b^۲c + ۳c^۲a$$

۴۴. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c ثابت کنید:

$$۲۷ + \Big(۲ + \frac{a^۲}{bc}\Big)\Big(۲ + \frac{b^۲}{ca}\Big)\Big(۲ + \frac{c^۲}{ab}\Big) \geq ٦(a+b+c)\Big(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\Big)$$

۴۵. فرض کنید $a_{\circ} = \frac{۱}{۲}$ و $a_{k+۱} = a_k + \frac{a_k^۲}{n}$. ثابت کنید $۱ - \frac{۱}{n} < a_n < ۱$.

(انتخابی تیم سنگاپور)

۴۶. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت در بازه‌ی $(\circ, ۱)$ اند و $ab + bc + ca = ۱$. نشان دهید:

$$\frac{a}{۱-a^۲} + \frac{b}{۱-b^۲} + \frac{c}{۱-c^۲} \geq \frac{۳}{۴}\left(\frac{۱-a^۲}{a} + \frac{۱-b^۲}{b} + \frac{۱-c^۲}{c}\right)$$

۴۷. فرض کنید $x, y, z \leq ۱$ و $x + y + z = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱+x^۲} + \frac{۱}{۱+y^۲} + \frac{۱}{۱+z^۲} \leq \frac{۲۷}{۱\circ}$$

۴۸. ثابت کنید اگر $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = ۱$، آن‌گاه:

$$(۱-x)^۲(۱-y)^۲(۱-z)^۲ \geq ۲^{۱۵} xyz(x+y)(y+z)(z+x)$$

۴۹. برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z داریم $xyz = x + y + z + ۲$. نشان دهید:

الف) $xy + yz + zx \geq ۲(x + y + z)$

ب) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{۳}{۲}\sqrt{xyz}$

۵۰. اعداد حقیقی x، y و z در رابطه‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ صدق می‌کنند. نشان دهید:

$$x + y + z \leq xyz + ۲$$

(پیشنهادی به المپیاد جهانی ریاضیات، ۱۹۸۷)

۵۱. ثابت کنید برای هر n عدد $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in (\circ, ۱)$ و هر جایگشت σ از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱-x_i} \geq \left(۱ + \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n}\right) \cdot \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱ - x_i x_{\sigma(i)}}\right)$$

۵۲. فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به نحوی که $\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱+x_i} = ۱$. ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{n} \sqrt{x_i} \geq (n-۱) \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{x_i}}$$

(مسابقات ریاضی Vojtech Jarnik)

۵۳. $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعدادی حقیقی‌اند، به‌نحوی که: $(n > 3)$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2$$

ثابت کنید $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$. (المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۹۹)

۵۴. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d نشان دهید:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

۵۵. اگر x و y اعدادی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید $x^y + y^x > 1$. (فرانسه، ۱۹۹۶)

۵۶. ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب اعداد حقیقی و مثبت a، b و c برابر ۱ باشد، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

(دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی آمریکا، ۲۰۰۱)

۵۷. برای هر سه عدد $a, b, c > 0$ ثابت کنید:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc(ab+bc+ca)$$

۵۸. فرض کنید $a, b, c > 0$. نشان دهید:

$$3 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}$$

(مجله‌ی کوانتوم)

۵۹. ثابت کنید برای هر n عدد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \dots, x_n$ با حاصل‌ضرب ۱، نابرابری زیر برقرار است:

$$n^n \prod_{i=1}^{n} (x_i^n + 1) \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big)^n$$

۶۰. فرض کنید a، b، c و d اعدادی حقیقی و مثبت‌اند و $a + b + c = 1$. ثابت کنید:

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min\Big\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\Big\}$$

(مجله‌ی کوانتوم، ۱۹۹۳)

۶۱. ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی a، b و c نابرابری زیر برقرار است:

$$\sum (1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2 \geq (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

(ماهنامه‌ی ریاضیات آمریکا)

۶۲. فرض کنید α، x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که $xyz = 1$ و $\alpha \geq 1$. ثابت کنید:

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

۶۳. اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $y_1, y_2, \ldots, y_n$ در رابطه‌ی

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq 2\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)$$

(کره، ۲۰۰۱)

۶۴. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی طبیعی و دوبه‌دو متمایزند. ثابت کنید:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

(انتخابی تیم رومانی)

۶۵. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که $a+b+c=1$. ثابت کنید:

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ca})} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

۶۶. a، b، c و d اعدادی حقیقی‌اند، به نحوی که:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16$$

ثابت کنید:

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5$$

۶۷. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c نشان دهید:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

(المپیاد ریاضی آسیا— اقیانوسیه، ۲۰۰۴)

۶۸. ثابت کنید اگر $0 < x \leq y \leq z$ و $x+y+z = xyz+2$، آن‌گاه:

الف) $(1-xy)(1-yz)(1-zx) \geq 0$

ب) $x^2y \leq 1$ و $x^3y^2 \leq \frac{32}{27}$

۶۹. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که $a+b+c \geq abc$. ثابت کنید حداقل دو تا از نابرابری‌های زیر، برقرارند:

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c} \geq 6, \quad \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a} \geq 6, \quad \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b} \geq 6$$

(انتخابی تیم آمریکا، ۲۰۰۱)

۷۰. اعداد حقیقی و مثبت x، y و z در رابطه‌ی

$$x+y+z = xyz$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3}-10$$

۷۱. ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c داریم:

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\right| \leq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}$$

(انتخابی تیم مولداوی، ۲۰۰۴)

۷۲. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geq (a+b+c)^3$$

(المپیاد ریاضی آمریکا، ۲۰۰۴)

۷۳. اعداد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>2)$ در رابطه‌ی

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) = n^2+1$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}\right) > n^2+4+\frac{2}{n(n-1)}$$

۷۴. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

۷۵. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

(المپیاد ریاضی آمریکا، ۲۰۰۳)

۷۶. فرض کنید x و y اعدادی حقیقی و مثبت، و m و n اعدادی طبیعی‌اند. نشان دهید:

$$\begin{aligned}(n-1)(m-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m)\\ \geq mn(x^{m+n-1}y+y^{m+n-1}x)\end{aligned}$$

(رقابت‌های ریاضی اتریش-لهستان، ۱۹۹۵)

۷۷. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b، c، d و e داریم $abcde=1$. ثابت کنید:

$$\begin{aligned}\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}\\ +\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\geq\frac{10}{3}\end{aligned}$$

(مجله‌ی Crux Mathematicorum)

۷۸. ثابت کنید برای هر $a,b,c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}\frac{\sin a\cdot\sin(a-b)\cdot\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b\cdot\sin(b-c)\cdot\sin(b-a)}{\sin(c+a)}\\ +\frac{\sin c\cdot\sin(c-a)\cdot\sin(c-b)}{\sin(a+b)}\geq 0\end{aligned}$$

(انتخابی تیم آمریکا، ۲۰۰۳)

۷۹. نشان دهید اگر a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

(دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی کره، ۲۰۰۱)

۸۰. برای عدد مفروض $n>2$، کم‌ترین مقدار ثابت k_n را طوری بیابید که برای هر n عدد حقیقی و مثبت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ با حاصل‌ضرب ۱ داشته باشیم:

$$\frac{a_1a_2}{(a_1^2+a_2)(a_2^2+a_1)}+\frac{a_2a_3}{(a_2^2+a_3)(a_3^2+a_2)}+\cdots+\frac{a_na_1}{(a_n^2+a_1)(a_1^2+a_n)}\leq k_n$$

۸۱. نشان دهید برای اعداد حقیقی a، b، c، x، y و z نابرابری زیر برقرار است:

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)} \geq \frac{۲}{۳}(a+b+c)(x+y+z)$$

(مجله‌ی کوانتوم، ۱۹۸۹)

۸۲. a، b و c طول اضلاع یک مثلث‌اند. نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$۳\Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-۱\Big) \geq ۲\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big)$$

۸۳. مجموع اعداد حقیقی و مثبت $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ $(n > ۲)$ برابر ۱ است. نشان دهید:

$$\prod_{i=۱}^{n}\Big(۱+\frac{۱}{x_i}\Big) \geq \prod_{i=۱}^{n}\Big(\frac{n-x_i}{۱-x_i}\Big)$$

(مجله‌ی Crux Mathematicorum)

۸۴. فرض کنید اعداد حقیقی و مثبت $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ در رابطه‌ی $x_۱x_۲\ldots x_n = ۱$ صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{n-۱+x_۱}+\frac{۱}{n-۱+x_۲}+\cdots+\frac{۱}{n-۱+x_n} \leq ۱$$

(انتخابی تیم رومانی، ۱۹۹۹)

۸۵. نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی و نامنفی a، b و c که در رابطه‌ی $a^۲+b^۲+c^۲+abc=۴$ صدق می‌کنند، داریم:

$$۰ \leq ab+bc+ca-abc \leq ۲$$

(المپیاد ریاضی آمریکا، ۲۰۰۱)

۸۶. نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a+b+c}{۳}-\sqrt[۳]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲\}$$

(انتخابی تیم آمریکا، ۲۰۰۳)

۸۷. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[۳]{abc}}{۳} \leq \sqrt[۳]{a\cdot\frac{a+b}{۲}\cdot\frac{a+b+c}{۳}}$$

۸۸. بیش‌ترین مقدار ثابت k را بیابید، به‌نحوی که برای هر عدد طبیعی و غیر مربع کامل مانند n، داشته باشیم:

$$|(۱+\sqrt{n})\sin(\pi\sqrt{n})| > k$$

(اردوی آمادگی ویتنام برای المپیاد جهانی، ۱۹۹۵)

۸۹. برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z داریم $(x+y+z)^۳ = ۳۲xyz$. حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{x^۴+y^۴+z^۴}{(x+y+z)^۴}$ را به‌دست آورید. (ویتنام، ۲۰۰۴)

۹۰. برای هر چهار عدد $a,b,c,d > ۰$ نشان دهید:

$$(a+b)^۳(b+c)^۳(c+d)^۳(d+a)^۳ \geq ۱۶a^۲b^۲c^۲d^۲(a+b+c+d)^۴$$

(مجله‌ی Crux Mathematicorum)

۹۱. a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی با مجموع ۱ اند و n عددی طبیعی است. حداکثر مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{(ab)^n}{۱-ab} + \frac{(bc)^n}{۱-bc} + \frac{(ca)^n}{۱-ca}$$

۹۲. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a(۱+b)} + \frac{۱}{b(۱+c)} + \frac{۱}{c(۱+a)} \geq \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}(۱+\sqrt[۳]{abc})}$$

۹۳. برای هر سه عدد حقیقی a، b و c با شرط $a^۲+b^۲+c^۲ = ۹$ نشان دهید:

$$۲(a+b+c) - abc \leq ۱۰$$

(ویتنام، ۲۰۰۲)

۹۴. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\left(a+\frac{۱}{b}-۱\right)\left(b+\frac{۱}{c}-۱\right)+\left(b+\frac{۱}{c}-۱\right)\left(c+\frac{۱}{a}-۱\right)+\left(c+\frac{۱}{a}-۱\right)\left(a+\frac{۱}{b}-۱\right) \geq ۳$$

۹۵. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ است. بزرگ‌ترین عدد حقیقی m_n و کوچک‌ترین عدد حقیقی M_n را طوری بیابید که برای هر n عدد حقیقی و مثبت $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ داشته باشیم: ($x_n = x_۰$ و $x_{n+۱} = x_۱$)

$$m_n \leq \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{x_{i-۱} + ۲(n-۱)x_i + x_{i+۱}} \leq M_n$$

۹۶. اگر x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y^2+yz+z^2}+\frac{1}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۹۷. برای هر چهار عدد $a,b,c,d>0$ ثابت کنید:

$$2(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(d^3+1)\geq(1+abcd)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۹۸. a، b و c اعدادی حقیقی‌اند. ثابت کنید:

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq\frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

(انتخابی تیم ویتنام، ۱۹۹۶)

۹۹. a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت با حاصل‌ضرب ۱ اند. نشان دهید:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$$

(بلغارستان، ۱۹۹۷)

۱۰۰. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c داریم $21ab+2bc+8ca\leq 12$. حداقل مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$$

(ویتنام، ۲۰۰۱)

۱۰۱. اعداد حقیقی و مثبت a، b، c، x، y و z در رابطه‌ی $xy+yz+zx=3$ صدق می‌کنند. ثابت کنید:

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\geq 3$$

۱۰۲. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

(ژاپن، ۱۹۹۷)

۱۰۳. ثابت کنید اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$، آن‌گاه:

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n - na_1a_2\ldots a_n \geq (n-1)\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} - a_n\right)^n$$

که a_n کوچک‌ترین عدد در میان $a_1, a_2, \ldots, a_n$ است.

۱۰۴. برای هر چهار عدد حقیقی و مثبت x، y، z و t ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2 + x^2z^2 + y^2t^2$$

(مجله‌ی کوانتوم)

۱۰۵. نشان دهید برای هر n عدد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j$$

۱۰۶. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعدادی حقیقی در بازه‌ی $[1001, 2002]$ اند و داریم:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{a_1^3}{b_1} + \frac{a_2^3}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^3}{b_n} \leq \frac{17}{10}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

(انتخابی تیم سنگاپور)

۱۰۷. نشان دهید اگر a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت با مجموع ۱ باشند، آن‌گاه:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

۱۰۸. برای اعداد حقیقی و مثبت a، b، c و d داریم $abcd = 1$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۱۰۹. فرض کنید a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۱۱۰. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$ است. نشان دهید:

$$\left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j)^2$$

۱۱۱. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_{2004}$ اعدادی حقیقی در بازه‌ی $[-1, 1]$ اند، به‌نحوی که $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2004}^3 = 0$. حداکثر مقدار عبارت $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004}$ را به‌دست آورید.

۱۱۲. ثابت کنید اگر $n \geq 2$ و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی با حاصل‌ضرب ۱ باشند، آن‌گاه:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \geq \frac{2n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n)$$

۱۱۳. a، b و c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

(مجله‌ی ریاضیات)

۱۱۴. ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x، y و z نابرابری زیر برقرار است:

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

(ایران، ۱۹۹۶)

۱۱۵. برای هر دو عدد حقیقی x و y در بازه‌ی $[0, 1]$ ثابت کنید:

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \geq (1 + \sqrt{5})(1 - xy)$$

۱۱۶. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + n a_1 a_2 \ldots a_n \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1})$$

(رقابت‌های ریاضی Miklos Schweitzer)

۱۱۷. برای اعداد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با حاصل‌ضرب ۱ نشان دهید:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n$$

(تعمیمی از نابرابری تورکویکی)

۱۱۸. برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$ داریم:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n < \frac{1}{n-1}, \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$$

حداقل مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{1 - (n-1)a_i}}$$

۱۱۹. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$ اعدادی حقیقی و نامنفی‌اند، به‌نحوی که:

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ثابت کنید:

$$\frac{a_1}{1 - a_1^2} + \frac{a_2}{1 - a_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{1 - a_n^2} \geq \frac{na}{1 - a^2}$$

۱۲۰. a، b، c، x، y و z اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، به‌نحوی که:

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$$

نشان دهید:

$$abcxyz < \frac{1}{36}$$

۱۲۱. برای عدد مفروض $n > 2$، حداقل مقدار ثابت k_n را طوری بیابید که اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ اعدادی با حاصل‌ضرب ۱ باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_n}} \leq n - 1$$

(مسابقات Mathlinks)

۱۲۲. برای عدد مفروض $n > 2$، حداکثر مقدار ثابت k_n را طوری بیابید که برای هر n عدد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با شرط $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\cdots(1 - x_n) \geq k x_1 x_2 \ldots x_n$$

فصل ۲

پاسخ‌ها

۱. **راه‌حل اول.** با به کار بردن نابرابری مینکوفسکی برای طرف چپ نابرابری، داریم:

$$\sqrt{a^۲+(۱-b)^۲}+\sqrt{b^۲+(۱-c)^۲}+\sqrt{c^۲+(۱-a)^۲} \geq \sqrt{(a+b+c)^۲+(۳-a-b-c)^۲}$$

با جایگذاری $a+b+c=x$ خواهیم داشت:

$$(a+b+c)^۲+(۳-a-b-c)^۲=۲\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲+\frac{۹}{۲}\geq\frac{۹}{۲}$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$\sqrt{a^۲+(۱-b)^۲}+\sqrt{b^۲+(۱-c)^۲}+\sqrt{c^۲+(۱-a)^۲} \geq \frac{|a|+|۱-b|}{\sqrt{۲}}+\frac{|b|+|۱-c|}{\sqrt{۲}}+\frac{|c|+|۱-a|}{\sqrt{۲}}$$

حال از آن‌جایی که برای هر عدد حقیقی x داریم $|x|+|۱-x|\geq ۱$، حداقل عبارت به‌دست آمده برابر است با $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$.

۲. **راه‌حل اول.** توجه کنید که برای هر $x\in(۰,۱)$ داریم $x^{\frac{۱}{۲}}<x^{\frac{۱}{۳}}$. بنابراین:

$$\sqrt{abc}<\sqrt[۳]{abc}\leq\frac{a+b+c}{۳}$$

و
$$\sqrt{(\text{۱}-a)(\text{۱}-b)(\text{۱}-c)} < \sqrt[\text{۳}]{(\text{۱}-a)(\text{۱}-b)(\text{۱}-c)} \le \frac{(\text{۱}-a)+(\text{۱}-b)+(\text{۱}-c)}{\text{۳}}$$

با جمع بستن این دو نامساوی، نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(\text{۱}-a)(\text{۱}-b)(\text{۱}-c)} < \frac{a+b+c+\text{۱}-a+\text{۱}-b+\text{۱}-c}{\text{۳}} = \text{۱}$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

راه‌حل دوم. داریم:

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(\text{۱}-a)(\text{۱}-b)(\text{۱}-c)} < \sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{\text{۱}-b}\cdot\sqrt{\text{۱}-c}$$

از طرفی با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز می‌توان نوشت:

$$\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{\text{۱}-b}\cdot\sqrt{\text{۱}-c} \le \sqrt{(b+\text{۱}-b)(c+\text{۱}-c)} = \text{۱}$$

راه‌حل سوم. فرض کنید $a=\sin^\text{۲} x$، $b=\sin^\text{۲} y$ و $c=\sin^\text{۲} z$، که $x,y,z\in\left(\text{۰},\frac{\pi}{\text{۲}}\right)$.
با این تغییر متغیر، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z < \text{۱}$$

حال حکم مسئله از نابرابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z < \sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y = \cos(x-y) \le \text{۱}$$

۳. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}} &\ge \text{۲}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)\\ &= \left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\\ &\ge \text{۲}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\text{۳}\sqrt[\text{۳}]{abc} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\text{۳}\end{aligned}$$

۴. **راه‌حل.** فرض کنید x ریشه‌ای حقیقی از معادله است. با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$a^\text{۲}+b^\text{۲} \ge \frac{(x^\text{۴}+\text{۲}x^\text{۲}+\text{۱})^\text{۲}}{x^\text{۲}+x^\text{۶}} \ge \text{۸}$$

توجه کنید که نابرابری آخر، از آن‌جا به‌دست آمده است که پس از ساده کردن نابرابری، به نتیجه‌ی $(x^\text{۲}-\text{۱})^\text{۴} \ge \text{۰}$ می‌رسیم.

۵. راه‌حل. فرض کنید $t = xy + yz + zx$. توجه کنید که

$$(x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz)^۲ = (x+y+z)^۲(۱-xy-yz-zx)^۲ = (۱+۲t)(۱-t)^۲$$

هم‌چنین می‌دانیم $-\frac{۱}{۲} \le t \le ۱$. در نتیجه می‌بایست حداکثر مقدار عبارت $(۱+۲t)(۱-t)^۲$ را در حالت $-\frac{۱}{۲} \le t \le ۱$ به‌دست آوریم. در این حالت، به وضوح داریم:

$$(۱+۲t)(t-۱)^۲ \le ۱ \Leftrightarrow t^۲(۳-۲t) \ge ۰$$

بنابراین $|x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz| \le ۱$ و تساوی به‌ازای $x = ۱$ و $y = z = ۰$ اتفاق می‌افتد. پس حداکثر مقدار این عبارت، برابر ۱ است.

۶. راه‌حل اول. دو بار از نابرابری کوشی — شوارتز استفاده می‌کنیم. نخست توجه کنید که:

$$ax+by+cz \le \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\cdot\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

حال با استفاده‌ی مجدد از نابرابری کوشی — شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} ax+by+cz &+ ۲\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \\ &\le \sqrt{\sum a^۲}\cdot\sqrt{\sum x^۲}+\sqrt{۲\sum ab}\cdot\sqrt{۲\sum xy} \\ &\le \sqrt{x^۲+۲\sum xy}\cdot\sqrt{a^۲+۲\sum ab}=\sum a \end{aligned}$$

راه‌حل دوم. نابرابری نسبت به a, b, c همگن است. بنابراین می‌توان فرض کرد $a+b+c = ۱$. با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی — هندسی داریم:

$$\begin{aligned} ax+by+cz+۲\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \\ \le ax+by+cz+xy+yz+zx+ab+bc+ca \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} xy+yz+zx+ab+bc+ca &= \frac{۱-x^۲-y^۲-z^۲}{۲}+\frac{۱-a^۲-b^۲-c^۲}{۲} \\ &\le ۱-ax-by-cz \end{aligned}$$

نابرابری آخر هم‌ارز است با $(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲ \ge ۰$. با جمع بستن دو نابرابری فوق، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۷. راه‌حل اول. نابرابری را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b+c)^۲}+\frac{b}{(c+a)^۲}+\frac{c}{(a+b)^۲}\Big) \ge \frac{۹}{۴}$$

با استفاده از نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b+c)^{۲}}+\frac{b}{(c+a)^{۲}}+\frac{c}{(a+b)^{۲}}\Big)\geq\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)^{۲}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{۳}{۲}$$

که این نابرابری نیز، نابرابری مشهوری است.

راه‌حل دوم. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a+b+c=۱$. حال تابع $f:(۰,۱)\to(۰,\infty)$ را با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{(۱-x)^{۲}}$ در نظر بگیرید. با محاسبه‌ی مشتق تابع f می‌توان نشان داد که f محدب است. در نتیجه با استفاده از نابرابری ینسن حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۸. **راه‌حل.** اثبات را با نابرابری $(a^{۲}-b^{۲})^{۲}\geq ۰$ شروع می‌کنیم. این نابرابری را می‌توان به‌صورت $۴a^{۴}+۴a^{۲}b^{۲}+۴b^{۴}\geq ۳a^{۴}+۶a^{۲}b^{۲}+۳b^{۴}$ بازنویسی کرد. بنابراین $\sqrt{a^{۴}+a^{۲}b^{۲}+b^{۴}}\geq\frac{\sqrt{۳}}{۲}(a^{۲}+b^{۲})$.

با استفاده از نابرابری به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم:

$$\Big(\sum\sqrt{a^{۴}+a^{۲}b^{۲}+b^{۴}}\Big)^{۲}\geq ۳\Big(\sum a^{۲}\Big)^{۲}$$

اما طبق نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$\Big(\sum a\sqrt{۲a^{۲}+bc}\Big)^{۲}\leq\Big(\sum a^{۲}\Big)\Big(\sum(۲a^{۲}+bc)\Big)\leq ۳\Big(\sum a^{۲}\Big)^{۲}$$

به این ترتیب، نابرابری مسئله ثابت می‌شود.

۹. **راه‌حل اول.** با استفاده از نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$۳(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})\geq(a+b+c)^{۲}\qquad(۱)$$

و

$$(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})^{۲}\leq(a+b+c)(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})\qquad(۲)$$

با ترکیب این دو نابرابری نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}&\geq\frac{(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})(a+b+c)}{۳}\\&=\frac{(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})[(b+c)+(a+c)+(a+b)]}{۶}\\&\geq\frac{(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^{۲}}{۶}\qquad(۳)\end{aligned}$$

از طرفی طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b} &\geq ۳\sqrt[۳]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\ &\geq ۳\sqrt[۳]{abc\sqrt{۸abc}} = ۳\sqrt[۳]{۸} = ۶ \end{aligned}$$

بنابراین:

$$(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b})^{۲} \geq ۶(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}) \quad (۴)$$

از روابط (۳) و (۴) نابرابری مسئله به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. داریم:

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{۲(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})(a+b+c)}$$

حال با استفاده از نابرابری چبیشف نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{۲(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})(a+b+c)} \leq \sqrt{۶(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳})}$$

در نتیجه تنها کافیست ثابت کنیم $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳} \geq ۳abc$، که این نابرابری نیز از نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی نتیجه می‌شود. تساوی نیز تنها در شرایطی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a=b=c=\sqrt[۳]{۲}$.

۱۰. **راه‌حل.** ابتدا نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱+۳x)\left(۱+\frac{۸y}{x}\right)\left(۱+\frac{۹z}{y}\right)\left(۱+\frac{۶}{z}\right) \geq ۷^{۴}$$

طبق نابرابری هویگنس داریم:

$$\begin{aligned} (۱+۳x)^{\frac{۱}{۴}}\left(۱+\frac{۸y}{x}\right)^{\frac{۱}{۴}}\left(۱+\frac{۹z}{y}\right)^{\frac{۱}{۴}}\left(۱+\frac{۶}{z}\right)^{\frac{۱}{۴}} &\geq ۱+(۳x)^{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۸y}{x}\right)^{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۹z}{y}\right)^{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۶}{z}\right)^{\frac{۱}{۴}} \\ &= ۱+۳^{\frac{۱}{۴}}\cdot۸^{\frac{۱}{۴}}\cdot۹^{\frac{۱}{۴}}\cdot۶^{\frac{۱}{۴}} = ۷ \end{aligned}$$

تساوی نیز در حالتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $x=۲$، $y=\frac{۳}{۲}$ و $z=۱$.

۱۱. **راه‌حل.** از آن‌جایی که $a+b+c=۱$، داریم:

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳} = ۳abc+a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-bc-ca$$

بنابراین، نامساوی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} ۵(a^۲+b^۲+c^۲) &\leq ۱۸abc+۶(a^۲+b^۲+c^۲)-۶(ab+bc+ca)+۱ \\ &\Leftrightarrow ۱۸abc+۱-۲(ab+bc+ca)+۱ \geq ۶(ab+bc+ca) \\ &\Leftrightarrow ۸(ab+bc+ca) \leq ۲+۱۸abc \\ &\Leftrightarrow ۴(ab+bc+ca) \leq ۱+۹abc \\ &\Leftrightarrow (۱-۲a)(۱-۲b)(۱-۲c) \leq abc \\ &\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \end{aligned}$$

نابرابری به‌دست آمده نیز، هم‌ارز با نابرابری شور است.

۱۲. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$(a-x_۱)^۲ \leq (n-۱)(x_۲^۲+x_۳^۲+\cdots+x_n^۲) \leq (n-۱)\left(\frac{a^۲}{n-۱}-x_۱^۲\right)$$

بنابراین:

$$a^۲-۲ax_۱+x_۱^۲ \leq a^۲-(n-۱)x_۱^۲ \Leftrightarrow x_۱\left(x_۱-\frac{۲a}{n}\right) \leq ۰$$

به این ترتیب حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۱۳. **راه‌حل.** از این‌که $a,b,c \in (۱,۲)$ نتیجه می‌گیریم که همه‌ی مخرج‌ها اعدادی مثبت‌اند. بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{b\sqrt{a}}{۴b\sqrt{c}-c\sqrt{a}} \geq \frac{a}{a+b+c} &\Leftrightarrow b(a+b+c) \geq \sqrt{a}(۴b\sqrt{c}-c\sqrt{a}) \\ &\Leftrightarrow (a+b)(b+c) \geq ۴b\sqrt{ac} \end{aligned}$$

نابرابری آخر نیز از نابرابری‌های $a+b \geq ۲\sqrt{ab}$ و $b+c \geq ۲\sqrt{bc}$ نتیجه شده است. با نوشتن دو نابرابری مشابه دیگر و جمع بستن این سه نابرابری، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۱۴. **راه‌حل اول.** اگر $ab+bc+ca \leq a+b+c$، آن‌گاه طبق نابرابری کوشی – شوارتز خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = \frac{a^۲c+b^۲a+c^۲b}{abc} \geq \frac{\frac{(a+b+c)^۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}}{abc} \geq a+b+c$$

در غیر این‌صورت، باز هم با استفاده از نابرابری کوشی — شوارتز داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^{۲}c+b^{۲}a+c^{۲}b}{abc}\geq\frac{\frac{(ab+bc+ca)^{۲}}{a+b+c}}{abc}\geq a+b+c$$

(توجه کنید که در انتهای این نابرابری‌ها از فرض $abc \leq ۱$ استفاده کرده‌ایم.)

راه‌حل دوم. اگر a، b و c را با ta، tb و tc جایگزین کنیم، که $t=\frac{۱}{\sqrt[۳]{abc}}$، مقدار عبارت سمت چپ نابرابری تغییر نمی‌کند، در حالی که مقدار عبارت سمت راست افزایش می‌یابد. از طرفی خواهیم داشت $at\cdot bt\cdot ct=abct^{۳}=۱$. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $abc=۱$. در این‌صورت اعداد حقیقی و مثبتی مانند x، y و z وجود دارند، به‌نحوی که $a=\frac{y}{x}$، $b=\frac{z}{y}$ و $c=\frac{x}{z}$. حال با استفاده از نابرابری جایگشتی داریم:

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}\geq x^{۲}y+y^{۲}z+z^{۲}x$$

در نتیجه:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}}{xyz}\geq\frac{x^{۲}y+y^{۲}z+z^{۲}x}{xyz}=a+b+c$$

و مسئله حل می‌شود.

راه‌حل سوم. طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی — هندسی داریم:

$$\frac{۲a}{b}+\frac{b}{c}\geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}}{bc}}\geq ۳a$$

به همین ترتیب $\frac{۲b}{c}+\frac{c}{a}\geq ۳b$ و $\frac{۲c}{a}+\frac{a}{b}\geq ۳c$. با جمع بستن این سه نابرابری، بلافاصله حکم مسئله نتیجه می‌شود.

راه‌حل چهارم. فرض کنید $x=\sqrt[۹]{\frac{ab^{۴}}{c^{۲}}}$، $y=\sqrt[۹]{\frac{ca^{۴}}{b^{۲}}}$ و $z=\sqrt[۹]{\frac{bc^{۴}}{a^{۲}}}$. بنابراین $a=xy^{۲}$، $b=zx^{۲}$ و $c=yz^{۲}$ و نیز $xyz\leq ۱$.

به این ترتیب با استفاده از نابرابری جایگشتی خواهیم داشت:

$$\sum\frac{a}{b}=\sum\frac{x^{۲}}{yz}\geq xyz\sum\frac{x^{۲}}{yz}=\sum x^{۳}\geq\sum xy^{۲}=\sum a$$

۱۵. **راه‌حل.** داریم:

$$\begin{aligned}ay+bx-ac-xz &= a(y-c)+x(b-z)\\ &= a(a+b-x-z)+x(b-z)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(a-x)+(a+x)(b-z)\\
&= \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a^2-x^2)+(a+x)(b-z)\\
&= \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a+x)(a-x+2b-2z)\\
&= \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a+x)(b-c+y-z)\geq 0
\end{aligned}
$$

تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a=x$، $b=z$، $c=y$ و $2x\geq y+z$.

۱۶. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $x=\frac{1}{a}$، $y=\frac{1}{b}$ و $z=\frac{1}{c}$. توجه کنید که $xyz=1$. در این‌صورت نابرابری مسئله هم‌ارز است با:

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq\frac{6}{x+y+z}$$

از نابرابری $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ نتیجه می‌گیریم:

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\geq\frac{6}{x+y+z}$$

این نابرابری نیز هم‌ارز است با $\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\geq 0$ و اثباتمان کامل می‌شود.

۱۷. **راه‌حل اول.** داریم:

$$\frac{a^3}{b^2}\geq\frac{a^2}{b}+a-b\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a-b)^2(a+b)\geq 0$$

با نوشتن نابرابری‌های مشابه و جمع بستن آن‌ها با هم، خواهیم داشت:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+a-b+\frac{b^2}{c}+b-c+\frac{c^2}{a}+c-a=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

راه‌حل دوم. با استفاده از نابرابری کوشی — شوارتز داریم:

$$(a+b+c)\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)\geq\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$$

بنابراین فقط می‌بایست ثابت کنیم:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

این نابرابری نیز مستقیماً از نابرابری کوشی — شوارتز نتیجه می‌شود.

۱۸. **راه‌حل.** از تغییر متغیر کلاسیک $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$، $x_2 = \frac{a_3}{a_2}$، ... و $x_n = \frac{a_1}{a_n}$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2}>1$$

این نابرابری نیز واضح است، چرا که $n>3$ و برای هر i، داریم:

$$a_i+a_{i+1}+a_{i+2}<a_1+a_2+\cdots+a_n$$

۱۹. **راه‌حل.**

الف) این قسمت، بسیار ساده است. با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی داریم:

$$1=x^2+y^2+z^2+2xyz\geq 4\sqrt[4]{2x^3y^3z^3}\Rightarrow x^3y^3z^3\leq\frac{1}{2\times 4^4}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{8}$$

ب) به‌وضوح باید داشته باشیم $x,y,z\in(0,1)$. اگر قرار دهیم $s=x+y+z$، از رابطه‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم:

$$s^2-2s+1=2(1-x)(1-y)(1-z)$$

$1-x$، $1-y$ و $1-z$ اعدادی مثبت‌اند. در نتیجه اگر نابرابری واسطه حسابی– هندسی را برای آن‌ها به کار بریم، خواهیم داشت:

$$s^2-2s+1\leq 2\Big(\frac{1-x+1-y+1-z}{3}\Big)^3=2\Big(\frac{3-s}{3}\Big)^3$$

بعد از ساده کردن عبارت‌ها داریم:

$$2s^3+9s^2-27\leq 0\Leftrightarrow(2s-3)(s+3)^2\leq 0$$

به این ترتیب نابرابری مورد نظر به‌دست می‌آید.

ج) این نابرابری‌ها، به‌راحتی از قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌شوند:

$$xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}\leq\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

و

$$x^2+y^2+z^2=1-2xyz\geq 1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

د) این نابرابری، از نابرابری‌های قبلی قوی‌تر است؛ ابتدا توجه کنید که همواره دو تا از سه عدد x، y و z بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ (و یا کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$) اند. به دلیل تقارن فرض مسئله، می‌توانیم فرض کنیم $x,y \leq \frac{1}{2}$ یا $x,y \geq \frac{1}{2}$. در هر دو حالت داریم:

$$(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Leftrightarrow x+y-2xy \leq \frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} 1 &= x^2+y^2+z^2+2xyz \geq 2xy+z^2+2xyz \\ &\Rightarrow 2xy(1+z) \leq 1-z^2 \Rightarrow 2xy \leq 1-z \end{aligned}$$

حال اگر طرفین نابرابری‌های

$$x+y-2xy \leq \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad z \leq 1-2xy$$

را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌گیریم:

$$xz+yz-2xyz \leq \frac{1}{2}-xy \Leftrightarrow xy+xz+yz \leq \frac{1}{2}+2xyz$$

به‌عنوان یک نکته‌ی جانبی که البته نقشی در اثبات بالا ندارد، توجه کنید که

$$x+y-2xy = xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-2\right) > 0$$

این نابرابری از آن‌جا ناشی شده است که اعداد $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ هر دو از ۱ بزرگ‌ترند.

ملاحظه.

۱) با استفاده از نابرابری

$$z+2xy \leq 1$$

و دو نابرابری مشابه آن، یعنی

$$y+2xz \leq 1, \qquad x+2yz \leq 1$$

می‌توان نامساوی‌های دیگری نیز به‌دست آورد. به‌عنوان مثال با ضرب این سه نابرابری به ترتیب در z، y و x و جمع کردن نابرابری‌های به‌دست آمده، خواهیم داشت:

$$x^2+y^2+z^2+6xyz \leq x+y+z$$

و یا به‌صورت معادل:

$$۱ + ۴xyz \leq x + y + z$$

۲) اگر ABC مثلثی دلخواه باشد، اعداد

$$x = \sin\frac{A}{۲}, \qquad y = \sin\frac{B}{۲}, \qquad z = \sin\frac{C}{۲}$$

در شرط مسئله صدق می‌کنند؛ برعکس، اگر اعداد مثبت x، y و z در رابطه‌ی

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xyz = ۱$$

صدق کنند، آن‌گاه مثلثی مانند ABC وجود دارد، به‌نحوی که:

$$x = \sin\frac{A}{۲}, \qquad y = \sin\frac{B}{۲}, \qquad z = \sin\frac{C}{۲}$$

با این تغییر متغیر، می‌توان اثبات‌های جدیدی برای نابرابری‌های مسئله به‌دست آورد.

۲۰. **راه‌حل.** به راحتی می‌توان نشان داد که

$$|\sin(x+y)| \leq \min\{|\cos x| + |\cos y|, |\sin x| + |\sin y|\}$$

و نیز

$$|\cos(x+y)| \leq \min\{|\sin x| + |\cos y|, |\sin y| + |\cos x|\}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$۱ = |\cos\sum_{i=۱}^{۵} x_i| \leq |\cos x_۱| + |\sin\sum_{i=۲}^{۵} x_i| \leq |\cos x_۱| + |\cos x_۲| + |\cos(x_۳ + x_۴ + x_۵)|$$

به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد:

$$|\cos(x_۳ + x_۴ + x_۵)| \leq |\cos x_۳| + |\cos x_۴| + |\cos x_۵|$$

به این ترتیب حکم مسئله به‌دست می‌آید.

۲۱. **راه‌حل اول.** داریم:

$$xyz = x + y + z \geq ۲\sqrt{xy} + z \Rightarrow z(\sqrt{xy})^۲ - ۲\sqrt{xy} - z \geq ۰$$

از آن‌جایی که ریشه‌ی مثبت چندجمله‌ای $zt^{2} - 2t - z$ برابر است با

$$\frac{1+\sqrt{1+z^{2}}}{z}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{1+\sqrt{1+z^{2}}}{z} \Leftrightarrow z\sqrt{xy} \geq 1+\sqrt{1+z^{2}}$$

به همین ترتیب می‌توان دو نابرابری مشابه دیگر نیز به‌دست آورد. بنابراین:

$$\begin{aligned} xy+xz+yz &\geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy} \\ &\geq 3+\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{y^{2}+1}+\sqrt{z^{2}+1} \end{aligned}$$

در نتیجه هم نابرابری مسئله ثابت می‌شود و هم نابرابری قوی‌تری به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. به روش دیگری نیز می‌توان این نابرابری را قوی‌تر کرد. ابتدا کار را با نابرابری

$$\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{y^{2}}+\frac{1}{z^{2}} \geq \frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz} = 1 \Rightarrow x^{2}y^{2}+x^{2}z^{2}+y^{2}z^{2} \geq x^{2}y^{2}z^{2}$$

شروع می‌کنیم. این نابرابری هم‌ارز است با:

$$(xy+xz+yz)^{2} \geq 2xyz(x+y+z)+x^{2}y^{2}z^{2} = 3(x+y+z)^{2}$$

علاوه براین،

$$\begin{aligned} (xy+xz+yz-3)^{2} &= (xy+xz+yz)^{2}-6(xy+xz+yz)+9 \\ &\geq 3(x+y+z)^{2}-6(xy+xz+yz)+9 \\ &= 3(x^{2}+y^{2}+z^{2})+9 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$xy+xz+yz \geq 3+\sqrt{3(x^{2}+y^{2}+z^{2})+9}$$

اما:

$$\sqrt{3(x^{2}+y^{2}+z^{2})+9} \geq \sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{y^{2}+1}+\sqrt{z^{2}+1}$$

نابرابری فوق از نامساوی کوشی—شوارتز نتیجه شده است. به این ترتیب نتیجه‌ی قوی‌تر زیر ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} xy+xz+yz &\geq 3+\sqrt{3(x^{2}+y^{2}+z^{2})+9} \\ &\geq 3+\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{y^{2}+1}+\sqrt{z^{2}+1} \end{aligned}$$

۲۲. راه‌حل. ابتدا توجه کنید که $y \leq \frac{۱+y^{۲}}{۲}$ و $۱+y+z^{۲} > ۰$. بنابراین:

$$\frac{۱+x^{۲}}{۱+y+z^{۲}} \geq \frac{۱+x^{۲}}{۱+z^{۲}+\frac{۱+y^{۲}}{۲}}$$

به همین ترتیب نابرابری‌های مشابه دیگری نیز حاصل می‌شود. قرار می‌دهیم $a=۱+x^{۲}$، $b=۱+y^{۲}$ و $c=۱+z^{۲}$. اکنون کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{a}{۲c+b}+\frac{b}{۲a+c}+\frac{c}{۲b+a} \geq ۱ \qquad (۱)$$

فرض کنید $A=۲c+b$، $B=۲a+c$ و $C=۲b+a$. در این‌صورت داریم: $a=\frac{C+۴B-۲A}{۹}$، $b=\frac{A+۴C-۲B}{۹}$ و $c=\frac{B+۴A-۲C}{۹}$. حال می‌توان نابرابری (۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+۴\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\right) \geq ۱۵$$

با توجه به اینکه $A,B,C > ۰$، با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{A}}=۳$$

به همین ترتیب $\frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C} \geq ۳$ و حکم مسئله ثابت می‌شود.

راه‌حل دیگری که برای اثبات نابرابری (۱) وجود دارد، استفاده از نابرابری کوشی–شوارتز است:

$$\frac{a}{۲c+b}+\frac{b}{۲a+c}+\frac{c}{۲b+a} = \frac{a^{۲}}{۲ac+ab}+\frac{b^{۲}}{۲ab+cb}+\frac{c^{۲}}{۲bc+ac}$$
$$\geq \frac{(a+b+c)^{۲}}{۳(ab+bc+ca)} \geq ۱$$

۲۳. راه‌حل. با استفاده از نابرابری کوشی – شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \frac{a^{۲}+b}{b+c} \geq \frac{\left(\sum a^{۲}+۱\right)^{۲}}{\sum a^{۲}(b+c)+\sum a^{۲}+\sum ab}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{\left(\sum a^{۲}+۱\right)^{۲}}{\sum a^{۲}(b+c)+\sum a^{۲}+\sum ab} \geq ۲ \Leftrightarrow ۱+\left(\sum a^{۲}\right)^{۲} \geq ۲\sum a^{۲}(b+c)+۲\sum ab$$

این نابرابری را می‌توان به‌صورت زیر در آورد:

$$\begin{aligned} ۱+\left(\sum a^۲\right)^۲ &\geq ۲\sum a^۲(b+c)+۲\sum ab \\ &\Leftrightarrow ۱+\left(\sum a^۲\right)^۲ \geq ۲\sum a^۲-۲\sum a^۳+۲\sum ab \\ &\Leftrightarrow \left(\sum a^۲\right)^۲+۲\sum a^۳ \geq \sum a^۲ \end{aligned}$$

نابرابری فوق نیز درست است، زیرا:

$$\sum a^۳ \geq \frac{\sum a^۲}{۳} \quad \text{(نابرابری چبیشف)}$$

و

$$\left(\sum a^۲\right)^۲ \geq \frac{\sum a^۲}{۳}$$

۲۴. **راه‌حل.** شرط

$$\sum a^۴ \leq ۲\sum a^۲ b^۲$$

هم‌ارز است با:

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq ۰$$

در هر یک از حالت‌های $a=b+c$، $b=c+a$ و $c=a+b$، نابرابری

$$\sum a^۲ \leq ۲\sum ab$$

بدیهی است. بنابراین فرض کنید $a+b\neq c$، $b+c\neq a$ و $c+a\neq b$. از آن‌جایی که حداکثر یکی از اعداد $b+c-a$، $c+a-b$ و $a+b-c$ منفی است و حاصل‌ضرب این اعداد نیز نامنفی است، در نتیجه همه‌ی این اعداد مثبت‌اند. لذا می‌توان فرض کرد:

$$a^۲ < ab+ac, \quad b^۲ < bc+ba, \quad c^۲ < ca+cb$$

با جمع بستن این سه نابرابری، حکم مسئله به‌دست می‌آید.

۲۵. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $a_i = \frac{۱۹۹۸}{۱۹۹۸+x_i}$. بنابراین مسئله به این‌صورت در می‌آید که برای هر n عدد حقیقی و مثبت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ که در شرط $a_۱+a_۲+\cdots+a_n=۱$ صدق می‌کنند، ثابت کنیم:

$$\prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{a_i}-۱\right) \geq (n-۱)^n$$

این نابرابری را نیز می‌توان با ضرب نابرابری‌های زیر، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ به‌دست آورد:

$$\frac{1}{a_i} - 1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n}{a_i} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n}{a_i^{n-1}}}$$

۲۶. راه‌حل.

الف) ، ب) و ج) با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow (xyz)^3 \geq 27(xyz)^2$$

در نتیجه $xyz \geq 27$. لذا:

$$xy + xz + yz \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \geq 3\sqrt[3]{27^2} = 27$$

و نیز

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3\sqrt[3]{27} = 9$$

د) توجه کنید که $x^2 < xyz \Rightarrow x < yz$. به همین ترتیب $y < xz$ و $z < xy$. بنابراین:

$$xy < yz \cdot xz \Rightarrow 1 < z^2 \Rightarrow z > 1$$

در نتیجه هر سه عدد x، y و z از ۱ بزرگ‌ترند. قرار می‌دهیم:

$$a = x - 1, \quad b = y - 1, \quad c = z - 1$$

داریم $a, b, c > 0$ و نیز:

$$x = a + 1, \quad y = b + 1, \quad z = c + 1$$

با جایگزینی این روابط در شرط مسئله، خواهیم داشت:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 = (a+1)(b+1)(c+1)$$

که پس از ساده شدن، به‌صورت

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 2 = abc + ab + ac + bc$$

در می‌آید. اگر قرار دهیم $q = ab + ac + bc$، نتیجه می‌گیریم:

$$q \le a^2 + b^2 + c^2, \qquad \sqrt{3q} \le a + b + c$$

و نیز:

$$abc \le \left(\frac{q}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(3q)^{\frac{3}{2}}}{27}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} q + \sqrt{3q} + 2 &\le a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 2 \\ &= abc + ab + ac + bc \le \frac{(\sqrt{3q})^3}{27} + q \end{aligned}$$

با جایگذاری $t = \sqrt{3q}$ داریم:

$$t + 2 \le \frac{t^3}{27} \Leftrightarrow (t-6)(t+3)^2 \ge 0$$

در نهایت،

$$\sqrt{3q} = t \ge 6 \Rightarrow q = ab + bc + ca \ge 12$$

مجدداً یادآوری می‌کنیم که $a = x - 1$، $b = y - 1$ و $c = z - 1$. در نتیجه:

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1) \;+\; (x-1)(z-1) + (y-1)(z-1) \ge 12 \\ \Rightarrow xy + xz + yz \ge 2(x+y+z) + 9 \end{aligned}$$

و مسئله ثابت می‌شود.

ملاحظه. می‌توان نابرابری قوی‌تر زیر را نیز ثابت کرد:

$$xy + xz + yz \ge 4(x+y+z) - 9$$

امتحان کنید!

۲۷. **راه‌حل.** نابرابری را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^2 \;+\; 2\sqrt{x} + y^2 + 2\sqrt{y} + z^2 + 2\sqrt{z} \\ \ge x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{x} + y^2 + 2\sqrt{y} + z^2 + 2\sqrt{z} \ge 9 \end{aligned}$$

حال با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$x^2 + 2\sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \ge 3\sqrt[3]{x^2 \cdot x} = 3x,$$

$$y^2 + 2\sqrt{y} \ge 3y, \qquad z^2 + 2\sqrt{z} \ge 3z$$

بنابراین:

$$x^۲+y^۲+z^۲+۲(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \geq ۳(x+y+z) \geq ۹$$

۲۸. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $x=a+b$، $y=b+c$ و $z=a+c$. با این جایگذاری و بعد از مقداری محاسبه، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} \geq \frac{۹}{۲}$$

اما با استفاده از نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}&\\ &\geq \frac{(x+y+z)^۲}{xy+yz+zx}+\frac{(x+y+z)^۲}{xy+yz+zx+x^۲+y^۲+z^۲}\\ &= \frac{۲(x+y+z)^۴}{۲(xy+yz+zx)(xy+yz+zx+x^۲+y^۲+z^۲)}\\ &\geq \frac{۸(x+y+z)^۴}{(xy+yz+zx+(x+y+z)^۲)^۲}\end{aligned}$$

حال اگر از نابرابری $xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^۲}{۳}$ استفاده می‌کنیم، حکم مسئله به‌دست می‌آید.

۲۹. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $x=\frac{a}{b}$، $y=\frac{b}{c}$ و $z=\frac{c}{a}$. در این صورت:

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{۱+xy}{۱+y}=x+\frac{۱-x}{۱+y}$$

به همین ترتیب برای عبارت‌های دیگر نیز روابط مشابهی برقرار است. بنابراین مسئله به این‌صورت در می‌آید که برای هر سه عدد x، y و z که $xyz=۱$، ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}&\frac{x-۱}{y+۱}+\frac{y-۱}{z+۱}+\frac{z-۱}{x+۱} \geq ۰\\ &\quad\Leftrightarrow (x^۲-۱)(z+۱)+(y^۲-۱)(x+۱)+(z^۲-۱)(y+۱) \geq ۰\\ &\quad\Leftrightarrow \sum x^۲z+\sum x^۲ \geq \sum x+۳\end{aligned}$$

اما اثبات این نابرابری بسیار آسان است. طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم $\sum x^۲z \geq ۳$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم $\sum x^۲ \geq \sum x$، که این نابرابری نیز به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\sum x^۲ \geq \frac{\left(\sum x\right)^۲}{۳} \geq \sum x$$

۳۰. **راه‌حل اول.** از آن‌جایی که $a+b+c \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$، بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c$$

با توجه به نابرابری کوشی – شوارتز داریم:

$$\sum \frac{a^3}{b^2-bc+c^2} \geq \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(b^2-bc+c^2)}$$

لذا می‌بایست نشان دهیم:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)\sum a(b^2-bc+c^2)$$

این نابرابری هم‌ارز است با:

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$$

که همان نابرابری شور در حالت $n=2$ است.

ملاحظه. نابرابری

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c \qquad (1)$$

که توسط واسیل کارتاج[1] در مجله‌ی ریاضیات طرح شد، حالت خاصی $(n=3)$ از نابرابری کلی‌تر زیر است:

$$\frac{2a^n-b^n-c^n}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^n-c^n-a^n}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^n-a^n-b^n}{a^2-ab+b^2} \geq 0$$

راه‌حل دوم. نابرابری را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum \frac{(b+c)a^3}{b^2+c^2} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

این نابرابری، از نتیجه‌ی کلی‌تر زیر به‌دست می‌آید:

اگر $a,b,c,x,y,z>0$، آن‌گاه:

$$\sum \frac{a(y+z)}{b+c} \geq \frac{3\sum xy}{\sum x}$$

خود این نابرابری نیز نتیجه‌ی ضعیف‌تری از نامساوی مسئله‌ی ۱۰۱ است.

[1] Vasile Cartoaje

راه‌حل سوم. فرض کنید:

$$A = \sum \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2}$$

و نیز

$$B = \sum \frac{b^3 + c^3}{b^2 - bc + c^2} = \sum \frac{(b+c)(b^2 - bc + c^2)}{b^2 - bc + c^2} = 2\sum a$$

در نتیجه با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\sum a^3\right)\left(\sum \frac{1}{b^2 - bc + c^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum (b+c)(b^2 - bc + c^2)\right)\left(\sum \frac{1}{b^2 - bc + c^2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sum \sqrt{b+c}\right)^2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$A \geq \frac{1}{2}\left(\sum \sqrt{b+c}\right)^2 - 2\sum a = \sum \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} - \sum a$$

تعریف می‌کنیم:

$$A_a = \sqrt{c+a} \cdot \sqrt{b+a} - a = \frac{\sum ab}{\sqrt{\sum ab + a^2} + a}$$

به همین ترتیب روابط مشابهی برای A_b و A_c برقرار است. لذا $A \geq A_a + A_b + A_c$.
اما از آن‌جایی که $\left(\sum a\right)^2 \geq 3\left(\sum ab\right)$، نتیجه می‌گیریم:

$$A_a \geq \frac{\sum ab}{\sqrt{\frac{\left(\sum a\right)^2}{3} + a^2} + a} = \frac{3\sum ab}{\left(\sum a\right)^2}\left(\sqrt{\frac{\left(\sum a\right)^2}{3} + a^2} - a\right)$$

برای A_b و A_c نیز روابط مشابهی برقرار است. بنابراین فقط کافی است ثابت کنیم:

$$\sum \left(\sqrt{\frac{\left(\sum a\right)^2}{3} + a^2} - a\right) \geq a + b + c \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{1}{3} + \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2} \geq 2$$

تابع محدب $f(t) = \sqrt{\frac{1}{3} + t^2}$ را در نظر بگیرید. را در نظر بگیرید. طبق نابرابری ینسن داریم:

$$\begin{aligned} \sum \sqrt{\frac{1}{3} + \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2} &= f\left(\frac{a}{a+b+c}\right) + f\left(\frac{b}{a+b+c}\right) + f\left(\frac{c}{a+b+c}\right) \\ &\geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3(a+b+c)}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \end{aligned}$$

تساوی نیز تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a = b = c$.

۳۱. **راه‌حل.** نابرابری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 \geq 2(2n-3)$$

فرض کنید $x_m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ،$x_M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $m < M$. قرار می‌دهیم:

$$S_1 = (x_m - x_{m+1})^2 + \cdots + (x_{M-1} - x_M)^2$$

و

$$S_2 = (x_M - x_{M+1})^2 + \cdots + (x_n - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{m-1} - x_m)^2$$

از نامساوی $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \geq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2$ (که از نابرابری کوشی – شوارتز به‌دست می‌آید) نتیجه می‌گیریم:

$$S_1 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{M-m} \quad \text{و} \quad S_2 \geq \frac{(x_M - x_m)^2}{n-(M-m)}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 = S_1 + S_2 \geq (x_M - x_m)^2\left(\frac{1}{M-m} + \frac{1}{n-(M-m)}\right)$$
$$\geq (n-1)^2 \cdot \frac{4}{n} = 4n - 8 + \frac{4}{n} > 4n - 8$$

اما:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 \overset{2}{\equiv} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}) = 0$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 \geq 4n - 6$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳۲. **راه‌حل.** می‌توان حدس زد که حداکثر این عبارت برابر $\frac{4}{27}$ است و به‌ازای $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \cdots = x_n = 0$ این حداکثر اتفاق می‌افتد. حال با استقرا ثابت می‌کنیم:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \cdots + x_{n-1}^2 x_n + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}$$

که $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعدادی نامنفی با مجموع ۱ اند.

ابتدا گام استقرا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید این نابرابری به ازای n برقرار باشد. می‌خواهیم نابرابری را برای $n+۱$ ثابت کنیم. ضمن این‌که می‌توانیم فرض کنیم $x_۲ = \min\{x_۱, x_۲, \ldots, x_{n+۱}\}$. در این صورت داریم:

$$x_۱^۲x_۲ + x_۲^۲x_۳ + \cdots + x_n^۲x_۱ \leq (x_۱ + x_۲)^۲x_۳ + x_۳^۲x_۴ + \cdots + x_{n-۱}^۲x_n + x_n^۲(x_۱ + x_۲)$$

اما با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(x_۱ + x_۲)^۲x_۳ + x_۳^۲x_۴ + \cdots + x_{n-۱}^۲x_n + x_n^۲(x_۱ + x_۲) \leq \frac{۴}{۲۷}$$

به این ترتیب گام استقرا ثابت می‌شود. در نتیجه کافی است ثابت کنیم که اگر $a+b+c = ۱$، آن‌گاه $a^۲b + b^۲c + c^۲a \leq \frac{۴}{۲۷}$. می‌توان فرض کرد که a بزرگ‌ترین عدد در میان اعداد a، b و c است. در این‌صورت با توجه به روابط $abc \geq b^۲c$ و $\frac{ac^۲}{۲} \geq \frac{a^۲c}{۲}$ نتیجه می‌گیریم $a^۲b + b^۲c + c^۲a \leq \left(a + \frac{c}{۲}\right)^۲\left(b + \frac{c}{۲}\right)$. حال از آن‌جایی که

$$۱ = \frac{a + \frac{c}{۲}}{۲} + \frac{a + \frac{c}{۲}}{۲} + b + \frac{c}{۲} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{(b + \frac{c}{۲})(a + \frac{c}{۲})^۲}{۴}}$$

بنابراین $a^۲b + b^۲c + c^۲a \leq \frac{۴}{۲۷}$؛ یعنی حداکثر مقدار عبارت مسئله برابر $\frac{۴}{۲۷}$ است.

۳۳. راه‌حل. ابتدا ببینیم اگر به‌ازای هر k، اعداد $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k$ و $x_{k+۱}$ به هم نزدیک شوند، چه اتفاقی می‌افتد. به‌عنوان مثال می‌توانیم قرار دهیم $x_k = ۲^k$، چرا که در این‌صورت خواهیم داشت $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = x_{k+۱} - ۲$. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$c \geq \frac{\sum_{k=۱}^{n} \sqrt{۲}^k}{\sqrt{\sum_{k=۱}^{n} ۲^k}}$$

حال اگر n را به سمت بی‌نهایت ببریم، نتیجه می‌گیریم $c \geq ۱ + \sqrt{۲}$. ثابت می‌کنیم $۱ + \sqrt{۲}$ در مسئله صدق می‌کند. نابرابری

$$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq (۱ + \sqrt{۲})\sqrt{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}$$

را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱$ و $n = ۲$ این نابرابری واضح است. فرض کنید این نامساوی برای n برقرار است و می‌خواهیم آن را برای $n+۱$ ثابت کنیم. یعنی:

$$\sqrt{x_۱} + \sqrt{x_۲} + \cdots + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n+۱}} \leq (۱ + \sqrt{۲})\sqrt{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n + x_{n+۱}}$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم:

$$\sqrt{x_{n+1}} \le (1+\sqrt{2})(\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}-\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n})$$

این نابرابری هم‌ارز است با:

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}} \le (1+\sqrt{2})\sqrt{x_{n+1}}$$

نامساوی فوق نیز مستقیماً از شرط $x_1+x_2+\cdots+x_n \le x_{n+1}$ نتیجه می‌شود.

۳۴. **راه‌حل.** توجه کنید که $abc+xyz=(1-b)(1-c)+ac+ab-a$. بنابراین:

$$\frac{1-c}{a}+\frac{c}{1-b}-1=\frac{abc+xyz}{a(1-b)}$$

با استفاده از این تساوی و دو تساوی مشابه دیگر نتیجه می‌گیریم:

$$3+(xyz+abc)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)=\frac{a}{1-c}+\frac{b}{1-a}+\frac{c}{1-b}+\frac{1-c}{a}+\frac{1-a}{b}+\frac{1-b}{c}$$

حال تنها کاری که می‌بایست انجام دهیم، این است که از نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی استفاده کنیم:

$$\frac{a}{1-c}+\frac{b}{1-a}+\frac{c}{1-b}+\frac{1-c}{a}+\frac{1-a}{b}+\frac{1-b}{c}\ge 6$$

۳۵. **راه‌حل اول.** داریم:

$$\sum\frac{ab}{a+b+2c}=\sum\frac{ab}{a+c+b+c}\le\sum\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=\frac{a+b+c}{4}$$

راه‌حل دوم. از آن‌جایی که نابرابری همگن است، بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a+b+c=1$. به این ترتیب نابرابری فوق هم‌ارز است با:

$$\sum\frac{1}{a(a+1)}\le\frac{1}{4abc}$$

داریم $\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$. در نتیجه نابرابری فوق به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum\frac{1}{a}\le\sum\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4abc}$$

حال با استفاده از عبارت واسطه‌ی $\frac{1}{4abc}+\frac{9}{4}$ نشان می‌دهیم:

$$\sum\frac{1}{a}\le\frac{9}{4}+\frac{1}{4abc}\le\sum\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4abc}$$

نابرابری سمت راست، از نامساوی کوشی — شوارتز نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum \frac{۱}{a+۱}\right)\left(\sum(a+۱)\right) \geq ۹$$

(توجه کنید که $\sum(a+۱) = ۴$). نابرابری سمت چپ را نیز می‌توان به‌صورت $\sum ab \leq \frac{۱+۹abc}{۴}$ نوشت، که دقیقاً همان نابرابری شور است.

۳۶. **راه‌حل.** ایده‌ی حل این مسئله در این مطلب است که عبارت

$$a^۳(b+c+d)+b^۳(c+d+a)+c^۳(d+a+b)+d^۳(a+b+c)$$

را می‌توان به‌صورت $\sum ab(a^۲+b^۲)$ نمایش داد. حال از آن‌جایی که عبارت $ab(a^۲+b^۲)$ در بسط $(a-b)^۴$ ظاهر می‌شود، عبارت مسئله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sum ab(a^۲+b^۲) &= \sum \frac{a^۴+b^۴+۶a^۲b^۲-(a-b)^۴}{۴}\\ &= \frac{۳\sum a^۴+۶\sum a^۲b^۲-\sum(a-b)^۴}{۴} = \frac{۳-\sum(a-b)^۴}{۴} \leq \frac{۳}{۴}\end{aligned}$$

بنابراین حداکثر عبارت داده شده، برابر $\frac{۳}{۴}$ است و به‌ازای $a=b=c=d=\frac{۱}{۲}$ این حداکثر اتفاق می‌افتد.

۳۷. **راه‌حل اول.** داریم:

$$(x+y)(x+z) = xy+(x^۲+yz)+xz \geq xy+۲x\sqrt{yz}+zx = (\sqrt{xy}+\sqrt{xz})^۲$$

بنابراین:

$$\sum \frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \sum \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}$$

اما:

$$\sum \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}} = \sum \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = ۱$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

راه‌حل دوم. طبق نابرابری هویگنس داریم $\sqrt{(x+y)(x+z)} \geq x+\sqrt{yz}$. به همین ترتیب می‌توان دو نابرابری مشابه دیگر به‌دست آورد. در نتیجه:

$$\begin{aligned}&\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\\ &\leq \frac{x}{۲x+\sqrt{yz}}+\frac{y}{۲y+\sqrt{zx}}+\frac{z}{۲z+\sqrt{xy}}\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $a = \frac{\sqrt{yz}}{x}$، $b = \frac{\sqrt{zx}}{y}$ و $c = \frac{\sqrt{xy}}{z}$. لذا نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \leq 1$$

با توجه به تغییر متغیر فوق داریم $abc = 1$. بنابراین پس از مخرج مشترک گرفتن و ساده کردن نابرابری، به نابرابری $ab+bc+ca \geq 3$ می‌رسیم، که این نابرابری نیز از نامساوی واسطه‌ی حسابی– هندسی نتیجه می‌شود.

۳۸. **راه‌حل.** با کمی دقت می‌توان فهمید که برای اثبات این نابرابری با استقرا، فقط کافی است حالت $n = 3$ را ثابت کرد (چرا؟). بنابراین باید نشان دهیم که برای هر سه عدد حقیقی $a < b < c$ داریم:

$$ab(b^3-a^3)+bc(c^3-b^3) \geq ca(c^3-a^3) \Leftrightarrow (c^3-b^3)(ac-bc) \leq (b^3-a^3)(ab-ac)$$

از آن‌جایی که $a < b < c$، نابرابری آخر به‌صورت $a(b^2+ab+a^2) \leq c(c^2+bc+c^2)$ در می‌آید، که این نابرابری هم‌ارز است با $(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 0$ که به وضوح این نامساوی درست است.

۳۹. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{4a}{b+c} \leq \frac{a}{b}+\frac{a}{c}, \quad \frac{4b}{a+c} \leq \frac{b}{a}+\frac{b}{c}, \quad \frac{4c}{a+b} \leq \frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

با جمع بستن این سه نابرابری، حکم مسئله به‌دست می‌آید.

۴۰. **راه‌حل.** ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n داریم $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$. برای $n = 1, 2, 3, 4$ به‌وضوح این رابطه برقرار است. فرض کنید این نابرابری برای $n > 3$ برقرار است و می‌خواهیم آن را برای $n+1$ ثابت کنیم. داریم:

$$1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{4} < \sqrt[3]{3} \Rightarrow 3^{\frac{n+1}{3}} = \sqrt[3]{3}\cdot 3^{\frac{n}{3}} \geq \frac{n+1}{n}\cdot n = n+1$$

بنابراین رابطه‌ی $n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$ همواره درست است. حال به مسئله‌ی اصلی باز می‌گردیم. فرض کنید برای هر i داشته باشیم $a_{i+1}^{\frac{1}{a_i}} > 3^{\frac{1}{3}}$ (برهان خلف). در این‌صورت با توجه به مطلبی که در ابتدای راه‌حل گفتیم، نتیجه می‌گیریم:

$$a_{i+1}^{\frac{1}{a_i}} > 3^{\frac{1}{3}} \geq a_{i+1}^{\frac{1}{a_{i+1}}} \Rightarrow a_{i+1} > a_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

لذا $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < a_1$ که تناقض است.

۴۱. راه‌حل.

الف) قرار می‌دهیم $xyz = t^۳$. طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$۱ = xy + xz + yz + ۲xyz \geq ۳t^۲ + ۲t^۳ \Leftrightarrow (۲t - ۱)(t + ۱)^۲ \leq ۰$$

بنابراین $t \leq \frac{۱}{۲}$ ⇔ $۲t - ۱ \leq ۰$؛ یعنی $xyz \leq \frac{۱}{۸}$.

ب) فرض کنید $s = x + y + z$. نابرابری‌های معروف زیر برقرارند:

$$(x+y+z)^۲ \geq ۳(xy+yz+zx) \quad \text{و} \quad (x+y+z)^۳ \geq ۲۷xyz$$

بنابراین $۲s^۳ \geq ۵۴xyz = ۲۷ - ۲۷(xy+yz+zx) \geq ۲۷ - ۹s^۲$؛ و یا به‌صورت معادل:

$$۲s^۳ + ۹s^۲ - ۲۷ \geq ۰ \Leftrightarrow (۲s - ۳)(s + ۳)^۲ \geq ۰$$

در نتیجه $s \geq \frac{۳}{۲}$ ⇔ $۲s - ۳ \geq ۰$.

روش دیگر. اگر قرار دهیم $p = xyz$ و $q = xy + yz + zx$، خواهیم داشت:

$$s^۲ \geq ۳q = ۳(۱ - ۲p) \geq ۳\left(۱ - \frac{۲}{۸}\right) = \frac{۹}{۴}$$

هم‌چنین می‌توان دید که نابرابری زیر نیز برقرار است:

$$q = xy + yz + zx \geq \frac{۳}{۴}$$

ج) سه عدد x، y و z نمی‌توانند همگی کوچک‌تر از $\frac{۱}{۲}$ باشند، چرا که در این‌صورت به تناقض زیر می‌رسیم:

$$xy + yz + yz + ۲xyz < \frac{۳}{۴} + ۲ \times \frac{۱}{۸} = ۱$$

حال با توجه به تقارن مسئله نسبت به x, y, z می‌توان فرض کرد $z \geq \frac{۱}{۲}$.

داریم $۱ = (۲z + ۱)xy + z(x + y) \geq (۲z + ۱)xy + ۲z\sqrt{xy}$؛ این نابرابری را می‌توان به‌صورت $۰ \leq (۱ + \sqrt{xy})(۱ - \sqrt{xy}(۱ + ۲z))$ نوشت، که منجر به نابرابری زیر می‌شود:

$$xy \leq \frac{۱}{(۲z + ۱)^۲}$$

هم‌چنین داریم $\text{۱} = (\text{۲}z+\text{۱})xy+z(x+y) \le (\text{۲}z+\text{۱})\frac{(x+y)^{\text{۲}}}{\text{۴}}+z(x+y)$.
بنابراین $\text{۰} \ge (x+y+\text{۲})\big((\text{۲}z+\text{۱})(x+y)-\text{۲}\big)$، که نشان می‌دهد:

$$x+y \ge \frac{\text{۲}}{\text{۲}z+\text{۱}}$$

می‌بایست ثابت کنیم:

$$\frac{\text{۱}}{x}+\frac{\text{۱}}{y}+\frac{\text{۱}}{z} \ge \text{۴}(x+y+z)$$

این نابرابری را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(x+y)\Big(\frac{\text{۱}}{xy}-\text{۴}\Big) \ge \frac{\text{۴}z^{\text{۲}}-\text{۱}}{z} = \frac{(\text{۲}z-\text{۱})(\text{۲}z+\text{۱})}{z}$$

با توجه به نتایجی که در بالا به‌دست آوردیم، داریم:

$$(x+y)\Big(\frac{\text{۱}}{xy}-\text{۴}\Big) \ge \frac{\text{۲}}{\text{۲}z+\text{۱}}\big((\text{۲}z+\text{۱})^{\text{۲}}-\text{۴}\big) = \frac{\text{۲}(\text{۲}z-\text{۱})(\text{۲}z+\text{۳})}{\text{۲}z+\text{۱}}$$

(فرض $z \ge \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ این امکان را می‌دهد که طرفین دو نابرابری را در هم ضرب کنیم).
بنابراین برای حل مسئله کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{\text{۲}(\text{۲}z+\text{۳})}{\text{۲}z+\text{۱}} \ge \frac{\text{۲}z+\text{۱}}{z} \Leftrightarrow \text{۴}z^{\text{۲}}+\text{۶}z \ge \text{۴}z^{\text{۲}}+\text{۴}z+\text{۱}$$

اما این نابرابری نیز با توجه به فرض $z \ge \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ درست است و مسئله حل می‌شود.

د) اگر z بزرگ‌ترین عدد در میان اعداد x، y و z باشد، آن‌گاه $z \ge \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$. دیدیم که:

$$\begin{aligned}\frac{\text{۱}}{x}+\frac{\text{۱}}{y}-\text{۴}(x+y) &= (x+y)\Big(\frac{\text{۱}}{xy}-\text{۴}\Big) \ge \frac{\text{۲}}{\text{۲}z+\text{۱}}\big((\text{۲}z+\text{۱})^{\text{۲}}-\text{۴}\big)\\ &= \frac{\text{۲}(\text{۲}z-\text{۱})(\text{۲}z+\text{۳})}{\text{۲}z+\text{۱}} = \text{۴}z-\frac{\text{۱}}{z}+\frac{(\text{۲}z-\text{۱})^{\text{۲}}}{z(\text{۲}z+\text{۱})}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{\text{۱}}{x}+\frac{\text{۱}}{y}+\frac{\text{۱}}{z}-\text{۴}(x+y+z) \ge \frac{(\text{۲}z-\text{۱})^{\text{۲}}}{z(\text{۲}z+\text{۱})}$$

البته در سمت راست این نابرابری، به‌جای z می‌توان هر یک از سه متغیر دیگر را که بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ باشند، قرار داد. (ممکن است دو عدد دارای این ویژگی باشند، اما به هر حال یکی از اعداد این ویژگی را دارد.)

ملاحظه. می‌توان دید که شرط داده شده معادل با وجود سه عدد مثبت a، b و c است، به‌نحوی که $x = \frac{a}{b+c}$، $y = \frac{b}{c+a}$ و $z = \frac{c}{a+b}$. با این تغییر متغیرها، نابرابری‌های قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) بلافاصله تبدیل به نابرابری‌های معروفی می‌شوند. سعی کنید با این روش قسمت (د) را حل کنید.

۴۲. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی ــ هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{3} + \frac{y^2 z}{y^2 z + z^2 x + x^2 y} + \frac{xy^2}{yz^2 + zx^2 + xy^2} \geq \frac{3y\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3(y^2 z + z^2 x + x^2 y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

به همین ترتیب می‌توان دو رابطه‌ی مشابه به‌دست آورد:

$$\frac{1}{3} + \frac{z^2 x}{y^2 z + z^2 x + x^2 y} + \frac{yz^2}{yz^2 + zx^2 + xy^2} \geq \frac{3z\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3(y^2 z + z^2 x + x^2 y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{x^2 y}{y^2 z + z^2 x + x^2 y} + \frac{zx^2}{yz^2 + zx^2 + xy^2} \geq \frac{3x\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{3(y^2 z + z^2 x + x^2 y)(yz^2 + zx^2 + xy^2)}}$$

با جمع بستن این سه نابرابری، همان نابرابری مسئله حاصل می‌شود.

۴۳. **راه‌حل.** می‌توانیم فرض کنیم $a = \min\{a, b, c\}$. بنابراین می‌توان نوشت $b = a + x$ و $c = a + y$ که $x, y \in [0, 1]$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3a(x^2 - xy + y^2) + x^3 + y^3,$$
$$a^2 b + b^2 c + c^2 a - 3abc = a(x^2 - xy + y^2) + x^2 y$$

در نتیجه، نابرابری به صورت $1 + x^3 + y^3 \geq 3x^2 y$ درمی‌آید. اما این نابرابری نیز از این مطلب ناشی می‌شود که $1 + x^3 + y^3 \geq 3xy \geq 3x^2 y$ (توجه کنید که $0 \leq x, y \leq 1$).

۴۴. **راه‌حل.** با بسط دادن عبارت‌های دو طرف، این نابرابری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2abc(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2 b - a^2 c - b^2 a - b^2 c - c^2 a - c^2 b)$$
$$+(a^3 b^3 + b^3 c^3 + c^3 a^3 + 3a^2 b^2 c^2$$
$$-a^3 b^2 c - a^3 bc^2 - ab^3 c^2 - ab^2 c^3 - a^2 b^3 c - a^2 bc^3) \geq 0$$

هر یک از این دو عبارت، مثبت‌اند؛ چرا که پرانتز اول، نابرابری شور به‌ازای a, b, c و پرانتز دوم، نابرابری شور به‌ازای ab, bc, ca است.

۴۵. **راه‌حل.** داریم $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$. بنابراین:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+a_k} < 1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n < 1$$

هم‌چنین از آن‌جایی که دنباله صعودی است، داریم $\frac{n}{n+1} < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+a_k} = 2 - \frac{1}{a_n}$.
در نتیجه:

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < 1$$

۴۶. **راه‌حل.** می‌دانیم در هر مثلث دلخواه ABC اتحاد $\sum \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$ برقرار است؛ بنابراین از آن‌جایی که تانژانت در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ تابعی پوشاست، می‌توان قرار داد $a = \tan\frac{A}{2}$، $b = \tan\frac{B}{2}$ و $c = \tan\frac{C}{2}$. از شرط $a, b, c \in (0, 1)$ نتیجه می‌گیریم که مثلث ABC حادةالزاویه است. با این تغییر متغیرها، نابرابری مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}} \geq 3\sum\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}\\
&\quad\Leftrightarrow \sum \tan A \geq 3\sum\frac{1}{\tan A}\\
&\quad\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C(\tan A+\tan B+\tan C)\\
&\qquad\qquad \geq 3(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)\\
&\quad\Leftrightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^2 \geq 3(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)
\end{aligned}$$

این نابرابری نیز به وضوح برقرار است.

۴۷. **راه‌حل.** برای هر $t \leq 1$ داریم $(4-3t)(1-3t)^2 \geq 0$. از این نابرابری نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{27}{50}(2-x)$$

با نوشتن دو رابطه‌ی مشابه دیگر برای y, z و جمع بستن این سه نابرابری، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

ملاحظه. اگر چه این نابرابری ساده به نظر می‌رسید، اما می‌توان از آن برای اثبات نابرابری سخت‌تر زیر استفاده کرد:

$$\sum \frac{(b+c-a)^{۲}}{a^{۲}+(b+c)^{۲}} \geq \frac{۳}{۵}$$

در حقیقت، این دو نابرابری هم‌ارزند. سعی کنید این نابرابری را اثبات کنید!

۴۸. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $a=\sqrt{x}$، $b=\sqrt{y}$ و $c=\sqrt{z}$. در این‌صورت داریم:

$$۱-x = ۱-a^{۲} = (a+b+c)^{۲}-a^{۲} = (b+c)(۲a+b+c)$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\big((a+b)(b+c)(c+a)(۲a+b+c)(a+۲b+c)(a+b+۲c)\big)^{۲}$$
$$\geq ۲^{۱۵}a^{۲}b^{۲}c^{۲}(a^{۲}+b^{۲})(b^{۲}+c^{۲})(c^{۲}+a^{۲})$$

اما این نابرابری نیز درست است، چرا که اولاً $ab(a^{۲}+b^{۲}) \leq \frac{(a+b)^{۴}}{۸}$ (که هم‌ارز است با $(a-b)^{۴} \geq ۰$) و ثانیاً:

$$(۲a+b+c)(a+۲b+c)(a+b+۲c) \geq ۸(b+c)(c+a)(a+b)$$

۴۹. **راه‌حل.** شرط اولیه‌ی $xyz = x+y+z+۲$ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{۱}{۱+x}+\frac{۱}{۱+y}+\frac{۱}{۱+z} = ۱$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۱+x}=a, \quad \frac{۱}{۱+y}=b, \quad \frac{۱}{۱+z}=c$$

در این‌صورت:

$$x=\frac{۱-a}{a}=\frac{b+c}{a}, \quad y=\frac{c+a}{b}, \quad z=\frac{a+b}{c}$$

الف) داریم:

$$xy+yz+zx \geq ۲(x+y+z)$$
$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}+\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}+\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a} \geq ۲\Big(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\Big)$$
$$\Leftrightarrow a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۳abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$\Leftrightarrow \sum a(a-b)(a-c) \geq ۰$$

که همان نابرابری شور است.

ب) داریم:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq \frac{۳}{۲}\sqrt{xyz}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a}{b+c}}\leq \frac{۳}{۲}$$

این نابرابری را نیز می‌توان با جمع بستن نابرابری

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c+a}}\leq \frac{۱}{۲}\Big(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\Big)$$

با نامساوی‌های مشابه دیگر، ثابت کرد.

۵۰. **راه‌حل اول.** اگر یکی از اعداد x، y و z مثلاً x، منفی باشد، آن‌گاه:

$$۲+xyz-x-y-z=(۲-y-z)-x(۱-yz)\geq ۰$$

چرا که $y+z\leq\sqrt{۲(y^۲+z^۲)}\leq ۲$ و نیز $yz\leq\frac{z^۲+y^۲}{۲}\leq ۱$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $z\geq y\geq x>۰$. اگر $z\leq ۱$، داریم:

$$۲+xyz-x-y-z=(۱-z)(۱-xy)+(۱-x)(۱-y)\geq ۰$$

حال اگر $z>۱$، آن‌گاه:

$$z+(x+y)\leq\sqrt{۲\big(z^۲+(x+y^۲)\big)}=۲\sqrt{۱+xy}\leq ۲+xy\leq ۲+xyz$$

و اثباتمان کامل می‌شود.

راه‌حل دوم. با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$x+y+z-xyz=x(۱-yz)+y+z\leq\sqrt{\big(x^۲+(y+z)^۲\big)\big(۱+(۱-yz)^۲\big)}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم حداکثر مقدار عبارت سمت راست نابرابری، ۲ است؛ و یا به‌صورت معادل

$$(۲+۲yz)\big(۲-۲yz+(yz)^۲\big)\leq ۴\Leftrightarrow ۲(yz)^۳\leq ۲(yz)^۲$$

این نامساوی نیز به‌وضوح برقرار است، چرا که $۲\geq y^۲+z^۲\geq ۲yz$.

۵۱. **راه‌حل.** با توجه به نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی و این مطلب که $\frac{۱}{x+y}\leq\frac{۱}{۴x}+\frac{۱}{۴y}$، نابرابری‌های زیر برقرارند: $(y_i=x_{\sigma(i)})$

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_iy_i}\leq\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-\frac{x_i^۲+y_i^۲}{۲}}=۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_i^۲+۱-y_i^۲}$$
$$\leq\sum_{i=۱}^{n}\Big(\frac{۱}{۲(۱-x_i^۲)}+\frac{۱}{۲(۱-y_i^۲)}\Big)=\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_i^۲}$$

لذا کافی است نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_i} \geq \left(۱+\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n}\right)\cdot\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_i^۲}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i}{۱-x_i^۲} \geq \frac{۱}{n}\cdot\left(\sum_{i=۱}^{n}x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱-x_i^۲}\right)$$

این نامساوی نیز از به کار بردن نابرابری چبیشف به‌ازای n تایی‌های $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و $\left(\frac{۱}{۱-x_۱^۲}, \frac{۱}{۱-x_۲^۲}, \ldots, \frac{۱}{۱-x_n^۲}\right)$ نتیجه می‌شود.

۵۲. **راه‌حل اول.** قرار می‌دهیم $a_i = \frac{۱}{۱+x_i}$. به این ترتیب، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{۱-a_i}{a_i}} \geq (n-۱)\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{۱-a_i}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{a_i(۱-a_i)}} \geq n\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{۱-a_i}}$$

$$\Leftrightarrow n\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{۱-a_i}} \leq \left(\sum_{i=۱}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{a_i(۱-a_i)}}\right)$$

نابرابری فوق نیز از به کار بردن نامساوی چبیشف به‌ازای n تایی‌های $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ و

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{a_۱(۱-a_۱)}}, \frac{۱}{\sqrt{a_۲(۱-a_۲)}}, \ldots, \frac{۱}{\sqrt{a_n(۱-a_n)}}\right)$$

نتیجه می‌شود.

راه‌حل دوم. با همان تغییر متغیر، می‌بایست ثابت کنیم:

$$(n-۱)\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{a_۱+a_۲+\cdots+a_{i-۱}+a_{i+۱}+\cdots+a_n}}$$
$$\leq \sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{i-۱}+a_{i+۱}+\cdots+a_n}{a_i}}$$

اما با استفاده از نابرابری کوشی ــ شوارتز و نابرابری واسطه‌ی حسابی ــ هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_{i-۱}+a_{i+۱}+\cdots+a_n}{a_i}}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{i-1}}+\sqrt{a_{i+1}}+\cdots+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{a_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{n-1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{i-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_{i+1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\Big) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{a_i}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{i-1}}+\sqrt{a_{i+1}}+\cdots+\sqrt{a_n}} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}(n-1)\sqrt{\frac{a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n}}
\end{aligned}$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۵۳. راه‌حل. ساده‌ترین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد، این است که فرض کنیم $a_i < 2$ (برای هر i) و سپس تغییر متغیر $x_i = 2 - a_i > 0$ را به کار ببریم. در این‌صورت داریم:

$$\sum(2-x_i) \geq n \Rightarrow \sum x_i \leq n,$$
$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(2-x_i)^2 = 4n - 4\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

حال با توجه به این‌که $x_i > 0$ نتیجه می‌گیریم $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2$. با ترکیب این نابرابری با نابرابری‌های بالا، خواهیم داشت:

$$n^2 < 4n - 4\sum_{i=1}^{n} x_i + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 < 4n + (n-4)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

بنابراین $(n-4)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\Big) > 0$، که به‌وضوح غیرممکن است، چرا که $n \geq 4$ و $\sum x_i \leq n$. لذا فرض ما غلط بوده و در نتیجه $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geq 2$.

۵۴. راه‌حل. داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} &= \frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}-4 \\
&= (a+c)\Big(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\Big)+(b+d)\Big(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\Big)-4
\end{aligned}$$

از آن‌جایی که

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a} \geq \frac{4}{(b+c)+(d+a)}, \qquad \frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{(c+d)+(a+b)}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geq \frac{۴(a+c)}{(b+c)+(d+a)}+\frac{۴(b+d)}{(c+d)+(a+b)}-۴=۰$$

هم‌چنین تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a=c$ و $b=d$.

حدس. (واسیل کارتاج[۲])

اگر a، b، c، d و e اعدادی حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه:

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+e}+\frac{d-e}{e+a}+\frac{e-a}{a+b} \geq ۰$$

۵۵. **راه‌حل.** ثابت می‌کنیم برای هر $a,b \in (۰,۱)$ داریم $a^b \geq \frac{a}{a+b-ab}$. برای این منظور، طبق نابرابری برنولی داریم:

$$a^{۱-b}=(۱+a-۱)^{۱-b} \leq ۱+(a-۱)(۱-b)=a+b-ab$$

به این ترتیب ادعایمان ثابت می‌شود. حال اگر x یا y حداقل برابر ۱ باشند، مسئله حل است. در غیر این‌صورت باید داشته باشیم $۰<x,y<۱$. در این حالت با استفاده از نابرابری بالا نتیجه می‌گیریم:

$$x^y+y^x \geq \frac{x}{x+y-xy}+\frac{y}{x+y-xy} > \frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=۱$$

۵۶. **راه‌حل اول.** با استفاده از اتحاد $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-۱$ مسئله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$ab+bc+ca+\frac{۳}{a+b+c} \geq ۴$$

حال می‌توانیم از نابرابری واسطه‌ی حسابی ــ هندسی استفاده کنیم:

$$ab+bc+ca+\frac{۳}{a+b+c} \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{(ab+bc+ca)^۳}{۹(a+b+c)}}$$

بنابراین کافی است نشان دهیم:

$$(ab+bc+ca)^۳ \geq ۹(a+b+c)$$

این کار نیز چندان سخت نیست، چرا که داریم:

$$ab+bc+ca \geq ۳, \qquad (ab+bc+ca)^۳ \geq ۳abc(a+b+c)=۳(a+b+c)$$

---

۲ Vasile Cirtoaje

راه‌حل دوم. از نابرابری $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{2}{9}(ab+bc+ca)+\frac{1}{a+b+c} \geq 1$$

طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$\frac{2}{9}(ab+bc+ca)+\frac{1}{a+b+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{81(a+b+c)}} \geq 1$$

چرا که:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)$$

۵۷. راه‌حل. به‌وضوح اگر یکی از پرانتزهای سمت چپ، عبارتی منفی باشد، کار تمام است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم a، b و c طول اضلاع مثلثی مانند ABC اند. اگر از نمادها و روابط مربوط به مثلث استفاده کنیم، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{16S^2}{a+b+c} \leq abc(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)R^2 \geq abc(a^2+b^2+c^2)$$

برای اثبات این نابرابری نیز کافی است توجه کنید که $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$ و نیز:

$$0 \leq OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

۵۸. راه‌حل. نابرابری مسئله، هم‌ارز است با:

$$\sum a+\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{a}{b} \geq \frac{3(\sum ab+\sum a)}{abc+1}$$

و یا:

$$abc\sum a+\sum\frac{1}{a}+\sum a^2c+\sum\frac{a}{b} \geq 2\left(\sum a+\sum ab\right)$$

اما نابرابری فوق، از نامساوی‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$a^2bc+\frac{b}{c} \geq 2ab, \quad b^2ca+\frac{c}{a} \geq 2bc, \quad c^2ab+\frac{a}{b} \geq 2ca$$

و

$$a^2c+\frac{1}{c} \geq 2a, \quad b^2a+\frac{1}{a} \geq 2b, \quad c^2b+\frac{1}{b} \geq 2c$$

۵۹. راه‌حل. با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{x_1^n}{1+x_1^n}+\frac{x_2^n}{1+x_2^n}+\cdots+\frac{x_{n-1}^n}{1+x_{n-1}^n}+\frac{1}{1+x_n^n}\geq\frac{n}{x_n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(1+x_i^n)}}$$

و نیز:

$$\frac{1}{1+x_1^n}+\frac{1}{1+x_2^n}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n-1}^n}+\frac{x_n^n}{1+x_n^n}\geq\frac{nx_n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(1+x_i^n)}}$$

بنابراین:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(1+x_i^n)}\geq x_n+\frac{1}{x_n}$$

البته این نابرابری برای متغیرهای دیگر نیز برقرار است؛ در نتیجه با جمع این نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(1+x_i)^n}\geq\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۶۰. راه‌حل. فرض کنید نابرابری غلط است. در این‌صورت باید داشته باشیم:

$$d\left(\frac{1}{27}-abc\right)>a^3+b^3+c^3-\frac{1}{9}$$

توجه کنید که $abc\leq\frac{1}{27}$. می‌توان فرض کرد $abc<\frac{1}{27}$. حال با اثبات نابرابری $a^3+b^3+c^3+abcd\geq\frac{1}{4}$ نشان می‌دهیم که فرض‌مان نادرست بوده است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}-abc}\cdot abc+a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{4}$$

اما این نابرابری هم‌ارز است با $4\sum a^3+15abc\geq 1$. حال اگر از اتحاد $\sum a^3=3abc+1-3\sum ab$ استفاده کنیم، این نابرابری به‌صورت $\sum ab\leq\frac{1+9abc}{4}$ در می‌آید که همان نامساوی شور است.

۶۱. راه‌حل. نابرابری را می‌توان به‌صورت $\sum\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)(a-b)^2}\geq 1$ نوشت (توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم a,b,c دوبه‌دو متمایزند). با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+c^2)(a-b)^2}+\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a^2)(b-c)^2}\geq\frac{2(1+b^2)}{|a-b|\cdot|c-b|}$$

با جمع بستن نابرابری‌های مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \frac{(۱+a^{۲})(۱+b^{۲})}{(۱+c^{۲})(a-b)^{۲}} \geq \sum \frac{۱+b^{۲}}{|(b-a)(b-c)|}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که عبارت آخر، حداقل برابر ۱ است. این مطلب نیز از نابرابری زیر ناشی می‌شود:

$$\sum \frac{۱+b^{۲}}{|(b-a)(b-c)|} \geq \left|\sum \frac{۱+b^{۲}}{(b-a)(b-c)}\right| = ۱$$

۶۲. **راه‌حل اول.** بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $x \geq y \geq z$. در این‌صورت داریم:

$$\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y}$$

و نیز $x^{\alpha-۱} \geq y^{\alpha-۱} \geq z^{\alpha-۱}$. حال با استفاده از نابرابری چبیشف نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \frac{x^{\alpha}}{y+z} \geq \frac{۱}{۳} \cdot \left(\sum x^{\alpha-۱}\right) \cdot \left(\sum \frac{x}{y+z}\right)$$

اکنون کافی است توجه کنیم که $\sum x^{\alpha-۱} \geq ۳$ (طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی) و نیز $\sum \frac{x}{y+z} \geq \frac{۳}{۲}$.

راه‌حل دوم. طبق نابرابری کوشی– شوارتز داریم:

$$[x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)]\left(\frac{x^{\alpha}}{y+z}+\frac{y^{\alpha}}{z+x}+\frac{z^{\alpha}}{x+y}\right) \geq \left(x^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+y^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+z^{\frac{۱+\alpha}{۲}}\right)^{۲}$$

در نتیجه می‌بایست نشان دهیم:

$$\left(x^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+y^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+z^{\frac{۱+\alpha}{۲}}\right)^{۲} \geq ۳(xy+yz+zx)$$

از آن‌جایی که $(x+y+z)^{۲} \geq ۳(xy+yz+zx)$، کافی است ثابت کنیم:

$$x^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+y^{\frac{۱+\alpha}{۲}}+z^{\frac{۱+\alpha}{۲}} \geq x+y+z$$

با استفاده از نابرابری برنولی نتیجه می‌گیریم:

$$x^{\frac{۱+\alpha}{۲}} = [۱+(x-۱)]^{\frac{۱+\alpha}{۲}} \geq ۱+\frac{۱+\alpha}{۲}(x-۱) = \frac{۱-\alpha}{۲}+\frac{۱+\alpha}{۲}\cdot x$$

به همین ترتیب

$$y^{\frac{۱+\alpha}{۲}} \geq \frac{۱-\alpha}{۲}+\frac{۱+\alpha}{۲}\cdot y \quad \text{و} \quad z^{\frac{۱+\alpha}{۲}} \geq \frac{۱-\alpha}{۲}+\frac{۱+\alpha}{۲}\cdot z$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
x^{\frac{1+\alpha}{2}} + y^{\frac{1+\alpha}{2}} + z^{\frac{1+\alpha}{2}} - (x+y+z) \\
&\geq \frac{3(1-\alpha)}{3} + \frac{1+\alpha}{2}(x+y+z) - (x+y+z) \\
&= \frac{\alpha-1}{2}(x+y+z-3) \\
&\geq \frac{\alpha-1}{2}\left(3\sqrt[3]{xyz}-3\right) = 0
\end{aligned}$$

تساوی نیز در حالت $x = y = z = 1$ اتفاق می‌افتد (و یا $\alpha = 1$ و $x = y = z$).

ملاحظه. با استفاده از تغییر متغیر $\beta = \alpha + 1$ $(\beta \geq 2)$ و $x = \frac{1}{a}$، $y = \frac{1}{b}$ و $z = \frac{1}{c}$ $(abc = 1)$ نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{a^\beta(b+c)} + \frac{1}{b^\beta(c+a)} + \frac{1}{c^\beta(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

حالت $\beta = 3$، یکی از مسائل المپیاد جهانی سال ۱۹۹۵ بود (طرح شده توسط روسیه).

۶۳. **راه‌حل.** به‌وضوح داریم:

$$\begin{aligned}
(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_iy_j - x_jy_i)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)^2 \\
&= \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)
\end{aligned}$$

اما از آن‌جایی که $\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq 1$، بلافاصله نتیجه می‌گیریم:

$$\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big) \leq 2\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big)$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۶۴. **راه‌حل.** بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. بنابراین برای هر i داریم $a_i \geq i$. قرار می‌دهیم $b_i = a_i - i \geq 0$، به این ترتیب نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ib_i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq \frac{2n+1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حال از این‌که $a_i < a_{i+1}$، نتیجه می‌گیریم $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. لذا با استفاده از نابرابری چبیشف خواهیم داشت:

$$2\sum_{i=1}^{n} ib_i \geq (n+1)\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \frac{2n+1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

بنابراین حکم مسئله ثابت می‌شود. هم‌چنین با توجه به روابط بالا می‌توان دید که تساوی تنها در شرایطی اتفاق می‌افتد که $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جایگشتی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ باشند.

۶۵. **راه‌حل.** نابرابری را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum \frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{\frac{3ca}{b}+a}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

با تغییر متغیر $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$، $y = \sqrt{\frac{ca}{b}}$ و $z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$، شرط $a+b+c=1$ به‌صورت $xy+yz+zx=1$ در می‌آید. نابرابری مسئله هم‌ارز است با:

$$\sum \frac{x}{\sqrt{3}y+yz} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

اما با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز داریم:

$$\sum \frac{x^2}{\sqrt{3}xy+xyz} \geq \frac{\left(\sum x\right)^2}{\sqrt{3}+3xyz} \geq \frac{3\sum xy}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

توجه کنید که در رابطه‌ی بالا از نابرابری‌های زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\left(\sum x\right)^2 \geq 3\sum xy \quad \text{و} \quad xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

۶۶. **راه‌حل.** شرط مسئله را به‌صورت $\prod(i+a)\prod(a-i) = 16$ می‌نویسیم. این رابطه نیز هم‌ارز است با:

$$16 = \left(1-i\sum a-\sum ab+i\sum abc+abcd\right)\left(1+i\sum a-\sum ab-i\sum abc+abcd\right)$$

بنابراین اتحاد $(1-\sum ab+abcd)^2+(\sum a-\sum abc)^2 = 16$ به‌دست می‌آید. لذا $|1-\sum ab+abcd| \leq 4$ و حکم مسئله ثابت می‌شود.

۶۷. **راه‌حل اول.** یک نتیجه‌ی قوی‌تر را ثابت می‌کنیم:

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$$

از آن‌جایی که $(a+b+c)^2 \leq (|a|+|b|+|c|)^2$، می‌توان فرض کرد که a، b و c اعدادی نامنفی‌اند. در ضمن توجه کنید که اگر x و y هم‌علامت باشند، آن‌گاه $(1+x)(1+y) \geq 1+x+y$. حال نابرابری مسئله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\prod\Big(\frac{a^2-1}{3}+1\Big) \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

سه حالت پیش می‌آید:

I) $a,b,c \geq 1$. در این‌صورت داریم

$$\prod\Big(\frac{a^2-1}{3}+1\Big) \geq 1+\sum\frac{a^2-1}{3} \geq \frac{(\sum a)^2}{9}$$

II) دو تا از اعداد، مانند a و b، هم‌زمان حداقل و یا حداکثر برابر ۱ اند. در این حالت با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز داریم:

$$\begin{aligned}\prod\Big(\frac{a^2-1}{3}+1\Big) &\geq \Big(1+\frac{a^2-1}{3}+\frac{b^2-1}{3}\Big)\Big(\frac{c^2+2}{3}\Big)\\ &= \frac{(a^2+b^2+1)}{9}\cdot\frac{(1^2+1^2+c^2)}{9} \geq (a+b+c)^2\end{aligned}$$

III) $a,b,c \leq 1$. در این‌صورت مشابه قسمت اول داریم:

$$\prod\Big(\frac{a^2-1}{3}+1\Big) \geq 1+\sum\frac{a^2-1}{3} \geq \frac{(\sum a)^2}{9}$$

به این ترتیب اثبات‌مان کامل می‌شود.

راه‌حل دوم. با بسط دادن نابرابری مسئله، می‌بایست ثابت کنیم:

$$(abc)^2+2\sum a^2b^2+4\sum a^2+8 \geq 9\sum ab$$

از آن‌جایی که $3\sum a^2 \geq 3\sum ab$ و $2\sum a^2b^2+6 \geq 4\sum ab$، کافی است نشان دهیم $(abc)^2+\sum a^2+2 \geq 2\sum ab$. می‌توانیم فرض کنیم a,b,c اعدادی نامنفی‌اند. بنابراین قرار می‌دهیم $a=x^2$، $b=y^2$ و $c=z^2$. در این‌صورت:

$$2\sum ab-\sum a^2=(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

واضح است که اگر x، y و z طول اضلاع یک مثلث نباشند، نامساوی برقرار می‌شود. در غیر این‌صورت می‌توان قرار داد $x = u + v$، $y = v + w$ و $z = w + u$. در نتیجه به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$\left((u+v)(v+w)(w+u)\right)^{۴} + ۲ \geq ۱۶(u+v+w)uvw$$

داریم:

$$((u+v)(v+w)(w+u))^{۴} + ۱ + ۱ \geq ۳\sqrt[۳]{(u+v)^{۴}(v+w)^{۴}(u+w)^{۴}}$$

لذا باید ثابت کنیم عبارت سمت راست نابرابری فوق، بزرگ‌تر یا مساوی $۱۶(u+v+w)uvw$ است، و یا به‌صورت معادل:

$$(u+v)^{۴}(v+w)^{۴}(w+u)^{۴} \geq \frac{۱۶^{۳}}{۳^{۳}}(uvw)^{۳}(u+v+w)^{۳}$$

این نابرابری نیز از نامساوی‌های زیر ناشی می‌شود:

$$(u+v)(v+w)(w+u) \geq \frac{۸}{۹}(u+v+w)(uv+vw+wu),$$
$$(uv+vw+wu)^{۴} \geq ۳^{۴}(uvw)^{\frac{۸}{۳}},$$
$$u+v+w \geq ۳\sqrt[۳]{uvw}$$

راه‌حل سوم. مشابه راه حل دوم، مسئله را به نابرابری زیر تبدیل می‌کنیم:

$$(abc)^{۲} + ۲ \geq ۲\sum ab - \sum a^{۲}$$

حال با استفاده از نابرابری شور نتیجه می‌گیریم:

$$۲\sum ab - \sum a^{۲} \leq \frac{۹abc}{a+b+c}$$

هم‌چنین طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$\frac{۹abc}{a+b+c} \leq ۳\sqrt[۳]{(abc)^{۲}}$$

در نتیجه اگر ثابت کنیم

$$(abc)^{۲} + ۲ \geq ۳\sqrt[۳]{(abc)^{۲}}$$

مسئله حل می‌شود. اما این نابرابری نیز به‌وضوح از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی نتیجه می‌شود.

٦٨. راه‌حل.

الف) داریم:

$$(1-xy)(1-yz) = 1-xy-yz+xy^2z = 1-xy-yz+y(x+y+z-2) = (y-1)^2 \geq 0$$

به همین ترتیب،

$$(1-yz)(1-zx) = (1-z)^2 \geq 0, \quad (1-zx)(1-xy) = (1-x)^2 \geq 0$$

در نتیجه عبارت‌های $1-xy$، $1-yz$ و $1-zx$ هم‌علامتند.

ب) رابطه‌ی $x+y+z = xyz+2$ را به‌صورت $(1-x)(1-y)+(1-z)(1-xy) = 0$ بازنویسی می‌کنیم. اگر $x > 1$، آن‌گاه $1 < x \leq y \leq z$ و در نتیجه

$$(1-x)(1-y) + (1-z)(1-xy) > 0$$

که غیر ممکن است. لذا داریم $x \leq 1$. در ادامه دو حالت را به‌صورت مجزا بررسی می‌کنیم: $xy \leq 1$ و $xy > 1$.

I) $xy \leq 1$. در این‌صورت داریم $x^2y \leq x \leq 1$ و $x^3y^2 \leq x \leq 1 < \frac{32}{27}$.

II) $xy > 1$. از رابطه‌ی $\sqrt{xy} \leq y$ نتیجه می‌گیریم $y > 1$. حال رابطه‌ی $x+y+z = xyz+2$ را به‌صورت $x+y-2 = (xy-1)z$ بازنویسی می‌کنیم. از آن‌جایی که $y \leq z$، داریم:

$$x+y-2 \geq (xy-1)y \Leftrightarrow (y-1)(2-x-xy) \geq 0$$

بنابراین $x(1+y) \leq 2$. هم‌چنین طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی داریم $1+y \geq 2\sqrt{y}$ و نیز $1+y = 1+\frac{y}{2}+\frac{y}{2} \geq 3\sqrt[3]{1\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}}$. در نتیجه $2x\sqrt{y} \leq 2$ و نیز $3x\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \leq 2$؛ یعنی $x^2y \leq 1$ و $x^3y^2 \leq \frac{32}{27}$.

تساوی برای نابرابری $x^2y \leq 1$ زمانی رخ می‌دهد که $x = y = 1$. برای نابرابری $x^3y^2 \leq \frac{32}{27}$ نیز در حالت تساوی باید داشته باشیم که $x = \frac{2}{3}$ و $y = z = 2$.

٦٩. راه‌حل. ساده‌ترین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد، تغییر متغیر $x = \frac{1}{a}$، $y = \frac{1}{b}$ و $z = \frac{1}{c}$ است. در این‌صورت داریم $x,y,z > 0$ و $xy+yz+zx \geq 1$. می‌بایست ثابت کنیم که حداقل دو تا از نابرابری‌های

$$2x+3y+6z \geq 6, \quad 2y+3z+6x \geq 6, \quad 2z+3x+6y \geq 6$$

درست‌اند. فرض کنید این گونه نباشد (برهان خلف). بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $2x+3y+6z < 6$ و $2z+3x+6y < 6$. با جمع بستن این دو نابرابری نتیجه می‌گیریم $5x+9y+8z < 12$. اما داریم $x \geq \frac{1-yz}{y+z}$. در نتیجه:

$$12 > \frac{5-5yz}{y+z}+9y+8z \Leftrightarrow 12(y+z) > 5+9y^2+8z^2+12yz$$
$$\Leftrightarrow (2z-1)^2+(3y+2z-2)^2 < 0$$

که به وضوح غیر ممکن است. تناقض حاصل، درستی حکم مسئله را نشان می‌دهد.

۷۰. **راه‌حل اول.** از آن‌جایی که $x < xyz \Rightarrow yz > 1$ (و به همین ترتیب $xz > 1$ و $xy > 1$) بنابراین حداکثر یکی از اعداد x، y و z می‌تواند کمتر از ۱ باشد. در هر یک از این حالت‌ها (یعنی حالت $x \leq 1$، $y \geq 1$، $z \geq 1$ و یا دو حالت مشابه دیگر) نابرابری مسئله واضح است. تنها حالتی که می‌بایست بررسی کنیم، این است که $x, y, z \geq 1$.

در این وضعیت، قرار می‌دهیم:

$$x-1=a, \quad y-1=b, \quad z-1=c$$

در این صورت a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی‌اند. از آن‌جایی که

$$x=a+1, \quad y=b+1, \quad z=c+1$$

در نتیجه اعداد a، b و c در رابطه‌ی

$$a+1+b+1+c+1=(a+1)(b+1)(c+1)$$

صدق می‌کنند، که این رابطه معادل است با:

$$abc+ab+bc+ca=2$$

حال فرض کنید $x=\sqrt[3]{abc}$. داریم:

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3x^2$$

لذا:

$$x^3+3x^2 \leq 2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) \leq 0$$

با توجه به این که $x \geq 0$، از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم:

$$\sqrt[3]{abc}=x \leq \sqrt{3}-1$$

و یا به‌صورت معادل:

$$abc \leq (\sqrt{3} - 1)^3$$

این نابرابری نیز، دقیقاً همان نابرابری

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3} - 10$$

است. به این ترتیب اثبات‌مان کامل می‌شود.

راه‌حل دوم. با توجه به راه حل اول (و به خاطر تقارن مسئله نسبت به x, y, z) فرض می‌کنیم $x \geq 1$ و $y \geq 1$. حتی می‌توان فرض کرد $x > 1$ و $y > 1$ (در حالت $x = 1$ نابرابری واضح است). در این صورت $xy > 1$. با توجه به شرط مسئله داریم:

$$z = \frac{x+y}{xy-1}$$

باید ثابت کنیم:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3} - 10 \Leftrightarrow 2xyz - (xy + yz + zx) \leq 6\sqrt{3} - 9$$

اگر مقدار z را در این نابرابری جایگزین کنیم، نابرابری به‌صورت زیر در می‌آید:

$$2xy \cdot \frac{x+y}{xy-1} - xy - (x+y) \cdot \frac{x+y}{xy-1} \leq 6\sqrt{3} - 9$$
$$\Leftrightarrow (xy - x - y)^2 + (6\sqrt{3} - 10)xy \leq 6\sqrt{3} - 9$$

حال قرار می‌دهیم $x = a + 1$ و $y = b + 1$. به این ترتیب، نابرابری هم‌ارز

$$a^2b^2 + (6\sqrt{3} - 10)(a + b + ab) - 2ab \geq 0$$

به‌دست می‌آید. اما

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

و نیز $6\sqrt{3} - 10 > 0$؛ بنابراین کافی است نشان دهیم:

$$a^2b^2 + (6\sqrt{3} - 10)(2\sqrt{ab} + ab) - 2ab \geq 0$$

با تغییر متغیر $t = \sqrt{ab} \geq 0$، نابرابری فوق به‌صورت

$$t^4 + (6\sqrt{3} - 12)t^2 + 2(6\sqrt{3} - 10)t \geq 0$$

در می‌آید. لذا باید ثابت کنیم:

$$t^3 + (6\sqrt{3} - 12)t + 2(6\sqrt{3} - 10) \geq 0$$

مشتق تابع

$$f(t) = t^{۳} + (۶\sqrt{۳} - ۱۲)t + ۲(۶\sqrt{۳} - ۱۰); \quad t \geq ۰$$

عبارتست از:

$$f'(t) = ۳(t^{۲} - (\sqrt{۳} - ۱)^{۲})$$

$f'(t)$ فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد، که آن هم $\sqrt{۳} - ۱$ است. به‌راحتی می‌توان فهمید که این نقطه، حداقل تابع f روی بازه‌ی $[۰, \infty)$ است. بنابراین

$$f(t) \geq f(\sqrt{۳} - ۱) = ۰$$

و مسئله حل می‌شود.

ملاحظه. در واقع داریم:

$$f(t) = (t - \sqrt{۳} + ۱)^{۲}(t + ۲\sqrt{۳} - ۲)$$

پس برای هر $t \geq ۰$، خواهیم داشت $f(t) \geq ۰$.

۷۱. **راه‌حل اول.** ابتدا توجه کنید که سمت چپ نابرابری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sum \frac{a^{۳} - b^{۳}}{a + b} &= (a^{۳} - b^{۳})\left(\frac{۱}{a+b} - \frac{۱}{a+c}\right) + (b^{۳} - c^{۳})\left(\frac{۱}{b+c} - \frac{۱}{a+c}\right) \\ &= \frac{(a-b)(c-b)(a-c)\sum ab}{(a+b)(a+c)(b+c)}\end{aligned}$$

بنابراین باید نابرابری زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{۱}{۲}\left(\sum a^{۲} - \sum ab\right)$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{۸}{۹}(a+b+c)(ab+bc+ca)$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{۲}{۹} \cdot \sum a \cdot \left(\sum (a-b)^{۲}\right) \geq \left|\prod (a-b)\right|$$

با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی ـ هندسی، نامساوی فوق به‌صورت

$$\frac{۸}{۲۷}\left(\sum a\right)^{۳} \geq \left|\prod (a-b)\right|$$

در می‌آید که این نابرابری درست است. چرا که اگر فرض کنیم $a \geq b \geq c$ (با توجه به تقارن نابرابری نسبت به a, b, c)، به نابرابری

$$(a-b)(a-c)(b-c) \leq \frac{۸}{۲۷}(a+b+c)^{۳}$$

می‌رسیم که نتیجه‌ای از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی است.

راه‌حل دوم. (ارائه شده توسط مارین تتیوا[۳])

به‌راحتی می‌توان دید که نابرابری مسئله نه تنها دوری است، بلکه متقارن نیز هست. به همین خاطر می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b \geq c > ۰$. ایده‌ی این راه حل، استفاده از نابرابری

$$x + \frac{y}{۲} \geq \frac{x^۲ + xy + y^۲}{x+y} \geq y + \frac{x}{۲}$$

است که در حالت $x \geq y > ۰$ برقرار است. اثبات این نابرابری ساده است و به آن نمی‌پردازیم. حال از آن‌جایی که $a \geq b \geq c > ۰$، داریم:

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{۲} &\geq \frac{a^۲ + ab + b^۲}{a+b} \geq b + \frac{a}{۲}, \\ b + \frac{c}{۲} &\geq \frac{b^۲ + bc + c^۲}{b+c} \geq c + \frac{b}{۲}, \\ a + \frac{c}{۲} &\geq \frac{a^۲ + ac + c^۲}{a+c} \geq c + \frac{a}{۲} \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^۳ - b^۳}{a+b} &= (a-b)\cdot\frac{a^۲ + ab + b^۲}{a+b} + (b-c)\cdot\frac{b^۲ + bc + c^۲}{b+c} \\ &\quad -(a-c)\cdot\frac{a^۲ + ac + c^۲}{a+c} \\ &\geq (a-b)\Big(b + \frac{a}{۲}\Big) + (b-c)\Big(c + \frac{b}{۲}\Big) - (a-c)\Big(a + \frac{c}{۲}\Big) \\ &= -\sum \frac{(a-b)^۲}{۴} \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\sum \frac{a^۳ - b^۳}{a+b} \leq \frac{\sum (a-b)^۲}{۴}$$

بنابراین حکم مسئله ثابت می‌شود.

۷۲. راه‌حل. ابتدا اثبات را از نابرابری $(a^۲ - ۱)(a^۳ - ۱) \geq ۰ \Leftrightarrow a^۵ - a^۲ + ۳ \geq a^۳ + ۲$ شروع می‌کنیم. به این ترتیب کافی است ثابت کنیم:

$$\prod (a^۳ + ۲) \geq \Big(\sum a\Big)^۳$$

---

[۳] Marian Tetiva

با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی — هندسی داریم:

$$\frac{a^۳}{a^۳+۲}+\frac{۱}{b^۳+۲}+\frac{۱}{c^۳+۲}\geq\frac{۳a}{\sqrt[۳]{\prod(a^۳+۲)}}$$

با نوشتن دو رابطه‌ی مشابه دیگر و جمع بستن این سه نابرابری، نتیجه می‌گیریم:

$$\prod(a^۳+۲)\geq\left(\sum a\right)^۳$$

به این ترتیب مسئله حل می‌شود.

۷۳. **راه‌حل.** برای حل این مسئله، نابرابری کوشی — شوارتز را با اتحادهای جبری تلفیق می‌کنیم. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{۱\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲\right)^۲$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned}\sum_{۱\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲\right)^۲ &= \sum_{۱\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i^۲}{x_j^۲}+\frac{x_j^۲}{x_i^۲}-۴\cdot\frac{x_i}{x_j}-۴\cdot\frac{x_j}{x_i}+۶\right)\\ &= \left(\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^۲}\right)-۴\left(\sum_{i=۱}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i}\right)+۳n^۲\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرض مسئله و این‌که

$$\sum\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲\right)^۲\geq ۰$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{x_i^۲}\right)\geq n^۲+۴$$

اما متأسفانه این نابرابری ضعیف‌تر از حکم مسئله است. به همین خاطر سعی می‌کنیم عبارت

$$\sum_{۱\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲\right)^۲$$

را حداقل کنیم. این کار با استفاده از نابرابری کوشی — شوارتز امکان‌پذیر است:

$$\sum_{۱\leq i<j\leq n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲\right)^۲\geq\frac{\left(\sum(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-۲)\right)^۲}{\binom{n}{۲}}$$

حال از آن‌جایی که $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right) = 1$ نتیجه می‌گیریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) \geq n^2+4+\frac{2}{n(n-1)}$$

ضمن این‌که توجه داشته باشید که تساوی نیز نمی‌تواند رخ بدهد. چرا که در این صورت باید داشته باشیم $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$، که متناقض با فرض $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = n^2+1$ است.

۷۴. **راه‌حل اول.** فرض کنید

$$f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2+abc+2-a-b-c-ab-bc-ca$$

می‌خواهیم ثابت کنیم مقدار f نامنفی است. اگر $a,b,c > 3$، به‌وضوح داریم $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1$؛ بنابراین $f(a,b,c) > a^2+b^2+c^2+2-a-b-c > 0$. لذا می‌توانیم فرض کنیم $a \leq 3$. قرار می‌دهیم $m = \frac{b+c}{2}$. با کمی محاسبه نتیجه می‌گیریم:

$$f(a,b,c)-f(a,m,m) = \frac{(3-a)(b-c)^2}{4} \geq 0$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $f(a,m,m) \geq 0$، که این نابرابری هم‌ارز است با:

$$(a+1)m^2-2(a+1)m+a^2-a+2 \geq 0$$

دلتای این عبارت درجه‌ی دوم عبارتست از $-4(a+1)(a-1)^2 \leq 0$. در نتیجه نابرابری فوق برقرار است.

راه‌حل دوم. نابرابری تورکویکی را یادآوری می‌کنیم:

$$x^4+y^4+z^4+t^4+2xyzt \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2x^2+x^2z^2+y^2t^2$$

که x، y، z و t اعدادی حقیقی و مثبت‌اند. با جایگذاری $t=1$، $a=x^2$، $b=y^2$ و $c=z^2$ و به کار بردن نابرابری $2\sqrt{abc} \leq abc+1$، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۷۵. **راه‌حل اول.** از آن‌جایی که نابرابری همگن است، می‌توانیم فرض کنیم $a+b+c=3$. در این‌صورت:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9} = \frac{1}{3}\left(1+2\cdot\frac{4a+3}{2+(a-1)^2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{3}\left(1+2\cdot\frac{4a+3}{2}\right) = \frac{4a+4}{3}$$

بنابراین:

$$\sum \frac{(۲a+b+c)^۲}{۲a^۲+(b+c)^۲} \le \frac{۱}{۳}\sum(۴a+۴) = ۸$$

راه‌حل دوم. قرار می‌دهیم $x = \frac{b+c}{a}$، $y = \frac{c+a}{b}$ و $z = \frac{a+b}{c}$. باید ثابت کنیم:

$$\sum \frac{(x+۲)^۲}{x^۲+۲} \le ۸ \Leftrightarrow \sum \frac{۲x+۱}{x^۲+۲} \le \frac{۵}{۲} \Leftrightarrow \sum \frac{(x-۱)^۲}{x^۲+۲} \ge \frac{۱}{۲}$$

اما طبق نامساوی کوشی– شوارتز داریم:

$$\sum \frac{(x-۱)^۲}{x^۲+۲} \ge \frac{(x+y+z-۳)^۲}{x^۲+y^۲+z^۲+٦}$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$۲(x^۲+y^۲+z^۲+۲xy+۲yz+۲zx-٦x-٦y-٦z+۹) \ge x^۲+y^۲+z^۲+٦$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲+z^۲+۴(xy+yz+zx)-۱۲(x+y+z)+۱۲ \ge ۰$$

می‌دانیم $xy+yz+zx \ge ۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲} \ge ۱۲$ (چرا که $xyz \ge ۸$). بنابراین می‌بایست ثابت کنیم:

$$(x+y+z)^۲+۲۴-۱۲(x+y+z)+۱۲ \ge ۰$$

این نابرابری نیز هم‌ارز است با $(x+y+z-٦)^۲ \ge ۰$، که به وضوح درست است.

۷٦. **راه‌حل.** نابرابری را به صورت زیر در می‌آوریم:

$$mn(x-y)(x^{m+n-۱}-y^{m+n-۱}) \ge (m+n-۱)(x^m-y^m)(x^n-y^n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{m+n-۱}-y^{m+n-۱}}{(m+n-۱)(x-y)} \ge \frac{x^m-y^m}{m(x-y)}\cdot\frac{x^n-y^n}{n(x-y)}$$

(فرض کرده‌ایم $x > y$). رابطه‌ی فوق را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-y)\int_y^x t^{m+n-۲}dt \ge \int_y^x t^{m-۱}dt \cdot \int_y^x t^{n-۱}dt$$

این نامساوی نیز از نابرابری چبیشف برای انتگرال‌ها نتیجه می‌شود.

۷۷. **راه‌حل.** از تغییر متغیر استاندارد زیر استفاده می‌کنیم:

$$a=\frac{z}{y},\quad b=\frac{y}{z},\quad c=\frac{z}{t},\quad d=\frac{t}{u},\quad e=\frac{u}{x},\quad x,y,z,t,u>۰$$

واضح است که:

$$\frac{a+abc}{۱+ab+abcd}=\frac{\frac{۱}{y}+\frac{۱}{t}}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{u}}$$

اگر روابط مشابه دیگر را نیز بنویسیم و فرض کنیم $a_۱=\frac{۱}{x}$، $a_۲=\frac{۱}{y}$، $a_۳=\frac{۱}{z}$، $a_۴=\frac{۱}{t}$ و $a_۵=\frac{۱}{u}$ می‌بایست ثابت کنیم:

$$\sum\frac{a_۲+a_۴}{a_۱+a_۳+a_۵}\geq\frac{۱}{۳};\qquad a_i>۰$$

برای این منظور از نابرابری کوشی — شوارتز استفاده می‌کنیم. سمت چپ نابرابری بالا، بزرگ‌تر یا مساوی است با:

$$\frac{۴S^۲}{۲S^۲-(a_۲+a_۴)^۲-(a_۱+a_۴)^۲-(a_۳+a_۵)^۲-(a_۲+a_۵)^۲-(a_۱+a_۳)^۲}$$

که $S=\sum\limits_{i=۱}^{۵}a_i$. حال اگر مجدداً نابرابری کوشی — شوارتز را برای مخرج این کسر به کار ببریم، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۷۸. راه‌حل. قرار می‌دهیم $x=\sin a$، $y=\sin b$ و $z=\sin c$؛ در این صورت $x,y,z>۰$. به راحتی می‌توان دید که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\sin a\cdot\sin(a-b)\cdot\sin(a-c)\cdot\sin(a+b)\cdot\sin(a+c)=x(x^۲-y^۲)(x^۲-z^۲)$$

با نوشتن روابط مشابه برای متغیرهای دیگر، در نهایت باید ثابت کنیم:

$$\sum x(x^۲-y^۲)(x^۲-z^۲)\geq۰$$

با تغییر متغیر $x=\sqrt{u}$، $y=\sqrt{v}$ و $z=\sqrt{w}$، نابرابری فوق به صورت $\sum\sqrt{u}(u-v)(v-w)\geq۰$ در می‌آید، که همان نابرابری شور در حالت $n=\frac{۱}{۲}$ است.

۷۹. راه‌حل. برای اثبات مسئله کافی است نشان دهیم:

$$\sum a^۴+\sum a^۲b^۲\geq\sum a^۳b+\sum ab^۳$$

و

$$\left(\sum a^۴\right)\left(\sum a^۲b^۲\right)\geq\left(\sum a^۳b\right)\left(\sum ab^۳\right)$$

نابرابری اول، از نامساوی شور نتیجه می‌شود:

$$\sum a^۴+abc\sum a\geq\sum a^۳b+\sum ab^۳$$

(توجه کنید که $\sum a^2b^2 \geq abc\sum a$) . برای اثبات نابرابری دوم، دو بار از نابرابری کوشی—شوارتز استفاده می‌کنیم:

$$(a^3b+b^3c+c^3a)^2 \leq (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^4+b^4+c^4),$$
$$(ab^3+bc^3+ca^3) \leq (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(b^4+c^4+a^4)$$

۸۰. راه‌حل. ابتدا قرار می‌دهیم $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x$ و $a_n = \frac{1}{x^{n-1}}$؛ در این صورت:

$$k_n \geq \frac{2x^{2n-1}}{(x^{n+1}+1)(x^{2n-1}+1)} + \frac{n-2}{(1+x)^2} > \frac{n-2}{(1+x)^2}$$

با توجه به اینکه x هر مقدار مثبتی می‌تواند باشد، نتیجه می‌گیریم $k_n \geq n-2$. حال نشان می‌دهیم $n-2$ همان ثابت خواسته شده در مسئله است.

توجه کنید که نابرابری $(x^2+y)(y^2+x) \geq xy(1+x)(1+y)$ برقرار است، چرا که این نابرابری هم‌ارز $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$ است. در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_n)(1+a_1)} \leq n-2$$

حال فرض کنید $a_1 = \frac{x_1}{x_2}, a_2 = \frac{x_2}{x_3}, \ldots, a_n = \frac{x_n}{x_1}$. با این تغییر متغیر نابرابری فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_{k+1}x_{k+2}}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})}\right) \geq 2$$

این نابرابری هم‌ارز است با:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}^2}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})}\right) \geq 2$$

به وضوح داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_n} = 1$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}^2}{(x_k+x_{k+1})(x_{k+1}+x_{k+2})} \geq 1$$

با استفاده از نابرابری کوشی— شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{x_{k+۱}^{۲}}{(x_k + x_{k+۱})(x_{k+۱} + x_{k+۲})} \geq \frac{(\sum_{k=۱}^{n} x_k)^{۲}}{\sum_{k=۱}^{n}(x_k + x_{k+۱})(x_{k+۱} + x_{k+۲})}$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$\left(\sum_{k=۱}^{n} x_k\right)^{۲} \geq \sum_{k=۱}^{n} x_k^{۲} + ۲\sum_{k=۱}^{n} x_k x_{k+۱} + \sum_{k=۱}^{n} x_k x_{k+۲}$$

پس از ساده کردن جملات داریم:

$$۲\sum_{۱\leq i<j\leq n} x_i x_j \geq ۲\sum_{k=۱}^{n} x_k x_{k+۱} + \sum_{k=۱}^{n} x_k x_{k+۲}$$

که به وضوح این نابرابری برقرار است. لذا $k_n = n - ۲$.

۸۱. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $t = \sqrt{\frac{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}}$. با استفاده از تغییر متغیر $x = tp$، $y = tq$ و $z = tr$ نتیجه می‌گیریم:

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = p^{۲} + q^{۲} + r^{۲}$$

به این ترتیب، نابرابری مسئله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$ap + bq + cr + a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \geq \frac{۲}{۳}(a+b+c)(p+q+r)$$

$$\Leftrightarrow (a+p)^{۲} + (b+q)^{۲} + (c+r)^{۲} \geq \frac{۴}{۳}(a+b+c)(p+q+r)$$

از آن‌جایی که

$$۴(a+b+c)(p+q+r) \leq [(a+b+c)+(p+q+r)]^{۲}$$

کافی است ثابت کنیم:

$$(a+p)^{۲} + (b+q)^{۲} + (c+r)^{۲} \geq \frac{۱}{۳}[(a+p)+(b+q)+(c+r)]^{۲}$$

این نابرابری نیز به وضوح برقرار است.

۸۲. **راه‌حل اول.** می‌توان فرض کرد c کوچک‌ترین عدد در میان اعداد a, b, c است. قرار می‌دهیم $x = b - \frac{a+c}{۲}$. بعد از مقداری محاسبه، نابرابری به صورت زیر در می‌آید:

$$(۳a - ۲c)x^{۲} + \left(x + c - \frac{a}{۴}\right)(a-c)^{۲} \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (۳a - ۲c)(۲b - a - c)^{۲} + (۴b + ۲c - ۳a)(a-c)^{۲} \geq ۰$$

این نابرابری نیز درست است، چرا که $۳a \geq ۲c$ و نیز

$$۴b + ۲c - ۳a = ۳(b + c - a) + b - c > ۰$$

راه‌حل دوم. از تغییر متغیر کلاسیک $a = y + z$، $b = z + x$ و $c = x + y$ استفاده می‌کنیم. بعد از ساده کردن نابرابری، در نهایت باید ثابت کنیم:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + ۲(x^۲y + y^۲z + z^۲x) \geq ۳(xy^۲ + yz^۲ + zx^۲)$$

می‌توان فرض کرد x کوچکترین عدد در میان x، y و z است. در این صورت می‌توان نوشت $y = x + m$ و $z = x + n$ ، که n و m اعدادی نامنفی‌اند. با جایگذاری مقادیر z و y در نابرابری، خواهیم داشت:

$$۲x(m^۲ - mn + n^۲) + m^۳ + n^۳ + ۲m^۲n - ۳n^۲m \geq ۰$$

حال فقط کافی است ثابت کنیم:

$$m^۳ + n^۳ + ۲m^۲n \geq ۳n^۲m \Leftrightarrow (n - m)^۳ - (n - m)m^۲ + m^۳ \geq ۰$$

این نابرابری نیز، از نامساوی $t^۳ + ۱ \geq t$ $(t \geq -۱)$ نتیجه می‌شود.

۸۳. **راه‌حل اول.** توجه کنید که:

$$\frac{n - x_i}{۱ - x_i} = ۱ + \frac{n - ۱}{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{i-۱} + x_{i+۱} + \cdots + x_n}$$

بنابراین:

$$\prod_{i=۱}^{n} \left(\frac{n - x_i}{۱ - x_i}\right) \leq \prod_{i=۱}^{n} \left(۱ + \frac{۱}{\sqrt[n-۱]{x_۱ x_۲ \ldots x_{i-۱} x_{i+۱} \ldots x_n}}\right)$$

لذا می‌بایست ثابت کنیم:

$$\prod_{i=۱}^{n} \left(۱ + \frac{۱}{x_i}\right) \geq \prod_{i=۱}^{n} \left(۱ + \frac{۱}{\sqrt[n-۱]{x_۱ x_۲ \ldots x_{i-۱} x_{i+۱} \ldots x_n}}\right)$$

اثبات این نابرابری چندان سخت نیست؛ در واقع کافی است نابرابری‌های به فرم

$$\prod_{j \neq i} \left(۱ + \frac{۱}{x_j}\right) \geq \left(۱ + \sqrt[n-۱]{\prod_{j \neq i} \frac{۱}{x_j}}\right)^{n-۱}$$

را که از نامساوی هویگنس به دست می‌آیند، در هم ضرب کنیم.

راه‌حل دوم. نامساوی کلی‌تر زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\prod\left(۱+\frac{۱}{x_i}\right) \geq \left(\frac{n^۲-۱}{n}\right)^n \cdot \prod_{i=۱}^{n} \frac{۱}{۱-x_i}$$

واضح است که این نامساوی از نابرابری مسئله قوی‌تر است (چرا؟). ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\prod_{i=۱}^{n} \frac{۱+x_i}{۱-x_i} \geq \left(\frac{n+۱}{n-۱}\right)^n$$

برای اثبات این نابرابری کافی است نامساوی ینسن را برای تابع $f(x)=\ln(۱+x)-\ln(۱-x)$ به کار ببرید. در نتیجه باید نشان دهیم:

$$\frac{\left(\frac{n+۱}{n-۱}\right)^n}{\prod_{i=۱}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=۱}^{n}(۱-x_i)^۲ \geq \left(\frac{n^۲-۱}{n}\right)^۲$$

این نابرابری را در راه‌حل مسئله‌ی ۱۲۱ ثابت خواهیم کرد.

۸۴. **راه‌حل اول.** فرض کنید نابرابری به‌ازای n عدد خاص، نادرست باشد (برهان خلف). در این صورت عددی مانند $k>۱$ و اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ با مجموع ۱ وجود دارند، به نحوی که $ka_i = \frac{۱}{n-۱+x_i}$. در این صورت داریم:

$$۱ = \prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{ka_i}-n+۱\right) < \prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{a_i}-n+۱\right)$$

(توجه کنید که $a_i < \frac{۱}{n-۱}$). حال قرار می‌دهیم $b_k = (۱-n)a_k - ۱$؛ در نتیجه $\sum_{k=۱}^{n} b_k = ۱$ و نیز:

$$\prod_{k=۱}^{n}(۱-b_k) < (n-۱)^n b_۱ b_۲ \ldots b_n$$

اما این نابرابری غلط است؛ چرا که اگر نابرابری‌های به فرم

$$۱-b_j = b_۱+\cdots+b_{j-۱}+b_{j+۱}+\cdots+b_n \geq (n-۱)\sqrt[n-۱]{b_۱\ldots b_{j-۱}b_{j+۱}\ldots b_n}$$

را به‌ازای $j=۱,۲,\ldots,n$ در هم ضرب کنیم، عکس نابرابری فوق نتیجه می‌شود.

راه‌حل دوم. نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x_۱}{n-۱+x_۱}+\frac{x_۲}{n-۱+x_۲}+\cdots+\frac{x_n}{n-۱+x_n} \geq ۱$$

این نابرابری را می‌توان از جمع بستن نابرابری‌های زیر به‌دست آورد:

$$\frac{x_1}{n-1+x_1} \geq \frac{x_1^{1-\frac{1}{n}}}{x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+\cdots+x_n^{1-\frac{1}{n}}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n}{n-1+x_n} \geq \frac{x_n^{1-\frac{1}{n}}}{x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+\ldots+x_n^{1-\frac{1}{n}}}$$

برای اثبات نابرابری‌های فوق، مثلاً نابرابری نخست، دقت کنید که این نابرابری هم‌ارز است با:

$$x_1^{1-\frac{1}{n}}+x_2^{1-\frac{1}{n}}+\cdots+x_n^{1-\frac{1}{n}} \geq (n-1)x_n^{1-\frac{1}{n}}$$

که این نابرابری نیز به‌طور مستقیم از نامساوی واسطه‌ی حسابی–هندسی نتیجه می‌شود.

ملاحظه. با جایگذاری اعداد $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ به جای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نابرابری مسئله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1}+\frac{1}{1+(n-1)x_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$$

۸۵. **راه‌حل اول.** (توسط ریچارد استونگ[۴])

اثبات کران پایین این نابرابری چندان سخت نیست. داریم $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$؛ بنابراین کافی است ثابت کنیم $abc \leq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$، که این نابرابری نیز از این مطلب که $abc \leq 4$ ناشی می‌شود. در عوض، اثبات کران بالا سخت است. ابتدا توجه کنید که در میان اعداد a, b, c یا حتماً دو عدد وجود دارند که بزرگ‌تر یا مساوی ۱ اند و یا دو عدد وجود دارند که کوچک‌تر یا مساوی ۱ اند. این اعداد را b و c در نظر می‌گیریم. در این‌صورت داریم:

$$4 \geq 2bc+a^2+abc \Rightarrow (2-a)(2+a) \geq bc(2+a) \Rightarrow bc \leq 2-a$$

بنابراین $ab+bc+ca-abc \leq ab+2-a+ac-abc$. حال کافی است ثابت کنیم:

$$ab+2-a+ac-abc \leq 2 \Leftrightarrow b+c-bc \leq 1 \Leftrightarrow (b-1)(c-1) \geq 0$$

اما این نابرابری نیز با توجه به انتخاب b و c درست است.

[۴] Richard Stong

راه‌حل دوم. کران پایین را در راه حل اول ثابت کردیم، بنابراین روی کران بالای نامساوی متمرکز می‌شویم. فرض کنید $a \geq b \geq c$ و $a = x + y$ و $b = x - y$. از فرض مسئله نتیجه می‌گیریم $x^۲(۲+c) + y^۲(۲-c) = ۴ - c^۲$. باید ثابت کنیم:

$$(x^۲ - y^۲)(۱ - c) \leq ۲(۱ - xc)$$

از آن‌جایی که $y^۲ = ۲ + c - \frac{۲+c}{۲-c}x^۲$، در نتیجه نابرابری فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{۴x^۲ - (۴ - c^۲)}{۲ - c} \cdot (۱ - c) \leq ۲(۱ - cx)$$

واضح است که $c \leq ۱$. هم‌چنین داریم:

$$\circ \leq y^۲ = ۲ + c - \frac{۲+c}{۲-c}x^۲ \Rightarrow x^۲ \leq ۲ - c \Rightarrow x \leq \sqrt{۲ - c}$$

حال تابع $f : [\circ, \sqrt{۲ - c}] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی

$$f(x) = ۲(۱ - cx) - \frac{۴x^۲ - (۴ - c^۲)}{۲ - c} \cdot (۱ - c)$$

در نظر بگیرید. داریم:

$$f'(x) = -۲c - ۸x \cdot \frac{۱ - c}{۲ - c} \leq \circ$$

لذا تابع f نزولی است و در نتیجه $f(x) \geq f(\sqrt{۲ - c})$. اکنون کافی است نشان دهیم:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{۲ - c}) \geq \circ \quad &\Leftrightarrow \quad f(۱ - c\sqrt{۲ - c}) \geq (۲ - c)(۱ - c) \\ &\Leftrightarrow \quad ۳ \geq c + ۲\sqrt{۲ - c} \\ &\Leftrightarrow \quad (۱ - \sqrt{۲ - c})^۲ \geq \circ \end{aligned}$$

که این نابرابری، به وضوح درست است و مسئله حل می‌شود.

۸۶. **راه‌حل.** ساده‌ترین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد، به کار بردن برهان خلف است؛ یعنی فرض کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{۳} - \sqrt[۳]{abc} &> a + b - ۲\sqrt{ab}, \\ \frac{a+b+c}{۳} - \sqrt[۳]{abc} &> b + c - ۲\sqrt{bc}, \\ \frac{a+b+c}{۳} - \sqrt[۳]{abc} &> c + a - ۲\sqrt{ca} \end{aligned}$$

با جمع بستن این سه نابرابری نتیجه می‌گیریم:

$$a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc} > ۲(a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca})$$

حال ثابت می‌کنیم $a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc} \leq ۲(a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca})$. از آن‌جایی که این نابرابری، همگن است، می‌توان فرض کرد $abc = ۱$. در این‌صورت نابرابری به فرم

$$۲\sqrt{ab}+۲\sqrt{bc}+۲\sqrt{ca}-a-b-c \leq ۳$$

در می‌آید. از طرفی طبق نابرابری شور، برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x، y و z داریم:

$$۲xy+۲yz+۲zx-x^۲-y^۲-z^۲ \leq \frac{۹xyz}{x+y+z} \leq ۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲}$$

حال کافی است در این نابرابری قرار دهیم $x=\sqrt{a}$، $y=\sqrt{b}$ و $z=\sqrt{c}$.

۸۷. راه‌حل. (توسط آنه کونگ[۵])

داریم:

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[۳]{abc} \leq a+\sqrt[۳]{ab\cdot\frac{a+b}{۲}}+\sqrt[۳]{abc}$$

حال باید ثابت کنیم:

$$a+\sqrt[۳]{ab\cdot\frac{a+b}{۲}}+\sqrt[۳]{abc} \leq \sqrt[۳]{a\cdot\frac{a+b}{۲}\cdot\frac{a+b+c}{۳}}$$

طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی می‌توان نوشت:

$$\sqrt[۳]{۱\cdot\frac{۲a}{a+b}\cdot\frac{۳a}{a+b+c}} \leq \frac{۱+\frac{۲a}{a+b}+\frac{۳a}{a+b+c}}{۳},$$

$$\sqrt[۳]{۱\cdot۱\cdot\frac{۳b}{a+b+c}} \leq \frac{۲+\frac{۳b}{a+b+c}}{۳},$$

$$\sqrt[۳]{۱\cdot\frac{۲b}{a+b}\cdot\frac{۳c}{a+b+c}} \leq \frac{۱+\frac{۲b}{a+b}+\frac{۳c}{a+b+c}}{۳}$$

با جمع بستن این سه نابرابری، نتیجه‌ی مورد نظر به دست می‌آید. در ضمن تساوی هنگامی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a=b=c$.

۵ Anh Cuong

۸۸. راه‌حل. ثابت می‌کنیم $\frac{\pi}{2}$ بهترین ثابت برای این نابرابری است. به وضوح برای هر عدد طبیعی i، باید داشته باشیم:

$$k < (1 + \sqrt{i^2+1})\left|\sin(\pi\sqrt{i^2+1})\right|$$

از آن‌جایی که $\left|\sin\pi(\sqrt{i^2+1})\right| = \sin\frac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}} \geq \sin\frac{\pi}{i+\sqrt{i^2+1}} > \frac{k}{1+\sqrt{i^2+1}}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم $k \leq \frac{\pi}{2}$. حال نشان می‌دهیم $\frac{\pi}{2}$ در شرط مسئله صدق می‌کند. برای این منظور، نابرابری مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(\pi\cdot\{\sqrt{n}\}) > \frac{\pi}{2(1+\sqrt{n})}$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم:

I) $\{\sqrt{n}\} \leq \frac{1}{2}$. در این صورت:

$$\{\sqrt{n}\} \geq \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

با توجه به این‌که $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$، داریم:

$$\sin(\pi\cdot\{\sqrt{n}\}) \geq \sin\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \geq \left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)^3$$

باید نشان دهیم مقدار عبارت به‌دست آمده، حداقل برابر $\frac{\pi}{2(1+\sqrt{n})}$ است؛ یعنی:

$$\left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)^3 > \frac{\pi}{2(1+\sqrt{n})}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{n}} > \frac{\pi^2}{3(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$$

و یا به صورت معادل،

$$6(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2 + 3(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) > \pi^2(1+\sqrt{n})$$

که این نابرابری به وضوح درست است.

II) $\{\sqrt{n}\} > \frac{۱}{۲}$. در این حالت فرض کنید $x = ۱ - \{\sqrt{n}\} < \frac{۱}{۲}$ و نیز $n = k^۲ + p$، که $۱ \leq p \leq ۲k$. از آن‌جایی که $\{\sqrt{n}\} > \frac{۱}{۲}$، نتیجه می‌گیریم $p \geq k + ۱$. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$x \geq \frac{۱}{k + ۱ + \sqrt{k^۲ + ۲k}}$$

بنابراین کافیست ثابت کنیم:

$$\sin \frac{\pi}{k + ۱ + \sqrt{k^۲ + ۲k}} \geq \frac{\pi}{۲(۱ + \sqrt{k^۲ + k})}$$

با استفاده‌ی مجدد از نابرابری $\sin x \geq x - \frac{x^۳}{٦}$، در نهایت باید ثابت کنیم:

$$\frac{۲\sqrt{k^۲ + k} - \sqrt{k^۲ + ۲k} - k + ۱}{۱ + \sqrt{k^۲ + k}} > \frac{\pi^۲}{۳(۱ + k + \sqrt{k^۲ + ۲k})^۲}$$

طبق نابرابری کوشی– شوارتز داریم $۲\sqrt{k^۲ + k} - \sqrt{k^۲ + ۲k} - k \geq ۰$. حال از آن‌جایی که نابرابری

$$(۱ + k + \sqrt{k^۲ + ۲k})^۲ > \frac{\pi^۲}{۳}(۱ + \sqrt{k^۲ + k})$$

برقرار است، این حالت نیز اثبات می‌شود.

۸۹. **راه‌حل اول.** (ارائه شده توسط دونگ تران نام[٦])

به وضوح می‌توان فرض کرد $x + y + z = ۴$ و $xyz = ۲$. بنابراین باید مقادیر اکسترمم عبارت $\frac{x^۴ + y^۴ + z^۴}{۴۴}$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} x^۴ + y^۴ + z^۴ &= (x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲ - ۲\sum x^۲y^۲ \\ &= \left(۱٦ - ۲\sum xy\right)^۲ - ۲\left(\sum xy\right)^۲ + ۴xyz(x + y + z) \\ &= ۲a^۲ - ٦۴a + ۲۸۸ \end{aligned}$$

که $a = xy + yz + zx$. از آن‌جایی که $y + z = ۴ - x$ و $yz = \frac{۲}{x}$، داریم $(۴ - x)^۲ \geq \frac{۸}{x}$. درنتیجه $۲ \geq x \geq ۳ - \sqrt{۵}$. با توجه به تقارن عبارت مسئله نسبت به x, y, z نتیجه می‌گیریم $x, y, z \in [۳ - \sqrt{۵}, ۲]$. لذا $(x - ۲)(y - ۲)(z - ۲) \leq ۰$ و نیز

$$(x - ۳ + \sqrt{۵})(y - ۳ + \sqrt{۵})(z - ۳ + \sqrt{۵}) \geq ۰$$

[٦] Dung Tran Nam

با بسط دادن این دو عبارت، در نهایت خواهیم داشت:

$$a \in \left[۵, \frac{۵\sqrt{۵}-۱}{۲}\right]$$

اما با توجه به این‌که $\frac{x^۴+y^۴+z^۴}{۴^۴} = \frac{(a-۱۶)^۲-۱۱۲}{۱۲۸}$، بنابراین مقادیر اکسترمم این عبارت، $\frac{۳۸۳-۱۶۵\sqrt{۵}}{۲۵۶}$ و $\frac{۹}{۱۲۸}$ اند که این مقادیر به‌ازای سه‌تایی‌های $\left(۳-\sqrt{۵}, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)$ و $(۲, ۱, ۱)$ اتفاق می‌افتند.

راه‌حل دوم. این بار فرض می‌کنیم $x+y+z = ۱$ و $xyz = \frac{۱}{۳۲}$. کافی است مقادیر اکسترمم $x^۲+y^۲+z^۲$ را پیدا کنیم، چرا که بعد از پیدا شدن این مقادیر، همان‌طور که در راه حل اول دیدیم، می‌توان بلافاصله اکسترمم‌های $x^۴+y^۴+z^۴$ را بدست آورد. برای این منظور از تغییر متغیر $x = \frac{a}{۴}$، $y = \frac{b}{۴}$ و $z = \frac{c}{۲}$ استفاده می‌کنیم. در این‌صورت داریم $abc = ۱$ و $a+b+۲c = ۴$. در نتیجه $x^۲+y^۲+z^۲ = \frac{a^۲+b^۲+۴c^۲}{۱۶}$. حال می‌بایست مقادیر اکسترمم $a^۲+b^۲+۴c^۲$ را پیدا کنیم. داریم:

$$a^۲+b^۲+۴c^۲ = (۴-۲c)^۲ - \frac{۲}{c} + ۴c^۲$$

لذا مسئله به این صورت در می‌آید که اگر اعداد مثبت a، b و c در روابط $abc = ۱$ و $a+b+۲c = ۴$ صدق کنند، حداقل و حداکثر عبارت $۴c^۲ - ۸c - \frac{۱}{c}$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که

$$(۴-۲c)^۲ = (a+b)^۲ \geq ۴ab = \frac{۴}{c} \;\Rightarrow\; c \in \left[\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}, ۱\right]$$

بنابراین باید تابع $f(x) = ۴x^۲ - ۸x - \frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $\left[\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}, ۱\right]$ بررسی کنیم که کار چندان سختی نیست.

۹۰. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری مک لارن برای

$$x = abc, \quad y = bcd, \quad z = cda, \quad t = dab$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\left(\frac{\sum abc}{۴}\right)^۳ \geq \frac{\sum abc \cdot bcd \cdot cda}{۴} = \frac{a^۲b^۲c^۲d^۲ \sum a}{۴}$$

بنابراین، کافی است نامساوی قوی‌تر زیر را ثابت کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$$

توجه کنید که:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) &= (ac+bd+ad+bc)(ac+bd+ab+cd)\\ &= (ac+bd)^۲ + \sum a^۲(bc+bd+cd)\\ &\geq ۴abcd + \sum a^۲(bc+bd+cd)\\ &= (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)\end{aligned}$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۹۱. راه‌حل. ابتدا حالت $n > ۱$ را بررسی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم حداکثر عبارت داده شده برابر است با $\frac{۱}{۳ \times ۴^{n-۱}}$. واضح است که $ab, bc, ca \leq \frac{۱}{۴}$. بنابراین:

$$\frac{(ab)^n}{۱-ab} + \frac{(bc)^n}{۱-bc} + \frac{(ca)^n}{۱-ca} \leq \frac{۴}{۳}((ab)^n + (bc)^n + (ca)^n)$$

در نتیجه باید ثابت کنیم $(ab)^n + (bc)^n + (ca)^n \leq \frac{۱}{۴^n}$. فرض کنید a بزرگ‌ترین عدد در میان a، b و c است. در این صورت داریم:

$$\frac{۱}{۴^n} \geq a^n(۱-a)^n = a^n(b+c)^n \geq a^nb^n + a^nc^n + na^nb^{n-۱} \geq a^nb^n + b^nc^n + c^na^n$$

حال با توجه به اینکه به ازای $c = ۰$ و $a = b = \frac{۱}{۲}$، این مقدار حاصل می‌شود، لذا حداکثر عبارت مسئله در این حالت برابر $\frac{۱}{۳ \times ۴^{n-۱}}$ است ($n > ۱$).

اما در حالت $n = ۱$ داریم:

$$\sum \frac{ab}{۱-ab} = \sum \frac{۱}{۱-ab} - ۳$$

با استفاده از این مطلب که $a+b+c = ۱$، می‌توان نشان داد:

$$\frac{۱}{۱-ab} + \frac{۱}{۱-bc} + \frac{۱}{۱-ca} = \frac{۳ - ۲\sum ab + abc}{۱ - \sum ab + abc - a^۲b^۲c^۲}$$

ثابت می‌کنیم $\sum \frac{ab}{۱-ab} \leq \frac{۳}{۸}$. با توجه به تساوی بالا، این نابرابری هم‌ارز است با:

$$\sum ab \leq \frac{۳ - ۲۷(abc)^۲ + ۱۹abc}{۱۱}$$

اما با توجه به نابرابری شور، داریم:

$$\sum ab \leq \frac{۱ + ۹abc}{۴}$$

در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{۹abc + ۱}{۴} \leq \frac{۳ - ۲۷(abc)^۲ + ۱۹abc}{۱۱} \Leftrightarrow ۱۰۸(abc)^۲ + ۲۳abc \leq ۱$$

این نابرابری نیز با توجه به اینکه $abc \leq \frac{۱}{۲۷}$، برقرار است.

بنابراین در حالت $n = ۱$، حداکثر مقدار عبارت مسئله برابر $\frac{۳}{۸}$ است و این حداکثر به ازای $a = b = c = \frac{۱}{۳}$ اتفاق می‌افتد.

۹۲. راه‌حل. واضح است که:

$$\begin{aligned}(۱ + abc)\Big(\frac{۱}{a(۱+b)} + \frac{۱}{b(۱+c)} + \frac{۱}{c(۱+a)}\Big) + ۳ \\ = \sum \frac{۱ + abc + a + ab}{a(۱+b)} \\ = \sum \frac{۱+a}{a(۱+b)} + \sum \frac{b(c+۱)}{۱+b}\end{aligned}$$

حال با دو بار استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \frac{۱+a}{a(۱+b)} + \sum \frac{b(c+۱)}{۱+b} \geq \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}} + ۳\sqrt[۳]{abc}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{\frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}} + ۳\sqrt[۳]{abc} - ۳}{۱ + abc} \geq \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}(۱ + \sqrt[۳]{abc})}$$

که این رابطه نیز در واقع یک اتحاد است!

۹۳. راه‌حل اول. (ارائه شده توسط گئورگی اکشتین[۷])

از آن‌جایی که $\max\{a,b,c\} \leq ۳$ و $|abc| \leq ۱۰$، بنابراین کافی است تنها حالت‌هایی را در نظر بگیریم که در آن‌ها $a,b,c \geq ۰$ و یا دقیقاً یکی از این سه عدد، منفی است. ابتدا فرض می‌کنیم a، b و c نامنفی‌اند. اگر $abc \geq ۱$، مسئله حل است، چرا که:

$$۲(a+b+c) - abc \leq ۲\sqrt{۳(a^۲+b^۲+c^۲)} - ۱ < ۱۰$$

---

[۷] Gheorghe Eckstein

در غیر این صورت می‌توان فرض کرد $a < ۱$. در این‌صورت داریم:

$$۲(a+b+c) - abc \leq ۲\left(a + ۲\sqrt{\frac{b^۲+c^۲}{۲}}\right) = ۲a + ۲\sqrt{۱۸ - ۲a^۲} \leq ۱۰$$

حال فرض می‌کنیم a, b, c هر سه نامنفی نیستند و نیز $c < ۰$.

لذا مسئله به این صورت در می‌آید که برای هر سه عدد نامنفی x, y, z که مجموع مربعات آن‌ها برابر ۹ است، ثابت کنیم $۴(x+y-z) + ۲xyz \leq ۲۰$. این نابرابری را می‌توان به صورت

$$(x-۲)^۲ + (y-۲)^۲ + (z-۱)^۲ \geq ۲xyz - ٦z - ۲$$

نوشت. از طرفی:

$$۲xyz - ٦z - ۲ \leq z(x^۲+y^۲) - ٦z - ۲ = -z^۳ + ۳z - ۲ = -(z-۱)^۲(z+۲) \leq ۰$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. به وضوح داریم $|a|, |b|, |c| \leq ۳$ و نیز $|a+b+c|, |abc| \leq ۳\sqrt{۳}$. در ضمن می‌توانیم فرض کنیم a، b و c مخالف صفرند و $a \leq b \leq c$. اگر $c < ۰$، آن‌گاه:

$$۲(a+b+c) - abc < -abc \leq ۳\sqrt{۳} < ۱۰$$

هم‌چنین اگر $a \leq b < ۰ < c$ در این صورت داریم $۲(a+b+c) < ۲c \leq ٦ < ۱۰ + abc$، چرا که $abc > ۰$.

حال اگر $a < ۰ < b \leq c$، با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز نتیجه می‌گیریم $۲b + ۲c - a \leq ۹$ (چرا؟). در نتیجه:

$$۲(a+b+c) = ۲b + ۲c - a + ۳a \leq ۹ + ۳a$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $abc \geq ۳a - ۱$. اما $a < ۰$ و $۲bc < ۹ - a^۲$، لذا:

$$abc \geq \frac{۹a - a^۳}{۲} \geq ۳a - ۱ \Leftrightarrow (a-۱)^۲(a-۲) \leq ۰$$

که این نابرابری درست است. اکنون باید حالت $۰ < a \leq b \leq c$ را بررسی کنیم. در این حالت داریم:

$$۲b + ۲c + a \leq ۹ \Rightarrow ۲(a+b+c) \leq ۹ + a$$

در نتیجه باید نشان دهیم $a \leq ۱ + abc$؛ اما این نابرابری نیز به وضوح برقرار است، چرا که در حالت $a < ۱$ این نامساوی بدیهی است و در حالت $a \geq ۱$ نیز، این نابرابری از این مطلب که $b, c > ۱$ نتیجه می‌شود. به این ترتیب اثباتمان کامل می‌شود.

۹۴. **راه‌حل اول.** با جایگذاری $x = a + \frac{۱}{b} - ۱$، $y = b + \frac{۱}{c} - ۱$ و $z = c + \frac{۱}{a} - ۱$، نابرابری به صورت

$$xy + yz + zx \geq ۳$$

در می‌آید. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $z = \max\{x, y, z\}$. از رابطه‌ی

$$(x+۱)(y+۱)(z+۱) = abc + \frac{۱}{abc} + a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$$
$$\geq ۲ + a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = ۵ + x + y + z$$

نتیجه می‌گیریم:

$$xyz + xy + yz + zx \geq ۴$$

هم‌چنین تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $abc = ۱$. از آن‌جایی که $y + z = \frac{۱}{a} + b + \frac{(c-۱)^۲}{c} > ۰$ دو حالت پیش می‌آید:

I) $x > ۰$ و $yz \leq ۰$. در این حالت داریم $xyz \leq ۰$. حال با توجه به این‌که $xyz + xy + yz + zx \geq ۴$ نتیجه می‌گیریم $xy + yz + zx \geq ۴ > ۳$.

II) $x, y, z > ۰$. قرار می‌دهیم $xy + yz + zx = ۳d^۲$، که $d > ۰$. طبق نامساوی واسطه‌ی حسابی– هندسی داریم:

$$xy + yz + zx \geq ۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲}$$

در نتیجه $xyz \leq d^۳$. بر مبنای این نتیجه، نابرابری $xyz + xy + yz + zx \geq ۴$ به صورت $d^۳ + ۳d^۲ \geq ۴$ در می‌آید. بنابراین:

$$d^۳ + ۳d^۲ \geq ۴ \Leftrightarrow (d-۱)(d+۲)^۲ \geq ۰ \;\; \Leftrightarrow \;\; d \geq ۱$$

لذا $xy + yz + zx \geq ۳$ و حکم مسئله ثابت می‌شود. تساوی نیز زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a = b = c = ۱$.

راه‌حل دوم. قرار می‌دهیم $u = x + ۱$، $v = y + ۱$ و $w = z + ۱$. در این صورت داریم:

$$uvw = u + v + w + abc + \frac{۱}{abc} \geq u + v + w + ۲$$

حال تابع $f(t) = ۲t^۳ + t^۲(u+v+w) - uvw$ را در نظر بگیرید. از آن‌جایی که $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ و $f(۱) \leq ۰$، عددی حقیقی مانند $r \geq ۱$ وجود دارد، به‌طوری

که $f(r) = 0$. فرض کنید $m = \frac{u}{r}$، $n = \frac{v}{r}$ و $p = \frac{w}{r}$. در این صورت m، n و p در رابطه‌ی $mnp = m+n+p+2$ صدق می‌کنند. لذا از مسئله‌ی ۴۹ نتیجه می‌گیریم:

$$mn+np+pm \geq 2(m+n+p) \Rightarrow uv+vw+wu \geq 2r(u+v+w) \geq 2(u+v+w)$$

اما با توجه به این‌که $u = x+1$، $v = y+1$ و $w = z+1$، نابرابری فوق به صورت $xy+yz+zx \geq 3$ در می‌آید که همان حکم مسئله است.

۹۵. راه‌حل. ثابت می‌کنیم $m_n = \frac{1}{2(n-1)}$ و $M_n = \frac{1}{2}$. ابتدا توجه کنید که نابرابری

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}} \geq \frac{1}{2(n-1)}$$

بدیهی است، چرا که برای هر i داریم $x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1} \leq 2(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k$.
بنابراین $m_n \geq \frac{1}{2(n-1)}$. حال با جایگذاری $x_i = x^i$، عبارت مسئله به صورت

$$\frac{1}{x+x^{n-1}+2(n-1)} + \frac{(n-2)x}{1+2(n-1)x+x^2} + \frac{x^{n-1}}{1+2(n-1)x^{n-1}+x^{n-2}}$$

در می‌آید. حد این عبارت وقتی که $x \to 0$ برابر است با $\frac{1}{2(n-1)}$. لذا $m_n = \frac{1}{2(n-1)}$. در ادامه نشان می‌دهیم $M_n \geq \frac{1}{2}$. برای این منظور باید ثابت کنیم که برای هر n عدد مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}} \leq \frac{1}{2}$$

اما این نابرابری نیز برقرار است، چرا که

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{x_{i-1}+2(n-1)x_i+x_{i+1}} &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{2\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}+2(n-1)x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-1+\frac{\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}}{x_i}}\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $a_i = \frac{\sqrt{x_{i-1}x_{i+1}}}{x_i}$ می‌بایست ثابت کنیم که اگر $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$، آن‌گاه $\sum \frac{1}{n-1+a_i} \leq 1$. این نابرابری را نیز در مسئله‌ی ۸۴ ثابت کردیم. در نتیجه

$\frac{1}{2} \geq M_n$ و از آنجایی که در حالت $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ تساوی رخ می‌دهد، در نهایت داریم $M_n = \frac{1}{2}$.

۹٦. **راه‌حل.** رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y+z)^2 - (xy+yz+zx) - (x+y+z)z$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1 - \frac{xy+yz+zx}{(x+y+z)^2} - \frac{z}{x+y+z}}$$

و یا:

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{1-(ab+bc+ca)-c}$$

که $a = \frac{x}{x+y+z}$، $b = \frac{y}{x+y+z}$ و $c = \frac{z}{x+y+z}$. نابرابری مسئله را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{1-d-c} + \frac{1}{1-d-b} + \frac{1}{1-d-a} \geq 9$$

نوشت، که a, b, c اعدادی حقیقی و مثبت‌اند، $a+b+c=1$ و $d = ab+bc+ca$. بعد از بسط دادن نابرابری فوق، خواهیم داشت:

$$9d^3 - 6d^2 - 3d + 1 + 9abc \geq 0$$

و یا به صورت معادل

$$d(3d-1)^2 + (1 - 4d + 9abc) \geq 0$$

این نابرابری نیز به وضوح از نابرابری شور نتیجه می‌شود.

۹۷. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری هویگنس داریم:

$$\prod(1+a^4) \geq (1+abcd)^4$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$2^4 \prod(a^3+1)^4 \geq \prod(1+a^4)(1+a^2)^4$$

برای این منظور نشان می‌دهیم $2(a^3+1)^4 \geq (a^4+1)(a^2+1)^4$. می‌دانیم $(a^2+1)^4 \leq (a+1)^2(a^3+1)^2$. لذا می‌بایست ثابت کنیم:

$$2(a^3+1)^2 \geq (a+1)^2(a^4+1) \Leftrightarrow 2(a^2-a+1)^2 \geq a^4+1 \Leftrightarrow (a-1)^4 \geq 0$$

به این ترتیب مسئله حل می‌شود.

۹۸. راه‌حل. از تغییر متغیر $a+b=۲z$، $b+c=۲x$ و $c+a=۲y$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب نابرابری به صورت $\sum(y+z-x)^۴ \leq ۲۸\sum x^۴$ در می‌آید. با ساده کردن عبارت سمت چپ نابرابری داریم:

$$\begin{aligned}\sum(y+z-x)^۴ &= \sum\left(\sum x^۲ + ۲yx - ۲xy - ۲xz\right)^۲\\ &= ۳\left(\sum x^۲\right)^۲ + ۴\left(\sum x^۲\right)\times\left(\sum(yz-xy-xz)\right) + ۴\sum\left(xy+xz-yz\right)^۲\\ &= ۴\left(\sum x^۲\right)^۲ - ۴\left(\sum xy\right)\left(\sum x^۲\right) + ۱۶\sum x^۲y^۲ - ۴\left(\sum xy\right)^۲\\ &= ۴\left(\sum x^۲\right)^۲ + ۱۶\sum x^۲y^۲ - \left(\sum x\right)^۴\\ &\leq ۲۸\sum x^۴\end{aligned}$$

نابرابری فوق نیز از آن‌جا ناشی شده است که $(\sum x^۲)^۲ \leq ۳\sum x^۴$ و $\sum x^۲y^۲ \leq \sum x^۴$.

۹۹. فرض کنید $x=a+b+c$ و $y=ab+bc+ca$. با بسط دادن طرفین نامساوی برحسب x و y، سمت چپ به‌صورت $\frac{x^۲+۴x+y+۳}{x^۲+۲x+y+xy}$ و سمت راست به صورت $\frac{۱۲+۴x+y}{۹+۴x+۲y}$ درمی‌آید. داریم:

$$\frac{x^۲+۴x+y+۳}{x^۲+۲x+y+xy}-۱ \leq \frac{۱۲+۴x+y}{۹+۴x+۲y}-۱ \Leftrightarrow \frac{۲x+۳-xy}{x^۲+۲x+y+xy} \leq \frac{۳-y}{۹+۴x+۲y}$$

برای اثبات این نابرابری، طرفین وسطین می‌کنیم و جملات یکسان را ساده می‌کنیم. با توجه به نابرابری‌های $x\geq ۳$، $y\geq ۳$ و $x^۲\geq ۳y$ داریم:

$$\frac{۵}{۳}x^۲y \geq ۵x^۲,\ \frac{x^۲y}{۳} \geq y^۲,\ xy^۲ \geq ۹x,\ ۵xy \geq ۱۵x,\ xy \geq ۳y,\ x^۲y \geq ۲۷$$

با جمع بستن این نابرابری‌ها، نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۱۰۰. راه‌حل اول. (ارائه شده توسط دونگ تران نام)

فرض کنید $x=\frac{۱}{a}$، $y=\frac{۲}{b}$ و $z=\frac{۳}{c}$. در این صورت شرط مسئله به صورت $۲xyz \geq ۲x+۴y+۷z$ در می‌آید. می‌بایست مقدار $x+y+z$ را حداقل کنیم. داریم:

$$z(۲xy-۷) \geq ۲x+۴y \Rightarrow \begin{cases} ۲xy > ۷,\\ z \geq \dfrac{۲x+۴y}{۲xy-۷}\end{cases}$$

حال سعی می‌کنیم عبارت $x+y+z$ را طوری تغییر می‌دهیم که مخرج $2xy-7$ با یک بار استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی–هندسی از بین برود. برای این منظور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x+y+z &\ge x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7} \\ &= x+\frac{11}{2x}+y-\frac{7}{2x}+\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7} \\ &\ge x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} \end{aligned}$$

اما به راحتی می‌توان ثابت کرد که $2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}} \ge \frac{3+\frac{7}{x}}{2}$. در نتیجه:

$$x+y+z \ge \frac{3}{2}+x+\frac{9}{x} \ge \frac{15}{2}$$

تساوی نیز در حالتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $x=3$، $y=\frac{5}{2}$ و $z=2$. بنابراین پاسخ مسئله برابر $\frac{15}{2}$ است و این مقدار به ازای $a=\frac{1}{3}$، $b=\frac{4}{5}$ و $c=\frac{3}{2}$ حاصل می‌شود.

راه‌حل دوم. باز هم از تغییر متغیر قبلی استفاده می‌کنیم. در واقع باید حداقل $x+y+z$ را با شرط $2xyz \ge 2x+4y+7z$ به‌دست آوریم. با استفاده از نابرابری وزن‌دار حسابی– هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$x+y+z \ge \left(\frac{5x}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\left(3y\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{15z}{4}\right)^{\frac{4}{15}}$$

در ضمن $2x+4y+7z \ge 10^{\frac{1}{5}}\cdot 12^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{5}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot z^{\frac{7}{15}}$. بنابراین:

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \ge \frac{225}{2}xyz$$

حال از آن‌جایی که $2xyz \ge 2x+4y+7z$، نتیجه می‌گیریم:

$$(x+y+z)^2 \ge \frac{225}{4} \Rightarrow x+y+z \ge \frac{15}{2}$$

هم‌چنین تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $x=3$، $y=\frac{5}{2}$ و $z=2$.

۱۰۱. راه‌حل. نابرابری زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

از آن‌جایی که این نابرابری نسبت به x,y,z همگن است می‌توان فرض کرد $x+y+z=1$. در این صورت با استفاده از نابرابری کوشی– شوارتز داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}x+\frac{b}{c+a}y+\frac{c}{a+b}z+\sqrt{3(xy+yz+zx)}\\
&\quad\le\sqrt{\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}\sqrt{\sum x^2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\sum xy}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\sum xy}\\
&\quad\le\sqrt{\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}}\sqrt{\sum x^2+2\sum xy}\\
&\quad=\sqrt{\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

بنابراین کافی است نابرابری

$$\sqrt{\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{3}{2}}\le\sum\frac{a}{b+c}$$

را ثابت کنیم. اما این نابرابری هم‌ارز است با $\frac{3}{4} \ge \sum\frac{ab}{(c+a)(c+b)}$ که اثبات آن راحت است.

ملاحظه. نابرابری قوی‌تر زیر نیز برقرار است:

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)$$

برای اثبات این نابرابری می‌توان نابرابری کوشی– شوارتز را به صورت زیر به کار برد:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\\
&\quad=(a+b+c)\left(\frac{y+z}{b+c}+\frac{z+x}{c+a}+\frac{x+y}{a+b}\right)-2(x+y+z)\\
&\quad\ge\frac{1}{2}(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y})^2-2(x+y+z)\\
&\quad=\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)
\end{aligned}$$

خواننده می‌تواند به عنوان یک تمرین خوب، نابرابری زیر را ثابت کند:

$$\sum\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge x+y+z+\sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

۱۰۲. **راه‌حل اول.** قرار می‌دهیم $x=\frac{b+c}{a}$، $y=\frac{c+a}{b}$ و $z=\frac{a+b}{c}$. در این صورت نابرابری را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\sum\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\ge\frac{3}{5}$$

با استفاده از نابرابری کوشی—شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \frac{(x-۱)^۲}{x^۲+۱} \geq \frac{(x+y+z-۳)^۲}{x^۲+y^۲+z^۲+۳}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{(x+y+z-۳)^۲}{x^۲+y^۲+z^۲+۳} \geq \frac{۳}{۵} \Leftrightarrow \left(\sum x\right)^۲ - ۱۵\sum x + ۳\sum xy + ۱۸ \geq ۰$$

با استفاده از نابرابری شور و بعد از کمی محاسبه می‌توان نشان داد $\sum xy \geq ۲\sum x$. در نتیجه:

$$\left(\sum x\right)^۲ - ۱۵\sum x + ۳\sum xy + ۱۸ \geq \left(\sum x\right)^۲ - ۹\sum x + ۱۸ \geq ۰$$

نابرابری فوق نیز به وضوح درست است، چرا که $\sum x \geq ٦$.

راه‌حل دوم. واضح است که می‌توان فرض کرد $a+b+c=۲$. به این ترتیب، نابرابری مسئله به‌صورت

$$\sum \frac{۴(۱-a)^۲}{۲+۲(۱-a)^۲} \geq \frac{۳}{۵} \Leftrightarrow \sum \frac{۱}{۱+(۱-a)^۲} \leq \frac{۲۷}{۱۰}$$

در می‌آید. حال اگر قرار دهیم $x = ۱ - a$، $y = ۱ - b$ و $z = ۱ - c$، به نابرابری مسئله‌ی ۴۷ می‌رسیم.

۱۰۳. **راه‌حل.** قرار می‌دهیم $a_i - a_n = x_i \geq ۰$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n-۱)$. حال عبارت

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^n - n\prod_{i=۱}^{n} a_i - (n-۱)\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n-۱} a_i}{n-۱} - a_n\right)^n$$

را به عنوان یک چندجمله‌ای برحسب $a = a_n$ در نظر می‌گیریم. در واقع این چندجمله‌ای عبارتست از:

$$a^n + \sum_{i=۱}^{n-۱}(a+x_i)^n - na\prod_{i=۱}^{n-۱}(a+x_i) - (n-۱)\left(\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_{n-۱}}{n-۱}\right)^n$$

ثابت می‌کنیم به‌ازای هر $k \in \{۰, ۱, \ldots, n-۱\}$، ضریب a^k نامنفی است (توجه کنید که درجه‌ی این چندجمله‌ای حداکثر $n - ۱$ است). به‌ازای $k = ۰$، این مطلب از محدب بدون تابع $f(x) = x^n$ نتیجه می‌شود. در واقع

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} x_i^n \geq (n-۱)\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n-۱} x_i}{n-۱}\right)^n$$

برای $k > ۰$، ضریب a^k برابر است با:

$$\binom{n}{k}\sum_{i=۱}^{n-۱} x_i^{n-k} - n \sum_{۱\le i_۱<\cdots<i_{n-k}\le n-۱} x_{i_۱}x_{i_۲}\ldots x_{i_{n-k}}$$

حال نشان می‌دهیم این عبارت، نامنفی است. طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی داریم:

$$\begin{aligned} n \sum_{۱\le i_۱<i_۲<\cdots<i_{n-k}\le n-۱} & x_{i_۱}x_{i_۲}\ldots x_{i_{n-k}} \\ &\le \frac{n}{n-k}\sum_{۱\le i_۱<i_۲<\cdots<i_{n-k}\le n-۱}(x_{i_۱}^{n-k}+x_{i_۲}^{n-k}+\cdots+x_{i_{n-k}}^{n-k}) \\ &= \frac{k}{n-۱}\cdot\binom{n}{k}\sum_{i=۱}^{n-۱}x_i^{n-k} \end{aligned}$$

این عبارت نیز به وضوح کوچک‌تر یا مساوی $\binom{n}{k}\sum_{i=۱}^{n-۱}x_i^{n-k}$ است. این مطلب نشان می‌دهد که هریک از ضرایب چندجمله‌ای نامنفی‌اند و درنتیجه چند جمله‌ای به‌ازای اعداد نامنفی، مقادیر نامنفی می‌پذیرد.

۱۰۴. راه‌حل. کافی است در حالت $xyzt = ۱$ مسئله را حل می‌کنیم. به این ترتیب نابرابری به این‌صورت در می‌آید که اگر a، b، c و d اعدادی مثبت با حاصل‌ضرب ۱ باشد، آن‌گاه $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۲ \ge ab+bc+cd+da+ac+bd$. فرض کنید d کوچک‌ترین عدد در میان a, b, c, d است. قرار می‌دهیم $m = \sqrt[۳]{abc}$. ثابت می‌کنیم:

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۲-(ab+bc+cd+da+ac+bd) \ge d^۲+۳m^۲+۲-(۳m^۲+۳md)$$

و یا به صورت معادل،

$$a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca \ge d(a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc})$$

از آن‌جایی که $d \le \sqrt[۳]{abc}$، کافی است ثابت کنیم:

$$a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca \ge \sqrt[۳]{abc}(a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc})$$

قرار می‌دهیم $u = \frac{a}{\sqrt[۳]{abc}}$، $v = \frac{b}{\sqrt[۳]{abc}}$ و $w = \frac{c}{\sqrt[۳]{abc}}$. طبق مسئله ۷۴ داریم:

$$u^۲+v^۲+w^۲+۳ \ge u+v+w+uv+vw+wu$$

که این نابرابری دقیقاً همان نابرابری $a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca \geq (a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc})\sqrt[۳]{abc}$ است. لذا تنها کافی است ثابت کنیم:

$$d^۲+۲ \geq ۳md \Leftrightarrow d^۲+۲ \geq ۳\sqrt[۳]{d^۲}$$

این نامساوی نیز به وضوح برقرار است.

۱۰۵. **راه‌حل.** توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=۱}^{n} \frac{ij}{i+j-۱}a_ia_j &= \sum_{i,j=۱}^{n} ia_i \cdot ja_j \int_۰^۱ t^{i+j-۲}dt \\ &= \int_۰^۱ \left(\sum_{i=۱}^{n} ia_i \cdot ja_j \cdot t^{i-۱+j-۱}\right)dt \\ &= \int_۰^۱ \left(\sum_{i=۱}^{n} ia_i \cdot t^{i-۱}\right)^۲\end{aligned}$$

حال با استفاده از نابرابری کوشی—شوارتز در مورد انتگرال‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\int_۰^۱ \left(\sum_{i=۱}^{n} ia_i \cdot t^{i-۱}\right)^۲ dt \geq \left(\int_۰^۱ \left(\sum_{i=۱}^{n} ia_i \cdot t^{i-۱}\right)dt\right)^۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right)^۲$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۱۰۶. **راه‌حل.** کلید حل این مسئله در این مطلب است که برای هر i داریم $\frac{a_i}{b_i} \in \left[\frac{۱}{۲}, ۲\right]$ و نیز برای هر $x \in \left[\frac{۱}{۲}, ۲\right]$ نابرابری $x^۲+۱ \leq \frac{۵}{۲}x$ برقرار است. بنابراین:

$$\frac{۵}{۲} \cdot \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{a_i^۲}{b_i^۲}+۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲}a_ib_i \geq a_i^۲+b_i^۲$$

در نتیجه:

$$\frac{۵}{۲}\sum_{i=۱}^{n} a_ib_i \geq \sum_{i=۱}^{n}(a_i^۲+b_i^۲) = ۲\sum_{i=۱}^{n} a^۲ \qquad (۱)$$

حال توجه کنید که $\frac{\frac{a_i^۳}{b_i}}{a_i \cdot b_i} = \frac{a_i^۲}{b_i^۲}$. پس نابرابری $\frac{۵}{۲} \cdot \frac{a_i}{b_i} \geq ۱+\frac{a_i^۲}{b_i^۲}$ را می‌توان به صورت $\frac{۵}{۲}a_i^۲ \geq \frac{a_i^۳}{b_i}+a_ib_i$ نوشت. با جمع بستن این نابرابری‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{۵}{۲}\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \geq \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{a_i^۳}{b_i}+a_ib_i\right) = \sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i^۳}{b_i}+\sum_{i=۱}^{n} a_ib_i \qquad (۲)$$

با ترکیب روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a_1^3}{b_1}+\frac{a_2^3}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^3}{b_n}\le\frac{17}{10}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

به این ترتیب مسئله حل می‌شود.

۱۰۷. راه‌حل. قرار می‌دهیم $x=\frac{1}{a}$، $y=\frac{1}{b}$ و $z=\frac{1}{c}$. در نتیجه نابرابری هم‌ارز است با این‌که اگر $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=1$، آن‌گاه:

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\ge 8(x^2+y^2+z^2)^2$$

ثابت می‌کنیم:

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\ge 8(x^2+y^2+z^2)^2$$

فرض کنید $x^2+y^2=2c$، $y^2+z^2=2a$ و $z^2+x^2=2b$. در این صورت نابرابری به‌صورت

$$\sum\sqrt{\frac{abc}{b+c-a}}\ge\sum a$$

در می‌آید. نابرابری شور را در نظر داشته باشید:

$$\sum a^4+abc(a+b+c)\ge\sum a^3(b+c)\ \Leftrightarrow\ abc(a+b+c)\ge\sum a^3(b+c-a)$$

با استفاده از نابرابری هولدر نتیجه می‌گیریم:

$$\sum a^3(b+c-a)=\sum\frac{a^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}\right)^2}\ge\frac{\left(\sum a\right)^3}{\left(\sum\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}\right)^2}$$

با ترکیب این دو نابرابری، داریم:

$$\sum\sqrt{\frac{abc}{b+c-a}}\ge\sum a$$

بنابراین نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

۱۰۸. راه‌حل. حکم مسئله از جمع بستن نابرابری‌های

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab},$$
$$\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+cd}$$

نتیجه می‌شود. برای اثبات این نابرابری‌ها نیز داریم:

$$\frac{۱}{(۱+a)^۲}+\frac{۱}{(۱+b)^۲}-\frac{۱}{۱+ab}=\frac{ab(a^۲+b^۲)-a^۲b^۲-۲ab+۱}{(۱+a)^۲(۱+b)^۲(۱+ab)}$$
$$=\frac{ab(a-b)^۲+(ab-۱)^۲}{(۱+a)^۲(۱+b)^۲(۱+ab)}\geq ۰$$

تساوی نیز زمانی برقرار می‌شود که داشته باشیم $a=b=c=d=۱$.

۱۰۹. **راه‌حل.** اتحادهای زیر برقرارند:

$$\frac{a^۲}{b^۲+c^۲}-\frac{a}{b+c}=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b+c)(b^۲+c^۲)},$$
$$\frac{b^۲}{c^۲+a^۲}-\frac{b}{c+a}=\frac{bc(b-c)+ab(b-a)}{(c+a)(c^۲+a^۲)},$$
$$\frac{c^۲}{a^۲+b^۲}-\frac{c}{a+b}=\frac{ac(c-a)+bc(c-b)}{(b+a)(b^۲+a^۲)}$$

بنابراین:

$$\sum\frac{a^۲}{b^۲+c^۲}-\sum\frac{a}{b+c}$$
$$=\sum\left[\frac{ab(a-b)}{(b+c)(b^۲-c^۲)}-\frac{ab(a-b)}{(a+c)(a^۲+c^۲)}\right]$$
$$=(a^۲+b^۲+c^۲+ab+bc+ca)\cdot\sum\frac{ab(a-b)^۲}{(b+c)(c+a)(b^۲+c^۲)(c^۲+a^۲)}\geq ۰$$

۱۱۰. **راه‌حل اول.** برای هر $k=۱,۲,\ldots,n$ فرض کنید $s_k=a_۱+a_۲+\cdots+a_k$ و نیز $s_{n+۱}=۰$. تعریف می‌کنیم:

$$b_i=\begin{cases}۱; & i\in S \text{ اگر}\\ ۰; & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

با استفاده از فرمول مجموع آبل نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{i\in S}a_i=a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n$$
$$=s_۱(b_۱-b_۲)+s_۲(b_۲-b_۳)+\cdots+s_{n-۱}(b_{n-۱}-b_n)+s_nb_n+s_{n+۱}(-b_۱)$$

حال قرار می‌دهیم $b_۱-b_۲=x_۱$، $b_۲-b_۳=x_۲$، ...، $b_{n-۱}-b_n=x_{n-۱}$، $b_n=x_n$ و $x_{n+۱}=-b_۱$. در نتیجه:

$$\sum_{i\in S}a_i=\sum_{i=۱}^{n+۱}x_is_i$$

در ضمن می‌دانیم $x_i \in \{-۱, ۰, ۱\}$ و نیز $\sum_{i=۱}^{n+۱} x_i = ۰$. از طرفی طبق اتحاد لاگرانژ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{۱\le i\le j\le n}(a_i+\cdots+a_j)^۲ &= \sum_{i=۱}^{n} s_i^۲ + \sum_{۱\le i<j\le n}(s_j-s_i)^۲\\ &= \sum_{۱\le i<j\le n+۱}(s_j-s_i)^۲\\ &= (n+۱)\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i^۲ - \left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i\right)^۲\end{aligned}$$

لذا باید ثابت کنیم:

$$(n+۱)\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i^۲ \ge \left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i x_i\right)^۲ + \left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i\right)^۲$$

اما واضح است که:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i x_i\right)^۲ + \left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i\right)^۲ = \sum_{i=۱}^{n+۱} s_i^۲(۱+x_i^۲) + ۲\sum_{۱\le i<j\le n+۱} s_i s_j (x_i x_j + ۱)$$

با استفاده از این مطلب که $۲s_i s_j \le s_i^۲ + s_j^۲$ و نیز $۱ + x_i x_j \ge ۰$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}۲\sum_{۱\le i<j\le n+۱} s_i s_j(x_i x_j+۱) &\le \sum_{۱\le i<j\le n+۱}(s_i^۲+s_j^۲)(۱+x_i x_j)\\ &= n(s_۱^۲+\cdots+s_{n+۱}^۲) + s_۱^۲ x_۱(x_۲+x_۳+\cdots+x_n)\\ &\quad +\cdots+ s_n^۲ x_n(x_۱+x_۲+\cdots+x_{n-۱})\\ &= -s_۱^۲x_۱^۲-\cdots-s_n^۲x_n^۲ + n(s_۱^۲+\cdots+s_n^۲)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i x_i\right)^۲ + \left(\sum_{i=۱}^{n+۱} s_i\right)^۲ &\le \sum_{k=۱}^{n+۱} s_k^۲(x_k^۲+۱) + \sum_{k=۱}^{n+۱} s_k^۲(n-x_k^۲)\\ &= (n+۱)\sum_{k=۱}^{n+۱} s_k^۲\end{aligned}$$

به این ترتیب نتیجه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. (ارائه شده توسط آندری نگوت[۸])

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم. برای هر $۲k+۱$ عدد حقیقی $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲k+۱}$ نابرابری زیر برقرار است:

$$(\sum_{i=۱}^{k} a_{۲i+۱})^۲ \le \sum_{۱\le i\le j\le ۲k+۱} (a_i+\cdots+a_j)^۲$$

اثبات لم. فرض کنید $s_k = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$. داریم:

$$\sum_{i=۰}^{k} a_{۲i+۱} = s_۱ + s_۳ - s_۲ + \cdots + s_{۲k+۱} - s_{۲k}$$

در نتیجه عبارت سمت چپ در نابرابری لم برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{۲k+۱} s_i^۲ + ۲\sum_{۰\le i<j\le k} s_{۲i+۱}s_{۲j+۱} + ۲\sum_{۱\le i<j\le k} s_{۲i}s_{۲j} - ۲\sum_{\substack{۰\le i\le k\\ ۱\le j\le k}} s_{۲i+۱}s_{۲j}$$

هم‌چنین طرف چپ نابرابری برابر است با:

$$(۲k+۱)\sum_{i=۱}^{۲k+۱} s_i^۲ - ۲\sum_{۱\le i<j\le ۲k+۱} s_i s_j$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$۲k\sum_{i=۱}^{۲k+۱} s_i^۲ \ge ۴\sum_{۰\le i<j\le k} s_{۲i+۱}s_{۲j+۱} + ۴\sum_{۱\le i<j\le k} s_{۲i}s_{۲j}$$

نابرابری فوق نیز از جمع بستن نابرابری‌های زیر به ازای همه‌ی مقادیر i, j ناشی می‌شود.

$$۲s_{۲j+۱}s_{۲i+۱} \le s_{۲i+۱}^۲ + s_{۲j+۱}^۲, \qquad ۲s_{۲i}s_{۲j} \le s_{۲i}^۲ + s_{۲j}^۲$$

حال به مسئله اصلی باز می‌گردیم. هر دسته از a_i های متوالی را یک دنباله و هر دنباله‌ای را که در S وجود ندارد، یک شکاف می‌نامیم. دنباله‌های متوالی S را در یک مجموعه می‌نویسیم. به این ترتیب S مجموعه‌ای به صورت

$$S = \{a_{i_۱}, a_{i_۱+۱}, \ldots, a_{i_۱+k_۱}, a_{i_۲}, a_{i_۲+۱}, \ldots, a_{i_۲+k_۲}, \ldots, a_{i_r}, \ldots a_{i_r+k_r}\}$$

---

۸ Andrei negut

است که در آن $i_j + k_j < i_{j+1} - 1$. در واقع S تشکیل شده است از یک دنباله، سپس یک شکاف، سپس یک دنباله، سپس یک شکاف، و به همین ترتیب.
اکنون قرار می‌دهیم:

$$s_1 = a_{i_1} + \cdots + a_{i_1+k_1}, \qquad s_2 = a_{i_1+k_1+1} + \cdots + a_{i_2-1},$$
$$s_3 = a_{i_2} + \cdots + a_{i_2+k_2}, \qquad s_4 = a_{i_2+k_2+1} + \cdots + a_{i_3-1},$$
$$\vdots$$
$$s_{2r-1} = a_{i_r} + \cdots + a_{i_r+k_r}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in S} a_i\right)^2 &= (s_1 + s_3 + \cdots + s_{2r-1})^2 \\ &\le \sum_{1\le i\le j\le 2r-1} (s_i + \cdots + s_j)^2 \\ &\le \sum_{1\le i\le j\le n} (a_i + \cdots + a_j)^2\end{aligned}$$

توجه کنید که نابرابری آخر از آن جهت درست است که همه‌ی جملات سمت چپ نابرابری، در عبارت سمت راست ظاهر می‌شوند.

راه‌حل سوم. نابرابری را به کمک استقرا حل می‌کنیم. به‌ازای $n = 2$ و $n = 3$ اثبات نابرابری، آسان است. فرض کنید برای هر $k < n$ این نابرابری برقرار است و می‌خواهیم برای n نیز آن را ثابت کنیم. اگر $1 \notin S$، آن‌گاه کافی است گام استقرا را برای اعداد $a_2, \ldots, a_n$ به کار ببریم، چرا که عبارت سمت راست نابرابری کاهش نمی‌یابد. حال فرض کنید $1 \in S$. اگر $2 \in S$، گام استقرا را برای اعداد $a_1 + a_2, a_3, \ldots, a_n$ به‌کار می‌بریم. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $2 \notin S$. می‌دانیم:

$$(a+b+c)^2 + c^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2} \ge 2ab$$

در نتیجه:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1})^2 \ge 2a_1a_k \qquad (1)$$

هم‌چنین گام استقرا برای اعداد $a_3, \ldots, a_n$ نشان می‌دهد که:

$$\left(\sum_{i\in S-\{1\}} a_i\right)^2 \le \sum_{3\le i\le j\le n} (a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j)^2$$

لذا کافی است ثابت کنیم:

$$a_1^2 + 2a_1 \sum_{i\in S-\{1\}} a_i \le \sum_{i=1}^{n}(a_1 + \cdots a_i)^2 + \sum_{i=2}^{n}(a_2 + \cdots + a_i)^2 \qquad (2)$$

اما این نابرابری نیز به وضوح برقرار است، چرا که با جمع بستن نابرابری (۱) به‌ازای $k = 3, \ldots, n$ و توجه به این مطلب که a_1^2 در سمت راست نابرابری (۲) ظاهر می‌شود، این نابرابری بلافاصله نتیجه می‌شود.

۱۱۱. راه‌حل. فرض کنید $a_i = x_i^3$. تابع $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ در نظر بگیرید. ابتدا ویژگی‌های زیر را برای تابع f ثابت می‌کنیم:

I) اگر $-1 < x, y < 0$، آن‌گاه $f(x+y+1) + f(-1) \ge f(x) + f(y)$.

II) f روی بازه‌ی $[-1, 0]$ محدب و روی بازه‌ی $[0, 1]$ مقعر است.

III) اگر $x > 0$، $y < 0$ و $x + y < 0$، آن‌گاه $f(x) + f(y) \le f(-1) + f(x+y+1)$؛ هم‌چنین اگر $x + y > 0$، آن‌گاه $f(x) + f(y) \le f(x+y)$.

اثبات این نتایج آسان است. برای قسمت (I) از تغییر متغیر $x = -a^3$ و $y = -b^3$ استفاده می‌کنیم. در این صورت نابرابری این قسمت به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} 1 &> a^3 + b^3 + (1 - a - b)^3 \\ &\Leftrightarrow 1 > (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 1 - 3(a+b) + 3(a+b)^2 - (a+b)^3 \\ &\Leftrightarrow 3(a+b)(1-a)(1-b) > 0 \end{aligned}$$

که این نابرابری، به وضوح درست است. قسمت (II) نیز کاملاً واضح است. برای قسمت (III) نیز می‌توانیم استدلالی مانند قسمت (I) انجام دهیم.

با توجه به ویژگی‌های تابع f نتیجه می‌گیریم که اگر $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{2004})$ نقطه‌ای باشد که به‌ازای آن، ماکزیمم تابع

$$g : A = \{x \in [-1, 1]^{2004} | x_1 + \cdots + x_{2004} = 0\} \to \mathbb{R};$$
$$g(x_1, \ldots, x_{2004}) = \sum_{k=1}^{2004} f(x_k)$$

اتفاق می‌افتد، آن‌گاه همه‌ی مؤلفه‌های مثبت t باید با هم برابر باشند و نیز همه‌ی مؤلفه‌های منفی t باید برابر -1 شوند. فرض کنید k مؤلفه برابر -1 و نیز $2004 - k$ مؤلفه‌ی دیگر برابر عددی مانند a اند. از آن‌جایی که $t_1 + t_2 + \cdots + t_{2004} = 0$

نتیجه می‌گیریم $a = \frac{k}{۲۰۰۴-k}$. مقدار g در این نقطه برابر است با:

$$m_k = (۲۰۰۴ - k)\sqrt[۳]{\frac{k}{۲۰۰۴-k}} - k$$

بنابراین می‌بایست حداکثر مقدار m_k را به ازای $k \in \{۰, ۱, \ldots, ۲۰۰۴\}$ به دست آوریم. با بررسی مشتق m_k نسبت به k به راحتی می‌توان نشان داد که این حداکثر، به‌ازای $k = ۲۲۳$ حاصل می‌شود. لذا پاسخ مسئله برابر است با $\sqrt[۳]{۲۲۳} \cdot \sqrt[۳]{۱۷۸۱^۲} - ۲۲۳$.

۱۱۲. راه‌حل. نابرابری مسئله را با استقرا ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۲$، نابرابری واضح است. حال فرض کنید این نامساوی برای $۱, ۲, \ldots, n-۱$ برقرار است و می‌خواهیم آن را برای n اثبات کنیم. توجه داشته باشید که کافی است نابرابری را در حالتی که همه‌ی a_i ها مثبت‌اند، ثابت کنیم (در حالت‌های دیگر، اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ را با $|a_۱|, |a_۲|, \ldots, |a_n|$ جایگزین می‌کنیم؛ در این‌صورت حاصل‌ضرب این اعداد هم‌چنان برابر ۱ باقی می‌ماند و نیز سمت راست نابرابری افزایش می‌یابد). a_n را بزرگ‌ترین عدد در میان اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید G میانگین هندسی $a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ - n - \frac{۲n}{n-۱} \cdot \sqrt[n]{n-۱}(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n - n)$$
$$\geq a_n^۲ + (n-۱)G^۲ - n - \frac{۲n}{n-۱} \cdot \sqrt[n]{n-۱}(a_n + (n-۱)G - n)$$

این نابرابری هم‌ارز است با:

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_{n-۱}^n - (n-۱)\sqrt[n-۱]{a_۱^۲ a_۲^۲ \ldots a_{n-۱}^۲}$$
$$\geq \frac{۲n}{n-۱} \cdot \sqrt[n]{n-۱}(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n-۱} - (n-۱)\sqrt[n-۱]{a_۱ a_۲ \ldots a_{n-۱}})$$

از آن‌جایی که $\sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_{n-۱}} \leq ۱$ و نیز

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n-۱} - (n-۱)\sqrt[n-۱]{a_۱ a_۲ \ldots a_{n-۱}} \geq ۰$$

کافی است نشان دهیم:

$$a_۱^۲ + \cdots + a_{n-۱}^۲ - (n-۱)G^۲ \geq \frac{۲n}{n-۱}\sqrt[n]{n-۱} \cdot G \cdot (a_۱ + \cdots + a_{n-۱} - (n-۱)G)$$

حال با استفاده از فرض استقرا برای اعداد $\frac{a_۱}{G}, \frac{a_۲}{G}, \ldots, \frac{a_{n-۱}}{G}$ (که حاصل‌ضربشان برابر ۱ است) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a_۱^۲ + \cdots + a_{n-۱}^۲}{G^۲} - n + ۱ \geq \frac{۲(n-۱)}{n+۲} \cdot \sqrt[n-۱]{n-۲}\left(\frac{a_۱ + \cdots + a_{n-۱}}{G} - n + ۱\right)$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{۲(n-۱)}{n-۲}\cdot \sqrt[n-۱]{n-۲}\,(a_۱+\cdots+a_{n-۱}-(n-۱)G) \geq \frac{۲n}{n-۱}\sqrt[n]{n-۱}\,(a_۱+\cdots+a_{n-۱}-(n-۱)G)$$

که این نابرابری پس از ساده شدن به صورت $\frac{\sqrt[n]{n-۱}}{\sqrt[n-۱]{n-۲}} \geq \frac{۱}{n(n-۲)}+۱$ در می‌آید. این نابرابری هم‌ارز است با:

$$\left(۱+\frac{۱}{n(n-۲)}\right)^{n(n-۱)} \geq \frac{(n-۱)^{n-۱}}{(n-۲)^n}$$

برای اثبات نابرابری فوق کافی است توجه کنید که اگر $n > ۴$، آن‌گاه:

$$\left(۱+\frac{۱}{n(n-۲)}\right)^{n(n-۱)} > ۲$$

و نیز:

$$\frac{(n-۱)^{n-۱}}{(n-۲)^n} = \frac{۱}{n-۲}\cdot\left(۱+\frac{۱}{n-۲}\right)\cdot\left(۱+\frac{۱}{n-۲}\right)^{n-۲} < \frac{e}{n-۲}\left(۱+\frac{۱}{n-۲}\right) < ۲$$

برای حالت‌های $n = ۳$ و $n = ۴$ نیز، به راحتی می‌توان نشان داد که این نابرابری برقرار است.

در نتیجه، تا این‌جای کار ثابت کردیم که:

$$a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲-n-\frac{۲n}{n-۱}\cdot\sqrt[n]{n-۱}\,(a_۱+a_۲+\cdots+a_n-n) \geq a_n^۲+(n-۱)G^۲-n-\frac{۲n}{n-۱}\cdot\sqrt[n]{n-۱}\,(a_n+(n-۱)G-n)$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که نابرابری زیر برای هر $x \geq ۱$ برقرار است:

$$x^{۲(n-۱)}+\frac{n-۱}{x^۲}-n \geq \frac{۲n}{n-۱}\cdot\sqrt[n]{n-۱}\left(x^{n-۱}+\frac{n-۱}{x}-n\right)$$

(در واقع مسئله x را برابر $\frac{۱}{G}$ انتخاب می‌کنیم). تابع

$$f(x) = x^{۲(n-۱)}+\frac{n-۱}{x^۲}-n-\frac{۲n}{n-۱}\cdot\sqrt[n]{n-۱}\left(x^{n-۱}+\frac{n-۱}{x}-n\right)$$

را نظر بگیرید. داریم:

$$f'(x) = \frac{۲(x^n-۱)}{x^۲}\cdot\left[\frac{(n-۱)(x^n+۱)}{x}-n\sqrt[n]{n-۱}\right] \geq ۰$$

چرا که:

$$x^{n-1}+\frac{1}{x}=x^{n-1}+\frac{1}{(n-1)x}+\cdots+\frac{1}{(n-1)x}\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)^{n-1}}}$$

بنابراین، تابع f صعودی است، در نتیجه $f(x)\geq f(1)=0$. به این ترتیب نابرابری مسئله ثابت می‌شود.

۱۱۳. راه‌حل اول. با جایگذاری $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$، $y=\sqrt{\frac{c}{b}}$ و $z=\sqrt{\frac{a}{c}}$، مسئله به این صورت در می‌آید که با شرط $xyz=1$ ثابت کنیم:

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leq 3$$

در ضمن فرض می‌کنیم $x\leq y\leq z$. بنابراین $xy\leq 1$ و نیز $z\geq 1$. داریم:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\right)^2&\\ &\leq 2\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+y^2}\right)=4\left[1+\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]\\ &\leq 4\left[1+\frac{1-x^2y^2}{(1+xy)^2}\right]=\frac{8}{1+xy}=\frac{8z}{z+1}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}}+\sqrt{\frac{2}{1+y^2}}\leq 2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leq 3$$

برای این منظور توجه کنید که:

$$\sqrt{\frac{2}{1+z^2}}\leq\frac{2}{1+z}$$

در نتیجه کافی است نشان دهیم:

$$2\sqrt{\frac{2z}{z+1}}+\frac{2}{1+z}\leq 3$$

این نابرابری هم‌ارز است با:

$$۱ + ۳z - ۲\sqrt{۲z(۱+z)} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{۲z} - \sqrt{z+۱})^۲ \geq ۰$$

به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. در واقع مسئله از ما می‌خواهد که با شرط $xyz = ۱$ ثابت کنیم:

$$\sum \sqrt{\frac{۲}{x+۱}} \leq ۳$$

در این‌جا دو حالت پیش می‌آید:

I) $xy + yz + zx \geq x + y + z$. در این حالت با استفاده از نابرابری کوشی ــ شوارتز نتیجه می‌گیریم:

$$\sum \sqrt{\frac{۲}{x+۱}} \leq \sqrt{۳ \sum \frac{۲}{x+۱}}$$

اما:

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{۱}{x+۱} \leq \frac{۳}{۲} \\
&\Leftrightarrow \sum ۲(xy + x + y + ۱) \leq ۳(۲ + x + y + z + xy + yz + zx) \\
&\Leftrightarrow x + y + z \leq xy + yz + zx
\end{aligned}$$

بنابراین در این حالت نابرابری برقرار است.

II) $xy + yz + zx < x + y + z$. داریم:

$$(x-۱)(y-۱)(z-۱) = x + y + z - xy - yz - zx > ۰$$

در نتیجه دقیقاً دو تا از اعداد x، y و z از ۱ کوچک‌ترند. فرض کنید این دو عدد x و y اند. لذا باید ثابت کنیم که اگر $x, y < ۱$، آن‌گاه:

$$\sqrt{\frac{۲}{x+۱}} + \sqrt{\frac{۲}{y+۱}} + \sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}} \leq ۳$$

طبق نابرابری کوشی ــ شوارتز داریم:

$$\sqrt{\frac{۲}{x+۱}} + \sqrt{\frac{۲}{y+۱}} + \sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}} \leq ۲\sqrt{\frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{y+۱}} + \sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}}$$

حال کافی است ثابت کنیم حداکثر عبارت به دست آمده ۳ است؛ و یا به صورت معادل:

$$۲\cdot\frac{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{y+۱}-۱}{۱+\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{y+۱}}}\le\frac{۱-\frac{۲xy}{xy+۱}}{۱+\sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}}}$$

از آن‌جایی که $\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{y+۱}\ge ۱$، طرف چپ نابرابری فوق حداکثر برابر است با:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{y+۱}-۱=\frac{۱-xy}{(x+۱)(y+۱)}$$

بنابراین کافی است نشان دهیم:

$$\frac{۱-xy}{(x+۱)(y+۱)}\le\frac{۱-xy}{(xy+۱)\left(۱+\sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow xy+۱+(xy+۱)\sqrt{\frac{۲xy}{xy+۱}}\le xy+۱+x+y$$

$$\Leftrightarrow x+y\ge\sqrt{۲xy(xy+۱)}$$

این نابرابری نیز از نامساوی $x+y\ge ۲\sqrt{xy}\ge\sqrt{۲xy(xy+۱)}$ نتیجه می‌شود. به این ترتیب مسئله حل می‌شود.

۱۱۴. **راه‌حل اول.** (ارائه شده توسط یوری بوریکو)

با استفاده از تغییر متغیر $x+y=c$، $y+z=a$، $z+x=b$ نابرابری مسئله بعد از کمی دستکاری به صورت

$$\sum\left(\frac{۲}{ab}-\frac{۱}{c^۲}\right)(a-b)^۲\ge ۰$$

در می‌آید. فرض کنید $a\ge b\ge c$. اگر $۲c^۲\ge ab$، هریک از جملات عبارت بالا، نامنفی خواهند بود و مسئله حل می‌شود. بنابراین فرض می‌کنیم $۲c^۲<ab$، ابتدا ثابت می‌کنیم $۲b^۲\ge ac$ و $۲a^۲\ge bc$. فرض کنید $۲b^۲<ac$ (برهان خلف). در این صورت:

$$(b+c)^۲\le ۲(b^۲+c^۲)<a(b+c)$$

در نتیجه $b+c<a$، که تناقض است. حال نابرابری مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{۲}{ac}-\frac{۱}{b^۲}\right)(a-c)^۲+\left(\frac{۲}{bc}-\frac{۱}{a^۲}\right)(b-c)^۲\ge\left(\frac{۱}{c^۲}-\frac{۲}{ab}\right)(a-b)^۲$$

به راحتی می‌توان دید که نابرابری $(a-c)^۲\ge(a-b)^۲+(b-c)^۲$ برقرار است؛ بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\left(\frac{۲}{ac}+\frac{۲}{bc}-\frac{۱}{a^۲}-\frac{۱}{b^۲}\right)(b-c)^۲\ge\left(\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}-\frac{۲}{ab}-\frac{۲}{ac}\right)(a-b)^۲$$

اما واضح است که $\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}-\frac{۲}{ab}-\frac{۲}{ac}<\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right)^۲$. در نتیجه سمت راست نابرابری بالا حداکثر برابر $\frac{(a-b)^۲(b-c)^۲}{b^۲c^۲}$ است. هم‌چنین می‌توان نشان داد:

$$\frac{۲}{ac}+\frac{۲}{bc}-\frac{۱}{a^۲}-\frac{۱}{b^۲}\geq\frac{۱}{ac}+\frac{۱}{bc}>\frac{(a-b)^۲}{b^۲c^۲}$$

بنابراین سمت چپ نابرابری، حداقل برابر $\frac{(a-b)^۲(b-c)^۲}{b^۲c^۲}$ است و مسئله حل می‌شود.

راه‌حل دوم. از آن‌جایی که نابرابری، همگن است، می‌توانیم فرض کنیم $xy+yz+zx=۳$. قرار می‌دهیم $x+y+z=۳a$. از نابرابری $(x+y+z)^۲\geq ۳(xy+yz+zx)$ نتیجه می‌گیریم $a\geq ۱$. حال نابرابری را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{(۳a-z)^۲}+\frac{۱}{(۳a-y)^۲}+\frac{۱}{(۳a-x)^۲}\geq\frac{۳}{۴}$$

$$\Leftrightarrow ۴[(xy+۳az)^۲+(yz+۳ax)^۲+(zx+۳ay)^۲]\geq ۳(۹a-xyz)^۲$$

$$\Leftrightarrow ۴(۲۷a^۴-۱۸a^۲+۳+۴axyz)\geq(۹a-xyz)^۲$$

$$\Leftrightarrow ۳(۱۲a^۲-۱)(۳a^۲-۴)+xyz(۳۴a-xyz)\geq ۰ \qquad (۱)$$

$$\Leftrightarrow ۱۲(۳a^۲-۱)^۲+۲۰۸a^۲\geq(۱۷a-xyz)^۲ \qquad (۲)$$

دو حالت پیش می‌آید:

I) $۳a^۲-۴\geq ۰$. از آن‌جایی که

$$۳۴a-xyz=\frac{۱}{۹}[۳۴(x+y+z)(xy+yz+zx)-۹xyz]>۰$$

بنابراین نابرابری (۱) برقرار است.

II) $۳a^۲-۴<۰$. در این حالت، با استفاده از نابرابری شور داریم:

$$(x+y+z)^۳-۴(x+y+z)(xy+yz+zx)+۹xyz\geq ۰$$

در نتیجه $۳a^۳-۴a+xyz\geq ۰$ و متعاقباً:

$$\begin{aligned}&۱۲(۳a^۲-۱)^۲+۲۰۸a^۲-(۱۷a-xyz)^۲\\&\geq ۱۲(۳a^۲-۱)^۲+۲۰۸a^۲-a^۲(۳a^۲+۱۳)^۲\\&=۳(۴-۱۱a^۲+۱۰a^۴-۳a^۶)\\&=۳(۱-a^۲)^۲(۴-۳a^۲)^۲\geq ۰\end{aligned}$$

۱۱۵. راه‌حل. (ارائه شده توسط ابی–خوزم[9] و روی باربارا[10] — «یک نابرابری قوی درباره‌ی شعاع دایره‌ی محاطی»)

تابع $F:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی

$$F(x,y)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}-(1+\sqrt{5})(1-xy)$$

در نظر بگیرید. واضح است که F نسبت به x,y متقارن است. در ضمن محدب بودن تابع $x \to \sqrt{1+x^2}$ نشان می‌دهد که برای هر $x \geq 0$ داریم $F(x,0) \geq 0$ (در واقع برای پیدا کردن حداقل $F(x,0)$ کافی است نقاط انتهایی بازه و نقطه‌ی x_0 را که $F'(x_0,0)=0$ بررسی کنیم). حال y را ثابت و F را به صورت تابعی از x در نظر می‌گیریم. مشتق‌های اول و دوم F عبارتند از:

$$f'(x)=(1+\sqrt{5})y+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}}$$

و نیز:

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}+\frac{(1-y)^2}{\sqrt{((1-x)^2+(1-y)^2)^3}}$$

بنابراین f محدب است و مشتق آن صعودی است. حال فرض کنید:

$$r=\sqrt{1-\frac{6\sqrt{3}}{(1+\sqrt{5})^2}} \quad \text{و} \quad c=1+\sqrt{5}$$

ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $y \geq \frac{1}{4}$. به راحتی می‌توان دید که در این حالت داریم $cy > \frac{1}{\sqrt{y^2-2y+2}}$ (مشتق تابع $y \to y^2c^2(y^2-2y+2)-1$ مثبت است). هم‌چنین $f'(0)>0$. از آن‌جایی که f' تابعی صعودی است، داریم $f'(x)>0$. لذا f نیز صعودی است، چرا که $f(0)=F(0,y)=F(y,0)\geq 0$. در نتیجه در این حالت نابرابری ثابت می‌شود.

با توجه به حالت قبل و تقارن نابرابری نسبت به x,y کافی است نابرابری را در حالت‌های $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$، $y\in[0,r]$ و $x\in\left[r,\frac{1}{4}\right]$، $y\in\left[r,\frac{1}{4}\right]$ ثابت کنیم.

در اولین حالت، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$f'(x)\leq r(1+\sqrt{5})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1-x}{\sqrt{1+(x-1)^2}}$$

---

[9] Abi Khuzam

[10] Roy Barbara

بنابراین $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$، که نشان می‌دهد f روی بازه‌ی $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ نزولی است. همانند بحثی که در حالت قبل کردیم، نتیجه می‌گیریم $f\left(\frac{1}{4}\right) \geq 0$ و متعاقباً برای هر نقطه‌ی (x,y) که $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ و $y \in \left[0, r\right]$ داریم $F(x,y) = f(x) \geq 0$.

اکنون مهم‌ترین حالت این نابرابری را بررسی می‌کنیم، یعنی حالتی که $x \in \left[r, \frac{1}{4}\right]$ و $y \in \left[r, \frac{1}{4}\right]$. نقاط

$$O(0,0), \quad A(1,0), \quad B(1,1), \quad C(0,1), \quad M(1,y), \quad N(x,1)$$

را در نظر بگیرید. محیط مثلث OMN برابر است با:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}$$

هم‌چنین مساحت این مثلث برابر $\frac{1-xy}{2}$ است.

می‌دانیم در هر مثلث با محیط P و مساحت S، نابرابری $S \leq \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$ برقرار است. در نتیجه با توجه به این نابرابری و این مطلب که $xy \geq r^2$ داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} &\geq \sqrt{6\sqrt{3}}\sqrt{1-xy} \\ &\geq (1+\sqrt{5})(1-xy)\end{aligned}$$

به این ترتیب اثباتمان کامل می‌شود.

۱۱۶. راه‌حل. برای اثبات این نابرابری از استقرا استفاده می‌کنیم؛ هرچند که اثبات گام استقرا به هیچ وجه کار راحتی نیست. فرض کنید نابرابری برای n عدد برقرار است و می‌خواهیم آن را برای $n+1$ عدد ثابت کنیم.

با توجه به متقارن و همگن بودن نابرابری، کافی است اثبات را با شرط $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n+1}$ و $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ انجام دهیم. می‌بایست ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}&n\sum_{i=1}^{n} a_i^{n+1} + na_{n+1}^{n+1} + na_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \\ &\qquad \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i - (1+a_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^n + a_{n+1}^n\right) \geq 0\end{aligned}$$

اما طبق فرض استقرا داریم:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + na_1a_2\ldots a_n \geq a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}$$

بنابراین:

$$na_{n+1}\prod_{i=1}^{n}a_i \geq a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}-(n-1)a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}$$

با توجه به این نابرابری، کافی است ثابت کنیم:

$$\left(n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}\right)-a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\right)$$
$$+a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i+(n-1)a_{n+1}^{n}-a_{n+1}^{n-1}\right)\geq 0$$

برای اثبات نابرابری فوق، نابرابری‌های

$$a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i+(n-1)a_{n+1}^{n}-a_{n+1}^{n-1}\right)\geq 0$$

و

$$\left(n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}\right)-a_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\right)\geq 0$$

را ثابت می‌کنیم. نابرابری نخست واضح است، چرا که:

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}a_i+(n-1)a_{n+1}^{n}-a_{n+1}^{n-1}\\&=\prod(a_i-a_{n+1}+a_{n+1})+(n-1)a_{n+1}^{n}-a_{n+1}^{n-1}\\&\geq a_{n+1}^{n}+a_{n+1}^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{n+1})+(n-1)a_{n+1}^{n}-a_{n+1}^{n-1}=0\end{aligned}$$

حال نابرابری دوم را ثابت می‌کنیم. این نابرابری را می‌توان به صورت زیر اثبات کرد:

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}\geq a_{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\right)$$

نابرابری فوق از آنجا ناشی شده است که $n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\geq 0$ (نابرابری چبیشف) و نیز $a_{n+1}\leq\frac{1}{n}$. لذا کافی است نشان دهیم:

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}\geq\frac{1}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n}a_i^{n}-\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\right)$$

برای اثبات این نابرابری نیز کافی است نابرابری‌های به فرم $na_i^{n+1}+\frac{1}{n}a_i^{n-1}\geq a_i^{n}$ را به ازای $i=1,2,\ldots,n$ با هم جمع کنیم. به این ترتیب گام استقرا ثابت می‌شود.

۱۱۷. راه‌حل. نابرابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$n \geq -(n-1)\Big(\sum_{k=1^n} x_k^2\Big) + \Big(\sum_{k=1} x_k\Big)^2$$

این نابرابری را با استقرا ثابت می‌کنیم. حالت $n = 2$ بدیهی است. فرض کنید این نابرابری برای $n - 1$ درست است و می‌خواهیم آن را برای n اثبات کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -(n-1)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2$$

هم‌چنین فرض کنید $x_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و $G = \sqrt[n-1]{x_2 x_3 \ldots x_n}$. می‌توان نشان داد که نابرابری

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(x_1, G, G, \ldots, G)$$

هم‌ارز است با:

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \Big(\sum_{k=2}^{n} x_k\Big)^2 \geq 2x_1\Big(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\Big)$$

واضح است که $x_1 \leq G$ و نیز $\sum_{k=2}^{n} x_k \geq (n-1)G$. بنابراین کافی است برای اثبات نابرابری فوق، نشان دهیم

$$(n-1)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 - \Big(\sum_{k=2}^{n} x_k\Big)^2 \geq 2G\Big(\sum_{k=2}^{n} x_k - (n-1)G\Big)$$

نشان می‌دهیم این نابرابری به ازای هر n عدد مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برقرار است. از آن‌جایی که این نابرابری همگن است، کافی است آن را در حالت $G = 1$ ثابت کنیم. برای این منظور، با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(n-2)\sum_{k=2}^{n} x_k^2 + n - 1 \geq \Big(\sum_{k=2}^{n} x_k\Big)^2$$

حال کافی است ثابت کنیم:

$$\sum_{k=2}^{n} x_k^2 + n - 1 \geq \sum_{k=2}^{n} 2x_k \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n}(x_k - 1)^2 \geq 0$$

که این نامساوی، به وضوح برقرار است.

تا اینجای کار ثابت کردیم که $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le f(x_1,G,G,\ldots,G)$. حال برای اثبات گام استقرا نشان می‌دهیم $f(x_1,G,G,\ldots,G) \le n$.

از آن‌جایی که $x_1 = \frac{1}{G^{n-1}}$ (با توجه به اینکه $x_1x_2\ldots x_n = 1$)، این نابرابری به صورت زیر در می‌آید:

$$(n-1)\left((n-1)^2G^2+\frac{1}{G^{2(n-1)}}\right)+n \ge \left((n-1)G+\frac{1}{G^{n-1}}\right)^2$$

پس از ساده کردن این نابرابری داریم:

$$\frac{n-2}{G^{2n-2}}+n \ge \frac{2n-2}{G^{n-2}}$$

که این نامساوی نیز، نتیجه‌ی واضح نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی است.

۱۱۸. راه‌حل. ثابت می‌کنیم حداقل این عبارت، برابر $\frac{1}{\sqrt{n^{n-3}}}$ است. برای این منظور، طبق نابرابری سورانی داریم:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + na_1a_2\cdots a_n \ge \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$$
$$\Rightarrow na_1a_2\cdots a_n \ge \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}(1-(n-1)a_i)$$

حال توجه کنید که:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{n-1}(1-(n-1)a_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt[3]{a_k^{n-1}}\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{1-(n-1)a_k}}\right)^2}$$

با استفاده از نابرابری هولدر نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}(1-(n-1)a_i) \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{n-1}{3}}\right)^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{1-(n-1)a_k}}\right)^2}$$

اگر $n > 3$، طبق نابرابری ینسن داریم:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{n-1}{3}}}{n} \ge \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^{\frac{n-1}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{n-1}{3}}}$$

در نهایت، با ترکیب این نابرابری‌ها، حکم مسئله در حالت $n > ۳$ ثابت می‌شود. در حالت $n = ۳$، باید ثابت کنیم:

$$\sum \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} \geq \sum a$$

که این نابرابری نیز در راه‌حل مسئله‌ی ۱۰۷ ثابت شده است.

۱۱۹. راه‌حل. باز هم از استقرا استفاده می‌کنیم. نابرابری در حالت $n = ۱$ بدیهی است. حال فرض کنید این نابرابری برای $k - ۱$ برقرار است و می‌خواهیم آن را برای k نیز اثبات کنیم ($k \geq ۲$). در واقع باید نشان دهیم اگر

$$a = \sqrt{\frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_k^۲}{k}} \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

آن‌گاه

$$\frac{a_۱}{۱ - a_۱^۲} + \frac{a_۲}{۱ - a_۲^۲} + \cdots + \frac{a_k}{۱ - a_k^۲} \geq \frac{ka}{۱ - a^۲}$$

بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_k$. در نتیجه $a \geq a_k$. قرار می‌دهیم:

$$x = \sqrt{\frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_{k-۱}^۲}{k - ۱}} = \sqrt{\frac{ka^۲ - a_k^۲}{k - ۱}}$$

از نابرابری $a \geq a_k$ نتیجه می‌گیریم $x \geq a \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳}$. طبق فرض استقرا داریم:

$$\frac{a_۱}{۱ - a_۱^۲} + \frac{a_۲}{۱ - a_۲^۲} + \cdots + \frac{a_{k-۱}}{۱ + a_{k-۱}^۲} \geq \frac{(k - ۱)x}{۱ - x^۲}$$

لذا کافی است نشان دهیم:

$$\frac{a_k}{۱ - a_k^۲} + \frac{(k - ۱)x}{۱ - x^۲} \geq \frac{ka}{۱ - a^۲}$$

از رابطه‌ی

$$x^۲ - a^۲ = \frac{ka^۲ - a_k^۲}{k - ۱} - a^۲ = \frac{a^۲ - a_k^۲}{k - ۱}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$(k - ۱)(x - a) = \frac{(a - a_k)(a + a_k)}{x + a}$$

هم‌چنین:

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{۱-a_k^۲}+\frac{(k-۱)x}{۱-x^۲}-\frac{ka}{۱-a^۲}
&=\left(\frac{a_k}{۱-a_k^۲}-\frac{a}{۱-a^۲}\right)+(k-۱)\left(\frac{x}{۱-x^۲}-\frac{a}{۱-a^۲}\right)\\
&=\frac{-(a-a_k)(۱+aa_k)}{(۱-a_k^۲)(۱-a^۲)}+\frac{(k-۱)(x-a)(۱+ax)}{(۱-x^۲)(۱-a^۲)}\\
&=\frac{a-a_k}{۱-a^۲}\left[\frac{-(۱+aa_k)}{۱-a_k^۲}+\frac{(a+a_k)(۱+ax)}{(۱-x^۲)(x+a)}\right]\\
&=\frac{(a-a_k)(x-a_k)}{(۱-a^۲)(۱-a_k^۲)(۱-x^۲)(x+a)}\times\\
&\quad[-۱+x^۲+a_k^۲+xa_k+a(x+a_k)+a^۲+axa_k(x+a_k)+a^۲xa_k]
\end{aligned}$$

از آن‌جایی که $x^۲-a_k^۲=\frac{ka^۲-a_k^۲}{k-۱}-a_k^۲=\frac{k(a-a_k)(a+a_k)}{k-۱}$، نتیجه می‌گیریم:

$$(a-a_k)(x-a_k)=\frac{k(a-a_k)^۲(a+a_k)}{(k-۱)(x+a_k)}\geq ۰$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$x^۲+a_k^۲+xa_k+a(x+a_k)+a^۲+axa_k(x+a_k)+a^۲xa_k\geq ۱$$

برای اثبات این نابرابری، توجه کنید که:

$$x^۲+a_k^۲=\frac{ka^۲+(k-۲)a_k^۲}{k-۱}\geq\frac{ka^۲}{k-۱}$$

و نیز:

$$x+a_k\geq\sqrt{x^۲+a_k^۲}\geq a\sqrt{\frac{k}{k-۱}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&x^۲+a_k^۲+xa_k+a(x+a_k)+a^۲+axa_k(x+a_k)+a^۲xa_k\\
&\geq(x^۲+a_k^۲)+a(x+a_k)+a^۲\\
&\geq\left(\frac{k}{k-۱}+\sqrt{\frac{k}{k-۱}}+۱\right)a^۲>۳a^۲=۱
\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات مسئله کامل می‌شود. در ضمن تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a_۱=a_۲=\cdots=a_n$.

ملاحظات.

۱. با توجه به راه حل مسئله، به راحتی می‌توان فهمید که این نابرابری، تحت شرط قوی‌تر

$$a \geq \frac{۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{\frac{n}{n-۱}} + \frac{n}{n-۱}}}$$

نیز برقرار است. این مقدار، بزرگ‌ترین کران پایین برای a است. چرا که اگر در نابرابری داده شده، قرار دهیم $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_{n-۱} = x$ و $a_n = ۰$ (در نتیجه $a = x\sqrt{\frac{n-۱}{n}}$)، نابرابری به صورت $a \geq \frac{۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{\frac{n}{n-۱}} + \frac{n}{n-۱}}}$ در می‌آید.

۲. حالت خاص $n = ۳$ و $a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ در مجله‌ی Crux در سال ۲۰۰۳ مطرح شد.

۱۲۰. **راه‌حل.** با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی داریم:

$$\begin{aligned}
&۴(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)\\
&\quad= [(a+b+c)^۲ - (a^۲+b^۲+c^۲)][(x+y+z)^۲ - (x^۲+y^۲+z^۲)]\\
&\quad= ۲۰ - (a+b+c)^۲(x^۲+y^۲+z^۲) - (a^۲+b^۲+c^۲)(x+y+z)^۲\\
&\quad\leq ۲۰ - ۲\sqrt{(a+b+c)^۲(x^۲+y^۲+z^۲)(a^۲+b^۲+c^۲)(x+y+z)^۲}\\
&\quad= ۴
\end{aligned}$$

بنابراین:

$$(ab+bc+ca)(xy+yz+zx) \leq ۱ \qquad (۱)$$

از طرفی با ضرب نابرابری‌های معروف

$$(ab+bc+ca)^۲ \geq ۳abc(a+b+c), \qquad (xy+yz+zx)^۲ \geq ۳xyz(x+y+z)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$(ab+bc+ca)^۲(xy+yz+zx)^۲ \geq ۹abcxyz(a+b+c)(x+y+z) \qquad (۲)$$

از ترکیب نابرابری‌های (۱) و (۲) داریم:

$$۱ \geq (ab+bc+ca)(xy+yz+zx) \geq ۳۶abcxyz$$

در نتیجه $۳۶abcxyz \leq ۱$.

اگر $۳۶abcxyz = ۱$، باید داشته باشیم:

$$(xy+yz+zx)^۲ = ۳xyz(x+y+z) \quad \text{و} \quad (ab+bc+ca)^۲ = ۳abc(a+b+c)$$

از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم $a = b = c$ و $x = y = z$. اما در این صورت رابطه‌ی

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲) = ۴$$

نمی‌تواند برقرار شود. بنابراین $۳۶abcxyz < ۱$.

۱۲۱. **راه‌حل.** ثابت می‌کنیم $k_n = \frac{۲n-۱}{(n-۱)^۲}$. با انتخاب $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n = ۱$ نتیجه می‌گیریم $k_n \geq \frac{۲n-۱}{(n-۱)^۲}$. بنابراین کافی است نشان دهیم اگر $x_۱x_۲\cdots x_n = ۱$، آن‌گاه:

$$\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۲n-۱}{(n-۱)^۲}x_k}} \leq n-۱$$

فرض کنید نابرابری به ازای n عدد خاص مانند $x_۱, x_۲, \ldots, x_n > ۰$ با حاصل‌ضرب ۱ برقرار نیست. در نتیجه می‌توانیم عددی مانند $M > n-۱$ و اعداد $a_i > ۰$ با مجموع ۱ را طوری بیابیم که:

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۲n-۱}{(n-۱)^۲}x_k}} = Ma_k$$

در این‌صورت $a_k < \frac{۱}{n-۱}$ و داریم:

$$۱ = \prod_{k=۱}^{n}\left[\frac{(n-۱)^۲}{۲n-۱}\left(\frac{۱}{M^۲a_k^۲}-۱\right)\right] \Rightarrow \left(\frac{۲n-۱}{(n-۱)^۲}\right)^۲ < \prod_{k=۱}^{n}\left(\frac{۱}{(n-۱)^۲a_k^۲}-۱\right)$$

فرض کنید $۱-(n-۱)a_k = b_k > ۰$. توجه کنید که $\sum_{k=۱}^{n} b_k = ۱$. با این تغییر متغیر، نابرابری بالا به صورت

$$(n-۱)^{۲n}\prod_{k=۱}^{n} b_k \cdot \prod_{k=۱}^{n}(۲-b_k) > (۲n-۱)^n\left(\prod_{k=۱}^{n}(۱-b_k)\right)^۲ \qquad (۱)$$

در می‌آید. طبق نابرابری واسطه‌ی حسابی — هندسی داریم:

$$\prod_{k=۱}^{n}(۲-b_k) \leq \left(\frac{۲n-۱}{n}\right)^n$$

لذا رابطه‌ی (۱) منجر به نابرابری

$$\prod_{k=1}^{n}(1-b_k)^2 < \frac{(n-1)^{2n}}{n^n} b_1 b_2 \cdots b_n$$

می‌شود. بنابراین کافی است ثابت کنیم که برای هر n عدد مثبت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\prod_{k=1}^{n}(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n)^2$$
$$\geq \frac{(n-1)^{2n}}{n^n} a_1 a_2 \cdots a_n (a_1+a_2+\cdots+a_n)^n$$

این نابرابری قوی را با استقرا ثابت می‌کنیم. در حالت $n = 3$ می‌توان این نابرابری را به صورت زیر اثبات کرد:

$$\frac{\left(\prod(a+b)\right)^2}{abc} \geq \frac{\left(\frac{8}{9}\cdot\left(\sum a\right)\cdot\left(\sum ab\right)\right)^2}{abc} \geq \frac{64}{27}\left(\sum a\right)^3$$

حال فرض کنید نابرابری برای هر n عدد درست باشد. $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ را اعدادی حقیقی و مثبت در نظر بگیرید. از آن‌جایی که این نابرابری، متقارن و همگن است، می‌توانیم فرض کنیم $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1}$ و نیز $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. طبق فرض استقرا داریم:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^2 \geq \frac{(n-1)^{2n}}{n^n} a_1 a_2 \cdots a_n$$

برای اثبات گام استقرا، می‌بایست ثابت کنیم:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}+1-a_i)^2 \geq \frac{n^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}$$

در نتیجه کافی است نابرابری قوی‌تر زیر را اثبات کنیم:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_{n+1}}{1-a_i}\right)^2 \geq \frac{n^{3n+2}}{(n-1)^{2n}\cdot(n+1)^{n+1}} a_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}$$

حال با استفاده از نابرابری هویگنس و نابرابری واسطه‌ی حسابی — هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{a_{n+1}}{1-a_i}\right)^2 \geq \left(1+\frac{a_{n+1}}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)}}\right)^{2n} \geq \left(1+\frac{na_{n+1}}{n-1}\right)^{2n}$$

لذا می‌بایست ثابت کنیم که اگر $a_{n+1} \geq \max\{a_1,\dots,a_n\} \geq \frac{1}{n}$، آن‌گاه:

$$\left(1+\frac{na_{n+1}}{n-1}\right)^{2n} \geq \frac{n^{3n+2}}{(n-1)^{2n}\cdot(n+1)^{n+1}}a_{n+1}(1+a_{n+1})^{n+1}$$

قرار می‌دهیم $1+x = \frac{n(1+a_{n+1})}{n+1}$، که x عددی نامنفی است. به این ترتیب نابرابری به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right)^{2n} \geq \frac{1+(n+1)x}{(x+1)^{n-1}}$$

طبق نابرابری برنولی داریم:

$$\left(1+\frac{x}{n(x+1)}\right)^{2n} \geq \frac{3x+1}{x+1}$$

در ضمن $(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{3x+1}{x+1} \geq \frac{1+(n+1)x}{1+(n-1)x}$$

که این نابرابری به وضوح برقرار است.

ملاحظه. نابرابری این مسئله در حالت $n=3$ قوی‌تر از نابرابریی است که در المپیاد ریاضی چین در سال ۲۰۰۳ مطرح شد. هم‌چنین حالت $n=3$، توسط واسیل کارتاج در مجله‌ی ریاضیات، سری A، ارائه شد.

۱۲۲. **راه‌حل.** نشان می‌دهیم که این ثابت برابر است با $(\sqrt{n}-1)^n$. برای این منظور فرض کنید $a_i = x_i^2$. می‌بایست حداقل مقدار عبارت

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-\sqrt{a_i})}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}}$$

را با شرط $a_1+a_2+\cdots+a_n = 1$ پیدا کنیم. برای این که ثابت کنیم این حداقل، برابر $(\sqrt{n}-1)^n$ است، باید نشان دهیم:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq (\sqrt{n}-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}(1+\sqrt{a_i})$$

اما با توجه به نتیجه‌ای که در راه حل مسئله‌ی ۱۲۱ ثابت کردیم، داریم:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^2 \geq \left(\frac{(n-1)^2}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n}a_i$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\prod_{i=۱}^{n}(۱+\sqrt{a_i}) \leq \left(۱+\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)^n$$

اما اثبات این نابرابری، چندان سخت نیست؛ چرا که با استفاده از نابرابری واسطه‌ی حسابی – هندسی نتیجه می‌گیریم:

$$\prod_{i=۱}^{n}(۱+\sqrt{a_i}) \leq \left(۱+\frac{\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{a_i}}{n}\right)^n \leq \left(۱+\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)^n$$

توجه کنید که در نابرابری دوم بالا، نتیجه‌ی ساده‌ای از نابرابری کوشی – شوارتز را به کار برده‌ایم.

ملاحظه. حالت $n = ۴$ این نابرابری، توسط واسیل کارتاج در مسابقات سالیانه‌ی مجله‌ی ریاضیات مطرح شد.

پیوست A

واژه‌نامه

(۱) فرمول مجموع آبل

اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعدادی حقیقی و یا مختلط باشند و

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots a_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

آن‌گاه:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n$$

(۲) نابرابری واسطه‌ی حسابی– هندسی

اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

هم‌چنین تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. این نابرابری، حالت خاصی از نابرابری واسطه‌ی توانی است.

(۳) نابرابری واسطه‌ی حسابی– توافقی

اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند، آن‌گاه:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

در ضمن تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. این نابرابری نیز حالت خاصی از نابرابری واسطه‌ی توانی است.

(۴) **نابرابری برنولی**

برای هر عدد حقیقی $x > -۱$ و هر عدد حقیقی $a > ۱$ داریم $(۱+x)^a \geq ۱ + ax$.

(۵) **نابرابری کوشی– شوارتز**

برای اعداد حقیقی و دلخواه $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ و $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ داریم:

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲)(b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲) \geq (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \cdots + a_nb_n)^۲$$

هم‌چنین تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که نسبت a_i و b_i به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ یکسان باشد.

(۶) **نابرابری کوشی– شوارتز برای انتگرال‌ها**

اگر a و b اعدادی حقیقی باشند که $a < b$، و $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ دو تابع انتگرال‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^۲ \leq \left(\int_a^b f(x)^۲dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)^۲dx\right)$$

(۷) **نابرابری چبیشف**

اگر $a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$ و $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ اعدادی حقیقی باشند، آن‌گاه:

I) اگر $b_۱ \leq b_۲ \leq \cdots \leq b_n$، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{n} a_ib_i \geq \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=۱}^{n} b_i\right)$؛

II) اگر $b_۱ \geq b_۲ \geq \cdots \geq b_n$، آن‌گاه $\sum a_ib_i \leq \frac{۱}{n}\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=۱}^{n} b_i\right)$.

(۸) **نابرابری چبیشف برای انتگرال‌ها**

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، که $a < b$ و $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ توابعی انتگرال‌پذیر و یکنوا باشند، آن‌گاه اگر یکنوایی این دو تابع یکسان باشد، داریم:

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

در ضمن اگر یکی از توابع، صعودی و دیگری نزولی باشد، جهت نابرابری برعکس می‌شود.

(۹) **تابع محدب**

تابع حقیقی f که روی بازه‌ی I از اعداد حقیقی تعریف شده است، محدب است هرگاه برای هر x, y در I و هر دو عدد نامنفی α, β با مجموع ۱ داشته باشیم:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

(۱۰) تحدب

تقعر تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ رو به بالا (پایین) است، هرگاه $f(x)$ به‌ازای هر

$$a \leq a_1 < x < b_1 \leq b$$

زیر (بالای) خط واصل بین نقاط $(a_1, f(a_1))$ و $(b_1, f(b_1))$ واقع باشد.

تقعر تابع $g(x)$ روی صفحه‌ی اقلیدسی رو به بالا (پایین) است، هرگاه تقعر آن روی هر خط صفحه رو به بالا (پایین) باشد.

ضمناً تابعی را تقعر آن رو به بالا و یا رو به پایین باشد، به ترتیب محدب و مقعر می‌نامند.

اگر تقعر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ رو به بالا باشد و $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ اعدادی نامنفی با مجموع ۱ باشند، آن‌گاه:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد دلخواهی در بازه‌ی $[a,b]$ اند. هم‌چنین اگر تقعر تابع f رو به پایین باشد، جهت نابرابری برعکس می‌شود. این نابرابری را نابرابری ینسن می‌نامند.

(۱۱) مجموع دوری

فرض کنید n عددی طبیعی است. برای هر تابع n متغیره مانند f، مجموع دوری f روی متغیرهای $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{\text{cyc}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + f(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

(۱۲) نابرابری هولدر

اگر r و s اعدادی حقیقی و مثبت باشند، به نحوی که $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$، آن‌گاه برای اعداد حقیقی مثبت و دلخواه $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ داریم:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$$

(۱۳) نابرابری هویگنس

اگر $p_1, p_2, \ldots, p_n$، $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند و $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$، آن‌گاه:

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p_i} \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} + \prod_{i=1}^{n} b_i^{p_i}$$

(۱۴) **نابرابری مک‌لارن**

برای هر n عدد حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعریف می‌کنیم:

$$S_k = \sqrt[k]{\frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$$

در این صورت داریم:

$$S_1 \geq S_2 \geq \cdots \geq S_n$$

(۱۵) **نابرابری مینکوفسکی**

برای هر عدد حقیقی $r \geq 1$ و اعداد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

(۱۶) **نابرابری واسطه‌ی توانی**

برای هر n عدد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ با مجموع ۱ و هر n عدد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعریف می‌کنیم:

$$M_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \qquad M_r = (a_1 x_1^r + a_2 x_2^r + \cdots + a_n x_n^r)^{\frac{1}{r}}; \qquad r \neq 0$$

$$M_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad M_{\infty} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

در این صورت برای هر دو عدد حقیقی $s \leq t$ داریم:

$$M_{-\infty} \leq M_s \leq M_t \leq M_{\infty}$$

(۱۷) **نابرابری واسطه‌ی حسابی – مربعی**

اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعدادی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

هم‌چنین تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(۱۸) نابرابری شور

برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x, y, z و عدد حقیقی $r > ۰$ داریم:

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \geq ۰$$

متداول‌ترین حالت این نابرابری، حالت $r = ۱$ است که منجر به نابرابری‌های هم‌ارز زیر می‌شود:

۱) $x^۳+y^۳+z^۳+۳xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$

۲) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

۳) $x+y+z=۱ \Rightarrow xy+yz+zx \leq \dfrac{۱+۹xyz}{۴}$

(۱۹) نابرابری سورانی

برای اعداد حقیقی و نامنفی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ داریم:

$$(n-۱)\sum_{k=۱}^{n} a_k^n + n\prod_{k=۱}^{n} a_k \geq \left(\sum_{k=۱}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=۱}^{n} a_k^{n-۱}\right)$$

(۲۰) نابرابری تورکویکی

برای هر چهار عدد حقیقی و مثبت x, y, z, t داریم:

$$x^۴+y^۴+z^۴+t^۴+۲xyzt \geq x^۲y^۲+y^۲z^۲+z^۲t^۲+t^۲x^۲+x^۲z^۲+y^۲t^۲$$

(۲۱) نابرابری وزن‌دار حسابی ـ هندسی

اگر $w_۱, w_۲, \ldots, w_n$ اعدادی حقیقی و نامنفی (وزن‌ها) با مجموع ۱ باشند، آن‌گاه برای هر n عدد حقیقی و نامنفی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ داریم:

$$w_۱a_۱+w_۲a_۲+\cdots+w_na_n \geq a_۱^{w_۱}a_۲^{w_۲}\cdots a_n^{w_n}$$

ضمناً تساوی تنها زمانی برقرار می‌شود که داشته باشیم $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.