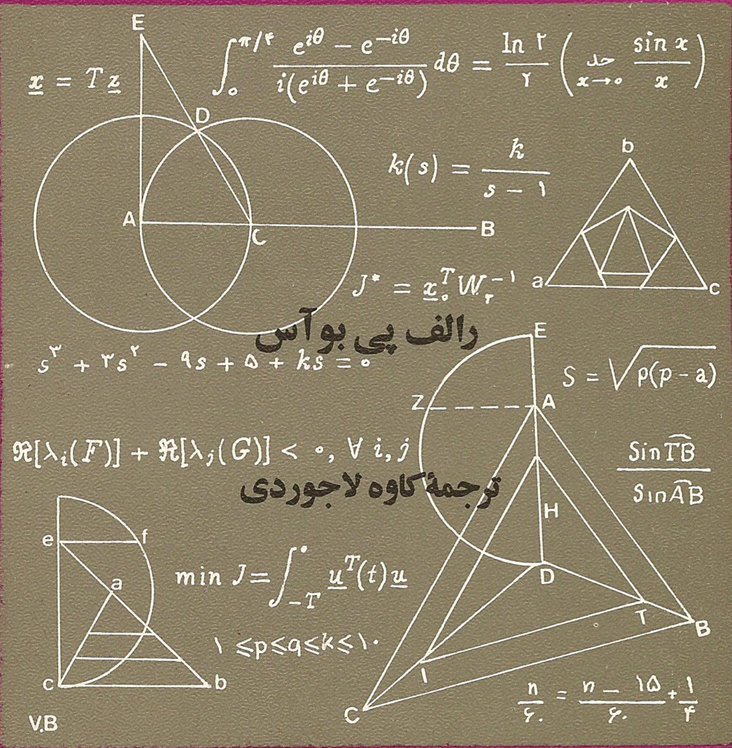
نخستینِ درسِ توابعِ حقیقی



رالف پی بوآس

ترجمهٔ کاوه لاجوردی

سبکِ غیررسمیِ این کتاب ــ که، به همراهِ غنای محتوا، از عواملِ شهرتِ آن است ــ کتاب را بیشتر به شکلِ مجموعه‌ای از صحبتهای «خودمانی» در توابعِ حقیقی و توپولوژیِ فضاهای متریک درآورده است تا کتابِ درسیِ متعارفی در آنالیزِ ریاضی.

رالف فیلیپ بوآس (۱۹۹۲ - ۱۹۱۳) از ریاضیدانانِ معروفِ امریکایی و صاحبِ چند کتاب و تعدادِ معتنابهی مقالهٔ پژوهشی و توصیفی است. نخستین درس توابع حقیقی معروفترین کتابِ اوست. بوآس سالها مدیر مجلهٔ *Mathematical Reviews* بوده است.

«شخصی، که خوشبختانه نامش را فراموش کرده‌ام، یک بار ... گفت که حسابان مسلماً مبحثِ کسل‌کننده‌ای زیرا هیچ‌کس در آن پژوهش نمی‌کند. شاید این کتاب شما را متقاعد کند که او در هر دو مورد بر خطا بوده است.»

ــ از پی‌نوشتِ کتاب.

رالف پی. بوآس

نخستین درسِ توابع حقیقی

ترجمهٔ

کاوه لاجوردی

تهران ۱۳۷۷

توضیح ناشر

«مجموعه علوم ریاضی» به قصد دست یافتن به اهدافی چون غنی‌ترکردن فرهنگ علوم ریاضی، معرفی شاخه‌های جدید، و تامین کتابهای مرجع و کمک آموزشی در زمینه‌های گوناگون علوم ریاضی سازمان یافته است.

هدفهای فوق با نشر کتابهای توصیفی ریاضی، متون کلاسیک، و کتابهای انگیزه‌ساز و آموزشی تحقق می‌یابد؛ کتابهایی که برای دانشجویان دوره‌های کارشناسی و بالاتر (بویژه در رشته‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی) و همچنین دبیران، استادان، و دیگر علاقه‌مندان به ریاضیات مفید خواهد بود.

در اینجا لازم است از آقای دکتر یحیی تابش که دبیری مجموعه را بر عهده داشته‌اند و نیز از گروه تخصصی مجموعه (آقایان دکتر ابوالقاسم لاله، دکتر سیاوش شهشهانی، و دکتر رؤیا درودی) و همچنین از کلیهٔ همکاران بخشهای علمی‌ـفنی و تولید شرکت که در انتشار این مجموعه نهایت همکاری را مبذول داشته‌اند صمیمانه سپاسگزاری کنیم.

پیشگفتار

I. خطاب به مبتدیان. در این کتابِ کوچکْ من برخی مفهومها و روشهای «متغیرهای حقیقی» را معرفی کرده‌ام و آنها را برای به‌دست آوردنِ نتایجِ جالبی به‌کار گرفته‌ام. من به دنبالِ کلّیتِ زیاد یا جامعیتِ زیاد نبوده‌ام. هدفِ من این است که با حداقلی از اصطلاحاتِ خاص، در چند موضوعْ به نحو معقولی پیش روم. امیدوارم با این روش توانسته باشم بخشی از احساسِ شگفتی‌ای را حفظ کنم که در روزهای آغازینْ همراهِ این موضوعات بوده است اما اکنون عمدتاً از دست رفته است. نیز امیدوارم که کسی که این کتاب را خوانده باشد بتواند به هر یک از رسالاتِ فراوانِ دستگاهمند و رعب‌آوری بپردازد که در موردِ آنها هیچ کمبودی وجود ندارد.

هیچ آگاهیِ قبلی از موضوعْ مفروض گرفته نشده است، اما خواننده باید دست‌کم درسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال گذرانده باشد. عموماً هر مبحث به آرامی پرورانده شده است اما به اوجِ نسبتاً مرتفعی می‌رسد؛ خواننده‌ای که شیب را زیاده تند می‌یابد می‌تواند به آغازِ بخشِ بعدی برود.

چون این نه یک کتابِ راهنما بلکه بیشتر از نوعِ رشته‌ای از سخنرانیهای غیررسمی است، اصلاً پیگیرِ تناسب بین اثباتِ مشروح و بحثِ کلّی، یا سازماندهیِ منطقیِ دقیقِ مطالب نبوده‌ام.

تمامیِ عبارتهایی چون «روشن است»، «آشکارا»، «بدیهی است» به‌عنوان اختصاراتی گرفته شده‌اند برای بیانِ چیزی چون «باید پذیرفتنی به‌نظر آید، باید بتوانید اثبات را بیابید، از شما خواسته می‌شود که چنین کنید». از طرف دیگر، «می‌توان نشان داد که . . . » معمولاً برای خبر دادنِ این است که اثباتْ پیچیده‌تر از آن است که در اینجا داده شود، یا متکی بر مفاهیمی است که در اینجا مطرح نشده‌اند، و از شما خواسته نمی‌شود کوشش کنید که خودتان اثبات را بیابید.

در بیان تعاریف اغلب از «اگر» استفاده کرده‌ام در حالی که واقعاً باید از «اگر و تنها اگر» استفاده می‌کرده‌ام. برای نمونه، «اگر مجموعه‌ای هم از بالا کراندار باشد و هم از پایین، کراندار خوانده می‌شود». این تعریف را باید چنان فهمید که شاملِ بندِ دیگرِ «و اگر توأماً از بالا و پایین کراندار نباشد، کراندار خوانده نمی‌شود» نیز باشد.

تعدادی تمرین هست، که بعضی از آنها صرفاً مطلبی توضیحی عرضه می‌کنند، و بعضی از آنها بخشهای مهمی از کتاب‌اند. تمرینی را که صرفاً گزاره‌ای را بیان می‌کند باید به معنای مطالبهٔ اثباتی برای آن گزاره گرفت. پاسخِ همهٔ تمرینها در پایانِ کتاب داده شده است.

بندهای با حروفِ ریزتر به مطالبِ حاشیه‌ای یا به مباحثِ دشوارتر می‌پردازند.

پیشاپیش از خوانندهٔ هوشیار بابتِ هر اشتباهی که می‌تواند بیابد پوزش می‌خواهم. هیچ یک از غلطها عامدانه آورده نشده است؛ با این حالْ یافتن و اصلاحِ اشتباهاتْ تمرینِ خوبی است، و شکِ سالمی را در مورد مطالبِ چاپ‌شده ترویج می‌کند.

II. خطاب به متخصصان. متخصصان اصلاً نباید این کتاب را بخوانند؛ چون این حکمْ بی‌تردید دعوتِ آنان برای چنین کاری گرفته خواهد شد، باید توضیح دهم که چه کاری را کوشش کرده‌ام (و چه کاری را کوشش نکرده‌ام) انجام دهم. خواسته‌ام نتایجی را که بسیار جالب می‌یابم برای خوانندگانی شرح دهم که از پیش تجربه‌ای دربارهٔ موضوع ندارند. بنابراین کوشیده‌ام مطالبی را عرضه کنم که برای

نتایجی که در نظر داشته‌ام لازم‌اند، و نیز آن مقدار از مطالبِ مربوط را که جالب و نه‌چندان پیچیده به‌نظر آمده‌اند. چون این کتابْ رسالهٔ دستگاهمندی نیست، عامدانه کوشیده‌ام هیچ مفهوم یا نمادی را، هر قدر هم مهم یا سودمند، که واقعاً نیازی به آن نداشته‌ام معرفی نکنم. انتگرالگیری را، با اکراه، به سببِ جزئیاتِ فنّیِ بسیاری که پیش از رسیدن به نتایجِ جالب وجود دارد، حذف کرده‌ام.

چون این کتابْ یک رساله نیست مانند رسالات هم نوشته نشده است. شیوهٔ نگارشْ تعمداً مطوّل است. اصل موضوعِ انتخابْ به دفعات به‌کار گرفته شده اما هرگز ذکر نشده است؛ این کتابْ محل بحثِ موضوعاتِ فلسفی نیست، و، در هر صورت، بنا بر قضایای گودِل، مفروض گرفتنِ اصل موضوعِ انتخاب نمی‌تواند سببِ اشکالِ ریاضی‌ای شود که از پیش وجود نداشته باشد. از طرف دیگر، مطابقِ کارِ متأخرترِ پی.جی. کوهِن، ما با فرضْ گرفتنِ اصل موضوعِ انتخاب به جای نقیضِ آن، یک نوعِ ریاضیات را به جای نوعی دیگر، مثلاً تْسِرمِلویی را به جای غیرتسرملویی، برمی‌گزینیم. با این گزینش، هرگاه که استفاده از اصل موضوعِ انتخابْ طبیعی به‌نظر آید، در احتراز از آن فایده‌ای وجود ندارد، حتی اگر دانسته باشد که این استفاده اجتناب‌پذیر است.

III. سپاسگزاری. من مدیونِ معلمانم، جِی.اِل. والش و دی.وی. وایدِر، هستم که مرا با این نوعِ ریاضیاتْ آشنا کردند؛ برای بررسیِ تحریرهای اولیهٔ کتاب مدیونِ اِم.اِل. بوآس و ئی.اِف. و آر.سی. باک هستم؛ و برای کمک به نمونه‌خوانی مدیونِ اِیچ.اِم. کلارک و ایچ.اِم. گِهمان هستم. سپاسگزارِ بسیاری کسانم که خطاهایی را نشان دادند یا اصلاحاتی را پیشنهاد کردند، به‌ویژه ریچارد اِل. بِیکِر، ئی.اِم. بیزلی، اِیچ.پی. بوآس، اِی.اِم. بروکنِر، جی.تی. کارگو، اِس.هَبِر، اِی.پی. مُرس، سی.سی. اُهرینگ، جِی.اِم.اِیچ. اَلمستِد، جِی.سی. آکستُبی، اِی.سی. سِگال، اِی. شوچات، و اِیچ.اِی. تِرستن.

* * * * * *

در تهیهٔ این متنِ تجدید نظر شده، کوشیده‌ام در برابرِ وسوسهٔ افزودنِ مطالبِ اضافیْ پایداری کنم؛ اما به یادداشتها تعداد معتنابهی ارجاع افزوده شده است.

رالْف پی. بوآس.
دانشگاه نورث وِسترِن
مارس ۱۹۶۰
ژوئن ۱۹۶۵
مارس ۱۹۷۲
اکتبر ۱۹۷۹

فهرست مطالب

فصل ۱

مجموعه‌ها

۰۱ **مجموعه‌ها.** برای خواندنِ هر مطلبی دربارهٔ موضوعِ ما، خواننده باید زبانِ به‌کار رفته در آن را بیاموزد. کوشش خواهم کرد که اصطلاحاتِ فنّی تا حد ممکن اندک باشد، اما حداقلِ مشخصی از این واژگان ضروری است. بیشتر این واژگان متشکل از لغاتی معمولی است که به معانی خاصی به کار می‌روند؛ این روال فواید و معایبی دارد، اما در هر صورت باید آن را تحمل کرد زیرا برای اینکه زبان را کاملاً تغییر دهیم خیلی دیر است. بیشترِ این زبانِ استانده برگرفته از نظریهٔ مجموعه‌هاست، مبحثی که ما آن را برای خاطر خودش بررسی نمی‌کنیم. در واقع، نظریهٔ مجموعه‌ها شاخهٔ مستقلی از ریاضیات است. این شاخه مفاهیم تعریف‌نشدهٔ بنیادیِ خاص خود را دارد که تابعِ اصول موضوعِ گوناگونی‌اند؛ یکی از این مفاهیمِ تعریف‌نشده خودِ مفهومِ «مجموعه» است.

با این حال، از دیدگاهی شهودی، می‌توانیم مجموعه را گردایه‌ای از اشیائی از نوعی خاص بینگاریم که اعضا، یا اجزا، یا نقاطِ آن خوانده می‌شوند. می‌گوییم که مجموعه شاملِ اعضایش است، یا اینکه اعضا متعلق به مجموعه‌اند یا فقط در مجموعه‌اند. کاربردِ متعارفِ مجموعه، چنانکه در «مجموعه‌ای از ظرفها» یا «مجموعه‌ای از آثارِ بورباکی»، به آنچه باید در ذهن آوریم نسبتاً نزدیک است، اگرچه عبارتِ دوم نوعی ترتیبِ اعضا را تداعی می‌کند که با این مفهومِ ریاضی

ارتباط ندارد. مجموعه‌ها می‌توانند، مثلاً، از نقاطِ هندسیِ معمولی، یا از توابع، یا در واقع از مجموعه‌های دیگر تشکیل شده باشند. ما واژه‌های رده، توده، و گردایه را به جای مجموعه به‌کار خواهیم برد، به‌ویژه برای اینکه وضعیتهای پیچیده را روشنتر سازیم: بدین گونه می‌توانیم به جای مجموعه‌ای از مجموعه‌های مجموعه‌ها از گردایه‌ای از توده‌های مجموعه‌ها سخن بگوییم.

اگر E مجموعه‌ای باشد، مجموعهٔ H را یک زیرمجموعه‌ی E می‌خوانند اگر هر عضوِ H عضوی از E نیز باشد.* برای نمونه، اگر E مجموعه‌ای باشد که اعضایش اعدادِ ۱، ۲، ۳ است، هشت زیرمجموعهٔ E وجود دارد. سه تا از آنها هر یک شاملِ یک عضوند؛ سه تا هر یک شامل دو عضوند؛ یکی خودِ مجموعهٔ E است (زیرمجموعه‌ها لازم نیست، به هیچ معنا، «کوچکتر» از مجموعهٔ اصلی باشند)؛ زیرمجموعهٔ هشتمِ E، بنا بر قرارداد، مجموعهٔ تهی است که مجموعه‌ای است که اصلاً هیچ عضوی ندارد. اگر H زیرمجموعه‌ای از E باشد می‌نویسیم $H \subset E$ یا $E \supset H$؛ گاهی می‌گوییم که E حاوی H است یا اینکه E H را می‌پوشانَد. اگر H زیرمجموعه‌ای از E باشد اما همهٔ E نباشد، H را یک زیرمجموعهٔ سره‌ی E می‌خوانیم.

می‌نویسیم $x \in E$ تا نشان دهیم که x عضوی از E است. اغلب، به همین معنا، می‌گوییم که x در E است، یا اینکه x متعلق به E است، یا اینکه E شامل x است. چون اعضای مجموعه‌ها معمولاً چیزهایی‌اند از نوعی غیر از آنچه خودِ مجموعه‌ها هستند، باید بین عضو x و مجموعه‌ای که تنها عضوش x است فرق بگذاریم. اغلب مناسب است مجموعهٔ دوم را با (x) نشان دهیم. نمادهای $x \in E$ و $(x) \subset E$ به یک معنا هستند.

فضا مجموعه‌ای است که جهانی انگاشته می‌شود که مجموعه‌ها از آن استخراج

*) مرسوم است که مجموعه‌ها را "E" بخوانند، احتمالاً چون واژهٔ فرانسوی برای «مجموعه» "ensemble" است.

می‌شوند. اگر Ω یک فضا باشد و $E \subset \Omega$، متمم E (نسبت به Ω) مجموعه‌ای است متشکل از همهٔ اعضایی از Ω که عضو E نیستند. متمم E را با $C(E)$ نشان می‌دهند. برای نمونه، اگر Ω متشکل از حروف الفبا[ی انگلیسی] باشد و E مجموعهٔ صامتها (شاملِ y به‌عنوان صامت)، $C(E)$ متشکل از مصوتهاست. ولی اگر* E متشکل از تک حرفِ a باشد، $C(E)$ متشکل است از حروفِ b، c، . . . ، z. اگر E متشکل از همهٔ الفبا باشد، $C(E)$ تهی است. اگر E تهی باشد، $C(E) = \Omega$.

تمرین ۱.۱ نشان دهید که $C(C(E)) = E$.

گاه لازم است متممهای مجموعه‌ای نسبت به فضاهای مختلفی را در نظر بگیریم؛ در چنین مواردی نمادهای ویژه‌ای را به‌کار خواهیم گرفت.

اگر E و F دو مجموعه باشند، دو مجموعهٔ دیگر هست که می‌توان با استفاده از آنها ساخت، و آنقدر زیاد ظاهر می‌شوند که باید نامهای ویژه‌ای داشته باشند. یکی از این مجموعه‌ها اجتماع دو مجموعه است، که به صورتِ $E \cup F$ نوشته می‌شود (گاهی آن را مجموعِ آنها می‌خوانند و به صورت $E + F$ می‌نویسند)؛ این مجموعه متشکل از همهٔ اعضایی است که در Eاند یا در F (یا در هر دو؛ عضوی که در هر دو باشد تنها یک‌بار به حساب می‌آید). دیگری اشتراک دو مجموعه است، که به صورت $E \cap F$ نوشته می‌شود (گاهی آن را ضربِ آنها می‌خوانند و به‌صورت $E.F$ یا EF می‌نویسند)؛ این مجموعه متشکل است از همهٔ اعضایی که در هر دوی E و Fاند. اگر $E \cap F$ تهی باشد، E و F را مجزا می‌خوانند؛ یعنی E و F مجزا هستند اگر هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.

---

*) برای سادگیِ نمادگذاریْ اغلب، مثلِ اینجا، حرفی را که پیشتر به‌عنوان نامِ مجموعه‌ای به‌کار برده‌ایم که دیگر با آن کاری نداریم برای نامیدنِ مجموعهٔ دیگری به‌کار می‌بریم.

تمرین ۲.۱. فرض کنید Ω متشکل از همهٔ ۲۶ حرف الفبا[ی انگلیسی] باشد. E را متشکل از همهٔ صامتها (مِن‌جمله y) بگیرید، و F را متشکل از همهٔ حروفی که در لغاتِ *real functions* وجود دارد (n تنها یک بار به حساب می‌آید). نشان دهید که (آ) $E \cup F = \Omega$؛ (ب) $F \supset C(E)$؛ (پ) $C(F) \subset E$؛ (ت) $F \cap E$ و $C(E)$ مجزا هستند.

اشکالاتِ منطقیِ گوناگونی در استفادهٔ عادی از اصطلاحاتِ نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد، و اینها منجر به بحثهای زیادی شده‌اند. با این حال، خوشبختانه، اینها تنها در مرحله‌ای از تجریدْ ظاهر می‌شوند که بالاتر از آنی است که در بقیهٔ این کتاب به آن می‌رسیم، و در شرایطی‌اند که می‌توانیم آنها را تصنعی بدانیم، لذا می‌توانیم از این پس به سلامت از آنها چشم‌پوشی کنیم. بعضی اَشکالِ واژه‌ها که به‌نظر می‌رسد مجموعه‌هایی را تعریف می‌کنند ممکن است در واقع چنین نکنند، کمابیش مثلِ بعضی ترکیباتِ حروف که احتمالاً می‌توانند واژه‌های انگلیسی‌ای را نمایش دهند (مثلِ "frong") اما در واقع چنین نمی‌کنند. برای نمونه، اگرچه می‌توانیم بدون خطر از مجموعه‌هایی سخن بگوییم که اعضایشان مجموعه‌اند، نمی‌توانیم بدون خطر دربارهٔ مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها، هرچه که باشد، صحبت کنیم. با فرضِ اینکه می‌توانستیم، مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها لزوماً یکی از اعضای خود می‌بود. این خاصیتِ غریبی است، اگرچه برخی بظاهر مجموعه‌های دیگر این خاصیت را دارند، برای نمونه مجموعهٔ همهٔ اشیائی که با کمتر از سیزده واژه قابل تعریف‌اند (زیرا این «مجموعه» خود با کمتر از سیزده واژه تعریف شده است). ممکن است تصمیم بگیریم که آن مجموعه‌هایی را که عضوِ خود هستند بررسی نکنیم. مجموعه‌های باقی‌مانده عضوِ خود نیستند؛ تودهٔ همهٔ چنین مجموعه‌های پذیرفتنی‌ای، مثلاً A، را تشکیل دهید. اکنون آیا A یکی از مجموعه‌هایی است که می‌پذیریم، یا یکی از مجموعه‌هایی است که حذف کرده‌ایم؟ اگر A را بپذیریم، این مجموعه عضوِ خود نیست و لذا باید در شمار تودهٔ همهٔ مجموعه‌های با این خاصیت باشد؛ یعنی A متعلق به A است، و بنابراین A را نمی‌پذیریم. از طرف دیگر، اگر A را نپذیریم، A عضوی از خود است؛ در این صورت چون همهٔ اعضای A مجموعه‌هایی‌اند که عضو خودشان نیستند، و لذا پذیرفتنی‌اند، باید A را بپذیریم. پس اگر A اصلاً مجموعه باشد، درگیرِ تناقضی منطقی شده‌ایم. به‌نظر می‌رسد که تنها راهِ خروج از این وضع، تصریح به این باشد که واژه‌هایی که در ظاهر A را تعریف می‌کنند در واقع

مجموعه‌ای تعریف نمی‌کنند.

خاصیتِ تناقض‌آلودِ دیگری از «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» در §۳ معلوم خواهد شد.

تمرین ۲.۱آ. کتابداری پیشنهاد می‌کند که کتابشناسی‌ای تدوین کنیم که کتابشناسیهایی را، و فقط آنهایی را، فهرست کند که خود را فهرست نمی‌کنند. دربارهٔ این پیشنهاد بحث کنید.

۲. مجموعهٔ اعداد حقیقی. چون باید از جایی شروع کنیم، فرض را بر این می‌گیریم که خواننده با دستگاهِ اعداد حقیقی آشناست. خواص جبریِ این دستگاه ــ خواصِ مربوط به جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم، و خواص مربوط به نابرابریهاــ جملگی مفروض گرفته می‌شوند. با این حال، یک خاصیتِ اعداد حقیقی هست که برای بیشترِ مردم کمتر آشناست، اگرچه این خاصیت در پسِ مفاهیمی چون حد و همگرایی قرار دارد که در حسابان مفاهیمی بنیادی‌اند. این خاصیت را می‌توان به صورتهای معادلِ بسیاری بیان کرد، و صورتِ خاصی که برمی‌گزینیم از روی سلیقه است. من خاصیتِ معروف به خاصیتِ کوچکترین کرانِ بالا را خاصیتِ بنیادی خواهم گرفت. پیش از آنکه بتوانیم بگوییم این خاصیت چیست، به اصطلاحاتِ بیشتری نیاز داریم. می‌گوییم که E از بالا کراندار است اگر عدد Mای باشد که هر x متعلق به E در نابرابریِ $x \leq M$ صدق کند. برای نمونه، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقیِ کوچکتر از ۲ از بالا کراندار است، و می‌توانیم بگیریم $M = ۲$، یا $M = \pi$، یا $M = ۱۰۰$. از طرف دیگر، مجموعهٔ همهٔ اعدادِ صحیحِ مثبت از بالا کراندار نیست. اگر E از بالا کراندار باشد، کوچکترین کرانِ بالای آن B است اگر B کوچکترین Mای باشد که می‌توان در تعریفِ پیشین به‌کار گرفت. در مثالِ ما، که E مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقیِ کوچکتر از ۲ است، ۲ کوچکترین کران بالای E است. راه دیگرِ بیانِ تعریفِ کوچکترین کران بالای E

گفتن این است که این عدد، عددِ Bای است که هر x متعلق به E در $x \leq B$ صدق می‌کند، در حالی که اگر $A < B$، دست‌کم یک x در E هست که در $x > A$ صدق می‌کند. کوچکترین کران بالای E ممکن است متعلق به E باشد یا نباشد. در مثالی که هم‌اکنون داده شد چنین نیست. با این حال، اگر مثال را تغییر دهیم طوری که E متشکل از همهٔ اعدادی باشد که از ۲ بزرگتر نیستند، کوچکترین کران بالای E همچنان ۲ است، و اکنون متعق به E است.

تاکنون، اگرچه دربارهٔ کوچکترین کران بالای مجموعه‌ها سخن گفته‌ایم، نفهمیده‌ایم (مگر در موردِ نمونه‌های توضیحیمان) که آیا چنین چیزی وجود دارد یا نه. خاصیت کوچکترین کران بالا، که آن را به‌عنوان یکی از اصولِ موضوع دربارهٔ اعدادِ حقیقی می‌گیریم، دقیقاً این است که هر مجموعهٔ ناتهیِ E که از بالا کراندار باشد واقعاً یک کوچکترین کران بالا دارد. به عبارت دیگر، اگر گردایهٔ همهٔ کرانهای بالای E را تشکیل دهیم، این گردایه یک کوچکترین عضو دارد (اصطلاح از همین‌جا می‌آید). کوچکترین کرانِ بالای E را با $\sup E$ یا $\sup_{x \in E} E$ نشان می‌دهیم (sup نشان‌دهندهٔ supremum است). وقتی $\sup E$ متعلق به E باشد گاهی به جای این علامت می‌نویسیم $\max E$. پس $\max E$ بزرگترین عضوِ E است اگر E بزرگترین عضوی داشته باشد. بزرگترین کرانِ پایین، که با inf نموده می‌شود، به‌نحو مشابه تعریف می‌شود. (رک. تمرین ۲.۲.)

بازه مجموعه‌ای است متشکل از همهٔ اعداد حقیقیِ بین دو عدد یا همهٔ اعداد حقیقیِ در یک طرف یا طرفِ دیگرِ عددی مفروض. به‌صورت دقیقتر، هر بازه متشکل است از همهٔ اعداد حقیقیِ xای که در نابرابری‌ای به یکی از شکلهای $a < x < b$، $a \leq x < b$، $a < x \leq b$، $a \leq x \leq b$ (که در اینها $a < b$)، $x > a$، $x \geq a$، $x < a$، یا $x \leq a$ صدق کنند. با استفاده از کروشه برای تداعیِ $\leq$ یا $\geq$ و پرانتز برای تداعیِ $>$ یا $<$، اغلب از این نمادها برای بازه‌های متناظر استفاده می‌کنیم: (a, b)، $[a, b)$،$(a, b]$ $[a, b]$، (a, ∞)، $[a, \infty)$، $(-\infty, a)$،

$(-\infty, a]$. پس $(\circ , \text{۱}]$ یعنی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقیِ xای که $\circ < x \leq \text{۱}$ (استفاده از نشانهٔ ∞ در نمادگذاریِ بازه‌ها تنها برای سادگی است، و نباید چنین تداعی کند که عددِ ∞ای وجود دارد.)

تمرین ۲.۱. به ازای هر یک از مجموعه‌های Eی تعریف شده در زیر، مجموعهٔ همهٔ کرانهای بالا، مجموعهٔ همهٔ کرانهای پایین و $\sup E$ و $\inf E$ را مشخص کنید.

(آ) E بازهٔ $(\circ , \text{۱})$ است.

(ب) E بازهٔ $[\circ , \text{۱})$ است.

(پ) E بازهٔ $[\circ , \text{۱}]$ است.

(ت) E بازهٔ $(\circ , \text{۱}]$ است.

(ث) E متشکل است از اعدادِ ۱، $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، $\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$، $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$، ....

(ج) E مجموعهٔ شامل تک نقطهٔ $\circ$ است.

(چ) $E = \{n + (-\text{۱})^n\}$، $n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots$.

(ح) $E = \{n + (-\text{۱})^n / n\}$، $n = \text{۱}, \text{۲}, \ldots$.

(خ) E مجموعهٔ اعداد حقیقیِ xای است، $\circ < x < \pi$، که $\sin x > \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$.

تمرین ۲.۲. تعریف مشروحی از $\inf E$ بدهید، خاصیتِ بزرگترین کران پایین را بیان کنید، و ثابت کنید که این خاصیتْ معادلِ خاصیت کوچکترین کران بالاست.

اگر E از بالا کراندار نباشد، می‌نویسیم $\sup E = +\infty$؛ اگر E از پایین کراندار نباشد، می‌نویسیم $\inf E = -\infty$. اینها اختصارات مناسبی‌اند، اما نباید آن‌گونه تعبیر شوند که گویی ایجاب می‌کنند که اعداد حقیقیِ $+\infty$ و $-\infty$ای وجود دارند؛ چنین اعدادی وجود ندارند. می‌توانیم، اگر بخواهیم، چنین اعدادِ نامتناهی‌ای بسازیم و آنها را به دستگاهِ اعداد حقیقی الحاق کنیم، اما برای بیشترِ مقاصدْ انجامِ این کارْ مطلوب نیست. صرف‌نظر از اینکه اعداد نامتناهی را چگونه معرفی کنیم، مطمئناً حساب را از آنچه هم‌اکنون هست بدتر می‌کنیم: فعلاً یک

عملِ ناممکن (تقسیم بر صفر) وجود دارد، اما اگر این عمل را ممکن سازیم حتی عملهای ناممکنِ بیشتری وارد می‌کنیم.

تمرین ۲.۳. نتایجِ معرفیِ اعدادِ $+\infty$ و $-\infty$ای را بررسی کنید که $a/0 = +\infty$ اگر $a > 0$، و $a/0 = -\infty$ اگر $a < 0$. آیا می‌توان معنای پذیرفتنی‌ای به $(+\infty) + (-\infty)$ داد؟ به $0 \cdot (+\infty)$ چطور؟

اگر مجموعه‌ای هم از بالا کراندار باشد و هم از پایین، کراندار خوانده می‌شود. هر مجموعهٔ ناتهیِ کراندارِ E با متناهی بودنِ هر دوی $\sup E$ و $\inf E$، یا معادلاً با جای گرفتن در یک بازهٔ متناهیِ (a, b)، مشخص می‌شود. در بحثمان از کرانهای بالا و پایینْ فرض کرده‌ایم که مجموعه‌های ناتهی را در نظر گرفته‌ایم. لذا لازم نیست دربارهٔ اینکه آیا مجموعه‌های ما عضوی دارند یا نه قیودی بگذاریم. ما این قرارداد (نسبتاً غریب) را وضع می‌کنیم که اگر E تهی باشد، $\sup E = -\infty$ و $\inf E = +\infty$. این قراردادْ ما را مجاز می‌دارد که، برای نمونه، بگوییم که $\sup(E \cup F)$ بزرگتر از $\sup E$ و $\sup F$ است، بدون اینکه مجبور باشیم بررسی کنیم که E یا F می‌توانند تهی باشند.

تمرین ۲.۴.* اگر E ناتهی باشد، $\inf E \leq \sup E$؛ نابرابریْ اکید است اگر E شامل دست‌کم دو نقطه باشد.

۳. مجموعه‌های شمارا و ناشمارا.

اگر مجموعهٔ Eای داشته باشیم با (مثلاً) پنج عضو، برای نمونه انگشتانِ یک دست، می‌توانیم این اعضا را بشماریم (یا، برای اختصار، E را بشماریم). این دقیقاً به معنای آن چیزی است که ممکن است انتظار داشته باشیم: می‌توانیم اعضای E را، یکایک، با ذکرِ پی در پیِ اعدادِ صحیحِ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مشخص کنیم، و چنین می‌کنیم. به زبانی اندکی رسمی‌تر،

*) تمرینی که صرفاً حکمی را بیان می‌کند اثباتی برای حکم طلب می‌کند.

همهٔ اعضای E را با یک بار استفاده از هر یک از اعداد صحیحِ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نشانه‌گذاری می‌کنیم. به زبانی باز هم رسمی‌تر، اعضای E را در تناظرِ یک به یک با اعداد صحیحِ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ قرار می‌دهیم.

معلوم خواهد شد که تعمیمِ مفهومِ شمارش به مجموعه‌هایی که تعدادی نامتناهی عضو دارند سودمند است. فرض کنید که، مثلاً، اکنون E مجموعهٔ همهٔ اعدادِ صحیحِ مثبتِ زوج باشد. دیگر نمی‌توانیم با ذکرِ اعدادِ صحیحِ متوالی همه‌ی اعضای E را، یکی پس از دیگری، مشخص کنیم، زیرا E تعداد بسیار زیادی عضو دارد. با این حال، هنوز می‌توانیم نشانه‌گذاریِ همهٔ اعضای E با همهٔ اعداد صحیح مثبت را تصور کنیم، طوری که به هر عضوِ E عدد صحیحِ مثبتِ متفاوتی نسبت داده شود: تنها باید هر عدد صحیح زوج را با عدد صحیحی که دو برابرش آن عدد است نشانه‌گذاری کنیم، یعنی عدد صحیحِ $2n$ را با برچسبِ n نشانه‌گذاری می‌کنیم. چون اعداد صحیحِ زوج را می‌توان به این روش با همهٔ اعداد صحیحْ در تناظرِ یک به یک قرار داد، به نحوی پذیرفتنی می‌توانیم بگوییم که تعدادِ هر دو یکی است بدون اینکه خود را متعهد به گفتنِ این کنیم که تعداد اعداد صحیح چه می‌تواند باشد.

فایدهٔ این مفهومِ شمارش عمدتاً از این امر ناشی می‌شود که، چنانکه به زودی ثابت خواهیم کرد، عملاً مجموعه‌هایی وجود دارند که نمی‌توان آنها را شمرد، لذا می‌توانیم مجموعه‌ها را بر حسب اینکه بتوان آنها را شمرد یا نه رده‌بندی کنیم. آنهایی را که نمی‌توان شمرد می‌توان «بزرگتر» از آنهایی انگاشت که می‌توان شمرد. (چنانکه هم‌اکنون دیدیم، مجموعه‌ها، به این معنا، لزوماً از همهٔ زیرمجموعه‌های سره‌شان بزرگتر نیستند.) پیش از اثباتِ وجودِ مجموعه‌های ناشمارا، اصطلاحاتِ دیگری را معرفی خواهیم کرد و نمونه‌های دیگری از مجموعه‌هایی ارائه می‌کنیم که می‌توان شمردشان.

شمردنِ مجموعه یعنی قرار دادنِ اعضای آن در تناظرِ یک به یک با مجموعه‌ای

از اعدادِ صحیح مثبتِ متوالی که از ۱ آغاز شده باشند؛ این مجموعه لزوماً زیرمجموعهٔ سره‌ای از مجموعهٔ همهٔ اعدادِ صحیح مثبت نخواهد بود. اگر بتوان مجموعه‌ای را شمرد آن را شمارا می‌خوانیم. (مجموعهٔ تهی نیز شمارا خوانده می‌شود: در اینجا، با اندکی کوشش، می‌توان مجموعهٔ اعدادِ صحیح مثبتِ مربوط را مجموعهٔ تهی انگاشت.) می‌توانیم عضوهای هر مجموعهٔ شمارای ناتهی را به شکلی چون $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... بنویسیم، که عضوی نوعی از مجموعه با x نموده می‌شود و زیرنویسها اعدادِ صحیحِ متوالی‌ای هستند که در شمردنِ مجموعه به‌عنوان نشانه به کار رفته‌اند. اگر شروع به شمردنِ مجموعه‌ای شمارا کنیم، یا سرانجامْ یک آخرین عضو می‌یابیم یا در غیر این صورت عملِ شمارش به‌طور نامحدود ادامه می‌یابد. در حالتِ نخست مجموعه را متناهی می‌خوانند؛ در حالتِ دوم نامتناهیِ شمارا.

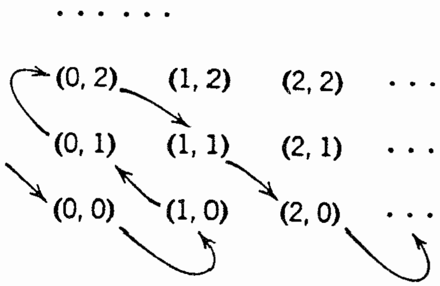
مجموعهٔ همهٔ اعدادِ صحیح مثبت و منفی با هم شماراست، زیرا می‌توانیم اعدادِ صحیحِ مثبتِ فرد را برای نشانه‌گذاری همهٔ اعداد صحیحِ مثبت و اعداد صحیحِ مثبتِ زوج را برای نشانه‌گذاریِ همهٔ اعدادِ صحیحِ منفی به‌کار گیریم، به این صورت:

عضو	...	۳	۲	۱	۱ـ	۲ـ	۳ـ	...
نشانه	...	۵	۳	۱	۲	۴	۶	...

تمرین ۳.۱. به نحو مشابه نشان دهید که اجتماعِ هر دو مجموعهٔ نامتناهیِ شمارا شماراست.

مجموعه‌ای که شمارا بودنِ آن کمتر واضح است مجموعهٔ نقاطِ مشبکه‌ای در صفحه است: اینها نقاطی‌اند که هر دو مختصشان عدد صحیح است، برای نمونه (۱, ۲) یا (۱۸ ,۵−). دیدنِ اینکه چگونه مطابقِ شکلِ زیر آنها را بشماریم آسان

است (این شکل، برای سادگی، تنها نقاطِ ربعِ اول را نشان می‌دهد؛ می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از تمرینِ ۳.۱ همهٔ نقاطِ مشبکه‌ای را بشماریم). بدون رسم شکل، می‌توانیم به این صورت بیندیشیم که نخست همهٔ نقاطِ مشبکه‌ایِ (m, n)ای را دسته‌بندی می‌کنیم که در آنها $m+n$ برابرِ ۰، ۱، ۲، ۳،... باشد، و سپس دسته‌ها را، یکی پس از دیگری، می‌شماریم. آنچه در شکل انجام داده‌ایم نمایشِ نقاطِ مشبکه‌ایِ ربع اول است به‌صورتِ اجتماعِ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های شمارا: این مجموعه‌ها ردیفهایِ افقیِ پی در پی‌اند.



مجموعه‌های نسبتاً پیچیده‌تری را می‌توان با به‌کارگرفتنِ این مطلبْ بررسی کرد که هر زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ شمارا شماراست. این قضیه، با بیانِ آن به روشی دیگر، می‌گوید که هر مجموعه‌ای را که اعضایش را بتوان با بعضی اعدادِ صحیحِ مثبت، با تنها یک بار استفاده از هر یک، نشانه‌گذاری کرد، می‌توان با همهٔ اعداد صحیح مثبت نیز نشانه‌گذاری کرد. برای دیدنِ این مطلب، توجه کنید که هر عضوِ زیرمجموعهٔ داده‌شده‌ای از مجموعه‌ای شمارا با عدد صحیحِ مثبتی نشانه‌گذاری شده است. عضوِ با کوچکترین نشان را بگیرید و آن را با ۱ دوباره نشان زنید؛

سپس از بقیهٔ زیرمجموعه (اگر چیزِ دیگری از زیرمجموعه مانده باشد) عضوِ با کوچکترین نشان را بگیرید و آن را با ۲ دوباره نشان زنید؛ و به همین ترتیب.

اکنون دیدنِ این مطلبْ ساده است که اعداد گویای مثبتْ مجموعهٔ شمارایی تشکیل می‌دهند. هر عدد گویای مثبت را می‌توان به صورتِ یک کسرِ p/q با کوچکترین جملات نمایش داد. اگر کسرِ ۳/۱۱ را با نقطهٔ مشبکه‌ایِ $(۳, ۱۱)$ مربوط کنیم، و به‌طورکلّی p/q را با (p, q)، اعداد گویا را در تناظرِ یک به یک با زیرمجموعه‌ای از نقاطِ مشبکه‌ای، یعنی با زیرمجموعه‌ای از یک مجموعهٔ شمارا، قرار داده‌ایم. پس اعداد گویای مثبتْ مجموعهٔ شمارایی تشکیل می‌دهند.

تمرین ۳.۲. نشان دهید که اجتماعِ هر گردایهٔ شمارا از مجموعه‌های شمارا شماراست.

تمرین ۳.۲آ. مجموعهٔ همهٔ نقاطِ داخلِ دایره را قرص می‌نامند. فرض کنید S مجموعه‌ای از قرصهای نامتداخل در صفحه باشد ــیعنی هیچ قرصِ متعلق به S با قرصِ دیگری در S اشتراکِ ناتهی نداشته باشد. نشان دهید که S باید شمارا باشد.

اعدادِ جبری مثالِ باز هم کمتر واضحی به‌دست می‌دهند: اینها اعدادی‌اند (حقیقی یا مختلط) که می‌توانند ریشهٔ چندجمله‌ایهایی با ضرایبِ صحیح باشند (برای نمونه، همهٔ اعدادِ گویا، $\sqrt{۲}$، i، $\sqrt[۵]{۷} + ۲\sqrt[۳]{۳}$). برای دیدنِ اینکه مجموعهٔ اعدادِ جبریْ شماراست، نخست توجه می‌کنیم که تنها تعداد شمارایی چندجمله‌ایِ خطی با ضرایبِ صحیح وجود دارد، تعداد شمارایی چندجمله‌ایِ درجهٔ دوم، و به همین ترتیب.

تمرین ۳.۳ چرا چنین است؟

چندجمله‌ایهای با درجهٔ داده‌شدهٔ n با ضرایبِ صحیحْ هر یک حداکثر n ریشه، پس مجموعاً تعداد شمارایی ریشه دارند. بنابراین تودهٔ ریشه‌های چندجمله‌ایها از

هر درجه با ضرایبِ صحیحْ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های شماراست، و لذا شماراست.

مثالی مجردترْ ردهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهیِ مجموعهٔ شمارای داده‌شده‌ای است. زیرا ردهٔ زیرمجموعه‌هایی که هر یک یک عضو دارند شماراست، ردهٔ مجموعه‌هایی که هر یک دو عضو دارند شماراست، و به همین ترتیب. باز هم گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های شمارا به دست می‌آوریم. (چنانکه بعداً (ص. ۳۰) خواهیم دید، مجموعهٔ همه‌ی زیرمجموعه‌های هیچ مجموعهٔ شمارای نامتناهیْ شمارا نیست.)

مفهومِ شمارا بودن را گاهی می‌توان برای اثبات وجود اشیائی از نوعی خاص به‌کار گرفت. به‌عنوان مثالی ساده، ثابت می‌کنیم که چنین نیست که همهٔ اعدادِ حقیقیْ جبری باشند. (عددی را که جبری نباشد متعالی می‌خوانند.) اعداد حقیقیِ جبری، چنانکه می‌دانیم، شمارا هستند؛ نخستین فرضِ ما این است که آنها را شمرده‌ایم، و به صورتِ دهدهی نمایش داده‌ایم. نمادگذاری را قدری ساده‌تر خواهد کرد، و از کلّیت نخواهد کاست، اگر تنها اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را بررسی کنیم.

هر عدد حقیقی بین ۰و ۱ یک بسطِ دهدهیِ معمولی دارد، برای نمونه

$$\frac{۱}{۷} = ۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸\cdots$$

$$\pi - ۳ = ۰/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶\cdots$$

برعکس، هر چنین بسطی عددی حقیقی بین ۰ و ۱ را مشخص می‌کند؛ اگر، برای نمونه، بنویسیم

$$x = ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵\cdots$$

x مطمئناً عددی حقیقی بین ۰ و ۱ است، اگرچه نمی‌توانیم آن را به روشِ ساده‌ای با اعدادِ آشناتری پیوند دهیم. (برای تفصیلِ بیشتر در موردِ دهدهیها §۶ را ببینید.)

اکنون فرض کنید که اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را شمرده‌ایم، لذا یک نخستین وجود دارد، یک دومین، یک سومین، و به همین ترتیب؛ آنها را $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، و غیره بخوانید. در این صورت ستونی از اعدادِ دهدهی به‌دست می‌آوریم که می‌تواند به این شکل آغاز شود:

$$a_۱ = ۰/۲۱۵۳۶۷\cdots$$

$$a_۲ = ۰/۶۵۲۴۸۹\cdots$$

$$a_۳ = ۰/۰۶۱۲۵۹\cdots$$

$$a_۴ = ۰/۳۰۰۹۲۱\cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

فرض بر این است که این فهرستْ شاملِ همه‌ی اعداد جبریِ حقیقی بین ۰ و ۱ است؛ یعنی اگر در فهرست به اندازهٔ کافی پیش رویم، هر چنین عددی ظاهر خواهد شد. اکنون ساختنِ عددِ دهدهی‌ای آسان است که هیچ جا در این فهرست ظاهر نشود و لذا نتواند عددی جبری باشد. برای نمونه، اگر بنویسیم ۰/۵۶۵۵ عددِ دهدهی‌ای را آغاز کرده‌ایم که با $a_۱$ در نخستین رقمِ دهدهیْ متفاوت است، با $a_۲$ در دومین، با $a_۳$ در سومین، و با $a_۴$ در چهارمین؛ به‌وضوح این عدد هیچ‌یک از این چهار عدد نخواهد بود. می‌توانیم به همین روش، با قرار دادنِ ۵ در nامین رقمِ دهدهیْ اگر a_n چیزی غیر از ۵ در آن موضع داشته باشد، و قرار دادنِ ۶ در nامین رقم اگر a_n در آنجا ۵ داشته باشد، کار را ادامه دهیم. عدد دهدهیِ حاصل، با a_n در nامینِ رقمِ دهدهی متفاوت است و لذا نمی‌تواند در فهرستِ فرضیِ ما از همهٔ اعدادِ جبری ظاهر شود، لذا این عددْ جبری نیست.

این روشِ ساخت را می‌توانیم به نحوِ موجزتری تشریح کنیم اگر ارقامِ nامین

عددِ جبری را $a_{n,1}$، $a_{n,2}$، $a_{n,3}$،... بگیریم، و با اختیارِ $b_n = 5$ اگر $a_{n,n} \neq 5$، و $b_n = 6$ اگر $a_{n,n} = 5$، یک عددِ جدیدِ $b = 0/b_1b_2b_3...$ بسازیم. (اعدادِ ۵ و ۶ هیچ اهمیتِ ویژه‌ای ندارند.)

گاه گفته می‌شود که اثباتی از این نوعْ تنها یک «اثباتِ صِرفِ وجود» است و هیچ نمونهٔ صریحی از عددی متعالی عرضه نمی‌کند. چنین نیست. دست‌کم علی‌الاصول می‌توان اعدادِ جبری را به صراحت شمرد، بسطِ دهدهیِ آنها را یافت، و بدین ترتیب دست‌کم یک عدد متعالی را تا هر چند رقم که بخواهیم نوشت. سببِ اینکه، مثلاً، عدد π واقعیتر به‌نظر می‌آید این است که نسبت به عددی که هم‌اکنون درباره‌اش سخن گفتیم، π در متونِ بیشتری ظاهر می‌شود، لذا دربارهٔ آن بیشتر می‌دانیم؛ به‌ویژه، مردم تاکنون به محاسبهٔ هزاران رقمِ دهدهیِ π بسیار علاقه‌مند بوده‌اند.[1] *

نشان داده‌ایم که چگونه عددی متعالی بیابیم؛ نشان دادنِ اینکه عددِ داده‌شده‌ای متعالی است بسیار دشوارتر است: این مسأله‌ای است در نظریهٔ اعداد و نیازمندِ روشهایی است عمیقتر از استدلالِ ساده‌ای که در اینجا به‌کار بستیم. متعالی بودنِ e نسبتاً دشوار است، متعالی بودنِ π به مراتب سخت‌تر است، e^π و $2^{\sqrt{2}}$ باز هم دشوارترند؛ و معلوم نیست که آیا π^e متعالی است یا نه، یا حتی اینکه گنگ است یا نه. یک عدد متعالیِ دیگرْ $0/1010010000001000...$ است، که در آن پس از nامین ۱، $n!$ صفر وجود دارد. این عددِ متعالی به یک معنا ساده‌تر از π یا e است، زیرا بدون مشکلِ زیادی می‌توانیم بگوییم که هر رقمِ خاص، مثلاً یک میلیاردیم، چیست، در حالی که، دست‌کم اکنون، نمی‌توانیم این کار را در مورد π یا e انجام دهیم.

اگر اثبات وجودِ اعداد متعالی را مرور کنیم، می‌بینیم که از این مطلب که a_1، a_2،... اعداد جبری بودند هیچ استفاده‌ای نشد غیر از این امر که اعداد جبریْ

*) در متنْ بالانویسها به یادداشتهای پایانِ کتاب ارجاع می‌دهند.

مجموعهٔ شمارایی تشکیل می‌دهند. همان استدلال را، کلمه به کلمه، می‌توان برای نشان دادنِ این به‌کار گرفت که اگر E مجموعهٔ شمارای دلخواه داده‌شده‌ای از اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ باشد، عددی حقیقی بین ۰ و ۱ هست که در E نیست. پس هیچ مجموعهٔ شمارایی نمی‌تواند مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را بپوشاند، یا به عبارت دیگر مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ نمی‌تواند شمارا باشد.

تمرین ۳.۴. بازهٔ ویژهٔ (۱ , ۰) اهمیتی ندارد؛ استدلالِ پیشین را تغییر دهید، یا نتیجهٔ آن را به‌کار گیرید، و نشان دهید که مجموعهٔ اعداد حقیقی در هر بازه، هر قدر کوچک، شمارا نیست.

تمرین ۳.۵. نشان دهید که اعداد حقیقی‌ای در (۱ , ۰) که بسطِ دهدهیِ آنها شاملِ هیچ ۳ای نیست شمارا نیست. (در اینجا عدد ۳ هیچ اهمیت خاصی ندارد.)

تمرین ۳.۵آ. «اثبات» ذیل از این مطلب را که مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ شماراست نقد کنید: نخست اعداد دهدهی‌ای را بشمارید که تنها یکِ رقمِ ناصفر دارند؛ بعد آنهایی را که حداکثر دو رقمِ ناصفر دارند، و به همین ترتیب؛ پس مجموعه را به مجموعهٔ شمارایی از مجموعه‌های شمارا تجزیه کرده‌ایم.

مجموعه را متناهی تعریف کردیم اگر شمارا باشد ولی نامتناهی شمارا نباشد. طبیعتاً مجموعه را، شمارا باشد یا نه، نامتناهی می‌خوانیم اگر متناهی نباشد. هر مجموعهٔ نامتناهیْ حاوی یک زیرمجموعهٔ نامتناهیِ شماراست. برای دیدنِ این، نخست، به‌طور کاملاً اختیاری، یک عضو x_1 انتخاب کنید. مجموعه با برداشتنِ x_1 از آن همچنان نامتناهی است (چرا؟)؛ یک عضو x_2 از مجموعهٔ تقلیل‌یافته انتخاب کنید؛ و به همین ترتیب. این فرایند نمی‌تواند پایان یابد (دیگر بار چرا؟)، لذا مجموعهٔ ما حاوی زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارای x_1، x_2،... است.

تمرین ۳.۶. برای دو پرسشِ بندِ بالا پاسخی بیابید.

تمرین ۳.۷. نشان دهید که اگر E مجموعهٔ نامتناهیِ دلخواهی باشد و F، E باشد با یک نقطهٔ محذوف، E و F را می‌توان در تناظر یک به یک با یکدیگر قرار داد. پس هر مجموعهٔ نامتناهی را می‌توان در تناظر یک به یک با زیرمجموعهٔ سره‌ای از خود قرار داد.

تمرین ۳.۸. بین بازه‌ای متناهی و مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی تناظری یک به یک برقرار کنید.

به‌عنوان کاربردی دیگر از نوعی از استدلال که به‌کار گرفته‌ایم، ثابت می‌کنیم که تودهٔ A از زیرمجموعه‌های هر مجموعهٔ ناتهیِ دادهٔ شدهٔ E «بزرگتر» از E است، به این معنا که A را نمی‌توان با E، یا در واقع با هیچ زیرمجموعهٔ Hای از E، در تناظرِ یک به یک قرار داد. ما از این امر هیچ استفاده‌ای نخواهیم کرد، اما این امر به توجیهِ تذکرِ ص. ۱۷ دربارهٔ سرشتِ تناقض‌آلودِ «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» کمک خواهد کرد.

تمرین ۳.۹. با به‌کار گرفتنِ قضیه‌ای که هم‌اکنون بیان شد نشان دهید که مفهوم مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها متناقض‌نما است.

در مورد مجموعه‌های متناهی بدون دشواریِ زیاد می‌توانیم نشان دهیم که هر مجموعه با یک عضوْ دو زیرمجموعه دارد (خودِ مجموعه و مجموعهٔ تهی)؛ هر مجموعه با دو عضوْ چهار زیرمجموعه دارد (کلّ مجموعه، دو زیرمجموعه هر یک شامل یک عضو، و مجموعهٔ تهی)؛ هر مجموعه با سه عضوْ هشت زیرمجموعه دارد؛ و به‌طور کلّی هر مجموعه با n عضو 2^n زیرمجموعه دارد. پس حکمِ ما در مورد مجموعه‌های متناهی درست است؛ در واقع اثباتِ کلّیْ همهٔ مجموعه‌های با دست‌کم یک عضو را در بر می‌گیرد.

پس فرض کنید E، مجموعه‌ای با دست‌کم یک عضو باشد، و فرض کنید که گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های E را بتوان در تناظرِ یک به یک با زیرمجموعهٔ Hای از E قرار داد. به عبارت دیگر، فرض کنید که زیرمجموعه‌ها را بتوان، مثلاً به صورت F_x، نشانه‌گذاری

کرد، که x روی اعضای H تغییر می‌کند، طوری که هر زیرمجموعه نشان خورده است و هیچ عضوِ H دوبار به‌کار نرفته است. می‌خواهیم تناقضی به‌دست آوریم، و این تناقض نشان خواهد داد که تناظر یک به یکِ گفته‌شده نمی‌تواند وجود داشته باشد. به روشِ ذیل یک زیرمجموعهٔ G از E می‌سازیم. به ازای هر x متعلق به H، به F_x نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که آیا F_x شامل x هست یا نه. اگر F_x شامل x نباشد، x را در G بگذارید. (به‌ویژه، xای که به ازای آن F_x تهی است در G گذاشته می‌شود؛ xای که به ازای آن F_x E است در G گذاشته نمی‌شود.) در این صورت G زیرمجموعهٔ سره‌ای از E است، و لذا بنا بر فرضْ متناظرِ zای متعلق به H است، یعنی G F_z است. با این حال، بنا بر نحوهٔ ساخت، اگر z در F_z باشد، عضوِ z را در G نگذاشته‌ایم، لذا G برابر F_z نیست؛ از طرف دیگر، اگر z در F_z نباشد، G شامل z است و F_z چنین نیست، لذا باز هم G برابر F_z نیست. پس، از فرضِ اولیه‌مان این احکامِ متناقض را به‌دست آورده‌ایم که G برابر F_z است و G برابر F_z نیست، لذا فرضِ اولیه قابل دفاع نیست.

قضیهٔ پیشین نشان می‌دهد، برای نمونه، که تعداد مجموعه‌های اعداد حقیقیْ بیش از اعدادِ حقیقی است.

به روشی تقریباً مشابه می‌توانیم نشان دهیم که تعداد توابعِ حقیقیْ‌مقدار با دامنهٔ اعداد حقیقی، بیش از اعدادِ حقیقی است.

تمرین ۳.۹آ. حکمِ بالا را ثابت کنید.

اکنون این مطلب را، که در نگاهِ اول شگفت می‌نماید، ثابت می‌کنیم که روی یک پاره‌خطِ راست دقیقاً همان تعداد نقطه هست که روی سطحِ یک مربع: یعنی اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را می‌توان در تناظر یک به یک با نقاطِ درون یک مربع قرار داد. (نقاطِ درونِ مربعْ زوجهای مرتبی از اعدادِ حقیقی، یعنی مختصاتِ آن نقاط، هستند؛ رک. ص. ۳۵.) درکِ ایدهٔ کلّیِ تناظر آسان است اگر دو عدد حقیقی، نمایش داده شده با بسطِ دهدهی، داشته باشیم، می‌توانیم ارقامِ آنها را یک در میان قرار دهیم

تا یک عدد حقیقی به‌دست آوریم؛ بر عکس، اگر عددی حقیقی داده شده باشد، می‌توانیم بسطِ دهدهیِ آن را تجزیه کنیم تا زوجی از اعدادِ حقیقی به‌دست آوریم. با این حال، جزئیاتْ چندان ساده نیستند. برای یکتاکردنِ بسطهای دهدهی، فرض کنید که بسطهای دهدهیِ نامختوم، را وقتی چنین انتخابی موجود باشد، برگزینیم: پس به جای ۰٫۲۴۴۰۰۰۰..., ۰٫۲۴۳۹۹۹... را می‌گیریم. روشِ سادهٔ متناظر ساختنِ (p,q)، که $p = 0{,}p_1p_2p_3\cdots$ و $q = 0{,}q_1q_2q_3\cdots$، با $0{,}p_1q_1p_2q_2\cdots$ نتیجه‌بخش نیست زیرا، برای نمونه، بسط دهدهیِ ۰٫۱۳۲۰۱۰۲۰... با (p,q) متناظر خواهد شد که $p =$ ۰٫۱۲۱۲۰۰۰... و $q =$ ۰٫۳۰۰۰۰۰...، و این آخری از نوعی است که مجاز نمی‌داریم. با این حال، همین که دشواری را تشخیص دهیم به آسانی می‌توانیم از آن احترازکنیم. تمام آنچه لازم است این است که به هر رقمِ ناصفر، رشته‌ای از صفرهای متوالی را که پیش از آن است بپیوندیم، و با هر یک از این گروههای ارقامْ همچون یک واحد عمل کنیم. بدین‌گونه اکنون ۰٫۱۳۲۰۱۰۲۰... با (p,q) متناظر می‌شود که $p =$ ۰٫۱۲۰۲۰۰۰... و $q =$ ۰٫۳۰۱۰۰۰...؛ و به (p,q) که $p =$ ۰٫۰۰۳۱۰۰۰۵۴۰۰۰... و $q =$ ۰٫۱۰۰۳۵۹۰۰۰...، عدد حقیقیِ ۰٫۰۰۳۱۱۰۰۳۰۰۰۰۵۵۴۹... متناظر می‌شود.

اغلب بسیار دشوار است که تناظرِ یک به یکی بین دو مجموعه را به صراحت عرضه کنیم؛ گاه ساده‌تر است نشان دهیم که هر مجموعه را می‌توان در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از دیگری قرار داد. در چنین وضعیتهایی گزارهٔ ذیل، معروف به قضیهٔ شرودرـبرنشتاین، سودمند است. اگر A و B مجموعه باشند، اگر A را بتوان در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از B قرار داد، و اگر B را بتوان در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از A قرار داد، آنگاه A و B را می‌توان در تناظر یک به یک با یکدیگر قرار داد.[۱آ]

می‌توانیم فرض کنیم که از آغازْ زیرمجموعه‌هایی از B و A که مورد توجه است خودِ B و A نباشند، زیرا اگر باشند، چیزی برای اثبات نیست. فرض بر این است که دو تناظرِ یک به یک هست، یکی (آن را S بخوانید) بین A و زیرمجموعه‌ای از B، دیگری (آن را

T بخوانید) بین B و زیرمجموعه‌ای از A. عضو دلخواهِ a_1ای از A بگیرید، تصویرِ آن، b_1، در B تحت S را بیابید، تصویرِ b_1 تحت T، a_2، را بیابید، و به همین ترتیب. این فرایندْ ممکن است ما را پس از تعدادی متناهی مرحله به a_1 بازگرداند، یا ممکن است به‌طور نامحدود ادامه یابد. آنچه این فرایند نمی‌تواند انجام دهد به دست دادنِ زنجیری از اعضا است که خود را قطع کند، برای نمونه، آنچنان که $a_5 = a_2$؛ زیرا، اگر چنین می‌شد، T b_1 را به a_2 و نیز b_4 را به a_2 می‌بُرد. این، این فرض را که T یک به یک است نقض می‌کرد مگر اینکه $b_4 = b_1$، که در این حالتْ $a_4 = a_1$. به‌علاوه، ممکن است که a_1 به‌صورتِ تصویرِ عضوی از B تحت T ظاهر شود، و در این حالت می‌توهانیم زنجیر را از a_1، محتملاً به‌طور نامحدود، به سمتِ عقبْ امتداد دهیم. اگر عضوی از A باقی ماند، یکی را بگیرید و زنجیرِ جدیدی بیاغازید.

به این روش، اعضای A به رده‌های مجزا تقسیم می‌شوند: A_1 که متشکل است از اعضایی که متعلق‌اند به زنجیرهایی با یک جفتْ عضو (به‌طور نمادی، $(a_1 \xrightarrow{S} b_1 \xrightarrow{T} a_1)$؛ A_2 که متشکل است از اعضایی که متعلق‌اند به زنجیرهایی با دو جفتْ عضو ($a_1 \xrightarrow{S} b_1 \xrightarrow{T} a_2 \xrightarrow{S} b_2 \xrightarrow{T} a_1$)؛ و به همین ترتیب. ممکن است که، افزون بر این، اعضایی از A باشند که متعلق به زنجیرهایی نامتناهی‌اند. سه نوع زنجیرِ نامتناهی وجود دارد: آنهایی که نخستین عضوشان در A است و مقدّمی در B ندارد که آن را تحتِ T تولید کند؛ آنهایی که نخستین عضوشان در B است؛ و آنهایی که اصلاً هیچ عضوِ نخستینی ندارند. این رده‌ها را به ترتیبْ A_0، A_{-1}، A_∞ می‌خوانیم. رده‌های A_{-1}، A_0، A_1، A_2،...، A_∞ همگی از هم مجزا هستند و هر عضوِ A در یکی از آنهاست. B_k را رده‌ای از اعضای B بگیرید که متعلق‌اند به زنجیرهایی که شامل اعضای A_kاند. در این صورت B_kها نیز مجزا هستند و هر عضوِ B در یکی از آنهاست (زیرا می‌توانیم زنجیرها را، همان‌گونه که با عضوی از A، با عضوی از B نیز بیاغازیم).

اکنون به وضوح A_1 و B_1 نقداً در تناظرِ یک به یک‌اند. A_2 متشکل از جفتهایی از اعضای A است که با جفتهایی از اعضای B_2 مرتبط‌اند؛ A_2 و B_2 را با متناظر ساختنِ جفتهای اعضا به روشِ آشکار (نخستین عضوِ هر جفت در A با نخستین عضو هر جفت در B، الی آخر) در تناظرِ یک به یک قرار می‌دهیم. به نحو مشابه در مورد A_k و

B_k به ازای $k = ۳, ۴, \ldots$ عمل می‌کنیم. با عمل کردن روی هر زنجیر به‌طور جداگانه، $A_۰$ را در تناظرِ یک به یک با $B_۰$ قرار می‌دهیم: نخستین عضو، $a_۱$، را با تصویرش تحتِ S، $b_۱$، جفت کنید؛ $a_۲$ را با $b_۲$ جفت کنید؛ و به همین ترتیب. به عبارت دیگر، با اِعمال S بر $A_۰$، $A_۰$ را به توی $B_۰$ ببرید. در اینجا از این مطلب استفاده می‌کنیم که زنجیرهای اعضای $A_۰$ متوقف نمی‌شوند. مشابهاً، در مورد $A_{-۱}$ T را به‌کار می‌بریم تا تناظری یک به یک برقرار کنیم. سرانجام، A_∞ و B_∞ متشکل از زنجیرهایی‌اند که از هر دو سو نامتناهی‌اند؛ در اینجا می‌توانیم از S یا T استفاده کنیم. بدین روش تناظری یک به یک بین هر A_k و B_kی متناظر، و لذا تناظری یک به یک بین کلّ A و کلّ B، برقرار کرده‌ایم.

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ شرودرـبرنشتاین نشان می‌دهیم که (برخلافِ این مطلبِ ذکرشده در ص. ۲۵، که تنها تعداد شمارایی مجموعهٔ متناهی از اعداد صحیح مثبت وجود دارد) تعداد مجموعه‌های اعداد صحیحِ مثبتِ دقیقاً برابر تعداد اعداد حقیقی است. اولاً، اگر عدد حقیقیِ rای بین ۰ و ۱ داشته باشیم، می‌توانیم آن را به صورتِ بسط دهدهیِ نامختومی نمایش دهیم، برای نمونه به صورتِ ۰٫۲۰۰۱۵۹۰۷۰۰۰... به این عددِ حقیقی، مجموعهٔ اعدادِ صحیحِ ۲۰، ۱۰۰۰۰، ۵۰۰۰۰۰، ۹۰۰۰۰۰۰،... را نسبت می‌دهیم. در حالتِ کلّی، اگر رقمِ $a \neq ۰$ در مکانِ nامِ پس از ممیز باشد، به مجموعه‌مان عدد صحیحی را می‌افزاییم که نمایشِ دهدهیِ آن a است که در پیِ آن n صفر آمده. بدین روش مجموعه از اعدادِ صحیحِ متفاوتی تشکیل می‌شود، و هر دو عددِ حقیقیِ مختلفِ r مجموعه‌های مختلفی از اعداد صحیح تولید می‌کنند.

ممکن است در نگاهِ نخست به‌نظر آید که به این روش تنها بخشِ نسبتاً کوچکی از همهٔ مجموعه‌های ممکن از اعداد صحیح را به‌دست می‌آوریم. با این حال، بیایید مجموعهٔ دلخواهِ Sای از اعداد صحیح مثبت در نظر بگیریم. به روش ذیل به S عدد حقیقیِ یکتایی نسبت می‌دهیم. نخست عددِ دهدهیِ $u = ۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲\ldots$ را (که از نوشتنِ همهٔ اعداد صحیحِ مثبت با ترتیبِ معمولیشان ساخته شده) می‌نویسیم. اگر عدد صحیح n در S باشد، در u آن را با رشته‌ای از صفرها جایگزین می‌کنیم. برای نمونه، اگر $S = \{۱, ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۷\}$، عدد دهدهیِ متناظرْ

$$۰٫۰۲۳۴۵۶۷۰۹۱۰۱۱۰۰۰۰۱۴۱۵۱۶۰۰۱۸۱۹\ldots$$

خواهد بود. اگر S متشکل از همهٔ اعداد صحیحِ مثبتِ زوج باشد، نمایشگرِ دهدهیِ آن ۰٫۱۰۳۰۵۰۷۰۹۰۰۱۱۰۰۱۳۰۰۰ است. بدین ترتیب تناظری یک به یک بین همهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح مثبت و مجموعه‌ای از اعداد حقیقی، و تناظر یک به یک دیگری بین مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی و رده‌ای از مجموعه‌های اعداد صحیحِ مثبت به‌دست می‌آوریم. پس، بنا بر قضیهٔ شرودر-برنشتاین، تناظری یک به یک بین ردهٔ همهٔ مجموعه‌های اعداد صحیح مثبت و ردهٔ همهٔ اعداد حقیقی وجود دارد.

تمرین ۳.۱۰. نشان دهید که تعداد دنباله‌های اعداد حقیقی دقیقاً برابر تعداد اعداد حقیقی است.

۴. فضاهای متریک.

فضا تنها نامِ دیگری است برای مجموعه، با تأکید بر امکانِ در نظر گرفتنِ زیرمجموعه‌های آن. با این حال، معمولاً وقتی مجموعه‌ای را فضا می‌نامیم می‌خواهیم به این اشاره کنیم که بعضی انواعِ شرایطِ اضافی روی نقاطِ مجموعه، که، البته، لازم نیست نقطه به معنای معمولی باشند، وضع خواهد شد. هر فضای متریکْ مجموعه‌ای (ناتهی) است که در آن می‌توانیم از فاصلهٔ بین دو نقطه سخن بگوییم. فضای متریک تعمیمی از خط، صفحه، و فضای سه‌بعدیِ معمولیِ هندسه است که در آن، با این تعمیم، تنها بعضی از خواص هندسی حفظ شده است.

می‌خواهیم که فاصلهٔ بین دو نقطه این شرایط را (که مطمئناً فاصلهٔ معمولی در هندسهٔ اقلیدسی برمی‌آورَد) برآورده سازد:

(۱) $d(x,y) \geq \circ$؛ $d(x,x) = \circ$؛ اگر $x \neq y$، $d(x,y) > \circ$ (مثبت بودن)؛

(۲) $d(x,y) = d(y,x)$ (تقارن)؛

(۳) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (نابرابریِ مثلث).

اغلب از تابعِ فاصله برای فضا به‌صورت متریکِ فضا نام می‌بریم.

معلوم خواهد شد که مقدار زیادی از هندسه تنها به این سه خاصیتِ فاصله بستگی دارد. نتیجتاً، بسیاری مطالب دربارهٔ فضای معمولی را می‌توان به فضاهای دیگری منتقل کرد که در نگاه نخست بسیار متفاوت‌اند زیرا نقاطشان نقطه به مفهومِ معمولی نیستند، بلکه ممکن است، برای نمونه، تابع باشند. امکان استفاده از زبانِ هندسی در فضاهای متریک بسیاری از خواص آنها را شهودی‌تر می‌سازد، گرچه، طبیعتاً، گاه ممکن است گمراه‌کننده نیز باشد.

اکنون چند نمونه از فضاهای متریک.

R_1، فضای یک‌بعدیِ اقلیدسی، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی است با $d(x,y)=|x-y|$.

R_2، فضای دو بعدی اقلیدسی، صفحهٔ معمولیِ هندسهٔ تحلیلی است و فاصلهٔ آن فاصلهٔ معمولی است. نقاطِ آن زوجهای مرتبِ اعداد حقیقی است («مرتب» یعنی اینکه (x,y) همان (y,x) نیست). فاصله از (x_1,y_1) تا (x_2,y_2)

$$\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

است.

R_n، فضای nبعدی اقلیدسی، به نحو مشابه تعریف می‌شود.

تمرین ۴.۰. آیا این اشیاء فضای متریک‌اند؟

(آ) صفحهٔ اقلیدسی با نقاطِ $x=(x_1,x_2)$ و غیره، اما با فاصلهٔ تعریف‌شده با $d(x,y)=|x_1-y_1|$.

(ب) مجموعهٔ شهرهایی در ایالات متحده که سرویسِ خط هواییِ مستقیم دارند، با $d(A,B)=$ «زمان برنامه‌ریزی‌شدهٔ سفر هوایی بین A و B».

(پ) اعداد حقیقی مثبت با $d(x,y)=x/y$.

(ت) همان (پ) اما با $d(x,y)=|\log(x/y)|$.

(ث) مجموعهٔ همهٔ اعداد مثبت نمایش داده شده با اعدادِ دهدهیِ مختوم، با $d(x,y)=|x-y|$ گردشده تا ۱۰ رقمِ دهدهی.

تمرین ۴.۱. اگر از نقاطِ واحدی استفاده کنیم اما تعریف فاصله را تغییر دهیم فضای جدیدی به‌دست می‌آوریم. برای نمونه، فاصله در $R_۲$ را با گفتنِ اینکه فاصله از $(x_۱, y_۱)$ تا $(x_۲, y_۲)$ برابرِ $|x_۱ - x_۲| + |y_۱ - y_۲|$ است تغییر دهید؛ نشان دهید که حاصلْ یک فضای متریک است؛ نشان دهید که اکنون یک مثلثِ ناتباهیده وجود دارد که مجموع دو ضلعِ آن برابر ضلع سوم است؛ مکان هندسی نقاطی را توصیف کنید که از $(۰, ۰)$ فاصلهٔ یک دارند. همین کارها را وقتی فاصله از $(x_۱, y_۱)$ تا $(x_۲, y_۲)$ برابرِ بزرگترینِ $|x_۱ - x_۲|$ و $|y_۱ - y_۲|$ گرفته شود انجام دهید.

در سه مثالِ بعدیمان اعضای فضا دنباله‌های نامتناهیِ اعداد خواهند بود. چون اعضای R_n دنباله‌هایی از n عددند، این «فضاهای دنباله‌ای» را می‌توان تعمیمهای نامتناهی‌بعدیِ R_n انگاشت.

$c_۰$ فضای دنباله‌هایی است که به صفر همگرا هستند. نقاطِ آن دنباله‌هایی از اعدادند: $\{x_۱, x_۲, x_۳, \ldots\}$، که $\lim x_n = ۰$. اگر چنین دنباله‌ای را با حرفِ x نشان دهیم، فاصلهٔ $d(x, y)$ برابرِ $\sup_{n\geq ۱}|x_n - y_n|$ تعریف می‌شود. برای نمونه، اگر $x = \{۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots\}$ و $y = \{۱, -۱, ۰, ۰, \ldots\}$، آنگاه $d(x, y) = \frac{۳}{۲}$.

m فضای دنباله‌های کراندار است. اعضای آن باز هم دنباله‌هایی از اعداد هستند، اما این بار تنها باید کراندار باشند. فاصله همان فاصلهٔ $c_۰$ است. پس می‌توانیم داشته باشیم $x = \{۱, ۰, ۱, ۰, \ldots\}$ و ·

$$y = \{۱, ۴, ۱, ۵, ۹, ۲, ۶, ۵, \ldots\}$$

که هیچ y_nای منفی یا بیشتر از ۹ نیست. در اینجا تا وقتی دربارهٔ قانونِ ساختِ y بیشتر ندانیم نمی‌توان فاصلهٔ $d(x, y)$ را محاسبه کرد. با این حال، با فرض اینکه $y_۹ = ۳$، $y_{۱۰} = ۵$، $y_{۱۱} = ۸$، و $y_{۱۲} = ۹$، درمی‌یابیم که $d(x, y) = ۹$،

که بزرگترین مقدار ممکن است.

l^2 فضای دنباله‌هایی است که در مورد آنها مجموع مربعاتِ مؤلفه‌ها همگراست. اعضای آن دنباله‌های $\{x_1, x_2, \ldots\}$ $x =$ با $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots < \infty$ هستند. قرار می‌دهیم $d(x, y) = \{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}$. برای بررسیِ نابرابری مثلث در این مورد، به نابرابری مینکوفسکی نیاز داریم (ص. ۱۹۴ را ببینید):

$$
\begin{aligned}
d(x, z) &= \{\sum(x_n - z_n)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= [\sum\{(x_n - y_n) + (y_n - z_n)\}^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \{\sum(x_n - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}} + \{\sum(y_n - z_n)^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}
$$

اکنون مثالهایی عرضه خواهیم کرد از فضاهای متریکی که نقاطشان تابع هستند.

C فضای توابع پیوستهٔ تعریف‌شده روی بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ است. اعضای آن توابع پیوستهٔ $x = x(t)$، $0 \leq t \leq 1$، هستند، و

$$d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1}|x(t) - y(t)|.$$

برای نمونه، می‌توانیم داشته باشیم $x(t) = \cos \pi t$ و $y(t) = 2t - 1$، و در این صورت $d(x, y) = 2$.

B فضای توابع کراندار تعریف شده روی $(0, 1)$ است با $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1}|x(t) - y(t)|$. (در اینجا مجبوریم به جای max بنویسیم sup زیرا $|x(t) - y(t)|$ ممکن است ماکزیمومش را نگیرد. برای نمونه، $x(t)$ را می‌توان در بازهٔ $(1/(n + 1), 1/n)$ به صورتِ $1 - n^{-1}$

تعریف کرد، $n = ۱, ۲, \cdots$؛ اگر ۰ نشان‌دهندهٔ تابعی باشد که تَک مقدارِ ۰ را می‌گیرد، آنگاه $d(x,۰) = ۱$.

فضای توابعِ پیوسته روی یک بازه، مثلاً $[۰, ۱]$، با

$$d(x,y) = \left\{ \int_{۰}^{۱} |x(t) - y(t)| \right\}^{۱/۲}$$

تشکیل یک فضای متریک می‌دهد.

تمرین ۴.۲. هر زیرمجموعه(ی ناتهی) از یک فضای متریکْ خود با متریکی که از فضای اولیه به ارث می‌برد یک فضای متریک است.

تمرین ۴.۳. هر مجموعهٔ ناتهی را، هرچه که باشد، می‌توان فضایی متریک ساخت اگر متریکی را با $d(x,y) = ۱$ اگر $x \neq y$، و $d(x,x) = ۰$ تعریف کنیم.

۵. مجموعه‌های باز و بسته. چند نوعِ خاص از مجموعه‌ها در فضاهای متریک هستند که آن‌قدر به فراوانی ظاهر می‌شوند که باید نامی داشته باشند. بخشهای ۵ و ۶و ۷ عمدتاً به معرفیِ آنها و مأنوس ساختنِ آنها اختصاص یافته‌اند.

هر همسایگی‌ی یک نقطهٔ x تعمیمی از قرص مدوّر (داخلِ یک دایره) به مرکز x است: مجموعهٔ همهٔ نقاطِ yای است که فاصله‌شان از نقطهٔ x، از عدد مثبتِ rای کمتر است؛ با نماد، $d(x,y) < r$. در واقع، در $R_۲$ همسایگیهای x همان قرصهای مدوّرِ به مرکز xاند. در $R_۱$ این همسایگیها بازه‌های به مرکز xاند؛ در $R_۳$ کره‌های توپُرند. اگر $r < ۱$، همسایگیها در فضای تمرین ۴.۳ تک نقطه‌ای‌اند.

مجموعه کراندار خوانده می‌شود اگر مشمول در همسایگی‌ای باشد. پس بازهٔ $(۰, ۱)$ در $R_۱$ کراندار است، در حالی که بازهٔ $(۱, \infty)$ نیست. در $R_۱$ این تعریف با تعریفی که پیشتر به کار بردیم، که مجموعه کراندار است اگر هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد، تطبیق می‌کند. در $R_۱$، هر مجموعهٔ کراندار یک کوچکترین کران

بالا و یک بزرگترین کران پایین دارد، اما چیزی متناظر با این خاصیت در فضاهای متریک کلّی وجود ندارد.

تمرین ۵.۱. همسایگیهای فضای C را توصیف کنید.

تمرین ۵.۲. همسایگیها را در فضایی، با متریک $R_۲$، متشکل از نقاطی از $R_۲$ که دو مختص صحیح دارند توصیف کنید.

اگر E فضایی متریک و x نقطه‌ای از E باشد، می‌گوییم x یک نقطهٔ درونی ی E است اگر همسایگی‌ای از x (محتملاً یک همسایگی کوچک) منحصراً از نقاط E تشکیل شده باشد. ایدهٔ تعریفْ نسبت دادن یک درون به هر مجموعه است که تقریباً با مفهومِ شهودی «درون» در ارتباط نزدیکی باشد، و در فضایی چون $R_۲$ این تعریف کاملاً موفق است. برای نمونه، مجموعهٔ نقاطِ (x, y)ای در $R_۲$ که $۰ \leq x \leq ۱$ و $۰ \leq y \leq ۱$ ، یک مربع است، و درون آن متشکل از همهٔ نقاطی در مربع است که روی محیطِ آن نیستند. از طرف دیگر، مجموعهٔ نقاطِ گویا در $R_۱$ اصلاً نقطهٔ درونی‌ای ندارد. در تمرین ۴.۳ فضای متشکل از نقاطی دلخواه را بررسی کردیم با $d(x, y) = ۱$ یا ۰ بر حسب اینکه $x \neq y$ یا $x = y$. در این فضا هر نقطه یک نقطهٔ درونیِ هر مجموعه‌ای است که شامل آن باشد. در واقع، اگر در یک فضای متریکْ مجموعه‌ای، با متریکِ اولیه، خود به عنوان یک فضای متریک جدید در نظر گرفته شود، همهٔ نقاط آن، نقطهٔ درونیِ فضای جدید خواهند شد. پس مفهوم نقطهٔ درونی نه فقط به مجموعه‌ای که بررسی می‌کنیم، بلکه به فضایی که مجموعه در آن واقع است نیز بستگی دارد.

مجدداً فرض کنید E مجموعه‌ای در یک فضای متریک باشد؛ اگر x لزوماً نقطه‌ای از E نباشد، اما هر همسایگی x (با تأکید بر کوچکی احتمالی آن) شامل دست‌کم یک نقطه از E (محتملاً فقط خود x) و دست‌کم یک نقطه از $C(E)$

(باز هم محتملاً فقط خود x) باشد، یک نقطهٔ کرانه‌ای‌ی E خوانده می‌شود. کرانه‌ی E یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاط کرانه‌ایِ E. در مورد مربعهای در $R_۲$، کرانه دقیقاً همان است که ممکن است پیش‌بینی کنیم. در $R_۱$، کرانهٔ بازهٔ $[a, b]$ یا کرانهٔ بازهٔ (a, b) از دو نقطهٔ a و b تشکیل شده است؛ همچنین است کرانهٔ مجموعهٔ متشکل از دو نقطهٔ a و b.

اصطلاحِ نقطهٔ مرزی گاهی به جای نقطهٔ کرانه‌ای به کار می‌رود، و شاید مرجّح باشد: ایدهٔ نقطهٔ کرانه‌ای ربطی به ایدهٔ کرانداری ندارد. مجموعه‌ای کراندار می‌تواند کرانه‌ای ناتهی داشته باشد (و اغلب دارد). برای نمونه، بازهٔ $(\circ, \infty)$ در $R_۱$ کرانه‌اش نقطهٔ $\circ$ است؛ $R_۱$، وقتی به عنوان زیرمجموعه‌ای از $R_۲$ در نظر گرفته شود، کرانه‌اش خودش است. از طرف دیگر، مجموعه‌های کراندارِ ناتهی ممکن است کرانهٔ تهی داشته باشد (اگرچه خواهیم دید که این در $R_۱$ یا $R_۲$ نمی‌تواند رخ دهد).*

تمرین ۵.۲. نقاط درونی و نقاط مرزیِ هر مجموعه را توصیف کنید:

(i) در $R_۲$، محیط دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$.

(ii) در $R_۱$، اجتماع بازه‌های باز $(۱/(n+۱), ۱/n)$، $n = ۱, ۲, \cdots$.

(iii) در $R_۲$، اجتماع مستطیلهای باز به ارتفاع ۱ بنا شده بر بازه‌های (ii).

(iv) مجموعه‌ای در $R_۲$ که در شکل ص. ۴۶ مشخص شده است.

تمرین ۵.۳ در مورد فضای تمرین ۵.۲، نشان دهید که مرزِ هر مجموعه تهی است.

تمرین ۵.۴. نشان دهید که E و $C(E)$ مرزِ واحدی دارند.

*) در سطورِ بالا، برای رساندن منظورِ مؤلف، "boundary point" و "boundary" را به‌ترتیب به «نقطهٔ کرانه‌ای» و «کرانه»، و "frontier point" را به «نقطهٔ مرزی» برگردانده‌ایم. اصطلاحاتی که در بقیهٔ کتاب به‌کار می‌رود دو اصطلاح اول است که در ادامهٔ به «نقطهٔ مرزی»، و «مرز» برگردانده شده است که برگردانهای رایجِ این دو اصطلاح در متون ریاضیِ فارسی‌اند. ـ مترجم.

تمرین ۵.۵. اگر E مجموعه‌ای باشد و B مرز E باشد، نشان دهید که مرزِ B زیرمجموعه‌ای از B است، و اینکه این مرز ممکن است زیرمجموعهٔ سره‌ای باشد.

تمرین ۵.۶. فرض کنید N یک همسایگیِ x با شعاع r باشد. در بارهٔ مرز N چه می‌توان گفت، (آ) اگر فضای زمینه $R_۲$ باشد؟ (ب) اگر فضای متریکِ دلخواه باشد؟

مجموعه‌ای که همهٔ نقاطش درونی باشد باز خوانده می‌شود؛ مجموعه‌ای که شامل همهٔ نقاطِ مرزیش باشد بسته خوانده می‌شود. چنانکه خواهیم دید، مجموعه‌ها می‌توانند نه باز باشند نه بسته، و یک مجموعه می‌تواند توأماً باز و بسته باشد. این مفاهیم به فضایی که مجموعه در آن واقع است، و نیز به خودِ مجموعه بستگی دارند.

تمرین ۵.۷. در $R_۱$، بازهٔ (a,b) باز است (این بازه به این دلیل یک بازهٔ باز خوانده می‌شود)، و بازهٔ $[a,b]$ بسته است (و یک بازهٔ بسته خوانده می‌شود).

تمرین ۵.۸. بازه‌های $[a,b]$ و (a,b) اگر به عنوان زیرمجموعه‌های $R_۲$ در نظر گرفته شوند، بازند یا بسته یا هیچ‌کدام؟

تمرین ۵.۹. نشان دهید که در $R_۱$ بازهٔ $[۰,۱)$ نه باز است نه بسته.

تمرین ۵.۱۰. نشان دهید که مجموعهٔ تهی و کلّ فضا هم بازند هم بسته.

تمرین ۵.۱۱. فضای متریکِ متشکل از بازه‌های $(n, n+\frac{۱}{۲})$ در $R_۱$ را، $n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ با متریکِ $R_۱$، در نظر بگیرید. نشان دهید که این فضا مجموعه‌های زیادی دارد که هم بازند هم بسته.

تمرین ۵.۱۲. مجموعهٔ همهٔ نقاطِ گویا در $R_۱$ باز است، بسته است، یا هیچ‌کدام؟

تمرین ۵.۱۳. نشان دهید که مجموعهٔ تمرین ۵.۱۲ اگر خود به عنوان یک فضا در نظر گرفته شود. مجموعه‌های زیادی دارد که هم بازند هم بسته.

تمرین ۵.۱۴. نشان دهید که همهٔ مجموعه‌ها در فضای تمرین ۵.۲ هم بازند هم بسته.

تمرین ۵.۱۵. نشان دهید که E باز است اگر هر نقطهٔ E، در زیرمجموعهٔ بازی از E قرار داشته باشد.

چند تعریفِ دیگر برای مجموعهٔ باز و مجموعهٔ بسته وجود دارد.

تمرین ۵.۱۶. هر مجموعه باز است.اگر و تنها اگر شامل هیچ یک از نقاط مرزیش نباشد.

تمرین ۵.۱۷. هر مجموعه باز است اگر و تنها اگر متممش بسته باشد.

تمرین ۵.۱۸. هر مجموعه بسته است اگر و تنها اگر متممش باز باشد.

تمرین ۵.۱۹. یک نقطهٔ حدی‌ِ E را نقطهٔ xای (خواه در E باشد خواه نه) تعریف کنید که هر همسایگیِ x (باز هم با تأکید بر کوچکیِ احتمالیِ همسایگی) شامل دست‌کم یک نقطه از E غیر از x باشد. اصطلاحِ روشنترِ نقطهٔ تجمع‌نیز به کار می‌رود. هر مجموعه بسته است اگر و تنها اگر شامل همهٔ نقاطِ حدیش باشد.

تمرین ۵.۲۰. هر همسایگیِ هر نقطهٔ حدّیِ x شامل تعدادی نامتناهی از نقاط E است.

تمرین ۵.۲۱. مجموعهٔ نقاط حدیِ x بسته است.

تمرین ۵.۲۱آ. مجموعهٔ نقاط مرزیِ E بسته است.

تمرین ۵.۲۲. در $R_۱$ نقاط حدیِ این مجموعه‌ها را بیابید: (آ) بازهٔ $(۰, ۱)$؛ (ب) مجموعهٔ متشکل از ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، ...؛ (پ) مجموعهٔ نقاطِ گویا در $(۰, ۱)$.

تمرین ۵.۲۲ آ. در $R_۲$ نقاط حدی این مجموعه‌ها را بیابید:

(i) مجموعهٔ مشخص‌شده در شکل ص. ۴۶.

(ii) مجموعهٔ همهٔ نقاط با مختصاتِ $(۱/m, ۱/n)$، $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$؛ $m = ۱, ۲, ۳, \ldots$.

(iii) مجموعهٔ همهٔ نقاط با مختصات قطبیِ $(r, ۱/n)$، $۰ \leq r \leq ۱$؛ $n = ۱, ۲, \ldots$.

تمرین ۵.۲۳. اگر $E = A \cup B$، هر نقطهٔ حدیِ E یک نقطهٔ حدیِ A یا یک نقطهٔ حدیِ B است.

اگر f تابع حقیقی‌مقدارِ پیوسته‌ای روی یک بازهٔ حقیقی باشد (برای تعریفِ رسمیْ §§۱۲، ۱۳ را ببینید)، و c عدد حقیقی داده‌شده‌ای باشد، مجموعهٔ نقاطِ xای که در مورد آنها $f(x) < c$، باز است و مجموعه‌هایی که در آنها $f(x) = c$ یا در آنها $f(x) \leq c$، بسته‌اند (ص. ۱۰۱ را ببینید).

مجموعه‌های باز در $R_۱$ ساختار فوق‌العاده ساده‌ای دارند؛ اینها از تعداد شمارایی از بازه‌های بازِ مجزا ساخته شده‌اند. لغتِ شمارا در اینجا زاید است: هر گردایه از بازه‌های بازِ مجزا در $R_۱$ شماراست، زیرا هر بازه شامل عدد گویایی است که در هیچ بازهٔ دیگری نیست، و لذا گردایهٔ بازه‌های ما در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از اعداد گویاست.

نشان دادنِ اینکه هر مجموعهٔ بازِ ناتهیِ داده‌شدهٔ G در $R_۱$ اجتماعی از بازه‌هاست از نظر جزئیاتْ نسبتاً ملال‌آور است. اما ایدهٔ اثباتْ ساده است. چون

G باز است و تهی نیست، شامل یک نقطه و لذا یک همسایگیِ آن نقطه است. این همسایگی را، که یک بازهٔ باز است، تا بزرگترین اندازهٔ ممکن بزرگ می‌کنیم. اگر بازهٔ بزرگ‌شده همهٔ G را نمی‌پوشانَد، یک نقطهٔ جدید و یک همسایگیِ آن در G را انتخاب کنید، و عمل را ادامه دهید؛ و به همین ترتیب. هیچ نقطهٔ G نمی‌تواند بر کنار بماند، زیرا اگر نقطه‌ای مانده باشد می‌توانیم مثل قبل با محصور کردنِ آن در یک بازه کار را ادامه دهیم.

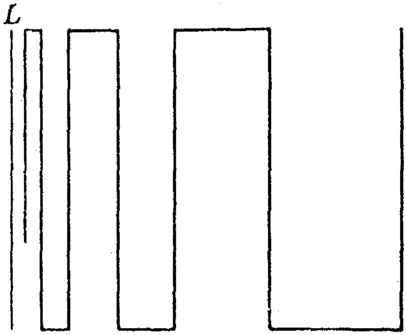
برای انجامِ دقیقِ این کار، مناسب است فرض کنیم که G کراندار است؛ اگر چنین نباشد می‌توانیم G را با تعداد شمارایی از بازه‌های باز بپوشانیم و نتایج مربوط به اشتراکِ G با این بازه‌ها را تلفیق کنیم. اگر نشان دهیم که یک بزرگترین بازهٔ مشمول در G و شاملِ هر نقطهٔ داده‌شدهٔ x وجود دارد، یک بزرگترین بازهٔ باز مشمول در G وجود دارد (تنها تعدادی متناهی بازه با طول بزرگتر از ۱ وجود دارد، تعدادی متناهی با طول بزرگتر از $\frac{1}{2}$، و به همین ترتیب). اگر بیش از یک بزرگترین بازه وجود داشته باشد، می‌توانیم آنها را بر حسب اندازهٔ نقطهٔ انتهاییِ چپشان مرتب کنیم. سپس همین کار را برای بزرگترین بازه‌های بعدی انجام می‌دهیم، و به همین ترتیب. به این روش می‌توانیم ببینیم که نمایشِ G به صورت اجتماعی از بازه‌ها یکتاست.

باقی می‌مانَد نشان دادنِ اینکه یک بزرگترین بازهٔ بازوجود دارد که زیرمجموعه‌ای از G است و شامل هر نقطهٔ داده شدهٔ x است. مطمئناً بازهٔ (a, b)ای (همسایگی‌ای از x) وجود دارد که در G است. B را کوچکترین کران بالای اعداد bای بگیرید که بازهٔ (x, b) در G است. مشابهاً، A را بزرگترین کران پایین اعداد aای بگیرید که بازهٔ (a, x) در G است. چون G کراندار است، A و B متناهی خواهند بود. همچنین B نقطه‌ای از G نیست، زیرا اگر بود، G حاوی یک همسایگیِ B می‌بود و B کران بالای مجموعهٔ به کار رفته در تعریفِ آن نمی‌بود. استدلال مشابهی در مورد A به کار می‌رود. پس بازهٔ (A, B) در G است و نمی‌توان آن را بدونِ در

برگرفتنِ نقاطی خارج از G بزرگ کرد.

اگر به دنبالِ زیرمجموعه‌هایی (غیر از مجموعهٔ تهی و کلّ فضا) از R_1 یا R_2 بگردیم که هم باز باشند هم بسته، بررسیِ اندکی قانعمان خواهد ساخت که چنین زیرمجموعه‌هایی وجود ندارند. این را که این حکمْ درست است به زودی اثبات خواهیم کرد. این خاصیتِ R_1 و R_2 (و به‌طورکلّی R_n) را که فقط مجموعه‌های پیش پا افتاده را می‌گذارد که هم باز باشند هم بسته، همبندی می‌خوانند. این خاصیت را نخست برای مجموعه‌های باز تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ای باز (به‌ویژه کلّ فضا) همبند است اگر نتوان آن را به صورت اجتماعِ دو مجموعهٔ بازِ مجزا که هیچ‌یک تهی نباشند نمایش داد. پس، برای نمونه، در R_1، اجتماعِ دو بازهٔ بازِ $(\frac{1}{2}, \circ)$ و $(1, \frac{1}{2})$ همبند نیست، زیرا این دو بازه هر یک بازند و تهی نیستند، و مجزا هستند.

به صورتی کلّیتر، یک مجموعهٔ E همبند است اگر نتوان آن را با دو مجموعهٔ باز که اشتراکهایشان با E مجزا باشد و تهی نباشد پوشاند. این مفهومِ همبندی شاید به‌طورکامل با شهودْ همساز نباشد. به‌زودی نشان خواهیم داد که R_1 و R_2 همبندند. مجموعهٔ نقاطِ گویا در R_2 همبند نیست، زیرا، برای نمونه، با مجموعه‌های بازِ تعریف‌شده با نابرابریهای $x > \sqrt{2}$ و $x < \sqrt{2}$ پوشانده می‌شود. از طرف دیگر، مجموعه‌ای مثل آن که در شکل مشخص شده، متشکل از یک منحنیِ نوسان‌کننده که به سمتِ یک پاره‌خطْ فشرده می‌شود، به همراهِ پاره‌خط، همبند هست. (نمودارِ $y = \sin(1/x)$، به همراهِ قطعهٔ $-1 \leq y \leq 1$، سرشتِ مشابهی دارد.) ممکن است گمان کنیم که پاره‌خط L در سمت چپ را می‌توان از بقیهٔ مجموعه جدا کرد، درست همان طور که دو بازهٔ بازِ مجاور را می‌توان از هم جدا کرد. با این حال، هر بازهٔ بازی که نقطه‌ای از L را در بر بگیرد باید حاوی یک همسایگیِ نقطه‌ای از L باشد و بخشِ نوسان‌کنندهٔ نمودارْ داخلِ هر چنین همسایگی‌ای می‌شود. در واقع، به همین دلیل، اگر تنها نقاطِ گویای روی L، یا تنها گنگ روی L، را به حساب



آوریم، مجموعه باز هم همبند است. با تلفیقِ دو مجموعه از این نوع می‌توان دو مجموعهٔ همبندْ داخل یک مربع ساخت، یکی از آنها دو رأسِ مقابلِ مربع را به هم وصل کند، و دیگری دو رأسِ دیگر را به هم وصل کند، در عینِ اینکه دو مجموعه نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

همچنین می‌توان مجموعه‌ای به دست آورد که همبند باشد اما این خاصیت را داشته باشد که پس از اینکه یک نقطهٔ خاص برداشته شد حاصلْ هیچ زیرمجموعهٔ همبندِ حاوی بیش از یک نقطه نداشته باشد.[۲] (طرحی کلّی یک روشِ ساخت در ص. ۵۶ داده شده است.)

هر مجموعه می‌تواند بر حسب فضایی که در آن در نظر گرفته می‌شود باز باشد یا نباشد. با این حال نباید صرفاً چون همبندی با استفاده از مجموعه‌های باز تعریف شد، بپنداریم که مجموعه‌ای می‌تواند، اگر به عنوان زیرمجموعه‌ای از فضای متفاوتی در نظر گرفته شود، از همبند بودن به همبند نبودن تغییر یابد. در واقع، خاصیتِ همبند بودن، بر خلاف خاصیت باز بودن، یک خاصیتِ ذاتیِ مجموعه است. یعنی اگر مجموعه‌ای وقتی در یک فضا در نظر گرفته می‌شود همبند باشد، وقتی در فضای دیگری در نظر گرفته شود

باز هم همبند خواهد بود، مشروط بر اینکه متریک روی نقاطِ مجموعه همان باقی بماند.

نشان خواهیم داد (معادلاً) که خاصیتِ همبند نبودن تنها به مجموعه بستگی دارد. فرض کنید که E مجموعه‌ای در یک فضای متریکِ S باشد، E همبند نباشد، و اینکه S_1 زیرفضایی از S باشد و S زیرفضایی از S_2 باشد، و $E \subseteq S_1$. باید نشان دهیم که، اگر نقاطی به S اضافه کرده باشیم (تا S_2 به دست آید) یا نقاطی از S برداشته باشیم (تا S_1 به دست آید)، مجموعهٔ E باز هم ناهمبند است.

با این فرض شروع می‌کنیم که $E \subseteq A \cup B$، که A و B بازند (در S) و مجزا، و نه $A \cap E$ تهی است نه $B \cap E$.

دلالت از S به فضای کوچکتر S_1 آسان است. مجموعه‌های A و B را با زیرمجموعه‌های A_1 و B_1 از S_1 جایگزین می‌کنیم، که A_1 مرکب است از همهٔ نقاطی از A که در S_1اند، و B_1 مرکب است از همهٔ نقاطی از B که در S_1اند. این مجموعه‌ها باز هم E را می‌پوشانند، با E اشتراکهای ناتهی دارند، و مجزا هستند. نیز، A_1 بر حسب S_1 باز است، زیرا در S_1 همسایگیهای هر نقطهٔ p از A_1 متشکل‌اند از همهٔ نقاطی از S_1 که فاصله‌شان از p کمتر از rای است، و این نقاط همگی در A هستند، زیرا A زیرمجموعهٔ بازی از S است. پس این نقاط در A_1اند. مشابهاً B_1 نیز بر حسب S_1 باز است. پس E در S_1 هم ناهمبند است.

دلالت از S به فضای بزرگتر S_2 دشوارتر است. مجموعه‌های پوشانندهٔ A و B را که نشان می‌دهند E در S ناهمبند است می‌گیریم، و آنها را به این صورت با بزرگ کردنْ به زیرمجموعه‌های A_2 و B_2 از S_2 تبدیل می‌کنیم. چون A باز است، اگر $p \in A$ فاصله از p تا نقاطِ B یک کران پایینِ مثبت دارد (شعاعِ همسایگی‌ای از p که در A است). به ازای هر pی در A همهٔ نقاطی از S_2 را به A اضافه می‌کنیم که فاصله‌شان از p از نصفِ بزرگترین کران پایینِ فاصله‌های از p تا نقاطِ B کمتر است. مجموعهٔ بزرگ‌شده را A_2 می‌خوانیم. مشابهاً B_2 را با بزرگ کردنِ B به‌دست می‌آوریم.

مجموعه‌های A_2 و B_2 نیز E را می‌پوشانند و با E اشتراکهای ناتهی دارند. به‌علاوه، A_2 در S_2 باز است. زیرا اگر $q \in A_2$، یک نقطهٔ p در A هست که $d(p, q)$ از نصفِ فاصله از p تا هر نقطه‌ای از B کمتر است. پس اگر $\acute{q}$ نقطه‌ای از S_2 نزدیک q باشد،

این نیز درست است که $d(p, q')$ کمتر از نصفِ فاصله از p تا نقاطِ B است، لذا q' نیز متعلق به A_2 است. یعنی A_2 در S_2 باز است. مشابهاً B_2 در S_2 باز است.

سرانجام، A_2 و B_2 مجزا هستند. زیرا اگر $q \in A_2$ و $r \in B_2$، q و r را از نقاط $p \in A$ و $s \in B$ به دست می‌آوریم؛ و

$$d(q, r) \geq d(p, s) - d(p, q) - d(s, r).$$

چون بنا بر نحوهٔ ساختْ $d(p, q) < \frac{1}{2}d(p, s)$ و $d(s, r) < \frac{1}{2}d(s, p)$، به دست می‌آوریم $d(q, r) > 0$. این نابرابری ایجاب می‌کند که A_2 و B_2 مجزا باشند. بنابراین نشان داده‌ایم که E در S_2 ناهمبند است.

نشان دادنِ اینکه R_1 همبند است ساده است. اگر همبند نبود، اجتماعِ دو مجموعهٔ بازِ ناتهیِ مجزا می‌بود. این مجموعه‌ها بسته نیز می‌بودند (تمرین ۵.۱۷ را ببینید)، زیرا هر یک متممِ دیگری است. پس کافی است ثابت کنیم که R_1 هیچ زیرمجموعهٔ ناتهی‌ای ندارد که‌هم باز باشد هم بسته و همهٔ R_1 نباشد. فرض کنید چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد؛ آن را G بخوانید. در این صورت، چنانکه کمی قبل نشان داده‌ایم، G از تعداد شمارایی بازهٔ باز که نقاطِ انتهاییشان در G نیست تشکیل شده است. از طرف دیگر، این نقاطِ انتهاییْ نقاطِ مرزی (همچنین نقاطِ حدی)ی Gاند، و چون G بسته هم هست، اینها متعلق به Gاند. این تناقض نشان می‌دهد که G نمی‌تواند وجود داشته باشد.

برای نشان دادنِ اینکه R_2 همبند است کافی است نشان دهیم که، غیر از خودش و مجموعهٔ تهی، حاوی هیچ مجموعه‌ای نیست که‌هم باز باشد هم بسته. فرض کنید E چنین مجموعه‌ای باشد؛ فرض کنید $P \in E$ و $Q \in C(E)$. خط راستِ نامتناهیِ گذرا از P و Q را، به عنوان یک فضای L، در نظر بگیرید طوری که فاصلهٔ دو نقطه روی L برابر فاصله‌شان در R_2 باشد. در این صورت L نسخه‌ای از R_1 است. در L مجموعه‌های $E \cap L$ و $C(E) \cap L$ هم بازند هم

بسته، و هیچ یک از آنها تهی نیست (زیرا یکی شامل P است و دیگری شامل Q است). این همبندیِ R_1 را نقض می‌کند.

تمرین ۵.۲۴. نشان دهید که، غیر از خودِ R_2، در R_2 هر مجموعهٔ ناتهی مرزی ناتهی دارد.

تمرین ۵.۲۵. بستارِ E اجتماعِ E و مجموعهٔ همهٔ نقاط حدیِ E است. نشان دهید که بستارِ E اجتماع E و مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی E نیز هست، و بسته است.

تمرین ۵.۲۵ (آ). اگر E متناهی نباشد، آیا باید نقطه‌ای از E یک نقطهٔ درونیِ بستارِ E باشد؟

تمرین ۵.۲۶. بستارِ مجموعه‌های تمرین ۵.۲۲ کدام‌اند؟

تمرین ۵.۲۷. هر همسایگیِ x متشکل است از نقاط yای که $d(x,y) < r$. نشان دهید که در R_1 یا R_2 بستارِ این همسایگیْ مجموعهٔ نقاطِ yای است که $d(x,y) \leq r$. آیا این در هر فضای متریک درست است؟

یک مطلب مهم در بارهٔ مجموعه‌های بسته این است که اجتماعِ دو مجموعهٔ بسته نیز بسته است، و اشتراکِ دو مجموعهٔ بسته نیز بسته است. چون مجموعه‌های بسته با در بر داشتنِ همهٔ نقاطِ حدیشان مشخص می‌شوند، برای اثباتِ گزارهٔ اولْ دو مجموعهٔ بستهٔ E_1 و E_2 و یک نقطهٔ حدیِ p از $E_1 \cup E_2$ را در نظر می‌گیریم؛ باید نشان دهیم $p \in E_1 \cup E_2$. بنا بر تمرین ۵.۲۰، هر همسایگیِ p شامل تعدادی نامتناهی از نقاطِ E_1 (غیر از p) یا تعدادی نامتناهی از نقاط E_2 (غیر از p) است. این نشان می‌دهد که p یک نقطهٔ حدیِ دست‌کم یکی از E_1 و E_2 است. چون E_1 و E_2 هر دو بسته‌اند، $p \in E_1$ اگر p یک نقطهٔ حدی E_1 باشد،

و $p \in E_2$ اگر p یک نقطهٔ حدیِ E_2 باشد. پس متعلق است به $E_1 \cup E_2$. بنابراین $E_1 \cup E_1$ شامل همهٔ نقاط حدیش است و لذا بسته است.

برای نشان دادنِ اینکه اشتراک دو مجموعهٔ بسته بسته است، یک نقطهٔ حدی q از $E_1 \cap E_2$ در نظر بگیرید. هر همسایگیِ q شامل نقاطی، غیر از q ، است متعلق به هر دوی E_1 و E_2. این خاصیتْ q را یک نقطهٔ حدیِ E_1 و یک نقطهٔ حدی E_2 می‌سازد. چون E_1 و E_2 هر دو بسته‌اند، q متعلق است به هر دو و لذا به $E_1 \cap E_2$. بنابراین $E_1 \cap E_2$ شامل همهٔ نقاطِ حدیش است و لذا بسته است.

تمرین ۵.۲۸. به استقراء ثابت کنید که اجتماعِ هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته بسته است و اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته بسته است.

تمرین ۵.۲۹. نشان دهید که اشتراک هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های بسته بسته است.

تمرین ۵.۳۰. مثالی بیابید که نشان دهد که اجتماع تعداد نامتناهیِ شمارایی از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نیست.

تمرین ۵.۳۱. با استدلال به طریقی مشابه، یا با در نظرگرفتنِ متممهای تحت بررسی، نشان دهید که اجتماعِ هر تعداد از مجموعه‌های باز باز است؛ که اشتراکهای تعداد متناهیْ مجموعه‌های باز بازند؛ و اینکه اشتراکهای تعداد نامتناهیِ شمارایی از مجموعه‌های باز لازم نیست باز باشد.

تمرین ۵.۳۲. اگر N_1 همسایگی‌ای باشد متشکل از همهٔ yهایی که، به ازای x مفروضی، $d(x,y) < r$، و N_2 همسایگیِ همان x باشد متشکل از همهٔ yهایی که $d(x,y) < r/2$، نشان دهید که بستارِ N_2 زیرمجموعه‌ای از N_1 است. آیا لازم است که این بستارْ یک زیرمجموعهٔ سره باشد؟

مجموعهٔ E بی‌کاست خوانده می‌شود اگر تهی باشد، یا اگر بسته باشد و هر نقطهٔ E یک نقطهٔ حدیِ E باشد. در R_1 هر بازهٔ بسته بی‌کاست است؛ چنین است اجتماعِ تعدادی متناهی از بازه‌های بسته. درِ بخشِ بعد با نمونه‌های کلّیتری از مجموعه‌های بی‌کاست روبه‌رو خواهیم شد.

۶. مجموعه‌های چگال و هیچ‌جاچگال. مجموعهٔ E همه‌جا چگال (یا، برای اختصار، فقط چگال) است اگر بستارِ آن کلّ فضا باشد. به ویژه (در R_n، معادلاً) E چگال است وقتی هر نقطهٔ فضا یک نقطهٔ حدیِ E باشد. مجموعه هیچ جاچگال است اگر بستارش حاوی هیچ همسایگی‌ای نباشد. به عبارت دیگر، E هیچ‌جاچگال است اگر E تهی باشد، یا اگر هر همسایگی در فضا شامل زیرهمسایگی‌ای باشد که از E مجزاست. در R_1 نقاطِ گویا مجموعه‌ای چگال تشکیل می‌دهند. در R_1 هر مجموعهٔ متشکل از تعدادی متناهی نقطه هیچ جاچگال است. به‌زودی با مجموعه‌های هیچ‌جاچگالِ پیچیده‌تری روبه‌رو خواهیم شد.

توجه کنید که «هیچ‌جاچگال» نقیضِ «همه‌جاچگال» نیست. اگر مجموعه‌ای همه‌جاچگال نباشد باید این خاصیت را داشته باشد که بستارِ آن همسایگی‌ای (محتملاً کوچک) را اشغال نکند. اگر مجموعه‌ای هیچ‌جاچگال نباشد باید بستارِ آن همسایگی‌ای را اشتغال کند، ولی نه لزوماً کلّ فضا را.

گاهی می‌خواهیم بگوییم که یک مجموعهٔ E در بازه‌ای، یا در مجموعهٔ دیگری، چگال است یا در بازه‌ای هیچ‌جاچگال است. چنین عباراتی بی‌نیاز از توضیح‌اند.

تمرین ۶.۱. فضای Ω که اعضای آن نقاطِ صحیحِ ۱، ۲، ۳، $\cdots$ از R_1اند را با متریکِ R_1 در نظر بگیرید. در Ω همسایگیها را توصیف کنید. آیا مجموعهٔ شامل تک نقطهٔ ۱ در Ω مجموعه‌ای هیچ‌جاچگال است؟

تمرین ۶.۲. اگر مجموعهٔ بسته‌ای حاوی هیچ همسایگی‌ای نباشد، آن مجموعه

هیچ‌جاچگال است.

چون هر نقطهٔ هر مجموعهٔ بی‌کاست یک نقطهٔ حدیِ آن مجموعه است، معلوم خواهد شد که هر مجموعهٔ بی‌کاستِ ناتهی باید نقاطِ بسیار زیادی داشته باشد. بنابراین دریافتنِ این تا حدی عجیب است که مجموعه‌ای ناتهی می‌تواند هم هیچ‌جاچگال باشد و هم بی‌کاست.

تمرین ۶.۳. $R_۱$، به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $R_۲$، هیچ‌جاچگال و بی‌کاست است.

در $R_۱$ هیچ مجموعهٔ بی‌کاستِ هیچ‌جاچگال با چنین ساختار ساده‌ای وجود ندارد. نمونه‌ای از یک مجموعهٔ بی‌کاستِ هیچ‌جاچگال در $R_۱$ مجموعهٔ کانتور است که می‌توان آن را به عنوان پایهٔ ساختِ نمونه‌های فراوانی از مجموعه‌ها و تابعهایی با خواصِ غیرعادی به کار گرفت. این مجموعه به صورتِ زیر ساخته می‌شود. بازهٔ بستهٔ $[۰ , ۱]$ در $R_۱$ را در نظر بگیرید. بازِ یک‌سومِ میانی، یعنی بازهٔ $(\frac{۱}{۳} , \frac{۲}{۳})$، را بردارید. سپس از بازه‌های باقی‌مانده بازهای یک سومِ میانی را بردارید، یعنی $(\frac{۱}{۹} , \frac{۲}{۹})$ و $(\frac{۷}{۹} , \frac{۸}{۹})$ را بردارید. بعد بازهای یک سومِ میانی را از چهار بازهٔ باقی‌مانده بردارید؛ و به همین ترتیب الی غیر النهایه. چه می‌مانَد؟ اولاً آنچه برداشته شده

است اجتماعی از مجموعه‌های باز (در واقع، اجتماعی از بازه‌های باز) است، و لذا

باز است؛ آنچه می‌مانَد متممِ آن (نسبت به $[\circ, ۱]$) است، و لذا مجموعه‌ای بسته است. نقاطِ انتهاییِ یک سوم‌های میانی حذف نشدند، لذا باقی مانده‌اند؛ و چون مجموعهٔ باقی مانده بسته است، هر نقطهٔ حدیِ نقاطِ انتهایی باقی می‌مانَد. برای نمونه، اگر از $\frac{۱}{۳}$ شروع کنیم و نزدیکترین نقطهٔ انتهایی در قدمِ دوم ($\frac{۲}{۹} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۹}$) را بگیریم، بعد نزدیکترین نقطهٔ انتهایی در قدمِ سوم ($\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷}$) را، و به همین ترتیب، (تنها) نقطهٔ حدیِ این مجموعه از نقاطْ $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} - \cdots$ است. پس، در واقع، نقاطِ حدی‌ای از نقاطِ انتهایی وجود دارند که نقطهٔ انتهایی نیستند. مجموعهٔ کانتورْ آن مجموعه‌ای است که پس از اینکه همهٔ یک‌سوم‌های میانی را برداشتیم می‌مانَد: این مجموعه متشکل است از همهٔ نقاطِ انتهایی و نقاطِ حدیِ آنها.

تمرین ۶.۳آ . آیا مجموعهٔ کانتورْ شامل هیچ نقطهٔ گنگی هست؟ اگر چنین است یکی را به صراحت معلوم کنید. آیا مجموعهٔ کانتور شامل نقطهٔ $\sqrt{\pi} - ۱ = \circ{,}۷۷۲۴۵\cdots$ هست؟

کمی پیش دیدیم که مجموعهٔ کانتور بسته است. همچنین این مجموعه حاوی هیچ بازه‌ای نیست، زیرا جمعِ طولِ بازه‌های برداشته شده $۱ = \cdots + \frac{۴}{۲۷} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۳}$ است. بنابراین مجموعهٔ کانتور هیچ‌جاچگال است (تمرین ۶.۲). برای نشان دادنِ اینکه این مجموعه بی‌کاست است فقط باید نشان دهیم که هر یک از نقاطش نقطه‌ای حدی است. چون نقاطِ حدیِ نقاطِ انتهاییْ طبیعتاً نقاطِ حدیِ مجموعه‌اند، مسأله تنها نشان دادنِ این است که نقاطِ انتهاییْ حدی‌اند. برای نمونه، نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$ را در نظر بگیرید. در سمتِ چپِ آن بازه‌ای به طول $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد که از آن یک‌سومِ میانی را برداشته‌ایم، و بازه‌ای به طول $\frac{۱}{۹}$ مجاور نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$ باقی گذاشته‌ایم؛ بعد بازهٔ $(\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۹})$ را برداشته‌ایم، و بازه‌ای به طول $\frac{۱}{۲۷}$ مجاور $\frac{۱}{۳}$ باقی گذاشته‌ایم؛ و به همین ترتیب. در هر همسایگیِ $\frac{۱}{۳}$ همواره بازهٔ کوچکی وجود خواهد داشت که در قدمی

برداشته نشده است، و این بازه شاملِ یک نقطهٔ انتهاییِ متعلق به قدمِ بعد خواهد بود. پس $\frac{۱}{۴}$ یک نقطهٔ حدیِ نقاطِ انتهایی است. استدلالِ مشابهی در مورد هر نقطهٔ انتهاییِ دیگر به کار می‌رود.

بعداً مفید خواهد بود که برای مجموعهٔ کانتور روشِ ساختی کاملاً حسابی داشته باشیم. از بسطِ «دهدهی»ی اعداد حقیقی در پایه‌های ۲ و ۳ (بسطهای دودویی و سه‌سه‌یی) به جای بسط در پایهٔ ۱۰ استفاده خواهیم کرد. برای نمونه،

$$۰/۱۰۰۱۰۱۱۰\cdots(\text{پایهٔ ۲})$$

یعنی

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۰}{۲^۲}+\frac{۰}{۲^۳}+\frac{۱}{۲^۴}+\frac{۰}{۲^۵}+\frac{۱}{۲^۶}+\frac{۱}{۲^۷}+\frac{۰}{۲^۸}+\cdots$$

در حالی که

$$۰/۱۰۰۱۰۱۱۰\cdots(\text{پایهٔ ۳})$$

یعنی

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۰}{۳^۲}+\frac{۰}{۳^۳}+\frac{۱}{۳^۴}+\frac{۰}{۳^۵}+\frac{۱}{۳^۶}+\frac{۱}{۳^۷}+\frac{۰}{۳^۸}+\cdots.$$

(در پایهٔ ۲ تنها ارقامِ ۰ و ۱ را داریم، حال آنکه در پایهٔ ۳ ارقامِ ۰، ۱، و ۲ را داریم.) پس $\frac{۱}{۴} = (\text{پایهٔ ۳})\ ۰/۰۲۰۲۰۲\cdots$. (استدلال همان است که در حساب کردنِ بسطِ دهدهیِ دوره‌ای در پایهٔ ۱۰ به کار می‌رود: اگر $x = ۰/۰۲۰۲\cdots$، $۹x = ۲/۰۲۰۲\cdots = ۲ + x$.) توجه کنید که این آن بسطی از $\frac{۱}{۴}$ نیست که از آن در بالا برای نشان دادنِ اینکه $\frac{۱}{۴}$ متعلق به مجموعهٔ کانتور است استفاده کردیم؛ اما این معادلِ آن است زیرا

$$\frac{۲}{۳^۲}+\frac{۲}{۳^۴}+\cdots=\frac{۳}{۳^۲}-\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۳}{۳^۴}-\frac{۱}{۳^۴}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}-\frac{۱}{۳^۴}+\cdots.$$

اکنون بیایید همهٔ اعداد بین ۰ و ۱ را در پایهٔ ۳ بیان کنیم. اعدادی که رقم اولشان ۱ است بینِ $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ (و خود این دو)اند، لذا اینها نخستین بازه‌ای را که درونش در ساختنِ مجموعهٔ کانتور کنار گذاشته شد پُر می‌کنند. اعدادی که رقم اولشان ۰ است بازهٔ $[0, \frac{1}{3}]$ را پر می‌کنند، و زیرمجموعه‌ای از اینها که رقمِ دومشان ۱ است اعدادِ بین $\frac{1}{9}$ و $\frac{2}{9}$اند، یعنی اینها یکی از بازه‌هایی را که درونشان در قدمِ دومِ ساخت حذف شد پر می‌کنند. هر عددی که تاکنون حذف شده در مکانِ اول یا دومِ بسطِ سه‌سه‌ای‌اش ۱ دارد؛ نقاط انتهایی هم چنین‌اند، اما این نقاط بسطی نیز دارند که هیچ ۱ای ندارد. برای نمونه، $\frac{1}{3} = 0/1000000\cdots = 0/02222\cdots$، و $\frac{2}{3} = 0/12222\cdots = 0/2000\cdots$. با ادامه دادن به این روش می‌بینیم که مجموعهٔ کانتور را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ متشکل از آن اعدادی توصیف کرد که بسطی در پایهٔ ۳ دارند که شاملِ ۱ نیست. نقاط انتهاییْ اعدادی از این نوع‌اند که بسطشان در پایهٔ ۳ به ۰ یا به ۲ ختم می‌شود (که معادل‌اند، درست همان‌طور که در پایهٔ ۱۰، $0/09999\cdots = 0/1000\cdots$.)

تمرین ۶.۴. نشان دهید که مجموعهٔ کانتور ناشماراست.

در واقع می‌توانیم بیش از این بگوییم: مجموعهٔ کانتور را می‌توان در تناظرِ یک به یک با مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ قرار داد. به یاد آورید که نقاطِ مجموعهٔ کانتور دقیقاً اعدادی‌اند که می‌توان تنها با استفاده از ۰ و ۲ آنها را در پایهٔ ۳ نوشت. به هر چنین عددِ xای عددی را نسبت دهید که از نصف کردنِ هر رقمِ بسطِ سه‌سه‌ایِ x و تعبیرِ نتیجه در پایهٔ ۲ به دست می‌آید. به این روش هر عدد بین ۰ و ۱ را از نقطه‌ای از مجموعهٔ کانتور به‌دست می‌آوریم، و نقاطِ انتهاییِ بازه‌های حذف‌شده به وجود آورندهٔ دو نمایشِ مختلف از عدد واحدی می‌شوند، برای نمونه، $\frac{1}{3} = 0/0222\cdots$ در پایهٔ ۳ و $\frac{2}{3} = 0/2000\cdots$ در پایهٔ ۳، هر دو $\frac{1}{2} = 0/0111\cdots = 0/1000\cdots$ در پایهٔ ۲ را به‌دست می‌دهند. این تناظری یک به یک است بین مجموعهٔ کانتور، منهای مجموعهٔ شمارای نقاطِ انتهاییِ

بازه‌های حذف شده، و مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی منهای مجموعهٔ شمارای اعدادی که در پایهٔ ۲ بسطِ مضاعف دارند. با متناظر ساختنِ این مجموعه‌های شمارا با یکدیگر تناظری یک به یک بین مجموعهٔ کانتور و مجموعهٔ اعداد حقیقیِ بین ۰ و ۱ به دست می‌آوریم.

می‌توانیم از مجموعهٔ کانتور برای ساخت مجموعهٔ ذکرشده در ص. ۴۶، که پس از برداشتنِ یک تک نقطه کاملاً ناهمبند می‌شود. استفاده کنیم. P را نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ بگیرید و P را با پاره‌خطهای مستقیم به نقاطِ مجموعهٔ کانتور وصل کنید. اکنون روی خطوطی که به نقاطِ انتهاییِ بازه‌های مکملِ مجموعهٔ کانتور می‌روند نقاط با عرضِ گنگ را حذف کنید، و روی خطوطی که به نقاط دیگرِ مجموعهٔ کانتور می‌روند نقاط با عرضِ گویا را حذف کنید. مجموعهٔ حاصلْ همبند است اما وقتی P برداشته می‌شود حاوی هیچ زیرمجموعهٔ همبندی غیر از نقاطِ تَک نیست. این مجموعه را به عنوانِ چادرِ کانتور* می‌شناسند.[آ۲]

فضای متریکْ تفکیک‌پذیر خوانده می‌شود اگر حاوی مجموعهٔ شمارایی باشد که همه‌جاچگال است. برای نمونه، $R_۱$ تفکیک‌پذیر است چون اعدادِ گویا یک مجموعهٔ چگالْ تشکیل می‌دهند.

تمرین ۶.۵. نشان دهید که $R_۲$ تفکیک‌پذیر است.

فضای $c_۰$ (دنباله‌های متقارب به صفر؛ ص. ۳۶) تفکیک‌پذیر است. به عنوان یک مجموعهٔ چگالِ شمارا می‌توانیم مجموعهٔ متشکل از همهٔ دنباله‌هایی از اعداد گویا را انتخاب کنیم که در آنها تنها تعدادی متناهی از اعضا مخالفِ ۰اند (مثلاً $\{۱, ۰, ۰, \cdots\}$ یا $\{\frac{۲}{۳}, -\frac{۵}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۰, ۰, \cdots\}$). این مجموعه شماراست چون مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهیِ اعدادِگویا شماراست (ص. ۲۵). برای نشان

*) Cantor teepee

دادنِ اینکه این مجموعه در c_0 چگال است، یادآوری می‌کنیم که در c_0 فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $x = (x_1, x_2, \cdots)$ و $r = (r_1, r_2, \cdots)$، $\sup |x_k - r_k|$ است. فرض کنید x نقطهٔ دلخواهی در c_0 باشد. می‌خواهیم یک نقطهٔ r انتخاب کنیم، که در آن همهٔ r_kها گویا باشند و تنها تعدادی متناهی از آنها صفر نباشند، طوری که $\sup |x_k - r_k|$ کوچک باشد. با گرفتنِ یک ϵ مثبتِ دلخواه برای اندازه گرفتنِ میزانِ مطلوبِ کوچکی، N را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنید که به ازای $n > N$، $|x_n| < \epsilon$ (رک. بحثِ مفصلترِ همگرایی در §۸). r_1، r_2، $\cdots$، r_n را اعدادِ گویایی بگیرید که به ازای $n = 1, 2, \cdots, N$، $|x_n - r_n| < \epsilon$. در این صورت $r = (r_1, r_2, \cdots, r_N, 0, 0, \cdots)$ نقطهٔ مطلوب است.

بعداً (§۱۹) نشان خواهیم داد که در فضای C (توابعِ پیوسته) مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایها همه‌جاچگال است.

تمرین ۶.۶. نشان دهید که تعداد ناشمارایی چندجمله‌ای وجود دارد.

تمرین ۶.۷. نشان دهید که تعداد شمارایی چندجمله‌ای وجود دارد که همهٔ ضرایبشان گویاست.

تمرین ۶.۸. نشان دهید که اگر در C مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایها چگال باشد، مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهایی که همهٔ ضرایبشان گویاست نیز چنین است. نتیجه بگیرید که C تفکیک‌پذیر است.

نمونه‌ای از فضایی که تفکیک‌پذیر نباشد فضای m از دنباله‌های کراندارِ اعداد حقیقی است (ص. ۳۶). این مطلب را می‌توانیم به صورتِ زیر ببینیم.

تمرین ۶.۹. نشان دهید که یک مجموعهٔ ناشمارای S در m وجود دارد که همهٔ نقاطِ S با دنباله‌هایی که فقط از ۰ و ۱ تشکیل شده‌اند نمایش داده می‌شود.

تمرین ۶.۱۰. در m فاصلهٔ بینِ هر دو نقطهٔ مجموعهٔ S در تمرین ۶.۹ چقدر است؟

در m یک مجموعهٔ همه‌جاچگالِ دلخواهِ E اختیار کنید. مجموعهٔ S (توصیف‌شده در تمرین ۶.۹) را در تناظرِ یک به یک با زیرمجموعه‌ای از E قرار خواهیم داد. این نشان خواهد داد که E حاویِ زیرمجموعه‌ای ناشماراست و لذا ناشماراست. بنابراین m نمی‌تواند حاوی هیچ مجموعهٔ چگالِ شمارایی باشد. برای اینکه S را در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌ای از E قرار دهیم، به این صورت عمل می‌کنیم. یک نقطهٔ p از S بگیرید. یک نقطهٔ q از E در فاطمهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$ از p وجود دارد، زیرا E همه‌جاچگال است. فاصله از q تا هر نقطهٔ دیگرِ s از S بیشتر از $\frac{1}{2}$ است، زیرا $1 = d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < \frac{1}{2} + d(q, s)$ با این روش به هر نقطه از S نقطهٔ متفاوتی از E وابسته کرده‌ایم، پس E دست‌کم به اندازهٔ S، و لذا تعدادی ناشمارا، نقطه دارد.

تمرین ۶.۱۱. مشابهاً نشان دهید که فضای Bی و ۴§ تفکیک‌پذیر نیست.

۰۷ فشردگی.

به کرّات مطلوب است بتوانیم حکم کنیم به اینکه مجموعه‌ای یک نقطهٔ حدی دارد، حتی اگر نتوانیم بگوییم که آن نقطهٔ حدیْ دقیقاً کجاست. برای نمونه، فرض کنید که کوشش می‌کنیم ثابت کنیم که هر تابعِ حقیقی‌مقدارِ پیوستهٔ کراندار f، تعریف‌شده روی مجموعهٔ دادهشدهٔ E در R_1، یک ماکزیموم دارد. یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که یک نقطهٔ x از E وجود دارد که $f(x)$ واقعاً برابر کوچکترین کران بالای همهٔ اعدادِ $f(y)$ به ازای yهای در E است. (فرض بر این است که خواننده نقداً دربارهٔ اینکه تابعِ پیوسته چیست دست‌کم ایدهٔ خامی دارد؛ تعریفِ رسمی از ۱۳§ داده خواهد شد و مورد بحث قرار خواهد گرفت.) در این صورت کوششی می‌کنیم نشان دهیم که xای در E وجود دارد که به ازای هر y

در E، $f(x) \geq f(y)$.

فرض کردیم که f کراندار باشد، یعنی اینکه به ازای yهای در E، مقادیرِ $f(y)$ مجموعهٔ کرانداری از اعدادِ حقیقی تشکیل دهند. چنین مجموعه‌ای یک کوچکترین کران بالای متناهیِ M دارد، پس به ازای همهٔ yهای متعلق به E، $f(y) \leq M$. باید نقاط x_nای در E باشند که $f(x_n) > M - ۱/n$، زیرا در غیر این صورت عددی کوچکتر از M نیز یک کرانِ بالا می‌بود. به‌علاوه، اگر E مجموعه‌ای متناهی نباشد، می‌توانیم به همان دلیلْ فرض کنیم که x_nها همگی متفاوت‌اند (و اگر E متناهی باشد چیزی برای اثبات نداریم). اگر x_nها یک نقطهٔ حدیِ x در E داشته باشند، پیوستگیِ f باعث می‌شود که $f(x) \leq M$ چون $f(x_n) \geq M - ۱/n$. چون در هر صورت، بنا بر تعریفِ M، $f(x) \leq M$، نتیجه می‌شود که $f(x) = M$.

اکنون تحت چه شرایطی می‌توانیم حکم کنیم که هر مجموعهٔ $\{x_n\}$ از تعدادی نامتناهی نقطهٔ متمایزِ E یک نقطهٔ حدی در E دارد؟ این نمی‌تواند همواره درست باشد: برای نمونه، در $R_۱$ مجموعهٔ $E_۱ = \{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \cdots\}$ نقطهٔ حدیِ ۰ دارد، اما این نقطهٔ حدی در $E_۱$ نیست. مجموعهٔ $E_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$ هیچ نقطهٔ حدی‌ای در $R_۱$ ندارد. برای تدارکِ شرایطِ ساده‌ای که تضمین کند که مجموعه‌ای شامل یک نقطهٔ حدی است قضیهٔ بَولتسانو- وایرشتراس وجود دارد. این قضیه می‌گوید که هر مجموعهٔ کرانداِر نامتناهی در $R_۱$ یک نقطهٔ حدی در $R_۱$ دارد؛ اگر مجموعه بسته هم باشد، آنگاه شاملِ یک نقطهٔ حدی است. اگر، موقتاً، صدقِ این قضیه را مفروض بگیریم، می‌بینیم که هر تابعِ حقیقی‌مقدارِ پیوستهٔ کراندار روی هر مجموعهٔ کرانداِر بسته در $R_۱$، ماکزیمومی می‌گیرد. مثالهای (i) $f(x) = x$، با $E = R_۱$؛ (ii) $f(x) = ۱/x$، با E برابرِ بازهٔ $(۰, \infty)$، نشان می‌دهند هم «بسته» و هم «کراندار» قیدهای اساسی‌ای بر مجموعهٔ Eاند. (فی‌الحال خواهیم دید که کرانداریِ تابع زاید است؛ کرانداریْ از مفروضاتِ دیگرْ نتیجه می‌شود.)

تمرین ۷.۱. نکتهٔ پیشین را از قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس استنتاج کنید.

قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس را می‌توانیم با شیوه‌ای که به عنوان روشی برای به دام انداختنِ شیر در صحرای آفریقا پیشنهاد شده اثبات کنیم. صحرا را با نرده‌ای محصور می‌کنیم، و سپس صحرا را با نرده‌ای که (مثلاً) از شمال به جنوب کشیده می‌شود نصف می‌کنیم. شیر در یک نیمه یا نیمهٔ دیگر است؛ این نیمه را با نرده‌ای که از شرق به غرب کشیده می‌شود نصف کنید. اکنون شیر در یکی از دو ربع است؛ این را با نرده‌ای نصف کنید؛ و به همین ترتیب؛ شیر سرانجام در یک حصارِ به‌دلخواه کوچک محصور می‌شود. این ایده عملاً در دامهای پرندهٔ هِلیگولَندی به کار گرفته شده است.[۲]؛

نکتهٔ اساسی در به کار گرفتنِ این ایده در موردِ مسألهٔ ما این است که اگر مجموعهٔ E تعدادی نامتناهی نقطه داشته باشد و در یک بازهٔ متناهیِ I قرارگرفته باشد، آنگاه دست‌کم یک نیمه از I باید شامل تعدادی نامتناهی از نقاطِ E باشد. I_2 را یکی از دو نیمه، که شامل تعدادی نامتناهی از نقاطِ E باشد، بگیرید و I_2 را نصف کنید. مجدداً، یکی از نیمه‌های I_2 شامل تعدادی نامتناهی از نقاطِ E است؛ چنین نیمه‌ای را I_3 بخوانید. این شیوه را ادامه دهید. یک دنبالهٔ تو در تو از بازه‌های I_2،I_3 ، ... به‌دست می‌آوریم که هر یک شامل تعدادی نامتناهی از نقاط E است. نقاطِ انتهاییِ سمتِ چپِ بازه‌های I_n مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که از بالا کراندار است (چون در I است) و لذا یک کوچکترین کران بالای x دارد. هر همسایگیِ x حاوی I_nای است، زیرا طولِ I_nها به ۰ می‌گراید، و لذا شامل تعدادی نامتناهی از نقاطِ E است. یعنی x یک نقطهٔ حدیِ E است.

تمرین ۷.۲. قضیهٔ بولتسانو‌ـوایرشتراس را در مورد R_2 ثابت کنید.

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ بولتسانو‌ـوایرشتراس به‌علاوهٔ ناشماراییِ مجموعهٔ اعداد حقیقی، قضیه‌ای در مورد تقریب زدنِ توابع با مجموعهای جزئیِ سریِ

توانیشان ثابت می‌کنیم. فرض کنید $f(x) = \sum\limits_{\circ}^{\infty} a_k x^k$، و سری در $|x| < 1$ همگرا باشد. فرض کنید که، به ازای هر x در $[\circ, 1]$، $f(x)$ با مجموعِ جزئی‌ای از سریِ توانیش برابر باشد، یعنی به ازای هر x یک n وجود داشته باشد که $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = \circ$. در این صورت f یک چندجمله‌ای است.[۳]

E_n را مجموعهٔ نقاط xای در $[\circ, \frac{1}{2}]$ بگیرید که در مورد آنها $f(x) = \sum\limits_{k=\circ}^{n} a_k x^k$. چون تعداد شمارایی عدد صحیح و تعداد ناشمارایی نقطه در $[\circ, \frac{1}{2}]$ وجود دارد، یک E_n باید ناشمارا، و لذا نامتناهی، باشد. در این صورت E_n در $[\circ, \frac{1}{2}]$ یک نقطهٔ حدی دارد، و f روی E_n با یک چندجمله‌ای برابر است، یعنی این دو در هر نقطه از E_n یکی‌اند. اما تابعی تحلیلی نمی‌تواند بدون اینکه خودْ یک چندجمله‌ای باشد، روی مجموعه‌ای که در داخلِ بازهٔ همگرایی نقطه‌ای حدی دارد با یک چندجمله‌ایْ برابر باشد.

این حکم که هر مجموعهٔ کراندارِ نامتناهی نقطه‌ای حدی دارد در هر فضای متریک معنا دارد، اگرچه ممکن است درست نباشد. برای نمونه، این حکم در موردِ فضای متشکل از نقاطِ گویای R_1، با متریک R_1، نادرست است. این را می‌توانیم با در نظر گرفتنِ مجموعهٔ متشکل از تقریبهای گویای ۱، ۱/۴، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱۴۲، ... از $\sqrt{2}$ ببینیم. این مجموعه کراندار است؛ بسته است (چون $\sqrt{2}$ در فضا نیست)؛ اما شامل هیچ نقطهٔ حدی‌ای نیست. در اینجا قضیهٔ بولتسانو–وایرشتراس درست نیست چون فضا، اصطلاحاً، تعداد خیلی کمی نقطه دارد. قضیهٔ می‌تواند در مورد فضایی که نقاط خیلی زیادی داشته باشد نیز درست نباشد. برای نمونه، فضای B را بگیرید که نقاطش توابع کراندار روی $[\circ, 1]$اند. دیده‌ایم (ص. ۵۸) که چگونه تعدادی نامتناهی از این گونه توابع بسازیم، هر کدام با فاصلهٔ ۱ از بقیهٔ؛ چنین مجموعه‌ای از نقاطِ B نمی‌تواند نقطه حدی‌ای داشته باشد.

پیشتر مجموعهٔ Eای که هر زیرمجموعهٔ نامتناهیِ E نقطه‌ای حدی در E

داشته باشد فشرده خوانده می‌شد؛ به‌تازگی دیده‌ایم که در R_1 یا R_2 مجموعه‌های بستهٔ کراندار این خاصیت را دارند. با وجود این، اصطلاحِ فشرده اکنون معمولاً در مورد مجموعه‌هایی با خاصیتی کمتر شهودی (که پیشتر نیم‌فشردگی خوانده می‌شد) به‌کار می‌رود. مجموعه فشرده خوانده می‌شود اگر هرگاه با گردایه‌ای (ناتهی) از مجموعه‌های باز پوشانده شود، با زیرگردایه‌ای متناهی از این مجموعه‌ها نیز پوشانده شود (یا اگر آن مجموعه تهی باشد). (گفتنِ اینکه یک گردایهٔ $\{G\}$ از مجموعه‌ها E را می‌پوشانَد یعنی هر نقطهٔ E در دست‌کم یک G است.)

برای دیدنِ اینکه چگونه می‌توان خاصیت فشردگی را به‌کار برد، آن را به‌کار می‌بریم تا نشان دهیم که هر تابع حقیقی‌مقدار پیوستهٔ F تعریف‌شده روی یک مجموعهٔ فشردهٔ E در یک فضای متریک، روی E ماکزیمومی دارد. نخست نشان می‌دهیم که تابعْ کراندار است. به هر x متعلق به E یک همسایگیِ N به مرکزِ x نسبت می‌دهیم که به ازای همهٔ yهای متعلق به N، $f(y) < f(x) + 1$. این کار را می‌توانیم انجام دهیم چون اگر x را تنها کمی تغییر دهیم f، که پیوسته است زیاد تغییر نمی‌کند. این همسایگیها مجموعه‌هایی بازند، و هر x در دست‌کم یکی از آنهاست، لذا چون E فشرده است تعدادی متناهی از آنها E را می‌پوشانند. فرض کنید اینها N_1، N_2، ...، N_n باشند. اگر x_k مرکزِ N_k باشد، $f(x)$ نمی‌تواند از بزرگترینِ ردهٔ متناهی‌ی اعدادِ $f(x_k) + 1$ بیشتر باشد؛ لذا f از بالا کراندار است. مشابهاً f از پایین کراندار است.

اکنون با فرضِ اینکه f ماکزیمومی روی E نمی‌گیرد ادامه می‌دهیم، و تناقضی به‌دست می‌آوریم. چنانکه هم‌اکنون دیدیم، مقادیرِ $f(x)$ به ازای xهای متعلق به E مجموعه‌ای کراندار تشکیل می‌دهند، لذا اینها یک کوچکترین کران بالای M دارند، که داریم فرض می‌کنیم تابع آن را نمی‌گیرد. می‌توانیم (بنا بر پیوستگیِ تابع) به هر x یک همسایگیِ N نسبت دهیم که به ازای همهٔ yهای در N، $f(y) < f(x) + \frac{1}{2}(M - f(x))$. باز هم تعدادی متناهی از این همسایگیها،

$N_1، N_2، \ldots، N_n$ (نه همان همسایگیهای قبلی)، E را می‌پوشانند. $\acute{M}(< M)$ را بزرگترین مقدارِ $f(x_k)$ها بگیرید، که x_k مرکزِ N_k است. در این صورت به ازای هر y در E، با اختیارِ x_kای که در همان N_kای است که y، به‌دست می‌آوریم

$$f(y) \leq f(x_k) + \frac{1}{2}(M - f(x_k)) =$$

$$\frac{1}{2}f(x_k) + \frac{1}{2}M < \frac{1}{2}(\acute{M} + M)$$

پس مقادیرِ $f(y)$، به ازای yهای در E، کران بالای $\frac{1}{2}(M + \acute{M})$ دارند، که کمتر از M است، ناقضِ تعریفِ M به صورتِ کوچکترین کران بالای f.

تمرین ۷.۳. اگر E مجموعه‌ای در R_1 باشد و E با تعدادی متناهی بازهٔ باز پوشانده شده باشد، می‌توانیم تعدادِ بازه‌ها را تقلیل دهیم طوری که هیچ نقطهٔ E در بیش از دو تا از آنها نباشد و مجموعهٔ تقلیل‌یافته هنوز E را بپوشاند.

تمرین ۷.۴. نشان دهید که هر زیرمجموعهٔ بستهٔ هر مجموعهٔ فشرده فشرده است.

اثباتِ پیشین نشان می‌دهد که مطلوب است وقتی با مجموعهٔ فشرده‌ای مواجه می‌شویم آن را بازشناسیم. این کار در R_1 آسان است: قضیهٔ هاینه‌ـبورِل حکم می‌کند که هر مجموعه در R_1 فشرده است اگر بسته و کراندار باشد. اثبات تقریباً عینِ اثباتِ قضیهٔ بولتسانوـوایرشتراس است. فرض کنید که حکمِ قضیهٔ هاینه‌ـبورل نادرست باشد. در این صورت یک مجموعهٔ E داریم که بسته و کراندار است، و یک گردایهٔ $\{G\}$ از مجموعه‌های بازکه E را می‌پوشانَد، در حالی که هیچ زیرگردایهٔ متناهی از مجموعه‌های G E را نمی‌پوشانَد. مجموعهٔ E در یک بازهٔ متناهیِ I قرار دارد؛ I را نصف کنید. بخشی از E که در یکی از نیمه‌های I است باید با هیچ زیرگردایهٔ متناهی از مجموعه‌های G پوشانده نشود؛ زیرا اگر هر دو بخشِ E را می‌شد چنین پوشاند، کلّ مجموعهٔ E را نیز می‌شد. I_2 را این نیمهٔ I بگیرید.

اکنون I_2 را نصف کنید و این شیوه را مثل قبل ادامه دهید. مثل قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس می‌بینیم که هر همسایگیِ x حاویِ یک بازهٔ I_n است که خود حاویِ بخشی از E است که نمی‌توان آن را با هیچ زیرگردایهٔ متناهی از مجموعه‌های G پوشاند (و لذا نامتناهی است). از طرف دیگر، x در E است زیرا E بسته است، و لذا x را می‌توان با یکی از مجموعه‌های G پوشاند. چون G باز است حاوی یک همسایگیِ x است، و این همسایگیْ حاوی یک بازهٔ I_n است اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. بخشی از E که در این I_n است با تعدادی متناهی (یعنی یکی) از مجموعه‌های G پوشانده می‌شود. پس با فرضِ غلط بودنِ قضیهٔ هاینه‌ـبورل به تناقضی رسیده‌ایم.

تمرین ۷.۵. در R_2 قضیهٔ هاینه‌ـبورل را ثابت کنید.

تمرین ۷.۵ (آ). فرض کنید S مجموعهٔ فشرده‌ای در R_2 باشد، شاملِ دست‌کم ۳ نقطهٔ ناهمخط. (آ) نشان دهید که مثلثی با بزرگترین مساحت با رأسهای در S وجود دارد. (ب) آیا باید قطرِ S برابرِ طولِ یکی از ضلعهای این مثلث باشد؟

خواننده ممکن است توجه کرده باشد که در قضایای هاینه‌ـبورل و بولتسانوـوایرشتراس مفروضات روی مجموعه یکی‌اند. شباهتِ هم مفروضات و هم اثباتها می‌تواند از ارتباطِ نزدیکی بین این قضایا خبر دهد. در واقع، این قضایا توأماً برقرار یا نامعتبرند: در مورد هر فضای متریکِ داده‌شده، اگر یکی از آنها درست باشد دیگری نیز چنین است. با این حال، ما اثبات را حذف می‌کنیم.[۴]

تمرین ۷.۶. مستقیماً نشان دهید که قضیهٔ هاینه‌ـبورل در موردِ دو نمونهٔ داده شده در ص. ۵۹، که در آنها قضیهٔ بولتسانوـوایرشتراس صدق نمی‌کند، صادق نیست.

تمرین ۷.۷. در R_1، E را بازهٔ $(0, 1]$ بگیرید. به هر x بازهٔ بازِ $\frac{1}{2}(x, 2x)$ را متناظر کنید. این بازه‌ها E را می‌پوشانند. نشان دهید که هیچ تعداد متناهی نمی‌تواند E را بپوشاند،

و توضیح دهید که چرا این مطلبْ قضیهٔ هاینه‌ـبورل را نقض نمی‌کند.

تمرین ۷.۸. در $R_۱$ مجموعهٔ $[۰,\infty)$ با بازه‌های بازِ $(n-۱, n+۱)$، $n=۰,۱,۲,\ldots$ پوشانده می‌شود. هیچ تعداد متناهی از این بازه‌ها مجموعه را نمی‌پوشانَد. توضیح دهید که چرا این مطلب قضیهٔ هایند‌ـبورل را نقض نمی‌کند.

تمرین ۷.۹. در $R_۱$ مجموعهٔ E متشکل از اعداد گویای بین ۰ و ۱ بسته نیست. این مجموعه به این روش با مجموعه‌های باز پوشانده می‌شود: فرض کنید x با بازهٔ بازی به طول $\frac{۱}{۱۰}$ به مرکز x پوشانده شده باشد. تعدادی متناهی از این بازه‌های بازْ E را می‌پوشانند. توضیح دهید که چرا این مطلب قضیهٔ هایند‌ـ بورل را نقض نمی‌کند.

۷.۱۰. در $R_۱$ مجموعهٔ E را بازهٔ بستهٔ $[۰,۱]$ بگیرید. فرض کنید هر $x \neq ۰$ در E با بازهٔ $[\frac{۱}{۲}x, ۲x]$ پوشانده شده باشد، و فرض کنید ۰ با $[۰,۰/۱]$ پوشانده شده باشد. بازه‌های پوشاننده باز نیستند، اما تعدادی متناهی از آنها E را می‌پوشانند. توضیح دهید که چرا این مطلب قضیهٔ هاینه‌ـبورل را نقض نمی‌کند.

همچنین شایسته است توجه کنیم که در $R_۱$ (یا در هر R_k) نه فقط هر مجموعه فشرده است اگر بسته و کراندار باشد، بلکه اگر مجموعه‌ای فشرده باشد لزوماً بسته و کراندار است. برای دیدنِ این، فرض کنید E یک مجموعهٔ فشردهٔ ناتهی در $R_۱$ باشد. این مجموعه نمی‌تواند همهٔ $R_۱$ باشد، لذا متممِ آن شامل یک نقطهٔ x است. همهٔ بازه‌های متناهیِ بازِ G را در نظر بگیرید که بستارِ G شامل x نیست. مطمئناً در بین این بازه‌های G همسایگیهایی از هر نقطهٔ E وجود دارد، زیرا اگر $y \in E$، بستارِ هر همسایگیِ y که تنها تا نیمهٔ راهِ منتهی به x برسد شامل x نخواهد بود. بنابراین E با مجموعه‌های بازِ G پوشانده می‌شود. چون E فشرده است، گردایه‌ای متناهی از مجموعه‌های EG را می‌پوشانَد؛ فرض کنید این مجموعه‌ها $G_۱$، ...،

G_n باشند. پس، اولاً، E کراندار است، زیرا در اجتماعِ تعدادی متناهی از بازه‌های متناهی گنجانده شده است. چون بستارهای G_1، ...، G_n شامل x نیستند، متممهای این بستارها همگی شامل xاند، و بنابراین اشتراکِ آنها نیز چنین است. بستارهای G_kها بسته‌اند، متممهایشان بازند، لذا اشتراک متممها باز است. پس x در زیرمجموعهٔ بازی از $C(E)$ است؛ چون x می‌تواند هر نقطه‌ای از $C(E)$ باشد، نتیجه می‌شود که هر نقطه از $C(E)$ در زیرمجموعهٔ بازی از $C(E)$ است. بنابراین $C(E)$ باز است (تمرین ۵.۱۵). پس E بسته است (تمرین ۵.۱۸).

۸. همگرایی و تمامیت. بخش بزرگی از آنالیز دربارهٔ سریهای نامتناهی یا دنباله‌های توابع است. ایدهٔ سریهای نامتناهیِ اعدادْ شهودی‌تر است: برای نمونه، می‌نویسیم $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$، و منظورمان این است که جملات را یکی یکی جمع می‌کنیم، و به این صورت «مجموعهای جزئی»ی متوالیِ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \cdots$$

را می‌سازیم و حدِ اینها را (اگر حدی وجود داشته باشد) مجموعِ سریِ نامتناهی می‌خوانیم. (فرض شده است که خواننده نقداً در مورد معنای حد ایده‌ای دارد؛ با این حال نگاه کنید به ص. ۶۸) در این موردْ مجموعهای جزئی $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$، $\frac{7}{8}$، ... هستند، و روشن است که مجموعِ سری باید ۱ باشد. این حتی روشنتر خواهد بود اگر از فرمول مجموع تصاعد هندسی استفاده کنیم:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-2^{-n}.$$

در حالت کلّی، اگر سری نامتناهیِ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

را بنویسیم، انتظار داریم که اول a_1 را محاسبه کنیم، بعد $a_1 + a_2$ را، بعد $a_1 + a_2 + a_3$ را، و به همین ترتیب، و هر حدِ این مجموعهای جزئی را (اگر موجود باشد) مجموعِ سری می‌خوانیم. توجه کنید که، برای نمونه، $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ و $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$ باید سریهای نامتناهیِ متفاوتی باشند، زیرا مجموعهای جزئیِ متوالیِ اولی ۱، ۰، ۱، ۰، ... اند، در حالی که همهٔ مجموعهای جزئیِ دومی ۰ اند.

با این همه، عملاً «سریهای نامتناهی» یا حتی یک سری نامتناهیِ خاص را تعریف نکرده‌ایم: ما فقط روشی برای وابسته کردنِ مقداری عددی به فرمولی که از پیش هیچ معنایی ندارد پیشنهاد کرده‌ایم. برای دیدنِ اینکه چگونه می‌توانیم عملاً تعریفی ارائه کنیم، توجه می‌کنیم که در واقع آنچه در محاسبهٔ پیشنهادی از آن استفاده شد دنباله‌ی مجموعهای جزئی است. به بیانِ فنّیْ هر دنباله تابعی است از اعدادِ صحیحِ مثبت به یک فضا: §۱۲ را ببینید. با این حال، در زبانی کمتر رسمی، می‌توانیم دنباله‌های اعداد را گردایه‌هایی از اعداد تصور کنیم که با اعداد صحیحِ مثبت، با حفظِ ترتیبشان، نشانه‌گذاری شده‌اند، و لزوماً همگی متمایز نیستند؛ پس ۱، ۰، ۱، ۰، ... یک دنباله است (نشانه‌گذاریْ ضمنی است)؛ عموماً می‌توان دنباله‌ها را به صورتی چون a_1، a_2، a_3، ...، یا $\{a_n\}_1^\infty$، یا، اگر از قرائن معلوم باشد که دربارهٔ دنباله‌ای حرف می‌زنیم و نه مجموعه‌ای، فقط به صورتِ $\{a_n\}$ نوشت. باید همواره هر دنباله را از مجموعهٔ اعدادی که در آن ظاهر می‌شوند تمییز دهیم. هر مجموعهٔ نامتناهیِ شمارا را می‌توان (به طرقِ زیادی) به صورت دنباله‌ای مرتب کرد، اما هر دنباله تنها لازم است تعدادی متناهی عضوِ متمایز داشته باشد. (توجه کنید که بنا بر تعریفِ ما هیچ «دنبالهٔ متناهی» مثل $\{4, 12, 13\}$ دنباله نیست.) اکنون می‌توانیم سری نامتناهیِ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ را دقیقاً به معنای

دنباله‌ای تعریف کنیم که اعضایش مجموعهای جزئیِ

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

و غیره است.

به عکس، هر دنباله از اعداد یک سریِ نامتناهیِ متناظر تعریف می‌کند که دنباله دنبالهٔ مجموعهای جزئیِ آن است. برای نمونه، دنبالهٔ ۱، ۰، ۱، ۰، ... دنبالهٔ مجموعهای جزئی سریِ $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ است. به‌طورکلّی، دنبالهٔ s_1، s_2، s_3، ... دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots$ است.

مفهوم دنباله کلّیتر از مفهوم سری است زیرا می‌توانیم دنباله‌ای داشته باشیم که اعضایش مجموعه‌هایی، یا، در واقع، نقاطِ هر فضایی که بخواهیم باشد؛ اما سریِ متناظری وجود ندارد مگر اینکه برای نقاطِ مجموعه عملِ جمعی وجود داشته بشد.

طبیعتاً خواهیم گفت که سریِ نامتناهیْ همگراست اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئیِ وابسته به آن همگرا باشد؛ در غیر این صورت سریْ واگرا گفته می‌شود. پس برای دقیق ساختنِ این تعریف باید مشخص کنیم که منظورمان از همگراییِ دنباله‌ها چیست. اگر $\{s_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، می‌گوییم که این دنباله به حدِ L همگراست اگر $|s_n - L|$ سرانجام هر قدر بخواهیم کوچک شود و بماند. به بیانی رسمی‌تر: $s_n \to L$، اگر هر عدد مثبتِ ϵ (با تأکید بر کوچکیِ احتمالیِ آن) که داده شود، عدد صحیحِ Nای (معمولاً نسبتاً بزرگ) باشد که $|s_n - L| < \epsilon$ مشروط بر اینکه $n > N$. این تعریف بیدرنگ به دنباله‌هایی که اعضایشان نقاطِ هر فضای

متریکی باشند. تعمیم می‌یابد: تنها باید $|s_n - L|$ را با $d(s_n, L)$ جایگزین کنیم. پس دنبالهٔ نقاطِ $\{(\cos(۱/n), \sin(۱/n))\}$ از $R_۲$ به $(۱, ۰)$ همگراست؛ اگر اعضای x_n از فضای C با $x_n(t) = t^n(۱ - t)^n$، $۰ \leq t \leq ۱$، تعریف شده باشند، دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عضوِ ۰ از C همگراست (زیرا $t(۱ - t) \leq \frac{۱}{۴}$).

اگرچه تعریفِ سری نامتناهیِ $a_۱ + a_۲ + \ldots$ به معنای دنبالهٔ $\{s_۱, s_۲, \ldots\}$ از مجموعهای جزئیِ آن بسیار طبیعی به‌نظر می‌رسد، در استفاده از آن هیچ اجباری نداریم، و در واقع این همواره مناسبترین تعریف برای استفاده نیست. برای بعضی مقاصدْ بهتر است $a_۱ + a_۲ + \cdots$ را به معنای دیگری، مثلاً

$$\frac{s_۱}{۱}, \quad \frac{s_۱ + s_۲}{۲}, \quad \frac{s_۱ + s_۲ + s_۳}{۳}, \quad \ldots$$

یا

$$\frac{s_۱ + s_۲}{۲}, \quad \frac{s_۲ + s_۳}{۲}, \quad \frac{s_۳ + s_۴}{۲}, \quad \ldots$$

بگیریم. می‌توان نشان داد که هر یک از این تعاریفْ مجموعِ هر سریِ همگرا را حفظ می‌کند.[۵] به‌علاوه، هر یک بعضی سریهای واگرا را همگرا می‌سازد؛ برای نمونه، در سری واگرای $۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots$، $s_۱ = ۱$ و $s_۲ = ۰$ و $s_۳ = ۱$ و به همین ترتیب، لذا هر یک از تعاریفِ پیشنهادیْ به سریْ مجموعِ $\frac{۱}{۲}$ خواهد داد.

اکنون می‌خواهیم در مورد برخی خواصِ دنباله‌هایی از نقاط در فضاهای متریک بحث کنیم؛ ایدهٔ سریهای نامتناهی برای ایجاد انگیزه برای معرفیِ دنباله‌ها به‌کار آمد، اما اکنون کاربردِ دیگری برای سریهای نامتناهی نداریم. (بعضی قضایا برحسب سریها به نحو مناسبتری بیان می‌شوند تا برحسب دنباله‌ها؛ در §۲۲ نمونه‌ای خواهیم داشت.)

اگر دنباله‌ای به یک حدِ L همگرا باشد، اعضای آن سرانجام به یکدیگر نزدیک می‌شوند و نزدیک می‌مانند. درواقع، N را آن‌قدر بزرگ بگیرید که، به ازای $n > N$،

$\epsilon/۲ > d(s_n, L)$؛ فرض کنید $m > N$؛ در این صورت همچنین $d(s_m, L) \leq \epsilon/۲$. بنا بر نابرابریِ مثلث، $d(s_m, s_n) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \epsilon$. به عبارت دیگر، با به‌اندازهٔ کافی بزرگ کردنِ m و n به‌طور همزمان، می‌توانیم $d(s_m, s_n)$ را هرقدر بخواهیم کوچک کنیم.

اگر دنبالهٔ $\{s_n\}$ای این خاصیت را داشته باشد که، به معنایی که اکنون توضیح داده شد، اعضایش سرانجام به یکدیگر نزدیک شوند و نزدیک بمانند، آن دنباله یک دنبالهٔ کوشی خوانده می‌شود، و گفته می‌شود که همگرا است. چنین دنباله‌ای ممکن است در فضا به حدی همگرا باشد یا نباشد. برای نمونه، در فضای متریکِ اعداد گویا با متریکِ $R_۱$، دنبالهٔ

$$\{۱, ۱/۴, ۱/۴۱, ۱/۴۱۴, ۱/۴۱۴۲, \ldots\}$$

از تقریبهای دهدهیِ $\sqrt{۲}$ همگراست. در واقع، اگر $m > N$ و $n > N$، s_m و s_n دست‌کم تا مکانِ Nامِ بعد از ممیز مطابقت دارند و لذا $|s_m - s_n| < ۱۰^{-N}$. با این حال، دنباله به نقطه‌ای از فضا همگرا نیست.

فضای متریکی که در موردِ آن هر دنبالهٔ کوشی به نقطه‌ای از فضا همگرا باشد تامّ خوانده می‌شود. فضای متریکِ اعداد گویا تامّ نیست. ولی، چنانکه به زودی خواهیم دید، $R_۱$ تامّ است. در واقع، همواره می‌توان هر فضای متریک را، تا حدی همان‌گونه که اعداد حقیقی را می‌توان از اعداد گویا ساخت، با افزودنِ نقاط جدیدی به آن و ساختنِ فضایی بزرگتر تامّ ساخت. با این حال، ما این روش ساخت را بررسی نخواهیم کرد.[۶]

اکنون نشان خواهیم داد که تمامیتِ $R_۱$ از خاصیت کوچکترین کران بالا که در ۲§ آن را به عنوان اصل گرفتیم نتیجه می‌شود. فرض کنید $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی باشد. در این صورت اگر ϵ عدد مثبتِ داده شده‌ای باشد Nای هست که اگر $n > N$ و $m > N$، $|s_m - s_n| < \epsilon$. اولاً اعداد متمایزِ s_n باید مجموعهٔ

کرانداری تشکیل دهند. برای دیدنِ این، بگیرید $\epsilon = ۱$، N متناظر را بیابید، و یک $m > N$ مناسب بگیرید. در این صورت $s_n = s_m + (s_n - s_m)$، لذا $|s_n| \leq |s_m| + ۱$ اگر $n > N$. چون مجموعهٔ متناهیِ

$$\{s_۱, s_۲, s_۳, \ldots, s_n\}$$

کراندار است، کلّ مجموعهٔ اعدادِ s_n نیز چنین است.

اکنون L_k را کوچکترین کران بالای مجموعهٔ متشکل از همهٔ s_nهای متمایز به ازای $n > k$ بگیرید. چون گرفتنِ kی بزرگتر یعنی اینکه کوچکترین کران بالای مجموعهٔ کوچکتری از اعداد را در نظر می‌گیریم، $\cdots \geq L_{k+۱} \geq L_k$. L را بزرگترین کران پایینِ مجموعهٔ همهٔ L_kها بگیرید. نشان خواهیم داد که $s_n \to L$. فرض کنید ϵ عدد مثبت دلخواهی باشد، و N متناظر با این ϵ را بگیرید، طوری که اگر $n > N$، $|s_m = s_n| < \epsilon$. بنا بر تعریفِ بزرگترین کرانِ پایین باید L_kای، که $k > N$، بین L و $L + \epsilon$ وجود داشته باشد. چون L_k کوچکترین کران بالای مجموعهٔ s_nها، که $n > k$، است، s_mای (که $m > k$) بین $L_k - \epsilon$ و L_k وجود دارد؛ پس $L - \epsilon \leq s_m \leq L + \epsilon$. چون s_n حداکثر به اندازهٔ ϵ با s_m تفاوت دارد، $L - ۲\epsilon \leq s_n \leq L + ۲\epsilon$. چون s_n حداکثر به اندازهٔ ϵ با s_m تفاوت دارد، $L - ۲\epsilon \leq s_n \leq L + ۲\epsilon$. چون ۲ϵ درست به اندازهٔ ϵ اختیاری است، اکنون می‌دانیم که با به اندازهٔ کافی بزرگ گرفتنِ n می‌توان s_n را به‌دلخواه به L نزدیک کرد؛ یعنی $s_n \to L$.

تمرین ۸.۱. به عکس نشان دهید که اگر تمامیتِ $R_۱$ فرض گرفته شده باشد، خاصیت کوچکترین کران بالا نتیجه می‌شود.

تمرین ۸.۲. اگر $\{s_n\}$ دنباله‌ای از نقاطِ $R_۱$ باشد که به ازای هر n، $s_n \leq s_{n+۱}$ و $s_n \leq M$، آنگاه $\{s_n\}$ همگراست. به عبارت دیگر، هر دنبالهٔ کرانداِر صعودی یک حد دارد. (این را اغلب به عنوان شکلِ بنیادیِ تمامیتِ $R_۱$ می‌گیرند.)

تمرین ۸.۳. نشان دهید که R_2 تام است.

در §۱۷ خواهیم دید که فضای C تام است؛ و، به صورت کلّیتر، فضای توابع پیوسته روی هر مجموعهٔ فشردهٔ داده‌شده تام است.

دیدیم (تمرین ۴.۲) که هر زیرمجموعهٔ هر فضای متریک خود یک فضای متریک است (اگر از همان متریک استفاده شود).

تمرین ۸.۴. زیرمجموعه‌های فضاهای متریکِ تام لزوماً فضای متریکِ تام نیستند. برای این مثالی بیاورید.

با این حال، می‌توانیم نشان دهیم که هر زیرمجموعهٔ بستهٔ ناتهی E از هر فضای متریکِ تام S نیز یک فضای متریک تام است (مجدداً با استفاده از همان فاصله). فرض کنید $\{x_k\}$ دنباله‌ای کوشی از نقاطِ E باشد. این دنباله دنباله‌ای کوشی از نقاطِ S نیز هست، زیرا فاصله‌ها در E و S یکی‌اند. چون S تام است، $x_k \to x_0$، که $x_0 \in S$. تنها باید نشان دهیم که $x_0 \in E$. دو حالت هست که باید بررسی شود. در حالتِ اول، غیر از تعدادی متناهی، همهٔ x_kها یکی‌اند. آشکارا در این صورت اینها باید با x_0 یکی باشند، که از این قرار به E تعلق دارد. در حالت دوم تعدادی نامتناهی از x_kهای متفاوت وجود دارد. در این صورت شرطِ $x_k \to x_0$ نشان می‌دهد که (در S) x_0 یک نقطهٔ حدیِ مجموعهٔ متشکل از این x_kهاست، و لذا x_0 یک نقطهٔ حدی مجموعهٔ E (به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از S) است. چون E بسته است، شامل نقاط حدیش است؛ لذا $x_0 \in E$. باید بین حدِ هر دنباله و نقاطِ حدیِ مجموعهٔ متشکل از نقاطِ (متمایزِ) دنباله به‌دقت فرق بگذاریم. برای نمونه، در R_1 دنبالهٔ $\{0, 0, 0, \ldots\}$ حدِ 0 دارد، اما مجموعهٔ اعضای دنباله تنها یک نقطه دارد و لذا نقطهٔ حدی‌ای ندارد. از طرف دیگر، در

R_1 مجموعهٔ اعضای دنبالهٔ $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots\}$ دو نقطهٔ حدی (۰ و ۱) دارد، اما دنباله هیچ حدی ندارد. لزومِ این تمییز چیزی بود که مجبورمان کرد در اثباتِ بالا دو حالت در نظر بگیریم.

با این حال، بین حدِ دنباله‌ها و نقاط حدیِ مجموعهٔ متشکل از اعضای متمایزِ دنباله ارتباط نزدیکی وجود دارد.

تمرین ۸.۵. نشان دهید که اگر دنباله‌ای به L همگرا باشد و تعدادی نامتناهی عضوِ متمایز داشته باشد، L یک نقطهٔ حدیِ، در واقع تنها نقطهٔ حدیِ، مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعضای متمایزِ دنباله است.

تمرین ۸.۶. سپس نشان دهید که اگر دنباله‌ای به حدی همگرا باشدو اعضایش متعلق به مجموعهٔ بسته‌ای باشد، حدِ دنباله متعلق به همان مجموعه است.

تمرین ۸.۷. سپس نشان دهید که اگر E مجموعهٔ فشردهٔ ناتهی‌ای در R_1 باشد، E یک بزرگترین عضو دارد.

می‌توانیم از تمرین ۸.۵ نتیجه بگیریم که اگر دنباله‌ای همگرا باشد، مجموعهٔ اعضایش نهایتِ سعیش را می‌کند تا حدِ دنباله یک نقطهٔ حدیش باشد. از جهت دیگر، به سادگی می‌توانیم ببینیم که اگر مجموعهٔ E نقطهٔ حدیِ Lای داشته باشد، دنباله‌ای از نقاطِ E وجود دارد که حدش L است. در واقع، یک نقطهٔ x_1 در E با فاصلهٔ کمتر از ۱ تا L وجود دارد؛ بعد یک نقطهٔ x_2 با فاصلهٔ کمتر از $\frac{1}{2}$ تا L وجود دارد؛ و به همین ترتیب. در عملْ اغلب مجموعهٔ E از اعضای دنباله‌ای تشکیل شده است؛ اگر این اعضا نقطهٔ حدی‌ای داشته باشند، زیردنباله‌ای وجود دارد که به این نقطهٔ حدی همگراست. با اصل زیردنباله به این مطلب ارجاع می‌دهیم؛ این اصل موارد استفادهٔ زیادی دارد.

برای نمونه، یکی از راههای اثباتِ قضیهٔ اساسیِ جبر نشان دادنِ این است که (الف) قدر مطلقِ چندجمله‌ایهای غیرثابتِ $P(z)$ مینیمومی در صفحهٔ مختلط ندارد، لذا یک دنبالهٔ $\{z_n\}$ وجود دارد که روی آن $P(z_n) \rightarrow ۰$؛ (ب) بنا بر اصل زیردنباله، یک زیر دنبالهٔ $\{z_n\}$ یک حدِ $z_۰$ دارد و لذا $P(z_۰) = ۰$. بعضی اثباتهای قرن نوزدهم، ظاهراً با بدیهی انگاشتنِ (ب)، پس از مرحلهٔ (الف) به پایان می‌رسیدند.

تمرین ۸.۸. اگر E مجموعهٔ کراندار دلخواهی در $R_۲$ باشد («کراندار» یعنی اینکه اعضای E مجموعهٔ کرانداری تشکیل می‌دهند)، نشان دهید که E شامل دست‌کم یک زیردنبالهٔ همگراست. (این نظیری در مورد دنباله‌هاست برای قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس در مورد مجموعه‌ها.)

به‌عنوان مثالی از کاربردِ اصل زیردنباله، در مورد قطرِ مجموعهٔ E بحث می‌کنیم. قطر برابرِ کوچکترین کران بالای فاصله بین نقاطِ E تعریف می‌شود؛ با نمادها، $\operatorname{diam} E = \sup d(x, y)$ به ازای x و y در E. برای نمونه، در $R_۲$ قطر دایره‌ای به شعاعِ ۱، ۲ است؛ همچنین است قطر ناحیهٔ (بازِ) درونِ این دایره و چنین است قطر ناحیهٔ بسته. قطرِ مجموعهٔ متشکل از سه نقطهٔ $(۰, ۰)$ و $(۰, ۱)$ و $(۱, ۰)$، $\sqrt{۲}$ است. ممکن است هیچ نقاطِ (x, y)ای در E نباشند که در مورد آنها $d(x, y) = \operatorname{diam} E$، حتی اگر E کراندار باشد و لذا قطری متناهی داشته باشد. برای نمونه، وقتی E همسایگی‌ای در $R_۲$ باشد هیچ دو نقطهٔ E وجود ندارد که با فاصلهٔ $\operatorname{diam} E$ از هم باشند.

با این حال، اگر E مجموعهٔ ناتهیِ فشرده‌ای در $R_۱$ یا $R_۲$ باشد، مطمئناً چنین نقاطی وجود دارد. برهان خلف ارائه می‌کنیم. فرض کنید در یافتنِ نقاطِ x و y از E که در مورد آنها $d(x, y) = \operatorname{diam} E$ موفق باشیم. در این صورت، بنا بر تعریفِ قطر، باید بتوانیم زوجهایی از نقاطِ $x_۱$، $y_۱$؛ $x_۲$، $y_۲$؛ ... بیابیم

که $d(x_n, y_n) > \text{diam}E - 1/n$. تعدادی نامتناهی از x_nها یا y_nها متمایز خواهند بود (در غیر این صورت نقداً x و yای یافته‌ایم که $d(x, y) = \text{diam}E$). اگر تعدادی نامتناهی از x_nهای متمایز وجود داشته باشد آنها (بنا بر قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس) یک نقطهٔ حدی دارند، و می‌توانیم زیردنباله‌ای برگزینیم که حدِ آن این نقطهٔ حدی باشد. اگر تنها تعدادی متناهی از x_nهای متمایز وجود داشته باشد، یکی از آنها، مثلاً x_1، به تعدادی نامتناهی یافت می‌شود، و در این صورت x_1 حدِ دنباله‌ای است که همهٔ اعضایش برابرِ x_1اند. در مورد y_nای که متناظر است با x_nای که پیشتر انتخاب کرده‌ایم به صورت مشابه عمل می‌کنیم. نتیجه این است که دنباله‌هایی، که آنها را هم برای سادگیِ نمادگذاری $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ می‌خوانیم، به‌دست آورده‌ایم که $x_n \to x_0$، و $y_n \to y_0$، و $d(x_n, y_n) \to \text{diam}E$. پس باید $d(x_0, y_0) = \text{diam}E$. زیرا از طرفی چون E بسته است و لذا x_0 و y_0 در Eاند، $d(x_0, y_0)$ نمی‌تواند از $\text{diam}E$ بیشتر باشد. از طرف دیگر، نابرابری مثلث نشان می‌دهد که

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y_0) + d(y_n, y_0) + d(x_0, y_0)$$

و لذا $\text{diam}E \leq d(x_0, y_0)$.

تمرین ۸.۹. فاصله بین دو مجموعهٔ F و G را $\inf d(x, y)$ به ازای xهای متعلق به F و yهایِ متعلق به G تعریف کنید. نشان دهید که اگر F و G در R_2 باشند، اگر F و G بسته باشند و تهی نباشند، و F کراندار باشد، آنگاه نقطه‌های xای در F و yای در G وجود دارند که $d(x, y)$ فاصلهٔ بین F و G است.

تمرین ۸.۱۰. اگر N همسایگی‌ای از y باشد متشکل از همهٔ xهایی که $d(x, y) < r$، آیا $\text{diam } N = 2r$؟ ((آ) R_1 یا R_2؛ (ب) فضاهای متریکِ کلّی را در نظر بگیرید.)

تمرین ۸.۱۱. نشان دهید که E و بستارش قطر واحدی دارند.

۹. **مجموعه‌های تو در تو و قضیهٔ بِئر.** فرض کنید دو مجموعهٔ $E_۱$ و $E_۲$ داریم که $E_۲ \supset E_۱$، و $E_۲$ تهی نیست. در این صورت دست‌کم یک نقطه وجود دارد که توأماً در هر دو مجموعه هست، زیرا $E_۱ \cap E_۲ = E_۲$. مشابهاً، اگر تعدادی متناهی مجموعه داشته باشیم که تو در تو باشند: $E_۱ \supset E_۲ \supset E_۳ \supset \cdots \supset E_n$، و اگر آخرین مجموعه، E_n، تهی نباشد، دست‌کم یک نقطه وجود دارد که توأماً در همهٔ مجموعه‌ها هست. برای وقتی که تعدادی نامتناهی مجموعه داریم که هیچ یک تهی نیست، چیزی متناظر با این وجود ندارد؛ با وجودِ این فرضْ کاملاً ممکن است که اشتراکِ همهٔ مجموعه‌ها تهی باشد. این سه مثال را در نظر بگیرید: (i) E_n بازهٔ بازِ $(۰, ۱/n)$ در $R_۱$ است؛ (ii) E_n مجموعهٔ آن نقاطِ xای در فضای متریکِ گویای $R_۱$ است که در نابرابریِ $|x - \sqrt{۲}| < ۱/n$ صدق می‌کنند؛ (iii) E_n بازهٔ $[n, \infty)$ در $R_۱$ است. در هر یک از این موارد اشتراکِ همهٔ مجموعه‌های E_n تهی است.

اکنون شرایطی عرضه می‌کنیم که مانع از این می‌شود که گردایه‌ای تو در تو از مجموعه‌ها اشتراک تهی داشته باشد. قضیهٔ مجموعه‌های تو در توی کانتور: اگر $E_۱ \subset E_۲ \subset E_۳ \subset \cdots$؛ اگر E_nها بسته و ناتهی باشند؛ اگر فضای زمینه تام باشد؛ و اگر $diamE_n \to ۰$؛ آنگاه دقیقاً یک نقطه وجود دارد که در اشتراکِ همهٔ E_nهاست.

قضیهٔ کانتور متضمن سه شرط است به علاوهٔ این شرط که مجموعه‌ها تو در تو هستند و تهی نیستند: بسته بودن و کوچک بودنِ قطرِ مجموعه‌ها، و تمامیتِ فضا.

در هر یک از سه مثالمان از مجموعه‌های تو در تو با اشتراکِ تهی، شرطِ متفاوتی از این سه شرط برقرار نیست.

برای اثبات قضیهٔ کانتور، x_n را نقطهٔ دلخواهی متعلق به E_n بگیرید. دنبالهٔ $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی است زیرا اگر $m > n$، $x_m \in E_n$ و $d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}E_n$، که به صفر می‌گراید. چون فضا تام است، $\{x_n\}$ در فضا حدی دارد. اگر E_n

دلخواهی انتخاب کنیم، همهٔ x_kها به E_n متعلق‌اند اگر $k \geq n$، لذا حد متعلق است به E_n چون E_n بسته است. یعنی حد در هر E_n قرار دارد. سرانجام، نمی‌شود دو نقطه باشد که در هر E_n باشد، زیرا قطرِ E_n دست‌کم به بزرگی فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ E_n است.

گاهی سودمند است که این قضیهٔ ضعیفتر را به دست آورده باشیم: اگر همهٔ مفروضات قضیهٔ کانتور را نگاه داریم غیراز اینکه دیگر الزام نکنیم که $diamE_n \to ۰$، بلکه در عوض الزام کنیم که E_nها فشرده باشند، باز هم می‌توانیم بگوییم که اشتراک E_nها تهی نیست (اگرچه این اشتراک اکنون ممکن است شامل بیش از یک نقطه باشد). چون این فرض را نگاه داشته‌ایم که E_n بسته است، فرضِ جدیدمان در هر R_k به معنای فرضِ این است که E_n کراندار نیز هست. در R_k، قضیهٔ تعمیم‌یافته کاربردِ ساده‌ای از اصلِ زیر دنباله است: هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ متشکل از یک نقطه از هر مجموعه، زیردنباله‌ای دارد که حدی دارد، و این حدْ نقطه‌ای از نوعِ مطلوب است.

در حالت کلّی باید به صورت متفاوتی عمل کنیم. بیایید $E_۱$ را با همسایگیهایی از همهٔ نقاطش، هر یک با قطرِ حداکثر ۱، بپوشانیم. چون $E_۱$ فشرده است، تعدادی متناهی از اینها، مثلاً $N_۱$، $N_۲$، ...، N_p، $E_۱$ را می‌پوشانند. یکی از N_kها باید شامل نقاطی از همهٔ E_nها (از $n = ۱$ به بعد) باشد. در غیر این صورت هر N_k با یک E_m مقطع نخواهد داشت، و لذا با هیچ E_n که $n > m$ مقطع ندارد (چون E_nها تو در تو هستند). اگر $N_۱$ و $E_{m_۱}$ مجزا باشند، و $N_۲$ و $E_{m_۲}$ مجزا باشند، و به همین ترتیب، آنگاه به ازای $n > m_۰$، بزرگترینِ $m_۱$، $m_۲$، ...، m_p، هیچ N_kای شامل نقاطی از E_n نیست. چون Nها $E_۱$ را می‌پوشانند، این بدین معنا خواهد بود که به ازای $n > m_۰$، $E_۱$ شامل هیچ نقطه‌ای از E_n نخواهد بود، ناقضِ این فرض که E_nها تو در تو هستند. پس، چنانکه ادعا شد، این باید درست باشد که Nای شامل نقاطی از همهٔ E_nها به ازای $n = ۱, ۲, \ldots$ است.

بستارهای مجموعه‌های $N \cap E_n$ بسته و تو در تو و با قطرِ حداکثر ۱ هستند. این استدلال را با همسایگیهای با قطرِ حداکثر $\frac{1}{2}$ که بستارِ $N \cap E_1$ را می‌پوشانند تکرار کنید؛ بعد با همسایگیهای با قطرِ حداکثر $\frac{1}{4}$؛ و به همین ترتیب. زیرمجموعه‌های تودرتویی از E_nها به‌دست می‌آوریم با قطرهایی که به صفر می‌گرایند، و سپس می‌توانیم قضیهٔ کانتور را در شکلِ اولیه‌اش به کار بریم.

گاه می‌توانیم با به‌کار بردنِ قضیهٔ کانتور نشان دهیم که مجموعه‌ای که مورد توجه ماست نمی‌تواند تهی باشد. اگر بخواهیم بدانیم که اشیایی با خاصیت مشخصی وجود دارند یا نه، می‌توانیم اطمینان یابیم که تعدادی از این اشیاء وجود دارد اگر بتوانیم آنها را به صورت اشتراکِ گردایهٔ تو در تویی از مجموعه‌هایی نمایش دهیم که مفروضاتِ قضیهٔ کانتور را برمی‌آورند. با این حال، اغلب مؤثرتر است اگر مستقیماً از مجموعه‌های تو در تو استفاده نکنیم، بلکه در عوض از قضیهٔ دیگری استفاده کنیم که نتیجه‌ای از قضیهٔ کانتور است. برای بیانِ این قضیهٔ جدید باید ردهٔ جدیدی از مجموعه‌ها را معرفی کنیم، یعنی مجموعه‌هایی که می‌توان آنها را به صورتِ اجتماعِ تعدادی شمارا مجموعه نمایش داد که هر یک هیچ‌جاچگال باشند. («تعدادی شمارا» در برگیرندهٔ هیچ، یا یک، یا تعدادی متناهی، و نیز بینهایتی شمارا می‌شود.) مجموعه‌ای که بتوان آن را به صورتِ اجتماعِ تعدادی شمارا مجموعهٔ هیچ جاچگال نمایش داد مجموعه‌ای از مقولهٔ اول خوانده می‌شود. (چون این اصطلاح به هیچ وجه توصیفی نیست، اصطلاحِ مجموعهٔ تُنُک* به عنوانِ شقّی دیگر پیشنهاد شده است؛ دلیلِ استفاده از این اصطلاح به زودی معلوم خواهد شد.)

در R_1 هر مجموعهٔ متشکل از تعدادی متناهی نقطه مجموعه‌ای از مقولهٔ اول است. هر مجموعهٔ شمارا نیز، مثلاً مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا، چنین است، زیرا اگرچه این مجموعه همه‌جا چگال است، اجتماعِ تعداد شمارایی مجموعه است که هر یک متشکل از یک تک نقطه است. مجموعهٔ کانتور، که هیچ‌جاچگال است،

---

*) meager

از مقولهٔ اول است ولی ناشماراست. اگر اجتماعِ مجموعهٔ کانتور را با مجموعهٔ همهٔ نقاطِ گویا تشکیل دهیم، مجموعه‌ای از مقولهٔ اول به دست می‌آوریم که هم همه‌جاچگال است و هم ناشمارا.

مجموعه‌هایی که از مقولهٔ اول نیستند از مقولهٔ دوم گفته می‌شوند. چون مجموعهٔ تهی هیچ‌جاچگال است، از مقولهٔ اول است؛ پس هیچ مجموعه‌ای از مقولهٔ دوم نمی‌تواند تهی باشد. این مطلبْ پایهٔ کاربردِ اصلیِ مفهومِ مقوله است: اگر بتوانیم نشان دهیم که مجموعه‌ای از مقولهٔ دوم است، این مجموعه باید شامل نقاطی باشد. گاه می‌توانیم دستهٔ اشیاء نوعِ خاصی را به صورت مجموعه‌ای از مقولهٔ دوم نمایش دهیم؛ در این صورت باید اشیایی از این نوع وجود داشته باشد. به زودی نمونه‌هایی ارائه خواهد شد. شگردِ به‌کار بستنِ این ایده متکی است بر قضیهٔ بئر، که می‌گوید که هر فضای متریکِ تام از مقولهٔ دوم است.

پیش از اثباتِ قضیهٔ بئر چند نکته را متذکر می‌شویم. نخست، تمامیتِ فضای متریکْ بخشی اساسی از قضیه است. فضای متریکی، با متریکِ R_1، که نقاطش نقاطِ گویای R_1 است تام نیست؛ هر نقطه از این فضا، به‌عنوان یک مجموعه، هیچ‌جاچگال است؛ بنابراین کلّ فضا اجتماع تعداد شمارایی مجموعهٔ هیچ‌جاچگال است.

نمی‌توانیم بدون استثناً بگوییم که مجموعه‌های شمارا از مقولهٔ اول‌اند، اگرچه ممکن است مثالِ قبل این را پذیرفتنی بنمایانَد. متأسفانه، چنانکه در تمرین ۶.۱ ذکر شد، لازم نیست هر تک نقطه مجموعه‌ای هیچ‌جاچگال تشکیل دهد. این، به‌ویژه، در هر فضایی که شامل تنها، تعدادی متناهی نقطه باشد رخ می‌دهد. تمرینِ بعد سوی دیگر را بررسی می‌کند.

تمرین ۹.۱. نشان دهید که اگر همهٔ نقاطِ فضایی نقطهٔ حدی باشند، هر مجموعهٔ شاملِ تنها یک تک نقطه هیچ‌جاچگال است.

تمرین ۹.۲. سپس نشان دهی که قضیهٔ بئر نتیجه می‌دهد که هم $R_۱$ و هم مجموعهٔ کانتور ناشمارا هستند.

اکنون قضیهٔ بئر را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های هیچ‌جاچگالِ یک فضای متریکِ تام باشد. باید ثابت کنیم که دست‌کم یک نقطه از فضا وجود دارد که در هیچ یک از E_nها نیست. ایدهٔ اثباتْ این است که چون $E_۱$ هیچ‌جاچگال است، متممِ آن حاویِ یک همسایگی $N_۱$ است؛ $N_۱$ خود حاوی یک زیرهمسایگی $N_۲$ است که در متممِ $E_۲$ و نیز در متممِ $E_۱$ قرار دارد؛ و به همین ترتیب. به این روش دنبالهٔ تو در تویی از همسایگیها به‌دست می‌آوریم که از تعدادِ بیشتر و بیشتری از E_kها مجزایند، و نقطهٔ مشترکی از همهٔ آنها نمی‌تواند در هیچ E_kای باشد.

برای نشان دادنِ اینکه واقعاً نقطهٔ مشترکی وجود دارد، باید قدری دقت در کار بندیم تا بتوانیم از قضیهٔ کانتور استفاده کنیم. نخست یک همسایگی $N_۱$ در $C(E_۱)$ انتخاب کنید. یک زیرهمسایگیِ هم‌مرکز با قطرِ حداکثر ۱ اختیار کنید، و $M_۱$ را بستارِ این زیرهمسایگی بگیرید. اکنون چون $E_۲$ هیچ‌جاچگال است، $M_۱$ حاوی همسایگی‌ای است که در $C(E_۲)$ (و نیز در $C(E_۱)$) است. $M_۲$ را بستارِ یک زیرهمسایگیِ $N_۲$ بگیرید که قطرش کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد. با ادامه دادن به این روش مجموعه‌های بستهٔ تو در توی M_kای به‌دست می‌آوریم که قطرهایشان به ۰ میل می‌کنند و تهی نیستند و این خاصیت را دارند که M_k از $E_۱$، $E_۲$، ...، E_k مجزاست. نقطهٔ مشترکِ همهٔ M_kها نقطه‌ای از نوعِ مطلوب است، زیرا نمی‌تواند در هیچ E_kای باشد.

تمرین ۹.۳. اگر E زیرمجموعهٔ کراندارِ ناتهی‌ای از $R_۲$ باشد، آنگاه E و مرزِ E قطرِ واحدی دارند.

۱۰. چند کاربردِ قضیهٔ بئر. (i) یک خاصیتِ انتگرالهای مکرر. فرض کنید f تابعِ حقیقی‌مقدارِ پیوسته‌ای روی یک بازهٔ حقیقی، مثلاً $[\circ, ۱]$، باشد. $f_۱$ را یک انتگرال دلخواهِ f بگیرید، $f_۲$ را یک انتگرال دلخواه $f_۱$، و به همین ترتیب. اگر f_kای متحداً صفر شود، f نیز چنین است: تنها باید از f_k مکرراً مشتق بگیریم. گزارهٔ ذیلْ این مطلبِ ساده را تعمیم می‌دهد: اگر به ازای هر x عدد صحیحِ kای، که محتملاً از یک x تا دیگری تفاوت می‌کند، وجود داشته باشد که $f_k(x) = \circ$ ، آنگاه f متحداً صفر است.

برای اثباتِ این قضیه، E_k را مجموعهٔ نقاطِ xای بگیرید که در مورد آنها $f_k(x) = \circ$؛ در این صورتْ فرضِ ما می‌گوید که هر x در $[\circ, ۱]$ در E_kای است. بنا بر قضیهٔ بئر، چنین نیست که هر E_k هیچ‌جاچگال باشد. پس kای وجود دارد که در مورد آن، بستارِ E_k یک بازهٔ I_k را اشتغال می‌کند. در مورد این kی ویژه، چون f_k روی E_k صفر می‌شود و پیوسته است، باید به ازای هر x در I_k، $f_k(x) = \circ$. اگر I_k همهٔ $[\circ, ۱]$ نباشد، این استدلال را با هر بخشِ باقی‌مانده از $[\circ, ۱]$ تکرار می‌کنیم، و به همین ترتیب. به این روش به ازای همهٔ xهای تعلق به مجموعه‌ای همه‌جاچگالْ $f(x) = \circ$؛ و چون f پیوسته است، پس نتیجه می‌شود که به ازای هر x در $[\circ, ۱]$، $f(x) = \circ$.

پس اگر $f(x) \not\equiv \circ$ ، آنگاه مستقل از اینکه انتگرالهای f_k چگونه انتخاب شده باشند، باید xای (در واقع، مجموعه‌ای همه‌جاچگال) باشد که به ازای هر k، $f_k(x) \neq \circ$.

(ii) توصیفی از چندجمله‌ایها. باز هم یک تابع حقیقی‌مقدارِ پیوستهٔ f روی $[\circ, ۱]$ در نظر بگیرید. اگر f مشتقِ nامی داشته باشد که متحداً صفر باشد، به سادگی، مثلاً با استفادهٔ مکرر از قانونِ میانگین (و ص. ۱۹۵ را ببینید)، ثابت می‌شود که f روی $[\circ, ۱]$ با یک چندجمله‌ای (از درجهٔ حداکثر $n - ۱$) برابر است.

قضیهٔ ذیل این مطلب را با الهام از مثال (i) تعمیم می‌دهد. فرض کنید f روی $[0, 1]$ از همهٔ مراتبْ مشتق داشته باشد، و فرض کنید در هر نقطه مشتقی از f صفر باشد. یعنی به ازای هر x عدد صحیح $n(x)$ای باشد که $f^{(n(x))}(x) = 0$. در این صورت f روی $[0, 1]$ با یک چندجمله‌ای برابر است.[۷]

می‌توانیم اثبات را درست مثل (i) آغازکنیم. E_n را مجموعهٔ نقاطِ xای بگیرید که در مورد آنها $f^{(n)}(x) = 0$. بنا بر فرضْ هر x در دست‌کم یک E_n است. بنا بر قضیهٔ بئر یک بازهٔ بستهٔ I وجود دارد که E_nای در آن همه‌جاچگال است. $f^{(n)}$ تابعِ پیوسته‌ای است؛ پس در I، $f^{(n)}(x) \equiv 0$ و f در I با یک چند جمله‌ای برابر است. اگر I همهٔ $[0, 1]$ نباشد، استدلال را با هر بخشِ باقی‌ماندهٔ $[0, 1]$ تکرار کنید، و به همین ترتیب. به این روش می‌بینیم که مجموعهٔ همه‌جاچگالی از بازه‌ها وجود دارد که در هر یک از آنها f با یک چندجمله‌ای برابر است. هنوز باید نشان دهیم که f در همهٔ بازه‌ها با چندجمله‌ایِ واحدی برابر است.

برای انجام این کار، باز هم قضیهٔ بئر را در مورد مجموعهٔ هیچ‌جاچگالِ Hای به‌کار می‌بریم که وقتی درونهای مجموعهٔ چگالِ بازه‌هایمان را از $[0, 1]$ برداشتیم باقی می‌مانَد. نخست باید نشان دهیم که H بی‌کاست است. اولاً H بسته است، زیرا از برداشتنِ گردایه‌ای از بازه‌های باز از یک بازهٔ بسته به‌دست آمده است. فرض کنید که H بی‌کاست نباشد، و دقیقاً زوجِ $\{0, 1\}$ هم نباشد (در غیر این صورت تنها یک بازه در آغاز می‌بود و چیز دیگری برای اثبات نمی‌مانَد). پس H باید نقطهٔ yای داشته باشد که نقطهٔ حدی نباشد. این نقطه نقطهٔ انتهاییِ مشترکِ دو بازه است که در هر یک از آنها f با یک چندجمله‌ای برابر است. پس اگر n از درجهٔ هر دو چندجمله‌ای بیشتر باشد، به ازای xهای متعلق به هر دو بازه و، بنا بر پیوستگیِ $f^{(n)}$، در نقاط انتهایی، $f^{(n)}(x) = 0$. بنابراین در اجتماعِ دو بازه f با یک چند جمله‌ای برابر است و y اصلاً متعلق به H نیست.

بحثِ پیشین نشان می‌دهد که H بی‌کاست است، و مجدداً می‌توانیم فرض

کنیم تهی نباشد. H را به‌عنوان یک فضای متریکِ تام در نظر بگیرید. بنا بر قضیهٔ بئر در مورد H، E_nای در یک همسایگی در H، یعنی در بخشی از H که در یک همسایگیِ J است، همه‌جاچگال است. به‌عبارت دیگر، یک بازهٔ J وجود دارد که شامل نقاطِ H است، و به ازای هر x در $J \cap H$، $f^{(n)}(x) = ۰$ (با همان n). اکنون J حاویِ بازه‌هایی مکملِ H نیز هست، و در هر چنین بازهٔ Kای، به ازای mای (وابسته به K) $f^{(m)}(x) = ۰$. اگر $m \leq n$، با مشتقگیری نتیجه می‌گیریم که در K، $f^{(n)}(x) = ۰$. اگر $m > n$ آنگاه در نقاط انتهاییِ K، $f^{(n)}(x) = f^{(n+۱)}(x) = \cdots = ۰$، زیرا اینها نقاطِ Hاند. پس، با انتگرالگیریِ مکرر از $f^{(m)}$، نتیجه می‌گیریم که در سراسرِ K، $f^{(n)}(x) = ۰$. این استدلال در مورد هر بازهٔ K که متممِ H باشد و در J باشد کارگر است؛ لذا در سراسرِ J، $f^{(n)}(x) = ۰$. پس J اصلاً شامل هیچ نقطه‌ای از H نیست. اما ما با این فرض که H تهی نبود به J به‌عنوان بازه‌ای شامل نقاطِ H رسیدیم. این تناقض یعنی اینکه H باید تهی باشد و در آغاز تنها یک بازهٔ $I = [۰, ۱]$ بوده است و f در سراسرِ این بازه با چندجمله‌ای واحدی برابر است.

(iii) توابعِ همه‌جا نوسان‌کنندهٔ پیوسته. در کاربردِ بعدیمان از قضیهٔ بئر فضای متریکِ زمینه فضای Cی توابع پیوسته روی بازه‌ای حقیقی خواهد بود. بعداً (§ ۱۷) نشان داده خواهد شد که این فضا تام است. بیایید نخست در صددِ ساخت تابعِ پیوسته‌ای برآییم که در هیچ بازه‌ای یکنوا نباشد. در واقع این کار را می‌توان به صورتِ سرراست‌تری انجام داد، اما این مثالِ خوبی از کاربرد قضیهٔ بئر در وضعیتی نسبتاً پیچیده است. بازه‌های با دو نقطهٔ انتهاییِ گویا مجموعه‌ای شمارا تشکیل می‌دهند. فرض کنید، با ترتیبی، اینها $I_۱$، $I_۲$، ... باشند، و E_n را مجموعهٔ اعضایی از فضای C بگیرید که روی I_n یکنوا هستند. نشان می‌دهیم که هر مجموعهٔ E_n در C هیچ‌جاچگال است؛ در این صورت از قضیهٔ بئر نتیجه خواهد شد که عضوی از

C وجود دارد که در هیچ E_nای نیست. به‌عبارت دیگر، تابع پیوسته‌ای وجود دارد که روی هیچ I_nای، و لذا روی هیچ بازه‌ای (چون در R_1 هر بازه حاوی بازه‌ای با نقاطِ انتهاییِ گویاست)، یکنوا نیست.

روشِ نشان دادنِ اینکه E_n هیچ‌جاچگال است روشی است که در مواردِ بسیاری سودمند است: نشان می‌دهیم که $C(E_n)$ باز و همه‌جاچگال است.

تمرین ۱.۱۰. نشان دهید که هر مجموعهٔ بسته با متممی همه‌جاچگالْ هیچ‌جاچگال است.

نخست نشان می‌دهیم که $C(E_n)$ باز است. اگر f متعلق به $C(E_n)$ باشد، f در I_n یکنوا نیست. این یعنی سه نقطهٔ x، y، z در I_n وجود دارند که $x < y < z$ و $f(x) < f(y)$ و $f(z) < f(y)$ (و یا $f(x) > f(y)$ و $f(z) > f(y)$). با به یاد آوردنِ اینکه فاصلهٔ بین اعضای f و gی C برابرِ $\max|f(x) - g(x)|$ است، می‌بینیم که اگر g به f نزدیکتر باشد از نصفِ کوچکترینِ اعدادِ $f(y) - f(x)$ و $f(y) - f(z)$، $g(x) < g(y)$ و $g(z) < g(y)$ نیز برقرارند، لذا g در I_n یکنوا نیست. یعنی، همهٔ اعضای gای که به اندازهٔ کافی به f نزدیک باشند در E_n نیستند، که یعنی اینکه $C(E_n)$ باز است.

اینکه متممِ E_n همه‌جاچگال است یعنی اینکه در هر همسایگی در C تابع fای وجود دارد که در I_n یکنوا نیست. این تقریباً مشهود است که نزدیک به هر تابعِ پیوسته تابعی هست که خیلی تکان می‌خورَد. برای توجیهِ این شهود می‌توانیم (مثلاً) g را مرکزِ همسایگیِ داده‌شده در C بگیریم؛ می‌توانیم g را بر حسب متریکِ C، با هر دقتی که بخواهیم، با یک چندجمله‌ایِ p تقریب بزنیم (§۱۹). اکنون p مشتقِ کرانداری دارد، لذا اگر به p یک تابعِ دندانه‌ایِ کوچک با دندانه‌هایی با شیبِ خیلی زیاد بیفزاییم تابع fای به‌دست می‌آوریم که هر قدر بخواهیم به g نزدیک است و در I_n یکنوا نیست.

(iv) وجود توابعِ هیچ‌جامشتق‌پذیرِ پیوسته. این مطلب که تابع پیوسته‌ای می‌تواند در هیچ نقطه‌ای مشتق نداشته باشد ریاضیدانان قرن نوزدهم را به شگفت آورد. با این حال، معلوم خواهد شد که «بیشترِ» توابعِ پیوسته این خاصیت را دارند، و ما بیشتر باید از این مطلبْ شگفت‌زده باشیم که اصلاً هیچ تابعِ پیوسته‌ای مشتق‌پذیر باشد. مطلبِ باز هم شگفت‌انگیزترْ این است که تابعی می‌تواند همه‌جا نوسان‌کننده باشد و باز هم در هر نقطه مشتقی متناهی داشته باشد. متأسفانه همهٔ نمونه‌های شناخته‌شدهٔ این پدیده پیچیده‌تر از آن‌اند که بتوان در اینجا عرضه کرد.[۸]

آنچه می‌خواهیم نشان دهیم این است که[۹] آن اعضای فضای C که، حتی در یک نقطه و حتی از یک جهت (رک. ص. ۱۵۱)، مشتقی متناهی دارند، در C مجموعه‌ای از مقولهٔ اول تشکیل می‌دهند. این قضیه نشان می‌دهد که همهٔ توابعی که به‌طور معمول در حسابان با آنها مواجه می‌شویم در C فقط مجموعه‌ای از مقولهٔ اول تشکیل می‌دهند. ما این احتمال را رد نمی‌کنیم که «بیشترِ» اعضای C می‌توانند در بیشترِ نقاطْ مشتقاتِ یک‌طرفهٔ نامتناهی داشته باشند (از نظر هندسی، نمودارِ این تابعها نقطهٔ بازگشت دارند). بعداً (§۲۱) خواهیم دید که در واقع توابعِ پیوسته نمی‌توانند در همه‌ی نقاطِ یک بازه مماسِ قائم داشته باشند. اگرچه واقعاً توابعِ هیچ‌جامشتق‌پذیری وجود دارند که حتی مشتقاتِ نامتناهیِ یک‌طرفه هم ندارند، ساختنِ آنها بسیار دشوارتر است[۱۰]؛ دشواریِ بیشتر را می‌توان با این مطلب (که در اینجا نمی‌توانیم ثابت کنیم) ارتباط داد که این توابع فقط مجموعه‌ای از مقولهٔ اول تشکیل می‌دهند.[۱۱] تابعِ پیوستهٔ «نوعی» مجموعهٔ همه‌جاچگالی از نقاطِ بازگشت (مثلِ $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ در مبدأ) دارد. هر تابعِ هیچ‌جامشتق‌پذیر باید همه‌جا نوسان‌کننده باشد، زیرا توابعِ یکنوا در بیشتر نقاط مشتق دارند (§۲۲).

اکنون ثابت می‌کنیم که در C توابعِ هیچ‌جامشتق‌پذیر مجموعه‌ای از مقولهٔ دوم تشکیل می‌دهند. مجموعهٔ E_n را در نظر بگیرید تشکیل‌شده از همهٔ آن اعضای

fای از C که، به ازای یک نقطهٔ x در بازهٔ $[0, 1 - 1/n]$، اگر $0 < h < 1/n$،

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n.$$

آشکارا هر تابع f که در x مشتقِ راست داشته باشد به ازای nای متعلق به E_n است. پس اجتماعِ همهٔ E_nها شامل همهٔ اعضایی از C است که در نقطه‌ای مشتقِ راستِ متناهی دارند. نشان خواهیم داد که هر E_n هیچ‌جاچگال است؛ پس اجتماعِ E_n ها از مقولهٔ اول است (و لذا نمی‌تواند همهٔ C باشد). همانندِ مثالِ قبل، این کار را با نشان دادنِ اینکه E_n بسته است و متممِ همه‌جاچگال دارد انجام می‌دهیم.

اینکه E_n بسته‌است یا مثل مثالِ (iii) نتیجه می‌شود، یا از این مطلب که نابرابریِ تعریف‌کنندهٔ E_n تحت همگرایی در C حفظ می‌شود. اینکه متممِ E_n همه‌جاچگال است درست مثلِ (iii) نتیجه می‌شود: اگر f تابع پیوستهٔ دلخواهی باشد، تابعی نزدیک به f با مشتقِ کراندار می‌یابیم، و سپس به این تابعِ پیوستهٔ کوچکی می‌افزاییم که شیبِ نمودارش قدر مطلقِ بزرگی داشته باشد.

(v) تجزیهٔ بازه‌های بسته.

تمرین ۲.۱۰. نشان دهید که هیچ بازهٔ بسته‌ای نمی‌تواند اجتماعِ تعداد نامتناهیِ شمارایی از مجموعه‌های ناتهیِ بستهٔ مجزا باشد. [۱۱ آ]

۱۱. مجموعه‌های با اندازهٔ صفر.

مجموعه‌ای از مقولهٔ اول را می‌توان مجموعه‌ای با تعداد نسبتاً کمی نقطه تصور کرد، اساساً به دلیلِ این مطلب که این مجموعه نمی‌تواند فضای متریکِ تامّی را پُر کند. از طرف دیگر، اگر از دیدگاههای دیگری به این مجموعه نگریسته شود، ممکن است کاملاً بزرگ به نظر آید. این مجموعه می‌تواند همه‌جاچگال باشد، چنانکه در R_1 مجموعهٔ نقاطِ گویا

چنین است. می‌تواند ناشمارا باشد، چنانکه مجموعهٔ کانتور هست. می‌تواند هم همه‌جاچگال باشد هم ناشمارا، چنانکه در ص. ۷۹ دیدیم.

نوعی دیگر ــ کاملاً متفاوت ــ از مجموعهٔ «متفرق» وجود دارد که استفاده‌های بسیاری دارد. فرض کنید که یک زیرمجموعهٔ E از $R_۱$ این خاصیت را داشته باشد که بتوان آن را با گردایهٔ شمارایی از بازه‌های باز پوشاند که مجموعِ طولهایشان به‌دلخواه کوچک باشد. در این صورت E یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر خوانده می‌شود. در هر R_n تعریفِ مشابهی وجود دارد. مجموعه‌های با اندازهٔ صفر دقیقاً آن مجموعه‌هایی‌اند که در نظریهٔ انتگرالگیریِ لُبگ قابل صرف‌نظر کردن‌اند، و اصطلاح از آن نظریه می‌آید. اگر چیزی همه‌جا، مگر روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر، رخ دهد گفته می‌شود که تقریباً همه‌جا، یا به ازای تقریباً همهٔ نقاط، رخ می‌دهد.

اجتماعِ دو، یا تعدادی متناهی، یا حتی بینهایتی شمارا از مجموعه‌های با اندازهٔ صفرْ باز هم با اندازهٔ صفر است.

به وضوح هر زیرمجموعهٔ شمارای $R_۱$ مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است، پس مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر می‌تواند همه‌جاچگال باشد. با این حال، مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر لازم نیست شمارا، یا حتی از مقولهٔ اول، باشد؛ و، از طرف دیگر، مجموعه‌ای از مقولهٔ اول ممکن است با اندازهٔ صفر نباشد. بگذارید این احکام را با مثالهایی اثبات کنیم. نخست، مجموعهٔ کانتور ناشمارا ولی با اندازهٔ صفر است. زیرا، اگر ϵ عدد مثبتِ کوچکی باشد، تعدادی کافی از بازه‌های مکملِ E اختیار کنید طوری که مجموعِ طولهایشان بیشتر از $۱ - \epsilon/۲$ شود. بقیهٔ بازهٔ واحد را که حاوی E است می‌توان با مجموعه‌ای متناهی از بازه‌هایی با طول نابیشتر از ϵ پوشاند و لذا مطمئناً E با اندازهٔ صفر است.

برای ساختنِ مجموعه‌ای که از مقولهٔ اول باشد، ولی با اندازهٔ صفر نباشد، روش ساختِ مجموعهٔ کانتور را به این صورت تغییر دهید. $\{a_n\}$ را دنباله‌ای از اعداد

مثبت بگیرید که $\sum a_n = \epsilon < ۱$. از بازهٔ واحد بازهٔ بازی به طولِ $a_۱$ بردارید؛ سپس از هر بازهٔ باقی‌مانده بازهٔ بازی به طولِ $\frac{۱}{۲}a_۲$ بردارید؛ و به همین ترتیب. مثل مجموعهٔ کانتور، می‌بینیم که مجموعهٔ Eی حاصل هیچ‌جاچگال، لذا از مقولهٔ اول، است. از طرف دیگر، E نمی‌تواند با اندازهٔ صفر باشد زیرا اگر با مجموعه‌ای شمارا از بازه‌ها با مجموع طول کمتر از $۱ - \epsilon$ پوشانده می‌شد بازهٔ واحدی می‌داشتیم که با مجموعه‌ای از بازه‌ها با مجموع طولِ کمتر از ۱ پوشانده می‌شد.

برای ساختنِ مجموعه‌ای که هم از مقولهٔ دوم باشد و هم با اندازهٔ صفر، یک مجموعهٔ تعمیم‌یافتهٔ کانتور از نوعی که هم‌اکنون شرح داده شد بسازید. سپس در بازه‌های مکملِ E مجموعه‌های مشابه بسازید، و به همین ترتیب. می‌توانیم کار را طوری ترتیب دهیم که متممِ اجتماعِ همهٔ مجموعه‌های تعمیم‌یافتهٔ کانتورْ اندازهٔ صفر داشته باشد؛ اما چون هر مجموعهٔ کانتورْ هیچ‌جاچگال است، این متمم از مقولهٔ دوم است.

چون در $R_۱$ هیچ بازه‌ای با اندازهٔ صفر نیست، راهِ دیگری برای نشان دادنِ اینکه مجموعه‌ای از نقاطْ تهی نیست نمایشِ آن به صورت متممِ مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است. برای نمونه، هر زیرمجموعهٔ شمارای $R_۱$ با اندازهٔ صفر است، و لذا $R_۱$ نمی‌تواند شمارا باشد. هر مجموعه با اندازهٔ صفر، مثل مجموعه‌های از مقولهٔ اول، «کوچک» است به این معنا که متممِ آن نمی‌تواند تهی باشد؛ گفتنِ هر چیزِ بیشتری دربارهٔ اینکه این مجموعه چقدر کوچک است نیازمندِ نظریهٔ اندازهٔ لبگ است.

تمرین ۱۱.۱. فرض کنید یک زیرمجموعهٔ Eی $R_۱$ این خاصیت را داشته باشد: یک qی مثبتِ کمتر از ۱ وجود دارد که به ازای هر بازهٔ (a, b)، مجموعهٔ $E \cap (a, b)$ را می‌توان با تعداد شمارایی بازه که مجموعِ طولشان حداکثر $q(b - a)$ است پوشاند. در این صورت E مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است. (شهوداً، این یعنی اینکه مجموعه‌ای که حداکثرْ کسرِ ثابتی از هر بازه را بپوشانَد از هر بازه تقریباً هیچ چیز را نمی‌پوشانَد.)

فصل ۲

تابعها

۱۲۰ **تابعها.** در ریاضیاتِ مقدماتیْ مرسوم است بگویند که y تابعی از x است اگر وقتی x داده شده باشد، y معین شده باشد (y باید به صورتی یکتا معین شده باشد؛ ما با «تابعهای چندمقداری» سر و کار نداریم). این تعریفِ کارآمدِ خوبی است و تعریفی است که برای بیشترِ مقاصدِ عملی کفایت می‌کند. با این حال، باید دریابیم که این، اگرچه به برخی عباراتِ حاوی این لغتْ معنای مشخصی می‌دهد، «تابع» را تعریف نمی‌کند. (به صورتی کمابیش مشابه، عادت کرده‌ایم که به عبارتِ «$y \to \infty$» معنای مشخصی نسبت دهیم اگرچه خودِ ∞ هیچ معنایی ندارد.) با وجود این، عملاً جالب، و گاه مفید، است که تابع را به عنوان یک هوّیتِ اصیلِ ریاضی تعریف کنیم. دو مجموعهٔ E و F از اعداد حقیقی در نظر بگیرید که هیچ یک تهی نباشند، و رده‌ای از زوجهای مرتبِ (x, y) تشکیل دهید که $x \in E$، $y \in F$، و هر x دقیقاً یک‌بار ظاهر شود و هر y دست‌کم یک‌بار ظاهر شود. چنین رده‌ای از زوجهای مرتبْ یک تابع با دامنهٔ E و بُرد F خوانده می‌شود، یا تابعی از E به F؛ یا، گاه وقتی لازم نباشد که دقیقاً بگوییم F چیست، تابعی با دامنهٔ E و مقادیر در $R_۱$، یا تابعی از E به توی $R_۱$ یا تابعی حقیقی‌مقدار با دامنهٔ E، و غیره. برای نمونه، E را همهٔ $R_۱$ بگیرید، F را بازهٔ بستهٔ $[-۱, ۱]$ بگیرید، و زوجهای مرتب را $(x, \sin x)$ به ازای هر x در $R_۱$ بگیرید. این آن

چیزی است که معمولاً از آن به صورتِ «تابعِ $\sin x$» سخن می‌رود. توجه کنید که اگر E را، برای نمونه، به جای همهٔ $R_۱$ بازهٔ $[\circ\,, ۲\pi]$ بگیریم، مجموعهٔ زوجهای مرتبِ $(x, \sin x)$، $x \in E$، تابعِ دیگری، تحدید تابعِ اول به $[\circ\,, ۲\pi]$، است.

برای مثالی دیگر، E را متشکل از اعداد صحیح مثبتِ ۱، ۲، ۳، ... بگیرید، و F را مجموعهٔ $\{۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots\}$ بگیرید. تابعی که زوجهای مرتبش $(۱\,, ۱)$، $(۲\,, ۴)$، $(۳\,, ۹)$، ...اند نمونه‌ای است از نوعِ خاصی از تابع که معمولاً آن را دنباله، به‌ویژه دنباله‌ای از اعدادِ حقیقی، می‌خوانیم.

تمرین ۱۲.۱. هر معادله بر حسبِ x و y مجموعه‌ای از زوجهای مرتبِ (x, y) را معین می‌کند که مؤلفه‌هایشان در معادله صدق می‌کنند. بر این پایه، این مجموعه می‌تواند تابعی را معین کند (یا نکند). در مورد معادله‌های زیر، تعیین کنید که کدام یک، وقتی همهٔ زوجهای مرتبِ (x, y) از اعداد حقیقی که در معادله صدق می‌کنند در نظر گرفته شود، تابعی را معین می‌کند.

(آ) $x^۲ + y^۲ = ۲۵$، (ب) $x^۲ + y^۲ = \circ$،

(پ) $y = |x|$، (ت) $|x| + |y| = -۲$،

(ث) $y = \cos x$، (ج) $x = \cos y$.

اگر F متشکل از یک تک نقطه، مثلاً نقطهٔ ۳، باشد، تابعی که زوجهای مرتبش $(x, ۳)$ها هستند یک تابعِ ثابت است؛ در حالتِ آرمانی، باید این را به لحاظِ نمادگذاری از عدد ۳ متمایز ساخت.

تعریف تابع به سادگی به وضعیتهای کلّیتر تعمیم می‌یابد. فرض کنید E مجموعه‌ای ناتهی از نقاطِ یک فضای S باشد (که می‌تواند R_n، یا C، یا هر چیز دیگری باشد؛ این فضا لازم نیست متریک باشد)؛ فرض کنید F مجموعهٔ ناتهیِ دیگری از نقاطِ متعلق به یک فضای T، در حالت کلّی کاملاً متفاوت با S، باشد. ردهٔ همه زوجهای مرتبِ (x, y) که x در S است و y در T، حاصل‌ضرب

دکارتیِ S و T خوانده می‌شود. هر تابع از E به F زیرمجموعه‌ای است از این حاصل‌ضربِ دکارتْی متشکل از همهٔ زوجهای (x, y) که هر x متعلق به E دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود و هر y متعلق به F دست‌کم یک بار ظاهر می‌شود. این مجموعه تابعی از E به توی T نیز خوانده می‌شود. از نقاطِ F با مقادیر تابع، و از F با تصویر E سخن می‌گوییم. اغلب مناسب است که تابع را یک نگاشت از E روی F بخوانیم.

حاصل‌ضرب دکارتیِ دو $R_۱$ فضای $R_۲$ است (اگر در حاصل‌ضربْ متریکِ مناسب را معرفی کنیم). تابعی که دامنه و بردش در $R_۱$ باشد دقیقاً مجموعه‌ای از نقاطِ $R_۲$ است که در آنچه معمولاً نمودار تابع می‌خوانیمش قرار دارد. «تابعی حقیقی از یک متغیرِ حقیقی» معمولاً یعنی تابعی با دامنه و برد در $R_۱$. برای اهدافِ این کتاب سعی در تعریفِ «متغیر» غیرضروری است، و ما این لغت را نه تعریف می‌کنیم نه به کار می‌گیریم.

فایدهٔ تعریف مجردِ تابع به صورت رده‌ای از زوجهی مرتبْ این است که این تعریف به ما شیئی ریاضی می‌دهد که بر حسب مفاهیمی که پیشتر داشته‌ایم تعریف شده است. هر اثبات دربارهٔ توابع را می‌توان بر حسبِ این تعریف بیان کرد. اِشکالش این است که در آن، بیشترِ محتوای شهودیِ مفهوم تابع از دست می‌رود. برای بسیاری مقاصد، و به‌ویژه برای نخستین بارِ عرضهٔ این مفهوم به دانشجو، بهتر است که تابع را به صورتِ یک نگاشت یا تبدیل یا عملگر تصور کنیم (که بر فرآیندی تأکید دارد که در آن، مقادیر از نقاطِ دامنه به دست می‌آیند)؛ یا به صورتِ یک قانون (که بر تناظر بین مقادیر و نقاطِ دامنه تأکید می‌کند)؛ یا به زبان فیزیکدانان به صورتِ یک میدان (که تأکید دارد بر دامنه، و نسبت دادنِ مقداری به هر نقطه از دامنه ـــ در فیزیک معمولاً دامنه در $R_۳$ است و برد در $R_۱$ (میدانِ اسکالر) یا در $R_۳$ (میدان برداری) است). شاید بتوانیم رده‌ای از زوجهای مرتب را، به جای خودِ تابع، به صورتِ یک مدلِ تابع تصور کنیم. از طرف دیگر، اگر «تابع» را

مفهومی اولیه بگیریم، آنگاه «زوج مرتب» را می‌توان بر حسبِ آن تعریف کرد یا برای آن مدلی ساخت (مثلاً به صورتِ تابعی روی مجموعهٔ $\{۱, ۲\}$).[۱۱]

دنباله تابعی است که دامنه‌اش از اعداد صحیح مثبت تشکیل شده است. اگر از دنباله‌ها صحبت کنیم، این‌طور فهمیده می‌شود که دامنه معین است و لذا می‌توانیم دنباله را با فهرست کردنِ نقاطِ بردش به ترتیبی که توسطِ نقاطِ دامنه وضع می‌شود مشخص کنیم. در این صورت اغلب از نقاطِ برد (با هر میزان تکرار که لازم باشد) به جای مقادیرِ تابع، به صورت اعضای دنباله نام می‌بریم. این ما را به تعریف غیررسمی دنباله که پیشتر (ص. ۶۶) به‌کار بردیم برمی‌گرداند. پس «دنبالهٔ $\{۲, ۴, ۸, ۱۶, \ldots\}$» یا «دنبالهٔ $\{۲^n\}$» یعنی مجموعهٔ زوجهای مرتبِ $(۱, ۲)$، $(۲, ۴)$، $(۳, ۸)$، ... . «دنبالهٔ $\{۱\}$» یعنی مجموعهٔ زوجهای مرتبِ $(۱, ۱)$، $(۲, ۱)$، $(۳, ۱)$، ... . هر زیردنبالهٔ دنبالهٔ داده‌شده‌ای یک تحدیدِ دنباله به زیرمجموعه‌ای از اعدادِ صحیح است؛ این زیردنباله را می‌توان با زیردنباله‌ای که از تجدیدِ شماره‌گذاریِ اعضای آن به دست می‌آید مشخص کرد. برای نمونه، $\{۲^n\}$ یک زیردنبالهٔ $\{n\}$ است. (چنانکه در ص. ۶۷ تذکر داده شد، به مفهومی که واژهٔ دنباله را به‌کار می‌بریم، «دنبالهٔ متناهی» دنباله نیست.)

در کارِ دقیقْ معمولاً سودمند است که به لحاظِ نمادگذاری بینِ (مثلاً) f، نامِ یک تابع، و $f(x)$، «مقدارِ تابع در نقطهٔ x»، تمییز بگذاریم. به عبارت دیگر، f برای نامیدنِ مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، در حالی که $f(x)$ نشانگرِ نقطه‌ای از برد است که با نقطهٔ x از دامنه جفت می‌شود. برای نمونه، تابعِ لگاریتمی متشکل است از زوجهای $(x, \log x)$؛ یکی از این زوجها $(e, ۱)$ است، و $\log(e) = ۱$. در بیشتر کتابها تمییز بینِ یک تابع و مقادیرِ آن همواره انجام نمی‌شود. صحبت از «تابعِ $\log$»، اگرچه هم درست است هم بی‌ابهام (البته باید دامنهٔ تابع را مشخص کنیم؛ در اینجا احتمالاً $(۰, \infty)$ خواهد بود)، کمی غیرعادی است. این را معمولاً

«تابعِ $\log x$» می‌خوانند. اغلب می‌خواهیم دربارهٔ توابعِ پیچیده‌تری، مثل تابعی که مقدارش در x، $\log(\sin x)$ است، صحبت کنیم. در این حالت اگر از عبارتِ احتمالاً گمراه کنندهٔ «تابعِ $\log(\sin x)$» احترازکنیم از مقداری تعقید ناگزیر خواهیم شد. همین شکل پدید می‌آید وقتی می‌خواهیم از توابعی صحبت کنیم که آن‌قدر ساده‌اند که هیچ نامِ عموماً پذیرفته‌شده‌ای ندارند. تابعِ همانی، که زوجهای مرتبش (به ازای xهای متعلق به دامنه‌ای مشخص) (x, x)اند، «تابعِ x» خوانده نمی‌شود بلکه به‌درستی به صورتِ تابع Iای توصیف می‌شود که $I(x) = x$. افزایشِ وضوحْ ارزشِ از دست دادنِ ایجاز را دارد.

اگر دامنهٔ تابعِ fای R_1 باشد، مقادیر آن را معمولاً به صورت $f(x)$ می‌نویسند. اگر دامنه R_2 باشد، مقادیر را معمولاً به صورت $f(x, y)$ می‌نویسند، اگرچه $f((x, y))$ با اصول ما بیشتر مطابقت دارد. اعضای دنباله را سنّتاً، به‌جای $s(n)$، به صورت s_n می‌نویسند، و باید از دنباله به صورت s نام بریم. با این حال، چنانکه پیشتر گفته‌ایم، معمولاً مناسبتر است که دنباله را $\{s_n\}$ بخوانیم، یعنی مشخص کنیم که اعضای آن چیستند (چون فهمیده می‌شود که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعدادِ صحیح است). پس دنباله‌ای که زوجهای مرتبش $(1, 1)$، $(2, 4)$، $(3, 9)$، ... است معمولاً $\{n^2\}$ نوشته می‌شود، و تحدیدهای آن با $\{n^2\}_{n=3}^{\infty}$و n فرد$\{n^2\}$ و $\{n^2\}_{n=3}^{8}$ و نظایرِ آن به‌روشنی مشخص می‌شود. مشابهاً می‌توانیم تابع f (با دامنهٔ R_1) را که $f(x) = \sin 2x$، با $\{\sin 2x\}$ نشان دهیم، و نمادِ $\sin 2x$ را برای نقطهٔ خاصی از R_1 (به عنوان برد) که با نقطهٔ x از دامنه جفت می‌شود نگاه داریم. تحدید این تابع به $(0, 2\pi)$، $\{\sin 2x\}_{0<x<2\pi}$ خواهد بود. نمادهای گوناگونِ دیگری به‌کار می‌رود؛[12] برای مقاصدِ این کتاب انتخابِ روشمندانهٔ هیچ یک از آنها مفید نخواهد بود.

در ابتدا تابع را تعریف‌شده با فرمول تصور می‌کردند، اما برای سالها در موردِ این جنبه از توابع دغدغهٔ اندکی وجود داشته است. بسیاری از تابعهایی را که آشکارا

به شکلِ دلخواهی تعریف شده‌اند می‌توان با فرمول نمایش داد، گرچه با فرمولهایی از نوعی نسبتاً پیچیده. (با این حال، باید بدانیم که نمادِ سادهٔ $f(x) = \sin x$ فرآیندِ حدیِ نابدیهی‌ای را پنهان می‌دارد، فرآیندی که فراموشش می‌کنیم چون تابعْ بسیار آشناست.) برای نمونه، فرض کنید f تابعی باشد که با قرار دادنِ $f(x) = ۱$ به ازای xهای گویا در $R_۱$، و $f(x) = ۰$ به ازای xهای گنگ، تعریف شده باشد. در این صورت

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n \cdot$$

تمرین ۱۲.۲. این مطلب را ثابت کنید.

نمونهٔ پیچیده‌تری از همین نوعْ[۱۳]

$$f(x) = \lim_{r\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=۰}^{m} \left[۱ - (\cos\{(\nu!)^۲\pi/x\})^{۲n} \right]$$

است که به ازای اعداد صحیح مثبتِ x بزرگترین عاملِ اولِ x را به‌دست می‌دهد.

توابعی که آنها را تنها با یک فرآیند حدی می‌توان نمایش داد که از تابعهای پیوسته آغاز شده باشد نسبتاً خاص‌اند (§۱۸ را ببینید). در واقع، چنین نیست که همهٔ توابع با دامنه و برد در $R_۱$ را بتوان با فرمول، یا دست‌کم فرمولی که با تابعهای پیوسته آغاز شود و تنها متضمنِ تعداد شمارایی فرآیند حدی باشد، نمایش داد.[۱۴] در اینجا کوشش نخواهیم کرد تا نمونه‌ای از این پدیده بسازیم.

اگرچه خاصیتهایی غیربدیهی، و حتی جالب، از توابعِ کاملاً عام با دامنه و بردی در یک فضای داده‌شده وجود دارد (رک. ص. ۱۶۵)، جالبترین خواص و خواصِ عموماً سودمند را تنها توابعی دارند که متعلق به رده‌های کمابیش خاصی هستند. به عبارت دیگر، حالتِ جالبْ وضعِ برخی خواصِ ویژه و دیدنِ این است که چه خواصی به عنوانِ نتیجه به‌دست می‌آید. از دیدگاه نظریهٔ عام، این صرفاً

پیشامد مساعدی است که تابعهایی که به‌نحو طبیعی در کاربردهای ریاضیات ظاهر می‌شوند غالباً پیوسته، یا مشتق‌پذیر، یا از این قبیل‌اند. با این حال، چون در واقع غالباً با این تابعهای خاص مواجه می‌شویم، هم مطلوب و هم جالب است که برخی خواص مهمِ آنها را بدانیم.

۱۳. توابع پیوسته. می‌خواهیم مشخص کنیم منظورمان از توابع پیوسته چیست و سپس برخی خواص آنها را بررسی کنیم. این آن طریقی نیست که ابتدا مفهوم تابعِ پیوسته به آن صورت وارد ریاضیات شد. نخست اصطلاحِ پیوسته آمد و سپس مردم به دنبال تعریفی گشتند که به ادراکاتِ شهودیشان دربارهٔ آن نزدیک باشد. برای نمونه، در مورد توابعِ حقیقی‌مقداری که دامنه‌شان بازه‌ای در R_1 باشد (آشناترین حالت)، زمانی احساس می‌شد که تابعِ پیوسته باید به صورت تابعی تعریف شود که همهٔ مقادیر بین هر دو مقداری را که می‌گیرد اختیار کند؛ به عبارت دیگر، به صورت تابعی که تصویرِ هر بازهٔ واقع در دامنه‌اش یک بازه یا یک نقطه باشد. این را خاصیت مقدارِ میانی می‌خوانیم. این خاصیت، متأسفانه، باعث نمی‌شود که تابع همهٔ خواصی را داشته باشد که بقاعده از توابعِ پیوسته دارا بودنِ آنها انتظار می‌رود. برای نمونه، تابعی که با $f(x) = \sin(۱/x)$ به ازای همهٔ xهای حقیقی غیر از ۰، و $f(۰) = ۰$ تعریف شده است خاصیت مقدار میانی را دارد اما بیشترِ مردم آن را در ۰ پیوسته نمی‌یابند. با روشِ ساختِ نسبتاً پیچیده‌تری می‌توانیم تابعی عرضه کنیم که در هر بازه، هر قدر هم کوچک باشد، خاصیت مقدار میانی را دارد اما پیوسته به نظر نمی‌آید زیرا این تابع تنها از آن رو خاصیت مقدار میانی را دارد که در هر بازه هر مقدار بین ۰ و ۱ را می‌گیرد.

این تابع را به این صورت می‌سازیم.[۱۵] فرض کنید x بین ۰ و ۱ باشد و به صورت دهدهیِ معمولیِ $x = ۰/a_۱a_۲\ldots$ بسط داده شده باشد، و عددِ $z = ۰/a_۱a_۳a_۵\ldots$ را در نظر بگیرید. اگر z یک بسطِ دهدهیِ دوره‌ای نباشد،

قرار دهید $f(x) = 0$. ولی اگر z دوره‌ای باشد و نخستین دوره‌اش با a_{2n-1} آغاز شود، قرار دهید

$$f(x) = 0/a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots.$$

این، تابعِ مورد نظرِ f را تعریف می‌کند. زیرا، اگر بازهٔ Iای داده شده باشد، می‌توانیم nای بیابیم آن‌قدر بزرگ که I شامل یک بسط دهدهیِ مختومِ $0/a_1a_2\ldots a_{2n-1}$ و همهٔ اعدادِ

$$0/a_1a_2a_3\ldots a_{2n-1}a_{2n}\ldots$$

باشد که با همان $2n-1$ رقمِ آغازینْ شروع می‌شوند. اکنون فرض کنید $y = 0/b_1b_2\cdots$ عدد دلخواهی در $(0, 1)$ باشد. می‌توانیم چنان کنیم که $0/a_1a_3\ldots a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+3}\ldots$ دوره‌ای باشد و نخستین دوره‌اش در a_{2n-1} شروع شود، و در این صورت طبق روش ساختِ ما، به ازای

$$x = 0/a_1a_2\ldots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\ldots,$$

$f(x) = y$.

در این موردْ جالب است که هر تابع از یک بازه در R_1 به R_1 را می‌توان به صورت مجموعِ دو تابع نوشت، که هر یک از آنها در هر زیربازه هر مقدارِ حقیقی را می‌گیرد.[15]

در مورد توابع از بازه‌ای در R_1 به توی R_1، تعریفی از پیوستگی که مورد قبول واقع شده است احتمالاً برای خواننده آشناست. می‌گوییم که f در x_0 پیوسته است اگر هر ϵ مثبت که داده شده باشد، بتوانیم عدد مثبتِ δای بیابیم که اگر $|x - x_0| < \delta$، آنگاه

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon;$$

و می‌گوییم که f در یک بازه پیوسته است اگر در هر نقطهٔ آن بازه پیوسته باشد. ایدهٔ شهودیِ پسِ این تعریفْ این است که تغییری کوچک در دامنه در مکانِ نقطه‌ای که به آن توجه داریم باید در برد در مکانِ نقطهٔ تصویر تغییرِ کوچکی پدید آوَرد. باید اذعان کرد که این تعریف نیز آن اندازه که ممکن است بخواهیم، به دقت با ایدهٔ شهودیِ توابعِ پیوسته هم‌خوانی ندارد. برای نمونه، لزوماً نمی‌توانیم نمودارِ رضایت‌بخشی از تابعِ پیوسته داده‌شده‌ای را با مداد روی کاغذ بکشیم: برای نمونه، توابعِ همه‌جا نوسان‌کنندهٔ §۱۰ را در نظر آورید. در واقع، مفهومِ شهودیِ تابعِ پیوسته بیشتر به مفهومِ تابعِ پیوسته‌ای نزدیک است که نمودارش از تعدادی متناهی قطعهٔ صعودی یا نزولی ساخته شده باشد.

تعریف پیوستگی را می‌توان به حالتی که دامنه و برد در دو فضای متریکِ دلخواه باشند گسترش داد. در ساده‌ترین حالتْ دامنهٔ f شامل یک همسایگیِ نقطهٔ $x_\circ$ است؛ در این صورت می‌گوییم f در $x_\circ$ پیوسته است اگر هر عدد مثبتِ ϵ که داده شده باشد، بتوانیم عدد مثبت δای بیابیم که اگر $d(x, x_\circ) < \delta$ آنگاه $d\left(f(x), f(x_\circ)\right) < \epsilon$. (طبیعتاً، در حالت کلّی، این دو d به متریکهای مختلفی راجع‌اند.)

اگر بخواهیم حالتهای کلّیتری را در نظر بگیریم باید این مطلب را پذیرا شویم که هر تابع می‌تواند بر حسب فضایی که بنا بر فرضْ دامنه‌اش در آن قرار دارد پیوسته باشد یا نباشد. به‌عنوان مثالی ساده، تابعی ثابت را با دامنهٔ R_1 در نظر بگیرید. این تابع مطمئناً در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. با این حال، اگر R_1 را به عنوان زیرمجموعه‌ای از R_2 در نظر بگیریم، نمی‌توانیم بگوییم که تابع در هر نقطه پیوسته است، زیرا حتی در هر همسایگی R_2 تعریف نشده است. در واقع، این تابعْ تحدیدِ توابع بسیاری با دامنه‌های در R_2 است به R_1؛ بعضی از این توابعْ پیوسته‌اند و بعضی نه.

همواره می‌توانیم خودِ دامنهٔ تابعِ داده‌شده‌ای را یک فضای متریک بگیریم و

بپرسیم که آیا در این صورت تابعْ پیوسته است یا نه؛ می‌توانیم برای تأکید اضافه کنیم «بر حسب دامنه‌اش». ایدهٔ جدیدی وارد می‌شود اگر بخواهیم نه تابعِ داده‌شده، بلکه تحدیدِ آن به زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش را بررسی کنیم. ممکن است تحدید (بر حسب دامنهٔ خودش) پیوسته باشد در حالی که تابعِ اصلی پیوسته نباشد. برای نمونه، تابع fای (ص. ۹۴) که به ازای نقاطِ گویای R_1 مقدار ۱ و به ازای نقاطِ گنگْ مقدار ۰ دارد آشکارا در هر نقطهٔ R_1 ناپیوسته است. تحدید همین تابع به مجموعهٔ P از نقاطِ گویای R_1 یک تابع g است که (روی فضای P) پیوسته است. بعضی مؤلفان می‌گویند که تابعِ اصلی در هر نقطه از P ناپیوسته است، اما روی P بر حسب P پیوسته است. با دریافتنِ اینکه برای تعریفِ هر تابع باید بگوییم دامنهٔ آن چیست و نیز چگونه باید مقادیرِ آن را حساب کرد، از ابهامی که این قبیل اظهارات پدید می‌آورند به بهترین صورت اجتناب می‌شود.

پس گفتنِ اینکه تابع fای در یک نقطهٔ x_0 از یک مجموعهٔ E پیوسته است یعنی اینکه با در نظرگرفتنِ E به عنوان فضا، تحدید f به E در x_0 پیوسته است. تعریفِ معادلی با استفاده از تعریفِ (ϵ, δ)ای به دست می‌آید (ص. ۹۶) با شرط اضافیِ اینکه $x \in E$. به‌ویژه، فرض کنید f تابعی باشد که دامنه‌اش بازه‌ای در R_1 است که x_0 درونِ آن است، و g را تحدیدِ f به یک بازهٔ $[x_0, b)$ در سمت راستِ x_0 بگیرید. اگر g در x_0 پیوسته باشد، اغلب گفته می‌شود که f در x_0 از راست پیوسته است. این همان است که بگوییم f شرطِ پیوستگی در x_0 را برمی‌آورَد الاّ اینکه تنها همسایگیهای سمتِ راستیِ x_0 در نظر گرفته شده‌اند. برای توضیح، بیایید به‌ترتیبْ توابعِ f_1، f_2، f_3 را تعریف کنیم که همگی به ازای $x < 0$ مقدارِ -1 و به ازای $x > 0$ مقدارِ $+1$ داشته باشند، در حالی که $f_1(0) = 1$، $f_2(0) = -1$، $f_3(0) = 0$. در این صورت f_1 در ۰ از راست پیوسته است، f_2 از چپ پیوسته است، f_3 از هیچ طرف پیوسته نیست، و هر سه تابع در ۰ ناپیوسته‌اند.

در این مورد جالب است که به ازای هر تابع دلخواهِ حقیقی‌مقدار (که دامنه‌اش یک بازه باشد) یک مجموعهٔ Eی چگال (اما شمارا) هست که f، تحدیدشده به E، روی E پیوسته است.[۱۵]؛ از طرف دیگر، توابعی هستند که تحدیدشان به همهٔ مجموعه‌های با عدد اصلیِ $R_۱$ ناپیوسته است[۱۵].

تمرین ۱۳.۱. نشان دهید که اگر y نقطه‌ای از یک فضای متریک باشد، تابعِ تعریف‌شده با $f(x) = d(x, y)$ روی فضا پیوسته است.

تمرین ۱۳.۲. فرض کنید E مجموعهٔ بسته‌ای در یک فضای متریک باشد؛ D را تابعی بگیرید که به ازای هر نقطهٔ x در فضا، $D(x)$ فاصله (رک. تمرین ۸.۹) از x تا E باشد. نشان دهید که E پیوسته است.

اگر بخواهیم توابعِ پیوسته را روی فضاهایی بررسی کنیم که متریک نیستند، طبیعتاً تعریفی از پیوستگی بر حسب فاصله مفید نخواهد بود. اگرچه ما در این کتاب فقط فضاهای متریک را در نظر می‌گیریم، تعریفِ پیوستگی را به شکل دیگری بیان می‌کنیم که می‌توان آن را به فضاهای کلّیتر گسترش داد زیرا اغلب، حتی در فضاهای متریک، این شکلِ مناسبی برای استفاده است. این تعریفِ پیشرفته‌تر به این صورت است: f روی دامنه‌اش پیوسته است اگر و تنها اگر تصویرِ وارونِ هر مجموعهٔ باز در فضای برد مجموعهٔ بازی در دامنه باشد. (در اینجا دامنهٔ f آن فضایی تلقی می‌شود که مجموعه‌های باز بر حسبِ آن تعریف شده‌اند.) طبیعتاً تصویر وارونِ E یعنی مجموعهٔ نقاطی از دامنه که نقاطِ تصویرشان در E است. برای نمونه، اگر $f(x) = \sin x$ با دامنهٔ $R_۱$، تصویر وارونِ بازهٔ $(۰, ۱)$ متشکل است از اجتماعِ بازه‌های $(۰, \pi)$، $(۲\pi, ۳\pi)$، $(-۲\pi, -\pi)$، ...، که مجموعه‌ای باز است. ولی اگر $f(x) = ۱$ به ازای $x > ۰$، و $f(۰) = ۰$ و $f(x) = -۱$ به ازای $x < ۰$، تصویر وارونِ بازهٔ بازِ $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ متشکل است از تک نقطهٔ ۰، و لذا باز نیست.

تمرین ۱۳.۳. مثالی ارائه کنید که نشان دهد که تصویر مجموعه‌های باز تحت تابعی پیوسته لزوماً باز نیست.

برای اثباتِ معادل بودنِ دو تعریفِ پیوستگی در هر فضای متریک، نخست فرض کنید که f طبق تعریفِ اولیه پیوسته باشد. فرض کنید E مجموعهٔ بازی در فضای برد باشد و فرض کنید $x_\circ$ نقطه‌ای در تصویرِ وارونِ E باشد. در این صورت $f(x_\circ) \in E$، و اگر ϵ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، هر y که $d(f(x_\circ), y) < \epsilon$، متعلق به E است (زیرا E باز است). چون f پیوسته است، δی مثبتی هست که $d(f(x)$ و $f(x_\circ)) < \epsilon$ از $d(x, x_\circ) < \delta$ نتیجه می‌شود. پس تصویرِ همهٔ نقاطِ x که به اندازهٔ کافی به $x_\circ$ نزدیک باشند در E است؛ یعنی تصویر وارون E حاوی همسایگی‌ای از هریک از نقاطش است، لذا باز است. به عکس، فرض کنید تصویر وارونِ هر مجموعهٔ باز باز باشد. به‌ویژه، تصویر وارونِ هر همسایگی در فضای برد که با نابرابریِ $d(f(x), f(x_\circ)) < \epsilon$ تعریف شده باشد باز است و لذا حاوی یک همسایگیِ $d(x, x_\circ) < \delta$ است؛ برای وابسته ساختنْ به ϵ در تعریفِ اولیه، این همسایگیِ مناسبی است.

چیزی ثابت کرده‌ایم کمی بیشتر است از آنچه کوشش کردیم انجام دهیم، یعنی اینکه f در $x_\circ$ پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر وارونِ هر مجموعهٔ باز که شامل $f(x_\circ)$ باشد شامل یک همسایگیِ $x_\circ$ باشد.

تمرین ۱۳.۴. نشان دهید که اگر بردِ f در R_1 باشد و f در $x_\circ$ پیوسته باشد و $f(x_\circ) \neq \circ$، آنگاه یک همسایگیِ $x_\circ$ وجود دارد که در آن $|f(x_\circ)|$ یک کران پایینِ مثبت دارد، یعنی $|f(x)| \geq m > \circ$.

تمرین ۱۳.۵. نشان دهید که اگر دامنهٔ f بازه‌ای در R_1 باشد و بردش در R_1 باشد و در $x_\circ$ پیوسته باشد، آنگاه f در همسایگی‌ای از $x_\circ$ کراندار است.

تمرین ۱۳.۶. اگر f، از R_1 به توی R_1، در x_0 ناپیوسته باشد، یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ با حدِ x_0 و یک ϵ مثبت وجود دارد که $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$.

۱۴. خواص توابعِ پیوسته. این مطلبِ پیش پا افتاده‌ای است که جمع و ضرب و خارج‌قسمتِ توابعِ پیوسته پیوسته است (مشروط بر اینکه در خارج‌قسمتْ مقسوم‌علیه صفر نباشد). به صورت دقیقتر، باید فرض کنیم که دو تابعِ f و g دامنهٔ واحدی دارند، و مقادیرشان در R_1 است. در این صورت می‌توانیم $f+g$ و fg و f/g را به روش معمول (و طبیعی) تعریف کنیم، مشروط بر اینکه در مورد آخر g هیچ‌جا در دامنهٔ مشترکِ تابعها صفر نباشد. در این صورت اگر f و g هر دو در x_0 پیوسته باشند، $f+g$ و fg و f/g، اگر تعریف شده باشند، نیز چنین‌اند. ولی معمولاً لازم نیست این قدر موشکاف بود. وقتی f و g دامنه‌های مختلفی داشته باشند، مناسب است که برای جمعِ تحدیدهای آنها به اشتراکِ دامنه‌های f و g بنویسیم $f+g$، و مشابهاً f/g را برای خارج‌قسمتِ تحدیدهای f و g به بخشی از اشتراکِ دامنه‌هایشان که در آن g مقدار ۰ را نمی‌گیرد بنویسیم. در این مورد توجه کنید که تابع f_1 تعریف‌شده با $f_1(x) = x/x$ و تابع f_2 تعریف‌شده با $f_2(x) = 1$ توابعِ متفاوتی‌اند زیرا دامنه‌هایشان متفاوت است؛ نمی‌توانیم بگوییم که f_1 در ۰ پیوسته است. در بحث پیوستگیِ حاصل‌ضربها مناسب است که از تمرین ۱۳.۵ استفاده کنیم.

تمرین ۱۴.۱. اگر f در x_0 پیوسته باشد و g نباشد، نشان دهید که $f+g$ نیز نیست. آیا اگر نه f در x_0 پیوسته باشد نه g، $f+g$ می‌تواند در x_0 پیوسته باشد؟

تمرین ۱۴.۲. پیوستگیِ $f+g$ و fg و f/g را وقتی f و g پیوسته باشند به تفصیل اثبات کنید.

تابع f را یک به یک، یا تک‌ارز، گویند اگر در مجموعهٔ زوجهای مرتبی که تابع

را تشکیل داده‌اند نه تنها هیچ x متعلق به دامنه دوبار ظاهر نشود، بلکه هیچ y متعلق به برد هم دوبار ظاهر نشود. در این حالت زوجهای مرتبِ (y, x) که y در برد و x در دامنه است نیز تابعی، وارون f، تشکیل می‌دهند، که اغلب با f^{-1} نشان داده می‌شود؛ دامنهٔ آنْ بردِ f است و بردِ آن دامنهٔ f است. اغلب مفید است بدانیم که تحت شرایطِ خاصی وارونِ یک تابعِ یکِ به یکِ پیوسته پیوسته است. این حکمْ درست است اگر دامنهٔ تابع مجموعهٔ فشرده‌ای در یک R_n باشد، یا، کلّیتر، هرگاه دامنه این خاصیت (حکمِ قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس) را داشته باشد که هر زیرمجموعهٔ نامتناهیِ آن یک نقطهٔ حدی داشته باشد.

برای اثباتِ حکمِ فوق باید نشان دهیم که تصویرهای مجموعه‌های باز بازند، زیرا اینها تصویر وارون‌های مجموعه‌های باز تحتِ f^{-1}اند. این گزاره که تصویر مجموعه‌های بسته بسته است گزارهٔ معادلی است که برای ما استفاده از آن راحت‌تر است.

تمرین ۱۴.۳. معادل بودنِ ادعاشده در جملهٔ پیشین را اثبات کنید.

پس فرض کنید E مجموعهٔ بسته‌ای در دامنهٔ f باشد، F را تصویرِ E بگیرید، و فرض کنید y_0 یک نقطهٔ حدیِ F باشد؛ باید نشان دهیم که $y_0 \in F$. $\{y_n\}$ را دنباله‌ای از نقاطِ متمایزِ F بگیرید که $y_n \to y_0$، و فرض کنید $y_n = f(x_n)$. بنا بر یک به یک بودن، به ازای هر y_n دقیقاً یک x_n وجود دارد، و x_nها همگی متمایزند زیرا y_nها همگی متمایزند. پس مجموعه‌ای که نقاطش x_nهایند یک نقطهٔ حدیِ x_0 و یک زیر دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ دارد که حدِ آن x_0 است. (ص. ۷۴ را ببینید.) $x_0 \in E$ زیرا E بسته است. چون f پیوسته است، $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0)$؛ اما $y_{n_k} \to y_0$، لذا $y_0 = f(x_0) \in E$.

اگرچه خاصیت مقدار میانی که در §۱۳ بحث شد توابعِ پیوسته را مشخص

نمی‌سازد، توابعِ پیوسته (تحتِ شرایطی) این خاصیت را دارند. تابعِ پیوسته‌ای با مقادیرِ در R_1 اگر دامنه‌اش مجموعهٔ همبندی در یک فضای متریکِ S باشد این خاصیت را دارد. برای دیدنِ این مطلب، فرض کنید $A = f(a)$ و $B = f(b)$، و فرض کنید $A < C < B$. مجموعه‌های E_1 و E_2 در S را در نظر بگیرید، متشکل از نقاطِ xای از S که در مورد آنها $f(x) < C$ و نقاط xای از S که در مورد آنها $f(x) > C$. این مجموعه‌ها مجزا هستند، زیرا (به ازای xای واحد) $f(x)$ نمی‌تواند توأماً کوچکتر از C و بزرگتر از C باشد. این مجموعه‌ها تهی نیستند، زیرا $a \in E_1$ و $b \in E_2$. اینها بازند زیرا تصویر وارونِ مجموعه‌های بازند. چون دامنهٔ f همبند فرض شده است نمی‌تواند اجتماعِ دو مجموعهٔ بازِ ناتهیِ مجزا باشد. پس دامنهٔ f شامل دست‌کم یک نقطهٔ c است که نه در E_1 است نه در E_2. تنها مقدار ممکن برای $f(c)$، C است.

در §۷ نشان دادیم که تابع پیوسته‌ای که دامنه‌اش فشرده باشد و بردش در R_1 باشد یک بزرگترین و یک کوچکترین مقدار دارد.

تمرین ۱۴.۴. می‌توان با فرضِ اینکه M، کوچکترین کرانِ بالای مقادیرِ f، مقداری از f نیست و در نظر گرفتنِ $1/[M - f(x)]$ اثباتِ پرداخته‌تری از گزارهٔ بالا داد.

تمرین ۱۴.۵. نتیجه بگیرید که اگر دامنه هم فشرده باشد و هم همبند، بردِ هر تابعِ پیوسته با مقادیر در R_1 یک بازهٔ بستهٔ کراندار یا یک نقطه است.

فشردگی البته برای وجودِ ماکزیممْ لازم نیست.

۱۴.۵آ. فرض کنید f یک تابعِ پیوستهٔ نامنفی با دامنهٔ $[a, \infty)$ و برد در R_1 باشد، و فرض کنید وقتی $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$. در این صورت f روی $[a, \infty)$ یک ماکزیموم دارد.

تمرین ۱۴.۵ب. اگر f مثل تمرین ۱۴.۵آ ولی اکیداً مثبت باشد، دنبالهٔ $\{x_n\}$ای، $x_n \to \infty$، هست که به ازای هر $x > x_n$، $f(x) < f(x_n)$. یعنی وقتی $x \to \infty$، تابع f هرگز مقداری به بزرگیِ مقداری که در x_n گرفته است نمی‌گیرد.

اکنون کاربردهایی از خاصیت مقدار میانی ارائه می‌کنیم.

تابع fای، از بازه‌ای در R_1 به توی R_1، در نظر بگیرید که روی هر بازه در دامنه‌اش خاصیت مقدار میانی داشته باشد و در نقطهٔ c ناپیوستگی‌ای داشته باشد. در این صورت (تمرین ۱۳.۶) دنبالهٔ $\{x_n\}$ای با حدِ c وجود دارد که به ازای ϵ مثبتی یا $f(x_n) > f(c) + \epsilon$، یا $f(x_n) < f(c) - \epsilon$؛ مثلاً فرض کنید اولی برقرار باشد. چون f روی هر بازه خاصیت مقدار میانی دارد، هر مقدار بین $f(c)$ و $f(c) + \frac{1}{2}\epsilon$ را می‌گیرد. به‌علاوه تابع این مقدار را بینهایت بار می‌گیرد، زیرا همواره می‌توانیم همسایگیِ کوچکتری از c را در نظر بگیریم. پس اگر تابعی از بازه‌ای به R_1 روی هر زیربازه خاصیت مقدار میانی داشته باشد و ناپیوسته باشد، باید بعضی مقادیر را بینهایت بار بگیرد. (پس تابع ناپیوسته‌ای با خاصیت مقدار میانی، که در ص. ۹۶ـ۹۵ ساخته شد، وضعیتِ نوعی را بهتر از آنچه می‌شد انتظار داشت نشان می‌دهد.) به عنوانِ فرع، می‌دانیم که اگر تابعی روی هر بازه خاصیت مقدار میانی داشته باشد و هیچ مقداری را بیش از یک بار نگیرد، پیوسته است. به‌ویژه، هر تابع پیوسته است اگر در هر بازهٔ $[a, b]$ در دامنه‌اش، هر مقدار بینِ $f(a)$ و $f(b)$ را دقیقاً یک‌بار بگیرد.[۱۵]

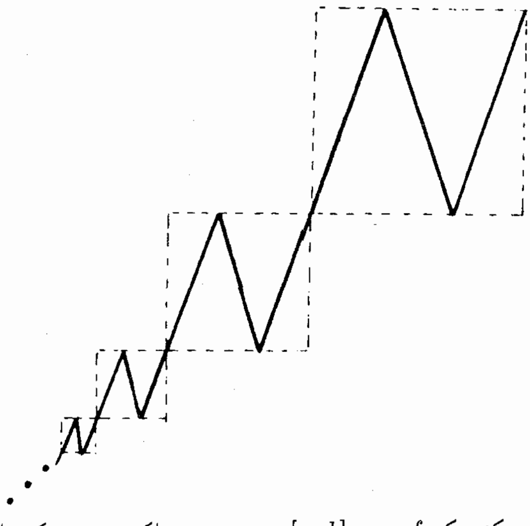
هر تابعِ اکیداً یکنوا (ص. ۱۶۶) نمونه‌ای است از تابعی که هیچ مقدار را بیش از یک‌بار نمی‌گیرد، اما چنین نیست که هر تابع با این خاصیت اکیداً یکنوا باشد ($f(x) = x + 1$ به ازای $-1 < x \le 0$، $f(x) = x - 1$ به ازای $0 < x < 1$ را در نظر بگیرید.) با این حال، تابعِ پیوسته‌ای که هیچ مقداری را بیش از یک‌بار نگیرد واقعاً اکیداً یکنواست. زیرا اگر اکیداً یکنوا نبود باید نقاطِ $x_1 < x_2 < x_3$ای

وجود می‌داشت که $f(x_1) \leq f(x_2)$ و $f(x_3) \leq f(x_2)$ (یا نابرابریهای مشابهِ معکوس)، و لذا (چون f پیوسته است) f یک ماکزیموم در نقطه‌ای بین x_1 و x_3 می‌داشت، و این ماکزیمومْ واقعی می‌بود (زیرا f هیچ مقداری را بیش از یک‌بار نمی‌گیرد). پس به ازای مقادیرِ x در هر دو طرفِ c، $f(x) < f(c)$، و لذا بنا بر خاصیت مقدار میانیْ f مقداری را در نزدیکیِ c دو بار می‌گرفت، که فرض را نقض می‌کند. (همین استدلال نشان می‌دهد که هر تابعِ پیوسته، بین ماکزیمومها و مینیمومهای متوالیش یکنواست: یعنی اگر f ماکزیمومی در x_1 و مینیمومی در $x_2 > x_1$ داشته باشد، و در (x_1, x_2) نه ماکزیمومی داشته باشد نه مینیمومی، آنگاه f در (x_1, x_2) یکنواست.)

الآن دیدیم که توابع پیوسته‌ای (روی بازه‌ای در R_1) که هر مقدار را دقیقاً یک‌بار می‌گیرند اکیداً یکنوا هستند. کدام انواعِ توابعِ پیوسته هر مقدار را دقیقاً دوبار می‌گیرند؟ پاسخْ این است که چنین توابعی وجود ندارند.[۱۵؛]

در واقع، نشان دادنِ اینکه هیچ تابع پیوسته‌ای روی بازهٔ کراندارِ بسته‌ای نمی‌تواند هر یک از مقادیرش را دقیقاً n بار، $n > 1$، بگیرد، همان‌قدر ساده است. فرض کنید که چنین تابع fای وجود داشته باشد. در این صورت f یک ماکزیمومِ مطلق، و یک مینیمومِ مطلق دارد، و هر یک از اینها باید در نقاطِ درونی اختیار شوند، مگر در حالتِ $n = 2$ که (مثلاً) مینیموم می‌تواند در هر دو نقطهٔ انتهایی اختیار شود. پس می‌توانیم فرض کنیم که ماکزیموم در یک نقطهٔ درونیِ c_1 اختیار شده است. نقاطِ c_2، c_3، $\ldots$ ، c_nای وجود دارند که $f(c_k) = f(c_1)$، $k = 2, \ldots, n$، و در یک همسایگی محذوفِ c_k (یا همسایگیِ یک‌طرفه، اگر c_k یک نقطهٔ انتهایی باشد)، $f(x) < f(c_1)$. بنا بر قضیهٔ مقدار میانی، به ازای یک ϵ مثبتِ به اندازهٔ کافی کوچک، خطِ $y = f(c_1) - \epsilon$ نمودارِ f را دوبار در نزدیکیِ c_1 و یک‌بار در نزدیکی هر c_kی دیگر قطع می‌کند، لذا مقداری هست که f $n + 1$ بار می‌گیرد، که تناقض است.

چون f نمی‌تواند پیوسته و دقیقاً دو به یک باشد، بگذارید اکنون فرض کنیم که f هر مقدار را حداکثر دوبار بگیرد. در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که نمودارِ f (مثل نمودار ص.۹۳، که قطعهٔ کوچکی از یک سمت حذف شده باشد) به حداکثر سه قطعهٔ یکنوا تقسیم می‌شود.[۱۵ج] توجه به این مطلب به جذابیتِ قضیه خواهد افزود که در مورد توابعِ پیوسته‌ای که هر مقدار را حداکثر سه‌بار می‌گیرند حکمِ مشابهی برقرار نیست: نمودار چنین توابعی لازم نیست از تعدادی متناهی قطعهٔ یکنوا تشکیل شده باشد[۱۵ج]، چنانکه در ص. ۹۰ با طرحی کلّی نشان داده شده است، که در آن a_n ضلعِ nامین مربع از راستْ a_n است و $\sum a_n < \infty$.



بگذارید فرض کنیم که f روی $[a, b]$ پیوسته و حداکثر دو به یک باشد. بنا بر اصلِ ذکرشده در بالا، f بین هر دو ماکزیموم و مینیمومِ متوالیْ یک به یک است. پس اگر ماکزیمومها و مینیمومهای f تنها در نقاطِ انتهایی اختیار شوند، f خودْ یک به یک است. اگر یکنوا نباشد دست‌کم یک ماکزیموم یا مینیموم در داخلِ بازه، مثلاً یک ماکزیموم در c، دارد. اگر f ماکزیموم یا مینیمومِ درونیِ دیگری نداشته باشد، باید روی (a, c) و روی (c, b) یکنوا باشد. حالت بعدیْ

حالتی است که f دقیقاً یک ماکزیممِ درونی در c_1 و یک مینیممِ درونی در c_2 داشته باشد، و مثلاً $a < c_1 < c_2 < b$. در این صورت f روی هر یک از سه بازهٔ (a, c_1)، (c_1, c_2)، (c_2, b) یکنواست. سرانجام فرض کنید که f مجموعاً بیش از دو ماکزیموم و مینیممِ درونی داشته باشد. فرض کنید یک ماکزیموم، یک مینیموم، و یک ماکزیموم (نه لزوماً متوالی) در c_1، c_2، c_3 وجود داشته باشد که $c_1 < c_2 < c_3$ و $f(c_1) > f(c_2)$، $f(c_3) > f(c_2)$؛ برای مشخص بودنْ فرض کنید $f(c_1) \geq f(c_3)$. در این صورت f یک مقدارِ کمی کوچکتر از $f(c_3)$ را دست‌کم دوبار می‌گیرد؛ این مقدار که بزرگتر از $f(c_2)$ است، کوچکتر از $f(c_1)$ خواهد بود، و بنا بر خاصیت مقدار میانیْ این مقدار مجدداً بین c_1 و c_2 گرفته خواهد شد، یعنی مجموعاً سه بار، که فرض را نقض می‌کند.

اکنون به کاربرد دیگری از خاصیت مقدار میانی می‌پردازیم. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای از بازه‌ای در R_1 به توی R_1 باشد. می‌گوییم که f یک وترِ افقی به طولِ a دارد اگر نقطهٔ xای وجود داشته باشد که x و $x + a$ هر دو در دامنهٔ f باشند و $f(x + a) = f(x)$. این یعنی پاره‌خطی افقی به طول a وجود دارد که هر دو انتهای آن روی نمودارِ تابع است؛ اهمیت نمی‌دهیم که پاره‌خطْ نقاطِ مشترکِ دیگری با نمودار داشته باشد یا نه. برای نمونه، اگر به ازای هر x، $f(x) = 1$، f از هر طولی وترِ افقی دارد؛ پاره‌خط از $(-1, 1)$ به $(1, 1)$ وتری افقی است به طولِ ۲ از تابعِ تعریف‌شده با $f(x) = x^3 - x + 1$؛ تابع f تعریف‌شده با $f(x) = x^3$ هیچ وتر افقی‌ای ندارد.

تابع fای را که دامنه‌اش همهٔ R_1 باشد دوره‌ای با دورهٔ p گویند اگر به ازای هر x، $f(x + p) = f(x)$.

تمرین ۱۴.۶. نشان دهید که هر تابع دوره‌ایِ پیوسته کراندار است.

تمرین ۱۴.۷. نشان دهید که هر تابع دوره‌ایِ پیوسته ماکزیمومی دارد.

تمرین ۱۴.۸. نشان دهید که اگر f پیوسته باشد و دورهٔ p داشته باشد آنگاه

$$\int_x^{x+p} f(t)dt$$

مقدار مستقل از x دارد.

نخست توجه می‌کنیم که هر تابعِ دوره‌ایِ پیوستهٔ f از تمامِ طولها وترِ افقی دارد. یعنی اگر f دورهٔ p داشته باشد، و a عدد حقیقی دلخواهی باشد، xای هست که $f(x+a) - f(x) = 0$.

برای دیدنِ این مطلب،

$$\int_0^p [f(x+a) - f(x)]\, dx$$

را که صفر است (تمرین ۱۴.۸) در نظر بگیرید. پس انتگرالده باید تغییر علامت دهد (مگر اینکه متحداً صفر باشد؛ در این صورت $f(x+a) \equiv f(x)$ و حرفِ دیگری لازم نیست). اما انتگرالده دورهٔ p دارد، و اگر در دوره‌ای یک بار تغییر علامت دهد باید دست‌کم دوبار تغییر علامت دهد تا در p به مقداری که در 0 داشت برگردد، مگر اینکه در آغاز در 0، 0 بوده باشد. پس دست‌کم دو نقطهٔ x در $[0, p)$ هست که به ازای آنها $f(x+a) = f(x)$، و می‌بینیم که هر تابعِ پیوسته با دورهٔ p دو وتر افقی از هر طولِ داده‌شده دارد که نقاط انتهایی سمت چپِ آنها نقاطِ متمایزی از $[0, p)$ است. ۱۵ ح

تمرین ۱۴.۹. نشان دهید که هر تابعِ پیوستهٔ دوره‌ای همواره وتری (نه لزوماً افقی) با طولِ تعیین‌شده دارد که نقطه‌ای میانیِ آن روی نمودار است: یعنی به ازای هر x، aای هست که $f(x+a) - f(x) = f(x) - f(x-a)$.

در مورد توابعِ غیردوره‌ای وضعیتْ کاملاً متفاوت است. تابعِ پیوستهٔ داده‌شدهٔ

fای، مثلاً با دامنهٔ $[\circ, ۱]$، می‌تواند اصلاً وترِ افقی‌ای نداشته باشد. با این حال، بگذارید فعلاً فرض کنیم که این تابع وتر افقی‌ای داشته باشد. به‌طور خاصتر، فرض کنید $f(۱) = f(\circ)$، لذا قطعهٔ $[\circ, ۱]$ یک وتر افقی است. قضیهٔ عمومیِ وتر[۱۶] می‌گوید که در این صورت وترهای افقی‌ای با طولهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، ...، ولی نه لزوماً وتر افقی‌ای با هر طولِ داده‌شده‌ای که وارونِ عدد صحیحی نباشد، وجود دارد.

برای اثباتِ نیمهٔ مثبتِ این قضیه، فرض کنیم که k عدد صحیحی باشد و تابع پیوستهٔ g را در نظر بگیرید که با $g(x) = f(x + ۱/k) - f(x)$ تعریف شده و دامنه‌اش $[\circ, ۱ - k^{-۱}]$ است. در این صورت حکم می‌کنیم که $\circ$ در بردِ g است. اگر چنین نباشد، g (بنا بر خاصیت مقدار میانی) یا به ازای هر x متعلق به دامنه‌اش مثبت خواهد بود یا در غیر این صورت به ازای هر x متعلق به دامنه‌اش منفی خواهد بود، و لذا $g(\circ) + g(۱/k) + g(۲/k) + \cdots + f(۱ - ۱/k)$ یا مثبت خواهد بود یا منفی؛ از طرف دیگر، این مجموع «ادغام می‌شود» و برابر است با $f(۱) - f(\circ) = \circ$.

به صورتی دیگر، اگر به ازای هر x، $g(x) > \circ$، یعنی اگر به ازای هر x، $f(x) < f(x + ۱/k)$، آنگاه

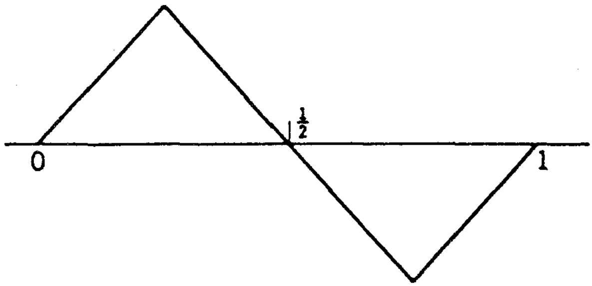
$$f(\circ) < f(\frac{۱}{k}) < f(\frac{۲}{k}) < \cdots < f(\frac{k-۱}{k}) < f(\frac{k}{k})$$

$$= f(۱) = f(\circ),$$

که تناقض است.

نمودار بعدی تابعِ fای را نشان می‌دهد که وتر افقی‌ای به طول ۱ دارد اما به ازای $\frac{۱}{۲} < a < ۱$ هیچ وتر افقی‌ای به طول a ندارد. طبیعتاً تابعی از این نوع وترهای افقی‌ای با بعضی طولها دارد که وارونِ عددِ صحیحی نیستند؛ بخشِ سالبِ قضیهٔ عمومیِ وتر حکم می‌کند که به ازای هر عدد b که وارونِ عدد صحیحی

نباشد، تابع پیوسته‌ای وجود دارد که وتر افقی‌ای به طول ۱ دارد ولی وتر افقی‌ای با طولِ ویژهٔ b ندارد.



تمرین ۱۴.۱۰. نشان دهید که چگونه به ازای هر $b \neq ۱/k$، برای بخشِ سالب قضیهٔ عمومیِ وتر نمونه‌ای بسازیم. (تقارنِ مثالِ داده‌شده برای $\frac{۱}{۲} < b < ۱$ گمراه‌کننده است.)

مکملِ جالبی برای قضیهٔ عمومیِ وتر این است که[۱۷] هر تابعِ پیوستهٔ f که وتر افقی‌ای به طول ۱ داشته باشد همواره یا یک وتر افقی به طولِ a یا دو وتر متفاوت به طول $۱ - a$ دارد (اگر $۰ < a < ۱$). برای دیدنِ این مطلب، فرض کنید $f(۱) = f(۰)$ و با تکرارِ f یک تابع جدید g با دورهٔ ۱ بسازید. g، به‌عنوان یک تابع پیوستهٔ دوره‌ای، لزوماً دو وترِ افقی به طول a دارد که نقاط انتهاییِ سمت چپِ آنها در $[۰, ۱)$ است (ص. ۱۰۸ را ببینید). هر وتر افقی به طول a برای g که از x آغاز شود، یک وتر افقی برای f است مگر اینکه $x + a > ۱$. اگر $x + a > ۱$، $۰ < x + a - ۱ < ۱$ و لذا یک وتر افقی به طول $۱ - a$ برای g (و نیز برای f) از $x + a - ۱$ آغاز می‌شود و در x به پایان می‌رسد.

تمرین ۱۴.۱۱. قضیهٔ عمومیِ وتر را با استقراء، با شروع از این مطلب ثابت کنید که اگر $f(1) = f(0)$، آنگاه f یا یک وتر افقی به طول a یا یک وتر افقی به طول $1 - a$ دارد.

به همین روش می‌توانیم نشان دهیم که اگر f در $[0, 1]$ یک مشتقِ f' داشته باشد و $f'(1) = f'(0)$، آنگاه به ازای هر عدد صحیحِ n نقاطِ x و $x + n^{-1}$ای وجود دارند که f در هر دو نقطه شیبِ واحدی دارد. این بر این مطلب (ص. ۱۵۵) متوقف است که مشتقها خاصیت مقدار میانی دارند؛ این خاصیت (برای $g(x)$، نه فقط برای $f(x)$) تمامِ آن چیزی بود که در اثباتِ قضیهٔ عمومیِ وتر از آن استفاده شد.

کاربردِ دیگری از همین ایده یک قضیهٔ نقطهٔ ثابتِ ساده به دست می‌دهد. این قضیه می‌گوید که هر نگاشتِ پیوسته از یک بازه به توی (بخشی از یا همهٔ) خودش دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد؛ یعنی دست‌کم یک نقطه هست که با تصویرش یکی است. راه دیگری برای گفتنِ این مطلبْ این است که اگر f تابع پیوسته‌ای روی $[0, 1]$ باشد، طوری که $0 \leq f(x) \leq 1$، آنگاه نمودارِ f باید خطِ $y = x$ را قطع کند.

تمرین ۱۴.۱۲. این مطلب را ثابت کنید؛ یعنی ثابت کنید که اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد و همهٔ مقادیرِ f در $[a, b]$ باشد، آنگاه xای در $[a, b]$ هست که به ازای آن $f(x) = x$.

تمرین ۱۴.۱۲آ. فرض کنید که ساعتی به‌طور نامنظم کار می‌کند اما در پایانِ ۲۴ ساعت مجموعاً نه جلو می‌رود نه عقب. آیا هیچ زمانِ یک‌ساعته‌ای هست که در آن این ساعت گذشتِ دقیقاً یک ساعت را نشان دهد؟ آیا ۵۷۶ دقیقهٔ پیوسته‌ای هست که در آن این ساعت گذشتِ ۵۷۶ دقیقه را نشان دهد؟ (فرض کنید که زمانِ نشان‌داده‌شده یک تابعِ صعودیِ پیوسته است.)[۱۷آ]

قضیهٔ دیگری که به نحو نزدیکی با این قضیه مربوط است حکم می‌کند که اگر تابعِ دوره‌ایِ پیوسته‌ای، با دورهٔ $2p$، این خاصیت را داشته باشد که به ازای هر x، $f(x) = -f(x+p)$ (مثلِ نمودار $y = \sin x$ با $p = \pi$)، آنگاه به ازای دست‌کم یک x، $f(x) = 0$. این با توجه به قضیهٔ مقدار میانیْ واضح است. این قضیه، اگر به صورتِ دیگری تقریر شود، حالت ساده‌ای از قضیهٔ نقاطِ متقاطِرِ بُرسوک می‌شود، که اثبات آن در حالتِ ابعادِ بالاتر بسیار دشوارتر است.[۱۸] در این تقریرْ یک تابع پیوستهٔ f در نظر می‌گیریم که دامنهٔ آن محیطِ دایره‌ای در R_2 باشد و بردِ آن در R_1 باشد. فرض کنید که تصویرِ هر جفت نقطهٔ متقاطر (نقاطِ دو انتهای یک قطر) یک جفت نقطه باشد که نسبت به مبداء متقارن‌اند. در این صورت نقاطی از محیطْ به مبدأ نگاشته می‌شوند.

باز هم کاربرد دیگری از قضیهٔ مقدار میانی نشان می‌دهد که هر کلوچه(ی دو بعدی) با شکلِ دلخواه را می‌توان با چاقو در هر جهتِ تعیین‌شده نصف کرد. حداقل اگر مرزِ کلوچه به اندازه کافی ساده باشد، دیدنِ این آسان است که مساحتِ بخشی از کلوچه که در یک طرفِ خطی با جهتِ داده‌شده قرار می‌گیرد، وقتی که خط به موازاتِ خود حرکت داده شود، به طور پیوسته تغییر می‌کند. چون این مساحت می‌تواند 0 باشد یا کّلِ مساحتِ کلوچه، باید در زمانی دقیقاً نصفِ کّلِ مساحت باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان همزمان دو کلوچهٔ واقع در صفحه‌ای را با خطی نصف کرد. دو کلوچه را A و B بگیرید. چنانکه هم‌اکنون دیدیم، در هر جهتِ داده‌شده خطی وجود دارد که B را نصف می‌کند. به ازای جهتِ معین‌شده با هر نقطهٔ P روی دایرهٔ داده‌شده‌ای با مرکزِ O در R_2، خطی بیابید که B را نصف کند و $f(P)$ را تفاضلِ علامت‌دارِ مساحتِ بخشی از A که در طرفِ چپ این خط قرار دارد و بخشی از A که در طرف راست آن قرار دارد بگیرید. تابعی به دست می‌آوریم که دامنه‌اش محیطِ یک دایره است؛ بردش در R_1 است؛ و

نقاطِ متقاطر را به نقطه‌های متقارن نسبت به O می‌نگارد، زیرا جایگزین کردنِ P با نقطهٔ متقاطرش چپ و راست را عوض می‌کند. اگر بتوانیم نشان دهیم که f پیوسته است، حالت خاصِ قضیهٔ بُرسوک، مذکور در فوق، نشان می‌دهد که به ازای Pای، $f(P) = ۰$، که یعنی اینکه خطی در جهتِ OP هر دوی A و B را نصف می‌کند. پیوستگیِ f پذیرفتنی است، اما چندان واضح نیست. کافی است نشان دهیم که تغییر کوچکی در مکانِ P، نه فقط تغییر کوچکی در جهتِ خطِ منصِّفِ B، بلکه همچنین تغییر کوچکی در مکانِ آن نیز ایجاد می‌کند و مثلاً در عرض از مبدأ روی یکی از محورهای مختصات تغییرِ کوچکی می‌دهد. زیرا، اگر این حکمْ درست باشد، $f(P)$ تنها به میزان اندکی تغییر خواهد کرد. اکنون حکم قبل در مورد خطهای منصّفِ B بدون قید و شرطْ درست است تنها اگر محدودیتی بر شکلِ پذیرفتنیِ کلوچه‌ها وضع کنیم؛ برای نمونه یک شکلِ «کلوچه‌ای» مثل ○—○ را می‌توان با خطهای قائم بسیاری نصف کرد. اگر خود را به کلوچه‌های محدبْ محدود کنیم هیچ مشکلی وجود نخواهد داشت، چنانکه از هر شکلی معلوم است.[۱۸]

تمرین ۱۴.۱۳. اگر منحنیِ بستهٔ محدبی در صفحه داده شده باشد، خطی هست که همزمان منحنی و ناحیه‌ای را که منحنی احاطه می‌کند نصف می‌کند.[۱۹]

قضایای مشابهی در ابعادِ بیشتر وجود دارند اما اثباتِ آنها دشوارتر است. قضیهٔ نقطهٔ ثابتِ سه‌بعدی را می‌توان با زبانی تصویری، گیریم گمراه‌کننده، بیان کرد: هر فنجان قهوه را به هر طریقِ پیوسته‌ای که به هم زنیم، دست‌کم یک ملکول هست که به وضعیتِ اولیه‌اش بر می‌گردد. (این تنها هنگامی درست است که قهوه هر نقطهٔ درون فنجان را اشغال کند و «مولکول» به «نقطه» تعبیر شود.) قضیهٔ نقاطِ متقاطرِ سه‌بعدی می‌گوید که هر نگاشتِ پیوسته از سطحِ هر کره به توی فضای $R_۲$، که هر جفت نقطهٔ متقاطر را به نقاطی ببرد که نسبت به مبدأ متقارن باشند،

باید نقطه‌ای از سطحِ کره را به مبدأ ببرد. می‌توان از این مطلب برای نشان دادنِ این استفاده کرد که هر سه شکل در فضا را می‌توان با صفحه‌ای همزمان نصف کرد (قضیهٔ «ساندویچ ژامبون»).[۲۰]

۱۵. حدودِ بالا و پایین. نیاز خواهیم داشت که تعمیمی از مفهومِ حدِ دنباله‌ای از اعداد حقیقی را به‌کار گیریم. اگر $\{s_n\}$ چنین دنباله‌ای باشد، و اعداد s_n مجموعهٔ کرانداری تشکیل دهند، نشان می‌دهیم که همواره عدد Lای با این خاصیت وجود دارد: اگر ϵ مثبتِ دلخواهی داده شده باشد، هرگاه n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد $s_n \leq L+\epsilon$، و به علاوه تعدادی نامتناهی از s_nها در $s_n \geq L-\epsilon$ صدق می‌کنند. عدد L را حدِ بالاییِ $\{s_n\}$ می‌خوانند، و به صورتِ $\limsup s_n$ یا $\overline{\lim} s_n$ می‌نویسند. اگر $\{s_n\}$ از بالا بی‌کران باشد می‌نویسیم $\limsup s_n = +\infty$. اگر $\{s_n\}$ از پایین بیکران باشد، ممکن است L وجود نداشته باشد، و در این حالت می‌نویسیم $\limsup s_n = -\infty$.

چند مثال را در نظر بگیرید. (i) $s_n = (-۱)^n$، لذا دنبالهٔ ما ۱، ۱−، ۱، ۱−، ... است. پس $\limsup s_n = ۱$. (ii) فرض کنید $s_n = n$؛ دنباله ۱،۲،۳، ... است. پس $\limsup s_n = +\infty$. (iii) فرض کنید $\{s_n\} = \{-۱, -۲, \dots\}$. در این صورت $\limsup s_n = -\infty$. (iv) فرض کنید $s_n = ۱/n$، $n = ۱, ۲, ۳, \dots$. در این صورت $\limsup s_n = \lim s_n = ۰$. (v) فرض کنید.

$$\{s_n\} = \{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۴}{۵}, \dots\}$$

در این صورت $\limsup s_n = ۱$.

تمرین ۱۵.۱. با در نظر گرفتنِ اعداد L_n تعریف‌شده با $L_n = \limsup s_k$ به ازای $k \geq n$، نشان دهید که $\limsup s_n$ وجود دارد اگر $\{s_n\}$ کراندار باشد.

تمرین ۱۵.۲. حدِ پایینی، lim inf، یا $\underline{\lim}$، را به نحو مشابه تعریف کنید، و در موردِ سه مثالِ بالا برای lim sup، آن را معین کنید.

تعریفِ حدِ بالاییْ شبیهِ تعریف کوچکترین کران بالاست، که با آن این تفاوت را دارد که زیرمجموعه‌های متناهی از اعضای s_n نادیده گرفته می‌شوند. برای نمونه، اگر مقادیرِ نخستین هزار تای s_nها با اعدادِ دیگری جایگزین شود مقدارِ $\limsup s_n$ بی‌تغییر می‌مانَد. همچنین می‌توانستیم $\limsup s_n$ را کوچکترین حدی تعریف کنیم که از انتخابِ زیردنباله‌های همگرای $\{s_n\}$ به دست می‌آید؛ این آن تعریفی است که اصطلاح را توضیح می‌دهد.

$\limsup(s_n + t_n) \leq \limsup s_n + \limsup t_n$ اگر هر دو مقدار در سمتِ راستْ متناهی باشند؛ اما در اینجا نابرابریِ اکید می‌تواند رخ دهد، برای نمونه، اگر $\{s_n\} = \{۱, ۰, ۱, ۰, \ldots\}$ و $\{t_n\} = \{۰, ۱, ۰, ۱, \ldots\}$. با این حال، اگر $\lim t_n$ وجود داشته باشد، $\limsup(s_n + t_n) = \limsup s_n + \limsup t_n$.

تمرین ۱۵.۳. نابرابری و برابریِ بیان‌شده در بالا را ثابت کنید.

این نابرابری به جمعهای متناهی گسترش می‌یابد، اما به جمعهای نامتناهی نه. برای نمونه، اگر فرض کنیم s_k دنبالهٔ $\{۰, ۰, \ldots, ۰, ۱, ۰, \ldots\}$ را نشان دهد که اعضای $s_{k,n}$ برابرِ ۰اند مگر kامین عضوِ $s_{k,k}$ از kامین دنباله که ۱ است، آنگاه (وقتی که $n \to \infty$)، $\limsup(s_{۱,n} + s_{۲,n} + \cdots) = \limsup ۱ = ۱$، در حالی که به ازای هر k، $\limsup s_{k,n} = ۰$.

حدود بالایی و پایینی را می‌توان برای توابعی نیز که بردشان در $R_۱$ است اما دامنه‌شان کلّیتر است تعریف کرد. اگر دامنهٔ f مجموعهٔ Sای در یک فضای متریک باشد و $x_۰$ یک نقطهٔ حدیِ S باشد، منظورمان از $\limsup_{x\to x_۰} f(x) = L$ این است که هر ϵ مثبت دلخواه که داده شود، $f(x) \leq L + \epsilon$ هرگاه x در یک

همسایگیِ به قدر کافی کوچکِ x باشد، و به علاوه یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ از نقاط با حدِ $x_\circ$ وجود دارد که $f(x_n) \geq L - \epsilon$. تغییرات کوچکی باید داده شود اگر $L = \pm\infty$. به روشی مشابه می‌توانیم $\limsup_{x \to +\infty} f(x)$ را تعریف کنیم اگر دامنهٔ f زیرمجموعه‌ای از $R_۱$ باشد که از بالا بیکران است. مثالها: (i) اگر به ازای $x \in R_۱$، $f(x) = \sin x$، آنگاه

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) = -۱ \quad \text{و} \quad \limsup_{x \to +\infty} f(x) = +۱$$

(ii) اگر به ازای $x > \circ$، $f(x) = e^x \sin x$، آنگاه

$$\lim \inf_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim \inf_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(iii) اگر به ازای $x \neq \circ$، $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$، آنگاه $\liminf_{x \to \circ+} f(x) = +\infty$ و $\liminf t_{x \to \circ-} f(x) = \circ$.

تمرین ۱۵.۴. نشان دهید که اگر $\liminf s_n = \liminf s_n = L$ و L متناهی باشد، آنگاه مطابق تعریفِداده شده در §۸، $\lim s_n = L$.

تمرین ۱۵.۵. اگر $\limsup s_n \leq L$ و $\liminf s_n \geq L$، آنگاه $\lim s_n$ وجود دارد (و برابرِ L است).

تا اینجا، اگرچه حدودِ دنباله‌ها را بررسی کرده‌ایم، مجبور نبوده‌ایم حدودِ توابعِ کلّیتری را بررسی کنیم. در مورد توابع با مقادیر در $R_۱$ ساده‌ترین راهْ این است که $\lim_{x \to x_\circ} f(x)$ را مقدار مشترکِ $\limsup_{x \to x_\circ} f(x)$ و $\liminf_{x \to x_\circ} f(x)$ تعریف کنیم. اگر دامنهٔ f حاوی یک همسایگیِ سمت راستِ $x_\circ$ باشد، $\limsup_{x \to x_\circ^+} f(x)$ را حدِ بالای تحدیدِ f به یک همسایگیِ سمت راستِ $x_\circ$ تعریف می‌کنیم؛ مشابهاً در مورد $\liminf$. مقدار مشترکِ این حدودِ بالا و پایین

(در صورت وجود) با $\lim_{x\to x_\circ^+} f(x)$، یا به نحو فشرده‌تر با $f(x_\circ+)$ نشان داده می‌شود. تعریف مشابهی برای $f(x_\circ-)$ وجود دارد.[آ۲۰]

۱۶. دنباله‌های توابع. مناسب خواهد بود که پیش از آنکه به بررسی خواص ویژهٔ رده‌های دیگری از توابع بپردازیم دربارهٔ چند نوع همگراییِ دنباله‌های توابع بحث کنیم.

فرض کنید دنباله‌ای داریم که اعضای آن توابعِ s_nای هستند با دامنه‌ای مشترکْ و با مقادیرِ $s_n(x)$ متعلق به R_1. می‌توانیم توجهمان را یا بر دنبالهٔ $\{s_n\}$ متمرکز کنیم، که اعضایش خودِ تابعها هستند، یا بر دنباله‌های $\{s_n(x)\}$ که اعضایشان مقادیرِ تابعها در تک نقطه‌های x از دامنه هستند. می‌گوییم که $\{s_n\}$ روی یک مجموعهٔ S به‌طور نقطه‌ای همگراست اگر به ازای هر x متعلق به S دنبالهٔ $\{s_n(x)\}$ از اعدادِ حقیقیْ همگرا باشد. برای نمونه، فرض کنید $s_n(x) = x^n$، که $\circ \leq x \leq 1$. به ازای هر x در $[\circ, 1]$، دنبالهٔ $\{s_n(x)\}$ همگراست؛ حدْ تابعِ ناپیوستهٔ L را تعریف می‌کند که به ازای $\circ \leq x < 1$، $L(x) = \circ$، اما $L(1) = 1$. از طرف دیگر، می‌توانیم همان توابعِ s_n را به‌عنوان نقاطِ فضای C در نظر بگیریم. در این صورت دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا نیست؛ در واقع، $d(s_n, s_{2n}) = \max\limits_{\circ\leq x\leq 1}(x^n - x^{2n})$، و اگر بگیریم $x = 2^{-1/n}$ می‌بینیم که مطمئناً $d(s_n, s_{2n}) \geq x^n - x^{2n} = \frac{1}{4}$. پس $\{s_n\}$ نمی‌تواند دنباله‌ای کوشی باشد.

تمرین ۱۶.۱. همگراییِ $\{s_n\}$ در C را بررسی کنید، (آ) اگر $s_n(x) = x^n(1-x)$، (ب) اگر $s_n(x) = nx^n(1-x)$؛ در هر حالت $\circ \leq x \leq 1$.

می‌بینیم که دنباله‌ای از توابعِ پیوسته می‌تواند به‌طور نقطه‌ای همگرا باشد حتی اگر همان دنباله از توابع، با در نظر گرفتنِ آن به‌عنوان اعضایی از فضای C، همگرا نباشد. آشکار است که همگراییِ دنباله‌ای از اعضای C همگراییِ نقطه‌ایِ دنبالهٔ

متناظر از توابع را ایجاب می‌کند. با این حال، فضاهای متریکِ دیگری هست که اعضایشان تابع‌اند و در مورد آنها همگراییِ دنباله‌ای از اعضای فضا همگراییِ نقطه‌ایِ دنبالهٔ توابع را تضمین نمی‌کند. یک مثالْ فضای ذکرشده در ۴§ است، که اعضایش توابعِ پیوسته روی $[0, 1]$ است، با متریکِ داده‌شده با

$$d(x, y) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

دنباله‌ای از اعضای این فضا را در نظر بگیرید که به این صورت تعریف شده باشد: اگر $2^n \leq k < 2^{n+1}$، $x_k(t) = 0$ مگر در بازهٔ $(2^{-n}k - 1, 2^{-n}(k+1) - 1)$؛ در این بازه، نمودارِ x_k مثلثی است با قاعده‌ای به طول 2^{-n} و ارتفاع ۱؛ وقتی که k بزرگ می‌شود این مثلث به عقب و جلو حرکت می‌کند، و به این صورت مانع از همگراییِ نقطه‌ای می‌شود؛ اما $d(x_k, 0) < 2^{\frac{-n}{2}} \to 0$.

در هر دنباله از توابع، خواه به‌طور نقطه‌ای همگرا باشد یا نباشد، اگر تابعها دامنه‌ای مشترک و برد در R_1 داشته باشند، همواره می‌توانیم حدودِ بالایی و پایینیِ نقطه‌ای، $\limsup s_n(x)$ و $\liminf s_n(x)$، را تعریف کنیم. اگر این حدودِ بالایی و پایینیْ متناهی باشند دو تابع تعریف می‌کنند، که می‌توانیم آنها را $\limsup s_n$ و $\liminf s_n$ بنامیم.

اغلب مناسب است که فضای Cی توابعِ پیوسته را با در نظر گرفتنِ توابع پیوسته‌ای که دامنه‌هایشان مجموعه‌هایی کلّیتر از بازه‌های R_1اند تعمیم دهیم. در تعریفِ C، از وجود ماکزیموم برای تابعِ پیوسته‌ای که دامنه‌اش بازهٔ فشرده‌ای باشد استفاده کردیم. چون هر تابع پیوسته‌ای که دامنه‌اش مجموعهٔ فشرده‌ای باشد ماکزیمومی دارد، می‌توانیم دقیقاً از همان تعریف استفاده کنیم: فرض کنید E مجموعهٔ فشرده‌ای در یک فضای متریک باشد؛ در این صورت فضای C_E متشکل است از توابع پیوستهٔ f با دامنهٔ E و برد در R_1، با $d(f, g)$ تعریف‌شده با $\max_E |f(x) - g(x)|$. مشابهاً می‌توانیم، با اختیارِ $d(f, g)$ تعریف‌شده با

$\sup_E |f(x) - g(x)|$، یک فضای B_E از توابعِ کراندار با دامنهٔ E تعریف کنیم؛ در اینجا E لازم نیست فشرده باشد.

اگر دنباله‌ای از توابعِ پیوسته، به‌عنوان دنباله‌ای از اعضای C_E، همگرا باشد، سنّتاً گفته می‌شود که روی E به‌طور یکنواخت همگراست. به صورت کلّیتر، فرض کنید دنباله‌ای از توابع داریم (کراندار یا نه، پیوسته یا نه)؛ اگر تفاضلِ هر دو تابعْ کراندار باشد، می‌توانیم فاصلهٔ بینِ آنها را در متریکِ B_E تشکیل دهیم؛ و اگر در این متریکْ دنبالهٔ توابعْ دنباله‌ای کوشی باشد، می‌گوییم که دنباله روی E به‌طور یکنواخت همگراست. برای نمونه، اگر $f(x) = ۱/x$، دنبالهٔ $\{f, f, f, ...\}$ روی $۱ \leq x > ۰$ به‌طور یکنواخت همگراست. دنبالهٔ $\{s_n\}$ که $s_n(x) = x^n$، روی هر بازهٔ مشخصِ $[۰, a]$ که $۱ > a > ۰$، به‌طور مطلق همگراست ولی روی $[۰, ۱]$ نه. توجه کنید که این دنباله روی بازهٔ نیم‌بستهٔ $(۰, ۱]$ نیز به‌طور یکنواخت همگرا نیست. تشخیصِ این مهم است که «همگراییِ یکنواخت روی هر زیربازهٔ بستهٔ بازه‌ای باز» با «همگراییِ یکنواخت روی آن بازهٔ باز» یکی نیست.

یک راهِ دیگر و مرسوم‌ترِ گفتنِ اینکه $\{s_n\}$ روی E به‌طور یکنواخت همگراست گفتنِ این است که هر ϵ مثبتی داده شده باشد، Nای هست که به ازای هر n و mای که از N بیشتر باشند، همزمان به ازای همه xهای متعلق به E، $|s_n(x) - s_m(x)| < \epsilon$؛ تأکید می‌کنیم که N باید مستقل از این باشد که کدام xهای متعلق به E در نظر گرفته شوند. اگر N مجاز باشد که به x وابسته باشد، مجدداً تعریفِ همگراییِ نقطه‌ای را به دست می‌آوریم.

فرض کنید بتوانیم اعدادِ M_nای بیابیم که به ازای هر x در E، $|s_n(x) - s_{n+۱}(x)| \leq M_n$؛ یعنی $\sup_{x\in E} |s_n(x) - s_{n+۱}(x)| \leq M_n$. در این صورت اگر $\sum M_n$ همگرا باشد، دنبالهٔ $\{s_n\}$ روی E به‌طور یکنواخت همگراست. زیرا اگر $m > n$، $|s_n(x) - s_m(x)| \leq M_n + M_{n+۱} + \ldots + M_m$،

و مجموعِ سمت راست وقتی m و n بزرگ باشند کوچک است. این به Mـآزمونِ وایرشتراس معروف است، و معمولاً به شکلِ معادلی بیان می‌شود که آزمون وقتی s_nها به عنوان مجموعهای جزئیِ یک سری در نظر گرفته شوند به خود می‌گیرد. این شکل به این صورت بیان می‌شود: اگر c_nها توابعی با دامنهٔ E باشند، و به ازای هر x در E، $|c_n(x)| \leq M_n$ (در اینجا تأکید می‌کنیم که M_n مستقل از x است)، آنگاه $\sum c_n$ به‌طور یکنواخت همگراست اگر $\sum M_n$ همگرا باشد.

اغلب سودمند است که نوعِ دیگری از همگرایی را در نظر بگیریم: همگراییِ نقطه‌ایْ توأم با کرانداریِ یکنواخت، یعنی کرانداری با متریکِ B_E. این را همگراییِ کراندار می‌خوانیم. برای نمونه، دنبالهٔ $\{s_n\}$ که $s_n(x) = x^n$، روی $[0, 1]$ به‌طور کراندارْ همگراست، اگرچه این دنباله تنها روی $[0, a]$ها، که $0 < a < 1$، به‌طور یکنواخت همگراست. اگر $s_n(x) = nx^n$، باز هم $\{s_n\}$ روی هر $[0, a]$، $0 < a < 1$، به‌طور یکنواخت همگراست، اما $\{s_n\}$ روی $[0, 1)$ به‌طور کراندار همگرا نیست.

تمرین ۱۶.۲. نشان دهید که حدِ هر دنبالهٔ به‌طور کراندارْ یکنواخت از توابعْ تابعی کراندار است.

۰۱۷ همگراییِ یکنواخت. یکی از کاربردهای عامِ همگراییِ یکنواخت از این مطلب ناشی می‌شود که حدِ هر دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا از توابعِ پیوسته پیوسته است. همین مطلب را می‌توان به نحوِ موجزتری با گفتنِ اینکه فضای C_E تام است بیان کرد. این به سادگی ثابت می‌شود. در واقع، حکمی ثابت می‌کنیم اندکی کلّیتر، که گاه سودمند است: اگر هر s_n در x_1 پیوسته باشد، و اگر $\{s_n\}$ در یک همسایگیِ x_1 به‌طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه تابعِ L تعریف‌شده با $L(x) = \lim s_n(x)$، در x_1 پیوسته است. اولاً، همگراییِ یکنواختْ همگرایی نقطه‌ای را ایجاب می‌کند، لذا تابع Lای وجود دارد. D را تابع فاصله در فضای

B_E بگیرید. در این صورت هر ϵ مثبت که داده شده باشد،

$$|L(x_1) - L(x_2)| \leq |L(x_1) - s_n(x_1)| + |L(x_2) - s_2(x_2)|$$

$$+|s_n(x_1) - s_n(x_2)|$$

$$\leq D(L, s_n) + D(L, s_n)$$

$$+|s_n(x_1) - s_n(x_2)|.$$

هر یک از دو جملهٔ D در سمت راست را می‌توان با انتخابِ nای به اندازهٔ کافی بزرگْ کوچکتر از $\epsilon/3$ کرد، زیرا $\{s_n\}$ به‌طور یکنواخت همگراست. پس از انتخابِ nای به اندازهٔ کافی بزرگ، n را تثبیت کنید. در این صورت، چون هر s_n در x_1 پیوسته است، جملهٔ آخر حداکثر $\epsilon/3$ است اگر $\delta > d(x_1, x_2)$. پس $|L(x_1) - L(x_2)| < \epsilon$ از $d(x_1, x_2) < \delta$ نتیجه می‌شود و لذا L در x_1 پیوسته است.

البته حدِ هر دنبالهٔ به‌طور غیریکنواخت همگرا از توابعِ پیوسته لزوماً ناپیوسته نیست. برای نمونه، $\{s_n\}$، که $s_n(x) = nx^n(1-x)$، روی $[0, 1]$ به‌طور یکنواخت همگرا نیست (تمرین ۱۶.۱)، اما حدِ آن تابعِ پیوستهٔ ۰ است. با این حال، تحتِ قیودی اضافی می‌توان نتیجه گرفت که اگر تابعِ حدیْ پیوسته باشد همگراییْ یکنواخت است. برای نمونه، اگر دنباله‌ای از توابعِ پیوسته روی بازهٔ فشرده‌ای در R_1 به‌طور یکنوا به تابعِ پیوسته‌ای همگرا باشد، همگراییْ لزوماً یکنواخت است.[21] فرضِ یکنوا بودنِ همگرایی یعنی یا به ازای هر n و هر x در بازه $s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$، یا به ازای هر n و هر x در بازه $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

بگذارید فرض را به شکلِ $s_n(x) \geq s_{n+1}(x)$ بگیریم. اگر تابعِ حدی را با L نشان دهیم، آنگاه $s_n(x) - L(x) \geq 0$. اگر همگراییْ یکنواخت نباشد،

$\max_x[s_n(x)-L(x)]$ به صفر نمی‌گراید، لذا دنباله‌ای از مقادیرِ n هست که به ازای آن $\max_x[s_n(x)-L(x)]>b>0$. چون s_n-L تابع پیوسته‌ای است، در یک نقطهٔ x_n ماکزیمومش را می‌گیرد؛ بنا بر تمرین ۸.۸، می‌توانیم از مجموعهٔ $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ $\{y_k\}$ با حدِ z انتخاب کنیم. در این صورت $s_k(y_k)-L(y_k)>b$، و نتیجتاً به ازای هر $k\geq n$، $s_n(y_k)-L(y_k)>b$ (تنها در اینجاست که از نابرابریِ $s_n(x)\geq s_{n+1}(x)$ استفادهٔ اساسی می‌کنیم). با $k\to\infty$، با nای ثابت، نتیجه می‌گیریم (بنا بر پیوستگیِ s_n-L) که به ازای هر n، $s_n(z)-L(z)\geq b$. از طرف دیگر، $s_n(z)-L(z)\to 0$ زیرا در نقطهٔ z همگرایی را داریم. پس فرضِ همگراییِ غیریکنواخت به تناقضی می‌انجامد.

شرطِ دیگری که همان نتیجه را باعث می‌شود این است که توابعِ s_n یکنوا هستند (حتی اگر لزوماً پیوسته نباشند). به صورت دقیقتر، فرض کنید روی بازهٔ فشردهٔ $[a,b]$ای به‌طور نقطه‌ای $s_n\to L$، و فرض کنید L پیوسته باشد و فرض کنید همهٔ s_nها توابعی صعودی باشند. در این صورت به‌طور یکنواخت $s_n\to L$.

اثبات این قضیه نیازمندِ مطالبی از بخشهای بعدی است، اما چون کاملاً مناسبِ اینجاست آن را اکنون ثابت می‌کنیم. هر عدد مثبت ϵ که داده شده باشد، مجموعه‌ای متناهی از نقاط x_k در $[a,b]$ انتخاب کنید که $a=x_1<x_2<\cdots<x_m=b$، و به ازای $k=2,3,\ldots,m$، $0\leq L(x_k)-L(x_{k-1})<\epsilon$. چون L به‌طور یکنواخت پیوسته (§۱۹ را ببینید) و غیرنزولی است، این نابرابریها مطمئناً برقرار خواهند بود اگر فاصله بین x_kهای متوالیْ به اندازهٔ کافی کوچک باشد. به‌علاوه، چون L غیرنزولی است، به ازای $x_{k-1}\leq x\leq x_k$، $0\leq L(x_k)-L(x)<\epsilon$. اکنون چون دنبالهٔ توابع $\{s_n\}$ به‌طور نقطه‌ای همگراست، و تنها تعدادی متناهی نقطهٔ x_k هست، می‌توانیم n را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنیم که به ازای همهٔ kها، $|s_n(x_k)-L(x_k)|<\epsilon$. چون هر x در $[x_{k-1},x_k]$ای است و L غیرنزولی است،

$$s_n(x)\leq s_n(x_k)\leq L(x_k)+\epsilon\leq L(x)+2\epsilon$$

که در آن متوالیاً از این مطلب که s_n غیرنزولی است و از نابرابریِ $s_n(x_k)\leq L(x)+\epsilon$،

که از آنچه هم‌اکنون اثبات شد نتیجه می‌شود، استفاده می‌کنیم. مشابهاً،

$$L(x) - ۲\epsilon \leq L(x_{k-۱}) - \epsilon \leq s_n(x_{k-۱}) \leq s_n(x)\cdot$$

این دو مجموعه از نابرابریها به همراهِ هم ایجاب می‌کنند که، اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به ازای هر x در $[a, b]$، $|s_n(x) - L(x)| \leq ۲\epsilon$؛ این، بیانِ همگراییِ یکنواختِ $\{s_n\}$ است.

حدِ دنباله‌ایْ از توابعِ ناپیوسته می‌تواند پیوسته یا ناپیوسته باشد، خواه همگراییْ یکنواخت باشد یا نباشد.

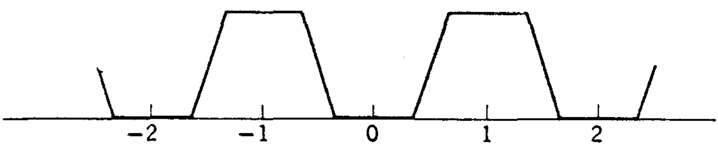
یک دلیلِ اهمیتِ ایدهٔ همگرایی یکنواخت این است که اغلب راه خوبی برای ساختنِ تابعی با خواصی معین، نمایشِ آن به صورت حد یکنواخت توابعی است که به‌طور کامل آن خاصیت را ندارند.

به‌عنوانِ توضیحی برای این اصل (که گاه چگالشِ تکینگیها خوانده می‌شود)، خمِ پیوسته‌ای عرضه می‌کنیم که از هر نقطهٔ ناحیهٔ مسطحی می‌گذرد. (چنین خمهای ناحیه‌پرکنی به خمهای پئانو معروف‌اند). طبیعتاً باید از پیش تعیین کنیم که عبارتِ «خمِ پیوسته» یعنی چه؛ درسی که از این ساختن می‌گیریم این است که تعریفی طبیعی از خمِ پیوسته ممکن است به شیئی بینجامد که با ایدهٔ شهودیِ اینکه خمهای پیوسته به چه می‌مانند تطبیق نکند.[۲۲]

یک راه طبیعیِ تعریف خمِ پیوسته در $R_۲$ گفتنِ این است که خمِ پیوسته تصویر پیوستهٔ یک پاره‌خط است، یعنی مجموعهٔ مقادیر تابعی پیوسته از یک بازهٔ بستهٔ مناسب (مثلاً $[۰, ۱]$) به $R_۲$. البته توابع مختلفی ممکن است به تصویر واحدی بینجامند، اما این مطلب در اینجا بی‌اهمیت است؛ ما می‌خواهیم نشان دهیم که دست‌کم یک تابع وجود دارد که در موردِ آن، تصویرِ بازه هر نقطهٔ کلّ مربع را می‌پوشاند، و در واقع بعضی نقاط را بیش از یک بار می‌پوشانَد. با متناظر

کردنِ نقطهٔ تصویریِ $(x(t), y(t))$ با نقطهٔ t از دامنه، نقاطِ p در تصویر را با مختصاتشان نمایش می‌دهیم. این به معنای گفتنِ این است که ما خم پیوسته را چیزی می‌انگاریم که با یک جفت معادلهٔ پارامتری، $x = x(t)$ و $y = y(t)$، تعریف شده است که در آن، توابع x و y پیوسته‌اند.

اکنون می‌خواهیم خم پیوسته‌ای، به این معنا، بسازیم که از هر نقطهٔ مربعی که در آن $۰ \le x \le ۱$ و $۰ \le y \le ۱$ بگذرد. در واقع، خمی که خواهیم ساخت از بعضی نقاطِ مربعْ چهار بار می‌گذرد. می‌توان تعریف را طوری تنقیح کرد که خم چیزی بدتر از نقاطِ سه‌گانه نداشته باشد، اما، چنانکه در توپولوژی نشان داده شده است، نمی‌توانیم از این فراتر برویم.[۲۳] به زودی ثابت می‌کنیم که خم باید دست‌کم نقاطِ دوگانه‌ای داشته باشد، یعنی نگاشت یک به یکِ پیوسته‌ای از یک پاره‌خط به روی یک مربع وجود ندارد.



روش ساختِ خود[۲۴] را بر پایهٔ خواصِ تابع پیوستهٔ fای می‌گذاریم که زوج است، دوره‌ای است با دورهٔ ۲، روی $[۰, \frac{۱}{۳}]$ مقدار صفر دارد، روی $[\frac{۲}{۳}, ۱]$ مقدار ۱ دارد، و در $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ خطی است. دو تابع x و y را با

$$x(t) = \frac{۱}{۲}f(t) + \frac{۱}{۲^۲}f(۳^۲t) + \frac{۱}{۲^۳}f(۳^۴t) + \cdots$$

$$y(t) = \frac{۱}{۲}f(۳t) + \frac{۱}{۲^۲}f(۳^۳t) + \frac{۱}{۲^۳}f(۳^۵t) + \cdots$$

تعریف کنید. هر دو سریْ (بنا بر Mـآزمون) به‌طور یکنواخت همگرا هستند، و لذا x و y توابعی پیوسته‌اند.

فرض کنید $۱ \leq x_۰ \leq ۰$ و $۱ \leq y_۰ \leq ۰$، و $x_۰$ و $y_۰$ را در پایهٔ ۲ به صورتِ «دهدهی» نمایش دهید (رک. ص. ۵۴):

$$(پایهٔ ۲)x_۰ = ۰/a_۰a_۲a_۴\cdots$$

$$(پایهٔ ۲)y_۰ = ۰/a_۱a_۳a_۵\cdots.$$

اکنون عدد $t_۰$ را با قرار دادنِ بسطِ آن در پایهٔ ۳ به صورتِ $t_۰ = ۰/(۲a_۰)(۲a_۱)(۲a_۲)\ldots$ (پایهٔ ۳) تعریف کنید. یعنی $t_۰$ با دو برابر کردنِ ارقامِ دودوییِ $x_۰$ و $y_۰$، یک در میان قرار دادنِ آنها، و تعبیرِ نتیجه در پایهٔ ۳ ساخته می‌شود. اکنون نشان می‌دهیم که $x(t_۰) = x_۰$ و $y(t_۰) = y_۰$، لذا خمی که معادلاتِ پارامتریِ آن $x = x(t)$ و $y = y(t)$ باشند از $(x_۰, y_۰)$ می‌گذرد.

برای انجام این کار، نشان می‌دهیم که به ازای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ $f(۳^kf_۰)a_k$ در این صورت از تعریفِ $x(t_۰)$ و $y(t_۰)$ واضح خواهد بود که $x(t_۰) = x_۰$ و $y(t_۰) = y_۰$. اکنون a_k یا ۰ است یا ۱. اگر $a_k = ۰$، عدد نمایش‌داده‌شده با $۰/(۲a_k)(۲a_{k+۱})\ldots$ (پایهٔ ۳) بین ۰ و $\frac{۱}{۳}$ است، و لذا

$$f(۳^kt_۰) = f(۰/(۲a_k)(۲a_{k+۱})\ldots) = ۰;$$

اگر $a_k = ۱$، عدد نمایش‌داده‌شده با $۰/(۲a_k)(۲a_{k+۱})\ldots$ (پایهٔ ۳) بین $\frac{۲}{۳}$ و ۱ است و لذا $f(۳^kt_۰) = ۱$.

اکنون نشان می‌دهیم که خم پیوسته‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد که از هر نقطهٔ یک مربعْ دقیقاً یک بار بگذرد. اگر چنین خمی وجود می‌داشت، باید نمودارِ تابعِ یک به یکی می‌بود که دامنه‌اش بازه‌ای در $R_۱$، مثلاً $[۰, ۱]$، و بردش مربعی

در R_2 باشد. بنا بر قضیهٔ ص. ۱۰۲ این تابعْ وارونِ پیوسته‌ای دارد. چون هم تابع و هم وارونش این خاصیت را دارند که تصویرِ وارونِ مجموعه‌های باز باز است، این نیز درست است که تصویر مجموعه‌های باز باز است. در R_1 مجموعه‌های بازِ $(0, \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2}, 1)$ را در نظر بگیرید؛ بستارهای آنها دقیقاً یک نقطهٔ مشترک دارند. تصویرهای آنها در R_2 دو مجموعهٔ E_1 و E_2اند که اینها هم بازند، و غیر از یک نقطهٔ P بقیهٔ صفحه را پر می‌کنند. اگر همسایگی‌ای در E_1 و همسایگی‌ای در E_2 بگیریم، به وضوح می‌توانیم پاره‌خطی رسم کنیم که نقطه‌ای از یک همسایگی را به نقطه‌ای از همسایگیِ دیگر وصل کند و در مربع باقی بماند و از P نگذرد. به این ترتیب دو مجموعهٔ مجزا به دست می‌آوریم که هر دو بازند، و هیچ یک تهی نیستند، و یک پاره‌خط را می‌پوشانند. این همبندیِ R_1 را نقض می‌کند. پس خم پیوستهٔ فرضیِ ما نمی‌تواند وجود داشته باشد.

از طرف دیگر، در ۳§ نشان دادیم که بین هر بازه و هر مربع تناظر یک به یکی وجود دارد؛ با توجه به آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم، این تناظر نمی‌تواند پیوسته باشد.

قضیهٔ سودمندی که از ایدهٔ همگرایی یکنواخت استفاده می‌کند می‌تواند به نحو موجزی به این صورت بیان شود: از هر دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. به صورت دقیقتر، اگر f_nها توابعی باشند از یک بازهٔ حقیقیِ متناهیِ I به R_1، اگر روی I به‌طور یکنواخت $f_n \to f$، و اگر هر f_n روی I به معنای معمول (ریمان) انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_I f_n(x)dx \to \int_I f(x)dx\cdot$$

اثباتْ حاضر است اگر بدانیم که f انتگرال‌پذیر است: اگر $I = [a, b]$،

$$\begin{aligned}\left|\int_I f_n(x)dx - \int_I f(x)dx\right| &= \left|\int_I [f_n(x) - f(x)]dx\right| \\ &\leq \int_I |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq (b-a)\sup_x |f_n(x) - f(x)| \\ &\rightarrow ۰.\end{aligned}$$

همین اثبات نشان می‌دهد که دنبالهٔ انتگرالهای نامعینِ

$$\int_a^y f_n(x)dx$$

خود به‌طور یکنواخت همگراست. اگر هر f_n مثلاً پیوسته باشد، آنگاه f نیز پیوسته (ص. ۱۲۰) و لذا انتگرال‌پذیر است.

در حالت کلّی، نشان‌دادنِ اینکه حدِ یکنواختِ دنباله‌ای از توابعِ انتگرال‌پذیر انتگرال‌پذیر است مستلزمِ نظریهٔ انتگرالگیری‌ای است بیش از آنچه در این کتاب به آن می‌پردازیم. اثباتِ این مطلب در مورد انتگرال ریمان نیز نسبتاً کم بازده است، زیرا اگر در عوضْ از انتگرالهای لُبگ استفاده کنیم، قضیهٔ بسیار قویتری به‌دست می‌آوریم: اگر هر f_n انتگرال‌پذیر باشد (به معنای لبگ) و روی بازهٔ متناهیِ Iای به‌طور کراندار $f_n \rightarrow f$، آنگاه f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I f_n(x)dx \rightarrow \int_I f(x)dx.$$

حتی بیش از این نیز درست است: کافی است $|f_n(x)| \leq g(x)$ و g روی I انتگرال‌پذیر باشد. (در این حالت می‌گویند $\{f_n\}$ به‌طور مغلوب همگراست.) این یکی از دلایل ترجیحِ انتگرالگیریِ لبگ بر انتگرالگیریِ ریمان است.

با این حال، حتی ساده‌ترین حالت، که در آن دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرایی از توابع پیوسته داریم، کاربردهای جالبِ زیادی دارد. اکنون یکی از آنها.

فرض کنید f تابعی باشد با مشتقات از همهٔ مراتب، که در این صورت لزوماً همگیْ توابعی پیوسته‌اند (ص. ۱۵۰). فرض کنید که، مثلاً، $\lim_{n\to\infty} f^{(n)} = L$ به‌طور یکنواخت وجود داشته باشد؛ می‌توانیم به نحو معقولی L را یک مشتقِ f از مرتبهٔ بینهایت بخوانیم. چون از یک طرف

$$\int_a^x f^{(n)}(t)dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \to L(x) - L(a)$$

و از طرف دیگر

$$\int_a^x f^{(n)}(t)dt \to \int_a^x L(t)dt,$$

طبق قضیه‌مان در مورد انتگرال گرفتن از دنباله‌های به‌طور یکنواختْ همگرا به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^x L(t)dt = L(x) - L(a)$$

پس

$$L(x) = L'(x)$$

و لذا

$$L(x) = ce^x.$$

پس هر مشتق از مرتبهٔ بینهایت لزوماً یک تابعِ نماییِ ساده است[۲۵] (که شامل حالتی هم که متحد با صفر است می‌شود)، مستقل از اینکه چه تابعی موجِدِ آن باشد.

از همان قضیه در مورد همگراییِ یکنواخت اغلب برای اثبات قضیه‌ای در مورد مشتق‌گیریِ جمله به جمله از دنباله‌ای از توابع استفاده می‌شود. اگر توابع f_n روی بازهٔ Iای مشتقِ پیوسته داشته باشند، اگر به ازای aای در I، $\{f_n(a)\}$ همگرا باشد، و اگر $\{f'_n\}$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه f_n به‌طور یکنواخت به یک حد f همگراست که مشتق‌پذیر است، و $\lim f'_n = f'$.

تحت مفروضاتی که بیان کردیم، فرض کنید $f'_n \to g$. در این صورت

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

چون $f_n(a) \to f(a)$، نتیجه می‌شود که $f_n(x)$ به ازای هر x همگراست؛ در واقع

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a) \\
&\quad + f_n(a) - f_m(a)| \\
&\leq |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a)| \\
&\quad + |f_n(a) - f_m(a)| \\
&\to \left|\int_a^x g(t)dt - \int_a^x g(t)dt\right| = 0
\end{aligned}$$

لذا $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت همگراست. اکنون

$$f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$$

پس

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

پس f مشتق‌پذیر است و $f'(x) = g(x)$؛ این مطلب را دانسته گرفته‌ایم که مشتقِ انتگرالِ نامعینِ هر تابعِ پیوسته برابر انتگرالده است.

بعداً (ص. ۱۵۷) قضیهٔ کلّیتری ثابت خواهیم کرد که در آن برای f'_n هیچ پیوستگی‌ای فرض نشده است. در انجامِ این کار فایده‌ای هست، زیرا تابع fای می‌تواند در هر نقطه مشتق داشته باشد و مشتق، به مفهومِ ریمان یا لبگ، انتگرال‌پذیر نباشد. تابع تعریف‌شده با $f(x) = x^۲ \sin(۱/x^۲)$ به ازای $x \neq ۰$، و $f(۰) = ۰$، مثالی عرضه می‌کند که در مورد آن f' بیکران است و لذا به مفهوم ریمان انتگرال‌پذیر نیست؛ این تابع به مفهوم لبگ نیز انتگرال‌پذیر نیست.

تمرین ۱۷.۱. اگر f تابعی از $R_۱$ به $R_۱$ باشد که از تمام مراتب مشتق داشته باشد، و سریِ

$$\cdots + \int_۰^x dt \int_۰^t f(u)du + \int_۰^x f(t)dt + f(x) + f'(x) + \cdots$$

به‌طور یکنواخت همگرا باشد، مجموعِ آن چیست؟[۲۶]

کاربردهای مختلفِ ما از همگرایی یکنواخت تقریرهای دقیقی بوده‌اند در شرایطِ مختلف، از این اصل که در دنباله‌های به‌طور یکنواخت همگرا می‌توانیم جمله به جمله حد بگیریم. اکنون کاربردی دیگر.

تمرین ۱۷.۱آ. قضیهٔ تانِری[۲۶آ] را ثابت کنید: اگر به ازای هر n وقتی $k \to \infty$، $f_n(k) \to L_n$ و به ازای هر k، $|f_n(k)| \leq M_n$ که $\sum M_n$ همگراست، آنگاه اگر وقتی $k \to \infty$، $p = p(k) \to \infty$،

$$\lim_{k\to\infty} \{f_۱(k) + f_۲(k) + \cdots + f_p(k)\} = \sum_{n=۱}^{\infty} L_n.$$

تمرین ۱۷.۱ب. کاربرد: نشان دهید که

$$\lim_{k\to\infty}(۱+x/k)^k=\sum_{n=۰}^{\infty}x^n/n!.$$

وضعیتهای نسبتاً ساده‌ای وجود دارند که در آنها قضیهٔ ص. 108 در مورد انتگرالگیریِ جمله به جمله از دنباله‌های به‌طور یکنواخت همگرا کارا نیست. برای نمونه، $۱-x+x^۲-\cdots+(-x)^n=[۱-(-x)^{n+۱}]/(۱+x)$، و لذا اگر $|x|<۱$، $۱-x+x^۲-\cdots=۱/(x+۱)$. پس، به لحاظ صوری،

$$\begin{aligned}\log ۲&=\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x}=\int_۰^۱ dx-\int_۰^۱ xdx+\int_۰^۱ x^۲dx-\cdots\\&=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots.\end{aligned}$$

نمی‌توانیم این محاسبات را با قضیهٔ مربوط به همگراییِ یکنواخت توجیه کنیم. زیرا دنبالهٔ $\{f_n\}$ که $f_n(x)=[۱-(-x)^n]/(۱+x)$، روی $[۰,۱]$ به‌طور یکنواخت همگرا نیست (زیرا در ۱ همگرا نیست) و حتی روی $[۰,۱)$ هم به‌طور یکنواخت همگرا نیست. در واقع، اگر می‌بود، سوپریمومِ $|x^n|/(۱+x)$ روی $[۰,۱)$ وقتی $n\to\infty$، به صفر می‌گرایید؛ اما چون $|x|^n/(۱+x)\geq\frac{۱}{۲}|x|^n$، سوپریمومِ مورد بحث دست‌کم $\frac{۱}{۲}$ است و لذا نمی‌تواند به صفر بگراید. در این مورد توجیهِ نتیجهٔ محاسباتِ صوری بدون توسل به قضیهٔ مربوط به همگراییِ کراندار (که می‌توان آن را به‌کار بست چون $|[۱-(-x)^n]/(۱+x)|\leq ۲$) آسان است.

می‌بینیم که

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}-\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx,$$

$$\left|1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\log 2\right| \leq \left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1} \to 0.$$

این محاسبات توأماً نشان می‌دهد که $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ همگراست و مجموعِ آن $\log 2$ است.

در اینجا معقول است که خواننده حدس بزند که اگر انتگرالگیریِ صوری از دنباله‌ای همگرا نتیجه‌ای همگرا به‌دست دهد، این نتیجه لزوماً نتیجهٔ درست است. این حدس درست نیست، اگرچه چون اتفاقاً در مورد سریهای توانیْ درست است دادنِ مثال نقضی که تا حدی مصنوعی به نظر نرسد دشوار است. با این حال، اگر f_n تابعی باشد که به ازای $0 < x < 1/n$ با $f_n(x)=n$ و در جاهای دیگر با $f_n(x)=0$ تعریف شده است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر x، $f_n(x) \to 0$، در حالی که

$$\int_0^1 f_n(x)dx=1$$

لذا

$$\int_0^1 \lim f_n(x)dx \qquad \text{و} \qquad \lim \int_0^1 f_n(x)dx$$

هر دو وجود دارند و متفاوت‌اند.

تمرین ۱۷.۲. نمونه‌ای از همان پدیده با توابعِ پیوستهٔ f_n بیابید.

مشابهاً، نشان دادنِ اینکه

$$\frac{\pi - x}{۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad ۰ < x < \pi$$

چندان دشوار نیست (هرچند این کار را نخواهیم کرد). انتگرالگیریِ صوری به دست می‌دهد

$$\frac{۱}{۴}\pi^۲ = \int_۰^{\pi} \frac{\pi - x}{۲} dx = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} \int_۰^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ - \cos n\pi}{n^۲} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{(۲n + ۱)^۲}$$

لذا راه ساده‌ای برای جمعبندیِ سریِ عددیِ

$$\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \cdots$$

داریم. چون می‌توان نشان داد که سریِ اولیه به‌طور یکنواخت همگرا نیست، اثباتِ برآوردِ ما از سریِ عددی از چنگِ نظریهٔ مقدماتی می‌گریزد. از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که سریِ $\sum n^{-۱} \sin nx$ به‌طور کراندار همگراست، لذا قضیهٔ مربوط به انتگرالگیری از دنباله‌های به‌طور کراندار همگرا کفایت خواهد کرد.

۱۸. حدودِ نقطه‌ایِ توابع پیوسته.[۲۷]

تابعهای از بازه‌ای در $R_۱$ به $R_۱$ را در نظر می‌گیریم. اگرچه لازم نیست هر حدِ نقطه‌ایِ توابع پیوسته پیوسته باشد، معهذا، چنانکه اکنون خواهیم دید، این حد نمی‌تواند خیلی ناپیوسته باشد: نقاطِ پیوستگیِ آن باید دست‌کم مجموعه‌ای هیچ‌جاچگال تشکیل دهند. (پس، برای نمونه، تابعِ همه‌جا ناپیوستهٔ مذکور در ص. ۹۴، که از تابعهایی پیوسته با دو فرآیندِ حدیِ متوالی به دست آمده است، نمی‌تواند با یک فرآیند حدی که تنها متضمنِ توابع پیوسته باشد به‌دست آید.)

با مشاهدهٔ این مطلبْ آغاز می‌کنیم که اگر تابعِ fای در نقطهٔ xای ناپیوسته باشد، تصاویر همسایگیهای به‌دلخواه کوچک x قطرهای به‌دلخواه کوچک ندارند. یعنی عدد صحیح nای

هست که قطر تصویر هر همسایگیِ x دست‌کم $1/n$ است. (تصاویرِ همسایگیهای بزرگتر، در هر صورت، قطرهای بزرگتری دارند، لذا می‌توانیم به جای «همسایگیهای کوچک» بگوییم «هر همسایگی».) اکنون فرض کنید f در هر نقطه از بازه‌ای ناپیوسته باشد، و E_n را مجموعهٔ نقاط xای در این بازه بگیرید که به ازای آنها قطرِ تصویرِ هر همسایگیِ x دست‌کم $1/n$ باشد. چنانکه هم‌اکنون دیدیم، هر x به E_nای متعلق است. به‌علاوه، E_n مجموعهٔ بسته‌ای است. زیرا اگر y یک نقطهٔ حدیِ E_n باشد، هر همسایگیِ y شامل نقطهٔ xای از E_n است، و بنابراین حاوی یک همسایگی x است، و لذا قطر تصویر هر همسایگیِ y نیز دست‌کم $1/n$ است.

اکنون از قضیهٔ بئر استفاده می‌کنیم، که به ما می‌گوید که E_nای در یک زیربازهٔ J چگال است. چون E_n بسته است، E_n حاوی J است. یعنی بازهٔ Jای یافته‌ایم با این خاصیت که قطرِ تصویر هر زیربازهٔ J دست‌کم $1/n$ است. پس وجود چنین بازهٔ Jای نتیجه‌ای است از خاصیتِ ناپیوسته بودن در هر نقطه از یک بازه. اکنون نشان خواهیم داد که هیچ حدِ نقطه‌ایِ توابعِ پیوسته نمی‌تواند چنین بازه‌های Jای داشته باشد، و لذا نمی‌تواند در هر نقطه از بازه‌ای ناپیوسته باشد.

برد f را، که زیرمجموعه‌ای از R_1 است، می‌توان با تعدادی شمارا از بازه‌های $I_n = (a_n, b_n)$ پوشاند که طول هر یک کمتر از $1/n$ باشد. بیایید به H_nها، تصاویرِ وارونِ این I_nها، توجه کنیم. مجموعه‌های H_n جمعاً بازهٔ J را می‌پوشانند، اما هیچ یک از آنها نمی‌تواند حاوی زیربازه‌ای از J باشد، زیرا تصاویرِ زیربازه‌های J همگی قطرِ بزرگتر از $1/n$ دارند. از طرف دیگر، بنا بر قضیهٔ بئر یکی از H_nها در زیربازه‌ای از J چگال است. اگر می‌دانستیم که H_nها بسته‌اند تناقضی به‌دست می‌آوردیم، زیرا مجموعهٔ بسته‌ای که در بازه‌ای چگال باشد حاوی آن بازه است.

حتی وقتی که f حدِ نقطه‌ایِ توابعِ پیوسته باشد، دلیلی وجود ندارد که فرض کنیم H_nها بسته‌اند. با این حال، می‌توانیم نشان دهیم که هر H_n اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته است، و این خاصیت نیز همان کار را می‌کند. زیرا اگر H_nها این خاصیت را داشته باشند آنگاه، باز هم بنا بر کاربستِ دیگری از قضیهٔ بئر، یکی از این مجموعه‌های بسته در زیربازه‌ای از J چگال است، و لذا حاوی آن زیربازه است. چون مجموعه‌های بسته

زیرمجموعه‌های H_nاند، نتیجه می‌شود که H_n نیز حاوی زیربازه‌ای از J خواهد بود.

بدین گونه اثبات قضیه‌مان را به نشان دادنِ این تحویل کرده‌ایم که اگر f حدِ نقطه‌ایِ توابع پیوستهٔ f_k باشد، مجموعه‌های H_n اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته‌اند. به یاد می‌آوریم که H_n تصویر وارونِ بازهٔ (a_n, b_n) تحتِ f است؛ یعنی H_n مجموعهٔ نقاطِ xای است که $a_n < f(x) < b_n$. xای در H_n در نظر بگیرید. در این صورت اگر j به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $a_n + ۱/(۲j) \leq f(x) \leq b_n - ۱/(۲j)$، زیرا $a_n < f(x) < b_n$. چون $f_k(x) \to f(x)$، پس به ازای همهٔ kهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $a_n + ۱/j \leq f_k(x) \leq b_n - ۱/j$. $E_{k,j}$ را مجموعه‌ای بگیرید که این نابرابریِ آخر روی آن برقرار است، و $F_{m,j}$ را اشتراکِ $E_{m,j}$، $E_{m+۱,j}$، $E_{m+۲,j}$ و غیره بگیرید. مجموعه‌های $E_{k,j}$ بسته‌اند زیرا f_k پیوسته است (اینها تصاویر وارونِ بازه‌های بسته‌اند)، و مجموعه‌های $F_{m,j}$ که اشتراکِ مجموعه‌های بسته‌اند بسته‌اند. هم‌اکنون دیدیم که اگر x در H_n باشد، آنگاه x در یک $F_{m,j}$ است. یعنی H زیرمجموعه‌ای از اجتماع همهٔ $F_{m,j}$هاست. از طرف دیگر، اگر x در $F_{m,j}$ای باشد آنگاه به ازای یک j و همهٔ kهای به اندازهٔ کافی بزرگ، $a_n + ۱/j \leq f_k(x) \leq b_n - ۱/j$؛ چون $f_k(x) \to f(x)$، این ایجاب می‌کند که $a_n + ۱/j \leq f(x) \leq b_n - ۱/j$ و لذا $x \in H_n$. پس H_n دقیقاً اجتماعِ همهٔ $F_{m,j}$ها به ازای همهٔ اعداد صحیح مثبتِ m و j است، لذا در نمایش H_n به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته موفق شده‌ایم. این چیزی است که برای کامل کردنِ اثبات لازم داشتیم.

تنها اصلاحاتِ اندکی در اثباتْ نشان می‌دهد که نقاط پیوستگیِ هر حدِ توابعِ پیوسته، در هر مجموعهٔ بی‌کاستِ ناتهیْ همه‌جاچگال است. می‌توان نشان داد که در این شکلْ شرطْ برگشت‌پذیر است: هر تابع را که نقاط پیوستگیش در هر مجموعهٔ بی‌کاستِ ناتهیْ همه‌جاچگال باشد می‌توان به صورت یک حدِ توابعِ پیوسته نمایش داد.

بئر حدهای ناپیوستهٔ توابع پیوسته را از ردهٔ ۱ نامید؛ حدهایی از توابع ردهٔ ۱ را، که خود از ردهٔ ۱ نباشند، از ردهٔ ۲؛ و به همین ترتیب. توابعی هستند که به هیچ ردهٔ بئر متعلق نیستند.

نمونهٔ جالبی از تابعی از ردهٔ ۱ بئر، هر تابعِ ناپیوسته‌ای روی $R_۲$ است که روی هر خطِ

موازی با هر محور مختصاتْ پیوسته باشد.[۲۷] آ

تمرین ۱۸.۱. نمونه‌ای از چنین تابعی بسازید.

جالب است که اگرچه تنها حکم کردیم که مجموعهٔ نقاط پیوستگیِ هر حدِ نقطه‌ایِ توابعِ پیوسته همه‌جاچگال است، بیش از این نیز درست است: نقاط ناپیوستگیِ آنها باید تنها مجموعه‌ای از مقولهٔ اول تشکیل دهند. این خاصیتْ واقعاً مستقل از این مطلب است که توابعِ مورد بحث حدهای نقطه‌ایِ توابعِ پیوسته‌اند. در واقع، نشان خواهیم داد که هر تابع حقیقی‌مقدارِ f که دامنه‌اش بازه‌ای در $R_۱$ باشد، اگر در نقاطِ مجموعه‌ای همه‌جاچگالْ پیوسته باشد، پیوسته است مگر روی مجموعه‌ای از مقولهٔ اول.

مجموعه‌های E_n از نقاطِ xای را در نظر بگیرید که دنبالهٔ $\{y_k\}$ای وجود داشته باشد که حدش x باشد و این خاصیت را داشته باشد که $|f(y_k) - f(x)| < ۱/n$. هر نقطهٔ ناپیوستگیْ در یک E_n است؛ یعنی مجموعهٔ نقاطِ ناپیوستگی در اجتماعِ E_nهاست. چون تعداد شمارایی E_n وجود دارد، قضیه‌مان اثبات شده است اگر نشان دهیم که هر E_n هیچ‌جاچگال است. اگر E_nای هیچ‌جاچگال نباشد، یک نقطهٔ x که f در آن پیوسته است یک نقطهٔ حدیِ E_n خواهد بود. اگر δی مثبتی انتخاب کنیم که $|y - x| < \delta$ ایجاب کند $|f(y) - f(x)| < ۱/(۲n)$ را، و سپس نقطهٔ wای از E_n انتخاب کنیم که $|w - x| < \frac{۱}{۲}\delta$، و y_kها را نقاطی بگیریم که در تعریفِ E_n وجود دارند، به ازای kی به‌اندازهٔ کافی بزرگ به‌دست می‌آوریم

$$|f(y_k) - f(w)| \leq |f(y_k) - f(x)| + |f(x) - f(w)| < ۱/n$$

که تعریفِ E_n را نقض می‌کند.

۱۹. تقریبهای توابع پیوسته. دیده‌ایم (§۱۰) که تابعی از $R_۱$ به $R_۱$ حتی اگر پیوسته باشد، نمودارش ممکن است بسیار نامنظم باشد، دست‌کم آن‌قدر که در هر بازه نوسان داشته باشد. از طرف دیگر، همواره تابعِ کاملاً هموراری هست که نمودارش

به نمودارِ تابعِ پیوستهٔ داده‌شده‌ای بسیار نزدیک است. به صورت دقیقتر، اگر دامنهٔ تابع پیوسته‌ای بازهٔ فشرده‌ای باشد، می‌توانیم تابعی پله‌ای، یا یک تابع چندضلعیِ پیوسته، یا یک چندجمله‌ای بیابیم که، هرقدر بخواهیم، به تابع نزدیک باشد. تابعِ پله‌ایْ نموداری دارد که از تعدادی متناهی پاره‌خطِ افقی تشکیل شده است؛ تابع چندضلعیْ نموداری دارد که از تعدادی متناهی پاره‌خط با جهت دلخواه (غیر قائم) تشکیل شده است. در اینجا «هرقدر نزدیک که بخواهیم» باید با متریکِ فضای B معنا شود. به عبارت دیگر، اگر f تابع پیوسته‌ای باشد، و ϵ عدد مثبت داده‌شده‌ای باشد، یک تابع پله‌ایِ $f_۱$، یک تابع چندضلعیِ پیوستهٔ $f_۲$، و یک چندجمله‌ای $f_۳$ وجود دارند که به ازای همهٔ xهای بازهٔ مورد بحث، $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$، $k = ۱, ۲, ۳$.

خاصیتی که این تقریبها را شدنی می‌سازد پیوستگیِ یکنواخت خوانده می‌شود. تابع f در x پیوسته است اگر وقتی ϵ مثبتی داده شده باشد، δی مثبتی باشد که اگر $|x - y| < \delta$، $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. در اینجا در حالت کلّی وقتی xهای مختلفی را در نظر می‌گیریم باید δهای کوچکتر و کوچکتری اختیار کنیم. اگر (به ازای f داده‌شده‌ای) همواره ممکن باشد δای یافت که همزمان برای همهٔ xهای متعلق به مجموعهٔ داده‌شده‌ای نتیجه‌بخش باشد، گفته می‌شود که تابعِ f روی آن مجموعه به‌طور یکنواخت پیوسته است. اکنون نشان می‌دهیم که هر تابع پیوسته روی هر مجموعهٔ فشرده در دامنه‌اش به‌طور یکنواخت پیوسته است. در واقع، این قضیه را در شرایط کلّیتری اثبات خواهیم کرد: هر تابع پیوسته‌ای که دامنه و بردش در فضاهای متریکی باشد، روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ S از دامنه‌اش به‌طور یکنواخت پیوسته است.

برای اثبات این قضیه، فرض کنید ϵ عدد مثبتی باشد و به x ابتدا همسایگیِ Nای وابسته کنید که به ازای هر y در N، $d(f(x), f(y)) < \epsilon$، و بعد همسایگیِ Mای به مرکزِ x و نصفِ شعاعِ N. همسایگیهای M S را می‌پوشانند، و چون S فشرده است، تعدادی متناهی از آنها نیز S را می‌پوشانند. فرض کنید این همسایگیهای پوشاننده $M_۱$، $M_۲$، ...، M_n باشند. δ را کوچکترینِ شعاعهای M_kها بگیرد. اکنون فرض کنید x و y دو نقطه از S باشند که $d(x, y) < \delta$. چون x در M_kای است، نقطهٔ zای هست که مرکزِ M_kای است که x در آن قرار دارد. پس $d(y, z) \leq d(x, z) + \delta$.

چون δ کوچکترینِ شعاعهای M_kهاست، این نابرابری نشان می‌دهد که y در M_kای است که مرکزِ آن z است. پس بنا بر روشی که M_kها ساخته شدند،

$$d(f(x), f(z)) \leq \epsilon$$

و

$$d(f(y), f(z)) \leq \epsilon$$

لذا بنا بر نابرابریِ مثلث،

$$d(f(x), f(y)) \leq ۲\epsilon.$$

تمرین ۱۹.۱. آیا تابع پیوستهٔ fای می‌تواند روی $۰ < x \leq ۱$ توأماً به‌طور یکنواخت پیوسته و بیکران باشد؟

تمرین ۱۹.۲. اگر f به ازای $x \geq ۰$ پیوسته باشد و وقتی $x \to +\infty$، $f(x) \to L$ (حدْ متناهی است)، آیا f باید به ازای $x \geq ۰$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد؟

تمرین ۱۹.۳. نشان دهید که اگر f به ازای $x \geq ۰$ پیوسته باشد و وقتی $x \to +\infty$، $f(x) - x \to L$ (حدْ متناهی است)، آنگاه f روی $x \geq ۰$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

تمرین ۱۹.۴. اگر f به ازای $x \geq ۰$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد، آیا باید وقتی $x \to +\infty$، f به حدی متناهی یا نامتناهی بگراید؟

اکنون سه تابع تقریب‌زننده‌ای را که قبلاً به وجودشان حکم کردیم می‌سازیم.

فرض کنید S یک بازهٔ فشردهٔ $[a, b]$ در $R_۱$ باشد. نقداً S را با تعدادی متناهی بازه (M_kهای اثباتِ قبل) پوشانده‌ایم، که روی هر یک از آنها تابع داده‌شدهٔ f کمتر از ϵ تغییر می‌کند، و می‌خواهیم تابع پله‌ایِ $f_۱$ای بسازیم که به ازای هر x، $f_۱(x)$ با $f(x)$ کمتر از

ϵ تفاوت داشته باشد. M_kها (که بازه‌های بازی هستند) لزوماً تداخل می‌کنند. اگر تداخل نمی‌کردند، می‌توانستیم $f_1(x)$ را برابرِ $f(x_k)$ بگیریم که x_k نقطهٔ میانیِ M_k است، پس به طریقهٔ دستگاهمندی برای کنارگذاشتنِ قطعه‌های متداخل نیاز داریم. روشی سرراست اما تا حدی ناظریف این است. M_kای (محتملاً بیش از یکی) نقطهٔ a را می‌پوشانَد. همهٔ اینها را غیر از یکی که میزانِ بیشتری به سمت راست گسترش می‌یابد کنار بگذارید، و آن را N_1 بخوانید. اگر N_1 شامل b باشد دست نگاه دارید. در غیر این صورت M_kای هست که با N_1 تداخل می‌کند و میزان بیشتری به سمت b گسترش می‌یابد. قسمت متداخل (غیر از نقطهٔ انتهاییِ چپِ آن) را کنار بگذارید، و بازهٔ (نیم‌باز) تقلیل‌یافته را N_2 بخوانید. اگر N_2 شامل b باشد دست نگاه دارید. در غیر این صورت به همین روش ادامه دهید. این فرآیندْ متوقف می‌شود زیرا در آغاز تنها تعدادی متناهی M_k وجود داشت، و تعدادی متناهی N_j به دست می‌آوریم که S را می‌پوشانند. چون هر N_j زیرمجموعهٔ M_kای است، $f(x)$ روی هر N_j کمتر از ϵ تغییر می‌کند. نتیجتاً، اگر روی N_j تعریف کنیم $f_1(x) = f(x_j)$، که x_j (مثلاً) مرکزِ M_kای است که N_j از آن به‌دست آمده است، آنگاه روی S، $|f_1(x) - f(x)| < \epsilon$.

برای ساختنِ تقریبِ چندضلعیِ f_2، انتهای پله‌های f_1 را به میزان کوچکی کوتاه کنید، و سپس نقطهٔ انتهاییِ هر پلهٔ تقلیل‌یافته را با پاره‌خطی به نقطهٔ انتهایی چپِ پلهٔ تقلیل‌یافتهٔ بعدی وصل کنید.

ساختِ تقریب چندجمله‌ایِ f_3 تا حدی دشوارتر است.[۲۸] یک روشْ چنین است. می‌توانیم، صرفاً برای ساده کردنِ فرمولها، فرض کنیم که دامنهٔ تابعِ پیوستهٔ داده‌شده‌مان یک بازهٔ $[h, 1-h]$ است، که $0 < h < 1$. می‌توانیم تابعمان را به روش ساده‌ای گسترش دهیم طوری که تابعِ گسترش‌یافتهٔ f روی R_1 پیوسته باشد و خارج از $(\frac{1}{2}h, 1-\frac{1}{2}h)$ صفر باشد. اکنون تابع I تعریف‌شده با

$$I(x) = c_n \int_0^1 f(t)[1-(x-t)^2]^n dt$$

را در نظر بگیرید که

$$\frac{۱}{c_n} = \int_{-۱}^{۱} (۱ - t^۲)^n dt \cdot$$

آشکارا I چندجمله‌ای با درجهٔ $۲n$ است. عاملی در انتگرالده که درکروشه است در $t = x$ حداکثر است و (وقتی n بزرگ باشد) وقتی t نزدیکِ x نباشد کوچک است، لذا ممکن است معقول به نظر آید که $I(x)$ باید نزدیک $f(x)$ باشد. اکنون نشان می‌دهیم که واقعاً این‌طور است.

می‌توانیم بنویسیم

$$I(x) = c_n \int_{x-۱}^{x} f(x - s)(۱ - s^۲)^n ds$$

و چون وقتی $t < ۰$ یا $t > ۱$، $f(t) = ۰$، این همان

$$I(x) = c_n \int_{-۱}^{۱} f(x - s)(۱ - s^۲)^n ds$$

است. بعد، به سببِ روشی که c_n تعریف شده است، می‌توانیم بنویسیم

$$I(x) - f(x) = c_n \int_{-۱}^{۱} [f(x - s) - f(x)](۱ - s^۲)^n ds.$$

اکنون انتگرال را به سه بخشِ

$$I_۱ = c_n \int_{-۱}^{-\delta}, \qquad I_۲ = c_n \int_{-\delta}^{\delta}, \qquad I_۳ = c_n \int_{\delta}^{۱}$$

تقسیم می‌کنیم، که $۱ > \delta > ۰$ و δ به زودی انتخاب خواهد شد.

در اینجا از پیوستگیِ یکنواختِ f استفاده می‌کنیم. اگر ϵ عدد مثبتِ دلخواهی باشد می‌توانیم δای بیابیم آن‌قدر کوچک که اگر $|s| < \delta$، $|f(x - s) - f(x)| < \epsilon/۳$، که نابرابری با δی واحدی به ازای همهٔ xها برقرار باشد. از این نابرابری برای برآوردِ $I_۲$ استفاده می‌کنیم:

$$|I_۲| \leq \frac{۱}{۳}\epsilon c_n \int_{-\delta}^{\delta} (۱ - s^۲)^n ds$$

$$< \frac{۱}{۳}\epsilon c_n \int_{-۱}^{۱} (۱ - s^۲)^n ds = \epsilon/۳ \cdot$$

اکنون، چون f روی مجموعهٔ فشرده‌ای پیوسته است، کراندار است، مثلاً $|f(x)| \leq M$.
در $I_۳$، $(۱-s^۲)^n \leq (۱-\delta^۲)^n$، در حالی که

$$۱.c_n = \int_{-۱}^{۱}(۱-t^۲)^n dt \geq \int_{۰}^{\delta/۲}(۱-t^۲)^n dt \geq \frac{۱}{۲}\delta(۱-\frac{۱}{۴}\delta^۲)^n.$$

پس

$$|I_۳| \leq ۲c_n M \int_{\delta}^{۱}(۱-s^۲)^n ds$$

$$\leq ۴M\delta^{-۱}(۱-\delta)(۱-\delta^۲)^n(۱-\frac{۱}{۴}\delta^۲)^{-n}.$$

چون $(۱-\delta^۲)/(۱-\frac{۱}{۴}\delta^۲) < ۱$، این برآورد نشان می‌دهد که وقتی $n \to \infty$، $I_۳ \to ۰$. دقیقاً همین استدلال در مورد $I_۱$ به‌کار می‌آید. با به اندازهٔ کافی بزرگ گرفتنِ n نتیجه می‌گیریم که $|I_۱|$ و $|I_۳|$ کمتر از $\epsilon/۳$اند. پس

$$|I(x)-f(x)| \leq |I_۱| + |I_۲| + |I_۳| \leq \epsilon$$

مشروط بر اینکه n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. پس اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. چندجمله‌ایِ I تقریبِ $f_۳$ را متکفل می‌شود.

قابلیتِ تقریب زدنِ توابعِ پیوسته با چندجمله‌ایها کاربردهای زیادی دارد. از این خاصیت در ص. ۸۵ در اثبات وجود توابعِ پیوستهٔ هیچ‌جامشتق‌پذیر استفاده شد. اکنون کاربردی دیگر.

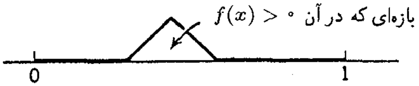
فرض کنید f تابع پیوسته‌ای روی بازهٔ $[a,b]$ باشد. مقادیرِ $\int_a^b f(x)x^n dx$، $n = ۰,۱,۲,\ldots$ را گشتاورهای f می‌خوانند. نشان خواهیم داد که هر تابعِ پیوسته با دامنهٔ فشرده‌ای در $R_۱$ با گشتاورهایش مشخص می‌شود؛ یعنی دو تابعِ پیوسته با دنبالهٔ واحدی از گشتاورها یکی‌اند. (دربارهٔ اینکه چگونه عملاً می‌توان تابع پیوسته‌ای را از روی گشتاورهایش محاسبه کرد چیزی نمی‌گوییم.) این حکمِ معادلی است که تابعِ پیوسته‌ای که گشتاورهایش صفر باشد باید متحداً صفر شود، و ما اکنون این را اثبات می‌کنیم. فرض کنید که همهٔ

گشتاورهای f صفر باشند. بدون کاستن از کلّیت، فرض می‌کنیم $a = ۰$ و $b = ۱$. اگر f متحداً صفر نباشد، در بازه‌ای مثبت (یا منفی) است، و می‌توانیم تابع پیوستهٔ gای بسازیم که خارج از این بازه صفر باشد و $\int_۰^۱ fgdx = ۲h > ۰$. (شکل را ببینید.) چندجمله‌ایِ Pای بسازید که $|g(x) - P(x)| < h/\max|f(x)|$. در این صورت

$$\int_۰^۱ fPdx = \int_۰^۱ fgdx - \int_۰^۱ f\cdot(g-P)dx$$

$$\geq ۲h - \max|f(x)|\cdot\max|g(x) - P(x)| > h.$$

اما $\int_۰^۱ fPdx = ۰$ زیرا تمام گشتاورهای f صفرند. تنها با متحداً صفر بودنِ f می‌توان از تناقض جلوگیری کرد. به‌عنوان فرعی بر قضیهٔ مربوط به گشتاورها، مشاهده می‌کنیم که



نمودارِ g

مجموعهٔ همهٔ توابعِ پیوسته را می‌توان در تناظرِ یک به یک با رده‌ای از دنباله‌های اعداد حقیقی قرار داد، زیرا توابع پیوستهٔ مختلفْ دنبالهٔ گشتاورهای مختلفی دارند. چون تعداد دنباله‌های اعداد حقیقی همان تعداد اعداد حقیقی است (تمرین ۳.۱۰)، نتیجه می‌شود که دقیقاً همان تعداد تابع پیوسته وجود دارد که عدد حقیقی هست. (یک راه سرراست‌ترِ دیدنِ این مطلب توجه به این است که هر تابعِ پیوسته با مقادیرش در نقاطِ گویا، یعنی با دنباله‌ای از اعداد حقیقی، مشخص می‌شود.)

خاصیت پیوستگیِ یکنواخت در توجیه جا به جا کردنِ عملگرهای حدی در حسابان نیز سودمند است. برای نمونه، فرض کنید f تابعِ پیوسته‌ای با دامنهٔ در $R_۲$ باشد و فرض کنید که به ازای هر x در بازه‌ای، $f(x,b) = L$ (مستقل از x)؛ یعنی تابع در طولِ پاره‌خطِ افقیِ $y = b$ ثابت باشد. در این صورت این لزوماً درست نیست که به ازای هر x وقتی $y \to b$ مشتق جزئیِ $\partial f/\partial x$ (محاسبه‌شده در (x,y)) به صفر می‌گراید. (مثال:

$f(x,y) = y\sin(1/(xy))$، $f(x,0) = 0$، $b = 0$، $L = 0$؛ مقدارِ $\partial f/\partial x$ در (x,y) برابرِ $-x^{-2}\cos(1/(xy))$ است، که به حدی نمی‌گراید.) یعنی نمی‌توانیم لزوماً بگوییم که

$$\lim_{y\to b}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{y\to b}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,b)-f(x,b)}{h}.$$

با این حال، می‌توانیم در هر همسایگیِ یک نقطهٔ (a,b) که در آن $\partial f/\partial x$ تابعی پیوسته باشد چنین حکم کنیم (پیوسته یعنی پیوسته به‌عنوان تابعی که دامنه‌اش همسایگی‌ای در R_2 است، نه صرفاً «پیوسته در x به ازای هر y و پیوسته در y به ازای هر x»؛ دومی تنها به معنای پیوستگیِ (در R_1) تحدیدهای f به‌خطوطِ موازیِ محورهای مختصات است). اثبات بر پیوستگیِ یکنواختِ $\partial f/\partial x$ متکی است. نخست، $\partial f/\partial x$ در هر (x,b) مقدارِ 0 دارد زیرا $f(x,b) = L$. سپس، طبق قانونِ میانگین،

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+h',y)$$

که h' بین 0 و h است. سرانجام، $\partial f/\partial x$، محاسبه‌شده در $(x+h',y)$، به میزانِ به دلخواه کوچکی با $\partial f/\partial x$، محاسبه‌شده در (x,b) (که در آن 0 است)، تفاوت دارد مشروط بر اینکه h (و لذا h') و $|y-b|$ به اندازهٔ کافی به 0 نزدیک باشند.

۲۰. توابع خطی. تابع fای راکه دامنه‌اش R_1 باشد خطی می‌گویند اگر به ازای همهٔ x و yها $f(x+y) = f(x)+f(y)$. (این کاربردِ اصطلاحِ خطی خاصتر از آنی است که اغلب به کار می‌رود: وقتی $b \neq 0$، تابع f تعریف‌شده با $f(x) = ax+b$ به مفهومِ مورد نظر ما خطی نیست.) آشکارا اگر $f(x) = ax$ آنگاه f خطی است، و ممکن است پیش‌بینی کنیم که همهٔ توابعِ خطیْ به این شکل‌اند؛ اما همهٔ آنها چنین نیستند. برای نشان دادنِ یکی که چنین نباشد، باید به یکی از خواصِ‌غامضترِ دستگاهِ اعداد حقیقی متوسل شویم، که متکی بر ایده‌هایی است که در این کتابْ معرفی نشده‌اند.[۲۹] چیزِ دیگری

هم که بی‌تأملْ واضح نیست، ولی به زودی ثابت خواهیم کرد، این است که هر تابعِ خطیِ ناپیوسته لزوماً به نحو سرکشی ناپیوسته است: این تابع، برای نمونه، در هر بازه بیکران است، و در واقع نمودارش باید در R_2 همه‌جاچگال باشد. تنها باید انتظار داشت که هیچ روش ساختِ بسیار ساده‌ای تابعی از این نوع به‌دست ندهد.

بگذارید یک تابع خطیِ f را بررسی کنیم. به ازای هر x، $f(2x) = f(x+x) = 2f(x)$، و لذا به استقراء، به ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، $f(nx) = nf(x)$. چون $f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$، $f(0) = 0$. چون $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$، $f(-x) = -f(x)$. بنابراین به ازای هر عدد صحیح، مثبت یا منفی، $f(nx) = nf(x)$. با جایگزین کردنِ x با x/n به‌دست می‌آوریم $f(x) = nf(x/n)$ ، یا $f(x/n) = n^{-1}f(x)$. اکنون x را با mx جایگزین می‌کنیم، و به‌دست می‌آوریم $f(mx/n) = n^{-1}f(mx) = (m/n)f(x)$. به عبارت دیگر، به ازای هر عدد گویای r، $f(rx) = rf(x)$. به‌ویژه به ازای هر عدد گویای r (قرار دهید $x = 1$)، $f(r) = rf(1)$. نتیجه می‌شود که اگر f به ازای همهٔ xها پیوسته باشد آنگاه به ازای همهٔ xها $f(x) = xf(1)$.

می‌توانیم به آسانی با نشان دادنِ اینکه به ازای همهٔ xها $f(x) = xf(1)$، تنها مشروط بر اینکه f در یک نقطهٔ c پیوسته باشد، این نتیجه را تقویت کنیم. زیرا اگر $a < c < b$، نتیجه می‌گیریم وقتی $\delta \to 0$، $f(c+\delta) - f(c) \to 0$؛ اما $f(c+\delta) - f(c) = f(\delta)$، لذا وقتی $\delta \to 0$، $f(\delta) \to 0$. یعنی f در 0 پیوسته است. اکنون اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، وقتی $\delta \to 0$، $f(x+\delta) - f(x) = f(\delta) \to 0$، لذا f در x پیوسته است. بدین ترتیب f در سراسر R_1 پیوسته است، و می‌دانیم که این نتیجه می‌دهد که $f(x) = xf(1)$.

می‌توانیم باز هم در ضعیف کردنِ فرض پیشتر رویم و با این همه بتوانیم ثابت کنیم که هر تابعِ خطیْ پیوسته است. تنها فرض کنید f روی بازه‌ای، یا حتی روی مجموعهٔ Eای با این خاصیت، کراندار باشد: مجموعهٔ همهٔ فواصلِ $|x-y|$ بین نقاطِ x و yی E حاوی یک همسایگیِ 0 است. یعنی δی مثبتی هست که اگر $|t| < \delta$ آنگاه نقاط x و yای در E هست که $x - y = t$. در این صورت باز هم می‌توانیم نتیجه بگیریم[30]

که f پیوسته است اگر خطی باشد، و لذا هر تابع خطی f که روی مجموعه‌ای از نوعی که هم‌اکنون توصیف شد کراندار باشد باید به شکلِ $f(x) = cx$ باشد.

فرض کنید روی E، $|f(x)| \le M$. به ازای اعداد tای که فاصلهٔ بین نقاطِ E باشند، $|f(t)| = |f(x-y)| = |f(x) - f(y)| \le ۲M$. بنابراین اگر $|u| < \delta/n$، نتیجه می‌گیریم $|f(u)| = n^{-۱}|f(nu)| \le ۲M/n$. اکنون فرض کنید s عددی حقیقی باشد، و r را عدد گویایی بگیرید که $|r - s| < \delta/n$. در این صورت

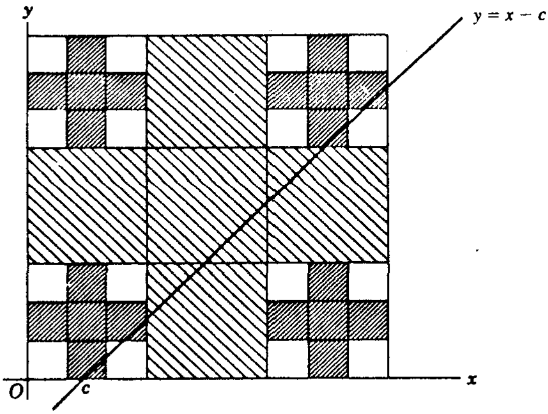
$$|f(s) - sf(۱)| = |f(s-r) + (r-s)f(۱)|$$

$$\le ۲M/n + \delta|f(۱)|/n\cdot$$

چون n می‌تواند هر قدر که بخواهیم بزرگ باشد، به‌دست می‌آوریم $f(s) - sf(۱) = ۰$.

غیراز بازه‌ها، مجموعه‌های Eی زیادی وجود دارند که خاصیتِ استفاده‌شده در این اثبات را دارند. اینها در برگیرندهٔ مجموعه‌های معروف به مجموعه‌های با اندازهٔ مثبت (که برای آن باید به آثار مربوط به انتگرالگیریِ لُبگ ارجاع دهیم)، و بعضی مجموعه‌های با اندازهٔ ۰اند. برای نمونه، مجموعهٔ کانتور (ص. ۵۲) این خاصیت را دارد. اثباتِ این مطلب را می‌توان به شکل هندسیِ بسیار شهودی‌ای ارائه کرد.[۳۱] در $R_۲$ دستگاه مختصات معمولی را می‌گیریم و روی هر دو محورِ x و y مجموعه‌های کانتور را روی بازهٔ $[۰, ۱]$ می‌سازیم، و از صفحه نه فقط یک‌سوم‌های میانیِ بازه‌ها، بلکه همچنین همهٔ نقاطی از مربعِ واحد را که (دست‌کم) یکی از مختصاتشان در بازهٔ حذف‌شده‌ای است برمی‌داریم، لذا در هر مرحله چند مجموعهٔ صلیب‌شکل را برمی‌داریم. خطی با معادلهٔ $y = x + c$ در نظر بگیرید، که $۰ \le c \le ۱$. در هر مرحله این خط حداقل یکی از مربعهایی را که در این مرحله حذف نشده است قطع می‌کند؛ این مربعها بسته‌اند، و تو در تو، و لذا اشتراکشان شامل نقطهٔ (x, y)ای است که $y = x + c$، و x و y هر دو نقاطی از مجموعهٔ کانتورند.

برای نشان دادنِ[۳۲] اینکه در مورد تابعهای خطیِ fای که نمودارشان در $R_۲$ هیچ‌جاچگال نیست $f(x) = cx$، می‌توانیم به مطلبِ مقدماتی‌ای از نظریهٔ اعداد متوسل شویم. فرض کنید $(x_۱, x_۲)$ و $(y_۱, y_۲)$ دو جفت عدد حقیقی باشند که متناسب نیستند؛



این یعنی اینکه $x_1y_2 \neq x_2y_1$، یا اینکه به زبان هندسیْ نقاطِ (x_1, x_2) و (y_1, y_2) از R_2 روی خطِ مستقیمِ واحدی که از مبدأ گذرد نیستند. در این صورت اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، می‌توانیم ضرایب گویای r_1 و r_2ای بیابیم که $r_1x_1 + r_2x_2$ هر قدر بخواهیم به a نزدیک باشد و همزمان $r_1y_1 + r_2y_2$ هر قدر بخواهیم به b نزدیک باشد. برای اثباتِ این، معادلاتِ $ux_1 + vx_2 = a$ و $uy_1 + vy_2 = b$ را حل می‌کنیم (چون دترمینانِ آنها صفر نیست)، و سپس r_1 و r_2 را به‌ترتیب نزدیک به u و v انتخاب می‌کنیم.

اکنون فرض کنید که f خطی باشد و به شکل $f(x) = ax$ نباشد. فرضِ دوم نتیجه می‌دهد که باید بتوانیم نقاطِ x_1 و x_2ای بیابیم که $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. پس به ازای هر نقطهٔ (a, b) در R_2 می‌توانیم اعدادِ گویای r_1 و r_2ای بیابیم که $f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2)$ به اندازهٔ به‌دلخواه کوچک با b اختلاف داشته باشد، و همزمانِ $r_1x_1 + r_2x_2$ به اندازهٔ به‌دلخواه کوچک با a اختلاف داشته باشد. پس نقطه‌ای از نمودارِ f هست که هر قدر بخواهیم به نقطهٔ (a, b) از R_2 نزدیک است.

می‌توان به این صورت اثباتِ دیگری ارائه کرد که بصیرتِ بیشتری دهد. فرض کنید که f خطی باشد اما به شکل $f(x) = cx$ نباشد. چون $f(r + t) = f(r) + f(t)$

و به ازای rهای گویا $f(r)=cr$، کافی است نشان داد که f، در فاصلهٔ به‌دلخواه نزدیک از مبدأ، مقادیرِ به‌دلخواه نزدیک به هر عدد حقیقی، یا، معادل با این، به‌دلخواه نزدیک به هر عدد گویا، را می‌گیرد. فرض کنید A عدد گویای مثبتی باشد و $\epsilon(<۱)$ عدد مثبتی که از آن برای مشخص کردنِ نزدیکی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که f در $(۰,\epsilon)$ بیکران است؛ برای مشخص بودن، فرض کنید که f در آنجا مقادیر مثبتِ به‌دلخواه بزرگ را بگیرد. در این صورت یک عدد صحیح n بزرگتر از A/ϵ وجود دارد که به ازای sای در $(۰,\epsilon)$، $n+۱\geq f(s)\geq n$. چون به ازای همهٔ اعداد گویای r و همهٔ xها $f(rx)=rf(x)$، به‌دست می‌آوریم $f(As/n)=(A/n)f(s)$، لذا $A+\epsilon>A(n+۱)/n\geq f(As/n)\geq A$، و As/n نقطه‌ای از بازهٔ $(۰,\epsilon)$ است. بنابراین نقطه‌ای به‌دلخواه نزدیک به ۰ ساخته‌ایم که در آن اگر $A>۰$، f مقداری به‌دلخواه نزدیک به A می‌گیرد. اگر $A<۰$، نقطه‌ای نزدیک به ۰ هست که در آن f مقداری نزدیک به $-A$ می‌گیرد، و چون $f(-x)=-f(x)$، همان نتیجه به‌دست می‌آید.

اینک کاربردی از قضایایمان دربارهٔ توابع خطی در حسابان.[۳۳] فرض کنید که حدِ

$$\lim_{R\to\infty}\frac{۱}{۲R}\int_{x-R}^{x+R}f(u)du$$

به ازای هر x حقیقی وجود داشته باشد؛ آن را با $\phi(x)$ نشان دهید. اکنون نشان خواهیم داد که $\phi(x)$ لزوماً به شکلِ $ax+b$ است. نخست،

$$\int_{(x-h)-R}^{(x-h)+R}f(u)du+\int_{(x+h)-R}^{(x+h)+R}f(u)du$$
$$=\int_{x-(R+h)}^{x+(R+h)}f(u)du+\int_{x-(R-h)}^{x+(R-h)}f(u)du$$

و لذا $\phi(x-h)+\phi(x+h)=۲\phi(x)$. اگر $x-h$ و $x+h$ را با x و y جایگزین کنیم، این می‌گوید که $\phi(x)+\phi(y)=۲\phi(\frac{۱}{۲}(x+y))$. قرار دهید $\psi(x)=\phi(x)-\phi(۰)$؛

در این صورت

$$(*) \qquad \psi(x) + \psi(y) = \phi(x) + \phi(y) - ۲\phi(۰)$$
$$= ۲\phi(\frac{۱}{۲}(x+y)) - ۲\phi(۰) = ۲\psi(\frac{۱}{۲}(x+y)).$$

این به ازای هر y، و لذا به‌ویژه به ازای $y = ۰$، درست است؛ با قرار دادنِ $y = ۰$، درمی‌یابیم که $\psi(۰) = ۰$ و $\psi(x) = ۲\psi(x/۲)$. در این برابریِ اخیرْ x را با $x+y$ جایگزین کنید؛ در این صورتْ برابری می‌گوید که $\psi(x+y) = ۲\psi(\frac{۱}{۲}(x+y))$. با این حال (*)ی فوق می‌گوید که $۲\psi(\frac{۱}{۲}(x+y)) = \psi(x)+\psi(y)$. بنابراین $\psi(x)+\psi(y) = \psi(x+y)$؛ یعنی ψ خطی است. اکنون ψ یک حدِ توابعِ پیوسته است، و لذا باید نقاطِ پیوستگی‌ای داشته باشد (§۱۸). اما می‌دانیم که تابع پیوستهٔ خطیِ ψای که یک نقطهٔ پیوستگی داشته باشد شکلِ $\psi(x) = x\psi(۱)$ دارد، که یعنی، چنانکه حکم شد، $\phi(x) = \phi(۰) + x\psi(۱)$.

تمرین ۲۰.۱. [آ۳۳] فرض کنید $\phi(x)$

$$\lim_{R\to\infty} \int_R^{x+R} f(u)du$$

را نشان دهد که فرض شده است به ازای هر x حقیقی وجود دارد. در این صورت $\phi(x) = ax$.

۲۱. مشتقها.[۳۳] فقط توابعی را در نظر می‌گیریم که بردشان در $R_۱$ باشد و دامنه‌شان بازه‌ای در $R_۱$ باشد. افزون بر مشتقِ یک تابعِ f، که می‌توان آن را به روشِ معمولْ تعریف کرد، تعمیمهایی را بررسی می‌کنیم که مزیتِ کاربرد داشتن در مورد توابعی را دارند که لزوماً به مفهومِ معمولْ مشتق‌پذیر نیستند. اینها چهار مشتقِ دینی هستند که

برای آنها این نمادها و تعاریف را به‌کار می‌بریم:

$$f^+(x) = \limsup_{h\to \circ+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f_+(x) = \liminf_{h\to \circ+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f^-(x) = \limsup_{h\to \circ-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f_-(x) = \liminf_{h\to \circ-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

$+$ و $-$ به ترتیب به حدودِ راست و چپ اشاره می‌کنند، و مکانِ (بالا یا پایینِ) آنها به حدودِ بالایی و پایینی اشاره می‌کنند. به ازای هر x، تابع f هر چه که باشد، این چهار حد، متناهی یا نامتناهی، وجود دارند.

به‌کار بردنِ عبارتِ «مشتقِ f» به معنای ــ بر حسبِ موردــ عددِ $f'(x)$، یعنی مشتقِ f در نقطهٔ خاصِ x، یا به معنای تابع f' که مقدارش در x عددِ $f'(x)$ است، رسمِ رایجی است. ما همین اصطلاحِ مبهم را برای مشتقهای دینی به‌کار خواهیم برد. اگر بخواهیم دربارهٔ آنها به‌عنوان تابع صحبت کنیم، باید مفهومِ معمولمان از تابع را با در نظر گرفتن توابعی که مقادیرشان می‌تواند شامل $+\infty$ یا $-\infty$ باشد گسترش دهیم. باید در مورد این‌گونه توابعِ تعمیم‌یافته مراقب باشیم؛ در موردِ تشکیل مجموع یا حاصل‌ضرب، یا (برای نمونه) در مورد مشتقگیری از آنها مشکلاتی وجود دارد. معلوم خواهد شد که ما در واقع هیچ کار مبهمی با مشتقها انجام نمی‌دهیم.

اگر $f^+(x) = f_+(x)$، می‌گوییم که یک مشتقِ راست در x وجود دارد، و آن را با $f'_+(x)$ نشان می‌دهیم؛ مشابهاً در مورد مشتقِ چپ $f'_-(x)$. سرانجام، مشتقِ معمولی وجود دارد (متناهی یا نامتناهی) اگر و تنها اگر چهار مشتق همگی برابر باشند.

حتی وقتی $f^+(x)$ و $g^+(x)$ هر دو متناهی باشند، لزوماً نمی‌دانیم $(f+g)^+(x) = f^+(x) + g^+(x)$؛ اما اگر $f'(x)$ وجود داشته باشد می‌دانیم $(f+g)^+(x) = f'(x) + g^+(x)$ (رک. ۱۵§).

تمرین ۲۱.۱. نشان دهید که اگر $f'_+(x)$ وجود داشته باشد و متناهی باشد، f در x از راست پیوسته است؛ و اگر $f'(x)$ وجود داشته باشد و متناهی باشد، f در x پیوسته است.

تمرین ۲۱.۲. نشان دهید که وقتی $f'(x)$ وجود دارد و نامتناهی است f می‌تواند در x ناپیوسته باشد.

از طرف دیگر، پیشتر دیده‌ایم که تابعی پیوسته لازم نیست هیچ جا مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد.

تمرین ۲۱.۳. نشان دهید که اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد (متناهی)، می‌توانیم بنویسیم $f(x) - f(a) = (x-a)[f'(a) + \epsilon(x)]$، که $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

«قاعدهٔ زنجیری» برای مشتقگیری می‌گوید که اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد (متناهی)، اگر $a = g(b)$، و اگر $g'(b)$ وجود داشته باشد (متناهی)، آنگاه در مورد تابع ϕای که $\phi(x) = f(g(x))$، مشتق $\phi'(b)$ وجود دارد و برابر است با $f'(a)g'(b)$. اثباتِ مغلطه‌آمیزی به‌صورت ذیل انجام می‌شود: وقتی $h \to 0$،

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\to f'(g(x))g'(x).$$

تمرین ۲۱.۴. غلط را بیابید؛ با استفاده از تمرین ۲۱.۳ اثباتِ درستی بدهید.

کاربرد دیگری از تمرین ۲۱.۳ شرطِ لازمِ ذیل برای مشتق‌پذیریِ متناهی است (که کافی هم هست).[۳۳] اگر دامنهٔ f حاوی بازه‌ای در R_1 باشد و a یک نقطهٔ درونیِ این بازه باشد، آنگاه به ازای هر ϵ مثبت همسایگیِ Nای از a هست که چنان کوچک است

که هرگاه t_1 و t_2 در دو طرفِ مقابلِ a و در N باشند، و u_1 و u_2 در دو طرفِ مقابلِ a و در N باشند، آنگاه

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<\epsilon.$$

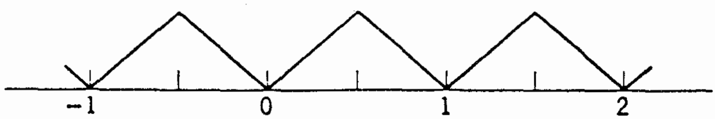
کافی است نشان دهیم که هر یک از کسرهای سمت چپ را می‌توان به‌دلخواه به $f'(a)$ نزدیک کرد. اکنون، برای نمونه،

$$\begin{aligned}\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}&=\frac{f(t_1)-f(a)}{t_1-a}\,\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-\frac{f(t_2)-f(a)}{t_2-a}\,\frac{t_2-a}{t_1-t_2}\\&=(f'(a)+\epsilon_1)\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-(f'(a)+\epsilon_2)\frac{t_2-a}{t_1-t_2}\\&=f'(a)+\epsilon_1\frac{t_1-a}{t_1-t_2}-\epsilon_2\frac{t_2-a}{t_1-t_2}\end{aligned}$$

که وقتی $t_1, t_2 \to a$، $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$. چون $|(t_1-a)/(t_1-t_2)| \le 1$ و $|(t_2-a)/(t_1-t_2)| \le 1$، آنچه باید به‌دست آورده‌ایم.

این گزارهٔ آخر را می‌توان برای اثبات مشتق‌ناپذیریِ بعضی توابع پیوسته به‌کار گرفت.[۳۴] یک مثالْ این است. $G(x)$ را فاصلهٔ عدد حقیقیِ x تا نزدیکترین عددِ صحیح بگیرید؛ نمودار G مثل شکلِ بعدی است.

قرار دهید $H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}G_n(x)$، که $G_n(x)=G(2^n x)$. اینکه H پیوسته



است از پیوستگیِ G و همگرایی یکنواختِ سری نتیجه می‌شود. فرض کنید a نقطه‌ای

دلخواه و $(a-\delta, a+\delta)$ بازه‌ای شامل a باشد. چون نقاطِ $2^{-k}r$، که k روی همهٔ اعداد صحیحِ مثبت و r روی همهٔ اعداد صحیح تغییر می‌کند، مجموعه‌ای همه‌جاچگال تشکیل می‌دهند، می‌توانیم نقاطِ $x_1 = 2^{-k}r$ و $x_2 = 2^{-k}(r+1)$ را در $(a-\delta, a+\delta)$ و در دو طرفِ مقابلِ a بیابیم. ξ را نقطهٔ میانیِ (x_1, x_2) بگیرید.

گوشه‌های نمودارِ G در نقاطِ $2^{-1}p$ است، که p روی اعداد صحیح تغییر می‌کند؛ گوشه‌های نمودار G_1 در نقاطِ $2^{-2}p$ است، و به‌طور کلّی گوشه‌های نمودار G_n در $2^{-n-1}p$هاست. پس نمودارهای G_0، G_1، ...، G_{k-1} بین x_1 و x_2 هیچ گوشه‌ای ندارند، و نتیجتاً شیبِ هر G_j (به ازای $0 \le j \le k-1$) بین x_1 و ξ، همان است که بین x_1 و x_2 است. از طرف دیگر، به ازای $n > k$، $G_n(x_1) = G_n(x_2) = 0$. پس

$$\frac{H(\xi) - H(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

به

$$\frac{G_k(\xi) - G_k(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{G_k(x_2) - G_k(x_1)}{x_2 - x_1} = \pm 1$$

تحویل می‌شود و استدلال مشابهی در موردِ

$$\frac{H(x_2) - H(\xi)}{x_2 - \xi} - \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

صادق است. چون ξ و x_1، یا ξ و x_2، در دو طرفِ مقابلِ a هستند، شرط لازمِمان برای مشتق‌پذیریِ متناهی را نمی‌توان برآورْد. این نشان می‌دهد که H در هیچ نقطه‌ای مشتقِ متناهی‌ای ندارد. (روش قبلیمان برای ساخت تابعی هیچ‌جامشتق‌پذیر نشان داد که تابعی پیوسته لازم نیست حتی درهیچ نقطه‌ای‌مشتقی‌نامتناهی داشته باشد.)

تمرین ۲۱.۵. نشان دهید که اگر $f'(x) > 0$، آنگاه f در x صعودی است، به این معنا که بازهٔ $(x-h, x+h)$ای وجود دارد که اگر s و t در بازه باشند و $s < x < t$، آنگاه $f(s) < f(x) < f(t)$. به‌صورت کلّیتر، اگر $f_+(x) > 0$، f در x از راست، به معنایی آشکار، صعودی است.

تمرین ۲۱.۵آ. شرطی لازم و کافی برای اینکه $f'_+(x_0)$ وجود داشته باشد (متناهی یا نامتناهی) این است که به ازای هر عدد حقیقی K، با حداکثر یک استثنا، $f(x)+Kx$ در x_0 از راست یکنوا باشد.[۳۴آ]

تمرین ۲۱.۵ب. تنها توابع پیوستهٔ fای که در مورد آنها به ازای هر عدد حقیقی K، با حداکثر یک استثنا، $f(x)+Kx$ روی (a,b) یکنواست به شکلِ $f(x)=px+q$ روی (a,b) هستند.

برای مقایسه با تمرین ۲۱.۵ب، توجه کنید که در مورد تابعِ $f(x)=x^2\sin(1/x)$ و $f(0)=0$، $f(x)+Kx$ یکنواست هرگاه $|K|>3$.

می‌گوییم که f در x (یک نقطهٔ درونیِ دامنهٔ f) یک ماکزیموم دارد اگر همسایگیِ Nای از x باشد که به ازای هر y در N، $f(y)\le f(x)$؛ این ماکزیمومْ سره است اگر همسایگیِ N'ای از x باشد که به ازای yهای در N' که $y\neq x$، $f(y)<f(x)$.

تمرین ۲۱.۶. نشان دهید که اگر f در x ماکزیمومی داشته باشد، آنگاه $f^+(x)\le 0$ و $f_-(x)\ge 0$.

به‌ویژه، اگر f در x ماکزیمومی داشته باشد و $f'(x)$ وجود داشته باشد، باید $f'(x)=0$. طبیعتاً نتایج مشابهی در مورد مینیمومها وجود دارد.

هر تابعْ تنها تعداد شماراییِ ماکزیموم و مینیمومِ سره دارد.[۳۵] برای دیدنِ این مطلب، بگذارید به هر ماکزیمومِ سرهٔ f در، مثلاً، x، یک بازهٔ (r_1,r_2) با نقاط انتهاییِ گویا نسبت دهیم، طوری که r_1 و r_2 در دو طرفِ x باشند و $f(y)<f(x)$ مشروط بر اینکه $y\neq x$ و $r_1<y<r_2$. این بازه نمی‌تواند به ماکزیمومِ سرهٔ دیگری که در z وجود داشته باشد نسبت داده شود زیرا شامل هر دوی z و x خواهد بود و باید هم $f(z)<f(x)$ و هم $f(x)<f(z)$. نتیجتاً به ماکزیمومهای سرهٔ متفاوتْ بازه‌های گویای متفاوتی نسبت داده می‌شود. چون تنها تعداد شمارایی بازه با نقاطِ انتهاییِ گویا وجود دارد، حداکثر تعداد

شمارایی ماکزیمومِ سره وجود دارد.

با این حال، تابع پیوسته‌ای می‌تواند تعداد ناشمارایی ماکزیمومِ ناسره داشته باشد؛ برای نمونه، هر تابعِ ثابت در همهٔ نقاطْ ماکزیمومِ ناسره دارد. می‌توان نشان داد که مقادیرِ هر تابع در نقاطی که مشتقِ تابع در آنها صفر است (یا حتی در نقاطی که یکی از مشتقهای دینیِ آن صفر است) مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر تشکیل می‌دهند.[۳۶] تلفیقِ این مطلب با خواصِ عمومیِ مشتقها که در ص. ۱۶۷ ذکر خواهد شد نشان می‌دهد که عرضِ همهٔ ماکزیمومها، سره باشند یا نه، مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر تشکیل می‌دهند.

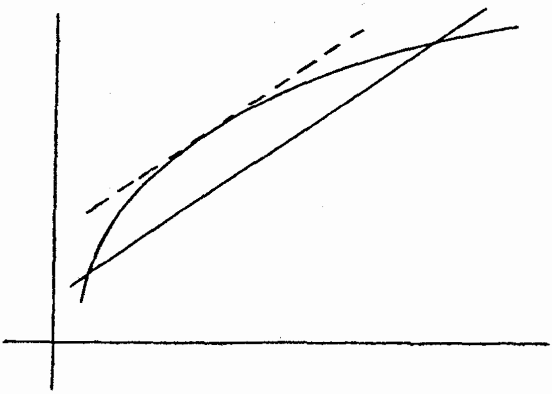
دیده‌ایم که وقتی در ماکزیموم یا مینیمومی در درونِ دامنهٔ تابع (که در اینجا فرض می‌شود یک بازه است) مشتق وجود داشته باشد، باید در آن نقطه مشتق برابرِ ۰ باشد؛ پس اگر بخواهیم نشان دهیم که مشتقی مقدار ۰ را می‌گیرد اغلبْ این کار را با نشان دادنِ این مطلب انجام می‌دهیم که تابعی که مشتق از آن ناشی شده، در جایی که نقطهٔ انتهاییِ دامنه‌اش نیست ماکزیموم یا مینیموم دارد. اگر بخواهیم نشان دهیم که f' مقدار cی دیگری را می‌گیرد، $g(x) = f(x) - cx$ را در نظر می‌گیریم و به دنبال ماکزیمومها و مینیمومهای آن می‌گردیم. در این صورت هر فرضی که g را مجبور به داشتنِ ماکزیموم یا مینیمومی در یک بازهٔ (a, b) کند تضمین می‌کند که c در بردِ f' است. دو فرض که این کار را در مورد توابع پیوستهٔ f انجام می‌دهند عبارت‌اند از (الف) اینکه $f'(a) > c$ و $f'(b) < c$ (زیرا در این صورت در یک بازهٔ سمت راستِ a، $g(x) > g(a)$، و لذا بزرگترین مقدارِ g بین a و b در a گرفته نمی‌شود؛ مشابهاً در b)؛ یا (ب) اینکه $g(a) = g(b)$ (زیرا در این صورت بین a و b، یا g ثابت است یا ماکزیموم یا مینیمومی سره دارد). فرضِ (الف) منجر به مشاهدهٔ این می‌شود که مشتقها خاصیت مقدارِ میانی دارند:[۳۶] اگر مشتقی دو مقدار را بگیرد، هر مقدار بین آنها را هم می‌گیرد.

تمرین ۲۱.۷. نشان دهید که این مطلب از آنچه پیشتر تذکر داده شد نتیجه می‌شود، یعنی از این مطلب که اگر f' مقداری مثبت و مقداری منفی را بگیرد، ۰ را می‌گیرد.

تمرین ۲۱.۸. فرض کنید f یک تابع مشتق‌پذیر دوره‌ای باشد؛ فرض کنید a عدد

مثبت داده‌شده‌ای باشد؛ در این صورت نقطهٔ xای هست که مماس در x نمودار را مجدداً در نقطه‌ای a واحد جلوتر در طولِ محور x قطع می‌کند (یعنی $f(x+a)-f(x) = af'(x)$).

فرضِ (ب) به قضیهٔ مقدار میانگین (که به قانونِ میانگین هم معروف است) می‌انجامد، که می‌گوید هر خارج‌قسمتِ تفاضلیِ $[f(x) - f(y)]/(x-y)$ از هر تابعِ مشتق‌پذیرِ f در بردِ f' است (تقریرِ معمولْ ـــ به صورت ظاهرـــ متفاوت است). اثبات را شکلِ بعدی پیشنهاد می‌کند:[۳۶]



$$g(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

در a و در b یک مقدارِ $f(a)$ را می‌گیرد، لذا در نقطهٔ cای بین a و b ماکزیمومی دارد؛ در این نقطه $g' = 0$ و $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$.

روشی که کمتر مرسوم است[۳۶]: آغاز کردن با $g(a) = g(b)$ و نتیجه گرفتنِ این مطلب از قضیهٔ عمومی وتر (ص. ۱۱۱) است که بازه‌های (x_n, y_n)ای در (a, b) وجود

دارند که طول هر یک نصفِ قبلی است و $g(x_n) = g(y_n)$. این بازه‌ها تو در تو هستند و لذا به نقطهٔ cای همگرا هستند که در بازهٔ بازِ (a, b) است اگر نخستین بازه را طوری انتخاب کنیم که شامل a و b نباشد. چون دنباله‌ای از وترهای افقیِ g داریم که نقاط انتهاییشان به c می‌گرایند، مماس در c (که فرض شده است وجود دارد) باید افقی باشد، یعنی $g'(c) = 0$.

نباید بی‌جهت بر وجودِ نقطهٔ c، که مکانش معمولاً نامعلوم است، پای فشرد؛ آنچه عموماً در عملْ مورد نیاز است این است که $[f(b) - f(a)]/(b - a)$، خارج‌قسمتِ تفاضلی، بین $\sup f'$ و $\inf f'$ باشد، این واقعاً خاصیتِ معادلی است زیرا f' خاصیت مقدار میانی دارد.[۳۶] راه دیگری برای بیانِ همهٔ اینها گفتنِ این است که بردِ f' بازه‌ای است که حاوی بردِ خارج‌قسمتهای تفاضلیِ $[f(x) - f(y)]/(x - y)$ است. با این حال، برد خارج‌قسمتهای تفاضلی لزوماً حاوی برد f' نیست؛ به عبارت دیگر، معکوسِ قضیهٔ مقدارِ میانگین می‌تواند غلط باشد. $f(x) = x^3$، که در آن f' مقدار 0 را می‌گیرد اما هیچ خارج‌قسمتِ تفاضلیْ 0 نیست، مثالی به‌دست می‌دهد. با این حال، کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایینِ مجموعهٔ مقادیرِ خارج‌قسمتهای تفاضلی و کرانهای متناظرِ f' یکی‌اند. آنچه باید نشان دهیم این است که (مثلاً) غیرممکن است که

$$\sigma = \sup_{(x,y)} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < S = \sup_t f'(t).$$

این به این معنا خواهد بود که نقطهٔ t_0ای هست که $f'(t_0)$ تقریباً به اندازهٔ $S - \sigma$ از همهٔ مقادیر ممکنِ $[f(x) - f(y)]/(x - y)$ بزرگتر است. چون $f'(t_0)$ یک حدِ خارج‌قسمتهای تفاضلی است، پس یک خارج‌قسمتِ تفاضلی هست که از $f'(t_0) - \frac{1}{2}(S - \sigma)$ بزرگتر است، و تناقضی به‌دست می‌آوریم.

در قضیهٔ مقدار میانگینْ فرض کردیم که f در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته است. در واقع، می‌توانیم فرض پیوستگیِ f در نقاطِ انتهایی را کنار بگذاریم، مشروط بر اینکه در حالتی که حدهای $f(a+)$ و $f(b-)$ وجود داشته باشند پیوستگی از راست در a و از چپ در b را الزام کنیم، و در غیر این صورت در نقاط انتهایی به هیچ چیز نیاز نداریم. با این حال، عمومیتِ بیشتری که به این صورت به‌دست می‌آید فریبنده است، زیرا اگر $f(a+)$ وجود

نداشته باشد و f' نزدیک a متناهی باشد، آنگاه f' در هر همسایگیِ سمت راستِ a هر مقدارِ متناهی را می‌گیرد، و لذا $(b-a)f'(c)$ می‌تواند هر مقدار متناهی که بخواهیم داشته باشد.[۳۷] زیرا اگر k عددی دلخواه باشد، $f(x)-kx$ در a حد راستی ندارد، و لذا نمی‌تواند در همسایگیِ سمت راستی از a یکنوا باشد. بنابراین در هر همسایگیِ سمت راستِ a ماکزیموم و مینیموم دارد، و مشتقش در این نقاطِ x صفر است؛ پس $f'(x)=k$.

اکنون به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ مقدارِ میانگین قضیه‌ای در مورد مشتق‌گیریِ جمله به جمله از دنباله‌های توابعِ اثبات می‌کنیم. قضیهٔ مقدماتی‌ای که در §۱۷ ثابت کردیم مستلزمِ انتگرال‌پذیریِ مشتقها بود، و اثباتِ آن از قضیه‌ای در مورد انتگرالگیری از دنباله‌های به‌طور یکنواخت همگرای توابع استفاده می‌کرد؛ اما می‌توان بدون هیچ‌گونه استفاده‌ای از انتگرالگیریْ قضیهٔ کلّیتری ثابت کرد. قضیه این است: فرض کنید توابعِ f_n در یک بازهٔ I مشتقهای (متناهیِ) f'_n داشته باشند؛ فرض کنید به ازای aای در I دنبالهٔ $\{f_n(a)\}$ همگرا باشد، و فرض کنید $\{f'_n\}$ به‌طور یکنواخت، مثلاً به g، همگرا باشد. در این صورت f_n به یک حد f همگراست؛ اگر I فشرده باشد همگرایی روی I یکنواخت است، و در غیر این صورتْ همگرایی روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ I یکنواخت است؛ و به ازای همهٔ xهای متعلق به I، $f'(x)=g(x)$.

برای اثباتِ این قضیه، نخست قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد f_n-f_m به‌کار می‌گیریم:

$$f_n(x)-f_m(x)-[f_n(a)-f_m(a)]=(x-a)[f'_n(c)-f'_m(c)]$$

که c بین x و a است (و، البته، ممکن است به m و n بستگی داشته باشد). پس همگراییِ یکنواختِ $\{f'_n\}$ و همگراییِ $\{f_n(a)\}$، $\{f_n\}$ را به‌طور یکنواخت همگرا می‌سازند اگر $|x-a|$ کراندار باشد. f را حدِ f_n بگیرید و فرض کنید ϵ عدد مثبت دلخواهی باشد. به‌دست می‌آوریم

$$|f_n(x)-f_m(x)-[f_n(a)-f_m(a)]|\le(x-a)\epsilon$$

اگر n و m بزرگتر از عدد صحیحِ $n_\circ$ای باشند. با میل دادنِ m به سمت ∞ می‌بینیم که

$$|f_n(x) - f(x) - [f_n(a) - f(a)]| \le (x-a)\epsilon, \qquad n > n_\circ.$$

یعنی

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right| \le \epsilon, \qquad n > n_\circ.$$

همچنین، بنا بر فرضِ همگرایی یکنواخت، $|f_n'(a) - g(a)| \le \epsilon$ اگر $n > n_۱$. اکنون nای انتخاب کنید که از هر دوی $n_\circ$ و $n_۱$ بزرگتر باشد. در این صورت اگر $|x-a|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد،

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - f_n'(a)\right| < \epsilon$$

و لذا اگر $|x-a|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد،

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f_n'(a)\right| < ۲\epsilon.$$

اما $|f_n'(a) - g(a)| \le \epsilon$، لذا

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - g(a)\right| < ۳\epsilon.$$

این نابرابری نشان می‌دهد که $f'(a)$ وجود دارد و برابرِ $g(a)$ است. چون می‌دانیم که $\{f_n\}$ به‌طور یکنواخت همگراست، می‌توانیم a را هر نقطه‌ای در I بگیریم، و قضیه نتیجه می‌شود.

کاربردِ دیگری از قضیهٔ مقدارِ میانگین این قضیه را به‌دست می‌دهد،[۳۸] که تعبیرِ هندسیِ آشکاری دارد. فرض کنید f در $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a) = f'(b)$؛ در این صورت نقطهٔ cای در $[a,b]$ هست که

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} = f'(c).$$

این می‌گوید که اگر نمودار f در a و در b شیبِ واحدی داشته باشد، باید یک نقطهٔ c باشد که مماس در آن از نقطهٔ اولیهٔ $(a, f(a))$ بگذرد؛ شکلی این را به لحاظ هندسیْ پذیرفتنی می‌کند.

در اثباتِ این قضیه می‌توانیم فرض کنیم که $f'(a) = f'(b) = \circ$، زیرا در غیر این صورت می‌توانیم تابعِ تعریف‌شده با $f(x) - xf'(a)$ را در نظر بگیریم. تابع g تعریف‌شده با

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad a < x \le b; \qquad g(a) = \circ$$

را در نظر بگیرید. تابع g در $[a, b]$ پیوسته است (در اثباتِ این مطلب در نقطهٔ a دقت لازم است)، و در $(a, b]$ مشتق‌پذیر است. اکنون $g'(b) = -g(b)/(b-a)$. اگر $g(b) > \circ$، آنگاه $g'(b) < \circ$، و لذا g در b نزولی است (تمرین ۲۱.۵)، در حالی که $g(a) = \circ$، لذا g ماکزیمومش را در نقطهٔ cای بین a و b می‌گیرد که $g'(c) = \circ$. استدلالِ مشابهی کاراست اگر $g(b) < \circ$. اگر $g(b) = \circ$، $g(a) = g(b) = \circ$ و باز هم به ازای یک cی میانی $g'(c) = \circ$. چون

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{c-a} - \frac{f(c) - f(a)}{(c-a)^{۲}}$$

حکمِ ما نتیجه می‌شود.

کاربردِ دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین به‌کارِ اثباتِ این ایدهٔ شهودی می‌آید که مشتقها معمولاً بدتر از توابعی که از آنها مشتق شده‌اند رفتار می‌کنند.[۳۹]

تمرین ۲۱.۹. اگر $f(x) \ge \circ$ و $f(\circ+) = \circ$ و f در $(\circ, ۱]$ مشتق‌پذیر باشد و $h(x) \ge \circ$ و $\int h(x)dx$ در $\circ$ واگرا باشد، آنگاه وقتی $x \to \circ$، $h(f(x))f'(x)$ بیکران است؛ برای نمونه، $f'(x)/f(x)$ بیکران است و $f'(x)/\{f(x)\log f(x)\}$ نیز چنین است (مشروط بر اینکه $f(x) \not\equiv \circ$).

ممکن است بخواهیم قضیهٔ مقدار میانگین را به حالاتی گسترش دهیم که مشتق لزوماً وجود ندارد، اما ساده‌ترین تعمیمْ مطمئناً غلط است. برای نمونه، اگر $f(x) = |x|$ آنگاه به ازای $x < \circ$، $f'_+(x) = -۱$ و به ازای $x \ge \circ$، $f'_+(x) = ۱$، لذا اگرچه $f(-۱) = f(۱)$، $f'_+(x) = \circ$ به ازای هیچ xای برقرار نیست. باز هم کمتر از این، ممکن است انتظار داشته باشیم که قضیهٔ مقدار میانگینی در مورد یکی از مشتقهای دینی

برقرار باشد. به هر حال چیزی مشابهٔ قضیهٔ مقدار میانگین در مورد مشتقهای دینی هم برقرار است و در بعضی کاربردها می‌تواند جایگزینِ قضیهٔ مقدار میانگین شود.[آ۳۹]

این حکم را اثبات خواهیم کرد. فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر C عددِ دلخواهی باشد که از $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ بزرگتر است، آنگاه در تعداد ناشمارایی نقطهٔ x در (a,b)، $f^{+}(x) \leq C$. مشابهاً در تعداد ناشمارایی نقطهٔ x، $f^{-}(x) \geq c$ اگر $c < [f(b)-f(a)]/(b-a)$؛ به‌طور کلّی در دو حالتْ نقطه‌ها یکی نیستند.

اثبات این گزاره بسیار شبیهِ اثباتِ متداولِ قضیهٔ مقدار میانگین است. فرض کنید k از $f(b)-f(a)$ بزرگتر باشد، و تابعِ g تعریف‌شده با

$$g(x) = f(x) - f(a) - k\frac{x-a}{b-a}$$

را در نظر بگیرید. در این صورتْ $g(a) = \circ$ و $g(b) = f(b) - f(a) - k < \circ$. sای اختیار کنید که $\circ = g(a) > s > g(b)$. مجموعهٔ نقاطِ xای را در $[a,b]$ در نظر بگیرید که $g(x) \geq s$؛ این، تصویرِ وارونِ مجموعهٔ بسته‌ای است، و لذا، چون g پیوسته است، بسته است. چون این مجموعه کراندار هم هست، یک بزرگترین نقطه، مثلاً x_s، دارد که $g(x_s) = s$ (چون g پیوسته است). چون $s > g(b)$، $x_s < b$. چون (بنا بر روشی که x_s تعریف شد) به ازای همهٔ hهای به اندازهٔ کافی کوچکْ $g(x_s+h) < s$، پس $g^{+}(x_{۲}) \leq \circ$، لذا

$$f^{+}(x_s) = g^{+}(x_s)\frac{k}{b-a} \leq \frac{k}{b-a} = C$$

sهای مختلف x_sهای مختلف به‌دست می‌دهند، و تعداد ناشمارایی s بین $\circ$ و $g(b)$ وجود دارد. یعنی تعداد ناشمارایی نقطهٔ x هست که $f^{+}(x) \leq C$.

این مطلبِ آشنایی است که اگر f' در سراسرِ بازه‌ای نامنفی باشد، f در آن بازه غیرنزولی است. این از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود، زیرا $f(y)-f(x) = (y-x)f'(c)$، که $x < c < y$. اگر $f'(c) \geq \circ$، نتیجه می‌گیریم که $f(y) \geq f(x)$ هرگاه $y \geq x$. با استفاده از قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم می‌توانیم نتیجه‌ای را اثبات کنیم که از دو جنبه قویتر است: لازم نیست فرض کنیم که f' وجود دارد، و می‌توانیم تعداد شمارایی

نقطه را حذف کنیم. به صورت دقیقتر، اگر f پیوسته باشد و، مگر محتملاً به ازای مجموعهٔ شمارایی از نقاط، یک مشتقِ دینی نامنفی باشد، نتیجه می‌شود که f غیرنزولی است.

فرض کنید که غیر از تعداد شمارایی نقطه، به ازای $a \leq x \leq b$، $f^+(x) \geq 0$. (فرضِ $f_+(x) \geq 0$ این را ایجاب می‌کند، و اثبات در مورد $f^-(x)$ مشابه است.) اگر f غیرنزولی نباشد، باید دو نقطهٔ x و y باشند که $x < y$ و $f(x) > f(y)$. در این صورت تعمیممان از قضیهٔ مقدار میانگین، با $f(y) - f(x) < c < 0$، می‌گوید که تعداد ناشمارایی نقطه در (x, y) هست که در آنها $f^+ < 0$، که فرضمان را نقض می‌کند.

تمرین ۲۱.۱۰. پیوستگیِ f در قضیهٔ فوق ضروری است: تابع ناپیوسته‌ای بسازید که غیرنزولی نباشد و در مورد آن، به ازای همهٔ xها $f_+(x) \geq 0$.

اکنون می‌توانیم نشان دهیم که اگر f پیوسته باشد، هر چهار مشتقِ دینی در هر بازه کرانهای بالا و پایینِ واحدی دارند، و، در واقع، به صورتی کلّیتر گردایهٔ خارج‌قسمتهای تفاضلیِ $[f(x+h) - f(x)]/h$ همان کرانهای بالا و پایینی را دارند که مشتقهای دینی، مشروط بر اینکه، البته، هر دوی x و $x + h$ متعلق به بازهٔ مورد بحث باشند. برای نمونه، فرض کنید که $f^+(x) \geq m$. قرار دهید $g(x) = f(x) - mx$. چون $g^+(x) \geq 0$، تابع g غیرنزولی است. بنابراین اگر $h > 0$ آنگاه $g(x+h) - g(x) \geq 0$، یا به عبارت دیگر

$$f(x+h) - f(x) - (x+h)m + mx \geq 0,$$

یعنی

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq m,$$

لذا $f_+(x) \geq m$. مشابهاً

$$f(x) - f(x-h) - mx + (x-h)m \geq 0,$$

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \geq m,$$

لذا $m \geq f_-(x) \geq f^-(x)$.

بعد، فرض کنید که یک مشتق، مثلاً f^+، در x پیوسته باشد. این یعنی اینکه در هر همسایگیِ به اندازهٔ کافی کوچکِ x، کرانهای بالا و پایینِ آن به‌دلخواه به $f^+(x)$ نزدیک‌اند؛ قضیهٔ فوق به ما می‌گوید که همین مطلب در مورد کرانهای بالا و پایینِ سه مشتقِ دیگر نیز درست است. این یعنی اینکه در نقطهٔ x هر چهار مشتق (با $f^+(x)$) برابرند. یعنی اگر یک مشتقِ تابعِ پیوسته‌ای در نقطه‌ای پیوسته باشد در آن نقطه مشتق وجود دارد.

یک اشتباهِ عامِ دانشجویانِ حسابان این است که گمان می‌کنند اگر $\lim_{x\to y} f'(x)$ وجود نداشته باشد $f'(y)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. (رک. ص. ۱۵۶)

تمرین ۲۱.۱۱. نشان دهید که اگر $\lim_{x\to y} f'(x)$ وجود داشته باشد $f'(y)$ وجود دارد.

یک دلیلِ این بدفهمی شاید این امر باشد که مشتقها، اگر ناپیوسته باشند، خیلی ناپیوسته‌اند، لذا در حسابان عموماً با توابعِ با مشتقِ ناپیوسته مواجه نمی‌شوند. به صورت دقیقتر، مشتقها نمی‌تواند جهشِ ساده‌ای داشته باشند. این را باید به این معنا تعبیر کرد: اگر $f'(x)$ در هر نقطهٔ x از بازه‌ای وجود داشته باشد، و (به ازای نقطهٔ yای از این بازه) حدهای $f'(y+)$ و $f'(y-)$ هر دو وجود داشته باشند، آنگاه هر دوی این حدها برابر $f'(y)$اند. از طرف دیگر، موردِ $f(x) = |x|$ نشان می‌دهد که اگر $f'(y)$ وجود نداشته باشد حدهای f' از هر دو طرف می‌توانند وجود داشته باشند و متفاوت باشند. ناممکن بودنِ جهشهای ساده در موردِ مشتقها نتیجه‌ای مستقیم است از این امر که مشتقها خاصیت مقدار میانی دارند.

هیچ تابع پیوسته‌ای نمی‌تواند مشتقی داشته باشد که همه‌جا نامتناهی باشد. در واقع، می‌توانیم چیزی بسیار بیش از این بگوییم: در مورد هر تابعِ پیوسته، باید روی مجموعه‌ای ناشمارا $f^+(x) < +\infty$ برقرار باشد،[۴۰] که مطلبی است که بیدرنگ از قانونِ تعمیم‌یافتهٔ میانگین ص. ۱۶۲ نتیجه می‌شود. در واقع، قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ مقدار میانگین می‌گوید که اگر $C > [f(b) - f(a)]/(b - a)$، آنگاه روی مجموعهٔ ناشمارایی $f^+(x) < C$.

از قضیه‌ای کلّی که بعداً (ص. ۱۶۸) ذکر خواهیم کرد نتیجه می‌شود که خواه f پیوسته باشد یا نه، حداکثر روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر می‌تواند مشتقِ راستِ نامتناهیِ f'_+ داشته باشد. از طرف دیگر، اگر الزام نکنیم که f پیوسته باشد، ممکن است در هر نقطهٔ x، $f^+(x) = +\infty$. نمونه‌ای از این پدیده را می‌توان به صورتِ ذیل ساخت.[۴۱] فرض کنید اعداد حقیقیِ x در $[۰, ۱]$ در پایهٔ ۳ نمایش داده شده باشند، $x = ۰/a_۱a_۲\ldots$، که هر a_n، ۰ یا ۱ یا ۲ است. اگر x دو نمایش داشته باشد، آنی را انتخاب می‌کنیم که مختوم باشد. سپس قرار می‌دهیم $f(x) = ۰/b_۱b_۲\ldots$ (پایهٔ ۲)، که $b_n = ۱$ اگر $a_n = ۲$، و در غیر این صورت $b_n = ۰$. اکنون، چون نمایشهای سه‌سه‌ایِ منتهی به ۲های مکرر را کنار گذاشته‌ایم، نمایش سه‌سه‌ایِ هر x حاوی دنباله‌ای نامتناهی از ارقامی است که ۰ یا ۱اند. فرض کنید یکی از این ۰ها یا ۱ها در مکانِ rاُم سه‌سه‌ای واقع شده باشد. فرض کنید x' با x تنها در ۲ بودنِ این رقمِ rاُم سه‌سه‌ای فرق داشته باشد؛ در این صورت $x' > x$ و در واقع $x' - x$ برابرِ ۳^{-r} یا $۲ \cdot ۳^{-r}$ است. در هر حالت، $f(x') - f(x) = ۲^{-r}$. پس

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq \frac{۳^r}{۲^r}.$$

چون r می‌تواند به‌دلخواه بزرگ باشد، نتیجه می‌شود که $f^+(x) = +\infty$.

می‌توان نشان داد که این تابعِ f پیوسته است مگر در نقاطی که بسطِ سه‌سه‌ایِ مختوم دارند، و در واقع در این نقاط از راست پیوسته است، ولی از چپ ناپیوسته است.

نتیجهٔ جالبِ دیگری دربارهٔ مقادیرِ ممکنِ مشتقها(ی نه لزوماً توابعِ پیوسته) این است که اگر یک مجموعهٔ ترازِ f' چگال باشد آنگاه هر مجموعهٔ ترازِ دیگرِ f' از مقولهٔ اول است. یعنی اگر روی یک مجموعهٔ چگالِ E، $f'(x) = A$ (محتملاً نامتناهی)، آنگاه $f'(x)$ حداکثر روی مجموعه‌ای از مقولهٔ اول می‌تواند وجود داشته باشد (متناهی) و متمایز از A باشد؛ پس E باید مجموعه‌ای از مقولهٔ اول باشد.[۴۱آ]

کافی است مجموعهٔ Sای را در نظر بگیریم که در آن $f'(x) < A$، زیرا مجموعه‌ای که در آن $f'(x) > A$، مجموعه‌ای است که در آن $(-f)'(x) < -A$. وقتی A متناهی باشد، S محتوا در اجتماعِ مجموعه‌های $E_{n,m}$ است، که $x \in E_{n,m}$ مشروط به اینکه

$|y-x| < \text{۱}/n$ ایجاب کند

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < A - \text{۱}/m$$

را؛ وقتی $A = +\infty$، $A - \text{۱}/m$ را با m جایگزین کنید. اگر نشان دهیم که هر $E_{n,m}$ هیچ‌جاچگال است، حکممان را ثابت کرده‌ایم.

پس فرض کنید که $E_{N,M}$ای در بازهٔ Iای چگال باشد. چون مجموعهٔ نقاطی که در آنها $f'(x) = A$ در I چگال است، $x_\circ \in I$ را نقطه‌ای بگیرید که در آن $f'(x_\circ) = A$. چون $E_{N,M}$ در I چگال است، بازهٔ $(x_\circ - \text{۱}/N, x_\circ + \text{۱}/N)$ شامل نقاطی از $E_{N,M}$ است؛ لذا می‌توانیم $x_k \in E_{N,M}$هایی انتخاب کنیم که $x_k \to x_\circ$. پس

$$\frac{f(x_k)-f(x_\circ)}{x_k - x_\circ} < A - \text{۱}/M \quad (\text{یا } < M \text{ اگر } A = +\infty).$$

با میل دادنِ k به سمتِ ∞ به‌دست می‌آوریم $f'(x_\circ) \le A - \text{۱}/M$ (یا $\le M$)، که ناقضِ $f'(x_\circ) = A$ (یا $= +\infty$) است. بنابراین $E_{n,m}$ همواره هیچ‌جاچگال است.

این قضیه را می‌توان با استفاده از مشتقهای دینی در فرضْ تعمیم داد؛ اما اثباتْ پیچیده‌تر است. چون نشان دادنِ این آسان است که در هر نقطهٔ ناپیوستگیْ دست‌کم یک مشتقِ دینیْ نامتناهی است، پس به‌دست آوردنِ نتیجهٔ ذیل آسان است:

اگر f در نقاطِ مجموعه‌ای همه‌جاچگالْ ناپیوسته باشد و در نقاطِ مجموعهٔ همه‌جاچگال دیگری مشتق‌پذیر (با مشتقی متناهی، و لذا پیوسته) باشد، آنگاه باید در نقاطِ مجموعه‌ای از مقولهٔ دومْ پیوسته باشد و مشتق‌پذیر نباشد.[۴۲] نشان دادیم (ص. ۱۳۸) که وقتی f در نقاطِ مجموعه‌ای همه‌جاچگال پیوسته باشد، نقاطِ ناپیوستگیش مجموعه‌ای از مقولهٔ اول تشکیل می‌دهند. پس وجودِ مجموعهٔ همه‌جاچگالی از نقاطِ پیوستگی یعنی اینکه تنها تعدادِ نسبتاً کمی نقطهٔ ناپیوستگی وجود دارد؛ اکنون می‌بینیم که وجودِ مجموعهٔ همه‌جاچگالی از نقاطِ ناپیوستگیْ تنها به وجودِ تعدادِ نسبتاً کمی نقطه امکان می‌دهد که در آنها مشتقی متناهی وجود داشته باشد.

اثباتِ مستقیمی را می‌توان به صورتِ ذیل عرضه کرد.

E_n را مجموعهٔ نقاط xای بگیرید که $|y-x| < 1/n$ ایجاب کند $|f(y) - f(x)|/|y-x| < n$. در وضعِ فعلیْ «مشتق‌پذیر» یعنی «مشتقی متناهی دارد»، لذا هر نقطهٔ x که $f'(x)$ وجود داشته باشد متعلق به E_nای است. پس برای نشان دادنِ اینکه مجموعهٔ چنین نقاطی مجموعه‌ای از مقولهٔ اول است کافی است نشان دهیم که هر E_n هیچ‌جاچگال است.

فرض کنید که، بر خلاف، E_Nای در بازهٔ بازِ Iای چگال باشد. این بازه شامل یک نقطهٔ w است که f در آن ناپیوسته است، لذا باید hای مثبت و دنبالهٔ $\{y_k\}$ای باشند که $y_k \to w$ و $|f(y_k) - f(w)| \geq h$. k را آن‌قدر بزرگ بگیرید که $|y_k - w| < 1/N$. چون E_N در I چگال است، می‌توانیم x_k را در E_N طوری انتخاب کنیم که x_k بین y_k و w باشد؛ در این صورت $|y_k - w| \leq 1/N$ و $|y_k - x_k| < 1/N$. اکنون $h \leq |f(y_k) - f(w)| \leq |f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(w)|$،

$$\begin{aligned}\frac{h}{|y_k - w|} &< \left|\frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - w}\right| + \left|\frac{f(x_k) - f(w)}{y_k - w}\right| \\ &\leq \left|\frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k}\right| + \left|\frac{f(x_k) - f(w)}{w - x_k}\right| < 2N\end{aligned}$$

زیرا $x_k \in E_N$. با میل دادنِ y_k به سمتِ w تناقضی به دست می‌آوریم.

اگر در بازه‌ای یکی از مشتقهای دینیِ تابعِ پیوسته‌ای همه‌جا صفر باشد، تابع در آنجا ثابت است؛ زیرا نشان داده‌ایم که تابع هم غیرصعودی است هم غیرنزولی. این ایجاب می‌کند که دو تابعِ پیوسته که در سراسرِ بازه‌ای مشتقِ متناهیِ واحدی داشته باشند در آنجا تنها در یک ثابت اختلاف دارند. از طرف دیگر، ممکن است دو تابع در سراسرِ بازه‌ای مشتقِ واحدی، لزوماً در بعضی نقاطْ نامتناهی، داشته باشند، و در آنجا در هیچ ثابتی اختلاف نداشته باشند (ص. ۱۷۳ را ببینید).

در مورد مشتقهای توابعِ کاملاً دلخواه می‌توان چیزهای زیادی گفت. ما مطالبِ ذیل را بدون اثباتْ بیان می‌کنیم.[۴۳] نخست اینکه، مگر در نقاطِ مجموعه‌ای شمارا، مشتقِ بالایی از یک طرف، از مشتقِ پایینی از طرفِ دیگر کمتر نیست. دیگر اینکه اگر روی

یک مجموعهٔ E، $f^+ = +\infty$ آنگاه ـــبه استثنای مجموعه‌ای با اندازهٔ صفرـــ روی E، $f_- = -\infty$؛ مشابهاً، اگر $f_+ = -\infty$ آنگاه با همان استثنای احتمالیْ $f^- = +\infty$. سرانجام، مجموعه‌ای که در آن f^+ و f_- متناهی و متفاوت‌اند با اندازهٔ صفر است. با کنار هم قرار دادنِ این مطالب، می‌بینیم که، مگر روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر، تنها سه امکان هست: (۱) مشتقی متناهی وجود دارد؛ (۲) دو مشتقِ بالاییْ $+\infty$اند

دو مشتقِ پایینی $-\infty$اند؛ (۳) مشتقِ بالایی از یک طرفْ $+\infty$ است، مشتقِ پایینی از طرفِ دیگر $-\infty$ است، و دو مشتقِ دیگر متناهی و برابرند. چون در مورد توابعِ یکنوا تنها (۱) ممکن است، به‌ویژه می‌بینیم که هر تابعِ یکنوا تقریباً همه‌جا مشتقی متناهی دارد؛ برای این مطلب در بخشِ بعد اثباتِ مستقیمی خواهیم داد. حکم دیگری که می‌توانیم از این قضیهٔ کلّی نتیجه بگیریم این است که اگر همهٔ مشتقها تقریباً همه‌جا کراندار باشند، تابع تقریباً همه‌جا مشتق دارد.

مشتقها تابعهایی به آن سادگی‌ای که ممکن است تصور شود نیستند. برای نمونه، حاصل‌ضربِ دو مشتق لزوماً مشتق نیست.[آ۴۳]

۲۲. توابع یکنوا. تابعِ f از یک بازهٔ I در $R_۱$ به $R_۱$ را یکنوا می‌خوانند اگر غیرنزولی یا غیرصعودی باشد. یعنی f یکنواست اگر $f(x) \geq f(y)$ هرگاه $y > x$ (x و y در I)، یا در غیر این صورت $f(x) \leq f(y)$ هرگاه در I، $x < y$. اگر یکی از این دو شرط با نابرابریِ اکید برقرار باشد، می‌گوییم‌که f اکیداً یکنواست. توابعِ آشنای حسابان، اگر یکنوا نباشند، دست‌کم قطعه به قطعه یکنوا هستند. مثلاً اگر $f(x) = x^۲$، f نزولی است وقتی $x < ۰$، و صعودی وقتی $x > ۰$؛ اگر $f(x) = \cos x$، f در بازه‌های $(-\pi, ۰)$، $(۰, \pi)$، و غیره متناوباً صعودی و نزولی است؛ اگر $f(x) = e^x$، f در سراسرِ $R_۱$ صعودی است. همهٔ این توابعْ پیوسته‌اند. از طرف دیگر، تابعِ f تعریف‌شده با $f(x) = [x]$ (بزرگترین عدد صحیحی که از x بزرگتر نیست) غیرنزولی است و در هر عدد صحیحِ x یک ناپیوستگی دارد.

تمرین ۲۲.۱. هر تابعِ یکنوا روی هر زیربازهٔ فشردهٔ دامنه‌اش کراندار است.

تمرین ۲۲.۲. هر تابع یکنوا در هر نقطهٔ درونیِ دامنه‌اش از هر طرف به حدی (متناهی) می‌گراید.

تمرین ۲۲.۳. حدِ هر دنبالهٔ نقطه‌ای از توابعِ یکنوا یکنواست.

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ x از دامنه‌اش جهش دارد اگر f در x از هر دو طرفْ حد داشته باشد، اما در x پیوسته نباشد. بنا بر تمرین ۲۲.۲ می‌توانیم بگوییم که جهشها تنها ناپیوستگیهای توابعِ یکنوایند. ساده‌ترین توابعِ یکنوا برای مجسم کردنْ آنهایی‌اند که تنها تعدادی متناهی جهش دارند، اما تابعی یکنوا می‌تواند ساختاری بسیار پیچیده‌تر از این داشته باشد. برای نمونه، اگر در بازهٔ $(۱/(n+۱), ۱/n]$، $f(x) = ۲^{-n}$، f تابعی غیرنزولی است با جهشهایی که در ۰ نقطه‌ای حدی دارند.

هر تابع یکنوا حداکثر می‌تواند تعداد نامتناهیِ شمارایی جهش داشته باشد، زیرا بازه‌های از $f(x-)$ تا $f(x+)$، اگر تهی نباشند، مجموعه‌ای از بازه‌های مجزا در $R_۱$ تشکیل می‌دهند (مجزا، از آن رو که f یکنواست)، و چنین مجموعه‌ای از بازه‌ها شماراست (ص. ۴۳). با این حال، نشان خواهیم داد که مجموعهٔ جهشهای تابعی پیوسته می‌تواند هر مجموعهٔ شمارایی، حتی مجموعه‌ای همه‌جاچگال، مثلاً مجموعهٔ همهٔ نقاطِ گویای یک بازه، باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ مجموعهٔ شمارای داده‌شده‌ای باشد، و j_nها را اعداد مثبتی بگیرید که $\sum j_n < \infty$. تابعهای f_n را با قرار دادنِ $f_n(x) = ۰$ به ازای $x < x_n$ و $f_n(x) = j_n$ به ازای $x \geq x_n$ تعریف می‌کنیم. طبیعتاً در حالت کلّی x_nها به ترتیبِ صعودیِ اندازه شماره‌گذاری نشده‌اند. سریِ $\sum f_n$ به‌طور یکنواخت همگراست (بنا بر Mـآزمون، ص. ۱۲۱)، زیرا $|f_n(x)| \leq j_n$ و $\sum j_n$ همگراست. اگر $x_۰$ هیچ‌یک از x_nها نباشد، یک نقطهٔ پیوستگیِ همهٔ f_nهاست و لذا یک نقطهٔ پیوستگیِ f است (ص. ۱۲۲). از طرف دیگر، اگر x_m یکی از x_nها باشد، دقیقاً یک تابعِ f_n، یعنی f_m، در x_m ناپیوسته است. در این صورت $\sum_{n \neq m} f_n = f - f_m$ در x_m پیوسته است پس f، به‌عنوان مجموعِ تابعی که در x_m پیوسته است و تابعی که در x_m ناپیوسته است، خود در x_m ناپیوسته است. در واقع، f در x_m جهشی به اندازهٔ j_m دارد. منطقاً می‌توانیم

چنین تابعِ fای را یک تابعِ جهشیِ محض بخوانیم. به صورت کلّیتر، f را یک تابع جهشیِ محض می‌خوانیم اگر به نحو مشابه ساخته شده باشد، اما محتملاً هم با جهشهای راست و هم با جهشهای چپ، طوری که $f(x_m-) \neq f(x_m) \neq f(x_m+)$. اگر تابع جهشیِ محضی بسازیم که جهشهای راست و چپِ آن همان جهشهای تابعِ غیرنزولیِ داده‌شدهٔ gای باشد، آنگاه $g - f$ هم غیرنزولی، و نیز پیوسته است.

ممکن است پذیرفتنی به‌نظر آید که مشتقِ هر تابعِ جهشیِ محض، مگر در جهشهایش، باید صفر باشد. این حدس تقریباً، اما نه کاملاً، درست است: مگر روی مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر، مشتقِ هر تابعِ جهشیِ محضْ صفر است، اما این مجموعهٔ با اندازهٔ صفر ممکن است شامل نقاطی اضافه بر جهشها باشد.[۴۴] با بررسیِ چند نمونهٔ ویژه می‌توانیم از کیفیتِ آنچه ممکن است رخ دهد تصور بهتری به‌دست آوریم. f را تابع جهشیِ محضی بگیرید که در نقاطِ ۳^{-n}، $n = ۱, ۲, \ldots$، جهشهایی به اندازهٔ ۲^{-n} داشته باشد؛ g را تابع جهشیِ محضی بگیرید که در نقاطِ ۲^{-n} جهشهایی به اندازهٔ ۳^{-n} داشته باشد؛ فرض کنید $f(۰) = g(۰) = ۰$. هر دوی f و g در ۰ (از راست) پیوسته‌اند. با این حال، به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که $f'_+(۰) = +\infty$ در حالی که $g'_+(۰) = ۰$. در واقع، اگر $h > ۰$، $[f(۰ + h) - f(۰)]/h = f(h)/h$؛ و اگر $۳^{-m-۱} < h < ۳^{-m}$، $f(h) = \sum_{k=m+۱}^{\infty} ۲^{-k} = ۲^{-m}$، لذا $f(h)/h > ۳^m/۲^m \to \infty$. مشابهاً، اگر $۲^{-m-۱} < h < ۲^{-m}$، $g(h) = \sum_{k=m+۱}^{\infty} ۳^{-k} = \frac{۱}{۲} \cdot ۳^{-m}$، لذا $g(h)/h < ۲^m/۳^m \to ۰$.

تمرین ۲۲.۴. تابعِ جهشیِ محضِ یکنوایی دارای جهشهایی با نقطهٔ حدیِ ۰ بسازید که $f'_+(۰)$ مثبت و متناهی باشد.

به‌نظر می‌رسد که برای اثباتِ اینکه مشتقِ توابعِ جهشیِ محض تقریباً همه‌جا صفر است راهی نیست که به‌طوربنیادی از توسل به این قضیهٔ کلّی (که به زودی ثابت خواهیم کرد) ساده‌تر باشد که هر تابعِ یکنوا تقریباً همه‌جا مشتقی متناهی دارد.

آنچه احتمالاً شگفت‌انگیزتر است این است که تابعِ پیوستهٔ یکنوایی، غیر از ثابت،

می‌تواند وجود داشته باشد که مشتقش تقریباً همه‌جا صفر باشد. توابعی با این خاصیت را توابعِ یکنوای تَکین می‌خوانند. ما تابع یکنوای تکینی را با ذکر برخی جزئیات خواهیم ساخت، زیرا از این تابع می‌توان برای کاربردهای گوناگونی استفاده کرد. یک کاربرد (ص. ۱۷۳) ساختنِ تابع یکنوای تکینِ پیچیده‌تری است که در هیچ بازه‌ای ثابت نباشد.

ساخت را بر پایهٔ تابعی تکین روی مجموعهٔ کانتورِ §۶ قرار می‌دهیم؛ مثالِ ما در هر بازهٔ مکملِ این مجموعه ثابت خواهد بود و لذا مطمئناً مشتقِ آن، مگر در نقاطِ مجموعهٔ کانتور که با اندازهٔ صفر است، صفر خواهد بود. اگر x نقطهٔ دلخواهی از بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد، می‌نویسیم $x = ۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ (پایهٔ ۳)، که هر a_k، ۰ یا ۱ یا ۲ است. نقاطِ انتهاییِ بازه‌های مکملِ مجموعهٔ کانتور اعدادیِ با بسط سه‌سه‌ایِ مختوم‌اند که می‌توان آنها را بدون استفاده از هیچ ۱ای نوشت، برای نمونه $\frac{۱}{۳} = ۰/۱۰۰۰\cdots = ۰/۰۲۲۲\cdots$؛ $\frac{۲}{۳} = ۰/۲۰۰۰\cdots$. اگر همهٔ ارقامِ چنین بسطی را نصف کنیم و حاصل را به صورتِ عددی نوشته‌شده در پایهٔ ۲ تعبیر کنیم، اعدادِ $۰/۰۱۱۱\cdots$ (پایهٔ ۲) و $۰/۱۰۰۰\cdots$ (پایهٔ ۲) را، برای نمونه، به‌دست می‌آوریم، که یکی‌اند. این در مورد هر جفت از نقاطِ انتهاییِ بازهٔ مکملِ واحدی رخ می‌دهد. اکنون بگذارید با نوشتنِ همهٔ نقاطِ x از مجموعهٔ کانتور در پایهٔ ۳، بدون استفاده از ۱، و نصف کردن همهٔ ارقام و قرار دادنِ $f(x)$ برابرِ عدد حاصل، تعبیرشده در پایهٔ ۲، تابع fای را تعریف کنیم. این تابعِ f روی مجموعهٔ کانتور تعریف شده است، و هم‌اکنون دیدیم که f در دو نقطهٔ انتهاییِ هر بازهٔ مکمل مقدار واحدی دارد. می‌توانیم f را، با دادنِ همان مقداری به آن در سراسرِ هر بازهٔ مکمل که در دو نقطهٔ انتهاییِ آن بازه دارد، به همهٔ $[۰, ۱]$ گسترش دهیم. اکنون باید نشان دهیم که f یکنوا و پیوسته است؛ همچنین جالب خواهد بود که مشتقهای f را در نقاطِ مجموعهٔ کانتور به‌دست آوریم.

اگر x و y دو نقطه، غیر از نقاط انتهایی، از مجموعهٔ کانتور باشند و $x < y$، آنگاه بسطِ سه‌سه‌ایِ x و y باید به شکلِ

$$x = ۰/a_۱a_۲a_۳\cdots a_na_{n+۱}\cdots$$

$$y = ۰/a_۱a_۲a_۳\cdots a_nb_{n+۱}\cdots$$

باشند که $b_{n+1} > a_{n+1}$. پس بسطهای دودوییِ $f(x)$ و $f(y)$ تا رقمِ nاُم یکی خواهند بود، در حالی که رقمِ $(n+1)$امِ $f(y)$، ۱ خواهد بود که از رقمِ $(n+1)$امِ $f(x)$ بزرگتر است. این یعنی اینکه $f(y) > f(x)$. پس f تابعی غیرنزولی است.

چون f در بازه‌هایی که ثابت است پیوسته است، تنها باید پیوستگیِ آن را درنقاطِ مجموعهٔ کانتور بررسی کنیم. فرض کنیم x چنین نقطه‌ای باشد. یک همسایگیِ x شامل همهٔ نقاط yای از مجموعهٔ کانتور است که با x حداکثر به اندازهٔ 3^{-n} تفاوت دارند، یعنی به اندازهٔ اعدادی که بسطِ سه‌سه‌ایِ آنها با دست‌کم n صفر آغاز می‌شود. پس بسطِ دودوییِ $f(y)$ با بسطِ دودوییِ $f(x)$ به اندازهٔ عددی تفاوت دارد که بسط دودوییِ آن با دست‌کم n صفر آغاز می‌شود، لذا $f(y)$ حداکثر به اندازهٔ 2^{-n} با $f(x)$ تفاوت دارد. چون به ازای هر نقطهٔ y که در مجموعهٔ کانتور نباشد ولی در همان همسایگیِ x باشد مقدار $f(y)$ همان مقدارِ آن در هر نقطهٔ انتهاییِ بازهٔ مکملِ شامل y است، نتیجه می‌شود که f در x پیوسته است.

بنابراین نشان داده‌ایم که f پیوسته است، یکنواست، ثابت نیست، و تکین است. اکنون مشتق‌پذیریِ f در نقاطِ مجموعهٔ کانتور را بررسی می‌کنیم. در هر نقطهٔ انتهاییِ چپِ هر بازهٔ مکمل، مشتق راست f'_+ وجود دارد و ۰ است؛ و مشابهاً در هر نقطهٔ انتهاییِ راست x، $f'_-(x) = 0$.

نخست مشتقها را در طرفِ دیگرِ نقاطِ انتهاییِ بازه‌های مکمل، مثلاً برای مشخص بودنْ در نقطه‌های انتهاییِ راستِ $x = 0/a_1a_2\cdots a_n 2000\cdots$، در نظر بگیرید. اگر h بین 3^{-m} و 3^{-m-1} باشد، و $m > n$، $f(x+h)$ به اندازهٔ چیزی بین 2^{-m} و 2^{-m-1} با $f(x)$ اختلاف دارد، لذا $[f(x+h) - f(x)]/h$ باید بین $2^{-m-1}/3^{-m}$ و $2^{-m}/3^{-m-1}$ باشد. پس وقتی $h \to 0$ (و لذا $m \to \infty$)، این خارج‌قسمتِ تفاضلیْ بینهایتِ مثبت می‌شود. یعنی در هر نقطهٔ انتهاییِ راست x، $f'_+(x) = +\infty$ و $f'_-(x) = 0$. مشابهاً، در هر نقطهٔ انتهاییِ چپْ $f'_-(x) = +\infty$ و $f'_+(x) = 0$.

می‌توان نشان داد که در نقاطی حدی که نقطهٔ انتهایی نیستند $f^+ = +\infty$، اما f_+ می‌تواند هر مقداری بین ۰ و $+\infty$ داشته باشد.

به‌عنوان نخستین کاربردْ تابعِ تکینِ دیگری می‌سازیم که روی هیچ بازه‌ای ثابت

نیست.[۴۵] C را تابعی بگیرید که هم‌اکنون ساخته شد، ولی گسترش‌یافته به $(-\infty, \infty)$ با قرار دادنِ $C(x) = ۰$ به ازای $x \leq ۰$ و $C(x) = ۱$ به ازای $x \geq ۱$.

$\{r_n\}$ را یک شمارشِ اعداد گویا بگیرید. تعریف کنید

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n} C(۲^n(x - r_n)).$$

چون این سریْ به‌طور یکنواخت همگراست (Mـآزمون)، f پیوسته است. همچنین f اکیداً صعودی است زیرا اگر $x < y$، rای گویا بین x و y هست. پس $C(۲^n(x - r)) = ۰ < C(۲^n(y - r))$. به ازای هر $m \neq n$،

$$C(۲^m(x - r)) \leq C(۲^m(y - r))$$

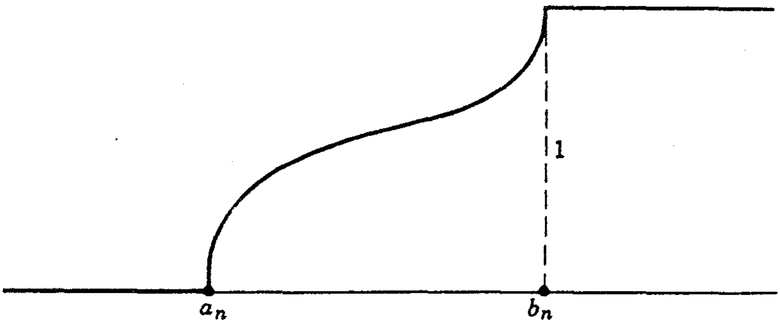
زیرا C غیرنزولی است. پس $f(x) < f(y)$.

سرانجام، بنا بر قضیهٔ فوبینی در مشتق‌گیری از سریهای با جملاتِ غیرنزولی (ص. 160 در زیر را ببینید)، به ازای تقریباً همهٔ xها،

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} C'(۲^n(x - r_n)) = ۰.$$

به‌عنوان کاربرد دیگری از تابع تکینِ Cی ساخته‌شده در ص. ۱۷۱، می‌توانیم نمونه‌ای، ذکرشده در ص. ۱۶۷، از دو تابع بسازیم که در سراسرِ بازه‌ای مشتقهای واحدی (در بعضی نقاطْ نامتناهی) دارند، اما تفاوتِ آنها در هیچ ثابتی نیست. همچنین به تابع gای نیاز داریم که پیوسته و غیرنزولی باشد با مشتقِ متناهی در هر نقطه‌ای که در مجموعهٔ کانتور نباشد، و مشتقِ $+\infty$ در هر نقطهٔ مجموعهٔ کانتور. همین که چنین gای به‌دست آوریم، می‌توانیم قرار دهیم $h(x) = f(x) + g(x)$؛ در این صورت در همهٔ نقاطِ مجموعهٔ کانتور $h'(x) = g'(x) = +\infty$ (زیرا همهٔ مشتقهای f نامنفی‌اند)؛ و در همهٔ نقاطی که در مجموعهٔ کانتور نباشند $h'(x) = g'(x)$، زیرا در چنین نقاطی $f'(x) = ۰$. اما g و h در f تفاوت دارند، که ثابت نیست.

به ساختنِ g می‌پردازیم.[۴۶] بگذارید بازه‌های مکملِ (a_n, b_n) برای مجموعهٔ کانتور را به ترتیب نزولیِ طولْ شماره‌گذاری کنیم (ترتیبِ تعدادی متناهی بازه با هر طولْ مهم نیست).



ϕ_n را تابع غیرنزولیِ پیوسته‌ای با ویژگیِ کلّیِ مشخص‌شده در شکل بگیرید: به ازای $x < a_a$، $\phi_n(x) = \circ$، و به ازای $x > b_n$، $\phi_n(x) = ۱$، و $\phi'_{n+}(a_n) = \phi'_{n-}(b_n) = +\infty$.
(یک مثالِ صریحْ

$$\phi_n(x) = (۲/\pi)\tan^{-۱}\{(x-a_n)^{\frac{۱}{۲}}(b_n - x)^{-\frac{۱}{۲}}\}$$

است.)

اکنون مشاهده می‌کنیم که طولهای بازه‌های (a_n, b_n) توانهای صحیح منفیِ ۳اند؛ قرار دهید $h_n = (\frac{۲}{۵})^m$ هرگاه (a_n, b_n) طولِ ۳^{-m} داشته باشد. تعریف کنید $g(x) = \sum h_n\phi_n(x)$ که مجموعْ (نامتناهی) روی همهٔ nهاست. به عبارت دیگر، مقدارِ $g(x)$ مجموعِ h_nها روی همهٔ بازه‌های (a_n, b_n) و در سمت چپ x است، به اضافهٔ $h_k\phi_k(x)$ اگر x در (a_k, b_k) باشد. اکنون تعدادِ $۲^{m-۱}$ بازهٔ (a_n, b_n) به طولِ ۳^{-m} وجود دارد، و روی هر یک $h_n = (\frac{۲}{۵})^m$، لذا $\sum h_n$ همگراست. بنابراین سریِ تعریف‌کنندهٔ g به‌طور یکنواخت همگراست و لذا g پیوسته است. بنا بر روشِ ساخت، g غیرنزولی است. فرض کنید x نقطه‌ای از مجموعهٔ کانتور باشد، غیراز a_nها، و فرض کنید $\delta > \circ$. خارج قسمتِ

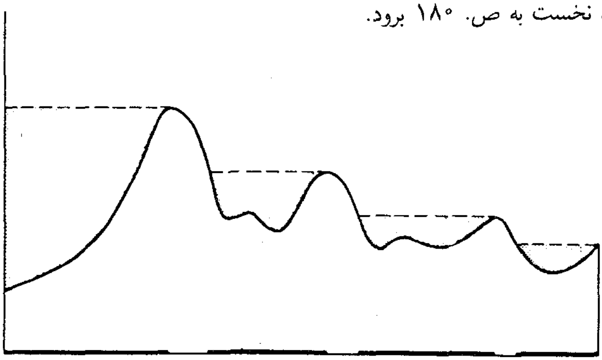
تفاضلی

$$\Delta = \delta^{-1}\{g(x+\delta) - g(x)\}$$

$$= \delta^{-1} \sum h_n \{\phi_n(x+\delta) - \phi_n(x)\}$$

از h_k بیشتر خواهد بود اگر بازهٔ $(x, x+\delta)$ حاوی بازهٔ مکملِ (a_k, b_k) باشد. دیدنِ این آسان است که $(x, x+\delta)$ همواره حاوی بازهٔ مکملی به طولِ $\delta/۹ \geq ۳^{-m}$ است. پس $\Delta \geq (\frac{۲}{۵})^m/\delta \geq \frac{۱}{۹}۳^m(\frac{۲}{۵})^m \to \infty$، لذا $g'_+(x) = +\infty$. اما اگر x یکی از a_nها باشد آنگاه با بررسی معلوم می‌شود که $g'_+(x) = +\infty$. مشابهاً در همهٔ xهای مجموعهٔ کانتور $g'_-(x) = +\infty$. یعنی در همهٔ xهای مجموعهٔ کانتور $g'(x) = +\infty$.

اکنون به اثباتِ نسبتاً دشوارِ این مطلب می‌پردازیم که هر تابعِ یکنوا تقریباً همه‌جا مشتقِ متناهی دارد.[۴۷] خواننده‌ای که علاقه‌مند به دیدنِ بعضی کاربردهای قضیه است می‌تواند نخست به ص. ۱۸۰ برود.



اثباتْ متکی بر لمی از ف. ریس است که به لمِ «آبِ جاری» یا «خورشیدِ طالع» معروف است. اگر g تابع پیوسته‌ای از یک بازهٔ I به $R_۱$ باشد، اگر نمودارِ g مقطعِ عرضیِ بسترِ رودی باشد، و مجموعهٔ E از نقاطی را در نظر بگیریم که پُر از آب‌اند، شهوداً آشکار است که E از بازه‌های بازی تشکیل شده است که g در دو انتهای هر یک مقدار واحدی دارد؛ اگر نموداْر نمای رشته کوهی باشد، اگر خورشید در جهت مثبتِ محورِ x طلوع کند، و اگر E مجموعهٔ نقاطی باشد که در سایه‌اند، باز هم شهوداً واضح است که E متشکل

از بازه‌های بازی است که در نقاطِ انتهاییشان مقدارِ واحدی دارد. (در هر دو مورد ممکن است، مانند شکل، در منتهی‌الیهِ سمتِ چپْ بازه‌ای استثنایی وجود داشته باشد.)

اکنون لم را با اصطلاحاتِ مجرد و برای حالت کلّیتری بیان می‌کنیم. فرض کنید g روی یک بازهٔ I، صرف‌نظر از جهشها، پیوسته باشد، و فرض کنید G با

$$G(x) = \max(g(x-), g(x), g(x^+))$$

تعریف شده باشد. مجموعهٔ E از نقاطِ xای که $y > x$ای هست که $g(y) > G(x)$، مجموعه‌ای باز است؛ و اگر (a,b) یکی از بازه‌هایی باشد که E را تشکیل می‌دهند، آنگاه $g(a+) \leq G(b)$.

اگر چپ و راست را عوض کنیم، و E' را به صورتِ مجموعهٔ نقاطِ xای تعریف کنیم که $y < x$ای هست که $g(y) > G(x)$، آنگاه، مشابهاً، اگر E' اجتماع بازه‌های بازِ (a', b') باشد، $G(a') \geq g(b'-)$.

نخست ثابت می‌کنیم که E باز است. فرض کنید $x_\circ \in E$؛ در این صورت یک $y > x_\circ$ هست که $g(y) > G(x_\circ)$. باید نشان دهیم که این خاصیت برای همهٔ xهای نزدیکِ $x_\circ$ برقرار است. اگر x اندکی به سمت چپِ $x_\circ$ منحرف شود، $g(x_\circ)$ نزدیکِ $g(x-)$ است؛ اگر x اندکی به سمت راستِ $x_\circ$ منحرف شود، $g(x_\circ)$ نزدیکِ $g(x+)$ است؛ در هر صورت $G(x)$ تنها می‌تواند اندکی از $G(x_\circ)$ بزرگتر شود. چون $g(y) > G(x_\circ)$ ، همچنین داریم $g(y) > G(x)$ مشروط بر اینکه $G(x)$ از $G(x_\circ)$ خیلی بزرگتر نباشد، که، چنانکه هم‌اکنون دیدیم، وقتی x نزدیک $x_\circ$ باشد چنین است.

برای اثباتِ حکمِ دومِ لم، فرض کنید (a,b) یکی از بازه‌هایی باشد که E را تشکیل می‌دهند، و b نقطه‌ای از E نباشد. فرض کنید $a < x < b$؛ کافی خواهد بود نشان دهیم که $g(x) \leq G(b)$، و سپس x را از سمت راست به a میل دهیم. چون $x \in E$، نقاطِ $y > x$ای هستند که $g(y) > G(x)$، و لذا $G(y) \geq g(x)$. می‌خواهیم نشان دهیم که b یک چنین نقطهٔ yای است. اگر نباشد، آنگاه $G(b) < g(x)$. z_1 را کوچکترین کرانِ بالای نقاطِ zای در $[x,b]$ بگیرید که $G(z) \geq g(x)$. (چنین نقاطی وجود دارند، مثلاً x؛ کوشش می‌کنیم نشان دهیم که $z_1 = b$.) اگر z_1 برابرِ b نباشد، آنگاه z_1 متعلق است به E و بنابراین $y > z_1$ای هست که $g(y) > G(z_1)$. اگر این y در $(z_1, b]$ باشد،

$G(z_1) \leq g(x) < G(y)$، خلافِ نحوه‌ای که z_1 تعریف شده است؛ لذا $y > b$. اما در این صورت چون b در E نیست، $g(y) \leq G(b)$. پس اگر $g(x) < G(b)$،

$$g(x) \leq G(z_1) < g(y) \leq G(b) < g(x),$$

که تناقض است.

می‌خواهیم مشتق‌پذیریِ تابعی غیرنزولی را از دو نتیجهٔ لمِ ریش نتیجه بگیریم. به این نتایج به این صورت می‌رسیم که نخست نشان می‌دهیم که قضیه‌مان نتیجه خواهد شد اگر بتوانیم ثابت کنیم که تقریباً همه‌جا $f^+(x) < +\infty$ و تقریباً همه‌جا $f^+(x) \leq f_-(x)$. نمادگذاریْ ساده خواهد شد، و از کلّیتْ کاسته نخواهد شد، اگر فرض کنیم که نقطهٔ میانیِ بازهٔ (a, b)ی ما ۰ است. در این صورت می‌توانیم نمودارِ f را نسبت به مبدأ انعکاس دهیم تا نمودارِ تابعِ f_0ای به‌دست آید که مقدارش در x برابرِ $-f(-x)$ است. این تابعِ f_0 نیز غیرنزولی است و مشتقِ پایینیِ راستِ آن در x برابرِ مشتقِ پایینیِ چپِ f در $-x$ است؛ در واقع،

$$\frac{f_0(x+h) - f_0(x)}{h} = \frac{-f(-x-h) - (-f(-x))}{h}$$
$$= \frac{f(-x + (-h)) - f(x)}{-h}.$$

اگر تقریباً همه‌جا به ازای هر f غیرنزولیْ $f^+(x) \leq f_-(x)$ برقرار باشد، این رابطه با f جایگزین‌شده با f_0 و x جایگزین‌شده با $-x$ نیز برقرار است. یعنی به ازای تقریباً همهٔ xها $f^-(x) \leq f_+(x)$، لذا به ازای تقریباً همهٔ xها،

$$f^+(x) \leq f_-(x) \leq f^-(x) \leq f_+(x) \leq f^+(x).$$

اگر به ازای تقریباً همهٔ xها $f^+(x) < \infty$، نابرابریِ قبل نشان می‌دهد که به ازای تقریباً همهٔ xها هر چهار مشتقْ برابر و متناهی‌اند، یعنی به ازای تقریباً همهٔ xها مشتقی متناهی وجود دارد.

اکنون می‌توانیم مسأله را بازهم فروکاهیم؛ کافی است نشان دهیم که، r و R هرچه باشند، مجموعه‌ای که روی آن $f_-(x) < r < R < f^+(x)$، اندازهٔ صفر دارد. زیرا اگر

$f_-(x) < r < R < f^+(x)$، اعداد گویای r و Rای هستند که $f^+(x) > f_-(x)$.
چون تنها تعداد شمارایی جفت اعداد گویا وجود دارد، مجموعه‌ای که در آن $f^+(x) >$ $f_-(x)$، محتوا در اجتماعِ تعداد شمارایی مجموعه با اندازهٔ صفر است، و لذا خود با اندازهٔ صفر است.

نتایجی از لمِ ریس که اثباتِ ما بر آنها متکی است اینها هستند:

(۱) فرض کنید f روی $[a,b]$ غیرنزولی باشد و E_R را مجموعهٔ نقاطِ xای بگیرید که در آنها f پیوسته است و $f^+(x) > R$. در این صورت E_R را می‌توان با مجموعهٔ شمارایی از بازه‌های (a_k, b_k) پوشاند که مجموعِ طولهایشان، $\sum(b_k - a_k)$، حداکثر

$$R^{-1} \sum [f(b_k+) - f(a_k+)] \leq [f(b-) - f(a+)]/R$$

است.

(۲) فرض کنید f روی $[a,b]$ غیرنزولی باشد و E_r را مجموعهٔ نقاطِ xای بگیرید که در آنها f پیوسته است و $f_-(x) < r$. در این‌صورت E_r را می‌توان با مجموعهٔ شمارایی از بازه‌های (a_k, b_k) که $\sum [f(b_k-) - f(a_k+)] \leq r \sum (b_k - a_k) \leq r(b-a)$ پوشاند.

اثباتِ این دو حکم را تا وقتی نشان دهیم که قضیه چگونه از آنها نتیجه می‌شود به تأخیر می‌اندازیم.

در نخستین مرحلهٔ مشاهده می‌کنیم که (۱) ایجاب می‌کند که تقریباً همه‌جا $f^+(x) <$ $+\infty$. زیرا اگر روی E، $f^+(x) = +\infty$، آنگاه فرضِ (۱) به ازای هر R مثبت برقرار است، لذا به ازای هر R، E با بازه‌های (a_k, b_k)ای پوشانده می‌شود که مجموعِ طولشان حداکثر $[f(b-) - f(a+)]/R$ است. یعنی E با بازه‌های با مجموعِ طولهای به‌دلخواه کوچک پوشانده می‌شود، لذا E با اندازهٔ صفر است.

سپس مجموعهٔ Eای در نظر بگیرید که در آن f پیوسته است و $f_-(x) < r < R < f^+(x)$، لذا فرضهای (۱) و (۲) هر دو برآورده می‌شوند. (۱) را در مورد هر یک از بازه‌های (a_k, b_k)ی (۲) به‌کار برید. می‌بینیم که بخشی از E که در (a_k, b_k) است با بازه‌هایی پوشانده می‌شود که مجموعِ طولهایشان، مثلاً L_k، حداکثر

$[f(b_k-) - f(a_k+)]/R$ است. با جمع کردنِ این نابرابریها به ازای همهٔ (a_k, b_k)ها، و به‌کار بردنِ (۲)، می‌بینیم که

$$\sum L_k \leq (1/R) \sum [f(b_k-) - f(a_k+)] \leq (r/R)(b-a)\cdot$$

همین استدلال را می‌توان در مورد هر زیربازه از (a, b) به‌کار بست؛ یعنی بخشی از E در هر بازهٔ (p, q) با بازه‌هایی با مجموع طولهای حداکثر $(r/R)(q-p)$ پوشانده می‌شود. اکنون فرض کنید E به طریقی با زیربازه‌های (p_k, q_k) (متداخل یا نامتداخل) پوشانده شده باشد. بخشی از E را که در (p_k, q_k) است می‌توان با بازه‌های نامتداخلی با مجموع طولهای حداکثر $(r/R)(q_k - p_k)$ پوشاند، و لذا E را می‌توان با بازه‌هایی پوشاند که مجموعِ طولهایشان حداکثر $(r/R)\sum(q_k - p_k)$ است. وجودِ چنین پوششهایی نتیجه می‌دهد که E با اندازهٔ صفر است (تمرین ۱.۱۱).

اکنون به اثباتِ گزاره‌های (۱) و (۲) می‌پردازیم.

(۱) اگر $x \in E_R$، یک $y > x$ هست که $[f(y) - f(x)] \div (y-x) > R$، یعنی $f(y) - Ry > f(x) - Rx$. لمِ ریس را در موردِ تابعِ g که $g(x) = f(x) - Rx$ به‌کار برید. چون f در x پیوسته است، g نیز چنین است و $G(x) = g(x)$. نتیجه می‌گیریم که E_R با مجموعهٔ شمارایی از بازه‌های (a_k, b_k) که $g(a_k+) \geq G(b_k)$ پوشانده می‌شود، به عبارت دیگر (چون f غیرنزولی است)،

$$f(b_k+) - Rb_k \geq f(a_k) - Ra_k,$$

یعنی

$$f(b_k+) - f(a_k+) \geq R(b_k - a_k)$$

با جمع کردنِ این نابرابریها به ازای مقادیرِ گوناگونِ k، و مجدداً استفاده از این مطلب که f غیرنزولی است، به‌دست می‌آوریم

$$R\sum(b_k - a_k) \leq \sum[f(b_k+) - f(a_k+)]\cdot$$

(۲) اگر $x \in E_r$، $x < y$ای هست که $[f(y) - f(x)] \div (y - x) < r$، یعنی (چون $y < x$)،

$$f(y) - f(x) > (y - x)r,$$

$$f(y) - ry > f(x) - rx\cdot$$

لمِ ریس را می‌توان، در شکلی که در فرضِ آن نابرابریْ معکوس شده است، در مورد تابع gی تعریف‌شده با $g(x) = f(x) - rx$ به‌کار برد. درمی‌یابیم که E_r با مجموعه‌ای از بازه‌های (a_k, b_k) که $g(b_k-) \leq G(a_k)$ پوشانده می‌شود؛ چون f غیرنزولی است، وجودِ این پوشش ایجاب می‌کند که

$$f(b_k-) - rb_k \leq f(a_k+) - ra_k.$$

یعنی

$$f(b_k-) - f(a_k+) \leq r(b_k - a_k)\cdot$$

با جمع بستن روی همهٔ بازه‌ها، حکمِ (۲) را به‌دست می‌آوریم.

اکنون کاربردهای جالبی از قضیهٔ مربوط به مشتقگیری از توابعِ یکنوا ارائه می‌کنیم. وجودِ چنین کاربردهایی به توجیهِ میزانِ کوششی که صرفِ اثباتِ قضیه شد کمک می‌کند.

(i) مشتقگیری از سریهای توابعِ یکنوا (قضیهٔ فوبینی).[۴۸] فرض کنید $f_1 + f_2 + \cdots$ یک سریِ همگرای نقطه‌ای از توابعِ غیرنزولی روی بازهٔ $[a, b]$ باشد، با مجموعِ s. در این صورت به ازای تقریباً هر x در $[a, b]$، $f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots = s'(x)$.

این نمونه‌ای است از قضیه‌ای که بر حسب سریها راحت‌تر بیان می‌شود تا بر حسبِ دنباله‌ها.

اگر مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر را در نظر نگیریم، همهٔ f_nها مشتقِ نامنفی دارند، و s نیز چنین است، زیرا این نیز تابعی غیرنزولی است. سریِ $f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots$ جملاتِ نامنفی دارد و لذا (به ازای هر x) مجموعهای جزئیِ آن، $s'_n(x)$، دنباله‌ای غیرنزولی

می‌سازند. بنابراین این سریْ همگراست اگر مجموعهای جزئیش کراندار باشند. اما

$$\begin{aligned}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} &= \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+\cdots \\ &\geq \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+\cdots \\ &+\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\end{aligned}$$

زیرا f_nها غیرنزولی‌اند. با میل دادنِ h به سمتِ ۰ نتیجه می‌گیریم که $s'(x) \geq s'_n(x)$ هرگاه سمتِ چپْ متناهی باشد، یعنی تقریباً همه‌جا. پس سریِ مشتق‌شده به ازای هر x همگراست و تنها باید ثابت کنیم که مجموعِ مناسب را دارد.

برای شناختنِ مجموعِ سریِ مشتق‌شده نخست نشان می‌دهیم که زیردنباله‌ای از مجموعهای جزئیِ آن تقریباً همه‌جا به $s'(x)$ همگراست. مشاهده می‌کنیم که $s(b) - s_n(b) \to 0$، لذا باید زیردنباله‌ای از اعداد صحیحِ n باشد که به ازای آن $\sum[s(b)-s_n(b)]$ همگرا باشد (می‌توانیم nای انتخاب کنیم که تفاوت را کمتر از $\frac{1}{2}$ سازد، بعد nای بزرگتر که تفاوت را کمتر از $\frac{1}{4}$ سازد، و به همین ترتیب). به ازای مقادیرِ n متعلق به این زیردنباله، $s(x) - s_n(x) \leq s(b) - s_n(b)$ زیرا $s(x) - s_n(x)$ «دُمِ» سریِ $s(x)$ است و لذا تابعی غیرنزولی تعریف می‌کند. پس $\sum[s(x) - s_n(x)]$ (جمع‌بسته‌شده روی همان مقادیرِ قبلیِ n) سریِ همگرایی از تابعهای غیرنزولی است. بنا بر آنچه پیشتر ثابت کرده‌ایم، سریِ $\sum[s'(x) - s'_n(x)]$ تقریباً همه‌جا همگراست، و نتیجتاً جملهٔ عمومیِ آن تقریباً همه‌جا به صفر همگراست. یعنی زیردنباله‌ای از مجموعهای جزئیِ $s_n(x)$ یافته‌ایم که تقریباً همه‌جا $s'_n(x) \to s'_n(x)$. چون کلِّ دنبالهٔ مجموعهای جزئیْ تقریباً همه‌جا همگراست، باید به حدِ این زیردنباله، یعنی به $s'(x)$، همگرا باشد.

(ii) چگالیِ مجموعه‌ها. فرض کنید E مجموعه‌ای در R_1 باشد. می‌گوییم که نقطهٔ x (در E باشد یا نباشد) یک نقطهٔ چگالی‌ِ E است اگر همسایگیهای به اندازهٔ کافی کوچکِ x «عمدتاً» از نقاطِ E تشکیل شده باشد. تقریرِ دقیقِ این تعریف کارِ چندان ساده‌ای نیست. نخست بگذارید E را با گردایهٔ شمارایی از بازه‌های باز بپوشانیم. این کار را می‌توان به راههای

گوناگونی انجام داد؛ بزرگترین کران پایینِ مجموعِ طولهای چنین بازه‌های پوشاننده‌ای را به عنوانِ ارائه‌کنندهٔ مقیاسی از اندازهٔ E اختیار می‌کنیم، و آن را اندازهٔ خارجی‌ی E می‌خوانیم و با $\mu(E)$ نشان می‌دهیم. به ازای هر بازهٔ I، $\mu(I)$ طول معمولیِ I است. اگر $E_۱$ و $E_۲$ مجموعه‌هایی باشند که‌در دو بازهٔ مجزا قرار دارند، $\mu(E_۱ \cup E_۲) = \mu(E_۱) + \mu(E_۲)$. اکنون فرض کنید N یک همسایگیِ x را نشان دهد؛ می‌گوییم که x یک نقطهٔ چگالیِ E است اگر وقتی $\mu(N) \to ۰$، $\mu(E \cap N)/\mu(N) \to ۱$؛ به‌عبارت دیگر، اگر اندازهٔ خارجیِ بخشی از E که در همسایگیهای کوچک x است تقریباً برابرِ طولِ همسایگی باشد. تعریف مشابهی برای مجموعه‌ها در هر R_n دلخواه وجود دارد.

اکنون ثابت خواهیم کرد که تقریباً همهٔ نقاطِ E نقاطِ چگالی Eاند. به بیان کلّی، این یعنی اینکه هر مجموعه همسایگیهای کوچکِ نقاطش را تقریباً پُر می‌کند، و، برای نمونه، نمی‌تواند حدودِ نیمی از هر بازه را پر کند. (مقایسه کنید با تمرین ۱.۱۱. همین قضیه در هر R_n برقرار است.)

فرض می‌کنیم که E با اندازهٔ صفر نباشد؛ در غیر این صورت قضیه محتوایی ندارد. می‌توانیم همچنین فرض کنیم که E کراندار باشد، و لذا در بازهٔ فشردهٔ Iای قرار داشته باشد، زیرا فقط همسایگیهای کوچکِ E مطرح‌اند. تابع λای را با برابرْ قرار دادنِ $\lambda(x)$ با اندازهٔ خارجیِ بخشی از E تعریف کنید که در سمت چپِ x است. در این صورت λ تابعی غیرنزولی است و قضیه‌مان موکول به نشان دادنِ این می‌شود که به ازای تقریباً همهٔ xهای متعلق به E، $\lambda'(x) = ۱$.

بگذارید نخست تابعِ fای را در نظر بگیریم که شبیه λ است اما با استفاده از پوششِ خاصی از E با مجموعهٔ شمارایی از بازه‌ها به‌دست آمده است؛ یعنی $f(x)$ مجموعِ طولهای بازه‌هایی متعلق به این پوشش است که در سمت چپِ x قرار دارند؛ اگر x داخلِ یکی یا چند تا از بازه‌ها باشد، تنها بخشی از هر یک را به‌حساب می‌آوریم که در سمت چپِ x است. اکنون وقتی $x \in E$، $f'(x) = ۱$، زیرا اگر $x \in E$ و h به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $x + h$ در یکی از بازه‌های (بازِ) دربرگیرندهٔ x خواهد بود، و لذا $f(x+h) - f(x) = h$. دنباله‌ای از پوششهای E اختیار کنید که مجموعهای طولهایشان، μ_nها، آن‌قدر به سرعت به $\mu(E)$ بگراید که $\sum[\mu_n - \mu(E)]$ همگرا

شود. f_n را تابعِ fای بگیرید که به پوششِ nام نسبت داده می‌شود. در این صورت $f_n(x) \to \lambda(x)$، و $f_n(x) - \lambda(x) \leq \mu_n - \mu(E)$؛ به‌علاوه، $f_n - \lambda$ تابعی غیرنزولی است. اکنون $\sum[f_n(x) - \lambda(x)]$ همگراست، و بنا بر قضیهٔ فوبینیْ سریِ مشتق‌شدهٔ $\sum[f'_n(x) - \lambda'(x)]$ تقریباً همه‌جا همگراست. پس جملاتِ این سریْ تقریباً همه‌جا به صفر می‌گرایند. چون در E تقریباً همه‌جا $f'_n(x) = ۱$، باید همچنین در E تقریباً همه‌جا $\lambda'(x) = ۱$.

(iii) اندازهٔ یک مکان هندسی.[۴۹] فرض کنید F مجموعهٔ فشرده‌ای در $R_۱$ باشد. اگر x در F نباشد می‌دانیم که فاصلهٔ مثبتی از x تا F وجود دارد و این فاصله در نقطه‌ای از F حاصل می‌شود (تمرین ۸.۹). مجموعهٔ E_r از نقاطی را در نظر بگیرید که در فاصلهٔ r از F هستند، که $r > ۰$. در این صورت E_r مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر است. زیرا، اگر نباشد، E_r شامل یک نقطهٔ چگالی است؛ فرض کنید y چنین نقطه‌ای باشد. x را نقطه‌ای از F بگیرید که در فاصلهٔ r از y باشد. همسایگیِ Nای از x با شعاعِ r نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای از E_r باشد، زیرا فاصلهٔ همهٔ نقاطِ N تا y کمتر از r است. اکنون نیمی از هر همسایگیِ Iای y در N است و لذا $I \cap C(E_r)$ حاوی بازه‌ای است که طولِ آن دست‌کم نصف طول I است. وجود چنین بازه‌هایی این فرض را نقض می‌کند که y یک نقطهٔ چگالیِ E_r است.

۰۲۳ توابعِ محدب. تابعهای از بازه‌ای در $R_۱$ به $R_۱$ را در نظر می‌گیریم. معمولاً تابع را محدب می‌خوانند اگر در هر بازه بخشی از نمودارِ آن که در آن بازه است منطبق بر وترش باشد یا در زیر آن قرار گیرد. این مطلبِ نسبتاً شگفت‌انگیز را ثابت خواهیم کرد که هر تابعِ پیوسته محدب است اگر تنها بدانیم که نقطهٔ میانیِ هر وتر بالای (یا منطبق بر) نمودارِ آن تابع است. در واقع فرضی بسیار ضعیفتر از پیوستگی نیز کفایت می‌کند؛ برای نمونه، کافی است فرض کنیم که تابع در بازه‌ای (کوچک) کراندار است.[۵۰] پس اگر تابع ناپیوسته‌ای خاصیتِ نقطهٔ میانی را داشته باشد، نمودارِ آن باید نسبتاً سرکش باشد. چنین تابعهایی وجود دارند، برای نمونه، توابعِ خطیِ ناپیوستهٔ مذکور در §۲۰.

احکام هندسی در بارهٔ وترها را می‌توان به این شکل به‌صورت تحلیلی بیان کرد: گفتنِ اینکه نقطهٔ میانیِ وتر منطبق بر نمودار است یا بالای آن قرار دارد یعنی اینکه به ازای هر x و y در دامنه،

$$f(\frac{x+y}{۲}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{۲};$$

گفتنِ اینکه تمام وتر منطبق بر نمودار است یا بالای آن قرار دارد یعنی اینکه هرگاه $q_۱ \geq ۰$ و $q_۲ \geq ۰$ و $q_۱ + q_۲ = ۱$،

$$f(q_۱x + q_۲y) \leq q_۱f(x) + q_۲f(y)\cdot$$

می‌خواهیم نشان دهیم که وقتی f پیوسته باشد، نابرابریِ اول (به ازای همهٔ x و yها) دومی را نتیجه می‌دهد.

مناسب است نابرابریِ اول را به شکلی اندکی متفاوت بنویسیم. قرار دهید $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$، لذا

$$\Delta_h\Delta_k f(x) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)\cdot$$

پس می‌نویسیم

$$\Delta_h\Delta_h f(x) = \Delta_h^۲ f(x) = f(x+۲h) - ۲f(x+h) + f(x),$$

و نابرابریِ نقطهٔ میانی می‌گوید که $\Delta_h^۲ f(x) \geq ۰$ هرگاه x و $x + ۲h$ هر دو در دامنهٔ f باشند. (پس h می‌تواند مثبت یا منفی باشد.)

همچنانکه با اختیارِ $z = q_۱x + q_۲y$ و $h = y - x$ و $g = z - x$ (که $y > x$) می‌توانیم ببینیم، نابرابریِ دوم را می‌توان به صورتِ

$$(*) \qquad \frac{\Delta_g f(x)}{g} \leq \frac{\Delta_h f(x)}{h}, \qquad ۰ < g < h$$

نوشت. این می‌گوید که اگر نقطهٔ انتهاییِ چپِ وتری را ثابت نگاه داریم، شیبِ آن تابعی صعودی از طولش است. برای نشان دادنِ اینکه تابع پیوسته‌ای که در تعریفِ تحدب بر

حسب نقطهٔ میانی صدق کند در تعریفِ دیگر صدق می‌کند، باید (*) را از $\Delta_h^{2} f(x) \geq 0$ نتیجه بگیریم. برای انجام این کار،[51] از اتحادِ

$$\Delta_h f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{h/n} f(x + ih/n)$$

شروع می‌کنیم، که در آن n عدد صحیح مثبتِ دلخواهی است (مجموع «ادغام می‌شود»). اگر عملگرِ $\Delta_{h/n}$ را بر هر دو طرف اِعمال کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta_{h/n}\Delta_h f(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{h/n}^{2} f(x + ih/n) \geq 0$$

(اگر $x + h + h/n$ نیز در دامنهٔ تابع باشد). یعنی

$$\Delta_h f(x + h/n) - \Delta_h f(x) \geq 0,$$

یا، به عبارت دیگر،

$$\Delta_h f(x + h/n) \geq \Delta_h f(x)\cdot$$

چون این نابرابری به ازای همهٔ xهایی که به ازای آنها همهٔ نقاطِ وارد در فرمولها در بازهٔ ما باشند برقرار است، می‌توانیم x را متوالیاً با $x + h/n$، $x + 2h/n$،...جایگزین کنیم، و لذا می‌بینیم که به ازای هر عدد صحیح مثبتِ m،

$$\Delta_h f(x + mh/n) \geq \Delta_h f(x + (m-1)h/n)$$

$$\geq \cdots \geq \Delta_h f(x + h/n) \geq \Delta_h f(x)\cdot$$

اکنون اگر x و $x + \delta$ و h اعدادِ مفروضی باشند، می‌توانیم دنباله‌هایی از اعدادِ گویای m/n بیابیم که $mh/n \to \delta$. سپس از پیوستگیِ f استفاده می‌کنیم تا

$$\Delta_h f(x + \delta) \geq \Delta_h f(x)$$

را از

$$\Delta_h f(x + mh/n) \geq \Delta_h f(x)$$

نتیجه بگیریم.

اکنون نشان داده‌ایم که به ازای هر h، $\Delta_h f(x)$ بر حسب x صعودی است. به ویژه

$$\Delta_{h/n}f(x) \leq \Delta_{h/n}f(x+h/n) \leq \cdots$$

$$\leq \Delta_{h/n}f(x+(n-۱)h/n).$$

فرض کنید $۰ < m < n$. متوسطِ نخستین m جملهٔ این زنجیرِ نابرابریها از متوسطِ نخستین n جمله بیشتر نیست. یعنی

$$\frac{\Delta_{h/n}f(x)+\Delta_{h/n}f(x+h/n)+\cdots+\Delta_{h/n}f(x+(m-۱)h/n)}{m}$$
$$\leq \frac{\Delta_{h/n}f(x)+\cdots+\Delta_{h/n}f(x+(n-۱)h/n)}{n}.$$

چون صورت هم ادغام می‌شود، این همان

$$\frac{f(x+mh/n)-f(x)}{m} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{n}$$

است، یا، اگر $h > ۰$،

$$\frac{f(x+mh/n)-f(x)}{mh/n} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

اگر $h > g > ۰$، می‌توانیم دنباله‌ای از اعدادِ گویای m/n انتخاب کنیم که $m/n \to g/h$، و نتیجه می‌گیریم که (*) برقرار است.

می‌توانیم، بدون هیچ فرضِ اولیه‌ای در مورد پیوستگیِ f، از (*) نتیجه بگیریم که f نه تنها در هر نقطه در درونِ بازهٔ تحدبش پیوسته است، بلکه در چنین نقاطی مشتقِ راست و چپ متناهی دارد، و این مشتقها خود توابعی غیرنزولی‌اند. چون هر تابعِ یکنوا، به استثنای تعداد شمارایی جهش، پیوسته است، مشتقِ راستِ هر تابعِ محدب به معنای (*) پیوسته است مگر شاید روی مجموعه‌ای شمارا. این، به‌ویژه، یعنی اینکه تابعِ محدبْ خودْ پیوسته است. در واقع، تنها نقاطی که در آنها این از وجودِ یک مشتق نتیجه نمی‌شود نقاطی‌اند که در آنها مشتقهای راست و چپْ متفاوت‌اند. در چنین نقطه‌ای تابع از هر طرفْ پیوسته

است، لذا در بدترین حالتْ جهشِ ساده‌ای دارد؛ اما تابعها نمی‌توانند در جهشهای ساده، از هر دو طرف مشتقِ متناهی داشته باشند.

برای استنتاجِ احکاممان در بارهٔ مشتقها از (*)، مشاهده می‌کنیم که (*) می‌گوید که $\Delta_h f(x)/h$ به ازای هر x تابعی صعودی از h را تعریف می‌کند. بنابراین وقتی $h \to ۰+$ این نسبت به حدی می‌گراید، که تا آنجا که تاکنون می‌دانیم می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. یعنی به ازای هر x که در درونِ بازهٔ ما باشد، $f'_+(x)$ (متناهی یا نامتناهی) وجود دارد.

با کار کردن با hهای منفی به نحو مشابه نتیجه می‌گیریم که $f'_-(x)$ (متناهی یا نامتناهی) وجود دارد.

مشاهده کنید که اکنون نشان داده‌ایم که، به ازای hهای مثبت، کمّیتِ $h^{-۱}\Delta_h f(x)$ به ازای h ثابت، بر حسب x صعودی است، و به ازای x ثابت بر حسبِ h صعودی است (همچنانکه به لحاظ هندسی واضح است). فرض کنید که $h > g > ۰$ و $y > x$. در این صورت با استفاده از این دو مطلب به‌دست می‌آوریم

$$\binom{*}{*} \qquad \frac{\Delta_g f(x)}{g} \leq \frac{\Delta_h f(x)}{h} \leq \frac{\Delta_h f(y)}{h}.$$

با میل دادنِ g به سمت ۰ با hای ثابت، می‌بینیم که $f'_+(x) < +\infty$. مشابهاً $f'_-(x) > -\infty$. به‌علاوه،

$$\frac{\Delta_{-g} f(x)}{-g} = \frac{f(x-g)-f(x)}{-g} = \frac{f(x)-f(x-g)}{g}$$

$$= \frac{\Delta_g f(x-g)}{g} \leq \frac{\Delta_g f(x)}{g}$$

و لذا $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. سرانجام، چون

$$\frac{\Delta_h f(x)}{h} \leq \frac{\Delta_h f(y)}{h}, \qquad y > x,$$

نتیجه می‌گیریم که f'_+ غیرنزولی است، و مشابهاً f'_- غیرنزولی است.

بازگشت به$\binom{*}{*}$، همچنین می‌بینیم که به ازای هر h مثبت،

$$f'_+(x) \leq \frac{\Delta_h f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

طرفِ راستْ شیبِ وترِیْ دلخواه از نمودارِ $y = f(x)$ است که انتهای چپِ آن در $(x, f(x))$ است؛ و طرف چپْ شیبِ مماسِ راست بر نمودار در x است. پس هر وتر که از $(x, f(x))$ بگذرد و به راست برود در بالای (یا منطبق بر) مماس (راست) قرار می‌گیرد، که یعنی اینکه تمامِ خم، از x به طرفِ راست، بالای (یا منطبق بر) مماسِ راست قرار می‌گیرد. مشابهاً در مورد چپ؛ و چون مماسِ راست از مماسِ چپْ شیبِ بیشتری دارد، تمام خمْ بالای (یا منطبق بر) خطِ مماسِ راست در x قرار می‌گیرد.

خطِ راستی را که تمام نمودارْ بالای آن یا منطبق بر آن قرار می‌گیرد یک خطِ محمل می‌خوانند؛ وجودِ یک خطِ محمل در هر نقطه می‌تواند به‌عنوانِ تعریفِ تحدب اختیار شود (و اغلب می‌شود). می‌گوییم که تابعْ اکیداً محدب است اگر هر خطِ محملْ دقیقاً در یک نقطه با نمودار تماس داشته باشد.

بگذارید نشان دهیم که ضابطهٔ معمولِ حسابان برای تحدبْ در واقع شرطی کافی است. فرض کنید که در هر نقطهٔ بازه‌ای $f''(x)$ وجود داشته باشد و نامنفی باشد. در این صورت به ازای هر x در درونِ بازه، و hهای مثبتِ کوچک، با دو بار به‌کار بردنِ قانون میانگین به‌دست می‌آوریم

$$f(x + ۲h) - f(x + h) = hf'(x + c_۱),$$

$$x + h < c_۱ < x + ۲h;$$

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + c_۲),\ x < c_۲ < x + h;$$

$$\Delta^۲ f(x) = h[f'(x + c_۱) - f'(x + c_۲)]$$

$$= h(c_۱ - c_۲) f''(c_۳) \leq ۰.$$

استدلال مشابهی را وقتی $h < ۰$ می‌توان به‌کار بست. پس f بنا بر تعریفِ مبتنی بر نقطهٔ میانیْ محدب است.

اکنون می‌توانیم تعریف اولیهٔ توابع محدب را تعمیم دهیم: نه‌تنها هر وترِ نمودارْ بالای کمان یا منطبق بر آن است بلکه اگر وزنه‌های مثبتِ دلخواهی در n نقطهٔ کمان قرار دهیم،

مرکز ثقلِ آنها نیز بالای کمان یا روی آن خواهد بود؛ و در مورد توابعِ اکیداً محدب (و به ازای $n > ۱$) مرکز ثقلْ اکیداً بالای کمان خواهد بود. به صورت جبری، این یعنی اینکه اگر $w_۱$، $w_۲$، ...، w_n وزنه‌های مثبتی باشند که مجموعشان ۱ است، آنگاه

$$(\dagger) \qquad f(w_۱x_۱ + w_۲x_۲ + \cdots + w_nx_n)$$

$$\leq w_۱f(x_۱) + \cdots + w_nf(x_n)$$

که نابرابریْ اکید است اگر f اکیداً محدب باشد و دست‌کم دو x_k متمایز باشند. (در مقایسهٔ ($\dagger$) با احکامِ قبلیمان در مورد تحدب، باید به جای آنچه پیشتر x و y بود بنویسیم $x_۱$ و $x_۲$.) اگر f مقعر باشد، نابرابریْ معکوس است.

نابرابریِ ($\dagger$) به نابرابری یِنسِن معروف است. برای اثباتِ آن، فرض کنید $M = w_۱x_۱ + w_۲x_۲ + \cdots + w_nx_n$ و $w_۱ + \cdots + w_n = ۱$، لذا M مختصهٔ x از مرکز ثقلِ n وزنهٔ w_k است که در نقاطِ $(x_k, f(x_k))$ قرار داده شده‌اند. بگذارید خطِ محملی را در نظر بگیریم که با مماسِ راست بر نمودارِ f در $x = M$ مشخص شده‌است؛ خمْ بالای این مماس قرار دارد. فرض کنید معادلهٔ مماسْ $y = g(x) = ax + b$ باشد، که a و b اعدادی‌اند که می‌توان آنها را محاسبه کرد ولی مقادیرشان بی‌اهمیت‌اند.

چون خمْ بالای این خطِ محملِ گذرا از $(M, f(M))$ یا منطبق برآن است، $ax + b \leq f(x)$. این نابرابری را به ازای $x = x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ بنویسید، نابرابریِ kام را در w_k ضرب کنید، و نتایج را جمع کنید. به‌دست می‌آوریم

$$w_۱g(x_۱) + \cdots + w_ng(x_n) \leq w_۱f(x_۱) + \cdots + w_nf(x_n)$$

یا، چون مجموعِ wها ۱ است،

$$a + b\sum_{k=۱}^{n} w_kx_k \leq \sum_{k=۱}^{n} w_kf(x_k).$$

اما $\sum_{k=۱}^{n} w_kx_k = M$، لذا

$$g(M) \leq \sum_{k=۱}^{n} w_kf(x_k).$$

سرانجام، خطِ محملِ $y = g(x)$ از نقطهٔ $(M, f(M))$ می‌گذرد، لذا $g(M) = f(M)$ و

$$f(M) \leq \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k);$$

این، (†) است.

افزون بر این، اگر یکی از x_kها متمایز از M بود در یکی از نابرابریهایی که جمع کردیم نابرابریِ اکید وجود می‌داشت. پس در (†) نابرابریِ اکید وجود دارد مگر اینکه همهٔ x_kها برابرِ M باشد.

به روشی مشابه می‌توانیم به جای مجموعها، نابرابریهای همانندی در مورد انتگرالها به‌دست آوریم. فرض کنید w و x توابع مثبتِ پیوسته‌ای‌باشند، $a \leq t \leq b$، و $\int_a^b w(t)dt = 1$. اگر عددِ M را با

$$M = \int_a^b x(t)w(t)dt$$

جایگزین کنیم و از نابرابریِ $g(y) \leq f(y)$ به ازای هر yی بین a و b استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\int_a^b w(t)f(x(t))dt \geq f\left(\int_a^b w(t)x(t)dt\right), \qquad \int_a^b w(t)dt = 1$$

مشروط بر اینکه f محدب باشد، و نابرابریِ معکوس به‌دست می‌آید وقتی f مقعر باشد. این، صورتِ انتگرالیِ نابرابریِ ینسن است.

متوسطِ معمولیِ ــیا به شکلِ رسمیترْ میانگینِ حسابیِ‌ــ اعدادِ x_1، ...، x_n

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

است؛ میانگینِ هندسیْ

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$$

است. برای بسیاری مقاصد بهتر است از میانگینهای موزونِ

$$w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n \qquad \text{و} \qquad x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}$$

استفاده کنیم که در آنها مجموعِ w_kها ۱ است؛ در حالتِ معمول، به ازای هر k، $w_k = 1/n$.

قضیه‌ای مشهور (و بسیار سودمند) حکم می‌کند که میانگینِ هندسیِ n عددِ مثبت از میانگین حسابیِ آنها بیشتر نیست و در واقع کمتر از آن است مگر اینکه همهٔ x_kها با هم مساوی باشند. این صرفاً نتیجه‌ای از تحدبِ $-\log t$ به ازای tهای مثبت است. در واقع، با به‌کار بستنِ (†) در مورد این تابع،

$$-\log(w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) \leq \sum_{k=1}^{n} w_k \log x_k,$$

یعنی

$$\log(w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \log(x_k)^{w_k}.$$

اگر دو طرف را به توان برسانیم نابرابریِ بین میانگینها را به دست می‌آوریم؛ و برابری وجود دارد اگر و تنها اگر همهٔ x_kها برابر باشند.

کاربردهای بسیاری از نابرابریِ ینسن به‌طور عام و نابرابری بین میانگینهای هندسی و حسابی به‌طور خاص وجود دارد. برای نمونه، می‌توانیم بدون استفاده از حسابانْ مسائلِ ماکزیموم و مینیمومِ بسیاری را در مورد چندجمله‌ایها حل کنیم، مثلاً یافتنِ بزرگترین جعبه‌ای که می‌توان با برداشتنِ مربعهایی به‌ضلعِ x ازگوشه‌های کاغذِ مربع‌شکلی به ضلعِ a و تاکردنِ مستطیلهای حاصل ساخت.[۵۱] این مسأله ماکزیموم کردنِ $x(a-2x)^2$ را از ما می‌خواهد، ولی ماکزیموم کردنِ $\{x(a-2x)^2\}^{\frac{1}{3}}$ نیز درست همانقدر وافی به مقصود است. اعدادِ x و $a-2x$ را با وزنهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ در نظر بگیرید. میانگینِ هندسیِ موزونِ آنها $x^{1/3}(a-2x)^{2/3}$ است. این از میانگین حسابیِ موزون، یعنی $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}(a-2x)$ بیشتر نیست، و برابری وجود دارد اگر و تنها اگر $x = a - 2x$، یعنی $x = a/3$. این می‌گوید که بزرگترین مقدارِ ممکن برای $\{x(a-2x)^2\}^{1/3}$ در $x = a/3$ گرفته می‌شود؛ و به ازای این x، $x(a-2x) = a^3/27$. توجه کنید که این مهم بود که بدانیم که در نابرابریهای بین میانگینها برابری چه موقع حاصل می‌شود.

به‌عنوان کاربردی دیگر، شرطِ لازمی برای همگراییِ سریهای $\sum a_n$ با جملاتِ مثبت به‌دست می‌آوریم.[52] البته $a_n \to 0$ شرط لازمی است، اما (در حالت کلّی) $na_n \to 0$ چنین نیست. با این حال، اگر سریْ همگرا باشد، آنگاه n برابرِ میانگین هندسیِ n جملهٔ اول باید به صفر بگراید؛ یعنی $n(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \to 0$.

برای دیدنِ این مطلب، قرار دهید $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ و $G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$. در این صورت داریم فرض می‌کنیم $s \to s_n$. نتیجه می‌شود که میانگین حسابیِ s_1، s_2، $\cdots$، s_n به s می‌گراید.

تمرین ۱.۲۳. حکمِ بالا را ثابت کنید.

این، با نوشتنش بر حسبِ a_kها، می‌گوید که

$$n^{-1}\{a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\} \to s$$

یعنی

$$n^{-1}\{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n\} \to s$$

یا معادلاً

$$n^{-1}\{(n+1)s_n - a_1 - a_2 - 2a_2 - \cdots - na_n\} \to s.$$

چون $s_n \to s$، فرمولِ پیشین نشان می‌دهد که

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} \to 0.$$

طرفِ چپْ میانگینِ حسابیِ n عددِ نمایش داده‌شده در صورت است، لذا میانگینِ هندسیِ آنها نیز به 0 می‌گراید. اما این میانگینِ حسابی برابرِ

$$\{n!a_1a_2\cdots a_n\}^{1/n} = (n!)^{1/n}G_n$$

است. چون (بنا بر، مثلاً، فرمولِ استرالینگ) $(n!)^{1/n}/n \to 1/e$، $nG_n \to 0$.

کاربردی از صورتِ انتگرالیِ نابرابریِ ینسِنْ خاصیتی از توابعِ محدب است که به قضیهٔ آدامار مشهور است: اگر f روی (a,b) پیوسته ومحدب باشد آنگاه

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(t)dt\cdot$$

تنها باید نابرابریِ ینسن را با $w(t) = ۱/(b-a)$ و $x(t) = t$ به کار گیریم:

$$\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(t)dt \geq f(\int_a^b \frac{۱}{b-a}tdt) = f(\frac{۱}{b-a}\frac{b^۲-a^۲}{۲})$$
$$= f(\frac{b-a}{۲}).$$

با تلقیِ $f(t)$ به‌عنوان‌سرعتِ نقطهٔ متحرکی در زمانِ t، می‌توانیم نابرابریِ آدامار را با اصطلاحاتِ فیزیکی تعبیر کنیم. فرض کنید نقطه‌ای از زمان ۰ تا زمان T با شتابی همواره صعودی روی خطی حرکت کند. در این صورت سرعتِ آن در زمانِ میانی $(t = T/۲)$ نمی‌تواند از سرعتِ متوسطش در کلّ حرکت بیشتر باشد. (این ممکن است به لحاظ فیزیکی پذیرفتنی به نظر رسد، اما، در مورد همهٔ توابعِ محدبِ پیوستهٔ f، تنها به ازای $T/۲$ درست است؛ یعنی به ازای $t = aT$ که $a \neq \frac{۱}{۲}$ لزوماً درست نیست.)

برای کاربردی کمتر ساختگی از نابرابریِ ینسن، بگیرید [آ۵۲] $f(x) = x^r$؛ وقتی $r > ۱$، f محدب است؛ و وقتی $۰ < r < ۱$، f مقعر است؛ وقتی $r < ۰$ نیز f محدب است، ولی به‌نظر نمی‌رسد نابرابریهای حاصلْ فایدهٔ چندانی داشته باشند. به ازای $r > ۱$ به‌دست می‌آوریم (همهٔ مجموعها از ۱ تا nاند)

$$(\sum w_k x_k)^r \leq \sum w_k x_k^r, \qquad \sum w_k = ۱\cdot$$

اگر x_k را با x_k^s جایگزین کنیم به‌دست می‌آوریم

$$(\sum w_k x_k^s)^r \leq \sum w_k x_k^{rs}\cdot$$

اکنون rs را با t جایگزین کنید:

$$(\sum w_k x_k^s)^{t/s} \leq \sum w_k x_k^t$$

و سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$(\sum w_k x_k^s)^{/s} \leq (\sum w_k x_k^t)^{1/t}$$

که در آن باید $s < t$ (زیرا $r > 1$). وقتی $s > t > 0$، نابرابریْ معکوس است.

اکنون p_kها را اعداد مثبتِ دلخواهی بگیرید؛ در این صورت می‌توانیم w_k را با $p_k / \sum p_j$ جایگزین کنیم، و می‌بینیم که

$$(\frac{\sum p_k x_k}{\sum p_k})^r \leq \frac{\sum p_k x_k^r}{\sum p_k},$$

یعنی

$$\sum p_k x_k \leq (\sum p_k)^{1-1/r}.$$

سرانجام، قرار دهید $p_k = y_k^{r/(r-1)}$ و $x_k = z_k y_k^{-1/(r-1)}$؛ به‌دست می‌آوریم

$$\sum y_k z_k \leq (\sum y_k^{r/(r-1)})^{(r-1)/r} (\sum z_k^r)^{1/r}$$

که به نابرابریِ هولدِر معروف است. حالتِ خالصِ $r = 2$،

$$\sum y_k z_k \leq (\sum y_k^2)^{1/2} (\sum z_k^2)^{1/2},$$

به نابرابریِ کوشی معروف است.

می‌توانیم نابرابری مینکوفسکی (ص. ۳۷) را از نابرابریِ کوشی به‌دست آوریم. باز هم فرض کنید که $\sum q_k = 1$؛ در این صورت

$$\begin{aligned} S \equiv \sum q_k (a_k + b_k)^2 &= \sum q_k a_k (a_k + b_k) + \sum q_k b_k (a_k + b_k) \\ &= \sum (q_k^{1/2} a_k) q_k^{1/2} (a_k + b_k) \\ &\quad + \sum (q_k^{1/2} b_k) q_k^{1/2} (a_k + b_k). \end{aligned}$$

با به‌کار بستنِ نابرابریِ کوشی در مورد هر مجموعِ طرفِ راست، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} S &\leq \{\sum q_k a_k^2 \sum q_k (a_k + b_k)^2\}^{1/2} + \{\sum q_k b_k^2 \sum q_k (a_k + b_k)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{\sum q_k (a_k + b_k)^2\}^{1/2} [\{\sum q_k a_k^2\}^{1/2} + \{\sum q_k b_k^2\}^{1/2}] \end{aligned}$$

لذا

$$\left\{\sum q_k(a_k+b_k)^{۲}\right\}^{۱/۲} \le \left\{\sum q_k a_k^{۲}\right\}^{۱/۲} + \left\{\sum q_k b_k^{۲}\right\}^{۱/۲}$$

اکنون بگیرید $q_k = ۱/n$؛ نابرابریِ پیشین به

$$\left\{\sum (a_k+b_k)^{۲}\right\}^{۱/۲} \le \left\{\sum a_k^{۲}\right\}^{۱/۲} + \left\{\sum b_k^{۲}\right\}^{۱/۲}$$

تحویل می‌شود.

این را، البته، می‌شد به صورتِ سرراست‌تری اثبات کرد. همین اثبات، با تغییراتی اندک، با استفاده از نابرابریِ هولدِر به جای نابرابریِ کوشی، نشان می‌دهد که اگر $r > ۱$،

$$\left\{\sum (a_k+b_k+\cdots)^{r}\right\}^{۱/r} \le \left\{\sum a_k^{r}\right\}^{۱/r} + \left\{\sum b_k^{r}\right\}^{۱/r} + \cdots$$

که صورت کلّیِ نابرابریِ مینکوفسکی است.

۲۴. توابعِ بینهایت بار مشتق‌پذیر.

اکنون توابعی را در نظر می‌گیریم که می‌توان پیش از یک بار، یا حتی بینهایت بار، از آنها مشتق گرفت. در موردِ چنین توابعی تعمیمی از قانونِ میانگین هست که قضیهٔ تِیلور با باقی‌مانده خوانده می‌شود. ما وارد انگیزهٔ بررسیِ این فرمولِ خاص نخواهیم شد، و کوشش نخواهیم کرد آن را تحت کلّیترین مفروضاتِ ممکن به دست آوریم. در عوض، این فرمول را با یکی از اَشکالِ سودمندترِ باقی‌مانده به‌دست خواهیم آورد.

فرض کنید که f تابعی باشد که دامنه‌اش حاوی بازهٔ $[a,x]$ است و $f^{(n)}$ وجود داشته باشد و پیوسته باشد، یا دست‌کم بتوان از آن انتگرال گرفت تا $f^{(n-۱)}$ به‌دست آید. در اینجا $n \ge ۱$. با

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t)$$

شروع می‌کنیم و (اگر $n \ge ۲$) به‌صورت جزء به جزء انتگرال می‌گیریم، و به دست می‌آوریم

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt.$$

با تکرارِ این فرآیند، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^{2}}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

که

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

برای نشان دادنِ یکی از راههایی که می‌توان قضیهٔ تیلور را به‌کار گرفت، قضیهٔ ذیل را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که f تابعی پیوسته روی یک بازهٔ $[x_0, \infty)$ باشد، f'' پیوسته باشد، و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. در این صورت $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

برای اثباتِ این، قضیهٔ تیلور با باقی‌مانده از مرتبهٔ ۲ را بگیرید، و آن را به‌صورتِ

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(x)}{x-a} + \frac{1}{x-a}\int_a^x (x-t)f''(t)dt, \qquad x > a$$

بنویسید. x_0 را آن‌قدر بزرگ بگیرید که به ازای $t > x_0$، $|f(t)| < \epsilon$ و به ازای $t > x_0$، $|f''(t)| < \epsilon$. در این صورت به ازای $a > x_0$،

$$|f'(a)| \le \frac{2\epsilon}{x-a} + \frac{\epsilon}{x-a}\int_a^x (x-t)dt = \frac{2\epsilon}{x-a} + \frac{\epsilon(x-a)}{2} = \epsilon\left(\frac{2}{x-a} + \frac{x-a}{2}\right).$$

در اینجا x در اختیار ماست، مشروط بر اینکه $x > a$؛ بگیرید $x = a + 2$. (دلیلِ این انتخابِ خاص این است که $2/(x-a) + (x-a)/2$ کمترین مقدار را وقتی دارد که $x = a + 2$.) در این صورتْ نابرابریِ پیشین به $|f'(a)| \le 2\epsilon$، $a > x_0$، تحویل می‌شود، که به معنای این است که وقتی $a \to \infty$، $f'(a) \to 0$.

تغییراتِ اندکی در این اثباتْ نتایجِ بسیار قویتری به‌دست می‌دهد.[۵۳] برای نمونه، نیازی نیست فرض کنیم که $f(x) \to 0$؛ مادام که $f''(x) \to 0$، کافی‌است $f(x)$ را کراندار بگیریم. برای دیدنِ این مطلب، فرض کنید که $|f(x)| \le M$ و قرار دهید

$\epsilon(x) = \max_{t\geq x}|f''(t)|$. آشکارا ϵ تابعی غیرصعودی است و $\lim\limits_{x\to\infty}\epsilon(x) = 0$
به‌دست می‌آوریم

$$|f'(a)| \leq \frac{2M}{x-a} + \frac{1}{x-a}\int_a^x (x-t)\epsilon(t)dt$$

$$\leq \frac{2M}{x-a} + \frac{\epsilon(a)}{2}(x-a). \qquad (1.24)$$

اکنون x را طوری بگیرید که $x-a = \{\epsilon(a)\}^{-1/2}$. در این صورت

$$|f'(a)| \leq 2M\{\epsilon(a)\}^{1/2} + \frac{1}{2}\{\epsilon(a)\}^{1/2},$$

و باز هم $f'(a)\to 0$.

این امری است وسوسه‌انگیز که در قضیهٔ تیلور، با میل دادنِ n به سمتِ ∞ یک سریِ نامتناهی، معروف به سریِ تیلورِ $f(x)$، به‌دست آوریم. اگر (به ازای xای خاص) $R_n(x)\to 0$، سری‌ای که به این صورت به‌دست می‌آید همگرا خواهد بود، و در واقع به $f(x)$ میل می‌کند. با این حال، نباید بپنداریم که همواره اگر f از همهٔ مراتبْ مشتق داشته باشد (یا، چنانکه خواهیم گفت، اگر f بینهایت بار مشتق‌پذیر باشد) این وضعیت رخ می‌دهد، اگرچه در مورد بسیاری از توابعِ ساده‌ای که در حسابان بررسی می‌شود چنین است.

اولاً سریِ تیلور ممکن است واگرا باشد؛ ثانیاً، ممکن است همگرا باشد، اما به مجموعی نادرست. از همهٔ این امکاناتْ نمونه‌هایی خواهیم داد.[۵۴]

حتی در مباحثِ مقدماتی این مطلبی پیش‌پاافتاده است که سری تیلور لازم نیست در سراسرِ دامنه‌ای که تابعِ اولیه در آن بینهایت بار مشتق‌پذیر است همگرا باشد؛ $f(x) = 1/(1+x^2)$ نمونه‌ای به‌دست می‌دهد. در اینجا تابع روی تمامِ R_1 بینهایت بار مشتق‌پذیر است، اما سری تیلور (به مرکز ۰) تنها به ازای $|x| < 1$ همگراست.

چیزهای بسیار بدتری می‌تواند رخ دهد. تابعی عرضه خواهیم کرد که سریِ تیلورش همه‌جا به‌جز، طبیعتاً، در خودِ a واگراست. تابع f تعریف‌شده با انتگرالِ

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\cos(t^2 x)dt$$

را در نظر بگیرید. به ازای nهای زوج،

$$f^{(n)}(\circ) = \pm \int_\circ^\infty t^{\text{۲}n} e^{-t} dt = \pm(\text{۲}n)!$$

و به ازای nهای فرد، $f^{(n)}(\circ) = \circ$، زیرا مشتقهای مرتبهٔ فردِ کسینوس در $\circ$ همگی $\circ$اند. پس جملهٔ عمومیِ سریِ مَک‌لورَنِ f برابرِ

$$\pm \frac{(\text{۲}n)!}{n!} x^n$$

است، که، مگر در $x = \circ$، به صفر نمی‌گراید، و بنا بر این سریْ همگرا نیست مگر در $x = \circ$.

می‌توان نشان داد که[۵۵] اگر $\{M_k\}$ دنبالهٔ دلخواهی از اعداد باشد یک تابع بینهایت بار مشتق‌پذیر f وجود دارد که به ازای هر k، $f^{(k)}(\circ) = M_k$. این نشان می‌دهد که توابعِ بینهایت بار مشتق‌پذیری که سری تیلورشان حولِ $\circ$ (غیر از در خودِ $\circ$) واگراست باید به فراوانی وجود داشته باشند.

با روشِ ساختِ پیچیده‌تری می‌توان نشان داد که توابعِ بینهایت بار مشتق‌پذیری وجود دارند که سریِ تیلورشان، مستقل از اینکه چه نقطه‌ای به‌عنوان مرکز اختیار شود، واگراست.[۵۶]

برای نمونه‌ای از نوعِ دیگری از نقصِ سریهای تیلور، تابع f تعریف‌شده با

$$f(x) = e^{-\text{۱}/x^{\text{۲}}},\ x \neq \circ; \quad f(\circ) = \circ$$

را در نظر بگیرید. می‌توانیم نشان دهیم که به ازای هر k، $f^{(k)}(\circ) = \circ$، پس جملاتِ سری تیلور f حول $\circ$ همگی $\circ$اند و لذا این سری مطمئناً به مجموعِ نادرستی میل می‌کند. آشکارا $f^{(k)}(x)$ به ازای $x \neq \circ$ به شکلِ $R(x)e^{-\text{۱}/x^{\text{۲}}}$ است که R تابعی گویاست. اکنون به ازای هر عدد صحیح n وقتی $x \to \circ$، $x^{-n}e^{-\text{۱}/x^{\text{۲}}} \to \circ$ (این معادلِ این مطلبِ آشناست که وقتی $x \to \infty$، $x^n e^{-x^{\text{۲}}} \to \circ$)، و لذا وقتی $x \to \circ$، $f^{(k)}(x) \to \circ$. این، بنا بر تمرینِ ۲۱.۱۱، ایجاب می‌کند که همچنین $f^{(k)}(\circ) = \circ$. به صورتی دیگر، می‌توانیم مستقیماً نشان دهیم که

$$f^{(k)}(\circ) = \lim_{x\to\circ} x^{-\text{۱}} f^{(k-\text{۱})}(x) = \circ.$$

با برآوردِ مستقیم باقی‌مانده‌ها، نشان دادنِ این دشوار نیست که سریهای تیلورِ توابعِ آشنایی چون سینوس و نمایی همه‌جا به توابعی که آنها را پدید آورده‌اند همگرا هستند. مشابهاً، به ازای هر عدد حقیقیِ p سری تیلورِ $(۱+x)^p$ حولِ $x = ۰$ به ازای $|x| < ۱$ همه‌جا به مجموعِ درستْ همگراست. چون این سریِ تیلور صرفاً سری‌ای است که از بسط دادنِ $(۱+x)^p$ مطابقِ قضیهٔ دوجمله‌ای به‌دست آمده است، اثباتی از قضیهٔ دوجمله‌ای برای توانهای منفی یا کسری به‌دست می‌آوریم.

تابعی را که در همسایگی‌ای از a سریِ تیلورش حولِ a به تابع میل کند در a تحلیلی می‌خوانند. برخلافِ نمونه‌های سالبِ پیشین، قضیهٔ جالبی (قضیهٔ س. برنشتاین) را ثابت می‌کنیم: اگر در بازهٔ Iای f و همهٔ مشتقهایش نامنفی باشند، آنگاه f در آن بازه تحلیلی است. ($f(x) = e^x$ نمونه‌ای به‌دست می‌دهد.) فرض کنید که $a < x < b$ و $[a,b] \subset I$. در این صورت چون $f^{(n)}(t) \geq ۰$،

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(b-t)^{n-۱}\left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{n-۱}dt \\ \leq& \frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-۱}\left(\frac{x-t}{b-۱}\right)^{n-۱}dt. \end{aligned}$$

چون $(x-t)/(b-t)$ (به‌عنوان تابعی از t) نزولی است، در $x = a$ بزرگترین مقدار را دارد، و

$$\begin{aligned} R_n(x) \leq& \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-۱}\frac{۱}{(n-۱)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-۱}dt \\ =& \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-۱}R_n(b). \end{aligned}$$

اما $R_n(b) \leq f(b)$ زیرا همهٔ جملاتِ سری تیلور نامنفی‌اند. پس

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-۱}f(b)$$

و چون $۰ < x-a < b-a$، این یعنی اینکه $R_n(x) \to ۰$.

در حقیقت می‌توان مثبت بودنِ همهٔ مشتقها را با مثبت بودنِ همهٔ تفاضلهای

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k f(x+nh)$$

جایگزین کرد زیرا می‌توان نشان داد که هر تابع با تفاضلات مثبت از همهٔ مراتب، حتماً بینهایت بار مشتق‌پذیر است.[۵۷] (قدمِ نخست را در §۲۳ برداشتیم، آنگاه که نشان دادیم که هر تابع با تفاضلاتِ دومِ مثبتْ مشتقهای چپ و راست دارد.)

این هم درست است، اما اثباتش دشوارتر است، که اگر روی بازهٔ مفروضی، هر مشتقِ f علامتِ ثابتی (که محتملاً از مشتقی به مشتقِ دیگر فرق کند) داشته باشد، آنگاه f روی آن بازه تحلیلی است.[۵۷آ]

اگرچه تابعی غیرتحلیلی می‌تواند حولِ هر نقطهٔ بازه‌ای سریِ تیلورِ واگرایی داشته باشد، پدیده‌ای که هم‌اکنون بحث شد، همگراییِ سری تیلور به مجموعی نادرست، نمی‌تواند در سراسر بازه رخ دهد. در واقع، می‌توانیم ثابت کنیم که اگر حولِ هر نقطهٔ بازه‌ای سریِ تیلورِ تابعی شعاعِ همگراییِ مثبتی داشته باشد، باید زیربازه‌ای باشد که تابع در آن تحلیلی باشد. کاربرد مکرر این امر به این نتیجه می‌انجامد که (تحتِ همان فرض) نقاطی که بسط تیلور حول آنها نتیجه نمی‌دهد حداکثر می‌توانند مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال تشکیل دهند.

اثباتْ متکی بر کاربرد ساده‌ای از قضیهٔ بئر است. فرض کنید $\rho(a)$ شعاع همگراییِ سری تیلورِ f را، تشکیل‌شده در نقطهٔ a، نشان دهد. طبقِ فرمولِ آشنایی، $1/\rho(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$. چون به ازای هر a در بازهٔ مورد نظرْ $1/\rho(a)$ متناهی است، به ازای هر a کمّیتِ $\mu(a) = \sup_n |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$ متناهی است. مجموعه‌های E_kی نقاطِ aای که در آنها $\mu(a) < k$، $k = 1, 2, \ldots$، بازه را می‌پوشانند و بنا بر قضیهٔ بئر نمی‌توانند همگی هیچ‌جا چگال باشند. زیربازه‌ای هست که در آن، نخست روی مجموعه‌ای چگال، و بعد، بنا بر پیوستگیِ $f^{(n)}$ها، همه‌جا، $|f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \leq k$، $n = 0, 1, 2, \ldots$. در این بازه f تحلیلی است، زیرا نابرابریِ آخر نشان می‌دهد که در سری تیلور حول a باقی‌مانده به ازای نقاطِ xای که $k > |x-a|$، به صفر می‌گراید.

اکنون طبیعی است بپرسیم چه رخ می‌دهد وقتی $\rho(a)$ نه تنها مثبت بلکه دور از

صفر کراندار باشد: به ازای هر a در بازه‌ای، $\rho(a) \geq \delta > 0$. می‌توان نشان داد که این شرطْ f را در سراسرِ بازه تحلیلی می‌سازد.[۵۸]

پی‌نوشت

واژهٔ "primer" (با تلفظِ "primmer" [بخوانید «پْریمِر»ـم.]) با این قصد انتخاب شد که «کتابِ کوچکی در اصولِ اولیه» را تداعی کند [مطابقِ *Webster's Collegiate Dictionary*, thid edition]. به‌نظر می‌رسد که این معنا از رواج افتاده باشد. بعضی خوانندگانْ "primer" را بر وزنِ "climber" [بخوانید «کلایمِر»ـم.] تلفظ می‌کنند. با این تلفظ، این واژه به معنای آسترِ رنگ یا چاشنیِ انفجار خواهد بود ـــ نمی‌دانم کدام‌یک را در نظر دارند.

شخصی، که خوشبختانه نامش را فراموش کرده‌ام، یک بار در یک گردهماییِ CUPM گفت که حسابان مسلماً مبحثِ کسل‌کننده‌ای است زیرا هیچ کس در آن پژوهش نمی‌کند. شاید این کتابْ شما را متقاعد کند که او در هر دو مورد بر خطا بوده است.

ژوئن ۱۹۸۱

یادداشتها

۱. جی. گیلوُد و همکارانش یک میلیون رقم دهدهیِ π را محاسبه کرده‌اند؛ این ارقام به صورتِ گسترده انتشار نیافته است. برای ۱۰۰,۰۰۰ رقم بعد از ممیزِ π، نگاه کنید به

D. Shanks and J.W. Wrench, Jr., Calculation of π to 100,000 decimals, *Math. of Computation* 16 (1962), 76-99.

[ص. ۲۷]

۱آ. برای اثباتهای دیگر نگاه کنید به

M. Reichbach, Une simple démonstration du théorème de Cantor-Bernstein, *Colloquium Math.* 3 (1955), 163; M.S. Hellmann, A short proof of an equivalent form of the Schroeder-Bernstein theorem, *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 770; M.F. Smiley, *Algebra of matrices*, Allyn and Bacon, Boston, 1965, pp. 235-236; R.H. Cox, A proof of the Schroeder-Bernstein theorem, *Amer. Math. Monthly* 75 (1968), 508.

[ص. ۳۱]

۲. مثلاً نگاه کنید به

C. Kuratowski, *Topologie*, vol. 2, *Monografie Matematyczne*, vol. 21, 2nd ed., Warsaw, 1952, p. 85.

[ص. ۴۶]

۲آ. مثلاً نگاه کنید به

J. Cobb and W. Voxman, Dispersion points and fixed points, *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), 278-281.

[ص. ۵۶]

۲ب. نگاه کنید به

John Sack, *Report from practically nowhere*, New York, 1959, p. 23.

[ص. ۶۰]

۳. اثبات را دابلیو. سی. فاکس و آر.آر. گُلدبِرگ پیشنهاد کردند. [ص. ۶۱]

۴. مثلاً نگاه کنید به

M.E. Munroe, *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass, 1953, p. 30.

[ص. ۶۴]

۵. غیر از همگرایی، هر روش برای نسبت دادنِ مجموعی به یک سریِ نامتناهی را یک روشِ مجموع‌پذیری می‌خوانند. نگاه کنید به

O. Szász, *Introduction to the theory of divergent series*, Hanfer, New York, 1948; G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949; K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren, Ergebnisse der Mathematik*, new series, no. 15, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[ص. ۶۹]

۶. مثلاً نگاه کنید به

H. Hahn, *Reelle Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932, p. 115.

[ص. ۷۰]

۷.

E. Corominas and F. Sunyer Balaguer, Condiciones para que una función infinitamente derivable sea un polinomio, *Revista Mat. Hisp.- Amer.* (4) 14 (1954), 26-43.

در این مقاله چند تعمیمِ قضیه ارائه شده است. [ص. ۸۲]

۸. سی.ئی. وِیل On nowhere monotone funtions, *Proc.Amer. Math. Soc.* 56 (1976), 388-389) اثباتِ کوتاهی از وجودِ چنین توابعی با استفاده از قضیهٔ بئر داده است، و نیز ارجاعاتی به دیگر روشهای ساخت. نیز نگاه کنید به

A. Denjoy, Sur les fonctions de′rive′es sommables, *Bull. Soc. Math. France* 43 (1915), 161-248

مخصوصاً صص. ۲۲۸ به بعد. [ص. ۸۵]

۹.

S. Banach, Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, *Studia. Math.* 3 (1931), 174-180.

[ص. ۸۵]

۱۰. ساده‌ترین مثال را اِی.پی. مُرس ساخته است،

A continuous function with no unilateral derivatives, *Trans.Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 496-507.

[ص. ۸۶]

۱۱.

S. Saks, On functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.* 19 (1932), 211-219.

[ص. ۸۶]

۱۱آ. این حالتِ خاصی از قضیهٔ سرپینسکی است که مجموعه‌های همبندِ فشردهٔ شامل بیش از یک نقطه هیچ‌گاه اجتماعِ شمارایی از مجموعه‌های بستهٔ مجزا نیستند؛ برای بعضی مراجع نگاه کنید به

Amer. Math. Monthly 84 (1977), 828.

[ص. ۸۷]

۱۱ب. نیز نگاه کنید به

G.J. Minty, On the notion of "function," *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 188-189.

[ص. ۹۴]

۱۲. به‌ویژه نگاه کنید به

J.B. Rosser, *Logic for mathematicians*, McGraw-Hill, New York, 1953, pp. 306ff.; K. Menger, *Calculus, a modern approach*, Ginn, Boston, 1955.

[ص. ۹۵]

۱۳.

G.H. Hardy, A formula for the prime factors of any number, *Messenger of Math.* 35 (1906), 145-146.

[ص. ۹۶]

۱۴.

W. Sierpiński, Sur un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement, *Fund. Math.* 5 (1924), 87-91.

[ص. ۹۶]

۱۵.

H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 97.

[ص. ۹۷]

۱۵آ.

H. Fast, Une remarque sur la propriété de Weierstrass, *Colloq. Math.* 7 (1959), 75-77.

مجموعِ یک تابع پیوستهٔ غیرثابت و تابعی با خاصیت مقدار میانی ممکن است خاصیت مقدار میانی را نداشته باشد. برای اطلاعاتِ بیشتر دربارهٔ خواصی از این نوع، نگاه کنید به
A.M. Bruckner and J. Ceder, On the sum of Darboux functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 51 (1975), 97-102.

[ص. ۹۸]

۱۵ب.

H. Blumberg, New properties of all real functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 24 (1922), 113-128.

[ص. ۱۰۱]

۱۵پ.

W. Sierpiński and A. Zygmund, Sur une fonction qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu, *Fund. Math.* 4 (1923), 316-318.

[ص. ۱۰۱]

۱۵ت. حکمِ آخر از تعریفِ پیوستگی در ص. ۱۰۲ نیز نتیجه می‌شود، زیرا خاصیتِ موردِ نظرْ نیازمندِ این است که تصویر وارونِ هر بازهٔ باز بازه‌ای باز باشد (و لذا تصویر وارونِ هر مجموعهٔ باز مجموعه‌ای باز باشد). برای بررسیِ کاملتر نگاه کنید به
J.B. Diaz, Discussion and extension of a theorem of Tricomi concerning functions which assume all intermediate values, *J. Math. Mech.* 18 (1968/69), 617-628;

نیز به نقدِ این مقاله در *Math. Reviews* 39 # 370. برای صورتی موضعی‌شده از خاصیتی که هم‌اکنون بحث شد نگاه کنید به
E.W. Chittenden, Note on functions which approach a limit at every point of an interval, *Amer. Math. Monthly* 25 (1918), 249-250.

[ص. ۱۰۶]

۱۵ث. به صورتی کلّیتر، هیچ تبدیلِ پیوسته‌ای از بازه‌ای وجود ندارد که تصویرِ هر نقطه دقیقاً دو وارون داشته باشد. نگاه کنید به

O.G. Harrold, The non-existence of a certain type of continuous transformation, *Duke Math. J.* 5 (1939), 789-793;

و برای تعمیمها نگاه کنید به

J .H. Roberts, Two-to-one transformations, *Duke Math. J.* 6 (1940), 256-262; P. Civin, Two-to-one mappings on manifolds, *Duke Math. J.* 10 (1943), 49-57.

مقدار معتنابهی اثر در مورد مباحثِ مربوط وجود دارد. برای نمونه، نگاه کنید به مقالاتی از آ.و. چِرناوسکی، ی. میودوسِوسکی، ژ.ر. اوتْز، و ب.ر. وِنر، که می‌توان در *Mathematical Reviews* یافت؛ و مسائِل E1094 و E1715 در *Amer. Math. Monthly* (1954, 425; 1965, 784).

[ص. ۱۰۷]

۱۵ج.

D.C. Gillespie, A property of continuity, *Bull. Amer. Math. Soc.* 28 (1922), 245-250.

[ص. ۱۰۷]

۱۵چ. گیلِسپی (مرجعِ بالا) فرمولی برای چنین تابعی می‌دهد:
$f(x) = \pi x + x^۲ \sin(\pi/x)$، $۰ < x \le ۱$ [ص. ۱۰۸]

۱۵ح.

J.B. Diaz and F.T. Metcalf, A continuous periodic function has every chord twice, *Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 833-835

اثباتِ دیگری می‌دهد. برای تعمیمها به توابعِ تقریباً دوره‌ای و توابعی کلّیتر، نگاه کنید به

J.C. Oxtoby, Horizontal chord theorems, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 468-475.

[ص. ۱۱۰]

۱۶. اگرچه تی.ام. فلِت (Bull. Inst. Math. Appl. 11 (1975), (34 کشف کرده است که بخشِ مثبتِ قضیهٔ عمومیِ وتر را آ.م. آمپر در ۱۸۰۶ اثبات کرده است (نگاه کنید به *Math. Rev.* 56 #5805)، تاریخِ نوینِ قضیه با

P. Lévy, Sur une généralisation du théorème de Rolle, *C. R. Acad. Sci. Paris* 198 (1934), 424-425

آغاز می‌شود؛ این قضیهٔ مکرراً از نو کشف شده است. برای تعمیمها نگاه کنید به

H. Hopf, Über die Sehnen ebener Kontinuen und die Schliefen geschlossener Wege, *Comment. Math. Helv.* 9 (1937), 309-319.

برای بحثی در مورد طولهای ممکنِ وترهای افقیِ تابعی داده‌شده مقالهٔ هاپف را ببنید؛ نیز مقالهٔ آکستوبی ذکرشده در یادداشتِ ۱۵ح، و

R.J. Levit, The finite difference extension of Rolle's theorem, *Amer. Math. Monthly* 70 (1963), 26-30.

برای اطلاعاتِ بیشتر و برخی کاربردها نگاه کنید به

J.T. Rosenbaum, Some consequences of the universal chord theorem, *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 509-513.

روزِنباؤم همچنین تعبیری تماشایی از قضیه به‌دست می‌دهد:

How to build a picnic table for use on a mountain range of known period, *Notices Amer. Math. Soc.* 16 (1969), 94.

کاربردِ دیگری را جِی.سی. آکستوبی به من نشان داد: اگر f پیوسته باشد و به ازای همهٔ x و yها $f(x+y) = g(f(x), y)$، آنگاه f یا اکیداً یکنواست یا ثابت. (این مسألهٔ E2246 است در *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 676-677.) اگر f اکیداً یکنوا نباشد، به ازای $x_\circ$ای و $h > \circ$ای، $f(x_\circ + h) = f(x_\circ)$. پس به ازای همهٔ xها،

$$f(x+h) = f((x_\circ + h) + (x - x_\circ)) = g(f(x_\circ + h), x - x_\circ)$$

$$= g(f(x_\circ), x - x_\circ) = f(x_\circ + (x - x_\circ)) = f(x)\cdot$$

چون (بنا بر قضیهٔ عمومیِ وتر) f وترهای افقیِ به دلخواه کوتاه دارد، این فرمول نشان می‌دهد که f دوره‌های به‌دلخواه کوتاه دارد، و لذا ثابت است. آکستوبی تذکر می‌دهد که بر عکس، اگر f پیوسته باشد و یا اکیداً یکنوا باشد یا ثابت، تابع gای هست که $f(x+y)=g(f(x),y)$. [ص. ۱۱۱]

۱۷. هاپف، یادداشت ۱۶. [ص. ۱۱۲]

۱۷آ. پیشنهادشده توسطِ

J.D. Memory, Kinematics problem for joggers, *Amer. J. Physics* 41 (1973), 1205-1206.

[ص. ۱۱۳]

۱۸. برای توصیفی مقدماتی و تفصیلی از این قضیه و قضایای مربوط، نگاه کنید به

A.W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress 1945*, University of Toronto Press, 1946, pp. 285-309.

[ص. ۱۱۴]

۱۸آ. نگاه کنید به

W.G. Chinn and N.E. Steenrod, *First concepts of topology* (New Mathematical Library, no. 18), Random House, New York, 1966, p. 65.

[ص. ۱۱۵]

۱۹.

J.G. Brennan, A property of a plane convex region, *Math. Gaz.* 42 (1958), 301-302; A.C. Zitronenbaum, Bisecting an area and its boundary, *Math. Gaz.* 43 (1959), 130-131.

[ص. ۱۱۵]

۲۰. برای اثبات، مراجع، و تعمیمها، نگاه کنید به

A.H. Stone and J.W. Tukey, Generalized "sandwich" theorems, Duke Math. J. 9 (1942), 356-359

و چین و استینرُد، کتاب ذکرشده در ۱۸آ، ص. ۱۲۰. [ص. ۱۱۵]

۲۰آ. برای تحلیلی جالب از مفهومِ پیوستگی بر حسبِ حدود، نگاه کنید به

K.P. Williams, Note on continuous functions, *Amer. Math. Monthly* 25 (1918), 246-249.

[ص. ۱۱۸]

۲۱. برای این قضیه و قضیهٔ بعدی نگاه کنید به

G.Pólya and G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925

جلد ۱، صص، ۶۳، ۲۲۵، مسائلِ II۱۲۶۱,۲۷. [ص. ۱۲۳]

۲۲. برای تحلیلهایی از مفهومِ خمِ پیوسته از دیدگاههای گوناگون، نگاه کنید به

G.T. Whyburn, What is a curve?, *Amer. Math, Monthly* 49 (1942), 493-497; J.W.T. Youngs, Curves and surfaces, *ibid.* 51 (1944), 1-11.

[ص. ۱۲۵]

۲۳.

W. Hurewicz, Über dimensionserhöhender stetige Abbildungen, *J. Reine Angew. Math.* 169 (1933), 71-78.

[ص. ۱۲۶]

۲۴.

I.J. Schoenberg, On the Peano curve of Lebesgue, *Bull Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 519.

[ص. ۱۲۶]

۲۵. برای تعمیمی نگاه کنید به

L. Lorch, Derivatives of infinite order, *Pacific J. Math.* 3 (1953), 773-778.

[ص. ۱۳۰]

۲۶. پولیا و سِگو، کتاب ذکرشده در یادداشت ۲۱، جلد ۱، صص. ۳۰، ۱۸۵، مسألهٔ ۱۶۵ I. [ص. ۱۳۲]

۲۶آ. مثلاً نگاه کنید به

T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1957, p. 458.

[ص. ۱۳۲]

۲۷. مثلاً نگاه کنید به

C. de la Vallée Poussin, *Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1934, pp. 127ff.

[ص. ۱۳۵]

۲۷آ. برای اثباتی ساده نگاه کنید به

F.W. Carroll, Separately continuous functions are Bair functions, *Amer, Math.* Monthly 78 (1971), 175.

[ص. ۱۳۸]

۲۸. این قضیه که توابعِ پیوسته را می‌توان به‌طور یکنواخت با چندجمله‌ایها تقریب زد به قضیهٔ تقریبِ وایرشتراس معروف است. اثباتِ داده‌شده در اینجا را ا.لانداؤ ابداع کرده است. [ص. ۱۴۱]

۲۹. آنچه مورد نیاز است وجود یک پایهٔ هَمِل برای اعداد حقیقی است: نگاه کنید به

H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions*, University of New Mexico Press, Albuquerque,1948, pp. 100ff.

یک تابعِ خطیِ ناپیوسته در

G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934, p. 96

ساخته شده است. مقالهٔ اولیهٔ هَمِل در یادداشتِ ۳۲ ذکر شده است. همچنین نگاه کنید به

G.S. Young, The linear functional equation, *Amer. Math. Monthly* 65 (1958), 37-38.

نکاتِ تاریخیِ دیگر و مراجع در

J.W. Green and W. Gustin, Quasi-convex sets, *Canadian J. Math.* 2 (1950), 489-507

داده شده است. [ص. ۱۴۵]

۳۰. برای این اثبات، و تعمیمی، نگاه کنید به

H. Kestelman, On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Fund. Math.* 34 (1947), 144-147.

[ص. ۱۴۶]

۳۱.

A. Zygmund, *Trigonometrical series, Monografje Matematyczne*, vol. 5, Warsaw-Lwów, 1935, pp. 133-134; *Trigonometric series*, vol. 1, Cambridge University Press, 1959, p. 235.

این‌خاصیت را هـ. اشتِینهاؤس کشف کرده است. برای اثباتِ حسابیِ ساده‌ای نگاه کنید به

J.F. Randolph, Distances between points of the Cantor set, *Amer. Math. Monthly* 47 (1940), 549-551.

برای خواصِ مرتبطِ جالبِ دیگری از مجموعهٔ کانتور و مجموعه‌های مشابه، مقالاتِ جدیدِ

T. Šalát (*Math. Reviews* 24 # A2538), N.C. Bose Majumder (*Math. Reviews* 22 # 2971; 24 # A1706, A2537, A3444; 29 # 5215, 5732, 5733), *Amer. Math. Monthly* 72 (1965), 725-729 (*Math. Reviews*, 32 # 1295) را ببینید.

همچنین نگاه کنید به

J.M. Brown and K.W. Lee, The distance set of $C_\lambda \times C_\lambda$, *J. London Math. Soc.* (2) 15 (1977), 551-556.

[ص. ۱۴۷]

.۳۲

G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Ann.* 60 (1905), 459-462.

[ص. ۱۴۷]

.۳۳

M. Plancherel and G. Pólya, Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable, *Comment. Math. Helv.* 3 (1931), 114-121.

[ص. ۱۴۹]

۳۳آ. نگاه کنید به

R. P. Agnew, Limits of integrals, *Duke Math. J.*9 (1942), 10-19; Mean values and Frullani integrals and variants, of the Egoroff theorem on essentially uniform convergence, *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* 6 (1954), 12-16.

[ص. ۱۵۰]

۳۳ب. برای مروری جامع بر قضایای مربوط به مشتقها، نگاه کنید به

A.M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes, in Mathematics 659, Springer, 1978.

[ص. ۱۵۰]

۳۳پ. میکولاس، یادداشت ۳۴. شرطِ مشابهی که مشتق‌پذیریِ پیوسته را ایجاب می‌کند در

G.P. Weller, A condition implying differentiability, *Delta* 4, no. 2 (1974), 56-64

داده شده است. [ص. ۱۵۲]

.۳۴

M. Mikolás, Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math. Szeged* 17 (1956), 49-62.

برای روشهای ساختِ سادهٔ دیگر نگاه کنید به

J. McCarthy, An everywhere continuous nowhere differentiable function, *Amer. Math. Monthly* 60 (1953), 709; T.H. Hildebrandt, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly* 40 (1933), 547-548.

[ص. ۱۵۳]

۳۴آ

U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, translated from the Italian edition of 1878, Leipzig, 1892, pp. 279-280.

توجه کنید که تابع می‌تواند «در نقطه‌ای از راست صعودی» باشد بدون اینکه لزوماً در هیچ همسایگی سمتِ راست صعودی باشد. [ص. ۱۵۴]

۳۵. و. سرپینسکی: نگاه کنید به

S. Saks, Théorie de l'intégrale, *Monografje Matematyczne*, vol. 2, Warsaw, 1933, pp. 167-168.

[ص. ۱۵۵]

۳۶. س. ساکس، کتابِ مذکور در یادداشت ۳۵، ص. ۱۷۷. همچنین نگاه کنید به

D.E. Varberg, On absolutely continuous functions, *Amer. Math. Monthly* 72 (1965), 831-841; E.P. Woodruff, Derivates of a function whose image is of Lebesgue measure zero, *Notices Amer. Math. Soc.* 16 (1969), 666-667.

برای اثباتی مقدماتی از یک خاصیتِ مقدماتی‌تر نگاه کنید به پولیا و سِگو، کتابِ مذکور در یادداشت ۲۱، جلد ۱، صص ۶۳، ۲۲۵، مسألهٔ II۱۲۵. [ص. ۱۵۵]

۳۶آ. می‌توان ادعا کرد که این به زمانِ گالیله باز می‌گردد، که در ۱۶۳۸ (در Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, *Opera*, 1898, vol. 8, p. 283) نوشت «شاید افلاطون بر این بود که هیچ شیء متحرکی نمی‌تواند از سکون به سرعتِ مثبتی برسد بدون اینکه از همهٔ سرعتهای کمتر بگذرد». به نظر می‌رسد که احتمالاً گالیله سرعت را پیوسته می‌انگاشته، لذا او ممکن است تنها به خاصیتِ مقدار میانیِ توابعِ پیوسته توجه کرده باشد. انتسابِ غیرقطعیِ این مطلب به افلاطونْ موهوم به‌نظر می‌آید. [ص. ۱۵۶]

۳۶ب. نمودارِ مشابهی یک بار در یک امتحانِ GRE وجود داشت با سؤالی شبیه به اینکه «این شکلْ کدام یک از پنج قضیهٔ زیر را به یادِ شما می‌آورد؟» [ص. ۱۵۶]

۳۶پ. نگاه کنید به

A.K. Aziz and J.B. Diaz, On Pompeiu's proof of the mean-value theorem of the differential calculus of real-valued functions, *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, pp. 467-481 (1963).

همچنین نگاه کنید به

H. Samelson, On Rolle's theorem, *Amer. Math .Monthly* 86 (1979), 486.

[ص. ۱۵۶]

۳۶ت. رک.

J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960, pp.153-155.

[ص. ۱۵۷]

.۳۷

E.W. Hobson, *The theory of functions of real variable and the theory of Fourier's series,* vol. 1, 3rd ed., Cambridge University Press, 1927, p. 363.

[ص. ۱۵۸]

.۳۸

T.M. Flett, A mean value theorem, *Math. Gaz.* 42 (1958), 38-39.

همچنین نگاه کنید به

S.G. Wayment, An integral mean value theorem, *Math. Gaz.* 54 (1970), 300-301

و مراجع داده‌شده در آنجا؛

J.B. Diaz and R.Výborný, On some mean value theorems of the differential calculus, *Bull. Austral. Math. Soc.* 5 (1971), 227-238; S. Riech, Problem 5810, *Amer. Math Monthly* 78 (1971), 798.

[ص. ۱۵۹]

۳۹. حالتِ خاصی در

L.J. Paige, A note on indeterminate forms, *Amer. Math. Monthly* 61 (1954),189-190

بررسی شده است. [ص. ۱۶۰]

۳۹آ. نگاه کنید به

A.P. Morse, Dini derivates of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 126-130.

[ص. ۱۶۱]

۴۰. برای مراجع نگاه کنید به

P. Erdős, Some remarks on set theory, *Ann. of Math.* 44 (1943), 643-646 (p. 646).

[ص. ۱۶۳]

۴۱.

A.N. Singh, On infinite derivatives, *Fund. Math.* 33 (1945), 106-107.

[ص. ۱۶۴]

۴۱آ.

F.M. Filipczak, On the derivative of a discontinuous function, *Colloq. Math.* 13 (1964), 73-79; K.M. Garg, On bilateral derivatives and the derivative, *Trans. Amer. Math. Soc.* 210 (1975), 295-329

(گزارهٔ ۳.۹ و نتیجهٔ ۵.۲)؛

R.P. Boas and G.T. Cargo, Level sets of derivatives, *Pacific J. Math.* 83 (1979), 37-44.

[ص. ۱۶۴]

۴۲. به نظر می‌رسد که این را نخستین بار اِم.کِی. فورت در ۱۹۵۱ آشکارا اظهار کرده باشد:

A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, *Amer. Math. Monthly* 58 (1951), 408-410.

این را مستقلاً یافته‌اند: در

S. Četković, Un théorème de la théorie des fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris* 245 (1957), 1692-1694;

و در

S. Markus [Marcus], Points of discontinuity and points of differentiability, *Rev. Math. Pures Appl.* (2) (1957), 471-474.

(به روسی). با این حال، این نتیجهٔ ساده‌ای است از قضیه‌ای قدیمی از وُ.هـ. یانگ:

On the infinite derivates of a function of a single variable, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 1 (1903), 201-204.

قضیهٔ یانگ می‌گوید که مجموعهٔ نقاطی که در آنها دست‌کم یک مشتقِ دینیْ بینهایت است اشتراکِ شمارایی از مجموعه‌های باز است (پس، اگر این مجموعه چگال باشد، متممش از مقولهٔ اول است). به اینکه قضیهٔ فورت نتیجه‌ای از قضیهٔ یانگ است در

K.M. Garg, On the derivability of functions discontinuous at a dense set, *Rev. Math. Pures Appl.* 7 (1962), 175-179

و مستقلاً توسطِ کارگو توجه شده است (به بوآس و کارگو، منبعِ ذکرشده در بالا نگاه کنید؛

آن مقاله شامل اثباتِ بسیار ساده‌ای از قضیهٔ یانگ نیز هست).

اثباتِ ذکرشده در متن برای قضیهٔ فورت را اِی.سی. سِگال پیشنهاد کرده است. اثباتِ طولانیترِ داده‌شده در ویراستِ نخستِ این کتاب یک اشتباه چاپی داشت: دومین < در ص. ۱۲۷، سطر ۶، باید > می‌بود. همچنین نگاه کنید به *Amer. Math. Monthly* 78 (1971), p. 1106 اثبات سادهٔ دیگری به‌طور ضمنی در نتایج کلّیترِ به‌دست آمده در

E.M. Beesley, A.P. Morse, and D.C. Pfaff, Lipschitzian points, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 603-608

وجود دارد. [ص. ۱۶۵]

۴۳. برای توصیفی ساده نگاه کنید به

F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis,* Ungar, New York, 1955, pp. 17ff.

[ص. ۱۶۶]

۴۳آ. نگاه کنید به

A.M. Bruckner, Creating differentiability and destroying derivatives, *Amer. Math. Monthly* 85 (1978), 554-562.

[ص. ۱۶۷]

۴۴.

J.S. Lipiński, Sur la dériviée d'une fonction de sauts, *Colloq. Math.* 4 (1957), 197-205; L.A. Rubel, Differentiability of monotonic functions, *Colloq. Math.* 10 (1963), 277-279.

[ص. ۱۶۹]

۴۵. این روشِ سادهٔ ساخت در

G. Freilich, *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 918-919

ارائه شده است. [ص. ۱۷۲]

۴۶. روش ساختِ ارائه‌شده در ویراستِ نخستِ این کتابْ نادرست بود. روش فعلی بر اساسِ روشِ داده‌شده توسطِ س. ساکس (*Theory of the integral, Monografie*

(*Matematyczne*, vol. 7, Warsaw-Lwów, 1937, pp. 205-206 برای
حالت کلّیتری که مشتق روی مجموعهٔ بستهٔ دلخواهی با اندازهٔ ۰ نامتناهی باشد بنا شده
است. بعضی نتایجِ جالبِ مربوط عبارت‌اند از: اگر g پیوسته باشد و، مگر روی مجموعهٔ
شمارایی، مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد، و این مشتق تقریباً همه‌جا نامنفی
باشد، آنگاه g غیرنزولی است (گ. گُلدُوْسکی؛ نگاه کنید به ساکس، مرجع ذکرشده در
بالا)؛ اگر E مجموعهٔ شمارایی باشد که اشتراکِ تعداد شمارایی مجموعهٔ باز است، تابعی
(نه لزوماً پیوسته) هست که مشتقش روی E، $+\infty$ و خارجِ E، ۰ است.
(G. Piranian, The derivative of a monotonic discontinuous function, *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), 243-244).

[ص. ۱۷۲]

۴۷. توضیحْ به اقتفای ریس و س.ـ ناگی، کتاب مذکور در یادداشتِ ۴۳، است با
ساده‌سازیهای ارائه‌شده در
H. Kestelman, *Modern theories of integration,* Oxford, 1937, pp. 199ff.
قضیه را اصلاً لبگ به‌عنوان استنتاجی از نظریهٔ انتگرالگیریِ کاملش اثبات کرده بود.
ساده‌سازیِ دیگری را ل.ا. روبلِ (مقالهٔ مذکور در یادداشت ۴۴) عرضه کرده است، و اثباتِ
بسیار کوتاهی در چند سطر در
D.G. Austin, A geometric proof of the Lebesgue differentiation theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), 220-221
عرضه شده است. [ص. ۱۷۳]

۴۸. این اثبات و اثبات قضیهٔ بعدی به اقتفای ریس و س. ـ ناگی است، کتابِ مذکور
در یادداشت ۴۳. «قضیهٔ فوبینی» در نظریهٔ انتگرالگیری قضیهٔ دیگری است.[ص. ۱۷۸]

۴۹.
P. Erdős, Some remarks on the measurability of certain sets, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 728-731
(اثبات از ت. رادو). [ص. ۱۸۱]

۵۰. کلّیترین نتیجه در

A. Ostrowski, Zur Theorie der konvexen Funktionen, *Comment. Math. Helv.* 1 (1929), 157-159

داده شده است. [ص. ۱۸۲]

۵۱. توضیحْ مطابقِ

R.P. Boas and D.V. Widder, Functions with positive differences, *Duke Math. J.* 7 (1940), 496-503

است. [ص. ۱۸۳]

۵۱آ. من این کاربرد را از م. کلامکین آموختهام. در کتابِ در دست چاپی از ا. نیوِن در مورد بسیاری مسائلِ مشابه بحث خواهد شد. [ص. ۱۹۱]

۵۲.

J.R. Nurcombe, A necessary condition for convergence, *Math. Gaz.* 59 (1975), 113-114.

[ص. ۱۹۲]

۵۲آ. در مورد نابرابریهای مطرحشده در اینجا، نگاه کنید به

Hardy, Littlewood, and Pólya, *Inequalites*, Cambridge University Press, 1934

فصلهای ۲ و ۳. همچنین نگاه کنید به

E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1961, 1965; D.S. Mitrinović and P.M. Vasić, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.

[ص. ۱۹۳]

۵۳. برای مراجع و تعمیمها نگاه کنید به

Boas, Asymptotic relations for derivatives, *Duke Math. J.* 3 (1937), 637-646.

[ص. ۱۹۶]

۵۴. برای مجموعهٔ آثار در این زمینه، نگاه کنید به

H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* 62 (1955), 354-367.

[ص. ۱۹۷]

۵۵. ا. بورل. نگاه کنید به

A. Rosenthal, On functions with infinitely many derivatives, *Proc. Amer. Math.* Soc. 4 (1953), 600-602;

سالتسمان و زِلِر، مقالهٔ مذکور در یادداشت ۵۴؛

H. Mirkil, Differentiable functions, formal power series, and moments, *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 650-652.

[ص. ۱۹۸]

۵۶. برای اثباتی با استفاده از قضیهٔ بئر، نگاه کنید به

D. Morgenstern, Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen, *Math. Nachr.* 12 (1954), 74;

برای روشِ ساختی صریحتر، نگاه کنید به

H. Cartan, *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, Actualités Scientifiques et Industrielles*, no. 867 (1940), pp. 20-22.

[ص. ۱۹۸]

۵۷. س. برنشتاین. نگاه کنید به بوآس و وایدِر، مقالهٔ مذکور در یادداشت ۵۱.

[ص. ۲۰۰]

۵۷آ. برای سالهای زیادی هیچ اثبات مقدماتی‌ای وجود نداشت، اما اخیراً یکی یافت شده است:

J.A.M. McHugh, A proof of Bernstein's theorem on regularly monotonic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 47 (1975), 358-360.

[ص. ۲۰۰]

۵۸. نگاه کنید به سالتسمان و زِلِر، مقالهٔ مذکور در یادداشت ۵۴. [ص. ۲۰۰]

۵۹. رک.

W.F. Osgood, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, *Monatsh. Math. Phys.* 9 (1898), 331-345; p. 344.

[پاسخ تمرینِ ۲۱.۹]

پاسخ تمرینها

۱.۱. بیانِ دیگری از تعریف.

۱.۲. (آ) هر حرف یا صامت است یا مصوت و همهٔ مصوتها در "real functions" وجود دارند.

(ب) $C(E)$ متشکل است از همهٔ مصوتها.

(پ) $C(F)$ تنها از صامتها (در واقع نه از همهٔ آنها) تشکیل شده است.

(ت) $F \cap E = \{r, l, f, n, c, t, s\}$ شامل هیچ مصوتی نیست.

۱.۲آ. چندان عملی نیست. (بحثِ پیشین را با جایگزین کردنِ «کتابشناسی» با «مجموعه» تکرار کنید.)

۲.۱. (آ) همهٔ اعدادِ بزرگتر از یا مساوی با ۱؛ همهٔ اعدادِ نامثبت؛ ۱؛ ۰.

(ب)، (پ)، (ت)، (ث): همانندِ (آ).

(ج) همهٔ اعدادِ نامنفی؛ همهٔ اعداد نامثبت؛ ۰؛ ۰.

(چ)، (ح): $+\infty$.

(خ) همهٔ اعدادِ بزرگتر از یا مساوی با $\pi/۶$؛ $\pi/۶$؛ $۵\pi/۶$.

۲.۲. هر مجموعهٔ ناتهیِ E که از پایین کراندار باشد یک بزرگترین کران پایین، که با $\inf E$ (برای infimum) نشان داده می‌شود، دارد، با این خواص که هر $x \in E$ در $x \geq \inf E$ صدق می‌کند، و اینکه اگر $A > \inf E$، دست‌کم یک $x \in E$ هست که $x < A$. اگر خاصیتِ کوچکترین کران بالا فرض گرفته شود و E مجموعه‌ای باشد که از پایین کراندار

است، F را متشکل از همهٔ اعداد حقیقیِ xای بگیرید که $-x \in E$. چون $x > M$ یعنی $-x < -M$، مجموعهٔ F از بالاکراندار است و لذا یک کوچکترین کران بالای B دارد. در این صورت $-B$ بزرگترین کران پایینِ E است. زیرا اگر $x \in E$، $x \leq B$، لذا $x \geq -B$؛ اگر $A > -B$، $-A < B$، $x \in E$ای هست که $-x > -A$، لذا $x < A$.

۲.۳. $(-\infty) + \infty+$ برابر $(a/\circ) + (b/\circ)$ خواهد شد که $a > \circ$، $b < \circ$. برای حفظِ قوانین حسابْ این باید برابرِ $(a + b)/\circ$ می‌بود، که می‌تواند $+\infty$، $-\infty$، یا تعریف‌نشده باشد، بسته به اینکه $a + b > \circ$، $a + b < \circ$، یا $a + b = \circ$. اگر $x = (+\infty) \cdot \circ$، آنگاه $+\infty = x/\circ$ و x می‌تواند هر عدد مثبتی باشد. همچنین ناممکن است که معنایی به $(+\infty)/(+\infty)$ نسبت داد.

۲.۴. اگر E شامل نقطهٔ x باشد، هرکران بالای E دست‌کم x است و هرکران پایینِ E حداکثر x است. اگر E شامِل یک نقطه y هم باشد، همین گزاره با y به جای x نیز درست است. پس، اگر $x < y$، آنگاه به ویژه $\sup E \geq y > x \geq \inf E$. مشابهاً اگر $y < x$.

۳.۱. مجموعه‌ها را E و F بگیرید، و از F همهٔ اعضای مشترک با E را بردارید. اگر مجموعهٔ تقلیل‌یافته (مثلاً F_1) متناهی باشد، F_1 و سپس E را بشمارید. اگر نه، اعداد صحیح مثبتِ فرد را برای نشانه‌گذاریِ F_1 و اعداد صحیح مثبتِ زوج را برای نشانه‌گذاریِ E به کار برید.

۳.۲. اعضای مجموعهٔ kام، E_k، را می‌توان با $e_{k,1}$، $e_{k,2}$، ... نمایش داد. $e_{k,n}$ را با نقطهٔ مشبکه‌ایِ (k, n) متناظر کنید.

۳.۲آ. هر قرصْ شامل نقطه‌ای با دو مختصهٔ گویاست که در هیچ قرصِ دیگر نیست؛ S را با شمردنِ این نقاط بشمارید.

۳.۳. چندجمله‌ایهای خطیِ $ax + b$ با ضرایبِ صحیحْ در تناظر یک به یک با نقاطِ مشبکه‌ایِ (a, b)اند؛ چندجمله‌ایهای درجهٔ دومِ $ax^2 + bx + c$ با نقاط مشبکه‌ایِ سه‌بعدی؛ و به همین ترتیب.

۳.۴. اگر اعداد حقیقیِ x متعلق به (a, b) شمارا بودند، اعداد حقیقیِ $x - a$ متعلق

به $(\circ\,, b-a)$ شمارا می‌بودند و اعداد حقیقیِ $(x-a)/(b-a)$ متعلق به $(\circ\,,\text{۱})$ نیز چنین می‌بودند.

۳.۵. روشِ ساخت مذکور در متنْ کلمه به کلمه به‌کار می‌آید، زیرا عددِ ساخته‌شده شامل هیچ ۳ای نیست.

۳.۵آ. روشِ پیشنهادشده نمی‌تواند اعداد حقیقی‌ای را که بینهایت رقمِ ناصفر دارند (یعنی بیشتر آنها را) بشمارد.

۳.۶. اگر E که $x_\text{۱}$ از آن حذف شده باشد متناهی باشد، پس از الحاقِ یک نقطهٔ $x_\text{۱}$ به آن نیز متناهی است. اگر فرآیند در مرحله‌ای، مثلاً پس از برداشتن $x_\text{۱}$، $x_\text{۲}$، ...، x_k متوقف می‌شد، مجموعه‌ای متناهی باقی می‌مانْد، و این مجموعه پس از الحاقِ k نقطه نیز متناهی می‌بود.

۳.۷. F را همان E بگیرید که $x_\circ$ از آن حذف شده. یک زیرمجموعهٔ شمارای $\{x_\text{۱}, x_\text{۲}, \ldots\}$ از F انتخاب کنید. نقاطِ E، غیر از $x_\circ$، $x_\text{۱}$، ...، را با خودشان (به عنوان نقاطی از F) متناظر کنید؛ $x_\circ$ را با $x_\text{۱}$ متناظر کنید، $x_\text{۱}$ را با $x_\text{۲}$، و غیره.

۳.۸. تناظرِ $\tan x \leftrightarrow x$ تناظری یک به یک بین اعداد حقیقیِ بین $-\pi/\text{۲}$ و $\pi/\text{۲}$ و مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی برقرار می‌کند. از استدلالهای هندسی نیز می‌توان استفاده کرد.

۳.۹. اگر «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» مجموعهٔ Sای باشد، تودهٔ زیرمجموعه‌های S مجموعهٔ Tای است که آن را نمی‌توان در تناظر یک به یک با هیچ زیرمجموعه‌ای از S قرار داد. از طرف دیگر، زیرمجموعه‌های S مجموعه و لذا عضوِ Sاند، و بنابراین تودهٔ آنها، T، با زیرمجموعه‌ای از S، یعنی خودِ T، در تناظر یک به یک است. تناقض.

۳.۹آ. اگر توابع را می‌شد در تناظرِ یک به یک با اعداد حقیقی قرار دارد، هر f را می‌شد به صورتِ f_x نشان زد، که x عددِ حقیقی‌ای است که متناظرِ f است. تابع gای را با $g(x) = f_x(x) + \text{۱}$ تعریف کنید. کدام x می‌تواند متناظرِ g باشد؟

۳.۱۰. قضیهٔ شرودر-برنشتاین را به‌کارگیرید. از طرفی، به هر عدد حقیقی می‌توان دنباله‌ای از اعداد حقیقی نسبت داد، یعنی دنبالهٔ ارقامِ دهدهی‌ای که آن عددِ حقیقی را تعریف می‌کند. از طرف دیگر، اگر دنباله‌ای از اعداد حقیقی داشته باشیم، می‌توانیم بسط

دهدهیِ آنها را، زیر یکدیگر، بنویسیم، و آرایهٔ حاصل را به صورت قطری بپیماییم تا بسط دهدهیِ عددی حقیقی را به دست آوریم. بدین روش، دنباله‌های مختلفِ اعدادِ حقیقیْ اعداد حقیقیِ مختلفی تولید می‌کنند، زیرا بسط دهدهی‌ای که به‌دست می‌آوریم نمی‌تواند مختوم باشد.

۴.۰. (آ) نه. $d(x,y)$ می‌تواند ۰ باشد بدون اینکه $x = y$. در واقع $d((\text{۰},a),(\text{۰},b)) = \text{۰}$.

(ب) نه؛ $d(x,y)$ همواره برابرِ $d(y,x)$ نیست؛ در واقع $\mathrm{d(x,\ y)}$ همواره خوش‌تعریف نیست.

(پ) نه؛ $d(x,y)$ متقارن نیست.

(ت) بله. خواصِ (۱) و (۲) واضح‌اند. بنویسید $x = e^u$، $y = e^v$، $z = e^w$. نابرابریِ مثلث را بر حسب u، v، w بنویسید.

(ث) نه: $d(\text{۱۰}^{-\text{۱۱}},\text{۰}) = \text{۰}$.

۴.۱. خواصِ (۱) و (۲)ی هر دو متریکِ جدیدْ واضح‌اند. در مورد خاصیت (۳)، فرض کنید که نقاطی که ابتدائاً با x، y، z نشان داده شده‌اند $(x_\text{۱},y_\text{۱})$، $(x_\text{۲},y_\text{۲})$، $(x_\text{۳},y_\text{۳})$ باشند. باید

$$\begin{aligned}|x_\text{۱}-x_\text{۳}|+|y_\text{۱}-y_\text{۳}| \leq& |x_\text{۱}-x_\text{۲}|+|y_\text{۱}-y_\text{۲}|\\ &+|x_\text{۲}-x_\text{۳}|+|y_\text{۲}-y_\text{۳}|\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\max(|x_\text{۱}-x_\text{۳}|,|y_\text{۱}-y_\text{۳}|) \leq& \max(|x_\text{۱}-x_\text{۲}|,|y_\text{۱}-y_\text{۲}|)\\ &+\max(|x_\text{۲}-x_\text{۳}|,|y_\text{۲}-y_\text{۳}|)\end{aligned}$$

را اثبات کنیم. اولی از $|x_\text{۱}-x_\text{۳}| \leq |x_\text{۱}-x_\text{۲}|+|x_\text{۲}-x_\text{۳}|$ (و همین نابرابری با x به جای y) نتیجه می‌شود. دومی از همان نابرابریها نتیجه می‌شود، زیرا

$$\begin{cases}|x_\text{۱}-x_\text{۳}|\\ |y_\text{۱}-y_\text{۳}|\end{cases} \leq \begin{cases}|x_\text{۱}-x_\text{۲}|+|x-\text{۲}-x_\text{۳}|\\ |y_\text{۱}-y_\text{۲}|+|y_\text{۲}-y_\text{۳}|\end{cases}$$

$$\le \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$$

$$+ \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|).$$

بر حسبِ نخستین متریکِ جدید، در مثلث با رأسهای $(\circ, \circ)$ و $(1, \circ)$ و $(1, \circ)$، طول ضلعها ۱ و ۱ و ۲ است. بر حسبِ دومین متریکِ جدید، در مثلث با رأسهای $(\circ, \circ)$ و $(1, -1)$ و $(1, 1)$، طول ضلعها ۱ و ۱ و ۲ است. مکان هندسیِ $d(x, \circ) = 1$ بر حسبِ نخستین متریکِ جدیدْ متشکل است از نقاطِ (x, y)ای که $|x| + |y| = 1$، یعنی این مکانْ مربع با رأسهای $(\circ, \pm 1)$، $(\pm 1, \circ)$ است. در دومین متریکْ مکانْ متشکل است از نقاط (x, y)ای که $|x| = 1$ و $|y| \le 1$، یا $|x| \le 1$ و $|y| = 1$؛ این مربعی است با رأسهای واقع در چهار نقطهٔ $(\pm 1, \pm 1)$.

۴.۲. همهٔ شرایطِ فضای متریکْ باز هم برآورده می‌شوند.

۴.۳. $d(x, x) = \circ$؛ $d(y, x) = d(x, y) = 1 > \circ$ اگر $x \ne y$؛ اگر $x = z$، $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) = \circ$؛ اگر $x \ne z$، $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) = 1$، زیرا $x = y = z$ کنار گذاشته شده است.

۵.۱. در C هر همسایگیِ نقطهٔ x متشکل است از همهٔ توابعِ پیوستهٔ yای که به ازای هر t در $[\circ, 1]$، $|y(t) - x(t)| < r$.

۵.۲. اگر $p = (m, n)$ نقطه‌ای از فضا باشد، هر همسایگیِ p متشکل است از همهٔ نقاطی با دو مختصهٔ صحیح که فاصلهٔ (معمولیِ) آنها تا p کمتر از r است. هر همسایگیْ تنها شامل تعدادی متناهی نقطه است، و اگر $r < 1$، تنها شاملِ مرکزش است.

۵.۲آ. (i) درونِ تهی؛ همهٔ نقاطْ نقاطِ مرزی‌اند.

(ii) درونِ مجموعه خودِ مجموعه است. مرزِ آن ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ...، و $\circ$ است.

(iii) مرز متشکل است از پاره‌خطهایی به طول ۱ قائم بر نقاطِ مرزیِ (ii).

(iv) درونِ تهی؛ مرزْ کلِّ مجموعه است.

۵.۳. همسایگیهای به شعاعِ کمتر از ۱ تنها شامل مرکزشان‌اند (تمرین ۵.۲). پس همسایگیهای به اندازهٔ کافی کوچکِ هر نقطهٔ هر مجموعهٔ ناتهیِ E هیچ‌گاه شامل نقاطی

از $C(E)$ نیستند، لذا مرزِ E تهی است.

۵.۴. تعریفْ نسبت به E و $C(E)$ متقارن است.

۵.۵. فرض کنید x یک نقطهٔ مرزیِ B باشد و فرض کنید N یک همسایگیِ x باشد. در این صورت N شامل دست‌کم یک نقطهٔ y از B است؛ N حاوی یک همسایگیِ y نیز هست، و این همسایگیْ شامل نقطه‌ای از E و نقطه‌ای از $C(E)$ است. پس x یک نقطهٔ مرزیِ E است، یعنی $x \in B$. اگر E متشکل از نقاطِ گویای R_1 باشد، مرزِ آن همهٔ R_1 است، لذا مرزِ مرزِ E تهی است.

۵.۶.(آ) مرز N متشکل از همهٔ نقاطِ با فاصلهٔ r از x است.

(ب) مرز N می‌تواند تهی باشد (تمرین ۵.۳)، اما اگر نقاطی داشته باشد باید با فاصلهٔ r از x باشند. زیرا اگر یک نقطهٔ y از N در فاصلهٔ کمتر از r تا x باشد، همسایگیِ کوچکی از y نیز چنین است، لذا y نقطه‌ای درونی است. مشابهاً، هر نقطهٔ y در فاصلهٔ بزرگتر از r تا x یک نقطهٔ درونیِ $C(E)$ است.

۵.۷. اگر $a < x < b$، هر همسایگیِ x یک بازهٔ $(x-h, x+h)$ است، و اگر $h < \min(x-a, b-x)$، این بازه داخلِ (a, b) است. پس x نقطه‌ای درونی است.

بنابراین نقاطِ مرزیِ $[a, b]$ نقاطِ a و bاند، و این نقاط در $[a, b]$اند، لذا $[a, b]$ بسته است.

۵.۸. در R_2، (a, b) نه باز است نه بسته، زیرا درونی تهی دارد اما شامل نقاطِ a و bی مرزش نیست. اما $[a, b]$ در R_2 بسته است زیرا در اینجا همهٔ نقاطِ آن مرزی‌اند.

۵.۹. ۰ نقطه‌ای درونی نیست؛ ۱ نقطه‌ای مرزی است که در مجموعه نیست.

۵.۱۰. همهٔ نقاطِ کلِّ فضا نقاطِ درونی‌اند، لذا فضا باز است. مرزِ کلِّ فضا تهی، و بنابراین محتوا در فضاست. پس کلِّ فضا هم باز است و هم بسته. مجموعهٔ تهی محتوا در درونِ (تهیِ) خود است و مرزِ (تهیِ) خود است.

۵.۱۱. بازه‌های $(n, n+\frac{1}{2})$ مجموعه‌هایی از نوعِ خواسته‌شده‌اند؛ اجتماعِ چنین مجموعه‌هایی نیز چنین است.

۵.۱۲. هیچ کدام: مرزِ آن همهٔ R_1 است و درونش تهی است.

۵.۱۳. هر همسایگیْ باز است. هر همسایگی، مثل مجموعهٔ نقاطی از صفحه با

فاصلهٔ کمتر از $\sqrt{۲}$ تا ۰، بسته نیز هست، زیرا مرزش تهی است.

۵.۱۴. اگر E مجموعهٔ دلخواهی در این فضا باشد، همسایگیهای نقاطِ E با شعاعهای کمتر از ۱ متعلق به Eاند، لذا E باز است. مرز E تهی است (تمرین ۵.۳)، و بنابراین محتوا در E است؛ پس E بسته است.

۵.۱۵. اگر $x \in G \subset E$ که G باز است، x یک نقطهٔ درونیِ G و بنابراین یک نقطهٔ درونیِ E است، زیرا هر همسایگیِ x که منحصراً از نقاطِ G تشکیل شده باشد منحصراً از نقاطِ E نیز تشکیل شده است.

۵.۱۶. اگر E باز باشد و $x \in E$، همسایگی‌ای از x تنها شامل نقاطِ E است، لذا چنین نیست که همهٔ همسایگیهای x بتوانند هم شامل نقاطی از E باشند هم شامل نقاطی از $C(E)$. پس E شامل هیچ‌یک از نقاط مرزیش نیست. به عکس، فرض کنید E شامل هیچ‌یک از نقاطِ مرزیش نباشد و فرض کنید $x \in E$. در این صورت x نقطهٔ مرزی‌ای نیست، لذا همسایگی‌ای از x شامل هیچ نقطه‌ای از $C(E)$ نیست و لذا صرفاً از نقاطِ E تشکیل شده است. پس E باز است.

۵.۱۷. E باز است اگر و تنها اگر شامل هیچ یک از نقاطِ مرزیش نباشد، بنابراین اگر و تنها اگر همهٔ نقاطِ مرزیِ E متعلق به $C(E)$ باشند؛ یعنی اگر و تنها اگر $C(E)$ شامل همهٔ نقاط مرزیِ $C(E)$ باشد (زیرا مرز E مرزِ $C(E)$ است)؛ یعنی اگر و تنها اگر $C(E)$ بسته باشد.

۵.۱۸. تقریرِ مجددِ تمرینِ ۵.۱۷؛ E و $C(E)$ را تعویض کنید.

۵.۱۹. فرض کنید E شامل همهٔ نقاط مرزیش باشد و فرض کنید x یک نقطهٔ حدیِ E باشد. در این صورت یا $x \in E$ یا $x \in C(E)$. در حالت دوم، هر همسایگیِ x شامل نقاطی از E (زیرا x یک نقطهٔ حدیِ E است) و نقطه‌ای از $C(E)$ (خودِ x) است. بنابراین x یک نقطهٔ مرزیِ E است اگر در E نباشد. پس اگر E شامل همهٔ نقاطِ مرزیش باشد شامل همهٔ نقاطِ حدیش است. به عکس، فرض کنید E شامل همهٔ نقاط حدیش باشد و فرض کنید y یک نقطهٔ مرزی E باشد. اگر y یک نقطهٔ حدیِ E باشد بنا بر فرض در E است. اگر y یک نقطهٔ حدیِ E نباشد، همسایگی‌ای از y شامل هیچ نقطه‌ای از y غیر از خودِ y نیست؛ اما در این صورت $y \in E$. بنا براین E شامل همهٔ

نقاطِ مرزیش است.

۵.۲۰. فرض کنید x یک نقطهٔ حدی E باشد و فرض کنید N_1 یک همسایگیِ x باشد. بنا بر فرض، N_1 شامل نقطهٔ y_1ای از E است که $x \neq y_1$. همسایگیهای N_2 از x با شعاع کمتر از $d(x, y_1)$ شامل y_1 نیستند، ولی شامل نقطهٔ y_2ای از Eاند. و به همین ترتیب.

۵.۲۱. F را مجموعهٔ نقاط حدیِ E بگیرید و فرض کنید x یک نقطهٔ حدیِ F باشد. در این صورت هر همسایگیِ x شامل نقاطی از F، یعنی نقاطِ حدی‌ای از E، است و لذا حاوی زیرهمسایگی‌ای است که شامل نقاطی از E است. پس خود x یک نقطهٔ حدیِ E است، و لذا $x \in F$. یعنی F شامل همهٔ نقاطِ حدیش است.

۵.۲۱آ. هر نقطهٔ حدیِ x از مرزِ Bی E در هر همسایگیْ نقطه‌ای از B، لذا نقطه‌ای از E و نقطه‌ای از $C(E)$، دارد؛ پس این نقطه یک نقطهٔ مرزیِ E، یعنی نقطه‌ای از B است.

۵.۲۲. (آ) و (پ): نقاطِ $[0, 1]$؛ (ب) تک نقطهٔ 0.

۵.۲۲آ. (i) کلّ مجموعه.

(ii) نقاطِ 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ... روی هر یک از محورهای مختصات، به اضافهٔ $(0, 0)$.

(iii) هر شعاعِ $\theta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$، $0 \leq r \leq 1$، از نقاطِ حدی تشکیل شده است.

۵.۲۳. فرض کنید x یک نقطهٔ حدیِ E باشد. هر همسایگیِ x شامل بینهایت نقطه از E است (تمرین ۵.۲۰)؛ چون هر چنین نقطه‌ای در A یا در B است، تعدادی نامتناهی باید متعلق به یکی از این مجموعه‌ها باشد.

۵.۲۴. اگر مجموعهٔ E مرزی تهی داشته باشد، این مجموعه هم باز است هم بسته (تمرین ۵.۱۶؛ تعریفِ بسته).

۵.۲۵. باید نخست نشان دهیم که هر نقطهٔ x از بستارِ E، اگر در E نباشد، یک نقطهٔ مرزیِ E است؛ می‌دانیم که این نقطه یک نقطهٔ حدیِ E است. هر همسایگیِ x شامل نقاطی از E و نقطه‌ای (یعنی x) از $C(E)$ است؛ پس x یک نقطهٔ مرزیِ E است. اکنون F را بستارِ E بگیرید، و بنویسید $F = E \cup H$، که در آن H متشکل از نقاطِ حدیِ E است. هر نقطهٔ حدیِ y از F یک نقطهٔ حدیِ E یا H است. (تمرین

۵.۲۳). در حالتِ نخست $y \in F$. چون H بسته است (تمرین ۵.۲۱)، در حالت دوم به دست می‌آوریم $y \in H$، لذا $y \in F$.

۵.۲۵آ. نه. برای نمونه، مجموعهٔ ۱، ۲، ۳، ... در $R_۱$.

۵.۲۶. (آ) $[۰, ۱]$؛ (ب) $\{۰, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots\}$؛ (پ) $[۰, ۱]$.

۵.۲۷. بنا بر تمرین ۵.۲۵ بستارِ همسایگیِ مورد نظرِ N اجتماعِ N و مرزش است. مرزْ مجموعهٔ نقاطِ yای است که $d(x, y) = r$.

حکم در حالت کلّی در فضاهای متریک درست نیست. برای نمونه، فضای متشکل از $[۰, \frac{۱}{۲}] \cup [۱, \infty)$ با متریکِ $R_۱$ را در نظر بگیرید. N را مجموعهٔ نقاطِ با فاصلهٔ کمتر از ۱ تا ۰ بگیرید. بستارِ N مجموعهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ است، نه مجموعهٔ نقاطی از فضا با فاصله‌ای تا ۰ که از ۱ بیشتر نباشد.

۵.۲۸. فرض کنید بدانیم که اجتماعِ n مجموعهٔ بسته بسته است. فرض کنید $F_۱$، ...، $F_{n+۱}$، $n + ۱$ مجموعهٔ بسته باشند. در این صورت $F_۱ \cup F_۲ \cup \cdots \cup F_{n+۱} = (F_۱ \cup F_۲ \cup \cdots \cup F_n) \cup F_{n+۱}$ ، که اجتماعِ دو مجموعهٔ بسته است. به نحو مشابه (یا با در نظر گرفتنِ متمها) در مورد اشتراکِ مجموعه‌های باز.

۵.۲۹. اثباتِ اینکه اشتراکِ دو مجموعهٔ بسته بسته است تقریباً کلمه به کلمه تعمیم می‌یابد.

۵.۳۰. اجتماعِ مجموعه‌هایی در $R_۱$ را در نظر بگیرید، هر یک متشکل از یک تک عددِ گویا.

۵.۳۱. اجتماعهای مجموعه‌های باز بازند: نقطهٔ xای در نظر بگیرید متعلق به دست‌کم یکی از مجموعه‌های گردایه‌ای از مجموعه‌های باز. در این صورت همسایگی‌ای از x متعلق به یکی از مجموعه‌های باز است (چون این مجموعه باز است) و بنابراین متعلق به اجتماعِ همهٔ مجموعه‌های باز است.

اشتراکهای متناهیِ مجموعه‌های باز بازند: کافی است دو مجموعه را در نظر بگیریم (برای تعداد بیشتر از استقراء استفاده می‌کنیم). فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ باز باشند، $x \in G_۱ \cap G_۲$. در این صورت همسایگی‌ای از x زیرمجموعهٔ $G_۱$ است و همسایگی‌ای از x زیرمجموعهٔ

G_2 است. اشتراکِ این همسایگیها حاوی همسایگی کوچکتری است که زیرمجموعهٔ هر دوی G_1 و G_2، و لذا زیرمجموعهٔ اشتراکشان است.

اشتراکهای نامتناهیِ مجموعه‌های باز لازم نیست باز باشند: در R_1 بازه‌های $(-1/n, 1/n)$ را در نظر بگیرید. اشتراکِ آنها مجموعهٔ بازی نیست، زیرا متشکل از تک نقطهٔ ۰ است.

۵.۳۲. نقاطِ مرزیِ N_2 هر چه که باشند، باید متعلق به مجموعهٔ نقاطِ yای باشند که $d(x, y) \leq r/2$؛ پس $N_2 \subset N_1$. اگر فضا متشکل باشد از اعدادِ صحیح با متریکِ R_1، و $r = 1$، به دست می‌آوریم $N_1 = N_2$ وقتی که $x = 0$.

۶.۱. در Ω هر همسایگیْ یک تک نقطه است اگر شعاعش کمتر از ۱ باشد. پس در Ω مجموعه‌هایی که تنها شامل یک نقطه‌اند هیچ‌جاچگال نیستند.

۶.۲. اگر مجموعه‌ای هیچ‌جاچگال نباشد بستارش همسایگی‌ای را اشغال می‌کند. اگر مجموعه بسته هم باشد، با بستارش برابر است؛ پس حاویِ یک همسایگی است.

۶.۳. R_1، با در نظرگرفتنِ آن به عنوان زیرمجموعه‌ای از R_2، بسته است، و هر نقطهٔ R_1 یک نقطهٔ حدیِ R_1 است، لذا R_1 بی‌کاست است. اما در R_2، R_1 حاوی هیچ همسایگی‌ای نیست.

۶.۳آ. بله، زیرا در مجموعهٔ کانتور تعداد ناشمارایی نقطه ولی تنها تعداد شمارایی نقطهٔ گویا وجود دارد. ساده‌ترین راهِ یافتنِ صریحِ عددی گُنگ توسل به ص. ۴۰ است: مجموعهٔ کانتور متشکل است از اعداد «دهدهی»ای در پایهٔ ۳ که تنها شامل ارقامِ ۰ و ۲اند. هر چنین بسطی که نامختوم و غیرتکراری باشد عدد گنگی را نمایش می‌دهد.

نقطهٔ ۰٫۷۷۲۴۵۰۰۰ بزرگتر از $\frac{2}{3}$ است، لذا در مرحلهٔ نخستِ ساختنِ مجموعهٔ کانتور برداشته نمی‌شود؛ کمتر از $\frac{7}{9}$ است، لذا در مرحلهٔ دوم برداشته نمی‌شود؛ و به همین ترتیب. در مرحلهٔ پنجم بازه‌ای می‌یابیم که شامل نقطه است و برداشته می‌شود. بنابراین نقطه در مجموعهٔ کانتور نیست.

به صورتی دیگر، ۰٫۷۷۲۴۵۰۰۰ را به پایهٔ ۳ ببرید و به ارقام نگاه کنید.

۶.۴. نقاط مجموعهٔ کانتور، غیر از نقاط انتهایی، را می‌توان به صورت بسطهایی سه‌سه‌ای نوشت که شامل هیچ ۱ای نیستند و تماماً با ۰ یا تماماً با $2p_2$ ختم نمی‌شوند. با

این فرض که این اعداد به شکلِ p_1، ... شمرده شده باشند، یک عدد جدیدِ t می‌سازیم، که رقمِ nامِ آن ۰ یا ۲ است بر حسبِ اینکه رقمِ n ام p_n ۲ یا ۰ باشد. چون t با p_n در رقمِ nامْ متفاوت‌است، این عدد نمی‌تواند در شمارشِ ادعاییِ ما یافت شود. این روشِ ساخت ممکن است عملی نباشد اگر، از قضا، از nای به بعد رقمِ nامِ p_n همواره ۰.(یا همواره ۲) باشد. می‌توان با تجدید شماره‌گذاریِ شمارشِ ادعایی پیش از آغازِ ساخت، از این دشواری احتراز کرد.

۶.۵. نقاط با دو مختصهٔ گویا مجموعهٔ شمارایی تشکیل می‌دهند که در R_2 همه‌جاچگال است.

۶.۶. دست‌کم به تعدادِ جملاتِ ثابتِ چندجمله‌ایها چندجمله‌ای وجود دارد.

۶.۷. تعداد شمارایی ثابتِ گویا وجود دارد؛ تعداد شمارایی چندجمله‌ایِ خطی با (دو) ضریبِ گویا؛ و به همین ترتیب (رک. تمرین ۳.۳).

۶.۸. اگر p_n چندجمله‌ایِ از درجهٔ n باشد، با تقریب زدنِ هر ضریب با دقتِ $\epsilon/(n+1)$ توسط عددی گویا، چندجمله‌ای را روی $[0,1]$ با دقتِ ϵ تقریب می‌زنیم. تمرین ۶.۷ را به‌کار گیرید.

۶.۹. تعداد ناشمارایی دنباله از ۰ و ۱ وجود دارد (اعضای بسطهای سه‌سه‌ایِ بررسی‌شده در تمرینِ ۶.۴ را نصف کنید).

۶.۱۰. ۱.

۶.۱۱. f_x را تابع تعریف‌شده با $f_x(t) = 0$ به ازای $0 \leq t < x$ و $f_x(t) = 1$ به ازای $x \leq t \leq 1$ بگیرید. تعداد ناشمارایی از چنین توابعی وجود دارد، زیرا به ازای هر x متعلق به $[0,1]$ یکی هست. فاصلهٔ بین دو f_x ۱ است. بقیهٔ اثباتْ شبیه اثبات مربوط به فضای m است.

۷.۱. فرض کنید f تابعی پیوسته روی یک مجموعهٔ کراندارِ بستهٔ E باشد، و فرض کنید که f کراندار نباشد. در این صورت نقطهٔ x_1ای هست که $|f(x_1)| > 1$؛ نقطهٔ x_2ای که $|f(x_2)| > |f(x_1)| + 1 > 2$؛ و غیره؛ به طور کلّی، $|f(x_n)| > n$. قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراسْ یک نقطهٔ حدیِ x از مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \ldots\}$ به دست می‌دهد؛ $x \in E$ زیرا E بسته است؛ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ چون f پیوسته است. اما

$\lim f(x_n)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد زیرا $|f(x_n)| > n$.

۷.۲. مجموعهٔ E در مستطیلی با اضلاعِ موازیِ محورهای مختصات قرار دارد؛ مستطیل را با خطهایی که همهٔ اضلاع را نصف می‌کنند به چهار بخش تقسیم کنید، و همانند R_1 ادامه دهید.

۷.۳. اگر نقطهٔ xای در دست‌کم سه بازه، مثلاً E_1، ...، E_k باشد، یکی را که نقطهٔ انتهاییِ راستِ آن بزرگترین است و یکی را که نقطهٔ انتهایی چپ آن کوچکترین است انتخاب کنید. چون هر دو بازه شامل xاند، این دو متداخل‌اند، و بقیهٔ E_jها را می‌پوشانند، و می‌توان بقیه را کنار گذاشت. در مورد نقاط x دیگری، اگر چنین نقاطی باشند، که در دو E_jی انتخاب‌شده نیستند به‌نحو مشابه عمل کنید.

۷.۴. فرض کنید $F \supset E$، E فشرده باشد، F بسته باشد. فرض کنید F با مجموعه‌های بازِ G پوشانده شده باشد. متممِ F، $C(F)$، باز است، و $\{G\}$ به اضافهٔ $C(F) \quad E$ را می‌پوشانند. چون E فشرده است، یک زیرگردایهٔ متناهیِ به‌دست آمده از $\{G\}$ و $C(F) \quad E$ را می‌پوشانَد، و لذا F را می‌پوشاند. با کنارگذاشتنِ $C(F)$ هنوز هم F پوشانده می‌شود.

۷.۵. مثل تمرین ۷.۲.

۷.۵آ. (آ) مساحتِ هر مثلث با رأسهای واقع در S تابعی پیوسته (روی R_6) است از ۶ مختصهٔ رأسها. چون S در R_2 بسته و کراندار است، مجموعهٔ مختصاتِ رأسها زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R_6 است. پس مساحتْ ماکزیمومی اختیار می‌کند.

(ب) نه. برای نمونه، بزرگترین مثلث با رأسهای واقع بر محیطِ یک دایره مثلثِ متساوی‌الاضلاعِ محاطی است.

۷.۶. $E_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ با بازه‌های بازِ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8})$، $(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}, \frac{1}{4} + \frac{1}{16})$، ... پوشانده می‌شود. هیچ تعدادِ متناهی از اینها نمی‌توانند E_1 را بپوشانند، زیرا به ازای هر تعدادِ متناهیِ دلخواهْ یک کوچکترین نقطهٔ انتهایی چپِ مثبت وجود خواهد داشت. $E_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ را می‌توان با بازه‌های $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$، $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$، ... پوشاند. هر تعداد متناهیِ دلخواه از اینها تنها بخش کرانداری از R_1 را می‌پوشانند، و E_2 بیکران است.

۷.۷. اگر تعدادی متناهی از بازه‌ها E را بپوشانند، y را کوچکترین نقطهٔ انتهاییِ

چپی بگیرید که یافت می‌شود. نقطهٔ $y/۲$ پوشانده نمی‌شود. چون E بسته نیست قضیهٔ هاینه‌ـبورل نقض نشده است.

۷.۸. مجموعهٔ E بسته است ولی کراندار نیست.

۷.۹، ۷.۱۰. قضیهٔ هاینه‌ـبورل برای اینکه پوششی به پوشش متناهی تقلیل یابد شرایطِ کافی می‌دهد، نه شرایطِ لازم.

۸.۱. فرض کنید که $R_۱$ تام باشد و فرض کنید E مجموعه‌ای ناتهی باشد که از بالا کراندار است. $x_۱$ را یک کران بالای E بگیرید. اگر $x_۱ - \frac{۱}{۲}$ نیز یک کران بالای E باشد، آن را $x_۲$ بنامید؛ اگر $x_۲ - \frac{۱}{۳}$ نیز یک کران بالای E باشد، آن را $x_۳$ بنامید؛ و به همین ترتیب. چون E ناتهی است و $\sum ۱/n$ واگراست، سرانجام به nای می‌رسیم که $x_{n-۱} - ۱/n$ نخستین عددی به این شکل است که کران بالای E نیست. اکنون بازه‌ای به طولِ $۱/n$ به دست آورده‌ایم که نقطهٔ انتهاییِ راستِ آن یک کران بالای E است و نقطهٔ انتهاییِ چپِ آن نیست. $y_۱$ را نقطهٔ انتهاییِ راست بگیرید. بازه را نصف کنید و هریک از $y_۱$ یا نقطهٔ میانی را که کران بالایی برای E بود $y_۲$ بگیرید. به این شیوه ادامه دهید؛ $\{y_n\}$ دنباله‌ای کوشی است که به کوچکترین کران بالای E همگراست.

۸.۲. مجموعه‌ی همهٔ s_nهای متمایزْ یک کوچکترین کران بالای L دارد. پس، اگر $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، s_nای هست که $L - s_n < \epsilon$. چون s_nها صعود می‌کنند، به ازای هر $m \geq n$، $L - s_m < \epsilon$. بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ به L همگراست.

۸.۳. به ازای هر دنبالهٔ کوشیِ $\{(x_n, y_n)\}$ در $R_۲$، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی کوشی در $R_۱$اند.

۸.۴. نقاط گویای $R_۱$.

۸.۵. اگر $s_n \to L$، از اندیسی به بعد هر s_n در همسایگی دلخواهی از L است. اگر از اندیسی به بعد s_nها همگی برابرِ L نباشند، هر همسایگیِ L شامل یکی از آنها غیر از L است.

۸.۶. اگر $s_n \to L$ و $s_n \in F$، که F مجموعهٔ بسته‌ای است، یا از نقطه‌ای به بعد $s_n = L$ و $L \in F$؛ یا L یک نقطهٔ حديِ مجموعهٔ s_nهای متمایز است، و لذا چون F بسته است $L \in F$.

۸.۷. E یک کوچکترین کران بالای L دارد. نقاطِ x_nای از E هستند (نه لزوماً همگی متمایز) که $L - x_n < 1/n$. پس L حدِ $\{x_n\}$ است. بنا بر تمرینِ ۸.۶، $L \in E$.

۸.۸. اگر E تنها تعدادی متناهی عضوِ متمایز داشته باشد، یکی از آنها بینهایت بار ظاهر می‌شود و ظهورِ آن، زیردنباله را مشخص می‌کند. در غیر این صورت اعضای E یک نقطهٔ حدی دارند؛ اصلِ زیردنباله را به‌کار برید.

۸.۹. D را فاصلهٔ مورد نظر بگیرید. اگر G کراندار نباشد، می‌توانیم G را با اشتراکِ G با همسایگیِ بزرگی جایگزین کنیم که فاصلهٔ مرزش از همهٔ نقاطِ F بیش از D باشد. فاصله، اگر اختیار شود، نمی‌تواند به ازای نقطه‌ای اختیار شود که در این زیرمجموعهٔ G نباشد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که F و G هر دو کراندارند. نقاطِ x_nای در F و y_nای در G بگیرید که $d(x_n, y_n) \to D$. با به‌کار بردنِ تمرین ۸.۷، زیردنبالهٔ همگرایی از $\{x_n\}$، و زیردنبالهٔ همگرایی از $\{y_n\}$ بگیرید؛ اینها را هم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ بخوانید. در این صورت $x_n \to x$ و $y_n \to y$، و $x \in F$ و $y \in G$، زیرا F و G بسته‌اند. همچنین

$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

و لذا $d(x,y) \le D$. چون $d(x,y)$ نمی‌تواند کمتر از D باشد، باید $d(x,y) = D$.

۸.۱۰. (آ) بله. (ب) نه لزوماً. برای (ب)، اعداد صحیح در R_1، با متریکِ R_1، را در نظر بگیرید. همسایگی‌ای از ۰ که در مورد آن $d(0,x) < \frac{1}{2}$، تک نقطهٔ ۰ است و قطر آن ۰ است.

۸.۱۱. قطرهای E و بستارِ آن را به‌ترتیب δ و Δ بگیرید؛ به‌وضوح $\delta \ge \Delta$. x_n و y_n را در بستار E طوری انتخاب کنید که $d(x_n, y_n) \to \Delta$. اگر x_n یک نقطهٔ حدیِ E باشد، نقطهٔ x'_nای از E در فاصلهٔ نابیشتر از $1/n$ تا x_n وجود دارد؛ پس $d(x'_n, y_n) \ge \Delta - 1/n$. به نحو مشابه اگر y_n یک نقطهٔ حدیِ E باشد. (در غیر این صورت بگیرید $x'_n = x_n$، $y'_n = y_n$.) اکنون نقاطِ x'_n، y'_nای از E به دست آورده‌ایم که $d(x'_n, y'_n) \ge \Delta - 2/n$ و لذا $\Delta \ge \delta$. بنابراین $\delta = \Delta$.

۹.۱. مجموعهٔ (x) شامل فقط تک نقطهٔ x را در نظر بگیرید. این مجموعه هیچ جاچگال است اگر بستارش، که خودِ (x) است، حاوی هیچ همسایگی‌ای نباشد، یعنی اگر (x) همسایگی نباشد. این حالت رخ می‌دهد اگر به ازای هر r مثبتْ مجموعهٔ y هایی که

$d(y,x) < r$ شامل نقاطی غیر از x باشد، و این‌چنین است اگر x یک نقطهٔ حدیِ فضا باشد.

۹.۲. هر مجموعهٔ بی‌کاستِ ناتهی، اگر خودْ فضایی متریک در نظر گرفته شود، از مقولهٔ دوم است. چون نقاطِ آن همگی حدی‌اند، هر تک نقطهٔ آن هیچ‌جاچگال است و بنابراین هر زیرمجموعهٔ شمارای آن از مقولهٔ اول است. پس در R_1 هیچ مجموعهٔ بی‌کاستِ ناتهی نمی‌تواند شمارا باشد.

۹.۳. این بی‌تأملْ واضح نیست زیرا $B =$ مرزِ E لزوماً زیرمجموعهٔ E نیست. نشان می‌دهیم که (آ) $\text{diam } E \geq \text{diam } B$ ، (ب) $\text{diam } B \geq \text{diam } E$.

(آ) قرار دهید $d = \text{diam } B$. به ازای h داده‌شده، می‌توانیم x و yای در B بیابیم که $d(x,y) > d - h$. بنا بر تعریفِ مرز می‌توانیم $x' \in E$ و $y' \in E$ای بیابیم که $d(x,x') < h$ و $d(y,y') < h$. پس $d(x',y') \geq d - ۳h$. چون h دلخواه است، $\text{diam } E \geq d = \text{diam } B$

(ب) چون بنا بر تمرین ۸.۱۱ E و بستارِ آن، $\text{Cl } E$، قطرِ واحدی دارند، کافی خواهد بود نشان دهیم $\text{diam } B \geq \text{diam } (\text{Cl } E)$. به‌علاوه، بنا بر تمرین ۵.۲۵، $\text{Cl}E = E \cup B$. چون $\text{Cl}E$ بسته و کراندار است، نقاطِ x و yای در $\text{Cl}E$ هستند که $d(x,y) = \text{diam } (\text{Cl}E)$. اگر x و y در B باشند واضح است که $\text{diam}B \geq d(x,y) = \text{diam Cl}B = \text{diam } E$. فرض کنید x در B نباشد. چون x نقطهٔ مرزیِ E نیست یک نقطهٔ درونیِ E است. همسایگی‌ای از x در نظر بگیرید، که باید شامل نقطهٔ zای باشد که $d(z,y) > d(x,y)$ (نقطه‌ای روی پاره‌خطِ واصلِ y به x که از x امتداد داده شده است بگیرید). این در تناقض با $d(x,y) = \text{diam}E$ است.

۱۰.۱. اگر E مجموعهٔ مورد نظر باشد، این مجموعه هیچ‌جاچگال است مگر اینکه بستارش (که E است) حاوی همسایگی‌ای باشد (تمرین ۶.۲). اگر E حاوی همسایگی‌ای باشد، متممش از این همسایگیْ مجزاست و لذا همه‌جاچگال نیست.

۱۰.۲. فرض کنید که در R_1 مجموعهٔ بسته‌ای اجتماع تعداد نامتناهی شمارایی از مجموعه‌های بستهٔ ناتهیِ E_n باشد. بنا بر قضیهٔ بئر یکی از این مجموعه‌ها در یک زیربازه چگال است، و، چون بسته است، حاوی آن زیربازه است. بزرگترین زیربازه از این

نوع را بگیرید. سپس فرآیند را با آنچه از بازهٔ اولیه می‌مانَد تکرار کنید. گردایهٔ شمارایی از بازه‌های بستهٔ I_n به‌دست می‌آوریم، که هر کدام متعلق به یک E_n است، و اجتماعشان همه‌جاچگال است. اگر I_n و I_m نقطهٔ انتهاییِ مشترکی داشته باشند، این نقطهٔ انتهاییْ متعلق به هر دوی E_n و E_m است، که نامممکن است زیرا E_nها مجزایند. اگر درونهای همهٔ بازه‌های I_n را برداریم، مجموعهٔ باقی‌ماندهٔ H بی‌کاست است. همانند مثال (ii)، با به‌کارگرفتنِ قضیهٔ بئر در مورد H می‌بینیم که بخشی از H که در بازهٔ Jای باشد به‌تمامی متعلق به E_n واحدی است؛ به‌ویژه، چنین‌اند همهٔ نقاطِ انتهاییِ بازه‌های I_n که در Jاند؛ پس این I_nها همگی متعلق به E_n واحدی‌اند، و H تهی است.

۱۱.۱. کافی است نشان دهیم که به ازای هر (a,b)، $E \cap (a,b)$ با اندازهٔ صفر است، زیرا R_1 را می‌توان با تعداد شمارایی بازه پوشاند. E را با بازه‌های (a_n, b_n)ای با مجموع طولهای حداکثر $q(b-a)$ بپوشانید. سپس هر $E \cap (a_n, b_n)$ را به نحو مشابه بپوشانید. اکنون E را با بازه‌هایی با مجموع طولهای حداکثر

$$q(b_1 - a_1) + q(b_2 - a_2) + \cdots = q[(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots]$$

$$\leq q^2(b-a)$$

پوشانده‌ایم. این فرآیند را تکرار کنید؛ $q^n \to 0$.

۱۲.۱. (ب) (دامنه تک نقطهٔ 0)؛ (پ) و (ث) (دامنه همهٔ R_1).

۱۲.۲. فرض کنید x یک عدد گویای p/q باشد. در این صورت اگر $m > q$، $m!x$ عدد صحیحِ زوجی است، $\cos m!\pi x = 1$، حدِ درونیْ 1 است و لذا $f(x) = 1$. از طرف دیگر، فرض کنید x گنگ باشد. در این صورت $m!x$ هیچ‌گاه عدد صحیحی نیست، $|\cos m!\pi x| < 1$، حدِ درونی 0 است، و $f(x) = 0$.

۱۳.۱. بنا بر نابرابریِ مثلث،

$$|f(x_0) - f(x)| = |d(x_0, y) - d(x, y)| \leq d(x_0, x).$$

۱۳.۲. کافی است نشان دهیم که $|D(x) - D(y)| \leq d(x,y)$. برای نشان دادنِ این، p را نقطه‌ای از E بگیرید؛ در این صورت $d(x,p) \leq d(x,y) + d(y,p)$ (نابرابریِ

مثلث). چون p هر نقطه‌ای که (در E) باشد $D(x) \leq d(x,p)$، نتیجه می‌گیریم که $D(x) \leq d(x,y) + d(y,p)$. با انتخابِ مناسبِ p، $d(y,p)$ را می‌توان به‌دلخواه به $D(y)$ نزدیک کرد. پس $D(x) \leq d(x,y) + D(y)$. با تعویضِ x و y همچنین (بنا بر تقارنِ d) به‌دست می‌آوریم $D(y) \leq d(x,y) + D(x)$. پس

$$D(x) - D(y) \leq d(x,y),$$

$$D(y) - D(x) \leq d(x,y),$$

لذا $|D(x) - D(y)| \leq d(x,y)$.

۱۳.۳. در مورد توابعِ ثابت، تصویرِ هر مجموعهٔ ناتهیْ یک تک نقطه است.

۱۳.۴. تصویر وارونِ همسایگی‌ای از $f(x_\circ)$ که آن‌قدر کوچک باشد که بستارش $\circ$ را در برنگیرد مجموعهٔ بازی است. به ازای xهایی در همسایگیهایی از $x_\circ$ که در این مجموعهٔ باز باشند، مقادیر $f(x)$ در همسایگی انتخاب‌شدهٔ $f(x_\circ)$اند و لذا دور از $\circ$ کراندارند.

۱۳.۵. مجموعهٔ اعداد حقیقی با قدر مطلقِ کمتر از $|f(x_\circ)| + ۱$ باز است؛ پس تصویر وارونِ آن باز است. این تصویر وارونْ تهی نیست، زیرا شامل $x_\circ$ است، و بنابراین حاوی یک همسایگی $x_\circ$ است.

۱۳.۶. نقض شدنِ تعریفِ پیوستگی به ما می‌گوید که $\epsilon > \circ$ای هست که به ازای هر $\delta_n > \circ$، x_nای هست که به ازای آن، $|x_n - x_\circ| < \delta_n$ و $|f(x_n) - f(x_\circ)| \geq \epsilon$.

۱۴.۱. اگر $f + g$ و f پیوسته باشند، $g = (f+g) - f$ نیز چنین است. اگر f پیوسته نباشد، $-f$ نیز نیست، و $f + (-f)$ تابع ثابتی است که همهٔ مقادیرش $\circ$ است؛ تابعِ ثابتْ پیوسته است.

۱۴.۲. مجموع: اگر ϵ مثبتی داده شده باشد، می‌توانیم $\delta_۱$ای بیابیم که $|f(x) - f(x_\circ)| < \epsilon/۲$ وقتی $d(x,x_\circ) < \delta_۱$، و $\delta_۲$ای که $|g(x) - g(x_\circ)| < \epsilon/۲$ وقتی $d(x,x_\circ) < \delta_۲$. بگیرید $\delta = \min(\delta_۱, \delta_۲)$؛ در این صورت $|f(x) + g(x) - [f(x_\circ) + g(x_\circ)]| < \epsilon$ وقتی $d(x,x_\circ) < \delta$.

حاصل‌ضرب: f و g در یک همسایگیِ $x_\circ$ کراندارند؛ M را کران مشترکی برای مقادیر

$|f(x)|$ و $|g(x)|$ بگیرید. در این صورت

$$|f(x)g(x) - f(x_\circ)g(x_\circ)| \leq |\,[f(x) - f(x_\circ)]\,g(x)|$$

$$+\,|f(x_\circ)\,[g(x) - g(x_\circ)]\,|$$

$$\leq M|f(x) - f(x_\circ)| + M|g(x) - f(x_\circ)|$$

و وقتی $d(x, x_\circ)$ کوچک باشد طرف راست، کوچک است.

خارج‌قسمت: کافی است نشان داد که اگر $g(x_\circ) \neq \circ$، $1/g$ پیوسته است وقتی g پیوسته باشد (از پیوستگیِ حاصل‌ضربها و $f/g = f\cdot(1/g)$ استفاده کنید). بنا بر تمرین ۱۳.۴، در یک همسایگیِ $x_\circ$، $|g(x)| \geq m > \circ$. پس به ازای xهای متعلق به این همسایگی،

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_\circ)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_\circ)|}{|g(x)||g(x_\circ)|} \leq m^{-2}|g(x) - g(x_\circ)|$$

و وقتی $d(x, x_\circ)$ کوچک باشد طرف راست کوچک است.

۱۴.۳. فرض کنید G مجموعهٔ بازی باشد؛ در این صورت $C(G)$ بسته است. پس اگر تصاویرِ مجموعه‌های بسته بسته باشد، تصویر $C(G)$ بسته است. چون f یک به یک است، متممِ تصویرِ $C(G)$ تصویرِ G است، و این (که متممِ مجموعهٔ بسته‌ای است) باز است. عکسِ حکم به‌نحو مشابه ثابت می‌شود.

۱۴.۴. اگر f مقدارِ M را نگیرد، تابع gی تعریف‌شده با $g(x) = 1/[M - f(x)]$ روی دامنهٔ f پیوسته است. بنابراین g کراندار است؛ G را یک کران بالای $|g(x)|$ بگیرید. در این صورت $1/[M - f(x)] \leq G$. این ایجاب می‌کند که $f(x) \leq M - (1/G)$، لذا M کوچکترین کران بالای مقادیرِ f نیست.

۱۴.۵. l و L را کوچکترین و بزرگترین نقاطِ برد بگیرید. تابع هر دوی این مقادیر را می‌گیرد؛ پس، بنا بر قضیه‌ای که پیشتر ثابت شده، تابع هر مقدار در بازهٔ $[l, L]$ را می‌گیرد.

۱۴.۵آ. اگر $f(x) \equiv \circ$ چیزی برای اثبات نیست. در غیر این صورت به ازای $x_\circ$ای

$f(x_\circ) > \circ$. $b > a$ را طوری بگیرید که به ازای $x \geq b$، $f(x) < \frac{1}{2}f(x_\circ)$. در این صورت $\max f(x)$ روی $[a, \infty)$ برابر است با $\max f(x)$ روی $[a, b]$.

۱۴.۵ب. x_n را آخرین (یعنی بزرگترین) نقطه‌ای بگیرید که f در آن ماکزیمومش روی (n, ∞) را می‌گیرد. (یک آخرین نقطه وجود دارد زیرا $f(x) \to \circ$، و مجموعه‌ای که روی آن $f(x) = f(x_n)$ فشرده است.) آشکارا $x_{n+1} \geq x_n$، $x_n \to \infty$.

۱۴.۶، ۱۴.۷. بردِ f همان بردِ تحدیدِ f به $[\circ, p]$ است. تابع اخیر روی مجموعهٔ فشرده‌ای پیوسته است.

$$۱۴.۸. \int_x^{x+p} f(t)dt = \int_\circ^p f(t)dt - \int_\circ^x f(t)dt + \int_p^{p+x} f(t)dt$$

$$= \int_\circ^p f(t)dt - \int_\circ^x f(t)dt + \int_\circ^x f(t+p)dt$$

$$= \int_\circ^p f(t)dt$$

زیرا $f(t+p) = f(t)$. به‌صورتی دیگر،

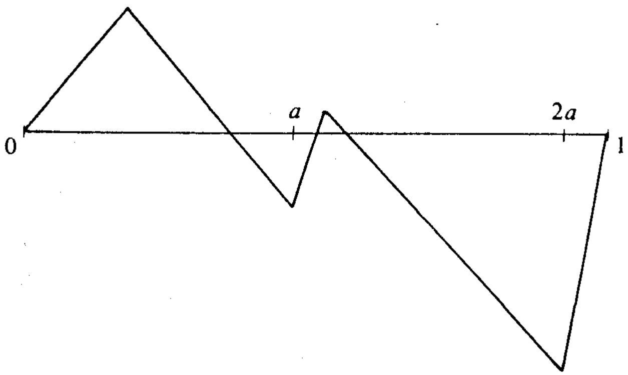
$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+p} f(t)dt = f(x+p) - f(x) = \circ.$$

$$.۱۴.۹. \qquad \int_\circ^p [f(x+a) - ۲f(x) + f(x-a)]\, dx = \circ.$$

۱۴.۱۰. مثالِ لِوی $f(x) = \sin^۲(\pi x/a) - x\sin^۲(\pi/a)$، $a \neq ۱/n$، بود. پی.آر. هالموس گفت که، مشابهاً، $f(x) = g(x) - x$ یک مثال است هرگاه g دوره‌ای باشد، با دورهٔ a، و $g(\circ) = \circ$ و $g(۱) = ۱$. شکلِ بعدی مثالی را نشان می‌دهد که در آن $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$.

۱۴.۱۱. اگر $a = \frac{1}{2}$، فرضمان می‌گوید که f وتری افقی به طولِ $\frac{1}{2}$ دارد. اگر $a = \frac{1}{4}$، f وتری افقی به طولِ $\frac{1}{4}$ یا به طولِ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}$ دارد. و به همین ترتیب.

۱۴.۱۲. تابع gای را در نظر بگیرید که $g(x) = f(x) - x$. پس $g(\circ) = f(\circ) \geq \circ$، $g(۱) = f(۱) - ۱ \leq \circ$، و g پیوسته است. پس به ازای xای $g(x) = \circ$.



۱۴.۱۲آ. (آ) بله؛ (ب) نه لزوماً. فرض کنید $T(t)$ زمانِ نشان داده‌شده روی ساعتِ نامنظم باشد و $f(t) = t - T(t)$. در این صورت $f(۰) = ۰$ و $f(۲۴) = ۰$، لذا f وتری افقی به طولِ $۲۴/۲۴ = ۱$ دارد، ولی لزوماً وتری با هر طولِ $۲۴/\lambda$ای که λ عدد صحیحی نباشد، ندارد؛ ۵۷۶، دوپنجمِ ۲۴ساعت است. با این حال، باید بررسی کنیم که مثالِ نقضمان واقعاً تابعی صعودی باشد. اگر $۲۴/n \neq \lambda$، می‌توانیم بگیریم $T(t) = t + \epsilon\left(t\lambda \sin^۲(۲۴\pi/\lambda) - \sin^۲(t\pi/\lambda)\right)$، که در آن ϵ کوچک و مثبت است. در این صورت $T(t+\lambda) - T(t) \neq \lambda$ و اگر ϵ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، $T'(t) > ۰$.

۱۴.۱۳. این حالتی حدی از قضیهٔ مربوط به نصف کردنِ همزمانِ دو ناحیه است (با فرضِ اینکه قضیه در موردِ ناحیه‌هایی که محدب نباشند ثابت شده باشد). اثباتی سرراست به شرح ذیل است. یک نقطهٔ P روی خم بگیرید و نقطهٔ دیگرِ Qای بیابید طوری که دو کمانِ PQ برابر باشند. $f(P)$ را بخشی از ناحیهٔ خم بگیرید که در سمت راستِ PQ واقع است. در این صورت f تابع پیوسته‌ای است که دامنهٔ آن متشکل از همهٔ نقاطِ خم است، زیرا تغییرِ کوچکی در P تغییر کوچکی در Q ایجاد می‌کند. اگر P در $P_۰$ آغاز شود و خم را دنبال کند، وقتی P به $Q_۰$ می‌رسد راست و چپ تعویض شده‌اند، لذا $f(P)$، اگر ابتدائاً ناحیه را نصف نکند، اکنون روی طرفِ دیگرِ ناحیه است و لذا باید در یک محلِ P برابرِ نصفِ مساحت بوده باشد.

۱۵.۱. اعداد L_n اعضای یک دنبالهٔ غیرصعودی‌اند. چون اینها کراندارند یک حدِ L دارند. اگر n چنان بزرگ باشد که $L_n < L + \epsilon$، به ازای $k \geq n$ به‌دست می‌آوریم $s_k < L + \epsilon$. اگر n چنان بزرگ باشد که $L_n > L - \epsilon$، $s_k > L - \epsilon$ای به دست می‌آوریم که $k > n$. با گرفتنِ nهای بزرگتر و بزرگتر تعدادی نامتناهی از s_kها با خاصیتِ دوم به‌دست می‌آوریم. پس L خواصِ تعریف‌کنندهٔ $\limsup s_n$ را دارد.

۱۵.۲. $l = \liminf s_n$ اگر، هر ϵ مثبت که داده شده باشد، اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $s_n \geq l - \epsilon$، و به علاوه تعدادی نامتناهی از s_nها در $s_n \leq l + \epsilon$ صدق کنند. اگر $\{s_n\}$ از پایین بیکران باشد، $\liminf s_n = -\infty$؛ اگر l وجود نداشته باشد، می‌نویسیم $\liminf s_n = +\infty$. در مثالها، l برابرِ -۱(i)؛ $+\infty$(ii)؛ $-\infty$(iii)؛ ۰(iv)؛ ۰(v) است.

۱۵.۳. وقتی $n > n_۱$، $s_n \leq \frac{۱}{۲}\epsilon + \limsup s_n$، و

وقتی $n > n_۲$، $t_n \leq \frac{۱}{۲}\epsilon + \limsup t_n$؛

پس

وقتی $n > \max(n_۱, n_۲)$، $s_n + t_n \leq \epsilon + \limsup s_n + \limsup t_n$.

بنابراین $\limsup(s_n + t_n)$ نمی‌تواند عددی بزرگتر از $\limsup s_n + \limsup t_n$ باشد. اگر $\lim t_n T$، آنگاه به ازای تعدادی نامتناهی n، $s_n \geq \limsup s_n - \frac{۱}{۲}\epsilon$ و به ازای همهٔ nهای بزرگ $t_n \geq T - \frac{۱}{۲}\epsilon$، لذا به ازای تعدادی نامتناهی n، $s_n + t_n \geq \limsup s_n + T - \epsilon$.

۱۵.۴. اگر $\epsilon > ۰$ آنگاه $s_n \leq L + \epsilon$ وقتی $n > n_۱$، و $s_n \geq L - \epsilon$ وقتی $n > n_۲$؛ پس $|s_n - L| < \epsilon$ وقتی $n > \max(n_۱, n_۲)$.

۱۵.۵. فرض کنید $\epsilon > ۰$. در این صورت $\limsup s_n \leq L$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $n > N_۱$ ، $s_n \leq L + \epsilon$؛ $\liminf s_n \geq L$ ایجاب می‌کند که به ازای $n > N_۲$، $s_n \geq L - \epsilon$. با گرفتنِ $N = \max(N_۱, N_۲)$، تعریفِ $\lim s_n = L$ را به‌دست می‌آوریم.

۱۶.۱. (آ) در C، $s_n \to ۰$. زیرا فرض کنید ϵ عدد مثبتی باشد؛ مستقل از n، اگر $۱ - \epsilon < x \le ۱$، $|s_n(x)| < \epsilon$ زیرا $|x^n| \le ۱$. اگر $۰ \le x \le ۱ - \epsilon$، $|s_n(x)| \le (۱-\epsilon)^n$. بنابراین $\max_{۰\le x\le ۱} |s_n(x)|$ از بزرگترینِ ϵ و $(۱-\epsilon)^n$ بزرگتر نیست، و دومینِ این اعدادْ کوچکتر است اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد. «تفرقه بینداز و حکومت کن».

(ب) در C، $\{s_n\}$ همگرا نیست. زیرا به ازای هر x، $s_n(x) \to ۰$، ولی $s_n(۱ - ۱/n) = (۱ - ۱/n)^n \to ۱/e$، و $\max |s_n(x)|$ کوچکتر از $s_n(۱ - ۱/n)$ نیست.

۱۶.۲. بنا بر همگراییِ کراندارْ $\sup_{x\in E} |s_n(x)| \le M$، و بنابراین به ازای هر $x \in E$، $\lim_{n\to\infty} s_n(x) \le M$.

۱۷.۱. سری با مشتقگیریِ جمله به جمله بی‌تغییر می‌مانَد، لذا مجموعِ آن، $s(x)$، در $s'(x) = s(x)$ صدق می‌کند. پس $s(x) = ce^x$، که $c = f(۰) + f'(۰) + \cdots$.

۱۷.۱آ. بنا بر Mـآزمون (ص. ۱۲۰) با مجموعهٔ اعدادِ صحیح گرفتنِ E، دنباله‌ای که جملهٔ kامِ آن $\sum_{n=۱}^{p(k)} f_n(k)$ باشد به‌طورِ یکنواخت همگراست. پس

$$\left|\sum_{n=۱}^{p(k)} f_n(k) - \sum_{n=۱}^{p(k)} L_n\right| \le \left|\sum_{n=۱}^{N} [f_n(k) - L_n]\right| + \left|\sum_{n=N+۱}^{p(k)} f_n(k)\right| + \left|\sum_{n=N+۱}^{p(k)} L_n\right|$$

دو مجموعِ آخر را می‌توان (بنا بر همگراییِ یکنواخت) با بزرگ گرفتنِ N کوچکتر از ϵ ساخت؛ با Nای ثابت، در مجموعِ متناهیْ k را به ∞ میل دهید.

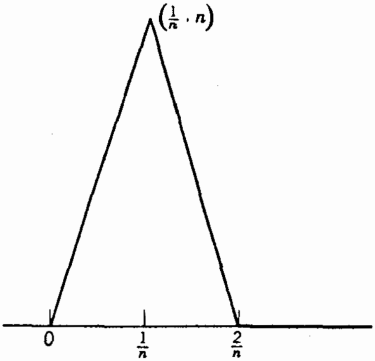
۱۷.۱ب. به ازای هر x،

$$(\text{۱} + x/k)^k = \sum_{n=\text{۰}}^{k} \binom{k}{n} \left(\frac{x}{k}\right)^n$$

$$= \sum_{n=\text{۰}}^{k} \left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{k}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۲}}{k}\right)\cdots\left(\text{۱} - \frac{n-\text{۱}}{k}\right)\frac{x^n}{n!};$$

$$M_n = |x|^{\text{۲}}/n!.$$

۱۷.۲. برای نمونه، $f_n(x) = \text{۰}$ مگر به ازای $\text{۰} < x \leq \text{۲}/n$، و $f(\text{۱}/n) = n$ و $f(x)$ در $(\text{۰}, \text{۱}/n)$ و $(\text{۱}/n, \text{۲}/n)$ خطی باشد.



۱۸.۱. برای نمونه، $f(x, y) = \sin \text{۲}\theta$ که $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$.

۱۹.۱. نه. اگر f بیکران باشد، یک دنبالهٔ $x_n \to \text{۰}$ هست که $f(x_n) > n$ (یا $-n <$). اگر f به‌طور یکنواختْ پیوسته باشد، آنگاه وقتی $\epsilon > \text{۰}$ داده شده باشد $\delta > \text{۰}$ای هست $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ هرگاه $|x - y| < \delta$. در بازهٔ از ۰ تا $\min(\epsilon, \delta)$، x: نخستین x_nای که به ازای آن $f(x_n)$ مقدارِ Vای دارد، و y: نخستین x_nای که به ازای آن $f(x_n) > V + \text{۲}\epsilon$ را در نظر بگیرید. در این صورت $|f(x) - f(y)| > \text{۲}\epsilon$، که ناقضِ پیوستگیِ یکنواخت است.

۱۹.۲. بله. چون وقتی $x \to +\infty$، $f(x) \to L$، پس به ازای $x > N$، $|f(x)-L| < \epsilon/۲$. به ازای $x, y \le ۲N$، وقتی $|x-y| < \delta$، $|f(x)-f(y)| \le \epsilon$. به ازای $x, y > N$، $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-L|+|f(y)-L| < \frac{۱}{۲}\epsilon+\frac{۱}{۲}\epsilon = \epsilon$

پس به ازای همهٔ x و yهای مثبت $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$.

۱۹.۳. اگر $\epsilon > ۰$ داده شده باشد آنگاه اگر $x > N$، $|f(x) - x - L| < \epsilon$. همچنین اگر $h > ۰$، $|f(x+h) - (x+h) - L| < \epsilon$ اگر $x > N$؛ اگر $h < \epsilon$،

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| =& |f(x+h) - (x+h) - L| \\ &+ |f(x) - x - L| + h \\ &\le ۲\epsilon + h < ۳\epsilon.\end{aligned}$$

این پیوستگیِ یکنواخت را به ازای $x > N$ نشان می‌دهد. f روی بازهٔ فشردهٔ $[۰, N]$ به‌طور یکنواخت پیوسته است زیرا f پیوسته است.

۱۹.۴. نه. $f(x) = \sin x$ یک مثالِ نقض است.

۲۰.۱. چون

$$\int_R^{x+y+R} = \int_R^{R+y} + \int_{R+y}^{x+y+R},$$

به دست می‌آوریم $\phi(x+y) = \phi(y) + \phi(x)$. اما ϕ یک حدِ توابعِ پیوسته است، لذا به شکلِ $\phi(x) = ax$ است.

۲۱.۱. اگر $f'_+(x)$ وجود داشته باشد (متناهی)، $\lim_{h\to ۰^+} [f(x+h) - f(x)]/h$ متناهی است، لذا $\lim_{h\to ۰^+} [f(x+h) - f(x)] = ۰$. برای حکم مربوط به f'، در جملهٔ پیشین همهٔ بالانویسها و علامتِ $+$ در زیرنویسها را حذف کنید.

۲۱.۲. اگر $f(x) = ۰$ به ازای $x < ۰$، و $f(x) = ۱$ به ازای $x > ۰$، و $f(۰) = \frac{۱}{۲}$، آنگاه $f'(۰) = +\infty$.

۲۱.۳. $\epsilon(x) = [f(x) - f(a)]/(x-a) - f'(a) \to ۰$.

۲۱.۴. $g(x+h)-g(x)$ می‌توان به ازای مقادیری از h که به‌دلخواه به ۰ نزدیک باشند صفر باشد. از تمرین ۲۱.۳ به‌دست می‌آوریم

$$\phi(x+h)-\phi(x)=f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)$$

$$=\left[g(x+h)-g(x)\right]\left[f'\left(g(x)\right)+\epsilon(g(x))\right].$$

چون $g'(b)$ وجود دارد، g در b پیوسته است؛ لذا وقتی $x\to a$، $g(x)\le g(b)$، و $\epsilon\left(g(x)\right)\to 0$. بر h تقسیم کنید و h را به صفر میل دهید.

۲۱.۵. اگر $f_+(x)>0$، $\liminf_{h\to 0^+}\left[f(x+h)-f(x)\right]/h=\delta>0$، لذا به ازای همهٔ hهای مثبتِ به‌اندازهٔ کافی کوچک، $f(x+h)-f(x)\ge \frac{1}{2}h\delta$.

۲۱.۵آ. (آ) اگر $f'_+(x_0)=c$، متناهی، آنگاه اگر s عدد مثبتِ (کوچکِ) داده‌شده‌ای باشد،

$$c+s>\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>c-s,\qquad x_0+h>x>x_0$$

مشروط بر اینکه h (وابسته به s) به اندازهٔ کافی کوچک باشد. پس

$$(c+s)(x-x_0)+K(x-x_0)>f(x)+Kx-\left[f(x_0)+Kx_0\right]$$

$$>(c-s)(x-x_0)+K(x-x_0),$$

$$x_0<x<x_0+h$$

و لذا $f(x)+Kx$ در K_0 از راست صعود می‌کند اگر $K>-c+s$، از راست نزول می‌کند اگر $K<-c+s$؛ و s به‌دلخواه کوچک باشد.

(ب) اگر c مثلاً $+\infty$ باشد، آنگاه به ازای هر N (بزرگ) داده‌شده، $x-x_0$ را می‌توان آن‌قدر کوچک گرفت که

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>N,\qquad x_0<x<x_0+h$$

که h ممکن است به N وابسته باشد. این یعنی اینکه

$$f(x)+Kx-\left[f(x_0)+Kx_0\right]>(N+K)(x-x_0)$$

و $f(x)+Kx$ در $x_\circ$ از راست صعود می‌کند اگر $K > -N$.

(پ) فرض کنید، با حداکثر یک استثنا، به ازای همهٔ Kها $f_K(x) = f(x) + Kx$ در $x_\circ$ از راست یکنوا باشد، و فرض کنید $f_K(x)$ به ازای K_1ای صعود کند و به ازای K_2ای نزول کند. چون این تابع همچنین به ازای هر $K > K_1$ صعود می‌کند و به ازای هر $K < K_2$ نزول می‌کند، باید $K_\circ$ای باشد که $f_K(x)$ به ازای $K > K_\circ$ صعود کند و به ازای $K < K_\circ$ نزول کند. اگر $K > K_\circ$،

$$f(x) - f(x_\circ) \geq -K(x - x_\circ)$$

لذا $f_+(x_\circ) \leq -K_\circ$. با استدلال به طریق مشابه در موردِ $K < K_\circ$، به دست می‌آوریم $f^+(x_\circ) \leq -K_\circ$. پس $f'_+(x_\circ) = -K_\circ$ (متناهی).

(ت) فرض کنید که $f_K(x)$ به ازای همهٔ Kها در $x_\circ$ از راست صعود کند. پس

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \geq -K$$

که h به K بستگی دارد. چون می‌توانیم K را به $-\infty$ میل دهیم، با (اگر لازم باشد) میل دادنِ x به $x_\circ$ از سمتِ راست، به دست می‌آوریم $f_+(x_\circ) = +\infty$، لذا $f'_+(x_\circ) = +\infty$. مشابهاً، اگر $f(x) + Kx$ همواره در راست نزول کند، آنگاه $f'_+(x_\circ) = -\infty$.

۲۱.۵ب. اگر f_K گاهی صعودی و گاهی نزولی باشد، آنگاه مثل بخش (پ)ای تمرین ۲۱.۵آ، این تابع به ازای $K > K_\circ$ صعود می‌کند و به ازای $K < K_\circ$ نزول می‌کند. اگر $b > y > x > a$،

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > -K, \qquad K > K_\circ,$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < -K, \qquad K < K_\circ \tag{۳.۲۴}$$

و لذا

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = K_\circ.$$

چون $K_\circ$ مستقل از x و y است، می‌توانیم y را تثبیت کنیم و به‌دست آوریم $f(x) = K_\circ x + (f(y) - K_\circ y)$. با این حال، اگر f_K همواره (مثلاً) صعودی باشد، آنگاه به ازای $a < x < y < b$ و به ازای همهٔ Kها (مستقل از x و y)،

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > -K$$

که ناممکن است (K را به $-\infty$ میل دهید).

۲۱.۶. به ازای $h > \circ$، $f(x+h) - f(x) \leq \circ$، لذا $f^+(x) \leq \circ$؛ به ازای $h < \circ$، $f(x+h)-f(x) \leq \circ$ و $[f(x+h) - f(x)]/h \geq \circ$، لذا $f_-(x) \geq \circ$.

۲۱.۷. فرض کنید $f'(a) < y < f'(b)$؛ حکمِ اشاره‌شده در تمرین را در مورد تابعِ gی تعریف‌شده با $g(x) = f(x) - yx$ به‌کار برید.

۲۱.۸. قرار دهید $g(x) = f(x+a)-f(x)-af'(x)$. c را نقطه‌ای بگیرید که f در آن ماکزیمومش را می‌گیرد. در این صورت $f'(c) = \circ$؛ بنابراین $g(c) = f(c+a)-f(c)$. چون $f(c+a)$ نمی‌تواند از $f(c)$ (بزرگترین مقدارِ f) بزرگتر باشد، باید $g(c) \leq \circ$. d را نقطه‌ای بگیرید که f در آن مینیمومش را می‌گیرد؛ به همان روش به دست می‌آوریم $g(d) \geq \circ$. چون g یک مشتق است (زیرا تابعِ پیوستهٔ f مشتقِ انتگرالِ خود است)، g خاصیت مقدار میانی دارد؛ بنابراین به ازای xای $g(x) = \circ$.

۲۱.۹. فرض کنید $\circ < x < ۱$؛ در این صورت وقتی $x \to \circ^+$، $g(x) = \int_{f(x)}^{f(۱)} h(t)dt$ بیکران است، زیرا $f(\circ+) = \circ$. قضیهٔ مقدارِ میانگین به دست می‌دهد $g(۱) - g(x) = (۱-x)g'(c) = -(۱-x)h(f(c))f'(c)$، $\circ < x < c$، و طرف چپ وقتی $x \to \circ^+$ بیکران است. این اثباتْ نسبت به اثباتِ «تغییر متغیری»ی زیر مفروضاتِ کمتری نیاز دارد:

$$\int_\circ^۱ h(f(x))f'(x)dx = \int_\circ^{f(۱)} h(t)dt = +\infty;$$

انتگرالده علامتی ثابت دارد و بنابراین بیکران است.[۵۹]

۲۱.۱۰. $f(x) = ۱$ به ازای $x < \circ$، $f(x) = \circ$ به ازای $x \geq \circ$.

۲۱.۱۱. داریم (تلویحاً) فرض می‌کنیم که $f'(x)$ به ازای همهٔ xهای متعلق به یک

همسایگیِ y، $x \neq y$، وجود دارد. پس بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین $[f(x) - f(y)]/(x - y) = f'(t)$، که t بین x و y است؛ اگر x به اندازهٔ کافی به y نزدیک باشد طرفِ راستْ هر قدر بخواهیم به $\lim_{x\to y} f'(x)$ نزدیک است، لذا طرف چپ نیز چنین است. گزارهٔ آخر می‌گوید که $f'(y)$ وجود دارد، و برابرِ $\lim_{x\to y} f'(x)$ است.

۲۲.۱. فرض کنید $[a, b]$ آن بازه باشد: در این صورت $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ اگر $a \leq x \leq b$.

۲۲.۲. فرض کنید y یک نقطهٔ درونیِ دامنه باشد و $\{x_n\}$ را دنباله‌ای صعودی با حدِ y بگیرید. در این صورت $\{f(x_n)\}$ دنبالهٔ کراندارِ صعودی‌ای است که (تمرین ۸.۲) یک حدِ L دارد. اگر $x_n < x < y$، می‌توانیم x_mای بیابیم که $x < x_m < y$، و لذا $f(x_n) \leq f(x) \leq f(x_m) \leq L$. چون $f(x_n) \to L$، نتیجه می‌شود که $f(x) \to L$.

۲۲.۳. اگر به ازای هر x، $f_n(x) \to f(x)$، و وقتی $x \leq y$، $f_n(x) \leq f_n(y)$، آنگاه وقتی $x \leq y$، $f(x) \leq f(y)$. فرضْ امکانْ این را که بعضی f_nها صعودی و بقیه نزولی باشند رد نمی‌کند. اگر چنین باشد، تعدادی متناهی از f_nهای استثنایی دشواری‌ای به‌وجود نمی‌آورند. اگر از هر دو نوعْ تعدادی نامتناهی باشد، f باید هم صعودی و هم نزولی، و لذا ثابت، باشد.

۲۲.۴. فرض کنید f جهشهایی به‌اندازهٔ $۱/\{n(n+۱)\}$ در نقاطِ $۱/n$ داشته باشد، و $f(۰) = ۰$. اگر $(m+۱)^{-۱} < h < m^{-۱}$، آنگاه

$$\sum_{k=m+۱}^{\infty} \frac{۱}{k(k+۱)} = \frac{۱}{m+۱}$$

لذا $f'_+(۰) = ۱$.

۲۳.۱. اگر $s_n \to s$ مفروض باشد، باید نشان داد $(s_۱ + \cdots + s_n)/n \to s$. با در نظرگرفتنِ $s_n - s$ به جای s_n، می‌توانیم فرض کنیم $s = ۰$. سپس بنویسید

$$\frac{s_۱ + \cdots + s_n}{n} = \frac{s_۱ + \cdots + s_k}{n} + \frac{s_{k+۱} + \cdots + s_n}{n}$$

و k را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنید که به ازای $j > k$، $|s_j| < \epsilon$. پس

$$\frac{s_{k+1} + \cdots + s_n}{n} \leq \epsilon.$$

اکنون k تثبیت شده است، لذا $(s_1 + \cdots + s_k)/n < \epsilon$ اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، و $(s_1 + \cdots + s_n)/n < 2\epsilon$.