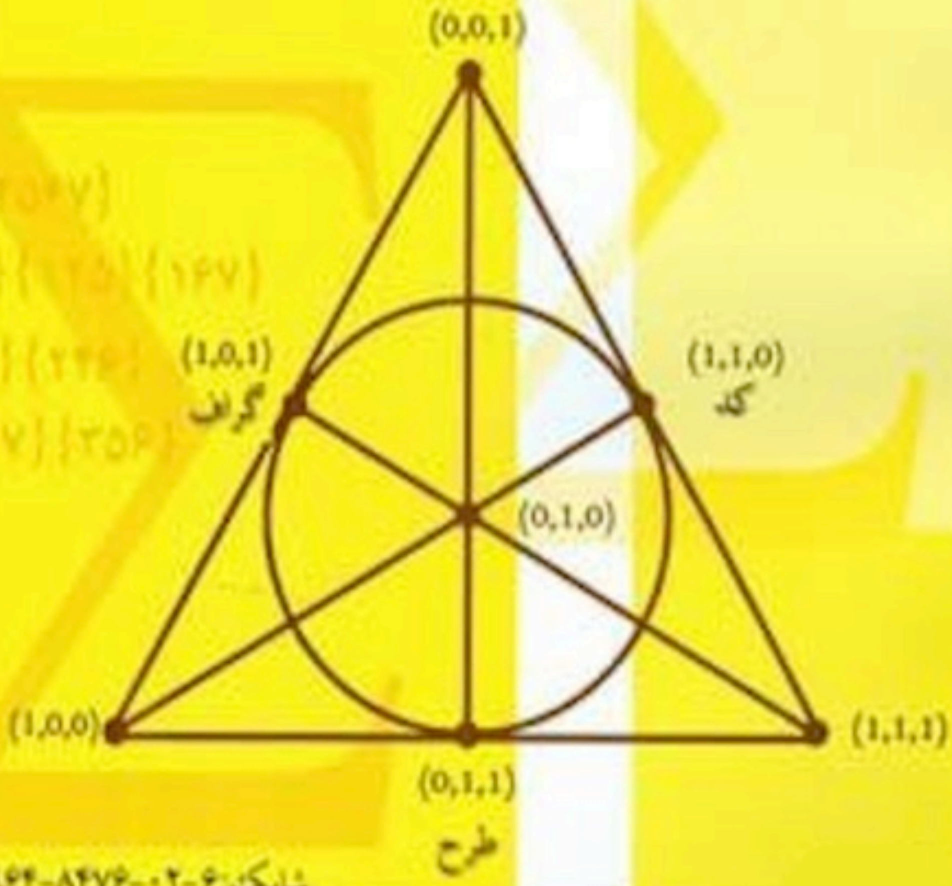
نخستین درس در ریاضیات گسسته

تألیف: ایان اندرسون
ترجمه: دکتر مرتضی اسماعیلی



شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۸۴۷۶-۰۲-۶

نخستین درس در ریاضیات گسسته

تألیف:

ایان اندرسن

دانشگاه waterloo

ترجمه :

دکتر مرتضی اسماعیلی

عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۳۸۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
مرکز نشر

شماره کتاب ۹۰ گروه علوم ۳۲

نخستین درس در ریاضیات گسسته

مؤلف	:	ایان اندرسن
مترجم	:	دکتر مرتضی اسماعیلی
ناشر	:	مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان
حروف‌چینی کامپیوتری	:	مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان
لیتوگرافی، چاپ و صحافی	:	مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان
چاپ اول	:	پائیز ۸۳
تیراژ	:	۲۰۰۰ جلد
شابک	:	۹۶۴-۸۴۷۶-۰۲-۰
قیمت	:	۲۰۰۰ تومان

اندرسن، ایان، ۱۹۴۲- م. Anderson, Ian
نخستین درس در ریاضیات گسسته/ ایان اندرسن؛ ترجمه مرتضی اسماعیلی.ــ اصفهان دانشگاه صنعتی اصفهان، مرکز نشر، ۱۳۸۳.
و ۲۱۸ ص. مصور.ــ (مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان؛ شماره کتاب ۹۰. گروه علوم؛ ۳۲)
ISBN 964-8476-02-0

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
کتابنامه : ص. ۲۱۳.
۱. ریاضیات. ۲. کامپیوتر— ریاضیات الف. اسماعیلی، مرتضی، ۱۳۳۶ــ ، مترجم. ب. دانشگاه صنعتی اصفهان. مرکز نشر. ج. عنوان.
۵۱۰ Q۸الف/ ۳۹/۲/ ۱۳۹Q

کتابخانه ملی ایران ۸۳-۱۸۲۹۵م

پیش گفتار مترجم

از جمله موضوعات اساسی مطرح به‌عنوان اصول ریاضیات گسسته می‌توان به نظریه گراف، شمارش و طرح‌های ترکیبی همچون مربع‌های لاتین اشاره کرد. در اکثر کتاب‌های درسی ریاضیات گسسته کم و بیش به این مباحث پرداخته می‌شود. در ایجاد زمینه و توان کافی برای تجزیه و تحلیل ساختارهای گسسته و امکان استفاده بهینه از آنها، ساختمان‌های هندسی و جبری متناهی، همچون صفحات تصویری و میدان‌های متناهی، نقش کلیدی دارند. صفحه هفت‌نقطه‌ای مثالی جالب در تبیین رابطه بین طرح‌های ترکیبی، گراف‌ها و کدها است.

زیبایی این کتاب در این نهفته است که مؤلف ضمن پرداختن به اجزای سه‌گانه شمارش، گراف و طرح‌های ترکیبی سعی کرده است یک مفهوم ترکیبیاتی را هنرمندانه به زبان‌های مختلف بیان نموده و حتی‌الامکان آن را در قالب یک الگوی هندسی بیان نماید. در واقع این وجه تمایز اساسی کتاب حاضر با دیگر کتاب‌های نوشته شده در ریاضیات گسسته می‌باشد.

در مجموع مطالب از نظر کمی و کیفی به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که به‌سادگی قابل ارائه در یک درس دوره کارشناسی بوده و زمینه ریاضی خوبی برای مطالعه بیشتر در ترکیبیات و کاربردهای آن را فراهم می‌سازند.

مرتضی اسماعیلی
عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان
اردیبهشت ۱۳۸۳

پیش گفتار مؤلف

این جلد از کتاب‌های درسی $SUMS$ مقدمه‌ای بر جنبه‌های متنوعی از ریاضیات گسسته است. این به‌عنوان یک کتاب درسی مقطع کارشناسی، احتمالاً یک درس ریاضی سال دوم، درنظر گرفته شده است. بعضی از کتاب‌های درسی در ریاضیات گسسته اصولاً برای دانشجویان علوم محاسبات نوشته شده‌اند، ولی این کتاب به‌منظور استفاده دانشجویانی تنظیم شده است که به‌دنبال یک درس ریاضیات گسسته در رشته ریاضی هستند. هم‌اکنون ریاضیات گسسته جایگاه خود را در مقطع کارشناسی در حد نسبتاً خوبی پیدا کرده است و قطعاً این جایگاه در هزاره سوم حفظ خواهد شد.

ریاضیات گسسته جنبه‌های مختلفی دارد. یک بخش اساسی آن شمارش است، که مطالعه شمردن انواع مختلف آرایه‌ها است. برای نمونه می‌توان به شمردن تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب شش عدد بخت‌آزمایی از میان اعداد ۱،...، ۴۹ یا تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف کامل، یا تعداد حالت‌های ممکن برای مرتب نمودن ۱۶ تیم به چهار گروه چهار تیمی اشاره نمود.

در مدل‌سازی موقعیت‌های متنوعی، همچون سیستم‌های جاده‌ای، ملکول‌های شیمیایی و جدول زمانی امتحانات می‌توان از نظریه گراف استفاده نمود. ضمن معرفی کلی گراف‌ها، اشاره‌ای خواهیم داشت به خواص مهمی که یک گراف می‌تواند داشته باشد.

سومین زمینه از ریاضیات گسسته که در این کتاب به آن پرداخته می‌شود موضوع آرایش‌ها یا ترکیب‌ها است. مربع‌های لاتین آرایش‌های خاصی از نمادها هستند؛ یک چنین آرایش‌هایی در ساخت طرح‌های تجربی، مربع‌های جادویی و طرح‌های بازی به‌کار می‌روند. این ما را به سمت مطالعه طرح‌های بلوکی سوق می‌دهد که، به‌جهت کاربرد آن‌ها درطراحی آزمایش‌ها، به‌وسیله آماردانان و ریاضی‌دانان زیاد مورد بحث قرار می‌گیرند. کتاب با ارائه مقدمه کوتاهی درباره ایده‌هایی که در پس کدهای تصحیح کننده خطا وجود دارند به پایان می‌رسد.

برای قادر بودن به درک محتوای کتاب، خواننده به مقدار زیادی از دانش فنی نیاز

ندارد. یک دانشی از روش اثبات با استقرا، یک آشنایی با نظریه ماتریس و محاسبات به‌هنگ n، آشنایی مختصری با سری‌های هندسی به‌همراه یک وضوح فکری معیّنی امکان مطالعه کتاب را فراهم می‌سازند. اغلب اوقات مسئله اصلی که خواننده با آن روبرو می‌شود عمق بحث نیست بلکه نگاه به مسئله از زاویه درست آن می‌باشد. واضح است که در این رابطه تمرین و تجربه موثر است.

هر فصل با تعداد قابل قبولی از تمرین به‌پایان می‌رسد. راهنمایی و جواب بعضی از این تمرین‌ها در انتهای کتاب ارائه شده است. بعضی از تمرین‌ها کاربرد مستقیم ایده‌های مطرح‌شده در طول فصل بوده و بعضی دیگر مسائل سخت‌تری هستند که به خودی خود جالب بوده و یا در فصل‌های دیگر کتاب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

امیدوارم که این کتاب فراهم‌کننده شالوده یک درس آغازین در ریاضیات گسسته باشد. واضح است که انتخاب مواد یک چنین درسی بستگی به علاقه مدرس دارد، ولی به‌نظر می‌رسد که مباحث مطرح‌شده در حدّی هستند که مدرس قادر به یک انتخاب مناسب باشد. اگرچه این کتاب به اشکال گوناگون متأثر از کتاب‌های زیادی است که در طول سال‌های گذشته ظاهر شده‌اند اما نهایتاً براساس علاقه و تجربه شخصی خود در تدریس ریاضیات گسسته در سطوح مختلف، از دبیرستان تا سال آخر دوره کارشناسی، تألیف شده است.

دانشگاه گلاسکو، ژوئن ۲۰۰۰

فهرست مندرجات

فصل ۱

شمارش و ضرایب دوجمله‌ای

در این فصل روش‌های اساسی شمارش، تابع فاکتوریل و ضرایب دوجمله‌ای را معرفی می‌کنیم. اینها نقش اساسی در رابطه با مطالب فصل‌های بعد دارند. با دو اصل اساسی مطلب را آغاز می‌کنیم.

۱.۱ اصول پایه

(a) اصل ضرب. فرض کنید کاری شامل k مرحله بوده و این‌که i امین مرحله به α_i روش متفاوت، مستقل از چگونگی انجام مراحل دیگر، قابل اجرا باشد، در این‌صورت کار مورد نظر به $\alpha_۱\alpha_۲\cdots\alpha_k$ روش متفاوت انجام‌پذیر است.

مثال ۱.۱

در رستورانی سه نوع پیش‌غذا، شش غذای اصلی و پنج نوع دسر پذیرایی می‌شود. از این‌رو در این رستوران میل کردن یک غذای سه‌مرحله‌ای به $۹۰ = ۵ \times ۶ \times ۳$ حالت مختلف امکان‌پذیر است.

(b) اصل جمع. اگر $A_۱$، ...، A_k مجموعه‌های دوبه‌دو جدا از هم باشند (یعنی اگر $i \neq j$ آنگاه $A_i \cap A_j = \emptyset$)، آنگاه تعداد اعضای اجتماع آنها برابر است با

$$|A_۱ \cup \cdots \cup A_k| = |A_۱| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=۱}^{k} |A_i|.$$

مثال ۲.۱

در مثال بالا، تعداد غذاهای دومرحله‌ای (شامل یک مرحله اصلی) را مشخص کنید.

جواب
دو نوع از غذای دومرحله‌ای باید مدّ نظر قرار گیرند. فرض کنید $A_۱$ معرف مجموعه غذاهای شامل یک پیش‌غذا و یک غذای اصلی بوده و $A_۲$ مجموعه غذاهای دومرحله‌ای شامل یک غذای اصلی و یک دسر باشد. در این‌صورت عدد مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} |A_۱ \cup A_۲| &= |A_۱| + |A_۲| && \text{(بنا به اصل جمع)} \\ &= ۳ \times ٦ + ٦ \times ۵ && \text{(بنا به اصل ضرب)} \\ &= ۴۸. \end{aligned}$$

۲.۱ فاکتوریل‌ها

به چند طریق می‌توان حروف a، b و c را در یک سطر قرار داد؟ این کار به شش طریق به‌شرح زیر امکان‌پذیر است

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

توجه کنید که سه انتخاب برای مکان اول، دو انتخاب برای موقعیت دوم، و بالاخره تنها یک انتخاب برای مکان سوم وجود دارد؛ پس بنابر اصل ضرب $٦ = ۱ \times ۲ \times ۳$ امکان برای مرتب کردن این حروف وجود دارد. در حالت کلی، اگر $n!$ (n فاکتوریل) را با

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\cdots ۲.۱$$

تعریف کنیم آنگاه قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۱
تعداد حالت‌های ممکن برای مرتب کردن n شی برابر $n!$ است.

مثال ۳.۱
چهار نفر به نام‌های A، B، C و D تشکیل یک کمیته می‌دهند؛ یک نفر رئیس، یک نفر منشی، یک خزانه‌دار و یک مسئول روابط عمومی. به چند طریق می‌توان این مسئولیت‌ها را به افراد اختصاص داد؟

جواب
فکر کنید که ابتدا رئیس، سپس منشی، و غیره انتخاب شوند. این کار به $۲۴ = ۴!$ حالت امکان‌پذیر است.

مقدار $n!$ خیلی سریع افزایش می‌یابد:

$$۵! = ۱۲۰, \quad ۱۰! = ۳٦۲۸۸۰۰, \quad ۵۰! \cong ۳.۰۴ \times ۱۰^{٦۴}.$$

این مثالی از آن چیزی است که انفجار ترکیباتی نامیده می‌شود: تعداد ترتیب‌های مختلف n شی با افزایش n بسیار بزرگ می‌شود. در پس مسئله مرد فروشنده دوره‌گرد این اندازه بسیار

بزرگ $n!$ قرار دارد؛ مسئله مرد فروشنده دوره‌گرد در فصل ۴ مطالعه خواهد شد. یک مرد فروشنده دوره‌گرد از خانه خارج شده و باید n شهر را ملاقات کرده و سپس به خانه باز گردد. با مفروض بودن فاصله بین شهرها، چگونه مرد می‌تواند کوتاه‌ترین مسیر ممکن را پیدا کند؟ ایده ابتدایی امتحان کردن تمامی $n!$ مسیرهای ممکن با افزایش n غیرعملی می‌باشد، و بنابراین رویکرد دیگری لازم است.

در بعضی از مسائل، تنها تعدادی از یک مجموعه از اشیا داده‌شده باید لیست شوند.

مثال ۴.۱

به‌عنوان مسابقه، در پشت یک پاکت حاوی حبوبات ده خاصیت یک نوع اتومبیل درج شده و از مصرف کنندگان خواسته شده است که از این خواص داده‌شده شش خاصیت با بیشترین اهمیت را به‌ترتیب اولویت مشخص کنند. تعداد جواب‌های ممکن را مشخص کنید.

جواب

برای انتخاب اول ده امکان وجود دارد، نه امکان برای مکان دوم، و نهایتاً پنج انتخاب برای مکان ششم. پس بنابر اصل ضرب تعداد جواب‌های ممکن برابر است با

$$۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = \frac{۱۰!}{۴!} = ۱۵۱۲۰۰.$$

در حالت کلی حکم زیر برقرار است.

قضیه ۲.۱

تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب r شی از یک مجموعه n عضوی، با درنظر گرفتن ترتیب ولی بدون تکرار، برابر است با

$$n(n-۱)\cdots(n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

مثال ۵.۱

همچون مثال ۳.۱، قرار است که یک کمیته چهارنفری انتخاب شود، با این تفاوت که این‌بار این کمیته از میان یک گروه بیست‌نفره انتخاب می‌شود. تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب رئیس، منشی، خزانه‌دار و مسئول روابط عمومی برابر است با

$$۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷ = \frac{۲۰!}{۱۶!} = ۱۱۶۲۸۰.$$

۳.۱ انتخاب‌ها

فرض کنید در مثال ۵.۱ به‌دنبال تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب چهار نفر به‌منظور تشکیل یک کمیته باشیم و مسئولیت‌های واگذارشده به افراد مهم نباشد. تعداد حالت‌های

ممکن برای انتخاب ۴ نفر از یک گروه ۲۰ نفری را که در آن ترتیب اهمیت ندارد با $\binom{۲۰}{۴}$ نمایش داده و انتخاب ۴ از ۲۰ می‌نامیم.

تعداد حالت‌هایی که چهار مسئولیت یادشده را می‌توان به یک گروه انتخابی ۴ نفره واگذار نمود برابر !۴ است، پس بنابر مثال ۵.۱ داریم

$$۴! \times \binom{۲۰}{۴} = \frac{۲۰!}{۱۶!}.$$

بنابراین

$$\binom{۲۰}{۴} = \frac{۲۰!}{۴!۱۶!} = ۴۸۴۵.$$

این بحث در حالت کلی برقرار است، یعنی $r! \times \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$، و از این‌رو فرمول کلی زیر را داریم.

قضیه ۳.۱

فرض کنید $\binom{n}{r}$ معرف تعداد انتخاب‌های غیرمرتب r از n، بدون تکرار، باشد. در این‌صورت

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (۱.۱)$$

چون بعضی از دانشجویان ایده تبدیل انتخاب‌های با ترتیب به انتخاب‌های بدون ترتیب را کمی گیج‌کننده می‌دانند، روش دیگری برای به‌دست آوردن فرمول (۱.۱) ارائه می‌دهیم.

فرض کنید می‌خواهیم از میان n بازیکن یک گروه r نفره انتخاب نموده و یکی از آنها را به‌عنوان سردسته درنظر بگیریم. این عمل را می‌توان با انتخاب تیم و سپس انتخاب سردسته انجام داد. انتخاب‌های ممکن برای تیم برابر $\binom{n}{r}$ بوده و سپس انتخاب سردسته به r حالت امکان‌پذیر است و بنابراین تعداد جواب‌های مسئله برابر $r\binom{n}{r}$ است. ولی ممکن است که ما ابتدا سردسته را انتخاب نموده، که این به n طریق امکان‌پذیر است، و سپس یک گروه $r-۱$ نفره را از میان $n-۱$ شخص باقیمانده انتخاب کنیم، که این به $\binom{n-۱}{r-۱}$ روش امکان‌پذیر است؛ پس این عمل به $n\binom{n-۱}{r-۱}$ حالت متفاوت می‌تواند انجام شود. بنابراین

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-۱}{r-۱},$$

و در نتیجه

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-۱}{r-۱}. \qquad (۲.۱)$$

اگر این بحث را برای اعداد $n-1$ و $r-1$ درنظر بگیریم آنگاه تساوی $\binom{n-1}{r-1} = \frac{n-1}{r-1}\binom{n-2}{r-2}$ را خواهیم داشت و در نتیجه

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}.\frac{n-1}{r-1}\binom{n-2}{r-2}.$$

با ادامه این روش رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}.\frac{n-1}{r-1}\cdots\frac{n-(r-2)}{2}.\binom{n-(r-1)}{1}.$$

چون مقدار $\binom{m}{1}$ برابر m است تساوی زیر حاصل می‌شود

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

توجه کنید که این در واقع مثال خوبی برای شمردن یک چیز به دو روش مختلف است.

مثال ۶.۱

در بخت‌آزمایی ملّی انگلستان، هر شرکت کننده شش عدد از ۱ تا ۴۹ را انتخاب می‌کند، که در آن ترتیب مطرح نیست. از این‌رو تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

$$\binom{49}{6} = \frac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6!} = 13983816.$$

پس احتمال برنده‌شدن تقریباً یک به ۱۴ میلیون است.

مثال ۷.۱

احتمال این‌که اعداد مربوط به بخت‌آزمایی هفته بعد از اعداد مربوط به این هفته متمایز باشند چقدر است؟

جواب

تعداد انتخاب‌های ممکن برای هفته آینده برابر $\binom{49}{6}$ است. تعداد جواب‌هایی که متمایز از اعداد مربوط به این هفته می‌باشند برابر $\binom{43}{6}$ است. چون تمامی $\binom{49}{6}$ انتخاب ممکن هم‌احتمال هستند عدد مطلوب برابر است با

$$\binom{43}{6}/\binom{49}{6} = 0.436\cdots.$$

مثال ۸.۱
تعداد دنباله‌های دوتایی به‌طول n برابر ۲^n است زیرا برای هر رقم دو انتخاب ۱ و ۰ وجود دارد. به‌عنوان مثال هشت دنباله دوتایی به‌طول سه عبارت هستند از

$$۰۰۰ \quad ۰۰۱ \quad ۰۱۰ \quad ۰۱۱ \quad ۱۰۰ \quad ۱۰۱ \quad ۱۱۰ \quad ۱۱۱.$$

(a) چند دنباله دوتایی به‌طول ۱۲ وجود دارد که دقیقاً حاوی شش ۰ است؟
(b) چند دنباله به‌طول ۱۲ وجود دارد که تعداد ۰های آن بیش از تعداد ۱ها است؟

جواب

(a) از ۱۲ رقم یک دنباله، شش موقعیت آن به ۱ها اختصاص دارد. تعداد $۹۲۴ = \binom{۱۲}{۶}$ انتخاب برای این شش موقعیت وجود دارد.

(b) تعداد $۳۱۷۲ = ۹۲۴ - ۲^{۱۲}$ دنباله وجود دارد که در آنها تعداد ۱ها و تعداد ۰ها برابر نیستند. از این تعداد در نصف آنها تعداد ۰ها بیشتر از تعداد ۱ها است.

این بخش را با دو خاصیت ساده اعداد $\binom{n}{r}$ به‌پایان می‌بریم که از این واقعیت نتیجه می‌شوند که عدد $\binom{n}{r}$ تعداد انتخاب‌های r از n است. از حالا به بعد از قراردادهای $۱ = !۰$ و $۱ = \binom{n}{۰}$، $n \geq ۰$، استفاده می‌کنیم.

قضیه ۴.۱

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \qquad ۰ \leq r \leq n; \tag{i}$$

$$\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-۱}, \qquad ۰ < r \leq n. \tag{ii}$$

اثبات

(i) این حکم به‌سادگی از (۱.۱) نتیجه می‌شود؛ معادلاً می‌توان این رابطه را این‌گونه اثبات کرد که انتخاب r از n برابر است با انتخاب $n - r$ عضوی که نباید انتخاب شوند.

(ii) یک انتخاب r تایی از n شی $x_۱, \ldots, x_{n+۱}$ ممکن است حاوی $x_{n+۱}$ باشد و ممکن است که حاوی آن نباشد. اگر r شی انتخاب‌شده حاوی $x_{n+۱}$ نباشد آنگاه تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با $\binom{n}{r}$، یعنی تعداد حالات ممکن برای انتخاب r شی از n شی $x_۱, \ldots, x_n$. اگر r شی انتخاب‌شده حاوی $x_{n+۱}$ باشد آنگاه $r - ۱$ شی باید از بین $x_۱, \ldots, x_n$ انتخاب شوند که این برابر $\binom{n}{r-۱}$ است. اکنون حکم از اصل جمع نتیجه می‌شود.

برای اثبات این حکم از فرمول (۱.۱) نیز می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!r}{r!(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!}{r!(n-r+1)!}\{n-r+1+r\}\\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}.\blacksquare\end{aligned}$$

۴.۱ ضرایب دوجمله‌ای و مثلث پاسکال

اعداد $\binom{n}{r}$ به ضرایب دوجمله‌ای معروف هستند. علّت این موضوع را در این بخش متوجه خواهیم شد. ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned}(1+y)^0 &= 1\\ (1+y)^1 &= 1+y\\ (1+y)^2 &= 1+2y+y^2\\ (1+y)^3 &= 1+3y+3y^2+y^3\\ (1+y)^4 &= 1+4y+6y^2+4y^3+y^4\\ &\vdots\end{aligned}$$

ضرایب :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\end{array}$$

به آرایش مثلثی ضرایب که به مثلث پاسکال معروف است توجه کنید. هر سطر متشکل از اعداد انتخاب می‌باشد؛ به‌عنوان مثال پایین‌ترین سطر متشکل است از

$$\binom{4}{0}=1,\quad \binom{4}{1}=4,\quad \binom{4}{2}=6,\quad \binom{4}{3}=4,\quad \binom{4}{4}=1.$$

پاسکال (۱۶۶۲—۱۶۲۳) قطعاً این اعداد را مطالعه کرده و از آنها در کارهای تحقیقاتی خود در زمینه احتمال استفاده کرده است، ولی ریاضی‌دانان چینی از خیلی پیش‌تر این مثلث را می‌شناختند.

قضیه ۵.۱ (قضیّه دوجمله‌ای)

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}y^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r.$$

اثبات

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

پس ضریب جمله $x^{n-r}y^r$ برابر است با تعداد حالت‌هایی که این جمله در هنگام ضرب این n پرانتز حاصل می‌شود. هر جمله از ضرب یک جمله از هر پرانتز نتیجه می‌شود، از این‌رو جمله $x^{n-r}y^r$ به تعداد دفعاتی که بتوان از r پرانتز y، معادلاً از $n-r$ پرانتز باقیمانده x، را انتخاب کرد ظاهر می‌شود. ولی این دقیقاً برابر انتخاب r از n است و بنابراین ضریب $x^{n-r}y^r$ برابر $\binom{n}{r}$ است.■

نتیجه ۱.۱

$$(1+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r.$$

مثال ۹.۱

$$1 + \binom{10}{1}2 + \binom{10}{2}2^2 + \cdots + \binom{10}{10}2^{10} = (1+2)^{10} = 3^{10}.$$

مثلث پاسکال

سطر ۰ ← ۱

سطر ۱ ← ۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

سطر ۷ ← ۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

درایه‌های سطر n ام، $n \geq 0$، ضرایب دوجمله‌ای $\binom{n}{r}$، $0 \leq r \leq n$، می‌باشند. دو خاصیت بیان‌شده در قضیه ۴.۱ به‌وسیله این مثلث نمایش داده می‌شوند: خاصیت (i) به‌وسیله تقارن

معکوس هر سطر، یعنی تطابق هر سطر با معکوس آن ، بیان شده و خاصیت (ii) با این واقعیت که هر درایه برابر مجموع دو درایه بالای خود در سطر قبل می‌باشد، مثلاً ۱۵ + ٦ = ۲۱، بیان می‌شود. همچنین توجه کنید که مجموع درایه‌های هر سطر توانی از ۲ است.

قضیه ٦.۱

$$\text{(i)} \qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n;$$

$$\text{(ii)} \qquad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

اثبات

(i) در نتیجه ۱.۱ قرار دهید $y = 1$. (ii) قرار دهید $y = -1$. ■

نتیجه بعدی خاصیتی از قطرهای مثلث پاسکال را بیان می‌کند. به‌عنوان مثال، در یک خط موازی ضلع چپ مثلث تساوی ۳۵ = ۱۵ + ۱۰ + ٦ + ۳ + ۱ را داریم.

قضیه ۷.۱

برای هر $m \geq 0$ و هر $n \geq 1$ تساوی زیر برقرار است:

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{m+n}{m}=\binom{m+n+1}{m+1}.$$

اثبات

$$\binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n}{m}+\binom{m+n}{m+1} \qquad \text{بنابر قضیه ۴.۱(ii)}$$

$$= \binom{m+n}{m}+\binom{m+n-1}{m}+\binom{m+n-1}{m+1} \qquad \text{مجددا بنابر ۴.۱(ii)}$$

$$= \binom{m+n}{m}+\binom{m+n-1}{m}+\cdots+\binom{m+1}{m}+\binom{m+1}{m+1}$$

$$= \binom{m+n}{m}+\binom{m+n-1}{m}+\cdots+\binom{m+1}{m}+\binom{m}{m},$$

چون $1 = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$. ■

تساوی‌ها

از قضیه دوجمله‌ای برای به‌دست آوردن تساوی‌های دیگری که حاوی ضرایب دوجمله‌ای باشند استفاده می‌شود.

مثال ۱۰.۱
تساوی زیر را درنظر بگیرید

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

یعنی

$$\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}=\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r}x^r.$$

از مساوی قرار دادن ضرایب x^n در طرفین این رابطه، نتیجه می‌شود

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

که بنابر قضیه ۴.۱(i) می‌تواند به‌فرم زیر نوشته شود

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

به‌عنوان مثال برای $n=4$ تساوی زیر را داریم

$$1^2+4^2+6^2+4^2+1^2=70=\binom{8}{4}.$$

با بحث مشابه‌ای به رابطه متناظر با مجموع‌های تناوبی می‌رسیم.

مثال ۱۱.۱
از تساوی $(1-x^2)^n=(1-x)^n(1+x)^n$ برای محاسبه مجموع زیر استفاده کنید:

$$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\cdots.$$

جواب
ضریب x^n را در هر دو طرف تساوی داده‌شده درنظر بگیرید.

چون سمت راست رابطه برابر عبارت زیر است

$$\left\{1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n\right\}\left\{1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\},$$

ضریب x^n برابر است با

$$\sum_{r+s=n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n}{s}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}^2.$$

اگر n فرد باشد آنگاه ضریب x^n در سمت چپ تساوی داده‌شده برابر ۰ است (چرا؟) و اگر n زوج باشد این عدد برابر $(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ است. از این‌رو داریم

$$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{زوج } n\\ 0 & \text{فرد } n\end{cases}$$

برای تشریح این تساوی روابط زیر را ملاحظه کنید:

$$\binom{5}{0}^2-\binom{5}{1}^2+\binom{5}{2}^2-\binom{5}{3}^2+\binom{5}{4}^2-\binom{5}{5}^2=0;$$

$$\binom{4}{0}^2-\binom{4}{1}^2+\binom{4}{2}^2-\binom{4}{3}^2+\binom{4}{4}^2=1-16+36-16+1=6=\binom{4}{2};$$

$$\binom{6}{0}^2-\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2-\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2-\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2=-20=-\binom{6}{3}.$$

۵.۱ انتخاب با تکرار

قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که تعداد دنباله‌های دوتایی به‌طول m برابر 2^m است. در این‌جا m رقم را به‌ترتیب انتخاب کرده و برای هر انتخاب دو امکان ۰ و ۱ در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۲.۱

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه m عضوی برابر 2^m است. هر زیرمجموعه متناظر با یک دنباله دوتایی به‌طول m می‌باشد که در آن i امین رقم برابر ۱ است زمانی که i امین عضو مجموعه در زیرمجموعه قرار داشته باشد. به‌عنوان مثال زیرمجموعه $\{2,3,5\}$ از $\{1,2,3,4,5\}$ متناظر با ۰۱۱۰۱ است. کدام‌یک از زیرمجموعه‌ها متناظر با دنباله‌های ۱۱۱۰۰ و ۰۰۰۰۰ هستند؟ $[\{1,2,3\}$، $\emptyset]$.

مثال ۱۳.۱

فرض کنید در پایان هر هفته از ماه فوریه امکان رفتن به یکی از سه سینمای مفروضی را داشته باشیم. تعداد دنباله‌های متمایز از ملاقات‌های ممکن را مشخص کنید که در آن تکرار مجاز می‌باشد.

جواب

برای هر پایان هفته سه انتخاب وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد ملاقات‌های ممکن برابر $3^4=81$ است.

برقراری حکم زیر واضح است.

قضیه ۸.۱
تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب r شی از n شی با رعایت ترتیب که در آن تکرار مجاز می‌باشد برابر n^r است.

اکنون فرض کنید می‌خواهیم r شی از n شی انتخاب کنیم که در آن تکرار مجاز بوده ولی ترتیب اهمیت ندارد.

مثال ۱۴.۱
به ده طریق می‌توان دو عضو از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$، بدون رعایت ترتیب، انتخاب کرد. این انتخاب‌ها به‌شرح زیر می‌باشند:

$$۱,۱ \quad ۱,۲ \quad ۱,۳ \quad ۱,۴ \quad ۲,۲ \quad ۲,۳ \quad ۲,۴ \quad ۳,۳ \quad ۳,۴ \quad ۴,۴.$$

قضیه ۹.۱
تعداد انتخاب‌های غیرمرتب r شی از n شی با مجازبودن تکرار برابر است با

$$\binom{n+r-۱}{r}.$$

اثبات
هر انتخابی متشکل است از $x_۱$ انتخاب از شی اول، $x_۲$ انتخاب از شی دوم، و غیره، مشروط به $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = r$. بنابراین تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله.
حال یک جواب $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را با دنباله دوتایی

$$۰^{x_۱}, ۱, ۰^{x_۲}, ۱, ۰^{x_۳}, ۱, \ldots, ۱, ۰^{x_n}$$

نمایش می‌دهیم که در آن ۰^j معرف دنباله تماماً صفر به‌طول j است. ۱ها را می‌توان به‌عنوان سمبلی معرف انتقال از یک شی به شی دیگر درنظر گرفت. به‌عنوان مثال جواب $x_۱ = ۲$، $x_۲ = ۰$، $x_۳ = ۲$، $x_۴ = ۱$ از معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۵$ متناظر با دنباله دوتایی ۰۰۱۱۰۰۱۰ است. متناظر با $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = r$ تعداد r صفر و $n - ۱$ یک وجود دارد و بنابراین هر دنباله به‌طول $n + r - ۱$ خواهد بود، که دقیقاً حاوی r عنصر ۰ می‌باشد. به‌عکس، هر یک چنین دنباله‌ای متناظر با یک جواب صحیح نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = r$ است. حال تعداد r صفر موجود در دنباله در هر مکانی از $n + r - ۱$ مکان موجود می‌توانند قرار گیرند، و بنابراین تعداد چنین دنباله‌هایی، یعنی تعداد انتخاب‌های غیرمرتب، برابر $\binom{n+r-۱}{r}$ است. ■

از این اثبات درستی حکم زیر نیز نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۰.۱
تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ برابر است با

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

مثال ۱۵.۱
تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x + y + z = 17$ برابر است با

$$\binom{17+3-1}{17} = \binom{19}{17} = \binom{19}{2} = 171.$$

مثال ۱۶.۱
تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادله $x + y + z = 17$ را مشخص کنید.

جواب
بر اساس شرط‌های $x, y, z \geq 1$ قرار می‌دهیم $x = 1 + u$، $y = 1 + v$، $z = 1 + w$.
در این‌صورت معادله بالا تبدیل به $u + v + w = 14$ می‌شود و تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله را محاسبه می‌کنیم. تعداد این جواب‌ها برابر است با

$$\binom{14+3-1}{14} = \binom{16}{2} = 120.$$

مثال ۱۷.۱
تعداد دنباله‌های دوتایی حاوی دقیقاً p عنصر ۰ و $q \geq p - 1$ عنصر ۱ را که حاوی ۰۰ نباشند تعیین کنید.

جواب
تعداد q عنصر ۱ را در یک ردیف به‌صورت ... ۱ ... ۱ ... ۱ ... درنظر بگیرید. به این ترتیب $q + 1$ محل برای قراردادن ۰ ها ایجاد می‌شود. ۰ ها باید در فضاهای متمایز قرارگیرند، و بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر $\binom{q+1}{p}$ است.

معادلاً می‌توان ابتدا تعداد p درایه ۰ را در یک ردیف قرار داد. در این حالت $p + 1$ محل برای قراردادن درایه‌های ۱ ایجاد می‌شود. ولی هریک از $p - 1$ محل میانی باید حاوی حدّاقل یک درایه ۱ باشد. اگر تعداد ۱های قرارگرفته در محل i ام را با x_i نمایش دهیم، آنگاه مسئله تبدیل به پیداکردن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} = q$ می‌شود که در آن تنها x_1 و x_{p+1} می‌توانند برابر ۰ باشند. با قراردادن $x_1 = y_1$، $x_{p+1} = y_{p+1}$ ، و $x_i = 1 + y_i$، اگر $i \neq 1, p+1$، معادله بالا تبدیل به $y_1 + \cdots + y_{p+1} = q - (p-1) = q - p + 1$ شده که تعداد جواب‌های صحیح نامنفی آن برابر است با

$$\binom{q-p+1+p+1-1}{q-p+1} = \binom{q+1}{q+1-p} = \binom{q+1}{p}.$$

فرمول‌های انتخاب را در جدول ۱.۱ خلاصه می‌کنیم.

جدول ۱.۱ خلاصه فرمول‌های انتخاب r شی از n شی

انتخاب r از n	با ترتیب	بدون ترتیب
بدون تکرار	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{n}{r}$
با تکرار	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$

۶.۱ یک عمل معکوس‌سازی ماتریسی مفید

در این بخش پایانی نتیجه‌ای مفید و ظریف را که بعداً از آن استفاده خواهیم کرد ارائه می‌دهیم. بر اساس این نتیجه قادر خواهیم بود تا از رابطه $a_n = \sum_k \binom{n}{k} b_k$ مقدار b_n را برحسب a_n بیان کنیم.

برای شروع، ماتریس زیر را که به‌وسیله چهار سطر اول مثلث پاسکال ساخته شده است درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که معکوس آن برابر ماتریس زیر است زیرا به‌سادگی می‌توان دید که حاصل‌ضرب آنها ماتریس واحد است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

این نتیجه به‌سادگی قابل تعمیم است. قبل از اثبات آن، به چند لم نیاز داریم.

لم ۱.۱
اگر $j \le k \le i$ آنگاه

$$\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}.$$

اثبات

$$\begin{aligned}\binom{i}{k}\binom{k}{j} &= \frac{i!}{k!(i-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!}=\frac{i!}{(i-k)!j!(k-j)!}\\ &= \frac{i!}{j!(i-j)!}\frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!}\\ &= \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}. \blacksquare\end{aligned}$$

لم ۲.۱

اگر $i > j$ آنگاه $\sum_{j\le k\le i}\binom{i}{k}\binom{k}{j}(-۱)^k = ۰$.

اثبات

$$\begin{aligned}\sum_{j\le k\le i}\binom{i}{k}\binom{k}{j}(-۱)^k &= \sum_{j\le k\le i}\binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}(-۱)^k && \text{بنا به لم ۱.۱}\\ &= (-۱)^j\binom{i}{j}\sum_{۰\le k-j\le i-j}\binom{i-j}{k-j}(-۱)^{k-j}\\ &= (-۱)^j\binom{i}{j}\sum_{l=۰}^{i-j}\binom{i-j}{l}(-۱)^l && \text{با قراردادن } l=k-j\\ &= (-۱)^j\binom{i}{j}(۱-۱)^{i-j}=۰ && (\text{چون } j<i). \blacksquare\end{aligned}$$

تعریف $\binom{i}{j}$ را برای حالت $j > i$ با قراردادن $\binom{i}{j} = ۰$ بسط می‌دهیم. این تعریف منطقی به‌نظر می‌رسد زیرا به هیچ طریقی نمی‌توان بدون تکرار j شی از i شی انتخاب کرد که $j > i$.

قضیه ۱۱.۱

فرض کنید A یک ماتریس $(n+۱) \times (n+۱)$ باشد که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۰، ۱، ...، n برچسب‌گذاری شده‌اند و $a_{ij} = \binom{i}{j}$. فرض کنید B ماتریس $(n+۱) \times (n+۱)$ تعریف‌شده با $b_{ij} = (-۱)^{i+j}\binom{i}{j}$ باشد. در این‌صورت $BA = I$.

اثبات

درایه (i,i) از ماتریس BA برابر ضرب سطر i ام ماتریس B در ستون i ام ماتریس A می‌باشد، و بنابراین برابر $\sum_k b_{ik}a_{ki} = \sum_k(-۱)^{i+k}\binom{i}{k}\binom{k}{i}$ است. تنها یک مقدار k وجود دارد که برای آن هر دو مقدار $\binom{i}{k}$ و $\binom{k}{i}$ ناصفر هستند، این مقدار برابر $k = i$ است؛

از این‌رو مجموع یادشده برابر $\binom{i}{i}\binom{i}{i}(-1)^{2i} = 1$ است. در نتیجه تمامی درایه‌های روی قطر برابر ۱ هستند.

اگر $i \neq j$ ، درایه (i,j) از BA برابر مجموع زیر است:

$$\sum_k (-1)^{i+k}\binom{i}{k}\binom{k}{j} = (-1)^i \sum_k \binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^k.$$

اگر $i < j$ آنگاه بنابر لم ۱.۱ این مقدار برابر ۰ است. ولی اگر $i > j$ آنگاه هر جمله $\binom{i}{k}\binom{k}{j}$ برابر ۰ بوده و بنابراین مقدار مجموع برابر ۰ است. ■

حال که قضیه ۱۱.۱ ثابت شده است، فرض کنید دو دنباله مفروض $(a_0, a_1, \ldots)$ و $(b_0, b_1, \ldots)$ در رابطه

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k, \quad n \geq 0,$$

صدق کنند. در این‌صورت تساوی ماتریسی زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

بنابراین از قضیه ۱۱.۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = BA \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

بنابراین از آخرین سطر مقدار b_n به‌دست می‌آید

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}a_k.$$

پس نتیجه زیر حاصل شده است.

نتیجه ۲.۱
اگر برای هر $n \geq 0$ رابطه $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$ برقرار باشد آنگاه

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}a_k.$$

از این رابطه معکوس‌نمودن در بخش‌های ۴.۲ و ۳.۵ استفاده خواهیم‌کرد.

تمرینات

تمرین ۱.۱
ده وزیر کابینه نیولند دور یک میز گرد می‌نشینند. یک صندلی برای نخست‌وزیر درنظر گرفته شده است . به چند طریق ۹ نفر دیگر می‌توانند دور میز بنشینند؟

تمرین ۲.۱
یک کمیته ۸ نفره از بین یک گروه متشکل از ۱۵ زن و ۱۲ مرد انتخاب می‌شود. این کمیته به چند طریق قابل تشکیل است اگر

(a) کمیته باید متشکل از ۴ مرد و ۴ زن باشد؟
(b) حدّاقل دو مرد باید در کمیته باشد؟
(c) تعداد زن‌ها باید بیشتر از مردها باشد؟

تمرین ۳.۱
می‌گویند که آقای لوبن شرط بسته بود که اگر تعدادی کارت را برای مدت کافی بر بزند نهایتاً کارت‌ها با یک ترتیب داده‌شده‌ای ظاهر خواهند شد. او برای رسیدن به نتیجه مطلوب عمل برزدن را به‌مدت ۲۰ سال و روزی ۱۰ ساعت انجام داد و پس از ۴۱۴۶۰۲۸ بار برزدن به ترتیب مورد نظر دست یافت. آیا او موفق بوده است؟

تمرین ۴.۱
احتمال به‌دست آوردن ۳، ۴، ۵ عدد درست را در بخت‌آزمایی ملی انگلستان مشخص کنید.

تمرین ۵.۱
شانس خود را در انتخاب اعداد برنده در بخت‌آزمایی‌های زیر برآورد کنید:
(a) سوئد — انتخاب ۷ از ۳۵؛ (b) مجارستان — انتخاب ۵ از ۹۰.

تمرین ۶.۱
در بخت‌آزمایی از نوع توپ رعدآسا[۱] پنج عدد از ۱ تا ۳۴ و یک عدد از ۱ تا ۱۴ انتخاب می‌شود. شانس برنده‌شدن خود در این بخت‌آزمایی را با برنده‌شدن در بخت‌آزمایی ملّی انگلستان مقایسه کنید.

تمرین ۷.۱
احتمال به‌دست آوردن ۵ خط در ده پرتاب یک سکه را مشخص کنید.

تمرین ۸.۱
یک اثبات استقرایی برای قضیه دوجمله‌ای ارائه دهید. (به استفاده از قضیه ۴.۱ (ii) نیاز خواهید داشت.)

[۱] Thunderball

تمرین ۹.۱
از قضیه ۶.۱ نتیجه بگیرید $2^{n-1} = \cdots + \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0}$.

تمرین ۱۰.۱
از تساوی $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$ برای اثبات **تساوی واندرموند**

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

استفاده کنید. نتیجه بگیرید

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k-1} = \binom{r+s}{r-1}.$$

تمرین ۱۱.۱
(a) نشان دهید $-\binom{6}{3} = -20 = \binom{7}{0} - \binom{7}{1} + \binom{7}{2} - \binom{7}{3}$.
(b) با استفاده از $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ این نتیجه را به

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k}$$

تعمیم دهید.
(c) اثبات دیگری را با درنظر گرفتن ضریب x^k در دو طرف تساوی $(1+x)^{n-1} = (1+x)^n(1+x)^{-1}$ ارائه دهید.

تمرین ۱۲.۱
با استفاده از (۲.۱) تساوی $\sum_k k\binom{m}{k}\binom{n}{k} = n\binom{m+n-1}{n}$ را ثابت کنید.

تمرین ۱۳.۱
تعداد جواب‌های معادله $x+y+z+w = 15$ را در اعداد صحیح نامنفی، در اعداد صحیح مثبت، و در اعداد صحیح با شرایط $x > 2$، $y > -2$، $z > 0$، $w > -3$ به‌دست آورید.

تمرین ۱۴.۱
تعداد جواب‌های صحیح نامنفی رابطه $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$ را مشخص کنید.

تمرین ۱۵.۱
نشان دهید بیش از نیمی از انتخاب‌های ۶ از ۴۹ در بخت‌آزمایی ملّی انگلستان فاقد دو عدد متوالی هستند .

تمرین ۱۶.۱
تعداد حالت‌هایی را که می‌توان ۴ مهره را در ده جعبه متمایز قرار داد تعیین کنید هرگاه

(a) مهره‌ها متمایز بوده و هیچ جعبه‌ای نمی‌تواند بیش از یک مهره را داشته باشد؛
(b) مهره‌ها قابل تمیز نبوده و هر جعبه حدّاکثر یک مهره می‌تواند داشته باشد؛
(c) مهره‌ها قابل تمیز بوده و هر جعبه می‌تواند هر تعدادی از آنها را داشته باشد؛
(d) مهره‌ها تمیزپذیر نبوده و محدودیتی روی تعداد مهره‌های واقع در یک جعبه وجود ندارد.

تمرین ۱۷.۱
با به‌کار بردن (۲.۱) ثابت کنید $\sum_{r=۰}^{n} r\binom{n}{r} = n۲^{n-۱}$. چرا وقتی اندازه متوسط یک زیرمجموعه از یک مجموعه n عضوی درنظر گرفته می‌شود این نتیجه واضح است؟

تمرین ۱۸.۱
فرمول $۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$ را به دو روش زیر ثابت کنید.
(a) ثابت کنید $r^۲ = \binom{r+۲}{۳} - \binom{r}{۳}$ و روی r عمل جمع انجام دهید.
(b) نشان دهید $r^۲ = \binom{r+۱}{۲} + \binom{r}{۲}$ و با استفاده از قضیه ۷.۱ روی r عمل جمع انجام دهید.

تمرین ۱۹.۱
(برای آنها که قضیه موآور را می‌دانند.)

فرض کنید $w = \frac{۱}{۲}(-۱ + i\sqrt{۳})$، بنابراین $w^۳ = ۱$ و $۱ + w + w^۲ = ۰$. در قضیه دوجمله‌ای قرار دهید $x = ۱$، $y = w$ و نشان دهید

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۶} + \cdots = \frac{۱}{۳}(۲^n + ۲\cos\frac{n\pi}{۳}).$$

(راهنمایی: $۱ + w = e^{\frac{\pi i}{۳}}$.)

فصل ۲

روابط بازگشتی

در مطالعه یک دنباله از اعداد a_n، اغلب با یک رابطه بین a_n و a_{n-1}، یا بین a_n و چند عضو قبل از آن مواجه می‌شویم. این ارتباط را رابطه بازگشتی می‌نامند؛ هدف این فصل تشریح چگونگی وقوع این روابط و چگونگی حلّ آنها است.

۱.۲ چند مثال

مثال ۱.۲ (برج‌های هانوی)
با مسئله‌ای شروع می‌کنیم که لوکاس، ریاضی‌دان فرانسوی قرن نوزدهم، باعث شهرت آن شد. n صفحه گرد با اندازه‌های مختلف را که در وسط آنها سوراخ وجود دارد (مانند صفحات قدیمی گرامافون) درنظر بگیرید. همچنین سه محور عمودی به‌منظور تفکیک صفحه‌ها مفروض است. در ابتدا تمامی صفحات به‌ترتیب بزرگی در یک محور قرار دارند به‌قسمی‌که بزرگ‌ترین صفحه در زیر بقیه قرار دارد. هدف جابه‌جا کردن صفحات است به‌قسمی‌که در هر حرکت یک صفحه جابه‌جا شده و نهایتاً با همان ترتیب در محور دیگری قرار گیرند. مهم این است که در هیچ مرحله‌ای هیچ صفحه‌ای نمی‌تواند روی صفحه کوچک‌تر از خود قرار گیرد. کمترین تعداد حرکت لازم برای انجام این عمل چقدر است؟

فرض کنید a_n معرف کمترین تعداد حرکت لازم جهت انتقال n صفحه باشد. واضح است که $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$؛ در رابطه با a_2 می‌توان صفحه کوچک‌تر را به محور دوم و صفحه بزرگ‌تر را به محور سوم انتقال داده، سپس صفحه کوچک‌تر را روی دیگری قرار داد. راجع به a_n چطور؟ واضح است که برای انتقال بزرگ‌ترین صفحه باید یکی از محورها خالی باشد و بنابراین $n-1$ صفحه دیگر باید در محور سوم قرار گرفته باشند. برای رسیدن به این مرحله

$a_{n-۱}$ حرکت لازم است. در این‌صورت بزرگ‌ترین صفحه به محور آزاد منتقل شده و سپس با $a_{n-۱}$ حرکت بقیه صفحات روی آن قرار می‌گیرند. بنابراین

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۱.$$

این **رابطه بازگشتی** به‌همراه شرط اولیه $a_۱ = ۱$ امکان محاسبه a_n را فراهم می‌کند. داریم $a_۲ = ۲.۱ + ۱ = ۳$، $a_۳ = ۲.۳ + ۱ = ۷$، $a_۴ = ۲.۷ + ۱ = ۱۵$، و به‌نظر می‌رسد که $a_n = ۲^n - ۱$. این رابطه با استقرا روی n ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} a_n &= ۱ + ۲a_{n-۱} = ۱ + ۲(۱ + ۲a_{n-۲}) = ۱ + ۲ + ۲^۲a_{n-۲} \\ &= ۱ + ۲ + ۲^۲(۱ + ۲a_{n-۳}) = ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳a_{n-۳} \\ &= ۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱}a_۱ \\ &= ۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^{n-۱} = ۲^n - ۱. \end{aligned}$$

در داستان افسانه‌ای وابسته به این معما آمده است که n برابر ۶۴ بوده و کشیش‌ها باید صفحه‌های طلایی را جابه‌جا می‌کردند؛ با انجام کار پایان دنیا نیز فرا می‌رسید. ولی

$$۲^{۶۴} - ۱ = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵,$$

و با درنظر گرفتن یک ثانیه زمان برای هر حرکت، انجام این کار به حدود ۵.۸۲×۱۰^{۱۱} سال زمان نیاز دارد؛ بنابراین نباید نگران چیزی باشیم! این مثال دیگری از انفجار ترکیبیاتی است.

مثال ۲.۲

تعداد دنباله‌های سه‌تایی n رقمی که در آن هر رقم برابر ۰، ۱ یا ۲ است برابر ۳^n می‌باشد. چه تعدادی از این دنباله‌ها حاوی تعداد فردی از ۰ هستند؟

جواب

فرض کنید جواب مسئله برابر با b_n باشد. هر یک چنین دنباله‌ای با یکی از سه عدد ۰، ۱، ۲ خاتمه می‌یابد. هر دنباله پایان‌یافته با ۱ می‌تواند با یکی از $b_{n-۱}$ دنباله به‌طول $n - ۱$ شروع شده باشد. این وضعیت در مورد یک دنباله پایان‌یافته با ۲ نیز برقرار است. اگر دنباله‌ای با ۰ خاتمه یابد آنگاه $n - ۱$ رقم آغازین باید حاوی تعداد زوجی از ۰ باشد، ولی تعداد یک چنین دنباله‌هایی برابر $۳^{n-۱}$ (کل دنباله‌های به‌طول $n - ۱$) منهای $b_{n-۱}$ (تعداد دنباله‌های به‌طول $n - ۱$ و حاوی تعداد فردی از ۰) است؛ بنابراین تعداد دنباله‌های پایان‌یافته با ۰ برابر $۳^{n-۱} - b_{n-۱}$ است. ازاین‌رو بنابر اصل جمع داریم

$$b_n = b_{n-۱} + b_{n-۱} + ۳^{n-۱} - b_{n-۱},$$

یعنی

$$b_n = b_{n-۱} + ۳^{n-۱}$$

مجدداً مقدار b_n را با تکرار به‌دست می‌آوریم:

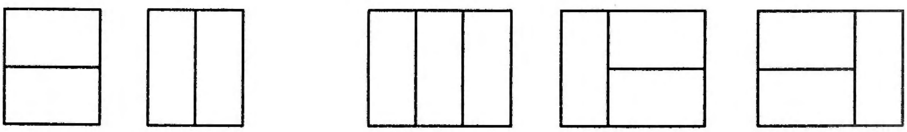
$$\begin{aligned} b_n &= ۳^{n-۱} + b_{n-۱} = ۳^{n-۱} + (۳^{n-۲} + b_{n-۲}) = \cdots \\ &= ۳^{n-۱} + ۳^{n-۲} + \cdots + ۳^{۱} + b_{۱}. \end{aligned}$$

ولی $b_۱ = ۱$ (چرا؟)، پس

$$b_n = ۱ + ۳ + \cdots + ۳^{n-۱} = \frac{۱}{۲}(۳^n - ۱).$$

مثال ۳.۲ (سنگ‌فرش کردن مسیر یک باغ)
مسیری به‌طول n و پهنای ۲ متر مفروض است. این مسیر قرار است با سنگ‌های به‌طول ۲ متر و عرض ۱ متر سنگ‌فرش شود. انجام این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

جواب
فرض کنید p_n معرف جواب مسئله برای مسیر به‌طول n باشد. واضح است که $p_۱ = ۱$، زیرا یک سنگ مسیر را می‌پوشاند. همچنین $p_۲ = ۲$، دو حالت ممکن در شکل ۱.۲ (a) نشان داده شده است، و $p_۳ = ۳$ (شکل ۱.۲ (b)).

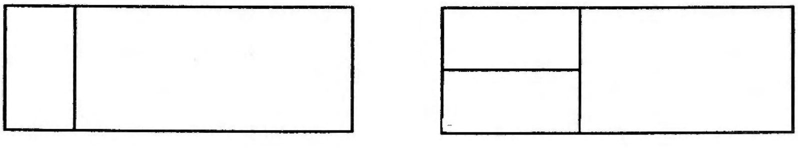


(a) (b)

شکل ۱.۲

ممکن است تصور شود که برای هر n مقدار p_n برابر n است، ولی ملاحظه کنید که $p_۴ = ۵$. راجع به p_n چطور؟

برای یک مسیر $n \times ۲$، سنگ‌فرشی باید با یکی از دو امکان نشان داده‌شده در شکل ۲.۲ آغاز شود.



۱ n-۱ ۲ n-۲

شکل ۲.۲

در حالت اول این عمل به $p_{n-۱}$ طریق، و در حالت دوم به $p_{n-۲}$ طریق، کامل می‌شود. بنابراین، مجدداً بنابر اصل جمع، داریم

$$p_n = p_{n-۱} + p_{n-۲} \qquad (n \geq ۳).$$

این یک رابطه بازگشتی مرتبه دوم است زیرا هر p_n به دو جمله قبل از خود بستگی دارد. ملاحظه می‌شود که $p_۵ = ۵ + ۳ = ۸$، $p_۶ = ۸ + ۵ = ۱۳$، $p_۷ = ۱۳ + ۸ = ۲۱$، و غیره؛ بنابراین می‌بینیم که دنباله (p_n) در واقع دنباله فیبوناتچی (F_n) است:

$$۱,\ ۲,\ ۳,\ ۵,\ ۸,\ ۱۳,\ ۲۱,\ ۳۴,\ ۵۵,\ ۸۹, \ldots.$$

فیبوناتچی (۱۲۰۰ بعد از میلاد) این دنباله را به هنگام بررسی رشد جمعیت خرگوش‌ها معرفی کرد (تمرین ۵.۲ را ببینید)؛ این دنباله به‌صورت اعجاب‌انگیزی در زمینه‌های مختلف ریاضیات ظاهر می‌شود. در بخش بعد یک فرمول برای F_n به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴.۲ (پرچم‌ها)
یک پرچم متشکل از n نوار افقی بوده که در آن هر نوار یکی از سه رنگ قرمز، سفید، و آبی را داشته و هیچ دو نوار مجاوری هم‌رنگ نیستند. تحت این شرایط، اولین نوار (نوار فوقانی) می‌تواند هر یک از این سه رنگ را داشته، دومی دارای دو امکان بوده، سومی نیز دو امکان، و غیره (هر نوار باید از رنگ نوار قبل از خود متمایز باشد)؛ بنابراین تعداد طرح‌های ممکن برابر $۳ \times ۲^{n-۱}$ است.

حال فرض کنید که به‌منظور جلوگیری از سردرگمی در سروته بودن پرچم به‌هنگام افراشتن آن باید رنگ نوارهای فوقانی و تحتانی متمایز باشند. فرض کنید a_n معرف تعداد یک چنین پرچم‌های متشکل از n نوار باشد. در این‌صورت $a_۱ = ۰$ (چرا؟) و $a_۲ = ۶$. به‌علاوه، یک تناظر یک‌به‌یک بین پرچم‌های n نواری با نوارهای فوقانی و تحتانی یکسان و پرچم‌های $n - ۱$ نواری با نوارهای فوقانی و تحتانی متمایز برقرار است. از این‌رو

$$\begin{aligned} a_n &= ۳ \times ۲^{n-۱} - (\text{تعداد پرچم‌های با نوارهای فوقانی و تحتانی یکسان}) \\ &= ۳ \times ۲^{n-۱} - (\text{تعداد پرچم‌های } n \text{ نواری با نوارهای فوقانی و تحتانی متمایز}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$a_n = ۳.۲^{n-۱} - a_{n-۱}. \qquad (۱.۲)$$

می‌توان روی این رابطه عمل تکرار را انجام داد (انجام دهید!) ولی روش دیگری نیز وجود دارد. چون

$$a_n + a_{n-۱} = ۳.۲^{n-۱}$$

پس رابطه زیر نیز برقرار است

$$a_{n-۱} + a_{n-۲} = ۳.۲^{n-۲}.$$

با توجه به

$$۲(a_{n-۱} + a_{n-۲}) = ۳.۲^{n-۱} = a_n + a_{n-۱}$$

نتیجه می‌شود

$$a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}. \qquad (۲.۲)$$

این مجدداً یک رابطه بازگشتی مرتبه دوم است؛ حال به حل آن می‌پردازیم.

۲.۲ روش معادله معین

در این بخش روی روابط بازگشتی به‌فرم

$$a_n = Aa_{n-۱} + Ba_{n-۲} \qquad (n \geq ۳) \qquad (۳.۲)$$

تمرکز می‌کنیم که A و B دو عدد ثابت بوده و $B \neq ۰$، و این‌که $a_۱$ و $a_۲$ مفروض هستند. رابطه (۳.۲) یک رابطهٔ بازگشتی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت نامیده می‌شود؛ ملاحظه خواهد شد که یک روش خیلی سرراست برای حل آن وجود دارد.

ابتدا می‌پرسیم که آیا اعدادی حقیقی چون $\alpha \neq ۰$ وجود دارند به‌قسمی‌که $a_n = \alpha^n$ در (۳.۲) صدق کند؟ با قراردادن $a_n = \alpha^n$ در (۳.۲) به $\alpha^n = A\alpha^{n-۱} + B\alpha^{n-۲}$ یعنی $\alpha^۲ = A\alpha + B$ می‌رسیم. بنابراین $a_n = \alpha^n$ جواب (۳.۲) است دقیقاً وقتی‌که α جوابی برای معادله معین

$$x^۲ = Ax + B \qquad (۴.۲)$$

باشد. بنابراین اگر α و β ریشه‌های متمایز (۴.۲) باشند، $a_n = \alpha^n$ و $a_n = \beta^n$ هر دو در (۳.۲) صدق می‌کنند. اگر معادله معین ریشه تکراری α داشته باشد، آنگاه

$$x^۲ - Ax - B = (x-\alpha)^۲ = x^۲ - ۲\alpha x + \alpha^۲$$

به‌طوری‌که $A = ۲\alpha$ و $B = -\alpha^۲$. در این حالت $a_n = n\alpha^n$ نیز در (۳.۲) صدق می‌کند زیرا

$$\begin{aligned} Aa_{n-۱} + Ba_{n-۲} &= A(n-۱)\alpha^{n-۱} + B(n-۲)\alpha^{n-۲} \\ &= ۲(n-۱)\alpha^n - (n-۲)\alpha^n = n\alpha^n = a_n. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۲

فرض کنید (a_n) در (۳.۲) صدق کرده و a_1 و a_2 مفروض باشند. فرض کنید α و β ریشه‌های معادله معین (۴.۲) باشند. در این‌صورت

(i) اگر $\alpha \neq \beta$، آنگاه اعداد ثابتی چون K_1 و K_2 وجود دارند به‌قسمی‌که برای هر $n \geq 1$ رابطه $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ برقرار است؛

(ii) اگر $\alpha = \beta$، آنگاه ثابت‌هایی چون K_3 و K_4 وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$،

$$a_n = (K_3 + nK_4)\alpha^n.$$

اثبات

(i) اعداد K_1 و K_2 را به‌قسمی انتخاب کنید که $a_1 = K_1\alpha + K_2\beta$ و $a_2 = K_1\alpha^2 + K_2\beta^2$، یعنی

$$K_1 = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad K_2 = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha - \beta)}. \qquad (5.2)$$

در این‌صورت رابطه $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ قطعاً برای $n = 1, 2$ برقرار خواهد بود. حال موضوع را با استقرا ادامه می‌دهیم. فرض کنید حکم برای تمامی n های با خاصیت $n \leq k$ برقرار باشد. در این‌صورت حکم از رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= Aa_k + Ba_{k-1} = A(K_1\alpha^k + K_2\beta^k) + B(K_1\alpha^{k-1} + K_2\beta^{k-1}) \\ &= K_1\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + K_2\beta^{k-1}(A\beta + B) \\ &= K_1\alpha^{k+1} + K_2\beta^{k+1}. \end{aligned}$$

(ii) اعداد K_3 و K_4 را به‌قسمی انتخاب کنید که $a_1 = (K_3 + K_4)\alpha$ و $a_2 = (K_3 + 2K_4)\alpha^2$، یعنی

$$K_3 = \frac{2a_1\alpha - a_2}{\alpha^2}, \quad K_4 = \frac{a_2 - a_1\alpha}{\alpha^2}. \qquad (6.2)$$

با این فرض، حکم برای $n = 1, 2$ برقرار است. اگر حکم برای تمامی n های با خاصیت $n \leq k$ برقرار باشد آنگاه از رابطه زیر حکم برای a_{k+1} نیز ثابت می‌شود:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= Aa_k + Ba_{k-1} = A(K_3 + kK_4)\alpha^k + B(K_3 + (k-1)K_4)\alpha^{k-1} \\ &= K_3\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + K_4\alpha^{k-1}(Ak\alpha + B(k-1)) \\ &= K_3\alpha^{k+1} + K_4\alpha^{k-1}(2k - \alpha^2(k-1)) \\ &= K_3\alpha^{k+1} + K_4(k+1)\alpha^{k+1}. \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۴.۲ (ادامه)
در مسئله پرچم به رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ رسیدیم که $a_1 = 0$ و $a_2 = 6$.
معادله معین $x^2 - x - 2 = 0$ دارای جواب‌های $\alpha = -1$ و $\beta = 2$ می‌باشد، پس

$$a_n = K_1(-1)^n + K_2 2^n$$

که $-K_1 + 2K_2 = 0$ و $K_1 + 4K_2 = 6$؛ بنابراین $K_1 = 2$ و $K_2 = 1$. پس

$$a_n = 2(-1)^n + 2^n.$$

مثال ۳.۲ (ادامه)

دنباله فیبوناتچی (F_n) به‌فرم زیر تعریف می‌شود

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

معادله معین $x^2 - x - 1 = 0$ دارای جواب‌های $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ می‌باشد، پس

$$F_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$$

که $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ و $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. از شرط اولیه $F_1 = 1$، $F_2 = 2$ و رابطه (۵.۲)
نتیجه می‌شود $K_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ و $K_2 = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$؛ پس

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}. \qquad (7.2)$$

این نتیجه ممکن است عجیب به‌نظر برسد زیرا F_n باید یک عدد صحیح باشد. نشان دهید که با استفاده از قضیه دوجمله‌ای تمامی عبارت‌های حاوی $\sqrt{5}$ حذف شده و فرم زیر برای F_n به‌دست می‌آید

$$F_n = \frac{1}{2^n}\left\{\binom{n+1}{1} + 5\binom{n+1}{3} + 5^2\binom{n+1}{5} + \cdots\right\}.$$

این به نوبه خود عجیب است زیرا به هیچ وجه واضح نیست که مجموع ضرایب دوجمله‌ای باید مضربی از 2^n باشد.

توجه کنید که چون $|\beta| < 1$، پس دومین عبارت در (۷.۲) با افزایش n به 0 میل می‌کند و بنابراین

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

که کسر طلایی نامیده می‌شود.

مثال ۵.۲
رابطه بازگشتی $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ را با مقادیر اولیه $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ حل کنید.

جواب
معادله معین برابر $x^2 - 4x + 4 = 0$، یعنی $(x-2)^2 = 0$، است؛ پس

$$a_n = (K_1 + nK_2)2^n.$$

از مقادیر اولیه نتیجه می‌شود $2(K_1 + K_2) = 1$ و $4(K_1 + 2K_2) = 3$، پس $K_1 = K_2 = \frac{1}{4}$. بنابراین

$$a_n = (n+1)2^{n-2}.$$

روش معادله معین به‌سادگی به روابط بازگشتی از مرتبه بالاتر تعمیم داده می‌شود.

مثال ۶.۲
فرض کنید $a_1 = 3$، $a_2 = 6$، $a_3 = 14$، و

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}, \quad (n \geq 4).$$

در این‌صورت معادله معین برابر $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$، یعنی $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ است. پس $a_n = K_1 + K_2 2^n + K_3 3^n$. از به‌کار بردن مقادیر اولیه نتیجه می‌شود

$$a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}.$$

روابط بازگشتی ناهمگن

روش معادله معین برای روابط بازگشتی مانند $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ به‌کار رفته است. اینها روابط بازگشتی خطی **همگن** با ضرایب ثابت هستند: a_n یک ترکیب خطی از a_i های قبلی است. حال به اختصار روابط بازگشتی **ناهمگن** را درنظر می‌گیریم، مثلاً

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + t_n,$$

که t_n تابعی از n است. مثالی از این نوع رابطه (۱.۲) است که ما آن را با تبدیل‌کردن به یک رابطه همگن مرتبه دو حل کردیم؛ ولی در این‌جا یک راه‌حل جایگزین ارائه می‌دهیم. برای این منظور جواب رابطه همگن حاصل از حذف t_n را با یک جواب خصوصی رابطه ناهمگن جمع می‌کنیم.

مثال ۴.۲ (تکرار)
رابطه $a_n = -a_{n-1} + 3.2^{n-1}$ را با فرض $a_1 = 0$ حل می‌کنیم.

جواب

ابتدا $a_n = -a_{n-1}$ را حل می‌کنیم. می‌توان از معادله معین $x = -1$ استفاده کرد، ولی به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $a_n = (-1)^{n-1}a_1$ ، یعنی این‌که $a_n = K(-1)^n$. برای یک جواب خصوصی رابطه $a_n = -a_{n-1} + 3.2^{n-1}$ مقدار معقولانه‌ای مانند $a_n = A2^n$ را امتحان می‌کنیم. با این جایگزینی رابطه $A2^n = -A2^{n-1} + 3.2^{n-1}$ و بنابراین $A = 1$ به‌دست می‌آید. پس $a_n = K(-1)^n + 2^n$. چون $a_1 = 0$، پس $K = 2$؛ سرانجام همچون قبل به $a_n = 2(-1)^n + 2^n$ می‌رسیم.

توجه کنید که مقادیر اولیه تا آخرین مرحله از عملیات به‌کار نمی‌روند.

۳.۲ توابع مولد

تابع مولد یک دنباله a_1، a_2، a_3، ... با تابع

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

تعریف می‌شود. برای مثال، تابع مولد دنباله فیبوناتچی برابر است با

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots.$$

اگر دنباله‌ای با a_0 شروع شود آنگاه از $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ استفاده می‌شود؛ برای مثال، تابع مولد دنباله $a_n = 2^n$، $n \geq 0$، برابر است با

$$1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - 2x}.$$

بعضی اوقات برای یک رابطه بازگشتی مفروض این امکان وجود دارد که تابع مولد دنباله را پیدا کرده و سپس a_n را با خواندن ضریب x^n مشخص نمود.

مثال ۴.۲ (باز هم تکرار!)

رابطه بازگشتی $a_n = 3.2^{n-1} - a_{n-1}$ را با شرط اولیه $a_1 = 0$ درنظر بگیرید. فرض کنید $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1x + (3.2 - a_1)x^2 + (3.2^2 - a_2)x^3 + \cdots \\ &= a_1x + 3(2x^2 + 2^2x^3 + \cdots) - (a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots) \\ &= 0 + 6x^2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots) - xf(x). \end{aligned}$$

پس $(1 + x)f(x) = \frac{6x^2}{(1-2x)}$ و در نتیجه

$$f(x) = 6x^2\frac{1}{(1+x)(1-2x)} = 2x^2(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x}).$$

بنابراین

$$f(x) = ۴x^۲(۱ + ۲x + ۲^۲x^۲ + \cdots) + ۲x^۲(۱ - x + x^۲ - \cdots).$$

با خواندن ضریب x^n، همچون قبل مقدار a_n به‌دست می‌آید:

$$a_n = ۴.۲^{n-۲} + ۲(-۱)^{n-۲} = ۲^n + ۲(-۱)^n.$$

مثال ۵.۲ (تکرار)

فرض کنید $a_n = ۴a_{n-۱} - ۴a_{n-۲}$ و $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۳$. درنتیجه

$$\begin{aligned} f(x) &= a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + a_۴x^۴ + \cdots \\ &= x + ۳x^۲ + (۴a_۲ - ۴a_۱)x^۳ + (۴a_۳ - ۴a_۲)x^۴ + \cdots \\ &= x + ۳x^۲ + ۴(a_۲x^۳ + a_۳x^۴ + \cdots) - ۴(a_۱x^۳ + a_۲x^۴ + \cdots) \\ &= x + ۳x^۲ + ۴x(f(x) - a_۱x) - ۴x^۲f(x), \end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$(۱ - ۴x + ۴x^۲)f(x) = x + ۳x^۲ - ۴x^۲ = x - x^۲.$$

پس

$$f(x) = \frac{x - x^۲}{(۱ - ۲x)^۲}.$$

با مشتق گیری از رابطه

$$\frac{۱}{۱ - x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{(۱ - x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots,$$

و بنابراین

$$\frac{۱}{(۱ - ۲x)^۲} = ۱ + ۲.۲x + ۳.۲^۲x^۲ + \cdots.$$

پس

$$f(x) = (x - x^۲)(۱ + ۲.۲x + ۳.۲^۲x^۲ + ۴.۲^۳x^۳ + \cdots)$$

و از آن‌جا مقدار a_n به‌دست می‌آید

$$a_n = b_n - c_n$$

که b_n و c_n به‌ترتیب ضریب $x^{n-۱}$ و $x^{n-۲}$ در $\cdots + ۲.۲x + ۱$ هستند. پس

$$a_n = n.۲^{n-۱} - (n - ۱)۲^{n-۲} = (n + ۱)۲^{n-۲}.$$

۴.۲ بی‌نظمی

فرض کنید در یک مهمانی n نفر کت‌های خود را در اتاق رخت‌کن قرار می‌دهند. بعد از مهمانی هر کسی به‌تصادف یک کت بر می‌دارد. احتمال این‌که هیچ‌کسی کت خود را برنداشته باشد چقدر است؟

یک **بی‌نظمی**[۱] از ۱، ...، n عبارت است از جایگشتی چون π از $\{۱,\dots,n\}$ به‌قسمی‌که همواره $\pi(i) \neq i$. به‌عنوان مثال تعداد بی‌نظمی‌های $\{۱,۲,۳,۴\}$ برابر ۹ است:

۲	۱	۴	۳
۲	۴	۱	۳
۲	۴	۳	۱
۳	۴	۱	۲
۳	۴	۲	۱
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۴	۱	۲	۳

در هریک از این جایگشت‌ها عدد ۱ در اوّلین مکان نبوده، عدد ۲ در دومین مکان نبوده، و غیره. فرض کنید d_n معرف تعداد بی‌نظمی‌های ۱، ...، n باشد. در این‌صورت (بررسی کنید!)

$$d_۱ = ۰,\quad d_۲ = ۱,\quad d_۳ = ۲,\quad d_۴ = ۹.$$

هدف ما پیداکردن یک رابطه بازگشتی برای d_i و سپس استفاده از آن برای به‌دست آوردن فرمولی برای d_n است. قبل از جلو رفتن در رابطه بازگشتی، توجه کنید که d_n برابر تعداد حالت‌هایی است که بتوان n شی را در n جعبه قرار داد که در آن متناظر با هر شی یک جعبه ممنوعه وجود داشته و این‌که هر جعبه دقیقاً در رابطه با یک شی قابل استفاده نمی‌باشد. با این فرض‌ها اشیا و جعبه‌ها هر دو با اعداد ۱، ...، n شماره‌گذاری می‌شوند که در آن جعبه شماره i مجاز به قبول شی i ام نیست، ولی شماره‌گذاری اشیا و جعبه‌ها اختیاری بوده و تأثیری روی مسئله ندارد.

حال توجه کنید که در لیست بی‌نظمی مربوط به ۱، ...، ۴ در سه جایگشت عدد ۴ جای خود را با اعداد دیگر عوض می‌کند: این حادثه در جایگشت‌های ۲۱۴۳، ۳۴۱۲، و ۴۳۲۱

[۱] derangement

رخ می‌دهد. در بقیه بی‌نظمی‌ها عدد ۴ جای خود را با عدد دیگری عوض نمی‌کند. با این توضیح، قرار می‌دهیم

$$d_n = e_n + f_n$$

که e_n و f_n به‌ترتیب تعداد بی‌نظمی‌های ۱، ...، n هستند که در آنها عدد n جای خود را با عدد دیگری عوض می‌کند و عوض نمی‌کند. حال اگر عدد n جای خود را با i عوض کند (تعداد انتخاب‌های ممکن برای i برابر $n - ۱$ است) آنگاه $n - ۲$ عدد دیگر نیز باید تشکیل یک بی‌نظمی دهند، و این به $d_{n-۲}$ طریق امکان‌پذیر است؛ پس

$$e_n = (n - ۱)d_{n-۲}.$$

اگر n جای خود را با عدد دیگری عوض نکند، آنگاه عددی چون r در مکان n قرار گرفته (و تعداد امکان‌های موجود برای r برابر $n - ۱$ است) در حالی‌که n در مکان r قرار نگرفته است. بنابراین باید اعضای $\{۱, ۲, \ldots, n\} \setminus \{r\}$ را در مکان‌های ۱، ۲، ...، $n - ۱$ قرار دهیم، در حالی‌که برای هر عددی یک مکان ممنوعه وجود دارد (اگر $i \neq r, n$ آنگاه مکان غیرمجاز i است، و برای $i = n$ این مکان r می‌باشد). از این‌رو تعداد جواب‌های ممکن برابر $d_{n-۱}$ است و بنابراین

$$f_n = (n - ۱)d_{n-۱}.$$

پس با توجه به اصل جمع داریم

$$d_n = (n - ۱)(d_{n-۱} + d_{n-۲}) \qquad (۸.۲)$$

با به‌کار بردن این رابطه بازگشتی مقادیر $d_۵$ و $d_۶$ را به‌دست می‌آوریم

$$d_۵ = ۴(۹ + ۲) = ۴۴, \quad d_۶ = ۵(۴۴ + ۹) = ۲۶۵.$$

رابطه بازگشتی (۸.۲) اجازه استفاده از روش معادله معین را نمی‌دهد زیرا ضرایب مربوط به $d_{n-۱}$ و $d_{n-۲}$ ثابت نیستند. با این‌حال، می‌توان (۸.۲) را به‌شکل مناسب‌تری تبدیل کرد. این رابطه را می‌توان به‌فرم زیر نوشت

$$d_n - nd_{n-۱} = -(d_{n-۱} - (n - ۱)d_{n-۲}),$$

که در آن عبارت سمت راست برابر است با قرینه عبارت سمت چپ که در آن n تبدیل به $n - ۱$ شده است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
d_n - nd_{n-۱} &= -(d_{n-۱} - (n - ۱)d_{n-۲}) \\
&= (-۱)^۲(d_{n-۲} - (n - ۲)d_{n-۳}) \\
&\vdots \\
&= (-۱)^{n-۲}(d_۲ - ۲d_۱) = (-۱)^n(۱ - ۰) = (-۱)^n;
\end{aligned}$$

یعنی

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^n. \qquad (9.2)$$

بنابراین

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

حال اگر روی تساوی

$$\frac{d_m}{m!} - \frac{d_{m-1}}{(m-1)!} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

عمل جمع را برای $m = 2, 3, \cdots, n$ انجام داده و از عمل حذف در سمت چپ استفاده کنیم رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}.$$

ولی $d_1 = 0$ و در نتیجه:

$$d_n = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = n!\{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\}. \qquad (10.2)$$

یک نتیجه جالب (۱۰.۲) این است که اگر $n \to \infty$، آنگاه

$$\frac{d_n}{n!} \to \frac{1}{e},$$

و بنابراین احتمال این‌که بعد از مهمانی کسی کت خود را برنداشته باشد، با افزایش n، به $\frac{1}{e} = 0.36788$ میل می‌کند. در واقع برای n به کوچکی ۶ داریم

$$\frac{d_6}{6!} = \frac{265}{720} = 0.368056$$

که تا سه مکان اعشاری برابر با $\frac{1}{e}$ است.

مثال ۷.۲

(a) تعداد جایگشت‌های ۱، ...، n را پیدا کنید که در آنها k عدد دقیقاً در محل خود قرار داشته، و نتیجه بگیرید

$$n! = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} d_l.$$

(b) در یک جایگشت تصادفی از ۱، ...، n متوسط تعداد اعدادی که در محل خود قرار دارند چقدر است؟

جواب

(a) تعداد انتخاب‌های ممکن برای مشخص نمودن k عدد برابر $\binom{n}{k}$ است. بقیه اعداد باید تشکیل بی‌نظمی بدهند و انجام این عمل به d_{n-k} طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد جایگشت‌های مورد نظر برابر $\binom{n}{k}d_{n-k}$ است.

ولی در هریک از $n!$ جایگشت، تعداد k عدد ثابت است که $۰ \le k \le n$. پس با قراردادن $l = n - k$ داریم:

$$n! = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k} = \sum_{l=۰}^{n}\binom{n}{l}d_l.$$

(b) متوسط تعداد اعدادی که برای یک جایگشت ثابت می‌ماند برابر است با

$$\begin{aligned}
\frac{۱}{n!}\sum_{k=۰}^{n}k\binom{n}{k}d_{n-k} &= \frac{۱}{n!}\sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}d_{n-k} \\
&= \frac{۱}{n!}\sum_{k=۱}^{n}n\binom{n-۱}{k-۱}d_{n-k} && \text{بنابر } (۲.۱) \\
&= \frac{۱}{(n-۱)!}\sum_{k=۱}^{n}\binom{n-۱}{n-k}d_{n-k} \\
&= \frac{۱}{(n-۱)!}\sum_{l=۰}^{n-۱}\binom{n-۱}{l}d_l && (l = n-k) \\
&= \frac{۱}{(n-۱)!}(n-۱)!, && \text{بنابر } (۱۱.۲)
\end{aligned}$$

بنابراین میانگین تعداد اعدادی که ثابت می‌ماند برابر ۱ است.

اثبات دیگری برای (۱۰.۲)

در فصل ٦، با استفاده از اصل شمول—حذف، اثبات دیگری برای (۱۰.۲) ارائه خواهد شد. در این‌جا با استفاده از اصل معکوس روی (۱۱.۲)، نتیجه ۲.۱، اثباتی را برای (۱۰.۲) می‌آوریم.

در (۱۱.۲) اعداد $n!$ و d_n را به‌ترتیب با a_n و b_n نمایش دهید. پس

$$a_n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}b_k,$$

و از این‌رو بنابر نتیجه ۲.۱، داریم

$$d_n = \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{n+k}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^{n+k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} &= n!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{2n-l}}{l!} \qquad (l=n-k) \\ &= n!\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{l}}{l!}. \end{aligned}$$

۵.۲ الگوریتم‌های مرتب‌سازی

دسته‌ای از برگه‌های امتحانی را درنظر بگیرید و فرض کنید که می‌خواهیم آنها را مثلاً برحسب نمره‌های دریافت‌شده به‌صورت صعودی مرتب کنیم. آیا روش کارایی برای انجام این کار وجود دارد؟ با یک روش ساده ولی نه‌چندان کارا بحث را شروع می‌کنیم.

ترتیب حبابی[۱]

لیستی از n عدد را با ترتیب تصادفی انتخاب کنید. اوّلین دو عضو دنباله را مقایسه کنید و در صورتی که ترتیب صعودی نداشته باشند جای آنها را عوض کنید. سپس عناصر دوم و سوم را مقایسه کرده و در صورت لزوم جای آنها را عوض کنید. به این روش روی دنباله کار را انجام دهید؛ در انتها بزرگ‌ترین عنصر در پایان لیست قرار خواهد داشت. سپس تمامی این مراحل را روی $n-1$ عدد اول تکرار کنید؛ این منجر به انتقال دومین عدد بزرگ به محل ماقبل آخر خواهد شد. عملیات را برای $n-2$ عنصر اول تکرار کنید، و غیره.

تعداد کل مقایسه لازم برای انجام این عمل برابر است با

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n,$$

و بنابراین می‌گوییم که پیچیدگی الگوریتم ترتیب حبابی برابر $O(n^2)$ است.

مثال ۸.۲

با دنباله ۷، ۱۰، ۴، ۶، ۳ شروع کنید.

بعد از ۴ مقایسه به دنباله ۷، ۴، ۶، ۳، ۱۰ می‌رسیم.

بعد از سه مقایسه بعدی به دنباله ۴، ۶، ۳، ۷، ۱۰ می‌رسیم.

با دو مقایسه بعدی به دنباله ۴، ۳، ۶، ۷، ۱۰ می‌رسیم.

بعد از مقایسه نهایی دنباله ۳، ۴، ۶، ۷، ۱۰ را خواهیم داشت.

ترتیب ادغامی[۲]

در این‌جا ایده این است که دنباله مفروض را به دو دنباله به‌طول تقریباً یکسان تجزیه نموده و بعد از مرتب‌کردن هریک از آنها، دو دنباله حاصل را ادغام نماییم.

---
[۱] bubblesort
[۲] mergesort

روند ترکیب کردن دو دنباله مرتب به‌طول‌های l و m با $l + m - ۱$ مقایسه صورت می‌گیرد. برای فهم این موضوع، فرض کنید دو لیست این‌چنینی داریم که هر دو به‌صورت صعودی مرتب شده‌اند. کوچک‌ترین اعداد (اولین اعداد) دو لیست را مقایسه کنید و عدد کوچک‌تر را به‌عنوان اولین عضو لیست جدید L درنظر گرفته و از لیست قبلی خود حذف کنید. این عمل را برای به‌دست آوردن دومین عضو لیست L تکرار کنید و کار را به‌همین منوال ادامه دهید. تعداد مقایسه‌های مورد نیاز $l + m - ۱$ است زیرا وقتی تنها یک عضو از دو لیست اولیه باقی‌مانده است دیگر نیازی به مقایسه نیست.

قبل از ادغام دو لیست، هریک از لیست‌ها به‌روش مشابه‌ای مرتب می‌شوند. فرض کنید t_n معرف تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب کردن یک لیست n عضوی با این روش باشد. اگر n را به $l + k$ افراز کنیم آنگاه

$$t_n = t_l + t_k + l + k - ۱ = t_l + t_k + n - ۱.$$

بنابراین اگر حالت خاص $n = ۲^m$ را درنظر بگیریم آنگاه با فرض این‌که در هر مرحله لیست به دو بخش تقسیم شود، خواهیم داشت

$$t_{۲^m} = ۲t_{۲^{m-۱}} + (۲^m - ۱).$$

با قراردادن $a_m = t_{۲^m}$ رابطه بازگشتی به‌فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$a_m = ۲a_{m-۱} + (۲^m - ۱). \qquad (۱۲.۲)$$

با به‌کار بردن روش بخش ۲.۲، ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_m = ۲a_{m-۱}$ را حل کنید. جواب به‌وضوح برابر است با $a_n = A۲^n$ که A عددی ثابت است. سپس باید جوابی خصوصی از (۱۲.۲) را پیدا کنیم. مقدار زیر را امتحان کنید

$$a_n = Bn۲^n + C.$$

(امتحان کردن $a_n = B۲^n + C$ نتیجه نخواهد داد زیرا $a_n = ۲^n$ یک جواب رابطه همگن است، پس بر اساس راهنمایی داده‌شده در قضیه ۱.۲(ii) عدد n را نیز در رابطه می‌گنجانیم.)
در این‌صورت به تساوی زیر نیاز داریم

$$Bn۲^n + C = ۲B(n - ۱)۲^{n-۱} + ۲C + ۲^n - ۱$$

یعنی این‌که

$$۰ = -B.۲^n + ۲^n - ۱ + C.$$

بنابراین قرار می‌دهیم $B = C = ۱$ تا سرانجام به رابطه $a_n = A.۲^n + n۲^n + ۱$ برسیم. ولی $a_۱ = ۱$، و بنابراین $A = -۱$؛ پس

$$a_n = ۲^n(n - ۱) + ۱.$$

بنابراین $t_{۲^m} = ۱ + ۲^m(m - ۱)$. با قراردادن $n = ۲^m$، نتیجه می‌گیریم

$$t_n = ۱ + n(\log_۲ n - ۱);$$

از این‌رو روش ترتیب ادغامی دارای پیچیدگی $O(n \log n)$ بوده که نسبت به $O(n^۲)$، پیچیدگی ترتیب حبابی، بهتر است.

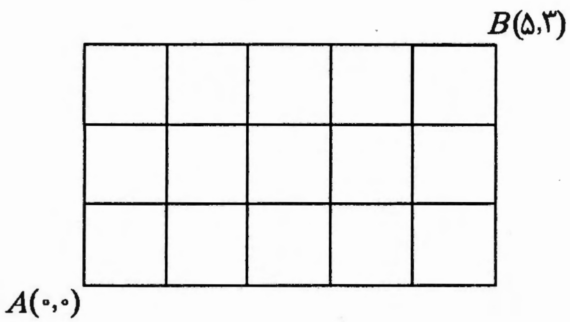
۶.۲ اعداد کتلان

در این بخش دنباله معروفی از اعداد را که به نام اعداد کتلان[۱] شناخته شده‌اند معرفی می‌کنیم. این اعداد در تعداد قابل ملاحظه‌ای از ساختارهای متفاوت به‌عنوان اعداد شمارنده ظاهر می‌شوند. این اعداد به نام کتلان، ریاضی‌دان بلژیکی (۱۸۹۴–۱۸۱۴)، که در آثار خود به آنها پرداخت نام‌گذاری شده‌اند، ولی قبل از آن نیز چند ریاضی‌دان، از جمله اویلر در مثلثی‌کردن چندضلعی‌ها، آنها را مطالعه کرده بودند.

یکی از موارد ظهور اعدد کتلان را به‌تفصیل بررسی خواهیم‌کرد؛ بحث را با مثال ساده زیر شروع می‌کنیم.

مثال ۹.۲

در شکل ۳.۲ چند مسیر بالا—راست از A به B وجود دارد؟



شکل ۳.۲

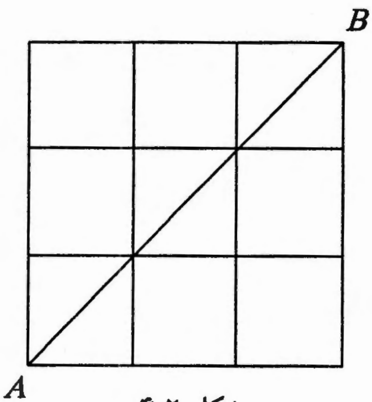
جواب

منظور ما از یک مسیر بالا—راست مسیری از A به B است که همواره روی اضلاع مربع‌ها به‌سمت بالا و یا به‌سمت راست حرکت می‌کند. هر مسیری باید متشکل از ۸ حرکت باشد که از این تعداد ۵ حرکت به‌سمت راست بوده و ۳ حرکت به‌سمت بالا است، بنابراین تعداد مسیرهای ممکن برابر $\binom{۸}{۳}$ است.

[۱] Catalan numbers

در حالت کلی، در یک آرایه $m \times n$ تعداد مسیرهای بالا—راست از رأس پایینی سمت چپ به رأس بالایی سمت راست برابر $\binom{m+n}{n}$ است.

حال فرض کنید در یک مربع $n \times n$ به‌دنبال عدد p_n هستیم که p_n معرف تعداد مسیرهای بالا—راست از رأس پایینی سمت چپ به رأس بالایی سمت راست بوده به‌قسمی‌که این مسیرها هرگز بالای قطر AB نروند. در حالت $n = ۳$، شکل ۴.۲، پنج مسیر این‌چنینی وجود دارد که با $RURURU$، $RURRUU$، $RRUURU$، $RRURUU$، $RRRUUU$ نمایش داده می‌شوند، که U و R به‌ترتیب معرف بالا و راست هستند. پس $p_۳ = ۵$. مقدار p_n چقدر است؟

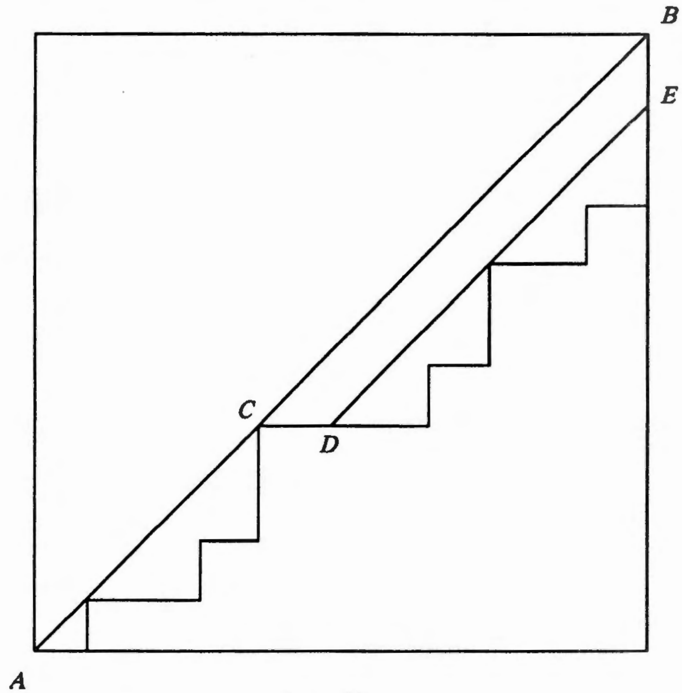


شکل ۴.۲

هر مسیر واجد شرطی (بهتر است آن‌را یک مسیر خوب بنامیم) از A به B باید قبل از B با قطر برخورد داشته باشد حتی اگر این برخورد تنها در A باشد. بنابراین یک مسیر خوب از A به B را درنظر گرفته و فرض کنید که آخرین نقطه تماس آن با قطر قبل از B نقطه $C(m, m)$ باشد که $۱ \leq m < n$. در این‌صورت تعداد p_m امکان برای بخشی از مسیر که بین A و C قرار می‌گیرد وجود دارد. مسیر سپس باید به $D(m + ۱, m)$ ادامه داده و سرانجام به $E(n, n - ۱)$ برسد، ولی هرگز بالای خط DE قرار نخواهد گرفت، زیرا در غیر این‌صورت C آخرین نقطه تماس قبل از B نخواهد بود. ولی D و E رئوس متقابل از یک مربع به‌طول ضلع $n - m - ۱$ می‌باشند، پس تعداد مسیرهای خوب از D به E برابر $p_{n-m-۱}$ است. شکل ۵.۲ را ببینید.

بنابر اصل ضرب، تعداد مسیرهای خوب از A به B که آخرین نقطه تماس آنها با قطر، قبل از B، نقطه (m, m) است برابر است با $p_m p_{n-m-۱}$. چون m هر مقداری بین ۰ و $n - ۱$ را اختیار می‌کند، از اصل جمع، با $p_۰ = ۱$، نتیجه می‌شود

$$p_n = \sum_{m=۰}^{n-۱} p_m p_{n-m-۱}. \qquad (۱۳.۲)$$



شکل ۵.۲

این رابطه بازگشتی متمایز از روابطی است که تا کنون دیده‌ایم، ولی با استفاده از توابع مولد می‌توان آن را حل کرد. فرض کنید $f(x)$ تابع مولد باشد:

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots.$$

پس

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n (p_0 p_n + p_1 p_{n-1} + \cdots + p_n p_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} x^n \qquad (\text{بنابر } (۱۳.۲)). \end{aligned}$$

بنابراین $xf^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} x^{n+1} = f(x) - 1$، و از آن‌جا

$$xf^2(x) - f(x) + 1 = 0.$$

از حل این معادله درجه دو نتیجه می‌گیریم

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{1}{2x}\{1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}\}.$$

به‌منظور پرهیز از داشتن جمله‌ای به‌فرم $\frac{1}{x}$ در $f(x)$، علامت منفی را انتخاب می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2x}\{1-(1-\frac{1}{2}.4x-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{4^2x^2}{2!}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{4^3x^3}{3!}-\cdots)\} \\ &= \frac{1}{2x}\{\frac{1}{2}.4x+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{4^2x^2}{2!}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{4^3x^3}{3!}+\cdots\} \\ &= 1+\frac{1}{2}.\frac{4x}{2!}+\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{4^2x^2}{3!}+\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{4^3x^3}{4!}+\cdots. \end{aligned}$$

بنابراین برای $n \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n(n+1)!}4^n = \frac{2^n}{(n+1)!}.1.3.5.\ldots.(2n-1) \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!}.\frac{(2n)!}{2^n.n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

پس، به‌عنوان مثال، $p_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$ و $p_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14$. توجه کنید که $p_0 = 1$ با قرارداد $\binom{0}{0} = 1$ نیز توافق دارد.

اعداد p_n **اعداد کتلان** هستند که معمولاً با C_n نمایش داده می‌شوند. پس

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{14.2}$$

شروع دنباله $(C_n)_{n\geq 0}$ عبارت است از

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 139,\ 429,\ \ldots.$$

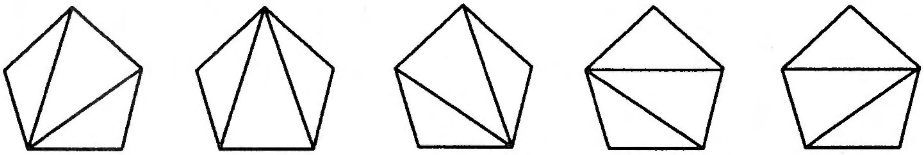
از (۱۳.۲) نتیجه می‌گیریم

$$C_m = C_0C_{m-1}+C_1C_{m-2}+\cdots+C_{m-1}C_0. \tag{15.2}$$

همچنان‌که قبلاً یادآور شدیم اعداد کتلان در موقعیت‌های زیادی رخ می‌دهند. از جایگزینی U و R به‌ترتیب با ۱ و ۰، تفسیر زیر حاصل می‌شود:

C_n برابر تعداد دنباله‌های دوتایی به‌طول $2n$ است که دقیقاً حاوی n عنصر ۰ بوده و این‌که در هر مرحله از دنباله، تعداد ۱ های موجود تا آن نقطه بیشتر از تعداد ۰ ها نباشد.
علاقه اویلر در مسئله زیر بود:

C_{n-2} برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان یک n ضلعی محدب را با رسم $n-3$ قطر غیرمتقاطع به نواحی مثلثی تقسیم نمود. برای مثال، C_3 حالت ممکن برای مثلثی‌کردن یک پنج‌ضلعی منظم در شکل ۶.۲ نشان داده‌شده است.



شکل ۶.۲

در رابطه با این مسئله تمرین ۱۶.۲ را ببینید. تمرین ۱۷.۲ رخداد دیگری از C_n را بیان می‌کند.

استخراج دیگری برای فرمول (۱۴.۲)

این بخش را با اشاره به این نکته به‌پایان می‌بریم که روش ماهرانه دیگری برای شمردن مسیرهای خوب بالا—راست وجود دارد؛ این روش منتسب به آندری (D. André , ۱۸۸۷) است. به‌جای استفاده از رابطه بازگشتی نسبتاً پیچیده (۱۳.۲)، این روش از یک اصل ماهرانه آینه استفاده می‌کند.

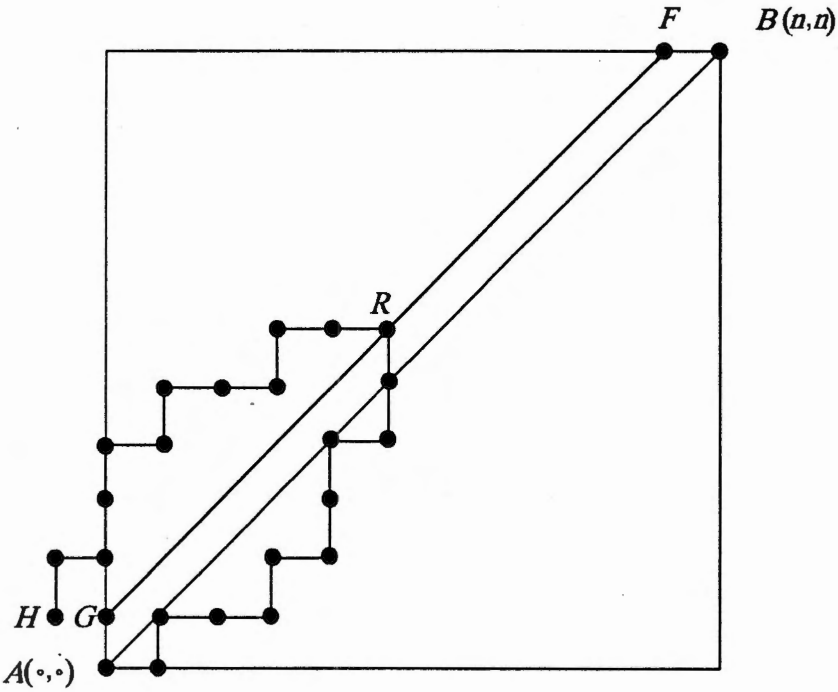
تعداد مسیرهای خوب از $A(\circ,\circ)$ به $B(n,n)$ که قطر AB را قطع نمی‌کنند برابر است با کل $\binom{2n}{n}$ مسیر بالا—راست از A به B منهای تعداد مسیرهایی که AB را قطع می‌کنند. اجازه دهید مسیرهای قطع کننده AB را مسیرهای بد بنامیم.

یک مسیر بد را درنظر بگیرید. اولین نقطه‌ای روی این مسیر وجود دارد که بالای AB قرار دارد؛ فرض کنید این نقطه برابر $R(m,m+1)$ باشد. اگر بخش AR از این مسیر را با تصویر آن نسبت به آینه GF جایگزین کنیم (شکل ۷.۲) آنگاه یک مسیر بالا—راست از $H(-1,1)$ به $B(n,n)$ به‌دست می‌آوریم. به‌عکس، هر مسیر بالا—راست از H به B باید GF را در نقطه‌ای قطع کند، و این از روی دقیقاً یک مسیر بد از A به B حاصل می‌شود. بنابراین تعداد مسیرهای بد دقیقاً برابر است با تعداد مسیرهای بالا—راست از $(-1,1)$ به (n,n)، یعنی

$$\binom{n+1+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}.$$

از این‌رو نهایتاً تعداد مسیرهای خوب از A به B برابر است با

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$



شکل ۷.۲

تمرینات

تمرین ۱.۲

روابط بازگشتی زیر را حل کنید

(a) $a_n = \frac{۱}{۲}a_{n-۱} + ۱,\ a_۱ = ۱;$

(b) $a_n = ۵a_{n-۱} - ۶a_{n-۲},\ a_۱ = -۱,\ a_۲ = ۱;$

(c) $a_n = ۶a_{n-۱} - ۹a_{n-۲},\ a_۱ = ۱,\ a_۲ = ۹;$

(d) $a_n = ۴a_{n-۱} - ۳a_{n-۲} + ۲^n,\ a_۱ = ۱,\ a_۲ = ۱۱.$

تمرین ۲.۲

فرض کنید b_n معرف تعداد دنباله‌های دوتایی n رقمی باشد که حاوی دو صفر متوالی نباشند. نشان دهید $b_n = b_{n-۱} + b_{n-۲}$، $n \geq ۳$، و مقدار b_n را به‌دست آورید.

تمرین ۳.۲

فرض کنید d_n معرف تعداد دنباله‌های n رقمی باشد که هر رقم برابر ۰ ، ۱، یا ۲ بوده و در آنها دو رقم متوالی ۱ یا دو رقم متوالی ۲ رخ ندهند. نشان دهید $d_n = ۲d_{n-۱} + d_{n-۲}$. این

رابطه را حل کرده و نشان دهید

$$d_n = ۱ + ۲\binom{n+۱}{۲} + ۲^۲\binom{n+۱}{۴} + ۲^۳\binom{n+۱}{۶} + \cdots.$$

تمرین ۴.۲

با به‌کار بردن توابع مولد، تمرین‌های ۱.۲(a) و ۱.۲(b) را حل کنید.

تمرین ۵.۲

خرگوش‌های فیبوناتچی. با یک جفت خرگوش شروع کنید، و فرض کنید که هر جفت در هریک از دو نسل بعدی یک جفت جدید تولید کرده و سپس می‌میرند. عدد f_n، تعداد جفت‌های موجود در نسل n ام، را مشخص کنید ($f_۱ = ۱ = f_۲$).

تمرین ۶.۲

رابطه بازگشتی (۱.۲) مربوط به پرچم‌ها را با روش تکرار حل کنید.

تمرین ۷.۲

اعداد لوکاس، L_n، با روابط $L_۱ = ۱$، $L_۲ = ۳$، و $L_n = L_{n-۱} + L_{n-۲}$ $(n \geq ۳)$ تعریف می‌شوند. یک فرمول برای L_n به‌دست آورید.

تمرین ۸.۲

رابطه (۱۲.۲) را با استفاده از روش داده‌شده در مثال ۴.۲، با حذف کردن ابتدا ۱ و سپس توان‌های ۲ حل کنید. باید رابطه $a_n - ۵a_{n-۱} + ۸a_{n-۲} - ۴a_{n-۳} = ۰$ را به‌دست آورید.

تمرین ۹.۲

نشان دهید که اگر a'_n و a''_n دو جواب رابطه $a_n = Aa_{n-۱} + Ba_{n-۲}$ باشند آنگاه $a'_n + a''_n$ نیز یک جواب است.

تمرین ۱۰.۲

نشان دهید که تابع مولد دنباله فیبوناتچی برابر $\frac{x(۱+x)}{۱-x-x^۲}$ است. از این‌جا (۷.۲) را نتیجه بگیرید.

تمرین ۱۱.۲

قرار دهید $M = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$.

(a) ثابت کنید $M^{n+۲} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+۱} \\ F_{n+۱} & F_{n+۲} \end{pmatrix}$ که F_n برابر n امین عدد فیبوناتچی است.

(b) با دترمینان گرفتن نشان دهید $F_nF_{n+۲} - F^۲_{n+۱} = (-۱)^n$.

(c) با درنظر گرفتن تساوی $M^{m+n+۲} = M^{m+۱}M^{n+۱}$، ثابت کنید

$$F_{m+n} = F_mF_n + F_{m-۱}F_{n-۱}.$$

تمرین ۱۲.۲

نشان دهید $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 2$.

تمرین ۱۳.۲

برای هریک از عبارت‌های زیر، حاصل‌جمع را برای چند مقدار ابتدایی از n محاسبه نموده و برای حالت کلی آن جوابی را حدس زده، و سپس حدس خود را با استقرا ثابت کنید.

(a) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1}$;

(b) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n}$;

(c) $F_1 - F_2 + F_3 - \cdots + (-1)^{n-1}F_n$.

تمرین ۱۴.۲

در زنگ‌زدن، جایگشت‌های متوالی از n زنگ یکی پس از دیگری زده می‌شوند. با اعمال جایگشت π، جایگشت بعدی باید به‌گونه‌ای باشد که هر زنگ حداکثر یک مکان جابه‌جا شود. برای مثال، برای $n = 4$، جایگشت ۱۲۳۴ با یکی از جایگشت های ۲۱۳۴، ۲۱۴۳، ۱۳۲۴، ۱۲۴۳ می‌تواند دنبال می‌شود. نشان دهید اگر a_n معرف تعداد جایگشت‌هایی باشد که بعد از $n \ldots 12$ ظاهر می‌شوند آنگاه $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$. از این‌جا مقدار a_n را به‌دست آورید.

تمرین ۱۵.۲

(a) فرض کنید g_n معرف تعداد زیرمجموعه‌هایی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد که حاوی هیچ دو عدد متوالی نباشند. از این‌رو، به‌عنوان مثال، $g_1 = 2$ (حاوی مجموعه خالی نیز می‌باشد !) و $g_2 = 3$. یک رابطه بازگشتی برای g_n به‌دست آورده و نشان دهید $g_n = F_{n+1}$.

(b) یک زیرمجموعه k عضوی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ را می‌توان به‌عنوان یک دنباله دوتایی به‌طول n حاوی k درایه ۱ و $n-k$ درایه ۰ درنظر گرفت (مثال ۱۲.۱). از مثال ۱۷.۱ استفاده کرده و نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی $\{1, \ldots, n\}$ که حاوی دو عدد متوالی نباشند برابر $\binom{n-k+1}{k}$ است.

$k=p$
$n-k=q$

(c) نتیجه بگیرید $F_n = \sum_{k \le \frac{1}{2}n} \binom{n-k}{k}$. این رابطه چگونه در مثلث پاسکال ظاهر می‌شود؟

تمرین ۱۶.۲

فرض کنید t_n معرف تعداد روش‌هایی باشد که بتوان یک $n+2$ ضلعی محدب را با رسم $n-1$ قطر مثلثی کرد. به‌روش زیر نشان دهید $t_n = C_n$. رئوس را با ۱، ۲، ...، $n+2$ برچسب‌گذاری کنید، و مثلث حاوی ضلع ۱۲ را درنظر بگیرید. اگر رأس r سومین رأس این مثلث باشد آنگاه به چند طریق می‌توان دو ناحیه داخلی دیگر از $n+2$ ضلعی را

مثلثی کرد؟ نتیجه بگیرید $t_n = \sum t_i t_j$ که عمل جمع روی تمامی زوج‌های i و j با خاصیت $i + j = n - ۱$ صورت می‌گیرد.

تمرین ۱۷.۲

نشان دهید اگر $۲n$ نقطه روی محیط یک دایره مشخص شوند و اگر a_n معرف تعداد حالت‌هایی باشد که بتوان این نقاط را به‌صورت جفتی با وترهای غیرمتقاطع به‌هم وصل نمود، آنگاه $a_n = C_n$.

تمرین ۱۸.۲

فرمول اویلر $C_n = \frac{۲.۴.۶ \ldots (۴n - ۲)}{(n+۱)!}$ را برای اعداد کنلان به‌دست آورید، و ملاحظه کنبد که $(n + ۱)C_n = (۴n - ۲)C_{n-۱}$.

تمرین ۱۹.۲

نشان دهید اگر $n \geq ۴$ آنگاه $d_n > (n - ۱)!$.

تمرین ۲۰.۲

ترتیب درجی. به‌روش زیر یک لیست $x_۱, \ldots, x_n$ را به‌صورت صعودی مرتب کنید. در مرحله ۱ ، لیست $L_۱$ را متشکل از تنها $x_۱$ بسازید. در مرحله ۲، $x_۱$ را با $x_۲$ مقایسه نموده و لیست $L_۲$ را متشکل از $x_۱$ و $x_۲$ به‌صورت صعودی بسازید. در مرحله i، وقتی $x_۱, \ldots, x_{i-۱}$ به صورت صعودی در لیست $L_{i-۱}$ قرار گرفته‌اند، x_i را به‌نوبت با هریک از عناصر x_j واقع در لیست $L_{i-۱}$ مقایسه نمایید تا وقتی‌که محل مناسب آن به‌دست آید. این عمل را تا به‌دست آوردن L_n انجام دهید. کارایی این روش را با روش ترتیب حبابی مقایسه کنید.

تمرین ۲۱.۲

در یک مدل ریاضی از جمعیّت روباه‌ها و خرگوش‌ها، اعداد x_n و y_n که به‌ترتیب معرف جمعیت روباه‌ها و خرگوش‌ها در پایان n سال می‌باشند، با رابطه زیر مرتبط هستند:

$$\begin{pmatrix} x_{n+۱} \\ y_{n+۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰.۶ & ۰.۵ \\ -۰.۱۶ & ۱.۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

نشان دهید $۵x_{n+۲} - ۹x_{n+۱} + ۴x_n = ۰$، و از آن‌جا مقدار x_n را برحسب $x_۰$ و $y_۰$ به‌دست آورید. نتیجه بگیرید اگر $x_۰ < \frac{۵}{۴}y_۰$ و $n \to \infty$ آنگاه $x_n \to \frac{۵}{۴}y_۰ - x_۰$. در رابطه با y_n چطور؟

تمرین ۲۲.۲

در یک مسابقه فوتبال، n گروه وجود دارد. در مرحله بعدی رقابت، برنده یک گروه با تیم دوم گروه دیگری بازی می‌کند. به چند طریق می‌توان تیم‌های برنده و تیم‌های دوم را برای بازی آماده نمود؟

فصل ۳

مقدمه‌ای بر گراف‌ها

ایده گراف را با ارائه چند مثال معرفی کرده، و روی دو نوع از گراف، درخت‌ها و گراف‌های تسطیح‌پذیر تمرکز خواهیم نمود. مباحث بیشتری از نظریه گراف در فصل بعد مطالعه خواهد شد.

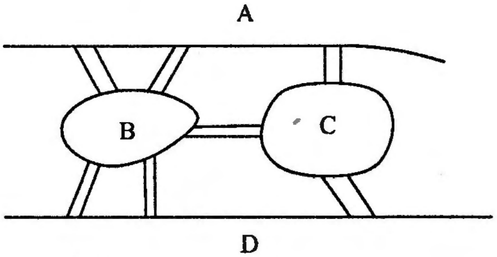
۱.۳ مفهوم یک گراف

مثال ۱.۳ (هفت پل کونیگذبرگ)

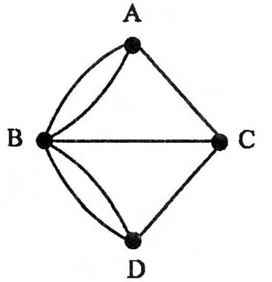
در اوایل قرن نوزدهم هفت پل روی رودخانه پریگل[1] واقع در شهر کونیگذبرگ[2] (کالنینگراد فعلی) در پروس شرقی[3] قرار داشت. گفته می‌شود که ساکنین شهر تلاش می‌کردند تا از خانه خارج شده و پس از عبور دقیقاً یک‌بار از روی هر پل به خانه خود باز گردند. با تقویت این باور که چنین عملی شدنی نیست، از اویلر خواسته شد تا در مورد امکان انجام این کار نظر بدهد. اثبات عدم وجود جواب برای این مسئله توسط اویلر، اغلب به‌عنوان نقطه شروع نظریه گراف درنظر گرفته می‌شود. آنچه که اویلر انجام داد اساساً تبدیل شکل ۱.۳(a) به دیاگرام ساده ۱.۳(b) بود. در این‌جا هر بخش از خشکی توسط یک نقطه (رأس) و هر پل با یک خط نمایش داده شده است. اگر گشت مورد نظر وجود می‌داشت، آنگاه هر دفعه که یک رأس توسط یک ضلع ملاقات می‌شد برای ترک آن رأس باید از ضلع دیگری استفاده می‌شد؛ از این‌رو هر رأسی باید با تعداد زوجی ضلع برخورد می‌داشت. چون این خاصیت برقرار نیست، چنین گشتی وجود ندارد. نمودار شکل ۱.۳(b) مثالی از یک گراف است. این گراف دارای چهار رأس و هفت ضلع است.

---

[1] Pregel river [2] Königsberg [3] East Prussia



(a)

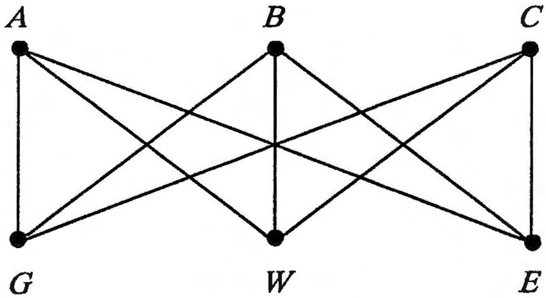


(b)

شکل ۱.۳

مثال ۲.۳ (مسئله امکانات)

یک مسئله قدیمی به این شرح است که سه خانه A، B، C می‌خواهند دارای امکانات آب، گاز و برق باشند به‌قسمی‌که اتصالات به‌کار رفته یکدیگر را قطع نکنند. به‌عبارت دیگر آیا امکان رسم نمودار شکل ۲.۳ به نحوی که هیچ دو خطی یکدیگر را قطع نکنند وجود دارد؟ این نمودار مثالی دیگر از یک گراف است.



شکل ۲.۳ گراف امکانات

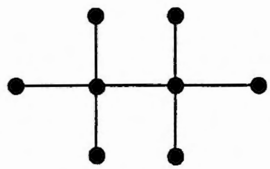
تعریف ۱.۳

یک گراف G متشکل است از یک مجموعه متناهی V از رئوس و یک گردایه E از زوج‌هایی از رئوس به‌نام اضلاع. رئوس و اضلاع به‌ترتیب با نقطه و خط (نه لزوماً خط راست) نمایش داده می‌شوند، که خط‌ها رئوس را به‌هم وصل می‌کنند. اگر ضلع e رئوس x و y را متصل کند آنگاه x و y را مجاور نامیده و گفته می‌شود ضلع e با دو رأس x و y برخورد دارد. هر ضلعی که یک رأس x را به خودش وصل کند یک حلقه نامیده می‌شود.

توجه کنید که می‌گوییم E گردایه‌ای از زوج‌ها است و نه مجموعه‌ای از زوج‌ها. این به‌منظور امکان وجود تکرار یک ضلع است. اگر دو رأس توسط دو یا تعداد بیشتری از اضلاع به‌هم وصل شوند آنگاه اضلاع مربوطه را اضلاع مرکب می‌نامند. به‌عنوان مثال، گراف شکل

۱.۳ (b) دو جفت از اضلاع مرکب دارد. گراف مسئله امکانات ساده است، به این معنی که این گراف حاوی حلقه و اضلاع مرکب نیست.

در یک گراف بدون حلقه، تعداد اضلاعی که با یک رأس v برخورد دارند را **درجه** یا **ظرفیت** v نامیده و با $d(v)$ نمایش می‌دهند. دومین نام یادآور رسم ملکول‌های شیمیایی، به‌عنوان یکی از اولین زمینه‌های طرح گراف است. برای نمونه، ملکول اتان $(C_۲H_۶)$ را می‌توان با گراف شکل ۳.۳ نمایش داد، که در آن دو رأس داخل با ظرفیت ۴، معرف دو اتم کربن بوده (ظرفیت کربن ۴ است)، و شش رأس دیگر، با ظرفیت ۱، معرف اتم‌های هیدروژن هستند. رئوس از درجه ۱ را رئوس **پایانی** یا **آویزان** می‌نامند.



شکل ۳.۳ اتان

اگر گرافی حاوی حلقه باشد آنگاه سهم یک حلقه در درجه رأس مربوط به آن ۲ برابر است. این قرارداد برقراری نتیجه سودمند زیر را در بر دارد.

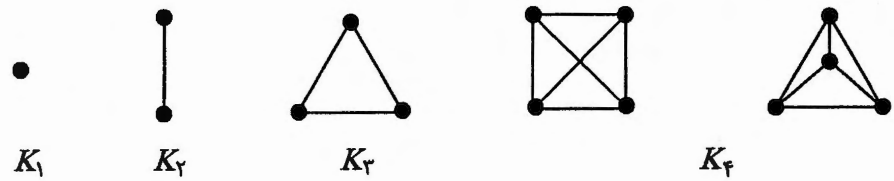
قضیه ۱.۳
مجموع درجه رئوس یک گراف دوبرابر تعداد اضلاع آن است.

اثبات
سهم هر ضلع در مجموع درجه رئوس برابر ۲ است. ■

این نتیجه را بعضی اوقات **لم دست دادن** می‌نامند: در یک مهمانی تعداد دست‌های تکان داده‌شده دوبرابر تعداد دست دادن‌ها است. از این حکم نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۳
در یک گراف، مجموع درجه رئوس زوج است.

مثال ۳.۳
گراف کامل K_n گراف ساده با n رأس است که در آن هر دو رأسی مجاور هستند. چون هر رأس باید از درجه $n-۱$ باشد پس q، تعداد اضلاع، باید در رابطه $۲q = n(n-۱)$ صدق کند، بنابراین $q = \frac{۱}{۲}n(n-۱)$. این در واقع همان چیزی است که انتظار می‌رود، زیرا q برابر است با تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب دو رأس از n رأس، یعنی $q = \binom{n}{۲} = \frac{۱}{۲}n(n-۱)$.



شکل ۴.۳

گراف‌های K_n، $n \leq 4$، در شکل ۴.۳ نشان داده شده‌اند. نماد K_n به‌افتخار کوراتسکی [1]، ریاضی‌دان لهستانی (۱۸۹۶–۱۹۸۰)، است که قضیه مهم او راجع به تسطیح‌پذیری در بخش ۶.۳ بیان خواهد شد. توجه کنید که گراف K_4 حاوی K_3 است؛ این ایده که یک گراف در گراف دیگری قرار داشته باشد با تعریف زیر فرموله می‌شود.

تعریف ۲.۳
یک گراف H را زیرگراف یک گراف G نامند هرگاه مجموعه رئوس و اضلاع H به‌ترتیب زیرمجموعه مجموعه رئوس و اضلاع G باشند.

پس، برای مثال، K_m یک زیرگراف K_n است هرگاه $m < n$؛ برای این منظور کافی است K_n را به m رأس آن محدود کنیم.

سرانجام در این بخش به معرفی چند نماد استاندارد می‌پردازیم. از این به بعد، از p و q به‌ترتیب برای تعداد رئوس و اضلاع یک گراف استفاده کرده، و یک چنین گرافی را یک (p, q) گراف می‌نامیم. بنابراین، به‌عنوان مثال، K_4 یک $(4, 6)$ گراف است.

۲.۳ مسیر در گراف‌ها

در بسیاری از کاربردهای نظریه گراف موضوع حرکت روی گراف، حرکت از رأسی به رأس دیگر از طریق اضلاع گراف، دخالت دارد. در رابطه با این ایده به ارائه چند تعریف می‌پردازیم.

تعریف ۳.۳
یک گشت [2] در یک گراف G عبارت است از دنباله‌ای از اضلاع به‌فرم

$$v_0v_1,\ v_1v_2,\ v_2v_3,\ \cdots,\ v_{n-1}v_n.$$

بعضی اوقات در یک گراف ساده، این گشت به‌شکل فشرده‌تری به‌وسیله $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ نمایش داده می‌شود. توجه کنید که به‌طور ضمنی یک جهت

[1] K. Kuratowski [2] walk

برای گشت درنظر گرفته شده است. رأس‌های v_0 و v_n را به‌ترتیب رئوس **آغازین** و **پایانی** گشت و تعداد اضلاع، n، را **طول** آن می‌نامند.

گشتی را که اضلاع آن متمایز باشند یک **گذر**[۱] می‌نامند. گذری که تمامی رئوس آن، مگر رأس‌های آغازین و پایانی، متمایز باشند یک **مسیر**[۲] نامیده می‌شود. یک مسیر با خاصیت $v_0 = v_n$ یک **دور**[۳] است.

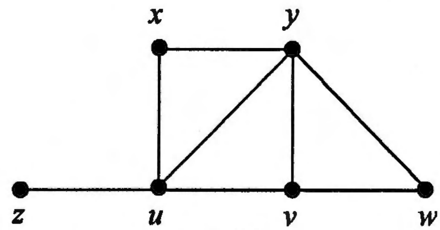
مثال ۴.۳

در گراف شکل ۵.۳،

$z \to u \to y \to v \to u$ یک گذر است ولی یک مسیر نیست؛

$u \to y \to w \to v$ یک مسیر به‌طول ۳ است؛

$u \to y \to w \to v \to u$ یک دور به‌طول ۴ است.



شکل ۵.۳

طبیعی به‌نظر می‌رسد که دورهای $u \to y \to v \to u$ و $y \to v \to u \to y$ را یکسان درنظر بگیریم؛ از این‌رو یک دور را اغلب با اضلاع آن مشخص می‌کنیم. برای $n > 1$ دو نماد زیر را به‌کار می‌بریم: C_n معرف یک دور به‌طول n (یعنی، دور با n ضلع و n رأس) بوده و P_n مسیر به‌طول $n - 1$ (یعنی با n رأس) می‌باشد. بنابراین، برای مثال، $P_2 = K_2$ و $C_3 = K_3$.

تعریف ۴.۳

یک گراف را **همبند**[۴] نامیم هرگاه به‌ازای هر دو رأس x و y یک مسیر از x به y وجود داشته باشد. یک گراف غیرهمبند متشکل از تعدادی گراف همبند است که **مؤلفه‌های** آن نامیده می‌شوند.

۳.۳ درخت‌ها

تعریف ۵.۳

یک گراف ساده بدون دور را **درخت** می‌نامند.

برای مثال گراف اتان، شکل ۳.۳، و گراف P_n درخت هستند. توجه کنید که در گراف اتان

---

[۱] trail [۲] path [۳] cycle [۴] connected

$p = 8$ و $q = 7$، در حالی‌که در گراف P_n داریم $p = n$ و $q = n - 1$؛ در هر حالت تساوی $p - q = 1$ برقرار است. این خاصیت در واقع مشخصه گراف‌های همبندی است که درخت هستند. برای اثبات این موضوع از نتیجه مفید زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۳

اگر T یک درخت با $p \geq 2$ رأس باشد آنگاه T دارای حدّاقل دو برگ است.

اثبات

چون T دارای p رأس است تمامی مسیرها در T طول کمتر از p دارند. از این‌رو یک مسیر به‌طول ماکزیمم مانند $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_r$ در T وجود دارد. ادعا می‌کنیم که v_1 و v_r هر دو از درجه ۱ هستند. فرض کنید درجه v_1 بزرگ‌تر از ۱ باشد؛ در این‌صورت ضلع دیگری چون v_1v_0 وجود دارد به‌طوری‌که v_0 متمایز از v_2، $\cdots$، v_r است (در غیر این‌صورت یک دور وجود خواهد داشت)، بنابراین مسیر $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_r$ یک مسیر بزرگ‌تر خواهد بود. در نتیجه v_1 از درجه ۱ است، و بحث مشابه‌ای برای v_r برقرار است. ■

قضیه ۳.۳

فرض کنید T یک گراف ساده با p رأس باشد. در این‌صورت احکام زیر معادل هستند:

(i) T یک درخت است؛

(ii) T بدون دور بوده و $p - 1$ ضلع دارد؛

(iii) T همبند بوده و $p - 1$ ضلع دارد.

اثبات

(i) $\Longrightarrow$ (ii) باید نشان دهیم که تعداد اضلاع یک درخت با p رأس برابر $p - 1$ است. این آشکارا برای $p = 1$ برقرار است. فرض کنید حکم برای تمامی درخت‌های با $k \geq 1$ رأس برقرار بوده، و فرض کنید T یک درخت با $k + 1$ رأس باشد. در این‌صورت، بنابر قضیه ۲.۳، T دارای برگی مانند w است. با حذف w و ضلع متصل به آن یک درخت T' با k رأس به‌دست می‌آید. بنا به فرض استقرا T' دارای $k - 1$ ضلع است؛ در نتیجه تعداد اضلاع T برابر $k = 1 + (k - 1)$ است.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) فرض کنید T بدون دور بوده و $p - 1$ ضلع داشته باشد. نیز فرض کنید T متشکل از $t \geq 1$ مؤلفه T_1، $\cdots$، T_t باشد. واضح است که هریک از این مؤلفه‌ها یک درخت است. فرض کنید p_i معرف تعداد رئوس درخت T_i باشد. در این‌صورت $\sum_i p_i = p$ و تعداد اضلاع موجود در T برابر $\sum_i (p_i - 1) = p - t$ است. بنابراین $p - t = p - 1$، یعنی $t = 1$، و از این‌رو T همبند است.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) فرض کنید T همبند بوده و $p - 1$ ضلع داشته باشد. اگر T درخت نباشد آنگاه باید حاوی یک دور باشد. برداشتن یک ضلع از یک دور خاصیت همبندی را از بین نمی‌برد،

بنابراین با حفظ خاصیت همبندی می‌توان از دورهای موجود اضلاعی را حذف نمود تا سرانجام یک درخت ایجاد شود. گراف حاصل باید یک درخت با p رأس و $q < p - ۱$ ضلع باشد که این در تناقض با (ii) است. ■

از این قضیه می‌توان برای اثبات درختی بودن بعضی از ملکول‌های شیمیایی استفاده کرد.

مثال ۵.۳

نشان دهید که ملکول‌های پارافین، $C_nH_{۲n+۲}$، ساختار درختی دارند.

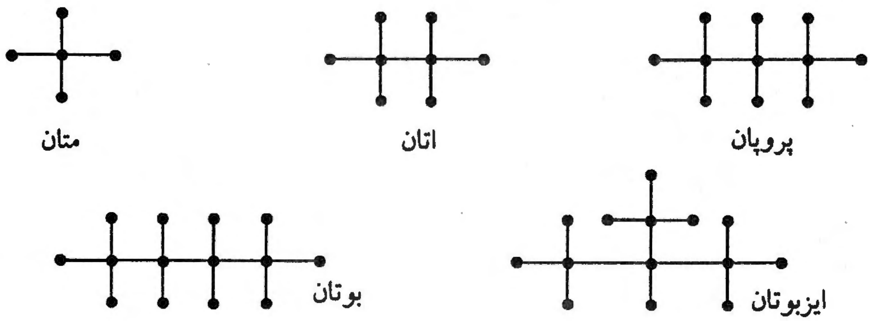
جواب

هر ملکول به‌وسیله یک گراف با $۳n + ۲ = (۲n + ۲) + n$ رأس نمایش داده می‌شود. از این تعداد، n رأس از درجه ۴ بوده و بقیه از درجه ۱ هستند، بنابراین بنابر قضیه ۱.۳،

$$۲q = ۴n + ۲n + ۲ = ۶n + ۲$$

و از آن‌جا $q = ۳n + ۱ = p - ۱$. چون ملکول‌ها همبند هستند، بنابر قضیه ۳.۳، گراف باید درخت باشد.

شکل ۶.۳ چند پارافین را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۳ پارافین‌ها

توجه کنید که متناظر با $C_۴H_{۱۰}$ دو درخت متفاوت وجود دارد.

تعریف ۶.۳

دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ را ایزمورف می‌نامند هرگاه بتوان رئوس هر دو گراف را با برچسب‌های یکسانی برچسب‌گذاری کرد به‌قسمی‌که برای هر زوج u و v از برچسب‌ها، تعدا اضلاع متصل‌کننده u و v در $G_۱$ برابر همین تعداد ضلع در $G_۲$ باشد.

مثال ۶.۳

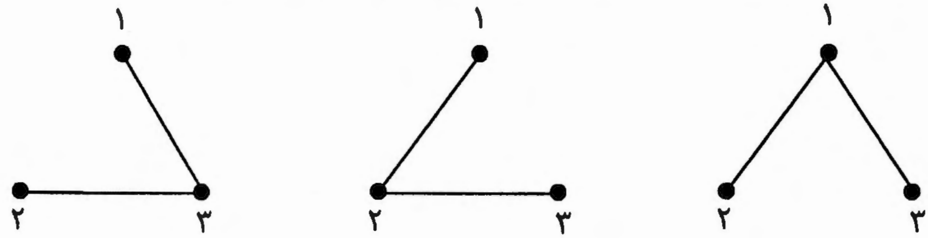
(i) دو گراف نمایش داده‌شده با دو نمودار پایانی در شکل ۴.۳ ایزمورف هستند.

(ii) گراف‌های بوتان و ایزبوتان (شکل ۶.۳) ایزمورف نیستند. در گراف دوم یک رأس

درجه ۴ وجود دارد که به بقیه رئوس درجه ۴ متصل است ولی این خاصیت در گراف اول وجود ندارد.

نمودارهای درختی شبیه به شکل ۶.۳ ابتدا توسط یک شیمی‌دان، کروم براون[۱]، در ۱۸۶۴ معرفی شدند. او این نمودارها را در حین مطالعه خود روی وجود ملکول‌های با فرمول شیمیایی یکسان ولی دارای خواص شیمیایی متفاوت معرفی نمود. مسئله شمارش ملکول‌های غیرایزمورف C_nH_{2n+2} نهایتاً در ۱۸۷۵ توسط کیلی حل شد، ولی جواب او خارج از حوصله این کتاب است.

در این رابطه یک مسئله عبارت است از پیدا کردن $T(n)$، تعداد درخت‌های غیرایزمورف با n رأس. واضح است که $T(1) = T(2) = T(3) = 1$ و می‌توان دید که $T(4) = 2$، $T(5) = 3$، $T(6) = 6$. هیچ فرمول ساده‌ای برای $T(n)$ وجود ندارد، اگرچه $T(n)$ ضریب x^n در یک سری شناخته‌شده خیلی پیچیده است. با این‌حال، یک فرمول خیلی خوب برای تعداد درخت‌های روی n رأس برچسب‌گذاری شده وجود دارد. برای مثال، اگرچه $T(3) = 1$، ولی سه درخت برچسب‌گذاری شده روی رئوس با برچسب‌های ۱، ۲، ۳ وجود دارد. شکل ۷.۳ این درخت‌ها را نشان می‌دهد. کیلی در ۱۸۸۹ نشان داد که تعداد درخت‌های برچسب‌گذاری شده برابر n^{n-2} است. اثباتی از این حکم در فصل ۶ ارائه خواهد شد.



شکل ۷.۳ درخت‌های برچسب‌گذاری شده

۴.۳ درخت‌های فراگیر

فرض کنید که یک گراف همبند معرف یک شبکه راه‌آهن بوده که در آن هر رأس معرف یک شهر و هر ضلع معرف راه‌آهن واصل دو شهر است. نیز فرض کنید که دولت می‌خواهد تعداد راه‌ها را تا حدّ ممکن کم کند با این شرط که هر دو شهری همچنان از طریق شبکه راه‌آهن به‌هم متصل باشند. آنچه که نیاز است در واقع یک درخت می‌باشد به‌قسمی‌که زیرگرافی از گراف داده‌شده بوده و حاوی تمامی رئوس آن باشد.

---
[۱] A. Crum Brown

تعریف ۷.۳
یک درخت فراگیر از یک گراف همبند G درختی است که زیرگراف G بوده و حاوی تمامی رئوس آن باشد.
مثال ۷.۳

(i) $K_۳$ حاوی سه درخت فراگیر است که در شکل ۷.۳ نشان داده شده‌اند.

(ii) $K_۴$ دارای $۴^۲ = ۱۶$ درخت فراگیر است. آنها را رسم کنید. آیا چگونگی ارتباط آنها را با نتیجه سال ۱۸۸۹ کیلی می بینید؟

(iii) در گراف شکل ۵.۳، اضلاع zu، xu، uy، yv، yw تشکیل یک درخت فراگیر می‌دهند.

یک گراف باردار G گرافی است که در آن هر ضلع e دارای برچسبی چون $w(e)$ است که وزن e نامیده شده و معرف مثلاً طول e می‌باشد. در یک چنین حالتی ممکن است که علاقمند به پیداکردن درخت فراگیری از G باشیم که مجموع وزن اضلاع آن کمترین مقدار ممکن باشد. چند الگوریتم مختلف برای پیداکردن درخت‌های فراگیر با وزن می‌نیمم وجود دارد.

الگوریتم حریص[۱]

این اغلب به‌عنوان الگوریتم کروسکل[۲] معروف است.

روند الگوریتم

(i) یک ضلع با کمترین وزن انتخاب کنید.

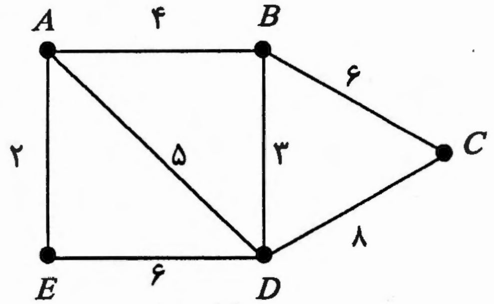
(ii) در هر مرحله، از میان اضلاع انتخاب‌نشده یک ضلع با وزن می‌نیمم به‌قسمی انتخاب کنید که افزودن آن به ضلع‌های انتخاب‌شده قبلی باعث ایجاد دور نشود.

(iii) تا به‌دست آوردن یک درخت فراگیر کار را ادامه دهید.

(اگر گراف داده‌شده دارای p رأس باشد، الگوریتم پس از انتخاب $p - ۱$ ضلع خاتمه می‌یابد.)

مثال ۸.۳
الگوریتم حریص را روی گراف شکل ۸.۳ به‌کار ببرید.
جواب
ابتدا ضلع به‌وزن ۲ AE را انتخاب کنید. سپس BD (به‌وزن ۳) و AB (به‌وزن ۴) را انتخاب کنید. حال نمی‌توانیم AD (به‌وزن ۵) را انتخاب کنیم زیرا باعث ایجاد دور $ABDA$ می‌شود.

[۱] greedy algorithm [۲] Kruskal's algorithm



شکل ۸.۳

به‌دلیل مشابه، ضلع DE را نیز نمی‌توانیم انتخاب کنیم. پس BC (به‌وزن ٦) را انتخاب کنید. در این‌صورت اضلاع AE، AB، BD، BC تشکیل یک درخت فراگیر با وزن می‌نیمم ۱۵ = ٦ + ۴ + ۳ + ۲ می‌دهند.

تصدیق الگوریتم حریص

فرض کنید الگوریتم حریص درخت T را تولید کرده، ولی درخت فراگیر دیگری چون U با وزن کمتر از وزن T وجود دارد. چون $T \neq U$ و تعداد اضلاع آنها برابر است باید ضلعی در T باشد که در U نیست: فرض کنید e یک ضلع این‌چنینی با وزن می‌نیمم باشد. افزودن e به U باید یک دور C ایجاد کند، و این دور باید حاوی ضلعی چون e' باشد که در T نیست. اگر $w(e') < w(e)$ آنگاه به‌جای e باید ضلع e' توسط الگوریتم حریص انتخاب می‌شد، بنابراین $w(e') \geq w(e)$. در نتیجه اگر e' را از C حذف کنیم یک درخت فراگیر V حاصل می‌شود که $w(V) \leq w(U)$ و در مقایسه با U، تعداد اضلاع مشترک آن با T یک ضلع بیشتر است. با تکرار این روند، نهایتاً U را به T تغییر داده و نتیجه می‌گیریم $w(T) \leq w(U) < w(T)$، که یک تناقض است. پس درخت U با خواص یادشده وجود ندارد.

الگوریتم حریص از این جهت که بدون توجه به گرفتاری‌های احتمالی بعدی، در هر مرحله حریصانه به‌دنبال می‌نیمم کردن وزن است به این نام شناخته شده است؛ خوشبختانه در این مورد مشکلی ایجاد نمی‌شود. با این‌حال، نقطه ضعف الگوریتم در این است که در هر مرحله باید عدم ایجاد یک دور را بررسی کند (این امر خصوصاً زمانی که گراف بزرگ باشد امری دشوار است). این مسئله را می‌توان با به‌کار بردن الگوریتم پریم[1] (۱۹۵۷) که اندکی با الگوریتم فوق تفاوت دارد حل نمود. در الگوریتم پریم گراف ساخته‌شده در هر مرحله همبند است (برخلاف الگوریتم حریص که در مثال بالا پس از انتخاب ضلع AE ضلع BD را انتخاب کرد)، و در هر مرحله یک ضلع با وزن می‌نیمم انتخاب می‌شود که درخت موجود را به یک رأس خارج درخت وصل می‌کند. واضح است که اضافه‌نمودن یک چنین ضلعی باعث ایجاد دور نمی‌شود.

[1] Prim's algorithm

الگوریتم پریم

(i) یک رأس انتخاب کرده، و یک ضلع به‌وزن می‌نیمم متصل به آن انتخاب کنید.

(ii) در هر مرحله یک ضلع به‌وزن می‌نیمم انتخاب کنید که یک رأس قبلاً انتخاب‌نشده را به یک رأس انتخاب‌شده قبلی وصل کند. (iii) تا انتخاب تمامی رئوس کار را ادامه دهید.

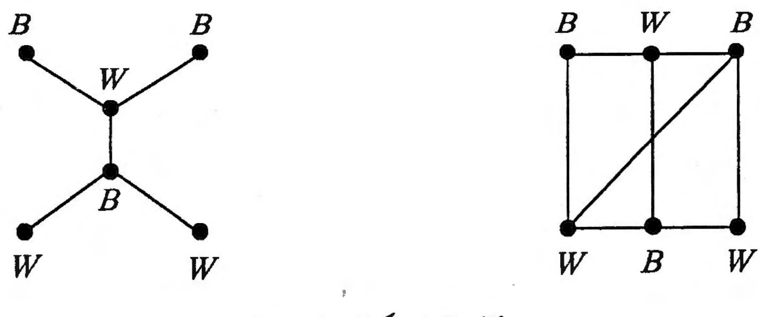
مثال ۸.۳ (نگاهی دوباره)
الگوریتم پریم را با انتخاب رأس B به‌عنوان نقطه شروع به‌کار ببرید. ضلع BD را انتخاب کنید؛ سپس BA (وزن ۴)، AE (وزن ۲) و سرانجام BC (وزن ٦) را انتخاب کنید. با این روش همان درخت فراگیر قبلی به‌دست می‌آید.

الگوریتم سومی وجود دارد که شیوه کار آن حذف‌نمودن اضلاع گراف داده‌شده، از بین بردن دورها، تا به‌دست آوردن یک درخت فراگیر می‌باشد. در هر مرحله یک ضلع به‌وزن ماکزیمم را که حذف آن باعث از دست دادن همبندی نشود از گراف خارج کنید. در مثال ۸.۳، می‌توان به‌ترتیب اضلاع DC، DE، و AD را حذف نمود. در صورتی که تعداد اضلاع گراف زیاد نباشد، این روش از روش‌های دیگر سریع‌تر است.

۵.۳ گراف‌های دوقسمتی

تعریف ۸.۳
یک گراف را دوقسمتی نامند هرگاه مجموعه رئوس آن، یعنی V را بتوان به دو مجموعه B و W افراز کرد به‌قسمی‌که هر ضلع گراف راسی در B را به راسی در W وصل کند. افراز $V = B \cup W$ را یک افراز دوقسمتی رئوس می‌نامند.

مثال ۹.۳
برچسب‌گذاری نشان می‌دهد که هر دو گراف شکل ۹.۳ دوقسمتی هستند. در هر دو گراف هر ضلع یک B را به یک W وصل می‌کند.



شکل ۹.۳ گراف‌های دوقسمتی

اگر B و W را به‌ترتیب به‌عنوان سیاه و سفید تعبیر کنیم، آنگاه یک گراف دوقسمتی است وقتی‌که رئوس آن را بتوان با دو رنگ سفید و سیاه رنگ کرد به‌قسمی‌که هیچ دو رأس هم‌رنگی مجاور نباشند. بدین جهت گراف‌های دوقسمتی را بعضی اوقات گراف‌های دو رنگ نیز می‌نامند.

مثال ۱۰.۳

دور C_n دوقسمتی است اگر و فقط اگر n زوج باشد.

قضیه ۴.۳

یک گراف همبند دوقسمتی است اگر و فقط اگر حاوی هیچ دور فردی نباشد.

اثبات

واضح است که اگر گراف G حاوی یک دور فرد باشد آنگاه دوقسمتی نخواهد بود. فرض کنید G حاوی دور فرد نباشد؛ چگونگی رنگ‌آمیزی رئوس G را با دو رنگ B و W نشان می‌دهیم.

یک رأس ν را انتخاب کرده و افراز $V = B \cup W$ را درنظر بگیرید:

$$B = \{u \in V : \text{کوتاه‌ترین مسیر از } \nu \text{ به } u \text{ به‌طول زوج است}\}$$

$$W = \{u \in V : \text{کوتاه‌ترین مسیر از } \nu \text{ به } u \text{ به‌طول فرد است}\}$$

چون ۰ زوج است پس $v \in B$. باید نشان دهیم که هردو انتهای هیچ ضلعی از G در B یا W قرار ندارند.

فرض کنید ضلعی چون xy وجود دارد که $x, y \in B$. در این‌صورت اگر $d(\nu_1\ ,\ \nu_2)$ معرف طول کوتاه‌ترین مسیر از ν_1 تا ν_2 باشد، آنگاه برای اعدادی چون m و n خواهیم داشت $d(\nu, x) = 2m$ و $d(\nu, y) = 2n$. ولی یک مسیر به‌طول $2m + 1$ از ν به y از طریق x وجود دارد، بنابراین $2n \leq 2m + 1$. مشابها $2m \leq 2n + 1$، یعنی $m = n$.

کوتاه‌ترین مسیرهای از ν به x و y را به‌ترتیب با $P(x)$ و $P(y)$ نمایش دهید. در این‌صورت، چون $m = n$ ، پس $P(x)$ و $P(y)$ طول‌های یکسانی دارند. فرض کنید w آخرین رأس مشترک دو مسیر $P(x)$ و $P(y)$ (احتمالا $w = \nu$) باشد. پس طول مسیر $P(x)$ از w تا x برابر است با طول مسیر $P(y)$ از w تا y. چون تنها رأس مشترک این دو مسیر w است این دو مسیر به‌همراه ضلع xy تشکیل یک دور فرد می‌دهند. بنابراین با توجه به این‌که G دور فرد ندارد وجود ضلعی چون xy که هر دو انتهای آن در B باشد منتفی است؛ به‌دلیلی مشابه، ضلعی با دو انتهای واقع در W وجود ندارد. ■

نتیجه ۲.۳

تمامی درخت‌ها دوقسمتی هستند.

تعریف ۹.۳ (گراف‌های دوقسمتی کامل)
یک گراف دوقسمتی ساده با مجموعه رئوس $V = B \cup W$ را کامل نامند هرگاه هر رأس از B به هر رأس از W متصل باشد. اگر $|B| = m$ و $|W| = n$، گراف را با $K_{m,n}$ یا $K_{n,m}$ نمایش می‌دهند. به‌عنوان مثال گراف امکانات شکل ۲.۳ گراف $K_{3,3}$ است و گراف متان در شکل ۶.۳ گراف $K_{1,4}$ است.

واضح است که $K_{m,n}$ دارای $m+n$ رأس و mn ضلع است؛ این گراف حاوی m رأس از درجه n و n رأس از درجه m است.

گراف‌های کامل K_n و گراف‌های کامل دوقسمتی $K_{m,n}$ نقش مهمی در نظریه گراف، خصوصا در بحث تسطیح‌پذیری دارند که اکنون به آن می‌پردازیم.

۶.۳ تسطیح‌پذیری

یک گراف را تسطیح‌پذیر نامند هرگاه قابل رسم‌شدن روی صفحه باشد به‌قسمی‌که هیچ دو ضلعی یکدیگر را قطع نکنند. مفهوم تسطیح‌پذیری قبلا در مسئله امکانات مطرح شده‌است؛ این مسئله را اکنون می‌توان به این شکل بیان کرد که آیا $K_{3,3}$ تسطیح‌پذیر است؟ اگر گرافی تسطیح‌پذیر باشد آنگاه هر ترسیمی از آن روی صفحه را که حاوی اضلاع متقاطع نباشد یک گراف **مسطح** می‌نامند. مثلا، همچنان‌که در شکل ۴.۳ نشان داده شده است K_4 تسطیح‌پذیر است؛ دومین ترسیم K_4 یک گراف مسطح است.

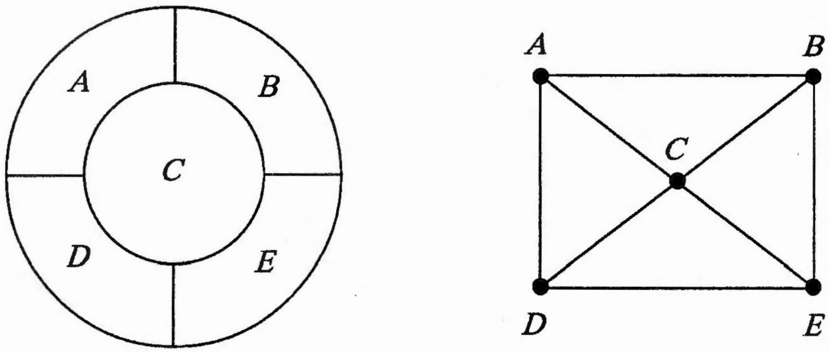
از جمله موارد ظهور گراف‌های تسطیح‌پذیر مسئله چهاررنگ است. در رنگ‌آمیزی یک نقشه، روش استاندارد این است که به دو کشور همسایه رنگ‌های مختلفی نسبت داده شود. براساس تجربه این‌گونه به‌نظر رسید که همیشه برای رنگ‌آمیزی یک نقشه وجود چهار رنگ کافی است و استدلالی برای درستی این خاصیت توسط کمپی[1] در ۱۸۷۹ ارائه شد. ده سال بعد، هیوود[2] متوجه وجود اشکال در اثبات کمپی شد و قضیه چهاررنگ تبدیل به فرضیه چهاررنگ شد. نهایتاً درستی این فرضیه در سال ۱۹۷۶ توسط دو ریاضی‌دان، اپل[3] و هیکن[4]، ثابت شد.

مسئله رنگ‌آمیزی یک نقشه قابل تبدیل به مسئله رنگ‌آمیزی رئوس یک گراف تسطیح‌پذیر است. در یک نقشه مفروض، می‌توان هر ناحیه را با یک رأس نمایش داده و دو رأس را مجاور درنظر گرفت اگر و فقط اگر دو ناحیه متناظر با آن دو رأس مرز مشترک داشته باشند. به‌عنوان مثال، شکل ۱۰.۳ یک نقشه و یک گراف تسطیح‌پذیر متناظر با آن‌را نشان

[1] A. B.Kempe [2] Heawood [3] K. Apple [4] W. Haken

می‌دهد. از این‌رو مسئله چهاررنگ تبدیل به مسئله رنگ‌آمیزی رئوس یک گراف تسطیح‌پذیر با چهار رنگ می‌شود به‌قسمی‌که هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نباشند. رنگ‌آمیزی گراف‌ها را در فصل ۵ با تفصیل بیشتری مطالعه خواهیم نمود.

واضح است که هر گراف مسطح صفحه را به نواحی جدا از هم تقسیم می‌کند که یکی از آنها نامحدود است. نتیجه اساسی مربوط به گراف‌های مسطح به‌نام فرمول اویلر معروف است؛ اویلر این خاصیت را ابتدا در مبحث چندوجهی‌ها مطالعه کرد، که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.



شکل ۱۰.۳

قضیه ۵.۳ (فرمول اویلر)
هر گراف مسطح همبند که دارای p رأس و q ضلع باشد صفحه را به r ناحیه تقسیم می‌کند که

$$p - q + r = ۲.$$

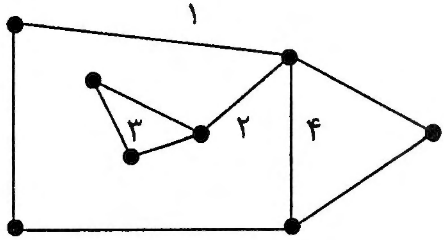
اثبات
اگر دور وجود دارد یک ضلع آن را حذف کنید. تأثیر این عمل کاستن یک واحد از q و r (زیرا دو ناحیه مجاور متناظر با ضلع حذف‌شده درهم ادغام می‌شوند) و ثابت نگهداشتن p است. بنابراین گراف حاصل دارای $p' = p$ رأس، $q' = q - ۱$ ضلع، و $r' = r - ۱$ ناحیه است که $p' - q' + r' = p - q + r$. این روند را تا حذف تمامی دورها ادامه دهید. آخرین گراف باید یک درخت با خاصیت $p'' - q'' + r'' = p - (p - ۱) + ۱ = ۲$ باشد.■

مثال ۱۱.۳
در گراف مسطح شکل ۱۰.۳ رابطه $p - q + r = ۵ - ۸ + ۵ = ۲$ برقرار است. تعداد چهار ناحیه محدود و یک ناحیه نامحدود وجود دارد.

اکنون درجه یک ناحیه را برابر تعداد اضلاعی تعریف می‌کنیم که به‌هنگام پیمودن مرز آن ناحیه با آنها مواجه می‌شویم.

مثال ۱۲.۳

در شکل ۱۱.۳، نواحی ۳ و ۴ از درجه ۳ هستند، ناحیه نامتناهی ۱ درجه ۵ دارد، و ناحیه ۲ از درجه ۹ است (توجه کنید که یکی از ضلع‌ها دوبار پیموده می‌شود).



شکل ۱۱.۳

به موازات لم دست دادن قضیه زیر را داریم:

قضیه ٦.۳

در یک گراف مسطح همبند، مجموع درجه نواحی دوبرابر تعداد اضلاع گراف است.

قضیه ۷.۳

K_n تسطیح‌پذیر است اگر و فقط اگر $n \leq ۴$.

اثبات

کافی است نشان دهیم که K_5 تسطیح‌ناپذیر است (چرا؟). K_5 دارای $p = ۵$ و $q = ۱۰$ است، بنابراین اگر ترسیم مسطحی از K_5 وجود داشته باشد باید دارای $r = ۲ - ۵ + ۱۰ = ۷$ ناحیه باشد. هر یک از این هفت ناحیه باید از درجه حداقل ۳ باشد، بنابراین بنابر قضیه ٦.۳ خواهیم داشت $۲۰ = ۲q \geq ۷ \times ۳ = ۲۱$، که یک تناقض است. ■

قضیه ۸.۳

$K_{۳,۳}$ تسطیح‌پذیر نیست.

اثبات

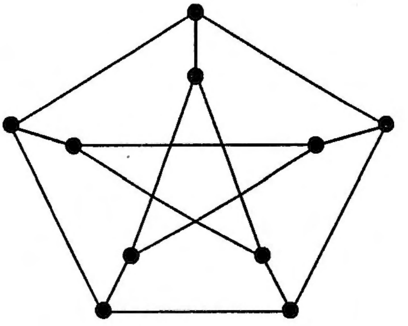
$K_{۳,۳}$ دارای $p = ٦$ و $q = ۹$ است، پس اگر ترسیم مسطحی برای آن وجود داشته باشد آنگاه $r = ۲ - ٦ + ۹ = ۵$. چون $K_{۳,۳}$ دوقسمتی بوده و بنابراین دور فرد ندارد، پس درجه هر ناحیه حداقل ۴ است. از این‌رو $۱۸ = ۲q \geq ۴ \times ۵ = ۲۰$، که یک تناقض است. ■

نتیجه ۳.۳

$K_{m,n}$ تسطیح‌پذیر است اگر و فقط اگر $\min(m, n) \leq ۲$.

روش شمارش مجموع درجه نواحی ابزار مفیدی است. می‌توان آن‌را در مورد گراف مشهور پیترسن[۱]، شکل ۱۲.۳، به‌کار برد. (برای بحث بیشتر راجع به این گراف به بخش ۱.۴ و

[۱] Petersen



شکل ۱۲.۳ گراف پیترسن

تمرین ۱۷.۵ مراجعه کنید.)

مثال ۱۳.۳

گراف پیترسن تسطیح‌ناپذیر است.

جواب

فرض کنید یک ترسیم مسطح وجود داشته باشد. چون $p = ۱۰$ و $q = ۱۵$، باید داشته باشیم $r = ۱۵ + ۱۰ - ۲ = ۷$. واضح است که طول کوتاه‌ترین دور در این گراف برابر ۵ است، بنابراین درجهٔ هر ناحیه حداقل ۵ است. از این‌رو $۳۵ = ۵ \times ۷ \geq ۲q = ۳۰$، که یک تناقض است.

قضیه کوراتسکی

چه چیزی یک گراف را تسطیح‌ناپذیر می‌سازد؟ واضح است که وجود $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ در یک گراف مانع از تسطیح‌پذیری آن می‌شوند. کوراتسکی، ریاضی‌دان لهستانی، در سال ۱۹۳۰ نشان داد که درواقع تنها وجود $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ در یک گراف مانع از تسطیح‌پذیری آن می‌شوند.

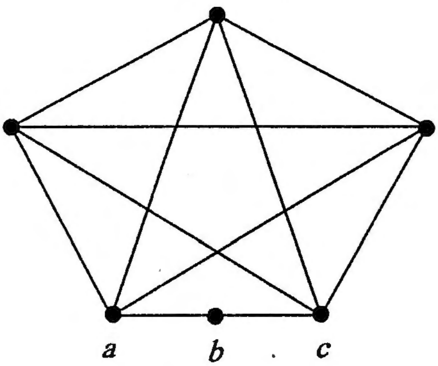
برای بررسی این حکم، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون $K_۵$ تسطیح‌پذیر نیست، گراف شکل ۱۳.۳ نیز نمی‌تواند تسطیح‌پذیر باشد. برای این‌که اگر این گراف تسطیح‌پذیر می‌بود با حذف رأس b از ضلع ac، ترسیم مسطحی از $K_۵$ حاصل می‌شد. عمل قراردادن یک رأس روی یک ضلع را تقسیم‌کردن آن ضلع می‌نامند. گراف حاصل از اعمال یک یا چند عمل تقسیم روی یک گراف زیرتقسیم[۱] گراف اولیه نامیده می‌شود.

قضیه ۹.۳ (قضیه کوراتسکی)

یک گراف تسطیح‌پذیر است اگر و فقط اگر حاوی هیچ زیرتقسیمی از $K_۵$ یا $K_{۳,۳}$ نباشد.

اثبات این نتیجه عمیق توپولوژیکی خارج از حوصله این کتاب است. کارآمدی این نتیجه را با استفاده از آن در اثبات تسطیح‌ناپذیری گراف پیترسن نشان می‌دهیم.

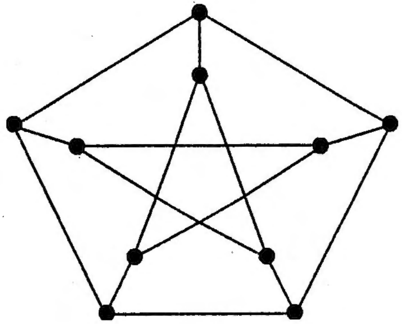
[۱] Subdivision

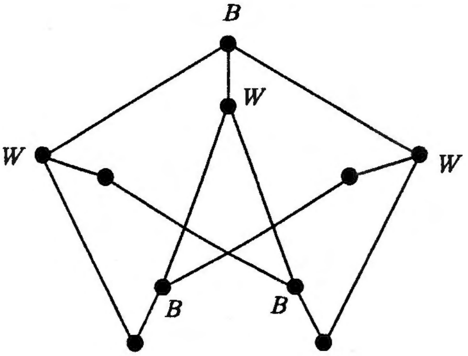


شکل ۱۳.۳

مثال ۱۳.۳ (تکرار)
در شکل ۱۴.۳، گراف پیترسن در سمت چپ قرار دارد. گراف حاصل از حذف دو ضلع از این گراف در سمت راست قرار دارد. این زیرگراف، همچنان‌که از برچسب‌گذاری رئوس نتیجه می‌شود، یک زیرتقسیم $K_{۳,۳}$ است.

آزمون دیگری برای تسطیح‌پذیری در بخش ۲.۴ ارائه خواهد شد.



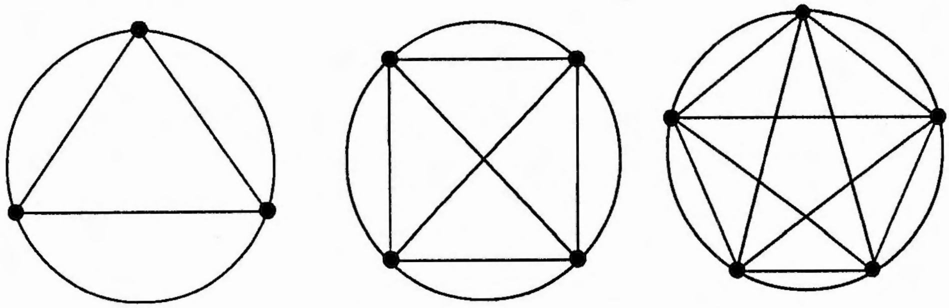


شکل ۱۴.۳

وترهای یک دایره

این بخش را با کاربردی از فرمول اویلر روی یک مسئله معروف راجع به وترهای یک دایره به‌پایان می‌بریم.

فرض کنید n نقطه روی یک دایره درنظر گرفته شده و دوبه‌دو با یک وتر به‌هم وصل شده‌اند به‌قسمی‌که هیچ سه وتری یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. داخل دایره به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟ حالت‌های $n = ۳, ۴, ۵$ در شکل ۱۵.۳ نمایش داده شده‌اند. ممکن است برای $n = ۶$ عدد ۳۲ به‌نظر برسد. ولی این درست نیست! (بررسی کنید!)



$n=۳$ $n=۴$ $n=۵$

۴ ناحیه   ۸ ناحیه   ۱۶ ناحیه

شکل ۱۵.۳

فرض کنید تعداد نقاط n بوده و $\binom{n}{۲}$ وتر رسم شده است. تعداد نواحی شامل قوس‌های دایره برابر n است؛ اجازه دهید این n ناحیه را کنار گذاشته و روی بقیه تمرکز کنیم. تصویر هندسی را با قراردادن یک رأس در هریک از n نقطه و در محل تلاقی وترها تبدیل به یک گراف کنید. چند نقطه تلاقی وجود دارد؟ برای هر دو وتر متقاطع یک نقطه وجود دارد. ولی هر زوج از وترهای متقاطع از انتخاب ۴ رأس روی دایره به‌دست می‌آید، بنابراین تعداد نقاط تلاقی برابر $\binom{n}{۴}$ است. پس گراف حاصل دارای $n + \binom{n}{۴}$ رأس است. هریک از n رأس اولیه از درجه $n-۱$ و هریک از $\binom{n}{۴}$ رأس جدید از درجه ۴ است. از این‌رو بنابر لم دست دادن

$$۲q = n(n-۱) + ۴\binom{n}{۴},$$

و بنابراین

$$q = \binom{n}{۲} + ۲\binom{n}{۴}.$$

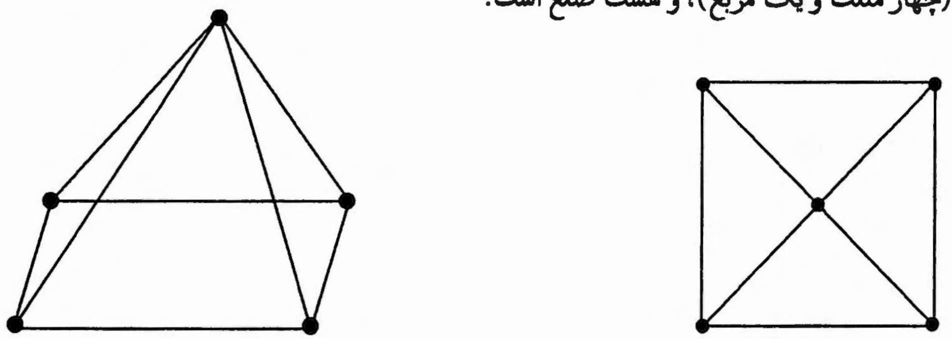
پس

$$\begin{aligned} r &= ۲ - p + q \\ &= ۲ - n - \binom{n}{۴} + \binom{n}{۲} + ۲\binom{n}{۴} \\ &= ۲ - n + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴}. \end{aligned}$$

در این‌جا ناحیه نامحدود هم لحاظ شده است، بنابراین تعداد ناحیه‌های محدود $\binom{n}{۴} + \binom{n}{۲} + n - ۱$ است. ملاحظه کنید که از این رابطه برای $n = ۳, ۴, ۵, ۶$ به‌ترتیب اعداد ۴، ۸، ۱۶، ۳۱ حاصل می‌شوند.

۷.۳ چندوجهی‌ها

یک چندوجهی عبارت است از یک جسم محدود به چند وجه که هریک از آنها یک چندضلعی است. برای مثال، هرم شکل ۱۶.۳(a) یک چندوجهی با پنج رأس، پنج وجه (چهار مثلث و یک مربع)، و هشت ضلع است.



(a) (b)

شکل ۱۶.۳ یک هرم و گراف مسطح آن

همچنان‌که قبلا بیان شد، فرمول اویلر ابتدا در مطالعه ارتباط تعداد رئوس، وجوه، و اضلاع یک چندوجهی محدب مطرح شد. (یک چندوجهی را محدب نامند هرگاه هر پاره‌خط مستقیم واصل دو رأس آن کاملاً در داخل چندوجهی قرار گیرد.) یک چنین چندوجهی‌ای قابل نمایش به‌وسیله یک گراف مسطح است که از تصویر کردن چندوجهی روی یک صفحه به‌دست می‌آید. گراف شکل ۱۶.۳(b) هرم را نمایش می‌دهد؛ رأس داخلی را به‌عنوان رأس هرم و ناحیه نامحدود (از درجه ۴) گراف را معرف قاعده هرم درنظر بگیرید.

مکعب مثالی از یک چندوجهی منظم است. یک چندوجهی را منظم نامند هرگاه اعداد صحیحی چون $n, m \geq ۳$ وجود داشته باشند به‌قسمی‌که هر رأس محل تلاقی m وجه (یا m ضلع) بوده و مرز هر وجه متشکل از n ضلع باشد. این اعداد برای مکعب برابر $m = ۳$ و $n = ۴$ هستند. چندوجهی‌های منظم محدب را اجسام افلاطونی می‌نامند؛ این اجسام به تفصیل توسط یونانیان قدیم، که می‌دانستند تنها پنج جسم این‌چنینی وجود دارد، مورد مطالعه قرارگرفتند. با درنظر گرفتن گراف متناظر با یک چندوجهی، در قضیه بعد از واژه‌های نظریه گراف استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳

فرض کنید در یک چندوجهی منظم هر رأس از درجه m و هر وجه از درجه n است. در این‌صورت (m,n) برابر یکی از زوج‌های (۳,۳)، (۳,۴)، (۴,۳)، (۳,۵)، (۵,۳) است.

به‌علاوه، متناظر با هریک از این زوج‌ها اجسام افلاطونی وجود دارند.

اثبات

داریم $p-q+r=۲$ که

$$۲q = \text{مجموع درجه رأس‌ها} = mp$$
$$۲q = \text{مجموع درجه وجه‌ها} = nr.$$

بنابراین $q(\frac{۲}{n}+۱-\frac{۲}{m})=۲$، و از آن‌جا

$$(۲m+۲n-mn)q=۲mn. \qquad (۱.۳)$$

بنابراین $۲m+۲n-mn>۰$، یعنی $(m-۲)(n-۲)<۴$. پس $(m-۲)(n-۲)\in\{۱,۲,۳\}$ و از این‌جا پنج حالت یادشده نتیجه می‌شوند.

جدول ۱.۳

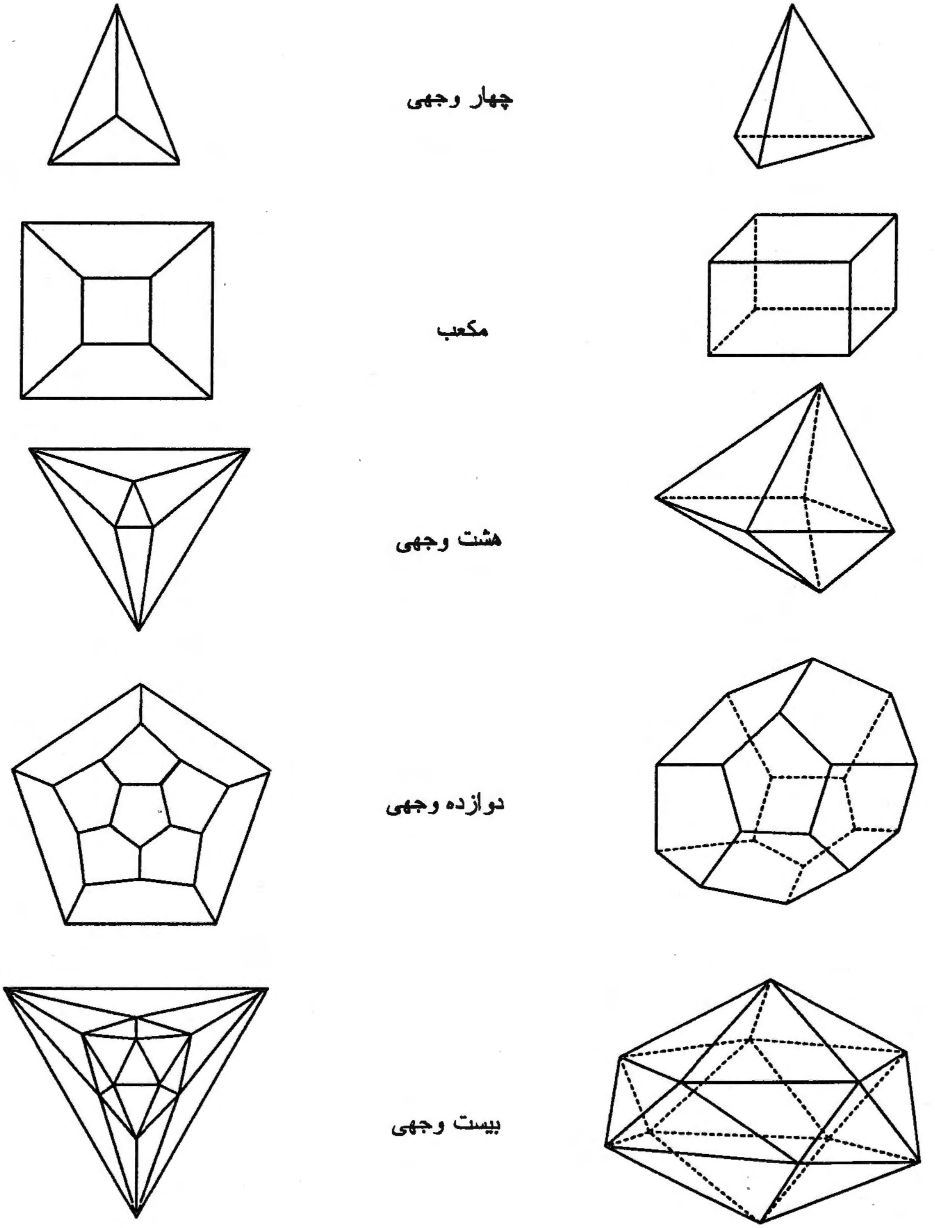
m	n	q	p	r	نام
۳	۳	٦	۴	۴	چهاروجهی
۳	۴	۱۲	۸	٦	مکعب
۴	۳	۱۲	٦	۸	هشت‌وجهی
۳	۵	۳۰	۲۰	۱۲	دوازه‌وجهی
۵	۳	۳۰	۱۲	۲۰	بیست‌وجهی

برای هر زوج ممکن (m,n)، می‌توانیم از (۱.۳) مقدار q را به‌دست آورده و سپس مقادیر p و r را محاسبه کنیم. مقادیر به‌دست‌آمده، به‌همراه نام اجسام افلاطونی متناظر با آنها، در جدول ۱.۳ مشخص شده‌اند.■

توجه کنید که نام معرف عدد r، یعنی تعداد وجوه، است. این پنج جسم به‌همراه گراف مسطح آنها در شکل ۱۷.۳ نشان داده شده‌اند.

علاوه بر چندوجهی‌های منظم یادشده، چندوجهی‌های **نیمه منظمی** وجود دارند که به **اجسام ارشمیدسی** معروف هستند. اگرچه ممکن است که این اجسام برای یونانیان شناخته‌شده بوده‌اند اولین لیست موجود معرف آنها مربوط به سال ۱٦۱۹ توسط کپلر است. این اجسام حاوی بیش از یک نوع وجه می‌باشند ولی این خاصیت را دارند که در آنها تمامی رئوس از نظر ترکیب وجوه جانبی خود یکسان هستند. برای مثال، با قطع‌کردن هریک از هشت رأس

یک مکعب، یک مکعب ناقص به‌دست می‌آید که دارای شش وجه هشت‌ضلعی و چهار وجه مثلثی می‌باشد. در این مکعب ناقص وجوه مجاور به هریک از رأس‌ها متشکل از ۲ هشت‌ضلعی و ۱ مثلث است.



شکل ۱۷.۳

مثال ۱۴.۳
وجوه یک چندوجهی را پنج‌ضلعی‌ها و شش‌ضلعی‌ها تشکیل می‌دهند. در هر رأس سه وجه با هم تلاقی دارند. نشان دهید که تعداد وجوه پنج‌ضلعی برابر ۱۲ است.
جواب
داریم $p - q + r = ۲$ و $۳p$ =مجموع درجه رئوس= $۲q$. پس $۲q = ۶r - ۱۲$. حال فرض کنید x وجه پنج‌ضلعی و y وجه شش‌ضلعی وجود داشته باشد. در این‌صورت $r = x + y$ و $۵x + ۶y$ =مجموع درجه وجوه= $۲q$. با جایگزینی در $۲q = ۶r - ۱۲$ نتیجه می‌گیریم $۵x + ۶y = ۶x + ۶y - ۱۲$، و بنابراین $x = ۱۲$.

حالت $x = ۱۲$، $y = ۰$ متناظر با دروازه‌وجهی است. حالت $x = ۱۲$، $y = ۲۰$ متناظر با الگویی است که اغلب روی توپ‌های فوتبال دیده می‌شود. جسم ارشمیدسی متناظر با آن **بیست‌وجهی ناقص** است؛ خواننده باید قادر به به‌دست آوردن آن به‌وسیله قطع‌کردن رأس‌های یک بیست‌وجهی باشد. با کشف این‌که علاوه بر الماس و گرافیت نوع سوم دیگری از کربن وجود دارد در دهه ۱۹۹۰ علاقه زیادی نسبت به این جسم ایجاد شد.

این نوع از کربن با $C_{۶۰}$ نمایش داده می‌شود؛ ساختار ملکولی آن به‌شکل قرار گرفتن ۶۰ اتم در رأس‌های یک بیست‌وجهی ناقص است. کاشف‌های این ملکول آن‌را بوکمنسترفولرین[۱] نامیدند (عموماً به توپ بوکی معروف هستند) زیرا آن‌را شبیه به قبه‌های کروی ساخته‌شده توسط بوکمنسترفولر[۲]) می‌دیدند. ولی، همچنان‌که اشاره کردیم، ریاضی‌دانان آن‌را از مدت‌ها قبل می‌شناختند.

در نوع گرافیتی کربن، اتم‌های کربن در روی فرم شانه‌زنبوری مسطح شش‌ضلعی‌ها قرار دارند. شش‌ضلعی‌های منظم صفحه را فرش می‌کنند، بنابراین برای امکان ایجاد یک نوع سه‌بعدی نیاز به n ضلعی‌های با خاصیت $n < ۶$ داریم. ملاحظه می‌شود که برای تشکیل یک چنین فرمی وجود ۱۲ پنج‌ضلعی کافی است. تمرین ۱۴.۳ را برای زمانی که پنج‌ضلعی‌ها با مربع جایگزین می‌شوند ببینید.

ملکول‌های فلورین دیگری مانند $C_{۷۰}$ وجود دارند که دارای ۱۲ پنج‌ضلعی و ۲۵ شش‌ضلعی می‌باشند؛ شکل آن بیشتر شبیه به توپ راگبی است.

تمرینات

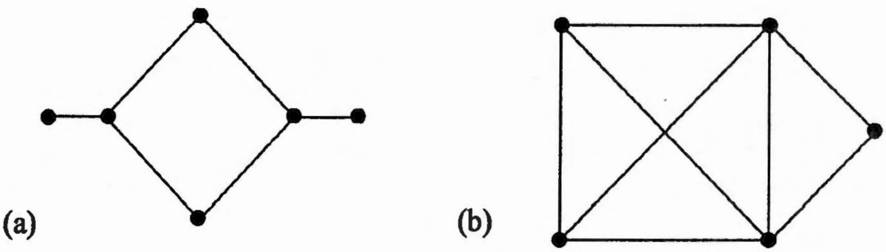
تمرین ۱.۳
نشان دهید که در هر گراف تعداد رأس‌های از درجه فرد عددی زوج است.

[۱] Buckminsterfullerine [۲] R. Buckminster Fuller

تمرین ۲.۳
نشان دهید که تمامی الکل‌های $C_nH_{2n+1}OH$ ملکول‌های درخت‌وار دارند. (ظرفیت‌های C، O، H به‌ترتیب ۴، ۲، ۱ هستند.)

تمرین ۳.۳
نشان دهید اگر G یک گراف ساده با p رأس باشد، که درجه هر رأس آن حداقل $\frac{1}{2}(p-1)$ است، آنگاه G همبند است. (راهنمایی: هرمؤلفه باید چند رأس داشته باشد؟)

تمرین ۴.۳
گراف‌های شکل ۱۸.۳ چند درخت فراگیر دارند؟



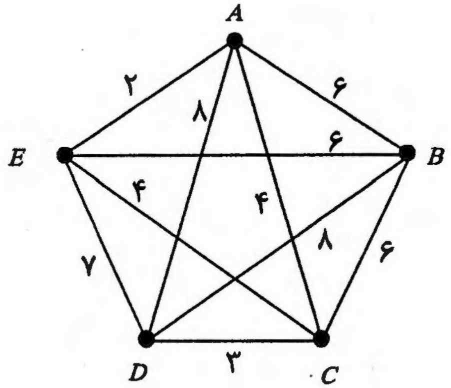
شکل ۱۸.۳

تمرین ۵.۳
برای به‌دست آوردن یک درخت فراگیر از یک گراف با p رأس و q ضلع، چند ضلع را باید حذف نمود؟

تمرین ۶.۳
فرض کنید $K_{2,3}$ دارای افراز دوقسمتی $B \cup W$ باشد که $B = \{a, b\}$ و $W = \{x_1, x_2, x_3\}$.
(a) توضیح دهید که چرا در یک درخت فراگیر از $K_{2,3}$ باید دقیقا یکی از اعضای W به هر دو عضو B وصل باشد.
(b) $K_{2,3}$ چند درخت فراگیر دارد؟
(c) $K_{2,100}$ چند درخت فراگیر دارد؟

تمرین ۷.۳
با استفاده از دو الگوریتم حریص و پریم یک درخت فراگیر می‌نیمم برای گراف شکل ۱۹.۳ پیدا کنید.

تمرین ۸.۳
فاصله بین ۵ شهر در جدول ۲.۳ داده شده است. طول کوتاه‌ترین شبکه جاده‌ای مرتبط‌کننده این شهرها را پیدا کنید.



شکل ۱۹.۳

جدول ۲.۳

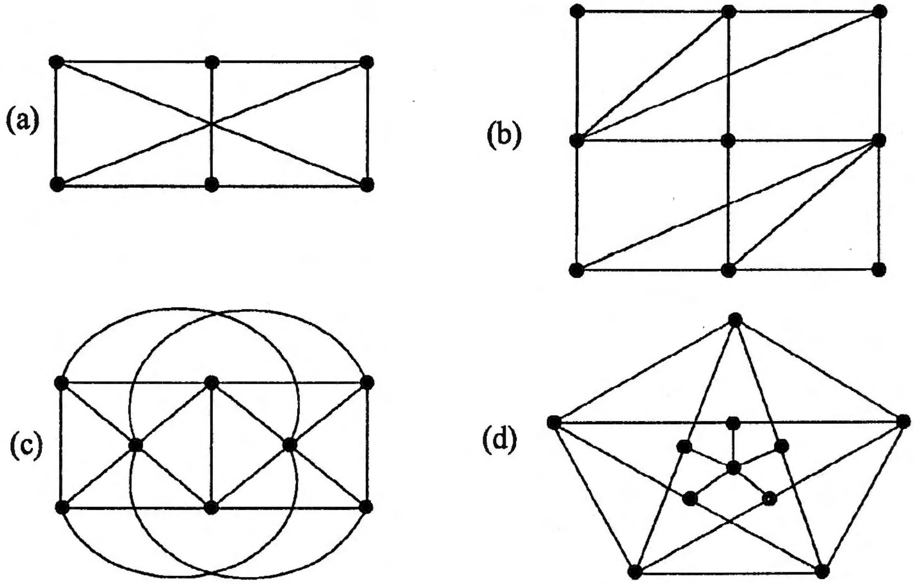
	G	H	A	M	EK
G	۰	۱۰	۱۱	۱۳	۹
H	۱۰	۰	۸	۳	٦
A	۱۱	۸	۰	۸	۱۳
M	۱۳	۳	۸	۰	۸
EK	۹	٦	۱۳	۸	۰

تمرین ۹.۳

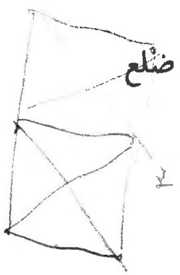
یک شرکت خطوط هوایی پروازهایی را بین دوازده شهر انجام می‌دهد که مختصات آنها نسبت به یک مقیاس خاصی عبارت هستند از (۰,۲)، (۰,۵)، (۱,۰)، (۱,۴)، (۲,۳)، (۲,۴)، (۳,۲)، (۳,۵)، (۴,۴)، (۴,۵)، (۵,۳)، (٦,۱). حداقل تعداد پرواز مورد نیاز برای ایجاد امکان پرواز بین هر دو شهری چقدر است؟ کمترین طول کل یک چنین شبکه‌ای چقدر است؟

تمرین ۱۰.۳

کدام‌یک از گراف‌های شکل ۲۰.۳ تسطیح‌پذیر هستند؟



شکل ۲۰.۳



تمرین ۱۱.۳

یک تطابق کامل از یک گراف با $2n$ رأس عبارت است از یک زیرگراف متشکل از n ضلع جدا از هم. در گراف شکل ۲۰.۳(a) چند تطابق کامل متفاوت وجود دارد؟

تمرین ۱۲.۳

گراف G_n $(n \geq 1)$ در شکل ۲۱.۳ نشان داده شده است.

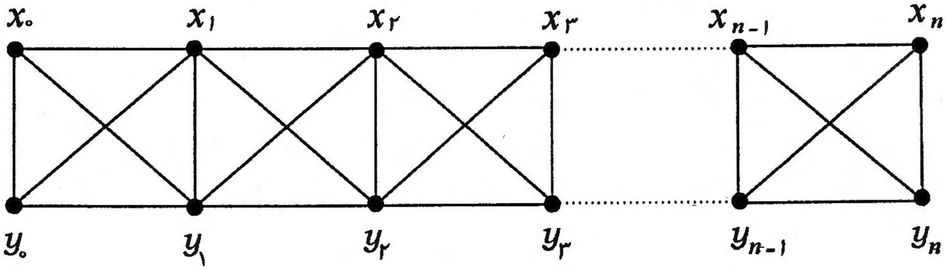
$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

(a) آیا G_n دوقسمتی است؟ آیا G_n تسطیح‌پذیر است؟

(b) فرض کنید a_n معرف تعداد تطابق‌های کامل G_n باشد. نشان دهید $a_1 = 3$ و $a_2 = 5$. نشان دهید $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 3)$ و از آن‌جا یک فرمول برای a_n به‌دست آورید.

$a_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}$

$\sum_{k=0}^{n/2} 2^k \binom{n-k}{k}$



شکل ۲۱.۳

تمرین ۱۳.۳

(a) نشان دهید اگر G یک گراف ساده تسطیح‌پذیر با $p \geq ۳$ رأس و q ضلع باشد آنگاه $q \leq ۳p - ٦$. نتیجه بگیرید که $K_۵$ تسطیح‌پذیر نیست.

(b) نشان دهید اگر G یک گراف ساده تسطیح‌پذیر با $p \geq g$ رأس و q ضلع باشد که g طول کوتاه‌ترین دور در G است، آنگاه $q \leq \frac{g}{g-۲}(p - ۲)$.

(c) از (b) نتیجه بگیرید که گراف‌های $K_{۳,۳}$ و پیترسن تسطیح‌ناپذیر هستند.

تمرین ۱۴.۳

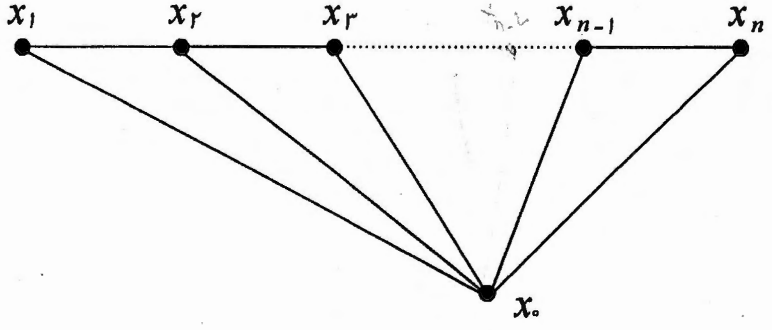
یک چندوجهی محدب دارای وجه‌های مربع و شش‌ضلعی است. در هر رأس سه وجه یکدیگر را تلاقی می‌کنند. با استفاده از فرمول اویلر نشان دهید که تعداد وجوه مربعی دقیقاً برابر ٦ است. مکعب وجه شش‌ضلعی ندارد: مثالی متشکل از ٦ مربع و حداقل یک شش‌ضلعی ارائه دهید. (یک هشت‌وجهی ناقص را امتحان کنید.)

تمرین ۱۵.۳

فرض کنید یک پیتزا n بار برش داده شده و P_n معرف بیشترین تعداد قطعه‌های ایجادشده باشد (این زمانی رخ می‌دهد که هیچ دو برشی موازی نبوده و در خارج پیتزا یکدیگر را قطع نکرده و این‌که هیچ سه برشی در یک نقطه یکدیگر را قطع نکنند).
نشان دهید $P_n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲}$.

تمرین ۱٦.۳

فرض کنید h_n معرف تعداد درخت‌های فراگیر در گراف بادافشان، شکل ۲۲.۳، باشد. نشان دهید $h_۱ = ۱, h_۲ = ۳, h_۳ = ۸$. یک رابطه بازگشتی برای h_n پیدا کرده و ثابت کنید $h_n = F_{۲n-۱}$.



شکل ۲۲.۳

فصل ۴

گشت کامل در یک گراف

در این فصل مسائل گوناگونی را که در رابطه با وجود گشت‌های خاصی از یک گراف هستند بررسی می‌کنیم. خواننده باید مفاهیم گشت، مسیر، دور و گذر را از بخش ۲.۳ به‌یاد بیاورد. مسئله پل‌کونیگذبرگ مرتبط با وجود یک گذر بسته‌ای است که تمامی اضلاع گراف را دربر داشته باشد. گذرهای اویلری این‌چنینی را با تفصیل بیشتر مطالعه خواهیم کرد، ولی ابتدا نگاهی به یک مسئله که به‌نام همیلتون[۱]، ریاضی‌دان ایرلندی، معروف است می‌اندازیم.

۱.۴ گراف‌های همیلتونی

دوازده‌وجهی در پایان فصل ۳ نشان داده شده است. همیلتون این مسئله را مطرح کرد که آیا این امکان وجود دارد که از یکی از ۲۰ رأس دوازده‌وجهی شروع کرده و با حرکت روی اضلاع، هر رأس را قبل از رسیدن به نقطه شروع دقیقاً یک‌بار ملاقات کرده باشیم؟ به‌عبارت دیگر آیا یک دور حاوی تمامی رئوس وجود دارد؟ بدون هیچ مشکلی باید قادر به پیداکردن چنین دوری باشید (در صورت بروز مشکل به شکل ۳.۴ مراجعه کنید)، بنابراین جای تعجب ندارد که استفاده از این مسئله به‌عنوان یک بازی تجارت موفقی نبوده است.

تعریف ۱.۴

یک دور همیلتونی در گراف G دوری است که حاوی تمامی رئوس G باشد. یک گراف همیلتونی گرافی است که حاوی یک دور همیلتونی باشد.

عنوان همیلتونی، همچنان‌که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد، کاملا عادلانه نیست، زیرا دیگرانی چون کرک‌من[۲] این ایده را قبل از همیلتون مطالعه کرده بودند.

---

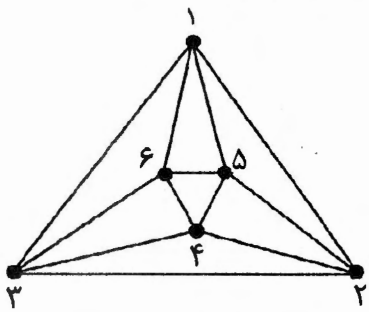
[۱] Sir William Rowan Hamilton:1805-1865

[۲] Kirkman

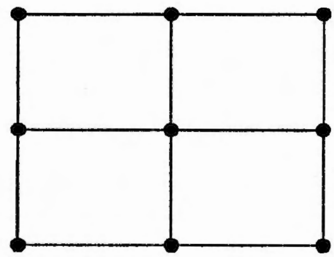
مثال ۱.۴

(a) گراف هشت‌وجهی همیلتونی است؛ در گراف شکل ۱.۴(a) دور همیلتونی ۱۲۳۴۵۶۱ را درنظر بگیرید.

(b) گراف شکل ۱.۴(b) همیلتونی نیست. آسان‌ترین راه برای دیدن این خاصیت این است که توجه کنیم چون تعداد رئوس ۹ است درصورت همیلتونی بودن، یک دور به‌طول ۹ وجود خواهد داشت. ولی، چون گراف دوقسمتی است حاوی دور فرد نیست.



(a)



(b)

شکل ۱.۴

قضیه ۱.۴

یک گراف دوقسمتی که تعداد رئوس آن فرد باشد همیلتونی نیست.

مثال ۲.۴

(a) برای هر $n \geq ۳$، گراف K_n همیلتونی است.

(b) $K_{m,n}$ همیلتونی است اگر و فقط اگر $m = n \geq ۲$.

(تمرین ۱.۴ را ببینید.)

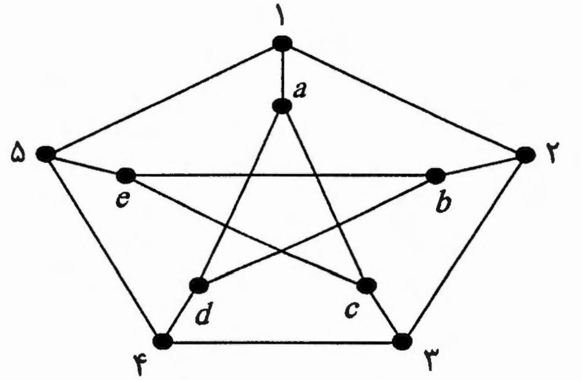
مثال ۳.۴

گراف پیترسن همیلتونی نیست.

جواب

رأس‌های گراف را مطابق شکل ۲.۴ برچسب‌گذاری کنید و فرض کنید که یک دور همیلتونی موجود باشد. هر بار که دور از طریق یکی از پره‌های $۱a$, $۲b$, $۳c$, $۴d$, $۵e$ از بیرون به‌سمت داخل حرکت می‌کند باید از طریق پره دیگری به بیرون باز گردد. بنابراین دور همیلتونی باید حاوی ۲ یا ۴ پره باشد.

(a) فرض کنید در یک دور همیلتونی ۴ پره وجود داشته باشد: می‌توان فرض کرد که $۵e$ روی دور قرار ندارد. دراین‌صورت ۵۱ و ۵۴ باید روی دور باشند همچنان‌که eb و ec باید روی آن باشند. چون $۱a$ و ۱۵ روی دور هستند ۱۲ خارج دور بوده و بنابراین ۲۳ روی دور است.



شکل ۲.۴

بر این اساس دور ۲۳ceb۲ بخشی از دور همیلتونی خواهد بود که ناممکن بودن آن واضح است.

(b) فرض کنید تنها ۲ پره روی دور همیلتونی باشد. فرض کنید ۱a یکی از آنها باشد. در این‌صورت ac یا ad، مثلاً ad، روی دور قرار دارد. پس ac روی دور نبوده و بنابراین c۳ در دور قرار دارد. پس پره‌های e۵, d۴, b۲ در دور قرار ندارند. چون b۲ خارج دور است ۲۳ باید در دور باشد. مشابها، چون d۴ در دور نیست، ۳۴ باید روی دور باشد. یعنی هر سه ضلع وارد بر ۳ روی دور قرار دارند که یک تناقض است.

هیچ روش سرراستی برای مشخص‌نمودن گراف‌های همیلتونی پیدا نشده است. شاید بهترین شرط کافی ساده شناخته‌شده برای همیلتونی بودن قضیه زیر باشد که توسط دیراک[1] بیان شده است. ولی باید تاکید کرد که این شرط اصلا لازم نیست (همچنان‌که با درنظر گرفتن دور C_n، $n \geq 5$، می‌توان آن‌را دید).

قضیه ۲.۴ (دیراک، ۱۹۵۰)

اگر G یک گراف ساده با p رأس بوده و درجه هر رأس آن حداقل $\frac{1}{2}p$ باشد، آنگاه G همیلتونی است.

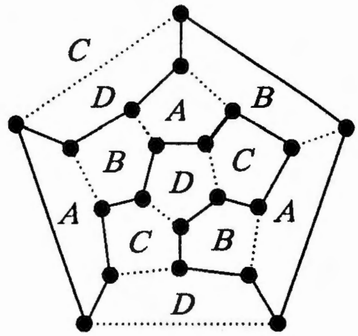
اثبات روش اثبات در تمرین ۶.۴ بیان شده است.

۲.۴ تسطیح‌پذیری و گراف‌های همیلتونی

ارتباط‌های جالبی بین گراف‌های تسطیح‌پذیر و گراف‌های همیلتونی وجود دارد. اولین ارتباط از حدس چهاررنگ به‌دست آمد و این زمانی بود که مشخص شد وجود یک دور همیلتونی در یک گراف مسطح منجر به یک چهاررنگ آسان برای وجوه گراف می‌شود. برای مثال، رنگ‌آمیزی وجوه یک دوازده‌وجهی را با چهار رنگ درنظر بگیرید. شکل ۳.۴ یک دور

[1]Dirac

همیلتونی را نشان می‌دهد که نواحی را به دو زنجیر متشکل از نواحی داخل دور و نواحی خارج دور افراز نموده است. زنجیر داخلی را با رنگ‌های A و B، و زنجیر خارجی را با رنگ‌های C و D رنگ کنید.



شکل ۳.۴ دوازده‌وجهی

در ابتدای تاریخ حدس چهاررنگ، تایت[۱] حدس زد که هر نقشه چندوجهی که در آن هر رأس از درجه ۳ باشد یک دور همیلتونی دارد. (یک نقشه را چندوجهی نامند هرگاه هر دو ناحیه مجاور تنها در یک ضلع و یا یک رأس مشترک باشند). اگر حدس تایت درست می‌بود آنگاه هر یک چنین نقشه‌ای چهاررنگ‌پذیر می‌بود؛ ولی، با مثال نقضی که تات[۲] ارائه کرد نادرستی این حدس در ۱۹۴۶ ثابت شد.

ارتباط دیگر بین همیلتونی بودن و تسطیح‌پذیری از الگوریتم زیر ناشی می‌شود که می‌توان آن‌را در تعیین تسطیح‌پذیر بودن یک گراف همیلتونی به‌کار برد. ایده اساسی این است که اگر گراف G همیلتونی و تسطیح‌پذیر باشد، آنگاه در یک ترسیم مسطح G، اضلاعی از G که روی دور همیلتونی H قرار ندارند در دو مجموعه قرار می‌گیرند، آنهایی که در داخل H هستند و آنهایی که در خارج رسم شده‌اند.

الگوریتم تسطیح‌پذیری برای گراف‌های همیلتونی

۱. گراف G را به‌قسمی رسم کنید که یک دور همیلتونی H کران ناحیه نامحدود باشد.

۲. اضلاع G را که در H قرار ندارند لیست کنید: e_1، ...، e_r.

۳. گراف جدید K را بسازید که در آن‌رأس‌ها برچسب‌های e_1، ...، e_r را داشته و دو رأس با برچسب‌های e_i و e_j مجاور هستند اگر و فقط اگر دو ضلع e_i و e_j در رسم G یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی این‌که هر دو قابل ترسیم در داخل (یا خارج) H نیستند (چنین ضلع‌هایی را

[۱] Tait [۲] Tutte

ناسازگار می‌نامند.)

۴. در این‌صورت G تسطیح‌پذیر است اگر و فقط اگر K دوقسمتی باشد.

(اگر K دارای افراز دوقسمتی $B \cup W$ باشد، آنگاه اضلاع e_i که با رنگ B رنگ شده‌اند قابل رسم در داخل H بوده، و اضلاع با رنگ W قابل رسم در خارج می‌باشند.)

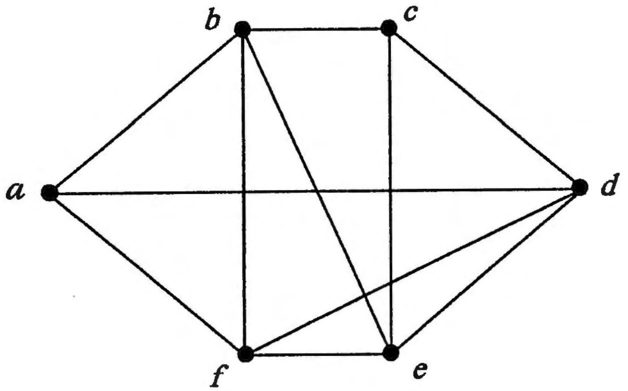
در عمل، مانند آنچه که ذیلا خواهید دید، اضلاع را یک‌به‌یک معرفی می‌کنیم.

مثال ۴.۴

تسطیح‌پذیری گراف شکل ۴.۴ را امتحان کنید.

جواب

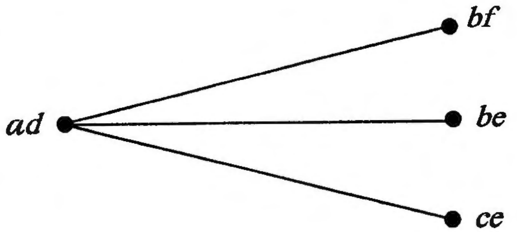
۱. گراف از قبل با دور همیلتونی $abcdefa$ که درخارج قرار دارد ترسیم شده است.



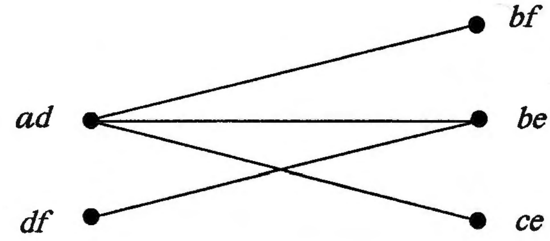
شکل ۴.۴

۲. اضلاعی که روی دور همیلتونی نیستند عبارت هستند از ad، be، bf، ce و df.

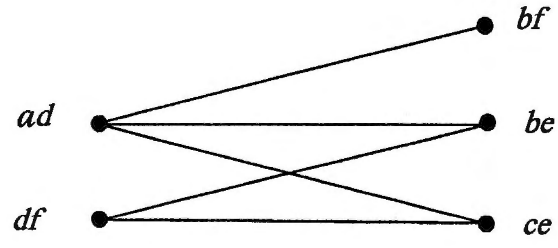
۳. با ad شروع کنید؛ این ضلع با اضلاع bf، be و ce ناسازگار است:



حال bf را درنظر بگیرید. این ضلع تنها ad را قطع می‌کند. سپس be را ملاحظه کنید که df را قطع می‌کند، بنابراین داریم:



حال ce را درنظر بگیرید. این ضلع نیز df را قطع می‌کند، پس شکل زیر حاصل می‌شود:

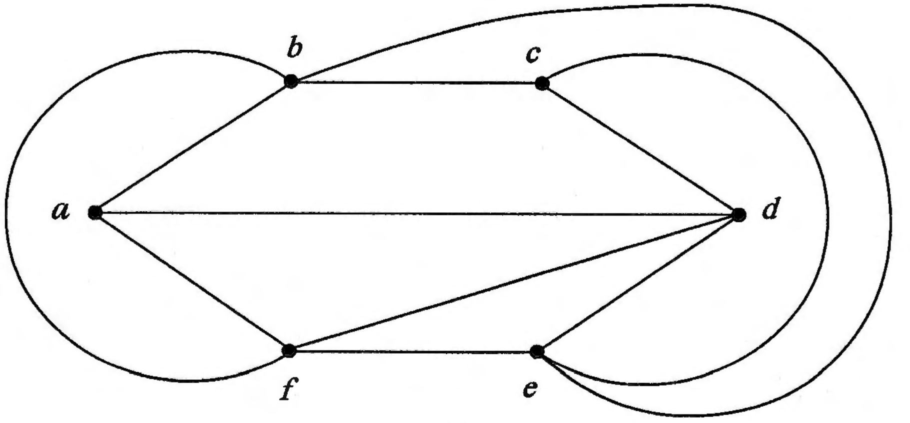


۴. تا این‌جا گراف K را به‌دست آورده‌ایم. (نشان دهید که تعداد اضلاع K برابر است با تعداد تلاقی اضلاع در G.) چون K دوقسمتی است، G تسطیح‌پذیر است، و می‌توان آن‌را با رسم ad و df در داخل و ce، be و bf در خارج رسم نمود (شکل ۵.۴).

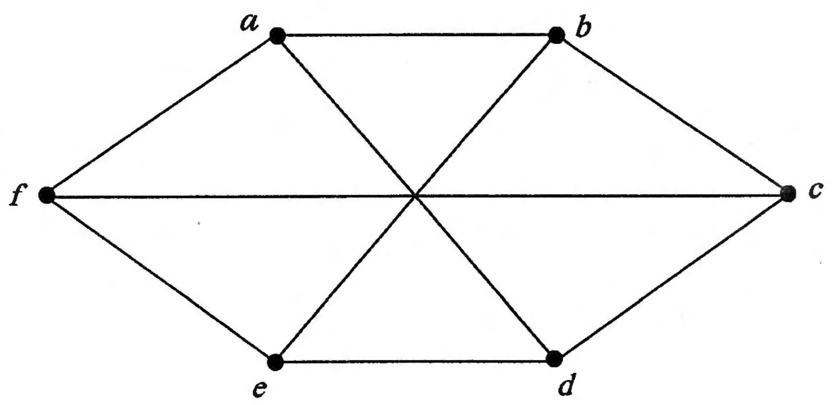
مثال ۵.۴

نشان دهید $K_{3,3}$ تسطیح‌پذیر نیست.

جواب ۱. در شکل ۶.۴، گراف $K_{3,3}$ با یک دور همیلتونی در خارج آن رسم شده است.

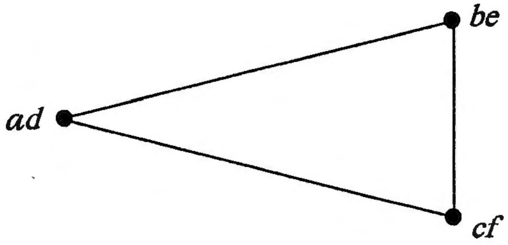


شکل ۵.۴



شکل ۶.۴

۲. اضلاعی که روی دور همیلتونی نیستند عبارت هستند از ad، be، cf.
۳. گراف زیر را به‌دست آورید:



۴. این دوقسمتی نیست و بنابراین $K_{3,3}$ تسطیح‌پذیر نیست.

۳.۴ مسئله مرد فروشنده دوره‌گرد

یک نماینده فروش یک انتشارات کتاب‌های ریاضی باید از خانه خود شروع کرده و قبل از بازگشت به خانه از مرکز فروش کتاب چند دانشگاه دیدن نماید. مرد فروشنده چگونه باید مسیر خود را انتخاب کند به‌قسمی‌که کل مسیر طی‌شده می‌نیمم شود؟

در این‌جا یک گراف باردار درنظر می‌گیریم که در آن‌رأس‌ها معرف منزل و مراکز فروش کتاب بوده و اضلاع معرف مسیرهای واصل این مراکز به یکدیگر هستند؛ برچسب هر ضلع معرف طول مسیر متناظر با آن است. مرد فروشنده در پی پیداکردن یک دور همیلتونی به‌طول می‌نیمم است.

یک گراف کامل K_n دارای $(n-1)!$ دور همیلتونی متفاوت (یا $\frac{1}{2}(n-1)!$ دور اگر بین یک دور و معکوس آن تمایزی قائل نباشیم) است، بنابراین بررسی یک‌به‌یک این دورها وقتی

n بزرگ است امکان‌پذیر نیست. حتی برای $n = ۱۰$ داریم $\frac{۱}{۲}(n-۱)! = ۱۸۱۴۴۰$. در واقع تاکنون الگوریتم کارایی برای حل مسئله TSP[1] ارائه نشده است، بنابراین به‌جای بهترین مسیر، مسیرهای خوب شناسایی می‌شوند، همچنان‌که به‌جای مقداردقیق طول کوتاه‌ترین مسیر از برآوردی از طول مسیر استفاده می‌شود.

کران‌های پایین

با استفاده از درخت‌های فراگیر می‌توان کران‌های پایینی را به‌دست آورد. ابتدا ملاحظه کنید که اگر یک ضلع از یک دور همیلتونی را حذف کنیم یک درخت فراگیر حاصل می‌شود، بنابراین

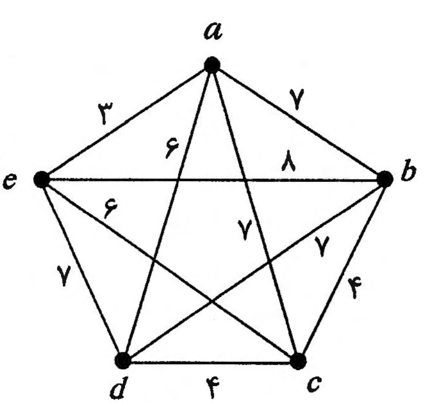
$$\text{جواب TSP} > \text{MST} \qquad (۱.۴)$$

که MST معرف می‌نیمم طول یک درخت فراگیر است. ولی بهتر از این می‌توان عمل کرد. یک رأس v از گراف G را درنظر بگیرید. هر دور همیلتونی در G باید حاوی دو ضلع مجاور با v، مثلا vu و vw باشد. یک چنین دوری شامل یک مسیر از u به w در گراف $G-\{v\}$ است که $G-\{v\}$ گراف حاصل از حذف v و اضلاع مجاور با آن است. چون این مسیر یک درخت فراگیر از $G-\{v\}$ است، داریم:

$$\text{جواب TSP} \geq \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع طول‌های دو ضلع} \\ \text{با کمترین طول مجاور با } v \end{array} \right\} + \text{MST}(G-\{v\}). \qquad (۲.۴)$$

مثال ۶.۴

رابطه (۲.۴) را روی گراف شکل ۷.۴ به‌کار ببرید.



شکل ۷.۴

[1]Travelling Salesman Problem

جواب
رأس a را انتخاب کنید. دو ضلع با کمترین طول مجاور با a دارای طول‌های ۳ و ٦ هستند. درخت فراگیر با می‌نیمم وزن در $G - \{a\}$ متشکل از اضلاع bc، cd و ec بوده و دارای طول ۱۴ است. بنابراین، بنابر (۲.۴)، یک کران پایین برای TSP برابر ۲۳ = ۱۴ + ٦ + ۳ است.

درعوض، می‌توانستیم از b شروع کنیم. دو ضلع با کوتاه‌ترین طول دارای طول‌های ۴ و ۷ هستند و درخت فراگیر با می‌نیمم وزن در $G - \{b\}$ دارای طول ۱۳ است، بنابراین کران پایین ۲۴ = ۱۳ + ۷ + ۴ حاصل می‌شود. این کران دوم در مقایسه با اولی اطلاعات بیشتری می‌دهد.

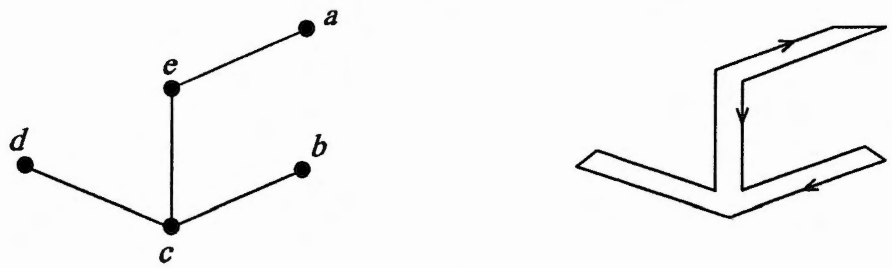
کران‌های بالا

فرض کنید که وزن‌ها معرف فاصله هستند و در نامساوی مثلث صدق می‌کنند

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$$

که $d(x,y)$ معرف کوتاه‌ترین فاصله از x به y است. در این حالت، روش زیرکران‌های بالایی برای TSP در K_n ارائه می‌دهد.

یک درخت فراگیر می‌نیمم، مثلاً به‌وزن w، در K_n پیدا کنید. در این‌صورت می‌توانیم یک گشت به‌طول $۲w$ پیدا کنیم که هر رأس را حداقل یک‌بار ملاقات کرده و با حرکت دوری روی درخت، شکل ۸.۴، به نقطه شروع خود بازگردد.



شکل ۸.۴

حال تلاش می‌کنیم تا طول این گشت را با انتخاب میان‌بر کاهش دهیم. از یک رأس شروع کرده و روی گشت حرکت کنید. وقتی به یک ضلعی می‌رسیم که ما را به یک راس قبلاً ملاقات‌شده می‌برد مسیر مستقیمی را انتخاب می‌کنیم که ما را به یک رأس جدید ببرد. برای مثال، در شکل ۸.۴ ، که درخت فراگیر می‌نیمم گراف مثال ٦.۴ را نشان می‌دهد، می‌توان از a شروع کرده و $aecbda$ را به‌طول ۲٦ به‌دست آورد. چون این روش منجر به یک دور همیلتونی به‌طول حداکثر دوبرابر MST می‌شود، داریم

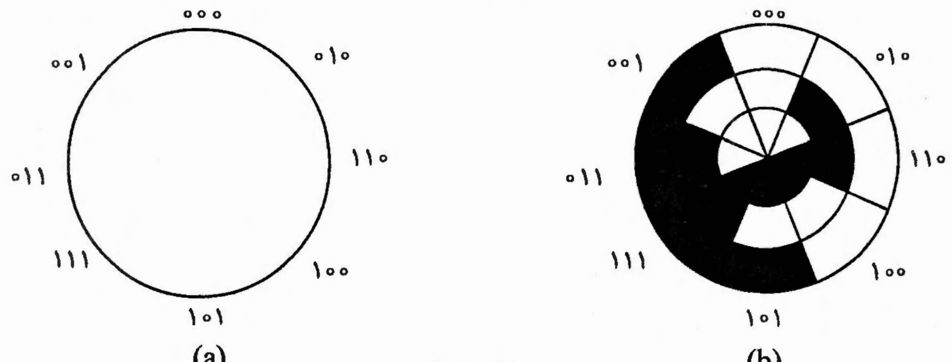
$$\text{MST} < \text{TSP} \leq \text{جواب} \; ۲\text{MST} \qquad (۳.۴)$$

و چون MST $<$ جواب TSP، بنابر (۱.۴)، طول دور همیلتونی ساخته‌شده حداکثر دوبرابر می‌نیمم طول ممکن است. در بخش ۵.۴ این مقدار را به $\frac{3}{2}$ می‌نیمم طول ممکن می‌رسانیم.

۴.۴ کدهای گری

یک کد گری[۱] از مرتبه n عبارت است از یک ترتیب دوری از 2^n دنباله دوتایی به‌طول n به‌قسمی‌که هر دو دنباله مجاور باهم تنها در یک مکان اختلاف داشته باشند. برای مثال، شکل ۹.۴(a) یک کد گری به‌طول ۳ را نشان می‌دهد.

استفاده صنعتی کدهای گری وابسته به توانایی آنها در توصیف موقعیت زاویه‌ای یک چرخ دوار است. همچون شکل ۹.۴(b)، ۰ و ۱ با سفید و سیاه (باز و بسته) نمایش داده می‌شوند. این واقعیت که دنباله‌های مجاور تنها در یک مکان اختلاف دارند باعث جلوگیری از خطا در هنگام خواندن دنباله می‌شود. (این را با تغییر عدد ۱۹۹۹ به ۲۰۰۰ در کیلومترشمار یک اتومبیل مقایسه کنید.)



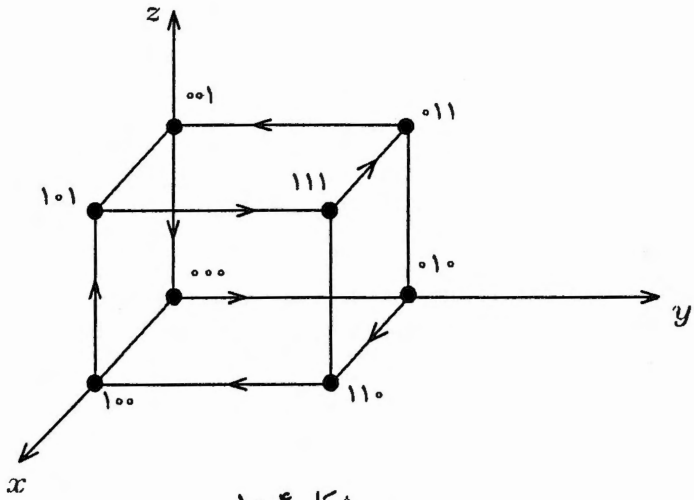
شکل ۹.۴

توجه کنید که کد یادشده متناظر با یک دور همیلتونی در یک مکعب سه‌بعدی است (در شکل ۱۰.۴ بردارها را تعقیب کنید). همچنین توجه کنید که حرکت دور شامل حرکت روی قاعده مکعب، مختص سوم برابر ۰، و سپس حرکت به بالا و تغییر مختص سوم از ۰ به ۱ است؛ نهایتاً با پیمودن مکعب دوبعدی بالایی، درجهت عکس، دور کامل می‌شود. این ایده قابل تعمیم است. بنابراین برای به‌دست آوردن یک کد گری از مرتبه ۴، یک کد گری از مرتبه۳ را نوشته و به انتهای هریک از دنباله‌های آن یک ۰ ضمیمه کنید، سپس همان کد گری را در جهت عکس و با پسوند ۱ دنبال کنید. نتیجه زیر حاصل می‌شود.

۰۰۰۰ – ۰۱۰۰ – ۱۱۰۰ – ۱۰۰۰ – ۱۰۱۰ – ۱۱۱۰ – ۰۱۱۰ – ۰۰۱۰ – ۰۰۱۱–

۰۱۱۱ – ۱۱۱۱ – ۱۰۱۱ – ۱۰۰۱ – ۱۱۰۱ – ۰۱۰۱ – ۰۰۰۱ – ۰۰۰۰.

---
[۱] Gray Code



شکل ۱۰.۴

۵.۴ گراف‌های اویلری

راننده یک ماشین برف‌روب می‌خواهد از آمادگاه خارج شده و پس از طی‌کردن هریک از جاده‌ها دقیقاً یک‌بار، مجددا به آمادگاه باز گردد. چه موقع این عمل امکان‌پذیر است؟ مشابها، شهروندان کونیگذبرگ علاقمند به پیمودن هریک از پل‌ها دقیقا یک‌بار و بازگشت به خانه بودند. هر دو مسئله در پی نوع خاصی از یک گذر بسته هستند.

تعریف ۲.۴
یک **مدار اویلری**[۱] یک گذر بسته است که حاوی تمامی اضلاع گراف است. یک گراف حاوی یک مدار اویلری را گراف اویلری می‌نامند.

در بخش ۱.۳ ملاحظه شد که یک شرط لازم برای وجود یک مدار اویلری این است که تمامی رأس‌ها از درجه زوج باشند. ملاحظه خواهد شد که این خاصیت یک شرط کافی برای اویلری بودن یک گراف همبند است. برای اثبات به لم زیر نیاز داریم.

لم ۱.۴
فرض کنید در گراف G هر رأس از درجه زوج باشد. در این‌صورت مجموعه اضلاع G اجتماعی از دورهای جدا از هم ضلعی است.

اثبات
از استقرا روی تعداد اضلاع استفاده کنید. لم برای $q = ۲$ درست است، بنابراین یک گراف با

[۱] Eulerian circuit

k ضلع درنظر بگیرید و فرض کنید که لم برای تمامی گراف‌های با $q < k$ ضلع درست باشد. یک رأس v. اختیار کرده و از آن‌جا گشتی را آغاز نموده و تا جایی ادامه دهید که به یک رأس قبلا ملاقات‌شده برسید. اگر این رأس v_j است آنگاه بخشی از گشت که از v_j تا v_j را تشکیل می‌دهد یک دور C است. با حذف C به یک گراف H با کمتر از k ضلع دست می‌یابیم که هر رأس آن از درجه زوج است. بنابر فرض استقراء H اجتماعی از دورهای جدا از هم ضلعی است، و از این‌جا حکم ثابت می‌شود. ■

قضیه ۳.۴

فرض کنید G یک گراف همبند است. در این‌صورت G اویلری است اگر و فقط اگر هر رأس آن از درجه زوج باشد.

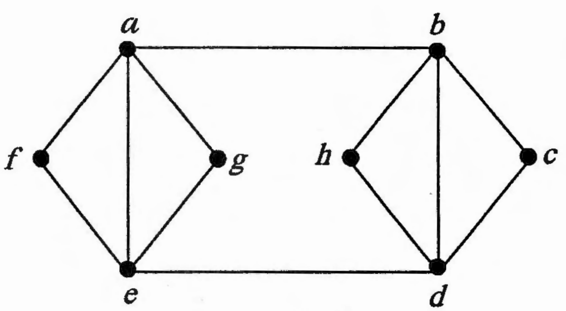
اثبات

لزوم. قبلا نشان داده شده است.

کفایت. فرض کنید هر رأس از درجه زوج باشد. در این‌صورت اضلاع در دورهای جدا از هم قرار می‌گیرند. یکی از این دورها، مثلاً C_1، را درنظر بگیرید. اگر C_1 حاوی تمامی اضلاع G نباشد آنگاه چون G همبند است رأسی مانند $v_1 \in C_1$ و ضلعی چون v_1v_2 وجود دارند که v_1v_2 در C_1 قرار ندارد. ضلع v_1v_2 در دور دیگری چون C_2 قرار دارد که جدا از C_1 است. با متصل نمودن C_2 و C_1 از طریق v_1 یک گذر بسته به‌دست آورید. اگر این گذر بسته حاوی تمامی اضلاع G نباشد آنگاه یک رأس v_3 در $C_1 \cup C_2$ و یک ضلع $v_3v_4 \notin C_1 \cup C_2$ را درنظر بگیرید. در این‌صورت v_3v_4 در دور دیگری چون C_3 قراردارد که آن‌را به $C_1 \cup C_2$ الحاق می‌کنیم. این روش را تا به‌کار بردن تمام اضلاع ادامه‌دهید.■

مثال ۷.۴

درشکل ۱۱.۴، ابتدا دور $abcdefa$ را انتخاب کنید. سپس دور $agea$ را در a به دور اول الحاق کنید، و سرانجام دور $bdhb$ را در b به دورهای قبلی ضمیمه کنید تا گذر اویلری $ageabdhbcdefa$ به‌دست آید.



شکل ۱۱.۴

تعریف ۳.۴
یک **گذر اویلری** گذری است که حاوی تمامی اضلاع گراف باشد ولی بسته نباشد. یک گراف غیراویلری را که حاوی یک گذر اویلری باشد یک گراف **نیمه اویلری**[۱] می‌نامند.

قضیه زیر فوراً از قضیه ۳.۴ نتیجه می‌شود.

قضیه ۴.۴
یک گراف همبند G نیمه اویلری است اگر و فقط اگر دقیقا حاوی دو رأس از درجه فرد باشد.

مثال ۸.۴
در مسئله پل کونیگزبرگ، فرض کنید که یک پل دیگر ساخته شود. در این‌صورت گراف حاصل دارای دو رأس از درجه فرد خواهد بود و بنابراین یک گذر اویلری خواهد داشت.

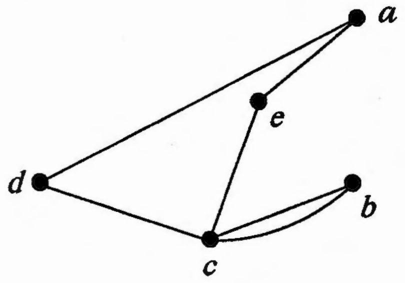
یک کران بالا برای TSP

روش زیر منجر به تولید یک دور همیلتونی در یک گراف کامل می‌شود که طول آن حداکثر $\frac{۳}{۲}$ طول دور همیلتونی می‌نیمم است. این کران بخش ۳.۴ را بهبود می‌بخشد.
در گراف K_n، که براساس طول اضلاع برچسب‌گذاری شده است، ابتدا یک درخت فراگیر می‌نیمم T پیدا کنید. بنابر تمرین ۱.۳، T باید حاوی یک تعداد زوجی چون $۲m$ از رئوس از درجه فرد باشد. در این‌صورت تبدیل این $۲m$ رأس به m زوج با استفاده از m ضلع واقع در K_n امکان‌پذیر است. یک چنین مجموعه‌ای از اضلاع متمایز را یک تطابق[۲] می‌نامند. راه‌های بسیاری برای انتخاب یک چنین تطابقی وجود دارد، بنابراین ما یک تطابق M با کمترین طول کل را انتخاب می‌کنیم. اگر اکنون اضلاع M را به T اضافه کنیم، گراف جدید $M \cup T$ را به‌دست می‌آوریم که در آن هر رأس درجه زوج دارد: پس $M \cup T$ حاوی یک مدار اویلری است.

برای مثال، با گراف مثال ۷.۴، طول T برابر ۱۷ است (شکل ۸.۴) و T دارای چهار رأس از درجه فرد است. قرار دهید $M = \{ad, bc\}$ تا $M \cup T$ را مطابق شکل ۱۲.۴ به‌دست آورید. دور $aecbcda$ اویلری است.
با شروع از a، می‌توانیم $aecb$ را انتخاب کنیم، و برای اجتناب از این‌که c را دوبار ملاقات کنیم، از b مستقیما به d و سپس به a می‌رویم. در این‌صورت دور همیلتونی به‌طول ۲۶ $aecbda$ حاصل می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که طول مدار اویلری حاصل از این روش همیشه حداکثر $\frac{۳}{۲}$TSP خواهد بود. فرض کنید TSP، EC، MST و M به‌ترتیب معرف طول دور همیلتونی می‌نیمم، مدار اویلری، درخت فراگیر می‌نیمم و تطابق باشند. در این‌صورت

---
[۱] Semi-Eulerian [۲] matching



شکل ۱۲.۴

$$\mathrm{EC} = \mathrm{MST} + \mathrm{M}, \quad \mathrm{TSP} > \mathrm{MST}.$$

در دور همیلتونی به‌طول می‌نیمم، $2m$ رأس M با ترتیبی مثلاً $x_1, \ldots, x_{2m}$ رخ می‌دهند. اگر برای هر $i < 2m$، بخشی از دور که بین x_i و x_{i+1} قرار دارد را با ضلع $x_i x_{i+1}$ و بخش بین x_{2m} و x_1 را با ضلع $x_{2m}x_1$ جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$l(x_1, x_2) + l(x_2, x_3) + \ldots + l(x_{2m}, x_1) \leq \mathrm{TSP}$$

که $l(x_i, x_j)$ معرف طول ضلع $x_i x_j$ است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}(l(x_1, x_2) + l(x_3, x_4) + \ldots + l(x_{2m-1}, x_{2m}))+ \\ (l(x_2, x_3) + \ldots + l(x_{2m}, x_1)) \leq \quad \mathrm{TSP}.\end{aligned}$$

بنابراین دو تطابق از $x_1, \ldots, x_{2m}$ به‌دست می‌آوریم که مجموع طول آنها از TSP تجاوز نمی‌کند. طول یکی از این تطابق‌ها باید از $\frac{1}{2}\mathrm{TSP}$ تجاوز نکند، به‌قسمی‌که

$$\mathrm{M} \leq \frac{1}{2}\mathrm{TSP}.$$

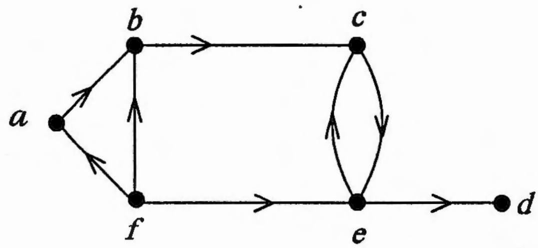
بنابراین $\mathrm{EC}=\mathrm{MST}+\mathrm{M}\leq\mathrm{TSP}+\frac{1}{2}\mathrm{TSP}= \frac{3}{2}\mathrm{TSP}$. پس، با استفاده از میان‌بر در مدار اویلری به‌منظور اجتناب از تکرار رأس‌ها، یک دور همیلتونی به‌طول حداکثر $\frac{3}{2}\mathrm{TSP}$ به‌دست می‌آوریم.

۶.۴ دگراف‌های اویلری

یک دگراف[1] یا گراف جهت‌دار[2] گرافی است که به هر ضلع آن یک جهت نسبت داده شده است که با علامت بردار مشخص می‌شود. به‌جای درجه یک رأس، درجه ورودی[3] و درجه خروجی[4] را داریم که به‌ترتیب تعداد ضلع‌های وارد به یک رأس و خارج از آن می‌باشند.

[1] digraph [2] directed graph [3] indegree [4] outdegree

مثال ۹.۴
در شکل ۱۳.۴، درجه ورودی رأس‌های a، ...، f به‌ترتیب ۱،۲،۲،۱،۲،۰ و درجه خروجی آنها برابر ۱،۱،۱،۰،۲،۳ هستند. واضح است که چرا مجموع درجه‌های ورودی برابر با مجموع درجه‌های خروجی است.



شکل ۱۳.۴

یک مدار اویلری در یک دگراف دقیقا آن چیزی است که انتظار داریم؛ این مدار باید در هر مرحله جهت بردارها را تعقیب کند. اگر برای هر رأسی درجه ورودی برابر درجه خروجی باشد آنگاه، همچون لم ۱.۴، مجموعه اضلاع قابل افراز به اجتماعی از دورهای جهت‌دار جدا از هم است، و مانند قضیه ۳.۴ خواهیم داشت:

قضیه ۵.۴
یک دگراف همبند دارای مدار اویلری است اگر و فقط اگر در هر رأس درجه ورودی برابر درجه خروجی باشد.

چرخ‌های حافظه

گفته می‌شود که کلمه سانسکریت بی‌معنی

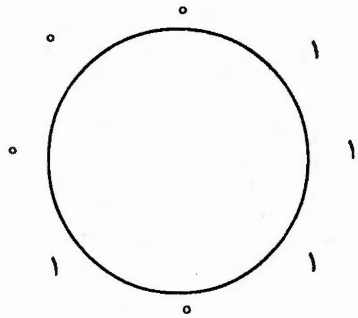
$$yama'ta'ra'jabha'nasalaga'm$$

به‌عنوان یک وسیله کمکی برای حافظه توسط طبال‌های هندی به‌کار می‌رفته است. در این کلمه هر حرف سه‌تایی تأکیدی و غیرتأکیدی دقیقا یک‌بار به‌کار رفته است. اگر حروف تاکیدی و غیرتاکیدی را به‌ترتیب با ۱ و ۰ نمایش دهیم دنباله زیر حاصل می‌شود:

$$0111010001. \qquad (۴.۴)$$

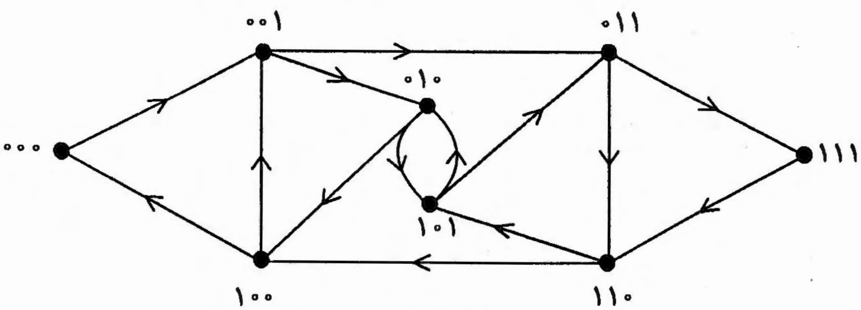
سه‌تایی‌های ۰۱۱، ۱۱۱، ۱۱۰، ۱۰۱، ۰۱۰، ۱۰۰، ۰۰۰، ۰۰۱ به‌ترتیب در این کلمه ظاهر می‌شوند. توجه کنید که آخرین دو رقم (۴.۴) مشابه اولین دو رقم هستند. پس می‌توان با روی هم قرار دادن دو سر دنباله به یک چرخ حافظه دست یافت که در شکل ۱۴.۴

نشان داده شده است.
حال این ترتیب آنچه را که یک کد گری انجام می‌داد به‌شکل خیلی کاراتری انجام می‌دهد. یک جسم حساسی که روی لبه چرخ قرارداده می‌شود می‌تواند دنباله‌های سه‌رقمی را خوانده و براساس آن میزان چرخش چرخ را تعیین کند. یک کد گری برای ۸ موقعیت نیاز به سه دایره دارد که هرکدام متناظر با ۸ رقم هستند، یعنی این‌که به یک حافظه ۲۴ رقمی نیاز است، درحالی که چرخ حافظه تنها به ۸ رقم نیاز دارد.



شکل ۱۴.۴

حال تلاش می‌کنیم تا این ایده را تعمیم دهیم: آیا یک ترتیب دوری از تمامی 2^n دنباله دوتایی به‌طول n وجود دارد؟ یک روش ورود به مسئله می‌تواند از طریق دورهای همیلتونی باشد. چون در مثال بالا دنباله‌های ۱۱۰ , ۱۰۱ به‌ترتیب قبل از دنباله‌های ۱۰۰ , ۰۱۰ ظاهر می‌شوند، می‌توان سه‌تایی‌های xyz را به‌عنوان رأس‌های یک گراف درنظر گرفت و xyz , yzw را با یک ضلع به‌هم وصل نمود تا دگراف شکل ۱۵.۴ به‌دست آید.



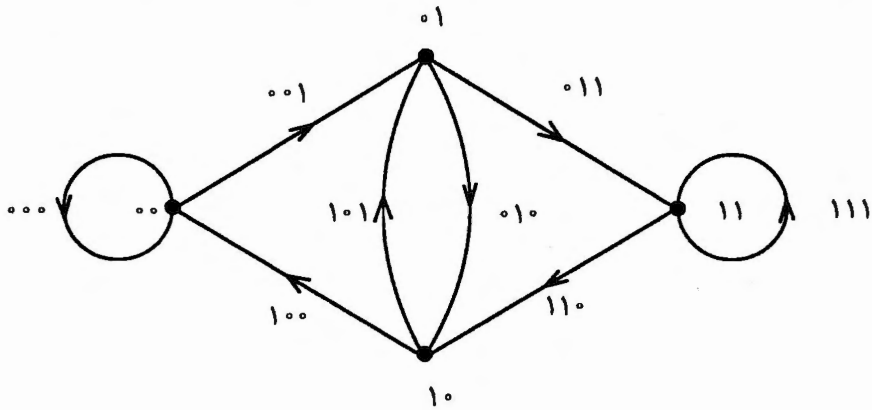
شکل ۱۵.۴

دور جهت‌دار همیلتونی

۰۰۰ − ۰۰۱ − ۰۱۱ − ۱۱۱ − ۱۱۰ − ۱۰۱ − ۰۱۰ − ۱۰۰ − ۰۰۰

چرخ حافظه شکل ۱۴.۴ را تولید می‌کند. ولی، دشواری این روش این است که برای $n \geq 4$ چگونگی به‌دست‌آوردن یک دور همیلتونی در دگراف حاصل کار ساده‌ای نیست.

با این‌حال مسئله در سال ۱۹۴۶ در یک مقاله نظریه اعداد توسط گود[1] حل شد. در روش ارائه‌شده، به‌جای انتخاب دنباله‌های سه‌تایی به‌عنوان رأس، این دنباله‌های سه‌تایی به‌عنوان ضلع گراف درنظر گرفته شدند که در آن‌رأس‌ها متناظر با دوتایی‌های یکسان انتخاب شدند. بنابراین برای $n = 3$، دگراف شکل ۱۶.۴ را داریم.



شکل ۱۶.۴

حال در این دگراف هر رأسی درجه ورودی و درجه خروجی یکسان دارد، و بنابراین یک مدار اویلری وجود دارد. یکی از مدارهای اویلری متشکل از اضلاع

۰۰۰ − ۰۰۱ − ۰۱۱ − ۱۱۱ − ۱۱۰ − ۱۰۱ − ۰۱۰ − ۱۰۰ − ۰۰۰

بوده و این همان چرخ حافظه قبلی را تولید می‌کند.

درحالت کلی، دنباله‌های دوتایی $n-1$ رقمی را به‌عنوان رأس درنظر بگیرید و از $x_1x_2\ldots x_{n-1}$ یک ضلع به $x_2x_3\ldots x_n$ با برچسب $x_1x_2\ldots x_n$ رسم کنید. دگراف حاصل یک مدار اویلری دارد که یک چرخ حافظه تولید می‌کند.

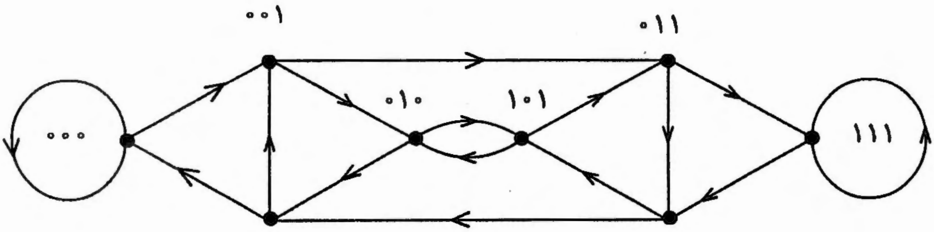
مثال ۱۰.۴

یک چرخ حافظه شامل تمامی ۱۶ دنباله دوتایی به‌طول ۴ به‌دست آورید.

جواب

یک دگراف با ۸ رأس بسازید که در آن‌رأس‌ها با دنباله‌های دوتایی به‌طول ۳ برچسب‌گذاری شده، و یک ضلع جهت‌دار از $x_1x_2x_3$ به x_2x_30 و x_2x_31 رسم شده است. دگراف شکل ۱۷.۴ حاصل می‌شود.

[1] I. J. Good



شکل ۱۷.۴

یک مدار اویلری، برحسب رئوس، عبارت است از

۰۰۰ − ۰۰۰ − ۰۰۱ − ۰۱۱ − ۱۱۱ − ۱۱۱ − ۱۱۰ − ۱۰۱

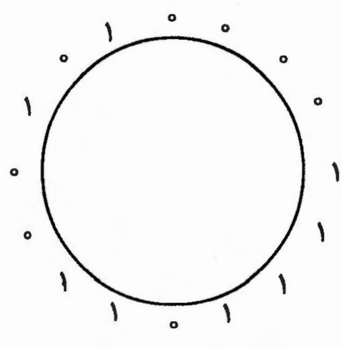
−۰۱۱ − ۱۱۰ − ۱۰۰ − ۰۰۱ − ۰۱۰ − ۱۰۱ − ۰۱۰ − ۱۰۰ − ۰۰۰

یعنی برحسب اضلاع مدار به‌شرح زیر است:

۰۰۰۰ − ۰۰۰۱ − ۰۰۱۱ − ۰۱۱۱ − ۱۱۱۱ − ۱۱۱۰ − ۱۱۰۱ − ۱۰۱۱

−۰۱۱۰ − ۱۱۰۰ − ۱۰۰۱ − ۰۰۱۰ − ۰۱۰۱ − ۱۰۱۰ − ۰۱۰۰ − ۰۰۰۰.

شکل ۱۸.۴ چرخ حافظه متناظر با این دور را نشان می‌دهد.



شکل ۱۸.۴

مسئله ساخت چرخ‌های حافظه به‌نام مسئله طبل دوار نیز معروف است. دنباله‌های دوتایی دوری اغلب دنباله‌های ثبت انتقال به‌طول ماکزیمم[۱]، یا دنباله‌های دبرون[۲] نامیده می‌شوند. برون، ریاضی‌دان آلمانی، در ۱۹۴۶ درباره این دنباله بحث کرد، اگرچه مشخص شده که این دنباله‌ها سال‌ها قبل توسط C. Flye Sainte-Marie ساخته شده بودند. از این دنباله‌ها در مخابرات و اخیرا در بیولوژی استفاده شده است.

[۱] maximum length shift register sequences
[۲] de Bruijn Sequences

تمرینات

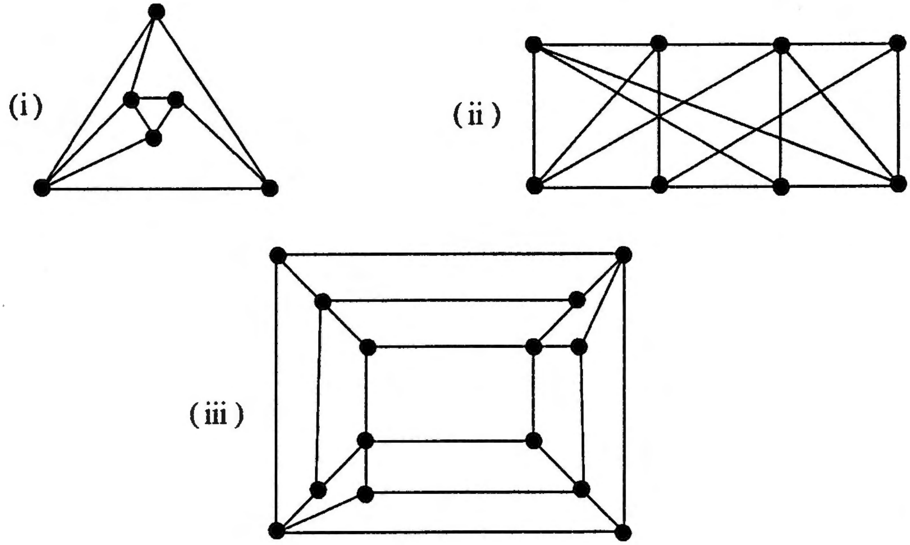
تمرین ۱.۴

(a) با حکم زیر قضیه ۱.۴ را تقویت کنید: اگر یک گراف دوقسمتی با افراز $V = B \cup W$ همیلتونی باشد آنگاه $|B| = |W|$.

(b) نتیجه بگیرید که $K_{m,n}$ همیلتونی است اگر و فقط اگر $m = n \geq ۲$.

تمرین ۲.۴

برای هریک از گراف‌های شکل ۱۹.۴ خاصیت همیلتونی بودن، اویلری بودن، و نیمه اویلری بودن را بررسی کنید.



شکل ۱۹.۴

تمرین ۳.۴

کدام‌یک از گراف‌های اجسام افلاطونی، همیلتونی و کدام‌یک اویلری هستند؟

تمرین ۴.۴

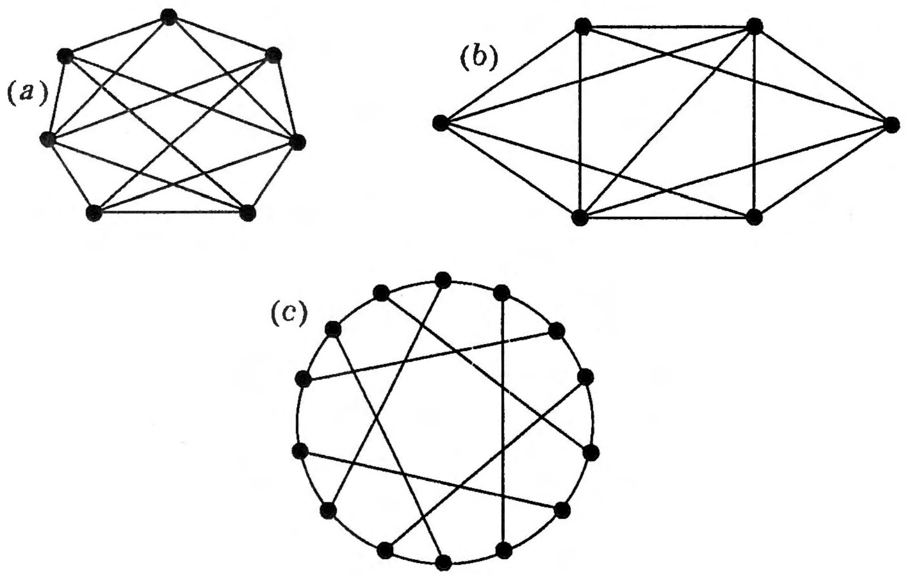
با به‌کار بردن الگوریتم تسطیح‌پذیری، تسطیح‌پذیر بودن گراف‌های شکل ۲۰.۴ را بررسی کنید.

تمرین ۵.۴

یک کد گری از مرتبه ۵ بسازید.

تمرین ۶.۴

قضیه دیراک. قضیه ۲.۴ را به‌روش زیر اثبات کنید.



شکل ۲۰.۴

فرض کنید G همیلتونی نیست. با افزودن ضلع، می‌توان فرض کرد که G تقریبا همیلتونی است، به این معنی که با افزودن یک ضلع دیگر به آن یک گراف همیلتونی به‌دست می‌آید. بنابراین G حاوی یک مسیر $v_۱ \to v_۲ \to \ldots \to v_p$ است که $v_۱$ و v_p مجاور نیستند. نشان دهید که رأسی چون v_i مجاور به $v_۱$ موجود است به‌قسمی‌که $v_{i-۱}$ نیز مجاور به v_p است. از این خاصیت دور همیلتونی $v_۱ \to \ldots \to v_{i-۱} \to v_p \to \ldots \to v_{i+۱} \to v_i \to v_۱$ حاصل می‌شود.

تمرین ۷.۴

(a) **قضیه اُری.** با تقلید از اثبات قضیه دیراک، نشان دهید اگر G یک گراف ساده با $p \geq ۳$ رأس باشد و برای هر دو رأس غیرمجاور w, v رابطه $\deg(v) + \deg(w) \geq p$ برقرار باشد آنگاه G همیلتونی است.

(b) نتیجه بگیرید که اگر G دارای $\frac{۱}{۲}(p-۱)(p-۲) + ۲$ ضلع باشد آنگاه G همیلتونی است.

(c) یک گراف غیرهمیلتونی با $\frac{۱}{۲}(p-۱)(p-۲) + ۱$ ضلع پیدا کنید.

تمرین ۸.۴

با حذف رأس A، یک کران پایین برای TSP در گراف تمرین ۷.۳ پیدا کنید. این عمل را با حذف رأس B تکرار کنید. سپس با به‌کار بردن روش بخش ۵.۴، یک کران بالا به‌دست آورید.

تمرین ۹.۴

با فرض‌های تمرین ۸.۳، یک کران بالا و پایین برای TSP ارائه دهید. نتیجه خود را با جواب

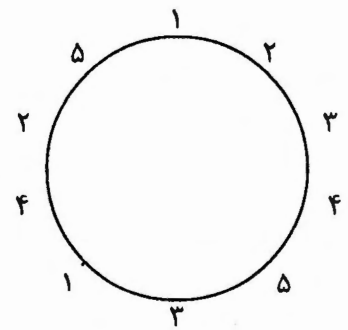
دقیق مسئله مقایسه کنید.

تمرین ۱۰.۴
یک چرخ حافظه شامل تمامی ۳۲ دنباله دوتایی ۵ رقمی بسازید.

تمرین ۱۱.۴
با استفاده از دگراف یک چرخ حافظه به‌طول ۹ بسازید که شامل تمامی دنباله‌های سه‌تایی دورقمی (دنباله‌های ساخته‌شده از ارقام ۰،۱،۲) باشد. سپس چرخ مشابه‌ای برای تمامی دنباله‌های سه‌تایی سه‌رقمی بسازید.

تمرین ۱۲.۴
آیا می‌توانید ۲۸ دمینو یک مجموعه معمولی را روی یک حلقه بسته قرار دهید به‌قسمی‌که هریک از آنها به‌روش معمولی با همسایه خود تطابق داشته باشد؟ آیا می‌توانید این کار را برای حالتی‌که تمامی دمینوهای حاوی ۶ حذف شده باشند انجام دهید؟ آیا می‌توانید یک قضیه کلی راجع به دمینوهای حاوی اعداد ۰، ۱، . . .، n بیان کنید؟ (راهنمایی: هر دمینو را به‌عنوان ضلعی از یک گراف با رأس‌های با برچسب ۰، ۱، . . .، n درنظر بگیرید.)

تمرین ۱۳.۴
شکل ۲۱.۴ ترتیبی از اعداد ۱، . . .، ۵ را روی یک دایره نشان می‌دهد به‌قسمی‌که هر عدد دقیقا یک‌بار با هریک از اعداد دیگر مجاور است. آیا ترتیب مشابه‌ای را می‌توانید برای اعداد ۱، . . .، ۷ ایجاد کنید؟ با استفاده از قضیه اویلر، نشان دهید که برای n عدد یک جواب وجود دارد اگر و فقط اگر n فرد باشد. آیا می‌توانید نتیجه مشابه‌ای را برای اعداد زوج بیان کنید؟



شکل ۲۱.۴

فصل ۵

افرازها و رنگ‌آمیزی‌ها

در این فصل افرازهای یک مجموعه را همراه با معرفی اعداد استرلینگ و بل[۱] درنظر می‌گیریم. سپس رنگ‌آمیزی رئوس و اضلاع یک گراف را بررسی می‌کنیم که در آن مجموعه رئوس و اضلاع توسط رنگ‌ها افراز می‌شوند.

۱.۵ افرازهای یک مجموعه

یک **افراز** از یک مجموعه S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های غیرخالی $S_۱$، . . .، S_r از S است که دوبه‌دو متمایز بوده و اجتماع آنها برابر S است. زیرمجموعه‌های S_i **بخش‌های** افراز نامیده می‌شوند. برای مثال، $\{۵\} \cup \{۳,۶\} \cup \{۱,۲,۴\}$ یک افراز $\{۱,\ldots۶\}$ به سه بخش است. توجه کنید که ترتیب ظهور بخش‌ها اهمیت ندارد.

مثال ۱.۵

در یک بازی پل، ۵۲ کارت یک دست استاندارد بین چهار نفر توزیع می‌شود که هر نفر ۱۳ کارت دریافت می‌کند. به چند طریق بسته ۵۲ کارتی قابل افراز به چهار مجموعه ۱۳ عضوی است؟

جواب

۱۳ کارت را می‌توان به $\binom{۵۲}{۱۳}$ طریق انتخاب کرد. از بقیه کارت‌ها می‌توان به $\binom{۳۹}{۱۳}$ طریق ۱۳ کارت انتخاب نمود، و سپس از ۲۶ کارت باقیمانده می‌توان ۱۳ کارت به $\binom{۲۶}{۱۳}$ طریق انتخاب کرد. به این ترتیب یک مجموعه نهایی متشکل از ۱۳ کارت باقی می‌ماند. بنابراین

[۱] Stirling and Bell numbers

تعداد حالت‌های ممکن برای افراز این بسته ۵۲ کارتی برابر است با

$$\binom{۵۲}{۱۳}\binom{۳۹}{۱۳}\binom{۲۶}{۱۳} = \frac{۵۲!}{۱۳!۳۹!}\cdot\frac{۳۹!}{۱۳!۲۶!}\cdot\frac{۲۶!}{۱۳!۱۳!} = \frac{۵۲!}{(۱۳!)^{۴}}.$$

ولی همه این افرازها متمایز نیستند، زیرا بسته به این‌که کدام‌یک از چهار مجموعه اول انتخاب شود و کدام دوم، ... ، هریک از این افرازها به !۴ حالت مختلف رخ می‌دهد. بنابراین عدد مطلوب برابر است با

$$\frac{۵۲!}{(۱۳!)^{۴}۴!}$$

که یک عدد بزرگتر از $۱۰^{۲۷}$ است.

روش دیگری برای ورود به این مسئله شمارش وجود دارد. یک ردیف ۵۲ مکانی که به چهار گروه ۱۳ مکانی تقسیم شده است را درنظر بگیرید.

$$(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot).$$

کارت‌ها به !۵۲ حالت مختلف می‌توانند در این مکان‌ها قرار گیرند. در هر گروه به !۱۳ طریق می‌توان مجموعه ۱۳ کارتی مربوطه را مرتب نمود، و این ترتیب‌های مختلف بی‌خاصیت هستند زیرا همگی منتج به بخش یکسانی از افراز می‌شوند، بنابراین باید عدد !۵۲ را به $(۱۳!)^{۴}$ تقسیم کنیم (برای هر گروه یک !۱۳). سپس چهار گروه حاصل خودشان می‌توانند به !۴ حالت مختلف مرتب شوند، و بنابراین باید یک عمل تقسیم بر !۴ نیز درنظر گرفته شود.

به‌سادگی می‌توان این ترتیب را تعمیم داده و نتیجه زیر را به‌دست آورد.

قضیه ۱.۵

یک مجموعه mn عضوی قابل افراز به m مجموعه n عضوی به

$$\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$$

طریق مختلف است.

نتیجه ۱.۵

یک مجموعه از $۲m$ شی را می‌توان به $\frac{(۲m)!}{۲^m m!}$ طریق مختلف به m زوج افراز نمود.

مثال ۲.۵

تعداد حالت‌های جفت نمودن ۱۶ تیم در یک قرعه‌کشی جام فوتبال برابر است با

$$\frac{۱۶!}{۲^۸ ۸!} = ۲۰۲۷۰۲۵۰.$$

بحث مشابه‌ای را می‌توان در مورد افرازهایی که در آنها بخش‌ها هم‌اندازه نیستند به‌کار برد.

مثال ۳.۵

به چند طریق می‌توان یک کلاس متشکل از ۲۵ شاگرد را به چهارگروه ۳ نفره، دو گروه ۴ نفره و یک گروه ۵ نفره افراز نمود؟

جواب

یک گروه‌بندی از ۲۵ مکان به‌فرم زیر است.

$$(---)(---)(---)(---)(----)(----)(-----).$$

بیست و پنج شاگرد به $!۲۵$ حالت مختلف می‌توانند در این مکان‌ها قرار گیرند. برای شمردن افرازهای متمایز، باید روشهای مرتب‌نمودن شاگردها را در داخل گروه‌ها درنظر بگیریم — بنابراین یک عمل تقسیم بر $(۳!)^۴(۴!)^۲۵!$ نیاز است — و همچنین حالت‌های مرتب‌نمودن گروه‌ها با یکدیگر نیز باید لحاظ شود که بر مبنای آن عمل تقسیم بر $!۴$، به‌حساب ۴ گروه ۳ نفره، و عمل تقسیم بر $!۲$، به‌حساب دو گروه ۴ نفره، لازم می‌شود. بنابراین عدد مطلوب عبارت است از

$$\frac{۲۵!}{(۳!)^۴(۴!)^۲۵!۴!۲!} \cong ۳.۶ \times ۱۰^{۱۵}.$$

تعریف ۱.۵

یک افراز از یک مجموعه n عضوی شامل α_i زیرمجموعه به‌اندازه i، $۱ \leq i \leq n$، که $\sum_{i=۱}^{n} i\alpha_i = n$، یک افراز از نوع $۱^{\alpha_۱}۲^{\alpha_۲}\ldots n^{\alpha_n}$ نامیده می‌شود.

با تعمیم مثال ۳.۵ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۲.۵

تعداد افرازهای از نوع $۱^{\alpha_۱}۲^{\alpha_۲}\ldots n^{\alpha_n}$ یک مجموعه n عضوی برابر است با

$$\frac{n!}{\prod_{i=۱}^{n}(i!)^{\alpha_i}\alpha_i!}.$$

مثال ۴.۵

تعداد حالت‌های ممکن برای افراز ۱۰ نفر به دو گروه ۳ نفره و یک گروه ۴ نفره برابر است با تعداد افرازهای از نوع $۳^۲۴^۱$، و بنابراین برابر است با

$$\frac{۱۰!}{(۳!)^۲۲!۴!} = ۲۱۰۰.$$

۲.۵ اعداد استرلینگ

در این بخش درباره افرازنمودن یک مجموعه به تعداد مفروضی از بخش‌ها بحث می‌کنیم.

تعریف ۲.۵
فرض کنید $S(n, k)$ معرف تعداد حالت‌های ممکن برای افراز یک مجموعه n عضوی به دقیقاً k بخش باشد. در این‌صورت $S(n, k)$ **عدد استرلینگ از نوع دوم** نامیده می‌شود.

این اعداد به‌نام ریاضی‌دان اسکاتلندی، جیمز استرلینگ (۱۶۹۲–۱۷۷۰)، نام‌گذاری شده‌اند که به‌جهت ارائه تقریبی برای $n!$ نیز معروف است:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}.$$

استرلینگ همچنین اعداد از نوع اولی دارد که به‌نام او نام‌گذاری شده‌اند (تمرین ۱۰.۵ را ببینید).

حال $S(n, k)$ را مطالعه می‌کنیم. واضح است که برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1. \qquad (۱.۵)$$

مثال ۵.۵
نشان می‌دهیم $S(4, 2) = 7$. هفت حالت ممکن برای افراز $\{1, 2, 3, 4\}$ به دو بخش عبارت هستند از:

$$\{1\} \cup \{2, 3, 4\},\ \{2\} \cup \{1, 3, 4\},\ \{3\} \cup \{1, 2, 4\},\ \{4\} \cup \{1, 2, 3\},$$
$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\},\ \{1, 3\} \cup \{2, 4\},\ \{1, 4\} \cup \{2, 3\}.$$

واضح است که برای یک n بزرگ به روشی بهتر برای تعیین $S(n, k)$ نیاز داریم. یک چنین روشی توسط رابطه بازگشتی زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۳.۵
اگر $1 < k < n$ آنگاه

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k). \qquad (۲.۵)$$

اثبات
در هر افرازی از $\{1, \ldots, n\}$ به k بخش، عضو n ممکن است که خودش به‌عنوان یک بخش یک‌عضوی ظاهر شود و یا به‌عنوان عضوی از یک بخش بزرگ‌تر. اگر n به‌عنوان یک بخش ظاهر شود آنگاه بقیه $n - 1$ عضو باید یک افراز $k - 1$ بخشی برای $\{1, \ldots, n-1\}$ تشکیل دهند و انجام این کار به $S(n-1, k-1)$ طریق مختلف امکان‌پذیر است. از طرف دیگر، اگر n عضوی از یک بخش با حدّاقل ۲ عضو باشد، می‌توانیم افراز k بخشی $\{1, \ldots, n-1\}$ را درنظر گرفته— این عمل به $S(n-1, k)$ طریق مختلف امکان‌پذیر است— و سپس عضویت n

را به هر یک از k بخش حاصل درنظر بگیریم — که انجام این کار به k روش شدنی است. بنابراین طبق اصول جمع و ضرب داریم:

$$S(n,k) = S(n-۱, k-۱) + kS(n-۱, k). \blacksquare$$

مثال ۵.۵ (تکرار)

$$\begin{aligned} S(۴,۲) &= S(۳,۱) + ۲S(۳,۲) \\ &= ۱ + ۲(S(۲,۱) + ۲S(۲,۲)) \\ &= ۱ + ۲(۱+۲) = ۷. \end{aligned}$$

قضیه ۴.۵
اگر $n \geq ۲$، آنگاه $S(n,۲) = ۲^{n-۱} - ۱$.

اثبات

از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. نتیجه برای $n = ۲$ برقرار است، بنابراین فرض کنید حکم برای $n = k \geq ۲$ برقرار باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned} S(k+۱,۲) &= S(k,۱) + ۲S(k,۲) \quad (\text{بنابر } ۵.۲) \\ &= ۱ + ۲(۲^{k-۱} - ۱) \\ &= ۱ + ۲^k - ۲ = ۲^{(k+۱)-۱} - ۱. \blacksquare \end{aligned}$$

جدول ۱.۵ چند مقدار اولیه از اعداد استرلینگ را ارائه می‌دهد.

جدول ۱.۵

n\k	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	B(n)
۱	۱								۱
۲	۱	۱							۲
۳	۱	۳	۱						۵
۴	۱	۷	٦	۱					۱۵
۵	۱	۱۵	۲۵	۱۰	۱				۵۲
٦	۱	۳۱	۹۰	٦۵	۱۵	۱			۲۰۳
۷	۱	٦۳	۳۰۱	۳۵۰	۱۴۰	۲۱	۱		۸۷۷
۸	۱	۱۲۷	۹٦٦	۱۷۰۱	۱۰۵۰	۲٦٦	۲۸	۱	۴۱۴۰

به اعداد $۲^{n-۱} - ۱$ در ستون $k = ۲$ دقت کنید. در سمت راست جدول اعداد $B(n)$ قرار دارند که مجموع اعداد استرلینگ سطر مربوطه هستند. این اعداد را اعداد بل[۱] می‌نامند که

[۱] Bell number

به‌نام ریاضی‌دان اسکاتلندی دیگری، $E.\ T.\ Bell$ می‌باشند که به آمریکا مهاجرت کرد و چند کتاب معروف در ریاضی، شامل مردان ریاضی[۱] که یک کتاب دوجلدی در رابطه با بیوگرافی ریاضی‌دانان مشهور است، نوشت. برای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$B(n) = \sum_{k=۱}^{n} S(n,k). \tag{۳.۵}$$

اگر تعریف کنیم $B(۰) = ۱ = S(۰,۰)$ (این را مانند $\binom{۰}{۰}$، به‌عنوان یک قرارداد مفید بپذیرید)، یک رابطه بازگشتی برای اعداد بل حاصل می‌شود.

قضیه ۵.۵

اگر $n \geq ۱$ آنگاه $B(n) = \sum_{k=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{k} B(k)$.

اثبات

n امین عضو مجموعه تحت افراز به‌همراه $j \geq ۰$ عضو دیگر در یکی از زیرمجموعه‌ها ظاهر می‌شود. این j عضو را به $\binom{n-۱}{j}$ طریق مختلف می‌توان انتخاب کرد. بقیه $n-۱-j$ عضو به $B(n-۱-j)$ طریق افراز می‌شوند. پس

$$\begin{aligned} B(n) &= \sum_{j=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{j} B(n-۱-j) \\ &= \sum_{k=۰}^{n-۱} \binom{n-۱}{k} B(k). \blacksquare \end{aligned}$$

$n-۱-j=k$

مثال ۶.۵

$$\begin{aligned} B(۹) &= \sum_{k=۰}^{۸} \binom{۸}{k} B(k) \\ &= ۱ + ۸ \times ۱ + ۲۸ \times ۲ + ۵۶ \times ۵ + ۷۰ \times ۱۵ \\ &\quad + ۵۶ \times ۵۲ + ۲۸ \times ۲۰۳ + ۸ \times ۸۷۷ + ۱ \times ۴۱۴۰ \\ &= ۲۱۱۴۷. \end{aligned}$$

برای یک فرمول جالب (ولی بی‌فایده) از $B(n)$ به تمرین ۹.۵ مراجعه کنید.

۳.۵ شمارش توابع

اعداد استرلینگ به‌طور طبیعی در شمارش تمامی توابع $f: X \to Y$ از یک مجموعه m عضوی X به یک مجموعه n عضوی Y مطرح می‌شوند. تعداد این توابع n^m است، زیرا برای

---
[۱] Men of Mathematics

هر $x \in X$، n مقدار ممکن برای $f(x)$ وجود دارد.

به‌خاطر بیاورید که تصویر تابع $f : X \to Y$ مجموعه اعضایی از Y است که به‌ازای عضوی چون $x \in X$ برابر $f(x)$ هستند:

$$\mathrm{im}f = \{f(x) \in Y \ : \ x \in X\}.$$

هر تابع $f : X \to Y$ زیرمجموعه‌ای از Y را به‌عنوان تصویر خود دارد. چند تابع این‌چنینی تصویری با اندازه k دارند؟ اگر f دقیقاً k مقدار را اختیار کند آنگاه X را می‌توان به k بخش افراز نمود، که iامین بخش آن متشکل از تمامی اعضای X است که توسط f به iامین عضو $\mathrm{im}f$ تصویر می‌شوند. بنابراین یک تابع $f : X \to Y$ که اندازه تصویر آن k است را می‌توان با روند زیر ساخت:

(i) مجموعه X را به k بخش X_1، ...، X_k افراز کنید (این کار به $S(m,k)$ حالت مختلف امکان‌پذیر است)؛

(ii) مجموعه تصویر با اندازه k را در Y انتخاب کنید (این به $\binom{n}{k}$ روش مختلف انجام می‌شود)؛

(iii) هریک از X_iها را با یکی از اعضای مجموعه تصویر جفت کنید (این عمل را به $k!$ طریق مختلف می‌توان انجام داد).

بنابراین تعداد توابع $f : X \to Y$ با اندازه تصویر k برابر $S(m,k)\binom{n}{k}k!$ است. از این‌رو، چون k هر مقداری بین ۱ و n را اختیار می‌کند، و چون در مجموع n^m تابع $f : X \to Y$ وجود دارد، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۶.۵

فرض کنید $|X| = m$ و $|Y| = n$، که $m, n \geq 1$.

(a) تعداد توابع $f : X \to Y$ با اندازه تصویر k برابر $S(m,k)\binom{n}{k}k!$ است.

(b)

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} S(m,k)\binom{n}{k}k!. \qquad (۴.۵)$$

توجه کنید که به‌عنوان حالت خاص، تعداد توابع پوشا از X به Y برابر $n!S(m,n)$ است.

مثال ۷.۵

برای حالت $n = ۴$ و $m = ۵$ رابطه (۴.۵) را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{4} S(5,k)\binom{4}{k}k! &= 4S(5,1) + 12S(5,2) + 24S(5,3) + 24S(5,4)\\ &= 4 + 180 + 600 + 240 = 1024 = 4^5.\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم $S(m,0)=0$، $m \geq 1$، و $S(0,0)=1$، آنگاه (۴.۵) را می‌توان به‌فرم

$$n^m = \sum_{k=0}^{n} S(m,k)\binom{n}{k}k!$$

بازنویسی کرد. این تساوی را می‌توان معکوس نمود.

قضیه ۷.۵
برای هر $m \geq 1$، $n \geq 0$ و $m \geq n$ داریم

$$n!S(m,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m. \tag{۵.۵}$$

اثبات
با قراردادن $a_k = k^m$ و $b_k = S(m,k)k!$، می‌توانیم نتیجه ۲.۱ را به‌کار ببریم. معادلاً می‌توان از اصل حذف و شمول (بخش ۲.۶) استفاده کرد. ■

مثال ۸.۵

$$S(5,3) = \frac{1}{3!}\left(\sum_{k=0}^{3}(-1)^{3-k}\binom{3}{k}k^5\right) = \frac{1}{6}(-0+3-3\times 2^5+3^5) = 25.$$

۴.۵ رنگ‌کردن رئوس گراف‌ها

رنگ‌کردن راس‌های یک گراف G عبارت است از نسبت دادن یک رنگ به هر راس به‌قسمی‌که هیچ دو راس مجاوری هم‌رنگ نباشند. اگر یک مجموعه مستقل از رئوس را یک مجموعه از راس‌هایی تعریف کنیم که هیچ دو عضوی از آن مجاور نباشند، آنگاه یک راس‌رنگی را می‌توان به‌عنوان افرازی از مجموعه رئوس V به زیرمجموعه‌های مستقل درنظر گرفت. اغلب با کمترین تعداد رنگ مطلوب مواجه هستیم، یعنی کمترین تعداد مجموعه‌های مستقل که V را افراز کنند؛ این عدد را عدد رنگی G می‌نامیم.

تعریف ۳.۵
عدد رنگی[۱] یک گراف G را با $\chi(G)$ نمایش داده و برابر کمترین مقدار k تعریف می‌کنیم که راس‌های G را بتوان به k زیرمجموعه مستقل افراز کرد.

ایده رنگ‌کردن راس‌ها را قبلاً دیده‌ایم؛ در بخش ۵.۳ ملاحظه کردیم که گراف‌های دوقسمتی دو رنگ‌پذیر هستند؛ بنابراین اگر G دوقسمتی بوده و حداقل یک ضلع داشته باشد آنگاه $\chi(G)=2$. همچنین قضیه چهاررنگ می‌گوید که برای هر گراف تسطیح‌پذیر رابطه $\chi(G) \leq 4$ برقرار است.

[۱] chromatic number

قضیه ۸.۵

(i) $\chi(K_n) = n$.

(ii) $\chi(C_n) = ۲$ اگر n زوج باشد؛ $\chi(C_n) = ۳$ اگر n فرد باشد.

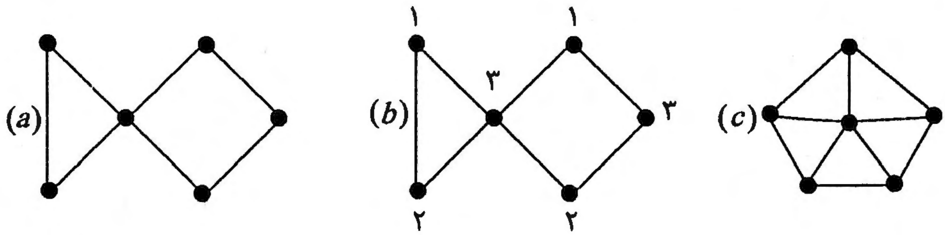
اثبات

(i) هیچ دو راسی نمی‌توانند رنگ‌های یکسانی داشته باشند زیرا مجاور هستند.

(ii) اگر n زوج باشد، می‌توانیم دو رنگ را به‌صورت تناوبی در طول دور به‌کار ببریم؛ اگر n فرد باشد برای آخرین راس به یک رنگ سوم نیاز داریم. ■

مثال ۹.۵

گراف شکل ۱.۵ (a) عدد رنگی ۳ دارد؛ این گراف به حداقل ۳ رنگ نیاز دارد زیرا حاوی $C_۳$ است، و همچنان‌که در شکل ۱.۵ (b) نشان داده شده است ۳ رنگ کافی است.



شکل ۱.۵

توجه کنید که مورد $C_{۲n+۱}$ در تناقض با اعتقاد بعضی از اثبات کننده‌های غیرحرفه‌ای قضیه چهاررنگ است که می‌گویند یک گراف نیاز به m رنگ دارد تنها اگر حاوی K_m، به‌عنوان یک زیرگراف باشد. مثال نقض دیگری برای این باور گراف شکل ۱.۵ (c) است که به چهار رنگ نیاز دارد (چرا؟) اگرچه حاوی $K_۴$ نیست.

هیچ روش ساده‌ای برای پیداکردن عدد رنگی یک گراف مفروض G ارائه نشده است. الگوریتم حریصی که هم‌اکنون معرفی می‌کنیم یک کران بالا برای $\chi(G)$ ارائه می‌دهد که وابسته به ماکزیمم درجه راس در G است. در توصیف این الگوریتم، رنگ‌ها را با $C_۱$، $C_۲$، ... نشان داده و C_i را i امین رنگ می‌نامیم.

الگوریتم حریص برای رنگ‌آمیزی راس‌ها

۱. راس‌ها را تحت ترتیبی چون $\nu_۱, \ldots, \nu_p$ مرتب کنید.

۲. رنگ $C_۱$ را به $\nu_۱$ نسبت دهید.

۳. در مرحله $i + ۱$، وقتی‌که تازه به ν_i رنگی نسبت داده شده است، رنگ C_j را به $\nu_{i+۱}$ نسبت دهید که j کمترین مقدار ممکن را داشته و هنوز در رنگ‌کردن رئوس مجاور با $\nu_{i+۱}$ به‌کار نرفته است.

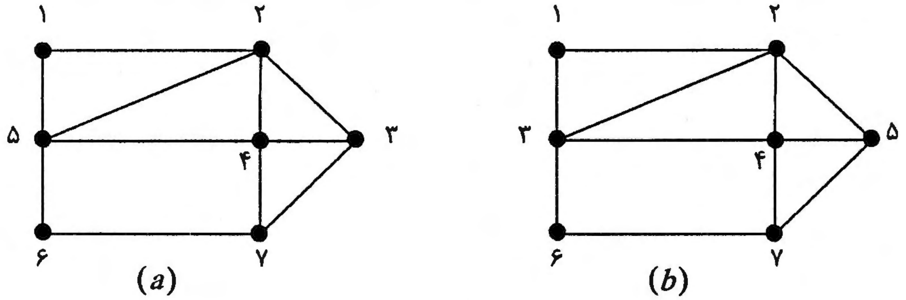
مثال ۱۰.۵
از الگوریتم حریص برای رنگ‌آمیزی گراف شکل ۲.۵ تحت هریک از دو ترتیب داده‌شده برای راس‌ها استفاده می‌کنیم. با رئوس مرتب‌شده مطابق با (a)، رنگ‌ها را به‌شرح زیر نسبت می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccccccccc} \nu & : & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ C & : & ۱ & ۲ & ۱ & ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{array}$$

این رنگ‌آمیزی از چهار رنگ استفاده می‌کند. با این‌حال، با راس‌های برچسب‌گذاری شده مطابق با (b)، رنگ‌آمیزی به‌فرم زیر است:

$$\begin{array}{ccccccccc} \nu & : & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ C & : & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۳ & ۱ & ۲ \end{array}$$

از دومین رنگ‌آمیزی نتیجه می‌شود $\chi(G) \leq ۳$؛ در واقع $\chi(G) = ۳$ زیرا G دوقسمتی نیست.



شکل ۲.۵

واضح است که کران به‌دست آمده برای $\chi(G)$ توسط این الگوریتم بستگی به ترتیب لحاظ‌شده برای راس‌ها دارد. ولی این بستگی کامل نیست، اگر راس ν از درجه d باشد آنگاه، وقتی‌که نوبت نسبت‌دادن یک رنگ به ν می‌شود حداکثر d رنگ مناسب نیستند، بنابراین به این راس باید رنگی چون C_i، $i \leq d + ۱$، نسبت داد. از این‌رو کران زیر را داریم.

قضیه ۹.۵
اگر ماکزیمم درجه راس‌ها در گراف G برابر Δ باشد، آنگاه الگوریتم حریص راس‌های G را با حداکثر $\Delta + ۱$ رنگ رنگ‌آمیزی می‌کند. بنابراین $\chi(G) \leq \Delta + ۱$.

مثال ۱۱.۵ (یک مسئله زمان‌بندی)
دانشگاه کالیفرنیای مرکزی نه معاون دارد، پرفسور A، B، ...، I،که در هشت کمیته فعالیت دارند. عضویت در کمیته‌ها به‌شرح زیر است:

۱ : $A,\ B,\ C,\ D$	۵ : $A,\ H,\ J$
۲ : $A,\ C,\ D,\ E$	٦ : $H,\ I,\ J$
۳ : $B,\ D,\ F,\ G$	۷ : $G,\ H,\ J$
۴ : $C,\ F,\ G,\ H$	۸ : $E,\ I.$

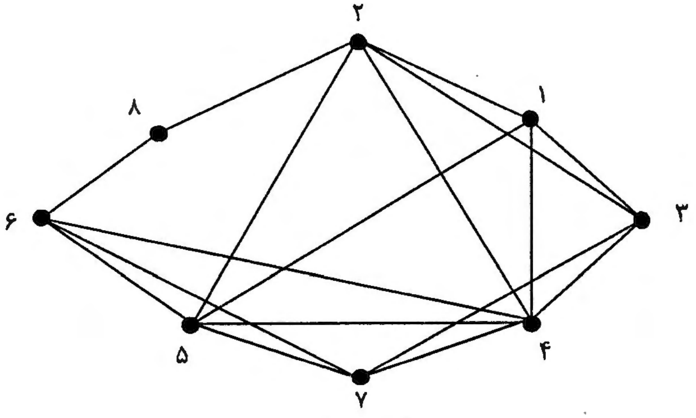
هر کمیته می‌خواهد جلسه‌ای را داشته باشد و دو کمیته که دارای عضو مشترکی باشند جلسات خود را نمی‌توانند در یک روز برگزار کنند. کمترین تعداد روزهای لازم برای برگزاری جلسات را تعیین کنید.

جواب

هر کمیته را با یک راس نشان داده و دو راس را با یک ضلع به‌هم وصل کنید دقیقاً وقتی‌که کمیته‌های مربوطه عضو مشترکی داشته باشند. در این‌صورت کمترین تعداد روزهای مطلوب برابر است با عدد رنگی گراف G که در شکل ۳.۵ نشان داده شده است. توجه کنید که راس های ۱، ۲، ۳، ۴ تشکیل $K_۴$ می‌دهند، بنابراین حداقل ۴ رنگ (روز) لازم است. ولی چهار رنگ کافی است، مثلاً

$$\{۱, ۷, ۸\} \cup \{۳, ۵\} \cup \{۲, ٦\} \cup \{۴\}$$

یک افراز $\{۱, ..., ۸\}$ به مجموعه‌های مستقل است. بنابراین $\chi(G) = ۴$، و چهار روز کافی است.



شکل ۳.۵

۵.۵ رنگ‌کردن اضلاع گراف‌ها

یک ضلع‌رنگی[۱] برای یک گراف G عبارت است از نسبت‌دادن رنگ‌هایی به اضلاع G به‌قسمی‌که هیچ دو ضلع مجاوری هم‌رنگ نباشند. کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ‌کردن

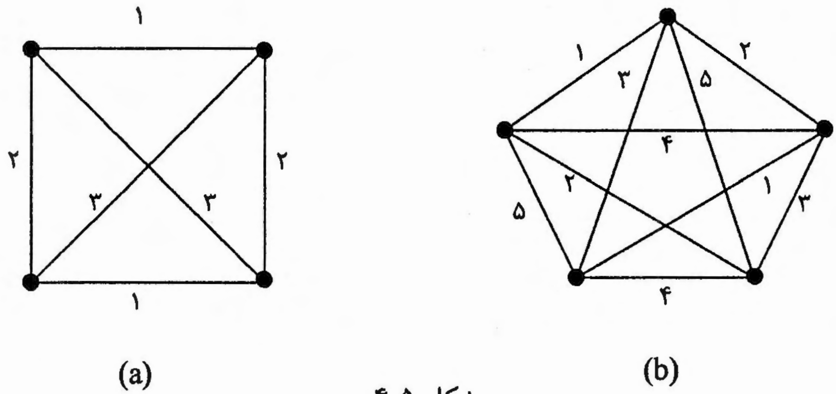
[۱] edge colouring

اضلاع G را شاخص رنگی[۱] G نامیده و با $\chi'(G)$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین رنگ‌کردن اضلاع یک گراف معادل است با افراز مجموعه اضلاع G به‌قسمی‌که هیچ دو ضلع هم‌مجموعه‌ای راس مشترک نداشته باشند، یعنی این‌که همه اضلاع واقع در یک بخش از افراز باید غیرمجاور باشند. یک مجموعه از اضلاع غیرمجاور از یک گراف را اغلب یک تطابق[۲] می‌نامند. واضح است که در یک ضلع‌رنگی، تمامی اضلاع وارد بر یک راس باید رنگ‌های متفاوتی را دریافت کنند، بنابراین $\chi'(K_n) \geq n - ۱$.

مثال ۱۲.۵

(a) چون $\chi'(K_۴) \geq ۳$ و بنابر شکل ۴.۵(a) با ۳ رنگ می‌شود $K_۴$ را رنگ کرد پس $\chi'(K_۴) = ۳$.



شکل ۴.۵

(b) $\chi'(K_۵) = ۵$. در این‌جا $\Delta = ۴$ رنگ کافی نیست. زیرا ده ضلع وجود دارد و هیچ تطابقی بیش از ۲ عضو ندارد. با این‌حال، همچنان‌که شکل ۴.۵(b) نشان می‌دهد ۵ رنگ کافی است.

قضیه ۱۰.۵

(i) اگر n فرد باشد آنگاه $\chi'(K_n) = n$.

(ii) اگر n زوج باشد آنگاه $\chi'(K_n) = n - ۱$.

اثبات

(i) اگر n فرد باشد آنگاه هر تطابقی حاوی حداکثر $\frac{۱}{۲}(n - ۱)$ ضلع خواهد بود. بنابراین یک رنگ را به حداکثر $\frac{۱}{۲}(n - ۱)$ ضلع می‌توان نسبت داد. ولی تعداد اضلاع K_n برابر $\frac{۱}{۲}n(n - ۱)$ است و از این‌رو حداقل به n رنگ نیاز است. حال به‌روش زیر می‌توان اضلاع را با n رنگ رنگ‌آمیزی کرد. K_n را به‌صورت یک n ضلعی منتظم که همه اقطار آن رسم

[۱] Chromatic index [۲] matching

شده‌اند نمایش دهید. اضلاع مرزی را با ۱، ...، n رنگ کنید؛ سپس هر قطری را با رنگ ضلع موازی با آن رنگ کنید. با این روش یک n ضلع‌رنگی حاصل می‌شود. حالت $n = ۵$ مطابق شکل ۴.۵(b) است.

(ii) حال فرض کنید n زوج است. قطعاً $\chi'(K_n) \geq n - ۱$؛ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تنها از $n - ۱$ رنگ استفاده کرد. چون $n - ۱$ فرد است می‌توان $K_{n-۱}$ را با استفاده از $n - ۱$ رنگ کامل کرد. حال راس دیگری چون ν اختیار کرده و با وصل‌کردن آن به تمامی راس‌های $K_{n-۱}$ گراف K_n را به‌دست می‌آوریم. در هر راس از $K_{n-۱}$ از یک رنگ استفاده نشده است. رنگ‌های به‌کار نرفته در راس‌های $K_{n-۱}$ دوبه‌دو متمایز هستند، بنابراین با این رنگ‌ها می‌توانیم اضلاع مجاور با راس ν را رنگ کنیم. این منجر به یک ضلع‌رنگی K_n با $n - ۱$ رنگ می‌شود. ■

ظهور $\Delta (= n - ۱)$ و $\Delta + ۱ (= n)$ به‌عنوان شاخص‌های رنگی K_n، بسته به زوج یا فرد بودن n، هماهنگ با نتیجه زیر است.

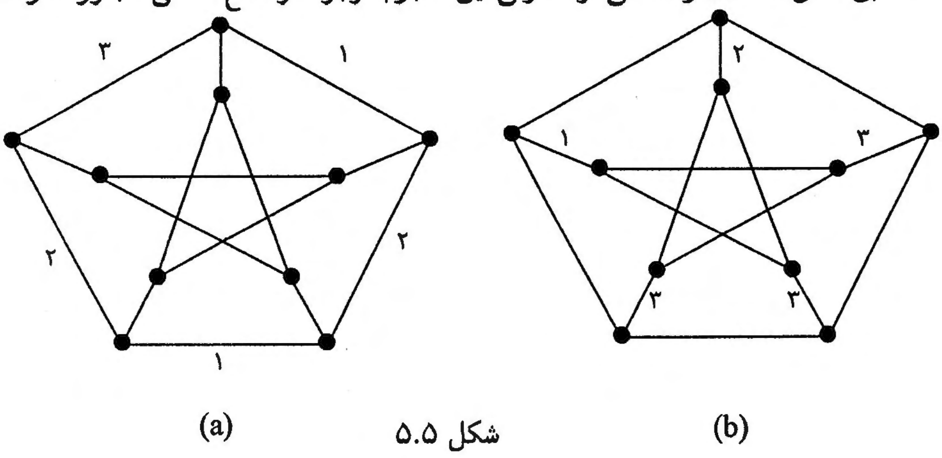
قضیه ۱۱.۵ (وایزینگ ۱۹۶۴)

اگر G یک گراف ساده با ماکزیمم درجه راس Δ باشد، آنگاه $\chi'(G) \in \{\Delta\ ,\ \Delta + ۱\}$.

از اثبات این نتیجه صرف‌نظر می‌کنیم؛ اثباتی از آن در [۹] ارائه شده است. این نتیجه منجر به کار زیادی روی تعیین گراف‌های کلاس یک، یعنی $\chi'(G) = \Delta$، و گراف‌های کلاس دو، یعنی $\chi'(G) = \Delta + ۱$، شده است.

مثال ۱۳.۵

گراف پیترسن کلاس ۲ است. در این‌جا $\Delta = ۳$، بنابراین باید نشان دهیم که $\chi'(G) \neq ۳$. فرض کنید یک ضلع‌رنگی با استفاده از تنها سه رنگ وجود دارد. در این‌صورت، دور خارجی به‌طول ۵ از سه رنگ استفاده می‌کند، و بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد رنگ‌آمیزی آن مطابق شکل ۵.۵(a) است. بر این اساس، پره‌ها به‌طور منحصربه‌فردی مطابق شکل ۵.۵(b) رنگ می‌شوند. ولی این منجر به وجود دو ضلع داخلی مجاور که رنگ



شکل ۵.۵

۲ دارند می‌شود. بنابراین یک ضلع‌رنگی با سه رنگ وجود ندارد.

این بخش را با نشان‌دادن این‌که تمامی گراف‌های دوقسمتی در کلاس یک قرار دارند به‌پایان می‌بریم. این نتیجه توسط کونیگ[۱] اثبات شده است که مؤلف مجارستانی اولین کتاب اساسی در نظریه گراف است [۱۴].

قضیه ۱۲.۵ (کونیگ)
برای هر گراف دوقسمتی G رابطه $\chi'(G) = \Delta$ برقرار است.

اثبات
از استقرا روی q، تعداد اضلاع G، استفاده کنید. واضح است که قضیه برای گراف‌های با $q = 1$ ضلع برقرار است؛ بنابراین فرض کنید حکم برای تمامی گراف‌های دوقسمتی با k ضلع برقرار بوده، و فرض کنید G یک گراف دوقسمتی با ماکزیمم درجه Δ و $k + 1$ ضلع باشد. یک ضلع vw از G را انتخاب کرده و با حذف آن یک گراف دوقسمتی جدید H به‌دست آورید. H دارای k ضلع و ماکزیمم درجه حداکثر Δ است، بنابراین، بنابر فرض استقرا، می‌توان اضلاع H را با حداکثر Δ رنگ رنگ‌آمیزی کرد.

اکنون، در H، راس‌های v و w هر دو از درجه حداکثر $\Delta - 1$ هستند، بنابراین در مورد هریک از این دو راس حداقل از یکی از Δ رنگ یادشده استفاده نشده است. اگر رنگی موجود باشد که در مورد هیچ‌یک از این دو راس استفاده نشده باشد آنگاه می‌توان این رنگ را به ضلع vw نسبت داد. اگر چنین رنگی موجود نباشد، آنگاه فرض کنید C_1 و C_2 دو رنگ باشند که به‌ترتیب در مورد اضلاع مجاور به v و w به‌کار نرفته‌اند. حال ضلعی چون vu با رنگ C_2 وجود دارد؛ اگر C_1 به ضلعی مجاور با u نسبت داده شده است، این ضلع را درنظر گرفته و تا جایی که امکان دارد روی اضلاع این‌چنینی که متناوباً با C_1 و C_2 رنگ شده‌اند حرکت کنید. مسیری که به این طریق حاصل می‌شود هرگز به w نمی‌رسد زیرا در صورت رسیدن به w باید با ضلعی به رنگ C_1 به w برسد و بنابراین یک مسیر به‌طول زوج خواهد بود که با احتساب ضلع vw یک دور به‌طول فرد در یک گراف دوقسمتی تشکیل خواهد داد که یک تناقض است. از این‌رو زیرگراف همبند K، متشکل از راس v و تمامی رئوس و اضلاع H که قابل دسترسی به‌وسیله یک مسیر با اضلاع به رنگ C_1 و C_2 هستند، شامل w نیست. بنابراین می‌توان در گراف K رنگ‌های C_1 و C_2 را بدون این‌که مشکلی برای بقیه رنگ‌های H ایجاد کنند باهم عوض کرد. این منجر به یک رنگ‌آمیزی جدید برای H می‌شود که در آن رنگ C_2 به اضلاع مجاور با v و w نسبت داده نشده است و بنابراین می‌توان C_2 را به vw نسبت داد. ■

ایده جابه‌جا کردن رنگ‌ها در طول یک مسیر را ابتدا کمپی[۲] در تلاش ناموفق سال ۱۸۷۹ خود در اثبات قضیه چهاررنگ به‌کار برد. علی‌رغم این‌که این ایده آنچنان‌که کمپی انتظار داشت

[۱] König [۲] Kampe

در آن مورد موفق نبود، با این‌حال مشخص شده است که این ایده یک روش خیلی مفید در نظریه گراف است.

مثال ۱۴.۵

هشت دانشجو نیاز به استفاده از چند کتاب کتاب‌خانه دارند. هر یک از آنها کتاب مورد نیاز خود را برای یک هفته به‌امانت می‌گیرد. کتاب‌های B_j مورد نیاز هر دانشجوی S_i به‌شرح زیر است:

$$\begin{array}{lll} S_۱ : B_۱, B_۲, B_۳ & S_۲ : B_۲, B_۴, B_۵, B_۶ & S_۳ : B_۲, B_۳, B_۵, B_۷ \\ S_۴ : B_۳, B_۵ & S_۵ : B_۱, B_۶, B_۷ & S_۶ : B_۲, B_۴, B_۶ \\ S_۷ : \ B_۴, B_۵, B_۷ & S_۸ : B_۳, B_۶. & \end{array}$$

کمترین تعداد هفته لازم برای این‌که تمامی دانشجویان کتاب‌های مورد نیاز خود را به‌امانت بگیرند چقدر است؟

جواب

یک گراف دوقسمتی G با راس‌های برچسب‌گذاری شده با $B_۱$، ...، $B_۷$، $S_۱$،...، $S_۸$ رسم کنید که در آن S_i و B_j مجاور هستند اگر و فقط اگر دانشجوی S_i به کتاب B_j نیاز دارد. در این‌صورت ماکزیمم درجه G برابر $۴ = \Delta$ است، پس بنابر قضیه کونیگ $\chi'(G) = ۴$. بنابراین چهار رنگ (هفته) لازم است. باید قادر به افراز اضلاع G به چهار تطابق جدا از هم باشید.

تمرینات

تمرین ۱.۵

به چند طریق می‌توان ۱۶ تیم فوتبال را به چهار گروه چهارتیمی افراز نمود؟

تمرین ۲.۵

یک کلاس دارای ۳۰ شاگرد است. برای یک پروژه شیمی، این کلاس باید به چهار گروه متشکل از ۲ گروه هفت‌نفره و ۲ گروه هشت‌نفره تقسیم شود. این عمل را به چند طریق می‌توان انجام داد؟

تمرین ۳.۵

در نسل‌های اول ماشین رمز[۱] که در دهه ۱۹۳۰ در آلمان به‌کار می‌رفت، در صفحه کلید از ۶ جفت متمایز از حروف الفبا استفاده می‌شد. با درنظر گرفتن ۲۶ حرف، انجام این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

تمرین ۴.۵

هر جایگشتی حاصل‌ضرب چند دور است. برای مثال جایگشت ۳۵۱۶۴۲، یعنی

---
[۱] Enigma machine

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۱ & ۵ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}$$

را می‌توان به‌فرم (۲۶۴۵)(۳۱) نوشت. چند جایگشت از ۱،...، ۸ حاصل‌ضربی از یک ۱—دور، دو ۲—دور و یک ۳—دور است؟

تمرین ۵.۵

ثابت کنید $\binom{n}{۲} = S(n, n-۱)$ و $S(n, n-۲) = \binom{n}{۳} + ۳\binom{n}{۴}$.

تمرین ۶.۵

با استقرا نشان دهید که برای هر $n \geq ۶$ رابطه $S(n, ۳) > ۳^{n-۲}$ برقرار است.

تمرین ۷.۵

نشان دهید

$$S(n,k) = \sum_{m=k-۱}^{n-۱} \binom{n-۱}{m} S(m, k-۱)$$

و از آن‌جا اثبات دیگری برای قضیه ۵.۵ ارائه دهید.

تمرین ۸.۵

مقدار $B(۱۰)$ را تعیین کنید.

تمرین ۹.۵

با استفاده از استقرا و قضیه ۵.۵ نشان دهید $B(n) = \frac{۱}{e}\sum_{j=۰}^{\infty} \frac{j^n}{(j!)}$.

تمرین ۱۰.۵

اعداد بی‌علامت استرلینگ $s(n,k)$ از نوع اول چنین تعریف می‌شوند؛ $s(n,k)$ تعداد جایگشت‌هایی از ۱،...، n است که دقیقاً شامل k دور هستند. نشان دهید $s(۲, ۱) = ۱$، $s(۳, ۱) = ۲$، $s(۳, ۲) = ۳$، $s(۴, ۲) = ۱۱$ و این‌که $s(n, ۱) = (n-۱)!$. ثابت کنید

$$s(n,k) = (n-۱)s(n-۱, k) + s(n-۱, k-۱),$$

و مقدار $s(۶, ۲)$ را به‌دست آورید.

تمرین ۱۱.۵

برای هریک از گراف‌های تمرین ۲.۴ مقادیر $\chi(G)$ و $\chi'(G)$ را پیدا کنید.

تمرین ۱۲.۵

فرض کنید G یک گراف با p راس باشد و فرض کنید $\alpha(G)$ معرف اندازه بزرگ‌ترین مجموعه حاوی رئوس مستقل باشد. نشان دهید $\chi(G)\alpha(G) \geq p$.

تمرین ۱۳.۵

الگوریتم حریص برای رنگ‌آمیزی راس‌ها را روی گراف شکل ۳.۵، یک‌بار با ترتیب ۱، ...،۸ و بار دیگر با ترتیب ۸، ...، ۱ به‌کار ببرید. آیا یک رنگ‌آمیزی با چهار رنگ حاصل می‌شود.

تمرین ۱۴.۵

تمرین قبل را با درنظر گرفتن مرتب‌بودن رئوس به‌صورت یک دنباله صعودی برحسب درجه راس‌ها و به‌صورت یک دنباله نزولی برحسب درجه راس‌ها تکرار کنید. انتظار دارید که در حالت کلی کدام‌یک از این دو روش رنگ‌های کمتری نیاز داشته باشد؟

تمرین ۱۵.۵

توضیح دهید که چرا همیشه ترتیبی از راس‌ها وجود دارد که متناظر با آن الگوریتم حریص منجر به یک رنگ‌آمیزی با $\chi(G)$ رنگ می‌شود.

تمرین ۱۶.۵

شاخص رنگی هریک از پنج گراف اجسام افلاطونی را تعیین کنید.

تمرین ۱۷.۵

یک گرافی را که هر راس آن از درجه ۳ باشد گراف مکعبی[1] می‌نامند. ثابت کنید که شاخص رنگی همه گراف‌های همیلتونی مکعبی ۳ است. (با این‌حال توجه کنید که همه گراف‌های مکعبی با شاخص رنگی ۳ نیستند، مثلاً گراف پیترسن را درنظر بگیرید.)

تمرین ۱۸.۵

فرض کنید G یک گراف با $p = ۲k + ۱$ راس است که هریک از آنها از درجه r می‌باشد.

(a) نشان دهید G دارای $r(k + \frac{۱}{۲})$ ضلع است.

(b) توضیح دهید که چرا در یک ضلع‌رنگی G یک رنگ را نمی‌توان به بیش از k ضلع نسبت داد، و از این‌رو نشان دهید $\chi'(G) = r + ۱$. بنابراین هر گراف منظم با یک تعداد فردی از رئوس، یک گراف کلاس ۲ است. (همچنان‌که در قضیه ۱۰.۵ دیدیم، این شامل K_n، n فرد، می‌شود.)

تمرین ۱۹.۵

فرض کنید $f_\lambda(G)$ معرف تعداد حالت‌های ممکن برای رنگ‌آمیزی راس‌های G با استفاده از λ رنگ باشد.

(a) نشان دهید $f_\lambda(K_n) = \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ۲)...(\lambda - n + ۱)$.

(b) نشان دهید برای هر درخت T با n راس رابطه $f_\lambda(T) = \lambda(\lambda - ۱)^{n-۱}$ برقرار است.

(c) فرض کنید xy ضلعی از G باشد. فرض کنید G' گراف حاصل از حذف ضلع xy

[1] Cubic graph

در G بوده و G'' گراف حاصل از یکی‌کردن راس‌های x و y باشد. در این‌صورت $f_\lambda(G) = f_\lambda(G') - f_\lambda(G'')$. نتیجه بگیرید که $f_\lambda(G)$ یک چندجمله‌ای برحسب λ است؛ این‌را **چندجمله‌ای رنگی**[۱] G می‌نامند.

(d) توجه کنید که جواب $a_n = ۲^n + (-۱)^n ۲$ از مثال ۴.۲ را می‌توان به‌عنوان $f_۳(C_n) = ۲^n + (-۱)^n ۲$ تعبیر کرد. با قراردادن λ رنگ به‌جای ۳ رنگ، نشان دهید $f_\lambda(C_n) = (\lambda - ۱)^n + (-۱)^n(\lambda - ۱)$. توجه کنید که همچنان‌که انتظار می‌رود اگر n فرد باشد از این رابطه نتیجه می‌شود $f_۲(C_n) = ۰$.

[۱] chromatic polynomial

فصل ۶

اصل شمول—حذف

دراین فصل روشی از شمارش را که حداقل برای ۳۰۰ سال مورد استفاده بوده است مطالعه می‌کنیم. از اولین کاربردهای آن می‌توان به مسئله بی‌نظمی اشاره کرد؛ افزون براین، به کاربردهای دیگری از این اصل، همچون درخت‌های برچسب‌دارشده، مسئله تقلا[1] و مسئله زناشویی[2] اشاره خواهیم کرد.

۱.۶ اصل

این اصل اساساً تعمیمی از مشاهده ساده زیر است. فرض کنید که دو مجموعه A و B مفروض هستند و می‌خواهیم تعداد اعضای موجود در اجتماع آنها را تعیین کنیم. اولین تلاش می‌تواند محاسبه $|A| + |B|$ باشد، ولی در این محاسبه اعضای مشترک بین A و B دوبار شمرده می‌شوند؛ بنابراین برآورد اصلاح‌شده برابر است با

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{۱.۶}$$

توجه کنید که در این‌جا ما ابتدا ضمیمه می‌کنیم و سپس اعضایی را که بیش از اندازه گنجانیده شده‌اند خارج می‌کنیم.

حتی این شکل ساده اصل می‌تواند مفید باشد.

مثال ۱.۶

در یک کلاس ۵۰ نفری، تعداد ۳۰ دختر و ۳۵ دانش‌آموز با موی تیره وجود دارند. نشان دهید که حداقل ۱۵ دختر با موی تیره در کلاس وجود دارد.

---

[1] Scrabble problem [2] ménage problem

جواب

فرض کنید A معرف مجموعه دانش‌آموزان دختر و B معرف دانش‌آموزان با موی تیره باشد. در این‌صورت از $|A \cup B| \leq ۵۰$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| = ۳۰ + ۳۵ - |A \cup B| \\ &\geq ۶۵ - ۵۰ = ۱۵. \end{aligned}$$

کاربرد بعدی (۱.۶) خیلی بدیهی‌تر است.

مثال ۲.۶

به‌دنبال کمترین مقدار ممکن m هستیم به‌قسمی‌که اگر G یک گراف با ۶۰ راس بوده و هر راس آن از درجه حداقل m باشد، آنگاه G باید حاوی $K_۴$ باشد.

پی‌بردن به این‌که m باید بزرگ‌تر از ۴۰ باشد دشوار نیست. زیرا اگر G را گراف $K_{۲۰,۲۰,۲۰}$ با مجموعه رئوس $V = V_۱ \cup V_۲ \cup V_۳$، $|V_i| = ۲۰$، درنظر بگیریم که هر راس از V_i به هر راس از V_j وصل است هرگاه $i \neq j$، آنگاه هر راس از درجه ۴۰ است؛ ولی G حاوی $K_۴$ نیست زیرا اگر $K_۴$ در G باشد آنگاه دو راس آن باید در V_i یکسانی قرار داشته باشند. حال نشان می‌دهیم $m = ۴۱$. فرض کنید G گرافی دلخواه روی ۶۰ راس بوده و درجه هر راس بزرگ‌تر از ۴۰ است. یک راس $v_۱$ را انتخاب کرده و $S_۱$ را مجموعه رئوس مجاور با $v_۱$ درنظر بگیرید. پس $|S_۱| > ۴۰$. یک راس $v_۲$ در $S_۱$ انتخاب کرده و $S_۲$ را معرف مجموعه تمامی راس‌های مجاور با $v_۲$ بگیرید. در این‌صورت

$$\begin{aligned} |S_۱ \cap S_۲| &= |S_۱| + |S_۲| - |S_۱ \cup S_۲| \\ &> ۴۰ + ۴۰ - |S_۱ \cup S_۲| \geq ۸۰ - ۶۰ = ۲۰. \end{aligned}$$

پس $|S_۱ \cap S_۲| > ۲۰$. حال راسی چون $v_۳ \in S_۱ \cap S_۲$ اختیار کرده و $S_۳$ را مجموعه رئوس G مجاور با $v_۳$ بگیرید. پس

$$\begin{aligned} |S_۱ \cap S_۲ \cap S_۳| = |(S_۱ \cap S_۲) \cap S_۳| &= |S_۱ \cap S_۲| + |S_۳| - |(S_۱ \cap S_۲) \cup S_۳| \\ &> ۲۰ + ۴۰ - ۶۰ = ۰. \end{aligned}$$

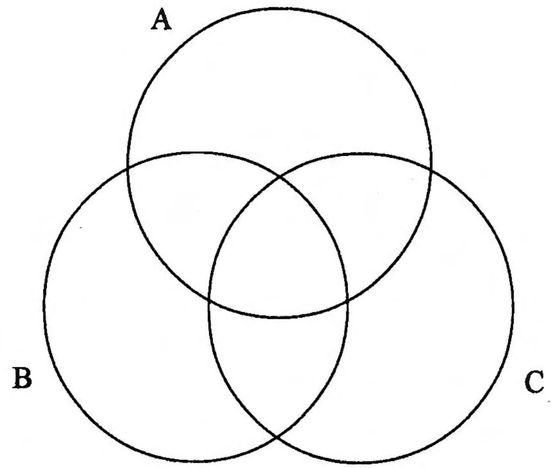
از این‌رو راسی چون $v_۴$ در $S_۱ \cap S_۲ \cap S_۳$ وجود دارد. ولی در این‌صورت، راس‌های $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، $v_۴$ در G دوبه‌دو مجاور هستند، و بنابراین G حاوی $K_۴$ است.

حال (۱.۶) را، همچنان‌که در شکل ۱.۶ نشان داده شده است، به سه مجموعه A، B، C تعمیم می‌دهیم. برآورد اولیه ما برای $|A \cup B \cup C|$ ممکن است $|A| + |B| + |C|$ باشد. ولی در این محاسبه اعضای واقع در بیش از یک مجموعه، بیش از یک‌بار لحاظ شده‌اند، بنابراین

برآورد دوم می‌تواند $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$ باشد. ولی در این برآورد اعضای واقع در هر سه مجموعه سه‌بار گنجانیده شده و سه‌بار حذف شده‌اند، و بنابراین باید یک‌بار دیگر لحاظ شوند. پس مقدار نهایی برابر است با

$$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|C \cap A|+|A \cap B \cap C|. \qquad (۲.۶)$$

توجه کنید که می‌گنجانیم، حذف می‌کنیم، مجدداً اضافه می‌کنیم.



شکل ۱.۶

فرمول کلی به‌شرح زیر است.

قضیه ۱.۶ (اصل شمول–حذف)
فرض کنید S مجموعه‌ای از اشیا بوده و فرض کنید P_1، ...، P_r خواصی باشند که اعضای S ممکن است این خواص را داشته باشند و ممکن هم هست که واجد این خواص نباشند. فرض کنید $N(i, j, ..., k)$ معرف تعداد اعضایی از S باشد که واجد خواص P_i، P_j، ...، P_k (و احتمالاً بعضی خواص دیگر) هستند. در این‌صورت تعداد اعضایی از S که حداقل در یک شرط صدق می‌کنند برابر است با

$$\sum_i N(i) - \sum_{i<j} N(i,j) + \sum_{i<j<k} N(i,j,k) - ... + (-1)^{r-1} N(1, 2, ..., r). \qquad (۳.۶)$$

اثبات
هر عضو S که هیچ‌یک از خواص را نداشته باشد روی هریک از جمل (۳.۶) تاثیر ۰ داشته و بنابراین تاثیر آن روی مجموع نیز ۰ است.

حال یک عضو S را درنظر بگیرید که واجد t، $r \geq t \geq ۱$، خاصیت است. این عضو روی t جمله $N(i)$، $\binom{t}{۲}$ جمله $N(i,j)$، ... تاثیر ۱ دارد. بنابراین کل تاثیر آن روی (۳.٦) برابر است با

$$\begin{aligned} t-\binom{t}{۲}+\binom{t}{۳}-\dots+(-۱)^{t-۱}\binom{t}{t} &= ۱-\left\{۱-t+\binom{t}{۲}-\dots+(-۱)^t\binom{t}{t}\right\} \\ &= ۱-(۱-۱)^t=۱. \blacksquare \end{aligned}$$

مثال ۳.٦

تعداد اعداد صحیح کمتر از ۱۰۱ را که بر ۳ یا ۷ بخش‌پذیر هستند تعیین کنید.

جواب

قرار دهید $S=\{۱,\dots,۱۰۰\}$، و فرض کنید $P_۱$ و $P_۲$ به‌ترتیب خاصیت بخش‌پذیری بر ۳ و ۷ باشند. در این‌صورت $N(۱)$ معرف تعداد اعداد واقع در S است که بر ۳ بخش‌پذیر هستند، پس $N(۱)=۳۳$. مشابهاً $N(۲)=۱۴$. سرانجام $N(۱,۲)$ تعداد اعدادی در S است که بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر هستند، یعنی بر ۲۱ بخش‌پذیر هستند؛ پس $N(۱,۲)=۴$. بنابراین عدد مطلوب برابر است با $۳۳+۱۴-۴=۴۳$.

این اصل در واقع بیشتر اوقات به‌شکل دیگری مطرح می‌شود. به‌جای این پرسش که چند عضو حداقل یک خاصیت را دارند، می‌پرسیم که چند عضو واجد هیچ‌یک از خواص نیستند.

قضیه ۲.٦ (شکل دوم اصل شمول—حذف)

با نمادهای قضیه ۱.٦، تعداد اعضای S که واجد هیچ‌یک از خواص نباشند برابر است با

$$|S|-\sum_i N(i)+\sum_{i<j}N(i,j)-\dots+(-۱)^r N(۱,۲,..,r). \qquad (۴.٦)$$

مثال ۴.٦

چند عدد صحیح مثبت کمتر از ۱۰۱ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ بخش‌پذیر نیستند؟

جواب

مجدداً $S=\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$ و $P_۱$، ...، $P_۴$ به‌ترتیب خواص بخش‌پذیری بر ۲، ۳، ۵ و ۷ می‌باشند. در این‌صورت $N(۱)=۵۰$، $N(۲)=۳۳$، $N(۳)=۲۰$ و $N(۴)=۱۴$. سپس، $N(۱,۲)$ تعداد اعضای S است که بر ۲ و ۳، یعنی بر ٦، بخش‌پذیر هستند؛ بنابراین $N(۱,۲)=۱٦$. مشابهاً، به‌عنوان مثال، $N(۱,۳,۴)$ تعداد اعضای S است که بر ۲، ۵ و ۷، یعنی بر ۷۰، بخش‌پذیر هستند؛ پس $N(۱,۳,۴)=۱$. بنابراین عدد مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned} ۱۰۰-(۵۰+۳۳+۲۰+۱۴) &+(۱٦+۱۰+۷+٦+۴+۲)-(۳+۲+۱) \\ &=۱۰۰-۱۱۷+۴۵-٦=۲۲. \end{aligned}$$

اهمیت این نتیجه در چیست ؟ ملاحظه کنید که هر عدد کمتر از ۱۰۱ که اول نباشد باید عاملی کوچک‌تر یا مساوی $۱۰ = \sqrt{۱۰۰}$ داشته باشد، و بنابراین باید بر عدد اولی کوچک‌تر از ۱۰ (یعنی یکی از اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷) بخش‌پذیر باشد. عدد به‌دست آمده ۲۲ کاملاً برابر تعداد اعداد اول کمتر از ۱۰۰ نیست زیرا این عدد حاوی اعداد اول ۲، ۳، ۵ و ۷ نیست و حاوی ۱ است که اول نیست. پس تعداد اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ برابر $۲۵ = ۱ - ۴ + ۲۲$ است.

مثال ۵.۶

در یک نوع از ماشین رمز که برای کدگذاری پیام‌های محرمانه به‌کار می‌رفت، سه گردنده[۱] از یک مجموعه پنج‌عضوی انتخاب و به‌ترتیب در ماشین قرار داده می‌شدند. در هر روز یک مجموعه مرتب سه‌تایی متفاوت انتخاب می‌شد به‌قسمی‌که موقعیت هیچ‌یک از گردنده‌ها در دو روز متوالی یکسان نبود. با مفروض بودن ترتیب گردنده‌ها برای یک روز، چند انتخاب مرتب ممکن برای روز بعد وجود دارد؟

جواب

می‌توان فرض کرد که گردنده‌ها برچسب‌های ۱، ...، ۵ داشته و این‌که در یک روز مشخصی گردنده‌های ۱، ۲ و ۳ با همین ترتیب انتخاب شده‌اند. فرض کنید S مجموعه همه سه‌تایی‌های مرتب از گردنده‌ها باشد؛ در این‌صورت $|S| = ۵ \times ۴ \times ۳ = ٦۰$. برای هر $i \leq ۳$، فرض کنید P_i معرف این خاصیت باشد که گردنده i در موقعیت i باشد. در این‌صورت در پی تعیین تعداد اعضایی از S هستیم که در هیچ‌یک از شرط‌های $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ صدق نکنند. بنابراین عدد مطلوب برابر است با

$$|S| - \sum N(i) + \sum N(i,j) - N(۱,۲,۳).$$

حال برای هر $i \leq ۳$ داریم $N(i) = ۴ \times ۳ = ۱۲$ و $N(i,j) = ۳$؛ بنابراین جواب برابر است با

$$٦۰ - ۳ \times (۴ \times ۳) + ۳ \times ۳ - ۱ = ۳۲.$$

(بعدها تعداد گردنده‌های به‌کار رفته در نیروی دریایی آلمان به هشت افزایش یافت؛ تمرین ۹.٦ را ببینید.)

مثال بعدی در رابطه با بی‌نظمی است که در فصل ۲ با آن آشنا شدیم.

مثال ٦.٦

به‌خاطر بیاورید که یک **بی‌نظمی** از n شی عبارت است از یک جایگشتی از آنها به‌قسمی‌که هیچ‌یک از اشیا در موقعیت قبلی خود قرار نداشته باشد. حال چگونگی استفاده از اصل شمول—حذف در استخراج فرمول (۱۰.۲) برای d_n، تعداد بی‌نظمی‌های n شی، را نشان می‌دهیم.

---

[۱] rotor

فرض کنید S مجموعه تمامی جایگشت‌های ۱، ...، n بوده و برای هر $i \leq n$، فرض کنید P_i خاصیت قرار داشتن عدد i در موقعیت i ام باشد. در این‌صورت d_n برابر تعدادی از اعضای S است که هیچ‌یک از خواص P_i را نداشته باشند. حال، برای هر i داریم: $N(i) = (n-۱)!$ زیرا i ثابت بوده و بقیه $n-۱$ عدد به هر ترتیبی می‌توانند مرتب شوند. مشابهاً $N(i,j) = (n-۲)!$، و غیره. همچنین توجه کنید که تعداد $\binom{n}{۱}$ جمله $N(i)$، $\binom{n}{۲}$ جمله $N(i,j)$، ... وجود دارد، پس بنابر (۴.۶) داریم

$$\begin{aligned} d_n &= |S| - \sum_i N(i) + \sum_{i<j} N(i,j) - \ldots + (-۱)^n N(۱,\ldots,n) \\ &= n! - \binom{n}{۱}(n-۱)! + \binom{n}{۲}(n-۲)! - \ldots + (-۱)^n \binom{n}{n} ۰! \\ &= n! - \frac{n!}{۱!} + \frac{n!}{۲!} - \ldots + (-۱)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left\{ ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \ldots + \frac{(-۱)^n}{n!} \right\}. \end{aligned}$$

مثال بعدی ایده‌ای را معرفی می‌کند که برای بخش ۴.۶ مفید خواهد بود.

مثال ۷.۶

چند جواب صحیح نامنفی برای معادله $x+y+z = ۲۰$ با شرایط $x \leq ۱۰$، $y \leq ۵$، $z \leq ۱۵$ وجود دارد؟

جواب

فرض کنید S معرف مجموعه تمامی جواب‌های نامنفی $x+y+z = ۲۰$ باشد. بنابر قضیه ۱۰.۱، $\binom{۲۲}{۲} = \binom{۲۲}{۲۰} = |S|$. فرض کنید $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ به‌ترتیب معرف خواص $x \geq ۱۱$، $y \geq ۶$ و $z \geq ۱۶$ باشند. در این‌صورت در پی تعیین تعداد اعضایی از S هستیم که واجد هیچ‌یک از این سه خاصیت نباشند. این عدد برابر است با:

$$\binom{۲۲}{۲} - \sum_i N(i) + \sum_{i<j} N(i,j) - N(۱,۲,۳). \qquad (۵.۶)$$

$N(۱)$ را درنظر بگیرید. اگر $x \geq ۱۱$، آنگاه به‌ازای عددی چون $u \geq ۰$ داریم $x = ۱۱ + u$، و معادله تبدیل به $u+y+z = ۹$ می‌شود. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله $\binom{۱۱}{۲} = \binom{۱۱}{۹} = N(۱)$ است. مشابهاً $N(۲) = \binom{۱۶}{۲}$، $N(۳) = \binom{۶}{۲}$. عدد $N(۱,۲)$ تعداد جواب‌های با خاصیت $x \geq ۱۱$ و $y \geq ۶$ است؛ با قراردادن $x = ۱۱ + u$ و $y = ۶ + \nu$ معادله تبدیل به $u + \nu + z = ۳$ می‌شود، و تعداد جواب‌های صحیح نامنفی آن $\binom{۵}{۲} = N(۱,۲)$ است. چون $N(۱,۳) = N(۲,۳) = N(۱,۲,۳) = ۰$، ملاحظه می‌کنیم

که مقدار (۵.٦) برابر است با

$$\binom{۲۲}{۲}-\binom{۱۱}{۲}-\binom{۱٦}{۲}-\binom{٦}{۲}+\binom{۵}{۲}=۵۱.$$

۲.٦ شمارش توابع پوشا

فرض کنید $|X|=m$ و $|Y|=n$ و تابع $f:X\to Y$ را درنظر بگیرید. تابع f را پوشا نامیم هرگاه تصویر f برابر Y باشد. چند تابع پوشا $f:X\to Y$ وجود دارد؟

فرض کنید S معرف مجموعه تمامی توابع $f:X\to Y$ باشد که $Y=\{y_۱,...,y_n\}$، و فرض کنید P_i این خاصیت باشد که y_i در تصویر f نباشد. در این‌صورت $N(۱)=(n-۱)^m$ زیرا هریک از m عضو X می‌تواند توسط f به هریک از $n-۱$ عضو دیگر Y تصویر شود. مشابهاً، $N(i_۱,...,i_k)=(n-k)^m$. از این‌رو بنابر (۴.٦)، تعداد توابع پوشا از X به Y، یعنی تعداد اعضایی از S که در هیچ‌یک از n خاصیت یادشده صدق نمی‌کنند، برابر است با

$$\begin{aligned}&|S|-\sum_i N(i)+\sum_{i<j}N(i,j)-...+(-۱)^n N(۱,...,n)\\&=n^m-\binom{n}{۱}(n-۱)^m+\binom{n}{۲}(n-۲)^m-...+(-۱)^n\binom{n}{n}(n-n)^m\\&=\sum_{i=۰}^{n-۱}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m.\end{aligned}$$

یک نتیجه فوری این حکم این است که اگر $n>m$، آنگاه هیچ تابع پوشایی از X به Y موجود نیست زیرا در X تعداد کافی عضو برای تصویرشدن به n عضو Y وجود ندارد. از این‌رو

$$\sum_{i=۰}^{n-۱}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^m=۰,\qquad m<n. \tag{٦.٦}$$

نتیجه دیگر از این واقعیت بر می‌آید که تعداد توابع پوشا از X به Y برابر $n!S(m,n)$ است (قضیه ٦.۵)؛ بنابراین اثبات دیگری برای (۵.۵) حاصل می‌شود.

۳.٦ شمارش درخت‌های برچسب‌گذاری‌شده

در بخش ۳.۳ یادآور شدیم که کیلی ثابت کرده است تعداد درخت‌های برچسب‌گذاری‌شده روی n راس $n^{n-۲}$ است. شکل ۷.۳ سه درخت روی ۳ راس را نشان می‌دهد. اثبات‌های متعددی برای نتیجه کیلی ارائه شده است. اکثر این اثبات‌ها کاملاً فنی هستند؛ مشهورترین آنها، منتسب به پروفر[۱] است که بستگی به ایجاد یک تناظر یک‌به‌یک بین درخت‌ها و

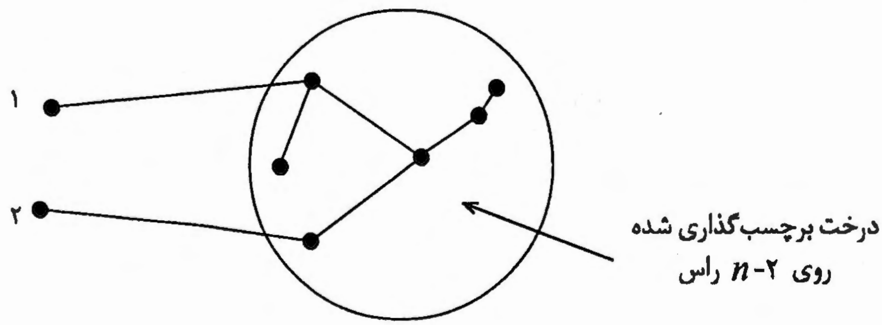
[۱] Prüfer

دنباله‌های $n-۲$ رقمی، که هر رقم می‌تواند هر عددی از مجموعه $\{۱, ..., n\}$ باشد، دارد. ولی در این‌جا می‌خواهیم ایده مون[۱] را به‌کار برده و از اصل شمول—حذف و (۶.۶) استفاده کنیم.

فرض کنید S معرف مجموعه تمامی درخت‌های فراگیر با راس‌های برچسب‌گذاری‌شده با ۱، ...، n باشد و فرض کنید $|S| = T(n)$. برای هر $i \leq n$، P_i معرف این خاصیت است که راس i یک راس پایانی است. چون، بنابر قضیه ۲.۳، هر درخت با $p \geq ۲$ راس دارای راس پایانی است، هر عضو S باید حداقل در یکی از خواص P_i صدق کند. افزون بر این، اگر $n \geq ۳$، آنگاه درختی با n راس وجود ندارد که همه راس‌های آن پایانی باشند، بنابراین هیچ‌یک از اعضای S واجد تمامی n خاصیت نیست. پس، برای $n \geq ۳$، از (۳.۶) نتیجه می‌شود

$$T(n) = \sum_i N(i) - \sum_{i<j} N(i,j) + \ldots + (-۱)^n \sum_{i_۱<\ldots<i_{n-۱}} N(i_۱, \ldots, i_{n-۱}).$$

حال $N(i) = (n-۱)T(n-۱)$، زیرا اگر راس i یک راس پایانی باشد، ضلع مربوط به آن می‌تواند به هریک از $n-۱$ راس دیگر برود، و این $n-۱$ راس به‌وسیله یک درخت به‌هم وصل می‌شوند.



شکل ۲.۶ $N(۱,۲) = (n-۲)^۲ T(n-۲)$

مشابهاً، همچنان‌که در شکل ۲.۶ شرح داده شده است، $N(i,j) = (n-۲)^۲ T(n-۲)$، و غیره. بنابراین اگر $n \geq ۳$، آنگاه

$$\begin{aligned} T(n) &= \binom{n}{۱}(n-۱)T(n-۱) - \binom{n}{۲}(n-۲)^۲ T(n-۲) \\ &+ \ldots + (-۱)^n \binom{n}{n-۱} T(۱) \\ &= \sum_{i=۱}^{n-۱} (-۱)^{i-۱} \binom{n}{i} (n-i)^i T(n-i). \qquad (۷.۶) \end{aligned}$$

[۱] J. Moon

ولی، با قراردادن $m = n - ۲$ در (۶.۶) و تجدید ترتیب، نتیجه می‌گیریم:

$$n^{n-۲} = \sum_{i=۱}^{n-۱} (-۱)^{i-۱} \binom{n}{i} (n-i)^i (n-i)^{n-i-۲}. \qquad (۸.۶)$$

روابط (۷.۶) و (۸.۶) را مقایسه کنید. اگر فرمول $T(k) = k^{k-۲}$ برای هر k کوچک‌تر از n برقرار باشد، آنگاه سمت راست روابط (۷.۶) و (۸.۶) یکی می‌شوند، و بنابراین نتیجه می‌شود که $T(n) = n^{n-۲}$. پس چون حکم برای $n = ۳$ برقرار است، از استقرا نتیجه می‌شود که اگر $n \geq ۳$ آنگاه $T(n) = n^{n-۲}$.

۴.۶ تقلا

تقلا[۱] یک بازی کلمه است که در آن بازیکنان به‌نوبت با استفاده از حروفی که در اختیار دارند کلمات جدید می‌سازند. در هر مرحله از بازی، هر بازیکن ۷ کارت در اختیار دارد که یا یک حرف روی آنها درج شده است و یا بدون حرف، سفید، هستند. توزیع حروف به‌شرح زیر است که در آن bl معرف کارت سفید است.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
۹	۲	۲	۴	۱۲	۲	۳	۲	۹	۱	۱	۴	۲

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	bl
۶	۸	۲	۱	۶	۴	۶	۴	۲	۲	۱	۲	۱	۲

در ابتدای بازی هر بازیکن ۷ کارت انتخاب می‌کند. به چند طریق می‌توان ۷ کارت را انتخاب کرد؟ اگر a معرف تعداد A، b معرف تعداد B، ...، z معرف تعداد Z، و ω معرف تعداد کارت سفید باشند، آنگاه تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب ۷ کارت در واقع تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله

$$a + b + \ldots + z + \omega = ۷ \qquad (۹.۶)$$

با خاصیت $a \leq ۹$، $b \leq ۲$، و غیره است. بنابراین برای استفاده از اصل شمول—حذف، S را به‌عنوان مجموعه تمامی جواب‌های صحیح نامنفی (۹.۶) درنظر گرفته، فرض کنید P_a معرف خاصیت $a \geq ۱۰$، P_b معرف خاصیت $b \geq ۳$، و غیره باشند. در این‌صورت درپی تعیین تعداد اعضایی از S هستیم که واجد هیچ‌یک از این خواص نباشند، که به‌وسیله (۴.۶) تعیین می‌شود. روند مثال ۷.۶ را اختیار می‌کنیم.

بنابر قضیه ۱۰.۱، $|S| = \binom{۲۷+۷-۱}{۷} = \binom{۳۳}{۷}$.

سپس $N(a)$ را درنظر بگیرید که تعداد جواب‌های (۹.۶) با خاصیت $a \geq ۱۰$ است. واضح است که این مقدار ۰ است.

[۱] scrabble

حال $N(b)$ را درنظر بگیرید. این تعداد جواب‌های (۹.۶) با شرط $b \geq ۳$ است. اگر قرار دهیم $b = b' + ۳$، (۹.۶) تبدیل به $a + (b' + ۳) + \ldots + z + \omega = ۷$، یعنی $a + b' + \ldots + \omega = ۴$، می‌شود و بنابراین $N(b) = \binom{۲۷ + ۴ - ۱}{۴} = \binom{۳۰}{۴}$.

به‌روش مشابه مقادیر زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} N(b) &= N(c) = N(f) = N(h) = N(m) = N(p) = N(v) = N(w) \\ &= N(y) = N(\omega) = \binom{۳۰}{۴}, \end{aligned}$$

$$N(j) = N(k) = N(q) = N(x) = N(z) = \binom{۳۱}{۵},$$

$$N(g) = \binom{۲۹}{۳} \quad , N(d) = N(l) = N(s) = N(u) = \binom{۲۸}{۲},$$

$$N(n) = N(r) = N(t) = \binom{۲۶}{۰} = ۱,$$

و بقیه برابر ۰ هستند. اکنون باید جملاتی مانند $N(c, d)$ را بررسی کنیم. تعداد این جمله‌ها $\binom{۲۷}{۲}$ است، ولی خوشبختانه بیشتر آنها صفر هستند؛ به‌عنوان مثال $N(c, d)$ صفر است زیرا شرایط $c \geq ۳$ و $d \geq ۵$ سازگار با (۹.۶) نیستند.

تعداد $\binom{۱۰}{۲}$ جمله مساوی با $N(b, c)$ وجود دارد. قراردادن $b = b' + ۳$ و $c = c' + ۳$ منجر به معادله $a + b' + c' + d + \ldots + \omega = ۱$ می‌شود که $\binom{۲۷}{۱}$ جواب دارد. مشابهاً، ۵ جمله مساوی $N(g, j)$ وجود دارد. قراردادن $g = g' + ۴$ و $j = j' + ۲$ منجر به معادله $a + \ldots + g' + h + i + j' + \ldots + \omega = ۱$ می‌شود که باز هم $\binom{۲۷}{۱}$ جواب دارد. تعداد $\binom{۵}{۲}$ جمله مساوی $N(j, k)$ و $۵ \times ۱۰ = ۵۰$ جمله مساوی $N(b, j)$ موجود است؛ ۱۰ جمله مساوی $N(b, g)$ و ۲۰ جمله مساوی $N(d, j)$.

سرانجام، $\binom{۵}{۳}$ جمله مساوی $N(j, k, q)$ و $۱۰ \times \binom{۵}{۲}$ جمله مساوی $N(j, k, q)$ وجود دارد. بنابراین عدد مطلوب برابر است با:

$$\begin{aligned} \binom{۳۳}{۷} &- \left\{ ۵\binom{۳۱}{۵} + ۱۰\binom{۳۰}{۴} + \binom{۲۹}{۳} + ۴\binom{۲۸}{۲} + ۳\binom{۲۶}{۰} \right\} \\ &+ \left\{ \binom{۵}{۲}\binom{۲۹}{۳} + ۵۰\binom{۲۸}{۲} + \binom{۱۰}{۲}\binom{۲۷}{۱} + ۵\binom{۲۷}{۱} + ۳۰\binom{۲۶}{۰} \right\} \\ &- \left\{ \binom{۵}{۳}\binom{۲۷}{۱} + ۱۰۰\binom{۲۶}{۰} \right\} \\ &= ۳۱۹۹۷۲۴. \end{aligned}$$

۵.۶ مسئله زناشویی

مسئله زناشویی[۱] در ۱۸۹۱ توسط لوکاس[۲]، ریاضی‌دان فرانسوی مطرح شد.

مسئله. به چند طریق n زوج متأهل می‌توانند دور یک میز بنشینند (صندلی‌ها برچسب‌دار هستند) به‌قسمی‌که هر زن بین دو مرد و هر مرد بین دو زن قرار داشته و هیچ زن و شوهری کنار هم نباشند؟

جواب

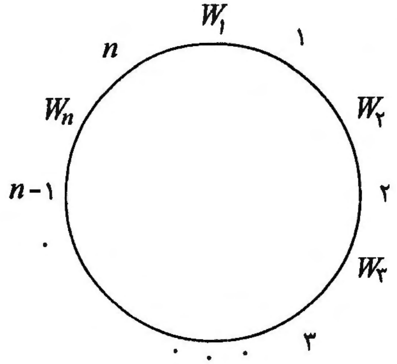
اجازه دهید آقامنش باشیم، و ابتدا خانم‌ها را بنشانیم. ملاحظه کنید که خانم‌های W_1، ...، W_n یا صندلی‌های فرد و یا صندلی‌های زوج را اشغال خواهند کرد، بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برای نشستن خانم‌ها دو برابر $n!$ است. سپس برای هریک از این $2(n!)$ ترتیب، تعداد حالت‌های ممکن برای نشستن آقایان یکسان و مثلاً برابر $g(n)$ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که خانم‌ها مطابق شکل ۳.۶ نشسته‌اند و صندلی‌های خالی برچسب‌های ۱، ...، n دارند که صندلی i بین W_i و W_{i+1} و صندلی n بین W_n و W_1 قرار دارد.

فرض کنید S مجموعه تمامی حالت‌های ممکن برای نشانیدن شوهران در n صندلی باشد، پس $|S| = n!$. سپس خواص زیر را درنظر بگیرید که اعضای S ممکن است دارای این خواص بوده و یا فاقد آن باشند:

P_i: H_i در صندلی i قرار دارد؛

Q_i: H_i در صندلی $i - 1$ قرار دارد که $2 \leq i \leq n$؛

Q_1: H_1 در صندلی n قرار دارد.



شکل ۳.۶

---

[۱] the ménage problem
[۲] E. Lucas

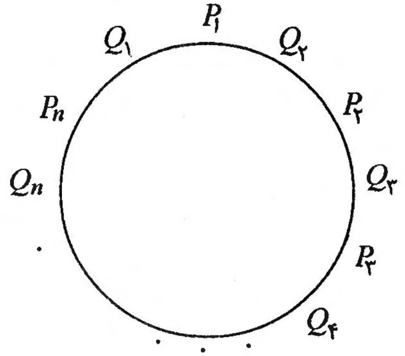
در این‌صورت $g(n)$ دقیقاً برابر تعداد اعضایی از S است که هیچ‌یک از این خواص را نداشته باشند. در به‌کار بردن (۴.۶)، تمامی ترکیبات ممکن این خواص وجود ندارد؛ برای مثال، P_1 و Q_2 نمی‌توانند هم‌زمان برقرار باشند. خواصی که می‌توانند هم‌زمان رخ دهند را **سازگار**[1] می‌نامند. فرض کنید r_k معرف تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب k خاصیت سازگار از خواص P_i و Q_i باشد. در این‌صورت، برای هر انتخاب این‌چنینی، تعداد حالت‌های ممکن برای مرتب‌نمودن شوهران به‌قسمی‌که این k خاصیت برقرار باشند برابر $(n-k)!$ خواهد بود. از این‌رو بنابر (۴.۶)،

$$g(n) = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n 0!.$$

برای تعیین r_k، تصور کنید که خواص مطابق شکل ۴.۶ روی یک دایره قرار گرفته باشند.

در این‌صورت مجموعه‌ای از خواص سازگار هستند دقیقاً زمانی‌که هیچ دو عضوی از آن مجاور نباشند؛ بنابراین r_k برابر است با تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب k عضو از یک ترتیب دوری $2n$ عضوی، به‌قسمی‌که k عضو انتخاب شده دوبه‌دو غیرمجاور باشند.

در تمرین ۱۵.۲(b) نشان داده شد که تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب k عضو دوبه‌دو غیرمجاور از ۱، ...، $2n$ برابر $\binom{2n-k+1}{k}$ است؛ بنابراین r_k برابر است با این عدد منهای تعداد حالت‌هایی که شامل ۱ و $2n$ هستند. ولی اگر ۱ و $2n$ انتخاب شوند آنگاه ۲ و $2n-1$ انتخاب نمی‌شوند، از این‌رو $k-2$ عدد غیرمجاور از ۳، ...، $2n-2$ انتخاب می‌شوند. چون تعداد اعداد موجود در این‌جا $2n-4 = 2(n-2)$ است، تعداد انتخاب‌های این‌چنینی $\binom{2n-4-(k-2)+1}{k-2} = \binom{2n-k-1}{k-2}$ است. بنابراین نهایتاً



شکل ۴.۶

[1] Compatible

$$r_k = \binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

و جواب مسئله زناشویی، $M(n)$، برابر است با $2(n!)g(n)$، که $g(n)$ برابر است با

$$n! - \frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)! + \frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \frac{2n}{n}\binom{n}{n} 0!.$$

برای مثال، $M(5) = 2 \times 5! \times 13 = 3120$.

با نگاهی به پیش، یک تعبیر جایگزین خوبی برای $g(n)$ وجود دارد؛ $g(n)$ برابر است با تعداد حالت‌های ممکن برای انتخاب سطر سومی از یک مربع لاتین $n \times n$ که دو سطر اول آن عبارت هستند از

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1. \end{array}$$

تمرینات

تمرین ۱.۶

رابطه (۲.۶) را به چهار مجموعه A، B، C، D تعمیم دهید.

تمرین ۲.۶

در یک کلاس ۱۰۰ نفره، هر دانشجو حداقل یکی از دو درس ریاضیات و محاسبات را می‌خواند؛ ۶۷ نفر ریاضی و ۴۴ نفر هر دو را می‌خوانند. چند نفر محاسبات را می‌خوانند؟

تمرین ۳.۶

هر یک از ۱۰۰ دانشجوی یک مدرسه موسیقی حداقل یک آلت را می‌نوازد، سیمی، بادی یا برنجی. ۷۰ نفر آلت سیمی را می نوازند، ۴۹ نفر آلت بادی و ۴۹ نفر آلت برنجی. ۲۰ نفر هر دو آلت سیمی و بادی را می‌نوازند؛ ۲۵ نفر آلت سیمی و برنجی، و ۳۵ نفر هر دو آلت بادی و برنجی را می‌نوازند. چند نفر هر سه آلت را می‌نوازند؟

تمرین ۴.۶

چند عدد صحیح مثبت کمتر از ۱۰۰۱ بر هیچ‌یک از اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر نیست.

تمرین ۵.۶

(a) از بحث مثال ۲.۶ پیروی کرده، نشان دهید که اگر G یک گراف با ۱۰۰ راس بوده و هر راس آن از درجه بزرگتر از ۷۵ باشد، آنگاه G حاوی K_5 خواهد بود.
(b) حکم را این‌چنین تعمیم دهید. اگر G یک گراف با mn راس باشد، هر راس از درجه بزرگ‌تر از $m(n-1)$، آنگاه G باید حاوی K_{n+1} باشد.

تمرین ۶.۶

نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x + y + z = 100$ با شرایط $x \le 50$،

$40 \leq y$ و $30 \leq z$ برابر ۲۳۱ است.

تمرین ۷.۶
در چند جایگشت از ۱، ...، ۸ هیچ‌یک از بلوک‌های ۱۲، ۳۴، ۵۶ و ۷۸ ظاهر نمی‌شوند؟

تمرین ۸.۶
در چند جایگشت از ۱، ...، ۸ هیچ عدد زوجی در موقعیت طبیعی خودش قرار نمی‌گیرد؟

تمرین ۹.۶
مثال ۵.۶ روی ماشین رمز را با تغییر ۵ به ۸ تکرار کنید.

تمرین ۱۰.۶
در چند جایگشت از اعداد ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵ هیچ دو عدد مجاوری برابر نیستند؟

تمرین ۱۱.۶

تابع فی اویلر. فرض کنید $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ تجزیه n به عوامل اول باشد و فرض کنید $\phi(n)$ معرف تعداد اعداد کوچک‌تر از $n+1$ باشد که نسبت به n اول هستند (یعنی بر هیچ‌یک از اعداد p_1، ...، p_r بخش‌پذیر نیستند). برای مثال، $\phi(10) = 4$، که اعداد اول مربوطه ۱، ۳، ۷ و ۹ هستند. با استفاده از اصل شمول—حذف نشان دهید $\phi(n) = n\prod_i (1 - \frac{1}{p_i})$. سپس $\phi(100)$ و $\phi(200)$ را تعیین کنید.

تمرین ۱۲.۶
فرض کنید G یک گراف با n راس و m ضلع است. فرض کنید S معرف تعداد رنگ‌آمیزی ممکن راس‌های G با λ رنگ باشد که در آن مجاورت اهمیت ندارد: بنابراین $|S| = \lambda^n$. برای هر $i \leq m$، فرض کنید P_i معرف این خاصیت باشد که دو انتهای ضلع e_i رنگ یکسانی دریافت کنند. در این‌صورت $f_\lambda(G)$، تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن G با λ رنگ (تمرین ۱۹.۵)، برابر است با تعداد اعضایی از S که هیچ‌یک از m خاصیت یادشده P_i را ندارند. نتیجه بگیرید

$$f_\lambda(G) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

که $a_1 = -m$ و $a_2 = \binom{m}{2} - t$، که t معرف تعداد زیرگراف‌های ایزومورف با K_3 در G است.

تمرین ۱۳.۶
(مثالی از کتاب اصول احتمال، متعلق به آبراهام دموآور، چاپ ۱۷۱۷.) اگر تاسی ۱۲ بار پرتاب شود، احتمال ظاهرشدن هر ۶ عدد چقدر است؟

تمرین ۱۴.۶
با استفاده از اصل شمول—حذف تعداد افرازهای $\{1, \ldots, 10\}$ به چهار گروه را تعیین کنید که در آن هیچ‌یک از گروه‌ها مجموعه یک‌عضوی نیست.

فصل ۷

مربع‌های لاتین و قضیه هال

در این فصل مربع‌های لاتین و تعامد آنها را مطالعه کرده و به ساخت مربع‌های جادویی می‌پردازیم. نیز قضیه هال را در مورد سیستم نماینده‌های متمایز بررسی نموده و آن‌را روی مربع‌های لاتین و گراف‌های دوقسمتی به‌کار می‌بریم. سرانجام، نشان می‌دهیم که چگونه مجموعه‌های کامل از مربع‌های لاتین متعامد منجر به صفحات آفینی می‌شوند.

۱.۷ مربع‌های لاتین و تعامد

تعریف ۱.۷

یک مربع لاتین از مرتبه n یک آرایه $n \times n$ است که در آن هر سطر و هر ستون جایگشتی از یک مجموعه n عضوی است. به‌عنوان مثال، دو مربع لاتین از مرتبه ۴ روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به‌فرم زیر هستند.

$$L_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}, \qquad L_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}.$$

علاقه اولیه نسبت به مربع‌های لاتین ابتدا در طرح آزمایش‌های آماری ظاهر شد و سپس در زمینه‌های مختلفی از ریاضیات گسسته و جبر مطرح شدند؛ یک مثال بدیهی این واقعیت است که جدول ترکیبی یک گروه متناهی یک مربع لاتین است.

مثال ۱.۷

فرض کنید $۲n$ تیم در یک اتحادیه بازی می‌کنند و هر تیم یک بازی در هریک از $۲n - ۱$

پایان هفته متوالی دارد. در مجموع هر تیم باید یک‌بار با هریک از تیم‌های دیگر بازی کند. تیم‌ها را با ۱، ۲، ...، $۲n$ برچسب‌گذاری کنید و قرار دهید $a_{ij} = k$ اگر تیم‌های i و j در k امین پایان هفته باهم بازی کنند و برای هر i تعریف کنید $a_{ii} = ۲n$. در این‌صورت $A = (a_{ij})$ یک مربع لاتین از مرتبه $۲n$ است. برای مثال، بازی‌های

پایان هفته ۱ :	۱v۲,	۳v۴
پایان هفته ۲ :	۱v۳,	۲v۴
پایان هفته ۳ :	۱v۴,	۲v۳

مربع لاتین زیر را ایجاد می‌کنند

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که این مربع لاتین نسبت به قطر اصلی متقارن است، یعنی برای هر i و j رابطه $a_{ij} = a_{ji}$ برقرار است. به‌عکس، هر مربع لاتین متقارن از مرتبه $۲n$، که عناصر قطر اصلی آن ثابت باشند، را می‌توان به‌عنوان لیست زمان‌بندی یک اتحادیه $۲n$ تیمی درنظر گرفت.

بسیاری از کاربردهای مربع‌های لاتین از مفهوم تعامد استفاده می‌کنند. این ایده به اویلر باز می‌گردد. در ۱۷۷۹ او مسئله‌ای راجع به ۳۶ افسر را مورد بحث قرار داد. این افسران به شش هنگ تعلق داشتند، شش نفر به هریک از هنگ‌ها؛ در میان شش عضو مربوط به یک هنگ، از هر شش رتبه مختلف یک افسر وجود داشت. سؤال اویلر این بود که آیا امکان مرتب‌کردن این ۳۶ افسر در یک آرایه ۶×۶ وجود دارد به‌قسمی‌که هر سطر و هر ستون از هر هنگ و هر رتبه یک عضو را شامل باشد؟ او معتقد بود (به‌درستی، اگرچه نتوانست آن‌را ثابت کند) که چنین آرایشی امکان‌پذیر نیست.

درعوض، مسئله متناظر با ۱۶ افسر، از چهار هنگ α، β، γ، δ و یک افسر از هریک از چهار رتبه a، b، c و d از هر هنگ را درنظر بگیرید. این مسئله حل‌پذیر است. آرایه زیر یک جواب برای این مسئله است که در آن، به‌عنوان مثال، γd معرف یک افسر از رتبه d از هنگ γ است:

$$\begin{matrix} \alpha a & \beta b & \gamma c & \delta d \\ \gamma d & \delta c & \alpha b & \beta a \\ \delta b & \gamma a & \beta d & \alpha c \\ \beta c & \alpha d & \delta a & \gamma b. \end{matrix}$$

چون باید در هر سطر و هر ستون یک افسر از هر هنگ وجود داشته باشد، حروف α، β، γ و δ باید تشکیل یک مربع لاتین بدهند؛ وضعیت مشابه‌ای برای a، b، c و d برقرار

است. افزون بر این، چون از هر رتبه یک افسر در هر هنگ وجود دارد زوج‌ها (حرف لاتین و حرف یونانی) باید متمایز باشند. این خاصیت در جواب ارائه‌شده وجود دارد، و خواننده می‌تواند بررسی کند که حروف یونانی و حروف لاتین به‌ترتیب متناظر با مربع‌های لاتین $L_۱$ و $L_۲$ هستند.

تعریف ۲.۷

(i) اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو آرایه $n \times n$ باشند آنگاه **الحاق** A و B، (A, B)، یک آرایه $n \times n$ است که (i, j) امین درایه آن زوج (a_{ij}, b_{ij}) است.

(ii) مربع‌های لاتین A و B **متعامد** هستند اگر تمامی درایه‌های الحاق (A, B) متمایز باشند.

اگر A و B متعامد باشند، هریک از A و B را **جفت متعامد**[۱] دیگری می‌نامیم. پس، برای مثال، $L_۱$ و $L_۲$ جفت متعامد یکدیگر هستند. توجه کنید که متمایز بودن درایه‌های (A, B) معادل با این است که هریک از $n^۲$ زوج ممکن دقیقاً یک‌بار ظاهر شود. نیز توجه کنید که شرط متعامدبودن A و B را می‌توان چنین بیان کرد

(۱.۷) اگر $a_{ij} = a_{IJ}$ و $b_{ij} = b_{IJ}$ آنگاه $i = I$ و $j = J$.

مسئله افسر اویلر جواب دارد تنها اگر دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ٦ موجود باشد؛ سرانجام در ۱۹۰۰ ثابت شد که چنین مربع‌هایی وجود ندارند.

به‌شکلی کلی‌تر، مربع‌های لاتین $A_۱$، ...، A_r از مرتبه n را **متقابلاً متعامد**[۲] نامند اگر دوبه‌دو متعامد باشند. برای این خاصیت از نماد MOLS[۳] استفاده خواهیم کرد.

به‌ازای هر n، یک حدّی برای تعداد MOLS از مرتبه n وجود دارد. $N(n)$ را معرف بزرگ‌ترین عدد r درنظر می‌گیریم که به‌ازای آن r MOLS از مرتبه n وجود دارد.

قضیه ۱.۷

اگر $n \geq ۲$ آنگاه $N(n) \leq n - ۱$.

اثبات

فرض کنید $L_۱$، ...، L_r r MOLS از مرتبه n باشند. با تجدید برچسب‌گذاری (که تاثیری روی شرط تعامد ندارد) عناصر هریک از این مربع‌ها، می‌توان فرض کرد که اولین سطر هریک از این مربع‌ها برابر n ,... ,۲ ,۱ است. روی عناصر واقع در موقعیت (۱ ,۲) تمرکز کنید. چون هر مربعی از پیش یک ۱ در اولین ستون دارد، هیچ‌یک از عناصر واقع در موقعیت (۱ ,۲) برابر ۱ نیست. افزون بر این، این عناصر دوبه‌دو متمایز هستند، برای این‌که الحاق هر دو مربعی از قبل حاوی تمامی زوج‌های با مولفه‌های یکسان در سطر اول است. پس $r \leq n - ۱$. ■

[۱] orthogonal mate
[۲] mutually orthogonal
[۳] mutually orthogonal latin square

یک مجموعه $n-۱$ عضوی از MOLSهای از مرتبه n، در صورت وجود، را یک مجموعه کامل از MOLS می‌نامند.

مثال ۲.۷

مربع‌های زیر یک مجموعه کامل از ۳ MOLS از مرتبه ۴ هستند:

$$M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}, \quad M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \quad M_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}.$$

قضیه بعد وجود مجموعه‌های کامل را برای اعداد اول اثبات می‌کند.

قضیه ۲.۷

اگر p اول باشد آنگاه $N(p) = p - ۱$.

اثبات

دنباله $A_۱$، ...، $A_{p-۱}$ از مربع‌ها را به این شرح تعریف می‌کنیم. برای (i,j) امین درایه A_k قرار دهید $a_{ij}^{(k)} = (ki + j) \bmod p$.

(i) ابتدا نشان می‌دهیم که هر A_k یک مربع لاتین است. اولاً، درایه‌های سطر i ام همگی متفاوت هستند؛ برای این‌که اگر $a_{ij}^{(k)} = a_{iJ}^{(k)}$ آنگاه $ki + j \equiv ki + J \pmod p$ و بنابراین $j = J$. نیز، درایه‌های ستون j ام همگی متمایز هستند؛ زیرا اگر $a_{ij}^{(k)} = a_{Ij}^{(k)}$ آنگاه $ki + j \equiv kI + j \pmod p$ و از آن‌جا $k(i - I) = ۰ \pmod p$. پس p بخش‌کننده $k(i - I)$ بوده و بنابراین عدد $i - I$ را بخش می‌کند، از این‌رو $i \equiv I \pmod p$ و در نتیجه $i = I$.

(ii) حال با استفاده از (۱.۷) نشان می‌دهیم اگر $k \neq h$ آنگاه A_k و A_h متعامد هستند. فرض کنید $a_{ij}^{(k)} = a_{IJ}^{(k)}$ و $a_{ij}^{(h)} = a_{IJ}^{(h)}$. در این‌صورت $ki + j \equiv kI + J \pmod p$ و $hi + j \equiv hI + J \pmod p$. بنابراین $(h - k)i \equiv (h - k)I \pmod p$ و در نتیجه $i = I$. از این‌رو $j \equiv J \pmod p$ و از آن‌جا $j = J$.■

مثال ۳.۷

مربع‌های زیر تشکیل یک مجموعه کامل از MOLSهای مرتبه ۵ می‌دهند:

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}, \quad A_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix},$$

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}, \quad A_۴ = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}.$$

برای خوانندگانی که با میدان‌های متناهی آشنا هستند، باید یادآور شویم که یک بحث مشابه‌ای نشان می‌دهد که اگر q توانی از یک عدد اول باشد آنگاه $N(q) = q - ۱$. (تمرین ۹.۷.)

۲.۷ مربع‌های جادویی

یک مربع جادویی از مرتبه n یک آرایه $n \times n$ است که شامل هریک از اعداد ۱، ...، $n^۲$ بوده و این‌که مجموع درایه‌های روی هر سطر، ستون، و هریک از دو قطر اصلی عددی ثابت است (که در واقع برابر $\frac{۱}{۲}n(n^۲ + ۱)$ است؛ تمرین ۳.۷).

مثال ۴.۷

آرایه زیر یک ماتریس جادویی از مرتبه ۳ است:

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۲ \end{bmatrix}.$$

برای هر $n \geq ۳$ مربع جادویی وجود دارد. اگر n فرد باشد روش ارائه‌شده در قرن هفدهم، توسط دلالوبری[۱]، را می‌توان مانند مثال ۴.۷ به‌کار برد. با قرار دادن ۱ در مرکز سطر اول شروع کنید؛ در حالت کلی در جهت شمال‌شرقی حرکت کنید و عدد بعدی را در درایه بعدی مربع قرار دهید مشروط به این‌که آن موقعیت خالی باشد؛ در این حرکت اگر در خارج یک سطر یا ستون قرار گرفتید در انتهای دیگر همان سطر یا ستون ظاهر شوید. در صورت عدم امکان حرکت به‌سمت شمال‌شرقی به‌سمت جنوب حرکت کنید.

مثال ۵.۷

برای حالت $n = ۵$، نشان دهید که روش دلالوبری منجر به مربع زیر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱۷ & ۲۴ & ۱ & ۸ & ۱۵ \\ ۲۳ & ۵ & ۷ & ۱۴ & ۱۶ \\ ۴ & ۶ & ۱۳ & ۲۰ & ۲۲ \\ ۱۰ & ۱۲ & ۱۹ & ۲۱ & ۳ \\ ۱۱ & ۱۸ & ۲۵ & ۲ & ۹ \end{bmatrix}.$$

[۱] de la Loubére

روش‌های ساخت مربع‌های جادویی از مرتبه زوج پیچیده‌تر هستند. بعضی از این مربع‌ها، با یک روش کلی که منتسب به اویلر است با استفاده از MOLSها ساخته می‌شوند.

مثال ۶.۷

الحاق دومین و سومین مربع لاتین مثال ۲.۷ را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \\ ۴۳ & ۳۴ & ۲۱ & ۱۲ \\ ۲۴ & ۱۳ & ۴۲ & ۳۱ \\ ۳۲ & ۴۱ & ۱۴ & ۲۳ \end{bmatrix}.$$

با ۱ واحد کاهش در مختص اول هریک از زوج‌ها مربع

$$\begin{bmatrix} ۰۱ & ۱۲ & ۲۳ & ۳۴ \\ ۳۳ & ۲۴ & ۱۱ & ۰۲ \\ ۱۴ & ۰۳ & ۳۲ & ۲۱ \\ ۲۲ & ۳۱ & ۰۴ & ۱۳ \end{bmatrix} \qquad (۲.۷)$$

را به‌دست آورده و سپس درایه‌های حاصل را به‌عنوان نمایش اعداد ۱، ...، ۱۶ در مبنای ۴ درنظر بگیرید (xy معرف $۴x + y$). از این تعبیر مربع جادویی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۱۱ & ۱۶ \\ ۱۵ & ۱۲ & ۵ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۱۴ & ۹ \\ ۱۰ & ۱۳ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}.$$

علت مربع جادویی بودن این آرایه به‌آسانی از (۲.۷) نتیجه می‌شود؛ در هر سطر، ستون، قطر اصلی از (۲.۷)، هریک از اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ دقیقاً یک‌بار در موقعیت اول و هریک از اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ یک‌بار در موقعیت دوم ظاهر می‌شوند، و بنابراین مجموع درایه‌های واقع در هریک از این سطرها، ستون‌ها و قطرها یکسان است.

این روش در حالت کلی کار می‌کند مشروط به این‌که بتوانیم دو MOLS پیدا کنیم که در آنها هریک از اعضا دقیقاً یک‌بار روی هریک از دو قطر ظاهر شوند. حال باید مشخص شده باشد که چرا از اولین مربع لاتین مثال ۲.۷ استفاده نکردیم.

مربع جادویی هندی زیر، که تاریخ آن به قرن دوازدهم باز می‌گردد، این خاصیت اضافی را دارد که در آن مجموعه درایه‌های واقع در قطرهای شکسته نیز همان مجموع را دارند.

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ & ۱ & ۱۴ \\ ۲ & ۱۳ & ۸ & ۱۱ \\ ۱۶ & ۳ & ۱۰ & ۵ \\ ۹ & ۶ & ۱۵ & ۴ \end{bmatrix}. \qquad (۳.۷)$$

برای مثال، $۳۴ = ۱۵ + ۵ + ۲ + ۱۲ = ۹ + ۵ + ۸ + ۱۲$. یک چنین مربع جادویی را تمام‌قطری[1] (یا دیابولیک) می‌نامند. اگر بخواهیم از روش اویلر برای ساخت مربع‌های جادویی دیابولیک استفاده کنیم، باید دو مربع لاتین متعامد انتخاب کنیم که در آنها قطرهای شکسته مجموع یکسانی داشته باشند (معادلاً، هریک از عناصر دقیقاً یک‌بار در هر قطر شکسته ظاهر شده باشد). این خاصیت در حالت‌های زیادی قابل دسترسی است.

مثال ۷.۷

آرایه‌های $A_۲$ و $A_۳$ از مثال ۳.۷ را انتخاب کنید. با ۱ واحد کاهش از تمامی درایه‌های $A_۲$ و تعبیر زوج (x, y) در الحاق $A_۲$ و $A_۳$ به‌عنوان $۵x + y$، مربع جادویی تمام‌قطری زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۰ & ۲۱ & ۲ & ۸ \\ ۲۲ & ۳ & ۹ & ۱۵ & ۱۶ \\ ۱۰ & ۱۱ & ۱۷ & ۲۳ & ۴ \\ ۱۸ & ۲۴ & ۵ & ۶ & ۱۲ \\ ۱ & ۷ & ۱۳ & ۱۹ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

در حالت کلی، اگر n فرد بوده و بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، می‌توان قرارداد $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ که $a_{ij} \equiv ۲i + j - ۲ (\bmod n)$ و $b_{ij} \equiv ۳i + j - ۲ (\bmod n)$. در این‌صورت الحاق A و B منجر به یک مربع لاتین دیابولیک می‌شود. جزییات امر به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۶.۷).

۳.۷ سیستم‌های نماینده‌های متمایز

در تشکیل مربع‌های لاتین، در هر مرحله یک سطر ساخته می‌شود. با مفروض‌بودن سطر اول، سطر دوم یک بی‌نظمی از سطر اول است؛ ولی، در حالت کلی، اگر در تلاش خود برای ساخت یک مربع لاتین، r سطر اول را ساخته باشیم، آیا همیشه امکان پیداکردن $r + ۱$ امین سطر مناسب وجود دارد؟ چون تا این‌جا در هر ستون r عضو ظاهر شده است، مجموعه X_i متشکل از عناصر موجود برای i امین موقعیت در سطر $r + ۱$، اندازه $n - r$ دارد. مسئله این است که آیا امکان انتخاب اعضای متمایز از مجموعه‌های $X_۱$، ...، X_n وجود دارد؟ اگر چنین باشد آنگاه این اعضا سطر $r + ۱$ را تشکیل خواهند داد.

مثال ۸.۷

فرض کنید اولین دو سطر را به‌شرح زیر داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \end{bmatrix}.$$

[1] pandiagonal

در این‌جا $X_1 = \{۲,۴,۵\}$، $X_۲ = \{۳,۴,۵\}$، $X_۳ = \{۱,۲,۵\}$، $X_۴ = \{۱,۲,۳\}$ و $X_۵ = \{۱,۳,۴\}$. می‌توانیم اعداد ۲، ۳، ۵، ۱ و ۴ را به‌ترتیب از $X_۱$، ...، $X_۵$ انتخاب کرده و داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۵ & ۱ & ۴ \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \end{bmatrix}.$$

تعریف ۳.۷

یک سیستم نماینده‌های متمایز[۱] (SDR) برای مجموعه‌های $A_۱$، ...، A_m متشکل است از اعضای متمایز $x_۱$، ...، x_m به‌قسمی‌که برای هر i داشته باشیم $x_i \in A_i$.

مثال ۹.۷

(a) ۳، ۱، ۴ و ۲ تشکیل یک SDR برای مجموعه‌های $\{۱,۳,۵\}$، $\{۱,۲\}$، $\{۳,۴\}$ و $\{۲,۳,۴\}$ می‌دهند.

(b) مجموعه‌های $\{۱,۲,۴\}$، $\{۲,۴\}$، $\{۱,۴\}$، $\{۱,۲\}$، $\{۱,۵\}$ و $\{۳,۴,۵\}$ فاقد SDR هستند، زیرا اجتماع چهار مجموعه اول تنها ۳ عضو دارد.

این مثال تنها وضعیتی را که مانع وجود یک SDR برای گردایه‌ای از مجموعه‌ها می‌شود توضیح می‌دهد. گوییم مجموعه‌های $A_۱$، ...، A_n در شرط هال[۲] صدق می‌کنند اگر

برای هر $k \le n$، اجتماع هر k مجموعه A_i حاوی حداقل k عضو است. (۴.۷)

قضیه ۳.۷

مجموعه‌های $A_۱$، ...، A_n دارای یک SDR هستند اگر و فقط اگر در شرط هال، (۴.۷)، صدق کنند.

اثبات

[اثباتی را بر پایه ایده رادو[۳] ارائه می‌دهیم. از ساده‌ترین فرم اصل شمول—حذف استفاده می‌شود: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.]

واضح است که اگر مجموعه‌ها دارای یک SDR باشند آنگاه در (۴.۷) صدق می‌کنند. بنابراین فرض کنید $A_۱$، ...، A_n در شرط (۴.۷) صدق کنند؛ نشان می‌دهیم که آنها دارای یک SDR هستند. کار را با خارج‌کردن یک عضو از یکی از مجموعه‌های A_i، اگر امکان‌پذیر باشد، به‌قسمی‌که مجموعه‌های حاصل همچنان در شرط هال صدق کنند شروع می‌کنیم. سپس عمل خارج‌کردن اعضا را، برداشت یک عضو در هربار، ادامه می‌دهیم تا به

[۱] system of distinct representatives [۲] Hall condition [۳] R. Rado

مجموعه‌هایی چون B_1، ...، B_n برسیم به‌قسمی‌که $B_i \subseteq A_i$، و اگر عضو دیگری از یکی از این مجموعه‌های B_i خارج شود آنگاه شرط هال برای B_1، ...، B_n نقض شود. اگر نشان دهیم که هر مجموعه B_i یکانی است، آنگاه خود مجموعه‌های B_i باید متمایز بوده و بنابراین یک SDR برای A_i هستند.

بنابراین فرض کنید B_1 دارای دو عضو x و y باشد. با برداشتن هریک از این دو عضو، شرط هال برای B_1، ...، B_n نقض می‌شود. بنابراین دو مجموعه P و Q از اندیس‌ها وجود دارند به‌قسمی‌که اگر

$$X = (B_1 - \{x\}) \cup \bigcup_{i \in P} B_i, \quad Y = (B_1 - \{y\}) \cup \bigcup_{i \in Q} B_i$$

آنگاه $|P| \geq |X|$ و $|Q| \geq |Y|$. ولی

$$X \cup Y = B_1 \cup \bigcup_{i \in P \cup Q} B_i, \quad X \cap Y \supseteq \bigcup_{i \in P \cap Q} B_i,$$

و از شرط هال نتیجه می‌شود

$$|X \cup Y| \geq 1 + |P \cup Q|, \quad |X \cap Y| \geq |P \cap Q|.$$

بنابراین از اصل شمول—حذف نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |P| + |Q| &\geq |X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| \\ &\geq 1 + |P \cup Q| + |P \cap Q| \\ &= 1 + |P| + |Q|, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. از این‌رو B_1 باید یکانی باشد. بحث مشابه‌ای در مورد هریک از B_iها به‌کار می‌رود؛ بنابراین برای هر i داریم $|B_i| = 1$. ■

حال نتیجه مهمی از قضیه ۳.۷ (قضیه هال) را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۷

فرض کنید A_1، ...، A_n زیرمجموعه‌های S باشند به‌قسمی‌که برای عددی چون m،

(i) برای هر i، $|A_i| = m$، و

(ii) هر عضو S دقیقاً در m زیرمجموعه A_i قرار دارد.

در این‌صورت A_1، ...، A_n دارای یک SDR است.

اثبات

نشان می‌دهیم که مجموعه‌های A_i شرط (۴.۷) را تامین می‌کنند. اجتماع k مجموعه A_i

را درنظر بگیرید. با احتساب تکرارها، این اجتماع شامل km عضو است. ولی بنابر (ii)، هیچ عضوی در این اجتماع بیش از m بار ظاهر نمی‌شود؛ بنابراین تعداد اعضای متمایز این اجتماع حداقل $\frac{km}{m} = k$ است. ■

اولین استفاده از قضیه ۴.۷ تاییدی بر این است که مربع‌های لاتین را می‌توان سطربه‌سطر ساخت.

تعریف ۴.۷
اگر $r \leq n$، یک **مربع‌مستطیل لاتین** روی یک مجموعه n عضوی S عبارت است از یک آرایه $r \times n$ از اعضای S به‌قسمی‌که هیچ عضوی بیش از یک‌بار در یک سطر یا ستون ظاهر نشده باشد.

قضیه ۵.۷
هر مربع‌مستطیل لاتین $r \times n$، $r < n$، قابل بسط به یک مربع‌مستطیل لاتین $(r+1) \times n$ است.

اثبات
فرض کنید L یک مربع‌مستطیل لاتین $r \times n$ روی $\{1, ..., n\}$ است. برای هر $i \leq n$ فرض کنید A_i معرف مجموعه‌ای از اعضای $\{1, ..., n\}$ است که در ستون iام L ظاهر نشده‌اند. پس برای هر i داریم $|A_i| = n - r$. افزون بر این، برای هر $j \leq n$، j در هر سطر L ظاهر می‌شود و بنابراین در r ستون ظاهر شده است؛ بنابراین j باید دقیقاً در $n - r$ مجموعه A_i ظاهر شود. از این‌رو می‌توان در قضیه ۴.۷ قرار داد $m = n - r$ و نتیجه گرفت که مجموعه‌های A_i دارای یک SDR هستند که می‌تواند به‌عنوان $r + 1$ امین سطر مربع‌مستطیل مطلوب درنظر گرفته شود. ■

استفاده دوم ما از قضیه ۴.۷ در واقع یک فرمول‌بندی جدید برای این نتیجه بر حسب گراف‌های دوقسمتی است.

تعریف ۵.۷
یک مجموعه از اضلاع غیرمجاور در یک گراف G را یک **تطابق** می‌نامند. اگر G دارای $2n$ راس باشد، یک تطابق با n ضلع، یک تطابق کامل[1] نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۷
اگر G یک گراف دوقسمتی با افراز $V = B \cup W$ باشد که $|B| = |W| = n$، و همه راس‌های G از درجه m باشند، آنگاه G یک تطابق کامل دارد.

اثبات
فرض کنید $B = \{u_1, .., u_n\}$ و $W = \{v_1, .., v_n\}$. برای هر $i \leq n$ فرض کنید A_i متشکل از

[1] perfect matching

همه اعدادی چون j باشد که u_i و v_j مجاور هستند. در این‌صورت مجموعه‌های A_i شرط‌های قضیه ۴.۷ را تامین می‌کنند و بنابراین دارای یک SDR هستند. این SDR یک تطابق کامل ارائه می‌دهد که در آن u_i به v_j مجاور است که j نماینده A_i است. ■

برای گراف‌های دوقسمتی منظم، مانند گراف‌های قضیه ۶.۷، بی‌درنگ اثبات معادلی از نتیجه کونیگ را به‌دست می‌آوریم که وجود رابطه $\chi'(G) = \Delta$ در گراف‌های دوقسمتی را بیان می‌کند. برای این‌که می‌توانیم ابتدا یک تطابق کامل پیدا کرده و اضلاع آن را با یک رنگ، رنگ کنیم. گراف حاصل از حذف این تطابق شرط‌های قضیه را به‌ازای $m = \Delta - ۱$ تامین می‌کنند، بنابراین می‌توان بحث را تکرار کرده و دومین تطابق کامل را انتخاب و با رنگ دیگری رنگ کرد. با ادامه این روش، اضلاع G به Δ تطابق کامل افراز شده و از این‌رو یک Δ ضلع‌رنگی حاصل می‌شود.

قضیه ۶.۷ در واقع ابتدا در سال ۱۸۹۳ توسط اشتاینتز[۱] و سپس مستقلاً در ۱۹۱۴ توسط کونیگ اثبات شد. البته این حالت خاصی از قضیه ۱۲.۵ است، زیرا اضلاع هم‌رنگ تشکیل یک تطابق می‌دهند.

۴.۷ از مربع‌های لاتین به صفحات آفینی

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه مجموعه‌های کامل از MOLSها منجر به خانواده مهمی از طرح‌ها می‌شوند. با سه MOLS از مرتبه ۴، مثال ۲.۷، همراه با آرایه طبیعی N شروع می‌کنیم:

$$N = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{bmatrix}.$$

از این چهار مربع، ۲۰ مجموعه ۴عضوی به‌شرح زیر می‌سازیم.

(a) سطرهای N چهار مجموعه تولید می‌کنند:

$$\{۱, ۲, ۳, ۴\}, \{۵, ۶, ۷, ۸\}, \{۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}, \{۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶\},$$

و ستون‌های N منجر به چهار مجموعه دیگر می‌شوند:

$$\{۱, ۵, ۹, ۱۳\}, \{۲, ۶, ۱۰, ۱۴\}, \{۳, ۷, ۱۱, ۱۵\}, \{۴, ۸, ۱۲, ۱۶\}.$$

(b) اولین عضو سه MOLS، به‌نام $M_۱$، چهار مجموعه زیر را می‌دهد:

$$\{۱, ۶, ۱۱, ۱۶\}, \{۲, ۵, ۱۲, ۱۵\}, \{۳, ۸, ۹, ۱۴\}, \{۴, ۷, ۱۰, ۱۳\}.$$

[۱] Steinitz

در این‌جا مجموعه اول متشکل از درایه‌هایی از N است که در موقعیت‌های متناظر با آنها در M_1 عدد ۱ ظاهر می‌شود، مجموعه دوم متشکل از درایه‌هایی از N است که در موقعیت‌های مربوطه در M_1، عدد ۲ ظاهر می‌شود؛ و غیره.

(c) به‌روش مشابه، M_2 منجر به چهار مجموعه زیر می‌شود:

$$\{1, 8, 10, 15\}, \{2, 7, 9, 16\}, \{3, 6, 12, 13\}, \{4, 5, 11, 14\}.$$

(d) سرانجام، از M_3 مجموعه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\{1, 7, 12, 14\}, \{2, 8, 11, 13\}, \{3, 5, 10, 16\}, \{4, 6, 9, 15\}.$$

حال ۲۰ مجموعه داریم که همه ۴عضوی هستند؛ این مجموعه‌ها را بلوک[1] می‌نامیم. بلوک‌ها یک خاصیت مهم دارند: هیچ دو عضوی از $\{1, \ldots, 16\}$ در بیش از یک بلوک مشاهده نمی‌شوند. هریک از بلوک‌های واقع در (b)، (c)، (d) دارای یک عضو از هر سطر و هر ستون N هستند و بنابراین حاوی هیچ زوجی از یک سطر یا ستون N نمی‌باشند؛ چنین زوج‌هایی دقیقاً یک‌بار در بلوک‌های (a) ظاهر می‌شوند. حال یک زوجی را درنظر بگیرید که در هیچ سطر یا ستونی از N قرار ندارند. یک چنین زوجی نمی‌تواند در بیش از یک بلوک (b) ظاهر شود زیرا بلوک‌های (b) متمایز هستند؛ و به‌دلیل مشابه، این زوج نمی‌تواند در دو بلوک از (c) یا (d) ظاهر شود. فرض کنید یک زوج در یک بلوک از (b) و یک بلوک از (c) ظاهر شود. در این‌صورت دو موقعیت وجود دارد که در آنها M_1 درایه‌های یکسان و M_2 نیز درایه‌های یکسان دارند. ولی این در تناقض با تعامد M_1 و M_2 است. بنابراین نشان داده‌ایم که هیچ زوجی در بیش از یک بلوک قرار ندارد.

حال هر بلوک حاوی $\binom{4}{2} = 6$ زوج است، و بنابراین ۲۰ بلوک روی‌هم حاوی ۱۲۰ زوج هستند. ولی تعداد کل زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه $\{1, \ldots, 16\}$ برابر $\binom{16}{2} = 120$ است؛ بنابراین هر زوجی باید در یک بلوک ظاهر شود !

پس ۲۰ بلوک یادشده این خاصیت را دارند که هر زوجی از اعضا دقیقاً در یکی از بلوک‌ها ظاهر می‌شود. این خاصیت توازن است که مبنای مطالعه طرح‌های بلوکی غیرکامل متوازن می‌باشد که در فصل ۹ به آنها خواهیم پرداخت.

در حالت کلی، اگر با $n - 1$ MOLS از مرتبه n روی $\{1, \ldots, n\}$ شروع کنیم و N را آرایه $n \times n$ با درایه‌های به‌ترتیب ۱، ۲، ...، n^2 انتخاب کنیم، آنگاه بلوک‌ها را به‌شرح زیر می‌سازیم:

(α_1) n بلوک از سطرهای N

[1] block

(α_2) n بلوک از ستون‌های N

(β_1) n بلوک از M_1، که i امین بلوک متشکل است از درایه‌های N در موقعیت‌هایی که در آنها i در M_1 ظاهر می شود،

$\vdots$

(β_{n-1}) n بلوک از M_{n-1} ، که به‌روش مشابه به‌دست می آیند.

به این ترتیب $n^2 + n = (n+1) \times n$ بلوک با اندازه n ساخته می‌شوند به‌قسمی‌که هیچ دو عضوی در بیش از یک بلوک قرار نمی‌گیرد. ولی این بلوک‌ها روی‌هم شامل

$$n(n+1)\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2(n+1)(n-1) = \binom{n^2}{2}$$

زوج هستند؛ بنابراین هر زوجی از اعضای $\{1, \ldots, n^2\}$ دقیقاً در یکی از بلوک‌ها ظاهر می‌شود.

از این‌رو یک گردایه از $n(n+1)$ زیرمجموعه (بلوک) از یک مجموعه n^2 عضوی به‌دست می آوریم به‌قسمی‌که

(i) هر بلوک حاوی n عضو است؛

(ii) هر عضو در $n + 1$ بلوک قرار دارد؛

(iii) هر دو عضوی دقیقاً در یک بلوک قرار دارند؛

(iv) هر دو بلوکی حدّاکثر یک عضو مشترک دارند.

(برای بررسی (ii)، توجه کنید که هر عضو در دقیقاً یکی از بلوک‌های هریک از α_1، α_2، β_1، ...، β_{n-1} قرار دارد. برای بررسی (iv)، فرض کنید که بلوک‌های β_1، β_2 دو عضو مشترک x و y داشته باشند. در این‌صورت زوج $\{x, y\}$ در دو بلوک ظاهر می‌شود که در تناقض با (iii) است).

یک چنین سیستمی یک **صفحه آفینی**[1] از مرتبه n نامیده می‌شود. اعضا و بلوک‌ها را به‌ترتیب با نقاط و خطوط در هندسه معمولی مقایسه کنید. خاصیت (iii) متناظر با این واقعیت است که هر دو نقطه دقیقاً یک خط تعریف می‌کنند، و (iv) متناظر با این است که هر دو خطی حداکثر در یک نقطه مشترک هستند. خط‌های غیرمتقاطع معمولاً **موازی** نامیده می‌شوند؛ می‌توانیم هریک از (α_1)، ...، (β_{n-1}) را به‌عنوان یک مجموعه از n خط موازی تلقی کنیم، که هریک افرازی از $\{1, \ldots, n^2\}$ می‌باشند.

---

[1] affine plane

مثال ۱۰.۷

دو MOLS از مرتبه ۳ تعریف شده با

$$M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \quad M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix},$$

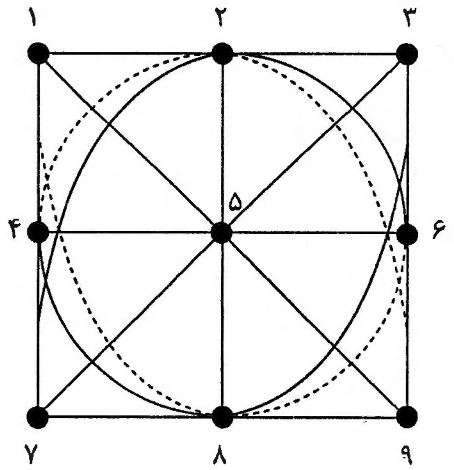
را به‌همراه N درنظر بگیرید

$$N = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ٦ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}.$$

در این‌صورت ۱۲ بلوک ۳عضوی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{rcl} \text{سطرهای } N & \to & \{۱,۲,۳\}, \quad \{۴,۵,٦\}, \quad \{۷,۸,۹\}, \\ \text{ستون های } N & \to & \{۱,۴,۷\}, \quad \{۲,۵,۸\}, \quad \{۳,٦,۹\}, \\ M_۱ & \to & \{۱,٦,۸\}, \quad \{۲,۴,۹\}, \quad \{۳,۵,۷\}, \\ M_۲ & \to & \{۱,۵,۹\}, \quad \{۲,٦,۷\}, \quad \{۳,۴,۸\}. \end{array}$$

هریک از این چهار مجموعه سه‌بلوکی مجموعه $\{۱,\ldots,۹\}$ را افراز می‌کند، و می‌تواند به‌عنوان یک مجموعه از خطوط موازی لحاظ شود. هر دو عضوی در یک بلوک منحصربه‌فرد ظاهر می‌شوند. با درنظر گرفتن بلوک‌ها به‌عنوان خط، این سیستم را با شکل ۱.۷ نمایش می‌دهیم، که هشت خط به‌صورت مستقیم و چهار خط دیگر به‌فرم منحنی رسم شده‌اند. از مربع‌های لاتین به حوزه نظریه طرح وارد شده‌ایم. این ارتباط را در فصل آخر ادامه خواهیم داد.



شکل ۱.۷

تمرینات

تمرین ۱.۷

مطابق توصیف قضیه ۲.۷، دو مربع متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

تمرین ۲.۷

زمان‌بندی بازی‌های داده‌شده توسط مربع لاتین زیر را (مانند مثال ۱.۷) بنویسید.

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٢ & ٣ & ۴ & ۵ \\ ١ & ٦ & ۵ & ۴ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ۵ & ٦ & ١ & ٣ & ۴ \\ ٣ & ۴ & ١ & ٦ & ۵ & ٢ \\ ۴ & ٢ & ٣ & ۵ & ٦ & ١ \\ ۵ & ٣ & ۴ & ٢ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

تمرین ۳.۷

ثابت کنید که مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون یک مربع جادویی از مرتبه n باید $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ باشد.

تمرین ۴.۷

با استفاده از روش دلالوبری یک مربع جادویی از مرتبه ۷ بسازید.

تمرین ۵.۷

با استفاده از روش اویلر یک مربع جادویی دیابولیک از مرتبه ۷ بسازید.

تمرین ۶.۷

ثابت کنید اگر n فرد بوده و مضرب ۳ نباشد، آنگاه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، با ضابطه $a_{ij} \equiv 2i + j - 2 \pmod{n}$ و $b_{ij} \equiv 3i + j - 2 \pmod{n}$، مربع‌های لاتین متعامد از مرتبه n هستند و این‌که در A و B هر قطری حاوی تمامی اعداد ۱، …، n است.

تمرین ۷.۷

یک مربع لاتین A خودمتعامد است اگر عمود بر ترانهاده خود A^T باشد. (این ترانهاده معمولی در یک ماتریس است.)

(a) ثابت کنید در مثال ۲.۷، M_2 خودمتعامد است.

(b) آیا M_1 و M_3 خودمتعامد هستند؟

(c) نشان دهید اگر $(n, 6) = 1$، آنگاه مربع لاتین A در تمرین ۶.۷ خودمتعامد است.

تمرین ۸.۷

(a) یک مربع لاتین متقارن روی $\{1, \ldots, n\}$ اعداد ۱، …، n را روی قطر اصلی خود دارد. نشان دهید که n باید فرد باشد.

(b) فرض کنید $n = ۲m + ۱$ و a_{ij} را در $\{۱, \ldots, n\}$ با ضابطه $a_{ij} = (i + j)(m + ۱)$ $(\mathrm{mod}\ n)$ تعریف کنید. نشان دهید $A = (a_{ij})$ یک مربع لاتین متقارن است و عناصر روی قطر اصلی اعداد ۱، ...، n هستند. در حالت $n = ۵$، A را تعیین کنید.

تمرین ۹.۷

با استفاده از میدان متناهی $GF(q)$، نشان دهید $N(q) = q - ۱$، که q توانی از یک عدد اول است. فرض کنید $GF(q) = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_{q-۱}, \lambda_q = ۰\}$، و مربع‌های A_k، $۱ \leq k \leq q-۱$، را به‌وسیله $a_{ij}^{(k)} = \lambda_i\lambda_k + \lambda_j$ تعریف کنید. (اثبات قضیه ۲.۷ را پیروی کنید.)

تمرین ۱۰.۷

روش اویلر برای ساخت مربع دیابولیک را روی مربع $M_۲$ از مثال ۲.۷ و ترانهاده آن $M_۲^T$ به‌کار ببرید. نتیجه حاصل را با (۳.۷) مقایسه کنید.

تمرین ۱۱.۷

مستطیل $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۳ & ۱ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ را به یک مربع لاتین از مرتبه ۵ بسط دهید.

تمرین ۱۲.۷

یک SDR برای مجموعه‌های $\{۱, ۳, ۵\}$، $\{۱, ۴, ۵\}$، $\{۲, ۳, ۴\}$، $\{۱, ۲, ۴\}$ پیدا کنید.

تمرین ۱۳.۷

توضیح دهید چرا مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $\{۲, ۵, ٦\}$، $\{۱, ۴, ۵\}$، $\{۲, ٦\}$، $\{۵, ۸\}$، $\{۱, ۴, ۷\}$، $\{۲, ۵\}$، $\{۵, ٦\}$ دارای یک SDR نیستند.

تمرین ۱۴.۷

۵۲ کارت از یک بسته معمولی، شامل چهار دست از ۱۳ مقدار متفاوت، در یک آرایه ۱۳×۴ مرتب می‌شوند. ثابت کنید می‌توان ۱۳ کارت با مقادیر متفاوت، یک کارت از هر ستون، انتخاب کرد.

تمرین ۱۵.۷

یک مجموعه S حاوی mn عضو به دو طریق مختلف به m مجموعه n عضوی افراز می‌شود: $S = A_۱ \cup \cdots \cup A_m = B_۱ \cup \cdots \cup B_m$. نشان دهید مجموعه‌های B_i را می‌توان تجدید شماره‌گذاری کرد به‌قسمی‌که برای هر $۱ \leq i \leq m$ رابطه $A_i \cap B_i \neq \emptyset$ برقرار باشد. [راهنمایی: مجموعه‌های $S_i = \{j \ : \ A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ را درنظر بگیرید.]

تمرین ۱٦.۷

با درنظر گرفتن چهار MOLS از مرتبه ۵ ارائه‌شده در مثال ۳.۷، یک صفحه آفینی از مرتبه ۵ بسازید.

تمرین ۱۷.۷

یک ماتریس $n \times n$ را ماتریس جایگشتی نامند اگر درایه‌های آن ۰ یا ۱ بوده و در هر سطر و

هر ستون دقیقاً یک ۱ قرار داشته باشد. نشان دهید، اگر M یک ماتریس $n \times n$ روی $\{۰, ۱\}$ باشد و در هر سطر و هر ستون m درایه ۱ وجود داشته باشد آنگاه M را می‌توان به‌صورت مجموع m ماتریس جایگشتی نوشت. مسئله را برای ماتریس M داده‌شده به‌وسیله (۲.۹) در فصل ۹ توضیح دهید.

فصل ۸

برنامه‌ها و ۱—عامل‌سازها

این فصل مربوط می‌شود به ساخت برنامه‌های گروهی برای رقابت‌های ورزشی یا، معادلاً، طرح‌های آزمایشی حاوی متغیرهای دوتایی. این موضوع روابط خوبی با مربع‌های لاتین و ضلع‌رنگی گراف‌ها برقرار کرده و مقدمه‌ای بر طرح‌های بلوکی و تجزیه‌پذیری ارائه می‌کند که بیشتر در فصل آخر مطالعه خواهد شد. از این‌رو این فصل نمایشی از روابط داخلی بین ایده‌های ترکیبیاتی ظاهراً متفاوت است.

۱.۸ روش دایره

فرض کنید یک اتحادیه فوتبال دارای هشت تیم است که هریک از آنها باید یک‌بار با هریک از تیم‌های دیگر بازی کند. بازی‌ها باید برای هفت روز شنبه برنامه‌ریزی شوند، هر شنبه چهار بازی، و هر تیمی دارای یک بازی در هر شنبه. چگونه می‌توان یک برنامه زمانی ارائه داد؟

نیز فرض کنید که یک محقق بیولوژی می‌خواهد هشت نوع معالجه را مقایسه کند، که هربار دو معالجه با هم مقایسه می‌شوند. در طول هفته اول او می‌خواهد چهار مقایسه انجام دهد که در آن تمامی هشت معالجه شرکت دارند؛ سپس در هفته دوم چهار مقایسه دیگر، و غیره. یک برنامه مناسب هفت هفته‌ای برای انجام مقایسه‌ها ارائه دهید.

واضح است که این دو مسئله معادل هستند. در واقع، هر دو مسئله معادل افرازنمودن مجموعه اضلاع K_8 به هفت مجموعه از چهار ضلع متمایز (غیرمجاور)، یعنی هفت تطابق کامل، است. اگر هفته‌ها را با رنگ‌ها جایگزین کنیم، می‌بینیم که هر دو مسئله معادل پیداکردن یک ضلع‌رنگی برای K_8 با استفاده از هفت رنگ هستند.

مثال ۱.۸

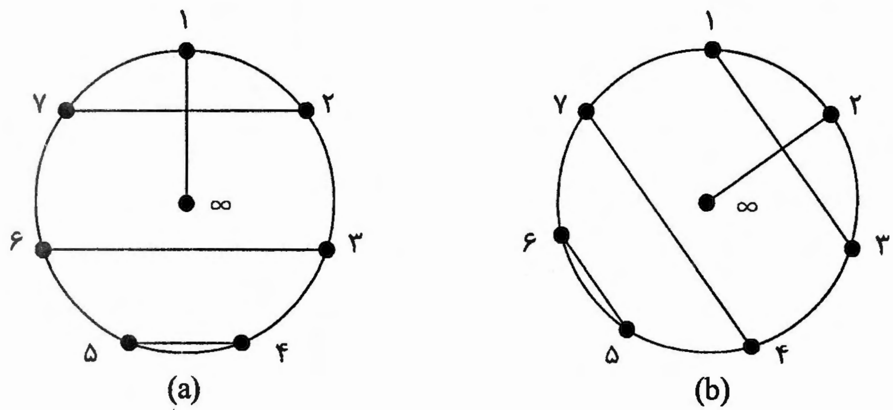
شکل ۴.۵(a) یک ضلع‌رنگی $K_۴$ را با استفاده از سه رنگ ۱، ۲، ۳ نشان می‌دهد. این متناظر است با برنامه گروهی زیر:

دور ۱ :	A v B	C v D
دور ۲ :	A v C	B v D
دور ۳ :	A v D	B v C.

برای $۲n$ تیم، باید یک ضلع‌رنگی از $K_{۲n}$ را با به‌کاربردن $۲n - ۱$ رنگ مشخص کنیم. چگونگی انجام این عمل را قبلاً در قضیه ۱۰.۵ دیده‌ایم. این روش را مجدداً با یک زبان اندکی متفاوت توضیح می‌دهیم.

روش دایره

تیم‌ها را با ∞، ۱، ۲، ...، $۲n - ۱$ برچسب‌گذاری کنید و اعداد ۱، ۲، ...، $۲n - ۱$ را با فواصل مساوی در اطراف یک دایره و ∞ را در مرکز آن قرار دهید. حالت $۲n = ۸$ در شکل ۱.۸ نشان داده شده است. در شکل ۱.۸(a) برنامه اولین روز و در شکل ۱.۸(b) برنامه روز دوم را داریم. با چرخانیدن وترها بازی‌های هریک از $۲n - ۱$ روز مشخص می‌شوند.



شکل ۱.۸

به‌طور کلی، برای تیم‌های ∞، ۱، ...، $۲n - ۱$، در روز i بازی‌های زیر را داریم

$$i \text{ v } \infty,\ (i-۱) \text{ v} (i+۱),\ (i-۲) \text{ v } (i+۲),\ \ldots, (i-(n-۱))\text{v } (i+(n-۱)),$$

که هر عدد، به‌منظور قرار گرفتن در $\{۱,\ldots,۲n-۱\}$، به‌هنگ $۲n - ۱$ کاهش می‌یابد.

مثال ۲.۸

لیست زمانی برای هشت تیم، که به‌روش دایره ساخته شده است، به‌شرح زیر می‌باشد.

روز ۱	۴ v ۵	۳ v ۶	۲ v ۷	۱ v ∞
روز ۲	۵ v ۶	۴ v ۷	۳ v ۱	۲ v ∞
روز ۳	۶ v ۷	۵ v ۱	۴ v ۲	۳ v ∞
روز ۴	۷ v ۱	۶ v ۲	۵ v ۳	۴ v ∞
روز ۵	۱ v ۲	۷ v ۳	۶ v ۴	۵ v ∞
روز ۶	۲ v ۳	۱ v ۴	۷ v ۵	۶ v ∞
روز ۷	۳ v ۴	۲ v ۵	۱ v ۶	۷ v ∞

توجه کنید که در روز i، تیم‌های u و v باهم بازی دارند که $u + v \equiv ۲i \bmod (۲n - ۱)$. نیز توجه کنید که برنامه دوری است به این معنی که هر دور با اضافه‌نمودن ۱، به‌هنگ $۲n - ۱$، به هریک از درایه‌های دور قبلی حاصل می‌شود $(\infty + ۱ = \infty)$.

روش دایره یک افراز از مجموعه اضلاع $K_{۲n}$ به n تطابق کامل (۱–عامل) جدا از هم ارائه می‌دهد. عنوان ۱–عامل یادآور این است که در یک تطابق کامل درجه هر رأس ۱ است. برای مثال، ضلع‌رنگی ارائه‌شده برای $K_۴$ در شکل ۴.۵(a)، یک افراز از اضلاع $K_۴$ به سه ۱–عامل تعریف می‌کند.

تعریف ۱.۸

یک ۱–عامل‌ساز[1] از یک گراف $۲n$ رأسی G عبارت است از افرازی از اضلاع G به ۱–عامل‌ها.

بنابراین روش دایره نتیجه زیر را برقرار می‌سازد.

قضیه ۱.۸

$K_{۲n}$ یک ۱–عامل‌ساز دارد.

توجه کنید که همه گراف‌های با تعداد زوج رأس ۱–عامل‌ساز ندارند. در واقع، باید واضح باشد که شرط لازم برای این‌که یک گراف G ۱–عامل‌ساز داشته باشد این است که G منظم باشد، یعنی رأس‌ها هم‌درجه باشند. اگر درجه هر رأسی r باشد، آنگاه ۱–عامل‌ساز، در صورت وجود، متشکل از r ۱–عامل خواهد بود. از آن‌جاکه یک ۱–عامل‌ساز منجر به یک ضلع‌رنگی گراف با کمترین تعداد رنگ ممکن می‌شود، و به‌عکس، یک ضلع‌رنگی از یک گراف منظم با درجه رأس Δ، با به‌کار بردن Δ رنگ، منجر به یک ۱–عامل‌ساز می‌شود، قضیه زیر را داریم.

[1] 1-factorization

قضیه ۲.۸
یک گراف منظم $2n$ رأسی G یک ۱ —عامل‌ساز دارد اگر و فقط اگر G کلاس ۱ باشد.

پس، بنابر مثال ۱۳.۵، گراف پیترسن ۱ —عامل‌ساز ندارد.

مثال ۳.۸
گراف K_6 چند ۱ —عامل‌ساز دارد؟ فرض کنید K_6 رأس‌های a، ...، f داشته، و فرض کنید که ab، cd، ef یکی از ۱ —عامل‌ها در یک ۱ —عامل‌ساز باشد. در یکی از ۱ —عامل‌های دیگر باید ضلع ac را داشته باشیم. تنها دو امکان وجود دارد:

$$ac,\ be,\ df \quad \text{یا} \quad ac,\ bf,\ de.$$

ولی ۱ —عامل‌ساز شامل

$$\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ ac & be & df \\ ad & & \\ ae & & \\ af & & \end{array}$$

تنها به یک طریق می‌تواند تکمیل شود (بررسی کنید!). مجموعه اضلاع زیر نیز این خاصیت را دارند:

$$\begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ ac & bf & de \\ ad & & \\ ae & & \\ af. & & \end{array}$$

بنابراین تنها دو ۱ —عامل‌ساز حاوی ۱ —عامل ab، cd، ef وجود دارد. مشابهاً، تنها دو ۱ —عامل‌ساز حاوی هر ۱ —عامل دیگری وجود دارد. ولی، تعداد کل ۱ —عامل‌ها برابر است با تعداد حالت‌های ممکن برای افراز یک مجموعه شش‌عضوی به سه زوج، و از این‌رو، بنابر نتیجه ۱.۵، برابر است با $۱۵ = \frac{۶!}{۲^۳.۳!}$. برای هریک از این ۱۵ ۱ —عامل دو روش برای بسط آن به یک ۱ —عامل‌ساز وجود دارد، که جمعاً ۳۰ ۱ —عامل‌ساز می‌شود. ولی، در این روش هر ۱ —عامل‌ساز، بسته به این‌که ابتدا کدام‌یک از پنج ۱ —عامل انتخاب شود، پنج‌بار ظاهر می‌شود. بنابراین تعداد ۱ —عامل‌سازهای متمایز $۶ = \frac{۳۰}{۵}$ است.

پس K_6 شش ۱–عامل‌ساز متفاوت دارد. تعداد ۱–عامل‌سازهای K_{2n}، با افزایش n، خیلی سریع بالا می‌رود. این عدد برای K_8 برابر ۶۲۴۰ و برای K_{10} برابر ۱۲۵۵۵۶۶۷۲۰ است.

برنامه برای $2n + 1$ تیم

اگر قرار باشد یک برنامه جمعی برای $2n + 1$ تیم تنظیم شود، آنگاه، با درنظر گرفتن استراحت برای یکی از تیم‌ها، در هر روز حدّاکثر n بازی انجام می‌شود. یک چنین برنامه‌ای متناظر با ضلع‌رنگی K_{2n+1} با استفاده از $2n + 1$ رنگ است (قضیه 10.5). ساده‌ترین راه برای به‌دست آوردن یک چنین برنامه‌ای به‌کار بردن روش دایره برای $2n + 2$ تیم و سپس حذف تمامی بازی‌های شامل ∞ است.

مثال ۴.۸

فرض کنید می‌خواهیم یک برنامه برای پنج تیم داشته باشیم. برنامه ارائه‌شده توسط روش دایره برای شش تیم را درنظر بگیرید :

∞ v ۱	۵ v ۲	۳ v ۴
∞ v ۲	۱ v ۳	۴ v ۵
∞ v ۳	۲ v ۴	۵ v ۱
∞ v ۴	۳ v ۵	۱ v ۲
∞ v ۵	۴ v ۱	۲ v ۳.

تمامی بازی‌های مربوط به ∞ را حذف کنید تا برنامه زیر حاصل شود:

۵ v ۲	۳ v ۴
۱ v ۳	۴ v ۵
۲ v ۴	۵ v ۱
۳ v ۵	۱ v ۲
۴ v ۱	۲ v ۳.

این در واقع برنامه‌ای است که در سال‌های اخیر برای مسابقات قهرمانی پنج تیم راگبی، شامل انگلستان، فرانسه، ایرلند، اسکاتلند و ویلز، به‌کار رفت. برای مثال در سال پایانی (۱۹۹۹) کلید عبارت بود از:

۱ = انگلستان ، ۲ = فرانسه ، ۳ = اسکاتلند، ۴ = ویلز، ۵ = ایرلند.

در سال ۲۰۰۰ این مسابقات با اضافه‌شدن ایتالیا به یک جام شش‌ملّیتی تبدیل شد. برنامه به‌کار رفته برنامه‌ای است که در بالا برای شش تیم ارائه شد. دور اول آن ∞v۱، ۲v۵، ۴v۳

بود و به بازی‌های مربوط به ∞ جهت‌های مناسب خانگی و خارجی داده شد. برنامه حاصل عبارت بود از

∞ v ۱	۲ v ۵	۴ v ۳
۲ v ∞	۳ v ۱	۵ v ۴
۳ v ∞	۴ v ۲	۱ v ۵
∞ v ۴	۵ v ۳	۲ v ۱
۵ v ∞	۱ v ۴	۳ v ۲

با کلید ∞ = ایتالیا، ۱ = اسکاتلند، ۲ = ویلز، ۳ = ایرلند، ۴ = انگلستان، ۵ = فرانسه. در رقابت پنج‌تیمی، برنامه به‌طور طبیعی به‌شکلی تنظیم شد که هر تیمی بازی‌های خود را متناوباً در خانه و خارج انجام دهد. این وضعیت اگر تعداد تیم‌ها زوج باشد امکان‌پذیر نیست (تمرین ۱۰.۸)؛ در برنامه بالا هر تیمی یک استراحت در اجرای تناوب یادشده دارد.

به‌طور خلاصه، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳.۸

(i) برای هر $n \geq 1$، افرازی از $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ زیرمجموعه‌های دوعضوی از $\{1,\ldots,2n\}$ به $2n-1$ کلاس وجود دارد به‌قسمی‌که هر کلاس شامل n زوج متمایز است.

(ii) برای هر $n \geq 1$، افرازی از $\binom{2n+1}{2} = n(2n+1)$ زیرمجموعه‌های دوعضوی از $\{1,\ldots,2n+1\}$ به $2n+1$ کلاس وجود دارد به‌قسمی‌که هر کلاس متشکل از n زوج متمایز بوده و هر عضوی دقیقاً در یکی از کلاس‌ها غایب است.

یک تعمیم طبیعی برای (i) وجود دارد. آیا می‌توان $\binom{3n}{3} = \frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)$ زیرمجموعه ۳ عضوی از $\{1,\ldots,3n\}$ را در $\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)$ کلاس مرتب کرد به‌قسمی‌که هرکلاس شامل n سه‌تایی متمایز باشد؟ حالت $n = 2$ بدیهی است، زیرا هر سه‌تایی می‌تواند با مکمل خود جفت شود. حالت $n = 3$ به‌وسیله سیلوستر[۱] حل شد. اثبات ظریفی از مسئله به‌شرح زیر است.

مثال ۵.۸

تعداد ۸۴ زیرمجموعه ۳ عضوی از $\{1,\ldots,9\}$ را به ۲۸ گروه، هر گروه شامل سه زیرمجموعه، افراز کنید به‌قسمی‌که اعضای هر گروه افرازی از $\{1,\ldots,9\}$ باشند.

جواب

هفت آرایه مربعی زیر را درنظر بگیرید.

۱۲۳	۳۷۲	۲۳۴	۳۱۸	۵۳۱	۹۱۲	۲۶۱
۴۵۶	۱۵۶	۷۵۶	۴۲۶	۴۸۶	۴۵۳	۴۵۹
۷۸۹	۴۸۹	۱۸۹	۷۵۹	۷۲۹	۷۸۶	۷۸۳

[۱] Sylvester

برای هر آرایه چهار گروه متشکل از ۳ سه‌تایی به‌دست می‌آوریم. این‌ها از روی سطرها، ستون‌ها، قطرهای به‌سمت جلو، و قطرهای به‌سمت عقب ساخته می‌شوند. نتیجه حاصل از اولین آرایه به شرح زیر است:

۱۲۳،	۴۵۶،	۷۸۹	(سطرها)
۱۴۷،	۲۵۸،	۳۶۹	(ستون‌ها)
۱۵۹،	۲۶۷،	۳۴۸	(قطرهای به جلو)
۱۶۸،	۲۴۹،	۳۵۷	(قطرهای به عقب).

به‌روش مشابه از هریک از شش آرایه دیگر، چهار افراز برای $\{۱,\dots,۹\}$ به‌دست می‌آید. جمعاً ۲۸ گروه از ۳ سه‌تایی به‌دست می‌آوریم که در واقع ۸۴ زیرمجموعه سه‌عضوی مطلوب را تشکیل می‌دهند.

قضیه قابل ملاحظه‌ای منتسب به باران‌یای[1] (۱۹۷۳) وجود دارد که ما آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم. اثباتی از آن در [۱۸] ارائه شده است.

قضیه ۴.۸
تمامی $\binom{nk}{k}$ زیرمجموعه k-عضوی از $\{۱,\dots,nk\}$ را می‌توان به $\frac{۱}{n}\binom{nk}{k} = \binom{nk-۱}{k-۱}$ کلاس افراز کرد که هر کلاس متشکل از n زیرمجموعه k عضوی متمایز است.

۲.۸ مسابقات دوقسمتی و ۱-عامل‌سازهای $K_{n,n}$

مثال ۶.۸
دو مدرسه، آکادمی آلفا و دبیرستان بتا، ترتیب یک مسابقه تنیس را می‌دهند که در آن هر مدرسه با ۴ بازیکن معرفی می‌شود. هر بازیکنی با هر بازیکن از تیم مقابل بازی می‌کند، و مسابقات در چهار دور صورت می‌گیرد که در هر دور هر بازیکنی بازی دارد. برای این‌کار یک برنامه ارائه دهید.

جواب
بازیکنان آکادمی آلفا را با $A_۱$، ...، $A_۴$ و بازیکنان دبیرستان بتا را با $B_۱$، ...، $B_۴$ نمایش دهید. نیز دور i ام را با Ri نمایش دهید.

$R۱$	$A_۱ \text{ v } B_۱$,	$A_۲ \text{ v } B_۲$,	$A_۳ \text{ v } B_۳$,	$A_۴ \text{ v } B_۴$
$R۲$	$A_۱ \text{ v } B_۲$,	$A_۲ \text{ v } B_۳$,	$A_۳ \text{ v } B_۴$,	$A_۴ \text{ v } B_۱$
$R۳$	$A_۱ \text{ v } B_۳$,	$A_۲ \text{ v } B_۴$,	$A_۳ \text{ v } B_۱$,	$A_۴ \text{ v } B_۲$
$R۴$	$A_۱ \text{ v } B_۴$,	$A_۲ \text{ v } B_۱$,	$A_۳ \text{ v } B_۲$,	$A_۴ \text{ v } B_۳$.

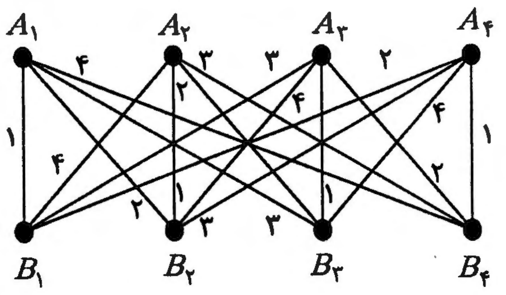
[1] Baranyai

توجه کنید که این برنامه را می‌توان با یک مربع لاتین M نمایش داد: در ستون i ام M اندیس‌های رقبای A_i را به‌ترتیب بنویسید:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}.$$

به‌عکس، هر مربع لاتین روی ۱، ...، ۴ را می‌توان به‌عنوان برنامه یک مسابقه دوقسمتی[۱] تعبیر کرد که این عمل با معکوس نمودن این بحث صورت می‌گیرد. بنابراین مسابقات دوقسمتی (یعنی مسابقات بین دو تیم که در آن هر بازیکن با هر بازیکن از تیم مقابل بازی می‌کند) معادل مربع‌های لاتبن هستند.

همچنین توجه کنید که جواب مثال ٦.٨ را می‌توان برحسب یک ۱-عامل‌ساز گراف $K_{۴,۴}$ بیان کرد. در شکل ۲.۸، با استفاده از ۴ رنگ اضلاع $K_{۴,۴}$ رنگ شده‌اند، که متناظر با ۴ دوری هستند که در آنها بازی‌ها (نمایش داده‌شده با اضلاع) انجام می‌شوند. بنابراین یک ۱-عامل‌ساز از $K_{n,n}$ معادل یک مسابقه دوقسمتی بین دو تیم n نفری است.



شکل ۲.۸

چون برای هر $n \geq ۱$ یک مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد، نتیجه زیر برقرار است.

قضیه ۵.۸

برای هر $n \geq ۱$، گراف $K_{n,n}$ یک ۱-عامل‌ساز دارد.

روش دیگری برای نمایش یک مسابقه دوقسمتی به‌وسیله یک مربع لاتین وجود دارد. مربع لاتین $N = (n_{ij})$ را به‌وسیله

[۱] bipartite tournament

$n_{ij} = k$ اگر A_i با B_j در دور k بازی کند،

تعریف کنید. برای برنامه مثال ۵.۸ داریم:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

مربع N هم‌نهشت مربع M است: $n_{ij} = k \Leftrightarrow m_{ki} = j$. به‌روش مشابه، با انجام جایگشت روی i، j، k هم‌نهشت‌های دیگر M به‌دست می‌آیند. توجه کنید که ترانهاده M، M^T، یک هم‌نهشت M است: $m^T_{ij} = k \Leftrightarrow m_{ji} = k$.

۱—عامل‌ساز دیگری از K_{2n}

وجود یک ۱—عامل‌ساز برای $K_{n,n}$ این امکان را فراهم می‌کند که یک روش کلی دیگر (متفاوت از روش حاصل از روش دایره) برای ساخت یک ۱—عامل‌ساز از K_{2n} ارائه دهیم. این‌را به‌زبان برنامه گروهی توضیح می‌دهیم.

برای $2n$ تیم مفروض، از نام‌گذاری x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_n استفاده کنید. سپس می‌توانیم یک مسابقه دوقسمتی متشکل از n دور ارائه دهیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که، برای هر i، x_i در دور اول با y_i بازی می‌کند.

حال دو حالت درنظر می‌گیریم.

(i) اگر n زوج باشد، می‌توانیم یک رقابت $n - 1$ دوری تشکیل دهیم که در آن x_i ها باهم و y_i ها نیز باهم به‌صورت موازی رقابت کنند. این منجر به $n - 1$ دور بیشتر و بنابراین تکمیل مسابقه مطلوب می‌شود. در این رابطه مثال زیر را داریم.

مثال ۷.۸

x_1 v y_1	x_2 v y_2	x_3 v y_3	x_4 v y_4
x_1 v y_2	x_2 v y_3	x_3 v y_4	x_4 v y_1
x_1 v y_3	x_2 v y_4	x_3 v y_1	x_4 v y_2
x_1 v y_4	x_2 v y_1	x_3 v y_2	x_4 v y_3
x_1 v x_2	x_3 v x_4	y_1 v y_2	y_3 v y_4
x_1 v x_3	x_2 v x_4	y_1 v y_3	y_2 v y_4
x_1 v x_4	x_2 v x_3	y_1 v y_4	y_2 v y_3

(ii) اگر n فرد باشد، این ایده کار نمی‌کند؛ مسابقه دوقسمتی نمی‌تواند به یک برنامه کامل بسط داده شود زیرا بازی‌های مربوط به تعداد فرد x_i ها به n دور اضافی نیاز دارد. ولی می‌توان این ایده را تعدیل کرد. دو تیم جدید ∞_x و ∞_y معرفی کنید و با استفاده از روش دایره

دو برنامه S_x و S_y به‌ترتیب روی $\{\infty_x, x_1, \ldots, x_n\}$ و $\{\infty_y, y_1, \ldots, y_n\}$ به‌دست آورید که در آنها ∞_x و ∞_y در دور i ام با x_i و y_i بازی می‌کنند. برای دور i ام برنامه مطلوب، بازی‌های دور i ام S_x و S_y را انتخاب کنید، ولی دو بازی $\infty_x v x_i$ و $\infty_y v y_i$ را با $x_i v y_i$ جایگزین کنید. n دور حاصل به‌همراه تمامی دورهای، به‌جز دور اول، مسابقه دوقسمتی، برنامه مطلوب را ارائه می‌کنند.

مثال ۸.۸

یک برنامه برای $n = 3$ می‌سازیم. S_x برابر است با

$$\begin{array}{ll} \infty_x \text{ v } x_1, & x_2 \text{ v } x_3 \\ \infty_x \text{ v } x_2, & x_1 \text{ v } x_3 \\ \infty_x \text{ v } x_3, & x_1 \text{ v } , x_2 \end{array}$$

و یک مسابقه دوقسمتی به‌شکل زیر است

$$\begin{array}{lll} x_1 \text{ v } y_1, & x_2 \text{ v } y_2, & x_3 \text{ v } y_3 \\ x_1 \text{ v } y_2, & x_2 \text{ v } y_3, & x_3 \text{ v } y_1 \\ x_1 \text{ v } y_3, & x_2 \text{ v } y_1, & x_3 \text{ v } y_2. \end{array}$$

برنامه نهایی چنین است:

$$\begin{array}{lll} x_1 \text{ v } y_1, & x_2 \text{ v } x_3, & y_2 \text{ v } y_3 \\ x_2 \text{ v } y_2, & x_1 \text{ v } x_3, & y_1 \text{ v } y_3 \\ x_3 \text{ v } y_3, & x_1 \text{ v } x_2, & y_1 \text{ v } y_2 \\ x_1 \text{ v } y_2, & x_2 \text{ v } y_3, & x_3 \text{ v } y_1 \\ x_1 \text{ v } y_3, & x_2 \text{ v } y_1, & x_3 \text{ v } y_2. \end{array}$$

۳.۸ مسابقات حاصل از مربع‌های لاتین متعامد

توازن میدان

حال فرض کنید که، در مسابقه تنیس مثال ۶.۸، چهار میدان وجود دارد که از کیفیت متفاوتی برخوردار هستند و هدف این است که نه‌تنها هر A_i با هر B_i یک‌بار بازی کند بلکه هر بازیکن یک‌بار در هریک از چهار میدان بازی داشته باشد.

یک راه‌حل برای این مسئله درنظرگرفتن الحاق دو MOLS از مرتبه ۴ است، مثلاً

$$\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \\ ۲۴ & ۱۳ & ۴۲ & ۳۱ \\ ۳۲ & ۴۱ & ۱۴ & ۲۳ \\ ۴۳ & ۳۴ & ۲۱ & ۱۲ \end{bmatrix}.$$

سطرها و ستون‌ها را به‌ترتیب متناظر با دورها و میدان‌ها درنظر بگیرید. خاصیت لاتین تضمین می‌کند که هر بازیکن یک‌بار در هر دور و یک‌بار در هر میدان بازی کند؛ خاصیت تعامد تضمین می‌کند که هر A_i با هر B_j بازی کند. بنابراین جواب داده‌شده در جدول ۱.۸ را به‌دست می‌آوریم که در آن Ci و Ri به‌ترتیب معرف میدان i و دور i می‌باشند.

زوج‌های مخلوط

کاربرد دیگری از مربع‌های لاتین در ساخت مسابقات زوج‌های مخلوط[۱] است. فرض کنید آکادمی آلفا و دبیرستان بتا تصمیم به بازی زوج‌های مخلوط دارند: هر مدرسه چهار پسر و چهار دختر معرفی‌می‌کنند، هر بازیکن در چهار بازی شرکت می‌کنند، با هریک از بازیکنان هم‌مدرسه‌ای خود که از جنس

جدول ۱.۸

	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$
$R1$	$A_1 \text{v} B_1$	$A_2 \text{v} B_2$	$A_3 \text{v} B_3$	$A_4 \text{v} B_4$
$R2$	$A_2 \text{v} B_4$	$A_1 \text{v} B_3$	$A_4 \text{v} B_2$	$A_3 \text{v} B_1$
$R3$	$A_3 \text{v} B_2$	$A_4 \text{v} B_1$	$A_1 \text{v} B_4$	$A_2 \text{v} B_3$
$R4$	$A_4 \text{v} B_3$	$A_3 \text{v} B_4$	$A_2 \text{v} B_1$	$A_1 \text{v} B_2$

مخالف است یک‌بار شریک می‌شود و برای یک‌بار در مقابل هریک از بازیکنان تیم حریف قرار می گیرد. ۱۶ بازی باید در ۴ دور تنظیم شود، هر دور چهار بازی، هر بازیکن درگیر در یک بازی از هر دور.

اجازه دهید پسران آلفا را با B_1، ...، B_4 و پسران بتا را با b_1، ...، b_4 نمایش دهیم؛ مشابهاً دختران آلفا و بتا را به‌ترتیب با G_1، ...، G_4 و g_1، ...، g_4 نمایش می‌دهیم. نیز سه MOLS M_1، M_2، M_3 از مثال ۲.۷ را درنظر بگیرید.

M_1 را معرفی‌کننده شریک‌های پسران آلفا تعبیر می‌کنیم: اگر درایه (i,j) برابر k باشد آنگاه به‌هنگام بازی‌کردن مقابل b_j، B_i با G_k شریک خواهد بود. مشابهاً M_2 شریک‌های پسران بتا را تعیین می‌کند: اگر درایه (i,j) از M_2 برابر l باشد آنگاه b_j و g_l باهم در مقابل B_i بازی می‌کنند. چون M_1 و M_2 مربع‌های لاتین هستند، هیچ تکراری در شرکت رخ نمی‌دهد. چون مربع‌ها متعامد هستند هیچ دختری بیش از یک‌بار مقابل دختر دیگری قرار نمی‌گیرد.

پس از به‌دست آوردن بازی‌های برنامه مطلوب، حال باید بازی‌ها را در چهار دور مرتب کنیم. این با استفاده از M_3 به‌دست می‌آید: اگر درایه (i,j) از M_3 برابر k است، بازی مربوط

[۱] mixed doubles tournaments

به B_i و b_j را در دور k قرار دهید. فرض کنید که این منجر به این شود که دختر G_i در دو بازی از دور k قرار گیرد. در این‌صورت می‌باید دو بازی $B_rG_i \text{ v } b_sg_t$ و $B_uG_i \text{ v } b_xg_y$ در دور k داشته باشیم. ولی در این‌صورت درایه‌های (r,s) و (u,x) از $M_۳$ برابر k و همین درایه‌ها در $M_۱$ برابر i خواهند بود که در تناقض با تعامد $M_۱$ و $M_۳$ است. مشابهاً از تعامد $M_۲$ و $M_۳$ نتیجه می‌شود که هیچ دختر g_i در دو بازی از یک دور شرکت ندارد.

بنابراین، برای مثال، چون درایه‌های (۳,۲) از $M_۱$ و $M_۲$ به‌ترتیب ۴ و ۱ هستند یکی از بازی‌ها $B_۳G_۴ \text{ v } b_۲g_۱$ است. چون درایه (۳,۲) در $M_۳$ برابر ۳ است، این بازی را در دور ۲ قرار می‌دهیم. به این طریق برنامه زیر به‌دست می‌آید که در آن Ri معرف دور i است:

$R۱$	$B_۱G_۱ \text{ v } b_۱g_۱$	$B_۲G_۴ \text{ v } b_۳g_۲$	$B_۳G_۲ \text{ v } b_۴g_۳$	$B_۴G_۳ \text{ v } b_۲g_۴$
$R۲$	$B_۱G_۲ \text{ v } b_۲g_۲$	$B_۲G_۳ \text{ v } b_۴g_۱$	$B_۳G_۱ \text{ v } b_۳g_۴$	$B_۴G_۴ \text{ v } b_۱g_۳$
$R۳$	$B_۱G_۳ \text{ v } b_۳g_۳$	$B_۲G_۲ \text{ v } b_۱g_۴$	$B_۳G_۴ \text{ v } b_۲g_۱$	$B_۴G_۱ \text{ v } b_۴g_۲$
$R۴$	$B_۱G_۴ \text{ v } b_۴g_۴$	$B_۲G_۱ \text{ v } b_۲g_۳$	$B_۳G_۳ \text{ v } b_۱g_۲$	$B_۴G_۲ \text{ v } b_۳g_۱$.

تمرینات

تمرین ۱.۸

با استفاده از روش دایره یک برنامه جمعی برای ۱۰ تیم بسازید. از آن‌جا یک برنامه جمعی برای ۹ تیم به‌دست آورید.

تمرین ۲.۸

با استفاده از روش مثال ۸.۸ یک برنامه جمعی برای ۱۰ تیم بسازید.

تمرین ۳.۸

فرض کنید اولین r دور یک مسابقه دوقسمتی بین دو تیم n نفره ساخته شده است $(r < n)$. آیا همیشه می‌توان این r دور را به یک مسابقه دوقسمتی کامل بسط داد؟

تمرین ۴.۸

یک ۱-عامل، در صورت وجود، برای هریک از گراف‌های زیر پیدا کنید: (a) گراف پیترسن، (b) گراف اتان (شکل ۴.۳)، (c) گراف یک هشت‌وجهی، (d) گراف یک مکعب.

تمرین ۵.۸

اضلاع گراف یک هشت‌وجهی را به دو دور همیلتونی متمایز افراز کنید. نتیجه بگیرید که گراف یک ۱-عامل‌ساز دارد.

تمرین ۶.۸

کدام‌یک از گراف‌های افلاطونی ۱-عامل‌ساز دارند؟

تمرین ۷.۸
ثابت کنید هر گراف همیلتونی که در آن همه رأس‌ها از درجه ۳ هستند ۱—عامل‌ساز دارد.

تمرین ۸.۸
(a) مثال ۶.۸ را برای تیم‌های ۵ نفره اجرا کنید.
(b) برنامه‌ای به‌دست آورید که در آن هر بازیکن یک‌بار در هریک از ۵ میدان بازی کند.

تمرین ۹.۸
(a) یک مسابقه زوج‌های مخلوط بین مدرسه‌های A و B بسازید که در آن در هر تیم ۵ پسر و ۵ دختر شرکت دارند.
(b) فرض کنید ۵ میدان وجود دارد. برنامه‌ای بسازید که در آن هر بازیکن دقیقاً یک‌بار در هر میدان بازی کند.

تمرین ۱۰.۸
در یک برنامه جمعی برای $2n$ تیم، مطلوب این است که هر تیمی حتی‌الامکان به‌صورت تناوبی در خانه و خارج بازی کند. یک تکرار از بازی در خانه (یا خارج) در دو بازی متوالی را یک استراحت[۱] می‌نامند. برای نمونه، در مثال ۲.۸، تیم ۶ بازی‌های $HHAAAAH$ را دارد و بنابراین ۴ استراحت دارد.
(a) نشان دهید هر برنامه‌ای برای $2n$ تیم حدّاکثر ۲ تیم بدون استراحت دارد، و نتیجه بگیرید که جمعاً باید حدّاقل $2n-2$ استراحت وجود داشته باشد.
(b) نشان دهید که یک برنامه با دقیقاً $2n-2$ استراحت را می‌توان ساخت. (در شکل ۱.۸، تیم‌های خانگی را متناوباً در سمت چپ و راست وترها و ∞ را متناوباً در خانه و خارج درنظر بگیرید.)

تمرین ۱۱.۸
فرض کنید یک برنامه جمعی برای $2n$ تیم ساخته شده است ولی محل آنها مشخص نشده است. نشان دهید می‌توان محل بازی‌ها را به‌گونه‌ای اختصاص داد که در هر دور، دقیقاً یکی از دو تیم هریک از بازی‌های دور اول در خانه باشد.

[۱] break

فصل ۹

مقدمه‌ای بر طرح‌ها

ایده یک طرح بلوکی غیرکامل متوازن را معرفی می‌کنیم، و نگاهی به چند خانواده خاص از یک چنین طرح‌هایی خواهیم داشت؛ این خانواده‌های خاص عبارت هستند از صفحات تصویری، صفحات آفینی، سیستم‌های سه‌تایی اشتاینر و طرح‌های هادامارد. رابطه بین صفحات تصویری متناهی و مجموعه‌های کامل از MOLS ثابت می‌شود. همچنین مفیدی سیستم‌های تفاضلی در ساخت طرح‌ها را توضیح خواهیم داد. سرانجام مقدمه‌ای کوتاه درباره چند ایده مربوط به نظریه کدهای تصحیح کننده خطا را ارائه می‌دهیم.

۱.۹ طرح‌های بلوکی غیرکامل متوازن

مثال ۱.۹

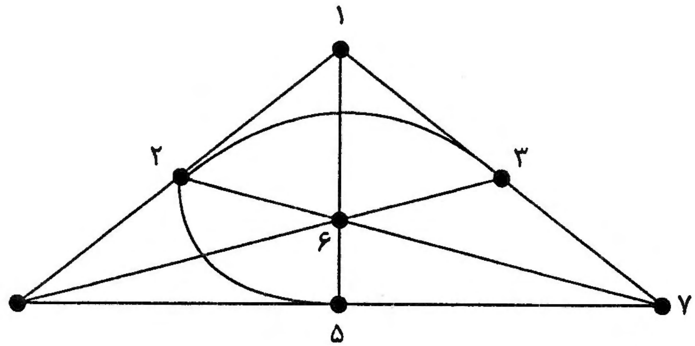
هفت بازیکن گلف می‌خواهند یک هفته تعطیلی را در یک شهر ساحلی که دارای دو زمین گلف باشکوه است سپری کنند. آنها تصمیم می‌گیرند که هر نفر باید در هر روز یک بازی داشته باشد. آنها همچنین تصمیم می‌گیرند که در هر روز به دو گروه سه‌نفره و چهارنفره تقسیم شده و هر گروه در یک زمین بازی‌های خود را انجام دهد. آیا می‌توان این گروه‌ها را به‌شکلی تشکیل داد که تعداد دفعات هم‌گروه شدن هر دو بازیکن در یک گروه سه‌نفره یکسان بوده و وضعیت مشابه‌ای در مورد گروه‌های چهارنفره نیز برقرار باشد؟

جواب

یک جواب به‌شرح زیر است: برای هر روز دو گروه مشخص شده‌اند. به‌سادگی می‌توان دید که هر دو بازیکن یک‌بار در گروه سه‌نفره و دوبار در گروه چهارنفره با هم بازی می‌کنند.

روز ۱	{۳, ۵, ۶, ۷}	{۱, ۲, ۴}
روز ۲	{۴, ۶, ۷, ۱}	{۲, ۳, ۵}
روز ۳	{۵, ۷, ۱, ۲}	{۳, ۴, ۶}
روز ۴	{۶, ۱, ۲, ۳}	{۴, ۵, ۷}
روز ۵	{۷, ۲, ۳, ۴}	{۵, ۶, ۱}
روز ۶	{۱, ۳, ۴, ۵}	{۶, ۷, ۲}
روز ۷	{۲, ۴, ۵, ۶}	{۷, ۱, ۳}

آنچه انجام داده‌ایم استفاده از ترکیبی معروف به صفحه هفت‌نقطه‌ای است که در شکل ۱.۹ نشان داده شده است. در این ترکیب هفت نقطه و هفت خط وجود دارد، که هر خط شامل ۳ نقطه است، و هر دو نقطه‌ای دقیقاً روی یک خط قرار دارند. گروه‌های ۴ عضوی مکمل خط‌های این ترکیب هستند.



شکل ۱.۹ صفحه هفت‌نقطه‌ای

مثال ۲.۹

زیرمجموعه‌هایی از {۱, . . . , ۶} که ذیلاً ارائه شده‌اند دارای این خاصیت هستند که هر زیرمجموعه ۳ عضوی بوده و هر دو عضوی در دو زیرمجموعه ظاهر شده‌اند:

{۱, ۲, ۳}, {۱, ۲, ۴}, {۱, ۳, ۵}, {۱, ۴, ۶}, {۱, ۵, ۶},
{۲, ۳, ۶}, {۲, ۴, ۵}, {۲, ۵, ۶}, {۳, ۴, ۵}, {۳, ۴, ۶}.

این مثال در ۱۹۳۶ در مقاله‌ای توسط ییتز[۱]، آماردان، ارائه شد که در آن مقاله موضوع استفاده از طرح‌های متوازن در ساخت آزمایش‌های کشاورزی مورد بحث قرار گرفت. مثال‌های این‌چنینی زیادی در طول صدها سال قبل توسط ریاضی‌دانان مورد بحث قرار گرفته بود. ولی این مقاله ایده را شفاف کرده و منجر به کار زیادی روی این موضوع توسط آماردانان و ریاضی‌دانان گردید.

[۱] F. Yates

تعریف ۱.۹
یک (v, k, λ) طرح گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی (به‌نام **بلوک**) از یک مجموعه v عضوی S است، که $k < v$، به‌قسمی‌که هر دو عضوی از S با هم دقیقاً در λ بلوک ظاهر می شوند. یک چنین طرحی را یک **طرح بلوکی غیرکامل متوازن**[۱] (BIBD) نیز می‌نامند.

صفت " متوازن " اشاره به وجود λ و " غیرکامل " اشاره به لزوم $k < v$ (به‌قسمی‌که هیچ بلوکی حاوی تمامی اعضا نیست) دارند. قبلاً چند مثال از طرح‌های متوازن را دیده‌ایم.

مثال ۳.۹
(i) برنامه‌های گروهی. بازی‌های یک برنامه جمعی برای $۲n$ تیم تشکیل یک $(۲n, ۲, ۱)$ طرح می‌دهند؛ اگر هر تیمی در یک فصل دوبار با هریک از تیم‌های دیگر بازی کند، بازی‌ها یک $(۲n, ۲, ۲)$ طرح می‌سازند.
(ii) صفحه هفت‌نقطه‌ای (شکل ۱.۹) یک $(۷, ۳, ۱)$ طرح می‌سازد.
(iii) طرح مثال ۲.۹ یک $(۶, ۳, ۲)$ طرح است.
(iv) یک صفحه آفینی از مرتبه n، که در پایان بخش ۴.۷ توصیف شد، یک $(n^۲, n, ۱)$ طرح است.

بالاخص، یک صفحه آفینی مرتبه ۳ یک $(۹, ۳, ۱)$ طرح است. این طرح متشکل است از ۱۲ بلوک به‌اندازه ۳، به‌قسمی‌که هر دو عضوی با هم دقیقاً در یک بلوک ظاهر می‌شوند. طرح‌های بلوکی با $k = ۳$ و $\lambda = ۱$ در بین اولین طرح‌هایی قرار دارند که بررسی می‌شوند.

تعریف ۲.۹
یک $(v, ۳, ۱)$ طرح را یک **سیستم سه‌تایی اشتاینر**[۲] از مرتبه v نامیده و اغلب با $\mathrm{STS}(v)$ نمایش می‌دهند.
سیستم‌های سه‌تایی اشتاینر تنها برای مقادیر خاصی از v وجود دارند. برای اثبات این حکم، ابتدا نتیجه کلی زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۹
فرض کنید که یک (v, k, λ) طرح دارای b بلوک باشد. در این‌صورت هر عضو دقیقاً در r بلوک ظاهر می‌شود، که

$$\lambda(v - ۱) = r(k - ۱), \qquad bk = vr. \tag{۱.۹}$$

اثبات
عضو دلخواه x را انتخاب کرده و فرض کنید در r بلوک قرار داشته باشد. در هریک از r بلوک،

[۱] balanced incomplete block design
[۲] Steiner triple system

x با اعضای دیگر تشکیل $k-۱$ زوج می‌دهد؛ بنابراین جمعاً $r(k-۱)$ زوج حاوی x در این بلوک‌ها وجود دارد. ولی x با هریک از $v-۱$ عضو دیگر λ بار جفت می‌شود، بنابراین تعداد زوج‌های حاوی x برابر $\lambda(v-۱)$ است. پس $r(k-۱)=\lambda(v-۱)$. این نشان می‌دهد که r مستقل از انتخاب x است، زیرا r به‌طور منحصر به‌فرد به‌وسیله v، k و λ تعیین می‌شود.

برای اثبات $bk=vr$، ابتدا توجه کنید که هر بلوک k عضو دارد و بنابراین b بلوک جمعاً (با احتساب تکرار) bk عضو دارند. ولی هر عضو r بار در بلوک‌ها ظاهر می‌شود، بنابراین باید داشته باشیم $bk=vr$. ■

مثال ۴.۹

در یک صفحه آفینی از مرتبه n، یعنی یک $(n^۲,n,۱)$ طرح، داریم $r(n-۱)=۱.(n^۲-۱)$، پس $r=n+۱$. نیز $bn=n^۲r$، بنابراین، مانند بخش ۴.۷ داریم $b=n(n+۱)=n^۲+n$.

مثال ۵.۹

هیچ $(۱۱,۶,۲)$ طرحی وجود ندارد، زیرا لازمه آن $۵r=۲(۱۱-۱)$، یعنی $r=۴$ و $۶b=۴۴$، است که امکان‌پذیر نیست.

قضیه ۲.۹

یک $\mathrm{STS}(v)$ می‌تواند وجود داشته باشد تنها اگر $v\equiv ۱ \bmod ۶$ یا $v\equiv ۳ \bmod ۶$.

اثبات

فرض کنید یک $(v,۳,۱)$ طرح وجود دارد. در این‌صورت $۲r=v-۱$ و $۳b=vr$، به‌قسمی‌که $v=۲r+۱$ (که فرد است) و $b=\frac{۱}{۶}v(v-۱)$. اگر $v=۶u+۵$ آنگاه $b=\frac{۱}{۶}(۶u+۵)(۶u+۴)$ یک عدد صحیح نیست، و بنابراین حکم ثابت شده است. ■

توجه کنید که حالت های $v=۷,۹$ که قبلاً بررسی شدند به این شکل هستند. سیستم‌های اشتاینر به این جهت این‌گونه نام‌گذاری شده‌اند که اشتاینر آنها را در سال ۱۸۵۳، با یک دید هندسی، مورد بحث قرار داد. ولی قبل از آن، در سال ۱۸۴۷، کرک‌من[۱] نشان داده بود که شرط $v\equiv ۱,۳ \bmod ۶$ نه‌تنها لازم است بلکه کافی نیز می‌باشد. بنابراین $\mathrm{STS}(v)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $v\equiv ۱,۳ \bmod ۶$.

مثال ۶.۹

مجموعه‌های $\{۱,۲,۵\}$، $\{۲,۳,۶\}$، …، $\{۹,۱۰,۱۳\}$، $\{۱۰,۱۱,۱\}$، …، $\{۱۳,۱,۴\}$ و مجموعه‌های $\{۱,۳,۹\}$، $\{۲,۴,۱۰\}$، …، $\{۵,۷,۱۳\}$، $\{۶,۸,۱\}$، …، $\{۱۳,۲,۸\}$ یک $\mathrm{STS}(۱۳)$ می‌سازند. توجه کنید که بلوک‌ها از روی $\{۱,۲,۵\}$ و $\{۱,۳,۹\}$ با اضافه‌کردن ۱ به هریک از اعضا و انجام محاسبات به‌هنگ ۱۳ به‌دست می‌آیند. این شبیه به $\mathrm{STS}(۷)$ از شکل ۱.۹ است که از بلوک آغازین $\{۱,۲,۴\}$ و کار به‌هنگ ۷ حاصل می‌شود. این‌که چرا این روش کار می‌کند در بخش ۵.۹ توضیح داده خواهد شد.

[۱] Kirkman

برای پیشرفت بیشتر در طرح‌ها از نمایش آنها به‌وسیله ماتریس‌ها استفاده می‌شود.

تعریف ۳.۹

ماتریس وقوع[۱] یک (v,k,λ) طرح ماتریس $A=(a_{ij})_{b\times v}$ است که $a_{ij}\in\{۰,۱\}$ و $a_{ij}=۱$ اگر و فقط اگر i امین بلوک حاوی j امین عضو باشد.

برای مثال، ماتریس وقوع صفحه هفت‌نقطه‌ای شکل ۱.۹ با بلوک‌های $\{۱,۲,۴\}$، $\{۲,۳,۵\}$، ...، $\{۷,۱,۳\}$ چنین است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}. \qquad (۲.۹)$$

چون اولین بلوک $\{۱,۲,۴\}$ است اولین سطر این ماتریس در موقعیت‌های ۱، ۲، ۴ ناصفر است. توجه کنید که سطرها و ستون‌ها به‌ترتیب متناظر با بلوک‌ها و نقطه‌ها هستند. همچنین توجه کنید که این ماتریس بستگی به ترتیب بلوک‌ها و نقطه‌ها دارد. با این‌حال، ثابت می‌شود که خواص مهم A بستگی به ترتیب انتخاب‌شده خاصی ندارد.

قضیه ۳.۹

اگر A ماتریس وقوع یک (v,k,λ) طرح باشد، آنگاه

$$A^TA=(r-\lambda)I+\lambda J \qquad (۹.۳)$$

که r مقدار داده‌شده در (۱.۹) است و J ماتریس $v\times v$ تماماً ۱ است (یعنی همه درایه‌های آن ۱ است).

اثبات

درایه (i,j) در A^TA برابر ضرب اسکالر سطر i ام A^T و ستون j ام A، یعنی ستون‌های j ام و i ام A، است. بنابراین درایه قطری (i,i) ضرب اسکالر ستون i ام A در خودش است و بنابراین برابر تعداد ۱های موجود در ستون i ام است. ولی این برابر تعداد بلوک‌های شامل عضو i ام است که مقدار آن r است.

اگر $i\neq j$، ضرب اسکالر ستون‌های i ام و j ام برابر تعداد مکان‌هایی است که هر دو ستون مقدار ۱ دارند. این برابر تعداد بلوک‌های حاوی اعضای i ام و j ام است که برابر λ می‌باشد. بنابراین تمامی درایه‌های قطری A^TA برابر r و تمامی درایه‌های غیرقطری برابر λ هستند.■

[۱] incidence matrix

یک نتیجه مهم این حکم این واقعیت است که که در یک (v, k, λ) طرح تعداد بلوک‌ها نمی‌تواند کمتر از تعداد اعضا باشد. این نتیجه اولین بار به‌وسیله فیشر[۱]، آماردان، در ۱۹۴۰ به‌دست آمد.

قضیه ۴.۹

در هر (v, k, λ) طرح رابطه $b \geq v$ برقرار است.

اثبات

با استفاده از قضیه ۳.۹ و خواص اساسی دترمینان یک اثبات ماتریسی ارائه می‌دهیم (یک اثبات ترکیبیاتی در تمرین ۲۱.۹ آمده است).

فرض کنید A ماتریس وقوع این طرح باشد. در این‌صورت با نمایش دادن دترمینان یک ماتریس به‌وسیله $|M|$، داریم

$$\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda - r & r - \lambda & 0 & & 0 \\ \lambda - r & 0 & r - \lambda & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda - r & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{vmatrix}$$

که از کم‌کردن سطر اول از سطرهای دیگر نتیجه می‌شود. حال به ستون اول مجموع ستون‌های دیگر را افزوده، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} |A^T A| &= \begin{vmatrix} r + (v-1)\lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ 0 & r - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \{r + (v-1)\lambda\}(r-\lambda)^{v-1} \\ &= rk(r-\lambda)^{v-1} \end{aligned}$$

زیرا، بنابر (۱.۹)، $r + (v-1)\lambda = r + r(k-1) = rk$. حال $k < v$ و بنابراین، با توجه به (۱.۹)، $r > \lambda$، و از این‌رو $|A^T A| \neq 0$. اکنون $A^T A$ یک ماتریس $v \times v$ است و در نتیجه رتبه آن $\rho(A^T A)$ باید v باشد. ولی $\rho(A^T A) \leq \rho(A)$، که $\rho(A)$ حدّاکثر برابر تعداد سطرهای A است؛ پس $\rho(A^T A) \leq b$. بنابراین $v \leq b$. ■

مثال ۷.۹

می‌توان نشان داد که هیچ $(25, 10, 3)$ طرحی وجود ندارد. اگر چنین طرحی موجود باشد، آنگاه از (۱.۹) نتیجه می‌شود $9r = 72$ و $25r = 10b$، و از آن‌جا $r = 8$ و $b = 20$. ولی از این نتیجه می‌شود $b < v$.

---
[۱] R. A. Fisher

یک (v,k,λ) طرح با خاصیت $b = v$ را یک **طرح متقارن** می‌نامند. توجه کنید که اگر $b = v$، از (۱.۹) نتیجه می‌شود که $r = k$ و

$$\lambda(v-۱) = k(k-۱). \qquad (۴.۹)$$

همچنین (۳.۹) تبدیل می‌شود به

$$A^T A = (k-\lambda)I + \lambda J. \qquad (۵.۹)$$

یک طرح متقارن به این دلیل که ماتریس وقوع آن متقارن است چنین نام‌گذاری نشده است، در واقع معمولاً ماتریس وقوع آن متقارن نیست!، بلکه این نام‌گذاری به‌دلیل تقارن بین بعضی از خواص بلوک‌ها و اعضا است. در یک طرح متقارن، چون $r = k$، داریم:

هر بلوک حاوی k عضو است؛

هر عضو در k بلوک قرار دارد.

همچنین داریم:

هر دو عضوی در λ بلوک قرار دارند.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که:

هر دو بلوکی در λ عضو مشترک هستند.

قضیه ۵.۹

اگر A ماتریس وقوع یک طرح متقارن باشد آنگاه $AA^T = A^T A$.

اثبات

چون $AJ = kJ$ و $JA = rJ$، از $r = k$ نتیجه می‌شود $AJ = JA$. از این‌رو A با J جابه‌جا می‌شود، و بنابراین A با $(k-\lambda)I + \lambda J = A^T A$ جابه‌جا می‌شود. پس

$$AA^T = A\{(k-\lambda)I+\lambda J\}A^{-۱} = \{(k-\lambda)I+\lambda J\}AA^{-۱} = (k-\lambda)I+\lambda J = A^T A. \blacksquare$$

نتیجه ۱.۹

در یک (v,k,λ) طرح متقارن، هر دو بلوکی در λ عضو مشترک هستند.

اثبات

درایه (i,j) از AA^T ضرب سطر i ام A و ستون j ام A^T، یعنی ضرب سطرهای i ام و j ام A، است. ولی این عدد برابر تعداد ستون‌هایی است که در آنها سطرهای i ام و j ام هر دو ۱ هستند، و این تعداد اعضای مشترک در بلوک‌های i و j است. بنابر قضیه ۵.۹ برای $i \neq j$ این عدد برابر λ است.■

یک نتیجه از این خواص تقارن این است که اگر A ماتریس وقوع یک طرح متقارن باشد،

آنگاه A^T نیز ماتریس وقوع یک طرح متقارن خواهد بود که طرح دوگان[۱] نامیده می‌شود. برای مثال، ترانهاده ماتریس وقوع صفحه هفت‌نقطه‌ای شکل ۱.۹ برابر است با

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

که ماتریس وقوع صفحه هفت‌نقطه‌ای با بلوک‌های {۱,۵,۷}، {۱,۲,۶}، {۲,۳,۷}، {۱,۳,۴} ، {۲,۴,۵}، {۳,۵,۶}، {۴,۶,۷} است. (با این‌حال توجه کنید که تجدید شماره‌گذاری ۷ → ۱، ۶ → ۲، ...، ۱ → ۷ نشان می‌دهد که این صفحه دوم در واقع همان صفحه قبلی است!)

طرح‌های مکمل

به‌ازای هر (v, k, λ) طرح مفروض D، می‌توانیم طرح دیگری، که با $\overline{D}$ نمایش داده می‌شود، از روی D به‌دست آوریم که در آن بلوک‌ها مکمل بلوک‌های D هستند. $\overline{D}$ را طرح مکمل D می‌نامند. در مثال ۱.۹، بلوک‌های با اندازه ۴ طرحی را می‌سازند که مکمل صفحه هفت‌نقطه‌ای است.

قضیه ۶.۹

فرض کنید D یک (v, k, λ) طرح روی یک مجموعه S باشد و B_1، ...، B_b بلوک‌های آن باشند. در این‌صورت مجموعه‌های $\overline{B_i} = S \setminus B_i$ یک $(v, v-k, \lambda')$ طرح می‌سازند که $\lambda' = b - 2r + \lambda$،مشروط به این‌که $\lambda' > 0$.

اثبات

چون برای هر i داریم $|B_i| = k$، واضح است که $|\overline{B_i}| = v - k$. باید نشان دهیم که هر دو عضوی از S دقیقاً در λ' بلوک $\overline{B_i}$ قرار دارند. اگر $x, y \in S$، آنگاه $x, y \in \overline{B_i}$ دقیقاً وقتی‌که هیچ‌یک از x و y در B_i نباشند. ولی، بنابر اصل شمول—حذف، تعداد بلوک‌های B_i که شامل هیچ‌یک از این دو عضو نباشند برابر است با

b − (تعداد بلوک‌های شامل x) − (تعداد بلوک‌های شامل y)

\+ (تعداد بلوک‌های شامل x و y)

$= b - 2r + \lambda.$ ■

---

[۱] dual design

مثال ۸.۹
طرح مکمل صفحه هفت‌نقطه‌ای یک (۷, ۴, ۲) طرح است زیرا $\lambda' = b - ۲r + \lambda = ۷ - ۶ + ۱ = ۲$. بلوک‌های این طرح گروه‌های ۴ عضوی در مثال ۱.۹ هستند.

قضیه ۷.۹
مکمل یک طرح متقارن نیز متقارن است.

اثبات
اگر D متقارن باشد، $b = v$، و بنابراین $\overline{D}$ نیز $b = v$ بلوک دارد. ■

۲.۹ طرح‌های تجزیه‌پذیر

مثال ۹.۹ (مسئله دختران مدرسه‌ای کرک‌من)
در ۱۸۵۰، کرک‌من این مسئله را مطرح کرد: "پانزده خانم جوان یک مدرسه به‌مدّت هفت روز در گروه‌های سه‌نفره به گردش می‌روند؛ لازم است که به‌صورت روزانه آنها به‌شکلی مرتب شوند که هیچ دو نفری دوبار باهم نباشند".

اگر یک چنین آرایشی وجود داشته باشد، گروه‌های سه‌نفره دختران یک STS(۱۵) می‌سازند. بنابر اثبات قضیه ۲.۹، هر یک چنین طرحی $b = \frac{1}{6}.15.14 = ۳۵$ بلوک دارد؛ مسئله این است که این بلوک‌ها را به هفت گروه ۵ بلوکی تقسیم کنیم به‌قسمی‌که بلوک‌های هر گروه افرازی از ۱۵ دختر باشند. این شرط شبیه به شرط مطرح‌شده برای بازی‌های یک برنامه جمعی $۲n$ تیمی است، که در آن‌جا بازی‌ها (زوج‌ها) به $۲n - ۱$ گروه n عضوی تقسیم می‌شوند و زوج‌های هر گروه افرازی از $۲n$ تیم را می‌سازند.

تعریف ۴.۹
یک (v, k, λ) طرح روی یک مجموعه S تجزیه‌پذیر[۱] است اگر بتوان بلوک‌ها را در r گروه مرتب کرد به‌قسمی‌که هر گروه یک افراز برای S بسازد. در این‌صورت گروه‌ها را تجزیه[۲] یا کلاس‌های موازی می‌نامند.

(توجه کنید که چرا باید r گروه وجود داشته باشد: هر عضو در r بلوک قرار دارد و باید دقیقاً در یک بلوک از هر گروه ظاهر شود. همچنین توجه کنید که شرط لازم برای یک طرح تجزیه‌پذیر این است که v مضربی از k باشد.)

برای مثال، یک جواب برای مسئله دختران مدرسه‌ای کرک‌من به‌شرح زیر است. در این (۱۵, ۳, ۱) طرح تجزیه‌پذیر بلوک‌ها به هفت گروه پنج‌بلوکی تقسیم می‌شوند، که

[۱] resolvable [۲] resolution

هر گروه افرازی از $\{۱, \ldots, ۱۵\}$ است. گروه‌ها را به‌صورت افقی بخوانید.

۱, ۸, ۱۵	۲, ۴, ۱۰	۳, ۷, ۱۲	۵, ۶, ۹	۱۱, ۱۳, ۱۴
۲, ۹, ۱۵	۳, ۵, ۱۱	۴, ۱, ۱۳	۶, ۷, ۱۰	۱۲, ۱۴, ۸
۳, ۱۰, ۱۵	۴, ۶, ۱۲	۵, ۲, ۱۴	۷, ۱, ۱۱	۱۳, ۸, ۹
۴, ۱۱, ۱۵	۵, ۷, ۱۳	۶, ۳, ۸	۱, ۲, ۱۲	۱۴, ۹, ۱۰
۵, ۱۲, ۱۵	۶, ۱, ۱۴	۷, ۴, ۹	۲, ۳, ۱۳	۸, ۱۰, ۱۱
۶, ۱۳, ۱۵	۷, ۲, ۸	۱, ۵, ۱۰	۳, ۴, ۱۴	۹, ۱۱, ۱۲
۷, ۱۴, ۱۵	۱, ۳, ۹	۲, ۶, ۱۱	۴, ۵, ۸	۱۰, ۱۲, ۱۳.

صفحات آفینی

صفحات آفینی در بخش ۴.۷ ساخته شدند. با داشتن یک مجموعه کامل از MOLS از مرتبه n، یک صفحه آفینی با $n^۲$ نقطه و $n^۲ + n$ خط ساختیم. همچنین دیدیم که خط‌ها را می‌توان به $n + ۱$ گروه از n خط موازی تقسیم نمود: به‌عبارت دیگر، صفحه آفینی حاصل تجزیه‌پذیر بود. حال نشان می‌دهیم که تمامی $(n^۲, n, ۱)$ طرح‌ها، صرف‌نظر از چگونگی به‌دست آمدن آنها، باید تجزیه‌پذیر باشند.

قضیه ۸.۹

هر $(n^۲, n, ۱)$ طرحی تجزیه‌پذیر است.

اثبات

بنابر (۱.۹) داریم $r = n + ۱$ و $b = n^۲ + n$. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $B = \{b_۱, \ldots, b_n\}$ و x به‌ترتیب بلوک دلخواه و عضو دلخواهی باشند به‌قسمی‌که $x \notin B$، آنگاه بلوک منحصربه‌فردی وجود دارد که شامل x است و B را قطع نمی‌کند. (این خاصیت را با این عبارت مقایسه کنید: به‌ازای هر خط l و یک نقطه P در خارج آن، خط منحصربه‌فردی از P می‌گذرد که l را قطع نمی کند (یعنی موازی l است).)

برای هر $b_i \in B$، یک بلوک منحصربه‌فرد B_i شامل x و b_i وجود دارد. واضح است که اگر $i \neq j$ آنگاه $B_i \neq B_j$، زیرا در غیر این‌صورت b_i و b_j در هر دو بلوک B و B_i قرار می‌گیرند که در تناقض با شرط $\lambda = ۱$ است. از این‌رو n بلوک B_i به‌دست می آوریم که شامل x بوده و B را قطع می‌کنند. ولی جمعاً $r = n + ۱$ بلوک حاوی x وجود دارد؛ بنابراین باید دقیقاً یک بلوک شامل x وجود داشته باشد که از B جدا باشد.

سپس توجه می‌کنیم که اگر $C_۱$ و $C_۲$ دو بلوک جدا از B باشند آنگاه $C_۱$ و $C_۲$ جدا از هم هستند. برای این‌که فرض کنید $z \in C_۱ \cap C_۲$؛ در این‌صورت z در بیش از یک بلوک جدا از B قرار دارد، که در تناقض با چیزی است که همین حالا ثابت کرده‌ایم.

بنابراین $n^۲ - n$ عضو خارج B را درنظر بگیرید. برای هر x این‌چنینی، یک بلوک منحصربه‌فرد شامل x و جدا از B وجود دارد. چون هر بلوک n عضو دارد بنابراین

$n-1 = \frac{n^2-n}{n}$ بلوک دوبه‌دو جدا از هم داریم که جدا از B هستند، و بنابراین به‌همراه B یک کلاس تجزیه می‌سازند. پس هر بلوک در یک کلاس تجزیه n بلوکی قرار دارد، و از این‌رو این طرح تجزیه‌پذیر است، و دو بلوک در یک کلاس قرار دارند اگر و فقط اگر جدا از هم باشند. ■

حال از تجزیه‌پذیری برای برگشتن از صفحات آفینی به MOLS استفاده می‌کنیم.

قضیه ۹.۹
یک صفحه آفینی از مرتبه n وجود دارد اگر و فقط اگر یک مجموعه کامل از $n-1$ MOLS از مرتبه n وجود داشته باشد.

اثبات
اثبات کفایت در بخش ۴.۷ ارائه شده است، بنابراین در این‌جا به اثبات لزوم می‌پردازیم. فرض کنید یک $(n^2, n, 1)$ طرح وجود داشته باشد. این طرح لزوماً تجزیه‌پذیر است و $r = n+1$ کلاس تجزیه دارد. دو کلاس این‌چنینی، مثلاً $\{B_1, \ldots, B_n\}$ و $\{C_1, \ldots, C_n\}$، را انتخاب کنید. چون هر نقطه از صفحه دقیقاً در یک B_i و یک C_j قرار می‌گیرد می‌توانیم به آن مختصات منحصربه‌فرد (i, j) را بدهیم.

تعداد $n-1$ کلاس تجزیه دیگر باقی می‌ماند، و برای هر یک از آنها یک مربع لاتین می‌سازیم. برای کلاس تجزیه $\{E_1, \ldots, E_n\}$ یک ماتریس $n \times n$ چون $E = (e_{ij})$ تعریف می‌کنیم که $e_{ij} = k$ اگر و فقط اگر (i, j) در E_k قرار داشته باشد.

ابتدا مربع لاتین بودن E را بررسی می‌کنیم. اگر $e_{ij} = e_{iJ}$ با $j \neq J$، آنگاه (i, j) و (i, J) در هر دو بلوک E_k و B_i قرار می‌گیرند که در تناقض با $\lambda = 1$ است. بنابراین هیچ سطری از E اعضای تکراری ندارد، و بحث مشابه‌ای در رابطه با ستون‌ها نیز برقرار است.

سرانجام نشان می‌دهیم که اگر $\{F_1, \ldots, F_n\}$ کلاس تجزیه دیگری باشد آنگاه E و F متعامد هستند. بنابراین فرض کنید $e_{ij} = e_{IJ} (= k)$ و $f_{ij} = f_{IJ} (= l)$. در این‌صورت (i, j) و (I, J) در هر دو بلوک E_k و F_l قرار دارند که باز هم در تناقض با $\lambda = 1$ است.

بنابراین $n-1$ مربع لاتین دوبه‌دو متعامد به‌دست می‌آوریم. ■

مثال ۱۰.۹
صفحه آفینی ساخته‌شده در مثال ۱۰.۷ را درنظر بگیرید. قرار دهید

$$B_۱ = \{۱, ۲, ۳\}, \quad B_۲ = \{۴, ۵, ۶\}, \quad B_۳ = \{۷, ۸, ۹\},$$
$$C_۱ = \{۱, ۴, ۷\}, \quad C_۲ = \{۲, ۵, ۸\}, \quad C_۳ = \{۳, ۶, ۹\},$$
$$E_۱ = \{۱, ۶, ۸\}, \quad E_۲ = \{۲, ۴, ۹\}, \quad E_۳ = \{۳, ۵, ۷\},$$
$$F_۱ = \{۱, ۵, ۹\}, \quad F_۲ = \{۲, ۶, ۷\}, \quad F_۳ = \{۳, ۴, ۸\}.$$

در این‌صورت، برای مثال، نقطه‌های $(۱,۱)$، $(۲,۱)$ و $(۲,۳)$ به‌ترتیب ۱، ۲، و ٦ هستند. چون $۱ \in E_۱$ پس $e_{۱۱} = ۱$؛ چون $۲ \in E_۲$، $e_{۱۲} = ۲$؛ و $e_{۲۳} = ۱$ زیرا $٦ \in E_۱$. به این روش E و F را به‌دست می‌آوریم

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}.$$

۳.۹ صفحات تصویری متناهی

در جستجو برای طرح‌های متقارن طبیعی است که به‌دنبال طرح‌های با خاصیت $\lambda = ۱$ باشیم. صفحه هفت‌نقطه‌ای یک چنین طرحی است. در حالت کلّی، اگر یک طرح با خواص $k = n + ۱$ و $\lambda = ۱$ داشته باشیم آنگاه از $\lambda(v - ۱) = k(k - ۱)$ نتیجه می‌شود $v - ۱ = n^۲ + n$، و بنابراین طرح مفروض یک $(n^۲ + n + ۱, n + ۱, ۱)$ طرح است. به‌عکس، بنابر (۱.۹)، هر $(n^۲ + n + ۱, n + ۱, ۱)$ طرحی باید در شرایط $n^۲ + n = rn$ و $b(n + ۱) = (n^۲ + n + ۱)r$ صدق کند و بنابراین $k = n + ۱ = r$ و $b = n^۲ + n + ۱ = v$؛ پس این یک طرح متقارن است.

تعریف ۵.۹
برای هر $n \geq ۲$، یک صفحه تصویری متناهی[۱] (FPP) از مرتبه n عبارت است از یک $(n^۲ + n + ۱, n + ۱, ۱)$ طرح.

بنابراین در یک FPP تعداد اعضا و بلوک‌ها یکسان هستند. آنها از نقاط و خط‌های یک هندسه پیروی می‌کنند: هر دو بلوک (خط) در یک عضو (نقطه) مشترک هستند، و هر دو نقطه روی یک خط منحصربه‌فرد قرار دارند. صفحه هفت‌نقطه‌ای یک FPP از مرتبه ۲ است.

مثال ۱۱.۹
بلوک‌های

$$\{۱,۲,۴,۱۰\}, \{۲,۳,۵,۱۱\}, \{۳,۴,٦,۱۲\}, \{۴,۵,۷,۱۳\}, \{۵,٦,۸,۱\}, \ldots,$$
$$\{۱۰,۱۱,۱۳,٦\}, \{۱۱,۱۲,۱,۷\}, \{۱۲,۱۳,۲,۸\}, \{۱۳,۱,۳,۹\}$$

خط‌های یک FPP از مرتبه ۳ هستند، یعنی بلوک‌ها یک $(۱۳, ۴, ۱)$ طرح می‌سازند. به ماهیت دوری (به‌هنگ ۱۳) طرح توجه کنید. اکنون مشخص شده است که یک چنین FPP دوری (به‌هنگ $p^۲ + p + ۱$) از مرتبه p برای هر عدد اول p وجود دارد.

[۱] finite projective plane

حال رابطه بنیادی بین صفحات آفینی و تصویری را نشان می‌دهیم. یک طراح دو خط موازی را موازی رسم نمی‌کند؛ دو طرف یک جاده همگام با محو شدن جاده در فاصله به یکدیگر می‌رسند. هنرمند از هندسه تصویری برای نمایش هندسه اقلیدسی (آفینی) استفاده می‌کند. بنابراین اجازه دهید از این ایده پیروی کرده، و، برای هریک از $n + ۱$ کلاس تجزیه یک صفحه آفینی از مرتبه n، یک "نقطه در بینهایت" به هر بلوک آن کلاس اضافه کنیم. بنابراین، برای هر $i \leq n + ۱$، یک نقطه جدید ∞_i به هر بلوک کلاس i ام اضافه می‌کنیم. اکنون اندازه بلوک‌ها $n + ۱$ است، تعداد $n^۲ + n + ۱$ نقطه وجود دارد، و واضح است که خاصیت قرار داشتن هر دو نقطه‌ای روی یک خط یکتا محفوظ می‌ماند، به‌جز این‌که هیچ دو نقطه جدید ∞_i در یک خط قرار نمی‌گیرند. بنابراین یک خط جدید $\{\infty_۱, \ldots, \infty_{n+۱}\}$ تعریف کرده و یک $(n^۲ + n + ۱, n + ۱, ۱)$ طرح، یعنی یک FPP از مرتبه n به‌دست می‌آوریم. این خط جدید را اغلب خط در بینهایت می‌نامند.

مثال ۱۲.۹

صفحه آفینی از مرتبه ۳ مثال ۱۰.۹ را انتخاب کنید، و چهار "نقطه در بینهایت" معرفی کنید که ما آنها را با ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳ نمایش می‌دهیم. یک FPP از مرتبه ۳ با خط‌های زیر به‌دست می‌آوریم :

$$\{۷, ۸, ۹, ۱۰\} \quad \{۴, ۵, ۶, ۱۰\} \quad \{۱, ۲, ۳, ۱۰\}$$
$$\{۳, ۶, ۹, ۱۱\} \quad \{۲, ۵, ۸, ۱۱\} \quad \{۱, ۴, ۷, ۱۱\}$$
$$\{۳, ۵, ۷, ۱۲\} \quad \{۲, ۴, ۹, ۱۲\} \quad \{۱, ۶, ۸, ۱۲\}$$
$$\{۳, ۴, ۸, ۱۳\} \quad \{۲, ۶, ۷, ۱۳\} \quad \{۱, ۵, ۹, ۱۳\}$$
$$\{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}.$$

بنابراین نیمی از قضیه بعد را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۱۰.۹

یک FPP از مرتبه n وجود دارد اگر و فقط اگر یک صفحه آفینی از مرتبه n وجود داشته باشد.

اثبات

قسمت کفایت در بالا بررسی شد. بنابراین فرض کنید یک FPP از مرتبه n موجود باشد. یک خط دلخواه $l = \{p_۱, \ldots, p_{n+۱}\}$ از صفحه را درنظر بگیرید. (می‌خواهیم با این خط به‌گونه‌ای عمل کنیم که انگار خط در بینهایت است.) چون l هر خط دیگری را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند، هر خط دیگری دقیقاً یکی از نقاط p_i را شامل است. بنابراین اگر l را کنار گذاشته و نقاط آن‌را هر جا که ظاهر می‌شوند حذف کنیم، به $n^۲ + n$ خط می‌رسیم که هریک دارای n نقطه است. هر دو نقطه‌ای دقیقاً در یک خط قرار دارند، که در واقع باقیمانده خطی از FPP است که دو

نقطه مورد نظر در آن قرار داشتند. بنابراین یک صفحه آفینی از مرتبه n داریم که در آن، به‌ازای هر i، باقیمانده‌های خطوط حاوی p_i در FPP یک کلاس تجزیه می‌سازند. ■

از ترکیب قضیه‌های ۹.۹ و ۱۰.۹، نتیجه قابل توجه زیر حاصل می‌شود.
قضیه ۱۱.۹
گزاره‌های زیر معادل هستند.
(i) یک مجموعه کامل از $n-1$ MOLS از مرتبه n وجود دارد.
(ii) یک صفحه آفینی از مرتبه n وجود دارد.
(iii) یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه n وجود دارد.

نظر به قضیه ۲.۷ و توضیح متعاقب آن، FPP های از مرتبه توان عدد اول وجود دارند. حدس زده می‌شود که اگر n توان اول نباشد آنگاه FPP از مرتبه n وجود نداشته باشد. این برای حالت‌های $n = 6$ و $n = 10$ ثابت شده است، ولی حالت $n = 12$ هنوز باز است.

۴.۹ ماتریس‌های هادامارد و طرح‌ها

این بخش را با معرفی خانواده‌ای از ماتریس‌ها شروع می‌کنیم که همه درایه‌های آنها ± 1 هستند. از این ماتریس‌ها خانواده مهمی از طرح‌ها به‌دست خواهد آمد.

دو بردار را متعامد نامند هر گاه ضرب اسکالر آنها صفر باشد. برای مثال هر دو سطری، نیز هر دو ستونی، از ماتریس زیر متعامد هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

تعریف ۶.۹
یک $(+1, -1)$ ماتریس، ماتریسی است که همه درایه‌های آن ± 1 هستند. یک $(+1, -1)$ ماتریس $n \times n$ H یک ماتریس هادامارد از مرتبه n است اگر $H^T H = H H^T = nI$.

توجه کنید که $HH^T = nI$ اساساً می‌گوید که H معکوس‌پذیر است و $\frac{1}{n}H^T$ معکوس آن است. چون یک ماتریس با معکوس خود جابه‌جا می‌شود هریک از دو خاصیت $HH^T = nI$ و $H^T H = nI$ از دیگری نتیجه می‌شود. نیز توجه کنید که $HH^T = nI$ دقیقاً این خاصیت است که هر دو سطری از H متعامدند و مشابهاً $H^T H = nI$ معادل با این است که ستون‌های H متعامد هستند. نام‌گذاری ماتریس‌های هادامارد به‌افتخار هادامارد[1] است که در ۱۸۹۳

[1] Jacques Hadamard

نشان داد که دترمینان هر ماتریس حقیقی $n \times n$ ‏$H = (h_{ij})$، با خاصیت $|h_{ij}| \leq ۱$، حداکثر $n^{n/۲}$ است، و تساوی تنها در حالت $HH^T = nI$ برقرار است. ولی از آن زمان به بعد ماتریس‌های هادامارد در بسیاری از زمینه‌های ترکیبیات مطرح شده و در ارسال عکس از مریخ به زمین از آنها استفاده شده است. این در بخش پایانی توضیح داده خواهد شد.

روش سرراستی برای ساخت ماتریس‌های هادامارد از مرتبه ۲^m وجود دارد.

فرض کنید

$$H_۰ = [۱], \quad H_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

و، برای هر $m \geq ۱$، H_m را با استقرا به‌شکل زیر تعریف کنید:

$$H_m = \begin{bmatrix} H_{m-۱} & H_{m-۱} \\ H_{m-۱} & -H_{m-۱} \end{bmatrix}.$$

در این‌صورت به‌سادگی می‌توان دید که H_m یک ماتریس هادامارد از مرتبه ۲^m است؛ ضرب اسکالر دو سطر دلخواه آن را درنظر بگیرید. بنابراین، برای مثال، $H_۲$ ماتریس (۶.۹) است.

ولی آیا برای دیگر مقادیر n یک ماتریس هادامارد از مرتبه n وجود دارد؟

نشان خواهیم داد که اگر $n > ۲$ آنگاه n باید مضرب ۴ باشد. قبل از پرداختن به اثبات این موضوع، توجه کنید که اگر سطر یا ستونی از یک ماتریس هادامارد در -۱ ضرب شود ماتریس حاصل نیز یک ماتریس هادامارد است؛ تعامد سطرها و ستون‌ها محفوظ می‌ماند. بنابراین می‌توان همیشه یک ماتریس هادامارد را به‌فرم نرمال تبدیل کرد، یعنی این‌که تمامی درایه‌های سطر اول و ستون اول $+۱$ هستند.

قضیه ۱۲.۹

اگر یک ماتریس هادامارد از مرتبه $n > ۲$ موجود باشد، آنگاه n باید مضربی از ۴ باشد.

اثبات

فرض کنید H به‌فرم نرمال است، بنابراین درایه‌های سطر اول برابر $+۱$ هستند. چون سطرها متعامد هستند، سطر دوم باید تعداد یکسانی از $+۱$ و -۱ داشته باشد؛ بنابراین تعداد $\frac{n}{۲}$ ‏$+۱$ و $\frac{n}{۲}$ ‏-۱ وجود دارد، و از این‌رو n زوج است. با تجدید ترتیب در ستون‌های H، می‌توان فرض کرد که دو سطر اول H به‌شکل زیر هستند

$$\begin{matrix} ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & ۱ & ۱ & \ldots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \ldots & ۱ & -۱ & -۱ & \ldots & -۱. \end{matrix}$$

اگر $n > ۲$، سطر سوم H را درنظر بگیرید. فرض کنید تعداد $+۱$ های موجود در نیمه اول و نیمه دوم این سطر به‌ترتیب h و k باشند. در این‌صورت $\frac{n}{۲} - h$ درایه از نیمه اول و $\frac{n}{۲} - k$

درایه از نیمه دوم آن برابر -1 هستند. چون سطرهای اول و سوم متعامد هستند،

$$h-(\frac{n}{2}-h)+k-(\frac{n}{2}-k)=0,$$

یعنی $h+k=\frac{n}{2}$. نیز، چون سطرهای دوم و سوم متعامد هستند،

$$h-(\frac{n}{2}-h)-k+(\frac{n}{2}-k)=0,$$

یعنی $h=k$. پس $h=k=\frac{n}{4}$، و n باید مضربی از ۴ باشد. ■

چون بحث مشابه‌ای را می‌توان روی ستون‌ها به‌کار برد، داریم:

نتیجه ۲.۹

در هر ماتریس هادامارد نرمال از مرتبه $4m$، هر دو ستونی، غیر از ستون اول، دقیقاً در m موقعیت هر دو برابر $+1$ هستند.

طرح‌های هادامارد

اگر یک ماتریس هادامارد از مرتبه $4m$ وجود داشته باشد، می‌توانیم یک طرح از آن به‌دست آوریم. ایده اصلی این است که یک ماتریس نرمال را انتخاب کرده، پس از حذف سطر و ستون اول آن، در ماتریس حاصل -1 را به 0 تبدیل کرده و آن‌را به‌عنوان ماتریس وقوع یک طرح درنظر بگیریم.

قضیه ۱۳.۹

اگر یک ماتریس هادامارد از مرتبه $4m$ موجود باشد، آنگاه یک $(4m-1, 2m-1, m-1)$ طرح وجود دارد.

اثبات

فرض کنید H یک ماتریس هادامارد نرمال از مرتبه $4m$ باشد. همچون در اثبات قضیه ۱۲.۹، هر سطر و ستون H، به‌استثنای اولین، باید دارای $2m$ درایه $+1$ و $2m$ درایه -1 باشد. سطر و ستون اول H را حذف کرده و در ماتریس حاصل -1 را تبدیل به 0 کنید. به این ترتیب یک $(0,1)$ ماتریس $(4m-1)\times(4m-1)$ A به‌دست می‌آید که در آن هر سطر و هر ستون دارای $2m$ درایه 0 و $2m-1$ درایه 1 است.

A را به‌عنوان ماتریس وقوع یک طرح (لزوماً متقارن) تلقی می‌کنیم. این طرح دارای $4m-1$ عضو و $4m-1$ بلوک است؛ هر بلوک دارای $2m-1$ عضو است و هر عضو در $2m-1$ بلوک قرار دارد. حال دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید. ستون‌های A که متناظر با این دو عضو هستند دارای (بنابر نتیجه ۲.۹) $m-1$ درایه مشترک ۱ می‌باشند؛ یعنی این‌که این دو عضو با هم دقیقاً در $m-1$ بلوک قرار دارند. بنابراین طرح مفروض متوازن است و $\lambda=m-1$. ■

تعریف ۷.۹
یک $(4m-1, 2m-1, m-1)$ طرح را **طرح هادامارد** می‌نامند.

مثال ۱۳.۹
با استفاده از روش دوبرابر کردن و (۶.۹)، یک ماتریس هادامارد نرمال از مرتبه ۸ به‌دست می‌آید. با حذف سطر و ستون اول آن، و تبدیل ۱− به ۰، ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (7.9)$$

این ماتریس وقوع یک $(7,3,1)$ طرح، یعنی یک FPP از مرتبه ۲، است که بلوک‌های آن عبارت هستند از

$$\{2,4,6\}, \{1,4,5\}, \{3,4,7\}, \{1,2,3\}, \{2,5,7\}, \{1,6,7\}, \{3,5,6\}.$$

در واقع، به‌صورت بنیادی، تنها یک FPP از مرتبه ۲ وجود دارد. صفحه‌ای را که همین حالا پیدا کردیم می‌توان تبدیل به صفحه شکل ۱.۹ کرد. برای این منظور اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ به‌ترتیب با ۱، ۶، ۵، ۴، ۲، ۳، ۷ جایگزین می‌شوند.

روش ساخت ارائه شده در قضیه ۱۳.۹ را می‌توان معکوس نمود: در یک طرح هادامارد مفروض، درایه‌های ۰ در ماتریس وقوع را تبدیل به ۱− کرده، سپس یک سطر اول و ستون اول، با درایه‌های ۱+، به آن می‌افزاییم. ماتریس حاصل هادامارد است. بنابراین حکم زیر را داریم.

قضیه ۱۴.۹
یک ماتریس هادامارد از مرتبه $4m$ وجود دارد اگر و فقط اگر یک $(4m-1, 2m-1, m-1)$ طرح موجود باشد.

این نتیجه ما را قادر به ساخت ماتریس‌های هادامارد از مرتبه $4m$ می‌سازد مشروط به این‌که بتوانیم طرح متناظر با آن را بسازیم. روش‌های بسیاری برای ساخت ماتریس‌های هادامارد پیدا شده است، ولی ما از میان این روش‌ها، ساده‌ترین را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید p عدد دلخواه اولی به‌فرم $p = 4m-1$ باشد، و توان دوم اعداد ۱، ۲، ...، $\frac{1}{2}(p-1)$ را به هنگ p محاسبه کنید. برای مثال، اگر $p = 7$، توان‌های دوم ۱، ۲، ۳ به هنگ ۷ عبارت هستند از ۱، ۴، ۲. بنابراین مجموعه $\{1,2,4\}$ را به‌دست می‌آوریم

که ملاحظه می‌کنیم دقیقاً مجموعه به‌کار رفته برای تولید صفحه هفت‌نقطه‌ای مثال ۱.۹ است. در حالت کلی، با درنظر گرفتن عدد دلخواه $p = ۴m - ۱$، مجموعه مربع‌های اعداد ۱، ۲، ...، $\frac{۱}{۲}(p - ۱)$ به‌عنوان بلوک آغازین برای یک طرح دوری هادامارد $(۴m - ۱, ۲m - ۱, m - ۱)$ عمل می‌کند. درستی این بحث در بخش بعد (قضیه ۱۶.۹) ثابت خواهد شد. برای جزئیات بیشتر در رابطه با توان دوم به‌هنگ p به بخش ضمیمه مراجعه کنید.

مثال ۱۴.۹

قرار دهید $p = ۱۱$. مربع‌های ۱، ۲، ...، ۵ به‌هنگ ۱۱ عبارت‌اند از ۱، ۴، ۹، ۵، ۳. از این‌رو مجموعه $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ را به‌عنوان بلوک آغازین درنظر گرفته و با اضافه‌نمودن ۱ (به‌هنگ ۱۱) به هریک از اعضای بلوک، متوالیاً بلوک‌های بعدی را به‌دست آورید. $(۱۱, ۵, ۲)$ طرح حاصل ماتریس وقوع زیر را دارد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۸.۹)$$

از این ماتریس وقوع، ماتریس هادامارد مرتبه ۱۲ زیر به‌دست می‌آید که در آن + و − به‌ترتیب معرف ۱+ و ۱− هستند. حدس زده می شود که برای هر عدد صحیح مثبت n، یک ماتریس هادامارد از مرتبه $۴n$ وجود داشته باشد اگرچه این گمان با اثبات فاصله زیادی دارد.

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & - \\ + & - & + & - & + & + & + & - & - & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & + & - & - & - & + \\ + & + & - & - & + & - & + & + & + & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + & + & + & - & - \\ + & - & - & + & - & - & + & - & + & + & + & - \\ + & - & - & - & + & - & - & + & - & + & + & + \\ + & + & - & - & - & + & - & - & + & - & + & + \\ + & + & + & - & - & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & + & - & - & + & - \\ + & - & + & + & + & - & - & - & + & - & - & + \end{bmatrix}$$

۵.۹ روش‌های تفاضلی

صفحه هفت‌نقطه‌ای قابل ساخت با اختیار نمودن $\{۱, ۲, ۴\}$، و متوالیاً اضافه‌نمودن ۱ (به‌هنگ ۷) به هریک از اعضای بلوک حاضر، برای به‌دست آوردن $\{۲, ۳, ۵\}$، $\{۳, ۴, ٦\}$، و غیره، است. چه چیز خاصی در انتخاب ۱، ۲، ۴ وجود دارد که مؤثر بودن این روش را امکان‌پذیر می‌سازد؟ به‌طور مشابه، بلوک $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ در مثال ۱۴.۹ برای ساخت یک طرح هادامارد به‌کار رفت؛ چه چیز خاصی در رابطه با این انتخاب وجود دارد؟

تفاضل‌های بین اعضای $\{۱, ۲, ۴\}$ به‌هنگ ۷ را درنظر بگیرید. این تفاضل‌ها عبارت‌اند از $\pm(۱ - ۲)$، $\pm(۲ - ۴)$، $\pm(۱ - ۴)$، یعنی ۱±، ۲±، ۳±، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ٦؛ و این یعنی تمام اعداد ناصفر (به‌هنگ ۷)، هریک برای یک‌بار. مشابهاً تفاضل‌های بین اعضای $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ را به‌هنگ ۱۱ درنظر بگیرید. این اعداد عبارت‌اند از ۲±، ۳±، ۴±، ۸±، ۱±، ۲±، ٦±، ۱±، ۵±، ۴±، یعنی ۱±، ۲±، ۳±، ۴±، ۵± (هر یک دوبار)؛ یعنی همه اعداد ناصفر (به‌هنگ ۱۱) که هر یک دوبار رخ می‌دهد. توجه کنید که اولی منجر به یک طرح با $\lambda = ۱$، و دومی منجر به یک طرح با $\lambda = ۲$ می‌شود.

تعریف ۸.۹

(i) فرض کنید $\mathbb{Z}_v$ معرف اعداد صحیح به‌هنگ v باشد. یک زیرمجموعه k عضوی $D = \{d_۱, \ldots, d_k\}$ از $\mathbb{Z}_v$ یک (v, k, λ) مجموعه تفاضلی دوری نامیده می‌شود هر گاه $\lambda > ۰$، $۲ \leq k < v$، و هر عضو ناصفر $d \in \mathbb{Z}_v$ را بتوان دقیقاً به λ طریق به‌صورت $d = d_i - d_j$ بیان کرد.

(ii) اگر D یک مجموعه تفاضلی باشد، مجموعه $D + a = \{d_۱ + a, \ldots, d_k + a\}$ یک انتقال D نامیده می‌شود.

بنابراین صفحه هفت‌نقطه‌ای مثال ۱.۹ متشکل است از انتقال‌های $\{۱, ۲, ۴\}$. این حالت خاصی از نتیجه کلی زیر است.

قضیه ۱۵.۹

اگر $D = \{d_۱, \ldots, d_k\}$ یک (v, k, λ) مجموعه تفاضلی دوری باشد، آنگاه انتقال‌های $D + i$، $۰ \leq i \leq v - ۱$، بلوک‌های یک (v, k, λ) طرح متقارن هستند.

اثبات

واضح است که v انتقال وجود دارد و اندازه هریک از آنها k است. بنابراین ما تنها باید خاصیت توازن را بررسی کنیم. دو عضو x و y در انتقال یکسان $D + a$ قرار دارند اگر و فقط اگر به‌ازای اعدادی چون $i \neq j$ داشته باشیم $x = a + d_i$ و $y = a + d_j$، یعنی $x - a = d_i$ و $y - a = d_j$، یعنی $(x - a, y - a)$ یکی از λ زوجی است که $x - y = d_i - d_j$. ■

حال می‌توانیم ببینیم چرا بلوک آغازکننده $\{۱, ۲, ۴, ۱۰\}$ در مثال ۱۲.۹ یک FPP از مرتبه ۳ تولید می‌کند. تفاضل‌ها عبارت هستند از ± ۱، ± ۳، ± ۹، ± ۲، ± ۸، ± ۶، یعنی همه اعداد ناصفر به هنگ ۱۳، هرکدام یک‌بار؛ و بنابراین $\{۱, ۲, ۴, ۱۰\}$ یک $(۱۳, ۴, ۱)$ مجموعه تفاضلی است.

مثال ۱۵.۹

(i) $\{۱, ۲, ۵, ۱۵, ۱۷\}$ یک $(۲۱, ۵, ۱)$ مجموعه تفاضلی در $\mathbb{Z}_{۲۱}$ است، و انتقال‌های آن یک FPP از مرتبه ۴ می‌سازند.

(ii) $\{۱, ۲, ۷, ۱۹, ۲۳, ۳۰\}$ یک $(۳۱, ۶, ۱)$ مجموعه تفاضلی است، و منجر به یک FPP از مرتبه ۵ می‌شود.

(iii) $\{۱, ۳, ۴, ۵, ۹\}$ یک $(۱۱, ۵, ۲)$ مجموعه تفاضلی است و انتقال‌های آن یک $(۱۱, ۵, ۲)$ طرح می‌سازند (مثال ۱۴.۹).

(iv) مجموعه $\{۲, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱\}$، که مکمل مجموعه تفاضلی (iii) است، خودش یک $(۱۱, ۶, ۳)$ مجموعه تفاضلی است، که انتقال‌های آن بلوک‌های یک $(۱۱, ۶, ۳)$ طرح هستند. این طرح، طرح مکمل (قضیه ۶.۹) طرح هادامارد $(۱۱, ۵, ۲)$ مثال ۱۴.۹ است.

مشخص شده است که برای هر عدد اول p یک $(p^۲ + p + ۱, p + ۱, ۱)$ مجموعه تفاضلی وجود دارد، که در هر حالت به یک FPP دوری منجر می‌شود. نمی‌توان با قوت در میزان مفید بودن روش مجموعه تفاضلی در ساخت طرح‌های متقارن تأکید کرد. واضح است که مفید بودن آن بستگی به توانایی در ساخت مجموعه‌های تفاضلی دارد. در بخش قبل، به یک روش ساخت اشاره شد که در ارتباط با طرح‌های هادامارد بود، بنابراین اکنون نشان می‌دهیم که چرا آن روش کار می‌کند.

مقدمات نظریه اعدادی لازم در اثبات را می‌توانید در بخش ضمیمه بیابید.

قضیه ۱۶.۹

فرض کنید $p = ۴m - ۱$ اول باشد. در این‌صورت مربع‌های ناصفر در $\mathbb{Z}_p$ تشکیل یک $(p, \frac{۱}{۲}(p - ۱), \frac{۱}{۴}(p - ۳))$ مجموعه تفاضلی می‌دهند.

اثبات

چون $x^۲ = (-x)^۲$، هر مربعی دوبار ظاهر می‌شود؛ همچنان‌که در ضمیمه نشان داده شده است، دقیقاً نصف اعضای ناصفر $\mathbb{Z}_p$ مربع هستند. بنابراین $\frac{۱}{۲}(p - ۱)$ مربع ناصفر وجود دارد.

فرض کنید w مربع ناصفر دلخواهی باشد، مثلاً $w = t^۲ (\mathrm{mod}\ p)$. در این‌صورت برای هر نمایش $۱ = x^۲ - y^۲$ به‌عنوان تفاضلی از دو مربع، نمایش $w = (tx)^۲ - (ty)^۲$ نیز وجود دارد. به‌عکس، اگر s یک معکوس t (به‌هنگ p) باشد، آنگاه متناظر با هر نمایش $w = x^۲ - y^۲$، نمایش $۱ = s^۲t^۲ = s^۲w = (sx)^۲ - (sy)^۲$ را داریم. بنابراین همه مربع‌های ناصفر w در $\mathbb{Z}_p$

به یک اندازه قابل بیان بر حسب تفاضل دو مربع هستند.

افزون بر این، چون $p \equiv ۳ (\mathrm{mod}\ ۴)$، عدد -۱ در $\mathbb{Z}_p$ مربع نیست، و غیرمربع‌ها دقیقاً قرینه مربع‌ها هستند. بنابراین، متناظر با هر نمایش $z = x^۲ - y^۲$ از غیرمربع z، نمایش $-z = y^۲ - x^۲$ را برای مربع $-z$ داریم. پس تمامی اعداد مربع و غیرمربع به یک اندازه، مثلاً λ، قابل نمایش به‌صورت تفاضل دو مربع هستند. مقدار λ از $\lambda(v-۱) = k(k-۱)$ حاصل می‌شود: داریم $\lambda(p-۱) = \frac{۱}{۲}(p-۱).\frac{۱}{۲}(p-۳)$، و از آن‌جا $\lambda = \frac{۱}{۴}(p-۳)$. ■

این روش تفاضلی را می‌توان به طرح‌های غیرمتقارن بسط داد. برای مثال، ساخت یک برنامه جمعی برای $۲n$ تیم را که در بخش ۱.۸ توضیح داده شد درنظر بگیرید. جدا از بازی شامل ∞، بازی‌های دور اول عبارت بودند از

$$۱ \text{ v } , (۲n-۲), ۲ \text{ v } (۲n-۳), \ldots, (n-۱) \text{ v } n.$$

زوج‌های $\{۱, ۲n-۲\}$، $\{۲, ۲n-۳\}$، ...، $\{n-۱, n\}$ دارای تفاضل‌های $\pm(۲n-۳)$، $\pm(۲n-۵)$، ...، ± ۱، یعنی تمام عناصر ناصفر $\mathbb{Z}_{۲n-۱}$، هستند.

مجدداً، STS از مرتبه ۱۳ ارائه‌شده در مثال ۷.۹ را درنظر بگیرید. بلوک‌ها انتقال دو بلوک آغازین $\{۱, ۲, ۵\}$ و $\{۱, ۳, ۹\}$ هستند. این دو بلوک دارای تفاضل‌های ± ۱، ± ۳، ± ۴ و ± ۲، ± ۶، ± ۸، یعنی تمامی اعضای ناصفر $\mathbb{Z}_{۱۳}$، هریک دقیقاً یک‌بار، هستند.

مثال ۱۶.۹

در $\mathbb{Z}_{۱۹}$ بلوک‌های $\{۱, ۲, ۹\}$، $\{۱, ۳, ۱۷\}$، $\{۱, ۵, ۱۴\}$ دارای تفاضل‌های ± ۱، ± ۷، ± ۸، ± ۲، ± ۱۴، ± ۱۶، ± ۴، ± ۹، ± ۱۳ هستند. اینها اعضای ناصفر $\mathbb{Z}_{۱۹}$، هرکدام یک‌بار، هستند. بنابراین، انتقال‌ها یک STS(۱۹) می‌سازند.

۶.۹ ماتریس‌های هادامارد و کدها

یک کد دوتایی گردایه‌ای از دنباله‌های دوتایی n رقمی، به‌نام کدواژه[۱]، است. اگر کدواژه‌ها ارسال شوند آنگاه امکان بروز خطا در اثر پارازیت وجود دارد، و بنابراین کلمات دریافتی ممکن است متفاوت از کدکلمات ارسال‌شده باشند. ایده اصلی در یک کد تصحیح کننده خطا این است که کدواژه‌ها را به‌قدر کافی متفاوت از یکدیگر انتخاب کنیم به‌قسمی‌که اگر در هنگام ارسال چند خطا صورت گیرد واژه دریافتی هنوز به کدواژه ارسال‌شده نزدیک‌تر باشد تا به کدواژه‌های دیگر. در این‌جا مفهوم فاصله بین دو کدواژه را داریم، که عبارت است از تعداد

[۱] codeword

مکان‌هایی که این دو کدواژه با هم متفاوت هستند. اگر تمامی کدواژه‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شوند که هر دو کدواژه حدّاقل در $2t + 1$ مکان با هم متفاوت باشند، آنگاه اگر در ارسال کدواژه‌ها حدّاکثر t خطا رخ دهد، واژه دریافتی هنوز به کدواژه ارسالی، در مقایسه با سایر کدواژه‌ها، نزدیک‌تر بوده و بنابراین می‌توان آن را به‌درستی به نزدیک‌ترین کدواژه دکد کرد.

تعریف ۹.۹
یک کد دوتایی به‌طول n یک مجموعه C از دنباله‌های دوتایی n رقمی است، که کدواژه نامیده می‌شوند. فاصله همینگ[1] $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ بین هر دو کدواژه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ برابر است با تعداد مکان‌هایی که آنها با هم تفاوت دارند. اگر برای هر دو کدواژه متفاوت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داشته باشیم $2t + 1 \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$، کد C یک کد t **خطا تصحیح کننده** نامیده می‌شود.

مثال ۱۷.۹
چهار کدواژه ۰۰۰۰۰۰۰، ۱۱۱۱۱۱۱، ۱۰۱۰۱۰۱، ۰۱۰۱۰۱۰ حدّاقل در ۳ مکان با هم تفاوت دارند و بنابراین یک کد ۱ خطا تصحیح کننده می‌سازند. برای مثال، اگر ۱۰۱۰۱۰۱ ارسال شود و در اثر پارازیت واژه ۱۱۱۰۱۰۱ دریافت شود، این واژه دریافتی به ۱۰۱۰۱۰۱ نزدیک‌تر است تا به کدواژه‌های دیگر و بنابراین درست دکد خواهد شد.

دو سیمای متضاد در یک کد وجود دارد. برای یک n مفروض، مطلوب این است که می‌نیمم فاصله بین کدواژه‌ها تا حدّ امکان بزرگ باشد (تا تصحیح خطا را امکان‌پذیر سازد)، ولی از طرف دیگر می‌خواهیم تعداد کدواژه‌ها تا حدّ امکان زیاد باشد. ولی این دو خاصیت در تضاد با هم هستند. شما نمی‌توانید کدواژه‌های زیادی داشته باشید که دوبه‌دو از هم فاصله زیادی داشته باشند. بنابراین یک مسئله بنیادی داریم: برای دو عدد مفروض n و k، چند دنباله دوتایی به‌طول n می‌توان پیدا کرد به‌قسمی‌که هر دو دنباله‌ای حدّاقل در k مکان با هم تفاوت داشته باشند؟

به حالت خاصی از این مسئله، وقتی $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$، خواهیم پرداخت. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که n فرد است.

لم ۱.۹
فرض کنید N دنباله دوتایی به‌طول $n = 2m - 1$ وجود دارد به‌قسمی‌که هر دو واژه در حدّاقل m مکان با هم تفاوت دارند. در این‌صورت $N \leq n + 1$.

اثبات
N دنباله را به‌عنوان سطرهای یک ماتریس دوتایی $N \times n$، ماتریس با درایه‌های ۰ و ۱، درنظر بگیرید.

---
[1] Hamming

فرض کنید S معرف مجموع تمامی فاصله‌های $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ بین واژه‌ها باشد:

$$S = \sum_{\mathbf{x}\neq\mathbf{y}} d(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

در این‌جا مجموع روی تمامی $\binom{N}{۲}$ دوتایی متمایز از دنباله‌های $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ است.

S را به دو روش مختلف می‌شماریم. برای هر جفت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داریم $m \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y})$؛ بنابراین

$$S \geq \binom{N}{۲} m. \qquad (۹.۹)$$

حال ستون j ام ماتریس را درنظر بگیرید. اگر این ستون شامل a_j درایه ۰ و b_j درایه ۱ باشد آنگاه $a_j + b_j = N$ و، چون هریک از a_j درایه ۰ یک تفاوت با هریک از b_j درایه ۱ ایجاد می کند، سهم این ستون در مقدار S برابر $a_j b_j$ است. بنابراین $S = \sum_{j=۱}^{n} a_j b_j$. حال به‌آسانی (مثلاً با حساب انتگرال) ملاحظه می‌شود که اگر $x + y = N$، آنگاه بیشترین مقدار xy برابر $\frac{N^۲}{۴}$ است. بنابراین هر $a_j b_j$ حدّاکثر $\frac{N^۲}{۴}$ است، و داریم

$$S \leq n.\tfrac{N^۲}{۴}. \qquad (۱۰.۹)$$

از (۹.۹) و (۱۰.۹) نتیجه می‌گیریم

$$m\frac{N(N-۱)}{۲} \leq \frac{nN^۲}{۴},$$

و از آن‌جا

$$(۲m - n)N \leq ۲m,$$

یعنی (چون $n = ۲m - ۱$)

$$N \leq n + ۱. \blacksquare$$

مثال ۱۸.۹

چند کدواژه به‌طول ۱۱ می‌توان یافت، به‌قسمی‌که هر دو کدواژه حدّاقل در ٦ مکان متفاوت باشند؟

جواب

بنابر لم ۱.۹، امیدی به یافتن بیش از ۱۲ کدواژه نیست. ولی، افزون بر این، با استفاده از طرح هادامارد مثال ۱۴.۹ می‌توانیم ۱۲ واژه این‌چنینی پیدا کنیم. یازده سطر ماتریس وقوع

(۸.۹)، هرکدام دارای پنج ۱ هستند؛ ولی هر دو سطری تنها در دو ۱ شریک هستند؛ بنابراین هر دو سطری در $6 = (2-5) \times 2$ مکان تفاوت دارند. پس اگر یازده سطر را به‌عنوان کدواژه درنظر بگیریم، به‌همراه سطر تماماً ۱ (که از هر ۱۱ سطر دیگر فاصله ۶ دارد)، ۱۲ کدواژه مطلوب را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۳.۹

فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کد به‌طول $n = 2m$ باشد، که حاوی N کدواژه بوده و هر دو واژه‌ای در حدّاقل m مکان متفاوت باشند. آنگاه $N \leq 2n$. افزون بر این، اگر یک ماتریس هادامارد از مرتبه n وجود داشته باشد، آنگاه یک کد این‌چنینی با $2n$ کدواژه وجود دارد.

اثبات

کدواژه‌هایی از $\mathcal{C}$ را درنظر بگیرید که با ۰ شروع می‌شوند. با حذف این ۰ از واژه‌های مربوطه، کدواژه‌های به‌طول $2m - 1$ به‌دست می‌آوریم که حدّاقل در m مکان متفاوت هستند. بنابر لم ۱.۹، حدّاکثر $2m$ کدواژه این‌چنینی وجود دارد. مشابهاً، حدّاکثر $2m$ کدواژه از $\mathcal{C}$ با ۱ شروع می‌شوند. بنابراین $\mathcal{C}$ حدّاکثر $2n = 4m$ کدواژه دارد.

اگر $n = 2$، آنگاه $\mathcal{C} = \{11, 10, 01, 00\}$ شرط مطلوب را تأمین می‌کند. حال فرض کنید که یک ماتریس هادامارد H از مرتبه $n > 2$ وجود داشته باشد. در این‌صورت به‌ازای عددی چون u خواهیم داشت $n = 4u$. هر دو سطری از H دقیقاً در $\frac{n}{2} = 2u$ مکان متفاوت‌اند، و در $\frac{n}{2}$ مکان موافق هستند.

فرض کنید A ماتریس حاصل از H با تبدیل ۱− به ۰ باشد، و فرض کنید $\bar{A}$ معرف ماتریس حاصل از A با جابه‌جا کردن ۰ها و ۱ها باشد. در این‌صورت هر دو سطری از A در حدّاقل $\frac{n}{2}$ مکان متفاوت‌اند، همچنان‌که هر دو سطری از $\bar{A}$ چنین هستند، و یک سطر دلخواه از A با هر سطر از $\bar{A}$ یا در $\frac{n}{2}$ یا تمامی n مکان تفاوت دارد. از این‌رو سطرهای A و $\bar{A}$ کدواژه‌های مطلوب هستند.■

مثال ۱۹.۹

ماتریس هادامارد H_5 حاصل از روش دوبرابرسازی بخش ۴.۹ را درنظر بگیرید. این ماتریس ۳۲ سطر و ستون دارد. فرض کنید A معرف ماتریس حاصل از H_5 با تبدیل ۱− به ۰ بوده، و $\bar{A}$ ماتریس حاصل از A به‌وسیله جابه‌جا کردن ۰ها و ۱ها باشد. در این‌صورت سطرهای A و $\bar{A}$ یک کد ۶۴ واژه‌ای به‌طول ۳۲ می‌سازند، که هر دو کدواژه در حدّاقل ۱۶ مکان تفاوت دارند؛ بنابراین این کد ۷ خطا تصحیح کننده است. از این کد در فضاپیمای جستجوگر مریخ شماره ۹[۱] سال ۱۹۷۲ به کره مریخ، به‌منظور ارسال تصویر به زمین، استفاده شد. هر عکس متشکل بود از انبوهی از نقاط با درجه تیرگی مختلف (برای ۶۴ درجه مختلف، نیاز به

[۱] Mars Mariner 9

دنباله‌های دوتایی به‌طول ٦ بود، زیرا $۶۴ = ۲^۶$)، و دنباله درجه‌های کدشده با استفاده از این کد ۷ خطا تصحیح کننده کدگذاری شدند. عکس‌های دریافت‌شده فوق‌العاده خوب بودند! فضاپیماهای جدیدتر از کدهای خیلی پیچیده‌تری استفاده کرده‌اند، همچنان‌که دیسک‌های فشرده و دیگر وسائل مدرن از این کدهای پیچیده استفاده می‌کنند. برای یک مقدمه خوب در نظریه کدگذاری به [۱۲] مراجعه کنید.

یک ارتباط نهایی بین کدها و طرح‌های هادامارد وجود دارد که این فصل را با آن به‌پایان می‌بریم. قبل از توصیف آن، ابتدا نیاز به پیداکردن یک کران روی تعداد کدواژه‌های یک کد t خطا تصحیح کننده داریم.

قضیه ۱۷.۹

اگر $\mathcal{C}$ یک کد دوتایی t خطا تصحیح کننده به‌طول n باشد، آنگاه

$$|\mathcal{C}|.\left\{\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\cdots+\binom{n}{t}\right\}\leq ۲^n. \qquad (۱۱.۹)$$

اثبات

هر دو کدواژه از $\mathcal{C}$ در حدّاقل $۲t+۱$ مکان متفاوت هستند. بنابراین هر دنباله که تفاوت آن با یک کدواژه $\mathbf{x}$ حدّاکثر t باشد به $\mathbf{x}$ دکد خواهد شد.

حال، برای هر i، $۰ \leq i \leq t$، تعداد $\binom{n}{i}$ دنباله دوتایی به‌طول n به فاصله i از $\mathbf{x}$ وجود دارد؛ بنابراین تعداد دنباله‌های قابل تصحیح به $\mathbf{x}$ برابر $\sum_{i=۰}^{t}\binom{n}{i}$ است. پس، چون $|\mathcal{C}|$ انتخاب برای $\mathbf{x}$ وجود دارد، باید حدّاقل $|\mathcal{C}|\sum_{i=۰}^{t}\binom{n}{i}$ دنباله دوتایی به‌طول n وجود داشته باشد. چون تعداد دنباله‌های دوتایی به‌طول n برابر ۲^n است، حکم ثابت می‌شود.■

یک کد $\mathcal{C}$ را کامل[۱] نامند هرگاه در (۱۱.۹) تساوی برقرار باشد. در یک چنین کدی هر دنباله دوتایی قابل تصحیح به یک کدواژه از $\mathcal{C}$ است، یعنی هر دنباله به فاصله حدّاکثر t از یک کدواژه منحصربه‌فرد است. توجه کنید که برای برقراری تساوی در (۱۱.۹)، باید $\binom{n}{۰}+\cdots+\binom{n}{t}$ مساوی توانی از ۲ باشد.

مثال ۲۰.۹

یک کد کامل ۱ خطا تصحیح کننده $\mathcal{C}$ به‌طول n تنها به شرط

$$|\mathcal{C}|.(۱+n)=۲^n$$

می‌تواند وجود داشته باشد. حالت $n=۷$ را درنظر بگیرید، به‌طوری‌که $|\mathcal{C}|=۱۶$. برای ساخت یک چنین کدی، هفت سطر ماتریس (۷.۹) را به‌همراه مکمل آنها درنظر گرفته و دو کلمه تماماً ۰ و تماماً ۱ را به آنها ضمیمه می‌کنیم. به این طریق ۱۶ کدواژه به‌شرح زیر حاصل می‌شوند.

[۱] perfect

۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

روش دیگر به‌دست آوردن این کدواژه‌ها این است که از بین آنها چهار واژه را که روی $\mathbb{Z}_۲$ مستقل خطی هستند انتخاب کرده و سپس تمامی ترکیبات خطی آنها را روی $\mathbb{Z}_۲$ درنظر بگیریم. به‌عبارت دیگر، چهار کدواژه مستقل خطی $c_۱, \ldots, c_۴$ را انتخاب و تمامی ترکیبات $\lambda_۱ c_۱ + \lambda_۲ c_۲ + \lambda_۳ c_۳ + \lambda_۴ c_۴$ را که λ_i برابر ۰ یا ۱ است تشکیل می‌دهیم. برای مثال، اگر اولین چهار کدواژه بالا را انتخاب کنیم،

$$c_۱ = ۰۱۰۱۰۱۰, \quad c_۲ = ۱۰۰۱۱۰۰, \quad c_۳ = ۰۰۱۱۰۰۱, \quad c_۴ = ۱۱۱۰۰۰۰,$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۰۱۰۰۱۰۱ &= c_۲ + c_۳ + c_۴, \\ ۱۰۱۰۱۰۱ &= c_۲ + c_۳, \end{aligned}$$

و غیره. بنابراین $\mathcal{C}$ متشکل از تمامی ترکیبات خطی (به‌هنگ ۲) سطرهای ماتریس

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

است که **ماتریس مولد** $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود. $\mathcal{C}$ یک **کد خطی** نامیده می‌شود. کدهای خطی امتیازهای ویژه‌ای نسبت به کدهای دیگر دارند. آنها همگی $\mathbf{0}$ را به‌عنوان یک کدواژه در خود دارند، و می‌نیمم فاصله بین هر دو کدواژه‌ای درست برابر می‌نیمم فاصله کدواژه‌ها از $\mathbf{0}$، یعنی کمترین تعداد ۱ در یک کدواژه ناصفر (تمرین ۱۹.۹) است. در مثال بالا، این عدد ۳ است، بنابراین کد ۱ خطا تصحیح کننده است. برای هر n به‌فرم $۲^m - ۱$ یک کد خطی کامل ۱ خطا تصحیح کننده به‌طول n وجود دارد که ماتریس مولد آن k سطر دارد، که $k = n - m$. این **کدهای همینگ** در [۱۲] توصیف شده‌اند.

برای $t > ۱$، کدهای کامل t خطا تصحیح کننده نایاب هستند. ولی یک نمونه ارزشمند متناظر با تساوی زیر وجود دارد

$$\binom{۲۳}{۰} + \binom{۲۳}{۱} + \binom{۲۳}{۲} + \binom{۲۳}{۳} = ۲^{۱۱} = ۲^{۲۳-۱۲}$$

یک کد کامل ۳ خطا تصحیح کننده به‌طول ۲۳ در سال ۱۹۴۹ به‌وسیله گلی[1] معرفی شد، و کار پایانی ما تشریح این کد است.

مثال ۲۱.۹ (گلی‌کد کامل $\mathcal{G}_{۲۳}$)

از مثال ۱۵.۹ (iv) به‌خاطر بیاورید که $\{۲,۶,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ یک $(۱۱,۶,۳)$ مجموعه تفاضلی (به‌هنگ ۱۱) است که انتقال‌های آن طرح مکمل یک $(۱۱,۵,۲)$ طرح هادامارد را تشکیل می‌دهند. فرض کنید A معرف ماتریس وقوع این $(۱۱,۶,۳)$ طرح باشد:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix}.$$

سپس تعریف کنید

$$B=\left[\begin{array}{c|ccc|c} ۱ & & & & ۰ \quad A \\ ۱ & & I_{۱۱} & & ۰ \\ \vdots & & & & \vdots \\ ۱ & & & & ۰ \\ \hline ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱\ ۱\ \cdots\cdots\ ۱ \end{array}\right].$$

در این‌صورت B یک ماتریس ۲۴×۱۲ دوتایی است. کد $\mathcal{G}_{۲۳}$ از حذف اولین ستون B و درنظر گرفتن ماتریس حاصل به‌عنوان ماتریس مولد $\mathcal{G}_{۲۳}$ به‌دست می‌آید. ماتریس حاصل ۲۳×۱۲ است. علت درنظر گرفتن اولین ستون B، نقش آن در سهولت محاسبات است. واضح است که چون سطرهای A در ۶ مکان متفاوت هستند، هر دو سطری از B حدّاقل در ۸ مکان تفاوت دارند. هدف ما نشان دادن این است که هر دو ترکیب خطی از سطرهای B در حدّاقل ۸ مکان متفاوت هستند، و بنابراین هر دو کدواژه‌ای از $\mathcal{G}_{۲۳}$ حدّاقل در ۷ مکان تفاوت دارند. باید نشان دهیم، اگر $\mathbf{x}$ یک ترکیب خطی ناصفر از سطرهای B باشد، آنگاه $w(\mathbf{x}) \geq ۸$ که $w(\mathbf{x})$، وزن $\mathbf{x}$، تعداد ۱های $\mathbf{x}$ است. این کار را با دنباله‌ای از مشاهدات انجام می‌دهیم. فرض کنید $\mathcal{V}$ معرف مجموعه ترکیبات خطی سطرهای B باشد.

(i) برای هر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از $\mathcal{V}$ داریم $w(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - ۲\mathbf{x}.\mathbf{y}$. در $w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y})$ هر ۱ که در $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در مکان‌های یکسانی باشد دوبار شمرده می‌شود، ولی مجموع این ۱ها به‌هنگ ۲ صفر است و از این‌رو باید دوبار کم شود.

(ii) هر سطر B وزن ۸ یا ۱۲ دارد.

(iii) اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو سطر B باشند آنگاه $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ زوج است.

درستی این گزاره در این است که هر دو سطری از A دقیقاً در سه مکان باهم درایه ۱ دارند.

---
[1] Golay

(iv) اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو سطر B باشند آنگاه $w(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ مضربی از ۴ است.

این از (i)، (ii) و (iii) نتیجه می‌شود.

(v) اگر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ و $\mathbf{y}$ سطری از B باشد آنگاه $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ زوج است.

این با استقرا ثابت می‌شود. درنظر بگیرید $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{r}$ که $\mathbf{r}$ سطری از B و $\mathbf{z}$ مجموع k سطر B است. در این‌صورت $\mathbf{x}.\mathbf{y} = (\mathbf{z}+\mathbf{r}).\mathbf{y} \equiv \mathbf{z}.\mathbf{y} + \mathbf{r}.\mathbf{y}$، که زوج است زیرا $\mathbf{z}.\mathbf{y}$ بنا به فرض استقرا زوج است و $\mathbf{r}.\mathbf{y}$ بنابر (iii) زوج است.

(vi) اگر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ آنگاه $w(\mathbf{x})$ مضربی از ۴ است.

مجدداً این با استقرا ثابت می‌شود. برای مرحله استقرا همچون (v) قرار دهید $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{r}$. در این‌صورت $w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{r}) - ۲\mathbf{z}.\mathbf{r}$. ولی $w(\mathbf{z})$ بنا به‌فرض مضرب ۴ است، $w(\mathbf{r})$ بنابر (ii) مضرب ۴ است، و $\mathbf{z}.\mathbf{r}$ بنابر (v) زوج است.

چون وزن هر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ مضربی از ۴ است، نتیجه می‌شود که، برای نشان‌دادن $w(\mathbf{x}) \geq ۸$، تنها نیاز داریم که نشان دهیم حالت $w(\mathbf{x}) = ۴$ غیرممکن است. این با درنظر گرفتن نیمه سمت چپ و نیمه سمت راست هر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ حاصل می‌شود. وزن نیمه‌های سمت چپ و سمت راست $\mathbf{x}$ را به‌ترتیب با $w_L(\mathbf{x})$ و $w_R(\mathbf{x})$ نمایش دهید.

(vii) برای هر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ عدد $w_L(\mathbf{x})$ زوج است. برای درستی این حکم توجه کنید که اگر $\mathbf{x}$ مجموع یک تعداد زوجی از سطرهای B باشد آنگاه مجموع ۱های اولین ستون ۰ (به‌هنگ ۲) است، و بنابراین تعداد زوجی ۱ از $I_{۱۱}$ باقی می‌ماند، در حالی‌که اگر $\mathbf{x}$ مجموع تعداد فردی از سطرها باشد، $\mathbf{x}$ در مکان اول ۱ داشته و تعداد فردی ۱ از $I_{۱۱}$ نیز دارد.

(viii) حالت $w_L(\mathbf{x}) = ۰$، $w_R(\mathbf{x}) = ۴$ غیرممکن است.

اگر $w_L(\mathbf{x}) = ۰$ آنگاه $\mathbf{x}$ یا $\mathbf{0}$ است (که در این‌حالت $w_R(\mathbf{x}) = ۰$) یا آخرین سطر B است (که در این‌حالت $w_R(\mathbf{x}) = ۱۲$).

(ix) حالت $w_L(\mathbf{x}) = w_R(\mathbf{x}) = ۲$ غیرممکن است. برای این‌که اگر $w_L(\mathbf{x}) = ۲$ آنگاه $\mathbf{x}$ باید مجموع یک یا ۲ سطر از بین اولین ۱۱ سطر (احتمالاً همراه با آخرین سطر B) باشد. ولی وزن مجموع یک یا دو سطر از A برابر ٦ است و اگر آخرین سطر B افزوده شود $\mathbf{x}$ حاصل خاصیت $w_R(\mathbf{x}) = ٦ > ۲$ خواهد داشت.

(x) حالت $w_L(\mathbf{x}) = ۴$، $w_R(\mathbf{x}) = ۰$ غیرممکن است.

در این‌جا $\mathbf{x}$ باید مجموع ۳ یا ۴ سطر از بین ۱۱ سطر اول B باشد. اگر $\mathbf{x}$ مجموع ۳ سطر باشد، فرض کنید $\mathbf{r}$ هر سطر دیگری از میان ۱۱ سطر اول باشد. در این‌صورت، چون $w_R(\mathbf{x}) = ۰$ پس $w_L(\mathbf{x}+\mathbf{r}) = ۴$، در نتیجه $w(\mathbf{x}+\mathbf{r}) = ۱۰$، که در تناقض با (vi) است.

اگر $\mathbf{x}$ مجموع ۴ سطر باشد، فرض کنید $\mathbf{t}$ یکی از آنها باشد. پس $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{t}$ که $\mathbf{z}$ مجموع ۳ سطر از B است. در این‌صورت $w_L(\mathbf{z}) = ۴$ و $w_R(\mathbf{z}) = w_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) = w_R(\mathbf{t}) = ٦$ زیرا $w_R(\mathbf{x}) = ۰$. بنابراین $w(\mathbf{z}) = ۱۰$، که مجدداً در تناقض با (vi) است.

بنابراین می‌نیمم وزن ترکیبات ناصفر $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ برابر ۸، و می‌نیمم وزن کدواژه‌های ناصفر $\mathcal{G}_{۲۳}$ برابر ۷ است. بنابراین $\mathcal{G}_{۲۳}$ یک کد ۳ خطا تصحیح کننده است.

کد $\mathcal{G}_{۲۳}$ ارتباط قابل توجهی با سیستم‌های اشتاینر دارد؛ برای جزئیات بیشتر به [۲] مراجعه کنید.

تمرینات

تمرین ۱.۹
نشان دهید هیچ (۲ ,۹ ,۱۷) یا (۱ ,٦ ,۲۱) طرحی وجود ندارد.

تمرین ۲.۹
چگونه یک (٦ ,۹ ,۱۳) طرح را می‌سازید؟

تمرین ۳.۹
با استفاده از (۱.۹) نشان دهید

$$vr(k-۱)\lambda = r^۲(k-۱)^۲ + r(k-۱)\lambda,$$
$$(k-۱)\lambda = (k-۱)r - (v-k)\lambda.$$

تمرین ۴.۹
نشان دهید که در یک (v, k, λ) طرح متقارن رابطه $k - ۱ < \sqrt{\lambda v} < k$ برقرار است.

تمرین ۵.۹
از اثبات قضیه ۳.۹ نتیجه بگیرید که اگر یک (v, k, λ) طرح متقارن وجود داشته باشد آنگاه ماتریس وقوع آن در $|A|^۲ = k^۲(k-\lambda)^{v-۱}$ صدق می‌کند. از این‌رو نشان دهید اگر یک طرح متقارن وجود داشته باشد که در آن v زوج باشد آنگاه $k - \lambda$ باید مربع کامل باشد. بر این اساس نشان دهید هیچ (۴ ,۱۲ ,۳۴) یا (۲ ,۱۰ ,۴٦) طرحی وجود ندارد.

تمرین ٦.۹
پارامترهای (b, v, r, k, λ) را برای طرح مکمل (a) یک صفحه آفینی مرتبه n، (b) یک $(۴m-۱, ۲m-۱, m-۱)$ طرح هادامارد تعیین کنید.

تمرین ۷.۹
چگونه یک (۳ ,۷ ,۱۵) طرح را می‌سازید؟

تمرین ۸.۹
چگونه یک ماتریس هادامارد از مرتبه ۲۴ را می‌سازید؟

تمرین ۹.۹
نشان دهید که اگر $D = \{d_۱, \dots, d_k\}$ یک (v, k, λ) مجموعه تفاضلی در $\mathbb{Z}_k$ باشد آنگاه $-D = \{-d_۱, \dots, -d_k\}$ و همه انتقال‌های D نیز (v, k, λ) مجموعه‌های تفاضلی هستند.

تمرین ۱۰.۹
ثابت کنید $\{۱, ۲, ۳, ۵, ٦, ۹, ۱۱\}$ یک $(۱۵, ۷, ۳)$ طرح تولید می‌کند.

تمرین ۱۱.۹
ثابت کنید $\{۱, ۲, ۸, ۲۰, ۲۴, ۴۵, ۴۸, ۵۰\}$ یک مجموعه تفاضلی (به‌هنگ ۵۷) است که یک FPP از مرتبه ۷ تولید می‌کند.

تمرین ۱۲.۹
نشان دهید $\{۱, ۸, ۱۱, ۱۲, ۲۴\}$ و $\{۱, ٦, ۱۵, ۲۱, ۲۳\}$ یک $(۴۱, ۵, ۱)$ طرح تولید می‌کنند.

تمرین ۱۳.۹
تصدیق کنید که انتقال‌های $\{۱, ۲, ۱۳\}$، $\{۱, ۴, ۹\}$، $\{۱, ۳, ۱۰\}$، $\{۱, ۵, ۱۱\}$ یک STS(۲۵) تشکیل می‌دهند.

تمرین ۱۴.۹
تصدیق کنید که تفاضل‌های حاصل از مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۷\}$، $\{۱, ۳, ۱۴\}$، $\{۱, ۵, ۱۳\}$، $\{۱, ۴, ۱۱\}$ متشکل از همه اعضای ناصفر $\mathbb{Z}_{۲۷}$ غیر از ۹ و ۱۸ است. نتیجه بگیرید که انتقال‌های این مجموعه‌ها به‌همراه نه انتقال $\{۱, ۱۰, ۱۹\}$، یک STS(۲۷) می‌سازند.

تمرین ۱۵.۹
یک مربع لاتین ٦×٦ L و یک آرایه ٦×٦ طبیعی N با اعداد ۱، ...، ۳٦، که به‌شکل طبیعی مرتب شده اند، را انتخاب کنید. اعداد i و j را متحد نامید هرگاه در ماتریس N هم‌سطر یا هم‌ستون باشند یا این‌که در مکان‌هایی از ماتریس N قرار داشته باشند که درایه‌های متناظر با آنها در L برابر باشند. فرض کنید B_i معرف مجموعه همه اعداد $j \leq ۳٦$ متحد با i باشد. نشان دهید $B_۱$، ...، $B_{۳٦}$ بلوک‌های یک $(۳٦, ۱۵, ٦)$ طرح متقارن هستند.

تمرین ۱٦.۹
(a) نشان دهید اگر A یک ماتریس مربعی با درایه‌های ۰ و ۱ باشد و B از A با تبدیل ۰ به ۱- حاصل شود، آنگاه $B = ۲A - J$.
(b) نشان دهید اگر A ماتریس وقوع یک (v, k, λ) طرح متقارن باشد آنگاه $B = ۲A - J$ یک ماتریس هادامارد است اگر و فقط اگر $v = ۴(k - \lambda)$.

(c) نتیجه بگیرید که تمرین ۱۵.۹ امکان ساخت یک ماتریس هادامارد از مرتبه ۳۶ را فراهم می‌سازد.

تمرین ۱۷.۹
آیا می‌توانید برای هر $m \geq ۱۲$ یک ماتریس هادامارد از مرتبه $۴m$ بسازید؟

تمرین ۱۸.۹
با پیروی از اثبات لم ۱.۹ نشان دهید اگر یک کد دارای N کدواژه به‌طول n باشد، که هر دو واژه‌ای در حدّاقل $d > \frac{n}{۲}$ مکان تفاوت داشته باشند، آنگاه $N \leq \frac{۲d}{۲d-n}$. (این را کران پلاتکین[1] می‌نامند.)

تمرین ۱۹.۹
نشان دهید در یک کد خطی می‌نیمم فاصله بین کدواژه‌ها برابر می‌نیمم وزن کدواژه‌های ناصفر است.

تمرین ۲۰.۹
نشان دهید اگر یک کد کامل ۱ خطا تصحیح کننده وجود داشته باشد آنگاه یک $\mathrm{STS}(n)$ وجود دارد.

تمرین ۲۱.۹
(یک اثبات غیرماتریسی برای نامساوی فیشر.) یک بلوک دلخواه B انتخاب کنید و فرض کنید x_i معرف تعداد بلوک‌های قطع‌کننده B در دقیقاً i عضو باشد. ابتدا نشان دهید

$$\sum_i x_i \binom{i}{۲} = \binom{k}{۲}(\lambda - ۱), \quad \sum_i i x_i = k(r-۱).$$

فرض کنید m معرف میانگین $|B \cap C|$ روی تمامی بلوک‌های $C \neq B$ باشد. بنابراین $m(b-۱) = \sum_i i x_i$.

نشان دهید $\sum_i (i-m)^۲ x_i \geq ۰$ منجر به رابطه زیر می‌شود

$$(b-۱)k(k-۱)(\lambda-۱) + (b-۱)k(r-۱) \geq k^۲(r-۱)^۲.$$

حال با استفاده از تمرین ۳.۹ و (۱.۹) نتیجه بگیرید $(r-k)(r-\lambda)(v-k) \geq ۰$. این ایجاب می‌کند $r \geq k$، و از آن‌جا $b \geq v$.

(تا این‌جا از اثبات ماتریسی مسئله خوشحال خواهید بود!)

[1] Plotkin's bound

ضمیمه

محاسبات به‌هنگ n

فرض کنید $n \geq ۲$ یک عدد صحیح باشد. اگر a و b اعداد صحیح باشند، گوییم a هم‌نهشت b به‌هنگ n است (و می‌نویسیم $a \equiv b(\text{mod}n)$) هرگاه تفاضل a و b مضربی از n باشد. بنابراین، برای مثال،

$$۸ \equiv ۳(\text{mod}۵), \quad ۲ \equiv ۱۰(\text{mod}۴), \quad ۲۰۰۰۱ \equiv -۹۹(\text{mod}۱۰۰).$$

فرض کنید $\mathbb{Z}_n$ معرف مجموعه $\{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$ باشد که در آن جمع و ضرب به‌هنگ n محاسبه می‌شوند. (بعضی اوقات ۰ با n جایگزین می‌شود.) برای مثال، در $\mathbb{Z}_۹$ داریم $۲ = ۸ \times ۷$ زیرا $۵۶ \equiv ۲(\text{mod}۹)$.

جدول‌های جمع و ضرب در $\mathbb{Z}_۵$ به‌شرح زیر هستند.

+	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

×	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

اگر p اول باشد، $\mathbb{Z}_p$ خواص یک میدان را دارد. توجه کنید که اگر $ab \equiv ۰(\text{mod}p)$ آنگاه $a \equiv ۰$ یا $b \equiv ۰$. بنابراین جدول ضرب برای $\mathbb{Z}_p - \{۰\}$ درایه ۰ ندارد. (این برخلاف وضعیت $\mathbb{Z}_۶$ است که برای مثال $۰ = ۳ \times ۲$.) سپس ملاحظه کنید که اگر $p \nmid t$ (یعنی p عدد t را بخش نمی‌کند) آنگاه t، $۲t$، ...، $(p-۱)t$ همگی به‌هنگ p متمایز هستند: برای این‌که اگر $ta \equiv tb(\text{mod}p)$ آنگاه $p|t(a-b)$ و بنابراین $p|(a-b)$، یعنی $a \equiv b(\text{mod}p)$. بنابراین t، $۲t$، ...، $(p-۱)t$ دقیقاً مشابه ۱، ۲، ...، $p - ۱$ هستند، که تنها ترتیب متفاوتی دارند. اولین نتیجه این خاصیت این است که باید عددی چون s، $۱ \leq s \leq p - ۱$، وجود داشته

باشد به‌قسمی‌که $st \equiv ۱(\mathrm{mod}p)$. پس هر عضو ناصفر t در $\mathbb{Z}_p$ یک معکوس دارد که با $t^{-۱}$ نمایش داده می‌شود. برای مثال، چون $۳ \times ۲ \equiv ۱(\mathrm{mod}۵)$، معکوس ۲ در $\mathbb{Z}_۵$ برابر ۳ است.

دومین نتیجه از هم‌نهشتی زیر بر می‌آید

$$t.۲t\ldots(p-۱)t \equiv ۱.۲.\ldots.(p-۱)(\mathrm{mod}p)$$

یعنی

$$t^{p-۱}(p-۱)! \equiv (p-۱)!(\mathrm{mod}p).$$

با ضرب کردن در معکوس $(p-۱)!$ **قضیه فرما** به‌دست می‌آید: اگر $p \nmid t$ آنگاه

$$t^{p-۱} \equiv ۱(\mathrm{mod}p).$$

برای مثال،

$$۳^{۵-۱} = ۳^۴ = ۸۱ \equiv ۱(\mathrm{mod}۵).$$

از وجود معکوس‌ها یک نتیجه دیگری هم حاصل می‌شود. ابتدا توجه کنید که تنها دو عددی که با معکوس خود برابرند اعداد ۱ و ۱− هستند برای این‌که

$$x^۲ \equiv ۱ \Leftrightarrow (x-۱)(x+۱) = ۰ \Leftrightarrow x \equiv \pm ۱(\mathrm{mod}p).$$

عدد $(p-۱)! = ۱.۲.۳\ldots(p-۲)(p-۱)$ را درنظر بگیرید. اعداد از ۲ تا $p-۲$ باید متشکل از $\frac{۱}{۲}(p-۳)$ زوج از اعداد و معکوس آنها باشد، و بنابراین حاصل‌ضرب همه آنها باید ۱ باشد. در نتیجه

$$(p-۱)! \equiv ۱.۱.(p-۱) \equiv -۱(\mathrm{mod}p)\,.$$

بنابراین **قضیه ویلسون** به‌دست می‌آید:

$$(p-۱)! \equiv -۱(\mathrm{mod}p)\,.$$

مربع‌ها و غیرمربع‌ها در $\mathbb{Z}_p$

فرض کنید p یک عدد اول فرد باشد: $p = ۲k+۱$. در این‌صورت اعداد $۱^۲$ ، $۲^۲$، ...، $k^۲$ همگی به‌هنگ p متمایز هستند؛ برای این‌که اگر $x^۲ \equiv y^۲$ آنگاه $(x-y)(x+y) \equiv ۰(\mathrm{mod}p)$ به‌قسمی‌که $x \equiv y$ یا $x \equiv -y$. ولی $x \equiv -y$ غیرممکن است، بنابراین $x \equiv y$.

چون $(p-x)^۲ \equiv (-x)^۲ \equiv x^۲(\mathrm{mod}p)$، نتیجه می‌شود که، از $p-۱ = ۲k$ عدد ناصفر به‌هنگ p، دقیقاً نیمی مربع و نیمی غیرمربع هستند. توجه کنید که:

(A۱) اگر x و y در $\mathbb{Z}_p$ مربع باشند آنگاه xy نیز چنین است (برای این‌که اگر $x \equiv u^۲$ و $y \equiv v^۲$ آنگاه $xy \equiv (uv)^۲$)؛

(A۲) اگر x یک مربع و y یک غیرمربع در $\mathbb{Z}_p$ باشند آنگاه xy غیرمربع است (اگر $x = u^۲$ و $xy = w^۲$ آنگاه $y = (u^{-۱}w)^۲$ یک مربع خواهد بود).

افزون بر این، توجه کنید اگر ۱− یک مربع باشد آنگاه به‌ازای عددی چون $x \in \mathbb{Z}_p$ داریم $x^۲ \equiv -۱$. با به توان $k = \frac{۱}{۲}(p-۱)$ رسانیدن طرفین نتیجه می‌گیریم $x^{p-۱} \equiv (-۱)^k$. ولی بنا به قضیه فرما $x^{p-۱} \equiv ۱$، بنابراین $(-۱)^k \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, p)$. پس k باید زوج باشد و از این‌رو $p \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۴)$. بنابراین:

(A۳) اگر $p \equiv ۳ (\mathrm{mod}\, ۴)$ آنگاه ۱− یک غیرمربع است.

در این‌صورت از (A۲) نتیجه می‌شود که:

(A۴) اگر $p \equiv ۳ (\mathrm{mod}\, ۴)$ آنگاه x مربع است اگر و فقط اگر $-x$ غیرمربع باشد.

مثال. قرار دهید $p = ۱۱$. مربعات به‌هنگ ۱۱ عبارت هستند از ۱، ۴، ۹، $۵ \equiv ۱۶$، $۳ \equiv ۲۵$. قرینه ۱، ۳، ۴، ۵، ۹ (یعنی غیرمربع‌ها) اعداد ۱۰، ۸، ۷، ٦، ۲ هستند.

حال $p \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۴)$ را درنظر بگیرید؛ در این حالت نشان می‌دهیم که ۱− به‌هنگ p مربع است.

توجه کنید که، اگر $p = ۴k + ۱$،

$$
\begin{aligned}
(p-۱)! &= ۱.۲.\ldots.۲k.(۲k+۱)\ldots۴k \\
&\equiv ۱.۲.\ldots.۲k.(-۲k)\ldots(-۱) (\mathrm{mod}\, p) \\
&\equiv (-۱)^{۲k}(۲k)!(۲k)! \equiv ((۲k)!)^۲,
\end{aligned}
$$

و بنابراین $(p-۱)!$ یک مربع است. ولی بنابر قضیه ویلسون، $(p-۱)! \equiv -۱ (\mathrm{mod}\, p)$، پس ۱− یک مربع است. بنابراین:

(A۵) اگر $p \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۴)$ آنگاه ۱− به‌هنگ p یک مربع است و x یک مربع است اگر و فقط اگر $-x$ مربع باشد.

مثال. قرار دهید $p = ۱۳$. مربع‌ها عبارت هستند از ۱، ۴، ۹، $۳ \equiv ۱٦$، $۱۲ \equiv -۱$، $۱۲ \equiv ۲۵$، $۱۰ \equiv ۳٦$، و قرینه آنها برابرند با ۱۲، ۹، ۴، ۱۰، ۱، ۳ که همان مربع‌ها هستند.

نتایج نظریه اعدادی بیشتری را می توانید در کتاب جدید [۱۳] بیابید.

جواب تمرین‌ها

فصل ۱

۱.۱ $۹!$.

۲.۱ (a) $\binom{۱۵}{۴}\binom{۱۲}{۴}$، (b) $\binom{۲۷}{۸}-\binom{۱۵}{۸}-\binom{۱۵}{۷}\binom{۱۲}{۱}$، (c) $\sum_{r=۵}^{۸}\binom{۱۵}{r}\binom{۱۲}{۸-r}$.

۳.۱ بله، چون $۵۲! > ۱۰^{۶۶}$.

۴.۱

$$\begin{array}{llcl}
(a) & \binom{۴۳}{۳}\binom{۶}{۳}/\binom{۴۹}{۶} & = & ۰.۱۷۶۵.... \\
(b) & \binom{۴۳}{۲}\binom{۶}{۴}/\binom{۴۹}{۶} & = & ۰.۰۰۰۹۷.... \\
(c) & \binom{۴۳}{۱}\binom{۶}{۵}/\binom{۴۹}{۶} & = & ۰.۰۰۰۰۲....
\end{array}$$

۵.۱ ۱ در (a) ۶۷۲۴۵۲۰، (b) ۴۳۹۴۹۲۶۸.

۶.۱ ۱ در $۳۸۹۵۵۸۴ = ۱۴\binom{۳۴}{۵}$؛ بنابراین تقریباً این شانس ۴ برابر است.

۷.۱ $\binom{۱۰}{۵}/۲^{۱۰}$

۹.۱ بندهای (i) و (ii) قضیه‌ی ۶.۱ را جمع کنید.

۱۰.۱ ضریب x^n را در دو طرف رابطه مساوی قرار دهید. سپس قرار دهید $n = s + ۱$.

۱۱.۱ (b) در مجموع حاصل، جمل به‌صورت جفتی حذف می شوند. (c) $\binom{n-۱}{k}$ برابر است با ضریب x^k در

$$(۱+x)^n\left(\sum_{s=۰}^{\infty}(-۱)^s x^s\right) = \sum_{r+s=k}\binom{n}{r}(-۱)^s = (-۱)^k\sum_{r=۰}^{k}(-۱)^r\binom{n}{r}.$$

۱۲.۱ بنابر تمرین ۱۰.۱، $LHS = n\sum_k \binom{m}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{m+n-1}{m-1}$.

۱۳.۱ (a) $\binom{18}{3} = \binom{15+4-1}{15}$. (b) $\binom{14}{3}$ با قرار دادن $x = 1 + u$ وغیره. (c) قرار دهید $x = 3 + a$، $y = -1 + b$، $z = 1 + c$، $w = -2 + d$ و نتیجه $\binom{17}{3}$ را به‌دست آورید.

۱۴.۱ معادله $x_1 + \cdots + x_4 + x_5 = 6$ را با شرط $x_i \geq 0$ حل کنید: $\binom{10}{4}$.

۱۵.۱ انتخاب ٦ از ۴۹ را به‌عنوان یک دنباله دوتایی به‌طول ۴۹ با دقیقاً شش صفر درنظر بگیرید. هیچ دو صفری را کنار هم نخواهید. بنابر مثال ۱۷.۱، عدد مطلوب برابر $\binom{44}{6} < \frac{1}{2}\binom{49}{6}$ است.

۱٦.۱ (a) $10 \times 9 \times 8 \times 7$، (b) $\binom{10}{4}$، (c) 10^4، (d) $\binom{10+4-1}{4}$.

۱۷.۱ بنابر قضیه ۷.۱ (i)، $\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n\sum_{1}^{n-1}\binom{n-1}{r-1} = n2^{n-1}$. اندازه متوسط $\frac{1}{2^n}\sum_r r\binom{n}{r} = \frac{n}{2}$ است.

۱۸.۱ (a) از جمع‌زدن نتیجه می‌شود

$$1^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(b) بنابر قضیه ۸.۱، از جمع‌زدن نتیجه می‌شود

$$1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{r=1}^{n}\binom{r}{2} + \sum_{r=1}^{n}\binom{r+1}{2} = \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}.$$

۱۹.۱ فرض کنید $S = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots$. در این‌صورت از دموآور نتیجه می‌شود

$$e^{\frac{1}{3}n\pi i} = (1+w)^n = S + w\left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \cdots\right\} + w^2\left\{\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \cdots\right\}.$$

قسمت حقیقی برابراست با

$$\cos\frac{n\pi}{3} = S - \frac{1}{2}\left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \cdots\right\} = S - \frac{1}{2}(2^n - S).$$

فصل ۲

۱.۲ (a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}a_1 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1 - \frac{1}{2^n})$

(b) $3^n - 2^{n-1}$،

(c) $(۲n-۱)۳^{n-۱}$،

(d) $a_n = ۴a_{n-۱} - ۳a_{n-۲}$ دارای جواب $a_n = A + B۳^n$ است. برای جواب خصوصی قرار دهید $a_n = K۲^n$. به‌دست آورید $K = -۴$. پس $a_n = A + B۳^n - ۲^{n+۲}$ را امتحان کنید. مقدار $a_n = ۳^{n+۱} - ۲^{n+۲}$ را به‌دست آورید.

۲.۲ $b_n = F_{n+۱}$.

۳.۲ فرض کنید c_n = تعداد دنباله‌های پایان یافته با ۱ = تعداد دنباله‌های پایان‌یافته با ۲. در این‌صورت $d_n = d_{n-۱} + ۲c_n$. ولی $c_n = d_{n-۱} - c_{n-۱}$، بنابراین $d_n = ۲d_{n-۱} + d_{n-۲}$. چون $d_۱ = ۳$ و $d_۲ = ۷$، $d_n = \frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۲})^{n+۱} + \frac{۱}{۲}(۱-\sqrt{۲})^{n+۱}$.

۴.۲ (a)

$$f(x) = x + (\frac{۱}{۲}a_۱+۱)x^۲ + (\frac{۱}{۲}a_۲+۱)x^۳+\cdots = \frac{۱}{۲}xf(x) + x(۱+x+x^۲+\cdots),$$

بنابراین $f(x)(۱-\frac{۱}{۲}x) = \frac{x}{۱-x}$، یعنی $f(x) = \frac{x}{(۱-x)(۱-\frac{۱}{۲}x)} = ۲(\frac{۱}{۱-x} - \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}x})$ و ازآن‌جا $a_n = ۲(۱-\frac{۱}{۲^n})$.

(b) $f(x) = (۶x-۱)(\frac{۱}{۱-۳x} - \frac{۱}{۱-۲x})$ و از آن‌جا

$$a_n = ۶(۳^{n-۱} - ۲^{n-۱}) - (۳^n - ۲^n).$$

۵.۲ $f_n = f_{n-۱}+f_{n-۲}$، بنابراین $f_n = F_{n-۱}$، $۲ \le n$.

۶.۲

$$\begin{aligned} a_n &= ۳(۲^{n-۱} - ۲^{n-۲} + \cdots + (-۱)^{n-۲}۲) = ۶(-۱)^n(۱-۲+\cdots+(-۲)^{n-۲}) \\ &= ۲^n + ۲(-۱)^n. \end{aligned}$$

۷.۲ $L_n = (\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^n + (\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n$.

۱۰.۲

$$\begin{aligned} f(x) &= F_۱x + F_۲x^۲ + (F_۱+F_۲)x^۳ + (F_۲+F_۳)x^۴ + \cdots = F_۱x + F_۲x^۲ + \\ & x^۲(F_۱x+\cdots) + x(F_۲x^۲+\cdots) = x + ۲x^۲ + x^۲f(x) + x(f(x)-x), \end{aligned}$$

واز آن‌جا $f(x)(۱-x-x^۲) = x+x^۲$. بنابراین

$$f(x) = \frac{۱}{۱-x-x^۲} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\frac{\alpha}{۱-\alpha x} - \frac{\beta}{۱-\beta x}) - ۱$$

و در نتیجه $F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(\alpha^{n+۱} + \beta^{n+۱})$.

۱۱.۲ (a) با استقرا.

(b) $F_nF_{n+۲}F^۲_{n+۱} = detM^{n+۲} = (detM)^{n+۲} = (-۱)^{n+۲} = (-۱)^n$. (c) هر سه ماتریس را همچون در (a) بنویسید و سپس درایه‌های فوقانی چپ را مساوی قرار دهید.

۱۲.۲ مرحله استقرا: $F_1 + \cdots + F_k + F_{k+1} = (F_{k+2} - 2) + F_{k+1} = F_{k+3} - 2$.

۱۳.۲ (a) $F_{2n} - 1$، (b) $F_{2n+1} - 1$، (c) $(-1)^{n-1}F_{n-1}$.

۱۴.۲ a_n = تعدادی که در آنها ۱ ثابت می‌ماند + تعدادی که در آنها ۱ و ۲ جابه‌جا می‌شوند؛ پس $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$؛ از این‌رو $a_n = F_n - 1$.

۱۵.۲ (a) تعداد g_{n-1} زیرمجموعه این‌چنینی از $\{1,\ldots,n\}$ وجود دارد که شامل n نیست، و g_{n-2} زیرمجموعه شامل n؛ بنابراین $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$. (b) قرار دهید $p = k$ و $q = n - k$. (c) $F_{n+1} = \sum_k \binom{n+1-k}{k}$.

۱۷.۲ نقاط را با ۱، ۲، ...، $2n$ برچسب‌گذاری کنید. اگر ۱ به $2r + 2$ وصل شود، دایره به دو بخش تقسیم می‌شود، یک بخش با $2r$ رأس ۲، ...، $2r + 1$ و دیگری با $2(n - r + 1)$ رأس. پس $a_n = \sum_r a_r a_{n-r-1}$. درستی $a_1 = 1$ و $a_2 = 2$ را بررسی کنید.

۱۸.۲ از (۱۴.۲) استفاده کنید.

۱۹.۲ مرحله استقرا: $d_{k+1} = kd_k + kd_{k-1} > kd_k > k.(k-1)! = k!$.

۲۰.۲ تعداد مقایسه‌ها کوچک‌تر یا مساوی $(n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ است: شبیه ترتیب حبابی.

۲۱.۲ y_n را از دو معادله داده شده حذف کنید. معادله معین ریشه‌های ۱ و $\frac{4}{5}$ دارد، بنابراین $x_n = A + (\frac{4}{5})^n B$، پس $x_n \to A$. قرار دهید $x_0 = A + B$ و $A + \frac{4}{5}B = x_1 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0$. با حذف B مقدار $A = \frac{5}{2}y_0 - x_0$ را به‌دست آورید.

۲۲.۲ d_n.

فصل ۳

۱.۳ نتیجه ۱.۳ را به‌کار ببرید.

۲.۳ $p = 3n + 3$، $2q = 4n + 2 + 2n + 2 = 6n + 4$، بنابراین $q = p - 1$. قضیه ۳.۳(iii) را به‌کار ببرید.

۳.۳ هر مؤلفه باید حدّاقل $\frac{1}{2}(p-1) + 1 > \frac{p}{2}$ رأس داشته باشد، بنابراین تنها یک مؤلفه می‌تواند وجود داشته باشد.

۴.۳ (a) ۴، (b) ۴۰.

۵.۳ $q-(p-۱)$.

۶.۳ (a) درخت فراگیر ۴ ضلع دارد، پس یکی از x_i ها باید در این درخت از درجه ۲ باشد.

(b) x_i متصل به a و b را می‌توان به ۳ طریق انتخاب کرد؛ در این‌صورت برای هر یک از دو x_i دیگر دو انتخاب ضلع وجود دارد: بنابراین $۱۲ = ۲^۲ \times ۳$.

(c) ۱۰۰×۲^{۹۹}.

۷.۳ (a) به ترتیب AE، DC، AC، AB را انتخاب کنید.

(b) AE، AC، DC، AB را انتخاب کنید.

۸.۳ با به‌کار بردن پریم، HM، HEK، HA، GEK را انتخاب کنید.

۹.۳ به ۱۱ پرواز نیاز است. $۴ + ۴\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۵}$.

۱۰.۳ (a) فرض کنید تسطیح‌پذیر؛ $p = ۶$ و $q = ۹$ منجر به $r = ۵$ می‌شوند. دوقسمتی، پس $۱۸ = ۲q \geq ۴r = ۲۰$، تناقض.

(b) بله، دو ضلع را در بیرون رسم کنید.

(c) نه. اگر چنین باشد، $p = ۸$، $q = ۱۹$، $r = ۱۳$، پس $۳۹ = ۳r \leq ۲q = ۱۸$.

(d) نه. اگر چنین باشد، $p = ۱۱$، $q = ۱۰$، $r = ۱۱$، پس $۴۴ = ۴r \leq ۲q = ۴۰$.

۱۱.۳ ۶.

۱۲.۳ (a) (i) نه. (ii) بله (ضلع‌های $y_i x_{i+۱}$ را در بیرون رسم کنید).

(b) $a_n =$ تعدادی که $x_n y_n$ را به‌کار می‌برند + تعدادی که $x_n y_n$ را به‌کار نمی‌برند، پس $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲}$. بنابراین $a_n = \frac{۱}{۳}(۲^{n+۲} - (-۱)^n)$.

۱۳.۳ (a) $p - q + r = ۲$ و $۲q \geq ۳r$، پس $۲q \geq ۳(۲ + q - p)$، یعنی $q \leq ۳p - ۶$.
برای $K_۵$، $q = ۱۰ > ۹ = ۳p - ۶$.

(b) $p-q+r = ۲$ و $۲q \geq gr$، پس $۲q \geq (۲-p+q)g$، یعنی $(g-۲)q \leq g(p-۲)$.

(c) مقدار $g = ۴$ را برای $K_{۳,۳}$ و $g = ۵$ را برای گراف پیترسن به‌کار ببرید.

۱۴.۳ مثال ۱۴.۳ را پیروی کنید. $۳p = ۲q$، $r = s + h$، $۲q = ۴s + ۶h$، $p - q + r = ۲$، پس $s = ۶$.

۱۵.۳ خط‌ها و قوس‌ها یک گراف با $۲n$ رأس از درجه ۳ در خارج و $\binom{n}{۲}$ رأس از درجه ۴ در داخل ایجاد می‌کنند. پس $p = ۲n + \binom{n}{۲}$، $۲q = ٦n + ۴\binom{n}{۲}$، بنابراین با احتساب ناحیه نامحدود داریم $r = n + \binom{n}{۲} + ۲$.

۱٦.۳ اگر g_n معرف تعدادی باشد که شامل ضلع $x_\circ x_n$ هستند، آنگاه $h_n = ۲h_{n-۱} + g_{n-۱}$ و $g_n = h_n - h_{n-۱}$؛ پس $h_n = ۳h_{n-۱} - h_{n-۲}$.

فصل ۴

۱.۴ (a) B و W باید متناوباً اختیار شوند. (b) در صورت همیلتونی بودن داریم $m = |B| = |W| = n$.

۲.۴ (a) (i) و (ii) همیلتونی هستند. (iii) بنابر تمرین ۱.۴(a) همیلتونی نیست.

(b) هیچ‌کدام.

(c) (iii).

۳.۴ همه همیلتونی؛ تنها هشت‌وجهی اویلری است.

۴.۴ تنها (a) تسطیح‌پذیر است.

۵.۴

$$\begin{gathered}
۰۰۰۰۰ - ۰۱۰۰۰ - ۱۱۰۰۰ - ۱۰۰۰۰ - ۱۰۱۰۰ - ۱۱۱۰۰ - ۰۱۱۰۰ - \\
۰۰۱۰۰ - ۰۰۱۱۰ - ۰۱۱۱۰ - ۱۱۱۱۰ - ۱۰۱۱۰ - ۱۰۰۱۰ - ۱۱۰۱۰ - \\
۰۱۰۱۰ - ۰۰۰۱۰ - ۰۰۰۱۱ - ۰۱۰۱۱ - ۱۱۰۱۱ - ۱۰۰۱۱ - ۱۰۱۱۱ - \\
۱۱۱۱۱ - ۰۱۱۱۱ - ۰۰۱۱۱ - ۰۰۱۰۱ - ۰۱۱۰۱ - ۱۱۱۰۱ - ۱۰۱۰۱ - \\
۱۰۰۰۱ - ۱۱۰۰۱ - ۰۱۰۰۱ - ۰۰۰۰۱ - ۰۰۰۰۰.
\end{gathered}$$

٦.۴ فرض کنید A مجموعه j هایی باشد که v_i و v_j مجاورند و B مجموعه j هایی باشد که $v_{j-۱}$ و v_p مجاورند. در این‌صورت $A \subseteq \{۲, \ldots, p-۱\}$، $|A| \geq \frac{p}{۲}$، $B \subseteq \{۳, \ldots, p\}$، $|B| \geq \frac{p}{۲}$؛ پس $A \cap B \neq \emptyset$.

۷.۴ (a) از اثبات دیراک پیروی کنید. $|A| = \deg(v_۱)$، $|B| = \deg(v_p)$. چون $p \leq \deg(v_p) + \deg(v_۱)$، مجدداً $A \cap B \neq \emptyset$.

(b) اگر رأس‌های غیرمجاور u و w با خاصیت $\deg(u) + \deg(w) \leq p - ۱$ موجود باشند آنگاه G حداکثر

$$\binom{p-۲}{۲} + (p-۱) = \frac{۱}{۲}(p-۱)(p-۲) + ۱$$

ضلع دارد.

(c) یک رأس v در K_p اختیار کنید و تمام اضلاع مجاور به v غیر از یکی را حذف کنید.

۸.۴ A را حذف کنید: ۱۹ = ۱۳ + (۴ + ۲). B را حذف کنید: ۲۱ = ۹ + (۶ + ۶). کران بالا: درخت فراگیر AE، EC، CD، AB کران بالا ۲۳ ($AECDBA$) را می‌دهد.

۹.۴ مقدار دقیق ۳۷ است.

۱۱.۴ (i) رأس‌های ۰، ۱، ۲ و همه اضلاع جهت‌دار ممکن را بردارید. مدار اویلری به‌ترتیب دوری دنباله ۰۰۱۱۲۲۰۲۱ را می‌دهد.

(ii) رأس‌های ۰۰، ۱۰، ...، ۲۲ را انتخاب و ضلع جهت‌دار از ij به jl را رسم کنید. یک جواب عبارت است از ۰۰۰۱۰۱۱۱۲۱۲۲۲۱۰۲۲۰۱۲۰۲۰۰۲۱۱.

۱۲.۴ K_7، با یک حلقه در هر رأس، اویلری است. K_{n+1} با رأس‌های ۰، ...، n و حلقه‌ها اویلری است اگر و فقط اگر n زوج باشد. بنابراین آرایش امکان‌پذیر است اگر و فقط اگر n زوج باشد. برای $n = ۶$ یک مدار اویلری ۰۰۱۱۲۲۳۳۴۴۵۵۶۶۰۲۴۶۱۳۵۰۳۶۲۵۱۴۰ است، که آرایش دوری دمینوهای (۰, ۰)، (۰, ۱)، (۱, ۱)، (۱, ۲)، ...، را می‌دهد.

۱۳.۴ K_n اویلری است اگر و فقط اگر n فرد باشد. ترتیب مطلوب متناظر با یک مدار اویلری می‌شود. برای n زوج، هر ضلع را تکرار کنید تا ترتیبی به‌دست آورید که هر زوجی دوبار مجاور باشند.

فصل ۵

۱.۵ $\frac{16!}{(4!)^5}$.

۲.۵ $\frac{30!}{(7!)^2(8!)^2(2!)^2}$.

۳.۵ $\binom{26}{12}\frac{12!}{2^6 6!}$.

۴.۵ $2 \times \frac{8!}{2^3 3!}$.

۵.۵ (a) یکی از بخش‌ها باید دو عضوی باشد: آن را به $\binom{n}{2}$ طریق انتخاب کنید.

(b) یا یک مجموعه ۳ عضوی و یا دو مجموعه ۲ عضوی وجود دارد. در حالت دوم چهار عضو انتخاب کنید و آن را به دو زوج افراز نمایید. معادلاً، از استقرا و (۲.۵) استفاده کنید.

۶.۵ مرحله استقرا:

$$S(k+۱,۳)=S(k,۲)+۳S(k,۳)>۳S(k,۳)>۳\times ۳^{k-۲}=۳^{(k+۱)-۲}.$$

۷.۵ n به‌همراه l عضو دیگر در یک بخش است که $۰\le l\le n-k$؛ بنابراین

$$S(n,k)=\sum_{l=۰}^{n-k}\binom{n-۱}{l}S(n-۱-l,k-۱).$$

قرار دهید $m=n-۱-l$.

$$\begin{aligned}B(n) &= ۱+\textstyle\sum_{k=۲}^{n}S(n,k)=۱+\sum_{k=۲}^{n}\sum_{m=k-۱}^{n-۱}\binom{n-۱}{m}S(m,k-۱)\\ &= ۱+\textstyle\sum_{m=۱}^{n-۱}\binom{n-۱}{m}\sum_{k=۲}^{m+۱}S(m,k-۱)\\ &= ۱+\textstyle\sum_{m=۱}^{n-۱}\binom{n-۱}{m}B(m).\end{aligned}$$

۸.۵ قضیه ۵.۵ را به‌کار ببرید. $B(۱۰)=۱۱۵۹۷۵$.

۹.۵

$$\begin{aligned}B(k+۱) &= \textstyle\sum_{m=۰}^{k}\binom{k}{m}B(m) &&= \tfrac{۱}{e}\textstyle\sum_{m=۰}^{k}\binom{k}{m}\sum_{j=۰}^{\infty}\tfrac{j^m}{j!}\\ &= \tfrac{۱}{e}\textstyle\sum_{j=۰}^{\infty}\tfrac{۱}{j!}\sum_{m=۰}^{k}\binom{k}{m}j^m\\ &= \tfrac{۱}{e}\textstyle\sum_{j=۰}^{\infty}\tfrac{۱}{j!}(۱+j)^k &&= \tfrac{۱}{e}\textstyle\sum_{j=۰}^{\infty}\tfrac{(j+۱)^{k+۱}}{(j+۱)!}.\end{aligned}$$

۱۰.۵ n یا به تنهایی تشکیل یک دور می‌دهد یا در درون یک دور از $s(n,k-۱)$ جایگشت ۱، ...، $n-۱$ قرار می‌گیرد. $s(۵,۲)=۵۰$، $s(٦,۲)=۲۷۴$.

۱۱.۵ $\chi=۳,۳,۲$. $\chi'=۴,۵,۴$.

۱۲.۵ هر رنگ را حدّاکثر $\alpha(G)$ بار می‌توان به‌کار برد.

۱۳.۵ (a) رأس‌های ۱، ...، ۸ رنگ‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۳، ۱، ۲، ۳ را می‌گیرند.

(b) رأس‌های ۸، ...، ۱ رنگ‌های ۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۲، ۵، ۱ را می‌گیرند.

۱۴.۵ (a) رأس‌های ۸، ۱، ۳، ٦، ۷، ۲، ۵، ۴ رنگ‌های ۱، ۱، ۲، ۲، ۱، ۳، ۳، ۴، ۵ را می‌گیرند.

(b) رأس‌های ۴، ۵، ۲، ۷، ٦، ۳، ۱، ۸ رنگ‌های ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۲، ۴، ۱ را می‌گیرند.

۱۵.۵ رأس‌ها را با رنگ‌های $c_۱$، ...، $c_۴$ رنگ کنید. سپس ترتیبی به رأس‌ها بدهید به‌قسمی‌که همه آنهایی که رنگ $c_۱$ دارند در ابتدا قرار گیرند، سپس آنهایی که رنگ $c_۲$ دارند، و غیره.

۱۶.۵ همه کلاس ۱ هستند.

۱۷.۵ با دو رنگ اضلاع دور همیلتونی را رنگ کنید. اضلاع باقیمانده رنگ سومی را می‌گیرند.

۱۸.۵ (a) قضیه ۱.۳ را به‌کار ببرید. (b) هر تطابقی می‌تواند حدّاکثر k ضلع داشته باشد، پس

$$\chi'(G) \geq \frac{1}{k}(k+\frac{1}{2})r > r.$$

۱۹.۵ (b) مرحله استقرا. یک رأس از درجه ۱،چون v، را حذف کنید: $T-\{v\}$ را می‌توان به $\lambda(\lambda-1)^{k-2}$ طریق رنگ کرد؛ پس از آن v به $\lambda-1$ طریق رنگ می‌شود.

(c) در یک رنگ‌آمیزی G'، ممکن است x و y هم‌رنگ باشند، بنابراین $f_\lambda(G'')$ را کم کنید. برای استنتاج، از استقرا روی تعداد اضلاع استفاده کنید.

(d) از رابطه بازگشتی $a_n = \lambda(\lambda-1)^{n-1} - a_{n-1}$ رابطه $a_n - (\lambda-2)a_{n-1} - (\lambda-1)a_{n-2} = 0$ به‌دست می‌آید. معادله معین $(x+1)(x-\lambda+1) = 0$ است.

فصل ۶

۱.۶

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D| &= |A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|\\ &- |B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|\\ &+ |A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\ &+ |B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|.\end{aligned}$$

۲.۶ از $44 - x + 67 = 100$ نتیجه می‌شود $x = 77$.

۳.۶ از $x + 35 - 25 - 20 - 49 + 49 + 70 = 100$ مقدار $x = 12$ به‌دست می‌آید.

۴.۶ $1000 - 142 - 90 - 76 + 12 + 10 + 6 - 0 = 720.$

۵.۶ (a)

$|S_1| > 75,\ |S_1\cap S_2| > 150 - 100 = 50,$

$S_1\cap S_2\cap S_3| > 75 + 50 - 100 = 25,$

(b) $|S_1| = m(n-1),\ |S_1\cap S_2| > 2m(n-1)-mn = m(n-2),\ \ldots.$

۶.۶ مثال ۷.۶ را پیروی کنید: $\binom{102}{2} - \binom{51}{2} - \binom{61}{2} - \binom{71}{2} + \binom{10}{2} + \binom{20}{2} + \binom{30}{2} = 231$.

۷.۶ تعریف کنید P_1: بلوک ۱۲ رخ دهد، ...، P_4: بلوک ۷۸ رخ دهد. $N(i) = 7!$، $N(i,j) = 6!$، و غیره. مقدار $8! - 4.7! + 6.6! - 4.5! + 4! = 24024$ را به‌دست آورید.

۸.٦ P_i را قرار گرفتن ۲i در موقعیت ۲i ($۱ \le i \le ۴$) تعریف کنید. مجدداً ۲۴۰۲۴ را به‌دست آورید.

۹.٦ $|S| = ۸\times۷\times٦ = ۳۳٦$. عدد $۲۲۷ = ۱-(٦)۳+(۷\times٦)۳-۳۳٦$ را به‌دست آورید.

۱۰.٦ فرض کنید S = مجموعه همه جایگشت‌ها؛ در این‌صورت $|S| = \frac{۱۰!}{۲^۵}$. فرض کنید P_i: دو i مجاور هستند. در این‌صورت $N(۱) = \frac{۹!}{۲^۴}$، $N(۱,۲) = \frac{۸!}{۲^۳}$، و غیره. مقدار

$$\frac{۱۰!}{۲^۵} - \frac{۵.۹!}{۲^۴} + ۱۰\frac{۸!}{۲^۳} - ۱۰\frac{۷!}{۲^۲} + ۵\frac{٦!}{۲} - ۵! = ۳۹۴۸۰$$

را به‌دست آورید.

۱۱.٦ $$\phi(n) = n - \sum \tfrac{n}{p_i} + \sum \tfrac{n}{p_ip_j} - \cdots = n\prod_{p|n}(۱-\tfrac{۱}{p}).$$
$$\phi(۱۰۰) = ۴۰,\ \phi(۲۰۰) = ۸۰.$$

۱۲.٦ $f_\lambda(\mathcal{G}) = \lambda^n - \sum N(i) + \sum N(i,j) - \cdots$. $N(i) = \lambda^{n-۱}$ (دو انتهای ضلع e_i رنگ یکسانی می‌گیرند). نیز $N(i,j) = \lambda^{n-۲}$. (دو حالت وجود دارد: e_i و e_j ممکن است یک رأس مشترک داشته باشند یا نداشته باشند، در هر دو حالت $\lambda^{n-۲}$ را به‌دست آورید.) نیز، $N(i,j,k) = \lambda^{n-۲}$ اگر e_i، e_j، e_k یک دور به طول ۳ بسازند، و در غیر این‌صورت این مقدار برابر $\lambda^{n-۳}$ است.

۱۳.٦ $S = \{(x_۱,\dots,x_{۱۲}) : ۱ \le x_i \le ٦\}$. شرط P_i: x_i مقدار i را ندارد. تعداد پرتاب‌هایی که در آنها تمامی اعداد ظاهر شوند برابر است با

$$|S| - \sum N(i) + \sum N(i,j) - \cdots =$$

$$٦^{۱۲} - \binom{٦}{۱}۵^{۱۲} + \binom{٦}{۲}۴^{۱۲} - \binom{٦}{۳}۳^{۱۲} + \binom{٦}{۲}۲^{۱۲} - \binom{٦}{۱} = ۹۵۳۰۲۹۴۴۰.$$

برای به‌دست آوردن احتمال، بر $٦^{۱۲}$ تقسیم کنید.

۱۴.٦ اگر S = مجموعه تمامی افرازهای ۴ بخشی، آنگاه $|S| = S(۱۰,۴)$. فرض کنید P_i: $\{i\}$ یک مجموعه یکانی است. پس $N(i) = S(۹,۳)$، $N(i,j) = S(۸,۲)$، و غیره. جواب برابر $S(۱۰,۴) - \binom{۱۰}{۱}S(۹,۳) + \binom{۱۰}{۲}S(۸,۲) - \binom{۱۰}{۳}S(۷,۱) = ۹۴۵۰$ است. معادلاً، تعداد افرازهای از نوع $۲^۳۴^۱$ یا $۲^۲۳^۲$ را به‌دست آورید، یعنی $\frac{۱۰!}{۲^۲۲!(۳!)^۲۲!} + \frac{۱۰!}{۲^۳۳!۴!}$.

فصل ۷

۱.۷

$$\begin{matrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{matrix}\qquad \begin{matrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{matrix},$$

۲.۷ دور ۱: ۲ v ۱، ۴ v ۳، ۶ v ۵. دور ۲: ۳ v ۱، ۵ v ۲، ۶ v ۴، و غیره.

۳.۷ $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n^۲} i = \frac{۱}{۲}n(n^۲+۱)$.

۶.۷

$$a_{ij}=a_{iJ} \Rightarrow ۲i+j-۲ \equiv ۲i+J-۲ \Rightarrow j\equiv J \Rightarrow j=J.$$

$$a_{ij}=a_{Ij} \Rightarrow ۲i+j-۲ \equiv ۲I+j-۲ \Rightarrow ۲i \equiv ۲I \pmod n$$

چون n فرد است پس $i\equiv I$. بنابراین A یک مربع لاتین است. مشابهاً برای B.

تعامد: $a_{ij}=a_{IJ}\,\&\,b_{ij}=b_{IJ} \Rightarrow ۲i+j \equiv ۲I+J\,\&\,۳i+j\equiv ۳I+J \Rightarrow i\equiv I \Rightarrow j\equiv J.$

قطر شکسته A با شروع $a_{۱j}$ متشکل است از j، $j+۱+۲$، $j+۲+۴$، ...، یعنی j، $j+۳$، $j+۶$، .... ولی $u\equiv v \Leftarrow ۳u\equiv ۳v \Leftarrow j+۳v\equiv j+۳u$ چون $۳\nmid n$. پس درایه‌های روی قطر متفاوت هستند.

۷.۷ (b) $M_۳$ خودمتعامد است.

(c) فرض کنید $a_{ij}=a_{IJ}$ و $a^T_{ij}=a^T_{IJ}$. پس $۲i+j\equiv ۲I+J$ و $۲j+i\equiv ۲J+I$. در نتیجه $i-j\equiv I-J$ و بنابراین $J=I-i+j$. پس $۲i+j\equiv ۲I+I-i+j$، یعنی $۳i\equiv ۳I$، و از این‌رو $i\equiv I$، $j\equiv J$.

۸.۷ (a) تعداد دفعاتی که ۱ در خارج قطر در موقعیت‌های متقارن نسبت به قطر ظاهر می‌شود عددی زوج است. بنابراین جمعاً تعداد دفعات ظهور آن فرد است، پس n فرد است.

(b)

$$a_{ij}=a_{iJ} \Rightarrow j(m+۱)\equiv J(m+۱) \Rightarrow ۲(m+۱)j \equiv ۲(m+۱)J$$
$$\Rightarrow j\equiv J \pmod{۲m+۱}.$$

مشابهاً برای ستون‌ها. چون $۲(m+۱)\equiv ۱ \pmod n$، درایه i ام قطر $۲(m+۱)i=i$ است. برای $m=۲$، A چنین است

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵.

۹.۷ تعامد. فرض کنید $\lambda_i\lambda_k+\lambda_j=\lambda_I\lambda_k+\lambda_J$ و $\lambda_i\lambda_h+\lambda_j=\lambda_I\lambda_h+\lambda_J$. پس $\lambda_i(\lambda_k-\lambda_h)=\lambda_I(\lambda_k-\lambda_h)$، یعنی $\lambda_i=\lambda_I$ زیرا $\lambda_h\neq\lambda_k$، در نتیجه $i=I$. بنابراین $\lambda_j=\lambda_J$، یعنی $j=J$.

۱۰.۷ سطرها همان ستون‌های (۳.۷) با ترتیب متفاوتی هستند.

۱۲.۷ برای مثال ۳، ۴، ۲، ۱.

۱۳.۷ مجموعه‌های {۶, ۵, ۲}، {۶, ۲}، {۵, ۲}، {۶, ۵} تنها ۳ عضو در اجتماع خود دارند.

۱۴.۷ دست‌ها را فراموش کنید. از هر مقدار ۴ کارت وجود دارد. هر k ستونی حاوی $۴k$ کارت است که باید حدّاقل $k = \frac{۴k}{۴}$ مقدار مختلف در میان آنها وجود داشته باشد. قضیه هال را به‌کار ببرید.

۱۵.۷ هر k مجموعه A_i دارای kn عضو در اجتماع خود هستند. این kn عضو باید در میان حدّاقل $k = \frac{kn}{n}$ مجموعه B_i توزیع شوند، بنابراین اجتماع هر k مجموعه S_i حاوی حدّاقل k عضو است.

۱۶.۷ آرایه ۵ × ۵ N با ترتیب طبیعی روی ۱، ...، ۲۵ را انتخاب کنید. پنج سطر و پنج ستون منجر به ۱۰ بلوک می‌شوند. متناظر با $A_۱$، بلوک‌های

{۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱}, {۱, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲}, {۲, ۶, ۱۵, ۱۹, ۲۳},
{۳, ۷, ۱۱, ۲۰, ۲۴}, {۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۵}

را به‌دست آورید. مشابهاً برای $A_۲$، ...، $A_۵$.

۱۷.۷ قرار دهید $A_i = \{(i, j) : m_{ij} = ۱\}$ و $B_i = \{(j, i) : m_{ji} = ۱\}$ که $M = (m_{ij})$. از تمرین ۱۵.۷برای به‌دست آوردن یک ماتریس جایگشتی $P_۱$ استفاده کنید. (معادلاً از قضیه ۶.۷ یا قضیه ۱۲.۵ استفاده کنید.) سپس این بحث را روی $M - P_۱$ برای به‌دست آوردن ماتریس جایگشتی $P_۲$ به‌کار ببرید. پس از آن $M - P_۱ - P_۲$ را درنظر بگیرید، و غیره.

فصل ۸

۱.۸ دور اول بازی‌های ۱ v ∞، ۲ v ۹، ۳ v ۸، ۴ v ۷، ۵ v ۶ را دارد. برای ۹ تیم بازی‌های شامل ∞ را حذف کنید.

۲.۸

$x_۱$ v $y_۲$,	$x_۲$ v $y_۳$,	$x_۳$ v $y_۴$,	$x_۴$ v $y_۵$,	$x_۵$ v $y_۱$
$x_۱$ v $y_۳$,	$x_۲$ v $y_۴$,	$x_۳$ v $y_۵$,	$x_۴$ v $y_۱$,	$x_۵$ v $y_۲$
$x_۱$ v $y_۴$,	$x_۲$ v $y_۵$,	$x_۳$ v $y_۱$,	$x_۴$ v $y_۲$,	$x_۵$ v $y_۳$
$x_۱$ v $y_۵$,	$x_۲$ v $y_۱$,	$x_۳$ v $y_۲$,	$x_۴$ v $y_۳$,	$x_۵$ v $y_۴$
$x_۱$ v $y_۱$,	$x_۲$ v $x_۵$,	$x_۳$ v $x_۴$,	$y_۲$ v $y_۵$,	$y_۳$ v $y_۴$
$x_۲$ v $y_۲$,	$x_۳$ v $x_۱$,	$x_۴$ v $x_۵$,	$y_۳$ v $y_۱$,	$y_۴$ v $y_۵$
$x_۳$ v $y_۳$,	$x_۴$ v $x_۲$,	$x_۵$ v $x_۱$,	$y_۴$ v $y_۲$,	$y_۵$ v $y_۱$
$x_۴$ v $y_۴$,	$x_۵$ v $x_۳$,	$x_۱$ v $x_۲$,	$y_۵$ v $y_۳$,	$y_۱$ v $y_۲$
$x_۵$ v $y_۵$,	$x_۱$ v $x_۴$,	$x_۲$ v $x_۳$,	$y_۱$ v $y_۴$,	$y_۲$ v $y_۳$

۳.۸ بله، بنابر قضیه ۵.۷.

۴.۸ (a) پره‌ها، (b) هیچ‌کدام، (c) اضلاع ۱۲، ۳۴، ۵٦ در شکل ۱.۴(a)، (d) "اضلاع عمودی".

۵.۸ در شکل ۱.۴(a) دورهای ۱۲۳٦۴۵۱ و ۱٦۵۲۴۳۱ را انتخاب کنید. هر کدام دو ۱ــعامل می‌دهند.

٦.۸ همه.

۷.۸ دور همیلتونی دو ۱ــعامل می‌دهد؛ بقیه اضلاع ۱ــعامل دیگری را می‌سازند.

۸.۸ (a) A_i v B_{i+k-1} در دور k، که اندیس‌ها به هنگ ۵ ساده می‌شوند تا در {۱, . . . , ۵} قرار گیرند.

(b) از الحاق اولین دو MOLS مثال ۳.۷ برای به‌دست آوردن دور اول A_2 v B_3 در میدان ۱، A_3 v B_4 در میدان ۲، A_4 v B_5 در میدان ۳، A_5 v B_1 در میدان ۴، A_1 v B_2 در میدان ۵، و غیره، استفاده کنید.

۹.۸ با به‌کار بردن اولین ۳ MOLS، A_1، A_2، A_3 از مثال ۳.۷، روش بخش ۳.۸ را دنبال کنید. سپس از A_4 برای تعیین میدان استفاده کنید. برنامه زیر را به‌دست آورید که سطرها و ستون‌ها به‌ترتیب دورها و میدان‌ها هستند.

B_5G_1 v b_1g_1	B_1G_4 v b_3g_5	B_2G_2 v b_5g_4	B_3G_5 v b_2g_3	B_4G_3 v b_4g_2
B_4G_4 v b_5g_3	B_5G_2 v b_2g_2	B_1G_5 v b_4g_1	B_2G_3 v b_1g_5	B_3G_1 v b_3g_4
B_3G_2 v b_4g_5	B_4G_5 v b_1g_4	B_5G_3 v b_3g_3	B_1G_1 v b_5g_2	B_2G_4 v b_2g_1
B_2G_5 v b_3g_2	B_3G_3 v b_5g_1	B_4G_1 v b_2g_5	B_5G_4 v b_4g_4	B_1G_2 v b_1g_3
B_1G_3 v b_2g_4	B_2G_1 v b_4g_3	B_3G_4 v b_1g_2	B_4G_2 v b_3g_1	B_5G_5 v b_5g_5

۱۰.۸ (a) تنها دنباله‌های بدون استراحت $HAHA\ldots H$ و $AHAH\ldots A$ هستند. امّا هیچ دو تیمی دنباله بازی خانه و خارج یکسانی ندارند (زیرا در غیر این‌صورت نمی‌توانند با هم بازی کنند).

(b) ∞ و ۰ هیچ استراحتی ندارند، هر کدام دیگر یک استراحت بعد از بازی خود در مقابل ∞ دارد.

۱۱.۸ یک گراف دو قسمتی رسم کنید که n رأس سیاه آن به‌وسیله زوج‌های دور اول و n رأس سفید آن به‌وسیله زوج‌های دور k ام برچسب‌گذاری شده‌اند. دو رأس را به هم وصل کنید تنها اگر زوج‌های متناظر جدا از هم نیستند. بنابر قضیه ٦.۷ با $m = 2$ یک تطابق کامل وجود دارد که در آن هر ضلع یک تیم را معرفی می‌کند. بازی دور k ام این تیم‌ها را در خانه آنها قرار دهید.

معادلاً، تمرین ۱۵.۷ را روی زوج‌های دور اول و دور k ام به‌کار ببرید: یک SDR مشترک انتخاب کنید و بازی دور k ام این تیم‌ها را در خانه قرار دهید.

فصل ۹

۱.۹ (a) b عدد صحیح نیست. (b) $v > ۱۴ = b$.

۲.۹ مکمل یک $(۱۳, ۴, ۱)$ طرح.

۳.۹

$$\text{(a)}\quad vr(k-۱)\lambda - r(k-۱)\lambda = \lambda(v-۱)r(k-۱) = r^۲(k-۱)^۲.$$

$$\text{(b)}\quad (k-۱)\lambda + (v-k)\lambda = \lambda(v-۱) + r(k-۱).$$

۴.۹ از $v\lambda = k^۲ - k + \lambda$ استفاده کنید.

۵.۹ $(k-۱)^{v-۱}$ باید یک مربع باشد، بنابراین، با تقسیم بر $(k-\lambda)^{v-۲}$، که یک مربع است، $k-\lambda$ نیز باید یک مربع باشد. برای قسمت‌های آخر باید نشان داد که دو طرح متقارن خواهند بود.

۶.۹

$$\text{(a)}\quad (n^۲+n, n^۲, n^۲-۱, n^۲-n, n^۲-n-۱),$$

$$\text{(b)}\quad (۴m-۱, ۴m-۱, ۲m, ۲m, m).$$

۷.۹ از $H_۴$ و قضیه ۱۳.۹ استفاده کنید.

۸.۹ از قضایای ۱۶.۹ و ۱۴.۹ استفاده کنید.

۹.۹ در هر یک از حالت‌ها، تفاضل‌ها $\pm(d_i - d_j)$ هستند.

۱۰.۹–۱۴.۹ تفاضل‌ها را بررسی کنید.

۱۵.۹ برای هر i، تعداد ۱۰ شریک سطری و ستونی، و ۵ شریک تعیین شده به‌وسیله L وجود دارند. بنابراین هر بلوک ۱۵ عضو دارد. برای هر i و j هم‌سطر در N، این دو عدد در ۴ B_k قرار دارند که k با i و j هم‌سطر است؛ i و j در B_h و B_l نیز قرار دارند که $h(l)$ عضوی از N است که با $i(j)$ هم‌سطر است به‌قسمی‌که $h(l)$ و $j(i)$ درایه‌های متناظر یکسانی را در L دارند. برای حالت‌های دیگر وضعیت مشابه‌ای برقرار است.

۱۶.۹ (a) یک درایه از $B = ۲A - J$ برابر ۱ است هرگاه همان درایه در A برابر ۱ باشد، و برابر ۱− است هرگاه درایه متناظر در A صفر باشد.

(b)
$$\begin{aligned} B^TB &= (۲A^T - J)(۲A - J) = ۴A^TA - ۲A^TJ - ۲JA + J^۲ \\ &= ۴(k-\lambda)I + ۴\lambda J - ۲(JA)^T - ۲JA + J^۲ \\ &= ۴(k-\lambda)I + (۴\lambda - ۴k + v)J = vI \Leftrightarrow ۴(k-\lambda) = v. \end{aligned}$$

(c) مقادیر $v = ۳۶$، $k = ۱۵$، $\lambda = ۶$ رابطه $۴(k-۱) = v$ را تأمین می‌کنند.

۱۷.۹ مرتبه‌های ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ با دوبرابرسازی؛ ۱۲، ۲۰، ۲۴، ۴۴، ۴۸ به وسیله قضیه ۱۶.۹؛ ۳۶ بنابر تمرین ۱۶.۹؛ ۴۰ با دوبرابر کردن ۲۰؛ ۲۸ با بسط قضیه ۱۶.۹ به توان اعداد اول و استفاده از میدان ۲۷ عضوی.

۱۸.۹ رابطه (۹.۹) تبدیل به $d\binom{N}{۲} \leq S$ می‌شود؛ (۱۰.۹) تغییر نمی‌کند.

۱۹.۹ اگر $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e$ آنگاه $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ وزن e دارد؛ بنابراین می‌نیمم وزن $\leq$ می نیمم فاصله. به‌عکس، اگر $w(\mathbf{x}) = w$ آنگاه $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = w$؛ پس می‌نیمم فاصله $\geq$ می‌نیمم وزن.

۲۰.۹ می‌توان فرض کرد که $\mathbf{0}$ در کد قرار دارد. همه دنباله‌های به وزن ۱ به $\mathbf{0}$ دکد می‌شوند. بنابر کامل بودن، کدواژه به وزن ۲ وجود ندارد، بنابراین همه دنباله‌های به وزن ۲ باید به یک کدواژه به وزن ۳ تصحیح شوند. یک تناظر یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های A از $\{۱, \ldots, n\}$ و دنباله‌های دوتایی $\mathbf{x}_A = x_۱ \ldots x_n$، که $x_i = ۱$ اگر و فقط اگر $i \in A$، درنظر بگیرید. زیرمجموعه‌های ۳ عضوی متناظر با کدواژه‌های به وزن ۳ یک $\mathrm{STS}(n)$ می‌سازند: اگر $|B| = ۲$ و $B \subseteq \{۱, \ldots, n\}$ آنگاه B در $\mathbf{c}$ قرار دارد که $\mathbf{x_c}$ دنباله $\mathbf{x}_B$ را تصحیح می‌کند.

۲۱.۹ (a) به دو روش مختلف زوج‌های (A, P) را شمارش کنید که P یک زوج از اعضای B است و A بلوکی غیر از B است که حاوی P می‌باشد.

(b) تعداد زوج‌های (A, y) را به دو روش متفاوت شمارش کنید که y عضوی از B است و A بلوکی غیر از B است که شامل y است.

(d) از بسط $\sum_i (i-m)^۲ x_i \geq ۰$ نتیجه می‌شود $\sum i^۲ x_i - ۲m \sum i x_i + m^۲ \sum x_i \geq ۰$. عدد $i^۲$ را به‌فرم $۲\binom{i}{۲} + i$ بنویسید؛ سپس از (a) و (b) نتیجه می‌شود

$$k(k-۱)(\lambda-۱) + m^۲(b-۱) \geq (۲m-۱)k(r-۱).$$

جایگزینی $m(b-۱)$ به‌وسیله $k(r-۱)$ منجر به (d) می‌شود.
سپس در (d) از جایگزینی $k(b-۱)$ به‌وسیله $vr-k$ رابطه

$$(vr-k)(k-۱)\lambda + vr(r-k) + k^۲ - rk \geq k^۲(r-۱)^۲$$

را به‌دست آورید. حال تمرین ۳.۹(a) را به‌کار ببرید و با فاکتورگیری از $r-k$ رابطه $(r-k)(r-۲rk+(k-۱)\lambda+vr) \geq ۰$ را به‌دست آورید. سرانجام از تمرین ۳.۹(b) نتیجه بگیرید $(r-k)(v-k)(r-\lambda) \geq ۰$، و از آن‌جا $k \leq r$، یعنی $v \leq b$.

مطالعه بیشتر

ایده‌های اصلی دو فصل اول در اکثر کتاب‌های درسی ترکیبیات، به‌عنوان مثال برالدی[1] [۵]،کمرن[2] [۶] و کتاب نسبتاً جامع گراهام—نوث—باتاشنک[3] [۱۱]، پوشانده می‌شوند. فصل‌های ۳ تا ۵ بعضی از ایده‌های اصلی نظریه گراف را شامل می‌شوند؛ جزئیات بیشتر را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های درسی موجود، از جمله دایستل[4] [۹]، ویلسون[5] [۲۰]، ویلسون—واتکنز[6] [۲۱]، و ترجمه انگلیسی [۱۵] کتاب همیشه تازه کونیگ[7] [۱۴]، یافت. خواننده علاقمند در تاریخ نظریه گراف را به چاپ جدید کتاب تألیف بیگز—لوید—ویلسون[8] [۴] ارجاع می‌دهیم.

ارائه‌ای عالی از اصل شمول—حذف را در [۵] و [۱۸] می‌توان یافت. اثبات قضیه کیلی روی درخت‌های برچسب‌دار، با استفاده از اصل شمول—حذف، منتسب به مون[9] [۱۹] است، و مقاله بسیار خوبی روی مسئله زناشویی، توسط دوتکا[10] در [۱۰] وجود دارد.

مربع‌های لاتین با جزئیات خیلی بیشتری در کتاب‌های دنیس و کیدول[11] [۷]، [۸] مطرح شده و موضوع اصلی کتاب لیوین و مولن[12] [۱۶] هستند. همچنین مطالبی راجع به مربع‌های لاتین در [۱]، [۵]، [۶] و [۱۸] وجود دارد. ارتباط مربع‌های لاتین و بازی‌ها در [۱] توضیح داده شده‌اند، جایی که موضوعات فصل‌های ۷—۹ کامل‌تر بررسی شده‌اند. در [۱]، همچون [۱۶] و [۱۸]، به طرح‌های بلوکی نیز پرداخته شده است، و گزارش‌های خوبی از نظریه کدگذاری در کتاب‌های بیلیث[13] [۳]، هیل[14] [۱۲] و ون‌لنت[15] [۱۷] وجود دارد.

منبع مهم دیگری از اطلاعات تارنما است. روی اعداد فیبوناتچی یا بی‌نظمی و یا مربع‌های لاتین جستجو کنید، ملاحظه خواهید کرد که پایگاه‌های بسیار جالب و آگاهی‌بخشی وجود دارند. همچنین درس کوتاهی در طرح‌ها [۲] به‌صورت رایگان در دسترس است.

---

[1] Brualdi
[2] Cameron
[3] Graham-Knuth-Patashnik
[4] Diestel
[5] Wilson
[6] Wilson-Watkins
[7] König
[8] Biggs-Lloyd-Wilson
[9] Moon
[10] Dutka
[11] De'nes and Keedwell
[12] Laÿwine and Mullen
[13] Baylis
[14] Hill
[15] Van Lint

کتاب‌نامه

[1] I. Anderson, *Combinatorial Designs and Tournaments*, Oxford University Press, 1977.

[2] Anderson and I. Honkala, *A Short Course in Combinatorrial Design*, http://www.utu.fi/~honkala /designs.ps

[3] J. Baylis, *Error-Correcting Code: A Mathematical introduction*, Chapman and Hall, 1998.

[4] N. L. Biggs, E. K. Loyd and R. J Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford University Press, 1998.

[5] R. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, 3rd edition, Prentice-Hall, 1999.

[6] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.

[7] J. Dénes and A. D. Keedwell, *Latin Squares and Their Applications*, English University Press,1974.

[8] J. Dénes and A. D. Keedwell, *Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications*, North Holland, 1991.

[9] R. Diestel, *Graph Theory*, 2nd edition, Springer, 2000.

[10] J. Dutka, On the Problème des Ménages, *Mathematical Intelligencer* 8 (1986), 18-25.

[11] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2nd edition, Addison-Wesley, 1994.

[12] R. Hill, *A First Course in Coding Theory*, Oxford University Press, 1996.

[13] G. A. Jones and J. M. Jones, *Elementary Number Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[14] D. Kőning, *Theorie Der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Akad. Verlag., Leipzig, 1936.

[15] D. Kőning, *Theory of Finite and Infinite Graphs* (translate by R. McCoart), Birkhauser, 1990.

[16] C. F. Laywine and G. L. Mullen, *Discrete Mathematics using Latin Squars*, Wiley, 1998.

[17] J. H. van Lint, *Introduction to Coding Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1992.

[18] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, 1992.

[19] J. W. Moon, Another Proof of Cayley's Formula for Counting Trees, *Amber. Math. Monthly 70* (1963), 846-847.

[20] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, 4th edition, Longman, 1996.

[21] R. J. Wilson and J. J. Watkins, *Graphs, an Introductory Approach*, Wiley, 1990.

واژه‌نامه

Ian Anderson, MA, PhD
Department of Mathematics, University of Glasgow, University Gardens,
Glasgow G12 8QW, UK

Cover illustration elements reproduced by kind permission of:
Aptech Systems, Inc., Publishers of the GAUSS Mathematical and Statistical System, 23804 S.E. Kent-Kangley Road, Maple Valley, WA 98038, USA. Tel: (206) 432 - 7855 Fax (206) 432 - 7832 email: info@aptech.com URL: www.aptech.com
American Statistical Association: Chance Vol 8 No 1, 1995 article by KS and KW Heiner 'Tree Rings of the Northern Shawangunks' page 32 fig 2
Springer-Verlag: Mathematica in Education and Research Vol 4 Issue 3 1995 article by Roman E Maeder, Beatrice Amrhein and Oliver Gloor 'Illustrated Mathematics: Visualization of Mathematical Objects' page 9 fig 11, originally published as a CD ROM 'Illustrated Mathematics' by TELOS: ISBN 0-387-14222-3, German edition by Birkhauser: ISBN 3-7643-5100-4.
Mathematica in Education and Research Vol 4 Issue 3 1995 article by Richard J Gaylord and Kazume Nishidate 'Traffic Engineering with Cellular Automata' page 35 fig 2. Mathematica in Education and Research Vol 5 Issue 2 1996 article by Michael Trott 'The Implicitization of a Trefoil Knot' page 14.
Mathematica in Education and Research Vol 5 Issue 2 1996 article by Lee de Cola 'Coins, Trees, Bars and Bells: Simulation of the Binomial Process' page 19 fig 3. Mathematica in Education and Research Vol 5 Issue 2 1996 article by Richard Gaylord and Kazume Nishidate 'Contagious Spreading' page 33 fig 1. Mathematica in Education and Research Vol 5 Issue 2 1996 article by Joe Buhler and Stan Wagon 'Secrets of the Madelung Constant' page 50 fig 1.

Springer Undergraduate Mathematics Series ISSN 1615-2085
ISBN 1-85233-236-0 Springer-Verlag London Berlin Heidelberg

British Library Cataloguing in Publication Data
Anderson, Ian, 1942-
A first course in discrete mathematics. - (Springer undergraduate mathematics series)
1. Computer science – Mathematics 2. Combinatorial analysis
I. Title
510
ISBN 1852332360

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
Anderson, Ian, 1942-
A first course in discrete mathematics / Ian Anderson.
p. cm. -- (Springer undergraduate mathematics series)
Includes bibliographical references and index.
ISBN 1-85233-236-0 (alk. paper)
1. Mathematics. 2. Computer Science - Mathematics. I. Title. II. Series.
QA39.2.A533 2000
510--dc21 00-063762

Typesetting: Camera ready by the author and Michael Mackey
Printed and bound at the Athenæum Press Ltd., Gateshead, Tyne & Wear
12/3830-543210 Printed on acid-free paper SPIN 10747858

A first course in Discrete Mathematics

by:

Ian Anderson

Translated by:

Morteza Esmaeili
Assistant Professor of mathematics
Department of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology

2004

A First Course in Discrete Mathematics

Isfahan University of Technology

By:

Ian Anderson

Translated by:

M. Esmaeili

Professor of Mathematics
Isfahan University of Technology

ISBN:978-964-8476-02-6

9 789648 476026