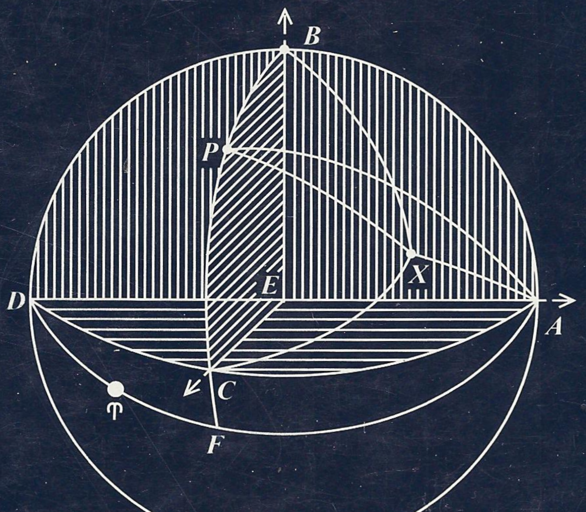
وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

نجوم کروی

و. م. اسمارت



ترجمهٔ داود محمدزاده جسور

نجوم کروی

و. م. اسمارت

ترجمهٔ داود محمدزاده جسور

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۷۹۲

فیزیک
۶۹

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مرکز نشر دانشگاهی

Textbook on Spherical Astronomy
W. M. Smart
Sixth Edition
Cambridge University Press, 1977

نجوم کروی

تألیف و. م. اسمارت

ترجمهٔ داود محمدزاده جسور

ویراستهٔ احمد کیاست‌پور
دستیار ویراستار: سوسن انوری
ناظر چاپ: علی صادقی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۷۵
چاپ چهارم ۱۳۸۹
تعداد ۱۵۰۰
حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی
لیتوگرافی: آبرنگ
چاپ و صحافی: سامان
۶۸۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خبیری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶
نمابر: ۶۶۴۱۰۷۶۱
فروش اینترنتی: http:\\eshop.iup.ir

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Smart, William Marshall.
اسمارت، ویلیام مارشال، ۱۸۸۹ـ
نجوم کروی/و. م. اسمارت؛ ترجمهٔ داود محمدزاده جسور. ـ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵.
دوازده، ۴۹۰ ص.: مصور، جدول، نمودار. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۷۹۲. فیزیک؛ ۶۹)
ISBN 978-964-01-0792-8
عنوان اصلی: Textbook on spherical astronomy, 6th ed.
چاپ چهارم: ۱۳۸۹.
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. نجوم کروی. الف. محمدزاده جسور، داود، ۱۳۲۹ـ ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
۵۲۲/۷ QB۱۴۵/ن۵الف۳
۱۳۷۵
کتابخانهٔ ملی ایران
۱۴۰۶ـ۷۵م

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار ویرایش ششم	۱
پیشگفتار	۳
۱. مثلثات کروی	۵
۱. مقدمه	۵
۲. مثلث کروی	۵
۳. طول کمان دایرهٔ صغیره	۷
۴. عرض و طول جغرافیایی	۸
۵. فرمول کسینوس	۱۰
۶. فرمول سینوس	۱۳
۷. فرمول قیاسی	۱۵
۸. فرمول چهار جزئی	۱۷
۹. اثبات فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج) به روشی دیگر	۱۸
۱۰. مثلثهای قائم‌الزاویه و ربع دایره‌ای	۲۱
۱۱. فرمولهای قطبی	۲۲
۱۲. مثال عددی	۲۳
۱۳. فرمول هاورسینوس	۲۶
۱۴. یک روش دیگر	۲۷

عنوان	صفحه
۱۵. نسبتهای مثلثاتی برای زاویه‌های کوچک	۳۰
۱۶. قیاسهای دالامبر و نپر	۳۱
تمرینها	۳۲
۲. کرهٔ سماوی	۳۴
۱۷. مقدمه	۳۴
۱۸. ارتفاع و سمت	۳۴
۱۹. میل و زاویهٔ ساعتی	۳۷
۲۰. نمودار مربوط به نیمکرهٔ جنوبی	۳۹
۲۱. ستاره‌های پیرا قطبی	۴۰
۲۲. کرهٔ سماوی استاندارد یا زمین-مرکز	۴۱
۲۳. حل مثلث کروی PZX	۴۳
۲۴. بُعد و میل	۴۴
۲۵. مدار زمین	۴۶
۲۶. عرض و طول سماوی	۴۷
۲۷. زمان نجومی	۴۸
۲۸. زمان خورشیدی متوسط	۴۹
۲۹. مثال	۵۳
۳۰. زاویهٔ ساعتی یک جرم آسمانی	۵۴
۳۱. طلوع و غروب	۵۵
۳۲. آهنگ تغییرات فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت	۵۷
۳۳. شَفَق	۶۱
تمرینها	۶۲
۳. شکست	۷۱
۳۴. قوانین شکست	۷۱
۳۵. شکست برای فاصله‌های سمت‌الرأسی کوچک	۷۲
۳۶. فرمول کلی شکست	۷۵
۳۷. بسط فرمول کلی شکست	۷۸
۳۸. تعیین ثابتهای A و B در فرمول (۲۹)	۸۱
۳۹. اثر شکست بر زمان غروب خورشید	۸۳
۴۰. اثر شکست بر بُعدو میل یک ستاره	۸۴
تمرینها	۸۶

عنوان | صفحه

۴. تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری ۸۸
۴۱. شرح کلی ۸۸
۴۲. خطاهای دستگاهی ۹۰
۴۳. خطای سمت ۹۰
۴۴. خطای تراز ۹۲
۴۵. خطای موازی‌سازی ۹۳
۴۶. تصحیح کل بر زمان عبور رصد شده ۹۴
۴۷. فرمول بسل ۹۵
۴۸. فواصل سیمها ۹۶
۴۹. تعیین خطای موازی‌سازی ۹۸
۵۰. تعیین خطای تراز ۱۰۲
۵۱. تعیین خطای سمت ۱۰۵
۵۲. زمان‌نگار (اهمیت تاریخی) ۱۰۶
۵۳. اندازه‌گیری میل ۱۰۷
۵۴. اندازه‌گیری بُعد ۱۰۸
۵۵. اندازه‌گیری زمان ۱۱۰
تمرینها ۱۱۱

۵. حرکتهای سیارات ۱۱۵
۵۶. مقدمه ۱۱۵
۵۷. قانون اول کپلر ۱۱۵
۵۸. قانون دوم کپلر ۱۱۶
۵۹. قانون سوم کپلر ۱۱۷
۶۰. قانون گرانش نیوتون ۱۱۷
۶۱. جرم سیاره‌ها ۱۱۹
۶۲. اختلالهای عناصر مداری ۱۲۰
۶۳. اصول دینامیکی حرکت مداری ۱۲۰
۶۴. معادلهٔ مدار ۱۲۲
۶۵. سرعت سیاره در مدارش ۱۲۶
۶۶. مؤلفه‌های سرعت خطی عمود بر بردار شعاعی و محور بزرگ ۱۲۸
۶۷. بی‌هنجاریهای واقعی و خروج‌ازمرکزی ۱۲۸
۶۸. معادلهٔ کپلر ۱۳۱
۶۹. حل معادلهٔ کپلر ۱۳۲

عنوان | صفحه

۷۰. خلاصهٔ فرمولهای حرکت بیضوی ۱۳۵
۷۱. بی‌هنجاری خروج از مرکزی به صورت سری از e ... ۱۳۶
۷۲. بی‌هنجاری واقعی به صورت سری‌ای از e و ... ۱۳۷
۷۳. تعدیل مرکز ۱۳۹
۷۴. مدار در فضا ۱۴۰
۷۵. مختصات قائم خورشیدمرکزی یک‌سیاره نسبت به دایرةالبروج ۱۴۲
۷۶. مختصات استوایی خورشیدمرکزی یک سیاره ۱۴۴
۷۷. مختصات استوایی خورشیدمرکزی یک سیاره (روش دیگر) ۱۴۵
۷۸. مختصات قائم خورشیدمرکزی زمین ۱۴۷
۷۹. بُعد و میل زمین‌مرکزی سیاره ۱۴۷
۸۰. دوره‌های مداری و هلالی یک سیاره ۱۵۰
۸۱. مدار زمین ۱۵۲
۸۲. مدار ظاهری خورشید ۱۵۲
۸۳. مدار ماه ۱۵۳
تمرینها ۱۵۴

۶. زمان ۱۵۸
۸۴. زمان نجومی ۱۵۸
۸۵. زمان زیجی و جهانی ۱۶۱
۸۶. سال نجومی و سال اعتدالی ۱۶۳
۸۷. رابطهٔ بین زمان جهانی و زمان نجومی میانگین ۱۶۴
۸۸. تقویم ۱۶۷
۸۹. سال بسلی ۱۶۸
۹۰. تاریخ ژولیانی ۱۶۸
۹۱. تعدیل زمان ۱۶۹
۹۲. فصلها ۱۷۳
۹۳. زمان عبور خورشید از هر دایرهٔ نصف‌النهار ۱۷۷
۹۴. زمان عبور ماه از هر دایرهٔ نصف‌النهار ۱۷۸
تمرینها ۱۷۹

۷. پدیده‌های سیاره‌ای و مختصات خورشیدنگاشتی ۱۸۴
۹۵. حرکت زمین‌مرکزی یک سیاره ۱۸۴
۹۶. فاصلهٔ خورشیدمرکزی یک سیاره به هنگام اقامت ... ۱۸۸

عنوان	صفحه

۹۷. نقاط اقامت با در نظرگرفتن زاویهٔ میل	۱۸۹
۹۸. اهلهٔ سیاره‌ها و ماه	۱۹۱
۹۹. درخشندگی سیاره‌ها	۱۹۳
۱۰۰.مختصات خورشیدنگاشتی	۱۹۴
۱۰۱.مختصات خورشیدنگاشتی مرکز قرص	۱۹۶
۱۰۲.زاویهٔ مکان محور چرخش خورشید	۱۹۷
۱۰۳.مختصات خورشیدنگاشتی لک خورشید	۱۹۸
تمرینها	۲۰۱
۸. ابیراهی	۲۰۴
۱۰۴.قانون ابیراهی	۲۰۴
۱۰۵.ابیراهی سالانه در طول و عرض دایرةالبروجی	۲۰۶
۱۰۶.بیضی ابیراهی	۲۰۸
۱۰۷.ابیراهی در بُعد و میل	۲۰۹
۱۰۸.حرکت بیضیی زمین و ابیراهی	۲۱۲
۱۰۹.اندازه‌گیری ثابت ابیراهی	۲۱۴
۱۱۰.مقدار نظری ثابت ابیراهی	۲۱۷
۱۱۱.ابیراهی شبانه‌روزی	۲۱۸
۱۱۲.تصحیح زمان نور	۲۲۱
تمرینها	۲۲۱
۹. اختلاف‌منظر	۲۲۳
۱۱۳.مقدمه	۲۲۳
۱۱۴.ژئوئید	۲۲۳
۱۱۵.عرض نجومی و عرض زمین‌مرکزی	۲۲۴
۱۱۶.شکل زمین	۲۲۷
۱۱۷.اختلاف‌منظر زمین‌مرکزی	۲۲۸
۱۱۸.اختلاف‌منظر ماه	۲۳۰
۱۱۹.نیم‌قطر	۲۳۲
۱۲۰.اثر اختلاف‌منظر بر بُعدو میل	۲۳۳
۱۲۱.اثر اختلاف‌منظر بر فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت	۲۳۶
۱۲۲.اختلاف‌منظر خورشید	۲۳۷
۱۲۳.اختلاف‌منظر خورشید (روش شبانه‌روزی)	۲۴۰

عنوان	صفحه
۱۲۴.اختلاف‌منظر خورشید (روشهای دیگر)	۲۴۲
۱۲۵.اختلاف‌منظر اختری	۲۴۷
۱۲۶.اثر اختلاف‌منظر بر طول وعرض سماوی ستاره	۲۴۹
۱۲۷.بیضی اختلاف‌منظری	۲۵۰
۱۲۸.اثر اختلاف‌منظر اختری بر بُعد و میل	۲۵۰
۱۲۹.اندازه‌گیری اختلاف‌منظر اختری	۲۵۲
۱۳۰.پارسک و سال نوری	۲۵۴
تمرینها	۲۵۵
۱۰. حرکت تقدیمی وناوش	۲۵۸
۱۳۱.مقدمه	۲۵۸
۱۳۲.اثر حرکت تقدیمی بر بُعد و میل یک ستاره	۲۶۱
۱۳۳.اثر حرکت تقدیمی بر بُعد و میل (روش دیگر)	۲۶۲
۱۳۴.ناوش یا رقص محوری	۲۶۳
۱۳۵.ناوش در میل	۲۶۶
۱۳۶.حرکت تقدیمی سیاره‌ای	۲۶۸
۱۳۷.استوای میانگین و مختصات میانگین یک ستاره	۲۷۰
۱۳۸.تغییر قرنی	۲۷۲
۱۳۹.استوای واقعی و مختصات واقعی یک ستاره	۲۷۴
۱۴۰.مکان ظاهری یک ستاره	۲۷۸
۱۴۱.یافتن مکان ظاهری از مکان میانگین (یا برعکس)	۲۷۸
۱۴۲.فهرست‌بندی ستاره‌ها	۲۷۹
۱۴۳.مقدارهای عددی اثر ناوش بر طول سماوی و بر میل دایرةالبروج	۲۷۹
تمرینها	۲۸۰
۱۱. حرکتهای خاصهٔ ستاره‌ها	۲۸۲
۱۴۴.تعریف حرکت خاصه	۲۸۲
۱۴۵.رابطهٔ بین حرکت خاصه، سرعت مماسی، و اختلاف‌منظر	۲۸۳
۱۴۶.سرعت شعاعی	۲۸۴
۱۴۷.اندازه‌گیری حرکت خاصه	۲۸۵
۱۴۸.مؤلفه‌های حرکت خاصه در عصرهای مختلف نسبت به یک دستگاه استوایی	۲۸۸
۱۴۹.مؤلفه‌های حرکت خاصه نسبت به استواهای میانگین دو عصر مختلف	۲۹۱
۱۵۰.مختصات میانگین و ظاهری	۲۹۴

۱۵۱. حرکت خورشید و حرکت اختلاف‌منظری	۲۹۵
۱۵۲. اختلاف‌منظر قرنی	۲۹۷
۱۵۳. حرکت خورشید و سرعت شعاعی	۲۹۸
۱۵۴. حرکت خورشید در حالت کلی	۲۹۹
۱۵۵. اختلاف‌منظرهای آماری	۳۰۱
۱۵۶. تعیین گرایشگاه خورشید از حرکتهای خاصه	۳۰۲
۱۵۷. تعیین حرکت خورشید از سرعتهای شعاعی	۳۰۹
تمرینها	۳۱۰
۱۲. عکاسی نجومی	۳۱۴
۱۵۸. تلسکوپ شکستی عکاسی	۳۱۴
۱۵۹. صفحهٔ مماس	۳۱۶
۱۶۰. مختصات استاندارد	۳۱۶
۱۶۱. فرمولهای مختصات استاندارد	۳۱۹
۱۶۲. اندازه‌گیری مقیاس صفحهٔ عکاسی	۳۲۱
۱۶۳. مختصات اندازه‌گیری شده	۳۲۳
۱۶۴. مبحث خطاها	۳۲۴
۱۶۵. شکست جوی	۳۲۸
۱۶۶. ابیراهی	۳۳۳
۱۶۷. روابط کلی بین مختصات استاندارد و مختصات اندازه گرفته شده (روش ترنر)	۳۳۴
۱۶۸. اندازه‌گیری صفحات عکاسی اخترنگاشتی	۳۳۵
۱۶۹. رصدهای عکسی سیارکها و دنباله‌دارها	۳۳۷
۱۷۰. اندازه‌گیری حرکتهای خاصه	۳۳۷
۱۷۱. اندازه‌گیری حرکتهای خاصه (روش کاپتین)	۳۳۹
۱۷۲. تصحیح حرکتهای خاصهٔ نسبی به مطلق	۳۴۱
۱۷۳. روش فیلم به فیلم اندازه‌گیری حرکتهای خاصه	۳۴۳
۱۷۴. تعیین ثابتهای صفحهٔ عکاسی به روش کریستی و دایسون	۳۴۴
۱۷۵. اندازه‌گیری اختلاف‌منظرهای اختری	۳۴۶
تمرینها	۳۵۰
۱۳. تعیین مکان در دریا	۳۵۱
۱۷۶. سکستان	۳۵۱
۱۷۷. خطاهای سکستان	۳۵۳

۱۷۸.تصحیحات بر ارتفاع رصد شده ۳۵۴
۱۷۹.دایرهٔ مکانی ۳۵۷
۱۸۰.خط مکانی (روش سنت هلر) ۳۵۹
۱۸۱.مثال محاسبهٔ فاصله از مبدأ ۳۶۰
۱۸۲.نقشهٔ مرکاتور ۳۶۲
۱۸۳.تعیین مکان کشتی با رصد دو ارتفاع ۳۶۵
۱۸۴.مثال در مورد یافتن مکان کشتی از دو رصد ۳۶۶
۱۸۵.روشهای ویژه ۳۶۹
۱۸۶.معادلهٔ دایرهٔ عظیمه روی نقشهٔ مرکاتور ۳۷۱
تمرینها ۳۷۳

۱۴. مدارهای ستاره‌های دوتایی ۳۷۸
۱۸۷.ستاره‌های دوتایی دیداری ۳۷۸
۱۸۸.ریزسنج ۳۷۹
۱۸۹.عناصر مدار واقعی ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۸۰
۱۹۰.مدار ظاهری ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۸۳
۱۹۱.روش کوالسکی برای تعیین عناصر مدار ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۸۵
۱۹۲.روش زُوایر برای تعیین عناصر مدار ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۹۰
۱۹۳.جرم ستاره‌ها ۳۹۵
۱۹۴.اختلاف‌منظر دینامیکی ۳۹۷
۱۹۵.ستاره‌های دوتایی طیفی ۳۹۷
۱۹۶.منحنی سرعت ۳۹۹
۱۹۷.روش لهمن‌ـفیلهه ۴۰۰
۱۹۸.دو طیف قابل رؤیت ۴۰۵
۱۹۹.تابع جرم ۴۰۶
۲۰۰.جرم ستاره‌های دوتایی طیفی ۴۰۷
۲۰۱.ستاره‌های دوتایی گرفتی ۴۰۸
تمرینها ۴۰۸

۱۵. اختفا و گرفتگی ۴۱۰
۲۰۲.اختفای ستاره‌ها به وسیلهٔ ماه ۴۱۰
۲۰۳.شرایط هندسی اختفا ۴۱۱
۲۰۴.روش بسل در بررسی اختفا ۴۱۲

عنوان	صفحه
۲۰۵.عناصر بسلی اختفا	۴۱۵
۲۰۶.پیشگویی اختفا در هر محل	۴۱۵
۲۰۷.تعدیل اختفا	۴۱۸
۲۰۸.گرفتگیهای ماه	۴۲۰
۲۰۹.شعاع زاویه‌ای مخروط سایه در فاصلهٔ زمین‌مرکزی ماه	۴۲۱
۲۱۰.حدود گرفتگی	۴۲۳
۲۱۱.محاسبهٔ ماه گرفتگی	۴۲۶
۲۱۲.گرفتگیهای خورشید	۴۲۹
۲۱۳.زاویهٔ مراکز خورشید و ماه از مرکز زمین ...	۴۳۰
۲۱۴.حدود گرفتگی	۴۳۱
۲۱۵.عناصر بسلی خورشید گرفتگی	۴۳۴
۲۱۶.محاسبات خورشید گرفتگی برای هر ایستگاه	۴۳۸
۲۱۷.بسامد گرفتگیها	۴۴۲
۲۱۸.تکرار گرفتگیها	۴۴۴
تمرینها	۴۴۵
پیوست ۱. روش وابستگیها	۴۴۹
۲۱۹.مقدمه	۴۴۹
۲۲۰.مسئلهٔ اخترنگاشتی (با ۳ ستارهٔ مقایسه)	۴۵۰
۲۲۱.مسئلهٔ اخترنگاشتی (با n ستارهٔ مقایسه)	۴۵۴
۲۲۲.کاربرد روش وابستگیها در تعیین اختلاف‌منظر ستاره	۴۵۷
پیوست ۲. قدر ستاره‌ای	۴۶۰
۲۲۳.قدر ظاهری	۴۶۰
۲۲۴.قدر مطلق	۴۶۱
پیوست ۳. کولِستات	۴۶۳
۲۲۵.اصول کلی	۴۶۳
۲۲۶.فرمولهای نصب تلسکوپ	۴۶۵
پیوست ۴. ثابتهای نجومی	۴۶۷
پیوست ۵. ابعاد خورشید، ماه، وسیارات	۴۷۰
پیوست ۶. عناصر میانگین مدارهای سیاره‌ای	۴۷۲

عنوان	صفحه
پیوست ۷. عناصر و ابعاد قمری	۴۷۴
پیوست ۸. زمان زیجی و جهانی	۴۷۶
واژه‌نامه	۴۷۸
فهرست راهنما	۴۸۳

پیشگفتار ویرایش ششم

از زمان اولین نشر این کتاب، تغییرات قابل ملاحظه‌ای در اصطلاحات و کمیتهای جدول‌بندی شده در زیجهای گوناگون (از جمله در زیج نجومی) به وجود آمده است. در این ویرایش، با در نظر گرفتن اهمیت این تغییرات و لزوم اعمال آنها، سعی بر آن بوده است که کتاب با زیجهای نجومی حتی‌الامکان هماهنگ باشد. امید دارم که درکل به مقصود رسیده باشم، هر چند که تفاوتهای جزئی در بررسی گرفتگیهای خورشید و در تعریف شماره‌های روز بسلی برای ابیراهی سالانه همچنان به‌جا مانده است.

بدون شک مهمترین تغییری که در جدولهای نجومی به عمل آمده است، معرفی زمان زیجی است. از آنجا که تقریباً در همهٔ جدولهای نجومی این زمان به عنوان شناسه به کار می‌رود، روشن است که در یک کتاب درسی مقدماتی نظیر این کتاب زمان زیجی باید جایگاهی مهم و توصیفی مناسب داشته باشد. از این رو در فصل زمان، اصلاحات عمده‌ای را با تأکید بر تفاوت بین زمانهای زیجی و جهانی انجام داده‌ام. با وجود این، در طرح و تشریح این اختلاف با مشکلی روبه‌رو بوده‌ام. پروفسور اسمارت برای تعریف زمان جهانی، واژهٔ خورشید میانگین را به کار برده است. خورشید میانگین یک جرم کاملاً پنداری است که مدتها قبل از شناسایی اختلاف مورد نظر ما برای تعریف زمان خورشیدی معرفی شد. نیوکام این مفهوم را خورشید میانگین پنداری نامید و یک تعریف بسیار دقیق و رسمی از آن ارائه داد. کار نیوکام طبعاً با تعریف بعدی زمان زیجی ارتباط یافت، و به‌همین جهت، من هم عبارت خورشید میانگین پنداری را به عنوان یک نقطهٔ مرجع برای زمان زیجی حفظ کرده‌ام. همچنین، به خاطر پیوستگی، عبارت خورشید میانگین اسمارت را نیز به عنوان یک نقطهٔ مرجع برای زمان جهانی حفظ کرده‌ام. امیدوارم که این دوگانگی، که رسم متداولی نیست، در عمل به سردرگمی منجر نشود. به عبارت دیگر، منظور این نیست که فقط یکی از نقاط مرجع پنداری است بلکه هر دو پنداری‌اند.

فرصت ویرایش را برای افزودن تعدادی تمرین به آخر بعضی از فصلها غنیمت شمرده‌ام. پاره‌ای از آنها، با کسب اجازه، از سؤالات امتحانی اخیر دانشگاه گلاسگو انتخاب شده‌اند. امید است که

بعضی از آنها در تفهیم مطالب جدیدی که به کتاب اضافه شده‌اند مفید واقع شوند.

هدف ما تجدید نظر در یک کتاب درسی بوده است و نه ایجاد تغییرات اساسی، بنابراین کلیات موضوع کتاب جز قسمتهایی از فصل ۶ که دربارهٔ زمان است به همان صورت قبلی حفظ شده است. با وجود این، برای نشان دادن ارتباط موضوع مورد بحث با نجوم جدید، یادداشتهای نسبتاً زیادی را به متن اضافه کرده‌ام.

هدف اساسی این تجدید نظر، برقراری مجدد هماهنگی با زیج نجومی و تا حدودی هم‌سازگاری با توضیحات کاملتر متمم همین اثر بوده است. پروفسور اسمارت در ویرایش اول این کتاب مثالهای عددی را از جدولهای سال ۱۹۳۱ (جدولهای دریایی آن دوره) انتخاب کرده بود. در مواردی که کمیتهای استخراج شده از این جدولها مطابقت کامل یا تقریباً کامل با مقادیر جدول‌بندی شده در زیجهای فعلی داشته‌اند فقط اصلاحات جزئی اعمال کرده‌ام. در مواردی که چنین تطابق کاملی وجود نداشته است، مثالهای جدیدی بر اساس زیج نجومی ۱۹۷۵ جایگزین کرده‌ام. در هیچ موردی کمیتی که در زیجهای نجومی فعلی جدول‌بندی نشده باشد، به‌کار برده نشده است.

گرین
گروه نجوم دانشگاه گلاسکو
۱۹۷۶

پیشگفتار

این کتاب بر اساس درسهایی تدوین شده است که هر سال در دانشگاه کمبریج و همراه با یک دورهٔ آموزش نجوم عملی در رصدخانه تدریس می‌شوند. تغییرات اخیر زیجها، کتابهای درسی قدیمیتر را، به عنوان منابع اطلاعات دربارهٔ مسائل جاری، از جهاتی نامناسب ساخته است. این کتاب به قصد پر کردن شکاف حاصل از پیشرفتهای جدید تهیه شده است. کتاب، علاوه بر مسائل کلاسیک نجوم کروی، حاوی مباحث اساسی دربارهٔ موضوعات مهمی از قبیل مختصات خورشیدنگاشتی، حرکتهای خاصه، تعیین مکان در دریا، کاربرد عکسبرداری در اندازه‌گیریهای دقیق نجومی و مدار ستاره‌های دوتایی است ـــ مباحثی که عموماً به‌آنها در کتابهایی از این دست کمتر توجه شده است. برای ارائهٔ هر چه کاملتر بعضی از موضوعات، از مرزهای سنتی نجوم کروی فراتر رفته‌ام. این ادعا بویژه در موضوع تعیین سرعت شعاعی به روش طیف‌نمودی صحت دارد، که با پذیرفتن اصول فیزیکی، در مسائلی از قبیل اختلاف‌منظر خورشیدی، حرکت خورشید و مدار ستاره‌های دوتایی طیفی مورد استفاده قرار گرفته است.

در سراسر کتاب، تنها از ساده‌ترین ابزارهای ریاضی استفاده شده است و برای توضیح مطالب بیشتر به‌نمودارهای روشنگر موضوع توجه شده است. فصل اول را به اثبات و کاربردهای عددی فرمولهای مثلثات کروی اختصاص داده‌ام؛ اینها پایهٔ ریاضی فصلهای بعدی را فراهم می‌سازند. هر چند فرمولهای فرعی هم به‌عنوان مرجع ارائه شده‌اند، امّا خود من تنها به فرمولهای اساسی اکتفا کرده‌ام.

در یک کتاب درسی نجوم کروی ناگزیر باید تا حدودی به‌تفصیل به‌ابزارهای اصلی اخترشناسی پرداخت. در این کتاب هم توصیف کلی ابزارها، همراه با بحث ساده‌ای از خطاهای عمده‌ای که باید در کارهای رصدی واقعی منظور شوند، در جاهای مناسب ارائه شده است. در کارهای عددی، از زیج سال ۱۹۳۱ استفاده شده است. در مورد علائم، معمولاً از توصیه‌های اتحادیهٔ بین‌المللی اخترشناسی پیروی کرده‌ام، اما در مواردی که اجتناب از سردرگمی و بدفهمی را مهمتر از پایبندی خشک به یک سیستم معین پیشنهادی تشخیص داده‌ام، اصلاحاتی هم به عمل آورده‌ام. مثلاً، زاویهٔ اختلاف‌منظر به جای π، که دانشجو آن را در اغلب مسائل ریاضی مربوط به خواص دایره

می‌داند، با II نشان داده شده است.

همچنین از توصیهٔ اتحادیهٔ بین‌المللی اخترشناسی در مورد نامگذاری زمان میانگین استاندارد پیروی کرده‌ام و در سراسر کتاب، منظور از GCT (زمان رسمی گرینویچ) زمان متوسطی است که برای نصف‌النهار گرینویچ، از نیمه شب محاسبه می‌شود. این انتخاب مغایر با رسم فعلی در تقویم دریایی بریتانیاست که از سال ۱۹۲۵ علامت GMT را، علی‌رغم این واقعیت که قبل از ۱۹۲۵ علامت جهانی GMT نشاندهندهٔ زمان متوسطی بود که از ظهر متوسط در گرینویچ محاسبه می‌شد، به همان مفهوم مذکور برای GCT به کار برده است. در این کتاب، علامت اخیر را (باز هم بنابه توصیه اتحادیهٔ بین‌المللی اخترشناسی) با حروف GMAT (زمان نجومی متوسط گرینویچ) نشان داده‌ام.

در آخر هر فصل، مجموعه مسائلی آمده است که اغلب آنها از مسائل امتحانی دانشگاه کمبریج و دانشگاه لندن و کالجهای کمبریج، و با اجازهٔ آنها، انتخاب شده‌اند؛ تعدادی از تمرینها نیز از کتاب نجوم کروی تألیف بال انتخاب شده‌اند.

اسمارت
رصدخانهٔ کمبریج
۱۹۳۱

۱

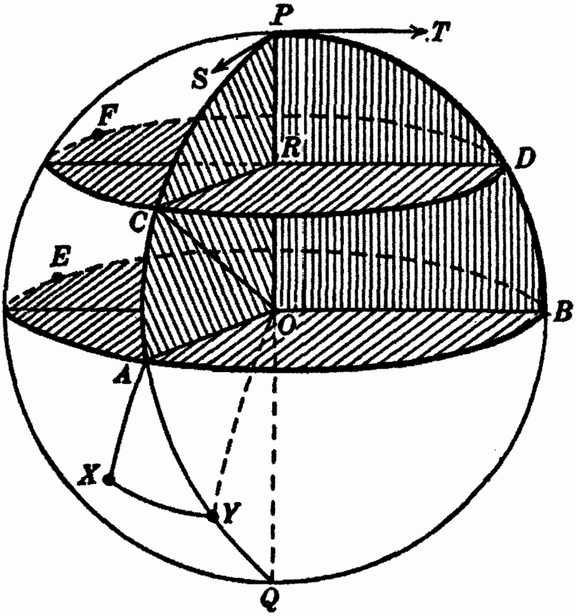
مثلثات کروی

۱. مقدمه

وقتی شبهای صاف به آسمان نگاه می‌کنیم ستاره‌ها را به صورت نقاط درخشانی می‌بینیم که ظاهراً بر سطح کرهٔ بزرگی قرار گرفته‌اند و ما در مرکز این کره‌ایم. البته، نمی‌توانیم با چشم فاصلهٔ ستاره‌ها را از خودمان تعیین کنیم ولی می‌شود اندازهٔ زاویه‌ای را تعیین کرد که هر دو ستاره در محل راصد با یکدیگر تشکیل می‌دهند. با دستگاههای مناسب می‌توان این زاویه‌ها را با دقت زیاد اندازه‌گیری کرد. در نجوم کروی جهتهایی را بررسی می‌کنند که ستاره‌ها در امتداد آنها مشاهده می‌شوند؛ این جهتها محل تقاطع خطوط راست واصل بین راصد و ستاره‌ها با سطح کره‌ای موسوم به کرهٔ سماوی به شمار می‌آیند. عبارت «مکان یک ستاره روی کرهٔ سماوی» باید به همین معنی تعبیر شود. شعاع این کره کاملاً اختیاری است. اساس نجوم کروی هندسهٔ این کره است.

۲. مثلث کروی

هر صفحه‌ای که از مرکز کره عبور کند سطح آن را در دایره‌ای موسوم به دایرهٔ عظیمه قطع می‌کند. هر صفحه‌ای که کره را قطع کند ولی از مرکز آن عبور نکند نیز سطح کره را در دایره‌ای قطع می‌کند که دایرهٔ صغیره نامیده می‌شود. EAB، در شکل ۱ یک دایرهٔ عظیمه است، زیرا صفحهٔ آن از نقطهٔ O که مرکز کره است می‌گذرد. فرض کنید QOP قطری از کره باشد که بر صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ



شکل۱

EAB عمود است. همچنین نقطهٔ دلخواه R را روی شعاع OP در نظر بگیرید و فرض کنید صفحه‌ای از آن نقطه به موازات صفحهٔ EAB رسم شده باشد؛ در این صورت، سطح کره در دایرهٔ صغیرهٔ FCD قطع می‌شود. از روی شکل پیداست که OP بر صفحهٔ FCD نیز عمود است. دو سر عمود مشترک QOP، یعنی P و Q، را قطبهای دایرهٔ عظیمه و دایرهٔ صغیرهٔ موازی با آن می‌نامند. اکنون فرض کنید دایرهٔ عظیمهٔ دلخواهی مانند $PCAQ$ از قطبهای P و Q عبور کند و دایرهٔ صغیرهٔ FCD و دایرهٔ عظیمهٔ EAB را به‌ترتیب در نقاط C و A قطع کند. همین‌طور، کمان PDB قسمتی از دایرهٔ عظیمهٔ دیگری است که از P و Q می‌گذرد. وقتی می‌خواهیم یک دایرهٔ عظیمهٔ بخصوصی را نام ببریم، ساده‌تر آن است که تنها قسمتی از محیط آن را نام ببریم. وقتی که دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند می‌گوییم میان آنها یک زاویهٔ کروی تشکیل می‌شود که تعریف آن به شرح زیر است. دو دایرهٔ عظیمهٔ PA و PB که همدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. خطوط PS و PT را به‌ترتیب مماس بر محیط دایره‌های PA و PB رسم می‌کنیم. بدیهی است که خط PT بر شعاع OP از دایرهٔ عظیمهٔ PB عمود است و چون در صفحهٔ PBO است بنابراین با شعاع OB موازی است. همین طور، PS با شعاع OA موازی است. زاویهٔ SPT بنابه تعریف زاویهٔ کروی میان دو دایرهٔ عظیمهٔ PA و PB است و با زاویهٔ AOB برابر است. کمان روبه‌روی این زاویه، AB، که دایره‌های عظیمهٔ PA و PB را قطع می‌کند بخشی از دایرهٔ عظیمه‌ای به قطب P است. باید تأکید کرد که زاویهٔ کروی تنها در ارتباط با

دو دایرهٔ عظیمه تعریف می‌شود.

اگر سه نقطهٔ دلخواه روی یک کره داشته باشیم می‌توانیم کره را طوری دو نیم کنیم که هرسه نقطه روی یک نیمکره باشند. اگر این نقاط با کمانهای دایرهٔ عظیمه که همه روی یک نیمکره قرار دارند به هم وصل شوند، شکل حاصل یک مثلث کروی خوانده می‌شود. بدین ترتیب در شکل ۱، سه نقطهٔ A، X، و Y واقع بر سطح کره با کمانهای دایرهٔ عظیمه به هم وصل می‌شوند و مثلث کروی AXY را تشکیل می‌دهند. AX، AY، و XY اضلاع این مثلث، و زاویه‌های کروی در A، X، و Y زاویه‌های آن هستند. در واقع، اگر R شعاع کره باشد آن وقت AY، طول کمان دایرهٔ عظیمه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$AY = R \times (A\hat{O}Y)$$

که در آن زاویهٔ AOY برحسب مقیاس دایره‌ای، یعنی رادیان بیان می‌شود. چون برای همهٔ کمانهای دایرهٔ عظیمهٔ واقع بر کره، شعاع R مقداری است ثابت، پس بهتر است که طول آن واحد اختیار شود. در این صورت طول کمان AY صرفاً برابر زاویهٔ مرکزی مقابل آن است. برای مثال، اگر AY برابر یک هشتم محیط دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از نقاط A و Y می‌گذرد، آن وقت ضلع AY برابر $\pi/۴$ رادیان است و هیچ ابهامی وجود نخواهد داشت اگر طول آن را به درجه بیان کنیم، یعنی، بگوییم $۴۵°$ است. اضلاع دیگر مثلث را نیز می‌توان به همین ترتیب بیان کرد. از تعریف مثلث کروی چنین نتیجه می‌شود که هیچ ضلعی نمی‌تواند مساوی یا بزرگتر از $۱۸۰°$ باشد. به عنوان مثالی دیگر، PAB یک مثلث کروی است که دو ضلع آن، یعنی کمانهای PA و PB، هر یک مقابل یک زاویهٔ $\pi/۲$ رادیان یا $۹۰°$ است که رأس آنها در نقطهٔ O قرار دارند؛ در این حالت گوییم که PA و PB هر یک برابر $\pi/۲$ رادیان یا $۹۰°$ است. اما PCD یک مثلث کروی نیست، زیرا کمان CD بخشی از یک دایرهٔ عظیمه نیست. بنابراین فرمولهایی که برای مثلثهای کروی به دست می‌آیند در شکلهایی مانند PCD کاربردی نخواهند داشت.

۳. طول کمان دایرهٔ صغیره

در شکل ۱، کمان CD از دایرهٔ صغیره را در نظر بگیرید. طول آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$CD = RC \times (C\hat{R}D)$$

همچنین، طول کمان دایرهٔ عظیمهٔ، AB، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$AB = OA \times (A\hat{O}B)$$

اما چون صفحه‌های FCD و EAB موازی‌اند، پس $C\hat{R}D = A\hat{O}B$، زیرا RC و RD به‌ترتیب با OA و OB موازی‌اند. بنابراین داریم

$$CD = \frac{RC}{OA} \times AB$$

اما چون $OA = OC$ (هر دو شعاع کره‌اند)، پس داریم

$$CD = \frac{RC}{OC} \times AB$$

حال RC بر OR عمود است، بنابراین $RC = OC \cos R\hat{C}O$. از موازی بودن RC و OA نتیجه می‌شود که $R\hat{C}O = A\hat{O}C$. از این‌رو داریم

$$CD = AB \cos A\hat{O}C$$

چون زاویهٔ مرکزی AOC مقابل کمان AC از دایرهٔ عظیمه است، بنابراین فرمول بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

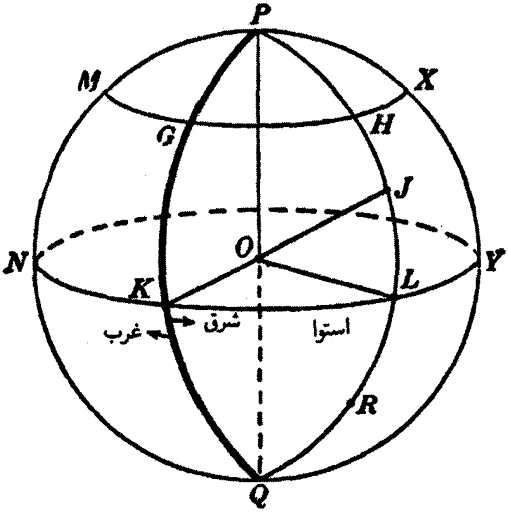
$$CD = AB \cos AC$$

یا، چون $PA = ۹۰°$ است

$$CD = AB \sin PC \qquad (۱)$$

۴. عرض و طول جغرافیایی

در اینجا مفاهیمی که تاکنون معرفی شده‌اند، در رابطه با کرهٔ زمین توضیح داده می‌شوند. در بسیاری از مسائل عملی زمین را می‌توان، مانند شکل ۲، یک جسم کروی دانست که گرد قطر PQ می‌چرخد. P قطب شمال و Q قطب جنوب زمین است. دایرهٔ عظیمه‌ای که صفحهٔ آن بر قطر PQ عمود است استوا نامیده می‌شود. هر نیمدایرهٔ عظیمه‌ای که به نقاط P و Q ختم شود به دایرهٔ نصف‌النهار یا به طور خلاصه نصف‌النهار موسوم است. در این خصوص، نصف‌النهاری که از ابزار بنیادی (دایرهٔ عبور) رصدخانهٔ گرینویچ می‌گذرد، با توافق جهانی، به عنوان نصف‌النهار اصلی یا استاندارد شناخته می‌شود. فرض کنید در شکل ۲، $PGKQ$ که استوا را در نقطهٔ K قطع می‌کند نصف‌النهار اصلی باشد. همچنین فرض کنید $PHLQ$ نصف‌النهار دیگری باشد که استوا را در L قطع می‌کند. زاویهٔ KOL که برابر کمان استوایی KL یا زاویهٔ مرکزی KPL است، طول جغرافیایی نصف‌النهار PHQ نامیده می‌شود. طول جغرافیایی از °۰ تا °۱۸۰ شرق نصف‌النهار گرینویچ و از °۰ تا °۱۸۰ غرب آن، در جهت پیکانهای نشان داده شده نزدیک نقطهٔ



شکل۲

K، اندازه‌گیری می‌شود. بدین ترتیب، مطابق شکل، طول جغرافیایی نصف‌النهار PHQ تقریباً برابر 100° شرق (E) و طول جغرافیایی نصف‌النهار PMQ تقریباً برابر 60° غرب (W) است. همهٔ محلهای واقع بر یک نصف‌النهار دارای یک طول‌اند و نصف‌النهاری که روی آن، محل خاصی قرارگرفته است، نسبت به نصف‌النهار اصلی PGQ مشخص می‌شود. برای اینکه مکان محلی را روی زمین کاملاً مشخص کنیم، لازم است مکان آن را روی نصف‌النهار طول جغرافیایی آن، تعریف کنیم. این کار نسبت به استوا انجام می‌گیرد. محلی مانند J را روی دایرهٔ نصف‌النهار PHQ در نظر می‌گیریم. این نصف‌النهار استوا را در L قطع می‌کند. زاویهٔ LOJ یا کما ن LJ از دایرهٔ عظیمه، عرض جغرافیایی J خوانده می‌شود. اگر J، مانند شکل ۲، بین استوا و قطب شمال P باشد، عرض جغرافیایی آن شمالی (N) است. محلی مانند R که بین استوا و قطب جنوب Q قرار دارد، دارای عرض جغرافیایی جنوبی (S) است. بدین ترتیب مکان هر نقطه روی سطح زمین به کمک دو دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی، یعنی استوا و نصف‌النهار گرینویچ، مشخص می‌شود.

فرض کنیم ϕ، عرض جغرافیایی نقطهٔ J باشد، در این صورت $L\hat{O}J$ یا LJ مساوی ϕ است. از آنجا که OP بر صفحهٔ استوا عمود است، پس $P\hat{O}L = 90^\circ$، و بنابراین $P\hat{O}J = 90^\circ - \phi$ است. زاویهٔ POJ یا کمان کروی PJ، متمم عرض نقطهٔ J نامیده می‌شود. بدین‌ترتیب داریم

$$\text{متمم عرض} = 90^\circ - \text{عرض جغرافیایی}$$

همهٔ محلهایی که دارای یک عرض‌اند روی دایرهٔ صغیره‌ای موازی استوا، موسوم به مدار، قرار دارند. بدین ترتیب همهٔ نقاطی که دارای عرضی برابر عرض جغرافیایی گرینویچ هستند روی دایرهٔ

صغیرهٔ $MGHX$ قرار می‌گیرند. اگر θ عرض جغرافیایی گرینویچ باشد، آن وقت طبق فرمول(۱)، مثلاً طول کمان HX از دایرهٔ صغیره برحسب طول کمان استوایی مربوط، یعنی LY، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$HX = LY\cos\theta \tag{۲}$$

برای اینکه مفهوم این فرمول را دقیقتر کنیم، واحدهایی را که فواصل روی سطح زمین با آنها بیان می‌شوند در نظر می‌گیریم. ساده‌ترین آنها مایل دریایی است و آن بنابه تعریف فاصلهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای بین دو نقطهٔ مقابل یک زاویهٔ مرکزی معادل یک دقیقهٔ قوسی است. این طول معادل ۱۸۵۴٫۲ متر است (از تغییرات اندک در مقدار این واحد، که از عدم کرویت کامل زمین ناشی می‌شود، چشم می‌پوشیم). اگر اختلاف طول جغرافیایی دو محل دلخواه واقع بر یک مدار معلوم، مثلاً LY، باشد آن وقت می‌توان LY را برحسب دقیقهٔ قوسی بیان کرد و تعداد دقیقه‌های قوسی برابر تعداد مایلهای دریایی میان دو نقطهٔ L و Y بر روی استواست. بنابراین، فرمول(۲) محاسبهٔ فاصلهٔ میان H و X روی مدار را برحسب مایل دریایی (یا دقیقهٔ قوسی) امکانپذیر می‌سازد.

۵. فرمول کسینوس

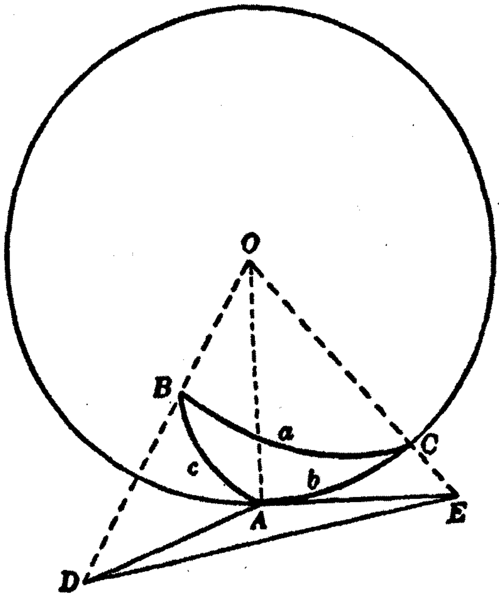
فرض می‌کنیم ABC یک مثلث کروی باشد (شکل۳) . اضلاع BC، CA، و AB را به‌ترتیب با a، b، و c نشان می‌دهیم. بنابراین، طبق تعریف، ضلع a با زاویهٔ مرکزی BOC که مقابل کمان دایرهٔ عظیمهٔ BC است اندازه گرفته می‌شود. همین طور، b و c به‌ترتیب با زاویه‌های AOC و AOB اندازه‌گیری می‌شوند. اگر AD مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ AB در نقطهٔ A و AE مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ AC در همان نقطه باشد، آن وقت شعاع OA بر AD و AE عمود خواهد بود. روشن است که، AD در صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AB قرار دارد؛ ازاین‌رو، اگر شعاع OB امتداد داده شود مماس AD را در نقطهٔ D قطع خواهد کرد. به همین ترتیب، امتداد شعاع OC مماس AE را در نقطهٔ E قطع می‌کند. زاویهٔ کروی BAC بنابه تعریف زاویه‌ای است که بین مماسهای رسم شده در نقطهٔ A، بر دایره‌های عظیمهٔ AB و AC، تشکیل می‌شود پس $B\hat{A}C = D\hat{A}E$ است. زاویهٔ کروی BAC صرفاً با A نشان داده خواهد شد، بنابراین $D\hat{A}E = A$ است.

حال، در مثلث مسطح OAD، زاویهٔ $O\hat{A}D$ برابر ۹۰° است و $A\hat{O}D$ مساوی $A\hat{O}B$ و برابر c است. بنابراین داریم

$$AD = OA\tan c; \qquad OD = OA\sec c \tag{۳}$$

به همین ترتیب، از مثلث مسطح OAE می‌توان نوشت

$$AE = OA\tan b; \qquad OE = OA\sec b \tag{۴}$$



شکل۳

از مثلث مسطح DAE داریم

$$DE^۲ = AD^۲ + AE^۲ - ۲AD \times AE \cos D\hat{A}E$$

یا

$$DE^۲ = OA^۲[\tan^۲ c + \tan^۲ b - ۲ \tan b \tan c \ \cos A] \qquad (۵)$$

از مثلث مسطح DOE می‌توان نوشت

$$DE^۲ = OD^۲ + OE^۲ - ۲OD \times OE \cos D\hat{O}E$$

اما $D\hat{O}E = B\hat{O}C = a$ است؛ بنابراین

$$DE^۲ = OA^۲[\sec^۲ c + \sec^۲ b - ۲ \sec b \sec c \ \cos a] \qquad (۶)$$

بدین‌ترتیب، از رابطه‌های (۵) و (۶) داریم

$$\sec^۲ c + \sec^۲ b - ۲ \sec b \sec c \cos a = \tan^۲ c + \tan^۲ b - ۲ \tan b \tan c \cos A$$

چون، $\sec^{2} c = 1 + \tan^{2} c$ و $\sec^{2} b = 1 + \tan^{2} b$ است پس از ساده کردن، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A \qquad \text{(الف)}$$

این رابطه، فرمول بنیادی مثلثات کروی است و در صفحات بعد از آن تحت عنوان فرمول کسینوس یا فرمول (الف) یاد خواهد شد. بدیهی است که، همراه با فرمول بالا، دو فرمول مشابه دیگر وجود دارند که عبارت‌اند از

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \qquad (۷)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad (۸)$$

همهٔ فرمولهایی که در مثلثات کروی مورد استفاده قرار می‌گیرند از سه فرمول (الف)، (۷)، و (۸) به دست می‌آیند. فرمول بنیادی دو کاربرد عملی مستقیم دارد:

۱. اگر در مثلث کروی ABC دو ضلع، مثلاً b و c، و زاویهٔ بین آنها، یعنی A، معلوم باشند، با استفاده از فرمول (الف) می‌توان ضلع سوم، یعنی a، را محاسبه کرد.

۲. اگر هر سه ضلع معلوم باشند، زاویه‌های مثلث را می‌توان به طور پیاپی از فرمولهای (الف)، (۷)، و (۸) به دست آورد.

مثلاً فرض کنید مقدار زاویهٔ A مورد نظر باشد، آن وقت از فرمول (الف) داریم

$$\cos A = \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} \ c \,[\cos a - \cos b \cos c] \qquad (۹)$$

فرمول (۹) را می‌توان با رابطه‌ای که برای محاسبات لگاریتمی مناسبتر است جایگزین کرد. چون $\cos A = 1 - 2\sin^{2} A/2$ است، از فرمول (الف) داریم

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c (1 - 2 \sin^{2} \frac{A}{2}) \\ &= \cos(b - c) - 2 \sin b \sin c \sin^{2} \frac{A}{2} \end{aligned}$$

یا

$$\cos(b - c) - \cos a = 2 \sin b \sin c \sin^{2} \frac{A}{2}$$

بنابراین

$$2 \sin \frac{a + (b - c)}{2} \sin \frac{a - (b - c)}{2} = 2 \sin b \sin c \sin^{2} \frac{A}{2}$$

اگر s به صورت زیر تعریف شود

$$۲s = a + b + c \tag{۱۰}$$

در این صورت $a - b + c = ۲(s - b)$ و $a + b - c = ۲(s - c)$ است. از این‌رو داریم

$$\sin(s - b)\sin(s - c) = \sin b \sin c \sin^۲ \frac{A}{۲}$$

بنابراین

$$\sin \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b \sin c}} \tag{۱۱}$$

این رابطه در محاسبات عددی مفید است. دو معادلهٔ مشابه نیز وجود دارند که $\sin B/۲$ و $\sin C/۲$ را به دست می‌دهند.

اگر در فرمول (الف) به جای $\cos A$ مقدارش $۲\cos^۲ A/۲ - ۱$ را قرار دهیم و مانند قبل عمل کنیم، خواهیم داشت

$$\cos \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}} \tag{۱۲}$$

دو معادلهٔ مشابه دیگر برای $\cos B/۲$ و $\cos C/۲$ به همین روش به دست می‌آیند.

از تقسیم رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت

$$\tan \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin s \sin(s - a)}} \tag{۱۳}$$

دو معادلهٔ مشابه دیگر نیز برای $\tan B/۲$ و $\tan C/۲$ وجود دارند. با معلوم بودن هر سه ضلع، هر یک از معادله‌های (۱۱) ، (۱۲)، و (۱۳) را می‌توان برای محاسبهٔ زاویهٔ A به کار گرفت.

۶. فرمول سینوس

اکنون فرمولی را که موسوم به فرمول سینوس است به دست می‌آوریم. از فرمول کسینوس، (الف)، داریم

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

با مجذور کردن دو طرف این رابطه خواهیم داشت

$$\sin^۲ b \sin^۲ c \cos^۲ A = \cos^۲ a - ۲\cos a \cos b \cos c + \cos^۲ b \cos^۲ c$$

طرف دست چپ این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sin^{۲} b \sin^{۲} c - \sin^{۲} b \sin^{۲} c \sin^{۲} A$$

یا

$$۱ - \cos^{۲} b - \cos^{۲} c + \cos^{۲} b \cos^{۲} c - \sin^{۲} b \sin^{۲} c \sin^{۲} A$$

از این‌رو

$$\sin^{۲} b \sin^{۲} c \sin^{۲} A = ۱ - \cos^{۲} a - \cos^{۲} b - \cos^{۲} c + ۲ \cos a \cos b \cos c$$

کمیت مثبت X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X^{۲} \sin^{۲} a \sin^{۲} b \sin^{۲} c = ۱ - \cos^{۲} a - \cos^{۲} b - \cos^{۲} c + ۲ \cos a \cos b \cos c$$

بنابراین با توجه به معادلهٔ قبلی خواهیم داشت

$$\frac{\sin^{۲} A}{\sin^{۲} a} = X^{۲}$$

در نتیجه داریم

$$X = \pm \frac{\sin A}{\sin a}$$

اما در یک مثلث کروی هر یک از اضلاع کمتر از ۱۸۰° است و این موضوع در مورد زاویه‌ها نیز صادق است. با توجه به اینکه $\sin \theta$ برای همهٔ مقادیر θ، بین ۰° و ۱۸۰°، مثبت است، پس در معادلهٔ بالا علامت منها غیرقابل قبول است، و داریم

$$X = \frac{\sin A}{\sin a}$$

به روش مشابهی می‌توان از رابطه‌های (۷) و (۸) نتیجه گرفت که

$$X = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

از این‌رو داریم

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \qquad (ب)$$

از این رابطه به عنوان فرمول سینوس یا فرمول (ب) یاد خواهیم کرد.

فرمول (ب) بین دو ضلع دلخواه یک مثلث کروی و زاویه‌های روبه‌روی آنها رابطه‌ای برقرار می‌کند. لیکن برای استفاده از آن در محاسبات عددی به ملاحظات جانبی نیاز است. زیرا، مثلاً اگر دو ضلع a و b و زاویهٔ B در دست باشند، در این صورت طبق فرمول (ب) داریم

$$\sin A=\frac{\sin a\sin B}{\sin b}$$

که از آن می‌توان مقدار $\sin A$ را محاسبه کرد. اما $\sin A = \sin(۱۸۰^\circ - A)$ است و بدون اطلاعات بیشتر نمی‌توان تصمیم گرفت که کدام یک از دو زاویه، A یا $A - ۱۸۰^\circ$، جواب صحیح را نشان می‌دهد. همین ابهام در مثلثات مسطح نیز وجود دارد.

۷. فرمول قیاسی

معادلهٔ (۷) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\sin c\sin a\cos B &= \cos b-\cos c\cos a\\ &=\cos b-\cos c(\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A)\\ &=\sin^{۲} c\cos b-\sin b\sin c\cos c\cos A\end{aligned}$$

از این‌رو، از تقسیم رابطهٔ فوق بر $\sin c$، خواهیم داشت

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A \qquad (ج)$$

که شامل هر سه ضلع و دو زاویه است.

به راحتی می‌توانیم به روش مشابهی ، با استفاده از معادلهٔ (۸)، ثابت کنیم که

$$\sin a\cos C=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A \qquad (۱۴)$$

به طوری که دیدیم، از فرمول کسینوس، (الف)، مقدار $\cos a$ برحسب b، c، و زاویهٔ بین آنها، یعنی A، به‌دست می‌آید. فرمولهای (ج) و (۱۴) تا حدی مانند فرمول (الف) هستند زیرا، این فرمولها حاصلضرب $\sin a$ درکسینوس یکی از دو زاویهٔ B و C، یعنی زاویه‌های مجاور ضلع a، را برحسب b، c، و A به دست می‌دهند. بنابراین، از فرمول (ج) یا (۱۴) به عنوان فرمول قیاسی یاد خواهیم کرد.

فرمول (ج) را می‌توان به روش زیر نیز اثبات کرد. فرض می‌کنیم ضلع c مثلث ABC کمتر از ۹۰° باشد (حالتی که c بین ۹۰° و ۱۸۰° است به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود). کمان BA از دایرهٔ عظیمه را تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم به طوری که BD مساوی ۹۰° شود

(شکل ۴) . بنابراین $AD = ۹۰° - c$ و $C\hat{A}D = ۱۸۰° - A$ است. نقاط C و D را به وسیلهٔ یک کمان دایرهٔ عظیمه به هم وصل می‌کنیم و آن را با x نشان می‌دهیم. از مثلث DAC، با استفاده از فرمول (الف) داریم

$$\cos x = \cos(۹۰° - c)\cos b + \sin(۹۰° - c)\sin b \cos(۱۸۰° - A)$$

یا

$$\cos x = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \qquad (۱۵)$$

در مثلث DBC، با استفاده از فرمول (الف) می‌توان نوشت

$$\cos x = \cos ۹۰° \cos a + \sin ۹۰° \sin a \cos B$$

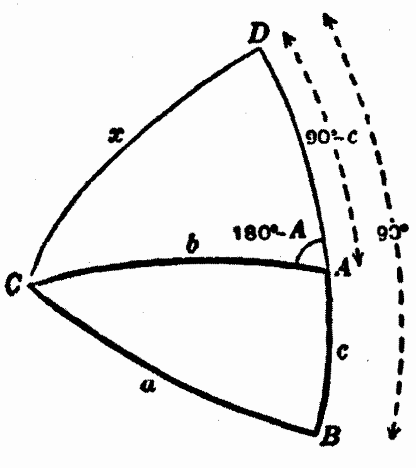
یا

$$\cos x = \sin a \cos B \qquad (۱۶)$$

و بنابراین از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

که همان فرمول (ج) است.



شکل۴

۸. فرمول چهار جزئی

اکنون فرمول مفید دیگری را که به فرمول چهار جزئی موسوم است، به دست می‌آوریم. در مثلث کروی ABC (شکل ۵) چهار جزء پیاپی B، a، C، و b را در نظر می‌گیریم. زاویهٔ C را که بین دو ضلع a و b قرار گرفته است «زاویه میانی» می‌نامیم. ضلع a که بین دو زاویهٔ B و C است «ضلع میانی» می‌نامیم. زاویه‌های B و C را به وسیلهٔ فرمول کسینوس به دست می‌آوریم، بنابراین

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \qquad (۱۷)$$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C \qquad (۱۸)$$

مقدار $\cos c$ را که از رابطهٔ (۱۸) به دست می‌آید در طرف راست رابطهٔ (۱۷) قرار می‌دهیم؛ آن وقت داریم

$$\cos b = \cos a(\cos b \cos a + \sin b \sin a \cos C) + \sin a \sin c \cos B$$

بنابراین به دست می‌آید

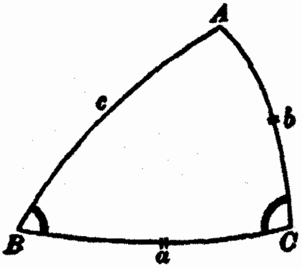
$$\cos b \sin^2 a = \cos a \sin b \sin a \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

پس از تقسیم همهٔ جمله‌ها بر $\sin a \sin b$ خواهیم داشت

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B$$

اما از فرمول سینوس (ب) داریم

$$\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$



شکل ۵

از این‌رو

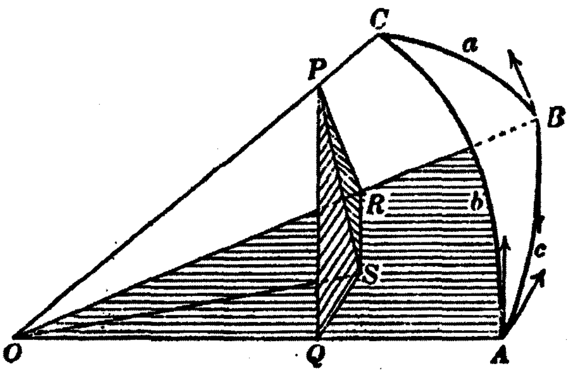
$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B \qquad (د)$$

برای آنکه عبارت بالا را بخوبی به خاطر بسپاریم می‌شود آن را به صورت زیر بیان کرد:

(کتانژانت ضلع دیگر × سینوس ضلع میانی) = کسینوس زاویهٔ میانی × کسینوس ضلع میانی
(کتانژانت زاویهٔ دیگر × سینوس زاویهٔ میانی) −

۹. اثبات فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج) به روشی دیگر

فرمولهای (ب)، (ج)، و (د) از تبدیلات جبری فرمول بنیادی به دست آمده‌اند. اکنون، هر یک از فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج) را به طور خلاصه به روش ساده و آموزندهٔ ترسیم هندسی اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم ABC (شکل ۶) یک مثلث کروی، و نقطهٔ O مرکز کره باشد. نقطهٔ O را به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم و نقطهٔ دلخواهی مانند P را بر روی OC برمی‌گزینیم. از نقطهٔ P خطوط PQ و PR را به‌ترتیب عمود بر OA و OB رسم می‌کنیم. در صفحهٔ OAB، QS و RS که به ترتیب عمود بر OA و OB رسم شده‌اند یکدیگر را در نقطه S قطع می‌کنند. PS و OS را به هم وصل می‌کنیم. اگر در نقطهٔ A دو مماس بر کمانهای دایره عظیمهٔ AB و AC رسم کنیم، این مماسها، طبق تعریف، زاویهٔ کروی A را در برمی‌گیرند. همانطور که از روی شکل دیده می‌شود، QS و QP با این مماسها موازی‌اند، از این‌رو $P\hat{Q}S = A$ است. به همین ترتیب $P\hat{R}S = B$ است. همچنین $C\hat{O}B = a$، $C\hat{O}A = b$، و $A\hat{O}B = c$ است. نخست باید ثابت کنیم که PS بر صفحهٔ AOB عمود است. از روی شکل پیداست که، OQ بر هر دو خط



شکل ۶

PQ و QS عمود است؛ از این‌رو OQ بر صفحهٔ PQS عمود است، بنابراین OQ بر خط PS در این صفحه عمود است. به همین ترتیب، OR بر PS عمود است. در نتیجه PS بر هر دو خط OQ و OR عمود است و بنابراین بر هر خطی در صفحهٔ گذرنده بر OQ و OR عمود خواهد بود. به گفتهٔ دیگر PS بر صفحهٔ OAB و، بویژه بر خطوط OS، SQ، و SR عمود است. بدین ترتیب PQS و PRS مثلثهای قائم‌الزاویه‌اند.

۱. از مثلثهای قائم‌الزاویه OQP و ORP داریم

$$PQ = OP\sin b\,; \qquad PR = OP\sin a \tag{۱۹}$$

$$OQ = OP\cos b\,; \qquad OR = OP\cos a \tag{۲۰}$$

اگر زاویهٔ SOQ را به x نشان دهیم، خواهیم داشت: $R\hat{O}S = c - x$. حال داریم

$$OS = OQ\sec x \quad \text{و} \quad OS = OR\sec(c-x)$$

از این‌رو

$$OR\cos x = OQ\cos(c-x)$$

بنابراین از رابطهٔ (۲۰) خواهیم داشت

$$OP\cos a\cos x = OP\cos b\cos(c-x)$$

در نتیجه

$$\cos a = \cos b\cos c + \cos b\sin c\tan x$$

اما داریم

$$\tan x = \frac{QS}{OQ} = \frac{PQ\cos A}{OQ} = \tan b\cos A$$

و از این‌رو

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

که همان فرمول (الف) است.

۲. دوباره از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PQS و PRS داریم

$$PS = PQ\sin PQS = PQ\sin A$$

و

$$PS = PR\sin PRS = PR\sin B$$

از این‌رو

$$PQ \sin A = PR \sin B$$

و بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۱۹) خواهیم داشت

$$OP \sin b \sin A = OP \sin a \ \sin B$$

که از آن، فرمول (ب) نتیجه می‌شود.

۳. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OSQ و OSR داریم

$$QS = OS \sin x \text{ و } RS = OS \sin(c - x)$$

بنابراین

$$RS \sin x = QS(\sin c \cos x - \cos c \sin x)$$

یا

$$RS = QS(\sin c \cot x - \cos \mathrm{c})$$

اما

$$RS = PR \cos B = OP \sin a \cos B$$

و

$$QS = PQ \cos A = OP \sin b \cos A$$

و

$$QS \cot x = OQ = OP \cos b$$

از این‌رو

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

که همان فرمول (ج) است.

۱۰. مثلثهای قائم‌الزاویه و ربع دایره‌ای

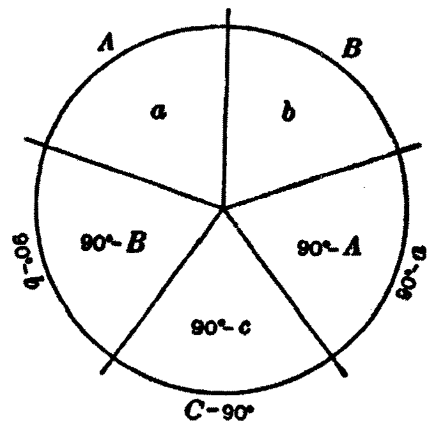
وقتی که یکی از زاویه‌های کروی ۹۰° باشد، فرمولهای (الف)، (ب)، (ج)، و (د) شکل ساده‌تری به خود می‌گیرند. این موضوع در حالتی که یکی از اضلاع مثلث کروی مساوی ۹۰° باشد (در این صورت مثلث را ربع دایره‌ای می‌نامند) نیز صادق است. نپر قواعدی ارائه کرده است که طبق آنها چندین فرمول ساده می‌توان نوشت. ولی این قواعد باری اضافی بر حافظه خواهند بود و بهتر است که برای مثلث قائم‌الزاویه یا مثلث ربع دایره‌ای مورد نظر یکی از فرمولهای اصلی (الف) تا (د) را به کار برد. این قواعد به ترتیب زیرند:

۱. برای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن $C = ۹۰°$ است، در داخل دایره پنج «بخش دایره‌ای» a، b، $۹۰° - A$، $۹۰° - c$، و $۹۰° - B$ را مانند شکل ۷ ترتیب می‌دهیم. هر بخش دلخواهی که به عنوان بخش «میانی» انتخاب شود، دو بخش مجاور آن «مجاورها» و دو بخش دیگر «مقابلها» نامیده می‌شوند. آن وقت قواعد یاد شدهٔ مذکور عبارت خواهند بود از

حاصلضرب تانژانتهای مجاورها = سینوس (میانی)

حاصلضرب کسینوسهای مقابلها = سینوس (میانی)

۲. برای مثلث ربع دایره‌ای که در آن $c = ۹۰°$ است، در خارج دایره پنج «بخش دایره‌ای» A، B، $a - ۹۰°$، $۹۰° - C$، و $b - ۹۰°$ را مانند شکل ۷ ترتیب می‌دهیم. در این صورت دو قاعدهٔ فوق برای این نوع مثلث نیز صادق‌اند.



شکل ۷

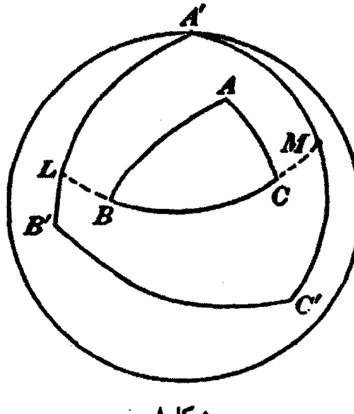
۱۱. فرمولهای قطبی

برخی فرمولهای مفید از مثلث قطبی که به شیوهٔ زیر رسم می‌شود (شکل ۸)، به دست می‌آیند. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث کروی باشد. دایرهٔ عظیمه‌ای که BC کمانی از آن است کره را به دو نیمکره تقسیم می‌کند و دارای دو قطب است که هر یک در یکی از این نیمکره‌هاست. فرض می‌کنیم A' قطبی باشد که در نیمکره‌ای واقع است که A در آن است. به همین ترتیب فرض می‌کنیم، B' و C' قطبهای CA و AB با شند. کمان BC را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا $A'B'$ و $A'C'$ را به ترتیب در نقاط L و M قطع کند. پس، چون A' قطب دایرهٔ عظیمهٔ $LBCM$ است، زاویهٔ کروی $B'A'C'$ (به طور ساده A') برابر کمان LM است. همچنین، B' قطب کمان AC است، یعنی، فاصلهٔ زاویه‌ای B' از هر نقطه‌ای از AC برابر ۹۰° است؛ همین‌طور فاصلهٔ زاویه‌ای A' از هر نقطه‌ای از BC مساوی ۹۰° است. از این رو فاصله‌های زاویه‌ای C از نقطهٔ B' و از نقطهٔ A' هر یک ۹۰° است، به عبارت دیگر، C قطب کمان $A'B'$ است. از این رو $CL = ۹۰^\circ$ است و همین طور $BM = ۹۰^\circ$ است. حال داریم: $LM = LB + BM = LB + ۹۰^\circ$ و همچنین $BC = a$؛ بنابراین و $LB = ۹۰^\circ - a$ و از این‌رو $A' = ۱۸۰^\circ - a$ است. به همین ترتیب $B' = ۱۸۰^\circ - b$ و $C' = ۱۸۰^\circ - c$ است. به همین روش رابطه‌های زیر را به دست می‌آوریم

$$a' = ۱۸۰^\circ - A\,; \quad b' = ۱۸۰^\circ - B\,;\ c' = ۱۸۰^\circ - C$$

اکنون، فرمول (الف) را در مورد مثلث $A'B'C'$ به کار می‌بریم. و به عنوان مثال، داریم

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$



شکل۸

با استفاده از رابطه‌هایی که در بالا پیدا کردیم، از این معادله نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

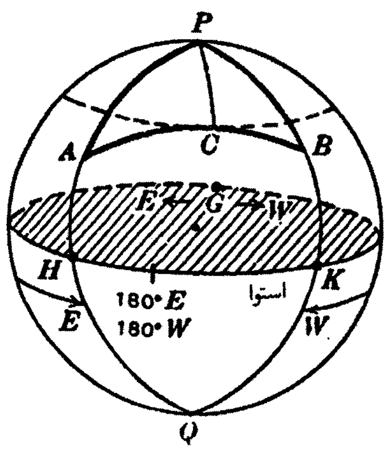
$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

که فرمولی است دربارهٔ مثلث ABC، و مقدار زاویهٔ A را برحسب دو زاویهٔ دیگر و ضلع بین آنها به دست می‌دهد. در این مرحله می‌توانیم این روش را به هر یک از فرمولهای اصلی (الف) تا (د) که قبلاً به دست آورده‌ایم گسترش دهیم، کافی است در این فرمولها به جای A، B، و غیره، مقادیرشان $a - ۱۸۰^\circ$، $b - ۱۸۰^\circ$، و ... را قرار دهیم.

۱۲. مثال عددی

برای نشان دادن حل عددی یک مثلث کروی، مسئلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که در شکل ۹، A و B دو محل را در نیمکرهٔ شمالی زمین نشان دهند؛ عرض جغرافیایی این دو محل به ترتیب ۲۴°۱۸′N و ۳۶°۴۷′N و طول جغرافیایی آنها به ترتیب ۱۳۳°۳۹′E و ۱۲۵°۲۴′W است؛ مطلوب است (الف) طول کمان دایرهٔ عظیمهٔ AB، (ب) زاویهٔ PAB، که در آن P قطب شمال است، و (ج) شمالی‌ترین نقطهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AB.

دایرهٔ عظیمهٔ $PAHQ$ نصف‌النهاری است که از A می‌گذرد و استوا را از H قطع می‌کند. HA عرض جغرافیایی A را نشان می‌دهد، یعنی، $HA = ۲۴^\circ ۱۸'$ است. PA متمم عرض A است؛ بنابراین $PA = ۹۰^\circ - ۲۴۱۸' = ۶۵^\circ ۴۲'$ است. به همین ترتیب $PB = ۵۳^\circ ۱۳'$ است. اگر نصف‌النهار گرینویچ، استوا را در G قطع کند، در این صورت، با دنبال کردن پیکانها



شکل۹

خواهیم داشت

$$GH = A_{\text{طول شرقی}} = ۱۳۳°۳۹'$$

و

$$GK = B_{\text{طول غربی}} = ۱۲۵°۲۴'$$

از این‌رو، کمان HGK برابر $۲۵۹°۳'$ است و بنابراین HK (کمان کوتاهتر در دایرهٔ عظیمه‌ای که H و K عبور می‌کند) برابر $۱۰۰°۵۷'$ است؛ یعنی $A\hat{P}B = ۱۰۰°۵۷'$. حال در مثلث PB دو ضلع PA و PB و زاویهٔ بین آنها، یعنی APB، داده شده‌اند.

الف) محاسبهٔ AB. از فرمول (الف)، داریم

$$\cos AB = \cos PA \cos PB + \sin PA \sin PB \cos APB$$

با قرار دادن داده‌ها در این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\cos AB &= \cos ۶۵°۴۲' \cos ۵۳°۱۳' - \sin ۶۵°۴۲' \sin ۵۳°۱۳' \cos ۷۹°۳' \\ &\equiv \qquad\qquad M \qquad\qquad - N\end{aligned}$$

در اینجا لگاریتمها را با پنج رقم اعشار بیان می‌کنیم

$$\begin{array}{llll}
\log\cos ۶۵°۴۲'ر۰ & \bar{۱}ر۶۱۴۳۸ & \log\sin ۶۵°۴۲'ر۰ & \bar{۱}ر۹۵۹۷۱ \\
\log\cos ۵۳°۱۳'ر۰ & \bar{۱}ر۷۷۷۲۸ & \log\sin ۵۳°۱۳'ر۰ & \bar{۱}ر۹۰۳۵۸ \\
\hline
 & & \log\cos ۷۹°۳'ر۰ & \bar{۱}ر۲۷۸۶۴ \\
\log M = & \bar{۱}ر۳۹۱۶۶ & & \\
\hline
 & & \log N = & \bar{۱}ر۱۴۱۹۳
\end{array}$$

بنابراین $N = ۰ر۱۳۸۶۵$ و $M = ۰ر۲۴۶۴۱$ است. از این رو

$$\cos AB \equiv M - N = ۰ر۱۰۷۷۶$$

بنابراین

$$AB \equiv ۸۳°۴۸'ر۸ = ۵۰۲۸'ر۸$$

بدین ترتیب فاصلهٔ دایرهٔ عظیمهٔ بین A و B برابر $۸۳°۴۸'ر۸$ یا برابر ۵۰۲۸ر۸ مایل دریایی است. با تقریب یک دقیقهٔ قوسی، $AB = ۸۳°۴۹'$ است.

ب) محاسبهٔ PAB. از فرمول (الف) داریم

$$\cos PB = \cos AB \cos PA + \sin AB \sin PA \cos PAB$$

در این معادله، هر سه ضلع PB، AB، و PA معلوم‌اند، بنابراین می‌توانیم مقدار $P\hat{A}B$ را به دست آوریم. در این مرحله ملاحظات سادهٔ هندسی نشان می‌دهند که $P\hat{A}B$ کوچکتر از ۹۰° است و در نتیجه فرمول سینوس، (ب)، را می‌شود بدون هیچگونه ابهامی به کار برد. فرمول مناسب عبارت است از

$$\sin PAB = \frac{\sin APB \sin PB}{\sin AB}$$

که در آن همهٔ کمیتهای طرف راست معادله اکنون معلوم‌اند. با این حال برای روشن ساختن روش، مقدار $P\hat{A}B$ را از فرمول (۱۱) محاسبه می‌کنیم. اگر AB را با p، PB را با a، و PA را با b نشان دهیم، خواهیم داشت

$$۲s = p + a + b = ۸۳^\circ۴۹' + ۵۳^\circ۱۳' + ۶۵^\circ۴۲' = ۲۰۲^\circ۴۴'$$

از این‌رو

$$s = ۱۰۱^\circ۲۲' \; ; \; s - p = ۱۷^\circ۳۳' \; ; \; s - b = ۳۵^\circ۴۰'$$

در این حال، فرمول (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sin \frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-p)}{\sin b \sin p}}$$

$$\log\sin(s-b) \equiv \log\sin\ ۳۵^\circ۴۰' \qquad \bar{۱}{,}۷۶۵۷۲$$

$$\log\sin(s-p) \equiv \log\sin\ ۱۷^\circ۳۳' \qquad \bar{۱}{,}۴۷۹۳۴$$

$$\log \operatorname{cosec} b \equiv \log\operatorname{cosec} ۶۵^\circ۴۲' \qquad ۰{,}۰۴۰۲۹$$

$$\log \operatorname{cosec} p \equiv \log\operatorname{cosec} ۸۳^\circ۴۹' \qquad ۰{,}۰۰۲۵۳$$

$$\log\sin^۲ \frac{A}{۲} = \bar{۱}{,}۲۸۷۸۸$$

$$\log\sin \frac{A}{۲} = \bar{۱}{,}۶۴۳۹۴$$

$$\frac{A}{۲} = ۲۶^\circ۸'$$

بنابراین $A = ۵۲^\circ۱۶'$

ج) محاسبهٔ شمالی‌ترین عرضی که دایرهٔ عظیمهٔ AB به آن می‌رسد. فرض می‌کنیم C شمالی‌ترین نقطهٔ AB باشد (شکل ۹). در این صورت روشن است که مداری که از C می‌گذرد در این نقطه بر دایرهٔ عظیمه مماس است و نیز نصف‌النهار PC در همان نقطه بر دایرهٔ عظیمهٔ AB

عمود در C است. بدین ترتیب، هر یک از زاویه‌های $P\hat{C}A$ و $P\hat{C}B$ برابر ۹۰° است. اکنون در مثلث PAC، مقادیر PA، $P\hat{A}C$، و $P\hat{C}A$ معلوم‌اند و می‌خواهیم مقدار PC را محاسبه کنیم. واضح است که می‌توانیم فرمول (ب) را که به صورت زیر است، به کار بریم

$$\frac{\sin PC}{\sin PAC} = \frac{\sin PA}{\sin PCA}$$

و چون $P\hat{C}A = ۹۰^\circ$ است، داریم

$$\sin PC = \sin PA \sin PAC$$

$$\log\sin\ PA \equiv \log\sin ۶۵^\circ ۴۲' \qquad \bar{۱}{,}۹۵۹۷۱$$

$$\log\sin PAC \equiv \log\sin ۵۲^\circ ۱۶' \qquad \bar{۱}{,}۸۹۸۱۰$$

$$\log\sin PC = \bar{۱}{,}۸۵۷۸۱$$

بنابراین $PC = ۴۶^\circ ۷'$ است. بدین ترتیب عرض جغرافیایی نقطهٔ C برابر $۴۳^\circ ۵۳'$ است. محاسبهٔ طول جغرافیایی نقطهٔ C به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۱۳. فرمول هاورسینوس

بسیاری از محاسبات با به کار بردن «هاورسینوس» به طور محسوسی کوتاهتر می‌شوند. هاورسینوس زاویهٔ θ (که به صورت $\operatorname{hav}\theta$ نوشته می‌شود) به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{hav}\theta = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos\theta) = \sin^۲\frac{\theta}{۲} \qquad (۲۱)$$

چون $\cos\theta = ۱ - ۲\sin^۲\theta/۲$ است، داریم

$$\cos\theta = ۱ - ۲\operatorname{hav}\theta \qquad (۲۲)$$

اکنون می‌توانیم فرمول (الف) را که به صورت زیر است به شکل دیگری بنویسیم

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

مطابق فرمول (۲۲) به جای $\cos a$, $(۱ - ۲\operatorname{hav} a)$ و به جای $\cos A$، $(۱ - ۲\operatorname{hav} A)$ را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم

$$۱ - ۲\operatorname{hav} a = \cos(b - c) - ۲\sin b\sin c\ \operatorname{hav} A$$

$\cos(b-c)$ را به جای $1 - 2\,\mathrm{hav}(b-c)$ می‌نویسیم، بنابراین خواهیم داشت

$$\mathrm{hav}\ a = \mathrm{hav}(b-c) + \sin b \sin c\ \mathrm{hav}\,A \qquad (۲۳)$$

که شکل دیگری از فرمول بنیادی است که برحسب هاورسینوس بیان شده است.

طبق تعریف $\mathrm{hav}\,\theta$ در رابطهٔ (۲۱)، همیشه مثبت است و $\mathrm{hav}(-\theta) = \mathrm{hav}\,\theta$ است.

هاورسینوس و لگاریتم هاورسینوس زاویه‌های از °۰ تا °۱۸۰ در برخی مجموعه جدولهای ریاضی یافت می‌شوند که از آن جمله می‌توان از جدولهای دریایی اینمان[1] نام برد. این منبع علاوه بر جدولهای معمولی لگاریتمی و مثلثاتی (تا پنج رقم اعشار)، شامل چندین جدول ارزشمند اخترشناسی دیگر نیز هست.

اکنون برای نشان دادن سهولت این روش، ضلع AB را، در شکل ۹، با استفاده از هاورسینوسها محاسبه می‌کنیم. رابطهٔ (۲۳) را در مورد مثلث PAB به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\mathrm{hav}\,AB &= \mathrm{hav}(PA-PB) + \sin PA \sin PB\, \mathrm{hav}\,APB \\
&\equiv \mathrm{hav}(PA-PB) + X
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lr}
\log \mathrm{hav}\ APB \equiv \log \mathrm{hav}\ ۱۰۰^\circ ۵۷' & \bar{۱}/۷۷۴۵۰ \\
\log \sin PA \equiv \log \sin ۶۵^\circ\ ۴۲' & \bar{۱}/۹۵۹۷۱ \\
\log \sin PB \equiv \log \sin ۵۳^\circ\ ۱۳' & \underline{\bar{۱}/۹۰۳۵۸} \\
\log X = & \bar{۱}/۶۳۷۷۹ \\
X = & ۰/۴۳۴۳۰ \\
\mathrm{hav}(PA-PB) \equiv \mathrm{hav}\ ۱۲^\circ ۲۹' = & \underline{۰/۰۱۱۸۲} \\
\mathrm{hav}\,AB = & ۰/۴۴۶۱۲ \\
AB = & ۸۳^\circ ۴۹'
\end{array}$$

که، با نتیجهٔ به دست آمده در صفحهٔ ۲۴ سازگاری دارد.

۱۴. یک روش دیگر

وقتی در مثلثی دو ضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم باشد و بخواهیم ضلع سوم و یکی از زاویه‌های باقیمانده را بیابیم، گاهی روش زیر را به کار می‌بریم. برای توضیح این روش، ضلع AB و زاویهٔ $P\hat{A}B$ (شکل ۹) را پیدا می‌کنیم. AB را به p، PB را با a، PA را با b، و $A\hat{P}B$ را با P نشان می‌دهیم. آن وقت داریم $a = ۵۳^\circ ۱۳'$، $b = ۶۵^\circ ۴۲'$، و $P = ۱۰۰^\circ ۵۷'$.

1. J.D.Potter, *Inman's Nautical Tables*, 156 Minories, London,E.1.

با استفاده از فرمولهای (الف)، (ج)، و (ب) داریم

$$\cos p = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos P \qquad (۲۴)$$

$$\sin p \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos P \qquad (۲۵)$$

$$\sin p \sin A = \sin a \sin P \qquad (۲۶)$$

کمیتهای d (مثبت) و D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\cos a = d \cos D \qquad (۲۷)$$

$$\sin a \cos P = d \sin D \qquad (۲۸)$$

بدین ترتیب می‌توانیم رابطه‌های (۲۴) تا (۲۶) را به صورتهای زیر بنویسیم

$$\cos p = d \cos(b - D) \qquad (۲۹)$$

$$\sin p \cos A = d \sin(b - D) \qquad (۳۰)$$

$$\sin p \sin A = \sin a \sin P \qquad (۳۱)$$

الف) از تقسیم رابطه‌های (۲۷) و (۲۸)، داریم

$$\tan D = \tan a \cos P \qquad (۳۲)$$

که از آن می‌توان مقدار D را محاسبه کرد.

ب) از رابطه‌های (۳۰) و (۳۱)، می‌توان نوشت

$$\tan A = \frac{\sin a \sin P}{d \sin(b - D)}$$

که با قرار دادن مقدار d از رابطهٔ (۲۸)، به صورت زیر درمی‌آید

$$\tan A = \tan P \sin D \operatorname{cosec}(b - D) \qquad (۳۳)$$

که از آن، مقدار A محاسبه می‌شود.

ج) از رابطه‌های (۲۹) و (۳۰)، داریم

$$\tan p = \tan(b - D) \sec A \qquad (۳۴)$$

که از آن می‌توان مقدار p را محاسبه کرد.

محاسبات:

الف)

$$\begin{array}{lr} \log\tan a \equiv \log\tan ۵۳^\circ ۱۳' & ۰٫۱۲۶۳۱ \\ \log\cos P \equiv \log\cos ۱۰۰^\circ ۵۷' & \underline{\bar{۱}٫۲۷۸۶۴n} \\ \log\tan D = & \bar{۱}٫۴۰۴۹۵n \end{array}$$

$\cos P$ منفی است و برای یادآوری حرف n را در کنار لگاریتم آن می‌نویسیم. پس $\tan D$ منفی است. در فرمولهای (۲۷) و (۲۸) فرض کرده‌ایم که d کمیتی مثبت است. بنابراین با توجه به مقادیر معلوم a و P، نتیجه می‌گیریم که $\cos D$ مثبت و $\sin D$ منفی است؛ پس D در ربع چهارم است و از مقدار $\log\tan D$ که قبلاً پیدا کردیم، خواهیم داشت

$$D = ۳۶۰^\circ - ۱۴^\circ ۱۵'٫۶ = ۳۴۵^\circ ۴۴'٫۴$$

از این‌رو

$$b - D \equiv ۶۵^\circ ۴۲' - ۳۴۵^\circ ۴۴'٫۴ = -۲۸۰^\circ ۰۲'٫۴ = ۷۹^\circ ۵۷'٫۶$$

ب)

$$\begin{array}{lr} \log\tan P \equiv \log\tan ۱۰۰^\circ ۵۷' & ۰٫۷۱۳۳۸n \\ \log\sin D \equiv \log\sin ۳۴۵^\circ ۴۴'٫۴ & \bar{۱}٫۳۹۱۵۱n \\ \log \operatorname{cosec}(b-D) \equiv \log\operatorname{cosec} ۷۹^\circ ۵۷'٫۶ & \underline{۰٫۰۰۶۷۰} \\ \log\tan A = & ۰٫۱۱۱۵۹ \end{array}$$

و، چون A کمتر از ۱۸۰° است، داریم

$$P\hat{A}B \equiv A = ۵۲^\circ ۱۶'٫۹$$

ج)

$$\begin{array}{lr} \log\tan(b-D) \equiv \log\tan ۷۹^\circ ۵۷'٫۶ & ۰٫۷۵۱۹۲ \\ \log\sec A \equiv \log\sec ۵۲^\circ ۱۶'٫۹ & \underline{۰٫۲۱۲۴۰} \\ \log\tan p = & ۰٫۹۶۵۳۲ \end{array}$$

$$AB \equiv p = ۸۳^\circ ۴۹'$$

که با محاسبات قبلی AB سازگاری دارد.

۱۵. نسبتهای مثلثاتی برای زاویه‌های‌کوچک

اگر θ زاویهٔ کوچکی باشد و برحسب مقیاس دایره‌ای بیان شود، فرمولهای تقریبی شناخته شدهٔ زیر به دست می‌آیند

$$\sin\theta = \theta\text{rad};\ \cos\theta = ۱;\ \tan\theta = \theta\text{rad} \qquad (۳۵)$$

حال می‌دانیم که

$$\begin{aligned} ۱\text{rad} &= ۵۷^\circ ۱۷' ۴۵'' \\ &= ۳۴۳۷\tfrac{۳'}{۴} \\ &= ۲۰۶۲۶۵'' \end{aligned}$$

به‌طوری که

$$۱'' = \frac{۱}{۲۰۶۲۶۵}\text{rad}$$

و به طور تقریب

$$۱' = \frac{۱}{۳۴۳۸}\text{rad}$$

از این‌رو، موقعی که θ به‌ترتیب برابر $۱''$ و $۱'$ است، با استفاده از فرمول نخست، (۳۵)، داریم

$$\sin ۱'' = \frac{۱}{۲۰۶۲۶۵} \qquad (۳۶)$$

و

$$\sin ۱' = \frac{۱}{۳۴۳۸} \qquad (۳۷)$$

اگر θ'' تعداد ثانیه‌های قوسی در θ رادیان را نشان دهد، آن وقت $\theta = \theta''/۲۰۶۲۶۵$ است و در نتیجه

$$\sin\theta = \frac{\theta''}{۲۰۶۲۶۵}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\sin\theta'' = \theta'' \sin ۱'' \qquad (۳۸)$$

به همین ترتیب داریم

$$\sin\theta' = \theta' \sin ۱' \qquad (۳۹)$$

که در آن θ' برحسب دقیقهٔ قوسی بیان می‌شود.
به روشی مشابه، می‌توان نوشت

$$\tan\theta'' = \theta'' \sin ۱''$$

در نجوم کروی، برخی زاویه‌ها طبق رابطه‌های زیر، اغلب برحسب ساعت، دقیقه، و ثانیهٔ زمانی بیان می‌شوند

$$۲۴^{\mathrm{h}} = ۳۶۰^\circ;\ ۱^{\mathrm{h}} = ۱۵^\circ;\ ۱^{\mathrm{m}} = ۱۵';\ ۱^{\mathrm{s}} = ۱۵'' \qquad (۴۰)$$

بدین ترتیب، فرمولهای تقریبی زیر را به دست می‌آوریم

$$\sin ۱^{\mathrm{m}} = \sin ۱۵' = ۱۵ \sin ۱' \qquad (۴۱)$$

$$\sin ۱^{\mathrm{s}} = \sin ۱۵'' = ۱۵ \sin ۱'' \qquad (۴۲)$$

اگر H زاویهٔ کوچکی باشد و در مقیاس دقیقهٔ زمانی با H^{m} نشان داده شود، آن وقت خواهیم داشت

$$\sin H = H^{\mathrm{m}} \sin ۱^{\mathrm{m}} = ۱۵H^{\mathrm{m}} \sin ۱' \qquad (۴۳)$$

به همین ترتیب، اگر H برحسب ثانیهٔ زمانی بیان شود، داریم

$$\sin H = H^{\mathrm{s}} \sin ۱^{\mathrm{s}} = ۱۵H^{\mathrm{s}} \sin ۱'' \qquad (۴۴)$$

این نتایج در فصلهای آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

۱۶. قیاسهای دالامبر و نپر

فرمولهایی را که دالامبر به دست آورده است و قیاسهای دالامبر نامیده می‌شوند به صورت زیرند

$$\sin\frac{۱}{۲}C \sin\frac{۱}{۲}(A-B) = \cos\frac{۱}{۲}C \sin\frac{۱}{۲}(a-b) \qquad (۴۵)$$

$$\sin\frac{۱}{۲}c \cos\frac{۱}{۲}(A-B) = \sin\frac{۱}{۲}C \sin\frac{۱}{۲}(a+b) \qquad (۴۶)$$

$$\cos\frac{۱}{۲}c \sin\frac{۱}{۲}(A+B) = \cos\frac{۱}{۲}C \cos\frac{۱}{۲}(a-b) \qquad (۴۷)$$

$$\cos\frac{۱}{۲}c \cos\frac{۱}{۲}(A+B) = \sin\frac{۱}{۲}C \cos\frac{۱}{۲}(a+b) \qquad (۴۸)$$

این فرمولها به سهولت از فرمولهای اصلی که در صفحات پیش مورد بحث قرارگرفته‌اند، به دست می‌آیند.

اگر این معادلات را دوبه‌دو در نظر بگیریم، قیاسهای نپر حاصل می‌شوند

$$\tan\frac{۱}{۲}(a+b)=\frac{\cos\frac{۱}{۲}(A-B)}{\cos\frac{۱}{۲}(A+B)}\tan\frac{۱}{۲}c \qquad (۴۹)$$

$$\tan\frac{۱}{۲}(a-b)=\frac{\sin\frac{۱}{۲}(A-B)}{\sin\frac{۱}{۲}(A+B)}\tan\frac{۱}{۲}c \qquad (۵۰)$$

$$\tan\frac{۱}{۲}(A+B)=\frac{\cos\frac{۱}{۲}(a-b)}{\cos\frac{۱}{۲}(a+b)}\cot\frac{۱}{۲}C \qquad (۵۱)$$

$$\tan\frac{۱}{۲}(A-B)=\frac{\sin\frac{۱}{۲}(a-b)}{\sin\frac{۱}{۲}(a+b)}\cot\frac{۱}{۲}C \qquad (۵۲)$$

تمرینها

۱. در مثلث کروی ABC، $C=۹۰°$، $a=۱۱۹°۴۶'۳۶''$، و $B=۵۲°۲۵'۳۸''$ است. مقادیر b، c، و A را محاسبه کنید.

[جواب : ۴۸°۲۶'۴۹"، ۱۰۹°۱۴'۰"، و ۱۱۳°۱۰'۴۶"]

۲. در مثلث کروی ABC، $a=۵۷°۲۲'۱۱''$، $b=۷۲°۱۲'۱۹''$، و $C=۹۴°۱'۴۹''$ است. مقادیر c، A، و B را محاسبه کنید.

[جواب: ۸۳°۴۶'۳۲"، ۵۷°۴۰'۴۵"، و ۷۲°۴۹'۵۰"]

۳. در مثلث کروی ABC، $c=۹۰°$، $B=۶۲°۲۰'۴۳''$، و $a=۱۳۶°۱۹'۰''$ است. مقادیر A، C، و b را محاسبه کنید.

[جواب: ۱۳۹°۴۶'۱۳"، ۶۹°۱۴'۴۵" و ۷۱°۱۸'۹"]

۴. دو کشتی X و Y به‌ترتیب روی مدارهای ۴۸°N و ۱۵°S در حرکت‌اند، به طوری که در هر لحظه هر دو کشتی روی یک دایرهٔ نصف‌النهار قرار دارند. اگر سرعت X برابر ۱۵ گره دریایی[۱] باشد، سرعت Y را پیدا کنید.

۵. دو محل A و B روی زمین دارای یک عرض جغرافیایی ϕ هستند؛ اختلاف طول جغرافیایی آنها برابر $۲l$ است. ثابت کنید که (الف) عرض جغرافیایی بالاترین نقطهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AB برابر $\tan^{-۱}(\tan\phi\sec l)$ است، و (ب) فاصلهٔ مداری بین A و B از فاصلهٔ دایرهٔ عظیمهٔ AB به

۱. گره دریایی واحد سرعت متداول در دریاست و برابر یک مایل دریایی بر ساعت است.

مقدار زیر بیشتر است

$$\text{مایل دریایی} \qquad ۲ \operatorname{cosec} ۱'[l\cos\phi - \sin^{-۱}(\sin l \cos\phi)]$$

۶. عرض جغرافیایی جنوبی‌ترین نقطهٔ دایره عظیمه‌ای که محل A واقع روی استوا را به محل B با عرض جنوبی ϕ وصل می‌کند برابر $\phi_۱$ است. ثابت کنید که اختلاف طول جغرافیایی بین A و B برابر $۹۰^\circ + \cos^{-۱}(\tan\phi \cot\phi_۱)$ است.

۷. مختصات جغرافیایی دو محل A و B به‌ترتیب عبارت‌اند از عرض $۳۹^\circ۲۰'S$، طول $۱۱۰^\circ۱۰'E$ و عرض $۴۴^\circ۳۰'S$، طول $۴۶^\circ۲۰'W$. نشان دهید که کشتیی که کوتاهترین راه ممکن میان A و B را بدون قطع مدار $۶۲^\circ S$ طی می‌کند، مسافتی برابر ۵۸۴۷٫۶ مایل دریایی را می‌پیماید.

۸. اگر اجزای a، b، c، A، B، و C یک مثلث کروی به‌ترتیب به اندازهٔ da، ... و dC نمو پیدا کنند، نشان دهید در صورتی که

$$K = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

باشد، خواهیم داشت

$$da = \cos C\, db + \cos B\, dc + K \sin b \sin c\, dA$$

$$db = \cos A\, dc + \cos C\, da + K \sin c \sin a\, dB$$

$$dc = \cos B\, da + \cos A\, db + K \sin a \sin b\, dC$$

$$dA = -\cos c\, dB - \cos b\, dC + \frac{۱}{K} \sin B \sin C\, da$$

$$dB = -\cos a\, dC - \cos c\, dA + \frac{۱}{K} \sin C \sin A\, db$$

$$dC = -\cos b\, dA - \cos a\, dB + \frac{۱}{K} \sin A \sin B\, dc$$

۹. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه دو ضلع یک مثلث کروی با هم برابر باشند این است که زاویه‌های روبروی آنها با هم برابر باشند.

در اضلاع و زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نموهای کوچکی داده می‌شوند به طوری که مثلث، متساوی‌الاضلاع باقی می‌ماند. ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\frac{da}{dA} = \cos\frac{A}{۲} \cot\frac{a}{۲}$$

[گلاسکو، ۱۹۶۷]

۲

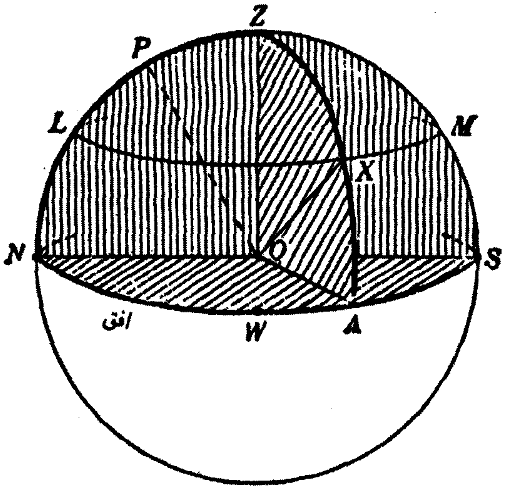
کرهٔ سماوی

۱۷. مقدمه

در فصل ۱ دیدیم که مکان در روی سطح زمین به کمک دو دایرهٔ عظیمهٔ اصلی، نصف‌النهار گرینویچ و خط استوا، به‌طورکامل مشخص می‌شود. قاعدهٔ کلی برای تعیین مکان روی کرهٔ سماوی نیز اساساً همین است و بسته به دایره‌های عظیمهٔ خاصی که به عنوان دایره‌های اصلی انتخاب می‌شوند چندین روش وجود دارد. اکنون به توصیف این روشها می‌پردازیم.

۱۸. ارتفاع و سمت

فرض کنید O که مکان راصد بر روی زمین (کروی) است مرکز کرهٔ سماوی است (شکل ۱۰). همچنین فرض کنید Z (سمت‌الرأس) نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی باشد که به‌طور قائم بالای سر راصد است. جهت این نقطه را می‌توان به کمک خط شاغولی تعریف کرد، بدین ترتیب که OZ ادامهٔ این خط‌راست است که مرکز زمین را به نقطهٔ O وصل می‌کند. صفحه‌ای که از O می‌گذرد و بر OZ عمود است صفحهٔ افق است. این صفحه کرهٔ سماوی را در دایرهٔ عظیمهٔ NAS که افق سماوی یا افق خوانده می‌شود، قطع می‌کند. بدین ترتیب افق، در شکل ۱۰، کرهٔ سماوی را به‌دو نیمکره تقسیم می‌کند که نیمکرهٔ بالایی مرئی است و نیمکرهٔ پایینی به‌وسیلهٔ زمین از دید راصد پنهان می‌شود. فرض کنید در لحظه‌ای معین، X مکان ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی باشد. هر دایرهٔ عظیمه‌ای که از



شکل ۱۰

Z رسم شود دایرهٔ قائم خوانده می‌شود. در شکل دایرهٔ قائمی که از X می‌گذرد ZXA است. در صفحهٔ ZXA، زاویهٔ AOX یا کمان AX از دایرهٔ عظیمه را ارتفاع X می‌نامیم و با a نشان می‌دهیم. چون OZ بر صفحهٔ افق عمود است، یعنی کمان دایرهٔ عظیمهٔ ZA برابر °۹۰ است، داریم $ZX = ۹۰° - a$. کمان ZX فاصلهٔ سمت‌الرأسی (ZD) ستارهٔ X خوانده می‌شود و با z نشان داده می‌شود. پس داریم

$$z = ۹۰° - a \qquad (۱)$$

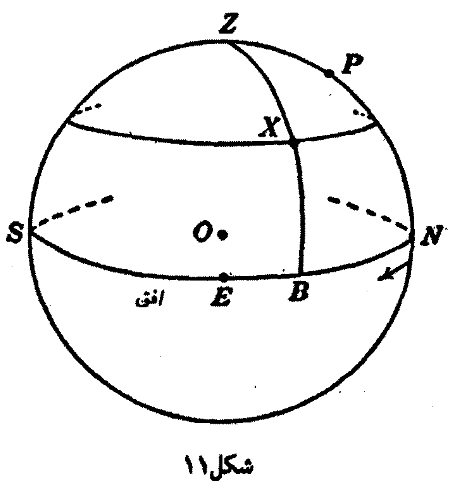
فرض کنید LXM دایرهٔ صغیره‌ای باشد که از X موازی افق می‌گذرد. این دایره موازی ارتفاع خوانده می‌شود و طوری است که همهٔ اجرام آسمانیی که مکان آنها در لحظه‌ای معین روی این دایرهٔ صغیره است یک ارتفاع دارند و نیز، مطابق رابطهٔ (۱)، فاصلهٔ سمت‌الرأسی آنها با فاصلهٔ سمت‌الرأسی X برابر است. بدین ترتیب اگر ارتفاع یا فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره‌ای در دست باشد، می‌توان موازی ارتفاعی را که ستاره باید روی آن قرار گیرد به‌طور قطع مشخص کرد. برای تعیین کامل مکان این ستاره روی کرهٔ سماوی، باید دایره قائم خاصی که ستاره روی آن قرار دارد نیز مشخص شود. این کار به شرح زیر انجام می‌شود.

فرض کنید OP موازی محوری باشد که زمین گرد آن می‌چرخد. اگرعرض جغرافیایی راصد، شمالی باشد (شکل ۱۰) مکان P، قطب شمال سماوی یا تنها قطب شمال نامیده می‌شود. ما چرخش زمین را به‌طور مستقیم حس نمی‌کنیم، بلکه اثر آن در چرخش ظاهری کرهٔ سماوی نمایان می‌شود. بدین ترتیب چنین به‌نظر می‌رسد که ستاره‌ها در آسمان حرکت می‌کنند و ارتفاع و جهت آنها پیوسته در تغییر است. با این حال در نیمکرهٔ شمالی ستاره‌ای هست که با چشم غیر مسلح

مرئی به‌نظر می‌رسد و مکان آن خیلی کم تغییر می‌کند. این ستاره جُدَی یا ستارهٔ قطبی نام دارد و جهت آن در آسمان خیلی نزدیک به جهت OP است. اگر ستاره‌ای درست در نقطهٔ P روی کرهٔ سماوی بود، ارتفاع و جهت آن در طول شب تغییر نمی‌کرد. دایرهٔ قائمی که از نقطهٔ P یعنی از ZPN (که افق را در نقطهٔ N قطع می‌کند) می‌گذرد دایرهٔ قائم اصلی، و نقطهٔ N نقطهٔ شمال افق تعریف می‌شود. نقطهٔ S که روی افق و درست روبه‌روی نقطهٔ N است به نقطهٔ جنوب موسوم است؛ جهت نقطهٔ غرب (W) و نقطهٔ شرق (E) به‌ترتیب بر جهتهای N و S عمودند (نقطهٔ E در شکل ۱۰ نشان داده نشده است).[1] نقطه‌های N، E، S، و W چهار جهت اصلی نامیده می‌شوند.

اکنون مکان ستارهٔ X روی کرهٔ سماوی را در لحظه‌ای معین نسبت به افق و دایرهٔ قائم اصلی ZPN مشخص می‌کنیم. اگر ستاره در بخش غربی کرهٔ سماوی باشد (شکل ۱۰)، زاویهٔ کروی PZX (که به‌وسیلهٔ دایرهٔ قائم اصلی و دایرهٔ قائم گذرنده از X ایجاد می‌شود) یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NA را سمت غربی می‌نامند. اگر ستاره، مانند شکل ۱۱ در بخش شرقی کرهٔ سماوی باشد زاویهٔ PZX یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ NB سمت (شرقی) خوانده می‌شود. بدین ترتیب مکان یک جرم آسمانی را روی کرهٔ سماوی می‌توان در هر لحظه نسبت به افق و نقطهٔ شمال افق، برحسب ارتفاع و سمت (شرقی یا غربی) یا برحسب فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت به‌طور کامل مشخص کرد. وقتی سمت °۹۰ شرقی یا °۹۰ غربی باشد، گفته می‌شود ستاره روی قائم مبدأ است. پس قائم مبدأ دایرهٔ قائمی است که از نقطهٔ شرق (E) یا نقطهٔ غرب (W) می‌گذرد.

چون در شکلهای ۱۰ و ۱۱ زاویهٔ POZ (یا کمان دایرهٔ عظیمهٔ PZ) با زاویه‌ای که شعاع



شکل ۱۱

۱. مکان نقطه‌های W و E نسبت به N و S را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم. اگر راصدی رو به شمال بایستد، نقطهٔ غرب به‌طرف دست چپ و نقطهٔ شرق به‌طرف دست راست اوست.

زمین در مکان راصد و محور زمین باهم می‌سازند معادل است، $P\hat{O}Z$ (یا PZ) با متمم عرض راصد برابر است

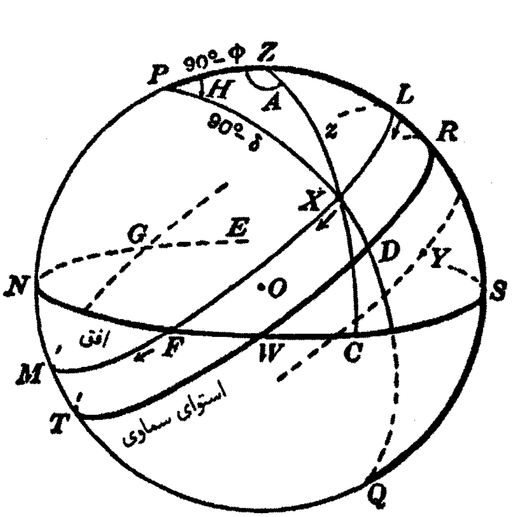
$$PZ = ۹۰° - \phi \qquad (۲)$$

که در آن ϕ عرض جغرافیایی راصد است. همچنین داریم $PN = ۹۰° - PZ = \phi$؛ از این‌رو ارتفاع قطب با عرض جغرافیایی راصد برابر است.

۱۹. میل و زاویهٔ ساعتی

همانند بخش قبل فرض کنید که کرهٔ سماوی برای راصد O در عرض جغرافیایی ϕ رسم می‌شود و در آن صفحهٔ افق، سمت‌الرأس Z، و قطب شمال P نمایش داده شود (شکل ۱۲). دایرهٔ عظیمهٔ RWT که صفحهٔ آن عمود بر OP است استوای سماوی است و صفحهٔ آن آشکارا موازی صفحهٔ استوای زمین است. استوای سماوی و افق همدیگر را در دو نقطهٔ W و E قطع می‌کنند. چون Z قطب دایرهٔ عظیمهٔ NWS و P قطب دایرهٔ عظیمهٔ RWT است، W از هر دو نقطهٔ Z و P به اندازهٔ °۹۰ فاصله دارد و بنابراین فاصلهٔ آن از همهٔ نقاط دایرهٔ عظیمه‌ای که از Z و P می‌گذرد °۹۰ است. به گفتهٔ دیگر، W قطب دایرهٔ عظیمهٔ $NPZSQ$ است و از این‌رو داریم $NW = ۹۰°$ و $WS = ۹۰°$. به‌همین ترتیب $EN = ۹۰°$ و $ES = ۹۰°$ است. بنابراین W و E دو جهت دیگر از چهار جهت اصلی‌اند که جهات N و S آن قبلاً تعریف شده بود.

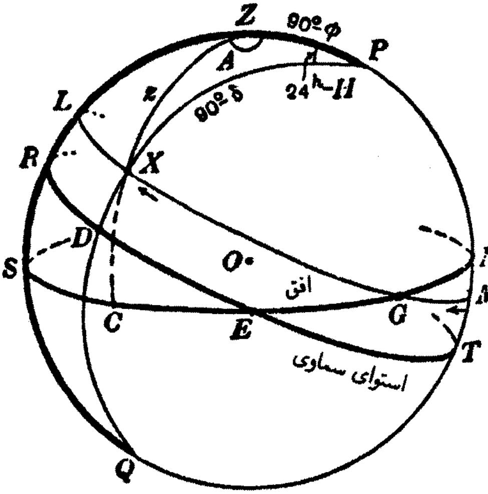
چنانکه پیش از این هم گفته شد چرخش زمین موجب چرخش ظاهری کرهٔ سماوی، به گرد OP، از شرق به غرب می‌شود. چون ستاره‌ها در فاصله‌هایی بسیار دور از زمین قرار دارند در



شکل ۱۲

نتیجه زاویهٔ میان خط‌راست و اصل بین راصد O و هر ستارهٔ ویژه و خط‌راست OP (موازی محور زمین) بدون تغییر می‌ماند. اگر به ستاره‌ای مانند X نگاه کنیم، به‌خاطر چرخش زمین، به‌نظر می‌رسد که این ستاره دایرهٔ صغیرهٔ LXM را موازی استوای سماوی در جهتی که در شکل ۱۲ با پیکان نشان داده شده است طی می‌کند. فرض کنید $PXDQ$ نیمدایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از X و قطبهای کرهٔ سماوی می‌گذرد. در این صورت، کمان DX را میل ستاره می‌نامند. اگر ستاره‌ای (مثلاً X) بین استوای سماوی و قطب شمال P باشد میل آن، میل شمالی و اگر (مثل Y) بین استوای سماوی و قطب جنوب Q باشد میل آن را میل جنوبی می‌نامند. بدین ترتیب میل یک ستاره به عرض جغرافیایی یک نقطه روی زمین می‌ماند که قبلاً تعریف شد. میل X را با δ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم $DX = \delta$ و $PX = ۹۰° - \delta$ است. PX فاصلهٔ قطبی شمالی (NPD) ستاره است. بهتر است میل را یک کمیت جبری تلقی کنیم تا فرمولهای گوناگونی که به‌دست می‌آوریم در مورد میلهای شمالی و جنوبی به‌طور یکسان صادق باشند. میلهای شمالی دارای علامت مثبت $(+)$ و میلهای جنوبی دارای علامت منفی $(-)$ هستند. بدین‌ترتیب، فرمول فاصلهٔ قطبی شمالی، یعنی $\text{NPD} = ۹۰° - \delta$، در مورد همهٔ ستاره‌ها، با هر میلی، صادق است.

با دانستن میل ستاره می‌توانیم دایرهٔ صغیره‌ای به نام مدار سماوی را که ستاره باید روی آن باشد مشخص کنیم. برای تعیین کامل مکان ستاره در هر لحظه روی کرهٔ سماوی به دایرهٔ عظیمهٔ دیگری به‌عنوان مرجع نیاز داریم. این نیاز را نیمدایرهٔ عظیمهٔ $PZRSQ$ که دایرهٔ نصف‌النهار راصد خوانده می‌شود برطرف می‌کند. هنگامی که ستاره در نقطهٔ L روی نصف‌النهار راصد است، می‌گوییم که ستاره عبور می‌کند و از روی شکل ۱۲ آشکار است که در این صورت ارتفاع ستاره (یعنی SL) بیشترین و فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن، یعنی ZL، کمترین مقدار است. از این پس ستاره، به‌سبب چرخش زمین، در طول دایرهٔ صغیرهٔ LFM حرکت می‌کند و افق را در نقطهٔ F قطع می‌کند. در این حالت می‌گوییم که ستاره در این نقطه غروب می‌کند. بی‌شک ارتفاع ستاره در نقطهٔ F، صفر درجه و فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن $۹۰°$ است. ستاره در مدتی‌که بستگی به میل آن دارد زیر افق می‌ماند و در M بیشترین انخفاض را در زیر افق خواهد داشت، و سرانجام در نقطهٔ G دوباره به افق می‌رسد و می‌گوییم که طلوع می‌کند. ارتفاع ستاره رفته‌رفته افزایش می‌یابد و ستاره پس از مدتی، که معادل زمان یک چرخش کامل زمین حول محور خود است، به نصف‌النهار راصد در نقطهٔ L باز می‌گردد. در هر لحظه مکان ستاره روی مدار سماوی با زاویه‌ای در P بین دایرهٔ نصف‌النهار راصد و نصف‌النهار (PXQ) که در همان لحظه از ستاره می‌گذرد مشخص می‌شود. این زاویه، یعنی RPX یا ZPX یا کمان RD روی استوا، با H نشان داده می‌شود و زاویهٔ ساعتی نام دارد و از دایرهٔ نصف‌النهار راصد به‌طرف غرب از $۰°$ (در L) تا $۳۶۰°$ (هنگامی که ستاره به نصف‌النهار راصد باز می‌گردد) یا از ۰^h تا ۲۴^h اندازه‌گیری می‌شود. این را می‌توانیم به‌روش نسبتاً متفاوتی بیان کنیم. هنگامی که ستاره در حال عبور است، دایرهٔ نصف‌النهار آن بر دایرهٔ نصف‌النهار راصد منطبق است؛ از آن پس، دایرهٔ نصف‌النهار ستاره به‌طور یکنواخت به‌طرف



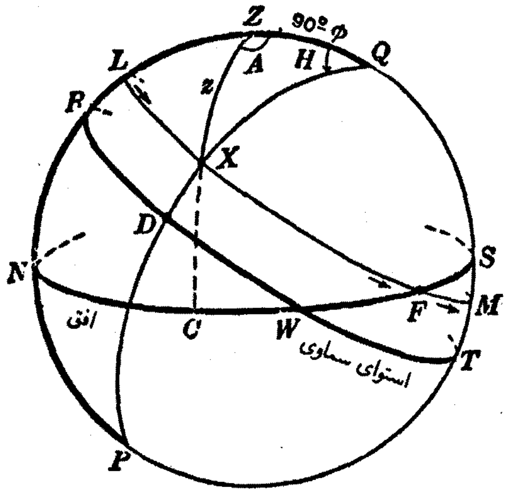
شکل۱۳

غرب حرکت می‌کند و وقتی یک دور کامل از کرهٔ سماوی را به‌پایان رسانید یک زاویهٔ ۳۶۰° یا 24^h را نسبت به دایرهٔ نصف‌النهار راصد پیموده است. از شکل ۱۲ دیده می‌شود که اگر ستاره در غرب دایرهٔ نصف‌النهار راصد باشد، یعنی اگر سمت آن غربی باشد، زاویهٔ ساعتی آن بین °۰ و °۱۸۰ یا بین 0^h و 12^h است. همین‌طور اگر (مانند شکل ۱۳) ستاره در شرق دایرهٔ نصف‌النهار (درسمت شرقی) باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 12^h و 24^h خواهد بود. بدین‌ترتیب می‌توانیم قاعده‌های زیر را بیان کنیم

اگر سمت ستاره غربی باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 0^h و 12^h خواهد بود (و برعکس)، اگر سمت ستاره شرقی باشد زاویهٔ ساعتی آن بین 12^h و 24^h است.

۲۰. نمودار مربوط به نیمکرهٔ جنوبی

نمودارهایی که تا کنون در این فصل شرح دادیم به کرهٔ سماوی راصدی که در عرض شمالی بود مربوط می‌شدند. اکنون این نمودارها را برای راصدی که در نیمکرهٔ جنوبی است توضیح می‌دهیم. درشکل ۱۴ محل سمت‌الرأسی راصد را مانند نمودارهای پیشین انتخاب می‌کنیم. در این صورت افق سماوی به ترتیبی است که نشان داده شده است. قطب جنوب سماوی، Q، و در نیمکرهٔ جنوبی، بالای افق است. پس اگر ϕ نمایندهٔ عرض جغرافیایی جنوبی راصد باشد، داریم $QZ = ۹۰° - \phi$. در این حال دایرهٔ قائم اصلی ZQS است که افق را در نقطهٔ جنوب، S، قطع می‌کند. پس نقطهٔ شمال، N، را نیز می‌توان در این نمودار مشخص کرد. استوای سماوی و افق، مطابق قاعده‌ای که در پانوشت صفحهٔ ۳۶ آمد یکدیگر را در نقاط غرب و شرق، W و E (نقطهٔ E در شکل ۱۴ نشان

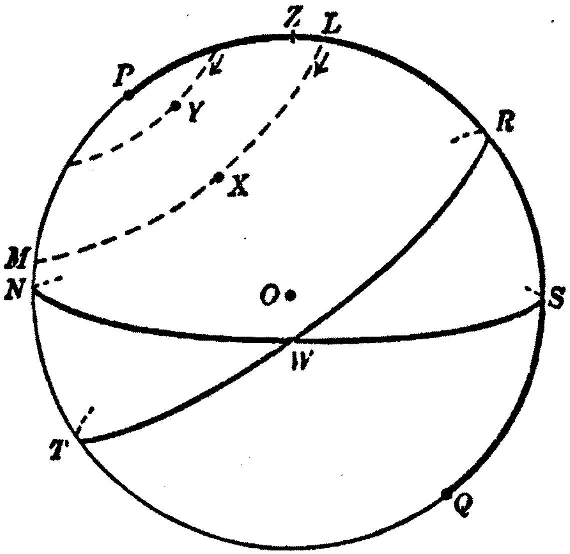


شکل۱۴

داده نشده است) قطع می‌کنند. ستارهٔ X را با میل جنوبی در نظر می‌گیریم. این ستاره، به‌سبب چرخش زمین، دایرهٔ صغیرهٔ LXM که بین استوای سماوی و قطب جنوب Q قرار دارد را موازی استوای سماوی طی خواهد کرد. درنقطهٔ L، ستاره بزرگترین ارتفاع را دارد و بنابراین روی نصف‌النهار راصد که نیمدایرهٔ $QZRNP$ است قرار دارد. ستاره در نتیجهٔ چرخش زمین، به‌طوری که در شکل با پیکان نشان داده شده است، از نصف‌النهار راصد به‌طرف غرب، یعنی در جهت LXM، حرکت خواهد کرد. زاویهٔ ZQX زاویهٔ ساعتی ستاره است که مانند قبل، از نصف‌النهار راصد به‌طرف غرب از 0^h تا 24^h اندازه‌گیری می‌شود. زاویهٔ QZX سمت ستاره است که در این مثال غربی است. اگر δ میل (منفی) ستاره باشد، آن وقت $DX = -\delta$ و $QX = 90° + \delta$. اجزای دیگر مثلث کروی QZX عبارت‌اند از: $QZ = 90° - \phi$ و $ZX = z$ (فاصلهٔ سمت‌الرأسی)، $QZX = A$ (سمت) و $ZQX = H$ (زاویهٔ ساعتی). هنگامی که سمت ستاره غربی است، زاویهٔ ساعتی بین 0^h و 12^h است. نمودار حالتی که در آن سمت ستاره شرقی است را به روشی مشابه می‌توان رسم کرد. این موضوع به‌عنوان تمرینی به دانشجو محول می‌شود؛ با رسم این نمودار مشخص خواهد شد که زاویهٔ ساعتی بین 12^h و 24^h است. معلوم می‌شود که قاعده‌های یاد شده در پایان بخش ۱۹ هم برای عرضهای جنوبی صادق‌اند هم برای عرضهای شمالی.

۲۱. ستاره‌های پیرا قطبی

کرهٔ سماوی را برای راصدی در عرض جغرافیایی شمالی ϕ در نظر می‌گیریم (شکل ۱۵). در شکل ۱۵ مدارهای سماوی دو ستارهٔ X و Y، که هر دو همواره بالای افق‌اند و در نتیجه غروب

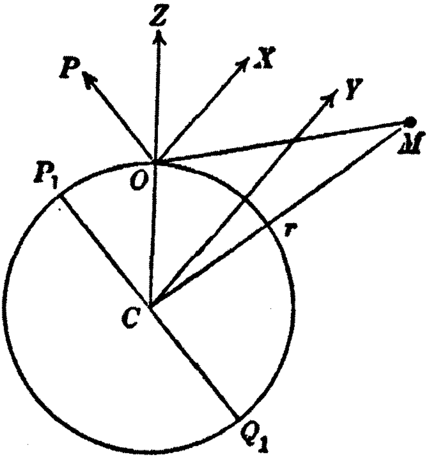


شکل۱۵

نمی‌کنند، رسم شده‌اند. چنین ستاره‌هایی را ستاره‌های پیرا قطبی می‌نامند. از شکل ۱۵ به سهولت می‌توان دید که شرط اینکه ستاره‌ای غروب نکند این است که PM از PN کوچکتر باشد؛ یعنی فاصلهٔ قطبی شمالی باید از عرض جغرافیایی کمتر، یا به‌عبارت دیگر، میل باید از متمم عرض بزرگتر باشد. هنگامی‌که ستارهٔ X روی نصف‌النهار راصد در L قرار دارد، در عبور بالاست؛ زمانی که ستاره به M می‌رسد، در عبور پایین است. اغلب عبارتهای «عبور بالای قطب» و «عبور پایین قطب» به‌کار برده می‌شوند. فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره در عبور بالا برابر ZL یا $(PL - PZ)$، یعنی برابر $\delta - \phi$ است. فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره در عبور پایین برابر ZM یا $(ZP + PM)$، یعنی برابر $(\phi + \delta) - ۱۸۰^\circ$ است. هنگامی که $\phi = \delta$ است، عبور بالا در سمت‌الرأس روی می‌دهد. وقتی $\phi < \delta$ باشد عبور بالای یک ستاره، نظیر ستارهٔ Y، بین P و Z روی می‌دهد و در این صورت، به‌طوری که می‌توان به آسانی از نمودار نتیجه گرفت، سمت ستاره نمی‌تواند بیشتر از ۹۰° باشد. ستاره‌های پیراقطبی جنوبی را می‌توان به‌همین روش بررسی کرد.

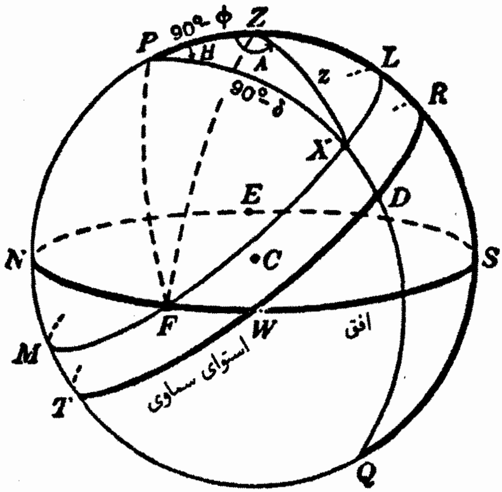
۲۲. کرهٔ سماوی استاندارد یا زمین‌ـمرکز

در بخشهای قبل، میل یک ستاره روی کرهٔ سماوی را که مرکز آن راصد است تعریف کردیم. چون فاصلهٔ ستاره‌ها در مقایسه با ابعاد زمین تقریباً بینهایت بزرگ است، بنابر تعریف پیش گفته و به‌طوری که به سهولت از شکل ۱۶ دیده می‌شود، میل یا فاصلهٔ قطبی ستاره مستقل از مکان راصد روی زمین است. (برای این منظور بهتر است به‌جای میل ستاره فاصلهٔ قطبی آن را در نظر بگیریم). در



شکل۱۶

شکل ۱۶، P_1CQ_1 محور چرخش، C مرکز زمین، O مکان راصد، و COZ جهت سمت‌الرأسی در O است؛ OP با CP_1 موازی است و OX جهت ستاره‌ای است که در O در حال عبور است. طبق تعریف، فاصلهٔ قطبی شمالی ستاره برای راصدی در O، $P\hat{O}X$ است. اگر CY به موازات OX رسم شود، آن‌وقت CY جهت ستاره نسبت به مرکز زمین یعنی C است. در این صورت $P_1\hat{C}Y = P\hat{O}X$؛ به‌عبارت دیگر، فاصلهٔ قطبی شمالی ستاره (و در نتیجه میل آن) روی کرهٔ سماوی به مرکز O (یا هر مکان دیگری در روی زمین) با مقدار آن روی کرهٔ سماوی به مرکز C یکی است. اما هنگامی که جرم آسمانی نسبتاً نزدیکی مانند ماه، خورشید، یا یک سیاره رصد می‌شود، تعریف فاصلهٔ قطبی شمالی (و بنابراین میل) که قبلا داده شده است به مکان ویژهٔ راصد روی زمین بستگی دارد. بدین ترتیب اگر M نشان دهندهٔ ماه در فاصلهٔ r از مرکز زمین باشد (شکل ۱۶)، بدیهی است که $P\hat{O}M = P_1\hat{C}M + O\hat{M}C$؛ و نیز $O\hat{M}C$ به مکان O بستگی دارد، در حالی که P_1CM اصلاً به O بستگی ندارد. $P_1\hat{C}M$ که زاویهٔ بین محور زمین و خط‌راست واصل بین مرکز زمین و جرم آسمانی است به‌عنوان فاصلهٔ قطبی شمالی M تعریف می‌شود. این تعریف کاملاً کلی است و در مورد همهٔ اجرام آسمانی به‌کار می‌رود. مرکز کرهٔ سماوی استاندارد (یا کرهٔ سماوی زمین‌ـمرکز) در نقطهٔ C، یعنی مرکز زمین انتخاب می‌شود (شکل ۱۷). CZ جهت سمت‌الرأسی راصد و قطر QCP بر محور زمین منطبق است. $NWSE$ افق سماوی (دایرهٔ عظیمه‌ای که صفحهٔ آن بر CZ عمود است) و $RWTE$ استوای سماوی (که صفحهٔ آن بر صفحهٔ استوای زمین منطبق) است. کمان PX، طبق تعریفی که در بالا داده شد، فاصلهٔ قطبی شمالی جرم آسمانی و DX میل δی آن $(\mathrm{NPD} = ۹۰° - \delta)$ است. چنان‌که قبلاً تعریف شد $PZRSQ$ دایرهٔ نصف‌النهار راصد، ZX (که با z نشان داده می‌شود) فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم



شکل ۱۷

آسمانی، $A(P\hat{Z}X)$ سمت، و $H(Z\hat{P}X)$ زاویهٔ ساعتی آن است.[۱]

از این پس فرض می‌کنیم که مرکز کرهٔ سماوی، نقطهٔ C یعنی مرکز زمین است (شکل ۱۷).

۲۳. حل مثلث کروی PZX

دو مسئلهٔ کلی را در ارتباط با مثلث کروی PZX در نظر می‌گیریم.

الف) عرض جغرافیایی ϕ راصد و میل δ و زاویهٔ ساعتی H جرم آسمانی معلوم‌اند، فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت آن را تعیین کنید.

چون دو ضلع PZ و PX و زاویهٔ بین آنها یعنی ZPX معلوم‌اند (شکل ۱۷)، از فرمول (الف) داریم

$$\cos ZX = \cos PZ \cos PX + \sin PZ \sin PX \cos ZPX$$

یا

$$\cos z = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H \qquad (۳)$$

بدین‌ترتیب مقدار z را می‌توان مستقیماً از رابطهٔ (۳) یا از فرمول هاورسینوس (بخش ۱۳) که در این حالت به‌صورت زیر نوشته می‌شود، محاسبه کرد

$$\text{hav}\, z = \text{hav}(\phi - \delta) + \cos\phi \cos\delta\, \text{hav}\, H \qquad (۴)$$

۱. میل اجرام اصلی آسمان (ماه، خورشید، سیارات، و ستاره‌های درخشان) در زیج نجومی که یک نشریهٔ آمریکایی-بریتانیایی است و در زیجهای کشورهای دیگر، فهرست می‌شود.

بازهم از فرمول (الف)، داریم

$$\cos PX = \cos PZ \cos ZX + \sin PZ \sin ZX \cos PZX$$

یا

$$\sin\delta = \sin\phi\cos z + \cos\phi\sin z\cos A \qquad (۵)$$

که از آن می‌توان سمت A را محاسبه کرد. رابطهٔ (۵) را می‌شود به‌صورت هاورسینوس نوشت

$$\cos\phi\cos a\,\mathrm{hav}\,A = \mathrm{hav}(۹۰^\circ - \delta) - \mathrm{hav}(\phi - a) \qquad (۶)$$

که در آن a ارتفاع است.

ب) عرض جغرافیایی ϕ راصد، فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره و سمت آن معلوم‌اند، زاویهٔ ساعتی و میل ستاره را تعیین کنید.

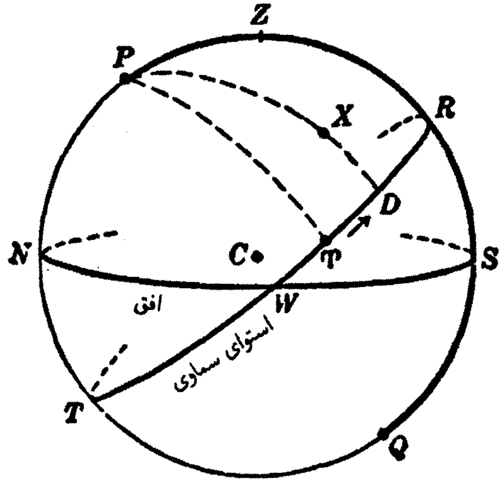
چون مقادیر ϕ، z، و A داده شده‌اند، از رابطهٔ (۵) می‌توانیم میل را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی، H، از یکی از معادلات (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم. از این‌رو، از رابطهٔ (۳) داریم

$$\cos H = \cos z \sec\phi \sec\delta - \tan\phi\tan\delta \qquad (۷)$$

اکنون مثلث کروی PZX را در شکل ۱۳ در نظر می‌گیریم. زاویهٔ PZX سمت (شرقی) ستاره است. با توجه به اینکه زاویهٔ ساعتی، در قطب، از دایرهٔ نصف‌النهار راصد به طرف غرب اندازه‌گیری می‌شود، می‌بینم که $Z\hat{P}X = ۲۴^{\mathrm{h}} - H$. مثلث را مانند قبل حل می‌کنیم.

۲۴. بُعد و میل

در تعیین مکان یک ستاره روی کرهٔ سماوی به‌روش زاویهٔ ساعتی و میل، فقط یک مختصه یعنی میل با حرکت ستاره در آسمان ثابت می‌ماند، در حالی که زاویهٔ ساعتی به‌طور یکنواخت از ۰^{h} به ۲۴^{h} افزایش می‌یابد. اما مکان ستاره‌ها روی کرهٔ سماوی را می‌توان به مکان نقاط ثابت روی سطح زمین تشبیه کرد و بنابراین مکان آنها را می‌توان نسبت به استوای سماوی و ستارهٔ ویژه‌ای روی استوا مشخص کرد. به‌عنوان مثال، فرض کنید در شکل ۱۸ Υ یک ستارهٔ استوایی و X ستارهٔ دیگری باشد؛ فرض کنید دایرهٔ نصف‌النهاری که از X می‌گذرد استوای سماوی را در D قطع کند. می‌دانیم با تغییر مکان ستاره‌ها در آسمان، میل X، یعنی DX ثابت می‌ماند و در پیکربندی‌آنها نیز تغییری روی نمی‌دهد. بنابراین ΥD ثابت است. به‌عبارت دیگر زاویهٔ بین نصف‌النهاری Υ و D ثابت می‌ماند. پس می‌توان نقطهٔ Υ را به‌عنوان یک نقطهٔ مرجع روی استوای سماوی اختیار کرد. در این حالت، مکان ستارهٔ X را می‌توانیم نسبت به Υ و استوای سماوی با کمان دایرهٔ عظیمه‌ای



شکل۱۸

ΥD و میل DX به‌روشنی مشخص کنیم. نقطهٔ مرجعی که در عمل انتخاب می‌شود موسوم به اعتدال بهاری یا نقطهٔ اول حمل است و فرض اینکه مکان نقطهٔ Υ به‌وسیلهٔ ستارهٔ ویژه‌ای در آسمان مشخص شود یک فرض مفید است. بعداً نقطهٔ Υ را با دقت بیشتری تعریف خواهیم کرد. کمان ΥD یا زاویهٔ $\Upsilon\hat{P}X$ بُعد (RA) ستارهٔ X (که با α نشان داده می‌شود) خوانده می‌شود و از نقطهٔ Υ به‌طرف شرق از 0^h تا 24^h (در جهت پیکان نزدیک Υ) اندازه‌گیری می‌شود. این خلاف جهتی است که در آن زاویهٔ ساعتی اندازه‌گیری می‌شود. از شکل ۱۸ می‌بینیم که $R\Upsilon = RD + \Upsilon D$. در این شکل RD (یا $R\hat{P}X$) زاویهٔ ساعتی ستارهٔ X، یعنی H، و $R\Upsilon$ زاویهٔ ساعتی Υ است. زاویهٔ ساعتی Υ را زمان نجومی (ST) می‌نامند. بنابراین داریم

$$\mathrm{ST} = \mathrm{HA}X + \mathrm{RA}X \qquad (۸)$$

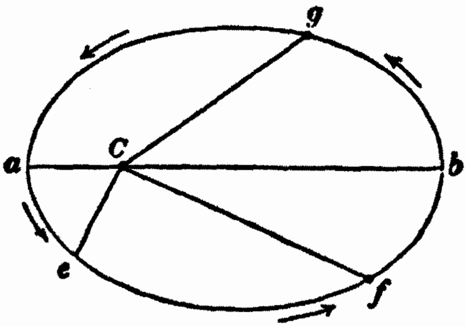
یا

$$\mathrm{ST} = H + \alpha \qquad (۹)$$

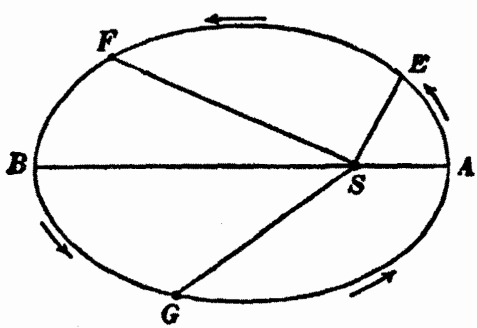
هنگامی که Υ روی دایرهٔ نصف‌النهار راصد است، زاویهٔ ساعتی Υ برابر 0^h، یعنی زمان نجومی 0^h است. وقتی Υ دوباره روی نصف‌النهار راصد قرار می‌گیرد، زمانی برابر 24^h ساعت زمان نجومی سپری شده است. البته این بازهٔ زمانی برابر همان مدت زمانی است که برای یک چرخش کامل زمین حول محورش لازم است و یک روز نجومی خوانده می‌شود. در واقع زمین چرخان یک زمان‌شمار استاندارد است.

۲۵. مدار زمین

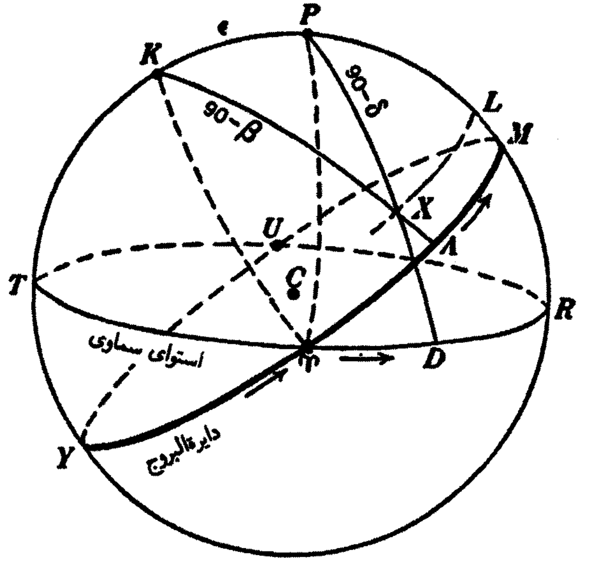
زمین سیاره‌ای است که روی یک مسیر یا مدار بیضی به‌دور خورشید می‌گردد و خورشید در یک کانون بیضی، S، واقع است (شکل ۱۹). این، قانون اول حرکت سیاره‌ای کپلر است. زمان لازم برای یک گردش کامل زمین بر روی مدارش یک سال است. با پیشروی زمین در مدارش، جهت آن از دیدگاه خورشید پیوسته تغییر می‌کند، لیکن سرعت زاویه‌ای آن یکنواخت نیست. چون رصدهای ما از زمین انجام می‌گیرد به‌نظر می‌رسد که خورشید، نسبت به زمین و حول آن یک مدار بیضی طی می‌کند. در شکل ۲۰ نقطهٔ C مرکز زمین، و مسیر بیضی مدار ظاهری خورشید را نسبت به زمین نشان می‌دهد. رشته مکانهای خورشید در این مدار، یعنی a، e، f، b، g نظیر رشته مکانهای زمین در مدارش به دور خورشید، یعنی A، E، F، B، و G هستند (شکل ۱۹). بدین ترتیب به‌نظر می‌رسد که خورشید در طول یک سال مدار کاملی را در آسمان نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها طی می‌کند. صفحهٔ این مدار را صفحهٔ دایرةالبروج می‌نامند و دایرهٔ عظیمه‌ای که از برخورد این صفحه با کرهٔ سماوی به مرکز C (مرکز زمین) درست می‌شود را دایرةالبروج می‌نامند. در شکل ۲۱، فرض کنید نقطهٔ C مرکز کرهٔ سماوی باشد که بر آن استوای سماوی $T\Upsilon R$ و قطب شمال P نیز رسم شده‌اند. ممکن است تصور کنیم که ستاره‌ها را می‌شود از مرکز زمین، یعنی از نقطهٔ C، نگاه کرد، که در آن صورت مکانهای معینی را روی کرهٔ سماوی اشغال می‌کنند. صفحهٔ دایرةالبروج مکان معینی نسبت به ستاره‌ها دارد، در نتیجه دایرةالبروج دایرهٔ عظیمهٔ ویژه‌ای است که‌طبق مشاهدات بااستوای سماوی زاویه‌ای تقریباً برابر $23\frac{1}{2}^\circ$ می‌سازد. در شکل ۲۱ دایرهٔ عظیمهٔ $Y\Upsilon MU$ نمایندهٔ دایرةالبروج و $M\hat{\Upsilon}R$ میل آن نسبت به استوای سماوی است که میل دایرةالبروج نامیده می‌شود. بظاهر خورشید نسبت به زمین روی کرهٔ سماوی در امتداد دایرةالبروج (در جهت $Y\Upsilon M$) حرکت می‌کند و در یک سال دوبار مکان‌آن روی کرهٔ سماوی بر نقاط برخورد دایرةالبروج و استوای سماوی، یعنی نقاط U و Υ، منطبق می‌شود. از Υ تا M و از M تا U خورشید در طرف قطب شمال



شکل ۲۰



شکل۱۹



شکل۲۱

استوا است و بنابراین میل آن شمالی است. همینطور از U تا Y و از Y تا ♈ میل خورشید جنوبی است. نقطهٔ ♈، که در آن میل خورشید از جنوبی به شمالی تغییر می‌کند، نقطهٔ اعتدال بهاری نامیده می‌شود. از همین طریق نقطهٔ مرجع ♈ را که بُعد ستاره‌ها نسبت به آن سنجیده می‌شود پیدا می‌کنند. بدین ترتیب اگر X یک ستاره باشد، بُعد آن ♈D یا α است که در راستای استوا از ♈ به‌طرف شرق اندازه‌گیری می‌شود و میل آن، δ، برابر DX است. از نمودار دیده می‌شود که بُعد و میل خورشید، هر دو پیوسته تغییر می‌کنند. هنگامی که خورشید در ♈ است بُعد و میل آن، هر دو صفرند (این وضع، که به اعتدال بهاری، معروف است تقریباً در ۲۱ مارس[۱] رخ می‌دهد)؛ در M بُعد خورشید ۶^h و میل آن تقریباً $۲۳\frac{۱}{۲}^\circ$N است (این وضع، که به انقلاب تابستانی معروف است، تقریباً در ۲۱ ژوئن رخ می‌دهد)؛ در U بُعد خورشید ۱۲^h و میل آن ۰° است (این وضع، که به اعتدال پاییزی معروف است، تقریباً در ۲۱ سپتامبر رخ می‌دهد)؛ و در Y بُعد خورشید ۱۸^h و میل آن تقریباً $۲۳\frac{۱}{۲}^\circ$S است (این وضع، که به انقلاب زمستانی معروف است، در ۲۱ دسامبر رخ می‌دهد).

۲۶. عرض و طول سماوی

در تعیین مکان یک جرم آسمانی می‌توان دایرةالبروج را به‌عنوان دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی و نقطهٔ اعتدال بهاری ♈ را به‌عنوان نقطهٔ مرجع اصلی به‌کار برد. در شکل ۲۱، K قطب شمال دایرةالبروج و

---

۱. درست در لحظهٔ تحویل سال ایرانی، یعنی اول فروردین.ــم.

KXA کمان دایرهٔ عظیمه‌ای است که از X می‌گذرد و دایرة‌البروج را در A قطع می‌کند. کمان ΥA که از Υ به A در راستای دایرة‌البروج در جهت حرکت سالیانهٔ خورشید، یعنی به‌سوی شرق از 0° تا 360° اندازه‌گیری می‌شود، طول سماوی نام دارد. کمان AX عرض سماوی X است؛ عرض سماوی شمالی مثبت، و عرض سماوی جنوبی منفی در نظر گرفته می‌شود. اگر بُعد و میل ستاره معلوم باشند، ازمثلث KPX می‌توانیم عرض سماوی (β) و طول سماوی (λ) آن را به‌دست آوریم و برعکس. حال چون Υ قطب دایرهٔ عظیمهٔ $KPMR$ است، پس داریم $K\hat{P}\Upsilon = 90^\circ$ و چون داریم $\Upsilon D = \Upsilon\hat{P}X = \alpha$، بنابراین $K\hat{P}X = 90^\circ + \alpha$. همچنین $P\hat{K}\Upsilon = 90^\circ$، و چون $\Upsilon A = \Upsilon\hat{K}X = \lambda$، پس $P\hat{K}X = 90^\circ - \lambda$. همچنین $PX = 90^\circ - \delta$ و داریم $KX = 90^\circ - \beta$. فرض کنید ε میل دایرة‌البروج باشد؛ این زاویه بین شعاعهای CM و CR واقع است، بنابراین $RM = \varepsilon$. اما $KM = 90^\circ$ و $PR = 90^\circ$، از این‌رو $KP = \varepsilon$. با به کار بردن فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج)، داریم

$$\cos KX = \cos PX \cos KP + \sin PX \sin KP \cos KPX$$
$$\sin KX \sin PKX = \sin PX \sin KPX$$
$$\sin KX \cos PKX = \cos PX \sin KP - \sin PX \cos KP \cos KPX$$

یا

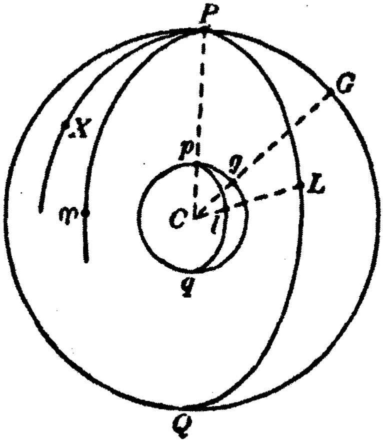
$$\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \tag{۱۰}$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \tag{۱۱}$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \tag{۱۲}$$

به‌همین ترتیب، بُعد α و میل δ را می‌توان برحسب β، λ، و ε بیان کرد. فرمولهای مربوط عبارت‌انداز

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

۲۷. زمان نجومی

فرض کنید زمین و کرهٔ سماوی (به مرکز C) مانند شکل ۲۲ رسم شوند و نیز فرض کنید g مکان گرینویچ و l مکان هر محل دیگری را روی زمین نشان دهند. بدیهی است که زاویهٔ بین نصف‌النهارهای plq و pgq، طول جغرافیایی l است و دراین مثال l غرب گرینویچ است. شعاعهای Cg و Cl را امتداد می‌دهیم تا کره سماوی را در G و L قطع کنند. در این صورت G و L به ترتیب



شکل۲۲

سمت‌الرأسهای گرینویچ و l هستند. اگر X مکان یک جرم آسمانی در یک لحظهٔ معین باشد، $G\hat{P}X$ زاویهٔ ساعتی X برای راصدی روی دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ و $L\hat{P}X$ زاویهٔ ساعتی آن برای راصدی روی دایرهٔ نصف‌النهار l است. اما $G\hat{P}X = L\hat{P}X + G\hat{P}L$ و $G\hat{P}L = g\hat{p}l$؛ از این‌رو، داریم

(۱۳) طول غربی l + زاویهٔ ساعتی X در l = زاویهٔ ساعتی X در گرینویچ

در این فرمول فرض بر این است که طول جغرافیایی l با مقیاس زمان بیان می‌شود ($15^\circ = 1^h; 15' = 1^m; 15'' = 1^s$). فرمول (۱۳) کلی است و آشکارا در مورد نقطهٔ اعتدال بهاری Υ نیز صادق است. پس چون زمان نجومی برابر زاویهٔ ساعتی Υ است داریم

(۱۴) طول جغرافیایی l $\pm$ زمان نجومی در l = زمان نجومی در گرینویچ

علامت + آنگاه اختیار می‌شود که l در غرب گرینویچ باشد و علامت منفی برای وقتی است که l در شرق گرینویچ است. زمان نجومی در l را زمان نجومی محلی (LST) می‌نامند.

۲۸. زمان خورشیدی متوسط

روز نجومی یک یکای زمان رصدخانه‌ای است و برای تنظیم کارهای روزانه، که مکان خورشید در آسمان بر آن حکم فرماست چندان مناسب نیست. هنگامی که خورشید روی دایرهٔ نصف‌النهار یک محل است، گوییم در آنجا ظهر ظاهری است؛ موقعی که خورشید دوباره به‌همان دایرهٔ نصف‌النهار می‌رسد گفته می‌شود یک روز خورشیدی ظاهری سپری شده است. اگر این بازهٔ زمانی را، برای

مثال، با ساعتی که زمان نجومی دقیق را نشان می‌دهد اندازه بگیریم معلوم می‌شود که روز خورشیدی ظاهری ثابت نیست. قبلاً دیدیم که خورشید نسبت به زمین به‌ظاهر در یک مدار بیضیوار به‌دور آن حرکت می‌کند و آهنگ تغییر جهت آن در مدار ثابت نیست. در نتیجه خورشید به‌ظاهر دایرةالبروج را با آهنگی نایکنواخت می‌پیماید. به‌عبارت دیگر، چنین به نظر می‌رسد که خورشید به نحوی نامنظم نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها حرکت می‌کند. بدین دلیل و نیز به‌دلیل اینکه خورشید روی دایرةالبروج حرکت می‌کند و نه در امتداد استوای سماوی (دایرهٔ عظیمهٔ بنیادی که اندازه‌گیری زاویهٔ ساعتی یا زمان به آن وابسته است)، بُعد آن به‌طور یکنواخت افزایش نمی‌یابد. روز خورشیدی ظاهری میانگین را در سال، روز خورشیدی متوسط می‌نامند و یک تعریف آسانتر این است که بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی یک جسم فرضی به‌نام خورشید میانگین را از دایرهٔ نصف‌النهار راصد، یک روز خورشیدی متوسط بخوانیم. فرض کنید خورشید میانگین روی استوای سماوی با آهنگی یکنواخت به‌دور زمین حرکت می‌کند. آهنگ حرکت طوری است که خورشید میانگین یک گردش کامل را روی استوای سماوی در همان مدتی انجام می‌دهد که خورشید روی دایرةالبروج. طبق این تعریف، بُعد خورشید میانگین (که با RAMS نشان داده می‌شود) با آهنگی یکنواخت افزایش می‌یابد.

حال اگر خورشید میانگین را یک جرم آسمانی معمولی بدانیم آن وقت می‌توانیم فرض کنیم که در هر لحظهٔ معین در هر محلی روی سطح زمین، خورشید میانگین زاویهٔ ساعتی (HAMS) ویژه‌ای دارد. فرض می‌کنیم که در این لحظهٔ بُعد خورشید میانگین معلوم است، بنابراین از رابطهٔ (۸) یا (۹) داریم

$$\mathrm{ST} = \mathrm{HAMS} + \mathrm{RAMS} \qquad (۱۵)$$

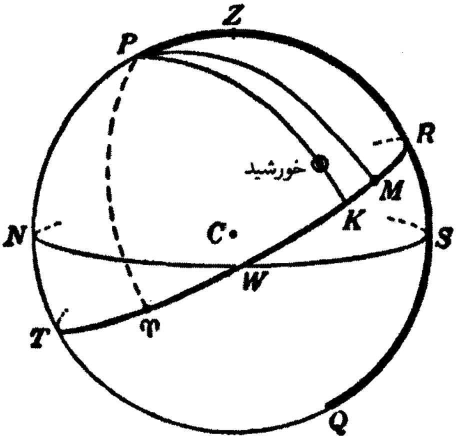
زمانی که در هر لحظه با یک زمان‌سنج متوسط، مثلاً، در گرینویچ نشان داده می‌شود صرفاً به مقدار HAMS در آن محل مربوط می‌شود و اگر RAMS معلوم باشد رابطهٔ (۱۵) مبنای مقایسهٔ زمان‌سنجهای نجومی و زمان‌سنجهای متوسط را تشکیل می‌دهد. خورشید میانگین و خورشید واقعی طبق برخی اصول که در یکی از فصلهای آینده بحث خواهند شد، به‌هم مربوط می‌شوند. همچنین کافی است گفته شود که اختلاف بین بُعد خورشید میانگین و خورشید واقعی را می‌توان در هر لحظه محاسبه کرد، این اختلاف به تعدیل زمان[1] (که با E نشان داده می‌شود) موسوم است. بدین ترتیب داریم

$$E = \mathrm{RAMS} - \mathrm{RA}\odot \qquad (۱۶)$$

که در آن $\mathrm{RA}\odot$ نمایندهٔ بُعد خورشید واقعی است. مقدار E می‌تواند مثبت یا منفی باشد و به‌طوری پیچیده تغییر می‌کند. محاسبهٔ مفصل E در بخش ۹۱ شرح داده می‌شود. فرض می‌کنیم

---

۱. در کتابهای درسی قدیم تعدیل زمان به‌صورت $E = \mathrm{RA}\odot - \mathrm{RAMS}$ تعریف شده است، ولی قرارداد (۱۶) عموماً قابل قبول است.



شکل۲۳

در شکل ۲۳ در لحظه‌ای معین، بُعد و میل خورشید (☉) معلوم باشند و همچنین ♈ نقطهٔ اعتدال بهاری در همین لحظه باشد، به‌طوری که $R\hat{P}\Upsilon$ یا $R\Upsilon$ زاویهٔ ساعتی ♈، یعنی زمان نجومی محلی است. اگر این زمان معلوم باشد، می‌توان مکان ♈ را روی کرهٔ سماوی به‌روشنی مشخص کرد. در این صورت می‌توان مکان خورشید را روی کرهٔ سماوی نشان داد. حال $\Upsilon K = \mathrm{RA}\odot$ و $K\odot$ میل خورشید است و هر دو بنابه فرض معلوم‌اند. اگر مقدار E مثبت باشد آن‌وقت طبق رابطهٔ (۱۶)، RAMS بزرگتر از RA☉ است و اگر E معلوم باشد مکان خورشید میانگین M را در این لحظه می‌توان در نمودار مشخص کرد. $R\hat{P}M$ یا RM زاویهٔ ساعتی M(HAMS) است. از شکل ۲۳ روشن است که چون $RK = RM + MK$ است، پس داریم

$$\mathrm{HA}\odot = \mathrm{HAMS} + E \qquad (۱۷)$$

که رابطهٔ مهمی است و HAMS و HA☉ را به‌هم مربوط و امکان محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی خورشید (HA☉) را، در صورت معلوم بودن سایر کمیتها فراهم می‌کند. هنگامی که خورشید میانگین روی دایرهٔ نصف‌النهار یک محل است، در آنجا ظهر متوسط محلی است. وقتی خورشید میانگین روی دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ است، ظهر متوسط گرینویچ است. زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در گرینویچ در این کتاب با GMAT (زمان نجومی متوسط گرینویچ) نشان داده می‌شود. هنگامی که خورشید میانگین در T است یعنی HAMS برابر ۱۲^{h} است می‌گوییم نیمه شب متوسط است. وقتی $\mathrm{GMAT} = ۱۲^{h}$ است نیم شب متوسط گرینویچ است و در این لحظه یک روز مدنی جدید در گرینویچ آغاز می‌شود. زمان متوسطی که از نیمه‌شب گرینویچ محاسبه می‌شود زمان

متوسط گرینویچ (GMT)[۱] خوانده می‌شود و اکنون آن را زمان جهانی (UT) می‌نامند. واضح است که داریم

$$\mathrm{UT} \equiv \mathrm{GMT} = \mathrm{GMAT} + ۱۲^{\mathrm{h}} \qquad (۱۸)$$

همین‌طور، برای هر محلی که زمان متوسط ویژهٔ دایرهٔ نصف‌النهار خود را نگاه دارد، خواهیم داشت

۱۲ ساعت + زمان نجومی متوسط محلی = زمان متوسط محلی

یا

$$(\mathrm{MT})_{\text{محلی}} = (\mathrm{MAT})_{\text{محلی}} + ۱۲^{\mathrm{h}} \qquad (۱۹)$$

$$= \mathrm{HAMS} \pm ۱۲^{\mathrm{h}} \qquad (۲۰)$$

فرمول (۱۴) رابطهٔ بین زمان نجومی در گرینویچ و زمان نجومی در هر محل l را به‌دست می‌دهد. از شکل ۲۲ و از رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) روشن است که رابطهٔ مشابهی بین زمان متوسط گرینویچ و زمان متوسط محلی خواهیم داشت، از این‌رو

زمان جهانی ≡ زمان متوسط گرینویچ = زمان متوسط محلی ± طول جغرافیایی l

یا

$$\mathrm{UT} \equiv \mathrm{GMT} = (\mathrm{MT})_{\text{محلی}} \pm l_{\text{طول جغرافیایی}} \qquad (۲۱)$$

علامت + برای وقتی است که طول جغرافیایی محل l غربی باشد و برای طول شرقی علامت − اختیار می‌شود.

اگر هر محلی زمان متوسط محلی وابسته به دایرهٔ نصف‌النهار خود را نگه دارد، درآمیختگی اجتناب‌ناپذیر خواهد بود و از این‌رو در کشورهای کوچک یک زمان متوسط استاندارد، وابسته به یک دایرهٔ نصف‌النهار ویژه (نصف‌النهار استاندارد) انتخاب می‌شود و در سراسر کشور به‌طور یکسان به‌کار می‌رود. در انگلستان، زمان متوسط استاندارد، زمان متوسط گرینویچ (GMT) است. در کشورهای بزرگی چون شوروی و ایالات متحدهٔ آمریکا دو زمان استاندارد یا بیشتر برای مناطق طولی مختلف به‌کار می‌رود و در هر منطقه زمان استاندارد مختص به دایرهٔ نصف‌النهار معین واقع

۱. تا پیش از سال ۱۹۲۵، در تقویمهای نجومی برای بیان زمان نجومی متوسط در گرینویچ (GMAT)، زمان متوسط گرینویچ (GMT) به‌کار می‌رفت. از سال ۱۹۲۵ زمان به‌کار رفته، زمان متوسط گرینویچ $\mathrm{GMT}(\equiv \mathrm{GCT})$ بود که بعداً، چنان که در بالا گفته شد، UT جانشین آن شد. اخیراً، به دلایلی که در پیوست د بیان می‌شود، در تقویمهای نجومی به‌جای UT از زمان زیجی (ET) استفاده می‌کنند. اختلاف بین UT و ET به‌قدری ناچیز است که در این کتاب عموماً همان اولی را به‌کار خواهیم برد، مگر در مواردی که جز این گفته شود.

در آن منطقه نگه‌داشته می‌شود. زمان استانداردی که بر مبنای نصف‌النهار ویژه‌ای تعیین می‌شود، زمان منطقه‌ای (ZT) نام دارد. درعمل، این دستگاه توسط کشتیها در دریا نگه داشته می‌شود، زیرا آنها معمولاً دچار پیچیدگیهای جغرافیایی نیستند. نظیر رابطهٔ (۲۱)، داریم

$$\mathrm{UT} \equiv \mathrm{GMT} = \mathrm{ZT} \pm \text{طول جغرافیایی نصف‌النهار استاندارد} \qquad (۲۲)$$

۲۹. مثال

برای روشن شدن مطلب مسئلهٔ کلی و مهم زیر را حل می‌کنیم. در محلی واقع در طول جغرافیایی ′۱۶۳°۱۴ شرقی می‌خواهیم زاویهٔ ساعتی خورشید (HA⊙) را که مربوط به رصدی است که در ساعت $۸^h۴۶^m۲۲^s$ زمان منطقه‌ای در ۱۰ مارس ۱۹۷۵ انجام شده است محاسبه کنیم؛ زمان منطقه‌ای مربوط به نصف‌النهار استاندارد ۱۶۵° E (۱۱^hE) است. نخست UT هنگام رصد را به‌دست می‌آوریم

زمان منطقه‌ای روز ۱۰ مارس	$۸^h۴۶^m۲۲^s$
طول جغرافیایی نصف‌النهار استاندارد	-۱۱^h
زمان جهانی روز ۹ مارس	$\mathrm{UT} = ۲۱^h۴۶^m۲۲^s$

طبق فرمول (۲۲)، ۱۱^h را از زمان منطقه‌ای کم می‌کنیم. (روشن است که زمان منطقه‌ای را می‌توانیم به‌صورت $۳۲^h۴۶^m۲۲^s$ روز ۹ مارس بنویسیم.)

سپس به‌کمک فرمول (۲۱) زمان متوسط محلی (یعنی زمان متوسط مربوط به طول جغرافیایی محل) را پیدا می‌کنیم

زمان جهانی روز ۹ مارس	$۲۱^h۴۶^m۲۲^s$
طول جغرافیایی شرقی محل	$+۱۰^h۵۲^m۵۶^s$
زمان متوسط محلی روز ۹ مارس	$=۳۲^h۳۹^m۱۸^s$
زمان متوسط محلی روز ۱۰ مارس	$=۸^h۳۹^m۱۸^s$

از فرمول (۲۰) مقدار HAMS (زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در محل) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathrm{HAMS} = ۲۰^h۳۹^m۱۸^s$$

گام بعدی اعمال تعدیل زمان بر زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین است. با استفاده از زیج نجومی و درون‌یابی معلوم می‌شود که در لحظهٔ $۲۱^h۴۶^m۲۲^s$، زمان جهانی (UT) در روز ۹ مارس، $E = -۱۰^m۳۶^s$ است.

بدین ترتیب از رابطهٔ (۱۷) داریم

$$\mathrm{HA}\odot = ۲۰^h۳۹^m۱۸^s - ۱۰^m۳۶^s$$

یا

$$\mathrm{HA}\odot = ۲۰^{h}۲۸^{m}۴۲^{s}$$

۳۰. زاویهٔ ساعتی یک جرم آسمانی

برای محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی هر جرم آسمانی (X) غیر از خورشید، به‌روش زیر عمل می‌کنیم. از رابطه‌های (۸) و (۱۴) داریم

$$\mathrm{LST} = \mathrm{HA}\,X + \mathrm{RA}\,X$$

و

$$\mathrm{GST} = \mathrm{LST} \pm l$$

که از آنجا داریم

$$\mathrm{HA}\,X + \mathrm{RA}\,X = \mathrm{GST} \pm l \qquad (۲۳)$$

زمان نجومی گرینویچ در ۰^{h} زمان جهانی هر روز از سال در زیج نجومی جدول‌بندی شده است. چون از رابطهٔ (۱۵) داریم

$$\mathrm{ST} = \mathrm{HAMS} + \mathrm{RAMS}$$

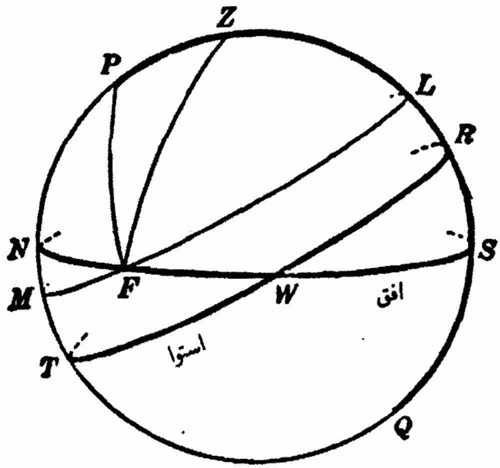
پس RAMS در ۰^{h} زمان جهانی هر روز مساوی است با زمان نجومی گرینویچ در ۰^{h} زمان جهانی آن روز از جدول منهای ۱۲^{h}. RAMS به‌طور یکنواخت با آهنگ $۳^{m}۵۶^{s}\!،۵۶$ در روز متوسط خورشیدی یا با آهنگ $۹^{s}\!،۸۵۶$ در ساعت متوسط خورشیدی افزایش می‌یابد؛ با استفاده از این بیان می‌توانیم مقدار RAMS را برای هر مقدار معین UT محاسبه کنیم.

جدولهایی برای ساده کردن این محاسبه، در تقویمهای نجومی ارائه شده است. کاربرد فرمول (۲۳) با یک مثال به بهترین نحو روشن می‌شود. می‌خواهیم زاویهٔ ساعتی ستارهٔ ابط‌الجوزا (آلفا‌ـجبار) را در زمان منطقه‌ای $۱۸^{h}۳۵^{m}۴۶^{s}$ در روز ۲۶ ژانویه ۱۹۷۵، در محلی که طول جغرافیایی آن $۶۴^{\circ}۲۸'۴۹''$ غربی است محاسبه کنیم (منطقه، $+۴^{h}$ است یعنی نصف‌النهار استاندارد منطقه، ۴^{h} غربی یا ۶۰° غربی است).

زمان منطقه‌ای در ۲۶ ژانویه	۱۸^{h}۳۵^{m}۴۶^s	
منطقه	۴^h	+
UT در ۲۶ ژانویه	۲۲^{h}۳۵^{m}۴۶^s	
تصحیح زمان نجومی	۳^{m}۴۳^s	(۳^{m}۵۶^s,۵۶ بر روز)
	۲۲^{h}۳۹^{m}۲۹^s	
GST در ۰^h زمان جهانی	۸^{h}۱۸^{m}۳۹^s	از زیج
GST	۳۰^{h}۵۸^{m}۰۸^s	
طول جغرافیایی غربی محل	۴^{h}۱۷^{m}۵۵^s	−
LST	۲۶^{h}۴۰^{m}۱۳^s	
RA ابط‌الجوزا را کم می‌کنیم	۵^{h}۵۳^{m}۴۹^s	از زیج
HA ابط‌الجوزا	۲۰^{h}۴۶^{m}۲۴^s	

۳۱. طلوع و غروب

شکل ۲۴ را در نظر بگیرید. وقتی جرم آسمانی X در نقطهٔ F به افق می‌رسد می‌گویند در این نقطه غروب می‌کند. در این موقع فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن ۹۰° است، یعنی $ZF = ۹۰°$. فرض کنید H زاویهٔ ساعتی X به‌هنگام غروب آن باشد، به‌طوری که $ZPF = H$. همچنین $PF = ۹۰° - \delta$. فرض کنید ϕ عرض جغرافیایی محل و A سمت X (PZF) به هنگام



شکل ۲۴

غروب باشد. از فرمول (الف)، داریم

$$\cos ZF = \cos PZ \cos PF + \sin PZ \sin PF \cos ZPF$$

یا

$$\cos ۹۰^\circ = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$$

بنابراین، چون $\cos ۹۰^\circ = ۰$ است، داریم

$$\cos H = -\tan\phi \tan\delta \qquad (۲۴)$$

که از آن می‌توان زاویهٔ ساعتی جرم را به هنگام غروب آن محاسبه کرد. دوباره از فرمول (الف)، داریم

$$\cos PF = \cos PZ \cos ZF + \sin PZ \sin ZF \cos PZF$$
$$\sin\delta = ۰ + \cos\phi \cos A$$

و سرانجام

$$\cos A = \sin\delta \sec\phi \qquad (۲۵)$$

که از آن می‌توان سمت جرم را به هنگام غروب آن محاسبه کرد.

از معادلات (۲۴) و (۲۵) یا از شکل ۲۴ دیده می‌شود که در عرضهای شمالی، اگر میل جرم آسمانی شمالی باشد زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب بین ۶^h و ۱۲^h و سمت آن کمتر از ۹۰° است (به گفتهٔ دیگر، جرم آسمانی بین غرب و شمال غروب می‌کند)؛ و اگر میل جرم آسمانی جنوبی باشد، زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب بین ۰^h و ۶^h است و بین جنوب و غرب غروب می‌کند. با همین روش می‌توان مسئلهٔ مربوط به طلوع جرم آسمانی را بررسی کرد. هنگامی که عرض جغرافیایی راصد جنوبی باشد نیز روند کار مانند بالاست.

اگر جرم آسمانی مورد نظر یک ستاره باشد زاویهٔ ساعتی آن به هنگام غروب، بازهٔ زمانی عبور نصف‌النهاری و غروب آن را برحسب زمان نجومی به‌دست می‌دهد. اگر جرم آسمانی خورشید باشد، بازهٔ زمانی بین عبور نصف‌النهاری و غروب آن برحسب زمان خورشیدی ظاهری بیان می‌شود. اما در طول این مدت مکانهای نسبی خورشید و خورشید میانگین تغییر چندانی نخواهند کرد (به‌عبارت دیگر، تغییر در تعدیل زمان را می‌توان نادیده گرفت، مگر اینکه دقت بسیار مطلوب باشد) و بنابراین این بازهٔ زمانی را، عملاً، می‌توان برحسب زمان متوسط بیان کرد. بدین ترتیب اگر طبق فرمول (۲۴) زاویهٔ ساعتی H به هنگام غروب خورشید $۷^h۳۰^m$ باشد آن‌وقت بازهٔ بین عبور

نصف‌النهاری خورشید و غروب آن $7^{h}30^{m}$ زمان متوسط خورشیدی خواهد بود. اگر از تغییر میل خورشید چشم بپوشیم، نتیجه می‌گیریم که این زاویهٔ ساعتی برابر بازهٔ زمانی بین طلوع خورشید و عبور نصف‌النهاری آن نیز هست. بدین ترتیب خورشید به مدت 15^{h} بالای افق و 9^{h} زیر افق است. البته در عمل، به‌سبب حرکت خورشید در طول دایرةالبروج، میل آن به هنگام طلوع و غروب یکسان نیست و تأثیر آن را می‌توان محاسبه کرد.

فرمول (۲۴) نشان می‌دهد که اگر $\phi > 90° - \delta$ باشد، مقدار عددی $\cos H$ بزرگتر از یک خواهد بود به‌طوری که این معادله نمی‌تواند مقداری برای H به‌دست دهد. در این حالت، خورشید در آن عرضها و در آن روزهایی که $\phi > 90° - \delta$ است غروب نمی‌کند؛ چیزی که صحت آن‌را در یک نمودار نیز می‌توان نشان داد. در روز اول تابستان، میل شمالی خورشید بیشینه، یعنی تقریباً برابر $23\frac{1}{2}°$ شمالی است، بنابراین خورشید درآن روز در عرضهای جغرافیایی $66\frac{1}{2}°$ شمالی بی‌آنکه غروب کند بالای افق می‌ماند.[1] در قطب شمال، چون $\phi > 90° - \delta$ است خورشید از اول فروردین تا اول مهر که δ شمالی است، همواره بالای افق است و شش ماه باقیمانده را زیر افق است. مدار $66\frac{1}{2}°$ شمالی، مدار شمالگان و همانند آن در نیمکرهٔ جنوبی ($66\frac{1}{2}°$ جنوبی) را مدار جنوبگان می‌نامند.

۳۲. آهنگ تغییرات فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت

فرض کنید X، در شکل ۲۵، مکان یک جرم آسمانی روی کرهٔ سماوی در یک لحظهٔ معین و Y مکان آن اندکی دیرتر است. میل را ثابت بگیرید به‌طوری که X و Y روی دایرهٔ صغیرهٔ LM (مدار) که P قطب آن است قرار گیرند. کمانهای دایرهٔ عظیمهٔ PX، PY، ZX، ZY را رسم کنید. اگر UX کمان دایرهٔ صغیره‌ای به قطب Z باشد، در این صورت $ZX = ZU$. فرض کنید که $Z\hat{P}X = H$ و $Z\hat{P}Y = H + \Delta H$ به‌طوری که $X\hat{P}Y = \Delta H$. اگر $P\hat{Z}X = A$ و $X\hat{Z}Y = \Delta A$ ونیز $ZX = z$ و $ZY = z + \Delta z$ باشد، آن‌وقت $UY = \Delta z$ خواهد بود. چون XY کمان کوچکی فرض شده است، می‌توانیم UXY را مثلث مسطحی بگیریم که در آن U یک زاویهٔ قائمه است.

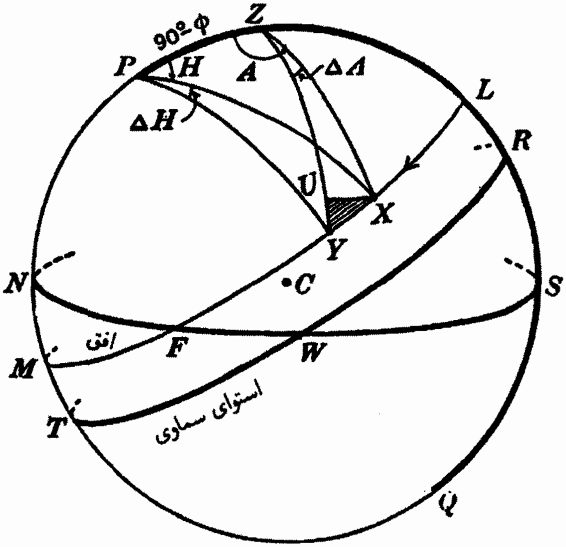
همین که جرم آسمانی، به‌سبب حرکت شبانه‌روزی، از X به Y می‌رود فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن به اندازهٔ Δz افزایش می‌یابد و زاویهٔ ساعتی و سمت آن به ترتیب به اندازهٔ ΔH و ΔA کاهش می‌یابند. از فرمول (۱) بخش ۳ داریم

$$XY = X\hat{P}Y \sin PX = \Delta H \cos\delta$$

و

$$UX = X\hat{Z}Y \sin ZX = \Delta A \sin z$$

۱. عبارت خورشید نیمه شب از اینجا آمده است.



شکل۲۵

زاویهٔ PXZ را با η نشان می‌دهیم و آن را زاویهٔ اختلاف‌منظر می‌نامیم. چون Y خیلی نزدیک به X است، می‌توانیم $P\hat{Y}Z$ را برابر η بگیریم. پس

$$UY = XY \cos UYX$$

و

$$UX = XY \sin UYX$$

چون $P\hat{Y}Z = \eta$ و $P\hat{Y}X = ۹۰°$ است، از این‌رو داریم

$$UY \equiv \Delta z = \Delta H \cos\delta \sin\eta$$

و

$$UX \equiv \Delta A \sin z = \Delta H \cos\delta \cos\eta$$

حال در مثلث کروی PXZ از فرمول (ب) داریم

$$\cos\delta \sin\eta = \sin A \cos\phi$$

و از فرمول (ج) داریم

$$\cos\delta \cos\eta = \sin\phi \sin z - \cos\phi \cos z \cos A$$

از این‌رو

$$\Delta z = \Delta H \sin A \cos\phi \qquad (۲۶)$$

و

$$\Delta A = \Delta H(\sin\phi - \cos\phi \cot z \cos A) \qquad (۲۷)$$

در این فرمولها، فرض بر این است که ΔH، Δz، و ΔA بامقیاس دایره‌ای بیان شده‌اند. فرض کنید ΔH^s تعداد ثانیه‌های زمانی در ΔH رادیان را نشان دهد و همچنین $\Delta z''$ و $\Delta A''$ به ترتیب تعداد ثانیه‌های قوسی در Δz و ΔA رادیان باشند. در این صورت طبق اصول بخش ۱۵ خواهیم داشت

$$\Delta z = \Delta z'' \sin ۱'',\ \Delta A = \Delta A'' \sin ۱'',\ \Delta H = \Delta H \sin ۱^s$$

و چون $\sin ۱^s = ۱۵ \sin ۱''$، داریم

$$\Delta z'' = ۱۵\Delta H^s \sin A \cos\phi$$
$$\Delta A'' = ۱۵\Delta H^s(\sin\phi - \cos\phi \cot z \cos A)$$

اگر ΔH^s مساوی یک ثانیه باشد، این معادلات به ترتیب نشان می‌دهند که فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم آسمانی با آهنگ $۱۵ \sin A \cos\phi$ ثانیهٔ قوسی در هر ثانیهٔ زمانی افزایش و سمت آن با آهنگ $۱۵[\sin\phi - \cos\phi \cot z \cos A]$ ثانیهٔ قوسی در هر ثانیهٔ زمانی کاهش می‌یابد.

اگر جرم آسمانی یک ستاره باشد، آهنگ تغییرات فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت آن با مقیاس ثانیهٔ قوسی بر ثانیهٔ زمانی نجومی بیان می‌شود. در مورد خورشید، آهنگ این تغییرات برحسب ثانیه قوسی بر ثانیهٔ زمان خورشیدی ظاهری یا، با دقت کافی، بر ثانیهٔ زمان متوسط خورشیدی است.

نتایج به‌دست آمده در بالا را می‌توان به‌سهولت با مشتق‌گیری، به‌دست آورد. از مثلث PZX، به‌موجب فرمول (الف)، داریم

$$\cos z = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H$$

که در آن δ و ϕ ثابت فرض می‌شوند. با مشتق‌گیری خواهیم داشت

$$\sin z \frac{dz}{dH} = \cos\delta \cos\phi \sin H$$

از فرمول (ب)، داریم

$$\sin z \sin A = \sin H \cos\delta \qquad (۲۸)$$

بنابراین

$$\frac{dz}{dH} = \sin A \cos \phi \qquad (۲۹)$$

که در اصل همان رابطهٔ (۲۶) است. اگر z و H به ترتیب برحسب ثانیهٔ قوسی و ثانیهٔ زمانی بیان شوند، آن‌وقت، داریم

$$\frac{dz}{dH} = ۱۵ \sin A \cos \phi$$

از رابطهٔ (۲۸) که در آن z، A، و H متغیرند، نسبت به H مشتق می‌گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned} \sin z \cos A \frac{dA}{dH} &= \cos H \cos \delta - \sin A \cos z \frac{dz}{dH} \\ &= \cos H \cos \delta - \sin^۲ A \cos z \cos \phi \end{aligned}$$

که در آن از رابطهٔ (۲۹) استفاده شده است. همچنین از (ج)، داریم

$$\cos \delta \cos H = \cos z \cos \phi - \sin z \sin \phi \cos A$$

بنابراین

$$\sin z \cos A \frac{dA}{dH} = \cos^۲ A \cos z \cos \phi - \sin z \sin \phi \cos A$$

سرانجام

$$\frac{dA}{dH} = -(\sin \phi - \cot z \cos A \cos \phi)$$

یا اگر A و H به ترتیب برحسب ثانیهٔ قوسی و ثانیهٔ زمانی بیان شوند، فرمول اخیر به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{dA}{dH} = -۱۵(\sin \phi - \cot z \cos A \cos \phi)$$

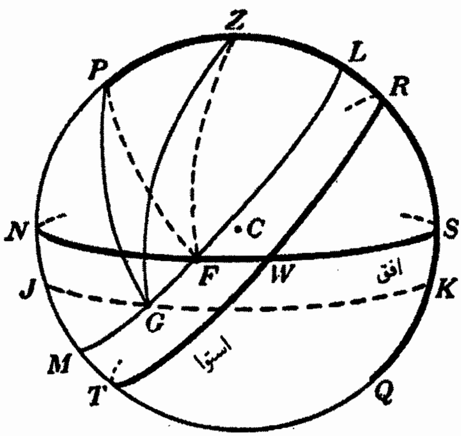
که پیشتر به‌دست آمد.

۳۳. شفق

پس از غروب خورشید، نور غیر مستقیم آن که به‌وسیلهٔ جو بالایی بازتاب و پراکنده می‌شود، همچنان زمین را روشن نگه می‌دارد، لیکن این روشنایی با فرو رفتن بیشتر خورشید به زیر افق، کاهش می‌یابد. هنگامی که خورشید به اندازهٔ $۱۸°$ زیر افق است (در این هنگام فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن $۱۰۸°$ است)، روشن‌سازی غیر مستقیم کاملاً ناچیز می‌شود. بازهٔ زمانی بین غروب خورشید و لحظه‌ای که فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن به $۱۰۸°$ می‌رسد مدت شفق خوانده می‌شود. مدت سپیدهٔ بامدادی (فلق) نیز به روشی مشابه تعریف می‌شود. برای مثال، مدت شفق را می‌توان به روش زیر محاسبه کرد. در شکل ۲۶، LFM مدار خورشید است (در این محاسبهٔ ویژه، چون نیازی به‌دقت زیاد نیست از تغییرات میل خورشید در طول روز مورد نظر چشم می‌پوشیم) و JGK دایرهٔ صغیره‌ای است موازی افق، که فاصلهٔ هر نقطهٔ آن از Z برابر $۱۰۸°$ است. این دایرهٔ صغیره، مدار خورشید را در نقطهٔ G قطع می‌کند. بنابراین، زمانی که لازم است تا خورشید از F به G برود، یعنی $F\hat{P}G$، برابر مدت شفق است. حال $F\hat{P}G = Z\hat{P}G - Z\hat{P}F$ است و چون $Z\hat{P}F$ زاویهٔ ساعتی خورشید به هنگام غروب است، مقدار آن را می‌توان از فرمول (۲۴) حساب کرد. در مثلث ZPG داریم $ZG = ۱۰۸°$، $PZ = ۹۰° - \phi$، و $PG = ۹۰° - \delta$؛ از این‌رو به‌موجب فرمول (الف) داریم

$$\cos ۱۰۸° = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos Z\hat{P}G$$

که محاسبهٔ $Z\hat{P}G$ را امکانپذیر می‌کند. البته، مقدار δ که در این فرمول به‌کار رفته است، بستگی به روز ویژهٔ سال مورد نظر دارد. بدین ترتیب مدت شفق پیدا می‌شود.



شکل ۲۶

از شکل ۲۶ روشن است که اگر NM بزرگتر از NJ باشد، به‌گفتهٔ دیگر اگر در نیمه شب ظاهری، خورشید بیش از $۱۸°$ زیر افق باشد شفق به پایان می‌رسد. حال چون $NT = ۹۰° - \phi$ و $MT = \delta$ است، پس $NM = ۹۰° - \phi - \delta$. از این‌رو، اگر $۹۰° - \phi - \delta > ۱۸°$ یا اگر $\delta < ۷۲° - \phi$ شفق پایان می‌یابد. برای مثال، در عرض جغرافیایی $۶۰°$ شمالی، اگر $\delta < ۱۲°$ شفق به پایان خواهد رسید. هنگامی که δ بزرگتر از $۱۲°$ است، فاصلهٔ سمت‌الرأسی خورشید بین غروب و نیمه شب ظاهری و همچنین بین نیمه شب ظاهری و طلوع کمتر از $۱۰۸°$ است و بنابراین در $۶۰°$ شمالی، در روزهایی از سال که میل خورشید از $۱۲°$ شمالی بیشتر می‌شود، آسمان هرگز به‌طور کامل تاریک نمی‌شود، این روزها بین ۳ اردیبهشت و ۳۱ مردادند.

تمرینها

نمادهای به‌کار رفته عبارت‌اند از:

$\phi =$ عرض جغرافیایی راصد، $z =$ فاصله سمت‌الرأسی

$A =$ سمت جرم آسمانی ، $\varepsilon =$ زاویهٔ میل دایرةالبروج

$H =$ زاویهٔ ساعتی

۱. اگر $z_۱$ و $z_۲$ به‌ترتیب فاصله‌های سمت‌الرأسی ستاره‌ای روی دایرهٔ نصف‌النهار و قائم مبدأ باشند، ثابت کنید که

(الف) $\cot\delta = \operatorname{cosec} z_۱ \sec z_۲ - \cot z_۱$ که در آن δ میل ستاره است.

(ب) $\cot\phi = \cot z_۱ - \cos\ \sec z_۱ \cos z_۲$

[لندن، ۱۹۲۹]

۲. اگر ψ زاویه‌ای باشد که مسیر یک ستاره هنگام طلوع با افق می‌سازد، ثابت کنید که

$$\cos\psi = \sin\phi\sec\delta$$

۳. اگر زاویه‌های ساعتی ستاره‌ای به میل $+\delta$ روی قائم مبدأ (غربی) و به‌هنگام غروب، برای محلی در عرض جغرافیایی شمالی، به‌ترتیب h و H باشند نشان دهید که

$$\cos h\cos H + \tan^۲\delta = ۰$$

بازهٔ زمانی بین عبور دبران (به‌میل $+۱۶°۲۲'$) از روی قائم مبدأ (غربی) و غروب آن را برای محلی در عرض جغرافیایی $۳۶°$ شمالی (با دقت ۱ر۰ دقیقهٔ زمان متوسط خورشیدی) حساب کنید.
[لندن، ۱۹۲۶]

۴. قایقی با سرعت ۵ گره دریایی حرکت می‌کند و پیوسته به‌سوی ستاره‌ای پیش می‌رود. ثابت کنید که مسافت طی‌شده به‌طرف غرب تقریباً برابر $۱/۳(z_۲^\circ - z_۱^\circ)\sec\phi$ مایل است، که در آن $z_۱^\circ$ و

z_2 فاصله‌های سمت‌الرأسی آغازی و پایانی ستاره، برحسب درجه و ϕ میانگین عرض جغرافیایی است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۱۷]

۵. اگرمتمم عرض برابر C باشد ثابت کنید

$$C = x + \cos^{-1}(\cos z \sec y)$$

که در آن

$$\tan x = \cot\delta \cos H$$
$$\sin y = \cos\delta \sin H$$

و H زاویهٔ ساعتی است.

۶. بازهٔ زمانی بین عبور دو ستاره با میلهای $60°$ شمالی و $60°$ جنوبی و فاصلهٔ $\cos^{-1}(-\frac{5}{8})$ از یکدیگر را از دایرهٔ نصف‌النهار با دقت یک ثانیهٔ زمانی متوسط خورشیدی پیدا کنید. (یک سال را $365\frac{1}{4}$ روز بگیرید).

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۳]

۷. اگر میل δ یک ستاره از عرض جغرافیایی ϕ بیشتر باشد، ثابت کنید که بیشترین سمت شرقی یا غربی این ستاره برابر است با

$$\sin^{-1}(\cos\delta \sec\phi)$$

۸. در ساعت $21^h 56^m$ زمان جهانی در ۲۸ مارس ۱۹۲۷ ستارهٔ درخشانی از میان ابرها با ارتفاع (تقریبی) $37°10'$ و سمت $136°$ غربی رصد شد؛ مکان راصد عبارت بود از عرض جغرافیایی $50°$ شمالی، طول جغرافیایی $7°15'$ غربی. ستاره را مشخص کنید (RAMS تقریباً $0^h 21^m$ بود).

[لندن، ۱۹۲۷]

۹. بُعد عیوق در لحظهٔ عبور بالایی در گرینویچ روز ۳۰ مه ۱۹۳۰ برابر $5^h 11^m$ و میل آن $+45°55'$ بود. ارتفاع و سمت این ستاره را در همان لحظه در نیویورک، در رصدخانهٔ دانشگاه کلمبیا به عرض جغرافیایی $40°49'$ شمالی و طول جغرافیایی $4^h 56^m$ غربی پیدا کنید.

۱۰. در عرض جغرافیایی شمالی $45°$ بزرگترین سمت یک ستاره پیرا قطبی $45°$ (شرقی یا غربی) است. ثابت کنید که میل ستاره $+60°$ است.

۱۱. اگر میل یک ستاره و عرض جغرافیایی ϕ معلوم باشند، نشان دهید که خطای موجود در مقدار محاسبه شدهٔ زاویهٔ ساعتی، ناشی از خطایی به‌اندازهٔ Δz در فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره، $\Delta z \operatorname{cosec} A \sec \phi$ است، که در آن A سمت ستاره است.

۱۲. اگر در ضمن اینکه زاویهٔ ساعتی یک ستاره به‌اندازهٔ ΔH افزایش می‌یابد، راصدی عرض جغرافیایی خود را به‌اندازهٔ $\Delta\phi$ افزایش دهد، نشان دهید که تغییر در ارتفاع برابر است با

$$\Delta\phi \cos A - \Delta H \sin A \cos \phi$$

۱۳. a و $a + \Delta a$ ارتفاعهای خورشیدند که از دو محل مجاور روی یک دایرهٔ نصف‌النهار به‌طور همزمان اندازه‌گیری شده‌اند. اگر ϕ عرض جغرافیایی یکی از این دومحل و δ میل خورشید باشد، ثابت کنید که اختلاف بین عرضهای جغرافیایی این دو محل تقریباً برابر است با

$$\Delta a \cos a \cos \phi / (\sin \delta - \sin a \sin \phi)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۱۴. دو ستارهٔ (α, δ) و (α', δ') در یک لحظه روی یک دایرهٔ قائم رصد می‌شوند. اگر H زاویهٔ ساعتی ستارهٔ اول باشد، ثابت کنید که

$$\cos(\chi + H) = \tan \phi \cos \chi \cot \delta$$

که در آن χ با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\tan \frac{۱}{۲}(\alpha - \alpha' - ۲\chi) = \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin(\delta' + \delta)} \cot \frac{۱}{۲}(\alpha' - \alpha)$$

۱۵. اگر طول سایهٔ یک دیرک قائم روی زمین تراز در ظهر ظاهری یکی از روزهای اعتدالین x باشد، و طول سایهٔ همان دیرک در انقلاب تابستانی در لحظهٔ عبور خورشید از روی قائم مبدأ y باشد نشان دهید که

$$x = y \tan \psi \tan \phi$$

که در آن

$$\sin \psi = \sin \varepsilon \operatorname{cosec} \phi$$

[لندن، ۱۹۲۸]

۱۶. دیواری راست به ارتفاع h، در جهت θ درجهٔ غرب جنوب کشیده شده است. ثابت کنید که وقتی زاویهٔ ساعتی H خورشید در یک روز اعتدالی از رابطهٔ

$$\tan H = \sin\phi \tan\theta$$

به‌دست می‌آید، دیوار سایه نمی‌اندازد و در ظهر ظاهری پهنای سایه برابر $h \tan\phi \sin\theta$ است.

۱۷. راصدی در عرض جغرافیایی ۵۰° ستاره‌ای را می‌بینید که درست در غرب پشت یک تپهٔ کم ارتفاع، که در فاصلهٔ ۱٫۶ کیلومتری است و با شیب ۳۰° نسبت به افق به‌طرف شمال سرازیر می‌شود، غروب می‌کند. ثابت کنید که اگر راصد گامی به‌طول ۹۱ سانتیمتر به‌طرف راست خود بردارد، ستاره را برای‌مدت ۲۲ ثانیهٔ دیگر خواهد دید.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۳]

۱۸. فاصلهٔ قطبی دایرهٔ عظیمه‌ای که از دو محل با یک عرض جغرافیایی می‌گذرد برابر میل خورشید است. ثابت کنید که طول شب در این دو محل با اختلاف طول جغرافیایی آنها برابر است.

۱۹. فرض کنید α و δ مختصات یک ستاره نسبت به دایرهٔ عظیمهٔ S و α' و δ' مختصات همان ستاره نسبت به دایرهٔ عظیمهٔ دیگر S' باشند. اگر i زاویهٔ میل S' نسبت به S باشد و گرهٔ صعودی S' بر S دارای مختصات $(\theta, ۰)$ در دستگاه اول و مختصات $(\theta', ۰)$ در دستگاه دوم باشد، درستی روابط زیر را نشان دهید

$$\begin{aligned}
\cos\delta' \cos(\alpha' - \theta') &= \cos\delta \cos(\alpha - \theta) \\
\cos\delta' \sin(\alpha' - \theta') &= \sin\delta \sin i + \cos\delta \cos i \sin(\alpha - \theta) \\
\sin\delta' &= \sin\delta \cos i - \cos\delta \sin i \sin(\alpha - \theta)
\end{aligned}$$

اگر $\alpha = ۷۵^\circ$، $\delta = ۱۵^\circ$، $\theta = ۲۱۵^\circ$، $\theta' = ۱۱۵^\circ$، و $i = ۲۳^\circ ۳۰'$ باشد از معادلات اخیر نشان دهید که $\alpha' = ۳۲۷^\circ ۱۲'$ و $\delta' = ۲۹^\circ ۰۰'$ است.

۲۰. نشان دهید که اگر a ارتفاع ستارهٔ قطبی، H زاویهٔ ساعتی و p فاصلهٔ قطبی آن (برحسب ثانیهٔ قوسی) باشد، عرض جغرافیایی به‌تقریب از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\phi = a - p\cos H + \frac{۱}{۲} p^۲ \sin^۲ H \tan a \sin ۱''$$

۲۱. یک جرم آسمانی (به‌میل δ) در فاصلهٔ زاویه‌ای کوچک H از دایرهٔ نصف‌النهار قرار دارد. ثابت کنید که فاصلهٔ سمت‌الرأسی z به‌تقریب از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$z = \phi - \delta + \alpha_۱ - \alpha_۲$$

که در آن $\alpha_۱$ (برحسب دقیقهٔ قوسی) با رابطهٔ زیر داده شود

$$\alpha_۱ = \frac{۲\cos\phi\cos\delta}{\sin(\phi-\delta)}\sin^۲\frac{H}{۲}\operatorname{cosec} ۱'$$

و

$$\alpha_۲ = \frac{۱}{۲}\alpha_۱^۲\cot(\phi-\delta)\sin ۱'$$

۲۲. اگر در محلی به‌عرض جغرافیایی ϕ ارتفاع خورشید در قائم مبدأ a و طول سماوی آن L باشد، ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\phi = \sin^{-۱}(\sin L\sin\varepsilon\operatorname{cosec} a)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۲۳. ثابت کنید که در عرض جغرافیایی $۴۵°$ بازهٔ زمانی بین لحظه‌ای که سمت یک ستاره $۹۰°$ شرقی است و لحظه‌ای که این ستاره غروب می‌کند، مقدار ثابتی است.

۲۴. اگر δ میل یک ستاره و A سمت بیشینهٔ آن باشد نشان دهید که سمت ستاره، در t ثانیهٔ زمانی از لحظه‌ای که سمت آن A است، به‌اندازهٔ $(۱/۲)۱۵^۲t^۲\sin ۱''\sin^۲\delta\tan A$ ثانیهٔ قوسی تغییر می‌کند.

۲۵. اگر η زاویهٔ اختلاف‌منظر و ϕ و δ مقادیر ثابتی باشند، درستی روابط زیر را ثابت کنید

(الف) $\dfrac{d\eta}{dH} = -\cos\phi\cos A\operatorname{cosec} z$

(ب) $\dfrac{d^۲z}{dH^۲} = \dfrac{d\eta}{dH}\cos\delta\cos\eta$

(ج) $\dfrac{d^۲A}{dH^۲} = -\dfrac{\cos\delta}{\sin^۲ z}\left(\cos z\cos\eta\dfrac{dz}{dH} + \sin z\sin\eta\dfrac{d\eta}{dH}\right)$

۲۶. اگر H زاویهٔ ساعتی ستاره‌ای در لحظهٔ طلوع آن باشد، نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tan^۲\frac{H}{۲} = \frac{\cos(\phi-\delta)}{\cos(\phi+\delta)}$$

۲۷. در محلی به‌عرض شمالی ϕ، دو ستارهٔ A و B (به‌ترتیب با میلهای δ و $\delta_۱$) به‌طور همزمان طلوع می‌کنند و در موقع غروب ستارهٔ B، ستارهٔ A در حال عبور است. رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\tan\phi\tan\delta = ۱ - ۲\tan^۲\phi\tan^۲\delta_۱$$

۲۸. اگر دو ستارهٔ (α, δ) و $(\alpha_۱, \delta_۱)$ در محلی به‌عرض جغرافیایی ϕ در یک لحظه طلوع کنند، نشان دهید که رابطهٔ زیر برقرار است

$$\cot^۲ \phi \sin^۲(\alpha_۱ - \alpha) = \tan^۲ \delta + \tan^۲ \delta_۱ - ۲ \tan \delta \tan \delta_۱ \cos(\alpha_۱ - \alpha)$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۲۹. در محلی به عرض جغرافیایی ϕ مشاهده می‌شود که خورشید h ساعت قبل از ظهر ظاهری و در روز بعد m دقیقه دیرتر طلوع می‌کند. میل آن در روز اول برابر δ است. نشان دهید که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ طلوع به دقیقهٔ قوسی چنین است

$$۱۵m \cos^۲ \delta \operatorname{cosec} \phi$$

[آزمون کالج]

۳۰. اگر شفق زمانی پایان یابد که مرکز خورشید °۱۸ زیر افق رفته است، نشان دهید که مدت شفق در استوا برحسب ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{۱۲}{\pi} \sin^{-۱}(\sin ۱۸^\circ \sec \delta)$$

با استفاده از این فرمولها مدت شفق را در انقلاب تابستانی محاسبه کنید.

[لندن، ۱۹۳۰]

۳۱. نشان دهید که در محلی به‌عرض جغرافیایی ϕ کوتاهترین مدت شفق برحسب ساعت برابر است با

$$\frac{۲}{۱۵} \sin^{-۱}(\sin ۹^\circ \sec \phi)$$

که در آن $\sin^{-۱}(\sin ۹^\circ \sec \phi)$ به درجه بیان می‌شود.

[نجوم کروی تألیف بال]

۳۲. اگر آغاز و پایان شفق هنگامی باشد که خورشید °۱۸ زیر افق است، نشان دهید تا زمانی که مقدار عددی میل خورشید کمتر از °۱۸ است درهمهٔ محلها روزی وجود دارد که مدت آن، با در نظر گرفتن شفق، بیشتر از ۱۲ ساعت است.

۳۳. اگر آغاز و پایان روز هنگامی در نظر گرفته شود که خورشید به‌اندازهٔ زاویهٔ θ زیر افق است. نشان دهید که اگر عرض جغرافیایی کمتر از ϕیی باشد که از رابطهٔ $\sin \phi = \sin \varepsilon \sin \theta$ به‌دست می‌آید، در این صورت کوتاهترین روز در انقلاب زمستانی وجود نخواهد داشت. در این رابطه، ε زاویه

دایرةالبروج است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۷]

۳۴. به‌فرض اینکه خورشید به‌طور یکنواخت روی دایرةالبروج حرکت کند و یک دور کامل را در ۳۶۵ روز به پایان برساند، نشان دهید که در محلی به‌عرض جغرافیایی ϕ تعداد شبهایی که شفق حتی در نیمه شب وجود دارد عدد صحیح بعد از

$$\frac{۷۳}{۳۶}\cos^{-۱}\{\cos(\phi+۱۸^\circ)/\sin\varepsilon\}$$

است؛ آغاز یا پایان شفق را هنگامی بگیرید که خورشید ۱۸° زیر افق است.

۳۵. اگر θ مقدار انخفاض خورشید در زیر افق در پایان شفق باشد و η', η به‌ترتیب زاویه‌های اختلاف‌منظر در پایان شفق و در موقع غروب باشند، ثابت کنید که مدت شفق (T) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۲\sin^{۲}\frac{T}{۲}\cos^{۲}\phi = ۱-\cos\theta\cos(\eta'-\eta)$$

۳۶. بُعد ستاره‌ای $۵^{\mathrm{h}}۴۹^{\mathrm{m}}$، میل آن $+۷^\circ ۲۳'$، و زاویهٔ میل دایرةالبروج $۲۳^\circ ۲۷'$ است. نشان دهید که طول و عرض سماوی این ستاره به‌ترتیب برابرند با $۸۷^\circ ۱۰'$ و $-۱۶^\circ ۲'$.

۳۷. دو ستارهٔ $(\alpha_۱,\delta_۱)$ و $(\alpha_۲,\delta_۲)$ دارای یک طول سماوی‌اند، تساوی زیر را ثابت کنید

$$\sin(\alpha_۱-\alpha_۲) = \tan\varepsilon(\cos\alpha_۱\tan\delta_۲-\cos\alpha_۲\tan\delta_۱)$$

۳۸. ستاره‌ای به بُعد α و میل δ دارای عرض سماوی کوچک β است. ثابت کنید که وقتی بُعد خورشید α است، طول سماوی خورشید تقریباً $\beta\sin\delta\cot\alpha$ با طول سماوی ستاره اختلاف دارد.

۳۹. نشان دهید که زاویهٔ میل دایرةالبروج را می‌توان با اندازه‌گیری میل δ خورشید در ظهری نزدیک به انقلاب تابستانی و با استفاده از فرمول $\varepsilon=\delta+q^{۲}\sin ۲\delta$ تعیین کرد. در این رابطه q نصف زاویهٔ متمم بُعد خورشید است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۴]

۴۰. قطب راه شیری در بُعد $۱۲^{\mathrm{h}}۴۸^{\mathrm{m}}$ و میل $+۲۷^\circ$ است. خورشید تقریباً در چه تاریخهایی از راه شیری عبور می‌کند؟ (زاویهٔ میل دایرةالبروج $۲۳^\circ ۲۷'$ است).

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۵]

۴۱. ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی یک تغییر مکان کوچک، به‌اندازهٔ dr، به‌طرف نقطهٔ O به مختصات $(\alpha_۰,\delta_۰)$ انجام می‌دهد. نشان دهید که تغییرات حاصل در مختصات استوایی ستاره (α,δ) از

رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند

$$\cos\delta d\alpha = \cos\delta_{\cdot} \sin(\alpha - \alpha_{\cdot}) \operatorname{cosec} r\, dr$$
$$d\delta = [\cos\delta_{\cdot} \sin\delta \cos(\alpha - \alpha_{\cdot}) - \sin\delta_{\cdot} \cos\delta] \operatorname{cosec} r\, dr$$

که در آن r طول کمانی است که ستاره و نقطهٔ O را روی کرهٔ سماوی به‌هم می‌پیوندد.
[گلاسکو، ۱۹۷۴]

۴۲. ثابت کنید که فاصلهٔ سمت‌الرأسی z قطب شمال دایرةالبروج از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$z = \cos^{-1}(\cos\varepsilon \sin\phi - \sin\varepsilon \cos\phi \sin T)$$

در این رابطه ε زاویهٔ میل دایرةالبروج، ϕ عرض جغرافیایی راصد، و T زمان نجومی محلی است.

۳

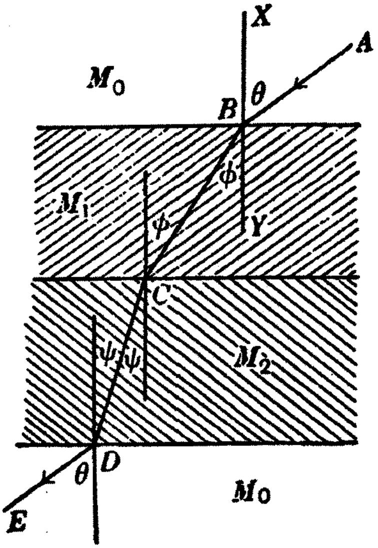
شکست

۳۴. قوانین شکست

در رصدهای نجومی، نور جرم آسمانی رصد شده قبل از رسیدن به راصد از جو زمین عبور می‌کند. پرتو نور در حین عبور از جو، به‌سبب پدیدهٔ شکست، تغییر جهت می‌دهد که مقدار آن به مشخصات فیزیکی جو و ارتفاع (یا فاصلهٔ سمت‌الرأسی) جسم مورد نظر بستگی دارد. بدین ترتیب، در وهلهٔ نخست، لازم است که اثرهای جو زمین را از این رصدها حذف کنیم. از مطالعهٔ شهابها چنین برمی‌آید که جو زمین حداقل تا ارتفاع ۱۶۰ کیلومتری گسترش دارد، زیرا حتی در آن ارتفاع نیز آنقدر هوا وجود دارد که مالش آن روی یک شهاب تندرو آن را درخشان می‌کند. اما هوا در ارتفاع بیش از ۶۵ کیلومتر به قدری رقیق است که اثر ناچیزی بر مسیر پرتو نور دارد.

نخست قوانین شکست را بیان می‌کنیم.

پرتو نور AB را در نظر بگیرید که از یک محیط شفاف $M_\circ$ (مانند هوا) عبور می‌کند و در منطقهٔ B به تیغه‌ای، با رخهای تخت موازی، در یک محیط شفاف دیگر M_1 (مانند شیشه) فرود می‌آید (شکل ۲۷). مسیر این پرتو در محیط M_1 در راستای خطی مانند BC خواهد بود، که جهتی غیر از جهت AB دارد. گفته می‌شود که پرتو نور در نقطهٔ B می‌شکند. فرض کنید YBX در نقطهٔ B بر تیغه عمود باشد. زاویهٔ ABX (که با θ نشان داده می‌شود) زاویهٔ فرودی، و زاویهٔ YBC (که با ϕ نشان داده می‌شود) زاویهٔ خروجی خوانده می‌شود. قوانین شکست عبارت‌اند از: (الف) پرتو فرودی AB، پرتو شکستهٔ BC، و خط عمود در نقطهٔ B بر سطح جدا کنندهٔ دو



شکل۲۷

محیط M_0 و M_1 در یک صفحه‌اند؛ (ب) رابطهٔ بین ϕ و θ به‌صورت زیر است

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \mu_1 \qquad (1)$$

μ_1 مقداری ثابت است که به خواص نوری دو محیط مورد نظر بستگی دارد. در این حالت، μ_1 ضریب شکست برای دو محیط M_0 و M_1 است و مقدار آن را می‌توان با آزمایش تعیین کرد.

اکنون فرض کنید پرتو BC از محیط M_1 عبور کند و به محیط M_2 وارد شود. در این حال ϕ زاویهٔ فرودی و ψ زاویهٔ خروجی است. بنابراین داریم

$$\frac{\sin\phi}{\sin\psi} = \mu \qquad (2)$$

که در آن μ ضریب شکست برای دو محیط M_1 و M_2 است. فرض خواهیم کرد که این پرتو در نقطهٔ D وارد محیط M_0 شود. مسیر آن یعنی DE، در محیط M_0 موازی جهت اولیه‌اش AB در همان محیط است. مسیر پرتو برگشت پذیر است، بدین معنی که یک پرتو فرودی در جهت ED، در سطح بین دو محیط M_0 و M_2 در راستای DC شکسته خواهد شد. از این‌رو داریم

$$\frac{\sin\theta}{\sin\psi} = \mu_2 \qquad (3)$$

که در آن μ_2 ضریب شکست بین محیطهای M_0 و M_2 است. از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۳) داریم

$$\frac{\sin\phi}{\sin\psi} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

یا

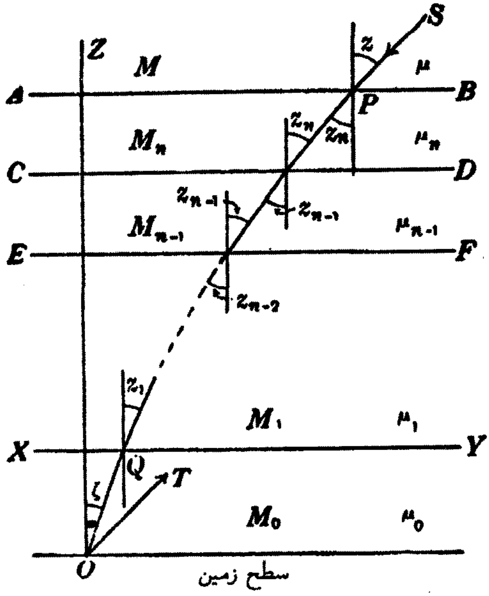
$$\mu_1 \sin\phi = \mu_2 \sin\psi \tag{۴}$$

از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌گیریم که $\mu = \mu_2/\mu_1$

اگر M_0 را یک محیط استاندارد بگیریم، می‌توانیم μ_1 را صرفاً به‌عنوان ضریب شکست محیط M_1 و μ_2 را به‌عنوان ضریب شکست محیط M_2 تعریف کنیم و مقادیر μ_1 و μ_2 را می‌توانیم معلوم فرض کنیم. اکنون فقط دو محیط M_1 و M_2 را در شکل ۲۷ در نظر می‌گیریم. BC پرتوی است در محیط M_1 که در C بر سطح جدا کنندهٔ M_1 و M_2 فرود می‌آید و CD پرتو واقع در محیط M_2 است. ϕ زاویهٔ فرودی و ψ زاویهٔ خروجی است و رابطهٔ بین ϕ و ψ با فرمول (۴) داده می‌شود.

۳۵. شکست برای فاصله‌های سمت‌الرأسی کوچک

چون چگالی هوا با افزایش ارتفاع از سطح زمین کاهش می‌یابد، بهتر است جو زمین را متشکل از تعداد زیادی لایه‌های نازک کروی و هم مرکز با سطح زمین (که کروی فرض می‌شود) بگیریم که در هر یک، چگالی و سایر مشخصات فیزیکی یکسان‌اند. ساده‌ترین مورد در بررسی پدیدهٔ شکست نجومی این است که جرم آسمانی تحت رصد، مثلاً یک ستاره، تقریباً در بالای سر باشد. در این حالت می‌توانیم از انحنای طبقات جوی که پرتوهای ستاره از آنها عبور می‌کنند چشم بپوشیم و سطوح جداکنندهٔ آنها را صرفاً یک رشته صفحات موازی بگیریم. فرض می‌کنیم تعداد $n+1$ لایهٔ موازی (که فقط چند تا از آنها در شکل ۲۸ نشان داده شده‌اند) وجود داشته باشند و AB حد مؤثر بالایی جو باشد که بالاتر از آن هوا، به‌سبب رقت زیادش، در ایجاد شکست بی‌تأثیر است. هر لایه، خواص نوری خود، و به‌ویژه ضریب شکست خود را دارد. محیط بالای سطح AB را با M، لایهٔ بین CD و AB را با M_n و غیره نشان می‌دهیم. ضریب شکست اینها به‌ترتیب μ، μ_n، μ_{n-1}، . . . ، μ_0 هستند که در آن μ_0 ضریب شکست لایهٔ زیرین، M_0، است. محیط M را که عملاً مانند خلأ است، می‌توانیم به‌عنوان محیط استاندارد بگیریم و بنابراین μ را برابر یک قرار دهیم. اگر z زاویهٔ فرودی پرتوی از ستاره بر سطح AB باشد که سرانجام در نقطهٔ O به راصد می‌رسد، آن وقت z فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ستاره نامیده می‌شود. اگر شکست جوی نبود، راصد ستاره را در جهت OT که موازی PS است می‌دید. با به‌کار بردن فرمول (۴) رشته معادلات زیر را در



شکل۲۸

مورد زوج لایه‌های متوالی می‌نویسیم (علائم به‌کار رفته، در شکل ۲۸ نشان داده شده‌اند)

$$\mu \sin z = \mu_n \sin z_n$$

یا، چون $\mu = ۱$ است داریم

$$\sin z = \mu_n \sin z_n$$
$$\mu_n \sin z_n = \mu_{n-۱} \sin z_{n-۱}$$
$$\mu_{n-۱} \sin z_{n-۱} = \mu_{n-۲} \sin z_{n-۲}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\mu_۱ \sin z_۱ = \mu_. \sin \zeta$$

درمعادلهٔ آخر ζ زاویهٔ بین جهت سمت‌الرأسی OZ و جزء نهایی مسیر پرتو یعنی OQ، است. بدین ترتیب، ζ فاصله سمت‌الرأسی رصد شدهٔ ستاره است. از این معادلات آشکارا داریم

$$\sin z = \mu_. \sin \zeta \qquad (۵)$$

$\mu_.$ ضریب شکست هوا در سطح زمین است. از قانون اول شکست روشن است که مسیر پرتو در لایه‌های مختلف جو در یک صفحهٔ قائم قرار دارد. ضریب شکست، با افزایش چگالی در

لایه‌های جوی به طرف پایین، از مقدار μ در M پیوسته به مقدار $\mu_۰$ در $M_۰$ افزایش می‌یابد. از این‌رو، می‌توان از رابطهٔ (۴) نتیجه گرفت که زاویه‌های z، z_n، $z_{n-۱}$، $z_۱$، ...، ζ یک دنبالهٔ کاهشی تشکیل می‌دهند و بدین ترتیب مسیر پرتو به‌نحوی که در نمودار نشان داده شده است خم می‌شود. بویژه ζ از z کوچکتر است، یعنی ستاره از حالتی که جو از نظر شکست بی‌تأثیر فرض شود، به سمت‌الرأس نزدیکتر دیده می‌شود. زاویهٔ $z-\zeta$ به زاویهٔ شکست موسوم است و با R نشان داده می‌شود. بنابراین رابطهٔ (۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\sin(\zeta + R) = \mu_۰ \sin\zeta$$

یا

$$\sin\zeta\cos R + \cos\zeta\sin R = \mu_۰ \sin\zeta$$

چون R زاویهٔ کوچکی است می‌توانیم بنویسیم: $\cos R = ۱$ و $\sin R = R$ (با فرض اینکه R برحسب مقیاس دایره‌ای بیان شود). بدین ترتیب داریم

$$\sin\zeta + R\cos\zeta = \mu_۰ \sin\zeta$$

یا

$$R = (\mu_۰ - ۱)\tan\zeta \qquad (۶)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که، در فواصل سمت‌الرأسی کوچک، زاویهٔ شکست با تانژانت فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شده متناسب است. حال $\mu_۰$ ضریب شکست هوا در سطح زمین است و مقدار آن در هر لحظهٔ معین به چگالی و دما بستگی دارد. در شرایط استاندارد، فشار جوی $۷۶۰\,\mathrm{mm}$ و دمای جو $۱۰^\circ\mathrm{C}$ است، و در این صورت شکست را شکست میانگین می‌نامند. در این شرایط $\mu_۰ - ۱$ تقریباً ۰٫۰۰۰۲۹ است، به‌طوری که R تقریباً $۰٫۰۰۰۲۹\tan\zeta$ یا، برحسب ثانیهٔ قوسی $۲۰۶۲۶۵ \times ۰٫۰۰۰۲۹\tan\zeta$ است. ضریب $\tan\zeta$ با رصدهای نجومی با دقت بیشتری تعیین می‌شود و معمولاً مقدار پذیرفته شدهٔ آن ۵۸″٫۲ است. پس داریم

$$R = ۵۸''٫۲\tan\zeta$$

ضریب $\tan\zeta$ به ثابت‌شکست میانگین موسوم است و با k نشان داده می‌شود. پس داریم

$$R = k\tan\zeta \qquad (۷)$$

شکست R' در هر فشار جوی P (برحسب mmHg) و هر دمای T (برحسب سلسیوس) برحسب شکست میانگین R از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{R'}{R} = \frac{۰٫۳۷۲P}{۲۷۳+T} \qquad (۸)$$

در اغلب موارد، فرمول (۷) برای فواصل سمت‌الرأسی کمتر از ۴۵° از دقت کافی برخوردار است.

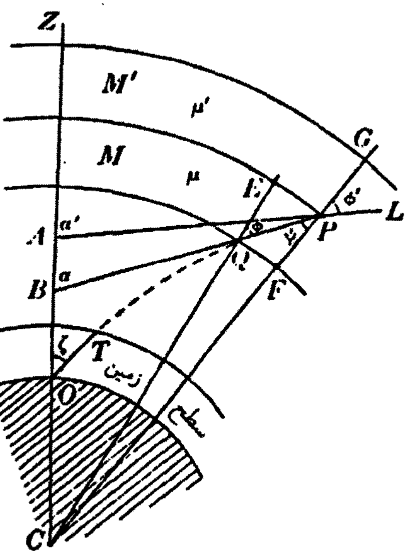
۳۶. فرمول کلی شکست

هنگامی که فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم آسمانی رصد شده قابل ملاحظه باشد، دیگر نمی‌توان جو را که پرتوهای نور از آن عبور می‌کنند به‌صورت طبقاتی از لایه‌های تخت درنظر گرفت. فرض کنید زمین کروی است و جو آن از لایه‌های کروی درست شده است. در شکل ۲۹، C مرکز زمین، O راصد، و COZ جهت سمت‌الرأسی راصد است. فرض کنید μ' و μ ضرایب شکست دو لایهٔ نازک مجاور M' و M باشند و LP قسمتی از یک پرتو در محیط M' باشد که سرانجام در O به راصد می‌رسد. این پرتو در P در راستای PQ می‌شکند و شکست آن در سطوح بین لایه‌های متوالی به گونه‌ای است که جزء نهایی مسیر آن TO است. اگر لایه‌ها نازک باشند مسیر پرتو خم می‌شود و راصد جرم آسمانی را در جهت OT، یعنی مماس بر منحنی در نقطهٔ O، مشاهده می‌کند. بدین ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شده $Z\hat{O}T$ است که با ζ نشان داده می‌شود. شعاعهای CP و CE را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $GPL = \phi'$، $QPF = \psi$، و $EQP = \phi$ باشد. در این صورت، چون شعاع CP در P بر سطح جداکنندهٔ لایه‌های M' و M عمود است، از قوانین شکست داریم

$$\mu' \sin\phi' = \mu \sin\psi \tag{۹}$$

اکنون از مثلث CQP، که در آن $CP = r'$، $CQ = r$، و $CQP = ۱۸۰^\circ - \phi$ است داریم

$$r \sin\phi = r' \sin\psi \tag{۱۰}$$



شکل۲۹

$\sin\psi$ را از روابط (۹) و (۱۰) حذف می‌کنیم، آن‌گاه داریم

$$r'\mu'\sin\phi' = r\mu\sin\phi \qquad (11)$$

این یک رابطهٔ کلی است که برای هر دو لایهٔ مجاوری با هر ارتفاعی از سطح زمین صادق است. اگر $r_\circ$، $\mu_\circ$، و $\phi_\circ$ مقادیر r، μ، و ϕ در لایهٔ زیرین مجاور سطح زمین باشند، از رابطهٔ (۱۱) خواهیم داشت

$$r\mu\sin\phi = r_\circ\mu_\circ\sin\phi_\circ$$

اما $r_\circ$ مساوی a یعنی شعاع زمین است و $\phi_\circ$ صرفاً زاویهٔ ZOT یا ζ یعنی فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شده است. از این‌رو داریم

$$r\mu\sin\phi = \mu_\circ a\sin\zeta \qquad (12)$$

اکنون زاویه‌ای را که تحت آن پرتو در عبور از لایه‌ای به لایهٔ دیگر منحرف می‌شود در نظر می‌گیریم. LP و PQ را امتداد می‌دهیم تا OZ را به‌ترتیب در A و B قطع کنند، و $Z\hat{A}P$ و $Z\hat{B}P$ را با α' و α نمایش می‌دهیم. در این صورت زاویه‌ای که پرتو در P تحت آن شکسته می‌شود $A\hat{P}B$ یا $\alpha' - \alpha$ است که با ΔR نمایش می‌دهیم، به‌طوری که داریم

$$\Delta R = \alpha' - \alpha \qquad (13)$$

اگر $A\hat{C}P = \theta'$ و $B\hat{C}Q = \theta$ و نیز

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \qquad (14)$$

باشد، آنگاه با فرض نازک بودن لایه‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$QF = EP = r\Delta\theta$$

همچنین اگر $r' = r + \Delta r$ باشد، پس $QE = \Delta r$ است. در مثلث بینهایت کوچک EQP که در آن E یک زاویهٔ قائمه است داریم

$$\tan\phi = \frac{EP}{QE} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta r} \qquad (15)$$

چون $\alpha' = \theta' + \phi'$ و $\alpha = \theta + \phi$ است، از این‌رو داریم

$$\Delta R \equiv \alpha' - \alpha = (\phi' - \phi) + (\theta' - \theta)$$

یا، اگر $\phi - \phi'$ را با $\Delta\phi$ نشان دهیم داریم

$$\Delta R = \Delta\phi + \Delta\theta \tag{۱۶}$$

اکنون اگر در رابطهٔ (۱۱) بنویسیم $\mu' = \mu - \Delta\mu$ (با افزایش r مقدار μ کاهش می‌یابد) خواهیم داشت

$$(r + \Delta r)(\mu - \Delta\mu)\sin(\phi + \Delta\phi) = r\mu\sin\phi$$

و چون $\Delta\phi$ زاویهٔ کوچکی است داریم

$$(r + \Delta r)(\mu - \Delta\mu)(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi) = r\mu\sin\phi$$

پس از حذف حاصلضربهای کمیتهای بینهایت کوچک Δr، $\Delta\mu$، و $\Delta\phi$ و تقسیم همهٔ عبارتها بر $r\mu\sin\phi$ خواهیم داشت

$$\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta\mu}{\mu} + \Delta\phi\cot\phi = ۰ \tag{۱۷}$$

اما از رابطهٔ (۱۵) داریم

$$\frac{\Delta r}{r} = \Delta\theta\cot\phi$$

از این‌رو رابطهٔ (۱۷) بصورت زیر در می‌آید

$$(\Delta\theta + \Delta\phi)\cot\phi - \frac{\Delta\mu}{\mu} = ۰$$

که با استفاده از رابطهٔ (۱۶) چنین می‌شود

$$\Delta R = \frac{\Delta\mu}{\mu}\tan\phi \tag{۱۸}$$

رابطهٔ (۱۲) به ما امکان می‌دهد که $\tan\phi$ را برحسب متغیرهای μ و r و مقادیر ثابت a، $\mu_۰$، و ζ بیان کنیم. بدین ترتیب رابطهٔ (۱۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta R = \frac{\Delta\mu}{\mu}\frac{a\mu_۰\sin\zeta}{(r^۲\mu^۲ - a^۲\mu_۰^۲\sin^۲\zeta)^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۱۹}$$

این معادله مقدار شکستی که یک پرتو در عبور از یک لایهٔ کروی با ضریب شکست $\mu - \Delta\mu$ به لایهٔ مجاور زیرین با ضریب شکست μ متحمل می‌شود را بیان می‌کند. شکست کل، R، ناشی از همهٔ جو از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R = a\mu_۰\sin\zeta\int_۱^{\mu_۰}\frac{d\mu}{\mu(r^۲\mu^۲ - a^۲\mu_۰^۲\sin^۲\zeta)^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۲۰}$$

حدود انتگرال، در سطح زمین $\mu_\circ$ و در بالاترین لایه یک است.

فرمول (۲۰) رابطهٔ کلی شکست است. باید توجه داشت که این انتگرال دو متغیر r و μ دارد. ضریب شکست هر لایه به مشخصات فیزیکی آن لایه بستگی دارد که به نوبهٔ خود، به ارتفاع لایه از سطح زمین، یعنی عملاً به r بستگی دارد. قبل از اینکه بتوان انتگرال (۲۰) را با دقت بسیار محاسبه کرد باید رابطهٔ بین μ و r مشخص شود. این کار مستلزم اعمال قوانین فیزیکی است که فشار، چگالی، و دمای هوا را در بر می‌گیرند. متأسفانه دانش ما در مورد حالت فیزیکی طبقات بالاتر جو برای تعیین بستگی دقیق بین μ و r کافی نیست و بنابراین ناگزیریم معادلهٔ (۲۰) را با روشهای تقریبی بررسی کنیم.

۳۷. بسط فرمول کلی شکست

ارتفاع جو در مقایسه با شعاع زمین کوچک است و اگر بنویسیم

$$\frac{r}{a} = 1 + s \qquad (۲۱)$$

می‌توانیم s را یک کمیت کوچک بگیریم، زیرا مقدار آن از صفر در سطح زمین تا تقریباً ۰٫۰۱ در ارتفاع ۶۵ کیلومتری که بالاتر از آن می‌توان تأثیر هوا در ایجاد شکست را ناچیز گرفت، تغییر می‌کند.[۱] با استفاده از رابطهٔ (۲۱) و چشمپوشی از جمله‌های شامل s^2، s^3، و غیره، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}(r^2\mu^2 - a^2\mu_\circ^2 \sin^2\zeta)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{a}(\mu^2 - \mu_\circ^2 \sin^2\zeta + 2s\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{a}(\mu^2 - \mu_\circ^2\sin^2\zeta)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{s\mu^2}{\mu^2 - \mu_\circ^2 \sin^2\zeta}\right)\end{aligned}$$

از این‌رو رابطهٔ (۲۰) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}R = \mu_\circ \sin\zeta \int_1^{\mu_\circ} \frac{d\mu}{\mu(\mu^2 - \mu_\circ^2\sin^2\zeta)^{\frac{1}{2}}} - \mu_\circ \sin\zeta \int_1^{\mu_\circ} \frac{s\mu d\mu}{(\mu^2 - \mu_\circ^2 \sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}\\ \equiv \qquad R_1 \qquad\qquad -R_2 \qquad (۲۲)\end{aligned}$$

بسط به‌کمک قضیهٔ دوجمله‌ای فقط در صورتی معتبر است که $2s\mu^2$ در مقایسه با $(\mu^2 - \mu_\circ^2 \sin^2\zeta)$ کوچک باشد و چون $\mu_\circ$ و μ تقریباً برابر واحدند پس هنگامی که جرم آسمانی تحت رصد روی افق و یا در نزدیکی آن است (یعنی ζ مساوی یا نزدیک به 90° و $\sin\zeta$ برابر یا نزدیک به یک است) بسط مزبور معتبر نیست. نخست عبارت R_1 را در رابطهٔ (۲۲) در نظر می‌گیریم. شکل آن چنین است

$$\alpha \int \frac{d\mu}{\mu(\mu^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۱. شعاع متوسط زمین ۶۳۳۶ کیلومتر است.

که انتگرالی است شناخته شده و مقدار آن برابر $\sin^{-1}\alpha/\mu$ – است. از این‌رو، با قرار دادن حدود انتگرال یعنی $\mu_{\circ}$ و یک خواهیم داشت

$$R_{1} = \sin^{-1}(\mu_{\circ} \sin\zeta) - \zeta$$

اکنون $\mu_{\circ}$ یعنی ضریب شکست هوا در سطح زمین که اندکی بزرگتر از یک است را با $(1 + x)$ نمایش می‌دهیم، که در آن x کمیت کوچکی است. در این صورت داریم

$$R_{1} \equiv f(x) = \sin^{-1}[(1 + x)\sin\zeta] - \zeta$$

و با استفاده از قضیهٔ ماکلورن و چشمپوشی از عبارتهای شامل x^{2}، x^{3}، و مانند آن، خواهیم داشت

$$R_{1} \equiv f(x) = f(0) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0}$$

چون داریم

$$f(0) = \sin^{-1}(\sin\zeta) - \zeta = 0$$

و

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sin\zeta}{\{1 - (1 + x)^{2}\sin^{2}\zeta\}^{\frac{1}{2}}}$$

نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} = \tan\zeta$$

از این‌رو با درجهٔ تقریب یاد شده، داریم

$$R_{1} = x\tan\zeta$$

یا

$$R_{1} = (\mu_{\circ} - 1)\tan\zeta \tag{۲۳}$$

که، با مراجعه به بخش ۳۵، می‌توان دید که این همان رابطه‌ای است که برای فواصل سمت‌الرأسی کوچک به‌دست آمد. اکنون انتگرال دوم در رابطهٔ (۲۲)، یعنی

$$R_{2} = \mu_{\circ}\sin\zeta\int_{1}^{\mu_{\circ}}\frac{s\mu d\mu}{(\mu^{2} - \mu_{\circ}^{2}\sin^{2}\zeta)^{\frac{3}{2}}}$$

را در نظر می‌گیریم. در این عبارت s را کمیتی کوچک می‌گیریم که، چنانکه دیدیم، از صفر تا ۰٫۰۱ تغییر می‌کند. اکنون می‌توانیم، با استفاده از قانون گلدستون و دیل، μ را برحسب چگالی جوی، ρ، به‌صورت

$$\mu = 1 + c\rho \qquad (24)$$

بیان کنیم که در آن c ثابت و مقدار عددی آن ۰٫۲۲۶ است. برای هوا در سطح زمین (با چگالی ρ_0) داریم

$$c\rho_0 = 0{,}00029$$

از رابطهٔ (۲۴) معادلهٔ زیر را می‌توانیم بنویسیم

$$d\mu = c\,d\rho$$

که تغییر ضریب شکست را با چگالی جوی بیان می‌کند. بنابراین داریم

$$R_2 = c\mu_0 \sin\zeta \int_0^{\rho_0} \frac{s\mu\,d\rho}{(\mu^2 - \mu_0^2 \sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (25)$$

چون μ و μ_0 خیلی نزدیک به واحد و s کوچک است، اگر در این انتگرال بنویسیم $\mu = \mu_0 = 1$، در مقدار R_2 تأثیر اندکی خواهد گذاشت. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} R_2 &= c\sin\zeta \int_0^{\rho_0} \frac{s\,d\rho}{(1 - \sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= c\tan\zeta\sec^2\zeta \int_0^{\rho_0} s\,d\rho \qquad (26) \end{aligned}$$

ولی داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_0} s\,d\rho &= [s\rho]_0^{\rho_0} - \int_{s'}^{0} \rho\,ds \\ &= [s\rho]_0^{\rho_0} + \int_0^{s'} \rho\,ds \qquad (27) \end{aligned}$$

که در آن s' مقدار s را در بالاترین لایهٔ جوی، جایی که آشکارا $\rho = 0$، نمایش می‌دهد. چون به ازای $\rho = \rho_0$ مقدار s صفر است، نتیجه می‌گیریم که $[s\rho]_0^{\rho_0} = 0$. باید دانست که

$$a\int_0^{s'} \rho\,ds = \int_0^{s'} \rho\,d(as)$$

و انتگرال دوم مربوط به جرم ستونی از هواست با سطح مقطع یک و ارتفاعی از سطح زمین تا حد مؤثر جو، پس طرف چپ از قانون واقعی که طبق آن چگالی جوی با ارتفاع تغییر می‌کند، مستقل است. با این حال، جرم ستون هوا به دما و فشار جو بستگی دارد و اگر بنویسیم

$$R_۲ = -B \tan\zeta \sec^۲\zeta \quad (۲۸)$$

کمیت $-B$ را (که مساوی c/a ضربدر جرم ستون هوای مورد نظر است) باید تابعی از دما و فشار بگیریم. با ترکیب (۲۳) و (۲۸)، برای شکست عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$R = (\mu_۰ - ۱)\tan\zeta + B\tan\zeta(۱ + \tan^۲\zeta)$$

یا

$$R = A\tan\zeta + B\tan^۳\zeta \quad (۲۹)$$

که در آن A به‌جای $(\mu_۰ - ۱) + B$ نوشته شده است.

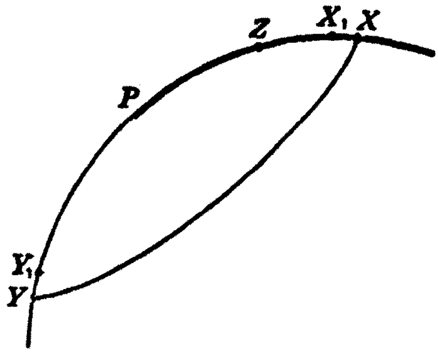
به‌جای محاسبهٔ مقادیر A و B از داده‌های فیزیکی مربوط، بهتر است فرض کنیم که شکست با فرمولی از نوع فرمول (۲۹) بیان می‌شود، و سپس مقدار ضرایب A و B را از رصد ستاره‌ها به‌دست آوریم. عبارت عددی شکست میانگین (برای فشار جوی ۷۶۰mm و دمای ۱۰°C) به‌صورت زیر است

$$R = ۵۸''٫۱۶\tan\zeta - ۰''٫۰۶۷\tan^۳\zeta \quad (۳۰)$$

هنگامی که فاصلهٔ سمت‌الرأسی تقریباً بیش از ۷۵° است، تقریبهایی که برای به‌دست آوردن فرمول (۲۹) به‌کار بردیم کافی نیستند. برای رصدهایی که در نزدیکی افق انجام می‌شوند، جدولهای شکست ویژه‌ای (بیشتر براساس داده‌های رصدی) تهیه شده‌اند و در رصدخانه‌هایی که در آنها دانستن دقیق شکست از ضروریات است مورد استفاده قرار می‌گیرند. از میان اینها، جدولهای گرینویچ و پولکوا را می‌توان نام برد.

۳۸. تعیین ثابتهای A و B در فرمول (۲۹)

در فصل بعد، ابزاری که به‌وسیلهٔ آن فواصل سمت‌الرأسی اجرام آسمانی در عبور بالا و پایین از دایرهٔ نصف‌النهار، اندازه‌گیری می‌شوند به تفصیل بررسی می‌شوند؛ در ضمن، نتایج عملی این روش را مسلم فرض خواهیم کرد. ستاره‌ای را در عبور بالا و عبور پایین در نظر می‌گیریم. ستاره در عبور بالا در $X_۱$ رصد می‌شود و جابه‌جایی حاصل از شکست $XX_۱$ است (شکل ۳۰). $ZX_۱ = \zeta$ از رصد به‌دست می‌آید و $ZX = z$ فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ستاره است، به‌طوری که داریم



شکل ۳۰

$z = (۹۰^\circ - \delta) - (۹۰^\circ - \phi)$، یا $z = \phi - \delta$. می‌دانیم $z = \zeta + R$ است، که در آن R شکست مربوط به فاصلهٔ سمت‌الرأسی ζ رصد شده است، بنابراین از رابطهٔ (۲۹) داریم

$$\phi - \delta = \zeta + A\tan\zeta + B\tan^{۳}\zeta \qquad (۳۱)$$

اگر ζ' فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شده در عبور پایین باشد آن وقت $\zeta' = ZY_۱$ است و فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ZY یا z' از $z' = (۹۰^\circ - \phi) + (\delta - ۹۰^\circ)$ یا $z' = ۱۸۰^\circ - \phi - \delta$ به‌دست می‌آید. همچنین $z' = \zeta' + R'$ است؛ از این‌رو داریم

$$۱۸۰^\circ - \phi - \delta = \zeta' + A\tan\zeta' + B\tan^{۳}\zeta' \qquad (۳۲)$$

اگر مقادیر ϕ و δ به‌دقت معلوم باشند دو معادلهٔ (۳۱) و (۳۲) را داریم که در آنها فقط A و B مجهول‌اند، زیرا ζ و ζ' به‌کمک رصدها تعیین شده‌اند. اگر δ را معلوم بگیریم، می‌توانیم ϕ را از رابطهٔ (۳۱) و (۳۲) حذف کنیم و معادلهٔ زیر را به‌دست آوریم

$$۱۸۰^\circ - ۲\delta = \zeta + \zeta' + R + R' \qquad (۳۳)$$

رصدهای یک ستارهٔ دیگر به معادله‌ای مانند (۳۳) می‌انجامد که از آن و معادلهٔ (۳۳) مقادیر A و B را می‌توان تعیین کرد. با توجه به اینکه هیچ رصدی بدون خطا نیست، چنین خطاهایی در طرف راست (۳۳) با هم ترکیب می‌شوند و بدین ترتیب دقت مقادیر به‌دست آمده برای A و B را کمی پایین می‌آورند. برای کاهش خطاها در A و B به یک مقدار کمینه، تعداد زیادی (n) ستاره را رصد می‌کنند و برای تعیین A و B، تعداد n معادله از نوع (۳۳) را با روش «کمترین مربعات» حل می‌کنند.

۳۹. اثر شکست بر زمان غروب خورشید

هنگامی که یک جرم آسمانی به هنگام طلوع یا غروبش در افق قرار دارد فاصلهٔ سمت‌الرأسی آن ۹۰° و مقدار عددی شکست $۳۴'$ است (که این را شکست افقی می‌نامند). اثر شکست سبب می‌شود تا جرم آسمانی به سمت‌الرأس نزدیکتر از وقتی دیده شود که جو وجود ندارد و یا وجود آن در انحراف پرتوهای نور بی‌اثر است. از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که مثلاً در لحظهٔ غروب یک جرم آسمانی یعني زمانی که فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شدهٔ ζ برابر ۹۰° است، فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی آن، z، ۹۰° بعلاوهٔ شکست افقی، یا $۹۰^\circ۳۴'$ است. اگر مورد خورشید را در نظر بگیریم، بدیهی است که زمان غروب ظاهری خورشید از زمان غروب نظری آن، که در بخش ۳۱ فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، دیرتر است. بازهٔ زمانی بین غروب نظری و غروب ظاهری خورشید بسادگی پیدا می‌شود. فرض کنید هنگامی که فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی مرکز خورشید ۹۰° است، زاویهٔ ساعتی آن H باشد و هنگامی که مرکز خورشید روی افق دیده می‌شود زاویهٔ ساعتی آن $H + \Delta H$ باشد، آن‌وقت $\zeta = ۹۰^\circ$ و $z = ۹۰^\circ۳۴'$ است. بنابراین، مانند بخش ۳۱، خواهیم داشت

$$\cos H = -\tan\phi\tan\delta \qquad (۳۴)$$

و نیز از فرمول کسینوس (الف) داریم

$$\cos(۹۰^\circ۳۴') = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos(H+\Delta H)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$-\sin ۳۴' = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta(\cos H\cos\Delta H - \sin H\, sin\Delta H)$$

چون $۳۴'$ و ΔH زاویه‌هایی کوچک‌اند، پس می‌توانیم معادلهٔ اخیر را به معادلهٔ زیر ساده کنیم

$$-۳۴\sin ۱' = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H - ۱۵\Delta H\sin ۱'\cos\phi\cos\delta\sin H$$

که در آن فرض می‌شود ΔH برحسب دقیقهٔ زمانی بیان شده است. با استفاده از رابطهٔ (۳۴) تغییر زاویهٔ ساعتی به دقیقه چنین می‌شود

$$\Delta H = \frac{۳۴}{۱۵}\sec\phi\sec\delta\,\mathrm{cosec}\,H \qquad (۳۵)$$

مثال ساده‌ای را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم عرض جغرافیایی ۶۰° و $\delta = ۰^\circ$ (اول فروردین یا اول مهر) باشد. به‌سهولت می‌توان دید که زاویهٔ ساعتی غروب نظری خورشید، H، برابر ۶^h است. از این‌رو از معادلهٔ (۳۵) $\Delta H = ۴^m{}_{ر}۵$ محاسبه می‌شود.

میل خورشید، یعنی δ که در این فرمولها آورده‌ایم، میل مرکز خورشید و فواصل سمت‌الرأسی نیز مربوط به مرکز خورشیدند. برای یافتن زاویهٔ ساعتی خورشید در لحظه‌ای که لبهٔ بالایی آن تازه

زیر افق ناپدید می‌شود، باید توجه داشت که در این لحظه فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی مرکز خورشید برابر است با حاصل جمع $۳۴' + ۹۰°$ و زاویه‌ای که تحت آن شعاعی از خورشید دیده می‌شود. کمیت اخیر نیم‌قطر زاویه‌ای خورشید است که برای هر روز از سال در تقویمها جدول‌بندی شده است و برای منظور کنونی، می‌توان آن را $۱۶'$ گرفت؛ بدین ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی مرکز خورشید، تحت شرایطی که اینک در نظر داریم، $۹۰°۵۰'$ است. اکنون اگر ΔH بازهٔ زمانی بین لحظهٔ غروب نظری خورشید و لحظهٔ ناپدید شدن لبهٔ بالایی آن در زیر افق باشد، مقدار آن به دقیقه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta H = \frac{۵۰}{۱۵} \sec\phi \sec\delta \operatorname{cosec} H$$

از این‌رو، در عرض جغرافیایی $۶۰°$ هنگامی که میل خورشید صفر است $\Delta H = ۶^{\mathrm{m}}{,}۷$ است. بازهٔ زمانی مشابهی بین طلوع ظاهری خورشید و طلوع نظری آن وجود دارد. بدین ترتیب اثر شکست، طول «روز» (در اینجا منظور از «روز» مدت زمانی است که در طول آن قسمتی از خورشید بالای افق قرار دارد) را به‌اندازهٔ تقریباً $۱۳\frac{۱}{۲}$ دقیقه در عرض جغرافیایی و در تاریخهای یادشده افزایش می‌دهد.

۴۰. اثر شکست بر بُعدو میل یک ستاره

مکان X ستاره‌ای را روی کرهٔ سماوی در نظر می‌گیریم که، به‌سبب شکست، به‌طرف سمت‌الرأس Z و به مکان X' جابه‌جا شده است (شکل ۳۱). از نقطهٔ X' دایرهٔ صغیره‌ای به قطب P رسم می‌کنیم تا PX را در Y قطع کند. چون XX' کوچک است، می‌توانیم $XX'Y$ را مثلثی تخت فرض کنیم که در آن Y یک زاویهٔ قائمه است. ZPX و PX یعنی زاویهٔ ساعتی و فاصلهٔ قطبی شمالی X را به‌ترتیب با H و $۹۰° - \delta$ نمایش می‌دهیم. X' مکان رصد شدهٔ ستاره است و ZPX' و PX' با H' و $۹۰° - \delta'$ نمایش داده می‌شوند. می‌توان فرض کرد که با رصد، H' و δ' را می‌شود تعیین کرد؛ می‌خواهیم مقادیر H و δ را پیدا کنیم. از مثلث تخت $XX'Y$ که در آن زاویهٔ $X'XY$ با η نمایش داده شده، داریم

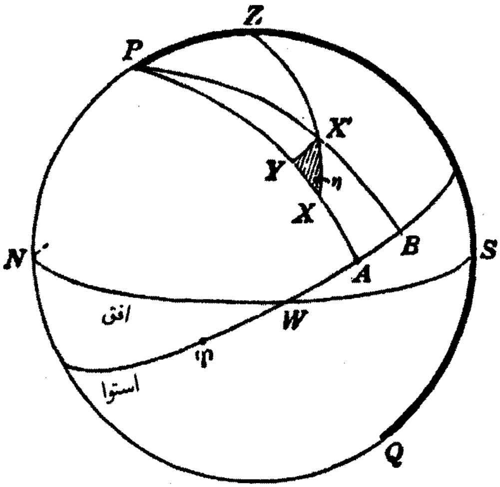
$$X'Y = XX' \sin\eta \qquad (۳۶)$$

و

$$XY = XX' \cos\eta \qquad (۳۷)$$

می‌دانیم

$$X'Y = X'\hat{P}Y \sin PX' = (H - H')\cos\delta'$$



شکل۳۱

است و داریم

$$XY = \delta' - \delta$$

با استفاده از عبارت سادهٔ شکست در فرمول (۷) داریم $XX' = k\tan\zeta$ که در آن از تساوی $\zeta = ZX'$ استفاده شده است. از این‌رو روابط (۳۶) و (۳۷) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$H - H' = k\tan\zeta\sec\delta'\sin\eta \qquad (۳۸)$$

$$\delta - \delta' = -k\tan\zeta\cos\eta \qquad (۳۹)$$

در این معادلات η زاویهٔ اختلاف‌منظر PXZ است و چون XX' کوچک است $PX'Z$ و PXZ اختلاف چندانی ندارند و بنابراین η را می‌شود برابر $PX'Z$ گرفت. بدین ترتیب η از داده‌های موجود با به‌کار بردن فرمول کسینوس، (الف)، قابل محاسبه است ($PZ \equiv ۹۰° - \phi$ معلوم فرض می‌شود). چون فرض کردیم H' و δ' از رصد ستاره به‌دست می‌آیند، پس طرفهای راست روابط (۳۸) و (۳۹) قابل محاسبه‌اند؛ در نتیجه H و δ را می‌توان پیدا کرد. حال اگر Υ نقطهٔ اعتدال بهاری باشد ΥA بُعد X و ΥB بُعد X' خواهد بود. اگر α و α' بُعدهای X و X' را نمایش دهند، آن‌وقت $\alpha' - \alpha = AB = H - H'$ است. از این‌رو داریم

$$\alpha - \alpha' = -k\tan\zeta\sec\delta'\sin\eta \qquad (۴۰)$$

بدین ترتیب (۴۰) و (۳۹) محاسبهٔ بُعد و میل واقعی جرم آسمانی رصد شده را امکانپذیر می‌سازند.

تمرینها

۱. عرض جغرافیایی شمالی تقریبی محلی را پیدا کنید که در آن اثر شکست، در زمانی که میل خورشید 10° جنوبی است، مدت روز را به‌اندازهٔ ۱۵ دقیقه طولانی کند. (شکست افقی $34'$ است).

۲. با فرض اینکه جو همگن و ارتفاع آن h باشد (فرضیهٔ کاسینی) ثابت کنید

$$\sin R = \frac{a \sin\zeta}{a+h}(\mu^2 - 2\mu\cos R + 1)^{\frac{1}{2}}$$

است، که در آن a شعاع زمین است.

۳. اگر رابطهٔ بین r و μ به‌صورت $r\mu^{n+1} = \text{const}$. باشد (فرضیهٔ سیمپسون) ثابت کنید

$$R = \frac{1}{n}\left\{\zeta - \sin^{-1}\left(\frac{\sin\zeta}{\mu_\circ^n}\right)\right\}$$

است و فرمول برادلی را که به‌صورت زیر نوشته می‌شود به‌دست آورید

$$R = \frac{2}{n}\frac{\mu_\circ^n - 1}{\mu_\circ^n + 1}\tan(\zeta - \frac{1}{2}nR)$$

۴. با فرض اینکه فرمول شکست $R = k\tan\zeta$ باشد، ثابت کنید که قرص دایره‌ای خورشید به‌سبب شکست جوی به شکل یک بیضی نمایان می‌شود که نیم‌قطرهای بزرگ و کوچک آن به‌ترتیب $a(1-k)$ و $a(1-k\sec^2 z)$ است. k برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود و ζ فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شدهٔ مرکز خورشید، z فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی آن، و a نیم‌قطر زاویه‌ای خورشید است.

۵. میانگین هر دو قطر زاویه‌ای عمود بر هم خورشید طبق رصد برابر D است. اگر z فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی مرکز خورشید باشد نشان دهید که قطر زاویه‌ای واقعی خورشید برابر است با

$$D\left\{1 + \frac{k}{2}(1 + \sec^2 z)\right\}$$

که در آن k برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود.

۶. اگر در لحظه‌ای معین میل ستاره‌ای تحت تأثیر شکست قرار نگیرد ثابت کنید که در آن لحظه سمت ستاره بیشینه است.

۷. X_1 و X_2 دو ستارهٔ نزدیک به‌هم‌اند که فاصلهٔ زاویه‌ای واقعی آنها D (برحسب ثانیهٔ قوسی) است. اگر Z سمت‌الرأس، $Z\hat{X}_1X_2 = \psi$، و z فاصلهٔ سمت‌الرأسی X_1 باشد ثابت کنید که

فاصلهٔ زاویه‌ای رصد شدهٔ این دو ستاره برابر است با

$$D - kD(۱ + \cos^۲ \psi \tan^۲ z)$$

که در آن k برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود.

۸. اگر ϕ عرض جغرافیایی، H زاویهٔ ساعتی، و δ میل یک ستاره باشد نشان دهید که در اثر شکست، آهنگ ظاهری تغییر زاویهٔ ساعتی با آهنگ

$$۰^s\text{ر}۵۱ \frac{\sin ۲\theta}{\sin^۲(\delta + \theta)}(\tan \delta + \cot \phi \sec H)$$

در ساعت کاهش می‌یابد، که در آن $\tan \theta = \cot \phi \cos H$. (ثابت شکست = $۵۸''$ر۲)
همچنین نشان دهید که آهنگ تغییر شکست در میل ستاره در هر ساعت برابر است با

$$+۱۵''\text{ر}۲ \cot \phi \sin H \cos^۲ \theta \operatorname{cosec}^۲(\delta + \theta)$$

۹. اگر فرمول شکست دقیقاً با معادله‌ای به‌صورت $R = k \tan \zeta$ داده شود، تغییر ضریب شکست با ارتفاع جو چگونه خواهد بود؛ مقدار k و ارتفاع جو را برحسب ضریب شکست در سطح زمین تعیین کنید.

[گلاسگو، ۱۹۶۵]

۱۰. با استفاده از نتایج تمرین ۴۱ فصل ۲ نشان دهید که آثار شکست در بُعد و میل یک ستاره از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند

$$\Delta a = \frac{k \sec^۲ \delta \sin H}{\tan \delta \tan \phi + \cos H}$$

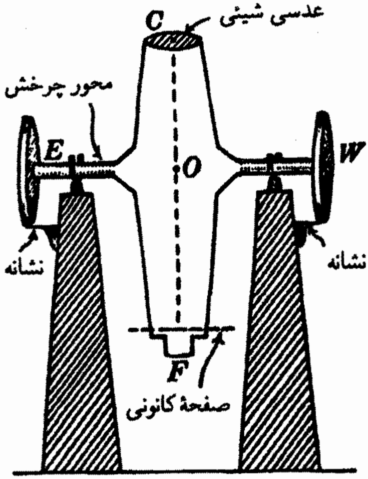
$$\Delta \delta = \frac{k(\tan \phi - \tan \delta \cos H)}{\tan \delta \tan \phi + \cos H}$$

۴

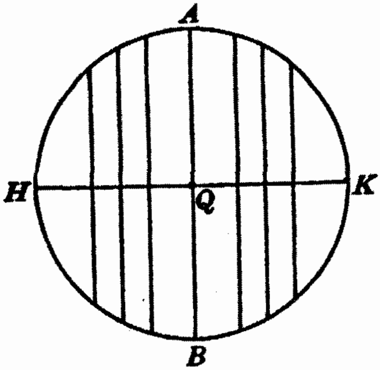
تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری

۴۱. شرح کلی

در این فصل بعضی مشخصات اصلی ابزار بنیادی نجوم یعنی تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری، که با آن بُعد و میل اجرام اصلی آسمان با دقت زیادی تعیین می‌شوند، بررسی می‌شود. رصد با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری همچنین اطلاعاتی را فراهم می‌سازد که به‌کمک آنها می‌توان ساعتهای نجومی را تنظیم کرد (در عمل کافی است خطای ساعت نجومی تعیین شود) و پس از یک محاسبهٔ ساده، در هر لحظه زمان متوسط واقعی را به‌دست آورد، به‌طوری که خطای ساعتی که زمان متوسط خورشیدی را نشان می‌دهد به‌راحتی قابل محاسبه باشد. این ابزار اصولاً از یک تلسکوپ شکستی ساخته شده است که می‌تواند حول یک محور افقی ثابت (محور چرخش) که در راستای شرق و غرب قرار دارد دوران کند. بدین ترتیب خود تلسکوپ فقط می‌تواند در صفحهٔ دایرهٔ نصف‌النهار حرکت کند. شکل ۳۲ ویژگیهای اصلی این ابزار را نشان می‌دهد. در صفحهٔ کانونی عدسی شیئی دو رشته تار نازک کشیده شده که معمولاً «سیم» نامیده می‌شوند، به شرح زیر وجود دارند: (الف) یک سیم افقی یا گاهی دو سیم افقی که (در شکل ۳۳ تنها یک سیم افقی نشان داده شده است) و (ب) چندین سیم عمود بر سیمهای افقی که به‌طور متقارن در دو طرف یک سیم مرکزی AB قرار گرفته‌اند و سیمهای قائم نامیده می‌شوند. در بعضی از این ابزارها، دو ریزسنج به‌صفحهٔ حامل سیمها وصل می‌شود که یکی از آنها می‌تواند سیم (یا سیمهای) افقی را به موازات HK حرکت دهد و دیگری قادر است مجموعه سیمهای قائم را به موازات AB جابه‌جا کند. در نوع دیگر این



شکل۳۲



شکل۳۳

ابزارها مجموعه سیمهای قائم ساکن‌اند، ولی یک سیم قائم اضافی وجود دارد که می‌تواند به‌وسیلهٔ ریزسنجی روی مجموعه سیمهای ساکن حرکت کند.

صفحه‌ای که از مرکز C عدسی شیئی عمود بر محور چرخش EW می‌گذرد به صفحهٔ موازی‌سازی موسوم است و خط راستی که از C می‌گذرد و روی این صفحه قرار دارد و محور چرخش را قطع می‌کند محور موازی‌سازی نامیده می‌شود (CO در شکل ۳۲). روشن است که با چرخش تلسکوپ حول محور EW، محور موازی‌سازی، صفحهٔ موازی‌سازی را جاروب می‌کند. فعلاً، فرض کنید این ابزار از نظر مکانیکی بی‌عیب است و به‌طور دقیق نصب شده است، به‌طوری که سیم مرکزی AB در صفحهٔ موازی‌سازی قرار دارد. در این صورت هنگامی که از عدسی چشمی در F نگاه می‌کنیم هر ستاره‌ای که در لحظه‌ای معین روی سیم مرکزی مشاهده شود، در همین لحظه روی دایرهٔ نصف‌النهار خواهد بود. اگر این لحظه از روی یک ساعت نجومی که زمان نجومی دقیق را نشان می‌دهد، یادداشت شود، این زمان نجومی (که جز اینجا به عنوان زاویهٔ ساعتی نقطهٔ اعتدال بهاری توصیف می‌شد) آشکارا معادل بُعد ستاره خواهد بود. کار سیمهای قائم اضافی در شکل ۳۳ دقت بخشیدن به اندازه‌گیری است، زیرا ستاره، به‌سبب حرکت شبانه‌روزی‌اش، ضمن گذشتن از میدان دید به‌طور متوالی بر این سیمها منطبق می‌شود و اگر لحظه‌های انطباق با تک‌تک سیمهای قائم یادداشت شوند میانگین آنها مسلماً زمان نجومی عبور ستاره و از این‌رو بُعد ستاره را با دقتی بسیار بیشتر از حالتی که رصد فقط به یک انطباق با سیم مرکزی محدود بود به‌دست می‌دهد.

دو صفحهٔ دایره‌ای به دقت مدرج شده (در شکل ۳۲ در نقاط E و W نشان داده شده‌اند) همراه با دستگاههای نوری کمکی که اندازه‌گیری دقیق ارتفاع یک ستاره را امکانپذیر می‌سازند به

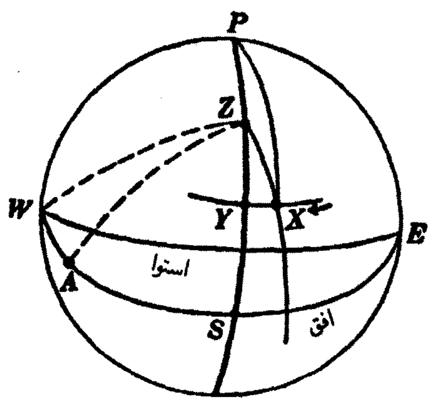
محور چرخش متصل شده‌اند. چون عرض جغرافیایی تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری را می‌توان معلوم در نظر گرفت، میل ستاره بسادگی به‌دست می‌آید. به‌طور خلاصه، اینها اصول عمده‌ای هستند که بر طبق آنها مکانهای ستاره‌ها از رصدهای تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری به‌دست می‌آیند.

۴۲. خطاهای دستگاهی

نصب صحیح دستگاه برای اندازه‌گیری مکان ستاره‌ها با دقتی که در بالا گفته شد غیر ممکن است و در عمل باید خطاهای ذاتی دستگاه در نظر گرفته شوند. این خطاها عبارت اند از (الف) خطای سمت: محور چرخش دقیقاً در راستای شرق و غرب قرار ندارد و انحراف زاویه‌ای آن از راستای حقیقی شرق و غرب خطای سمت است (گاهی خطای انحرافی خوانده می‌شود) که با a نمایش داده خواهد شد،(ب) خطای تراز: محور چرخش دقیقاً افقی نیست و انحراف زاویه‌ای آن از خط افق به خطای تراز موسوم است که با b نمایش داده خواهد شد،(ج) خطای موازی‌سازی: سیم مرکزی درست در صفحهٔ موازی‌سازی نیست و زاویهٔ بین محور موازی‌سازی و خطی که نقطهٔ میانی سیم قائم را به مرکز عدسی جسمی وصل می‌کند خطای موازی‌سازی نامیده می‌شود و با c نمایش داده می‌شود. ما به‌ترتیب اثر این خطاها را روی زمان عبور رصد شدهٔ یک ستاره بررسی می‌کنیم.

۴۳. خطای سمت

فرض کنید این تنها خطای موجود باشد. شکل ۳۴ کرهٔ سماوی را با افق و استوا و جهتهای چهارگانه نشان می‌دهد؛ مرکز کره را نقطهٔ تلاقی محور موازی‌سازی و محور چرخش می‌گیریم. اگر دستگاه بی‌عیب نصب شده باشد یکی از دو سر محور چرخش به‌طرف نقطهٔ غرب (W) و سر دیگر آن به‌طرف نقطهٔ شرق (E) قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم در اثر یک خطای سمت فرضی



شکل ۳۴

انتهای غربی محور چرخش به‌طرف نقطهٔ A روی افق باشد، و از این‌رو WA خطای سمت باشد. طبق قرار داد وقتی نقطهٔ A، مانند شکل ۳۴، بین W و S قرار دارد خطای سمت مثبت است. محور موازی‌سازی، با چرخش تلسکوپ حول محورش، صفحه‌ای را می‌پیماید که بر محور چرخش عمود است و کرهٔ سماوی را در دایرهٔ عظیمه‌ای به قطب A قطع می‌کند. ما این دایرهٔ عظیمه را به عنوان «دایرهٔ نصف‌النهار پنداری» معرفی خواهیم کرد. چون A نقطه‌ای است روی افق، پس دایره نصف‌النهار پنداری از Z عبور خواهد کرد. اگر X مکان ستاره‌ای در لحظهٔ انطباق آن با سیم مرکزی (که در صفحهٔ موازی‌سازی قرار دارد) باشد، در این صورت ZX کمانی از دایرهٔ نصف‌النهار پنداری است. زاویهٔ ZPX را با τ_1 نمایش می‌دهیم؛ به‌طوری که در شکل دیده می‌شود چون X مکان ستاره در لحظهٔ رصد روی سیم مرکزی است، پس زمان واقعی عبور یعنی زمان رسیدن ستاره به دایره نصف‌النهار حقیقی در نقطهٔ Y، به‌اندازهٔ τ_1 تأخیر خواهد داشت. بدین ترتیب τ_1 خطای موجود در زمان عبور ستاره است.

اینک $W\hat{Z}A \equiv WA = a$ است زیرا Z قطب $WASE$ است. همچنین $W\hat{Z}S = ۹۰^\circ$ و $A\hat{Z}X = ۹۰^\circ$ است زیرا A قطب دایرهٔ عظیمهٔ ZX (دایرهٔ نصف‌النهار پنداری) است. از این‌رو، داریم

$$Y\hat{Z}X = a$$

و بنابراین $P\hat{Z}X = ۱۸۰^\circ - a$ است. از مثلث PZX که در آن $PZ = ۹۰^\circ - \phi$، $PX = ۹۰^\circ - \delta$، $Z\hat{P}X = \tau_1$، و $P\hat{Z}X = ۱۸۰^\circ - a$ است، با استفاده از فرمول سینوس نتیجه می‌شود

$$\sin PZX \sin ZX = \sin ZPX \sin PX$$

یا

$$\sin a \sin ZX = \sin \tau_1 \cos \delta$$

همچنین a و τ_1 زوایای کوچکی هستند و در نتیجه معمولاً ZX تقریباً برابر ZY یا $(\phi - \delta)$ است؛ و نیز $\sin a = a$، $\sin \tau_1 = \tau_1$ است، و در نتیجه داریم

$$\tau_1 = a \sin(\phi - \delta) \sec \delta \qquad (۱)$$

که در آن می‌توان فرض کرد τ_1 و a هر دو برحسب ثانیهٔ زمانی بیان شوند. این فرمول تصحیح زمان عبور رصد شده را که تنها از خطای سمت ناشی می‌شود، به‌دست می‌دهد.

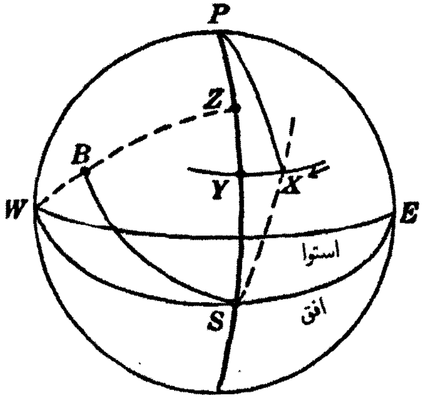
۴۴. خطای تراز

اکنون فرض کنید که خطای دستگاهی فقط خطای تراز باشد و انتهای غربی محور به اندازهٔ زاویهٔ b به‌طرف بالا کج باشد. در این حالت علامت b، طبق قرارداد، مثبت است. انتهای غربی محور روی کرهٔ سماوی با B نمایش داده خواهد شد (شکل ۳۵) به‌طوری که $WB = b$ است. چون خطای دیگری وجود ندارد، B روی قائم مبدأ ZW قرار دارد. هنگامی که تلسکوپ حول محورش چرخانده می‌شود محور موازی‌سازی، صفحه‌ای را می‌پیماید که کرهٔ سماوی را در دایرهٔ عظیمه‌ای به‌قطب B قطع می‌کند. در شکل ۳۵ این دایرهٔ عظیمه SX است (این دایره از S می‌گذرد زیرا S قطب WZ است و در نتیجه $SB = ۹۰°$ است). اینک SX دایرهٔ نصف‌النهار پنداری است. چون $WB \equiv W\hat{S}B = b$، همچنین $W\hat{S}Z = ۹۰°$، و $B\hat{S}X = ۹۰°$؛ از این‌رو $Z\hat{S}X = b$. ستاره‌ای را در لحظهٔ عبور رصدی، روی سیم مرکزی در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم که ستاره در این لحظه در نقطهٔ X روی دایرهٔ نصف‌النهار پنداری است و زمان عبور قبل از رسیدن ستاره به دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی در Y رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم $X\hat{P}Y = \tau_۲$ است، پس $\tau_۲$ تصحیحی است که باید روی زمان عبور رصد شده اعمال شود تا زمان واقعی عبور در نقطهٔ Y به‌دست آید. در مثلث PXS داریم $PX = ۹۰° - \delta$، $PS = PZ + ZS = ۱۸۰° - \phi$، $S\hat{P}X = \tau_۲$، و $P\hat{S}X = b$. از فرمول (ب) نتیجه می‌شود

$$\sin \tau_۲ \sin PX = \sin b \sin SX$$

چون b همواره خیلی کوچک است، SX تقریباً برابر SY است. همچنین داریم

$$SY = PS - PY = ۱۸۰° - \phi - (۹۰° - \delta) = ۹۰° - (\phi - \delta)$$



شکل ۳۵

از این‌رو

$$\sin \tau_2 \cos \delta = \sin b \cos(\phi - \delta)$$

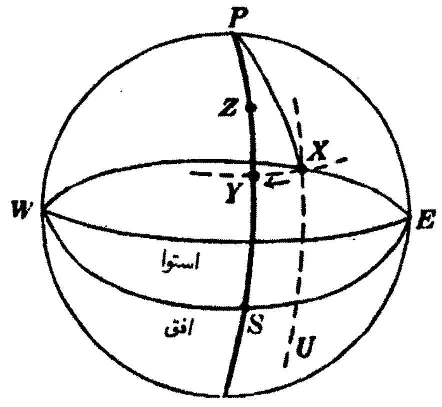
زوایای کوچک τ_2 و b را برحسب ثانیهٔ زمانی بیان می‌کنیم؛ پس داریم

$$\tau_2 = b \cos(\phi - \delta) \sec \delta \qquad (۲)$$

این فرمول تصحیح زمان عبور رصد شده را که فقط ناشی از خطای تراز است به‌دست می‌دهد.

۴۵. خطای موازی‌سازی

اکنون فرض بر این است که فقط خطای موازی‌سازی وجود دارد. در این حالت سیم مرکزی در خارج صفحهٔ موازی‌سازی قرار دارد، و هنگامی که تلکسوپ چرخانده می‌شود سیم مرکزی صفحه‌ای را که موازی صفحهٔ دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی است، می‌پیماید. این صفحه کرهٔ سماوی را در دایر ۀ صغیرهٔ UX (شکل ۳۶) که اکنون دایرهٔ نصف‌النهار پنداری است قطع می‌کند. خط راستی که مرکز عدسی شیئی و نقطهٔ میانی سیم مرکزی را به‌هم وصل می‌کند با محور موازی‌سازی زاویهٔ کوچک c درست می‌کند و چون محور موازی‌سازی بر محور چرخش، در این حالت EW، عمود است فاصلهٔ زاویه‌ای W از هر نقطهٔ دایرهٔ صغیرهٔ UX ، $c + {}^\circ۹۰$ است. (هنگامی که دایرهٔ نصف‌النهار پنداری XU، مانند شکل ۳۶، افق را در شرق S قطع می‌کند علامت c مثبت گرفته می‌شود.) اینک ستارهٔ X را در لحظهٔ عبور روی سیم مرکزی در نظر می‌گیریم. چنان‌که از شکل پیداست اگر c مثبت باشد، ستاره قبل از رسیدن به دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی در Y، روی سیم مرکزی قرار می‌گیرد. فرض می‌کنیم $Z\hat{P}X = \tau_3$ باشد. در مثلث کروی WPX داریم



شکل ۳۶

$WX = ۹۰° + c$، $WPX = ۹۰° + \tau_۳$، $PX = ۹۰° - \delta$، و $WP = ۹۰°$. بنابراین از فرمول (الف) داریم

$$\cos WX = \cos WP \cos PX + \sin WP \sin PX \cos WPX$$

که از آن رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$-\sin c = -\cos\delta \sin\tau_۳$$

به‌طوری که c و $\tau_۳$ کوچک‌اند و برحسب ثانیهٔ زمانی بیان می‌شوند پس داریم

$$\tau_۳ = c\sec\delta \qquad (۳)$$

۴۶. تصحیح کل بر زمان عبور رصد شده

فرض کنید T زمان نجومی عبور رصد شده روی سیم مرکزی باشد. در عمل T را میانگین زمانهای عبور رصد شده از روی مثلاً هفت سیم، سه سیم در هر طرف سیم مرکزی، می‌گیرند. فرض کنید که ساعت به اندازهٔ ΔT خطا داشته باشد؛ هنگامی که ساعت عقب است، ΔT را مثبت می‌گیرند. در این صورت، زمان واقعی عبور روی سیم مرکزی $T + \Delta T$ است. پس زمان نجومی عبور روی دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی برابر $T + \Delta T + \tau_۱ + \tau_۲ + \tau_۳$ است. این مقدار برابر بُعد (α) ستاره است. بدین ترتیب $\alpha = T + \Delta T + \tau_۱ + \tau_۲ + \tau_۳$ است یا، از روابط (۱)، (۲)، و (۳) داریم

$$\alpha = T + \Delta T + \sec\delta\{a\sin(\phi-\delta) + b\cos(\phi-\delta) + c\} \qquad (۴)$$

که گاهی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\alpha = T + \Delta T + aA + bB + cC \qquad (۵)$$

و در آن $A = \sin(\phi-\delta)\sec\delta$، $B = \cos(\phi-\delta)\sec\delta$، و $C = \sec\delta$ است. در واقع خطای ساعت نجومی، ΔT، از روزی به روز دیگر ثابت نیست با این حال در تعیین بُعد ستاره‌ها بر طبق رابطهٔ (۵)، فرض می‌کنیم این مقدار برای هر رصد معلوم باشد. همچنین فرمول (۵) به‌صورتی که در بالا داده شد کامل نیست، زیرا عبارت کوچکی که ناشی از ابیراهی است (بخش ۱۱۱ را ببینید) هنوز در نظر گرفته نشده است؛ مقدار این عبارت $-۰^s{,}۰۲۱\cos\phi\sec\delta$ ثانیهٔ زمانی است.

فرمولهایی که تا کنون ارائه شده‌اند مربوط به زمانی هستند که ستاره در عبور بالاست. نظیر این فرمولها را برای عبور پایین با روش مشابهی می‌توان به‌دست آورد. معلوم می‌شود که فرمول متناظر با رابطهٔ (۴) دارای شکل مشابهی است و می‌توان آن را با نوشتن $(۱۸۰° - \delta)$ به‌جای δ در فرمول (۴) به‌دست آورد.

۴۷. فرمول بسل

تصحیح τ بر زمان عبور یک ستاره که از هر سه خطای a، b، و c بر روی هم ناشی می‌شود، به نحو زیر بررسی می‌شود. فرض کنید انتهای غربی محور چرشی به مکان B روی کرهٔ سماوی نشانه برود. دایرهٔ قائم ZBA را رسم کنید تا افق را در A قطع کند. پس $WA = a$ (خطای سمت) و $AB = b$ (خطای تراز) است. همچنین فرض کنید X مکان یک ستاره در لحظهٔ انطباق بر سیم مرکزی باشد. در این صورت $BX = ۹۰° + c$. دایرهٔ نصف‌النهار PBC را رسم کنید تا استوا را در C قطع کند و فرض کنید $WC = W\hat{P}C = m$ و $BC = n$ باشد. کمیتهای m و n تنها به a و b مربوط می‌شوند. در مثلث PBZ، $PZ = ۹۰° - \phi$، $PB = ۹۰° - n$، $BZ = ۹۰° - b$، $P\hat{Z}A = ۹۰° + a$، و $Z\hat{P}B = ۹۰° - m$ است. از فرمول (الف) داریم

$$\cos PB = \cos PZ \cos ZB + \sin PZ \sin ZB \cos PZB$$

یا

$$\sin n = \sin\phi \sin b - \cos\phi \cos b \sin a$$

که چون n، a، و b کوچک‌اند می‌توان آن را با دقت کافی به‌صورت زیر نوشت

$$n = b\sin\phi - a\cos\phi \qquad (۶)$$

همچنین از فرمول (د) داریم

$$\cos PZ \cos PZB = \sin PZ \cot ZB - \sin PZB \cot ZPB$$

یا

$$-\sin\phi \sin a = \cos\phi \tan b - \cos a \tan m$$

که چون m، a، و b کوچک‌اند نتیجه می‌شود

$$m = a\sin\phi + b\cos\phi \qquad (۷)$$

اینک در مثلث BPX داریم $BX = ۹۰° + c$، $PB = ۹۰° - n$، $PX = ۹۰° - \delta$، و $BPX = ۹۰° + \tau - m$ که در آن τ زاویهٔ ZPX (یا تصحیح زمان عبور در X با استفاده از سیم مرکزی برای به‌دست آوردن زمان عبور از دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی PZS) است. فرمول (الف) را به‌کار می‌بریم

$$\cos BX = \cos PB \cos PX + \sin PB \sin PX \cos BPX$$

از آن‌رو داریم

$$-\sin c = \sin n \sin\delta - \cos n \cos\delta \sin(\tau - m)$$

چون c، n، و $(\tau - m)$ کوچک‌اند این رابطه چنین می‌شود

$$-c = n\sin\delta - (\tau - m)\cos\delta$$

که از آن نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tau = m + n\tan\delta + c\sec\delta \qquad (۸)$$

این فرمول بسل است و به شکلی است که در عمل راحت‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که وقتی مقادیر m و n از روابط (۶) و (۷)، برحسب a و b، در رابطهٔ (۸) قرار داده شوند فرمول (۴) به‌دست می‌آید. با افزودن خطای ساعت ΔT و عبارت ابیراهی به مقدار بالا، برای بُعد ستارهٔ تحت رصد خواهیم داشت

$$\alpha = T + \Delta T + m + n\tan\delta + (c - ۰^{s}{,}۰۲۱\cos\phi)\sec\delta \qquad (۹)$$

۴۸. فواصل سیمها

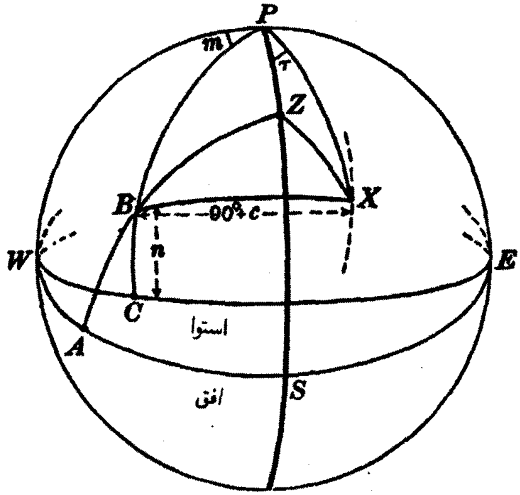
چنانکه قبلاً گفته شد بعضی تلسکوپهای دایرهٔ نصف‌النهاری به یک ریزسنج مجهزند که به‌وسیلهٔ آن مجموعه سیمهای قائم یکجا در میدان دید حرکت داده می‌شوند. در برخی دیگر، مجموعه سیمهای قائم ثابت‌اند و ریزسنج یک سیم متحرک را که می‌تواند متوالیاً روی دو سیم ثابت دلخواه قرار گیرد به حرکت در می‌آورد. در هر دو نوع لازم است کمیتهای زیر تعیین شوند:

الف) فاصلهٔ بین دو سیم متوالی برحسب مقیاس ریزسنج، و

ب) مقدار یک دور ریزسنج برحسب مقیاس زاویه‌ای.

برای تعیین (الف) در ابزار نوع نخست، فرض می‌کنیم هنگامی که تلسکوپ تقریبا افقی است یک جسم دور در میدان دید قابل رؤیت باشد. ریزسنج را حرکت می‌دهیم تا دو سیم متوالیاً بر تصویر جسم دور منطبق شوند. فاصلهٔ بین این سیمها با تفاضل مقادیر خوانده شدهٔ ریزسنج بیان می‌شود. سپس این رصد را می‌توان در مورد سیمهای دیگر دوبه‌دو تکرار کرد. روشن است که در نوع دوم، فواصل سیمها بسادگی برحسب مقیاس ریزسنج پیدا می‌شوند.

برای تعیین (ب) بازهٔ زمانیی که یک ستاره برای عبور ازسیم $W_۱$ به سیم $W_۲$ لازم دارد، اندازه‌گیری می‌شود. برای این منظور ستاره‌ای در نزدیکی قطب انتخاب می‌شود زیرا چنین ستاره‌ای در میدان دید نسبتاً آهسته حرکت می‌کند. با چرخش تلسکوپ حول محورش، سیم $W_۱$ صفحه‌ای را جاروب خواهد کرد که کرهٔ سماوی را در دایرهٔ صغیره‌ای به قطب انتهای غربی B (مانند شکل ۳۷)



شکل۳۷

قطع می‌کند. فرض می‌کنیم که فاصلهٔ زاویه‌ای B از هر نقطه‌ای روی این دایرهٔ صغیره، $c_۱ + ۹۰°$ باشد. در این صورت $c_۱$ خطای موازی‌سازی $W_۱$ است. بنابراین، اگر $\tau_۱$ بازهٔ زمانی بین عبور ستارهٔ X (شکل ۳۷) از سیم $W_۱$ و از دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی باشد، با در نظر گرفتن اینکه $c_۱$ و n کوچک‌اند از رابطهٔ (۸) داریم

$$\tau_۱ = m + c_۱ \sec\delta + n \tan\delta \qquad (۱۰)$$

اکنون سیم $W_۲$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $\tau_۲$ و $c_۲$ کمیتهای متناظر با آن باشند. در این صورت مانند گذشته داریم

$$\tau_۲ = m + c_۲ \sec\delta + n \tan\delta \qquad (۱۱)$$

اگر، طبق ساعت نجومی، $T_۱$ و $T_۲$ زمانهایی باشند که ستاره به‌ترتیب روی سیمهای $W_۱$ و $W_۲$ است و $T_.$ زمانی باشد که طبق همین ساعت ستاره روی دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی است، داریم

$$T_. = T_۱ + \Delta T + \tau_۱ \text{ و } T_. = T_۲ + \Delta T + \tau_۲$$

همچنین اگر $t = T_۲ - T_۱$ (زمان لازم برای عبور ستاره از $W_۱$ به $W_۲$ برحسب ثانیه) باشد آنگاه با حذف $T_.$ و ΔT خواهیم داشت

$$t = \tau_۱ - \tau_۲$$

به‌طوری که با استفاده از روابط (۱۰) و(۱۱) داریم

$$t = (c_۱ - c_۲) \sec\delta \qquad (۱۲)$$

یا

$$c_۱ - c_۲ = t\cos\delta$$

اینک $c_۱ - c_۲$ فاصلهٔ زاویه‌ای سیمهای $W_۱$ و $W_۲$ (برحسب ثانیهٔ زمانی) است و در نتیجه می‌توان آن را از رابطهٔ (۱۲) محاسبه کرد، زیرا t با رصد تعیین می‌شود و δ معلوم است. در عمل فرمول (۱۲) از دقت کافی برخوردار است، مگر اینکه میل ستاره خیلی نزدیک به ۹۰° باشد.

چنانکه توضیح داده‌ایم، می‌توانیم فاصلهٔ بین دو سیم $W_۱$ و $W_۲$ را برحسب مقیاس ریزسنج بیابیم، و بدین ترتیب قادریم هر دور ریزسنج را برحسب ثانیهٔ زمانی بیان کنیم.

از رابطهٔ (۱۲) دیده می‌شود که $c_۱ - c_۲$ (در مقیاس ثانیهٔ زمانی) زمان لازم برای عبور یک ستارهٔ استوایی از سیم $W_۱$ به سیم $W_۲$ است.

مثال. در ۳ ژانویهٔ ۱۹۳۱ بازهٔ زمانی بین عبورهای ستارهٔ δ دب اصغر از دو سیم تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری کمبریج برابر $۳^{\mathrm{m}}۴^{\mathrm{s}}$ بود؛ فاصلهٔ سیمها را پیدا کنید.

از تقویم نجومی دریانوردی، داریم $\delta = +۸۶^\circ۳۶'۳۴''$. همچنین $t = ۳^{\mathrm{m}}۴^{\mathrm{s}} = ۱۸۴^{\mathrm{s}}$ است. بدین ترتیب داریم

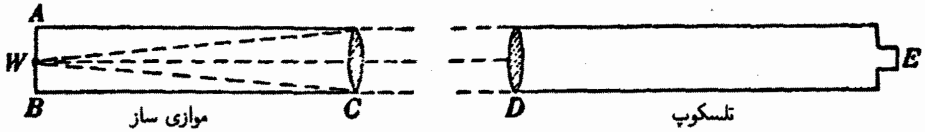
$$\begin{aligned} c_۱ - c_۲ &= ۱۸۴^{\mathrm{s}}\cos ۸۶^\circ۳۶'۳۴'' \\ &= ۱۰^{\mathrm{s}}{،}۸۸ \end{aligned}$$

۴۹. تعیین خطای موازی‌سازی

روشهای تعیین خطاهای دستگاهی، با اندازه یا ظرافت تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری تغییر می‌کنند. هدف ما این نیست که همهٔ روشهای گوناگون متداول را شرح دهیم و پیشنهاد می‌کنیم که دانشجو برای جزئیات مطلب به کتابی که بیشتر به نجوم عملی می‌پردازد، مراجعه کند.[1] با این حال چند اصل کلی برای تعیین خطاهای گوناگون وجود دارند که به نوبت آنها را بررسی می‌کنیم؛ این بررسی را با خطای موازی‌سازی آغاز می‌کنیم.

در تلسکوپهای عبور بزرگ خطای موازی‌سازی با دو موازی‌ساز، یکی در شمال و دیگری در جنوب تلسکوپ، تعیین می‌شود. موازی‌ساز جنوبی را در نظر بگیرید که از یک عدسی شیئی قائم درست شده است و محورش روی دایرهٔ نصف‌النهار یا نزدیک به آن قرار دارد و ارتفاعش با ارتفاع محور چرخش تلسکوپ از کف اتاق یکی است. در صفحهٔ کانونی (AB) عدسی شیئی (C) موازی‌ساز یک یا دو سیم قائم و یک یا دو سیم افقی قرار دارد (شکل ۳۸). (برای سادگی فرض خواهیم کرد که فقط یک سیم قائم و یک سیم افقی وجود دارد.) این سیمها را می‌شود با یک

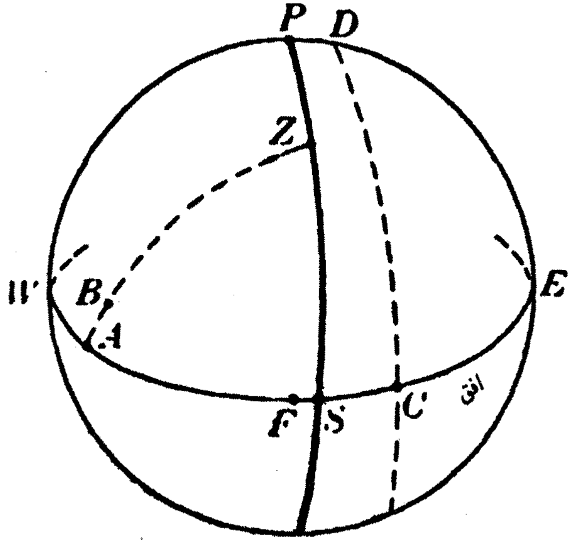
۱. رجوع کنید به کتاب
W. W. Campbell, *The Elements of Practical Astronomy*, (Macmillan, 1899).



شکل۳۸

عدسی چشمی که درست بیرون صفحهٔ کانونی AB قرارگرفته است نگاه کرد. هنگامی که تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری به‌طور افقی و به‌طرف جنوب نشانه رود، راصد می‌تواند در میدان دید واقع در E، سیم موازی‌ساز W را در صورتی که درست روشن شده باشد، ببیند. چون سیم موازی‌ساز در صفحهٔ کانونی عدسی C قرار دارد، پرتوهایی که از W می‌آیند و از موازی‌ساز عبور می‌کنند به‌طور موازی از C خارج می‌شوند و پس از ورود به عدسی شیئی تلسکوپ، D، تصویر واضحی از سیم در E تشکیل می‌دهند. در این آرایش نوری، مشاهدهٔ سیم موازی‌ساز معادل مشاهده جسمی در بینهایت است. موازی‌ساز شمالی نیز به روش مشابهی تنظیم می‌شود، با این تفاوت که فرض می‌کنیم سیم قائم در آن به‌وسیلهٔ ریزسنجی قابل حرکت دادن است و سیم موازی‌ساز جنوبی ساکن است. وقتی تلسکوپ به وضعیت قائم چرخانده می‌شود، دریچه‌های واقع در چهارچوبهٔ محور را می‌توان باز کرد و از یک موازی‌ساز، دیگری را بدون مانع دید. بدین ترتیب اگر راصد در انتهای چشمی موازی‌ساز شمالی بایستد می‌تواند سیم موازی‌ساز جنوبی را ببیند و با به‌کار انداختن ریزسنج، سیم موازی‌ساز شمالی را با تصویر سیم موازی‌ساز جنوبی منطبق سازد. هنگامی که این کار انجام شود، آرایش نوری مرکب به نحوی است که اگر در تلسکوپ به سیم موازی‌ساز جنوبی نگاه کنیم مثل این است که آن سیم در جهت خاصی در فاصلهٔ بینهایت دور قرار دارد و وقتی سیم موازی‌ساز شمالی را در تلسکوپ بنگریم مثل این است که در فاصلهٔ بینهایت دور دقیقاً در جهت مخالف قرار دارد. امکان دارد جهت سیم موازی‌ساز جنوبی دقیقاً در جهت جنوب نباشد؛ فرض کنید که این جهت به اندازهٔ θ درجه به‌طرف غرب جنوب باشد؛ در این صورت سیم موازی‌ساز شمالی در جهت θ درجه به‌طرف شرق شمال خواهد بود. روش تعیین خطای موازی‌سازی c باید طوری باشد که کمیت نامعلوم θ در رصدها حذف شود.

فرض کنیم که نخست تلسکوپ به‌طرف موازی‌ساز جنوبی نشانه برود به‌طوری که سیم قائم آن دیده شود. این سیم همانند جسمی است که مکان آن روی کرهٔ سماوی با نقطهٔ F نشان داده شده و FS زاویهٔ θ است (شکل ۳۹). فرض کنید خطای موازی‌سازی c مثبت باشد، در این صورت (با چرخاندن تلسکوپ حول محورش) سیم مرکزی، دایرهٔ صغیره CD که محور غربی، B، تلسکوپ قطب آن است را روی کرهٔ سماوی جاروب می‌کند و کمان دایرهٔ عظیمه که B را به C وصل می‌کند $c + {}^\circ۹۰$ است. چون همیشه خطای تراز کوچک است این کمان دایرهٔ عظیمه عملاً در مجاورت نقطهٔ جنوب S بر افق منطبق است، بدین ترتیب برای منظور فعلی می‌توانیم از خطای



شکل ۳۹

تراز چشم بپوشیم و فرض کنیم که قسمت غربی محور تلسکوپ به‌طرف A نشانه رفته است؛ نقطهٔ A روی افق است به‌طوری که WA خطای سمت a است. بنابراین $AC = ۹۰° + c$ است.

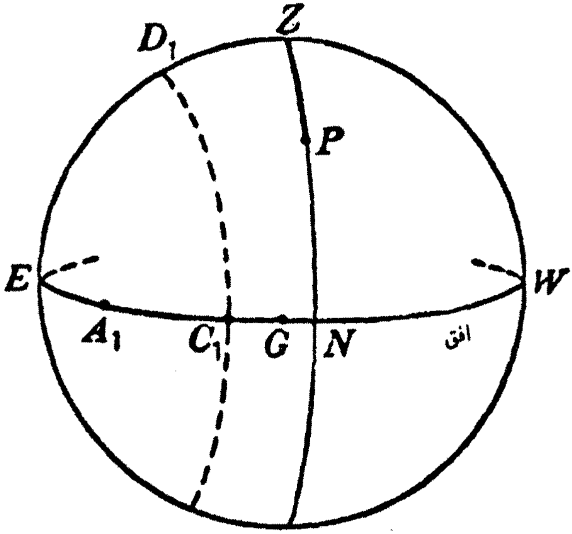
اکنون $AS = ۹۰° - a$ و $AC = ۹۰° + c$؛ از این‌رو $SC = a + c$ است و چون $FS = \theta$ داریم

$$FC = \theta + a + c \tag{۱۳}$$

یک تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری را در نظر می‌گیریم که به مجموعه‌ای از سیمهای قائم ثابت و یک سیم متحرک متصل به یک ریزسنج مجهز است و مقیاس آن، مثلاً با روش ذکر شده در بخش ۴۸، تعیین شده است. سیم متحرک را روی سیم مرکزی (متناظر C در شکل ۳۹) قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $M_۱$ مقدار خوانده شدهٔ ریزسنج باشد؛ سپس آن را روی تصویر سیم موازی‌ساز جنوبی F قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم که مقدار خوانده شده $M_۲$ باشد. از این‌رو، برحسب مقیاس ریزسنج، $M_۲ - M_۱ = CF$ است و با نوشتن $D = M_۲ - M_۱$ از رابطهٔ (۱۳) داریم

$$D = \theta + a + c \tag{۱۴}$$

لازم است قراری در مورد علامت D گذاشته شود؛ هنگامی که، مانند شکل ۳۹، C در شرق F است، علامت D مثبت فرض می‌شود. بدین ترتیب اگر در تلسکوپ نگاه کنیم (چون ترکیب نوری



شکل ۴۰

وارون کننده است) سیم مرکزی C در غرب سیم موازی‌ساز جنوبی F دیده می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که تلسکوپ به‌طرف موازی‌ساز شمالی نشانه رفته است. از خطای تراز که چشم بپوشیم، انتهای شرق محور متوجه $A_۱$ (شکل ۴۰) خواهد شد به‌طوری که $EA_۱ = a$. دایرهٔ صغیرهٔ مربوط به سیم مرکزی که $A_۱$ قطب آن است افق را روی کرهٔ سماوی بین نقاط شمال و شرق، در $C_۱$، قطع می‌کند. چون $A_۱$ در شکل ۴۰ و A در شکل ۳۹ دو نقطهٔ قطری روبه‌روی هم‌اند و $AC = ۹۰° + c$ است بنابراین، داریم $A_۱C_۱ = ۹۰° - c$. همچنین $A_۱N = ۹۰° - a$ است؛ از این‌رو نتیجه می‌شود $C_۱N = c - a$. از سوی دیگر، سیم قائم موازی‌ساز شمالی در جهت θ درجه به‌طرف شرق شمال است و مکان G را روی کرهٔ سماوی مشخص می‌کند، به‌طوری که $GN = \theta$ است. از این‌رو، داریم

$$GC_۱ = c - a - \theta \qquad (۱۵)$$

می‌دانیم وقتی سیم متحرک بر سیم مرکزی منطبق می‌شود مقدار $M_۱$ روی ریزسنج خوانده می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم وقتی سیم متحرک بر سیم موازی‌ساز شمالی G منطبق می‌شود مقدار $M_۲$ خوانده شود. اگر بنویسیم $D' = M_۲ - M_۱$ در این صورت مطابق شکل ۴۰ چون $C_۱$ در شرق G است، به‌طوری که در تلسکوپ سیم مرکزی در غرب سیم موازی‌ساز دیده می‌شود، پس طبق

قرار داد علامت D' مثبت است. با استفاده از رابطهٔ (۱۵) داریم

$$D' = c - a - \theta \tag{۱۶}$$

از روابط (۱۴) و (۱۶) نتیجه می‌شود

$$c = \frac{۱}{۲}(D + D') \tag{۱۷}$$

این فرمول خطای موازی‌سازی c است. در وهلهٔ نخست D و D' برحسب مقیاس ریزسنج بیان می‌شوند و از مقدار از قبل تعیین‌شدهٔ یک گردش ریزسنج برحسب ثانیهٔ زمانی، می‌توانیم c را برحسب این واحد بیان کنیم.

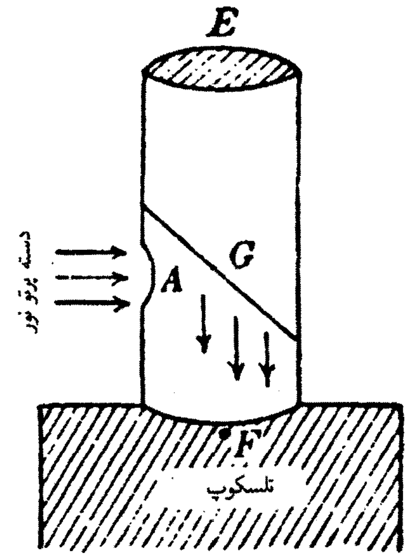
باید توجه داشت که در ابزارهایی که مجموعهٔ سیمهای قائم آن متحرک‌اند اثر خطای موازی‌سازی و تصحیح ابیراهی (که در بخش ۴۶ به آن اشاره شده است) بر روی زمان عبور یک ستاره را می‌توان از میان برداشت. به هر مکان سیم مرکزی یک مقدار معین c مربوط می‌شود و اگر سیمها را به چنان مکانی حرکت دهیم که رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$c - ۰^s{,}۰۲۱ \cos\phi = ۰ \tag{۱۸}$$

(که در آن ϕ عرض جغرافیایی است) تصحیحایی که به زمان عبور از سیم مرکزی باید اعمال شوند تا زمان عبور از دایرهٔ نصف‌النهار حقیقی به‌دست‌آید منحصراً تصحیحهایی ناشی از خطای سمت a و خطای تراز b هستند.

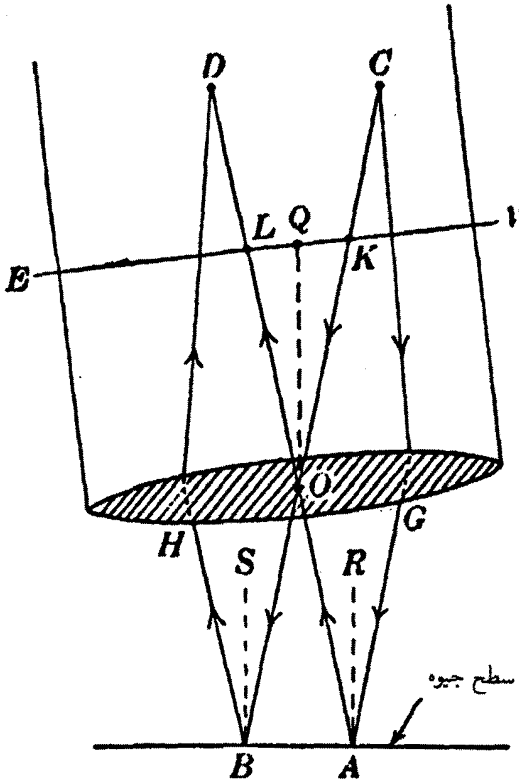
۵۰. تعیین خطای تراز

در مورد تلسکوپهای دایرهٔ نصف‌النهاری کوچک، به‌طور کلی این خطا را می‌توان با دقت کافی به‌وسیلهٔ یک تراز آبی که روی محور چرخش قرار داده می‌شود به‌دست آورد. در ابزارهای بزرگ، روشی دقیقتر به‌کار گرفته می‌شود که اینک توضیح داده می‌شود. تلسکوپ به‌طور قائم و روبه پایین به‌طرف یک تشتک جیوه که معمولاً برای جلوگیری از آشفتگیهای جوی و مانند آن، پایینتر از کف اتاق قرار دارد، نشانه می‌رود. سطح جیوه مانند یک صفحهٔ بازتابان افقی عمل می‌کند و خط عمود بر آن جهت سمت‌الرأسی را معین می‌کند. یک چشمی ویژه موسوم به چشمی بونن برگر، امکان عبور یک دسته پرتو نور را به داخل تلسکوپ امکانپذیر می‌سازد که پس از عبور از عدسی شیئی، از سطح جیوه باز می‌تابد و دوباره وارد عدسی شیئی می‌شود. سیم مرکزی و تصویر آن، که پس از بازتاب در سطح جیوه تشکیل می‌شوند، هر دو در میدان دید مشاهده خواهند شد. این چشمی ویژه (شکل ۴۱)، از لوله‌ای درست شده است که در بدنهٔ آن روزنهٔ A وجود دارد که از آن پرتوهای افقی یک لامپ واقع در فاصله‌ای از لوله، به درون آن وارد می‌شوند. یک قطعه شیشهٔ شفاف



شکل۴۱

G درون لوله و مقابل A، تحت زاویهٔ $۴۵°$ نسبت به محور لوله، قرار دارد. سطح شیشه مانند یک بازتابان عمل می‌کند و بخشی از دسته پرتو ورودی در A را به درون تلسکوپ باز می‌تاباند. چون این شیشه نقره‌اندود نیست، وقتی راصد چشم خود را در E قرار می‌دهد می‌تواند سیمهای قائم و تصاویر آنها را که به سبب بازتاب در سطح جیوه به‌وجود می‌آیند، ببیند. فرض می‌کنیم در شکل ۴۲، EW محور چرخش تلسکوپ باشد که به اندازهٔ زاویهٔ b نسبت به افق مایل است. همچنین فرض می‌کنیم O مرکز عدسی شیئی، C سیم مرکزی و D تصویر آن، و AB سطح جیوه باشد. پرتو CO که از C به مرکز عدسی شیئی (نازک فرض می‌شود) می‌تابد بدون انحراف از آن خارج می‌شود و در B به سطح جیوه برخورد می‌کند. چون C در صفحهٔ کانونی عدسی شیئی قرار دارد هر پرتو دیگری مانند CG، در امتداد GA به موازات OB از عدسی شیئی خارج خواهد شد. بدین ترتیب پرتوهایی که درون یک مخروط از C گسیل می‌شوند به‌صورت دسته پرتو موازی بیرون خواهند آمد. این دسته پرتو از سطح جیوه به‌صورت یک دسته پرتو موازی دیگر باز می‌تابد و به‌وسیلهٔ عدسی شیئی در کانونی واقع در D کانونی می‌شود. پرتو COB را در نظر می‌گیریم؛ این پرتو در B در امتداد BH طوری باز می‌تابد که $O\hat{B}S = S\hat{B}H$ باشد، زیرا BS عمود بر سطح جیوه در B است. این پرتو پس از اینکه در H از عدسی شیئی عبور می‌کند، از نقطهٔ D می‌گذرد. DO را امتداد دهید تا سطح جیوه را در A قطع کند. فرض کنید CG یک پرتوی آمده از C باشد که در نقطهٔ A بر سطح جیوه می‌تابد. در این صورت این پرتو در امتداد AO باز می‌تابد و از D می‌گذرد؛ بدین ترتیب GA با OB موازی است و AO با BH. پس نتیجه می‌گیریم که



شکل۴۲

$C\hat{O}D = G\hat{A}O = O\hat{B}H$ و هر یک دو برابر $O\hat{B}S$ است. فرض می‌کنیم OQ موازی BS و AR باشد. در این صورت چون OQ عمود بر سطح جیوه است داریم $K\hat{Q}O = ۹۰° + b$. همچنین $W\hat{K}O = ۹۰° + c$ است، که در آن c خطای موازی‌سازی است. اکنون داریم

$$K\hat{Q}O = W\hat{K}O - Q\hat{O}K$$

یعنی

$$b = c - \frac{۱}{۲}C\hat{O}D$$

زاویه COD را می‌توان اندازه گرفت. سیم متحرک را نخست روی سیم مرکزی C و سپس روی تصویر آن D قرار می‌دهیم؛ اختلاف بین مقادیر خوانده شده، مثلاً R است که می‌تواند از مقدار

معلوم مقیاس ریزسنج به ثانیه تبدیل شود. بدین ترتیب داریم

$$b = c - \frac{۱}{۲}R \qquad (۱۹)$$

که از آن b را، با فرض معلوم بودن c، می‌توان به‌دست آورد. هنگامی که مجموعهٔ سیمهای قائم متحرک است، مقدار $\frac{۱}{۲}R$ براحتی با حرکت دادن این سیمها، و انطباق سیم مرکزی بر تصویرش به‌دست می‌آید. قرارداد علامت R به‌صورت زیر است: بنابه تعریف هنگامی که سیم مرکزی در درون تلسکوپ در غرب تصویرش دیده شود، R مثبت است.

۵۱. تعیین خطای سمت

با توجه به اینکه مقادیر b و c قبلاً تعیین شدند، خطای سمت، a، را هم می‌توان به‌کمک رصد ستاره‌ها به‌دست آورد. فرض می‌کنیم که $(\alpha_۱, \delta_۱)$ و $(\alpha_۲, \delta_۲)$ مختصات استوایی دو ستاره و $T_۱$ و $T_۲$ زمانهای عبور رصد شدهٔ آنها برطبق ساعت نجومی باشند، با استفاده از رابطهٔ (۵) داریم

$$\alpha_۱ = T_۱ + \Delta T + aA_۱ + bB_۱ + cC_۱$$
$$\alpha_۲ = T_۲ + \Delta T + aA_۲ + bB_۲ + cC_۲$$

در این معادلات ΔT خطای نامعلوم ساعت است و اگر با انتخاب مناسب دو ستاره، رصد آنها به فاصلهٔ چند دقیقه از یکدیگر انجام شود می‌توان فرض کرد که مقدار ΔT در این دو معادله یکی است؛ همچنین در این معادله‌ها داریم $A_۱ = \sin(\phi - \delta_۱)\sec\delta_۱$، و مانند آن. با عمل تفریق، ΔT حذف می‌شود و داریم

$$a = \frac{(\alpha_۲ - \alpha_۱) - (T_۲ - T_۱) - b(B_۲ - B_۱) - c(C_۲ - C_۱)}{A_۲ - A_۱} \qquad (۲۰)$$

در این معادله

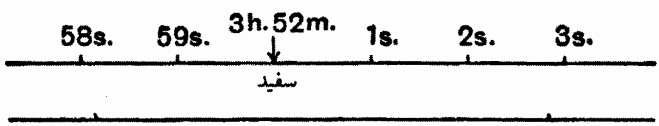
$$A_۲ - A_۱ = \sin(\phi - \delta_۲)\sec\delta_۲ - \sin(\phi - \delta_۱)\sec\delta_۱$$

طرف راست رابطهٔ (۲۰) را می‌توان از مقادیر معلوم b، c، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\delta_۱$، $\delta_۲$، و زمانهای رصد شدهٔ $T_۱$ و $T_۲$ محاسبه کرد. اکنون باید نشان دهیم که انتخاب ستاره‌ها چگونه باشد تا تعیین دقیق a را امکانپذیر سازد. از رابطهٔ (۲۰) چنین برمی‌آید که اگر مخرج کسر $(A_۲ - A_۱)$ بزرگ باشد a با دقت بیشتری تعیین می‌شود. این شرط هنگامی برقرار است که یا (الف) یک ستاره با میل بالا $(\delta_۲)$ انتخاب شود و یک ستاره در نزدیکی استوا (با میل $\delta_۱$) زیرا در آن صورت $A_۲$ به‌علت بزرگی $\sec\delta_۲$ بزرگ خواهد بود، یا (ب) یک ستاره با میل بالا $(\delta_۲)$ در عبور بالا رصد شود و یک ستاره با میل بالا $(\delta_۱)$، که بُعد آن تقریباً ۱۲ ساعت با بُعد ستارهٔ نخست اختلاف دارد، در عبور پایین رصد شود. در (ب) مقادیر $A_۱$ و $A_۲$ هر دو بزرگ‌اند اما علامتهای مخالف دارند، به‌طوری که $(A_۲ - A_۱)$ از لحاظ عددی بزرگ خواهد بود.

۵۲. زمان‌نگار (اهمیت تاریخی)

در تلسکوپهای دایرهٔ نصف‌النهاری جدید زمانهای عبور یک ستاره از روی مجموعه سیمهای قائم به‌طور الکتریکی به‌وسیلهٔ یک زمان‌نگار ثبت می‌شوند. یک دستگاه با ساز و کار ساعتی یک نوار کاغذی را با آهنگی یکنواخت می‌کشد (یا استوانه‌ای که سطح آن با صفحهٔ کاغذی پوشیده شده است را با سرعتی یکنواخت می‌گرداند). ساعت نجومی که قرار است به‌وسیلهٔ آن زمانهای عبور ثبت شوند با سیمهایی به آهنربای الکتریکی زمان‌نگار که مجهز به یک قلم است وصل می‌شود. آونگ ساعت هر بار در پایین نوسان خود یک مدار الکتریکی را برای لحظه‌ای می‌بندد و جریان لحظه‌ای که از آهنربای الکتریکی می‌گذرد سبب «جهیدن» قلم می‌شود. وقتی جریانی نمی‌گذرد، این قلم یک خط مستقیم روی نوار متحرک (یا روی کاغذ استوانهٔ چرخان) رسم می‌کند، اما وقتی که به‌وسیلهٔ آونگ تماس برقرار می‌شود، «جهش» قلم علامت واضحی روی کاغذ می‌کشد. بدین نحو، ثانیه‌های ساعت به‌طور مکانیکی ثبت می‌شوند. معمولاً آرایش خودکاری وجود دارد که سبب می‌شود قلم، ثانیهٔ شصتم هر دقیقه را سفید بگذارد. بدین ترتیب به آسانی، با نگاهی به ساعت می‌توان ساعت و دقیقهٔ مربوط به هر قسمت «سفید» را معین کرد و این زمان را روی کاغذ نوشت و هر ثانیهٔ بخصوصی از دقیقهٔ بعدی را با شمردن تعداد «جهشهای» قلم از قسمت «سفید» به‌دست آورد. این موضوع روی رد بالایی شکل ۴۳ نشان داده شده است. زمان‌نگار قلم دیگری دارد که به‌یک آهنربای الکتریکی وصل است و ردی موازی رد قلم ساعت رسم می‌کند. این قلم می‌تواند توسط راصد با بستن مداری با یک کلید تلنگری به‌کار انداخته شود. وقتی راصد ستاره‌ای را درون تلسکوپ روی یک سیم قائم مشاهده می‌کند تلنگری به کلید می‌زند و قلم دومی «جهشی» روی کاغذ متحرک انجام می‌دهد. زمان عبور ستاره از این سیم را می‌توان بعداً با استفاده از آنچه روی زمان‌نگار ثبت شده است تعیین کرد (این رد در پایین شکل ۴۳ نشان داده شده است).

چندین شکل دیگر از روشی که در بالا توضیح داده شد، متداول است. در یکی از آنها راصد یک سیم قائم را به‌وسیلهٔ ریزسنج متصل به آن، طوری حرکت می‌دهد که تصویر ستارهٔ در حال حرکت در میدان دید را، همواره نصف کند؛ در نقاطی معین، منطبق بر مکانهای مجموعه سیمهای قائم، قاب حامل سیم یک مدار الکتریکی را می‌بندد و قلم زمان‌نگار به‌موقع نگاشتها را ثبت می‌کند. در دوربینهای دایرهٔ نصف‌النهار دیگر، سیم متحرک به‌وسیلهٔ موتور کوچکی که سرعت آن طبق میل ستاره تنظیم می‌شود، جابه‌جا می‌شود و راصد فقط باید تصحیحهای کوچک ضروری را در مورد سرعت موتور اعمال کند تا تصویر ستاره همواره نصف شود.



شکل۴۳

۵۳. اندازه‌گیری میل

قبلاً متذکر شدیم که محور چرخش تلسکوپ حامل دو دایره به‌دقت مدرج شده است. این درجه‌بندیها به فاصله‌های ′۵ از هم و از °۰ تا °۳۶۰ هستند. در صفحهٔ کانونی عدسی شیئی، یک سیم افقی وجود دارد و هنگامی که میل یک ستاره رصد می‌شود تلسکوپ طوری تنظیم می‌شود که ستاره ظاهراً در نزدیکی محور موازی‌سازی و در امتداد این سیم افقی حرکت کند. در این وضعیت، دایره‌های مدرج مقدار ویژهٔ $R_۱$ را نشان می‌دهند که تعیین دقیق آن با استفاده از چهار میکروسکوپ (به فاصلهٔ °۹۰ از یکدیگر) واقع روی هر دایره آسان می‌شود. برای به‌دست آوردن فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره باید مقدار R که هنگام نشانه روی دقیق تلسکوپ به‌طرف سمت‌الرأس از روی دایره خوانده می‌شود را بدانیم. برای لحظه‌ای فرض می‌کنیم سیم افقی در صفحهٔ کانونی عدسی شیئی ساکن است. تلسکوپ را به‌طرف پایین روبه تشتک جیوه نشانه می‌رویم و آن را تدریجاً (به‌وسیله پیچهای حرکت آهسته) حرکت می‌دهیم تا سیم افقی و تصویر آن از درون چشمی ویژهٔ شکل ۴۱ برهم منطبق دیده شوند، آن وقت با اضافه کردن °۱۸۰ به‌مقدار خوانده شده از دایره‌ها در این وضعیت، مقدار R مربوط به وضعیتی از تلسکوپ که به سمت‌الرأس نشانه می‌رود، به‌دست می‌آید. تفاضل مقادیر خوانده شدهٔ R و $R_۱$ فاصلهٔ سمت‌الرأسی دایر ۀ نصف‌النهار ستاره است. البته این فاصلهٔ سمت‌الرأسی ناشی از شکست جوی است و با برطرف کردن آن فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ستاره به‌دست می‌آید. سرانجام به فرض معلوم بودن عرض جغرافیایی، میل ستاره محاسبه می‌شود. اما در عمل تنظیم تلکسوپ با دقت بالا توصیه نمی‌شود. چون همیشه میل تقریبی ستاره‌ای که می‌خواهیم آن را رصد کنیم معلوم است می‌توانیم تلسکوپ را با چنان دقتی به‌طرف ستاره نشانه رویم که مطمئن باشیم ستاره به‌موقع در میدان دید ظاهر خواهد شد. معمولاً، ستاره (گذشته از انحنای جزئی در مسیر) به موازات سیم افقی و در فاصله‌ای از آن حرکت خواهد کرد. با تلسکوپی که در این وضعیت قرار دارد می‌توان دایره‌ها را قبل یا بعد از ظاهر شدن ستاره قرائت کرد. فرض می‌کنیم مقدار خوانده شده $R_۲$ باشد. اکنون فرض می‌کنیم که سیم افقی بتواند به‌وسیلهٔ یک ریزسنج به موازات خودش به چنان وضعیتی حرکت داده شود که ستاره به‌ظاهر در امتداد این سیم حرکت کند. دو مقدار خوانده شدهٔ ریزسنج یعنی $M_۰$ و $M_۱$ را در نظر می‌گیریم که اولی عدد خوانده شدهٔ ابتدایی (مثلاً عدد معینی که از ریزسنج خوانده می‌شود) و دومی مقدار خوانده شده به هنگام حرکت ظاهری ستاره در امتداد سیم است. مقدار یک چرخش ریزسنج را می‌توان برحسب ثانیهٔ قوسی با رصد دو ستارهٔ نزدیک به‌هم با میلهای معلوم، پیدا کرد. با ساکن نگه داشتن تلسکوپ می‌توان تفاوت میلهای دو ستاره را برحسب مقیاس ریزسنج اندازه گرفت و بدین ترتیب این مقیاس (برحسب ثانیهٔ قوسی) را به‌دست آورد. اکنون هنگامی که تلسکوپ دقیقاً به‌طرف سمت‌الرأس نشانه می‌رود دایره‌ها مقدار ویژهٔ R که نظیر $M_۰$ است را نشان می‌دهند؛ فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره، مانند حالتی که سیم افقی ثابت است، دقیقاً برابر با اختلاف بین R و $R_۲$ نیست و باید به این اختلاف، تصحیحی که با $(M_۱ - M_۰)$ داده می‌شود و برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود را اعمال کرد.

بدین ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی ستاره تعیین می‌شود و مانند پیش می‌توان میل آن را به‌دست آورد.

۵۴. اندازه‌گیری بُعد

نقطهٔ واقع بر استوای سماوی که بُعد ستاره‌ها نسبت به آن اندازه‌گیری می‌شود نقطهٔ اعتدال بهاری است که مکان مرکز خورشید در اول فروردین (لحظهٔ تحویل سال نو ایرانی) هنگام عبور خورشید از میل جنوبی به میل شمالی مکان آن را به‌دست می‌دهد. خورشید در انقلاب تابستانی (اول تیر) به بیشترین میل شمالی خود می‌رسد و میل آن برابر است بامیل دایرةالبروج. رصد فاصلهٔ سمت‌الرأسی نصف‌النهاری خورشید چندین روز قبل و بعد از انقلاب تابستانی به تعیین مقدار دقیق میل آن درست در انقلاب تابستانی خواهد انجامید، به عبارت دیگر میل دایرةالبروج رامی‌توان پیدا کرد. باید توجه داشت که در این بررسیها میل مرکز خورشید باید مشخص شود. در رصدهای واقعی فاصلهٔ سمت‌الرأسی نصف‌النهاری لبهٔ بالایی (یا پایینی) اندازه گرفته می‌شود، و برای به‌دست آوردن فاصلهٔ سمت‌الرأسی مرکز، نیم قطر زاویه‌ای خورشید (زاویه‌ای که در محل چشم راصد شعاع خورشید را فرا می‌گیرد) باید به آن اضافه (یا کم) شود.

چون اعتدال بهاری ارتباط نزدیکی با خورشید دارد، نتیجه می‌گیریم که بُعد هر ستاره به نحوی اساسی به مکان خورشید در هر روز بستگی دارد. فرض کنید که رصد کامل خورشید در یک روز خاص اطلاعات زیر را فراهم کند.

۱. زمان ساعتی عبور مرکز خورشید T (که از حیث خطاهای دستگاهی a، b، و c تصحیح شده است) و

۲. فاصلهٔ سمت‌الرأسی مرکز خورشید در لحظهٔ عبور.

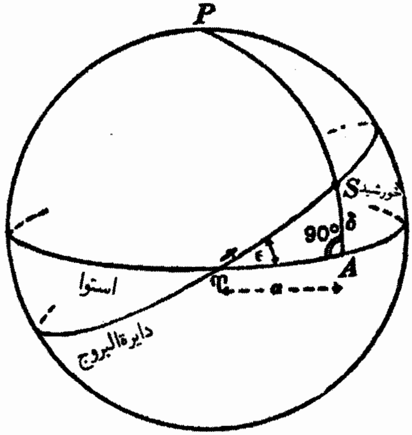
با فرض اینکه عرض جغرافیایی را دقیقاً می‌دانیم، میل مرکز خورشید را مانند بخش گذشته به‌دست می‌آوریم [در این بحث تصحیح ناشی از «اختلاف‌منظر» را حذف می‌کنیم (فصل ۹ را ببینید)]. با داشتن میل و زاویهٔ میل ε (که معلوم فرض می‌شود) می‌توانیم بُعد α خورشید را به‌هنگام عبور در روز مورد سؤال محاسبه کنیم. در مثلث ΥSA (شکل ۴۴)، PSA دایرهٔ نصف‌النهار گذرنده از خورشید S است و $S A \Upsilon = ۹۰^\circ$، $\Upsilon A = \alpha$، $AS = \delta$، $S\Upsilon A = \varepsilon$. با استفاده از فرمول (د) داریم

$$\cos\alpha\cos ۹۰^\circ = \sin\alpha\cot\delta - \sin ۹۰^\circ\cot\varepsilon$$

یا

$$\sin\alpha = \tan\delta\cot\epsilon \qquad (۲۱)$$

که در آن بُعد α خورشید در لحظهٔ عبور در روز مورد نظر به‌دست می‌آید. فرض کنید E خطای ساعت نجومی در زمان عبور T باشد. در این صورت زمان نجومی واقعی عبور $T + E$ خواهد



شکل۴۴

بود. اما این مقدار دقیقاً برابر با بُعد خورشید α است. از این‌رو داریم

$$\alpha = T + E \qquad (۲۲)$$

فرض کنید که بعداً، به محض عملی شدن، عبور یک ستاره رصد شود و زمان ساعتی آن T_1 باشد (فرض می‌کنیم که T_1 و T هر دو از حیث خطاهای دستگاهی a، b، و c تصحیح شده‌اند). خطای ساعت اکنون کمی متفاوت و برابر E_1 فرض می‌شود. اگر α_1 بُعد ستاره باشد، خواهیم داشت

$$\alpha_1 = T_1 + E_1 \qquad (۲۳)$$

به‌طوری که، از روابط (۲۲) و (۲۳)، داریم

$$\alpha_1 - \alpha = (T_1 - T) + (E_1 - E) \qquad (۲۴)$$

$(T_1 - T)$ بازهٔ زمانی بین عبور خورشید و ستاره بر طبق ساعت است و بنابراین معلوم است. اگر ساعت تند و یا کند کار نکند $(E_1 - E) = ۰$ است و α_1 را می‌توان از رابطه (۲۴) پیدا کرد. اما به‌طور کلی، ساعت را نمی‌توان از لحاظ مکانیکی بی‌نقص دانست و برای سادگی می‌توان فرض کرد که ساعت، در بازهٔ زمانی چند ساعت، با سرعتی یکنواخت تند (یا کند) کار می‌کند به‌طوری که $(E_1 - E)$ با بازهٔ زمانی بین رصدها متناسب است، پس می‌توانیم بنویسیم

$$E_1 - E = r(T_1 - T)$$

به‌طوری که رابطهٔ (۲۴) چنین می‌شود

$$\alpha_1 - \alpha = (1 + r)(T_1 - T) \qquad (۲۵)$$

فرض می‌کنیم این رصدها روز بعد نیز تکرار شوند. در این صورت خواهیم داشت

$$\alpha_۱ - \alpha' = (۱ + r)(T'_۱ - T') \qquad (۲۶)$$

که در آن α' بُعد خورشید است که از (۲۱) محاسبه شده است و T' و $T'_۱$ به‌ترتیب زمانهای نجومی عبور خورشید و ستاره‌اند. از تقسیم روابط (۲۵) و (۲۶) خواهیم داشت

$$\frac{\alpha_۱ - \alpha'}{\alpha_۱ - \alpha} = \frac{T'_۱ - T'}{T_۱ - T} \qquad (۲۷)$$

که از آن بُعد $\alpha_۱$ ستاره را می‌توان محاسبه کرد. در اینجا، به‌طور خلاصه، اصول بنیادی اندازه‌گیری بُعد ستاره‌ها را نشان دادیم. در عمل، فرض می‌شود که بُعد یک تعداد کافی ستاره دقیقاً اندازه‌گیری شده است؛ ستاره‌هایی که بر روی کرهٔ سماوی یک مجموعه نقاط مرجع تشکیل می‌دهند به «ستاره‌های بنیادی» موسوم‌اند و به‌وسیلهٔ آنها (یا گزیده‌ای از آنها) می‌توانیم، همان طور که در مورد خورشید انجام شد، بُعد هر ستاره‌ای را با اندازه‌گیری بازهٔ زمانی بین عبورهای یک یا چند ستارهٔ بنیادی و ستارهٔ مورد سؤال تعیین کنیم.

۵۵. اندازه‌گیری زمان

ستاره‌هایی که برای تعیین خطای ساعت و در نتیجه برای تعیین زمان نجومی دقیق و در گامی فراتر، برای تعیین UT دقیق انتخاب می‌شوند «ستاره‌های ساعتی» نامیده می‌شوند. اگر $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ بُعدهای معلوم دو ستارهٔ ساعتی، $T_۱$ و $T_۲$ زمانهای عبور رصد شده (که هر دو از حیث خطاهای دستگاهی سمتی و مانند آن تصحیح شده‌اند)، و $E_۱$ و $E_۲$ خطاهای ساعت در زمانهای عبور مربوط باشند، در آن صورت داریم

$$\alpha_۱ = T_۱ + E_۱$$
$$\alpha_۲ = T_۲ + E_۲$$

$\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ هر دو معلوم‌اند و مقادیر $T_۱$ و $T_۲$ از رصد به‌دست می‌آیند، از این‌رو $E_۱$ و $E_۲$ پیدا می‌شوند. آهنگ ساعت، یعنی r از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E_۲ - E_۱ = r(T_۲ - T_۱)$$

در عمل چندین ستاره رصد می‌شوند تا دقت بیشتری در مقادیر خطا و آهنگ ساعت به‌دست آید.

ساعتهای جدیدی که امروزه در چندین رصدخانهٔ مهم نصب شده‌اند دقیقترین زمان‌سنجهایی هستند که تا کنون اختراع شده‌اند. ثبت زمانی این ساعتها به‌قدری نزدیک به یکنواخت است که ممکن است آن را در تأیید توصیف نیوتونی زمان (در رابطه با ET) «جریانی یکروند» دانست و

کار عادی یک ساعت جدید طوری است که خطای آن را در هر روز می‌توان تقریباً از چندین ماه قبل پیشگویی کرد. در گذشته نحوهٔ کار یک ساعت با رصدهای دایرهٔ نصف‌النهار ستاره‌ها وارسی می‌شد. امروزه به‌طور معکوس عمل می‌کنند، و تغییرات دورهٔ چرخش زمین را با استفاده از این رصدها تعیین می‌کنند.

تمرینها

نمادهای به‌کار برده شده عبارت‌اند از:

$b =$ خطای تراز، $\phi =$ عرض جغرافیایی

$c =$ خطای موازی‌سازی، $a =$ خطای سمت

۱. اگر a و b تنها خطاهای یک تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری باشند، نشان دهید که این خطاها روی زمان عبور ستاره‌ای که میل آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید تأثیری ندارند

$$\delta = \phi + \tan^{-۱}(\frac{b}{a})$$

۲. ثابت کنید که خطای زمان عبور یک ستاره که از سه خطای دستگاهی ناشی می‌شود برای ستاره‌ای که میل آن برابر

$$\sin^{-۱}\{(a\cos\phi - b\sin\phi)/c\}.$$

است کمینه است.

[آزمون کالج]

۳. اگر دو ستاره با میلهای $\delta_۱$ و $\delta_۲$ بتوان پیدا کرد که خطاهای سه‌گانهٔ تنظیم در آنها در زمان عبور خطایی ایجاد نکنند، نشان دهید تصحیحی که باید به زمان عبور یک ستاره به میل δ اضافه شود برابر است با

$$۲c\sin\frac{۱}{۲}(\delta - \delta_۱)\sin\frac{۱}{۲}(\delta - \delta_۲)\sec\delta\sec\frac{۱}{۲}(\delta_۱ - \delta_۲)$$

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۴. اگر معلوم شود که زمان عبور رصد شده ستاره‌ای به میل ۳۰° بدون خطاست در حالی که زمانهای رصد شدهٔ ستاره‌هایی به میلهای ۱۵° و ۶۰° به‌ترتیب به اندازهٔ ۷٫۴− ثانیه و ۳۱٫۵+ ثانیه خطا دارند، نشان دهید که خطایی که برای ستاره‌ای به میل ۴۵° باید انتظار داشت تقریباً برابر ۱۱ ثانیه است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۵. در یک دوربین عبور به فاصلهٔ کانونی ۳۰۵ سانتیمتر که کاملاً تنظیم شده است و جز خطای موازی‌سازی خطای دیگری ندارد، مشاهده می‌شود که ستاره‌ای به میل $۶۰°$ در ثانیه زودتر از دایرهٔ نصف‌النهار می‌گذرد. نشان دهید که برای تنظیم این ابزار سیمها باید به اندازهٔ ۰٫۰۲ سانتیمتر حرکت داده شوند.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۰۰]

۶. ثابت تراز b و ثابت موازی‌سازی c یک ابزار عبور به‌ترتیب با خطاهای احتمالی Δb و Δc به روش معمولی تعیین می‌شوند. ثابت سمت a از رصد یک ستارهٔ قطبی و یک ستارهٔ استوایی تعیین می‌شود. نشان دهید که خطای احتمالی a از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta a = \Delta b \tan\phi + \Delta c \sec\phi$$

که در آن ϕ عرض جغرافیایی است.

همچنین ثابت کنید که رابطه‌های زیر برقرارند

$$\Delta m = \Delta b \sec\phi + \Delta c \tan\phi$$
$$\Delta n = -\Delta c$$

[لندن، ۱۹۲۶]

۷. زمانهای نجومی رصد شدهٔ عبور دو ستاره در یک روز در عرض جغرافیایی $۵۱°۳۰'$ شمالی که از حیث خطاهای تراز و موازی‌سازی آن تصحیح شده‌اند $۱۸^h۵۱^m۲۷^s٫۲$ و $۱۹^h۷^m۳۸^s٫۹$ هستند. اگر مختصات این دو ستاره چنین باشند

$$\alpha_۱ = ۱۸^h۵۱^m۳۶^s٫۵\ ;\ \delta_۱ = +۸۹°۲'$$
$$\alpha_۲ = ۷^h۷^m۱۱^s٫۲\ ;\ \delta_۲ = +۸۷°۱۰'$$

خطای سمت و خطای‌ساعت را محاسبه کنید.

[لندن، ۱۹۲۶]

۸. ثابت کنید که جابه‌جایی قطب چرخش زمین به اندازهٔ s متر در طول جغرافیایی L، تغییر $s/a \sin(l-L)\sec\phi \operatorname{cosec} ۱''$ را در خطای سمت یک تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری واقع در عرض جغرافیایی ϕ و طول جغرافیایی l ایجاد می‌کند که در آن a شعاع زمین برحسب متر است. مقدار بیشینهٔ این جابه‌جایی را برای رصدخانه‌ای واقع در عرض جغرافیایی $۶۰°$ به‌ترتیب تخمین بزنید و امکان کشف آن را در حین کار روزانهٔ تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری بحث کنید.

[لندن، ۱۹۲۲]

۹. با فرض اینکه تصحیح دستگاهی یک دوربین عبور به‌صورت زیر باشد

$$\tau = m + n\tan\delta + c\sec\delta$$

ثابت کنید که در صورت برقراری شرایط زیر، این مقدار تصحیح برای هر ستاره‌ای و با هر میلی مثبت خواهد شد

$$c > |n|$$

و

$$m + (c^۲ - n^۲)^{\frac{۱}{۲}} > ۰$$

۱۰. یک تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری با خطاهای دستگاهی نامعلوم در محلی که عرض و طول جغرافیایی آن به‌دقت معلوم نیستند، نصب شده است. روشی برای تعیین کمیتهای a، b، c، ΔT، m، n، ϕ، و λ پیشنهاد کنید؛ معنای این نمادها همان معنای معمولی است.

۵

حرکتهای سیارات

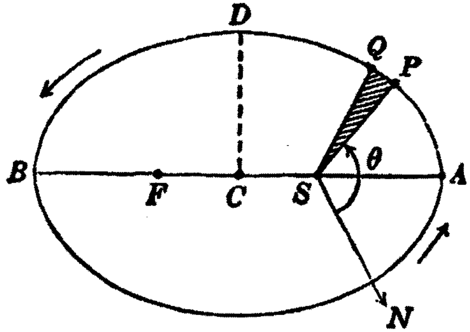
۵۶. مقدمه[۱]

نُه سیارهٔ بزرگ به ترتیب فاصله از خورشید عبارت‌اند از عطارد (تیر)، زهره(ناهید)، ارض(زمین)، مریخ(بهرام)، مشتری(برجیس)، زحل (کیوان)، اورانوس، نپتون، و پلوتون. قوانینی که بر حرکت سیارات نسبت به خورشید حاکم است توسط یوهانس کپلر (۱۰۰۹ – ۹۵۰)/(۱۶۳۰ – ۱۵۷۱) کشف شدند. نیم قرن بعد ایزاک نیوتون (۱۱۰۶ – ۱۰۲۱)/(۱۷۲۷ – ۱۶۴۲) ثابت کرد که قوانین سه‌گانهٔ کپلر را می‌توان از قانون جهانی گرانش که او در سال ۱۶۸۷/۱۰۶۶ در اصول بیان کرد، به دست آورد. بررسی کامل حرکت سیارات مربوط به نجوم دینامیکی است و از این‌رو در این کتاب وارد بحث آن نمی‌شویم. اما اگر بخواهیم بعضی مسائل را که با نجوم کروی وابستگی نزدیکتری دارند به‌طور روشن درک کنیم، بررسی برخی اصول و نتایج مربوط به حرکت سیارات و به‌ویژه حرکت زمین ضروری است.

۵۷. قانون اول کپلر

بنابه قانون اول کپلر مسیر یا مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید بیضی است و خورشید در یکی از کانونهای بیضی قرار دارد. شکل ۴۵ یک بیضی را نشان می‌دهد که در آن S و F دو کانون و C مرکز (نقطهٔ میانی بین S و F) و AB محور بزرگ است. فرض کنید خورشید در S

۱. در این فصل زمان برحسب زمان زیجی (ET) بیان می‌شود؛ پیوست ۵ را نگاه کنید.



شکل۴۵

است و سیاره در جهت پیکانها بیضی را طی کند. سیاره در A در نزدیکترین فاصله نسبت به خورشید قرار دارد؛ بنابراین می‌گوییم که سیاره درحضیض است. در B سیاره دورترین فاصله را از خورشید دارد و بنابراین می‌گوییم سیاره در اوج است. CA نیم محور بزرگ است و طول آن با a نشان داده می‌شود. CD که عمود بر CA رسم شده، نیم محور کوچک است و با b نشان داده می‌شود. نسبت $CS : CA$ خروج از مرکز خوانده می‌شود و ما آن را با e نشان می‌دهیم. نیم محور کوچک b رامی‌توان با فرمول زیر برحسب a و e بیان کرد

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \qquad (1)$$

فاصلهٔ حضیض SA برابر $a(1 - e)$، و فاصلهٔ اوج SB برابر $a(1 + e)$ است.

اگر P مکان سیاره روی مدارش باشد SP بردار شعاعی نامیده می‌شود و با r نشان داده می‌شود. این فاصلهٔ SP فاصلهٔ خورشید مرکزی سیاره، یعنی فاصلهٔ سیاره از خورشید است. فرض کنید SN یک جهت مرجع در صفحهٔ مدار باشد. در این صورت مکان P به وسیلهٔ بردار شعاعی r و زاویهٔ θ که SP با SN می‌سازد مشخص می‌شود؛ زاویهٔ θ در جهت حرکت سیاره اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید هنگامی که سیاره در حضیض یعنی در A قرار دارد، ω مقدار θ باشد به‌طوری که $N\hat{S}A = \omega$ است. در این صورت $P\hat{S}A = \theta - \omega$ است. می‌دانیم که معادلهٔ بیضی به صورت زیر است

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)} \qquad (2)$$

که در آن جانشانی زیر انجام شده است

$$p = b^2/a = a(1 - e^2) \qquad (3)$$

زمانی که لازم است تا سیاره مدارش را طی کند به دوره معروف است و با T نشان داده می‌شود. دورهٔ مداری زمین یک سال است که فعلاً $365\frac{1}{4}$ روز متوسط خورشیدی گرفته می‌شود.

۵۸. قانون دوم کپلر

قانون دوم کپلر می‌گوید بردار شعاعی SP (شکل ۴۵) در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی را جاروب می‌کند. فرض کنید P مکان سیاره در لحظهٔ t و Q مکان آن را در لحظهٔ $t + \Delta t$ نشان دهد. اگر $r + \Delta r$ بردار شعاعی SQ و $\theta + \Delta\theta$ زاویهٔ QSN را نشان دهد، در این صورت $Q\hat{S}P = \Delta\theta$ است. اگر $\Delta\theta$ به حد کافی کوچک باشد کمان PQ را می‌توان یک خط راست گرفت و مساحت جاروب شده در زمان بینهایت کوچک Δt برابر با مساحت مثلث QSP است، یعنی $\sin\Delta\theta$ $(r + \Delta r)$ $۱/۲r$ که با دقت کافی برابر $۱/۲r^۲\Delta\theta$ می‌شود. آهنگ پیمایش مساحت برابر است با عبارت اخیر تقسیم بر Δt. چون طبق قانون دوم کپلر این آهنگ ثابت است. می‌توانیم بنویسیم

$$r^۲\frac{d\theta}{dt} = h \qquad (۴)$$

که در آن h ثابت و دو برابر آهنگ پیمایش مساحت به وسیلهٔ بردار شعاعی است.

در این صورت مساحت کل بیضی برابر πab است که طبق تعریف در دورهٔ T پیموده می‌شود. از این‌رو داریم

$$\frac{۲\pi ab}{T} = h \qquad (۵)$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۱)، داریم

$$\frac{۲\pi a^۲(۱ - e^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{T} = h \qquad (۶)$$

بردار شعاعی در مدت T یک زاویهٔ ۳۶۰° یا ۲π جاروب می‌کند. اگر n آهنگ متوسط پیمایش این زاویه به وسیلهٔ بردار شعاعی باشد، در این صورت داریم

$$n = ۲\pi/T \qquad (۷)$$

n حرکت زاویه‌ای میانگین سیاره نامیده می‌شود. بردار شعاعی در رفتن از SP به SQ، زاویهٔ $\Delta\theta$ را در مدت Δt جاروب می‌کند. پس سرعت زاویه‌ای در P برابر $d\theta/dt$ است و بنابراین، n مقدار میانگین $d\theta/dt$ برای همهٔ نقاط مدار است. با کمک رابطهٔ (۷) می‌توان فرمول (۶) را به صورت زیر نوشت

$$na^۲(۱ - e^۲)^{\frac{۱}{۲}} = h \qquad (۸)$$

۵۹. قانون سوم کپلر

قانون سوم کپلر به بیان ریاضی به شرح زیر است. فرض کنید a و a_1 نیم محورهای بزرگ دو مدار سیاره‌ای و T و T_1 دوره‌های مداری آنها باشند. در این صورت طبق قانون سوم داریم

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} \tag{۹}$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۷) داریم

$$n^2 a^3 = n_1^2\, a_1^3 \tag{۱۰}$$

که در آن n و n_1 حرکتهای زاویه‌ای میانگین در این دو مدارند.

از رابطهٔ (۹) نتیجه می‌شود

$$\frac{a_1}{a} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{۱۱}$$

اگر a و T مربوط به مدار زمین به دور خورشید باشند، وقتی دورهٔ مداری T_1 از سیارهٔ P_1 برحسب سال معلوم باشد نسبت نیم‌محور بزرگ مدار آن سیاره به نیم‌محور بزرگ مدار زمین از رابطهٔ (۱۱) به دست می‌آید، زیرا T برای زمین یک سال است. دورهٔ مداری سیاره‌ها از طریق رصد (بخش ۸۰ را ببینید) معلوم می‌سوند و از این‌رو نیم محورهای بزرگ آنها را می‌توان برحسب a به عنوان واحد فاصله به دست آورد. نیم محور بزرگ مدار زمین، a، به عنوان واحد نجومی فاصله شناخته می‌شود. با قرار دادن $T = ۱$ در رابطهٔ (۱۱)، T_1 برحسب سال به دست می‌آید و داریم

$$a_1 = (T_1)^{\frac{2}{3}}\ \mathrm{AU}$$

۶۰. قانون گرانش نیوتون

این قانون به صورت زیر بیان می‌شود. هر ذرهٔ ماده، هر ذرهٔ دیگر ماده را با نیرویی متناسب با حاصلضرب جرمهای دو ذره و عکس مجذور فاصلهٔ میان آنها جذب می‌کند. بیان ریاضی این قانون به صورت زیر است

$$F = G\frac{mm_1}{r^2} \tag{۱۲}$$

که در آن m و m_1 جرمهای ذرات، r فاصلهٔ میان آنها، F نیروی گرانشی جاذبه، و G یک مقدار ثابت موسوم به ثابت گرانش است. مقدار G در دستگاه یکاهای cgs برابر $۶٫۶۷۰ \times ۱۰^{-۸}$ است، یعنی نیروی جاذبه میان دو ذره، هر یک به جرم یک گرم که به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر از یکدیگر قرار

دارند $۶٫۶۷۰ \times ۱۰^{-۸}$ دین است. برای منظور فعلی می‌توانیم خورشید و سیارات را «ذره» در نظر بگیریم.

اعمال قانون گرانش (۱۲) در حرکت یک سیاره به دور خورشید، به سه قانون کپلر می‌انجامد. فرض کنید M و m به‌ترتیب جرمهای خورشید و یک سیاره باشند و μ طبق رابطهٔ زیر تعریف شود

$$\mu = G(M+m) \qquad (۱۳)$$

در این صورت معلوم می‌شود که ثابت h در رابطهٔ (۴) به صورت زیر به دست می‌آید

$$h^۲ = \mu p = \mu a(۱-e^۲) \qquad (۱۴)$$

اما، با استفاده از رابطهٔ (۸)، داریم

$$h^۲ = n^۲a^۴(۱-e^۲)$$

از این‌رو

$$n^۲a^۳ = \mu \equiv G(M+m) \qquad (۱۵)$$

در مورد سیاره‌ای دیگر، داریم

$$n_۱^۲\, a_۱^۳ = \mu_۱ \equiv G(M+m_۱) \qquad (۱۶)$$

از این‌رو، از رابطهٔ (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت

$$\frac{n^۲a^۳}{n_۱^۲a_۱^۳} = \frac{M+m}{M+m_۱}$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۷)، نتیجه می‌شود

$$\frac{a^۳}{a_۱^۳} = \frac{M+m}{M+m_۱} \times \frac{T^۲}{T_۱^۲} \qquad (۱۷)$$

معادلهٔ (۱۷) شکل صحیح قانون سوم کپلر را که در نمادگذاری ما با رابطهٔ (۹) بیان شده بود به دست می‌دهد. در واقع جرم یک سیاره در مقایسه با جرم خورشید بسیار کوچک و کمیت $M+m/M+m_۱$ در رابطهٔ (۱۷) خیلی نزدیک به یک است؛ در نتیجه قانون سوم کپلر هر چند از دقت زیادی برخوردار نیست، یک تقریب خیلی خوب است.

۶۱. جرم سیاره‌ها

فرمولهای بخش پیش محاسبهٔ جرم هر سیاره‌ای را که یک قمر یا بیشتر دارد، برحسب کسری از جرم خورشید، به دست می‌دهند. اگر m، a، و T مقادیر مربوط به زمین باشند با استفاده از روابط (۷) و (۱۵) داریم

$$G(M+m) = ۴\pi^۲ \frac{a^۳}{T^۲} \tag{۱۸}$$

در این صورت حرکت یک قمر به دور یک ستاره توسط همان قوانین حرکت سیاره به دور خورشید تعیین می‌شود. در مورد قمر، سیاره جسم کنترل کننده است و اگر $m_۱$ و m' به‌ترتیب جرمهای سیاره و قمر، $a_۱$ نیم محور بزرگ مدار قمر به دور سیاره، و $T_۱$ دورهٔ مداری آن باشد، قانون گرانش نیوتون به معادله‌ای شبیه به رابطهٔ (۱۸) می‌انجامد که به صورت زیر است

$$G(m_۱+m') = ۴\pi^۲ \frac{a_۱^۳}{T_۱^۲} \tag{۱۹}$$

از این‌رو، با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹)، داریم

$$\frac{m_۱+m'}{M+m} = \left(\frac{a_۱}{a}\right)^۳ \left(\frac{T}{T_۱}\right)^۲ \tag{۲۰}$$

حال چون جرم m' قمر در مقایسه با جرم $m_۱$ سیاره کوچک است، می‌توانیم در روابط (۱۹) و (۲۰) از m' چشم بپوشیم. همین‌طور می‌توانیم ازجرم زمین m در مقایسه با جرم خورشید M صرفنظر کنیم. پس رابطهٔ (۲۰) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{m_۱}{M} = \left(\frac{a_۱}{a}\right)^۳ \left(\frac{T}{T_۱}\right)^۲ \tag{۲۱}$$

فرض می‌کنیم نیم محور بزرگ $a_۱$ مدار قمر برحسب واحد نجومی و دورهٔ $T_۱$ آن نیز برحسب سال در دست باشد. در این صورت در رابطهٔ (۲۱)، $a = ۱\text{AU}$ و $T = ۱\text{y}$ است و بنابراین نسبت $m_۱$ (جرم سیاره) به M (جرم خورشید) تعیین می‌شود.

به عنوان مثال جرم مریخ را (برحسب جرم خورشید) از اجزای مداری قمر دیموس پیدا خواهیم کرد. نیم‌محور بزرگ مدار دیموس به دور مریخ ۰٫۰۰۰۱۵۶۹۵ واحد نجومی است؛ دورهٔ آن ۱٫۲۶۲۴۴ روز یا $۱٫۲۶۲۴۴/۳۶۵\frac{۱}{۴}$ سال است

از این‌رو از رابطهٔ (۲۱) داریم

$$\begin{aligned}\frac{m_۱}{M} &= (۰٫۰۰۰۱۵۶۹۵)^۳ \times \frac{(۳۶۵\frac{۱}{۴})^۲}{(۱٫۲۶۲۴۴)^۲}\\ &= \frac{۱}{۳٫۰۹ \times ۱۰^۶}\end{aligned}$$

یعنی جرم خورشید اندکی بیش از سه میلیون برابر جرم مریخ است.

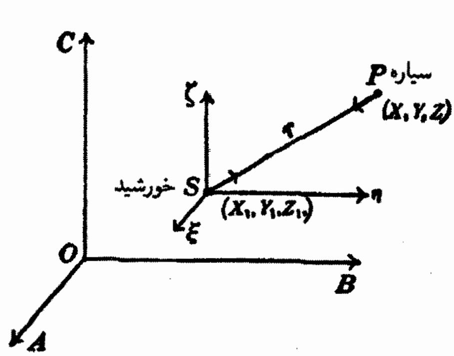
۶۲. اختلالهای عناصر مداری

تا کنون فرض می‌کردیم که مسیر یک سیاره به دور خورشید فقط با جاذبهٔ گرانشی متقابل سیاره و خورشید تعیین می‌شود. اما هر سیاره، یا هر جسم دیگر، در منظومهٔ شمسی یک جاذبه گرانشی به سیارهٔ مورد نظر وارد می‌کند و اثرهای آنها به صورت تغییرات کوچکی در عناصر مداری سیاره، چون نیم محور بزرگ a و خروج از مرکز e آن نمایان می‌شوند. چنین تغییراتی که معمولاً کوچک‌اند به اختلالهای عناصر مداری معروف‌اند. بزرگی اختلال ناشی از هر سیارهٔ مختل‌کننده، جز چیزهای دیگر، به جرم آن سیاره بستگی دارد و بدین‌ترتیب ممکن است جرمهای سیاره‌های بی‌قمر را با استفاده از فرمولهای نجوم دینامیکی و رصد به دست آورد. با این‌روش، جرمهای عطارد و زهره (که قمر ندارند) به دست می‌آیند. البته، این دو سیاره توسط کاوه‌های فضایی بازدید شده‌اند و در مدتی که کاوه، از نزدیکی سیاره می‌گذرد در واقع برای سیاره یک ماهوارهٔ مصنوعی محسوب می‌شود. بنابراین با به کار بردن روشی که با روش بخش ۶۱ اندکی تفاوت دارد، می‌توان مقدار خیلی دقیقتری برای جرم سیاره به دست آورد.

۶۳. اصول دینامیکی حرکت مداری

فرض کنید S و P مکانهای خورشید و یک سیاره در هر لحظهٔ t باشند و مختصات این دو نسبت به محورهای راستگوشهٔ بی‌شتاب OA، OB، و OC در فضا به‌ترتیب (X_1, Y_1, Z_1) و (X, Y, Z) باشد (شکل ۴۶). اگر جرمهای خورشید و سیاره M و m باشند در این صورت طبق قانون گرانش نیوتون سیارهٔ P با نیروی GMm/r^2، که در آن r فاصلهٔ SP است، به طرف S جذب می‌شود. مؤلفهٔ این نیرو در جهت مثبت محور OA چنین است

$$\frac{GMm}{r^2}\frac{(X_1 - X)}{r} \quad \text{یا} \quad -\frac{GMm(X - X_1)}{r^3}$$



شکل ۴۶

اگر $\ddot{X}\ (\equiv d^2X/dt^2)$ مولفهٔ موازی با OA شتاب سیارهٔ P را نشان دهد، طبق قانون دوم حرکت نیوتون داریم

$$m\ddot{X} = -\frac{GMm(X - X_1)}{r^3} \tag{۲۲}$$

حال جاذبهٔ گرانشی متقابل است و خورشید S نیز با نیروی GMm/r^2 به طرف P جذب خواهد شد و مؤلفهٔ موازی با OA این نیرو عبارت است از

$$\frac{GMm}{r^2} \times \frac{(X - X_1)}{r}$$

اگر $\ddot{X}_1$ مؤلفهٔ موازی با OA شتاب خورشید باشد، مانند گذشته داریم

$$M\ddot{X}_1 = \frac{GMm(X - X_1)}{r^3} \tag{۲۳}$$

از تقسیم رابطهٔ (۲۲) بر m و رابطهٔ (۲۳) بر M و تفریق معادلات حاصل، رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\ddot{X} - \ddot{X}_1 = -G(M + m)\frac{(X - X_1)}{r^3} \tag{۲۴}$$

دو معادلهٔ مشابه نیز برای Y و Z وجود دارند

اگر بنویسیم $\xi = X - X_1$، $\eta = Y - Y_1$، و $\zeta = Z - Z_1$ در این صورت (ξ, η, ζ) مختصات سیارهٔ P نسبت به محورهای راستگوشه‌ای هستند که از خورشید می‌گذرند. اگر، طبق رابطهٔ (۱۳)، در رابطهٔ (۲۴) μ را به جای $G(M + m)$ بگذاریم خواهیم داشت

$$\ddot{\xi} + \frac{\mu\xi}{r^3} = 0 \tag{۲۵}$$

همین‌طور خواهیم داشت

$$\ddot{\eta} + \frac{\mu\eta}{r^3} = 0 \tag{۲۶}$$

$$\ddot{\zeta} + \frac{\mu\zeta}{r^3} = 0 \tag{۲۷}$$

اینها معادلات حرکت سیارهٔ P نسبت به خورشیدند.

رابطهٔ (۲۶) را در ζ و رابطهٔ (۲۷) را در η ضرب می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\zeta\ddot{\eta} - \eta\ddot{\zeta} = 0$$

یعنی

$$\frac{d}{dt}(\zeta\dot{\eta} - \eta\dot{\zeta}) = \circ$$

با گرفتن انتگرال داریم

$$\zeta\dot{\eta} - \eta\dot{\zeta} = A \tag{۲۸}$$

که در آن A ثابت انتگرال‌گیری است.

به روش مشابهی از روابط (۲۵) و (۲۷) و سپس از روابط (۲۵) و (۲۶) روابط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\zeta\dot{\xi} - \zeta\dot{\xi} = B \tag{۲۹}$$

$$\eta\dot{\xi} - \dot{\xi}\dot{\eta} = C \tag{۳۰}$$

که در آنها B و C ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند.

روابط (۲۸)، (۲۹)، و (۳۰) را به‌ترتیب در ζ،η،ξ ضرب و با هم جمع می‌کنیم. در این صورت داریم

$$A\xi + B\eta + C\zeta = \circ \tag{۳۱}$$

که معادلهٔ یک صفحه است که از مبدأ مختصات $(\xi،\eta،\zeta)$ یعنی از خورشید، S، می‌گذرد و تعبیر آن این است که چون مختصات (ξ, η, ζ) سیارهٔ P در رابطهٔ (۳۱) صدق می‌کند حرکت آن نسبت به خورشید روی یک صفحه انجام می‌شود. این صفحه همان صفحهٔ مداری است.

۶۴. معادلهٔ مدار

اکنون حرکت سیاره را می‌توانیم به دو محور که از خورشید می‌گذرند و در صفحهٔ مداری قرار دارند نسبت دهیم. فرض کنید (x, y) مختصات سیاره نسبت به این محورها باشد. فرض خواهیم کرد که SN، در شکل ۴۵، محور x است و محور y که البته در صفحهٔ مدار قرار دارد بر SN عمود است. بنابراین معادلات حرکت سیاره عبارت‌اند از

$$\ddot{x} + \mu\frac{x}{r^{۳}} = \circ \tag{۳۲}$$

$$\ddot{y} + \mu\frac{y}{r^{۳}} = \circ \tag{۳۳}$$

اکنون این معادلات از مختصات قائم به مختصات قطبی r و θ تبدیل خواهند شد. (در شکل ۴۵، $SP = r$ و $N\hat{S}P = \theta$ است). داریم

$$y = r\sin\theta \quad \text{و} \quad x = r\cos\theta \tag{۳۴}$$

فرض کنید α و β به‌ترتیب مؤلفه‌های شتاب سیارهٔ P در امتداد SP و در امتداد عمود بر آن باشند. در این صورت

$$\alpha = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta \tag{۳۵}$$

و

$$\beta = \ddot{y}\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta \tag{۳۶}$$

از رابطهٔ اول روابط (۳۴) داریم

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \times \dot{\theta}$$

و

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - ۲\dot{r}\sin\theta \times \dot{\theta} - r\cos\theta \times \dot{\theta}^{۲} - r\sin\theta \times \ddot{\theta} \tag{۳۷}$$

عبارت مربوط به $\ddot{y}$ را می‌توان به روشی مشابه به دست آورد که عبارت است از

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + ۲\dot{r}\cos\theta \times \dot{\theta} - r\sin\theta \times \dot{\theta}^{۲} + r\cos\theta \times \ddot{\theta} \tag{۳۸}$$

با قرار دادن مقادیر $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ از روابط (۳۷) و (۳۸) در رابطهٔ (۳۵) و پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$\alpha = \ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} \tag{۳۹}$$

اما با استفاده از روابط (۳۲) و (۳۳) داریم

$$\begin{aligned}\alpha \equiv \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta &= -\frac{\mu}{r^{۳}}(x\cos\theta + y\sin\theta)\\ &= -\frac{\mu}{r^{۲}}\end{aligned}$$

از این‌رو، نتیجه می‌شود

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲} = -\frac{\mu}{r^{۲}} \tag{۴۰}$$

به روشی مشابه رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\beta = ۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = ۰$$

اما داریم

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

از این‌رو، رابطهٔ زیر برقرار است

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

و با انتگرال گرفتن خواهیم داشت

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{۴۱}$$

که در آن h ثابت انتگرال‌گیری است. بدین ترتیب رابطهٔ(۴۱) بیان ریاضی قانون دوم کپلر است که قبلاً در بخش ۵۸ بررسی کردیم.

اکنون می‌توان معادلهٔ مسیر سیاره به دور خورشید را از روابط (۴۰) و (۴۱) به دست آورد؛ البته این معادله، رابطه‌ای میان r و θ است. این کار با حذف t از رابطهٔ (۴۰) با استفاده از رابطهٔ (۴۱) عملی می‌شود؛ در این معادلات زمان فقط در ضرایب دیفرانسیلی وجود دارد. برای سادگی می‌نویسیم

$$u = \frac{1}{r} \tag{۴۲}$$

به‌طوری که با استفاده از رابطهٔ (۴۱) داریم

$$\dot{\theta} = hu^2 \tag{۴۳}$$

چون داریم

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

از این‌رو، با استفاده از رابطهٔ (۴۳) داریم

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$$

و

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{d\theta}(\dot{r}) \times \frac{d\theta}{dt}\\ &= -hu^2\frac{d}{d\theta}(h\frac{du}{d\theta})\end{aligned}$$

به‌طوری که

$$\ddot{r} = -h^{۲}u^{۲}\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} \qquad (۴۴)$$

همچنین با به کار بردن رابطهٔ (۴۳) نتیجه می‌شود

$$r\dot{\theta}^{۲} = h^{۲}u^{۳} \qquad (۴۵)$$

از این‌رو رابطهٔ(۴۰) بااستفاده از روابط (۴۴) و (۴۵) به صورت زیر در می‌آید

$$-h^{۲}u^{۲}\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} - h^{۲}u^{۳} = -\mu u^{۲}$$

یا

$$\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} + u = \frac{\mu}{h^{۲}} \qquad (۴۶)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۴۶) بارابطهٔ زیر داده می‌شود

$$u = \frac{\mu}{h^{۲}}[۱ + e\cos(\theta - \omega)] \qquad (۴۷)$$

که در آن e و ω دو ثابت اصلی انتگرال‌گیری‌اند. طبق معادلهٔ (۴۲) داریم

$$r = \frac{h^{۲}/\mu}{۱ + e\cos(\theta - \omega)} \qquad (۴۸)$$

اگر $p = h^{۲}/\mu$ باشد یعنی، با استفاده از رابطهٔ (۳)، اگر

$$h^{۲} = \mu a(۱ - e^{۲}) \qquad (۴۹)$$

باشد که همان معادلهٔ (۱۴) است که قبلاً بررسی شد، در این صورت معادلهٔ (۴۸) همان معادلهٔ (۲) یعنی معادلهٔ بیضی است. مشاهده می‌شود که ثابت انتگرال‌گیری e همان خروج از مرکز است.

باید گفته شود که معادلهٔ (۴۸) معادلهٔ کلی یک مقطع مخروطی است که ممکن است یکی از اشکال زیر را دارا باشد :

الف) بیضی، اگر $۱ > e$ باشد .

ب) سهمی، اگر $e = ۱$ باشد.

ج) هذلولی، اگر $e > ۱$ باشد.

هر چند (الف) موردی است که ما در اینجا بیشتر با آن سروکار داریم، اما تعمیم حرکت یک جسم تحت جاذبهٔ گرانشی خورشید به صورتهای دیگر نیز باید مورد توجه قرار گیرد.

معادلهٔ (۴۱) به طور ساده بیان ریاضی قانون دوم کپلر است. همچنین با تعریف حرکت زاویه‌ای میانگین n طبق رابطهٔ (۷) و با استفاده از روابط (۵)، (۷)، و (۴۹) به فرمول زیر دست می‌یابیم

$$n^2a^3 = \mu \equiv G(M+m)$$

که قبلاً داشتیم. بدین‌ترتیب از یگانه قانون گرانش، معادلهای ریاضی قوانین سه‌گانهٔ کپلر را به دست آوردیم

۶۵. سرعت سیاره در مدارش

فرض کنید V سرعت سیاره در نقطهٔ P واقع در مدارش باشد (شکل ۴۷). V در جهت مماس PT خواهد بود. مؤلفه‌های V عبارت‌اند از (الف) $\dot{r}$ در امتداد بردار شعاعی در جهت PR و (ب) $r\dot{\theta}$ در امتداد PL عمود بر بردار شعاعی. بدین‌ترتیب داریم

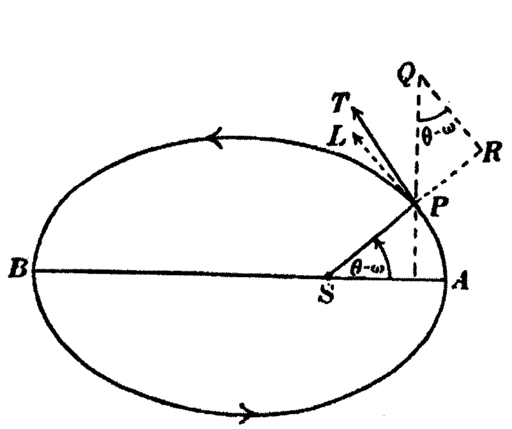
$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad (۵۰)$$

اکنون داریم

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$$

و از رابطهٔ (۴۷) نتیجه می‌شود

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{h^2}e\sin(\theta-\omega)$$



شکل۴۷

به‌طوری که

$$\dot{r} = \frac{\mu}{h} e \sin(\theta - \omega) \quad (۵۱)$$

همچنین چون $r^۲\dot{\theta} = h$ است داریم

$$r\dot{\theta} = hu = \frac{\mu}{h}[۱ + e\cos(\theta - \omega)] \quad (۵۲)$$

ازاین‌رو، با مجذور کردن روابط (۵۱) و (۵۲) و استفاده از رابطهٔ (۵۰) داریم

$$V^۲ = \frac{\mu^۲}{h^۲}[۱ + ۲e\cos(\theta - \omega) + e^۲]$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$V^۲ = \frac{\mu^۲}{h^۲}[۲ + ۲e\cos(\theta - \omega) - (۱ - e^۲)]$$

یا با استفاده از رابطهٔ (۴۷) نتیجه می‌شود

$$V^۲ = ۲\mu u - \frac{\mu^۲}{h^۲}(۱ - e^۲)$$

اما از رابطهٔ (۴۹) داریم

$$h^۲ = \mu a(۱ - e^۲)$$

از این‌رو، با قرار دادن $۱/r$ به جای u، رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$V^۲ = \mu\left(\frac{۲}{r} - \frac{۱}{a}\right) \quad (۵۳)$$

این فرمول سرعت V را به صورت تابعی از بردار شعاعی r به دست می‌دهد.

از رابطهٔ (۵۳) دیده می‌شود که اگر r حداقل باشد، یعنی هنگامی که سیاره در حضیض است، V حداکثر است. در آن صورت $r = a(۱ - e)$ است و اگر $V_۱$ سرعت سیاره در حضیض باشد نتیجه می‌شود

$$V_۱^۲ = \frac{\mu}{a} \times \frac{۱ + e}{۱ - e} \quad (۵۴)$$

همین طور اگر r حداکثر باشد، یعنی هنگامی که سیاره در اوج است، سرعت حداقل است. اگر $V_۲$ سرعت در اوج باشد، خواهیم داشت.

$$V_۲^۲ = \frac{\mu}{a} \times \frac{۱ - e}{۱ + e} \quad (۵۵)$$

از روابط (۵۴) و (۵۵) داریم

$$V_1V_2 = \frac{\mu}{a}$$

بدین‌ترتیب حاصلضرب سرعتهای خطی در حضیض و اوج از خروج از مرکز مدار مستقل است.

۶۶. مؤلفه‌های سرعت خطی عمود بر بردار شعاعی و محور بزرگ

اکنون قضیه‌ای را به دست می‌آوریم که بعداً در بررسی برخی مسائل مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در شکل ۴۷ فرض می‌کنیم که PR سرعت $\dot{r}$ باشد. PQ را عمود بر محور بزرگ AB و RQ را عمود بر PR رسم می‌کنیم. در این صورت سرعت $\dot{r}$ معادل است با (الف) سرعتی در امتداد $\vec{PQ}$ که بزرگی آن با PQ نمایش داده می‌شود و (ب) سرعتی موازی با $\vec{QR}$ که بزرگی آن با QR نمایش داده می‌شود. حال $P\hat{S}A = \theta - \omega$ و از روی شکل $P\hat{Q}R = \theta - \omega$ است. از این‌رو، $PQ = PR\,\mathrm{cosec}(\theta - \omega)$ و $QR = PR\cot(\theta - \omega)$ است. بدین‌ترتیب معلوم می‌شود که سرعت $\dot{r}$ با سرعتهای زیر معادل است:

(الف) $\dot{r}\,\mathrm{cosec}(\theta - \omega)$ در امتداد PQ.

ب) $\dot{r}\cot(\theta - \omega)$ موازی با $\vec{QR}$.

حال سرعت V معادل است با $\dot{r}$ در امتداد PR و $r\dot{\theta}$ در امتداد PL، که PL خود بر SP عمود است. از این‌رو، V معادل است با

(الف) $\dot{r}\,\mathrm{cosec}(\theta - \omega)$ در امتدا PQ، یعنی عمود بر محور بزرگ و

ب) $r\dot{\theta} - \dot{r}\cot(\theta - \omega)$ در امتداد PL، یعنی عمود بر بردار شعاعی.

از رابطهٔ (۵۱) برای (الف) خواهیم یافت

$$\dot{r}\,\mathrm{cosec}(\theta - \omega) = \frac{e\mu}{h} \qquad (۵۶)$$

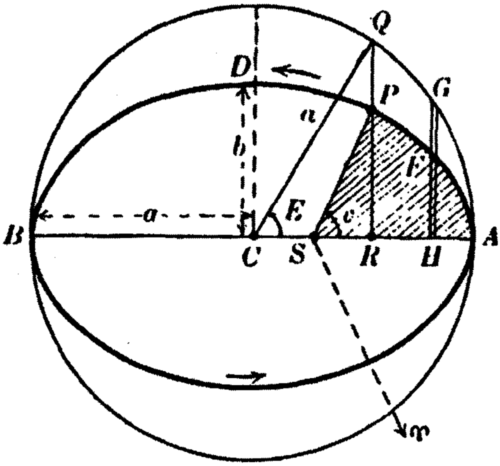
و همین‌طور، از روابط (۵۱) و (۵۲) برای (ب) داریم

$$r\dot{\theta} - \dot{r}\cot(\theta - \omega) = \frac{\mu}{h} \qquad (۵۷)$$

بنابراین روابط (۵۷) و (۵۶) این نتیجه را بیان می‌کنند که سرعت V یک سیاره در هر نقطه از مدارش به یک سرعت ثابت μ/h عمود بر بردار شعاعی و یک سرعت ثابت $e\mu/h$ عمود بر محور بزرگ تجزیه می‌شود.

۶۷. بی‌هنجاریهای واقعی و خروج‌ازمرکزی

قانون دوم کپلر از دیدگاه نظری به ما امکان می‌دهد که در هر لحظه مکان یک سیاره را در مدارش محاسبه کنیم؛ کافی است نیم محور بزرگ a، خروج از مرکز e، زمان گذشتن سیاره از حضیض



شکل۴۸

τ، و دورهٔ مداری T را بدانیم. در شکل ۴۸ فرض کنید P مکان سیاره در لحظهٔ t باشد. در مدت $(t-\tau)$ بردار شعاعی در حرکت از SA به SP مساحت هاشور خورده SPA را جاروب می‌کند. اکنون با استفاده از قانون دوم داریم

$$\frac{SPA\text{مساحت}}{\text{مساحت بیضی}}=\frac{t-\tau}{T}$$

یعنی

$$SPA\text{مساحت}=\frac{\pi ab(t-\tau)}{T}$$

یا، با معرفی حرکت زاویه‌ای میانگین n $(n=۲\pi/T)$، می‌توانیم بنویسیم

$$SPA\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}nab(t-\tau) \qquad (۵۸)$$

که در آن b از رابطهٔ $b^۲=a^۲(۱-e^۲)$ به دست می‌آید. بدین‌ترتیب اگر در یک لحظهٔ معین t کمیتهای a،e،τ، و n معلوم باشند می‌توانیم طرف راست رابطهٔ (۵۸) را محاسبه کنیم. از این‌رو، مساحت SPA محاسبه و مکان سیاره روی مدارش تعیین می‌شود.

هر چند این‌روش از دیدگاه نظری ساده می‌نماید، اما در عمل نامناسب است. اکنون فرمولهایی که معمولاً برای تعیین مکان یک سیاره در مدارش به کار می‌روند را به دست خواهیم آورد.

فرض کنید بردار شعاعی SP زاویهٔ v را با SA بسازد؛ v موسوم به بی‌هنجاری واقعی است و آشکارا با θ و ω رابطهٔ زیر را دارد

$$v=\theta-\omega \qquad (۵۹)$$

دایره‌ای به قطر محور بزرگ AB رسم می‌کنیم؛ شعاع آن برابر با a است. اگر RP را از P عمود بر AB رسم کنیم و آن را ادامه دهیم تا این دایره را در Q قطع کند، در این صورت زاویهٔ QCA را بی‌هنجاری خروج‌ازمرکزی می‌نامند و با E نشان می‌دهند.

با استفاده از یک خاصیت معروف بیضی داریم

$$PR : QR = b : a \tag{۶۰}$$

که در آن b نیم محور کوچک CD است.

چون $PR = r\sin v$ و $QR = CQ\sin E = a\sin E$ است، از این‌رو از رابطهٔ (۶۰) نتیجه می‌شود

$$r\sin v = b\sin E \tag{۶۱}$$

از طرف دیگر $SR = r\cos v$، و همچنین $SR = CR - CS = a\cos E - ae$. از این‌رو، داریم

$$r\cos v = a(\cos E - e) \tag{۶۲}$$

روابط (۶۱) و (۶۲) را مجذور و با هم جمع می‌کنیم. سپس با قرار دادن $b^۲ = a^۲(۱ - e^۲)$، و پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$r = a(۱ - e\cos E) \tag{۶۳}$$

دوباره داریم

$$\begin{aligned} ۲r\sin^۲\frac{v}{۲} &= r(۱ - \cos v) \\ &= a(۱ - e\cos E) - a(\cos E - e) \end{aligned}$$

که در آن از روابط (۶۳) و (۶۲) استفاده شده است، از این‌رو، داریم

$$۲r\sin^۲\frac{v}{۲} = a(۱ + e)(۱ - \cos E) \tag{۶۴}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت

$$۲r\cos^۲\frac{v}{۲} = a(۱ - e)(۱ + \cos E) \tag{۶۵}$$

رابطهٔ (۶۴) را بر رابطهٔ (۶۵) تقسیم می‌کنیم، در این صورت داریم

$$\tan^۲\frac{v}{۲} = \frac{۱ + e}{۱ - e} \times \frac{۱ - \cos E}{۱ + \cos E}$$

که از آن نتیجهٔ زیر به دست می‌آید

$$\tan \frac{v}{۲} = (\frac{۱+e}{۱-e})^{\frac{۱}{۲}} \tan \frac{E}{۲} \tag{۶۶}$$

بدین‌ترتیب، با استفاده از روابط (۶۳) و (۶۶) می‌توان بردار شعاعی r و بی‌هنجاری واقعی v را برحسب بی‌هنجاری خروج از مرکزی E بیان کرد. اکنون معادلهٔ کپلر را که با استفاده از آن می‌توان بی‌هنجاری خروج ازمرکزی E را برحسب کمیتهای معلوم بیان کرد به دست می‌آوریم. بنابراین بی‌هنجاری خروج از مرکزی به صورت یک زاویهٔ میانجی در بحث نظری ما وارد می‌شود.

۶۸. معادلهٔ کپلر

از تعریف حرکت زاویه‌ای میانگین n چنین برمی‌آید که حاصلضرب $n(t-\tau)$ که در فرمول (۵۸) هست، نمایشگر زاویهٔ پیموده شده در مدت $(t-\tau)$ توسط یک بردار شعاعی است که با سرعت زاویه‌ای ثابت n حول S می‌چرخد. کمیت $n(t-\tau)$ را به عنوان بی‌هنجاری میانگین تعریف می‌کنیم و با M نشان می‌دهیم، به طوری که داریم

$$M = n(t-\tau) \tag{۶۷}$$

از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۵۸)، مساحت SPA در شکل ۴۸ به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{۱}{۲}abM = SPA\text{مساحت} \tag{۶۸}$$

اینک این مساحت را برحسب بی‌هنجاری خروج از مرکزی E بیان می‌کنیم. سطح هاشور خوردهٔ SPA برابر است با مساحت مثلث PSR به اضافهٔ مساحت RPA . نخست مثلث PSR را در نظر می‌گیریم. مساحت آن برابر است با $۱/۲SR \times PR$. اما داریم $SR = CR - CS$ یا $SR = a\cos E - ae$. همچنین با استفاده از رابطهٔ (۶۰) داریم $PR = (b/a)QR$ و بنابراین $PR = b\sin E$. از این‌رو، مساحت مثلث PSR برابر $۱/۲ab\sin E(\cos E - e)$ است. اکنون مساحت RPA را در نظر می‌گیریم و آن را به نوارهای عمود بر AB تقسیم می‌کنیم و آنها را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ به قطر AB را قطع کنند. نوار FH را در نظر می‌گیریم. چون $FH = (b/a)GH$ است، مجموع همهٔ نوارهای تشکیل دهندهٔ مساحت RPA برابر با b/a ضرب در مجموع نوارهای تشکیل‌دهندهٔ مساحت QRA است، یا

$$RPA\text{مساحت} = \frac{b}{a} \times QRA\text{مساحت} \tag{۶۹}$$

اما مساحت QRA برابر قطاع CQA منهای مساحت مثلث QCR است. چون $Q\hat{C}A = E$ است، مساحت CQA برابر $۱/۲a^۲E$ و مساحت مثلث QCR برابر با $۱/۲a^۲ \sin E\cos E$

است. ازاین‌رو رابطهٔ (۶۹) به صورت زیر در می‌آید

$$\text{مساحت}RPA = \frac{b}{a}[\frac{۱}{۲}a^۲E - \frac{۱}{۲}a^۲\sin E\cos E]$$
$$= \frac{۱}{۲}ab(E - \sin E\cos E)$$

با افزودن مساحت مثلث PSR که قبلاً پیدا کردیم به مساحت RPA خواهیم داشت

$$\text{مساحت}SPA = \frac{۱}{۲}ab(E - e\sin E) \qquad (۷۰)$$

بنابراین از روابط (۶۸) و (۷۰)نتیجه می‌شود

$$E - e\sin E = M \equiv n(t-\tau) \qquad (۷۱)$$

این معادلهٔ کپلر است، رابطه‌ای بین بی‌هنجاری خروج از مرکزی E و بی‌هنجاری میانگین M. اگر M و e معلوم باشند، آن وقت تعیین مقدار E امکانپذیر است. از روش به دست آوردن رابطهٔ (۷۱) باید متوجه شویم که E و M هر دو باید در مقیاس دایره‌ای بیان شوند.

۶۹. حل معادلهٔ کپلر

روش کلی حل این معادله عبارت است از یافتن یک مقدار تقریبی برای E که تقریباً در معادله صدق کند. این کار با بازرسی معادله، یا با استفاده از جدولهای ویژه، و یا با یکی از روشهای ترسیمی متعددی که در زمانهای مختلف ابداع شده‌اند،انجام می‌شود. فرض کنید این مقدار تقریبی $E.$ و مقدار واقعی آن $E. + \Delta E.$ باشد. در این صورت به‌طور دقیق داریم

$$(E. + \Delta E.) - e\sin(E. + \Delta E.) = M$$

یا

$$E. + \Delta E. - e\sin E.\cos\Delta E. - e\cos E.\sin\Delta E. = M$$

چون $\Delta E.$ کوچک فرض می‌شود می‌توان به‌طور تقریب نوشت

$$\sin\Delta E. = \Delta E. \qquad \text{و} \qquad \cos\Delta E. = ۱$$

و نتیجه می‌شود

$$(E. - e\sin E.) + \Delta E.(۱ - e\cos E.) = M$$

از آنجا که $E_\circ$ و e معلوم‌اند، می‌توانیم کمیت $M_\circ$ را از رابطهٔ زیر حساب کنیم

$$M_\circ = E_\circ - e\sin E_\circ \tag{۷۲}$$

در این صورت داریم

$$\Delta E_\circ = \frac{M - M_\circ}{1 - e\cos E_\circ} \tag{۷۳}$$

که از آن $\Delta E_\circ$ را می‌توان محاسبه کرد. آنگاه $(E_\circ + \Delta E_\circ)$ مقدار دقیقتر E است و بنابراین می‌توان فرایند را، در صورت لزوم، با مقدار $(E_\circ + \Delta E_\circ)$ به عنوان تقریبی جدید برای E تکرار کرد.

اگر خروج از مرکز کوچک (مثلاً کمتر از ۰٫۱) باشد از بازرسی معادلهٔ کپلر مقدار تقریبی بی‌هنجاری خروج از مرکزی را به دست می‌آوریم. زیرا، با چشمپوشی از جملهٔ $e\sin E$، برای تقریب نخست $E_\circ$ نتیجهٔ سادهٔ زیر حاصل می‌شود

$$E_\circ = M$$

و با به کار بردن رابطهٔ (۷۳) می‌توان مقدار دقیقتر بی‌هنجاری خروج از مرکزی را به دست آورد.

هنگامی که خروج از مرکز بزرگ باشد، به دست آوردن یک مقدار تقریبی برای بی‌هنجاری خروج از مرکزی که در معادلهٔ کپلر صدق کند کار چندان ساده‌ای نیست. در این شرایط استفاده از جدولهای ویژه، از قبیل جدولهای باوشینگر[1] یا جدولهای استراند،[2] یا یک ساخت ترسیمی محاسبات را خیلی آسان می‌کند. در جدولهای باوشینگر، مقادیر E برای مقادیر مختلف خروج از مرکز e و بی‌هنجاری میانگین M جدول‌بندی شده‌اند؛ بنابراین با بازرسی یا با یک درون‌یابی ساده، می‌توان مقدار تقریبی خیلی خوبی برای $E_\circ$ به دست آورد. کاربرد رابطهٔ (۷۳) که قبلاً نشان داده شد در زیر می‌آید.

مثال. می‌خواهیم بی‌هنجاری خروج از مرکزی مریخ را ۲۰۰ روز بعد از گذشت از حضیض محاسبه کنیم. در اینجا $e = ۰٫۰۹۳۳۴$ و $T = ۱٫۸۸۰۹\mathrm{y}$ معلوم‌اند.

حرکت زاویه‌ای میانگین n طبق تعریف عبارت است از $n = ۲\pi/T$ که برابر است با ۱٫۸۸۰۹ / ۳۶۰ درجه در سال یا ۱۸۸۶٫۵۲ ثانیهٔ قوسی در یک روز متوسط خورشیدی. از این‌رو، داریم

$$M = ۲۰۰ \times ۱۸۸۶''٫۵۲ = ۳۷۷۳۰۴'' = ۱۰۴^\circ ۴۸' ۲۴''$$

اگر از جملهٔ $e\sin E$ در معادلهٔ کپلر چشم‌بپوشیم می‌توانیم به عنوان یک تقریب، بی‌هنجاری خروج از مرکزی $E_\circ$ را برابر ۱۰۵° بگیریم (مقدار M به تقریب یک درجه).

1. J.Bauschinger, *Tafeln zur theoretischen Astronomie* (Leipzig 1901).
2. J.J.Astrand, *Hülfstafeln* (Leipzig, 1890).

اکنون مقدار $M.$ را از رابطهٔ (۷۲)، یعنی از رابطهٔ زیر

$$M. = E. - e \sin E.$$

محاسبه می‌کنیم. نخست توجه می‌کنیم که در این فرمول نظری، $M.$ و $E.$ الزاماً در مقیاس دایره‌ای بیان می‌شوند. اکنون اگر فرض کنیم که برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شوند، داریم

$$M. \sin ۱'' = E. \sin ۱'' - e \sin E.$$

یا

$$M. = E. - e \sin E. \operatorname{cosec} ۱''$$

$$\log e = \bar{۲}٫۹۷۰۰۷$$

$$\log \sin E.$$

$$(\equiv \log \sin ۱۰۵^\circ) = \bar{۱}٫۹۸۴۹۴$$

$$\log \operatorname{cosec} ۱'' = \underline{۵٫۳۱۴۴۳}$$

$$۴٫۲۶۹۴۴ \quad \text{که } \log ۱۸۵۹۷ \text{ است.}$$

ازاین‌رو، داریم

$$M. = E. - ۱۸۵۹۷'' = ۱۰۵^\circ - ۵^\circ ۹' ۵۷''$$

یا

$$M. = ۹۹^\circ ۵۰' ۳''$$

بنابراین فرمول (۷۳) در مورد $\Delta E.$ به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta E. = \frac{۱۰۴^\circ ۴۸' ۲۴'' - ۹۹^\circ ۵۰' ۳''}{۱ - e \cos ۱۰۵^\circ}$$

ولی

$$e \cos ۱۰۵^\circ = -۰٫۰۹۳۴ \sin ۱۵^\circ = -۰٫۰۲۴۲$$

از این‌رو

$$\Delta E. = \frac{۴^\circ ۵۸' ۲۱''}{۱٫۰۲۴۲} = \frac{۱۷۹۰۱}{۱٫۰۲۴۲} \text{(ثانیهٔ قوسی)}$$

$$= ۱۷۴۷۸''$$

$$= ۴^\circ ۵۱' ۱۸''$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$E_{\circ} + \Delta E_{\circ} = ۱۰۹^{\circ}۵۱'۱۸''$$

که مقدار دقیقتر بی‌هنجاری خروج از مرکزی است و در معادلهٔ کپلر صدق می‌کند. این فرایند را با فرض $۱۰۹^{\circ}۵۱'۱۸''$ به عنوان مقدار تقریبی E باید تکرار کنیم و آن را تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه دهیم. انجام این کار را به دانشجو واگذار می‌کنیم.

مقادیر زیر را از جدولهای باوشینگر استخراج می‌کنیم:

	$e = ۰/۰$	$e = ۰/۱$
$M = ۱۰۴^{\circ}$	$E = ۱۰۴^{\circ}$	$E = ۱۰۹^{\circ}/۴۰$
$M = ۱۰۵^{\circ}$	$E = ۱۰۵^{\circ}$	$E = ۱۱۰^{\circ}/۳۷$

بدین‌ترتیب با یک درون‌یابی تقریبی، به‌ازای $M = ۱۰۴^{\circ}۴۸'$ و $e = ۰/۰۹۳$، مقدار $۱۰۹^{\circ}/۸$ را برای $E_{\circ}$ به دست می‌آوریم که نزدیک به نتیجهٔ محاسبهٔ نخست ماست. بدین‌ترتیب جدولها، در این مثال، ما را از محاسبهٔ مقدار تقریبی E بی‌نیاز می‌کنند. اما در صورت برنامه‌ریزی محاسبهٔ تکراری دیگر نیازی به جدولها نیست، زیرا در هر حال این فرایند در نهایت همگرا خواهد شد.

۷۰. خلاصهٔ فرمولهای حرکت بیضوی

اکنون فرمولهای مهم حرکت بیضوی را که در صفحات پیش به دست آوردیم بازنویسی می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned}
r &= \frac{a(۱-e^۲)}{۱+e\cos v} && \text{(الف)}\\
n^۲a^۳ &= \mu \equiv G(M+m) && \text{(ب)}\\
h^۲ &= \mu a(۱-e^۲) && \text{(ج)}\\
E - e\sin E &= M \equiv n(t-\tau) && \text{(د)}\\
r &= a(۱-e\cos E) && \text{(ه)}\\
\tan\frac{v}{۲} &= \left(\frac{۱+e}{۱-e}\right)^{\frac{۱}{۲}}\tan\frac{E}{۲} && \text{(و)}
\end{aligned}\right\} \qquad (۷۴)$$

در این فرمولها، a ، e و τ عنصر مدار بیضوی‌اند.

روش پیدا کردن مکان سیاره در مدارش، در لحظهٔ t، با در دست داشتن عنصرهای a، e، τ، و دورهٔ تناوب، به ترتیب زیر است:

۱. بی‌هنجاری خروج از مرکزی E را از فرمول (د) یا به روشی که در بخش ۶۹ شرح داده شد یا به طریق دیگر، محاسبه می‌کنیم.

۲. بردار شعاعی r را از فرمول (هـ) محاسبه می‌کنیم.
۳. بی‌هنجاری واقعی v را با استفاده از فرمول (و) حساب می‌کنیم.[1]
۴. برای بررسی درستی نتایج، بردار شعاعی r را از فرمول (الف) و با استفاده از مقدار بی‌هنجاری واقعی که در بخش ۳ پیدا کردیم، محاسبه می‌کنیم.

۷۱. بی‌هنجاری خروج از مرکزی به صورت سری‌ای از e و بی‌هنجاری میانگین

اکنون معادلهٔ کپلر را به شکل متفاوت، که در آن E را به صورت سری‌ای از خروج از مرکز e و بی‌هنجاری میانگین M به دست خواهیم آورد، بیان می‌کنیم. معادلهٔ کپلر را به صورت زیر در دست داریم

$$E = M + e\sin E \qquad (۷۵)$$

e را کسر کوچکی می‌گیریم، در این صورت بدیهی است که تقریب نخست E، که با $E_۱$ نشان داده می‌شود، با چشمپوشی از $e\sin E$ به دست خواهد آمد؛ به طوری که داریم

$$E_۱ = M$$

مقدار دقیقتر E یعنی تقریب دوم که با $E_۲$ نشان داده می‌شود، به روشنی با نوشتن $E_۱$ (یا M) در طرف راست رابطهٔ (۷۵) به دست خواهد آمد. بدین ترتیب داریم

$$E_۲ = M + e\sin M \qquad (۷۶)$$

به روشی مشابه، اگر تقریب سوم E با $E_۳$ نشان داده شود، می‌توانیم بنویسیم

$$E_۳ = M + e\sin E_۲$$

که با استفاده از رابطهٔ (۷۶) به صورت زیر در می‌آید

$$E_۳ = M + e\sin[M + e\sin M]$$

یا

$$E_۳ = M + e\sin M\cos[e\sin M] + e\cos M\sin[e\sin M]$$

---

۱. در روشی که در بخش ۷۷ شرح داده می‌شود منحصراً کمیتهای E و r محاسبه می‌شوند.

اما، چون e کوچک است، می‌توانیم معادلهٔ اخیر را به صورت زیر بنویسیم

$$E_{۳} = M + e\sin M + e\cos M \times e\sin M \qquad (۷۷)$$

که تا جملات با ضریب $e^{۲}$ صحیح است. رابطهٔ (۷۷) معادل است با

$$E_{۳} = M + e\sin M + \frac{۱}{۲}e^{۲}\sin ۲M \qquad (۷۸)$$

با این‌روش می‌توانیم تا آنجا که بخواهیم، پیش برویم. تقریبی باز هم بیشتر رابطهٔ زیر را به دست می‌دهد

$$E = M + (e - \frac{e^{۳}}{۸})\sin M + \frac{۱}{۲}e^{۲}\sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^{۳}\sin ۳M \qquad (۷۹)$$

اگر بتوانیم از جمله‌های شامل $e^{۴}$ و توانهای بالاتر چشمپوشی کنیم، با داشتن e و E، به کمک فرمول (۷۹) می‌توانیم مقدار M را حساب کنیم.

۷۲. بی‌هنجاری واقعی به صورت سری‌ای از e و بی‌هنجاری خروج از مرکزی

با فرمول زیر شروع می‌کنیم

$$\tan\frac{v}{۲} = (\frac{۱+e}{۱-e})^{\frac{۱}{۲}}\tan\frac{E}{۲} \qquad (۸۰)$$

زاویهٔ ϕ، بین ۰ و $\pi/۲$ را، به گونهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\sin\phi = e \qquad (۸۱)$$

آن وقت می‌توانیم رابطهٔ (۸۰) را به صورت زیر بنویسیم

$$\tan\frac{v}{۲} = \frac{۱+\tan\frac{\phi}{۲}}{۱-\tan\frac{\phi}{۲}}\tan\frac{E}{۲}$$

یا، با قرار دادن $\tan\phi/۲ = x$، داریم

$$\tan\frac{v}{۲} = \frac{۱+x}{۱-x}\tan\frac{E}{۲} \qquad (۸۲)$$

چون $\text{۲}\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ و $\text{۲}i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ است، که در آنها i به وسیلهٔ $i^{\text{۲}} = -\text{۱}$ تعریف می‌شود، می‌توانیم بنویسیم

$$\tan\frac{v}{\text{۲}} = \frac{e^{iv/\text{۲}}-e^{-iv/\text{۲}}}{i(e^{iv/\text{۲}}+e^{-iv/\text{۲}})} = \frac{e^{iv}-\text{۱}}{i(e^{iv}+\text{۱})}$$

فرمول مشابهی نیز برای $E/\text{۲}$ وجود دارد. از این‌رو رابطهٔ (۸۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{e^{iv}-\text{۱}}{e^{iv}+\text{۱}} = \frac{\text{۱}+x}{\text{۱}-x}\times\frac{e^{iE}-\text{۱}}{e^{iE}+\text{۱}}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$e^{iv} = \frac{e^{iE}-x}{\text{۱}-xe^{iE}}$$

یا

$$e^{iv} = e^{iE}(\text{۱}-xe^{-iE})/(\text{۱}-xe^{iE})$$

با گرفتن لگاریتم از دو طرف، خواهیم داشت

$$iv = iE+\log(\text{۱}-xe^{-iE})-\log(\text{۱}-xe^{iE})$$

چون $x=\tan\phi/\text{۲}$ و $\phi = \sin^{-\text{۱}}(e)$ است از این‌رو از لحاظ عددی $x<\text{۱}$ است، زیرا داریم $e<\text{۱}$. با به کار بردن فرمول مربوط به سری لگاریتمی، پس از اندکی ساده کردن، خواهیم داشت

$$v = E+\text{۲}(x\sin E+\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}\sin\text{۲}E+\frac{x^{\text{۳}}}{\text{۳}}\sin\text{۳}E+\cdots) \qquad (\text{۸۳})$$

باید دانست که

$$x\equiv\tan\frac{\phi}{\text{۲}} = \frac{\sin^{\text{۲}}\frac{\phi}{\text{۲}}}{\sin\frac{\phi}{\text{۲}}\cos\frac{\phi}{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}-\cos\phi}{e} = \frac{\text{۱}-(\text{۱}-e^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}{e}$$

یا

$$x = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}e+\frac{\text{۱}}{\text{۸}}e^{\text{۳}}+\cdots \qquad (\text{۸۴})$$

از این‌رو، سرانجام از روابط (۸۳) و (۸۴) نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$v = E+(e+\frac{\text{۱}}{\text{۴}}e^{\text{۳}})\sin E+\frac{\text{۱}}{\text{۴}}e^{\text{۲}}\sin\text{۲}E+\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}e^{\text{۳}}\sin\text{۳}E \qquad (\text{۸۵})$$

که تا توان سوم e صحیح است.

۷۳. تعدیل مرکز

با استفاده از روابط (۷۹) و (۸۵) v را به صورت سری‌ای از e و M بیان می‌کنیم. جمله‌های این سری را تا $e^۳$ ادامه می‌دهیم. چون در رابطهٔ (۸۵)، E به صورت $\sin E$، $\sin ۲E$ و $\sin ۳E$ است، نخست از رابطهٔ (۷۹) مقدار این کمیتها را برحسب e و M، پیدا می‌کنیم. پس با استفاده از رابطهٔ (۷۹) داریم

$$\sin E = \sin\left[M + (e - \frac{e^۳}{۸})\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^۳ \sin ۳M\right] \quad (۸۶)$$

اما از آنجا که در رابطهٔ (۸۵)، $\sin E$ در ضریب e ضرب می‌شود در رابطهٔ (۸۶) تنها لازم است جمله‌ها را تا $e^۲$ نگه داریم، بنابراین داریم

$$\sin E = \sin[M + e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M]$$

که می‌تواند به صورت زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}\sin E &= \sin M \cos[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M] + \cos M \sin[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M]\\ &= \sin M\left[۱ - \frac{e^۲}{۲}\sin^۲ M\right] + \cos M[e\sin M + \frac{۱}{۲}e^۲ \sin ۲M]\\ &= \sin M + \frac{۱}{۲}e\sin ۲M + \frac{۱}{۲}e^۲(\sin ۲M\cos M - \sin^۳ M)\\ &= (۱ - \frac{۱}{۸}e^۲)\sin M + \frac{۱}{۲}e\sin ۲M + \frac{۳}{۸}e^۲\sin ۳M\end{aligned}$$

به همین ترتیب، اگر تنها جمله‌های لازم را نگه داریم، نتیجه‌های زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sin ۲E &= \sin ۲M + e(\sin ۳M - \sin M)\\ \sin ۳E &= \sin ۳M\end{aligned}$$

از این‌رو، با استفاده از رابطهٔ (۷۹) و عبارتهایی که هم اینک برای $\sin E$، $\sin ۲E$، و $\sin ۳E$ پیدا کردیم، فرمول (۸۵) به صورت زیر در می‌آید

$$v - M = (۲e - \frac{۱}{۴}e^۳)\sin M + \frac{۵}{۴}e^۲ \sin ۲M + \frac{۱۳}{۱۲}e^۳ \sin ۳M \quad (۸۷)$$

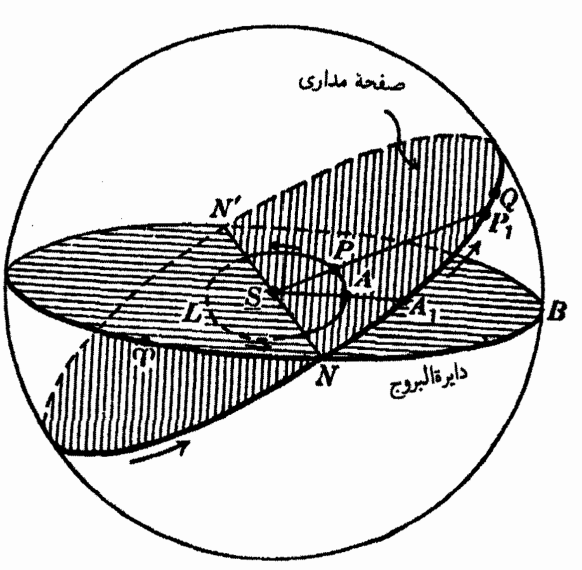
فرمول اخیرتعدیل مرکز نام دارد و اهمیت آن در این است که بی‌هنجاری واقعی v را مستقیماً برحسب خروج از مرکز e و بی‌هنجاری میانگین M بیان می‌کند. بدین ترتیب وقتی e و M معلوم باشند، v را می‌توان محاسبه کرد. تعدیل مرکز را در یکی از فصلهای بعدی به کار می‌بریم.

۷۴. مدار در فضا

صفحهٔ دایرةالبروج را صفحهٔ بنیادی می‌گیریم. به طور کلی، صفحهٔ مداری هر سیاره‌ای، بجز زمین، زاویهٔ ویژه‌ای با دایرةالبروج می‌سازد. فرض کنید کره‌ای به مرکز خورشید رسم شده باشد (شکل ۴۹). چون صفحهٔ مداری سیاره (ناحیهٔ هاشورخورده) از مرکز خورشید عبور می‌کند، بنابراین کره را در یک دایرهٔ عظیمهٔ NQN' قطع خواهد کرد. این دایرهٔ عظیمه، دایرةالبروج را در دو نقطهٔ N و N'، موسوم به گره، قطع می‌کنند. در این شکل، بیضی مداری APL که در آن A حضیض است رسم شده است؛ ادامهٔ شعاع SA دایرهٔ عظیمهٔ NQN' را در A_1 قطع می‌کند و اگر P مکان سیاره در مدارش در لحظهٔ t باشد، ادامهٔ بردار شعاعی SP این دایرهٔ عظیمه را در P_1 قطع می‌کند. بدین ترتیب، چون $A\hat{S}P$ بی هنجاری واقعی v است، زاویهٔ A_1SP_1 یا کمان دایرهٔ عظیمه‌ای A_1P_1 نیز برابر v است. در شکل، v در جهت پیکان بین A_1 و P_1 افزایش می‌یابد. بنابراین N گرهٔ صعودی و N' گرهٔ نزولی نامیده می‌شود.

زاویهٔ P_1NB (که با i نشان داده می‌شود) زاویهٔ میل صفحهٔ مداری را نسبت به دایرةالبروج مشخص می‌کند و به طور ساده زاویهٔ میل خوانده می‌شود. کمان NA_1 که از گرهٔ صعودی به طرف A_1 اندازه‌گیری می‌شود، شناسهٔ حضیض نام دارد و با ω نشان داده می‌شود.

فرض کنید Υ مکان نقطهٔ اعتدال بهاری باشد. کمان ΥN طول گرهٔ صعودی است و با θ نشان داده می‌شود. مجموع کمانهای ΥN و NA_1 را طول حضیض می‌نامند و با ϖ نشان می‌دهند.



شکل ۴۹

از این‌رو، داریم

$$\varpi = \theta + \omega \qquad (۸۸)$$

باید توجه داشت که از طول حضیض فقط θ در امتداد دایرةالبروج اندازه گرفته می‌شود.

θ، i، و ϖ سه عنصر مدارند. طول گره (θ) نقاط N' و N روی کرهٔ سماوی، یعنی محلهای تلاقی صفحهٔ مداری و دایرةالبروج، را تعیین می‌کند. عنصر i زاویه‌ای که تحت آن صفحهٔ مدار نسبت به دایرةالبروج مایل است را مشخص می‌کند. طول حضیض (ϖ) جهت حضیض را نسبت به دایرةالبروج و نقطهٔ اعتدال بهاری تعیین می‌کند.

از آنجا که سه عنصر a، e، و τ که در بخش ۷۰ بررسی شدند فقط به بیضی مداری مربوط می‌شوند، می‌بینیم که برای مشخص کردن کامل یک مدار سیاره‌ای به شش عنصر نیاز داریم، که عبارت‌اند از a، e، τ، θ، i، و ϖ.

در شکل ۴۹ مجموع کمانهای ΥN و NP_1 طول واقعی سیاره در مدار نامیده می‌شود. اگر این طول را با L نشان دهیم، خواهیم داشت

$$L = \theta + \omega + v$$

یا با استفاده از رابطهٔ (۸۸) داریم

$$L = \varpi + v \qquad (۸۹)$$

اینک یک بردار شعاعی را که در لحظهٔ τ بر SA منطبق است و در صفحهٔ مدار با سرعت زاویه‌ای میانگین n حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. در لحظهٔ t این بردار شعاعی زاویهٔ $n(t-\tau)$ یعنی بی هنجاری M را پیموده است و فرض خواهیم کرد که در آن هنگام بردار شعاعی، کره را در Q قطع کند. بدین ترتیب کمان A_1Q برابر M است. اگر l مجموع کمانهای ΥN و NQ را نشان دهد، در این صورت داریم

$$l = \theta + \omega + n(t-\tau)$$

$$l = \varpi + n(t-\tau) \qquad (۹۰)$$

l، طول میانگین سیاره خوانده می‌شود.

فرمول (۹۰) معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$l = nt + \varepsilon \qquad (۹۱)$$

که در آن ε از رابطهٔ

$$\varepsilon = \varpi - n\tau \qquad (۹۲)$$

به دست می‌آید. از رابطهٔ (۹۱) دیده می‌شود که به ازای $t = ۰$ کمیت ε برابر طول میانگین است. این لحظه را «مبدأ» می‌نامند و بنابراین ε طول میانگین در مبدأ است.

از رابطهٔ (۹۰) داریم

$$M \equiv n(t-\tau) = l - \varpi$$

به طوری که، با استفاده از رابطهٔ (۹۱) خواهیم داشت

$$M \equiv nt + \varepsilon - \varpi$$

از این‌رو معادلهٔ کپلر می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$E - e\sin E = nt + \varepsilon - \varpi \tag{۹۳}$$

چون ε طبق رابطهٔ (۹۲) برحسب دو عنصر ϖ و τ تعریف می‌شود، می‌توان آن را به جای τ به عنوان یکی از شش عنصر مدار در نظر گرفت.

برای روشن شدن مطلب، در زیر عناصر مدار مریخ برای مبدأ ظهر متوسط گرینویچ، روز صفر ژانویهٔ ۱۹۲۹ داده می‌شود

$$a = ۱٫۵۲۳۶۹\text{AU} \qquad \theta = ۴۹^\circ ۰' ۳۶''٫۰$$
$$e = ۰٫۰۹۳۳۴ \qquad i = ۱^\circ ۵۱' ۰''٫۵$$
$$\varepsilon = ۸۴^\circ ۴۲' ۳۳''٫۹ \qquad \varpi = ۳۳۴^\circ ۴۵' ۷''٫۳$$

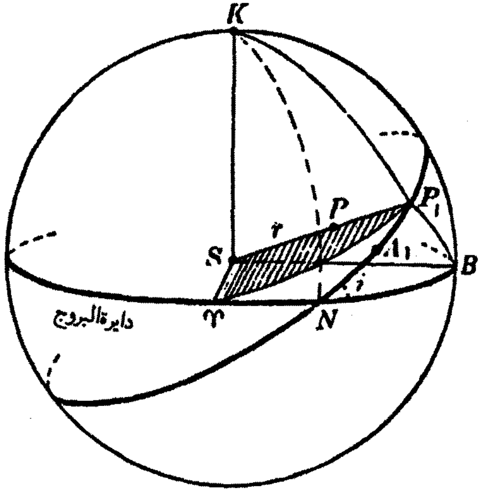
۷۵. مختصات قائم خورشید مرکزی یک‌سیاره نسبت به دایرةالبروج

فرض کنید که در شکل ۵۰، $S\Upsilon$، SB، و SK محورهای قائمی باشند که از خورشید می‌گذرند و یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند، به طوری که Υ نقطهٔ اعتدال بهاری، B نقطه‌ای روی دایرةالبروج به فاصلهٔ ۹۰° از Υ و K قطب دایرةالبروج باشد. همچنین فرض کنید P مکان سیاره در مدارش در لحظهٔ t باشد به طوری که داشته باشیم $SP = r$. فرض کنید $P_۱$ نقطهٔ برخورد SP با کرهٔ سماوی باشد. مختصات قائم سیارهٔ P نسبت به محورهای $S\Upsilon$، SB، و SK را با $(x_۱, y_۱, z_۱)$ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$\frac{x_۱}{r} = \cos PS\Upsilon = \cos P_۱S\Upsilon$$

یا، با نوشتن کمان $P_۱\Upsilon$ به جای زاویهٔ $P_۱\hat{S}\Upsilon$ داریم

$$x_۱ = r\cos P_۱\Upsilon \tag{۹۴}$$



شکل ۵۰

همین طور،

$$y_1 = r\cos P_1B \tag{۹۵}$$

$$z_1 = r\cos P_1K \tag{۹۶}$$

اینک مثلث کروی $P_1\Upsilon N$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\Upsilon N = \theta$، $NP_1 = \omega + v$، و $P_1\hat{N}\Upsilon = ۱۸۰° - i$ است. در این صورت با استفاده از فرمول کسینوس، (الف)، داریم

$$\cos P_1\Upsilon = \cos\theta\cos(\omega+v) - \sin\theta\sin(\omega+v)\cos i$$

از این‌رو

$$x_1 = r[\cos\theta\cos(\omega+v) - \sin\theta(\omega+v)\cos i] \tag{۹۷}$$

همین‌طور، از مثلث P_1NB که در آن $NB = ۹۰° - \theta$ و $P_1\hat{N}B = i$ است، داریم

$$y_1 = r[\sin\theta\cos(\omega+v) + \cos\theta\sin(\omega+v)\cos i] \tag{۹۸}$$

در مثلث KP_1N داریم $KN = ۹۰°$ و $K\hat{N}P_1 = ۹۰° - i$؛ از این‌رو با به کار بردن فرمول (الف) نتیجه می‌گیریم که

$$z_1 = r\sin(\omega+v)\sin i \tag{۹۹}$$

بدین ترتیب هنگامی که v و r و عناصر θ، i، و ω معلوم باشند، می‌توان از فرمولهای (۹۷)، (۹۸)، و (۹۹) مختصات خورشیدمرکزی (x_1, y_1, z_1) را محاسبه کرد.

در عمل بهتر است زاویه‌های کمکی a، A، b_1، و B_1 را که به وسیلهٔ روابط زیر تعریف می‌شوند و در آنها θ و i معلوم فرض می‌شوند، محاسبه کنیم

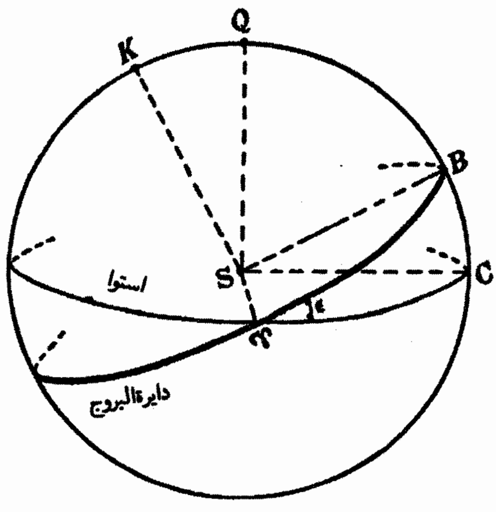
$$\left.\begin{array}{ll} \sin a \sin A = \cos\theta \;; & \sin a \cos A = -\sin\theta\cos i \\ \sin b_1 \sin B_1 = \sin\theta \;; & \sin b_1 \cos B_1 = \cos\theta\cos i \end{array}\right\} \qquad (100)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r\sin a\sin(A+\omega+v) \\ y_1 = r\sin b_1\sin(B_1+\omega+v) \\ z_1 = r\sin(\omega+v)\sin i \end{array}\right\} \qquad (101)$$

۷۶. مختصات استوایی خورشیدمرکزی یک سیاره

فرض می‌کنیم در شکل ۵۱ ΥC استوای کرهٔ سماوی باشد. دستگاه محورهای راستگرد قائم استوایی $S\Upsilon$، SC، و SQ را، که در آن C نقطه‌ای روی استوا به فاصلهٔ ${}^\circ$۹۰ از Υ و Q قطب شمال استواست، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم (x, y, z) مختصات سیاره نسبت به این محورها باشند. پس داریم $B\hat{\Upsilon}C = KQ = \varepsilon$، که در آن ε زاویهٔ میل دایرةالبروج است. محورهای SC



شکل۵۱

و SQ را می‌توان از SB و SK با چرخاندن محورهای اخیر به اندازهٔ ε حول $S\Upsilon$ به دست آورد. از این رو روابط زیر بین (x, y, z) و (x_1, y_1, z_1) به دست می‌آیند

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1\cos\varepsilon - z_1\sin\varepsilon \\ z &= y_1\sin\varepsilon + z_1\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۲)$$

با جانشانی مقادیر x_1، y_1، و z_1 از روابط(۹۷)،(۹۸)،(۹۹) در روابط بالا، عبارتهایی را برای x، y، و z برحسب r و v، عناصر θ، i، و ω، و ε به دست می‌آوریم. زاویه‌های کمکی b، B، c، و C را با روابط زیر تعریف می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} \sin b\sin B &= \sin\theta\cos\varepsilon\ ;\ \sin b\cos B = \cos\theta\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon \\ \sin c\sin C &= \sin\theta\sin\varepsilon\ ;\ \sin c\cos C = \cos\theta\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۳)$$

در این‌صورت داریم

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin a\sin(A+\omega+v) \\ y &= r\sin b\sin(B+\omega+v) \\ z &= r\sin c\sin(C+\omega+v) \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۴)$$

مزیت این فرمولها هنگامی آشکار می‌شود که مختصات قائم چندین مکان سیاره مورد نیاز باشند. زیرا وقتی کمیتهای $\sin a$، $\sin b$، $\sin c$، A، B، و C از روابط (۱۰۰) و (۱۰۳) و مقادیرمعلوم عناصر θ، i و ω، و ε محاسبه شده‌اند می‌توانند برای تعیین چندین مقدار (x, y, z) در رابطهٔ (۱۰۴) به کار روند. فرض بر این است که برای مکان هر سیاره، بردار شعاعی r و بی‌هنجاری واقعی v با روشهایی که قبلاً توضیح داده شدند، محاسبه شده‌اند.

روش دیگری برای بدست آوردن مختصات (x, y, z) در بخش زیر توضیح داده می‌شود.

۷۷. مختصات استوایی خورشیدمرکزی یک سیاره (روش دیگر)

مختصات استوایی خورشیدمرکزی را می‌توان به صورت دیگری که امروزه برای کامپیوتر مناسب است نوشت.[1] نخستین معادلهٔ روابط (۱۰۴) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$x = r\cos v[\sin a\sin(A+\omega)] + r\sin v[\sin a\cos(A+\omega)]$$

1. *Journal of the Brit.Astron.Association*, Vol.XXXII,P.231 (C.E.Adams).

فرض کنید $P_x = \sin a \sin(A+\omega)$ و $Q_x = \sin a \cos(A+\omega)$ باشد، در این صورت داریم

$$P_x = \sin a \sin A \cos\omega + \sin a \cos A \sin\omega$$

که با استفاده از رابطهٔ (۱۰۰) به صورت زیر در می‌آید

$$P_x = \cos\theta \cos\omega - \sin\theta \sin\omega \cos i$$

همین طور معلوم می‌شود

$$Q_x = -\cos\theta \sin\omega - \sin\theta \cos\omega \cos i$$

اینک با استفاده از رابطهٔ (۶۲) داریم $r\cos v = a(\cos E - e)$، و از رابطهٔ (۶۱) نتیجه می‌شود

$$r \sin v = b \sin E$$

که در آنها E بی‌هنجاری خروج از مرکزی و b نیم‌محور کوچک مدار است. بنابراین، با اضافه کردن فرمولهای مربوط به y و z که با روشی مشابه به دست می‌آیند، داریم

$$\left.\begin{aligned} x &= aP_x \cos E + bQ_x \sin E - aeP_x \\ y &= aP_y \cos E + bQ_y \sin E - aeP_y \\ z &= aP_z \cos E + bQ_z \sin E - aeP_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{(۱۰۴الف)}$$

که در آنها

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega\cos i \\ Q_x &= -\cos\theta\sin\omega - \sin\theta\cos\omega\cos i \\ P_y &= (\sin\theta\cos\omega + \cos\theta\sin\omega\cos i)\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon \\ Q_y &= (-\sin\theta\sin\omega + \cos\theta\cos\omega\cos i)\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon \\ P_z &= \sin\omega\sin i\cos\varepsilon + (\sin\theta\cos\omega + \cos\theta\sin\omega\cos i)\sin\varepsilon \\ Q_z &= \cos\omega\sin i\cos\varepsilon - (\sin\theta\sin\omega - \cos\theta\cos\omega\cos i)\sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad \text{(۱۰۴ب)}$$

برای هر مکان سیاره، بی‌هنجاری خروج از مرکزی E، از عناصر مدار که معلوم فرض می‌شوند محاسبه می‌شود. همچنین کمیتهای P_x و مانند آن هم از عناصر مدار پیدا می‌شوند. بنابراین مختصات (x, y, z) برای هر تعداد مکان سیاره که بخواهیم بسادگی از (۱۰۴الف) قابل محاسبه‌اند.

۷۸. مختصات قائم خورشیدمرکزی زمین

در مورد زمین، از آنجا که زاویهٔ میل مدار زمین نسبت به دایرةالبروج صفر است، معادلات (۱۰۴) شکل ساده‌ای به خود می‌گیرند. با نوشتن (x', y', z') برای مختصات استوایی خورشیدمرکزی زمین در لحظهٔ دلخواه t، فرمولهای زیر را بسادگی به دست می‌آوریم

$$\left.\begin{aligned} x' &= r'\cos(\theta' + \omega' + v') \\ y' &= r'\sin(\theta' + \omega' + v')\cos\varepsilon \\ z' &= r'\sin(\theta' + \omega' + v')\sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۵)$$

که در آن پریم به کمیات مربوط به مدار زمین اشاره دارد. اما $(\theta' + \omega')$ طول حضیض برای مدار زمین است و با ϖ' نشان داده می‌شود، بنابراین داریم

$$\left.\begin{aligned} x' &= r'\cos(\varpi' + v') \\ y' &= r'\sin(\varpi' + v')\cos\varepsilon \\ z' &= r'\sin(\varpi' + v')\sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۶)$$

مقادیر r' و v' را برای هر لحظهٔ t می‌توان از عناصر مدار زمین محاسبه کرد؛ از این‌رو x'، y'، z' را می‌توان به‌دست آورد.

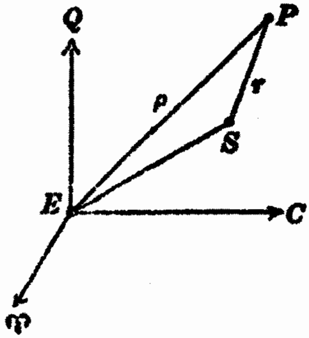
یک روش دیگر بر اساس فرمولهای (۱۰۴الف) و (۱۰۴ب) استوار است؛ با مساوی صفر قراردادن زاویهٔ میل i در دومی، مقادیر P_x و مانند آن به‌دست می‌آیند. همانند پیش، مقادیر بی‌هنجاری خروج‌ازمرکزی زمین محاسبه می‌شود و مختصات آن با رابطهٔ (۱۰۴الف) به‌دست می‌آیند

۷۹. بُعد و میل زمین‌مرکزی سیاره

اکنون محورهای قائمی که از زمین (شکل ۵۲) و به موازات محورهای استوایی مار بر خورشید می‌گذرد و در شکل ۵۱ نشان داده شده‌اند را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم X، Y، Z مختصات خورشید را نسبت به محورهایی که از E رسم شده‌اند، نشان دهند. در این صورت روشن است که داریم

$$X = -x', Y = -y', \; Z = -z' \qquad (۱۰۷)$$

X، Y، و Z مختصات قائم استوایی زمین‌مرکزی خورشیدند و، چنانکه قبلاً نشان داده شد، از رابطهٔ (۱۰۶) قابل محاسبه‌اند، مقادیر آنها برای تمام روزهای سال در تقویمهای نجومی جدول‌بندی شده‌اند.

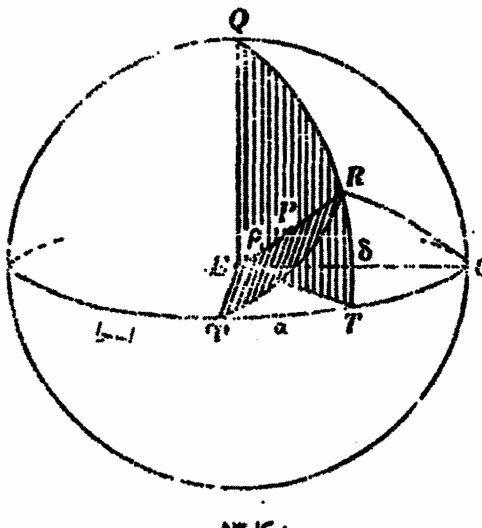


شکل ۵۲

فرض کنید (ξ, η, ζ) مختصات سیارهٔ P را در لحظهٔ t نسبت به مبدأ E (شکل ۵۲) نشان دهند. در این صورت چون (x, y, z) مختصات P نسبت به مبدأ S هستند، داریم

$$\xi = X + x \,;\; \eta = Y + y \,;\; \zeta = Z + z \tag{۱۰۸}$$

کرهٔ سماوی که مرکز آن در E (مرکز زمین) قرار دارد را در شکل ۵۳ در نظر می‌گیریم. خط راست واصل بین E و سیاره، کرهٔ سماوی را در R قطع می‌کند. فاصلهٔ EP را با ρ نشان می‌دهیم. بنابراین ρ فاصلهٔ زمین‌مرکزی سیاره در لحظهٔ t است. دایرهٔ نصف‌النهار QRT را که استوای ΥC را در T قطع می‌کند، رسم می‌کنیم. بُعد و میل زمین مرکزی سیاره را به α و δ نشان می‌دهیم



شکل ۵۳

به‌طوری که $\Upsilon T = \alpha$ و $TR = \delta$ است. بنابراین داریم

$$\xi/\rho = \cos P\hat{E}\Upsilon = \cos R\hat{E}\Upsilon$$

یا

$$\xi = \rho \cos R\Upsilon$$

همین‌طور داریم

$$\eta = \rho \cos RC$$
$$\eta = \rho \cos RQ$$

اما از فرمول (الف)، در مورد مثلث $R\Upsilon T$ (راستگوشه در T) داریم

$$\cos R\Upsilon = \cos\alpha \cos\delta$$

از این‌رو، رابطهٔ زیر و همین‌طور دو رابطهٔ بعدی به‌دست می‌آیند

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\alpha\cos\delta \\ \eta &= \rho\sin\alpha\cos\delta \\ \zeta &= \rho\sin\delta \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰۹)$$

بنابراین از روابط (۱۰۴)، (۱۰۸) و (۱۰۹) روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$\rho\cos\alpha\cos\delta = X + r\sin\alpha\sin(A+\omega+v) \qquad (۱۱۰)$$

$$\rho\sin\alpha\cos\delta = Y + r\sin b\sin(B+\omega+v) \qquad (۱۱۱)$$

$$\rho\sin\delta = Z + r\sin c\sin(C+\omega+v) \qquad (۱۱۲)$$

این معادلات را نخستین بار گاؤس به همین صورت مطرح کرد.

با در دست داشتن عناصر مدار سیاره، طرفهای راست روابط (۱۱۰) تا (۱۱۲) را می‌توان برای هر لحظهٔ t، چنانکه قبلاً توضیح داده شد، محاسبه کرد(X، Y، و Z در تقویمهای نجومی یافت می‌شوند). بدین ترتیب از تقسیم رابطهٔ (۱۱۱) بر رابطهٔ (۱۱۰) خواهیم داشت

$$\tan\alpha = \frac{Y + r\sin b\sin(B+\omega+v)}{X + r\sin a\sin(A+\omega+v)}$$

که از آن مقدار α به‌دست می‌آید. همین‌طور، از تقسیم رابطهٔ (۱۱۲) بر رابطهٔ (۱۱۱) عبارتی برای $\tan\delta\,\mathrm{cosec}\,\alpha$ به‌دست می‌آید که δ از آن به‌سادگی محاسبه می‌شود. بدین ترتیب بُعد و میل

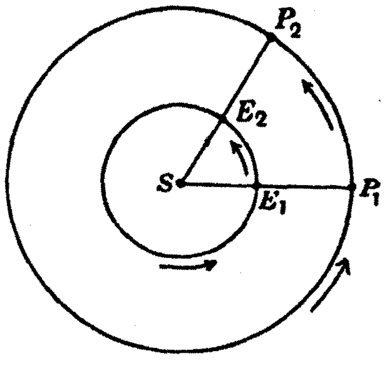
زمین‌مرکزی سیاره را می‌توان برای هر لحظهٔ t به‌دست آورد. پس مکان رصد شدهٔ سیاره عبارت خواهد بود از مکان زمین‌مرکزی محاسبه شدهٔ آن، به‌اضافهٔ تصحیح شکست جوی و تصحیحهای دیگری که در فصلهای آینده به آنها خواهیم پرداخت.

بدین ترتیب نشان دادیم که مکان یک سیاره در آسمان در هر لحظه بااطلاع از مدار آن چگونه به‌دست می‌آید.

عکس مسئله یعنی تعیین عناصر یک مدار سیاره‌ای با استفاده از تعدادی رصد کافی، مسئله‌ای بسیار دشوارتر است. بخش وسیعی از مطالب نجوم به این مسئله اختصاص داده شده است و موضوع آن خارج از محدودهٔ این کتاب است. خواننده برای اصول کلی روشهای تعیین مدارها از رصد می‌تواند به کتاب نجوم دینامیکی[1] یا به کتاب تعیین مدار سیاره‌ها و دنباله‌دارها[2] مراجعه کند.

۸۰. دوره‌های مداری و هلالی یک سیاره

در این فصل فرض می‌کنیم که دورهٔ مداری یک سیاره معلوم است، و اینک نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این دوره را از رصد سیاره به‌دست آورد. حالت ساده‌ای را که در آن صفحهٔ مداری سیاره بر صفحهٔ دایرةالبروج منطبق فرض می‌شود و مدارهای زمین و سیاره دایره‌ای‌اند (شکل ۵۴) در نظر خواهیم گرفت. در این شکل، سیارهٔ مورد بررسی یک سیارهٔ بیرونی است که فاصلهٔ خورشید مرکزی آن از فاصلهٔ خورشیدمرکزی زمین بزرگتر است. فرض می‌کنیم که در یک لحظه خورشید، زمین، و سیاره، به‌ترتیب نقاط S، E_1، و P_1، همراستا هستند. در این صورت می‌گوییم که زمین و سیاره مقارنهٔ خورشید مرکزی‌اند. اگر از روی زمین در نقطهٔ E_1 بنگریم (از ابعاد زمین در مقایسه با ابعاد مدارهای مورد نظر چشمپوشی می‌کنیم) و مکان سیارهٔ P_1 را در آسمان به‌طور قطری مقابل



شکل ۵۴

1. H. C. Plummer, *Dynamical Astronomy,* (Cambridge, 1918).
2. G. Stracke, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen* (Berlin, 1929).

مکان خورشید ببینیم آن وقت می‌گوییم که سیاره در مقابله قرار دارد. اگر مقارنهٔ خورشید مرکزی در محلی ویژه، مثلاً درگرینویچ، در نیمه شب ظاهری (وقتی زاویهٔ ساعتی خورشید ۱۲ ساعت است) روی دهد آن‌وقت سیاره روی دایرهٔ نصف‌النهار آن محل خواهد بود؛ این لحظه را می‌توان به‌طور دقیق از رصد سیاره با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری تعیین کرد. ولی در عمل، به واقعیت پیوستن این فرض ویژه بعید است و بنابراین رصدها باید در چند شب، قبل و بعد از مقارنهٔ خورشید مرکزی مورد انتظار انجام شوند. در هر یک از این شبها می‌توان اختلاف بین بُعد سیاره و بُعد خورشید را در لحظهٔ عبور سیاره تعیین کرد؛ بعضی شبها این اختلاف اندکی کمتر از ۱۲ ساعت و در شبهای دیگر کمی بیشتر از ۱۲ ساعت خواهد بود. لحظه‌ای که این اختلاف دقیقاً ۱۲ ساعت می‌شود را می‌توان به روش درون‌یابی به‌دست آورد. بدین ترتیب زمان مقارنهٔ خورشیدمرکزی معلوم می‌شود. این لحظه را با t_1 نشان دهید.

فرض کنید t_2 لحظهٔ مقارنهٔ خورشیدمرکزی بُعدی زمین و سیاره و مکان آنها به‌ترتیب E_2 و P_2 باشد. چون فاصلهٔ سیاره از خورشید بیشتر از فاصلهٔ آن از زمین است، پس طبق قانون سوم کپلر سرعت زاویه‌ای میانگین آن کمتر از سرعت زاویه‌ای میانگین زمین است. از این‌رو، زمین پس از مدت $(t_2 - t_1)$ زاویهٔ $360° + E_2\hat{S}E_1$ یا $2\pi + \phi$ را که در آن $\phi = E_2\hat{S}E_1$ است پیموده و سیاره زاویهٔ P_2SP_1 یا ϕ را طی کرده است. فرض کنید T_1 و T دوره‌های زمین و سیاره را نشان دهند. در این صورت حرکت زاویه‌ای میانگین آنها به‌ترتیب $2\pi/T_1$ و $2\pi/T$ است. از این‌رو، داریم

$$2\pi + \phi = \frac{2\pi}{T_1}(t_2 - t_1)$$

و

$$\phi = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1)$$

بدین ترتیب با حذف ϕ خواهیم داشت

$$(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right) = 1 \qquad (113)$$

فاصلهٔ زمانی بین دو مقارنهٔ خورشید مرکزی پیاپی در طول سماوی را دورهٔ هلالی سیاره می‌نامند، که ما آن را با S نشان می‌دهیم. پس $S = t_2 - t_1$ و بنابراین، با استفاده از رابطهٔ (۱۱۳)، داریم

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}$$

برای زمین، T_1 یک سال است. S نیز با استفاده از رصد به‌دست می‌آید و اگر آن را برحسب سال به‌عنوان واحد بیان کنیم فرمول زیر برای دورهٔ مداری سیاره، T، با همان واحد به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{S}$$

یا

$$T = \frac{S}{S - ۱} \tag{۱۱۴}$$

برای یک سیارهٔ داخلی، دورهٔ T' از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T' = \frac{S'}{۱ + S'}$$

که در آن S' دورهٔ هلالی مربوط است.

روشن است که برای سیاره‌های بیرونی دورهٔ هلالی بیش از یک سال است. دوره‌های هلالی برای عطارد و زحل با این‌روش ۱۱۶ و ۵۸۴ روز به‌دست آمده‌اند.

به‌سبب فرضهایی که در این بخش در مورد مدارهای زمین و سیارهٔ مورد نظر وضع شده است دوره‌های مداری به‌دست آمده از این‌روش، تقریبی‌اند؛ مقادیر دقیق از مطالعهٔ کاملتر مدارهای سیاره‌ای به‌دست می‌آیند.

۸۱. مدار زمین

خروج از مرکز مدار زمین ۰٫۰۱۶۷۳۹ و طول حضیض آن ۱۰۱°۴۵′۸″٫۱ است؛ این کمیتها به آغاز سال ۱۹۳۱ باز می‌گردند.

سال نجومی را فاصلهٔ زمانی بین دو بازگشت پیاپی زمین به یک نقطه بین ستاره‌ها، از دید خورشید، تعریف می‌کنند و برابر ۳۶۵٫۲۵۶۴ روز متوسط خورشیدی است.

۸۲. مدار ظاهری خورشید

برای بسیاری از هدفهای ما بهتر است مدار ظاهری خورشید، یعنی، مداری که خورشید به‌ظاهر نسبت به زمین طی می‌کند را در نظر بگیریم. البته، خروج از مرکز همان است که در بخش قبل داده شد.

نقطه‌ای از مدار که در آن خورشید در نزدیکترین فاصله از زمین قرار دارد حضیض (زمین) و دورترین نقطهٔ آن اوج (زمین) است. چون جهت حضیض (از دید خورشید) دقیقاً مخالف حضیض از دید زمین است، نتیجه می‌گیریم که

$$\varpi = \varpi_۱ + ۱۸۰^\circ \tag{۱۱۵}$$

که در آن ϖ طول حضیض (زمین) و $\varpi_۱$ طول حضیض را نشان می‌دهند.

روشن است که سال نجومی از دید زمین بازهٔ زمانی بین دو بازگشت خورشید است (در مدار ظاهریش) به یک نقطه بین ستاره‌ها.

سال اعتدالی را بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی خورشید از نقطهٔ اعتدال بهاری تعریف می‌کنند. در یکی از فصلهای بعدی خواهیم دید که اعتدال بهاری، آن‌طوری که تا کنون فرض کرده‌ایم، نقطهٔ ثابتی روی دایرةالبروج نیست و در نتیجه طول سال اعتدالی با طول سال نجومی اندکی تفاوت دارد. سال اعتدالی ۳۶۵٫۲۴۲۲ روز متوسط خورشیدی است. وقتی کلمهٔ «سال» بدون هیچگونه صفت توصیفی به‌کار برده شود منظور همان سال اعتدالی است.

به‌سبب تأثیر جاذبهٔ گرانشی سیارات بر زمین، عناصر مدار زمین کاملاً ثابت نیستند. بویژه طول حضیض، [یا بنابه رابطهٔ (۱۱۵) طول حضیض (زمین)]، تغییرات کوچکی می‌کند. بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی زمین از حضیض در مدارش- یا بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی خورشید از حضیض (زمین) در مدار ظاهریش سال بی‌هنجار نامیده می‌شود که ۳۶۵٫۲۵۹۶ روز متوسط خورشیدی است.

۸۳. مدار ماه

فرمولهایی را که برای حرکت یک سیاره به‌دور خورشید به‌دست آوردیم می‌توان برای حرکت ماه به‌دور زمین نیز به‌کار برد. مدار ماه در فضا همانند مدار یک سیاره نسبت به دایرةالبروج مشخص می‌شود و شکل مناسب آن نیز (نظیر شکل ۴۹) مشابه مدار مشخصهٔ سیاره است با این تفاوت که مرکز کرهٔ سماوی در اینجا به عوض S (خورشید)، E (زمین) است. طول سماوی گره ماه، طول حضیض (یعنی‌نزدیکترین نقطهٔ مدار ماه به زمین-دورترین نقطه اوج است)، و زاویهٔ میل صفحهٔ مداری به‌همان روش بخش ۷۴ تعریف می‌شوند.

تا وقتی که فقط جاذبهٔ گرانشی زمین در نظر گرفته می‌شود، مدار ماه بیضی خواهد بود؛ اما به‌سبب اثر گرانشی خورشید و تا حدی سیارات، عناصر مداری، تغییرات (اختلالهای) قابل ملاحظه‌ای می‌کنند که باید در اغلب مسائل متأثر از ماه و بویژه درنظریهٔ حرکت تقدیمی و ناوش (رقص محوری)، که در فصل ۱۰ مورد بحث قرار می‌گیرند، در نظر گرفته شوند.

ماه هلالی عبارت است از بازهٔ زمانی بین دو «ماه نو» پیاپی. ماه نو زمانی پدیدار می‌شود که طولهای سماوی زمین مرکزی خورشید و ماه یکی باشند. مقدار متوسط ماه هلالی ۲۹٫۵۳۰۶ روز متوسط خورشیدی است.

ماه نجومی بازهٔ زمانیی است که ماه در آن، از دید زمین، دور کاملی را نسبت به ستاره‌ها می‌پیماید. مقدار میانگین آن ۲۷٫۳۲۱۷ روز متوسط خورشیدی است.

به‌سبب اختلالها جهت حضیض ماه (نسبت به زمین) تغییر می‌کند و مدتی که لازم است تا ماه روی مسیرش به دور زمین از حضیض تا حضیض بعدی را بپیماید ماه بی‌هنجار نامیده می‌شود؛ مقدار آن ۲۷٫۵۵۴۶ روز متوسط خورشیدی است.

همچنین به‌سبب اختلالها، گرهٔ صعودی ماه در امتداد دایرةالبروج حرکت قهقرایی دارد، به‌طوری که طول گره با آهنگ تقریباً °۲۰ در سال کاهش می‌یابد (مدتی که لازم است تا گرهٔ ماه یک دور کامل دایرةالبروج را طی کند ۱۸٫۶ سال است). ماه گرهی را بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی ماه از

گرهٔ صعودی تعریف می‌کنند؛ مقدار آن ۲۷٫۲۱۲۲ روز متوسط خورشیدی است.

تمرینها

نمادهای به‌کار رفته عبارت‌اند از:

a = نیم محور بزرگ مدار، E = بی‌هنجاری خروج از مرکزی

e = خروج از مرکز ، M = بی‌هنجاری میانگین

v = بی‌هنجاری واقعی

۱. اگر نیم‌محور مدار عطارد و مشتری به‌ترتیب ۰٫۳۸۷ و ۵٫۲۰۳ واحد نجومی و دورهٔ مداری مشتری ۱۱٫۸۶۲ سال باشد، نشان دهید که دورهٔ مداری عطارد ۰٫۲۴۰۶ سال است.

۲. با چشمپوشی از جرم نخستین قمر مشتری، جرم این سیاره را برحسب جرم زمین از داده‌های زیر حساب کنید.

دورهٔ گردش نخستین قمر: $۱^{d}۱۸^{h}۲۴^{m}$

فاصلهٔ میانگین نخستین قمر از مرکز مشتری: ۴۴۵۰۰۰ کیلومتر

شعاع زمین: ۶۶۰۰ کیلومتر

شتاب گرانی در سطح زمین: ۹٫۹۱ متر بر مجذور ثانیه.

[لندن، ۱۹۲۶]

۳. دورهٔ مداری مشتری ۴۳۳۳ روز متوسط خورشیدی و جرم آن ۱/۱۰۴۸ برابر جرم خورشید است. یک جسم کوچک با جرم ناچیز در یک مدار بیضیوار که محور بزرگش برابر محور بزرگ مشتری است، به‌دور خورشید حرکت می‌کند؛ نشان دهید که دورهٔ گردش این جسم $۴۳۳۵\frac{۱}{۱۶}$ روز است.

[لندن، ۱۹۳۰]

۴. اگر T دورهٔ مداری یک سیاره باشد، نشان دهید که یک افزایش کوچک Δa در نیم‌محور بزرگ a، افزایشی برابر $۳T\Delta a/۲a$ در دورهٔ مداری ایجاد می‌کند.

۵. اگر $V_۱$ و $V_۲$ سرعتهای خطی یک سیاره به‌ترتیب در حضیض و اوج باشند، ثابت کنید که داریم

$$(۱ - e)V_۱ = (۱ + e)V_۲$$

۶. اگر $e = \sin\phi$ باشد، ثابت کنید که داریم

$$\tan\frac{v}{۲} = \tan(۴۵^\circ + \frac{۱}{۲}\phi)\tan\frac{۱}{۲}E$$

۷. اگر $e = \sin\phi$ باشد نشان دهید، اگر توانهای بالاتر از توان دوم e قابل چشمپوشی باشند، مقدار E که در معادلهٔ کپلر صدق می‌کند از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tan E = \sec\phi \tan ۲\chi$$

که در آن

$$\tan\chi = \tan(۴۵^\circ + \frac{۱}{۲}\phi)\tan\frac{۱}{۲}M$$

و

$$\tan E = \sin M/(\cos M - e)$$

۸. رابطه‌های زیر را ثابت کنید

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{۱ - e\cos E}$$
$$\sin v = \frac{(۱ - e^۲)^{\frac{۱}{۲}}\sin E}{۱ - e\cos E}$$

۹. ثابت کنید که اگر توانهای چهارم و بالاتر e قابل چشمپوشی باشند

$$E = M + \frac{e\sin M}{۱ - e\cos M} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{e\sin M}{۱ - e\cos M}\right)^۳$$

یک جواب معادلهٔ کپلر است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۱۰. عناصر مربوط یک مدار عبارت‌انداز: $e =$ ۰٫۹۶۱۷۳۳ (خروج از مرکز)، $T =$ ۷۶٫۰۸۵ (دورهٔ گردش به سال)؛ زمان عبور از حضیض، ۲۴ مه ۱۹۱۰. اگر وقتی $M =$ ۴۷°٫۳ و $e =$ ۰٫۹۶ است، $E =$ ۱۰۱°٫۳ یک جواب تقریبی معادلهٔ کپلر باشد، نشان دهید که مقدار E برای ۲۴ مه ۱۹۰۰ برابر ″۳۳′۲۰°۱۰۱ است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۱۱. ستارهٔ دنباله‌داری یک مدار هذلولی به دور خورشید طی می‌کند؛ ثابت کنید که سرعت V از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$V^۲ = \mu(\frac{۲}{r} + \frac{۱}{a})$$

اگر کمینهٔ فاصلهٔ خورشیدمرکزی آن k واحد نجومی و بیشینه سرعت خطی آن l برابر سرعت زمین باشد، نشان دهید که زاویهٔ بین مجانبهای هذلولی برابر است با

$$۲\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{l^{۲}k-۱}\right)$$

[ادینبورو، ۱۹۲۱]

۱۲. اگر ψ زاویهٔ بین جهت حرکت یک سیاره و جهت عمود بر بردار شعاعی باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tan\psi=\frac{e\sin E}{(۱-e^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}$$

۱۳. یک سیاره در مداری با زاویهٔ میل کوچک i ، نسبت به دایرةالبروج، حرکت می‌کند. نشان دهید، اگر میل آن بیشینه باشد، یا حرکت عرضی آن صفر و یا طول سماوی آن تقریباً برابر $۹۰^{\circ}+i\cot\varepsilon\sin\theta$ می‌شود، که درآن θ طول گرهٔ صعودی و ε میل دایرةالبروج است.

۱۴. فاصلهٔ میانگین زهره از خورشید ۰٫۷۲ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. اگر فرض شود که مدار زهره دایره‌ای است در صفحهٔ دایرةالبروج، بزرگترین ارتفاعی که ناهید در آن می‌تواند پس از غروب خورشید در یک عرض جغرافیایی معلوم قابل رؤیت باشد، و زمانی از سال که این حالت رخ می‌دهد را معین کنید.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج]

۱۵. اگر $(\lambda_{۱},\beta_{۱})$، $(\lambda_{۲},\beta_{۲})$، و $(\lambda_{۳},\beta_{۳})$ طول و عرض سماوی خورشیدمرکزی سیاره‌ای در سه نقطهٔ متفاوت از مدارش باشند، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است

$$\tan\beta_{۱}\sin(\lambda_{۲}-\lambda_{۳})+\tan\beta_{۲}\sin(\lambda_{۳}-\lambda_{۱})+\tan\beta_{۳}\sin(\lambda_{۱}-\lambda_{۲})=۰$$

۱۶. ثابت کنید تعدیل مرکز برحسب بی‌هنجاری واقعی v از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{p=۱}^{\infty}(-۱^{p-۱}\frac{۲\lambda^{p}\{(p+۱)-(p-۱)\lambda^{۲}\}}{p(۱+\lambda^{۲})}\sin pv$$

که در آن $\lambda=e/(۱+\sqrt{۱-e^{۲}})$ و e خروج از مرکز مدار است.

نشان دهید اگر e کوچک باشد، مقدار بیشینهٔ تعدیل مرکز هنگامی اتفاق می‌افتد که $V=(۱/۲)\pi+\sin^{-۱}(۳e/۴)$باشد.

[لندن، ۱۹۳۰]

۱۷. فاصلهٔ حضیض مدار سهموی یک ستارهٔ دنباله‌دار a واحد نجومی است ($a < 1$). به‌فرض اینکه مدار زمین دایره‌ای باشد و ستارهٔ دنباله‌دار در صفحهٔ دایرةالبروج حرکت کند نشان دهید، اگر t (به‌سال) فاصلهٔ زمانیی باشد که در آن ستارهٔ دنباله‌دار درون مدار زمین است، داریم

$$t = \frac{1}{3\pi}(1 + 2a)(2 - 2a)^{\frac{1}{2}}$$

۱۸. (قضیهٔ اویلر) اگر r و r_1 بردارهای شعاعی دو نقطهٔ C و C_1 روی یک مدار سهموی باشند و k فاصلهٔ CC_1 باشد، نشان دهید زمان بین C و C_1 در مدار برابر است با

$$\frac{T_{\circ}}{12\pi}\left\{\left(\frac{r + r_1 + k}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r + r_1 + k}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

که در آن $T_{\circ}$ طول سال نجومی و a نیم‌محور بزرگ مدار زمین است.

۱۹. (قضیهٔ لامبرت) اگر r و r_1 بردارهای شعاعی دو نقطهٔ C و C_1 روی یک مدار بیضوی، k فاصلهٔ CC_1، t زمان لازم برای رفتن سیاره از C به C_1، و T دورهٔ مداری باشد، ثابت کنید که داریم

$$\frac{2\pi t}{T} = \eta - \sin\eta - (\eta_1 - \sin\eta_1)$$

که در آن

$$\sin\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{r + r_1 + k}{a}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \sin\frac{1}{2}\eta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{r + r_1 - k}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

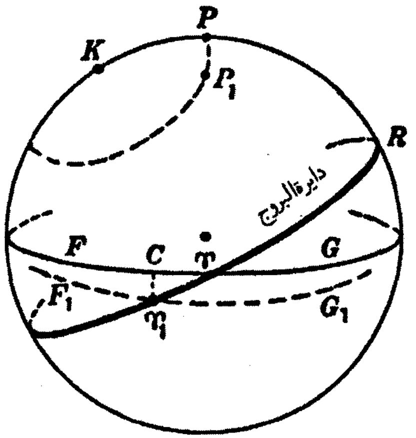
۶

زمان

۸۴. زمان نجومی

در فصل ۲ زمان را به اختصار مطرح کردیم و اکنون آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم. زمان نجومی در هر لحظه در یک محل معین، زاویهٔ ساعتی نقطهٔ اعتدال بهاری است. در فصل ۲، دایرةالبروج و استوای سماوی را دایره‌های عظیمهٔ ساکنی روی کرهٔ سماوی در نظر گرفتیم، به طوری که نقطهٔ اعتدال بهاری نیز، که ممکن است جهت آن برای سهولت مانند جهت ستاره‌ای ویژه تصور شود، به عنوان نقطه‌ای ساکن تلقی شد. اما به سبب پدیده‌های حرکت تقدیمی و ناوش (رقص محوری)، دیگر نمی‌توان استوای سماوی را دایرهٔ عظیمه‌ای ساکن در نظر گرفت. در نتیجه، نقطهٔ اعتدال بهاری باید نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی تلقی شود که به طور آهسته، طبق قوانین تحقیق شده، نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها حرکت می‌کند.

حرکت تقدیمی و ناوش را در فصل ۱۰ به طور کامل بررسی خواهیم کرد اما در اینجا برخی نتایج آن را می‌پذیریم. در بحث زمان نجومی کافی است دایرةالبروج را یک دایرهٔ عظیمهٔ ثابت بگیریم. قطب شمال سماوی P (که با جهت محور زمین معین می‌شود) به سبب حرکت تقدیمی، دایرهٔ صغیره‌ای به دور قطب K دایرةالبروج در یک دورهٔ تقریبی ۲۶۰۰۰ سال طی می‌کند (شکل ۵۵). در حال حاضر قطب شمال سماوی P اندکی کمتر از 1° از ستارهٔ قدر دوم α خرس کوچک (جُدی یا ستارهٔ قطبی) فاصله دارد. اما مکانهای نسبی آنها روز به روز و سال به سال در حال تغییر است. دو هزار سال پیش قطب P، 12° از جُدی فاصله داشت و ۱۲۰۰۰ سال بعد



شکل ۵۵

در فاصلهٔ چند درجه‌ای ستارهٔ قدر اول نسر واقع قرار خواهد گرفت. جهت محور زمین است که همواره نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها در حال تغییر است.

اکنون شکل ۵۵ راکه درآن P قطب شمال سماوی، مثلاً درآغاز ۱۹۰۰ (به صورت ۰ر۱۹۰۰ نشان داده می‌شود) و $P_۱$ مکان آن در سال بعد است، در نظر می‌گیریم. $PP_۱$ کمانی است از دایرهٔ صغیره‌ای که قطب آن K است. $F\Upsilon G$ استوای سماوی مربوط به قطب P و$F_۱\Upsilon_۱G_۱$ استوای مربوط به قطب $P_۱$ در سال بعد است. Υ نقطهٔ اعتدال بهاری برای ۰ر۱۹۰۰ و $\Upsilon_۱$ نقطهٔ اعتدال بهاری برای ۰ر۱۹۰۱ است. Υ و $\Upsilon_۱$ را نقاط اعتدال بهاری میانگین در تاریخهای مورد نظر و استواهای سماوی مربوط را استواهای میانگین می‌نامند. فرض می‌کنیم قطب شمال سماوی به سبب حرکت تقدیمی به طور یکنواخت در امتداد کمان دایرهٔ صغیره‌ای $PP_۱$ حرکت کند و نقطهٔ اعتدال بهاری میانگین نیز به طور یکنواخت در امتداد دایرةالبروج از Υ به $\Upsilon_۱$ حرکت قهقرایی انجام دهد. آهنگ حرکت Υ در امتداد دایرةالبروج ۳ر″۵۰ در سال به دست آمده است.

اکنون به تعریف زمان نجومی بر می‌گردیم. برای سهولت فرض می‌کنیم ستاره‌ای در جهت Υ، که فعلاً آن را ثابت می‌گیریم، وجود داشته باشد. در این صورت بنابه تعریف، زمان نجومی زاویهٔ ساعتی Υ یا زاویهٔ ساعتی این ستاره است و دورهٔ چرخش زمین صرفاً بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی این ستاره(یاΥ) از دایرهٔ نصف‌النهار هر رصدخانهٔ ویژه است. اما هنگامی که زمان نجومی را نسبت به اعتدال بهاری متحرک تعریف می‌کنیم، دیگر نمی‌توانیم دورهٔ چرخش زمین را بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی نقطهٔ اعتدال بهاری در نظر بگیریم. فرض کنید $C\Upsilon_۱$ در شکل ۵۵ کمانی از یک دایرهٔ عظیمه باشد که از $\Upsilon_۱$ عمود بر استوای $F\Upsilon G$ رسم شده است. بنابراین جابه‌جایی نقطهٔ اعتدال هر تاریخ در بُعد، از نقطهٔ اعتدال سال ۰ر۱۹۰۰ یعنی Υ، با آهنگ سالیانه‌ای که با کمان ΥC سنجیده می‌شود انجام می‌شود. اما از مثلث کوچک $\Upsilon C\Upsilon_۱$ داریم

$$\Upsilon C = \Upsilon\Upsilon_{1} \cos\varepsilon$$

که در آن ε زاویهٔ میل دایرةالبروج است. از این‌رو

$$\Upsilon C = 50''{,}3 \cos\varepsilon$$

و با جانشانی مقدار ε ($23°27'$) به راحتی در می‌یابیم که، در مقیاس زمان، نقطهٔ اعتدال میانگین، با آهنگ ۰٫۰۰۸ ثانیه در روز نجومی در بُعد از Υ فاصله می‌گیرد. در این صورت جهت حرکت نقطهٔ اعتدال در آسمان به طرف غرب، یعنی مخالف جهت افزایش بُعد است و در نتیجه بازهٔ زمانی بین دو عبور پیاپی نقطهٔ اعتدال متحرک از هر دایرهٔ نصف‌النهار، به اندازهٔ ۰٫۰۰۸ ثانیه کمتر از بازهٔ زمانی حاصل از نقطهٔ اعتدال یا ستارهٔ ثابت است. بازهٔ زمانی اول روز نجومی است (که نسبت به نقطهٔاعتدال متحرک تعریف می‌شود) و بازهٔ زمانی دوم دورهٔ چرخش زمین است.

استوای واقعی در هر لحظه، به سبب ناوش، با استوای میانگین در آن لحظه اندکی تفاوت دارد. در نتیجه نقطهٔ اعتدال واقعی در امتداد دایرةالبروج، نسبت به نقطهٔ اعتدال میانگین کمی تغییر مکان می‌دهد؛ این تغییر مکانهای کوچک مشخصه‌ای دوره‌ای با یک دورهٔ تقریبی ۱۸ سال دارند. روشن است که تفاوت بُعدی نقطهٔ اعتدال واقعی در هر لحظه و نقطهٔ اعتدال میانگین در همان لحظه نیز دوره‌ای است و مقدار عددی آن ممکن است به ۱٫۲ ثانیه برسد.

زمان نجومی میانگین را در ارتباط با نقطهٔ اعتدال میانگین (فقط حرکت تقدیمی) تعریف می‌کنیم و زمان نجومی ظاهری را وابسته به نقطهٔ اعتدال واقعی می‌دانیم. از آنجا که حرکت نقطهٔ اعتدال واقعی در امتداد دایرةالبروج می‌تواند ترکیبی از (الف) حرکت یکنواخت ناشی از حرکت تقدیمی ($50''{,}3$ در سال) و (ب) حرکت نوسانی کم دامنه نسبت به نقطهٔ اعتدال میانگین، ناشی از ناوش، در نظر گرفته شود، پس روشن است که بازهٔ زمانی میان دو عبور پیاپی نقطهٔ اعتدال واقعی از یک دایرهٔ نصف‌النهار با بازهٔ زمانی میان دو عبور پیاپی نقطهٔ اعتدال میانگین اختلاف اندکی خواهد داشت که مشخصهٔ دوره‌ای دارد.اما این اختلاف از روزی به روز دیگر به قدری کوچک است که روز نجومی را معمولاً برابر میانگین بازهٔ زمانی میان دو عبور پیاپی نقطهٔ اعتدال میانگین می‌گیرند. چنانکه دیدیم، روز نجومی پذیرفته شده ۰٫۰۰۸ ثانیه کوتاهتر از دورهٔ چرخش زمین است. ساعتهای نجومی بر طبق زمان نجومی میانگین تنظیم می‌شوند.

هنگامی که مکان ستاره‌ای در هر لحظه رصد می‌شود، آن مکان نسبت به استوا و نقطهٔ اعتدال واقعی در آن لحظه سنجیده می‌شود. مثلاً، وقتی عبور ستاره‌ای رصد می‌شود، بُعد آن زمان نجومی ظاهری عبور را نشان می‌دهد؛ یا به فرض اینکه بُعد ستاره (نسبت به استوای واقعی) معلوم باشد، زمان نجومی ظاهری عبور آن به دست می‌آید. با این حال این زمان، زمانی نیست که ساعت نجومی نشان می‌دهد زیرا چنانکه گفته شد این ساعت (که آن را صحیح فرض می‌کنیم) برای نگهداری زمان نجومی میانگین تنظیم می‌شود؛ اختلاف آن دو در اثر کوچکی است که به

ناوش مربوط می‌شود. بزرگی این کمیت، که یک دورهٔ اصلی ۱۸ ساله دارد، می‌تواند از ملاحظات دیگری به دست آید. این کمیت در تقویمهای نجومی تحت عنوان «تعدیل اعتدالها» به مفهوم

$$\text{زمان نجومی‌ظاهری} = \text{زمان نجومی میانگین} + \text{تعدیل اعتدالها} \qquad (۱)$$

برای هر روز جدول‌بندی شده است.

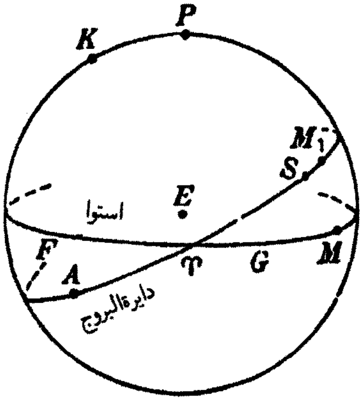
۸۵. زمان زیجی و جهانی

زمان نجومی، بنابه تعریفی که ارائه شد، زاویهٔ ساعتی اعتدال بهاری یعنی زاویهٔ ساعتی جهتی معین در فضاست. بنابراین، گذشت زمان نجومی کلاً توسط چرخش زمین تعیین می‌شود و از آنجا که چرخش زمین دستخوش تغییرات نامنظم و غیر قابل پیش‌بینی است، گذشت زمان نجومی نیز یکنواخت نخواهد بود. این موضوع، در مورد زمان جهانی (UT) نیز صادق است؛ زمان جهانی در بخش ۲۸ برحسب زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین (HAMS)، جسمی پنداری که با آهنگی ثابت بر پیرامون استوای سماوی حرکت می‌کند، تعریف شد. لیکن، توجه داشته باشید که اگر زمان جهانی دقیقاً به زمان نجومی ارتباط داشته باشد آن‌وقت این آهنگ باید نسبت به چرخش زمین ثابت باشد. پس آهنگی دقیقاً یکنواخت نیست. هنگامی که نخستین بار خورشید میانگین معرفی شد این نکته که چرخش زمین متغیر است ناشناخته بود. بنابراین بین زمان جهانی که با چرخش زمین تعریف می‌شود و زمان زیجی (پیوست ۷ را ببینید) که یکنواخت است و بر پایهٔ دینامیک گرانشی سیستم خورشیدی، مستقل از چرخش زمین، تعریف می‌شود، هیچ فرقی گذاشته نشد. پس، اگر بخواهیم مفهوم خورشید میانگین را نگه داریم باید آن را برای زمان زیجی و زمان جهانی به دو روش جداگانه تعریف کنیم.

در آغاز از حرکت تقدیمی و ناوش چشمپوشی می‌کنیم، بدین ترتیب که فعلاً نقطهٔ اعتدال بهاری Υ و استوای $F\Upsilon G$ را ثابت فرض می‌کنیم (شکل ۵۶). فرض کنید جهت خورشید از دیدگاه زمین را در نزدیکترین فاصله از زمین A بنامیم. چون خورشید در مدت یک سال بظاهر محیط یک بیضی را نسبت به زمین طی می‌کند، A جهت حضیض (زمین) است. سرعت زاویه‌ای میانگین خورشید را در مدار ظاهری آن به دور زمین با n نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم، وقتی مکان خورشید روی کرهٔ سماوی A است، جسمی پنداری از A با سرعت زاویه‌ای میانگین n در امتداد دایرةالبروج شروع به حرکت کند. فرض می‌کنیم وقتی خورشید به نقطهٔ S روی دایرةالبروج می‌رسد، جسم پنداری در نقطهٔ M_1 باشد. اگر t و τ به ترتیب زمانهای مربوط به مکان خورشید در S و A باشند، کمان AM_1 بی‌هنجاری میانگین M است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$M = n(t-\tau) \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم هنگامی که جسم پنداری در Υ است (در زمان τ_1)، جسم دومی که آن را خورشید میانگین پنداری (FMS) خواهیم نامید از نقطهٔ Υ با سرعت زاویه‌ای میانگین n و در



شکل۵۶

امتداد استوا شروع به حرکت کند. هنگامی که جسم پنداری نخست در $M_۱$ است، دومی در M خواهد بود به طوری که داریم $\Upsilon M_۱ = \Upsilon M$. اما $\Upsilon M_۱$ طول سماوی میانگین خورشید، l، و ΥM بُعد خورشید میانگین پنداری است (RAFMS)؛ از این‌رو داریم

$$\mathrm{RAFMS} = l = n(t - \tau_۱) \qquad (۳)$$

روشن است که طبق این معادله RAFMS با آهنگی یکنواخت افزایش می‌یابد.

هنگامی که حرکتهای تقدیمی استوا و نقطهٔ اعتدال بهاری به حساب آورده می‌شوند خورشید میانگین پنداری طبق تعریف، در امتداد استوای میانگین طوری حرکت می‌کند که بُعد میانگین آن همواره برابر طول سماوی میانگین خورشید باشد. در نتیجه این بُعد، از چرخش زمین مستقل است و خورشید میانگین پنداری برای تعریف زمان زیجی، نقطهٔ مرجع مناسبی است. با وجود این، زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین پنداری تحت تأثیر بی‌نظمیهای چرخش زمین قرار خواهد گرفت، زیرا این زاویه به جهت نجومی لحظه‌ای دایرهٔ نصف‌النهار راصد بستگی دارد. بنابراین یک دایرهٔ نصف‌النهار دیگر، موسوم به دایرهٔ نصف‌النهار زیجی، که در صورت یکنواخت بودن چرخش زمین با جهت نجومی دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ مطابقت می‌کند، تعریف می‌شود. زاویهٔ ساعتی که، به جای دایرهٔ نصف‌النهار راصد، نسبت به دایرهٔ نصف‌النهار زیجی اندازه گرفته می‌شود به زاویهٔ ساعتی زیجی (EHA) موسوم است. زمان زیجی برحسب زاویهٔ ساعتی زیجی خورشید میانگین پنداری تعریف می‌شود

$$\mathrm{ET} = ۱۲^{\mathrm{h}} + \mathrm{EHAFMS} \qquad (۴)$$

برای تعریف زمان جهانی به نقطهٔ مرجعی که اندکی متفاوت است و بسادگی خورشید میانگین خوانده می‌شود، نیاز است. خورشید میانگین نیز پیرامون استوای میانگین ولی با سرعتی که در

هر لحظه مستقیماً با سرعت زاویه‌ای زمین متناسب است، حرکت می‌کند. بنابه تعریف، در عصر معینی خورشید میانگین بر خورشید میانگین پنداری و دایرهٔ نصف‌النهار زیجی بر دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ منطبق می‌شود. اگر سرعت زاویه‌ای زمین در حال کاهش باشد، بعد از مدتی، دایرهٔ نصف‌النهار زیجی کمی به طرف شرق دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ جابه‌جا می‌شود و بُعد خورشید میانگین از بُعد خورشید میانگین پنداری، به اندازه‌ای متناسب با آن ولی خیلی کوچکتر از جابه‌جایی، کمتر خواهد بود. تعریف رسمی دقیقی از خورشید میانگین در پیوست ۷ داده شده است، و زمان جهانی، همچون بخش ۲۸، برحسب HAMS در گرینویچ چنین تعریف می‌شود

$$\mathrm{UT} = ۱۲^{\mathrm{h}} + \mathrm{GHAMS} \qquad (۵)$$

اختلاف بین زمان زیجی و جهانی که در سال ۱۹۷۵ تقریباً برابر ۴۵ ثانیه بود با ΔT نشان داده می‌شود، یعنی

$$\Delta \mathrm{T} = \mathrm{ET} - \mathrm{UT} \qquad (۶)$$

با این حال، چون آهنگ چرخش زمین کاملاً قابل پیشگویی نیست، مقدار ΔT را نمی‌توان از پیش محاسبه کرد.

۸۶. سال نجومی و سال اعتدالی

زمانی که لازم است تا خورشید دایرةالبروج را به طور کامل دور بزند سال نجومی خوانده می‌شود. بدین ترتیب، سال نجومی بازهٔ زمانی میان عبور خورشید از هر نقطهٔ ثابت روی دایرةالبروج و عبور بعدی آن از همان نقطه است.

سال اعتدالی بازهٔ زمانی میانگین میان دو عبور پیاپی خورشید از اعتدال بهاری است (که اکنون به خاطر حرکت تقدیمی باید آن را در حرکت دانست). اکنون، در شکل ۵۵، فرض می‌کنیم Υ اعتدال بهاری میانگین باشد هنگامی که بُعد و میل خورشید هر دو صفرند ـ بنابراین خورشید در جهت Υ است. با حرکت خورشید در امتداد دایرةالبروج در جهت ΥR، اعتدال بهاری میانگین به طور آهسته در جهت مخالف حرکت می‌کند. فرض کنید هنگامی که اعتدال بهاری میانگین و خورشید دوباره بر هم منطبق می‌شوند $\Upsilon_۱$ مکان اعتدال بهاری میانگین را نشان دهد. پس سال اعتدالی مدت زمانی است که خورشید برای طی ۳۶۰° منهای $\Upsilon_۱\Upsilon$ لازم دارد. از رصدها معلوم می‌شود

$$\text{سال اعتدالی} = ۳۶۵{,}۲۴۲۲ \ \text{روز زیجی}$$

رابطهٔ میان سال اعتدالی و سال نجومی به روشنی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{\text{سال نجومی}}{\text{سال اعتدالی}} = \frac{۳۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ - ۵۰{,}''۳} \qquad (۷)$$

(حرکت تقدیمی اعتدال بهاری، یعنی $\Upsilon\Upsilon_1$، ۳ر″۵۰ در سال‌اعتدالی است). بنابراین داریم

$$\text{سال نجومی} = ۳۶۵٫۲۵۶۴ \text{ روز زیجی}$$

برای دقت کامل از روز زیجی استفاده می‌کنیم، اما، با دقتی که دو نوع سال در بالا داده شده‌اند، می‌توانیم آنها را برحسب روزهای متوسط خورشیدی زمان جهانی نیز در نظر بگیریم.

۸۷. رابطهٔ بین زمان جهانی و زمان نجومی میانگین

ما سال اعتدالی را به صورت بازهٔ زمانی میانگین دو عبور پیاپی خورشید از اعتدال بهاری میانگین متحرک تعریف کرده‌ایم. با چشمپوشی از اختلاف میان UT و ET، این بازهٔ زمانی برابر بازهٔ زمانی میان دو عبور پیاپی خورشید میانگین از اعتدال بهاری میانگین است. بنابراین در خلال یک سال اعتدالی، RAMS از °۰ به °۳۶۰ افزایش می‌یابد، یعنی افزایش در RAMS با آهنگ ۳۶۵٫۲۴۲۲ : °۳۶۰ یا ۳۳ر″۸′۵۹ در یک روز متوسط خورشیدی صورت می‌گیرد. فرض کنید، هنگامی که زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در مکان معینی برابر H_1 است، t_1 زمان نجومی میانگین باشد و R_1 مقدارRAMS را نشان دهد. بنابراین

$$t_1 = H_1 + R_1 \qquad (8)$$

فرض کنید t_2 زمان نجومی میانگین پس از یک روز متوسط خورشیدی باشد. زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین وRAMS به ترتیب به اندازهٔ °۳۶۰ و ۳۳ر″۸′۵۹ یا با مقیاس زمانی به ترتیب به اندازهٔ ۲۴^h و $۳^m۵۶^s$ر۵۵۶ افزایش یافته‌اند. از این‌رو

$$t_2 = (H_1 + ۲۴^h) + (R_1 + ۳^m۵۶^s{,}۵۵۶) \qquad (9)$$

به طوری که، با استفاده از رابطهٔ (۸)

$$t_2 - t_1 = ۲۴^h۳^m۵۶^s{,}۵۵۶$$

اما $t_1 - t_2$ بازهٔ زمانی نجومی متناظر با ۲۴^h زمان جهانی است. از این‌رو

$$۲۴^h\mathrm{UT} = ۲۴^h۳^m۵۶^s{,}۵۵۶ \text{ زمان نجومی میانگین} \qquad (10)$$

به سهولت از رابطهٔ (۱۰) می‌توان محاسبه کرد که

$$۲۴^h \text{ زمان نجومی میانگین} = (۲۴^h - ۳^m۵۵^s{,}۹۱۰)\mathrm{UT} \qquad (11)$$

رابطهٔ (۱۰) را می‌توان از ملاحظات زیر نیز به دست آورد. در لحظهٔ ویژه‌ای خورشید میانگین و اعتدال بهاری میانگین بر هم منطبق‌اند و پس از یک سال اعتدالی دوباره به هم می‌رسند. در این

بازهٔ زمانی، زمین ۳۶۵٫۲۴۲۲ بار حول محورش نسبت به خورشید میانگین و یکبار بیشتر نسبت به اعتدال بهاری میانگین چرخیده است. از این‌رو

$$\text{روز نجومی میانگین}\ ۳۶۶٫۲۴۲۲ = \text{روز متوسط خورشیدی}\ ۳۶۵٫۲۴۲۲ \qquad (۱۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$۲۴^{h}\mathrm{UT} = \left(۱ + \frac{۱}{۳۶۵٫۲۴۲۲}\right)۲۴^{h}\ \text{زمان نجومی میانگین} \qquad (۱۳)$$

این رابطه با رابطهٔ (۱۰) یکی است.

برای سهولت تبدیل هر بازهٔ زمانی UT به معادل آن برحسب زمان نجومی میانگین و برعکس، جدولهای زیر داده می‌شوند؛ اعداد به سادگی از روابط (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند.

جدول۱. تبدیل زمان متوسط خورشیدی به زمان نجومی میانگین

زمان متوسط خورشیدی ۲۴^{h} ≡ زمان نجومی میانگین $(۲۴^{h} + ۳^{m}۵۶^{s}٫۵۵۶)$
زمان متوسط خورشیدی ۱^{h} ≡ زمان نجومی میانگین $(۱^{h} + ۹^{s}٫۸۵۶۵)$
زمان متوسط خورشیدی ۱^{m} ≡ زمان‌نجومی میانگین $(۱^{m} + ۰^{s}٫۱۶۴۳)$
زمان متوسط خورشیدی ۱^{s} ≡ زمان‌نجومی میانگین $(۱^{s} + ۰^{s}٫۰۰۲۷)$

جدول۲. تبدیل زمان نجومی میانگین به زمان متوسط خورشیدی

زمان نجومی میانگین ۲۴^{h} ≡ زمان متوسط خورشیدی $(۲۴^{h} - ۳^{m}۵۵^{s}٫۹۱)$
زمان نجومی میانگین ۱^{h} ≡ زمان متوسط خورشیدی $(۱^{h} - ۹^{s}٫۸۲۹۶)$۱
زمان نجومی میانگین ۱^{m} ≡ زمان متوسط خورشیدی $(۱^{m} - ۰^{s}٫۱۶۳۸)$
زمان نجومی میانگین ۱^{s} ≡ زمان متوسط خورشیدی $(۱^{s} - ۰^{s}٫۰۰۲۷)$

در تقویمهای نجومی جدولهای کاملتری وجود دارند که مسئلهٔ تبدیل زمان را راحت‌تر می‌کنند.

مثال ۱. می‌خواهیم زمان نجومی میانگین را در $۸^{h}۴۷^{m}۳۸^{s}٫۵۲$ زمان جهانی روز ۲۴ فوریه ۱۹۳۱ پیدا کنیم.

از تقویمهای نجومی، زمان نجومی گرینویچ، در ۰^{h} زمان جهانی (نصف شب) روز ۲۴ فوریه $۱۰^{h}۱۱^{m}۳۷^{s}٫۶۷$ است. بازهٔ زمانی متوسط خورشیدی مورد نظر $۸^{h}۴۷^{m}۳۸^{s}٫۵۲$ است و می‌توان آن را با استفاده از جدول ۱ به روش زیر برحسب زمان نجومی میانگین (ساعتها، دقیقه‌ها،

ثانیه‌ها را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم) بیان کرد.

زمان نجومی میانگین			زمان متوسط خورشیدی
$۸^{h} + ۱^{m}۱۸^{s}٫۸۵$	یا	$\equiv ۸^{h} + ۸ \times ۹^{s}٫۸۵۶۵$	۸^{h}
$۴۷^{m} + ۷^{s}٫۷۲$	یا	$\equiv ۴۷^{m} + ۴۷ \times ۰^{s}٫۱۶۴۳$	۴۷^{m}
$۳۸^{s} + ۰^{s}٫۱۰$	یا	$\equiv ۳۸^{s} + ۳۸ \times ۰^{s}٫۰۰۲۷$	۳۸^{s}
$۰^{s}٫۵۲ + ۰^{s}٫۰۰$		$\equiv$	$۰^{s}٫۵۲$

جمع کمیتهای طرف راست چنین است

$$۸^{h}۴۷^{m}۳۸^{s}٫۵۲ + ۱^{m}۲۶^{s}٫۶۷ \quad \text{یا} \quad ۸^{h}۴۹^{m}۵^{s}٫۱۹$$

بنابراین بازهٔ $۸^{h}۴۷^{m}۳۸^{s}٫۵۲$ زمان متوسط خورشیدی معادل $۸^{h}۴۹^{m}۵^{s}٫۱۹$ زمان نجومی میانگین است.

اما در ۰^{h} زمان جهانی زمان نجومی میانگین $۱۰^{h}۱۱^{m}۳۷^{s}٫۶۷$ است. پس در $۸^{h}۴۷^{m}۳۸^{s}٫۵۲$ زمان جهانی زمان نجومی میانگین $۱۹^{h}۰^{m}۴۲^{s}٫۸۶$ خواهد بود.

مثال ۲. زمان نجومی میانگین گرینویچ در روز ۵ فوریه ۱۹۳۱، $۱۸^{h}۳۱^{m}۵۲^{s}٫۳۸$ است. مقدار U T مطلوب است.

از تقویم نجومی، زمان نجومی میانگین در ۰^{h} زمان جهانی در ۵ فوریه $۱۲^{h}۴۹^{m}۱۹^{s}٫۸۳$ است که با کم کردن از $۱۸^{h}۳۱^{m}۵۲^{s}٫۳۸$، بازهٔ زمانی نجومی مورد نظر به دست می‌آید. بدین ترتیب این بازه $۵^{h}۴۲^{m}۳۲^{s}٫۵۵$ زمان نجومی میانگین است. جدول ۲ را به صورت زیر به کار می‌بریم:

زمان متوسط خورشیدی		زمان نجومی میانگین
$= ۵^{h} - ۴۹^{s}٫۱۵$	$\equiv ۵^{h} - ۵ \times ۹^{s}٫۸۲۹۶$	۵^{h}
$= ۴۲^{m} - ۶^{s}٫۸۸$	$\equiv ۴۲^{m} - ۴۲ \times ۰^{s}۱۶۳۸$	۴۲^{m}
$= ۳۲^{s} - ۰^{s}٫۰۹$	$\equiv ۳۲^{s} - ۳۲ \times ۰^{s}٫۰۰۲۷$	۳۲^{s}
$= ۰^{s}٫۵۵ - ۰^{s}٫۰۰$		$۰^{s}٫۵۵$

جمع کمیتهای طرف راست چنین است

$$۵^{h}۴۲^{m}۳۲^{s}٫۵۵ - ۵۶^{s}٫۱۲ \quad \text{یا} \quad ۵^{h}۴۱^{m}۳۶^{s}٫۴۳$$

پس وقتی زمان نجومی میانگین گرینویچ مقدار یاد شده در این مسئله باشد، UT برابر $۵^{h}۴۱^{m}۳۶^{s}٫۴۳$ خواهد بود.

این محاسبات به کمک جدولهای ویژه در تقویمهای نجومی یاد شده خیلی کوتاهتر می‌شود.

۸۸. تقویم

قبلاً گفتیم که سال اعتدالی واحدی است که شمارش سالهای رسمی بر اساس آن است. به دلایلی آشکار، سال رسمی شامل تعداد درستی روز متوسط خورشیدی نیست و سال اعتدالی، چنانکه دیدیم، ۳۶۵ر۲۴۲۲ روز متوسط خورشیدی است.

در تقویم ژولیانی که به وسیلهٔ ژولیوس قیصر[1] تدوین شد، سال اعتدالی $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ روز در نظر گرفته شد؛ سه سال از چهار سال هر یک برابر ۳۶۵ روز تعیین شدند در صورتی که برای سال چهارم—موسوم به سال کبیسه—۳۶۶ روز منظور شد. سال کبیسه سالی انتخاب شد که بر ۴ بخش‌پذیر بود و روز اضافی به ماه فوریه اضافه شد. بدین ترتیب، مطابق قانون یولیوس، همهٔ سالهای ۱۹۲۸، ۱۹۳۲، ۱۹۳۶، و مانند آن، سالهای کبیسه‌اند و در هر کدام، ماه فوریه ۲۹ روز است. اگر طول فرض شدهٔ سال اعتدالی دقیق بود، آن وقت تطابق دقیقی میان دورهٔ چهار سالهٔ اعتدالی و دورهٔ چهار سالهٔ رسمی وجود داشت.

در سال ۱۵۸۲ (۹۶۱ هـ.ش.)، پاپ گرگوری تقویمی را که اکنون متداول است، معرفی کرد؛ لیکن تا سال ۱۷۵۲ (۱۱۳۱هـ.ش.) هنوز این تقویم در انگلستان پذیرفته نشده بود. اکنون تقویم گرگوری طوری اصلاح شده است که تصحیح لازم، بر اساس مقدار صحیح سال اعتدالی، به سیستم ژولیانی اعمال شود. بنابر سیستم ژولیانی، سالهای ۱۷۰۰، ۱۸۰۰، ۱۹۰۰، و ۲۰۰۰ همه کبیسه خواهند بود؛ در تقویم گرگوری فقط سال ۲۰۰۰ سال کبیسه به حساب می‌آید. این قاعده چنان است که، اگر سالی به دو «صفر» منتهی شود کبیسه نیست مگر اینکه بر ۴۰۰ بخش‌پذیر باشد. در یک دورهٔ ۴۰۰ ساله، بنابر تقویم ژولیانی، ۱۰۰ سال کبیسه و بنابر تقویم گرگوری ۳ سال کمتر، یعنی ۹۷، سال کبیسه وجود دارد. بنابراین، طبق تقویم گرگوری

$$\text{۴۰۰ سال رسمی} = (\text{۴۰۰} \times \text{۳۶۵} + \text{۹۷})\ \text{روز متوسط خورشیدی}$$

که از آن، سال رسمی میانگین برابر ۳۶۵ر۲۴۲۵ روز متوسط خورشیدی است. این مقدار چنان به مقدار سال اعتدالی نزدیک است که برای قرنهای متمادی اختلاف قابل ملاحظه‌ای پیش نخواهد آمد.

در اینجا نکته‌ای را دربارهٔ سال رسمی بیان می‌کنیم. طبق کاربرد رسمی اولین روز سال، ۱ ژانویه نوشته می‌شود و رویدادی که مثلاً، در ساعت ۶ قبل از ظهر ۱ ژانویه در گرینویچ رخ می‌دهد گفته می‌شود در $۶^{h}۰^{m}$ زمان جهانی روز ۱ ژانویه یا در ۱^{d}ر۲۵ ژانویه اتفاق می‌افتد. بدین ترتیب این رویداد ۱ر۲۵ روز بعد از مبدئی که، از نظر نجومی به صورت ۰^{d}ر۰ ژانویه نوشته می‌شود و در واقع نصف شبی است که ورود روز ۳۱ دسامبر را اعلام می‌کند، به وقوع می‌پیوندد. بنابراین لحظهٔ $۱۸^{h}۰^{m}$، زمان جهانی، ۳۱ دسامبر ۱۹۳۱ را می‌توان به صورت روز ۰^{d}ر۷۵ ژانویهٔ ۱۹۳۲ نوشت. برای ماههای دیگر نیز از روش مشابهی استفاده می‌شود.

1. Julius Caesar

۸۹. سال بسلی

طول سال اعتدالی را تعریف کردیم اما لحظه‌ای که، طبق شمارش رسمی، این سال آغاز می‌شود را تعریف نکرده‌ایم. از نظر نجومی آغاز سال اعتدالی (یا سال خورشیدی) لحظه‌ای تعریف می‌شود که RA خورشید میانگین پنداری ـ یا طول سماوی خورشید میانگین ـ دقیقاً برابر $۱۸^h۴۰^m$ یا ۲۸۰° شود. این لحظه نزدیک آغاز سال رسمی قرار می‌گیرد. سالی که بدین روش تعریف می‌شود معمولاً به افتخار بسل ستاره‌شناس آلمانی که نخستین بار آن را وارد مسائل نجومی کرد، سال بسلی خوانده می‌شود. بدین ترتیب آغاز سال بسلی ۱۹۷۵ در زمان زیجی ۰^dر۹۷۸ ژانویهٔ ۱۹۷۵ یعنی $۲۳^h۲۸^m$ زمان زیجی روز ۳۱ دسامبر ۱۹۷۴، است. با دقت یاد شده در اینجا، اختلاف میان زمان زیجی و جهانی کم و بیش قابل چشمپوشی است، زیرا در ۱۹۷۵، $\Delta T = ۴۵^s$ر۶ از یک‌هزارم روز کمتر است. آغاز سال بسلی بعدی، آشکارا، با افزایش ۲۴۲۲ر۳۶۵ روز به دست می‌آید. بنابراین، در سال ۱۹۷۶، آغاز سال بسلی در ۱^dر۲۲۱ET ژانویهٔ ۱۹۷۶ است. اختلاف جزئی ظاهری ناشی از گرد کردن اعداد است.

معمولاً آغاز سال بسلی را به صورت ۰ر۱۹۷۵، ۰ر۱۹۷۶، ۰ر۱۹۷۷، و مانند آن نشان می‌دهند.

در محاسبات و رصدهای مربوط به اجرام آسمانی از سالی که با این روش تعریف می‌شود استفاده می‌کنند. برای مثال، اگر RA و میل ستاره‌ای در یک لحظهٔ ویژه رصد شوند، این مختصات به اعتدال بهاری و استوای واقعی یا حقیقی در آن لحظه مربوط می‌شوند. مکان ستاره‌ای را می‌توان، با به کار بردن برخی اصول که در فصل ۱۰ توضیح خواهیم داد، نسبت به اعتدال بهاری و استوای میانگین در آغاز سال بسلی به دست آورد. بدین ترتیب برای مثال، تمامی مکانهای ستاره‌هایی که در تاریخهای مختلف در خلال سال ۱۹۷۵ رصد می‌شوند، می‌توانند به اعتدال بهاری و استوای میانگین ۰ر۱۹۷۵ و با فرایندی دیگر به اعتدال بهاری استانداردی مانند اعتدال بهاری ۰ر۱۹۰۰ یا ۰ر۱۹۵۰ مربوط شوند.

۹۰. تاریخ ژولیانی

در برخی رصدها (مانند رصد ستاره‌های متغیر) بهتر است لحظهٔ رصد به صورت تعداد روز و کسری از روز پس از یک مبدأ بنیادی معین بیان شود. مبدأ انتخاب شده ظهر متوسط گرینویچ در اول ژانویهٔ سال ۴۷۱۳ پیش از میلاد است.برای هر تاریخ دلخواه، تعداد روزهایی که از این مبدأ سپری شده است، تاریخ ژولیانی (JD) متناظر با تاریخ مورد نظر را به دست می‌دهد. مثلاً، ساعت ۱۲ زمان جهانی اول ژانویهٔ ۱۹۷۵ به تاریخ ژولیانی به صورت JD ۲۴۴۲۴۱۴ نشان داده می‌شود؛ زمان رصدی که مثلاً در ۱۸^hUT روز ۳ ژانویهٔ ۱۹۷۵ (یعنی ۶ ساعت پس از ظهر متوسط گرینویچ ۳ ژانویه) انجام شده است به صورت ۲۴۴۲۴۱۶ر۲۵JD نمایش داده می‌شود. لازم به تذکر است که روز ژولیانی در ظهر متوسط گرینویچ شروع می‌شود. در تقویمهای نجومی،

تاریخ ژولیانی برای هر روز سال داده شده است و نیز جدولهایی وجود دارند که ستاره‌شناسان توسط آنها می‌توانند تاریخ ژولیانی را برای هر روز سال پیدا کنند.

۹۱. تعدیل زمان

تعدیل زمان (E) را، همچون فصل ۲ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E = \mathrm{HA}\odot - \mathrm{HAMS} \qquad (۱۴)$$

که در آن $\mathrm{HA}\odot$ زاویهٔ ساعتی خورشید و HAMS زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین را در یک لحظه و محل دلخواه نشان می‌دهند. همچنین داریم

$$\text{زمان نجومی} = \mathrm{HA}\odot + \mathrm{RA}\odot = \mathrm{HAMS} + \mathrm{RAMS} \qquad (۱۵)$$

و

$$E = \mathrm{RAMS} - \mathrm{RA}\odot \qquad (۱۶)$$

مقدار RAMS برای هر زمان جهانیی از پیش معلوم است و مقدار $\mathrm{RA}\odot$ نیز برای هر زمان زیجیی در دست است، اما رابطهٔ دقیق میان این دو زمان را نمی‌توان پیشگویی کرد. از این‌رو، معادلهٔ زمان را نمی‌توان از پیش محاسبه کرد و بنابراین دیگر در زیجهای نجومی داده نمی‌شود، هر چند هنوز در تقویمهای دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. لیکن، اگر خورشید میانگین را جایگزین خورشید میانگین پنداری کنیم و به جای تعدیل زمان معادلهٔ زیر را بنویسیم

$$E' = \mathrm{RAFMS} - \mathrm{RA}\odot \qquad (۱۷)$$

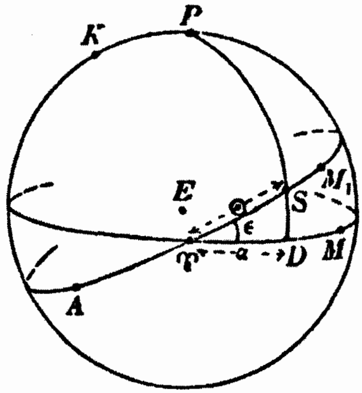
در آن صورت E'، که می‌تواند تعدیل زمان زیجی نامیده شود، فقط به اندازهٔ ΔT۰٫۰۰۲۷ با E اختلاف دارد و می‌توان آن را از پیش محاسبه کرد.

در شکل ۵۷ کرهٔ سماوی را به مرکز زمین رسم کرده‌ایم. خورشید نسبت به زمین به ظاهر مدار بیضی شکلی را در صفحهٔ دایرةالبروج طی خواهد کرد. اصول و فرمولهای فصل پنجم برای مدار ظاهری خورشید به دور زمین به کار می‌روند.

فرض کنید $\odot$ طول سماوی خورشید را در لحظه‌ای دلخواه نشان دهد و α بُعد خورشید و l طول سماوی میانگین آن باشد. در این صورت با استفاده از رابطهٔ (۳) داریم

$$E' = (\odot - \alpha) - (\odot - l) \qquad (۱۸)$$

اگر A در شکل ۵۷ حضیض خورشید را نشان دهد، کمان AS بی‌هنجاری واقعی خورشید، v، خواهد بود. فرض کنید $M_۱$ مکان یک جسم پنداری باشد که در حضیض بر خورشید واقعی



شکل۵۷

منطبق است و روی دایرةالبروج با حرکت زاویه‌ای میانگین خورشید، n، حرکت می‌کند، در آن صورت کمان $AM_۱$ بی‌هنجاری میانگین M و کمان $\Upsilon M_۱$ برابر l است. بدین‌ترتیب

$$\odot - l = \Upsilon S - \Upsilon M_۱$$

$$= AS - AM_۱$$

یعنی

$$\odot - l = v - M \qquad (۱۹)$$

از این‌رو

$$E' = -(\alpha - \odot) - (v - M) \qquad (۲۰)$$

پس E' شامل دو قسمت است: (۱) کمیت $(\alpha - \odot)$ که تقلیل به استوا نام دارد و (۲) کمیت $(v - M)$ که تعدیل مرکز است و در بخش ۷۳ دربارهٔ آن بحث شد.

نخست کمیت $(\odot - \alpha)$ را به صورت یک سری بیان می‌کنیم. از مثلث راستگوشهٔ ΥSD (PSD دایرهٔ نصف‌النهار است که از S می‌گذرد) که در آن

$$\Upsilon S = \odot, \Upsilon D = \alpha, S\hat{\Upsilon}D = \varepsilon, S\hat{D}\Upsilon = ۹۰^\circ$$

با استفاده از فرمول چهار قسمتی (د) داریم

$$\cos\alpha\cos\varepsilon = \sin\alpha\cot\odot$$

یا

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon \tan\odot$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\tan\alpha = \frac{1-\tan^2\varepsilon/2}{1+\tan^2\varepsilon/2}\tan\odot \qquad (21)$$

از آنجا که ε در حدود $23\frac{1}{2}^\circ$ است، پس $\tan^2\varepsilon/2$ تقریباً ۱/۲۵ است. به جای $\tan^2\varepsilon/2$، y را قرار می‌دهیم، داریم

$$\tan\alpha = \frac{1-y}{1+y}\tan\odot \qquad (22)$$

که در آن y را کمیت کوچکی می‌گیریم. رابطهٔ (۲۲) اساساً همان شکل فرمول (۸۲) فصل ۵ را دارد که در معادلهٔ(۸۳) به صورت یک سری نوشته شده است. از این‌رو، با نوشتن y به جای $-x$ و α به جای $v/2$ و $\odot$ به جای $E/2$ در معادلهٔ(۸۳) داریم

$$\odot - \alpha = y\sin 2\odot - \frac{1}{2}y^2\sin 4\odot + \frac{1}{3}y^3\sin 6\odot \qquad (23)$$

در این فرمول، $\odot$ و α برحسب رادیان بیان می‌شوند. تفاضل $(\odot - \alpha)$ برحسب ثانیهٔ زمانی چنین است

$$\odot - \alpha = \operatorname{cosec} 1^s[y\sin 2\odot - \frac{1}{2}y^2\sin 4\odot \cdots]$$

حال $\operatorname{cosec} 1^s = 206265/15$ و با نشاندن مقدار $23^\circ 26' 33''$ به جای زاویهٔ میل ε در سال ۱۹۷۵ خواهیم داشت $y(\equiv \tan^2\varepsilon/2) = 0{,}0430468$. در این صورت نتیجه می‌شود

$$\odot - \alpha = 591^s{,}94\sin 2\odot - 12^s{,}74\sin 4\odot + 0^s{,}37\sin 6\odot \qquad (24)$$

فرمول (۲۴) بخشی از معادلهٔ زمان زیجی که به زاویهٔ میل دایرةالبروج بستگی دارد را به صورت سری شامل طول سماوی واقعی خورشید، $\odot$، به دست می‌دهد.

بخش دیگر معادلهٔ زمان زیجی وابسته به خروج از مرکز است و آن را تعدیل مرکز می‌نامند. فرمول(۸۷) فصل پنجم را، با حفظ جمله‌ها تا e^2، می‌نویسیم

$$v - M \equiv \odot - l = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M \qquad (25)$$

با بیان $(v-M)$ برحسب ثانیهٔ زمانی و با به‌کار بردن مقدار e برای ۱۹۷۵٫۰ یعنی ۰٫۰۱۶۷۲۰، نتیجه می‌شود

$$v - M = ۴۵۹^{s}٫۸۳ \sin M + ۴^{s}٫۸۱ \sin ۲M \qquad (۲۶)$$

حال طرف راست رابطهٔ (۲۳) برحسب $\odot$، طول سماوی خورشید، است که با استفاده از رابطهٔ(۲۵) برحسب بی‌هنجاری میانگین M بیان می‌شود

$$\odot = l + ۲e \sin M + \frac{۵}{۴} e^{۲} \sin ۲M \qquad (۲۷)$$

مقدار $\odot$ را از رابطهٔ (۲۷) در طرف راست رابطهٔ (۲۳) قرار می‌دهیم. چنانکه پیشتر اشاره کردیم، y حدود ۱/۲۵ و e تقریباً ۱/۶۰ است؛ با توجه به اینکه y و e کمیتهای کوچکی هستند که مرتبهٔ یکسانی دارند، با حفظ جمله‌های تا مرتبهٔ دوم در مقدار $\odot - \alpha$، می‌توانیم با دقت مورد نظر بنویسیم

$$\begin{aligned} \sin ۲\odot &= \sin(۲l + ۴e \sin M) \\ &= \sin ۲l + ۴e \sin M \cos ۲l \end{aligned}$$

(چون در رابطهٔ (۲۳)، $\sin ۲\odot$ در y ضرب می‌شود، لازم است که $\sin ۲\odot$ فقط تا مرتبهٔ اول بسط داده شود). همین طور، با محدودیتهای اعمال شده، داریم

$$\sin ۴\odot = \sin ۴l$$

از این‌رو رابطهٔ (۲۳)، تا مرتبهٔ دوم، به صورت زیر در می‌آید

$$\odot - \alpha = y \sin ۲l + ۴ey \sin M \cos ۲l - \frac{۱}{۲} y^{۲} \sin ۴l \qquad (۲۸)$$

با ترکیب روابط (۲۸) و (۲۵) داریم

$$\begin{aligned} E' = {} & y \sin ۲l - ۲e \sin M + ۴ey \sin M \cos ۲l \\ & - \frac{۱}{۲} y^{۲} \sin ۴l - \frac{۵}{۴} e^{۲} \sin ۲M \qquad (۲۹) \end{aligned}$$

با قرار دادن مقادیر عددی y و e خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E' = {} & ۵۹۱^{s}٫۹ \sin ۲l - ۴۵۹^{s}٫۸ \sin M + ۳۹^{s}٫۶ \sin M \cos ۲l \\ & - ۱۲^{s}٫۷ \sin ۴l - ۴^{s}٫۸ \sin ۲M \qquad (۳۰) \end{aligned}$$

در شکل ۵۷ بی‌هنجاری میانگین، M، کمان AM_1 است که برابر $A\Upsilon + \Upsilon M_1$ است، به طوری که

$$M = A\Upsilon + l$$

همچنین، اگر ϖ طول حضیض خورشید را نشان دهد، داریم $\varpi = ۳۶۰^\circ - A\Upsilon$. از این‌رو

$$M = ۳۶۰ + (l - \varpi) \qquad (۳۱)$$

بدین ترتیب در طرف راست فرمول (۳۰) می‌توانیم به جای M، $(l - \varpi)$ را بنویسیم. مقدار ϖ برای سال ۱۹۷۵٫۰ برابر ۲۸۲°٫۵۰۹۹ است. بنابراین، پس از کمی ساده کردن، خواهیم داشت

$$E' = -۱۰۳^s{,}۹ \sin l - ۴۲۹^s{,}۶ \cos l + ۵۹۶^s{,}۳ \sin ۲l - ۲^s{,}۰ \cos ۲l$$
$$+ ۴^s{,}۳ \sin ۳l + ۱۹^s{,}۳ \cos ۳l - ۱۲^s{,}۷ \cos ۴l \qquad (۳۲)$$

از این فرمول تعدیل زمان برحسب طول سماوی میانگین خورشید، تا مرتبهٔ مورد نظر، به دست می‌آید.

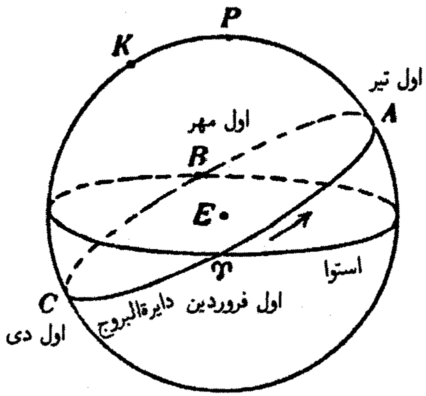
کمیتی که در زیجهای نجومی فهرست می‌شود E' نیست بلکه عبور زیجی خورشید است. این کمیت، زمان زیجی در لحظهٔ عبور خورشید از دایرهٔ نصف‌النهار زیجی است و به سهولت دیده می‌شود که برابر ۱۲^h منهای تعدیل زمان زیجی در آن لحظه است.

۹۲. فصلها

مسیر ظاهری خورشید را در طول سال در نظر بگیرید (شکل ۵۸). زمین E مرکز کرهٔ سماوی است و به نظر می‌رسد که خورشید نسبت به E دایرهٔ عظیمهٔ $C\Upsilon AB$ یا دایرةالبروج را می‌پیماید. دایرةالبروج استوای سماوی را در دو نقطهٔ Υ و B یعنی در اعتدالهای بهاری و پاییزی (که گاهی به ترتیب اولین نقطهٔ حمل و اولین نقطهٔ میزان نامیده می‌شوند) قطع می‌کند. نقطهٔ P قطب شمال استواست. میل خورشید از °۰ در نقطهٔ Υ (اول فروردین) تا حداکثر ′۲۷°۲۳ در نقطهٔ A (اول تیر) که موسوم به انقلاب تابستانی است، افزایش می‌یابد. همین طور، نقطه C که خورشید در آن (اول دی) بزرگترین میل جنوبی خود (′۲۷°۲۳−) را دارد انقلاب زمستانی نامیده می‌شود.

چهار بخش سال، یا فصلها، که در طی آنها خورشید به طور پیاپی در ربع دایره‌های ΥA، AB، BC، و $C\Upsilon$ قرار دارد، از نظر نجومی به ترتیب بهار، تابستان، پاییز و زمستان خوانده می‌شوند. از آنجا که این واژه‌ها در محاورات معمولی نسبتاً به طور غیر دقیق به کار برده می‌شوند، ما فقط معنی نجومی آنها را بررسی خواهیم کرد.

مشخصات کلی فصلها در هر محل به مقدار نسبی گرمای دریافتی روز به روز از خورشید بستگی دارد. دو عامل نجومی فصلها عبارت‌اند از (الف) مدتی که خورشید در هر روز بالای افق



شکل۵۸

است، و (ب) ارتفاعهای پیوسته‌ای که خورشید در طول این مدت کسب می‌کند. بهتر است ارتفاع یا فاصلهٔ سمت‌الرأسی خورشید در ظهر ظاهری به جای (ب) ملاک قرار گیرد.

اگر از شکست نور چشمپوشی کنیم، تعداد ساعاتی که خورشید (یا دقیقاً مرکز خورشید) بالای افق قرار دارد $2H$ است که در آن H زاویهٔ بین 0^{h} و 12^{h} است و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\cos H = -\tan\phi\tan\delta \qquad (۳۳)$$

این همان فرمول (۲۴) فصل ۲ است و در آن ϕ عرض جغرافیایی محلی است.

اگر میل δ مثبت باشد، در عرضهای جغرافیایی شمالی H بین 6^{h} و 12^{h} است و بنابراین خورشید بیش از ۱۲ ساعت از ۲۴ ساعت را بالای افق خواهد بود. این وضعیت، بین اول فروردین، یعنی آنگاه که خورشید در Υ است، و اول مهر، یعنی هنگامی که خورشید در B است، اتفاق می‌افتد. بدین ترتیب تا آنجا که به (الف) مربوط می‌شود، گرمی روزها از اول فروردین تا ۲۱ تیر که با افزایش δ از $0°$ به $+23°27'$ متناظر است، زیاد می‌شود؛ از آن پس، کاهش گرما به دنبال می‌آید. اگر δ منفی باشد، در عرضهای جغرافیایی شمالی زاویهٔ ساعتی خورشید در غروب، بنابر رابطهٔ (۳۳) کمتر از 6^{h} است و در نتیجه خورشید کمتر از 12^{h} بالای افق خواهد بود؛ این وضعیت، به دو فصل پاییز و زمستان مربوط می‌شود. هنگامی که خورشید بزرگترین میل جنوبی خود را دارد یعنی در انقلاب زمستانی (اول دی)، تعداد ساعات روشنی روز کمینه است. به سهولت دیده می‌شود که تعداد ساعات روز از اول دی تا اول تیر افزایش یافته، و از اول تیر تا اول دی کاهش می‌یابد.

فاصلهٔ سمت‌الرأسی خورشید، z، در ظهر ظاهری هر روز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$z = \phi - \delta \qquad (۳۴)$$

واضح است در هر محلی که در عرض جغرافیایی شمالی بین $0°$ و $23°27'$ واقع باشد، خورشید

دو بار در خلال بهار و تابستان، یعنی بین اول فروردین و اول مهر، در سمت‌الرأس (یا عملاً چنین) خواهد بود. خورشید در عرض جغرافیایی ′۲۳°۲۷ شمالی، فقط در اول تیر در سمت‌الرأس است. این مدار شمالی (′۲۳°۲۷ شمالی) مدار رأس السرطان خوانده می‌شود. مدار جنوبی متناظر آن (′۲۳°۲۷ جنوبی) مدار رأس الجدی نام دارد و خورشید در محلهای میان این مدار و خط استوا، بین اول مهر و اول فروردین دوبار در سمت‌الرأس خواهد بود. منطقه‌ای از سطح زمین که بین مدارهای رأس‌السرطان و رأس‌الجدی محصور است منطقهٔ حاره است. مدارهای ′۶۶°۳۳ شمالی و ′۶۶°۳۳ جنوبی به ترتیب مدار شمالگان و مدار جنوبگان نامیده می‌شوند. منطقهٔ بین مدارهای ′۲۳°۲۷ شمالی و ′۶۶°۳۳ شمالی را منطقهٔ معتدلهٔ شمالی و منطقه متناظر آن در نیمکرهٔ جنوبی را منطقه معتدلهٔ جنوبی می‌نامند.

از رابطهٔ (۳۳)دیده می‌شود که وقتی ′۶۶°۳۳ = ϕ شمالی و ′۲۳°۲۷+ = δ آنگاه زاویهٔ ساعتی خورشید در غروب ۱۲^h است؛ بدین معنی که، خورشید در مدار شمالگان در اول تیر تمام ۲۴ ساعت را بالای افق خواهد بود. برای مثال، بنابر رابطهٔ (۳۳)، خورشید در عرض جغرافیایی ۷۰° در مدتی که میلش بین ۲۰°+ و ′۲۳°۲۷+ است، یعنی (طبق تقویم نجومی سال ۱۹۳۱)، بین اول خرداد و دوم امرداد پیوسته بالای افق خواهد بود. خورشید در قطب شمال، بین اول فروردین و اول مهر پیوسته بالای افق است و مدت باقیمانده از سال را زیر افق خواهد بود.

به طور خلاصه، برای نیمکرهٔ شمالی، این خصوصیات را در مورد فصلها داریم: تعداد ساعات روشنایی روز در طول بهار از ۱۲ ساعت، در اول فروردین، به بیشترین مقدار خود در اول تیر می‌رسد؛ این بیشینه در روزهای خاص در محلهایی روی مدار شمالگان یا شمال آن می‌تواند ۲۴ ساعت باشد؛ ارتفاع خورشید هنگام ظهر، در محلهای شمال مدار رأس السرطان در طول بهار افزایش می‌یابد و در اول تیر به بیشینهٔ خود می‌رسد؛ این ارتفاع در محلهای واقع بین استوا و مدار ′۲۳°۲۷ شمالی، در بعضی از روزهای بین اول فروردین و اول تیر به حداکثر ۹۰° می‌رسد.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول تابستان، از بیشینه در اول تیر به ۱۲ ساعت در اول مهر کاهش می‌یابد.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول پاییز، از ۱۲ ساعت در اول مهر به کمینه‌ای در اول دی می‌رسد و در طول این مدت ارتفاع خورشید هنگام ظهر پیوسته کاهش پیدا می‌کند.

تعداد ساعات روشنایی روز، در طول زمستان، از کمینه در اول دی به ۱۲ ساعت در اول فروردین افزایش می‌یابد و ارتفاع خورشید هنگام ظهر در طول این فصل پیوسته زیاد می‌شود.

رابطهٔ بین فصلها ومیل خورشید در نیمکرهٔ جنوبی را می‌توان به سهولت از بحثی که گذشت نتیجه گرفت.

طول هر فصل را (برحسب روز متوسط خورشیدی) می‌توان با توجه به تعدیل مرکز که برای منظور فعلی با استفاده از رابطهٔ (۲۵) به صورت سادهٔ زیر نوشته می‌شود به دست آورد

$$l = \odot - ۲e \sin M$$

یا با به کار بردن رابطهٔ (۳۱) داریم

$$l = \odot - ۲e\sin(l - \varpi) \qquad (۳۵)$$

چون l برابر تقریباً $\odot$ است، در طرف راست (۳۵) می‌توان l را با $\odot$ جایگزین کرد و در آن صورت

$$l = \odot - ۲e\sin(\odot - \varpi) \qquad (۳۶)$$

فرض کنید $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$، و $l_۴$ به ترتیب طول سماوی میانگین خورشید در آغاز بهار، تابستان، پاییز، و زمستان باشند. در آغاز بهار $\odot = ۰$ بنابراین

$$l_۱ = ۲e\sin\varpi \qquad (۳۷)$$

در آغاز تابستان، $\odot$ برابر ۹۰° یا برحسب رادیان برابر $\pi/۲$ است؛ از این‌رو

$$l_۲ = \frac{\pi}{۲} - ۲e\cos\varpi \qquad (۳۸)$$

همین طور

$$l_۳ = \pi - ۲e\sin\varpi \qquad (۳۹)$$

$$l_۴ = \frac{۳\pi}{۲} + ۲e\cos\varpi \qquad (۴۰)$$

فرض کنید $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$، و $t_۴$ لحظاتی باشند که در آنها طول سماوی میانگین خورشید $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$، و $l_۴$ است، در این صورت

$$l_۲ - l_۱ = n(t_۲ - t_۱) \qquad (۴۱)$$

که در آن n حرکت زاویه‌ای میانگین است. اگر $t_۲ - t_۱$ برحسب روز متوسط خورشیدی بیان شود، $n = ۲\pi/T$، که در آن T برابر ۳۶۵٫۲۴۲۲ روز متوسط خورشیدی است. از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۴۱)، داریم

$$t_۲ - t_۱ = \frac{T}{۲\pi}(l_۲ - l_۱) \text{ روز متوسط خورشیدی} \qquad (۴۲)$$

اما $(t_۲ - t_۱)$ تعداد روزهای متوسط خورشیدی در بهار است و اگر این بازهٔ زمانی با $I_۱$ نشان داده شود از (۳۷)، (۳۸)، و(۴۲) خواهیم داشت

$$I_۱ = \frac{T}{۲\pi}\left\{\frac{\pi}{۲} - ۲e(\sin\varpi + \cos\varpi)\right\}$$

یا

$$I_۱ = ۹۱٫۳۱ - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi + \cos\varpi) \qquad (۴۳)$$

همین طور اگر $I_۲$، $I_۳$، $I_۴$ به ترتیب روزهای متوسط خورشیدی در تابستان، پاییز، و زمستان باشند، خواهیم داشت

$$I_۲ = ۹۱٫۳۱ - \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi - \cos\varpi) \qquad (۴۴)$$
$$I_۳ = ۹۱٫۳۱ + \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi + \cos\varpi) \qquad (۴۵)$$
$$I_۴ = ۹۱٫۳۱ + \frac{eT}{\pi}(\sin\varpi - \cos\varpi) \qquad (۴۶)$$

با قرار دادن $T = ۳۶۵٫۲۴۲۲$، $e = ۰٫۰۱۶۷۲$، $\varpi = ۲۸۲^\circ٫۵۱۰$، برای نیمکرهٔ شمالی داریم

بهار شامل ۹۲ روز و ۱۹ ساعت است
تابستان شامل ۹۳ روز و ۱۵ ساعت است
پاییز شامل ۸۹ روز و ۲۰ ساعت است
زمستان شامل ۸۹ روز و ۰ ساعت است

۹۳. زمان عبور خورشید از هر دایرهٔ نصف‌النهار

این فصل را با بررسی دو مسئله مربوط به زمان به پایان می‌بریم. مثالی از مسئلهٔ نخست چنین است: می‌خواهیم UT و زمان استاندارد عبور مرکز خورشید در روز ۴ ژانویهٔ ۱۹۷۵ از دایرهٔ نصف‌النهار رصدخانهٔ دومینیان[1] را با دقت ثانیه محاسبه کنیم. طول جغرافیایی این محل $8^h 13^m 40^s٫2W$ است.

اطلاعات زیر را از تقویم نجومی ۱۹۷۵ داریم:

ET عبور زیجی خورشید در ۴ ژانویه $12^h 04^m 45^s٫5$ است.

ET عبور زیجی خورشید در ۵ ژانویه $12^h 05^m 12^s٫6$ است.

این دو زمان دقیقاً زمانهایی که در آنها زاویهٔ ساعتی گرینویچ خورشید صفر است، نیستند زیرا اینها زمانهای عبور از دایرهٔ نصف‌النهار زیجی‌اند، نه گرینویچ. می‌توان نشان داد (به تمرین ۲۳ در پایان این فصل مراجعه شود) که دایرهٔ نصف النهار زیجی به اندازهٔ $۱٫۰۰۲۷\Delta T$ به شرق دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ تغییر مکان می‌یابد، و بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\text{EHA}\odot = \text{GHA}\odot + ۱٫۰۰۲۷\Delta T \qquad (۴۷)$$

1. Dominion Observatory, Victoria, B.C.

حال اگر از تغییر تعدیل زمان در زمان کوتاه بین دو عبور چشم بپوشیم، بی‌درنگ نتیجه می‌گیریم که

$$\mathrm{UT}(\text{عبور گرینویچ}) = \mathrm{ET}(\text{عبور زیجی}) + ۰٫۰۰۲۷\Delta T$$

معمولاً از تصحیح کوچک $۰٫۰۰۲۷\Delta T$، که برای ۱۹۷۵ برابر $۰^{s}٫۱۲$ است، چشم می‌پوشند و بنابراین داده‌های تقویم نجومی همان زمانهای جهانی عبور در گرینویچ تلقی می‌شوند. هنگامی که مرکز خورشید روی دایرهٔ نصف‌النهار ویکتوریاست زاویهٔ ساعتی گرینویچ خورشید $۸^{h}۱۳^{m}۴۰^{s}٫۲$ یا تقریباً $۸^{h}٫۲۳$ است. از دو زمان یاد شده می‌بینیم که برای اینکه زاویهٔ ساعتی خورشید از ۰^{h} به ۲۴^{h} افزایش یابد به $۱^{s}٫۲۷$ بیش از ۲۴^{h} نیاز است. زمان اضافی مربوط به ویکتوریا $۱^{s}٫۲۷ \times ۸٫۲۳/۲۴$ یا $۹^{s}٫۳$ است، و بنابراین UT عبور خورشیدی در ویکتوریا برابر T است

$$T = ۱۲^{h}۰۴^{m}۴۵^{s}٫۵ + ۸^{h}۱۳^{m}۴۰^{s}٫۲ + ۹^{s}٫۳$$

بدین ترتیب UT عبور در ویکتوریا $۲۰^{h}۱۸^{m}۳۵^{s}$ است.

زمان استانداردی که در ویکتوریا نگاه می‌دارند «زمان پاسیفیک» است که متناظر با نصف‌النهار ۸^{h} غربی است. از این‌رو زمان استاندارد عبور خورشید در ویکتوریا در ۴ ژانویه $۱۲^{h}۱۸^{m}۳۵^{s}$ (زمان پاسیفیک) است.

۹۴. زمان عبور ماه از هر دایرهٔ نصف‌النهار

این مسئلهٔ دوم است و به عنوان مثال، UT و زمان استاندارد عبور ماه را در ویکتوریا برای شب میان ۲۴ و ۲۵ ماه مه ۱۹۷۵ پیدا خواهیم کرد.

اطلاعات مربوط به هر دو عبور زیجی بالایی و پایینی ماه از زیج نجومی به دست می‌آید. مانند بخش پیش می‌توانیم این داده‌ها را زمانهای جهانی عبور از روی نصف النهار گرینویچ تلقی کنیم. بدین ترتیب معلوم می‌شود که عبور ماه در ۲۴ مه در $۲۳^{h}٫۷۱۷۴$ رخ داده و عبور پایینی آن $۱۲^{h}٫۴۷۱۷$ دیرتر انجام می‌گیرد. در این مدت زاویهٔ ساعتی گرینویچ ماه از ۰^{h} به ۱۲^{h} افزایش می‌یابد. روشن است که عبور در ویکتوریا $۸^{h}۱۳^{m}۴۰^{s}٫۲ \times ۱۲٫۴۷۱۷/۱۲$ پس از عبور در گرینویچ اتفاق می‌افتد. این بازهٔ زمانی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$۸^{h}٫۲۲۷۸ \times \left(۱ + \frac{۰٫۴۷۱۷}{۱۲}\right) \quad \text{یا} \quad ۸^{h}٫۵۵۱۲$$

بنابراین هنگامی که ماه در ویکتوریا عبور می‌کند، UT برابر $(۲۳^{h}٫۷۱۷۴ + ۸^{h}٫۵۵۱۲)$ در ۲۴ مه یا برابر $۸^{h}٫۲۶۸۶$ در ۲۵ مه است.

اکنون می‌توانیم نتیجهٔ دقیقتری به دست آوریم. ΔT را برابر $۴۵^{s}٫۶$ (یا $۰^{h}٫۰۱۲۷$) در نظر می‌گیریم، ET این عبور در ویکتوریا در ۲۵ مه $۸^{h}٫۲۸۱۳$ به دست می‌آید. بُعد ظاهری ماه در

زیج نجومی به فواصل یک ساعت زمان زیجی جدول‌بندی شده است. مقدار این بُعد برای زمان حساب شدهٔ عبور $۱۶^{h}۱۱^{m}۴۱^{s}$ است. چون زاویهٔ ساعتی گرینویچ در این هنگام $۸^{h}۱۳^{m}۴۰^{s}$ است، زمان ظاهری نجومی در گرینویچ چنین خواهد بود

$$\mathrm{GST} = ۱۶^{h}۱۱^{m}۴۱^{s} + ۸^{h}۱۳^{m}۴۰^{s} \quad \text{یا} \quad ۰^{h}۲۵^{m}۲۱^{s}$$

این زمان نجومی گرینویچ بسهولت با استفاده از جدول زمانهای جهانی و نجومی موجود در تقویم نجومی به UT تبدیل می‌شود. بنابراین UT عبور در ویکتوریا را $۸^{h}۱۶^{m}۰۹^{s}$ می‌یابیم. زمان استاندارد عبور $۰^{h}۱۶^{m}۰۹^{s}$ (زمان پاسیفیک) روز ۲۵ مه است.

تمرینها

نمادهای به کار رفته عبارت‌اند از:

$\phi =$ عرض جغرافیایی راصد، $\varepsilon =$ زاویهٔ میل دایرةالبروج

$e =$ خروج از مرکز مدار زمین

۱. ثابت کنید وقتی که، در محلی بین دو مدار رأس‌السرطان و رأس‌الجدی، دایرةالبروج قائم است، زاویهٔ ساعتی H خورشید (α, δ) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$H = \sin^{-۱}(\sin\alpha \cot\delta \tan\phi) - \alpha$$

۲. ستاره‌ای (α, δ) در محلی به عرض جغرافیایی شمالی ϕ، هنگامی که بُعد خورشید $\alpha_۱$ است، با آن همزمان طلوع می‌کند. ثابت کنید

$$\alpha_۱ - \sin^{-۱}(\sin\alpha_۱ \tan\phi \tan\varepsilon) = \alpha - \sin^{-۱}(\tan\delta \tan\phi)$$

۳. ثابت کنید که در محلی روی مدار شمالگان جابه‌جایی روزانهٔ نقطهٔ غروب خورشید برابر تغییر طول سماوی خورشید در همان بازهٔ زمانی است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۴. با چشمپوشی از خروج از مرکز مدار زمین، ثابت کنید که در محلی درون مدار شمالگان، خورشید برای مدت

$$\frac{۳۶۵\frac{۱}{۴}}{\pi} \cos^{-۱}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\varepsilon}\right) \quad \mathrm{d}$$

بالای افق خواهد بود.

۵. اگر S نیم‌قطر زاویه‌ای خورشید برحسب دقیقهٔ قوسی باشد، نشان دهید در یک انقلاب (تابستانی یا زمستانی)، زمان لازم برای اینکه قرص خورشید، قائم اصلی محلی به عرض جغرافیایی $\phi(>\varepsilon)$ را بپیماید، برحسب دقیقه چنین است

$$\frac{۲S}{۱۵(\sin^۲\phi-\sin^۲\varepsilon)^{\frac{۱}{۲}}}$$

۶. رصدهای هم ارتفاع ζ برشاوش[1] با یک تئودولیت در روز ۳ ژانویه ۱۹۳۱ در زمانهای $۱۸^{h}۴۵^{m}۸^{s}$ و $۲۲^{h}۴۴^{m}۱۹^{s}$UT انجام می‌گیرند. طول جغرافیایی راصد را محاسبه کنید.
[لندن، ۱۹۲۵]

۷. طول جغرافیایی دانشگاه کلمبیا، در نیویورک $۴^{h}۵۵^{m}۵۰^{s}$ غرب گرینویچ است. زمان نجومی ظهر متوسط گرینویچ در روز معینی $۱۷^{h}۲۳^{m}۸^{s}$ است. نشان دهید که همان روز، هنگامی که زمان نجومی در دانشگاه کلمبیا $۲۰^{h}۸^{m}۴^{s}$ است، زاویهٔ ساعتی خورشید میانگین در این محل $۲^{h}۴۳^{m}۴۱^{s}$ است.

۸. اگر δ میل خورشید، S نیم‌قطر زاویه‌ای آن برحسب دقیقهٔ قوسی، و I تعداد دقیقه‌های زمانی بین ناپدید شدن لبهٔ پایینی و بالایی آن در غروب برای محلی در عرض جغرافیایی ϕ باشد، ثابت کنید که ϕ تقریباً از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\sin^۲\phi=\cos^۲\delta-\frac{۴}{۲۲۵}\frac{S^۲}{I^۲}$$

[لندن، ۱۹۳۰]

۹. دو ستاره با RA مساوی و میلهای δ و δ' در ارتفاعهای یکسان رصد می‌شوند؛ بازهٔ زمان نجومی h بین رصدها یادداشت می‌شود. ثابت کنید که H، زاویهٔ ساعتی ستارهٔ نخست در لحظهٔ رصد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\cos(\psi+H)=\frac{۲\sin\psi\tan\phi}{\cos\delta'\sin h}\sin\frac{۱}{۲}(\delta-\delta')\cos\frac{۱}{۲}(\delta+\delta')$$

که در آن

$$\cot\psi=\frac{\cos\delta'\cos h-\cos\delta}{\cos\delta'\sin h}$$

۱۰. بُعد و میل خورشید در نزدیکی انقلاب تابستانی به‌ترتیب $(۹۰^\circ-۲\beta)$ و δ است. ثابت کنید که $(\varepsilon-\delta)$ برحسب ثانیهٔ قوسی چنین است

$$\varepsilon-\delta=\operatorname{cosec}۱''[\tan^۲\beta\sin۲\varepsilon-\frac{۱}{۲}\tan^۴\beta\sin۴\varepsilon+\cdots]$$

1. ζ Persei

۱۱. فرض کنید T و T' زمانهایی باشند که یک ساعت نجومی به هنگام رصد ستاره‌ای با ارتفاع یکسان نخست در یک طرف دایرهٔ نصف‌النهار و سپس در طرف دیگر آن، نشان می‌دهد و فرض کنید α بُعد ستاره باشد. نشان دهید $\alpha - ۱/۲(T + T')$ تصحیحی است که باید روی زمان آن ساعت اعمال شود تا زمان نجومی واقعی به دست آید.

۱۲. اگر زمانهای نشان داده شده به وسیلهٔ ساعت نجومی، به هنگام رسیدن خورشید به یک ارتفاع در دو طرف دایرهٔ نصف‌النهار، T و T' باشند و اگر تغییر میل δ خورشید در این بازهٔ زمانی $d\delta$ و بُعد خورشید در اوج α باشد، نشان دهید که تصحیح لازم بر روی زمان ساعت برای به دست آوردن زمان نجومی واقعی برابر است با

$$\alpha - \frac{۱}{۲}(T + T') - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\tan\delta}{\tan\frac{۱}{۲}(T' - T)} - \frac{\tan\phi}{\sin\frac{۱}{۲}(T' - T)}\right) d\delta$$

۱۳. یک شمعک بلند از طرف جنوب، دیوار شرقی‌ـغربی یک کلیسا را پشتیبان است و گوشهٔ قائمه‌ای را تشکیل می‌دهد که بعدازظهرها سایهٔ مثلثی شکلی روی زمین می‌اندازد. نشان دهید که در زمستان مقدار کل سایه در طول روز (مساحت زمین نسبت به زمان انتگرال گیری می‌شود) متناسب است با

$$\frac{۱}{\sin\phi}\log\frac{\sin(-\delta)}{\cos\phi\sin(\phi - \delta)}$$

که در آن δ میل خورشید است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۵]

۱۴. اگر بُعد خورشید به اندازهٔ $\Delta\alpha$ افزایش یابد در حالی که طول سماوی آن به مقدار کوچک ΔL زیاد می‌شود، نشان دهید که

$$\Delta\alpha = \Delta L \cos\varepsilon \sec^{۲}\delta$$

که در آن ε زاویهٔ میل دایرةالبروج و δ میل خورشید است.
سپس تاریخهای تقریبی که در آنها قسمت موسوم به تعدیل به استوا در تعدیل زمان بیشینه است پیدا کنید.

[لندن، ۱۹۲۹]

۱۵. اگر $\odot$ طول سماوی خورشید و α بُعد آن باشد، نشان دهید که بزرگترین مقدار $(\odot - \alpha)$ هنگامی اتفاق می‌افتد که

$$\tan\alpha = (\cos\varepsilon)^{\frac{۱}{۲}} \quad \text{و} \quad \tan\odot = (\sec\varepsilon)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۶. ثابت کنید در صورت صفر بودن خروج از مرکز مدار زمین، تعدیل زمان زیجی برحسب دقیقه به صورت زیر است

$$\frac{۷۲۰}{\pi}\tan^{-۱}\frac{(۱-\cos\varepsilon)\tan\odot}{۱+\cos\varepsilon\tan^{۲}\odot}$$

که در آن ε زاویهٔ میل دایرةالبروج و $\odot$ طول سماوی خورشید است.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۱۲]

۱۷. نشان دهید، آن قسمت از تعدیل زمان که ناشی از خروج از مرکز مداری است هنگامی دارای مقدار ماناست که بی‌هنجاری واقعی خورشید برابر

$$\cos^{-۱}\left[\frac{(۱-e^{۲})^{\frac{۳}{۴}}-۱}{e}\right]$$

باشد و نیز آن قسمت از تعدیل زمان که ناشی از زاویهٔ میل دایرةالبروج است در صورتی دارای مقدار ماناست که طول سماوی خورشید به صورت زیر باشد

$$\tan^{-۱}\{(\sec\varepsilon)^{\frac{۱}{۲}}\}$$

۱۸. نشان دهید که هرگاه تعدیل زمان بیشینه یا کمینه باشد طول سماوی خورشید $\odot$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$(۱-e^{۲})^{\frac{۳}{۲}}(\cos^{۲}\odot+\cos^{۲}\varepsilon\sin^{۲}\odot)=\cos\varepsilon\{۱+e\cos(\odot-\varpi)\}^{۲}$$

که در آن ϖ طول حضیض خورشید است.

۱۹. نشان دهید که در عرض جغرافیایی °۴۵ اختلاف بین بازهٔ زمانی از طلوع خورشید تا ظهر ظاهری و از ظهر ظاهری تا غروب خورشید برابر است با

$$\frac{D}{۳۶۵\frac{۱}{۴}}\tan\delta\sec\delta(\sec ۲\delta)^{\frac{۱}{۲}}\cot\left(\frac{۳۶۰^{\circ}T}{۳۶۵\frac{۱}{۴}}\right)$$

که در آن D طول روز، δ میل خورشید، و T تعداد روزها از اعتدال بهاری تا زمان مورد نظر است و مدار زمین دایره فرض شده است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۲۰. با فرض اینکه نیم قطر زاویه‌ای خورشید در فاصلهٔ متوسط ″۹۶۱ است نشان دهید که زمان لازم t برای عبور این نیم قطر از دایرهٔ نصف‌النهار برحسب ثانیهٔ نجومی چنین بیان می‌شود

$$\frac{۹۶۱}{r\cos\delta} = ۱۵\left(۱ - \frac{\cos\varepsilon}{r^{۲}(\tau+۱)\cos^{۲}\delta}\right)t$$

که در آن τ طول سال برحسب روز متوسط خورشیدی و r فاصلهٔ خورشید برحسب واحد نجومی است.

[آزمون کالج]

۲۱. کشتیی با سرعت V مایل دریایی در ساعت روی مسیر$\theta°$ جنوب غربی در حرکت است. ثابت کنید بازهٔ زمانی I بین عبور خورشید از روی دایرهٔ نصف‌النهار کشتی و لحظه‌ای‌که ارتفاع خورشید بیشینه است از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$I = ۱۵^{s}{,}۳(V\cos\theta + \Delta\delta)(\tan\phi - \tan\delta)/\left(۱ - \frac{V\sin\theta\sec\phi}{۹۰۰}\right)^{۲}$$

که در آن ϕ عرض جغرافیایی کشتی در ظهر ظاهری و $\Delta\delta$ تغییر شمالی میل خورشید (به دقیقهٔ قوسی) بر ساعت در ظهر ظاهری است.

[لندن، ۱۹۲۶]

۲۲. با داده‌های

روز متوسط خورشیدی ۳۶۵٫۲۴۲۲ = سال اعتدالی
روز متوسط خورشیدی ۳۶۵٫۲۵۶۴ = سال نجومی
روز متوسط خورشیدی ۳۶۵٫۲۵۹۶ = سال بی‌هنجار

مقدار و علامت جبری حرکت تقدیمی سالیانه و حرکت حضیض را تعیین کنید.

۲۳. دایرهٔ نصف‌النهار زیجی را تعریف کنید و نشان دهید که می‌توان تعریفهای سازگاری برای زاویهٔ ساعتی زیجی یک ستاره، طول جغرافیایی زیجی یک محل، و زمان نجومی ارائه داد. نشان دهید که جدولهایی را که در زیج نجومی، زمان متوسط خورشیدی و زمان نجومی میانگین را به هم مربوط می‌کنند می‌توان بدون تغییر برای ارتباط دادن زمان زیجی و زمان نجومی (میانگین) زیجی به کار برد.

ثابت کنید که برای هر جسم سماوی X

$$\mathrm{EHAX} = \mathrm{GHAX} + ۱{,}۰۰۲۷\Delta T$$

که در آن ΔT، طبق معمول، به صورت تفاوت بین زمان زیجی و جهانی تعریف می‌شود.

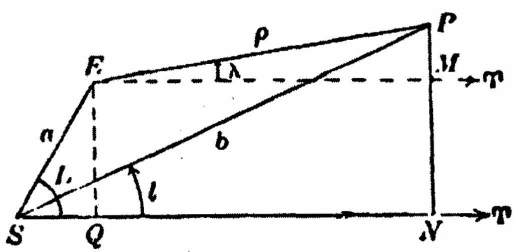
۲۴. ثابت کنید که بُعد خورشید میانگین پنداری $۰{,}۰۰۲۷\Delta T$ بیشتر از بُعد خورشید میانگین است.

۷

پدیده‌های سیاره‌ای و مختصات خورشیدنگاشتی

۹۵. حرکت زمین‌مرکزی یک سیاره

اکنون فرض می‌کنیم که مدارهای زمین و سیارهٔ P دایره‌ای در صفحهٔ دایرةالبروج باشند، و E و P مکان زمین و سیاره را در یک لحظهٔ معین در شکل ۵۹ نشان دهند. صفحهٔ کتاب نمایانگر صفحهٔ دایرةالبروج است. فرض می‌کنیم $S\Upsilon$ امتداد اعتدال بهاری را از خورشید S و $E\Upsilon$ امتداد آن را از زمین E نشان دهد. از این‌رو زاویه‌های $ES\Upsilon$ و $PS\Upsilon$ به ترتیب طولهای خورشیدمرکزی زمین و سیاره (که با L و l نشان داده می‌شوند) و $P\hat{E}\Upsilon$ طول زمین‌مرکزی سیاره (که با λ نشان داده می‌شود) است. فرض کنید a و b شعاع مدارها باشند به طوری که $SE = a$ و $SP = b$؛



شکل۵۹

همچنین فرض کنید فاصلهٔ زمین‌مرکزی سیاره EP با ρ نشان داده شود. هدف ما این است که تغییرات طول زمین مرکزی λ را برحسب طولهای خورشیدمرکزی L و l بیان کنیم. عمودهای PMN و EQ را بر $S\Upsilon$ رسم کنید آنگاه داریم

$$\rho \sin\lambda = b\sin l - a\sin L \qquad (۱)$$

$$\rho \cos\lambda = b\cos l - a\cos L \qquad (۲)$$

در این معادلات ρ، λ، l، و L با زمان تغییر می‌کنند. با دیفرانسیل‌گیری، نتیجه می‌شود

$$\rho\cos\lambda\frac{d\lambda}{dt} + \sin\lambda\frac{d\rho}{dt} = b\cos l\frac{dl}{dt} - a\cos L\frac{dL}{dt} \qquad (۳)$$

$$\rho\sin\lambda\frac{d\lambda}{dt} - \cos\lambda\frac{d\rho}{dt} = b\sin l\frac{dl}{dt} - a\sin L\frac{dL}{dt} \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۳) را در $\rho\cos\lambda$ و رابطهٔ (۴) را در $\rho\sin\lambda$ ضرب و سپس جمع می‌کنیم؛ خواهیم داشت

$$\rho^{2}\frac{d\lambda}{dt} = b\rho\cos(l-\lambda)\frac{dl}{dt} - a\rho\cos(L-\lambda)\frac{dL}{dt} \qquad (۵)$$

رابطهٔ (۱) را در $\sin l$ و (۲) را $\cos l$ ضرب و سپس جمع می‌کنیم آنگاه خواهیم داشت

$$\rho\cos(l-\lambda) = b - a\cos(L-l) \qquad (۶)$$

رابطهٔ (۱) را در $\sin L$ و رابطهٔ (۲) را در $\cos L$ ضرب و سپس جمع می‌کنیم در آن صورت

$$\rho\cos(L-\lambda) = b\cos(L-l) - a \qquad (۷)$$

با به‌کار بردن روابط (۶) و (۷)، از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌گیریم

$$\rho^{2}\frac{d\lambda}{dt} = \{b^{2} - ab\cos(L-l)\}\frac{dl}{dt} + \{a^{2} - ab\cos(L-l)\}\frac{dL}{dt} \qquad (۸)$$

اکنون از آنجا که مدار سیاره دایره‌ای فرض می‌شود dl/dt حرکت زاویه‌ای متوسط n است که طبق رابطهٔ زیر به شعاع b بستگی دارد

$$n^{2}b^{3} = G(M+m)$$

که در آن M و m جرمهای خورشید و سیاره‌اند و G ثابت گرانشی است. در این مسئله می‌توانیم از m در مقایسه با M چشم بپوشیم و با نوشتن $GM = \mu$، خواهیم داشت

$$n \equiv \frac{dl}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}} \tag{۹}$$

همین طور

$$\frac{dL}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}} \tag{۱۰}$$

مقادیر dl/dt و dL/dt را در رابطهٔ (۸) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}} \{(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) - (ab^{-\frac{1}{2}} + ba^{-\frac{1}{2}}) \cos(L-l)\} \tag{۱۱}$$

همچنین از مثلث PES، داریم

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(L-l) \tag{۱۲}$$

بدین ترتیب مقدار $d\lambda/dt$ که از رابطهٔ(۱۱) به دست می‌آید می‌تواند کلاً برحسب L و l بیان شود.
فرمول (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}} (ab^{-\frac{1}{2}} + ba^{-\frac{1}{2}}) \left\{ \frac{(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}} - \cos(L-l) \right\} \tag{۱۳}$$

حال اگر $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} < b + a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$باشد، یعنی اگر $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2 > 0$ باشد، که آشکارا همواره درست است، آنگاه $(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ کمتر از $(b^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}})$ خواهد بود. از این‌رو می‌توان یک زاویهٔ α بین 0° و 90° چنان تعریف کرد که

$$\cos\alpha = \frac{(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}) a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}} \tag{۱۴}$$

زاویهٔ α را می‌توان از مقادیر معلوم a و b محاسبه کرد. بنابراین از (۱۳) داریم

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = A[\cos\alpha - \cos(L-l)] \tag{۱۵}$$

که در آن A به طور آشکار کمیتی مثبت است. از رابطهٔ (۱۵) روشن است که $d\lambda/dt$، بسته به مقادیری که $(L-l)$ به خود می‌گیرد، می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشد.
هنگامی که $d\lambda/dt$ مثبت است، یعنی آنگاه که طول زمین‌مرکزی سیاره در حال افزایش است، گفته می‌شود حرکت زمین‌مرکزی مستقیم است. زمانی که $d\lambda/dt$ منفی است، یعنی هنگامی که

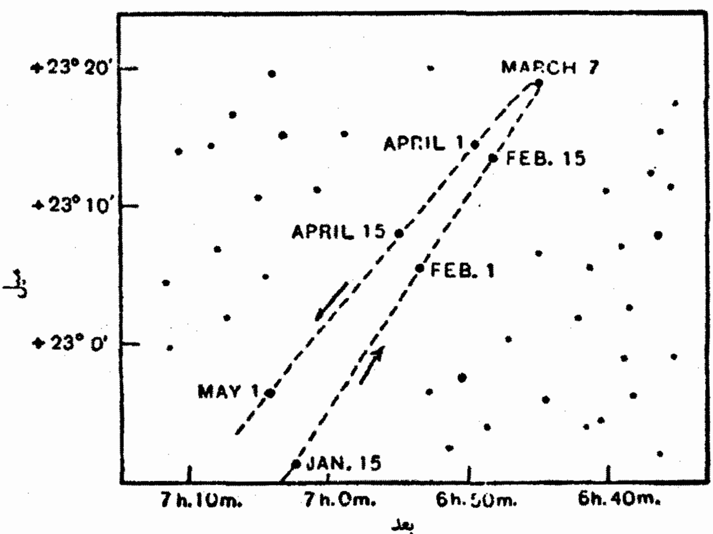
طول زمین‌مرکزی در حال کاهش است، گفته می‌شود حرکت زمین‌مرکزی رجوعی است. هنگامی که $d\lambda/dt = ۰$ است گفته می‌شود که سیاره در حال اقامت است.

برای نقطهٔ اقامت، از رابطهٔ (۱۵) نتیجهٔ $\cos(L-l) = \cos\alpha$ به دست می‌آید که از آن $L-l$ برابر α یا $۳۶۰° - \alpha$ می‌شود. از این رو هنگامی که $(L-l)$ درون گسترهٔ $\alpha \rightarrow ۰° \rightarrow (۳۶۰° - \alpha)$ است، $\cos(L-l) > \cos\alpha$ و بنابراین حرکت زمین‌مرکزی رجوعی است. هنگامی که $(L-l)$ خارج از گسترهٔ مزبور است، حرکت زمین‌مرکزی مستقیم است

فاصلهٔ زمانی که در طی آن طول‌زمین‌مرکزی سیاره از ۰° به ۳۶۰° افزایش می‌یابد دورهٔ هلالی است (صفحهٔ ۱۵۳) و آن را برحسب روز با S نشان می‌دهیم. بدین ترتیب در طی هر دورهٔ هلالی، حرکت زمین‌مرکزی به مدت $\alpha S/۱۸۰$ روز رجوعی و به مدت $S(۱۸۰ - \alpha/۱۸۰)$ روز مستقیم است، که در آن α برحسب درجه بیان می‌شود.

در موردمشتری $b = ۵٫۲۰a$، و از رابطهٔ (۱۴) به سادگی معلوم می‌شود که $\alpha = ۵۴\frac{۱}{۲}°$. چون دورهٔ هلالی مشتری ۳۹۹ روز است، حرکت این سیاره به مدت ۱۲۱ روز رجوعی و ۲۷۸ روز مستقیم است.

حرکت زمین‌مرکزی مشتری نسبت به زمینهٔ ستاره‌ها، از ۲۵ دیماه ۱۳۰۹ تا ۲۵ اردیبهشت ۱۳۱۰ در شکل ۶۰ نشان داده شده است. بین ۲۵ دیماه و ۱۶ اسفندماه، حرکت آن رجوعی است و بین این دو تاریخ بُعد سیاره در حال کاهش است. در ۱۶ اسفندماه سیاره در حال اقامت است و پس از آن حرکت سیاره مستقیم و بُعد آن زیاد می‌شود. جدا بودن این دو بخش از مسیر



شکل ۶۰

ناشی از اثر زاویهٔ میل سیاره نسبت به دایرةالبروج است. اثر زاویهٔ میل در تعیین نقاط اقامت بعداً در بخش ۹۷ مورد بحث قرار می‌گیرد.

۹۶. فاصلهٔ خورشیدمرکزی یک سیاره به هنگام اقامت برحسب فاصلهٔ زاویه‌ای آن

اکنون فرض می‌کنیم که P در شکل ۵۹ مکان سیاره در یک نقطهٔ اقامت باشد، به طوری که $E\hat{S}P = \alpha$ به وسیلهٔ رابطهٔ (۱۴) تعریف شود. فرض کنیم E نمایانگر زاویهٔ SEP باشد که به فاصلهٔ زاویه‌ای سیاره از خورشید، از دیدگاه زمین موسوم است. فرض خواهیم کرد که بُعد و میل سیاره در نقطهٔ اقامت رصد شوند؛ در این صورت با یافتن مختصات خورشید از زیج، محاسبهٔ E می‌تواند به راحتی انجام پذیرد.

از مثلث ESP، داریم

$$a \sin E = b \sin(E + \alpha)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\tan E = \frac{b \sin \alpha}{a - b \cos \alpha} \qquad (۱۶)$$

حالتی را که در آن b بزرگتر از a است بررسی می‌کنیم.

بنا به تعریف $۰ < \alpha < ۹۰°$، از رابطهٔ (۱۴) داریم

$$\sin \alpha = +\frac{(b-a)(b+a)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}}$$

از این‌رو رابطهٔ (۱۶)، پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید

$$\tan E = -\frac{b}{(ab + a^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (۱۷)$$

از این رابطه روشن است که در حالت مورد نظر مقدار E بین ۹۰° و ۱۸۰° قرار می‌گیرد.

چون a فاصلهٔ خورشیدمرکزی زمین است و E معلوم فرض می‌شود، فرمول اخیر محاسبهٔ مقدار b یعنی فاصلهٔ خورشیدمرکزی سیاره را امکانپذیر می‌سازد. البته، باید به خاطر داشته باشیم که در به دست آوردن رابطهٔ (۱۷)، از خروج‌ازمرکزهای مداری و زاویهٔ میل صفحهٔ مدار سیاره نسبت به دایرةالبرج چشمپوشی شده و در نتیجه، در حالت کلی، می‌توان انتظار داشت که این فرمول تنها مقدار تقریبی فاصلهٔ خورشیدمرکزی سیاره را به دست دهد. سیارک پالاس اندکی بعد از کشفش در حال اقامت بود و فاصلهٔ خورشیدمرکزی تقریبی آن نخستین بار به فرض دایره‌ای بودن مدارش به وسیلهٔ رابطهٔ (۱۷) به دست آمد.

وقتی b کوچکتر از a است روش مشابه همین است.

۹۷. نقاط اقامت با در نظر گرفتن زاویهٔ میل

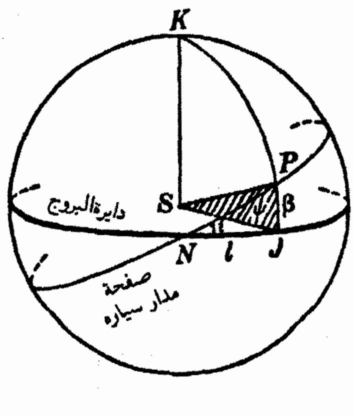
در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن یک سیاره که صفحهٔ مدار آن نسبت به صفحهٔ دایرةالبروج زاویهٔ i می‌سازد، در طول سماوی در حال اقامت باشد. فرض خواهیم کرد که مدارهای زمین و سیاره دایره‌ای و شعاعهای آنها به ترتیب a و b باشند.

فرض می‌کنیم NP در شکل ۶۱ معرف صفحهٔ مدار سیاره به دور خورشید و NJ معرف صفحهٔ دایرةالبروج باشد؛ زاویهٔ PNJ برابر i است. از نقطهٔ K (قطب دایرةالبروج) یک دایرهٔ عظیمه KPJ رسم می‌کنیم. NP را با ψ، NJ را با l، و JP را با β نشان می‌دهیم. تصویر بردار شعاعی سیاره، b، بر صفحهٔ دایرةالبروج $b\cos\beta$ است که با B نشان می‌دهیم. از مثلث PJN (که در آن $P\hat{J}N = ۹۰^\circ$)، داریم

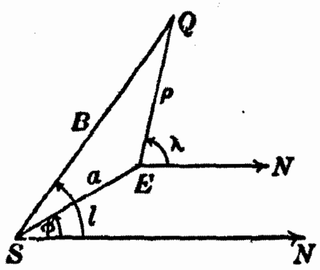
$$\sin\psi\cos i = \cos\beta\sin l \tag{۱۸}$$

$$\cos\psi = \cos\beta\cos l \tag{۱۹}$$

اینک شکل ۶۲ که در آن SQ تصویر بردار شعاعی سیاره بر صفحهٔ دایرةالبروج است را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم SN جهت یک گره و ϕ فاصلهٔ زاویه‌ای زمین E ازگره را نشان می‌دهد. EQ را با ρ و $N\hat{E}Q$ را با λ نشان می‌دهیم (EN جهت زمین‌مرکزی گره را معین



شکل۶۱



شکل۶۲

می‌کند). همچنین داریم $N\hat{S}Q = l$ و $SQ = B$. مطابق بخش ۹۵ داریم

$$\rho \sin\lambda = B\sin l - a\sin\phi$$
$$\rho\cos\lambda = B\cos l - a\cos\phi$$

چون $B = b\cos\beta$، از این‌رو، با استفاده از رابطه‌های (۱۸) و (۱۹) داریم

$$\left.\begin{aligned}\rho\sin\lambda &= b\cos i\sin\psi - a\sin\phi\\ \rho\cos\lambda &= b\cos\psi - a\cos\phi\end{aligned}\right\} \qquad (۲۰)$$

و با دیفرانسیل‌گیری

$$\rho\cos\lambda\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\sin\lambda = b\cos i\cos\psi\frac{d\psi}{dt} - a\cos\phi\frac{d\phi}{dt}$$
$$\rho\sin\lambda\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\rho}{dt}\cos\lambda = b\sin\psi\frac{d\psi}{dt} - a\sin\phi\frac{d\phi}{dt}$$

اگر این معادلات را به ترتیب در $\rho\cos\lambda$ و $\rho\sin\lambda$ ضرب کرده و آنها را جمع کنیم با به کار بردن رابطه (۲۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\rho^2\frac{d\lambda}{dt} &= \left(b\cos i\cos\psi\frac{d\psi}{dt} - a\cos\phi\frac{d\phi}{dt}\right)(b\cos\psi - a\cos\phi)\\ &\quad + \left(b\sin\psi\frac{d\psi}{dt} - a\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\right)(b\cos i\sin\psi - a\sin\phi)\\ &= b^2\cos i\frac{d\psi}{dt} + a^2\frac{d\phi}{dt} - ab\frac{d\psi}{dt}[\cos\psi\cos\phi\cos i + \sin\psi\sin\phi]\\ &\quad - ab\frac{d\phi}{dt}[\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi\cos i]\end{aligned}$$

اگر سیاره در طول سماوی در حال اقامت باشد باید داشته باشیم $d\lambda/dt = 0$. همچنین با استفاده از قانون کپلر داریم

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}} \text{ و } \frac{d\phi}{dt} = \mu^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$$

بدین ترتیب برای نقاط اقامت داریم

$$\begin{aligned}b^{\frac{1}{2}}\cos i + a^{\frac{1}{2}} &= ab^{-\frac{3}{2}}[\cos\psi\cos\phi\cos i + \sin\psi\sin\phi]\\ &\quad + a^{-\frac{3}{2}}b[\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi\cos i]\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

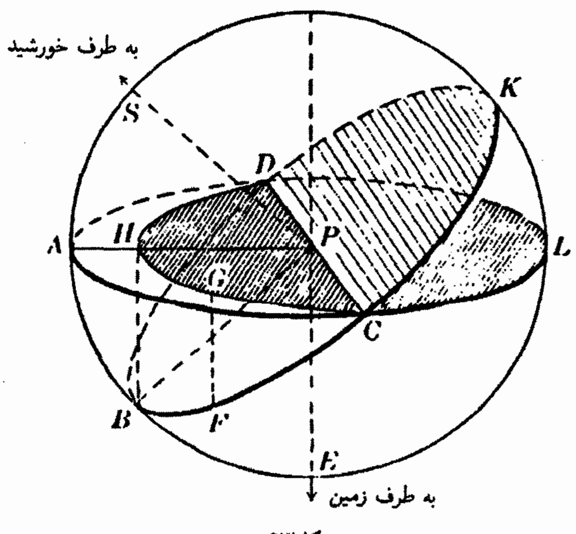
با قرار دادن $\cos i = \cos^{۲} i/۲ - \sin^{۲} i/۲$ و پس از ضرب همهٔ جمله‌ها در $a^{\frac{۱}{۲}} b^{\frac{۱}{۲}}$ سرانجام به نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$a^{\frac{۱}{۲}} b^{\frac{۱}{۲}} (a^{\frac{۱}{۲}} + b^{\frac{۱}{۲}} \cos i) = (a^{\frac{۳}{۲}} + b^{\frac{۳}{۲}}) \cos(\psi - \phi) \cos^{۲} \frac{i}{۲} - (a^{\frac{۳}{۲}} - b^{\frac{۳}{۲}}) \cos(\psi + \phi) \sin^{۲} \frac{i}{۲} \qquad (۲۲)$$

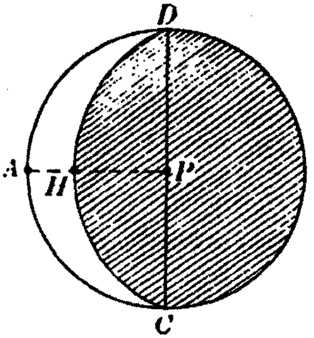
این رابطه‌ای است که در پی آن بودیم. باید به یاد داشته باشیم که ψ و ϕ فاصله‌های زاویه‌ای سیاره و زمین را از خط گره‌ها نشان می‌دهند که هر یک در صفحهٔ مربوط به مدار خود اندازه‌گیری می‌شوند.

۹۸. اهلهٔ سیاره‌ها و ماه

فرض کنیم که اجرام آسمانی مورد بررسی کروی‌اند. در شکل ۶۳، فرض می‌کنیم P مرکز یک سیاره(یا ماه) است و خطهای راستی که P را به زمین و خورشید وصل می‌کنند سطح سیاره را در E و S قطع کنند. نیمکره که توسط خورشید روشن می‌شود با دایرهٔ عظیمهٔ $BCKD$، که S قطب آن است، محدود می‌شود. نیمکرهٔ روبه‌روی زمین به‌وسیلهٔ دایرهٔ عظیمهٔ $ACLD$ که E قطب آن است، محدود می‌شود. از این‌رو تنها بخشی از سیاره که از زمین دیده می‌شود سطح متشکل از مثلثهای کروی ABC و ABD است. صفحهٔ $ACLD$ از دیدگاه زمین صفحهٔ قرص سیاره است. کمان دایرهٔ عظیمهٔ CAD حد مرئی سیاره است. هر نقطه‌ای مانند F واقع بر BC



شکل۶۳



شکل۶۴

در نقطهٔ G روی فرص، همانند نقطهٔ F دیده خواهد شد به طوری که FG موازی خط دید EP است. بدین ترتیب تصویر همهٔ نقاط نیمدایرهٔ CBD روی منحنی CHD در صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ $ACLD$ واقع است؛ این منحنی بیضیی با محور بزرگ CD و نیم‌محور کوچک HP است، که در آن H تصویر B روی صفحهٔ قرص است. سیاره به گونه‌ای که در شکل ۶۴ نشان داده شده است، دیده می‌شود. مساحت سطح مرئی قرص سیاره بین نیمدایرهٔ CAD و نیم‌بیضی CHD محصور است. اگر شعاع سیاره (یا ماه) r باشد مساحت این سطح مرئی A چنین است

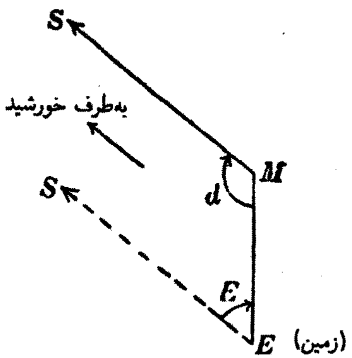
$$A = \frac{۱}{۲}\pi r^{۲} - \frac{۱}{۲}\pi r \times PH$$

زاویهٔ SPE را با d نشان می‌دهیم، در این صورت d فاصلهٔ زاویه‌ای زمین از خورشید از دیدگاه P است. حال $PH = PB\cos A\hat{P}B$ و چون $S\hat{P}B = ۹۰^\circ$، نتیجه می‌شود که زاویهٔ APB برابر $۱۸۰^\circ - d$ است. از این‌رو داریم

$$A = \frac{\pi r^{۲}}{۲}(۱ + \cos d) \qquad (۲۳)$$

هلال کسری از قطر عمود بر خط واصل بین دو نوک هلال است که در بخش مرئی قرص قرار دارد؛ بدین ترتیب هلال $AH/۲r$ یا $(۱ + \cos d)/۲$ است. از رابطهٔ(۲۳) دیده می‌شود که هلال با کسری از مساحت قرص که روشن شده است نیز نمایش داده می‌شود.

اینک اهلهٔ ماه را به طور مفصلتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۶۵، فرض می‌کنیم که M کرهٔ ماه و E کرهٔ زمین را نشان دهد. MS جهت خورشید از M و $S\hat{M}E$ زاویهٔ d است. در این صورت هلال ماه از رابطهٔ(۲۳) به دست می‌آید. چون فاصلهٔ ماه از زمین در مقایسه با



شکل۶۵

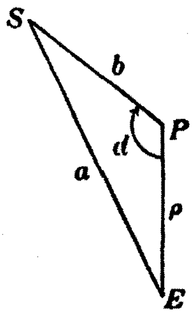
فاصلهٔ خورشید از زمین خیلی کوچک است، در شکل ۶۵ می‌توانیم بدون اینکه از دقت به طور جدی کاسته شود فرض کنیم ES موازی MS است. از این‌رو اگر $S\hat{E}M$ را با E نمایش دهیم، $E = ۱۸۰° - d$ یا $d = ۱۸۰° - E$ است. زاویهٔ E فاصلهٔ زاویه‌ای ماه از خورشید از دیدگاه زمین است.

در ماه‌نو $E = ۰$، زیرا در این صورت ماه مستقیماً، یا تقریباً مستقیم، بین زمین و خورشید قرار دارد؛ در نتیجه $d = ۱۸۰°$ و هلال برابر صفر است. در تربیع، فاصلهٔ زاویه‌ای ماه از خورشید ۹۰° و $d = ۹۰°$، پس هلال برابر ۱/۲ است؛ بنابراین ماه نصف سطح روشن خود را به زمین نشان می‌دهد. هنگامی که ماه در مقابله است فاصلهٔ زاویه‌ای ماه از خورشید برابر ۱۸۰° خواهد بود به طوری که $d = ۰$؛ از این‌رو هلال برابر یک است، یعنی قرص کامل ماه مرئی است (بدر). پس از بدر، اهله به ترتیب معکوس تا ایجاد ماه نو بعدی تکرار می‌شوند. هنگامی که بیش از نصف قرص مرئی باشد، ماه را کوژ می‌نامند.

۹۹. درخشندگی سیاره‌ها

مقدار نوری که از یک سیاره به زمین می‌رسد (الف) به‌هلال سیاره، و (ب) به‌عکس مجذور فاصلهٔ زمین‌مرکزی آن، ρ، بستگی دارد. بدین ترتیب اگر B نشانگر درخشندگی ظاهری باشد می‌توانیم بنویسیم

$$B = \frac{c(1 + \cos d)}{\rho^2} \qquad (۲۴)$$



شکل ۶۶

که در آن c مقداری ثابت است و به روشنایی سطحی و توان و بازتاب بستگی دارد. اما از شکل ۶۶ داریم

$$\cos d = \frac{\rho^۲ + b^۲ - a^۲}{۲\rho b} \qquad (۲۵)$$

که در آن a و b فواصل خورشیدمرکزی زمین و سیاره‌اند. از این‌رو

$$B = c[\rho^۲ + ۲\rho b + b^۲ - a^۲]/۲b\rho^۳ \qquad (۲۶)$$

هنگامی که B بیشینه است فرض می‌کنیم که مدارها دایره‌ای‌اند، باید داشته باشیم $dB/d\rho = ۰$ یا $\rho^۲ + ۴b\rho + ۳(b^۲ - a^۲) = ۰$، که از آنجا داریم

$$\rho = (b^۲ + ۳a^۲)^{\frac{۱}{۲}} - ۲b \qquad (۲۷)$$

در مورد سیارهٔ زهره داریم $b = ۰٫۷۲۳a$ و به ازای درخشندگی بیشینه رابطهٔ (۲۷) مقدار $\rho = ۰٫۴۳۰$ را به دست می‌دهد. مقدار متناظر برای d، از رابطه (۲۵) برابر $۱۱۷°٫۹$ است. بنابراین فاصلهٔ زاویه‌ای از خورشید، یعنی زاویهٔ SEP، برابر $۳۹°٫۷$ می‌شود.

در مورد سیارهٔ عطارد که خروج از مرکز مداری آن بزرگ (تقریباً ۰٫۲) است باید گفت، b در رابطهٔ (۲۶) نشانگر شعاع حامل مدار است. بدین ترتیب درخشندگی سیارهٔ عطارد، هم به مکان سیاره در مدارش و هم به فاصلهٔ زمین‌مرکزی آن بستگی دارد.

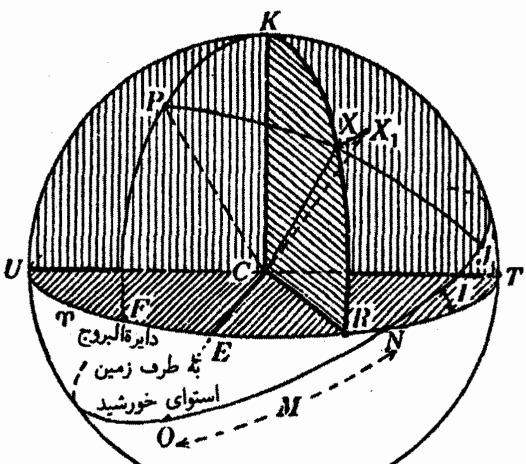
۱۰۰. مختصات خورشیدنگاشتی

در مطالعهٔ لکها و پدیده‌های خورشیدی وابسته به آنها، دانستن مختصات آنها روی سطح خورشید حائز اهمیت است. این مختصات تقریباً به همان روشی که نقاط روی سطح زمین برحسب طول

و عرض جغرافیایی بیان می‌شوند، تعریف می‌شوند. فرض کنید کره‌ای که در شکل ۶۷ نشان داده شده نشانگر کرهٔ خورشید باشد. دایرهٔ عظیمهٔ ΥEN به قطب K، محل تلاقی صفحهٔ دایرةالبروج با این کره است. خط راستی که از مرکز خورشید C در جهت اعتدال بهاری رسم می‌شود کره را در Υ قطع می‌کند. چون زمین در دایرةالبروج است خط راست واصل بین C و زمین سطح خورشید را در E قطع می‌کند.صفحهٔ قرص خورشید بر خط EC (خط دید) عمود است. صفحهٔ هاشورخورده را که با شعاعهای CK و CT مشخص می‌شوند صفحهٔ قرص در نظر می‌گیریم (E قطب دایرهٔ عظیمه UKT است). نقطهٔ دلخواه X واقع بر سطح خورشید روی قرص در نقطهٔ $X_۱$ دیده می‌شود، به طوری که $XX_۱$ عمود بر صفحهٔ قرص و بنابراین موازی EC است. مکان $X_۱$ را نسبت به محورهای راستگوشه در صفحهٔ قرص، می‌توان از رصدهای بصری یا تصویری تعیین کرد. مسئله به دست آوردن طول و عرض خورشیدی یا خورشیدنگاشتی X از مکان رصد شدهٔ $X_۱$ است.

خورشید به گرد محوری که انتهای شمالی آن در شکل ۶۷نقطهٔ P است می‌چرخد و صفحهٔ عمود براین محور سطح خورشید را در دایرهٔ عظیمهٔ ONJ موسوم به استوای خورشید قطع می‌کند. معمولاً زاویهٔ میل JNT، استوای خورشید نسبت به دایرةالبروج با I نشان داده می‌شود. نقطهٔ N گرهٔ صعودی استوای خورشید روی دایرةالبروج است و طول سماوی آن ΥN، که در امتداد دایرةالبروج و از Υ اندازه‌گیری می‌شود، با Ω نمایش داده می‌شود. معلوم می‌شود که مقدار Ω از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Omega = ۷۳^\circ ۴۰' + ۵۰''{,}۲۵(t - ۱۸۵۰{,}۰)$$



شکل۶۷

که در آن t برحسب سال بیان می‌شود به طوری که مقدار Ω برای ۱۹۷۵٫۰ برابر ۷۵°۲۴٫۷′ است. مختصات خورشید نگاشتی نقطه‌ای مانند X روی سطح خورشید، نسبت به استوای خورشید تعریف می‌شود. از آنجا که خورشید جسمی گازی است، نقطه‌ای قابل تشخیص روی استوای خورشید که طول نقاط نسبت به آن اندازه‌گیری شود وجود ندارد. یک نقطهٔ مرجع O به‌ترتیب زیر انتخاب می‌شود. نقطهٔ خاصی روی سطح خورشید در ظهر متوسط گرینویچ در روز اول ژانویه ۱۸۵۴ به عنوان گره N تعریف می‌شود. این نقطه به سبب چرخش خورشید به دور استوا جابه‌جا می‌شود و در هر لحظهٔ بعد در نقطهٔ O فرض می‌شود؛ به فرض اینکه دورهٔ چرخش استوایی ۲۵٫۳۸ روز باشد، مکان O نسبت به N می‌تواند برای لحظهٔ مورد نظر محاسبه شود، به‌ویژه کمان ON را که با M نشان می‌دهیم، می‌توانیم پیدا کنیم. این چرخش در جهت $\overrightarrow{ON}$ صورت می‌گیرد. هرگاه در شکل ۶۷، PXJ نصف‌النهار خورشیدی گذرنده بر X باشد، آنگاه OJ طول خورشیدنگاشتی $X(L)$ و کمان JX عرض خورشیدنگاشتی $X(B)$ خواهد بود.

۱۰۱. مختصات خورشیدنگاشتی مرکز قرص

با مراجعه به شکل ۶۷، می‌بینیم که نقطهٔ E روی سطح خورشید از دیدگاه ما مرکز قرص است. مختصات خورشید نگاشتی E را $L_\circ$ و $B_\circ$ می‌گیریم. در این صورت در مثلث کروی PEN داریم

$$PN = ۹۰^\circ \text{ ، } P\hat{N}E = ۹۰^\circ - I \text{ ، } PE = ۹۰^\circ - B_\circ \text{ ، و } E\hat{P}N = M - L_\circ$$

هنوز کمان EN را برحسب کمیات معلوم لازم داریم. حال ΥE زاویهٔ بین جهت اعتدال بهاری و جهت زمین، از دیدگاه مرکز خورشید C است به‌طوری که ΥE طول خورشیدنگاشتی زمین است. اگر $\odot$ نشانگر طول زمین‌مرکزی خورشید باشد داریم

$$\Upsilon E = \odot + ۱۸۰^\circ \tag{۲۸}$$

همچنین از آنجا که $\Upsilon N = \Omega$ می‌بینیم که

$$EN = \Omega - \odot - ۱۸۰^\circ \tag{۲۹}$$

از مثلث PEN فرمولهای زیر را با به‌کاربردن فرمولهای (د) و (الف) به طور متوالی به دست می‌آوریم

$$\tan(L_\circ - M) = \tan(\odot - \Omega)\cos I \tag{۳۰}$$

$$\sin B_\circ = \sin(\odot - \Omega)\sin I \tag{۳۱}$$

به فرض اینکه M برای لحظهٔ رصد محاسبه شده باشد مختصات خورشید نگاشتی $L_\circ$ و $B_\circ$ مرکز قرص را می‌توان با این فرمولها پیدا کرد؛ $L_\circ$ و $B_\circ$ برای هر روز سال در زیجها جدول‌بندی می‌شوند.

۱۰۲. زاویهٔ مکان محور چرخش خورشید

محورهای قائم CE، CT، و CK را در نظر می‌گیریم (شکل ۶۷)، فرض کنید KXR دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از K (قطب دایرةالبروج) می‌گذرد و دایرةالبروج را در R قطع می‌کند. اگر شعاع کره را واحد بگیریم، مختصات X نسبت به این محورها چنین‌اند $(\cos ER \cos RX, \sin ER \cos RX, \sin RX)$. اینک X_1 تصویر X روی صفحهٔ KCT یا صفحهٔ قرص است و بنابراین مختصات X_1 نسبت به محورهای CT و CK برابر $(\sin ER \cos RX, \sin RX)$ یا چون $KR = ۹۰^\circ$، $(\sin ER \sin KX, \cos KX)$ است.

اگر زاویهٔ بین CX_1 و CK را با ψ نشان دهیم آنگاه داریم

$$\tan\psi = \sin ER \tan KX \qquad (۳۲)$$

اکنون فرض کنید X نشانگر نقطهٔ تقاطع شعاع موازی محور چرخش زمین با سطح خورشید باشد. تصویر CX_1 روی قرص، جهت شمال را معین می‌کند که در عمل زاویهٔ مکان هر نقطه‌ای روی قرص نسبت به آن اندازه‌گیری می‌شود. چون KX زاویهٔ بین قطب دایرةالبروج و قطب استوای زمین است، از این‌رو $KX = \varepsilon$ است، که در آن ε زاویهٔ میل دایرةالبروج است. همچنین اعتدال بهاری ۹۰° از هر دو نقطهٔ K و X فاصله دارد. بنابراین، این نقطه ۹۰° از دایرهٔ عظیمه KXR فاصله دارد و $\Upsilon R = ۹۰^\circ$ است. اما از رابطهٔ (۲۸) داریم: $\Upsilon E = ۱۸۰^\circ + \odot$؛ بنابراین $ER = ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ + \odot)$ یا

$$ER = ۲۷۰^\circ - \odot \qquad (۳۳)$$

زاویهٔ X_1CK را با x نمایش می‌دهیم و با نوشتن x به جای ψ در رابطه (۳۲)، داریم

$$\tan x = -\cos\odot \tan\varepsilon \qquad (۳۴)$$

باز تصویر CP روی صفحهٔ KCT با CK یک زاویهٔ مثلاً y می‌سازد. از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۳۲)، داریم

$$\tan y = \sin EF \tan KP \qquad (۳۵)$$

که در آن F نقطه‌ای روی دایرةالبروج و محل تلاقی آن با دایرهٔ عظیمهٔ KP است. حال چون K قطب ΥRT و P قطب ONJ است، در نتیجه N قطب KPF است؛ از این‌رو $FN = ۹۰^\circ$ است. ولی $\Upsilon N = \Omega$ و بنابراین $\Upsilon F = \Omega - ۹۰^\circ$. همچنین، از رابطهٔ (۲۸) داریم

$$\Upsilon E = ۱۸۰^\circ + \odot$$

بنابراین

$$EF = ۱۸۰^\circ + \odot - (\Omega - ۹۰^\circ)$$

یا

$$EF = ۲۷۰° + (\odot - \Omega) \qquad (۳۶)$$

همچنین KP زاویهٔ میل I است. و بنابراین با به کار بردن رابطهٔ (۳۶) معادلهٔ (۳۵) به صورت زیر در می‌آید

$$\tan y = -\cos(\odot - \Omega)\tan I \qquad (۳۷)$$

برای آسانی فرض خواهیم کرد که با عکسی از قرص خورشید سروکار داریم. فرض کنید CN (شکل ۶۸) شعاعی در صفحهٔ قرص متناظر با شعاعی از خورشید که موازی با محور زمین است، باشد. شعاع CN را می‌توان از حرکت شبانه‌روزی خورشید در آسمان مشخص کرد. اگر تلسکوپ ساکن باشد، تصویر خورشید در امتداد یک مدار سماوی، یعنی در امتداد عمود بر CN حرکت خواهد کرد؛ از این‌رو شعاع CN را می‌توان با وسیله‌ای مناسب روی عکس ترسیم کرد.

زاویهٔ مکان هر نشانه‌ای روی قرص چون Y، از CN به طرف شرق یعنی خورشید را که می‌نگریم، به طرف چپ، اندازه‌گیری می‌شود. بدین ترتیب زاویهٔ مکان Y زاویهٔ NCY، و زاویهٔ مکان X زاویهٔ $(۳۶۰° - N\hat{C}X)$ است. حال اگر CA تصویر محور خورشید بر روی قرص باشد، $NCK = x$ و $KCA = y$ که در آن x و y از معادله‌های (۳۴) و (۳۷) به دست می‌آیند. بدین ترتیب زاویهٔ مکان، P، محور خورشید یعنی CA از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$P = x + y \qquad (۳۸)$$

بدین‌سان P را می‌توان محاسبه کرد و مقدار آن در زیجها جدول‌بندی می‌شود.

اگر χ نشانگر زاویهٔ ACX باشد (شکل ۶۸) که در آن X نشانهٔ دلخواهی روی قرص است، و θ زاویهٔ مکان X باشد، از آنجا که $NCX = ۳۶۰° - \theta$، داریم $\chi = P + ۳۶۰° - \theta$ یا

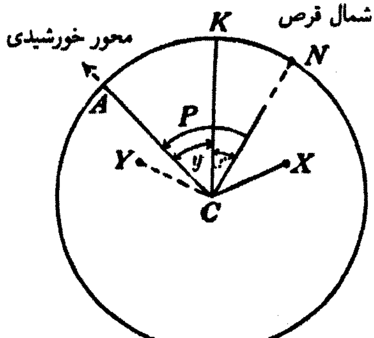
$$\chi = P - \theta \qquad (۳۹)$$

از آنجا که θ و P را می‌شود معلوم دانست، زیرا اولی به کمک عکس و دومی به کمک زیج قابل دستیابی است، از این‌رو χ را می‌توان به دست آورد.

۱۰۳. مختصات خورشیدنگاشتی لک خورشید

فرض کنید R و d به ترتیب اندازهٔ خطی شعاع خورشید و فاصلهٔ زمین از خورشید باشند. اگر نیم قطر زاویه‌ای خورشید را که برای روز رصد از زیج به دست می‌آید، با S نشان دهیم داریم $\sin S = R/d$ و چون S تقریباً $۱۶'$ است، می‌توانیم با دقت کافی بنویسیم

$$S = \frac{R}{d}\,\mathrm{cosec}\,۱' \qquad (۴۰)$$



شکل۶۸

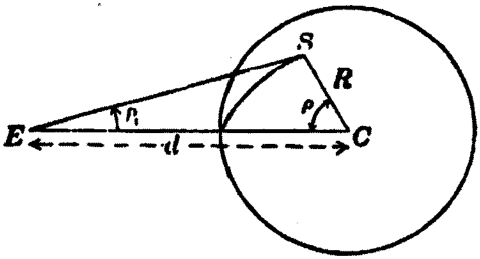
که در آن S برحسب دقیقهٔ قوسی بیان می‌شود. فرض کنید $r_\circ$ و r اندازه‌های شعاع قرص و فاصلهٔ لک X از مرکز C قرص را نشان دهند (شکل ۶۸)؛ $r_\circ$ و r را می‌توان روی عکس برحسب هر واحد مناسبی اندازه‌گیری کرد. اگر ρ_1 (به دقیقهٔ قوسی) زاویهٔ بین جهت مرکز خورشید و جهت لک از دید زمین باشد، با دقت کافی داریم

$$\frac{\rho_1}{S} = \frac{r}{r_\circ} \tag{۴۱}$$

که از آن ρ_1 تعیین می‌شود.

فرض کنید S در شکل ۶۹ مکان لک روی سطح خورشید باشد و $S\hat{C}E$ را که در آن E زمین است، با ρ نشان دهید. در این صورت $ESC = 180^\circ - (\rho + \rho_1)$ است. اما از مثلث ESC داریم

$$\sin ESC = \frac{d}{R} \sin \rho_1$$



شکل۶۹

از آنجا که $\rho_۱$ کوچک است (کمتر از $۱۶'$!) و برحسب دقیقهٔ قوسی بیان می‌شود، داریم

$$\sin(\rho + \rho_۱) = \frac{d}{R}\rho_۱ \sin ۱'$$

یا، با به‌کار بردن رابطهٔ (۴۰)

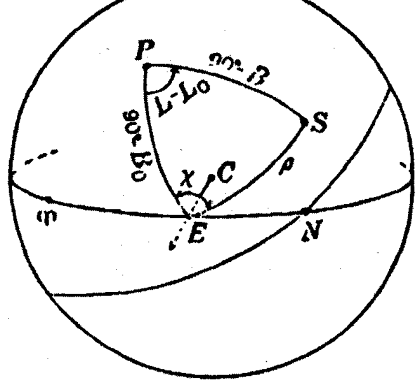
$$\sin(\rho + \rho_۱) = \frac{\rho_۱}{S} \qquad (۴۲)$$

از آنجا که $\rho_۱$ از رابطهٔ (۴۱) به دست می‌آید فرمول اخیر (۴۲) محاسبهٔ ρ را امکانپذیر می‌کند.

اینک شکل ۷۰ را که در آن S لک روی سطح خورشید، CE جهت زمین از مرکز خورشید C، و P قطب شمال محور خورشید است، در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب کمان دایرهٔ عظیمه‌ای ES زاویهٔ ρ است که از فرمول (۴۲) به دست می‌آید. طول و عرض خورشیدنگاشتی S را با L و B نشان می‌دهیم؛ $L.$ و $B.$، مختصات متناظر E هستند. در مثلث کروی PES داریم: $PS = ۹۰° - B$، $PE = ۹۰° - B.$، $ES = \rho$، و $E\hat{P}S = L - L.$ همچنین، از آنجا که نقطهٔ E به عنوان مرکز C قرص دیده می‌شود و تصویر دایره‌های عظیمهٔ EP و ES به صورت خطوط راست CA و CX در شکل ۶۸ در می‌آیند، زاویهٔ PES برابر زاویهٔ ACX یا χ است. از این‌رو، با استفاده از رابطهٔ (۳۹) داریم $P\hat{E}S = P - \theta$ که در آن θ زاویهٔ مکان لک روی قرص است. بنابراین با به‌کار بردن فرمولهای (الف) و (ب) از مثلث PES، فرمولهای زیر را در اختیار خواهیم داشت

$$\sin B = \sin B.\cos\rho + \cos B.\sin\rho\cos(P - \theta) \qquad (۴۳)$$

$$\sin(L - L.) = \sin\rho\sin(P - \theta)\sec B \qquad (۴۴)$$



شکل ۷۰

حال، چون $B.$، ρ، P، θ، و $L.$ همه معلوم فرض می‌شوند، فرمولهای (۴۳) و (۴۴) عرض و طول خورشیدنگاشتی لک را تعیین می‌کنند.

تمرینها

۱. دو سیارهٔ P_1 و P_2 در مدارهای دایره‌ای در فاصله‌های b_1 و b_2 از خورشید به دور آن می‌گردند. ثابت کنید هنگامی که آنها نسبت به یکدیگر در حال اقامت‌اند داریم

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

که در آن $\tan \theta = 2 \cot E$ و E فاصلهٔ زاویه‌ای P_2 از دیدگاه P_1 است.

۲. اگر θ زاویهٔ بین خورشید و نقطهٔ اقامت مدار یک سیاره از دیدگاه زمین، و ϕ حداکثر فاصلهٔ زاویه‌ای این سیاره باشد، ثابت کنید که

$$2 \cot \theta = \sec \frac{1}{2}\phi + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\phi$$

۳. اگر فرض شود که زمین و سیاره‌ای مدارهای دایره‌ای هم صفحه‌ای بپیمایند و تفاضل طول سماوی خورشید و این سیاره θ باشد، نشان دهید که آهنگ تغییر θ، از لحاظ عددی، چنین است

$$\frac{2\pi}{S}\left(1 - \frac{a}{\rho} \cos \theta\right)$$

که در آن S دورهٔ گردش هلالی سیاره، a شعاع مدار زمین و ρ فاصلهٔ سیاره از زمین در آن زمان است.
[آزمون کالج]

۴. اگر خط واصل بین دو سیاره هنگامی که در حالت اقامت به نظر می‌رسند تحت زاویهٔ $60°$ از خورشید دیده شوند، نشان دهید $a^2 + b^2 = 7ab$، که در آن a و b فاصله‌های دو سیاره از خورشیدند.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج

۵. اگر u و V سرعتهای دو سیاره در مدارهای دایره‌ای و هم صفحه باشند، نشان دهید که نسبت زمان حرکت مستقیم به زمان حرکت رجوعی $\theta : (180° - \theta)$ است، که در آن

$$\cos \theta = uv/(u^2 - uv + v^2)$$

[آزمون کالج

۶. اگر a و b شعاعهای مدارهای دایره‌ای هم‌صفحه زمین E و یک سیارهٔ زبرین P و u و v به ترتیب سرعتهای خطی آنها باشند، ثابت کنید مجذور سرعت P نسبت به E در یک نقطهٔ اقامت برابر است با

$$\frac{(u^۲ - v^۲)(bu - av)}{bu + av}$$

۷. هلال سیاره‌ای به فاصلهٔ متوسط a از خورشید از دید سیارهٔ دیگری با فاصلهٔ متوسط b از خورشید، E است و هلال سیارهٔ دوم V است. ثابت کنید که، اگر از زاویهٔ میل مدارها نسبت به یکدیگر و خروج از مرکز آنها چشم بپوشیم داریم

$$b^۲V(۱ - V) = a^۲E(۱ - E)$$

اگر فاصلهٔ ناهید از خورشید ۷۲ر۰ واحد نجومی باشد، پیدا کنید که چه بخشی از سطح زمین، از دیدگاه ناهید روشن به نظر می‌رسد.

۸. فاصلهٔ خورشیدمرکزی یک سیاره زیرین P، که در مداری دایره‌ای در دایرةالبروج حرکت می‌کند b واحد نجومی است؛ مدار زمین (E) نیز دایره‌ای فرض می‌شود. اگر مختصات خورشیدمرکزی P و E به ترتیب $(b\cos f\theta، b\sin f\theta)$ و $(\cos\theta ، \sin\theta)$ باشند و مبدأ اندازه‌گیری θ مقارنهٔ زیرین باشد، نشان دهید که برای یک نقطهٔ اقامت داریم

$$\cos(f - ۱)\theta = \frac{۱ + fb^۲}{b(۱ + f)}$$

۹. ثابت کنید هرگاه سیاره‌ای که مدارش بر دایرةالبروج منطبق نیست از دیدگاه زمین کاملاً در حال اقامت باشد، جهت حرکت آن و جهت حرکت زمین باید روی خط گره‌ها تلاقی کنند و تصویر جهت حرکت آن روی صفحهٔ دایرةالبروج نیز در حال اقامت است.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۱۰. ثابت کنید که اگر از زاویهٔ میل صفحهٔ مدار سیاره‌ای نسبت به دایرةالبروج چشمپوشی شود، در عرض جغرافیایی $\phi(> \varepsilon)$، عرض سماوی یک سیارهٔ زیرین در طلوع یا غروب خورشید هرگز از مقدار زیر، که در آن E بیشینهٔ فاصلهٔ زاویه‌ای است بیشتر نمی‌شود

$$\sin^{-۱}(\sin E\cos\overline{\phi - \varepsilon})$$

و ثابت کنید که این مساعدترین حالت فقط در هنگامی می‌تواند رخ دهد که فاصلهٔ زاویه‌ای بیشینه، بر یکی از اعتدالها بیفتد. اگر راصد در منطقهٔ حاره باشد این نتیجه چگونه تغییر می‌کند؟
[لندن، ۱۹۲۵]

۱۱. اگر مدار یک سیارهٔ زبرین بیضی با خروج ازمرکز e و نیم‌محور a باشد که زاویهٔ میل آن نسبت به دایرةالبروج صفر است، و مقابله در نقطهٔ حضیض رخ دهد، نشان دهید که حرکت سیاره مستقیم به نظر خواهد رسید اگر a برحسب واحد نجومی از $(e+۱)/(e-۱)$ کمتر باشد.
[نجوم‌کروی تألیف بال]

۱۲. نشان دهید که هلال یک سیارهٔ زبرین از دیدگاه زمین هنگامی حداقل است که نیمی از زمین از سیاره روشن دیده می‌شود، ولی درخشندگی ظاهری سیاره در مقابله بیشینه و در مقارنه کمینه است.

[آزمون کالج]

۱۳. اگر ناهید و زمین مدارهایی دایره‌ای در دایرةالبروج بپیمایند نشان دهید که درخشانترین حالت ناهید در فاصلهٔ زاویه‌ای θ که از معادلهٔ زیر به دست می‌آید رخ می‌دهد

$$\cos\theta = \frac{۲}{۳}\{(۳+a^۲)^{\frac{۱}{۲}} - a\}$$

که در آن a فاصلهٔ خورشیدمرکزی ناهید برحسب واحد نجومی است.

[لندن ۱۹۲۶]

۱۴. نشان دهید که «تصحیح برای روشنایی ناقص» مریخ (یعنی پهنای ظاهری هلال روشن نشده برحسب کمان) هنگامی بیشینه است که مریخ در فاصلهٔ زمین‌مرکزی $(b^۲-a^۲)/b$ باشد؛ مدارهای زمین و مریخ دایره‌هایی با شعاعهای a و b در نظر گرفته می‌شوند. نشان دهید هنگامی که قرص ماه در شب با نور زمینتاب دیده می‌شود، هلالی باریک وجود دارد که نه با نور خورشید روشن می‌شود و نه با نور زمینتاب، و پهنای این هلال از ۵ر″۰ فزونی نمی‌یابد. (اختلاف‌منظر ماه ′۵۷ و نیم قطر آن ′۱۵ است.)

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۶]

۱۵. با فرض اینکه قطر زمین و زهره قابل چشمپوشی باشند، نشان دهید که فاصلهٔ زاویه‌ای خورشیدمرکزی ناهید از زمین در آغاز یا پایان یک عبور از روی خورشید، ψ، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$b^۲r^۲\cos^۲\psi - ۲br\,R^۲\cos\psi + R^۲(b^۲+r^۲) - b^۲r^۲ = ۰$$

که در آن R شعاع خورشید، b و r فاصله‌های ناهید و زمین از مرکز خورشیدند.

[نجوم‌کروی تألیف بال]

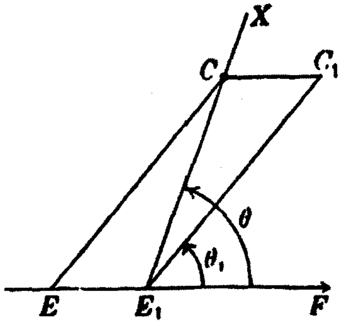
۸

ابیراهی

۱۰۴. قانون ابیراهی

پدیدهٔ ابیراهی در سال ۱۷۲۸/۱۱۰۶ در نتیجهٔ یک رشته رصدهای دایرهٔ نصف‌النهار ستارهٔ قدر دوم γ اژدها توسط برادلی، که بعدها ستاره‌شناس سلطنتی شد، کشف شد. رؤمر ستاره‌شناس دانمارکی در سال ۱۶۷۵/۱۰۵۳ ثابت کرد که نور با سرعتی محدود حرکت می‌کند و رصدهای برادلی با آگاهی از این موضوع تعبیر شد که مکان یک ستاره در آسمان می‌تواند به‌اندازه‌ای جابه‌جا شود که به نسبت سرعت مداری زمین به سرعت نور و به مکان ستارهٔ مورد بررسی بستگی دارد. سرعت متوسط مداری زمین به تقریب ۳۰ کیلومتر بر ثانیه و سرعت نور ۲۹۹۷۹۲ کیلومتر بر ثانیه است؛ در نتیجه نسبت گفته شده کوچک است اما چشم‌پوشیدنی نیست.

فرض می‌کنیم C در شکل ۷۱ نشانگر مرکز عدسی شیئی یک تلسکوپ و E چشمی آن در لحظهٔ رسیدن پرتوی از ستارهٔ X به C باشد. EF موازی جهت حرکت زمین به دور خورشید در همین لحظه است. اگر τ زمان لازم برای عبور این پرتو از تلسکوپ باشد، زمین در این بازهٔ زمانی فاصله EE_1 یا $V\tau$ را که در آن V سرعت زمین است طی می‌کند. سرعت نور را با c نشان می‌دهیم، در این صورت هنگامی که پرتو ستاره به چشمی می‌رسد، زمین در E_1 است و داریم $CE_1 = c\tau$. اگر زمین سرعتی نمی‌داشت، جهتی که تلسکوپ به آن نشانه‌روی می‌شد جهت E_1C که آن را جهت واقعی ستاره تعریف می‌کنیم بود. در واقع، به سبب حرکت زمین، تلسکوپ باید در جهت EC نشانه گرفته شود. متوازی‌الاضلاع EE_1C_1C را کامل می‌کنیم. پس



شکل۷۱

E_1C_1 موازی EC و در نتیجه در جهت ظاهری ستاره در لحظهٔ رصد است. فرض کنید θ و θ_1 به ترتیب نشانگر $C_1\hat{E}_1F$ و $C\hat{E}_1F$ باشند. در این صورت جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta - \theta_1$ را ناشی از ابیراهی می‌دانند. از شکل ۷۱ دیده می‌شود که ابیراهی، جهت واقعی ستاره را به طرف جهت حرکت زمین EF در صفحهٔ XE_1F جابه‌جا می‌کند.

در مثلث CE_1C_1 داریم

$$\frac{\sin CE_1C_1}{\sin CC_1E_1} = \frac{CC_1}{CE_1}$$

اما $CC_1 = EE_1 = V\tau$ و $CE_1 = c\tau$. از این‌رو نتیجه می‌گیریم

$$\sin(\theta - \theta_1) = \frac{V}{c}\sin\theta_1$$

حال V/c کوچک است و در نتیجه $\theta - \theta_1$ نیز مقداری کوچک است. بنابراین می‌توانیم با دقت لازم $\theta - \theta_1$ را برحسب ثانیهٔ قوسی به صورت زیر بنویسیم

$$\theta - \theta_1 = \frac{V}{c}\sin\theta_1 \operatorname{cosec} 1''$$

یا

$$\theta - \theta_1 = \kappa \sin\theta_1 \qquad (1)$$

که در آن

$$\kappa = \frac{V}{c}\operatorname{cosec} 1'' \qquad (2)$$

بنابه تعریف κ ثابت ابیراهی است؛ مقدار آن از مقادیر V و c قابل محاسبه و تقریباً ۵ر۲۰″ است. تعریف و مقدار κ بعداً با تفصیل بیشتری بررسی خواهد شد. روشن است که $\theta - \theta_1$ از ۵ر۲۰″

بیشتر نمی‌تواند باشد و معادلهٔ (۱) را با دقت کافی می‌توان به صورت زیر نوشت

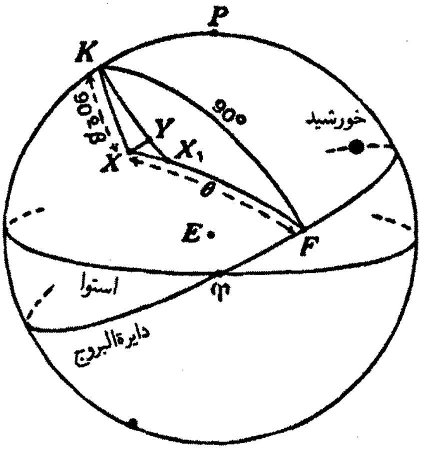
$$\theta - \theta_1 = \kappa \sin\theta \qquad (۳)$$

فرمول (۱) یا (۳) را قانون ابیراهی گویند.

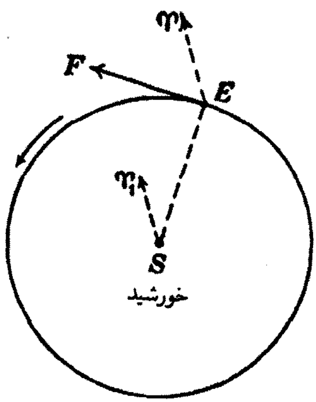
۱۰۵. ابیراهی سالانه در طول و عرض دایرةالبروجی

اکنون از خروج‌ازمرکز مدار زمین چشم می‌پوشم و به طور ساده این مدار را دایره‌ای به مرکز خورشید فرض می‌کنیم و سرعت مداری V را ثابت می‌گیریم. اگر E مکان زمین در لحظهٔ دلخواهی باشد (شکل ۷۲)، جهت حرکت آن در راستای EF عمود بر SE خواهد بود. جهت اعتدال بهاری را $E\Upsilon$ یا $S\Upsilon_1$ می‌گیریم؛ در این صورت $\Upsilon\hat{E}S$ طول زمین‌مرکزی خورشید است که با $\odot$ نشان داده‌ایم. بدین ترتیب طول سماوی F برابر $(\odot - 90^\circ)$ است. براین پایه نقطهٔ F روی دایرةالبروج، که حرکت زمین متوجه آن است، 90° عقبتر از مکان خورشید روی دایرةالبروج است. آشکار است که نقطهٔ F، در طول یک سال نسبت به زمین به عنوان مرکز کرهٔ سماوی، دایرةالبروج را یک دور کامل می‌زند؛ در این حالت ابیراهی را ابیراهی سالانه می‌نامند و جابه‌جاییهای ناشی از آن در دوره‌های سالیانه تکرار می‌شوند.

نقطهٔ F در شکل ۷۳ جهت حرکت زمین را مشخص می‌کند و داریم $\Upsilon F = \odot - 90^\circ$. نقطهٔ X مکان واقعی یک ستاره است (این نقطه بنابه تعریف جهتی است که ستاره از خورشید دیده می‌شود). بنابراین از آنجا که جابه‌جایی ناشی از ابیراهی در صفحهٔ XEF صورت می‌گیرد، ستاره در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ XF بظاهر جابه‌جا شده است و در نقطهٔ X_1 دیده می‌شود. با



شکل۷۳



شکل۷۲

نمادگذاری بخش پیش، $XF = \theta$، $X_1F = \theta_1$ و بنابراین XX_1 از رابطهٔ (۳) به دست می‌آید

$$XX_1 = \kappa \sin\theta \tag{۴}$$

دایره‌های عظیمهٔ KX و KX_1 را که در آن K قطب دایرةالبروج است رسم می‌کنیم و دایرهٔ صغیرهٔ XY را موازی دایرةالبروج می‌کشیم. اگر λ و β طول و عرض سماوی X، λ_1 و β_1 از آن X_1 باشند، در این صورت $X\hat{K}Y = \lambda_1 - \lambda$ و چون $XY = X\hat{K}Y \sin KX$ است پس داریم $XY = (\lambda_1 - \lambda)\cos\beta$. همچنین $X_1Y = \beta - \beta_1$ است. با قرار دادن

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta \quad \text{و} \quad \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda$$

به دست می‌آوریم

$$X_1Y = -\Delta\beta \quad , \quad XY = \Delta\lambda\cos\beta \tag{۵}$$

در مثلث مسطح بینهایت کوچک XX_1Y زاویهٔ YXX_1 را با ϕ نشان می‌دهیم. پس داریم

$$X_1Y = XX_1\sin\phi \quad \text{و} \quad XY = XX_1\cos\phi$$

از این‌رو از معادلهٔ (۴) و (۵) داریم

$$\Delta\lambda = \kappa\sin\theta\cos\phi\sec\beta \tag{۶}$$

$$\Delta\beta = -\kappa\sin\theta\sin\phi \tag{۷}$$

اکنون در مثلث کروی KXF داریم $KX = 90^\circ - \beta$، $KF = 90^\circ$، $XF = \theta$، $K\hat{X}F = 90^\circ + \phi$ و $X\hat{K}F$ برابر تفاضل طولهای سماوی F و X است، به طوری که $X\hat{K}F = (\odot - 90^\circ) - \lambda$

از فرمول (ب) سینوس داریم

$$\sin XF \sin KXF = \sin KF \sin XKF$$

و در نتیجه

$$\sin\theta\cos\phi = -\cos(\odot - \lambda) \tag{۸}$$

از فرمول (ج) داریم

$$\sin XF\cos KXF = \cos KF\sin KX - \sin KF\cos KX\cos XKF$$

و بدین ترتیب

$$\sin\theta\sin\phi = \sin\beta\sin(\odot - \lambda) \qquad (۹)$$

از معادله‌های (۶) تا (۹)، فرمولهای زیر را به دست می‌آوریم

$$\Delta\lambda = -\,\kappa\sec\beta\cos(\odot - \lambda) \qquad (۱۰)$$

$$\Delta\beta = -\,\kappa\sin\beta\sin(\odot - \lambda) \qquad (۱۱)$$

این فرمولها یعنی (۱۰) و (۱۱) جابه‌جاییهای ناشی از ابیراهی سالانه در طول و عرض سماوی را به دست می‌دهند.

۱۰۶. بیضی ابیراهی

از شکل ۷۳ می‌بینیم که جابه‌جایی ابیراهی از X به X_1 معادل دو جابه‌جایی است: از X به Y و از Y به X_1. اینها را به ترتیب با x و y نشان می‌دهیم. آنگاه داریم

$$x = \Delta\lambda\cos\beta = -\kappa\cos(\odot - \lambda) \qquad (۱۲)$$

$$y = -\,\Delta\beta \quad = \kappa\sin\beta\sin(\odot - \lambda) \qquad (۱۳)$$

که با حذف $(\odot - \lambda)$ از آنها، معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\kappa^2\sin^2\beta} = 1 \qquad (۱۴)$$

این معادلهٔ یک بیضی است موسوم به بیضی ابیراهی. ستاره در طی یک‌سال به‌ظاهر این منحنی را روی کرهٔ سماوی می‌پیماید، به گونه‌ای که مرکز بیضی مکان واقعی ستاره است. نیم‌محور بزرگ که موازی دایرةالبروج است، برابر κ و بنابراین برای همهٔ ستاره‌ها ثابت است. نیم‌محور کوچک برابر $\kappa\sin\beta$ و عمود بر نیم‌محور بزرگ است. جابه‌جایی ابیراهی به‌ازای $x = \pm\kappa$، یعنی با استفاده از رابطهٔ (۱۲) به‌ازای $\odot - \lambda$ برابر با 0° یا 180°، بیشترین مقدار را دارد. بدین ترتیب به فرض اینکه مقدار λ را برای ستارهٔ خاصی بدانیم می‌توانیم دو مقدار $\odot$ (طول زمین‌مرکزی خورشید) مربوط به بیشترین جابه‌جایی را به دست آوریم و بنابراین می‌توانیم تاریخهایی را که این اتفاق رخ می‌دهد از زیج نجومی استخراج کنیم. بدین ترتیب برای $\lambda = 0^\circ$، جابه‌جایی ابیراهی وقتی $\odot = 0^\circ$ یا $\odot = 180^\circ$ باشد، یعنی در اعتدال بهاری یا پاییزی بیشترین مقدار را خواهد داشت.

بیضی ابیراهی برای یک ستاره واقع بر دایرةالبروج $(\beta = 0^\circ)$، به خطی راست (جزئی از دایرةالبروج) تبدیل می‌شود و برای ستاره‌ای در قطب دایرةالبروج، به صورت دایره در می‌آید.

۱۰۷. ابیراهی در بُعد و میل

مانند قبل، X را مکان واقعی ستاره و X_1 را مکان ظاهری آن در نظر می‌گیریم (شکل ۷۴). این بار α و δ بُعد و میل X و α_1 و δ_1 از آن X_1 هستند. دایرهٔ صغیرهٔ XY را موازی استوا رسم می‌کنیم. آنگاه داریم

$$XY = X\hat{P}Y \sin PX \quad \text{و} \quad X\hat{P}Y = \alpha_1 - \alpha$$

جاگذاریهای زیر را انجام می‌دهیم

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta \quad \text{و} \quad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha$$

در این صورت داریم

$$\Delta\alpha = XY \operatorname{cosec} PX = XY \sec\delta$$

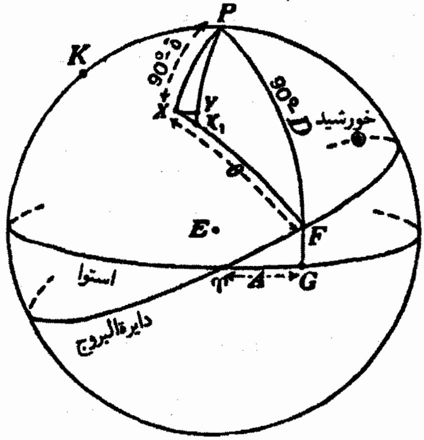
از روی شکل $X_1Y = -\Delta\delta$ را به دست می‌آوریم. $Y\hat{X}X_1$ را هم با ψ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$X_1Y = XX_1 \sin\psi \quad \text{و} \quad XY = XX_1 \cos\psi$$

از آنجا که در نمادگذاری بخش ۱۰۴، $XX_1 \equiv \theta - \theta_1$ است، با استفاده از رابطهٔ (۳) می‌نویسیم

$$\Delta\alpha = \kappa \sin\theta \cos\psi \sec\delta \tag{۱۵}$$

$$\Delta\delta = -\kappa \sin\theta \sin\psi \tag{۱۶}$$



شکل ۷۴

بُعد و میل نقطهٔ F (روی دایرةالبروج که حرکت زمین به طرف آن صورت می‌گیرد) را با A و D نشان می‌دهیم. در مثلث کروی PXF: $PX = 90^\circ - \delta$، $PF = 90^\circ - D$، $X\hat{P}F = A - \alpha$، $XF = \theta$، و $P\hat{X}F = 90^\circ + \psi$ است.
با استفاده از فرمول (ب) داریم

$$\sin XF \sin PXF = \sin PF \sin XPF$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\sin\theta\cos\psi = \cos D\sin(A-\alpha) \qquad (17)$$

از فرمول (ج) داریم

$$\sin XF \cos PXF = \cos PF \sin PX - \sin PF \cos PX \cos XPF$$

که از آن داریم

$$-\sin\theta\sin\psi = \sin D\cos\delta - \cos D\sin\delta\cos(A-\alpha) \qquad (18)$$

بدین ترتیب از معادلات (۱۵) تا (۱۸) نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\alpha = \kappa\sec\delta\cos D\sin(A-\alpha) \qquad (19)$$

$$\Delta\delta = \kappa\sin D\cos\delta - \kappa\cos D\sin\delta\cos(A-\alpha) \qquad (20)$$

اکنون مثلث $F\Upsilon G$ که در آن PFG نصف‌النهار F است را در نظر می‌گیریم داریم: $\Upsilon F = \odot - 90^\circ$، $F\hat{\Upsilon}G = \varepsilon$ (زاویهٔ میل دایرةالبروج)، $\Upsilon G = A$، $FG = D$، و $F\hat{G}\Upsilon = 90^\circ$. با استفاده از فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج) نتیجه می‌گیریم

$$\left.\begin{aligned} \sin\odot &= \cos A\cos D \\ -\cos\odot\sin\varepsilon &= \sin D \\ -\cos\odot\cos\varepsilon &= \sin A\cos D \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

اینک از رابطهٔ (۱۹) داریم

$$\Delta\alpha = \kappa\sec\delta[\cos\alpha\sin A\cos D - \sin\alpha\cos A\cos D]$$

به طوری که با به‌کار بردن رابطهٔ (۲۱) می‌یابیم

$$\Delta\alpha \equiv \alpha_1 - \alpha = -\kappa\sec\delta[\cos\alpha\cos\odot\cos\varepsilon + \sin\alpha\sin\odot] \qquad (22)$$

همین‌طور از رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\delta \equiv \delta_1 - \delta = -\kappa \cos\odot \cos\varepsilon(\tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) - \kappa \cos\alpha \sin\delta \sin\odot \qquad (۲۳)$$

چون κ برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود، فرمول $\Delta\alpha$ یا $(\alpha_1 - \alpha)$ مقدار این کمیت را هم برحسب ثانیهٔ قوسی به دست می‌دهد. البته معمول آن است که بُعد به مقیاس زمان بیان شود و بنابراین طرف راست رابطهٔ (۲۲) باید بر ۱۵ تقسیم شود. جاگذاریهای زیر را انجام می‌دهیم

$$\left.\begin{array}{ll} C = -\kappa \cos\varepsilon \cos\odot, & D = -\kappa \sin\odot \\ c = \frac{1}{15} \cos\alpha \sec\delta, & c' = \tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta \\ d = \frac{1}{15} \sin\alpha \sec\delta, & d' = \cos\alpha \sin\delta \end{array}\right\} \qquad (۲۴)$$

آنگاه از (۲۲)، (۲۳)، و (۲۴) داریم

$$\alpha_1 = \alpha + Cc + Dd \qquad (۲۵)$$

$$\delta_1 = \delta + Cc' + Dd' \qquad (۲۶)$$

در این معادلات، C و D به طول سماوی خورشید و در نتیجه به زمانی از سال که به آن راجع می‌شوند بستگی دارند؛ مقادیر C و D که به اعداد بسلی روز موسوم‌اند، به تندی تغییر می‌کنند و بنابراین برای هر روز از سال درزیجها جدول‌بندی می‌شوند. کمیات c، c'، d، و d' تنها به مختصات ستاره و زاویهٔ میل دایرةالبروج بستگی دارند و بنابراین می‌توانند یکبار برای همیشه محاسبه شوند.

باید توجه داشت که رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) تنها اثر ابیراهی بر مختصات ستاره را به دست می‌دهند.

روشی دیگر برای ساده کردن محاسبات به‌ترتیب زیر است. جاگذاریهای زیر را انجام می‌دهیم

$$h\cos H = -\kappa \sin\odot \quad ; \quad h\sin H = -\kappa \cos\varepsilon \cos\odot$$

$$i = -\kappa \sin\varepsilon \cos\odot$$

آنگاه اگر α_1 و α در مقیاس زمان بیان شوند، معادلات (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر در می‌آیند

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{15} h \sin(H + \alpha) \sec\delta \qquad (۲۷)$$

$$\delta_1 = \delta + i\cos\delta + h\cos(H + \alpha)\sin\delta \qquad (۲۸)$$

مقادیر H، h، و i اعداد مستقل روز نیز برای هر روز سال درزیجها جدول‌بندی می‌شوند. در بیشتر موارد به کار بردن اینها ساده‌تر از اعداد بسلی روز است.

۱۰۸. حرکت بیضیی زمین و ابیراهی

تاکنون فرض بر این بود که زمین با سرعت ثابت در مداری دایره‌ای حرکت می‌کند. اینک مسئله را از دید کلی بررسی می‌کنیم. در بخش ۶۶ نشان داده شد که سرعت در امتداد ET (مماس در E) در یک مدار بیضوی (شکل ۷۵) معادل است با سرعت ثابت h/p در امتداد EF، عمود بر شعاع حامل SE ، به انضمام سرعت ثابت eh/p در امتداد Ef عمود بر محور بزرگ AB. بر پایهٔ نمادگذاری فصل ۵ داریم $h^2 = n^2a^3p$ و $p = a(1 - e^2)$ ؛ از این‌رو اگر بنویسیم $n = 2\pi/T$ که در آن T دورهٔ گردش در مدار است خواهیم داشت

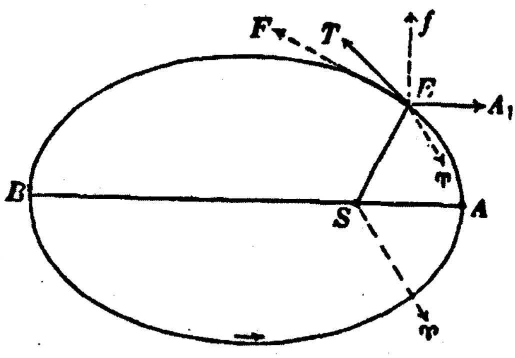
$$\frac{h}{p} = \frac{2\pi a}{T(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{۲۹}$$

جابه‌جایی کل ناشی از ابیراهی در مکان یک ستاره را در هر مختصی می‌توان مجموع دو جابه‌جایی دانست: یکی جابه‌جایی ناشی از سرعت h/p عمود بر شعاع حامل و دیگری جابه‌جایی ناشی از سرعت ثابت eh/p عمود بر محور بزرگ. این جابه‌جایی‌ها را به‌نوبت بررسی می‌کنیم.

چون EF عمود بر SE است، طول زمین‌مرکزی F برابر است با طول واقعی زمین‌مرکزی خورشید منهای 90° (یا $90^\circ - \odot$). بدین ترتیب با همان شرایط هندسی که در شکل ۷۳ نمایش داده شده روبه‌رو هستیم. جابه‌جاییهای مربوط در طول و عرض سماوی را در نظر می‌گیریم. اگر این جابه‌جاییها با $\Delta\lambda_1$ و $\Delta\beta_1$ نشان داده شوند، مقادیر آنها مستقیماً از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند، به طوری که

$$\Delta\lambda_1 = -\,\kappa \sec\beta \cos(\odot - \lambda) \tag{۳۰}$$

$$\Delta\beta_1 = -\,\kappa \sin\beta \sin(\odot - \lambda) \tag{۳۱}$$



شکل ۷۵

که در آنها κ (برحسب ثانیهٔ قوسی) با استفاده از روش فرمول (۲) چنین تعریف می‌شود

$$\kappa = \frac{h}{p}\frac{\operatorname{cosec} 1''}{c}$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۲۹) داریم

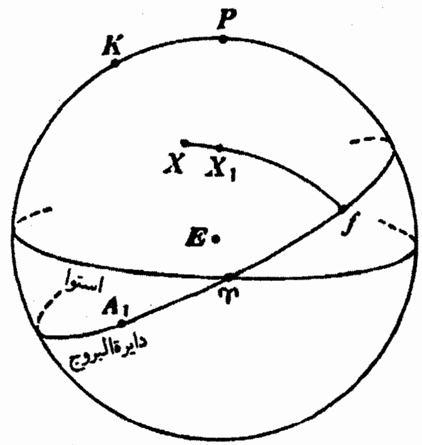
$$\kappa = \frac{2\pi a \operatorname{cosec} 1''}{cT(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{۳۲}$$

این تعریف دقیق ثابت ابیراهی κ است.

اکنون جابه‌جاییهای ابیراهی $\Delta\lambda_2$ و $\Delta\beta_2$ را که از سرعت ثابت eh/p عمود بر محور بزرگ ناشی می‌شوند، بررسی می‌کنیم، فرض می‌کنیم $S\Upsilon$ در شکل ۷۵ جهت اعتدال بهاری باشد؛ پس $\Upsilon\hat{S}A$ برابر ϖ، طول سماوی حضیض است. EA_1 را موازی SA رسم می‌کنیم؛ پس طول زمین‌مرکزی A_1 برابر ϖ است. همچنین Ef عمود بر EA_1 و بنابراین طول زمین‌مرکزی f برابر $90^\circ + \varpi$ است. در شکل ۷۳، که ΥF برابر $90^\circ - \odot$، جابه‌جاییهای ابیراهی $\Delta\lambda_1$ و $\Delta\beta_1$ مربوط به سرعت h/p را به دست آوردیم. اینک از شکل ۷۶، که در آن Υf برابر $90^\circ + \varpi$ است، دیده می‌شود که فرمولهای $\Delta\lambda_2$ و $\Delta\beta_2$ مربوط به سرعت ثابت eh/p را می‌توان از رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) با قرار دادن $90^\circ + \varpi$ به جای $90^\circ - \odot$، یعنی، $180^\circ + \varpi$ به جای $\odot$ و با نوشتن eh/p به جای h/p یا $e\kappa$ به جای κ، به دست آورد. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta\lambda_2 = +e\kappa \sec\beta \cos(\varpi - \lambda) \tag{۳۳}$$

$$\Delta\beta_2 = +e\kappa \sin\beta \sin(\varpi - \lambda) \tag{۳۴}$$



شکل ۷۶

از این‌رو جابه‌جاییهای ابیراهی کل حاصل، از حرکت زمین در مدار بیضوی خود از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\Delta\lambda \equiv \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = -\kappa \sec\beta \cos(\odot - \lambda) + e\kappa \sec\beta \cos(\varpi - \lambda) \quad (۳۵)$$

$$\Delta\beta \equiv \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 = -\kappa \sin\beta \sin(\odot - \lambda) + ek \sin\beta \sin(\varpi - \lambda) \quad (۳۶)$$

توجه داشته باشید که عبارتهای $\Delta\lambda_2$ و $\Delta\beta_2$، موسوم به جمله‌های E، از طول سماوی خورشید مستقل‌اند و بنابراین برای هر ستاره در تمام سال تغییر نمی‌کنند. چون مقدار خروج از مرکز e تقریباً ۱/۶۰ است، مقدار $e\kappa$ در حدود ۳ر″۰ است. اگر چه کمیتهای ϖ، e، λ، و β به طور آهسته تغییر می‌کنند، تغییرات در جمله‌های E آنچنان کوچک‌اند که دست کم برای چند صدسال می‌توان آنها را کاملاً ثابت در نظر گرفت.

چون $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda$ است، پس داریم

$$\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$$

معادلهٔ مشابهی نیز می‌توان برای β نوشت. به جای به‌کار بردن مقدار $\Delta\lambda_2$ در این معادله، راحت‌تر است که $(\lambda + \Delta\lambda_2)$ را طول سماوی واقعی ستاره بگیریم، همین‌کار را می‌توان در مورد عرض سماوی واقعی‌انجام داد.

به همین روش می‌توان اثرات ابیراهی بر مختصات استوایی α و δ را، با در نظر گرفتن بیضی بودن مدار زمین به دست آورد. باز فرض می‌کنیم که جمله‌های E، وابسته به سرعت eh/p عمود بر محور بزرگ، در مختصات واقعی α و δ منظور شوند.

بدین ترتیب فرمولهای مؤثر که جابه‌جاییهای ابیراهی را در مختصات دایرةالبروجی و استوایی به دست می‌دهند، عبارت‌اند از

$$\lambda_1 = \lambda - \kappa \sec\beta \cos(\odot - \lambda) \quad (۳۷)$$

$$\beta_1 = \beta - \kappa \sin\beta \sin(\odot - \lambda) \quad (۳۸)$$

$$\alpha_1 = \alpha + Cc + Dd \quad (۳۹)$$

$$\delta_1 = \delta + Cc' + Dd' \quad (۴۰)$$

که در آنها C،c،c'،D،d، و d' با رابطهٔ (۲۴) تعریف می‌شوند.

۱۰۹. اندازه‌گیری ثابت ابیراهی

تعیین دقیق κ یک مسئلهٔ عملی است که در وهلهٔ اول نسبتاً ساده و بی‌پیچ‌وخم می‌نماید. برای کاهش اثر شکست که حتی در بهترین شرایط هم ممکن است با دقت لازم در این بررسی معلوم

نباشد، فقط ستاره‌هایی را برای رصد انتخاب می‌کنند که خیلی نزدیک به سمت‌الرأس به اوج برسند. فرض می‌کنیم δ میل ستاره‌ای باشد که در تاریخی معین اندکی جنوب سمت‌الرأس به اوج می‌رسد. برای سادگی از آثار حرکت تقدیمی و ناوش که در فصلی دیگر دربارهٔ آنها بحث خواهد شد، چشم می‌پوشیم. میل ظاهری δ_1 که شامل جابه‌جایی ابیراهی نیز هست از رابطهٔ (۲۳) به دست می‌آید و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta_1 = \delta + \kappa x \tag{۴۱}$$

که در آن x ضریب κ در طرف راست رابطهٔ (۲۳) است.

فرض می‌کنیم در شکل ۷۷، ZX' فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصدشدهٔ ستاره‌ای روی دایرهٔ نصف‌النهار باشد و XX' شکست r را نشان دهد. پس داریم $ZX = z + r$. ولی $PX = 90^\circ - \delta_1$ و $PZ = 90^\circ - \phi$ است که در آن ϕ عرض جغرافیایی است، به طوری که

$$ZX = \phi - \delta_1 = \phi - \delta - \kappa x$$

از این‌رو

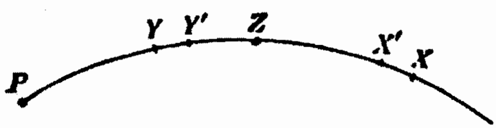
$$z + r = \phi - \delta - \kappa x$$

یا

$$\phi = \delta + z + r + \kappa x \tag{۴۲}$$

فرض می‌کنیم ستارهٔ دیگری در Y'، که اندکی شمالیتر از سمت‌الرأس است، به اوج برسد و Z فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شدهٔ آن و R شکست در جو را نشان دهد. پس داریم $ZY = Z + R$. همچنین اگر D میل واقعی و D_1 میل ظاهری آن که شامل ابیراهی است باشد، در این صورت با استفاده از رابطهٔ (۲۳)، داریم

$$D_1 = D + \kappa X$$



شکل ۷۷

که در آن X ضریب κ در طرف راست رابطهٔ (۲۳) برای این ستاره است. حال $PY = ۹۰^\circ - D_۱$ و $PZ = ۹۰^\circ - \phi$ است. از این‌رو $ZY = D_۱ - \phi$ و داریم

یا
$$Z + R = D + \kappa X - \phi$$

$$\phi = D - Z - R + \kappa X \qquad (۴۳)$$

بنابراین از رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) به دست می‌آوریم

$$۲\phi = (\delta + D) + (z - Z) + (r - R) + \kappa(x + X) \qquad (۴۴)$$

در این معادله فرض می‌کنیم که $(\delta + D)$ معلوم باشد و $(z - Z)$ تفاضل فاصله‌های سمت‌الرأسی اندازه گرفته شده است. چون ستاره‌ها نزدیک سمت‌الرأس به اوج می‌رسند، وضعیت تلسکوپ در مدت رصد دو ستاره می‌تواند بدون تغییر باقی بماند و چنانچه ستاره‌ها به دقت انتخاب شده باشند بازهٔ زمانی بین عبورهای آنها حداکثر چند دقیقه خواهد بود. گرچه در این مسئله تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری به کار برده شده است، اما امروزه به جای آن از تلسکوپ عکاسی سمت‌الرأسی که رد ستاره‌ها را درگذار از دایرهٔ نصف‌النهار روی یک صفحهٔ عکاسی ثبت می‌کند، استفاده می‌شود. اندازهٔ فاصله بین ردهای دو ستارهٔ مورد نظر، به طور خیلی دقیق برابر $(z - Z)$ است. تفاضل شکستهای جوی $(r - R)$ را ممکن است با دقت لازم معلوم فرض کرد. کمیت $(x + X)$ را نیز می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

حدود شش ماه بعد، رصدها تکرار می‌شوند. مانند قبل داریم

$$۲\phi = (\delta + D) + (z_۱ - Z_۱) + (r_۱ - R_۱) + \kappa(x_۱ + X_۱) \qquad (۴۵)$$

که در آن شاخصهای پایین رصدهای جدید را نشان می‌دهند.
برای سادگی فرض می‌کنیم بازهٔ زمانی طوری باشد که طول سماوی خورشید دقیقاً به اندازهٔ ۱۸۰° افزایش یابد. با نگاهی به رابطه (۲۳) می‌بینم که مقادیر $x_۱$ و $X_۱$ اکنون به ترتیب برابرند با $-x$ و $-X$، به طوری که رابطهٔ (۴۵) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

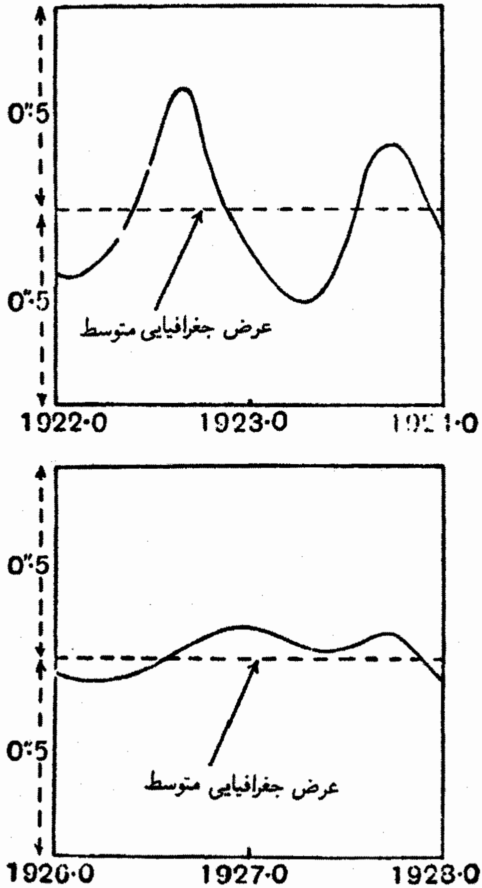
$$۲\phi = (\delta + D) + (z_۱ - Z_۱) + (r_۱ - R_۱) - \kappa(x + X) \qquad (۴۶)$$

با تفریق رابطه‌های (۴۴) و (۴۶) نتیجه می‌گیریم

$$۲\kappa(x + X) + (z - Z) - (z_۱ - Z_۱) + (r - R) - (r_۱ - R_۱) = ۰ \qquad (۴۷)$$

که از آن κ به دست می‌آید.

اما وقتی هدف تعیین دقیق κ باشد این روش، یعنی حذف عرض جغرافیایی در رابطه‌های (۴۴) و (۴۶)، قابل توجیه نیست. کوستنر کشف کرد که محور چرخش زمین نسبت به پوستهٔ آن



شکل۷۸

کاملاً ثابت نیست، و از آنجا که عرض جغرافیایی ϕ نسبت به محور چرخش تعریف می‌شود، مقدار آن تغییراتی خفیف به بزرگی چند دهم ثانیهٔ قوسی خواهد داشت. پس مقادیر ϕ در رابطه‌های (۴۴) و (۴۶) را نباید یکی فرض کرد. در نتیجه تعیین ثابت ابیراهی به طور پیچیده‌ای با مسئلهٔ تغییر عرض جغرافیایی در ارتباط است. ما بحث را طولانیتر از این نمی‌کنیم بلکه فقط می‌پذیریم که گرچه در اصل اندازه‌گیری ثابت ابیراهی ساده است، ولی در عمل چنین نیست. این ثابت به طور دقیقتر از ملاحظات نظری بخش بعد تعیین می‌شود. شکل ۷۸ تغییرات در عرض جغرافیایی گرینویچ را طی سالهای ۱۹۲۳-۱۹۲۲ و ۱۹۲۷-۱۹۲۶ نشان می‌دهد.

۱۱۰. مقدار نظری ثابت ابیراهی

با استفاده از رابطه (۳۲)، κ چنین می‌شود

$$\kappa = \frac{۲\pi a \operatorname{cosec} ۱''}{cT(۱-e^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۴۸)$$

که در آن a نیم‌محور بزرگ مدار زمین، c سرعت نور، T سال نجومی برحسب ثانیهٔ متوسط خورشیدی، و e خروج از مرکز مدار زمین است. مقادیر پذیرفته شدهٔ این کمیتها عبارت‌اند از

$$a = ۱۴۹۶۰۰۰۰۰\text{km}$$

$$c = ۲۹۹۷۹۲٫۵\text{km/s}$$

$$T = ۳۱۵۵۸۱۵۰\text{s}$$

$$e = ۰٫۰۱۶۷۲$$

که از آنها مقدار κ برابر ۲۰″٫۴۹۶ محاسبه می‌شود. مقادیر کمیتهای نجومی اقتباس شدهٔ بالا آنهایی هستند که اتحادیه جهانی اخترشناسی در سال ۱۹۶۴/۱۳۴۲ پذیرفته است.[۱] با وجودی که مختصات ظاهری خورشید و سیارات درونی در زیج نجومی بر اساس مقدار قدیمی κ یعنی ۲۰″٫۴۷ مبتنی است، ولی به طور کلی در این منبع از مقادیر بالا استفاده شده است. به هر حال، فرمولهای لازم برای تبدیل آنها به دستگاه ثابتهای IAU، در پیوست آخر کتاب آورده می‌شوند.

۱۱۱. ابیراهی شبانه‌روزی

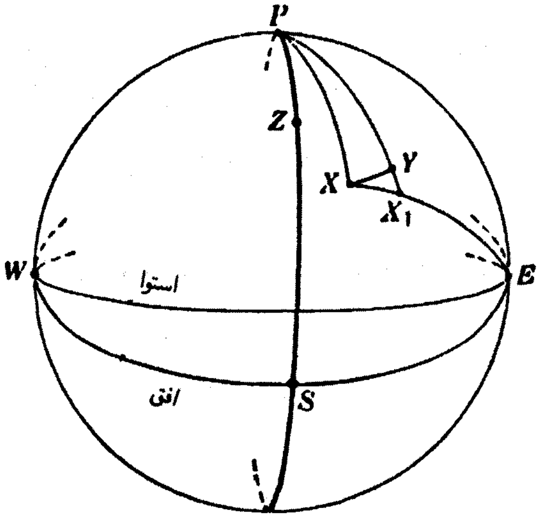
علاوه بر حرکت سالیانه راصد به دور خورشید، حرکت روزانهٔ ناشی از چرخش زمین حول محورش نیز وجود دارد. فرض می‌کنیم ρ شعاع زمین و ϕ عرض جغرافیایی یک رصدخانه باشد که در طول یک روز نجومی، به سبب چرخش تنها، محیط مداری کوچک به شعاع $\rho\cos\phi$ را می‌پیماید. چون در یک روز نجومی ۸۶۱۶۴ ثانیهٔ متوسط خورشیدی هست، سرعت مربوط به آن برابر $۲\pi\rho\cos\phi/۸۶۱۶۴$ کیلومتر بر ثانیه است، که در آن ρ برحسب کیلومتر بیان می‌شود. اگر ρ را ۶۳۷۸ کیلومتر بگیریم، این سرعت برابر $۰٫۴۶۵\cos\phi$ کیلومتر بر ثانیه می‌شود. k را برحسب ثانیهٔ قوسی چنین تعریف می‌کنیم

$$k = \frac{۰٫۴۶۵}{c}\cos\phi \operatorname{cosec} ۱'' \qquad (۴۹)$$

که در آن c سرعت نور برحسب کیلومتر بر ثانیه است. بنابراین k ثابت ابیراهی شبانه‌روزی رصدخانه‌ای واقع در عرض جغرافیایی ϕ است. با قراردادن مقدار c که قبلاً بیان کردیم، خواهیم داشت. $k = ۰''٫۳۲\cos\phi$.

اکنون جهت حرکت عمود بر صفحهٔ دایرهٔ نصف‌النهار راصد و به طرف شرق است. فرض می‌کنیم X در شکل ۷۹، در لحظه‌ای معین مکان واقعی ستاره‌ای روی کرهٔ سماوی باشد. این

1. *Trans. IAU*, vol. XIIB, p.594, 1966.



شکل۷۹

ستاره به سبب ابیراهی شبانه‌روزی به $X_۱$، در جهت نقطهٔشرق E، جابه‌جا خواهد شد. XE را با θ و $X_۱E$ را با $\theta_۱$ نشان می‌دهیم. آنگاه بنابه قانون ابیراهی [فرمول (۳)] داریم

$$XX_۱ \equiv \theta - \theta_۱ = k \sin\theta \qquad (۵۰)$$

XY را موازی میل رسم می‌کنیم. از آنجا که زاویهٔ ساعتی از دایرهٔ نصف‌النهار راصد به طرف غرب اندازه‌گیری می‌شود، زاویهٔ ساعتی $X_۱$ کمتر از زاویهٔ ساعتی X است. به طوری که اگر H و $H_۱$ زاویه‌های ساعتی آنها باشند، داریم $H - H_۱ = X\hat{P}Y$. فرض می‌کنیم $\Delta H = H_۱ - H$ است اکنون داریم

$$XY = X\hat{P}Y \sin PX = X\hat{P}Y \cos\delta$$

که در آن δ میل واقعی ستاره است.
از این‌رو

$$XY = -\Delta H \cos\delta$$

میل $X_۱$ را با $\delta_۱$ نشان می‌دهیم. پس $X_۱Y = \delta - \delta_۱ = -\Delta\delta$ اگر $Y\hat{X}X_۱ = \psi$ باشد، داریم

$$XY = XX_۱ \cos\psi \quad \text{و} \quad X_۱Y = XX_۱ \sin\psi$$

یعنی، با به کار بردن رابطهٔ (۵۰) به دست می‌آوریم

$$-\Delta\delta = k\sin\theta\sin\psi \quad \text{و} \quad -\Delta H\cos\delta = k\sin\theta\cos\psi \qquad (۵۱)$$

در مثلث کروی PXE، $PX = ۹۰^\circ - \delta$ ، $PE = ۹۰^\circ$،$XE = \theta$، $P\hat{X}E = ۹۰^\circ + \psi$، و $X\hat{P}E = H - ۲۷۰^\circ$. از فرمولهای (ب) و (ج) داریم

$$\sin XE \sin PXE = \sin XPE \sin PE$$

و

$$\sin XE \cos PXE = \cos PE \sin PX - \sin PE \cos PX \cos XPE$$

این روابط، با قرار دادن مقدار PX و جز آن به صورت زیر در می‌آیند

$$\sin\theta \cos\psi = \cos H$$

و

$$\sin\theta \sin\psi = -\sin\delta \sin H$$

ازاین‌رو با به کار بردن رابطهٔ (۵۱) و قراردادن $k = ۰''{,}۳۲ \cos\phi$ نتیجه می‌گیریم

$$\Delta H \equiv H_۱ - H = -۰''{,}۳۲ \cos\phi \cos H \sec\delta \qquad (۵۲)$$

و

$$\Delta\delta \equiv \delta_۱ - \delta = ۰''{,}۳۲ \cos\phi \sin H \sin\delta \qquad (۵۳)$$

معادله‌های (۵۲) و (۵۳) اثر ابیراهی شبانه‌روزی بر زاویهٔ ساعتی و میل یک ستاره را به دست می‌دهند.

هرگاه ستاره روی دایرهٔ نصف‌النهار باشد، اثر این ابیراهی بر میل بنابه معادلهٔ(۵۳) صفر خواهد بود.

جابه‌جاییهای ناشی از ابیراهی شبانه‌روزی چنان کوچک‌اند که معمولاً از آنها چشم می‌پوشند. استثنا در رصد ستاره‌ها با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری پیش می‌آید. از شکل ۷۹ یا فرمول (۵۲) دیده می‌شود که ابیراهی، ستاره را به طرف شرق مکان واقعی آن جابه‌جا می‌کند، بنابراین عبور ستاره دیرتر از حالتی که ابیراهی شبانه‌روزی بی‌تأثیر باشد، رخ می‌دهد. از معادلهٔ (۵۲) مدت درنگ در عبور برابر است با

$$\frac{۰{,}۳۲}{۱۵} \cos\phi \sec\delta \quad \text{ثانیهٔ زمانی}$$

(زاویهٔ ساعتی H در زمان عبور ۰^h است). برای یک رصدخانهٔ معین، این عبارت به صورت $C \sec\delta$ است که دقیقاً شکل عبارت ناشی از اثر خطای موازی‌سازی بر زمان عبور یک ستاره را دارد. اگر t زمان عبوری باشد که عملاً رصد می‌شود، زمان واقعی اگر تنها اثر ابیراهی شبانه‌روزی منظور شود برابر است با

$$t - ۰^s{,}۰۲۱ \cos\phi \sec\delta \qquad (۵۴)$$

جملهٔ دوم در رابطهٔ (۵۴) تصحیح یاد شده در بخش ۴۶ است که در فرمول (۹) فصل چهار قرار داده شد.

۱۱۲. تصحیح زمان نور

فرض می‌کنیم t لحظه‌ای باشد که خورشید یا ماه یا یک سیاره یا ستارهٔ دنباله‌داری رصد می‌شود. از آنجا که نور سرعتی محدود دارد. لحظهٔ رصد، مثلاً τ ثانیه بعد از لحظه‌ای است که پرتوی که سرانجام به چشم راصد رسیده آن جسم خاص را ترک کرده است. فرض می‌کنیم که این جسم یک سیاره باشد. مکان رصد شده در زمان t متأثر از ابیراهی سالانه است و پس از به کار بردن فرمولهای کلی ابیراهی که در بخشهای قبل به دست آوردیم، مکان سیاره در صورت ساکن بودن زمین به دست می‌آید. این، مکان سیاره در زمان رصد یعنی t نیست بلکه مکان مربوط به لحظه‌ای است که پرتو سیاره را ترک کرده است. به‌گفتهٔ دیگر، مکان سیاره در زمان $t-\tau$ است. این تصحیح زمان نور و تصحیح ابیراهی سالانه با هم به کار برده می‌شوند، زیرا خاستگاههای مشابه دارند. تصحیح اول از سرعت سیاره و تصحیح دوم از سرعت زمین ناشی می‌شود و فقط سرعت نسبی دو جسم با معنی است. وقتی این دو اثر ترکیب شوند، ترکیب آنها تقدیم سیاره‌ای خوانده می‌شود. تصحیح زمان نور خیلی ساده است. فقط به بُعد و میل رصد شده کمیتهای $\tau\Delta\alpha$ و $\tau\Delta\delta$ را می‌افزاییم که در آنها $\Delta\alpha$ و $\Delta\delta$ آهنگهای تغییر مختصات مربوط در یک ثانیه‌اند.

تمرینها

۱. مکانهای ستاره‌هایی را پیدا کنید که (الف) تحت تأثیر ابیراهی قرار نمی‌گیرد، (ب) فقط در عرض سماوی تحت تأثیر واقع می‌شوند.

۲. فاصلهٔ زاویه‌ای بین دو ستاره که دارای عرض سماوی یکسان β هستند برابر θ و میانگین طولهای آنها λ است، نشان دهید که افزایش θ حاصل از ابیراهی برابر است با

$$۲\kappa \tan \frac{۱}{۲}\theta \sin(\lambda - \odot)(\cos^{۲} \beta - \sin^{۲} \frac{۱}{۲}\theta)^{\frac{۱}{۲}}$$

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۳. مختصات دایرةالبروجی دو ستاره (λ, β) و $(\lambda_۱, \beta_۱)$ است، ثابت کنید که وقتی طول سماوی خورشید، $\odot$، از معادلهٔ زیر پیروی کند فاصلهٔ زاویه‌ای دو ستاره تغییر نخواهد کرد

$$\cos\beta \sin(\odot - \lambda) + \cos\beta_۱ \sin(\odot - \lambda_۱) = ۰$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۴. نشان دهید ستاره‌ای به میل δ، در عرض جغرافیایی ϕ به سبب ابیراهی شبانه‌روزی، به‌ظاهر روی یک بیضی با نیم‌محورهای $m\cos\phi$ و $m\cos\phi\sin\delta$ حرکت می‌کند، که در آن m نسبت پیرامون زمین است به فاصله‌ای که نور در یک روز می‌پیماید.

[آزمون کالج]

۵. ثابت کنید، هنگامی که ابیراهی در میل بزرگترین مقدار عددی خود را دارد، کمانهایی که ستاره را روی کرهٔ سماوی به خورشید و قطب استوا وصل می‌کنند، بر هم عمودند.
[نجوم کروی تألیف بال]

۶. اگر κ ثابت ابیراهی، c سرعت نور، G ثابت گرانش، M جرم خورشید، و l نیم‌قطر بیضی مدار زمین باشد نشان دهید که

$$GM = l\kappa^{۲}c^{۲}$$

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۲۲]

۷. نشان دهید که در هر محل و هر زمانی، مکان ستاره‌ای وجود دارد که اثر ابیراهی و اثر شکست جوی برابر و مخالف هم باشند. همچنین نشان دهید که فاصلهٔ سمت‌الرأسی این ستاره در نیمه شب کوتاهترین روز از معادله‌ای به شکل زیر به دست می‌آید

$$\sin^{۲} z + \lambda \sin z = ۱$$

فرض بر این است که تصحیح شکست جوی با تانژانت فاصلهٔ سمت‌الرأسی متناسب ، و مدار زمین دایره‌ای است.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۰۰]

۸. اگر دو سیاره در مدارهای دایره‌ای به شعاعهای a و b گرد خورشید بگردند، نشان دهید که ابیراهی یکی از آنها از دیدگاه دیگری در مقابله به مقدار زیر از ابیراهی در مقارنه بزرگتر است

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج]

۹. اگر u و v مؤلفه‌های استوایی سرعت زمین به‌ترتیب در جهت Υ و عمود بر این جهت باشند، نشان دهید که اعداد بسلی روز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$C = \frac{v}{c} - e\kappa \cos\varpi \cos\varepsilon$$
$$D = -\frac{u}{c} - e\kappa \sin\varpi$$

۹

اختلاف منظر

۱۱۳. مقدمه

روش تعیین فاصلهٔ یک جرم آسمانی، دراصل، شبیه روشی است که در نقشه‌برداریهای زمین برگزیده می‌شود. اگر نقشه‌برداری بخواهد فاصلهٔ جرم A را از نقطهٔ B تعیین کند، نخست خط پایهٔ BC را اندازه می‌گیرد، سپس با ابزاری مناسب، مانند زاویه‌سنج، زاویه‌های ABC و ACB را اندازه می‌گیرد. حل این مثلث مسطح، فاصلهٔ جسم A از B را به او می‌دهد. در نقشه‌برداری نجومی منظومهٔ شمسی، ابتدا یک‌خط راست واصل بین دو نقطهٔ خیلی دور از هم را روی سطح زمین به‌عنوان خط پایهٔ لازم فرض و تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب لازم است که ابعاد و شکل زمین بویژه مورد بررسی قرار گیرد. بزرگترین خط پایهٔ قابل دسترس در این روش، از قطر زمین یعنی حدود ۱۲۵۰۰ کیلومتر بیشتر نیست؛ از آنجا که این خط پایه در بررسی فواصل حتی نزدیکترین ستاره‌ها هم نامناسب است، چنانکه بعداً خواهیم دید، وقتی با فواصل ستاره‌ها سروکار داریم، باید خط پایهٔ متفاوتی انتخاب کنیم.

۱۱۴. ژئوئید

شکل تقریبی زمین ژئوئید نامیده می‌شود و برای مقاصد نجومی کافی‌است که آن را کره‌واری با تقارن چرخشی که محور کوچک آن بر قطر واصل بین قطبهای شمال و جنوب منطبق است، درنظر

گرفت. پس دایرهٔ نصف‌النهار زمینیی چون $POBQ$ در شکل ۸۰ بیضیی است که محور بزرگ آن CB در صفحهٔ استوا قرار دارد. اگر CB با a نشان داده شود، استوای زمین دایره‌ای به شعاع a خواهد بود. محور کوچک PC را با b و خروج از مرکز یک مقطع دایرهٔ نصف‌النهار را با e نشان می‌دهیم. پس داریم

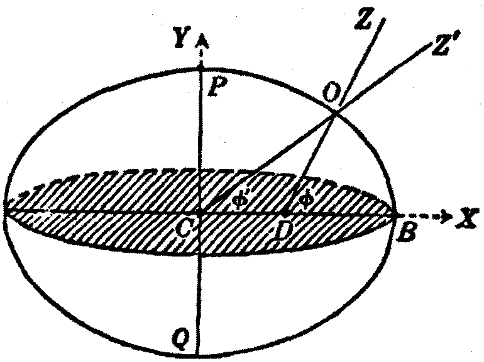
$$b^{۲} = a^{۲}(۱ - e^{۲}) \tag{۱}$$

معادلهٔ بیضی $POBQ$ نسبت به محورهای CX و CY به‌صورت آشنای زیر است

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱ \tag{۲}$$

۱۱۵. عرض نجومی و عرض زمین‌مرکزی

راصدی را در O (شکل ۸۰) درنظر می‌گیریم. اگر از هرگونه بی‌نظمی گرانشی محلی در همسایگی O، که بر جهت تعیین شده به‌وسیلهٔ شاقول کمی اثر می‌گذارد، چشم بپوشیم جهت سمت‌الرأس راصد بر سطح ژئوئید در O عمود است، یعنی طبق تعریف در جهت DOZ است؛ این خط در نقطهٔ O بر بیضی $POBQ$ عمود است. Z را سمت‌الرأس نجومی راصد می‌گویند؛ اندازه‌گیری فواصل سمت‌الرأسی، مثلاً با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری، از این سمت‌الرأس انجام می‌گیرد. زاویه‌ای‌که DOZ باشعاع استوایی CB درست می‌کند عرض نجومی راصد است؛ این زاویه در شکل ۸۰ زاویهٔ ODB است و با ϕ نشان داده شده است. C را به O وصل می‌کنیم و CO را تا Z' ادامه می‌دهیم، در این صورت Z' سمت‌الرأس زمین‌مرکزی راصد است و زاویهٔ OCB که با ϕ' نشان داده شده است عرض زمین مرکزی O نامیده می‌شود. زاویهٔ ZOZ' بین سمت‌الرأسهای نجومی و زمین مرکزی Z و Z' به زاویهٔ شاقول موسوم‌است و معمولاً با v نشان داده می‌شود. اکنون رابطهٔ بین v و ϕ را بررسی می‌کنیم.



شکل ۸۰

اگر x و y مختصات قائم O نسبت به محورهای CX و CY باشند داریم $y/x = \tan\phi'$.
همچنین $\tan\phi$ شیب خط عمود DOZ است و از فرمول آشنای زیر به‌دست می‌آید

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\frac{a^۲}{b^۲}$$

از این رو

$$\frac{y}{x} = \tan\phi' = \frac{b^۲}{a^۲}\tan\phi \qquad (۳)$$

با قرار دادن مقدار y برحسب x و ϕ از رابطهٔ (۳) در رابطهٔ (۲) داریم

$$\frac{x^۲}{a^۲} + x^۲\frac{b^۲}{a^۴}\tan^۲\phi = ۱$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x^۲ = \frac{a^۴\cos^۲\phi}{a^۲\cos^۲\phi + b^۲\sin^۲\phi} \qquad (۴)$$

یا با قرار دادن $b^۲$ به‌جای $a^۲(۱ - e^۲)$ داریم

$$x^۲ = \frac{a^۲\cos^۲\phi}{۱ - e^۲\sin^۲\phi} \qquad (۵)$$

همین‌طور

$$y^۲ = \frac{a^۲(۱ - e^۲)^۲\sin^۲\phi}{۱ - e^۲\sin^۲\phi} \qquad (۶)$$

بردار شعاعی CO را با ρ نشان می‌دهیم، پس

$$x = \rho\cos\phi' \ ; \ y = \rho\sin\phi'$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌های (۵) و (۶)، داریم

$$x = \rho\cos\phi' = \frac{a\cos\phi}{(۱ - e^۲\sin^۲\phi)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۷)$$

$$y = \rho\sin\phi' = \frac{a(۱ - e^۲)\sin\phi}{(۱ - e^۲\sin^۲\phi)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۸)$$

که ازآنها

$$\rho^۲ = \frac{a^۲[۱ - (۲e^۲ - e^۴)\sin^۲\phi]}{۱ - e^۲\sin^۲\phi} \qquad (۹)$$

معادلات (۷) و (۸) به‌اختصار به‌صورت $x = aC\cos\phi$، $y = aS\sin\phi$ نوشته می‌شوند، که در آنها C و S آشکارا فقط توابعی از ϕ هستند. مقادیر آنها در زیج نجومی جدول‌بندی می‌شوند.

معادلهٔ (۷) را در $\sin\phi$ و (۸) را در $\cos\phi$ ضرب کرده و از هم کم می‌کنیم؛ آنگاه از آنجا که $v = \phi - \phi'$، است خواهیم داشت

$$\rho\sin v = \frac{ae^{۲}\sin\phi\cos\phi}{(۱ - e^{۲}\sin^{۲}\phi)^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۱۰}$$

دوباره معادلهٔ (۷) را در $\cos\phi$ و معادلهٔ (۸) را در $\sin\phi$ ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم. آنگاه داریم

$$\rho\cos v = a(۱ - e^{۲}\sin^{۲}\phi)^{\frac{۱}{۲}} \tag{۱۱}$$

بنابراین از معادلات (۱۰) و (۱۱) داریم

$$\begin{aligned}\tan v &= \frac{e^{۲}\sin ۲\phi}{۲(۱ - e^{۲}\sin^{۲}\phi)}\\ &= \frac{e^{۲}\sin ۲\phi}{۲ - e^{۲} + e^{۲}\cos ۲\phi}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

اگر $e^{۲}/(۲ - e^{۲})$ را با m نشان دهیم فرمول (۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\tan v = \frac{m\sin ۲\phi}{۱ + m\cos ۲\phi} \tag{۱۳}$$

حال e در حدود ۰٫۰۸ است به‌طوری که m تقریباً ۰٫۰۰۳ است. درنتیجه می‌توانیم به‌روش زیر برای v، یک سری که به‌سرعت هم‌گرا می‌شود به‌دست آوریم. بااستفاده از فرمول (۱۳) و نشان دادن جذر ۱− با i خواهیم داشت

$$\frac{۱ + i\tan v}{۱ - i\tan v} = \frac{۱ + m(\cos ۲\phi + i\sin ۲\phi)}{۱ + m(\cos ۲\phi - i\sin ۲\phi)}$$

یا

$$e^{۲iv} = \frac{۱ + me^{۲i\phi}}{۱ + me^{-۲i\phi}}$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$۲iv = \log(۱ + me^{۲i\phi}) - \log(۱ + me^{-۲i\phi})$$

با به‌کار بردن بسط لگاریتمی، خواهیم داشت

$$۲iv = m(e^{۲i\phi} - e^{-۲i\phi}) - \frac{m^۲}{۲}(e^{۴i\phi} - e^{-۴i\phi}) + \dots$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$v = m \sin ۲\phi - \frac{m^۲}{۲} \sin ۴\phi + \dots$$

اگر v برحسب ثانیهٔ قوسی بیان شود خواهیم داشت

$$\phi - \phi' \equiv v = m\frac{\sin ۲\phi}{\sin ۱''} - \frac{۱}{۲}\frac{m^۲ \sin ۴\phi}{\sin ۱''} + \frac{۱}{۳}\frac{m^۳ \sin ۶\phi}{\sin ۱''} \cdots \qquad (۱۴)$$

هنگامی که ϕ و e (یا m) معلوم باشند، این فرمول محاسبهٔ زاویهٔ شاقول و بنابراین عرض زمین‌مرکزی ϕ' را به‌سادگی امکانپذیر می‌سازد.

۱۱۶. شکل زمین

در ژئودزی (زمین پیمایی) معمولاً با تخت‌شدگی یا بیضویت دایرهٔ نصف‌النهار زمینی سروکار دارند و آن را با f نشان می‌دهند که طبق معادلهٔ زیر به خروج از مرکز مربوط می‌شود

$$f = \frac{a - b}{a} = ۱ - (۱ - e^۲)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱۵)$$

ابعاد ژئوئید، ، که در سال ۱۹۶۴ توسط IAU پذیرفته شده، عبارت‌اند از

$$a = ۶۳۷۸٫۱۶۰\,\mathrm{km}$$
$$f = \frac{۱}{۲۹۸٫۲۵}$$

بنابراین

$$b = ۶۳۵۶٫۷۷۴۷\mathrm{km}$$
$$e^۲ = ۰٫۰۰۶۶۹۴۵۴$$

و

$$m = ۰٫۰۰۳۳۵۸۵۱$$

از این‌رو

$$\frac{m}{\sin l''} = ۶۹۲''٫۷۴$$

و

$$\frac{m^{۲}}{۲\sin ۱''} = ۱''{,}۱۶$$

با نگه‌داشتن تنها دو جملهٔ نخست در رابطهٔ (۱۴)، فرمول زاویهٔ شاقول به‌صورت زیر می‌شود

$$v \equiv \phi - \phi' = ۶۹۲''{,}۷۴ \sin ۲\phi - ۱''{,}۱۶ \sin ۴\phi \qquad (۱۶)$$

هنگامی که عرض نجومی ϕ معلوم باشد می‌توانیم عرض زمین مرکزی ϕ' را از این فرمول محاسبه کنیم. مثلاً، مقدار ϕ برای گرینویچ برابر ۲ر"۳۸'۲۸°۵۱ است و

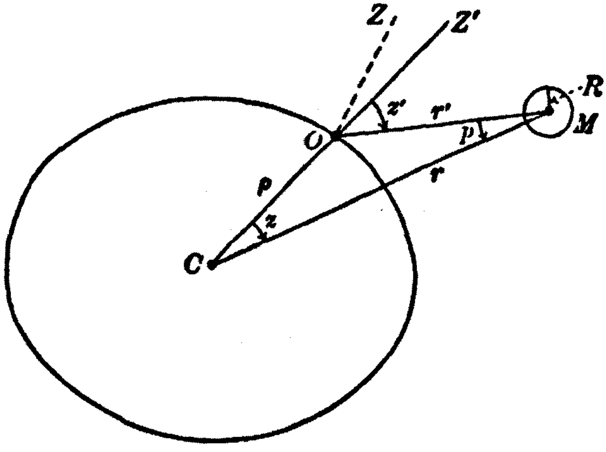
$$\phi - \phi' = ۶۷۵''{,}۰۹ + ۰''{,}۵۱$$

از این‌رو

$$\phi' = ۵۱°۱۷'۲۲''{,}۶$$

۱۱۷. اختلاف‌منظر زمین‌مرکزی

فرض می‌کنیم که O در شکل۸۱ مکان راصد، Z' سمت‌الرأس زمین‌مرکزی او، و M مرکز ماه، خورشید، یا سیاره‌ای باشد. زاویه‌های $Z'OM$ و $Z'CM$ را به ترتیب با z' و z و زاویهٔ OMC را با p نشان می‌دهیم. اگر ρ فاصلهٔ O از مرکز زمین C و r فاصلهٔ زمین‌مرکزی CM جرم M



شکل۸۱

رامشخص کند، در این صورت داریم

$$z' = z + p \tag{۱۷}$$

$$\sin p = \frac{\rho}{r} \sin z' \tag{۱۸}$$

زاویهٔ p را اختلاف‌منظر جرم M می‌گویند؛ این زاویه عبارت است از زاویهٔ بین جهت این جرم ازدیدگاه O، و جهت آن از مرکز زمین به عنوان دیدگاهی استاندارد. اگر بتوان p را با رصد تعیین کرد، در آن صورت فاصلهٔ r جرم را می‌توان از رابطهٔ (۱۸)، که در آن ρ ممکن است معلوم فرض شود و z' از رصدهای سمت‌الرأسی تعیین شود، به دست‌آورد. هرچه مقدار r بزرگتر باشد، زاویهٔ اختلاف‌منظر p کوچکتر خواهد بود. از آنجا که z' بزرگتر از z است، اثر اختلاف‌منظر موجب افزایش فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم به‌هنگام رصد آن در O می‌شود و این جابه‌جایی در صفحهٔ CZ' و CM رخ می‌دهد.

هنگامی که z' برابر $۹۰°$ است، اختلاف‌منظر p' از $\sin p' = \rho/r$ به‌دست می‌آید. در این حالت p'، برای راصد در O، اختلاف‌منظر افقی نامیده می‌شود. اگر راصد در استوا باشد و M روی افق، در آن صورت اختلاف‌منظر P آن از معادلهٔ زیر به‌دست خواهد آمد

$$\sin P = \frac{a}{r} \tag{۱۹}$$

P اختلاف‌منظر افقی استوایی خوانده می‌شود.

به سبب اثر حرکت بیضوی، فاصلهٔ زمین‌مرکزی r ماه یاخورشید در طول دورهٔ گردش مداری تغییر می‌کند و اگر $r_{\circ}$ فاصلهٔ زمین‌مرکزی متوسط رانشان دهد، از معادلهٔ (۱۹) اختلاف‌منظر افقی استوایی متوسط‌ '$P_{\circ}$' که به وسیلهٔ معادلهٔ زیر داده می‌شود به‌دست می‌آید

$$\sin P_{\circ} = \frac{a}{r_{\circ}} \tag{۲۰}$$

بانوشتن معادلهٔ (۱۸) به‌صورت

$$\sin p = \frac{\rho}{a}\frac{a}{r_{\circ}}\frac{r_{\circ}}{r} \sin z'$$

داریم

$$\sin p = \left(\frac{\rho}{a}\right)\left(\frac{r_{\circ}}{r}\right) \sin P_{\circ} \sin z' \tag{۲۱}$$

که در آن کافی‌است که ρ/a و $r_{\circ}/r$ کمیتهای معلوم درنظر گرفته شوند، اولی از فرمول (۹) و دومی از چگونگی حرکت مداری.

۱۱۸. اختلاف‌منظر ماه

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان اختلاف‌منظر ماه را از راه رصد تعیین کرد. فرض می‌کنیم که دو رصدخانهٔ O و O_1 (شکل ۸۲) روی یک دایرهٔ نصف‌النهار زمینی وجود داشته باشند، یکی باعرض جغرافیایی شمالی زیاد و دیگری باعرض جغرافیایی جنوبی زیاد. این انتخاب برای این است که خط پایهٔ محدود به O و O_1 به حد کافی بزرگ باشد. فرض می‌کنیم که فواصل سمت‌الرأسی دایرهٔ نصف‌النهار مرکز ماه در یک روز با تلسکوپهای دایرهٔ نصف‌النهاری واقع در O و O_1 اندازه گرفته شوند. البته این‌فواصل سمت‌الرأسی در O و O_1 به‌ترتیب نسبت به سمت‌الرأسهای نجومی Z و Z_1 اندازه‌گیری می‌شوند (شکل۸۲). نتیجهٔ این اندازه‌گیریها را پس از اعمال تصحیحهای شکست، با ζ و ζ_1 نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب $Z\hat{O}M = \zeta$ و $Z_1\hat{O}_1M = \zeta_1$ است. اگر v و v_1 زاویه‌های شاقول در O و O_1 و z' و z'_1 زاویه‌های $Z'OM$ و Z'_1O_1M (Z' و Z'_1 سمت‌الرأسهای زمین‌مرکزی در O و O_1 هستند) باشند، داریم

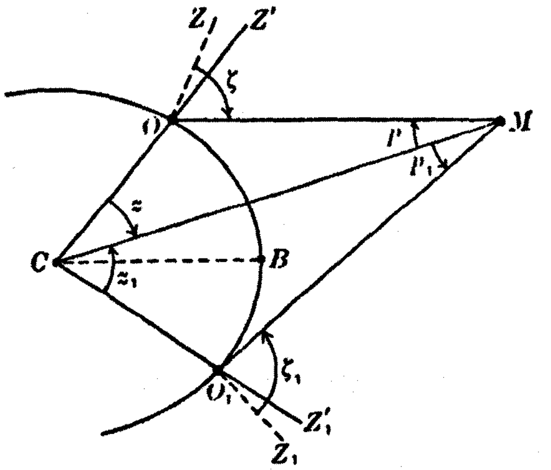
$$z' = \zeta - v \quad \text{و} \quad z'_1 = \zeta_1 - v_1$$

زاویه‌های اختلاف‌منظر برای O و O_1 را با p و p_1 و زاویه‌های OCM و O_1CM را با z و z_1 نشان می‌دهیم پس خواهیم داشت

$$p_1 = z'_1 - z_1 \quad \text{و} \quad p = z' - z$$

و بنابراین

$$p + p_1 = \zeta + \zeta_1 - (v + v_1) - (z + z_1) \tag{۲۲}$$



شکل۸۲

اما $z+z_1 = O\hat{C}O_1 = O\hat{C}B+O_1\hat{C}B$، که در آن CB شعاع استوایی در دایرهٔ نصف‌النهار O و O_1 است. اما OCB و O_1CB به‌ترتیب عرضهای جغرافیایی زمین‌مرکزی O و O_1 هستند که با ϕ' و ϕ'_1 نشان داده می‌شوند. از این‌رو

$$z+z_1 = \phi' + \phi'_1$$

همچنین اگر ϕ و ϕ_1 عرضهای نجومی O و O_1 باشند، $\phi = \phi' + v$ و $\phi_1 = \phi'_1 + v_1$. از این‌رو رابطهٔ (۲۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$p+p_1 = \zeta + \zeta_1 - \phi - \phi_1 \tag{۲۳}$$

حال همهٔ کمیتهای طرف راست معلوم‌اند و خواهیم نوشت

$$p+p_1 = \theta \tag{۲۴}$$

اکنون

$$\sin p = \frac{\rho}{r}\sin(\zeta - v) \tag{۲۵}$$

و

$$\sin p_1 = \frac{\rho_1}{r}\sin(\zeta_1 - v_1) \tag{۲۶}$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۴)، معادلهٔ (۲۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sin\theta\cos p = \cos\theta\sin p + \frac{\rho_1}{r}\sin(\zeta_1 - v_1)$$

یا، با به کار بردن معادلهٔ (۲۵) داریم

$$\sin\theta\cos p = \frac{\rho}{r}\cos\theta\sin(\zeta - v) + \frac{\rho_1}{r}\sin(\zeta_1 - v_1) \tag{۲۷}$$

باتقسیم (۲۵) به (۲۷) و حذف r خواهیم داشت

$$\tan p = \frac{\rho\sin\theta\sin(\zeta - v)}{\rho\cos\theta\sin(\zeta - v) + \rho_1\sin(\zeta_1 - v_1)} \tag{۲۸}$$

همهٔ کمیتهای طرف راست (۲۸) معلوم‌اند و در نتیجه این معادله مقدار p را معین می‌کند. اینک معادلهٔ (۲۵) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin p = (\frac{\rho}{a})(\frac{r_0}{r})\sin P.\sin(\zeta - v) \tag{۲۹}$$

که در آن p، ρ/a، $r_\circ/r$، v، $\zeta -$ معلوم فرض می‌شوند. بدین‌ترتیب به‌کمک رابطهٔ (۲۹)، اختلاف‌منظر افقی استوایی متوسط ماه، $P_\circ$، را تعیین‌می‌کنیم.

فرض شده است که در O و O_1 مرکز ماه رصد می‌شود. لیکن، در عمل، فاصلهٔ سمت‌الرأسی لبهٔ بالایی یا پایینی ماه یا یک فنجانهٔ کوچک یایک قلهٔ کوه اندازه‌گیری می‌شود. باوجود این، تصحیحات برای تطبیق با روش شرح داده شده در بالا جزئی است و در اینجا نیازی به توضیح کاملتر جزئیات نیست. همچنین فرض شده است که O و O_1 روی یک دایرهٔ نصف‌النهار باشند و آشکارا بعید است که دو رصدخانهٔ ثابت بتوان پیدا کرد که دقیقاً این فرض در آنها صدق کند. در گذشته رصدخانه‌های سلطنتی در گرینویچ و رصدخانهٔ دماغهٔ گودهوپ در بررسی اختلاف‌منظر ماه باهم همکاری داشته‌اند و از آنجا که تفاضل طول جغرافیایی آنها برابر $1^{h}13^{m}55^{s}$ است، اثر تغییر میل ماه دربازهٔ زمانی بین عبورهای دایرهٔ نصف‌النهار در این دو رصد خانه باید به‌حساب آورده شود.

مقدار اختلاف‌منظر افقی استوایی متوسط ماه که به وسیله IAU پذیرفته شده است و در زیج نجومی به کار برده می‌شود $3422''{,}608$ است، و این متناظر بافاصلهٔ متوسط ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است. از آنجا که امروزه فاصلهٔ ماه را می‌توان‌از تأخیر زمانی پژواکهای راداری و لیزری از سطح ماه تعیین کرد، روش بالا دیگر به‌عنوان دقیقترین روش تعیین فاصله کاربرد ندارد.

اولین پژواکهای راداری از ماه در سال ۱۳۲۴/۱۹۴۶ آشکارسازی شد، و حدود ده سال پس از آن فاصله‌های راداری دقیق در دسترس قرار گرفت. پژواکهای لیزری به کمک بازتابنده‌هایی که توسط فضانوردان آپولو روی سطح ماه برپا شدند. امکانپذیر شده است.

۱۱۹. نیم‌قطر

در شکل ۸۱، فرض می‌کنیم که شعاع خطی ماه R کیلومتر باشد و r و r' فواصل مرکز ماه از C و O برحسب همین واحد باشند. S زاویهٔ فراگیرندهٔ شعاع ماه در C و s زاویهٔ فراگیرندهٔ شعاع ماه در O را نشان می‌دهد. بنابراین داریم $\sin S = R/r$ و $\sin s = R/r'$. اولی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\sin S = \frac{R}{a}\frac{a}{r}$$

که در آن a شعاع استوایی زمین است. چون $a/r = \sin P$، پس داریم

$$\sin S = \frac{R}{a}\sin P \qquad (۳۰)$$

اگر $S_\circ$ زاویهٔ فراگیرندهٔ شعاع ماه در C در فاصلهٔ متوسطش $r_\circ$ باشد، داریم

$$\sin S_\circ = \frac{R}{a}\sin P_\circ \qquad (۳۱)$$

$S_\circ$ نیم‌قطر متوسط ماه خوانده می‌شود. همچنین

$$\sin s = \frac{R}{r'} = \frac{R}{r}\frac{\sin z'}{\sin z}$$

یا

$$\sin s = \sin S_\circ \; \frac{\sin z'}{\sin z} \qquad (۳۲)$$

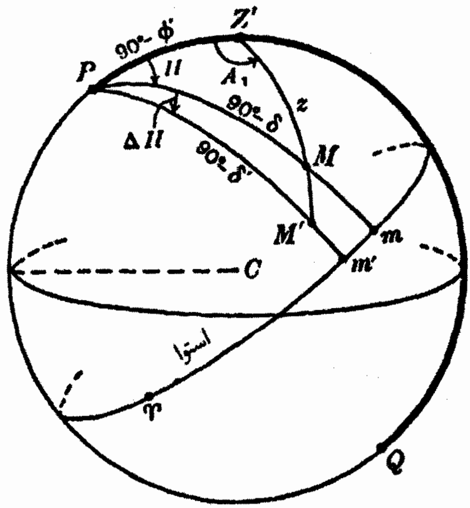
مقدار s را می‌توان اندازه گرفت، و از آنجا که z و z' را می‌توان معلوم فرض کرد، معادلهٔ (۳۲) مقدار $S_\circ$ را معین می‌کند. از معادله‌های (۳۰) و (۳۱) داریم $\sin s/\sin s_\circ = \sin P/\sin P_\circ$ و با فرض اینکه $P_\circ$ و P معلوم‌اند مقدار $S_\circ$ را تعیین می‌کنیم. از معادلهٔ (۳۰) یا (۳۱) شعاع ماه، یعنی R، به دست می‌آید و برابر ۱۷۳۸ کیلومتر است. بدین‌ترتیب شعاع ماه تقریباً برابر یک چهارم شعاع زمین است. مقدار $S_\circ$ برابر ۱۵′۳۲″ر۶ است. نیم‌قطرهای خورشید و سیارات به روش مشابهی تعریف می‌شوند.

۱۲۰. اثر اختلاف‌منظر بر بُعدو میل

اکنون اثر اختلاف‌منظر بر بُعد و میل ماه را نسبت به راصدی در نقطهٔ O مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرمولهای دقیقی که به‌دست می‌آوریم تنها در مورد ماه و ماهواره‌های مصنوعی، که اختلاف‌منظرشان می‌تواند واقعاً بزرگ باشد، ضروری‌اند. در این حالت، اختلاف‌منظر خورشید و سایر اجرام منظومهٔ شمسی کوچک و درنتیجه فرمولهای عمومی می‌توانند به مقدار زیادی پیراسته و ساده‌شوند.

در شکل ۸۳، کرهٔ سماوی راکه مرکز آن در C (مرکز زمین) است درنظر می‌گیریم. P قطب شمال، Z' سمت‌الرأس زمین مرکزی راصد و $PZ' = ۹۰° - \phi'$ است. فرض می‌کنیم M مکان جرمی روی کرهٔ سماوی باشد که از C رصد می‌شود؛ پس $Z'M = z$. کمان دایرهٔ عظیمهٔ $Z'M$ را تا M' امتداد می‌دهیم به طوری که $Z'M' = z'$، z' فاصلهٔ سمت‌الرأسی M از دیدگاه راصد در O است. از آنجا که $z' = z + p$، پس MM' برابر p، یعنی زاویهٔ اختلاف‌منظر مربوط به رصد انجام شده در O است. فرض می‌کنیم α و δ بُعد و میل نقطهٔ M روی کرهٔ سماوی و α' و δ' از آن M' باشند. پس داریم $PM = ۹۰° - \delta$؛ $PM' = ۹۰° - \delta'$. زاویه‌های ساعتی M و M' را به ترتیب H و H' می‌گیریم و می‌نویسیم $H' - H = \Delta H$. از روی شکل، $H' - H = m'm$، و اگر Υ نقطهٔ اعتدال بهاری باشد $\alpha' = \Upsilon m'$ و $\alpha = \Upsilon m$، به‌طوری که اگر بنویسیم $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$ در آن‌صورت $\Delta\alpha = -m'm$ و بنابراین داریم $\Delta H = -\Delta\alpha$. زاویهٔ $PZ'M$ را با $A_۱$ نشان می‌دهیم.

اکنون مسئلهٔ بیان مختصات α' (یا H') و δ' برحسب α (یا H) و δ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۸۳

از مثلث $PZ'M$، با به کار بردن فرمول (د)، داریم

$$\sin\phi' \cos A_1 = \cos\phi' \cot z - \sin A_1 \cot H \qquad (۳۳)$$

و از مثلث $PZ'M'$ می‌نویسیم

$$\sin\phi' \cos A_1 = \cos\phi' \cot z' - \sin A_1 \cot H' \qquad (۳۴)$$

با تفریق رابطه‌های (۳۳) از (۳۴) خواهیم یافت

$$\cos\phi'(\cot z - \cot z') = \sin A_1(\cot H - \cot H')$$

یا، چون $z' - z = p$ و $H' - H = \Delta H$ داریم

$$\frac{\cos\phi' \sin p}{\sin z \sin z'} = \frac{\sin A_1 \sin \Delta H}{\sin H \sin H'}$$

اما از رابطهٔ (۱۸) داریم $\sin p = (\rho/r) \sin z'$ و از فرمول سینوس، (ب)، داریم

$$\sin A_1 \sin z = \sin H \cos\delta$$

از این‌رو

$$\frac{\rho}{r}\cos\phi' = \frac{\cos\delta \sin\Delta H}{\sin(H + \Delta H)}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\tan \Delta H \equiv -\tan \Delta\alpha = \frac{\rho}{r} \frac{\sin H \cos\phi'}{\cos\delta - \rho/r \cos H \cos\phi'} \qquad (۳۵)$$

این فرمولی است دقیق که در صورت معلوم بودن ρ/r، ϕ'، و مختصات زمین‌مرکزی H و δ محاسبهٔ ΔH یا $\Delta\alpha$ (اثر اختلاف‌منظر بر بُعد) را برای ما امکانپذیر می‌سازد. سپس مقدار H' یا α' رابه‌دست می‌آوریم. تنها هنگامی این فرمول به کار برده می‌شود که‌کمیت ρ/r کوچک نباشد.

اینک فرمول کلی که مقدار $\Delta\delta$، اثر اختلاف‌منظر بر میل $(\Delta\delta = \delta' - \delta)$، را به‌دست می‌دهد پیدا می‌کنیم.

با استفاده‌از فرمول کسینوس، (الف)، از مثلثهای $PZ'M$ و $PZ'M'$ داریم

$$\sin\delta = \sin\phi' \cos z + \cos\phi' \sin z \cos A_1$$

$$\sin\delta' = \sin\phi' \cos z' + \cos\phi' \sin z' \cos A_1$$

که از آن باحذف $\cos A_1$ و سپس بااستفاده‌از رابطهٔ (۱۸) خواهیم داشت

$$\sin\delta \sin z' - \sin\delta' \sin z = \sin\phi' \sin p = \frac{\rho}{r} \sin\phi' \sin z'$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\sin\delta' \frac{\sin z}{\sin z'} = \sin\delta - \frac{\rho}{r}\sin\phi' \qquad (۳۶)$$

دوباره، بااستفاده‌از (ج)، داریم

$$\cos\delta \cos H = \cos\phi' \cos z - \sin\phi' \sin z \cos A_1$$

$$\cos\delta' \cos H' = \cos\phi' \cos z' - \sin\phi' \sin z' \cos A_1$$

و، با حذف $\cos A_1$ از این معادلات و با به‌کار بردن رابطهٔ (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\cos\delta \cos H \sin z' - \cos\delta' \cos H' \sin z = \frac{\rho}{r} \cos\phi' \sin z'$$

و

$$\cos\delta' \cos H' \frac{\sin z}{\sin z'} = \cos\delta \cos H - \frac{\rho}{r} \cos\phi' \qquad (۳۷)$$

با تقسیم رابطهٔ (۳۶) بر (۳۷) داریم

$$\frac{\tan\delta'}{\cos H'} = \frac{\sin\delta - \frac{\rho}{r}\sin\phi'}{\cos\delta\cos H - \frac{\rho}{r}\cos\phi'}$$

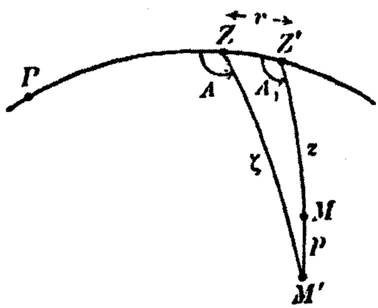
با نوشتن $\delta' = \delta + \Delta\delta$ و $T = \tan\Delta\delta$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan\delta + T}{1 - T\tan\delta} = \frac{\cos H'(\sin\delta - \frac{\rho}{r}\sin\phi')}{\cos\delta\cos H - \frac{\rho}{r}\cos\phi'} \tag{۳۸}$$

از آنجا که $H' = H + \Delta H$ و ΔH از رابطهٔ (۳۵) به‌دست می‌آید، $\cos H'$ که در طرف راست رابطهٔ (۳۸) قرار دارد قابل محاسبه است، پس می‌توانیم T را از رابطهٔ (۳۸) محاسبه کنیم. بدین‌ترتیب $\Delta\delta$ یا $\delta' - \delta$ را به‌دست می‌آوریم و از آن مقدار δ' نتیجه می‌شود.

۱۲۱. اثر اختلاف‌منظر بر فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت

اینک اثر اختلاف‌منظر فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت ماه یا خورشید را، وقتی جرم موردنظر روی نصف‌النهار نیست به‌اختصار مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۸۴ مرکز کرهٔ سماوی را مرکز زمین C می‌گیریم و فرض می‌کنیم Z و Z' سمت‌الرأسهای نجومی و زمین‌مرکزی راصدی در O باشند. اگر M و M'، مانند قبل، مکان جرم روی کرهٔ سماوی به‌ترتیب از دیدگاه C و O باشند؛ $Z'M = z$ و $Z'M' = z' = z + p$ می‌شود. می‌دانیم رصدهای فاصلهٔ سمت‌الرأسی وسمت نسبت به سمت‌الرأس نجومی Z انجام می‌گیرد وبنابراین ZM' و PZM' را می‌توانیم کمیتهای مشاهده شده بگیریم. این کمیتها را به ترتیب با ζ و A نشان می‌دهیم. اینک ZZ' زاویهٔ شاقول v است که معلوم فرض می‌شود و $Z'\hat{Z}M' = 180° - A$ است. پس‌به کمک فرمول (الف) می‌توانیم z' را برحسب v، A، و ζ بیان‌کنیم. همچنین $\sin p = (\rho/r)\sin z'$ که از آن p و سپس، در صورت معلوم بودن ρ/r، $z(\equiv z' - p)$ می‌تواند نتیجه‌گیری شود. بدین‌ترتیب z را می‌توان برحسب v، ζ، A، و ρ/r بیان کرد.



شکل ۸۴

سمت زمین‌مرکزی $PZ'M$ را با $A_۱$ نشان می‌دهیم. $A_۱$ را بااستفاده از فرمول (د) می‌توان برحسب v، ζ، و A بیان کرد.

روشن است که اگر v، z، $A_۱$، ρ/r معلوم باشند، ζ و A را می‌توان به‌روشی مشابه به‌دست آورد. فرمولهایی که $(z-\zeta)$ و $(A_۱-A)$ را به‌دست می‌دهند، و از روش بالا به‌دست می‌آیند، از اهمیت علمی زیادی برخوردار نیستند و در اینجا کافی است توجه خود را به اصول مورد بحث معطوف داریم.

۱۲۲. اختلاف‌منظر خورشید

روشی که برای تعیین اختلاف‌منظر ماه شرح دادیم نمی‌تواند با دقت کافی در اندازه‌گیری مستقیم اختلاف‌منظر خورشید به‌کار برده شود. اصل روش سنتی به‌دست آوردن فاصلهٔ خورشید بر اندازه‌گیری فاصلهٔ یک سیاره بیرونی مانند مریخ یا اراس، و به کار بردن قانون سوم کپلر استوار است. اگر a (نیم‌محور بزرگ)، T (دورهٔ گردش مداری)، و m (جرم) از آن زمین باشند آنگاه، با استفاده از فرمول (۱۸) صفحهٔ ۱۱۹ و نمایش جرم خورشید با M، داریم

$$\frac{۴\pi^۲ a^۳}{T^۲}=G(M+m)$$

و اگر $a_۱$، $T_۱$، و $m_۱$ از آن مریخ یا اراس باشند

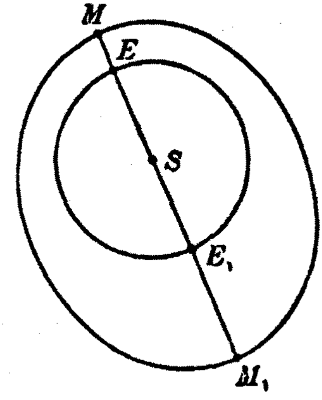
$$\frac{۴\pi^۲ a_۱^۳}{T_۱^۲}=G(M+m_۱)$$

می‌توانیم بااطمینان، از m و $m_۱$ در مقایسه با M چشم بپوشیم و در نتیجه داریم

$$a^۳ : a_۱^۳ = T^۲ : T_۱^۲$$

چون دوره‌های گردش مداری به طور خیلی دقیق معلوم‌اند، پس نسبت $a : a_۱$ را می‌توان با دقت زیادی تعیین‌کرد. این را می‌شود به‌طور کلی‌تر بااین گزاره که ابعاد نسبی مدارهای سیاره‌ای با دقت زیادی معلوم‌اند بیان کرد. اگر بتوان فاصلهٔ سیاره‌ای را از زمین (مثلاً برحسب مایل) در زمانی معین به طور دقیق اندازه گرفت، در آن صورت مقیاس منظومهٔ سیاره‌ای را می‌توان به‌دست آورد؛ بویژه، فاصلهٔ خورشید از زمین را می‌توان برحسب مایل یا برحسب شعاع استوایی زمین به عنوان واحد پیدا کرد.

مدار زمین و مدار بسیار بیضوی سیارک اراس، رادرنظر می‌گیریم (شکل ۸۵). واضح است که اگر زمین و اراس همزمان به ترتیب در E و M باشند (در این صورت سیاره در مقابله است)، شرایط برای اندازه‌گیری فاصلهٔ EM، به‌خاطر کمینه بودن فاصلهٔ بین‌شان مساعد خواهد بود. بدیهی است وضعیت مقابلهٔ نشان داده شده به وسیلهٔ پیکربندی $SE_۱M_۱$ نامناسبترین وضعیت است.



شکل ۸۵

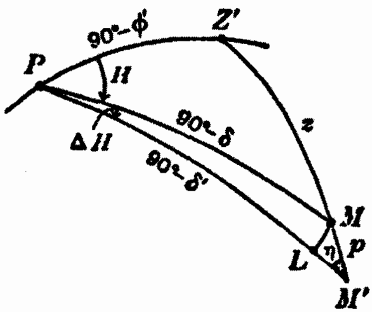
در مساعدترین مقابله، هنگامی که اراس به نزدیکترین فاصله از زمین می‌رسد، فاصلهٔ بین این دو تقریباً ۱۴ میلیون مایل است؛ یعنی خیلی کوچکتر از فاصلهٔ زمین تا خورشید، که تقریباً ۹۳ میلیون مایل است. در ۱۹۰۱ـ۱۹۰۰ فرصت مناسبی برای اندازه‌گیری فاصلهٔ اراس پیش آمد و باز شرایط در ۱۹۳۱ـ۱۹۳۰ مناسب بود.

در بخش ۱۲۰ فرمولهای عمومی اثر اختلاف‌منظر بر مختصات یک جرم آسمانی را به‌دست آوردیم. این فرمولهای دقیق تنها در ارتباط باماه لازم است به کار برده شوند، زیرا چنان‌که دیدیم، اختلاف‌منظر افقی متوسط ماه در حدود $57'$ است. برای سیاره‌ای مانند اراس مقدار اختلاف‌منظر افقی بیش از تقریباً $30''$ نیست؛ در نتیجه برای چنین جرمی ρ/r کمیت خیلی کوچکی است (تقریباً ۰٫۰۰۰۲ است)، و بنابراین در فرمولهای یاد شده می‌توانیم بااطمینان از توانهای دوم و بالاتر ρ/r چشم بپوشیم. مثلاً رابطهٔ (۳۵) را می‌توان از این راه به شکل زیر ساده‌کرد

$$\Delta\alpha = -\frac{\rho}{r}\sin H\cos\phi'\sec\delta$$

اکنون با روش دیگری این فرمول را برای $\Delta\alpha$ و فرمول مشابهی را برای $\Delta\delta$ به‌دست‌می‌آوریم. در شکل ۸۶ فرض‌می‌کنیم M مکان سیاره‌ای روی کرهٔ سماوی از دیدگاه مرکز زمین C و M' مکان‌آن از دیدگاه راصدی در O با سمت‌الرأس زمین‌مرکزی Z' باشد. p تغییر مکان MM' ناشی از اختلاف‌منظر را نشان می‌دهد. α، δ و α'، و δ' به‌ترتیب مختصات استوایی M و M'، H و H' زاویه‌های ساعتی وابسته به‌آنها هستند. ML را کمان دایرهٔ صغیره‌ای موازی با استوا می‌گیریم و $P\hat{M'}Z'$ را با η نشان می‌دهیم. پس چون، p خیلی کوچک است، از مثلث تخت‌گونهٔ LMM' داریم

$$LM' = p\cos\eta \quad \text{و} \quad LM = p\sin\eta$$



شکل ۸۶

از معادلهٔ (۱۸) بانوشتن p به‌جای $\sin p$ داریم

$$p = \frac{\rho}{r}\sin z' \tag{۳۹}$$

$H' - H$ را با ΔH و $\delta' - \delta$ را با $\Delta\delta$ نشان می‌دهیم. آنگاه داریم

$$LM = (H' - H)\cos\delta = \Delta H\cos\delta$$

از این‌رو

$$\Delta H\cos\delta = \frac{\rho}{r}\sin\eta\sin z'$$

اما بااستفاده از (ب) داریم

$$\sin\eta\sin z' = \cos\phi'\sin H'$$

از این‌رو

$$\Delta H = \frac{\rho}{r}\sin H'\cos\phi'\sec\delta \tag{۴۰}$$

در طرف راست رابطهٔ (۴۰) بدون کاهش محسوس دقت می‌توانیم به‌جای H'، H بنویسیم و چون $\alpha' - \alpha \equiv \Delta\alpha = -(H' - H) = -\Delta H$، خواهیم داشت

$$\alpha' - \alpha \equiv \Delta\alpha = -\frac{\rho}{r}\cos\phi'\sec\delta\sin H \tag{۴۱}$$

دوباره $M'L = \delta - \delta' = -\Delta\delta$ و بنابراین

$$\Delta\delta = -p\cos\eta$$

به‌طوری‌که با استفاده از رابطهٔ (۳۹) داریم

$$\Delta\delta = \frac{\rho}{r}\sin Z' \cos\eta$$

و با به کار بستن فرمول (ج) خواهیم یافت

$$\Delta\delta = -\frac{\rho}{r}(\sin\phi' \cos\delta' - \cos\phi' \sin\delta' \cos H')$$

به‌جای δ' و H' در طرف راست این معادله δ و H را می‌گذاریم، آنگاه داریم

$$\delta' - \delta \equiv \Delta\delta = -\frac{\rho}{r}(\sin\phi' \cos\delta - \cos\phi' \sin\delta \cos H) \qquad (۴۲)$$

که تغییر مکان را در میل‌ناشی از اختلاف‌منظر به‌دست می‌دهد.

رصد فاصلهٔ سمت‌الرأسی سیاره در دو رصدخانهٔ دور ازهم واقع بر (یا تقریباً واقع بر) یک‌نصف‌النهار، همانند مورد ماه به تعیین ρ/r می‌انجامد. بدین‌ترتیب فاصلهٔ r سیاره در هنگام رصد را می‌توان پیدا کرد واز مقیاس منظومهٔ سیاره‌ای که‌اینک معلوم است، فاصلهٔ متوسط زمین از خورشید را می‌توان به‌دست‌آورد. در این حالت‌خط پایه، خط راست واصل دو رصدخانه است.

۱۲۳. اختلاف‌منظر خورشید (روش شبانه‌روزی)

اکنون روش دیگری را به نام روش شبانه‌روزی شرح می‌دهیم. اصول آن بدین شرح‌است. سیاره، چندین ساعت پیش از گذر ازنصف‌النهار و دوباره چندین ساعت پس از گذر ازنصف‌النهار، در یک رصدخانه رصد می‌شود. مکان‌راصد نسبت به مرکز زمین و سیاره، دربارهٔ زمانی بین رصدها، به‌سبب چرخش زمین تغییر کرده است واساساً فاصلهٔ بین این دو مکان خط پایهٔ مناسب را برای اندازه‌گیری اختلاف‌منظر سیاره تشکیل می‌دهد.

اینک ستاره‌ای را درنظر می‌گیریم که مکان آن در آسمان نزدیک به سیاره باشد. رصد اختلاف‌منظر، در عمل به‌معنی یافتن اختلاف بین بُعد ظاهری α' سیاره و بُعد α. ستاره، یا اختلاف متناظر آن در میل است. برای سادگی فقط اختلاف اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این اختلاف در بُعد را می‌توان با تلسکوپ نصف‌النهاری یا چشمی ریزسنج‌دار یا، دقیقتر، با عکسبرداری از ناحیه‌ای از آسمان که سیاره در آن است، اندازه‌گرفت. فاصلهٔ بین‌تصویر سیاره و تصویر ستاره‌ای نزدیک به آن به دقت قابل تعیین است و اختلاف $\alpha' - \alpha$. را بااستفاده از اصولی که در فصل ۱۲ شرح داده خواهد شد، می‌توان با دقت زیاد به‌دست آورد.

چون بررسی اختلاف‌منظر هنگامی آغاز می‌شود که سیاره در مقابله یا نزدیک به‌آن باشد، پس سیاره در نیمه شب روی نصف‌النهار یانزدیک به آن خواهد بود. بنابراین دو رشته رصد یادشده چند ساعت پیش و چند ساعت پس از نیمهٔ شب انجام می‌گیرد. این رصدها را به ترتیب رصدهای

شامگاهی و صبحگاهی می‌نامیم. نخست رصدی شامگاهی را درنظر می‌گیریم که در آن اختلاف بُعد سیاره و ستاره، m_1، اندازه‌گیری می‌شود. داریم

$$m_1 = \alpha' - \alpha_\circ$$

حال جابه‌جایی ناشی از اختلاف‌منظر برابر $\alpha' - \alpha$، یعنی $(\alpha' - \alpha_\circ) + (\alpha_\circ - \alpha)$ است. از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۴۱)، داریم

$$m_1 + \alpha_\circ - \alpha = -\frac{\rho}{r}\cos\phi' \sec\delta \sin H$$

یااگر مقادیر α، r، δ، و H را به هنگام رصد شامگاهی به‌ترتیب با α_1، r_1، δ_1، و H_1 نشان دهیم، خواهیم داشت

$$m_1 + \alpha_\circ - \alpha_1 = -\frac{\rho}{r_1}\cos\phi' \sec\delta_1 \sin H_1 \qquad (۴۳)$$

دربارهٔ زمانی بین رصدهای شامگاهی و صبحگاهی بُعد، میل، و فاصلهٔ واقعی سیاره از مرکززمین در تغییرند؛ این کمیتها را به هنگام رصد صبحگاهی α_2، δ_2، r_2، و زاویهٔ ساعتی سیاره را H_2 می‌نامیم. آنگاه معادله‌ای مشابه (۴۳) خواهیم داشت که به صورت زیر است

$$m_2 + \alpha_\circ - \alpha_2 = -\frac{\rho}{r_2}\cos\phi' \sec\delta_2 \sin H_2 \qquad (۴۴)$$

باکاستن معادلهٔ (۴۳) از معادلهٔ (۴۴)، بُعد ستاره، $\alpha_\circ$، حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$m_2 - m_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) - \rho\cos\phi' \left\{ \frac{\sec\delta_2 \sin H_2}{r_2} - \frac{\sec\delta_1 \sin H_1}{r_1} \right\}$$

$(\alpha_2 - \alpha_1)$ افزایش بُعد زمین‌مرکزی سیاره در خلال رصدهاست که از حرکت مداری نسبی زمین و سیاره ناشی می‌شود. این کمیت را می‌شود از یک رشته رصد، مثلاً، رصدهای نصف‌النهاری، به‌دست آورد. همچنین می‌توان، بی‌آنکه دقت کم شود، به‌جای δ_1، δ_2 و r_1، r_2 به‌ترتیب مقادیر متوسطشان δ و r را نوشت. از این‌رو داریم

$$m_2 - m_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{\rho}{r}\cos\phi' \sec\delta(\sin H_2 - \sin H_1) \qquad (۴۵)$$

از آنجا که $(m_2 - m_1)$ بااستفاده از اندازه‌گیریها به‌دست می‌آید و $(\alpha_2 - \alpha_1)$، ρ، ϕ'، δ، H_1، و H_2 همه معلوم فرض می‌شوند، مقدار r را می‌توان به‌کمک رابطهٔ (۴۵) تعیین کرد. بدین‌ترتیب مقیاس منظومهٔ سیاره‌ای مشخص واختلاف‌منظر خورشید نتیجه می‌شود.

برای اینکه روشهایی را که در این بخش و در بخش پیش مورد بررسی‌قرار دادیم به‌طور مؤثر به‌کار گیریم، سیارک اراس باید در مقابله‌ای مساعد باشد. مقابلهٔ مساعدی در سال ۱۹۳۱ـ۱۹۳۰ رخ داد. و واحد نجومیی که بر اساس رصدهای آن‌زمان تعیین شد، سالیان دراز عموماً به‌عنوان صحیح‌ترین مقدار تعیین شدهٔ موجود پذیرفته شد. ولی از سال ۱۹۶۱ با به کار بردن اندازه‌گیریهای راداری دقت بیشتر حاصل شده است. اساس روش تغییر نکرده‌است. با به‌کاربردن دینامیک نظری، به‌ویژه قانون سوم کپلر، ابعاد نسبی مدارهای همهٔ سیاره معلوم است. مقیاس مطلق منظومهٔ سیاره‌ای تنها با اندازه‌گیری یک فاصلهٔ سیاره‌ای معین می‌شود. فاصله‌ای را که به دقت می‌توان بارادار اندازه گرفت فاصله زهره در مقارنهٔ زیرین است. نخستین بار در سال ۱۹۵۹ چنین اندازه‌گیریی انجام شده و نتایج‌مقدماتی بسیار امیدوار کننده‌ای به‌دست آمد. در مقارنهٔ زیرین بعدی در سال ۱۹۶۱ تعدادی اندازه‌گیری مستقل بر روی اختلاف‌منظر خورشید باهمین روش راداری انجام شد. با ادغام همهٔ این اندازه‌گیریها، امروزه بهبود عمده‌ای در دقت واحد نجومی حاصل شده‌است. مقداری که برای اختلاف‌منظر خورشید توسط IAU در سال ۱۹۶۴ پذیرفته شد ۷۹۴ر″۸ است.

۱۲۴. اختلاف‌منظر خورشید (روشهای دیگر)

الف) عبور زهره. برای شرح این روش، که کلاً جنبهٔ تاریخی دارد، به کتاب نجوم کروی مراجعه شود.[1]

ب) روشهای گرانشی. این روشها به‌مقایسهٔ برخی اختلالهای مشاهده شده در حرکت ماه باعبارتهای نظری به‌دست آمده از مکانیک سماوی، که شامل نیم‌محور بزرگ a مدار زمین‌اند، بستگی دارد.

ج) ثابت ابیراهی. در فصل ۸ دیدیم که ثابت ابیراهی κ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\kappa = \frac{2\pi a \operatorname{cosec} 1''}{cT(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

اختلاف‌منظر استوایی متوسط خورشید را با P_0 و شعاع استوایی زمین را با ρ_0 نشان می‌دهیم. آنگاه $\sin P_0 = \rho_0 / a$ یا، با بیان P_0 برحسب ثانیهٔ قوسی داریم

$$P_0 = \frac{\rho_0}{a} \operatorname{cosec} 1''$$

از این‌رو با ترکیب این دو فرمول داریم

$$\kappa P_0 = \frac{2\pi \rho_0 \operatorname{cosec}^2 1''}{cT(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{۴۶}$$

1. Ball, *Spherical Astronomy*, p 312.

دراینجا $\rho_\circ = ۶۳۷۸{,}۱۶\text{km}$، $c = ۲۹۹۷۹۲\text{km/s}$، $T = ۳۱۵۵۸۱۵۰\text{s}$، و $e = ۰{,}۰۱۶۷۲$ است. پس نتیجه می‌گیریم

$$\kappa P_\circ = ۱۸۰{,}۲۴ \qquad (۴۷)$$

که در آن k و $P_\circ$ هر دو برحسب ثانیه‌های قوسی بیان می‌شوند. ثابت ابیراهی، به‌طوری که در بخش ۱۰۹ نشان دادیم، با رصد تعیین می‌شود و بنابراین اختلاف‌منظر خورشید را می‌توان از رابطهٔ (۴۷) به‌دست آورد. ولی، به‌طوری که در آن‌بخش متذکر شدیم، تعیین دقیق κ بسیار مشکل است، و بنابراین روش مورد بحث در اینجا، به نتایج خیلی دقیق منجر نشده است. راه بهتر آن است که‌واحد نجومی را با روشهای بخش قبل تعیین کنیم و سپس κ را ازملاحظات نظری بخش ۱۱۰ به‌دست‌آوردیم.

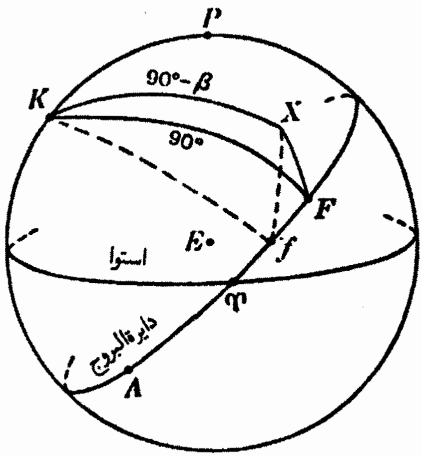
د) روش طیف‌نمایی. اساس این روش به یکی از دستاوردهای طیف‌نمایی نجومی، یعنی، اندازه‌گیری سرعت نزدیک شدن ستاره‌ای به زمین یا دور شدن آن از زمین بستگی دارد.[۱] این سرعت (موسوم به سرعت شعاعی) مستقیماً برحسب واحدهای خطی، مثلاً به‌صورت فلان‌قدر کیلومتر بر ثانیه به‌دست می‌آید. برای سادگی، ستاره‌ای را روی دایرةالبروج درنظر می‌گیریم و برای یک لحظه فرض می‌کنیم که مدار زمین دایره‌ای و سرعت مداری آن ثابت باشد. در زمانی معین در سال سرعت مداری زمین متوجه ستاره می‌شود. به طور کلی ستاره نسبت به خورشید، که آن را ساکن فرض می‌کنیم، حرکت می‌کند. مؤلفهٔ سرعت ستاره در جهت خورشید را با V نشان می‌دهیم. روش طیف‌نمایی سرعت ستاره را نسبت به زمین و بطرف زمین‌معین‌می‌کند. این سرعت برابر V بعلاوهٔ سرعت مداری زمین‌است. شش ماه‌بعد، سرعت‌زمین در خلاف جهت ستاره است، پس با این روش مقدار V منهای سرعت مداری زمین اندازه‌گیری می‌شود. با تفریق نتایج دو اندازه‌گیری، V حذف و سرعت مداری زمین تعیین می‌شود که معمولاً برحسب کیلومتر بر ثانیه است. بنابراین با معلوم بودن دورهٔ گردش در مدار زمین، محیط مدار به دست می‌آید و سرانجام شعاع مدار زمین برحسب کیلومتر از آن نتیجه می‌شود. بدین ترتیب واحد نجومی فاصله و از آن اختلاف‌منظر خورشید تعیین‌می‌شود. اکنون مسئلهٔ کلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که λ و β، در شکل ۸۷، طول وعرض سماوی ستارهٔ X باشند. چنانکه در بخش ۱۰۸ دیدیم، سرعت مداری زمین را می‌توان به دو جزء تجزیه کرد: (الف) h/p در جهت نقطهٔ F روی دایرةالبروج، که در طول سماوی °۹۰ از خورشید عقبتر است (بدین ترتیب طول سماوی F برابر $۹۰ - \odot$ است، که در آن $\odot$ طول سماوی واقعی خورشید است)، و (ب) eh/p در جهت نقطهٔ f روی دایرةالبروج که °۹۰ ازنقطهٔ A جلوتر است و $\overrightarrow{EA}$ موازی جهت حضیض از دیدگاه، خورشید است. نخست سرعت h/p و مؤلفه‌اش در جهت ستارهٔ X را درنظر می‌گیریم.

---

۱. برای شرح اصول و روشهای طیف‌نمایی به‌کتاب زیرمراجعه شود:

A. D. Thackery, *Astronomical Spectroscopy* (Eyre and Spottiswoode, 1961).



شکل۸۷

این مؤلفه $h/p \cos XF$ است. ولی داریم

$$KX = ۹۰° - \beta \text{ و } KF = ۹۰°، F\hat{K}X = \lambda - (\odot - ۹۰°)$$

از این رو بااستفاده‌از فرمول کسینوس داریم

$$\cos XF = \cos\beta \sin(\odot - \lambda)$$

و درنتیجه مؤلفهٔ سرعت h/p در جهت ستاره برابر است با

$$\frac{h}{p}\cos\beta\sin(\odot - \lambda)$$

اینک مؤلفه eh/p سرعت زمین‌که درجهت نقطهٔ f است را درنظر می‌گیریم. مؤلفهٔ eh/p در امتداد EX برابر $eh/p \cos Xf$ است. حال طول سماوی حضیض برابر ϖ و بنابراین طول سماوی f برابر $۹۰° + \varpi$ است. از این‌رو زاویهٔ fKX برابر $(۹۰° + \varpi) - \lambda$ است. با به‌کار بردن فرمول کسینوس می‌یابیم که

$$\cos Xf = -\cos\beta\sin(\varpi - \lambda)$$

و مؤلفهٔ سرعت شعاعی مربوط برابر است با

$$-\frac{eh}{p}\cos\beta\sin(\varpi - \lambda)$$

این‌کمیت برای هر ستارهٔ معین مقدار ثابتی است.

اگر ستاره با سرعت V به‌طرف خورشید (که آن راساکن فرض می‌کنیم) حرکت کند، سرعت نزدیک شدن ستاره به زمین برابر است با

$$V + \frac{h}{p}\cos\beta\sin(\odot - \lambda) - \frac{eh}{p}\cos\beta\sin(\varpi - \lambda)$$

این سرعت شعاعی است که آن را با $-R$ نشان‌می‌دهیم (طبق قرارداد سرعت دور شدن مثبت درنظر گرفته می‌شود). اکنون دو سرعت شعاعی که به فاصلهٔ چندین ماه از یکدیگر اندازه‌گیری شده‌اند را درنظر می‌گیریم. پس داریم

$$\left.\begin{aligned} -R_1 &= V + \frac{h}{p}\cos\beta\{\sin(\odot_1 - \lambda) - e\sin(\varpi - \lambda)\} \\ -R_2 &= V + \frac{h}{p}\cos\beta\{\sin(\odot_2 - \lambda) - e\sin(\varpi - \lambda)\} \end{aligned}\right\} \qquad (۴۸)$$

که در آن $\odot_1$ و $\odot_2$ طولهای سماوی واقعی خورشید در دوتاریخ موردنظرند.

حال باکم کردن این دو از یکدیگر داریم

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{p}\cos\beta\{\sin(\odot_1 - \lambda) - \sin(\odot_2 - \lambda)\} \qquad (۴۹)$$

وقتی $\beta = 0$ و $\odot_1 - \lambda = -(\odot_2 - \lambda)$ برابر 90° یا 270° می‌شود، $R_2 - R_1$ از لحاظ عددی بیشترین مقدار را دارد. در نتیجه مناسبترین شرایط برای یک چنین بررسیی هنگامی موجود است که (الف) ستارهٔ رصد شده روی دایرةالبروج یا نزدیک به آن باشد، (ب) رصدها به فاصلهٔ زمانی شش ماه انجام گیرند، (ج) تاریخهای رصد طوری انتخاب شوند که اختلاف بین طول سماوی خورشید وستاره 90° یا 270° باشد. حال داریم

$$\frac{h}{p} = -\frac{2\pi a}{T(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

که درآن a نیم‌محور بزرگ مدار زمین است. از این‌رو از رابطهٔ (۴۹)، داریم

$$R_2 - R_1 = \frac{2\pi a}{T(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}\cos\beta\{\sin(\odot_1 - \lambda) - \sin(\odot_2 - \lambda)\} \qquad (۵۰)$$

در این معادله $R_2 - R_1$ برحسب کیلومتر برثانیه از رصدهای طیفی به‌دست می‌آید، T دورهٔ گردش مداری برحسب ثانیه است و e، $\odot_1$، $\odot_2$، و λ معلوم‌اند. از این‌رو a برحسب کیلومتر معین و اختلاف‌منظر خورشید پیدا می‌شود.

درگذشته این روش نتایج با ارزشی را فراهم آورد، اماچون دقت این نتایج کمتر از دقت نتایجی بود که براساس اختلاف‌منظر اراس به‌دست آمد، این روش نیز با روش راداری جایگزین شده‌است.

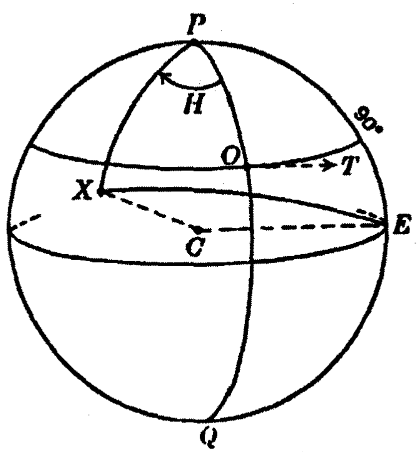
در به‌دست آوردن مقدار a از اندازه‌گیریهای سرعت شعاعی، در فرمول (۵۰)، نکته‌ای را منظور نکردیم. جز در حالتی که ستاره به هنگام رصد روی نصف‌النهار باشد، سرعت خطی رصدخانه که از حرکت شبانه‌روزی ناشی می‌شود مؤلفه‌ای در جهت ستاره خواهد داشت، و سرعت شعاعی رصد شده شامل این مؤلفه نیز خواهد بود. آشکار است که اثر این مؤلفه پیش از اینکه بتوان فرمول (۵۰) را به‌کاربرد، باید برداشته شود. راصد O را روی زمین درنظر می‌گیریم (شکل ۸۸). او به سبب چرخش زمین، با سرعت خطی $۲\pi\rho/\tau\cos\phi$ کیلومتر بر ثانیه در جهت OT (مماس بر مداری در نقطهٔ O) حرکت می‌کند، که در آن ρ شعاع زمین برحسب کیلومتر و τ طول روز نجومی برحسب ثانیهٔ متوسط است (τ برابر ۸۶۱۶۴ است). فرض کنید X نقطه‌ای را روی زمین نشان دهد که ستاره در آن در لحظهٔ رصد در سمت‌الرأس قرار دارد. اگر E نقطهٔ شرق افق باشد، در این صورت CE موازی OT خواهد بود. بنابراین مؤلفهٔ سرعت راصد در امتداد CX برابر است با

$$\frac{۲\pi\rho}{\tau}\cos\phi\cos XE$$

اما اگر H زاویهٔ ساعتی ستاره باشد، $X\hat{P}O = H$ و $X\hat{P}E = H + ۹۰^\circ$ است. از این‌رو بااستفاده از فرمول کسینوس داریم

$$\cos XE = -\cos\delta\sin H$$

فرض کنید R' سرعت شعاعی ستاره (مثبت، برای دور شدن) ناشی از حرکت شبانه‌روزی باشد.



شکل۸۸

پس

$$R' = +\frac{۲\pi\rho}{\tau}\cos\phi\cos\delta\sin H \qquad (۵۱)$$

می‌بینیم که R' به‌ازای H برابر ۰^{h} یا ۱۲^{h}، صفر است. حداکثر مقدار R' برحسب کیلومتر برثانیه برابر $۰٫۴۷\cos\phi$ است. مقداری که هم‌اکنون برای R' پیدا شد باید از سرعت شعاعی رصدشده کم شود تا اثر حرکت شبانه‌روزی حذف شود.

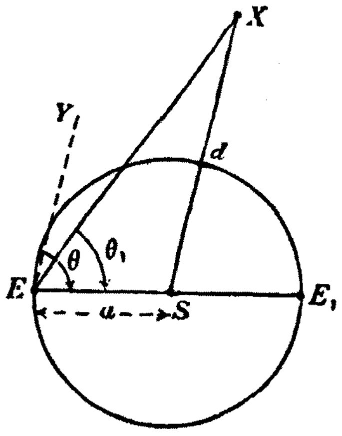
در فرمول (۵۰)، $R_۱$ و $R_۲$ سرعتهای شعاعیی هستند که بدین نحو تصحیح شده‌اند.

۱۲۵. اختلاف‌منظر اختری

اکنون روش بنیادی تعیین فواصل ستاره‌ها را توضیح می‌دهیم. شکل ۸۹ مدار زمین را، که می‌توانیم آن را دایره درنظر بگیریم، نشان می‌دهد؛ S خورشید و a شعاع مدار است. فرض کنید X مکان ستاره‌ای را در فاصلهٔ d از خورشید نشان دهد، و نیزستاره نسبت به خورشید در حال اقامت باشد. فرض کنید که زمین در تاریخی معین در E و شش ماه بعد در $E_۱$ باشد. فاصلهٔ $EE_۱$ خط پایه را به‌وجود می‌آورد که طولش در حدود ۳۰۰ میلیون کیلومتر است و فاصلهٔ ستاره از خورشید بعداً به کمک آن تعیین می‌شود.

EY را موازی SX بگیرید و زاویه‌های SEY و SEX را به ترتیب با θ و $\theta_۱$ نشان دهید. از مثلث SXE، که در آن $S\hat{X}E = \theta - \theta_۱$، داریم

$$\sin(\theta - \theta_۱) = \frac{a}{d}\sin\theta_۱ \qquad (۵۲)$$



شکل ۸۹

Π را چنین تعریف کنید

$$\sin \Pi = \frac{a}{d} \tag{۵۳}$$

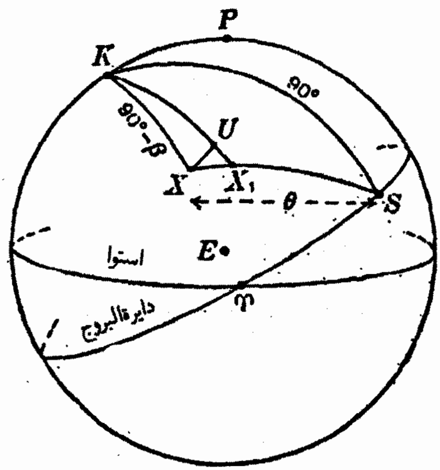
آنگاه Π اختلاف‌منظر ستاره (گاهی اختلاف‌منظر سالانه) نامیده‌می‌شود و زاویه‌ای است در ستاره که شعاع مدار زمین را فرا می‌گیرد. Π برای نزدیکترین ستاره ۷۶ر″۰ است و بدیهی است که می‌توانیم رابطهٔ (۵۲) را باکمک رابطهٔ (۵۳) به‌صورت ساده و به حد کفایت دقیق بنویسیم.

$$\theta - \theta_۱ = \Pi \sin\theta \tag{۵۴}$$

که در آن $(\theta - \theta_۱)$ و Π واحد یکسانی دارند و θ به جای $\theta_۱$ نوشته شده است.

در شکل ۸۹، SX جهت ستاره از دیدگاه خورشید و EX جهت آن از دیدگاه زمین در تاریخ موردنظر است؛ این دو جهت را به‌ترتیب جهتهای خورشیدمرکزی و زمین‌مرکزی می‌نامیم. اگر ستاره در فاصلهٔ بینهایت دور می‌بود آنگاه از زمین در جهت EY، که موازی SX رسم‌شده است، دیده‌می‌شد. θ زاویهٔ بین جهت خورشیدمرکزی ستاره، EY، و جهت خورشید از زمین، ES، است. شکل ۸۹ نشان می‌دهد که جهت زمین مرکزی EX از جهت خورشیدمرکزی EY به‌طرف جهت ES خورشید جابه‌جا می‌شود ونیز این جابه‌جایی در صفحهٔ ESX صورت می‌گیرد.

اکنون شکل ۹۰ که کرهٔ سماوی را به‌مرکز E نمایش می‌دهد را درنظر بگیرید. X مکان ستاره راکه متناظر با جهت خورشیدمرکزی آن است، نشان می‌دهد. S مکان خورشید روی دایرةالبروج در تاریخ موردنظر است. اگر $X_۱$ مکان ستاره روی کرهٔ سماوی متناظر با جهت زمین‌مرکزی آن



شکل ۹۰

باشد، آنگاه X_1 در صفحهٔ E،X، و S است و بنابراین X_1 روی کمان دایرهٔ عظیمهٔ XS است. به‌علاوه X_1 بین X و S است. X و X_1 به‌ترتیب مکان خورشیدمرکزی و مکان زمین‌مرکزی ستاره خوانده می‌شوند.

۱۲۶. اثر اختلاف‌منظر بر طول وعرض سماوی ستاره

فرض کنید λ و β طول وعرض خورشید مرکزی ستاره (این‌کمیتها به مکان X مربوط می‌شوند) و λ_1 و β_1 طول وعرض زمین‌مرکزی آن (مربوط به X_1) را نشان دهند. کمان دایرهٔ صغیرهٔ UX را به موازات دایرةالبروج رسم کنید؛ $\lambda - \lambda_1$ را با $\Delta\lambda$ و $\beta - \beta_1$ را با $\Delta\beta$ نشان دهید. زاویهٔ UXX_1 را با ϕ نشان دهید. آنگاه در مثلث صفحه‌ای بینهایت کوچک UXX_1،داریم

$$UX \equiv \Delta\lambda \cos\beta = XX_1 \cos\phi$$

و

$$UX_1 \equiv -\Delta\beta = XX_1 \sin\phi$$

اکنون با نمادگذاری شکل ۸۹ داریم $XX_1 = \theta - \theta_1$ و $XS = \theta$. از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۵۴) داریم

$$\Delta\lambda \cos\beta = \Pi \sin\theta \cos\phi \tag{۵۵}$$

و

$$\Delta\beta = -\Pi \sin\theta \sin\phi \tag{۵۶}$$

در مثلث KXS داریم $X\hat{K}S = \odot - \lambda$ که درآن $\odot$ طول سماوی واقعی خورشید، یعنی ΥS است؛ همچنین $KS = 90°$،$KX = 90° - \beta$،و $K\hat{X}S = 90° + \phi$.از این‌رو بااستفاده از فرمول سینوس، (ب)، داریم

$$\sin\theta \cos\phi = \sin(\odot - \lambda)$$

و از فرمول (ج)

$$\sin\theta \sin\phi = +\sin\beta \cos(\odot - \lambda)$$

فرمولهای (۵۵) و (۵۶) اکنون به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\Delta\lambda \cos\beta = \Pi \sin(\odot - \lambda) \tag{۵۷}$$

$$\Delta\beta = -\Pi \sin\beta \cos(\odot - \lambda) \tag{۵۸}$$

این معادله‌ها جابه‌جاییهای ستاره که از اختلاف‌منظر ناشی می‌شوند را، در طول و عرض سماوی به‌دست می‌دهند.

۱۲۷. بیضی اختلاف‌منظری

فرض کنید x جابه‌جایی UX موازی دایرةالبروج و y جابه‌جایی $UX_۱$ در عرض سماوی باشد. آنگاه با استفاده از فرمولهای (۵۷) و (۵۸)، داریم

$$x = \Pi \sin(\odot - \lambda)$$
$$y = \Pi \sin\beta \cos(\odot - \lambda)$$

که باحذف $\odot$ خواهیم‌داشت

$$\frac{x^۲}{\Pi^۲} + \frac{y^۲}{\Pi^۲ \sin^۲\beta} = ۱ \tag{۵۹}$$

که معادلهٔ بیضیی است به نام بیضی اختلاف‌منظری. این منحنی مکان هندسی مکان زمین‌مرکزی $X_۱$ در سرتاسر سال است. محور بزرگ این بیضی موازی دایرةالبروج و محور کوچکش عمود بر آن است. ستارهٔ مورد رصد هر چه باشد، نیم‌محور بزرگ این بیضی از عرض سماوی ستاره مستقل و برابر Π است. برای ستاره‌ای روی دایرةالبروج، نیم‌محور کوچک صفر می‌شود و جابه‌جایی اختلاف‌منظری کلاً در دایرةالبروج صورت می‌گیرد.

۱۲۸. اثر اختلاف‌منظر اختری بر بُعد و میل

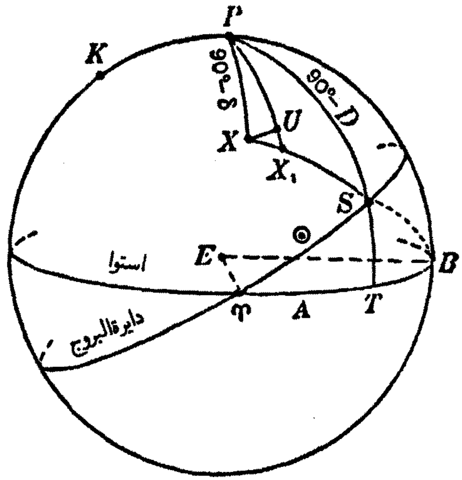
فرض کنید A و D در شکل ۹۱، بُعد و میل خورشید S باشند، همچنین α و δ بُعد و میل X، و $\alpha_۱$ و $\delta_۱$ بُعد و میل $X_۱$ باشند. $\alpha_۱ - \alpha$ را با $\Delta\alpha$ و $\delta_۱ - \delta$ را با $\Delta\delta$ نشان دهید وفرض کنید UX موازی میلی باشد که از X می‌گذرد. $U\hat{X}X_۱$ را با ψ نشان دهید: آنگاه در مثلث صفحه‌ای کوچک $UXX_۱$، داریم

$$UX \equiv \Delta\alpha \cos\delta = XX_۱ \cos\psi$$
$$UX_۱ \equiv -\Delta\delta = XX_۱ \sin\psi$$

مانند قبل $XS = \theta$ و $XX_۱ = \theta - \theta_۱$. بدین ترتیب، با به کار بردن رابطهٔ (۵۴) داریم

$$\Delta\alpha \cos\delta = \Pi \sin\theta \cos\psi \tag{۶۰}$$
$$\Delta\delta = -\Pi \sin\theta \sin\psi \tag{۶۱}$$

اینک در مثلث کروی PXS داریم $PX = ۹۰^\circ - \delta$، $PS = ۹۰^\circ - D$، $X\hat{P}S = A - \alpha$، $XS = \theta$، و $P\hat{X}S = ۹۰^\circ + \psi$.



شکل۹۱

از فرمولهای (ب) و (ج) داریم

$$\sin\theta\cos\psi = \cos D\sin(A-\alpha) \qquad (۶۲)$$

$$-\sin\theta\sin\psi = \sin D\cos\delta - \cos D\sin\delta\cos(A-\alpha) \qquad (۶۳)$$

حال در مثلث ΥST داریم $\Upsilon S = \odot$، $S\hat{\Upsilon}T = \varepsilon$ (میل دایرة‌البروج)، $\Upsilon T = A$، $\Upsilon\hat{T}S = ۹۰°$، و $TS = D$، بااستفادهٔ پیاپی از فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج) داریم

$$\left.\begin{aligned}\cos\odot &= \cos D\cos A\\ \sin\odot\sin\varepsilon &= \sin D\\ \sin\odot\cos\varepsilon &= \cos D\sin A\end{aligned}\right\} \qquad (۶۴)$$

از این‌رو از فرمولهای (۶۰)، (۶۲)، و (۶۴) داریم

$$\Delta\alpha\cos\delta = \Pi(\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\odot - \sin\alpha\cos\odot) \qquad (۶۵)$$

همین‌طور، از فرمولهای (۶۱)، (۶۳)، و (۶۴) نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\delta = \Pi(\cos\delta\sin\varepsilon\sin\odot - \cos\alpha\sin\delta\cos\odot - \sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon\sin\odot) \qquad (۶۶)$$

فرمولهای (۶۵) و (۶۶) را به شرح زیر تغییر می‌دهیم. محورهای قائم استوایی $E\Upsilon$، EB، و EP را در شکل ۹۱، که در آن ΥB برابر ۹۰° است درنظر بگیرید. اگر X، Y، و Z مختصات خورشید برحسب شعاع مدار زمین (که دایره‌ای فرض می‌کنیم) باشند، آنگاه داریم

$$Z = \cos PS،\ Y = \cos BS،\ X = \cos \Upsilon S$$

یا

$$Z = \sin \odot \sin \varepsilon،\ Y = \sin \odot \cos \varepsilon،\ X = \cos \odot$$

با جایگذاری در فرمولهای (۶۵) و (۶۶) داریم

$$\Delta\alpha \cos\delta = \Pi(Y \cos\alpha - X \sin\alpha) \qquad \text{(۶۵ الف)}$$

و

$$\Delta\delta = \Pi(Z \cos\delta - X \cos\alpha \sin\delta - Y \sin\alpha \sin\delta)$$

(۶۶ الف)

مقادیر X، Y، و Z برای همهٔ روزهای سال در تقویمها جدول‌بندی می‌شوند و در نتیجه ضرایب Π از فرمولهای (۶۵الف) و (۶۶الف) براحتی حساب می‌شوند.

فرمولهای (۶۵) و (۶۶) یا (۶۵الف) و (۶۶الف) جابه‌جاییهای ناشی از اختلاف‌منظر در بُعد و میل را به‌دست می‌دهند.

۱۲۹. اندازه‌گیری اختلاف‌منظر اختری

ما فقط کاربرد فرمول (۶۵) را بررسی خواهیم کرد و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\Delta\alpha \cos\delta \equiv (\alpha_1 - \alpha)\cos\delta = F\Pi \qquad \text{(۶۷)}$$

که درآن

$$F = \cos\alpha \cos\varepsilon \sin\odot - \sin\alpha \cos\odot \qquad \text{(۶۸)}$$

یا

$$F = Y \cos\alpha - X \sin\alpha \qquad \text{(۶۸الف)}$$

F عامل اختلاف‌منظر نامیده می‌شود ومقدار آن برای هر ستاره با طول سماوی واقعی خورشید تغییرمی‌کند. چنانچه دیدیم، مقدار آن براحتی محاسبه می‌شود.

فرض کنید یک ستارهٔ ضعیف B، که احتمالاً خیلی دور است، در نزدیکی ستارهٔ A که اندازه‌گیری فاصله‌اش موردنظر است، باشد. بُعد B را α_0 بگیرید. فرض کنید در تاریخی معین

اختلاف بین بُعد زمین‌مرکزی ستارهٔ A، $\alpha_۱$، و بُعد ستارهٔ B، $\alpha_.$، اندازه گرفته شود. فرض کنید $m_۱ = \alpha_۱ - \alpha_.$ است. آنگاه $m_۱ = (\alpha_۱ - \alpha) + (\alpha - \alpha_.)$، که در آن α بُعد خورشیدمرکزی A است. اگر B در فاصلهٔ بینهایت دور درنظر گرفته شود، $\alpha_.$ صرفاً بُعد خورشیدمرکزی B است وکمیت $(\alpha - \alpha_.)$ در تمام سال ثابت خواهد ماند، بابه‌کار بردن فرمول (۶۷) داریم

$$m_۱ \equiv (\alpha_۱ - \alpha) + (\alpha - \alpha_.) = F_۱ \Pi \sec\delta + (\alpha - \alpha_.) \qquad (۶۹)$$

که در آن $F_۱$ عامل اختلاف‌منظر درتاریخ یاد شده در بالاست. فرض کنید چند ماه بعد رصد تکرار شود. آنگاه خواهیم داشت

$$m_۲ = F_۲ \Pi \sec\delta + (\alpha - \alpha_.) \qquad (۷۰)$$

و با حذف $(\alpha - \alpha_.)$ بین (۶۹) و (۷۰) خواهیم یافت

$$m_۲ - m_۱ = (F_۲ - F_۱)\Pi \sec\delta$$

و بنابراین

$$\Pi = \frac{(m_۲ - m_۱)\cos\delta}{F_۲ - F_۱} \qquad (۷۱)$$

اگر خطای e درکمیت اندازه‌گیری شدهٔ $(m_۲ - m_۱)$ وجود داشته باشد، اختلاف‌منظر Π با خطای $e\cos\delta/(F_۲ - F_۱)$ تعیین می‌شود. پس خطا در Π هنگامی حداقل خواهد شد که $F_۲ - F_۱$ بزرگترین مقدار را داشته باشد. این شرط اهمیت مناسبترین وضعیتهایی را که در آنها تعیین اختلاف‌منظر می‌تواند انجام گیرد به ما نشان می‌دهد.

فرض کنید

$$\cos\alpha \cos\varepsilon = g\cos h \qquad (۷۲)$$

و

$$\sin\alpha = g\sin h \qquad (۷۳)$$

آنگاه بااستفاده از فرمول (۶۸)، F را به صورت زیر می‌نویسیم

$$F = g\sin(\odot - h) \qquad (۷۴)$$

واضح است که بزرگترین مقدار عددی F برابر g است و این هنگامی رخ می‌دهد که $\odot - h$ مساوی $۹۰°$ یا $۲۷۰°$ باشد. اینک بااستفاده از فرمولهای (۷۲) و (۷۳)، داریم

$$g^۲ = \cos^۲\alpha\cos^۲\varepsilon + \sin^۲\alpha$$

یا

$$g = (۱ - \sin^۲\varepsilon\cos^۲\alpha)^{\frac{۱}{۲}}$$

که بیشینه مقدار عددی F را به‌دست می‌دهد. همچنین برای h داریم

$$\tan h = \tan \alpha \sec \varepsilon$$

به‌طوری که، برای بیشینه مقدار F، طول سماوی خورشید از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\odot = \tan^{-۱}(\tan \alpha \sec \varepsilon) + ۹۰^\circ \text{ یا } ۲۷۰^\circ$$

بدین‌ترتیب تاریخهایی که عامل اختلاف‌منظر به بزرگترین مقدار عددی خود می‌رسد را می‌توان حساب کرد. اگر بازهٔ بین دو تاریخ شش ماه باشد، آنگاه $F_۱ = -F_۲$ و اختلاف‌منظر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Pi = \frac{(m_۲ - m_۱)\cos\delta}{۲F_۲}$$

روش عملی اندازه‌گیری اختلاف‌منظر اختری این است که در، یا نزدیک به مناسبترین تاریخها که با منظورکردن عامل اختلاف‌منظر تعیین می‌شود، از ناحیه‌ای از آسمان که ستارهٔ مورد اندازه‌گیری («ستارهٔ اختلاف‌منظر») در آن قرار دارد عکسبرداری شود. چندین ستارهٔ ضعیف به‌عنوان «ستاره‌های مقایسه» انتخاب می‌شوند. اندازه‌گیری یک صفحهٔ عکاسی عملاً به تعیین کمیتهای $(\alpha_۱ - \alpha_۰)$ یا $m_۱$ برای چندین ستارهٔ مقایسه، می‌انجامد. همین‌طور، بااستفاده از صفحهٔ عکاسیی که حدود شش ماه بعد گرفته می‌شود می‌توان کمیتهای $(\alpha_۲ - \alpha_۰)$ یا $m_۲$ را به‌دست آورد. سپس فرمول کلی (۷۱) را به‌کار می‌بریم. جزئیات روش عکسبرداری به‌طور گسترده‌تر در فصل ۱۲ بحث خواهد شد. برای اینکه اختلاف‌منظر یک تک ستاره را با اطمینان تعیین کنیم معمولاً لازم است که از حدود بیست صفحهٔ عکاسی، هر یک با سه یا چهار نوردهی مجزا که در تاریخهای مناسب گرفته شده‌اند، استفاده‌کنیم. اختلاف‌منظر نزدیکترین ستاره، قنطورس نزدیک، ″۷۶ر۰ است و با ابزارهای جدید اختلاف‌منظرهایی به کوچکی ″۰۰۵ر۰ با دقت نسبتاً خوب اندازه‌گیری می‌شوند.

۱۳۰. پارسک و سال نوری

فاصلهٔ وابسته به اختلاف‌منظر ″۱ را پارسک می‌نامند. اگر این فاصله d باشد، $\sin ۱'' = a/d$ است و چون $a = ۱٫۴۹۶ \times ۱۰^۸\,\mathrm{km}$ و $\sin ۱'' = ۱/۲۰۶۲۶۵$، در نتیجهٔ پارسک معادل ۲۰۶۲۶۵ واحد نجومی یا $۲۰۶۲۶۵\mathrm{km} \times ۱۰^۸ \times ۱٫۴۹۶$ یا $۳٫۰۸۶ \times ۱۰^{۱۳}\,\mathrm{km}$ است. ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن ″۰۱۰ر۰ است در فاصلهٔ ۱۰۰ پارسک قرار دارد و، به‌طور کلی، اگر اختلاف‌منظر $n/۱۰۰۰$ ثانیهٔ قوسی باشد، فاصلهٔ وابسته به‌آن $۱۰۰۰/n$ پارسک خواهد بود. معمولاً در کتابهای عمومی نجوم، سال نوری به‌عنوان واحد فاصلهٔ ستاره‌ای پذیرفته می‌شود—سال نوری فاصله‌ای است که نور در یک سال می‌پیماید. از مقدار معلوم سرعت نور، به‌سادگی پیدا می‌شود که یک سال نوری برابر $۹٫۴۶ \times ۱۰^{۱۲}\,\mathrm{km}$ است. بدین ترتیب یک پارسک برابر ۳٫۲۶ سال نوری است.

تمرینها

۱. اگر a و b شعاعهای استوایی و قطبی زمین (که کره‌وار فرض می‌شود) باشند، نشان دهید که بزرگترین مقدار زاویهٔ قائم برابر است با

$$\tan^{-1} \frac{a^2 - b^2}{2ab}$$

[نجوم کروی تألیف بال]

۲. نشان دهید که اگر میل و زاویه ساعتی دو جسم به‌ترتیب H، δ و $-\delta$، H باشند، و اختلاف‌منظرهای افقی آنها برابر باشند، اختلاف‌منظرهای آنها در بُعد با هم برابرند.

۳. نشان دهید که اختلاف‌منظر در میل یک سیاره که از مکانی با عرض جغرافیایی ϕ رصد می‌شود درصورتی صفر است که داشته باشیم

$$\tan \phi = \tan \delta \cos H$$

که در آن δ و H به‌ترتیب میل و زاویهٔ ساعتی سیاره‌اند، و زمین کروی فرض می‌شود.

۴. نشان دهید که اگر اختلاف‌منظر افقی، P، جرمی کوچک باشد به‌طوری که بتوان از $\sin^2 P$ چشم پوشید، مسیر شبانه‌روزی ظاهری این جرم که از مکانی در عرض جغرافیایی ϕ دیده می‌شود دایرهٔ صغیره‌ای است به شعاع $90° - \delta + P \sin \phi \cos \delta$، حول نقطه‌ای به‌فاصله $P \cos \phi \sin \delta$ زیر قطب.

۵. با فرض اینکه اختلاف‌منظر افقی خورشید $8''80$ است نشان دهید که مدت زمانی که خورشید، در هر یک از قطبها، زیر افق است به اندازهٔ $7 \operatorname{cosec} \varepsilon$ دقیقه به‌سبب اختلاف‌منظر افزایش می‌یابد، ε زاویهٔ میل دایرةالبروج است.

[دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج، ۱۹۰۳]

۶. با فرض اینکه زمین کروی است، نشان دهید که اختلاف‌منظر، نیم‌قطر ظاهری ماه را به‌نسبت $\sin(z' - \psi) : \sin z'$ افزایش می‌دهد، که در آن z' فاصلهٔ سمت‌الرأسی ظاهری ماه است و ψ زاویه‌ای است در ماه بین راصد و مرکز زمین.

[نجوم کروی تألیف بال]

۷. مکان ظاهری نقطهٔ $S(\alpha, \delta)$ روی کرهٔ سماوی به‌اندازهٔ فاصلهٔ کوچک SS' در امتداد دایرهٔ عظیمه به طرف نقطهٔ $Q(\alpha_0, \delta_0)$ جابه‌جا می‌شود به‌طوری که $SS' = k \sin SQ$، که در آن k

مقدارکوچکی است. نشان دهید که افزایش در بُعد میل چنین‌اند

$$\Delta\alpha = k\sin(\alpha_{\circ} - \alpha)\cos\delta_{\circ}\sec\delta$$
$$\Delta\delta = k\{\cos\delta\sin\delta_{\circ} - \sin\delta\cos\delta_{\circ}\cos(\alpha_{\circ} - \alpha)\}$$

این رابطه‌ها را به‌کار برید و فرمولهای تغییرات مختصات ستاره را که ناشی از اختلاف‌منظر و ابیراهی‌است به دست‌آورید.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۹]

۸. ثابت کنید که کسینوس زاویهٔ بین جهتهای جابه‌جایی یک ستاره در اثر ابیراهی سالانه و اختلاف‌منظر سالانه روی کرهٔ سماوی برابر است با

$$\sin 2(\odot - \lambda)\cos^2\beta[4\sin^2\beta + \cos^4\beta\sin^2 2(\odot - \lambda)]^{-\frac{1}{2}}$$

که در آن β،λ، و $\odot$ به ترتیب عرض و طول سماوی ستاره و طول سماوی خورشیدند.

[آزمون کالج]

۹. قمرفوبوس[1] در صفحهٔ استوای مریخ با دورهٔ گردش $7^{h}\ 40^{m}$ می‌گردد، شعاع مدار آن ۲٫۷۹ برابر شعاع مریخ است. دورهٔ چرخش مریخ $24^{h}\ 40^{m}$ است. نشان دهید که با منظور کردن اختلاف‌منظر، زمان بین طلوع و غروب فوبوس در ایستگاههای روی خط استوا $4^{h}\ 16^{m}$ است، و فوبوس در عرضهای جغرافیایی بالای 69° هرگز دیده نمی‌شود.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی کمبریج، ۱۹۲۵]

۱۰. نشان دهید که اگر سیاره‌ای از محلی مانند P روی سطح زمین، و از نقطهٔ O، مرکز زمین، رصد شود شعاعهای زاویه‌ای آن، S و S'، با فرمول زیر به‌هم مربوط خواهند شد

$$\sin S' = \frac{\sin(\delta' - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)}\sin S$$

که در آن γ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\tan\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\tan\phi'\sec\{\theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')\}$$

و در آن ϕ' عرض زمین‌مرکزی آن محل، θ زمان نجومی لحظهٔ رصد، α' و δ' بُعد و میل سیاره از دیدگاه P و α و δ مختصات آن از دیدگاه O است.

[نجوم‌کروی تألیف بال]

1. Phobos

۱۱. اگر Z سمت‌الرأس، C_1 و C_2 دو سیاره، O نقطهٔ میانی C_1C_2، D فاصلهٔ واقعی C_1C_2، و D' فاصله ظاهری آن باشد، نشان دهید که $D' - D = Q\cos ZR$ که در آن R نقطه‌ای است روی کمان C_1C_2، به‌طوری که $OR = \gamma$، و نیز $Q\cos\gamma = (P_1 + P_2)\sin\frac{1}{2}D$ و $Q\sin\gamma = (P_1 - P_2)\cos\frac{1}{2}D$ است و P_1 و P_2 اختلاف‌منظرهای افقی دو سیاره‌اند.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۸]

۱۲. ستاره‌ای در طول وعرض سماوی λ و β رصد می‌شود، مشاهده می‌شود که طول سماوی آن، به سبب اختلاف‌منظر سالانه به اندازه ۵ر۰″ تغییر می‌کند. حداکثر تغییر در عرض سماوی آن چقدر است، و درچه مواقعی از سال بیشینه‌ها وکمینه‌های عرض و طول سماوی اتفاق می‌افتند؟ فاصلهٔ آن چقدر است؟

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۰]

۱۳. اگر α و δ بُعد و میل ستاره‌ای با اختلاف‌منظر سالانهٔ Π باشند، و p و D زاویهٔ مکانی و فاصلهٔ آن از یک ستارهٔ مجاور که اختلاف‌منظر آن چشم پوشیدنی است، باشد؛ و اگر کمیتهای کمکی ρ، θ، μ، و λ به وسیلهٔ معادله‌های زیرتعریف شوند

$$\rho\cos\theta = \sin\delta' \quad , \quad \lambda\cos\mu = \cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha)$$
$$\rho\sin\theta = \cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha) \quad , \quad \lambda\sin\mu = \rho\cos(\theta + \delta)$$

که در آنها (δ', α') مختصات خورشید است، نشان دهید که اگر مدار زمین دایره فرض شود، تصحیحهای اختلاف‌منظری لازم بر روی زاویهٔ مکانی و فاصلهٔ رصد شده، برای دستیابی به‌مقادیر خورشید مرکزی آنها به‌ترتیب $\Pi\lambda\cos(p + \mu)\operatorname{cosec} D$ و $\Pi\lambda\sin(p + \mu)$ هستند.
[نجوم کروی تألیف بال]

۱۰

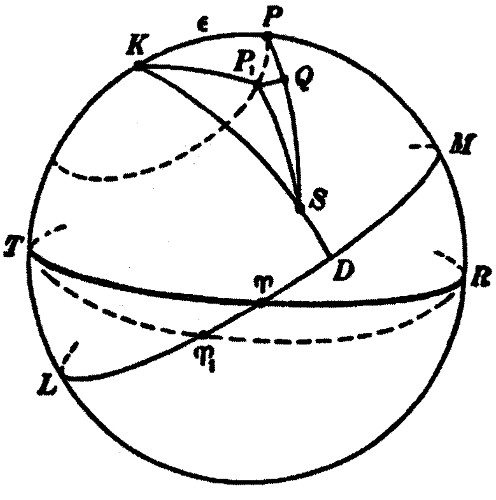
حرکت تقدیمی وناوش

۱۳۱. مقدمه

پدیدهٔ حرکت تقدیمی در قرن دوم پیش از میلاد توسط اِبَرخُس[1] کشف شد. او با مقایسهٔ رصدهای زمان خود و رصدهایی که حدود یک قرن و نیم پیشتر انجام شده بود به این نتیجه رسید که طول سماوی ستاره‌ها با آهنگ $36''$ در سال(که امروزه در حدود $50''$ است) افزایش می‌یابند در حالی که، تا آنجا که او توانست آشکار کند عرض سماوی آنها تغییراتی قطعی نشان نمی‌دهند. دو توضیح ممکن وجود دارد؛ یا همهٔ ستاره‌های بررسی شده در طول سماوی حرکتهای واقعی و یکسان داشتند، که فرضیه‌ای نامحتمل است یایک نقطهٔ بنیادی مرجع، یعنی نقطهٔ اعتدال بهاری Υ که طول سماوی در امتداد دایرةالبروج از آن اندازه‌گیری می‌شود، دیگر نمی‌توانست نقطه‌ای ثابت روی دایرةالبروج در نظرگرفته شود. حال بنابه تعریف، Υ یکی از دو نقطهٔ برخورد دایرةالبروج و استوای سماوی روی کرهٔ سماوی است؛ رصدهای انجام شده تغییراتی در عرضهای سماوی ستاره‌ها نشان ندادند و بنابراین بجا بود که نتیجه‌گیری شود که دایرةالبروج صفحه‌ای ثابت است. طبق فرضیهٔ دوم (که به وسیلهٔ اِبَرخُس اختیار شد)، لازم بود فرض شود که استوا و در نتیجه نقطهٔ اعتدال بهاری طوری حرکت کند که طولهای سماوی ستاره‌ها به اندازه‌ای برطبق رصدها به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابند.

فرض کنید در شکل ۹۲، $L\Upsilon M$ دایرةالبروج ثابت را نمایش دهد و $T\Upsilon R$ استوای سماوی

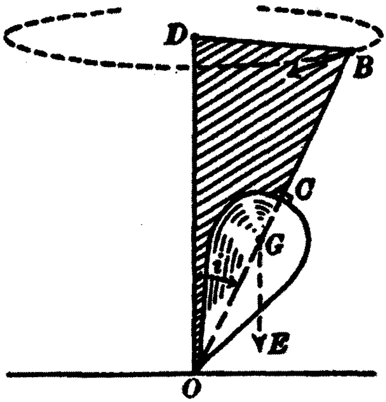
1. Hipparchus



شکل۹۲

در زمان t و $T\Upsilon_1R$ استوای سماوی یک سال بعد را نشان دهند. درطی یک سال اعتدال بهاری از Υ به Υ_1 جابه‌جا شده است و در نتیجه طول سماوی ستارهٔ S از ΥD به $\Upsilon_1 D$، یعنی، حدود $50''$ افزایش یافته است. پسروی یکنواخت Υ در راستای دایرةالبروج را، حرکت تقدیمی نقطهٔ اعتدال می‌نامند. اِبَرخُس در اینجا خود را متقاعد کرد که زاویهٔ میل دایرةالبروج یعنی ε، تغییر محسوسی نداشته است و بنابراین نتیجه شد که حرکت استوا باید طوری باشد که قطب P پیرامون نقطهٔ K روی یک دایرهٔ صغیره از P به P_1 حرکت کرده باشد؛ KP یا KP_1 زاویهٔ میل ε است. از آنجا که KP عمود بر دایرهٔ عظیمهٔ واصل K به Υ است و KP_1 عمود بر دایرهٔ عظیمهٔ $K\Upsilon_1$ است، زاویهٔ PKP_1 برابر کمان $\Upsilon\Upsilon_1$ است. از حرکت معلوم Υ در راستای دایرةالبروج بسادگی دیده می‌شود که قطب P دایرهٔ صغیره‌ای را که قطبش K است در یک دورهٔ تقریباً ۲۶۰۰۰ ساله طی می‌کند.

نخستین بار، نیوتون توضیح دینامیکی صحیح را در مورد حرکت تقدیمی ارائه داد. پدیدهٔ آشنای فرفرهٔ معمولی که حول محورش OC، تحت زاویهٔ i با قائم OD، به‌تندی می‌چرخد و نقطهٔ O آن روی یک میز افقی ناصاف است را در نظر بگیرید (شکل ۹۳). اگر G مرکز گرانش فرفره باشد، سنگینی آن که به‌طور قائم به‌طرف پایین در راستای GE عمل می‌کند گشتاوری حول O دارد که در نگاه اول ظاهراً سبب افزایش زاویهٔ COD (یعنی i) و باعث تماس تقریباً فوری سطحی فرفره با سطح میز می‌شود. اما حرکت به علت چرخش سریع فرفره حول OC، خیلی متفاوت خواهد بود، چون دیده‌می‌شود که محور OC حول خط قائم به طور یکنواخت حرکت می‌کند، به‌طوری‌که هر نقطهٔ B روی محور، حول نقطهٔ D روی قائم OD دایره‌ای را رسم می‌کند، و محور OC یک سطح مخروطی را جاروب می‌کند. محور OC به جای افتادن روی میز در هر لحظه در جهت



شکل ۹۳

عمود بر صفحهٔ OC و OD حرکت می‌کند. این حرکت محور را حرکت تقدیمی می‌نامند. اکنون زمین را در حالی که تحت نیروهای جاذبهٔ خورشید و ماه قرار دارد و به‌تندی حول محور قطبی خود در حال چرخش است در نظر می‌گیریم. اگر زمین به شکل کره بود، یعنی اگر چگالی مواد آن در هر نقطه فقط به فاصلهٔ آن از مرکز بستگی داشت، امتداد جاذبهٔ خورشید و ماه از مرکز زمین می‌گذشت و علتی برای تغییر جهت محور چرخشی وجود نمی‌داشت. اما درواقع زمین یک کره‌وار، و استوا صفحهٔ اصلی آن است و چون خورشید و ماه، جز در دو نوبت در دوره‌های مداریشان که میلهای آنها صفر می‌شوند، در صفحهٔ استوایی واقع نیستند امتداد جاذبه‌های گرانشی آنها از مرکز زمین نمی‌گذرد و بنابراین نیروهای گرانشی به‌دور مرکز گشتاور خواهند داشت. خورشید تنها را در نظر بگیرید. بنابه آنچه گفته شد، گشتاور جاذبه خورشید ظاهراً می‌خواهد صفحهٔ استوایی زمین را به‌طرف دایرةالبروج ببرد، درست مانند مورد فرفره (شکل ۹۳)، که گشتاور سنگینی فرفره به دور نقطهٔ O به‌ظاهر سبب نزدیک شدن محور OC به مسیر می‌شود. در مورد زمین نتیجهٔ دینامیکی واقعی همانند مثال فرفره است؛ محور زمین، در هر لحظه، عمود بر صفحهٔ شامل این محور و خورشید حرکت می‌کند و بنابراین، حرکتی مخروطی حول جهت قطب دایرةالبروج خواهد داشت؛ به‌عبارت دیگر قطب استوا چنانکه در شکل ۹۲ نشان داده شده است دایرهٔ صغیره‌ای حول قطب دایرةالبروج K طی می‌کند و نقطهٔ اعتدال بهاری Υ در راستای دایرةالبروج در جهت $\Upsilon\Upsilon_1$ به‌عقب پس می‌رود. اثر اصلی ماه بر جهت محور زمین ماهیت مشابهی دارد. حرکت رجوعی مرکب نقطهٔ اعتدال بهاری Υ در راستای دایرةالبروج در جهت $\Upsilon\Upsilon_1$ حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی نام دارد، که حدود دوسوم این اثر از ماه و بقیه از خورشید ناشی می‌شود. برخی اثرها با ماهیت دوره‌ای در تعریف حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی منظور نشده‌اند. بعداً (بخش ۱۳۴) به این اثرها اشاره خواهد شد.

۱۳۲. اثر حرکت تقدیمی بر بُعد و میل یک ستاره

حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی در یک سال را با ψ نشان دهید. آنگاه چنانکه دیدیم عرض سماوی یک ستاره بدون تغییر می‌ماند، در حالی که طول سماوی با آهنگ ψ یا $50''$ در سال افزایش می‌یابد. در شکل ۹۲، $\Upsilon\Upsilon_1$ یا $P\hat{K}P_1$ کمیت ψ را نشان می‌دهد. اگر (α,δ) و (α_1,δ_1) مختصات ستارهٔ S، به‌ترتیب نسبت به استوای $T\Upsilon R$ و $T\Upsilon_1 R$ باشند، خواهیم داشت: $PS = 90^\circ - \delta$، $P_1S = 90^\circ - \delta_1$، $K\hat{P}S = 90^\circ + \alpha$، $K\hat{P}_1S = 90^\circ + \alpha_1$، $KS = 90^\circ - \beta$، $P\hat{K}S = 90^\circ - \lambda$، و $P_1\hat{K}S = 90^\circ - \lambda_1$، که در آنها β عرض سماوی ستاره و λ و λ_1 به‌ترتیب طولهای سماوی ستاره نسبت به Υ و Υ_1 هستند. همچنین $KP = KP_1 = \varepsilon$.

نخست مقدار $\delta_1 - \delta$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. کمان دایرهٔ صغیره‌ای P_1Q را عمود بر PS رسم می‌کنیم. ψ را کمیتی کوچک می‌گیریم و بنابراین QS عملاً با P_1S برابر است؛ از این‌رو $QS = 90^\circ - \delta_1$ و $PQ = \delta_1 - \delta$ یا به‌گونه‌ای که ما می‌نویسیم $PQ = \Delta\delta$. اکنون P_1P بر KP عمود است و چون $K\hat{P}Q = 90^\circ + \alpha$ داریم $P_1\hat{P}Q = \alpha$. از این‌رو

$$\Delta\delta \equiv PQ = PP_1 \cos\alpha \tag{۱}$$

حال $P\hat{K}P_1 = \Upsilon\Upsilon_1 = \psi$ و

$$PP_1 = P\hat{K}P_1 \sin\varepsilon = \psi \sin\varepsilon \tag{۲}$$

پس، از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$\delta_1 - \delta \equiv \Delta\delta = \psi \sin\varepsilon \cos\alpha \tag{۳}$$

این معادله تغییر سالانه میل را ناشی از حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی ψ به‌دست می‌دهد.

اینک تغییر بُعد را در نظر می‌گیریم. $\alpha_1 - \alpha$ را با $\Delta\alpha$ نشان می‌دهیم. از مثلث KPS، با استفاده از فرمول (الف) داریم

$$\sin\beta = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\varepsilon \cos\delta \sin\alpha \tag{۴}$$

و از مثلث KP_1S داریم

$$\sin\beta = \cos\varepsilon \sin\delta_1 - \sin\varepsilon \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \tag{۵}$$

در رابطهٔ (۵) جایگذاریهای $\delta_1 = \delta + \Delta\delta$ و $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ را انجام و بسط می‌دهیم؛ با حفظ تنها جمله‌های مرتبهٔ اول در $\Delta\alpha$ و $\Delta\delta$ خواهیم داشت

$$\sin\delta_1 = \sin\delta + \Delta\delta \cos\delta$$

$$\cos\delta_1 = \cos\delta - \Delta\delta \sin\delta$$

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha + \Delta\alpha \cos\alpha$$

به‌طوری‌که رابطهٔ (۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\sin\beta = \cos\varepsilon(\sin\delta + \Delta\delta\cos\delta) - \sin\varepsilon(\cos\delta - \Delta\delta\sin\delta)(\sin\alpha + \Delta\alpha\cos\alpha) \quad (۶)$$

با تفریق رابطهٔ (۴) از رابطهٔ (۶) و چشمپوشی از جملهٔ شامل $\Delta\alpha\cdot\Delta\delta$ خواهیم یافت

$$\sin\varepsilon\cos\alpha\cos\delta\Delta\alpha = (\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\alpha\sin\delta)\Delta\delta$$

اما از رابطهٔ (۳) داریم

$$\Delta\delta = \psi\sin\varepsilon\cos\alpha$$

از این‌رو

$$\alpha_1 - \alpha \equiv \Delta\alpha = \psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta) \quad (۷)$$

به‌کمک معادلهٔ آخر می‌توان تغییر سالانه بُعد را که از حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی ψ ناشی می‌شود به‌دست آورد.

۱۳۳. اثر حرکت تقدیمی بر بُعد و میل (روش دیگر)

مثلث کروی به رأسهای ستاره و قطبهای استوا و دایرةالبروج، یعنی KPS، به‌سبب حرکت تقدیمی پس از یک بازهٔ یک ساله به مثلث KP_1S تغییر می‌کند (شکل ۹۲). بدین ترتیب می‌توانیم فرض کنیم که مثلث دوم با اعمال تغییرات بینهایت کوچک $\Delta\lambda$، $\Delta\alpha$، و $\Delta\delta$ در مقدارهای λ، α، و δ، مربوط به مثلث KPS به‌دست می‌آید. اجزای ε و $\beta - ۹۰$ ثابت باقی می‌مانند. از مثلث KPS، با استفاده از فرمول (الف)، داریم

$$\sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda$$

که با دیفرانسیل‌گیری از آن ، نتیجه می‌شود

$$\cos\delta\Delta\delta = \sin\varepsilon\cos\beta\cos\lambda\Delta\lambda \quad (۸)$$

اما با استفاده از فرمول (ب) می‌توان نوشت

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda \quad (۹)$$

از این‌رو از رابطه‌های (۸) و (۹)، داریم

$$\Delta\delta = \Delta\lambda \sin\varepsilon \cos\alpha \qquad (۱۰)$$

اگر $\Delta\lambda$ تغییر در λ در اثر حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی در یک سال باشد، $\Delta\lambda = \psi$ و فرمول (۳) که تغییر سالانهٔ میل است را به‌دست می‌آوریم.

با دیفرانسیل‌گیری از فرمول (۹)، داریم

$$\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha + \cos\alpha\sin\delta\Delta\delta = \cos\beta\sin\lambda\Delta\lambda$$

و با به‌کار بردن فرمول (۱۰) این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha = \Delta\lambda[\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\cos^۲\alpha\sin\delta] \qquad (۱۱)$$

اما از فرمول (ج) داریم

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$

از این‌رو فرمول (۱۱)، پس از کمی ساده‌کردن، به‌صورت زیر در می‌آید

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda[\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta]$$

که، با نوشتن ψ به‌جای $\Delta\lambda$، فرمول (۷) بخش قبل به‌دست می‌آید.

۱۳۴. ناوش یا رقص محوری

در رابطهٔ(۱۱) بخش قبل، $\Delta\lambda$ نشانگر تغییر طول سماوی نقطهٔ اعتدالی در یک سال است، و با فرض ثابت بودن $\Delta\lambda$ شاید بتوان آن را با مقدار تقریباً $''۵۰$ در سال که به گردش نقطهٔ اعتدال به‌دور دایرةالبروج در دورهٔ تقریب ۲۶۰۰۰ سال منجر می‌شود، متناظر دانست. حال، $\Delta\lambda$ در صورتی ثابت است که میلهای خورشید و ماه ثابت و غیر صفر باقی بمانند، آنگاه جاذبهٔ گرانشی هرکدام بر کره‌وار زمین بدون تغییر است و جهت جاذبه‌ها از مرکز زمین نمی‌گذرد؛ در نتیجه هر جرم جفت نیروی ثابتی بر زمین وارد می‌کند.

نخست مکان در حال تغییر خورشید در دایرةالبروج را در نظر بگیرید. جفت نیرویی که اکنون به کج کردن محور زمین تمایل دارد دارای شکل متغیر $b(۱ - \cos ۲\odot)$ است، که در آن b مقداری ثابت است و تا اندازه‌ای به زاویهٔ میل بستگی دارد. با انتگرال‌گیری، تغییر طول سماوی در t سال به‌صورت زیر است

$$a_۱ t + l\sin ۲\odot \qquad (۱۲)$$

(جمله‌های کوچک حذف شده‌اند)، که در آن ⊙ طول سماوی خورشید و a_1 و l ثابتهایی هستند که مقادیر آنها از نظریهٔ دینامیکی به‌دست می‌آیند. جملهٔ a_1t نشان می‌دهد که ♈ حرکتی پیش‌رونده و یکنواخت در راستای دایرةالبروج دارد و معمولاً جمله‌های با چنین خصوصیاتی را جملات قرنی، و در مسئلهٔ خاص مورد بحث جملات حرکت تقدیمی می‌نامند. بدین ترتیب a_1t نشانگر آن بخش از حرکت تقدیمی در t سال است، که از خورشید ناشی می‌شود.

جملهٔ $l \sin ۲\odot$ مشخصه‌ای دوره‌ای دارد و به‌ازای طول سماوی خورشید برابر °۰، °۹۰، ... ، °۳۶۰ صفر می‌شود. اگر $♈_۲$ نقطهٔ اعتدالی باشد که توسط جملهٔ a_1t تعریف می‌شود و $♈_۳$ نشانگر نقطهٔ اعتدال تعریف شده توسط معادلهٔ (۱۲) باشد، فاصلهٔ $♈_۲$ و $♈_۳$ بین مقادیر $l+$ و $l-$ نوسان می‌کنند و دورهٔ تغییرات مقدار $♈_۲♈_۳$ برابر شش ماه است. جملهٔ $l \sin ۲\odot$ جملهٔ دوره‌ای نامیده می‌شود.

با روش مشابه ماهیت مدار ماه منجر به جمله‌های اصلی به صورت زیر خواهد شد

$$a_۲t + m \sin ۲☾ \qquad (۱۳)$$

که در آن ☾ طول سماوی ماه را مشخص می‌کند.

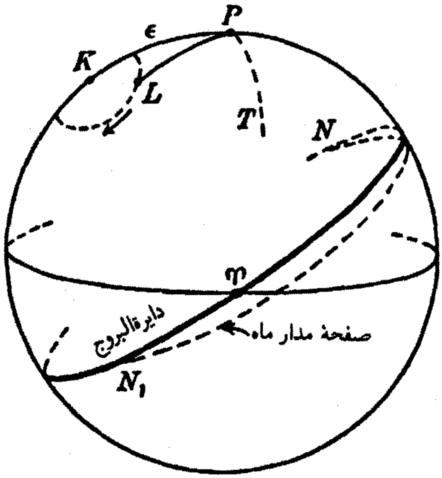
بدین ترتیب با ترکیب اثرهای خورشید وماه، حرکت نقطهٔ اعتدالی می‌تواند، با دخالت دادن استدلال قبلی، با فرمول زیر (فقط جملات اصلی) توصیف شود

$$at + l \sin ۲ \odot + m \sin ۲☾ \qquad (۱۴)$$

در آن a به‌جای $a_1 + a_۲$ نوشته شده است.

در بحث بالا فرض کردیم که صفحهٔ مدار ماه بر دایرةالبروج منطبق است. درواقع صفحهٔ مدار ماه یک زاویه (با i نشان داده می‌شود) ′۹ °۵ با دایرةالبروج می‌سازد و اینک باید اثرات این زاویهٔ میل را بر حرکت نقطهٔ اعتدالی ♈ بررسی کنیم.

در شکل ۹۴ فرض کنید که دایرهٔ نقطه‌چین که دایرةالبروج را در N_1 و N قطع می‌کند نشانگر محل تقاطع صفحهٔ مدار ماه در لحظه‌ای معین با کرهٔ سماوی باشد. قطب صفحهٔ مدار ماه در L خواهد بود به‌طوری که KL زاویهٔ میل i یا ′۹ °۵ است. اگر فعلاً قطب L روی کرهٔ سماوی ثابت فرض شود، اثر جاذبهٔ ماه کره‌وار برزمین کره‌وار سبب خواهد شد که قطب P حول L روی دایرهٔ صغیرهٔ PT به‌شعاع LP حرکت کند. این امر، اولاً، به پس‌روی ♈ روی دایرةالبروج منجر خواهد شد؛ ثانیاً ،فاصلهٔ زاویه‌ای بین K و P ثابت نخواهد ماند، یا به‌عبارت دیگر، زاویهٔ میل دایرةالبروج تغییر خواهد کرد. اما از ملاحظات نظریهٔ دینامیکی، همچنین از رصد، می‌دانیم که صفحهٔ مدار ماه نسبت به دایرةالبروج ثابت نیست، بلکه طوری حرکت می‌کند که قطب L در یک دورهٔ ۱۸٫۶ ساله دایرهٔ صغیره‌ای حول K (در جهت پیکان) می‌پیماید. پس نتیجه می‌گیریم که تا آنجا که به حرکت ماه مربوط می‌شود، پس‌روی نقطهٔ اعتدالی ♈ در امتداد دایرةالبروج از دو بخش تشکیل می‌شود؛ یکی ناشی از اثر ماه است، با فرض اینکه قطب مدار آن بر K منطبق باشد و دیگری به مکان



شکل ۹۴

صفحهٔ مدار ماه نسبت به دایرةالبروج یا به‌گفتهٔ دیگر به‌مکان قطب L، که می‌تواند برحسب طولهای سماوی گرهٔ N_1 یا N و زاویهٔ میل i تعریف شود، بستگی دارد. بدیهی است که دومین بخش دارای مشخصه‌ای دوره‌ای خواهد بود و جملات اصلی عبارت ریاضی آن به‌صورت زیر است

$$b \sin \Omega + c \sin 2\Omega \qquad (15)$$

که در آن Ω طول سماوی گرهٔ صعودی ماه، یعنی N، است و b و c ثابتهایی هستند که مقادیر آنها از نظریهٔ دینامیکی به‌دست می‌آید.

با ترکیب عبارتهای (۱۴) و (۱۵) عبارت زیر را خواهیم داشت که حرکت نقطهٔ اعتدالی را روی دایرةالبروج به‌دست می‌دهد

$$at + b \sin \Omega + c \sin 2\Omega + l \sin 2 \odot + m \sin 2 ☾ \qquad (16)$$

جملهٔ اول، at، حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی در طول سماوی را به‌دست می‌دهد و سایر جمله‌ها، که همه مشخصهٔ دوره‌ای دارند، اثر ناوش بر طول سماوی را معین می‌کنند. اثر ناوش بر طول سماوی با $\Delta\psi$ نشان داده می‌شود.

در گزاره‌های این بخش تنها جمله‌های مهمتر ناوش در طول سماوی ذکر شده‌اند؛ بعداً به‌طور کاملتر به اینها رجوع خواهیم کرد.

۱۳۵. ناوش در میل

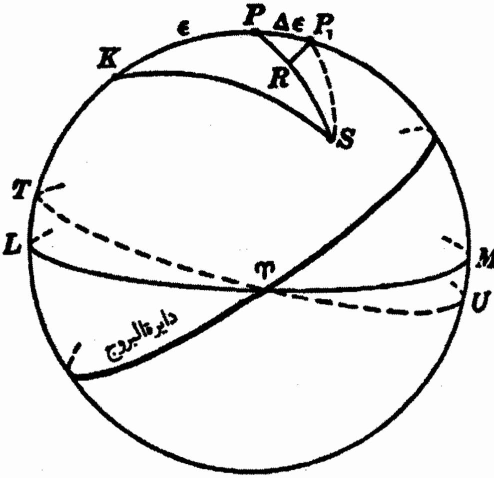
در بخش پیش نشان دادیم که چون قطب صفحهٔ مدار ماه بر قطب دایرةالبروج منطبق نیست، میل ثابت نخواهد ماند. از آنجا که حرکت L حول K دوره‌ای است، تغییرات در میل نیز دوره‌ای است. اگر $\Delta\varepsilon$ تغییر در میل را نشان دهد، معلوم می‌شود که جملات اصلی به‌صورت زیرند (یک جمله ناشی از خورشید در نظر گرفته می‌شود)

$$\Delta\varepsilon = b_1 \cos\Omega + c_1 \cos 2\Omega + l_1 \cos 2\odot + m_1 \cos 2☾ \qquad (17)$$

این جملات، که دوره‌ای‌اند ناوش در میل را به‌دست می‌دهند.

اینک تغییرات بُعد و میل یک ستاره را که تنها از تغییر $\Delta\varepsilon$ در میل ناشی می‌شود، با فرض ثابت بودن دایرةالبروج، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۹۵، فرض کنید P قطب استوای $L\Upsilon M$ باشد که تنها حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی در آن منظور شده است و P_1 قطب استوای $T\Upsilon U$، که ناوش در میل نیز در آن منظور شده است. سرانجام فرض کنید مختصات ستارهٔ S نسبت به این دو استوا (α, δ) و (α_1, δ_1) باشند. آنگاه داریم $PS = 90° - \delta$، $P_1S = 90° - \delta_1$، $KP = \varepsilon$، $KP_1 = \varepsilon + \Delta\varepsilon$، $K\hat{P}S = 90° + \alpha$ ، $K\hat{P}_1S = 90° + \alpha_1$، $P\hat{K}S = 90° - \lambda$ و $KS = 90° - \beta$. از P_1 کمان دایرهٔ صغیره‌ای P_1R را عمود بر PS رسم می‌کنیم. از آنجا که $\Delta\varepsilon$ کمیت کوچکی است، P_1S و RS عملاً باهم برابرند و بنابراین PR برابر $\delta_1 - \delta$ است که آن را با $\Delta\delta$ نشان خواهیم داد. همچنین $P_1\hat{P}R = 90° - \alpha$ است. بنابراین

$$PR = PP_1 \cos P_1PR$$



شکل ۹۵

یا

$$\delta_1 - \delta \equiv \Delta\delta = \Delta\varepsilon \sin\alpha \qquad (18)$$

از مثلث KPS ، با استفاده از فرمول سینوس (ب)، داریم

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta \qquad (19)$$

و از مثلث KP_1S با روش مشابه داریم

$$\cos\alpha_1\cos\delta_1 = \cos\lambda\cos\beta \qquad (20)$$

$\alpha_1 - \alpha$ را با $\Delta\alpha$ نشان می‌دهیم. آنگاه با بسط ساده و با حفظ توانهای اول $\Delta\alpha$ و $\Delta\delta$، با دقت کافی به‌دست می‌آید

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha - \Delta\alpha\sin\alpha$$
$$\cos\delta_1 = \cos\delta - \Delta\delta\sin\delta$$

از این‌رو از معادله (۲۰) با چشمپوشی از جملهٔ حاصلضرب $\Delta\alpha\Delta\delta$، خواهیم داشت

$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta - \Delta\delta\cos\alpha\sin\delta - \Delta\alpha\sin\alpha\cos\delta$$

و با به‌کار بردن فرمول (۱۹) داریم

$$\Delta\alpha\sin\alpha\cos\delta = -\Delta\delta\cos\alpha\sin\delta \qquad (21)$$

اما $\Delta\delta$ از فرمول (۱۸) به‌دست می‌آید؛ از این‌رو داریم

$$\Delta\alpha = -\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta \qquad (22)$$

فرمولهای (۱۸) و (۲۲) تغییرات میل و بُعد یک ستاره را تنها در اثر ناوش محوری $\Delta\varepsilon$ میل به‌دست می‌دهند. همچنین این فرمولها بسادگی به‌روش زیر نیز به‌دست می‌آیند. از مثلث KPS، با استفاده از فرمول (الف) داریم

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$

مختصات λ و β را، چون ناوش در میل بر آنها اثر نمی‌گذارد، ثابت می‌گیریم؛ با دیفرانسیل‌گیری خواهیم یافت

$$\cos\delta\Delta\delta = -\Delta\varepsilon(\sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda)$$

اما با استفاده از (ج) داریم

$$-\cos\delta\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$

از این‌رو

$$\Delta\delta = \Delta\varepsilon\sin\alpha$$

که همان معادلهٔ (۱۸) است.

همچنین با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۱۹) می‌یابیم

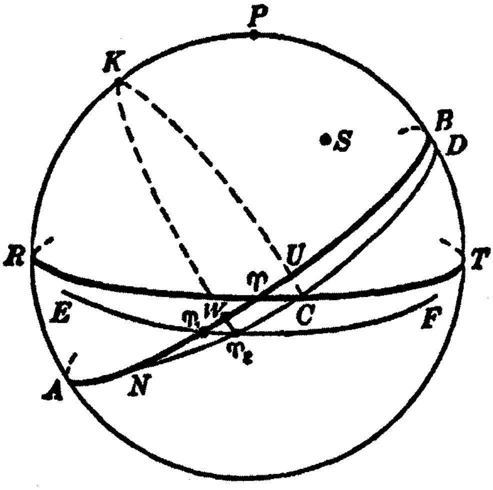
$$\sin\alpha\cos\delta\Delta\alpha + \cos\alpha\sin\delta\Delta\delta = \text{۰}$$

که با فرمول (۲۱) یکی است و فرمول برایند (۲۲) مانند قبل به‌دست می‌آید.

۱۳۶. حرکت تقدیمی سیاره‌ای

تا اینجا فرض شد که دایرةالبروج صفحه‌ای ثابت است. نخست معنی «صفحهٔ ثابت» را بررسی می‌کنیم. کرهٔ سماوی را به‌مرکز خورشید در نظر می‌گیریم حال اگر دو نقطهٔ دلخواه که دو طرف یک قطر نباشند روی کره سماوی داشته باشیم تنها یک دایرهٔ عظیمه می‌توان رسم کرد که از آنها بگذارد. بنابراین می‌توانیم دایرهٔ عظیمه را برحسب آن دو نقطه مشخص کنیم. فرض کنید این دو نقطه روی کرهٔ سماوی با دو ستاره، که برای سادگی در فاصلهٔ بینهایت دور فرض می‌شوند، معین شوند. این فرضها ضروریت منظور کردن ابیراهی، اختلاف‌منظر، حرکت خاصه را از میان برمی‌دارند. آنگاه می‌توانیم بگوییم که صفحهٔ شامل خورشید و این دو ستاره نسبت به خورشید صفحه‌ای ثابت است. در این معنا، دایرةالبروج صفحه‌ای کاملاً ثابت نیست.

دایرةالبروج $A\Upsilon B$ (شکل ۹۶) ۱۹۰۰٫۰ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بر صفحه‌ای ثابت، بنابه تعریف بالا، منطبق باشد. بدین ترتیب دایرةالبروج $A\Upsilon B$ را یک صفحهٔ ثابت مرجع در نظر می‌گیریم، و آن را «دایرةالبروج ثابت» می‌نامیم. فرض خواهیم کرد که یک سال بعد دایرةالبروج NCD باشد، که دایرةالبروج ثابت را در N قطع کرده است. این تغییر مکان دایرةالبروج به‌وسیلهٔ جاذبهٔ گرانشی سیارات حاصل می‌شود و باعث تغییرات قرنی میل، و در طول سماوی گرهٔ N صفحهٔ مدار زمین، نسبت به صفحهٔ ثابت مرجع می‌شود. تنها به‌این‌علت، نقطهٔ اعتدالی در مدت یک سال از Υ به C جابه‌جا می‌شود؛ این حرکت نقطهٔ اعتدالی به حرکت تقدیمی سیاره‌ای موسوم است، که با λ' نشان خواهیم داد. مقدار λ' تقریباً ۱۲٫″۰ در سال است. از شکل ۹۶ آشکار است که اثر حرکت تقدیمی سیاره‌ای، کاهش بُعدهای همهٔ ستاره‌ها به یک مقدار سالانه، یعنی λ' ، است بدون اینکه تغییری در میلهای آنها بدهد. همچنین از شکل ۹۶ واضح است که به‌همین علت تغییری جزئی در میل حاصل می‌شود که آن را به آهنگ تقریباً ۴۷٫″۰ در سال کاهش می‌دهد.



شکل ۹۶

درواقع دریافته‌اند که تغییر مکان نقطهٔ اعتدالی Υ در t سال، در امتداد استوا در جهت ΥC، با دقت کافی با فرمولی از نوع $ct + dt^{2}$ داده می‌شود و تغییر میل با عبارت مشابهی داده می‌شود. ضریبها در هر مورد خیلی کوچک‌اند.

اکنون اثر ترکیبی حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی و سیاره‌ای را در نظر می‌گیریم. در شکل ۹۶ $A\Upsilon B$ و $R\Upsilon T$ دایرةالبروج و استوای ۱۹۰۰٫۰ هستند. یک سال بعد این صفحات بنیادی NCD و $E\Upsilon_{1}\Upsilon_{2}$ هستند. $\Upsilon\Upsilon_{1}$ حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی در یک سال است. چون همهٔ تغییرات در صفحات بنیادی کوچک‌اند، با دقت کافی، خواهیم داشت $\Upsilon_{1}\Upsilon_{2} = \Upsilon C$. $\Upsilon_{1}\Upsilon_{2}$ حرکت تقدیمی سیاره‌ای در یک سال است. کمانهای دایرهٔ عظیمه K را به C و K را به Υ_{2} وصل می‌کنیم تا دایرةالبروج ثابت را به‌ترتیب در U و W قطع کنند. آنگاه ΥU یا $\Upsilon_{1}W$ حرکت تقدیمی سیاره‌ای در طول سماوی است. مقدار آن $\lambda' \cos\varepsilon$ در سال است.

اکنون حرکت تقدیمی عام را تعریف می‌کنیم. نقطهٔ اعتدال (هنوز بدون در نظر گرفتن ناوش) در یک سال از Υ به Υ_{2} می‌رود. طول سماوی Υ_{2} را نسبت به دایرةالبروج ثابت $A\Upsilon B$ و نقطهٔ اعتدال Υ، را می‌توان به‌صورت $p - {}^{\circ}360$ نوشت که البته p کمیتی کوچک است. کمیت p را حرکت تقدیمی عام (در طول سماوی) می‌نامند. وقتی با مکانهای صفحات بنیادیی سروکار داریم که زمان کوتاهی، مثلاً چند سال، از هم فاصله دارند حرکت تقدیمی عام می‌تواند به‌طور هندسی با دقت زیاد نشان داده شود. ما بازهٔ یک سال را که قبلاً برای آن شکل ۹۶ به‌کار برده شد در نظر خواهیم گرفت. پس حرکت تقدیمی عام در طول سماوی برابر ΥW، یعنی $\Upsilon\Upsilon_{1} - \Upsilon_{1}W$، یا حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی منهای حرکت تقدیمی سیاره‌ای در طول سماوی است.

چنانکه دیدیم، حرکت تقدیمی سیاره‌ای تغییری جزئی در میل ایجاد می‌کند.

اینک عبارتهای عددی حرکت تقدیمی عام p و میل برای t سال بعد از ۱۹۰۰ داده می‌شود. اولین آنها به‌صورت

$$p = ۵۰''\text{،}۲۵۶۴ + ۰''\text{،}۰۰۰۲۲۲t \quad \text{در سال}$$

و دومی به‌صورت

$$\varepsilon = ۲۳^\circ ۲۷' ۸''\text{،}۲۶ - ۰''\text{،}۴۶۸۵t$$

است.

۱۳۷. استوای میانگین و مختصات میانگین یک ستاره

در شکل ۹۶، $A\Upsilon B$ و $R\Upsilon T$ به‌ترتیب دایرةالبروج و استوا در آغاز سال ۱۹۰۰ (که معمولاً به‌صورت ۱۹۰۰٫۰ نوشته می‌شود) هستند؛ اینها صفحات ثابت مرجع در نظر گرفته می‌شوند. بعد از یک سال حرکتهای تقدیمی قمری‌ـخورشیدی و سیاره‌ای تغییراتی در دایرةالبروج و استوا ایجاد می‌کنند به‌طوری که این صفحات برای سال ۱۹۰۱٫۰، $N\Upsilon_۲ D$ و $E\Upsilon_۲ F$ می‌شوند. $N\Upsilon_۲ D$ و $E\Upsilon_۲ F$ دایرةالبروج میانگین و استوای میانگین سال ۱۹۰۱٫۰ تعریف می‌شوند. همچنین نقطهٔ اعتدالی $\Upsilon_۲$ نقطهٔ اعتدالی میانگین سال ۱۹۰۱٫۰ است.

در این فصل ملاحضات کلی حرکت خاصهٔ یک ستاره را کنار می‌گذاریم و موقتاً مکان میانگین آن را تعریف می‌کنیم. مکان میانگین یک ستاره در هر زمان، مکان آن روی کرهٔ سماوی به مرکز خورشید، و نسبت به استوا و نقطهٔ اعتدال میانگین در آن زمان است. در عمل مکان میانگین تنها نسبت به نقطهٔ اعتدال در آغاز سال در نظر گرفته می‌شود. باید در نظر داشت که در این تعریف ناوش، ابیراهی، اختلاف‌منظر سالانه (موقتاً) حرکت خاصهٔ ستاره مورد توجه قرار نگرفته‌اند.

اینک مسئلهٔ یافتن مکان میانگین یک ستاره برای سال ۱۹۰۱٫۰ را، با در دست داشتن مکان میانگین برای سال ۱۹۰۰٫۰ بررسی می‌کنیم. فرض کنید (α, δ) مختصات ستاره نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال سال ۱۹۰۰٫۰ باشد، و $(\alpha_۱, \delta_۱)$ مختصات آن نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال سال ۱۹۰۱٫۰. طول سماوی ستاره در یک سال، به‌سبب حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی به‌اندازهٔ ψ افزایش یافته است. فرمولهای (۷) و (۳) را می‌توان مستقیماً برای به‌دست آوردن تغییرات بُعد ومیل که از این علت ناشی می‌شوند به‌کار برد. با بازنویسی این فرمولها داریم

$$\alpha_۱ - \alpha = \psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \sin\alpha \tan\delta) \qquad (۲۳)$$

$$\delta_۱ - \delta = \psi \sin\varepsilon \cos\alpha \qquad (۲۴)$$

اما حرکت تقدیمی سیاره‌ای بُعد را در یک سال به‌اندازهٔ λ' ($\Upsilon_1\Upsilon_2$ در شکل ۹۶) کاهش می‌دهد، از این رو عبارت کامل برای $\alpha_1 - \alpha$ چنین است

$$\alpha_1 - \alpha = (\psi\cos\varepsilon - \lambda') + \psi\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta \qquad (۲۵)$$

حرکت تقدیمی سیاره‌ای میل را تغییر نمی‌دهد، و از این‌رو معادلهٔ (۲۴) معادلهٔ کامل تغییر میل است.

اکنون قرار می‌دهیم

$$m = \psi\cos\varepsilon - \lambda' \quad ; \quad n = \psi\sin\varepsilon \qquad (۲۶)$$

می‌رسیم به

$$\alpha_1 - \alpha = m + n\sin\alpha\tan\delta \qquad (۲۷)$$

$$\delta_1 - \delta = n\cos\alpha \qquad (۲۸)$$

کمیتهای m و n توابعی هستند از ثابتهای حرکتهای تقدیمی و میل، که همه به‌کندی با زمان تغییر می‌کنند؛ در نتیجه m و n نیز به‌کندی با زمان تغییر می‌کنند.

جدول زیر مقدارهای m و n را در چند عصر ارائه می‌دهد [1] (از آنجا که n در هر دو فرمول (۲۷) و (۲۸) وجود دارد، مقدار آن در هر دو مقیاس زمانی و زاویه‌ای جدول‌بندی شده است).

جدول. مقادیر m و n

	m	n	n
۱۸۰۰	۳^s،۰۷۰۴۸	۱^s،۳۳۷۰۳	$۲۰''$،۰۵۵۴
۱۸۵۰	۳^s،۰۷۱۴۱	۱^s،۳۳۶۷۴	$۲۰''$،۰۵۱۱
۱۹۰۰	۳^s،۰۷۲۳۴	۱^s،۳۳۶۴۶	$۲۰''$،۰۴۶۸
۱۹۵۰	۳^s،۰۷۳۲۷	۱^s،۳۳۶۱۷	$۲۰''$،۰۴۲۶

معادله‌های (۲۷) و (۲۸) را با در نظر گرفتن سال به‌عنوان واحد و نوشتن $d\alpha/dt$ و $d\delta/dt$ به‌جای آهنگهای تغییر مختصات α و δ ناشی از حرکت تقدیمی، باز می‌نویسیم

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n\sin\alpha\tan\delta \qquad (۲۹)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n\cos\alpha \qquad (۳۰)$$

مثال. با داشتن مختصات میانگین αجبار برای عصر ۱۹۰۰،۰ که عبارت‌اند از

$$\alpha = ۵^h۴۹^m۴۵^s،۴۸۱ \quad , \quad \delta = +۷^\circ۲۳'۱۸''،۴۱$$

1. Newcomb, *Spherical Astronomy*, p. 406.

بُعد میانگین آن را برای عصر ۱۹۰۲٫۰ محاسبه کنید.

نخست حرکت تقدیمی سالانه را به‌وسیلهٔ فرمول (۲۹) محاسبه می‌کنیم. از جدول بالا، برای ۱۹۰۰٫۰، داریم

$$m = ۳^s٫۰۷۲۳, n = ۱^s٫۳۳۶۵$$

$$\log n = ۰٫۱۲۵۹۷$$

$$\log \sin \alpha = \bar{۱}٫۹۹۹۵۶$$

$$\log \tan \delta = \frac{\bar{۱}٫۱۱۲۸۴}{\bar{۱}٫۲۳۸۳۷}$$

از این‌رو $n \sin \alpha \tan \delta = ۰^s٫۱۷۳۱$

همچنین $m = ۳^s٫۰۷۲۳$

بنابراین $\dfrac{d\alpha}{dt} = ۳^s٫۲۴۵۴$

بدین ترتیب حرکت تقدیمی سالانه بُعد برای این ستاره $+۳^s٫۲۴۵۴$ است، و در دو سال تغییر بُعد ناشی از حرکت تقدیمی برابر $+۶^s٫۴۹۱$ است. از این‌رو بُعد میانگین نسبت به نقطهٔ اعتدال میانگین ۱۹۰۲٫۰ با اضافه کردن $۶^s٫۴۹۱$ به بُعد میانگین ۱۹۰۰٫۰ به‌دست می‌آید، و نتیجه عبارت است از

$$\text{بُعد میانگین } (۱۹۰۲٫۰) = ۵^h۴۹^m۵۱^s٫۹۷۲$$

با روشی مشابه، میل میانگین برای ۱۹۰۲٫۰ برابر $+۷°۲۳'۲۰''٫۲۰$ به‌دست می‌آید.

۱۳۸. تغییر قرنی

روشی که در مثال بالا برگزیدیم فقط هنگامی صحیح است که بازهٔ زمانی چند سالی بیش نباشد. باید توجه شود که در طرف راست (۲۹) و (۳۰) مقادیر α و δ و نیز m و n کمیتهای متغیری هستند و باید این واقعیت، هنگامی که بازهٔ زمانی، مثلاً بیش از ۵ تا ۱۰ سال باشد درنظر گرفته شود. بنابه تعریف، آهنگ تغییر $d\alpha/dt$ در هر قرن را تغییر قرنی بُعد می‌گویند. حال α تابعی از t (که برحسب سال، مثلاً از ۱۹۰۰٫۰ اندازه‌گیری می‌شود) است و اگر $\alpha_۰$، $d\alpha_۰/dt$، و $d^۲\alpha_۰/dt^۲$ مقادیر مربوط به بُعد، $d\alpha/dt$ و $d^۲\alpha/dt^۲$ در $t = ۰$، مثلاً برای مبدأ زمانی ۱۹۰۰٫۰، باشند، آنگاه α را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\alpha = \alpha_۰ + t\frac{d\alpha_۰}{dt} + \frac{t^۲}{۲}\frac{d^۲\alpha_۰}{dt^۲} \qquad (۳۱)$$

اگر s تغییر قرنی بُعد را نشان دهد، $d^۲\alpha_./dt^۲$ آهنگ تغییر (در سال) $d\alpha_./dt$ است، یعنی $d^۲\alpha_./dt^۲ = s/۱۰۰$. از این‌رو از معادلهٔ (۳۱)، داریم

$$\alpha - \alpha_. = t\left(\frac{d\alpha_.}{dt} + \frac{st}{۲۰۰}\right) \qquad (۳۲)$$

در حالت کلی، داریم

$$\begin{aligned} \frac{s}{۱۰۰} \equiv \frac{d^۲\alpha}{dt^۲} &= \frac{d}{dt}(m + n\sin\alpha\tan\delta) \\ &= \frac{dm}{dt} + \sin\alpha\tan\delta\frac{dn}{dt} + n\cos\alpha\tan\delta\frac{d\alpha}{dt} \\ &\qquad + n\sin\alpha\sec^۲\delta\frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

ازمقادیر m معلوم می‌شود که، برای ۱۹۰۰٫۰، آهنگ تغییر سالانهٔ m چنین است

$$\frac{dm}{dt} = +۰^s٫۰۰۰۰۱۸۶$$

و به‌طور مشابه

$$\frac{dn}{dt} = -۰''٫۰۰۰۰۸۵۳$$

همچنین $d\delta/dt, d\alpha/dt$ در معادلهٔ (۳۳)، به‌وسیلهٔ معادله‌های (۲۹) و (۳۰) داده می‌شوند. بنابراین مقدار s را می‌توان محاسبه کرد.

فرمول نظیر (۳۲) برای میل چنین است

$$\delta - \delta_. = t\left(\frac{d\delta_.}{dt} + \frac{s_۱ t}{۲۰۰}\right) \qquad (۳۴)$$

که در آن $s_۱$ تغییر قرنی میل است.

در فهرستهای اصلی، کمیتهای موسوم به تغییر سالانهٔ بُعد و میل برای هر ستاره جدول‌بندی می‌شوند. مثلاً ، تغییر سالانهٔ بُعد مقدار $d\alpha/dt$ ناشی از حرکت تقدیمی سالانه است (برای عصر مناسب، مثلاً ۱۹۰۰٫۰)، به‌انضمام اثر حرکت خاصه، که تا کنون از بحث ما مستثنی بوده است. تغییرات قرنی s و $s_۱$ نیز داده می‌شوند.

مثال. محاسبهٔ مختصات میانگین εـ هشتک برای ۱۹۵۰٫۰ مطلوب است. مختصات میانگین $(\alpha_., \delta_.)$ برای ۱۹۰۰٫۰ چنین‌اند

$$۲۲^h۸^m۴۹^s٫۳۰ \quad \text{و} \quad -۸۰^\circ۵۶'۱۴''٫۷$$

تغییرات سالانهٔ بُعد ومیل برای ۱۹۰۰٫۰ از فهرست عام مقدماتی باس، به‌ترتیب چنین‌اند

$$۶^{s}٫۹۹۳۱ \quad \text{و} \quad +۱۷''٫۶۹۹$$

و تغییرات قرنی s و $s_۱$ چنین‌اند

$$s = -۰^{s}٫۵۹۲۶ \quad \text{و} \quad s_۱ = +۰''٫۴۶۸$$

بنابراین، اگر α بُعد میانگین برای ۱۹۵۰٫۰ باشد با استفاده از فرمول (۳۲) داریم

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_{\circ} &= ۵۰(۶^{s}٫۹۹۳۱ - \frac{۵۰}{۲۰۰} \times ۰^{s}٫۵۹۲۶) \\ &= ۵۰(۶^{s}٫۹۹۳۱ - ۰^{s}٫۱۴۸۱) \\ &= ۵^{m}۴۲^{s}٫۲۵ \end{aligned}$$

از این‌رو بُعد میانگین برای ۱۹۵۰٫۰ چنین است

$$۲۲^{h}۱۴^{m}۳۱^{s}٫۵۵ \quad \text{یا} \quad (۲۲^{h}۸^{m}۴۹^{s}٫۳۰ + ۵^{m}۴۲^{s}٫۲۵)$$

همچنین با استفاده از فرمول (۳۴) داریم

$$\begin{aligned} \delta - \delta_{\circ} &= ۵۰(۱۷''٫۶۹۹ + \frac{۵۰}{۲۰۰} \times ۰''٫۴۶۸) \\ &= +۱۴'۵۰''٫۸ \end{aligned}$$

از این‌رو میل میانگین برای ۱۹۵۰٫۰ چنین است

$$-۸۰^{\circ}۴۱'۲۳''٫۹ \quad \text{یا} \quad (-۸۰^{\circ}۵۶'۱۴''٫۷ + ۱۴'۵۰''٫۸)$$

۱۳۹. استوای واقعی و مختصات واقعی یک ستاره

برای اینکه آگاهیهای خود را مرتب کنیم، زمان و تاریخ ویژه‌ای، مثلاً ساعت ۱۵ زمان جهانی روز ۹ مارس ۱۹۳۱ را در نظر می‌گیریم. استوای واقعی، دایرةالبروج واقعی و نقطهٔ اعتدال واقعی به‌ترتیب استوا، دایرةالبروج، و نقطهٔ اعتدال در این لحظه‌اند و مکانهای آنها نسبت به یک دایرةالبروج ثابت، مثلاً دایرةالبروج ۱۹۰۰٫۰، به مقدار حرکت تقدیمی و ناوشی بستگی دارند که برای بازهٔ زمانی بین ۱۹۰۰٫۰ و لحظهٔمورد سؤال محاسبه شده است. مکان واقعی یک ستاره در این لحظه به‌صورت مکان آن روی کرهٔ سماوی به مرکز خورشید، نسبت به نقطهٔ اعتدال واقعی و استوای آن تاریخ تعریف می‌شود.

فرض کنید که مختصات میانگین ستاره‌ای برای ۱۹۰۰٫۰ با $(\alpha_\circ, \delta_\circ)$، مختصات میانگین برای ۱۹۳۱٫۰ با (α, δ)، و مختصات واقعی برای ساعت ۱۵ زمان جهانی روز ۹ مارس ۱۹۳۱ با (α_1, δ_1) نشان داده شوند. همچنین فرض کنید که τ کسری از سال بین آغاز سال و تاریخ مورد نظر را نشان دهد. در این‌صورت، اگر تغییر در بُعد ستاره را ناشی از حرکت تقدیمی و ناوش در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\alpha_1 - \alpha_\circ = \text{سال}(\text{۳۱} + \tau)\text{حرکت تقدیمی در بُعد برای} + \text{اثر ناوش بر بُعد}$$

می‌نویسیم

$$\alpha_1 - \alpha_\circ = (\alpha - \alpha_\circ) + (\alpha_1 - \alpha)$$

حال $\alpha_1 - \alpha$ برابر است با اختلاف بین بُعد واقعی ستاره، نسبت به نقطهٔ اعتدال واقعی آن تاریخ، و بُعد میانگین نسبت به نقطهٔ اعتدال میانگین آغاز سال (۱۹۳۱٫۰)؛ این تفاضل از کمیتهای زیر تشکیل شده است:

الف) حرکت تقدیمی در بُعد برای بازهٔ τ،

ب) اثرناوش بر بُعد برای تاریخ مورد نظر.

$\alpha - \alpha_\circ$ نیز اختلاف مختصات میانگین برای ۱۹۳۱٫۰ و ۱۹۰۰٫۰ است. در نتیجه قانون کلی زیر به‌دست می‌آید:

برای به‌دست آوردن مختصات واقعی ستاره در $(\text{۱۹۳۱} + \tau)$ با داشتن مختصات میانگین مثلاً برای، ۱۹۰۰٫۰، اول مختصات میانگین برای ۱۹۳۱٫۰ را (با روش توضیح داده شده در صفحهٔ ۲۷۴ محاسبه می‌کنیم و دوم (الف) حرکت تقدیمی برای بازهٔ τ، و (ب) اثر ناوش را محاسبه می‌کنیم. اثرات ناشی از (الف) و (ب) بر بُعد را به‌ترتیب با $\Delta\alpha_1$ و $\Delta\alpha_2$ نشان می‌دهیم. آنگاه با استفاده از فرمول (۲۷) که تغییر سالانهٔ ناشی از حرکت تقدیمی و در بُعد را معین می‌کند، برای بازهٔ τ داریم

$$\Delta\alpha_1 = \tau(m + n\sin\alpha\tan\delta)$$

سپس ناوش را در نظر می‌گیریم. چنانکه دیدیم، ناوش سبب تغییر طول سماوی یک ستاره و نیز میل دایرةالبروج می‌شود. فرض می‌کنیم $\Delta\psi$ و $\Delta\varepsilon$ به‌ترتیب اثر ناوش بر طول سماوی و بر میل را برای تاریخ مورد نظر نشان دهند. $\Delta\psi$ از جملات دوره‌ای فرمول (۱۶) تشکیل شده است و $\Delta\varepsilon$ از فرمول (۱۷) حاصل می‌شود. تغییر بُعد ناشی از $\Delta\psi$ با استفاده از رابطهٔ (۷) داده می‌شود

$$\Delta\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)$$

و تغییر بُعد ناشی از $\Delta\varepsilon$ از رابطهٔ (۲۲) به‌دست می‌آید

$$-\Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta$$

از این‌رو تغییر کل $\Delta\alpha_۲$ بُعد ناشی از ناوش به‌صورت زیر است

$$\Delta\alpha_۲ = \Delta\psi(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta) - \Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta$$

اما $\alpha_۱ - \alpha$ (اختلاف بین بُعد واقعی در تاریخ مورد نظر و بُعد میانگین برای آغاز سال) برابر $\Delta\alpha_۱ + \Delta\alpha_۲$ است؛ از این‌رو می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha_۱ - \alpha = (m\tau + \Delta\psi\cos\varepsilon) + \sin\alpha\tan\delta(n\tau + \Delta\psi\sin\varepsilon) - \Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta \quad (۳۵)$$

ولی m و n با استفاده از (۲۶)، برحسب حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی ψ و حرکت تقدیمی سیاره‌ای λ' طبق رابطه‌های زیر تعریف‌می‌شوند

$$m = \psi\cos\varepsilon - \lambda' \quad , \quad n = \psi\sin\varepsilon \qquad (۳۶)$$

با جایگذاری عبارتهای $\cos\varepsilon$ و $\sin\varepsilon$ از (۳۶) در (۳۵)، خواهیم یافت

$$\alpha_۱ - \alpha = (\tau + \frac{\Delta\psi}{\psi})(m + n\sin\alpha\tan\delta) + \frac{\lambda'\Delta\psi}{\psi} - \Delta\varepsilon\cos\alpha\tan\delta \quad (۳۷)$$

حال فرض می‌کنیم همهٔ کمیتهای وابسته به حرکت تقدیمی و ناوش برحسب ثانیهٔ قوسی بیان شوند، و می‌نویسیم

$$\left.\begin{array}{l} A = n(\tau + \dfrac{\Delta\psi}{\psi}); \quad B = -\Delta\varepsilon; \quad E = \dfrac{\lambda'\Delta\psi}{۱۵\psi} \\ a = \dfrac{۱}{۱۵}(\dfrac{m}{n} + \sin\alpha\tan\delta); \quad b = \dfrac{۱}{۱۵}\cos\alpha\tan\delta \end{array}\right\} \qquad (۳۸)$$

در این صورت داریم

$$\alpha_۱ - \alpha = A\alpha + Bb + E \qquad (۳۹)$$

که در آن طرف دست راست به‌طور یک دست برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود.

کمیتهای A، B، و E، در (۳۹)، از بازهٔ معلوم τ، ناوشهای $\Delta\psi$، $\Delta\varepsilon$ مربوط به تاریخ مورد نظر، و حرکتهای تقدیمی قمری‌ـخورشیدی و سیاره‌ای ψ و λ' محاسبه می‌شوند و از مکان ستاره مستقل‌اند. این کمیتها به اعداد بسلی روز معروف‌اند و برای هر روز سال در تقویمها جدول‌بندی می‌شوند.

کمیتهای a و b به‌مقادیر m و n و مختصات ستاره بستگی دارند؛ و به‌کندی با زمان تغییر می‌کنند، اما در بازه‌های زمانی بلند می‌توانند ثابتهای وابسته به‌یک ستارهٔ خاص تلقی شوند.

با روشی مشابه، فرمول قیاسی میل را می‌نویسیم

$$\delta_1 - \delta = (\tau + \frac{\Delta\psi}{\psi})n\cos\alpha + \Delta\varepsilon\sin\alpha \qquad (۴۰)$$

که در آن فرض بر این است که n و $\Delta\varepsilon$ برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شوند.

می‌نویسیم

$$a' = \cos\alpha, \qquad b' = -\sin\alpha \qquad (۴۱)$$

آنگاه، با به‌کاربردن مقادیر A و B در رابطهٔ (۳۸)، داریم

$$\delta_1 - \delta = Aa' + Bb' \qquad (۴۲)$$

معادلات (۳۹) و (۴۲) محاسبهٔ مختصات واقعی (α_1, δ_1) در هر تاریخی را، در صورت داشتن مختصات میانگین (α, δ) در آغاز سال امکانپذیر می‌سازند.

همین معادلات امکان حل مسئله مکمل، یعنی محاسبهٔ مختصات میانگین برای آغاز سال از مختصات واقعی تاریخ مورد نظر، را فراهم می‌آورند.

باید به‌یاد داشته باشیم که در این بحث اثرات حرکت خاصهٔ ستاره بر مختصات را کنارگذاشته‌ایم.

محاسبات را می‌توان به‌روش دیگری نیز انجام داد. با استفاده از معادلات (۳۸) و (۳۹)، می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{15}mA/n + E + \frac{1}{15}A\sin\alpha\tan\delta + \frac{1}{15}B\cos\alpha\tan\delta \qquad (۴۳)$$

در این معادله اعداد روز A و B برحسب ثانیهٔ قوسی‌اند، در حالی که E برحسب ثانیهٔ زمانی بیان می‌شود که با جدول‌بندی آنها درتقویمها مطابقت دارد.

همچنین از (۴۱) و (۴۲) داریم

$$\delta_1 - \delta = A\cos\alpha - B\sin\alpha \qquad (۴۴)$$

فرض می‌کنیم f، g، و G چنین تعریف می‌شوند

$$f = \frac{1}{15}mA/n + E; \qquad g\sin G = B, \qquad g\cos G = A \qquad (۴۵)$$

در این صورت

$$\alpha_1 - \alpha = f + \frac{1}{15}g\sin(G + \alpha)\tan\delta \qquad (۴۶)$$

$$\delta_1 - \delta = g\cos(G + \alpha) \qquad (۴۷)$$

در این فرمولها، g برحسب ثانیهٔ قوسی و f برحسب ثانیهٔ زمانی داده می‌شوند.

کمیات f، g، و G را اعداد مستقل روز می‌نامند و مانند اعداد بسلی روز، در تقویمها برای هر روز جدول‌بندی می‌شوند.

۱۴۰. مکان ظاهری یک ستاره

دیدیم که مکان واقعی یک ستاره در هر لحظه مکان آن روی کرهٔ سماوی، به‌مرکز خورشید، نسبت به نقطهٔ اعتدال واقعی و استوا در آن لحظه است. بدین ترتیب مکان واقعی از اثرهای ابیراهی و اختلاف‌منظر سالانه مستقل است. مکان ظاهری یک ستاره یا جرم آسمانی دیگر در هر لحظه مکان آن روی کرهٔ سماوی، به مرکز مرکز زمین، نسبت به نقطهٔ اعتدال واقعی و استوای واقعی در آن لحظه تعریف می‌شود. بدین‌ترتیب داریم:

مکان ظاهری = مکان واقعی بعلاوه تصحیحات ناشی از ابیراهی و اختلاف‌منظر سالانه

فرمولهای (۲۵) و (۲۶) فصل ۸ تصحیحهای بُعد و میل یک ستاره ناشی از ابیراهی را، به‌ترتیب به‌صورت $Cc + Dd$ و $Cc' + Dd'$ به‌دست می‌دهند. تصحیحهای ناشی از اختلاف‌منظر سالانه درمعادله‌های (۶۵ الف) و (۶۶ الف) فصل ۹ داده می‌شوند. این فرمولها را با کمی دست کاری می‌توان به‌صورت مشابهی نوشت. در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$\text{بُعد ظاهری} = \text{بُعد واقعی} + (C + \Pi Y)c + (D - \Pi X)d \qquad (۴۸)$$

$$\text{میل ظاهری} = \text{میل واقعی} + (C + \Pi Y)\, c'' + (D - \Pi X)d' \qquad (۴۹)$$

۱۴۱. یافتن مکان ظاهری از مکان میانگین (یا برعکس)

فرض می‌کنیم که $(\alpha_\cdot, \delta_\cdot)$ مختصات میانگین یک ستاره برای عصری مانند ۱۹۰۰٫۰ باشد. می‌خواهیم مختصات ظاهری (α', δ') را، مثلاً، در ساعت ۱۵ زمان جهانی روز ۹ مارس ۱۹۳۱، تعیین کنیم.

نخست باید مختصات میانگین (α, δ) برای نقطهٔ اعتدال میانگین ۱۹۳۱٫۰ را با استفاده از اصول بخش ۱۳۸ محاسبه کرد. با به‌کاربردن فرمولهای (۳۹)، (۴۲)، (۴۸)، و (۴۹) خواهیم داشت

$$\alpha' - \alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E \qquad (۵۰)$$

$$\delta' - \delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' \qquad (۵۱)$$

این فرمولها اختلاف بین مختصات ظاهری در تاریخ مورد نظر و مختصات میانگین برای آغاز سال را به‌دست می‌دهند. کمیتهایی که با حروف بزرگ نشان داده شده‌اند اعداد بسلی روز و کمیتهای با حروف کوچک ثابتهای بسلی ستاره‌اند. برای دقت بیشتر، کمیتهای اخیر باید برای سال مورد نظر محاسبه شوند، زیرا این کمیتها دقیقاً ثابت نیستند، و به‌کندی تغییر می‌کنند. محاسبات را می‌توان به‌وسیلهٔ فرمولهای (۴۶) و (۴۷) بخش ۱۳۹ و (۲۷) و (۲۸) فصل ۸ برحسب اعداد مستقل روز

به‌صورت زیر نیز انجام داد

$$\alpha' - \alpha = f + \frac{۱}{۱۵} g \sin(G+\alpha)\tan\delta + \frac{۱}{۱۵} h \sin(H+\alpha)\sec\delta \qquad (۵۲)$$

$$\delta' - \delta = g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta \qquad (۵۳)$$

هنگامی که مختصات ظاهری درتاریخ موردنظر معلوم باشند این فرمولها را می‌توان برای به‌دست آوردن مختصات میانگین در آغاز سال نیز به‌کار برد.

۱۴۲. فهرست‌بندی ستاره‌ها

فرض کنید ستاره‌ای با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری در ساعت ۱۵ زمان جهانی روز ۹ مارس ۱۹۳۱ رصد شود. پس از اینکه تصحیحهای دستگاهی و شکست جوی را اعمال کردیم بُعد ظاهری α' و میل ظاهری δ' مربوط به نقطهٔ اعتدال واقعی آن تاریخ را به‌دست می‌آوریم.

با به‌کار بردن فرمولهای (۵۰) و (۵۱) یا (۵۲) و (۵۳) مختصات میانگین α و δ ستاره نسبت به آغاز سال ۱۹۳۱ به‌دست می‌آیند. برای فهرست‌بندی، بهتر است که مکانهای ستاره‌ها به‌نقطهٔ اعتدال میانگین عصر مشترکی، چون ۱۹۰۰٫۰ ارجاع شوند. در این صورت مختصات میانگین $(\alpha_\circ, \delta_\circ)$ نسبت به این عصر مشترک، طبق روش بخش ۱۳۸ به‌دست می‌آیند.

۱۴۳. مقدارهای عددی اثر ناوش بر طول سماوی و بر میل دایرةالبروج

در عبارت (۱۶) ماهیت جمله‌های اثر ناوش بر طول سماوی، $\Delta\psi$، را نشان دادیم ـ آنها جمله‌های دوره‌ای در عبارت (۱۶) هستند ـ و در عبارت (۱۷) جمله‌های اصلی اثر ناوش بر میل، $\Delta\varepsilon$، نشان داده شدند. ضریبهای b و $b_۱$ کاملاً ثابت نیستند و به‌کندی با زمان تغییر می‌کنند. اگر T بازهٔ زمانی برحسب قرن باشد و از ۱۹۰۰٫۰ شمرده شود، عبارتهای (۱۶)ـناوش تنهاـ و (۱۷) شکلهای عددی زیر را به‌خود می‌گیرند

$$\Delta\psi = -(۱۷''٫۲۳۳ + ۰''٫۰۱۷T)\sin\Omega + ۰''٫۲۰۹\sin ۲\Omega - ۱''٫۲۷۳\sin ۲L - ۰''٫۲۰۴\sin ۲☾ \qquad (۵۴)$$

$$\Delta\varepsilon = (۹''٫۲۱۰ + ۰''٫۰۰۱T)\cos\Omega - ۰''٫۰۹۰\cos ۲\Omega + ۰''٫۵۵۲\cos ۲L + ۰''٫۰۸۸\cos ۲☾ \qquad (۵۵)$$

که در آنها طول سماوی میانگین خورشید یعنی L به‌جای طول سماوی واقعی خورشید یعنی $\odot$ نوشته شده است.

جمله‌های بسیار دیگری که در (۵۴)، و (۵۵) نیستند در محاسبهٔ اعداد بسلی روز و اعداد مستقل روز، به‌کار برده می‌شوند. عبارتهای کامل $\Delta\psi$ و $\Delta\varepsilon$ در متمم توضیحی به زیج نجومی داده شده‌اند.

ضریب $\cos\Omega$ در عبارت (۵۵) برای هر عصری ثابت ناوش خوانده می‌شود.

تمرینها

۱. اگر P و K قطبهای استوا و دایرةالبروج، و X ستاره‌ای باشد به‌طوری که $P\hat{X}K$ برابر 90° باشد، نشان دهید که X حرکت تقدیمی در بود ندارد.

۲. میل و بُعد فعلی نقطه‌ای ازکرهٔ سماوی که در ۱۲۰ سال قبل از میلاد (زمانی که حرکت تقدیمی کشف شد) نخستین نقطهٔ حمل بود را تخمین بزنید.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۱]

۳. مختصات استوای ستاره‌ای واقع بر دایرةالبروج (α, δ) و طول سماوی آن λ است. اگر $\Delta\alpha$، $\Delta\delta$، و $\Delta\lambda$ به‌ترتیب حرکت تقدیمی سالانه در بُعد، میل، و طول سماوی باشند، ثابت کنید

$$\Delta\alpha \cot\alpha \cos^2\delta = \Delta\delta \cot\delta = \Delta\lambda \cot\lambda$$

[آزمون ورودی کالج]

۴. دو ستاره در تاریخ معین به‌طور همزمان در 0^h زمان نجومی به‌افق مکانی در عرض جغرافیایی $\cot^{-1}(\sqrt{3}\sin\varepsilon)$ می‌آیند. نشان دهید همان دو ستاره در تاریخی بعد، هنگامی که حرکت تقدیمی به 60° رسید، به‌طور همزمان در 6^h زمان نجومی به افق مکانی در عرض جغرافیایی $\varepsilon + \cot^{-1}(2\tan\varepsilon)$ می‌آیند، ε میل دایرةالبروج است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۹]

۵. نشان دهید ستاره‌ای جنوبی با میل $-\delta$ و بُعد α می‌بایست در عصری از ایستگاهی در عرض جغرافیایی شمالی ϕ قابل رؤیت باشد، به‌شرطی که

$$\sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha < \cos(\phi - \varepsilon)$$

که در آن ε میل دایرةالبروج است. فرمولهایی را برای محاسبهٔ تاریخی که در آن ستاره از رؤیت افتاد (یا خواهد افتاد) به‌دست آورید.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۲۶]

۶. نشان دهید که زاویهٔ مکانی θ یک ستارهٔ دوتایی غیر قطبی به سبب حرکت تقدیمی با آهنگ $d\theta/dt = +1{,}4\sin\alpha\sec\delta\sin\varepsilon$ درجه در قرن تغییر می‌کند.

مکان تقریبی ستارهٔ دوتایی ۲۲ دجاجه (19^h22^m; $+27°30'$) است. زاویه‌های مکانی رصد شده (افزایش یابنده) برای عصرهای میانگین ۱۸۳۰٫۰ و ۱۹۰۵٫۰ به‌ترتیب ۲۵۶°٫۰ و ۳۱۱°٫۸ هستند. تغییر واقعی در زاویهٔ مکانی چقدر است؟

[لندن، ۱۹۲۸]

۷. بازهٔ بین دو عبور پیاپی ستاره‌ای از نصف‌النهار معین، به‌سبب حرکت تقدیمی، با یک روز نجومی میانگین فرق دارد. اگر $\beta + \varepsilon > 90°$ نشان دهید این تفاوت در صورتی که طول سماوی λ ستاره از رابطهٔ

$$\sin\lambda = \cot\beta\cot\varepsilon$$

به‌دست آید صفر می‌شود. β عرض سماوی ستاره و ε میل دایرةالبروج است.

۸. مختصات ستاره‌ای برای ۱۹۰۰٫۰ عبارت‌اند از: $16^h56^m12^s$: $\delta = +82°12'$. نشان دهید که حرکت تقدیمی سالانه در بُعد برای ۱۹۰۰٫۰ برابر $-6^s{,}30$ است.

۹. ثابت کنید که تبدیل کامل از مکان واقعی به مکان ظاهری یک ستاره به نحوی است که در معادله‌های (۴۸) و (۴۹) گزارش شده‌اند.

۱۰. دو ستاره به‌طور همزمان در مکانی در عرض جغرافیایی ϕ در زمان نجومی محلی T طلوع می‌کنند. با فرض اینکه حرکتهای خاصه این دو ستاره چشم‌پوشیدنی باشند، نشان دهید که آنها دوباره پس از سپری شدن کسر زیر از دورهٔ حرکت تقدیمی، به‌طور همزمان طلوع خواهند کرد

$$\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(\sin\varepsilon\tan\phi\sec T + \cos\varepsilon\tan T)$$

و نیز نشان دهید که زمان نجومی محلی طلوع آنها در آن هنگام $\pi - T$ خواهد بود.

[گلاسگو، ۱۹۷۲]

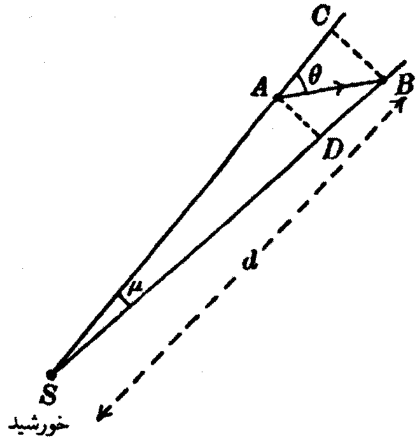
۱۱

حرکتهای خاصهٔ ستاره‌ها

۱۴۴. تعریف حرکت خاصه

هالی در سال ۱۷۱۸ کشف کرد که از زمان ابرخس تا آن هنگام، مکان بعضی از ستاره‌های درخشان نسبت به زمینهٔ اختری کلی به طوری محسوس تغییر کرده بود. برای لحظه‌ای فرض کنید همهٔ ستاره‌ها جز ستارهٔ سماک رامح در فاصلهٔ بینهایت از خورشید قرار داشته باشند و بنابراین سیستمی معین از نقطه‌های ثابت مرجع درست کنند. مقایسهٔ رصدهای سماک رامح، که در روزگاران ابرخس و هالی انجام شده بودند، قطعاً نشان داد که این ستاره در فاصلهٔ زمانی حدود بیست قرن به اندازهٔ زاویهٔ قابل ملاحظه‌ای، در حدود یک درجه، نسبت به ستاره‌های همسایهٔ نزدیک روی کرهٔ سماوی، حرکت کرده بود. این نشان داد که سماک رامح نسبت به خورشید یک سرعت فضایی معین داشته، و فاصلهٔ آن متناهی بوده است.

شکل ۹۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید S مکان خورشید باشد و ستاره‌ای با یک سرعت فضایی نسبت به خورشید در مدت یک سال از A به B برود. مسیر ستاره در فضا را می‌توان خط راست فرض کرد؛ هیچ رصدی در طی بازهٔ درازی چون دو قرن به قطعیت نشان نداده است که مسیر ستاره‌ای تکی به مقداری قابل اندازه‌گیری از خط راست منحرف شده باشد. زاویهٔ ASB را با μ نشان دهید. پس μ زاویه‌ای است که ستاره در طی یک سال از دید ما جابه‌جا شده است و حرکت خاصه ستاره نامیده می‌شود که معمولاً برحسب ثانیهٔ قوسی در سال اندازه‌گیری می‌شود.



شکل۹۷

۱۴۵. رابطهٔ بین حرکت خاصه، سرعت مماسی، و اختلاف‌منظر

فرض کنید BC و DA در شکل ۹۷، عمود بر SA رسم شوند. فاصلهٔ ستاره از خورشید SB را d (به کیلومتر) و زاویهٔ بین جهت حرکت آن AB و جهت SA را θ بگیرید. سرعت خطی ستاره از A به B را (برحسب کیلومتر بر ثانیه) با V نشان می‌دهیم، به طوری که اگر n تعداد ثانیه در یک سال باشد، داریم

$$AB = nV\text{km} \qquad (1)$$

فرض کنید v مؤلفهٔ سرعت خطی در جهت عمود بر SA (خط دید) باشد؛ v را سرعت مماسی یا سرعت عرضی می‌گویند و برحسب کیلومتر بر ثانیه بیان می‌شود. مقدار μ برای ستاره‌ای که بزرگترین حرکت خاصه را دارد در حدود ″۱۰ در سال است، و در هر مورد می‌توانیم $A\hat{S}B$ را زاویه‌ای خیلی کوچک فرض کنیم به طوری که، در شکل ۹۷، AD و CB را می‌توان مساوی گرفت؛ همچنین AD یا CB را می‌توانیم فاصلهٔ طی شده عمود بر SA در یک سال بگیریم، به طوری که

$$AD = CB = nv \text{ km} \qquad (2)$$

حال $CB = d\sin\mu$، بنابراین، اگر μ برحسب ثانیهٔ قوسی باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$CB = d\mu \sin 1'' \qquad (3)$$

فرض کنید Π اختلاف‌منظر سالانهٔ ستاره و a شعاع مدار زمین برحسب کیلومتر باشد؛ آنگاه فاصلهٔ d و اختلاف‌منظر Π طبق فرمول زیر (فصل ۹)

$$\sin \Pi = \frac{a}{d}$$

یا، چون Π کوچک است، طبق

$$d = \frac{a}{\Pi \sin 1''} \tag{۴}$$

به هم مربوط‌اند که در آن Π برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود. از این‌رو از روابط (۲)، (۳)، و (۴) داریم

$$v = \frac{\mu a}{n\Pi} \tag{۵}$$

اکنون مقادیر a و n را در رابطهٔ (۵) قرار می‌دهیم؛ $a = ۱۴۹٫۶ \times ۱۰^۶ \mathrm{km}$ و $n = ۳۱٫۵۶ \times ۱۰^۶$ (تعداد ثانیه‌ها دریک سال). نتیجه می‌گیریم

$$v = ۴٫۷۴ \frac{\mu}{\Pi} \tag{۶}$$

که با معلوم بودن مقادیر μ و Π سرعت عرضی v را برحسب کیلومتر بر ثانیه به دست می‌آوریم.

مثلاً، حرکت خاصهٔ سالانه، μ، عیوق $۰٫''۴۳۹$ (روشهای اندازه‌گیری حرکت خاصه بعداً شرح داده خواهند شد) و اختلاف‌منظر، Π، آن $۰٫''۰۷۵$ است. با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ (۶)، سرعت مماسی v را برابر ۲۷٫۷ کیلومتر بر ثانیه می‌یابیم.

۱۴۶. سرعت شعاعی

فاصلهٔ ستاره در یک سال از SA به SB یا، با دقت کافی، از SA به SC، یعنی، به اندازه فاصلهٔ AC افزایش یافته است (شکل ۹۷). آهنگی که با آن فاصلهٔ ستاره از خورشید، به سبب سرعت خطی آن در فضا، تغییر می‌کند سرعت شعاعی نسبت به خورشید نامیده می‌شود. اگر ρ سرعت شعاعی برحسب کیلومتر بر ثانیه باشد، داریم

$$AC = n\rho = AB \cos\theta$$

اما با استفاده از رابطهٔ (۱)، $AB = nV$؛ از این رو داریم

$$\rho = V \cos\theta \tag{۷}$$

مقادیر سرعتهای شعاعی ρ ستاره‌های درخشان را می‌توان با روشهای طیف‌نمایی، مستقیماً برحسب کیلومتر بر ثانیه تعیین کرد. در اینجا این نتیجه‌ها را، مانند بخش ۱۲۴، قسمت(د)، بدون شرح اصول طیف‌نمایی می‌پذیریم.

بنابه تعریف وقتی فاصلهٔ ستاره‌ای از خورشید افزایش می‌یابد (مانند شکل ۹۷)، سرعت شعاعی آن مثبت است؛ هنگامی که فاصلهٔ آن کاهش می‌یابد، سرعت شعاعی منفی است.

حال $BC = AB\sin\theta$ است؛ ازاین‌رو، از روابط (۱) و (۲) داریم

$$v = V\sin\theta \qquad (۸)$$

اگر v از رابطهٔ (۶) تعیین شود و ρ از رصدهای طیف‌نمایی معلوم باشد آنگاه دو معادلهٔ (۷) و (۸) داریم، که از آنها سرعت فضایی خطی V ستاره و زاویهٔ θ را می‌توان تعیین کرد. در مورد عیوق، چنانکه دیدیم، $v = ۲۷{,}۷\,\mathrm{km/s}$ و $\rho = +۳۰{,}۲\,\mathrm{km/s}$ به دست آمده است. از این‌رو

$$V\sin\theta = ۲۷{,}۲ \text{ و } V\cos\theta = ۳۰{,}۲$$

با محاسبه‌ای ساده، معلوم می‌شود $V = ۴۱{,}۰\,\mathrm{km/s}$ (این سرعت فضایی عیوق نسبت به خورشید است) و θ برابر $۴۲\frac{۱}{۲}^\circ$ است.

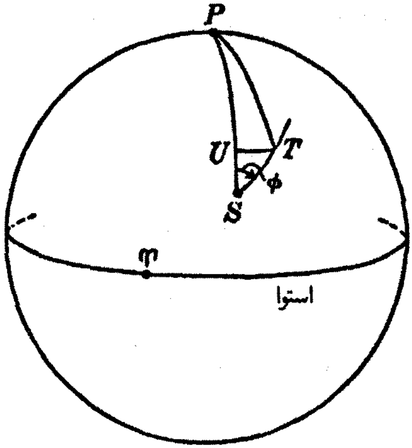
۱۴۷. اندازه‌گیری حرکت خاصه

با بازگشت به شکل ۹۷، می‌بینیم که مؤلفه‌ای از سرعت فضایی خطی ستاره که سبب حرکت خاصه می‌شود سرعت مماسی در راستای AD یا CB است؛ سرعت شعاعی به تنهایی جهتی که ستاره در آن دیده می‌شود را تغییر نمی‌دهد. حال A، D، و S هم صفحه‌اند؛ از این‌رو ستاره به نظر می‌رسد که، روی کرهٔ سماوی به مرکز خورشید، بر دایرهٔ عظیمه‌ای حرکت می‌کند. فرض کنید S در شکل ۹۸ مکان ستاره، مثلاً، در ۱۹۳۰٫۰ و T مکان آن بعد از یک سال باشد. بدین ترتیب کمان دایرهٔ عظیمهٔ ST حرکت خاصهٔ سالانه، μ، است. فرض کنید (α, δ) و $(\alpha_۱, \delta_۱)$ به‌ترتیب مختصات S و T، نسبت به یک نقطهٔ اعتدال و یک استوا مثلاً نقطهٔ اعتدال میانگین و استوای ۱۹۳۰٫۰ باشند. در این صورت اختلافهای $(\alpha_۱ - \alpha)$ و $(\delta_۱ - \delta)$ ناشی از حرکت خاصهٔ سالانه‌اند. اگر بنویسیم

$$\alpha_۱ - \alpha = \mu_\alpha \;\; ; \;\; \delta_۱ - \delta = \mu_\delta \qquad (۹)$$

آنگاه μ_α و μ_δ به‌ترتیب مؤلفه‌های حرکت خاصه در بُعد و میل خواهند بود. μ که همیشه برحسب ثانیهٔ قوسی بر سال بیان می‌شود را حرکت خاصه کل می‌نامیم.

کمان دایرهٔ صغیرهٔ UT را موازی با استوا رسم کنید. پس داریم $UT = U\hat{P}T\sin PT$؛ همچنین $UT = ST\sin\phi$، که در آن ϕ زاویهٔ مکانی PST است. زاویهٔ ϕ از دایرهٔ نصف‌النهار



شکل۹۸

واصل بین ستاره و قطب شمال P، در جهت پیکان نشان داده شده در شکل ۹۸ از °۰ تا °۳۶۰ اندازه گرفته می‌شود. اما $U\hat{P}T = \mu_\alpha$، $PT = ۹۰° - \delta_۱$، و $ST = \mu$. از این‌رو

$$\mu_\alpha \cos\delta_۱ = \mu \sin\phi$$

یا، با نوشتن δ به جای $\delta_۱$ از آنجا که μ کوچک است، داریم

$$\mu_\alpha = \mu \sin\phi \sec\delta \qquad (۱۰)$$

چون μ برحسب ثانیهٔ قوسی بر سال بیان می‌شود، μ_α نیز توسط فرمول (۱۰) با همین واحد داده می‌شود. همین‌طور، $SU = \delta_۱ - \delta = \mu_\delta$، به طوری که

$$\mu_\delta = \mu \cos\phi \qquad (۱۱)$$

μ_δ برحسب ثانیهٔ قوسی بر سال بیان می‌شود. اگر μ_α و μ_δ معلوم باشند، فرمولهای (۱۰) و (۱۱) برای محاسبهٔ مقادیر μ و ϕ کافی خواهند بود.

مقادیر μ_α و μ_δ برای ستاره‌های درخشان (تقریباً تا قدر نهم) از رصدهای نصف‌النهاری که دربازهٔ طولانی از هم انجام می‌گیرند، به دست می‌آیند. این روش را با مثالی توضیح می‌دهیم. مختصات میانگین سماک رامح برای ۱۸۷۵٫۰ در فهرست $A.G.$ چنین‌اند

$$۱۴^h ۹^m ۵۷^s{,}۶۳ \quad ; \quad +۱۹° ۵۰' ۲''{,}۶$$

این مختصات میانگین از چندین رصد نصف‌النهاری ستاره به دست آمده‌اند که برای سادگی، فرض می‌کنیم این رصدها تقریباً در آغاز سال ۱۸۷۵ انجام یافته‌اند. هر رصد نصف‌النهاری پس از

اعمال تصحیحهای دستگاهی و شکست جوی، مختصات ظاهری ستاره را نسبت به نقطهٔ اعتدال واقعی آن تاریخ به دست می‌دهد؛ بعد از به کار بردن فرمولهای حرکت تقدیمی، ناوش، وابیراهی مختصات میانگین برای عصر ۱۸۷۵ر۰ به دست می‌آیند. این در مورد هر یک از رصدها انجام می‌گیرد؛ وقتی میانگین چندین رصد گرفته می‌شود، نتیجهٔ حاصل که قبلاً ذکر شد، مختصات میانگین ستاره است برای آغاز سال ۱۸۷۵ نسبت به استوای میانگین ۱۸۷۵ر۰.

مجموعه‌ای از رصدهای مشابه که در اوایل ۱۹۲۵ انجام می‌گیرند مختصات میانگین ستاره را برای آغاز سال ۱۹۲۵ نسبت به استوای میانگین ۱۹۲۵ر۰ به دست می‌دهد. با این فرضها بازهٔ بین دو مجموعه رصد ۵۰ سال است. حال اگر ستاره حرکت خاصه نمی‌داشت، مختصات میانگین برای ۱۹۲۵ر۰ باید برابر می‌شد با مختصات میانگین برای ۱۸۷۵ر۰ بعلاوهٔ مقدار حرکت تقدیمی در آن بازه. برای اینکه عملاً مقدار حرکت خاصه در بُعد و میل را بیابیم، نخست مکان ستاره در آغاز سال ۱۸۷۵ را نسبت به استوای میانگین ۱۹۲۵ر۰ به دست می‌آوریم. این مستلزم به کار بردن حرکت تقدیمی بین ۱۸۷۵ و ۱۹۲۵ است ـ این بازه را t می‌نامیم. از فهرست $A.G.$ اطلاعات زیر را برای ستارهٔ سماک رامح استخراج می‌کنیم:

	میل	بُعد
حرکت تقدیمی سالانه [فصل ۱۰: فرمولهای (۲۹) و (۳۰)]	$-۱۶''ر۹۱۵$	$+۲^{s}ر۸۱۳۲;$
تغییر قرنی (s و $s_۱$)	$+۰''ر۲۲۸$	$+۰^{s}ر۰۰۰۳;$

با به‌کار بردن فرمولهای (۳۲) و (۳۴) فصل ۱۰، برای $t = ۵۰$، داریم

$$\frac{st}{۲۰۰} = +۰^{s}ر۰۰۰۱ \;\; ; \;\; \frac{s_۱ t}{۲۰۰} = +۰''ر۰۵۷$$

که وقتی به حرکتهای تقدیمی سالانه در بالا افزوده شوند به‌ترتیب مقادیر $+۲^{s}ر۸۱۳۳$ و $-۱۶''ر۸۵۸$ را به دست می‌دهند. بدین ترتیب کل تغییرات در مختصات که از حرکت تقدیمی ناشی می‌شوند به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$+۱۴۰^{s}ر۶۶; \quad -۸۴۲''ر۹$$

یا

$$+۲^{m}۲۰^{s}ر۶۶; \quad -۱۴'۲''ر۹$$

با اعمال این تصحیحات به مختصات میانگین برای ۱۸۷۵ر۰، مختصات میانگین سماک رامح را به گونه‌ای که در آغاز سال ۱۸۷۵ رصد شده است، نسبت به استوای میانگین ۱۹۲۵ر۰، به دست می‌آوریم؛ نتایج چنین‌اند

$$۱۴^{h}۱۲^{m}۱۸^{s}ر۲۹; \quad +۱۹°۳۵'۵۹''ر۷ \qquad (۱۲)$$

اکنون دومین مجموعه رصد که در آغاز سال ۱۹۲۵ انجام یافته‌اند را در نظر می‌گیریم. مختصات میانگین سماک رامح، به گونه‌ای که در سال ۱۹۲۵ رصد و به استوای میانگین ۱۹۲۵٫۰ ارجاع شده است، به صورت زیر داده می‌شوند

$$۱۴^{h}۱۲^{m}۱۴^{s}٫۳۹ \;;\; +۱۹^{\circ}۳۴'۱۹''٫۹ \qquad (۱۳)$$

مختصات داده شده در (۱۲) و (۱۳) همه به یک دستگاه مختصات، یعنی، استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال میانگین ۱۹۲۵٫۰ باز می‌گردند. بدین ترتیب اختلافهای بین دو بُعد و دو میل در (۱۲) و(۱۳) ناشی از حرکت خاصه ستاره در طی ۵۰ سال‌اند. بُعد، در طی ۵۰ سال، به اندازهٔ $۳^{s}٫۹۰$ و میل به مقدار $۱'۳۹''٫۸$ کاهش یافته است.
بنابراین داریم

$$\mu_\alpha = -۰^{s}٫۰۷۸; \qquad \mu_\delta = -۲''٫۰۰$$

اینها مؤلفه‌های حرکت خاصه سماک رامح نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال ۱۹۲۵٫۰ هستند.

برای روشهای ترکیب تعدادی زیاد از این تعیینها و برای بحث در مورد خطاهای سیستماتیک فهرستهای مختلف، خواننده را به نجوم کروی (تألیف نیوکم) ارجاع می‌دهیم.

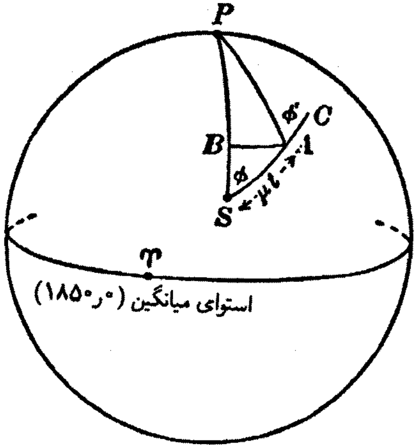
در مورد ستاره‌های ضعیفتر از قدر نهم تعیین حرکتهای خاصه با تلسکوپ عکاسی انجام می‌شود؛ این روش بعداً در فصل دوازدهم شرح داده می‌شود.

۱۴۸. مؤلفه‌های حرکت خاصه در عصرهای مختلف نسبت به یک دستگاه استوایی

فرض کنید S (شکل ۹۹) مکان میانگین ستاره‌ای در ۱۸۵۰، مثلاً نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال ۱۸۵۰٫۰ باشد. برای جلوگیری از اشتباه، نخست μ را برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌کنیم. ستاره به سبب حرکت خاصه‌اش در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ SAC با آهنگ μ رادیان در سال حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم μ ثابت باشد. در حالی که از تغییرات μ نمی‌توان چشم پوشید، حذف آنها در اینجا مسئلهٔ واقعی تحت بررسی را خیلی روشن خواهد ساخت. فرض کنید مکان ستاره روی کرهٔ سماوی پس از یک بازهٔ زمانی t سال A باشد.

مؤلفه‌های حرکت خاصه را، وقتی ستاره در S است. یعنی، در ۱۸۵۰ با μ_α و μ_δ نشان می‌دهیم. در آن صورت از فرمولهای (۱۰) و (۱۱)، هرگاه μ_α و μ_δ برحسب رادیان بر سال بیان شوند، داریم

$$\mu_\alpha = \mu \sin\phi \sec\delta \;;\; \mu_\delta = \mu\cos\phi \qquad (۱۴)$$



شکل۹۹

که در آن (α, δ) مختصات S و ϕ زاویهٔ PSA است.

مؤلفه‌های حرکت خاصه را هنگامی که ستاره در A است، یعنی، در $t +$ ۱۸۵۰ با $\mu_{\alpha'}$ و $\mu_{\delta'}$ نشان می‌دهیم. در آن صورت اگر (α', δ') مختصات A (نسبت به استوای میانگین ۰ر۱۸۵۰) و ϕ' زاویه PAC باشد، مانند قبل داریم

$$\mu_{\alpha'} = \mu \sin\phi' \sec\delta' \;\; ; \;\; \mu_{\delta'} = \mu\cos\phi' \qquad (۱۵)$$

در این فرمولها از تغییر حرکت خاصه چشم می‌پوشیم؛ در مورد اثر آن تمرین ۷ این فصل را ببینید. بدین ترتیب از فرمولهای (۱۴) و (۱۵) روشن می‌شود که مؤلفه‌های حرکت خاصه نسبت به عصر که بر اساس آن تعریف می‌شوند، تغییر می‌کنند حتی اگرچه صفحهٔ بنیادی مرجع (استوای میانگین ۰ر۱۸۵۰) یکی باشد و حرکت خاصهٔ کل μ ثابت باشد.

از A کمان دایرهٔ صغیره‌ای AB را موازی استوا رسم می‌کنیم. در مثلث PSA داریم $PS =$ ۹۰° $- \delta$، $PA =$ ۹۰° $- \delta'$، $S\hat{P}A = \alpha' - \alpha$، $P\hat{S}A = \phi$، $P\hat{A}S =$ ۱۸۰° $- \phi'$، و $SA = \mu t$. از فرمول سینوس، (ب)، داریم

$$\sin\phi' \cos\delta' = \sin\phi\cos\delta$$

با نوشتن $\phi + \Delta\phi$ به جای ϕ' و $\delta + \Delta\delta$ به جای δ' نتیجه می‌گیریم [از آنجا که $SA(\equiv \mu t)$ حتی برای بازه‌های زمانی قابل ملاحظه، کوچک است؛ $\Delta\phi$ و $\Delta\delta$ را زاویه‌هایی کوچک می‌گیریم]

$$(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi)(\cos\delta - \Delta\delta\sin\delta) = \sin\phi\cos\delta$$

که از آن، با چشمپوشی از بینهایت کوچکهای مرتبهٔ دوم، داریم

$$\Delta\phi \cos\phi \cos\delta = \Delta\delta \sin\phi \sin\delta \qquad (۱۶)$$

این معادله تغییر ϕ را با δ به دست می‌دهد.

در مثلث بینهایت کوچک SAB داریم $SB = \delta' - \delta = \Delta\delta$ و بنابراین

$$\Delta\delta = \mu t \cos\phi \qquad (۱۷)$$

از این‌رو از فرمولهای (۱۶) و (۱۷)، داریم

$$\Delta\phi = \mu t \sin\phi \tan\delta \qquad (۱۸)$$

از فرمول (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha'} &= \frac{\mu(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi)}{\cos\delta - \Delta\delta\sin\delta} \\ &= \mu\sec\delta(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi)(۱ + \Delta\delta\tan\delta)\end{aligned}$$

یا، باز با چشمپوشی از کمیتهای کوچک مرتبهٔ دوم

$$\mu_{\alpha'} = \mu\sin\phi\sec\delta + \mu\Delta\phi\cos\phi\sec\delta + \mu\Delta\delta\sin\phi\sec\delta\tan\delta$$

از این‌رو با به کار بردن فرمولهای (۱۴)، (۱۷)، و (۱۸) نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = ۲\mu^۲ t \sin\phi\cos\phi\sec\delta\tan\delta$$

و با استفاده از فرمول (۱۴)

$$\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = ۲t\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta \qquad (۱۹)$$

این معادله با این فرض که همهٔ کمیتهای μ، μ_α، $\mu_{\alpha'}$، و μ_δ در مقیاس دایره‌ای بیان می‌شوند به دست آمده است. اگر μ_α و $\mu_{\alpha'}$ را برحسب ثانیهٔ زمانی و μ_δ را برحسب ثانیهٔ قوسی بیان کنیم آنگاه فرمول (۱۹) چنین نوشته می‌شود

$$\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = ۲t\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin ۱'' \qquad (۲۰)$$

با روش مشابه، از فرمول (۱۵)، وقتی حرکتهای خاصه در مقیاس دایره‌ای بیان شوند، داریم

$$\mu_{\delta'} = \mu(\cos\phi - \Delta\phi\sin\phi)$$

یا

$$\begin{aligned}\mu_{\delta'} - \mu_\delta &= -\mu\Delta\phi\sin\phi \\ &= -\mu^۲ t\sin^۲\phi\tan\delta \qquad &&\text{[از (۱۸)]} \\ &= -t\mu_\alpha^۲\sin\delta\cos\delta \qquad &&\text{[از (۱۴)]}\end{aligned}$$

با بیان μ_α و $(\mu_{\delta'} - \mu_\delta)$ به‌ترتیب برحسب ثانیه‌های زمانی و قوسی، خواهیم داشت

$$\mu_{\delta'} - \mu_\delta = -t(۱۵\mu_\alpha)^۲ \sin\delta\cos\delta\sin ۱'' \qquad (۲۱)$$

بدین‌ترتیب هنگامی که مؤلفه‌های حرکت خاصه برای عصر ۱۸۵۰٫۰ معلوم باشند معادله‌های (۲۰) و (۲۱) این مؤلفه‌ها را در عصر $(t + ۱۸۵۰)$ به دست می‌دهند؛ و به‌عکس. با این حال تنها وقتی مؤلفه‌های حرکت خاصه بزرگ باشند، منظور کردن کمیتهای طرف راست (۲۰) و (۲۱) ضرورت دارد.

مثال. مختصات میانگین ستارهٔ گرومبریج ۱۸۳۰ برای ۱۹۰۰٫۰ عبارت‌اند از $۱۱^{\mathrm{h}}۴۷^{\mathrm{m}}۱۳^{\mathrm{s}}$٫۰ و $+۳۸°۲۶'۱۰''$ و مؤلفه‌های حرکت خاصه برای ۱۹۰۰ چنین‌اند

$$\mu_\alpha = +۰^{\mathrm{s}}٫۳۴۰۵ \;,\;\; \mu_\delta = -۵''٫۸۰۱$$

می‌خواهیم مؤلفه‌های حرکت خاصه $\mu_{\alpha'}$ و $\mu_{\delta'}$ این ستاره را در سال ۲۰۰۰، نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰، پیدا کنیم.

معادلهٔ (۲۰) را که در آن $t = ۱۰۰$، $\tan\delta = ۰٫۷۹۳$، و $\sin ۱'' = ۱/۲۰۶۲۶۵$ است به کار می‌بریم. در آن صورت

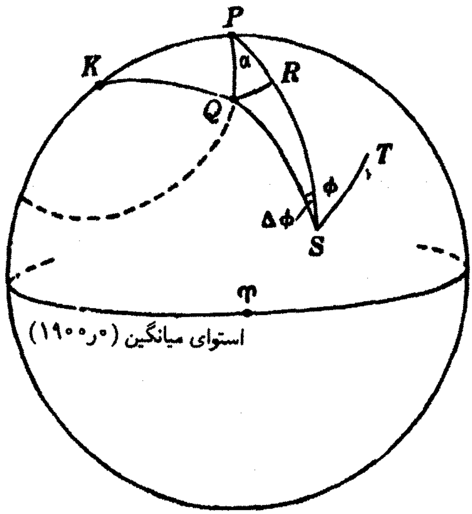
$$\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = -۰^{\mathrm{s}}٫۰۰۱۶$$

به‌طوری که $\mu_{\alpha'}$ برابر $+۰^{\mathrm{s}}٫۳۳۸۹$ است.

به همین ترتیب از معادلهٔ (۲۱)، $\mu_{\delta'}$ برابر $-۵''٫۸۰۱ - ۰''٫۰۰۶$ یا $-۵''٫۸۰۷$ است.

۱۴۹. مؤلفه‌های حرکت خاصه نسبت به استواهای میانگین دو عصر مختلف

فرض کنید که S، در شکل ۱۰۰، مکان ستاره‌ای در ۱۹۰۰٫۰ نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال آن سال باشد. قطب P پس از t سال به سبب حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی به نقطهٔ Q می‌رود و یک کمان دایرهٔ صغیره‌ای حول K، قطب دایرةالبروج، طی می‌کند. زاویهٔ PKQ حرکت تقدیمی قمری-خورشیدی ψt در t سال است؛ مقدار ψ چنانکه در فصل ۱۰ دیدیم در حدود $''۵۰$ است. مانند بخش پیش، ψ و حرکتهای خاصه را نخست در مقیاس دایره‌ای بیان می‌کنیم. $P\hat{K}Q$ را زاویه‌ای کوچک می‌گیریم، به‌طوری که کمان دایرهٔ عظیمه‌ای واصل بین P و Q از کمان دایره صغیره‌ای که حرکت تقدیمی قطب روی آن صورت می‌گیرد غیر قابل تمیز باشد. فرض می‌کنیم (α, δ) مختصات S نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال ۱۹۰۰٫۰ و $(\alpha_۱, \delta_۱)$ مختصات S نسبت به استوای میانگین و نقطهٔ اعتدال $t + ۱۹۰۰$ باشند. در آن



شکل ۱۰۰

صورت $PS = 90^\circ - \delta$ و $QS = 90^\circ - \delta_1$. همچنین $K\hat{P}S = 90^\circ + \alpha$، به‌طوری که $Q\hat{P}S = \alpha$.

فرض کنید حرکت خاصهٔ μ ستاره در راستای دایرهٔ عظیمهٔ ST باشد. آنگاه اگر μ_α و μ_δ مؤلفه‌های حرکت خاصه S در ۱۹۰۰ نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰ باشند با استفاده از فرمولهای (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت

$$\mu_\alpha = \mu \sin\phi \sec\delta \;\; ; \;\; \mu_\delta = \mu\cos\phi \qquad (۲۲)$$

که در آن ϕ زاویهٔ PST است.

فرض کنید $\mu_{\alpha''}$ و $\mu_{\delta''}$ مؤلفه‌های حرکت خاصه ستاره، باز در ۱۹۰۰، نسبت به استوای میانگین وقطب Q برای $t + 1900$ باشند. آنگاه

$$\mu_{\alpha''} = \mu \sin\phi_1 \sec\delta_1 \quad ; \quad \mu_{\delta''} = \mu\cos\phi_1 \qquad (۲۳)$$

که در آن ϕ_1 زاویهٔ QST است. ϕ_1 را برابر $\phi + \Delta\phi$ می‌نویسیم به طوری که $P\hat{S}Q = \Delta\phi$. بنابراین با به کار بردن فرمول (ب) از مثلث PQS داریم

$$\sin\Delta\phi = \sin PQ \sin\alpha \sec\delta_1$$

یا، از آنجا که $\Delta\phi$ و PQ کوچک فرض می‌شوند و $PQ = \psi t \sin\varepsilon$ داریم

$$\Delta\phi = \psi t \sin\alpha \sec\delta \sin\varepsilon \qquad (۲۴)$$

که در آن، بدون کاهش محسوس دقت، δ به جای δ_1 نوشته شده است.

کمان دایرهٔ صغیرهٔ QR راکه S قطب آن است، رسم می‌کنیم. بدین‌ترتیب $PR = \delta_1 - \delta$. با نوشتن $\Delta\delta$ به جای $\delta_1 - \delta$ ازمثلث بینهایت کوچک PQR نتیجه می‌شود که

$$\delta_1 - \delta \equiv \Delta\delta = \psi t \cos\alpha \sin\varepsilon \tag{۲۵}$$

از معادلهٔ اول در (۲۳)، داریم

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha''} &= \frac{\mu \sin(\phi + \Delta\phi)}{\cos(\delta + \Delta\delta)} \\ &= \frac{\mu(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi)}{\cos\delta(1 - \Delta\delta\tan\delta)} \\ &= \mu\sec\delta(\sin\phi + \Delta\phi\cos\phi)(1 + \Delta\delta\tan\delta) \end{aligned}$$

یا، با چشمپوشی ازکمیتهای کوچک مرتبهٔ دوم

$$\mu_{\alpha''} = \mu\sec\delta\sin\phi + \mu\Delta\delta\sec\delta\sin\phi\tan\delta + \mu\Delta\phi\sec\delta\cos\phi$$

یا، با به کار بستن معادله‌های (۲۲)، (۲۴)، و (۲۵)

$$\mu_{\alpha''} - \mu_\alpha = \mu\psi t\sin\varepsilon\sec\delta(\cos\alpha\tan\delta\sin\phi + \sin\alpha\sec\delta\cos\phi)$$

اما

$$\mu_\delta = \mu\cos\phi \quad \text{و} \quad \mu_\alpha = \mu\sin\phi\sec\delta$$

از این‌رو

$$\mu_{\alpha''} - \mu_\alpha = \psi t\sin\varepsilon(\mu_\alpha\cos\alpha\tan\delta + \mu_\delta\sin\alpha\sec^2\delta) \tag{۲۶}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \mu_{\delta''} &= \mu(\cos\phi - \Delta\phi\sin\phi) \\ &= \mu\cos\phi - \mu\psi t\sin\varepsilon\sin\alpha\sec\delta\sin\phi \end{aligned}$$

به‌طوری که

$$\mu_{\delta''} - \mu_\delta = -\psi t\,\mu_\alpha\sin\alpha\sin\varepsilon \tag{۲۷}$$

در به دست آوردن فرمولهای (۲۶) و (۲۷)، فرض براین است که همهٔ کمیتهای μ_α، μ_δ، و ψ در مقیاس دایره‌ای بیان شوند. μ_α و $\mu_{\alpha''}$ را برحسب ثانیهٔ زمانی و μ_δ، $\mu_{\delta''}$، و ψ را برحسب ثانیهٔ قوسی بیان کنید و این معادله‌ها به صورت زیر در می‌آیند

$$\mu_{\alpha''} - \mu_\alpha = \psi t \sin\varepsilon(\mu_\alpha \cos\alpha \tan\delta + \frac{۱}{۱۵}\mu_\delta \sin\alpha \sec^۲\delta)\sin ۱'' \qquad (۲۸)$$

$$\mu_{\delta''} - \mu_\delta = -۱۵\psi t \mu_\alpha \sin\alpha \sin\varepsilon \sin ۱'' \qquad (۲۹)$$

مثال. می‌خواهیم مقدار $\mu_{\alpha''}$ را برای حرکت ستارهٔ گرومبریج ۱۸۳۰ در ۱۹۰۰ نسبت به استوای میانگین ۱۹۳۰٫۰، با در دست داشتن $\mu_\alpha = +۰^s٫۳۴۰۵, \mu_\delta = -۵''٫۸۰۱$ (نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰) پیدا کنیم. در اینجا $t = ۳۰$، $\alpha = ۱۱^h۴۷^m۱۳^s$، $\delta = ۳۸^\circ۲۶'۱۰''$، $\cos\alpha = -۰٫۹۹۸$، $\sin\alpha = ۰٫۰۵۶$، $\tan\delta = ۰٫۷۹۳$، $\sec^۲\delta = ۱٫۶۳$، $\psi = ۵۰$، و $\sin\varepsilon = ۰٫۳۹۸$.

بنابراین از معادلهٔ (۲۸) داریم

$$\mu_{\alpha''} - \mu_\alpha = -۰^s٫۰۰۰۹$$

به‌طوری که

$$\mu_{\alpha''} = +۰^s٫۳۳۹۶$$

محاسبهٔ مقدار $\mu_{\delta''}$ می‌تواند با روشی مشابه با استفاده از معادلهٔ (۲۹) انجام شود.

فرمولهای اصلی این بخش و بخش قبل یافتن مؤلفه‌های حرکت خاصه یک ستاره را در هر عصر دلخواه نسبت به دستگاه مختصات بنیادی در آن عصر یا یک عصر متفاوت امکانپذیر می‌سازند. به کار بستن این فرمولها فقط هنگامی ضرورت دارد که مؤلفه‌های حرکت خاصه خیلی بزرگ باشند.

۱۵۰. مختصات میانگین و ظاهری

در فصل مربوط به حرکت تقدیمی و ناوش از منظور کردن حرکت خاصه صرفنظر کردیم و اینک با منظور کردن حرکت خاصه در تعریفهای بنیادی تجدید نظر می‌کنیم. فرض کنید با مختصات میانگین $(\alpha_\circ, \delta_\circ)$ یک ستاره برای ۱۹۰۰٫۰ آغاز کنیم. درآن صورت مختصات میانگین (α, δ) در $t + ۱۹۰۰$ با اعمال حرکت تقدیمی برای t سال با تغییر قرنی و همچنین اعمال حرکت خاصه برای t سال به دست می‌آیند. مجموع حرکت تقدیمی سالانه و حرکت خاصه سالانه به تغییر سالانه موسوم است و این کمیت معمولاً برای هر ستاره در فهرستها جدول‌بندی می‌شود. بنابراین بُعد و میل میانگین برای $t + ۱۹۰۰$ به وسیلهٔ فرمولهای (۳۲) و (۳۴) فصل (۱۰) به‌دست می‌آیند، که اکنون

$d\alpha_\circ/dt$ و $d\delta_\circ/dt$ در آنها به‌ترتیب به معنای تغییر سالانه در بُعد و تغییر سالانه در میل گرفته می‌شوند.

مکان ظاهری یک ستاره، مثلاً در ۹ مارس ۱۹۳۱، مکان آن ستاره است در این تاریخ روی کرهٔ سماوی (به مرکز زمین) و نسبت به استوای واقعی و نقطهٔ اعتدال آن تاریخ. مکان ظاهری در این تاریخ از مکان میانگین در آغاز سال با اعمال حرکت تقدیمی، ناوش، ابیراهی (توسط اعداد روز بسلی یا مستقل)، و حرکت خاصه برای کسر سال مورد بررسی به دست می‌آید.

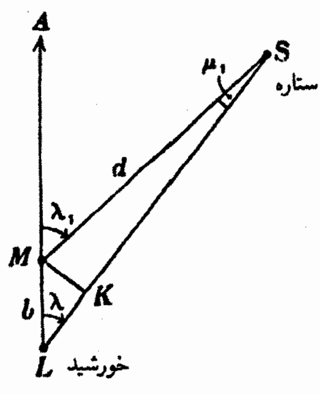
۱۵۱. حرکت خورشید و حرکت اختلاف‌منظری

دیدیم که حرکت خاصه یک ستاره آهنگ تغییر جهت آن از دیدگاه خورشید است. علت حرکت خاصهٔ ستاره را برای سادگی سرعت فضایی خطی آن نسبت به خورشید توصیف کردیم، اما شاید این پرسش پیش آید که: "آیا ممکن نیست که همهٔ ستاره‌ها در فضا ثابت باشند و حرکت خاصه آنها در نتیجهٔ حرکت خورشید در جهت معینی باشد؟" در این بخش مسئله به گونه‌ای که پیشنهاد شد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ستارهٔ S را در شکل ۱۰۱ نسبت به محورهای فرضی معین در فضا در حال سکون بگیرید. فرض کنید خورشید نسبت به این محورها در امتداد خط راست LA حرکت کند و مسافت LM را در یک سال بپیماید. اگر U سرعت خورشید (برحسب کیلومتر بر ثانیه) و n تعداد ثانیه در یک سال باشد، آنگاه مسافت LM که با b نشان داده می‌شود برحسب کیلومتر چنین است

$$b = nU \tag{۳۰}$$

فرض کنید زاویهٔ ALS با λ نشان داده شود. λ زاویهٔ بین جهت حرکت خورشید و جهتی که ستاره از نقطهٔ L در آن امتداد دیده می‌شود، است. زاویهٔ AMS را با λ_1 نشان دهید. و نیز فرض کنید



شکل ۱۰۱

$\mu_۱ = \lambda - \lambda_۱$، به طوری که $M\hat{S}L = \mu_۱$. بنابر این $\mu_۱$ تغییر جهت ستاره از دیدگاه خورشید در یک سال است که در رصدها به صورت حرکت خاصه ظاهر می‌شود.

اگر d مسافت MS برحسب کیلومتر باشد، داریم

$$\frac{\sin\mu_۱}{\sin\lambda} = \frac{b}{d}$$

یا، چون $\mu_۱$ زاویه‌ای خیلی کوچک است، می‌توانیم بنویسیم

$$\mu_۱ = \frac{b}{d}\sin\lambda \operatorname{cosec} ۱'' \qquad (۳۱)$$

که در آن $\mu_۱$ برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود.

با معرفی اختلاف‌منظر سالانهٔ ستاره

$$\Pi = \frac{a}{d}\operatorname{cosec} ۱'' \qquad (۳۲)$$

که در آن a شعاع مدار زمین به دور خورشید برحسب کیلومتر است.

می‌توانیم (۳۱) را تغییر شکل دهیم. از فرمولهای (۳۰)، (۳۱)، و (۳۲) نتیجه می‌گیریم

$$\mu_۱ = \frac{n}{a}\Pi U \sin\lambda$$

اما $n = ۳۱٫۵۶ \times ۱۰^۶$ و $a = ۱۴۹٫۶ \times ۱۰^۶\mathrm{km}$، از این‌رو

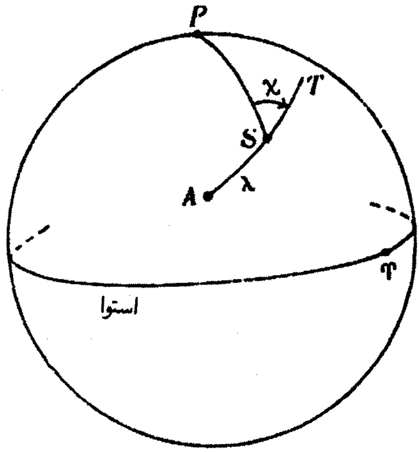
$$\mu_۱ = \frac{\Pi U \sin\lambda}{۴٫۷۴} \qquad (۳۳)$$

باید توجه داشت که اگر سرعت خورشید U و جهت آن معلوم باشند و نیز اگر فرض «ثابت» بودن ستاره‌ها هنوز صادق باشد، فرمول (۳۳) روشی برای به دست آوردن اختلاف‌منظر سالانهٔ Π یک ستاره در اختیار می‌گذارد.

حرکت خاصه $\mu_۱$ که از حرکت خورشید ناشی می‌شود حرکت اختلاف‌منظری ستاره نامیده می‌شود که به‌طور مستقیم با اختلاف‌منظر Π و در نتیجه، طبق فرمول (۳۲)، به‌طور معکوس با فاصلهٔ ستاره از خورشید تغییر می‌کند.

نقطه‌ای که حرکت خورشید روی کرهٔ سماوی به طرف آن است گرایشگاه خورشید می‌نامند.

در شکل ۱۰۲ فرض کنید A گرایشگاه خورشید و S ستاره‌ای باشد. بعداً چگونگی تعیین مکان A را نشان خواهیم داد؛ اکنون فرض می‌کنیم که مختصات آن معلوم باشند. زاویهٔ بین جهتی که خورشید در آن حرکت می‌کند و جهت ستاره توسط کمان AS دایرهٔ عظیمه‌ای مشخص می‌شود، بدین‌ترتیب AS برابر λ است. همچنین در شکل ۱۰۱ می‌بینیم که تغییر در جهت، یا $\mu_۱$، در صفحهٔ



شکل۱۰۲

ALS صورت می‌گیرد، به طوری که به نظر می‌رسد ستاره روی کرهٔ سماوی در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ AST (شکل ۱۰۲) حرکت می‌کند. چون $\lambda_۱$ بزرگتر از λ است، به نظر می‌رسد که ستاره از نقطه A دور می‌شود، یعنی در جهت ST حرکت می‌کند.

زاویهٔ مکانی PST رابا χ نشان دهید؛ χ از ۰° تا ۳۶۰° در جهت پیکان اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین ازآنجا که حرکت اختلاف‌منظری $\mu_۱$ در امتداد ST است، با به کار بستن فرمولهای (۱۰) و (۱۱) و نشان دادن مؤلفه‌های حرکت اختلاف‌منظری در بُعد و میل به ترتیب با P_α و P_δ، داریم

$$P_\alpha = \mu_۱ \sin\chi \sec\delta \ ؛ \ P_\delta = \mu_۱ \cos\chi \qquad (۳۴)$$

با جایگذاری عبارت $\mu_۱$ از فرمول (۳۳) نتیجه می‌گیریم

$$P_\alpha = \frac{\Pi U}{۴{,}۷۴} \sin\lambda \sin\chi \sec\delta \qquad (۳۵)$$

و

$$P_\delta = \frac{\Pi U}{۴{,}۷۴} \sin\lambda \cos\chi \qquad (۳۶)$$

این فرمولها، آنگاه که یافتن مؤلفه‌های حرکت اختلاف‌منظری یک، یا گروهی ستاره مطلوب باشد و کمیتهای طرف راست (۳۵) و (۳۶) معلوم باشند، دارای اهمیت‌اند.

۱۵۲. اختلاف‌منظر قرنی

واضح است که اگر فاصلهٔ LM (شکل ۱۰۱) که خورشید در یک سال می‌پیماید معلوم باشد، آنگاه این خط برای اندازه‌گیری فاصله‌های اختری خط پایهٔ مناسبی خواهد بود. این اختلاف‌منظر

که بنابه تعریف اختلاف‌منظر قرنی، H، نامیده می‌شود، در مقایسه با اختلاف‌منظر سالانهٔ Π از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\sin H = \frac{b}{d}$$

یا، چون H کوچک است از

$$H = \frac{b}{d} \operatorname{cosec} 1''$$

همچنین از فرمول (۳۰) داریم $b = nU$، به طوری که

$$H = \frac{nU}{d} \operatorname{cosec} 1'' \tag{۳۷}$$

که در آن H برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود. از این‌رو، از فرمولهای (۳۲) و (۳۷)، داریم

$$H = \frac{\Pi U}{4{,}74} \tag{۳۸}$$

در مورد اندازه‌گیری U بعداً بحث خواهد شد؛ اکنون مقدار آن را برابر ۱۹٫۵ کیلومتر بر ثانیه قرار می‌دهیم. بدین ترتیب رابطهٔ عددی بیان اختلاف‌منظر سالانهٔ Π و اختلاف‌منظر قرنی H را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\Pi = 0{,}243 H \tag{۳۹}$$

فرمولهای (۳۵) و (۳۶) با استفاده از (۳۸) شکل ساده‌ای پیدا می‌کنند و چنین می‌شوند

$$P_\alpha = H \sin\lambda \sin\chi \sec\delta \tag{۴۰}$$

$$P_\delta = H \sin\lambda \cos\chi \tag{۴۱}$$

۱۵۳. حرکت خورشید و سرعت شعاعی

در شکل ۱۰۱ MK را عمود بر LS رسم می‌کنیم. حال LM در مقایسه با LS خیلی کوچک است و می‌توانیم MS و SK را مساوی بگیریم. بدین‌ترتیب در یک سال که خورشید از L به M می‌رود فاصلهٔ ستاره از LS به MS، یعنی به اندازهٔ LK، کاهش می‌یابد. این کاهش معادل با اثر یک سرعت شعاعی منفی ρ_1 (برحسب کیلومتر بر ثانیه) است. از این‌رو $LK = n\rho_1$ که در آن n تعداد ثانیه در یک سال است. همچنین $LK = b\cos\lambda$ و چون طبق رابطهٔ (۳۰) $b = nU$، پس نتیجه می‌گیریم

$$\rho_1 = -U\cos\lambda \tag{۴۲}$$

که در آن علامت منفی به سبب منفی بودن سرعت شعاعی گذاشته شده است. فرمول (۴۲) سرعت شعاعی ستاره که از حرکت خورشید ناشی می‌شود را به دست می‌دهد.

۱۵۴. حرکت خورشید در حالت کلی

بخش ۱۵۱ را با این فرضیه که ستاره‌ها «در فضا ثابت‌اند» و فقط خورشید نسبت به محورهای ثابت در حرکت است شروع کردیم. این فرض را می‌توان به وسیلهٔ حرکتهای خاصه رصد شده آزمود. با مراجعه به فرمولهای (۳۵) و (۳۶) یا (۴۰) و (۴۱)، می‌بینیم که دو نقطه روی کرهٔ سماوی وجود دارند ـ گرایشگاه خورشید و نقطهٔ قطری مقابل آن، گریزگاه خورشید ـ که در آنها حرکت اختلاف‌منظری صفر می‌شود، زیرا در آن صورت λ برابر $0°$ یا $180°$ است، به طوری که P_α و P_δ هر دو صفر می‌شوند. بدین‌ترتیب دو ناحیه در آسمان باید وجود داشته باشند که حرکتهای خاصه رصد شدهٔ همهٔ ستاره‌های مورد بررسی در آن نواحی صفر باشند. این فرضیه مغایر با واقعیتهاست. به‌طور کلیتر، اگر فرضیهٔ بالا صحیح باشد، حرکت خاصه کل هر ستاره باید روی دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از نقطهٔ معین A (شکل۱۰۲) ـ گرایشگاه خورشید ـ می‌گذرد، به‌طوری که با بررسی فقط دو ستاره در قسمتهای مختلف آسمان، باید تعیین گرایشگاه به‌عنوان یکی از دو نقطهٔ محل برخورد دایره‌های عظیمه مربوط امکانپذیر باشد. درواقع از حرکتهای خاصه چنین برمی‌آید که نقاط تلاقی به‌دست آمده از یک جفت ستاره با نقاط تلاقی به‌دست آمده از جفتی دیگر اختلاف زیادی دارند. نتیجه آنکه ستاره‌ها علاوه بر حرکت اختلاف‌منظری ناشی از سرعت خورشید، حرکتهای فردی نیز دارند.

با این اوضاع حرکت خورشید را باید دقیقتر تعبیر کرد. نقاط ثابت دیگری که بتوان حرکت خورشید را به‌آنها ارجاع داد نداریم، زیرا همهٔ ستاره‌ها ازجمله خورشید در حرکت‌اند. اگر حرکتهای خاصهٔ ۱۰۰۰۰ ستاره که سرتاسر آسمان پراکنده‌اند را مورد بررسی قرار دهیم، حرکت خورشید با ارجاع به همهٔ این ستاره‌ها به‌عنوان یک گروه تعریف می‌شود یا، به‌طور دقیقتر، حرکت خورشید برحسب سرعت‌اش نسبت به مرکز میانگین این گروه تعریف می‌شود.

شکل ۱۰۳ را درنظر بگیرید، که در آن S یک ستاره است و A گرایشگاه خورشید که مکان آن معلوم فرض خواهد شد. فرض کنید حرکت خاصهٔ μ ستاره در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ SU باشد و $P\hat{S}U$ با ϕ نشان داده شود. هم μ و هم ϕ را می‌توان از مقادیر رصد شدهٔ μ_α و μ_δ ازمعادله‌های (۱۰) و (۱۱) محاسبه کرد. حرکت اختلاف‌منظری μ_1 در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ AST، از نقطهٔ S به طرف T است؛ زاویه PST همان χ است. فرض کنید (α, δ) مختصات S و (A, D) مختصات گرایشگاه A باشد. آنگاه در مثلث PAS داریم $PS = 90° - \delta$، $PA = 90° - D$، $A\hat{P}S = \alpha - A$، $P\hat{S}A = 180° - \chi$، و $AS = \lambda$.

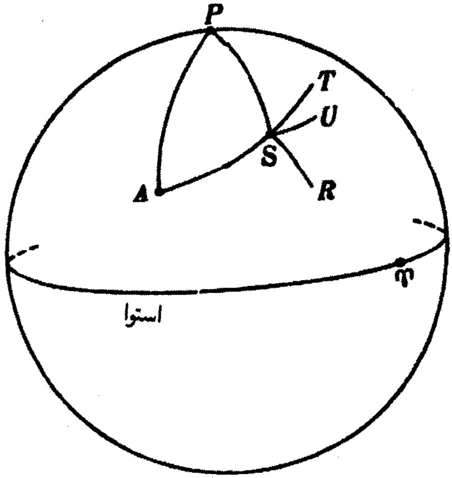
مقادیر λ و χ را می‌توان به‌سادگی به طریق زیر پیدا کرد. از فرمول کسینوس، (الف)، داریم

$$\cos\lambda = \sin D \sin\delta + \cos D \cos\delta \cos(\alpha - A) \qquad (۴۳)$$

که از آن λ محاسبه می‌شود، و از فرمول (ج) داریم

$$-\sin\lambda \cos\chi = \sin D \cos\delta - \cos D \sin\delta \cos(\alpha - A) \qquad (۴۴)$$

که از آن χ به دست می‌آید.



شکل ۱۰۳

λ فاصلهٔ زاویه‌ای ستاره ازگرایشگاه است. جهت ST جهت گریزگاه از نقطهٔ S است و زاویهٔ χ بین دایرهٔ نصف‌النهار SP و دایرهٔ عظیمهٔ ST زاویهٔ مکانی گریزگاه خوانده می‌شود. با توجه به اینکه از A تا گریزگاه $180°$ است، فاصلهٔ زاویه‌ای ستاره از گریزگاه $\lambda - 180°$ است. این زاویه‌ها، $(\lambda - 180°)$ و χ، را می‌توان با دقت کافی از نمودارهای مخصوصی پیدا کرد،[1] و بدین‌ترتیب از محاسبات نسبتاً خسته‌کنندهٔ فرمولهای (۴۳) و (۴۴) رهایی یافت.

اکنون حرکت خاصه رصد شدهٔ μ را که در جهت SU (شکل ۱۰۳) است در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ ST و در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ RS، که بر AST عمود است، تجزیه می‌کنیم. فرض کنیم که υ و τ این مؤلفه‌ها را نمایش دهند. پس چون $T\hat{S}U = \phi - \chi$ داریم

$$\upsilon = \mu \cos(\phi - \chi)$$

و

$$\tau = \mu \sin(\chi - \phi)$$

از آنجا که طبق (۱۰) و (۱۱) داریم $\mu_\alpha = \mu \sin\phi \sec\delta$ و $\mu_\delta = \mu\cos\phi$، پس فرمولهای

۱. نمودارهای W.M.Smart که توسط انجمن ستاره‌شناسی سلطنتی منتشر و در منبع زیر توضیح داده شده است.

Monthly Notices, vol. LXXXIII,p.465;

J.A. Pearce and S.N.Hill: *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory, Victoria B.C.* vol. IV, No. 4

نمودارهای J.M.Baldwin که توسط انجمن ستاره‌شناسی سلطنتی منتشر و در منبع زیر توضیح داده شده است:

Monthly Notices, vol. LXXXIX ,p.453.

v و τ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$v = \mu_\alpha \cos\delta \sin\chi + \mu_\delta \cos\chi \tag{۴۵}$$

$$\tau = \mu_\delta \sin\chi - \mu_\alpha \cos\delta \cos\chi \tag{۴۶}$$

با فرض معلوم بودن مختصات گرایشگاه خورشید، می‌توانیم مقدار χ را از فرمول (۴۴) یا از نمودار به دست آوریم، و در نتیجه با فرض معلوم بودن مقادیر μ_α و μ_δ مقادیر v و τ را محاسبه کنیم.

می‌نویسیم

$$v = \mu_۱ + v_۱ \tag{۴۷}$$

که در آن $\mu_۱$ حرکت اختلاف‌منظری در امتداد ST است. بنابراین $v_۱$ آن بخش از حرکت خاصهٔ رصد شده در امتداد ST است که از حرکت انفرادی ستاره ناشی می‌شود؛ $\mu_۱$ ناشی از حرکت خورشید است. بدیهی است که مؤلفهٔ τ کلاً از حرکت انفرادی ستاره ناشی می‌شود.

۱۵۵. اختلاف‌منظرهای آماری

تعیین اختلاف‌منظر سالانهٔ حتی یک تک ستاره مستلزم انجام کارهای رصدی و محاسبات زیادی است. در بیشتر بررسیها دانستن اختلاف‌منظر میانگین گروهی ویژه از ستاره‌ها، مثلاً ستاره‌های بین قدرهای دهم و یازدهم در ناحیهٔ ویژه‌ای از آسمان، از اهمیت فراوانی برخوردار است، و این اختلاف‌منظر میانگین را می‌توان از مؤلفه‌های v و τ حرکت خاصه تعیین کرد. مؤلفه‌های v تعداد N ستاره که در آسمان نزدیک هم‌اند و، مثلاً متعلق به ردهٔ قدری معینی هستند را در نظر می‌گیریم.

بنابه تعریف: هنگامی که $v_۱$ در جهت ST است آن را مثبت، و هنگامی که در جهت مخالف SA است آن را منفی می‌گیریم (شکل ۱۰۳). اگر N ستاره حرکتهای انفرادی کاتوره‌ای داشته باشند، انتظار می‌رود که تعداد ستاره‌هایی که $v_۱$ آنها مثبت است با ستاره‌هایی که $v_۱$ آنها منفی است برابر باشند، به طوری که جمع جبری همه $v_۱$ها (که با $\sum v_۱$ نشان داده می‌شود) یا صفر است یا در مقایسه با $\sum \mu_۱$ خیلی کوچک است. با جمع کردن N معادله از نوع (۴۷) داریم

$$\sum v = \sum \mu_۱ + \sum v_۱$$

و باچشمپوشی از $\sum v_۱$ بنابه اظهار قبلی خواهیم داشت

$$\sum \mu_۱ = \sum v \tag{۴۸}$$

برای ستاره‌ای معین، v معلوم فرض می‌شود ــ زیرا به وسیلهٔ فرمول (۴۵) از داده‌های معلوم محاسبه می‌شود. از این‌رو حاصل جمع $\sum v$ برای همهٔ ستاره‌ها براحتی پیدا خواهد شد. اکنون

برای ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن Π است، $\mu_۱$ از فرمول (۳۳) به دست می‌آید، یعنی

$$\mu_۱ = \frac{\Pi U \sin\lambda}{۴٫۷۴}$$

بنابراین

$$\sum \mu_۱ = \frac{U \sin\lambda}{۴٫۷۴} \sum \Pi$$

اگر $\Pi_.$ نمایانگر اختلاف‌منظر میانگین N ستاره باشد، $\sum \Pi = N\Pi_.$، و بنابراین به کمک فرمول (۴۸) می‌یابیم

$$\Pi_. = \frac{۴٫۷۴}{NU\sin\lambda} \sum v \qquad (۴۹)$$

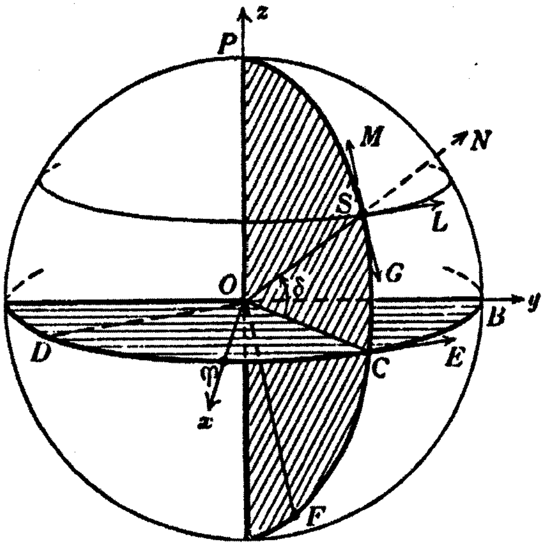
از آنجا که همه کمیتهای طرف راست (۴۹) معلوم فرض می‌شوند، اختلاف‌منظر میانگین $\Pi_.$ بی‌درنگ به دست می‌آید.

با استفاده از معادله‌های (۳۸) و (۴۹) می‌توان با روش مشابه اختلاف‌منظر قرنی میانگین، مثلاً $H_.$، را محاسبه کرد، و معمولاً همین کمیت است که محاسبه می‌شود نه خود اختلاف‌منظر میانگین. دریافته‌اند که اختلاف‌منظر قرنی میانگین با افزایش ردهٔ قدری کاهش، و با عرض کهکشانی افزایش می‌یابد. عرض کهکشانی یک ستاره نسبت به صفحهٔ راه شیری را مشابه عرض سماوی آن ستاره نسبت به صفحهٔ دایرةالبروج تعریف می‌کنیم.

۱۵۶. تعیین گرایشگاه خورشید از حرکتهای خاصه

اگر خورشید در جهتی معین با سرعت U حرکت کند، در آن صورت هر ستاره به نظر می‌رسد که نسبت به خورشید یک سرعت اضافی U در جهت مخالف دارد. در شکل ۱۰۴ فرض کنید O (خورشید) مرکز کرهٔ سماوی و Ox، Oy، و Oz محورهای راستگوشه باشند: Ox از نقطهٔ اعتدال بهاری Υ، Oy از نقطهٔ B روی استوا به بُعد °۹۰، و Oz از قطب P رسم می‌شود. پس اگر $-X$، $-Y$ و $-Z$ (برحسب کیلومتر بر ثانیه) مؤلفه‌های حرکت خورشید نسبت به این محورها باشند، آنگاه ستاره‌ای در S نسبت به خورشید سرعتی خواهد داشت با مؤلفه‌های $+X$، $+Y$، و $+Z$. فعلاً از سرعت خطی انفرادی ستاره چشم می‌پوشیم، به‌طوری که صرفاً اثر حرکت اختلاف‌منظری تحت بررسی است. ستاره را در فاصلهٔ d کیلومتری از خورشید و برای سادگی شعاع کره را نیز برابر d می‌گیریم.

سرعت ستارهٔ S دارای مؤلفه‌های $+X$ موازی $O\Upsilon$، $+Y$ موازی OB، و $+Z$ موازی OP است. هدف نخست ما یافتن مؤلفه‌های سرعت خطی ستاره در راستای محورهای راستگوشه SL، SM، و SN است. که در آن SL مماس بر مدار سماوی در نقطهٔ S (در جهت افزایش



شکل۱۰۴

بُعد)، SM مماس بر دایرهٔ نصف‌النهار PSC (در جهت افزایش میل)، و SN امتداد شعاع OS است.

حال سرعت X موازی $O\Upsilon$ با یک سرعت $X\cos\alpha$ موازی OC (زاویهٔ ΥOC برابر α است) و یک سرعت $X\sin\alpha$ موازی OD، که در آن DOC برابر ۹۰° است، معادل است. همینطور سرعت Y موازی OB با یک سرعت $Y\sin\alpha$ موازی OC و یک سرعت $-Y\cos\alpha$ موازی OD معادل است. بدین ترتیب می‌توانیم به جای X و Y کمیتهای زیر را بنشانیم

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha \quad \text{موازی}\ OC \tag{۵۰}$$

و

$$X\sin\alpha - Y\cos\alpha \quad \text{موازی}\ OD \tag{۵۱}$$

CE را مماس بر استوا در نقطهٔ C رسم کنید. پس CE بر OC عمود، و بنابراین CE موازی OD است. چون CE در جهت خلاف OD است، پس رابطهٔ (۵۱) را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha \quad \text{موازی}\ CE \tag{۵۲}$$

همچنین SL موازی CE است، از این‌رو کمیت زیر را می‌توانیم به جای (۵۲) بنشانیم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha \quad \text{موازی}\ SL \tag{۵۳}$$

OF را در صفحهٔ نصف‌النهار PSC عمود بر OS رسم کنید. بنابراین OF با مماس MSG در S موازی است.

گزارهٔ (۵۰) را در نظر می‌گیریم. این سرعت را موازی OS و OF تجزیه می‌کنیم. می‌دانیم $C\hat{O}S = \delta$؛ از این‌رو $(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)$ موازی OC معادل است با

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\sin\delta \qquad \text{موازی } OF$$

یا

$$-(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\sin\delta \qquad \text{موازی } SM \tag{۵۴}$$

و

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\cos\delta \qquad \text{در راستای } OS \text{ یا } SN \tag{۵۵}$$

همینطور سرعت Z موازی OP با $Z\cos P\hat{O}S$ در راستای OS، و $Z\sin P\hat{O}S$ در راستای SM معادل است. اما $P\hat{O}S = 90^\circ - \delta$ ، به طوری که Z معادل است با

$$Z\cos\delta \qquad \text{در راستای } SM \tag{۵۶}$$

و

$$Z\sin\delta \qquad \text{در راستای } SN \tag{۵۷}$$

با جمع‌آوری بنوبت مؤلفه‌های سرعت در راستاهای SL، SM، و SN و نمایش این جمعها به‌ترتیب با ξ، η و ζ خواهیم داشت

$$\xi = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \qquad \text{از رابطهٔ (۵۳)} \tag{۵۸}$$

از رابطهٔ (۵۴) و (۵۶)

$$\eta = -X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta + Z\cos\delta \tag{۵۹}$$

از روابط (۵۵) و (۵۷)

$$\zeta = X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta \tag{۶۰}$$

چون X، Y، و Z برحسب کیلومتر بر ثانیه بیان می‌شوند، کمیتهای ξ، η، و ζ نیز برحسب همین واحد خواهند بود. اکنون سرعت ξ در راستای SL را در نظر می‌گیریم. ستاره تنها به سبب این

سرعت، فاصلهٔ $n\xi$ کیلومتر را دریک سال در راستای SL طی خواهد کرد، که در آن n تعداد ثانیه‌ها در یک سال است و بنابراین، چون OS برابر d کیلومتر است، زاویه‌ای که S در راستای مدار سماوی طی می‌کند برابر $n\xi/d$ در مقیاس دایره‌ای یا $n\xi/d \operatorname{cosec} 1''$ ثانیهٔ قوسی است. از این‌رو بُعد ستاره به اندازه $n\xi/d \sec\delta \operatorname{cosec} 1''$ ثانیهٔ قوسی در سال افزایش می‌یابد. اما این افزایش مؤلفهٔ حرکت اختلاف‌منظری در بُعد، یعنی P_α، است که فرض می‌کنیم در واحد ثانیهٔ قوسی بیان شود. از این‌رو

$$\frac{n\xi}{d} = P_\alpha \cos\delta \sin 1''$$

با وارد کردن اختلاف‌منظر سالانهٔ Π از رابطهٔ (۴)، پس ازجایگذاری مقادیر n و a و نوشتن عبارت داده شده در رابطه (۵۸) برای ξ، نتیجه می‌شود

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{۴{,}۷۴}{\Pi} P_\alpha \cos\delta \qquad (۶۱)$$

این معادلهٔ دقیقی است برای ستارهٔ S و آشکارا برای هر ستارهٔ دیگر نیز صادق است. به خواننده یادآوری می‌کنیم که فعلاً تنها حرکت اختلاف‌منظری مورد نظر است.

با در نظر گرفتن مؤلفه η در راستای SM که سبب مؤلفهٔ حرکت اختلاف‌منظری در میل، P_δ، می‌شود با روشی مشابه از رابطهٔ (۵۹) نتیجه می‌گیریم

$$-X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta + Z\cos\delta = \frac{۴{,}۷۴}{\Pi} P_\delta \qquad (۶۲)$$

اکنون مؤلفه‌های رصد شدهٔ حرکت خاصه μ_α و μ_δ را در نظر می‌گیریم. هم حرکت اختلاف‌منظری در μ_α سهم دارد و هم حرکت انفرادی ستاره. همینطور در μ_δ. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\mu_\alpha = P_\alpha + \mu_{\alpha'} \;\; ; \;\; \mu_\delta = P_\delta + \mu_{\delta'} \qquad (۶۳)$$

که در آن $\mu_{\alpha'}$ و $\mu_{\delta'}$ به‌ترتیب سهمهای حرکت انفرادی ستاره در حرکت خاصه بُعد و میل‌اند. فرض بر این است که همهٔ کمیتها در رابطهٔ (۶۳) برحسب ثانیهٔ قوسی بیان شوند.

معادلهٔ (۶۱)، به کمک (۶۳) چنین فرض می‌شود

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{۴{,}۷۴}{\Pi}\mu_\alpha\cos\delta - \frac{۴{,}۷۴}{\Pi}\mu_{\alpha'}\cos\delta \qquad (۶۴)$$

در این معادله X و Y کمیتهایی‌اند که در پی یافتن آنهاییم، α و δ معلوم‌اند و μ_α از رصدهای حرکت خاصه به دست می‌آید. عموماً Π و نیز $\mu_{\alpha'}$ مجهول‌اند.

N عدد ستاره را در ناحیه‌ای کوچک از آسمان در نظر می‌گیریم، به طوری که بتوانیم فرض کنیم همهٔ ستاره‌ها دارای مقادیر α و δ یکسانی هستند. هر ستاره معادله‌ای از نوع (۶۴) به ما می‌دهد و با جمع کردن N معادله نتیجه می‌گیریم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{۴{,}۷۴}{N}\cos\delta\sum\left(\frac{\mu_\alpha}{\Pi}\right) - \frac{۴{,}۷۴}{N}\cos\delta\sum\left(\frac{\mu_{\alpha'}}{\Pi}\right) \quad (۶۵)$$

اگر $\Pi_{\circ}$ متناظر با فاصلهٔ میانگین $d_{\circ}$ ستاره‌ها باشد، معادلهٔ (۶۵) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{۴{,}۷۴}{N\Pi_{\circ}}\cos\delta\sum\mu_\alpha - \frac{۴{,}۷۴}{N\Pi_{\circ}}\cos\delta\sum\mu_{\alpha'} \quad (۶۶)$$

که در آن اکنون فرض بر این است که ستاره‌ها همه یک اختلاف‌منظر $\Pi_{\circ}$ دارند.

اینک آخرین جملهٔ (۶۶) را در نظر بگیرید. $\mu_{\alpha'}$ مؤلفه حرکت خاصه ناشی از سرعت انفرادی ستاره است، و احتمال مثبت بودن و منفی بودن آن یکی است. می‌توان فرض کرد $\sum\mu_{\alpha'}$ صفر یا خیلی کوچک است، به طوری که ماهیت خطای تصادفی در اندازه‌گیری حرکتهای خاصه را دارد. با چشمپوشی از جملهٔ آخر داریم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = \frac{۴{,}۷۴}{N\Pi_{\circ}}\cos\delta\sum\mu_\alpha \quad (۶۷)$$

که در آن $\Pi_{\circ}$ مجهول است و $\sum\mu_\alpha$ از حرکتهای خاصهٔ رصد شده به دست می‌آید. می‌نویسیم $\overline{\mu}_\alpha = ۱/N\sum\mu_\alpha$، به‌طوری که $\overline{\mu}_\alpha$ متوسط مقدار رصد شدهٔ μ_α برای N ستاره است.

فرض کنید با تعداد زیادی ناحیه به طریقی مشابه سروکار داشته باشیم و برای سادگی فرض کنید که در هر ناحیه تعداد N ستاره وجود داشته باشند و فاصلهٔ میانگین آنها در هر ناحیه یکسان باشد، به‌طوری که $\Pi_{\circ}$ ثابت باشد. پس برای هر ناحیه معادله‌ای از نوع زیر داریم

$$-X\sin\alpha + Y\cos\alpha = K\overline{\mu}_\alpha\cos\delta \quad (۶۸)$$

که در آن $K \equiv ۴{,}۷۴/\Pi_{\circ}$ و ثابتی مجهول در نظر گرفته می‌شود.

با روش مشابه و با همان فرضها از معادلهٔ (۶۲) نتیجه می‌گیریم

$$-X\cos\alpha\sin\delta - Y\sin\alpha\sin\delta + Z\cos\delta = K\overline{\mu}_\delta \quad (۶۹)$$

اگر M ناحیه وجود داشته باشد، M معادله از نوع (۶۸) و M معادله از نوع (۶۹) وجود خواهد داشت. حل این معادله‌ها به روش کمترین مربعات انجام می‌گیرد. نحوهٔ عمل به شرح زیر

است. دو طرف معادلهٔ (۶۸) را برای هر یک از M معادله در $\sin\alpha$ – (ضریب X) ضرب و همهٔ معادله‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم. با نمایش جمع‌زنی با $\sum$ داریم

$$X\sum\sin^2\alpha - Y\sum\sin\alpha\cos\alpha = -K\sum\overline{\mu}_\alpha\sin\alpha\cos\delta \qquad (۷۰)$$

همینطور با ضرب کردن در $\cos\alpha$ (ضریب Y) و جمع کردن نتیجه می‌گیریم

$$-X\sum\sin\alpha\cos\alpha + Y\sum\cos^2\alpha = K\sum\overline{\mu}_\alpha\cos\alpha\cos\delta \qquad (۷۱)$$

با عملیاتی مشابه بر روی معادلهٔ (۶۹) سه معادلهٔ زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} X\sum\cos^2\alpha\sin^2\delta + Y\sum\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\delta - Z\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta \\ = -K\sum\overline{\mu}_\delta\cos\alpha\sin\delta \qquad (۷۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\sum\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\delta + Y\sum\sin^2\alpha\sin^2\delta - Z\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta \\ = -K\sum\overline{\mu}_\delta\sin\alpha\sin\delta \qquad (۷۳) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -X\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta - Y\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta + Z\sum\cos^2\delta \\ = K\sum\overline{\mu}_\delta\cos\delta \qquad (۷۴) \end{aligned}$$

در پنج معادلهٔ (۷۰) تا (۷۴)، ضریبهای X، Y، و Z همه از مقادیر معلوم α و δ قابل محاسبه‌اند، و نیز چون مقادیر $\overline{\mu}_\alpha$ و $\overline{\mu}_\delta$ از حرکتهای خاصهٔ رصد شده به دست می‌آید، ضریبهای K در طرفهای راست این معادله‌ها را می‌توان محاسبه کرد. با جمع کردن معادله‌های (۷۰) و (۷۲) و نیز (۷۱) و (۷۳) و بازنویسی (۷۴) سه معادله خواهیم داشت به صورت نمادی

$$\left.\begin{aligned} aX + bY + cZ &= KS_1 \\ bX + BY + dZ &= KS_2 \\ cX + dY + CZ &= KS_3 \end{aligned}\right\} \qquad (۷۵)$$

که در آنها ضریبهای X، Y، و Z همه تابعهای قابل محاسبه‌ای از α و δ هستند و S_1، S_2، و S_3 نیز معلوم‌اند. حل معادله‌های (۷۵) به تعیین کمیتهای

$$\frac{X}{K},\quad \frac{Y}{K},\quad \frac{Z}{K}$$

می‌انجامد، نه کمیتهای X، Y، و Z زیرا K نیز مجهول است.

اکنون می‌توانیم مختصات گریزگاه که خورشید با سرعتی به مؤلفه‌های $+X$، $+Y$، و $+Z$ به طرف آن حرکت می‌کند را به دست آوریم. (ابتدا فرض کردیم که مؤلفه‌های حرکت خورشید $-X$،

$-Y$، و $-Z$ هستند و چون این حرکت در جهت گرایشگاه است، سرعتی که مؤلفه‌های آن $+X$، $+Y$، و $+Z$ باشند در جهت نقطهٔ مقابل روی کرهٔ سماوی یعنی در جهت گریزگاه خواهد بود.)

فرض کنید J در شکل ۱۰۵ گریزگاه باشد و محورهای قائم را به صورتی که نشان داده شده‌اند در نظر می‌گیریم. اگر PJC دایرهٔ نصف‌النهار گذرنده از J باشد و A و D مختصات استوایی J باشند آنگاه $\Upsilon\hat{O}C = A$ و $JOC = D$. از ترکیب مؤلفه‌های X و Y سرعتی برابر $(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ در راستای OC به دست می‌آید و A از $\tan A = Y/X$ به دست می‌آید. از ترکیب $(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$ در راستای OC و Z در راستای OP عکس حرکت خورشید، در جهت OJ به دست می‌آید، به طوری که

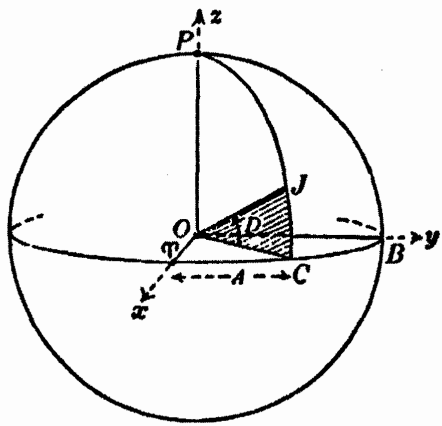
$$\tan D = Z/(X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

معادله‌های $\tan A$ و $\tan D$ را در زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\tan A = \frac{Y}{K}\Big/\frac{X}{K} \;\; ; \;\; \tan D = \frac{Z}{K}\Big/\left[\left(\frac{X}{K}\right)^2 + \left(\frac{Y}{K}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۶)$$

نسبتهای X/K، Y/K، و Z/K از حل معادله‌های(۷۵) معلوم‌اند؛ از این‌رو A و D تعیین می‌شوند. بنابراین مختصات گرایشگاه خورشید $A + ۱۸۰°$ و $-D$ هستند.

با روش بالا که تنها حرکتهای خاصه را به کار می‌بندد نمی‌توان اندازهٔ سرعت خورشید را تعیین کرد، بلکه تنها جهت آن، یعنی مکان گرایشگاه خورشید روی کرهٔ سماوی معین می‌شود. ولی مختصات به دست آمده تا اندازه‌ای به گروه اختری ویژه که در بررسی به کار برده می‌شود، بستگی دارند. شاید ناگزیر از اعتراف به نکته‌ای دیگر باشیم. این فرض که حرکت انفرادی ستاره‌ها کلاً کتره‌ای‌اند به واسطهٔ چرخش منظم کهکشان موجه نیست، این نکته باید در بررسی منظور شود.



شکل ۱۰۵

۱۵۷. تعیین حرکت خورشید از سرعتهای شعاعی

اکنون فرمول (۶۰) را درنظر می‌گیریم این فرمول مؤلفه سرعت، ζ، در خط دید OS را (شکل ۱۰۴) ناشی از سرعت خورشید به دست می‌دهد. بدین‌ترتیب، ζ صرفاً ρ_1 بخش ۱۵۳ است، و از رابطهٔ (۴۲) می‌توانیم بنویسیم

$$\zeta = U\cos\lambda \qquad (۷۷)$$

که در آن U سرعت خورشید است. اینک فرض کنید ρ سرعت شعاعی رصد شده[1] را نشان دهد. بنابراین سهم حرکت خورشید در ρ، $U\cos\lambda$ است و سهم سرعت فضایی انفرادی ستاره در آن، مثلاً ρ_2 است از این‌رو

$$\rho = U\cos\lambda + \rho_2 \qquad (۷۸)$$

بنابراین، از رابطه‌های (۶۰)، (۷۷)، و(۷۸) آشکارا داریم

$$X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta = \rho - \rho_2 \qquad (۷۹)$$

که در آن ρ از رصدهای طیف‌نمایی به دست می‌آید و ρ_2 مجهول است. اگر سرعتهای شعاعی N ستاره که در سراسر آسمان پراکنده‌اند رصد شوند، هر ستاره معادله‌ای به شکل (۷۹) به دست می‌دهد و N معادله با روش کمترین مربعات حل می‌شوند.

با ضرب کردن هر معادله بنوبت در ضریب X، و جمع کردن آنها خواهیم داشت

$$X\sum\cos^2\alpha\cos^2\delta + Y\sum\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\delta + Z\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta$$
$$= \sum\rho\cos\alpha\cos\delta + \sum\rho_2\cos\alpha\cos\delta \qquad (۸۰)$$

حال احتمال مثبت بودن مؤلفهٔ شعاعی ρ_2 سرعت خطی انفرادی ستاره با منفی بودن آن یکی است و جمع‌زنی $\sum\rho_2\cos\alpha\cos\delta$ به صفر می‌گراید. با چشمپوشی از این جمله در (۸۰)، می‌نویسیم

$$X\sum\cos^2\alpha\cos^2\delta + Y\sum\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\delta + Z\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta$$
$$= \sum\rho\cos\alpha\cos\delta \qquad (۸۱)$$

۱. سرعت شعاعی رصد شده که در اینجا مد نظر است سرعت شعاعی نسبت به خورشید است. اما رصد سرعت شعاعی ستاره که روی زمین انجام می‌گیرد شامل اثری ناشی از حرکت مداری زمین به دور خورشید و اثری ناشی از چرخش زمین (صفحات ۲۴۲ تا ۲۴۴) است. فرض می‌کنیم که‌این اثرها از رصدهای کنونی سرعت شعاعی برداشته شوند.

همینطور

$$X\sum \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\delta + Y\sum \sin^2\alpha\cos^2\delta + Z\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta = \sum\rho\sin\alpha\cos\delta \qquad (۸۲)$$

$$X\sum\cos\alpha\sin\delta\cos\delta + Y\sum\sin\alpha\sin\delta\cos\delta + Z\sum\sin^2\delta = \sum\rho\sin\delta \qquad (۸۳)$$

ضریبهای X، Y، و Z در این معادله‌ها و نیز کمیتهای طرفهای راست را می‌توان محاسبه کرد. بدین‌ترتیب سه معادلهٔ خطی داریم که از آنها X، Y، و Z نتیجه‌گیری می‌شوند. باید گفت که از این حل، X، Y، و Z برحسب کیلومتر بر ثانیه به دست می‌آیند.

بنابراین مختصات گریزگاه خورشید، A و D، مانند بخش قبل به وسیلهٔ معادلهٔ (۷۶) داده می‌شوند.

سرعت خورشید، U، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$U^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad (۸۴)$$

بحث بالا نیز اثر چرخشِ کهکشان را نادیده می‌گیرد. به این خاطر، آن قسمت از سرعت شعاعی ستاره که ρ_2 نامیده شده است دارای مؤلفه‌ای منظم خواهد بود که به جهت ستاره و فاصلهٔ آن از خورشید بستگی دارد.

از اندازه‌گیریهای اخیر حرکت خورشید، هم با استفاده از حرکتهای خاصه هم به کمک سرعتهای شعاعی، نتایج زیر حاصل شده‌اند.[۱]

بُعد گرایشگاه خورشید	°۲۷۱
میل گرایشگاه خورشید	°۳۰+
سرعت خورشید	۱۹٫۷ کیلومتر بر ثانیه

تمرینها

۱. اختلاف‌منظر ستارهٔ لالند ۲۱۲۵۸ برابر ۱۷۷″٫۰ و حرکت خاصهٔ کل سالانه آن ۴″٫۵۲ است. نشان دهید که سرعت ستارهٔ عمود بر خط دید ۱۲۱ کیلومتر بر ثانیه است.

[لندن، ۱۹۲۸]

۲. اگر اختلاف‌منظر ستاره‌ای ۰۳۷″٫۰ و حرکت خاصهٔ کل سالانه آن ۵۲″٫۰ باشد، نشان دهید

۱. برای بحث گسترده‌تر در حرکت خورشید و تعیین آن، به فصل ۵ کتاب زیر مراجعه کنید:

D. Mihalis, *Galactic Astronomy*, chapter 5, Freeman, 1968.

که سرعت خطی مماسی آن ۲٫۲۴ برابر سرعت مداری زمین است، مداز زمین دایره‌ای فرض می‌شود.

[لندن، ۱۹۲۵]

۳. اختلاف‌منظر ستارهٔ ۶۱ دجاجه ۰٫۳۰″ و حرکت آن عمود بر خط دید ۵٫۲″ در سال است. سرعت خطی مماسی آن را با سرعت زمین در حرکتش به دور خورشید مقایسه کنید.

۴. حرکت خاصه کل سالانهٔ ستاره‌ای (با بُعد $۳^{\rm h}$ و میل $+۱۰°$) ۰٫۱″ است. با فرض اینکه این حرکت خاصه کلاً اختلاف‌منظری باشد و حرکت خورشید ۱۹٫۵ کیلومتر بر ثانیه به طرف نقطهٔ ($۱۸^{\rm h}$، $+۳۴°$) باشد. اختلاف‌منظر ستاره را تعیین کنید.

[لندن، ۱۹۲۷]

۵. سرعت خطی مماسی ستاره‌ای (α, δ) نسبت به خورشید V کیلومتر بر ثانیه در جهت نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی با بُعد A و میل D است. ثابت کنید

$$\mu_\alpha = ۰^{\rm s}{,}۰۱۴۱ V\Pi \cos D \sin(A - \alpha) \sec\delta$$

که در آن Π اختلاف‌منظر ستاره است.

[لندن، ۱۹۲۶]

۶. بُعد و میل ستارهٔ شعرای یمانی به‌ترتیب $۶^{\rm h}۴۱^{\rm m}$ و $-۱۶°۳۵'$ و حرکتهای خاصه آن در بُعد و میل $-۰^{\rm s}{,}۰۳۷۴$ و $-۱{,}۲۰۹''$ هستند؛ سرعت شعاعی رصد شدهٔ آن $-۷{,}۵$ کیلومتر بر ثانیه، و اختلاف‌منظر آن ۰٫۳۸″ است.

نشان دهید که سرعت شعرای یمانی نسبت به خورشید، با خط دید زاویه‌ای در حدود $۱۱۴\frac{۱}{۲}°$ می‌سازد و اندازهٔ این سرعت را برحسب کیلومتر بر ثانیه محاسبه کنید.

[لندن، ۱۹۲۹]

۷. اگر μ_α و μ_δ مؤلفه‌های حرکت خاصه سالانهٔ ستاره‌ای (α, δ) نسبت به نقطهٔ اعتدال و استوای ویژه‌ای در زمان t باشند، و اگر $\mu_{\alpha'}$ و $\mu_{\delta'}$ مؤلفه‌های حرکت خاصه نسبت به همان نقطهٔ اعتدال و استوا در زمان t' باشند، ثابت کنید اگر $t' - t$ برحسب سال بیان شود و Π اختلاف‌منظر ستاره برحسب ثانیهٔ قوسی و V مؤلفهٔ سرعت بر خط دید آن برحسب کیلومتر بر ثانیه باشد داریم

$$\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = \{۲\mu_\alpha\mu_\delta \tan\delta - ۲V\Pi\mu_\alpha/۴{,}۷۴\}(t' - t)\sin ۱''$$
$$\mu_{\delta'} - \mu_\delta = -\{۲۲۵\mu_\alpha^۲ \sin\delta\cos\delta + ۲V\Pi\mu_\delta/۴{,}۷۴\}(t' - t)\sin ۱''$$

[μ_α برحسب ثانیهٔ زمانی و μ_δ برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شوند.]

[لندن، ۱۹۳۰]

۸. μ_α و μ_δ مؤلفه‌های حرکت خاصه ـ تارهٔ $S(\alpha,\delta)$ در مختصات استوایی‌اند. اگر (l,b) مختصات کهکشانی S و μ_l و μ_b مؤلفه‌های حرکت خاصهٔ آن در این مختصات باشند، نشان دهید

$$\mu_l = \mu_\alpha \cos\eta \cos\delta \sec b + \mu_\delta \sin\eta \sec b$$
$$\mu_b = -\mu_\alpha \sin\eta \cos\delta + \mu_\delta \cos\eta$$

که در آن η زاویهٔ PSK است و P و K به‌ترتیب قطبهای شمال استوا و صفحهٔ کهکشانی‌اند.

[تبصره: علامت η آنگاه مثبت گرفته می‌شود که در پیمودن مثلث SPK در جهت نامگذاری شده، مساحت مثلث در طرف چپ قرار گیرد.]

[لندن، ۱۹۲۶]

۹. بُعد گرهٔ صفحهٔ کهکشان روی استوا Ω، و زاویهٔ میل آن نسبت به استوا i است. $(\xi،\eta،\zeta)$ مؤلفه‌های سرعت (برحسب کیلومتر بر ثانیه) ستاره‌ای (α,δ) نسبت به محورهای مختصات قائم کهکشانی‌اند، که در آن جهت محور ξ در جهت گرهٔ N است.

اگر μ_α و μ_δ مؤلفه‌های حرکت خاصهٔ سالانه به‌ترتیب برحسب ثانیه‌های زمانی و قوسی و Π اختلاف‌منظر ستاره باشد، نشان دهید که

$$\xi \sin(\alpha-\Omega) - \eta \cos i \cos(\alpha-\Omega) + \zeta \sin i \cos(\alpha-\Omega) = -\frac{K}{\Pi}\mu_\alpha \cos\delta$$

که در آن K ثابت عددی معینی است، معادله‌های متناظر را برحسب μ_δ و سرعت شعاعی به‌دست آورید. مقدار K در دستگاه واحدهای به کار رفته چقدر است؟

[لندن، ۱۹۲۶]

۱۰. اگر (u,v,w) مؤلفه‌های سرعت خطی V یک خوشهٔ اختری نسبت به محورهای استوایی دریک تاریخ معین باشند، معادلهٔ زیر را برای هر ستاره (α,δ) عضو خوشه با مؤلفه‌های حرکت خاصه سالانهٔ μ_α و μ_δ (هر دو برحسب ثانیهٔ قوسی) ثابت کنید

$$u(\mu_\delta \sin\alpha - \mu_\alpha \cos\alpha \sin\delta \cos\delta) - v(\mu_\delta \cos\alpha + \mu_\alpha \sin\alpha \sin\delta \cos\delta)$$
$$+ w\mu_\alpha \cos^۲\delta = ۰$$

از این‌رو نشان دهید که مختصات (A,D) نقطهٔ همگرا چگونه به دست می‌آیند.

[لندن، ۱۹۳۰]

۱۱. اگر زاویهٔ بین نقطهٔ همگرای یک خوشهٔ متحرک و یکی از ستاره‌های عضو آن که سرعت شعاعی‌اش v است، θ باشد، نشان دهید که سرعت خوشه نسبت به خورشید $v\sec\theta$، و فاصلهٔ

ستاره $v\tan\theta$ بر حرکت خاصه است. اگر $v = ۴۵٫۶$ کیلومتر بر ثانیه، $\theta = ۶۰^\circ$، و حرکت خاصه $۱٫۸''$ باشد، اختلاف‌منظر ستاره را پیدا کنید.

[لندن، ۱۹۲۲]

۱۲. ستاره‌ای دارای سرعت شعاعی ρ، اختلاف‌منظر π، و حرکت خاصه μ است. این کمیتها به‌ترتیب برحسب کیلومتر بر ثانیه، ثانیهٔ قوسی، و ثانیه قوسی بر سال ذکر می‌شوند. نشان دهید که آهنگهای تغییر سالانهٔ آنها به وسیلهٔ معادله‌های زیر داده می‌شوند

$$\frac{d\rho}{dt} = ۴٫۷۴\frac{\mu^۲}{\pi}\sin ۱''$$
$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\rho\mu\pi}{۲٫۳۷}\sin ۱''$$
$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\rho\pi^۲}{۴٫۷۴}\sin ۱''$$

[گلاسگو، ۱۹۷۴]

۱۳. ثابت کنید که سرعت فضایی یک ستاره (α, δ) در جهت نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی با مختصات استوایی (A, D) است به طوری که

$$\tan(A - \alpha) = \frac{۷۱٫۱\mu_\alpha}{(\rho\pi - ۴٫۷۴\mu_\delta\tan\delta)}$$

(در اینجا همهٔ نمادها مفهوم معمولی خود را دارند و در واحدهای معمولی خود اندازه‌گیری می‌شوند). فرمولی برای تعیین D به دست آورید.

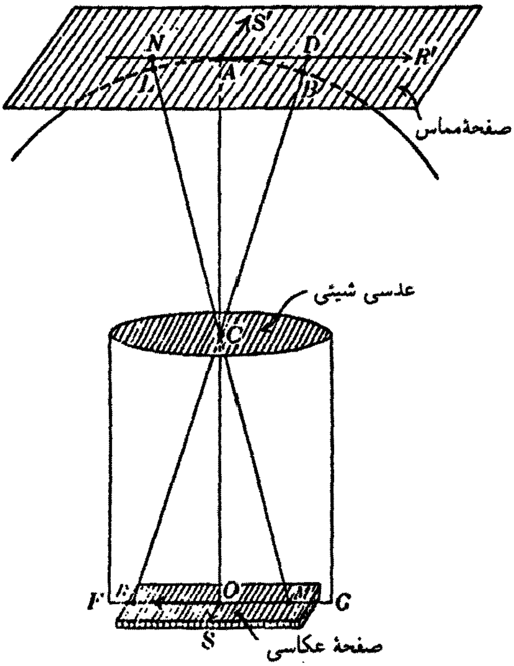
[گلاسگو، ۱۹۷۳]

۱۲

عکاسی نجومی

۱۵۸. تلسکوپ شکستی عکاسی

دو قسمت اصلی تلسکوپ شکستی عکاسی که در این فصل با آنها سروکار داریم عبارت‌اند: نخست، عدسی شیئی و دوم، صفحهٔ عکاسی (شکل ۱۰۶). فرض می‌کنیم که عدسی شیئی (که به‌ویژه برای کارهای عکاسی طرح شده است) به‌درستی در لولهٔ تلسکوپ نصب شده و CO، که در آن C مرکز عدسی شیئی است، محور نوری باشد. صفحهٔ کانونی عدسی شیئی FG، عمود بر CO است. صفحهٔ عکاسی (که فرض می‌کنیم مربع است) به وسیلهٔ کشویی (که در شکل نشان داده نشده است) طوری در جای خود نگه‌داشته می‌شود که طرف حساس صفحه دقیقاً در صفحهٔ کانونی باشد. همچنین برای سادگی فرض می‌کنیم که محور نوری CO از مرکز هندسی صفحهٔ عکاسی بگذرد. ستاره‌ای را در نظر می‌گیریم که در جهت CA (امتداد OC) دیده شود. همهٔ پرتوهای تابیده از ستاره، که روی عدسی شیئی فرود می‌آیند در نقطه O کانونی می‌شوند و در این نقطه روی صفحهٔ عکاسی تصویر دایره‌ای کوچکی به وجود می‌آورند. ستارهٔ دیگری را در نظر بگیرید که در جهت CB دیده شود. همهٔ پرتوهای تابیده شده به عدسی شیئی از این ستاره در کانونی در R (در امتداد BC) متمرکز خواهند شد. فرض کنید صفحهٔ ACB یا RCO موازی یک لبهٔ صفحهٔ عکاسی باشد. فرض کنید تصویر ستارهٔ B درست روی لبهٔ صفحه در R باشد. در آن صورت اگر l طول ضلع صفحهٔ عکاسی باشد، $l = ۲OR$ و از آنجا که $OR = OC\tan RCO = OC\tan ACB$، پس



شکل ۱۰۶

$$l = ۲OC \tan \beta \qquad (۱)$$

که در آن β نشانگر فاصلهٔ زاویه‌ای بین ستاره‌های A و B است. البته OC فاصلهٔ کانونی عدسی شیئی است ومعلوم فرض می‌شود. اگر ابعاد صفحه معلوم باشند مساحتی از آسمان (در مقیاس زاویه‌ای) را که می‌شود عکسبرداری کرد می‌توانیم به کمک معادلهٔ (۱)، محاسبه کنیم. مثلاً، فرض کنید یک تلسکوپ شکستی f۱۹ با فاصلهٔ کانونی ۵۸۹ سانتیمتر داشته باشیم، و صفحه‌های عکاسی مورد استفاده مربعهایی با ضلع ۱۶ سانتیمتر باشند. (قطر عدسی شیئی ۳۱ سانتیمتر خواهد بود). بنابراین از معادلهٔ (۱) داریم

$$\tan \beta = \frac{۱۶}{۲ \times ۵۸۹}$$

به طوری که β تقریباً $۴۷'$ است. بدین ترتیب ناحیه‌ای مربع از آسمان، $\frac{۱^\circ}{۲}$ در $\frac{۱^\circ}{۲}$، می‌تواندروی این صفحه عکاسی عکسبرداری شود.

مقیاس صفحهٔ عکاسی یا رابطهٔ بین فاصلهٔ خطی روی صفحه و جابه‌جایی زاویه‌ای متناظر آن در آسمان دارای اهمیت فراوانی است. مثلاً در مورد صفحه‌های یاد شده، ۱ سانتیمتر روی صفحه معادل $5\overset{'}{.}5$، یا ۱ میلیمتر معادل تقریباً $35''$ است. همین را می‌توانیم اندکی متفاوت بیان کنیم؛ اگر جدایی دو ستاره در آسمان $5\overset{'}{.}5$ باشد، مراکز تصویرهای آنها روی صفحهٔ عکاسی ۱ سانتیمتر فاصله خواهند داشت. ملاحظات مشابهی نیز در مورد تلسکوپ شکستی که برای منظورهای عکاسی به کار برده‌می‌شود انجام می‌گیرند.

۱۵۹. صفحهٔ مماس

در شکل ۱۰۶ کرهٔ سماوی را به مرکز C می‌کشیم و صفحهٔ مماس در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم - این صفحه عمود بر شعاع CA و بنابراین با صفحهٔ عکاسی موازی است. باید به یادداشت که A نقطه‌ای است روی کرهٔ سماوی که محور نوری تلسکوپ در جهت آن است. CB را امتداد می‌دهیم تا صفحهٔ مماس را در D قطع کند؛ بنابراین D تصویر B روی صفحهٔ مماس خوانده می‌شود. تصویر هر نقطهٔ دیگر روی کرهٔ سماوی می‌تواند به روشی مشابه با وصل کردن مرکز C به نقطهٔ مورد نظر و امتداد آن شعاع تا تلاقی صفحهٔ مماس ترسیم‌شود. ستارهٔ L را در نظر می‌گیریم که تصویر آن روی صفحهٔ مماس N و تصویرش روی صفحهٔ عکاسی M باشد. اگر $\phi = O\hat{C}M = A\hat{C}L$ داریم

$$\tan\phi = \frac{OM}{OC} = \frac{AN}{AC} \tag{۲}$$

کلاً نتیجه می‌شود که دستگاه تصاویر ستاره‌ها روی صفحهٔ عکاسی مشابه با دستگاه تصاویر روی صفحهٔ مماس است، اما مقیاس خطی یک دستگاه با دستگاه دیگر متفاوت است. فرض می‌کنیم AR' و AS' جهتهای مثبت محورهای قائم در صفحهٔ مماس باشند؛ OR و OS به‌ترتیب موازی AR' و AS'، در صفحهٔ عکاسی‌اند و جهتهای مثبت آنها مخالف جهتهای مثبت AR' و AS' است. اگر ξ' و η' مختصات تصویر ستاره‌ای روی صفحهٔ مماس باشند و ξ و η مختصات تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی باشند، در آن صورت با استفاده از اصل تشابه، داریم

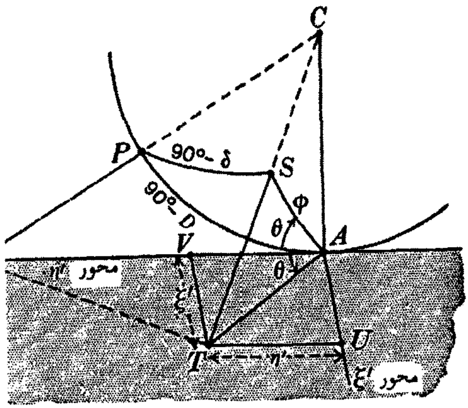
$$\frac{\xi'}{AC} = \frac{\xi}{OC} \tag{۳}$$

و

$$\frac{\eta'}{AC} = \frac{\eta}{OC} \tag{۴}$$

۱۶۰. مختصات استاندارد

برای سادگی هندسهٔ مسئله فرض خواهیم کرد که کرهٔ سماوی (به مرکز C) و صفحهٔ مماس در A به گونهٔ شکل ۱۰۷ رسم شوند. باید توجه داشت که A نقطه‌ای روی کرهٔ سماوی است که تلسکوپ



شکل۱۰۷

به سوی آن متوجه است. اگر S ستاره‌ای در نزدیکی A باشد، تصویر آن T روی صفحهٔ مماس با وصل کردن C به S و امتداد دادن CS تا تلاقی صفحهٔ مماس در T به دست می‌آید. کمان دایرهٔ عظیمهٔ AS را رسم می‌کنیم؛ پس چون صفحهٔ این دایرهٔ عظیمه از C می‌گذرد، نتیجه می‌شود که همه شعاعهای واصل بین C و نقاط روی AS در یک صفحه قرار دارند و این صفحه، صفحه مماس را در یک خط راست AT قطع می‌کند. به طور کلی‌تر، می‌توانیم بگوییم که تصویر هر دایرهٔ عظیمه‌ای روی صفحهٔ مماس یک خط راست است. P را قطب شمال کرهٔ سماوی بگیرید. AP دایرهٔ نصف‌النهار A خواهد بود و خط راست AQ تصویر آن است. AQ را محور η' در صفحهٔ مماس خواهیم گرفت. AU محور ξ' گرفته می‌شود که عمود بر AQ رسم شده است، و جهت مثبت آن به طرف شرق دایرهٔ نصف‌النهار AP انتخاب می‌شود به طوری که افزایش مقدار ξ' متناظر با افزایش مقدار بُعد است.

چون AT در صفحهٔ مماس قرار دارد، بر AC عمود است و بنابراین در نقطهٔ A بر کمان دایرهٔ عظیمهٔ AS مماس است. همینطور AQ بر کمان دایرهٔ عظیمهٔ AP مماس است. چون $Q\hat{A}T$ معرف زاویهٔ کروی PAS است از این‌رو $Q\hat{A}T = P\hat{A}S$. بدین‌ترتیب می‌بینیم که زاویهٔ بین دو کمان دایرهٔ عظیمهٔ دلخواهی، که یکدیگر را در نقطهٔ تماس A قطع می‌کنند، عیناً روی صفحهٔ مماس به صورت زاویهٔ بین دو خط راست که تصویرهای دو دایره عظیمه‌اند، بازسازی می‌شود. این گفته تنها در مورد دایره‌های عظیمه‌ای که از نقطهٔ تماس می‌گذرند صادق است؛ مثلاً، تصویر دایرهٔ عظیمهٔ SP خط راست TQ است و تصویر AP خط راست AQ است؛ ولی $A\hat{Q}T$ (زاویهٔ بین AQ و TQ) برابر $S\hat{P}A$ (زاویهٔ بین دایره‌های عظیمهٔ AP و SP)نیست.

کمان AS را با ϕ و زاویهٔ $S\hat{A}P$ را با θ نشان می‌دهیم؛ پس $Q\hat{A}T = \theta$. عمودهای TU و

TV را به‌ترتیب بر AU و AQ رسم می‌کنیم آنگاه

$$VT = \xi' = AT \sin\theta \qquad (۵)$$

و

$$UT = \eta' = AT \cos\theta \qquad (۶)$$

اکنون داریم

$$AT = AC \tan A\hat{C}T = AC \tan\phi$$

ازاین‌رو

$$\frac{\xi'}{AC} = \tan\phi \sin\theta \qquad (۷)$$
$$\frac{\eta'}{AC} = \tan\phi \cos\theta \qquad (۸)$$

از این‌رو از رابطه‌های (۳) و (۴) داریم

$$\frac{\xi}{OC} = \tan\phi \sin\theta \qquad (۹)$$
$$\frac{\eta}{OC} = \tan\phi \cos\theta \qquad (۱۰)$$

که در آن ξ و η مختصات تصویر S روی صفحهٔ عکاسی نسبت به محورهای قائمی هستند که از مرکز O صفحه (شکل ۱۰۶) موازی ولی در خلاف جهت محورهای AU و AQ واقع در صفحهٔ مماس، رسم می‌شوند. OC فاصلهٔ کانونی تلسکوپ است. فرض کنید فاصلهٔ کانونی برحسب میلیمتر معلوم باشد و مختصات ξ و η صفحهٔ عکاسی نیز برحسب میلیمتر از راههایی که بعداً توضیح داده خواهند شد به دست آورده شوند؛ بنابراین مقادیر ϕ و θ را می‌توان از روابط (۹) و (۱۰) محاسبه کرد. چنانکه بی‌درنگ خواهیم دید، ϕ و θ تابعهایی از بُعد و میل A و S هستند؛ اگر بُعد و میل A معلوم باشند، در آن صورت می‌توان بُعد و میل S را از مقادیر مختصات ξ و η به دست آورد.

اگر فاصلهٔ کانونی OC را واحد طول بگیریم و ξ و η را برحسب این واحد بیان کنیم، از روابط (۹) و (۱۰)، داریم

$$\xi = \tan\phi \sin\theta \qquad (۱۱)$$

$$\eta = \tan\phi \cos\theta \qquad (۱۲)$$

در آن صورت ξ و η مختصات استاندارد ستارهٔ مورد نظر نامیده می‌شوند. در تعریف مختصات استاندارد، که اولین بار توسط استارد ترنر معرفی شد،[1] نکته‌های زیر باید مورد توجه قرار گیرند: (الف) مبدأ محورهای مختصات به مکانی معین مربوط است، که بُعد و میل آن نسبت به یک نقطهٔ اعتدال میانگین استاندارد مشخص می‌شوند؛ عصر این نقطهٔ اعتدال میانگین را می‌توان ۱۹۰۰٫۰ انتخاب کرد؛ (ب) سمتگیری محورهای ξ و η به طور صحیح برای عصر ۱۹۰۰٫۰ انجام می‌گیرد؛ (ج) از آنجا که این تعریف، صرفاً تعریفی هندسی است، اثر عیبهای دستگاهی و شکست جوی و ابیراهی (که همهٔ آنها بعداً مورد بررسی قرار خواهند گرفت) را به حساب نمی‌آورد. بدین‌ترتیب مختصات استاندارد یک ستارهٔ بخصوص، مکان آن را به طور یکتا مشخص می‌کند، و بنابراین می‌توان آنها را به جای بُعد و میل به کار برد.

۱۶۱. فرمولهای مختصات استاندارد

فرض کنید A و D بُعد و میل نقطهٔ A روی کرهٔ سماوی نسبت به ۱۹۰۰٫۰، و α، و δ مختصات ستارهٔ S باشند. اکنون نشان می‌دهیم چگونه رابطه‌های بین ξ، η و A، D، α، و δ به دست می‌آیند. در مثلث کروی ASP (شکل ۱۰۷) داریم: $AP = ۹۰° - D$، $SP = ۹۰° - \delta$، $A\hat{P}S = \alpha - A$ (در شکل، S در سمت شرق دایرهٔ نصف‌النهار AP است)، $AS = \phi$، $S\hat{A}P = \theta$. بنابراین با استفاده از فرمولهای (الف)، (ب)، و (ج)، داریم

$$\cos\phi = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(\alpha - A) \qquad (۱۳)$$

$$\sin\phi\sin\theta = \cos\delta\sin(\alpha - A) \qquad (۱۴)$$

$$\sin\phi\cos\theta = \sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha - A) \qquad (۱۵)$$

از تقسیم (۱۵) بر (۱۳)، با استفاده از (۱۲) خواهیم داشت

$$\eta = \frac{\cos D - \cot\delta\sin D\cos(\alpha - A)}{\sin D + \cot\delta\cos D\cos(\alpha - A)} \qquad (۱۶)$$

q را چنین تعریف می‌کنیم

$$\cot q = \cot\delta\cos(\alpha - A) \qquad (۱۷)$$

پس

$$\eta = \frac{\cos D - \sin D\cot q}{\sin D + \cos D\cot q}$$

1. H.H.Turner, *Monthly Notices*, vol. LIV,p.13 (1893).

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\eta = \tan(q - D) \tag{۱۸}$$

همچنین از تقسیم رابطهٔ (۱۴) بر (۱۳) و با به کار بردن رابطهٔ (۱۱)، داریم

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\cot\delta \sin(\alpha - A)}{\sin D + \cos D \cot\delta \cos(\alpha - A)} \\ &= \frac{\cot q \tan(\alpha - A)}{\sin D + \cos D \cot q}\end{aligned} \tag{۱۹}$$

در گام آخر از (۱۷) استفاده شده است، به طوری که

$$\xi = \frac{\cos q \tan(\alpha - A)}{\cos(q - D)} \tag{۲۰}$$

بسهولت دیده می‌شود که کمیت کمکی q، که برای ساده کردن محاسبات لگاریتمی ξ و η با معلوم بودن A، D، α، و δ در رابطه‌های (۱۸) و (۲۰) معرفی شده است، تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. کمان دایرهٔ عظیمهٔ SL را طوری رسم کنید که AP را در زاویهٔ قائمهٔ در L قطع کند (شکل ۱۰۸). PL را با x نمایش دهید. آنگاه با استفاده از فرمول (د)، داریم

$$\cos x \cos(\alpha - A) = \sin x \tan\delta - \sin(\alpha - A) \cot ۹۰^\circ$$

که‌ازآن داریم

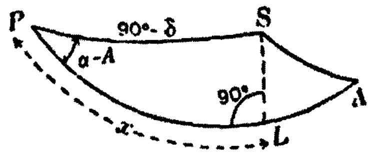
$$\tan x = \cot\delta \cos(\alpha - A)$$

از این‌رو به کمک فرمول (۱۷) داریم $x = ۹۰^\circ - q$، پس q میل L است.

فرمولهای (۱۸) و (۲۰) محاسبهٔ ξ و η را، در صورت معلوم بودن A، D، α، و δ امکان‌پذیر می‌سازند.

اکنون فرمولهایی خواهیم یافت که α و δ را برحسب A، D، ξ، و η به دست بدهند. از فرمول (۱۶) داریم

$$\eta \sin D + \eta \cot\delta \cos D \cos(\alpha - A) = \cos D - \cot\delta \sin D \cos(\alpha - A)$$



شکل ۱۰۸

که از آن نتیجه می‌شود

$$\cot\delta\cos(\alpha - A)\{\xi\cos D + \sin D\} = \cos D - \eta\sin D$$

از این‌رو

$$\cot\delta\cos(\alpha - A) = \frac{1 - \eta\tan D}{\eta + \tan D} \tag{۲۱}$$

همچنین از فرمول (۱۹) داریم

$$\begin{aligned}\cot\delta\sin(\alpha - A) &= \xi\sin D + \xi\cos D\cot\delta\cos(\alpha - A)\\ &= \xi\left\{\sin D + \frac{\cos D(1 - \eta\tan D)}{\eta + \tan D}\right\}\end{aligned}$$

که از آن، با بهره‌گیری از (۲۱)، نتیجه می‌گیریم که

$$\cot\delta\sin(\alpha - A) = \frac{\xi\sec D}{\eta + \tan D} \tag{۲۲}$$

فرمول (۲۲) را بر (۲۱) تقسیم می‌کنیم؛ آنگاه داریم

$$\tan(\alpha - A) = \frac{\xi\sec D}{1 - \eta\tan D} \tag{۲۳}$$

که از آن $(\alpha - A)$ را می‌توان محاسبه کرد و α را به دست آورد. هنگامی که $(\alpha - A)$ پیدا شده باشد، δ را می‌توان از فرمولهای (۲۱) یا (۲۲) به دست آورد.

در عکاسی نجومی دو فرایند بنیادی وجود دارند که به طور مستقیم یا غیرمستقیم به کار برده می‌شوند. اولی عبارت است از محاسبهٔ مختصات استاندارد یک یا چند ستاره که بُعد و میل آنها معلوم‌اند؛ این فرایند استفاده از فرمولهای (۱۸) و (۲۰) را شامل می‌شود. دومی عبارت است از محاسبهٔ بُعد و میل ستاره‌ها از مختصات استاندارد آنها؛ این فرایند با استفاده از فرمولهای (۲۳) و (۲۱) یا (۲۲) انجام می‌گیرد.

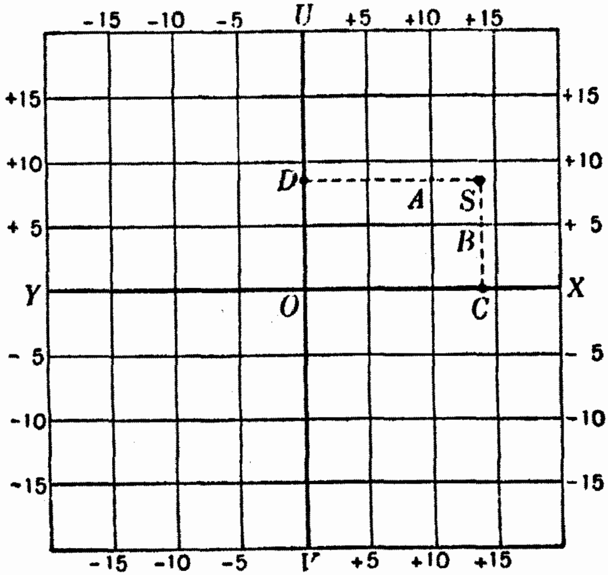
۱۶۲. اندازه‌گیری مقیاس صفحهٔ عکاسی

برای سهولت صفحه‌هایی که با تلسکوپهای اخترنگاشتی برداشته می‌شوند را بررسی می‌کنیم. این تلسکوپها، که طبق طرحی استاندارد ساخته شده‌اند، در ده بیست رصدخانه پراکنده در سراسر جهان مورد استفاده قرار می‌گرفتند؛ کاری که این رصدخانه‌ها بیشتر عهده‌دار انجام آن بوده‌اند تهیهٔ نقشهٔ عکسی آسمان بوده است. بهر حال باید توجه داشت، که روشهای توضیح داده شده در زیر

اکنون بیشتر اهمیت تاریخی دارند، چون کار تهیهٔ نقشهٔ عکسی تمام شده است. روشهای جدید کامپیوتری که امروزه در کار اخترسنجی مورد استفاده قرار می‌گیرند خیلی تخصصی است و، بدین لحاظ، از حوصلهٔ این کتاب خارج است.

روی هر صفحهٔ اخترنگاشتی، قبل یا بعد از مواجههٔ صفحه با نور ستاره‌ها، از شبکه‌ای از خطهای موازی (شکل ۱۰۹) عکسبرداری می‌شود به طوری که صفحهٔ عکاسی پس از ظهور، تصویر ستاره‌ها و شبکهٔ خطها را نشان می‌دهد. این خطها به فاصله‌های مساوی پنج میلیمتر از هم قرار دارند. فرض خواهیم کرد که خطهای مرکزی XOY و UOV دقیقاً بر محورهای ξ و η، که قبلاً تعریف شدند، منطبق باشند. تصویر ستاره‌ای را در S در نظر می‌گیریم. مسافت AS، موازی OX، با ماشین سنجش اندازه گرفته می‌شود و فرض خواهیم کرد که $AS = ۴{,}۱۴\mathrm{mm}$ باشد. بدین‌ترتیب فاصلهٔ S از محور UOV (یعنی OC) برابر ۴٫۱۴ + ۱۰ یا ۱۴٫۱۴mm است. با روشی مشابه، BS اندازه گرفته می‌شود و فاصلهٔ OD به دست می‌آید.

چون مختصات استاندارد برحسب فاصلهٔ کانونی، که به عنوان‌واحد در نظر گرفته می‌شود، بیان می‌شوند، از این‌رو مختصهٔ استاندارد ξ مثلاً S، در شکل ۱۰۹ برابر است با OC (برحسب میلیمتر) تقسیم بر فاصلهٔ کانونی (برحسب میلیمتر). برای سادگی، دو ستاره (به میلهای δ_1 و δ_2) روی دایرهٔ نصف‌النهار مرکزی AP در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم Y_1 و Y_2 (در طول محور η) مختصات استاندارد آنها باشند. پس، از روابط (۱۷) و (۱۸) داریم



شکل ۱۰۹

$$Y_۲ = \tan(\delta_۲ - D) \quad \text{و} \quad Y_۱ = \tan(\delta_۱ - D)$$

با فرض اینکه $(\delta_۱ - D)$ و $(\delta_۲ - D)$ زاویه‌های کوچک‌اند و برحسب دقیقهٔ قوسی بیان می‌شوند، داریم

$$Y_۲ = (\delta_۲ - D)\sin ۱' \quad \text{و} \quad Y_۱ = (\delta_۱ - D)\sin ۱'$$

به طوری که

$$Y_۲ - Y_۱ = (\delta_۲ - \delta_۱)\sin ۱'$$

اگر فاصلهٔ اندازه‌گیری شده بین تصویرها برحسب میلیمتر d باشد و فاصلهٔ کانونی به همان‌واحد f باشد، داریم $Y_۲ - Y_۱ = d/f$ و در نتیجه

$$\delta_۲ - \delta_۱ = sd \qquad (۲۴)$$

که در آن $s = (۱/f)\,\mathrm{cosec}\, ۱'$؛ بدین ترتیب مقدار s را می‌توان معلوم دانست. s «مقیاس» صفحهٔ عکاسی است و تعداد دقیقه‌های قوسی متناظر با ۱mm روی صفحهٔ عکاسی را به دست می‌دهد. پس با اندازه‌گیری فاصلهٔ (برحسب میلیمتر) بین تصویرهای دو ستارهٔ دلخواه، به کمک رابطهٔ (۲۴) و مقدار معلوم s، می‌توانیم جدایی زاویه‌ای آن دو ستاره را در آسمان به‌دست آوریم.[۱] تلسکوپ اخترنگاشتی طوری طرح می‌شد که مقیاس آن ۱mm بر '۱ باشد.

در برخی کارها گاهی آسانتر آن است که فاصله‌های کوچک روی صفحهٔ عکاسی برحسب تعداد دور ریزسنج متصل به ماشین سنجش اندازه‌گیری شوند. مانند قبل، فاصلهٔ بین تصویرهای دو ستاره را برحسب مقیاس ریزسنج (مثلاً ۳٫۴۵۶ دور) اندازه می‌گیریم، و این عدد با تعداد دقیقه‌ها (یا ثانیه‌های) قوسی‌ای که با آن ستاره‌ها در آسمان از هم جدا هستند متناظر است. مثلاً، اگر یک دور چرخش پیچ ریزسنج برابر با ″۱۲٫۳۴ روی صفحهٔ عکاسی باشد، در آن صورت فاصلهٔ زاویه‌ای جدایی دو ستاره ″۴۲٫۶۵ خواهد بود.

۱۶۳. مختصات اندازه‌گیری شده

در تعریف مختصات استاندارد یک ستاره فرض کردیم (الف) محور نوری تلسکوپ از مبدأ مختصات روی صفحهٔ عکاسی می‌گذرد، (ب) صفحهٔ عکاسی بر محور نوری عمود است، (ج) محور η با تصویر دایرهٔ نصف‌النهار مرکزی، برای عصر ۱۹۰۰٫۰، روی صفحهٔ مماس دقیقاً یکی است (د)

---

۱. فاصلهٔ کانونی f و مقیاس ماشین سنجش کمی با دما تغییر می‌کند؛ این تغییرات خود به خود در «ثابتهای صفحهٔ عکاسی» a و e (بخش ۱۶۷) به حساب می‌آیند.

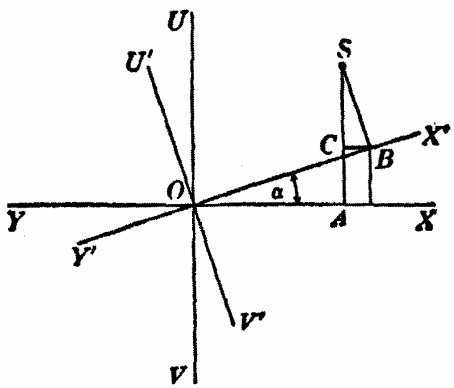
محور ξ بر محور η عمود است. در عمل رسیدن به این وضع بی نقص هندسی ناممکن است، و در نتیجه باید انتظار داشت که مختصات تصویر ستاره، که نسبت به محورهای روی صفحهٔ عکاسی اندازه گرفته می‌شوند، با مختصات استاندارد نظری تفاوت (معمولاً جزئی) داشته باشند. تنها این نیست. تا اینجا، هر گاه سخن از تصویر ستاره‌ها به میان می‌آمد، از اثر شکست و از اثر ابیراهی چشم می‌پوشیدیم. در فصلهای قبل دیدیم که به سبب شکست و ابیراهی، مکان ظاهری یک ستاره روی کرهٔ سماوی به اندازهٔ قابل اندازه‌گیری یا قابل محاسبه از مکان واقعی آن جابه جا می‌شود؛ در نتیجه عملاً تصویر یک ستاره روی صفحهٔ عکاسی از مکانی که در صورت ناموثر بودن این پدیده‌ها می‌داشت تا اندازه‌ای جابه‌جا شده خواهد بود. بدین ترتیب درمی‌یابیم که مختصات استاندارد مختصاتی آرمانی‌اند. در حالی که مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر ستاره اثر عیبهای هندسی (یا مکانیکی) و اثر شکست و اثر ابیراهی را در بر دارند. در نظر نخست، مسئلهٔ به دست آوردن مختصات استاندارد یک ستاره از مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی کاری بس دشوار می‌نماید؛ در واقع، چنانکه خواهیم دید، حل این مسئله در عمل بسیار ساده است. اینک مفصلاً تفاوتهای بین مختصات استاندارد اندازه‌گیری شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۶۴. مبحث خطاها

خطاها را به طور انفرادی مورد بررسی قرار خواهیم داد. مختصات استاندارد واقعی ستاره را با ξ و η و مختصات تحت تأثیر خطای ویژهٔ مورد نظر را با x و y نشان می‌دهیم.

الف) خطای سمتگیری

فرض می‌کنیم که در شکل ۱۱۰، XOY و UOV محورهای مختصاتی باشند که به درستی برای عصر ۱۹۰۰٫۰، مرکزی و سمتگیری شده‌اند و $X'OY'$ و $U'OV'$ محورهای روی صفحهٔ



شکل ۱۱۰

عکاسی (خطاهای مرکزی شبکه) باشند که به‌درستی مرکزی ولی اشتباهاً سمتگیری شده‌اند. فرض می‌کنیم $X'\hat{O}X = \alpha$.

فرض کنید S نقطه‌ای باشد که مختصات استاندارد آن نسبت به OX و OY، ξ و η هستند و مختصات آن نسبت به OX' و OY'، X' و yاند. عمودهای SA و SB را به ترتیب بر OX و OX' رسم کنید. پس $OA = \xi$، $AS = \eta$، $OB = x$، و $BS = y$. داریم

$$OA = OB\cos\alpha + BS\cos(۹۰^\circ + \alpha)$$

یا

$$\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

که از آنجا نتیجه می‌شود

$$\xi - x = -۲x\sin^۲\frac{\alpha}{۲} - y\sin\alpha$$

همینطور داریم

$$\eta - y = x\sin\alpha - ۲y\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

این فرمولها را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\left.\begin{aligned}\xi - x &= a_۱x + b_۱y\\ \eta - y &= d_۱x + e_۱y\end{aligned}\right\} \qquad (۲۵)$$

که در آن $a_۱$ و . . . ، $e_۱$ تابعهایی ساده از α هستند. در عمل α همواره زاویه‌ای کوچک است و در نتیجه ضریبهای $a_۱$، . . . ، $e_۱$ نیز کوچک‌اند. فرمولهای (۲۵) الزاماً برحسب x و y خطی هستند.

ب) ناعمودی محورها

اگر محور x روی صفحهٔ عکاسی دقیقاً بر محور y عمود نباشد، روشن است که دوباره فرمولهایی خطی از نوع (۲۵) برای کمیتهای $\xi - x$ و $\eta - y$ به دست خواهند آمد.

نتیجهٔ مشابهی نیز در صورت عمود نبودن دقیق محورهای متناظر مقیاس ریزسنج حاصل می‌شود.

ج) خطای مرکزی‌سازی

اولاً فرض می‌کنیم که در خلال یک نورگیری، جهت محور نوری با جهتی معین (A, D) نسبت به نقطهٔ اعتدال میانگین ۱۹۰۰٫۰ مطابقت کند و ξ و η مختصات استاندارد یک ستاره (α, δ)، نسبت به مکان (A, D) به عنوان مرکز، باشند. مشکل بتوان انتظار داشت که خط راست واصل

بین مرکز عدسی شئ و مبدأ محورهای مختصات شبکهٔ نقش بسته بر صفحهٔ عکاسی دقیقاً بر محور نوری منطبق باشد، و در نتیجه مبدأ با مقادیر کمی متفاوت از A و D مطابقت خواهد کرد. ثانیاً، محور نوری ممکن است دقیقاً در جهت مکان (A,D) در ۱۹۰۰٫۰ نباشد. در نتیجه، باید فرض کنیم که مبدأ مختصات روی صفحهٔ عکاسی با یک مکان $(A+\Delta A, D+\Delta D)$، که در آن ΔA و ΔD کمیتهایی کوچک‌اند مطابقت دارد.

با فرض اینکه همهٔ خطاها و اثرهای دیگر وجود نداشته باشند، x و y را مختصات یک تصویر نسبت به محورهای شبکه می‌گیریم. پس x و y را می‌توان مختصات استاندارد ستارهٔ مورد نظر، نسبت به مکان $(A+\Delta A, D+\Delta D)$ به عنوان مرکز، تلقی کرد. $x-\xi$ و $y-\eta$ را به‌ترتیب با $\Delta\xi$ و $\Delta\eta$ نشان می‌دهیم.

حال، از فرمولهای (۱۱) و (۱۲)، داریم

$$\xi = \tan\phi \sin\theta \,, \quad \eta = \tan\phi\cos\theta$$

که در آن ϕ و θ تابعهایی از A و D هستند. در برابر نموهای ΔA و ΔD، نموهای $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$ را داریم. از این رو

$$\Delta\xi = \Delta\phi(1+\tan^2\phi)\sin\theta + \Delta\theta\tan\phi\cos\theta$$
$$\Delta\eta = \Delta\phi(1+\tan^2\phi)\cos\theta - \Delta\theta\tan\phi\sin\theta$$

برای ستاره‌ای که در فاصلهٔ زاویه‌ای ۱° از (A,D) قرار دارد، $\tan\phi = 1/57$، پس در فرمولهای بالا از آن جمله‌هایی که عامل $\Delta\phi\tan^2\phi$ دارند چشم می‌پوشیم. بدین‌ترتیب داریم

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi &= \Delta\phi\sin\theta + \eta\Delta\theta\\ \Delta\eta &= \Delta\phi\cos\theta - \xi\Delta\theta\end{aligned}\right\} \tag{۲۶}$$

اینک باید $\Delta\phi$ و $\Delta\theta$ را برحسب ΔA و ΔD بیان کنیم.

از رابطهٔ (۱۳) داریم

$$-\sin\phi\Delta\phi = \Delta D\{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha-A)\}$$
$$+\Delta A\cos\delta\cos D\sin(\alpha-A)$$

و، با استفاده از فرمولهای (۱۴) و (۱۵) این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\Delta\phi = -\Delta D\cos\theta - \Delta A\cos D\sin\theta \tag{۲۷}$$

از فرمول (۱۴) می‌یابیم

$$\Delta\theta\sin\phi\cos\theta + \Delta\phi\cos\phi\sin\theta = -\Delta A\cos\delta\cos(\alpha-A)$$

یا، با به کار بستن معادلهٔ (۲۷) داریم

$$\Delta\theta \sin\phi \cos\theta = \cos\phi \sin\theta(\Delta D \cos\theta + \Delta A \cos D \sin\theta) - \Delta A \cos\delta \cos(\alpha - A)$$

رابطهٔ (۱۳) را در $\cos D$ و (۱۵) را در $\sin D$ ضرب و از هم کم می‌کنیم. در آن صورت

$$\cos\delta \cos(\alpha - A) = \cos\phi \cos D - \sin\phi \cos\theta \sin D$$

از این‌رو

$$\Delta\theta \sin\phi \cos\theta = \Delta D \cos\phi \sin\theta \cos\theta + \Delta A\{\cos\phi \sin^2\theta \cos D - \cos\phi \cos D + \sin\phi \cos\theta \sin D\}$$

که از آن داریم

$$\Delta\theta \sin\phi = \Delta D \cos\phi \sin\theta + \Delta A(\sin\phi \sin D - \cos\phi \cos\theta \cos D)$$

با ضرب معادلهٔ اخیر در $\sec\phi \cos\theta$ داریم

$$\eta\Delta\theta = \Delta D \sin\theta \cos\theta + \Delta A(\eta \sin D - \cos^2\theta \cos D)$$

عبارت مربوط به $\eta\Delta\theta$ و عبارت مربوط به $\Delta\phi$ از معادلهٔ (۲۷) را در معادلهٔ اول (۲۶) قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\Delta\xi = -\Delta A \cos D + \eta\Delta A \sin D$$

یا

$$\xi - x = \Delta A \cos D - \eta\Delta A \sin D$$

چون $(\xi - x)$ هم مرتبه با ΔA است، معادلهٔ اخیر را می‌توانیم با دقت کافی به صورت زیر بنویسیم

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= \Delta A \cos D - y\Delta A \sin D \\ &\text{با روشی مشابه} \\ \eta - y &= \Delta D + x\Delta A \sin D \end{aligned}\right\} \qquad (۲۸)$$

این فرمولها شکلهای خطی زیر را دارند

$$\xi - x = b_۲ y + c_۲$$
$$\eta - y = d_۲ x + f_۲$$

د) خطای کجی

این خطا ناشی از ناعمودی محور نوری بر صفحهٔ عکاسی است. اگر i زاویهٔ بین محور نوری و خط عمود بر صفحهٔ عکاسی باشد، عبارتهای $\xi - x$ و $\eta - y$ به صورت زیر خواهند بود

$$\xi - x = \tan i(p\, x^۲ + q\, x\, y)$$
$$\eta - y = \tan i(p\, x\, y + q\, y^۲)$$

چون در عمل i تنها چند دقیقهٔ قوسی است و مجذور x و y و حاصلضربهای آنها در معادله‌های بالا موجودند، معمولاً می‌توان از تصحیح کجی صرفنظر کرد.

کل خطاهای گوناگونی که در اینجا منظور می‌شوند باید تغییر مکانهای $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$ را برحسب عبارتهای الزاماً خطی به دست دهند؛ بدین‌ترتیب می‌توانیم فرمولهای کلی زیر را بنویسیم

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= ax + by + c \\ \eta - y &= dx + ey + f \end{aligned}\right\} \qquad (۲۹)$$

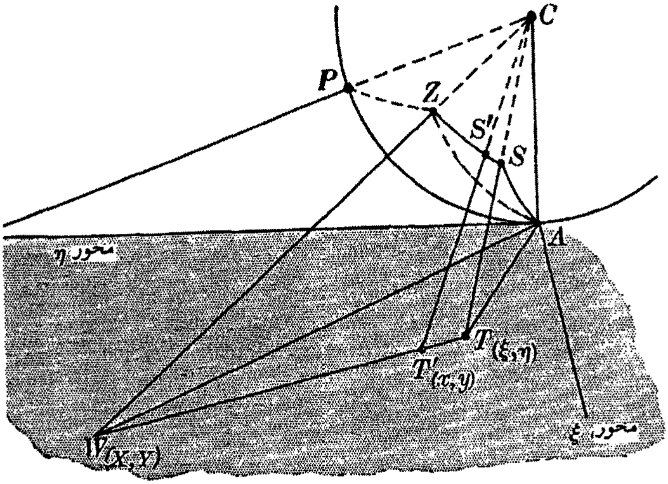
که در آنها a، b، . . . ، f کمیتهایی کوچک‌اند که به خطاهای کوچک موجود بستگی دارند.

۱۶۵. شکست جوی

اکنون جابجاییهای تصاویر ستاره‌ها را که تنها ناشی از شکست جوی‌اند مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۱۱۱ صفحهٔ مماس بر کرهٔ سماوی در نقطهٔ A مانند شکل ۱۰۷ رسم شده است. Z سمت‌الرأس و W تصویر آن بر صفحهٔ مماس است؛ مختصات W را X و Y فرض کنید. ستارهٔ S به سبب شکست در S' دیده می‌شود، به طوری که جابه‌جایی SS' در امتداد کمان دایرهٔ عظیمهٔ واصل بین S و Z صورت می‌گیرد. فرمول زیر [فرمول (۷) فصل ۳] را به کار می‌بریم

$$SS' = k \tan ZS \qquad (۳۰)$$

که در آن k برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود و به جای فاصلهٔ سمت‌الرأسی رصد شدهٔ ZS'، بدون اینکه دقت محسوساً کاهش یابد، ZS نوشته شده است. خط راست $WT'T$ تصویر دایرهٔ عظیمهٔ $ZS'S$ بر صفحهٔ مماس است، به طوری که T و T' به‌ترتیب تصویرهای S و S'اند. فرض می‌کنیم ξ، η مختصات T و x و y مختصات T' باشند. اگر ξ، η، x، y برحسب واحد



شکل۱۱۱

طول AC بیان شوند، به‌ترتیب مختصات استاندارد ستاره و مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی خواهند بود.

چون ناحیهٔ عکسبرداری معمولاً بزرگتر از $2^\circ \times 2^\circ$ نیست، در واقع نقاط مختلف بخش مورد نظر از سطح کرهٔ سماوی به نقاط تصویر شدهٔ متناظر روی صفحهٔ مماس خیلی نزدیک‌اند؛ بنابراین فرض می‌کنیم $SS' = TT'$. از فرمول (۳۰) داریم

$$TT' = k \tan ZS \qquad (۳۱)$$

چون T، T'، و W همخط‌اند داریم

$$\frac{x-\xi}{TT'} = \frac{X-\xi}{TW} \quad \text{و} \quad \frac{y-\eta}{TT'} = \frac{Y-\eta}{TW}$$

و با نوشتن $\Delta\xi$ به جای $(\xi - x)$ و $\Delta\eta$ به جای $(\eta - y)$، از فرمول (۳۱) نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\xi = -\frac{k(X-\xi)}{TW} \tan ZS \qquad (۳۲)$$

$$\Delta\eta = -\frac{k(Y-\eta)}{TW} \tan ZS \qquad (۳۳)$$

یادآور می‌شویم که مختصات مختلف ξ، η،y، x، X و Y همه به‌فرض برحسب واحد طول AC بیان می‌شوند. بدین‌ترتیب کمیتهای ξ و η، به‌ویژه، کوچک‌اند و در زیر از کمیتهای خیلی کوچکتر ξ^2، $\xi\eta$، η^2 و توانهای بالاتر آنها چشمپوشی خواهیم کرد.

اکنون از مثلث مسطح TAW داریم

$$TW^۲ = AT^۲ + AW^۲ - ۲AT \times AW \cos TAW$$

به طوری که

$$(X-\xi)^۲ + (Y-\eta)^۲ = (\xi^۲+\eta^۲) + (X^۲+Y^۲) - ۲AT \times AW \cos TAW$$

که از آن رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$AT \times AW \cos TAW = X\xi + V\eta \qquad (۳۴)$$

از مثلث کروی ZAS، با استفاده از فرمول (الف)، داریم

$$\begin{aligned}\cos ZS &= \cos AS \cos AZ + \sin AS \sin AZ \cos ZAS\\ &= \frac{AC}{CT}\frac{AC}{CW} + \frac{AT}{CT}\frac{AW}{CW}\cos ZAS\end{aligned}$$

چون $T\hat{A}W$ معرف زاویهٔ کروی ZAS است، از رابطهٔ (۳۴) با قرار دادن $AC = ۱$ داریم

$$\cos ZS = \frac{۱ + X\xi + Y\eta}{CT \times CW}$$

اما

$$\begin{aligned}CT^۲ &= ۱ + \xi^۲ + \eta^۲\\ &= ۱ \qquad \text{با چشمپوشی از } \xi^۲ \text{ و } \eta^۲\end{aligned}$$

از این‌رو

$$\cos ZS = \frac{۱ + X\xi + Y\eta}{CW} \qquad (۳۵)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\sin^۲ ZS &= \frac{CW^۲ - (۱ + X\xi + Y\eta)^۲}{CW^۲}\\ &= \frac{(CW^۲ - ۱) - ۲(X\xi + Y\eta)}{CW^۲}\\ &= \frac{AW^۲ - ۲(X\xi + Y\eta)}{CW^۲}\end{aligned}$$

از این‌رو، با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای، و چشمپوشی از $\xi^۲$ و غیره خواهیم یافت

$$\sin ZS = \frac{AW}{CW}\left(۱ - \frac{X\xi + Y\eta}{AW^۲}\right) \tag{۳۶}$$

از رابطه‌های (۳۵) و (۳۶) داریم

$$\tan ZS = \frac{AW\left(۱ - \frac{X\xi + Y\eta}{AW^۲}\right)}{۱ + X\xi + Y\eta} \tag{۳۷}$$

اکنون

$$\begin{aligned} TW^۲ &= (X-\xi)^۲ + (Y-\eta)^۲ \\ &= X^۲ + Y^۲ - ۲(X\xi + Y\eta) && \text{وبا چشمپوشی از } \xi^۲ \text{ و } \eta^۲ \\ &= AW^۲ - ۲(X\xi + Y\eta) && \text{بنابراین} \end{aligned}$$

$$TW = AW\left(۱ - \frac{X\xi + Y\eta}{AW^۲}\right) \tag{۳۸}$$

از رابطه‌های (۳۷) و (۳۸) داریم

$$\begin{aligned} \tan ZS &= TW(۱ + X\xi + Y\eta)^{-۱} \\ &= TW(۱ - X\xi - Y\eta) \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب از رابطهٔ (۳۲) می‌یابیم

$$\Delta\xi = -k(X-\xi)(۱ - X\xi - Y\eta)$$

یا

$$\Delta\xi = -kX + k\{(۱ + X^۲)\xi + XY\eta\} \tag{۳۹}$$

از آنجا که $(x - \xi)$ و k (برحسب مقیاس دایره‌ای) هر دو کوچک‌اند، می‌توانیم در طرف راست رابطهٔ (۳۹) بدون وارد کردن خطایی محسوس، x و y را به ترتیب به‌جای ξ و η بنویسیم. آنگاه (۳۹)، با نوشتن $(x - \xi)$ به جای $\Delta\xi$ رابطهٔ‌زیر را به ما می‌دهد

$$\Delta\xi \equiv \xi - x = -k\,X + k\{(۱ + X^۲)x + XYy\} \tag{۴۰}$$

همینطور، نتیجه می‌گیریم

$$\Delta\eta \equiv \eta - y = -kY + k\{XYx + (۱ + Y^۲)y\} \tag{۴۱}$$

جابه‌جاییهای ناشی از شکست برای مرکز صفحهٔ عکاسی $-kX$ و $-kY$ هستند، و چون این کمیتها در مقادیر $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$، برای همهٔ تصویرها روی صفحهٔ عکاسی، ظاهر می‌شوند می‌توان آنها را در ثابتهای تعیین نشدهٔ c و f معادلات (۲۹) نهفته دانست. هرگاه $-kX$ و $-kY$ از رابطه‌های (۴۰) و (۴۱) برداشته شوند، جمله‌های باقیمانده مقادیر $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$ را برای شکست تفاضلی بیان می‌کنند؛ در این صورت این معادله‌ها صورت خطی زیر را پیدا می‌کنند.

$$\xi - x = ax + by \tag{۴۲}$$

$$\eta - y = dx + ey \tag{۴۳}$$

که در آنها مثلاً $a = k(1 + X^2)$ است.

ضرایب a، b، d، و e را در صورت لزوم می‌توان محاسبه کرد. کافی است مقادیر X و Y را برای لحظهٔ وسط نورگیری در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم زمان نجومی آن لحظه S باشد. پس چون PZ دایرهٔ نصف‌النهار راصد است (شکل ۱۱۱)، زاویهٔ ساعتی نقطهٔ اعتدال Υ برابر بُعد هر نقطه‌ای است که روی دایرهٔ نصف‌النهار راصد، PZ، قرار دارد؛ بخصوص، بُعد Z برابر S است. همچنین $PZ = 90^\circ - \phi$، که در آن ϕ عرض جغرافیایی است، به طوری که‌اگر Z را نقطهٔ ویژه‌ای روی کرهٔ سماوی بگیریم، میل آن ϕ خواهد بود. اینک فرمولهای (۱۷)، (۱۸)، و (۲۰) را به کار می‌بریم، فرض کنید Q به وسیلهٔ رابطهٔ زیر تعریف شود

$$\cot Q = \cot\phi \cos(S - A) \tag{۴۴}$$

در آن‌صورت

$$Y = \tan(Q - D) \tag{۴۵}$$

$$X = \frac{\cos Q \tan(S - A)}{\cos(Q - D)} \tag{۴۶}$$

با دانستن مقدار kـ که در مقیاس دایره‌ای $58{,}2 \sin 1''$ است ـ مقادیر a، b، d، و e رابطه‌های (۴۲) و (۴۳) را می‌توان نتیجه گرفت. در عمل این محاسبه احتمالاً هیچگاه لازم نیست، زیرا کافی است به عنوان قاعده‌ای کلی بدانیم اختلافهای بین مختصات استاندارد و مختصات متناظر تصویر بر اثر شکست با دقت کافی به وسیلهٔ عبارتهایی که در x و y خطی‌اند و ضرایب a، b، و غیرهٔ آنها کوچک‌اند به دست می‌آیند.

ولی هرگاه ارتفاع ناحیهٔ مورد عکسبرداری آسمان کمتر از 30° یا در این حدود باشد، فرمول سادهٔ (۳۰) برای شکست دقت کافی ندارد؛ همچنین حذف جمله‌های درجهٔ دوم، دیگر توجیه‌پذیر نخواهد بود. با فرض اینکه شکست جوی R از رابطهٔ زیر به دست آید

$$R = A \tan ZS' + B \tan^3 ZS'$$

[فرمولهای (۲۹) و (۳۰) از فصل ۳] و جمله‌های مرتبهٔ دوم به حساب آورده شوند، می‌توانیم فرمولهای $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$ را به صورتهای زیر بنویسیم

$$\xi - x = \alpha x + \beta y + gx^{2} + hxy + ky^{2}$$
$$\eta - y = \gamma x + \delta y + l\,x^{2} + mxy + ny^{2}$$

این روابط اثر شکست تفاضلی بر مختصات استاندارد را به دست می‌دهند. ضریبهای α، β، ...، m، n برحسب A و B و مختصات X و Y سمت‌الرأس بیان می‌شوند. در عمل، مقادیر آنها بدون در نظر گرفتن فرمولهای نظری که آنها را بیان می‌کنند، به دست آورده می‌شوند.

۱۶۶. ابیراهی

بررسی اثر ابیراهی بر مختصات استاندارد یک ستاره شباهت زیادی به بررسی بخش قبل دارد. از فصل هشتم می‌دانیم که اگر F مکانی روی کرهٔ سماوی باشد که زمین به هنگام رصد به سوی آن در حرکت است، مکان یک ستاره از مکان واقعی‌اش S به S' روی کمان دایرهٔ عظیمهٔ SF جابه‌جا می‌شود، به طوری که S' از F به S نزدیکتر است. جابه‌جایی SS' از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$SS' = \kappa \sin FS \tag{۴۷}$$

که در آن κ ثابت ابیراهی است و مقدارش در مقیاس دایره‌ای $20{,}5 \sin 1''$ است. ما تنها اثرات ابیراهی را در نظر می‌گیریم و مانند قبل، ξ و η را برای مختصات استاندارد یک ستاره و x و y را برای مختصات تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی به کار می‌بریم. البته، F روی کرهٔ سماوی نقطه‌ای معین است و فرض می‌کنیم تصویر آن روی صفحهٔ مماس W_1، با مختصات U و V، باشد. همچنین فرض می‌کنیم F، U، و V صرفاً مربوط به زمان وسط نورگیری باشند. با پیروی از روش بخش قبل، فرمولهای متناظر با (۳۲) و (۳۳) را در زیر می‌نویسیم

$$\Delta\xi = -\frac{\kappa(U-\xi)}{TW_1}\sin FS \tag{۴۸}$$

$$\Delta\eta = -\frac{\kappa(V-\eta)}{TW_1}\sin FS \tag{۴۹}$$

و از رابطه‌های (۳۶) و (۳۸) داریم

$$\sin FS = \frac{AW_1}{CW_1}\left(1 - \frac{U\xi + V\eta}{AW_1^{2}}\right) \tag{۵۰}$$
$$TW_1 = AW_1\left(1 - \frac{U\xi + V\eta}{AW_1^{2}}\right)$$

به طوری که

$$\frac{\sin FS}{TW_۱} = \frac{۱}{CW_۱}$$

سپس

$$CW_۱^۲ = ۱ + U^۲ + V^۲$$

بنابراین خواهیم یافت

$$\Delta\xi = -\frac{\kappa U}{(۱+U^۲+V^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{\kappa\xi}{(۱+U^۲+V^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \quad (۵۱)$$

$$\Delta\eta = -\frac{\kappa V}{(۱+U^۲+V^۲)^{\frac{۱}{۲}}} + \frac{\kappa\eta}{(۱+U^۲+V^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \quad (۵۲)$$

همچون بخش قبل و بدون کاهش محسوس دقت، می‌توانیم در طرف راست رابطه‌های (۵۱) و (۵۲) x را به جای ξ و y را به جای η بنویسیم و نیز جمله‌های ثابت (مستقل از ξ و η) را از طرفهای راست این معادله‌ها خارج کنیم. سپس عبارتهایی به شکل زیر برای ابیراهی تفاضلی به دست می‌آوریم

$$\xi - x = a_۱ x \quad (۵۳)$$

$$\eta - y = d_۱ y \quad (۵۴)$$

که در آنها $a_۱$ و $d_۱$ کوچک‌اند (ضریب مشترکشان $۲۰٫۵ \sin ۱''$ است که هم مرتبه با $۱۰^{-۴}$ است). در اینجا نیز، اصولاً، محاسبهٔ مقادیر $a_۱$ و $d_۱$ از عبارتهای نظری آنها غیر ضروری است.

۱۶۷. روابط کلی بین مختصات استاندارد و مختصات اندازه گرفته شده (روش ترنر)[1]

در سه بخش قبل دیدیم که شکست، ابیراهی، و خطاهای دستگاهی هر یک جداگانه موجب می‌شود که در هر مختصهٔ تصویر یک ستاره روی صفحهٔ عکاسی تغییر مکانی از مکان مختصات استاندارد آن رخ دهد و این جابه‌جایی معمولاً با دقت کافی به صورت عبارتی خطی از مختصات است. اگر همهٔ این اثرهای گوناگون را با هم ترکیب کنیم آشکارا برای $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$ فرمولهایی خطی به دست می‌آوریم، که می‌توانیم آنها را به صورتهای کلی زیر بنویسیم

$$\xi - x = ax + by + c \quad (۵۵)$$

$$\eta - y = dx + ey + f \quad (۵۶)$$

1. Turner method

که در آنها ξ و η مختصات استاندارد ستاره و x و y مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی‌اند. a، b، و غیره در این معادلات کمیتهایی کوچک‌اند و به صورتی مرکب به خطاهای دستگاهی، شکست، و ابیراهی بستگی دارند. بدین‌ترتیب در حالت کلی x اندکی با ξ تفاوت دارد و می‌توانیم این معادله‌ها را، بدون کاهش دقت، به صورت دیگری بنویسیم، یعنی

$$\xi - x = a\xi + b\eta + c \qquad (۵۷)$$

$$\eta - y = d\xi + e\eta + f \qquad (۵۸)$$

که در آنها کمیتهای a، b و غیره کوچک‌اند. این کمیتها را ثابتهای صفحهٔ عکاسی می‌نامند. اکنون سه کاربرد عملی را مورد بررسی قرار می‌دهیم: (۱) اندازه‌گیری صفحات عکاسی اخترنگاشتی، (۲) اندازه‌گیری حرکتهای خاصه، (۳) اندازه‌گیری اختلاف‌منظر اختری.

۱۶۸. اندازه‌گیری صفحات عکاسی اخترنگاشتی

تعیین دقیق بُعد و میل ستاره‌های درخشانتر از قدر حدود ۹ مستقیماً از رصدهای دایرهٔ نصف‌النهار انجام می‌پذیرد. فراتر از این قدر، ستاره‌ها به سبب روشنایی‌ای که برای نمایان کردن سیمهای تاربست دستگاه لازم است، خیلی کم نورتر از آن‌اند که با این روش رصد شوند. در واقع، بدیهی است که رصد انبوه ستاره‌های ضعیف با این دستگاه حتی اگر تعداد آنها هزار برابر باشد و تنها برای همین منظور به‌کار برده شود (و در صورتی که عملی هم باشد) کاملاً خارج از کارایی نجومی رصدخانه‌های دنیاست. یکی از بررسیهای متفاوتی که در آنها تلسکوپ عکاسی به کار می‌رود، بررسی مکان ستاره‌هاست که نخست توجه خود را بدان معطوف می‌داریم.

اکنون فرض می‌کنیم عکسی از ناحیه‌ای برداشته شده است، که مختصات (A, D) مرکز آن را می‌دانیم، و شبکه‌ای از خطوط تاروپودی نیز بر صفحهٔ عکاسی نشانده شده است. مختصات x و y هر تصویر ستاره را (نسبت به دو خط مرکزی که به عنوان محورهای مختصات روی صفحهٔ عکاسی در نظر گرفته می‌شوند) می‌توان با ماشین سنجش اندازه‌گیری کرد. چون مختصات استاندارد ξ و η برحسب فاصلهٔ کانونی به عنوان واحد طول تعریف می‌شوند، فرض خواهیم کرد که x و y نیز برحسب همان واحد تعریف شوند؛ بدین‌ترتیب اگر اندازهٔ x تصویری روی صفحهٔ عکاسی p میلیمتر به دست آمده باشد و فاصلهٔ کانونی f برحسب میلیمتر باشد، داریم $x = p/f$.

با توجه به اندازهٔ میدان تلسکوپ اخترنگاشتی ($۲° \times ۲°$) می‌توان با اطمینان فرض کرد که هر صفحهٔ عکاسی تصویر چندین ستاره، که بُعد و میل آنها از رصدهای انجام شده با تلسکوپ دایرهٔ نصف‌النهاری معلوم‌اند، را برخود داشته باشد. فعلاً فرض می‌کنیم که از چنین ستاره‌هایی سه تا بر صفحهٔ عکاسی وجود داشته باشند. پس مختصات استاندارد این ستاره‌ها، که ستاره‌های مرجع نامگذاری می‌شوند، را می‌توان به وسیلهٔ رابطه‌های (۱۸) و (۲۰) محاسبه کرد. مختصات

اندازه‌گیری شدهٔ تصاویر ستاره‌های مرجع نیز معلوم‌اند. بنابراین از رابطهٔ (۵۵) داریم

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 - x_1 &= ax_1 + by_1 + c\\ \xi_2 - x_2 &= ax_2 + by_2 + c\\ \xi_3 - x_3 &= ax_3 + by_3 + c\end{aligned}\right\} \qquad (۵۹)$$

که در آنها شاخصهای ۱، ۲، و ۳ به این سه ستاره اشاره دارند. این سه معادله برای تعیین سه ثابت صفحهٔ عکاسی a، b ، و c کافی‌اند. برای هر ستارهٔ دیگر داریم

$$\xi - x = ax + by + c$$

و چون x و y از اندازه‌گیریهای تصویر معلوم‌اند و مقادیر a، b، و c هم تعیین شده‌اند، بنابراین می‌توانیم مقدار ξ، مختصهٔ استاندارد ξ ستارهٔ مورد نظر، را محاسبه کنیم. با روشی مشابه، و با توجه به اینکه ثابتهای صفحهٔ عکاسی d، e، و f به کمک سه ستارهٔ مرجع اندازه‌گیری شده‌اند، η به دست می‌آید. اگر بخواهیم، می‌توانیم به کمک فرمولهای (۲۳) و (۲۱) بُعد α و میل δ این ستاره را محاسبه کنیم. در واقع مختصات استاندارد ξ و η ستاره، مکان آن را نسبت به مرکز ناحیه (A, D) به طور یکتا مشخص می‌کند، جز برای مواردی خاص، نیازی به، محاسبهٔ مختصات استوایی α و δ نیست.

در عمل، بیش از سه ستاره به عنوان ستارهٔ مرجع انتخاب می‌شوند. اگر از چنین ستاره‌هایی N عدد وجود داشته باشند، N معادله به صورت رابطهٔ (۵۹) خواهیم داشت. در آن صورت ثابتهای a، b، و c از حل این N معادله طبق روش کمترین مربعات (یا روشی مشابه) به دست می‌آیند. در مورد تعیین ثابتهای d، e، و f نیز به همین روش عمل می‌شود.

بررسی مختصات استاندارد که هم اکنون در بالا انجام گرفت، بدون اشارهٔ بیشتر به عصرهایی که این مختصات به آن ارجاع می‌شوند کامل نیست. عصرهایی که برای مختصات استاندارد محل ستاره‌ها در فهرستهای اخترنگاشتی انتخاب شده است ۱۹۰۰٫۰ است. فرض می‌کنیم صفحهٔ عکاسی در ۱۴ اسفند ۱۲۸۲/۴ مارس ۱۹۰۴ برداشته شده باشد. مختصات استاندارد ستاره‌های مرجع را می‌توان برای عصر ۱۹۰۰٫۰ از فهرستها یافت. از تصحیح مختصات اندازه‌گیری شدهٔ هر ستارهٔ دیگری، مختصات استاندارد مکان ستاره در آسمان در تاریخ ۱۴ اسفند ۱۲۸۲/۴ مارس ۱۹۰۴ نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰ به دست می‌آید. اگر حرکت خاصه و اختلاف‌منظر ستاره قابل چشمپوشی باشند، مختصات استانداردی که بدین‌ترتیب به دست می‌آیند مکان ستاره را برای عصر ۱۹۰۰٫۰ مشخص می‌کنند. مختصات اندازه‌گیری شدهٔ x و y هر یک از ستاره‌های مرجع مؤلفه‌های μ_x و μ_y حرکت خاصه مربوط به بازهٔ ۱۹۰۰٫۰ تا ۴ مارس ۱۹۰۴ را در بر خواهند داشت. (مؤلفهٔ حرکت خاصه در امتداد محور ξ را با μ_x و مؤلفه آن در امتداد محور η را با μ_y نشان می‌دهیم، بدین‌ترتیب $\mu_x = \mu_\alpha \cos\delta$ و $\mu_y = \mu_\delta$؛ همهٔ کمیتهای مورد نظر در

مقیاس دایره‌ای بیان می‌شوند.) اگر μ_x و μ_y معلوم باشند، اثرات μ_x و μ_y را باید حتماً قبل از حل مسئله یافتن ثابتهای صفحهٔ عکاسی، از مقادیر x و y کم کرد.

۱۶۹. رصدهای عکسی سیارکها و دنباله‌دارها

فرض می‌کنیم عکسی از یک سیارک در لحظهٔ t در تاریخی معین برداشته شود (این روش کلی برای دنباله‌دارها نیز قابل اجرا است)، در عمل زمان وسط نورگیری را لحظهٔ t می‌گیرند. اگر مختصات استاندارد ستاره‌های مرجع انتخابی را نسبت به استوا و نقطهٔ اعتدال میانگین عصر استانداردی چون ۱۹۵۰٫۰ تعریف کنیم، اندازه‌گیری تصویر سیاره روی صفحهٔ عکاسی و تصحیح بُعدی آن، طبق بخش ۱۶۸، مکان این تصویر را نسبت به استوا و اعتدال میانگین همان عصر انتخابی به دست خواهد داد. باید به یاد داشت که عمل تصحیح بویژه اثر ابیراهی سالانه را در تاریخ مورد نظر به طور خودکار برطرف می‌کند. مختصات تصحیح شده اثر اختلاف‌منظر سیارک را، که به مکان راصد روی زمین بستگی دارد، در بر دارد. هنگامی که این اثر بر طرف شود مختصات حاصل، مختصات اخترسنجی خوانده می‌شوند.

در زیج نجومی مکانهای اخترسنجی چهار سیارک که از همه درخشانترند و همچنین تفاوتهای بین مختصات ظاهری و اخترسنجی درج می‌شوند. باید توجه داشت که مختصات ظاهری بسادگی از رصدهای دایره نصف‌النهاری به دست می‌آیند، در حالی که مکان اخترسنجی از اندازه‌گیریهای روی صفحهٔ عکاسی حاصل می‌شوند.

نظریهٔ حرکت سیاره‌ای مکان هندسی یک شئ را به دست می‌دهد. این مکان را با استفاده از مکان اخترسنجی و با تصحیحات زیر از طریق (الف) افزودن اثرات ابیراهی سالانه

در بُعد	$Cc + D_d$
در میل	$Cc + D_{d'}$

[فرمولهای (۲۵) و (۲۶)، صفحهٔ ۲۱۱]، و (ب) جلو بردن زمان منظور شدهٔ رصد، t، به اندازهٔ τ، یعنی زمان لازم برای پیمودن فاصلهٔ سیارک تا زمین، به دست می‌آوریم (بخش ۱۱۲).

۱۷۰. اندازه‌گیری حرکتهای خاصه

برای تعیین دقیق حرکت خاصه، یک بازهٔ زمانی کافی T بین دو عصر رصد لازم است. فرض کنیم که از ناحیه‌ای از آسمان در ۴ مارس ۱۹۰۴ و دوباره در ۳ آوریل ۱۹۲۶ عکسبرداری شده باشد. بنابراین می‌توانیم بازهٔ زمانی T را ۲۲٫۱ سال بگیریم، صفحهٔ عکاسی اول پس از انجام عمل تصحیح اندازه‌گیریها، طبق بخش ۱۶۸، مختصات استاندارد ξ_1 و η_1 (نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰ و نسبت به نقطهٔ مرکزی معینی با مختصات استوایی A و D برای این عصر)

مکان ستارهٔ X را در آسمان در ۴ مارس ۱۹۰۴ به دست خواهد داد. اگر x_1 و y_1 مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر آن روی صفحهٔ عکاسی اول باشند، داریم

$$\xi_1 - x_1 = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 \qquad (۶۰)$$

که در آن a_1، b_1، و c_1 ثابتهای این صفحه‌اند که به کمک تعدادی از ستاره‌های مرجع مناسب تعیین می‌شوند. حال فرض می‌کنیم که صفحهٔ عکاسی دوم با همان روش اندازه‌گیری شده است. (فرض بر این است که روی هر صفحهٔ عکاسی یا شبکه‌ای از خطوط تاروپودی نقش‌بندی شده است.) بطور کلی، ثابتهای صفحهٔ عکاسی دوم از ثابتهای صفحهٔ اول متفاوت خواهند بود؛ مقادیر آنها را، که به کمک ستاره‌های مرجع تعیین می‌شوند، با a_2، b_2، و c_2 نشان می‌دهیم. اگر x_2 و y_2 مختصات اندازه‌گیری شدهٔ تصویر ستارهٔ X روی صفحهٔ عکاسی دوم باشند، و اگر ξ_2 و η_2 مختصات استاندارد (نسبت به استوای میانگین ۱۹۰۰٫۰ و نسبت به همان نقطهٔ مرکزی ناحیه) مکان X را در آسمان در ۳ آوریل ۱۹۲۶ نشان دهند، آنگاه داریم

$$\xi_2 - x_2 = a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 \qquad (۶۱)$$

اگر ستاره حرکت خاصه نداشته باشد، روشن است که ξ_2 و ξ_1 یکی خواهند بود. اگر ستاره حرکت خاصه‌ای با مؤلفه‌های μ_x و μ_y در سال داشته باشد، در این صورت چون تفاوت بین ξ_2 و ξ_1 جابه‌جایی (موازی محور ξ) ناشی از حرکت خاصه در T سال است، داریم

$$\xi_2 - \xi_1 = T\mu_x \qquad (۶۲)$$

همین طور

$$\eta_2 - \eta_1 = T\mu_y \qquad (۶۳)$$

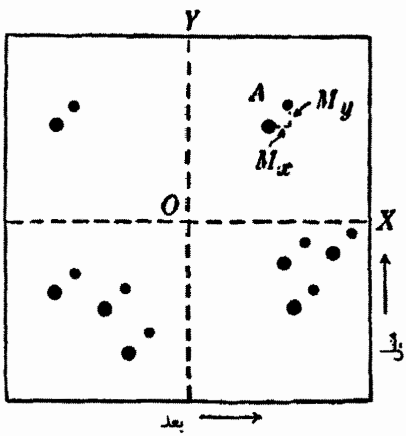
مقادیر ξ_1، ξ_2، η_1، و η_2 از روابط (۶۰) و (۶۱) و معادله‌های متناظرشان برحسب η، به دست می‌آیند. بدین‌ترتیب مقادیر μ_x و μ_y از روابط (۶۲) و (۶۳) پیدا می‌شوند.

باید توجه داشت که در این فرمولها واحدی که با آن μ_x و μ_y بیان می‌شوند همان است که مختصات استاندارد برحسب آن تعریف شده‌اند. در عمل، راحت‌تر آن است که مختصات استاندارد برحسب میلیمتر یا برحسب واحد مقیاس ریزسنج، یا به دقیقه یا ثانیهٔ قوسی بیان شوند. اگر فرض کنیم که ξ، η، x، و y همه برحسب ثانیهٔ قوسی بیان شده باشند، مقادیر μ_x و μ_y را برحسب مقیاس آشنایی، یعنی، ثانیهٔ قوسی بر سال به دست می‌آوریم. بنابراین μ_y همان μ_δ (حرکت خاصه در میل) است و μ_x برابر $\mu_\alpha \cos\delta$ است، که در آن δ میل ستاره و μ_α حرکت خاصه (برحسب ثانیهٔ قوسی) در امتداد استواست.

به جای استفاده از فرمولهای خطی (۶۰) و (۶۱) شاید لازم باشد که جمله‌های درجه دومی که در پایان بخش ۱۶۵ گفته شد در نظر گرفته شوند. با استفاده از معادلات ستاره‌های مرجع به تعداد کافی، می‌توان هر یک از ثابتهای فرمولهای $(\xi - x)$ و $(\eta - y)$ را به دست آورد.

۱۷۱. اندازه‌گیری حرکتهای خاصه (روش کاپتین)[1]

روشی که در بالا شرح داده شد خطوط تاروپودی را به عنوان محورهای مرجع واسطه به کار می‌برد. اندازه‌گیری مختصهٔ x یا y یک تصویر در هر صفحهٔ عکاسی مستلزم آن است که سیم ریزسنج یا مقیاس را یک بار روی یک خط تاروپودی مجاور و بار دیگر روی تصویر قرار دهیم. برای صفحهٔ عکاسی دوم نیز روش همین است. در روشی که اغلب در عمل دنبال می‌کنند، کار اندازه‌گیری با حذف کلی دستگاه خطوط تاروپودی به نصف کاهش داده می‌شود. ما نخست طرح پیشنهادی کاپتین را مورد بررسی قرار می‌دهیم، زیرا اساس این روش در این کاربرد به‌روشنی دیده می‌شود. صفحهٔ عکاسی که نورگیری کرده است بدون اینکه ظاهر شود به‌دقت نگاهداری می‌شود. پس از سپری شدن یک بازهٔ زمانی مناسب T، صفحهٔ عکاسی دوباره در تلسکوپ قرار داده می‌شود و یک نورگیری دیگری از همان ناحیه بر آن انجام می‌شود. برای جلوگیری از انطباق یا همپوشانی تصویر بار اول یک ستاره و تصویر بار دوم آن، تغییر مکانی کوچک عمود بر محور نوری به کشوی صفحهٔ عکاسی داده می‌شود. صفحهٔ عکاسی بعد از نورگیری بار دوم ظاهر می‌شود. هر ستاره به وسیلهٔ دو تصویر نمایانده می‌شود. یکی متناظر با عصر اول است و دیگری با بعدی. شکل ۱۱۲ این نتیجه را نشان می‌دهد؛ فرض می‌کنیم نقطهٔ بزرگتر در A تصویر ستاره‌ای خاص را در عصر اول، مثلاً ۱۹۰۰ نمایش دهد و نقطهٔ کوچکتر تصویر آن در عصر بعدی مثلاً، ۱۹۲۰ باشد. اگر یک ستارهٔ درخشان در نورگیری اول ردی بر صفحهٔ عکاسی بر جای بگذارد (این کار با متوقف کردن دستگاه حرکت دهندهٔ تلسکوپ انجام می‌شود)، این رد با دقت کافی محور ξ را معین خواهد کرد؛ در این صورت به کمک این رد می‌توان صفحهٔ عکاسی را در جهت صحیح در ماشین سنجش قرار داد.



شکل ۱۱۲

1. Kapteyn method

طرز عمل شامل اندازه‌گیری مؤلفه‌های M_x و M_y جابه‌جایی تصویرها بین سالهای ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ است. برای تصویر A که مربوط به مکان ستاره در ۱۹۰۰ است، با توجه به محورهای فرضی روی صفحهٔ عکاسی (که در شکل ۱۱۲ با خطوط منقطع نمایش داده شده‌اند) و با استفاده از رابطهٔ (۵۷) داریم

$$\xi_1 - x_1 = a_1\xi_1 + b_1\eta_1 + c_1 \tag{۶۴}$$

و برای تصویر آن در سال ۱۹۲۰ داریم

$$\xi_2 - x_2 = a_2\xi_2 + b_2\eta_2 + c_2 \tag{۶۵}$$

مشکل بتوان مثلاً اثرات شکست و ابیراهی و جهت‌گیری صفحهٔ عکاسی در سالهای ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ را یکسان گرفت، از این‌رو نمی‌توان فرض کرد $a_1 = a_2$ و غیره. تفاوتهای بین مختصات استاندارد در ۱۹۰۰ و ۱۹۲۰ کوچک خواهند بود ـ این تفاوتها صرفاً اثرهای حرکت خاصه در آن بازهٔ زمانی هستند ـ و چون a_2 و b_2 کوچک‌اند، در طرف راست رابطهٔ (۶۵) می‌توانیم ξ_2 و η_2 را بدون خطای محسوس با ξ_1 و η_1 جایگزین کنیم و بدین‌ترتیب نتیجه بگیریم که

$$\xi_2 - x_2 = a_2\xi_1 + b_2\eta_1 + c_2 \tag{۶۶}$$

از تفاضل روابط (۶۴) و (۶۶) داریم

$$\xi_2 - \xi_1 = x_2 - x_1 + (a_2 - a_1)\xi_1 + (b_2 - b_1)\eta_1 + (c_2 - c_1) \tag{۶۷}$$

در معادلهٔ بالا $\xi_2 - \xi_1 = T\mu_x$ و $(x_2 - x_1)$ تغییر مکان اندازه گرفته شدهٔ M_x است. همچنین در طرف راست معادلهٔ (۶۷)، بدون اینکه سرشت خطی این معادله را تغییر دهیم می‌توانیم ξ_1 را با x_1 و η_1 را با y_1 جایگذاری کنیم. بدین‌ترتیب برای $T\mu_x$ عبارت کلی زیر را خواهیم داشت

$$T\mu_x = M_x + ax_1 + by_1 + c \tag{۶۸}$$

معادلهٔ مشابهی نیز هست که $T\mu_y$ را به دست می‌دهد.

ثابتهای a، b، و c صفحهٔ عکاسی در رابطهٔ (۶۸)، به کمک چندین ستارهٔ پراکنده روی صفحهٔ عکاسی‌ـستاره‌های مقایسه‌ـکه حرکتهای خاصه‌اشان را کوچک فرض می‌کنیم، تعیین می‌شوند؛ ستاره‌های ضعیف بیشتر این شرط را ارضا می‌کنند تا ستاره‌های درخشان. اگر فرض کنیم که حرکتهای خاصهٔ همهٔ ستاره‌های مقایسه صفر باشند، در آن صورت به هر یک از این ستاره‌ها معادله‌ای از نوع

$$ax + by + c + M_x = 0 \tag{۶۹}$$

مربوط می‌شود که در آن x و y مختصات اندازه‌گیری شدهٔ ستاره‌اند. در تعیین مقادیر x و y دقت زیادی لازم نیست، زیرا که ضرایب آنها، یعنی به‌ترتیب a و b، کمیتهایی کوچک‌اند. اگر N ستارهٔ مقایسه وجود داشته باشند، حل N معادله از نوع (۶۹) با روش کمترین مربعات مقادیر مناسبی برای ثابتهای a، b، و c صفحهٔ عکاسی به دست می‌دهد. روشی مشابه برای حل N معادله با شکل زیر اختیار می‌شود

$$dx + ey + f + M_y = 0$$

با قرار دادن مقادیر a، b، و c در فرمول کلی (۶۸) می‌توان مؤلفهٔ μ_x حرکت خاصه هر ستارهٔ دیگر را به دست آورد. مقدار μ_y به طور مشابه حاصل می‌شود.

فرض کردیم که حرکتهای خاصه همهٔ ستاره‌های مقایسه صفرند؛ با جایگذاری مقادیر a، b، و c برای هر ستاره در معادلهٔ (۶۸) می‌توانیم بسادگی رضایت بخش بودن یا نبودن این فرض را ببینیم زیرا با این کار، عملاً مقدار μ_x را برای ستارهٔ مقایسه تعیین می‌کنیم. اگر ثابت شود که یک ستارهٔ مقایسه حرکت خاصه محسوساً بزرگی دارد، باید آن را کنار گذاشت و در صورت امکان ستاره‌ای دیگر انتخاب کرد. این کار مستلزم آن است که ثابتهای جدیدی برای صفحهٔ عکاسی محاسبه شوند. در واقع، نمی‌توان انتظار داشت که حرکتهای خاصه همهٔ ستاره‌های مقایسه صفر باشند؛ و اصولاً مقادیر μ_x و μ_y به دست آمدهٔ ستاره‌ها، حرکتهای خاصه نسبی آنها ـ نسبت به حرکت میانگین گروه ستاره‌های مقایسه ـ هستند.

۱۷۲. تصحیح حرکتهای خاصهٔ نسبی به مطلق

حرکتهای خاصه ستاره‌ها که از رصدهای دایرهٔ نصف‌النهاری نتیجه می‌شوند حرکتهای خاصهٔ مطلق‌اند. فرض کنید ستاره‌ای روی صفحهٔ عکاسی وجود داشته باشد که حرکتهای خاصهٔ مطلق آن $\mu_{x'}$ و $\mu_{y'}$ معلوم‌اند؛ اندازه‌گیریهای صفحهٔ عکاسی حرکتهای خاصهٔ نسبی μ_x و μ_y را به دست می‌دهند. بنابراین $\mu_{x'} - \mu_x$ و $\mu_{y'} - \mu_y$ تصحیحاتی هستند که باید به همهٔ حرکتهای خاصهٔ نسبی اعمال شوند تا آنها را به حرکتهای خاصهٔ مطلق تبدیل کنند. معمولاً حرکتهای خاصهٔ حاصل از رصدهای دایرهٔ‌نصف‌النهاری آن دقت مطلوب را ندارند، و بنابراین تصحیح بالا در صورتی می‌تواند با دقت کافی همراه باشد که دست‌کم حدود ده ستاره که حرکتهای خاصه‌شان به‌دقت تعیین شده‌اند روی صفحه وجود داشته باشند. چنین شرطی معمولاً به‌سختی برآورده می‌شود و در نتیجه برای به دست آوردن تصحیح روش دیگر باید اختیار کرد.

در صفحهٔ ۲۹۸ فصل ۱۱ دیدیم که مؤلفه‌های P_α و P_δ حرکت اختلاف‌منظری، برحسب ثانیهٔ قوسی بر سال، از روابط زیر به دست می‌آیند

$$P_\alpha = H \sin\lambda \sin\chi \sec\delta$$

$$P_\delta = H \sin\lambda \cos\chi$$

که در آنها H اختلاف‌منظر قرنی ستاره، λ فاصلهٔ زاویه‌ای آن از گریزگاه حرکت خورشید و χ زاویهٔ مکانی گریزگاه نسبت به ستاره است. اگر اختلاف‌منظر قرنی ستاره‌ای با قدر m با H_m نشان داده شود و P_x به جای $P_\alpha \cos\delta$ و p_y به جای P_δ نوشته شود خواهیم داشت

$$P_x = H_m \sin\lambda \sin\chi \qquad (۷۰)$$

$$P_y = H_m \sin\lambda \cos\chi \qquad (۷۱)$$

برای ستاره‌های موجود در یک ناحیهٔ عکسی مقادیر متوسط λ و χ را می‌توان برابر مقادیر آنها در مرکز صفحهٔ عکاسی در نظر گرفت. گروهی ستاره، به تعداد N، که همه قدرشان m است را در نظر می‌گیریم. هر ستاره حرکت کتره‌ای خود را در فضا دارد، اما وقتی این ستاره نسبت به خورشید رصد می‌شود، حرکت اختلاف‌منظری نیز بر آن نهاده می‌شود. بدین‌ترتیب حرکت خاصه رصد شده شامل اثر حرکت کتره‌ای و اثر حرکت اختلاف‌منظری خواهد بود. با جمع این اثرهای مربوط به N ستاره، اثر حرکتهای کتره‌ای موجود در حرکتهای خاصه حذف خواهند شد و N برابر حرکت اختلاف‌منظری یک ستاره با قدر m (در فاصلهٔ میانگین ستاره‌های موجود درگروه) در ناحیهٔ مورد نظر آسمان، به جا می‌ماند. بدین‌ترتیب با متوسط‌گیری برای N ستاره، مؤلفه‌های حرکت خاصهٔ مطلق میانگین آنها باید خیلی نزدیک به مقادیر P_x و P_y در رابطه‌های (۷۰) و (۷۱) باشند. فرض کنید $\overline{\mu}_x$ و $\overline{\mu}_y$ مقادیر متوسط حرکتهای خاصهٔ نسبی N ستاره، که از اندازه‌گیریهای صفحهٔ عکاسی حاصل می‌شوند، باشند. آشکار است، تصحیحاتی که باید به مؤلفه‌های حرکت‌خاصهٔ‌نسبی همهٔ ستاره‌های عکسبرداری شده اعمال شوند تا حرکتهای خاصهٔ نسبی به حرکتهای خاصه مطلق تبدیل شوند، برابر کمیتهای زیرند

$$P_x - \overline{\mu}_x \quad \text{و} \quad P_y - \overline{\mu}_y$$

در عمل چندین گروه قدری تشکیل می‌شوند و میانگین وزنی تصحیحهای به دست آمده از این گروه‌ها را به عنوان تصحیح نهایی که باید اعمال شود در نظر می‌گیرند. جدول زیر این روش را نشان می‌دهد.[1] مرکز ناحیهٔ عکسبرداری ستارهٔ εـدجاجه است و مقادیر λ و χ به‌ترتیب °۱۴۷ و °۱۰۲ هستند؛ بنابراین از رابطهٔ (۷۰) داریم

$$P_x = ۰٫۵۳ H_m$$

مقادیر H_m از آن کاپیتن هستند که به عرض کهکشانی εـدجاجه، که برابر °۶− است، مربوط می‌شوند.

1. *Canbridge Astronomical Observations*, vol XXVI, p18 (1928).

گروه	قدر m	تعداد ستاره‌ها N	H_m	P_x	NP_x	$N\overline{\mu}_x$	$N(P_x-\overline{\mu}_x)$
۱	۸٫۱	۷	۰″٫۰۲۳۴	+۰″٫۰۱۲۴۲	+۰″٫۰۸۷	+۰″٫۰۴۹	+۰″٫۰۳۸
۲	۹٫۲	۱۱	۰″٫۰۱۶۳	+۰″٫۰۰۸۶۵	+۰″٫۰۹۵	+۰″٫۰۶۵	+۰″٫۰۳۰
۳	۹٫۵	۲۰	۰″٫۰۱۴۷	+۰″٫۰۷۸۰	+۰″٫۱۵۶	+۰″٫۰۳۵	+۰″٫۰۲۱
۴	۹٫۷	۱۱	۰″٫۰۱۳۸	+۰″٫۰۰۷۳۳	+۰″٫۰۸۰	+0″.72	+۰″٫۰۰۸
		۴۹					+۰″٫۱۹۷

بدین‌ترتیب تصحیحی که باید به همهٔ مؤلفه‌های μ_x حرکت خاصهٔ نسبی اعمال شود تا آنها را به حرکت خاصهٔ مطلق تبدیل کند ۴۹ ÷ ۱۹۷٫۰″+ یا ۰۰۴٫۰″+ است. تصحیحی که باید مؤلفه‌های μ_y اعمال شود به روش مشابهی به دست می‌آید.

۱۷۳. روش فیلم به فیلم اندازه‌گیری حرکتهای خاصه

اندازه‌گیری حرکتهای خاصه به روش کاپیتن، که در بخش ۱۷۱ شرح داده‌ایم، چند عیب دارد، که از میان آنها عیبهای زیر تذکر داده می‌شوند: فیلم عکاسی احتمالاً در مدت بازهٔ زمانی نسبتاً طولانی بین نورگیری اول و دوم فاسد می‌شود، در نتیجه کیفیت تصاویر حاصل از نورگیری دوم پایینتر از استاندارد مورد انتظار در کارهای دقیق از این نوع خواهد بود؛ تصاویر حاصل از نورگیری اول ممکن است به سبب شرایط بد جوی یا سهل‌انگاری در «هدایت» در خلال نورگیری، کیفیتی پایین داشته باشند و این وضعیت تا سالها بعد معلوم نشود. روشی که امروزه معمولاً اختیار می‌شود به صورت زیر است. عکس عصر اول، پس از ثبت ردی از یک ستاره، با روش معمولی برداشته می‌شود و صفحهٔ‌عکاسی فوراً ظاهر می‌شود. اگر صفحه رضایت‌بخش نباشد صفحه‌ای دیگر به جای آن برداشته می‌شود. پس از گذشت بازه‌ای مناسب، دوباره عکسی از ناحیه برداشته می‌شود، اما در این حالت صفحهٔ عکاسی طوری در کشوی خود قرار داده می‌شود که طرف حساس فیلم دور از عدسی شیئی باشد. در نتیجه تصویر ستاره پس از عبور نور از شیشهٔ صفحه ایجاد می‌شود. این صفحه ـ که به‌آن صفحهٔ عکاسی «برگشته» می‌گوییم ـ به روش معمول ظاهر می‌شود. بُعد صفحهٔ عکاسی عصر اول و صفحهٔ عکاسی برگشته، فیلم به فیلم به وسیلهٔ بستهایی به هم بسته می‌شوند ضمن اینکه تغییر مکانی جزئی برای جفت تصاویر چندین ستاره منظور می‌شود. در آن صورت ظاهر تصاویر دوگانه شبیه به تصاویر دوگانه در روش کاپتین است که در شکل ۱۱۲، نشان داده شد. برهم‌نهی صفحات عکاسی باید با کمترین چرخش ممکن یک صفحه نسبت به صفحهٔ دیگر همراه باشد. اندازه‌گیری تصاویر و به دست آوردن حرکتهای خاصه همان خط سیر روش کاپتین را دنبال می‌کنند. در عمل، معمولاً چندین صفحهٔ عکاسی بر هر ناحیه در هر عصر گرفته می‌شود و حداقل دو نورگیری مجزا روی هر صفحه انجام می‌گیرد. آنگاه داده‌ها برای به دست آوردن مقادیر دقیق حرکتهای خاصهٔ نسبی مناسب خواهند بود.

۱۷۴. تعیین ثابتهای صفحهٔ عکاسی به روش کریستی و دایسون

معادلهٔ (۶۸) را به شکل سادهٔ زیر می‌نویسیم

$$ax + by + c = M - p \qquad (۷۲)$$

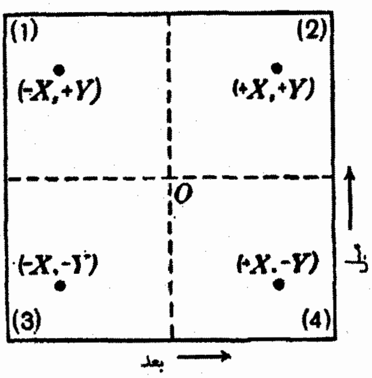
که در آن p کمیت $T\mu_x$ است و شاخص M_x نوشته نشده است. این معادلهٔ برای هر ستاره‌ای در ناحیه دقیقاً برقرار است. برای تعیین ثابتهای صفحهٔ عکاسی به‌روش سادهٔ پیشنهاد شده توسط کریستی و دایسون[1] ، ستاره‌های مقایسه در چهار گروه مساوی، مطابق با مربعهای روی صفحهٔ عکاسی انتخاب می‌شوند به‌طوری که مراکز میانگین مکان گروهها تا حد امکان حول مرکز متقارن باشند. فرض می‌کنیم که مختصات مراکز گروهها طبق شکل ۱۱۳ و در هر گروه N ستاره موجود باشد.

البته مقادیر p در معادلهٔ (۷۲) مجهول‌اند. با این‌حال، فرض می‌کنیم که ستاره‌های مقایسهٔ برگزیده دارای حرکتهای خاصهٔ نسبی کوچک، مثلاً کمتر از ۰٫۰۲″ بر سال باشند. یک حل مقدماتی، ستاره‌هایی را که در این شرط صدق نمی‌کنند نشان می‌دهد که می‌توان آنها را از گروههای مربوط حذف و با ستاره‌های دیگر جایگذاری کرد.

با جمع‌کردن N معادله از نوع (۷۲) برای ستاره‌های مقایسهٔ در گروه ۱، داریم

$$N(-aX + bY + c) = \sum_{1} p - \sum_{1} M \qquad (۷۳)$$

که در آن $\sum p$ مجموع حرکتهای خاصه (موازی محور x) N ستاره در گروه ۱ را نشان می‌دهد و $\sum_{1} M$ مجموع جابه‌جاییهای اندازه‌گیری شدهٔ بین جفت تصاویر N ستاره است. همین‌طور، برای



شکل۱۱۳

1. *Montly Notices, R.A.S,* vol.LV, p.61.

گروههای دیگر داریم

$$N(+aX+bY+c)=\sum_{۲} p-\sum_{۲} \mathrm{M} \qquad (۷۴)$$

$$N(-aX-bY+c)=\sum_{۳} p-\sum_{۳} \mathrm{M} \qquad (۷۵)$$

$$N(+aX-bY+c)=\sum_{۴} p-\sum_{۴} \mathrm{M} \qquad (۷۶)$$

رابطه‌های (۷۳) و (۷۵) را جمع می‌کنیم؛ بنابراین داریم

$$-۲NaX+۲Nc=\sum_{۱} p+\sum_{۳} p-\sum_{۱} M-\sum_{۳} M \qquad (۷۷)$$

روابط (۷۴) و (۷۶) را جمع می‌کنیم؛ بنابراین داریم

$$+۲NaX+۲Nc=\sum_{۲} p+\sum_{۴} p-\sum_{۲} M-\sum_{۴} M \qquad (۷۸)$$

با کاستن (۷۷) از (۷۸) داریم

$$۴NaX=\left\{\sum_{۲} p-\sum_{۱} p+\sum_{۴} p-\sum_{۳} p\right\}+\left\{\sum_{۱} M-\sum_{۲} M+\sum_{۳} M-\sum_{۴} M\right\} \qquad (۷۹)$$

$$۴NbY=\left\{\sum_{۱} p+\sum_{۲} p-\sum_{۳} p-\sum_{۴} p\right\}-\left\{\sum_{۱} M+\sum_{۲} M-\sum_{۳} M-\sum_{۴} M\right\} \qquad (۸۰)$$

$$۴Nc=\left\{\sum_{۱} p+\sum_{۲} p+\sum_{۳} p+\sum_{۴} P\right\}-\left\{\sum_{۱} M+\sum_{۲} M+\sum_{۳} M+\sum_{۴} M\right\} \qquad (۸۱)$$

در این معادلات N، X، Y، و $\sum_{۱} M$، ...، $\sum_{۴} M$ معلوم‌اند و ثابتهای a، b، و c صفحهٔ عکاسی اکنون بنابه فرضهای زیر به‌دست می‌آیند،

$$\sum_{۱} p-\sum_{۱} p+\sum_{۴} p-\sum_{۳} p=۰$$

$$\sum_{۱} p+\sum_{۲} p-\sum_{۳} p-\sum_{۴} p=۰$$

$$\sum_{۱} p+\sum_{۲} p+\sum_{۳} p+\sum_{۴} p=۰$$

که از آنها نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{۱} p = \sum_{۴} p ؛ \sum_{۲} p = \sum_{۳} p ؛ \sum_{۱} p = -\sum_{۲} p$$

در یک گروه N ستاره‌ای، می‌توان انتظار داشت که بعضی از مقادیر p مثبت و بعضی دیگر منفی باشند؛ در نتیجه می‌توان انتظار داشت که، مثلاً $\sum_{۱} p$ کوچک باشد و عملاً در مقایسه با سایر کمیتهای طرف راست معادله‌های (۷۹) تا (۸۱) قابل چشمپوشی باشد. سومین فرض بالا، یعنی $\sum_{۱} p + \sum_{۲} p + \sum_{۳} p + \sum_{۴} p = ۰$ صرفاً راه دیگری برای بیان این واقعیت است که حرکتهای خاصهٔ به‌دست آورده شده از این روش، حرکتهای خاصهٔ نسبی‌اند. اینها را می‌توان با روشی که قبلاً در بخش ۱۷۲ توصیف شد به حرکتهای خاصهٔ مطلق تبدیل کرد. روشی مشابه برای مؤلفه‌های موازی محور y اختیار می‌شود. مقادیر ثابتهای صفحه که به این طریق به‌دست می‌آیند اندکی از مقادیر به‌دست آمده از روش دقیق، ولی طولانیتر، کمترین مربعات کم دقت‌ترند.

۱۷۵. اندازه‌گیری اختلاف‌منظرهای اختری

در فصل ۹ جابه‌جاییهای ناشی از اختلاف‌منظر را در بُعد و در میل یک ستاره به‌دست آورده‌ایم. در اینجا تنها جابه‌جایی در بُعد را که اندازهٔ آن در عمل به‌تنهایی کفایت می‌کند، مورد بررسی قرار می‌دهیم، اگر بُعد و میل خورشید ـ مرکزی ستاره‌ای که اندازه‌گیری اختلاف‌منظر Π آن مورد نظر است، α و δ و بُعد آن از دیدگاه زمین در تاریخ بخصوص $T_۱$، $\alpha_۱$ باشد در آن صورت از رابطهٔ (۶۷) فصل ۹ داریم

$$\alpha_۱ - \alpha = \Pi F_۱ \sec\delta \qquad (۸۲)$$

در این معادله $F_۱$ عامل اختلاف‌منظر و مقدار آن قابل محاسبه است زیرا همهٔ کمیتهایی که $F_۱$ به آنها بستگی دارد معلوم‌اند. در یک تاریخ بعدی $T_۲$، بُعد خورشید ـ مرکزی ستاره به سبب حرکت خاصه به $\alpha + T\mu_\alpha$ افزایش یافته است، که در آن T بازهٔ بین $T_۱$ و $T_۲$ (برحسب سال) و μ_α حرکت خاصه بُعد است. اگر $\alpha_۲$ بُعد زمین مرکز در تاریخ $T_۲$ و $F_۲$ اختلاف‌منظر متناظر آن باشد، خواهیم داشت

$$\alpha_۲ - (\alpha + T\mu_\alpha) = \Pi F_۲ \sec\delta \qquad (۸۳)$$

از رابطه‌های (۸۲) و (۸۳) داریم

$$\alpha_۲ - \alpha_۱ = \Pi(F_۲ - F_۱)\sec\delta + T\mu_\alpha \qquad (۸۴)$$

فرض کنید ξ_1 و η_1 مختصات استاندارد (نسبت به مرکز ناحیه‌ای که مختصات استوایی آن A و D هستند) متناظر با مختصات زمین مرکزی α_1 و δ_1 ستاره باشند، و ξ_2 و η_2 مختصات استاندارد متناظر با α_2 و δ_2. در این صورت از رابطهٔ (۲۳) داریم

$$\tan(\alpha_1 - A) = \frac{\xi_1 \sec D}{1 - \eta_1 \tan D}$$

از آنجا که ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن مورد نظر است همواره در نزدیکی مرکز ناحیه انتخاب می‌شود، و ξ_1 و η_1 خیلی کوچک‌اند و D اختلاف چندانی با δ_1 یا δ ندارد، با دقت لازم می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha_1 - A = \xi_1 \sec \delta$$

همین‌طور

$$\alpha_2 - A = \xi_2 \sec \delta$$

از این‌رو

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (\xi_2 - \xi_1) \sec \delta \tag{85}$$

حرکت خاصه در امتداد مدار سماوی δ را با μ_x نشان می‌دهیم؛ آنگاه خواهیم داشت $\mu_x - \mu_\alpha \cos \delta$ یا $\mu_\alpha = \mu_x \sec \delta$. باقرار دادن این مقدار μ_α در رابطهٔ (۸۴) و با به‌کار بردن رابطهٔ (۸۵) داریم

$$\xi_2 - \xi_1 = \Pi(F_2 - F_1) + T\mu_x \tag{86}$$

اکنون فرض می‌کنیم x_1 و y_1 مختصات تصویر نسبت به محورهای قائم روی صفحهٔ عکاسی که در تاریخ T_1 برداشته شده است باشد؛ در آنصورت از رابطهٔ (۵۷) داریم

$$\xi_1 - x_1 = a_1\xi_1 + b_1\eta_1 + c_1$$

همین‌طور

$$\xi_2 - x_2 = a_2\xi_2 + b_2\eta_2 + c_2$$

و چون ξ_2 با ξ_1 اختلاف خیلی کمی دارد که به‌سبب اختلاف منظر حرکت خاصه به وجود می‌آید، و چون هر یک از اینها تفاوت کمی با x_1 و y_1 دارد، می‌توانیم اختلاف بین این دو معادله را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\xi_2 - \xi_1 = x_2 - x_1 + ax_1 + by_1 + c$$

در عمل اختلاف $(x_2 - x_1)$ بین دو تصویر ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن مطلوب است اندازه‌گیری می‌شود؛ این اختلاف را با M_x نشان می‌دهیم؛ آنگاه با به‌کار بردن رابطهٔ (۸۶) خواهیم داشت

$$\Pi(F_2 - F_1) + T\mu_x = M_x + ax + by + c \tag{۸۷}$$

که در طرف راست شاخصهای x_1 و y_1 حذف شده‌اند.

ثابتهای a، b، و c صفحهٔ عکاسی از اندازه‌گیریهای چندین ستارهٔ کم نور، که اختلاف‌منظر و حرکت خاصه آنها را می‌توان ناچیز گرفت، به‌دست آورده می‌شوند. بدین‌ترتیب هر ستارهٔ مقایسه معادله‌ای از نوع زیر به‌دست می‌دهد

$$ax + by + c + M_x = 0 \tag{۸۸}$$

مختصات x و y ستاره‌های مقایسه معلوم فرض می‌شوند. حل چندین معادله از نوع (۸۸)، مقادیر a، b، و c را به‌دست می‌دهد.

معمولاً، ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن مطلوب است به‌عنوان مبدأ محورهای مختصات x و y انتخاب می‌شود، به‌طوری که برای این ستاره داریم $x = y = 0$ ورابطه (۸۷) چنین می‌شود

$$\Pi(F_2 - F_1) + T\mu_x = M_x + c \tag{۸۹}$$

این معادله که از اندازه‌گیریهای یک جفت صفحهٔ عکاسی در تاریخهای T_1 و T_2 که در آن کمیت $F_2 - F_1$ بزرگترین مقدار ممکن را داراست به‌دست آمده است و شامل دو مجهول است. این مجهولها عبارت‌اند از اختلاف‌منظر Π و مؤلفهٔ μ_x حرکت خاصه (دقیقاً، نسبت به حرکت میانگین گروه ستاره‌های مقایسه).

با استفاده از چند جفت صفحهٔ عکاسی دیگر (شاید ده عدد) می‌توان تعدادی معادله از نوع (۸۹) فراهم آورد. هنگامی که این معادلات به‌روش کمترین مربعات حل شوند، مقادیر Π و μ_x را به‌دست می‌دهند. در عمل M_x و c برحسب واحد ریزسنج که متصل به ماشین سنجش است پیدا می‌شوند؛ بدین‌ترتیب Π و μ_x به کمک رابطهٔ (۸۹) برحسب این واحد به‌دست می‌آیند. این کمیتها با معلوم بودن مقیاس معادل واحد ریزسنج به ثانیهٔ قوسی تبدیل می‌شوند. (همچنین صفحهٔ ۴۵۵ پیوست ۱ را ببینید.)

چندین روش برای به‌دست آوردن اندازه‌های M_x بین جفت تصاویر ستاره‌های اختلاف‌منظری و مقایسه‌ای به‌کار برده می‌شود. روش کاپتین، که در اصل شبیه به روشی است که برای اندازه‌گیری حرکتهای خاصه (بخش ۱۷۱) توصیف شد، آزمایش شده است. روش دومی که در رصدخانهٔ سلطنتی گرینویچ اختیار شده است، به استفاده از خطوط مقایسه بستگی دارد و اساس کار مانند آن است که گویی روی هر صفحهٔ عکاسی شبکه‌ای از خطوط تاروپودی ثبت شده است. در بعضی از رصدخانه‌ها نوع ویژه‌ای ماشین سنجش- مقایسه‌گر سه‌بُعدی اندازه‌گیری کمیتهای M_x را بدون

استفاده از هرگونه خطوط مرجع واسطه امکانپذیر می‌سازد. این دستگاه برای اندازه‌گیری حرکتهای خاصه نیز به‌کار می‌رود.

مثلاً، نتایج اندازه‌گیری دو جفت صفحهٔ عکاسی از ستارهٔ «باس ۳۶۵۰» که توسط دکتر ون مانن از رصدخانه مونت ویلسون انجام گرفته است همراه با سایر جزئیات وابسته در جدول زیر خلاصه شده‌اند.

شمارهٔ صفحه	تاریخ	اختلاف‌منظر F	عامل $F_۲ - F_۱$	T	$M_x + c$
۱۳۶	۱۵ ژوئن ۱۹۱۴	−۰٫۷۳	+۱٫۶۴	۰٫۶۴	−۳۱
۴۷۰	۶ فوریه ۱۹۱۵	+۰٫۹۱			
۴۸۶	۷ فوریه ۱۹۱۵	−۰٫۹۰	−۱٫۵۰	۰٫۳۲	−۱۵۰
۵۵۵	۴ ژوئن ۱۹۱۵	−۰٫۶۰			

مقادیر $M_x + c$ در ستون آخر برحسب واحد ماشین سنجش، و هر واحد آن برابر ۰″٫۰۰۱۶۴۹ است. از جفت صفحهٔ نخست معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$+۱٫۶۴\Pi + ۰٫۶۴\mu_x = -۳۱$$

و از دومین جفت معادلهٔ زیر حاصل می‌شود

$$-۱٫۵۰\Pi + ۰٫۳۲\mu_x = -۱۵۰$$

با حذف μ_x، خواهیم داشت $\Pi = +۵۸$؛ سپس نتیجه می‌گیریم که $\mu_x = -۱۹۷$. با ضرب‌کردن این اعداد در ۰٫۰۰۱۶۴۹ به‌دست می‌آوریم

$$\Pi = +۰''٫۰۹۵$$
$$\mu_x = -۰''٫۳۱۵$$

وَن مانن، مقادیر زیر را از اندازه‌گیری شش جفت صفحهٔ عکاسی پیدا کرد

$$\Pi = +۰''٫۰۹۶ \pm ۰''٫۰۰۳$$
$$\mu_x = -۰''٫۳۰۲ \pm ۰''٫۰۰۸$$

در اینجا ۰″٫۰۹۶ محتمل‌ترین مقدار Π است که از این اندازه‌گیریها به‌دست آمده است؛ ۰″٫۰۰۳± خطای محتمل است و درجهٔ دقت مقدار Π به‌دست آمده را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن خطاهای ناگزیر اندازه‌گیری و نظیر آن، نتیجهٔ کل را برای Π با این بیان تفسیر می‌کنیم که احتمال اینکه مقدار واقعی بین دو حد ۰″٫۰۰۳ + ۰″٫۰۹۶ و ۰″٫۰۰۳ − ۰″٫۰۹۶، یعنی بین ۰″٫۰۹۹ و ۰″٫۰۹۳ قرار داشته باشد برابر است با احتمال اینکه در خارج این حدود باشد. در حقیقت،

خطای محتمل فوق ۶۷۴۵ر۰ برابر خطای استانداردی است که معمولاً ذکر می‌شود.

همه روشهایی که در بالا مورد بررسی قرارگرفتند بر پایهٔ استفاده از مختصات استاندارد استوارند. در حالی که این مختصات ماهیت هندسی مسئلهٔ تصویرکردن کرهٔ سماوی را بر یک سطح تخت عکاسی بخوبی روشن می‌سازند، معمولاً در فنون اخترسنجی جدید، که بستگی شدید به روشهای کامپیوتری دارند، کنار گذاشته می‌شوند. چنانکه قبلاً متذکر شدیم، این فنون بسیار تخصصی‌تر از آن‌اند که در اینجا مورد بررسی قرار گیرند. اما باید اعتراف کرد که بعضی از روشهای شرح داده شده در این فصل امروزه بیشتر اهمیت تاریخی دارند. با این حال این روشها، هنوز هم اصول اساسی مطرح شده را توضیح می‌دهند، و حتی در مسائلی ویژه، از قبیل تعیین فوری مکان یک سیارک یا ستارهٔ دنباله‌دار تازه کشف شده بسیار بجا و مناسب هستند به‌طوری که به‌دست آوردن سریع مدار مقدماتی را امکانپذیر می‌سازند.

تمرینها

۱. دو صفحهٔ عکاسی به مرکزهای P و Q را در نظر بگیرید که مختصات استاندارد ستاره‌ای که تصویرش روی هر یک از صفحات ظاهر می‌شود به‌ترتیب $(x, ۰)$ و $(\xi, ۰)$ باشند. ثابت کنید

$$\xi = \frac{(x+c)}{۱ - cx}$$

که در آن c مختصهٔ ξ نقطهٔ P نسبت به صفحه‌ای است که مرکزش در Q است. [محورهای x و ξ تصویرهای دایرهٔ عظیمهٔ PQ بر صفحات مربوط‌اند.]

[لندن، ۱۹۳۰]

۲. نشان دهید که، در تقریب اول، رد ستاره‌ای با میل δ روی یک صفحهٔ عکاسی چنین است

$$y = \text{const.} + \frac{۱}{۲}x^{۲} \tan\delta$$

و نیز نشان دهید که تصویر یک دایرهٔ نصف‌النهار در فاصلهٔ $\Delta\alpha$ از دایرهٔ نصف‌النهار مرکزی زاویه‌ای برابر $\tan^{-۱}(\tan\Delta_\alpha \sin D)$ با دایرهٔ دوم درست می‌کند، که در آن D میل مرکز صفحهٔ عکاسی است.

۳. یک صفحهٔ عکاسی از ناحیه‌ای از آسمان حاوی یک ستارهٔ دنباله‌دار و تعدادی ستارهٔ میدان که مؤلفه‌های حرکت خاصه و مختصات میانگین استوایی آنها برای ۱۹۵۰ر۰ معلوم‌اند دردست است. به‌تفصیل شرح دهید که چگونه می‌توان با اندازه‌گیری این صفحهٔ عکاسی بُعد و میل ستارهٔ دنباله‌دار را تعیین کرد. آیا این مختصات با مختصاتی که از اندازه‌گیری با تلسکوپ دایره نصف‌النهاری تعیین می‌شوند تفاوت دارند، و اگر چنین است چه عاملهایی سبب این تفاوت می‌شوند؟

[گلاسکو، ۱۹۷۳]

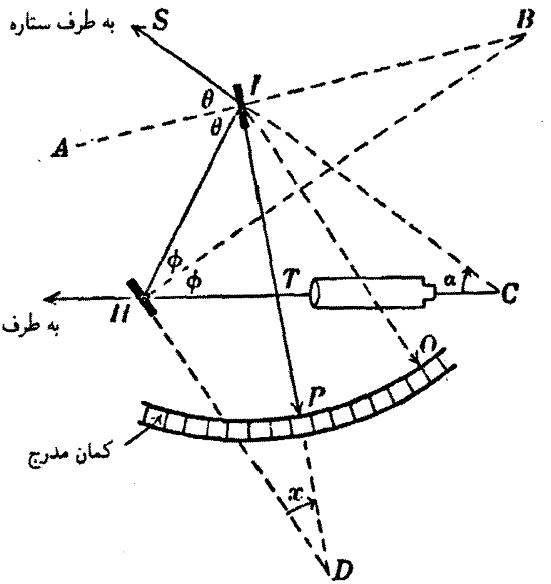
۱۳

تعیین مکان در دریا

۱۷۶. سکستان

در این فصل مسئلهٔ تعیین مکان یک کشتی در دریا را با استفاده از رصد اجرام آسمانی مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابزار کار یک سکستان است، که با آن ارتفاع جرم آسمانی از افق دریا را می‌توان اندازه گرفت. شکل ۱۱۴ نموداری است که ویژگیهای مهم این ابزار را نشان می‌دهد. I آینه‌ای است عمود بر صفحهٔ کاغذ که شیشهٔ شاخص نامیده می‌شود. یک بازو، IP، به طور محکم به شیشهٔ شاخص متصل شده است. شیشهٔ شاخص و بازوی IP می‌توانند در I حول محوری (عمود بر صفحه کاغذ) بچرخند. مرکز چرخش در I، مرکز یک کمان مدرج OP نیز هست. شیشهٔ شاخص و بازوی IP هر جا باشند عددی روی کمان مدرج در برابر آن خواهد بود. H یک قطعه شیشهٔ مستطیلی است که به تنهٔ ابزار عمود بر صفحهٔ کاغذ نصب شده است؛ نیمهٔ بالایی سطح آن شفاف و نیمهٔ پایینی، که مانند یک آینه عمل می‌کند، نقره‌اندود است. T تلسکوپی کوچک است که به تنه وصل است. برای پیدا کردن ارتفاع مثلاً یک ستاره از افق دریا، راصد ابزار را در صفحهٔ قائم نگه می‌دارد و تلسکوپ را طوری نشانه می‌رود که افق را از نیمهٔ بالایی H (موسوم به شیشهٔ افق) ببیند. سپس شیشهٔ شاخص I را با بازوی IP حرکت می‌دهد تا تصویر ستاره در میدان دید ظاهر شود. هنگامی که این تصویر روی خط افق قرار می‌گیرد، عدد روی کمان مدرج را یادداشت می‌کند.

فرض کنید IS جهت ستاره را نشان دهد. پرتوی که در جهت SI است توسط آینهٔ I در جهت IH بازتابیده می‌شود؛ سپس این پرتو به وسیلهٔ بخش آینه‌ای شیشهٔ افق H در جهت



شکل ۱۱۴

HT بازتابیده می‌شود، و بدین‌ترتیب ستاره درون تلسکوپ، در امتداد افق دریا مشاهده می‌شود. ارتفاع ستاره صرفاً به زاویهٔ میل شیشهٔ شاخص I نسبت به شیشهٔ افق H مربوط می‌شود ـ در شکل ۱۱۴ زاویهٔ میل $I\hat{D}H$ است که با x نشان می‌دهیم. اگر AIB و HB به‌ترتیب بر آینه‌های I و H عمود باشند، آنگاه آشکارا $I\hat{B}H$ برابر x خواهد بود. از قوانین بازتاب داریم

$$S\hat{I}A = A\hat{I}H \equiv \theta$$

و

$$I\hat{H}B = B\hat{H}C \equiv \phi$$

اگر a ارتفاع ستاره از افق دریا باشد، در آن صورت $S\hat{C}H = a$ است. از مثلث IHC، زاویهٔ خارجی SIH برابر $I\hat{C}H + I\hat{H}C$ است، به طوری که

$$۲\theta = ۲\phi + a \qquad (۱)$$

همین طور از مثلث IBH داریم

$$\theta = \phi + x \qquad (۲)$$

از این‌رو از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$a = 2x \qquad (3)$$

یا ارتفاع ستاره دو برابر زاویهٔ بین آینه‌های I و H (یا بین عمودهای آنها) است. ارتفاع a هنگامی برابر صفر است که x برابر صفر باشد، یعنی، آینه‌های I و H موازی باشند. در شکل ۱۱۴، IO موازی جهت ثابت HD و O نقطهٔ صفر مقیاس است. بدین‌ترتیب زاویهٔ OIP را می‌توان با خواندن عدد روی کمان مدرج پیدا کرد و ارتفاع ستاره طبق رابطهٔ (۳) دو برابر این زاویه است. معمولاً کمان سکستان در حدود یک ششم محیط دایره است (نام «سکستان» از این جا سرچشمه می‌گیرد)، این کمان به جای اینکه به ۶۰ بخش، که هر بخش نشان‌دهندهٔ یک درجه است، تقسیم شده باشد به ۱۲۰ بخش تقسیم شده است. به این طریق، ارتفاع ستاره مستقیماً، بدون نیاز به اعمال ضریب ۲ در معادلهٔ (۳)، از روی مقیاس خوانده می‌شود. با یک سکستان خیلی خوب و به کمک تقسیمات ریز و یک ورنیه ارتفاع ستاره‌ها را می‌توان با دقتی تا یک‌دهم دقیقهٔ قوسی خواند.

۱۷۷. خطاهای سکستان

در این بخش به طور خیلی خلاصه خطاهایی که در یک سکستان رخ می‌دهد را تذکر خواهیم داد.[۱] (الف) خطای عمودیت. شیشهٔ شاخص I باید بر صفحهٔ کمان مدرج عمود باشد. (ب) خطای کناری. شیشهٔ افق H باید بر صفحهٔ کمان مدرج عمود باشد. خطاهای (الف) و (ب) را می‌توان به کمک پیچهای مربوط در I و H بر طرف کرد. (ج) خطای هم‌خط‌سازی. محور اپتیکی تلسکوپ باید موازی صفحهٔ کمان باشد. (د) خطای شاخص. هنگامی که I با H موازی است، عقربهٔ P باید صفر درجه را روی کمان مدرج نشان دهد. ممکن است خطای شاخص را به کمک پیچی در H بر طرف ساخت، ولی رسم بر این است وقتی که I و H موازی‌اند درجه تعیین می‌شود و تصحیح مناسب به همهٔ ارتفاعهای خوانده شده اعمال می‌شود. شرط موازی I و H به‌راحت‌ترین وجه به شرح زیر حاصل می‌شود [فرض می‌کنیم که در ابتدا خطای (الف) و (ب) بر طرف شده باشند]. در حالی که عقربه نزدیک به صفر درجه است، تلسکوپ را به طرف ستاره‌ای نشانه می‌رویم. در این صورت دو تصویر از این ستاره در میدان دید وجود خواهد داشت؛ یکی تصویر مستقیم ستاره است که از نیمهٔ بالایی شیشهٔ افق H دیده می‌شود و تصویر دیگر تصویری است که در نتیجهٔ بازتابها در I و H تشکیل می‌شود. با یک پیچ تنظیم ظریف می‌توان این دو تصویر را بر هم نهاد و در آن صورت عددی که روی کمان خوانده می‌شود با مکان I به هنگام موازی بودن با H مطابقت

---

۱. برای مطالعهٔ روشهای عملی حذف یا تعیین خطاها خواننده می‌تواند مثلاً به مراجع مفصلتر زیر رجوع کند:
The Admiralty Manual of Navigation

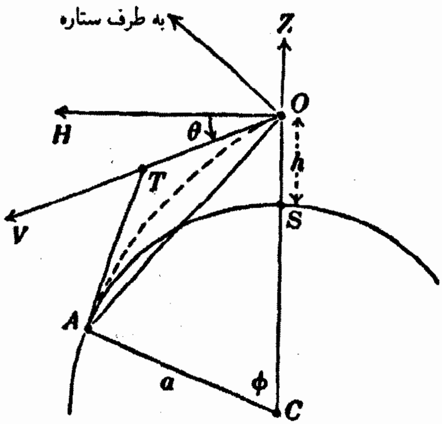
و

Doolittle's *Practical Astronomy as Applied to Geodesy and Navigation.*

می‌کند. چون احتمالاً دستگاه برای مدت نامحدود در حالت تنظیم نخواهد ماند، خطای شاخص باید زود به زود تعیین شود. (ه) خطای مرکزی‌سازی. محوری که بازوی IP حول آن دوران می‌کند باید مرکز کمان مدرج باشد. در بهترین سکستانها این خطا معمولاً خیلی کوچک است و با مکان ویژهٔ بازوی IP تغییر می‌کند. سکستانهایی که در بریتانیا ساخته می‌شوند پیش از عرضه به بازار در آزمایشگاه ملی فیزیک (NPL) آزموده می‌شوند و خطاهای مرکزی‌سازی که در آنجا تعیین می‌شوند روی قوطی سکستان یادداشت می‌شوند.

۱۷۸. تصحیحات بر ارتفاع رصد شده

الف) افت افق. به هنگام رصد، چشم راصد اندکی بالای سطح دریا قرار دارد، و در نتیجه افق قابل دید تا اندازه‌ای زیر صفحه افقی، یعنی، زیر صفحهٔ عمود بر جهت سمت‌الرأس راصد به نظر خواهد رسید. بدین‌ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی افق مرئی کمی بیشتر از 90° خواهد بود و همهٔ ارتفاعهای اندازه‌گیری شده از افق مرئی یا افق دریا به تصحیح نیاز خواهند داشت. در شکل ۱۱۵ فرض می‌کنیم COZ جهت سمت‌الرأس راصدی در O روی بلندی h یا بالای سطح دریا باشد. صفحهٔ قائم ZOA را که شامل جهت ستارهٔ مورد رصد است، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم OH بر OZ در این صفحه عمود باشد. اگر A نقطه‌ای از سطح دریا مطابق با افق مرئی باشد، مسیر پرتو از A به O به سبب شکست جوی اندکی خمیده و در واقع جهتی که در آن A دیده می‌شود در راستای OV خواهد بود. این خط مماس بر منحنی نقطه‌چین است که خود مسیر پرتو را نشان می‌دهد. زاویهٔ HOV (که با θ نشان داده می‌شود) به افت افق موسوم است. از آنجا که A دورترین نقطهٔ قابل رؤیت است، مسیر پرتو در نقطهٔ A بر سطح زمین مماس خواهد بود. در



شکل۱۱۵

نتیجه اگر AT مماسی در A بر مسیر خمیدهٔ پرتو باشد، AT بر CA عمود خواهد بود. چون h در مقایسه با شعاع زمین a کوچک است، فرض می‌کنیم که مسیر خمیده تقریباً کمانی دایره‌ای باشد؛ از این‌رو، چون OV و AT بر این کمان مماس‌اند، پس $O\hat{A}T = T\hat{O}A$. $O\hat{C}A$ را با ϕ نشان می‌دهیم. معمولاً فرض می‌شود که $T\hat{O}A$ یا $O\hat{A}T$ کسری ثابت از ϕ است. در آن صورت می‌توانیم بنویسیم

$$O\hat{A}T = \beta\phi \qquad (۴)$$

که در آن β ضریب عددی ثابتی است که برای آن مقدار تقریبی ۱/۱۳ را به دست آورده‌اند. اکنون داریم $O\hat{A}C = ۹۰^\circ - \beta\phi$؛ $A\hat{O}C = ۹۰^\circ - (\theta + \beta\phi)$ و از این‌رو

$$۹۰^\circ - \beta\phi + ۹۰^\circ - (\theta + \beta\phi) + \phi = ۱۸۰^\circ$$

که از آنجا

$$\phi(۱ - ۲\beta) = \theta \qquad (۵)$$

با نشان دادن شعاع زمین با a (برحسب فوت) از مثلث AOC داریم

$$\frac{\sin(۹۰^\circ - \beta\phi)}{a + h} = \frac{\sin(۹۰^\circ - \theta - \beta\phi)}{a}$$

یا

$$\frac{\cos\beta\phi}{\cos(\theta + \beta\phi)} = ۱ + \frac{h}{a} \qquad (۶)$$

که از آنجا به دست می‌آوریم

$$\frac{۲\sin(\theta/۲)\sin\frac{۱}{۲}(\theta + ۲\beta\phi)}{\cos(\theta + \beta\phi)} = \frac{h}{a}$$

چون θ و ϕ زوایایی کوچک‌اند، معادلهٔ اخیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\theta(\theta + ۲\beta\phi) = ۲h/a$$

یا با به کار بردن رابطهٔ (۵) داریم

$$\theta^۲ = ۲(۱ - ۲\beta)h/a \qquad (۷)$$

با قرار دادن مقدار β و بیان θ برحسب دقیقهٔ قوسی داریم

$$\theta = \sqrt{\frac{۲۴h}{۱۳a}} \operatorname{cosec} ۱'$$

حال a مساوی ۵۲۸۰ × ۳۹۶۰ فوت است و $\operatorname{cosec} ۱' = ۳۴۳۸$، از این‌رو رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم

$$\theta = ۰٫۹۸ (h)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۸)$$

یا، به عنوان قاعدهٔ کاری که دقت کافی دارد: افت، برحسب دقیقهٔ قوسی، با جذر بلندی از سطح دریا برحسب فوت برابر است. مثلاً اگر چشم راصد ۳۶ فوت بالای سطح دریا باشد زاویهٔ افت، θ، تقریباً ′۶٫۰ است.

چون ارتفاع رصد شدهٔ جرم آسمانی نسبت به OV، یعنی جهت افق دریا، اندازه‌گیری می‌شود زاویهٔ افت باید از ارتفاع رصد شده کاسته شود؛ بدین‌ترتیب ارتفاع نسبت به OH، جهت افق نظری، به دست می‌آید.

ب) شکست نجومی. در فصل سوم دیدیم که شکست جوی سبب می‌شود که جرم آسمانی از حالتی که در انحراف پرتوهای عبوری از هوا بی‌تاثیر است نزدیکتر به سمت‌الرأس دیده شود به نحوی که ارتفاع رصد شده به مقدار شکست R که در فرمول (۷) فصل ۳ آمده است بیشتر است

$$R = k \tan \xi$$

(این فرمول برای مقاصد دریانوردی از دقت کافی برخوردار است.)

ج) نیم‌قطر (SD). در رصدهای خورشید، ماه، سیاره‌های بزرگ نزدیک ارتفاع مرکز قرص را نمی‌توان مستقیماً بادقت اندازه گرفت؛ رصد در این‌گونه موارد شامل اندازه‌گیری ارتفاع لبهٔ بالایی یا پایینی جرم و کاستن یا افزودن مقدار نیم‌قطر از تقویمها به ارتفاع ارصادی است. ارتفاع مرکز خورشید، ماه، یا سیاره با این روش به دست می‌آید.

د) اختلاف‌منظر. چنانکه در فصل نه دیدیم، اختلاف‌منظر سبب می‌شود ارتفاع رصد شده کمتر از وقتی باشد که از ابعاد زمین در مقایسه با فاصلهٔ جرم آسمانی مورد رصد چشمپوشی می‌کنیم. اگر P اختلاف‌منظر افقی جرم و a ارتفاع آن (پس از اعمال تصحیحات افت، شکست، و نیم‌قطر) باشد، تصحیح اختلاف‌منظری برای مقاصد دریانوردی با دقت کافی برابر $P \cos a$ است، که باید به ارتفاع رصد شده افزوده شود. این تصحیح فقط در مورد ماه مهم است.

هنگامی که خطای شاخص و تصحیحهای (الف) تا (د)، به ترتیب ذکر شده، به ارتفاع رصد شده اعمال شوند، با تفریق این ارتفاع تصحیح شده از °۹۰، فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی جرم آسمانی به دست می‌آید.

در رصد ستاره‌ها فقط تصحیحهای (الف) و (ب) از اهمیت عملی برخوردارند. در جدولهای دریانوردی،[1] حاصل جمع این تصحیحها را می‌توان مستقیماً از یک جدول مترادف ساده به دست آورد.

در مورد خورشید، جدولهای ساده‌ای تهیه شده که با مراجعه به آنها اثر کلی تصحیحهای (الف) تا (د) را می‌توان یافت.

تصحیحهای (ج) و (د) برای سیاره‌ها جزئی‌اند و در رصدهای دریایی معمولاً از آنها چشم می‌پوشند.

مثال. می‌خواهیم فاصلهٔ سمت‌الرأسی مرکز ماه را در ۲۴ مارس ۱۹۳۱ (دوم فروردین ۱۳۰۹)، 10^{h} زمان جهانی، با توجه به داده‌های $h = ۲۵\mathrm{ft}$ و ارتفاع رصد شدهٔ لبهٔ پایینی ماه برابر با ۳۲°۲۰′٫۰ (که در آن خطای شاخص منظور شده است) به دست آوریم. از تقویم دریانوردی داریم ۱۵′٫۲ = SD؛ $P =$ ۵۵′٫۸

۳۲°۲۰′٫۰		ارتفاع رصد شده (a)
۵′٫۰	−	افت
۱′٫۵	−	شکست
۱۵′٫۲	+	نیم‌قطر
۴۷′٫۰	+	اختلاف‌منظر $(P\cos a)$
۳۳°۱۵′٫۷	=	ارتفاع تصحیح شده

و بدین‌ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ۵۶°۴۴′٫۳ است.

۱۷۹. دایرهٔ مکانی

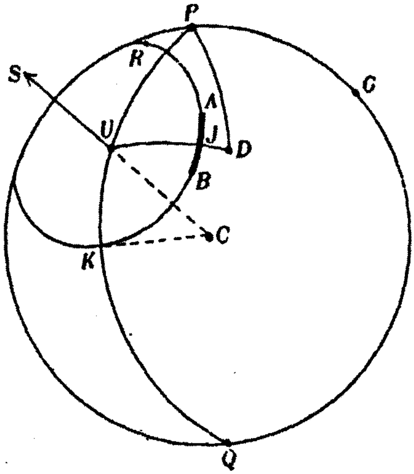
بخش مهمی از رصد دریانورد به زمان جهانی دقیقی، که در آن رصد ارتفاع انجام می‌پذیرد، مربوط می‌شود. برای این منظور زمان‌سنجی قابل اطمینان، که زمان جهانی را تا حد امکان دقیق نگه می‌دارد مورد نیاز است. علائم زمانی رادیویی روزانه این امکان را به دریانورد می‌دهد که خطای زمان‌سنج را در بازه‌های مناسب زمانی تعیین کند و در نتیجه، وقتی ارتفاع یک جرم آسمانی را اندازه می‌گیرد زمان جهانی دقیق را، که در آن رصد انجام گرفته است بداند. یک رصد کامل، پس از اعمال تصحیحهای گوناگون بخش ۱۷۸، به دو نتیجهٔ قطعی زیر می‌انجامد:

۱. فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی جرم آسمانی

۲. زمان جهانی لحظهٔ رصد

اینک از زمان جهانی می‌توان براحتی مکانی را روی سطح زمین که در آن جرم مورد نظر دقیقاً در لحظهٔ رصد بالای سر است، پیدا کرد. فرض می‌کنیم در شکل ۱۱۶، که زمین را با مرکز C نشان می‌دهد، این نقطه U باشد. بنابراین در لحظهٔ رصد این جسم در جهت CUS است.

۱. مثلاً: *Inman's Tables*; Bowditch's *Practical Navigator*.



شکل۱۱۶

CP جهت قطب شمال و بنابراین $S\hat{C}P$ فاصلهٔ قطب شمالی جرم آسمانی است، یعنی، کمان دایرهٔ عظیمهٔ PU برابر $(\delta - ۹۰°)$ است، که در آن δ میل این جرم در زمان جهانی رصد است. اما PU عرض تمام U است و بنابراین عرض U صرفاً میل جرم آسمانی است. باز اگر PGQ دایرهٔ نصف‌النهار گرینویچ باشد، $G\hat{P}U$ طول جغرافیایی U است (که از گرینویچ به طرف غرب اندازه‌گیری می‌شود). اما $G\hat{P}U$ هم برابر زاویهٔ بین نصف‌النهار سماوی جرم آسمانی و نصف‌النهار سماوی متناظر با نصف‌النهار PGQ گرینویچ است. لیکن زاویهٔ اخیر همان زاویهٔ ساعتی جرم آسمانی، نسبت به نصف‌النهار گرینویچ، در آن زمان جهانی بخصوص است. بدین‌ترتیب طول جغرافیایی U (که به طرف غرب اندازه‌گیری می‌شود) زاویهٔ ساعتی جرم آسمانی درگرینویچ در آن زمان جهانی خاص است. این زاویهٔ ساعتی را می‌توان از داده‌های موجود در تقویمهای نجومی محاسبه کرد. بنابراین مکان U روی سطح زمین را می‌توان به طور قطعی مشخص کرد. U را مکان جغرافیایی جرم رصد شده (یا، در مورد خورشید یا ستاره، به‌ترتیب نقطهٔ زیر خورشیدی و زیراختری) در آن زمان جهانی خاص می‌نامند.

اکنون حاصل رصد ارتفاع که از آن فاصلهٔ سمت‌الراسی واقعی z به دست می‌آید را در نظر بگیرید. اگر راصد در واقع روی سطح زمین در نقطه‌ای چون K باشد، جهت سمت‌الرأس او در امتداد شعاع CK است؛ جهت جرم آسمانی هم در زمان رصد در امتداد شعاع CU است؛ از این‌رو $K\hat{C}U$ یا کمان دایرهٔ عظیمه UK فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی z است. حال چون زمان جهانی رصد معلوم است، مکان جغرافیایی U نقطه‌ای معین روی سطح زمین است؛ فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی z نیز معلوم است، و بنابراین راصد باید در جایی روی یک دایرهٔ صغیرهٔ KJR باشد که U قطب آن و فاصلهٔ زاویه‌ای هر نقطهٔ آن از U، z است. این دایرهٔ صغیره دایرهٔ مکانی

نامیده می‌شود. باید توجه داشت که هر تک رصدی از یک جرم آسمانی فقط به یک دایرهٔ صغیرهٔ معین که راصد روی آن قرار دارد می‌انجامد. اگر فرض کنیم که رصدی مشابه از جرم آسمانی دیگری در همان زمان جهانی انجام بگیرد، دایرهٔ مکانی دومی به دست خواهد آمد که راصد باید روی آن واقع باشد. بنابراین مکان واقعی او باید در یکی از دو نقطهٔ تلاقی این دو دایرهٔ مکانی باشد. چون مکان تقریبی کشتی همواره معلوم است، مشکلی در حکم اینکه کدام یک از دو نقطه مکان درست راصد است وجود ندارد.

مکان تقریبی کشتی توسط دریانورد با عمل ترسیم مسیر به دست می‌آید. او سرعتها و خط سیرهای کشتی را از زمانی که لنگرگاه را ترک کرده است، یا از زمان آخرین تعیین مکان، با دقت نسبتاً خوبی می‌داند. همچنین، احتمالاً با موفقیتی نسبتاً خوب، می‌تواند اثر بادها و جریانها را بر پیشروی خود تخمین بزند. دریانورد، با به کاربردن این داده‌ها، مکان ساعت به ساعت کشتی را روی یک نقشه رسم می‌کند، و هنگامی که یک رصد نجومی انجام می‌دهد مکان خود را از این نقشه طبق ترسیم پیدا می‌کند؛ این مکان به مکان ترسیمی (مکان DR) موسوم است. فرض می‌کنیم که D در شکل ۱۱۶ مکان ترسیمی کشتی را در زمان رصد ارتفاع نشان دهد. باید توجه داشت که مکان ترسیمی، در بهترین شرایط، فقط یک تخمین تقریبی است و احتمالاً پس از ۲۴ ساعت یا بیشتر، که رصد نجومی انجام نگرفته باشد، مکان ترسیمی خطایی به اندازهٔ ۱۰ مایل دریایی یا بیشتر خواهد داشت.

۱۸۰. خط مکانی (روش سنت هلر)

چنانکه دیدیم، رصد ارتفاع یک جرم آسمانی این آگاهی را به ما می‌دهد که در زمان رصد، کشتی روی دایرهٔ صغیره‌ای معین مانند KJR (شکل ۱۱۶) قرار دارد؛ در این لحظه مکان تخمینی کشتی در D است. واضح است که تنها آن قسمت از دایرهٔ مکانی که در همسایگی نزدیک D قرار دارد مورد توجه دریانورد است. بنابراین هدف او نمایاندن بخش AJB دایرهٔ مکانی بر روی نقشه (خط پررنگ در شکل ۱۱۶) است. چون عرض و طول جغرافیایی U و D معلوم‌اند، از این رو طول کمان دایرهٔ عظیمه UD را می‌توان محاسبه کرد. اما این کمان صرفاً برابر زاویهٔ بین شعاعهای CU و CD است، و چون CD امتداد داده شود جهت سمت‌الرأس در نقطهٔ مخصوص D به دست می‌آید، پس کمان UD فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم آسمانی برای راصدی فرضی در D در زمان جهانی رصد است. ما این فاصلهٔ سمت‌الرأسی UD را فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای می‌نامیم. حال طول کمان UJ از رصد معلوم است و همان فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی z است. از این رو با تفریق طول کمان DJ را به دست می‌آوریم. کمان DJ را فاصله از مبدأ می‌نامند. این کمان، اگر برحسب دقیقهٔ قوسی بیان شود، فاصلهٔ مکان ترسیمی D را از نزدیکترین نقطهٔ J روی دایرهٔ مکانی برحسب مایل دریایی به دست می‌دهد. از آنجا که U قطب KJR است، کمان DJ در نقطهٔ J بر دایرهٔ مکانی عمود است.

همچنین براحتی دیده می‌شود که زاویهٔ کروی UDP برای راصدی در D، سمت جرم آسمانی

در آن زمان جهانی بخصوص است؛ که مقدار آن را می‌توان با محاسبه یا با نگاه کردن جدولهایی از قبیل جدولهای سمت بردوود پیدا کرد. در شکل ۱۱۶ سمت J با سمت U، که اینک فرض می‌کنیم معلوم باشد، یکی است. بدین‌ترتیب، تحت شرایط نشان داده شده در شکل ۱۱۶ که در آن فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای UD از فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی UJ بزرگتر است، دریانورد می‌تواند روی نقشه از مکان ترسیمی خطی راست در جهت معلوم سمت جسم آسمانی رسم کند؛ سپس فاصله‌ای برابر فاصله از مبدأ در امتداد این خط جدا کند، و از نقطه‌ای که بدین‌ترتیب به دست می‌آید خطی راست، موسوم به خط مکانی[1]، عمود بر خط سمت رسم کند. خط مکانی قسمت AJB دایرهٔ مکانی KJR را روی نقشه (که در بخش ۱۸۲ با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار خواهد گرفت) نشان می‌دهد (شکل ۱۱۶). بدیهی است که اگر D درون دایرهٔ مکانی باشد، یعنی، اگر فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای از فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی کوچکتر باشد فاصله از مبدأ در جهت مخالف جهت معلوم سمت جدا خواهد شد.

۱۸۱. مثال محاسبهٔ فاصله از مبدأ[2]

ارتفاع رصد شدهٔ لبهٔ پایینی خورشید در زمان جهانی $16^h31^m2^s$ روز ۲۰ اسفند ۱۳۱۰/۱۰ مارس ۱۹۳۱ برابر $17°27'{,}0$ و بلندی چشم راصد از سطح دریا 25ft و خطای شاخص سکستان $-2'{,}0$ بود. مکان تخمینی، D، کشتی به روش ترسیمی چنین بود: عرض جغرافیایی $48°15'$ شمالی، طول جغرافیایی $7°28'$ غربی. می‌خواهیم فاصله از مبدأ را محاسبه کنیم. طول $7°28'$ غربی، در مقیاس زمانی معادل 29^m52^s غربی است.

برای زمان جهانی و تاریخ رصد، از تقویم نجومی داریم

میل خورشید	$4°18'{,}0$ جنوبی
زاویه ساعتی خورشید در گرینویچ	$4^h20^m29^s$
نیم‌قطر خورشید	$16'{,}1$

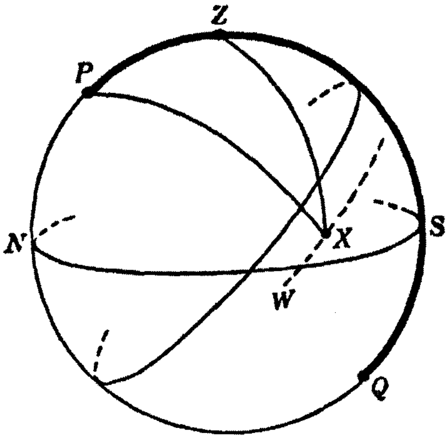
در شکل ۱۱۷، Z سمت‌الرأس مکان تخمینی کشتی است. بدین‌ترتیب $PZ = 41°45'$ (متمم عرض). همچنین X مکان مرکز خورشید روی کرهٔ سماوی است و PX برابر $94°18'{,}0$ است. زاویهٔ ZPX زاویه ساعتی خورشید (HATS) است. برای محاسبه ZX (فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای) فرمول هاورسینوس (بخش۱۳) را به کار می‌بریم. از معادلهٔ (۲۳) صفحهٔ ۲۶ می‌توانیم فرمول هاورسینوس را در این حالت به صورت زیر بنویسیم

$$\operatorname{hav} ZX = \operatorname{hav}(PX - PZ) + \operatorname{hav}\theta$$

---

۱. گاهی خط سنر خوانده می‌شود.

۲. گرچه در نشریات دریانوردی مثلاً در *Nautical Almanac* (برای استفاده در دریانوردی) به‌جای UT، GMT به کار برده می‌شود، با این حال ما در این فصل UT را حفظ خواهیم کرد.



شکل۱۱۷

که در آن $\operatorname{hav}\theta$ نمادگذاری اختصاری است که طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

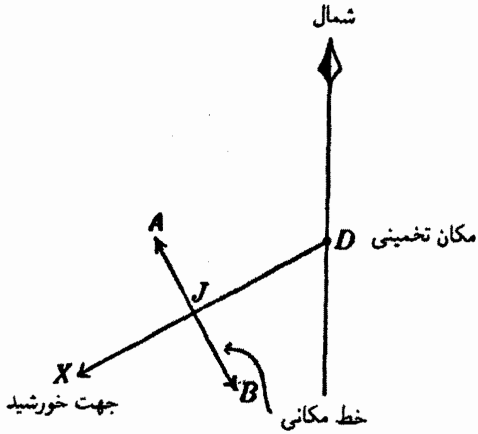
$$\operatorname{hav}\theta = \sin PX \sin PZ \operatorname{hav} ZPX$$

GHATS(زاویهٔ ساعتی خورشید واقعی درگرینویچ)	۴^h ۲۰^m ۲۹^s		
[طول جغرافیایی (غربی)]	-۲۹^m ۵۲^s		
HATS (زاویهٔ ساعتی خورشید واقعی)	۳^h ۵۰^m ۳۷^s	log hav	$\bar{1}$٫۳۶۶۴۰
PX	۹۴° ۱۸′٫۰	log sin	$\bar{1}$٫۹۹۸۷۸
PZ	۴۱ ۴۵٫۰	log sin	$\bar{1}$٫۸۲۳۴۰
	۵۲° ۳۳′٫۰	log havθ	$\bar{1}$٫۱۸۸۵۸

havθ	۰٫۱۵۴۳۷
hav۵۲°۳۳′٫۰	۰٫۱۹۵۹۷
havZX	۰٫۳۵۰۳۴

بنابراین فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای چنین است: $ZX =$ ۷۲°۳۵′٫۰.

خواننده می‌تواند درستی این محاسبه را با فرمول کسینوس بیازماید. اکنون فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی را پیدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۸

ارتفاع رصد شدهٔ لبهٔ پایینی خورشید	۱۷° ۲۷ر۰′
خطای شاخص	−۲ر۰
افت (برای بلندی چشم، ۲۵ فوت)	−۵ر۰
شکست جوی	−۳ر۱
نیم‌قطر	+۱۶ر۱
بنابراین ارتفاع رصد شدهٔ تصحیح شده چنین است	۱۷° ۳۳ر۰′

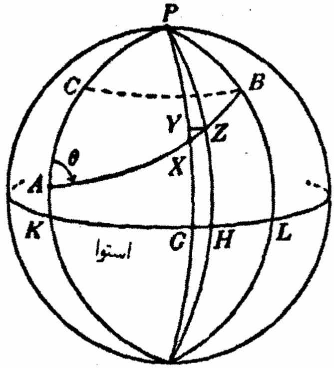
بدین‌ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ۷۲°۲۷ر۰′ است. اما فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای ۷۲°۳۵ر۰′ است. از این‌رو فاصله از مبدأ ۸ر۰′ است.

سمت خورشید ۱۱۸° غربی یا ۶۲° جنوب غربی (S۶۲°W) است. (این محاسبه به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.)

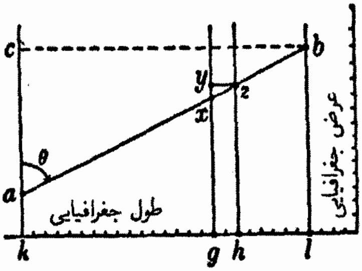
از آنجا که فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه‌ای بزرگتر از فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی (۷۲°۲۷ر۰′) است، خط مکانی روی نقشه (شکل ۱۱۸) با کشیدن خط DX از D مکان تخمینی در جهت S۶۲°W، و با در نظرگرفتن نقطهٔ J به طوری که DJ هشت مایل دریایی باشد، به دست می‌آید؛ خط راست AB که از J عمود بر DX رسم شد، خط مکانی است که مکان کشتی باید در زمان رصد روی آن قرار گیرد. این خط مکانی بعداً در شکل ۱۲۲ نیز نشان داده می‌شود.

۱۸۲. نقشهٔ مرکاتور

جز هنگامی که کشتی طبق برنامه حرکت می‌کند، خط سیر آن عموماً حداقل برای چند ساعت ثابت است؛ در این شرایط، مسیرش روی سطح زمین به خط قطبنمایی یا خط هم‌شیب موسوم



شکل۱۱۹



شکل۱۲۰

است که طبق تعریف دقیق جسمی است روی سطح زمین که خط مماس بر آن در هر نقطه با دایرهٔ نصف‌النهار آن نقطه زاویه‌ای ثابت می‌سازد. در شکل ۱۱۹، $AXZB$ یک خط قطبنمایی است که همه دایره‌های نصف‌النهار بین A و B را تحت یک زاویهٔ ثابت θ قطع می‌کند. بدیهی است، نقشه‌ای از سطح زمین که در آن خطوط قطبنمایی با خطوط راست نشان داده می‌شوند برای دریانورد فوق‌العاده راحت خواهد بود، زیرا در آن صورت مسیر کشتی او روی نقشه با یک خط راست نمایانده خواهد شد. چنین نقشه‌ای نقشهٔ مرکاتور است. اکنون برای ترسیم آن به بیان دو اصل عمده می‌پردازیم. (الف) همهٔ خطوط قطبنمایی روی سطح زمین، روی نقشه با خطوط راست نشان داده می‌شوند. (ب) زاویهٔ بین هر دو خط قطبنمایی متقاطع به طور صحیح روی نقشه نشان داده می‌شود؛ مثلاً، اگر دو خط قطبنمایی تحت زاویهٔ 30° همدیگر را قطع کنند، در آن صورت روی نقشه نیز زاویهٔ بین دو خط راست متناظرآنها 30° است. استوا یک خط‌قطبنمایی است، و همهٔ نصف‌النهارهای طول خطوطی قطبنمایی‌اند که استوا را تحت زاویه‌های قائمه قطع می‌کنند. از این‌رو استوا بر روی نقشه با خطی راست (kl در شکل ۱۲۰) نشان داده می‌شود و مثلاً نصف‌النهارهای KAP و LBP با خطوط راست موازی ka و lb عمود بر kl نمایش داده می‌شوند. نصف‌النهارها روی نقشه هم فاصله‌اند، به طوری که طول kl با اختلاف طولی بین K و L (یا بین A و B) متناسب است. همچنین همهٔ مدارها خطوطی قطبنمایی‌اند که نصف‌النهارها را تحت زاویه‌های قائمه قطع می‌کنند؛ از این‌رو مدارهایی چون CB روی نقشه با خطوطی راست موازی kl (مثلاً، cb در شکل ۱۲۰) و عمود بر ka و lb نشان داده می‌شوند.

دو نقطهٔ نزدیک به هم Z و X را روی خط قطبنمایی AB در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱۹). مدار YZ را رسم می‌کنیم. XYZ را مثلث مسطح کوچکی در نظر می‌گیریم که در آن $Y\hat{X}Z = \theta$ (خط سیر ثابت در امتداد خط قطبنمایی). اگر ΔL زاویهٔ XPZ (اختلاف طول جغرافیایی بین X و Z) را نشان دهد. و ϕ عرض Z باشد، پس $YZ = \Delta L \cos\phi$. اگر عرض جغرافیایی X

برابر $\phi - \Delta\phi$ باشد، پس $XY = \Delta\phi$. ولی $YZ = XY \tan\theta$ است، به طوری که

$$\Delta\phi \sec\phi = \Delta L \cot\theta \tag{۹}$$

که در آن فرض می‌کنیم $\Delta\phi$ و ΔL در مقیاس دایره‌ای بیان شوند. حال نصف‌النهارهای X و Z روی نقشه با خطوط راست gx و hz، و خط قطبنمایی AB نیز با خط راست ab، که با نصف‌النهارها زاویهٔ θ می‌سازد، نشان داده می‌شوند. فاصلهٔ gh اختلاف طول جغرافیایی، ΔL، بین نصف‌النهارهای GXP و HZP را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم که مثلاً مقیاس نقشه طوری انتخاب شود که یک دقیقهٔ قوسی طول، روی نقشه یک میلیمتر باشد؛ پس اگر ΔL معادل n دقیقهٔ قوسی باشد، طول gh برابر n میلیمتر خواهد بود. اما چون ΔL در مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود، داریم $\Delta L = n \sin ۱'$. از این‌رو رابطهٔ (۹) به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta\phi \sec\phi = n \cot\theta \sin ۱' \tag{۱۰}$$

در مثلث کوچک xyz (شکل ۱۲۰)، که روی نقشه مثلث کوچک XYZ روی کره را نشان می‌دهد، داریم $y\hat{x}z = \theta$ و $yz \equiv gh = n\ \mathrm{mm}$. طول xy را برحسب میلیمتر با Δy نشان می‌دهیم. بنابراین داریم

$$\Delta y = n \cot\theta \tag{۱۱}$$

از روابط (۱۰) و (۱۱)، با قرار دادن $\sin ۱' = ۱/۳۴۳۸$ به دست می‌آوریم

$$\Delta y = ۳۴۳۸ \sec\phi \Delta\phi \tag{۱۲}$$

اگر اختلاف عرض بین X و Z، $۱'$، یعنی $\Delta\phi$ (در مقیاس دایره‌ای) ۱/۳۴۳۸ باشد، آنگاه از رابطهٔ (۱۲) خواهیم داشت $\Delta y = \sec\phi\ \mathrm{mm}$. بدین‌ترتیب دیده می‌شود که با افزایش ϕ، از استوا به طرف شمال یا به طرف جنوب، فاصلهٔ واقعی (برحسب میلیمتر) بین مدارهای ϕ و $(\phi + ۱')$ روی نقشهٔ افزایش می‌یابد و با رسیدن به قطبهای شمال و جنوب نامتناهی می‌شود؛ از این‌رو، قطبهای شمال و جنوب را نمی‌توان روی نقشه مرکاتور نمایش داد. مقیاس عرض نقشه روی یک خط موازی lb یا بیشتر نشانه‌گذاری می‌شود.

با انتگرال‌گیری از رابطهٔ (۱۲)، برای طول lb (برحسب میلیمتر) که با $y_۲$ نشان می‌دهیم، داریم

$$y_۲ = ۳۴۳۸ \log_e \tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\phi''}{۲}) \tag{۱۳}$$

که در آن ϕ'' عرض جغرافیایی B است. همین‌طور، اگر $ka = y_۱$ و ϕ' عرض جغرافیایی A باشد، داریم

$$y_۱ = ۳۴۳۸ \log_e \tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\phi'}{۲}) \tag{۱۴}$$

از این فرمولها، فاصله‌های روی نقشه بین استوا و مدارهایی که A و B روی آنها قرار دارند، برحسب میلیمتر به دست می‌آیند؛ این واحد فاصله روی مقیاس طول جغرافیایی متناظر با یک دقیقهٔ قوسی است. مقیاس اخیر روی kl یا روی خطهایی موازی kl چاپ می‌شود.

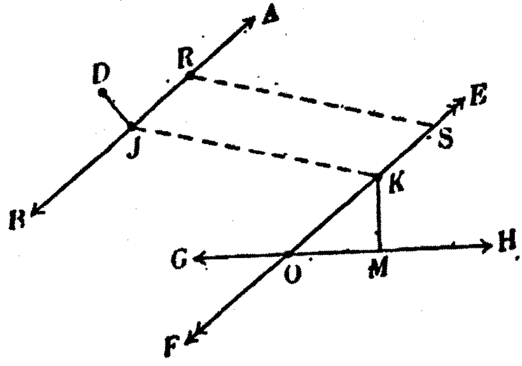
اکنون مسئلهٔ به دست آوردن فاصلهٔ دو مکان دلخواه در امتداد خط قطبنمایی واصل بین آنها روی زمین، برحسب مایل دریایی، از اندازه‌گیریهای روی نقشه، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نقاط نزدیک به هم X و Z که روی نقشه با x و z نمایش داده شده‌اند را در نظر بگیرید. مثلثهای XYZ و xyz متشابه‌اند؛ از این‌رو داریم

$$XZ : XY = xz : xy = \sec\theta : ۱ \qquad (۱۵)$$

هرگاه $XY = ۱'$ (یک مایل دریایی) باشد، آنگاه از رابطهٔ (۱۵) $XZ = \sec\theta$ مایل دریایی خواهد بود. حال در مثلث xyz مسافت xy نمایشگر یک مایل دریایی است و چون، از رابطهٔ (۱۵) داریم $xz = xy\sec\theta$، اگر xz برحسب xy به عنوان واحد اندازه‌گیری شود، اندازهٔ آن تعداد مایل دریایی بین X و Z را به دست خواهد داد. بدین‌ترتیب مقیاس عرض جغرافیایی، واحدی را در اختیار می‌گذارد که یک مسافت اندازه‌گیری شده با آن روی نقشه، فاصلهٔ بین نقاط متناظر را در امتداد خط قطبنمایی مربوط روی سطح زمین، برحسب مایل دریایی، به طور صحیح به ما می‌دهد. از آنجا که طول این واحد طبق $\sec\phi$ تغییر می‌کند، یافتن تعداد مایل دریایی که با خطی چون ab روی نقشه نمایش داده می‌شود از دیدگاه نظری پیچیده است، زیرا برای این کار باید ab را به تعداد زیادی بخش تقسیم کرد و تعداد مایل دریایی در هر بخش را با مراجعه به واحدمقیاس عرض جغرافیایی بلافاصله روبه‌روی آن به دست آورد. با این حال در عمل اگر ab به بخشهایی با طول ۳۰ یا ۴۰ مایل دریایی تقسیم شود و هر یک برحسب واحد عرض جغرافیایی مقابل نقطهٔ میانی بخش مورد نظر اندازه‌گیری شود، دقت کافی خواهد بود.

۱۸۳. تعیین مکان کشتی با رصد دو ارتفاع

اینک مسئله کلی تعیین مکان کشتی را با استفاده از دو رصد که فرض می‌کنیم در زمانهای $t_۱$ و $t_۲$ انجام می‌شوند و با منظورکردن کامل «سیر» کشتی در بین رصدها، مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید D (شکل ۱۲۱) روی نقشهٔ مکان ترسیمی تخمینی در $t_۱$ باشد. با محاسبهٔ فاصلهٔ سمت‌الرأسی جرم آسمانی رصد شده در $t_۱$ برای عرض و طول جغرافیایی D، و به کار بستن ارتفاع رصدی تصحیح شده، فاصله از مبدأ را به دست می‌آوریم. پس از اینکه سمت این جسم را یافتیم می‌توانیم خط مکانی در $t_۱$ را، مطابق روش بخشهای ۱۸۰ و۱۸۱ روی نقشه رسم کنیم. فرض کنید AB خط مکانی به دست آمده در $t_۱$ باشد، پس مکان کشتی در $t_۱$ در روی خط AB خواهد بود. JK را موازی خط سیر کشتی و طول آن را برابر مسافت طی شده در بازهٔ $(t_۲ - t_۱)$ بگیرید. از K خط EF را موازی AB رسم کنید. نقطهٔ دلخواه R را روی AB



شکل۱۲۹

در نظر بگیرید و RS را موازی JK رسم کنید تا EF را در S قطع کند. اگر کشتی در واقع در زمان $t_۱$ در J قرار داشت، آن وقت مکان آن در $t_۲$ در K بود. همین‌طور، اگر مکان آن در $t_۱$ در R بود، مکان آن در $t_۲$ در S بود.از این‌رو بدیهی است که چون مکان کشتی در $t_۱$ در جایی روی AB است، مکان آن در $t_۲$ باید روی EF باشد. این خط EF را خط مکانی انتقال‌یافته می‌نامند.

اکنون رصد دوم را که در $t_۲$ انجام شده است به کار می‌بندیم. می‌توانیم K را به عنوان مکان تخمینی در این زمان به کار بریم و مانند قبل با محاسبهٔ فاصله از مبدأ، خط مکانی GH که مکان کشتی در $t_۲$ باید روی آن باشد را به دست آوریم. اما، رصد اول و به کاربردن سیر کشتی، آن را در زمان $t_۲$ روی EF قرار می‌دهد. از این‌رو مکان آن در $t_۲$ در نقطهٔ O، محل تلاقی EF و GH است.

مکان واقعی کشتی در $t_۱$ (در صورت نیاز) با کشیدن خطی از O موازی JK به دست می‌آید؛ نقطهٔ تلاقی این خط با AB مکان کشتی در $t_۱$ است.

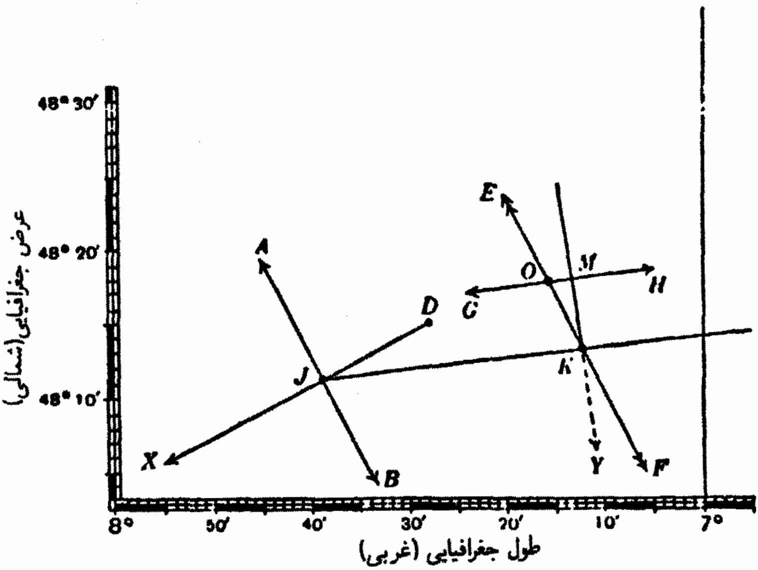
بدیهی است که می‌توانیم رصدهای انجام شده بر روی یک جرم (مثلاً خورشید) را در $t_۱$ و $t_۲$ به کار بریم مشروط بر اینکه تغییر سمت در این بازه طوری باشد که دو خط مکانی به دست آمده در یک زاویهٔ خیلی کوچک همدیگر را قطع کنند.

اصول این بخش را در مثال زیر که شامل رصدهایی از خورشید و یک ستاره است توضیح می‌دهیم.

۱۸۴. مثال در مورد یافتن مکان کشتی از دو رصد

مکان تخمینی یک کشتی که با سرعت ۸ گره دریایی به طرف °۸۴ شمال شرقی (N۸۴°E) در حرکت بود در $۱۶^h۳۱^m۲^s$ زمان جهانی روز ۱۰ مارس ۱۹۳۱ در ′۱۵°۴۸ عرض شمالی و ′۲۸°۷ طول غربی بود. رصدهای زیر انجام شدند.

در ساعت $۱۶^h۳۱^m۲^s$ زمان جهانی، ارتفاع رصدشدهٔ لبهٔ پایینی خورشید ۰ر′۲۷°۱۷ بود.



شکل ۱۲۲

در $18^h 46^m 10^s$ زمان جهانی، ارتفاع رصد شدهٔ ابطالجوزا $48°55'{,}0$ بود.

اگر خطای سکستان $-2'{,}0$ و بلندی چشم راصد 25ft باشد مکان کشتی در ساعت $18^h 46^m$ زمان جهانی مطلوب است.

رصد اول آن است که به طور مفصل در بخش ۱۸۱ مورد بررسی قرار گرفت. اکنون آن نتایج را روی نقشه (شکل ۱۲۲) رسم می‌کنیم. D مکان تخمینی داده شده است؛ DJ فاصله از مبدأ $8'{,}0$ است که جهت $62°$ جنوب غربی (S62°W) کشیده شده است و AB خط مکانی در ساعت $16^h 31^m$ زمانی جهانی است.

بازهٔ زمانی بین دورصد $2\frac{1}{4}$ ساعت است؛ بنابراین سیر کشتی $18'{,}0$ است. JK را در جهت $84°$ شمال شرقی (خط سیر کشتی) با طولی برابر هیجده بخش از مقیاس عرض جغرافیایی روبه‌رو رسم می‌کنیم. EF که از K موازی EF؛ AB رسم می‌شود خط مکانی انتقال یافته است که کشتی باید در ساعت $18^h 46^m$ زمان جهانی روی آن واقع باشد. K را مکان تخمینی در این زمان بُعدی می‌گیریم، و این مکان را برای به دست آوردن خط مکانی حاصل از رصد ستارهٔ ابطالجوزا به کار می‌بریم. از روی نقشه می‌یابیم که نقطهٔ K در عرض جغرافیایی $48°13'$ شمالی و طول جغرافیایی $7°12'{,}5$ غربی است.

نخست زاویهٔ ساعتی این ستاره را به روش زیر محاسبه می‌کنیم (بُعد و میل آن به‌ترتیب $5^h 51^m 27^s$ و $+7°23'{,}8$ است):

زمان نجومی گرینویچ (GST) در ۰^h زمان جهانی (UT)	۱۱^h	۰۶^m	۴۹^s
زمان جهانی رصد	۱۸	۴۶	۱۰
	۲۹	۵۲	۵۹
تبدیل زمان جهانی به زمان نجومی گرینویچ (GST)		+۳	۰۵
GST در لحظهٔ رصد	۲۹	۵۶	۰۴
طول جغرافیایی غربی		−۲۸	۵۰
زمان نجومی محلی (LST)	۲۹	۲۷	۱۴
بُعد ستاره (RA)	۵	۵۱	۲۷
زاویهٔ ساعتی (HA)[1]	۲۳	۳۵	۴۷

اگر X مکان ابط‌الجوزا روی کرهٔ سماوی و Z سمت‌الرأس نقطهٔ K باشد، داریم

$$Z\hat{P}X \equiv ۲۴^{\mathrm{h}} - \mathrm{HA} = ۰^{\mathrm{h}}۲۴^{\mathrm{m}}۱۳^{\mathrm{s}}؛ PZ = ۴۱°۴۷'٫۰؛ PX = ۸۲°۳۶'٫۲$$

ZX را به کمک فرمول کسینوس محاسبه می‌کنیم

$\log\cos PX$	$\bar{1}$٫۱۰۹۷۱	$\log\sin PX$	$\bar{1}$٫۹۹۶۳۷
$\log\cos PZ$	$\bar{1}$٫۸۷۲۵۵	$\log\sin PZ$	$\bar{1}$٫۸۲۳۶۸
		$\log\cos Z\hat{P}X$	$\bar{1}$٫۹۹۷۵۷
	$\bar{2}$٫۹۸۲۲۶		$\bar{1}$٫۸۱۷۶۲

از این‌رو $\cos ZX = ۰٫۰۹۶۰۰ + ۰٫۶۵۷۰۸ = ۰٫۷۵۳۰۸$

بنابراین $ZX = ۴۱°۸'٫۵$

از محاسبه معلوم می‌شود که سمت برابر °۱۷۱ شرقی است، به طوری که جهت ستاره °۹ جنوب شرقی (S۹°E)، یعنی در جهت KY در شکل ۱۲۲ است.

اکنون ارتفاع رصد شده را تصحیح می‌کنیم

ارتفاع رصد شدهٔ ستاره	۴۸°۵۵'٫۰
خطای شاخص	−۲٫۰
افت	−۵٫۰
شکست	−۰٫۹
بنابراین ارتفاع رصد شدهٔ تصحیح شده	۴۸°۴۷'٫۱

بدین‌ترتیب فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی ۴۱°۱۲'٫۹ است. اما فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه شده ۴۱°۸'٫۵ است. از این‌رو فاصله از مبدأ ۴'٫۴ است.

چون فاصلهٔ سمت‌الرأسی محاسبه شده از فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی کوچکتر است، بدیهی است که نقطهٔ K درون دایرهٔ مکانی حاصل از رصد ستارهٔ ابط‌الجوزا است. از این‌رو برای به دست

۱. مقدار زاویهٔ ساعتی گرینویچ ستاره را می‌توان مستقیماً از تقویم دریانوردی به دست آورد. و در آن صورت روش کمی متفاوت خواهد بود. محاسبهٔ داده شده در اینجا در صورتی لازم است که داده از زیج نجومی گرفته شود.

آوردن خط مکانی روی نقشه، KM رابه اندازهٔ فاصله از مبدأ (۴٫۴′) در جهت مخالف جهت سمت ستاره رسم می‌کنیم. خط GH که از M عمود بر KM رسم می‌شود خط مکانی حاصل از رصد ستاره است.

مکان کشتی در زمان جهانی 18^h46^m نقطهٔ O، محل تلاقی GH و EF است. از روی نقشه معلوم می‌شود که O مکانی است به عرض جغرافیایی ۴۸°۱۷٫۸′ شمالی و طول جغرافیایی ۷°۱۶′ غربی.

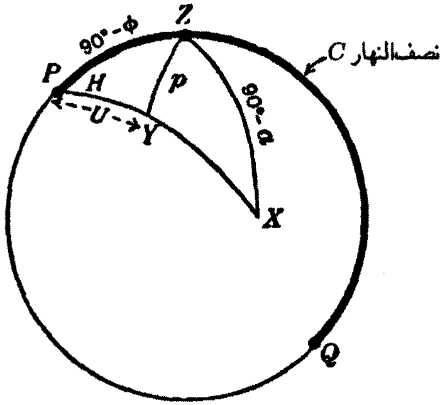
۱۸۵. روشهای ویژه

وقتی که ستارهٔ قطبی رصد شود، خط مکانی را براحتی می‌توان به کمک جدولهای ساده بر پایهٔ فرمولهای تمرین ۲۰، صفحهٔ ۶۵ به دست آورد. این جدولها در تقویم دریانوردی، زیج نجومی، و نیز در جدولهای اینمان منتشر می‌شوند. از آنجا که جهت ستارهٔ قطبی با تقریب خوبی جهت شمال است، خط مکانی حاصل عملاً یک مدار خواهد بود؛ در نتیجه یک بار رصد ستارهٔ قطبی عرض جغرافیایی کشتی را معلوم می‌کند.

هنگامی که زاویهٔ ساعتی جرم آسمانی مورد رصد کمتر از ۳۰ یا ۴۰ دقیقه از نصف‌النهار باشد، جدولهایی ساده بر پایهٔ فرمولهای تمرین ۲۱، صفحهٔ ۶۵، محاسبهٔ فاصلهٔ سمت‌الرأسی را آسان می‌کنند. چنین رصدهایی را رصدهای برون نصف‌النهاری می‌نامند.

در مسئلهٔ کلی، محاسبات ممکن است با استفاده از جدولهای خاص خیلی ساده شوند. در میان این جدولها می‌توان از جدولهای ارتفاع[1] تألیف دو آکینو و جدولهای خط مکانی (روش سینوسی) تألیف اسمارت و شیرم، که اصول کلی آن در جدولهای دیگر نیز به کار رفته است، نام برد. دایرهٔ مکانی روی زمین از دو رصد به دست می‌آید: (الف) ارتفاع رصد شدهٔ جرم آسمانی. (ب) زمان جهانی که در آن رصد انجام می‌پذیرد. گرچه مکان تخمینی (D) را برای به دست آوردن خط مکان به کار می‌بریم ولی چون دایرهٔ مکانی و نیز خط مکانی بر روی نقشه از مکان تخمینی کشتی مستقل‌اند، هر نقطهٔ دیگری مانند C در ۳۰ یا ۴۰ مایلی D نیز می‌تواند بخوبی به کار برده شود. در روش سینوسی، نقطهٔ ویژهٔ C به طریقی انتخاب می‌شود که با یک مثال بخوبی روشن می‌شود. فرض کنید مکان تخمینی D کشتی به عرض جغرافیایی ۴۸°۳۹′ شمالی و طول جغرافیایی ۷°۱۸′ غربی باشد و زاویهٔ ساعتی جرم آسمانی که برای D محاسبه می‌شود $2^h18^m32^s$ باشد. عرض جغرافیایی C را عددی انتخاب می‌کنیم که مقدار آن برحسب درجه عدد درستی بوده و نزدیکترین مقدار به عرض جغرافیایی D باشد و طول جغرافیایی آن را عددی انتخاب می‌کنیم که زاویهٔ ساعتی برای C نزدیکترین مضرب از 4^m باشد. در این مثال، عرض جغرافیایی C ۴۹° شمالی و طول جغرافیایی آن عددی است که زاویهٔ ساعتی برای C، 2^h20^m باشد؛ از این‌رو C باید 1^m28^s یا ۰٫۲۲′ شرق D باشد، به طوری که طول جغرافیایی آن ۶°۵۶′ غربی است. نقطهٔ C روی نقشه مشخص می‌شود. انتخاب C در حالت کلی-یعنی وقتی عرض

۱. منتشر شده توسط: J.D. Potter, 145 Minories, London, E.l.



شکل ۱۲۳

جغرافیایی عدد صحیح و طول جغرافیایی طوری است که زاویهٔ ساعتی جرم آسمانی مضربی از ۴^m است. جدول‌بندی فشردهٔ برخی کمیتها را که در محاسبات بعدی به کار می‌روند امکانپذیر می‌سازد.

در شکل ۱۲۳ فرض می‌کنیم Z سمت‌الرأس C، X جرم آسمانی (با میل δ) و H زاویهٔ ساعتی برای طول جغرافیایی C باشد. نخست فرض خواهیم کرد که این زاویهٔ ساعتی کمتر از ۶^h از نصف‌النهار باشد، کمان دایرهٔ عظیمهٔ ZY را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ عظیمهٔ PX را در زاویهٔ قائمه قطع کند. PY و ZY را به‌ترتیب با U و p نشان می‌دهیم، و عرض جغرافیایی C را ϕ می‌گیریم. از مثلث راستگوشهٔ PZY که در آن $PZ = ۹۰° - \phi$ است داریم

$$\tan U = \cot\phi \cos H \qquad (۱۶)$$

$$\cos p = \sin\phi \sec U \qquad (۱۷)$$

فاصلهٔ سمت‌الرأسی ZX را با $(۹۰° - a)$ نشان می‌دهیم؛ a را ارتفاع محاسبه‌ای می‌نامیم. از مثلث ZYX، که در آن $YX = PX - U = ۹۰° - \delta - U$، داریم

$$\sin a = \sin(\delta + U) \cos p \qquad (۱۸)$$

مقادیر U، که به کمک رابطهٔ (۱۶) محاسبه می‌شوند، برای هر درجهٔ عرض جغرافیایی و در هر بازهٔ ۴^mای در زاویهٔ ساعتی، از $۰^h۰^m$ تا $۶^h۰^m$ یا از $۱۸^h۰^m$ تا $۲۴^h۰^m$، در جدولها موجودند. در کنار هر یک از این مقادیر، مقدار متناظر $\log\cos p$، که به کمک رابطهٔ (۱۷) داده می‌شود، جدول‌بندی شده است. ارتفاع محاسبه‌ای a بسادگی از رابطهٔ (۱۸) محاسبه می‌شود. اختلاف بین

a که از این‌روش به دست می‌آید و ارتفاع رصد شده (پس از تصحیح) برابر فاصله از مبدأ است، که باید روی نقشه از نقطهٔ C کشیده شود. به این طریق خط مکانی را می‌توان با حداقل محاسبات رسم کرد.

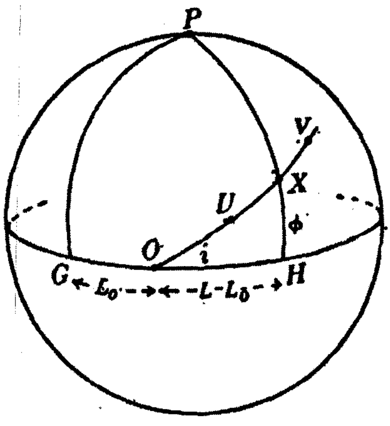
وقتی زاویهٔ ساعتی (H) جرم آسمانی پیش از 6^{h} از نصف‌النهار باشد، تغییری جزیی لازم خواهد بود. فرض کنید ($H - 12^{\mathrm{h}}$) یا ($12^{\mathrm{h}} - H$) با H_1 نشان داده شود. کمیتهای $\log\cos p$ و U برای مقدار خاص H_1 از جدولها گرفته می‌شوند و فرمول متناظر (۱۸) چنین می‌شود

$$\sin a = \sin(\delta - U)\cos p$$

۱۸۶. معادلهٔ دایرهٔ عظیمه روی نقشهٔ مرکاتور.

فاصلهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای بین دو نقطه روی سطح زمین از فاصلهٔ خط قطبنمایی کوتاهتر است، و این اختلاف از دید اقتصادی در مسافرتهای اقیانوسی طولانی اهمیت پیدا می‌کند. در چنین مواردی معمول آن است که تا حد امکان دایرهٔ عظیمهٔ خاص را دنبال می‌کنند. فرض کنید که این دایرهٔ عظیمه روی نقشه نمایانده شود. آن را به تعداد مناسبی بخش تقسیم می‌کنند و کشتی از آغاز تا پایان هر بخش، آن خط قطبنمایی خاص (خط راستی که از وصل کردن انتهای بخش به دست می‌آید) را که براحتی از نقشه حاصل می‌شود دنبال می‌کند. هنگامی که کشتی به انتهای یک بخش می‌رسد، خط سیر آن به خط قطبنمایی مربوط به بخش بعدی تغییر داده می‌شود؛ و الی آخر.

برای یافتن معادلهٔ منحنیی که دایرهٔ عظیمهٔ واصل بین دو نقطهٔ U و V (شکل ۱۲۴) را نشان می‌دهد به روش زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید دایرهٔ عظیمهٔ UV استوا را در O قطع کند و طول جغرافیایی O (که به طرف شرق اندازه گرفته می‌شود) برابر L_0 باشد. PG در این شکل نصف‌النهار گرینویچ است. زاویهٔ میل UV نسبت به استوا را (در امتداد افزایش طولهای شرقی) با i نشان



شکل ۱۲۴

می‌دهیم؛ i می‌تواند همهٔ مقادیر بین $۰°$ و $۱۸۰°$ را دارا باشد. فرض کنید L و ϕ به‌ترتیب طول جغرافیایی شرقی و عرض جغرافیایی شمالی نقطهٔ دلخواه X روی دایرهٔ عظیمهٔ UV باشند. فرض کنید x و y مختصات X روی نقشه باشند؛ اگر x و y برحسب رادیان بیان شوند، آن‌وقت داریم

$$x = L \tag{۱۹}$$

که در آن L برحسب مقیاس دایره‌ای است و از رابطهٔ (۱۳) داریم

$$y = \log_e \tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\phi}{۲}) \tag{۲۰}$$

از مثلث کروی XOH، که در آن H محل تلاقی نصف‌النهار X با استواست، داریم: $OH = L - L_.$، $HX = \phi$، $X\hat{O}H = i$ و $X\hat{H}O = ۹۰°$. از فرمول (د) به‌دست می‌آوریم

$$\tan\phi = \sin(L - L_.)\tan i \tag{۲۱}$$

اما رابطهٔ (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$e^y = \tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\phi}{۲}) = \frac{۱ + \sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\cos\phi}{۱ - \sin\phi}$$

از این‌رو

$$\sec\phi + \tan\phi = e^y$$
$$\sec\phi - \tan\phi = e^{-y}$$

که از آن داریم

$$\tan\phi = \frac{۱}{۲}(e^y - e^{-y}) = \sinh y \tag{۲۲}$$

از این‌رو با به کار بردن روابط (۱۹) و (۲۲) با (۲۱)، معادلهٔ دایره عظیمه را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\sinh y = \sin(x - L_.)\tan i \tag{۲۳}$$

که در آن $L_.$ و i را دو مقدار ثابت وابسته به دایرهٔ عظیمه می‌دانیم. اکنون مقادیر $L_.$ و i را می‌توان به‌ترتیب برحسب طولها و عرض جغرافیایی نقاط U و V یعنی به‌ترتیب برحسب $L_۱$، $L_۲$ و $\phi_۱$، $\phi_۲$ بیان کرد. از رابطهٔ (۲۱) داریم

$$\left.\begin{aligned}\tan\phi_۱ &= \sin(L_۱ - L_.)\tan i\\ \tan\phi_۲ &= \sin(L_۲ - L_.)\tan i\end{aligned}\right\} \tag{۲۴}$$

از تقسیم آنها

$$\frac{\tan \phi_۱}{\tan \phi_۲} = \frac{\sin(L_۱ - L_۰)}{\sin(L_۲ - L_۰)}$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\tan \phi_۲ - \tan \phi_۱}{\tan \phi_۲ + \tan \phi_۱} = \frac{\sin(L_۲ - L_۰) - \sin(L_۱ - L_۰)}{\sin(L_۲ - L_۰) + \sin(L_۱ - L_۰)}$$

با ساده کردن بیشتر آن، خواهیم داشت

$$\tan\left(\frac{L_۲ + L_۱}{۲} - L_۰\right) = \tan\left(\frac{L_۲ - L_۱}{۲}\right) \times \frac{\sin(\phi_۲ + \phi_۱)}{\sin(\phi_۲ - \phi_۱)} \qquad (۲۵)$$

مقدار $L_۰$ از رابطهٔ (۲۵) محاسبه می‌شود. سپس $\tan i$ از یکی از فرمولهای (۲۴) به دست می‌آید.

برای پیدا کردن مکان نقطه‌ای هر طول جغرافیایی فرضی L روی منحنی، عرض جغرافیایی ϕ متناظر آن را به کمک رابطهٔ (۲۱) محاسبه می‌کنیم. سپس مختصات x و y را از روابط (۱۹) و (۲۰) به دست می‌آوریم.

رسم یک دایرهٔ عظیمه روی نقشهٔ مرکاتور به کمک تشکیل تصویر شاخصی می‌تواند خیلی ساده‌تر شود.

تمرینها

۱. بابه کار بردن اثر شکست جوی که در بخش ۱۷۸ توضیح داده شد ثابت کنید که فاصلهٔ افق برحسب مایل دریایی برای راصدی h فوت بالای سطح دریا برابر است با

$$\left(\frac{۲۶h}{۱۱a}\right)^{\frac{۱}{۲}} \operatorname{cosec} ۱'$$

که در آن a شعاع زمین برحسب فوت است.

۲. راصدی، روی دکل یک کشتی در بلندی ۸۰ فوت از سطح دریا، چراغی را که ۱۰۰ فوت بالای سطح دریا قرار دارد، می‌تواند ببیند. نشان دهید که فاصلهٔ او از چراغ $۲۱\frac{۳}{۴}$ مایل دریایی است.

۳. نشان دهید که در مکانی به عرض جغرافیایی ϕ، طلوع خورشید در اعتدالهای بهاری و پاییزی، در قله کوهی به بلندی h فوت در حدود $۴\sqrt{h}\sec\phi$ ثانیه زودتر از طلوع خورشید در دامنهٔ آن قابل رؤیت خواهد بود.

[آزمون کالج]

۴. مسیر خورشید در حال غروب با افق زاویهٔ θ می‌سازد. ثابت کنید که اگر میل خورشید δ باشد، قله کوهی به بلندی $۱/n$ شعاع زمین در عرض جغرافیایی ϕ مدت

$$۱۲\sqrt{۲}\,\text{cosec}\,\theta\sec\delta/\pi\,\sqrt{n}$$

ساعت پس از غروب خورشید در دشت پایین کوه، آفتاب خواهد داشت.
مقدار این عبارت را با دقت یک دقیقه در انقلاب تابستانی برای کوهی به بلندی سه مایل در عرض جغرافیایی °۴۵ تعیین کنید.

[آزمون کالج]

۵. مشاهده می‌شود که زاویهٔ فرورفتگی لبهٔ بالایی خورشید در حال غروب از یک بلندی برابر d و از یک بلندی مجاور که h فوت از اولی بلندتر است $d + \Delta d$ است، که در آن Δd برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شود. ثابت کنید که شعاع زمین برحسب فوت تقریباً برابر است با

$$\frac{h\cos d\cot d}{\Delta d\sin ۱''}$$

۶. اگر s طول خط قطبنمایی واصل بین دو نقطه در عرضهای جغرافیایی $\phi_۱$ و $\phi_۲$ و θ زاویهٔ این خط با نصف‌النهارها باشد، ثابت کنید

$$s = a(\phi_۲ - \phi_۱)\sec\theta$$

که در آن a شعاع زمین است.

[نجوم کروی تألیف بال]

۷. نشان دهید که در تصویر مرکاتور معادلهٔ یک دایرهٔ صغیره روی زمین (که کروی فرض می‌شود) به صورت زیر است

$$\cosh y/c\ \sec x/c = \text{const}.$$

به شرط اینکه دایرهٔ صغیره شامل قطبی از زمین نباشد و x و y روی نقشه از مبدأ معینی اندازه گرفته شوند.
شعاع انحنای این منحنی را در نقطه‌ای که مماس بر آن در امتداد شمال و جنوب قرار می‌گیرد، به شکل زیر به دست آورید

$$\rho = c\sin\theta(\cos^۲\delta - \sin^۲\theta)^{-\frac{۱}{۲}}$$

که در آن δ عرض جغرافیایی مرکز دایرهٔ صغیرهٔ یاد شده و θ شعاع زاویه‌ای آن است.

خطای حاصل در چشمپوشی از انحنای «خط مکانی» را به هنگام تعیین طول جغرافیایی از یک رصد زمان‌گیری شدهٔ ارتفاع ۳۰° در عرض جغرافیایی ′۵۱°۳۰ تعیین کنید، خطای عرضی فرضی را ′۱۰۰ بگیرید؛ این رصد در نزدیکی قائم اصلی انجام شده است و عرض جغرافیایی فرضی به یک رصد ایده‌آل که دقیقاً روی قائم اصلی انجام می‌گیرد مربوط می‌شود.
[لندن،۱۹۲۶]

۸. رصد ارتفاع ستاره‌ای در مکانی با عرض جغرافیایی معلوم ϕ، هنگامی که ستاره روی قائم اصلی قرار دارد، انجام می‌گیرد. نشان دهید که خطا در ϕ اثر محسوسی بر طول جغرافیایی محاسبه شده ندارد.

۹. عرض و طول جغرافیایی غربی دو مکان F و G به‌ترتیب (ϕ_1, λ_1) و (ϕ_2, λ_2) هستند. هنگامی که یک جرم آسمانی (به میل δ) به طور همزمان در F و G رصد می‌شود، ارتفاع تصحیح شده در هر حالت a است. ثابت کنید

$$\begin{aligned}\sin^2(\lambda_2 - \lambda_1)\cos^2\delta &= P_1^2 - 2P_1P_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + P_2^2\\ &= S_1^2 - 2S_1S_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1) + S_2^2\end{aligned}$$

که در آن

$$\left.\begin{aligned}P_i &= \sin a \sec\phi_i - \sin\delta\tan\phi_i\\ S_i &= \cos a \sin A_i\end{aligned}\right\}\ (i = 1, 2)$$

A_1 و A_2 به ترتیب سمت در F و G هستند.

[لندن، ۱۹۳۰]

۱۰. در ساعت $15^h17^m48^s$ زمان جهانی در تاریخ معینی ارتفاع رصد شدهٔ خورشید (پس از تصحیح) ′۸۹°۳۴ بود. با فرض اینکه عرض کشتی معلوم و برابر ′۲۳°۳ و نیز میل خورشید ′۲۳°۱۳ و معادلهٔ زمان $+0^m12^s$ باشد، ثابت کنید که طول جغرافیایی کشتی یا ′۴۹°۴ غربی یا ′۴۹°۵۶ غربی است.

۱۱. هنگامی که عرض و طول جغرافیایی از رصدهای همزمان ارتفاعهای a_1، a_2 دو ستارهٔ معلوم پیدا می‌شوند، ثابت کنید که دو مکان ممکن رصد در صورتی دارای یک طول جغرافیایی خواهند بود که

$$\sin a_1/\sin a_2 = \sin\delta_1/\sin\delta_2$$

که در آن δ_1، δ_2 میلهای دو ستاره‌اند.

[آزمون کالج]

۱۲. با فرض اینکه رصد ارتفاع خورشید بدرستی انجام شود ولی زمان جهانی به کار برده شده در محاسبات بُعدی خطای Δt ثانیه داشته باشد، نشان دهید که خط مکانی حاصل به اندازهٔ $\frac{1}{4}\Delta t \sin A \cos \phi$ مایل دریایی تغییر مکان می‌دهد که در آن A سمت خورشید و ϕ عرض جغرافیایی است.

[لندن، ۱۹۳۰]

۱۳. ارتفاعهای a_1 و a_2 خورشید، در فاصلهٔ زمانی 2^h رصد شده است، و خطوط مکانی به طور عمود همدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید

$$\sin a_1 \sin a_2 = 1 - 2 \sin^2 h \cos^2 \delta$$

[آزمون کالج]

۱۴. ملوانی در تعیین زاویهٔ ساعتی یک ستاره خطایی به اندازه Δa در ارتفاع و $\Delta\phi$ در عرض جغرافیایی فرضی انجام می‌دهد. نشان دهید که خطا در زاویهٔ ساعتی چنین خواهد بود

$$\Delta H = \Delta\phi \cot A \sec \phi - \Delta a \sec \phi \operatorname{cosec} A$$

که در آن ϕ عرض جغرافیایی و A سمت است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی، ۱۹۲۳]

۱۵. ستارهٔ X در ساعت ۶ بعد از ظهر به شرح زیر رصد می‌شود (پس از اعمال همهٔ تصحیحات): ارتفاع: $33^\circ 20'$ و جهت واقعی 220°.

همینطور در ساعت ۷ بعد از ظهر ستارهٔ Y به شرح زیر رصد می‌شود: ارتفاع $63^\circ 50'$ و جهت واقعی 290°.

ارتفاعهای محاسبه‌ای، هردو برای مکانی با عرض حغرافیایی 60° شمالی، طول جغرافیایی 30° غربی محاسبه شده‌اند؛ و به‌ترتیب برابرند با $33^\circ 15'$ و $63^\circ 56'$. اگر کشتی با سرعت ۱۰ گره دریایی در جهت 070° حرکت کند، با ترسیم روی کاغذ میلیمتری، مکان کشتی را در ۶ و ۷ بعدازظهر پیدا کنید.

[لندن،۱۹۲۸]

۱۶. فاصله از مبدأ p در جهت θ شمال شرقی از مکانی با طول جغرافیایی شرقی L و عرض جغرافیایی شمالی ϕ رسم می‌شود. اگر مختصات واقعی کشتی $L + \Delta L$، $\phi + \Delta\phi$ باشند، ثابت کنید

$$\Delta L \cos \phi \sin \theta + \Delta\phi \cos \theta - p = 0$$

که در آن ΔL، $\Delta\phi$، و p برحسب دقیقهٔ قوسی بیان می‌شوند.

۱۷. ملوان کشتیی مشاهده می‌کند که ارتفاع ستارهٔ معلومی به هنگام عبور از نصف‌النهار جنوبی α° است و زمان این عبور t ساعت پس از ظهر میانگین گرینویچ است. میل ستاره δ° و بُعد آن α ساعت است. از روی تقویم نجومی، بُعد میانگین خورشید در ظهر میانگین گرینویچ در روز رصد را σ ساعت می‌یابد. نشان دهید که کشتی در عرض جغرافیایی $\alpha - \delta + ۹۰^\circ$ و طول جغرافیایی غربی $۱۵(\sigma - \alpha + t۳۶۶\frac{۱}{۴}/۳۶۵\frac{۱}{۴})$، که هر دو در مقیاس درجه اندازه‌گیری می‌شوند، قرار دارد.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی، ۱۹۲۱]

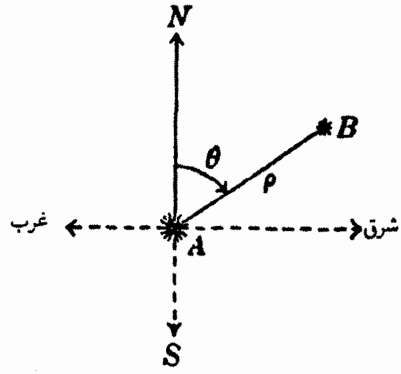
۱۴

مدارهای ستاره‌های دوتایی

۱۸۷. ستاره‌های دوتایی دیداری

ستارهٔ دوگانه معمولاً به یک جفت ستاره که در تلسکوپ خیلی نزدیک به هم دیده می‌شوند گفته می‌شود. این نزدیکی ظاهری به یکی از دو علت زیر است: (۱) دو ستاره ممکن است در فواصل خیلی متفاوتی از زمین قرار داشته باشند، اما از دیدگاه زمین در یک جهت دیده شوند؛ (۲) آنها ممکن است در فضا واقعاً نزدیک هم باشند و منظومه‌ای تشکیل دهند که جاذبهٔ گرانشی متقابل آنها در آن منظومه با حرکت مداری‌شان نشان داده شود. در سال ۱۱۸۲/۱۸۰۳ ویلیام هرشل نخست به کمک رصدهای انجام داده شده در طول یک ربع قرن نشان داد که بعضی از ستاره‌های دوگانه حرکت مداری نسبی از خود نشان می‌دهند. از آن زمان تاکنون تعداد زیادی ستاره با این مشخصه کشف شده‌اند که به آنها نام ستاره‌های دوتایی داده می‌شود. ستاره‌های دوگانه از نوع (۱) در بالا، به ستاره‌های دوگانهٔ اپتیکی موسوم‌اند و بیش از این دربارهٔ آنها بحث نخواهیم کرد.

معمولاً، دو عضو یک ستارهٔ دوتایی دارای روشنایی نابرابرند. ستارهٔ روشنتر ستارهٔ اصلی، و ستاره کم نورتر همدم‌نامیده می‌شود. شکل ۱۲۵ بخشی از کرهٔ سماوی را نشان می‌دهد که در آن A ستارهٔ اصلی و B همدم آن است. فرض کنید طبق تعریف AN جهت قطب شمال سماوی باشد‌ـدر آن صورت AN بخشی از نصف‌النهار گذرنده از A است. زاویهٔ NAB، که با θ نشان داده می‌شود، زاویهٔ مکانی B نسبت به A است. زاویهٔ مکانی از شمال به طرف شرق از $0°$ تا $360°$ در جهت پیکان اندازه گرفته می‌شود. فاصلهٔ زاویه‌ای بین A و B را صرفاً فاصلهٔ AB و



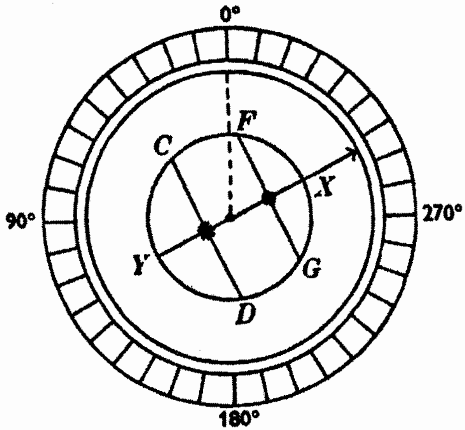
شکل۱۲۵

گاهی، جدایی می‌نامند و معمولاً با ρ نشان می‌دهند. بدین ترتیب ρ و θ مکان B را نسبت به A معلوم می‌کنند. اگر A و B یک منظومهٔ دوتایی تشکیل دهند، آنگاه، به سبب جاذبهٔ گرانشی متقابل دو ستاره ــ که فرض می‌کنیم با قانون گرانشی در منظومهٔ سیاره‌ای یکی باشد ــ همدم نسبت به ستارهٔ اصلی یک مدار بیضوی خواهد پیمود. این مدار، مدار واقعی و صفحهٔ آن صفحهٔ مداری واقعی است. معمولاً این صفحه با صفحهٔ عمود بر خط دید فرق می‌کند و در نتیجه مدار رصد شده، که مدار ظاهری نامیده می‌شود، تصویر مدار واقعی بر روی صفحهٔ عمود بر خط دید خواهد بود. صفحهٔ اخیر صفحهٔ مدار ظاهری است. رصد، عناصر مدار ظاهری را در اختیار ما می‌گذارد و هدف ما این است که نشان دهیم چگونه عناصر مدار واقعی را می‌توانیم استخراج کنیم. اهمیت این موضوع در نجوم در این است که می‌توانیم اطلاعات با ارزشی در مورد جرم ستاره‌ها به دست آوریم.

۱۸۸. ریزسنج

دستگاهی که در عمل برای اندازه‌گیری فاصله و زاویهٔ مکانی به کار می‌رود ریزسنج است. این دستگاه به انتهایی از تلسکوپ که چشمی قرار دارد نصب می‌شود. در میدان دید چشمی ریزسنج، معمولاً سه‌تار وجود دارند که یکی از آنها، XY (شکل ۱۲۶) [۱]، در مرکز ثابت است و دو تار، CD و FG، بر XY عمودند. صفحه‌ای که این تارها در آن نصب شده‌اند می‌تواند حول محور تلسکوپ دوران داده شود. تصاویر دو ستارهٔ A و B با تنظیم ریزسنج روی XY قرار داده می‌شوند. زاویهٔ مکانی θ را می‌توان توسط دایره‌ای مدرج به‌دست آورد، مشروط بر اینکه بتوانیم نخست قرائت مربوط به جهت ON (زاویهٔ مکانی صفر) را به دست آوریم. این کار در عمل به گونهٔ زیر انجام می‌شود. تلسکوپ متوجهٔ ستارهٔ دلخواهی می‌شود و تصویر ستاره روی XY قرار داده می‌شود. اگر

۱. شکل ۱۲۶ برخلاف شکل ۱۲۵ آنچه راصد می‌بیند را نشان می‌دهد.



شکل۱۲۶

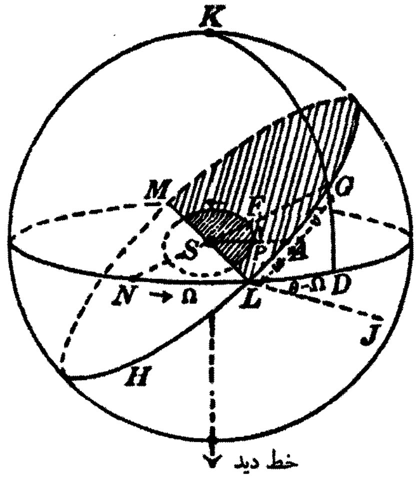
تلسکوپ متوقف شود، ستاره در نتیجهٔ حرکت شبانه‌روزی در امتدادی موازی میل حرکت خواهد کرد؛ اگر XY بر نصف‌النهار ON عمود باشد، در این صورت ستاره به‌ظاهر در امتداد XY حرکت خواهد کرد. بنابراین روش کار این است که صفحهٔ حامل تارها دوران داده شود تا این شرط برقرار شود. در این وضعیت، مقداری که روی مقیاس مدرج خوانده می‌شود بازاویهٔ مکانی ۹۰° یا ۲۷۰° مطابقت می‌کند؛ از این‌رو قرائت مربوط به زاویهٔ مکانی صفر درجه حاصل می‌شود. در روش دیگر با دوران دایرهٔ مدرج حول محور نوری تلسکوپ، می‌توان مقیاس را دقیقاً بر زاویهٔ مکانی منطبق کرد؛ در این حالت، نیازی به اعمال تصحیح برخوانده‌ها نیست.

فاصلهٔ ρ بین A و B به کمک دو تار CD و FG که هر یک می‌تواند با پیچهای ریزی که ریزسنج به آنها متصل است عمود بر XY حرکت کند به دست آید. هنگامی که دستگاه مانند شکل۱۲۶ تنظیم شد، اندازه‌گیری فاصله با قرار دادن CD روی A و FG روی B انجام می‌شود. آنچه بر ریزسنج خوانده می‌شود مقدار ρ را برحسب تعداد گردشهای سه ریزسنج به دست می‌دهد. به کمک رصدهایی که روی دو ستاره با فاصلهٔ زاویه‌ای دقیقاً معلوم انجام می‌شود، مقدار متناظر با یک دور گردش ریزسنج را می‌توان برحسب ثانیه‌های قوسی به دست آورد.

با رصد کامل یک ستارهٔ دوتایی، مقدار جدایی ρ برحسب ثانیهٔ قوسی و مقدار زاویهٔ مکانی θ به‌دست می‌آیند.

۱۸۹. عناصر مدار واقعی ستارهٔ دوتایی دیداری

کره‌ای رسم می‌کنیم که ستارهٔ اصلی S در مرکز آن باشد (شکل ۱۲۷). خط راست واصل بین زمین و S این کره را در K قطع می‌کند. صفحهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای که نقطهٔ K قطب آن است، صفحهٔ مدار ظاهری را نمایش می‌دهد. KS خط دید است. فرض می‌کنیم که دایرهٔ عظیمهٔ HLG



شکل۱۲۷

معرف صفحهٔ مدار واقعی ستارهٔ همدم در S، و زاویهٔ GLD زاویهٔ میل i باشد. خط راست MSL که محل تقاطع دو صفحهٔ یاد شده است، خط گره‌هاست. فرض کنید شعاع SN معرف جهت زاویهٔ مکانی صفر درجه باشد. در شکل ۱۲۷، مدار واقعی ستارهٔ همدم نسبت به ستارهٔ اصلی S، هاشورزده شده‌است. هنگامی که ستارهٔ همدم در مدار واقعی‌اش در نقطهٔ F است، مکانش در مدار ظاهری با رسم عمودی از F به صفحهٔ دایرهٔ عظیمه NLD به دست خواهد آمد. این عمود در صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ KGD، که در آن G محل تقاطع امتداد SF با سطح کره است، قرار دارد. بدین ترتیب مکان رصد شدهٔ ستارهٔ همدم روی شعاع SD واقع است و بنابراین زاویهٔ مکانی آن، کمان ND است. (زاویه‌های مکانی باید در جهت NLD اندازه‌گیری شوند.)

اگر r بردار شعاع SF باشد، فاصلهٔ ρ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\rho = r\cos GD \qquad (1)$$

زاویهٔ مکانی گرهی که کمتر از $180°$ از نقطهٔ N واقع است با Ω نشان داده می‌شود؛ در شکل ۱۲۷ داریم $NL = \Omega$ و در نتیجه $LD = \theta - \Omega$.

فرض کنید P نقطه‌ای روی مدار واقعی باشد که همدم در آن نزدیکترین فاصله را از ستارهٔ اصلی دارد؛ این نقطه را حضیض می‌نامند و انتهای دیگر محور بزرگ اوج خوانده می‌شود. نیم‌محور بزرگ مدار واقعی (برحسب ثانیهٔ قوسی) با a و خروج از مرکز آن با e نشان داده می‌شود. فرض کنید هنگامی که ستارهٔ همدم در F است بی‌هنجاری واقعی برابر v باشد. در این صورت با فرض اینکه همدم در جهت پیکان نزدیک P حرکت کند، زاویهٔ FSP برابر v است و در نتیجه $AG = v$. اگر کمان LA را با ω نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت $LG = v + \omega$. از این‌رو، ا

مثلث LGD که در D راستگوشه است، داریم

$$\cos LG = \cos LD \cos GD$$

یا

$$\cos GD = \cos(v+\omega)\sec(\theta-\Omega)$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۱)، داریم

$$\rho = r\cos(v+\omega)\sec(\theta-\Omega) \tag{۲}$$

همچنین، از مثلث LGD به دست می‌آوریم

$$\tan(\theta-\Omega) = \tan(v+\omega)\cos i \tag{۳}$$

دورهٔ گردش مداری را با T (برحسب سال) نشان می‌دهیم. حرکت زاویه‌ای میانگین، n، ستارهٔ همدم به دور S در مدار واقعی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$n = ۲\pi/T \tag{۴}$$

فرض کنید زمان گذر از حضیض با τ نشان داده شود. در آن صورت بی‌هنجاری میانگین M در زمان t با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$M = n(t-\tau) = E - e\sin E \tag{۵}$$

که در آن E بی‌هنجاری مرکزی است. بی‌هنجاری واقعی v توسط رابطهٔ زیر به E مربوط می‌شود

$$\tan\frac{v}{۲} = \left(\frac{۱+e}{۱-e}\right)^{\frac{۱}{۲}}\tan E/۲ \tag{۶}$$

همچنین داریم

$$n^۲a^۳ = \frac{۴\pi^۲a^۳}{T^۲} = G(m_۱+m_۲) \tag{۷}$$

که در آن $m_۱$ و $m_۲$ جرمهای دو ستاره و G ثابت گرانشی است. از آنجا که مجموع جرمها برحسب a و T تعریف می‌شود، T را یک عنصر مدار در نظر می‌گیریم.

عناصر مدار واقعی عبارت‌اند از a،e،i،Ω،ω،τ، و T. اگر همهٔ عناصر معلوم باشند، مقدار E در لحظهٔ t می‌تواند از روابط (۴) و (۵) به دست آید، و بنابراین بی‌هنجاری واقعی v از رابطهٔ (۶)

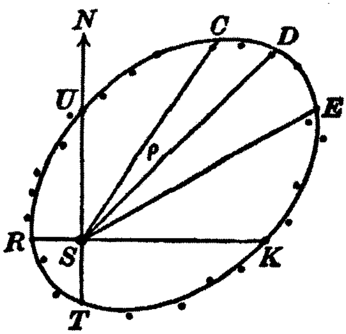
پیدا می‌شود. بنابراین سرانجام از روابط (۳) و (۲) مقادیر θ و ρ را می‌توان به دست آورد. از این راه، می‌توان کمیتهای رصد شدهٔ ρ و θ در هر زمان را با مقادیر حساب شدهٔ مبتنی بر عناصر مدار واقعی مقایسه کرد. مسئله‌ای که اساساً بیشتر با آن روبه‌رو هستیم یافتن عناصر مدار واقعی از رصد است که ترسیم مدار ظاهری را امکانپذیر می‌سازد.

لازم به تذکر است که گرچه مقدار زاویهٔ میل ممکن است معلوم باشد ولی صفحهٔ مداری به‌طور یکتا معین نیست. از رصد با ریزسنج معلوم نمی‌شود که آیا صفحهٔ مداری واقعی توسط دایرهٔ عظیمهٔ HLG مشخص می‌شود، یا به وسیلهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای که فقط کمان LJ از آن در شکل ۱۲۷ نشان داده شده است، زیرا زاویهٔ DLJ نیز برابر i است. حال در مورد صفحهٔ مداری HLG، که در آن حرکت زاویه‌ای ستارهٔ همدم در جهت L به A است، واضح است که وقتی همدم از L می‌گذرد، جهت مؤلفهٔ حرکت مداری آن در خط دید (یعنی، عمود بر صفحهٔ مدار ظاهری) به طرف زمین است. در این لحظه، زاویهٔ میل با $-i$ نشان داده می‌شود. اگر حرکت زاویه‌ای همدم در جهت LJ باشد، زاویهٔ میل $+i$ خواهد بود، با این حال این تمایز ساختگی است.

وقتی زاویه‌های مکانی با زمان افزایش می‌یابند، مانند زاویه‌های مکانی در دو مدار بالا که صفحات آنها با LG و LJ تعریف می‌شوند، حرکت مستقیم است. هنگامی که زاویه‌های مکانی کاهش می‌یابند، مانند وقتی که حرکت زاویه‌ای در جهت GL یا JL بود، حرکت رجوعی است.

۱۹۰. مدار ظاهری ستارهٔ دوتایی دیداری

از آنجا که مدار همدم را نسبت به ستارهٔ اصلی مورد بررسی قرار می‌دهیم، ستارهٔ اخیر در یک کانون مدار بیضوی واقعی قرار خواهد داشت. حال مدار ظاهری، تصویر مدار واقعی روی صفحهٔ عمود بر خط دید است و آن نیز یک بیضی است. اما این الزاماً به آن معنی نیست که کانون بیضی واقعی (یعنی S) بر کانونی از بیضی ظاهری تصویر شود. فرض کنید در شکل ۱۲۸ بیضی، مدار



شکل۱۲۸

ظاهری و S ستارهٔ اصلی را نشان دهد. از آنچه در بالا بیان شد، S عموماً در کانون این بیضی قرار ندارد. اگر SN نشانگر جهت زاویهٔ مکانی صفر درجه و SR نشانگر جهت $\theta = ۹۰°$ باشد، معادلهٔ کلی بیضی نسبت به SN و SR، به عنوان محورهای x و y چنین است

$$Ax^۲ + ۲Hxy + By^۲ + ۲Gx + ۲Fy + ۱ = ۰ \qquad (۸)$$

که در آن پنج ثابت مستقل A،B، ...،F وجود دارند که بیضی ویژهٔ مورد نظر را مشخص می‌کنند. اگر همدم در C باشد، با انجام یک رصد، ρ و θ به دست می‌آیند، که از آنها مختصات قائم x و y نقطهٔ C به صورت زیر به دست می‌آیند

$$y = \rho \sin\theta \quad ، \quad x = \rho\cos\theta$$

در اصل انجام پنج رصد مانند رصد یاد شده، که در نقاط مختلف مدار پخش شده باشند، برای تعیین پنج ثابت A،B، ...،F در رابطهٔ (۸) کافی است، اما، این بیضی به سبب خطاهای اجتناب‌ناپذیر در اندازه‌گیری ρ و θ نمی‌تواند بدقت تعیین شود. تعداد زیادی رصد که در طول سالهای بسیار انجام می‌گیرند، یک رشته نقاطی چون C،D،E، ... را به دست می‌دهند که به کمک آنها می‌توان یک بیضی مقدماتی رسم کرد. با ملاحظاتی که در زیر خواهند آمد، دقت ترسیم این بیضی، به‌کمک یک آزمون، شاخص خواهد شد. مساحتهای جاروب شده به وسیلهٔ بردار شعاعی متحرک در مدار واقعی، طبق قانون دوم کپلر، با بازه‌های زمانی مربوط متناسب‌اند، و نسبت هر دو مساحتی از مساحتهای مذکور با تصویر کردن تغییر نمی‌کند. بدین ترتیب اگر $t_۱$،$t_۲$، و $t_۳$ لحظاتی باشند که همدم به‌ترتیب در C،D، و E قرار می‌گیرد، نسبت مساحت CSD به مساحت DSE برابر نسبت $(t_۲ - t_۱)$ به $(t_۳ - t_۲)$ است. البته، نسبت دوم به دقت معلوم است. این آزمون را می‌توان به سرعت با یک مساحت‌سنج انجام داد و بیضی مقدماتی را تا برقراری شرایط یادشده تغییر داد. اینک فرض می‌کنیم که بیضی ظاهری به طور مطلوب رسم شده باشد.

ثابتهای A،B، ...،F معادلهٔ کلی (۸) را، می‌توان براحتی به روش زیر به دست آورد. فرض کنید بیضی ظاهری (که به مقیاسی مناسب رسم شده است) محورهای مختصات را در K،R،U، و T قطع کند. اگر مختصات U و T به ترتیب $(x_۱, ۰)$ و $(-x_۲, ۰)$ باشند، چون این مختصات معادلهٔ (۸) را ارضا می‌کنند، داریم

$$Ax_۱^۲ + ۲Gx_۱ + ۱ = ۰$$
$$Ax_۲^۲ - ۲Gx_۲ + ۱ = ۰$$

که از آنها A و G تعیین می‌شوند. با روشی مشابه برای نقاط K و R، می‌توانیم B و F را به‌دست می‌آوریم. اگر (ξ,η) مختصات اندازه‌گیری شدهٔ نقطهٔ D واقع بر بیضی ظاهری باشد، H از رابطهٔ زیر پیدا می‌شود

$$-۲H\xi\eta = A\xi^۲ + B\eta^۲ + ۲G\xi + ۲F\eta + ۱$$

از میان روشهای متعددی که برای به دست آوردن عناصر بیضی واقعی وجود دارند، دو روش معروف کوالسکی و زوایرز را به تفصیل شرح می‌دهیم. در هر یک از این روشها، مدار ظاهری اساس طرز عمل بعدی را تشکیل می‌دهد.

۱۹۱. روش کوالسکی برای تعیین عناصر مدار ستارهٔ دوتایی دیداری

نخست ثابتهای A،B، ...،F معادلهٔ (۸) را برای مدار ظاهری مطابق روش فوق به دست می‌آوریم، و یا اینکه در شکل ۱۲۹، محور x در جهت SN (جهت زاویهٔ مکانی صفر درجه) و محور y در جهت SR (زاویهٔ مکانی °۹۰) است. K قطب دایرهٔ عظیمهٔ NLR است. SK را محور z می‌گیریم.

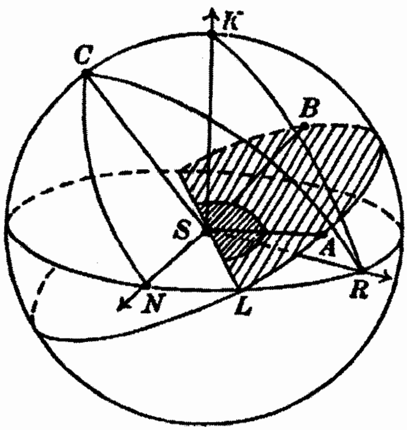
فرض کنید SA جهت حضیض و C قطب صفحهٔ مدار واقعی باشد. بنابراین از آنجا که S کانون مدار واقعی همدم نسبت به ستارهٔ اصلی است، معادلهٔ بیضی مدار نسبت به محورهای قائم SA و SB در صفحهٔ مدار واقعی عبارت خواهد بود از

$$\frac{(\xi + ae)^۲}{a^۲} + \frac{\eta^۲}{b^۲} = ۱ \qquad (۹)$$

که در آن $b^۲ = a^۲(۱ - e^۲)$. مدار ظاهری که با معادلهٔ (۸) داده می‌شود تصویر بیضی بالا، (۹)، بر روی صفحهٔ NLR است.

فرض کنید $(l_۱, m_۱, n_۱)$ کسینوسهای هادی SA نسبت به محورهای SN، SR، و SK باشند. پس اگر A با کمانهای دایرهٔ عظیمه‌ای به N، R، و K وصل شود، خواهیم داشت

$$l_۱ = \cos AN,\ m_۱ = \cos AR,\ n_۱ = \cos AK$$



شکل۱۲۹

همینطور فرض کنید $(l_۲, m_۲, n_۲)$ و $(l_۳, m_۳, n_۳)$ کسینوسهای هادی SB و SC نسبت به SN، SR، و SK باشند. در این صورت

$$l_۲ = \cos BN, \quad m_۲ = \cos BR, \quad n_۲ = \cos BK$$

و

$$l_۳ = \cos CN, \quad m_۳ = \cos CR, \quad n_۳ = \cos CK$$

از مثلثهای کروی ANL، ARL، و AKL داریم

$$\left.\begin{aligned} l_۱ &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ m_۱ &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ n_۱ &= \sin\omega\sin i \end{aligned}\right\} \qquad (۱۰)$$

از مثلثهای BLN، BLR، و BLK– یا صرفاً با نوشتن $(\omega + ۹۰°)$ به جای ω در رابطهٔ (۱۰)– کسینوسهای هادی SB را به دست می‌آوریم

$$\left.\begin{aligned} l_۲ &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ m_۲ &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ n_۲ &= \cos\omega\sin i \end{aligned}\right\} \qquad (۱۱)$$

از مثلثهای CLN، CLR، و CLK به‌دست می‌آوریم

$$\left.\begin{aligned} l_۳ &= \sin\Omega\sin i \\ m_۳ &= -\cos\Omega\sin i \\ n_۳ &= \cos i \end{aligned}\right\} \qquad (۱۲)$$

از میان روابط شناخته شدهٔ بین کسینوسهای هادی مختلف روابط زیر را به کار خواهیم برد

$$l_۱m_۲ - l_۲m_۱ = n_۳ \qquad (۱۳)$$

$$l_۱^۲ + l_۲^۲ + l_۳^۲ = ۱ \qquad (۱۴)$$

$$m_۱^۲ + m_۲^۲ + m_۳^۲ = ۱ \qquad (۱۵)$$

$$l_۱m_۱ + l_۲m_۲ + l_۳m_۳ = ۰ \qquad (۱۶)$$

فرض می‌کنیم که (ξ, η) مختصات نقطه‌ای دلخواه روی بیضی واقعی نسبت به محورهای SA

و SB، و (x,y) مختصات تصویر این نقطه بر صفحهٔ NLR نسبت به محورهای SN و SR باشند. بنابراین از نحوهٔ تصویر داریم

$$x = l_1\xi + l_2\eta$$
$$y = m_1\xi + m_2\eta$$

که از آنها به‌دست می‌آید

$$(l_1m_2 - l_2m_1)\xi = m_2x - l_2y$$

یا با به کار بردن رابطهٔ (۱۳) داریم

$$\xi = \frac{m_2x - l_2y}{n_3} \qquad (۱۷)$$

همینطور

$$\eta = -\frac{m_1x - l_1y}{n_3} \qquad (۱۸)$$

حال این مقادیر ξ و η در رابطهٔ (۹) صدق می‌کنند؛ از این رو

$$\frac{(m_2x - l_2y + aen_3)^2}{a^2n_3^2} + \frac{(m_1x - l_1y)^2}{b^2n_3^2} = 1 \qquad (۱۹)$$

اما چون x و y از رابطهٔ (۸) پیروی می‌کنند؛ بنابراین روابط (۱۹) و (۸) باید یک بیضی را در صفحهٔ مدار ظاهری نمایش دهند. نتیجه می‌شود که هر یک از ضرایب x^2،xy،y^2، و ...... در رابطهٔ (۸) باید جداگانه متناسب با ضرایب x^2،xy،y^2 ...... در رابطهٔ (۱۹) باشند. اگر f نسبت مشترک را نشان دهد، داریم

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{f}{n_3^2}\left(\frac{m_2^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2}\right)\\
B &= \frac{f}{n_3^2}\left(\frac{l_2^2}{a^2} + \frac{l_1^2}{b^2}\right)\\
H &= -\frac{f}{n_3^2}\left(\frac{l_2m_2}{a^2} + \frac{l_1m_1}{b^2}\right)\\
G &= \frac{fem_2}{an_3}\\
F &= -\frac{fel_2}{an_3}\\
1 &= -f(1 - e^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (۲۰)$$

از این معادلات پس از ساده کردن داریم

$$F^۲ - G^۲ + A - B = \frac{(l_۱^۲ - m_۱^۲ + l_۲^۲ - m_۲^۲)}{n_۲^۲ a^۲ (۱ - e^۲)^۲}$$

با کمک روابط (۱۴) و (۱۵) خواهیم داشت

$$F^۲ - G^۲ + A - B = \frac{m_۲^۲ - l_۲^۲}{n_۲^۲ a^۲ (۱ - e^۲)^۲}$$

با جاگذاری مقادیر $l_۲$، $m_۲$، و $n_۲$ که در رابطهٔ (۱۲) داده شده‌اند، نتیجه می‌گیریم که

$$F^۲ - G^۲ + A - B = \frac{\cos ۲\Omega \tan^۲ i}{p^۲} \qquad (۲۱)$$

که در آن

$$p = a(۱ - e^۲) \qquad (۲۲)$$

دوباره، داریم

$$FG - H = -\frac{(l_۱ m_۱ + l_۲ m_۲)}{n_۲^۲ a^۲ (۱ - e^۲)^۲}$$

با کمک روابط (۱۶) و (۲۲) خواهیم داشت

$$FG - H = \frac{l_۲ m_۲}{n_۲^۲ p^۲}$$

از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۱۲) داریم

$$FG - H = -\frac{\sin ۲\Omega \tan^۲ i}{۲p^۲} \qquad (۲۳)$$

از روابط (۲۱) و (۲۳) نتیجه می‌شود

$$(F^۲ - G^۲ + A - B)\sin ۲\Omega + ۲(FG - H)\cos ۲\Omega = ۰ \qquad (۲۴)$$

که از آنجا Ω را می‌توان تعیین کرد. باید به یاد آورد که مقدار Ω، طبق قرارداد، بین صفر درجه و ۱۸۰° است.

با به کار بردن مقدار Ω که در بالا پیدا شد، مقدار $\tan^۲ i/p^۲$ با استفاده از (۲۱) یا (۲۳) پیدا می‌شود. دوباره داریم

$$F^۲ + G^۲ - (A+B) = \frac{(l_۱^۲ + m_۱^۲ + l_۲^۲ + m_۲^۲)}{n_۲^۲ a^۲ (۱ - e^۲)^۲}$$

با به کار بردن روابط (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آوریم

$$F^۲ + G^۲ - (A+B) = \frac{(۲ - n_۱^۲ - n_۲^۲)}{p^۲ \cos^۲ i}$$

اما، از روابط (۱۰) و (۱۱) داریم

$$\begin{aligned} ۲ - n_۱^۲ - n_۲^۲ &= ۲ - \sin^۲ i \\ &= ۲\cos^۲ i + \sin^۲ i \end{aligned}$$

از این رو

$$F^۲ + G^۲ - (A+B) = \frac{۲}{p^۲} + \frac{\tan^۲ i}{p^۲} \qquad (۲۵)$$

اما مقدار $\tan^۲ i/p^۲$ قبلاً تعیین شده است؛ از این‌رو مقدار $p^۲$ را می‌توان از رابطهٔ (۲۵) تعیین کرد. پس از یافتن p می‌توان مقدار $\tan^۲ i$ و از آن زاویهٔ میل i را محاسبه کرد (همان طور که در پایان بخش ۱۸۹ متذکر شدیم علامت جبری i نامعین است).

با استفاده از رابطهٔ (۲۲) در رابطهٔ (۲۰) به جای f، $-a/p$ را قرار می‌دهیم

$$G = -\frac{e}{p}\frac{m_۲}{\cos i}$$

$$F = \frac{e}{p}\frac{l_۲}{\cos i}$$

با جاگذاری مقادیر $m_۲$ و $l_۲$ از رابطهٔ (۱۱)، داریم

$$\sin\Omega\sin\omega - \cos\Omega\cos\omega\cos i = \frac{Gp\cos i}{e} \qquad (۲۶)$$

$$\cos\Omega\sin\omega + \sin\Omega\cos\omega\cos i = -\frac{Fp\cos i}{e} \qquad (۲۷)$$

رابطهٔ (۲۶) را در $\sin\Omega$ و (۲۷) را در $\cos\Omega$ ضرب و با هم جمع می‌کنیم. آنگاه

$$\sin\omega = \frac{p}{e}\cos i(G\sin\Omega - F\cos\Omega) \qquad (۲۸)$$

رابطهٔ (۲۶) را در $\cos\Omega$ و (۲۷) را در $\sin\Omega$ ضرب و از هم کم می‌کنیم. در آن صورت

$$\cos\omega\cos i = -\frac{p}{e}\cos i(G\cos\Omega + F\sin\Omega) \qquad (۲۹)$$

بنابراین، از روابط (۲۸) و (۲۹) داریم

$$\tan\omega = \frac{(F\cos\Omega - G\sin\Omega)\cos i}{F\sin\Omega + G\cos\Omega} \qquad (۳۰)$$

این فرمول با معلوم بودن i و Ω محاسبهٔ ω را ممکن می‌سازد. بنابراین خروج از مرکز e از رابطهٔ (۲۸) یا (۲۹) پیدا می‌شود، زیرا اکنون همهٔ کمیتهای ω، p، i، و Ω ارزیابی شده‌اند. حال می‌توانیم نیم‌محور بزرگ a را از رابطهٔ (۲۲) به دست آوریم. بدین ترتیب نشان داده‌ایم که چگونه عناصر a، e، i، Ω ، و ω را می‌توانیم ازبیضی ظاهری به دست آوریم.

اکنون مسئلهٔ یافتن دورهٔ گردش T و τ (زمان گذر از حضیض) باقی می‌ماند. مقادیر ρ و θ را، برای هر نقطهٔ متناظر با زمان t روی بیضی ظاهری، در دست داریم. حال با استفاده از رابطهٔ (۳) به دست می‌آوریم

$$\tan(v+\omega) = \tan(\theta-\Omega)\sec i$$

که از آن بی‌هنجاری واقعی v را می‌توان پیدا کرد. بنابراین بی‌هنجاری مرکزی E از رابطهٔ (۶) محاسبه می‌شود پس بی‌هنجاری میانگین M از رابطهٔ

$$M = E - e\sin E$$

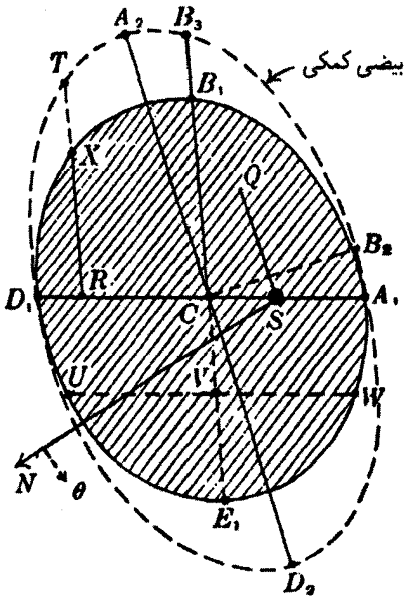
پیدا می‌شود. اما $M = n(t-\tau)$، یا

$$M = \frac{۳۶۰^\circ}{T}(t-\tau) \qquad (۳۱)$$

از این‌رو، برای هر زمان دلخواه t معادله‌ای مانند (۳۱) داریم که شامل دو مجهول T و τ است. اصولاً دو معادله از نوع (۳۱) برای تعیین T و τ کافی است. لیکن در عمل، مقادیر آنها معمولاً از حل چندین معادله از نوع (۳۱) به روش کمترین مربعات تعیین می‌شوند.

۱۹۲. روش زُوایر برای تعیین عناصر مدار ستارهٔ دوتایی دیداری

در اینجا نیز فرض می‌کنیم که بیضی ظاهری که در شکل ۱۳۰ هاشور زده شده است ترسیم شده باشد. عناصر مدار را می‌توان با دو روش (الف) روش ترسیمی یا (ب) روشی تحلیلی مبتنی بر روش ترسیمی تعیین کرد.



شکل ۱۳۰

الف) روش ترسیمی. فرض می‌کنیم C مرکز بیضی ظاهری، و S ستارهٔ اصلی باشد. خط راست واصل بین C و S بیضی ظاهری را در A_1 قطع می‌کند. این نقطه، تصویر نقطهٔ حضیض در مدار واقعی است، زیرا C تصویر مرکز مدار واقعی است. از آنجا که نسبتها با تشکیل تصویر تغییر نمی‌کنند، داریم

$$CS : CA_1 = ae : a$$

یا

$$\frac{CS}{CA_1} = e$$

که در آن e خروج از مرکز بیضی واقعی است. بدین ترتیب با تعیین C، مرکز بیضی ظاهری، خروج از مرکز بی‌درنگ به دست می‌آید. این روش می‌تواند به عنوان آزمونی بر درستی مقدار e که از فرمولهای روش کوالسکی به دست می‌آید به کار برده شود.

فرض کنید B_1CE_1 قطر بیضی ظاهری، مزدوج قطر A_1CD_1، باشد. این قطر را می‌توان به آسانی با کشیدن وتر دلخواه UW موازی A_1D_1 و نصف کردن آن در V و وصل کردن C به V به دست آورد. فرض کنید X نقطه‌ای دلخواه روی بیضی ظاهری باشد. XR را موازی CB_1

رسم می‌کنیم تا CD_1 را در R قطع کند. RX را تا T امتداد می‌دهیم و در نتیجه خواهیم داشت

$$RT/RX = 1/(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \equiv k \tag{۳۲}$$

اگر این عمل به فرض برای هر نقطه روی بیضی ظاهری انجام شود، منحنی $D_1A_2B_2A_1D_2$ نتیجه خواهد شد. این منحنی، به طوری که نشان داده خواهد شد، یک بیضی است موسوم به بیضی کمکی، به ویژه، داریم

$$CB_2 = k \times CB_1 \tag{۳۳}$$

که در آن k توسط رابطه (۳۲) تعریف می‌شود.

در بیضی واقعی، محور کوچک مزدوج محور بزرگ است و این خاصیت در مورد خطوط تصویر شدهٔ متناظر نیز صادق است. از این‌رو، CB_1 تصویر نیم‌محور کوچک بیضی واقعی است. اکنون دایرهٔ واسطهٔ بیضی واقعی را در نظر می‌گیریم. اگر وتری از بیضی واقعی، موازی محور کوچک، از هر دو طرف امتداد داده شود تا دایرهٔ واسطه را قطع کند، نسبت وتر دایرهٔ واسطه به وتر بیضی واقعی برابر $1/(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$ یا k است. از طرز ساخت شکل ۱۳۰ نتیجه می‌شود که منحنی $D_1A_2B_2A_1D_2$ تصویر دایرهٔ واسطه بر صفحهٔ مدار ظاهری است و بنابراین یک بیضی است؛ و در A_1 و D_1 بر بیضی ظاهری مماس است.

فرض کنند CA_2 و CB_2 به‌ترتیب نیم محورهای بزرگ و کوچک بیضی کمکی باشند و مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ آنها به‌ترتیب با α و β نشان داده شود. در این صورت باید داشته باشیم

$$\frac{\beta}{\alpha} = |\cos i| \tag{۳۴}$$

حال، برحسب اینکه حرکت مستقیم یا رجوعی باشد، $\cos i$ مثبت یا منفی است. بنابراین زاویهٔ میل توسط رابطهٔ (۳۴) تعیین می‌شود.

همچنین، نیم‌محور بزرگ، α، برابر شعاع دایرهٔ واسطه است وتنها شعاعی است که با تشکیل تصویر کوتاه نمی‌شود. اما شعاع دایرهٔ واسطه، a، نیم‌محور بزرگ مدار واقعی است؛ از این‌رو

$$a = \alpha \tag{۳۵}$$

بدین ترتیب a از بیضی کمکی به دست می‌آید.

از آنجاکه قطر موازی خط گره‌ها با تشکیل تصویر تغییر نمی‌کند، از این‌رو محور بزرگ A_2CD_2 موازی خط گره‌هاست اگر SN جهت زاویهٔ مکانی $\theta = 0°$ باشد، در این صورت زاویه‌های مکانی از جهت SN در خلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شوند. SQ را به گونه‌ای که نشان داده شده است موازی CA_2 رسم می‌کنیم. پس زاویهٔ مکانی یک گره برابر $N\hat{S}Q$ است

که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود. اما این زاویه بزرگتر از ۱۸۰° است و بنابراین، طبق قرارداد، Ω برابر $N\hat{S}Q - ۱۸۰°$ است.

در شکل ۱۳۱ فرض می‌کنیم SA جهت حضیض را نشان دهد و KAG بخش از دایره عظیمه‌ای باشد که از A می‌گذارد و K قطبی از دایرهٔ عظیمهٔ NLG باشد که معرف صفحهٔ مدار ظاهری است. اگر کمان LG را با λ نشان دهیم، در این صورت چون $LA = \omega$، $A\hat{L}G = i$، و $A\hat{G}L = ۹۰°$ است، با استفاده از فرمول چهار بخشی (د)، داریم

$$\tan\lambda = \tan\omega\cos i \qquad (۳۶)$$

اما SL معرف خط گره‌ها و SG معرف تصویر حضیض است. بنابراین، از شکل ۱۳۰، زاویهٔ $D_۲CA_۱$ باید برابر λ باشد. با اندازه‌گیری این زاویه، عنصر ω از رابطهٔ (۳۶) به دست می‌آید.

بدین ترتیب، با استفاده از بیضی کمکی، عناصر a،e،i،Ω و ω را به دست آوردیم. عناصر باقیمانده، T و τ، به گونه‌ای که در روش کوالسکی نشان داده شد، به دست می‌آیند.

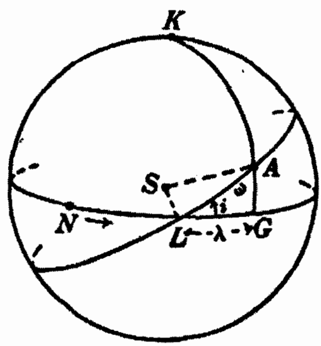
ب) روش تحلیلی. بیضی کمکی در عمل رسم نمی‌شود، بلکه خواص آن به کار برده می‌شوند. در شکل ۱۳۰ نیم‌قطرهای مختلف را به ترتیب زیر نمایش می‌دهیم

$$CA_۱ = a_۱\ ;\ CB_۱ = b_۱\ ;\ CB_۳ = b_۲\ ;\ CA_۲ = \alpha_۲\ ;\ CB_۲ = \beta$$

اگر زاویهٔ مکانی $A_۱$ را با $\theta_۱$ و زاویهٔ مکانی $E_۱$ را با $\theta_۲$ نمایش دهیم، در این صورت $E_۱\hat{C}A_۱$ برابر $(\theta_۱ - \theta_۲)$ خواهد بود.

حال $CB_۱$ و $CA_۱$ نیم‌قطرهای مزدوج بیضی ظاهری‌اند و از ترسیم بیضی کمکی معلوم می‌شود که $CA_۱$ و $CB_۳$ نیم‌قطرهای مزدوج بیضی کمکی‌اند. روابط شناخته شده‌ای که جفت نیم‌قطرهای مزدوج را به هم مربوط می‌سازند عبارت‌اند از

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = a_۱^۲ + b_۲^۲ \qquad (۳۷)$$



شکل ۱۳۱

$$\alpha\beta = a_1 b_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \qquad (۳۸)$$

اما با استفاده از (۳۳) داریم

$$b_2 = kb_1$$

و می‌توانیم بنویسیم

$$(\alpha+\beta)^2 = a_1^2 + 2ka_1 b_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + k^2 b_1^2 \equiv g^2 \qquad (۳۹)$$

و

$$(\alpha-\beta)^2 = a_1^2 - 2ka_1 b_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + k^2 b_1^2 \equiv h^2 \qquad (۴۰)$$

که از آنجا داریم

$$\alpha = \frac{1}{2}(g+h) \quad \text{و} \quad \beta = \frac{1}{2}(g-h) \qquad (۴۱)$$

فرض می‌شود که بیضی ظاهری رسم شده است؛ قطر مزدوج CA_1 نیز عملاً رسم می‌شود. در نتیجه می‌توانیم مقادیر e،a_1،b_1 و $(\theta_1 - \theta_2)$ را با اندازه‌گیری به دست آوریم؛ از آنجا که اکنون e معلوم است، می‌توان k را از رابطهٔ (۳۲) محاسبه کرد. بدین ترتیب کمیتهای g و h را می‌توان محاسبه کرد ومقادیر α و β را از رابطهٔ (۴۱) به دست آورد.

اکنون زاویهٔ D_2CA_1 را که قبلاً با λ نشان دادیم، در نظر می‌گیریم؛ این زاویه عبارت است از زاویهٔ بین نیم‌محور بزرگ بیضی کمکی، CD_2، و شعاع CA_1. چون مختصات A_1 نسبت به CD_2 و CB_2 به عنوان محور ($a_1\cos\lambda$ و $a_1\sin\lambda$) است، از این‌رو داریم

$$\frac{a_1^2\cos^2\lambda}{\alpha^2} + \frac{a_1^2\sin^2\lambda}{\beta^2} = 1$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\tan\lambda = \pm\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2 - a_1^2}{a_1^2 - \beta^2}\right)^{\frac12}$$

یا، با استفاده از رابطهٔ (۳۴) داریم

$$\tan\lambda = \pm\cos i\left(\frac{\alpha^2 - a_1^2}{a_1^2 - \beta^2}\right)^{\frac12} \qquad (۴۲)$$

چون علامت $\tan\lambda$ با علامت $\tan(\theta_1-\theta_2)$ یکی است، بنابراین دو مقدار ممکن برای λ وجود دارند، که به اندازهٔ $180°$ اختلاف دارند و در رابطهٔ (۴۲) صدق می‌کنند. چون زاویهٔ مکانی جهتهای CA_1 و CD_2 به‌ترتیب θ_1 و Ω است و چون $D_2\hat{C}A_1=\lambda$، داریم

$$\Omega=\theta_1-\lambda \tag{۴۳}$$

ولی Ω طبق تعریف بین صفر درجه و $180°$ است و چون θ_1 از اندازه‌گیری معلوم است، مقدار λ که در رابطهٔ (۴۲) صدق می‌کند به کمک رابطهٔ (۴۳) تعیین می‌شود؛ معادلهٔ اخیر یافتن Ω را ممکن می‌سازد. سپس مقدار ω از رابطهٔ (۳۶) پیدا می‌شود، که عبارت است از

$$\tan\lambda=\tan\omega\cos i$$

عناصر باقیماندهٔ T و τ مانند قبل به دست می‌آیند.

۱۹۳. جرم ستاره‌ها

دو عنصر مدار که در ارتباط با جرم ستاره‌ها از اهمیت اصلی برخوردارند، دورهٔ گردش T (برحسب سال) و نیم‌محور بزرگ a هستند. از دورهٔ گردش، حرکت زاویه‌ای میانگین n را به دست می‌آوریم

$$n=2\pi/T \tag{۴۴}$$

باید به یاد داشت که اندازه‌های ریزسنجی فواصل ρ بین ستارهٔ همدم و اصلی بر حسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شوند، و a نیز بر برحسب ثانیهٔ قوسی به دست می‌آید. فرض کنید Π اختلاف‌منظر ستارهٔ دوتایی باشد، پس اگر d فاصلهٔ آن از ما برحسب واحد نجومی باشد، مقدار Π برحسب ثانیهٔ قوسی چنین خواهد بود

$$\Pi=\frac{1}{d}\operatorname{cosec}1'' \tag{۴۵}$$

فرض کنید a_1 نیم‌محور بزرگ مدار واقعی برحسب واحد نجومی باشد. در این صورت a (برحسب ثانیهٔ قوسی) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$a=\frac{a_1}{d}\operatorname{cosec}1'' \tag{۴۶}$$

از این‌رو، از روابط (۴۵) و (۴۶) داریم

$$a_1=\frac{a}{\Pi} \tag{۴۷}$$

حال رابطهٔ بین سرعت زاویه‌ای میانگین n و نیم‌محور بزرگ خطی a_1 عبارت است از

$$n^2 a_1^3 = G(m_1 + m_2)$$

که در آن G ثابت گرانشی و m_1 و m_2 جرمهای دو ستاره‌اند. از این‌رو، با استفاده از رابطهٔ (۴۴)، داریم

$$\frac{a_1^3}{T_2} = \frac{G}{4\pi^2}(m_1 + m_2) \qquad (48)$$

اکنون مدار زمین به دور خورشید را در نظر می‌گیریم. معادله‌ای نظیر (۴۸) خواهیم داشت یعنی

$$\frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{Gm}{4\pi^2} \qquad (49)$$

که در آن m جرم خورشید (از جرم زمین چشم می‌پوشیم) و a_0، و T_0 مربوط به مدار زمین‌اند. اما a_0 مساوی یک واحد نجومی و T_0 برابر یک سال است. اگر جرم خورشید را واحد جرم m بگیریم، در این صورت مقدار G برحسب این واحدها چنین خواهد بود

$$G = 4\pi^2 \qquad (50)$$

از این‌رو، معادلهٔ (۴۸) در مورد ستارهٔ دوتایی به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{a_1^3}{T^2} = m_1 + m_2$$

که در آن جرم ستاره‌ها برحسب جرم خورشید بیان می‌شوند. بنابراین، با به کاربردن رابطهٔ (۴۷) نتیجه می‌گیریم

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{\Pi^3 T^2} \qquad (51)$$

به کمک این معادله می‌توان حاصل جمع جرمهای یک ستارهٔ دوتایی را، با دانستن اختلاف‌منظر و مدار آن تعیین کرد.

برای اغلب ستاره‌ها دوتایی دیداری، جرم دستگاه تقریباً دو برابر جرم خورشید است. وقتی شواهد دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد بندرت ستاره‌ای با جرمی خارج از محدودهٔ $1/10m$ تا $50m$، که در آن m جرم خورشید است، می‌یابیم.

باید توجه داشت که فقط مجموع جرمها از رابطهٔ (۵۱) قابل محاسبه است. تنها در موارد نسبتاً نادر، وقتی اطلاعات رصدی اضافی متفاوتی در دسترس باشد، می‌توان جرمهای انفرادی ستارهٔ اصلی و ستارهٔ همدم را به دست آورد.

۱۹۴. اختلاف‌منظر دینامیکی

فرمول (۵۱) را می‌توان برای تعیین مقدار تقریبی Π، وقتی این کمیت با روش معمول قابل اندازه‌گیری نیست، به کار برد. می‌توانیم بنویسیم

$$\Pi = \frac{a}{T^{\frac{2}{3}}(m_1 + m_2)^{\frac{1}{3}}} \qquad (۵۲)$$

که در آن فرض بر این است که a و T از رصدهای مدار دوتایی دیداری به دست آورده می‌شوند. اگر، طبق نتیجهٔ میانگینی که برای ستاره‌های دوتایی دیداری شناخته شده، به دست آمده است $m_1 + m_2$ را برابر ۲ قرار دهیم، چیزی که به اختلاف‌منظر دینامیکی موسوم است، به دست می‌آید. البته، در هر مورد معین، مقدار $(m_1 + m_2)$ در واقع مجهول است، اما از آنجا که ریشهٔ سوم این کمیت در فرمول(۵۲) وارد می‌شود، عدم قطعیت در مقدار محاسبه شدهٔ Π، ناشی از فرض مربوط به جرم دستگاه، نسبتاً کوچک است. اختلاف‌منظرهای دینامیکی اطلاعات با ارزشی برای بعضی بررسیها که فاصلهٔ ستاره‌ها در آنها لازم است، در اختیار می‌گذارند.

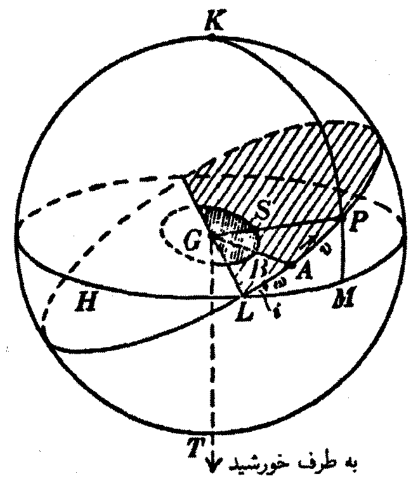
۱۹۵. ستاره‌های دوتایی طیفی

یک دستگاه ستارهٔ دوتایی از این رده از دو عضو بسیار نزدیک تشکیل می‌شوند که فاصله‌شان از یکدیگر نزدیکتر از آن است که با تلسکوپ به یک ستارهٔ دوتایی قابل تفکیک باشند؛ دوتایی بودن این دستگاه از رصدهای طیفی سرعت شعاعی استنباط می‌شود. هر یک از ستاره‌ها در یک دستگاه دوتایی که مرکز گرانی آن در G قرار دارد (شکل ۱۳۲) یک مدار بیضوی حول G طی می‌کند. در حالت کلی، صفحهٔ مداری نسبت به خط دید مایل خواهد بود. تعریف عناصر مداری همانند ستاره‌های دوتایی دیداری است (Ω، طول گره، یک استثناست، زیرا به سبب عدم وجود یک نقطهٔ مقایسهٔ قطعی روی صفحهٔ عمود بر خط دید، قابل تعریف نیست).

در صفحهٔ ۲۴۳، به روش طیف‌نمایی اندازه‌گیری سرعتهای شعاعی ستاره‌ها اشاره شد و به ویژه، فرمولی برای بخش متغیر سرعت شعاعی که ناشی از حرکت مداری زمین به دور خورشید است به دست آورده شد. در اینجا فرض خواهیم کرد که این بخش متغیر، از سرعت شعاعی رصدی یک ستاره برداشته شده است؛ مقداری که بدین ترتیب به دست می‌آید نمایانگر سرعت شعاعی ستاره نسبت به خورشید است.

فرض می‌کنیم که خط راست واصل بین G و خورشید، در شکل ۱۳۲ کرهٔ با مرکز G را در T قطع کند. دایرهٔ عظیمهٔ HLM که T قطب آن است می‌تواند، بدون ابهام، صفحهٔ مدار ظاهری محسوب شود. K قطب دیگر HLM است. اما توجه داشته باشید که شکل ۱۳۲ نسبت به ۱۲۷ وارونه است.

فرض کنید r (برحسب کیلومتر) نشاندهندهٔ بردار شعاعی GS باشد که در آن S مکان یکی از ستاره‌ها در مدارش نسبت به G است. اگر GB بردار شعاعی، در لحظهٔ نزدیکترین مکان ستاره



شکل ۱۳۲

نسبت به G باشد در این صورت $S\hat{G}B$ یا $P\hat{G}A$ بی‌هنجاری واقعی v است. (فرض می‌کنیم که جهت حرکت از A به P باشد.) L گرهٔ صعودی است و مانند قبل LA را برابر ω قرار می‌دهیم.

فرض کنید z فاصلهٔ S از صفحهٔ HLM را نشان دهد؛ وقتی S در همان سمتی از این صفحه باشد که K در آن قرار دارد، z مثبت محسوب می‌شود. بنابراین داریم

$$z = r \sin PM$$

که KPM کمان دایرهٔ عظیمه‌ای است که بر P می‌گذرد. اما از مثلث PLM، که در آن $LP = v + \omega$، $P\hat{L}M = i$ و $P\hat{M}L = ۹۰^\circ$ است، داریم

$$\sin PM = \sin(v + \omega) \sin i$$

از این‌رو

$$z = r \sin(v + \omega) \sin i \qquad (۵۳)$$

که در آن z برحسب کیلومتر بیان می‌شود. آهنگ تغییر z با زمان، یعنی dz/dt، سرعت شعاعی ستارهٔ S را نسبت به مرکز گرانش دستگاه، G، به دست می‌دهد.

در حالت کلی، خود دستگاه نسبت به خورشید دارای سرعتی شعاعی خواهد بود که با V نشان می‌دهیم. پس V سرعت شعاعی G است که اگر از خورشید دور شود مثبت در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب سرعت شعاعی R ستارهٔ S نسبت به خورشید به وسیلهٔ رابطهٔ زیر داده

می‌شود

$$R = V + \frac{dz}{dt} \qquad (۵۴)$$

مقدار R از رصدهای طیفی نتیجه می‌شود. وقتی ستاره‌ها به حد کافی روشن باشند تا طیفهای هر دو آنها روی صفحهٔ عکاسی ثبت شوند، سرعتهای شعاعی هر دو ستاره را می‌توان به دست آورد. ولی فعلاً آن نوع ستاره‌های دوتایی طیفی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که اندازه‌گیری سرعت شعاعی فقط یکی از مؤلفه‌ها امکان‌پذیر باشد.

اینک فرمولهای حرکت بیضوی را که در حرکت ستارهٔ S حول G به کار می‌روند می‌نویسیم

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \qquad (۵۵)$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = h = \{\mu a(1-e^2)\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۶)$$

$$\mu = n^2a^3 \qquad (۵۷)$$

که در آنها a نیم‌محور بزرگ برحسب کیلومتر و n حرکت زاویه‌ای میانگین است. حال از (۵۳)، داریم

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin(v+\omega)\sin i + r\cos(v+\omega)\sin i\frac{dv}{dt}$$

و از فرمولهای فوق به آسانی فرمول زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nae\sin v}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad r\frac{dv}{dt} = \frac{na(1+e\cos v)}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ازاین‌رو خواهیم داشت

$$\frac{dz}{dt} = \frac{na\sin i}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}[\cos(v+\omega)+e\cos\omega] \qquad (۵۸)$$

بدین ترتیب از (۵۴) می‌توانیم سرعت شعاعی R را برحسب V، v، و عناصر مدار بیان کنیم.

۱۹۶. منحنی سرعت

دوره‌های مداری ستاره‌های دوتایی طیفی معمولاً فقط چندین روز هستند، و چون رصد کردن آنها ممکن است در طی مدت چندین ماه، یا حتی چندین سال، انجام گیرد، دوره‌های مداری را می‌توان با دقت بالایی پیدا کرد. از همهٔ رصدهای موجود منحنیی رسم می‌شود که رابطهٔ بین سرعت

شعاعی R و زمان را (دربازه‌ای مساوی دورهٔ گردش) به دست می‌دهد. شکل ۱۳۳ یک منحنی سرعت نوعی با دورهٔ گردش $\frac{1}{۲}$۳۳ روز را نشان می‌دهد؛ این منحنی مربوط به ستارهٔ HR۸۸۰۰ است که رصدهای طیفی آن در رصدخانهٔ دومینیان در ویکتوریا انجام شده است. این منحنی، بین B و F نمایانگر یک چرخهٔ کامل از تغییرات سرعت شعاعی R است. سرعت شعاعی در C، بیشترین مقدار مثبت خود (در حدود ۶۰ کیلومتر بر ثانیه) و در E بیشترین مقدار منفی خود (در حدود ۱۱۵− کیلومتر بر ثانیه) را دارد.

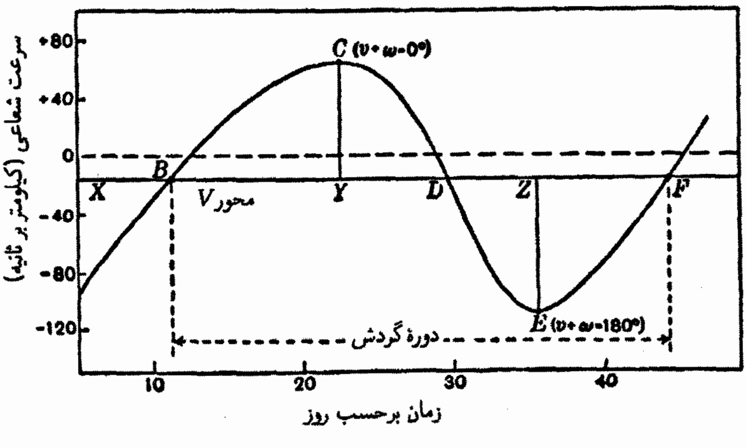
در واقع، معلوم می‌شود (بعداً شرح خواهیم داد) که ستارهٔ دوتایی با سرعت ۱۵ کیلومتر بر ثانیه به خورشید نزدیک می‌شود. بدین ترتیب $V = -۱۵\mathrm{km/s}$. خط XYZ که طبق این مقدار V، موازی محور زمان رسم شده موسوم به محور V است، عرضهایی که از این خط تا منحنی اندازه‌گیری می‌شوند، مقادیر مربوط به dz/dt را به دست می‌دهند. فعلاً، فرض می‌کنیم که محور V رسم شده باشد.

روشهای زیادی برای استخراج عناصر مداری از منحنی سرعت وجود دارند؛ فقط یکی از این روشها که در عمل به طور گسترده به کار برده می‌شود را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱۹۷. روش لهمن-فیلهه

رابطهٔ (۵۸) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{dz}{dt} = K[\cos(v+\omega) + e\cos\omega] \qquad (۵۹)$$



شکل ۱۳۳

که در آن

$$K = \frac{na \sin i}{(۱ - e^۲)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۶۰)$$

حال dz/dt هنگامی بیشینه است که $(v+\omega)$ صفر باشد و چون سرعت شعاعی در C بیشینه است، عرض YC از محور V (که با α نشان داده می‌شود) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\alpha = K(۱ + e \cos \omega) \qquad (۶۱)$$

همچنین، سرعت شعاعی بیشترین مقدار منفی خود را در E پیدا می‌کند، و این هنگامی رخ می‌دهد که $v + \omega = ۱۸۰^\circ$. اگر اندازهٔ عرض EZ را با β نشان دهیم، از لحاظ عددی داریم

$$\beta = K(۱ - e \cos \omega) \qquad (۶۲)$$

از روابط (۶۱) و (۶۲) داریم

$$K = \frac{۱}{۲}(\alpha + \beta) \qquad (۶۳)$$

$$e \cos \omega = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \qquad (۶۴)$$

اندازه‌گیری α و β به ما امکان می‌دهد که مقادیر K و $(e \cos \omega)$ را به دست آوریم.

تعیین محور V از این نکته میسر است که مساحت BCD بالای این محور با مساحت DEF پایین آن برابر است. این نکته به سادگی به شرح زیر دیده می‌شود. dz/dt عرض، و زمان t طول است، پس مساحت BCD از انتگرال زیر به دست می‌آید

$$q \int \frac{dz}{dt} dt$$

که حدود آن مقادیر t مربوط به B و D است، و q ثابتی است وابسته به واحدهایی که این مساحت برحسب آنها اندازه‌گیری می‌شود. از این‌رو این مساحت برابر است با

$$q(z_D - z_B)$$

که در آن z_D مقدار z مربوط به نقطهٔ D روی منحنی سرعت است. همینطور مساحت DEF برابر است با

$$q(z_f - z_D)$$

اما $z_B = z_F$، زیرا BF مربوط به یک چرخهٔ کامل است، و بنابراین عبارتهای عددی دو مساحت با هم برابرند. پس رسم محور V بیشتر یک مسئلهٔ آزمون و خطاست؛ براورد اولیه‌ای انجام می‌شود و مساحتهای بالا و پایین این خط را با یک مساحت‌سنج اندازه می‌گیرند. پس از یک یا چند آزمون سرانجام مکانی برای محور V پیدا می‌شود که شرط مساحتهای مساوی را ارضا کند. مکان محور V در شکل ۱۳۳ طبق اصول شرح داده شده پیدا شده است، و مقدار V حاصل برابر ۱۵− کیلومتر بر ثانیه است. این سرعت شعاعی ستارهٔ دوتایی (HR۸۸۰۰) نسبت به خورشید است.

مساحت CYD که با Δ_1 نشان می‌دهیم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Delta_1 = z_D - z_C \tag{۶۵}$$

مقدار $(v + \omega)$ در C برابر صفر درجه است و از رابطهٔ (۵۳) داریم $z_C = 0$. از این‌رو

$$\Delta_1 = z_D \tag{۶۶}$$

همینطور مساحت DZE برابر $(z_E - z_D)$ است وچون z_E برابر صفر است، مساحت DZE برابر مساحت CYD، یعنی، برابر Δ_1 است. با روشی مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که مساحتهای BCY و ZEF برابرند.

اگر v_1 و r_1 مقادیر بی‌هنجاری واقعی و بردار شعاعی نقطهٔ متناظر D در شکل ۱۳۳، در مدار واقعی باشند در آن صورت با استفاده از روابط (۵۳) و (۶۶) داریم

$$\Delta_1 = r_1 \sin(v_1 + \omega) \sin i \tag{۶۷}$$

اما مقدار dz/dt در D صفر است؛ از این‌رو با استفاده از رابطهٔ (۵۹) داریم

$$\begin{aligned}\cos(v_1 + \omega) &= -e \cos\omega \\ &= -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\end{aligned}$$

که در تساوی آخر از رابطهٔ (۶۴) استفاده شده است. از این‌رو

$$\sin(v_1 + \omega) = \pm\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta}$$

اکنون اگر در امتداد منحنی سرعت از C به E برویم، سرعت شعاعی درست قبل و بعد از نقطهٔ D از مثبت به منفی تغییر می‌یابد. از این‌رو با مراجعه به شکل ۱۳۲ مشاهده می‌کنیم که نقطهٔ D روی منحنی سرعت (شکل ۱۳۳) باید متناظر با نقطه‌ای روی مدار واقعی باشد که برای

آن z دارای یک مقدار مثبت بیشینه است. پس با استفاده از رابطهٔ (۵۳) کمیت $\sin(v_۱ + \omega)$ مثبت است و بنابراین داریم

$$\sin(v_۱ + \omega) = +\frac{۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} \qquad (۶۸)$$

اکنون مساحت ZEF را که با $\Delta_۲$ نشان می‌دهیم، در نظر می‌گیریم. پس

$$\Delta_۲ = z_F - z_E$$

یا چون $z_E = ۰$، نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta_۲ = z_F$$

اگر $v_۲$ و $r_۲$ به نقطه‌ای روی مدار واقعی که متناظر با نقطهٔ F روی منحنی سرعت است مربوط شوند خواهیم داشت

$$\Delta_۲ = r_۲ \sin(v_۲ + \omega) \sin i \qquad (۶۹)$$

اما dz/dt در F صفر است؛ بدین ترتیب

$$\cos(v_۲ + \omega) = -e\cos\omega = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

و بنابراین

$$\sin(v_۲ + \omega) = -\frac{۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} \qquad (۷۰)$$

علامت منفی از این‌رو در رابطهٔ (۷۰) اختیار می‌شود که F متناظر نقطه‌ای روی مدار واقعی است که برای آن z دارای مقدار منفی بیشینه است. به‌این ترتیب با به کار بردن روابط (۶۷)، (۶۸)، (۶۹)، و (۷۰)، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\Delta_۱}{\Delta_۲} = -\frac{r_۱}{r_۲}$$

روش به گونه‌ای بوده است که $\Delta_۲$ از نظر ریاضی کمیتی منفی است. اگر $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ هر دو کمیتهایی مثبت در نظر گرفته شوند، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\Delta_۱}{\Delta_۲} = \frac{r_۱}{r_۲} \qquad (۷۱)$$

اما $r_1 = a(1-e^2)/1 + e\cos v_1$، و عبارت مشابهی نیز برای r_2 وجود دارد پس داریم

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1 + e\cos v_2}{1 + e\cos v_1}$$

معادلهٔ اخیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_1}{\Delta_2} &= \frac{1 + e\cos(\overline{v_2 + \omega} - \omega)}{1 + e\cos(\overline{v_1 + \omega} - \omega)}\\ &= \frac{1 + e\cos\omega\cos(v_2 + \omega) + e\sin\omega\sin(v_2 + \omega)}{1 + e\cos\omega\cos(v_1 + \omega) + e\sin\omega\sin(v_1 + \omega)}.\end{aligned}$$

که با به کار بردن روابط (۶۴)، (۶۸)، و (۷۰)، به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2\alpha\beta - \sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta)e\sin\omega}{2\alpha\beta + \sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta)e\sin\omega}$$

و از آن به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$e\sin\omega = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \times \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_2 + \Delta_1} \tag{۷۲}$$

با اندازه‌گیری مساحتهای Δ_1 و Δ_2 (که هر دو کمیتهایی مثبت‌اند) می‌توان از رابطهٔ (۷۲) مقدار $e\sin\omega$ را به دست آورد. اما رابطهٔ زیر را هم داشتیم

$$e\cos\omega = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

از این‌رو این معادله و معادلهٔ (۷۲) e و ω را تعیین می‌کند.

برای تعیین زمان گذر از حضیض، τ، توجه داریم که در آن هنگام v برابر صفر است و اگر $\dot{z}_1$ مقدار متناظر با dz/dt باشد مقدار $\dot{z}_1$ با استفاده از رابطهٔ (۵۹) چنین می‌شود

$$\dot{z}_1 = K(1+e)\cos\omega \tag{۷۳}$$

اکنون چون K، e، و ω معلوم فرض می‌شوند، مقدار $\dot{z}_1$ را می‌توان به‌دست آورد. از رابطهٔ (۷۳)، دو عرض منحنی سرعت به دست می‌آید. ولی با توجه به اینکه در C، $v + \omega = 0$، و در E، $v + \omega = 180^\circ$ است این ابهام برطرف می‌شود. بدین‌ترتیب اگر برای ω مثلاً عدد 60° پیدا شود، مقدار v در C برابر 300° و در E برابر 120° خواهد بود؛ در این مثال نقطهٔ حضیض متناظر است باعرض بین C و D روی منحنی سرعت، و بنابراین زمان (طول) گذر از حضیض، τ، که از عصر مربوط به، مثلاً، B اندازه گرفته می‌شود، به دست می‌آید.

باز از روابط (۶۰) و (۶۳) داریم

$$K = \frac{na\sin i}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad (۷۴)$$

همچنین اگر دورهٔ گردش T معلوم فرض شود، $n = 2\pi/T$، و از رابطهٔ (۷۴) خواهیم داشت

$$a\sin i = \frac{T(\alpha+\beta)(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{4\pi}$$

دورهٔ گردش T معمولاً برحسب روز بیان می‌شود و α و β اندازه‌های سرعت‌اند که برحسب کیلومتر بر ثانیهٔ متوسط خورشیدی بیان می‌شوند. معادلهٔ آخر با این واحد (با توجه به اینکه یک روز برابر ۸۶۴۰۰ ثانیه است) به صورت زیر در می‌آید

$$a\sin i = \frac{21600T}{\pi}(\alpha+\beta)(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۵)$$

این فرمول، وقتی T برحسب روز بیان شود، مقدار کمیت $(a\sin i)$ را برحسب کیلومتر به دست می‌دهد. نیم‌محور بزرگ a، نسبت به مرکز گرانش دستگاه، قابل تعیین نیست، مگر آنکه زاویهٔ میل i را بتوان از روشهای دیگر به دست آورد.

۱۹۸. دو طیف قابل رؤیت

هنگامی که هر دو عضو ستارهٔ دوتایی به اندازهٔ کافی روشن باشند، منحنی سرعت هر ستاره را می‌توان به روش قبلی، یا هر روش دیگری، مورد تحلیل قرار داد. اکنون فرض کنید a_1 نیم‌محور بزرگ یک مدار نسبت به مرکز گرانش دستگاه، و a_2 نیم‌محور بزرگ مدار دیگر باشد. پس نیم‌محور بزرگ مدار یک ستاره نسبت به ستارهٔ دیگر، $(a_1 + a_2)$ است که با a_0 نشان می‌دهیم. اگر a_0 برحسب واحد نجومی، و دورهٔ گردش T برحسب روز بیان شود جمع جرمهای دو ستاره (برحسب جرم خورشید) از رابطهٔ زیر بدست می‌آید

$$m_1 + m_2 = a_0^3\left(\frac{365\frac{1}{4}}{T}\right)^2 \qquad (۷۶)$$

اما $(a_1\sin i)$ را می‌توان به کمک رابطهٔ (۷۵) برحسب کیلومتر پیدا کرد، و همینطور از تحلیل دومین منحنی سرعت می‌توان مقدار $(a_2\sin i)$ را به دست آورد. چون $a_0 = a_1 + a_2$ و یک واحد نجومی نیز ۱۴۹۶۰۰۰۰۰ کیلومتر است فرمول (۷۶)، با ضرب کردن دو طرف آن در $\sin^3 i$، چنین می‌شود

$$(m_1 + m_2)\sin^3 i = \left(\frac{a_1\sin i + a_2\sin i}{149600000}\right)^3\left(\frac{365\frac{1}{4}}{T}\right)^2$$

که در آن $a_۱ \sin i$ و $a_۲ \sin i$ برحسب کیلومتر، و T برحسب روز بیان می‌شود، یا با به کاربردن (۷۵) داریم

$$(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i = ۱{,}۲۹۵ \times ۱۰^{-۸} T (۱ - e^۲)^{\frac{۳}{۲}} \{(\alpha_۱ + \beta_۱) + (\alpha_۲ + \beta_۲)\}^۳$$

که در آن $\alpha_۱$،$\beta_۱$،$\alpha_۲$و $\beta_۲$ به دو منحنی سرعت مربوط می‌شوند. با نوشتن $K_۱ = \frac{۱}{۲}(\alpha_۱ + \beta_۱)$ و $K_۲ = \frac{۱}{۲}(\alpha_۲ + \beta_۲)$، معادلهٔ اخیر به صورت زیر در می‌آید

$$(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i = ۱۰{,}۳۶ \times ۱۰^{-۸} T (۱ - e^۲)^{\frac{۳}{۲}} (K_۱ + K_۲)^۳ \qquad (۷۷)$$

بدین ترتیب مقدار $(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i$ را می‌توان به دست آورد.

حال چون G مرکز گرانش دستگاه است داریم

$$m_۱ a_۱ = m_۲ a_۲ \qquad (۷۸)$$

یا

$$m_۱ (a_۱ \sin i) = m_۲ (a_۲ \sin i)$$

بنابراین، با استفاده از (۷۵) داریم

$$\frac{m_۱}{m_۲} = \frac{\alpha_۲ + \beta_۲}{\alpha_۱ + \beta_۱} = \frac{K_۲}{K_۱} \qquad (۷۹)$$

بدین ترتیب نسبت جرمها را می‌توان به دست آورد. فرمول (۷۷) در مورد مجموع جرمها، شامل مقدار مجهول زاویهٔ میل است و بنابراین نمی‌توان تک‌تک جرمها را پیدا کرد، مگر آنکه بتوان i را با روش دیگر به دست آورد.

۱۹۹. تابع جرم

اینک به موردی بر می‌گردیم که فقط یک طیف قابل رؤیت باشد. از رابطهٔ (۷۸) داریم

$$\frac{a_۱}{a_۱ + a_۲} = \frac{a_۱}{a_۰} = \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}$$

بنابراین

$$(a_۱ \sin i)^۳ = \frac{m_۲^۳ a_۰^۳ \sin^۳ i}{(m_۱ + m_۲)^۳} \qquad (۸۰)$$

اما، با بیان $a_\circ$ برحسب کیلومتر، از رابطهٔ (۷۶) داریم

$$m_۱ + m_۲ = \left(\frac{a_\circ}{۱۴۹۶۰۰۰۰۰}\right)^۳ \left(\frac{۳۶۵\frac{۱}{۴}}{T}\right)^۲$$

یا

$$m_۱ + m_۲ = ۳{,}۹۸۵ \times ۱۰^{-۲۰} \frac{a_\circ^۳}{T^۲} \qquad (۸۱)$$

از این‌رو پس از حذف $a_\circ$ از روابط (۸۰) و (۸۱) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{m_۲^۳ \sin^۳ i}{(m_۱ + m_۲)^۲} = \frac{۳{,}۹۸۵ \times ۱۰^{-۲۰} (a_۱ \sin i)^۳}{T^۲} \qquad (۸۲)$$

مقدار کمیت طرف راست را می‌توان تعیین کرد. تابع طرف چپ تابع جرم است که معمولاً توسط محاسبه کنندگان مدارهای ستاره‌های دوتایی طیفی گزارش می‌شود.

۲۰۰. جرم ستاره‌های دوتایی طیفی

وقتی تنها از یک طیف عکسبرداری می‌شود، اطلاعات مربوط به جرم ستاره‌ها از مقدار تابع جرم به دست می‌آید. دیدیم که وقتی هر دو طیف قابل رؤیت باشند، نسبت $m_۱$ به $m_۲$، و نیز کمیت $(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i$ از منحنیهای سرعت قابل تعیین است. پس برای هر دستگاه ستارهٔ دوتایی، به سبب وجود زاویهٔ نامعلوم میل i در فرمولها، مقدار جرمها را، عملاً نمی‌توان تعیین کرد. با وجود این، از بررسیهای آماری، اطلاعات ارزشمندی در مورد جرمها به دست می‌آید. تعداد زیادی ستارهٔ دوتایی طیفی با ردهٔ طیفی یکسان که در سرتاسر آسمان پراکنده‌اند را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که جرمهای این گونه دستگاههای دوتایی خیلی نزدیک به هم باشند. اگر جرم متوسط یک دستگاه را M و تعداد دستگاهها را N بگیریم، می‌توانیم از مقادیر معلوم، جمع $\sum(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i$ را به صورت زیر تشکیل دهیم

$$\sum(m_۱ + m_۲) \sin^۳ i = NMS$$

که در آن S مقدار میانگین $\sin^۳ i$، نسبت به زاویه‌های میل کتره‌ای در سرتاسر آسمان است. مقدار S معمولاً ۲/۳ اختیار می‌شود. با این روش، تخمینی از جرم میانگین M یک ستارهٔ دوتایی طیفی با ردهٔ طیفی معین به دست می‌آید.

احتمالاً پر جرمترین ستارهٔ دوتایی طیفی شناخته شده ستارهٔ HD۴۷۱۲۹ است، که تابع جرم آن ۱۲٫۸۸ برابر جرم خورشید به دست آمده است. اگر فرض شود که دو مؤلفه جرمهای مساوی دارند، جرم هر ستاره باید بیشتر از ۵۰ برابر جرم خورشید باشد.

۲۰۱. ستاره‌های دوتایی گرفتی

بدیهی است اگر خط دید درون صفحهٔ مدار یک ستارهٔ دوتایی یا نزدیک به آن باشد، در مدت هر دورهٔ گردش مداری، مؤلفه A به طورکامل یا جزئی از جلوی مؤلفه B می‌گذرد و بدین ترتیب باعث گرفتگی دومی می‌شود. این پدیده به صورت کاهش نور ستارهٔ دوتایی مشاهده می‌شود. همینطور مؤلفهٔ B سبب گرفتگی کلی یا جزئی A خواهد شد. منحنی نور یک چنین ستاره‌ای را در اینجا نمی‌توان تحلیل کرد، و خواننده برای آگاهی بیشتر می‌تواند به کتابی تخصصی‌تر رجوع کند.[1] با این‌حال می‌توان اضافه کرد که منحنی نور، زاویهٔ میل i را به دست می‌دهد و اگر طیفهای هر دو مؤلفه قابل مشاهده باشند، جرم هر یک به دست می‌آید.

تمرینها

۱. بزرگترین قطر ظاهری مدار یک ستارهٔ دوتایی دیداری ۸ر″۱، اختلاف‌منظر آن ۰۷۲ر″۰، و دورهٔ گردش آن ۵۰ سال است. اگر مدار دایره‌ای باشد، نشان دهید که جرم ستارهٔ دوتایی ۲۵/۳۲ برابر جرم خورشید است.

[لندن، ۱۹۲۵]

۲. نیم‌محور بزرگ مدار ستارهٔ کروگر ۶۰، ۴۶ر″۲، دورهٔ گردش آن ۳ر۴۴ سال، و اختلاف‌منظر دستگاه ۲۵۷ر″۰ است. جرم این ستارهٔ دوتایی را برحسب جرم خورشید محاسبه کنید.

[لندن، ۱۹۲۸]

۳. بزرگترین جدایی زاویه‌ای مؤلفه‌های ستاره τـدجاجه ۹۱ر″۰، دورهٔ گردش آن ۰ر۴۷ سال و اختلاف‌منظر آن ۰۵ر″۰ است. با فرض اینکه مدار دایره‌ای باشد، جرم این ستارهٔ دوتایی را محاسبه کنید.

۴. اختلاف‌منظر دینامیکی ستارهٔ دوتایی β ۷۶۴۲ که برای آن ۸۷ر″۲ $= a$ و ۵ر۳۱۷ $= T$ سال است را محاسبه کنید. اختلاف‌منظر مثلثاتی این ستاره ۰۸۸ر″۰ است؛ تفاوت دو مقدار اختلاف‌منظر را تعبیر کنید.

[لندن، ۱۹۲۶]

۵. توضیح دهید که چگونه شکل و وضعیت مدار واقعی یک ستارهٔ دوتایی دیداری را می‌توان از رصدهای زاویهٔ مکانی و جدایی، در طی یک دورهٔ کامل به دست آورد.

اگر a و b نیم‌محورهای مدار ظاهری و h و k مختصات ستارهٔ اصلی نسبت به این محورها باشند، نشان دهید که زاویهٔ میل مدار نسبت به صفحهٔ عمود بر خط دید از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

1. A. H. Batten, *Binary and Multiple Systems of Stars* (Pergamon 1973).

$$\sin^2 i = \frac{2\lambda}{a^2 + b^2 - h^2 - k^2 + \lambda}$$

که در آن

$$\lambda^2 = (h^2 + k^2)^2 + (a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - b^2)(k^2 - h^2)$$

[لندن، ۱۹۲۲]

۶. ثابت کنید که اگر مدار ظاهری کامل یک ستارهٔ دوتایی دیداری را داشته باشیم و روی هر وتر دلخواه POQ که از ستارهٔ اصلی O می‌گذرد نقطهٔ R را طوری اختیار کنیم که OR میانگین هماهنگ بین PO و OQ باشد، مکان هندسی R بیضیی است که طول محور بزرگ آن ضلع قائم مدار واقعی است و جهت این محور بزرگ جهت خط گره‌هاست و نسبت محور کوچک به محور بزرگ کسینوس زاویهٔ میل است.

[لندن، ۱۹۲۳]

۷. دورهٔ گردش واقعی یک ستارهٔ دوتایی گرفتی ۳ روز، و سرعت آن در راستای خط دید (به دور از خورشید) ۳۰ کیلومتر بر ثانیه است. نشان دهید که دورهٔ گردش ظاهری آن به اندازهٔ ۲۶ ثانیه از دورهٔ گردش واقعی بلندتر است.

[لندن، ۱۹۲۳]

۸. ستارهٔ متغیری دارای مختصات دایرةالبروجی λ و β است. اگر از دیدگاه راصدی روی زمین زمان یک بیشینه T باشد و زمان همین بیشینه از دیدگاه خورشید $T.$ باشد، نشان دهید

$$T. = T - \frac{a}{c}\cos\beta\cos(\lambda - \odot)$$

که در آن c سرعت نور برحسب کیلومتر بر ثانیه، a شعاع مدار زمین برحسب کیلومتر و $\odot$ طول سماوی خورشید است.

[لندن، ۱۹۲۷]

۱۵

اختفا و گرفتگی

۲۰۲. اختفای ستاره‌ها به وسیلهٔ ماه

چون دورهٔ نجومی گردش مداری به دور زمین تقریباً $\frac{1}{3}$۲۷ روز است، ماه نسبت به ستاره‌ها با یک آهنگ متوسط اندکی بیش از نیم درجه در ساعت به طرف شرق می‌رود. ماه در حین گذر از برابر ستاره‌های زمینه قرص خود را بین ما و ستاره‌ها قرار می‌دهد. ناپدید شدن ناگهانی یک ستاره بدین طریق را اختفای ستاره به وسیلهٔ ماه می‌نامند. پس از مدتی، که بستگی به عاملهایی گوناگون دارد، ستاره دوباره پدیدار می‌شود. به‌طور کلی ناپدید شدن و باز پدیدار شدن ستاره به ترتیب پنهان شدن و نمایان شدن نامیده می‌شود. ناپدید شدن ستاره و باز پدیدار شدن آن پدیده‌هایی آنی‌اند و، اگر زمان یکی از این دو رویداد دقیقاً یادداشت شود، به فرض آنکه مکان ستاره بدقت معلوم باشد رابطه‌ای قطعی بین مکان ماه در آسمان و مکان راصد در آن لحظه به دست می‌آید. قبلاً از اختفای ستاره‌ها برای تعیین طول جغرافیایی استفاده می‌شد، اما استفاده از علائم زمانی رادیویی این روش را غیر معمول ساخته است.

اگر مکان ماه به دقت معلوم باشد، خصوصیات اختفای یک ستاره را در هر محل می‌توان پیشگویی کرد و تحت این شرایط انتظار می‌رود که پیشگویی و رصد با هم توافق داشته باشند. اکنون مکان ماه در تقویمهای نجومی برای هر لحظهٔ زمان زیجی پیشگویی می‌شود، در حالی که زمان رصد یک اختفا برحسب زمان جهانی ثبت می‌شود. بنابراین، بررسی اختفا وسیله‌ای فوری برای تعیین رابطهٔ بین زمانهای جهانی و زیجی در اختیار می‌گذارد و به ویژه، به دست آوردن

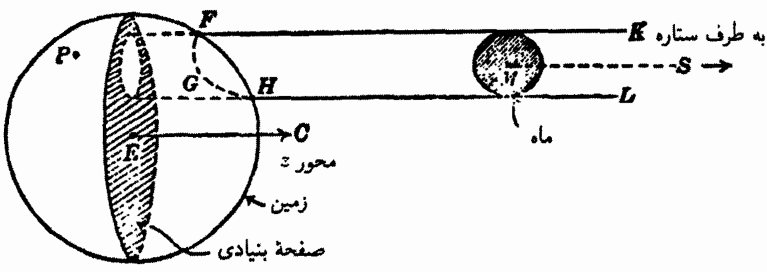
تصحیح ΔT را امکاناپذیر می‌سازد. اختفای چشمه‌های رادیویی نیز مهم‌اند، زیرا اندازه‌گیری دقیق مکان چشمه‌های رادیویی مشکل است. اولین شناسایی قطعی نوری یک اختروش با اندازه‌گیری زمان قطع علائم رادیویی آن در حین اختفای آن توسط ماه انجام گرفت.

۲۰۳. شرایط هندسی اختفا

شکل ۱۳۴ که در آن زمین یک کره‌وار و ماه یک کره فرض می‌شود و مرکز هر یک از آنها به ترتیب در E و M قرار دارد را در نظر بگیرید. فرض کنید MS خط راست واصل بین مرکز ماه و ستارهٔ مورد نظر در یک لحظهٔ خاص باشد. چون می‌توان ستاره را در فاصله‌ای بینهایت در نظر گرفت، پرتوهایی از ستاره که درون استوانه‌ای با محور MS و شعاع مقطع عریضیی برابر با شعاع ماه قرار دارند به وسیلهٔ ماه متوقف خواهد شد. فرض کنید که این استوانه سطح زمین را در منحنی FGH (که فقط قسمتی از آن در شکل ۱۳۴ نشان داده شده است) قطع کند؛ پس ستاره از دیدگاه نقاط روی منحنی FGH، در لحظهٔ ویژهٔ مورد نظر، در شرف ناپدید شدن در پشت قرص ماه یا بازپدیدار شدن از پشت است و در همهٔ جای سطح زمین درون این منحنی غیر قابل رؤیت خواهد شد. بدیهی است که برای اینکه اختفای ستاره‌ای خاص در نقطه‌ای روی سطح زمین قابل رؤیت باشد، این استوانه باید سطح زمین را قطع کند.

صفحه‌ای که از مرکز زمین عمود بر خط MS رسم می‌شود صفحه بنیادی نامیده می‌شود؛ در بحث بعدی عمود EC بر این صفحه، محور z اختیار می‌شود. باید توجه داشت که صفحهٔ بنیادی و محور z، به سبب چرخش زمین پیوسته نسبت به محورهای ثابت در زمین تغییر می‌کنند.

از دیدگاه هر نقطه روی زمین، ماه به علت اختلاف‌منظر، به اندازهٔ زاویه‌ای کمی بیش از 1° (که اختلاف‌منظر بیشینه یا اختلاف‌منظر افقی است) از سمت‌الرأس دور می‌شود؛ ضمناً نیم‌قطر آن $16'$ است. از این‌رو در هر لحظه برای ستاره‌ای که بُعدش برابر بُعد ماه است اختفا در صورتی در یک محل امکان دارد که اختلاف میل ستاره و میل جدول‌بندی شدهٔ ماه از حدود $1\frac{1}{2}$ درجه تجاوز نکند. انتخاب ستاره‌هایی که برای آنها اختفا امکاناپذیر است طبق معیار بالا با مقایسهٔ مکانهای



شکل ۱۳۴

جدول‌بندی شدهٔ ماه در تقویمهای نجومی و مکان ستاره‌ها انجام می‌گیرد.

۲۰۴. روش بسل در بررسی اختفا

اینک به توصیف روشی می‌پردازیم که برای پیش‌بینی اختفا به کار می‌رود. نمادهای زیر را به کار خواهیم برد:

α،δ ، بُعد و میل ظاهری ستاره.

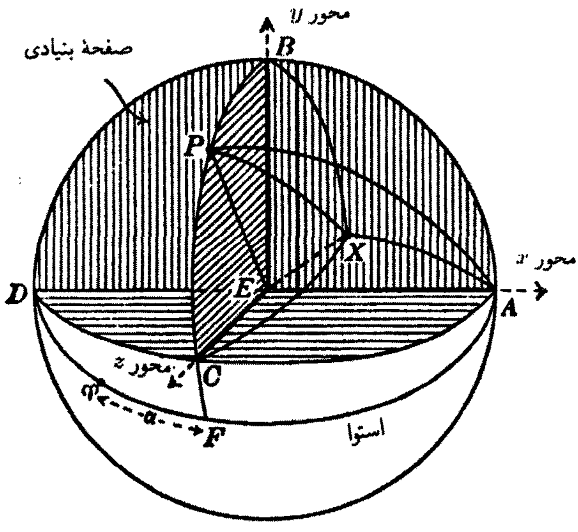
α_1،δ_1 ، بُعد و میل ظاهری مرکز ماه.

P_1، اختلاف‌منظر افقی استوایی ماه.

r_1، فاصلهٔ زمین‌مرکزی ماه
kــ شعاع ماه
ρ، فاصلهٔ زمین‌مرکزی راصد
} واحد همهٔ این کمیتها شعاع استوایی زمین است.

ϕ'، عرض زمین‌مرکزی راصد.

فرض کنید در شکل ۱۳۵ E (مرکز زمین) مرکز کرهٔ سماوی باشد. شعاعEC موازی خط راست واصل بین مرکز ماه و ستاره رسم می‌شود؛ EC محور z است و صفحهٔ DBA که عمود بر EC است و از مرکز E می‌گذرد، صفحهٔ بنیادی است. نقطهٔ P قطب شمال و EP محور چرخش زمین است. از آنجا که C قطب صفحهٔ بنیادی است، صفحهٔ هر دایرهٔ عظیمه‌ای که بر C بگذرد بر صفحهٔ بنیادی عمود خواهد بود؛ به ویژه، صفحهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای که C را به P وصل می‌کند



شکل۱۳۵

عمود بر صفحهٔ بنیادی است. فرض کنید این دو صفحه یکدیگر را در EB و صفحهٔ اول استوا را در F قطع کند؛ صفحهٔ $BPCF$ بنابه تعریف صفحهٔ x است. چون ستاره در فاصله‌ای بینهایت در نظر گرفته می‌شود، EC از دیدگاه زمین جهت ستاره است و PCF نصف‌النهارگذرنده بر آن. چرخش زمین این نصف‌النهار را به طرف غرب، یعنی در جهت FD می‌برد. بنابه تعریف EA جهت مثبت محور x است که به طرف شرق و عمود بر صفحهٔ $BPCF$ رسم می‌شود. روشن است که A روی استوای سماوی است و بنابراین بُعد آن $\alpha + ۹۰°$ است (زیرا $FA = ۹۰°$ و $\Upsilon F = \alpha$ که در آن Υ نقطهٔ اعتدال بهاری است). همچنین FC برابر δ (میل ستاره) است. EB محور y است.

فرض کنید EX جهت زمین‌مرکزی ماه و (z و y و x) مختصات قائم آن برحسب شعاع استوایی زمین، نسبت به دستگاه مختصات تعریف شده در بالا باشد. اگر X را با کمانهای دایرهٔ عظیمه‌ای به B،A،و C وصل کنیم خواهیم داشت

$$\frac{x}{r_۱} = \cos AX, \frac{y}{r_۱} = \cos BX, \frac{z}{r_۱} = \cos CX$$

در مثلث کروی APX داریم

$$PX = ۹۰° - \delta_۱, \qquad PA = ۹۰°, \qquad X\hat{P}A = (۹۰° + \alpha) - \alpha_۱$$

بدین ترتیب، بابه کار بردن فرمول کسینوس، نتیجه می‌گیریم

$$x = r_۱ \cos\delta_۱ \sin(\alpha_۱ - \alpha) \qquad (۱)$$

در مثلث کروی BPX داریم

$$BP \equiv FC = \delta \quad , \quad PX = ۹۰° - \delta_۱$$
$$B\hat{P}X \equiv B\hat{P}A + A\hat{P}X = ۱۸۰° + \alpha - \alpha_۱$$

از این‌رو، با استفاده از فرمول کسینوس داریم

$$y = r_۱[\sin\delta_۱ \cos\delta - \cos\delta_۱ \sin\delta \cos(\alpha_۱ - \alpha)] \qquad (۲)$$

نیازی به عبارت متناظر به z نداریم.

چون صفحهٔ بنیادی بر خط راست واصل بین مرکز ماه و ستاره عمود است، x و y، در هر لحظه، مختصات مرکز سایهٔ ماه در نور ستاره روی صفحهٔ بنیادی هستند. به عبارت دیگر، x و y مختصات نقطهٔ تلاقی محور استوانه با صفحهٔ بنیادی‌اند.

همچنین r_1 و P_1 به وسیلهٔ فرمول زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{1}{r_1} = \sin P_1 \tag{۳}$$

$(\alpha_1 - \alpha)$ و $(\delta_1 - \delta)$ را برای اختفا، می‌توان زاویه‌هایی کوچک در نظر گرفت. اگر $(\alpha_1 - \alpha)$ برحسب ثانیهٔ زمانی و $(\delta_1 - \delta)$ و P_1 برحسب ثانیهٔ قوسی بیان شوند، برای پیشگویی، فرمولهای (۱) و (۲) را می‌توان، با استفاده از فرمول (۳)، با دقت کافی به صورت زیر نوشت

$$x = \frac{15}{P_1}(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1 \tag{۴}$$

$$y = \frac{(\delta_1 - \delta)}{P_1} \tag{۵}$$

حال مختصات (ξ, η) راصد را نسبت به صفحهٔ بنیادی در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۳۵، برای پرهیز از پیچیدگی فرض خواهیم کرد که EX جهت زمین‌مرکزی راصد و بنابراین PX نصف‌النهار راصد را نمایش دهد. مانند قبل داریم

$$\frac{\xi}{\rho} = \cos AX, \qquad \frac{\eta}{\rho} = \cos BX$$

اینک در مثلث APX داریم: $PX = 90° - \phi'$، $PA = 90°$ و $X\hat{P}A = C\hat{P}A - C\hat{P}X$. اگر h زاویهٔ ساعتی ستاره در لحظهٔ مورد نظر را نشان دهد، $C\hat{P}X = h$ و بنابراین $X\hat{P}A = 90° - h$. از این‌رو

$$\xi = \rho\cos\phi'\sin h \tag{۶}$$

همینطور در مثلث BPX داریم

$$BP = \delta \text{ ، } PX = 90° - \phi'$$

و

$$B\hat{P}X = 90° + (90° - h) = 180° - h$$

از این‌رو

$$\eta = \rho[\cos\delta\sin\phi' - \sin\delta\cos\phi'\cos h] \tag{۷}$$

با مراجعه به شکل ۱۳۴ می‌بینیم که، برای پنهان یا نمایان شدن ستاره، نقطهٔ تصویر راصد روی صفحهٔ بنیادی باید روی دایره‌ای به شعاع k که در آن استوانه صفحهٔ بنیادی را قطع می‌کند قرار داشته باشد. این شرط به صورت زیر بیان می‌شود

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=k^2 \qquad (۸)$$

برای محاسبهٔ اختفا، مقدار k (شعاع ماه که به واحد شعاع استوایی زمین بیان می‌شود) را ۲۷۲۵ر۰ می‌گیرند.

۲۰۵. عناصر بسلی اختفا

کمیتهای وابسته به اختفای ستاره‌ای معین به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$T_\circ$، زمان جهانی مقارنه در بُعد ماه و ستاره.

H، زاویهٔ ساعتی ستاره در گرینویچ در لحظهٔ $T_\circ$.

Y، مقدار مختصهٔ y [فرمول (۵) را ببینید] در لحظهٔ $T_\circ$. روشن است که در این لحظه مقدار مختصهٔ x صفر است.

x' و y'، آهنگ تغییر x و y در ساعت زمان خورشیدی متوسط

این کمیتها عناصر بسلی اختفا نام دارند و اساس پیشگویی زمان رویداد اختفا در هر ایستگاه رصدی ویژه را تشکیل می‌دهند. داده‌های اختفا در زیجهای نجومی درج نمی‌شوند زیرا، از آنجا که هر اختفا فقط در ناحیهٔ محدودی از سطح زمین قابل مشاهده است، درج این داده‌ها در تقویمهای نجومی بین‌المللی مناسب نیست. با این حال اختفاهایی که در جزایر بریتانیا، نیوزیلند و بخشهایی از استرالیا قابل رؤیت‌اند در کتاب دستی انجمن ستاره‌شناسی بریتانیا درج می‌شوند.

۲۰۶. پیشگویی اختفا در هر محل

فرض خواهیم کرد که نخست تخمینی تقریبی از زمان جهانی یک اختفا که در نقطه‌ای خاص روی سطح زمین قابل رؤیت است، به دست آمده باشد. بعداً به روشهایی برای به دست آوردن این زمان جهانی تخمینی، که فرض می‌کنیم $(T_\circ+t)$ باشد، اشاره خواهیم کرد.

اگر λ طول جغرافیایی راصد در غرب گرینویچ باشد، زاویهٔ ساعتی ستاره، h، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$h=H-\lambda+t' \qquad (۹)$$

که در آن t' تعداد ساعتهای نجومی معادل t ساعت زمان متوسط خورشیدی است. از این‌رو مقادیر ξ و η در زمان جهانی $(T_\circ+t)$ را می‌توان از روابط (۶) و (۷) و مختصات زمینی معلوم راصد، ρ و ϕ'، محاسبه کرد. میل ستاره در تقویمهای نجومی موجود است.

همچنین، چون در لحظهٔ $T_\circ$، $x = \circ$ (ماه و ستاره از لحاظ بُعد در مقارنه‌اند) و $y = Y$ است، پس در زمان $(T_\circ + t)$ داریم

$$x = x't, \qquad y = Y + y't \tag{۱۰}$$

که در آن t برحسب ساعت بیان می‌شود.

اگر $(T_\circ + t)$ در واقع زمان واقعی اختفا باشد، معادلهٔ زیر باید به ازای مقادیر ξ، η، x، و y که در بالا محاسبه شدند برقرار باشد

$$(x - \xi)^۲ + (y - \eta)^۲ = k^۲$$

ولی به‌طور کلی، زمان تخمینی احتمالاً به اندازهٔ یک یا دو دقیقه با زمان واقعی اختلاف خواهد داشت که به ترتیب زیر به تصحیح آن می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $(T_\circ + t)$ زمان تخمین باشد و $(T_\circ + t + \Delta t)$، که در آن Δt برحسب ساعت بیان می‌شود، زمان دقیق مورد نظر باشد. مقادیر x، y، ξ، و η را برای زمان جهانی $(T_\circ + t)$، چنانکه قبلاً نشان داده شد، محاسبه می‌کنیم به این ترتیب، مقادیر x، y، ξ، و η متناظر با زمان واقعی $(T_\circ + t + \Delta t)$ اختفا را از روابط زیر به دست می‌آوریم

$$\left.\begin{aligned} y = y_۱ + y'\Delta t, \qquad x = x_۱ + x'\Delta t \\ \eta = \eta_۱ + \eta'\Delta t, \qquad \xi = \xi_۱ + \xi'\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{۱۱}$$

که در آنها ξ' و η' آهنگ تغییر ξ و η در یک ساعت متوسط خورشیدی را نشان می‌دهند. چون برای اختفا رابطهٔ(۸) باید برقرار باشد، داریم

$$[x_۱ - \xi_۱ + \Delta t(x' - \xi')]^۲ + [y_۱ - \eta_۱ + \Delta t(y' - \eta')]^۲ = k^۲$$

یا، با نوشتن

$$y_۱ - \eta_۱ = g, \qquad x_۱ - \xi_۱ = f \tag{۱۲}$$

و چشمپوشی از مربعات Δt، نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta t = \frac{k^۲ - f^۲ - g^۲}{۲(fx' + gy' - f\xi' - g\eta')} \tag{۱۳}$$

در این فرمول $k = \circ$ر۲۷۲۵ ؛ f و g از کمیتهای $x_۱$، $\xi_۱$، $y_۱$، و $\eta_۱$ محاسبه شده برای زمان جهانی $(T_\circ + t)$ به دست می‌آیند؛ x' و y' نیز عناصر بسلی معلوم‌اند. برای محاسبهٔ Δt باید

مقادیر ξ' و η' را بدانیم. حال از روابط (۶) و(۷) داریم

$$\xi' \equiv \frac{d\xi}{dt} = \rho\cos\phi'\cos h\frac{dh}{dt} \tag{۱۴}$$

$$\eta' \equiv \frac{d\eta}{dt} = \rho\cos\phi'\sin\delta\sin h\frac{dh}{dt} \tag{۱۵}$$

که در آنها dh/dt یعنی تغییر زاویهٔ ساعتی ستاره (برحسب مقیاس دایره‌ای) در یک ساعت زمان خورشیدی متوسط. h در مدت $۲۳^{\mathrm{h}}۵۶^{\mathrm{m}}$ زمان خورشیدی متوسط از صفر به ۲π افزایش می‌یابد، بنابراین

$$\frac{dh}{dt} = \frac{۲\pi}{۲۳٫۹۳} = ۰٫۲۶۲۵$$

سپس با قرار دادن

$$Q = \rho\cos\phi'\cos h \tag{۱۶}$$

از روابط (۶)، (۱۴)،(۱۵)، و(۱۶) داریم

$$f\xi' + g\eta' = ۰٫۲۶۲۵(fQ + g\xi\sin\delta) \tag{۱۷}$$

$$= ۰٫۲۶۲۵a_{\circ}$$

که در آن کمیت درون پرانتزها را مساوی $a_{\circ}$ گرفته‌ایم. از این‌رو

$$\Delta t = \frac{k^۲ - f^۲ - g^۲}{۲[fx' + gy' - ۰٫۲۶۲۵a_{\circ}]} \tag{۱۸}$$

که از آن می‌توان Δt را به دست آورد.

در صورت لزوم، می‌توان با در نظر گرفتن $(T_{\circ} + t + \Delta t)$ به عنوان زمان تقریبی پدیده، و تکرار محاسبات به شرح بالا به دقت بیشتری دست یافت.

چندین روش ترسیمی[۱] وجود دارند که با آنها می‌توان زمان تقریبی پدیده را تخمین زد. ما می‌توانیم، تنها به‌طور خلاصه، به روشی که توسط اِل.ج.کومری پیشنهاد شده است اشاره کنیم. به تصویر مکان راصد روی صفحهٔ بنیادی به عنوان مبدأ باز می‌گردیم، مختصات مرکز سایه (f, g)

۱. مثلاً به کتاب زیر مراجعه شود:

W.F.Rigge, *The Graphic Construction of Eclipsesand Occultations*, (Loyola Univ. Press,Chicago,1924).

هستند، دایره‌ای به شعاع k رسم کنید و مقادیر f و g را برای سه زمان t_1، t_2، و t_3 در پیرامون T. حساب کنید. در عمل t_1، t_2، و t_3 همیشه سه مقدار پیاپی رشتهٔ -2^h، -1^h، 0^h، $+1^h$، $+2^h$، که در آن 0^h متناظر T. است، در نظر گرفته می‌شوند. با ترسیم مکانهایی که به کمک این مقادیر (f, g) معین شده‌اند، مسیر مرکز سایه را نسبت به مکان راصد به دست می‌آوریم. این مسیر یا منحنی تقریباً یک خط راست است. معمولاً اگر اختفا ممکن باشد این منحنی، دایرهٔ به شعاع k را در دو نقطه قطع خواهد کرد، و زمانهای مربوط از داده‌هایی که با آنها این منحنی رسم شده است استنتاج می‌شوند. این زمانها، زمانهای تقریبی پنهان شدن و نمایان شدن‌اند. سپس فرمول (۱۸) می‌تواند برای پی بردن به زمان وقوع اختفا به کار برده شود.

طبق شکل، χ، زاویهٔ مکان مربوط به پنهان شدگی یا نمایان شدگی (که از نقطهٔ شمال قرص ماه به طرف شرق اندازه‌گیری می‌شود) از روابط زیر به دست می‌آید

$$\sin\chi = -\frac{f}{k} \quad , \quad \cos\chi = -\frac{g}{k} \tag{۱۹}$$

که در اینجا f و g به یکی از دو نقطهٔ تلاقی مسیر و دایره مربوط می‌شوند.

اختفاهایی که در گرینویچ و ادین‌بورو قابل رؤیت‌اند در کتاب دستی انجمن ستاره شناسی بریتانیا درج می‌شوند. زمان تقریبی پدیده در مکانی، مثلاً $\Delta\lambda$ درجه غرب و $\Delta\phi$ درجه شمال ادین‌بورو از فرمول زیر به دست می‌آید

زمان تقریبی = (زمان جهانی پیشگویی شده برای ادین‌بورو) $+ a\Delta\lambda + b\Delta\phi$

که در آن کمیتهای a و b برای هر اختفا جدول‌بندی می‌شوند. این زمان تقریبی مبنای پیشگویی دقیق، طبق روش توصیف شده در بالا، قرار می‌گیرد.

۲۰۷. تعدیل اختفا

فرض کنید T زمان جهانی لحظهٔ رصد یک اختفا را نشان دهد. چون زیج ماه برحسب زمان زیجی داده می‌شود، نخست آخرین تقریب ΔT به زمان رصد اعمال می‌شود. از روابط (۴) و(۵) داریم.

$$x = \frac{15}{P_1}(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1 \tag{۲۰}$$

$$y = \frac{\delta_1 - \delta}{P_1} \tag{۲۱}$$

که در آن α_1، δ_1، و P_1 بُعد، میل، و اختلاف‌منظر افقی ماه مربوط به زمان T هستند؛ $(\alpha_1 - \alpha)$ برحسب ثانیهٔ زمانی و $(\delta_1 - \delta)$ برحسب ثانیهٔ قوسی بیان می‌شوند. معمولاً به جای (۲۱) فرمول دقیقتری به کار برده می‌شود که به روش زیر به دست می‌آید. از روابط (۲) و (۳) داریم

$$y = \frac{\sin(\delta_1 - \delta)}{\sin P_1} + \frac{2}{\sin P_1}\cos\delta_1 \sin\delta \sin^2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}\right)$$

که اگر $(\delta_1 - \delta)$، $(\alpha_1 - \alpha)$، و P_1 برحسب همان واحدهای بالا بیان شوند، چنین می‌شود

$$y = \frac{\delta_1 - \delta}{P_1} + \frac{(\alpha_1 - \alpha)\cos\delta_1 \sin\delta}{2P_1} 15^2(\alpha_1 - \alpha)\sin 1''$$

یا، بابه کار بردن فرمول (۲۰) داریم

$$y = \frac{\delta_1 - \delta}{P_1} + \frac{x(\alpha_1 - \alpha)\sin\delta}{27500} \qquad (22)$$

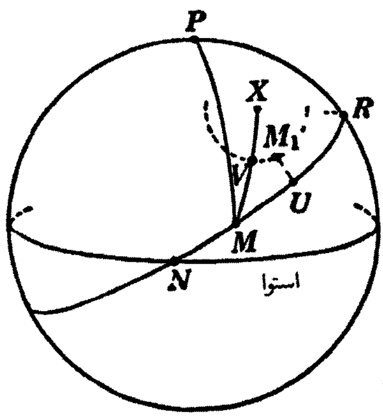
با فرمولهای (۲۰) و (۲۲) می‌توان کمیتهای x و y متناظر با زمان T را محاسبه کرد.

اگر h زاویهٔ ساعتی ستاره در T باشد، مقادیر ξ و η را از روابط (۶) و(۷) محاسبه می‌کنیم. سپس f و g را برای زمان T به دست می‌آوریم

$$f = x - \xi, \qquad g = y - \eta \qquad (23)$$

فرض کنیم که X در شکل ۱۳۶ مکان ستاره در لحظهٔ T باشد و به سبب خطا در طول متوسط سماوی، بُعد و میل جدول‌بندی شدهٔ ماه خطا داشته باشند. فرض کنیم M، طبق مقادیر جدول‌بندی شدهٔ α_1 و δ_1 در زمان T، مرکز ماه باشد. بدین ترتیب فاصلهٔ زاویه‌ای XM، که از مقادیر دارای خطای α_1 وδ_1 محاسبه می‌شود، تا اندازه‌ای با فاصلهٔ زاویه‌ای رصد شده، که نیم‌قطر S ماه است، متفاوت خواهد بود. کمان XM را باS' نشان می‌دهیم. اگر زاویهٔ PMX یعنی زاویهٔ مکانی ستاره نسبت به M را با χ نشان دهیم، از روابط (۱۹) و (۲۳) داریم

$$\tan\chi = f/g = (x - \xi)/(y - \eta) \qquad (24)$$



شکل۱۳۶

که از آن χ محاسبه می‌شود. همچنین

$$-r_1 S' = (x-\chi)\operatorname{cosec}\chi = (y-\eta)\sec\chi$$

که در آن S' برحسب مقیاس دایره‌ای بیان می‌شود. از این رابطه S' را محاسبه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم NMR در شکل ۱۳۶، دایرهٔ عظیمهٔ تعیین شده به وسیلهٔ صفحهٔ مداری ماه باشد. اگر ρ زاویهٔ مکانی PMR باشد، آن وقت زاویهٔ XMR برابر $\rho-\chi$ خواهد بود.

ρ به روش زیر محاسبه می‌شود. فرض کنید $\Delta\alpha_1$ و $\Delta\delta_1$ تغییر α_1 (برحسب ثانیهٔ زمانی) و δ_1 (برحسب ثانیهٔ قوسی) در یک دقیقه را نشان دهند. این کمیتها از تقویمهای نجومی به دست می‌آیند. بنابراین مؤلفه‌های حرکت ماه در امتداد مدارش، در مقیاس دایره‌ای عبارت‌اند از $15\Delta\alpha_1 \sin 1'' \cos\delta_1$ (در امتداد موازی میل از M) و $\Delta\delta_1 \sin 1''$ (در امتداد نصف‌النهار MP). از این‌رو

$$\tan\rho = \frac{15\Delta\alpha_1\cos\delta_1}{\Delta\delta_1} \qquad (25)$$

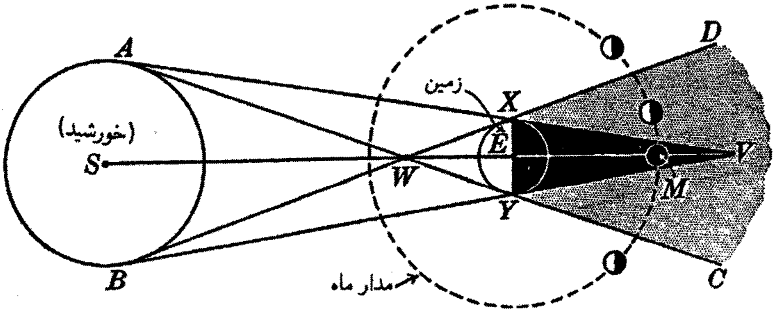
خلاصهٔ مطلب اینکه در شکل ۱۳۶ برای لحظهٔ T که عملاً اختفا رصد شده است نکات زیر را می‌دانیم: (الف مکان ستارهٔ X، (ب) فاصلهٔ زاویه‌ای $XM(=\delta')$ و (ج) زاویهٔ $XMR(=\rho-\xi)$. اکنون در لحظهٔ اختفا، T، فاصلهٔ زاویه‌ای ستارهٔ X از مرکز ماه برابر S (نیم‌قطر ماه) است. چون مکان X را به‌طور قطع می‌دانیم، مرکز ماه باید در جایی روی دایرهٔ صغیره به مرکز X و شعاع زاویه‌ای S (که XM را در V قطع می‌کند) قرار گیرد. فرض کنید M_1 مکان واقعی مرکز ماه باشد. M_1U را عمود بر NMR رسم کنید. در این صورت MU نشانگر تصحیح لازم در طول سماوی جدول‌بندی شدهٔ ماه است(که در امتداد NMR اندازه‌گیری می‌شود) و UM_1 تصحیح متناظر در عرض سماوی آن. MU را با $\Delta\lambda$ و UM_1 را با $\Delta\beta$ نمایش می‌دهیم. این کمیتها در مقایسه با S (یا XV) کوچک‌اند و بنابراین کمان MV (یا $S'-S$) کوچک است. بنابراین مرکز واقعی ماه، M_1، به V نزدیک است به‌طوری که M_1V بر XM عمود است. با تصویر کردن MU و UM_1 روی MV نتیجه می‌گیریم

$$S'-S = \Delta\lambda\cos(\rho-\chi) + \Delta\beta\sin(\rho-\chi) \qquad (26)$$

چندین رصد از یک اختفا که در محلهای مختلف انجام می‌گیرند به همان تعداد معادله‌های به‌صورت (۲۶) فراهم می‌آورند. حل این معادلات، به روش کمترین مربعات، به مقادیر $\Delta\lambda$ و $\Delta\beta$ می‌انجامد.

۲۰۸. گرفتگیهای ماه

ماه گرفتگی هنگامی رخ می‌دهد که ماه از سایهٔ زمین (نسبت به نور خورشید) عبور کند. این پدیده فقط هنگامی رخ می‌دهد که زمین مستقیماً در فاصلهٔ بین خورشید و ماه قرار گیرد و ماه در مقابله



شکل۱۳۷

باشد؛ این همان «ماه بدر» است.

اگر صفحهٔ مداری ماه منطبق بر صفحه دایرة‌البروج بود، ماه گرفتگی در هر ماه بدر اتفاق می‌افتاد. ولی چون صفحهٔ مداری تحت زاویه‌ای حدود $5°$ نسبت به صفحهٔ دایرة‌البروج مایل است، چگونگی رخ دادن یک ماه گرفتگی مستلزم این است که ماه به هنگام بدر روی دایرة‌البروج یا نزدیک به آن باشد، یعنی، ماه باید در یکی از گره‌ها یا نزدیک به آن باشد.

وقتی تمامی قرص ماه تاریک می‌شود، می‌گویند ماه گرفتگی کلی است؛ هنگامی که در نهایت تنها قسمتی از ماه تاریک شود، گرفتگی یک گرفتگی جزئی است.

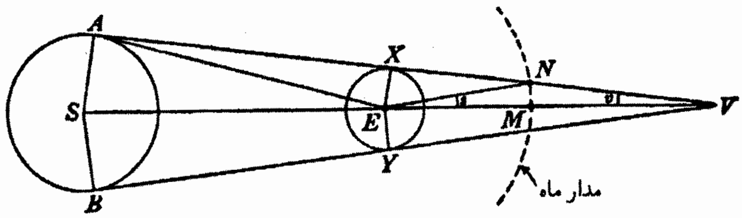
در شکل ۱۳۷ فرض می‌کنیم S و E به ترتیب مرکز خورشید و زمین باشند. مخروطی می‌توان رسم کرد که مولدهای آن مماسهای خارجی بر کره‌های خورشید و زمین باشند؛ رأس این مخروط در V است، و آن قسمت از مخروط (سایه زدگی تیره) که بین XV و YV قرار دارد سایه نام دارد. مدار ماه در شکل نشان داده شده است و اگر ماه کلاً از درون سایه بگذرد، گرفتگی کلی رخ می‌دهد.

مخروط دیگری می‌توان رسم کرد که مولدهای آن مماسهای داخلی بر کره‌های خورشید و زمین باشند؛ رأس آن W است. قسمتهای این مخروط (سایه زدگی روشن)که با DXV و CYV نشان داده شده است مقدار متغیری از روشنایی خورشید را دریافت می‌کند؛ روشنایی در امتداد XD و YC کامل، و در امتداد XV و YV صفر است. قسمتهای مخروط داخلی که به‌طور روشن سایه زده شده است نیم‌سایه را تشکیل می‌دهد، و وقتی ماه از نیم‌سایه به طرف سایه می‌رود درخشندگی آن به‌تدریج کاهش می‌یابد و هنگامی که ماه به‌کلی در سایه قرار می‌گیرد، کاملاً غیرواضح می‌شود.

۲۰۹. شعاع زاویه‌ای مخروط سایه در فاصلهٔ زمین‌مرکزی ماه

در بقیهٔ این فصل از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

P، اختلاف‌منظر افقی استوایی خورشید.



شکل۱۳۸

P_1، اختلاف‌منظر افقی استوایی ماه.

S، نیم‌قطر خورشید

S_1، نیم‌قطر ماه.

r، فاصلهٔ زمین‌مرکزی خورشید.

r_1،فاصلهٔ زمین‌مرکزی ماه.

s، شعاع زاویه‌ای مخروط سایه (از دیدگاه مرکز زمین) در فاصلهٔ ماه.

فرض می‌کنیم که r و r_1 برحسب شعاع استوایی زمین به عنوان واحد فاصله بیان شوند.

شکل ۱۳۸ را در نظر می‌گیریم. شعاع مخروط سایه در فاصلهٔ ماه به هنگام گرفتگی کلی MN است. شعاع زاویه‌ای s نسبت به E، $N\hat{E}M$ است. $X\hat{V}E$ را با v نشان می‌دهیم. آن وقت داریم

$$X\hat{N}E = s + v$$

اما $X\hat{N}E$ زاویه‌ای است که شعاع زمین در ماه فرا گرفته می‌شود و اگر زمین یک کره در نظر گرفته شود مشاهده می‌کنیم که $X\hat{N}E = P_1$. از این‌رو

$$P_1 = s + v \qquad (۲۷)$$

همچنین داریم $S\hat{E}A = X\hat{A}E + v$. اما SEA زاویه‌ای است که شعاع خورشید در زمین فرا گرفته می‌شود و بنابراین برابر نیم‌قطر خورشید،S، است. همچنین، روشن است که $X\hat{A}E$ اختلاف منظر خورشید،P، است. از این‌رو

$$S = P + v \qquad (۲۸)$$

از روابط (۲۷) و (۲۸) داریم

$$s = P + P_1 - S \qquad (۲۹)$$

با روشی مشابه بسادگی نشان داده می‌شود که شعاع زاویه‌ای مخروط نیم‌سایه، s'، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$s = P + P_{۱} + S \qquad (۳۰)$$

فرمولهای s و s' در روابط (۲۹) و (۳۰) شعاعهای زاویه‌ای سایه‌های هندسی مربوط را به دست می‌دهند. ولی، معلوم می‌شود که جو زمین، به سبب جذب، این شعاعهای نظری را تقریباً ۲ درصد افزایش می‌دهد. از این‌رو برای پیشگویی ماه گرفتگیها عبارتهای زیر را به کار می‌بریم

$$s = \frac{۵۱}{۵۰}(P + P_{۱} - S) \qquad (۳۱)$$

$$s' = \frac{۵۱}{۵۰}(P + P_{۱} + S) \qquad (۳۲)$$

به عنوان مثال، با به کار بردن مقادیر $P = ۹''$، $P_{۱} = ۵۷'$، و $S = ۱۶'$، از رابطهٔ (۳۱) می‌یابیم که s خیلی نزدیک به $۴۲'$ است. بدین ترتیب قطر زاویه‌ای مخروط سایه $۸۴'$ است. اگر گرفتگی مرکزی باشد، یعنی اگر محور مخروط سایه، EV، از مرکز ماه بگذرد، گرفتگی کلی برای مدتی دوام خواهد داشت که مرکز ماه زاویهٔ $۸۴' - ۲S_{۱}$ یا (به فرض اینکه $S_{۱} = ۱۶'$) $۵۲'$ را بپیماید. چون زمان بین دو ماه بدر پیاپی تقریباً ۳۰ روز است. حرکت زاویه‌ای ماه نسبت به سایه تقریباً $۱۲°$ در روز یا $۳۰'$ در ساعت است. بنابراین گرفتگی مرکزی که مورد بحث ماست برای مدت تقریباً ۵۲/۳۰ ساعت یا حدود $۱\frac{۳}{۴}$ ساعت ادامه خواهد داشت.

مقدار s از یک بیشینه $۴۶'٫۷$ به یک کمینه $۳۸'٫۵$ تغییر می‌کند؛ مقدار بیشینه هنگامی رخ می‌دهد که ماه، در حالی که زمین در دورترین فاصلهٔ خود از خورشید (یعنی، در اوج) است، در نزدیکترین فاصلهٔ خود از زمین (یعنی، در حضیض) باشد؛ مقدار کمینه زمانی اتفاق می‌افتد که ماه در اوج و زمین در حضیض باشد.

طول سایهٔ زمین، EV، براحتی به دست می‌آید. از رابطه (۲۸) داریم $v = S - P$، به طوری که

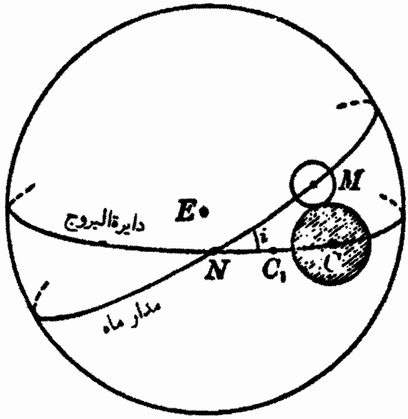
$$EV = EX \operatorname{cosec}(S - P)$$

با قرار دادن $S = ۱۶'$، $P = ۹''$، و $EX = ۳۹۶۰\,\text{mile}$ به‌دست می‌آوریم

$$EV = ۸۵۹,۰۰۰\,\text{mile}$$

۲۱۰. حدود گرفتگی

اکنون اثر میل صفحهٔ مداری ماه نسبت به دایرةالبروج را در محدود کردن تعداد گرفتگیها مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ فرض می‌کنیم MN در شکل ۱۳۹ دایرهٔ عظیمه‌ای روی کرهٔ سماوی به مرکز



شکل۱۳۹

E باشد که صفحهٔ مدار ماه را معین می‌کند. فرض کنید M و C به ترتیب مرکز ماه و سایه، به هنگام آغاز یک گرفتگی، باشند. فرض کنید وقتی ماه در گرهٔ N است مرکز سایه در C_1 باشد. NC_1 را با ξ نشان دهید و فرض کنید t زمان لازم برای رفتن ماه از N به M، و برای رفتن مرکز سایه از C_1 به C باشد. حال طول زمین‌مرکزی C برابر طول سماوی خورشید به علاوهٔ 180° است. از این‌رو، وقتی در پی یافتن مقدار بیشینهٔ ξ که به ازای آن نوعی گرفتگی رخ می‌دهد، هستیم در واقع، درصدد یافتن فاصلهٔ زاویه‌ای بیشینهٔ خورشید از گره دیگریم.

فرض کنید $\dot\theta$ آهنگ افزایش طول سماوی خورشید و $\dot\phi$ سرعت زاویه‌ای ماه در مدارش باشد؛ برای سادگی فرض می‌کنیم که $\dot\theta$ و $\dot\phi$ ثابت باشند. پس

$$NM = \dot\phi t \quad , \quad NC = \xi + \dot\theta t$$

اگر فاصلهٔ زاویه‌ای CM را با η، و زاویهٔ میل $M\hat{N}C$ را با i نشان دهیم و مثلث MNC را مسطح بگیریم، داریم

$$\eta^2 = (\xi + \dot\theta t)^2 + \dot\phi^2 t^2 - 2\dot\phi t(\xi + \dot\theta t)\cos i$$

یا

$$\eta^2 = \xi^2 - 2\xi t(\dot\phi\cos i - \dot\theta) + t^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 - 2\dot\theta\dot\phi\cos i)$$

آشکار است که η هنگامی کمینه است که t از رابطهٔ زیر داده شود

$$\xi(\dot\phi\cos i - \dot\theta) - t(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 - 2\dot\theta\dot\phi\cos i) = 0$$

و اگر این حداقل را $\eta_\circ$ بنامیم خواهیم داشت

$$\eta_\circ = \frac{\xi \dot{\phi} \sin i}{(\dot{\theta}^۲ + \dot{\phi}^۲ - ۲\dot{\theta}\dot{\phi}\cos i)^{\frac{۱}{۲}}} \tag{۳۳}$$

یا، اگر نسبت $\dot{\theta}/\dot{\phi}$ را q بنامیم، می‌توانیم (۳۳) را چنین بنویسیم

$$\xi = \eta_\circ (۱ - ۲q\cos i + q^۲)^{\frac{۱}{۲}} \operatorname{cosec} i \tag{۳۴}$$

چون q نسبت سرعت زاویه‌ای مداری زمین به سرعت زاویه‌ای مداری ماه، یا نسبت دورهٔ گردش نجومی ماه به سال است، با در نظر گرفتن مقادیر میانگین،q تقریباً ۳/۴۰ می‌شود. همچنین $i = ۵^\circ ۱۵$ و از این‌رو به دست می‌آوریم

$$\xi = ۱۰٫۳\eta_\circ \tag{۳۵}$$

اگر ماه در حال وارد شدن به مخروط سایه باشد

$$\eta_\circ = s + S_۱$$

که در آن کمیت s در رابطهٔ (۳۱) داده شده است. بدیهی است برای اینکه گرفتگی جزئی ممکن باشد، ξ نباید بر $۱۰٫۳(s + S_۱)$ فزونی یابد. برای یک گرفتگی کلی، ξ نباید از $۱۰٫۳(s - S_۱)$ بیشتر باشد. با اختیار مقادیر عددی زیر

$$P_۱ = ۳۴۲۳'' ,\ \ P = ۹'' \ \ ,\ \ S_۱ = ۹۳۳'' \ \ ,\ \ S = ۹۶۰''$$

برای اینکه گرفتگی جزئی امکان داشته باشد، باید داشته باشیم

$$\xi < ۱۰٫۳[\frac{۵۱}{۵۰}(P + P_۱ - S) + S_۱]$$

یا

$$\xi < ۹^\circ ٫۹$$

و برای اینکه گرفتگی کلی امکان داشته باشد، باید داشته باشیم

$$\xi < ۱۰٫۳[\frac{۵۱}{۵۰}(P + P_۱ - S) - S_۱]$$

یا

$$\xi < ۴^\circ ٫۶$$

مقدار ξ را برای امکانپذیربودن گرفتگی نیم‌سایه‌ای ماه می‌توان به روش مشابهی به‌دست آورد.
روش دیگر برای شرایط ماه گرفتگی محاسبهٔ حد گرفتگی است و آن بنابه تعریف حداکثر فاصلهٔ ممکن خورشید از گره در زمان مقابله در طول سماوی (ماه بدر) است. روش محاسبه تقریباً مشابه روشی است که برای خورشید گرفتگیها در بخش ۲۱۴ داده می‌شود. حد گرفتگی یک کمیت متغیر است، زیرا همهٔ کمیتهای وابسته متغیرند. مقدار بیشینهٔ آن ۳ر۱۲° است (که به آن حد بالایی گرفتگی می‌گویند) و مقدار کمینهٔ آن ۶ر۹° است (که حد پایینی گرفتگی نامیده می‌شود).

۲۱۱. محاسبهٔ ماه گرفتگی

فرض کنیم شرایط برای یک گرفتگی جزئی یا کلی برقرار باشد و M در شکل ۱۴۰ مکان ماه روی کرهٔ سماوی به مرکز E، و C مرکز سایهٔ زمین باشد. مختصات مرکز ماه و C را به ترتیب (α_1, δ_1) و (α_0, δ_0) می‌گیریم. CM را با η و $P\hat{C}M$ را با Q نشان می‌دهیم. آن وقت داریم

$$\sin\eta \sin Q = \cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_0)$$

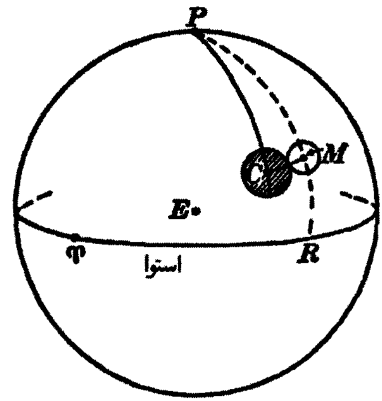
$$\sin\eta \cos Q = \sin\delta_1 \cos\delta_0 - \cos\delta_1 \sin\delta_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

یا، با دقت کافی

$$\eta \sin Q = (\alpha_1 - \alpha_0)\cos\delta_1 \qquad (۳۶)$$

$$\eta \cos Q = \delta_1 - \delta_0 \qquad (۳۷)$$

چون C به‌طور قطری در مقابل مرکز خورشید قرار دارد، بُعد C، α_0، برابر بُعد خورشید بعلاوهٔ 12^h، و میل C، δ_0، برابر منهای میل خورشید، δ، است.



شکل ۱۴۰

روابط زیر را می‌نویسیم

$$x \equiv (\alpha_1 - \alpha_0)\cos\delta_1 = \eta \sin Q \qquad (۳۸)$$

$$y \equiv \delta_1 - \delta_0 = \eta \cos Q \qquad (۳۹)$$

فرض می‌کنیم x' و y' تغییرات ساعتی x و y باشند که با محاسبه x و y در بازه‌های یک ساعتی در پیرامون زمان گرفتگی پیدا می‌شوند. فرض می‌کنیم T_0 لحظهٔ مناسب نزدیک مقابله (مثلاً زمان زیجی مقابله در بُعد تا نزدیکترین ساعت) باشد و x_0 و y_0 مقادیر محاسبه شدهٔ x و y در این لحظه باشند. در زمان زیجی $(T_0 + t)$، که در آن t برحسب ساعت است، می‌توانیم بنویسیم

$$x = x_0 + x't \ , \ \ y = y_0 + y't$$

از این‌رو با استفاده از روابط (۳۸) و (۳۹)، داریم

$$\eta \sin Q = x_0 + x't$$

$$\eta \cos Q = y_0 + y't$$

جایگذاریهای زیر را انجام می‌دهیم

$$x_0 = m \sin M, y_0 = m \cos M \qquad (۴۰)$$

$$x' = n \sin N, y' = n \cos N \qquad (۴۱)$$

از مقادیر عددی معلوم x_0، y_0، x'، و y' مقادیر m، M، n، و N را می‌توان به دست آورد. پس داریم

$$\eta \sin Q = m \sin M + nt \sin N \qquad (۴۲)$$

$$\eta \cos Q = m \cos M + nt \cos N \qquad (۴۳)$$

بامجذورکردن این معادلات و جمع کردن آنها، خواهیم داشت

$$\eta^2 = m^2 + 2mnt\cos(M - N) + n^2t^2$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N) \pm \left[\frac{\eta^2 - m^2\sin^2(M - N)}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۴)$$

با نوشتن

$$m \sin(M - N) = \eta \sin \psi \qquad (۴۵)$$

فرمول (۴۴) به صورت زیر در می‌آید

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N) \pm \frac{\eta}{n}\cos\psi \qquad (۴۶)$$

اکنون شرایط یک گرفتگی را می‌توان اعمال کرد. برای نخستین و چهارمین تماس (هنگامی که ماه در شُرَف وارد شدن به سایه یا در شُرف ترک کردن آن است)، داریم

$$\eta = \frac{۵۱}{۵۰}(P + P_۱ - S) + S_۱$$

وقتی این مقدار η در (۴۶) گذاشته می‌شود زمانهای نخستین و چهارمین تماس به دست می‌آیند.

برای تماسهای دوم و سوم (آغاز و پایان گرفتگی کلی)، مقدار η از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\eta = \frac{۵۱}{۵۰}(P + P_۱ - S) - S_۱$$

و هنگامی که این مقدار η در فرمول (۴۶) قرار داده می‌شود، زمانهای آغاز و پایان مرحلهٔ گرفتگی کلی به دست می‌آیند.

زمان میان گرفتگی خواه جزئی باشد خواه کلی، $T_۰ + t'$ است که در آن

$$t' = -\frac{m}{n}\cos(M - N)$$

قدر یک گرفتگی جزئی کسری از قطر ماه است که تاریک می‌شود و عبارت است از

$$\frac{\eta - m\sin(M - N)}{۲S_۱}$$

که در آن $m\sin(M - N)$ برای زمان میان گرفتگی، مثبت در نظر گرفته می‌شود و η میانگین مقادیر به کار رفته برای اولین و آخرین تماس با سایه است.

می‌ماند، پیشگویی زاویهٔ مکانی نقطه‌ای روی قرص ماه، که در آن گرفتگی آغاز می‌شود و یا پایان می‌یابد. با مراجعه به شکل ۱۴۰ می‌بینیم که این شکل برای نمایش چهارمین تماس، هنگامی که ماه در شُرَف بیرون آمدن از سایه است، رسم شده است. دایرهٔ عظیمهٔ واصل بین نقطهٔ تماس قرص ماه با سایه و مرکز سایه زاویهٔ PMC را با نصف‌النهار PM که از مرکز ماه می‌گذرد درست می‌کند. چون زاویه‌های مکانی در جهت NESW اندازه‌گیری می‌شوند، زاویهٔ مکانی نقطهٔ تماس، θ، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\theta = ۳۶۰^\circ - P\hat{M}C$$

یا

$$\theta = ۱۸۰^\circ + C\hat{M}R$$

اما چون CM کوچک است، $P\hat{C}M$ تقریباً برابر $C\hat{M}R$ است از این‌رو

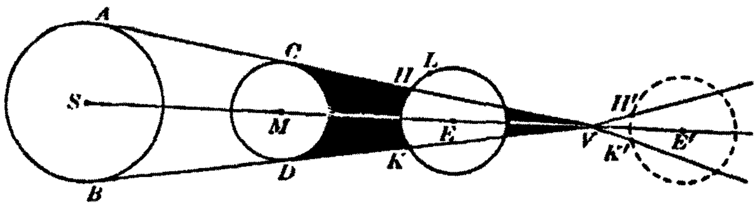
$$\theta = ۱۸۰^\circ + Q$$

Q از روابط (۴۲) و (۴۳)، با قرار دادن t مربوط به تماس چهارم در آنها، تعیین می‌شود. با روشی مشابه، می‌توان زاویهٔ مکانی نقطهٔ آغاز گرفتگی روی قرص ماه را به دست آورد.

۲۱۲. گرفتگیهای خورشید

خورشید گرفتگی ناشی از واقع شدن ماه بین خورشید و زمین است. بنابراین ماه باید در مقارنه با خورشید یا نزدیک به آن باشد، یعنی، ماه باید ماه نو باشد. همچنین، به سبب میل مدار ماه نسبت به دایرةالبروج، بدیهی است که گرفتگی نمی‌تواند رخ دهد مگر اینکه ماه روی دایرةالبروج یا نزدیک به آن باشد، یعنی، ماه باید در یکی از گره‌ها یا نزدیک به آن باشد.

از آنجا که شعاع ماه خیلی کوچکتر از شعاع زمین است، زمین نمی‌تواند کاملاً درون مخروط سایهٔ درست شده توسط مماسهای خارجی به کرهٔ خورشید و کرهٔ ماه قرار گیرد؛ در نتیجه، یک خورشید گرفتگی تنها در ناحیهٔ محدودی از سطح زمین قابل رؤیت است. این موضوع در شکل ۱۴۱ نشان داده شده است. در این شکل مخروط سایهٔ تشکیل شده به وسیلهٔ مماسهای خارجی که رأس آن در V قرار دارد، سیاه شده است و سایه نامیده می‌شود. نیم سایه، همانند مورد ماه گرفتگی، از رسم مماسهای داخلی به دست می‌آید. برای نقاطی از سطح زمین که بین H و K، درون سایه، قرار دارند ماه مانعی کامل در برابر نور خورشید ایجاد می‌کند و در این صورت گرفتگی را یک خورشید گرفتگی‌کلی می‌نامند. واضح است که ماه در نقطه‌ای مانند L تنها بخشی از قرص خورشید را پنهان می‌کند؛ در این صورت گرفتگی را گرفتگی جزئی می‌نامند. شرط امکان گرفتگی جزئی در L این است که L باید در نیم‌سایه باشد.



شکل ۱۴۱

اینکه اصلاً خورشید گرفتگی کلی امکان دارد ناشی از این واقعیت مساعد است که قطر زاویه‌ای ماه گهگاه بزرگتر از قطر زاویه‌ای خورشید می‌شود؛ آن وقت ماه، در آسمان، سطحی بزرگتر از خورشید را می‌پوشاند. از آنجا که مدار ماه دارای یک خروج از مرکزی حدود ۰٫۰۵۵ است، و قطرهای زاویه‌ای میانگین ماه و خورشید تقریباً برابرند، قطر زاویه‌ای ماه کمتر از قطر زاویه‌ای خورشید نیز می‌شود (این هنگامی رخ می‌دهد که ماه در نزدیکی اوج باشد) و در این حالت ماه کاملاً قرص خورشید را نمی‌پوشاند؛ تحت این شرایط، گرفتگی، به جای گرفتگی کامل، گرفتگی‌حلقوی نامیده می‌شود. این موضوع در شکل ۱۴۱ نشان داده شده است که در آن مراکز خورشید، ماه و زمین به ترتیب در S، M، و E' فرض می‌شوند؛ برای هر محلی بین H' و K'، گرفتگی حلقوی است.

۲۱۳. زاویهٔ مراکز خورشید و ماه از مرکز زمین در آغاز یا پایان یک خورشید گرفتگی جزئی

در شکل ۱۴۲ مماسهای داخلی بین خورشید و ماه، که نیم‌سایه را تشکیل می‌دهند، نشان داده شده‌اند. فرض کنید مماس AB، بر سطح زمین نیز در نقطهٔ C، مماس باشد. در این صورت سطح خورشید، برای راصدی در C، به‌طور کامل قابل رؤیت است. بدیهی است که وضعیت هندسی نشان داده شده در شکل، مربوط به آغاز یا پایان مرحلهٔ گرفتگی است، یعنی هنگامی که C در شُرُف ورود به نیم‌سایه یا ترک آن است. زاویهٔ MES را با D نشان می‌دهیم، داریم

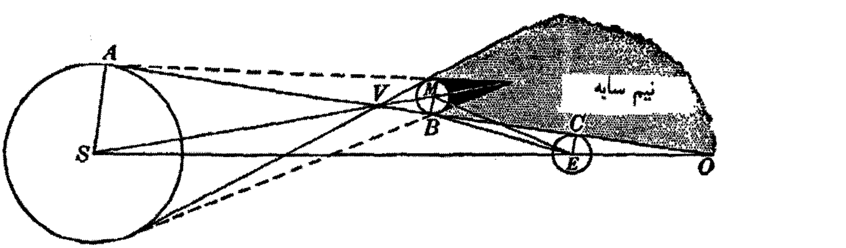
$$D = B\hat{E}S + M\hat{E}B \qquad (۴۷)$$

اما تحت شرایط رسم شده، MB تقریباً بر EB عمود است، به‌طوری که $M\hat{E}B = S_1$؛ از این‌رو

$$D = B\hat{E}S + S_1$$

و نیز

$$B\hat{E}S = O\hat{B}E + E\hat{O}B \qquad (۴۸)$$



شکل ۱۴۲

اما $O\hat{B}E$ همان $C\hat{B}E$ است که برابر اختلاف‌منظر افقی B، یا تقریباً اختلاف‌منظر افقی M است؛ پس $O\hat{B}E = P_1$
همچنین

$$E\hat{O}B \equiv E\hat{O}A = A\hat{E}S - E\hat{A}C$$

یا

$$E\hat{O}B = S - P$$

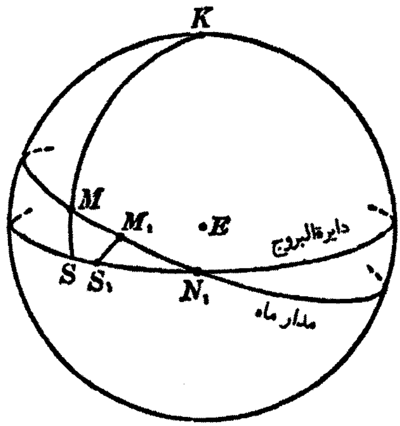
از این‌رو، از روابط (۴۷) و (۴۸) داریم

$$D = S + S_1 + P_1 - P \qquad (۴۹)$$

پس D، در زمان هر گرفتگی، قابل ارزیابی است.

۲۱۴. حدود گرفتگی

شکل ۱۴۳ را که در آن ماه و خورشید در نزدیکی گره نزولی N_1 در M و S متناظر به وضعیت ماه نو، طول زمین‌مرکزی یکسانی دارند در نظر می‌گیریم. عرض سماوی ماه SM، را با β و زاویهٔ میل، $M\hat{N}_1S$، مدار ماه نسبت به دایرةالبروج را با i نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم M_1 و S_1 مکان ماه و خورشید در لحظه‌ای بعد باشند و MM_1 را با y نشان می‌دهیم. اگر مثلث MN_1S



شکل ۱۴۳

را مسطح فرض کنیم، مشاهده می‌کنیم که طول سماوی ماه به اندازهٔ $MM_1 \cos i$ یا $y \cos i$، و طول خورشید به اندازهٔ SS_1 افزایش یافته‌اند. اگر m نسبت SS_1 به $y \cos i$ باشد، داریم

$$SS_1 = my \cos i \tag{۵۰}$$

همچنین، $SN_1 = \beta \cot i$ و $MN_1 = \beta \operatorname{cosec} i$است، به‌طوری که

$$S_1N_1 = \beta \cot i - my \cos i$$

و

$$M_1N_1 = \beta \operatorname{cosec} \ i - y$$

اگر فاصلهٔ زاویه‌ای M_1S_1 را با D نشان دهیم، آن وقت از مثلث $M_1N_1S_1$ (که مسطح فرض می‌شود)، داریم

$$\begin{aligned} D^2 = (\beta \cot i - my \cos i)^2 + (\beta \operatorname{cosec} i - y)^2 \\ - 2(\beta \cot i - my \cos i)(\beta \operatorname{cosec} i - y) \cos i \end{aligned}$$

که ممکن است به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} D^2 = (1 - 2m \cos^2 i + m^2 \cos^2 i) \left\{ y - \frac{\beta \sin i}{1 - 2m \cos^2 i + m^2 \cos^2 i} \right\}^2 \\ + \frac{\beta^2 (1-m)^2 \cos^2 i}{1 - 2m \cos^2 i + m^2 \cos^2 i} \end{aligned}$$

بدیهی است که حداقل مقدار D (که با $D_\circ$ نشان داده می‌شود) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$D_\circ = \frac{\beta (1-m) \cos i}{(1 - 2m \cos^2 i + m^2 \cos^2 i)^{\frac{1}{2}}}$$

یا

$$D_\circ = \frac{\beta (1-m) \cos i}{\left\{ \sin^2 i + (1-m)^2 \cos^2 i \right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{۵۱}$$

زاویهٔ j را چنین تعریف می‌کنیم

$$\tan j = \frac{\tan i}{1-m} \tag{۵۲}$$

پس

$$D_{\circ} = \beta \cos j \tag{۵۳}$$

در رابطهٔ (۵۲)، چون $i = ۵^\circ ۱۵$ر، $\tan i$ کمیتی کوچک (حدود ۱/۱۱) است و نیز تقریباً $m = ۳/۴۰$. با به کار بردن این مقادیر در رابطهٔ (۵۲) به‌دست می‌آوریم

$$\cos j = \cos i - ۰{,}۰۰۰۶ \cos i$$

به‌طوری که، با دقت کافی، می‌توانیم بسادگی بنویسیم

$$D_{\circ} = \beta \cos i = \beta(۱ - ۲ \sin^۲ \frac{i}{۲})$$

برای اینکه یک گرفتگی امکانپذیر باشد، $D_{\circ}$ نباید بر مقدار D در رابطه(۴۹) فزونی یابد؛ از این‌رو

$$\beta \left(۱ - ۲ \sin^۲ \frac{i}{۲}\right) < S + S_۱ + P_۱ - P$$

چون $\sin^۲ i/۲$ کمیتی کوچک است، با دقت کافی داریم

$$\beta < S + S_۱ + P_۱ - P + ۲(S + S_۱ + P_۱ - P) \sin^۲ \frac{i}{۲} \tag{۵۴}$$

برای ارزیابی جملهٔ آخر رابطهٔ (۵۴)، کافی است که مقادیر میانگین کمیتهای مربوط را به کار بریم؛ بدین ترتیب جملهٔ آخر برابر ۳ر′۰ است. همچنین می‌توانیم، با دقت کافی، P را برابر ۱ر′۰ قرار دهیم. از این‌رو

$$\beta < S + S_۱ + P_۱ + ۰'{,}۲ \tag{۵۵}$$

مقادیر بیشینهٔ S، $S_۱$، و $P_۱$ بدین ترتیب عبارت‌اند از ۳ر′۱۶، ۸ر′۱۶، و ۵ز′۶۱. از این‌رو بنابر رابطهٔ (۵۵)، اگر عرض سماوی شمالی یا جنوبی ماه، β، در زمان ماه نو بزرگتر از ۸ر′۳۴°۱ باشد، امکان خورشید گرفتگی در نزدیکی این مقارنهٔ خاص وجود ندارد.

اگر یک گرفتگی امکانپذیر باشد حد بالایی گرفتگی بنابه تعریف بیشترین فاصلهٔ خورشید از یک گره در زمان ماه نو است در شکل ۱۴۳ $SN_۱$ را با x نشان می‌دهیم. آن وقت داریم

$$\sin x = \tan \beta \cot i \tag{۵۶}$$

بدین ترتیب هنگامی که β دارای بزرگترین مقدار (۸ر′۳۴°۱)، و i دارای کمترین مقدار (۸′۵۸°۴) باشد x حداکثر است. با این مقادیر، ۴ر°۱۸ $= x$. از این‌رو اگر فاصلهٔ خورشید از یک گره در ماه نو بیشتر از ۴ر°۱۸ باشد، وقوع یک گرفتگی غیر ممکن است.

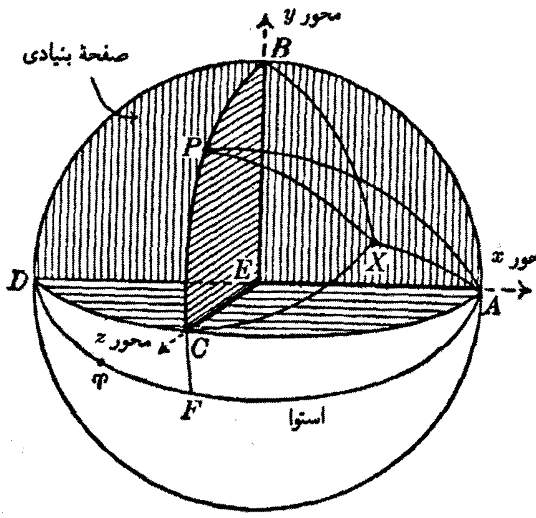
برای محاسبهٔ حد پایینی گرفتگی، کمترین مقدار β و بیشترین مقدار i را در نظر می‌گیریم. حداقل مقادیر S، S_1، و P_1 به ترتیب عبارت‌اند از ۸ر′۱۵، ۷ر′۱۴ و ۹ر′۵۳؛ از این‌رو، از رابطهٔ (۵۵)، کمترین مقدار β برابر ۶ر′۲۴°۱ می‌شود. بیشترین مقدار i برابر ۶ر′۱۸°۵ است. بنابراین، از رابطهٔ (۵۴)، حد پایینی گرفتگی برابر ۴ر°۱۵ خواهد شد. بدین ترتیب می‌بینیم که اگر خورشید در ماه نو درون ۴ر°۱۵ از یک گره باشد یک گرفتگی حتماً صورت می‌گیرد.

۲۱۵. عناصر بسلی خورشید گرفتگی

روشی که در پیشگویی گرفتگیها به کار می‌رود شبیه به روشی است که قبلاً در ارتباط با اختفا شرح داده شد.

فرض کنید خط EC از مرکز زمین، E، (شکل ۱۴۴) در لحظه‌ای معین به موازات خط راست و اصل بین مراکز ماه و خورشید رسم شود تا کره‌ای به مرکز E را در C قطع کند. EC محور z، و صفحهٔ DBA (هاشور زده شده)، که EC در E بر آن عمود است، صفحهٔ بنیادی است. اگر P قطب شمال سماوی باشد، صفحهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای که بر C و P می‌گذرد صفحهٔ بنیادی را در EB قطع می‌کند. EA و EB، مانند شکل متناظر در مبحث اختفا، به ترتیب محورهای x و y را تشکیل می‌دهند.

الف) عناصر x، y، و d. (α, δ) را بُعد و میل ظاهری خورشید و (α_1, δ_1) را مختصات متناظر ماه می‌گیریم.



شکل ۱۴۴

بُعد و میل نقطهٔ C روی کره را $((a,d))$ می‌گیریم.

فرض می‌کنیم (x,y,z) برحسب شعاع استوایی زمین به عنوان واحد، مختصات قائم خورشید نسبت به محورهای توصیف شده باشند. آن وقت اگر X مکان خورشید روی کره باشد، داریم

$$x = r\cos AX, \quad y = r\cos BX, \quad z = r\cos CX \tag{۵۷}$$

که در آنها r فاصلهٔ زمین‌مرکزی خورشید است.

حال A قطب CPB است و بنابراین باید روی استوا باشد؛ پس داریم $PA = ۹۰^\circ$، $FA = ۹۰^\circ$. از این‌رو بُعد A برابر $۹۰^\circ + \alpha$ است و بنابراین $X\hat{P}A = ۹۰^\circ + a - \alpha$. از آنجا که $PX = ۹۰^\circ - \delta$، از رابطهٔ نخست (۵۷)، با به کار بردن فرمول کسینوس، داریم

$$x = r\cos\delta\sin(\alpha - a) \tag{۵۸}$$

در مثلث PBX داریم $BP = d$. همچنین، چون $A\hat{P}B$ برابر ۹۰° است، داریم

$$X\hat{P}B = ۱۸۰^\circ + a - \alpha$$

از این‌رو

$$y = r[\sin\delta\cos d - \cos\delta\sin d\cos(\alpha - a)] \tag{۵۹}$$

در مثلث PCX، $PC = ۹۰^\circ - d$، $PX = ۹۰^\circ - \delta$ و $X\hat{P}C = \alpha - a$؛ بنابراین

$$z = r[\sin\delta\sin d + \cos\delta\cos d\cos(\alpha - a)] \tag{۶۰}$$

معادلات زیر به همان روشی که معادلات متناظر برای ماه به دست آمد حاصل می‌شوند

$$x_۱ = r_۱\cos\delta_۱\sin(\alpha_۱ - a)$$
$$y_۱ = r_۱[\sin\delta_۱\cos d - \cos\delta_۱\sin d\cos(\alpha_۱ - a)]$$
$$z_۱ = r_۱[\sin\delta_۱\sin d + \cos\delta_۱\cos d\cos(\alpha_۱ - a)]$$

اما چون محور z موازی خط واصل بین مراکز ماه و خورشید است، باید داشته باشیم

$$x = x_۱ \quad , \quad y = y_۱$$

مختصات (x,y) یا $(x_۱,y_۱)$ مختصات مرکز سایه روی صفحهٔ بنیادی هستند. از این‌رو

$$r\cos\delta\sin(\alpha - a) = r_۱\cos\delta_۱\sin(\alpha_۱ - a) \tag{۶۱}$$

$$r[\sin\delta\cos d-\cos\delta\sin d\cos(\alpha-a)]=r_1[\sin\delta_1\cos d-\cos\delta_1\sin d\cos(\alpha_1-a)] \quad (62)$$

مقادیر $\alpha_1, \delta, \alpha, r_1, r$ و δ_1 را در هر لحظه می‌توان معلوم فرض کرد؛ بدین ترتیب از روی فرمولهای (۶۱) و (۶۲) می‌توان a و d را محاسبه کرد. با این حال، چون در زمان گرفتگی یا نزدیک به آن α و δ به ترتیب اختلاف چندانی با α_1 و δ_1 ندارند این فرمولها را می‌توان به صورت ساده‌تری در آورد. نسبت زیر را می‌نویسیم

$$\frac{r_1}{r}=b \quad (63)$$

این نسبت به صورت زیر نیز بیان می‌شود

$$b=\frac{\sin P}{\sin P_1} \quad (64)$$

زیرا، طبق تعریف $1/r=\sin P$ و $1/r_1=\sin P_1$. بدین ترتیب b را که کمیتی کوچک در حدود ۱/۴۰۰ است، در هر زمان می‌توان محاسبه کرد. بانوشتن $[\alpha_1-\alpha+(\alpha-a)]$ به جای (α_1-a) در طرف راست فرمول (۶۱) بسط آن، فرمول زیر را به دست می‌آوریم

$$\sin(\alpha-a)\{1-b\sec\delta\cos\delta_1\cos(\alpha_1-a)\}=b\sec\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-a)\sin(\alpha_1-\alpha)$$

یا، با دقت کافی داریم

$$a=\alpha-\frac{b\sec\delta\cos\delta_1}{1-b}(\alpha_1-\alpha) \quad (65)$$

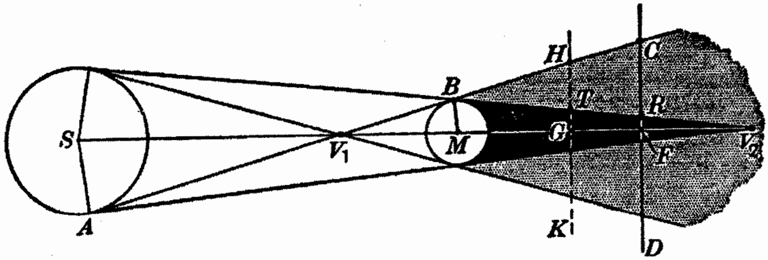
با روشی مشابه از فرمول(۶۲) به دست می‌آوریم

$$d=\delta-\frac{b}{1-b}(\delta_1-\delta) \quad (66)$$

کمیتهای a و d در بازه‌های یک ساعتی محاسبه می‌شوند.

به علاوه، تغییرات مختصات (x,y) مرکز سایه (در ساعت)، یعنی (x',y') نیز مورد نیازند که براحتی از اختلافهای مقادیر x و مقادیر y جدول‌بندی شده در زیجهای نجومی به دست آورده می‌شوند.

ب) عنصر μ. برای نصف النهار، زاویهٔ ساعتی C (شکل ۱۴۴) برابر زاویهٔ ساعتی نقطهٔ اعتدال بهاری ♈ منهای بُعد C است. به ویژه، اگر هنگامی که زمان نجومی زیجی برابر G است، زاویهٔ ساعتی C را نسبت به نصف النهار زیجی با μ نشان دهیم، در این صورت $\mu=G-a$. از این‌رو، با پیدا کردن a از فرمول (۶۵)، می‌توانیم در هر لحظه مقدار μ را محاسبه کنیم. همچنین واضح است که مقادیر μ' (تغییر μ در ساعت) را نیز می‌توانیم با روشهای ساده پیدا کنیم.



شکل۱۴۵

ج) عناصر $f_۱$ و $f_۲$. فرض می‌کنیم CD، در شکل ۱۴۵، مقطع صفحهٔ بنیادی با صفحه کاغذ باشد. نخست مخروط نیم‌سایه را که رأس آن در $V_۱$ است در نظر می‌گیریم. زاویهٔ $AV_۱S$ یا $FV_۱C$ را با $f_۱$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم R شعاع خطی خورشید و k شعاع خطی ماه باشد. در این صورت

$$\sin f_۱ = \frac{R}{SV_۱} = \frac{K}{V_۱M} = \frac{R+k}{SM}$$

ولی در طول هر گرفتگی با دقت کافی داریم $SM = r - r_۱$. از این‌رو با استفاده از فرمول (۶۳) به دست می‌آوریم

$$\sin f_۱ = \frac{R+k}{r(۱-b)} \qquad (۶۷)$$

در این فرمول صورت کسر، $R+K$، یک مقدار ثابت و برابر است با حاصل جمع شعاع خطی خورشید و ماه.

اگر زاویهٔ نیم قائم مخروط سایه یعنی $BV_۲M$ را با $f_۲$ نشان دهیم: به همین ترتیب به دست می‌آوریم

$$\sin f_۲ = \frac{R-k}{r(۱-b)} \qquad (۶۸)$$

زاویه‌های $f_۱$ و $f_۲$ به آسانی از فرمولهای (۶۷) و (۶۸) به دست می‌آیند.

د) عناصر $l_۱$ و $l_۲$. نظر به شکل ۱۴۵ و با توجه به محورهای از پیش تعیین شده معلوم می‌شود که MF مختصهٔ z مرکز ماه است. از این‌رو $MF = z_۱$. همچنین $V_۱M = k \operatorname{cosec} f_۱$. اگر $V_۱F$ مختصهٔ z رأس مخروط نیم‌سایه را با $c_۱$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$c_۱ = z_۱ + k \operatorname{cosec} f_۱ \qquad (۶۹)$$

و همینطور، اگر مختصهٔ z رأس V_2 مخروط سایه را با c_2 نشان دهیم داریم

$$c_2 = z_1 - k \operatorname{cosec} f_2 \tag{۷۰}$$

در هر مورد c_1 و c_2 کمیتهایی جبری‌اند که در جهت $\vec{FM}$ (جهت مثبت محور z) مثبت به حساب می‌آیند.

فرض کنید l_1 و l_2 نشاندهندهٔ شعاعهای دایره‌هایی باشند که مخروطهای نیم سایه و سایهٔ صفحهٔ بنیادی را قطع می‌کنند. پس داریم

$$l_1 \equiv FC = c_1 \tan f_1 \qquad \text{و} \qquad l_2 \equiv FR = c_2 \tan f_2 \tag{۷۱}$$

یا، با به کار بردن فرمولهای (۶۹) و (۷۰)

$$l_1 = z_1 \tan f_1 + k \sec f_1 \tag{۷۲}$$

$$l_2 = z_1 \tan f_2 - k \sec f_2 \tag{۷۳}$$

فرمولهای (۷۲) و (۷۳) امکان محاسبهٔ مقادیر عددی l_1 و l_2 را فراهم می‌آورند.

کمیتهای x، y، $\sin d$، $\cos d$، μ، l_1، و l_2 عناصر بسلی گرفتگی خوانده می‌شوند. این کمیتها نخست در بازه‌های یک ساعتی محاسبه می‌شوند و سپس در بازه‌های ۱۰ دقیقه‌ای در زیجهای نجومی به گونه‌ای ریزتر جدول‌بندی می‌شوند. مقدار هر یک از کمیتهای $\tan f_1$، $\tan f_2$، μ'، و d'، که در حد دقت لازم ثابت‌اند، نیز یک بار درج می‌شود. اینک نشان می‌دهیم که چگونه این عناصر در پیشگویی چگونگی گرفتگی به کار برده می‌شوند.

۲۱۶. محاسبات خورشید گرفتگی برای هر ایستگاه

در شکل ۱۴۵ محل تقاطع صفحه‌ای که از راصد موازی صفحهٔ بنیادی می‌گذرد با صفحهٔ کاغذ KH نامیده شده است. اگر مختصات راصد در هر لحظه نسبت به محورهای بنیادی (ξ, η, ζ) باشند، آن وقت صفحهٔ KH به وسیله رابطهٔ $z = \zeta$ معین می‌شود. اکنون شعاعهای دایره‌های واقع در صفحهٔ $z = \zeta$ را که از تقاطع این صفحه با مخروطهای نیم‌سایه و سایه به دست می‌آیند، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این شعاعها به ترتیب L_1 و L_2 باشند. بنابراین از شکل داریم $L_1 = GH$ و $L_2 = GT$. با توجه به اینکه $FG = \zeta$، پس داریم

$$L_1 = (c_1 - \zeta) \tan f_1$$

$$L_2 = (c_2 - \zeta) \tan f_2$$

یا، با به کار بردن رابطهٔ (۷۱) به‌دست می‌آوریم

$$L_1 = l_1 - \zeta \tan f_1 \qquad (۷۴)$$

$$L_2 = l_2 - \zeta \tan f_2 \qquad (۷۵)$$

L_1 همواره مثبت است. نظر به اینکه c_2 در جهت جبری خود به کار رفته است، وقتی رأس V_2 مخروط سایه (همانند شکل ۱۴۵) در سمت راست G قرار دارد L_2 منفی است. این شرط هندسی است که برخی نواحی سطح زمین می‌توانند درون مخروط سایه قرار گیرند. از این‌رو برای راصدی خاص، در فاصلهٔ ζ از صفحهٔ بنیادی، یک شرط گرفتگی کامل این است که L_2 محاسبه شده از رابطهٔ (۷۵) کمیتی منفی باشد.

فرض کنید ϕ' و ρ به ترتیب عرض و فاصلهٔ زمین‌مرکزی راصد، و λ طول جغرافیایی او در غرب گرینویچ باشد. اینک در شکل ۱۴۴ فرض می‌کنیم X نمایشگر سمت‌الرأس زمین‌مرکزی راصد روی کرهٔ سماوی باشد. در این صورت داریم

$$\xi = \rho \cos AX, \qquad \eta = \rho \cos BX, \qquad \zeta = \rho \cos CX \qquad (۷۶)$$

حال PX نصف‌النهار راصد است و، چون μ زاویهٔ ساعتی زیجی C است، زاویهٔ ساعتی C برای راصد، مثلاً h، عبارت است از $X\hat{P}C = \mu - \lambda - ۱٫۰۰۲۷\Delta T$. بنابراین $X\hat{P}A = ۹۰° - h$. همچنین $PX = ۹۰° - \phi'$. پس اولین رابطهٔ (۷۶)، با به کار بردن فرمول کسینوس در مورد مثلث APX، به صورت زیر در می‌آید

$$\xi = \rho \cos \phi' \sin h \qquad (۷۷)$$

همینطور

$$\eta = \rho[\sin \phi' \cos d - \cos \phi' \sin d \cos h] \qquad (۷۸)$$

$$\zeta = \rho[\sin \phi' \sin d + \cos \phi' \cos d \cos h] \qquad (۷۹)$$

تغییرات مقادیر ξ'، η'، و ζ' در ساعت، یعنی ξ، η، و ζ محاسبه می‌شوند. مثلاً

$$\xi' = \mu' \rho \cos \phi' \cos h$$

که در آن μ' تغییر μ در ساعت است.

معمولاً مقادیر ξ، η، و ζ برای زمان فرضی تماس حساب می‌شوند؛ سپس مقادیر ξ، η، و ζ در بازه‌های ۱۰ دقیقه‌ای، به کمک کمیتهای محاسبه شدهٔ ξ'، η'، و ζ'، به دست آورده می‌شوند. پس از آن مقادیر L_1 و L_2 را می‌توان از روابط (۷۴) و (۷۵) در موارد مقتضی به دست آورد.

اینک شرایط آغاز و پایان یک گرفتگی جزئی یا کلی را در یک ایستگاه مورد بررسی قرار می‌دهیم. وقتی مرحلهٔ جزئی، در شُرُف آغاز شدن یا پایان یافتن است، راصد در مرز مخروط نیم‌سایه قرار دارد، و فاصلهٔ او از محور سایه برابر L_1، یعنی برابر شعاع دایرهٔ محل تقاطع صفحهٔ $z = \zeta$ و مخروط نیم‌سایه است. اما مرکز این دایره دارای مختصات (x, y)، و راصد دارای مختصات (ξ, η) است که هر دو نسبت به محورهای درون صفحهٔ $z = \zeta$، موازی محورهای بنیادی، سنجیده می‌شوند. از این‌رو شرط لازم عبارت است از

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = L_1^2 \tag{۸۰}$$

همینطور، شرط آغاز یا پایان گرفتگی کلی برای ایستگاه مورد نظر عبارت است از

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = L_2^2 \tag{۸۱}$$

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه این معادله باید برای محاسبهٔ مرحلهٔ آغاز و پایان گرفتگی کلی به کار برده شود. فرض کنید T نشانگر یک زمان زیجی مناسب باشد که در نزدیکی زمان گرفتگی کلی انتخاب می‌شود و $T + t$ زمان زیجی واقعی آغاز (یا پایان) گرفتگی کلی باشد. مقادیر مختصات x و y در زمان T را با x_0 و y_0 نشان می‌دهیم و مختصات متناظر راصد با ξ_0 و η_0. پس در زمان $T + t$، که در آن t برحسب ساعت بیان می‌شود، خواهیم داشت

$$x = x_0 + x't, \quad y = y_0 + y't \quad ; \quad \xi = \xi_0 + \xi't, \quad \eta = \eta_0 + \eta't$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ (۷۵) داریم

$$L_2 = l_2 - \zeta \tan f_2 \tag{۸۲}$$

و چون f_2 زاویه‌ای کوچک است، مقدار $\zeta \tan f_2$ در زمان $T + t$ تفاوت قابل ملاحظه‌ای با مقدارش در زمان T نخواهد داشت؛ همچنین l_2 خیلی کند تغییر می‌کند. از این رو کافی است در رابطهٔ (۸۲) مقدار L_2 که برای زمان T محاسبه شده است را به کار برد. در این صورت برای آغاز یا پایان مرحلهٔ گرفتگی کلی (یامرحلهٔ گرفتگی حلقه‌وار) داریم

$$[x_0 - \xi_0 + t(x' - \xi')]^2 + [y_0 - \eta_0 + t(y' - \eta')]^2 = L_2^2 \tag{۸۳}$$

چون همهٔ کمیتهای L_2، x_0، $\cdots$ η' معلوم‌اند، رابطهٔ (۸۳) معادله‌ای درجهٔ دوم برحسب t است که لحظه‌های آغاز و پایان گرفتگی کلی را به دست می‌دهد.

کمیتهای کمکی m، M، n، و N را که به وسیلهٔ روابط زیر تعیین می‌شوند معرفی می‌کنیم

$$m \sin M = x_0 - \xi_0 \quad , \quad m \cos M = y_0 - \eta_0 \tag{۸۴}$$

$$n \sin N = x' - \xi' \quad , \quad n \cos N = y' - \eta' \tag{۸۵}$$

چون $\tan M = (x_\circ - \xi_\circ)/(y_\circ - \eta_\circ)$، دو مقدار M وجود دارند که ۱۸۰° با هم اختلاف دارند و می‌توانند در رابطهٔ (۸۴) صدق کنند. با در نظر گرفتن m به عنوان ریشهٔ دوم مثبت $[(x_\circ - \xi_\circ)^۲ + (y_\circ - \eta_\circ)^۲]$، مقداری را برای M انتخاب می‌کنیم که علامت $\sin M$ همان علامت $(x_\circ - \xi_\circ)$ باشد. نحوهٔ انتخاب برای n و N نیز همینطور است. واضح است که از نظر هندسی، m و M فاصله و زاویهٔ مکانی محور سایه نسبت به راصدند؛ همینطور n و N به ترتیب اندازه و جهت حرکت مرکز سایه را نسبت به راصد معین می‌کند. با قرار دادن رابطهٔ (۸۴) و (۸۵) در رابطه (۸۳) به دست می‌آوریم

$$n^۲t^۲ + ۲mnt\cos(M - N) + m^۲ - L_۲^۲ = ۰ \qquad (۸۶)$$

دو ریشهٔ این معادله آغاز و پایان گرفتگی کلی را به دست می‌دهند. حل این معادله معمولاً به روش زیر انجام می‌گیرد. زاویهٔ ψ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_۲ \sin\psi = m\sin(M - N) \qquad (۸۷)$$

فرمول (۸۷) دو مقدار برای ψ به دست می‌دهد که بزودی به آنها اشاره خواهیم کرد. از رابطهٔ (۸۶) داریم

$$\begin{aligned} n^۲t^۲ + ۲mnt\cos(M - N) + m^۲\cos^۲(M - N) \\ = L_۲^۲ - m^۲ + m^۲\cos^۲(M - N) = L_۲^۲\cos^۲\psi \end{aligned}$$

که تساوی آخر با استفاده از فرمول(۸۷) نوشته شده است. از این‌رو

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N) \pm \frac{L_۲\cos\psi}{n} \qquad (۸۸)$$

اگر τ مقدار عددی $L_۲\cos\psi/n$ باشد، آغاز گرفتگی کلی در زمان زیجی $(T - m/n\cos\overline{M - N} - \tau)$ و پایان آن در زمان زیجی $(T - m/n\cos\overline{M - N} + \tau)$ اتفاق می‌افتد. مدت گرفتگی کلی ۲τ است. برای بعضی مقاصد این نتیجه به حد کافی دقیق نیست و به شرح زیر عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $T_۱$ زمان زیجی آغاز گرفتگی کلی باشد. کمیتهای موجود در رابطهٔ (۸۸) را برای $T_۱$ محاسبه می‌کنیم. مانند قبل، دو ریشه برای (۸۸) وجود دارد، که یکی به آغاز مرحلهٔ گرفتگی کلی و دیگری به پایان آن مربوط می‌شود. فرض کنید $\tau_۱$ مربوط به اولی باشد، به‌طوری که گرفتگی کلی در زمان زیجی

$$T_۱ - \frac{m_۱}{n_۱}\cos(M_۱ - N_۱) - \tau_۱$$

آغاز می‌شود، که در آن τ_1 مقدار عددی $L_2 \cos\psi/n$ است که برای T_1، محاسبه می‌شود و شاخصهای پایین به مقادیر m، n، M، N در T_1 مربوط می‌شوند. اگر T_2 زمان تقریبی پایان گرفتگی کلی باشد، آن وقت به گونه‌ای مشابه، پایان مرحلهٔ گرفتگی کلی در زمان زیجی

$$T_2 - \frac{m_2}{n_2}\cos(M_2 - N_2) + \tau_2$$

رخ می‌دهد که در آن شاخصهای پایین به مقادیر m، n، M، N در T_2 مربوط شوند. تفاضل بین زمانهای محاسبه شده مدت گرفتگی کلی را به دست می‌دهد.

اگر ψ_1 و ψ_2 مقادیر ψ در آغاز و پایان گرفتگی کلی باشند، ربعهای مثلثاتی این زاویه‌ها، با در نظر گرفتن دو مقدار ممکن ψ که به وسیلهٔ فرمول (۸۷) داده می‌شوند، به شرح زیر معین می‌شوند. برای آغاز مرحله گرفتگی کلی، ربع مثلثاتی زاویه طوری است که $\cos\psi_1$ مثبت است، و برای پایان مرحلهٔ گرفتگی کلی، ربع مثلثاتی زاویه طوری است که $\cos\psi_2$ منفی است.

در صورت لزوم، می‌توان محاسبات را، با انتخاب مقداری دقیقتر برای T، تکرار کرد.

برای محاسبهٔ آغاز و پایان مرحلهٔ جزئی گرفتگی در هر ایستگاه، روشی، مشابه اتخاذ می‌شود، البته، مقدار L_1 در این محاسبات به کار برده می‌شود.

زاویهٔ مکانی، θ، برای آغاز یا پایان مرحلهٔ جزئی گرفتگی، مانند مورد اختفا از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$L_1 \sin\theta = x_0 - \xi_0 + t(x' - \xi')$$
$$L_1 \cos\theta = y_0 - \eta_0 + t(y' - \eta')$$

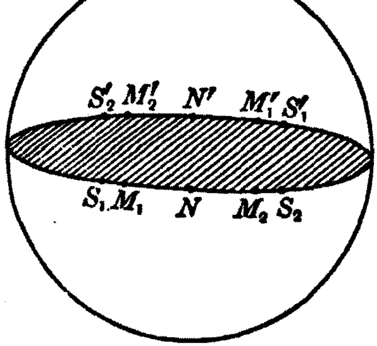
که مقدار مناسب t مربوط به آغاز یا پایان مرحلهٔ جزئی گرفتگی است، یا با توجه به $\theta = N + \psi$ به مقادیر مناسب N و ψ

زاویه‌های مکانی متناظر برای مرحلهٔ کلی گرفتگی، با روشی مشابه به دست می‌آیند. در تقویمهای نجومی، پدیده‌های گرفتگی با روشهای بالا محاسبه، و با نمودار نشان داده می‌شوند.

۲۱۷. بسامد گرفتگیها

بازهٔ بین ماه نو تا ماه نو، یک ماه هلالی ۲۹٫۵۳ روز متوسط خورشیدی است. همچنین دیدیم که گره‌های مدار ماه (بخش۸۳) در ۶۷۹۸٫۳ روز (در حدود ۱۸٫۶ سال) یک گردش کامل قهقرایی روی دایرةالبروج انجام می‌دهند. بنابراین بازهٔ بین دو گذر پیاپی خورشید از یک گره ۳۴۶٫۶۲ روز است. بدین ترتیب خورشید با آهنگ ۳۰٫۶۷ درجه در ماه هلالی از یک گره جدا می‌شود.

در بررسی بسامد گرفتگیها، نخست داده‌های مربوط به حدود گرفتگیها را خلاصه می‌کنیم:



شکل ۱۴۶

	حد بالایی	حد پایینی
حدود گرفتگیها (ماه گرفتگی)	۳ر۱۲°	۶ر۹°
حدود گرفتگیها (خورشید گرفتگی)	۴ر۱۸°	۴ر۱۵°

در هر مورد، حد گرفتگی به آن فاصلهٔ خورشید از یک گره گفته می‌شود که یک گرفتگی جزئی (ماه یا خورشید) امکانپذیر باشد.

اکنون شکل ۱۴۶ را با گره‌ها در N و N' در نظر بگیرید. فرض کنید

$$NM_۱ = NM_۲ = N'M'_۱ = N'M'_۲$$

نشاندهندهٔ حدود گرفتگی در مورد یک ماه گرفتگی و

$$NS_۱ = NS_۲ = N'S'_۱ = N'S'_۲$$

نشانگر حدود گرفتگی درمورد یک خورشید گرفتگی باشند.

حال کمان $S_۱S_۲$ حداقل ۸ر۳۰° (متناظر با حد پایینی خورشید گرفتگی) است و بنابراین همیشه از زاویه‌ای که خورشید در یک ماه هلالی از یک گره دور می‌شود، بزرگتر است. از این‌رو، هنگامی که خورشید روی کمان $S_۱S_۲$ است، حداقل یک ماه نو خواهیم داشت، در نتیجه یک خورشید گرفتگی باید اتفاق بیفتد. همینطور، وقتی خورشید روی کمان $S'_۱S'_۲$ است، یک خورشید گرفتگی باید رخ دهد.

از سوی دیگر کمترین مقدار $M_۱M_۲$ دو برابر ۶ر۹° یا ۲ر۱۹° اسب که تقریباً دو سوم زاویه‌ای است که خورشید نسبت به یک گره در یک ماه هلالی طی می‌کند. بدین ترتیب امکان دارد یک ماه بدر، به دنبال یک گرفتگی خورشید در نزدیکی یک گره، اما خارج حدود پایینی مربوط، رخ دهد؛ بنابراین تحت این شرایط، گرفتگی ماه در طی سال وجود نخواهد داشت.

نتیجه می‌گیریم که حداقل دو گرفتگی ممکن است در طی یک سال رخ دهد و هر دو خورشید گرفتگی خواهند بود.

به علاوه ۶ ماه هلالی برابر ۱۷۷٫۲ روز و زمان لازم برای رفتن خورشید از N به N' برابر ۱۷۳٫۳ روز است. بنابراین اگر ۲ روز قبل از گذشتن خورشید از N ماه بدر باشد، ۲ روز پس از عبور خورشید از N' نیز ماه بدر خواهد بود. پس فاصلهٔ زاویه‌ای خورشید از یک گره کاملاً درون حدود ماه گرفتگی است و از این‌رو تحت این شرایط ۲ ماه گرفتگی روی خواهد داد.

پس از $14\frac{3}{4}$ روز از ماه بدر، ماه نو خواهد بود، و در طی این مدت خورشید نسبت به یک گره به اندازهٔ $15\frac{1}{2}^\circ$، و در ۲ روز تقریباً 2° حرکت خواهد کرد. از این‌رو اگر ۲ روز قبل از رسیدن خورشید به N ماه بدر باشد، خورشید در ماه نو بعدی $13\frac{1}{2}^\circ$ در طرف دیگر N خواهد بود؛ فاصلهٔ آن از همین گره در ماه نو قبلی $17\frac{1}{2}^\circ$ است. همچنین وقتی ماه بدر ۲ روز بعد از عبور خورشید از N' رخ می‌دهد، خورشید در ماه نو بعدی $17\frac{1}{2}^\circ$ در طرف دیگر N' خواهد بود؛ فاصلهٔ آن از همین گره در ماه نو قبلی $13\frac{1}{2}^\circ$ است. $13\frac{1}{2}^\circ$ و $17\frac{1}{2}^\circ$ هر دو درون حدود بالایی خورشید گرفتگی واقع‌اند. از این‌رو در نزدیکی هر گره امکان ۲ خورشید گرفتگی وجود دارد، یعنی، در ۳۴۶٫۶ روز امکان ۴ خورشید گرفتگی هست.

اگر گرفتگیها، هنگامی که خورشید بین S و S_1 است، در ژانویه اتفاق افتند، خورشید دوباره در دسامبر بعدی، یعنی پس از ۱۲ ماه هلالی، در بین S و S_1 خواهد بود، و در نیم ماه هلالی بعدی یک خورشید گرفتگی و یک ماه گرفتگی امکان خواهد داشت. بدین ترتیب، در $12\frac{1}{2}$ ماه هلالی، می‌توان جمعاً ۵ خورشید گرفتگی و ۳ ماه گرفتگی داشت. اما $12\frac{1}{2}$ ماه قمری کمی بر ۳۶۵ روز فزونی دارد. از این‌رو، در شمارش گرفتگیهای ممکن در هر سال، باید یک خورشید گرفتگی یا یک ماه گرفتگی را حذف کنیم.

نتیجه می‌گیریم که بیشترین تعداد گرفتگی ممکن در یک سال ۷ است، ۴ عدد خورشید گرفتگی و ۳ ماه گرفتگی یا ۵ عدد خورشید گرفتگی و ۲ ماه گرفتگی.

۲۱۸. تکرار گرفتگیها

بازهٔ زمانی بین گذشت پیاپی خورشید از یک گره ۳۴۶٫۶۲ روز است، و ۱۹ تا از این بازه‌ها معادل ۶۵۸۵٫۸ روز است. طول متوسط ماه هلالی ۲۹٫۵۳۰۶ روز، و ۲۲۳ ماه هلالی معادل ۶۵۸۵٫۳ روز است. در نتیجه رابطهٔ تقریبی زیر برقرار است:

۲۲۳ ماه هلالی = ۱۹ گردش خورشید نسبت به یک گره

= تقریباً ۱۸ سال و ۱۱ روز

این دورهٔ ۱۸ سال و ۱۱ روز ساروس نامیده می‌شود. معنی آن در ارتباط با گرفتگیها به شرح زیر است. فرض کنید خورشید در ماه نو درون حدود گرفتگی، مثلاً در S، باشد، به‌طوری که یک

خورشید گرفتگی رخ دهد. خورشید پس از ۱۹ گردش نسبت به گرهٔ N دوباره در همان فاصلهٔ SN از N است و نیز چون دوره‌ای برابر ۲۲۳ ماه هلالی سپری شده است دوباره ماه نو خواهد بود. از این‌رو، به‌طور کلی، دوباره یک خورشید گرفتگی اتفاق خواهد افتاد.

همین استدلال در مورد ماه گرفتگیها به کار می‌رود. بدین ترتیب مشاهده می‌کنیم که گرفتگیها به‌طور کلی در بازه‌های ۱۸ سال و ۱۱ روز تکرار می‌شوند. با این حال چون زمان ۱۹ گردش خورشید دقیقاً برابر ۲۲۳ ماه هلالی نیست، بنابراین شرایط مربوط به یک گرفتگی در پایان ساروس دوباره تجدید نمی‌شود؛ به ویژه، ناحیه‌ای از سطح زمین که از آن یک گرفتگی کلی قابل رؤیت است، به‌طور کلی با ناحیه‌ای که گرفتگی بعدی (وابسته به آن ساروس) از آن قابل رؤیت است یکی نخواهد بود.

رابطهٔ جالب توجه دیگری را اضافه می‌کنیم:

$$۲۳۵ \text{ ماه هلالی} = ۱۹ \text{ سال } ۳۶۵\tfrac{۱}{۴} \text{ روز}$$

$$(۲۳۵ \text{ ماه هلالی} = ۶۹۳۹{,}۶۹ \text{ روز و } ۱۹ \text{ سال} = ۶۹۳۹{,}۷۵ \text{ روز})$$

این را چرخهٔ متونیک می‌نامند. بدین ترتیب اگر ماه بدر در تاریخ معینی اتفاق افتد، ۱۹ سال بعد ماه بدری دیگر وجود خواهد داشت. بدیهی است که چرخهٔ متونیک در مورد تکرار ماههای نو نیز به‌طور مشابه به کار می‌رود.

تمرینها

۱. اگر زاویهٔ میل مدار ماه نسبت به دایرةالبروج $۵^\circ ۲۰' ۶''$ باشد، نشان دهید که ماه سرانجام هر ستاره‌ای را که عرض سماوی آن از لحاظ عددی کمتر از $۶^\circ ۳۸' ۲۴''$ باشد می‌پوشاند.

[آزمون کالج]

۲. در نیمه شب تاریخی معین، میل ماه $۴^\circ ۳۶' ۴۶''{,}۷$ است و آهنگ افزایش بُعد و میل آن به ترتیب $۲۳^s{,}۰$ و $۱۶۴''$ در ۱۰ دقیقه است. نشان دهید که اگر میل ستاره‌ای که در نیمه شب با ماه در مقارنهٔ بعدی است کمتر از $۳^\circ ۱۰'{,}۴$ باشد در این مقارنه یا نزدیک به آن پوشانده نخواهد شد. مجموع نیم‌قطر ماه و اختلاف‌منظر افقی آن را برابر $۷۸'{,}۰$ بگیرید.

[کتاب نجوم کروی تألیف بال]

۳. به فرض اینکه زمین کروی است، نشان دهید که اگر اختلاف‌منظر افقی ماه و نیم‌قطر زاویه‌ای آن به ترتیب P و S باشند، هر ستاره‌ای که فاصلهٔ زاویه‌ای زمین‌مرکزی آن از مرکز ماه از $\sin^{-1}(\sin P + \sin S)$ کمتر است در قسمتی از زمین به وسیلهٔ ماه پوشانده می‌شوند.

همچنین نشان دهید که بیشترین اختلاف ممکن بین میل مرکز ماه و یک ستاره که در لحظهٔ

مقارنهٔ بُعدی وقوع یک اختفا را در ناحیه‌ای از زمین امکان‌پذیر می‌کند، تقریباً برابر است با

$$\sin^{-1}\{(\sin P + \sin S)(m^2 \cos^2 \delta + n^2)^{\frac{1}{2}}/(m \cos \delta)\}$$

که در آن δ میل ماه در مقارنه است و m و n به ترتیب آهنگ تغییر در بُعد و میل.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج،۱۹۱۹]

۴. نشان دهید که در زمان یک ماه گرفتگی جزئی یا کلی، فاصلهٔ زاویه‌ای زمین مرکزی مرکز ماه از محور سایهٔ زمین باید از مقدار زیر کمتر باشد

$$\sin^{-1}(\sin P_1 + \sin S_1) - \sin^{-1}(\sin S - \sin P)$$

که در آن P، P_1، S، و S_1 به ترتیب اختلاف‌منظرهای افقی خورشید و ماه و نیم‌قطرهای خورشید و ماه هستند. زمین، خورشید، و ماه کروی در نظر گرفته می‌شوند.
[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج،۱۹۰۰]

۵. نشان دهید که اگر از تأثیر جو چشمپوشی شود، حداکثر مدت یک ماه گرفتگی کلی تقریباً برابر است با

$$\frac{2(P + P_1 - S - S_1)}{m}\left(1 + \frac{s \cos^2 i}{m}\right) \cos i \ \ \mathrm{h}$$

که در آن P، P_1، S، S_1، s، و m به ترتیب عبارت‌اند از اختلاف‌منظر افقی خورشید و ماه، نیم‌قطر زاویه‌ای خورشید و ماه و حرکت ساعتی در طول سماوی خورشید و ماه، و i زاویهٔ میل مدار ماه نسبت به دایرةالبروج است.

۶. نشان دهید که بازهٔ بین زمان میان یک ماه گرفتگی و زمان مقابله تقریباً برابر است با

$$\frac{m\Delta}{m^2 + n^2 \cos \delta \cos \delta_1} \quad \mathrm{h}$$

که در آن m و n به ترتیب اختلاف حرکت ساعتی ماه در مرکز سایهٔ زمین و بُعد، و Δ اختلاف بین میل ماه و مرکز سایهٔ زمین در زمان مقابله، δ و δ_1 میل متوسط سایه و ماه در مدت گرفتگی هستند.

[آزمون کالج]

۷. نشان دهید که، در یک ماه گرفتگی، طول مدت گرفتگی لحظهٔ مقابلهٔ در طول سماوی را الزاماً، اگر گرفتگی جزئی باشد، شامل نمی‌شود ولی اگر گرفتگی کلی باشد، حتماً آن را شامل می‌شود.
[نجوم کروی تألیف بال]

۸. با معلوم بودن اختلاف‌منظرهای افقی خورشید و ماه، بزرگترین زاویهٔ میل مدار ماه را نسبت به دایرةالبروج که به ازای آن در هر ماه یک خورشید گرفتگی حتمی باشد، پیدا کنید.

۹. توضیح دهید که چگونه یک خورشید گرفتگی می‌تواند در محلی کلی و در محلی دیگر حلقه‌وار باشد. اگر خورشید در محلی که در ظهر ظاهری به‌طور کلی می‌گیرد در سمت‌الرأس باشد، بزرگترین پهنای ممکن حلقه در هر مکان دیگر چقدر است.

[لندن، ۱۹۲۵]

۱۰. ثابت کنید که در لحظهٔ مقارنهٔ بُعدی نسبت فاصله‌های خورشید از ماه و از زمین برابر است با

$$\{\sin P_1 - \sin P\cos(\delta - \delta_1)\}/\sin P_1$$

که در آن δ و δ_1 میلهای خورشید و ماه، P و P_1 اختلاف‌منظرهای افقی آنها هستند و مجذور $\sin P$ نیز قابل چشمپوشی است.

همچنین ثابت کنید که اگر $\dot{\alpha}$ و $\dot{\alpha}_1$ به ترتیب تغییرات ساعتی در بُعد خورشید و ماه همان لحظه باشند و $\dot{A}$ تغییر ساعتی در بُعد خطی باشد که از مرکز زمین به موازات خط واصل بین مراکز خورشید و ماه رسم می‌شود، آنگاه

$$\dot{A} = \dot{\alpha} + \frac{\sin P\cos\delta_1}{\sin P_1\cos\delta}(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_1)$$

[آزمون کالج]

۱۱. در حدود روز ۱ دیماه ۲۱/۱۲۹۶ دسامبر ۱۹۱۷، یک خورشیدگرفتگی حلقه‌وار، که در حوالی قطب جنوب قابل رؤیت بود، به وقوع پیوست. طبق تقویم دریایی این گرفتگی در نیمه شب در عرض جغرافیایی جنوبی $89°57'$ و طول جغرافیایی غربی $142°$ دقیقاً مرکزی بود. طبق تقویم دیگری این گرفتگی در ظهر عرض جغرافیایی جنوبی $89°57'$، اما در طول جغرافیایی شرقی $38°$ نیز مرکزی بود. نشان دهید که اختلاف این دو بیان به این علت است که محاسبات یک تقویم برای سطح دریا و محاسبات تقویم دیگر برای سطحی به ارتفاع ۵۰۰۰ متر از سطح دریا انجام گرفته است.

همچنین نشان دهید که اگر مکانهای اختیار شده برای ماه در دو تقویم به اندازهٔ $2\frac{1}{2}''$ در میل اختلاف داشته باشند نیز این تفاوت قابل توضیح است، اختلاف‌منظر ماه $57'$ است.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی درکمبریج، ۱۹۱۷]

۱۲. ساخت ترسیمی زیر را برای تعیین تقریبی نقطهٔ Q که در آن یک خورشید گرفتگی در هر لحظهٔ خاص مرکزی است به دست آورید.

M نقطه‌ای از سطح زمین است که در آن ماه در سمت‌الرأس است، و S نقطه‌ای است که در آن خورشید در سمت‌الرأس است. دایرهٔ عظیمه‌ای از M و S بگذرانید و روی امتداد SM

نقطهٔQ را چنان انتخاب کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$\sin SQ = (\alpha_{☾} - \alpha_{\odot}) \cdot \cos\delta / (P_{☾} - P_{\odot}) \sin\eta$$

که در آن
$$\tan\eta = (\alpha_{۱} - \alpha_{\odot}) \cos\delta / (\delta_{☾} - \delta_{\odot})$$

داده‌های زیر مربوط به خورشید گرفتگی ۱ مهر ۱۳۰۱/ ۲۰ سپتامبر ۱۹۲۲ هستند:

زمان نجومی میانگین مقارنه در گرینویچ	$۱۶^{h}\ ۴۷^{m}\ ۱۸^{s}$
تعدیل زمان	$+۶^{m}\ ۳۸^{s}$
میل خورشید	$+۱^{\circ}\ ۱'۴۲''$ر۷
میل ماه	$+۰^{\circ}\ ۴۸'\ ۰''$ر۳
اختلاف‌منظر افقی خورشید	$۸''$ر۸
اختلاف‌منظر افقی ماه	$۶۱'\ ۲۴''$ر۱

نشان دهید نقطه‌ای که در آن گرفتگی مرکزی در ظهر رخ می‌دهد تقریباً در طول جغرافیایی شرقی $۱۰۶^{\circ}۳۰'$ و عرض جغرافیایی جنوبی ۱۲° قرار دارد.

[آزمون دانشجویان ممتاز ریاضی در کمبریج،۱۹۲۲]

پیوست ۱

روش وابستگیها

۲۱۹. مقدمه

روش وابستگیها ابتدا توسط راف. شلزینگر[1] در ۱۹۱۱/۱۲۹۰ در ارتباط با تعیین اختلاف‌منظر ستاره‌ها گسترش یافت و سپس برای اندازه‌گیری مکان سیارکها و ستاره‌های دنباله‌دار از روی عکس به کار برده شد.[2]

در بخش ۱۶۷ فرمولهای خطیی که مختصات استاندارد یک ستاره یا، یک شیئ دیگر، را به مختصات اندازه‌گیری شده و «ثابتهای صفحهٔ عکاسی» a، b، و غیره ربط می‌دهند، به دست آوردیم. برای ارزیابی ثابتهای صفحهٔ عکاسی، حداقل سه ستارهٔ مقایسه را مورد استفاده قرار می‌دهیم. مثلاً اگر در مسئلهٔ اخترنگاری، چند صفحهٔ عکاسی که مکان سیارکی را معلوم می‌کنند در دست داشته باشیم، ثابتهای صفحهٔ عکاسی باید برای هر صفحه تعیین شوند و این امر مستلزم عملیات عددی زیادی است. تعدادی صفحهٔ عکاسی را با یک مرکز صفحه که مکان سیارک در یک صفحه تفاوت چندانی با مکان آن در صفحهٔ دیگر ندارد در نظر می‌گیریم. ستاره‌های مقایسه‌ای که برای هر صفحهٔ عکاسی به کار می‌روند می‌توانند یکی باشند و به جای محاسبهٔ ثابتهای صفحهٔ عکاسی برای هر صفحه، کمیتهایی را محاسبه می‌کنیم که به ستاره‌های مقایسهٔ انتخابی و به یک مکان سیارک بستگی دارند؛ این کمیتها را که بدین‌ترتیب از صفحهٔ خاص تحت بررسی مستقل‌اند،

1. F.Schlesinger, *Astrophysical Journal* ,vol. XXX III, p.161 (1911).

2. *Astronomical Journal*,vol.XXX VII, p.77(1926);H.C.Plummer, *Monthly Notices*, vol. XCII, p.892 (1932). H. C. Plummer, *monthly Notices*, vol, XCII,p.892 (1932).

وابستگی می‌نامند. بنابراین مکان سیارک برحسب این وابستگیها و کمیتهایی قابل اندازه‌گیری بیان می‌شود. روشی مشابه برای اندازه‌گیری اختلاف‌منظر ستاره‌ها اتخاذ می‌شود.

۲۲۰. مسئلهٔ اخترنگاشتی (با ۳ ستارهٔ مقایسه)

در این بخش فرض بر این است که سه ستارهٔ مقایسه به کار برده شوند. مختصات اندازه‌گیری شده و مختصات استاندارد ستاره‌های مقایسه برای یک صفحهٔ عکاسی معین، از روابط (۵۷) و (۵۸) صفحهٔ ۳۳۷ به دست می‌آیند. تنها اندازه‌گیریهایی را در نظر می‌گیریم که بر روی x انجام می‌شوند روش کار برای اندازه‌گیریهای مربوط به y نیز مشابه این است. پس برای سه ستارهٔ مقایسه داریم

$$\xi_1 - x_1 = a\xi_1 + b\eta_1 + c \tag{۱}$$

$$\xi_2 - x_2 = a\xi_2 + b\eta_2 + c \tag{۲}$$

$$\xi_3 - x_3 = a\xi_3 + b\eta_3 + c \tag{۳}$$

و برای سیارک داریم

$$\xi - x = a\xi + b\eta + c \tag{۴}$$

اگر مختصات استاندارد سیارک برای یکی از صفحات عکاسی، که از این پس به آن «صفحهٔ گزیده» می‌گوییم، (ξ_0, η_0) باشند می‌توانیم رابطهٔ (۴) را به صورت زیر بنویسیم

$$\xi - x = a\xi_0 + b\eta_0 + c + a(\xi - \xi_0) + b(\eta - \eta_0) \tag{۵}$$

فرض براین است که برای همهٔ صفحات عکاسی مورد نظر $(\xi - \xi_0)$ و $(\eta - \eta_0)$ کمیتهایی کوچک‌اند. همچنین، ثابتهای a و b که در اصل در برگیرنده تصحیح مقیاس و جهت‌گیری صفحهٔ عکاسی هستند، کمیتهایی کوچک در نظر گرفته می‌شوند؛ از این‌رو، در رابطه (۵) از $a(\xi - \xi_0)$ و $b(\eta - \eta_0)$ چشم می‌پوشیم که در این صورت چنین می‌شود

$$\xi - x = a\xi_0 + b\eta_0 + c \tag{۶}$$

باید به خاطر آورد که x_1، x_2، x_3، و x در (۱)، (۲)، (۳)، و (۶) کمیتهایی هستند که با کمال دقت از طریق اندازه‌گیری پیدا می‌شوند. مختصات استاندارد ستاره‌های مقایسه (ξ_1, η_1) و غیره، معلوم فرض می‌شوند. پس اگر بخواهیم، می‌توانیم a، b، و c را از روابط (۱) ، (۲)، و (۳) به دست آوریم و سپس مقادیر آنها را در رابطهٔ (۶) قرار دهیم. فعلاً فرض می‌کنیم که مقادیر ξ_0 و η_0 را می‌دانیم. در این صورت مقدار ξ را برای صفحهٔ عکاسی مورد نظر از رابطهٔ (۶) به دست می‌آوریم.

اما این روش معادل حذف a، b، و c بین چهار معادلهٔ (۱) ، (۲) ، (۳)، و (۶) است و می‌توانیم این حذف را به طریق زیر انجام دهیم.

روابط (۱) ، (۲) ، (۳)، و (۶) را به‌ترتیب در D_1، D_2، D_3، و -1 ضرب کرده و جمع می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_1(\xi_1 - x_1) + D_2(\xi_2 - x_2) + D_3(\xi_3 - x_3) - (\xi - x) \\ = a\{D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3 - \xi_0\} \\ + b\{D_1\eta_1 + D_2\eta_2 + D_3\eta_3 - \eta_0\} \\ + c\{D_1 + D_2 + D_3 - 1\} \end{aligned} \tag{۷}$$

حذف a، b، و c در صورتی انجام می‌گیرد که

$$D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + D_3\xi_3 = \xi_0 \tag{۸}$$

$$D_1\eta_1 + D_2\eta_2 + D_3\eta_3 = \eta_0 \tag{۹}$$

$$D_1 \quad + D_2 \quad + D_3 \quad = 1 \tag{۱۰}$$

که سه معادله‌اند و از آنها می‌توان D_1، D_2، و D_3 را به دست آورد.

ضریبهای D_1، D_2، و D_3 وابستگی خوانده می‌شوند. بنابراین از رابطهٔ (۷) داریم

$$\xi - x = D_1(\xi_1 - x_1) + D_2(\xi_2 - x_2) + D_3(\xi_3 - x_3) \tag{۱۱}$$

که از آن می‌توان ξ را تعیین کرد، زیرا همه کمیتهای دیگر معلوم فرض می‌شوند.

حال $(\xi_1 - x_1)$، $(\xi_2 - x_2)$، و $(\xi_3 - x_3)$ کمیتهایی کوچک‌اند و در نتیجه اگر مختصات اندازه‌گیری شدهٔ ستاره‌های مقایسه و سیارک از صفحهٔ گزیده را در روابط (۸) و (۹) قرار دهیم تعیین D_1، D_2، و D_3 به حد کافی دقیق خواهد بود. اگر این مختصات را به‌ترتیب با (X_1, Y_1)، (X_2, Y_2)، (X_3, Y_3)، و (X_0, Y_0) نشان دهیم، معادلات تعیین D_1، D_2، و D_3 چنین می‌شوند

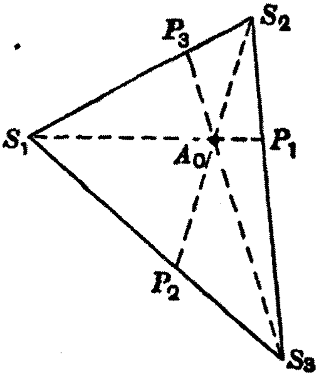
$$D_1X_1 + D_2X_2 + D_3X_3 = X_0 \tag{۱۲}$$

$$D_1Y_1 + D_2Y_2 + D_3Y_3 = Y_0 \tag{۱۳}$$

$$D_1 + D_2 \quad + D_3 \quad = 1 \tag{۱۴}$$

که با حل آنها با استفاده از دترمینان، برای D_1 داریم

$$\frac{D_1}{\begin{vmatrix} X_0, & X_2, & X_3 \\ Y_0, & Y_2, & Y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ Y_1, & Y_2, & Y_3 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}} \tag{۱۵}$$



شکل ۱۴۷

فرض می‌کنیم S_1، S_2، و S_3 در شکل ۱۴۷ ، مکان تصویرهای ستاره‌های مقایسه روی صفحهٔ عکاسی گزیده، و A_0 مکان تصویر سیارک باشد. در این صورت دترمینان زیر D_1 در رابطهٔ (۱۵) صرفاً دو برابر اندازهٔ جبری مساحت مثلث $A_0S_2S_3$، و دترمینان دیگر دو برابر مساحت مثلث $S_1S_2S_3$ است. نتایج مشابهی برای D_2 و D_3 به دست می‌آیند و بنابراین، به عنوان حل معادلات (۱۲)، (۱۳)، و (۱۴) داریم

$$\frac{D_1}{A_0S_2S_3} = \frac{D_2}{A_0S_3S_1} = \frac{D_3}{A_0S_1S_2} = \frac{1}{S_1S_2S_3} \qquad (۱۶)$$

فرض کنید خطوط راست واصل بین A_0 و رئوس مثلث، اضلاع آن را در P_1، P_2، و P_3 قطع کنند. آن وقت

$$\frac{A_0S_2S_3}{S_1S_2S_3} = \frac{A_0P_1}{S_1P_1}$$

از این‌رو

$$D_1 = \frac{A_0P_1}{S_1P_1} \quad ، \quad D_2 = \frac{A_0P_2}{S_2P_2} \text{ ، و } D_3 = 1 - D_1 - D_2 \qquad (۱۷)$$

با ترسیم مکان ستاره‌های مقایسه و سیارک روی کاغذ شطرنجی می‌توان مقادیر D_1، D_2، و D_3 را بسادگی و با دقت کافی، از مختصات اندازه‌گیری شده بر صفحهٔ عکاسی گزیده به دست آورد. می‌توان نشان داد که دقیقترین نتایج از این روش هنگامی حاصل می‌شود که A_0 در شکل ۱۴۷ منطبق بر مرکز جرم مثلث $S_1S_2S_3$ باشد. در بیشتر موارد ممکن است ستاره‌های مقایسه را طوری انتخاب کرد که این شرط تقریباً برقرار باشد. در هر حال، ستاره‌های مقایسه طوری انتخاب می‌کنیم که سیارک درون مثلث ایجاد شده به وسیلهٔ آنها باشد.

معادلهٔ (۱۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\xi = \sum_{i=1}^{3} D_i \xi_i + x - \sum_{i=1}^{3} D_i x_i \qquad (18)$$

همینطور

$$\eta = \sum_{i=1}^{3} D_i \eta_i + y - \sum_{i=1}^{3} D_i y_i \qquad (19)$$

عبارت $(x - \sum_{1}^{3} D_i x_i)$، در معادلهٔ (۱۸) مثلاً برحسب میلیمتر به دست می‌آید و مقدار واقعی آن به مقیاس صفحهٔ عکاسی که با تلسکوپی خاص با فاصلهٔ کانونی f_1 گرفته شده است بستگی دارد. از طرف دیگر، معمولاً مختصات استاندارد برحسب مقیاس «تلسکوپ اخترنگاشتی» که فاصلهٔ کانونی آن را به f_2 نشان می‌دهیم (f_2 برابر با ۳٫۴۴ متر است به طوری که ۱ میلیمتر روی صفحهٔ عکاسی نظیر ″۶۰ است) بیان می‌شود. در نتیجه لازم است $(x - \sum D_i x_i)$ را در f_2/f_1 ضرب کنیم تا ξ از معادلهٔ (۱۸) برحسب واحد اخترنگاشتی به دست آید. در مورد معادلهٔ (۱۹) نیز همینطور عمل می‌کنیم.

باید به خاطر داشت که (ξ_i, η_i) در معادلات (۱۸) و (۱۹) مختصات استاندارد یک ستارهٔ مقایسه را نسبت به مرکز صفحهٔ عکاسی اندازه‌گیری شده نشان می‌دهند. اگر از یک فهرست اخترنگاشتی استفاد کنیم آن وقت مختصات استاندارد ستاره‌های مقایسه نسبت به «مرکز اخترنگاشتی»، یعنی مرکز صفحهٔ عکاسی اخترنگاشتی که مختصات استاندارد منتشره از آن حاصل شده‌اند، به دست می‌آیند. اگر ξ'_1، ξ'_2، ξ'_3، و ξ' نشانگر مختصات استاندارد سه ستارهٔ مقایسه و سیارک نسبت به مرکز اخترنگاشتی باشند، با دقت کافی، داریم

$$\xi'_1 = \xi_1 + k, \cdots\cdots, \xi' = \xi + k$$

که در آنها k مختصهٔ استاندارد مرکز صفحهٔ اندازه‌گیری شده نسبت به مرکز اخترنگاشتی است. بدین‌ترتیب، با توجه به $D_1 + D_2 + D_3 = 1$، از معادلهٔ (۱۸) خواهیم یافت

$$\xi' = \sum_{i=1}^{3} D_i \xi'_i + x - \sum_{i=1}^{3} D_i x_i \qquad (20)$$

معادلهٔ مشابهی نیز برای η' وجود دارد.

مثال ۱. مثال زیر که توسط وود داده شده است مربوط به ستارهٔ‌دنباله‌دار $1911b$ است.[1] مقادیر ξ'_1، ξ'_2، و ξ'_3 از فهرست اخترنگاری آکسفورد برداشته می‌شوند. داده‌ها را برای به دست آوردن مختصهٔ استاندارد ξ' ستارهٔ دنباله‌دار، به صورت زیر جدول‌بندی می‌کنیم:

1. H. E. wood. *Journal of the Brit. Ast. Association*, vol. XXXIX p.201 (1929).

ستاره	ξ'	x	y	D	$D\xi'$	Dx
۱	۷٫۶۹۲	۵٫۶۰۶۷	۱۱٫۶۶۰۵	۰٫۲۳۳	۱٫۷۹۲۲	۱٫۳۰۶۴
۲	۱۷٫۶۵۰	۱۵٫۸۱۶۰	۲۲٫۰۹۳۵	۰٫۲۷۳	۴٫۸۱۸۴	۴٫۳۱۷۸
۳	۲۳٫۵۴۷	۲۱٫۶۰۱۱	۹٫۳۹۵۱	۰٫۴۹۴	۱۱٫۶۳۲۲	۱۰٫۶۷۰۹
				۱٫۰۰۰	۱۸٫۲۴۲۸	۱۶٫۲۹۵۱

برای ستارهٔ دنباله‌دار

$$x = ۱۶٫۳۴۳۷ \quad ; \quad y = ۱۳٫۳۴۶۲ \qquad (۲۱)$$

وابستگیهای داده شده، D، در ستون ۵ به کمک یک شکل و با به کاربردن مختصات اندازه‌گیری شدهٔ ستونهای ۳ و ۴ و مقادیر x و y ستارهٔ دنباله‌دار در (۲۱)، پیدا شده‌اند.

از (۲۱) و ستون آخر، خواهیم داشت

$$x - \sum D_i x_i \equiv ۱۶٫۳۴۳۷ - ۱۶٫۲۹۵۱ = +۰٫۰۴۸۶$$

مقدار عامل $f_۲/f_۱$ را می‌توانیم از داده‌های بالا با دقت کافی، به نحو زیر به دست آوریم. داریم

$$x_۲ - x_۱ = ۱۰٫۲۰۹۳ \text{ و } \xi'_۲ - \xi'_۱ = ۹٫۹۵۸$$

از این رو برحسب مختصات اخترنگاری داریم

$$x - \sum D_i x_i = +۰٫۰۴۸۶ \times \frac{۹٫۹۵۸}{۱۰٫۲۰۹} = +۰٫۰۴۷۸$$

بنابراین از معادلهٔ (۲۰) داریم

$$\begin{aligned} \xi' &= ۱۸٫۲۴۲۸ + ۰٫۰۴۷۸ \\ &= ۱۸٫۲۹۰۶ \end{aligned}$$

که مختصهٔ استاندارد ξ ستارهٔ دنباله‌دار نسبت به مرکز اخترنگاشتی است.

مختصهٔ η به روشی مشابه به دست می‌آید. اگر بخواهیم، می‌توانیم بُعد و میل ستارهٔ دنباله‌دار را از فرمولهای (۲۲) و (۲۳) صفحهٔ ۳۳۰ یا از فرمولهای معادل حساب کنیم.

۲۲۱. مسئلهٔ اخترنگاشتی (با n ستارهٔ مقایسه)

اینک فرض می‌کنیم که تعداد ستاره‌های مقایسه، n، بیش از ۳ باشد. در این صورت n معادله به شکل (۱) داریم که مقادیر ثابتهای صفحهٔ عکاسی، a، b، و c را به دست می‌دهند. این معادلات

از این قرارند

$$\left.\begin{array}{l} a\xi_1 + b\eta_1 + c = \xi_1 - x_1 \\ a\xi_2 + b\eta_2 + c = \xi_2 - x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\xi_n + b\eta_n + c = \xi_n - x_n \end{array}\right\} \qquad (۲۲)$$

مقادیر a، b، و c باید به روش کمترین مربعات به دست آورده شوند. هر معادله را در ضریب متناظر a ضرب، و آنها را با هم جمع می‌کنیم، نتیجه چنین می‌شود

$$a\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\} + b\{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n\}$$
$$+ c\{\xi_1 + \cdots + \xi_n\} = \xi_1(\xi_1 - x_1) + \xi_2(\xi_2 - x_2)$$

این معادلات معمولاً به صورت نمادی زیر نوشته می‌شود

$$a[\xi_i^2] + b[\xi_i\eta_i] + c[\xi_i] = [\xi_i(\xi_i - x_i)] \qquad (۲۳)$$

کروشه‌ها جمع‌زنی بر روی $i = 1, 2, \cdots, n$ را نشان می‌دهند.

همینطور، با ضرب کردن هر یک از معادلات (۲۲) در ضریب متناظر b و جمع کردن آنها داریم

$$a[\xi_i\eta_i] + b[\eta_i^2] + c[\eta_i] = [\eta_i(\xi_i - x_i)] \qquad (۲۴)$$

همچنین، با جمع کرده n معادله در (۲۲)، خواهیم داشت

$$a[\xi_i] + b[\eta_i] + nc = [\xi_i - x_i] \qquad (۲۵)$$

معادلهٔ مربوط به سیارک، همانند معادلهٔ (۶) است

$$a\xi_0 + b\eta_0 + c = \xi - x \qquad (۲۶)$$

که در آن، ξ_0 و η_0 مانند قبل مختصات استاندارد سیارک را برای یک صفحهٔ عکاسی گزیده نشان می‌دهند.

برای حذف a، b، و c از چهار معادلهٔ (۲۳) تا (۲۶) این معادلات را به‌ترتیب در P، Q، R، و -1 ضرب، و با هم جمع می‌کنیم. در این صورت اگر P، Q، و R با روابط

$$P[\xi_i^2] + Q[\xi_i\eta_i] + R[\xi_i] = \xi_0 \qquad (۲۷)$$

$$P[\xi_i\eta_i] + Q[\eta_i^2] + R[\eta_i] = \eta_0 \qquad (۲۸)$$

$$P[\xi_i] + Q[\eta_i] + Rn = 1 \qquad (۲۹)$$

داده شوند، داریم

$$\xi - x = P[\xi_i(\xi_i - x_i)] + Q[\eta_i(\xi_i - x_i)] + R[\xi_i - x_i]$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\xi - x = \sum_{i=1}^{n}(P\xi_i + Q\eta_i + R)(\xi_i - x_i)$$

قرار می‌دهیم

$$D_i \equiv P\xi_i + Q\eta_i + R \tag{۳۰}$$

بنابراین

$$\xi - x = \sum_{i=1}^{n} D_i(\xi_i - x_i) \tag{۳۱}$$

در این معادله، D_i تابعی از مختصات استاندارد n ستارهٔ مقایسه و $\xi_\circ$ و $\eta_\circ$ است. چون $(\xi_i - x_i)$ برای هر یک از ستاره‌ها کمیتی کوچک است کافی است D_i را تابعی از مختصات اندازه‌گیری شدهٔ $y_\circ, x_\circ, x_1 \cdots y_n$ برای صفحهٔ عکاسی گزیده در نظر بگیریم؛ این مختصات را مانند قبل، با X_i، Y_i، $X_\circ$، و $Y_\circ$ نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب، اینک P، Q، و R باید از روابط (۲۷)، (۲۸)، و (۲۹) که در آنها ξ_i و غیره با X_i و غیره جایگزین می‌شوند، تعیین شوند. از این‌رو

$$P[X_i^2] + Q[X_iY_i] + R[X_i] = X_\circ \tag{۳۲}$$

$$P[X_iY_i] + Q[Y_i^2] + R[Y_i] = Y_\circ \tag{۳۳}$$

$$P[X_i] + Q[Y_i] + Rn = 1 \tag{۳۴}$$

محاسبهٔ P، Q، و R را می‌توانیم با فرض اینکه مقادیر X_i، Y_i، $X_\circ$ و $Y_\circ$ برای صفحهٔ عکاسی گزیده، از مرکز جرم n ستارهٔ مقایسه اندازه‌گیری می‌شوند ساده کنیم. در این صورت داریم

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

و P، Q، و R باید از روابط زیر تعیین شوند

$$P[X_i^2] + Q[X_iY_i] = X_\circ \tag{۳۵}$$

$$P[X_iY_i] + Q[Y_i^2] = Y_\circ \tag{۳۶}$$

$$Rn = 1 \tag{۳۷}$$

بنابراین

$$D_i = PX_i + QY_i + R \tag{۳۸}$$

کمیتهای D_i وابستگیهای مسئله‌اند.

روش عملی این است که نخست P، Q، و R را با استفاده از معادلات (۳۵) ، (۳۶)، و (۳۷) محاسبه کنند و سپس وابستگی D_i را برای هر ستاره با به کار بردن معادلهٔ (۳۸) تشکیل دهند.

مانند بخش قبل داریم

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = 1 \tag{۳۹}$$

این موضوع با نگاهی به معادلات (۳۸) و (۳۷) و به یاد آوردن اینکه

$$\sum X_i = \sum Y_i = 0$$

معلوم می‌شود.

هنگامی که وابستگیها محاسبه شدند آن وقت مقدار ξ مربوط به سیارک را می‌توان از معادلهٔ (۳۱) برای هر تعداد صفحهٔ عکاسی پیدا کرد.

لازم به تذکر است که به کاربردن معادلهٔ (۳۱) مستلزم این است که مقادیر ξ_i برای n ستارهٔ مقایسه به طور دقیق معلوم باشند و مقادیر x و x_i برای n ستارهٔ مقایسه به طور دقیق اندازه‌گیری شوند.

۲۲۲. کاربرد روش وابستگیها در تعیین اختلاف‌منظر ستاره

روش وابستگیها را می‌توان به طور مفید در استخراج اندازهٔ اختلاف‌منظر به کار برد.

فرض کنید ξ_0 مختصهٔ استاندارد خورشیدمرکزی ستاره‌ای باشد که در زمان t_0 اختلاف‌منظر آن مطلوب است. مانند بخش ۱۷۵ عامل اختلاف‌منظر رصدی را که در زمان t انجام شده است با F، و مؤلفهٔ حرکت خاصه سالیانه را با $\mu_x(\equiv \mu_\alpha \cos\delta)$ نشان می‌دهیم. در این صورت مختصهٔ استاندارد زمین مرکزی ξ در زمان t با رابطهٔ زیر معین می‌شود

$$\xi = \xi_0 + F\Pi + T\mu_x \tag{۴۰}$$

که در آن Π اختلاف‌منظر ستاره $T \equiv t - t_0$ برحسب سال است. اما مقدار ξ را در رابطهٔ (۳۱)، از اندازه‌گیری یک صفحهٔ عکاسی که در زمان t برداشته شده است، داریم

$$\xi = x + \sum_{i=1}^{n} D_i(\xi_i - x_i) \tag{۴۱}$$

از این‌رو با استفاده از روابط (۴۰) و (۴۱) خواهیم داشت

$$F\Pi + T\mu_x + .\xi_\circ - \sum_{i=1}^{n} D_i\xi_i = x - \sum_{i=1}^{n} D_i x_i \qquad (۴۲)$$

قرار می‌دهیم

$$m = x - \sum_{i=1}^{n} D_i x_i \qquad (۴۳)$$

$$C = \xi_\circ - \sum_{i=1}^{n} D_i\xi_i \qquad (۴۴)$$

بنابراین

$$F\Pi + T\mu_x + C = m \qquad (۴۵)$$

m، در رابطهٔ (۴۳)، به کمیتهای اندازه گرفتنی x_i مربوط به ستاره‌های مقایسه و به کمیت اندازه گرفتنی x مربوط به ستاره‌ای که اختلاف‌منظر آن مطلوب است بستگی دارد. اگر فرض کنیم اختلاف‌منظر و حرکت خاصه ستاره‌های مقایسه قابل چشمپوشی باشند (در واقع، Π و μ_x در معادلهٔ (۴۵) اختلاف‌منظر و حرکت خاصه نسبی هستند، یعنی نسبت به میانگین ستاره‌های مقایسه) در این صورت C، در رابطهٔ (۴۴)، برای هر صفحهٔ عکاسی مقداری ثابت خواهد بود. بدین‌ترتیب هر نورگیری معادله‌ای به شکل (۴۵) فراهم می‌آورد و از حل همهٔ این معادلات به روش کمترین مربعات، مقادیر Π، μ_x، و C (که دیگر مورد توجه نیست) تعیین می‌شوند. از آنجا که معمولاً دستکم تعداد ۲۰ صفحهٔ عکاسی اندازه‌گیری می‌شوند راحتی روش و مقرون به صرفه بودن آن در محاسبات به آسانی محسوس است.

مثال ۲. داده‌های زیر (برحسب یک واحد مقیاس خاص) از اندازه‌گیریهای یک ستاره، که به وسیلهٔ شلزینگر انجام شده است گرفته شده‌اند.[1] چهار ستارهٔ مقایسه مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

ستاره	X	Y	x	D	Dx
۱	−۳۷۸	+۶۲	۱۹۸٫۷۶۶	۰٫۲۵	۴۹٫۶۹۱۵
۲	−۸	+۲۰۰	۵۶۹٫۳۵۱	۰٫۴۸	۲۷۳٫۲۸۸۵
۳	+۸۴	−۱۳۰	۶۶۰٫۹۳۴	۰٫۱۱	۷۲٫۷۰۲۷
۴	+۳۰۲	−۱۳۲	۸۷۹٫۴۸۵	۰٫۱۶	۱۴۰٫۷۱۷۶
اختلاف‌منظر ستاره	−۴۰٫۳	+۷۵٫۵	۵۳۵٫۱۳۳	−	$\sum D_i x_i =$ ۵۳۶٫۴۰۰

1. *Astrophysical Journal*, vol. XXX III, p. 163 (1911).

مختصات چهارستارهٔ مقایسه و ستاره‌ای که اختلاف منظر آن مورد بررسی است نسبت به مرکز جرم ستاره‌های مقایسه در ستونهای ۲ و ۳ درج شده‌اند. از مقادیر مربوط به ستاره‌های مقایسه به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۱}^{۴} X_i^۲ = ۲۴۱۲۰۸ \quad , \quad \sum_{i=۱}^{۴} Y_i^۲ = ۷۸۱۶۸ \quad , \quad \sum_{i=۱}^{۴} X_iY_i = -۷۵۸۲۰$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه‌های (۳۵) ، (۳۶)، و (۳۷) و قراردادن $X_. = -۴۰٫۳$ و $Y_. = +۷۵٫۵$ (از خط آخر جدول)، خواهیم یافت

$$P = ۰٫۰۰۰۱۹۶ \quad , \quad Q = ۰٫۰۰۱۱۶ \quad , \quad R = ۰٫۲۵۰$$

سپس مقادیر D_i از رابطهٔ (۳۸) محاسبه می‌شوند که این مقادیر در ستون پنجم نوشته شده‌اند. حاصلضرب D_ix_i برای هر ستاره تشکیل می‌شود و جمع $\sum D_ix_i$ در پایین ستون آخر درج شده است. بدین‌ترتیب برای این نوردهی خاص مقدار m، که از رابطهٔ (۴۳) به دست می‌آید چنین است

$$۵۳۵٫۱۳۳ - ۵۳۶٫۴۰۰ \equiv -۱٫۲۶۷$$

همچنین، برای این نوردهی خاص داریم $F = +۰٫۸۸۰$ و $T = +۰٫۷۲۳$، به طوری که از رابطهٔ (۴۵) داریم

$$۰٫۸۸۰\Pi + ۰٫۷۲۳\mu_x + C = -۱٫۲۶۷ \qquad (۴۶)$$

مقادیر Π و μ_x، از حل همهٔ معادلات حالت شبیه به (۴۶) به روش کمترین مربعات برحسب واحد مقیاس به‌ترتیب برابر ۰٫۱۰۵۵ و ۰٫۱۳۰۷– به دست آمدند و در پایان به نتایج زیر منجر شدند

$$\Pi = ۰''٫۲۸۱ \pm ۰''٫۰۰۴ \quad ; \quad \mu_x = -۰''٫۳۴۸$$

پیوست ۲

قدر ستاره‌ای

۲۲۳. قدر ظاهری

اولین طبقه‌بندی ستاره‌ها که با چشم غیر مسلح دیده می‌شوند بر اساس روشنایی ظاهری آنها تقریباً دو هزار سال پیش توسط هیپارکوس انجام شد. روشنترین ستاره‌ها که پانزده تا هستند به عنوان «ستاره‌های قدر اول» تعیین شدند و ستاره‌هایی که در مرز دید چشم غیر مسلح بودند جزو «ستاره‌های قدر ششم» و ستاره‌هایی که روشنایی بینابین داشتند در ردهٔ قدری بینابین قرار گرفتند. با ابزارهای دقیق امروزی برای اندازه‌گیری روشنایی نسبی ستاره‌ها، وجود یک طبقه‌بندی دقیق بر طبق روشنایی ضروری است و امروزه «قدر» در مقیاس معینی که با روشنایی ستاره رابطه دارد به‌مفهوم یک عدد است . اگر $m_۱$ و $m_۲$ قدرهای دو ستاره را در این مقیاس نشان دهند و $l_۱$ و $l_۲$ روشنایی یا درخشندگی ظاهری آنها باشند، اختلاف قدر آنها یعنی $m_۲ - m_۱$ با فرمول زیر تعریف می‌شود

$$\frac{l_۱}{l_۲} = ۱۰^{-۰٫۴(m_۱-m_۲)} \qquad (۱)$$

بدین ترتیب اختلاف قدری برابر ۵ با نسبت روشنایی ۱ : ۱۰۰ و اختلاف قدر یک با نسبت روشنایی ۱ : ۲٫۵۱۲ متناظر است. نقطهٔ صفر مقیاس قدر به طور دلخواه انتخاب می‌شود. در عمل، قدر صفر در مقیاس قدر مرئی تقریباً با روشنایی ستارهٔ آلفای چنگ رومی (نسر واقع)، که قدر آن در واقع ۰٫۰۴ است، مطابقت دارد. مقیاس قدر مرئی (V) به آن ناحیه از طیف که چشم نسبت به آن بیشترین حساسیت را دارد مربوط می‌شود.

سایر مقیاسهای قدری که به همین نحو معرفی می‌شوند، با قسمتهای مختلف طیف مطابقت دارند. دو دستگاه قدری دیگر که اغلب به کار برده می‌شوند، مقیاس قدری آبی (B) و مقیاس قدری فرابنفش (U) هستند، در اینها نیز نقطهٔ صفر مقیاس قدری به طور اختیاری انتخاب می‌شود. این انتخاب طوری است که برای ستاره‌ای مانند نسر واقع همهٔ قدرهای V، B، و U با هم برابرند. تفاوت بین این قدرها در مورد یک ستارهٔ خاص اساساً بستگی به دمای ستاره دارد.

۲۲۴. قدر مطلق

اگر چه ممکن است ستاره‌ای روشنتر از ستارهٔ دیگر به نظر رسد ولی نمی‌توان گفت که ستارهٔ اول ذاتاً درخشانتر از ستارهٔ دوم است. روشنایی یک ستاره متناسب با عکس مجذور فاصلهٔ آن از ما تغییر می‌کند. اگر l روشنایی ظاهری مربوط به فاصلهٔ d و L روشنایی ظاهری به فرض قرار داشتن ستاره در فاصلهٔ استاندارد D باشد، داریم

$$\frac{l}{L} = \frac{D^۲}{d^۲} \tag{۲}$$

اگر M قدر ظاهری ستاره به‌فرض قرار داشتن آن در فاصلهٔ استاندارد D باشد، آنگاه با استفاده از روابط (۱) و (۲) به دست می‌آید

$$۱۰^{-۰٫۴(m-M)} = \frac{D^۲}{d^۲}$$

که در آن داریم

$$M - m = ۵\log_{۱۰}(D/d) \tag{۳}$$

اما اختلاف‌منظر ستاره، Π برحسب ثانیهٔ قوسی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Pi = \frac{a}{d}\operatorname{cosec} ۱'' \tag{۴}$$

که در آن a شعاع مدار زمین است. همین‌طور، اگر $\Pi_۰$ اختلاف‌منظر مربوط به فاصلهٔ D باشد، داریم

$$\Pi_۰ = \frac{a}{D}\operatorname{cosec} ۱'' \tag{۵}$$

بدین ترتیب با استفاده از روابط (۴) و (۵)، به دست می‌آید

$$\frac{D}{d} = \frac{\Pi}{\Pi_۰}$$

با توجه به معادلهٔ (۳) خواهیم داشت

$$M = m + 5\log_{10}\Pi - 5\log_{10}\Pi_0 \qquad (۶)$$

فاصلهٔ استاندارد D، طبق‌قرار داد، ده پارسک است به طوری که $\Pi_0 = 0''{,}1$. بدین ترتیب داریم

$$M = m + 5 + 5\log_{10}\Pi \qquad (۷)$$

که در آن M قدر مطلق نامیده می‌شود.

معلوم می‌شود که قدر مطلق ستاره‌ها در گسترهٔ تقریبی ۵− تا ۱۵+ که متناظر با گسترهٔ روشنایی ذاتی ۱ : $۱۰۰^{۴}$ یا ۱: ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ است قرار دارند.

پیوست ۳

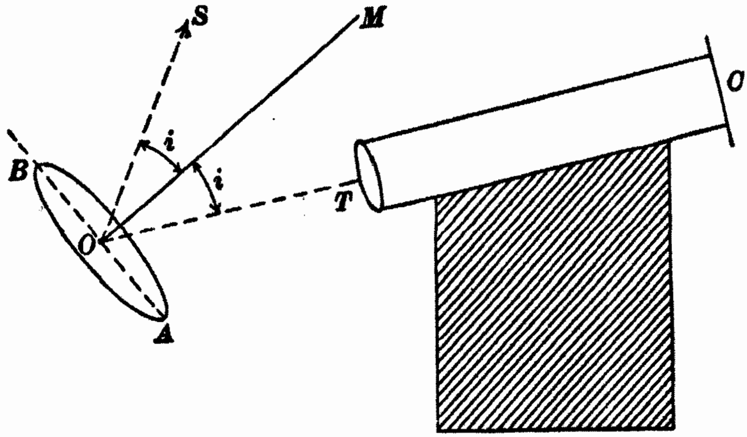
کولِستات

۲۲۵. اصول کلی

برای رصد گرفتگی و برخی از رصدهای اختر فیزیکی، استفاده از تلسکوپی که مکان ثابتی دارد مناسب است. بنابراین، جهت بازتاب نور جرم آسمانی تحت رصد و رساندن آن به این تلسکوپ ثابت به وسایلی کمکی نیازمندیم. این نوع ابزار کمکی را کولستات می‌نامند. قسمت اصلی آن آینهٔ تختی است که می‌توان آن را حول قطری موازی محور زمین چرخاند.

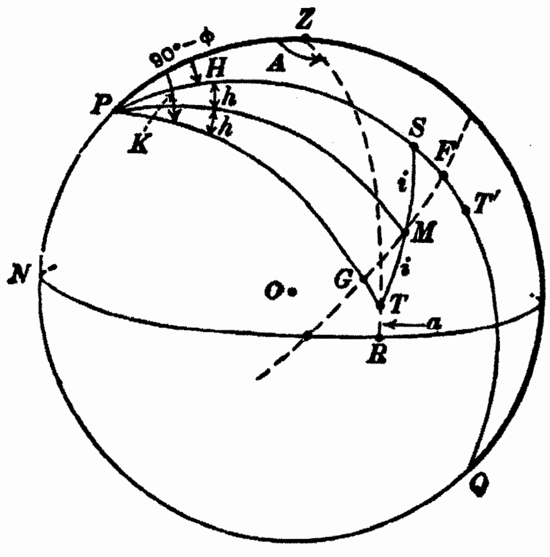
در شکل ۱۴۸، این آینه (که معمولاً گرد است) با قطر محوری آنAB نشان داده شده است و OM امتداد عمود بر آینه است. سایر قسمتهای این وسیله نشان داده نشده‌اند. تلسکوپ به همان صورتی که در شکل نشان داده شده است نصب می‌شود، T عدسی شیئی آن و C صفحهٔ کانونی است که صفحهٔ عکاسی را می‌توان در آنجا قرار داد. ابتدا آینه نسبت به عمود OM طوری تنظیم می‌شود که باریکه‌ای از پرتوهای جرم آسمانی S در راستای OT که منطبق بر محور نوری تلسکوپ است بازتابیده شود. به طوری که بعداً خواهیم دید، شرط لازم برای ادامهٔ فرود عمودی پرتوهای S بر شیشهٔ شیئی در T پس از بازتاب از آینه این است که آینه با سرعتی برابر با نصف سرعت زاویه‌ای حرکت شبانه‌روزی S دوران داده شود. زاویهٔ بین عمود بر آینه و امتداد OS یا OT را با i نشان می‌دهیم.

فرض کنید O یعنی مرکز آینه، در شکل ۱۴۹، مرکز کرهٔ سماوی نیز باشد. بنابراین S امتداد جرم آسمانی، M امتداد عمود بر آینه و T امتداد پرتوهای بازتابیده را به دست می‌دهد. از آنجایی که محور آینه، AB، موازی محور چرخش زمین است، M درشکل ۱۴۹ روی استوای سماوی



شکل۱۴۸

یعنی FG قرار دارد. اگر δ میل S باشد، کمان FS که در راستای نصف‌النهار PS اندازه گرفته می‌شود، برابر δ است. فرض کنید PT استوا را در G قطع کند. آنگاه طبق قوانین بازتاب OS، OM، و OT هم صفحه‌اند و بنابراین S، M، و T بر یک دایرهٔ عظیمه قرار دارند؛ همچنین کمانهای SM و MT با هم برابرند و هر یک مساوی i است. نتیجه می‌گیریم که GT برابر SF



شکل۱۴۹

است به طوری که $PT = ۹۰^\circ + \delta$. باز هم داریم $GM = MF$ و بنابراین به دست می‌آوریم $T\hat{P}M = S\hat{P}M$ که این زاویه‌ها را با h نشان می‌دهیم.

چون تلسکوپ ثابت است، T نقطهٔ ثابتی در کرهٔ سماوی است. فرض کنیم ارتفاع و سمت T به‌ترتیب a و A باشند؛ آنگاه برای یک موضع معین تلسکوپ، a و A هم ثابت‌اند.

فرض کنید H زاویهٔ ساعتی S و H' زاویهٔ ساعتی M، و K (که مقداری ثابت است) زاویهٔ ساعتی T باشد. داریم

$$H + ۲h = K \qquad \text{و} \qquad H' = H + h$$

که از آنها حاصل می‌شود

$$۲H' = H + K$$

بدین ترتیب خواهیم داشت

$$\frac{dH'}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{dH}{dt} \tag{۱}$$

این فرمول آهنگی را که آینه حول محور AB باید دوران داده شود معین می‌کند. در مورد خورشید این آهنگ را می‌توان به صورت ۳۶۰° در ۴۸ ساعت یا تقریباً $۷\frac{۱}{۲}^\circ$ در هر ساعت خورشیدی متوسط بیان کرد. برای یک ستاره این آهنگ برابر $۷\frac{۱}{۲}^\circ$ در هر ساعت نجومی است.

۲۲۶. فرمولهای نصب تلسکوپ

اکنون روشهای گوناگونی را که می‌توان تلسکوپ را در عرض جغرافیایی معین ϕ نصب کرد بررسی می‌کنیم

الف) در مثلث PZT، که در آن

$$PZ = ۹۰^\circ - \phi \text{ ،} \quad ZT = ۹۰^\circ - a \text{ ،} \quad PT = ۹۰^\circ + \delta \text{ ،و} \quad P\hat{Z}T = A$$

است، با استفاده از فرمول (الف) داریم

$$-\sin\delta = \sin\phi \sin a + \cos\phi \cos a \cos A \tag{۲}$$

که رابطه‌ای است لازم بین a و A برای اینکه پرتوها به درون تلسکوپ بازتابیده شوند. بدین ترتیب اگر بخواهیم که تلسکوپ تحت زاویهٔ معینی نسبت به افق قرار گیرد، سمت A به راحتی از رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

ب) به ویژه ممکن است نصب افقی تلسکوپ را مناسب بدانیم؛ در این حالت داریم $a = ۰°$ و A از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\cos A = -\sin\delta \sec\phi \qquad (۳)$$

همراه با شرط زیر برای مقادیر عددی δ و ϕ

$$\delta + \phi \leq ۹۰°$$

ج) در حالتی که نصب تلسکوپ در صفحهٔ نصف‌النهار مناسب باشد، آنگاه داریم $A = ۱۸۰°$ و رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\sin\delta = \cos(\phi + a)$$

و بدین ترتیب خواهیم داشت

$$a = ۹۰° - \phi - \delta \qquad (۴)$$

د) نکتهٔ قابل ملاحظهٔ دیگر در عمل بزرگی زاویهٔ i است که به عنوان یک قاعدهٔ کلی باید کوچک نگه داشته شود.

سطح مقطع باریکه بازتابیده یک بیضی است که نسبت محورهای اصلی آن برابر ۱ : $\cos i$ است. همیشه «پرکردن» عدسی شیئی تلسکوپ، هدفی مطلوب به شمار می‌رود و شرط این کار این است که $\cos i > d/D$ باشد که در آن d و D به‌ترتیب قطر عدسی شیئی و آینه‌اند.

از مثلث PSM، که در آن $PM = ۹۰°$ است، و با استفاده از فرمول (الف) داریم

$$\cos i = \cos\delta \cos h \qquad (۵)$$

از رابطهٔ (۵) دیده می‌شود که به ازای $h = ۰$ مقدار i مینیموم است. بدین ترتیب مقدار مینیموم i برابر δ است. در این حالت، M و T در نصف‌النهار PS، قرار می‌گیرند، به طوری که M روی F و T روی T'، و $FT' = FS = \delta$ است. در این صورت، ارتفاع T' یعنی a' به راحتی از مثلث PZT' که در آن $PT' = ۹۰° + \delta$ است پیدا می‌شود. داریم

$$\sin a' = -\sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos H \qquad (۶)$$

مثلاً در مورد گرفتگی کلی، زاویهٔ ساعتی لحظهٔ میانی گرفتگی، H، را می‌توان با دقت کافی پیدا کرد و بدین ترتیب a' را می‌توان از رابطهٔ (۶) محاسبه کرد. بدین گونه سمت T'، یعنی A'، از فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$-\sin\delta = \sin\phi \sin a' + \cos\phi \cos a' \cos A' \qquad (۷)$$

پیوست ۴

ثابتهای نجومی

ابعاد زمین:

شعاع استوایی	$a = ۶۳۷۸٫۱۶۰\text{km}$
شعاع قطبی	$b = ۶۳۵۶٫۷۷۵\text{km}$
پهن‌شدگی	$c \equiv \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{۱}{۲۹۸٫۲۵}$

طول شبانه‌روز:

روز نجومی متوسط	$۲۳^{h}\ ۵۶^{m}\ ۴^{s}٫۰۹۱$ = زمان خورشیدی متوسط
روز خورشیدی متوسط	$۲۴\ \ ۳\ \ ۵۶٫۵۵۵$ = زمان نجومی متوسط

طول ماه (۱۲۷۹/۱۹۰۰):

ماه هلالی	=	$۲۹^{d}٫۵۳۰۵۸۹$	$= ۲۹^{d}\ ۱۲^{h}\ ۴۴^{m}\ ۲^{s}٫۹$
ماه اعتدالی	=	$۲۷٫۳۲۱۵۸۲$	$= ۲۷\ \ ۷\ \ ۴۳\ \ ۴٫۷$
ماه نجومی	=	$۲۷٫۳۲۱۶۶۱$	$= ۲۷\ \ ۷\ \ ۴۳\ \ ۱۱٫۵$
ماه بی‌هنجار	=	$۲۷٫۵۵۴۵۵۱$	$= ۲۷\ \ ۱۳\ \ ۱۸\ \ ۳۳٫۲$
ماه گرهی	=	$۲۷٫۲۱۲۲۲۰$	$= ۲۷\ \ ۵\ \ ۵\ \ ۳۵٫۸$

طول سال (۱۲۷۹/۱۹۰۰):

سال اعتدالی	= ۳۶۵^{d}٫۲۴۲۲
سال نجومی	= ۳۶۵٫۲۵۶۴
سال بی‌هنجار	= ۳۶۵٫۲۵۹۶
سال گرفتی	= ۳۴۶٫۶۲۰۰
اختلاف‌منظر خورشیدی	= ۸″٫۷۹۴
اختلاف‌منظر افقی استوایی ماه	= ۵۷′۲″٫۶۰۸
ثابت ابیراهی نوری	= ۲۰″٫۴۹۶
ثابت ناوش (رقص محوری)	= ۹″٫۲۱۰
حرکت تقدیمی کلی	= ۵۰″٫۲۵۶۴ + ۰″٫۰۲۲۲T^{*}
حرکت تقدیمی در بُعد	m = ۴۶″٫۰۸۵۰ + ۰″٫۰۲۷۹T
	= ۳^{s}٫۰۷۲۳۴ + ۰^{s}٫۰۰۱۸۶T
حرکت تقدیمی در میل	n = ۲۰″٫۰۴۶۸ − ۰″٫۰۰۸۵T
میل دایرةالبروج	ε = ۲۳°۲۷′۸″٫۲۶ − ۴۶″٫۸۵T
فاصلهٔ میانگین زمین‌مرکزی ماه	= ۳۸۴۴۰۱km
فاصلهٔ میانگین زمین‌مرکزی خورشید (یک واحد نجومی)	= ۱۴۹۵۹۷۹۰۰km
۱ پارسک	= ۳۰٫۸۶ × ۱۰^{۱۲}km
۱ سال نوری	= ۹٫۴۶ × ۱۰^{۱۲}km
سرعت نور	= ۲۹۹۷۹۲٫۵km/s

نور یک واحد نجومی را در ۴۹۹٫۰۱۲ ثانیه‌می‌پیماید.

* T برحسب قرن ژولیانی از سال ۱۹۰۰٫۰ اندازه‌گیری می‌شود.

ثابت‌گرانش G = ۶٫۶۷۰ × ۱۰^−۸ (برحسب واحدهای CGS)

ثابت گرانش = ۶٫۶۷۰ × ۱۰^−۱۱ (برحسب واحدهای بین‌المللی، SI)

گرایشگاه خورشید بُعد = ۱۸^h ۴^m یا ۲۷۱° ، میل = +۳۰°

قطب صفحهٔ کهکشانی (۱۹۰۰/۱۲۷۹) بُعد = ۱۲^h ۴۶^m٫۶ ، میل = +۲۷°۴۰′

پیوست ۵

ابعاد خورشید، ماه، وسیارات

نام	نماد	نیم قطر (کیلومتر)	دورهٔ چرخش محوری	عکس جرم[1] (خورشید= ۱)	چگالی (آب= ۱)	سرعت مداری میانگین (کیلومتر بر ثانیه)
خورشید	☉	۶۹۶۰۰۰	۲۵^{d}ر۴	۱	۱ر۴۱	—
ماه	☾	۱۷۳۸	۲۷^{d}ر۳	۲۷۱۳۶۰۰۰	۳ر۳۴	۱ر۰۲
عطارد (تیر)	☿	۲۴۳۰	۵۸^{d}ر۶	۶۰۲۳۶۰۰	۵ر۴۴	۴۷ر۹
زهره (ناهید)	♀	۶۰۵۰	۲۴۳^{d}ر۰	۴۰۸۵۹۰	۵ر۲۳	۳۵ر۰
زمین	⊕	(استوایی)۶۳۷۸ (قطبی)۶۳۵۷	۲۳^{h}۵۶^{m}	۳۲۸۹۱۲	۵ر۵۲	۲۹ر۸
مریخ (بهرام)	♂	(استوایی)۳۳۹۵ (قطبی)۳۳۷۵	۲۴^{h}۳۷^{m}	۳۰۹۸۵۰۰	۳ر۹۴	۲۴ر۱
مشتری (برجیس)	♃	(استوایی)۷۱۶۰۰ (قطبی)۶۷۳۵۰	۹^{h}۵۰^{m}	۱۰۴۷ر۳۹	۱ر۳۳	۱۳ر۱

۱. این ارقام جرم دستگاه قمری را، در صورت موجود بودن، دربر می‌گیرد.

زحل (کیوان)	♄	(استوایی)۵۹۶۵۰ (قطبی)۵۳۸۵۰	۱۰^{h}۱۴^{m}	۳۴۹۸٫۵	۰٫۷۰	۹٫۷
اورانوس	♅	(استوایی)۲۳۵۵۰ (قطبی)۲۱۹۰۰	۱۰^{h}۴^{m}	۲۲۹۰۰	۱٫۷۱	۶٫۸
نپتون	♆	(استوایی)۲۴۲۰۰ (قطبی)۲۳۷۰۰	۱۵^{h}۴۸^{m}	۱۹۳۰۰	۱٫۷۷	۵٫۴
پلوتون	PL	۵٫۹۰۰	۶^{d}٫۴	۴۰۰۰۰۰۰?	۴٫۶?	۴٫۷

پیوست ۶

عناصر میانگین مدارهای سیاره‌ای

برای عصر ژانویهٔ ۱۹۷۵، ۰٫۵ET

نام	نیم‌محور بزرگ a (برحسب واحد نجومی)	خروج از مرکز e	دوره گردش نجومی (برحسب سال اعتدالی)	حرکت میانگین شبانه‌روزی نجومی n	دورهٔ هلالی (برحسب روز)
عطارد(تیر)	۰٫۳۸۷۰۹۹	۰٫۲۰۵۶۲۹	۰٫۲۴۰۸۵	۴°٫۰۹۲۳۳۹	۱۱۵٫۸۸
زهره (ناهید)	۰٫۷۲۳۳۳۲	۰٫۰۰۶۷۸۵	۰٫۶۱۵۲۱	۱°٫۶۰۲۱۳۰	۵۸۳٫۹۲
زمین	۱٫۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۱۶۷۲۰	۱٫۰۰۰۰۴	۰°٫۹۸۵۶۰۹	——
مریخ (بهرام)	۱٫۵۲۳۶۹۱	۰٫۰۹۳۳۸۲	۱٫۸۸۰۸۹	۰°٫۵۲۴۰۳۳	۷۷۹٫۹۴
مشتری (برجیس)	۵٫۲۰۲۸۰۴	۰٫۰۴۸۴۶۰	۱۱٫۸۶۲۲۴	۰°٫۰۸۳۰۹۱	۳۹۸٫۸۸
زحل (کیوان)	۹٫۵۳۸۸۴۴	۰٫۰۵۵۶۳۰	۲۹٫۴۵۷۷۱	۰°٫۰۳۳۴۶۰	۳۷۸٫۰۹
اورانوس	۱۹٫۱۸۱۸۵۴	۰٫۰۴۷۲۵۰	۸۴٫۰۱۲۴۷	۰°٫۰۱۱۷۳۲	۳۶۹٫۶۶
نپتون	۳۰٫۰۵۷۹۶۰	۰٫۰۰۸۵۸۶	۱۶۴٫۷۹۵۵۸	۰°٫۰۰۵۹۸۱	۳۶۷٫۴۹
پلوتون[1]	۳۹٫۲۹۹۷۶	۰٫۲۴۶۱۱۵	۲۴۶٫۳۷۸	۰°٫۰۰۴۰۰۱	۳۶۶٫۷۵

۱. عناصر پلوتون عناصر مماسیی هستند که مدار لحظه‌ای سیاره را به دور خورشید معین می‌کنند.

		طول سماوی میانگین		
نام	زاویهٔ میل، i	گرهٔ صعودی، θ	حضیض، ϖ	عصر، Υ
عطارد (تیر)	۷°٫۰۰۴۲۷	۴۸°٫۰۳۴۹۳	۷۷°٫۰۶۶۴۵	۳۲۰°٫۶۶۳۰۵
زهره (ناهید)	۳°٫۳۹۴۳۸	۷۶°٫۴۵۴۷۵	۱۳۱°٫۲۱۹۲۸	۳۱۰°٫۹۷۴۵۳
زمین	۰°٫۰	۰°٫۰	۱۰۲°٫۵۱۰۴۴	۹۹°٫۵۳۴۳۱
مریخ (بهرام)	۱°٫۸۴۹۸۳	۴۹°٫۳۶۴۶۶	۳۳۵°٫۵۹۸۸۱	۲۴۹°٫۶۲۹۱۹
مشتری (برجیس)	۱°٫۳۰۴۵۰	۱۰۰°٫۱۹۶۰۸	۱۳°٫۹۱۹۹۲	۳۵۵°٫۲۱۴۱۴
زحل (کیوان)	۲°٫۴۸۹۳۳	۱۱۳°٫۴۳۸۴۲	۹۲°٫۵۵۸۳۳	۱۰۴°٫۱۷۲۷۸
اورانوس	۰°٫۷۷۳۱۶	۷۳°٫۸۷۲۸۳	۱۷۰°٫۲۵۴۷۲	۲۰۵°٫۷۸۲۸۶
نپتون	۱°٫۷۷۲۳۶	۱۳۱°٫۵۰۵۰۶	۴۴°٫۴۰۵۹۲	۲۴۹°٫۹۱۴۶۲
پلوتون	۱۷°٫۱۴۴۵۱	۱۰۹°٫۹۹۶۵	۲۲۴°٫۲۵۸۰	۲۰۲°٫۳۳۴۵

پیوست ۷

عناصر و ابعاد قمری

سیاره	قمر	فاصلهٔ میانگین از سیاره (برحسب km × ۱۰^۳)	دورهٔ گردش نجومی (برحسب روز)	خروج از مرکز مدار میانگین	قطر (برحسب km)
زمین	ماه	۳۸۴٫۴	۲۷٫۳۲۱۶۶	۰٫۰۵۴۹۰	۳۴۷۶
مریخ	۱. فوبوس	۹٫۴	۰٫۳۱۸۹۱	۰٫۰۲۱۰	۲۳
	۲. دیموس	۲۳٫۵	۱٫۲۶۲۴۴	۰٫۰۰۲۸	۱۲
مشتری	۱. یو	۴۲۲	۱٫۷۶۹۱۴	۰٫۰۰۰	۳۶۶۰
	۲. اروپا	۶۷۱	۳٫۵۵۱۱۸	۰٫۰۰۰	۲۹۶۰
	۳. گانیمید	۱۰۷۰	۷٫۱۵۴۵۵	۰٫۰۰۱	۵۲۰۰
	۴. کالیستو	۱۸۸۳	۱۶٫۶۸۹۰۲	۰٫۰۰۷	۴۷۲۰
	۵. الماثیا	۱۸۱	۰٫۴۹۸۱۸	۰٫۰۰۳	۱۶۰
	۶. هیمالیا	۱۱۴۷۸	۲۵۰٫۵۷	۰٫۱۵۸	۱۰۰
	۷. الارا	۱۱۷۳۷	۲۵۹٫۶۵	۰٫۲۰۷	۳۰
	*۸. پاسیفیا	۲۳۵۰۰	۷۳۹	۰٫۴	۲۰
	*۹. سینوپه	۲۳۶۰۰	۷۵۸	۰٫۲۷۵	۲۰
	۱۰. لیسیتیا	۱۱۷۲۰	۲۵۹٫۲۲	۰٫۱۲	۲۰
	*۱۱. کارمه	۲۲۶۰۰	۶۹۲	۰٫۲۰۷	۲۰

سیاره	قمر	فاصلهٔ میانگین از سیاره (برحسب km × ۱۰^۳)	دورهٔ گردش نجومی (برحسب روز)	خروج از مرکز مدار میانگین	قطر (برحسب km)
	۱۲. انانکه	۲۱۲۰۰	۶۳۱	۰٫۱۶۹	۲۰
	۱۳. لِدا	۱۱۱۰۰	۲۴۰	?	?
کیوان	۱. میماس	۱۸۶	۰٫۹۴۲۴۲	۰٫۰۲۰۲	۵۰۰
	۲. انسلادوس	۲۳۸	۱٫۳۷۰۲۲	۰٫۰۰۴۵	۶۰۰
	۳. تتیس	۲۹۵	۱٫۸۸۷۸۰	۰٫۰۰۰۰	۱۰۰۰
	۴. دیون	۳۷۸	۲٫۷۳۶۹۲	۰٫۰۰۲۲	۹۵۰
	۵. ریا	۵۲۷	۴٫۵۱۷۵۰	۰٫۰۰۱۰	۱۳۰۰
	۶. تیتان	۱۲۲۲	۱۵٫۹۴۵۴۵	۰٫۰۲۹۲	۴۸۰۰
	۷. هیپریون	۱۴۸۳	۲۱٫۲۷۶۶۶	۰٫۱۰۴۲	۴۵۰
	۸. یاپتوس	۳۵۶۰	۷۹٫۳۳۰۸۵	۰٫۰۲۸۳	۱۱۰۰
	*۹. فوبه	۱۲۹۵۰	۵۵۰٫۳۴	۰٫۱۶۳۳	۲۰۰
	۱۰. یانوس	۱۵۹	۰٫۷۴۹۰	۰٫۰	۳۰۰
اورانوس	۱. آریبل	۱۹۲	۲٫۵۲۰۳۸	۰٫۰۰۲۸	۷۰۰
	۲. اومبریبل	۲۶۷	۴٫۱۴۴۱۸	۰٫۰۰۳۵	۵۰۰
	۳. تیتانیا	۴۳۸	۸٫۷۰۵۸۸	۰٫۰۰۲۴	۱۰۰۰
	۴. اُبرون	۵۸۶	۱۳٫۴۶۳۲۶	۰٫۰۰۰۷	۹۰۰
	۵. میراند [۱]	۱۳۰	۱٫۴۱۴	< ۰٫۰۱	۲۵۰
نپتون	*۱. تریتون	۳۵۵	۵٫۸۷۶۸۴	۰٫۰۰	۳۸۰۰
	۲. نِرید	۵۵۶۲	۳۵۹٫۸۸	۰٫۷۵	۳۰۰

* حرکت رجوعی است.

پیوست ۸

زمان زیجی و جهانی

چرخش زمین مبنای اندازه‌گیری زمان است و در رابطه با زمان جهانی (UT) این آهنگ چرخش یکنواخت فرض می‌شود. اخیراً، ساعتهای بلوری و سپس ساعتهای اتمی، که امروزه دقت آنها ۱ در $۱۰^{۱۳}$ است، نشان داده‌اند که چرخش زمین گاه‌به‌گاه نامنظم است. البته این انحراف از یکنواختی خیلی کوچک، حدود ۱ یا ۲ میلی ثانیه در روز، و غیر قابل پیشگویی است. گذشت زمان، در نظریه‌های گرانشی اجرام منظومهٔ شمسی، یکنواخت فرض می‌شود. این زمان طبق تعریف، زمان زیجی (ET) است و امروزه کمیتهای نجومی در تقویمها برحسب این زمان جدول‌بندی می‌شوند. عصرهایی که زمان زیجی نسبت به آن اندازه‌گیری می‌شود عبارت است از

ژانویه ۱۹۰۰، ۰ر۵ET

که به تفصیل در سال ۱۹۵۸/۱۳۳۷ چنین تعریف شد: «لحظهٔ نزدیک به آغاز سال گاهنامه‌ای ۱۹۰۰ میلادی هنگامی که طول سماوی میانگین خورشید ۲۷۹° ۴۱′ ۴۸″ر۰۴ بود اندازهٔ زمان زیجی دقیقاً ساعت ۱۲ روز صفر ژانویهٔ ۱۹۰۰ بود. عصر زمان جهانی ساعت ۱۲ (UT) صفر ژانویهٔ ۱۹۰۰ است. گرچه این دو عصر به ظاهر با یک عبارت نشان داده می‌شود، ولی مطابق با یک لحظه از زمان نیستند، عصر زمان زیجی ۴ ثانیه دیرتر از عصر زمان جهانی است.

بنابراین زمان زیجی هر لحظه با فرمول زیر برای طول میانگین هندسی خورشید تعریف می‌شود:

$$L = ۲۷۹^\circ\ ۴۱'۴۸''ر۰۴ + ۱۲۹۶۰۲۷۶۸''ر۱۳T + ۱''ر۰۸۹T^{۲}$$

در اینجا T زمان زیجی است که برحسب قرن ژولیانی برابر ۳۶۵۲۵ روز زیجی، از عصر بنیادی اندازه‌گیری می‌شود. بُعد خورشید میانگین پنداری نیز با همین عبارت داده می‌شود منتهی اثر ابیراهی نیز اضافه می‌شود. بُعد نقطهٔ مرجع زمان جهانی، که صرفاً خورشید میانگین نامیده می‌شود، دارای همان عبارت خورشید میانگین پنداری است فقط زمان جهانی، به عنوان شناسه، جای زمان زیجی قرار می‌گیرد.

می‌توان اضافه کرد که واحد بنیادی زمان یک ثانیه (ET) است که برابر ۱/۳۱۵۵۶۹۲۵٫۹۷۴۷ طول سال اعتدالی مربوط به ۱۹۰۰٫۰ گرفته می‌شود.

واژه‌نامه

آلفا-جبار	α orionis
ابط الجوزا	Betelgeuse
اختفا	occulation
اختلاف‌منظر اختری	stellar parallax
ارتفاع	altitude
استوای سماوی	celestial equator
استوای میانگین	mean equator
استوای واقعی	true equator
اعتدال بهاری	vernal equinox
اعتدال پاییزی	autumnal equinox
اعتدال میانگین	mean equinox
اعتدال واقعی	true equinox
اعداد بسلی روز	Besselian day number
اعداد مستقل روز	independent day number
افق سماوی	celestial horizon
انقلاب تابستانی	summer solstice
انقلاب زمستانی	winter solstice
اوج ۱	apastron
اوج ۲	aphelion
اوج زمین	apogee
بُعد	right ascension
بی‌هنجاری میانگین	mean anomaly

بی‌هنجاری واقعی	true anomaly
پارسک	parsec
تاریخ ژولیانی	Julian date
تصویر	projection
تعدیل زمان	equation of time
تعدیل مرکز	equation of center
تغییر قرنی	secular variation
تقلیل به استوا	reduction to the equator
ثانیهٔ قوسی	second of arc
جرم آسمانی	heavenly body
چرخهٔ متونیک	metonic cycle
چهار جهت اصلی	cardinal points
حد بالایی گرفتگی	superior ecliptic limit
حد پایینی گرفتگی	inferior ecliptic limit
حرکت تقدیمی قمری‌ـخورشیدی	luni-solar precession
حرکت خاصه	proper motion
حرکت زاویه‌ای میانگین	mean angular motion
حضیض ۱	periastron
حضیض ۲	perihelion
حضیض زمین	perigee
خروج از مرکز	eccentricity
خطای تراز	level error
خطای مرکزی‌سازی	centering error
خطای موازی‌سازی	collimation error
خط قطبنمایی	rhumb line
خط هم‌شیب	loxodrome line
خورشید میانگین	mean sun
دایرهٔ صغیره	small circle
دایرهٔ عبور	transit circle

دایرهٔ عظیمه	great circle
دایرهٔ مکانی	position circle
دایرهٔ نصف‌النهار	meridian circle
دایرهٔ نصف‌النهار راصد	observer's meridian
دوره	period
دورهٔ چرخش	period of rotation
دورهٔ مداری	orbital period
دورهٔ هلالی	synodic period
روز خورشیدی ظاهری	apparent solar day
روز متوسط خورشیدی	mean solar day
زاویهٔ ساعتی	hour angle
زاویهٔ کروی	spherical angle
زاویهٔ مکانی گریزگاه	position angle of ant-apex
زاویهٔ میل	inclination
زمان جهانی	universal time
زمان خورشیدی متوسط	mean solar time
زمان متوسط گرینویچ	Greenwich mean time
زمان منطقه‌ای	zone time
زمان نجومی	sidereal time
زمان نجومی متوسط گرینویچ	Greenwich mean astronomical time
زیج نجومی	astronomical ephemeris
ژئوئید	geoid
سال اعتدالی	tropical year
سال بسلی	Besselian year
سال بی‌هنجاری	anomalistic year
سایه	umbra
ستاره‌های پیراقطبی	circumpolar stars
ستاره‌های دوتایی دیداری	visual binary stars
ستاره‌های دوتایی طیفی	spectroscopic binaries
ستاره‌های دوتایی گرفتی	eclipsing stars
ستاره‌های دوگانه	double stars

سکستان	sextant
سمت	azimuth
سمت‌الرأس	zenith
شفق	twilight
شکست میانگین	mean refraction
صفحهٔ موازی‌سازی	collimation plane
طلوع نظری	theoretical sunrise
طول جغرافیایی	longitude
طول سماوی	celestial longitude
ظهر ظاهری	apparent noon
ظهر متوسط	mean noon
ظهر متوسط گرینویچ	Greenwich mean noon
عبور	transit
عرض جغرافیایی	latitude
عرض سماوی	celestial latitude
عصر	epoch
غروی ظاهری	visible sunset
غروب نظری	theoretical sunset
فاصلهٔ خورشیدمرکزی	heliocentric distance
فاصلهٔ زمین‌مرکزی	geocentric distance
فاصلهٔ سمت‌الرأسی	zenith distance
فاصلهٔ سمت‌الرأسی واقعی	true zenith distance
فاصلهٔ قطبی شمالی	north pole distance
فرضیهٔ سیمپسون	Simpson's hypothesis
فرضیهٔ کاسینی	Cassini's hypothesis
فرمول برادلی	Bradly formula
فرمول قیاسی	analogue formula
قائم مبدأ	prime vertical
قضیهٔ ماکلورن	Maclaurin's theorem

کرهٔ سماوی	celestial sphere
کولستات	coelostat
گرایشگاه	apex
گرایشگاه خورشید	solar apex
گرفتگی کلی ۱	totality
گرفتگی جزئی	partial eclipse
گرفتگی کلی ۲	total eclipse
گریزگاه	ant-apex
ماه گرهی	nodical month
ماه هلالی	synodical month
مایل دریایی	nautical mile
متمم عرض	colatitude
مثلثات کروی	spherical triangle
مثلث ربع دایره‌ای	quadrantal triangle
محورهای موازی‌سازی	collimation axes
مدار	parallel of latitude
مدار جنوبگان	antartic circle
مدار سماوی	parallel of declination
مدار شمالگان	arctic circle
مقابله	opposition
میل	declination
میل دایرةالبروج	obliquity of the ecliptic
ناعمودی	non-perpendicularity
نصف‌النهار پنداری	fictitious meridian
نصف‌النهار حقیقی	true meridian
نقشهٔ مرکاتور	mercator plan
نقطهٔ اول حمل	first point of aries
نیم‌سایه	penumbra
واحد نجومی	astronomical unit
همدم	companion

فهرست راهنما

ابیراهی
بیضی~ ۲۰۸
~تفاضلی ۳۳۴
ثابت~ ۲۱۳
~ در رابطه با اختلاف‌منظر خورشید، ۲۴۲
~شبانه‌روزی ۲۱۸
جمله‌هایE~ ۲۱۴
~در تلسکوپ عکاسی نجومی ۳۳۳
~سالانه ۲۰۶
~سیاره‌ای ۲۲۱
~شبانه‌روزی ۸۹، ۲۱۸
قانون~ ۲۰۴
اختروش ۴۱۱
اختفا(ی) ۴۱۰، ۴۱۵
تعدیل~ ۴۱۸
~رادیویی ۴۱۰
روش بسل در بررسی~ ۴۱۲
روش ترسیمی برای ~ ۴۱۷
شرایط هندسی~ ۴۱۱
عناصر بسلی~ ۴۱۵
اختلاف‌منظر
~آماری ۳۰۱
اثر~بر بُعدو میل ۲۳۳
اثر~بر فاصلهٔ سمت‌الرأسی و سمت ۲۳۶
~اختری ۲۴۷، ۴۵۷
اندازه‌گیری~ ۲۵۲، ۳۴۶
~افقی ۲۲۹
~استوایی متوسط ۲۲۹
~خورشید ۲۳۷
تعیین~ با استفاده از روش شبانه‌روزی ۲۴۰
~دینامیکی ۳۹۷
~زمین‌مرکزی ۲۲۸
~سالانه ۲۴۸
عامل~ ۲۵۲
~قرنی ۲۹۷، ۳۴۲
~ماه ۲۳۰
اختلال ۱۲۰
ارتفاع ۳۵
موازی ~ ۳۵
استوا(ی) ۸
تقلیل به~ ۱۷۰
~جغرافیایی ۸
~خورشید ۱۹۶
~سماوی ۳۷

~میانگین ۱۵۹، ۲۷۰
~واقعی ۲۷۴
اصول دینامیکی حرکت مداری ۱۲۰
اعتدال
~بهاری ۴۵، ۴۷
~پاییزی ۴۷
~میانگین ۱۵۹، ۱۶۰، ۲۷۰
~واقعی ۲۷۴
اعداد بسلی روز ۲۱۱، ۲۷۶، ۲۷۸
اعداد مستقل روز ۲۱۱، ۲۷۹
اندازه‌گیری صفحات عکاسی ۳۲۱
~اخترنگاشتی ۳۳۵
انقلاب تابستانی ۴۷، ۱۷۴
انقلاب زمستانی ۴۷، ۱۷۴
اوج ۱۱۵، ۳۸۱
اوج (زمین) ۱۵۲

بردار شعاعی ۱۱۵
بُعد ۴۵
اندازه‌گیری~ ۱۰۸
~و میل زمین‌مرکزی سیاره ۱۴۷
بیضی
~ابیراهی ۲۱۲
~اختلاف‌منظری ۲۵۰
~کمکی ۳۹۱
بی‌هنجاری(های) ۱۲۹
~خروج‌ازمرکزی ۱۳۰، ۱۳۱
~به صورت سری ۱۳۶
~میانگین ۱۳۱
~واقعی ۱۲۸، ۱۳۱
~به‌صورت سری ۱۳۷

پارسک ۲۵۴
پنهان شدن ۴۱۰

تاریخ ژولیانی ۱۶۸
تخت‌شدگی ۲۲۷
تصحیح زمان نور ۲۲۱
تصویر شاخص ۳۷۳
تعدیل
~اعتدالها ۱۶۱
~زمان ۵۰، ۱۶۹
~مرکز ۱۳۹، ۱۷۰
تعریف حرکت خاصه ۲۸۲
تعریف هاورسینوس ۲۶
تعیین عناصر ۱۵۰
~مدار ستارهٔ دوتایی ۳۸۰
تعیین فاصله
~توسط رادار ۲۳۲
~توسط لیزر ۲۳۲
~زهره توسط رادار ۲۴۲
تغییر
~سالانه ۲۷۳، ۲۹۴
~عرض جغرافیایی ۲۱۷
~قرنی ۲۷۲
تقلیل به استوا ۱۷۰
تقویم ۱۶۶
~ژولیانی ۱۶۷
~گرگوری ۱۶۷
تلسکوپ ۸۹
~شکستی ۳۱۵، ۳۲۳
عبور~ ۸۹
~عکاسی ۳۱۴، ۳۱۵
~ سمت‌الرأسی ۲۱۶
ثابت(های)
~ابیراهی ۲۱۳
اندازه‌گیری~ ۲۱۴

~بسلی ۲۷۹
~صفحهٔ عکاسی ۳۳۵
~گرانش ۱۱۷
مقدار نظری~ ۲۱۷
~ناوش ۲۸۰

جدولهای
~ارتفاع ۳۶۹
~دریایی اینمان ۲۷
~سمت ۳۶۰
جرم
~ستاره‌ها ۳۹۵
~سیاره‌ها ۱۱۹
~ی دوتایی طیفی ۴۰۷
جملات قرنی ۲۶۴
جملهٔ دوره‌ای ۲۶۴

چرخش کهکشان ۳۰۸، ۳۱۰
چرخهٔ متونیک ۴۴۵
چشمی بونن برگر ۱۰۳

حدود گرفتگی ۴۳۱
حرکت
~اختلاف‌منظر ۲۹۵
~خورشید ۲۹۵
گرایشگاه~ ۲۹۶
~رجوعی ۱۸۷
~زمین‌مرکزی مشتری ۱۸۷
~مداری ۱۲۰
اصول دینامیکی~ ۱۲۰
~مستقیم ۱۸۶
~میانگین ۱۱۶
حرکت(های) خاصه ۲۸۵
اندازه‌گیری~ ۲۸۵، ۲۸۷، ۳۳۸
تعریف~ ۲۸۲
روش فیلم به فیلم اندازه‌گیری~ ۳۴۳
~کل ۲۸۵
~نسبی ۳۴۱
حرکت تقدیمی
اثر ~ بر بُعد و میل ستاره ۲۶۱
~سیاره‌ای ۲۶۸
~عام ۲۶۹
~قمری-خورشیدی ۲۶۰
~نقطهٔ اعتدال ۲۵۹
حضیض ۱۱۵، ۳۸۱
حضیض (زمین) ۱۵۲

خروج‌ازمرکز ۱۱۵
خط
~قطبنمایی ۳۶۲
~مکانی ۳۵۹
~ انتقال‌یافته ۳۶۶
جدولهای~ ۳۶۹
~هم‌شیب ۳۶۲
خطا(ی)
~تراز ۹۰
تعیین~ ۱۰۲
~سمت ۹۰
تعیین~ ۱۰۵
~سمتگیری ۳۲۴
~شاخص ۳۵۳
~عمودیت ۳۵۳
~کناری ۳۵۳
~مرکزی‌سازی ۳۵۴
~موازی‌سازی ۹۰، ۹۳
~در سکستان ۳۵۳
تعیین~ ۹۶

خورشید
زمان عبور~ از هر دایرهٔ نصف‌النهار ۱۷۷
گرفتگی~ ۴۲۹
محور چرخش~ ۱۹۷
مدار ظاهری~ ۱۵۲
~میانگین ۱۶۱
~پنداری ۱۶۲، ۴۷۶

دایرةالبروج ۴۶
~میانگین ۲۷۰
میل~ ۴۶
دایره ۵
~صغیره ۵
طول کمان~ ۷
~عظیمه ۵
قطب~ ۶
~مکانی ۳۵۷
~نصف‌النهار راصد ۳۸
~نصف‌النهاری ۸۸
توصیف~ ۹۱
خطای ~ ۸۸
دورهٔ‌هلالی ۱۵۱
دیموس ۱۱۹

روز متوسط خورشیدی ۱۶۴
روز نجومی ۴۵، ۱۶۰
روش
تعیین ثابتهای صفحهٔ عکاسی به ~
کریستی و دایسون ۳۴۴
~زُوایر (ستارهٔ دوتایی دیداری) ۳۹۰
~سنت هلر (خط مکانی) ۳۵۹
~شبانه‌روزی در اختلاف‌منظر خورشید
۲۴۰
~طیف‌نمایی در اختلاف‌منظر خورشید
۲۴۳

زاویه ۶
~اختلاف‌منظر ۵۸
حرکت~ ۲۹۵
~ساعتی ۳۷
~شکست ۷۲
~قائم ۳۵
~کروی ۶
~مکان ۱۹۶
~گریزگاه ۳۰۰
~یک ستاره دوتایی ۳۷۸
نسبتهای مثلثاتی برای ~های کوچک ۳۰
زمان ۴۵، ۵۲
اندازه‌گیری~ ۱۱۰
~ جهانی ۵۱، ۱۶۱، ۴۷۶
~خورشیدی متوسط ۵۱
تبدیل~به زمان نجومی ۱۶۵
~زیجی ۱۶۱، ۴۷۷
~متوسط گرینویچ ۵۲
~محلی ۵۱
~مدنی گرینویچ ۵۱
~مدنی محلی ۵۲
~نجومی ۴۵
تبدیل ~به زمان میانگین ۱۶۵
~زیجی ۱۸۳
~ظاهری ۱۶۰
~متوسط گرینویچ ۵۱
~محلی ۵۱
~میانگین ۱۶۰
~نگار ۱۰۶
زمین

مدار ~ ۱۵۲

ژئوئید ۲۲۳
ابعاد~ ۲۲۷

ساروس ۴۴۴
سال
~اعتدالی ۱۵۳، ۱۶۳
~بسلی ۱۶۸
~بی‌هنجار ۱۵۳
~کبیسه ۱۶۷
~نجومی ۱۵۲، ۱۶۳
سایه ۴۲۱
ستاره‌های ۱۱۰
~اصلی ۳۷۸
~بنیادی ۱۱۰
~پیراقطبی ۴۰
~دوتایی ۳۷۸
جرم~طیفی ۴۰۷
عناصر مدار~ ۳۸۰
~گرفتی ۴۰۸
مدار ظاهری~ ۳۸۳
~ساعتی ۱۱۰
~مرجع ۱۱۰، ۳۳۵
~مقایسه ۳۴۰
سرعت
~سیاره ۱۲۶
~شعاعی ۲۴۳، ۲۸۴
تعیین حرکت خورشید از~ ۳۰۹
~حرکت خورشید ۲۹۸
~مماسی ۲۸۳
سمت ۳۶
آهنگ تغییرات~ ۵۷

جدولهای~ ۱۳۳
~باوشینگر ۱۳۳
سمت‌الرأس ۳۴، ۲۲۴
~نجومی ۲۲۵
سیاره(ها) ۱۱۹
اهلهٔ~ ۱۹۱
جرم~ ۱۱۹
حرکت زمین‌مرکزی~ ۱۸۴
مختصات خورشیدمرکزی~ ۱۴۲
~ی بزرگ ۱۱۵

شاقول ۲۲۵
شفق ۶۱
شکست ۷۰
اثر~بر بُعد و میل ۸۴
اثر~بر زمان غروب خورشید ۸۳
~افقی ۸۳
~تفاضلی ۳۳۲
جدولهای~پولکوا ۸۱
جدولهای~گرینویچ ۸۱
~جوی در تلسکوپ عکاسی نجومی ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۱
ضریب ~ ۷۲
فرمول کلی~ ۷۵
قوانین~ ۷۰
~میانگین ۷۴
ثابت ~ ۷۴
شیشهٔ افق ۳۵۲
شیشهٔ شاخص ۳۵۱

صفحه
~بنیادی ۴۱۱، ۴۳۴
~مماس ۳۱۶

~موازی‌سازی ۸۹

ضریب شکست ۷۱

طلوع ۳۸، ۵۵
طول ۱۴۱
~حضیض ۱۴۱
~سماوی ۴۸
اثر ناوش بر~ ۲۶۵، ۲۷۹
~صعودی ۱۴۰
~گرهٔ صعودی ۱۴۰
~میانگین ۱۴۱
~واقعی سیاره ۱۴۱
~ و عرض خورشیدنگاشتی ۱۹۶

ظهرمتوسط گرینویچ ۵۱

عبور ۳۸، ۴۱
~بالا ۴۱
~پایین ۴۱
~زهره ۲۴۲
عرض
~جغرافیایی ۹
~زمین‌مرکزی ۲۲۴
~سماوی ۴۸
~کهکشانی ۳۰۲
~نجومی ۲۲۴
عناصر
~ بسلی خورشیدگرفتگی ۴۳۴
تعیین ~قمرها ۴۷۴
~ مداری یک سیاره ۱۳۵، ۱۴۲
~ و ابعاد قمرها ۴۷۴

غروب ۵۵

فاصله
~زاویه‌ای ۱۸۸
~زمین‌مرکزی ۱۴۸
~سمت‌الرأسی ۵۵
آهنگ تغییرات~ ۵۷
شکست برای ~کوچک ۷۲
~قطبی شمالی ۳۸
~مرکزی ۱۱۵
فرضیهٔ سیمپسون ۸۶
فرضیهٔ کاسینی ۸۶
فرمول
~بسل ۹۵
~بنیادی ۱۲
~چهار جزئی ۱۷
~سینوس ۱۳
~قطبی ۲۲
~قیاسی ۱۵
~کسینوس ۱۰
~مختصات استاندارد ۳۱۹
~هاورسینوس ۲۶
فصلها ۱۷۳
طول~ ۱۷۵
فواصل سیمها ۹۶
فهرست‌بندی ستاره‌ها ۲۷۹

قانون ۱۱۷
~گرانش ۱۱۸
~نیوتون ۱۱۷
~گلدستن و دیل ۸۰
قائم ۳۴
دایرهٔ~ ۳۵
~مبدأ ۳۶
قدر ستاره‌ای ذاتی ۴۶۱

قدر ستاره‌ای ظاهری ۴۶۰
قرص ۱۹۲
قضیهٔ لامبرت ۱۵۷
قطب
~جغرافیایی ۸
~دایرهٔصغیره ۶
~دایرهٔعظیمه ۶
~راه شیری ۶۸
قوانین کپلر ۱۱۴
قیاسهای دالامبر ۳۱
قیاسهای نپر ۳۱

کرهٔ سماوی ۵، ۴۱
کشف پلوتون ۱۱۴
کولستات ۴۶۳

گرفتگی(های)
بسامد~ ۴۴۲
~جزئی خورشید ۴۳۰
حدود~ ۴۲۳
~حلقوی ۴۳۰
~خورشید ۴۲۹
~کلی خورشید ۴۲۹
قدر یک ~ ۴۲۸
~ماه ۴۲۰
تکرار~ ۴۴۴
گره ۳۲، ۱۴۰
طول ~صعودی ۱۴۰
ماه
اختلاف‌منظر~ ۲۳۰
~بی‌هنجار ۱۵۳
گرفتگی جزئی ~ ۴۲۱
~گرفتگی کلی ۴۲۱
~گرهی ۱۵۴
مدار~ ۱۵۳
~نجومی ۱۵۳
~هلالی ۴۴۲
مبدأ ۱۴۲
طول میانگین در~ ۱۴۲
متمم عرض ۹
متوسط ۵۰
ظهر~ ۵۱
مثلث(های)
~ربع دایره‌ای ۲۱
~قائم‌الزاویه ۱۹
قواعد~قائم‌الزاویه و ربع دایره‌ای ۲۱
~کروی ۵
حل~ ۴۳
محور موازی‌سازی ۸۹
مختصات
~استاندارد ۳۱۶، ۳۱۷
~استوایی خورشیدمرکزی ۱۴۴
~خورشیدمرکزی دایرةالبروج ۱۴۲
~خورشیدنگاشتی ۱۹۴
~لک خورشید ۱۹۸
~مرکز قرص ۱۹۶
~ظاهری ۲۹۴
~قائم استوایی خورشیدمرکزی ۱۴۴
~قائم استوایی زمین‌مرکزی خورشید ۱۴۷
~قائم خورشیدمرکزی زمین ۱۴۷
~کهکشانی ۳۱۲
~میانگین و ظاهری ۲۹۴
مدار ۹، ۵۷
~بیضی ستاره‌های دوتایی طیفی ۳۹۷
تعیین عناصر سیاره‌ای~ ۱۵۰
~جنوبگان ۵۷

~در فضا ۱۴۰
دورهٔ~ی ۱۱۵
~رأس‌الجدی ۱۷۵
~رأس‌السرطان ۱۷۵
~زمین ۴۶، ۱۵۲
~ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۸۰
~سماوی ۳۸
~شمالگان ۵۷
~ظاهری خورشید ۱۵۲
~ظاهری ستارهٔ دوتایی دیداری ۳۸۳
عنصرهای~بیضوی ۱۳۵، ۱۴۱
~ماه ۱۵۳
معادلهٔ~ ۱۲۲
معادله
~دایرهٔ عظیمه روی نقشهٔ مرکاتور ۳۷۱
~سیاره‌ای مدار ۱۲۳
~کپلر ۱۳۱
حل~ ۱۳۲
~مرکزی
مقابله ۱۵۰
مکان
~اراس ۲۳۷، ۲۴۲
~ظاهری ۲۷۸
یافتن~ از مکان میانگین ۲۷۸
~یک ستاره ۲۷۸
~گریزگاه ۳۰۰
~میانگین ۳۳۷
~واقعی ۲۷۵
~یک ستاره ۲۷۴
منحنی سرعت ۳۹۹
منطقهٔ حاره ۱۷۵
منطقهٔ معتدله ۱۷۵
مؤلفه‌های سرعت ۱۲۸

موازی‌ساز ۹۸
میل ۳۸، ۴۲، ۴۶
اندازه‌گیری~ ۱۰۷
~دایرةالبروج ۴۶
ناوش در~ ۲۶۶، ۲۷۹

ناوش(یا رقص‌محوری) ۲۶۳
اثر~بر طول سماوی ۲۶۵، ۲۷۹
اثر~بر میل ۲۷۹
~در میل ۲۶۶
نصف‌النهار ۹
~جغرافیایی ۹
~راصد ۳۸
نقشهٔ مرکاتور ۳۶۲
نقطه
~اقامت ۱۸۷
~اول حمل ۴۵
حرکت تقدیمی~اعتدال ۲۵۸
~زیراختری ۳۵۸
~زیرخورشیدی ۳۵۸
~های چهار جهت اصلی ۳۶
نمودار نیمکرهٔ جنوبی ۳۹
نیم‌سایه ۴۲۱، ۴۲۹
نیم‌قطر ۲۳۲
~زاویه‌ای ۱۰۸
نیم‌محور بزرگ ۱۱۵

وابستگیها ۴۴۹
واحد نجومی
~فاصله ۱۱۷
~قطبی شمالی ۳۸
~فاصلهٔ‌سمت‌الرأسی ۳۵

همدم (یک ستاره دوتایی) ۳۷۸