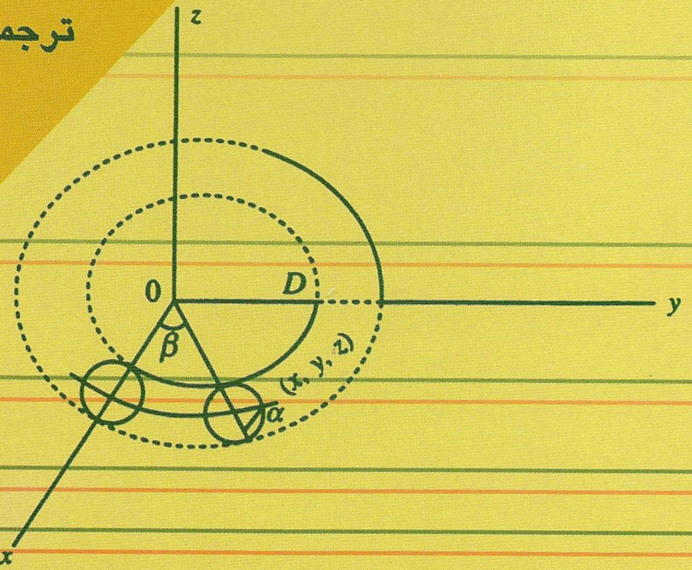
نخستین درس در

توپولوژی جبری

بنوی کومار لاهیری

ترجمهٔ شهرام رضاپور



نخستین درس در توپولوژی جبری

بنوی کومار لاهیری

ترجمهٔ شهرام رضاپور

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

پیشگفتار

برخی از مسائل توپولوژی از طریق توپولوژی جبری به مسائل جبری بدل می‌شوند. در برخی موارد پیدا کردن جواب مسائل در جبر ممکن است آسانتر از پیدا کردن جواب مسائل متناظر آنها در توپولوژی باشد. در این موارد می‌توان برای مسائل توپولوژیک راه‌حلهای مناسبی به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، می‌توان با استفاده از یک فضای توپولوژیک مفروض، گروهی (به نام گروه بنیادی) تشکیل داد و از یک همسانریختی بین دو فضای توپولوژیک، یک یکریختی بین گروههای بنیادی متناظر آن دو فضا به‌دست آورد.

در کتاب حاضر که برای آشنایی با مبادی نوشته شده است، به مفاهیم اساسی چندی از توپولوژی جبری می‌پردازیم. مطالب این کتاب چنان نوشته شده‌اند که خوانندگان مبتدی برای درک بی‌ابهام مفاهیمِ مختلفِ مطرح‌شده در آن هیچ‌گونه مشکلی نداشته باشند. معتقدیم که برای مطالعهٔ عمیقتر توپولوژی جبری در یک سطح پیشرفته و کسب تصوری روشن به‌منظور کاربرد نظریه، فهم دقیق آن در سطح مقدماتی ضروری است.

در نگارش این کتاب، تلاش کافی برای عرضهٔ روشن مفاهیم صورت گرفته است و تقریباً برای تمام مفاهیم جدید، مثالهای مناسبی ارائه شده است. تمامی مطالب کتاب به‌گونه‌ای عرضه شده است که دانشجویان سالهای آخر کارشناسی و دانشجویان کارشناسی ارشد بتوانند از آن بهرهٔ لازم را ببرند. آگاهی مختصری از نظریهٔ مجموعه‌ها، آنالیز حقیقی، توپولوژی و جبر را دانسته فرض کرده‌ام، مع‌هذا مطالب مورد نیاز برای مطالعهٔ این کتاب در فصل اول توضیح داده شده‌اند، ولی اثبات قضایا آورده نشده است. به جای نمودارهای تعویض‌پذیری که معمولاً در چند مورد به‌کار برده می‌شوند، ترجیح داده‌ام که این موارد به‌صورت نظری تشریح شوند.

از مؤلفان و ناشران کتابهای مختلفی که در فهرست مراجع از آنها نام برده شده و برداشتی

آزاد از آثار آنها داشته‌ام، تشکر می‌کنم. به خوانندگان توصیه می‌کنم برای مطالعهٔ بیشتر به این کتابها مراجعه کنند. برخی از مثالهای این کتابْ بدیع (از آنِ خود من) هستند اما بعضی دیگر از کتابهای متعارف گردآوری شده‌اند و متناسب با زمینهٔ بحث تغییراتی در آنها داده شده است. از آنجا که معتقدم هر اثری را همواره می‌توان اصلاح کرد، از هر پیشنهادی در این زمینه با تشکر استقبال می‌کنم.

بنوی کومار لاهیری

نمادها و قراردادها

مجموعهٔ اعداد حقیقی $= \mathbb{R}$

مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $= \mathbb{N}$

مجموعهٔ اعداد صحیح $= \mathbb{Z}$

مجموعهٔ اعداد مختلط $= \mathbb{C}$

مجموعه‌های اندیسگذار $= J, \Lambda$

فضای اقلیدسی nبعدی $= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n$

اگر $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، آنگاه

$$\text{نُرم } x = \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

گوی بستهٔ nبعدی $= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\} = B^n = D^n$

کرهٔ $(n-1)$بعدی $= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = S^{n-1}$

اگر $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$، آنگاه

$$\text{حاصلضرب اسکالری } x \text{ و } y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x \cdot y$$

مکعب nبعدی = $I_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$

بازهٔ واحد بستهٔ $C = [0, 1]$

گوی باز nبعدی به مرکز $x \in \mathbb{R}^n$ و شعاع $\delta > 0$ = $B^n(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \delta\}$

فضاهای توپولوژیک (مگر آنکه به‌خلاف آن تصریح شود) = $X, Y, \dots$

۱

مفاهیم اساسی

اگر A و B دو مجموعه باشند و B زیرمجموعه‌ای از A باشد، می‌نویسیم $B \subseteq A$. مجموعهٔ $A - B$ مجموعهٔ عضوهایی از A است که متعلق به B نیستند. مجموعهٔ تهی را با ϕ نمایش می‌دهیم.

حاصلضرب دکارتی (یا حاصلضرب مستقیم) مجموعه‌های A و B مجموعهٔ زوجهای مرتبی به‌صورت (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in B$. این حاصلضرب را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم. لذا

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, \ \ b \in B\}.$$

حاصلضرب دکارتی تعداد متناهی مجموعهٔ $A_۱$، ...، A_n به‌طور مشابه تعریف می‌شود:

$$A_۱ \times \cdots \times A_n = \{(a_۱, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, ۱ \leq i \leq n\}.$$

رابطه روی مجموعهٔ A زیرمجموعه‌ای مانند $\sim$ از $A \times A$ است. هرگاه $(a, b) \in \sim$، معمولاً می‌نویسیم $a \sim b$. رابطهٔ $\sim$ روی A را رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(الف) به‌ازای هر $a \in A$، $a \sim a$ (شرط بازتابی)؛

(ب) اگر $a \sim b$، آنگاه $b \sim a$ (شرط تقارن)؛

(ج) اگر $a \sim b$ و $b \sim c$، آنگاه $a \sim c$ (شرط ترایایی).

ردهٔ هم‌ارزی $a \in A$ را با $[a]$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$[a] = \{b \in A : a \sim b\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد، هر عضو A دقیقاً به یکی از رده‌های هم‌ارزی متعلق است.

فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای متشکل از اعضای x، y، z و غیره باشد. فرض می‌کنیم هر دو عضو x و y بتوانند با یک عمل، که جمع نامیده می‌شود، با هم ترکیب شوند و عضوی از X را، که با $x + y$ نشان می‌دهیم، تولید کنند. همچنین فرض می‌کنیم با هر α و $x \in X$، که α عددی حقیقی یا مختلط است و اسکالر نامیده می‌شود، عضوی از X متناظر شود، که آن را با αx نشان می‌دهیم و حاصلضرب α و x می‌نامیم. این عمل را ضرب اسکالر [در بردار] می‌نامند. مجموعهٔ X را با این دو عمل فضای برداری می‌نامند هرگاه در اصول زیر صدق کند

۱. $x + y = y + x$؛

۲. $x + (y + z) = (x + y) + z$؛

۳. عضو منحصر به‌فردی مانند $\theta \in X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$، $x = \theta + x$؛ θ را عضو صفر X می‌نامند؛

۴. به‌ازای هر $x \in X$، عضو منحصر به‌فردی از X، که با $-x$ نمایش داده می‌شود، چنان موجود باشد که $x + (-x) = \theta$؛

اگر $x, y \in X$ و α, β اسکالر باشند، آنگاه

۵. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$؛

۶. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$؛

۷. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$؛

۸. $۱ \cdot x = x$؛

۹. $۰ \cdot x = \theta$.

فضای برداری را بسته به اینکه اسکالرها اعداد حقیقی یا مختلط باشند، فضای برداری حقیقی یا فضای برداری مختلط می‌نامند. اگر X فضای برداری باشد، هر عضو $x \in X$ را بردار می‌نامند.

مجموعهٔ متناهی x_1، ...، x_n از بردارها را خطیْوابسته می‌نامند هرگاه اسکالرهای α_1، ...، α_n که همگی صفر نیستند، چنان موجود باشند که

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta .$$

از طرف دیگر، اگر برابری

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$$

ایجاب کند که به‌ازای هر i، $\alpha_i = 0$، آنگاه بردارهای x_1، ...، x_n را خطیْمستقل می‌نامند.

اگر مجموعهٔ $\{x_i\}$ مجموعه‌ای متناهی باشد و $x = \Sigma \alpha_i x_i$، آنگاه x را ترکیب خطی اعضای $\{x_i\}$ می‌نامند.

پایهٔ X مجموعه‌ای از بردارهای خطی‌مستقل است که هر بردار X ترکیبی خطی از اعضای آن باشد. فضای برداری X متناهی‌بعد است هرگاه پایه‌ای متناهی داشته باشد.

زیرمجموعهٔ ناتهی B از X را زیرفضا می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $x, y \in B$، هر ترکیب خطی $\alpha x + \beta y$ عضوی از B باشد.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ دلخواهی از بردارهای فضای برداری X باشد، و M اشتراک تمام زیرفضاهای شامل S باشد. در این‌صورت، روشن است که M کوچکترین زیرفضای شامل S است. M را زیرفضای پدیدآمده از S می‌نامند.

فرض می‌کنیم U و V فضاهای برداری روی مجموعهٔ اسکالرهای واحدی باشند. مجموع مستقیم U و V که با $U \oplus V$ نمایش داده می‌شود فضایی است برداری که اعضای آن تمام زوجهای مرتب (u, v) هستند که $u \in U$ و $v \in V$، و اعمال آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha_1(u_1, v_1) + \alpha_2(u_2, v_2) = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) .$$

اگر X فضای برداری باشد، مجموعهٔ تمام اعضایی به شکل

$$t x_1 + (1 - t) x_2$$

که $x_1, x_2 \in X$ و $0 \leq t \leq 1$، پاره‌خط واصل بین نقاط x_1 و x_2 نامیده می‌شود. مجموعهٔ $K \subseteq X$ را محدب می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دوعضو از اعضای K، پاره‌خط واصل بین آنها در K قرار داشته باشد.

فرض می‌کنیم $H \subseteq X$. اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل H، غلاف محدب H نامیده می‌شود. واضح است که این اشتراک خود مجموعه‌ای محدب است.

فرض می‌کنیم X یک مجموعه و σ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند

(الف) $\phi \in \sigma$، $X \in \sigma$؛

(ب) اشتراک هر دوعضو از اعضای σ، در σ باشد؛

(ج) اجتماع هر تعداد از اعضای σ، در σ باشد.

گردایهٔ σ با ویژگیهای فوق را توپولوژی روی X (یا توپولوژی X) و مجموعهٔ X همراه با σ را فضای توپولوژیک می‌نامند و با (X, σ) نمایش می‌دهند. وقتی دربارهٔ توپولوژی ابهامی وجود نداشته باشد، گاهی به جای (X, σ) فقط می‌نویسند X. هر عضو σ را مجموعهٔ باز می‌نامند.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، زیرمجموعهٔ G از X را همسایگی نقطهٔ $x \in X$ می‌نامند هرگاه G شامل مجموعهٔ بازی شامل x باشد.

زیرمجموعهٔ F از فضای توپولوژیک X را بسته می‌نامند اگر و فقط اگر $X - F$ باز باشد.

فرض می‌کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subseteq X$. کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل Y را بستار Y می‌نامند و با $\overline{Y}$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\overline{Y} = \bigcap_{j \in J} F_j$$

که در آن $\{F_j : j \in J\}$ خانوادهٔ تمام مجموعه‌های بستهٔ شامل Y است.

فرض می‌کنیم $S \subseteq X$. در این‌صورت توپولوژی القایی روی S توسط توپولوژی X، خانوادهٔ مجموعه‌هایی به شکل $U \cap S$ است که U در فضای توپولوژیک X باز باشد. بنابراین اگر T خانوادهٔ مجموعه‌های باز X باشد، آنگاه خانوادهٔ

$$T_S = \{U \cap S : U \in T\}$$

خانوادهٔ مجموعه‌های باز S است، و این خانواده یک توپولوژی روی S است.

گاهی توپولوژی القایی را توپولوژی نسبی می‌نامند. اگر S مجهز به توپولوژی القایی باشد، S را زیرفضای X می‌نامند.

فرض می‌کنیم $S \subseteq X$. در این‌صورت پوشش S، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌هایی مانند U_j از X است که

$$S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \,.$$

اگر مجموعهٔ اندیسگذار J متناهی باشد، پوشش فوق را پوشش متناهی می‌نامند. اگر در گردایهٔ فوق هر U_j باز باشد، این پوشش را پوشش باز می‌نامند.

زیرمجموعهٔ S از X را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز S زیرپوششی متناهی داشته باشد.

هر زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، X و Y فشرده‌اند اگر و فقط اگر $X \times Y$ فشرده باشد.

هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbb{R}^n$ فشرده است.

فضای توپولوژیک X همبند است اگر و فقط اگر اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز ناتهی مجزای خود نباشد. روشن است که X همبند است هرگاه تنها زیرمجموعه‌های X که هم باز باشند و هم بسته، ϕ و X باشند. زیرمجموعهٔ S از X همبند است هرگاه S با توپولوژی القایی، فضایی همبند باشد.

بازهٔ $R \supseteq [a, b]$ همبند است.

فرض می‌کنیم $\{S_j : j \in J\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد. اگر $\bigcap\limits_{j \in J} S_j \neq \phi$، آنگاه زیرمجموعهٔ $S = \bigcup\limits_{j \in J} S_j$ همبند است.

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، $X \times Y$ همبند است اگر و فقط اگر X و Y همبند باشند.

می‌گوییم فضای توپولوژیک X در نقطهٔ $x \in X$ موضعاً همبند است هرگاه هر مجموعهٔ باز شامل x، شامل یک مجموعهٔ باز همبند شامل x باشد. فضای X را موضعاً همبند نامند هرگاه در هر نقطه‌اش موضعاً همبند باشد.

هر زیرمجموعهٔ همبند ماکسیمال X را مؤلفهٔ X می‌نامند.

فضای توپولوژیک X موضعاً همبند است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های هر زیرفضای باز X، در X باز باشند.

اگر X موضعاً همبند باشد، هر مؤلفهٔ X باز است.

فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه باشند. تابع یا نگاشت $f : X \to Y$ تناظری است که به هر عضو $x \in X$، عضوی منحصر به‌فرد از Y را، که با $f(x)$ نشان می‌دهند، نسبت می‌دهد. نگاشت همانی رویِ X تابع $I : X \to X$ است که به‌ازای هر $x \in X$، $I(x) = x$. گاه این نگاشت را با I_X نشان می‌دهند.

اگر $A \subseteq X$، نگاشت $i : A \to X$ با ضابطهٔ $i(a) = a$، $a \in A$، را نگاشت مشمولیت از A به X می‌نامند.

نگارهٔ نگاشت $f : X \to Y$ به‌صورت
$$\mathrm{im}(f) = f(X) = \{y \in Y : y = f(x) ،x \in X \text{ به‌ازای عضوی مانند}\}$$
تعریف می‌شود.

اگر $A \subseteq X$، آنگاه تحدید f به A را با $f|A$ نمایش می‌دهند. بنابراین نگاشت

$$f|A : A \to Y$$

با ضابطهٔ

$$(f|A)(a) = f(a) \quad \text{به‌ازای هر } a \in A$$

تعریف می‌شود.

تابع $f : X \to Y$ یک‌به‌یک است هرگاه به‌ازای هر $x_1, x_2 \in X$، که $x_1 \neq x_2$، $f(x_1) \neq f(x_2)$. f را پوشا نامند هرگاه $f(X) = Y$ و آن را دوسویی نامند هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد.

اگر f دوسویی باشد، آنگاه معکوس f، یعنی تابع $f^{-1} : Y \to X$ وجود دارد و به‌صورت

$$x = f^{-1}(y) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad y = f(x)$$

تعریف می‌شود.

اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ دو نگاشت باشند، نگاشت مرکب gf یا $g \circ f$ از X به Z با ضابطهٔ

$$g(f(x)) = gf(x) \quad \text{به‌ازای هر } x \in X$$

تعریف می‌شود.

فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ باز U از Y، $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ F از Y، $f^{-1}(F)$ بسته باشد.

اگر توابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند، تابع $gf : X \to Z$ نیز پیوسته است.

اگر تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد و زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ مجهز به توپولوژیِ زیرفضایی (نسبی) باشد، تابع $f|A : A \to Y$ پیوسته است.

اگر تابع $f : X \to Y$ پیوسته باشد و $f(X)$ مجهز به توپولوژی زیرفضایی باشد، تابع $f : X \to f(X)$ پیوسته است.

فرض می‌کنیم $f : X \to Y$ نگاشت باشد. در این‌صورت احکام زیر هم‌ارزند

(الف) f پیوسته است.
(ب) نگارهٔ معکوس هر مجموعهٔ بسته از فضای Y، در X بسته است.
(ج) به‌ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی $N(f(x))$ در Y، یک همسایگی $V(x)$ در X چنان موجود است که

$$f(V(x)) \subseteq N(f(x))$$

(د) هرگاه $A \subseteq X$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
(ه) هرگاه $B \subseteq Y$، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

تابعی که نگارهٔ هر مجموعهٔ باز تحت آن مجموعهٔ باز باشد، نگاشت باز، و تابعی که نگارهٔ هر مجموعهٔ بسته تحت آن مجموعهٔ بسته باشد، نگاشت بسته نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم $f: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد. اگر S زیرفضایی فشرده از X باشد، $f(S)$ فشرده است.

همسانریختی (یا نگاشت توپولوژیک یا تبدیل توپولوژیک) نگاشتی پیوسته، باز و دوسویی از یک فضای توپولوژیک به یک فضای توپولوژیک دیگر است.

دو فضای توپولوژیک X و Y را همسانریخت نامند هرگاه یک همسانریختی از X به Y موجود باشد. در این حالت گوییم Y نگارهٔ همسانریخت X است.

نگارهٔ یک فضای موضعاً همبند تحت نگاشت پیوسته و باز، موضعاً همبند است.

تبدیل خطی (یا عملگر خطی یا نگاشت خطی) A روی فضای برداری V تناظری است که به هر بردار $x \in V$، برداری از V را، که با Ax نشان می‌دهیم، چنان نسبت می‌دهد که به‌ازای اسکالرهای دلخواه α و β داشته باشیم

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay\,.$$

تابعک خطی f روی فضای برداری V تابعی اسکالرْمقدار است که به‌ازای هر بردار تعریف می‌شود و این ویژگی را دارد که به‌ازای بردارهای دلخواه $x_1, x_2 \in V$ و اسکالرهای دلخواه α_1 و α_2،

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\,.$$

فرض می‌کنیم V فضای برداری دلخواه و V' گردایهٔ تمام تابعکهای خطی تعریف‌شده روی V باشد. تابعک خطی fای را که به‌ازای هر $x \in V$، $f(x) = 0$، با 0 نشان می‌دهیم. اگر $f_1, f_2 \in V'$ و α_1 و α_2 اسکالر باشند، قرار می‌دهیم

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\,.$$

روشن است که f تابعکی خطی است. با این تعاریف از ۰، جمع دو تابعک و ضرب اسکالر در تابعک، مجموعهٔ V' به شکل یک فضای برداری در می‌آید که آن را فضای دوگان V می‌نامند.

برای سادگی، به جای نماد معمولی تابع $y(x)$ می‌نویسیم $[x,y]$. فرض می‌کنیم V فضایی برداری و f عضو دلخواهی از V' باشد. به‌ازای هر نگاشت خطی A روی V، عبارت $[Ax,f]$ را که در آن $x \in V$، در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر f ثابت، تابع f' که با ضابطهٔ $f'(x) = [Ax,f]$ تعریف شده است تابعکی خطی روی V است. می‌توانیم بنویسیم $[Ax,f] = [x,f']$. حال اگر f در V' تغییر کند، آنگاه به این طریق به‌ازای هر f یک f' به‌دست می‌آوریم و لذا می‌توانیم بنویسیم $f' = A'f$. بنابراین

$$[Ax,f] = [x,A'f]\,.$$

در این‌صورت A' نگاشتی خطی روی V' است؛ زیرا اگر $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$، آنگاه

$$\begin{aligned}[x,A'f] &= [Ax,f] = \alpha_1[Ax,f_1] + \alpha_2[Ax,f_2]\\ &= \alpha_1[x,A'f_1] + \alpha_2[x,A'f_2]\\ &= [x,\alpha_1 A'f_1 + \alpha_2 A'f_2]\,.\end{aligned}$$

نگاشت خطی A' را نگاشت الحاقی (یا دوگان) A می‌نامند.

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و Y یک مجموعه و $f : X \to Y$ نگاشتی پوشا باشد. توپولوژی خارج‌قسمتی روی Y نسبت به f، خانوادهٔ

$$U_f = \{U : \text{باز باشد } X \text{ در } f^{-1}(U) \text{ و } U \subseteq Y\}$$

است.

مجموعهٔ $RP^n = \{\{x,-x\} : x \in S^n\}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\pi : S^n \to RP^n$ با ضابطهٔ $x \to \{-x,x\}$ نگاشتی پوشاست. مجموعهٔ RP^n با توپولوژی خارج‌قسمتی نسبت به نگاشت π را nـفضای تصویری حقیقی می‌نامند.

اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشتهای تصویرگر زیر را داریم

$$\pi_X : X \times Y \to X \quad \text{و} \quad \pi_Y : X \times Y \to Y.$$

π_X و π_Y هر دو پیوسته‌اند زیرا

$$\pi_X^{-1}(U) = U \times Y \quad \text{و} \quad \pi_Y^{-1}(V) = X \times V.$$

عمل دوتایی روی مجموعهٔ X تابعی است مانند $f : X \times X \to X$. $f(x, y)$ را به‌صورت xy (در نمادگذاری ضربی) یا $x + y$ (در نمادگذاری جمعی) می‌نویسیم.

مجموعهٔ G را گروه نامند هرگاه عملی دوتایی با شرایط زیر روی G موجود باشد

(الف) عضوی مانند $e \in G$ که عضو همانی G نامیده می‌شود، چنان موجود باشد که به‌ازای هر $g \in G$،

$$ge = eg = g\,.$$

(ب) به‌ازای هر $g \in G$، عضوی مانند $g^{-1} \in G$، که معکوس g نامیده می‌شود، چنان موجود باشد که

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e\,.$$

(ج) به‌ازای هر $g_1, g_2, g_3 \in G$،

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)\,.$$

رابطهٔ آخر را رابطهٔ شرکت‌پذیری می‌نامند.

اگر گروه جمعی باشد، عضو همانی آن را با 0 و معکوس هر عضو g از آن را با $-g$ نشان می‌دهند. گروهی که تنها عضو آن عضو همانی e یا 0 باشد، گروه بدیهی نامیده می‌شود.

اگر G و H گروه باشند، حاصلضرب مستقیم G و H را با $G \times H$ نشان می‌دهند، و عمل دوتایی آن را با

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

تعریف می‌کنند. در گروه جمعی، حاصلضرب مستقیم همان مجموع مستقیم است و با $G \oplus H$ نشان داده می‌شود.

اگر G و H هر دو گروه باشند، همریختی $f : G \to H$ تابعی است با این ویژگی که به‌ازای هر $g, g' \in G$،

$$f(gg') = f(g)f(g')\,.$$

اگر f دوسویی باشد، آن را یکریختی می‌نامند، و در این‌صورت، می‌گویند گروههای G و H یکریخت‌اند. گاهی به‌صورت نمادین می‌نویسیم $G \simeq H$ یا $f : G \simeq H$.

هستهٔ $f : G \to H$ مجموعهٔ

$$\ker f = \{g \in G : f(g) = e\}$$

است که در آن e عضو همانی H است. باید توجه داشت که اگر f یکریختی باشد، هستهٔ f فقط متشکل از عضو همانی G است.

گروه G را آبلی یا تعویض‌پذیر نامند هرگاه به‌ازای هر $g, g' \in G$، $gg' = g'g$. گروه آبلی آزاد از رتبهٔ n گروهی است یکریخت با $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdots \oplus \mathbb{Z}$ (n بار) که در آن $\mathbb{Z}$ حلقهٔ اعداد صحیح است.

همریختی یک‌به‌یک را تکریختی و همریختی پوشا را بروریختی می‌نامند.

فرض می‌کنیم G گروه باشد و $a \in G$. در این‌صورت، a از مرتبهٔ n گفته می‌شود هرگاه n کوچکترین عدد طبیعی با ویژگی $a^n = e$ باشد، که e عضو همانی G است. اگر عددی طبیعی مانند n موجود نباشد به‌طوری که $a^n = e$، می‌گویند a از مرتبهٔ نامتناهی است.

گروه G را گروه دوری نامند هرگاه عضوی مانند $a \in G$ چنان موجود باشد که هر عضو G توانی از a باشد. در این حالت a را مولد G می‌نامند. تعداد اعضای گروه را مرتبهٔ گروه می‌نامند. مرتبهٔ گروه دوری برابر با مرتبهٔ مولد آن است.

زیرمجموعهٔ H از گروه G را زیرگروه G می‌نامند هرگاه H تحت عمل دوتایی G گروه باشد. اگر H زیرگروه G باشد و $g \in G$، آنگاه هم‌مجموعهٔ چپ H نسبت به g را با gH نشان می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

هم‌مجموعه‌های راست H به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

زیرگروه H از گروه G را زیرگروه نرمال نامند هرگاه به‌ازای هر $a \in G$، $aH = Ha$.

فرض می‌کنیم G گروه و H زیرگروه نرمال G باشد. در این‌صورت هم‌مجموعهٔ چپ gH و هم‌مجموعهٔ راست Hg با هم برابرند. مجموعهٔ G/H متشکل از تمام هم‌مجموعه‌های H در G همراه با عمل دوتایی $(Ha)(Hb) = Hab$، به‌ازای هر $Ha, Hb \in G/H$، گروهی است که آن را گروه خارج‌قسمت G بر H یا گروه خارج‌قسمتی G/H می‌نامیم.

۲

رسته و تابعگونها

۱. رسته

رسته را می‌توان به‌طورشهودی متشکل از رده‌ای از مجموعه‌ها و رده‌ای از توابع، احیاناً باساختارهایی اضافی بر یک یا هر دو رده، در نظر گرفت. تعریف دقیق رسته به‌صورت زیر است.

تعریف ۱.۲ رسته متشکل است از

(الف) رده‌ای از اشیاء؛

(ب) به‌ازای هر زوج مرتب از اشیاء X و Y از ردهٔ فوق،مجموعه‌ای از ریختارها با حوزهٔ X و برد Y که با $\hom(X, Y)$ نمایش داده می‌شود؛

(ج) به‌ازای هر سه‌تایی مرتب از اشیاء X و Y و Z، تابعی که به هر جفت از ریختارها مانند

$$g : Y \to Z \quad \text{و} \quad f : X \to Y$$

ترکیب آنها

$$gf : X \to Z$$

را نسبت می‌دهد.

$\hom(X,Y) \cap \hom(X_1,Y_1) = \phi$ مگر آنکه $X = X_1$ و $Y = Y_1$. در اینجا اصطلاح ریختار را به معنی نگاشت به‌کار می‌بریم و گاه به‌جای ریختار می‌گوییم نگاشت.

ریختارها باید در اصول زیر صدق کنند

شرکت‌پذیری: اگر $f : X \to Y$، $g : Y \to Z$ و $h : Z \to W$، آنگاه

$$h(gf) = (hg)f : X \to W\,.$$

همانی: متناظر با هر شیء Y، ریختار $I_Y : Y \to Y$ چنان موجود باشد که اگر $f : X \to Y$، آنگاه $I_Y f = f$ و اگر $h : Y \to Z$، آنگاه $hI_Y = h$.

از این اصول نتیجه گرفته می‌شود I_Y، که ریختار همانی y نامیده می‌شود، منحصر به‌فرد است. اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ ریختار باشند و $gf = I_X$، آنگاه g را معکوس چپ f و f را معکوس راست g می‌نامند. معکوس f ریختاری است که هم معکوس چپ f و هم معکوس راست آن باشد. اگر $f : X \to Y$ ریختار باشد، آن را هم‌ارزی نامند هرگاه ریختاری مانند $g : Y \to X$ موجود باشد که معکوس دوطرفهٔ f باشد. این مطلب را با $f : X \approx Y$ نمایش می‌دهند. اگر $g_1 : Y \to X$ معکوس چپ f و $g_2 : Y \to X$ معکوس راست f باشد، آنگاه

$$g_1 = g_1 I_Y = g_1(fg_2) = (g_1 f)g_2 = I_X g_2 = g_2\,.$$

لذا لم زیر برقرار است.

لم ۱.۲ اگر $f : X \to Y$ معکوس چپ و معکوس راست داشته باشد، آن دو معکوس برابرند و در نتیجه f هم‌ارزی است.

بنابراین، نتیجه می‌شود که هر هم‌ارزی مانند $f : X \approx Y$، معکوسی منحصر به‌فرد دارد که خود هم‌ارزی است، این معکوس را با $f^{-1} : Y \to X$ نشان می‌دهند. اگر یک هم‌ارزی مانند $f : X \approx Y$ موجود باشد، می‌گویند X و Y هم‌ارزند و به‌صورت نمادین می‌نویسند $X \approx Y$. روشن است که ترکیب هم‌ارزیها هم‌ارزی است، بنابراین رابطهٔ $X \approx Y$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ اشیاء یک رسته است.

مثال ۱.۲ رسته‌ای که در این مثال عرضه می‌کنیم رسته‌ای است که ردهٔ اشیاء آن ردهٔ تمام مجموعه‌هاست و اگر X و Y دو مجموعه باشند، $\hom(X,Y)$ مجموعهٔ تمام توابعی مانند f از X به Y است.

مثال ۲.۲ رستهٔ ما در این مثال رسته‌ای است که اشیاء آن فضاهای توپولوژیک هستند، و $\hom(X,Y)$ مجموعهٔ توابع پیوسته از X به Y است. در این‌صورت، قاعدهٔ ترکیب، قاعدهٔ ترکیب توابع است.

مثال ۳.۲ رستهٔ مورد نظر در این مثال رسته‌ای است که اشیاء آن گروهها هستند، و $\hom(X,Y)$ مجموعهٔ همریختیها از گروه X به گروه Y است.

مثال ۴.۲ فرض می‌کنیم $X_۱$ و $X_۲$ دو شیء دلخواه باشند. رستهٔ ما رسته‌ای است که اشیاء آن $X_۱$ و $X_۲$ هستند، و

$$\hom(X_۱,X_۱)=I_{X_۱},\hom\ (X_۲,X_۲)=I_{X_۲}$$
$$\hom(X_۱,X_۲)=\phi,\hom\ (X_۲,X_۱)=\phi\,.$$

۲. تابعگونها

تعریف ۲.۲ فرض می‌کنیم $c_۱$ و $c_۲$ دو رسته باشند. تابعگون هموردای F از $c_۱$ به $c_۲$، متشکل است از یک تابع شیئی که به هر شیء X از $c_۱$، یک شیء از $c_۲$ مانند $F(X)$ را نسبت می‌دهد، و یک تابع ریختاری که به هر ریختار $f:X\to Y$ از $c_۱$، ریختاری از $c_۲$ مانند $F(f):F(X)\to F(Y)$ را نسبت می‌دهد به‌طوری که روابط

(الف) $F(I_X)=I_{F(X)}$

(ب) $F(gf)=F(g)F(f)$

برقرار باشند.

تعریف ۳.۲ تابعگون پادوردای F از $c_۱$ به $c_۲$ متشکل است از یک تابع شیئی و یک تابع ریختاری همانند تعریف ۲.۲ بجز اینکه اگر $f:X\to Y$، آنگاه $F(f):F(Y)\to F(X)$ و به‌جای قسمت (ب) داشته باشیم

$$F(gf)=F(f)F(g)\,.$$

در هر یک از تعاریف فوق برای بیان اینکه F تابعگون است می‌نویسیم

$$F:c_۱\to c_۲\,.$$

مثال ۵.۲ فرض می‌کنیم F تابعگونی هموردا از رستهٔ فضاهای توپولوژیک و نگاشتهای پیوسته به رستهٔ مجموعه‌ها و توابع باشد که به هر فضای توپولوژیک مجموعهٔ زیربنای آن را [یعنی مجموعه‌ای را که به توپولوژی مجهز شده] نسبت می‌دهد. این تابعگون F را تابعگون نادیده‌گیر می‌نامند زیرا قسمتی از ساختار فضای توپولوژیک را «نادیده» می‌گیرد.

مثال ۶.۲ فرض می‌کنیم u_K رستهٔ فضاهای برداری روی K و نگاشتهای خطی باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم $F : u_K \to u_K$ با ضابطهٔ $F(V) = V^*$ و $F(f) = f^*$ تعریف شده باشد که در آن V^* فضای دوگان V و f^* نگاشت الحاقی f است. در این‌صورت، F تابعگونی پادورداست.

مثال ۷.۲ فرض می‌کنیم c رسته باشد. تابعگون همانی از c به c که روی اشیاء و نگاشتها همانی است، همورداست.

قضیهٔ ۱.۲ اگر T تابعگونی از رستهٔ c_1 به رستهٔ c_2 باشد، آنگاه T هم‌ارزیهای c_1 را به هم‌ارزیهای c_2 می‌نگارد.

اثبات. قضیه را برای تابعگون هموردا ثابت می‌کنیم. اثبات برای تابعگون پادوردا مشابه آن است. فرض می‌کنیم T تابعگونی هموردا باشد، و $f : X \to Y$ یک هم‌ارزی از c_1 باشد. در این‌صورت، بنابه تعریف $f^{-1}f = I_X$. لذا

$$I_{T(X)} = T(I_X) = T(f^{-1})T(f)$$

به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم $I_{T(Y)} = T(f)T(f^{-1})$. بنابراین $T(f^{-1})$ معکوس دوطرفهٔ $T(f)$ است. لذا بنابه لم ۱.۲، $T(f)$ یک هم‌ارزی از c_2 است. در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

۳

هوموتوپی

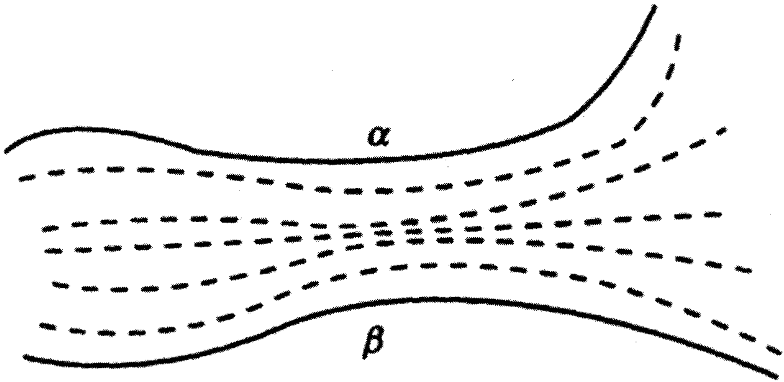
۱. مقدمه و تعاریف

در حالت کلی یک زیرفضا از فضای توپولوژیک X با زیرفضایی دیگر هوموتوپیک است هرگاه هر یک از آنها بتواند با تغییر شکل پیوسته به دیگری تبدیل شود (به بیان دقیقتر، همان‌گونه که بعداً خواهیم دید هوموتوپی رابطه‌ای است بین نگاشتهای پیوسته نه زیرفضاها). کمان ساده در X نگارهٔ نگاشتی پیوسته مانند $f : C_1 \to X$ است که در آن C_1 زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ به‌صورت

$$C_1 : a \leq u \leq b, a < b$$

است. به‌عنوان مثال، فرض کنید α و β دو کمان ساده همانند شکل ۱.۳ باشند.

در این‌صورت می‌گویند α با β هوموتوپیک است هرگاه بتوان α را با انتقال پیوسته به β تبدیل کرد، و این بدان معنی است که مجموعه‌ای از کمانهای میانی (بین α و β) متناظر با مراحل مختلف انتقال موجود باشد (برخی از این کمانها در شکل فوق با خطوط نقطه‌چین نمایش داده شده‌اند). چون این انتقال پیوسته است، کمانها به‌طور پیوسته تغییر شکل می‌یابند. برای صورت‌بندی ریاضی این مطلب، فرض می‌کنیم خانوادهٔ کمانهای میانی به طریقی یک‌به‌یک با اعداد حقیقی



شکل ۱.۳

بازهٔ واحد $C = [\circ, \text{۱}]$ متناظرند. پس نیاز داریم خانواده‌ای از کمانها مانند $\alpha_u\,(\circ \leq u \leq \text{۱})$ را چنان تعریف کنیم که $\alpha_\circ = \alpha$ و $\alpha_\text{۱} = \beta$ و α_u نسبت به u به‌طور پیوسته تغییر کند. مفهوم تغییر شکل پیوسته را می‌توان برحسب نگاشتی مانند F به X که وابسته به u و نیز نقاط $C_\text{۱}$ باشد، و نگارهٔ F به‌ازای uای مفروض، α_u باشد، بیان کرد. فرض می‌کنیم F نگاشتی از $C_\text{۱} \times C$ به X باشد. در این‌صورت اگر F پیوسته باشد و به‌ازای هر مقدار u، $F(t,u)$ معرف کمان α_u باشد، آنگاه F معرف تغییر شکل پیوسته‌ای از α به β از طریق کمانهای α_u است (به‌خصوص $F(t,\circ)$ معرف α و $F(t,\text{۱})$ معرف β است). توجه کنید که F منحصر به‌فرد نیست زیرا هر خانوادهٔ پیوسته از کمانهای α_u که $\alpha_\circ = \alpha$ و $\alpha_\text{۱} = \beta$، برای این منظور کفایت خواهد کرد.

مطالب فوق را فقط برای روشن شدن مفهوم هوموتوپی عرضه کردیم، حال تعریف رسمی و دقیق هوموتوپی را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳ دو نگاشت پیوستهٔ $f_\circ, f_\text{۱} : X \to Y$ را هوموتوپیک نامند هرگاه تابعی پیوسته مانند $F : X \times C \to Y$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$،

$$F(x,\circ) = f_\circ(x), \qquad F(x,\text{۱}) = f_\text{۱}(x)\,.$$

نگاشت F را هوموتوپی بین $f_\circ$ و $f_\text{۱}$ می‌نامند. در این حالت می‌نویسیم $f_\circ \simeq f_\text{۱}$ یا $F : f_\circ \simeq f_\text{۱}$. به‌ازای هر $u \in C = [\circ, \text{۱}]$، نگاشت F_u را با ضابطهٔ $F_u(x) = F(x,u)$، که در آن $x \in X$، تعریف می‌کنیم. بنابراین $F_\circ = f_\circ$ و $F_\text{۱} = f_\text{۱}$.

مثال ۱.۳ فرض می‌کنیم $X = Y = \mathbb{R}^n$ و به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$، $f_\circ(x) = x$ و $f_\backslash(x) = \circ$.
نگاشت $F : \mathbb{R}^n \times C \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ

$$F(x,t) = (\backslash - t)x$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، F یک هوموتوپی بین $f_\circ$ و $f_\backslash$ است.

مثال ۲.۳ فرض می‌کنیم $X = Y = C$ و به‌ازای هر $x \in C$، $f_\circ(x) = x$ و $f_\backslash(x) = \circ$.
نگاشت $F : C \times C \to C$ را با ضابطهٔ

$$F(x,u) = (\backslash - u)x$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، $F : f_\circ \simeq f_\backslash$.

تعریف ۲.۳ تابع پیوستهٔ $f : X \to Y$ را هوموتوپیک پوچ نامند هرگاه با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک باشد.

مثال ۳.۳ نگاشتهای هوموتوپیک پوچ ممکن است هوموتوپیک نباشند. در واقع ضرورتی ندارد نگاشتهای ثابت هوموتوپیک باشند. فرض می‌کنیم X همبند باشد و Y همبند نباشد. همچنین فرض می‌کنیم $y_\circ$ و $y_\backslash$ نقاطی در مؤلفه‌های متمایز Y باشند و به‌ازای هر $x \in X$، $f_\circ(x) = y_\circ$ و $f_\backslash(x) = y_\backslash$. در این‌صورت $f_\circ$ و $f_\backslash$ هوموتوپیک نیستند زیرا $X \times C$ همبند است در حالی‌که Y همبند نیست و نگارهٔ یک فضای همبند تحت یک نگاشت پیوسته همبند است.

۲. ویژگیهای نگاشتهای هوموتوپیک

قضیهٔ ۱.۳ تابعی مانند $f : B^n \to S^{n-\backslash}$ با ویژگی $f \cdot i = I$ موجود است اگر و فقط اگر نگاشت همانی $I : S^{n-\backslash} \to S^{n-\backslash}$ با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک باشد که در اینجا $i : S^{n-\backslash} \to B^n$ نگاشت مشمولیت و $\cdot$ نمایشگر ضرب اسکالری است.

اثبات. فرض می‌کنیم چنین تابعی مانند f موجود باشد. هوموتوپی

$$F : S^{n-\backslash} \times C \to S^{n-\backslash}$$

را با ضابطهٔ

$$F(x,t) = f(tx)$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت چون $x \in S^{n-1}$، داریم $F(x,1) = f(x) = x$ و $F(x,0) = f(0)$ که $f(0)$ مستقل از x است. بالعکس، فرض می‌کنیم نگاشت F،

$$F : S^{n-1} \times C \to S^{n-1}$$

با ویژگی $F(x,0) = c$ و $F(x,1) = x$ موجود باشد. تابع $f : B^n \to S^{n-1}$ را با ضابطهٔ

$$f(0) = c \quad \text{و} \quad f(0) = F\left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|\right)$$

تعریف می‌کنیم. چون S^{n-1} فشرده است، F یکنواخت‌پیوسته است. لذا به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، δی مثبتی مستقل از x چنان موجود است که هرگاه $t < \varepsilon$، آنگاه $\|F(x,t) - c\| < \delta$. بنابراین f در 0 پیوسته است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

لمهای بعدی در آینده مفید خواهند بود.

لم ۱.۳ اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ نگاشتهایی پیوسته باشند، آنگاه تبدیل مرکب $h = gf : X \to Z$ پیوسته است.

اثبات. نگارهٔ معکوس هر مجموعهٔ باز از فضای Y، در X باز است و نگارهٔ معکوس هر مجموعهٔ باز از فضای Z، در Y باز است. فرض می‌کنیم G مجموعهٔ باز دلخواهی در Z باشد. در این‌صورت، پیوستگی h از رابطهٔ

$$h^{-1}(G) = f^{-1}\{g^{-1}(G)\}$$

حاصل می‌شود.

لم ۲.۳ اگر $p : X \times Y \to X$ و $q : X \times Y \to Y$ به‌صورت $p(x_1, x_2) = x_1$ و $q(x_1, x_2) = x_2$ تعریف شوند که در آن $x_1 \in X$ و $x_2 \in Y$، آنگاه p و q پیوسته‌اند.

اثبات. فرض می‌کنیم G در X باز باشد. در این‌صورت، $p^{-1}(G)$ مجموعهٔ زوجهایی مرتب به‌صورت (x_1, x_2) است که $x_1 \in G$ و $x_2 \in Y$. لذا $p^{-1}(G) = G \times Y$ که $G \times Y$ در $X \times Y$ باز است. بنابراین، p پیوسته است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که q پیوسته است.

لم ۳.۳ اگر X اجتماع دو زیرمجموعهٔ بسته A و B باشد و اگر $f : A \rightarrow Y$ و $g : B \rightarrow Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$، آنگاه تبدیل $h : X \rightarrow Y$ با ضابطهٔ $h(x) = f(x)$ به‌ازای $x \in A$ و $h(x) = g(x)$ به‌ازای $x \in B$، پیوسته است.

اثبات. فرض می‌کنیم $F \subseteq X$، $F_۱ = F \cap A$ و $F_۲ = F \cap B$. در این‌صورت $F = F_۱ \cup F_۲$ و لذا

$$h(F) = h(F_۱) \cup h(F_۲) .$$

چون $\overline{F} = \overline{F}_۱ \cup \overline{F}_۲$، داریم

$$h(\overline{F}) = h(\overline{F}_۱) \cup h(\overline{F}_۲)$$

که در آن علامت ـــ روی مجموعه نمایشگر بستار آن مجموعه است.

اگر $x \in \overline{F}_۱ = \overline{F \cap A}$، آنگاه روشن است که $x \in \overline{A}$ و لذا $x \in A$ زیرا A بسته است. بنابراین $\overline{F}_۱ \subseteq A$، در نتیجه $h(\overline{F}_۱) = f(\overline{F}_۱)$. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم $\overline{F}_۲ \subseteq B$ و لذا $h(\overline{F}_۲) = g(\overline{F}_۲)$. چون f و g پیوسته‌اند، داریم

$$f(\overline{F}_۱) \subseteq \overline{f(F_۱)}, \quad g(\overline{F}_۲) \subseteq \overline{g(F_۲)} .$$

در نتیجه

$$h(\overline{F}) = h(\overline{F}_۱) \cup h(\overline{F}_۲) \subseteq \overline{f(F_۱)} \cup \overline{g(F_۲)} = \overline{h(F_۱)} \cup \overline{h(F_۲)} .$$

لذا $\overline{h(F_۱)} \cup \overline{h(F_۲)} = \overline{h(F_۱) \cup h(F_۲)} = \overline{h(F)}$ و بنابراین

$$h(\overline{F}) \subseteq \overline{h(F)}$$

یعنی h پیوسته است.

قضیهٔ ۲.۳ رابطهٔ $\simeq$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات. با تعریف هوموتوپی $F(x,t)$ به‌صورت $F(x,t) = f(x)$، نتیجه می‌گیریم که $f \simeq f$. اگر $F : f \simeq g$، آنگاه $G : g \simeq f$ زیرا نگاشت $G(x,t) = F(x, ۱-t)$ یک هوموتوپی بین g و f است. اگر $F : f \simeq g$ و $G : g \simeq h$، نگاشت H را با ضابطهٔ

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, ۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ G(x, ۲t-۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ . \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم . در این‌صورت، بنابه لم ۳.۳، H پیوسته است و نیز $H : f \simeq h$.

مفهوم ردهٔ هوموتوپی نگاشتها از این قضیه حاصل می‌شود.

اگر f نگاشتی پیوسته باشد، آنگاه ردهٔ هوموتوپی متناظر آن متشکل از تمام نگاشتهای پیوستهٔ هوموتوپیک با f است که با $\{f\}$ نمایش داده می‌شود و مجموعهٔ تمام رده‌های هوموتوپی نگاشتهای پیوسته از X به Y با $[X, Y]$ نمایش داده می‌شود.

قضیهٔ ۳.۳ (ترکیب و تحدید).

(۱) نگاشتهای پیوستهٔ $f_۱, f_۲ : X \to Y$ و $g_۱, g_۲ : Y \to Z$ مفروض‌اند. اگر $f_۱ \simeq f_۲$ و $g_۱ \simeq g_۲$، آنگاه $g_۱ f_۱ \simeq g_۲ f_۲$.

(۲) نگاشتهای پیوستهٔ $f, g : X \to Y$ مفروض‌اند و $f \simeq g$. در این‌صورت به‌ازای هر $A \subseteq X$،

$$f|A = g|A\,.$$

اثبات. (۱) فرض می‌کنیم $\Phi : f_۱ \simeq f_۲$ و $\Psi : g_۱ \simeq g_۲$. تعریف می‌کنیم

$$F(x,t) = \begin{cases} g_۱\Phi(x, ۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ \Psi(f_۲(x), ۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱\,. \end{cases}$$

در این‌صورت، $F(x,t)$ نگاشتی پیوسته از $X \times C$ به Z و یک هوموتوپی بین $g_۱ f_۱$ و $g_۲ f_۲$ است.

(۲) فرض می‌کنیم $i : A \to X$ نگاشت مشمولیت باشد. در این‌صورت $f|A = fi$ و لذا اثبات از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۴.۳ فرض می‌کنیم f و g نگاشتهایی هوموتوپیک از X به Y باشند و h نگاشتی پیوسته از Y به Z باشد. در این‌صورت، hf و hg نگاشتهایی هوموتوپیک از X به Z هستند.

اثبات. نگاشتی مانند $F : X \times C \to Y$ چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, ۰) = f(x)$ و $F(x, ۱) = g(x)$. تبدیل $G : X \times C \to Z$ را با ضابطهٔ

$$G(x,t) = hF(x,t)$$

تعریف می‌کنیم. چون F و h پیوسته‌اند، بنابه لم ۱.۳، G پیوسته است.

به‌علاوه،

$$G(x, \circ) = hF(x, \circ) = h(f(x))$$

و

$$G(x, \text{۱}) = hF(x, \text{۱}) = h(g(x))\,.$$

لذا $hg \simeq hf$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ زیر را می‌توان به طریقی مشابه قضیهٔ فوق ثابت کرد.

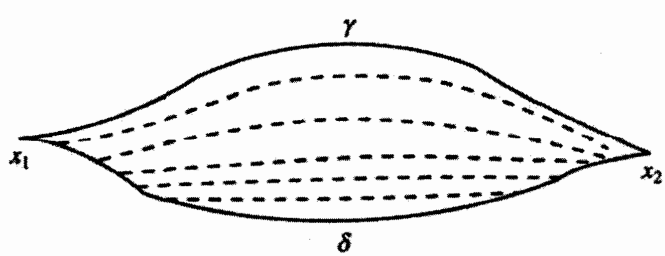
قضیهٔ ۵.۳ اگر f نگاشتی پیوسته از X به Y و g و h نگاشتهایی هوموتوپیک از Y به Z باشند، آنگاه gf و hf نگاشتهایی هوموتوپیک از X به Z هستند.

۳. هوموتوپی نسبی

در مواردی هوموتوپی مورد نظر به نوعی دچار محدودیت است. در این محدودیت، لازم است زیرمجموعه‌ای در طی فرایند تغییر شکل [که آن را فرایند دگردیسی می‌نامیم] ثابت باقی بماند. شکل ۲.۳ را که در آن دوکمان سادهٔ γ و δ با نقاط ابتدایی و انتهایی یکسان $x_\text{۱}$ و $x_\text{۲}$ نشان داده شده‌اند، ملاحظه کنید.

فرض می‌کنیم γ به‌طور پیوسته‌ای به‌صورت تشریح شده در ابتدای فصل، تغییر شکل (یا دگردیسی) یابد و به δ تبدیل شود، اما با این محدودیت که نقاط ابتدایی و انتهایی هر یک از اعضای خانوادهٔ کمانهای میانی نقاط $x_\text{۱}$ و $x_\text{۲}$ باشد. در این حالت گوییم نگاشتهای معرف γ و δ نسبت به زیرمجموعهٔ متشکل از $x_\text{۱}$ و $x_\text{۲}$ هوموتوپیک هستند. اکنون تعریف دقیق این مفهوم را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳.۳ فرض می‌کنیم $A \subseteq X$ و نگاشتهای $f_\circ : X \to Y$ و $f_\text{۱} : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. در این‌صورت، می‌گویند $f_\circ$ و $f_\text{۱}$ نسبت به A هوموتوپیک هستند هرگاه یک



شکل ۲.۳

هوموتوپی مانند F بین f_0 و f_1 چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in A$، $F(x,t)$ مستقل از t باشد. به عبارت دیگر، به‌ازای هر $x \in A$ و هر $t \in C$، $F(x,t) = f_0(x)$.

در این حالت واضح است که به‌ازای هر $x \in A$، $f_0(x) = f_1(x)$. هوموتوپی F را هوموتوپی نسبت به A می‌نامند و به‌صورت $f_0 \simeq f_1(\mathrm{rel}\, A)$ و هنگامی که اشاره به F مدنظر باشد، به‌صورت

$$F : f_0 \simeq f_1(\mathrm{rel}\, A)$$

نشان می‌دهند.* لذا، اگر

$$F : f_0 \simeq f_1(\mathrm{rel}\, A)$$

آنگاه به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, 0) = f_0(x)$ و $F(x, 1) = f_1(x)$، و به‌ازای هر $x_0 \in A$ و هر $t \in C$، $F(x_0, t) = f_0(x_0) = f_1(x_0)$. اگر $A = \phi$، آنگاه هوموتوپی نسبت به A همان هوموتوپی است. بنابراین هوموتوپی معمولی حالت خاصی از هوموتوپی نسبی است.

قضیهٔ ۶.۳ رابطهٔ هوموتوپیک بودن نسبت به A یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات. بازتابی. F را به‌صورت $F(x,t) = f(x)$ تعریف می‌کنیم، در این‌صورت F پیوسته است. روشن است که به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, 1) = f(x) = F(x, 0)$ و $F(x,t) = f(x)$. لذا $f \simeq f(\mathrm{rel}\, A)$ که در آن A می‌تواند هر زیرمجموعه‌ای از X باشد.

تقارن. فرض می‌کنیم $f \simeq g(\mathrm{rel}\, A)$. در این‌صورت نگاشت پیوستهٔ $F : X \times C \to Y$ چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, 0) = f(x)$ و $F(x, 1) = g(x)$. به‌علاوه اگر $x_0 \in A$، $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$. نگاشت $G : X \times C \to Y$ را با ضابطهٔ $G(x,t) = F(x, 1-t)$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت بنابه لم ۱.۳، G پیوسته است و

$$G(x, 0) = g(x), G(x, 1) = f(x)$$

همچنین به‌ازای هر $x_0 \in A$، $G(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$. لذا $g \simeq f(\mathrm{rel}\, A)$.

ترایایی. فرض می‌کنیم $f \simeq g(\mathrm{rel}\, A)$ و $g \simeq h(\mathrm{rel}\, A)$. نگاشتهای پیوستهٔ $F, G : X \times C \to Y$ چنان موجودند که $F(x, 0) = f(x)$، $F(x, 1) = g(x)$، و به‌ازای هر $x_0 \in A$، $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$، همچنین $G(x, 0) = g(x)$، $G(x, 1) = h(x)$، و به‌ازای هر $x_0 \in A$، $G(x_0, t) = g(x_0) = h(x_0)$.

---

* rel نشانهٔ اختصاری relative است. ـ م.

تبدیل $H : X \times C \to Y$ را با ضابطهٔ

$$H(x,t) = F(x, 2t) \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$H(x,t) = G(x, 2t-1) \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت بنابه لم ۳.۳، H پیوسته است و $H(x,0)=f(x)$، $H(x,1)=h(x)$، و به‌ازای هر $x_0 \in A$، $H(x_0,t) = f(x_0) = h(x_0)$. بنابراین $f \simeq h(\mathrm{rel}\, A)$.

نکتهٔ ۱.۳ از قضیهٔ ۶.۳ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تمام نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $f : X \to Y$ که نگارهٔ آنها در $x \in A$ نقطهٔ واحدی از Y باشد، به رده‌هایی که دوبه‌دو هم‌ارزند تقسیم می‌شود. دو نگاشت پیوستهٔ f و g متعلق به یک‌رده هستند اگر و فقط اگر $f \simeq g(\mathrm{rel}\, A)$. هر یک از این رده‌های نگاشتهای پیوسته را ردهٔ هوموتوپی می‌نامند.

تمرین

۱. فرض کنید نگاشتهای $f, g : X \to S^n$ پیوسته باشند و به‌ازای هر $x \in X$، $f(x) \neq -g(x)$. نشان دهید $f \simeq g$.

۲. فرض کنید نگاشت $f : S^1 \to X$ پیوسته باشد. نشان دهید f هوموتوپیک پوچ است اگر و فقط اگر نگاشتی پیوسته مانند $g : B^2 \to X$ چنان موجود باشد که $f = g|S^1$.

۳. فرض کنید $f_0 \simeq f_1(\mathrm{rel}\, A) : X \to Y$ و نگاشت $g : Y \to Z$ پیوسته باشد. نشان دهید $gf_0 \simeq gf_1(\mathrm{rel}\, A) : X \to Z$.

۴. فرض‌کنید $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$ و $g_0 \simeq g_1 : Y \to Z$. نشان دهید $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1 : X \to Z$.

۴

نوع هوموتوپی و درون‌بریها

۱. فضای انقباض‌پذیر

اگر نگاشت $g : X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد که نگارهٔ آن فقط شامل یک نقطه باشد، آنگاه g نگاشتی ثابت است. اگر نگاشت $f : X \to Y$ هوموتوپیک با چنین نگاشتی باشد، آنگاه می‌گوییم f هوموتوپیک با ثابت (یا هوموتوپیک پوچ) است. اگر نگاشت همانی I_X هوموتوپیک با یک نگاشت ثابت (در رسته‌ای مناسب) باشد، آنگاه می‌گوییم X دگردیسی‌پذیر و تبدیل‌پذیر به یک نقطه یا انقباض‌پذیر است.

اجمالاً می‌گوییم فضای انقباض‌پذیر چنان است که می‌تواند در خودش دگردیسی یابد و به یک نقطه تبدیل شود.

مثال ۱.۴ دایره انقباض‌پذیر نیست. سطح کره انقباض‌پذیر نیست.

مثال ۲.۴ B^n، کرهٔ «توپُر» nبعدیِ بستهٔ واحد را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که B^n انقباض‌پذیر است. B^n از نقاطی از $\mathbb{R}^n$مانند $(x_1, \ldots, x_n)$ تشکیل می‌شود که در رابطهٔ $x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1$

صدق کنند. تبدیل $F: B^n \times C \to B^n$ با ضابطهٔ

$$F(x,t) = ((۱-t)x_۱, \ldots, (۱-t)x_n)$$

که در آن $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in B^n$، پیوسته است و

$$F(x,\circ) = x, \quad F(x,۱) = (\circ, \circ, \ldots, \circ)\,.$$

لذا نگاشت همانی $I: B^n \to B^n$ هوموتوپیک با ثابت است.

قضیهٔ ۱.۴ اگر Y انقباض‌پذیر باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \to Y$ هوموتوپیک با ثابت است.

اثبات. چون Y انقباض‌پذیر است، نگاشتی پیوسته مانند $F: Y \times C \to Y$ چنان موجود است که به‌ازای هر $y \in Y$، $F(y,\circ) = y$ و $F(y,۱) = y_\circ$، که در آن $y_\circ$ عنصری ثابت است. فرض می‌کنیم نگاشت $f: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد.

نگاشت $G: X \times C \to Y$ را با ضابطهٔ

$$G(x,t) = F(f(x),t) \qquad x \in X$$

تعریف می‌کنیم.

با استفاده از لم ۱.۳ نتیجه می‌گیریم که G پیوسته است. به‌علاوه

$$G(x,\circ) = F(f(x),\circ) = f(x)$$

و

$$G(x,۱) = F(f(x),۱) = y_\circ\,.$$

بنابراین f هوموتوپیک با $g: X \to Y$ است که g نگاشت ثابت با ضابطهٔ $g(x) = y_\circ$، به‌ازای هر $x \in X$، است. لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

نکتهٔ ۱.۴ از این قضیه نتیجه می‌شود که در هر فضای انقباض‌پذیر فقط یک ردهٔ هوموتوپی از نگاشتها وجود دارد.

۲. نوع هوموتوپی

گویند فضای X و فضای Y یک نوع هوموتوپی دارند هرگاه نگاشتهای پیوستهٔ $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ چنان موجود باشند که $gf : X \to X$ هوموتوپیک با I_X، و $fg : Y \to Y$ هوموتوپیک با I_Y باشد.

هر یک از نگاشتهای f و g را هم‌ارزی هوموتوپی می‌نامند. فضاهای X و Y را نیز هوموتوپی‌ْهم‌ارز می‌نامند.

مثال ۳.۴ اگر X با Y همسانریخت باشد، آنگاه X و Y یک نوع هوموتوپی دارند.

مثال ۴.۴ عکس مثال فوق (مثال ۳.۴) برقرار نیست. فضای انقباض‌پذیر و فضایی که فقط شامل یک نقطه است یک نوع هوموتوپی دارند. اما این دو فضا ممکن است همسانریخت نباشند (اگر فضای انقباض‌پذیر بیش از یک نقطه داشته باشد، با فضای تک‌نقطه‌ای همسانریخت نیست). مثال دیگری را مدنظر قرار می‌دهیم.

مثال ۵.۴ B^n همسانریخت با یک نقطهٔ تنها، مثلاً $\{y_\circ\} \subseteq B^n$، نیست اما نشان می‌دهیم که نوع هوموتوپی B^n و نقطهٔ تنها یکی است. برای مشاهدهٔ این موضوع، نگاشت مشمولیت $f : \{y\} \to B^n$ (با ضابطهٔ $f(y) = y$) و نگاشت ثابت $g : B^n \to \{y\}$ را در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت، $gf = I$، و نگاشت $F : B^n \times C \to B^n$ با ضابطهٔ $F(x,t) = tx + (\text{۱} - t)y$ یک هوموتوپی بین fg و I_{B^n} است.

قضیهٔ ۲.۴ رابطهٔ یک نوع هوموتوپی داشتن رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات. ویژگیهای بازتابی و تقارن به سادگی از تعریف نتیجه می‌شوند. فرض می‌کنیم X و Y یک نوع هوموتوپی، و Y و Z نیز یک نوع هوموتوپی داشته باشند. نگاشتهای پیوستهٔ $f : X \to Y$، $g : Y \to Y$، $f_\text{۱} : Y \to Z$ و $g_\text{۱} : Z \to Y$ چنان موجودند که gf، fg، $g_\text{۱}f_\text{۱}$ و $f_\text{۱}g_\text{۱}$ با نگاشتهای همانی مناسب هوموتوپیک باشند. تبدیلهای

$$f_\text{۲} : X \to Z \quad \text{و} \quad g_\text{۲} : Z \to X$$

را با ضابطه‌های

$$f_\text{۲}(x) = f_\text{۱}(f(x)) \quad \text{و} \quad g_\text{۲}(x) = g(g_\text{۱}(x))$$

در نظر بگیرید.

بنابه لم ۳.۱، $f_۲$ و $g_۲$ پیوسته‌اند و بنابه قضایای ۳.۴ و ۳.۵، $g(g_۱ f_۱)$ هوموتوپیک با g است زیرا $g_۱ f_۱$ هوموتوپیک با همانی است. لذا نگاشت $g_۲ f_۲ = g((g_۱ f_۱) f)$ هوموتوپیک با gf و در نتیجه هوموتوپیک با همانی است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $f_۲ g_۲$ هوموتوپیک با همانی $I : Z \to Z$ است. بنابراین X و Z یک نوع هوموتوپی دارند. در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

۳. درون‌بریها

تعریف ۱.۴ زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ را درون‌برد X می‌نامند هرگاه نگاشتی پیوسته مانند $r : X \to A$ چنان موجود باشد که $ri = I_A$، که در آن نگاشت $i : A \to X$ نگاشت مشمولیت است، در نتیجه به‌ازای هر $a \in A$، $r(a) = a$. نگاشت r را درون‌بری می‌نامند.

تعریف ۲.۴ زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ را درون‌برد دگردیسی X می‌نامند هرگاه یک درون‌بری مانند $r : X \to A$ چنان موجود باشد که

$$ir \simeq I_X$$

که در آن نگاشت $i : A \to X$ نگاشت مشمولیت است.

به عبارت دیگر A درون‌برد دگردیسی X است هرگاه یک هوموتوپی مانند $F : X \times C \to X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in A$، $F(x, ۰) = x$ و $F(x, ۱) \in A$.

مثال ۶.۴ دایره درون‌برد دگردیسی استوانه است.

مثال ۷.۴ اگر A درون‌برد دگردیسی X باشد، آنگاه A و X هوموتوپی‌هم‌ارز هستند.

تعریف ۳.۴ زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ را درون‌برد دگردیسی قوی نامند هرگاه درون‌بری $r : X \to A$ چنان موجود باشد که

$$ir \simeq I_X (\mathrm{rel}\, A) .$$

این تعریف معادل تعریف زیر است.

تعریف ۴.۴ زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ را درون‌برد دگردیسی قوی X نامند هرگاه یک هوموتوپی مانند $F : X \times C \to X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, ۰) = x$، و به‌ازای هر $F(a) \in A$ و $t \in C$، $F(a, t) = a$، و به‌ازای هر $x \in X$، $F(x, ۱) \in A$.

مثال ۸.۴ هر درون‌برد دگردیسی قوی، درون‌برد دگردیسی است.

مثال ۹.۴ فرض می‌کنیم X فضایی دلخواه باشد. در این‌صورت، X درون‌برد X است. هر $x_\circ \in X$ نیز درون‌برد X است.

مثال ۱۰.۴ گوی واحد B^n درون‌برد $\mathbb{R}^n$ است. نگاشت زیر را بررسی کنید: $r(x) = x/\|x\|$ وقتی $\|x\| \geq ۱$ و $r(x) = x$ وقتی $\|x\| < ۱$.

مثال ۱۱.۴ S^n درون‌برد دگردیسی قوی $\mathbb{R}^{n+۱} - \circ$ است.

نگاشت $F : (\mathbb{R}^{n+۱} - \circ) \times C \to \mathbb{R}^{n+۱} - \circ$ را با ضابطهٔ

$$F(x,t) = (۱-t)x + \frac{tx}{\|x\|} \quad x \in \mathbb{R}^{n+۱} - \circ, t \in C$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت نتیجه می‌گیریم S^n درون‌برد دگردیسی قوی $\mathbb{R}^{n+۱} - \circ$ است.

مثال ۱۲.۴ زیرمجموعه‌های $C_۱$ و $C_۲$ از $\mathbb{R}^۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_۱ = \{x = (x_۱, x_۲) : (x_۱ - ۱)^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$$

و

$$C_۲ = \{x = (x_۱, x_۲) : (x_۱ + ۱)^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$$

و می‌نویسیم $Y = C_۱ \cup C_۲$ و $X = Y - \{(۲,\circ), (-۲,\circ)\}$.

نشان می‌دهیم که نقطهٔ $x_\circ = (\circ,\circ)$ درون‌برد دگردیسی قوی X است. نگاشتهای $i : \{x_\circ\} \to X$ و $r : X \to \{x_\circ\}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت، $ri = I$. برای مشاهدهٔ اینکه $ir \simeq I(\mathrm{rel}\{x_\circ\})$، هوموتوپی $F : X \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(x,t) = \frac{((۱-t)x}{\|(۱-t)x_۱ + (-۱)^k, (۱-t)x_۲)\|}$$

که در آن $x \in C_k$، $k = ۱,۲$، تعریف می‌کنیم. $F(x,t)$ نامتناهی نیست، زیرا به‌ازای هر $x \in X$، $((۱-t)x_۱ + (-۱)^k, (۱-t)x_۲) \neq (\circ,\circ)$. می‌توان نتیجه گرفت که F پیوسته است. علاوه بر این،

$$F(x_\circ, t) = x_\circ, \quad F(x,\circ) = x \quad \text{و} \quad F(x,۱) = x_\circ.$$

لذا $ir \simeq I(\mathrm{rel}\{x_\circ\})$ و در نتیجه $\{x_\circ\}$ درون‌برد دگردیسی قوی X است.

تمرین

۱. فرض کنید $\{I_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از بازه‌های واحد باشد. نشان دهید که $\Pi_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ انقباض‌پذیر است.

۲. نشان دهید X انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر نگاشت همانی I_X هوموتوپیک با یک نگاشت ثابت باشد.

۳. فرض کنید X همبند باشد و نوع هوموتوپی آن با Y یکی باشد. نشان دهید Y همبند است.

۴. فرض کنید $A \subseteq B \subseteq X$ و B درون‌برد X و A درون‌برد B باشد. نشان دهید که A درون‌برد X است.

۵. فرض کنید X موضعاً فشرده و A درون‌برد X باشد. نشان دهید A نیز موضعاً فشرده است.

۶. نشان دهید هر درون‌برد یک فضای هاوسدورف زیرمجموعه‌ای بسته است.

۷. نشان دهید $\{۱\} \cup \{۰\}$ درون‌برد C نیست.

۸. نشان دهید یک درون‌بری از B^n به $S^{n-۱}$ وجود دارد اگر و فقط اگر $S^{n-۱}$ انقباض‌پذیر باشد. (راهنمایی: فرض کنید $F : S^{n-۱} \times C \to S^{n-۱}$ یک هوموتوپی بین یک نگاشت ثابت و نگاشت همانی باشد. سپس از نگاشت $S^{n-۱} \times C \to B^n$ با ضابطهٔ $(x,t) \to tx$، و این نکته که $F(S^{n-۱} \times \{۰\})$ یک نقطهٔ تنهاست، استفاده کنید).

۵

مسیر

۱. تعاریف

فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک و C نمایشگر بازهٔ واحد $[\circ, \text{۱}]$ باشد. مسیر در فضای X نگاشتی پیوسته‌مانند $f : C \to X$ است. نقاط $f(\circ)$ و $f(\text{۱})$ را به‌ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر می‌نامند. باید توجه داشت که مسیر، نگاشت f است نه نگارهٔ $f([\circ, \text{۱}])$.

اگر x عضو ثابتی از X باشد، نگاشت ثابت ε_x نگاشت

$$\varepsilon_x : [\circ, \text{۱}] \to X$$

با ضابطهٔ $\varepsilon_x(t) = x$ به‌ازای هر $t \in C$، است.

مسیر ε_x را مسیر پوچ می‌نامند.

مثال ۱.۵ ε_x مسیر است.

مسیر معکوس f، که آن را با $\overline{f}$ نشان می‌دهیم، مسیری است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{f}(t) = f(\text{۱} - t) \qquad \circ \le t \le \text{۱}$$

لذا نقطهٔ انتهایی یک مسیر منطبق بر نقطهٔ ابتدایی مسیر معکوس آن و نقطهٔ ابتدایی مسیر منطبق بر نقطهٔ انتهایی مسیر معکوس آن است. نگارهٔ f و نگارهٔ معکوس آن $\overline{f}$، مجموعهٔ واحدی از نقاط X هستند، اما این دو نگاره در دو جهت مخالف هم حاصل می‌شوند.

فرض می‌کنیم f و g دو مسیر باشند و $f(۱) = g(۰)$، یعنی نقطهٔ انتهایی f منطبق بر نقطهٔ ابتدایی g باشد. در این‌صورت، مسیر حاصلضرب f و g را که با $f * g$ نمایش می‌دهند، به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$(f * g)(t) = f(۲t) \qquad ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲}$$

$$(f * g)(t) = g(۲t - ۱) \qquad \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱$$

بنابه لم ۳.۳، تابع $f * g$ پیوسته است و لذا $f * g$ مسیر است. به تسامح، $f * g$ را می‌توان به‌صورت مسیر f که به دنبال آن مسیر g آمده است، در نظر گرفت. با خلاصه کردن این ملاحظات، می‌توانیم لمهای زیر را بیان کنیم.

لم ۱.۵ اگر f مسیری در X باشد، آنگاه $\overline{f}$ نیز مسیر است.

لم ۲.۵ اگر f و g دو مسیر در X باشند به‌طوری که $f(۱) = g(۰)$، آنگاه تابع $f*g : [۰, ۱] \to X$ با ضابطهٔ

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ g(۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

مسیری در X است.

۲. فضای مسیری‌همبند

تعریف ۱.۵ فضای X را مسیری‌همبند نامند هرگاه به‌ازای هر $a, b \in X$، مسیری در X از a به b وجود داشته باشد.

بنابراین مؤلفهٔ مسیری‌همبند، زیرمجموعهٔ مسیری‌همبند ماکسیمال است.

مثال ۲.۵ $\mathbb{R}^n$ را با توپولوژی معمولی در نظر بگیرید. اگر $a, b \in \mathbb{R}^n$، آنگاه نگاشت $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ

$$f(t) = bt + a(۱ - t)$$

مسیری از a به b است. لذا $\mathbb{R}^n$ مسیری‌همبند است.

مثال ۳.۵ هر زیرمجموعهٔ محدب $\mathbb{R}^n$ مسیری‌همبند است.

قضیهٔ ۱.۵ اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، X مسیری‌همبند، و $g : X \to Y$ تابعی پیوسته و پوشا باشد، آنگاه Y مسیری‌همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم $a, b \in Y$، در این‌صورت نقاط $a', b' \in X$ چنان موجودند که $g(a') = a$ و $g(b') = b$. چون X مسیری‌همبند است، مسیری از a' به b' مانند f وجود دارد. تابع مرکب gf را، که به‌وضوح مسیری از a به b است، در نظر بگیرید. وجود این تابع نشان می‌دهد که Y مسیری‌همبند است.

فرع ۱.۵ اگر X و Y همسانریخت باشند، آنگاه X مسیری‌همبند است اگر و فقط اگر Y مسیری‌همبند باشد.

در قضیهٔ بعدی مشاهده می‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ همبند $\mathbb{R}^n$ مسیری‌همبند است.

قضیهٔ ۲.۵ هر زیرمجموعهٔ باز و ناتهی و همبند $\mathbb{R}^n$ مسیری‌همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم E چنین مجموعه‌ای باشد و $p \in E$. همچنین فرض می‌کنیم F زیرمجموعه‌ای از E متشکل از تمام نقاطی از E باشد که هر یک را بتوان با مسیری در E به p وصل کرد. با در نظر گرفتن مسیر پوچ ε_p، مشاهده می‌کنیم که F ناتهی است. نشان می‌دهیم که F هم بسته و هم باز است.

برای اثبات باز بودن F، فرض می‌کنیم $q \in F \subseteq E$. چون E باز است، ε مثبتی چنان موجود است که

$$q \in D = \{x : \{x : ||q - x\| < \varepsilon\} \subseteq E\,.$$

چون D با $\mathbb{R}^n$ همسانریخت است و $\mathbb{R}^n$ (بنابه مثال ۲.۵) مسیری‌همبند است، از فرع ۱.۵ نتیجه می‌گیریم که D مسیری‌همبند است، یعنی هر نقطهٔ D را می‌توان با مسیری در D به q وصل کرد. بنابراین هر نقطه را می‌توان با مسیری در E به p وصل کرد و لذا $q \in D \subseteq F$. در نتیجه F باز است.

برای نشان دادن اینکه F بسته است، فرض می‌کنیم $G = E - F$. لذا G متشکل از تمام

نقاطی از E است که آنها را نمی‌توان با مسیری در E به p وصل کرد. با استدلالی مشابه استدلال فوق، نتیجه می‌گیریم که G باز است و لذا F بسته است.

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که E همبند است و F زیرمجموعه‌ای ناتهی از E است که هم باز و هم بسته است. لذا $E = F$ و در نتیجه E مسیری‌همبند است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۳.۵ فرض می‌کنیم $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مسیری‌همبند X باشد که

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \neq \phi$$

در این‌صورت، زیرمجموعهٔ $Y = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ مسیری‌همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p, q \in Y$، در این‌صورت به‌ازای k و lای، $p \in Y_k$ و $q \in Y_l$. فرض می‌کنیم $r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. چون Y_k مسیری‌همبند است و $p, r \in Y_k$، مسیری از p به r مانند f وجود دارد. همچنین مسیری از r به q مانند g موجود است. نگاشت $h = f * g$ را با ضابطهٔ

$$h(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ g(۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، h مسیری از p به q است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۲.۵ اگر $n \geq ۱$، آنگاه $\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}$ مسیری‌همبند است.

فرع ۳.۵ S^n مسیری‌همبند است $(n \geq ۱)$.

قضیهٔ ۴.۵ هر فضای مسیری‌همبند همبند است.

اثبات. فرض می‌کنیم X مسیری‌همبند باشد و $X = U \cup V$ که در آن U و V ناتهی و باز هستند. با اختیار دو نقطه یکی از U و دیگری از V، می‌توانیم مسیری مانند $f : [۰, ۱] \to X$ را چنان بیابیم که $f(۰) \in U$ و $f(۱) \in V$. چون $[۰, ۱]$ همبند است، $f([۰, ۱])$ همبند است و در نتیجه $U \cap f([۰, ۱])$ و $V \cap f([۰, ۱])$ نمی‌توانند مجزا باشند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که U و V نمی‌توانند مجزا باشند. لذا X همبند است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۴.۵ فرض می‌کنیم $X_۱$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^۲$ باشد که به‌صورت

$$X_۱ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x > ۰, y = \sin \frac{۱}{x}\right\}$$

تعریف شده است. در این‌صورت $X_۱$ مسیری‌همبند است.

مثال ۵.۵ فرض می‌کنیم $X_۲$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^۲$ باشد که به‌صورت

$$X_۲ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x = ۰, -۱ \leq y \leq ۱\}$$

تعریف شده است. در این‌صورت $X_۲$ مسیری‌همبند است.

[شایان توجه است که چون $X_۱ \cup X_۲ = \overline{X}_۱$، و $X_۱$ همبند است، پس فضای $X_۱ \cup X_۲$ همبند است، اما این فضا مسیری‌همبند نیست.]*

مثال ۶.۵ فرض می‌کنیم $\mathbb{C}$ نمایشگر صفحهٔ مختلط باشد و

$A = \{i\}$، که i واحد موهومی است

و

$$B = [۰, ۱] \cup \left\{\left(\frac{۱}{n}\right) + iy : \quad n \in \mathbb{N}, ۰ \leq y \leq ۱\right\}.$$

فرض می‌کنیم $X = A \cup B$. نشان می‌دهیم X همبند است اما مسیری‌همبند نیست. به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم

$$B_n = [۰, ۱] \cup \left\{\left(\frac{۱}{n}\right) + iy : \quad ۰ \leq y \leq ۱\right\}.$$

بنابه قضیهٔ ۳.۵، B_n مسیری‌همبند است و باز هم بنابه همان قضیه، زیرمجموعهٔ $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ مسیری‌همبند است. بنابراین، بنابه قضیهٔ ۴.۵، B همبند است.

فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و بسته از X باشد. می‌توانیم فرض کنیم $A \subseteq U$. اگر چنین نباشد، متمم U را که باز و بسته و شامل A است، در نظر می‌گیریم. چون $i \in U$ و U باز است، عدد $r > ۰$ چنان موجود است که

$$\{x : |i - x| < r\} \cap X \subseteq U.$$

واضح است که عدد $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $۱/n + i \in U$، و لذا $U \cap B \neq \phi$. حال

---

* مثالهای ۴.۵ و ۵.۵ تصحیح شده‌اند و جملهٔ داخل کروشه از مترجم است.ـم.

توجه کنید که B همبند و $U \cap B$ زیرمجموعه‌ای ناتهی و باز و بسته از B است، لذا $U \cap B = B$ و در نتیجه $B \subseteq U$. همچنین $A \subseteq U$ و $X = A \cup B$، لذا $X = U$ و در نتیجه X همبند است (در حقیقت، به‌دست می‌آوریم $B \subseteq X \subseteq \overline{B}$).

حال نشان می‌دهیم X مسیری‌همبند نیست. بدین‌منظور، ثابت می‌کنیم تنها مسیری در X که نقطهٔ ابتدایی آن i است، مسیر ثابت (مسیر پوچ) است.

فرض می‌کنیم f مسیری در X با نقطهٔ ابتدایی i باشد. توجه کنید که $f^{-۱}(i)$ بسته، و نیز ناتهی است زیرا $\circ \in f^{-۱}(i)$. فرض می‌کنیم G زیرمجموعه‌ای باز از X باشد که به‌صورت

$$G = X \cap \left\{ Z \in \mathbb{C} : |Z - i| < \frac{۱}{۲} \right\}.$$

تعریف شده است. اگر $t_\circ \in f^{-۱}(i)$، آنگاه بنابه پیوستگی f، ε مثبتی چنان وجود دارد که به‌ازای هر t با ویژگی $|t - t_\circ| < \varepsilon$، $f(t) \in G$. می‌خواهیم نشان دهیم

$$f((t_\circ - \varepsilon, t_\circ + \varepsilon) \cap [\circ, ۱]) = i.$$

بدین‌منظور، فرض می‌کنیم $|t_۱ - t_\circ| < \varepsilon$ و $f(t_۱) \in B$. $G \cap B$ اجتماع بازه‌هایی مجزاست، و بازه‌ای که شامل $f(t_۱)$ باشد، در G هم باز و هم بسته است. این بازه باز است زیرا G باز است، و بسته است زیرا به‌ازای یک $n \in \mathbb{N}$، این بازه به‌صورت

$$\left\{ \left(\frac{۱}{n}\right) + iy : \circ \leq y \leq ۱ \right\} \cap G.$$

است. بنابراین از آنجا که $f((t_\circ - \varepsilon, t_\circ + \varepsilon) \cap [\circ, ۱])$ همبند است، به تناقض رسیده‌ایم. لذا

$$(t_\circ - \varepsilon, t_\circ + \varepsilon) \cap [\circ, ۱] \subseteq f^{-۱}(i)$$

و این نتیجه نشان می‌دهد که $f^{-۱}(i)$ باز است. بنابراین همبندی $[\circ, ۱]$ نتیجه می‌دهد که $f^{-۱}(i) = [\circ, ۱]$، یعنی $f([\circ, ۱]) = i$. لذا مسیری بین $i \in X$ و نقطه‌ای از $B \subseteq X$ وجود ندارد. بنابراین X مسیری‌همبند نیست.

۳. مسیرهای هم‌ارز

تعریف ۲.۵ مسیر f را بسته نامند هرگاه نقاط ابتدایی و انتهایی آن برهم منطبق باشند، یعنی $f(\circ) = f(۱)$.

مثال ۷.۵ مسیر $f * \overline{f}$ بسته است.

مثال ۸.۵ مسیر $\overline{f} * f$ بسته است.

تعریف ۳.۵ مسیرهای f و g در X را هم‌ارز (یا هوموتوپیک) نامند هرگاه f و g نسبت به مجموعهٔ متشکل از ۰ و ۱، یعنی نسبت به مجموعهٔ $A = \{۰, ۱\}$ هوموتوپیک باشند. هم‌ارزی f و g را به‌طور نمادین با $f \sim g$ نشان می‌دهیم.

در این حالت باید داشته باشیم $f(۰) = g(۰)$، $f(۱) = g(۱)$ و نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \to X$ چنان موجود باشد که به‌ازای هر $u, v \in C$،

$$\begin{aligned} F(u, ۰) &= f(u) \\ F(u, ۱) &= g(u) \\ F(۰, v) &= f(۰) = g(۰) \\ F(۱, v) &= f(۱) = g(۱)\,. \end{aligned}$$

بنابراین می‌بینیم که هرگاه مسیرها هوموتوپیک باشند، نسبت به مجموعهٔ $\{۱ , ۰\}$ هوموتوپیک هستند.

متذکر می‌شویم که با توجه به قضیهٔ ۶.۳ رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ردهٔ هم‌ارزی مسیر f را با $[f]$ نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۵.۵ فرض می‌کنیم، $f_۱$، $f_۲$، $g_۱$ و $g_۲$ چنان مسیرهایی باشند که $f_۱ \sim g_۱$ و $f_۲ \sim g_۲$. اگر $f_۱ * f_۲$ موجود باشد، آنگاه $g_۱ * g_۲$ موجود است و

$$f_۱ * f_۲ \sim g_۱ * g_۲\,.$$

اثبات. چون $f_۱ * f_۲$ موجود است، $f_۱(۱) = f_۲(۰)$. همچنین چون $f_۱ \sim g_۱$ و $f_۲ \sim g_۲$، داریم $f_۱(۱) = g_۱(۱)$ و $f_۲(۰) = g_۲(۰)$. لذا $g_۱(۱) = g_۲(۰)$ یعنی $g_۱ * g_۲$ موجود است.

چون $f_۱ \sim g_۱$، نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \to X$ چنان موجود است که

$$\begin{aligned} &F(u, ۰) = f_۱(u), F(u, ۱) = g_۱(u) \\ &F(۰, v) = f_۱(۰) = g_۱(۰), F(۱, v) = f_۱(۱) = g_۱(۱)\,. \end{aligned}$$

همچنین چون $f_۲ \sim g_۲$، نگاشتی پیوسته مانند $G : C \times C \to X$ چنان موجود است که

$$G(u,\circ) = f_۲(u), G(u,۱) = g_۲(u)$$
$$G(\circ,v) = f_۲(\circ) = g_۲(\circ), G(۱,v) = f_۲(۱) = g_۲(۱)\,.$$

نگاشت $H : C \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$H(u,v) = F(۲u,v) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲}$$

و

$$H(u,v) = G(۲u-۱,v) \qquad \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱\,.$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت بنابه لم ۳.۳، H پیوسته است و

$$H(u,\circ) = f_۱(۲u) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲}$$
$$H(u,\circ) = f_۲(۲u-۱) \qquad \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱$$
$$H(u,۱) = g_۱(۲u) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲}$$
$$H(u,۱) = g_۲(۲u-۱) \qquad \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱$$
$$H(\circ,v) = F(\circ,v) = f_۱(\circ) = g_۱(\circ)$$
$$H(۱,v) = G(۱,v) = f_۲(۱) = g_۲(۱)\,.$$

این روابط نشان می‌دهد که $f_۱ * f_۲ \sim g_۱ * g_۲$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۶.۵ اگر f و g مسیر باشند و $f \sim g$، آنگاه $\overline{f} \sim \overline{g}$.

اثبات. چون $f \sim g$، نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \to X$ چنان موجود است که

$$F(u,\circ) = f(u), \quad F(u,۱) = g(u)$$
$$F(\circ,v) = f(\circ) = g(\circ)$$
$$F(۱,v) = f(۱) = g(۱)\,.$$

نگاشت $G : C \times C \to X$ را با ضابطهٔ $G(u, v) = F(۱ - u, v)$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت G پیوسته است و در روابط زیر صدق می‌کند

$$G(u, \circ) = f(۱ - u), G(u, ۱) = g(۱ - u)$$
$$G(\circ, v) = F(۱, v) = f(۱) = g(۱)$$
$$G(۱, v) = F(\circ, v) = f(\circ) = g(\circ)$$

در نتیجه $\overline{g} \sim \overline{f}$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۷.۵ اگر f و g مسیر باشند و $\overline{g} \sim \overline{f}$، آنگاه $f \sim g$.

اثبات را نمی‌آوریم.

قضیهٔ ۸.۵ اگر f مسیری دلخواه و g چنان مسیر پوچی باشد که $f * g$ موجود باشد، آنگاه $f * g \sim f$.

اثبات. چون g مسیری پوچ است و $f * g$ موجود است، به‌ازای هر $u \in C$ داریم $g(u) = f(۱)$. اگر $F : C \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(u, v) = f\left(\frac{۲u}{۱ + v}\right) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱ + v}{۲}$$

و

$$F(u, v) = f(۱) \qquad \frac{۱ + v}{۲} \leq u \leq ۱$$

تعریف کنیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که

$$F(u, \circ) = f(۲u) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲}$$
$$F(u, \circ) = f(۱) \qquad \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱$$
$$F(\circ, v) = f(\circ), F(۱, v) = f(۱)$$

و F پیوسته است. لذا $f * g \sim f$.

قضیهٔ ۹.۵ اگر f مسیری پوچ و g چنان مسیر دلخواهی باشد که $f * g$ موجود باشد، آنگاه $f * g \sim g$.

اثبات مشابه با اثبات قضیهٔ قبلی است.

برای یک مسیر مشخص، قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیهٔ ۱۰.۵ اگر f مسیری باشد که نقطهٔ ابتدایی آن x و نقطهٔ انتهایی آن y باشد، آنگاه $\varepsilon_x * f \sim f$ و $f * \varepsilon_y \sim f$.

اثبات. نگاشت $F : C \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(u,v) = \begin{cases} x & \circ \leq u \leq (۱-v)/۲ \\ f(۲u-۱+v)/(۱+v) & (۱-v)/۲ \leq u \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، $F(u,\circ) = \varepsilon_x * f$ و $F(u,۱) = f(u)$. اکنون به آسانی می‌توان نشان داد که F هوموتوپی نسبت به مجموعهٔ $\{\circ, ۱\}$ است. به این طریق، قضیه به اثبات می‌رسد.

بنابر قضایای ۶.۵ و ۷.۵، اگر f و g دو مسیر باشند، آنگاه $f \sim g$ اگر و فقط اگر $\overline{g} \sim \overline{f}$.
قضیهٔ بعدی ویژگی حاصلضربهای f و $\overline{f}$ را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱.۵ اگر f مسیری دلخواه باشد، آنگاه $f * \overline{f}$ و $\overline{f} * f$ با مسیرهایی پوچ هوموتوپیک هستند.

اثبات. نگاشت $F : C \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(u,v) = \begin{cases} f(۲u(۱-v)) & \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲} \\ f(۲(۱-u)(۱-v)) & \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که F پیوسته است. به‌علاوه،

$$F(u,\circ) = f(۲u) \qquad \circ \leq u \leq \frac{۱}{۲}$$

$$F(u,\circ) = f(۲-۲u) \qquad \frac{۱}{۲} \leq u \leq ۱$$

$$F(u,۱) = f(\circ)$$

$$F(\circ,v) = f(\circ) = F(۱,v).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $f * \overline{f}$ با مسیر پوچی که نگاره‌اش $f(\circ)$ است، هوموتوپیک است. هوموتوپیک بودن $\overline{f} * f$ با مسیری پوچ به طریق مشابه نتیجه گرفته می‌شود.

با مشخص کردن نقاط ابتدایی و انتهایی، قضیهٔ بعدی را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱۲.۵ فرض می‌کنیم f مسیری باشد که نقطهٔ ابتدایی آن x و نقطهٔ انتهایی آن y باشد. در این‌صورت، $f * \overline{f} \sim \varepsilon_x$ و $\overline{f} * f \sim \varepsilon_y$.

اثبات. در اثبات قضیهٔ فوق قرار دهید $x = f(\circ)$ و $y = f(\text{۱})$.

قضیهٔ ۱۳.۵ اگر f و g و h سه مسیر باشند و $f * g$ و $g * h$ موجود باشند، آنگاه $(f * g) * h$ و $f * (g * h)$ موجودند و

$$(f * g) * h \sim f * (g * h)\,.$$

اثبات. نگاشت $F : C \times C \rightarrow X$ را به‌صورت

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= f\left(\frac{\text{۴}u}{\text{۱}+v}\right) && \circ \leq u \leq \frac{\text{۱}+v}{\text{۴}} \\
F(u,v) &= g(\text{۴}u - \text{۱} - v) && \frac{\text{۱}+v}{\text{۴}} \leq u \leq \frac{\text{۲}+v}{\text{۴}} \\
F(u,v) &= h\left(\frac{\text{۱} - \text{۴}(\text{۱}-u)}{\text{۲}-v}\right) && \frac{\text{۲}+v}{\text{۴}} \leq u \leq \text{۱}
\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت F پیوسته است و

$$\begin{aligned}
F(u,\circ) &= f(\text{۴}u) && \circ \leq u \leq \text{۱}/\text{۴} \\
F(u,\circ) &= g(\text{۴}u - \text{۱}) && \text{۱}/\text{۴} \leq u \leq \text{۱}/\text{۲} \\
F(u,\circ) &= h(\text{۲}u - \text{۱}) && \text{۱}/\text{۲} \leq u \leq \text{۱} \\
F(u,\text{۱}) &= f(\text{۲}u) && \circ \leq u \leq \text{۱}/\text{۲} \\
F(u,\text{۱}) &= g(\text{۴}u - \text{۲}) && \text{۱}/\text{۲} \leq u \leq \text{۳}/\text{۴} \\
F(u,\text{۱}) &= h(\text{۴}u - \text{۳}) && \text{۳}/\text{۴} \leq u \leq \text{۱}
\end{aligned}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = (f * g) * h$ و $\beta = f * (g * h)$. در این‌صورت

$$F(u,\circ) = \alpha(u) \quad \text{و} \quad F(u,\text{۱}) = \beta(u)\,.$$

همچنین

$$F(\circ, v) = f(\circ) = \alpha(\circ)$$

و

$$F(\mathsf{1}, v) = h(\mathsf{1}) = \beta(\mathsf{1}).$$

این روابط نشان می‌دهند که $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

قضیهٔ ۱۴.۵ فرض می‌کنیم f و g چنان مسیرهایی باشند که $f * \overline{g}$ موجود و مسیری بسته باشد. در این‌صورت، $f * \overline{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است اگر و فقط اگر $f \sim g$.

اثبات. وجود $f * \overline{g}$ نتیجه می‌دهد که $f(\mathsf{1}) = g(\mathsf{1})$. چون $f * \overline{g}$ بسته است، همچنین داریم $f(\circ) = g(\circ)$.

اگر $f * \overline{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ باشد، آنگاه بنابه قضایای ۵.۵، ۸.۵ و ۹.۵، $(f * \overline{g}) * g$ هوموتوپیک با g است. همچنین بنابه قضیهٔ ۱۳.۵، $(f * \overline{g}) * g$ هوموتوپیک با مسیر $f * (\overline{g} * g)$ است که این مسیر بنابه قضایای ۸.۵، ۹.۵ و ۱۱.۵ هوموتوپیک با f است. لذا $f \sim g$.

اگر $f \sim g$، آنگاه بنابه قضیهٔ ۵.۵، $f * \overline{g} \sim g * \overline{g}$، و بنابه قضیهٔ ۱۱.۵، $g * \overline{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است. بنابراین $f * \overline{g}$ هوموتوپیک با مسیری پوچ است.

تمرین

۱. فرض کنید در $\mathbb{R}^{\mathsf{2}}$، $A = \{(x,y) : x = \circ, -\mathsf{1} \leq y \leq \mathsf{1}\}$ و $B = \{(x,y) : \circ < x \leq \mathsf{1}, y = \cos \pi/x\}$. نشان دهید مجموعهٔ $F = A \cup B$ همبند است ولی مسیری‌همبند نیست.

۲. فرض کنید در $\mathbb{R}^{\mathsf{2}}$، $A = \{(x,y) : \circ \leq x \leq \mathsf{1}, y = x/n, n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{(x,y) : \mathsf{1}/\mathsf{2} \leq x \leq \mathsf{1}, y = \circ\}$. نشان دهید مجموعهٔ $F = A \cup B$ همبند است ولی مسیری‌همبند نیست.

۳. فرض کنید زیرمجموعهٔ $A \subset X$ زیرمجموعه‌ای مسیری‌همبند باشد و $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مسیری‌همبند X باشد که اشتراک هیچ‌یک از آنها با A تهی نیست. نشان دهید مجموعهٔ

$$A \cup \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right\}$$

مسیری‌همبند است.

۴. فرض کنید $\sim$ رابطه‌ای روی مجموعهٔ نقاط X باشد به‌طوری که به‌ازای نقاط $x, y \in X$، $x \sim y$ هرگاه مسیری در X چنان موجود باشد که x و y به‌ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی آن باشند. ثابت کنید $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵. فرض کنید f مسیری در X باشد و $g : C \to C$ نگاشتی پیوسته باشد و $g(\circ) = \circ$ و $g(۱) = ۱$. نشان دهید $f \sim fg$.

اگر $g(\circ) = ۱$ و $g(۱) = \circ$، نشان دهید $\overline{f} \sim fg$.

۶. اگر f مسیر باشد، ثابت کنید $\varepsilon_{f(\circ)} * f \sim f * \varepsilon_{f(۱)}$.

۷. فرض کنید f و g مسیرهایی از x به y باشند. ثابت کنید $f \sim g$ اگر و فقط اگر $f * \overline{g} \sim \varepsilon_x$.

۸. فرض کنید $\circ = u_\circ \le u_۱ \le u_۲ = ۱$ و f مسیر باشد. مسیرهای $f_۱$ و $f_۲$ را به‌صورت

$$f_۱(u) = f((۱-u)u_\circ + uu_۱) \quad \text{و} \quad f_۲(u) = f((۱-u)u_۱ + uu_۲)$$

تعریف کنید. نشان دهید $f \sim f_۱ * f_۲$ (از تمرین ۵ استفاده کنید).

۶

گروه بنیادی

۱. تشکیل یک گروه

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و $x_{\circ} \in X$. مجموعهٔ تمام مسیرهای بسته‌ای را که هر یک با $x_{\circ}$ شروع و به $x_{\circ}$ ختم می‌شوند، در نظر می‌گیریم. $x_{\circ}$ را نقطهٔ پایه (یا نقطهٔ پایه‌ای) تمام این مسیرها می‌نامند و چنین مسیرهایی را گاه «مسیر با پایهٔ $x_{\circ}$» یا «طوقهٔ با پایهٔ $x_{\circ}$» می‌نامند [به جای «با پایهٔ $x_{\circ}$» گاه «$x_{\circ}$پایه» می‌گوییم]. اگر f مسیری با پایهٔ $x_{\circ}$ باشد، آنگاه ردهٔ تمام مسیرهای $x_{\circ}$پایه را که با f هوموتوپیک باشند، با $[f]$ نمایش می‌دهند و آن را ردهٔ هوموتوپی مسیرهای $x_{\circ}$پایه می‌نامند. گردایهٔ تمام این رده‌های هوموتوپی مسیرهای $x_{\circ}$پایه را با $\pi_1(X, x_{\circ})$ نمایش می‌دهند.

قضیهٔ ۱.۶ $\pi_1(X, x_{\circ})$ گروه است.

اثبات. حاصلضرب دو ردهٔ $[f] \in \pi_1(X, x_{\circ})$ و $[g] \in \pi_1(X, x_{\circ})$ را به‌صورت

$$[f][g] = [f * g]$$

تعریف می‌کنیم. تعریف ضرب مستقل از نماینده‌های انتخابی رده‌های $[f]$ و $[g]$ است. زیرا اگر $f_1 \sim f$ و $g_1 \sim g$، آنگاه بنابه قضیهٔ ۵.۵، $f_1 * g_1 \sim f * g$ ولذا $[f_1][g_1] = [f_1 * g_1] = [f * g]$. در نتیجه، حاصلضرب $[f][g]$ به‌طور منحصر به‌فردی به‌وسیلهٔ $[f]$ و $[g]$ تعیین می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که تمام اصول گروه برقرارند.

(الف) بنابه تعریف واضح است که $[f][g]$ یک ردهٔ هوموتوپی از مسیرهای x_0پایه است.

(ب) داریم

$$([f][g])[h] = [f * g][h] = [(f * g) * h]$$

و

$$[f]([g][h]) = [f][g * h] = [f * (g * h)] .$$

بنابه قضیهٔ ۱۳.۵، $(f * g) * h \sim f * (g * h)$. لذا عمل ضرب شرکت‌پذیر است.

(ج) فرض می‌کنیم $[I]$ نمایشگر ردهٔ هوموتوپی مسیرپوچ x_0پایه، یعنی ε_{x_0} باشد. دراین‌صورت، بنابه قضایای ۸.۵ و ۹.۵،

$$[f][I] = [f] = [I][f] .$$

لذا $[I]$ عضو یکه (یا همانی) است.

(د) بنابه قضیهٔ ۱۱.۵،

$$[f][\overline{f}] = [f * \overline{f}] = [I] .$$

در نتیجه هر عضو یک معکوس دارد.

بنابراین $\pi_1(X, x_0)$ گروه است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تعریف ۱.۶ $\pi_1(X, x_0)$ را گروه بنیادی X نسبت به x_0 می‌نامند.

با استفاده از ساختار $\pi_1(X, x_0)$ می‌توانیم سرشت موضعی فضا را در x_0 به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال، اگر $\pi_1(X, x_0)$ گروه بدیهی باشد، یعنی گروهی که فقط عضو همانی $[I]$ را دارد (که $I = \varepsilon_{x_0}$)، آنگاه هر مسیر x_0پایه هوموتوپیک با I است و این به‌طور شهودی، به‌عنوان مثال، بدین معناست که «حفره»هایی که مانع از انقباض و تبدیل شدن یک مسیر x_0پایه به x_0 شوند، وجود ندارند.

در مطالب بالا اگر به‌جای یک مسیر بسته، مسیر دلخواه به‌کار گرفته شود، وجود همانی با مشکل مواجه خواهد شد و همچنین ممکن است ضرب مذکور همواره قابل تعریف نباشد.

۲. یکریختی گروههای بنیادی

قضیهٔ ۲.۶ فرض می‌کنیم $x_0, x_1 \in X$. اگر مسیری از x_0 به x_1 در X وجود داشته باشد، آنگاه گروههای $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ یکریخت هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم f مسیری با پایهٔ x_0 و h مسیری از x_0 به x_1 باشد. در این‌صورت، نگاشت $g = (\overline{h} * f) * h$ مسیری با پایهٔ x_1 است. فرض می‌کنیم Φ تبدیلی بین رده‌های هوموتوپی مسیرهای x_0پایه و رده‌های هوموتوپی مسیرهای x_1پایه باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi[f] = [g]\,.$$

واضح است که $\Phi[f]$ به‌طور منحصر به‌فردی به‌وسیلهٔ $[f]$ تعیین می‌شود. بالعکس، $[f]$ نیز به‌طور منحصر به‌فردی به‌وسیلهٔ $\Phi[f]$ تعیین می‌شود، زیرا اگر

$$(\overline{h} * f_1) * h \sim (\overline{h} * f_2) * h$$

آنگاه بنابه قضایای ۱۱.۵ و ۱۳.۵، $f_1 \sim f_2$. به‌علاوه، هر مسیر x_1پایه مانند g هوموتوپیک با $\overline{h} * ((h * g) * \overline{h}) * h$ است و لذا هر ردهٔ هوموتوپی از مسیرهای x_1پایه به‌ازای رده‌ای مانند $[f]$، به شکل $\Phi[f]$ است.

بنابراین Φ تبدیلی دوسویی از اعضای $\pi_1(X, x_0)$ به اعضای $\pi_1(X, x_1)$ است. فرض می‌کنیم $[f_1]$ و $[f_2]$ دو عضو از $\pi_1(X, x_0)$ باشند. در این‌صورت، بنابه قضایای ۱۱.۵ و ۱۳.۵،

$$\begin{aligned}
\Phi[f_1]\Phi[f_2] &= [(\overline{h} * f_1) * h][(\overline{h} * f_2) * h] \\
&= [(\overline{h} * f_1 * h * \overline{h} * f_2 * h] \\
&= [(\overline{h} * f_1 * f_2 * h] \\
&= \Phi[f_1 * f_1] \\
&= \Phi([f_1][f_2])\,.
\end{aligned}$$

بنابراین Φ یکریختی است.

فرع ۱.۶ اگر X فضایی مسیری‌همبند باشد، آنگاه به‌ازای هر $x, y \in X$، $\pi_1(X, x)$ و $\pi_1(X, y)$ یکریخت هستند.

اگر شرط مسیری‌همبند بودن حذف شود، این حکم برقرار نیست. حتی اگر X همبند باشد، ممکن است حکم برقرار نباشد.

نکتهٔ ۱.۶ بنابه فرع فوق، ممکن است این فکر پیش بیاید که x را از $\pi_1(X,x)$ کنار بگذاریم و فقط بنویسیم $\pi_1(X)$، اما این کار خطاآفرین است زیرا هیچ «یکریختی کلی متعارفی» بین $\pi_1(X,x)$ و $\pi_1(X,y)$ وجود ندارد زیرا یکریختی Φ کاملاً به مسیر x تا y وابسته است و در نتیجه مسیرهای مختلف از x به y ممکن است یکریختیهای متفاوتی را تولید کنند. به این دلیل، یکریختی Φی مذکور در بالا را می‌توانیم یکریختی حاصل از مسیر h، از $\pi_1(X,x_0)$ به $\pi_1(X,x_1)$، بنامیم. گاهی بهتر است که این یکریختی را به‌صورت Φ_h نشان دهیم.

۳. همریختی گروههای بنیادی

اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند، می‌خواهیم ببینیم که تأثیر تبدیلی پیوسته از X به Y بر گروههای بنیادی X و Y چیست. اگر $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه گروه بنیادی X نسبت به x_0 ممکن است با گروه بنیادی Y نسبت به $f(x_0)$ یکریخت نباشد. لیکن همان‌گونه که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد، یک همریختی بین این گروهها وجود دارد.

قضیهٔ ۳.۶ اگر تبدیل $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه یک همریختی مانند

$$f^* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$$

که در آن x_0 نقطهٔ دلخواهی از X است، وجود دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم g و h مسیرهایی با پایهٔ x_0 باشند. نگاشتهای $g_1, h_1 : C \to Y$ را به‌صورت $g_1 = fg$ و $h_1 = fh$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، به‌ازای هر $u \in C$، $g_1(u) = f(g(u))$ و $h_1(u) = f(h(u))$. لذا، g_1 و h_1 مسیرهایی بسته در Y با پایهٔ $f(x_0)$ هستند.

اگر $g \sim h$، نگاشتی پیوسته مانند $F : C \times C \to X$ چنان موجود است که

$$F(u,0) = g(u)$$

$$F(u,1) = h(u)$$

$$F(0,v) = g(0) = h(0) = x_0$$

$$F(1,v) = g(1) = h(1) = x_0\,.$$

حال تابع $G : C \times C \to Y$ را با ضابطهٔ $G(u,v) = f(F(u,v))$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت بنابه لم ۱.۳، G پیوسته است و به‌علاوه

$$G(u,0) = f(g(u)) = g_1(u)$$
$$G(u,1) = f(h(u)) = h_1(u)$$
$$G(0,v) = f(x_0)$$
$$G(1,v) = f(x_0).$$

از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که $g_1 \sim h_1$.

حال اگر تعریف کنیم

(الف) $$f^*[g] = [fg]$$

آنگاه f^* تبدیلی از رده‌های هوموتوپی مسیرهای X پایهٔ x_0 به رده‌های هوموتوپی مسیرهای Y پایهٔ $f(x_0)$ است. علاوه بر این، $f^*[g]$ به‌طور منحصر به‌فردی به‌وسیلهٔ $[g]$ تعریف می‌شود. لذا f^* به هر عضو از $\pi_1(X,x_0)$ عضوی منحصر به‌فرد از $\pi_1(Y,f(x_0))$ را نسبت می‌دهد.

حال می‌توان نتیجه گرفت که $g*h$ مسیری مانند $\rho : C \to X$ با ضابطهٔ

$$\rho(u) = g(2u) \qquad 0 \le u \le \frac{1}{2}$$
$$\rho(u) = h(2u-1) \qquad \frac{1}{2} \le u \le 1$$

است. از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که $f*\rho$ مسیری مانند $\sigma : C \to Y$ با ضابطهٔ

$$\sigma(u) = f(g(2u)) \qquad 0 \le u \le \frac{1}{2}$$
$$\sigma(u) = f(h(2u-1)) \qquad \frac{1}{2} \le u \le 1$$

است. در حقیقت σ مسیر $g_1 * h_1$ است. بنابراین به‌دست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} f^*[g]f^*[h] &= [fg][fh] \\ &= [fg*fh] \\ &= [f(g*h)] \\ &= f^*[g*h] \end{aligned}$$

و لذا f^* یک همریختی از $\pi_1(X,x_0)$ به $\pi_1(Y,f(x_0))$ است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۴. همریختی القایی

رابطهٔ (الف) بخش قبل نام بخصوصی دارد.

تعریف ۲.۶ همریختی

$$f^* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

با ضابطهٔ $f^*[g] = [fg]$ که در آن f نگاشتی پیوسته از X به Y است، همریختی القایی نامیده می‌شود.

برای همریختی القایی، قضیهٔ زیر را که اثبات آن را نمی‌آوریم، بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۶ (الف) فرض می‌کنیم نگاشتهای $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند، در این‌صورت $(gf)^* = g^* f^*$.

(ب) اگر I نگاشت همانی روی X باشد، آنگاه I^* همریختی همانی روی $\pi_1(X, x)$ است.

اینک نشان می‌دهیم تحت شرط خاصی همریختی قضیهٔ ۳.۶ یکریختی است. در واقع، نشان می‌دهیم که اگر f همسانریختی باشد، آنگاه f^* یکریختی است. این موضوع را به‌صورت نتیجه‌ای از یک حکم کلی به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۶ فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ موجود باشند به‌طوری که $g(y_0) = x_0$، که x_0 نقطه‌ای از X است و $f(x_0) = y_0$؛ علاوه بر این، gf با نگاشت همانی I_X هوموتوپیک $(\mathrm{rel}\, x_0)$ و fg با نگاشت همانی I_Y هوموتوپیک $(\mathrm{rel}\, y_0)$ باشد. در این‌صورت، $\pi_1(X, x_0)$ با $\pi_1(Y, y_0)$ یکریخت است.

اثبات. مطابق تعریف ۲.۶، از نگاشتهای f، g، gf، fg به‌ترتیب همریختیهای القایی

$$f^* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

$$g^* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

$$(gf)^* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

$$(fg)^* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

به‌دست می‌آید.

فرض می‌کنیم α مسیری با پایهٔ $x_\circ$ در X باشد. در این‌صورت چون $(gf)(x_\circ) = g(y_\circ) = x_\circ$، $(gf)\alpha$ نیز مسیری با پایهٔ $x_\circ$ است. اما gf با I_X هوموتوپیک $(\mathrm{rel}\, x_\circ)$ است، لذا $(gf)\alpha$ با α هوموتوپیک است. بنابراین $(gf)^*$ تبدیل همانی از $\pi_1(X, x_\circ)$ به روی خودش است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $(fg)^*$ تبدیل همانی از $\pi_1(Y, y_\circ)$ به روی خودش است.

اما بنابه قضیهٔ ۴.۶،

$$(gf)^* = g^* f^* \quad \text{و} \quad (fg)^* = f^* g^*.$$

لذا $g^* f^*$ و $f^* g^*$ به‌ترتیب تبدیلهای همانی $\pi_1(X, x_\circ)$ و $\pi_1(Y, y_\circ)$ هستند.

مسیر $(gf)\alpha : C \to X$ را در نظر می‌گیریم. این مسیر همان مسیر $g(f\alpha) : C \to X$ است. لذا اگر $f^*[\alpha] = [\beta]$، آنگاه

$$g * [\beta] = g^* f^* [\alpha]$$

و چون $g^* f^*$ تبدیل همانی است، به‌دست می‌آوریم $[\alpha] = g^*[\beta]$. بنابراین اگر $f^*[\alpha_1] = f^*[\alpha_2]$، آنگاه $[\beta_1] = [\beta_2]$ و این ایجاب می‌کند $[\alpha_1] = [\alpha_2]$، یعنی f^* تبدیلی یک‌به‌یک است. به طریق مشابهی نتیجه می‌گیریم که g^* نیز تبدیلی یک‌به‌یک است.

به‌علاوه هر عضو $\pi_1(Y, y_\circ)$ به‌صورت $f^*[\gamma]$ است که در آن $[\gamma]$ عضوی از $\pi_1(X, x_\circ)$ است. بنابراین f^* همریختی پوشاست. در نتیجه f^* یکریختی بین $\pi_1(X, x_\circ)$ و $\pi_1(Y, y_\circ)$ است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که g^* یکریختی از $\pi_1(Y, y_\circ)$ به روی $\pi_1(X, x_\circ)$ است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۲.۶ اگر نگاشت $f : X \to Y$ همسانریختی باشد، آنگاه $\pi_1(X, x_\circ)$ با $\pi_1(Y, f(x_\circ))$ یکریخت است.

اثبات. در قضیهٔ قبل فرض کنید f همسانریختی باشد و $g = f^{-1}$.

نکتهٔ ۲.۶ کمی بعد قضیهٔ کلی‌تری را ثابت خواهیم کرد.

نکتهٔ ۳.۶ فرع ۲.۶ راهی برای رفتن از توپولوژی به جبر به‌دست می‌دهد. اگر قضیهٔ قبل را تحلیل کنیم، مشاهده می‌کنیم که

(الف) هرگاه یک فضای توپولوژیک (با نقطه‌ای پایه‌ای) در دست باشد، می‌توان یک گروه تشکیل داد (گروه بنیادی)،

(ب) از دو فضای توپولوژیک و یک نگاشت پیوسته بین آنها، یک همریختی بین گروههای بنیادی به‌دست می‌آید،

(ج) از یک همسانریختی بین فضاها، یک یکریختی القایی به‌دست می‌آید،

(د) از نگاشت همانی، همریختی القایی همانی به‌دست می‌آید،

(هـ) از ترکیب نگاشتهای پیوسته، یک همریختی القایی مرکب از همریختیهای القایی به‌دست می‌آید.

عکس نتیجهٔ فوق برقرار نیست، یعنی گروههای بنیادی دو فضا ممکن است یکریخت باشند بدون اینکه آن دو فضا همسانریخت باشند. اما اگر گروههای بنیادی یکریخت نباشند، ممکن نیست فضاها همسانریخت باشند.

متذکر می‌شویم که ویژگیهای (الف) تا (هـ) مثالی از یک تابعگون از ردهٔ فضاهای توپولوژیک با نقاط پایه‌ای و نگاشتهای پیوسته‌ای که این نقاط را حفظ می‌کنند به ردهٔ گروهها و همریختیهای گروهها به‌دست می‌دهند.

قضیهٔ ۶.۶ فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و نگاشتهای $\phi, \psi : X \to Y$ پیوسته باشند. همچنین فرض می‌کنیم $f : C \to Y$ مسیری در Y از $\phi(x_\circ)$ به $\psi(x_\circ)$ با ضابطهٔ $f(t) = F(x_\circ, t)$ باشد. در این‌صورت، همریختیهای القایی

$$\phi^* : \pi_1(X, x_\circ) \to \pi_1(Y, \phi(x_\circ))$$

و

$$\psi^* : \pi_1(X, x_\circ) \to \pi_1(Y, \psi(x_\circ))$$

به‌صورت $\psi^* = \Phi_f \phi^*$ با هم ارتباط دارند که در آن Φ_f یکریختی حاصل از مسیر f، از $\pi_1(Y, \phi(x_\circ))$ به $\pi_1(Y, \psi(x_\circ))$، است.

اثبات. با توجه به تعریف نگاشتی که در اثبات قضیهٔ ۲.۶ آمده است و نکتهٔ پس از آن قضیه، باید نشان دهیم اگر $[g] \in \pi_1(X, x_\circ)$، آنگاه

$$[\psi g] = [\overline{f} * \phi g * f]$$

یعنی باید نشان دهیم که مسیرهای ψg و $\overline{f} * \phi g * f$ هم‌ارزند.

داریم

$$((\overline{f} * \phi g) * f)(t) = \begin{cases} f(۱ - ۴t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴} \\ \phi g(۴t - ۱) & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ f(۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$((\overline{f} * \phi g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_۰, ۱ - ۴t) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴} \\ F(g(۴t - ۱), ۰) & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ F(x_۰, ۲t - ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

می‌خواهیم یک هوموتوپی بین ψg و $(\overline{f} * \phi g) * f$ بیابیم. بدین‌منظور ابتدا متذکر می‌شویم که ψg با $(\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x$، که در آن $x = \psi(x_۰)$، هم‌ارز است. توجه کنید که مسیر $(\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x$ به‌صورت زیر است

$$((\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x)(t) = \begin{cases} F(x_۰, ۱) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴} \\ F(g(۴t - ۱), ۱) & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ F(x_۰, ۱) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

لذا نگاشت $H : C \times C \to Y$ را با ضابطهٔ

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_۰, ۱ - ۴t(۱ - s)) & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴} \\ F(g(۴t - ۱), s) & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ F(x_۰, ۱ + ۲(t - ۱)(۱ - s)) & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، H پیوسته است و

$$H(t, \circ) = ((\overline{f} * \phi g) * f)(t)$$
$$H(t, \text{۱}) = ((\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x)(t)$$
$$H(\circ, s) = F(x_\circ, \text{۱}) = \psi(x_\circ)$$
$$H(\text{۱}, s) = F(x_\circ, \text{۱}) = \psi(x_\circ)\,.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$(\overline{f} * \phi g) * f \sim (\varepsilon_x * \psi g) * \varepsilon_x \sim \psi g$$

و لذا $\Phi_f \phi^* = \psi^*$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

بنابه مثالهای ۳.۴ و ۴.۴ می‌دانیم که اگر X با Y همسانریخت باشد، آنگاه X و Y یک نوع هوموتوپی دارند، اما عکس این موضوع برقرار نیست. بنابراین، قضیهٔ بعدی تعمیم فرع ۲.۶ است.

قضیهٔ ۷.۶ فرض می‌کنیم X و Y یک نوع هوموتوپی داشته باشند و $\phi : X \to Y$ هم‌ارزی هوموتوپی باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $x \in X$، نگاشت $\phi^* : \pi_\text{۱}(X, x) \to \pi_\text{۱}(Y, \phi(x))$ یکریختی است.

اثبات. چون ϕ هم‌ارزی هوموتوپی است، طبق تعریف، نگاشتی پیوسته مانند $\psi : Y \to X$ چنان وجود دارد که $\phi\psi : Y \to Y$ هوموتوپیک با I_Y و $\psi\phi : X \to X$ هوموتوپیک با I_X باشد. بنابه قضیهٔ ۶.۶ نتیجه می‌گیریم که

$$\Phi_f (\psi\phi)^* = I^*\,.$$

چون Φ_f و I^* یکریختی هستند، نگاشت $(\psi\phi)^* = \psi^*\phi^*$ یکریختی است. لذا ψ^* بروریختی و ϕ^* تکریختی است. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $\phi^*\psi^*$ یکریختی است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که ϕ^* بروریختی و ψ^* تکریختی است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۳.۶ فضای انقباض‌پذیر گروه بنیادی بدیهی دارد.

برای فضای مسیری‌همبندی که گروه بنیادی آن بدیهی باشد، اصطلاحی وضع شده است.

تعریف ۳.۶ فضا را سادهٔهمبند نامند هرگاه مسیری‌همبند باشد و گروه بنیادی آن نسبت به هر نقطه‌اش بدیهی باشد.

فرع ۴.۶ فضای انقباض‌پذیر ساده‌همبند است. عکس این مطلب برقرار نیست.

۵. گروههای هوموتوپی

عضوهای گروههای بنیادی (که رده‌های هوموتوپی مسیرها هستند) یک‌بعدی در نظرگرفته می‌شوند زیرا مسیرها نگاشتهایی از قسمتی از فضای اقلیدسی یک‌بعدی (یعنی C) هستند. این مفاهیم را به بعد n، به‌ازای هر $n > ۱$، تعمیم می‌دهیم. به‌منظور سادگی، این کار را فقط برای گروههای هوموتوپی مطلق انجام می‌دهیم نه گروههای هوموتوپی نسبی.

نماد I_n را برای مکعب nبعدی مجهز به توپولوژی طبیعی $\mathbb{R}^n$ به‌کار می‌بریم. مکعب nبعدی متشکل از نقاطی از فضای اقلیدسی nبعدی $\mathbb{R}^n$ مانند $(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)$ است که در شرط $۰ \le u_i \le ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، صدق می‌کنند. مرز I_n، که آن را با J_n نمایش می‌دهیم، اجتماع تمام زیرمجموعه‌هایی از I_n است که یکی از مختصات نقاط متعلق به آنها، یعنی یکی از u_iها، ۰ یا ۱ باشد. به‌عنوان مثال، اگر $n = ۲$، $I_۲$ مربع واحد و $J_۲$ محیط مربع است.

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و نگاشتهای $\phi, \psi : I_n \to X$ پیوسته باشند و $\phi(J_n) = x_۰ = \psi(J_n)$ که در آن $x_۰$ نقطه‌ای ثابت از X است. پس اگر $n = ۱$، ϕ و ψ مسیرهایی با پایهٔ $x_۰$ هستند. حال نگاشت $\chi : I_n \to X$ را با ضابطهٔ

$$\chi(u_۱, u_۲, \ldots, u_n) = \phi(۲u_۱, u_۲, \ldots, u_n) \qquad ۰ \le u_۱ \le \frac{۱}{۲}$$

و

$$\chi(u_۱, u_۲, \ldots, u_n) = \psi(۲u_۱ - ۱, u_۲, \ldots, u_n) \qquad \frac{۱}{۲} \le u_۱ \le ۱$$

تعریف می‌کنیم.

در این‌صورت بنابه لم ۳.۳، χ پیوسته است. علاوه بر این $\chi(J_n) = x_۰$. به‌عنوان مثال اگر $n = ۱$، آنگاه χ حاصلضرب مسیرهای ϕ و ψ است. اگر $n > ۱$، می‌نویسیم

$$\chi = \phi + \psi \text{، یعنی } \chi(u_۱, u_۲, \ldots, u_n) = (\phi + \psi)(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)$$

(که فقط وقتی $n > ۱$، مناسب است).

حال فرض کنیم α، β، γ و δ نگاشتهایی پیوسته باشند که هر یک I_n $(n > ۱)$ را به X بنگارد و

$$\alpha(J_n) = \beta(J_n) = \gamma(J_n) = \delta(J_n) = x_\circ \,.$$

فرض می‌کنیم $\alpha \sim \gamma \,(\mathrm{rel}\, J_n)$. در این‌صورت، نگاشتی پیوسته مانند $F : I_n \times C \to X$ چنان موجود است که

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \circ) = \alpha(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$
$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, ۱) = \gamma(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$
$$F(\overline{x}_۱, \overline{x}_۲, \ldots, \overline{x}_n, y) = x_\circ$$

که در آن $(\overline{x}_۱, \overline{x}_۲, \ldots, \overline{x}_n) \in J_n$.

همچنین اگر $\beta \sim \delta \,(\mathrm{rel}\, J_n)$، آنگاه نگاشتی پیوسته مانند $G : I_n \times C \to X$ موجود است که وقتی $y = \circ$، برابر با β و وقتی $y = ۱$، برابر با δ باشد و $G(J_n \times C) = x_\circ$.

نگاشت $H : I_n \times C \to X$ را با ضابطهٔ

$$H(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, y) = F(۲x_۱, \ldots, x_n, y) \qquad \circ \leq x_۱ \leq \frac{۱}{۲}$$

و

$$H(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, y) = G(۲x_۱ - ۱, \ldots, x_n, y) \qquad \frac{۱}{۲} \leq x_۱ \leq ۱$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، H پیوسته است و

$$H(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \circ) = (\alpha + \beta)(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$
$$H(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, ۱) = (\gamma + \delta)(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$
$$H(\overline{x}_۱, \overline{x}_۲, \ldots, \overline{x}_n, y) = x_\circ \,.$$

بنابراین $\alpha + \beta \sim (\gamma + \delta)(\mathrm{rel}\, J_n)$.

فرض می‌کنیم عدد $n > ۱$ عدد طبیعی ثابتی باشد. حال مجموعهٔ تمام رده‌های هوموتوپی $(\mathrm{rel}\, J_n)$ از نگاشتهایی پیوسته مانند $\alpha : I_n \to X$ را که $\alpha(J_n) = x_\circ$، در نظر می‌گیریم. مجموع دو ردهٔ $[\alpha]$ و $[\beta]$ را به‌صورت

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$$

تعریف می‌کنیم.

حاصل این جمع به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌شود زیرا بنا به تحلیل قبلی اگر $\alpha \sim \gamma(\mathrm{rel}\, J_n)$

و $\beta \sim \delta(\operatorname{rel} J_n)$، آنگاه $\alpha + \beta \sim \gamma + \delta(\operatorname{rel} J_n)$. با این تعریف از عمل جمع دو رده، مجموعهٔ رده‌های هوموتوپی تشکیل گروه می‌دهد، این گروه را با $\pi_n(X, x_\circ)$ نمایش می‌دهند و گروه هوموتوپی nبعدی X نسبت به $x_\circ$ می‌نامند. به قیاس با گروه $\pi_n(X, x_\circ)$، گروه بنیادی $\pi_\text{۱}(X, x_\circ)$ را گروه هوموتوپی یک‌بعدی می‌نامند.

شایان توجه است که اگرچه امکان دارد $\pi_\text{۱}(X, x_\circ)$ تعویض‌پذیر نباشد، اما به‌ازای هر $n > \text{۱}$، $\pi_n(X, x_\circ)$ تعویض‌پذیر است. برای اثبات تعویض‌پذیری، خواننده را به منابع سطح بالاتری ارجاع می‌دهیم.

تمرین

۱. فرض کنید $\pi_\text{۱}(X, x)$ گروه بدیهی باشد. اگر f و g دو مسیر در X باشند با این ویژگی که $x = g(\circ) = f(\circ)$ و $g(\text{۱}) = f(\text{۱})$، نشان دهید $f \sim g$.

۲. فرض کنید نگاشتهای $\phi, \psi : X \to Y$ پیوسته و نسبت به $x_\circ \in X$ هوموتوپیک باشند. اگر $\phi(x_\circ) = \psi(x_\circ)$، نشان دهید که هر دو نگاشت ϕ و ψ یک همریختی القایی از $\pi_\text{۱}(X, x_\circ)$ به $\pi_\text{۱}(Y, \phi(x_\circ))$ تولید می‌کنند.

۳. فرض کنید f مسیری از x به y باشد و نگاشت $\Phi_f : \pi_\text{۱}(X, x) \to \pi_\text{۱}(X, y)$ یکریختی حاصل از f باشد. ثابت کنید Φ_f مستقل از f است اگر و فقط اگر $\pi_\text{۱}(X, x)$ آبلی باشد.

۴. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک مسیری‌همبند باشند و $x \in X$، $y \in Y$. نشان دهید $\pi_\text{۱}(X \times Y, (x, y))$ با حاصلضرب مستقیم گروههای $\pi_\text{۱}(X, x)$ و $\pi_\text{۱}(Y, y)$ یکریخت است.

۵. اگر نگاشت $\phi : X \to Y$ پیوسته و f مسیری از x به y باشد، آنگاه نشان دهید

$$\phi^* \Phi_f = \Phi_{\phi(f)} : \pi_\text{۱}(X, x) \to \pi_\text{۱}(Y, \phi(y))$$

که در آن Φ_f و $\Phi_{\phi(f)}$ یکریختیهای گروههای بنیادی، حاصل از f و $\phi(f)$، هستند.

۶. ثابت کنید گروه بنیادی صفحهٔ تصویری حقیقی گروهی دوری از مرتبهٔ دو است.

۷. اگر A یک درون‌برد دگردیسی قوی X باشد، نشان دهید نگاشت مشمولیت $i : A \to X$، به‌ازای هر $a \in A$، یکریختی القایی

$$i^* : \pi_\text{۱}(A, a) \to \pi_\text{۱}(X, a)$$

را تولید می‌کند.

۸. ثابت کنید $\pi_n(X, x_\circ)$ گروه است.

۹. اگر مسیری از x_0 به x_1 در X موجود باشد، نشان دهید $\pi_n(X,x_0)$ با $\pi_n(X,x_1)$ یکریخت است.

۱۰. اگر نگاشت $\phi : X \to Y$ پیوسته باشد، نگاشت $\phi^* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,\phi(x_0))$ را تعریف کنید و سپس نشان دهید ϕ^* همریختی است.

۷

گروه بنیادی دایره‌ها

۱. مقدمه

در این فصل می‌خواهیم $\pi_۱(X,۰)$ را در برخی حالتهای ساده مشخص کنیم. ابتدا دایرهٔ $S^۱$ را بررسی می‌کنیم. در اینجا توپولوژی نسبی را به‌کار می‌بریم. به‌عنوان مثال، برای $S^۱$ توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}^۲$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های باز $S^۱$، اجتماع کمانهای باز، یعنی کمانهایی بدون نقاط انتهایی، هستند. به‌طور کلی، اگر S^n نمایشگر کرهٔ nبعدی

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+۱} : \sum_{i=۱}^{n+۱} x_i^۲ = ۱ \right\}$$

باشد، آنگاه به S^n توپولوژی القایی حاصل از توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^{n+۱}$ را نسبت می‌دهیم.

حال به دایرهٔ $S^۱$ می‌پردازیم. $S^۱$ را به‌صورت گروه اعداد مختلط با قدرمطلق یک در نظر می‌گیریم، یعنی

$$S^۱ = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

چون $S^۱$ مسیری‌همبند است (فرع ۳.۵)، تمام گروههای بنیادی آن یکریخت هستند (فرع ۱.۶). بنابراین برای مشخص کردن $\pi_۱(S^۱,۰)$، هر نقطه‌ای روی $S^۱$ را می‌توانیم به‌کار ببریم. نقطهٔ $۱ = e^{i۰}$

را به‌عنوان نقطهٔ پایه برای تعیین $\pi_1(S^1)$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین، قصد داریم نوع هوموتوپی تمام نگاشتهای پیوسته‌ای مانند $\alpha : C \to S^1$ را که $\alpha(0) = \alpha(1) = 1 \in S^1$، رده‌بندی کنیم. می‌توانیم وضعیتی را که در اینجا رخ می‌دهد، به‌طور شهودی به‌صورت زیر توصیف کنیم.

اگر مسیر زیر را با پایهٔ ۱ در نظر بگیریم

$$x(t) = \begin{cases} e^{\pi i t} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ e^{\pi i(1-t)} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که مسیر x از ۱ شروع می‌شود و با پیمودن قسمتی از محیط دایره به $e^{i\pi/2} = (0, 1) \in S^1$ می‌رسد و سپس جهت حرکت آن معکوس می‌شود و به ۱ باز می‌گردد. این مسیر نمونهٔ شاخص مسیرهایی است که هر یک از ۱ شروع می‌شود، قسمتی از محیط دایره را، بدون اینکه گردش کاملی انجام دهد، طی می‌کند، به نقطه‌ای مانند $e^{i\theta_0}$ می‌رسد و سپس در جهت عکس به ۱ باز می‌گردد. واضح است که مسیرهای مختلف ممکن است «سرعتهای» متفاوتی داشته باشند، ممکن است کمانهای زیادی را بپیمایند و باز گردند و غیره، اما واضح است که این مسیرها با مسیر پوچ ۱پایه یعنی ε_1، هوموتوپیک هستند.

از طرف دیگر، مسیر ۱پایهٔ زیر

$$y(t) = e^{2\pi i t} \qquad t \in C$$

دقیقاً یک دور S^1 را می‌پیماید. این نگاشت با مسیر ε_1 هوموتوپیک نیست و لذا متعلق به‌یک ردهٔ هوموتوپی غیربدیهی است. ممکن است انواع دیگری از مسیرهای ۱پایه موجود باشند، مثلاً مسیرهایی که محیط دایره را یک دور کامل می‌پیمایند و بدون اینکه در ۱ توقف کنند به نقطه‌ای مانند $e^{i\theta_0}$ می‌روند (بدون اینکه برای دومین بار محیط دایره را طی کنند) و سپس به نقطهٔ ۱ باز می‌گردند. پیمودن این کمانهای آخری و باز پیمودن آنها در جهت عکس اصلاً تأثیری در پیمودن محیط دایره ندارد (زیرا این قسمت از مسیر هوموتوپیک با ε_1 است)، در نتیجه چنین مسیرهایی بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شوند که دقیقاً یک دور S^1 را می‌پیمایند.

همچنین می‌توانیم مسیرهایی را (مشابه با مسیر قبل) در نظر بگیریم که به‌جای یک‌بار دقیقاً n بار S^1 را می‌پیمایند. عدد صحیح n را مثبت یا منفی در نظر می‌گیریم بسته به اینکه مسیرها در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت یا در جهت آن حرکت، S^1 را بپیمایند. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که به‌ازای هر عدد صحیح n، یک ردهٔ هوموتوپی به‌دست می‌آید و لذا می‌توانیم حدس بزنیم که $\pi_1(S^1)$ با گروه اعداد صحیح یکریخت است.

توابع ϕ و ψ بعدی در دنبالهٔ بحث مورد نیاز خواهند بود. فرض می‌کنیم ϕ نگاشتی از گروه جمعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به S^1 با ضابطهٔ

$$\phi(x) = e^{2\pi i x} \quad \text{به‌ازای هر } x \in \mathbb{R}$$

باشد. در این‌صورت، واضح است که ϕ همریختی است. مشاهده می‌شود که ϕ، عنصر $0 \in \mathbb{R}$ را به عنصر $e^{2\pi i 0} = 1 \in S^1$ می‌نگارد و $\mathbb{R}$ را دور S^1 می‌پیچاند. واضح است که بازهٔ باز $(-1/2, 1/2)$ تحت ϕ با $S^1 - \{-1\}$ همسانریخت است، لذا می‌توانیم فرض کنیم که

$$\psi : S^1 - \{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

معکوس $\phi|(-1/2, 1/2)$ باشد.

۲. لمها

برای به‌دست آوردن قضیهٔ اصلی این فصل به لمهای زیر نیاز داریم. اثبات هر دو لم را یکجا ارائه می‌کنیم.

لم ۱.۷ (لم ترفیع). فرض می‌کنیم σ مسیری ۱پایه در S^1 باشد. در این‌صورت، مسیری منحصربه‌فرد مانند σ' در $\mathbb{R}$ چنان موجود است که نقطهٔ ابتدایی آن 0 باشد و $\phi\sigma' = \sigma$.

در این حالت می‌گوییم که مسیر σ از طریق ϕ به مسیر σ' در $\mathbb{R}$ ترفیع می‌یابد (و σ' را ترفیع σ به $\mathbb{R}$ می‌نامیم).

فرض می‌کنیم $A = \{0, 1\}$. هرگاه σ و τ مسیرهایی ۱پایه در S^1 باشند، فرض می‌کنیم σ' و τ' مسیرهای حاصل از σ و τ بر طبق ۱.۷ باشند.

لم ۲.۷ (لم هوموتوپی پوششی). فرض می‌کنیم σ و τ مسیرهایی ۱پایه در S^1 باشند و $F : \sigma \simeq \tau (\operatorname{rel} A)$. در این‌صورت نگاشت پیوستهٔ منحصربه‌فردی مانند $F' : C \times C \to \mathbb{R}$ چنان موجود است که $\phi F' = F$ و $F' : \sigma' \simeq \tau' (\operatorname{rel} A)$.

اثبات. فرض می‌کنیم Y نمایشگر C یا $C \times C$، $f : Y \to S^1$ نمایشگر σ یا F باشد و نماد $0 \in Y$ به معنای $0 \in C$ یا $(0, 0) \in C \times C$ باشد. چون Y فشرده است، f روی Y یکنواخت‌پیوسته است. لذا عدد $\delta > 0$ چنان موجود است که نابرابری $\|y - y'\| < \delta$

نابرابری $\|f(y) = f(y')\| < ۱$ را ایجاب کند. چون به‌ازای هر $y \in Y$، $\|f(y)\| = ۱$، اگر $\|y - y'\| < \delta$، آنگاه

$$f(y) \neq -f(y')، \quad \text{یعنی} \quad f(y)/f(y') \neq -۱.$$

بنابراین وقتی $\|y - y'\| < \delta$، $\psi(f(y)/f(y'))$ تعریف شده است. فرض می‌کنیم عدد $N > ۰$ عددی طبیعی باشد که به‌ازای هر $y \in Y$، $\|y\| < N\delta$. در این حالت هر یک از کمیتهای

$$\left\|y - \frac{N-۱}{N}y\right\|, \left\|\frac{N-۱}{N}y - \frac{N-۲}{N}y\right\|, \ldots, \left\|\frac{۱}{N}y - ۰\right\|$$

کمتر از σ هستند و لذا کمیتهای

$$\psi\left[\frac{f(y)}{f\left(\frac{N-۱}{N}y\right)}\right], \psi\left[\frac{f\left(\frac{N-۱}{N}y\right)}{f\left(\frac{N-۲}{N}Y\right)}\right], \ldots, \psi\left[\frac{f\left(\frac{۱}{N}y\right)}{f(۰)}\right]$$

تعریف‌شده هستند.

حال نگاشت $f' : Y \to \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$f'(y) = \psi\left[\frac{f(y)}{f\left(\frac{N-۱}{N}y\right)}\right] + \cdots + \psi\left[\frac{f\left(\frac{۱}{N}y\right)}{f(۰)}\right]$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $f'(۰) = \psi(۱) + \cdots + \psi(۱) = ۰$ و f' پیوسته است. چون ϕ همریختی است و $\phi\psi = I_{S^۱ - \{-۱\}}$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\phi f'(y) &= \phi(f'(y)) \\
&= \frac{f(y)}{f\left(\frac{N-۱}{N}y\right)} \cdot \frac{f\left(\frac{N-۱}{N}y\right)}{f\left(\frac{N-۲}{N}y\right)} \cdot \cdots \frac{f\left(\frac{۱}{N}y\right)}{f(۰)} \\
&= \frac{f(y)}{f(۰)} = f(y)
\end{aligned}$$

یعنی $\phi f' = f$، که نتیجهٔ مطلوب است.

حال ثابت می‌کنیم که f' منحصر به‌فرد است. فرض می‌کنیم نگاشت $f'' : Y \to \mathbb{R}$ نیز در $f''(\circ) = \circ$ و $\phi f'' = f$ صدق کند. در این‌صورت، $f' - f''$ پیوسته است و با استفاده از تعریف ϕ نتیجه می‌گیریم که اگر $y_\circ \in Y$، آنگاه

$$\begin{aligned}\phi(f'(y_\circ) - f''(y_\circ)) &= \frac{\phi(f'(y_\circ))}{\phi(f''(y_\circ))}\\ &= \frac{f(y_\circ)}{f(y_\circ)} = ۱\end{aligned}$$

لذا $f' - f''$، Y را به هستهٔ ϕ، یعنی به اعداد صحیح می‌نگارد. چون Y همبند و $f' - f''$ پیوسته است، پس $f' - f''$ نگاشتی ثابت است. چون $f'(\circ) = f''(\circ) = \circ$، پس $f' - f''$ متحد با صفر است، و لذا منحصر به‌فرد بودن f' ثابت می‌شود.

به این ترتیب، لم ۱.۷ به اثبات می‌رسد. برای تکمیل اثبات لم ۲.۷، فرض می‌کنیم

$$Y = C \times C, f = F, f' = F'$$

باید نشان دهیم

$$F' : \sigma' \simeq \tau' \,(\mathrm{rel}\, A)\,.$$

مشاهده می‌کنیم که $F'(x, \circ)$ نگاشتی از C به $\mathbb{R}$ است. چون $\phi F' = F$، با استفاده از لم ۱.۷ داریم

$$\phi(F'(x, \circ)) = F(x, \circ) = \sigma(x) = \phi(\sigma'(x))$$

و به‌علاوه $F'(\circ, \circ) = \sigma'(\circ) = \circ$.

با استفاده از حکم منحصر به‌فرد بودن مسیر مذکور در لم ۱.۷ برابری $F'(x, \circ) = \sigma'(x)$ را به‌ازای هر $x \in C$، به‌دست می‌آوریم. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $x \in C$، $F'(x, ۱) = \tau'(x)$. اثبات نسبی بودن هوموتوپی از اینجا حاصل می‌شود که

$$F'|\{\circ\} \times C \quad \text{و} \quad F'|\{۱\} \times C$$

هر دو ثابت هستند. لذا هر دو لم ثابت می‌شوند.

۳. قضیهٔ اصلی

حال قضیهٔ اصلی این فصل را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۷ گروه بنیادی دایرهٔ S^1، یعنی $\pi_1(S^1)$ با گروه جمعی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

نکتهٔ ۱.۷ همان‌گونه که در مقدمه دیدیم، می‌توانیم $\pi_1(S^1)$ را نسبت به هر نقطه از S^1 مشخص کنیم. این کار را برای $e^{i0} = 1$ انجام می‌دهیم.

اثبات. فرض می‌کنیم σ مسیری ۱پایه در S^1 باشد. بنابه لم ترفیع (لم ۱.۷)، σ را به مسیر σ' در $\mathbb{R}$ با نقطهٔ ابتدایی ۰ چنان ترفیع می‌دهیم که $\phi\sigma' = \sigma$. ممکن است مسیر σ' مسیر ۰پایه نباشد، یعنی ممکن است $\sigma'(1)$ صفر نباشد. اما چون $\phi\sigma' = \sigma$، $\sigma'(1)$ باید متعلق به هستهٔ ϕ باشد، یعنی $\sigma'(1) \in \mathbb{Z}$. عدد صحیح $\sigma'(1)$ تعداد دفعاتی است که محیط S^1 به‌طور کامل توسط هر عضو $[\sigma]$ پیموده می‌شود (این پیمایش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است اگر $\sigma'(1)$ مثبت، و در جهت آن حرکت است اگر $\sigma'(1)$ منفی باشد).

اگر τ مسیر ۱ پایهٔ دیگری در S^1 باشد که $\tau \simeq \sigma\ (\mathrm{rel}\ A)$، آنگاه بنابه لم ۲.۷، $\tau' \simeq \sigma'(\mathrm{rel}\ A)$ و لذا $\sigma'(1) = \tau'(1)$، یعنی عدد صحیح $\sigma'(1)$ مستقل از عضو σی ردهٔ $[\sigma]$ است و در نتیجه نگاشت

$$f : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$

را با ضابطهٔ $f([\sigma]) = \sigma'(1)$ به‌ازای هر $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1)$ می‌توانیم تعریف کنیم.

واضح است که نگاشت f خوش‌تعریف است. می‌خواهیم نشان دهیم که f یکریختی است. برای استنتاج اینکه f همریختی است، فرض می‌کنیم رده‌های $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(S^1, 1)$ چنان باشند که $\sigma'(1) = m$ و $\tau'(1) = n$. در این‌صورت

$$f([\sigma]) + f([\tau]) = m + n$$

و با در نظر گرفتن $\mathbb{R}$ به‌صورت گروه جمعی، باید نشان دهیم

$$f([\sigma][\tau]) = m + n\,.$$

حال متذکر می‌شویم که

$$f([\sigma][\tau]) = f(\sigma * \tau) = (\sigma * \tau)'(1)$$

که در آن $(\sigma * \tau)'$ مسیری در $\mathbb{R}$ با نقطهٔ ابتدایی ۰ است که ترفیع $\sigma * \tau$ است. نگاشت τ'' را به‌صورت

$$\tau''(t) = \tau'(t) + m$$

تعریف می‌کنیم، در این‌صورت τ'' مسیری در $\mathbb{R}$ از m تا $n+m$ است. لذا $\sigma' * \tau''$ مسیری در $\mathbb{R}$ از $\circ$ تا $m+n$ است. حال داریم

$$\phi(\sigma' * \tau'') = (\phi\sigma') * (\phi\tau'') = \sigma * \tau$$

و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\sigma' * \tau''$ ترفیع $\sigma * \tau$ به $\mathbb{R}$ است، یعنی

$$(\sigma * \tau)' = \sigma' * \tau''.$$

بنابراین $(\sigma * \tau)'(۱) = (\sigma' * \tau'')(۱) = m + n$ و لذا

$$f([\sigma][\tau]) = m + n$$

و از این برابری نتیجه می‌گیریم که f همریختی است.

با استفاده از اینکه $\mathbb{R}$ انقباض‌پذیر است (به تمرین ۲ فصل ۴ رجوع کنید)، می‌توانیم نشان دهیم که $\ker f = [I]$، که در آن $[I]$ ردهٔ هوموتوپی مسیر $\varepsilon_۱$ است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که f دوسویی است. بنابراین f یکریختی است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

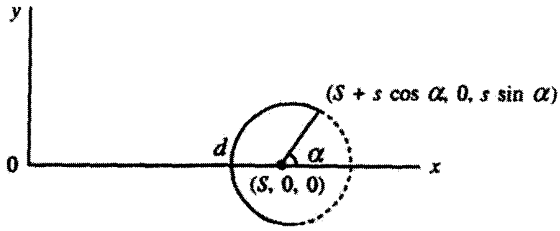
۴. چنبره

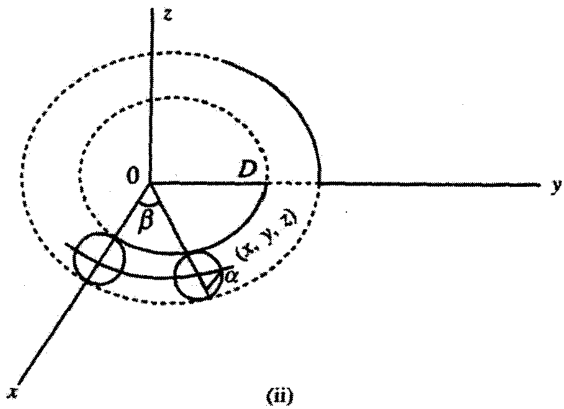
دایره‌ای در صفحهٔ xz از $\mathbb{R}^۳$ به شعاع $s > \circ$ و به مرکز $(S, \circ, \circ)$، که $S > s$، در نظر می‌گیریم. مختصات هر نقطه از محیط دایره، به‌ازای αی مناسبی از بازهٔ $[\circ, ۲\pi]$، به‌صورت $(S + s\cos\alpha, \circ, s\sin\alpha)$ است. اگر این دایره را حول محور zها دوران دهیم، رویه‌ای به‌دست می‌آید که چنبره نامیده می‌شود.

متذکر می‌شویم که به‌ازای هر نقطه از محیط دایره، مقادیر $x^۲ + y^۲$ و z در هنگام دوران ثابت باقی می‌مانند. فرض می‌کنیم (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی روی چنبره و β زاویه‌ای باشد که دایره به اندازهٔ آن دوران داده شده است تا به این نقطه برسد. در این‌صورت، $x = (S + s\cos\alpha)\cos\beta$، $y = (S + s\cos\alpha)\sin\beta$ و $z = s\sin\alpha$، که در آن $(S + s\cos\alpha, \circ, s\sin\alpha)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ اولیه است که پس از دورانی به اندازهٔ زاویهٔ β، به (x, y, z) می‌رسد.

حال نگاشت $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۳$ را با ضابطهٔ

$$f(\alpha, \beta) = ((S + s\cos\alpha)\cos\beta, (S + s\cos\alpha)\sin\beta, s\sin\alpha)$$





شکل ۱.۷

تعریف می‌کنیم و خاطرنشان می‌کنیم که چنبره نگارهٔ مربع

$$[\circ, \text{۲}\pi] \times [\circ, \text{۲}\pi] = \{(\alpha, \beta) : \circ \leq \alpha \leq \text{۲}\pi, \circ \leq \beta \leq \text{۲}\pi\}$$

تحت f است. واضح است که f پیوسته است و لذا چنبره فشرده است.

قضیهٔ ۲.۷ گروه بنیادی چنبره با $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یکریخت است.

اثبات از قضیهٔ ۱.۷ و تمرین ۴ (فصل ششم) حاصل می‌شود.

۵. دو کاربرد

برای اینکه کاربردی بلاواسطه را ارائه کرده باشیم، قضیهٔ بعدی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۷ دایرهٔ $S^{\text{۱}}$ درون‌برد قرص $B^{\text{۲}}$ نیست.

اثبات. بالعکس، فرض می‌کنیم یک درون‌بری مانند

$$r : B^{۲} \to S^{۱}$$

موجود باشد. لذا $ri = I_{S^{۱}}$. بنابه قضیهٔ ۴.۶،

$$r^{*}i^{*} = I^{*} : \pi_{۱}(S^{۱}, ۱) \to \pi_{۱}(S^{۱}, ۱)$$

و لذا I^{*} یک‌به‌یک است. بنابراین $\pi_{۱}(S^{۱}, ۱)$ با زیرگروهی از $\pi_{۱}(B^{۲}, ۱)$ یکریخت است. اما $B^{۲}$ انقباض‌پذیر است (بنابه تمرین ۲ فصل ۴) و لذا $\pi_{۱}(B^{۲}, ۱)$ بدیهی است (یعنی تنها عضو آن همانی است) (فرع ۳.۶ را ببینید) و $\pi_{۱}(S^{۱}, ۱)$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است. از اینجا به تناقض می‌رسیم و لذا قضیه ثابت می‌شود.

نکتهٔ ۲.۷ این اثبات را نمی‌توان برای S^{n} و $B^{n+۱}$ $(n > ۱)$ به‌کار برد.

برای عرضهٔ کاربرد دوم، نیاز داریم تا درجهٔ مسیر را تعریف کنیم. فرض می‌کنیم σ مسیری در $S^{۱}$ با پایهٔ ۱ باشد و $\sigma' : C \to \mathbb{R}$ ترفیع منحصر به‌فرد آن باشد (لم ۱.۷). در اثبات قضیهٔ ۱.۷ مشاهده کردیم که $\sigma'(۱)$ عددی صحیح است. این عدد $\sigma'(۱)$ را درجهٔ σ می‌نامند. چون مسیرهای هم‌ارز ترفیعهای هم‌ارز دارند، درجهٔ مسیرهای هم‌ارز یکی است.

قضیهٔ ۴.۷ هر چندجمله‌ای مختلط غیرثابت حداقل یک ریشه دارد.

اثبات. بدون اینکه خللی به کلیت مسأله وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم چندجمله‌ای مورد نظر چندجمله‌ای

$$P(z) = a_{۰} + a_{۱}z + \cdots + a_{k-۱}z^{k-۱} + z^{k}$$

باشد، که در آن $k \geq ۱$. فرض می‌کنیم $P(z)$ ریشه نداشته باشد. تابع

$$G : C \times [۰, \infty) \to S^{۱} \subseteq C \times C$$

را با ضابطهٔ

$$G(t, r) = \frac{P(r\exp(۲\pi it))}{|P(r\exp(۲\pi it))|} \times \frac{|P(r)|}{P(r)}$$

و تابع $F : C \times C \to S^{۱}$ را با ضابطهٔ

$$F(t, s) = \begin{cases} G\left(t, \dfrac{s}{۱-s}\right) & ۰ \leq t \leq ۱, ۰ \leq s < ۱ \\ \exp(۲\pi ikt) & ۰ \leq t \leq ۱, s = ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون G پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{s\to ۱} F(t,s) = \lim_{s\to ۱} G(t, s/۱-s) = \lim_{r\to\infty} G(t,r)$$
$$= (\exp(۲\pi i t))^k$$

و لذا F نیز پیوسته است. همچنین نتیجه می‌گیریم که F یک هوموتوپی $(\operatorname{rel} A)$ بین $F(t,۰) = f_۰(t)$ و $F(t,۱) = f_۱(t)$ است. بنابراین، $f_۱ \sim f_۰$ و لذا بنابه استنتاج قبل از قضیه، $\deg(f_۰) = \deg(f_۱)$. اما $\deg(f_۰) = ۰$ و $\deg(f_۱) = k$. بنابراین به تناقض می‌رسیم (مگر اینکه $k = ۰$) و لذا قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱. نشان دهید $\pi_۱(\mathbb{R}^n, ۰)$ گروهی تک‌عضوی است.

۲. نشان دهید $\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}$ و S^n یک نوع هوموتوپی دارند و نتیجه بگیرید که $\pi_۱(\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}, ۰)$ گروهی تک‌عضوی است.

۳. فرض کنید X صفحهٔ سفتهٔ $\mathbb{R}^۲ - \{(۰,۰)\}$ باشد. نشان دهید $\pi_۱(X)$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۴. نشان دهید گروه بنیادی کره از یک عضو، یعنی همانی، تشکیل می‌شود. (زیرا تمام مسیرهای بسته با یک مسیر پوچ هوموتوپیک هستند.)

۵. فرض کنید $[f] \in \pi_۱(S^۱, ۱)$ و γ مسیر $\{f(t) : t \in C\} \subseteq S^۱$ باشد. فرض کنید

$$\omega(f) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

نشان دهید که

(الف) $\omega(f)$ عددی صحیح است؛

(ب) $\omega(f) = \deg(f)$؛

(ج) $\omega(f)$ مستقل از انتخاب $f \in [f]$ است.

۶. نگاشت $\mathbb{Z} \to \pi_۱(S^۱)$ را با ضابطهٔ $(\alpha \text{ درجهٔ}) \to [\alpha]$ در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف ثابت کنید که این نگاشت یک همریختی از $\pi_۱(S^۱)$ به گروه جمعی اعداد صحیح است.

۷. نشان دهید گروه بنیادی $\pi_۱(S^۱, ۱)$ یک گروه دوری نامتناهی است که توسط ردهٔ $[f]$ تولید می‌شود، که در آن

$$f(t) = (\cos ۲\pi t, \sin ۲\pi t) \qquad ۰ \le t \le ۱.$$

۸. نشان‌دهید $\pi_۱(S^۱ \times \mathbb{R})$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۸

فضاهای پوششی

۱. تعاریف

مفهوم فضاهای پوششی مفهوم بسیار مهمی در مبحث فضاهای توپولوژیک است که کاربردهایی در مباحث وابسته مانند هندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ گروههای لی و نظریهٔ سطوح ریمان یافته است. این مفهوم ارتباط نزدیکی نیز با مطالعهٔ گروه بنیادی دارد. مسائل توپولوژیک مختلفی دربارهٔ فضاهای پوششی را می‌توان به مسائل جبری درگروههای بنیادی فضاهای مربوط تبدیل کرد. ابتدا تعریف فضای پوششی را عرضه می‌کنیم.

تعریف ۱.۸ فرض می‌کنیم $\widetilde{X}$ و X دو فضای توپولوژیک باشند و $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. می‌گوییم زیرمجموعهٔ باز $U \subseteq X$ توسط p به‌طور هموار پوشانده می‌شود هرگاه $p^{-1}(U)$ اجتماع زیرمجموعه‌های باز مجزایی از $\widetilde{X}$ باشد و هر یک از این زیرمجموعه‌های باز $\widetilde{X}$ به‌طور همسانریخت توسط p به روی U نگاشته شوند. نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ را نگاشت پوششی یا تصویرگر پوششی می‌نامند هرگاه هر $x \in X$ همسایگی بازی داشته باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود. $\widetilde{X}$ را فضای پوششی و X را فضای پایهٔ نگاشت پوششی $p : \widetilde{X} \to X$ می‌نامند. این تعریف در واقع معادل تعریف زیر است.

تعریف ۲.۸ نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ را نگاشت پوششی نامند هرگاه
(الف) p پوشا باشد، و
(ب) اگر $x \in X$، همسایگی باز U از x چنان موجود باشد که

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

که در آن U_jها زیرمجموعه‌های بازی از $\widetilde{X}$ هستند و به‌ازای هر $j \neq k$، $U_j \cap U_k = \phi$ و به‌ازای هر $j \in J$، نگاشت $p|U_j : U_j \to U$ همسانریختی است.

مثال ۱.۸ نگاشت $p : \mathbb{R} \to S^1$ را با ضابطهٔ $p(t) = e^{2\pi i t}$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $x+iy$ نقطه‌ای روی S^1 باشد. در این‌صورت، نقطهٔ متقاطر آن $-x+i(-y)$ است. فرض می‌کنیم $U = S^1 - \{-x+i(-y)\}$. در این‌صورت، $p^{-1}(U)$ متشکل از اجتماع تمام بازه‌های باز به طول یک و مراکز $(1/2\pi) \arcsin x$ است و هر یک از این بازه‌ها تحت p به‌طور همسانریخت به روی U نگاشته می‌شوند. لذا p تصویرگر پوششی و $\mathbb{R}$ فضای پوششی S^1 است.

مثال ۲.۸ هر همسانریختی تصویرگر پوششی است.

مثال ۳.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ تصویرگر متعارف باشد و $\widetilde{X} = X \times Y$، که Y فضایی گسسته است. در این‌صورت، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۴.۸ فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت باشد و نگاشت $p : S^1 \to S^1$ را با ضابطهٔ $p(z) = z^n$ در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $z \in S^1$، مجموعهٔ $S^1 - \{z\}$ به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. بنابراین، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۵.۸ فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت باشد، و

$$\widetilde{X} = \{z : z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}, \quad X = \{z : z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r^n\}$$

و $p(z) = z^n$.

در این‌صورت، p تصویرگر پوششی است.

مثال ۶.۸ فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}^2$، $M = S^1 \times S^1$ (چنبره)، و به‌ازای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$،

$$p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

در این‌صورت، p تصویرگر پوششی است.

۲. همسانریختی موضعی

تعریف ۳.۸ فرض می‌کنیم $f : Y \to X$ تابع باشد. در این‌صورت، f را همسانریختی موضعی می‌نامند هرگاه هر نقطهٔ $y \in Y$ یک همسایگی باز داشته باشد که به‌طور همسانریخت توسط f به روی زیرمجموعهٔ بازی از X نگاشته شود.

نکتهٔ ۱.۸ اگر f همسانریختی موضعی باشد، هر یک از نقاط Y یک همسایگی با ویژگی فوق دارد. بنابراین، لم زیر برقرار است.

لم ۱.۸ هر همسانریختی موضعی نگاشتی باز است.

لم ۲.۸ هر نگاشت پوششی یک همسانریختی موضعی است.

اثبات. فرض می‌کنیم $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشت پوششی باشد و $\tilde{x} \in \widetilde{X}$. همچنین فرض می‌کنیم U همسایگی بازی از $p(\tilde{x})$ باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود. طبق تعریف

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

که در آن به‌ازای هر j و kی متفاوت $U_j \cap U_k = \phi$ و هر U_j به‌طور همسانریخت توسط p به روی U نگاشته می‌شود. فرض می‌کنیم $\widetilde{U}$ آن مجموعهٔ بازی از $\{U_j\}_{j \in J}$ باشد که شامل $\tilde{x}$ است. در این‌صورت، $\widetilde{U}$ همسایگی بازی از $\tilde{x}$ با این ویژگی است که $p|\widetilde{U}$ یک همسانریختی از $\widetilde{U}$ به روی U است. بنابراین p همسانریختی موضعی است.

لیکن، همان‌گونه که مثال بعدی نشان می‌دهد، همسانریختی موضعی ممکن است نگاشت پوششی نباشد.

مثال ۷.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p_1 : (\circ, ۳) \to S^1$ تحدید نگاشت $p : \mathbb{R} \to S^1$ با ضابطهٔ $p(t) = e^{۲\pi i t}$ به بازهٔ باز $(\circ, ۳)$ باشد. چون p نگاشتی پوششی است (مثال ۱.۸ را ببینید)، بنابه لم ۲.۸، p همسانریختی موضعی است و لذا تحدید آن به مجموعهٔ باز $(\circ, ۳)$، یعنی p_1، همسانریختی موضعی است. p_1 پوشا نیز هست. اما چون عدد مختلط $۱ \in S^1$ هیچ همسایگی که به‌طور هموار توسط p_1 پوشانده شود ندارد، p_1 نگاشت پوششی نیست.

واضح است که هر نگاشت پوششی پوشاست و لذا با استفاده از لمهای فوق فرع زیر را به‌دست می‌آوریم.

فرع ۱.۸ فرض می‌کنیم $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشت پوششی باشد. در این‌صورت، X یک فضای خارج‌قسمتی $\widetilde{X}$ است.

۳. Gـفضا

نشان خواهیم داد که Gـفضا با شرط خاصی فضای پوششی است. برای این منظور، به چند تعریف و لم احتیاج داریم.

تعریف ۴.۸ فرض می‌کنیم X مجموعه و G گروه باشد. در این‌صورت، گویند G روی X عمل می‌کند یا X، Gـمجموعه است هرگاه نگاشتی از $G \times X$ به X، که با $(g, x) \to g \cdot x$ ($\cdot$ نمایشگر یک عمل است) نمایش داده می‌شود، چنان موجود باشد که

(الف) به‌ازای هر $x \in X$، $e \cdot x = x$؛

(ب) به‌ازای هر $x \in X$ و هر $g, h \in G$، $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$؛

که در آن e عضو همانی G است.

مثال ۸.۸ فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد و $G(X)$ مجموعهٔ تمام همسانریختیهای $f : X \to X$ باشد. در این‌صورت، واضح است که $G(X)$ گروه است. به‌ازای هر $g \in G$ و $x \in X$، فرض می‌کنیم $g \cdot x = g(x)$. در این‌صورت،

$$e \cdot x = e(x) = x$$

و

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= g \cdot h(x) = g(h(x)) \\ &= (gh)x = (gh) \cdot x\,. \end{aligned}$$

بنابراین، G روی X عمل می‌کند.

لم ۳.۸ فرض می‌کنیم X، Gـمجموعه باشد. در این‌صورت اگر $g \in G$، تابع $\theta_g : X \to X$ با ضابطهٔ $x \to g \cdot x$ دوسویی است.

اثبات. از تعریف نتیجه می‌شود

$$\theta_g \theta_h = \theta_{gh} \quad \text{و} \quad \theta_e = I_X\cdot$$

بنابراین، $\theta_{g^{-1}}\theta_g = I_X = \theta_g\theta_{g^{-1}}$ و لذا θ_g دوسویی است.

تعریف ۵.۸ فرض می‌کنیم G روی X عمل کند و $x \in X$. در این‌صورت مدار x، زیرمجموعهٔ

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$$

از X است.

لم ۴.۸ دو مدار $G \cdot x$ و $G \cdot y$ یا مجزا هستند یا برابرند.

اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

فرض می‌کنیم G روی X عمل کند. یک رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی X به‌صورت

$x \sim y$ اگر و فقط اگر عنصر $g \in G$ چنان موجود باشد که $g \cdot x = y$

تعریف می‌کنیم. چون مدارهای $G \cdot x$ و $G \cdot y$ یا مجزا هستند یا برابر (لم ۴.۸)، رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت

$x \sim y$ اگر و فقط اگر $y \in G \cdot x$

نوشت. مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی را مجموعهٔ خارج‌قسمتی X به G می‌نامیم و با X/G نمایش می‌دهیم. واضح است که نگاشتی پوشا از X به X/G وجود دارد. لذا اگر X فضایی توپولوژیک باشد که G روی آن عمل کند، آنگاه می‌توانیم یک توپولوژی خارج‌قسمتی روی X/G در نظر بگیریم. در این‌صورت، X/G را فضای خارج‌قسمتی X به G (نسبت به نگاشت پوشای فوق) می‌نامیم.

مثال ۹.۸ اگر $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ به‌صورت $n \cdot x = n + x$ عمل کند، آنگاه $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$، S^1 است.

تعریف ۶.۸ فرض می‌کنیم X فضای توپولوژیک و G گروه باشد. در این‌صورت، X را Gـفضا نامند هرگاه G روی X عمل کند و به‌ازای هر $g \in G$، تابع θ_g با ضابطهٔ $x \to g \cdot x$ پیوسته باشد.

لم ۵.۸ فرض می‌کنیم X، Gـفضا باشد. در این‌صورت، تصویرگر متعارف

$$\pi : X \to X/G$$

نگاشتی باز است.

اثبات. فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ $V \subseteq X$ باز باشد. در این‌صورت،

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(V)) &= \{x \in X : \pi(x) \in \pi(V)\}\\ &= \{x \in X : G\cdot x = G\cdot y \quad \text{به‌ازای عضو } y \text{ای از } V\text{،}\}\\ &= \{x \in X : x = g\cdot y \quad \text{به‌ازای عضو } y \text{ای از } V \text{ و عضو } g \text{ای از } G\text{،}\}\\ &= \{x \in X : x \in g\cdot V \quad \text{به‌ازای عضو } g \text{ای از } G\text{،}\}\\ &= \bigcup_{g\in G} g\cdot V\,.\end{aligned}$$

بنابه تعریف Gـفضا و لم ۳.۸، عمل هر g از G یک همسانریختی است. لذا چون V باز است، $\pi^{-1}(\pi(V))$ باز است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\pi(V)$ در X/G باز است.

تعریف ۷.۸ فرض می‌کنیم X، Gـفضا باشد. عمل G روی X را ناپیوستهٔ سره نامند هرگاه به‌ازای هر $x \in X$، یک همسایگی باز از x مانند V چنان موجود باشد که به‌ازای هر $g, g_1 \in G$ که $g \neq g_1$، $g\cdot V \cap g_1\cdot V = \phi$.

واضح است که اگر عملی ناپیوستهٔ سره باشد، آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، که $g \neq e$، و هر $x \in X$، $g\cdot x \neq x$.

حال می‌توانیم قضیه‌ای دربارهٔ Gـفضاها عرضه کنیم.

قضیهٔ ۱.۸ فرض می‌کنیم X، Gـفضا باشد. اگر عمل G روی X ناپیوستهٔ سره باشد، آنگاه تصویرگر متعارف

$$\pi : X \to X/G$$

پوششی است.

اثبات. از تعاریف و مطلبی که قبل از مثال ۹.۸ آورده شد، نتیجه می‌شود که π نگاشتی پوشا و پیوسته است و بنابه لم ۵.۸، π نگاشتی باز است. فرض می‌کنیم $x \in X$ و V یک همسایگی باز x باشد که در شرط ناپیوستگی سره صدق می‌کند. لذا $\pi(V)$ باز است و یک همسایگی از $\pi(x) = G\cdot x$ است. به‌علاوه

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g\in G} g\cdot V$$

که در آن اعضای مجموعهٔ $\{g\cdot V : g \in G\}$ زیرمجموعه‌های باز مجزایی از X هستند. علاوه بر این نگاشت

$$\pi|g\cdot V : g\cdot V \to \pi(V)$$

نگاشت باز دوسویی پیوسته است و لذا همسانریختی است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۱۰.۸ نگاشت $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ نگاشتی پوششی است.

در این مثال که به جای G گروه جمعی $\mathbb{Z}$ را قرار داده‌ایم، مشاهده می‌کنیم که عمل $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $x \to x + n$ ناپیوستهٔ سره است زیرا اگر $x \in \mathbb{R}$ و $۱/۲ > \varepsilon > ۰$، آنگاه همسایگی باز $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ از x، در شرط بیان‌شده صدق می‌کند و با این عملِ $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Z}$ـفضا تبدیل می‌شود، و بنابراین نگاشت

$$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

نگاشتی پوششی خواهد بود.

۴. ویژگیهای نگاشت پوششی

قضیهٔ ۲.۸ هر نگاشت پوششی مانند $p : \widetilde{X} \to X$ باز است.

اثبات. فرض می‌کنیم زیرمجموعهٔ $V \subseteq \widetilde{X}$ باز باشد. نشان می‌دهیم $p(V)$ در X باز است. فرض می‌کنیم $x \in p(V)$. بنابه تعریف، یک همسایگی باز x مانند U موجود است که به‌طور هموار پوشانده می‌شود. فرض می‌کنیم $\tilde{x} \in p^{-۱}(x) \cap V$. از آنجا که

$$\tilde{x} \in p^{-۱}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

U_jای در $\widetilde{X}$ هست که $\tilde{x} \in U_j$. همچنین چون $U_j \cap V$ در U_j باز، و $p|U_j$ یک همسانریختی از U_j به روی U است (بنابه تعریف)، نتیجه می‌گیریم که $p(U_j \cap V)$ زیرمجموعهٔ بازی از U است. U در X باز است و لذا $p(U_j \cap V)$ در X باز است. چون

$$x \in p(U_j \cap V) \subseteq p(V)$$

پس $p(V)$ در X باز است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۳.۸ اگر $p : \widetilde{X} \to X$ یک نگاشتی پوششی باشد، آنگاه X توپولوژی خارج‌قسمتی نسبت به p دارد.

اثبات. چون p نگاشت باز پیوسته است، زیرمجموعهٔ U از X باز است اگر و فقط اگر $p^{-۱}(U)$ باز باشد.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که نگاشت پوششی برای فضایی موضعاً همبند را می‌توان به نگاشتهایی پوششی برای مؤلفه‌های فضا تقلیل داد.

قضیهٔ ۴.۸ اگر X موضعاً همبند باشد، آنگاه نگاشت پیوستهٔ $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی است اگر و فقط اگر برای هر مؤلفهٔ H از X، نگاشت

$$p|p^{-1}(H) : p^{-1}(H) \to H$$

نگاشتی پوششی باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم p نگاشتی پوششی و H مؤلفه‌ای از X باشد. همچنین فرض می‌کنیم $x \in H$ و U یک همسایگی باز x باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. اگر V مؤلفه‌ای از U شامل x باشد،آنگاه چون X موضعاً همبند است، V در X و در نتیجه در H باز است. همچنین واضح است که V به‌طور هموار توسط $p|p^{-1}(H)$ پوشانده می‌شود. بنابراین $p|p^{-1}(H)$ نگاشتی پوششی است.

بالعکس، فرض می‌کنیم برای هر مؤلفهٔ H از X، نگاشت $p|p^{-1}(H) : p^{-1}(H) \to H$ نگاشتی پوششی باشد. اگر $x \in H$، فرض می‌کنیم U همسایگی بازی از x در H باشد که به‌طور هموار توسط $p|p^{-1}(H)$ پوشانده می‌شود. همچنین از آنجا که X موضعاً همبند است، H در X باز است. لذا U در X باز است و روشن است که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. بنابراین، p نگاشتی پوششی است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

حال مفهوم ترفیع (مذکور در لم ۱.۷) را که در آن از نگاشت پوششی $p : \mathbb{R} \to S^1$ استفاده شد (مثال ۱ فصل ۸ را ببینید)، به نوع دیگری از نگاشتهای پوششی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۸.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ پوششی و نگاشت $f : Y \to X$ پیوسته باشد. در این‌صورت، ترفیع f نگاشت پیوسته‌ای مانند $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ است که $p\widetilde{f} = f$.

در لم بعدی می‌بینیم که اگر ترفیعی موجود باشد، منحصر به‌فرد است.

لم ۶.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ پوششی و نگاشتهای $f_1, f_2 : Y \to \widetilde{X}$ دو ترفیع $f : Y \to X$ باشند. به‌علاوه فرض می‌کنیم Y همبند و عضو $y_0 \in Y$ چنان موجود باشد که $f_1(y_0) = f_2(y_0)$. در این‌صورت، $f_1 = f_2$.

اثبات. مجموعهٔ Y_1 را به‌صورت

$$Y_1 = \{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، Y_1 ناتهی است زیرا $y_0 \in Y_1$. ثابت می‌کنیم Y_1 هم باز و هم بسته است. اگر $y \in Y$، آنگاه همسایگی بازی مانند V از $f(y)$ موجود است که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود، و لذا بنابه تعریف،

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

که به‌ازای $j \neq i$، $V_j \cap V_i = \phi$ و به‌ازای هر j، نگاشت $p|V_j : V_j \to V$ همسانریختی است.

اگر $y \in Y_1$، آنگاه به‌ازای kای، $f_1(y) = f_2(y) \in V_k$. نشان می‌دهیم که مجموعهٔ

$$F = f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_k)$$

همسایگی بازی از y و زیرمجموعه‌ای از Y_1 است.

بدین‌منظور، فرض می‌کنیم $x \in F$. در این‌صورت، $f_1(x), f_2(x) \in V_k$ و همچنین $pf_1(x) = pf_2(x)$. چون نگاشت $p|V_k$ همسانریختی است، پس $f_1(x) = f_2(x)$. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که هر نقطهٔ Y_1 یک نقطهٔ درونی Y_1 است و لذا Y_1 باز است.

اگر $y \notin Y_1$، آنگاه به‌ازای k و lای که $k \neq l$، $f_1(y) \in V_k$ و $f_2(y) \in V_l$. به طریقی مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموعهٔ

$$f_1^{-1}(V_k) \cap f_2^{-1}(V_l)$$

یک همسایگی باز y است که در متمم Y_1 قرار دارد. لذا Y_1 بسته نیز هست. چون Y همبند است، نتیجه می‌گیریم که $Y_1 = Y$ و بنابراین $f_2 = f_1$. به این ترتیب لم به اثبات می‌رسد.

۵. گروه بنیادی فضای پوششی

این فصل را با قضیه‌ای دربارهٔ گروه بنیادی فضای پوششی به پایان می‌رسانیم.

قضیهٔ ۵.۸ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ پوششی و فضای $\widetilde{X}$ مسیری‌همبند باشد و $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \widetilde{X}$. در این‌صورت، مسیری مانند f در X از $p(\tilde{x}_0)$ به $p(\tilde{x}_1)$ چنان موجود است که

$$\Phi_f \, p^* \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p^* \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)\,.$$

نکته. در اینجا Φ_f یکریختی حاصل از f (نکتهٔ ۱.۶ را ببینید) و p^* همریختی القایی است (تعریف ۲.۶ را ببینید).

اثبات. فرض می‌کنیم g مسیری در $\widetilde{X}$ از $\tilde{x}_0$ به $\tilde{x}_1$ باشد. در این‌صورت، با استفاده از نتیجهٔ ۱.۶ یک یکریختی مانند Φ_g از $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ به $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$ به‌دست می‌آید. لذا

$$\Phi_g \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) .$$

حال اثر همریختی القایی p^* را بر طرفین رابطهٔ فوق در نظر می‌گیریم

$$p^* \Phi_g \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) = p^* \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1) .$$

با استفاده از تمرین ۵ (فصل ۶) به سادگی درمی‌یابیم که

$$p^* \Phi_g = \Phi_{pg} p^* .$$

لذا اگر بنویسیم $f = pg$، آنگاه f مسیری در X از $p(\tilde{x}_0)$ به $p(\tilde{x}_1)$ است و رابطهٔ مورد نیاز را از بالا به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. فرض کنید H زیرگروهی ازگروه G با عمل $*$ باشد. اگر $h \in H$ و $g \in G$، فرض کنید $h \cdot g$ همان $h * g$ باشد. نشان دهید که به این ترتیب عملی برای H روی G تعریف می‌شود (یعنی با این تعریف، H روی G عمل می‌کند).

۲. فرض کنید G گروه و $S(G)$ نمایشگر ردهٔ تمام زیرمجموعه‌های G باشد. ثابت کنید با تعریف

$$g \cdot U = gU = \{gh : h \in U, g \in G, U \subseteq S(G)\}$$

G روی $S(G)$ عمل می‌کند.

۳. فرض کنید X، Gـفضا باشد. ثابت کنید به‌ازای هر $g \in G$، تابع θ_g با ضابطهٔ $x \to g \cdot x$ یک همسانریختی از X به خودش است.

۴. فرض کنید G گروهی متناهی و X یک Gـفضا باشد. نشان دهید تصویرگر متعارف

$$\pi : X \to X/G$$

نگاشتی بسته است.

۵. فرض کنید نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی باشد و $X_0 \subseteq X$. فرض کنید $\widetilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. نشان دهید نگاشت $p_0 : \widetilde{X}_0 \to X_0$ که در آن $p_0(x) = p(x)$، نگاشتی پوششی است.

۶. فرض کنید نگاشتهای $p : \widetilde{X} \to X$ و $q : \widetilde{Y} \to Y$ نگاشتهایی پوششی باشند. نشان دهید نگاشت

$$p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$$

نگاشتی پوششی است.

۷. فرض کنید نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ پوششی و فضای $\widetilde{X}$ مسیری‌همبند باشد، و $p(\tilde{x}_\circ) = x_\circ$. نشان دهید p همسانریختی است اگر و فقط اگر

$$p^*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_\circ) = \pi_1(X, x_\circ).$$

۹

تاربندی

۱. تعاریف

این فصل را با مسألهٔ مهمی دربارهٔ ویژگی ترفیع شروع می‌کنیم. در ذیل تعریفی کلی عرضه می‌کنیم. فضاهای توپولوژیک را با حروف بزرگی مانند E، B، X نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۹ فرض می‌کنیم $p : E \to B$ و $f : X \to B$ نگاشت باشند. اگر نگاشتی پیوسته مانند $f' : X \to E$ چنان موجود باشد که $pf' = f$، آنگاه می‌گوییم f را می‌توان به E ترفیع داد، و f' را ترفیع f (به E) می‌نامیم.

تعریف بعدی برای عرضهٔ مفهوم تاربندی مورد نیاز است.

تعریف ۲.۹ فرض می‌کنیم $p : E \to B$ نگاشت باشد. در این‌صورت، می‌گویند p ویژگی ترفیع هوموتوپی نسبت به فضای X دارد هرگاه به‌ازای هر

$$F : X \times C \to B \quad \text{و} \quad f' : X \to E$$

با ویژگی $F(x, \circ) = p(f'(x))$، $x \in X$، نگاشتی مانند

$$F' : X \times C \to E$$

با این ویژگی موجود باشد که به‌ازای هر $x \in X$، $F'(x, \circ) = f'(x)$ و $pF' = F$.

نکتهٔ ۱.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p : E \to B$ دارای ویژگی ترفیع هوموتوپی نسبت به X باشد و نگاشتهای $f_\text{۱}, f_\text{۲} : X \to B$ هوموتوپیک باشند، در این‌صورت $f_\text{۱}$ قابل ترفیع به E است اگر و فقط اگر $f_\text{۲}$ قابل ترفیع به E باشد.

حال می‌توانیم تعریف تاربندی را ارائه دهیم.

تعریف ۳.۹ نگاشت $p : E \to B$ را تاربندی می‌نامند هرگاه p نسبت به هر فضای X دارای ویژگی ترفیع هوموتوپی باشد. تاربندی را برخی اوقات فضای تاریِ هورویچ[1] می‌نامند. فضای E را فضای کلی و B را فضای پایهٔ تاربندی p می‌نامند.

تعریف ۴.۹ اگر نگاشت $p : E \to B$ تاربندی باشد، آنگاه به‌ازای هر $b \in B$، $p^{-\text{۱}}(b)$ را تار روی b می‌نامند.

مثال ۱.۹ فرض می‌کنیم $p : B \times F \to B$ نگاشت تصویرگر باشد. در این‌صورت، p تاربندی است. به‌علاوه به‌ازای هر $b \in B$، تار روی b با F همسانریخت است.

همان‌گونه که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد، از تاربندی می‌توان برای ترفیع مسیری در B به مسیری در E استفاده کرد.

قضیهٔ ۱.۹ اگر $p : E \to B$ تاربندی باشد، آنگاه هر مسیر f در B با ویژگی $f(\circ) \in p(E)$ را می‌توان به مسیری در E ترفیع داد.

اثبات. فرض می‌کنیم P فضایی تک‌نقطه‌ای باشد. f را به‌صورت یک هوموتوپی مانند $f : P \times C \to B$ در نظر می‌گیریم که در آن نقطهٔ $e_\circ \in E$ با ویژگی $p(e_\circ) = f(\circ)$ متناظر با نگاشتی مانند $E \to P$ است به‌طوری که به‌ازای $\alpha \in P$، $p(f(\alpha)) = f(\alpha, \circ)$. چون p تاربندی است، ویژگی ترفیع هوموتوپی دارد و لذا مسیری مانند g در E چنان موجود است که $g(\circ) = e_\circ$ و $pg = f$. بنابراین، g ترفیع f است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

۲. ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد

خاصیتی از نگاشت پوششی را که در لم ۶.۸ حاصل شد، گاهی ویژگی ترفیع منحصر به‌فرد نگاشت پوششی می‌نامند.

1. Hurewicz

تعریف ۵.۹ گویند نگاشت $p : E \to B$ ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارد هرگاه برای مسیرهای f و g در E که $pf = pg$ و $f(\circ) = g(\circ)$، داشته باشیم $f = g$.

لم ۱.۹ هر نگاشت پوششی ترفیع مسیری منحصر به‌فرد دارد.

اثبات از لم ۶.۸ حاصل می‌شود.

لم ۲.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p : E \to B$ ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد داشته باشد. در این‌صورت، p برای فضاهای مسیری‌همبند ویژگی ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم Y مسیری‌همبند باشد و نگاشتهای $f, g : Y \to E$ چنان نگاشتهایی باشند که $pf = pg$، و عضو $y_\circ \in Y$ چنان باشد که $f(y_\circ) = g(y_\circ)$. باید نشان دهیم که $f = g$. فرض می‌کنیم y عضو دلخواهی از Y و h مسیری در Y باشد که نقاط ابتدایی و انتهایی آن به‌ترتیب $y_\circ$ و y باشند. دو مسیر fh و gh را در E در نظر می‌گیریم. هر دو مسیر ترفیع یک مسیر در B هستند و نقطهٔ شروع هر دو یکی است. چون p ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارد، نتیجه می‌گیریم که $fh = gh$. بنابراین

$$f(y) = (fh)(\text{۱}) = (gh)(\text{۱}) = g(y)\,.$$

چون عضو $y \in Y$ دلخواه است، $f = g$ و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ بعدی ارتباطی را بین تاربندی و ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۹ یک تاربندی مفروض ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارد اگر و فقط اگر هیچ‌یک از تارهای آن مسیر غیرپوچ نداشته باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $p : E \to B$ یک تاربندی با ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد، b عضوی از B، و f مسیری در تار $p^{-1}(b)$ باشد. فرض می‌کنیم g مسیر پوچی در $p^{-1}(b)$ باشد به‌طوری که $g(\circ) = f(\circ)$. در این‌صورت، $pf = pg$ و از اینجا نتیجه می‌گیریم $f = g$ و لذا f مسیری پوچ است.

بالعکس، فرض می‌کنیم $p : E \to B$ چنان تاربندی باشد که هیچ‌یک از تارهای آن مسیر غیرپوچ نداشته باشد، و f و g مسیرهایی در E باشند به‌طوری که $pf = pg$ و $f(\circ) = g(\circ)$.

فرض می‌کنیم $t \in C$ و h_t مسیری در E با ضابطهٔ

$$h_t(x) = \begin{cases} f((۱ - ۲x)t) & ۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \\ g((۲x - ۱)t) & \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

باشد.

بدین‌ترتیب مسیر h_t در E از $f(t)$ به $g(t)$ را چنان به‌دست آورده‌ایم که ph_t مسیری بسته در B باشد که با مسیر پوچ با پایهٔ $p(f(t))$ نسبت به C هوموتوپیک باشد. بنابه ویژگی ترفیع هوموتوپی p، نگاشت $F' : C \times C \to E$ چنان موجود است که داشته باشیم

$$F'(t', ۰) = h_t(t')$$

و F' مجموعهٔ $(۰ \times C) \cup (C \times ۱) \cup (۱ \times C)$ را به تار $p^{-۱}(p(f(t)))$ بنگارد. بنابه فرض، $p^{-۱}(p(f(t)))$ مسیر غیرپوچ ندارد. بنابراین F' مجموعه‌های $۰ \times C$ و $C \times ۱$ و $۱ \times C$ را به یک نقطهٔ تنها می‌نگارد و این ایجاب می‌کند که $F'(۰, ۰) = F'(۱, ۰)$. بنابراین

$$h_t(۰) = h_t(۱) \quad \text{و} \quad f(t) = g(t).$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

اثبات قضایای بعدی را، که برای تاربندیها برقرارند ولی هیچ‌یک برای نگاشتهای پوششی برقرار نیستند، نمی‌آوریم.

قضیهٔ ۳.۹ ترکیب تاربندیهایی که ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارند، یک تاربندی با ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد است.

قضیهٔ ۴.۹ حاصلضرب تاربندیهایی که ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارند، یک تاربندی با ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد است.

۳. تاربندیها و مسیرهای هم‌ارز

اکنون قضیهٔ اساسی تاربندیهایی را که ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد دارند به‌صورت زیر ارائه می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۹ فرض می‌کنیم نگاشت $p : \widetilde{X} \to X$ یک تاربندی با ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد باشد، و f و g مسیرهایی در $\widetilde{X}$ باشند به‌طوری که $f(۰) = g(۰)$ و $pf \sim pg$. در این‌صورت، $f \sim g$.

اثبات. فرض می‌کنیم $A = \{\circ, \text{۱}\}$ و نگاشت $F : C \times C \to X$ یک هوموتوپی نسبت به A بین pf و pg باشد. بنابراین، بنابه تعریف هوموتوپی نسبی

$$F(t, \circ) = p(f(t)), \qquad F(t, \text{۱}) = p(g(t))$$
$$F(\circ, t) = p(f(\circ)), \qquad F(\text{۱}, t) = p(f(t))\,.$$

چون p تاربندی است، ویژگی ترفیع هوموتوپی دارد و لذا نگاشت $F' : C \times C \to \widetilde{X}$ چنان موجود است که

$$F'(t, \circ) = f(t), \qquad pF' = F\,.$$

لذا $F'(\circ \times C)$ و $F'(\text{۱} \times C)$ به‌ترتیب در $p^{-\text{۱}}(p(f(\circ)))$ و $p^{-\text{۱}}(p(f(\text{۱})))$ قرار دارند. بنابراین، بنابه قضیهٔ ۲.۹، $F'(\circ \times C)$ و $F'(\text{۱} \times C)$ تک‌نقطه‌ای هستند.

در نتیجه F' یک هوموتوپی نسبت به A بین f و مسیر hای است که $h(\circ) = f(\circ)$ و $ph = pg$. حال $f(\circ) = g(\circ)$ و لذا بنابه ویژگی ترفیع مسیرِ منحصر به‌فرد p نتیجه می‌گیریم که $g = h$ و $F' : f \sim g$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۴. نگاشت پوششی و تاربندیها

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر نگاشت پوششی ویژگی ترفیع هوموتوپی دارد.

قضیهٔ ۶.۹ فرض می‌کنیم $p : \widetilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی باشد. در این‌صورت، p تاربندی است.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشتهای $F : Y \times C \to X$ و $f' : Y \to X$ چنان نگاشتهایی باشند که به‌ازای هر $y \in Y$، $F(y, \circ) = p(f'(y))$. باید نشان دهیم به‌ازای هر $y \in Y$، همسایگی بازی از y مانند N_y در Y و نگاشتی مانند $F'_y : N_y \times C \to \widetilde{X}$ چنان موجودند که

$$\text{به‌ازای هر } y' \in N_y\text{،}\quad F'_y(y', \circ) = f'(y') \qquad \text{و} \qquad pF'_y = F\big|N_y \times C\text{.}$$

موقتاً فرض می‌کنیم وجود چنین همسایگیها و نگاشتهایی محرز باشد.

اگر $y'' \in N_y \cap N_{y'}$، آنگاه $F'_y|y'' \times C$ و $F'_{y'}|y'' \times C$ نگاشتهایی از فضای $y'' \times C$، که همبند است، به $\widetilde{X}$ هستند به‌طوری که به‌ازای هر $t \in C$،

$$p(F'_y\big|y'' \times C)(y'', t) = F(y'', t) = p(F'_{y'}\big|y'' \times C)(y'', t)\,.$$

حال داریم

$$(F'_y|y'' \times C)(y'', \circ) = f'(y'') = (F'_{y'}|y'' \times C)(y'', \circ)\,.$$

بنابراین، از لم ۶.۸ نتیجه می‌شود

$$F'_y\big|y'' \times C = F'_{y'}\big|y'' \times C\,.$$

واضح است که این برابری به‌ازای هر $y'' \in N_y \cap N_{y'}$ برقرار است. لذا

$$F'_y\big|(N_y \cap N_{y'}) \times C = F'_{y'}\big|(N_y \cap N_{y'}) \times C\,.$$

این برابری نشان می‌دهد که نگاشتی پیوسته مانند $F' : Y \times C \to \widetilde{X}$ چنان موجود است که $F'\big|N_y \times C = F'_y$ و لذا F' ترفیعی از F است و به‌ازای هر $y \in Y$، $F'(y, \circ) = f'(y)$.

بنابراین، اثبات قضیه به ساختن نگاشتهای F'_y و همسایگیهای باز N_y باز می‌گردد.

چون p نگاشتی پوششی و C فشرده است، پس اگر $y \in Y$، همسایگی بازی از y مانند N_y و دنباله‌ای متناهی از نقاط C مانند $\circ = t_\circ < t_۱ < \cdots < t_m = ۱$ چنان موجودند که اگر $i = ۱, ۲, \ldots, m$، آنگاه $F(N_y \times [t_{i-۱}, t_i])$ در مجموعهٔ بازی از X که به‌طور هموار توسط p پوشانده می‌شود، قرار گیرد. ثابت می‌کنیم نگاشتی مانند $F'_y : N_y \times C \to \widetilde{X}$ با ویژگیهای مورد نیاز موجود است.

بدین‌منظور می‌خواهیم نگاشتهایی مانند $G_i : N_y \times [t_{i-۱}, t_i] \to \widetilde{X}$ را، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, m$ تعریف کنیم به‌طوری که

$$pG_i = F\big|N_y \times [t_{i-۱}, t_i]$$

$$G_۱(y', \circ) = f'(y') \quad y' \in N_y$$

$$G_{i-۱}(y', t_{i-۱}) = G_i(y', t_{i-۱}) \quad y' \in N_y$$

متذکر می‌شویم که اگر چنین نگاشتهایی پیدا شوند، نگاشتی مانند

$$F'_y : N_y \times C \to \widetilde{X}$$

وجود دارد به‌طوری که $F'_y\big|N_y \times [t_{i-۱}, t_i] = G_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, m$، و در این‌صورت واضح است که F'_y ویژگیهای مورد نیاز را دارد. لذا بالاخره باید نگاشتهای G_i را بسازیم و در این‌صورت، اثبات به اتمام خواهد رسید.

نگاشتهای G_i را به استقرا روی i می‌سازیم. ابتدا نگاشت G_1 را می‌سازیم. بدین‌منظور، فرض می‌کنیم U زیرمجموعهٔ بازی از X باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود، و $F(N_y \times [t_0, t_1]) \subseteq U$. همچنین فرض می‌کنیم

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \widetilde{U}_j$$

که در آن $\widetilde{U}_j$ها زیرمجموعه‌های مجزا و بازی از $\widetilde{X}$ هستند به‌طوری که به‌ازای هر j، نگاشت p مجموعهٔ $\widetilde{U}_j$ را به‌طور همسانریخت به روی U می‌نگارد. اگر

$$V_j = f'^{-1}(\widetilde{U}_j)$$

آنگاه V_jها مجموعه‌های باز مجزایی هستند که N_y را می‌پوشانند. حال نگاشت G_1 را نگاشت منحصر به‌فردی تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر j، مجموعهٔ $V_j \times [t_0, t_1]$ را به $\widetilde{U}_j$ می‌نگارد و ترفیع $F\big|V_j \times [t_0, t_1]$ است. به این ترتیب G_1 تعریف می‌شود.

حال فرض می‌کنیم به‌ازای $1 < i \leq m$، G_{i-1} تعریف شود. فرض می‌کنیم U' زیرمجموعهٔ بازی از X باشد که به‌طور هموار توسط p پوشانده شود و

$$F(N_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U'.$$

فرض می‌کنیم $p^{-1}(U') = \cup \widetilde{U}'_k$ که در آن $\widetilde{U}'_k$ها زیرمجموعه‌های مجزای بازی از $\widetilde{X}$ هستند به‌طوری که به‌ازای هر k، نگاشت p مجموعهٔ $\widetilde{U}'_k$ را به‌طور همسانریخت به روی U' می‌نگارد. فرض می‌کنیم

$$V'_k = \{y' \in N_y : G_{i-1}(y', t_{i-1}) \in \widetilde{U}'_k\}.$$

در این‌صورت، $\{V'_k\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز مجزاست که N_y را می‌پوشانند. حال G_i را نگاشت منحصر به‌فردی تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر k، مجموعهٔ $V'_k \times [t_{i-1}, t_i]$ را به $\widetilde{U}'_k$ می‌نگارد و ترفیع $F\big|V'_k \times [t_{i-1}, t_i]$ است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. نشان دهید قضیهٔ ۳.۹ برای نگاشتهای پوششی برقرار نیست.

۲. نشان دهید قضیهٔ ۴.۹ برای نگاشتهای پوششی برقرار نیست.

۳. فرض کنید نگاشت $p : E \to B$ تاربندی باشد. ثابت کنید $p(E)$ اجتماع مؤلفه‌هایی مسیری‌همبند از B است.

۴. فرض کنید که یک تاربندی پایهٔ مسیری‌همبند داشته باشد و یکی از تارها مسیری‌همبند باشد. ثابت کنید فضای کلی آن نیز مسیری‌همبند است.

۵. فرض کنید نگاشت $p : E \to B$ تاربندی باشد، $e_\circ \in E$، $b_\circ = p(e_\circ)$، و $F = p^{-1}(b_\circ)$. فرض کنید B ساده‌همبند باشد. نشان دهید نگاشت $\pi_1(F, e_\circ) \to \pi_1(E, e_\circ)$ بروریختی است.

۶. فرض کنید نگاشت $p : E \to B$ تاربندی باشد، $b_\circ \in p(E)$، و E ساده‌همبند باشد. ثابت کنید نگاشتی دوسویی بین $\pi_1(B, b_\circ)$ و مجموعهٔ مؤلفه‌های مسیری‌همبند $p^{-1}(b_\circ)$ موجود است.

۱۰

سادک هندسی و مجتمع

در این فصل ویژگیهای اساسی سادک هندسی و مجتمع سادکی را بررسی می‌کنیم. این ویژگیها در صورت‌بندی نظریهٔ مانستگی سادکی مفیدند.

۱. مجموعهٔ هندسیْ مستقل

تعریف ۱.۱۰ زیرمجموعهٔ H^p از $\mathbb{R}^n (p \leq n)$ را ابرصفحهٔ pبعدی $\mathbb{R}^n$ می‌نامند هرگاه مجموعهٔ خطی‌مستقل $\{a_۱, a_۲, \dots, a_p\}$، $a_i \in \mathbb{R}^n$، و نقطهٔ $a_۰ \in \mathbb{R}$ چنان موجود باشند که

$$H^p = \{x : x \in \mathbb{R}^n, x = a_۰ + \sum_{i=۱}^{p} t_i a_i, t_i \in \mathbb{R}\}.$$

مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \dots, a_p\}$ زیرفضایی خطی از $\mathbb{R}^n$، مثلاً V را تولید می‌کند و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$H^p = a_۰ + V$$

و در نتیجه H^p متشکل از تمام بردارهایی به شکل $a_۰ + v$ است که در آن $v \in V$.

تعریف ۲.۱۰ مجموعهٔ $s = \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$، $p \leq n$، متشکل از $p+1$ نقطه از $\mathbb{R}^n$ را از لحاظ هندسی مستقل یا هندسیْ‌مستقل نامند هرگاه p بردار $a_1 - a_0$، $a_2 - a_0$، …، $a_p - a_0$ خطی‌مستقل باشند.

بعداً خواهیم دید که یک ابرصفحهٔ pبعدی منحصر به‌فرد که شامل s باشد، در $\mathbb{R}^n$ موجود است. در لم بعدی، مجموعهٔ هندسی‌مستقل را به‌صورت مفید دیگری عرضه می‌کنیم.

لم ۱.۱۰ مجموعهٔ $s = \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر روابط

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i = 0$$

ایجاب کنند که به‌ازای هر $i = 0, 1, \ldots, p$، $\lambda_i = 0$.

اثبات. فرض می‌کنیم روابط $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0$ و $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i = 0$ ایجاب کنند که به‌ازای هر $i = 0, 1, \ldots, p$، $\lambda_i = 0$. نشان می‌دهیم که بردارهای $a_1 - a_0$، $a_2 - a_0$، …، $a_p - a_0$ خطی‌مستقل‌اند. فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^{p} u_i(a_i - a_0) = 0$. در این‌صورت

$$0 = \sum_{i=1}^{p} u_i(a_i - a_0) = \sum_{i=1}^{p} u_i a_i - \left(\sum_{i=1}^{p} u_i\right) a_0 = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i$$

که در آن $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{p} u_i$ و به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, p$، $\lambda_i = u_i$. بنابراین $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 0$ و لذا بنابه فرض نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $i = 0, 1, \ldots, p$، $\lambda_i = 0$. بنابراین به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, p$، $u_i = 0$. اثبات قسمت عکس را به خواننده واگذار می‌کنیم.

تعریف ۳.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $\{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این‌صورت، ابرصفحهٔ pبعدی متشکل از تمام xهایی از $\mathbb{R}^n$ به شکل

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i(a_i - a_0)$$

که در آن به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, p$، $t_i \in \mathbb{R}$، با $\pi(s)$ نمایش داده می‌شود.

واضح است که $\pi(s)$ شامل هر a_i است.

لم ۲.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این‌صورت، $\pi(s)$ شامل s و منحصر به‌فرد است و دقیقاً مجموعهٔ تمام نقاطی مانند $x \in \mathbb{R}^n$ است که به‌صورت

$$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i \text{، که } \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$$

قابل نمایش باشند.

علاوه بر این به‌ازای هر $x \in \pi(s)$، مقادیر ثابت λ_0، λ_1، ...، λ_p منحصر به‌فردند.

اثبات. به‌ازای $x \in \pi(s)$ داریم $x = a_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i(a_i - a_0)$، $t_i \in \mathbb{R}$، و بنابراین به‌ازای هر چنین xای می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=1}^{p} t_i a_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} t_i\right) a_0 = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i$$

که در آن $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{p} t_i$ و به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, p$، $\lambda_i = t_i$، و لذا $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$. بنابراین x را به شکل مورد نظر نمایش داده‌ایم.

چون بردارهای $a_1 - a_0$، $a_2 - a_0$، ...، $a_p - a_0$ خطی‌مستقل‌اند، t_iها در $x = a_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i(a_i - a_0)$ و لذا λ_iها منحصر به‌فردند.

بالعکس، اگر $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i$ و $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$، آنگاه $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$، و در نتیجه

$$x = a_0 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (a_i - a_0)$$

و لذا x متعلق به $\pi(s)$ است. منحصر به‌فرد بودن $\pi(s)$ به سادگی حاصل می‌شود.

تعریف ۴.۱۰ به‌ازای هر $x \in \pi(s)$، مقادیر ثابت λ_0، λ_1، ...، λ_p مذکور در لم ۲.۱۰ را مختصات گرانیگاهی x نسبت به $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ می‌نامند.

از اثبات لم ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که مختصات گرانیگاهی منحصر به‌فردند. اگر مجموعهٔ $s = \{a_0, a_1, \ldots, a_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه از مطالب فوق درمی‌یابیم که هر $x \in \pi(s)$ مختصات گرانیگاهی منحصر به‌فردی مانند $\lambda_i(x)$، $i = 0, 1, \ldots, p$، با

ویژگی زیر دارد

$$x = \sum_{i=\circ}^{p} \lambda_i(x) a_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=\circ}^{p} \lambda_i(x) = \text{۱}.$$

بنابراین، $\lambda_i(x)$ تابعی حقیقی‌مقدار روی $\pi(s)$ است. حال نشان می‌دهیم که هر $\lambda_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است.

قضیهٔ ۱.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. به‌ازای هر $x \in \pi(s)$، فرض می‌کنیم $u_i(x)$ها، $i = \circ, ۱, \ldots, p$، مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. در این‌صورت، هر $u_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است.

اثبات. ابتدا قضیه را برای حالت $p = n$ ثابت می‌کنیم. متذکر می‌شویم که اگر مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی در $\mathbb{R}^n$ مستقل باشد، آنگاه $\pi(s) = \mathbb{R}^p$. برای ادامهٔ اثبات‌به دو لم زیر احتیاج داریم. لم بعدی به سادگی از لم ۱.۱۰ نتیجه می‌شود.

لم ۳.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^p$ باشد و به‌ازای $i = \circ, ۱, \ldots, p$، $a_i = (a_i^۱, a_i^۲, \ldots, a_i^p)$. در این‌صورت، s از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر

$$\det(s) = \begin{vmatrix} a_\circ^۱ & a_\circ^۲ & \cdots & a_\circ^p & ۱ \\ a_۱^۱ & a_۱^۲ & \cdots & a_۱^p & ۱ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_p^۱ & a_p^۲ & \cdots & a_p^p & ۱ \end{vmatrix} \neq \circ .$$

حال با استفاده از قاعدهٔ کرامر، لم زیر به سادگی حاصل می‌شود.

لم ۴.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ در $\mathbb{R}^p$ از لحاظ هندسی مستقل باشد و به‌ازای هر $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_p)$ از $\pi(s) = \mathbb{R}^p$، $\lambda_i(x)$ها، $i = \circ, ۱, \ldots, p$، نمایشگر مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. در این‌صورت،

$$\lambda_i(x) = \frac{\det_i(x)}{\det(s)}$$

که در آن $\det_i(x)$ دترمینان حاصل از $\det(s)$ با تعویض سطر iام $\det(s)$ با بردار $(x_۱, x_۲, \ldots, x_p, ۱)$ است.

به‌وضوح از لم ۴.۱۰ نتیجه می‌شود که $\lambda_i(x)$ روی $\pi(s) = \mathbb{R}^p$ پیوسته است.

حال حالت کلی $n > p$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_۰, a_۱, \ldots, a_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. بنابه تعریف، بردارهای $a_۱ - a_۰$، $a_۲ - a_۰$، ...، $a_p - a_۰$ در $\mathbb{R}^n$ خطی‌مستقل‌اند و نقاط $b_{p+۱}$، $b_{p+۲}$، ...، b_n چنان موجودند که مجموعهٔ $\{a_۱ - a_۰, a_۲ - a_۰, \ldots, a_p - a_۰, b_{p+۱}, \ldots b_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر به‌ازای $i = p + ۱, p + ۲, \ldots, n$، بنویسیم $a_i = b_i + a_۰$، آنگاه مجموعهٔ

$$s' = \{a_۰, a_۱, \ldots, a_p, a_{p+۱}, \ldots, a_n\}$$

در $\mathbb{R}^n$ از لحاظ هندسی مستقل است.

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $x \in \pi(s)$، $u_i(x)$ها، $i = ۰, ۱, \ldots, p$، مختصات گرانیگاهی x نسبت به s باشند. همچنین فرض می‌کنیم به‌ازای هر x از $\pi(s') = \mathbb{R}^n$، $\lambda_i(x)$ها، $i = ۰, ۱, \ldots, n$ مختصات گرانیگاهی x نسبت به s' باشند. از لم ۴.۱۰ نتیجه می‌گیریم که هر $\lambda_i(x)$ روی $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. چون مختصات گرانیگاهی منحصر به‌فردند، داریم $u_i = \lambda_i \big| \pi(s)$، در نتیجه $u_i(x)$ روی $\pi(s)$ پیوسته است و بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۲. سادک

اگر مجموعهٔ $s = \{a_۰, a_۱, \ldots, a_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه به اجمال می‌توان گفت pـسادک هندسی زیرمجموعه‌ای از $\pi(s)$ با مختصات گرانیگاهی مثبت است. تعریف دقیق آن به‌صورت زیر است.

تعریف ۵.۱۰ فرض می‌کنیم مجموعهٔ $s = \{a_۰, a_۱, \ldots, a_p\}$ در $\mathbb{R}^n$ از لحاظ هندسی مستقل باشد. در این‌صورت، pـسادک هندسی (یا به اختصار، pـسادک) پدیدآمده توسط s که با s_p یا $(a_۰, a_۱, \ldots, a_p)$ نمایش داده می‌شود، برابر است با

$$s_p = \left\{ \sum_{i=۰}^{p} \lambda_i a_i : \sum_{i=۰}^{p} \lambda_i = ۱, ۰ < \lambda_i < ۱, i = ۰, ۱, \ldots, p \right\}.$$

pـسادک هندسی را بسیاری اوقات pـسادک هندسی باز می‌نامند. pـسادک هندسی بسته را به همین روش تعریف می‌کنند غیر از اینکه به جای شرط $۰ < \lambda_i < ۱$ شرط $۰ \leq \lambda_i \leq ۱$ را قرار می‌دهند، و آن را با

$$\overline{s}_p = [a_۰, a_۱, \ldots, a_p]$$

نمایش می‌دهند.

وقتی $\mathbb{R}^n$ توپولوژی معمولی دارد، $\overline{s}_p$ بستار s_p است. درستی لم بعدی واضح است.

لم ۵.۱۰ s_p و $\overline{s}_p$ زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ هستند. به‌علاوه، $\overline{s}_p$ غلاف محدب بستهٔ s است.

مثال ۱.۱۰ هر ۰ـسادک هندسی فقط از یک نقطه تشکیل می‌شود، زیرا

$$s_\circ = (a_\circ) = [a_\circ] = \overline{s}_\circ = \{a_\circ\}.$$

مجموعه‌ای که فقط از دو عضو متمایز تشکیل شده باشد، مانند $s = \{a_\circ, a_1\}$، به‌وضوح از لحاظ هندسی مستقل است. بازهٔ باز واصل بین $a_\circ$ و a_1 سادکی یک‌بعدی است.

مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_1, a_2\}$ متشکل از سه نقطهٔ $\mathbb{R}^n$، $n \geq 2$، از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر این نقاط رئوس یک مثلث باشند. ناحیهٔ درونی این مثلث سادکی دوبعدی است.

مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_1, a_2, a_3\}$ متشکل از چهار نقطهٔ $\mathbb{R}^n$، $n \geq 3$، از لحاظ هندسی مستقل است اگر و فقط اگر این نقاط رئوس یک چهاروجهی باشند. ناحیهٔ درونی این چهاروجهی سادکی ۳بعدی است. در باقی موارد نیز وضع به همین صورت است.

هر ۰ـسادک باز یا بسته یک نقطه است.

اگر مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_1\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه $\overline{s}_1$ بازهٔ بستهٔ واصل بین $a_\circ$ و a_1 است.

اگر مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_1, a_2\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه $\overline{s}_2$ مثلثی بسته با رئوس $a_\circ$، a_1 و a_2 است.

اگر مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_1, a_2, a_3\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، آنگاه $\overline{s}_3$ چهاروجهی توپر بسته‌ای با رئوس $a_\circ$، a_1، a_2 و a_3 است. در باقی موارد نیز وضع به همین صورت است.

تعریف ۶.۱۰ اگر s_p، pـسادک $(a_\circ, a_1, \ldots, a_p)$ باشد، آنگاه $a_\circ$، a_1، ...، و a_p را رأس s_p و p را بعد (جبری) s_p می‌نامند.

تعریف ۷.۱۰ اگر s_p، pـسادک باشد، آنگاه $\overline{s}_p - s_p$ را مرز s_p می‌نامند و با $\dot{s}_p$ نمایش می‌دهند، در نتیجه

$$\dot{s}_p = \overline{s}_p - s_p.$$

تعریف ۸.۱۰ اگر s_p، pـسادک باشد و $\{i_\circ, i_\backslash, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای از $\{\circ, \backslash, \dots, p\}$ باشد، آنگاه می‌گویند سادک

$$s_k = (a_{i_\circ}, a_{i_\backslash}, \dots, a_{i_k})$$

kـوجه s_p است و می‌نویسند $s_k \leq s_p$. اگر $s_k \leq s_p$ و $s_k \neq s_p$، آنگاه می‌گویند s_k وجه سرهٔ s_p است و می‌نویسند $s_k < s_p$.

وجه روبه‌روی رأس a_i، $(p - \backslash)$ـوجه $(a_\circ, a_\backslash, \dots, a_{i-\backslash}, a_{i+\backslash}, \dots, a_p)$ است و آن را با

$$(a_\circ, a_\backslash, \dots, a_{i-\backslash}, \hat{a}_i, a_{i+\backslash}, \dots, a_p)$$

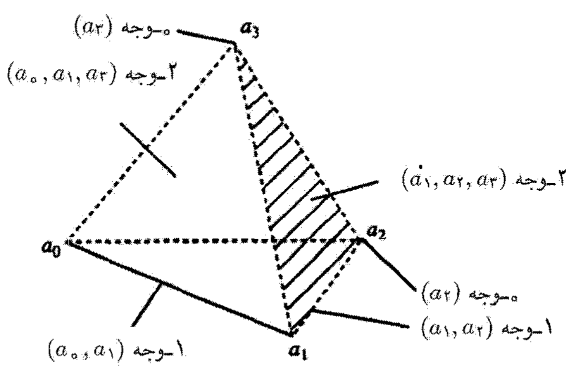
نمایش می‌دهند.

مثال ۲.۱۰ ۰ـوجهای s_p عبارت‌اند از $a_\circ$، $a_\backslash$، ...، a_p. ۱ـوجها را یال می‌نامند. ۲ـوجهای s_p وجوه مسطح آن هستند؛ و غیره. (شکل ۱.۱۰ را ببینید، $p = ۳$).

در قضیهٔ بعدی روابط بین s_p، $\overline{s}_p$ و $\dot{s}_p$ را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۲.۱۰ در هر pـسادک $s_p = (a_\circ, a_\backslash, \dots, a_p)$، $\overline{s}_p$ اجتماع تمام وجوه s_p، و $\dot{s}_p$ اجتماع تمام وجوه سرهٔ s_p است. به‌علاوه، هر نقطهٔ $\overline{s}_p$ در یک وجه منحصر به‌فرد s_p قرار دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم $x \in \overline{s}_p$. در این‌صورت، می‌توانیم بنویسیم $x = \sum_{i=\circ}^{p} \lambda_i a_i$ که در آن $\sum_{i=\circ}^{p} \lambda_i = \backslash$ و به‌ازای هر $i = \circ, \backslash, \dots, p$، $\circ \leq \lambda_i \leq \backslash$. فرض می‌کنیم $i_\circ$، $i_\backslash$، ...، i_k مقادیری از iهایی باشند که به‌ازای آنها $\lambda_i > \circ$. در این‌صورت، x در $s_k = (a_{i_\circ}, a_{i_\backslash}, \dots, a_{i_k})$



شکل ۱.۱۰

قرار دارد و $s_p \leq s_k$. چون مختصات گرانیگاهی منحصر به‌فردند، در نتیجه s_k تنها وجه s_p است که شامل x است. همچنین، s_k وجه سرهٔ s_p است اگر و فقط اگر $\{i_\circ, i_\backslash, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای سره از $\{\circ, \backslash, \dots, p\}$ باشد، یعنی اگر و فقط اگر حداقل یکی از مختصات گرانیگاهی x صفر باشد و در این حالت $x \in \dot{s}_p$.

بالعکس، اگر وجه $s_k = (a_{i_\circ}, a_{i_\backslash}, \dots, a_{i_k})$ وجه s_p باشد و $x \in s_k$، آنگاه $x = \sum_{j=\circ}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j}$، که در آن $\sum_{j=\circ}^{k} \lambda_{i_j} = ۱$ و به‌ازای $j = \circ, \backslash, \dots, k$، $\lambda_{i_j} > \circ$.
اگر $\{i_\circ, i_\backslash, \dots, i_k\} = \{\circ, \backslash, \dots, p\}$ ، آنگاه $x \in s_k = s_p \subseteq \overline{s}_p$. لیکن اگر $\{i_\circ, i_\backslash, \dots, i_k\}$ زیرمجموعه‌ای سره از $\{\circ, \backslash, \dots, p\}$ باشد، آنگاه s_k وجه سره‌ای از s_p است و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{j=\circ}^{k} \lambda_{i_j} a_{i_j} + \sum_{i \neq ij} \lambda_i a_i$$

که در آن به‌ازای $i \neq i_j$، $\lambda_i = \circ$. بنابراین $x \in \dot{s}_p \subseteq \overline{s}_p$ و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

حال «اندازهٔ» یک سادک را محاسبه می‌کنیم.

لم ۶.۱۰ قطر pـسادک $s_p = (a_\circ, a_\backslash, \dots, a_p)$ طول بزرگترین یال آن است.

اثبات. ثابت خواهیم کرد رئوسی مانند a_i و a_j از s_p وجود دارد که به‌ازای آنها، $\operatorname{diam} s_p = d(a_i, a_j)$* که در آن d فاصلهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ است. برای اثبات این موضوع، فرض می‌کنیم D طول بزرگترین یال s_p باشد. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر x و y متعلق به s_p، $d(x, y) \leq D$. فرض می‌کنیم $a_{i_\circ}$ دورترین رأس s_p از x باشد. گوی بسته به مرکز x و به شعاع $d(x, a_{i_\circ})$ را در نظر می‌گیریم. این گوی شامل تمام رئوس s_p است و به‌وضوح محدب است. لذا بنابه لم ۵.۱۰، این گوی شامل تمام s_p است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $d(x, y) \leq d(x, a_{i_\circ})$. اگر $a_{i_\backslash}$ دورترین رأس s_p از $a_{i_\circ}$ باشد، آنگاه با استدلالی مشابه استدلال فوق نتیجه می‌گیریم که $d(x, a_{i_\circ}) \leq d(a_{i_\circ}, a_{i_\backslash})$. بنابراین، به‌دست می‌آوریم

$$d(x, y) \leq d(x, a_{i_\circ}) \leq d(a_{i_\circ}, a_{i_\backslash}) \leq D\,.$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

* diam نشانهٔ اختصاری diameter به معنی قطر است.ـم.

نکتهٔ ۱.۱۰ به سادگی مشاهده می‌شود که $\operatorname{diam}(s_p) = \operatorname{diam}(\overline{s}_p)$.

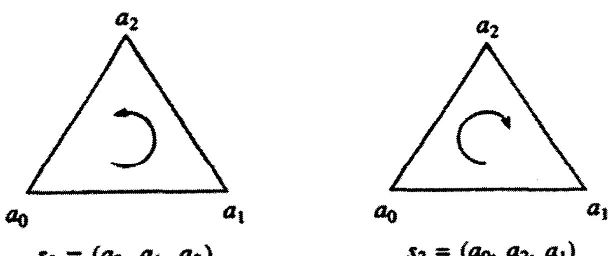
۳. جهت‌دهی سادک

pـسادک $s_p = (a_\circ, a_\backslash, \dots, a_p)$ به‌طور منحصر به‌فردی توسط رئوسش $a_\circ$، a_1، ...، a_p معین می‌شود و ترتیب این رئوس در تعریف pـسادک بی‌اهمیت است. لیکن برای اهدافی خاص، ترتیب این رئوس نقش مهمی ایفا می‌کند.

در این‌صورت، منظور ما از جایگشت s_p، جایگشتی از رئوس آن است. تعداد جایگشتهای s_p، $(p+1)!$ است. دو جایگشت را هم‌ارز نامند هرگاه هر دو زوج یا فرد باشند، یعنی دو ترتیب $(a_{i_\circ}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$ و $(a_{j_\circ}, a_{j_1}, \dots, a_{j_p})$ از $(a_\circ, a_1, \dots, a_p)$ را هم‌ارز نامند هرگاه $(j_\circ, j_1, \dots, j_p)$ جایگشتی زوج (یا فرد) از $(i_\circ, i_1, \dots, i_p)$ باشد. اگر دو جایگشت هم‌ارز نباشند، آنها را متضاد می‌نامند. بدین‌ترتیب، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی جایگشتها حاصل می‌شود که مجموعهٔ جایگشتهای s_p را به دو ردهٔ مجزا تقسیم می‌کند. این رده‌ها را جهتهای s_p می‌نامند. سادک جهت‌دار، سادکی مانند s_p همراه با یکی از دو جهت ممکن آن است. بنابراین هر pـسادک معین‌کنندهٔ دو pـسادک جهت‌دار است.

مثال ۳.۱۰ اگر s_2، ۲ـسادک $(a_\circ, a_1, a_2)$ باشد، آنگاه دو ۲ـسادک جهت‌داری که توسط سه نقطهٔ $a_\circ$ و a_1 و a_2 معین می‌شوند، با نمودارهای شکل ۲.۱۰ نشان داده می‌شوند که در آنها پیکانها نمایشگر ترتیب رئوس هستند.

فرض می‌کنیم $(a_{i_\circ}, a_{i_1}, \dots, a_{i_p})$، pـسادکی جهت‌دار باشد، یعنی جهت آن توسط $i_\circ$، i_1، ...، i_p معین شود. دیده‌ایم که فقط دو امکان متفاوت وجود دارد و روشن است که ۱، ۰، ۲، ۳، ...، p جایگشتی فرد از ۰، ۱، ۲، ...، p است. بنابراین، هر pـسادک جهت‌داری را که



شکل ۲.۱۰

توسط $p+۱$ رأس $a_۰$، $a_۱$، ...، a_p معین می‌شود، می‌توان به‌صورت $(a_۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_p)$ یا $(a_۱, a_۰, a_۲, \ldots, a_p)$ نوشت. بنابراین، اگر $s_p = (a_۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_p)$، می‌نویسیم

$$-s_p = (a_۱, a_۰, a_۲, \ldots, a_p).$$

بنابراین، متناظر با $p+۱$ رأس $a_۰$، $a_۱$، ...، a_p فقط دو pـسادک جهت‌دار داریم، که s_p و $-s_p$ هستند.

۴. مجتمع

مجتمع سادکی هندسی K در $\mathbb{R}^n$ (که آن را به اختصار مجتمع می‌نامیم) گردایه‌ای متناهی از سادکهای هندسی باز $\mathbb{R}^n$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند

$K_۱$: اگر s_p سادکی در K باشد و $s_k < s_p$، آنگاه s_k در K باشد.
$K_۲$: اگر s_p و s_q اعضای K باشند و $s_p \neq s_q$، آنگاه $s_p \cap s_q = \phi$.

توجه کنید که بنابه شرط $K_۱$ اگر s_p در K باشد، آنگاه تمام وجوه s_p در K هستند و لذا هر یک از رئوس هر سادک، رأس K نیز هست. ماکسیمم بُعد سادکهای K را بعد (جبری) مجتمع K می‌نامند. اجتماع نقاط تمام سادکهای K، یعنی مجموعهٔ تمام نقاطی از $\mathbb{R}^n$ را که هر یک متعلق به یکی از سادکهای K باشد چندوجهی می‌نامند و با $|K|$ نمایش می‌دهند. مجتمع را نباید با چندوجهی متناظرش خلط کرد. مجتمع گردایه‌ای از سادکهاست در حالی‌که چندوجهی مجموعه‌ای از نقاط است.

بنابه تعریف، هر مجتمعی مانند K مجموعه‌ای متناهی از سادکهاست و چون وجوه هر سادک در K هستند (بنابه شرط $K_۱$)، چندوجهی $|K|$ را می‌توان اجتماع تعدادی متناهی سادک بسته در نظر گرفت. بنابراین، $|K|$ زیرمجموعه‌ای بسته و کراندار از $\mathbb{R}^n$ است و لذا با توپولوژی معمولی $\mathbb{R}^n$، $|K|$ مجموعه‌ای فشرده است.

اگر $x \in |K|$، آنگاه سادک منحصر به‌فردی از K را که شامل x باشد محمل x می‌نامند (چنین سادکی بنابه شرط $K_۲$ منحصر به‌فرد است). زیرگردایه‌ای از K را که در شرط $K_۱$ صدق کند زیرمجتمع K می‌نامند. اگر s_p سادک باشد، آنگاه گردایهٔ متشکل از s_p و وجوه آن در شرطهای $K_۱$ و $K_۲$ صدق می‌کند و لذا مجتمع است. این مجتمع را با $K(s_p)$ نمایش می‌دهند و مجتمع pبعدی متعارف می‌نامند. واضح است که

$$|K(s_p)| = \overline{s}_p\,.$$

شکل ۳.۱۰

مثال ۴.۱۰ نشان دهید چندوجهی دو مجتمع متفاوت ممکن است یکی باشد.

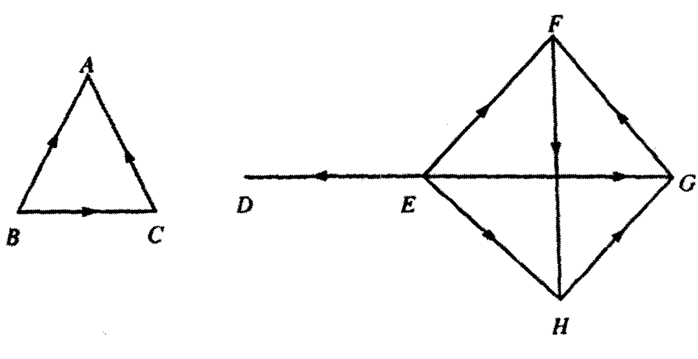
فرض می‌کنیم $s_1 = (a_0, a_1)$، در این‌صورت مجتمع $K = K(s_1)$ متشکل از سادکهای (a_0, a_1)، (a_0) و (a_1) است که در شکل ۳.۱۰ نمایش داده شده، و سادکهای مجتمع L سادکهای (a_0, a_2)، (a_2, a_1)، (a_0)، (a_1)، و (a_2) هستند. لذا مجتمعهای K و L برابر نیستند، اما $|K| = |L|$.

اگر K مجتمع و q عددی صحیح و نامنفی باشد و از بعد K بزرگتر نباشد، آنگاه qـاستخوان‌بندی K_q از K زیرمجتمعی از K است که متشکل از تمام زیرسادکهایی از K با بعد حداکثر q است.

مثال ۵.۱۰ ۰ـاستخوان‌بندی K_0 مجموعهٔ رئوس K است.

یک مجتمع K راکه در آن به هر سادک یک جهت داده شده است، مجتمع جهت‌دار می‌نامند. از این به بعد منظورمان از مجتمع، مجتمع جهت‌دار و از سادک، سادک جهت‌دار خواهد بود، مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

مثال ۶.۱۰ شکل ۴.۱۰ را که نشان‌دهندهٔ یک مجتمع ۳بعدی است، در نظر بگیرید. جهتهای ۱ـسادکها و ۲ـسادکها با پیکان نمایش داده شده‌اند. جهتها دلخواه‌اند و لزومی ندارد که به یکدیگر وابسته باشند. چهاروجهی EFGH تنها ۳ـسادک این مجتمع است. مثلثهای BAC، EFH،



شکل ۴.۱۰

FHG، EGH و EFG ۲ـسادکهایی هستند که غیر از اولی، همگی وجوه چهاروجهی هستند. پاره‌خطهای BA، CA، BC، ED، EF، EH، EG، FH، GF و HG ۱ـسادک هستند و A، B، C، D، E، F، G و H ۰ـسادک هستند. ضمناً مشاهده می‌شود که چندوجهی متناظر، همبند نیست.

گردایهٔ متشکل از ناحیهٔ درونی مثلث BAC، یالهای BC، CA، BA، و رئوس A، B، C مثالی از زیرمجتمع است.

گردایهٔ متشکل از یالهای BA، CA، BC، ED، EF، EH، EG، FH، GF، HG، و رئوس A، B، C، D، E، F، G، H مثالی از ۱ـاستخوان‌بندی است.

۵. مثلث‌بندی

موضوع مثلث‌بندی بسیار عمیق است و در کتابی از این نوع، این موضوع را با دقت کامل نمی‌توان مطرح کرد. بنابراین فقط ایده‌های مقدماتی را ارائه خواهیم کرد.

اگر K مجتمع باشد، آنگاه چندوجهی متناظر آن $|K|$، به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌شود و دیده‌ایم که $|K|$ مجموعه‌ای فشرده است. همچنین دیده‌ایم (شکل ۳.۱۰) که چندوجهی دو مجتمع متفاوت ممکن است یکی باشد، یعنی با یک چندوجهی مفروض $|K|$ مجتمع K، غیر از حالت بدیهی که $|K|$ فقط یک نقطه دارد، به‌طور منحصر به‌فرد معین نمی‌شود، در واقع تعدادی نامتناهی مجتمع متفاوت ممکن است یک چندوجهی داشته باشند. فرض می‌کنیم یک چندوجهی مفروض باشد، در این‌صورت فرایند ساختن مجتمعی که چندوجهی آن همان چندوجهی مفروض باشد، به مثلث‌بندی چندوجهی مشهور است.

ایدهٔ مثلث‌بندی را با قرار دادن مجموعه‌هایی همسانریخت با سادکهای یک مجتمع به جای آن سادکها می‌توان تعمیم داد. به‌عنوان مثال، رویه‌های فشردهٔ $\mathbb{R}^3$ را می‌توان از طریق نقاط، خمها، و مثلثهای خمیده‌خطی مثلث‌بندی کرد. همچنین، اگر زیرمجموعهٔ فشردهٔ S از $\mathbb{R}^n$ همسانریخت با چندوجهی $|P|$ باشد، آنگاه با قرار دادن نگارهٔ سادکهای P تحت همسانریختی $f : |P| \to S$ به جای آن سادکها، می‌توان S را مثلث‌بندی کرد.

مثال ۷.۱۰ رویهٔ یک کره در $\mathbb{R}^3$ فضایی مثلث‌بندی‌شدنی است، زیرا این رویه با گردایهٔ وجوه یک چهاروجهی، که مجتمع است، همسانریخت است. می‌توانیم این همسانریختی را بدین روش تصور کنیم که مرکزوار چهاروجهی را به‌عنوان مرکز کره در نظر بگیریم و از این نقطه یک رویه را به روی دیگری تصویر کنیم. تصاویر وجوه چهاروجهی، مثلثهایی خمیده‌خطی روی کره هستند و لذا با استفاده از این همسانریختی، رویهٔ کره به تعدادی مثلث خمیده‌خطی تقسیم می‌شود.

مثال ۸.۱۰ رویهٔ چنبره فضایی مثلث‌بندی‌شدنی است.

نکتهٔ ۲.۱۰ در اکثر حالتها برای رویه‌های ساده، مثلث‌بندی با کمک مثلثها (مثلثهای خمیده‌خطی) انجام می‌شود و لذا توجیهی شهودی برای قبول اصطلاح «مثلث‌بندی‌شدنی» وجود دارد.

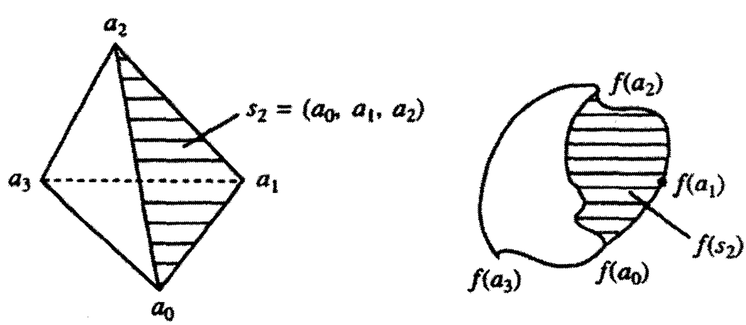
حال می‌خواهیم تعریفی دقیق ارائه کنیم. توجه کنید هنگامی که مطالعهٔ ویژگیهای توپولوژیک یک فضا مورد نیاز است، با وضعیتهای مختلفی ممکن است مواجه شویم. با در نظر داشتن این موضوع ابتدا چندوجهی توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱۰ چندوجهی توپولوژیک فضایی است که با چندوجهی یک مجتمع همسانریخت باشد.

فرض کنید K مجتمع، X فضای توپولوژیک و $f:|K|\to X$ همسانریختی باشد، در این‌صورت اگر s_p سادک $(a_۰,a_۱,\ldots,a_p)$ از K باشد، $f(s_p)$ زیرفضایی از X است که با s_p همسانریخت است. زیرفضای $f(s_p)$ را می‌توان «سادک خمیده» با «رئوس» $f(a_۰)$، $f(a_۱)$، ...، $f(a_p)$ نامید. مثالی از این وضعیت در شکل ۵.۱۰ نمایش داده شده است.

فرض می‌کنیم $\{i_۰,i_۱,\ldots,i_k\}\subseteq\{۰,۱,\ldots,p\}$. در این‌صورت اگر Kـوجه چنین سادک خمیده‌ای را به‌صورت $f(s_k)=(f(a_{i_۰}),f(a_{i_۱}),\ldots,f(a_{i_k}))$ تعریف کنیم، مشاهده می‌کنیم که گردایهٔ تمام $f(s_p)$ها، $s_p\in K$، تمام ویژگیهای مجتمع را دارد، فقط ممکن است ویژگی مستقیم‌الخط بودن را نداشته باشد، و لذا می‌توان آن را «مجتمع خمیده‌خطی» نامید و این مجتمع خمیده‌خطی یک مثلث‌بندی از X به‌دست می‌دهد.

اینک تعریف دقیق مفهوم مثلث‌بندی را ارائه می‌کنیم.



شکل ۵.۱۰

تعریف ۱۰.۱۰ فرض می‌کنیم X یک چندوجهی توپولوژیک باشد. مثلث‌بندی X یک دوتایی (K,f) است که در آن K مجتمع و $f:|K|\to X$ همسانریختی است.

مثال ۹.۱۰ اگر s_p سادک باشد، آنگاه $K(s_p)$ یک مثلث‌بندی از سادک بستهٔ $\overline{s}_p$ است.

۶. نگاشت سادکی

فرض می‌کنیم s_p، pـسادک $(a_\circ, a_\backslash,\ldots,a_p)$ در $\mathbb{R}^m$ و t_s، sـسادک $(b_\circ,b_\backslash,\ldots,b_s)$ در $\mathbb{R}^n$ باشد و f نگاشتی باشد که هر رأس a_i از s_p را به یک رأس از t_s مانند b_j می‌نگارد. نگاشت f ممکن است یک‌به‌یک نباشد. اگر

$$x=\lambda_\circ a_\circ+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_p a_p\in s_p$$

آنگاه به x، نقطهٔ $f(x)\in\mathbb{R}^n$ را نسبت می‌دهیم که

$$f(x)=\lambda_\circ f(a_\circ)+\lambda_1 f(a_1)+\cdots+\lambda_p f(a_p).$$

نگاشت f، که به این ترتیب حاصل می‌شود، نگاشتی پیوسته از سادک s_p به سادک t_s است. f را نگاشت سادکی از سادک s_p به سادک t_s می‌نامند. مجموعهٔ $f(s_p)$ وجه C_kای از t_s است که این وجه، یعنی سادک C_k به‌وسیلهٔ آن رئوسی از t_s مانند b_j تولید می‌شود که به‌صورت $f(a_i)$ باشند.

متذکر می‌شویم که f ممکن است دو یا چند رأس از s_p را به یک رأس از t_s بنگارد و لذا عبارت $f(x)$ فوق ممکن است به‌صورت زیر در آید

$$f(x)=u_\circ b_\circ+u_1 b_1+\cdots+u_s b_s$$

که در آن u_j مجموع تمام λ_iهایی است که $f(a_i)$ متناظر با آنها برابر b_j است. به‌عنوان مثال اگر $p=۳$ و $s=۲$ و

$$f(a_\circ)=f(a_۲)=b_\circ,\qquad f(a_1)=f(a_۳)=b_1$$

آنگاه $f(x)=(\lambda_\circ+\lambda_۲)b_\circ+(\lambda_1+\lambda_۳)b_1$ و لذا $u_\circ=\lambda_\circ+\lambda_۲$ و $u_1=\lambda_1+\lambda_۳$.
در اینجا $k=۱$ و $C_1=(b_\circ,b_1)$.

حال تعریف دقیق این مفهوم را برای مجتمعها ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم K و L دو مجتمع و f نگاشتی پیوسته از چندوجهی $|K|$ به چندوجهی $|L|$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم به‌ازای هر سادک A از K، f نگاشتی سادکی از سادک A به سادکی از L مانند B باشد، در این‌صورت f را نگاشت سادکی از مجتمع K به مجتمع L می‌نامند.

تعریف فوق ایجاب می‌کند که اگر a_0، a_1، ...، a_p رئوس سادکی از مجتمع K باشند، آنگاه $f(a_0)$، $f(a_1)$، ...، $f(a_p)$ رئوس سادکی از L باشند.

اکنون تعریف دیگری ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱۰ فرض می‌کنیم f نگاشتی باشد که به هر رأس از مجتمعی مانند K، رأسی از مجتمعی مانند L را چنان نسبت می‌دهد که اگر a_0، a_1، ...، a_p رئوس سادکی از K باشند، آنگاه $f(a_0)$، $f(a_1)$، ...، $f(a_p)$ رئوس سادکی از L باشند. در این‌صورت، f را نگاشت رأسِ سادکی یا سادکْ‌رأسی از مجتمع K به مجتمع L می‌نامند.

۷. بعد توپولوژیک

می‌دانیم چندوجهی توپولوژیک فضایی است که با چندوجهی یک مجتمع همسانریخت باشد. در این مرحله شاید واضح نباشد که بعد (جبری) منحصر به‌فردی برای چندوجهی توپولوژیک بتوان تعریف کرد زیرا می‌توان تصور کرد که چنین فضایی می‌تواند با چندوجهیهای مجتمعهایی که بعدهای (جبری) متفاوت دارند، همسانریخت باشد. بنابه مطالبی که ارائه خواهد شد، آشکار خواهد شد که چنین حالتی ممکن نیست رخ دهد. ابتدا تعریف بعد توپولوژیک را ارائه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم X زیرفضایی از $\mathbb{R}^n$، G پوششی از X با تعداد متناهی مجموعه، و ε عددی مثبت باشد. اگر قطر هر عضو G کمتر از ε باشد، آنگاه G را εـپوشش X می‌نامند. مرتبهٔ پوشش G، m است هرگاه هیچ نقطه از X متعلق به $m+1$ عضو از G نباشد، اما حداقل یک نقطه از X موجود باشد که متعلق به m عضو از G باشد.

تعریف ۱۳.۱۰ گویند بعد (توپولوژیک) فضای فشردهٔ $X \subseteq \mathbb{R}^n$، k است هرگاه k کوچکترین عدد صحیح نامنفی با این ویژگی باشد که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، εـپوشش متناهی و بسته‌ای از X با مرتبهٔ $k+1$ موجود باشد. در این حالت می‌نویسیم $\dim X = k$.

قضیهٔ بعدی، که اثبات آن خارج از چارچوب این کتاب است، نتایج گوناگونی دارد و به طرق زیادی به‌کار می‌آید.

قضیهٔ ۳.۱۰ فرض می‌کنیم s_p، pـسادک باشد. در این‌صورت، $\dim|K(s_p)| = \operatorname{diam}(\overline{s}_p) = p$.
قضیهٔ بعدی را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۴.۱۰ فرض می‌کنیم X و Y فضاهای فشردهٔ همسانریخت باشند و $\dim X = k$، در این‌صورت $\dim Y = k$.
برای اثبات قضیه، به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۷.۱۰ (لم پوشش لبگ). فرض می‌کنیم فضای $X \subseteq \mathbb{R}^n$ فضایی فشرده و c یک پوشش باز X باشد. در این‌صورت، عدد $\delta > ۰$ چنان موجود است که هر زیرمجموعهٔ X با قطر کمتر از δ در عضوی از c قرار گیرد.
عدد δ را عدد لبگ این پوشش c می‌نامند.

اثبات لم. فرض می‌کنیم $\{U_۱, U_۲, \ldots, U_k\}$ زیرپوششی متناهی از c برای X باشد، و به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$،

$$\phi_i(x) = \operatorname{dist}(x, X - U_i) \quad \text{و} \quad \phi = \max(\varphi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_k).$$

واضح است که ϕ پیوسته است. چون هر $x \in X$ در یک U_i قرار دارد و هر $X - U_i$ بسته است، نتیجه می‌گیریم به‌ازای هر $x \in X$، $\phi(x) \geq \phi_i(x) > ۰$. بنابراین $\phi(X)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbb{R}$ است که شامل صفر نیست و لذا $\operatorname{dist}(۰, \phi(X)) > ۰$. در نتیجه، عدد $\delta > ۰$ چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in X$، $\phi(x) > \delta$. بنابراین گوی باز $B^n(x, \delta)$ که در آن x می‌تواند هر نقطه‌ای از X باشد، به‌طور کامل در یک U_i قرار می‌گیرد و لذا لم به اثبات می‌رسد.

اثبات قضیه. فرض می‌کنیم نگاشت $f : X \to Y$ همسانریختی باشد. نشان می‌دهیم که $\dim Y \leq k$. بدین‌منظور، باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک εـپوشش متناهی و بسته برای Y از مرتبهٔ $k + ۱$ وجود دارد. فرض می‌کنیم ε عدد مثبت دلخواه، و c پوشش Y متشکل از تمام گویهای باز $B^n(x, \varepsilon)$، $x \in Y$ باشد. در این‌صورت، گردایهٔ $\{f^{-۱}(U) : U \in c\}$ پوششی باز برای X است. فرض می‌کنیم δ عدد لبگی برای این پوشش باشد. چون $\dim X = k$، یک δـپوشش متناهی و بسته مانند $\{A_۱, A_۲, \ldots, A_m\}$ برای X از مرتبهٔ $k + ۱$ موجود است. در نتیجه $\{f(A_۱), f(A_۲), \ldots, f(A_m)\}$ یک پوشش متناهی و بسته برای Y از مرتبهٔ $k + ۱$ است و چون هر A_i در یک $f^{-۱}(U)$، $U \in c$، قرار دارد، این پوشش εـپوشش نیز هست.
به طریق مشابهی می‌توان نشان داد عدد $\varepsilon > ۰$ چنان موجود است که مرتبهٔ هر εـپوشش

متناهی و بستهٔ Y حداقل $k+1$ باشد و این ایجاب خواهد کرد که $\dim Y \geq k$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۵.۱۰ اگر A زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه بعد توپولوژیک A حداکثر n است.

اثبات. مجموعهٔ A در nـسادکی مانند s_n قرار دارد. با تحدید هر εـپوشش متناهی و بستهٔ $\overline{s}_n$ به A، یک εـپوشش متناهی و بستهٔ A که مرتبهٔ آن بیشتر از مرتبهٔ پوشش $\overline{s}_n$ نیست، به‌دست می‌آید. حال قضیه از قضیهٔ ۳.۱۰ نتیجه گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۵.۱۰ نتیجهٔ مهمی دارد که آن را در قضیهٔ بعدی می‌آوریم.

قضیهٔ ۶.۱۰ $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ همسانریخت است اگر و فقط اگر $n = m$.

اثبات. نشان خواهیم داد اگر $n \neq m$، آنگاه $\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^m$ همسانریخت نیست. فرض می‌کنیم $m < n$ و نگاشت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ همسانریختی باشد. همچنین فرض می‌کنیم s_n، nـسادکی در $\mathbb{R}^n$ باشد. بنابه قضیهٔ ۳.۱۰، $\dim \overline{s}_n = n$. چون $f(\overline{s}_n)$ با $\overline{s}_n$ همسانریخت است، بنابه قضیهٔ ۴.۱۰، $\dim f(\overline{s}_n) = n$. با توجه به اینکه $f(\overline{s}_n)$ زیرفضایی فشرده از$\mathbb{R}^m$ است و $m < n$، این نتیجه متناقض با قضیهٔ ۵.۱۰ است و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

۸. قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر[1]

فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک و f نگاشتی از X به خودش باشد. اگر نقطهٔ $x_\circ \in X$ چنان موجود باشد که $f(x_\circ) = x_\circ$، آنگاه $x_\circ$ را نقطهٔ ثابت f می‌نامند. اگر X چنان باشد که هر نگاشت پیوسته مانند $f : X \to X$ نقطهٔ ثابت داشته باشد، آنگاه می‌گویند X ویژگی [مربوط به] نقطهٔ ثابت دارد. ابتدا نشان می‌دهیم که بازهٔ بسته $[\circ, ۱]$ ویژگی نقطهٔ ثابت دارد.

قضیهٔ ۷.۱۰ بازهٔ بسته $C = [\circ, ۱]$ ویژگی نقطهٔ ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $f : C \to C$ پیوسته باشد. اگر $f(\circ) = \circ$ یا $f(۱) = ۱$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $f(\circ) > \circ$ و $f(۱) < ۱$. نگاشت $g : C \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x) = x - f(x)$، به‌ازای هر $x \in C$، تعریف می‌کنیم. در این‌صورت g پیوسته است، $g(\circ) = -f(\circ) < \circ$ و $g(۱) = ۱ - f(۱) > \circ$. لذا $x_\circ \in C$ چنان موجود است که $g(x_\circ) = \circ$ و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

---
1. Brouwer

حال نشان می‌دهیم که دو فضای همسانریخت ویژگی نقطهٔ ثابت دارند هرگاه یکی از آنها این ویژگی را داشته باشد.

قضیهٔ ۸.۱۰ فرض می‌کنیم نگاشت $f : X \to Y$ همسانریختی باشد و X ویژگی نقطهٔ ثابت داشته باشد. در این‌صورت، Y ویژگی نقطهٔ ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نگاشت $g : Y \to Y$ پیوسته باشد. دراین‌صورت، نگاشت $f^{-1}gf : X \to X$ پیوسته است و لذا بنابه فرض، نقطهٔ $x_\circ \in X$ چنان موجود است که $f^{-1}gf(x_\circ) = x_\circ$، یعنی $g(f(x_\circ)) = f(x_\circ)$ و لذا نقطهٔ $f(x_\circ) \in Y$ یک نقطهٔ ثابت g است.

فرع ۱.۱۰ هر بازهٔ بسته $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ ویژگی نقطهٔ ثابت دارد. لذا بازهٔ $[-۱,۱]$ نیز ویژگی نقطهٔ ثابت دارد.

این حکم از قضایای ۷.۱۰ و ۸.۱۰ نتیجه می‌شود. اینک خواهیم دید که این حکم حالت خاصی از قضیهٔ مشهور نقطهٔ ثابت براوئر است.

قضیهٔ ۹.۱۰ (قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر). گوی بستهٔ B^n $(n \geq ۱)$ ویژگی نقطهٔ ثابت دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم s_n، nـسادک $(a_\circ, a_۱, \ldots, a_n)$ باشد. اثبات اینکه گوی بستهٔ B^n همسانریخت با $\overline{s}_n$ است، دشوار نیست و لذا بنابه قضیهٔ ۸.۱۰، فقط کافی است نشان دهیم که $\overline{s}_n$ ویژگی نقطهٔ ثابت دارد. فرض می‌کنیم نگاشت $f : \overline{s}_n \to \overline{s}_n$ پیوسته باشد و $x \in \overline{s}_n$. در این‌صورت، می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=\circ}^{n} \lambda_i(x) a_i$$

که در آن $\sum\limits_{i=\circ}^{n} \lambda_i(x) = ۱$ و $\circ \leq \lambda_i(x) \leq ۱$، $i = \circ, ۱, \ldots, n$.

همچنین چون $f(x) \in \overline{s}_n$، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \sum_{i=\circ}^{n} u_i(x) a_i, \sum_{i=\circ}^{n} u_i(x) = ۱, \qquad \circ \leq u_i(x) \leq ۱,\ i = \circ, ۱, \ldots, n.$$

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i = \circ, ۱, \ldots, n$، $A_i = \{x \in \overline{s}_n : u_i(x) \leq \lambda_i(x)\}$. در این‌صورت چون f پیوسته است، بنابه قضیهٔ ۱.۱۰، هر A_i بسته است.

فرض می‌کنیم $\{i_\circ, i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{\circ, 1, \ldots, n\}$ و $x \in (a_{i_\circ}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$. لذا می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{j=\circ}^{p} \lambda_{i_j}(x) a_{i_j}, \sum_{j=\circ}^{p} \lambda_{i_j}(x) = 1, \ \circ < \lambda_{i_j}(x) < 1, \ j = \circ, 1, \ldots, p.$$

از عبارتی که برای $f(x)$ نوشته بودیم نتیجه می‌شود که حداقل به‌ازای یک $j \leq p$، مثلاً به‌ازای r، باید داشته باشیم $u_{i_r}(x) \leq \lambda_{i_r}(x)$ و لذا $x \in A_{i_r}$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$(a_{i_\circ}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}) \subseteq A_{i_\circ} \cup A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_p}.$$

حال از این مطالب نتیجه می‌گیریم که $\bigcap_{i=\circ}^{n} A_i$ ناتهی است. فرض می‌کنیم $y \in \bigcap_{i=\circ}^{n} A_i$. دراین‌صورت، $y \in \overline{s}_n$ و همچنین به‌ازای هر i، $u_i(y) \leq \lambda_i(y)$. چون $\sum_{u=\circ}^{n} u_i(y) = 1$ $= \sum_{i=\circ}^{n} \lambda_i(y)$، باید به‌ازای هر $i = \circ, 1, \ldots, n$، داشته باشیم $u_i(y) = \lambda_i(y)$؛ در نتیجه $f(y) = y$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۹. افراز گرانیگاهی

مفهوم افراز گرانیگاهی برای مثلث‌بندی هر چندوجهی با سادکهایی که به اندازهٔ دلخواه کوچک باشند، مفید است.

فرض می‌کنیم s_p سادک $(a_\circ, a_1, \ldots, a_p)$ باشد. در این‌صورت گرانیگاه s_p، نقطهٔ

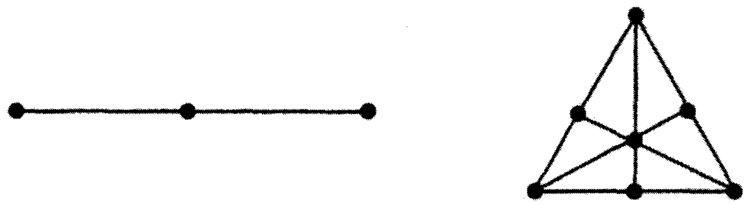
$$b(s_p) = \frac{1}{p+1}(a_\circ + a_1 + \cdots + a_p)$$

است.

بنابراین، $b(s_p)$ همان گرانیگاه (یا مرکز ثقل) رئوس به معنای معمولی است. فرض می‌کنیم K مجتمع باشد، در این‌صورت دنباله‌ای صعودی از سادکهای K، گردایه‌ای مانند

$$\{s^\circ, s^1, \ldots, s^k\}$$

از سادکهای K است که $s^\circ < s^1 < \ldots < s^k$. در اینجا به جای اندیس پایین از اندیس بالا استفاده کرده‌ایم تا نشان دهیم که بعد s^i ممکن است i نباشد. افراز گرانیگاهی K' از K، مجتمعی است که هر یک از رئوس آن گرانیگاه $b(s)$، به‌ازای سادک sای از K باشد، و سادکهای آن توسط مجموعه‌هایی از گرانیگاهها که سادکهای متناظر با آن گرانیگاهها با ترتیبی مناسب تشکیل یک دنبالهٔ صعودی دهند، تعریف شوند. به عبارت دقیقتر



شکل ۶.۱۰

تعریف ۱۴.۱۰ افراز گرانیگاهی مجتمعی مانند K، مجتمعی مانند K' است به‌طوری که
(الف) رئوس K' گرانیگاههای تمام سادکهای K باشند؛
(ب) سادکهای K'، سادکهایی به‌صورت $(b(s^\circ), b(s^\prime), \ldots, b(s^m))$ باشند که در آن $s^i < s^{i+1}$ و $s^i \in K$.

نکتهٔ ۳.۱۰ چون مجتمع K' به‌وضوح به‌وسیلهٔ تعریف فوق معین می‌شود، اگر مجتمع K' موجود باشد، منحصر به‌فرد است.

در شکل ۶.۱۰، افراز گرانیگاهیِ یک ۱ـسادک و یک ۲ـسادک را نشان داده‌ایم.

لم ۸.۱۰ فرض می‌کنیم L مجتمع و K زیرمجتمعی از L باشد. اگر L افرازی گرانیگاهی مانند L' داشته باشد، آنگاه K افرازی گرانیگاهی مانند K' دارد که K' متشکل از تمام سادکهایی از L' است که در $|K|$ باشند.

اثبات. سادکهایی از L' که در $|K|$ باشند، به‌وضوح تشکیل زیرمجتمعی از L' می‌دهند. شرطهای (الف) و (ب) از تعریف ۱۴.۱۰ برقرارند زیرا اگر s^iها سادکهای K باشند و $s^\circ < s^\prime < \cdots < s^m$، آنگاه $(b(s^\circ), b(s^\prime), \ldots, b(s^m)) \subseteq s^m \subseteq |K|$.

لم ۹.۱۰ اگر K مجتمع باشد و افرازی گرانیگاهی مانند K' از K موجود باشد، آنگاه $|K'| = |K|$.

اثبات. فرض می‌کنیم t سادک $(b(s^\circ), b(s^\prime), \ldots, b(s^m))$ از K' باشد؛ در این‌صورت، $t \subseteq s^m \subseteq |K|$. لذا $|K'| \subseteq |K|$. برای اثبات عکس این رابطه، فرض می‌کنیم $x \in s \subseteq |K|$. رئوس سادک $s = (a_\circ, a_\prime, \ldots, a_n)$ را می‌توان چنان مرتب کرد که اگر $x = \sum t_i a_i$، آنگاه $t_\circ \geq t_\prime \geq \cdots \geq t_n$. فرض می‌کنیم $s_i = (a_\circ, a_\prime, \ldots, a_i)$. در این‌صورت $x = \sum r_i b(s_i)$، که در آن $r_i = (i+\prime)(t_i - t_{i+\prime})$. واضح است که $r_i \geq \circ$

و $\sum r_i = \sum t_i = ۱$. لذا

$$x \in (b(s_۰), b(s_۱), \dots, b(s_m)) \in K'$$

یعنی $|K| \subseteq |K'|$، و بنابراین $|K| = |K'|$.

تعریف ۱۵.۱۰ فرض می‌کنیم s_p سادک $(a_۰, a_۱, \dots, a_p)$ باشد، در این‌صورت ∂s_p گردایهٔ تمام سادکهای $(a_۱, a_۲, \dots, a_p)$، $(a_۰, a_۱, a_۳, \dots a_p)$، ...، $(a_۰, a_۱, \dots, a_{p-۱})$ است.

واضح است که ∂s_p مجتمع است.

لم ۱۰.۱۰ فرض می‌کنیم s_p سادک $(a_۰, a_۱, \dots, a_p)$ باشد و ∂s_p افراز گرانیگاهی داشته باشد. در این‌صورت، s_p افراز گرانیگاهی دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم نقطهٔ $b = (p+۱)^{-۱}(a_۰ + a_۱ + \cdots + a_p)$ گرانیگاه s_p باشد. همچنین فرض می‌کنیم سادک $t_s = (b_۰, b_۱, \dots, b_s)$ سادکی از افراز گرانیگاهی ∂s_p، یعنی سادکی از $(\partial s_p)'$، باشد. تعریف می‌کنیم $t_s b = (b_۰, b_۱, \dots, b_s, b)$. ابتدا نشان می‌دهیم که $t_s b$ سادک است.

فرض می‌کنیم $\sum t_i b_i + tb = ۰$ و $\sum t_i + t = ۰$. به‌علاوه فرض می‌کنیم در صورتی که امکان داشته باشد $t \neq ۰$. چون t_s در وجهی از s_p مانند s_j قرار دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$b_i = \sum_{k \neq j} \lambda_{i,k} a_k \qquad \text{که} \qquad \sum_{k \neq j} \lambda_{i,k} = ۱$$

در نتیجه

$$b = \frac{-۱}{t} \sum t_i b_i = -\frac{۱}{t} \sum_{k \neq j} t_i \lambda_{i,k} a_k = \sum_{k \neq j} d_k a_k$$

که در آن $\sum_{k \neq j} d_k = (-۱/t) \sum_{k \neq j} t_i \lambda_{i,k} = -۱$. بنابراین

$$۰ = \frac{۱}{p+۱}(a_۰ + a_۱ + \cdots + a_p) + \sum_{k \neq j} d_k a_k = \sum r_k a_k \qquad \text{و} \qquad \sum r_k = ۰ .$$

چون s_p سادک است، باید به‌ازای هر k داشته باشیم $r_k = ۰$. اما $r_j = (p+۱)^{-۱}$ و در نتیجه به تناقض رسیده‌ایم. لذا $t = ۰$. بنابراین $\sum t_i b_i = ۰$ و $\sum t_i = ۰$. اما t_s سادک است، لذا باید به‌ازای هر i داشته باشیم $t_i = ۰$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $t_s b$ سادک است.

واضح است که رئوس s'_p عبارت‌اند از رئوس $(\partial s_p)'$ و b؛ و سادکهای s'_p عبارت‌اند از

سادکهای t_s و t_sb به‌ازای همهٔ سادکهای t_s از $(\partial s_p)'$. برای اثبات اینکه s'_p مجتمع است، باید نشان دهیم که اشتراک هر دو سادکی از آن وجهی از هر کدام است. این مطلب واضح است، زیرا

$$t_sb \cap t'_s = t_s \cap t'_s, \quad t_sb \cap t'_sb = (t_s \cap t'_s)b\,.$$

لذا s'_p مجتمع است و به این ترتیب لم به اثبات می‌رسد.

اگر K و L دو مجتمع باشند، آنگاه منظورمان از $K \cap L$ مجموعهٔ سادکهایی است که هم در K و هم در L باشند، و منظورمان از $K \cup L$ مجموعهٔ سادکهایی است که یا در K یا در L باشند. واضح است که $K \cap L$ زیرمجتمعی از K و L است، اما $K \cup L$ ممکن است مجتمع نباشد. لیکن در لم بعدی می‌بینیم که در حالتی خاص، $K \cup L$ مجتمع است.

لم ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم K و L دو مجتمع باشند. اگر

$$|K \cap L| = |K| \cap |L|$$

آنگاه $K \cup L$ مجتمع است.

اثبات. فرض می‌کنیم s سادکی از K و t سادکی از L باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $s \cap t$ هم وجه s است هم وجه t (توجه کنید که مجموعهٔ تهی وجه هر سادکی است).

فرض می‌کنیم A و B به‌ترتیب زیرمجتمعهای K و L باشند. در این‌صورت

$$|A \cap B| = |A| \cap |B| \cap |K \cap L|$$

این مطلب را ثابت می‌کنیم. واضح است که $|A \cap B| \subseteq |A| \cap |B| \cap |K \cap L|$. فرض می‌کنیم $x \in s \in A$، $x \in t \in B$، و $x \in u \in K \cap L$. چون t و u سادکهایی از L هستند، $t \cap u < u$. به همین صورت نتیجه می‌گیریم که $s \cap u < s$. لذا

$$s \cap t \cap u = (s \cap u) \cap (t \cap u) < s \cap u < s\,.$$

همچنین، به دلیل تقارن، $s \cap t \cap u < t$. بنابراین

$$x \in s \cap t \cap u \in A \cap B\,. \qquad \text{و} \qquad x \in |A \cap B| \cdot$$

اگر A (یا B) مجتمعی متشکل از s (یا t) و تمام وجوه آن باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= s \cap t \cap |K \cap L| = s \cap t \cap |K| \cap |L| \\ &= (s \cap |K|) \cap (t \cap |L|) = s \cap t\,. \end{aligned}$$

چون $A\cap B$ هم زیرمجتمع A و هم زیرمجتمع B است، پس $s\cap t$ زیرمجتمع هر دو سادک s و t است. از لم ۵.۱۰ نتیجه می‌گیریم که $s\cap t$ محدب است و لذا هم وجه s و هم وجه t است. پس $K\cup L$ مجتمع است. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

حال قضیهٔ اصلی این بخش را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰.۱۰ هر مجتمع افراز گرانیگاهی دارد.

اثبات. قضیه را با استقرایی مضاعف روی بعد مجتمع و روی تعداد سادکها ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم قضیه به‌ازای هر مجتمع با بعد کمتر از p و همچنین به‌ازای هر مجتمع با بعد p که تعداد pـسادکهای آن کمتر از s باشد، $s \geq ۱$، برقرار باشد.

فرض می‌کنیم K مجتمعی pـبعدی باشد که تعداد pـسادکهای آن s است. همچنین فرض می‌کنیم u یک pـسادک باشد. در این‌صورت، زیرمجتمعی از K مانند L با کمتر از s سادک چنان موجود است که $K = L\cup u$. بنا به استقرا، L مجتمع است، $(\partial u)'$ نیز مجتمع است، در نتیجه بنابه لم ۱۰.۱۰، u' مجتمع است. می‌توان نشان داد که $K' = L'\cup u'$. بنابراین بنا به لم ۱۱.۱۰، کافی است نشان دهیم

$$|K'\cap u'| = |K'|\cap |u'|.$$

مشاهده می‌کنیم $K'\cap u' = (K\cap u)'$ و $(K\cap u)'$ بنابه لم ۸.۱۰، مجتمع است. اگر M مجتمع و $K_۰$ و $K_۱$ زیرمجتمعهایی از M باشند، آنگاه $|K_۰\cap K_۱| = |K_۰|\cap |K_۱|$. با استفاده از این مطلب و لم ۹.۱۰، نتیجه می‌گیریم که

$$|K'\cap u'| = |(K\cap u)'| = |K\cap u| = |K|\cap |u| = |K'|\cap |u'|.$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

نکتهٔ ۴.۱۰ از اثبات نتیجه می‌شود که برای هر مجتمع K، بعد $K' =$ بعد K.

تعریف ۱۶.۱۰ فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. قطر K را، که با $u(K)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت

$$u(K) = \max\{\operatorname{diam} s : s\in K\}$$

تعریف می‌کنیم.

فایدهٔ اصلی افراز گرانیگاهی در دو قضیهٔ بعدی نهفته است.

قضیهٔ ۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم بعد مجتمع K، m باشد، در این‌صورت

$$u(K') \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

اثبات. بنابه لم ۶.۱۰، فقط یالها را باید در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم s' یالی از K' (یعنی ۱ـسادک) با رئوس $b(s_p)$ و $b(s_q)$ باشد، و $s_q < s_p$. در این‌صورت $p < q \leq m$. فرض می‌کنیم

$$s_p = (a_0, a_1, \ldots, a_p) \quad \text{و} \quad s_q = (a_0, a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_q).$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} b(s_p) - b(s_q) &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} a_i - \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{q} a_i \\ &= \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right) \sum_{i=0}^{p} a_i - \frac{1}{q+1} \sum_{i=p+1}^{q} a_i \\ &= \frac{q-p}{q+1} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} a_i - \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} a_i\right). \end{aligned}$$

نقاط $\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} a_i$ و $\frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} a_i$ هر دو در $\overline{s}_q$ هستند و چون بنابه نکتهٔ ۱.۱۰، $\operatorname{diam} \overline{s}_q = \operatorname{diam} s_q$، فاصلهٔ این دو نقطه از هم بیشتر از $u(K)$ نیست، یعنی

$$\left\| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} a_i - \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} a_i \right\| \leq u(K).$$

لذا از مطالب فوق نتیجه می‌شود که

$$\| b(s_p) - b(s_q) \| \leq \frac{q-p}{q+1} u(K) \leq \frac{q}{q+1} u(K) \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

لم ۶.۱۰ نشان می‌دهد که $u(K')$ طول بزرگترین یال K' است. چون نابرابری فوق برای هر یال K' برقرار است، نتیجه می‌گیریم که

$$u(K') \leq \frac{m}{m+1} u(K).$$

به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

اگر K مجتمع باشد، افراز گرانیگاهی آن K' نیز مجتمع است. بنابراین با تشکیل افرازهای گرانیگاهی متوالی، دنباله‌ای مانند

$$K^{(\circ)} = K, K^{(۱)} = K', K^{(۲)} = (K^{(۱)})' = (K')', \ldots, K^{(r)} = (K^{(r-۱)})', \ldots$$

که در آن $K^{(r)}$، $r = ۱, ۲, ۳, \ldots$، افراز گرانیگاهی $K^{(r-۱)}$ است، به‌دست می‌آوریم. حال ثابت می‌کنیم که r را می‌توان آن‌قدر بزرگ اختیار کرد که قطر $K^{(r)}$ به اندازهٔ دلخواه کوچک باشد.

قضیهٔ ۱۲.۱۰ فرض می‌کنیم K مجتمع و ε عدد مثبت دلخواهی باشد. عدد $r \geq \circ$ چنان موجود است که $u(K^{(r)}) < \varepsilon$.

اثبات. فرض می‌کنیم m بعد K باشد. در این‌صورت، با استفاده از نکتهٔ ۴.۱۰ و قضیهٔ ۱۱.۱۰، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} u(K^{(r)}) &\leq \left(\frac{m}{m+۱}\right) u(K^{(r-۱)}) \leq \left(\frac{m}{m+۱}\right)^{۲} u(K^{(r-۲)}) \\ &\leq \cdots \leq \left(\frac{m}{m+۱}\right)^{r} u(K)\,. \end{aligned}$$

چون r را می‌توان به اندازهٔ مورد نیاز بزرگ اختیار کرد و $m/(m+۱) < ۱$، درستی قضیه نتیجه گرفته می‌شود.

تمرین

۱. اگر مجموعهٔ $s = \{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ از لحاظ هندسی مستقل باشد، ثابت کنید ابرصفحهٔ $\pi(s)$ بسته است.

۲. اگر $\{a_\circ, a_۱, \ldots, a_p\}$ زیرمجموعه‌ای هندسی‌مستقل از $\mathbb{R}^n$ باشد، نشان دهید عدد $\varepsilon > \circ$ چنان موجود است که هر مجموعهٔ $\{b_\circ, b_۱, \ldots, b_p\}$ از نقاط $\mathbb{R}^n$ با ویژگی $\|a_i - b_i\| < \varepsilon$، $i = \circ, ۱, ۲, \ldots, p$، هندسی‌مستقل باشد.

۳. اگر s_p و t_p دو pـسادک باشند، نشان دهید s_p با t_p، و $\overline{s}_p$ با $\overline{t}_p$ همسانریخت است.

۴. نشان دهید که هر سادکی محدب است.

۵. نشان دهید اشتراک دو زیرمجتمع، زیرمجتمعی از هر کدام است.

۶. ثابت کنید که زیرمجتمع یک زیرمجتمع خود زیرمجتمع است.
۷. نشان دهید حاصلضرب دو چندوجهی توپولوژیک یک چندوجهی توپولوژیک است.
۸. نشان دهید در هر مثلث‌بندی مکعب I_n، تعداد nـسادکها حداقل $n!$ است.
۹. ثابت کنید گوی باز $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ ویژگی نقطهٔ ثابت ندارد.

۱۱

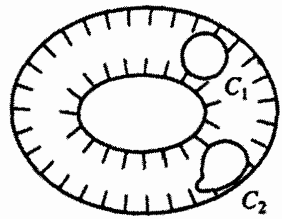
نظریهٔ مانستگی سادکی

۱. مقدمه

نظریهٔ مانستگی در توپولوژی بسیار مهم است. در این فصل نظریهٔ مانستگی مجتمعهای سادکی را به اختصار ارائه خواهیم کرد. شرح کامل این نظریه خارج از چارچوب این کتاب است. باید توجه کرد که نظریهٔ مانستگی سادکی فقط یکی از چندین نظریهٔ مانستگی است.

در برخی از حالات، مانستگی شبیه هوموتوپی است. به‌عنوان مثال، می‌توان گفت دو ۱ـچرخه (که بعداً تعریف می‌شود) روی چنبره مانسته هستند اگر و فقط اگر هوموتوپیک باشند. لیکن در حالت کلی این موضوع برای رویه‌ها برقرار نیست. به‌عنوان مثال، رویه‌ای را که از حذف درون یک ناحیهٔ ساده‌همبند از رویهٔ یک چنبره حاصل می‌شود در نظر بگیرید. قسمت حذف‌شده در شکل ۱.۱۱ نشان داده شده است.

هیچ خمی بر رویهٔ چنبره که این ناحیه را احاطه کند، با صفر هوموتوپیک نیست، زیرا این خم نمی‌تواند روی رویهٔ چنبره به‌طور پیوسته آن‌قدر منقبض شود تا به یک نقطه تبدیل شود. اما چون این خم مرز تمام رویه است، با صفر مانسته است. همچنین خمهای $C_۱$ و $C_۲$ همان‌گونه که در شکل فوق نمایش داده شده‌اند، مانسته هستند اما هوموتوپیک نیستند.



شکل ۱.۱۱

۲. گروه آبلی متناهی‌مولد

در این فصل به برخی از ایده‌ها و قضایا دربارهٔ گروههای متناهی‌ْمولد احتیاج خواهیم داشت. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی جمعی باشد. در این‌صورت، G را متناهی‌مولد نامند هرگاه اعضای g_1، g_2، ...، g_k در G چنان موجود باشند که هر $x \in G$ را بتوان به‌صورت

$$x = u_1 g_1 + u_2 g_2 + \cdots + u_k g_k$$

نوشت که در آن u_1، u_2، ...، u_k اعدادی صحیح هستند.

فرض می‌کنیم $g \in G$، و k چنان عدد صحیحی باشد که $kg = 0$. در این‌صورت، مقدار مینیمم چنین kای را مرتبهٔ g و g را عنصر تاب G می‌نامند. اگر چنین kای موجود نباشد، آنگاه می‌گویند g از مرتبهٔ نامتناهی است.

قضایای زیر، که اثبات آنها را نمی‌آوریم، در مراحل متعددی مورد نیاز خواهند بود.*

قضیهٔ A (قضیهٔ پایه). فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی‌مولد باشد. عنصرهای g_1، g_2، ...، g_k به‌ترتیب از مرتبه‌های m_1، m_2، ...، m_k که m_i، m_{i-1} را عاد کند، و اعضای h_1، h_2، ...، h_l از مرتبهٔ نامتناهی چنان موجودند که G مجموع مستقیم

$$G = \{g_1\} \oplus \{g_2\} \oplus \cdots \oplus \{g_k\} \oplus \{h_1\} \oplus \{h_2\} \oplus \cdots \oplus \{h_l\}$$

باشد، که در آن $\{g_i\}$ گروهی دوری از مرتبهٔ m_i است که توسط g_i تولید می‌شود و $\{h_i\}$ گروه دوری نامتناهیِ تولیدشده توسط h_i است.

* برای ملاحظهٔ اثبات این قضایا، می‌توانید به کتابهای زیر رجوع کنید

1. G. Birkhoff and S. MacLane, *A Surveg of Modern Algebra*, Macmillan, New York, 1971;

2. I. D. MacDonald, *The Theory of Groups*, Oxford University Press, New York, 1968.

نکتهٔ ۱.۱۱ اعداد $m_۱$، $m_۲$، ...، m_k، و l به‌طور منحصر به‌فرد توسط G معین می‌شوند. اعداد $m_۱$، $m_۲$، ...، m_k را ضرایب تاب G، و l را رتبهٔ G می‌نامند.

قضیهٔ B. فرض می‌کنیم H زیرگروهی از گروه آبلی متناهی‌مولد G باشد. در این‌صورت، رتبهٔ G برابر با مجموع رتبه‌های H و $G - H$ است.

قضیهٔ C. فرض می‌کنیم G گروه جمعی دلخواهی باشد. زیرمجموعهٔ $H \subseteq G$ زیرگروه G است اگر و فقط اگر چنانچه $x \in H$ و $y \in H$، آنگاه $x - y \in H$.

۳. زنجیر

فرض می‌کنیم K یک مجتمع سادکی هندسی nبعدی باشد، و به‌ازای $p = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$، α_p تعداد pـسادکهای K باشد. زنجیر pبعدی روی K یا به اختصار pـزنجیر K، یک «جمع صوری» به شکل

$$c_p = u_۱ s_p^۱ + u_۲ s_p^۲ + \cdots + u_{\alpha_p} s_p^{\alpha_p}$$

است، که در آن $u_۱$، $u_۲$، ...، u_{α_p} اعدادی صحیح و $s_p^۱$، $s_p^۲$، ...، $s_p^{\alpha_p}$، pـسادکهای K هستند. لذا c_p یک صورت خطی روی pـسادکهای K است. همچنین می‌نویسیم

$$(-۱)s_p = -s_p$$

که در آن s_p، pـسادک است. باید توجه کرد که هر pـسادک K را می‌توان pـزنجیری در نظر گرفت که تمام ضرایب آن غیر از یکی برابر صفرند.

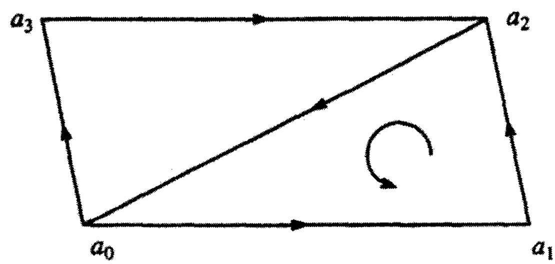
اگر c_p و c'_p زنجیرهای

$$c'_p = \sum u'_i s_p^i \quad \text{و} \quad c_p = \sum u_i s_p^i$$

باشند، مجموع آنها $c_p + c'_p$ را pـزنجیر

$$c_p + c'_p = \sum (u_i + u'_i) s_p^i$$

تعریف می‌کنیم. لذا مجموع دو pـزنجیر یک pـزنجیر است و قانون شرکت‌پذیری برای pـزنجیرها برقرار است زیرا جمع اعداد صحیح شرکت‌پذیر است. pـزنجیری را که تمام ضرایب آن صفر باشد pـزنجیر صفر می‌نامند (همانی). معکوس هر pـزنجیر $\sum u_i s_p^i$ به‌صورت $\sum (-u_i) s_p^i$ تعریف می‌شود. بنابراین با این عملها، مجموعهٔ تمام pـزنجیرهای K تشکیل گروهی می‌دهد که به‌وضوح



شکل ۲.۱۱

آبلی است. این گروه را با $C_p(K)$ نمایش می‌دهند و گروه pـزنجیری یا گروه pـزنجیرهای K می‌نامند.

اگر s_p، pـسادکی از K باشد، آنگاه $-s_p$ متعلق به $C_p(K)$ است و لذا گروه $C_p(K)$ با تغییر جهتهای سادکهای K تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، $C_p(K)$ مستقل از جهت انتخاب‌شده برای K است. $C_{-۱}(K)$ را برابر صفر تعریف می‌کنیم.

مثال ۱.۱۱ فرض می‌کنیم K مجتمعی متشکل از ۲ـسادک $(a_۰, a_۱, a_۲)$، رئوس $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، و ۱ـسادکهای $(a_۰, a_۱)$، $(a_۱, a_۲)$، $(a_۰, a_۳)$، $(a_۳, a_۲)$، $(a_۲, a_۰)$ با جهتهای نشان‌داده‌شده در شکل ۲.۱۱ باشد.

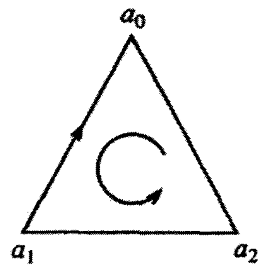
در این‌صورت، $(a_۰, a_۱)$ و $(a_۲, a_۰) + (a_۳, a_۲) + (a_۰, a_۳)$ از ۱ـزنجیرهای K و لذا متعلق به $C_۱(K)$ هستند. تمام مضارب صحیح چنین زنجیرهایی نیز عضو $C_۱(K)$ هستند.

۴. تلازم

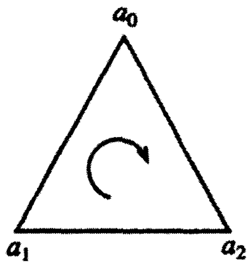
فرض می‌کنیم K مجتمع و s_m و $t_{m+۱}$ دو سادک آن باشند. عدد تلازم این دو سادک را با $[t_{m+۱}; s_m]$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر s_m وجهی از $t_{m+۱}$ نباشد، آنگاه عدد تلازم $[t_{m+۱}; s_m]$ صفر تعریف می‌شود. اگر سادک $s_m = (a_۰, a_۱, \dots, a_m)$ وجهی از $t_{m+۱}$ باشد، آنگاه رأس دیگری مانند b وجود دارد چنانکه

$$t_{m+۱} = \pm(b, a_۰, a_۱, \dots, a_m)$$

که علامت مثبت و منفی به جهت دو سادک بستگی دارد [b را رأس اضافی $t_{m+۱}$ می‌گوییم].



شکل ۳.۱۱



شکل ۴.۱۱

عدد تلازم $[t_{m+۱}; s_m]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[t_{m+۱}; s_m] = ۱ \qquad \text{هرگاه} \qquad t_{m+۱} = (b, a_۰, a_۱, \ldots, a_m)$$

و

$$[t_{m+۱}; s_m] = -۱ \qquad \text{هرگاه} \qquad t_{m+۱} = -(b, a_۰, a_۱, \ldots, a_m).$$

اگر عدد تلازم دو سادک مخالف صفر باشد، آنگاه می‌گوییم دو سادک متلازم‌اند.

مثال ۲.۱۱ مجتمع K را شامل ۲ـسادک $s_۲ = (a_۰, a_۱, a_۲)$ و ۱ـسادک $s_۱ = (a_۱, a_۰)$ با جهتهایی که در شکلهای ۳.۱۱ و ۴.۱۱ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. بر طبق شکل ۳.۱۱،

$$s_۲ = (a_۱, a_۲, a_۰) = -(a_۲, a_۱, a_۰) \qquad \text{و لذا} \qquad [s_۲; s_۱] = -۱.$$

بر طبق شکل ۴.۱۱،

$$s_۲ = (a_۲, a_۱, a_۰) \qquad \text{و لذا} \qquad [s_۲; s_۱] = ۱.$$

حال فرض می‌کنیم تعداد mـسادکها و $(m+۱)$ـسادکهای مجتمع K به‌ترتیب q و r باشد. فرض می‌کنیم این دو دسته سادک به‌ترتیب

$$s_m^۱, s_m^۲, \ldots, s_m^q \qquad \text{و} \qquad t_{m+۱}^۱, t_{m+۱}^۲, \ldots, t_{m+۱}^r$$

باشند، و به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, r$ و $j = ۱, ۲, \ldots, q$،

$$[t_{m+۱}^i; s_m^j] = \eta_{ij}^m.$$

بنابراین به تعداد $q \times r$ عدد η_{ij}^m به‌دست می‌آوریم که ۰، ۱ یا ۱− هستند. ماتریسی r سطری و q ستونی که درایهٔ سطر iام و ستون jام آن η_{ij}^m باشد تشکیل می‌دهیم. این ماتریس را ماتریس تلازم می‌نامیم و با I_m نمایش می‌دهیم.

اگر s_p سادک $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ باشد، منظورمان از rs_p، prs_p و غیره به‌ترتیب سادکهای $(r, a_0, a_1, \ldots, a_p)$، $(p, r, a_0, a_1, \ldots, a_p)$ و غیره است. بعداً به قضیهٔ زیر نیاز خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱.۱۱ $I_m I_{m-1} = 0$.

اثبات. حاصلضرب $I_m I_{m-1}$ وجود دارد زیرا تعداد ستونهای I_m، تعداد mـسادکهاست که برابر با تعداد سطرهای I_{m-1} است.

اگر تعداد mـسادکها q باشد، آنگاه درایهٔ سطر iام و ستون jام $I_m I_{m-1}$ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{q} \eta_{ik}^m \, \eta_{kj}^{m-1}. \tag{1}$$

نشان می‌دهیم که این درایه صفر است. اگر t_{m+1}^i با s_m^k متلازم نباشد، η_{ik}^m صفر است. اگر s_m^k با $(m-1)$ـسادک u_{m-1}^j متلازم نباشد، η_{kj}^{m-1} صفر است. بنابراین، یکی از جملات مجموع (۱) صفر است مگر آنکه s_m^k با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم باشد.

فرض می‌کنیم s_m^k با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم باشد. در این‌صورت اگر

$$u_{m-1}^j = (q_0, q_1, \ldots, q_{m-1})$$

آنگاه

$$s_m^k = \eta_{kj}^{m-1}(pu_{m-1}^j), \quad t_{m+1}^i = \eta_{ik}^m \, \eta_{kj}^{m-1}(rpu_{m-1}^j)$$

که در آن p رأس اضافی s_m^k و r رأس اضافی t_{m+1}^i است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} t_{m+1}^i &= -\eta_{ik}^m \, \eta_{kj}^{m-1}(pru_{m-1}^j) \\ &= -\eta_{kj}^{m-1}(pv_m^h) \end{aligned}$$

که در آن v_m^h، mـسادک $\eta_{ik}^m(ru_{m-1}^j)$ است. بنابراین mـسادک v_m^hای وجود دارد که با سادکهای t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم است و اعداد تلازم آنها به‌ترتیب $-\eta_{kj}^{m-1}$ و η_{ik}^m هستند. واضح است که $\pm v_m^h$ وجهی از سادک t_{m+1}^i از مجتمع K است و لذا $\pm v_m^h$ سادکی از K است. علاوه‌بر این،

s_m^k و $\pm v_m^h$ تنها سادکهایی از K هستند که با هر دو سادک t_{m+1}^i و u_{m-1}^j متلازم‌اند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر جملهٔ مخالف صفر در مجموع (۱)، یک جملهٔ مخالف صفر دیگر با همان قدرمطلق ولی با علامت مخالف وجود دارد. لذا مقدار مجموع (۱) صفر است، و در نتیجه $I_m I_{m-1} = 0$. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

۵. مرز

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد و s_pها، pـسادکها و t_{p-1}ها، $(p-1)$ـسادکهای K باشند. مرز pـسادک s_p^i $(p > 0)$، $(p-1)$ـزنجیر

$$\sum_j \eta_{ij}^{p-1}\, t_{p-1}^j$$

است و با $\partial_p s_p^i$ نمایش داده می‌شود. بنابراین

$$\partial_p s_p^i = \sum_j \eta_{ij}^{p-1}\, t_{p-1}^j\,.$$

در اینجا η_{ij}^{p-1} عدد تلازم s_p^i و t_{p-1}^j است. مرز ۰ـسادک را صفر تعریف می‌کنیم.

با تعریف زیر، از مرز سادک به مرز زنجیر می‌رسیم. فرض می‌کنیم c_p، pـزنجیری به‌صورت

$$c_p = \sum u_i s_p^i$$

باشد. در این‌صورت، مرز pـزنجیر c_p، $\partial_p c_p$، $(p-1)$ـزنجیر

$$\partial_p c_p = \sum_i u_i \partial_p s_p^i = \sum_{i,j} u_i \eta_{ij}^{p-1}\, t_{p-1}^j$$

است. بنابه تعریف، مرز ۰ـزنجیر، صفر است. اگر c_p و c'_p دو pـزنجیر باشند، آنگاه

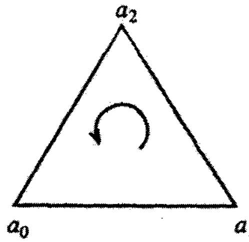
$$\partial_p(c_p + c'_p) = \partial_p c_p + \partial_p c'_p\,.$$

لذا ∂_p یک همریختی از $C_p(K)$ به $C_{p-1}(K)$ است. پس برای هر مجتمع K، دنباله‌ای از همریختیهای گروههای زنجیری مانند

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(K)$$

به‌دست می‌آوریم که در آن فرض بر این است که به‌ازای هر عدد صحیح i بزرگتر از بعد مجتمع K، $C_i(K) = 0$ و $\partial_i = 0$.

شکل ۵.۱۱



شکل ۶.۱۱

مثال ۳.۱۱ فرض می‌کنیم $s_۱$ و $s_۲$ سادکهای $(a_۰, a_۱)$ و $(a_۰, a_۱, a_۲)$ از مجتمع K با جهتهای نشان داده‌شده در شکلهای ۵.۱۱ و ۶.۱۱ باشند. در این‌صورت

$$\begin{aligned} \partial_۱ s_۱ &= a_۱ - a_۰ \\ \partial_۲ s_۲ &= (a_۰, a_۱) + (a_۱, a_۲) + (a_۲, a_۰) \\ &= (a_۱, a_۲) - (a_۰, a_۲) + (a_۰, a_۱) . \end{aligned}$$

ویژگی اساسی مرز زنجیر را در قضیهٔ بعدی می‌آوریم.

قضیهٔ ۲.۱۱ اگر K مجتمع باشد و $p > ۰$، آنگاه ترکیب همریختیهای

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-۱}(K) \xrightarrow{\partial_{p-۱}} C_{p-۲}(K)$$

همریختی بدیهی است. به عبارت دیگر $\partial_{p-۱}(\partial_p c_p) = ۰$، یعنی مرزِ مرزِ هر p-زنجیر صفر است.

اثبات. داریم $\partial_p c_p = \partial_p(\sum u_i s_p^i) = \sum u_i \eta_{ij}^{p-۱}\ t_{p-۱}^j$، که عبارت سمت راست این تساوی $(p-۱)$-زنجیر است. اگر $p = ۱$، آنگاه

$$\partial_{p-۱}(\partial_p c_p) = \partial_{p-۱}\left(\sum u_i \eta_{ij}^{p-۱}\ t_{p-۱}^j\right) = ۰$$

اما اگر $p > ۱$، عبارت فوق $(p-۲)$-زنجیر

$$\sum_{i,j,k} u_i \eta_{ij}^{p-۱}\ \eta_{jk}^{p-۲}\ u_{p-۲}^k$$

است که در آن $u_{p-۲}^k$ها $(p-۲)$-سادک هستند. بنابه قضیهٔ ۱.۱۱، $\sum \eta_{ij}^{p-۱}\ \eta_{jk}^{p-۲} = ۰$ و لذا $\partial_{p-۱}(\partial_p c_p) = ۰$. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۶. چرخه

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. pـزنجیر روی K را pـچرخه نامند هرگاه مرز آن صفر (یعنی بدیهی) باشد، به عبارت دیگر اگر c_p، pـزنجیر باشد و $\partial_p c_p = \circ$، آنگاه c_p، pـچرخه است. اگر c_p و c'_p دو pـچرخه باشند، آنگاه $\partial_p c_p = \circ = \partial_p c'_p$. لذا

$$\partial_p(c_p - c'_p) = \partial_p c_p - \partial_p c'_p = \circ$$

یعنی $c_p - c'_p$، pـچرخه است. بنابراین بنابه قضیهٔ C، مجموعهٔ تمام pـچرخه‌ها زیرگروهی از $C_p(K)$ تشکیل می‌دهد، که آن را با $Z_p(K)$ نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۱۱ مرز $(p+۱)$ـزنجیر pـچرخه است.

اثبات. فرض می‌کنیم $c_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱}$. در این‌صورت، بنابه قضیهٔ ۲.۱۱،

$$\partial_p c_p = \partial_p(\partial_{p+۱} c_{p+۱}) = \circ$$

و لذا c_p، pـچرخه است.

نکتهٔ ۲.۱۱ باید توجه داشت که pـچرخه ممکن است مرز $(p+۱)$ـزنجیر نباشد.

pـچرخه‌ای را که مرز $(p+۱)$ـزنجیری از K باشد pـمرز می‌نامند، یعنی هرگاه c_p، pـچرخه باشد و $(p+۱)$ـزنجیری از K مانند $c_{p+۱}$ چنان موجود باشد که

$$c_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱}$$

آنگاه c_p، pـمرز است.

فرض می‌کنیم c_p و c'_p، pـمرز باشند. در این‌صورت $\partial_p c_p = \circ = \partial_p c'_p$ و $(p+۱)$ـزنجیرهای $c_{p+۱}$ و $c'_{p+۱}$ روی K چنان موجودند که

$$c'_p = \partial_{p+۱} c'_{p+۱} \quad \text{و} \quad c_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱}$$

در نتیجه $\partial_p(c_p - c'_p) = \circ$ و

$$c_p - c'_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱} - \partial_{p+۱} c'_{p+۱} = \partial_{p+۱}(c_{p+۱} - c'_{p+۱})\,.$$

لذا $c_p - c'_p$، pـمرز است. بنابراین بنابه قضیهٔ C، مجموعهٔ تمام pـمرزها زیرگروهی از $Z_p(K)$ تشکیل می‌دهد، که آن را با $B_p(K)$ نشان می‌دهیم.

بنابراین، به‌ازای هر مجتمع K، سه گروه $B_p(K)$، $Z_p(K)$ و $C_p(K)$ را تشکیل داده‌ایم که رابطهٔ

$$B_p(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq C_p(K)$$

بین آنها برقرار است.

۷. گروههای مانستگی

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد، و c_p و c'_p دو pـچرخه روی K باشند. اگر $c_p - c'_p$، pـمرز باشد، می‌نویسیم

$$c_p \sim c'_p$$

و می‌گوییم c_p با c'_p مانسته است (معنی نماد $\sim$ را در هر بحثی از فحوای کلام باید دریافت). اگر خود c_p، pـمرز باشد، می‌گوییم c_p با صفر مانسته است و می‌نویسیم $c_p \sim ۰$.

نشان می‌دهیم که رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

(الف) شرط بازتابی: چون $c_p - c_p = ۰$، $c_p \sim c_p$.

(ب) شرط تقارن: فرض می‌کنیم $c_p \sim c'_p$، لذا $c_{p+۱}$ چنان موجود است که $c_p - c'_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱}$. لذا

$$c'_p - c_p = \partial_{p+۱}(-c_{p+۱})$$

و در نتیجه $c'_p \sim c_p$.

(ج) شرط ترایایی: فرض می‌کنیم $c_p \sim c'_p$ و $c'_p \sim c''_p$. در این‌صورت

$$c_p - c'_p = \partial_{p+۱} c_{p+۱} \qquad \text{و} \qquad c'_p - c''_p = \partial_{p+۱} c'_{p+۱}$$

و در نتیجه $c_p - c''_p = \partial_{p+۱}(c_{p+۱} + c'_{p+۱})$، و لذا $c_p \sim c''_p$.

بنابراین رابطهٔ $\sim$ مجموعهٔ تمام pـچرخه‌ها را به رده‌های هم‌ارزی دوبه‌دو مجزا تفکیک می‌کند. این رده‌ها را رده‌های مانستگی از بعد p می‌نامند.

حال جمع این رده‌ها را تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $[c_p]$ و $[c'_p]$ دو رده از pـچرخه‌ها باشند. جمع آنها را به‌صورت

$$[c_p] + [c'_p] = [c_p + c'_p]$$

تعریف می‌کنیم. مجموع فوق منحصر به‌فرد است، زیرا این مجموع مستقل از نمایندهٔ رده‌هاست. اگر $[\circ]$ نمایشگر ردهٔ pـمرزها باشد، آنگاه واضح است که

$$[c_p] + [\circ] = [c_p]$$

و

$$[c_p] + [-c_p] = [\circ]\,.$$

جمع رده‌ها شرکت‌پذیر است، زیرا جمع pـچرخه‌ها شرکت‌پذیر است. این مطالب نشان می‌دهند که مجموعهٔ رده‌های مانستگی از بعد p یک گروه آبلی جمعی است. این گروه را با $H_p(K)$نمایش می‌دهند و گروه مانستگی pام K می‌نامند. از نحوهٔ ساختن این گروه نتیجه می‌شود که $H_p(K)$ گروه خارج‌قسمتی $Z_p(K)/B_p(K)$ است، یعنی

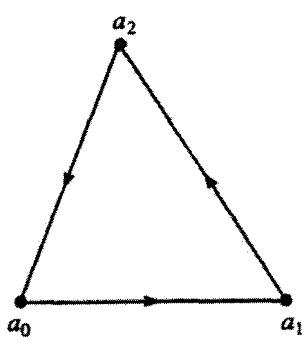
$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)\,.$$

مثال ۴.۱۱ مجتمع ۲بعدی متعارف $K(s_۲)$ را در نظر بگیرید که در آن $s_۲ = (a_\circ, a_۱, a_۲)$ و سادکهای $s_۲$ به‌صورتی که از نمایش آنها در زیر برمی‌آید جهت‌دهی شده‌اند

$$(a_\circ, a_۱, a_۲), (a_\circ, a_۱), (a_۱, a_۲), (a_۲, a_\circ), a_\circ, a_۱, a_۲$$

(شکل ۷.۱۱ را ببینید). به‌ازای $p > ۲$، $C_p(K(s_۲)) = \circ$ و $\partial_p = \circ$، و لذا به‌ازای $p > ۲$، $H_p(K(s_۲)) = \circ$. اما $C_۲(K(s_۲))$ توسط عضو $(a_\circ, a_۱, a_۲)$ تولید می‌شود و هر عضو $C_۲(K(s_۲))$ به‌صورت $m(a_\circ, a_۱, a_۲)$ است که در آن $m \in \mathbb{Z}$.

به‌ازای هر عضو $m(a_\circ, a_۱, a_۲)$ از $C_۲(K(s_۲))$ داریم



شکل ۷.۱۱

$$\partial_2(m(a_0, a_1, a_2)) = m\partial_2(a_0, a_1, a_2) = m[(a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)]\,.$$

در نتیجه

$$\ker\partial_2 = Z_2(K(s_2)) = 0$$

و

$$\text{نگارهٔ}\ \partial_2 = B_1(K(s_2)) = \{m[a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)] : m \in \mathbb{Z}\}$$

بنابراین نگارهٔ ∂_2 با $\mathbb{Z}$ یکریخت است. توجه کنید که

$$\partial_1[(a_0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, a_0)] = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_0 - a_2) = 0\,.$$

چون $\partial_3 = 0$، $\text{نگارهٔ}\ \partial_3 = B_2(K(s_2)) = 0$ و لذا گروه

$$H_2(K(s_2)) = Z_2(K(s_2))/B_2(K(s_2))$$

فقط شامل عنصر همانی است.

۸. مجتمع همبند

فرض می‌کنیم K مجتمع باشد. در این‌صورت، K را همبند نامند هرگاه اجتماع دو زیرمجتمع ناتهی که هیچ سادک مشترکی ندارند، نباشد. می‌توان نشان داد که K همبند است اگر و فقط اگر چندوجهی $|K|$ همبند باشد. برای اثبات اینکه $H_0(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکریخت است، به قضیهٔ بعدی نیاز خواهیم داشت.

قضیهٔ ۴.۱۱ شرط لازم وکافی برای اینکه مجتمع K همبند باشد آن است که به‌ازای هر دو رأسی از K مانند a و b، دنباله‌ای از رئوس مانند

$$a_1(=a), \ldots, a_2, a_r(=b)$$

چنان موجود باشد که a_i و a_{i+1} رئوس ۱ـسادکی از K باشند.

اثبات. فرض می‌کنیم K همبند باشد و a رأس دلخواهی از K باشد. همچنین فرض می‌کنیم K_0 مجموعهٔ تمام رئوسی از K باشد که بتوان آنها را با دنباله‌هایی به شکل مذکور به a وصل

کرد. در این‌صورت، مجموعهٔ تمام سادکهایی از K که رئوسشان در $K_\circ$ باشد، زیرمجتمعی مانند L تشکیل می‌دهد.

فرض می‌کنیم M زیرمجتمع دیگری باشد که هیچ سادکی در L نداشته باشد (اگر چنین مجتمعی موجود باشد). در این‌صورت M، L را قطع نمی‌کند. در نتیجه M باید تهی باشد زیرا K همبند است. بنابراین هر دو رأسی از K را می‌توان با دنباله‌ای به شکل مذکور به‌هم وصل کرد.

بالعکس، فرض می‌کنیم هر دو رأسی از K را بتوان با دنباله‌ای، به شکلی که در صورت قضیه بیان شد، به‌هم وصل کرد. فرض می‌کنیم که K در صورت امکان همبند نباشد. در این‌صورت، K اجتماع دو زیرمجتمع ناتهی مجزا مانند L و M است. فرض می‌کنیم a رأسی از L و b رأسی از M باشد و دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$، a_r دنبالهٔ وصل‌کنندهٔ a و b باشد. فرض می‌کنیم a_i اولین عضوی از این دنباله باشد که متعلق به M است. در این‌صورت $i > ۱$ و $a_{i-۱}$ در L است. بنابراین $(a_{i-۱}, a_i)$ سادکی از K نیست. این تناقض نشان می‌دهد که K همبند است.

قضیهٔ ۵.۱۱ فرض می‌کنیم K مجتمعی همبند باشد. در این‌صورت، $H_\circ(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکریخت است.

اثبات. فرض می‌کنیم a و b دو رأس از رئوس K باشند. بنابه تعریف، دنباله‌ای مانند

$$a_۱(a = p), \ldots, a_۲, a_{r-۱}, a_r(= b)$$

از رئوس K چنان موجود است که a_i و $a_{i+۱}$ رئوس ۱ـسادکی از K باشند. ۱ـسادک $s_۱^i = (a_{i+۱}, a_i)$ را در نظر بگیرید، در این‌صورت

$$\partial_۱ s_۱^i = a_i - a_{i+۱}\,.$$

بنابراین

$$\partial_۱ \sum_{i=۱}^{r-۱} u s_۱^i = ua - ub$$

که در آن u می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. این رابطه نشان می‌دهد که ua با ub مانسته است و در نتیجه، اگر $\sum u_i s_\circ^i$، ۰ـچرخهٔ دلخواهی از K باشد، با ۰ـچرخهٔ $(\sum u_i)a$ مانسته است. لذا هر ۰ـچرخه‌ای از K، به‌ازای عدد صحیح uای، با ua مانسته است. شایان توجه است که، به‌ازای دو عدد صحیح u و v، دو ۰ـچرخهٔ مجزای ua و va مانسته نیستند. زیرا اگر مانسته باشند، $u - v$، ۰ـمرز خواهد بود که ممکن نیست زیرا $u \neq v$. بنابراین، تناظری یک‌به‌یک بین

رده‌های مانستگی ۰ـچرخه‌ها و مجموعهٔ اعداد صحیح وجود دارد. در این تناظر، اگر u و v با دو ردهٔ مانستگی متناظر باشند، آنگاه واضح است که $u+v$ با مجموع آن دو رده متناظر خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $H_{\circ}(K)$ با گروه جمعی اعداد صحیح یکریخت است، و لذا قضیه به اثبات می‌رسد.

تمرین

۱. فرض کنید $s_{\circ}=(a_{\circ})$. به‌ازای $p>\circ$، گروه مانستگی $H_p(K(s_{\circ}))$ را مشخص کنید.

۲. فرض کنید $s_{۲}$ ۲ـسادک باشد. نشان دهید $H_{\circ}(K(s_{۲}))$ با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت یکریخت است. به‌ازای $p>\circ$، گروه مانستگی $H_p(K(s_{۲}))$ را مشخص کنید.

۳. فرض‌کنید $s_{۲}$ ۲ـسادک، و $K_{۱}(s_{۲})$ ۱ـاستخوان‌بندی $K(s_{۲})$ باشد. نشان دهید $H_{\circ}(K_{۱}(s_{۲}))$ با $H_{۱}(K_{۱}(s_{۲}))$ و هر یک از این دو با مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت یکریخت است. به‌ازای $p>۱$، گروه مانستگی $H_p(K_{۱}(s_{۲}))$ را مشخص کنید.

۴. تمام گروههای مانستگی طوق

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}:\frac{۱}{۲}\leq(x^{۲}+y^{۲})^{۱/۲}\leq ۱\}$$

را بیابید.

۵. نشان دهید به‌ازای $p=۱,۲,۳,\ldots$، گروه خارج‌قسمتی $C_p(K)/Z_p(K)$ با $B_{p-۱}(K)$ یکریخت است.

۱۲

مانستگی تکین

در این فصل فقط خلاصه‌ای از ایده‌های مبحث مانستگی تکین را ارائه می‌کنیم.

۱. تعاریف

nـسادک متعارف Δ_n زیرفضای

$$\Delta_n = \{x = (x_۰, x_۱, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+۱} : \sum_{i=۰}^{n} x_i = ۱, x_i \geq ۰, i = ۰, ۱, \dots, n\}$$

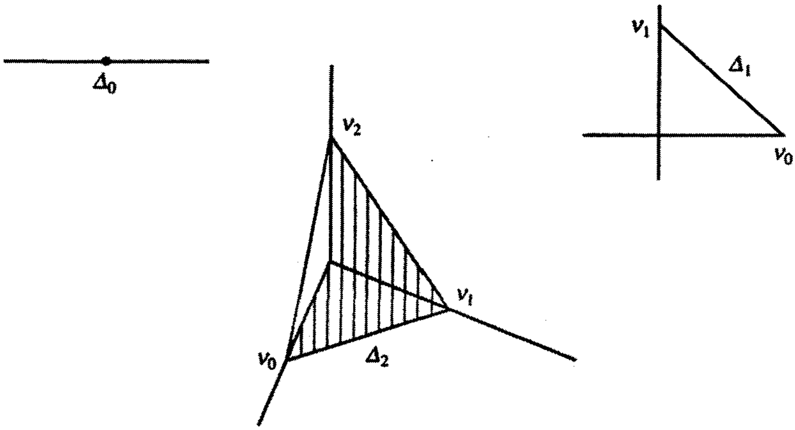
از $\mathbb{R}^{n+۱}$ است. رئوس Δ_n نقاط

$$\nu_۰ = (۱, ۰, \dots, ۰), \nu_۱ = (۰, ۱, ۰, \dots, ۰), \dots, \nu_n = (۰, \dots, ۰, ۱) .$$

هستند.

مثال ۱.۱۲ $\Delta_۰$ تک‌نقطه، $\Delta_۱$ بازه و $\Delta_۲$ ناحیهٔ مثلثی است. این سادکها را در شکل ۱.۱۲ نشان داده‌ایم.

حال nـسادک تکین فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.



شکل ۱.۱۲

تعریف ۱.۱۲ فرض می‌کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. در این‌صورت، nـسادک تکین X نگاشتی پیوسته مانند $\phi : \Delta_n \to X$ است.

مثال ۲.۱۲ ۰ـسادک تکین نقطه‌ای در X است. ۱ـسادک تکین اساساً مسیری در X است. زیرا فرض می‌کنیم ϕ، ۱ـسادک تکین باشد، نگاشت f را با ضابطهٔ $f(t) = \phi(۱ - t, t)$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، نگاشت $f : C \to X$ مسیری از $\phi(\nu_۰)$ و $\phi(\nu_۱)$ است. بالعکس، اگر مسیری مانند $f : C \to X$ مفروض باشد، آنگاه با تعریف $\phi(x_۰, x_۱) = f(x_۱)$، نگاشت $\phi : \Delta_۱ \to X$، ۱ـسادک تکین است.

تعریف ۲.۱۲ فرض می‌کنیم J مجموعه‌ای اندیسگذار و $\{\phi_j : j \in J\}$ گردایهٔ تمام nـسادکهای تکین X باشد. در این‌صورت، عبارتی به شکل

$$\sum_{j \in J} n_j \phi_j$$

که در آن $n_j \in \mathbb{Z}$ و فقط تعدادی متناهی از n_jها مخالف صفرند، nـزنجیر تکین X نامیده می‌شود.

مجموعهٔ تمام nـزنجیرهای تکین X با $S_n(X)$ نمایش داده می‌شود.

قضیهٔ ۱.۱۲ $S_n(X)$ گروهی آبلی است.

اثبات. جمع دو عضو از $S_n(X)$ را به‌صورت

$$\sum n_j\phi_j + \sum m_j\phi_j = \sum(n_j+m_j)\phi_j$$

تعریف می‌کنیم. عضو صفر $S_n(X)$، $\sum \circ\phi_j$ است وعضو معکوس $\sum n_j\phi_j$، $\sum(-n_j)\phi_j$ است. اصول موضوع گروه برقرارند و واضح است که این گروه آبلی است.

۲. عملگر مرزی

فرض می‌کنیم ϕ، nـسادکی تکین باشد. به‌ازای $i=\circ,۱,\dots,n$، $(n-۱)$ـسادک تکین $\partial_i\phi$ را به‌صورت

$$\partial_i\phi(x_\circ,x_۱,\dots,x_{n-۱}) = \phi(x_\circ,x_۱,\dots,x_{i-۱},\circ,x_i,\dots,x_{n-۱})$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین، $\partial_i\phi$ یک همریختی ازگروه $S_n(X)$ به گروه $S_{n-۱}(X)$ با ضابطهٔ

$$\sum n_j\phi_j \longrightarrow \sum n_j\partial_i\phi_j$$

است. حال عملگر مرزی $\partial : S_n(X)\to S_{n-۱}(X)$ را با ضابطهٔ

$$\partial = \partial_\circ - \partial_۱ + \partial_۲ - \cdots + (-۱)^n\partial_n = \sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i\partial_i$$

تعریف می‌کنیم. قضیهٔ بعدی را فقط با استفاده از تعریف ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۱۲ $\partial\partial=\circ$.

اثبات. فرض می‌کنیم ϕ، nـسادکی تکین باشد. نشان می‌دهیم $\partial\partial\phi=\circ$، که در آن $\circ$ نمایشگر همانی است. داریم

$$\partial\partial\phi = \partial\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i\partial_i\phi = \sum_{j=\circ}^{n-۱}\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi\,.$$

اگر $j\le i$، ابتدا نشان می‌دهیم $\partial_j\partial_i = \partial_i\partial_{j+۱}$. بدین‌منظور، متذکر می‌شویم که

$$\begin{aligned}(\partial_j\partial_i\phi)(x_\circ,\dots,x_{n-۲}) &= (\partial_j(\partial_i\phi))(x_\circ,\dots,x_{n-۲})\\ &= (\partial_i\phi)(x_\circ,\dots,x_{j-۱},\circ,x_j,\dots,x_{n-۲})\\ &= \phi(x_\circ,\dots,x_{i-۱},\circ,x_i,\dots x_{j-۱},\circ,x_j\dots,x_{n-۲})\\ &= (\partial_i\partial_{j+۱}\phi)(x_\circ,\dots,x_{n-۲})\end{aligned}$$

و لذا $\partial_j\partial_i = \partial_i\partial_{j+1}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\partial\partial\phi &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_{j+1}\phi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_{i+1}\phi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j-1}\partial_j\partial_i\phi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

در نتیجه قضیه به اثبات می‌رسد.

۳. چرخه و مرز

تعریف ۳.۱۲ nـزنجیری تکین مانند $\alpha \in S_n(X)$ را nـچرخه نامند هرگاه $\partial\alpha = 0$. مجموعهٔ تمام nـچرخه‌های X را با $Z_n(X)$ نمایش می‌دهند. لذا

$$\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X) \quad \text{که}\ ، Z_n(X) = \ker\partial\,.$$

شایان توجه است که $Z_0(X) = S_0(X)$، یعنی تمام ۰ـزنجیرهای تکین ۰ـچرخه هستند.

تعریف ۴.۱۲ nـزنجیر تکین $\beta \in S_n(X)$ را nـمرز می‌نامند هرگاه به‌ازای زنجیری مانند $\gamma \in S_{n+1}(X)$، $\beta = \partial\gamma$. مجموعهٔ تمام nـمرزهای X را با $B_n(X)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$\partial : S_{n+1}(X) \longrightarrow S_n(X) \quad \text{که}\ ، B_n(X) = \partial\ \text{نگارهٔ}\,.$$

از قضیهٔ ۲.۱۲ نتیجه می‌شود که هر nـمرز nـچرخه است. از قضیهٔ C (فصل ۱۱) و تعاریف فوق نتیجه می‌گیریم که $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ زیرگروههایی از X هستند و علاوه‌بر این، از قضیهٔ ۲.۱۲ نتیجه می‌گیریم که $B_n(X)$ زیرگروه $Z_n(X)$ است.

۴. گروههای مانستگی

تعریف ۵.۱۲ گروه مانستگی nام X را گروه خارج‌قسمتی $Z_n(X)/B_n(X)$ تعریف می‌کنند و با $H_n(X)$ نمایش می‌دهند. بنابراین

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)\,.$$

اگر $\alpha, \beta \in Z_n(X)$، آنگاه می‌گوییم α با β هم‌ارز است اگر و فقط اگر $\alpha - \beta \in B_n(X)$، و در این‌صورت می‌نویسیم $\alpha \sim \beta$. به سادگی نتیجه می‌شود که $\sim$، یک رابطهٔ هم‌ارزی است و لذا اعضای $H_n(X)$، رده‌های هم‌ارزی چرخه‌ها تحت این رابطهٔ هم‌ارزی هستند. اگر $\alpha \sim \beta$، می‌گویند α و β مانسته‌اند.

حال گروههای مانستگی را در حالتهای ساده‌ای می‌یابیم.

قضیهٔ ۳.۱۲ اگر X فضایی تک‌نقطه‌ای باشد، آنگاه $H_\circ(X)$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است و به‌ازای هر $n > \circ$، $H_n(X) = \circ$.

اثبات. اگر $n \geq \circ$، nـسادک تکین منحصر به‌فرد

$$\phi^{(n)} : \Delta_n \to X$$

وجود دارد. بنابراین

$$S_n(X) = \mathbb{Z} = \{k\phi^{(n)} : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

چون به‌ازای $n > \circ$، $\partial_i \phi^{(n)} = \phi^{(n-\text{۱})}$، پس

$$\partial\phi^{(n)} = \sum_{i=\circ}^{n} (-\text{۱})^i \partial_i \phi^{(n)} = \sum_{i=\circ}^{n} (-\text{۱})^i \phi^{(n-\text{۱})}$$

$$= \begin{cases} \phi^{(n-\text{۱})} & \text{اگر } n > \circ \text{ و } n \text{ زوج باشد} \\ \circ & \text{اگر } n > \circ \text{ و } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

و $\partial\phi^{(\circ)} = \circ$. از این مطالب به‌دست می‌آوریم

$$Z_n(X)=\begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد یا } n=\circ \\ \circ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد و } n>\circ \end{cases}$$

$$B_n(X)=\begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \circ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

از این روابط نتیجه می‌گیریم که

$$H_n(X)=\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{اگر } n=\circ \\ \circ & \text{اگر } n>\circ \end{cases}$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ ۴.۱۲ اگر X فضایی مسیری‌همبند و ناتهی باشد، آنگاه $H_\circ(X)$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

اثبات. هر ∘ـچرخه، یعنی ∘ـزنجیر تکین به شکل

$$\sum n_x\, x$$

است که در آن جمع روی عناصر $x\in X$ محاسبه می‌شود و n_xها اعدادی صحیح‌اند و غیر از تعداد متناهی از آنها، همگی صفرند. نگاشت

$$\psi : H_\circ(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

را با ضابطهٔ $\psi(\sum n_x\, x)=\sum n_x$ تعریف می‌کنیم.

نشان می‌دهیم که ψ خوش‌تعریف است. فرض می‌کنیم $\sum m_x\, x$، ∘ـچرخه‌ای باشد که با $\sum n_x\, x$ مانسته است، لذا

$$\sum n_x\, x=\sum m_x\, x+\partial\alpha$$

که در آن α، ۱ـزنجیری تکین است و در نتیجه α به شکل

$$\alpha=\sum_{j\in J} k_j\phi_j$$

است که در آن $k_j\in\mathbb{Z}$ و ϕ_jها ۱ـسادکهای تکین هستند. واضح است که

$$\partial\alpha=\sum_{j\in J} k_j\partial\phi_j=\sum_{j\in J} k_j(\phi_j(v_1)-\phi_j(v_\circ))\,.$$

بنابراین

$$\psi\left(\sum n_x\,x\right) = \psi\left(\sum m_x\,x + \partial\alpha\right)$$
$$= \psi\left(\sum m_x\,x + \sum k_j\phi_j(v_1) - \sum k_j\phi_j(v_0)\right)$$
$$= \sum m_x = \psi\left(\sum m_x\,x\right).$$

این رابطه نشان می‌دهد که ψ خوش‌تعریف است. همریختی بودن ψ به سادگی نتیجه می‌شود. همچنین، ψ پوشاست زیرا به‌ازای هر نقطهٔ $x \in X$، $n = \psi(nx)$. بالاخره، نشان می‌دهیم که ψ یک‌به‌یک است. اگر $\sum n_x\,x$، ۰ـچرخه باشد، آنگاه

$$\sum n_x\,x = \left(\sum n_x\right)x_0 + \sum_{x\in X}(n_x\,x - n_x\,x_0)$$
$$= \left(\sum n_x\right)x_0 + \partial\left(\sum_{x\in X} n_x\phi_x\right)$$

که در آن ϕ_x، ۱ـسادکی تکین است، یعنی مسیری از x به x_0 است. بنابراین $\sum n_x\,x$ و $(\sum n_x)x_0$ مانسته هستند و در نتیجه اگر $\psi(\sum n_x\,x) = 0$، آنگاه $\sum n_x = 0$. لذا ψ یک‌به‌یک است. بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

۵. همریختی القایی

فرض می‌کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد. $H_n(X)$ و $H_n(Y)$ را در نظر می‌گیریم و نگاشت $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$را با ضابطهٔ

$$f_*\left(\sum_{j\in J} n_j\phi_j\right) = \sum_{j\in J} n_j f\phi_j$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\sum_{j\in J} n_j\phi_j$، nـچرخه‌ای از X است. در این‌صورت واضح است که f_* یک همریختی بین گروههای مانستگی nـام است

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y).$$

این نگاشت را همریختی القایی می‌نامند.

اگر نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته باشد، نگاشت $f_{\#} : S_n(X) \to S_n(Y)$ را با ضابطهٔ

$$f_{\#}\left(\sum_{j\in J} n_j\phi_j\right) = \sum_{j\in J} n_j f\phi_j$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت، $f_{\#}$ همریختی گروههاست.

قضیهٔ ۵.۱۲ $\partial f_{\#} = f_{\#}\partial$.

اثبات. اگر ϕ، $(n-1)$ـسادک باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}((\partial_i f_{\#})(\phi))(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \partial_i(f\phi)(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})\\ &= (f\phi)(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})\\ &= f((\partial_i\phi)(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})),\\ &= (f\partial_i\phi)(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),\\ &= ((f_{\#}\partial_i)(\phi))(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})\end{aligned}$$

بنابراین قضیه به اثبات می‌رسد.

فرع ۱.۱۲ $f_{\#}$ چرخه را به چرخه و مرز را به مرز می‌نگارد.

قضیهٔ ۶.۱۲ فرض می‌کنیم $f, g : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. اگر f و g هوموتوپیک باشند آنگاه $f_* = g_*$، که در آن نگاشتهای

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), g_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \qquad n \geq 0$$

همریختیهای القایی هستند.

اثبات. به‌ازای $t \in C$، نگاشت $\lambda_t : X \to X \times C$ را با ضابطهٔ $\lambda_t(x) = (x, t)$ تعریف می‌کنیم. اگر $F : X \times C \to Y$ یک هوموتوپی از f به g باشد، آنگاه

$$F(x, 0) = f(x), \qquad F(x, 1) = g(x)$$

این روابط را می‌توان با استفاده از λ_t به‌صورت

$$F\lambda_0 = f, \qquad F\lambda_1 = g$$

نوشت. متذکر می‌شویم که اگر $\lambda_{1*} = \lambda_{0*}$، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد (قضیهٔ ۴.۶ را ببینید) که

$$f_* = (F\lambda_0)* = F_*\lambda_{0*} = F_*\lambda_{1*} = (F\lambda_1)* = g_*$$

و لذا کافی است نشان دهیم

$$\lambda_{0*} = \lambda_{1*} : H_n(X) \longrightarrow H_n(X \times C)\,.$$

نشان خواهیم داد که به‌ازای همریختیهای

$$\lambda_{0\#}, \lambda_{1\#} : S_n(X) \longrightarrow S_n(X \times C)$$

یک همریختی (به نام عملگر منشور) مانند

$$P : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times C)$$

با این ویژگی وجود دارد که $\partial P + P\partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{0\#}$.

در این حالت، می‌گوییم همریختیهای $\lambda_{0\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هوموتوپیک زنجیری‌اند.

فرض می‌کنیم $\lambda_{0\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هوموتوپیک زنجیری باشند و α، nـچرخه‌ای از X باشد. در این‌صورت، به‌دست می‌آوریم

$$(\lambda_{1\#} - \lambda_{0\#})(\alpha) = (\partial P + P\partial)(\alpha) = \partial(P\alpha)$$

و این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda_{0\#}\alpha$ و $\lambda_{1\#}\alpha$ مانسته هستند، یعنی $\lambda_{0*} = \lambda_{1*}$. بنابراین برای اثبات قضیه، کافی است نشان دهیم λ_{1*} و λ_{0*} هوموتوپیک زنجیری هستند و بدین‌منظور باید عملگر منشور P را تعریف کنیم. فرض می‌کنیم $\phi : \Delta_n \to X$، nـسادک تکین، یعنی عضو $S_n(X)$ باشد. $S_{n+1}(X \times C)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم هر $P_i(\phi)$، $i = 0, 1, \ldots, n$، عضوی از $S_{n+1}(X \times C)$ با ضابطهٔ

$$P_i(\phi)(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$$

$$= \phi(x_0, x_1, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\right)$$

باشد، و عضو $P(\phi) \in S_{n+1}(X \times C)$ نگاشتی به‌صورت

$$P(\phi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i P_i(\phi)$$

باشد. می‌توانیم نشان دهیم نگاشت $P : S_n(X) \to S_{n+1}(X \times C)$، که به این صورت تعریف شد، همریختی است.

می‌توان $\partial P(\phi)$ را به شکل

$$\partial P(\phi) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial_j P(\phi) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j P_i(\phi)$$

نوشت. همچنین می‌توان $\partial_j P_i(\phi)$ را به شکل دیگری نوشت. اگر $i < j - 1$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\partial_j P_i(\phi)(x_0, \ldots, x_n) &= P_i(\phi)(x_0, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \phi(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{j-1}, 0, \ldots, x_n) \\
&\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\right) \\
&= \partial_{j-1}\phi(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) \\
&\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\right) \\
&= P_i \partial_{j-1}(\phi)(x_0, \ldots, x_n)\,.
\end{aligned}$$

اگر $j < i$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\partial_j P_i(\phi)(x_0, \ldots, x_n) &= P_i(\phi)(x_0, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, \ldots, x_n) \\
&= \phi(x_0, \ldots, x_{j-1}, 0 \ldots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, x_n) \\
&\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k\right) \\
&= \partial_j \phi(x_0, \ldots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\
&\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k\right) \\
&= P_{i-1} \partial_j(\phi)(x_0, \ldots, x_n)\,.
\end{aligned}$$

اگر $j = i$، آنگاه

$$\begin{aligned}\partial_j P_j(\phi)(x_\circ,\ldots,x_n) &= P_j(\phi)(x_\circ,\ldots,x_{j-۱},\circ,x_j,\ldots,x_n)\\ &= \phi(x_\circ,\ldots,x_n)\times\left(۱-\sum_{k=\circ}^{j-۱}x_k\right)\\ &= \partial_j P_{j-۱}(\phi)(x_\circ,\ldots,x_n)\,.\end{aligned}$$

حاصل مطالب فوق این است که

$$\begin{aligned}&\partial_j P_j = \partial_j P_{j-۱}\\ &\partial_j P_j = P_i \partial_{j-۱} \qquad i < j-۱\\ &\partial_j P_i = P_{i-۱}\partial_j \qquad i > j\,.\end{aligned}$$

حال ∂P را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\partial P &= \sum_{j=\circ}^{n+۱}\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^{i+j}\partial_j P_i\\ &= \partial_\circ P_\circ + \sum_{i=j=۱}^{n}\partial_j P_j + \sum_{i=j-۱=\circ}^{n}(-۱)^{i+j}\partial_j P_{j-۱} - \partial_{n+۱}P_n\\ &\quad + \sum_{i>j}(-۱)^{i+j}\partial_j P_i + \sum_{i<j-۱}(-۱)^{i+j}\partial_j P_i\,.\end{aligned}$$

با استفاده از روابط فوق، پس از محاسبات لازم، به‌دست می‌آوریم

$$\partial P = \partial_\circ P_\circ - \partial_{n+۱}P_n - P\partial\,.$$

لیکن داریم

$$\begin{aligned}\partial_\circ P_\circ(\phi)(x_\circ,\ldots,x_n) &= P_\circ(\phi)(\circ,x_\circ,\ldots,x_n)\\ &= \phi(x_\circ,\ldots,x_n)\times ۱\\ &= \lambda_{۱\#}(\phi)(x_\circ,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}P_n(\phi)(x_0,\dots,x_n) &= P_n(\phi)(x_0,\dots,x_n,0)\\ &= \phi(x_0,\dots,x_n)\times 0\\ &= \lambda_{0\#}(\phi)(x_0,\dots,x_n)\,.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\partial P + P\partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{0\#}\,.$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\lambda_{0\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هوموتوپیک زنجیری هستند و لذا اثبات قضیه به انجام می‌رسد.

۶. دنبالهٔ مایر-ویتوریس

اگر X فضای توپولوژیک باشد، فرض می‌کنیم $X = U_1 \cup U_2$، که در آن U_1 و U_2 زیرمجموعه‌های بازی از X هستند. فرض می‌کنیم نگاشتهای

$$\begin{aligned}&\phi_i : U_1\cap U_2 \longrightarrow U_i\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2)\\ &\psi_i : U_i \longrightarrow X\end{aligned}$$

نگاشتهای مشمولیت باشند. حال همریختیهای i و j را

$$\begin{aligned}&i : H_k(U_1\cap U_2) \longrightarrow H_k(U_1)\oplus H_k(U_2)\\ &j : H_k(U_1)\oplus H_k(U_2) \longrightarrow H_k(X)\end{aligned}$$

با ضابطهٔ

$$\begin{aligned}i(\alpha) &= (\phi_{1*}(\alpha), \phi_{2*}(\alpha))\\ j(\alpha_1,\alpha_2) &= \psi_{1*}(\alpha_1) - \psi_{2*}(\alpha_2)\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ بعدی را که به طرق مختلفی در نظریهٔ مانستگی کاربرد دارد، ثابت نخواهیم کرد؛ فقط یکی از کاربردهای آن را ارائه خواهیم کرد.

قضیهٔ ۷.۱۲ فرض می‌کنیم $X = U_1 \cup U_2$، که در آن U_1 و U_2 زیرمجموعه‌های بازی از X

هستند. می‌توان همریختیهای

$$\Delta : H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$$

را چنان یافت که در دنبالهٔ گروهها و همریختیهای زیر

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \xrightarrow{j}$$
$$\xrightarrow{j} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \cdots$$

هستهٔ هر همریختی برابر با نگارهٔ همریختی قبل از خود باشد.

همریختیهای Δی فوق را همریختیهای رابط و دنبالهٔ قضیهٔ ۷.۱۲ را دنبالهٔ مایر-ویتوریس[1] می‌نامند.

تعریف ۶.۱۲ دنباله‌ای از گروهها و همریختیها را که در آن هستهٔ هر همریختی برابر با نگارهٔ همریختی قبل از خود باشد دنبالهٔ کامل می‌نامند.

از قضیهٔ ۷.۱۲ نتیجه می‌شود که دنبالهٔ مایر-ویتوریس دنباله‌ای کامل است.

قضیهٔ ۸.۱۲ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

به‌علاوه اگر $T_n : S^n \to S^n$ نگاشت بازتابی

$$T_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

باشد، آنگاه نگاشت

$$T_{n*} : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$$

هر عنصری را بر حاصلضرب آن عنصر در -1 می‌نگارد.

اثبات. با استفاده از دنبالهٔ مایر-ویتوریس، قضیه را به استقرا ثابت می‌کنیم. اگر

$$U_1 = \left\{x \in S^n : x_n > -\frac{1}{2}\right\}, \qquad U_2 = \left\{x \in S^n : x_n < \frac{1}{2}\right\}$$

1. Mayer-Vietoris

آنگاه $U_۱$ و $U_۲$ انقباض‌پذیرند و $U_۱ \cap U_۲$ با $S^{n-۱}$ هوموتوپی‌هم‌ارز است. لذا

$$H_k(U_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = ۰ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

و $H_k(U_۱ \cap U_۲) = H_k(S^{n-۱})$.

قبل از شروع استقرا، متذکر می‌شویم که اگر $S^{n-۱}$ را به‌صورت $\{x \in S^n : x_n = ۰\}$ در نظر بگیریم، آنگاه $T_n \big| S^{n-۱} = T_{n-۱}$.

فرض می‌کنیم $n = ۱$. در این‌صورت به‌ازای $k = ۱$، دنبالهٔ مایر-ویتوریس به‌صورت زیر است

$$\cdots \longrightarrow ۰ \xrightarrow{j} H_۱(S^۱) \xrightarrow{\Delta} H_۰(S^۰) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \cdots$$

که با $i(x,y) = (x+y, x+y)$، به‌صورت زیر در می‌آید

$$\cdots \longrightarrow ۰ \xrightarrow{j} H_۱(S^۱) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \cdots .$$

چون $\ker(\Delta) = \operatorname{im}(j) = ۰$، Δ یک‌به‌یک است و به‌علاوه گروه

$$\operatorname{im}(\Delta) = \ker(i) = \{(x, -x) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$$

با $\mathbb{Z}$ یکریخت است. لذا $H_۱(S^۱) = \mathbb{Z}$.

چون $T_{۰*} = \Delta T_{۱*}$ و به‌وضوح $T_{۰*}(x,y) = (y,x)$، مشاهده می‌کنیم که $T_{۱*}$ هر عنصری را بر حاصلضرب آن عنصر در -۱ می‌نگارد. اگر $k > ۱$، دنبالهٔ مایر-ویتوریس به‌صورت زیر است

$$\cdots \longrightarrow ۰ \xrightarrow{i} H_k(S^۱) \xrightarrow{\Delta} H_{k-۱}(S^۰) \xrightarrow{j} ۰ \longrightarrow \cdots .$$

حال $\ker(\Delta) = \operatorname{im}(i)$ و لذا Δ یک‌به‌یک است و چون $\operatorname{im}(\Delta) = \ker(j)$، Δ پوشاست. در نتیجه Δ یکریختی است. بنابراین قضیه به‌ازای $n = ۱$ درست است.

حال فرض می‌کنیم $m > ۱$ و قضیه به‌ازای $n = m - ۱$ برقرار باشد. باید نشان دهیم که قضیه به‌ازای $n = m$ برقرار است.

اگر $k = ۱$، دنبالهٔ مایر-ویتوریس به‌صورت زیر است

$$\cdots \longrightarrow ۰ \xrightarrow{j} H_۱(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_۰(S^{m-۱}) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

که با دنبالهٔ

$$\cdots \longrightarrow \circ \xrightarrow{j} H_{1}(S^m) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

که در آن $i(a) = (a, a)$ معادل است. بنابراین $\ker(i) = \circ$ و در نتیجه $\operatorname{im}(\Delta) = \circ$ و لذا $H_{1}(S^m) = \circ$.

اگر $k > 1$، دنبالهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$\cdots \longrightarrow \circ \xrightarrow{j} H_k(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \circ .$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $H_k(S^m)$ با $H_{k-1}(S^{m-1})$ یکریخت است. اگر $k = m$، آنگاه با استفاده از رابطهٔ

$$T_{m-1*}\Delta = \Delta T_{m*}$$

می‌توانیم نشان دهیم که T_{m*} هر عنصر را بر حاصلضرب آن عنصر در -1 می‌نگارد. بنابراین درستی قضیه به استقرا نتیجه می‌شود.

تمرین

۱. اگر نگاشت $f : X \to Y$ هم‌ارزی هوموتوپی باشد، نشان دهید به‌ازای $n \geq \circ$ نگاشت

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

یکریختی است.

۲. فرض کنید A درون‌برد X، و $i : A \to X$ نگاشت مشمولیت باشد. نشان دهید نگاشت

$$i_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$$

تکریختی است.

۳. اگر نگاشت $g : X \to A$ درون‌بری باشد، که در آن A درون‌برد X است، نشان دهید

$$H_n(X) = \operatorname{im}(i_*) \oplus \ker(g_*)$$

(i_* نگاشت مذکور در تمرین ۲ است).

۴. نشان دهید $H_{1}(S^{1})$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۵. با استفاده از دنبالهٔ مایر-ویتوریس، گروه مانستگی $\mathbb{R}P^{2}$ را مشخص کنید.

۶. نشان دهید هیچ درون‌بری از D^n به روی S^{n-1} موجود نیست.

مراجع

1. V.K. Balachandran, Topological Algebras, Narosa Publishing House, New Delhi, 1999.
2. W. Fulton, Algebraic topology, Springer-Verlag 1995.
3. B. Gray, Homotopy theory, Academic Press, 1975.
4. M. Greenberg and J.R. Harper, Algebraic Topology: A first course, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1981.
5. J.G. Hocking and G.S. Young, Topology, Addison-Wesley Pub. Co., 1961.
6. C. Kosniowski, A first course in Algebraic Topology, 1979.
7. S. MacLane, Homology, Springer-Verlag, 1963.
8. G. McCarty, Topology, McGraw-Hill Book Co. 1967.
9. W.S. Massey, Algebraic Topology, Harcourt, Brace & World, Inc. 1967.
10. W.S. Massey, A basic course in algebraic topology, Springer-Verlag, 1991.
11. C.R.F. Maunder, Algebraic topology, Van Nostrand Reinhold Co., 1970.
12. J.P. May, Equivalent Homotopy and Cohomology theory, Amer. Math. Soc., 1996.
13. G.L. Naber, Topological methods in Euclidean spaces, Camb. Univ. Press, 1979.
14. E.M. Patterson, Topology, Oliver and Boyd Ltd., 2nd edition, 1959.
15. L.S. Pontryagin, Foundations of combinatorial topology, Graylock Press, 1952.
16. F.H. Spanier, Algebraic Topology, Tata McGraw-Hill Pub. Co. Ltd., 1977.
17. A.H. Wallace, Algebraic Topology, Pergamon Press, 1961.

واژه‌نامهٔ انگلیسی-فارسی

ascending sequence	دنبالهٔ صعودی
barycentric subdivision	افراز گرانیگاهی
base point	نقطهٔ پایه
	مت: نقطهٔ پایه‌ای
contractible	انقباض‌پذیر
covering projection	تصویرگر پوششی
cycle	چرخه
deformable	دگردیسی‌پذیر
deformation retract	درون‌برد دگردیسی
evenly	به‌طور هموار [در مورد پوشاندن]
factor group	گروه خارج‌قسمتی
fibration	تاربندی
finitely generated	متناهی‌مولد
forgetful functor	تابعگون نادیده‌گیر
fundamental group	گروه بنیادی
geometrically independent	هندسیْ‌مستقل
geometric p-simplex	p-سادک هندسی

geometric simplicial complex	مجتمع سادکی هندسی
incidence matrix	ماتریس تلازم
incidence number	عدد تلازم
incident	متلازم
inclusion map	نگاشت مشمولیت
lift (of a continuous map)	ترفیع (نگاشت پیوسته)
lifting → lift	
morphism	ریختار
null homotopic	هوموتوپیک پوچ
null path	مسیر پوچ
prism operator	عملگر منشور
product path	مسیر حاصلضرب
projection	تصویرگر
properly discontinuous	ناپیوستهٔ سره
quotient group → factor group	
quotient set	مجموعهٔ خارج‌قسمتی
quotient space	فضای خارج‌قسمتی
quotient topology	توپولوژی خارج‌قسمتی
simplicial vertex mapping	نگاشت رأسِ سادکی مت: نگاشت سادکْ‌رأسی
spanned	پدیدآمده
standard p-dimensional complex	مجتمع pـبعدی متعارف
standard p-simplex	pـسادک متعارف
strong deformation retract	درون‌برد دگردیسی قوی
trivial group	گروه بدیهی
unique path lifting	ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد

واژه‌نامهٔ فارسی-انگلیسی

barycentric subdivision	افراز گرانیگاهی
contractible	انقباض‌پذیر
evenly	به‌طور هموار [در مورد پوشاندن]
spanned	پدیدآمده
forgetful functor	تابعگون نادیده‌گیر
fibration	تاربندی
lift (of a continuous map) syn: lifting	ترفیع (نگاشت پیوسته)
unique path lifting	ترفیع مسیریِ منحصر به‌فرد
projetion	تصویرگر
covering projetion	تصویرگر پوششی
quotient topology	توپولوژی خارج‌قسمتی
cycle	چرخه
deformation retract	درون‌برد دگردیسی
strong deformation retract	درون‌برد دگردیسی قوی
deformable	دگردیسی‌پذیر
ascending sequence	دنبالهٔ صعودی
morphism	ریختار

standard p-simplex	pـسادک متعارف
geometric p-simplex	pـسادک هندسی
incidence number	عدم تلازم
prism operator	عملگر منشور
quotient space	فضای خارج‌قسمتی
trivial group	گروه بدیهی
fundamental group	گروه بنیادی
factor group syn: quotient group	گروه خارج‌قسمتی
incidence matrix	ماتریس تلازم
incident	متلازم
finitely generated	متناهی‌مولد
standard p-dimensional complex	مجتمع pـبعدی متعارف
geometric simplicial complex	مجتمع سادکی هندسی
quotient set	مجموعهٔ خارج‌قسمتی
null path	مسیر پوچ
product path	مسیر حاصلضرب
properly discontinuous	ناپیوستهٔ سره
base point	نقطهٔ پایه
	نقطهٔ پایه‌ای ← نقطهٔ پایه
simplicial vertex mapping	نگاشت رأس سادکی
	نگاشت سادک‌رأسی ← نگاشت رأس سادکی
inclusion map	نگاشت مسمولیت
geometrically independent	هندسی‌مستقل
null homotopic	هوموتوپیک پوچ

نمایه