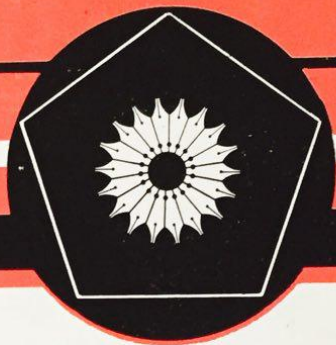


هوسکینگ، جويس، ترنر



# نخستين گامها در آناليز عددي

ترجمهٔ اسماعيل بابليان، ميرکمال ميرنيا



# نخستین گامها در آنالیز عددی

هوسکینگ، جويس، ترنر

ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

# بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
هفت	پیشگفتار مؤلفان
۱	مقدمه
۵	خطاها
۵	گام یک ۱ منابع خطا
۸	گام دو ۲ تقریب اعداد
۱۱	گام سه ۳ تولید و انتشار خطا
۱۶	گام چهار ۴ حساب ممیز سیار
۲۱	گام پنج ۵ تقریب توابع
۲۶	معادلات غیر خطی
۲۶	گام شش ۱ حل معادلات جبری و متعالی
۳۱	گام هفت ۲ روش تنصیف
۳۵	گام هشت ۳ روش نابجایی
۴۰	گام نه ۴ روش تکرار ساده
۴۴	گام ده ۵ روش تکراری نیوتن - رفسون
۵۱	دستگاههای معادلات خطی
۵۱	گام یازده ۱ حل به روش حذفی

صفحه	عنوان
۶۰	گام دوازده ۲ خطاها و بدحالت بودن
۶۶	گام سیزده ۳ روش تکرار گاوس - سایدل
۷۰	گام چهارده ۴* معکوس کردن ماتریس
۷۷	تفاضلات متناهی
۷۷	گام پانزده ۱ جدول
۸۲	گام شانزده ۲ نمادهای تفاضل پیشرو، پسرو، و مرکزی
۸۷	گام هفده ۳ چندجمله‌ایها
۹۳	گام هیجده ۴ کشف و تصحیح اشتباهات
۱۰۰	درونیایی
۱۰۰	گام نوزده ۱ درونیایی خطی و درجه دوم
۱۰۶	گام بیست ۲ دستورهای درونیایی نیوتن
۱۱۲	گام بیست و یک ۳* دیگر دستورهای درونیایی شامل تفاضلات متناهی
۱۱۹	گام بیست و دو ۴ دستور درونیایی لاگرانژ
۱۲۴	گام بیست و سه ۵* تفاضلات تقسیم شده و روش ایتکن
۱۳۱	گام بیست و چهار ۶* درونیایی معکوس
۱۳۷	برازش منحنی
۱۳۷	گام بیست و پنج ۱ برازش منحنی
۱۴۷	مشتق گیری عددی
۱۴۷	گام بیست و شش ۱ مشتق گیری عددی
۱۵۱	انتگرال گیری عددی
۱۵۱	گام بیست و هفت ۱ قاعده ذوزنقه‌ای
۱۵۷	گام بیست و هشت ۲ قاعده سیمپسون
۱۶۱	گام بیست و نه ۳ کوادراتور از یک جدول مقادیر
۱۶۴	گام سی ۴ دستورهای انتگرال گیری گاوس

صفحه	عنوان
۱۶۹	گام سی و يك * ۵ معادلات دیفرانسیل
۱۷۵	ضمیمه فلوچارتها
۱۸۵	فهرست منابع
۱۸۶	جواب تمرینها
۲۳۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۴۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۲۵۳	فهرست راهنما

## پیشگفتار مؤلفان

هدف این کتاب، چنانکه از نامش برمی آید، عرضه درآمدهای بر مفاهیم مقدماتی و روشهای آنالیز عددی به دانشجویانی است که برای اولین بار با این موضوع برخورد می کنند. به خصوص، خواسته ایم ایده های ارائه شده در سطح هفتمین فرم ریاضیات کاربردی در زلاند جدید یا در سطح پیشرفته G. C. E. در انگلستان، قابل فهم باشند. ما امیدواریم که این کتاب برای بسیاری از درسها در پل تکنیکها و دانشگاهها نیز مفید واقع شود.

برای سهولت آموختن و تدریس، مطالب کتاب به «گامهای» کوتاهی تقسیم شده اند که بیشتر آنها در هر درس مقدماتی می آیند. بحثی از محتوا و طرح این کتاب در بخش ۳ ی مقدمه آمده است (صفحات ۳-۴ را ببینید).

آر. جی. هوسکینگ  
دی. سی. جویس  
جی. سی. ترنر

## مقدمه

### ۱- تاریخچه

هرچند ممکن است بعضی‌ها آنالیز عددی را مبحث تازه‌ای بپندارند، ولی در واقع چنین نیست. بدو، این مبحث به تهیه نتایج به صورت اعداد مربوط می‌شود که بدون تردید توسط بشر اولیه هم به کار می‌رفته است. بعد از آن تمدنهای بابلی‌ها و مصریان قدیم به خاطر مهارت‌های عددی، به ویژه در رابطه با نجوم و مهندسی راه و ساختمان جالب توجه بود. لوحی بابلی به دست آمده است که تاریخش به تقریباً سال ۲۰۰۰ ق. م. برمی‌گردد و مجذورات اعداد صحیح از ۱ تا ۶۰ را به دست می‌دهد؛ لوح دیگری هم وجود دارد که در آن خسوف و کسوفهای از حدود سال ۷۵۰ ق. م. ثبت شده است. مصریان کسرها مورد توجه قرار داده، وحتى دوش نابجائی را برای حل معادلات جبری ابداع کرده‌اند (ر. ک. گام ۸).  
شاید لازم نباشد اشاره کنیم که از یونان قدیم عده‌ای ریاضیدان برجسته برخاستند و بسیاری از آنان نتایج عددی مهمی را به دست دادند. ارشمیدس<sup>۱</sup> در حدود سال ۲۲۰ ق. م. نتیجه زیر را ارائه داد:

$$3\frac{1}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

روند تکراری برای  $\sqrt{a}$  شامل  $\frac{1}{4}(x_n + \frac{a}{x_n})$  که معمولاً به نیوتن<sup>۲</sup> نسبت داده می‌شود (ر. ک. گام ۱۰) در واقع در حدود سال ۱۰۰ ق. م. توسط هرون<sup>۳</sup> ارشد مورد استفاده قرار گرفته بود. فیثاغورثیان<sup>۴</sup> مجموع گیری عددی سریهارا مورد توجه قرار دادند. دیوفانتوس<sup>۵</sup> در حدود سال ۲۵۰ ب. م. برای حل معادلات درجه دوم روشی را به دست داد.

متعاقباً، پیشرفت کار عددی در خاور میانه به وقوع پیوست. صرف نظر از گسترش نمادگذاری عددی جدید که معمولاً عربی نامیده می‌شود، جداول توابع مثلثاتی سینوس و تانژانت هم قبل از قرن دهم تنظیم شدند. به طرف خاور، در هندوچین، تحول ریاضی به موازات هم،

1. Archimedes  
4. Pythagoreans

2. Newton  
5. Diophantus

3. Heron

(گرچه نه تماماً مجزا از یکدیگر) صورت گرفت.

در غرب، رنسانس و انقلاب علمی با توسعهٔ سریعی از دانش ریاضی، از جمله مبحث آنالیز عددی، همراه بود. نام ریاضیدانان بزرگی چون نیوتن، اویلر<sup>۱</sup>، لاگرانژ<sup>۲</sup>، گاوس<sup>۳</sup> و بسل<sup>۴</sup> به روشهای جدید آنالیز عددی منتسب می‌گردد و این خود مبین علاقهٔ همه جانبه به این موضوع است.

در قرن هفدهم، نپر<sup>۵</sup>، یک جدول لگاریتم به وجود آورد، و ترد<sup>۶</sup> خط کش محاسبه را اختراع کرد، و پاسکال<sup>۷</sup> و لایبنیتز<sup>۸</sup> در اختراع ماشینهای محاسب (هر چند که این ماشینها تا قرن نوزدهم در سطح وسیعی تولید نشدند) پیشقدم شدند. تدارک چنین ماشینهایی در کار عددی انقلابی به وجود آورد، و این انقلاب از اواخر دههٔ ۱۹۴۰ با پیدایش کامپیوتر الکترونیک تشدید شد.

اهمیت این انقلاب وقتی روشن می‌شود که پیشرفتهای مربوط به سرعت محاسبه را مورد توجه قرار بدهیم؛ در حالی که ماشینهای محاسب مکانیکی در حدود ده بار سریعتر از مداد و کاغذ هستند، کامپیوترهای الکترونیک در حدود ده میلیون بار از آن هم سریعترند! روندهای جدیدی پدید آمده و می‌آیند؛ محاسبات و تحلیل داده‌هایی که تا چند دهه پیش حتی تصور انجامشان در طول عمر یک انسان هم نمی‌رفت، اینک ظرف چند ساعت انجام می‌شوند. ماشین آلات در اختیار ما سیمای جدید غالب در زمینهٔ آنالیز عددی است.

## ۲- آنالیز عددی در حال حاضر

علم نظری مشتمل است بر ساختن قالبهایی برای تفسیر نتایج تجربی و پیش بینی نتایج برای کنترل تجربه‌های آتی. چون این نتایج غالباً عددی هستند، متخصص ریاضیات کاربردی تلاش می‌کند تا برای وضع پیچیده‌ای که در مباحثی مانند فیزیک یا اقتصاد پیش می‌آید، با بیان جنبه‌های مهم به زبان ریاضی، یک قالب ریاضی بسازد. هنر ریاضیات کاربردی خوب آن است که جهت استنتاجهای مفید فقط جنبه‌های مهم را در نظر بگیرد، زیرا در غیر این صورت، معمولاً کار اضافی غیر ضرور پیش می‌آید.

ماهیت مجرد چنین قالب ریاضی می‌تواند یک مزیت واقعی باشد، زیرا ممکن است این قالب شبیه قالبهای دیگری باشد که قبلاً در زمینه‌های کاملاً متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته، و لذا جوابهایشان معلومند. گاهی اوقات ممکن است یک راه حل تحلیلی صوری در دسترس باشد، ولی در این حالت هم ممکن است به عباراتی آن چنان پیچیده برخوردیم که هر گونه تفسیر مورد نیاز بعدی از نتایج ریاضی را مشکل سازند. در بسیاری از حالات، یک روند عددی که به نتایج عددی با معنایی هم منجر می‌شود وجود دارد و مرجح است. آنالیز عددی هنوز هم شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن این قبیل روندهای عددی، و در این زمان با تأکید بر فنون قابل استفاده در کامپیوترهای رقمی خودکار، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

1. Euler

2. Lagrange

3. Gauss

4. Bessel

5. Napier

6. Oughtred

7. Pascal

8. Leibniz



در آنالیز عددی موضوعات اصلی گوناگونی وجود دارند، از آن جمله است: یافتن ریشه‌های معادلات غیرخطی، حل دستگاههای معادلات جبری خطی، استفاده صحیح از جداول، محاسبه انتگرالها، حل معادلات دیفرانسیل و بهگزینی. مثلاً، معادلات مشتعل بر توابع متعالی (نظیر لگاریتم یا سینوس)، اغلب در علوم یسا مهندسی پیش می‌آیند و معمولاً به طور عددی حل می‌شوند. معادلات جبری (نظیر دوران يك دستگاه محورهای مختصات یا انتقال کالا در اقتصاد) هم در علوم متداول هستند و هم در علوم اجتماعی. جواب معادلات دیفرانسیل نیازمیرم رشته‌های گوناگونی نظیر فیزیک ریاضی یا مطالعات محیط زیستی است. چون بسیاری از این معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند و لذا، احتمالاً جواب تحلیلی ندارند، جواب عددیشان حایز اهمیت است.

البته، در يك کتاب درسی مقدماتی، به‌جز اشاره به چند مطلب اساسی، نمی‌توان به بحث عمیق پرداخت. با این وجود، امیدواریم با این تذکرات مختصر دانشجویان را تشویق کرده باشیم که نه تنها پیشرفت خود به کمک این کتاب را با ارزش تلقی کنند، بلکه با شوق و موفقیت به فراگیری مطالبی بیش از این نیز همت گمارند.

### ۳- در باب این کتاب

هرمبحث اصلی این کتاب به تعدادی گام تقسیم شده است. پنج گام اول به مسئله خطاهای ناشی از کار عددی اختصاص داده شده‌اند. ما معتقدیم که برای آشنایی صحیح با هنر استفاده از روشهای عددی، درك كامل خطاها لازم است. مفاهیم و روشهایی که در مباحث معادلات غیرخطی، دستگاه معادلات خطی، درونیابی، مشتق گیری و انتگرال گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند مربوط به گامهای بعدی هستند.

اکثر گامهای بدون ستاره این کتاب در هر درس مقدماتی گنجانیده خواهد شد. گامهای ستاره‌دار («گامهای جنبی») مطالبی را در بر می‌گیرند که به نظر مؤلفین، با اینکه سطحشان بالا نیست، برای يك درس مقدماتی اضافی هستند. کوشش شده است مطالب هر گام به‌طور مناسبی روبه افزایش باشد، و شاید هم وابسته به درك گامهای قبلی بدون ستاره (و نه گامهای بعدی). به‌طور مطلوب، بررسی هر گام باید دست کم همراه با تمریناتی باشد که، در صورت لزوم، تحت راهنمایی معلم حل شوند. تأکید می‌کنیم که آنالیز عددی به تجربه عملی نسبتاً زیاد نیاز دارد و تمرین بیشتر نیز می‌تواند مؤثر واقع شود.

در داخل هر گام، ابتدا مفاهیم و روشهایی را که باید فرا گرفته شوند ارائه می‌کنیم و متعاقبش چند مثال روشن کننده. سپس از دانشجویان می‌خواهیم، با جواب دادن به دو یا سه سؤال خودآزمایی میزان درك آنی خود از مطالب را امتحان کنند. این سؤالات به نکات برجسته هر گام مربوط می‌شوند، و دانشجویان را به اندیشیدن درباره آنها و خواندن مجدد مطالب مربوط وامی‌دارند، و ممکن است برای حك و اصلاح هم مفید واقع شوند. جواب مختصر تمرینات موجود در هر گام را در انتهای کتاب آورده‌ایم.

پس از بررسی بسیار، مؤلفین تصمیم گرفتند که برای الگوریتمهای مختلف مذکور

در گامها، برنامه کامپیوتری ضمیمه نکنند. با این وجود چند فلوچارت اساسی را به صورت يك ضمیمه عرضه کرده اند. در صورتی که دانشجویان فلوچارت يك روش را همزمان با یادگیری گام مربوط مورد مطالعه قرار دهند فایده بسیاری خواهند برد. اگر دانشجویان با يك زبان برنامه نویسی آشنا باشند، تشویق خواهند شد که دست کم بعضی از فلوچارتها را به صورت يك برنامه کامپیوتری در آورند و از آنها برای تمرینات مربوط استفاده کنند.

# گام يك

## خطاها - ۱

### منابع خطا

منابع اصلی خطا در موقع به دست آوردن جوابهای عددی مسائل ریاضی عبارتند از:

(الف) قالب - ساختمان قالب معمولاً متضمن ساده کردن و حذف کردن است؛

(ب) داده‌ها - ممکن است خطاهایی در اندازه‌گیری یا برآورد مقادیر باشد؛

(پ) روش عددی - عموماً مبتنی بر نوعی تقریب کردن است؛

(ت) نمایش اعداد - مثلاً  $\pi$  را نمی‌توان به وسیله تعدادی متناهی رقم نمایش داد؛

(ث) حساب - غالباً در انجام عملیاتی نظیر جمع (+) و ضرب (X) خطاهایی

ایجاد می‌شوند.

مسئولیت (الف) را می‌توان بر عهده متخصص ریاضیات کاربردی گذاشت، ولی از بقیه به

آسانی نمی‌توان گذشت. لذا، اگر معلوم شود که خطاهای موجود در داده‌ها در محدوده معینی

هستند باید قادر باشیم خطاهای منتج در پاسخها را برآورد کنیم. به طریق مشابه با معلوم

بودن مشخصات کامپیوتر، باید بتوان تأثیرات (ت) و (ث) را نیز در نظر گرفت. در مورد

(پ)، وقتی يك روش عددی ابداع می‌شود رسم بر این است که خواص خطایش را نیز

بررسی کنند.

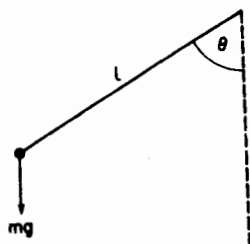
### مثال

برای تشریح طرقی که خطاهای فوق به وجود می‌آیند، مثال آونگ ساده را در نظر می‌گیریم

(ر. ک. ش. ۱). اگر از مقاومت هوا و اصطکاک در لولا صرف نظر شود، معادله دیفرانسیل

ساده (غیرخطی) زیر به دست می‌آید

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta.$$



شکل ۱. آونگ ساده

مرحله بعدی متداول در درس مکانیک مقدماتی<sup>۱</sup> به کار بردن تقریب  $\sin \theta \approx \theta$  جهت به دست آوردن معادله دیفرانسیل بازهم ساده تر (خطی) ذیل است:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta, \quad \omega^2 = g/l.$$

این معادله دارای جواب تحلیلی

$$\theta(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

است، که در آن  $A$  و  $B$  اعداد ثابت مناسبی هستند.

لذا می توان نتیجه گرفت که دوره تناوب این آونگ ساده (یعنی کوچکترین مقدار مثبت  $T$  که  $\theta(t+T) = \theta(t)$  عبارت است از

$$2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

تا اینجا تنها با خطاهای از نوع (الف) مواجه شده ایم؛ وقتی بخواهیم در یک حالت خاص مقداری عددی برای  $T$  به دست آوریم سایر خطاها هم وارد می شوند. از این رو هم  $l$  و هم  $g$  دستخوش خطاهای اندازه گیری خواهند بود؛  $\pi$  باید به صورت یک عدد اعشاری متناسبی نمایش داده شود؛ پس از تقسیم  $l$  بر  $g$  (که ممکن است شامل خطای گرد کردن باشد) جذر باید (با استفاده از جدول یا یک روند تکراری) محاسبه، و سرانجام این جذر باید در  $2\pi$  ضرب شود.

### خود را بیازماید

۱- چه منابعی از خطا مورد توجه متخصص آنالیز عددی هستند؟

۱. در عمل، با استفاده از یک روش عددی (ر.ک. گام ۳۱) جهت حل معادله دیفرانسیل واقع - بینانه تر (غیر خطی) زیر، می توان از خطای نوع (الف) کاست

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \theta.$$

۲- کدام نوع از خطاها به کامپیوتر مورد استفاده بستگی دارد؟

### تمرین

در حین انجام محاسبات زیر، تمام جاهایی را که در آن نوعی خطا به وجود می آید مشخص کنید.

۱- با فرض اینکه  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ ، دوره تناوب یک آونگ ساده به طول ۷۵ سانتیمتر را محاسبه کنید.

۲- اندازه جریان یک مایع از یک سوراخ مدور به قطر  $d$  به وسیله دستور

$$R = C \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH} ,$$

که در آن  $C$  ضریب مربوط به تخلیه و  $H$  اختلاف ارتفاع است به دست می آید. با فرض اینکه  $d = 15 \text{ cm}$  و ضریب تخلیه برابر  $0.528$  برآورد شده باشد، مطلوب است محاسبه  $R$  برای اختلاف ارتفاع  $650$  سانتیمتر.

# گام دو

## خطاها - ۲

### تقریب اعداد

گرچه ممکن است مبتدی با ما موافق نباشد ولی بررسی طرق مختلف نمایش اعداد حایز اهمیت است.

#### ۱- نمایش اعداد

با وجودی که ماشینهای محاسب جدید از صورتو تایی (مبنای ۲) و نیز ۱۶ تایی (مبنای ۱۶) استفاده می کنند، مع هذا انسانها معمولاً يك عدد را به صورت اعشاری (مبنای ۱۰) نمایش می دهند. انجام عمل تقسیم اغلب به عددی منجر می شود که خاتمه نمی یابد؛ نمایش اعشاری (مبنای ۱۰)  $\frac{2}{3}$  يك نمونه آن است. همچنین اعداد گنگی نظیر مقدار  $\pi$  هم وجود دارند که خاتمه نمی یابند. برای انجام يك محاسبه عددی شامل چنین اعدادی، ناچاریم آنها را به وسیله نمایشی که شامل تعدادی متناهی رقم با معنی (S) است تقریب کنیم. به دلایل عملی (مثلاً اندازه پست پاکت یا «حافظه» موجود در يك ماشین)، معمولاً تعداد این ارقام بسیار کم است.

تا پنج رقم با معنی (S)،  $\frac{2}{3}$  به صورت ۰۵۶۶۶۶۷،  $\pi$  به صورت ۳۱۴۱۶ و  $\sqrt{2}$  به صورت ۱۴۱۴۲ نمایش داده می شود. هیچ يك از اینها يك نمایش دقیق نیستند، اما تماشان در حد نصف واحد رقم پنجم با معنی درستند. (دانشجویان توجه داشته باشند که اعداد را همیشه باید بدین مفهوم، درست تا تعداد معلومی از ارقام، نمایش دهند.)

اگر اعدادی را که باید نمایش دهیم خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشند، مناسب است که آنها را بر حسب نمادگذاری همیز سیار بنویسیم (مثلاً سرعت نور  $3 \times 10^8 m/s$  یا بار الکترونی  $1.6 \times 10^{-19}$  کولن). به طوری که اشاره شد، ارقام با معنی (مانتیس) را از توان ده (نما) جدا می کنیم؛ شکلی را که در آن نماچنان انتخاب

می شود که اندازه ماننیس کمتر از ۱۵ و ناکتر از ۱ باشد نهادگذاری علمی می نامند.

## ۲- خطای گرد شده

ساده ترین راه کاهش تعداد ارقام بامعنی در نمایش يك عدد، این است که از ارقام ناخواسته صرف نظر شود. این روند، معروف به قطع کردن، به وسیله بسیاری از کامپیوترهای جدید مورد استفاده قرار می گیرد. يك روند بهتر گسرد کردن است که شامل افزودن ۵ به اولین رقم ناخواسته است و سپس قطع کردن حاصل. برای مثال، اگر  $\pi$  تا چهار رقم اعشار (۴D) قطع شود، ۳۱۴۱۵ به دست می آید، ولی در صورتی که گرد شود حاصل ۳۱۴۱۶ می شود؛ نمایش ۳۱۴۱۶ تا پنج رقم بسا معنی (۵S) درست است. خطای موجود در کاهش تعداد ارقام به خطای گرد شده موسوم است. چون  $\pi$  برابر ۳۱۴۱۵۹۰۰۰... است، می توان ملاحظه کرد که قطع کردن، خطای گرد شده بسیار بیشتری از گرد کردن ایجاد کرده است.

## ۳- خطای برشی

نتایج عددی اغلب با بریدن يك سری نامتناهی یا با روند تکراری (ر.ك. گام ۵) به دست می آیند. در حالی که با در نظر گرفتن ارقام با معنی بیشتر می توان خطای گرد شده را کاهش داد، خطای برشی را می توان با در نظر گرفتن جملات بیشتر در سری یا گامهای بیشتر در تکرار کاهش داد؛ البته این عمل متضمن کار (وشاید هم مخارج) اضافی است.

## ۴- اشتباهات

در زبان آنالیز عددی، يك اشتباه (یا خبط) يك خطا نیست! يك اشتباه ناشی از جایز الخطا بودن (معمولاً انسان و نه ماشین) است. اشتباهات ممکن است بدیهی باشند، با تأثیری اندك بردقت محاسبه یا بدون هیچ تأثیر، یا ممکن است چنان خطیر باشند که نتایج محاسبه شده کاملاً غلطی را به دست دهند. سه چیز است که می تواند در جلوگیری از اشتباه کمک کند.

(i) دقت:

(ii) بازبینی، اجتناب از تکرار؛

(iii) آگاهی از منابع متداول اشتباه.

اشتباهات متداول مشتمل است بر: جا به جا کردن ارقام (مثلاً خواندن ۶۲۳۸ به صورت ۶۳۲۸)؛ غلط خواندن ارقام مکرر (مثلاً خواندن ۶۲۲۳۸ به صورت ۶۲۳۳۸)؛ غلط

۱. D حرف اول Decimal به معنی «اعشاری» است. منظور از (۴D) همان ۴ رقم اعشار است. م.

خواندن جدولها (مثلاً مراجعه به يك سطر يا يك ستون عوضی)؛ نادرست قرار دادن ممیز اعشاری؛ عدم توجه به علامتها (به خصوص وقتی که تغییر علامت نزدیک بهم باشند).

### ۵- مثال

نمونه‌های زیر گرد کردن تا چهار رقم اعشار را نشان می‌دهند:

$$\frac{4}{3} \rightarrow 1.3333; \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow 1.5708; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 0.7071.$$

نمونه‌های زیر گرد کردن تا چهار رقم با معنی را نشان می‌دهند:

$$\frac{4}{3} \rightarrow 1.333; \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow 1.571; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 0.7071.$$

### خود را بیازمایید

- ۱- چه چیزی می‌تواند دقت يك عدد مورد محاسبه را محدود کند؟
- ۲- قرارداد پذیرفته شده در گرد کردن چیست؟
- ۳- از کدام يك انتظار گرفتن نتیجهٔ بهتری دارید، گرد کردن یا قطع کردن؟
- ۴- چگونه می‌توان از اشتباه اجتناب کرد؟

### تمرین

۱- نمایش ممیز سیار اعداد زیر را بنویسید:

$$12.345; \quad 0.80059; \quad 296.844; \quad 0.00519.$$

۲- هر يك از اعداد زیر را:

$$3378219; \quad 3378219; \quad 03378219; \quad 003378219$$

- (الف) تا سه رقم با معنی (۳S) قطع کنید؛
- (ب) تا سه رقم اعشار (۳D) قطع کنید؛
- (پ) تا سه رقم با معنی (۳S) گرد کنید؛
- (ت) تا سه رقم اعشار (۳D) گرد کنید.



# گام سه

## خطاها - ۳

### تولید و انتشار خطا

قبلا اشاره کرده‌ایم که يك عدد، با تعدادی متناهی رقم، و در نتیجه اغلب با يك تقریب، نمایش داده می‌شود. لذا باید انتظار داشت که نتیجه هر روند محاسباتی (هر الگوریتم) شامل دسته‌ای از اعداد، خطایی ضمنی داشته باشد که به خطای اعداد اصلی مربوط می‌شود. گوییم که خطاهای اولیه در طی محاسبه منتشر می‌شوند. به علاوه، در هر گام الگوریتم ممکن است خطاهایی هم تولید شوند، و می‌توانیم از کل خطای جمع شده در هر گام به عنوان خطای مجتمع نام ببریم.

چون می‌خواهیم نتایج را در محدوده‌ی منتخبی از خطا به دست آوریم، بررسی انتشار خطا مفید است. بنا به تجربه اجمالاً می‌توان گفت که خطای منتشر شده به الگوریتم ریاضی انتخاب شده بستگی دارد، در حالی که خطای تولید شده به ترتیب عملی مراحل محاسباتی بیشتر حساسیت نشان می‌دهد. ممکن است در این مورد به صورت دقیقتر زیر هم صحبت کرد.

#### ۱- خطای مطلق

خطای مطلق عبارت است از قدر مطلق تفاضل بین خود عدد  $x$  و مقدار تقریبی آن،  $x^*$ ؛ یعنی

$$e_{abs} = |x - x^*|.$$

برای يك عدد درست تا  $n$  رقم اعشار داریم

$$e_{abs} \leq 5 \times 10^{-n};$$

انتظار داریم که خطای مطلق هر عدد تقریبی بیشتر از ۵ واحد در اولین رقم صرف نظر شده نباشد.

## ۲- خطای نسبی

خطای نسبی عبارت است از نسبت خطای مطلق به قدر مطلق خود عدد، یعنی،

$$e_{rel} = \frac{e_{abs}}{|x|} \leq \frac{e_{abs}}{|x^*| - e_{abs}}.$$

(دقت کنید که کران بالا از نامساوی مثلثی نتیجه می شود؛ یعنی

$$|x^*| = |x + x^* - x| \leq |x| + |x^* - x|,$$

$$\text{و لذا } (|x| \geq |x^*| - e_{abs})$$

$$\text{اگر } \text{Max}\{e_{rel}\} \approx \frac{e_{abs}}{|x^*|} \ll 1 \text{ آنگاه}$$

برای یک عدد اعشاری، درست تا  $n$  رقم بامعنی داریم

$$e_{rel} \leq 5 \times 10^{-n}.$$

## ۳- انتشار خطا

دو عدد  $x = x^* + e_1$  و  $y = y^* + e_2$  را در نظر بگیرید.

(i) تحت اعمال جمع یا تفریق داریم:

$$x \mp y = x^* \mp y^* + e_1 \mp e_2$$

که در نتیجه

$$e \equiv (x \mp y) - (x^* \mp y^*) = e_1 \mp e_2,$$

لذا

$$|e| \leq |e_1| + |e_2|,$$

یعنی

۱. rel سه حرف اول relative به معنی «نسبی» است. م.

۲. نماد  $\ll$  به معنی «خیلی کوچکتر است از» می باشد.  $x \ll y$  یعنی « $x$  خیلی کوچکتر از  $y$

است». م.

$$\text{Max}\{|e|\} = |e_1| + |e_2|.$$

بنابراین، اندازه خطای منتشر شده بیشتر از مجموع خطاهای مطلق اولیه نیست؛ البته ممکن است صفر هم باشد.

(ii) تحت عمل ضرب داریم:

$$xy - x^*y^* = x^*e_2 + y^*e_1 + e_1e_2,$$

که در نتیجه

$$\left| \frac{xy - x^*y^*}{x^*y^*} \right| \leq \left| \frac{e_1}{x^*} \right| + \left| \frac{e_2}{y^*} \right| + \left| \frac{e_1}{x^*} \frac{e_2}{y^*} \right|,$$

و لذا، اگر فرض کنیم  $\left| \frac{e_1}{x^*} \frac{e_2}{y^*} \right|$  قابل چشم‌پوشی باشد،

$$\text{Max}\{e_{rel}\} \approx \left| \frac{e_1}{x^*} \right| + \left| \frac{e_2}{y^*} \right|.$$

بیشترین خطای نسبی منتشر شده تقریباً برابر با مجموع خطاهای نسبی اولیه است. از عمل تقسیم نیز نتیجه مشابهی به دست می‌آید.

#### ۴- تولید خطا

اغلب (مثلاً در یک ماشین) عملی چون  $\otimes$  نیز به وسیله عمل دیگر، فرضاً  $\otimes^*$ ، تقریب می‌شود. در نتیجه  $y \otimes x$  به وسیله  $y^* \otimes x^*$  نمایش داده می‌شود. در واقع داریم:

$$\begin{aligned} |x \otimes y - x^* \otimes y^*| &= |(x \otimes y - x^* \otimes y^*) + (x^* \otimes y^* - x^* \otimes^* y^*)| \\ &\leq |x \otimes y - x^* \otimes y^*| + |x^* \otimes y^* - x^* \otimes^* y^*|, \end{aligned}$$

که در نتیجه خطای مجتمع از مجموع خطاهای منتشر شده و تولید شده بیشتر نمی‌شود. مثالهای مربوط به این قسمت را می‌توان در گام ۴ یافت.

#### ۵- مثال

مطلوب است محاسبه (تا حد امکان دقیق):

$$(i) \quad 516 - 487 + 335;$$

$$(ii) \quad 273 \times 355.$$

دو روش وجود دارد که می‌تواند مورد توجه دانشجو قرار بگیرد، اولی عبارت است از به‌کارگیری مفاهیم خطای مطلق و خطای نسبی تعریف شده در این گام. لذا، نتیجهٔ مربوط به (i) برابر است با  $0.015 \pm 0.016$ ، زیرا بیشترین خطای مطلق

$$0.0005 + 0.0005 + 0.0005 = 0.0015$$

است. لذا نتیجه می‌شود که جواب ۳ (تا ۱۵) است، زیرا یقیناً این عدد بین ۳۰۱۴۵ و ۳۰۱۷۵ قرار می‌گیرد. در (ii)، حاصل ضرب  $0.015$  مقید به بیشترین خطای نسبی

$$\frac{0.0005}{3755} + \frac{0.0005}{2773} + \frac{0.0005}{3755} \times \frac{0.0005}{2773} \approx \left( \frac{1}{3755} \times \frac{1}{2773} \right) \times 0.0005$$

است، لذا:

$$0.003 \approx (2773 + 3755) \times 0.0005 \approx \text{بیشترین خطای (مطلق)}$$

که در نتیجه جواب برابر ۹۷ خواهد بود.

دومین روش، استفاده از «حساب بازه‌ها» است. بنابراین عدد تقریبی ۳۰۴۵ نمایش عددی است در بازهٔ  $(30445, 30455)$ ، و الی آخر. پس جواب (i) در بازه‌ای واقع می‌شود که از پایین به

$$30445 + 4865 - 5165 = 30145$$

و از بالا به

$$30455 + 4875 - 5155 = 30175$$

محدود است. به همین طریق، جواب (ii) در بازه‌ای واقع می‌شود که از پایین به

$$30445 \times 27725 \approx 966$$

و از بالا به

$$30555 \times 27735 \approx 972$$

محدود است. لذا مجدداً نتیجه می‌شود که اعداد تقریبی ۳ و ۹۷ به ترتیب جوابهای (i) و (ii) را دقیقاً نمایش می‌دهند.

خود را بیازمایید

۱- وجه تمایز خطای منتشر شده و تولید شده چیست؟

۲- چگونه می‌توان خطای منتشر شده را برای اعمال جمع (تفریق) و ضرب (تقسیم)

تعیین کرد؟

تمرین

با فرض اینکه تمامی مقادیر زیر تا تعداد ارقام داده شده درست هستند، عبارات زیر را با

دقت ممکن حساب کنید:

$$؛۸۷۲۴ + ۵۷۳۳ \text{ (الف)}$$

$$؛۱۲۴۷۵۳ - ۱۲۴۷۵۲ \text{ (ب)}$$

$$؛۴۷۲۷ \times ۳۷۱۳ \text{ (پ)}$$

$$؛۹۷۴۸ \times ۰۷۵۱۳ - ۶۷۷۲ \text{ (ت)}$$

$$؛۰۷۲۵ \times \frac{۲۷۸۴}{۰۷۶۴} \text{ (ث)}$$

$$.۱۷۷۳ - ۲۷۱۶ + ۰۷۰۸ + ۱۷۰۰ - ۲۷۲۳ - ۰۷۹۷ + ۳۷۰۲ \text{ (ج)}$$

# گام چهار

## خطاها - ۴

### حساب ممیز سیار

در گام ۲، نمایش ممیز سیار به عنوان طریقی مناسب جهت کار کردن با اعداد بزرگ یا کوچک معرفی شد. چون اکثر محاسبات علمی شامل چنین اعدادی هستند، بسیاری از دانشجویان ضمن آشنایی با حساب ممیز سیار، به این روش که سبب سهولت محاسبات مشتمل بر ضرب یا تقسیم می شود ارج خواهند نهاد.

برای بررسی پیامدهای نمایش متناهی اعداد باید طریقی را که در آن عملیات با ممیز سیار انجام می پذیرد مورد بررسی قرار دهیم. مشخصات زیر در مورد اکثر کامپیوترهایی که گرد می کنند صادق است و برای کامپیوترهایی که قطع می کنند هم به آسانی قابل تطبیق. برای سادگی مثالها از مانتیس های اعشاری ۳ رقمی، نرمال شده جهت قرار گرفتن در حوزه (۱۰، ۱]، یعنی  $10 > |مانتیس| \leq 1$ ، استفاده می کنند (اکثر کامپیوترهای رقمی نمایش اعداد در مبنای ۲ و مانتیس معمولاً نرمال شده جهت قرار گرفتن در حوزه (۱، ۱/۲] را به کار می برند.) توجه داشته باشید که برای نتایج میانی تا ۶ رقم به کار گرفته می شود ولی نتیجه نهایی هر عمل، یک عدد ممیز سیار اعشاری ۳ رقمی نرمال شده است.

### ۱- جمع و تفریق

بعد از انتقال مانتیس و افزایش نمای عدد کوچکتر، در صورت لزوم، جهت یکسان شدن نماها، مانتیس ها را جمع یا تفریق می کنیم و نتیجه نهایی را (بعد از انتقال مانتیس و تنظیم نما، در صورت لزوم) با گرد کردن به دست می آوریم. لذا

$$3212 \times 10^1 + 4226 \times 10^1 = 7438 \times 10^1$$

$$۲۷۷۷ \times ۱۰^۲ + ۷۷۵۵ \times ۱۰^۲ = ۱۰۷۳۲ \times ۱۰^۲ \rightarrow ۱۰۷۳ \times ۱۰^۳$$

$$۶۱۸ \times ۱۰^۱ + ۱۷۸۴ \times ۱۰^{-۱} = ۶۱۸ \times ۱۰^۱ + ۰۷۰۱۸۴ \times ۱۰^۱ \\ = ۶۱۹۸۴ \times ۱۰^۱ \rightarrow ۶۲۰ \times ۱۰^۳$$

$$۳۶۵ \times ۱۰^{-۱} - ۲۷۷۸ \times ۱۰^{-۱} = ۰۸۸۷ \times ۱۰^{-۱} \rightarrow ۸۷۰ \times ۱۰^{-۲}$$

## ۲- ضرب

نماها جمع ومانتیسها ضرب می شوند؛ نتیجه نهایی (بعداز انتقال مانتیس به طرف راست و افزایش نما به اندازه یک واحد، در صورت لزوم) با گرد کردن به دست می آید. لذا:

$$(۴۲۷ \times ۱۰^۱) \times (۳۶۸ \times ۱۰^۱) = ۱۵۷۱۳۶ \times ۱۰^۲ \rightarrow ۱۵۷ \times ۱۰^۳$$

$$(۲۷۳ \times ۱۰^۲) \times (-۳۶۴ \times ۱۰^{-۲}) = \\ -۹۹۳۷۲ \times ۱۰^۰ \rightarrow -۹۹۴ \times ۱۰^۰$$

## ۳- تقسیم

نماها از هم تفریق ومانتیسها برهم تقسیم می شوند و نتیجه نهایی (بعداز انتقال مانتیسها به طرف چپ و کاهش نما به اندازه یک واحد، در صورت لزوم) با گرد کردن حاصل می شود. لذا:

$$\frac{۵۴۳ \times ۱۰^۱}{۴۵۵ \times ۱۰^۲} = ۱۱۹۳۴۰... \times ۱۰^{-۱} \rightarrow ۱۱۹ \times ۱۰^{-۱}$$

$$\frac{-۲۷۵ \times ۱۰^۲}{۹۸۷ \times ۱۰^{-۲}} = -۰۲۷۸۶۲۲... \times ۱۰^۴ \rightarrow -۲۷۹ \times ۱۰^۳$$

## ۴- عبارات

ترتیب محاسبه به طریقی استاندارد تعیین می شود و نتیجه هر عمل یک عدد ممیز بسیار نرمال شده است. لذا:

$$\frac{۶۱۸ \times ۱۰^۱ + ۱۷۸۴ \times ۱۰^{-۱}}{(۴۲۷ \times ۱۰^۱) \times (۳۶۸ \times ۱۰^۱)}$$

$$\rightarrow \frac{۶۲۰ \times ۱۰^۱}{۱۵۷ \times ۱۰^۳} = ۳۹۴۹۰۴... \times ۱۰^{-۲} \rightarrow ۳۹۵ \times ۱۰^{-۲}$$

## ۵- خطای تولید شده

توجه داریم که تمامی مثالهای فوق (به استثنای تفریق و اولین جمع) مشتمل بر خطاهای تولید شده‌ای هستند که به خاطر اندازه کوچک مانیتیس‌ها، نسبتاً بزرگند. لذا خطای تولید شده در

$$2777 \times 10^2 + 7755 \times 10^2 = 10532 \times 10^2 \rightarrow 1053 \times 10^3$$

برابراست با  $0002 \times 10^3$  چون خطای منتشرشده در این مثال می‌تواند به اندازه  $10^2 \times 001$  (با فرض درست بودن مؤلفه‌ها تا ۳۵) باشد، با استفاده از نتیجه گام ۳ می‌توان دریافت که خطای مجتمع نمی‌تواند از

$$0002 \times 10^3 + 0001 \times 10^2 = 0003 \times 10^3$$

تجاوز کند.

## ۶- نتایج

ویژگیهای حساب ممیز سیار به چند نتیجه غیرمنتظره و ناخوشایند منجر می‌شود، از جمله:  
(الف) جمع یا تفریق یک عدد کوچک (ولی غیر صفر) ممکن است هیچ تأثیری نداشته باشد، مثلاً

$$518 \times 10^2 + 437 \times 10^{-1} = 518 \times 10^2 + 000437 \times 10^2 \\ = 518437 \times 10^2 \rightarrow 518 \times 10^2$$

(یعنی همانی جمعی منحصر به فرد نیست).

(ب) غالباً حاصل  $a \times (1/a)$  برابر بایک نمی‌شود، مثلاً اگر:  $a = 300 \times 10^0$

$$1/a \rightarrow 333 \times 10^{-1} \text{ و } a \times (1/a) \rightarrow 999 \times 10^{-1}$$

(یعنی ممکن است معکوس ضربی وجود نداشته باشد).

(پ) حاصل  $(a+b)+c$  همواره برابر حاصل  $a+(b+c)$  نیست، مثلاً، اگر

$$c = 247 \times 10^{-1}, b = 424 \times 10^0, a = 631 \times 10^1$$

$$(a+b)+c = (631 \times 10^1 + 0424 \times 10^1) + 247 \times 10^{-1}$$

$$\rightarrow 673 \times 10^1 + 00247 \times 10^1$$

$$\rightarrow 675 \times 10^1.$$

در صورتی که



$$\begin{aligned}
 a+(b+c) &= ۶۳۱ \times ۱۰^۱ + (۴۲ \times ۴۱۰^۰ + ۰۲۴۷ \times ۱۰^۰) \\
 &\rightarrow ۶۳۱ \times ۱۰^۱ + ۴۴۹ \times ۱۰^۰ \\
 &\rightarrow ۶۳۱ \times ۱۰^۱ + ۰۲۴۹ \times ۱۰^۱ \\
 &\rightarrow ۶۷۶ \times ۱۰^۱,
 \end{aligned}$$

یعنی قانون شرکت پذیری برای جمع همواره برقرار نیست). مثالهای مربوط به افزودن تعداد زیادی عدد، با اندازه‌های مختلف، حاکی است که جمع کردن با ترتیب اندازه صعودی بر جمع کردن با ترتیب معکوس آن برتری دارد.

### خود را بیازماید

- ۱- چراگاهی لازم است که ماتریس را انتقال دهیم و نمای يك عدد ممیز سیار را تنظیم کنیم؟
- ۲- آیا حساب ممیز سیار از قوانین معمول حساب پیروی می‌کند؟

### تمرین

- ۱- مطلوب است محاسبات زیر با استفاده از حساب ممیز سیار نرمال شده تا ۳ رقم اعشار توأم با گرد کردن:

$$(الف) \quad ۶۱۹ \times ۱۰^۲ + ۵۸۲ \times ۱۰^۲$$

$$(ب) \quad ۶۱۹ \times ۱۰^۲ + ۳۶۱ \times ۱۰^۱$$

$$(پ) \quad ۶۱۹ \times ۱۰^۲ - ۵۸۲ \times ۱۰^۲$$

$$(ت) \quad ۶۱۹ \times ۱۰^۲ - ۳۶۱ \times ۱۰^۱$$

$$(ث) \quad (۳۶۰ \times ۱۰^۳) \times (۱۰۱ \times ۱۰^{-۱})$$

$$(ج) \quad (-۷۵۰ \times ۱۰^{-۱}) \times (-۴۴۴ \times ۱۰^۱)$$

$$(ح) \quad (۶۴۵ \times ۱۰^۲) / (۵۱۶ \times ۱۰^{-۱})$$

$$(ح) \quad (-۲۸۶ \times ۱۰^{-۲}) / (۳۲۹ \times ۱۰^۳)$$

- ۲- مطلوب است بر آورد خطای مجتمع در نتایج تمرین ۱، مشروط بر اینکه تمامی مقادیر تا ۳S درست باشند.

- ۳- با استفاده از حساب ممیز سیار نرمال شده تا ۴ رقم اعشار توأم با گرد کردن، محاسبات زیر

را انجام دهید، سپس بسادگی نظر گرفتن تمام ارقام اعشاری، این عبارات را مجدداً محاسبه و خطای منتشر شده را برآورد کنید.

(الف) اگر  $a = ۶۸۴۲ \times ۱۰^{-۱}$ ،  $b = ۵۶۸۵ \times ۱۰^۱$  و  $c = ۵۶۴۱ \times ۱۰^۱$  آنگاه  $ab - ac$  و  $a(b - c)$  را بیابید.

(ب) اگر  $a = ۹۷۸۱۲ \times ۱۰^۱$ ،  $b = ۴۶۳۱ \times ۱۰^{-۱}$  و  $c = ۸۳۴۰ \times ۱۰^{-۱}$  آنگاه  $a + (b + c)$  و  $(a + b) + c$  را پیدا کنید.

# گام پنجم

## خطاها - ۵

### تقریب توابع

یکی از روندهای مهم در آنالیز آن است که یک تابع داده شده را به صورت یک سری نامتناهی نمایش دهیم که جملاتش شامل توابع ساده تر و یا از جهتی مناسبتر باشند. لذا، اگر  $f(x)$  تابع مفروض باشد، ممکن است آن را به صورت بسط به سری

$$f(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x) + \dots$$

مشمول بر مجموعه توابع  $\{\phi_r(x)\}$  نمایش داد. ریاضیدانان برای توصیف همگرایی سریها، یعنی برای تعیین شرایطی که تحت آنها مجموع جزئی

$$s_n(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x)$$

با ازدیاد  $n$ ، هرچه دقیقتر مقدار تابع  $f(x)$  را تقریب زند، کوشش فراوانی را مبذول داشته اند. در آنالیز عددی، اساساً با چنین سریهای همگرایی سروکار داریم؛ محاسبه دنباله مجموعهای جزئی، یک روند تقریبی است، که در آن خطای بخشی را می توان، با در نظر گرفتن تعدادی کافی از جملات، به دلخواه کوچک کرد.

### ۱- سری تیلر<sup>۱</sup>

مهمترین بسط برای نمایش یک تابع سری تیلر است. اگر  $f(x)$  در یک همسایگی نقطه<sup>۱</sup> منتخبی مانند  $x_0$  به طور مناسبی هموار باشد، داریم

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x_0) + R_n$$

که در آن

$$f^{(k)}(x_0) \equiv \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_0};$$

و

$$h = x - x_0.$$

نمایانگر تغییر مکان از  $x_0$  تا نقطه  $x$  در این همسایگی است، و جمله باقیمانده عبارت است از

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

که در آن  $\xi$  نقطه‌ای بین  $x_0$  و  $x$  است. ( $R_n$  صورت لاگرانژی باقیمانده نام دارد؛ برای مثال به بخش ۴.۱۸ از کتاب ج. ب. توماس<sup>۱</sup> مذکور در فهرست منابع رجوع شود.)

بسط تیلر برای  $x$ های واقع در حوزه‌ای حاوی نقطه  $x_0$ ، حوزه‌ای که داخل همسایگی  $x_0$  فوق‌الذکر قرار دارد، همگرا می‌باشد. در داخل این حوزه همگرایی اندازه خطای پرشی حاصل از حذف جملات پس از جمله  $n$ م (برابر با مقدار  $R_n$  در نقطه  $x$ ) را می‌توان با انتخاب  $n$  به قدر کافی بزرگ، از هر عدد ثابت مثبت کوچکتر نمود. به عبارت دیگر، با استفاده از  $R_n$  جهت تشخیص تعداد جملات مورد نیاز، می‌توان در هر نقطه از این حوزه همگرایی تابع را با دقتی که خطای گرد شده مجتمع اجازه می‌دهد محاسبه کرد.

از نظریه متخصص آنالیز عددی، مهمترین مسئله این است که همگرایی به قدر کافی سریع باشد. برای مثال، اگر  $f(x) = \sin x$  داریم:

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

و غیره،

و بسط تیلر آن (حول نقطه  $x_0 = 0$ ) عبارت است از

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

با

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

چون  $|\cos \xi| \leq 1$  پس  $|R_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ؛ در صورتی که دقت  $5D$  لازم باشد، نتیجه

می‌گیریم که تنها دو جمله در  $x=0.1$  و چهار جمله در  $x=1$  مورد نیاز است (زیرا  $0.1^{20} = 1.05 \times 10^{-13}$ ). از طرف دیگر، بسط لگاریتم طبیعی (درمبنای  $e$ )

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_n$$

کمتر مناسب است. با وجودی که برای حصول دقت  $5D$  در  $x=0.1$  تنها چهار جمله مورد نیاز است، برای دقت  $5D$  در  $x=0.5$  سیزده جمله لازم است و ۱۰ جمله در  $x=1$  صرفاً دقت  $1D$  را به دست می‌دهد!

علاوه بر این، متذکر می‌شویم که سری تیلر نه تنها به‌طور وسیعی جهت نمایش توابع به صورت عددی به کار گرفته می‌شود، بلکه برای تحلیل خطاهای موجود در الگوریتمهای مختلف نیز مفید است. (مثلاً به گامهای ۸، ۹، ۱۰، ۲۷ و ۲۸ رجوع کنید.)

## ۲- تقریب چند جمله‌ای

از سری تیلر يك روش ساده تقریب چند جمله‌ای (از درجه معین  $n$ )،

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

به دست می‌آید که اساس بحث روندهای عددی مقدماتی مختلف در این کتاب درسی است. چون  $f(x)$  اغلب پیچیده است، ممکن است ترجیح داده شود که عملیاتی نظیر مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بر يك تقریب چند جمله‌ای انجام پذیرد. برای ساختن تقریبات چند جمله‌ای، از فرمولهای درونبایی (ر.ک. گامهای ۲۰ و ۲۲) نیز می‌توان استفاده کرد.

## ۳- سایر بسط‌های به سری

چندین بسط دیگر به سری، نظیر سری فوریه<sup>۱</sup> (بر حسب سینوسها و کسینوسها)، یا بسط‌های شامل توابع متعامد گوناگون (چند جمله‌ایهای لژاندر<sup>۲</sup>، چند جمله‌ایهای چیبیشف<sup>۳</sup>، توابع بسل و غیره) هم وجود دارند. از نقطه نظر عددی، سری فوریه و سری چند جمله‌ای چیبیشف بریده شده ثابت کرده‌اند که مفیدترین بسطها هستند. برای بحث در مورد توابع با تناوب

طبیعی، سریهای فوریه مناسب هستند، و حال آنکه در میان تمامی تقریبات شناخته شده مبتنی بر چند جمله ایها، سری چیشف سریعترین همگرایی را به دست می دهد.

گاهی، امکان دارد که تابع را به طور رضایت بخشی (از نقطه نظر عددی) با بریدن يك سری که به مفهوم ریاضی همگرا هم نیست نمایش داد. مثلا، گاهی جوابها به صورت سریهای مجانبی به دست می آیند که از جملات مقدمشان نتایج عددی به قدر کافی دقیق حاصل می شوند. با اینکه ما توجه خود را در این کتاب به سریهای بریده شده تیلر محدود می کنیم، با این وجود دانشجویان علاقه مند باید آگاه باشند که چنین بسطهایی نیز وجود دارند (برای مثال ر. ک. کونت<sup>۱</sup> و دوبور<sup>۲</sup>).

#### ۴- روندهای تراجعی

با اینکه يك سری مختوم با چند جمله می تواند روشی عملی برای محاسبه مقادیر يك تابع باشد، ولی این روش مشتمل بر چندین عمل محاسباتی است. به ویژه در محاسبه کامپیوتری، برخی از روندهای تراجعی موجود که حجم محاسبات را تقلیل می دهند ممکن است مطلوب باشند. مثلا به ازای  $x = \bar{x}$ ، مقادیر چند جمله ای

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

و مشتق آن

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1}$$

را می توان به طور تراجعی با برنامه

$$p_0 = a_n, \quad q_0 = 0$$

$$p_k = p_{k-1} \bar{x} + a_{n-k}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$q_k = q_{k-1} \bar{x} + p_{k-1}$$

تولید کرد. لذا، برای مقادیر متوالی  $k$  داریم

$$p_1 = p_0 \bar{x} + a_{n-1} = a_n \bar{x} + a_{n-1},$$

$$q_1 = q_0 \bar{x} + p_0 = a_n;$$

$$p_2 = p_1 \bar{x} + a_{n-2} = a_n \bar{x}^2 + a_{n-1} \bar{x} + a_{n-2}, \quad q_2 = q_1 \bar{x} + p_1$$

$$= 2a_n \bar{x} + a_{n-1};$$

.

.

.

.

.

.

.

.

$$p_n = P(\bar{x}),$$

$$q_n = P'(\bar{x}).$$

(شاید دانشجویان بتوانند برای مشتقات بالاتر  $P(x)$  نیز يك روند تراجعی ارائه دهند.)  
 سرانجام، باید متذکر شویم که تولید اعضای يك مجموعه از توابع متعامد به صورت  
 تراجعی نیز متداول است.

### خود را بیازمایید

- ۱- چگونه متخصصین آنالیز عددی از جمله باقیمانده سری تیلر  $R_n$  استفاده می کنند؟
- ۲- چرا «سرعت همگرایی» از دیدگاه عددی خیلی با اهمیت است؟
- ۳- آیا از دیدگاه عددی ضرورت دارد که يك نمایش به سری به مفهوم ریاضی  
 همگرا باشد؟

### تمرین

- ۱- برای بسط  $\cos x$  حول  $x = 0$  از سری تیلر استفاده کنید.
- ۲- جهت به دست آوردن تقریبات چند جمله ای خطی، درجه دوم و درجه سوم برای  
 $f(x) = e^x$  در يك همسایگی  $x = 0$ ، سری تیلر را مختوم کنید. برای برآورد (در حسد  
 نزدیکترین به ۰٫۱) حوزهای که در آن از هر يك از چند جمله ایهای تقریب، نتایجی  
 درست تا  $2D$  حاصل می شود، از جمله باقیمانده استفاده کنید.
- ۳- مطلوب است تعداد جملات مورد لزوم سری تیلر برای  $f(x) = e^x$  حول  $x = 0$  تا  
 برای تمامی  $x$ های بین ۰ و ۱، دقت  $5D$  حاصل شود.
- ۴- مطلوب است محاسبه  $P(3.1)$  و  $P'(3.1)$  که در آن  $P(x) = x^2 - 2x^2 + 2x + 3$ .

# گام شش

## معادلات غیر خطی - ۱

### حل معادلات جبری و متعالی

معمولاً اولین معادله غیر خطی که در درس جبر به آن برمی‌خوریم معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

است. کلیه دانشجویان برای محاسبه ریشه‌های این معادله با فرمول زیر آشنا هستند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فرمول ریشه‌های يك معادله درجه سوم کلی تا حدی پیچیده‌تر است و تشریح فرمول ریشه‌های يك معادله درجه چهارم کلی معمولاً چندین صفحه را اشغال می‌کند! قضیه‌ای که حکم می‌کند هیچ فرمولی برای چند جمله‌ای‌های کلی از درجه بالاتر از چهار وجود ندارد، مارا از کوشش بیشتر باز می‌دارد. از این رو ترجیح می‌دهیم، بجز در حالات ویژه (مثلاً وقتی عمل تجزیه ساده است)، در عمل برای حل معادلات چند جمله‌ای از درجه بالاتر از دو از يك روش عددی استفاده کنیم.

دسته دیگری از معادلات غیر خطی متشکل از معادلاتی است که توابع متعالی نظیر  $e^x$ ،  $\log x$ ،  $\sin x$  و  $\tan x$  را شامل می‌شود. جوابهای تحلیلی و مفید چنین معادلاتی نادر هستند، و بنا بر این معمولاً مجبور می‌شویم باز هم از روشهای عددی استفاده کنیم.

### ۱- يك معادله متعالی

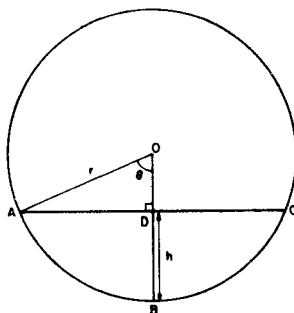
برای اینکه نشان دهیم معادلات متعالی حتماً به طور کاملاً طبیعی به وجود می‌آیند از مسئله



ریاضی ساده‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید یک مخزن استوانه‌ای به شعاع  $r$  که  $1/4$  آن پراز مایع است طوری قرار دارد که محورش افقی باشد و می‌خواهیم ارتفاع مایع در این مخزن را بیابیم (ر. ک. شکل ۲). فرض کنید ارتفاع مایع  $h$  باشد ( $DB$  در شکل راهنما). شرطی که باید برقرار گردد آن است که مساحت قطعه  $ABC$  برابر  $1/4$  مساحت دایره باشد. این شرط به صورت

$$2\left[\frac{1}{4}r^2\theta - \frac{1}{4}(r \sin \theta)(r \cos \theta)\right] = \frac{1}{4}\pi r^2$$

در می‌آید.  $(1/4\pi r^2)\theta$  مساحت قطاع  $OAB$ ،  $r \sin \theta$  قاعده و  $r \cos \theta$  ارتفاع مثلث  $OAD$  است.



شکل ۲. مخزن استوانه‌ای (مقطع عرضی)

بنابراین،  $2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\pi}{2}$

یا  $x + \cos x = 0$  که در آن  $x = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

(زیرا،  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ )

پس از حل معادله متعالی

$$f(x) \equiv x + \cos x = 0,$$

$h$  از روابط زیر به دست می‌آید:

$$h = OB - OD$$

$$= r - r \cos \theta$$

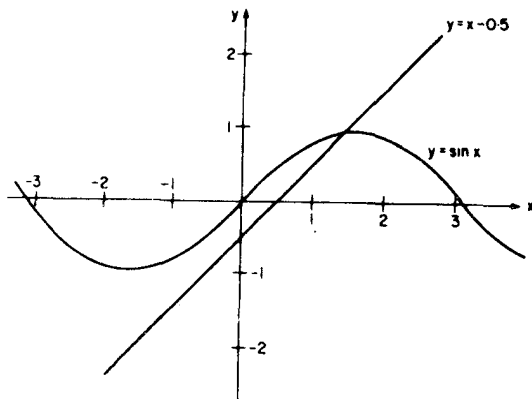
$$= r\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right).$$

## ۲- تعیین محل ریشه‌ها

فرض کنید هدف یافتن برخی یا همه ریشه‌های معادله غیرخطی  $f(x) = 0$  باشد. قبل از اینکه يك روش عددی را به کار گیریم (با گامهای ۷-۱۰ مقایسه کنید) باید در مورد تعداد، طبیعت و محل تقریبی ریشه‌ها اطلاعاتی داشته باشیم. شیوه متداول رسم نمودار یا جدول مقادیر تابع  $f(x)$  است و به بهترین وجه با چند مثال روشن می‌شود.

$$\sin x - x + 0.5 = 0 \quad (\text{الف})$$

همچنان که اغلب اتفاق می‌افتد ساده‌تر است که  $f(x)$  را به دو قسمت جدا کنیم؛ در يك دستگاه مختصات دومانحنی رسم نماییم و مشاهده کنیم کجا همدیگر را قطع می‌کنند. در این حالت  $y = \sin x$  و  $y = x - 0.5$  را رسم می‌کنیم. چون  $|\sin x| \leq 1$ ، تنها بازه  $-0.5 \leq x \leq 1.5$  (که خارجش  $|x - 0.5| > 1$  است) مورد نظر ماست.



شکل ۳. نمودارهای  $y = \sin x$  و  $y = x - 0.5$

از این نمودار نتیجه می‌گیریم که معادله تنها يك ریشه حقیقی، نزدیک  $x = 1.5$  دارد. سپس  $f(x) \equiv \sin x - x + 0.5$  را نزدیک  $x = 1.5$  به صورت زیر جدول بندی می‌کنیم:

$x$	۱٫۵	۱٫۴۵	۱٫۴۹
$\sin x$	۰٫۹۹۷۵	۰٫۹۹۲۷	۰٫۹۹۶۷
$f(x)$	-۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۴۲۷	۰٫۰۰۶۷

حال می‌دانیم که ریشه مذکور بین ۱٫۴۹ و ۱٫۵۰ قرار دارد و برای به دست آوردن جوابی دقیقتر می‌توانیم از یک روش عددی استفاده کنیم.

$$e^{-0.2x} = x(x-2)(x-3) \quad \text{ب)}$$

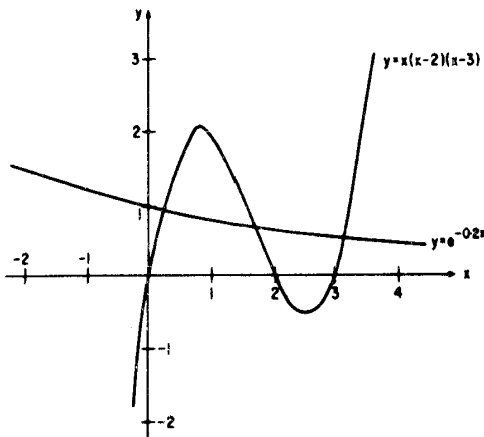
$$y = e^{-0.2x} \quad \text{دوباره دو منحنی}$$

و

$$y = x(x-2)(x-3)$$

را رسم می‌کنیم.

در رسم منحنی دوم از سه صفر در ۰ و ۲ و ۳ و از این ا گاهی که  $x(x-2)(x-3)$  به ازای  $x < 0$  و  $2 < x < 3$  منفی و به ازای  $x > 3$  به طور مرتب صعودی و مثبت است استفاده می‌کنیم. از نمودار نتیجه می‌گیریم که سه ریشه حقیقی در نزدیکی ۰٫۲ و ۱٫۸ و ۳٫۱ قرار دارند.



شکل ۴. نمودارهای  $y$

موجود است. حال جدول بندی زیر را (با فرض:  $f(x) = e^{-0.2x} - x(x-2)(x-3)$ ) انجام می‌دهیم:

$x$	۰٫۲	۰٫۱۵	۱٫۸	۱٫۶	۳٫۱	۳٫۲
$e^{-0.2x}$	۰٫۹۶۰۸	۰٫۹۷۰۴	۰٫۶۹۷۷	۰٫۷۲۶۱	۰٫۵۳۷۹	۰٫۵۲۷۳
$x(x-2)(x-3)$	۱٫۰۰۸۰	۰٫۷۹۰۹	۰٫۴۳۲۰	۰٫۸۹۶۰	۰٫۳۴۱۰	۰٫۷۶۸۰
$f(x)$	-۰٫۰۴۷۲	۰٫۱۷۹۵	۰٫۲۶۵۷	-۰٫۱۶۹۹	۰٫۱۹۶۹	-۰٫۲۴۰۷

از جدول بالا نتیجه می گیریم که ریشه‌ها به ترتیب بین ۰۱۵ و ۰۲، ۰۶ و ۰۸، و ۳۱ و ۳۲ قرار دارند.

### خود را بیازمایید

۱- چرا در حل معادلات غیرخطی روشهای عددی به کار می روند؟

۲- فرق يك معادله متعالي با يك معادله جبري چیست؟

۳- در رسم منحنی، جهت تعیین محل يك ریشه، از چه نوع اطلاعاتی استفاده می شود؟

### تمرین

محل ریشه‌های معادله زیر را تعیین کنید

$$x + \cos x = 0.$$

# گام هفت

## معادلات غیر خطی-۲

### روش تنصیف

مبنای روش تنصیف\* جهت حل معادله  $f(x) = 0$  برای مقادیر  $x$  (ریشه‌ها)، قضیه زیر است.

قضیه: اگر  $f(x)$  به ازای  $x$  بین  $a$  و  $b$  پیوسته باشد و  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلف‌العلامه باشند آنگاه حداقل یک ریشه حقیقی  $f(x) = 0$  بین  $a$  و  $b$  قرار دارد.

### ۱- دستورالعمل

فرض کنید که تابع پیوسته  $f(x)$  در  $x = a$  منفی و در  $x = b$  مثبت باشد، و لذا حداقل یک ریشه حقیقی بین  $a$  و  $b$  قرار داشته باشد. معمولاً  $a$  و  $b$  به وسیله رسم منحنی به دست می‌آیند. اگر  $f[(a+b)/2]$  را که مقدار تابع در نقطه وسط بازه  $a < x < b$  است، محاسبه کنیم سه حالت اتفاق می‌افتد:

(i)  $f[(a+b)/2] = 0$ ، که در این حالت  $(a+b)/2$  ریشه است؛

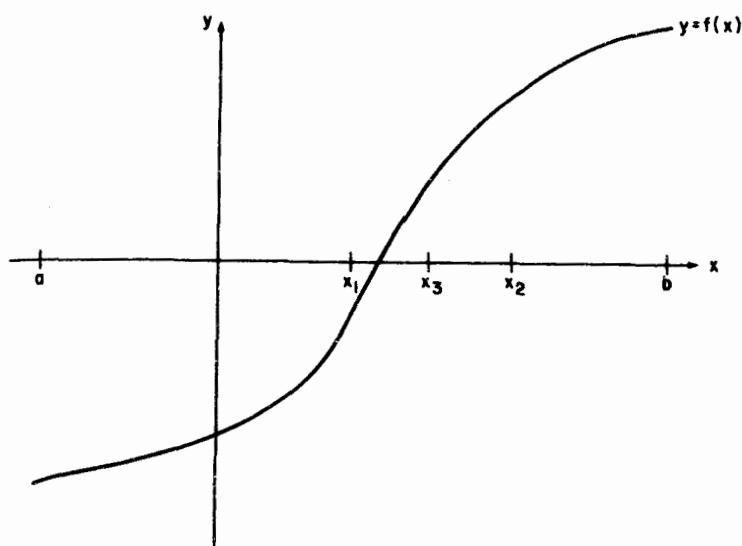
(ii)  $f[(a+b)/2] < 0$ ، که در این حالت ریشه بین  $(a+b)/2$  و  $b$  قرار دارد؛

(iii)  $f[(a+b)/2] > 0$ ، که در این حالت ریشه بین  $(a+b)/2$  و  $a$  قرار دارد.

اگر فرض کنیم که تنها یک ریشه وجود دارد، در صورتی که حالت (i) اتفاق افتد عمل پایان می‌یابد. اگر یکی از حالات (ii) یا (iii) پیش آید عمل تنصیف بازه شامل ریشه

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه‌نویسی در صفحه ۱۷۶ یک فلوجارت داده شده است.

را می‌توان آن قدر تکرار کرد تا ریشه مورد نظر با دقت مطلوب به دست آید. در شکل ۵ نقاط متوالی تنصیف با  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  نشان داده شده‌اند.



شکل ۵. تنصیف متوالی

## ۲- کارایی

روش تنصیف برای محاسبه کامپیوتری مناسب است و تقریباً مسلم است که یک ریشه را به دست می‌دهد در صورتی که شرایط قضیه بالا برقرار باشند، این روش تنها هنگامی می‌تواند ناموفق باشد که خطای مجتمع در محاسبه  $f(x)$  در یک نقطه تنصیف سبب شود که یک مقدار کوچک منفی برای آن به دست آید حال آنکه مقدار آن حقیقتاً بایستی یک مقدار کوچک مثبت باشد (یا بعکس) و بنابراین بازه‌ای که از این پس انتخاب می‌شود غلط خواهد بود. این عیب را می‌توان با دقت بسیار زیاد مرتفع ساخت، و این همگرایی تقریباً تضمین شده، برای بسیاری از روشهای دیگر جهت پیدا کردن یک ریشه وجود ندارد.

یک نقص روش تنصیف آن است که تنها برای ریشه‌هایی از  $f(x)$  به کار می‌رود که علامت  $f(x)$  در اطرافشان عوض می‌شود. مخصوصاً ممکن است ریشه‌های مضاعف نادیده گرفته شوند؛ در حوزه‌هایی که  $f(x)$  کوچک است باید  $f(x)$  با دقت بیشتری مورد بررسی قرار گیرد، تا ریشه‌های مکرری که  $f(x)$  در اطرافشان تغییر علامت نمی‌دهد هم محاسبه شوند (مثلاً، ر. ک. گامهای ۹ و ۱۰). البته یک چنین آزمایش تنگاتنگی از نادیده گرفتن ریشه دیگر همجوار نیز، جلوگیری می‌کند.

بالاخره، متوجه باشید که روش تنصیف نسبتاً کند است؛ بعد از  $n$  مرحله طول بازه

شامل ریشه،  $|b-a|/2^n$  خواهد بود. مع هذا، به شرط اینکه بتوان مقادیر  $f(x)$  را به سرعت تولید کرد تعداد نسبتاً زیاد مراحل ناشی از کاربرد تصنیف، برای يك کامپیوتر خودکار اهمیت نسبتاً کمی دارد.

## مثال ۳

به وسیله روش تصنیف  $3x e^x = 1$  را تا سه رقم اعشار حل کنید. می توانیم  $f(x) = 3x - e^{-x}$  را که در بازه  $0.25 < x < 0.27$  تغییر علامت می دهد در نظر بگیریم. همچنین می توانیم جدول بندی ذیل را (با کار کردن تا  $4D$ ) به دست آوریم.

$x$	$3x$	$e^{-x}$	$f(x)$
0.25	0.75	0.7788	-0.0288
0.27	0.81	0.7634	+0.0466

(خواننده باید مطمئن شود که درست يك ریشه وجود دارد.)  
از ادامه تصنیف نتیجه می شود:

$a$	$b$	$x = \frac{a+b}{2}$	$3x$	$e^{-x}$	$f(x)$
0.25	0.27	0.26	0.78	0.7711	+0.0089
0.25	0.26	0.255	0.765	0.7749	-0.0099
0.255	0.26	0.2575	0.7725	0.7730	-0.0005
0.2575	0.26	0.2588	0.7764	0.7720	+0.0044
0.2575	0.2588	0.2582	0.7746	0.7724	+0.0022

بنابراین،  $0.2582 < x < 0.2575$ ، که در نتیجه ریشه برابر 0.258 است.

## خود را بیازمایید

۱- روش تنصیف را چه موقع برای پیدا کردن يك ریشه معادله  $f(x) = 0$  می توان به کار برد؟

۲- بعد از محاسبه يك مقدار تنصیفی، سه انتخاب ممکن چه هستند؟

۳- بعد از  $n$  تنصیف ماگزیم خطا چیست؟

## تمرین

۱- روش تنصیف را برای پیدا کردن ریشه معادله

$$x + \cos x = 0,$$

درست تا دو رقم اعشار ( $2D$ ) به کار ببرید.

۲- روش تنصیف را جهت پیدا کردن ریشه مثبت معادله

$$x - 0.2 \sin x - 0.5 = 0$$

تا  $3D$  به کار ببرید.



## گام هشت

### معادلات غیر خطی-۳

#### روش نابجایی

همان طور که در مقدمه ذکر شد روش نابجایی\* به زمان مصریان قدیم برمی گردد. با فرض اینکه  $f(x)$  پیوسته و  $f(a)$  و  $f(b)$  مختلف علامه باشند، این روش جانشین کارآیی برای روش تنصیف در حل معادله  $f(x) = 0$  برای یک ریشه حقیقی بین  $a$  و  $b$  است.

#### ۱- دستورالعمل

در حالت کلی منحنی  $y = f(x)$  یک خط مستقیم نیست. مع هذا نقاط

$$(a, f(a)) \quad \text{و} \quad (b, f(b))$$

را می توان به وسیله خط مستقیم

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

به هم وصل کرد. این خط مستقیم محور  $y$ ها را در  $(\bar{x}, 0)$  که در آن

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\bar{x} - a}{b - a}$$

---

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه نویسی در صفحه ۱۷۷ یک فلوچارت داده شده است.

$$\bar{x} = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1}{f(b) - f(a)} \begin{vmatrix} a & f(a) \\ b & f(b) \end{vmatrix}$$

است قطع می کند.

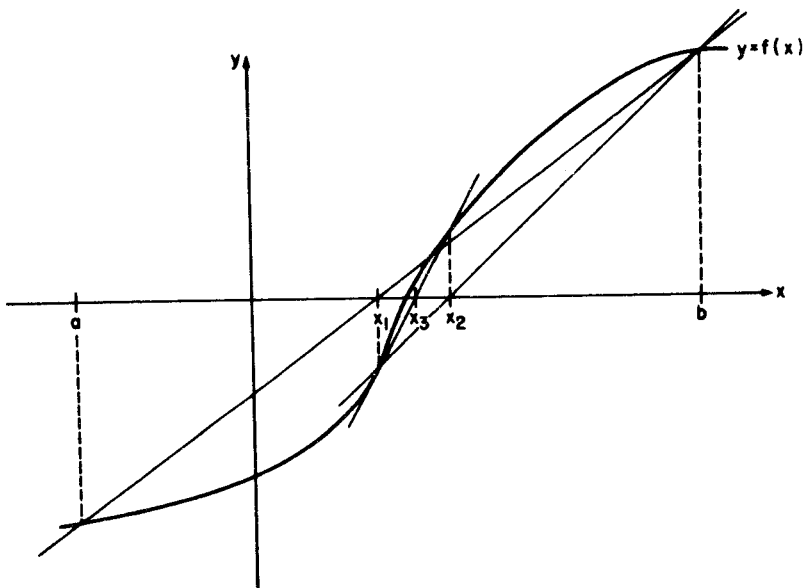
فرض می کنیم که  $f(a)$  منفی و  $f(b)$  مثبت باشد. همچون روش تنصیف سه حالت پیش می آید:

(i)  $f(\bar{x}) = 0$ ، که در این حالت ریشه  $\bar{x}$  است:

(ii)  $f(\bar{x}) < 0$ ، که در این حالت ریشه بین  $\bar{x}$  و  $b$  قرار دارد؛

(iii)  $f(\bar{x}) > 0$ ، که در این حالت ریشه بین  $\bar{x}$  و  $a$  واقع است.

دوباره اگر حالت (i) اتفاق بیفتد عمل خاتمه می یابد؛ اگر یکی از حالات (ii) یا (iii) رخ دهد این عمل را می توان آن قدر تکرار کرد تا اینکه ریشه مورد نظر با دقت مطلوب به دست آید. در شکل ۶ نقاط متوالی، یعنی محل تقاطع خطوط مستقیم با محور  $x$ ها، به وسیله  $x_1, x_2, x_3$  و  $x_4$  نشان داده شده اند.



شکل ۶. روش نابجایی

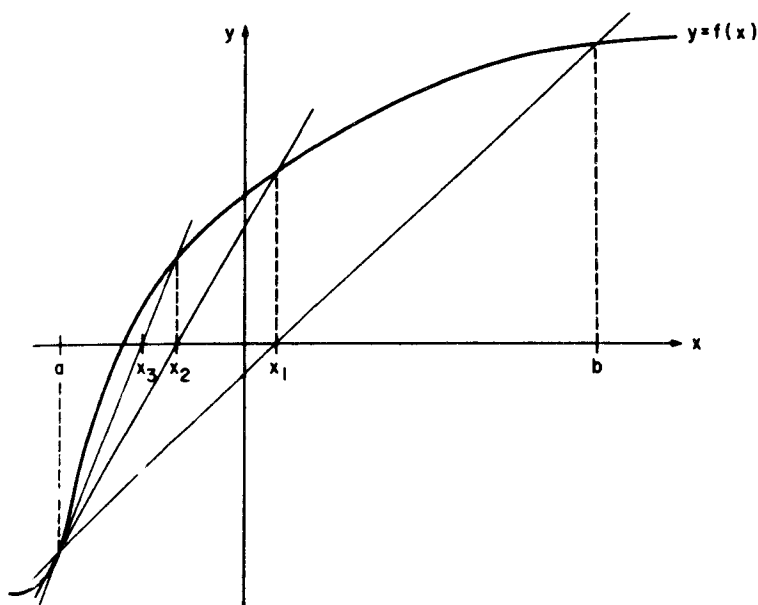
## ۲- کارایی و روش وتری

روش نابجایی، همانند روش تنصیف، همگرایی تقریباً تضمین شده دارد و ممکن است سریعتر به يك ریشه همگرا شود. مع هذا ممکن است اتفاق افتد که اکثر یا تمام مقادیر محاسبه شده  $\bar{x}$  در يك طرف ریشه باشند، که در این حالت همگرایی می تواند کند باشد (ر. ک. شکل ۷). جلوان این پیشامد در روش وتری، که بایک استثنا به روش نابجایی شباهت دارد، گرفته می شود و آن استثنا این است که در اینجا هیچ کوششی جهت اطمینان از احاطه ریشه مورد نظر به عمل نمی آید. در این روش با دو تقریب از ریشه ( $x_0$  و  $x_1$ ) شروع می کنیم و تقریبهای بعدی  $x_2, x_3, \dots$  را از:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

به دست می آوریم.

در اینجا، دیگر همگرایی تضمین شده نداریم ولی این شیوه ساده تر است (علامت  $f(x_{n+1})$  آزمایش نمی شود) و اغلب سریعتر همگرا می شود.



شکل ۷. روش نابجایی

در مورد سرعت همگرایی روش وتری، در مرحله  $(n+1)$ م خطای ذیل را داریم:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x - x_{n+1} \\ &= \frac{(x - x_{n-1})f(x_n) - (x - x_n)f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}f(x - e_n) - e_n f(x - e_{n-1})}{f(x - e_n) - f(x - e_{n-1})}. \end{aligned}$$

پس، با بسط بر حسب سری تیلر داریم

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{e_{n-1}[f(x) - e_n f'(x) + (e_n^2/2)f''(x) - \dots] - e_n[f(x) - e_{n-1}f'(x) + (e_{n-1}^2/2)f''(x) - \dots]}{[f(x) - e_n f'(x) + \dots] - [f(x) - e_{n-1}f'(x) + \dots]} \\ &\approx \left[ \frac{-f''(x)}{2f'(x)} \right] e_{n-1} e_n \sim e_{n-1} e_n. \end{aligned}$$

حال  $k$ ی را پیدا می‌کنیم که  $e_n \sim e_{n-1}^k$ ؛ لذا،  $e_{n+1} \sim e_n^k \sim e_{n-1}^{k^2}$  و  $e_n e_{n-1} \sim e_{n-1}^{k+1}$ ؛ و از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$k^2 \approx k + 1 \text{ و لذا } k \approx (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618$$

بنابراین، سرعت همگرایی سریعتر از خطی ( $k=1$ )، اما کندتر از درجه دوم ( $k=2$ ) است.

### ۳- مثال

معادله  $3xe^x = 1$  را تا سه رقم اعشار به وسیله روش نابجایی حل کنید. در گام قبلی مشاهده کردیم که ریشه این معادله در بازه  $0.25 < x < 0.27$

قرار دارد.

در نتیجه

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{0.0466 + 0.0288} \times \begin{vmatrix} 0.25 & -0.0288 \\ 0.27 & 0.0466 \end{vmatrix} \\ &= \frac{0.01165 + 0.00778}{0.0754} = 0.2577. \end{aligned}$$

اگر مثل گذشته بنویسیم  $f(x) = 3x - e^{-x}$  داریم:

۱. نماد  $\sim$  به معنی «متناسب بودن» است و مفهوم ریاضی  $y_n \sim x_n$  این است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = \alpha$

که در آن  $\alpha$  عددی حقیقی و مخالف صفر است. م.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(0.2577) \\ &= 3 \times 0.2577 - 0.7728 \\ &= 0.7731 - 0.7728 \\ &= 0.0003. \end{aligned}$$

وسوسه‌انگیز است نتیجه بگیریم که ریشه برابر ۰.۲۵۸ است، اما لازم است که این مطلب تأیید شود. از این رو می‌دانیم که ریشه در بازه  $0.25 < x < 0.2577$  است و لذا با تکرار شیوه مذکور داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{0.0003 + 0.0288} \left| \begin{array}{cc} 0.25 & -0.288 \\ 0.2577 & 0.0003 \end{array} \right| \\ &= \frac{0.000075 + 0.007422}{0.0291} = 0.2576, \end{aligned}$$

$$f(\bar{x}) = -0.0001.$$

بنابراین،  $0.2576 < x < 0.2577$  و لذا ریشه ۰.۲۵۸ است.

### خود را بیازمایید

- ۱- برای یافتن ریشه‌ای از  $f(x) = x^2 - 2$  چه موقع می‌توان از روش نابجایی استفاده کرد؟
- ۲- روش نابجایی بر چه ساخت هندسی استوار است؟

### تمرین

- ۱- جهت به دست آوردن ریشه مثبت معادله  $2 \sin x + x - 2 = 0$  درست تا سه رقم اعشار از روش نابجایی استفاده کنید.
- ۲- نتایج حاصل از به کارگیری روش تنصیف، روش نابجایی و روش وتری (با مقادیر آغازی ۰.۷ و ۰.۹) را برای حل معادله

$$3 \sin x = x + \frac{1}{x}$$

مقایسه کنید.

- ۳- روش نابجایی را جهت به دست آوردن ریشه معادله

$$x + \cos x = 0$$

# گام نه

## معادلات غیر خطی - ۴

### روش تکرار ساده

روش تکرار ساده متضمن نوشتن معادله  $f(x) = 0$  به شکل  $x = \phi(x)$  است که جهت ساختن دنباله ای از تقریبات مربوط به یکی از ریشه ها، به شیوه ای تکراری، مناسب است.

#### ۱- دستورالعمل

دستورالعمل تکرار به صورت زیر است. تقریبی سردستی چون  $x_0$  از ریشه مطلوب را به طریقی به دست می آوریم که جهت حصول تقریبی جدید چون  $x_1 = \phi(x_0)$  بتواند در طرف راست قرار گیرد. تقریب جدید دوباره در طرف راست قرار داده می شود تا تقریب دیگر  $x_2 = \phi(x_1)$  به دست آید و به همین ترتیب تا اینکه (ان شاء الله) برای ریشه يك تقریب به قدر کافی دقیق به دست آید. این شیوه تکراری مبتنی بر  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  را تکرار ساده می نامند، به شرطی که با افزایش  $n$ ،  $|x_{n+1} - x_n|$  کاهش یابد. این شیوه به  $\alpha = \phi(\alpha)$  که در آن  $\alpha$  نمایانگر ریشه است، میل می کند.

#### ۲- مثال

با به کار بردن روش تکرار ساده ریشه معادله  $3xe^x = 1$  را با دقت ۰۰۰۰۱ به دست آورید.

ابتدا می نویسیم

$$x = \frac{1}{3} e^{-x}$$

$$= \phi(x).$$

با فرض  $x_0 = 1$  تکرارهای متوالی

$$x_1 = 0.12263$$

$$x_2 = 0.29486$$

$$x_3 = 0.24821$$

$$x_4 = 0.26007$$

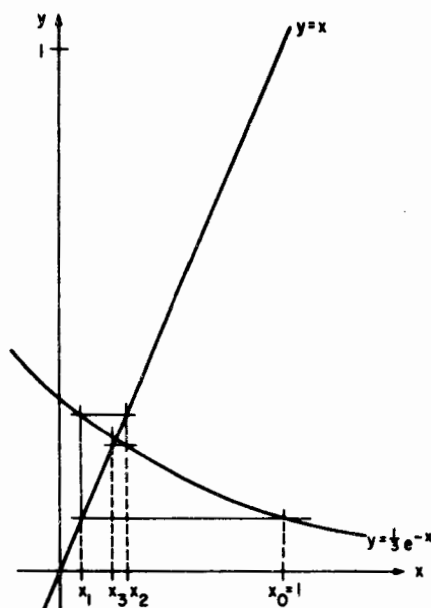
$$x_5 = 0.25700$$

$$x_6 = 0.25779$$

$$x_7 = 0.25759$$

$$x_8 = 0.25764$$

به دست می آیند. بنابراین، هشت تکرار لازم است تا داشته باشیم  $|x_{n+1} - x_n| < 0.0001$ .  
 یک تعبیر هندسی از سه تکرار نخست در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸. روش تکراری

## ۳- همگرایی

اینکه يك طريقه تکراری سریعاً همگرا باشد، یا در واقع ابدأ همگرا نباشد، بستگی به انتخاب تابع  $\phi(x)$  و نیز به مقدار آغازی  $x_0$  دارد. مثلاً، معادله  $x^2 = 3$  دارای دوریسه حقیقی  $\pm\sqrt{3}$  ( $\approx \pm 1.732$ ) است. این معادله را می توان به شکل

$$x = \frac{3}{x} \equiv \phi(x)$$

که تکرار

$$x_{n+1} = \frac{3}{x_n}$$

را پیشنهاد می کند نیز نوشت. بنابراین، اگر از مقدار آغازی  $x_0 = 1$  استفاده شود تکرارهای متوالی

$$x_1 = \frac{3}{x_0} = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{x_1} = 1$$

$$x_3 = \frac{3}{x_2} = 3 \text{ و غیره}$$

به دست می آیند. همگرایی فرایند تکراری

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

به

$$\alpha = \phi(\alpha)$$

را می توان به کمک سری تیلر

$$\phi(\alpha) = \phi(x_k) + (\alpha - x_k) \phi'(\xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

که در آن  $\xi_k$  نقطه ای بین ریشه  $\alpha$  و تقریب  $x_k$  است، بررسی کرد. داریم

$$\alpha - x_1 = \phi(\alpha) - \phi(x_0) = (\alpha - x_0) \phi'(\xi_0)$$

$$\alpha - x_2 = \phi(\alpha) - \phi(x_1) = (\alpha - x_1) \phi'(\xi_1)$$

$$\vdots$$

$$\alpha - x_{n+1} = \phi(\alpha) - \phi(x_n) = (\alpha - x_n) \phi'(\xi_n).$$



با ضرب  $(n+1)$  سطر بالا در هم و حذف عوامل مشترك  $\alpha - x_1, \alpha - x_2, \dots, \alpha - x_n$  خواهیم داشت

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_0) \phi'(\xi_0) \dots \phi'(\xi_n).$$

در نتیجه

$$|\alpha - x_{n+1}| = |\alpha - x_0| |\phi'(\xi_0)| |\phi'(\xi_1)| \dots |\phi'(\xi_n)|,$$

که اگر در يك همسایگی از ریشه داشته باشیم  $|\phi'| < 1$ ، خطای مطلق  $|\alpha - x_{n+1}|$  را می‌توان با در نظر گرفتن تکرار کافی به دلخواه کوچک کرد. (توجه کنید که  $\phi(x) = 3/x$  به ازای  $|x| < \sqrt{3}$  دارای مشتق  $|\phi'(x)| = |-3/x^2| > 1$  است.)

### خود را بیازمایید

- ۱- در يك برنامه عادی کامپیوتری که از روش تکرار ساده استفاده می‌شود يك برنامه-نویس باید مواظب چه خطری باشد؟
- ۲- برای تضمین اینکه روش تکرار ساده حتماً به يك ریشه همگرا باشد چه لازم است؟

### تمرین

- ۱- با فرض حدس اولیه  $x_0 = 1$ ، به وسیله روش تکرار ساده نشان دهید که يك ریشه معادله  $2x - 1 - 2 \sin x = 0$  عبارت است از  $0.174973$ .
- ۲- برای یافتن ریشه  $x + \cos x = 0$  (تا  $4D$ ) از روش تکرار ساده استفاده کنید.

گام ده

## معادلات غیر خطی - ۵

### روش تکراری نیوتن - رفسون<sup>۱</sup>

روش نیوتن-رفسون\* طریقه‌ای است برای تعیین ریشه‌ای از معادله‌ای چون  $f(x) = 0$ ، که در آن فقط يك نقطهٔ نزدیک به ریشهٔ مطلوب داده شده است. این روش را می‌توان به عنوان يك حالت حدی روش وتری (ر.ك. گام ۸) یا به‌عنوان حالت‌خاصی از روش تکرار ساده (ر.ك. گام ۹) در نظر گرفت.

#### ۱- دستورالعمل

فرض کنید  $x_0$  نمایانگر مقدار تقریبی معلوم ریشهٔ  $f(x) = 0$  و  $h$  نمایانگر تفاضل بین مقدار تحقیقی  $\alpha$  و مقدار تقریبی آن باشد؛ یعنی

$$\alpha = x_0 + h$$

بسط تیلر مختوم درجهٔ دوم در نزدیکی  $x_0$  عبارت است از

$$f(\alpha) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

با چشم‌پوشی از جملهٔ باقیمانده و نوشتن  $f(\alpha) = 0$  داریم

#### 1. Raphson

\* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه‌نویسی در صفحه ۱۷۸ يك فلوجارت داده شده است.

$$f(x_0) + h f'(x_0) \approx 0$$

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{بنابراین،}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{و در نتیجه}$$

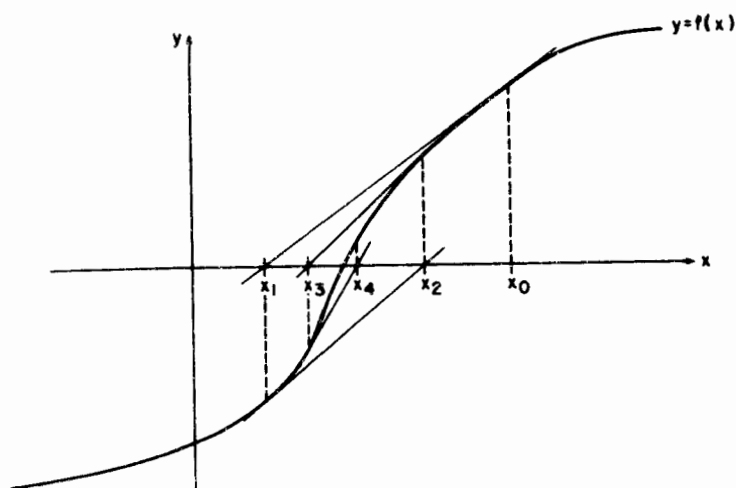
باید بر آورد بهتری از  $x_0$  برای ریشه مورد نظر باشد.

حتی تقریبات بهتری را هم می توان با تکرار این عمل به شرح ذیل به دست آورد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

توجه کنید که اگر  $f(x)$  یک چند جمله ای باشد برای محاسبه  $f(x_n)$  و  $f'(x_n)$  شیوه تراجعی گام ۵ را به کار می بریم.

تعبیر هندسی این عمل آن است که از هر مرحله نقطه ای به دست می آید که مماس در نقطه اصلی، محور  $x$ ها را قطع می کند (با شکل ۹ مقایسه شود).



شکل ۹. روش نیوتن - رفسون

بنابراین معادله مماس در  $(x_0, f(x_0))$  عبارت است از

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ولذا  $(x_1, 0)$  متناظر است با

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

یا

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

## ۲- مثال

با به کار بردن روش نیوتن - رفسون ریشه مثبت معادله  $\sin x = x^2$  را، درست تا سه رقم اعشار، به دست آورید.  
برای به دست آوردن يك تقريب اوليه بهتر است که از روش نابجایی استفاده کنیم.  
به وسیله جدول بندی داریم:

$x$	$f(x) = \sin x - x^2$
۰	۰
۰٫۲۵	۰٫۱۸
۰٫۵	۰٫۲۳
۰٫۷۵	۰٫۱۲
۱	-۰٫۱۶

ریشه‌ای در بازه  $۰٫۷۵ < x < ۱$  وجود دارد که تقریباً برابر است با

$$x_0 = \frac{1}{-0.16 - 0.12} \left| \begin{array}{cc} 0.75 & 0.12 \\ 1 & -0.16 \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{0.28} (-0.12 - 0.12)$$

$$= \frac{0.24}{0.28} = 0.857.$$

حال روش نیوتن - رفسون را به کار می‌بریم؛ داریم

$$f(0.857) = \sin(0.857) - (0.857)^2$$

$$= 0.07559 - 0.07344$$

$$= 0.00215$$

و چون  $f'(x) = \cos x - 2x$  داریم

$$f'(0.8857) = 0.6547 - 1.7714$$

$$= -1.1167$$

در نتیجه يك تقريب بهتر عبارت است از

$$x_1 = 0.8857 + \frac{0.00215}{-1.1167}$$

$$= 0.8857 - 0.00192$$

$$= 0.8838$$

با تکرار دستورالعمل به دست می آوریم

$$f(x_1) = f(0.8838) = -0.00007$$

$$f'(x_1) = f'(0.8838) = -1.1154$$

و لذا

$$x_2 = 0.8838 - \frac{-0.00007}{-1.1154}$$

$$= 0.8838 - 0.00006$$

$$= 0.8832$$

چون  $f(x_2) = 0.00000$ ، نتیجه می گیریم که ریشه تا  $3D$  برابر  $0.8832$  است.

۳- همگرایی

اگر بنویسیم:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

دستور تکرار نیوتن - رفسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

را می توان چنین نوشت

$$x_{n+1} = \phi(x_n).$$

مشاهده کردیم (ر. ک. صفحه ۴۳) که به طور کلی وقتی در نزدیکی ریشه داشته باشیم  $|\phi'(x)| < 1$  روش تکراری همگراست. در مورد روش نیوتن - رفسون داریم

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

در نتیجه محک همگرایی عبارت است از

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2;$$

این همگرایی به اندازه همگرایی در مورد روش تنصیف (مثلا) تضمین شده نیست.

#### ۴- سرعت همگرایی

چون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

داریم

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \alpha - x_{n+1} = \alpha - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= e_n + \frac{f(\alpha - e_n)}{f'(\alpha - e_n)} \\ &= e_n + \frac{f(\alpha) - e_n f'(\alpha) + (e_n^2/2)f''(\alpha) - \dots}{f'(\alpha) - e_n f''(\alpha) + (e_n^2/2)f'''(\alpha) - \dots} \\ &= e_n - e_n + \frac{e_n^2 f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} + \dots \end{aligned}$$

وقتی که  $e_n$  به حد کافی کوچک باشد:

$$\approx + \frac{e_n^2 f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

این نتیجه حاکی است که خطا در مرحله  $n+1$  با مربع خطا در مرحله  $n$  متناسب است. بنابراین اگر  $f''(\alpha) \approx 4f'(\alpha)$  یک جواب درست تا ۱ رقم اعشار در یک مرحله، باید در مرحله بعد تا دو رقم اعشار، در مرحله بعد تا ۴، و در مرحله بعد تا ۸ رقم اعشار،

درست باشد و الی آخر. این همگرایی درجه دوم (مرتبه دوم) بر میزان همگرایی روشهای تنصیف و نابجایی پیشی می گیرد.

برای ما که از برنامه های کامپیوتری نسبتاً کم استفاده می کنیم ممکن است عاقلانه آن باشد که روشهای تنصیف یا نابجایی را ترجیح بدهیم، زیرا همگرایی آنها واقعاً تضمین شده است. برای محاسبه دستی یا برای برنامه های فرعی کامپیوتری که مدام مورد استفاده هستند معمولاً برتری با روش نیوتن - رفسون است.

### ۵- ریشه دوم (جذر)

یکی از موارد استفاده روش نیوتن - رفسون محاسبه ریشه های دوم است. پیدا کردن  $\sqrt{a}$  معادل است با پیدا کردن ریشه مثبت  $x^2 = a$  یا  $x^2 - a = 0$  چون  $f(x) = x^2 - a$  و  $f'(x) = 2x$  دستور تکرار نیوتن - رفسون عبارت است از

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

(همان طور که در مقدمه ذکر شد این دستور نزد یونانیان قدیم شناخته شده بود.) بنا بر این، اگر  $a = 16$  و  $x_0 = 5$ ، درحد  $3D$  داریم  $x_1 = (1/2)(5 + 3.2) = 4.1$  و  $x_2 = (1/2)(4.1 + 3.902) = 4.001$  و  $x_3 = (1/2)(4.001 + 3.999) = 4.000$ .

### خود را بیازماید

- ۱- تعبیر هندسی دستور العمل تکراری نیوتن - رفسون چیست؟
- ۲- محک همگرایی برای روش نیوتن - رفسون چیست؟
- ۳- روش نیوتن - رفسون چه مزیت بارزی بر بعضی از روشهای دیگر دارد؟

### تمرین

۱- برای یافتن ریشه (مثبت)  $1 = x e^x$  نسا چهار رقم اعشار از روش نیوتن - رفسون استفاده کنید.

[توجه: جداول لگاریتمهای طبیعی (نپری) سریعتر از جداول نمایی در دسترس هستند و لذا ممکن است ترجیح بدهید که به جای معادله فوق معادله

$$f(x) = \log_e 3x + x = \log_e 3 + \log_e x + x = 0$$

را که با آن معادل است حل کنید.]

۲- دستور تکرار نیوتن - رفسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}}$$

را برای پیدا کردن ریشه  $k$  ام  $a$  به دست آورید.

۳- ریشه دوم ۱۰۵ را از حدس اولیه ۱، تا ۵ رقم اعشار حساب کنید.

۴- از روش نیوتن - رفسون برای پیدا کردن ریشه معادله

$$x + \cos x = 0$$

(تا ۴D) استفاده کنید.



# گام یازده

## دستگاههای معادلات خطی - ۱

### حل به روش حذفی

بسیاری از دستگاههای فیزیکی را می‌توان به وسیلهٔ چنان دسته‌ای از معادلات خطی قالب‌بندی کرد که معادلات، مابین روابط بین متغیرهای دستگاه باشند. در موارد ساده دو یا سه متغیر وجود دارند؛ در دستگاههای پیچیده (مثلاً در يك قالب خطی مربوط به اقتصاد يك کشور) ممکن است چند صد متغیر وجود داشته باشند. در رابطه با بسیاری از مسائل آنالیز عددی نیز دستگاههای خطی به وجود می‌آیند. مثالهایی از این قبیل عبارتند از حل معادلات دیفرانسیل به روشهای تفاضل منتهای، تحلیل قهقرايي آماری و حل مسائل مقدار خاص (مثلاً رجوع شود به کتاب کونت و دوبور).

بنابراین، لازم است که روشهای سریع و دقیقی برای حل دستگاههای معادلات خطی در دسترس داشته باشیم. دانشجویان قبلاً با حل دستگاههای معادلات با دو یا سه متغیر به روشهای حذفی آشنا شده‌اند. در این گام به توصیف صوری روش حذفی گاوس برای دستگاه با  $n$  متغیر می‌پردازیم و در مورد خطاهای مشخصی که ممکن است در جوابها پدید آیند بحث می‌کنیم. علاوه بر روش گاوس، موضوع دیگری هم در گام بعد تشریح خواهد شد که در کاستن خطا ما را یاری می‌دهد.

### ۱- علامت‌گذاری و تعاریف

(i) يك نمونه از دستگاه معادلات با ۳ متغیر به صورت زیر است

$$x + y - z = 2$$

$$x + 2y + z = 6$$

$$2x - y + z = 10$$



ماتریس ضرایب را می‌توان با بردار ثابت ترکیب کرد و ماتریس افزوده زیر را تشکیل داد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

وقتی برای حل يك دستگاه از روشهای حذفی استفاده می‌شود، معمول آن است که مستقیماً با ماتریس افزوده کار کنند.

## ۲- وجود جواب

برای هر دستگاه مشخص  $n$  معادله خطی ممکن است صفر جواب، یا تنها يك جواب  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  یا بی‌نهایت جواب وجود داشته باشد. در نظریه جبر خطی قضایایی ارائه و شرایطی وضع می‌شوند که به کمک آنها می‌توان تشخیص داد که يك دستگاه داده شده در زمره کدام دسته می‌باشد. مسئله وجود جوابها را در این کتاب بررسی نخواهیم کرد، ولی به خاطر دانشجویان آشنا به ماتریسها و دترمینانها، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

**قضیه:** يك دستگاه از  $n$  معادله خطی  $n$  مجهولی با ماتریس ضرایب  $A$  و بردار ثابت  $b \neq 0$  جوابی منحصر به فرد دارد اگر و فقط اگر دترمینان  $A$  مخالف صفر باشد. اگر تمامی اعضای  $b$  صفر باشند آنگاه دستگاه دارای جواب  $x = 0$  خواهد بود. این دستگاه جواب دیگری ندارد مگر اینکه دترمینان  $A$  برابر صفر باشد، که در این صورت دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است.

## ۳- روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس عبارت است از تبدیل دستگاه معادلات مفروض به دستگاه معادلی که به شکل مثلثی باشد؛ این شکل جدید را به آسانی می‌توان با روندی موسوم به جایگذاری از پایین حل کرد. با حل مثال بخش ۱ ( $i$ )، این روند را نشان می‌دهیم.

(الف) تبدیل به شکل مثلثی

$$x + y - z = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y + z = 6 \quad (2)$$

$$2x - y + z = 1 \quad (3)$$

مرحله اول: با استفاده از معادله (۱)،  $x$  را از معادلات (۲) و (۳) حذف کنید.

$$x + y - z = 2 \quad (1)'$$

$$y + 2z = 4 \quad (2)' \quad ((1) \text{ منهای معادله } (1))$$

$$-3y + 3z = -3 \quad (3)' \quad ((1) \text{ برابر معادله } (1))$$

مرحله دوم: با استفاده از (۲)',  $y$  را از (۳)' حذف کنید.

$$x + y - z = 2 \quad (1)''$$

$$y + 2z = 4 \quad (2)''$$

$$9z = 9 \quad (3)'' \quad ((2)' \text{ به علاوه سه برابر } (2)')$$

اکنون دستگاه به شکل مثلثی است. ماتریس ضرایب، ماتریس بالا مثلثی زیر است

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(ب) حل با جایگذاری از پایین

این دستگاه مثلثی با به دست آوردن  $z$  از (۳)'، سپس  $y$  از (۲)' و بالاخره،  $x$  از (۱)' به آسانی حل می‌شود. این روند، جایگذاری از پایین نامیده می‌شود.

لذا، از تقسیم (۳)' بر ۹ نتیجه می‌شود  $z = 1$ ؛  
از (۲)' نتیجه می‌شود:

$$y = 4 - 2z;$$

$$y = 2$$

با استفاده از  $z = 1$  داریم  
از (۱)' نتیجه می‌گیریم:

$$x = 2 - y + z = 1$$

$$\cdot x = 1$$

و با استفاده از  $z = 1$  و  $y = 2$  داریم

## ۴- عملیات تبدیل

وقتی که يك دستگاه را به شکل مثلثی تبدیل می‌کنیم، در هر مرحله، از اعمال مقدماتی زیر استفاده می‌نماییم:

- (۱) ضرب يك معادله در يك عدد ثابت؛
- (۲) افزودن مضربی از يك معادله به معادله دیگر؛
- (۳) تعویض دو معادله.

به بیان ریاضی، باید برای دانشجو روشن باشد که انجام اعمال مقدماتی بريك دستگاه معادلات خطی منجر به دستگاههای معادلی می‌شود که جوابهای هريك با دیگری یکسانند. این حکم نیاز به اثبات دارد؛ این مطلب را می‌توان در کتابهای جبر خطی تحت يك قضیه پیدا کرد (ر. ك. فهرست منابع). این حکم اساس تمام روشهای حذفی برای حل دستگاههای معادلات خطی را تشکیل می‌دهد.

## ۵- بررسی کلی روند حذفی

اینك روند حذفی را با اعمال آن بر سه معادله که به صورت کلی نوشته می‌شوند، تشریح می‌کنیم. برای این منظور، با ماتریس افزوده آغاز می‌کنیم و مضارب لازم برای انجام عملیات تبدیل را (درستون تحت  $m$ ) نشان می‌دهیم.

مضارب	ماتریس افزوده
$m$	
	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad (1)$
$m_1 = -a_{21}/a_{11}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad (2)$
$m_2 = -a_{31}/a_{11}$	$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad (3)$

مرحله اول: با استفاده از سطر (۱)، ضرایب  $a_{21}$  و  $a_{31}$  را حذف کنید

مضارب	ماتریس افزوده
$m$	
	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{bmatrix} \quad (1)'$
	$\begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{bmatrix} \quad (2)' \quad ((1) \text{ بر سطر } m_1 +)$
$m_2 = -a'_{32}/a'_{22}$	$\begin{bmatrix} a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{bmatrix} \quad (3)' \quad ((1) \text{ بر سطر } m_2 +)$

مرحله دوم: با استفاده از سطر (۲)'،  $a'_{32}$  را حذف کنید

$$\left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right] \begin{array}{l} (1)'' \\ (2)'' \\ (3)'' \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} \text{سطر } (3) + m_3 \text{ برابر سطر } (2) \\ \text{سطر } (3)'' \end{array} \right)$$

اکنون ماتریس به شکلی است که برای انجام جایگذاری از پایین ضروری است. در این مرحله، کل دستگاه معادلات عبارت است از

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned}$$

این دستگاه معادل دستگاه اول است. راه حل به شرح زیر ادامه می‌یابد:

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3 / a''_{33}, \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22}, \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}. \end{aligned}$$

### یادآوری

(i) اعضای قطری  $a_{11}$ ,  $a'_{22}$ ,  $a''_{33}$ ، که در حذف‌های متوالی به کار می‌روند، به اعضای محوری موسومند.

(ii) برای رفتن از یک مرحله به مرحله دیگر لازم است که عضو محوری مخالف صفر باشد (توجه داشته باشید که از اعضای محوری به صورت مقسوم علیه در مضارب و همچنین در جواب نهایی استفاده می‌شود). اگر در مرحله‌ای عضو محوری صفر شود، سطرهای باقیمانده ماتریس را چنان عوض می‌کنیم که یک محور غیر صفر به دست آید؛ در صورتی که این امر ممکن نباشد، آن دستگاه معادلات خطی جواب نخواهد داشت.

(iii) در صورتی که یک عضو محوری در مقایسه با اعضای هم ستون آن که باید حذف شوند کوچک باشد، اندازه مضاربی که در آن مرحله به کار می‌روند از یک بیشتر خواهند بود. استفاده از مضارب بزرگ در روندهای حذفی و جایگذاری از پایین منجر به بزرگ شدن خطاهای گرد شده می‌شود. یک روش جلوگیری از اعضای محوری کوچک در گام بعدی ارائه خواهد شد.

(iv) وقتی از یک روش حذفی استفاده می‌شود، در هر مرحله یک ستون اضافی مقابله‌ای

شامل مجموعه‌های سطری نیز باید محاسبه گردد (ر. ک. مثال زیر). با اعضای ستون مقابله‌ای عیناً مانند ضرایب معادله عمل می‌شود. پس از اتمام هر مرحله مجموعه‌های سطری جدید باید (در حدود خطای گرد شده) با اعضای ستون مقابله‌ای جدید برابر باشند.

۶- مثال عددی، با ستون مقابله‌ای

دستگاه معادلات عبارت است از

$$0.24x_1 - 0.58x_2 + 0.94x_3 = 2.0$$

$$0.27x_1 + 0.42x_2 + 0.13x_3 = 1.5$$

$$0.20x_1 - 0.51x_2 + 0.54x_3 = 0.8$$

حل

عملیات را به صورت جدول زیر تنظیم می‌کنیم. ضرایب قبل از استفاده تا  $3S$  گرد شده؛ نتایج نهایی حاصل از محاسبات دیگر تا  $2S$  گرد شده‌اند. به طوری که با آزمایشی از

	$m$	ماتریس افزوده	ستون مقابله
		$0.24 \quad -0.58 \quad 0.94 \quad 2.0$ $0.27 \quad 0.42 \quad 0.13 \quad 1.5$ $0.20 \quad -0.51 \quad 0.54 \quad 0.8$	$2.70$ $2.32$ $1.03$
مرحله اول		$0.24 \quad -0.58 \quad 0.94 \quad 2.0$ $-0.2794 \quad \quad \quad -0.88 \quad -0.62 \quad -0.088$ $-0.588 \quad \quad \quad -0.17 \quad -0.01 \quad -0.38$	$0.18 \quad (0.17)$ $-0.56 \quad (-0.56)$
مرحله دوم		$0.24 \quad -0.58 \quad 0.94 \quad 2.0$ $\quad \quad \quad 0.88 \quad 0.62 \quad -0.088$ $\quad \quad \quad -0.13 \quad -0.40$	$-0.53 \quad (-0.53)$

مانده‌ها، در زیر نشان داده شده‌است، عملیات با چنین تعداد کمی ارقام بامعنی، منجر به خطاهای نسبتاً زیادی در جواب می‌شود.

جایگذاری از پایین

$$-0.13x_3 = -0.40 \rightarrow x_3 \approx 3.1$$

$$0.88x_2 - 0.62 \times 3.1 = -0.88 \rightarrow x_2 \approx 2.1$$

$$0.34x_1 - 0.58 \times 2.1 + 0.94 \times 3.1 = 2.0 \rightarrow x_1 \approx 0.89.$$

امتحان

سه معادله اصلی را جمع کنید:  $0.81x_1 - 0.67x_2 + 1.61x_3 = 4.3$   
 حال جواب را در این معادله قرار دهید:

$$0.81 \times 0.89 - 0.67 \times 2.1 + 1.61 \times 3.1 = 4.3049.$$

مانده‌ها

برای قضاوت در دقت جواب، می‌توان جواب را در طرف چپ هر یک از معادله‌های اصلی قرارداد و نتایج را با مقادیر ثابت طرف راست نظیر مقایسه کرد. تفاضلهای بین این نتایج و مقادیر ثابت را مانده‌ها می‌نامند. برای مثال:

مانده‌ها

$$0.34 \times 0.89 - 0.58 \times 2.1 + 0.94 \times 3.1 = 1.9986; 2.00 - 1.9986 = 0.0014$$

$$0.27 \times 0.89 + 0.42 \times 2.1 + 0.13 \times 3.1 = 1.5253; 1.50 - 1.5253 = -0.0253$$

$$0.20 \times 0.89 - 0.51 \times 2.1 + 0.54 \times 3.1 = 0.781; 0.80 - 0.781 = 0.019$$

این گمان که اگر مانده‌ها کوچک باشند، جواب مربوط جواب خوبی است جایز به نظر می‌رسد. معمولاً، این موضوع صحت دارد. مع‌هذا، مانده‌های کوچک همیشه حاکی از یک جواب خوب نیستند. این مطلب در گام بعدی تحت عنوان «بدحالت بودن» بررسی می‌شود.

خود را بیازمایید

۱- به هنگام تبدیل ماتریس افزوده، چه نوع اعمالی مجاز هستند؟



۲- شکل نهایی ماتریس ضرایب، قبل از آغاز جایگذاری از پایین چیست؟

۳- اعضای محوری چه هستند؟ چرا در صورت امکان باید از اعضای محوری کوچک اجتناب شود؟

### تمرین

دستگاههای زیر را با روش حذفی گاوس حل و از يك ستون مقابله‌ای نیز استفاده کنید. مانده‌ها را محاسبه نمایید.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad -1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4.$$

$$506x + 308y + 102z = 104 \quad -2$$

$$301x + 701y - 407z = 501$$

$$104x - 304y + 803z = 204.$$

$$(i) \quad 2x + 6y + 4z = 5 \quad -3$$

$$6x + 19y + 12z = 6$$

$$2x + 8y + 14z = 7.$$

$$(ii) \quad 103x + 406y + 301z = -1$$

$$506x + 508y + 709z = 2$$

$$402x + 302y + 405z = -3.$$

# گام دوازده

## دستگاههای معادلات خطی - ۲

### خطاها و بدحالت بودن

برای هر دستگاه از معادلات خطی، پاسخ به این سؤال که در جواب حاصل از يك روش عددی چه قدر خطا ممکن است وجود داشته باشد بسیار مشکل است. بحث کلی در مورد این مسائل از حیطه این کتاب خارج است. با این وجود، به پاره‌ای از منابع خطاهای موجود در جوابها اشاره‌ای خواهیم کرد.

### ۱- شك در ضرایب و اعداد ثابت

در بسیاری از مسائل عملی، ضرایب مجهولات، و نیز اعداد ثابت طرف راست معادلات از مشاهدات تجربی یا از محاسبات عددی دیگر به دست می‌آیند. این اعداد به یقین معلوم نیستند؛ و در نتیجه وقتی جواب دستگاه به دست می‌آید، آن نیز حاوی میزانی از تردید است. برای اینکه نشان دهیم این نوع خطا در سراسر محاسبات چگونه منتقل می‌شود، با فرض اینکه هر دو عدد ثابت در حدود  $\pm 0.001$  مشکوک هستند، يك مثال ساده بادو متغیر را حل می‌کنیم.

$$2x + y = 4 (\pm 0.001)$$

$$-x + y = 1 (\pm 0.001)$$

اگر این دستگاه را به وسیله حذفی گاوس و جایگذاری از پایین حل کنیم داریم:

$$2x + y = 4 (\pm 0.001)$$

$$\frac{3}{2}y = 1 (\pm 0.001) + 2 (\pm 0.0005).$$

بنابراین،  $y = (3/2)x$  بین ۲۹۸۵ و ۳۰۱۵ و لذا  $y$  بین ۱۹۹۰ و ۲۰۱۰ قرار می‌گیرد.  
حال از معادله اول داریم

$$2x = 4(\pm 0.001) - 2(\pm 0.001),$$

و در نتیجه،  $x$  بین ۰.۹۹ و ۱.۰۱ قرار می‌گیرد.

اگر اعداد ثابت و ضرایب دستگاه دقیق بودند، جواب دقیق  $x = 1$  و  $y = 2$  می‌شد. چون اعداد ثابت به‌طور دقیق معلوم نیستند، صحبت از يك جواب دقیق بی‌معنی است؛ بهترین چیزی را که می‌توان گفت این است که  $0.999 \leq x \leq 1.01$  و  $1.999 \leq y \leq 2.01$ .

در این مثال شك موجود در جواب باشك موجود در اعداد ثابت هم مرتبه‌است. ولی، عموماً شك موجود در جوابها بزرگتر از شك موجود در اعداد ثابت است.

## ۲- خطاهای گرد شده

هر روش عددی برای حل دستگاههای معادلات خطی، شامل تعداد زیادی اعمال حسابی است. برای مثال، در روش حذفی گاوس، مذکور در گام قبل، می‌توان نشان داد (مثلاً، ر. ک. کونت و دوبور) که  $n(n+1)/2$  عمل تقسیم،  $(\frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6})$  عمل ضرب و

عمل جمع لازم است تا جواب دستگاهی که  $n$  مجهول دارد حاصل شود.

چون هر گام يك الگوریتم، مولد خطاهای گرد شده است، لذا وقتی  $n$  بزرگ باشد رشد خطاهای گرد شده می‌تواند چنان باشد که به‌جوابی بسیار دور از جواب واقعی منتهی گردد.

## ۳- انقباض محوری

در روش حذفی گاوس، با تغییر ترتیب معادلات به نحوی که در اعمال حذفی از به‌کارگیری مضارب بزرگ اجتناب شود، می‌توان از رشد خطاهای گرد شده کاست. روندی که باید انجام گیرد به انقباض محوری (یا حذفی گاوس با محورگیری جزئی) معروف است. قاعده کلی چنینی است: در هر مرحله حذفی، سطرهای ماتریس افزوده را چنان مرتب می‌کنیم که قدر مطلق عضو جدید محوری بزرگتر از (یا مساوی با) قدر مطلق هر عضو زیر آن در همان ستون باشد.

با استفاده از این قاعده مطمئن می‌شویم که اندازه مضاربی که در هر مرحله به‌کار می‌رود نایبتر از يك است. برای نشان دادن این قاعده در عمل، به بررسی يك مثال ساده،

با استفاده از عملیات حسابی دقیق، می‌پردازیم.

مطلوب است حل

$$2x + 5y + 8z = 36$$

$$4x + 8y - 12z = -16$$

$$x + 8y + z = 20.$$

حل جدول بندی شده به صورت زیر است؛ اعضای محوری پررنگ چاپ شده‌اند.

مرحله	ماتریس افزوده	مضارب	توضیح
۱. در دو معادله $x$ را حذف کنید؛ توجه کنید که اندازه هر يك از دو ضرب از يك کمتر است	$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & -12 & -16 \\ 0 & 1 & 14 & 44 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \end{array}$	$\begin{array}{c} -1/2 \\ -1/4 \end{array}$	معادلات اول و دوم با هم عوض شده‌اند؛ عضو محوری ۴ دارای بزرگترین مقدار در ستون مربوط به $x$ می‌باشد.
۲. $y$ را از معادله سوم حذف کنید.	$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & -12 & -16 \\ 0 & 1 & 14 & 44 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \end{array}$		باید سطرهای ۲ و ۳ با هم عوض شوند تا اینکه ۶ به جای ۱ عضو محوری گردد.
توجه کنید که $ m  < 1$	$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & -12 & -16 \\ 0 & 6 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 40/3 & 40 \end{array}$	$-1/6$	
۳. با جایگذاری از پایین حل کنید: $x=1$ , $y=2$ , $z=3$ .			

#### ۴- بد حالت بودن

پاره‌ای از دستگاه‌های معادلات خطی چنانند که جوابهاشان نسبت به تغییرات کوچک (و در نتیجه نسبت به خطاها) در ضرایب و اعداد ثابت بسیار حساس هستند. مثالی را در زیر می‌آوریم

که در آن تغییر دو ضریب به اندازه ۱٪، جواب با مضربی از ۱۰۵۱ یا بیشتر تغییر می کند. این دستگاهها را بدحالت می گویند. اگر دستگاهی بدحالت باشد، جواب حاصل از يك روش عددی ممکن است، حتی اگر برای بسیار کوچک نگه داشتن خطاهای گرد شده و دیگر خطاها مراقبت زیادی هم به عمل آید، با جواب دقیق خیلی متفاوت باشد.

### مثال

دستگاه دو معادله زیر را در نظر بگیرید

$$2x + y = 4$$

$$2x + 1001y = 4002.$$

این دستگاه دارای جواب دقیق  $x = 1$  و  $y = 2$  است. اگر ضرایب معادله دوم را به اندازه ۱٪ و عدد ثابت معادله اول را به اندازه ۵٪ تغییر دهیم، دستگاه زیر حاصل می شود.

$$2x + y = 382$$

$$2002x + y = 4002.$$

به آسانی نتیجه می شود که جواب دقیق این دستگاه عبارت است از  $x = 10$  و  $y = -1618$ . این جواب با جواب دستگاه اولی بسیار متفاوت است. بنابراین هر دو دستگاه بدحالت هستند.

اگر دستگاهی بدحالت باشد، روند معمول امتحان يك جواب عددی - با قراردادن آن در معادلات اصلی (یا ترکیبی از آنها) و «مشاهده اینکه با چه کیفیتی در معادلات صدق می کند» - بی اعتبار است. طرق دقیقتری برای امتحان جوابها وجود دارند، و برای تعیین اینکه آیا يك دستگاه بدحالت است یا نه، آزمایشهای بسیاری هم پیشنهاد شده اند. برای این گونه آزمایشها، خواننده می تواند به کتابهای پیشرفته تر آنالیز عددی رجوع کند.

### خود را بیازماید

- ۱- انواع خطاهایی را که می توانند بر جواب يك دستگاه معادلات خطی اثر بگذارند شرح دهید.
- ۲- استفاده از قاعده انقباض محوری چگونه می تواند برای کاستن خطاها کمک نماید؟
- ۳- آیا درست است بگوییم که يك دستگاه بدحالت جواب دقیقی ندارد؟

### تمرین

- ۱- اگر فرض کنیم اعداد داخل پرانتز میان حدود خطاهای اعداد ثابت باشند، حوزه

جوابهای دستگاه زیر را بیابید:

$$x - y = ۱۲(\pm ۰۰۰۱),$$

$$x + y = ۳۲۸(\pm ۰۰۰۵).$$

۲- مطلوب است حل دستگاههای زیر به روش حذفی گاوس:

(i) 
$$x - ۱۰y = -۲۱۲۸,$$

$$۱۰x + y = ۱۴۲۳;$$

(ii) 
$$x + ۵y - z = ۴,$$

$$۲x - y + ۳z = ۷,$$

$$۳x - y + ۵z = ۱۲;$$

(iii) 
$$۲۰۱x_1 + ۲۰۴x_2 + ۸۰۱x_3 = ۶۲۲۷۶,$$

$$۷۲۲x_1 + ۸۰۵x_2 - ۶۲۳x_3 = -۱۲۹۳,$$

$$۳۲۴x_1 - ۶۲۴x_2 + ۵۲۴x_3 = ۱۶۲۲۴.$$

۳- با استفاده از حساب ممیز سیار با مانتیس چهار رقم اعشار، دستگاه زیر را بسا و بدون استفاده از انقباض محوری حل کنید. جوابهای خود را با جواب دقیق، که عبارت است از  $x = ۱۲۰۰۰$  و  $y = ۰۰۵۰۰۰$ ، مقایسه کنید.

$$۰۰۲۳۱۰ \times 10^{-2}x + ۰۰۴۱۰۴ \times 10^{-1}y = ۰۰۲۲۸۳ \times 10^{-1}$$

$$۰۰۴۲۰۰ \times 10^0x + ۰۰۵۳۶۸ \times 10^1y = ۰۰۳۱۰۴ \times 10^1.$$

۴- نشان دهید که تکمیل مثلثی کردن يك دستگاه خطی ۳ مجهولی به روش حذفی گاوس، ۳ عمل تقسیم، ۸ عمل ضرب و ۸ عمل جمع، و انجام جایگذاری از پایین ۳ عمل تقسیم، ۳ عمل ضرب و ۳ عمل جمع دیگر لازم دارد. دستورکلی مربوط به تعداد اعمال حسابی مورد لزوم، مذکور در بخش ۲، را به دست آورید.

۵- مثال مربوط به بدحالت بودن مذکور در بخش ۴ را به طریق زیر بررسی کنید.  
(i) خطوط راست دستگاه اول را بر روی کاغذ میلی متری رسم کنید؛ اکنون که تنها دو مجهول داریم، بدحالت بودن را به زبان هندسی شرح دهید.

(ii) جواب دستگاه اول را در طرف چپ دستگاه دوم قرار دهید. آیا  $x = ۱$  و  $y = ۲$  جواب خوبی برای دستگاه دوم «به نظر می رسد»؟ تفسیر کنید.

(iii) جواب دستگاه دوم را در طرف چپ دستگاه اول قرار دهید. تفسیر کنید.

۶- (این مثالی است از بدحالت بودن منسوب به ت. س. ویلسون<sup>۱</sup>.)

$$10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32$$

$$7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$

$$8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33$$

$$7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31$$

«جواب» (۵۱-، ۲۹۹، ۷۲۲-، ۶۰۰) را در طرف چپ دستگاه قرار دهید. آیا می‌توانید ادعا کنید که این جواب، جواب خوبی است؟ اینک جواب (۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰) را قرار دهید. در مورد خطرات پیش دآوری توضیح دهید!

## گام سیزده

### دستگاههای معادلات خطی - ۳

#### روش تکراری گاوس - سایدل<sup>۱</sup>

روشهایی را که در گامهای قبل جهت حل دستگاههای معادلات خطی به کار بردیم، به روشهای مستقیم مصطلح هستند. هنگام استفاده از يك روش مستقیم، پس از انجام تعدادی متناهی از اعمال مربوط به حساب در صورتی که خطای گرد شده و دیگر خطاها به وجود نیایند، به يك جواب دقیق می رسیم. البته، عموماً خطاهای گرد شده به وجود می آیند، و لذا وقتی که يك دستگاه بزرگ را با روشهای مستقیم حل می کنیم، رشد خطاها می تواند آن قدر زیاد باشد که به نتایج بیهوده ای منجر شود.

#### ۱- روشهای تکراری

روشهای تکراری شیوه دیگری را فراهم می آورند. به خاطر آورید که در يك روش تکراری بایک جواب تقریبی شروع می کنیم، و آن را در يك دستور تراجعی به کار می بریم تا جواب تقریبی دیگری به دست آید. با به کار بردن پی در پی این دستور، دنباله ای از جوابها حاصل می گردد که (تحت شرایط مناسب) به جواب دقیق همگرا می شود. روشهای تکراری دارای مزایای ساده عمل و سهولت اجرا به وسیله کامپیوتر هستند، و نسبت به انتشار خطاها نسبتاً فاقد حساسیت. این روشها، با مزیت بر روشهای مستقیم، برای حل دستگاههای خطی حاوی چند صد متغیر به کار می روند، به ویژه اگر بسیاری از ضرایب صفر هم باشند. دستگاههای تا ۱۰۰۰۰ متغیر هم به طور موفقیت آمیز به وسیله روشهای تکراری با کامپیوتر حل شده اند و



حال آنکه حل دستگاههای با ۵۰۰ متغیر یا بیشتر بدروشهای مستقیم مشکل است یا غیرممکن.

## ۲- روش گاوس - سایدل \*

در این کتاب برای معادلات خطی تنها یک روش تکراری، مرهون گاوس و اصلاح شده توسط سایدل، ارائه خواهد شد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

### مثال

مطلوب است حل دستگاه

$$10x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$$

$$2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13$$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 = 13.$$

از روش تکراری استفاده می‌کنیم.

اولین قدم آن است که معادله اول بر حسب  $x_1$ ، دوم بر حسب  $x_2$  و سوم بر حسب  $x_3$  حل شود. این عمل دستگاه فوق را به صورت زیر درمی‌آورد:

$$x_1 = 1.3 - 0.2x_2 - 0.1x_3 \quad (1)$$

$$x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3 \quad (2)$$

$$x_3 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_2 \quad (3).$$

اکنون جواب اولیه‌ای انتخاب می‌شود؛ ما از  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = 0$ ،  $x_3 = 0$  استفاده خواهیم کرد. با قراردادن این مقادیر در طرف راست (۱) نتیجه می‌شود  $x_1 = 1.3$ . بلافاصله این مقدار  $x_1$  همراه با بقیه جوابهای اولیه (یعنی،  $x_2 = 0$  و  $x_3 = 0$ ) در طرف راست (۲) قرار داده می‌شوند تا  $x_2 = 1.3 - 0.2 \times 1.3 - 0 = 1.04$  به دست آید. بالاخره،  $x_1 = 1.3$  و  $x_2 = 1.04$  در (۳) قرار داده می‌شود تا  $x_3 = 0.936$  حاصل شود. این عمل اولین تکرار را تکمیل می‌کند؛ و بدین ترتیب دومین جواب تقریبی یعنی (۰.۹۳۶، ۱.۰۴، ۱.۳) به دست می‌آید.

با استفاده از دومین جواب می‌توانیم روند فوق را تکرار کنیم تا تقریب سوم را هم به دست آوریم. روشن است که بدین طریق می‌توان ادامه داد و دنباله‌ای از جوابهای

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه‌نویسی در صفحه ۱۷۹ یک فلوجارت داده شده است.

تقریبی به دست آورد. چنانچه ضرایب دستگاه شرایط مشخصی را داشته باشند این دنباله به جواب دقیق همگرا خواهد شد.

با تشکیل روابط تراجعی مربوط، به روشنی می توان دید که این روند تکراری چگونه به پیش می رود. اگر جوابهای  $(k+1)$  ام و  $k$  ام را به ترتیب با  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$  و  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$  نمایش دهیم، داریم

$$x_1^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} \quad (1)'$$

$$x_2^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k)} \quad (2)'$$

$$x_3^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_2^{(k+1)} \quad (3)'$$

از  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$  شروع می کنیم و سپس روابط فوق را به طور پی در پی با ترتیب  $(1)'$ ،  $(2)'$ ،  $(3)'$  به کار می بریم. توجه داشته باشید که وقتی در طرفهای راست معادلات فوق به جای  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  مقدار قرار می دهیم همواره به جای هر مجهول از آخرین برآوردهای حاصل استفاده می کنیم.

### ۳- همگرایی

دنباله جوابهای حاصل از این روند تکراری را می توان در جدولی به صورت زیر نمایش داد:

تکرار $k$	جواب تقریبی (گاوس-سایدل)		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۱.۳	۱.۵۴	۰.۹۳۶
۲	۰.۹۹۸۴	۱.۰۰۶۷۲	۰.۹۹۹۶۴۸
۳	۰.۹۹۸۶۹۱	۱.۰۰۰۲۹۷	۱.۰۰۰۲۳۲

دانشجویی تواند نشان دهد که جواب دقیق این دستگاه  $(1, 1, 1)$  است. مشاهده می شود که جوابهای گاوس - سایدل بد سرعت به این جواب نزدیک می شوند، به عبارت

دیگر، این روش در حال همگرا شدن است.

البته در عمل، جواب درست معلوم نیست. بنا به رسم به محض اینکه تفاضلات بین مقادیر  $x^{(k)}$ ،  $x^{(k+1)}$  به اندازه مناسب کوچک شدند، به این روند هم خاتمه داده می شود. يك قاعده برای توقف آن است که وقتی برای اولین دفعه  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$  از عدد کوچک معلومی (مثلاً ۰۰۰۰۰۰۱) کمتر شد به تکرار خاتمه داده شود. مسئله همگرایی يك دستگاه مفروض از معادلات مسئله مهمی است، مانند مثال فوق، ممکن است روش گاوس - سایدل سریعاً منجر به جوابی شود که خیلی نزدیک به جواب دقیق است؛ از طرف دیگر ممکن است چنان به کندي همگرا شود که از نظر عملی بی فایده باشد، یا ممکن است دنباله ای را تولید کند که از جواب دقیق دور هم بشود. برای بررسی این مسئله، دانشجو باید به کتابهای پیشرفته تر (مثلاً ر.ک. به کتاب کنت و دو بور) مراجعه نماید. برای بهتر کردن شانس (وسرعت) همگرایی، قبل از استفاده از روش تکراری باید دستگاه معادلات را طوری مرتب کرد که تا حد امکان هر ضریب قطری مقدم (بر حسب قدر مطلق) بیشترین مقدار موجود در همان سطر را داشته باشد.

### خود را بیازمایید

۱- فرق اساسی بین يك روش تکراری و يك روش مستقیم در چیست؟

۲- چند مزیت استفاده از روشهای تکراری به جای روشهای مستقیم را بیان کنید.

۳- شانس موفقیت روش گاوس - سایدل را چگونه می توان بهتر کرد؟

### تمرین

۱- برای مثالی که در بالا بررسی شد، مقدار  $S_p$ ، کمیت استفاده شده در قاعده توقف پیشنهادی پس از تکرار سوم، را محاسبه کنید.

۲- دستگاههای زیر را به روش گاوس - سایدل حل کنید.

(i) (تا ۴D)

$$x - y + 10z = -7$$

$$20x + 3y - 2z = 51$$

$$2x + 8y + 4z = 25$$

(تجدید ترتیب را فراموش نکنید.)

پس از هر تکرار مقدار  $S_p$  را (تا ۵D) محاسبه کنید.

(ii) (تا ۴D)

$$10x - y = 1$$

$$-x + 10y - z = 1$$

$$-y + 10z = 1$$

## گام چهارده

### دستگاههای معادلات خطی-۴\*

#### معکوس کردن ماتریس

در این گام اختیاری فرض بر این است که دانشجو با جبر ماتریسی مقدماتی آشنایی دارد. صورت کلی دستگاه  $n$  معادله خطی  $n$  مجهولی (ر.ك. بخش ۱ از گام ۱۱) را می توان به شکل ماتریسی  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  هم نوشت، و برداری مانند  $\mathbf{x}$  را جستجو کرد که در این معادله صدق کند.

#### ۱- ماتریس معکوس

اگر دترمینان  $\mathbf{A}$  مخالف صفر باشد، ماتریسی به نام معکوس  $\mathbf{A}$  (که با  $\mathbf{A}^{-1}$  نشان داده می شود) وجود دارد که حاصل ضرب ماتریسی  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{A}^{-1}$  برابر ماتریس واحد  $\mathbf{I}$  به ابعاد  $n \times n$  باشد. یعنی،  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{AA}^{-1}$ .

اگر معادله  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  را از سمت چپ در ماتریس معکوس،  $\mathbf{A}^{-1}$  ضرب کنیم داریم  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ ؛ که از آن نتیجه می شود  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  (زیرا  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$  و  $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ ). لذا جواب دستگاه معادلات خطی را می توان بدین ترتیب به دست آورد که ابتدا معکوس ماتریس ضرایب  $\mathbf{A}$  را یافت و سپس حاصل ضرب  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  را محاسبه کرد.

مع هذا، نباید این روش حل برای حالت کلی هم توصیه شود. مسئله یافتن معکوس ماتریس، خود یک مسئله عددی است که حلش محتاج اعمال حسابی بسیار زیادتری (و بنا بر این شامل خطای گرد شده و خطاهای دیگر بیشتری) در مقایسه با هر یک از روشهای توصیف شده در گامهای قبلی است.

محاسبه معکوس ماتریس عاقلانه است هر گاه (الف) معکوس ماتریس به دلایل دیگری

هم مورد نیاز باشد (مثلا حسای اطلاعات آماری ویژه‌ای باشد یا در دستور یا محاسبه دیگری نیز مورد استفاده قرار گیرد) یا (ب) حل چند دستگاه خطی که همه دارای يك ماتریس ضرایب یکسان هستند مورد نظر باشد.

## ۲- روش معکوس کردن يك ماتریس

روشهای عددی بسیاری برای یافتن معکوس يك ماتریس وجود دارند. به تشریح روشی می پردازیم که از روندهای حذفی گاوس و جایگذاری از پایین، گام ۱۱، استفاده می کند. این روش از نظر محاسباتی کارا و به کار بردنش ساده است. با به کار بردن این روش برای يك ماتریس  $2 \times 2$  و يك ماتریس  $3 \times 3$ ، آن را تشریح می کنیم؛ پس از آن برای دانشجو باید روشن باشد که این روش را چگونه می توان برای ماتریسهای  $n \times n$  تعمیم داد.

(i) مثال  $2 \times 2$   
فرض می کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{می خواهیم ماتریسی مانند } A^{-1} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \text{ بیابیم که}$$

$$AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این رابطه با حل دو دستگاه زیر معادل است:

$$A \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } A \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این روش به شرح زیر ادامه می یابد:

الف) ماتریس افزوده زیر را تشکیل دهید

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(ب) عملیات سطری مقدماتی را بر ماتریس افزوده اعمال کنید تا  $A$  به یک ماتریس بالا مثلثی چون  $\tilde{A}$  تبدیل شود (ر. ک. بخش ۵ از گام ۱۱):

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \qquad \mathbf{I} \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{A}} \qquad \tilde{\mathbf{I}} \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

(دو برابر سطر ۱ منهای سطر ۲).

(پ) دو دستگاه

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از روش جایگذاری از پایین حل کنید. توجه داشته باشید که با استفاده از  $\tilde{A}$  و ستونهای  $\tilde{I}$ ، چگونه دستگاهها ساخته می‌شوند. سپس از دستگاه اول داریم  $3v_1 = -2$ ،

یعنی  $v_1 = -\frac{2}{3}$  و  $2u_1 + v_1 = 1$ ، بنابراین  $2u_1 = 1 + \frac{2}{3}$  و لذا  $u_1 = \frac{5}{6}$ .

از دستگاه دوم داریم  $3v_2 = 1$  یعنی  $v_2 = \frac{1}{3}$  و  $2u_2 + v_2 = 0$  بنابراین

$2u_2 = -\frac{1}{3}$  و در نتیجه  $u_2 = -\frac{1}{6}$ . ماتریس معکوس مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(ت) امتحان: باید  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$  برابر  $\mathbf{I}$  شود. با انجام عمل ضرب خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین  $\mathbf{A}^{-1}$  درست است.

در این مثال ساده، انجام اعمال حسابی با کسرها امکان پذیر است، و لذا هیچ خطای گرد شده‌ای هم پیش نمی‌آید و ماتریس معکوس حاصل، دقیق است.

(ii) يك مثال  $3 \times 3$

هنگامی که تبدیل ماتریس افزوده انجام می‌گیرد باید يك ستون مقابله حاوی مجموعهای سطری هم در دست باشد. برای اجتناب از زوال زیاده از حد ارقام با معنی، به سبب تجمع خطاهای گرد شده، در تمامی محاسبات می‌توان يك یا دو رقم با معنی اضافی را هم منظور کرد. نتیجه نهایی باید با محاسبه  $AA^{-1}$  امتحان شود که تقریباً برابر با ماتریس واحد  $I$  باشد. به عنوان مثال، ماتریس معکوس  $A^{-1}$  از

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0.10 & 0.24 & 0.24 \\ 0.05 & 0.30 & 0.12 \end{bmatrix}$$

را پیدا می‌کنیم.

برای نشان دادن تأثیرات خطاها، فرض می‌کنیم که اعضای  $A$  تا  $2S$  درست باشند و در محاسبه  $A^{-1}$  هم عملیات را تا  $2S$  انجام می‌دهیم. نتایج محاسبات را می‌توان برای راحتی به صورت جدولی نمایش داد.

اینک به مثالی از محاسبات جایگذاری از پایین می‌پردازیم. اگر  $\tilde{A}$  با ستون دوم  $\tilde{I}$  در نظر گرفته شود آنگاه ستون دوم  $A^{-1}$  به دست می‌آید. لذا:

$$\begin{bmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0 & 0.12 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_5 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

از معادله فوق به ترتیب نتیجه می‌شود  $u_4 = -20$ ،  $u_5 = 38$  و  $u_6 = -34$ . دانشجو باید امتحان کند که حاصل ضرب  $AA^{-1}$  عبارت از

$$\begin{bmatrix} 1.00 & -0.08 & 0.00 \\ 0.10 & 0.92 & 0.00 \\ 0.13 & -0.10 & 1.00 \end{bmatrix}$$

مضارب	$\tilde{A}$ به $A$ تبدیل می شود			$\tilde{I}$ به $I$ تبدیل می شود			$\sum$ امتحان	عملیات سطری
	۰۲۰	۰۲۴	۰۱۲	۱	۰	۰	۱۷۵۶	(۱)
	۰۱۰	۰۲۴	۰۲۴	۰	۱	۰	۱۷۵۸	(۲)
	۰۵۰	۰۳۰	۰۴۹	۰	۰	۱	۱۷۸۴	(۳)
	۰۲۰	۰۲۴	۰۱۲	۱	۰	۰		(۴) = (۱)
— ۵	۰	۰۱۲	۰۱۸	— ۵	۱	۰	۰۸۰	(۵) = (۲) — ۵(۱)
— ۵۲۵	۰	۰۲۴	۰۴۶	— ۵۲۵	۰	۱	۱۷۴۵	(۶) = (۳) — ۵۲۵(۱)
	۰۲۰	۰۲۴	۰۱۲	۱	۰	۰		(۷) = (۴)
	۰	۰۱۲	۰۱۸	— ۵	۱	۰		(۸) = (۵)
— ۲	۰	۰	۰۱۰	۰۷۵	— ۲	۱	— ۰۱۵	(۹) = (۶) — ۲(۵)
<p>ماتریس معکوس <math>A^{-1}</math> را در اینجا قرار داده ایم. (<math>\rightarrow</math>)؛ اعضایش به ترتیبی که نشان داده شده است (شماره گذاری شده با ۱، ۲، ...، ۹) تا <math>۲S</math> محاسبه شده اند.</p>								



هست که تقریباً برابر با  $\mathbf{I}_3$  است. این تقریب به خاطر اینکه محاسبهٔ اعضای  $\mathbf{A}^{-1}$  تنها تا  $2S$  انجام شد، ضعیف است.

### ۳- حل دستگاههای خطی با استفاده از ماتریس معکوس

به طوری که در بالا اشاره شد، جواب دستگاه خطی  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  عبارت است از  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ . این مطلب را با حل مثالی، که از ماتریس  $\mathbf{A}^{-1}$  به دست آمده در بخش ۲ بالا استفاده می‌کند، تشریح می‌کنیم.

#### مثال

می‌خواهیم دستگاه زیر را حل کنیم

$$0.20x + 0.24y + 0.12z = 1$$

$$0.10x + 0.24y + 0.24z = 2$$

$$0.05x + 0.30y + 0.49z = 3.$$

حل این دستگاه به شرح ذیل است. ماتریس ضرایب عبارت است از

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0.10 & 0.24 & 0.24 \\ 0.05 & 0.30 & 0.49 \end{bmatrix}.$$

اگر فرض کنیم که اعضای  $\mathbf{A}$  با دقت  $2S$  معلوم است، می‌توان  $\mathbf{A}^{-1}$  را به همان طریق بخش ۱ محاسبه و از آن به شرح زیر استفاده کرد:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 190 & -340 & 120 \\ -150 & 380 & -150 \\ 70 & -200 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -130 \\ 160 \\ -205 \end{bmatrix}.$$

یعنی، جواب تا  $2S$  عبارت است از  $x = -130$ ،  $y = 160$  و  $z = -205$ . با جمع کردن سه معادله، جواب را می‌توان امتحان کرد. نتیجه اینکه

$$0.35x + 0.78y + 0.85z = 6.$$

اگر جواب فوق را در طرف چپ رابطه اخیر قرار دهیم، تا  $۲S$  داریم:

$$۰۰۳۵(-۱۳) + ۰۰۷۸ \times ۱۶ + ۰۰۸۵(-۲۵) = ۵۸۰.$$

خود را بیازمایید

۱- در روش یافتن معکوس  $A$ ، پس از انجام عملیات سطری مقدماتی، شکل نهایی

$A$  چیست؟

۲- آیا جواب، دستگاه  $Mx = d$  عبارت از  $x = dM^{-1}$  یا  $x = M^{-1}d$  (یا

هیچ کدام)؟

۳- شرطی برای يك ماتریس ارائه دهید که معکوسی نداشته باشد.

### تمرین

۱- با استفاده از روش حذفی و جایگذاری از پایین، معکوس ماتریسهای زیر را بیابید.

$$(الف) \begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۶ & ۱۹ & ۱۲ \\ ۲ & ۸ & ۱۴ \end{bmatrix}, (ب) \begin{bmatrix} ۱۳ & ۴۶ & ۳۱ \\ ۵۶ & ۵۸ & ۷۹ \\ ۴۲ & ۳۲ & ۴۵ \end{bmatrix},$$

$$(پ) \begin{bmatrix} ۰۳۷ & ۰۶۵ & ۰۸۱ \\ ۰۴۱ & ۰۷۱ & ۰۳۴ \\ ۰۱۱ & ۰۸۲ & ۰۵۲ \end{bmatrix}.$$

۲- (با دو بردار طرف راست) هر يك از دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x + ۶y + ۴z = ۵ & (=۱) \\ ۶x + ۱۹y + ۱۲z = ۶ & (=۲) \\ ۲x + ۸y + ۱۴z = ۷ & (=۳) \end{cases} (الف)$$

$$\begin{cases} ۱۳x + ۴۶y + ۳۱z = -۱ & (=۰) \\ ۵۶x + ۵۸y + ۷۹z = ۲ & (=۱) \\ ۴۲x + ۳۲y + ۴۵z = -۳ & (=۱) \end{cases} (ب)$$

$$\begin{cases} ۰۳۷x_۱ + ۰۶۵x_۲ + ۰۸۱x_۳ = ۱۱ & (=۰۵) \\ ۰۴۱x_۱ + ۰۷۱x_۲ + ۰۳۴x_۳ = ۲۲ & (=۲۱) \end{cases} (پ)$$

# گام پانزده

## تفاضلات متناهی-۱

### جدول

متخصصین آنالیز عددی از قدیم با جدولهایی از اعداد سروکار داشته و فنون بسیاری هم جهت بررسی توابع ریاضی نمایش داده شده به وسیله جدول، توسعه یافته اند. مثلاً، ممکن است مقدار تابع در نقطه‌ای که در جدول نیامده است خواسته شود، و مجبور شویم از یک روند درونیابی استفاده کنیم. تخمین زدن مشتق یا انتگرال معین یک تابع جدولی، با کمک برخی از فرایندهای متناهی، جهت تقریب کردن روندهای حدی (بینهایت کوچک) متناظر، از حساب دیفرانسیل و انتگرال، نیز میسر است. در هر حالت به کار بردن تفاضلات متناهی مرسوم است.

### ۱- جدول مقادیر

کتابهای بسیاری جدولهایی از توابع ریاضی را شامل هستند. یکی از جامعترین آنها کتاب دهنمای توابع ریاضی است، که توسط م. آبراموویتس<sup>۱</sup> و آی. ا. استگان<sup>۲</sup> (اداره ملی استانداردهای ایالات متحده، ۱۹۶۴؛ داور<sup>۳</sup> ۱۹۶۵) تنظیم شده است، و شامل اطلاعات مفیدی درباره روشهای عددی نیز می باشد.

هر چند که اکثر جداول از شناسههایی با فواصل ثابت استفاده می کنند، ولی مقادیر برخی از توابع در نواحی خاصی از شناسه خود سریع تغییر می کنند و لذا ممکن است بهتر باشد که تابع مورد مطالعه بر حسب فاصلههای متغیری که نسبت به رفتار موضعی تابع تعیین

می‌شوند، جدول بندی شود. اما کار کردن با جداولی که فاصله شناسه‌ای متغیر دارند بسیار مشکل است و لذا هر جا که ممکن باشد از فاصله‌های شناسه‌ای یکسان استفاده می‌کنند. به عنوان مثالی ساده جدول ۲S مربوط به تابع نمایی روی  $0.14 \leq x \leq 0.15$  تقسیم شده به فاصله‌های  $0.01$  را در نظر می‌گیریم (این علامت حوزه  $0.14 \leq x \leq 0.15$  تقسیم شده به فاصله‌های  $0.01$  را مشخص می‌کند).

$x$	$f(x) = e^x$
0.10	1.10517
0.11	1.11628
0.12	1.12750
0.13	1.13883
0.14	1.15027

نکته بسیار مهم این است که فاصله بین شناسه‌های متوالی آن قدر کوچک باشد که تغییرات تابع جدول بندی شده جلوه‌گر شود. زیرا معمولاً مقدار تابع در مقادیر از شناسه بین مقادیر مشخص شده لازم خواهد بود (به عنوان مثال، مقدار  $e^x$  در  $x = 0.105$  از جدول بالا). اگر جدول این طور تنظیم شده باشد، با اختیار کردن یک نمایش بر حسب چند جمله‌ای (ان شاء الله از درجه پایین) می‌توان چنین مقادیر میانجی تابع مفروض را با تقریب خوب به دست آورد.

## ۲- تفاضلات منتهای

از زمان نیوتن تفاضلات منتهای به طور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تنظیم جدولی از تفاضلات منتهای برای یک تابع جدولی ساده است. تفاضلات اول از تفریق هر مقدار از مقدار بعدی موجود در جدول، تفاضلات دوم با تکرار این عمل روی تفاضلات اول به دست می‌آیند و هکذا برای تفاضلات مراتب بالاتر. برای جدول بالا مربوط به  $e^x$ :  $0.14 \leq x \leq 0.15$  جدول ذیل به دست می‌آید (به نحوه تنظیم مرسوم جدول، یعنی حذف ممیزها و صفرهای مقدم از تفاضلات، توجه کنید).

(در این مورد، برای مقایسه با مقادیر تابع، تفاضلات باید در  $10^{-5}$  ضرب شوند.)



$x$	$f(x) = e^x$	تفاضلات سوم		
		اول	دوم	تفاضلات اول
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷			
		۵۶۶۶		
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱	
		۵۹۵۷		۱۵
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶	
		۶۲۶۳		۱۴
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰	
		۶۵۸۳		۱۸
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸	
		۶۹۲۱		۱۶
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴	
		۷۲۷۵		۲۰
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲		۳۷۴	
		۷۶۴۹		۱۸
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱		۳۹۲	
		۸۰۴۱		
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲			

با وجودی که خطاهای گرد شده در  $f(x)$  باید در آخرین رقم با معنی کمتر از  $1/2$  باشند ولی خطاها ممکن است مجتمع شوند؛ بزرگترین خطایی که می تواند به دست آید متناظر است با:

خطای جدولی	تفاضلات					
	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
$+1/2$	-۱					
$-1/2$		+۲				
$+1/2$	+۱		-۴			
$+1/2$	-۱	-۲		+۸		
$-1/2$		+۲	+۴		-۱۶	
$-1/2$	+۱		-۴	-۸		+۳۲
$+1/2$		+۲		+۱۶		
$+1/2$	+۱	-۲		+۸		
$-1/2$	-۱		+۴			
$-1/2$		+۲				
$+1/2$	+۱					

يك محك عملی نادقیق برای نوسانات مورد انتظار (« سطح مزاحمت ») ناشی از خطای گرد شده، در جدول ذیل نشان داده شده است.

مرتبه تفاضل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حدود خطای مورد انتظار	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 6$	$\pm 12$	$\pm 22$

### خود را بیازماید

- ۱- چه عواملی فاصله‌های جدول بندی يك تابع را تعیین می کنند؟
- ۲- نام روندی که مقداری از يك تابع جدول بندی شده در يك نقطه میانی را تعیین می کند چیست؟
- ۳- در يك جدول تفاضلی، چه چیز مسبب بی نظمی تفاضلات در بالاترین مرتبه است؟

### تمرین

- ۱- برای تابع  $f(x) = x^2$  به ازای  $x = 0(1)6$ ، يك جدول تفاضلات بسازید.
- ۲- برای تابع  $f(x) = e^x$  (که در جدول زیر تا رقم ۷ با معنی داده شده است) به ازای  $x = 0(0.005)0.05$ ، يك جدول تفاضلی بسازید:

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0.01	1.0105171	0.025	1.0284025	0.04	1.04081825
0.015	1.0161832	0.03	1.0349859	0.045	1.0568312
0.02	1.0221403	0.035	1.0419068	0.05	1.0648721

# گام شانزده

## تفاضلات متناهی - ۲

### نمادهای تفاضل پیشرو، پسرو، و مرکزی

برای تنها دسته از تفاضلات متناهی که در گام قبل توضیح داده شد سه نماد مختلف وجود دارند؛ این نمادها معرف تفاضلات پیشرو، پسرو، و مرکزی هستند. هر یک از این سه نماد را بر حسب به اصطلاح عملگر انتقال معرفی می کنیم.

#### ۱- عملگر انتقال $E$

فرض کنید  $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$  نمایانگر مجموعه‌ای از مقادیر تابع  $f(x)$  تعریف شده به صورت  $f_j \equiv f(x_j)$  که در آن  $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n$  باشد. عملگر انتقال  $E$  با

$$Ef_j = f_{j+1}$$

تعریف می شود. در نتیجه:

$$E^2 f_j = E(Ef_j) = Ef_{j+1} = f_{j+2},$$

و الی آخر: یعنی،

$$E^k f_j = f_{j+k},$$

که در آن  $k$  عددی است صحیح. به علاوه، فرمول اخیر را برای تمام مقادیر حقیقی  $z$  و  $k$  چنان تعمیم می دهیم که مثلا .



$$E^{\frac{1}{q}} f_j = f_{j+\frac{1}{q}} = f(x_0 + (j + \frac{1}{q})h),$$

$$E^{\frac{1}{q}} f_{j+\frac{1}{q}} = f_{j+1} = f(x_0 + (j+1)h).$$

۲- عملگر تفاضل پیشرو  $\Delta$ 

اگر عملگر تفاضل پیشرو  $\Delta$  را به وسیله

$$\Delta = E - 1$$

تعریف کنیم نتیجه می گیریم

$$\Delta f_j = (E - 1)f_j = E f_j - f_j = f_{j+1} - f_j,$$

که تفاضل پیشرو مرتبه اول در  $x_j$  است. به همین طریق،

$$\Delta^2 f_j = \Delta(\Delta f_j) = \Delta(f_{j+1} - f_j) = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

تفاضل پیشرو مرتبه دوم در  $x_j$  است و الی آخر. تفاضل پیشرو مرتبه  $k$  ام عبارت است از  $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$ ، که در آن  $k$  عددی است صحیح.

۳- عملگر تفاضل پسرو  $\nabla$ 

اگر عملگر تفاضل پسرو  $\nabla$  را به وسیله

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

تعریف کنیم نتیجه می گیریم

$$\nabla f_j = (1 - E^{-1})f_j = f_j - E^{-1}f_j = f_j - f_{j-1},$$

که تفاضل پسرو مرتبه اول در  $x_j$  است. به همین طریق،

$$\nabla^2 f_j = \nabla(\nabla f_j) = \nabla(f_j - f_{j-1}) = \nabla f_j - \nabla f_{j-1} = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2},$$

تفاضل پسرو مرتبه دوم در  $x_j$  است و الی آخر. تفاضل پسرو مرتبه  $k$  ام عبارت است از  $\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$ ، که در آن  $k$  عددی است صحیح.

توجه کنید که:

$$\nabla^k f_j = \Delta^k f_{j-k} \quad \text{و} \quad \nabla f_j = \Delta f_{j-1}.$$

۴- عملگر تفاضل مرکزی  $\delta$ اگر عملگر تفاضل مرکزی  $\delta$  را به وسیله

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$

تعریف کنیم نتیجه می گیریم

$$\delta f_j = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})f_j = E^{\frac{1}{2}}f_j - E^{-\frac{1}{2}}f_j = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}},$$

که تفاضل مرکزی مرتبه اول در  $x_j$  است. به همین طریق،

$$\delta^2 f_j = \delta(\delta f_j) = \delta(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}.$$

تفاضل مرکزی مرتبه دوم در  $x_j$  است و الی آخر. تفاضل مرکزی مرتبه  $k$  ام عبارت است از  $\delta^k f_j = \delta^{k-1} f_{j+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{j-\frac{1}{2}}$ ، که در آن  $k$  عددی صحیح است.توجه کنید که  $\delta f_{j+\frac{1}{2}} = \Delta f_j = \nabla f_{j+1}$ .

## ۵- نمایش تفاضلی

نقش تفاضلات پیشرو، مرکزی و پسرو به وسیله جدول صفحه بعد نمایش داده می شود: با وجودی که تفاضلات پیشرو، مرکزی و پسرو دقیقاً يك مجموعه از اعداد را نمایش می دهند، ولی:

- (i) تفاضلات پیشرو مخصوصاً در نزدیکی ابتدای يك جدول مفیدند، زیرا شامل مقادیر تابع جدول بندی شده در زیر  $x_j$  هستند؛
- (ii) تفاضلات مرکزی مخصوصاً دور از دو انتهای جدول، یعنی جایی که مقادیر تابع جدول بندی شده در بالا و زیر  $x_j$  موجودند، مفید هستند؛
- (iii) تفاضلات پسرو مخصوصاً در نزدیکی انتهای يك جدول مفیدند، چرا که شامل مقادیر تابع جدول بندی شده در بالای  $x_j$  هستند.

## خود را بیازماید

- ۱- تعریف عملگر انتقال چیست؟
- ۲- عملگرهای تفاضل پیشرو، پسرو و مرکزی چگونه تعریف می شوند؟
- ۳- چه وقت مناسب است که به ترتیب از نمادهای تفاضل پیشرو، پسرو و مرکزی استفاده شود؟

$x$	$f(x)$	تفاضل اول	دوم	سوم	چهارم
$x_0$	$f_0$	$\Delta f_0$			
$x_1$	$f_1$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_0$		
$x_2$	$f_2$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
$x_3$	$f_3$	$\Delta f_3$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$
$x_4$	$f_4$				
$\vdots$	$\vdots$				
$x_{j-2}$	$f_{j-2}$	$\delta f_{j-\frac{r}{2}}$			
$x_{j-1}$	$f_{j-1}$	$\delta f_{j-\frac{1}{2}}$	$\delta^2 f_{j-1}$		
$x_j$	$f_j$		$\delta^2 f_j$	$\delta^3 f_{j-\frac{1}{2}}$	$\delta^4 f_j$
$x_{j+1}$	$f_{j+1}$	$\delta f_{j+\frac{1}{2}}$			
$x_{j+2}$	$f_{j+2}$	$\delta f_{j+\frac{r}{2}}$	$\delta^2 f_{j+1}$	$\delta^3 f_{j+\frac{1}{2}}$	
$\vdots$	$\vdots$				
$x_{n-4}$	$f_{n-4}$				
$x_{n-3}$	$f_{n-3}$	$\nabla f_{n-3}$	$\nabla^2 f_{n-3}$		
$x_{n-2}$	$f_{n-2}$	$\nabla f_{n-2}$	$\nabla^2 f_{n-2}$	$\nabla^3 f_{n-2}$	
$x_{n-1}$	$f_{n-1}$	$\nabla f_{n-1}$	$\nabla^2 f_{n-1}$	$\nabla^3 f_{n-1}$	$\nabla^4 f_{n-1}$
$x_n$	$f_n$	$\nabla f_n$	$\nabla^2 f_n$	$\nabla^3 f_n$	$\nabla^4 f_n$

## تمرین

۱- جدول تفاضلی  $f(x) = e^x$  (در بخش ۳ از گام ۱۵) را به ازای  $h = 0.05$  ( $0.05$ ) و  $x = 0.1$  تا پنجم رقم بامعنی مجدداً در نظر بگیرید و عبارات زیر را (با فرض  $x_0 = 0.1$ ) تعیین کنید:

$$\Delta^4 f_{\frac{1}{4}}, \Delta^3 f_{\frac{1}{4}}, \Delta^2 f_{\frac{1}{4}}, \Delta f_{\frac{1}{4}} \quad (i)$$

$$\nabla^4 f_{\frac{1}{4}}, \nabla^3 f_{\frac{1}{4}}, \nabla^2 f_{\frac{1}{4}}, \nabla f_{\frac{1}{4}} \quad (ii)$$

$$\delta^4 f_{\frac{1}{4}}, \delta^2 f_{\frac{1}{4}} \quad (iii)$$

$$\nabla^2 f_{\frac{1}{4}}, \delta^2 f_{\frac{1}{4}}, \Delta^2 f_{\frac{1}{4}} \quad (iv)$$

$$\delta^2 f_{\frac{1}{4}}, \nabla^3 f_{\frac{1}{4}}, \Delta^3 f_{\frac{1}{4}} \quad (v)$$

۲- ثابت کنید که

$$Ex_j = x_{j+1} \quad (i)$$

$$\Delta^2 f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j \quad (ii)$$

$$\nabla^2 f_j = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2} \quad (iii)$$

$$\delta^2 f_j = f_{j+\frac{1}{2}} - 2f_j + f_{j-\frac{1}{2}} \quad (iv)$$

## گام هفده

### تفاضلات متناهی - ۳

#### چند جمله ایها

چون تقریبات چند جمله ای در بسیاری از زمینه های آنالیز عددی به کار می روند بررسی آثار تفاضل گیری چند جمله ایها مهم است.

#### ۱- تفاضلات متناهی يك چند جمله ای

تفاضلات متناهی يك چند جمله ای درجه  $n$  چون

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

را که برای نقاط متساوی الفاصله با فاصله جدولی  $h$  جدول بندی شده است در نظر می گیریم.

قضیه : تفاضل  $n$  يك چند جمله ای از درجه  $n$  يك عدد ثابت متناسب با  $h^n$  است و تفاضلات از مراتب بالاتر صفرند.

برهان: با حذف اندیس  $x$  داریم:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= a_n [(x+h)^n - x^n] + a_{n-1} [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots \\ &\quad + a_1 [(x+h) - x] \end{aligned}$$

$= a_n n x^{n-1} h + (n-2)$  جمله‌ای از درجه ۲

$$\Delta^2 f(x) = a_n n h [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots$$

$$= a_n n (n-1) x^{n-2} h^2 + (n-3)$$
 جمله‌ای از درجه ۳

.....

$$\Delta^n f(x) = a_n n! h^n = \text{ثابت}$$

$$\Delta^{n+1} f(x) = 0.$$

در ضمن دانشجو ممکن است به خاطر آورد که در حساب دیفرانسیل نمو

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

به مشتق  $f(x)$  در نقطه  $x$  مربوط می‌شود.

مثال

$f(x) = x^2$  به ازای  $x = 50, 51, 52, 53, 54, 55$

$x$	$f(x) = x^2$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۵۰	۱۲۵۰۰۰	۷۶۵۱			
۵۱	۱۳۲۰۶۵۱		۳۰۶		
		۷۹۵۷		۶	
۵۲	۱۴۰۰۶۰۸		۳۱۲		۰
		۸۲۶۹		۶	
۵۳	۱۴۸۰۸۷۷		۳۱۸		۰
		۸۵۸۷		۶	
۵۴	۱۵۷۰۴۶۴		۳۲۴		
		۸۹۱۱			
۵۵	۱۶۶۰۳۷۵				

در این حالت  $h = 0.1$ ،  $n = 3$ ،  $a_n = 1$ ، از آنجا،

$$\Delta^2 f(x) = 1 \times 3! \times (0.1)^2 = 0.006$$

توجه کنید که ممکن است خطای گرد شده مزاحم شود: مثلاً، جدول بندی  $f(x) = x^3$  به ازای  $0.1$  (0.006)، گرد شده تا رقم اعشار، را در نظر بگیرید.

$x$	$f(x) = x^3$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0.0	0.000	0.000			
0.1	0.001	0.001			
0.2	0.008	0.007	0.006		
0.3	0.027	0.019	0.012	0.006	
0.4	0.064	0.045	0.026	0.010	0.004
0.5	0.125	0.080	0.034	0.008	0.002

## ۲- تقریب يك تابع به وسیله يك چند جمله‌ای

هروقت که تفاضلات از مراتب بالای يك جدول (با در نظر گرفتن خطای گرد شده) کوچک شوند تابع نمایش داده شده را می‌توان به خوبی به وسیله يك چند جمله‌ای تقریب کرد. مثلاً جدول تفاضلی  $f(x) = e^x$  به ازای  $0.1$  (0.005) تا شش رقم با معنی را مجدداً بررسی کنید.

$x$	$f(x) = e^x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷	۵۶۶۶			
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱		
		۵۹۵۷		۱۵	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶		-۱
		۶۲۶۳		۱۴	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰		۴
		۶۵۸۳		۱۸	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸		-۲
		۶۹۲۱		۱۶	
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴		۴
		۷۲۷۵		۲۰	
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲		۳۷۴		-۲
		۷۶۴۹		۱۸	
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱		۳۹۲		
		۸۰۴۱			
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲				

چون تخمین خطای گرد شده در  $\Delta^3$  برابر  $\pm 3$  (ر. ک. ص ۸۱) است، می‌گوییم که تفاضلات سوم در حد خطای گرد شده ثابت هستند و نتیجه می‌گیریم که برای  $e^x$ ، روی حوزه  $0.5 < x < 1.0$  و با فواصل  $0.05$ ، یک تقریب درجه سوم مناسب است. بدین- ترتیب، از تفاضلات می‌توان استفاده کرد و تشخیص داد که چند جمله‌ای تقریب از درجه چند (در صورت امکان) مناسب است.

مثالی که در آن تقریب با چند جمله‌ای نامناسب است عبارت است از  $f(x) = 10^x$  به ازای  $x = 0(1)4$ ، که داریم



$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰	۱				
		۹			
۱	۱۰		۸۱		
		۹۰		۷۲۹	
۲	۱۰۰		۸۱۰		۶۵۶۱
		۹۰۰		۷۲۹۰	
۳	۱۰۰۰		۸۱۰۰		
		۹۰۰۰			
۴	۱۰۰۰۰				

با وجودی که  $f(x) = 10^x$  «هموار» است فاصله جدولی بزرگ ( $h=1$ )، تفاضلات متناهی مراتب بالای بزرگی را به دست می دهد. همچنین باید متذکر شد که توابعی هم وجود دارند که به هیچ وجه، حداقل در یک همسایگی، نمی توانند به طور مفیدی جدول بندی شوند. مثلاً،  $f(x) = \sin(1/x)$  در نزدیکی مبدأ  $x=0$  از این نوع است. با این وجود، این حالات نسبتاً استثنایی هستند.

بالاخره، متذکر می شویم که در رابطه با استفاده گسترده از روشهای تفاضل متناهی، تقریب یک تابع به وسیله یک چند جمله ای اساسی است.

### خود را بیازماید

- ۱- درباره تفاضلات (دقیق) از مراتب بالای یک چند جمله ای چه می توان گفت؟
- ۲- تأثیر خطای گرد شده بر تفاضلات از مراتب بالای یک چند جمله ای چیست؟
- ۳- چه وقت می توان یک تابع را با یک چند جمله ای تقریب کرد؟

### تمرین

- ۱- در حالت های زیر یک جدول تفاضلی برای چند جمله ای  $f(x) = x^4$  به ازای  $x = 0(0.1)1$  بسازید:
- (i) مقادیر  $f(x)$  دقیق هستند؛
- (ii) مقادیر  $f(x)$  تا سه رقم اعشار گرد شده اند.

نظایهای گرد شده تفاضل چهارم را با تخمین  $\pm 6$  مقایسه کنید.

۲- درجه چند جمله‌ایی را پیدا کنید که داده‌های جدول زیر را برازش می‌کند.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
۰	۳	۳	۲۴
۱	۲	۴	۵۹
۲	۷	۵	۱۱۸

# گام هیجده

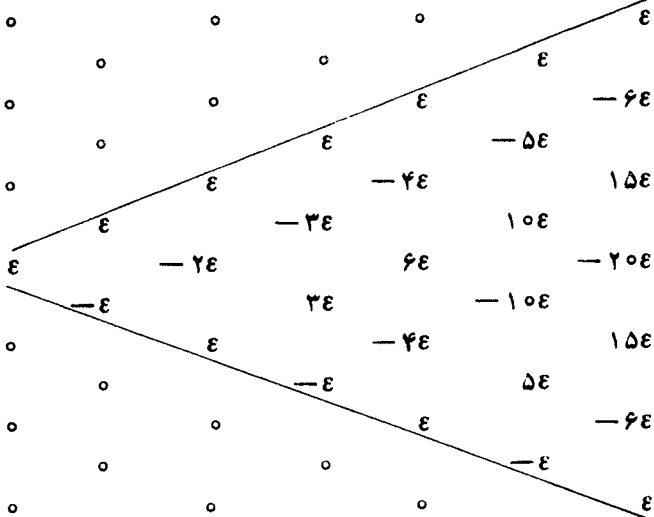
## تفاضلات متناهی - ۴

### کشف و تصحیح اشتباهات

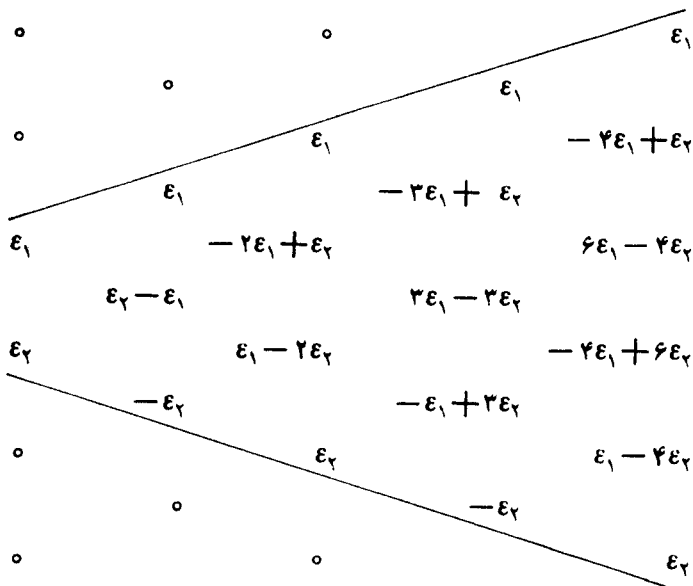
دیدیم که خطاهای گسرد شده سبب نوسانات کوچکی در تفاضلات می‌شوند. اشتباهات ، نوسانات بسیار بزرگتری را تولید می‌کنند، و در نتیجه به دست آوردن تفاضلات متناهی ، امتحان دقیقی است از توابع جدول بندی شده. توصیه می‌شود که این امتحان در مورد هر جدول حاصل از محاسبات به کار گرفته شود.

### ۱- پرة ناشی از يك اشتباه

خطایی چون  $\epsilon$  در مقدار  $f(x)$  یا در يك تفاضل به صورت زیر منتشر می‌شود:



يك جفت خطای مجاور به صورت زیر منتشر می شود:



در هر حالت يك «پره خطا» وجود دارد که محل اشتباه را نشان می دهد. در اولین پره، ضرایب يك قالب آشنا تشکیل می دهند؛ و آن صرفنظر از علامتهای منها، مثلث پاسکال، یعنی ضرایب دو جمله ای است.

به هر حال عملاً می توان جای اشتباهات را یافت و آنها را تصحیح کرد. اگر تابع، در فاصله ای که به وسیله يك چند جمله ای به خوبی نمایش داده می شود، به طور صحیح جدول بندی شده باشد انتظار داریم که (سرانجام) به ستونی از تفاضلات تقریباً ثابت برسیم. اگر در عوض به ستونی مشتمل بر دنباله ای از تفاضلات با علامتهای متناوب برسیم که به مقدار قابل ملاحظه ای بزرگتر از تفاضلات دیگر در همان ستون باشند، به وجود يك یا چند اشتباه مظنون می شویم و اطلاعات در مورد پره های خطا را جهت تعیین محل و تصحیح آنها به کار می بریم (بامثالهای زیر مقایسه شود).

## ۲- چند مثال

(i) در جدول بندی ذیل که مربوط به  $f(x) = x^2$  به ازای  $x = ۵۰۰(۰۰۱)۶۰۰$  است، در  $x = ۵۰۵$  پره خطا يك اشتباه را نشان می دهد. این اشتباه با نوسانات موجود در  $\Delta^2$  و  $\Delta^4$  آشکار می شود. چون تابع از درجه سوم است می توان دنباله های  $\{-۱۸, ۷۲, -۱۰۸, ۷۲, -۱۸\}$  و  $\{-۱۲, ۶۰, -۴۸, ۲۴\}$  یا  $\{۴, -۴۸, ۶۴, -۴۸, ۴\}$

$$\{6 + \varepsilon, 6 - 3\varepsilon, 6 + 3\varepsilon, 6 - \varepsilon\} \text{ و}$$

را با هم مقایسه کرد. از هر دو طریق نتیجه می گیریم که  $\varepsilon = -18$  و  $f(505) = 1669375$ . این اشتباه ناشی از ترانزاندن ارقام مجاور (ر.ک. گام ۲) است.

$x$	$f(x) = x^3$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۵۰۰	۱۲۵۰۰۰۰	۷۶۵۱			
۵۰۱	۱۳۲۰۶۵۱	۷۹۵۷	۳۰۶	۶	
۵۰۲	۱۴۰۰۶۰۸	۸۲۶۹	۳۱۲	۶	۰
۵۰۳	۱۴۸۰۸۷۷	۸۵۸۷	۳۱۸	-۱۲	-۱۸
۵۰۴	۱۵۷۰۴۶۴	۸۸۹۳	۳۰۶	۶۰	۷۲
۵۰۵	۱۶۶۰۳۵۷	۹۲۵۹	۳۶۶	-۴۸	-۱۰۸
۵۰۶	۱۷۵۰۶۱۶	۹۵۷۷	۳۱۸	۲۲	۷۲
۵۰۷	۱۸۵۰۱۹۳	۹۹۱۹	۳۴۲	۶	-۱۸
۵۰۸	۱۹۵۰۱۱۲	۱۰۲۶۷	۳۴۸	۶	۰
۵۰۹	۲۰۵۰۳۷۹	۱۰۶۲۱	۳۵۴		
۶۰۰	۲۱۶۰۰۰۰				

حال فرض کنید اشتباه ترا نهاده‌ی را تصحیح بکنیم ولی در جدول تفاضلی حاصل مرتکب اشتباه دیگری بشویم، به طوری که

$x$	$f(x) = x^3$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۵۰۰	۱۲۵۰۰۰۰	۷۶۵۱			
۵۰۱	۱۳۲۰۶۵۱	۷۹۵۷	۳۰۶	۶	
۵۰۲	۱۴۰۰۶۰۸	۸۲۶۹	۳۱۲	۶	۰
۵۰۳	۱۴۸۰۸۷۷	۸۵۸۷	۳۱۸	۶	۰
۵۰۴	۱۵۷۰۴۶۴	۸۹۱۱	۳۲۴	-۲۱	-۲۷
۵۰۵	۱۶۶۰۳۷۵	۹۲۱۴	۳۰۳	۶۰	۸۱
۵۰۶	۱۷۵۰۶۱۶	۹۵۷۷	۳۶۳	-۲۱	-۸۱
۵۰۷	۱۸۵۰۱۹۳	۹۹۱۹	۳۲۲	۶	۲۷
۵۰۸	۱۹۵۰۱۱۲	۱۰۲۶۷	۳۴۸	۶	۰
۵۰۹	۲۰۵۰۳۷۹	۱۰۶۲۱	۳۵۴		
۶۰۰	۲۱۶۰۰۰۰				

$x$	$f(x) = \log_{10} x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^3$ بعد از اولين تصحیح	$\Delta^3$ بعد از دومين تصحیح
۱۲۰	۰۰۵۰۰۰۰	۴۱۴				
۱۲۱	۰۰۵۰۴۱۴	۳۷۸	-۳۶		۵	۵
۱۲۲	۰۰۵۰۷۹۲	۳۴۷	-۳۱		۶	۶
۱۲۳	۰۰۵۱۱۳۹	۲۶۲	-۸۵		۳	۳
۱۲۴	۰۰۵۱۴۰۱	۳۶۰	+۹۸	۱۸۳	۲	۲
۱۲۵	۰۰۵۱۷۶۱	۲۸۰	-۸۰		۲۳	۳
۱۲۶	۰۰۵۲۰۴۱	۲۹۳	۱۳	۹۳	-۸۷	۳
۱۲۷	۰۰۵۲۳۳۴	۲۱۹	-۷۴	-۸۷	۹۰	۰
۱۲۸	۰۰۵۲۵۵۳	۲۳۵	۱۶	۹۰	-۲۹	۱
۱۲۹	۰۰۵۲۷۸۸	۲۲۲	-۱۳	-۲۹	۳	۳
۲۰۰	۰۰۳۰۱۰	۲۱۲	-۱۰	۳	۰	۰
۲۰۱	۰۰۳۲۲۲	۲۰۲	-۱۰	۰	۱	۱
۲۰۲	۰۰۳۴۲۴	۱۹۳	-۹	۱	۱	۱
۲۰۳	۰۰۳۶۱۷	۱۸۵	-۸			
۲۰۴	۰۰۳۸۰۲					

مجدداً پره بر اشتباهی به اندازه  $\varepsilon = -27$ ، (بادنباله  $\{27, 81, -81, 27\}$  مقایسه شود)، دلالت دارد که ناشی از وجود درایه  $9214$  به جای درایه صحیح  $9241$  است. دانشجو در صورت تمایل می تواند جدول تفاضلی صحیح را کامل کند.

(ii) در جدول بندی صفحه قبل در مورد  $f(x) = \log_{10} x$  به ازای  $x = 100(01)2r4$  دو اشتباه کشف و تصحیح می شوند.

نوسانات در  $\Delta^2$  ما را مظنون می کند و ظن ما با رفتار  $\Delta^2$  تأیید می شود. دنباله تفاضلات  $\{-29, 90, -87, 93, -178, 183, -54\}$  علامت متناوب دارند و جملگی از دیگر تفاضلات مرتبه سوم بسیار بزرگترند. ما انتظار پیدا کردن قالب  $-E, 3E, -3E, E$  را داریم، و لذا نتیجه می گیریم که اشتباهاتی در  $f(104)$  و  $f(107)$  موجودند.

اگر فرض کنیم که  $f(104) + E_1 = 01401$  و  $f(107) + E_2 = 02334 - 02334 - 3E_2, 3E_2, -E_2$  عبارت باشند از  $\Delta^2$  انتظار خواهیم داشت که خطاهای منتشر شده در  $\Delta^2$  عبارت باشند از  $\{E_1, -3E_1, 3E_1, -E_1 + E_2, -3E_2, 3E_2, -E_2\}$ . با فرض اینکه تفاضلات مرتبه سوم تقریباً ثابت هستند، از  $183 \approx C - 3E_1$  و  $-178 \approx C + 3E_1$  می توان جهت تخمین  $E_1 \approx (-183 - 178)/6 \approx -60$

استفاده کرد. نتایج این تصحیح در صفحه قبل نشان داده شده اند. به همین ترتیب،  $-87 \approx C - 3E_2$  و  $90 \approx C + 3E_2$  پیشنهاد می دهند که  $30 \approx (87 + 90)/6 \approx 30$  و بنا بر این مقادیر صحیح پیشنهاد شده، از

$$f(104) + E_1 = 01401$$

$$f(107) + E_2 = 02334$$

به دست می آیند. یعنی،

$$f(104) = 01401 + 00060 = 01461$$

$$f(107) = 02334 - 00030 = 02304.$$

بعد از اینکه تصحیح دوم انجام شد، تفاضلات مرتبه سوم بسیار مناسبتر به نظر می آیند. توجه کنید که به هنگام تخمین  $E$  ترجیح می دهیم که در ستون مربوط از درایه های بزرگتر استفاده کنیم تا تأثیر تغییرات اصلی ناشی از گرد کردن، در تفاضلات مینیمم شوند.

خود را بیازمایید

۱- چگونه می توان اشتباهات موجود در جدول را یافت؟

۲- روی یک تابع جدول بندی شده به وسیله محاسبه چه امتحانی باید انجام گیرد؟



۳- اشتباهات جداول چگونه تصحیح می‌شوند؟

### تمرین

۱- جدول زیر از مقادیر دقیق تابع درجه سوم  $f(x)$  ، شامل يك اشتباه است. درایه غلط را پیدا و آن را تصحیح کنید.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
۲	۳۲۰۶۷۱	۵	۱۳۲۳۱۸۴	۸	۲۴۲۲۵۷۳	۱۱	۳۵۲۹۰۰۰
۳	۶۲۴۰۸۸	۶	۱۶۲۸۸۷۵	۹	۲۸۲۰۵۹۲	۱۲	۳۹۲۹۴۰۱
۴	۹۲۸۲۵۷	۷	۲۰۲۵۳۶۶	۱۰	۳۱۲۹۳۹۹	۱۳	۴۴۲۰۶۰۸

۲- اشتباهات جدول زیر را پیدا و تصحیح کنید.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
۰	۱۲۳۲۴۶	۴	۱۶۳۳۲	۸	۱۲۹۲۸۲
۱	۱۲۴۰۳۱	۵	۱۲۷۰۸۲	۹	۲۲۰۰۰۰
۲	۱۲۴۸۰۷	۶	۱۲۷۸۲۳	۱۰	۲۲۰۷۱۱
۳	۱۲۵۵۴۷	۷	۱۲۸۵۷۷	۱۱	۲۲۱۴۱۴

# گام نوزده

## درونیابی - ۱

### درونیابی خطی و درجه دوم

درونیابی عبارت است از «هنر درك معانی مستمر در يك جدول» و آن را می توان به عنوان حالت خاصی از روند عمومی برازش منحنی در نظر گرفت (ر. ك. گام ۲۵). به عبارت دقیقتر، درونیابی روندی است که به وسیله آن مقادیر غیر موجود در جدول يك تابع جدولی برآورد می شوند، البته با این فرض که تابع، بین نقاط موجود در جدول آن قدر به آرامی تغییر کند که بتواند با يك چند جمله ای از درجه نسبتاً پایین تقریب شود.

درونیابی در آنالیز عددی فعلاً به اندازه زمان گذشته اهمیت ندارد، زیرا کامپیوترهای خودکار (ومحاسبه های الکترونی رومیزی با کلیدهای تابعی) در دسترس هستند، و غالباً مقادیر يك تابع را به آسانی به وسیله الگوریتم (احتمالاً به وسیله يك برنامه فرعی استاندارد) به دست می دهند. با این وجود:

i) درونیابی برای توابعی که تنها بد صورت جداول معلومند حایز اهمیت است؛

ii) درونیابی برای معرفی کاربرد وسیعتر تفاضلات متناهی به کار می آید.

در گام ۱۷، مشاهده کردیم که هر گاه تفاضلات مرتبه  $k$  ام ثابت باشند (در حدود نوسانات خطای گرد شده)، تابع جدولی مورد نظر را می توان با يك چند جمله ای درجه  $k$  تقریب کرد. درونیابی خطی و درجه دوم به ترتیب مناظر با حالات  $k = 1$  و  $k = 2$  هستند.

### ۱- درونیابی خطی

وقتی يك تابع چنان کند تغییر کند که تفاضلات مرتبه اول آن ثابت باشند می توان آن را با يك خط مستقیم بین نقاط جدولی مجاور به دقت تقریب کرد. این مطلب، مفهوم اساسی

درونیایی خطی است که در مواقع استفاده عادی از جدول لگاریتم و جدول توابع مثلثاتی به کار می‌رود.

در شکل ۱۰، دو نقطه  $(x_j, f_j)$  و  $(x_{j+1}, f_{j+1})$  از منحنی نمایش تابع با يك خط مستقیم به هم وصل شده‌اند. هر  $x$  بین  $x_j$  و  $x_{j+1}$  را می‌توان به وسیله مقدار  $\theta$  به صورت زیر مشخص کرد:

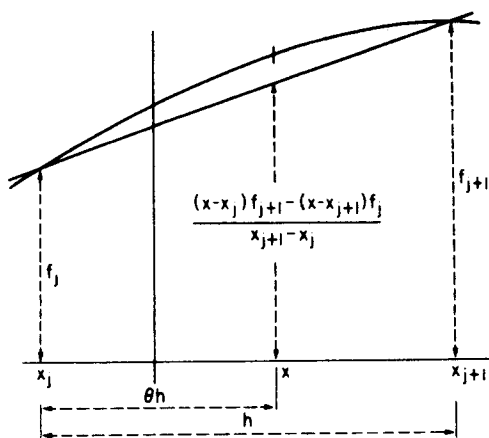
$$x - x_j = \theta(x_{j+1} - x_j) \equiv \theta h, \quad 0 < \theta < 1.$$

اگر  $f(x)$  در این بازه واقعاً به کندی تغییر کند، مقدار تابع در  $x$  به وسیله عرض خط مستقیم در  $x$  تقریب می‌شود. با توجه به هندسه مقدماتی داریم:

$$\theta = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \approx \frac{f(x) - f_j}{f_{j+1} - f_j},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f_j + \theta(f_{j+1} - f_j) \\ &= f_j + \theta \Delta f_j \\ &= f_j + \theta \nabla f_{j+1} \\ &= f_j + \theta \delta f_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



شکل ۱۰. درونیایی خطی

به بیان تحلیلی،  $f(x)$  را به وسیله

$$P_1(x) = f_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (f_{j+1} - f_j),$$

که در آن  $P_1(x)$  یک تابع خطی از  $x$  است و در شرایط

$$P_1(x_j) = f_j = f(x_j), \quad P_1(x_{j+1}) = f_{j+1} = f(x_{j+1})$$

صدق می‌کند، تقریب کرده‌ایم.

مثال

از یک جدول  $D$  ۴ مربوط به  $e^{-x}$ ، جدول تفاضلی زیر را به دست می‌آوریم. تفاضلات

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$
۰٫۹۰	۰٫۴۰۶۶		
		-۴۱	
۰٫۹۱	۰٫۴۰۲۵		۱
		-۴۰	
۰٫۹۲	۰٫۳۹۸۵		۱
		-۳۹	
۰٫۹۳	۰٫۳۹۴۶		-۱
		-۴۰	
۰٫۹۴	۰٫۳۹۰۶		۱
		-۳۹	
۰٫۹۵	۰٫۳۸۶۷		۱
		-۳۸	
۰٫۹۶	۰٫۳۸۲۹		۰
		-۳۸	
۰٫۹۷	۰٫۳۷۹۱		۰
		-۳۸	
۰٫۹۸	۰٫۳۷۵۳		۱
		-۳۷	
۰٫۹۹	۰٫۳۷۱۶		

مرتبه اول به طور موضعی تقریباً ثابت هستند، و در نتیجه، این جدول برای درونیایی خطی مناسب است. مثلاً:

$$f(0.9934) = 0.3946 + \frac{4}{10}(-0.0040) = 0.3930.$$

## ۲- درونیایی درجه دوم

به طوری که اشاره شد، درونیایی خطی تنها برای مقادیر جدولی نزدیک به هم توابعی که به کندی تغییر می کنند، مناسب است. ساده ترین روند دیگر درونیایی درجه دوم است که بزرگ چند جمله ای تقریبی از درجه ۲ استوار است؛ می توان انتظار داشت که این تقریب برای توابع با تغییرات بزرگتر، از دقت بیشتری برخوردار باشد.

با معلوم بودن سه نقطه مجاور  $x_j$ ،  $x_{j+1} = x_j + h$  و  $x_{j+2} = x_j + 2h$  فرض می کنیم  $f(x)$  به وسیله

$$P_2(x) = a + b(x - x_j) + c(x - x_j)(x - x_{j+1})$$

که در آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  چنان انتخاب شده اند که

$$P_2(x_{j+k}) = f(x_{j+k}) = f_{j+k}, \quad k = 0, 1, 2$$

تقریب شده باشد. بدین ترتیب:

$$P_2(x_j) = a = f_j$$

$$P_2(x_{j+1}) = a + bh = f_{j+1}$$

$$P_2(x_{j+2}) = a + 2bh + 2ch^2 = f_{j+2},$$

و از اینجا

$$a = f_j$$

$$b = (f_{j+1} - a)/h = (f_{j+1} - f_j)/h = \Delta f_j/h$$

$$c = (f_{j+2} - 2bh - a)/(2h^2) = (f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)/(2h^2) \\ = \Delta^2 f_j/(2h^2).$$

با قراردادن  $x = x_j + \theta h$ ، فرمول درونیایی درجه دوم زیر را به دست می آوریم

$$f(x_j + \theta h) \approx f_j + \theta \Delta f_j + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) \Delta^2 f_j.$$

فوراً متوجه می شویم که در فرمول درونیابی درجه دوم، يك جمله مرتبه دوم (شامل  $\Delta^2 f$ ) وجود دارد که در فرمول درونیابی خطی وجود نداشت.

## مثال

برای مقدار  $f(0.934)$  حاصل از به کارگیری درونیابی خطی فوق، تصحیح مرتبه دوم را تعیین کنید.

تصحیح مرتبه دوم مورد نظر عبارت است از

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{10} \times \left(-\frac{6}{10}\right) (+0.00001) = -\frac{0.00024}{200}$$

در نتیجه، از فرمول درونیابی درجه دوم داریم

$$f(0.934) = 0.3946 - \frac{0.00160}{10} - \frac{0.00024}{200} = 0.3930$$

تصحیح  $-\frac{0.00024}{200}$  قابل اغماض است.

## خود را بیازمایید

- ۱- روند به دست آوردن يك مقدار غیرجدولی از يك تابع را چه می نامند؟
- ۲- چه موقع درونیابی خطی مناسب است؟
- ۳- چه موقع درونیابی درجه دوم لازم و مناسب است؟

## تمرین

۱- درایه های يك جدول  $\cos x$  عبارتند از:

	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'
۸۰°	۰.۱۷۳۶	۰.۱۷۰۸	۰.۱۶۷۹	۰.۱۶۵۰	۰.۱۶۲۲	۰.۱۵۹۳

مطلوب است مقدار  $\cos 80^\circ 35'$  از (i) درونیابی خطی (ii) درونیابی درجه دوم.

۲- درایه‌های يك جدول  $\tan x$  عبارتند از:

	۰'	۱۰'	۲۰'	۳۰'	۴۰'	۵۰'
۸۰°	۵۶۷۱	۵۷۶۹	۵۸۷۱	۵۹۷۶	۶۰۸۴	۶۱۹۷

تعیین کنید که آیا می‌توان درونیایی خطی یا درجه دوم را به کار برد؟ اگر چنین باشد، مقدار  $\tan ۸۰^\circ ۳۵'$  را به دست آورید.

# گام بیست

## درونیابی - ۲

### دستورهای درونیابی نیوتن

فرمولهای درونیابی خطی و درجه دوم، مبتنی بر تقریب چندجمله‌ای درجه اول و دوم هستند. نیوتن برای جدولهای با فواصل ثابت  $h$ ، فرمولهای درونیابی تفاضلی پیشرو و پسرو کلی (متناظر با تقریب به وسیله یک چند جمله‌ای از درجه  $n$ ) را به دست آورده است.

#### ۱- دستور تفاضل پیشرو نیوتن

نقاط  $x_j$ ،  $x_j + h$ ،  $x_j + 2h$ ، ... را در نظر بگیرید و به خاطر بیاورید که اگر  $\theta$  عدد حقیقی دلخواهی باشد

$$E f_j = f_{j+1} = f(x_j + h), \quad E^\theta f_j = f_{j+\theta} = f(x_j + \theta h).$$

به طور صوری، (چون  $\Delta = E - 1$ ) داریم

$$\begin{aligned} f(x_j + \theta h) &= E^\theta f_j \\ &= (1 + \Delta)^\theta f_j \\ &= [1 + \theta \Delta + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) \Delta^2 + \frac{\theta(\theta - 1)(\theta - 2)}{3!} \Delta^3 + \dots] f_j, \end{aligned}$$

و این دستور تفاضل پیشرو نیوتن است. از بردن این دستور در مرتبه اول و دوم، به ترتیب فرمولهای درونیابی (پیشرو) خطی و درجه دوم به دست می‌آیند. اگر آن را در مرتبه  $n$  ببریم، داریم



$$f(x_j + \theta h)$$

$$\approx [1 + \theta \Delta + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) \Delta^2 + \dots + \frac{\theta(\theta - 1) \dots (\theta - n + 1)}{n!} \Delta^n] f_j,$$

که تقریبی مبتنی بر مقادیر  $f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+n}$  است. این تقریب دقیق (در حد خطای گردشده) خواهد بود هر گاه

$$\Delta^{n+k} f_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

که محقق است اگر  $f(x)$  یک چند جمله‌ای از درجه  $n$  باشد.

### ۲- دستور تفاضل پسرو نیوتن

به طور صوری (چون  $\nabla = 1 - E^{-1}$ ) داریم

$$f(x_j + \theta h) = E^\theta f_j$$

$$= (1 - \nabla)^{-\theta} f_j$$

$$= [1 + \theta \nabla + \frac{1}{2} \theta(\theta + 1) \nabla^2 + \frac{\theta(\theta + 1)(\theta + 2)}{3!} \nabla^3 + \dots] f_j,$$

و این دستور تفاضل پسرو نیوتن است. از بردن این دستور در مرتبه اول و دوم، به ترتیب فرمولهای درونیایی (پسرو) خطی و درجه دوم به دست می‌آیند. تقریب مبتنی بر مقادیر  $f_j, f_{j-1}, \dots, f_{j-n}$  عبارت است از

$$f(x_j + \theta h)$$

$$\approx [1 + \theta \nabla + \frac{1}{2} \theta(\theta + 1) \nabla^2 + \dots + \frac{\theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)}{n!} \nabla^n] f_j.$$

### ۳- استفاده از دستورهای درونیایی نیوتن

دستورهای تفاضل پسرو و پیشرو نیوتن به ترتیب برای استفاده در ابتدا و در انتهای یک جدول تفاضلی بسیار مناسبند. (بقیه دستورهایی که از تفاضلات مرکزی استفاده می‌کنند، ممکن است برای جاهای دیگر مناسبتر باشند.) به عنوان مثال، جدول تفاضلی زیر مربوط به  $f(x) = \sin x$  برای  $50^\circ (10^\circ) 0^\circ$  را در نظر بگیرید:

$x^\circ$	$f(x) = \sin x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$
۰	۰٫۰۰۰۰۰	۱۷۳۶				
۱۰	۰٫۰۱۷۳۶		-۵۲			
		۱۶۸۴		-۵۲		
۲۰	۰٫۰۳۴۲۰		-۱۰۴		۴	
		۱۵۸۰		-۴۸		۰
۳۰	۰٫۰۵۰۰۰		-۱۵۲		۴	
		۱۴۲۸		-۴۴		
۴۰	۰٫۰۶۴۲۸		-۱۹۶			
		۱۲۳۲				
۵۰	۰٫۰۷۶۶۰					

چون تفاضلات مرتبه چهارم ثابت هستند، نتیجه می گیریم که یک تقریب درجه چهارم مناسب است. (تفاضلات مرتبه سوم در حد خطای گرد شده منظره، کاملاً ثابت نیستند، و پیش بینی می کنیم که یک تقریب درجه سوم به قدر کافی خوب نباشد.) برای تعیین  $\sin 5^\circ$  از این جدول، دستور تفاضل پیشرو نیوتن (تا مرتبه چهارم) را به کار می بریم؛ لذا، با انتخاب  $x_j = 0$ ، داریم

$$(h = 10), \theta = \frac{5 - 0}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 5^\circ &= \sin 0^\circ + \frac{1}{1} (0.01736) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(-\frac{1}{2}\right) (-0.00052) \\ &+ \frac{1}{6 \cdot 2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (-0.00052) + \frac{1}{24 \cdot 2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (0.00004) \\ &= 0 + 0.01736 + 0.00006(5) - 0.00003(3) - 0.00000(2) \\ &= 0.01791. \end{aligned}$$

(با ۰٫۰۸۷۲ از جداول مقایسه شود.)

توجه داشته باشید که برای حداقل کردن خطای گردشدهٔ مجتمع، (در داخل چند برانتز) يك رقم محافظ هم نوشته شده است. برای تعیین  $\sin 45^\circ$  از این جدول، دستور تفاضل پسرو نیوتن (تا مرتبهٔ چهارم) را به کار می‌بریم؛ لذا، با انتخاب  $x_j = 40$  داریم

$$\theta = \frac{45 - 40}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin 40^\circ + \frac{1}{2}(0.01428) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (-0.00152) \quad \text{و}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (-0.00048) + \frac{1}{24} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} (0.00004)$$

$$= 0.64278 + 0.00714 - 0.00057 - 0.00015 + 0.00001 (1)$$

$$= 0.64971. \quad (\text{با } 0.64971 \text{ از جداول مقایسه شود.})$$

#### ۴- یکتایی چندجمله‌ای درونیابی

به ازای يك دسته از مقادیر  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  با  $x_j = x_0 + jh$ ، دو دستور درونیابی مرتبهٔ  $n$  م به شرح ذیل موجودند:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

$$= (1 + \theta \Delta + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \Delta^2 + \dots + \frac{\theta(\theta-1) \dots (\theta-n+1)}{n!} \Delta^n) f_0.$$

$$f(x) \approx Q_n(x)$$

$$= (1 + \phi \nabla + \frac{1}{2} \phi(\phi+1) \nabla^2 + \dots + \frac{\phi(\phi+1) \dots (\phi+n-1)}{n!} \nabla^n) f_n,$$

$$\phi = (x - x_n)/h \quad \text{و} \quad \theta = (x - x_0)/h \quad \text{که در آن}$$

واضح است که هر دو چندجمله‌ای  $P_n(x)$  و  $Q_n(x)$  بر حسب  $x$ ، از درجهٔ  $n$  هستند می‌توان نشان داد (ر. ک. تمرین ۲ ذیل) که

$$P_n(x_j) = Q_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

و از آن نتیجه گرفت که  $P_n(x) - Q_n(x)$  يك چندجمله‌ای از درجهٔ  $n$  است که در  $n+1$  نقطه صفر می‌شود. این به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد

$$P_n(x) \equiv Q_n(x) \quad \text{یا} \quad P_n(x) - Q_n(x) \equiv 0$$

درواقع، يك چند جمله‌ای از درجه  $n$  مسار بر هر  $n+1$  نقطه (متمايز ولی نه الزاماً متساوی الفاصله) مفروض یکتاست، و به چند جمله‌ای هم محل موسوم است.

### ۵- قیاس با سری تیلر

اگر برای عدد صحیح  $k$  تعریف کنیم

$$D^k f_j \equiv \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_j}$$

آنگاه سری تیلر حول  $x_j$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x) = f_j + (x-x_j)Df_j + \frac{(x-x_j)^2}{2!} D^2 f_j + \dots$$

با قرار دادن  $x = x_j + \theta h$ ، به‌طور صوری خواهیم داشت

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta h Df_j + \frac{\theta^2 h^2}{2!} D^2 f_j + \dots$$

$$= \left[ 1 + \theta h D + \frac{\theta^2 h^2}{2!} D^2 + \dots \right] f_j$$

$$= e^{\theta h D} f_j$$

مقایسه با صورت درونیایی نیوتن

$$f(x_j + \theta h) = E^\theta f_j$$

نشان می‌دهد که عملگر  $e^{hD}$  (بر توابعی از يك متغیر متصل) شبیه عملگر  $E$  (بر توابعی از يك متغیر گسسته) است.

### خود را بیازمایید

- ۱- ارتباط بین فرمولهای درونیایی خطی و درجه دوم پیشرو و پسرو ( برای يك جدول با فواصل ثابت  $h$ ) و دستورهای درونیایی نیوتن چیست؟
- ۲- دستور تفاضل پیشرو نیوتن چه موقع برای استفاده مناسب است؟
- ۳- دستور تفاضل پسرو نیوتن چه موقع برای استفاده مناسب است؟

### تمرین

۱- مطلوب است برآورد

(i)  $e^{0.14}$  با استفاده از دستور تفاضل پیشرو نیوتن؛ و

(ii)  $e^{0.315}$  با استفاده از دستور تفاضل پسرو نیوتن

از یک جدول تفاضلی  $f(x) = e^x$  (با ۵ رقم اعشار) برای  $x = 0.10(0.05)0.40$ .

۲- نشان دهید که برای  $j = 0, 1, 2, \dots$

$$f_j = f(x_0 + jh) = \left(1 + j\Delta + j\left(\frac{j-1}{2}\right)\Delta^2 + \dots + \Delta^j\right)f(x_0).$$

۳- برای داده‌های زیر معادله چند جمله‌ای هم محل را به دست آورید.

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
0	3	3	24
1	2	4	59
2	7	5	118

# گام بیست و یک

## درونیابی - ۳\*

### دیگردستورهای درونیابی شامل تفاضلات متناهی

با وجودی که هر گونه درونیابی از جدولهای با نقاط متساوی الفاصله را می توان با استفاده از دستور پیشرو نیوتن انجام داد ولی دستورهای درونیابی دیگری هم وجود دارند که احتمالاً مرجحند. در گام قبلی ۲۵ اشاره کردیم که دستور پسر نیوتن ممکن است در نزدیکی انتهای يك جدول مرجح باشد.

دستورهای استرلینگ<sup>۱</sup>، بسل واورت<sup>۲</sup>، دستورهای دیگری هستند که برای استفاده به طور مرکزی يك جدول تفاضلی مناسبند، و این دستورها در این گام اختیاری مورد بررسی قرار می گیرند. اما، ابتدا دستورهای درونیابی گاوس را که بقیه به آسانی از آن نتیجه می شوند، مورد بررسی قرار می دهیم.

در این مرحله، تأکید می کنیم که تمامی این دستورها مبتنی بر چند جمله ای هم محل هستند، و قبلاً هم اشاره کرده ایم که چند جمله ای از (حداکثر) درجه  $n$  ماربر هر زیر مجموعه  $(n+1)$  نقطه ای از جدول یکتاست. ضابطه انتخاب يك دستور، صرفاً کارآیی محاسباتی آن است.

### ۱- دستورهای درونیابی گاوس

چون

$$\Delta^2 f_j = \Delta^2 (f_{j-1} + \Delta f_{j-1}) = \Delta^2 f_{j-1} + \Delta^2 f_{j-1},$$

$$\Delta^3 f_j = \Delta^3 f_{j-1} + \Delta^4 (f_{j-2} + \Delta f_{j-2}) = \Delta^3 f_{j-1} + \Delta^4 f_{j-2} + \Delta^5 f_{j-2},$$

و غیره.

از دستور پیشرو نیوتن فوراً

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \Delta f_j + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \Delta^3 f_{j-1} + \dots,$$

نتیجه می شود که دستور پیشرو گاوس است. به همین طریق، از

$$\Delta f_j = \Delta(f_{j-1} + \Delta f_{j-1}) = \Delta f_{j-1} + \Delta^2 f_{j-1},$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta^2 f_{j-1} + \Delta^3 (f_{j-2} + \Delta f_{j-2}) = \Delta^2 f_{j-1} + \Delta^3 f_{j-2} + \Delta^4 f_{j-2},$$

و غیره،

و دستور نیوتن

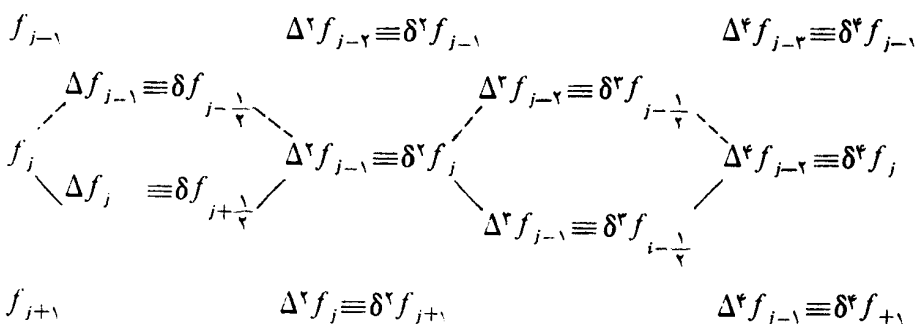
$$f(x_j + \theta h) =$$

$$f_j + \theta \Delta f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta}{2!} \Delta^2 f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \Delta^3 f_{j-2} + \dots$$

به دست می آید که دستور پسرو گاوس نام دارد.

از روی يك جدول تفاضلی روشن است که این دستورها از تفاضلات واقع در سراسر

جدول استفاده می کنند:



دستور پیشرو گاوس

دستور پسرو گاوس

همچنین از این جدول برمی آید که نوشتن دستورهایی گاوس بر حسب علامت گذاری

تفاضل مرکزی امری عادی است:

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_j + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots$$

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \delta f_{j-\frac{1}{2}} + \frac{(\theta+1)\theta}{2!} \delta^2 f_j + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j-\frac{1}{2}} + \dots$$

دستورهای گاوس عمدتاً از نظر تئوری مورد توجه هستند و اینک می‌پردازیم به پیدا کردن دیگر دستورهای فوق‌الذکر. باز هم روال معمول را به کار می‌بریم و از تفاضلات مرکزی استفاده می‌کنیم.

### ۲- دستور استرلینگ

با افزودن دو دستور گاوس و تقسیم آن بر ۲، بلافاصله دستور استرلینگ به دست می‌آید:

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \mu \delta f_j + \frac{\theta^2}{2!} \delta^2 f_j + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \mu \delta^3 f_j + \dots$$

که در آن  $\mu$  عملگر مقدار میانگین است. (بر حسب عملگر انتقال،  $\mu = \frac{1}{2}(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}})$ ). لذا، مثلاً، داریم  $\mu \delta f_j = \delta f_{j+\frac{1}{2}} = \delta f_{j-\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_{j-1}$  مناسب است که دستور استرلینگ برای  $\theta$ ی کوچک، مثلاً  $|\theta| \leq \frac{1}{4}$ ، به کار برده شود.

### ۳- دستور بسل

چون  $x_j + \theta h = x_{j+1} - h + \theta h = x_{j+1} + (\theta - 1)h$  پس اگر در دستور پسر و گاوس، به ترتیب  $(j+1)$  را به جای  $j$  و  $(\theta - 1)$  را به جای  $\theta$  قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} f(x_j + \theta h) &\equiv f(x_{j+1} + (\theta - 1)h) \\ &= f_{j+1} + (\theta - 1) \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_{j+1} + \\ &\quad \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots \end{aligned}$$

با افزودن این نتیجه به دستور پیشرو گاوس (پس از تقسیم بر ۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x_j + \theta h) &= \mu f_{j+\frac{1}{2}} + (\theta - \frac{1}{2}) \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \\ &\quad \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \mu \delta^2 f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-\frac{1}{2})}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots \end{aligned}$$

که دستور بسل نام دارد. دستور بسل مناسب است که برای  $\theta$ ی نزدیک به  $1/2$ ، مثلاً

$$\frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}$$

به کار برده شود.



#### ۴- دستور اورت

اگر دستور داده شده در بخش قبل،

$$f(x_j + \theta h) = f_{j+1} + (\theta - 1) \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_{j+1} + \\ + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots$$

را از دستور پیشرو گاوس،

$$f(x_{j+1} + \theta h) = f_{j+1} + \theta \delta f_{j+\frac{2}{3}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_{j+1} + \\ + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{2}{3}} + \dots$$

تفریق کنیم، نتیجه می شود:

$$f(x_{j+1} + \theta h) - f(x_j + \theta h) = \theta \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{(\bar{\theta}+1)\bar{\theta}(\bar{\theta}-1)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \dots \\ + \theta \delta f_{j+\frac{2}{3}} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{2}{3}} + \dots$$

که در آن  $\bar{\theta} = 1 - \theta$ . با تعریف  $g_j = f_{j+1} - f_j = \delta f_{j+\frac{1}{2}}$ ، نتیجه اخیر را می توان به صورت

$$g(x_j + \theta h) = \bar{\theta} g_j + \frac{(\bar{\theta}+1)\bar{\theta}(\bar{\theta}-1)}{3!} \delta^2 g_j + \dots \\ + \theta g_{j+1} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^2 g_{j+1} + \dots$$

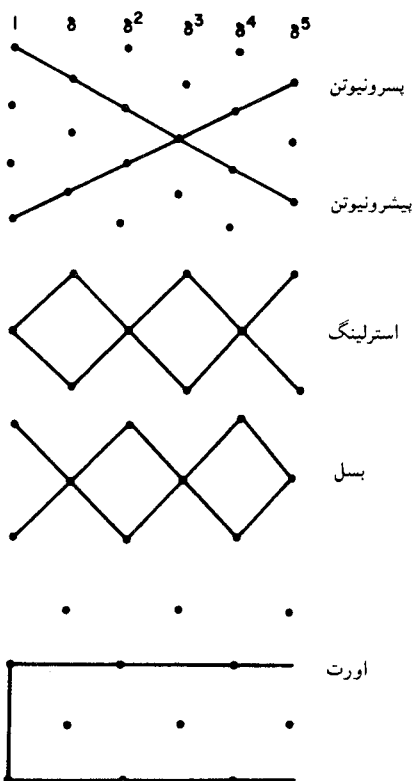
هم نوشت، که دستور اورت نام دارد.

دستور اورت گهگاه مورد استفاده واقع می شود؛ در جداول چاپ شده بهتر است که تنها تفاضلات زوج داده شوند، ضمناً جداولی از ضرایب اورت هم در دسترس هستند.

#### ۵- طرح دستورها

اکثر دانشجویان به خاطر سپردن طرح حاصل از هر کاربرد یک دستور درونیایی در یک

جدول تفاضلی را مفید تشخیص می دهند.



شکل ۱۱ - طرح دستورها

قبلا طرح مربوط به دستورهای نیوتن را مورد توجه قرار داده ایم و اینک طرحهای مربوط به دستورهای استرلینگ، بسل و اورت ممکن است مورد توجه قرار بگیرند.

### ۶- مثال

در بخش ۳ از گام ۲۰، جهت درونیایی کردن برای  $\sin 5^\circ$  و  $\sin 45^\circ$  از دستورهای نیوتن استفاده کردیم، می توانستیم از دستور پیشرو نیوتن استفاده کنیم تا (مثلا)

$$\sin 21^\circ = 0.35720 + \frac{1}{10}(0.1580) + \frac{1}{2} \frac{1}{10} \left(-\frac{9}{10}\right) (-0.0152) + \left(-\frac{19}{10}\right) (-0.0044)$$

$$= 0.3420 + 0.0158 + 0.0006(8) - 0.0001(3)$$

$$= 0.3584.$$

را به دست آوریم.

همین نتیجه با استفاده از دستور استرلینگ نیز به دست می آید:

$$\sin 21^\circ = 0.3420 + \frac{1}{20}(0.1684 + 0.1580) + \frac{1}{200}(-0.0104)$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{10} \frac{1}{10} \left(\frac{-9}{10}\right) \frac{1}{2}(-0.0052 - 0.0048)$$

$$= 0.3420 - 0.0163(2) - 0.0000(5) + 0.0000(8)$$

$$= 0.3584.$$

باز هم می توانستیم از دستور بیشرونیوتن استفاده کنیم تا (مثلا)  $\sin 25^\circ$  را به دست آوریم:

$$\sin 25^\circ = 0.3420 + \frac{1}{4}(0.1580) + \frac{1}{4} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)(-0.0152)$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)(-0.0044)$$

$$= 0.3420 + 0.0395 + 0.0019 - 0.0002(8)$$

$$= 0.4226.$$

اما، با دستور بسل محاسبه کمتری مورد نیاز است:

$$\sin 25^\circ = \frac{1}{4}(0.3420 + 0.5000) + \frac{1}{4} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}(-0.0104 - 0.0152)$$

$$= 0.4210 + 0.0016$$

$$= 0.4226.$$

بالاخره، توجه داشته باشید که در این حالت، از دستور اورت نیز همین نتیجه حاصل

می شود.

### خود را بیازمایید

- ۱- چه موقع دستور درونیابی استرلینگ می تواند مناسب باشد؟
- ۲- چه موقع دستور درونیابی بسل می تواند مناسب باشد؟
- ۳- چرا دستور اورت با جداول چاپ شده مشخصی به کار می رود؟

### تمرین

۱- از يك جدول تفاضلی  $D$  از  $f(x) = e^x$  برای  $x = 0.10(0.05)0.40$  مقادیر زیر را برآورد کنید

- (i)  $f(0.31)$  با استفاده از دستور استرلینگ؛
- (ii)  $f(0.31)$ ، با استفاده از دستور اورت؛
- (iii)  $f(0.315)$ ، با استفاده از دستور بسل؛
- (iv)  $f(0.315)$ ، با استفاده از دستور اورت.

# گام بیست و دو

## درونیابی - ۴

### دستور درونیابی لاگرانژ

در گامهای ۱۹-۲۱، دستورهای درونیابی مختلفی را مورد بررسی قرار دادیم که از تفاضلات متناهی استفاده می کردند. دستور درونیابی دیگری منسوب به لاگرانژ هم وجود دارد که ابداً از تفاضلات متناهی استفاده نمی کند، و دارای این مزیت است که می تواند برای توابعی که در فواصل متساوی از شناسه ها جدول بندی نشده اند به کار گرفته شود. اما کار کردن با دستور لاگرانژ سخت است و علاوه بر این، دارای این عیب است که باید درجه چند جمله ای تقریبی از ابتدا انتخاب شود و لذا، این روش اصولاً تنها از نظر تئوری مورد توجه است.

#### ۱- دستور العمل\*

فرض می کنیم که تابع  $f(x)$  در  $n+1$  نقطه (نه لزوماً متساوی الفاصله)  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  جدول بندی شده و قرار است به وسیله یک چند جمله ای از درجه حداکثر  $n$ ، مانند

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

چنان تقریب شود که برای  $n = 0, 1, 2, \dots$  داشته باشیم

$$f_j = f(x_j) = P_n(x_j).$$

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه نویسی در صفحه ۱۸۰ یک فلوجارت داده شده است.

اکنون، به ازای  $k = 0, 1, \dots, n$ ،

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

یک چند جمله‌ای از درجه  $n$  است، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$L_k(x_j) = 0, \quad j \neq k, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$L_k(x_k) = 1.$$

لذا

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f_k$$

یک چند جمله‌ای از درجه (حداکثر)  $n$  است که

$$P_n(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n;$$

یعنی،  $P_n(x)$  چند جمله‌ای هم محل (یکتا) است. توجه داشته باشید که برای  $x = x_j$ ، تمامی جملات در مجموع فوق صفر می‌شوند به استثنای جمله  $j$ ام که برابر  $f_j$  است؛

$L_k(x)$  را ضریب  $k$ ام درونیابی لاگرانژ می‌نامند، و اتحاد  $\sum_{k=0}^n L_k(x) = 1$  را (که با قرار

دادن  $f(x) \equiv 1$  به دست می‌آید) می‌توان به عنوان یک آزمون به کار برد. همچنین توجه کنید که به ازای  $n=1$ ، بازهم دستور درونیابی خطی

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1 = f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} (f_1 - f_0)$$

از گام ۱۹ به دست می‌آید.

## ۲- مثال

برای پیدا کردن چند جمله‌ای هم محل  $P_3(x)$  مابین نقاط  $(0, 3)$ ،  $(1, 2)$ ،  $(2, 7)$  و  $(4, 59)$ ، دستور درونیابی لاگرانژ را به کار ببرید، و از آنجا مقدار  $P_3(3)$  را بیابید. ضرایب لاگرانژ عبارتند از:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \\ &= -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8). \end{aligned}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 6x^2 + 8x),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}$$

$$= -\frac{1}{4}(x^2 - 5x^2 + 4x),$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$= \frac{1}{24}(x^2 - 3x^2 + 2x),$$

دانشجویان باید بررسی کنند که  $(L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x)) = 1$  . لذا، چند جمله‌ای مطلوب عبارت است از

$$P_3(x) = -\frac{3}{8}(x^2 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$+ \frac{2}{3}(x^2 - 6x^2 + 8x)$$

$$- \frac{1}{4}(x^2 - 5x^2 + 4x)$$

$$+ \frac{59}{24}(x^2 - 3x^2 + 2x)$$

$$= \frac{1}{24}(-9x^2 + 63x^2 - 126x + 72$$

$$+ 16x^2 - 96x^2 + 128x$$

$$- 42x^2 + 210x^2 - 168x$$

$$+ 59x^2 - 177x^2 + 118x)$$

$$= \frac{1}{24}(+24x^2 + 0x^2 - 48x + 72)$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

در نتیجه،  $P_3(3) = 27 - 6 + 3 = 24$ . ولی توجه داشته باشید که اگر صورت صریح چند جمله‌ای هم محل لازم نبود، می‌توانستیم مقدار  $P_3(x)$  به ازای  $x$  مشخصی را مستقیماً از صورت‌های ضربی  $L_k(x)$  محاسبه کنیم. از این رو، برای محاسبه  $P_3(3)$  داریم

$$L_0(3) = \frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = \frac{1}{4}$$

والی آخر.

### ۳- نکته تحذیری

در مورد دستورهای درونیایی تفاضل نیوتن یا سایر دستورها درجه چند جمله‌ای تقریب مورد نیاز را می‌توان صرفاً با احتساب جملات تعیین کرد، تا اینکه جملات دیگر از اهمیتی برخوردار نباشند. در دستورالعمل لاگرانژ، درجه چند جمله‌ای باید بدو انتخاب شود. همچنین توجه داشته باشید که، (i) یک تغییر درجه، مستلزم محاسبه تمامی جملات به‌طور کامل از اول است، و (ii) برای یک چند جمله‌ای از درجه بالا، این روند مشتمل بر تعداد زیادی عمل ضرب می‌شود، و در نتیجه ممکن است کاملاً کند باشد.

درونیایی لاگرانژ را باید با احتیاط قابل توجهی به‌کار برد. برای مثال، فرض

می‌کنیم که دستور لاگرانژ را برای تخمین  $\sqrt[3]{20}$  از روی نقاط  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(2, 2)$ ،  $(3, 27)$  و  $(4, 64)$  بر روی  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  به‌کار ببریم. داریم:

$$f(x) \approx \frac{x(x-1)(x-27)(x-64)}{1(-7)(-26)(-63)} \times 1 + \frac{x(x-1)(x-27)(x-64)}{8(7)(-19)(-56)} \times 2 \\ + \frac{x(x-1)(x-8)(x-64)}{27(26)(19)(-37)} \times 3 + \frac{x(x-1)(x-8)(x-27)}{64(63)(56)(37)} \times 4$$

که در نتیجه

$$f(20) \approx -13139.$$

که به مقدار صحیح  $27144$  خیلی نزدیک نیست! با درونیایی خطی بین  $(1, 1)$  و  $(2, 2)$  می‌توان نتیجه بهتر  $(26316)$  را به‌دست آورد.

مشکل در اینجا است که از روش لاگرانژ نمی‌توان پی برد که  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  تا چه حد به وسیله یک چند جمله‌ای درجه چهار خوب نمایش داده می‌شود. بنابراین، عملاً از دستور لاگرانژ خیلی به‌ندرت استفاده می‌شود. (در آنالیز عددی این دستور از نظر گسترش تئوری



واجد اهمیت بیشتری است.)

### خود را بیازمایید

- ۱- چه موقع دستور درونیایی لاگرانژ را در محاسبه عملی به کار می‌بریم؟
- ۲- چه چیزی دستور لاگرانژ را از بسیاری از دیگر دستورهای درونیایی متمایز می‌کند؟
- ۳- چرا دستور لاگرانژ را باید در عمل با احتیاط فراوان به کار برد؟

### تمرین

با فرض اینکه  $f(3) = 156$ ،  $f(1) = 4$ ،  $f(-1) = 4$ ،  $f(-2) = 46$  و  $f(4) = 484$  برای محاسبه  $f(0)$ ، از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

## گام بیست و سه

### درونیابی - ۵\*

#### تفاضلات تقسیم شده و روش ایتکن<sup>۱</sup>

قبلاً اشاره کردیم که دستور درونیابی لاگرانژ عمدتاً از نظر تئوری مورد توجه است، زیرا در بهترین حالت عملی هم شامل محاسبات نسبتاً زیاد است و استفاده از آن می‌تواند کاملاً خطرناک باشد. استفاده از تفاضلات تقسیم شده، برای درونیابی یک تابع جدولی با شناسه‌های نامساوی الفاصله، بسیار کارا تر و درعین حال نسبتاً بدون خطر است؛ زیرا درجه لازم از چند جمله‌ای هم محل را می‌توان تشخیص داد. در عمل یک دستورالعمل وابسته به این، که منتسب به ایتکن است به‌طور وسیعی به‌کار گرفته می‌شود.

#### ۱- تفاضلات تقسیم شده

دوباره، فرض می‌کنیم تابع  $f(x)$  در نقاط (نه الزاماً مساوی الفاصله)  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  جدول بندی شده باشد. تفاضلات تقسیم شده بین این نقاط را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

تفاضل تقسیم شده اول (مثلاً، بین  $x_0$  و  $x_1$ ) به صورت

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f(x_1, x_0);$$

تفاضل تقسیم شده دوم (مثلاً، بین  $x_0, x_1$  و  $x_2$ ) به صورت

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0};$$

و الی آخر تا تفاضل تقسیم شده  $n$  (بین  $x_n, \dots, x_1, x_0$ ) به صورت

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

مثال

از داده‌های زیر یک جدول تفاضل تقسیم شده بسازید:

$x$	۰	۱	۳	۶	۱۰
$f(x)$	۱	-۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

این جدول تفاضل به صورت زیر است:

$x$	$f(x)$			
۰	۱			
		-۷		
۱	-۶		+۴	
		+۵		+۱
۳	۴		+۱۰	۰
		+۵۵		+۱
۶	۱۶۹		+۱۹	
		+۱۸۸		
۱۰	۹۲۱			

قابل توجه است که تفاضلات تقسیم شده سوم ثابت هستند. در زیر، با استفاده از دستور تفاضلات تقسیم شده نیوتن، از این جدول درونیابی می‌کنیم و چند جمله‌ای هم-

محل درجه سوم نظیر را تعیین می‌نماییم.

## ۲- دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن

به موجب تعاریف تفاضلات تقسیم شده داریم

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_0)$$

$$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)f(x, x_0, x_1)$$

$$f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)f(x, x_0, x_1, x_2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n)f(x, x_0, x_1, \dots, x_n).$$

با ضرب تساوی دوم در  $(x - x_0)$ ، و سوم در  $(x - x_0)(x - x_1)$  و الی آخر و جمع نتایج حاصل خواهیم داشت:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2)$$

$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n) + R,$$

که در آن

$$R = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x, x_0, x_1, \dots, x_n).$$

توجه داشته باشید که جمله باقیمانده  $R$  در  $x_0, x_1, \dots, x_n$  صفر است و لذا می‌توان نتیجه گرفت که بقیه جملات طرف راست، چند جمله‌ای هم محل یا، به‌طور معادل، چند جمله‌ای لاگرانژ را تشکیل می‌دهند. در صورتی که درجه مورد نیاز چند جمله‌ای هم-محل از پیش معلوم نباشد، رسم بر این است که نقاط  $x_0, x_1, \dots, x_n$  را به نسبت ازدیاد فاصله‌شان از  $x$  مرتب می‌کنند و جملات را با هم جمع می‌نمایند تا اینکه  $R$  به قدر کافی کوچک بشود.

## مثال

از تابع جدولی بخش ۱ این‌گام،  $f(2)$  را به وسیله دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن بیابید، و چند جمله‌ای هم محل نظیر را بنویسید. همین کار را برای  $f(4)$  هم انجام دهید. چون تفاضل سوم ثابت است، یک چند جمله‌ای درجه سوم را می‌توان در این پنج نقطه بر ارزش کرد. بنابراین دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن، با استفاده از  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$  و  $x_3 = 6$ ، این چند جمله‌ای درجه سوم عبارت است از

$$f(x) = f(0) + xf(0, 1) + x(x-1)f(0, 1, 3)$$

$$+x(x-1)(x-3)f(0, 1, 3, 6) \\ = 1 - 7x + 4x(x-1) + 1x(x-1)(x-3),$$

که در نتیجه

$$f(2) = 1 - 14 + 8 - 2 = -7.$$

به وضوح، چند جمله‌ای هم محل به صورت زیر است:

$$1 - 7x + 4x^2 - 4x + x^3 - 4x^2 + 3x = x^3 - 8x + 1.$$

برای یافتن  $f(4)$  نقاط  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 6$  و  $x_3 = 10$  را در نظر می‌گیریم، که در نتیجه

$$f(x) = -6 + 5(x-1) + 10(x-1)(x-3) + (x-1)(x-3)(x-6),$$

$$f(4) = -6 + 5 \times 3 + 10 \times 3 + 3 \times 1(-2) = +33.$$

همان طور که انتظار می‌رفت، این چند جمله‌ای هم محل همان چند جمله‌ای درجه سوم، یعنی  $x^3 - 8x + 1$  است.

### ۳- روش ایتنکن

در عمل، غالباً يك دستورالعمل منتسب به ایتنکن به کار می‌رود که از آن به طور منظم چند-جمله‌ایهای درونی‌سبب بهتر و بهتری (متناظر با برش متوالیاً از مراتب بالاتر دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن) تعیین می‌شوند. بدین ترتیب، داریم:

$$f(x) \approx f_0 + (x - x_0) \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\ = \frac{f_0(x_1 - x) - f_1(x_0 - x)}{x_1 - x_0} \equiv I_{0,1}(x),$$

به وضوح

$$f_0 = I_{0,1}(x_0), \quad f_1 = I_{0,1}(x_1).$$

سپس با توجه به

$$I_{0,2}(x) = f_0 + (x - x_0) f(x_0, x_1),$$

و غیره داریم:

$$f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f(x_0, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{I_{0,1}(x)(x_2 - x) - I_{0,2}(x)(x_1 - x)}{x_2 - x_1} \equiv I_{0,1,2}(x).$$

درضمن، می توان توجه کرد که

$$f_0 = I_{0,1,2}(x_0), \quad f_1 = I_{0,1,2}(x_1), \quad f_2 = I_{0,1,2}(x_2).$$

در دید اول این دستورالعمل ممکن است پیچیده به نظر برسد، ولی این روش از نظم برخوردار و بنا بر این از نظر محاسباتی سراسر است. این دستورالعمل را می توان با طرح زیر نمایش داد:

$x_0$	$f_0$				$x_0 - x$
$x_1$	$f_1$	$I_{0,1}(x)$			$x_1 - x$
$x_2$	$f_2$	$I_{0,2}(x)$	$I_{0,1,2}(x)$		$x_2 - x$
$x_3$	$f_3$	$I_{0,3}(x)$	$I_{0,1,3}(x)$	$I_{0,1,2,3}(x)$	$x_3 - x$
...	...	...	...	...	...

يك مزیت بزرگ این روش این است که کامپیوتر می تواند با مقایسه مراحل متوالی، دقت حاصل را اندازه بگیرد (البته این عمل متناظر است با اندازه گیری برش مناسب دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن). همان طور که برای دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن ذکر شد، معمولاً نقاط  $x_0, x_1, x_2, \dots$  را چنان مرتب می کنند که قدر مطلق اعداد  $x - x_0, x - x_1, x - x_2, \dots$  يك دنباله صعودی تشکیل بدهند.

در پایان، متذکر می شویم که هر چند نحوه استخراج روش ایکن ارتباطش را با دستور نیوتن نشان می دهد، ولی قابل توجه است که سرانجام روش ایکن ابدأ شامل تفاضلات تقسیم شده نیست!

### مثال

از تابع جدولی بخش ۱ این گام،  $f(x)$  را به روش ایکن بیابید.

داریم  $x = 2$ ، که در نتیجه  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6$  و  $x_4 = 10$  را انتخاب می کنیم:

	$x_k$	$f_k$			$x_k - x$
$k=0$	۱	-۶			-۱
$k=1$	۳	۴	-۱		+۱
$k=2$	۵	۱	-۱۳	-۵	-۲
$k=3$	۶	۱۶۹	۲۹	-۱۱	+۴
$k=4$	۱۵	۹۲۱	۹۷	-۱۵	+۸

این محاسبه از چپ، سطر به سطر، بایک «ضرب قطری» تقسیم شده مناسبی از درایه‌های مربوط در درایه‌های ستون  $x_k - x$  در طرف راست انجام می‌گیرد: بدین ترتیب،

$$I_{0,1} = \frac{(-6)(+1) - (+4)(-1)}{3-1} = -1$$

$$I_{0,2} = \frac{(-6)(-2) - (+1)(-1)}{5-1} = -13$$

$$I_{0,1,2} = \frac{(-1)(-2) - (-13)(+1)}{5-3} = -5$$

و الی آخر.

درایه  $-7$  (داخل دایره) دوبار متوالی در امتداد قطر ظاهر می‌شود و بنا بر این می‌توان نتیجه گرفت که  $f(2) = -7$ .

### خود را بیازماید

- ۱- دستور درونیایی تفاضل تقسیم شده نیوتن چه برتری عملی مهمی نسبت به دستور لاگرانژ دارد؟
- ۲- معمولاً نقاط جدولی برای درونیایی با دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن یا روش ایتنکن چگونه مرتب می‌شوند؟
- ۳- آیا عملاً در درونیایی به روش ایتنکن از تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌شود؟

### تمرین

- ۱- از دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن استفاده کنید و نشان دهید که درونیایی برای  $\sqrt[3]{x}$  از نقاط  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(2, 8)$ ،  $(3, 27)$  و  $(4, 64)$  بر روی  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  کاملاً

بی اعتبار است.

۲- با فرض اینکه  $f(-2) = 46$ ،  $f(-1) = 4$ ،  $f(1) = 4$ ،  $f(3) = 156$  و  $f(4) = 484$ ، مطلوب است محاسبه  $f(0)$  به وسیله (i) دستور تفاضل تقسیم شده؛ و (ii) روش ایتکن.

درمورد اعتبار این درونیابی بحث کنید.

۳- با فرض اینکه  $f(0) = 23913$ ،  $f(1) = 23919$ ،  $f(3) = 23938$  و  $f(4) = 23951$ ، به روش ایتکن  $f(2)$  را برآورد کنید.



# گام بیست و چهار

## درونیابی - ۶\*

### درونیابی معکوس

به جای مقدار يك تابع  $f(x)$  به ازای نقطهٔ معینی مانند  $x$ ، می توان  $x$  متناظر با يك مقدار داده شدهٔ  $f(x)$  را جستجو کرد؛ این روند به درونیابی معکوس موسوم است. برای مثال، شاید دانشجو در مورد امکان به دست آوردن ریشه های  $f(x) = 0$  به وسیلهٔ درونیابی معکوس اندیشیده باشد.

### ۱- درونیابی معکوس خطی

يك روند مقدماتی واضح این است که تابع را در همسایگی مقدار داده شده به فاصله هایی آن قدر كوچك جدول بندی كنیم که بتوان درونیابی معکوس خطی را به کار برد. با توجه به تقریب خطی از گام ۱۹، داریم

$$x = x_j + \theta(x_{j+1} - x_j),$$

که در آن

$$\theta \approx \frac{f(x) - f_j}{f_{j+1} - f_j}.$$

(توجه داشته باشید که اگر  $f(x) = 0$ ، باز هم روش نابجایی را به دست می آوریم - ر.ك. گام ۰.۸)

مثلا، از يك جدول  $4D$  برای  $f(x) = e^{-x}$  داریم:

$f(0.91) = 0.4085$  و  $f(0.92) = 0.3985$ ، و در نتیجه  $f(x) = 0.4$  متناظر

است با

$$x \approx 0.91 + \frac{0.04 - 0.04025}{0.03985 - 0.04025} \times (0.92 - 0.91)$$

$$= 0.91 + 0.00625 = 0.91625.$$

يك امتحان فوری آن است که از درونیابی (مستقیم) استفاده کنیم و  $f(x) = 0.04$  را دوباره به دست آوریم. بدین ترتیب:

$$f(0.91625) \approx 0.04025 + \frac{0.91625 - 0.91}{0.92 - 0.91} \times (0.03985 - 0.04025)$$

$$= 0.04000.$$

## ۲- درونیابی معکوس تکراری

به جای جستجو برای جدول بندی در يك فاصله به قدر کافی كوچك جهت انجام درونیابی معکوس خطی، دانشجو هم بدون تردید تصدیق خواهد کرد که بهتر است (دست کم به طور تقریب) يك چندجمله‌ای هم محل از درجهٔ بیش از يك به کار گرفته شود. درجهٔ چندجمله‌ای تقریبی را می‌توان به طور ضمنی با يك روش تکراری (تقریب متوالی) تعیین کرد. مثلاً، دستور تفاضل پیشرو نیوتن را می‌توان به صورت

$$\theta = \{f(x) - f_j - \frac{1}{p} \theta (\theta - 1) \Delta^2 f_j + \dots\} / \Delta f_j$$

هم مرتب کرد. چون می‌توان انتظار داشت که جملات شامل تفاضلات مرتبهٔ دوم و بالاتر نسبتاً با سرعت کاهش یابند، تقریبات متوالی  $\{\theta_p\}$  برای  $\theta$  به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\theta_1 = \{f(x) - f_j\} / \Delta f_j,$$

$$\theta_p = \{f(x) - f_j - \frac{1}{p} \theta_1 (\theta_1 - 1) \Delta^2 f_j\} / \Delta f_j.$$

و الی آخر.

روندهای تکراری مشابه را می‌توان بر اساس دیگر دستورهای تفاضلی بنا کرد؛ مثلاً، از دستور اورت خواهیم داشت

$$\theta_1 = \{f(x) - f_j\} / \delta f_{j+\frac{1}{p}}$$

$$\theta_2 = \{f(x) - f_j + \frac{1}{6}\theta_1(\theta_1 - 1)[(\theta_1 - 2)\delta^2 f_j - (\theta_1 + 1)\delta^2 f_{j+1}]\} / \delta f_{j+1} + \frac{1}{6}$$

و الی آخر.

برای تشریح مطلب، جدول  $f(x) = \sin x$  به ازای  $50^\circ (10^\circ)$   $x = 0^\circ$  داده شده در گام ۱۲۰ در نظر بگیرید، و فرض کنید که می‌خواهیم  $x$  را بیابیم که  $f(x) = 0.2$  چون برخی از محاسبات رومیزی الکترونیکی فاقد کلیدهای تابع مثلثاتی معکوس هستند، این مثال ساده از نقطه نظر عملی جالب است. واضح است که،  $10^\circ < x < 20^\circ$ . از دستور نیوتن داریم

$$\theta_1 = \frac{(0.2 - 0.1736)}{0.1684} = \frac{0.0264}{0.1684} = 0.1568 \approx 0.16,$$

$$\theta_2 = \frac{0.0264 - \frac{1}{2}(0.16)(-0.84)(-0.0104)}{0.1684}$$

$$= \frac{0.0264 - 0.0007}{0.1684} = 0.1526 \approx 0.153,$$

$$\theta_2 = \frac{1}{0.1684} \left\{ 0.0264 - \frac{1}{2}(0.153)(-0.847)(-0.0104) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}(0.153)(-0.847)(-1.847)(-0.0048) \right\}$$

$$= \frac{1}{0.1684} \{ 0.0264 - 0.0007 + 0.0002 \}$$

$$= 0.1538.$$

(توجه کنید که در برآوردهای اولیه  $\theta$ ، منظور کردن ارقام متعدد ضرور نیست.)  
به موجب دستور اورت،

$$\theta_1 = 0.16,$$

$$\theta_2 = \frac{1}{0.1684} \left\{ 0.0264 + \frac{1}{6}(0.16)(-0.84)[(-1.84)(-0.0052) \right.$$

$$\left. - (1.16)(-0.0104) \right\}$$

$$= \frac{1}{0.1684} \{ 0.0264 - (0.0224)(0.0216) \}$$

$$= \frac{1}{0.1684} \{0.0264 - 0.0005\}$$

$$= 0.1538.$$

در نتیجه،  $\theta = 0.1538 = (x - 10) / 10$  عدد  $x = 11.538^\circ$  را به دست می‌دهد. با امتحان کردن به روش معمولی درونیایی مستقیم، یا در این مثال به روش مستقیم، داریم  $\sin 11.538^\circ = 0.2000$ .

### ۳- تفاضلات تقسیم شده

چون تفاضلات تقسیم شده برای درونیایی با مقادیر جدولی نامتساوی الفاصله مناسب هستند، آنها را می‌توان برای درونیایی معکوس هم به کار برد. مجدداً، تابع  $f(x) = \sin x$  را به ازای  $50^\circ (10^\circ)$  در نظر می‌گیریم، و  $x$  را می‌یابیم که  $f(x) = 0.2$  اگر  $f(x)$ ها را بر حسب ازدیاد فاصله از  $f(x) = 0.2$  مرتب کنیم، جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را (درایه‌ها در ۱۰۰ ضرب شده‌اند) خواهیم داشت:

$f(x)$	$x$			
0.1736	10	5938		
0.3420	20	518	1360	
0.5000	0	962	1988	3486
0.7500	30	1560	2403	
0.6428	40	7003	4188	
0.7660	50	8117		

$$\begin{aligned}
 x &= 10 + (0.02 - 0.01736) 5938 \\
 &+ (0.02 - 0.01736)(0.02 - 0.03420) 518 \\
 &+ (0.02 - 0.01736)(0.02 - 0.03420)(0.02 - 0) 13260 \\
 &+ (0.02 - 0.01736)(0.02 - 0.03420)(0.02 - 0)(0.02 - 0.05) 13338 \\
 &+ (0.02 - 0.01736)(0.02 - 0.03420)(0.02 - 0)(0.02 - 0.05) \\
 &\quad \times (0.02 - 0.06428) 34786 \\
 &= 10 + 1.05676 = 0.0194 - 0.0102 + 0.0030 - 0.0035 \\
 &= 1.05375.
 \end{aligned}$$

از طرف دیگر، طرح ایکن را هم می‌توان به کار برد. به هر حال، در هر یک از دو شق قابل توجه است که در مقایسه با درونیایی معکوس تکراری مزیتی به نام دقت، نمی‌تواند نیاز به محاسبات اضافی را توجیه کند.

### خود را بیازمایید

- ۱- چرا درونیایی معکوس خطی می‌تواند کسل کننده یا غیر عملی باشد؟
- ۲- روش متداول امتحان کردن درونیایی معکوس چیست؟
- ۳- درونیایی معکوس با به کار بردن هر یک از تفاضلات تقسیم شده یا طرح ایکن، چه مزیت بالقوه‌ای نسبت به روش تکراری دارد؟ عیب احتمالی آن چیست؟

### تمرین

- ۱- برای یافتن ریشه  $x + \cos x = 0$  از درونیایی معکوس خطی استفاده کنید.
- ۲- مطلوب است حل  $3xe^x = 1$  تا  $3D$ .
- ۳- جدول تصحیح شده مربوط به تابع درجه سوم  $f(x)$  داده شده در تمرین ۱ از گام ۱۸ عبارت است از:

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
۲	۳۰۰۶۷۱	۸	۲۴۰۲۵۷۳
۳	۶۰۴۰۸۸	۹	۲۸۰۵۵۹۲
۴	۹۰۸۲۵۷	۱۰	۳۱۰۹۳۹۹
۵	۱۳۰۳۱۸۴	۱۱	۳۵۰۹۰۰۰
۶	۱۶۰۸۸۷۵	۱۲	۳۹۰۹۴۰۱
۷	۲۰۰۵۳۳۶	۱۳	۴۴۰۰۶۰۸

بدون آگاهی از صورت صریح  $f(x)$ ، مقدار  $x$  را به ترتیب برای  $f(x) = 10, 20, 40$  به دست آورید. جوابهای خود را با درونیایی (مستقیم) امتحان کنید. بالاخره، معادله درجه سوم را به دست آورید و با استفاده از آن جوابهای خود را دوباره امتحان کنید.

# گام بیست و پنج

## برازش منحنی

دانشمندان و جامعه‌شناسان اغلب می‌خواهند منحنی همواری را به چند داده تجربی برازش کنند. يك شیوه واضح برای  $(n+1)$  نقطه مفروض این است که از چند جمله‌ای درونیاب درجه  $n$  استفاده کنیم، ولی این شیوه هنگامی که  $n$  بزرگ باشد غالباً رضایت بخش نیست. با استفاده از چند جمله‌ایهای تکه‌ای، یعنی برازش چند جمله‌ایهای از درجه پایین به زیر مجموعه‌هایی از نقاط داده شده، می‌توان نتایج بهتری به دست آورد. در این مورد استفاده از توابع اسپلاین (که معمولاً برازش هموار خاصی را به دست می‌دهند) همه جا متداول شده است (مثلاً ر. ک. کونت و دوبور).

نوع نسبتاً متفاوت دیگر برازش منحنی که غالباً کارا تر هم هست، برازش کمترین مربعات است که در آن به جای سعی در برازش دقیق نقاط، يك چند جمله‌ای از درجه پایین (غالباً از مرتبه اول یا دوم) پیدا می‌کنیم که آن نقاط را به طور تنگاتنگ برازش کند (به هر جهت خود نقاط هم مشمول خطای تجربی بوده دقیق نخواهند بود).

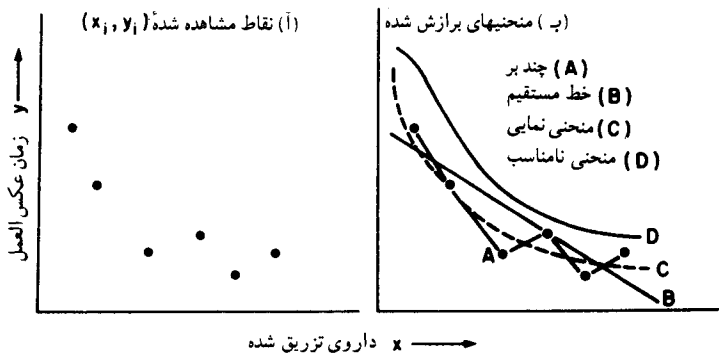
### ۱- تشریح مسئله

فرض کنید به طور تجربی مشغول مطالعه ارتباط بین دو متغیر  $x$  و  $y$  هستیم - مثلاً،  $(x)$  مقدار داروی تزریق شده و  $(y)$  زمان عکس‌العمل مشاهده شده روی نمونه‌ای از موشهای صحرائی باشد. با مثلاً شش بار انجام آزمایش مربوط، شش جفت از مقادیر  $(y_i, x_i)$  به دست می‌آیند، این مقادیر را می‌توان در نموداری مانند شکل (آ) ۱۲ رسم کرد.

ممکن است گمان کنیم که ارتباط بین این متغیرها را می‌توان به طور رضایت بخشی با يك رابطه تابعی  $f(x) = y$  بیان کرد، ولی چون مقادیر  $y$  به طور تجربی به دست آمده‌اند مقید به خطا (یا اختلال) هستند. قالب ریاضی این وضعیت به شرح زیر است:

وقتی که  $n$  نقطه مشاهده شده در دست باشد، به ازای  $n, \dots, 1, i$  داریم  $f(x_i) = y_i + \varepsilon_i$ . در اینجا  $f(x_i)$  مقدار تابعی  $y$  نظیر مقدار  $x_i$  است که در آزمایش به کار گرفته شده و  $\varepsilon_i$  عبارت است از خطای تجربی مربوط به اندازه گیری متغیر  $y$  در این نقطه. لذا خطای موجود در  $y$ ، در نقطه مشاهده شده، برابر است با  $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$ . مسئله برآزش منحنی این است که جهت تعیین يك منحنی مناسب از اطلاعات مربوط به نقاط داده نمونه چنان استفاده کنیم (یعنی، تابع مناسبی مانند  $f(x)$  بیابیم) که از معادله  $y = f(x)$  بتوان به عنوان توصیفی از رابطه  $(x, y)$  استفاده کرد؛ امید آن است که پیش بینی هایی که از این معادله انجام می گیرند خیلی در خطا نباشند.

تابع  $f(x)$  را چگونه باید انتخاب کرد؟ تعداد نامحدودی تابع وجود دارند که  $f$  باید از میانشان انتخاب شود، و شکل (ب) ۱۲ چهار انتخاب ممکن را نشان می دهد. چندبر  $A$  از تمام شش نقطه می گذرد؛ اما به طور شهودی ممکن است مرجح باشد که برآزش با خط مستقیمی مانند  $B$ ، یا با يك منحنی نمایی چون  $C$  انجام شود. روشن است که منحنی  $D$  برآزش خوبی برای این داده ها نیست.



شکل ۱۲. عکس العمل موشها نسبت به دارو

## ۲- شیوه کلی حل مسئله

جهت آغاز پاسخگویی به این سؤال که کدام تابع باید انتخاب شود يك شیوه ممکن را توضیح می دهیم.

برای مجموعه مفروضی از مقادیر  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  تابعی را انتخاب می کنیم که برای مقادیر مجموعه ای از  $k$  پارامتر  $c_1, c_2, \dots, c_k$  بتواند به طور کامل مشخص شود. این تابع را با  $y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_k)$  نمایش می دهیم. مقادیری برای این پارامترها انتخاب خواهیم کرد که در نقاط اندازه گیری شده  $(x_i, y_i)$  خطاها حتی الامکان کوچک باشند. سه روش پیشنهاد خواهیم کرد که با کمک آنها بتوانیم به عبارت «حتی الامکان کوچک» معنی مشخصی ببخشیم.



## مثالهایی از توابع مورد استفاده

$$(i) \quad y = c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1} \quad (\text{چند جمله‌ای})$$

(ترکیبی از توابع سینوسی)

$$(ii) \quad y = c_1 \sin \omega x + c_2 \sin 2\omega x + \dots + c_k \sin k\omega x$$

(ترکیبی از توابع کسینوسی)

$$(iii) \quad y = c_1 \cos \omega x + c_2 \cos 2\omega x + \dots + c_k \cos k\omega x$$

مثالهای (i)، (ii)، و (iii) خود مثالهایی از آنچه که می‌تواند فرم خطی کلی:

$$(iv) \quad y = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \dots + c_k \phi_k(x)$$

نامیده شود هستند که در آن توابع  $\phi_1(x), \dots, \phi_k(x)$  متشکل از مجموعه‌ای از توابع از پیش انتخاب شده می‌باشند. در (i) این مجموعه از توابع عبارت است از  $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$  در (ii) این مجموعه عبارت است از  $\{\sin \omega x, \sin 2\omega x, \dots, \sin k\omega x\}$  که در آن ثابت  $\omega$  طوری انتخاب می‌شود که با یک دوره تناوب موجود در داده‌ها توافق داشته باشد؛ در (iii) مجموعه عبارت است از  $\{\cos \omega x, \cos 2\omega x, \dots, \cos k\omega x\}$  توابع دیگری که عموماً در برازش منحنی به کار می‌روند عبارتند از توابع نمایی، توابع بسل، چند جمله‌ایهای لژاندر، و چند جمله‌ایهای چیبیشف (مثلاً ر. ک. کونت و دوبور).

## ۳- خطاهای «حتی‌الامکان کوچک»

در اینجا معیاری را ارائه می‌دهیم که مفهوم انتخاب تابعی که خطاهای اندازه‌گیری را حتی‌الامکان کوچک کند روشن می‌سازد. فرض می‌کنیم که منحنی مورد برازش را بتوان به شکل خطی کلی با مجموعه معلومی از توابع  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x)\}$  بیان کرد. خطاهای  $\varepsilon_i = y - y_i$  در  $n$  نقطه داده شده به قرار ذیل هستند:

$$\varepsilon_1 = c_1 \phi_1(x_1) + c_2 \phi_2(x_1) + \dots + c_k \phi_k(x_1) - y_1$$

$$\varepsilon_2 = c_1 \phi_1(x_2) + c_2 \phi_2(x_2) + \dots + c_k \phi_k(x_2) - y_2$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_n = c_1 \phi_1(x_n) + c_2 \phi_2(x_n) + \dots + c_k \phi_k(x_n) - y_n$$

اگر تعداد نقاط داده شده نایبتر از تعداد پارامترها (یعنی،  $n \leq k$ ) باشد، پیدا کردن مقادیری برای  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  که تمامی خطاهای  $\varepsilon_i$  را صفر کنند امکان‌پذیر است. اگر  $n < k$ ، تعدادی نامتناهی جواب برای  $\{c_i\}$  موجود است که تمامی خطاها را

صفر می کنند (و لذا بینهایت منحنی با شکل مفروض از همه نقاط تجربی می گذرند)؛ در این حالت مسئله به طور کامل حل نمی شود - جهت انتخاب يك منحنی مناسب اطلاعات بیشتری مورد نیاز است.

اگر  $n > k$ ، که معمولاً در عمل هم چنین است، نمی توان تمامی خطاها را با يك انتخاب صفر کرد. سه دستورالعمل ممکن به قرار زیرند:

(i) مجموعه ای مانند  $\{c_i\}$  انتخاب کنید که خطای مطلق کل را مینیمم سازد؛

یعنی، مجموع  $\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|$  را مینیمم کنید؛

(ii) مجموعه ای مانند  $\{c_i\}$  انتخاب کنید که ماکزیمم خطای مطلق را مینیمم سازد؛

یعنی،  $\text{Max} \{|\varepsilon_i|\}$  را مینیمم کنید؛

$$i = 1, \dots, n$$

(iii) مجموعه ای مانند  $\{c_i\}$  انتخاب کنید که مجموع مربعات خطاها را مینیمم سازد؛

یعنی،  $S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$  را مینیمم کنید.

استفاده از دستورالعملهای (i) و (ii) عموماً مشکل است. دستورالعمل (iii) به يك دستگاه معادلات خطی منجر می شود که برای تعیین مجموعه  $\{c_i\}$  باید حل شود؛ این دستورالعمل اهل کمترین مربعات نام دارد و دستورالعملی است که معمولاً به کار برده می شود.

#### ۴- روش کمترین مربعات

برای به کار بردن اصل کمترین مربعات استفاده از مشتق گیری جزئی، فنی از حساب دیفرانسیل و انتگرال که ممکن است بر متعلمین این کتاب ناشناخته باشد، لازم است. به این دلیل، به جای يك توصیف کلی از این روش به شرح رئوس مطالب توأم با مثالهایی از کاربرد مطلب مبادرت می ورزیم.

#### الف) معادلات ذرهال

مجموع مربعات خطاها که باید مینیمم شود عبارت است از:

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i; c_1, c_2, \dots, c_k) - y_i]^2.$$

$n$  مقدار  $(x_i, y_i)$  اندازه های معلوم و مأخوذ از  $n$  آزمایش هستند. اگر این مقادیر

را در طرف راست قرار دهیم  $S$  به عبارتی تبدیل می شود که تنها  $k$  مجهول، به نامهای  $c_1, c_2, \dots, c_k$  را دربردارد. به عبارت دیگر،  $S$  را می توان به صورت تابعی از  $c_i$ ها؛ یعنی

$$S \equiv S(c_1, c_2, \dots, c_k)$$

در نظر گرفت. مسئله انتخاب مقادیری است برای  $\{c_i\}$  که  $S$  را مینیمم کند.

قضیه ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال حاکی است که (تحت شرایط معینی که معمولاً در عمل برقرار هستند) مینیمم در نقطه ای واقع می شود که در آن نقطه تمام مشتقات جزئی  $\partial S / \partial c_1, \partial S / \partial c_2, \dots, \partial S / \partial c_k$  صفر هستند. (مشتق جزئی  $\partial S / \partial c_1$  (مثلاً)، همان ضریب دیفرانسیلی  $dS/dc_1$  است با فرض ثابت نگه داشتن تمام  $c_i$ های دیگر؛ مثلاً اگر

$$S = 3c_1 + 5c_2 \quad (\partial S / \partial c_2 = 5 \text{ و } \partial S / \partial c_1 = 3)$$

بنابراین، باید دستگاه متشکل از  $k$  معادله زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_2} = 0$$

⋮

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = 0.$$

این دستگاه مجموعه ای است از معادلات که نسبت به مجهولات  $c_1, c_2, \dots, c_k$  خطی هستند و به معادلات نرمال برای تقریب کمترین مربعات موسوم است. این معادلات را می توان با روشهای عددی ارائه شده در گامهای ۱۱ و ۱۳ حل کرد. جواب مشترک این معادلات مجموعه مطلوب  $\{c_i\}$  را که مینیمم کننده  $S$  است به دست می دهد.

(ب) مثالهایی از روش کمترین مربعات

نقاط زیر در يك آزمایش به دست آمده اند:

$x$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$y$	۱	۳	۴	۳	۴	۲

این نقاط را در نموداری رسم، و جهت برازش (i) يك خط راست، (ii) يك سهمی، به این نقاط، از روش کمترین مربعات استفاده کنید.

نقاط فوق در شکل (آ) ۱۳ نشان داده شده‌اند.

(i) جهت برازش يك خط مستقیم بسايد تابعی چون  $y = c_1 + c_2 x$  (یعنی يك چند جمله‌ای درجه اول) پیدا کرده

$$S = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^6 (y_i - c_1 - c_2 x_i)^2$$

را مینیمم سازد.

اگر ابتدا نسبت به  $c_1$  (با ثابت نگهداشتن  $c_2$ ) و بعد نسبت به  $c_2$  (با ثابت نگهداشتن  $c_1$ ) دیفرانسیل بگیریم و نتایج را برابر صفر قرار دهیم، معادلات نرمال ذیل بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} \equiv -2 \sum_{i=1}^6 (y_i - c_1 - c_2 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_2} \equiv -2 \sum_{i=1}^6 x_i (y_i - c_1 - c_2 x_i) = 0.$$

می‌توان هر دو معادله را بر ۲ — تقسیم کرد، اعمال سیگما را به داخل پرانتزها برد، جملات را مرتب کرد و دستگاه زیر را به دست آورد:

$$\sum y_i \equiv 6c_1 + (\sum x_i)c_2$$

$$\sum x_i y_i \equiv (\sum x_i)c_1 + (\sum x_i^2)c_2.$$

ملاحظه می‌شود که برای رسیدن به جواب باید چهار مجموع  $\sum x_i^2$ ،  $\sum y_i$ ،  $\sum x_i$  و  $\sum x_i y_i$  را محاسبه کرد و در آخرین معادلات قرارداد. این عملیات را می‌توان در يك جدول به قرار جدول صفحه بعد مرتب کرد (سه ستون آخر مربوط به برازش سهمی مورد نظر است).

بنابراین، معادلات نرمال جهت برازش خط مستقیم عبارتند از:

$$17 = 6c_1 + 21c_2$$

$$63 = 21c_1 + 91c_2.$$

جواب تا  $2D$  عبارت است از:

$$c_1 = 2.13$$

$$c_2 = 0.20$$

$x$	$y$	$x^2$	$xy$	$x^2y$	$x^3$	$x^4$
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۳	۴	۶	۱۲	۸	۱۶
۳	۴	۹	۱۲	۳۶	۲۷	۸۱
۴	۳	۱۶	۱۲	۴۸	۶۴	۲۵۶
۵	۴	۲۵	۲۰	۱۰۰	۱۲۵	۶۲۵
۶	۲	۳۶	۱۲	۷۲	۲۱۶	۱۲۹۶
مجموعه‌های مطلوب	۲۱	۹۱	۶۳	۲۶۹	۴۴۱	۲۲۷۵

در نتیجه:

$$y = 2.13 + 0.2x$$

خط مطلوب می باشد که در شکل (ب) رسم شده است.  
(ii) جهت برازش يك سهمی باید چند جمله‌ای درجه دومی مانند

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

یافت که

$$S = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (y_i - c_1 - c_2x_i - c_3x_i^2)^2$$

را مینیمم کند.

با گرفتن مشتقات جزئی و ادامه عمل همانند فوق، معادلات نرمال زیر به دست می آیند.

$$\sum y_i = 6c_1 + (\sum x_i)c_2 + (\sum x_i^2)c_3$$

$$\sum x_i y_i = (\sum x_i)c_1 + (\sum x_i^2)c_2 + (\sum x_i^3)c_3$$

$$\sum x_i^2 y_i = (\sum x_i^2)c_1 + (\sum x_i^3)c_2 + (\sum x_i^4)c_3$$

بامنظور کردن مقادیر مجموعه‌ها (ر.ك. جدول بالا)، دستگاه معادلات خطی زیر حاصل می شود:

$$17 = 6c_1 + 21c_2 + 91c_3$$

$$63 = 21c_1 + 91c_2 + 441c_3$$

$$269 = 91c_1 + 241c_2 + 2275c_3$$

جواب تا  $3D$  عبارت است از:

$$c_1 = -17200$$

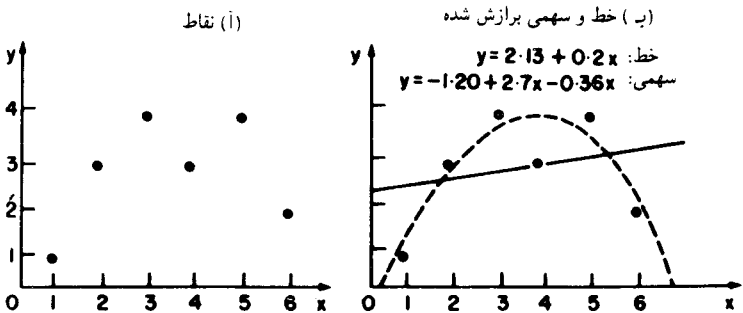
$$c_2 = 27700$$

$$c_3 = -033570$$

بنابراین، سهمی مطلوب (تا  $2D$ ) چنین است:

$$y = -17200 + 27700x - 0336x^2$$

این سهمی نیز در شکل (ب)  $13$  رسم شده است. روشن است که این سهمی از خط مستقیم، برآزش بهتری است!



شکل ۱۳. برآزش یک خط و یک سهمی به وسیله کمترین مربعات

### خود را بیازمایید

- ۱- خطا در یک نقطه به چه معناست؟
- ۲- سه معیاری را که ممکن است جهت انتخاب مجموعه  $\{c_i\}$  به کار رود ارائه دهید.
- ۳- معادلات نرمال چگونه به دست می آیند؟

### تمرین

- ۱- برای مثال ۴ (ب) فوق الذکر، مقدار  $S$ ، مجموع مربعات خطای نقاط، را از (i) خط برآزش شده، و (ii) سهمی برآزش شده، حساب کنید. نقاط مربوط را روی کاغذ رسم مشخص کنید و «بانگاه» خط مستقیمی به آنها ببرازانید. (یعنی، با حدس بهترین مکان، خطی با یک خط کش رسم کنید)؛ مقدار  $S$  را برای این خط تعیین، و آن را با مقدار مربوط به خط

کمترین مربعات مقایسه کنید.

۲- با روش کمترین مربعات خط مستقیمی به هر یک از مجموعه داده‌های زیر برآزانیید:

(i) سختی ( $x$ ) و درصد نیکل ( $y$ ) در هشت نمونه از آلیاژ فولاد:

سختی ( $x$ )	۳۶	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۷	۵۰
درصد نیکل ( $y$ )	۲۲۵	۲۲۷	۲۲۸	۲۲۹	۳۲۰	۳۲۲	۳۲۳	۳۲۵

(ii) نمره آزمایش استعداد ( $x$ ) شش فروشنده کارآموز و فروشهای اولین سال آنها ( $y$ ) بر حسب هزار تومان:

آزمایش استعداد ( $x$ )	۲۵	۲۹	۳۳	۳۶	۴۲	۵۴
فروش اولین سال ( $y$ )	۴۲	۴۵	۵۰	۴۸	۷۳	۹۰

برای هر دو مجموعه، نقاط را بر روی یک نمودار مشخص و خط کمترین مربعات را رسم کنید. با استفاده از این خطوط (i) درصد نیکل یک نمونه را که سختی آن ۳۸ است، و (ii) حدود فروش اولین سال یک فروشنده کارآموز را که نمره آزمایش استعدادش ۴۸ است، پیش‌بینی کنید.

۳- معادلات نرمال مربوط به برازش یک چند جمله‌ای درجه سوم مانند  $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$  به مجموعه‌ای از  $n$  نقطه را به دست آورید. نشان دهید که این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر هم نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \\ \sum x^3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 \\ \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی معادلات نرمال برای برازش یک چند جمله‌ای درجه چهارم را نتیجه بگیرید.

۴- با روش کمترین مربعات، يك سهمی به نقاط  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$ ،  $(2, 3)$ ،  $(3, 3)$ ، و  $(4, 2)$  برازانیید. مقدار  $S$  مربوط به این برازش را بیابید.

۵- معادلات نرمال مربوط به برازش معادله‌ای به شکل  $y = c_1 + c_2 \sin x$  به مجموعه نقاط  $(0, 0)$ ،  $(\pi/6, 1)$ ،  $(\pi/2, 3)$ ، و  $(5\pi/6, 2)$  را بسه وسیله روش کمترین مربعات پیدا کنید. این معادلات را برای به دست آوردن  $c_1$  و  $c_2$  حل کنید.



# گام بیست و شش

## مشتق گیری عددی

در آنالیز، معمولاً قادریم مشتق یک تابع را با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به دست آوریم. ولی اگر این تابع خیلی پیچیده یا تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، ممکن است لازم شود که به مشتق گیری عددی متوسل شویم.

### ۱- دستورالعمل

دستورهای مشتق گیری عددی را می توان به آسانی با مشتق گرفتن از چند جمله ای درونیاب به دست آورد. ایده اساسی این است که مشتقات  $f'(x)$ ،  $f''(x)$ ، ... از یک تابع مانند  $f(x)$  به وسیله مشتقات  $P'_n(x)$ ،  $P''_n(x)$ ، ... از چند جمله ای هم محل  $P_n(x)$  نمایش داده می شوند.

برای مثال، با مشتق گرفتن از دستور تفاضل پیشرو نیوتن

$$f(x) =$$

$$f(x_j + \theta h) \approx [1 + \theta \Delta + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) \Delta^2 + \frac{\theta(\theta - 1)(\theta - 2)}{3!} \Delta^3 + \dots] f_j$$

نسبت به  $x$ ، (چون  $x = x_j + \theta h$  و  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$  و غیره) به طور صوری

$$f'(x) = \frac{1}{h} \frac{df}{d\theta} \approx \frac{1}{h} [\Delta + (\theta - \frac{1}{2}) \Delta^2 + \frac{3\theta^2 - 6\theta + 2}{6} \Delta^3 + \dots] f_j$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \frac{d^2 f}{d\theta^2} \approx \frac{1}{h^2} [\Delta^2 + (\theta - 1)\Delta^2 + \dots] f_j,$$

و غیره حاصل می‌شود. به ویژه با قرار دادن  $\theta = 0$ ، برای مشتقات در نقاط جدولی  $\{x_j\}$  دستورهای زیر به دست می‌آیند:

$$f'_j \approx \frac{1}{h} [\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots] f_j$$

$$f''_j \approx \frac{1}{h^2} [\Delta^2 - \Delta^2 + \frac{1}{12}\Delta^4 - \dots] f_j.$$

و غیره.

(درگام ۲۰ اشاره کردیم که  $E$  شبیه به  $e^{hD}$  است؛ لذا می‌توان «نتیجه گرفت» که

$$hD = \log_e E = \log_e (1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots!$$

با قرار دادن  $\theta = 1/2$ ، یک دستور نسبتاً دقیق به صورت زیر برای نقاط میانی (بدون تفاضلات مرتبه دوم) به دست می‌آید:

$$f'_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{h} [\Delta - \frac{1}{24}\Delta^3 + \dots] f_j;$$

حال آنکه با قرار دادن  $\theta = 1$  در دستور مربوط به مشتق مرتبه دوم (بدون تفاضلات مرتبه سوم) داریم:

$$f''_{j+1} \approx \frac{1}{h^2} [\Delta^2 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \dots] f_j,$$

که دستوری برای مشتق مرتبه دوم در نقطه بعدی است. توجه داشته باشید که اگر تنها یک جمله را منظور کنیم، دستورهای معروف

$$f'(x_j) \approx \frac{f(x_j+h) - f(x_j)}{h};$$

$$f''(x_j) \approx \frac{f(x_j+2h) - 2f(x_j+h) + f(x_j)}{h^2} \quad (\theta = 0);$$

$$f'(x_j + \frac{1}{2}h) \approx \frac{f(x_j+h) - f(x_j)}{h} \quad (\theta = \frac{1}{2});$$

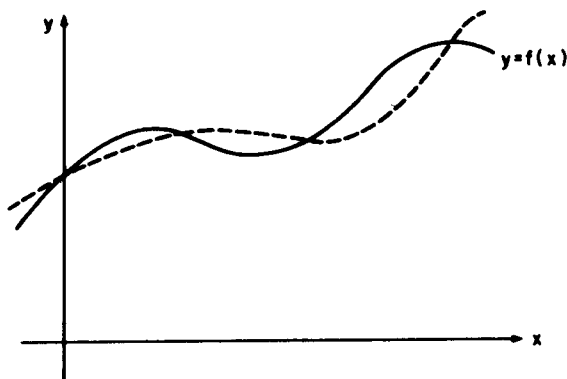
$$f''(x_j+h) \approx \frac{f(x_j+2h) - 2f(x_j+h) + f(x_j)}{h^2} (\theta = 1);$$

و غیره، را دوباره به دست می آوریم.

## ۲- خطا در مشتق گیری عددی

باید درك شود که مشتق گیری عددی مقید به خطای نسبتاً زیادی است؛ اشکال اساسی در این است که امکان دارد  $(f(x) - P_n(x))$  کوچک باشد ولی اختلافات  $(f'(x) - P'_n(x))$  و  $(f''(x) - P''_n(x))$  و غیره، خیلی بزرگ باشند. به بیان هندسی، گرچه ممکن است دو منحنی نزدیک هم باشند ولی امکان دارد اختلاف شیب، تغییر در شیب، و غیره قابل ملاحظه باشند (ر. ک. شکل ۱۴).

همچنین باید توجه شود که دستورهای فوق، همگی شامل تقسیم ترکیبی از تفاضلات (که به ویژه وقتی  $h$  کوچک باشد مستعد خطاهای حذفی هستند) بر توان مثبتی از  $h$  می باشند. در نتیجه اگر بخواهیم خطاهای گرد شده را پایین نگهداریم، باید از يك مقدار بزرگ  $h$  استفاده کنیم. از طرف دیگر، می توان نشان داد (ر. ک. تمرین ۳ زیر) که خطای برشی تقریباً متناسب با  $h^p$  است، که در آن  $p$  يك عدد صحیح مثبت است، و لذا  $h$  باید به قدر کافی کوچک باشد تا خطای برشی قابل اغماض شود. بدین ترتیب، در «تنگنا» قرار داریم، و باید با انتخاب بهینه ای از  $h$  بسازیم.



شکل ۱۴. درونیابی کردن  $f(x)$

به اختصار، در يك مشتق گیری عددی مبتنی بر تقریب مستقیم يك چند جمله ای، خطاهای بزرگ می توانند به وجود آیند، و در نتیجه همواره يك امتحان خطا توصیه می شود. چند روش دیگر مبتنی بر چند جمله ایها هم وجود دارند که از دستورالعملهای پیچیده تر نظیر کمترین مربعات یا اقل اکثر استفاده می کنند، و دستورالعملهایی مشتمل بر سایر توابع مقدماتی

(نظیر توابع مثلثاتی) هم وجود دارند. به هر حال، احتمالاً، بهترین شیوه آن باشد که تنها به هنگام اجبار از مشتق گیری عددی استفاده کنیم!

### ۳- مثال

بسیار استفاده از داده‌های در گام ۱۷ (ص ۹۰) برای  $f(x) = e^x$ ، مطلوب است برآورد  $f'(0.1)$  و  $f''(0.1)$ .

اگر از دستورهای صفحه ۱۰۶ (با  $\theta = 0$ ) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f'(0.1) &\approx \frac{1}{0.05} \left[ 0.05666 - \frac{1}{4}(0.00291) + \frac{1}{3}(0.00015) \right] \\ &= 20(0.05666 - 0.00145(5) + 0.00005) \\ &= 1.1051, \end{aligned}$$

$$f''(0.1) \approx 400(0.00291 - 0.00015) = 1.104.$$

چون  $f'(0.1) = f''(0.1) = f(0.1) = 1.10517$  (به خاطر خطاهای گرد شده) نتیجه دوم بسیار نادقیقتر است.

### خود را بیازمایید

- ۱- چگونه دستورهای مشتق يك تابع از دستورهای دورنیابی به دست می‌آیند؟
- ۲- چرا از ومادقت روند مشتق گیری عددی معمولی، با کاهش فاصله شناسه افزایش نمی‌یابد؟
- ۳- چه وقت باید از مشتق گیری عددی استفاده کنیم؟

### تمرین

- ۱- دستورهای مشتق بر تفاضلات پسر و را برای مشتقات مرتبه‌های اول و دوم يك تابع به دست آورید.
- ۲- تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  به ازای  $x = 1.35(0.05) = 1.00$  تا ۵ رقم اعشار جدول بندی شده است:

$x$	$f(x)$
۱۲۰۰	۱۲۰۰۰۰۰۰
۱۲۰۵	۱۲۰۲۴۷۰
۱۲۱۰	۱۲۰۴۸۸۱
۱۲۱۵	۱۲۰۷۲۳۸
۱۲۲۰	۱۲۰۹۵۴۵
۱۲۲۵	۱۲۱۱۸۰۳
۱۲۳۰	۱۲۱۴۰۱۸

- (i) از دستور تفاضل پیشرو نیوتن استفاده کنید و  $f'(۱)$  و  $f''(۱)$  را تخمین بزنید.
- (ii) از دستور تفاضل پسرو نیوتن استفاده کنید و  $f'(۱۲۳۰)$  و  $f''(۱۲۳۰)$  را تخمین بزنید.

۳- برای یافتن خطاهای برشی در دستورهای زیر، از سری تیلر استفاده کنید:

$$i) f'(x_j) \approx (f(x_j+h) - f(x_j))/h$$

$$ii) f'(x_j + \frac{1}{4}h) \approx (f(x_j+h) - f(x_j))/h$$

$$iii) f''(x_j) \approx (f(x_j+2h) - 2f(x_j+h) + f(x_j))/h^2$$

$$iv) f''(x_j+h) \approx (f(x_j+2h) - 2f(x_j+h) + f(x_j))/h^2.$$

# گام بیست و هفت

## انتگرال گیری عددی - ۱

### قاعده ذوزنقه‌ای

محاسبه انتگرال‌های معین به شکل

$$\int_a^b f(x) dx$$

به روشهای تحلیلی غالباً یا مشکل است یا غیر ممکن، لذا از انتگرال گیری عددی یا کوادراتور استفاده می‌کنیم.

معلوم است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی  $y = f(x)$  به‌ازای  $a \leq x \leq b$  تعبیر کرد و با تقسیم بازه مورد نظر و جمع کردن مساحت‌های مربوط به این تقسیمات آن را محاسبه نمود. با این خاصیت جمعی انتگرال معین می‌توان محاسبه را به صورت تکه‌ای انجام داد. می‌توان برای هر زیر بازه  $x_0 \leq x \leq x_n$  از بازه  $a \leq x \leq b$  تقریب با چند جمله‌ای  $f(x) \approx P_n(x)$  را اختیار کرد و برای اینکه

$$\int_{x_0}^{x_n} P_n(x) dx$$

با تقریب خوبی محاسبه شود،  $n$  را چنان انتخاب نمود که به قدر کافی کوچک بودن خطای  $(f(x) - P_n(x))$  در هر یک از زیر بازه‌های جدولی  $x_0 \leq x \leq x_{j+1}$  تضمین گردد. قابل توجه است که (برای  $n > 1$ ) این خطا غالباً در زیر بازه‌های متوالی، متناوباً مثبت و منفی است و به مقدار قابل توجهی حذف خطا پیش می‌آید؛ و لذا به عکس مشتق گیری عددی، کوادراتور ذاتاً دقیق است! معمولاً کافی است که بر هر زیر بازه  $x_0 \leq x \leq x_n$  از یک

تقریب با چند جمله‌ای از درجه نسبتاً پایینی استفاده کنیم.

### ۱- قاعده ذوزنقه‌ای\*

شاید سراسرترین کوادرات‌توران باشد که بازه  $a \leq x \leq b$  را به وسیله نقاط

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$$

که در آن  $b = a + Nh$ ، به  $N$  نوار متساوی به عرض  $h$  تقسیم کنیم. سپس می‌توانیم از خاصیت جمعی

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) dx$$

و تقریبات خطی (مشمول بر  $x = x_j + \theta h$ )

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \int_{x_j}^{x_j + h} f(x_j + \theta h) dx = h \int_0^1 f(x_j + \theta h) d\theta$$

$$\approx h \int_0^1 [1 + \theta \Delta] f_j d\theta = h \left[ \left( \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \Delta \right) f_j \right]_0^1$$

$$= h \left[ 1 + \frac{1}{2} \Delta \right] f_j = h \left[ f_j + \frac{1}{2} (f_{j+1} - f_j) \right]$$

$$= \frac{1}{2} h (f_j + f_{j+1}),$$

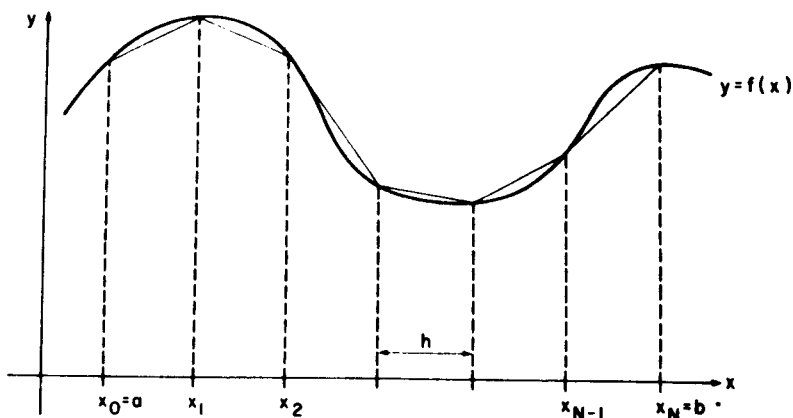
استفاده کنیم و قاعده ذوزنقه‌ای

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \dots + \frac{h}{2} (f_{N-1} + f_N)$$

$$= \frac{h}{2} (f_0 + f_N) + h (f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1})$$

را به دست آوریم. بنابراین، انتگرال گیری به وسیله قاعده ذوزنقه‌ای شامل محاسبه يك مجموع متناهی از مقادیر داده شده به وسیله انتگران  $f(x)$  است و بسیار هم سریع می‌باشد. توجه کنید که این روند را از نظر هندسی می‌توان به صورت مجموع مساحت‌های  $N$  ذوزنقه به عرض  $h$  و ارتفاع متوسط  $(f_j + f_{j+1})/2$  تعبیر کرد (ر. ک. شکل ۱۵).

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه نویسی در صفحه ۱۸۱ يك فلوجارت داده شده است.



شکل ۱۵. قاعده ذوزنقه‌ای

## ۲- دقت

قاعده ذوزنقه‌ای متناظر است با یک تقریب چند جمله‌ای نسبتاً خام (یک خط راست) بین نقاط متوالی  $x_j$  و  $x_{j+1} = x_j + h$ ، و لذا تنها برای  $h$ های به قدر کافی کوچک می‌تواند دقیق باشد. به قرار زیر می‌توان برای خطای این قاعده یک کران تقریبی (بالا) به دست آورد.

به موجب بسط تیلر

$$f_{j+1} = f(x_j + h) = f_j + hf'_j + \frac{1}{2!}h^2 f''_j + \dots,$$

از قاعده ذوزنقه‌ای

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \approx \frac{1}{2}h(f_j + f_{j+1}) = h\left(f_j + \frac{h}{2}f'_j + \frac{h^2}{6}f''_j + \dots\right)$$

حاصل می‌شود. حال آنکه در  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$  می‌توان  $f(x)$  را به صورت

$$f(x) = f_j + (x - x_j)f'_j + \frac{1}{2!}(x - x_j)^2 f''_j + \dots$$

بسط داد و صورت دقیق

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = h\left[f_j + \frac{h}{2}f'_j + \frac{h^2}{6}f''_j + \dots\right]$$



را به دست آورد. با مقایسه این دو صورت نتیجه می شود که تصحیح لازم عبارت است از

$$h \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) h^2 f_j'' + \dots = -\frac{1}{12} h^3 f_j'' + \dots$$

بنابراین، اگر از جملات مرتبه بالا صرف نظر کنیم، کران تقریبی خطای مربوط به به کارگیری قاعده ذوزنقه ای (بر  $N$  زیر بازه) عبارت خواهد بود از:

$$+\frac{N}{12} h^2 \text{Max} |f''(x)| = +\frac{(b-a)h^2}{12} \text{Max} |f''(x)|.$$

برای قابل اغماض کردن این خطا، هر جا که ممکن باشد،  $h$  را به قدر کافی کوچک انتخاب می کنیم. این کار احتمالاً در حالت استفاده از جدول و محاسبه با دست ممکن نباشد. از سوی دیگر، در یک برنامه کامپیوتری الکترونیکی که در آن  $f(x)$  در هر نقطه  $a \leq x \leq b$  قابل محاسبه است، بازه را می توان به زیر بازه های کوچک و کوچکتری تقسیم کرد و دقت کافی را به دست آورد. (مقادیر انتگرال مربوط به زیر تقسیمات متوالی را می توان با هم مقایسه کرد و وقتی که بین مقادیر متوالی تطابق کافی حاصل شد، به روند تقسیم بازه ها خاتمه داد.)

### ۳- مثال

با به کار بردن قاعده ذوزنقه ای و داده های مندرج در گام ۱۷ (ص ۹۵)  $\int_{0.1}^{0.2} e^x dx$  را بر آورد کنید.

اگر  $T(h)$  را جهت نشان دادن تقریب گیری با نواری به عرض  $h$  به کار بگیریم، خواهیم داشت:

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2} [1.10517 + 1.34986] = 0.24550$$

$$T(0.1) = \frac{0.1}{2} [1.10517 + 2(1.22140) + 1.34986] \\ = 0.24489$$

$$T(0.05) = \frac{0.05}{2} [1.10517 + 2(1.16183 + 1.22140 \\ + 1.28403) + 1.34986] \\ = 0.24474.$$

چون  $\int_{0.1}^{0.2} e^x dx = e^{0.2} - e^{0.1} = 0.24469$ ، می‌توان مشاهده کرد که دنباله خطا  $0.00005$ ،  $-0.00020$ ،  $-0.00081$ ، با کاهشی به نسبت  $h^2$  متناظر است.

### خود را بیازمایید

- ۱- چرا کوادراتوری که از یک تقریب چند جمله‌ای برای انتگرال استفاده می‌کند، حتی اگر چند جمله‌ای از درجه پایین هم باشد، احتمالاً رضایت بخش است؟
- ۲- درجه چند جمله‌ای تقریبی متناظر با قاعده ذوزنقه‌ای چیست؟
- ۳- چرا قاعده ذوزنقه‌ای برای محاسبه کامپیوتری کاملاً مناسب است؟

### تمرین

- ۱- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای و داده‌های مفروض در گام قبلی

$$\int_{100}^{1000} \sqrt{x} dx$$

را برآورد کنید.

- ۲- برای برآورد

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

از قاعده ذوزنقه‌ای با  $h = 100$ ،  $h = 50$ ، و  $h = 25$  استفاده کنید.

# گام بیست و هشت

## انتگرال گیری عددی - ۲

### قاعدهٔ سیمپسون<sup>۱</sup>

اگر جهت به دست آوردن کوادراتور دقیقتر، تقسیم تزیادی بازه‌ای چون  $a \leq x \leq b$  (همچون درموقع استفاده از جداول) نامطلوب باشد، راه دیگر، به کار بردن یک چندجمله‌ای تقریبی از درجه بالاتر است. یک انتگرال گیری مبتنی بر تقریب درجه دوم (یعنی تقریب سهموی)، به نام قاعدهٔ سیمپسون، برای اکثر کوادراتورها مناسب است.

### ۱- قاعدهٔ سیمپسون

قاعدهٔ سیمپسون با تقریب درجه دوم متناظر است، لذا، به ازای  $x_j \leq x \leq x_j + 2h$

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_j+2h} f(x) dx &= h \int_0^2 f(x_j + \theta h) d\theta \\ &\approx h \int_0^2 \left[ 1 + \theta\Delta + \frac{1}{6}\theta(\theta-1)\Delta^2 \right] f_j d\theta \\ &= h \left[ \left( \theta + \frac{1}{6}\theta^2\Delta + \left( \frac{1}{6}\theta^3 - \frac{1}{6}\theta^2 \right) \Delta^2 \right) f_j \right]_0^2 \\ &= h \left[ 2f_j + 2(f_{j+1} - f_j) + \frac{1}{3}(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j) \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{h}{3}(f_j + 4f_{j+1} + f_{j+2}).$$

به منحنی  $y = f(x)$ ، در سه نقطه جدولی  $x_j, x_j + h$  و  $x_j + 2h$  قوسی از سهمی برازش می‌شود. در نتیجه، اگر  $N = (b-a)/h$  زوج باشد، قاعدهٔ سیمپسون به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x) dx$$

$$\approx \frac{1}{3}h[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{N-1} + f_N],$$

که در آن

$$f_j = f(x_j) = f(a + jh), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

همانند قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، انتگرال‌گیری به وسیلهٔ قاعدهٔ سیمپسون شامل محاسبهٔ یک مجموع متناهی از مقادیر حاصل از انتگران  $f(x)$  است. قاعدهٔ سیمپسون برای محاسبهٔ کامپیوتری نیز کاراست و معمولاً از کاربرد مستقیم آن در محاسبات دستی هم دقت کافی به دست می‌آید.

## ۲- دقت

تأکید می‌کنیم که در محاسبات کامپیوتری مشتمل بر یک انتگران معلوم مانند  $f(x)$ ، برنامه‌ریزی تقسیم‌تزیایدی بازه به زیربازه‌ها جهت حصول دقت مطلوب، کاملاً مناسب است ولی برای محاسبات دستی، بازهم استفاده از یک کران خطا (خطای برشی) مفید است.

فرض کنید تابع  $f(x)$  در بازهٔ  $x_j - h \leq x \leq x_j + h$  دارای بسط تیلر

$$f(x) = f_j + (x - x_j)f'_j + \frac{1}{2!}(x - x_j)^2 f''_j + \dots,$$

باشد و لذا داشته باشیم

$$\int_{x_j-h}^{x_j+h} f(x) dx = 2h \left[ f_j + \frac{1}{3} \times \frac{h^2}{2!} f''_j + \frac{1}{5} \times \frac{h^4}{4!} f^{(4)}_j + \dots \right].$$

با بسط  $f_{j+1} = f(x_j + h)$  و  $f_{j-1} = f(x_j - h)$  به سری تیلر می‌توان قاعدهٔ کوادرات‌انور مربوط به  $x_j - h \leq x \leq x_j + h$  را به صورت زیر هم نوشت:

$$\int_{x_j-h}^{x_j+h} f(x) dx \approx \frac{1}{3}h(f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} h \left[ (f_j - h f'_j + \frac{1}{2!} h^2 f''_j - \dots) + 4 f_j \right. \\
 &\quad \left. + (f_j + h f'_j + \frac{1}{2!} h^2 f''_j + \dots) \right] \\
 &= 2h \left[ f_j + \frac{1}{3} \frac{h^2}{2!} f''_j + \frac{1}{3} \frac{h^4}{4!} f^{(4)}_j + \dots \right].
 \end{aligned}$$

مقایسه این دو صورت نشان می دهد که تصحیح لازم عبارت است از

$$2h \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \frac{h^4}{4!} f^{(4)}_j + \dots = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}_j + \dots$$

با چشم پوشی از جملات مرتبه بالاتر نتیجه می گیریم که در بر آورد

$$\int_a^b f(x) dx$$

به وسیله قاعده سیمپسون (با تعداد  $N/2$  زیر بازه به عرض  $2h$ ) یک کران تقریبی خطای برشی عبارت است از:

$$+\frac{N}{2} \frac{1}{90} h^5 \text{Max} |f^{(4)}(x)| = +\frac{(b-a)h^4}{180} \text{Max} |f^{(4)}(x)|.$$

قابل ذکر است که کران خطا متناسب است با  $h^4$ . در حالی که در قاعده خامتر ذوزنقه ای، کران خطا متناسب است با  $h^2$ . در ضمن می توان ملاحظه کرد که قاعده سیمپسون برای یک چند جمله ای درجه سوم دقیق است.

### ۳- مثال

با استفاده از قاعده سیمپسون و داده های مندرج در گام ۲۶،

$$\int_{100}^{130} \sqrt{x} dx$$

را بر آورد کنید.

اگر  $h = 0.05$  و  $h = 0.15$  انتخاب شوند تعداد بازه ها زوج خواهند بود. اگر تقریب مربوط به نواری به عرض  $h$  را با  $S(h)$  نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$S(0.15) = \frac{0.15}{3} [1 + 4(1.07238) + 1.14018] = 0.321485$$

$$S(0.05) = \frac{0.05}{3} [1 + 4(1.002470 + 1.007238 + 1.011803) + 2(1.004881 + 1.009545) + 1.014018] = 0.321486.$$

چون  $f^{(4)}(x) = -15/16x^{-5}$  از آن تقریبی خطای برشی به ازای  $h = 0.05$  عبارت است از  $h^4 = 0.00015625$  و در نتیجه  $0.00015625 \times 0.321486 = 0.00005025$  در حالی که به ازای  $h = 0.025$  برابر است با  $0.00000625$ . توجه کنید که خطای برشی قابل اغماض است؛ و بر آورد انتگرال، در محدوده خطای گرد شده، برابر است با  $0.32148(6)$ .

### خود را بیازمایید

- ۱- درجه چند جمله‌ای تقریبی متناظر با قاعده سیمپسون چیست؟
- ۲- کران خطای مربوط به قاعده سیمپسون چیست؟
- ۳- چرا قاعده سیمپسون برای محاسبه کامپیوتری کاملاً مناسب است؟

### تمرین

با استفاده از انتگرال گیری عددی،

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

را تا  $D4$  بر آورد کنید.

# گام بیست و نه

## انتگرال گیری عددی - ۳

### کوادراتور از يك جدول مقادير

به طور کلی، دستورهای مربوط به کوادراتور از يك جدول تفاضلات متناهی را می توان با انتگرال گیری از فرمولهای درونیایی به دست آورد. قاعده ذوزنقه ای متناظر است با برش خطی و سپس انتگرال گیری روی  $x_j \leq x \leq x_{j+1} + h$ ، در حالی که قاعده سیمپسون متناظر است با برش درجه دوم و بعداً انتگرال گیری روی  $x_j \leq x \leq x_{j+2} + 2h$ . گرچه قاعده ذوزنقه ای یا قاعده سیمپسون معمولاً برای کوادراتور، به ویژه در محاسبات کامپیوتری، مناسب است، با این حال انتگرال گیری از يك تابع جدولی ممکن است نیاز به يك برش از مرتبه بالاتر (متناظر با يك چند جمله ای هم محل از درجه بیشتر از ۲) داشته باشد.

### ۱- کوادراتور بین نقاط جدولی مجاور

برای انتگرال گیری بريك بازه وسیع، فرمولهای مربوط به ذوزنقه ها را مانند قبل با هم جمع می کنیم. اما، برای انتگرال گیری بین نقاط جدولی مجاور باید يك بازه تنها را اختیار کرد و برای حصول دقت مورد نظر تعدادی کافی جمله نگه داشت. در این روند مستقیم است که مقادير جدولی خارج بازه انتگرال گیری با چند جمله ایهای درجه بالاتر متناظر مطابقت داده می شوند؛ چنین روندهایی را دستورهای انتگرال گیری حوزه جزئی می نامند. در عمل، نقطه برش (درجه چند جمله ای) از اندازه جملات تفاضلی مراتب بالا نتیجه می شود.

(i) انتگرال گیری از دستور تفاضل پیشرو نیوتن

کافی است بازه ای به عرض  $h$  در نظر گرفته شود :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx &= h \int_0^1 \left[ 1 + \theta \Delta + \frac{1}{2!} \theta(\theta-1) \Delta^2 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 + \dots \right] f_0 d\theta \\ &= h \left[ \left( \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \Delta + \frac{\frac{1}{3} \theta^3 - \frac{1}{2} \theta^2}{2!} \Delta^2 + \frac{\frac{1}{4} \theta^4 - \theta^3 + \theta^2}{3!} \Delta^3 + \dots \right) f_0 \right]_0^1 \\ &= h \left( f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 + \dots \right). \end{aligned}$$

(ii) انتگرال گیری از دستود تفاضل پسرد نیوتن

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_j+h} f(x) dx &= h \int_0^1 \left[ 1 + \theta \nabla + \frac{1}{2} \theta(\theta+1) \nabla^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 + \dots \right] f_j d\theta \\ &= h \left( f_j + \frac{1}{2} \nabla f_j + \frac{5}{12} \nabla^2 f_j + \frac{3}{8} \nabla^3 f_j + \frac{251}{720} \nabla^4 f_j + \dots \right). \end{aligned}$$

۲- مثال

با استفاده از داده‌های  $x = ۱۰۰۰(۰۰۵)۱۰۳۰$  در گام ۲۶، انتگرال‌های

$$(i) \int_{۱۰۰۰}^{۱۰۰۵} \sqrt{x} dx \quad , \quad (ii) \int_{۱۰۲۵}^{۱۰۳۰} \sqrt{x} dx$$

را محاسبه کنید.

(i)  $x_0 + h = ۱۰۰۵$ ،  $x_0 = ۱۰۰۰$  (تفاضلات پیشرو)

$$\begin{aligned} \int_{۱۰۰۰}^{۱۰۰۵} \sqrt{x} dx &\approx ۰.۰۰۵(1 + ۰.۰۰۱۲۳۳۵ + ۰.۰۰۰۰۰۰۴(۹) + ۰.۰۰۰۰۰۰۰(۲)) \\ &= ۰.۰۰۵(۱.۰۰۱۲۳۳۵) \\ &= ۰.۰۰۵۰۶۱۶۷۵ \end{aligned}$$



(ii)  $x_0 + h = ۱۲۳۰, x_0 = ۱۲۲۵$  (تفاضلات پسرو)

$$\int_{1225}^{1230} \sqrt{x} dx \approx 0.05(1.11803 + 0.01129 - 0.00020)(4) + 0.000000(4))$$

$$= 0.05(1.12912)$$

$$= 0.05646.$$

### خود را بیازمایید

- ۱- قاعدهٔ سیمپسون چند موقع ممکن است برای کوادراتور نامناسب باشد؟
- ۲- چگونه می‌توان انتگرال یک تابع را بین نقاط جدولی مجاور محاسبه کرد؟
- ۳- برای چند جمله‌ای هم محل درجهٔ سوم، در کوادراتور بین دو نقطهٔ جدولی مجاور، از کدام نقاط جدولی استفاده می‌شود؟

### تمرین

تابعی به صورت زیر جدول بندی شده است:

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
۰.۶۸	۰.۸۰۸۷	۰.۸۰	۱.۰۲۹۶	۰.۹۲	۱.۳۱۳۳	۱.۰۴	۱.۷۰۳۶
۰.۷۲	۰.۸۷۷۱	۰.۸۴	۱.۱۱۵۶	۰.۹۶	۱.۴۲۸۴	۱.۰۸	۱.۸۷۱۲
۰.۷۶	۰.۹۵۰۵	۰.۸۸	۱.۲۰۹۷	۱.۰۰	۱.۵۵۷۴	۱.۱۲	۲.۰۶۶۰

(i) برای محاسبهٔ

$$\int_{0.88}^{0.92} f(x) dx$$

از تفاضلات پیشرو استفاده کنید.

(ii) برای محاسبهٔ

$$\int_{0.88}^{0.92} f(x) dx$$

از تفاضلات پسرو استفاده کنید.

# گام سی

## انتگرال گیری عددی - ۴

### دستورهای انتگرال گیری گاوس

روندهای انتگرال گیری عددی که قبلاً مورد بحث قرار گرفتند (یعنی، قاعده ذوزنقه‌ای، قاعده سیمپسون یا قواعد از درجات بالاتر ناشی از دستورهای درونیایی) شامل مقادیر مساوی الفاصله شناسه هستند. اما، اگر اصراری بر مساوی الفاصله بودن نقاط نداشته باشیم، دقت را می‌توان برای تعداد ثابتی از نقاط افزایش داد. این مطلب زیربنای یک فرایند دیگر از انتگرال گیری منتسب به گاوس است که اکنون آن را بررسی می‌کنیم. به‌طور خلاصه، با فرض تعداد معینی از مقادیر انتگرال (با محل تعیین نشده)، با تعیین محل‌های جدولی در محدوده انتگرال گیری، فرمولی را به‌دست خواهیم داد که دقیقترین فرمول انتگرال گیری است.

#### ۱- دستور انتگرال گیری دو نقطه‌ای گاوس\*

دستور دو نقطه‌ای دلخواهی به شکل

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af(\alpha) + bf(\beta)$$

را در نظر بگیرید که در آن وزنهای  $a$  و  $b$  و طولهای  $\alpha$  و  $\beta$  باید طوری تعیین شوند که این دستور از  $1$ ،  $x$ ،  $x^2$  و  $x^3$  (و در نتیجه از تمام توابع درجه سوم) به‌طور دقیق

\* این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است جهت مطالعه و استفاده در برنامه‌نویسی در صفحه ۱۸۳ یک فلوجارت داده شده است.

انتگرال بگیرد. برای این چهار مجهول، چهار شرط به شرح زیر داریم:

(i) اگر  $a+b=2$  آنگاه از  $f(x)=1$  به دقت انتگرال گرفته می شود؛

(ii) اگر  $0=aa+bb$  آنگاه از  $f(x)=x$  به دقت انتگرال گرفته می شود؛

(iii) اگر  $2/3=aa^2+bb^2$  آنگاه از  $f(x)=x^2$  به دقت انتگرال گرفته می شود؛

(iv) اگر  $0=aa^3+bb^3$  آنگاه از  $f(x)=x^3$  به دقت انتگرال گرفته می شود.

به سادگی ثابت می شود که

$$a=b=1, \quad \alpha=-\beta, \quad \alpha^2=\frac{1}{3}$$

و دستور انتگرال گیری دو نقطه ای گاوس به صورت زیر به دست می آید:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\approx f(-0.57735027) + f(0.57735027).$$

با يك تغییر متغیر می توان این دستور را برای هر بازه دیگری هم به کار برد، اگر مثلاً

بخواهیم

$$\int_a^b \phi(u) du$$

را محاسبه کنیم، تغییر متغیر زیر را اختیار می کنیم:

$$u = \frac{1}{2}[(b-a)x + (b+a)].$$

اگر بنویسیم:

$$\phi(u) = \phi\left\{\frac{1}{2}[(b-a)x + (b+a)]\right\} \equiv f(x)$$

آنگاه

$$\int_a^b \phi(u) du = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

زیرا،  $du = (1/2)(b-a)dx$  و  $u=a$  وقتی که  $x=-1$ ، و  $u=b$  وقتی که  $x=1$ .

قابل توجه است که دستور دو نقطه ای گاوس برای چند جمله ایهای درجه سوم دقیق

است، و لذا می توان آن را از نظر دقت یا قاعده سیمپسون مقایسه کرد. (در واقع خطای

برشی برای دستور گاوس حدود  $2/3$  خطای برشی برای قاعده سیمپسون است.) چون

برای دستور گاوس از تعداد مقادیر مورد نیاز تابع یکی کم می شود، به شرط اینکه اصم بودن

طول نقاط (همچون در محاسبات کامپیوتری) بی اهمیت باشد، این دستور مرجح است.

## ۲- سایر دستوره‌های گاوس

دستور انتگرال گیری دو نقطه‌ای گاوس که مورد بحث قرار گرفت تنها يك دستور از دسته وسیع این قبیل دستورهاست. مثلاً، می توان دستور انتگرال گیری سه نقطه‌ای گاوس را هم به دست آورد.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} \left[ 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right],$$

که برای چند جمله‌ایهای درجه پنج دقیق است: در واقع خطا کمتر از

$$\frac{1}{15750} \text{Max} |f^{(6)}(x)|$$

است.

این دستور و دستور دو نقطه‌ای قبلی، در دسته دستوره‌های معروف به گاوس - لژاندر، به خاطر ارتباطشان با چند جمله‌ایهای لژاندر، دستورهایی از پایین ترین مرتبه هستند.

در ارتباط با دیگر چند جمله‌ایهای متعامد (لاگورا، هرmites، چیشف و غیره) دستوره‌های دیگری نیز وجود دارند؛ شکل کلی انتگرال گیری گاوس را می توان با دستور

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

نمایش داد، که در آن  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  مجموعه نقاط در حوزه انتگرال گیری  $a \leq x \leq b$  است،  $A_i$  ها ثابت هستند، و  $w(x)$  معروف به تابع وزن است.

## ۳- کاربرد کوادراتور گاوس

عموماً مجموعه‌های  $\{x_i\}$  و  $\{A_i\}$  آماده برای رجوع، جدول بندی می شوند و لذا کاربرد کوادراتور گاوس فوری است.

مثال

برای محاسبه

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt$$

دستور دو نقطه‌ای گاوس (گاوس - لزاندر) را بدکار ببرید. این انترگرال را با استفاده از دستور چهار نقطه‌ای گاوس هم حساب کنید.  
دستور دو نقطه‌ای ( $n=2$ ) عبارت است از:

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx f(-0.57735027) + f(0.57735027).$$

با تغییر متغیر

$$t = \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) = \pi(x+1)/4$$

نتیجه می‌شود

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi(x+1)}{4} \, dx,$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi(x+1)}{4} \Rightarrow f(-0.57735027) = 0.32589$$

$$f(0.57735027) = 0.94541,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{4} (0.32589 + 0.94541)$$

$$= 0.99848.$$

از دستور چهار نقطه‌ای ( $n=4$ ):

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx 0.34788485 [f(-0.86113631) + f(0.86113631)]$$

$$+ 0.65214515 [f(-0.33998104) + f(0.33998104)]$$

که منجر می‌شود به:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt = 1.0000000$$

و این تا شش رقم اعشار درست است. این دقت به قدر کافی قانع کننده است، از قاعدهٔ سیمپسون با ۶۵ نقطه مقدار ۰.۹۹۹۹۹۹۸۳ به دست می‌آید!

## خود را بیازمایید

- ۱- عیب دستورهای انتگرال گیری که از بسازه شناسه‌ای ثابت استفاده می‌کنند چیست؟
- ۲- شکل کلی دستور انتگرال گیری گاوس چیست؟
- ۳- دستورهای دو و سه نقطه‌ای گاوس - لژاندر چقدر دقیق هستند؟

## تمرین

دستورهای دو و چهار نقطه‌ای گاوس را جهت محاسبه انتگرال زیر به کار ببرید:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u} du.$$

# گام سی و یک

## انتگرال گیری عددی - ۵\*

### معادلات دیفرانسیل

در درس ریاضیات محض دقت زیادی صرف خواص معادلات دیفرانسیل و فنون «تحلیلی» برای حل آنها می‌شود. متأسفانه بسیاری از معادلات دیفرانسیل (از جمله، تقریباً تمام معادلات دیفرانسیل غیرخطی) که در «جهان واقعی» با آن روبه‌رو می‌شویم جواب تحلیلی ندارند. حتی مسئله ظاهرأ ساده حل

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \text{ با } y=0 \text{ اگر } x=1$$

قبل از اینکه جواب بدقواره

$$\log_e(x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

به دست آید محاسبات زیادی را ایجاد می‌کند. تازه به دست آوردن مقدار  $y$  نظیر فقط یک مقدار  $x$ ، کار بسیار بیشتری می‌برد. در چنین حالتی مرجح است که از آغاز یک شیوه عددی به کار برده شود.

معادلات دیفرانسیل جزئی خارج از حد این کتاب درسی است، ولی می‌توان به اختصار بعضی از روشهای حل تنها یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$y' = f(x, y)$$

با مقدار اولیه مفروض  $y(x_0) = y_0$  را بررسی کرد. حل عددی مشتمل است بر برآورد مقادیر  $y(x)$  در نقاط (معمولاً متساوی الفاصله)  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

## ۱- سری تیلر

قبلاً، يك فن برای حل این مسئله به دست آوردیم و آن بر آورد مقدار  $y(x_1)$  به وسیله يك سری تیلر از مرتبه  $p$  بود (این مقدار خاص  $p$  به اندازه  $(x_1 - x_0)$  و دقت مورد نیاز بستگی دارد):

$$y(x_1) \approx y_1 = y(x_0) + (x_1 - x_0)y'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2}y''(x_0) + \dots + \frac{(x_1 - x_0)^p}{p!}y^{(p)}(x_0).$$

در اینجا  $y(x_0)$  معلوم است، و  $y'(x_0)$  را می توان با جایگذاری  $x = x_0$  و  $y = y_0$  در معادله دیفرانسیل به دست آورد؛ اما مقادیر  $y''(x_0)$ ،  $y^{(3)}(x_0)$ ، ...،  $y^{(p)}(x_0)$  نیاز به مشتق گیری از  $f(x, y)$  دارند که می توانند پیچیده باشند. توجه کنید که  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$ ، ...،  $y_N$  جهت نشان دادن برآوردهای  $y(x_1)$ ،  $y(x_2)$ ،  $y(x_3)$ ، ...،  $y(x_N)$  به کار خواهند رفت.

وقتی که  $y(x_1)$  حساب شده باشد می توان  $y(x_2)$  را به وسیله يك سری تیلر یا متکی بر  $x_1$  (که در این حالت خطای موجود در  $y_1$  انتشار می یابد) یا متکی بر  $x_0$  (که در این حالت ممکن است مجبور به افزایش  $p$  باشیم) بر آورد کرد. در شیوه موضعی،  $y_{n+1}$  از يك سری تیلر متکی بر  $x_n$  محاسبه می شود، در صورتی که در شیوه جامع  $y_1$ ،  $y_2$ ،  $y_3$ ، ...،  $y_N$ ، جملگی از سری تیلر متکی بر  $x_0$  محاسبه می شوند.

يك راه اجتناب از مشتق گیری از  $f(x, y)$  این است که  $p = 1$  را ثابت نگه داریم و

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

را محاسبه کنیم این طریقه به نام روش اویلر معروف است. اما خطای برشی بزرگ و نتایج، نادقیق خواهند بود، مگر آنکه فاصله بین  $x_i$ ها بسیار کوچک باشند.

## ۲- روشهای ۱ رانگ-۲ کوتا ۳

يك راه معمولی اجتناب از مشتق گیری از  $f(x, y)$ ، بدون از دست دادن دقت، مشتمل است بر بر آورد  $y(x_{n+1})$  از  $y_n$  و از يك میانگین وزن دار از مقادیر  $f(x, y)$ ، به شرطی که این وزنها چنان انتخاب شوند که خطای برشی حاصل با خطای برشی سری تیلر از مرتبه  $p$  قابل مقایسه باشد. جزئیات به دست آوردن این طریقه خارج از حد این کتاب است

۱. این الگوریتم برای محاسبه کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه نویسی در صفحه ۱۸۴ يك فلوچارت داده شده است.



ولی دو روش ساده از روشهای دانگت-کوفا را می توانیم ذکر کنیم.

روش اول دارای دقتی هم مرتبه با دقت سری تیلر به ازای  $p=2$  است، و معمولاً به صورت سه مرحله ای زیر نوشته می شود:

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

روش دوم مرتبه چهارذیل است:

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{1}{3}h_n, y_n + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{2}{3}h_n, y_n + \frac{2}{3}k_2\right)$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

اگر نقاط متساوی الفاصله باشند، طول گام  $h_n (= x_{n+1} - x_n)$  ثابت خواهد بود. هیچ يك از این دو روش شامل محاسبه مشتقات  $f(x, y)$  نیست؛ در عوض خود  $f(x, y)$  چندین بار (دو بار در روش مرتبه دو، چهار بار در روش مرتبه چهار) محاسبه می شود.

### ۳- روشهای چندگامی

روشهای سری تیلر و رانگت - کوتا در رده روشهای تک گامی قرار می گیرند، زیرا تنها مقدار جواب تقریبی که در ساختن  $y_{n+1}$  به کار می رود  $y_n$ ، یعنی نتیجه گام قبلی، است. روشهای چندگامی، برای تقلیل تعداد دفعاتی که  $f(x, y)$  یا مشتقاتش باید محاسبه شوند، از مقادیر قبلی تر نظیر  $y_{n-1}$ ،  $y_{n-2}$ ، ... نیز استفاده می کنند.

از جمله روشهای چندگامی که می توان آنها را با انتگرال گیری از چند جمله ایهای درونیابی به دست آورد (با به کار بردن  $f_n$  برای نشان دادن  $f(x_n, y_n)$ ) عبارتند از:  
الف) روش نقطه میانی (مرتبه دو):

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n,$$

(ب) روش میلن<sup>۱</sup> (مرتبه چهار):

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}),$$

(پ) روش ادمز<sup>۲</sup>- بشفورث<sup>۳</sup> (مرتبه چهار):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

در اینجا نقاط مورد استفاده در هر یک از دستورهای، متساوی الفاصله و با طول گام  $h$  هستند. ما به بحث درباره طرق گوناگونی که در آنها روشهای چندگامی استفاده می‌شوند نمی‌پردازیم، اما مسلماً به بیش از یک «مقدار اولیه» احتیاج داریم که خود یک نقص است. از سوی دیگر، برای ساختن  $y_{n+1}$  تنها نیاز به محاسبه  $f(x, y)$  برای یکبار داریم، زیرا  $f_{n-1}, f_{n-2}, \dots$  قبلاً محاسبه شده‌اند. اینکه کدام یک از سه نوع روش (تیلر، رانگ-کوتا، چندگامی) بهترین روش است عمدتاً به پیچیدگی  $f(x, y)$  بستگی دارد. ملاحظات دیگر در کتابهای درسی پیشرفته‌تر بحث می‌شوند.

## ۴- مثال

مقایسه بعضی از روشهای فوق‌الذکر در مورد یک مسئله بسیار ساده آموزنده است: مطلوب است بر آورد  $y(0.5)$  مشروط به اینکه:

$$y' = x + y \quad \text{با} \quad y(0) = 1$$

یعنی،

$$y_0 = 1 \quad \text{و} \quad x_0 = 0$$

جواب دقیق عبارت است از:

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

بنابراین،

$$y(0.5) = 1.799744.$$

از یک طول گام ثابت  $h = 0.1$  استفاده می‌کنیم و محاسبه راتا  $5D$  انجام می‌دهیم.

(الف) روش اوایلر (مرتبه یک):

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n) = 0.1x_n + 1.1y_n$$

بنابراین،

$$y_1 = 0.01(0.00) + 1.01(1) = 1.01$$

$$y_2 = 0.01(0.01) + 1.01(1.01) = 1.022$$

$$y_3 = 0.01(0.02) + 1.01(1.022) = 1.0362$$

$$y_4 = 0.01(0.03) + 1.01(1.0362) = 1.05282$$

$$y_5 = 0.01(0.04) + 1.01(1.05282) = 1.072102$$

و که خطایی در حدود ۰.۰۰۸ دارد.

(ب) سری تیلر (مرتبه چهار):

چون

$$y' = x + y, y'' = 1 + y', y''' = y'' \text{ و } y^{(4)} = y'''$$

داریم:

$$y_{n+1} = y_n + 0.01(x_n + y_n) + \frac{(0.01)^2}{2}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0.01)^3}{6}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0.01)^4}{24}(1 + x_n + y_n)$$

$$\approx 0.000517 + 0.010517x_n + 1.010517y_n.$$

بنابراین،

$$y_1 = 0.000517 + 0.010517(0) + 1.010517(1) = 1.011034$$

$$y_2 = 0.000517 + 0.010517(0.01) + 1.010517(1.011034) = 1.024280$$

$$y_3 = 0.000517 + 0.010517(0.02) + 1.010517(1.024280) = 1.039971$$

$$y_4 = 0.000517 + 0.010517(0.03) + 1.010517(1.039971) = 1.058364$$

$$y_5 = 0.000517 + 0.010517(0.04) + 1.010517(1.058364) = 1.079943$$

که خطایی در حدود ۰.۰۰۰۰۱ دارد.

(ب) رانگ - کوتا (مرتبه دو):

$$k_1 = 0.01(x_n + y_n), k_2 = 0.01(x_n + 0.01 + y_n + k_1), y_{n+1}$$

$$= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

$$n=0: k_1 = 0.1(0+1) = 0.1, \quad k_2 = 0.1(0.1+1.1) = 0.12,$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{4}(0.1+0.12) = 1.11.$$

$$n=1: k_1 = 0.1(0.1+1.11), \quad k_2 = 0.1(0.2+1.11+0.121),$$

$$y_2 = 1.11 + \frac{1}{4}(0.121+0.1431) = 1.24205.$$

$$n=2: k_1 = 0.1(0.2+1.24205),$$

$$k_2 = 0.1(0.3+1.24205+0.14421)$$

$$y_3 = 1.24205 + \frac{1}{4}(0.14421+0.16863) = 1.39847.$$

$$n=3: k_1 = 0.1(0.3+1.39847),$$

$$k_2 = 0.1(0.4+1.39847+0.16985)$$

$$y_4 = 1.39847 + \frac{1}{4}(0.16985+0.19683) = 1.58181.$$

$$n=4: k_1 = 0.1(0.4+1.58181),$$

$$k_2 = 0.1(0.5+1.58181+0.19818)$$

$$y_5 = 1.58181 + \frac{1}{4}(0.19818+0.22800) = 1.79490.$$

$y_5$  دارای خطای تقریبی ۰.۰۰۳ است.

همچنان که ممکن است انتظار داشته باشیم، روش مرتبه چهار به وضوح برتر است، روش مرتبه یک به وضوح پست‌تر، و روش مرتبه دو بین آنها قرار دارد.

**خود را بیازمایید**

- ۱- عیب اصلی هر یک از سه نوع روش عرضه شده در این گام چیست؟
- ۲- چرا باید انتظار داشته باشیم که روش‌های از مراتب بالاتر دقیق‌تر باشند؟

**تمرین**

۱- با فرض اینکه  $y' = x + y$  و  $y(0) = 1$ ، از روش نقطه میانی با طول گام  $h = 0.1$  استفاده و  $y(0.5)$  را برآورد کنید.

به عنوان دومین مقدار آغازی (از (ب) فوق)  $y_1 = 1.11$  را اختیار کنید.

۲- در صورتی که  $y' = -xy^2$  و  $y(0) = 2$ ، از روش اویلر با طول گام  $h = 0.2$  استفاده و  $y(1)$  را برآورد کنید.

## ضمیمه

### فلوچارتها

در اینجا برای بعضی از الگوریتمهایی که در این کتاب معرفی شده اند فلوچارت‌های مبنا را ارائه می‌دهیم. اگر دانشجویان فلوچارت يك روش را همزمان باید آشنایی آن روش در گام مربوط مطالعه کنند بیشتر نتیجه می‌گیرند. اگر آنها با يك زبان برنامه‌نویسی هم آشنا باشند باید بگویند لاقلاً برخی از فلوچارتها را به برنامه‌های کامپیوتری برگردانند و آنها را برای تمرینهای مربوط به کار ببرند.

#### فهرست مطالب

##### معادلات غیرخطی

- (۱) روش تنصیف (گام ۷)
- (۲) روش نابجایی (گام ۸)
- (۳) روش تکراری نیوتن - رفسون (گام ۱۰)

##### دستگاه معادلات خطی

- (۴) روش تکراری گاوس - سایدل (گام ۱۳)

##### درونیاپی

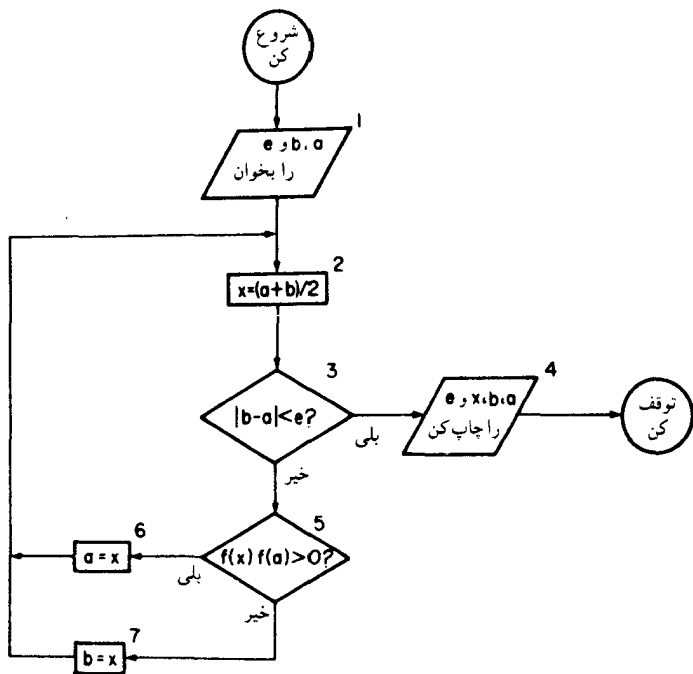
- (۵) دستور لاگرانژ (گام ۲۲)

##### انتگرال گیری عددی

- (۶) قاعده ذوزنقه‌ای (گام ۲۷)
- (۷) دستورهای انتگرال گیری گاوس (گام ۳۰)
- (۸) روش رانگک - کوتا (گام\*۳۱)

۱- روش تنصیف (گام ۷)

فرض کنید معادله مورد نظر به صورت  $f(x) = 0$  باشد.

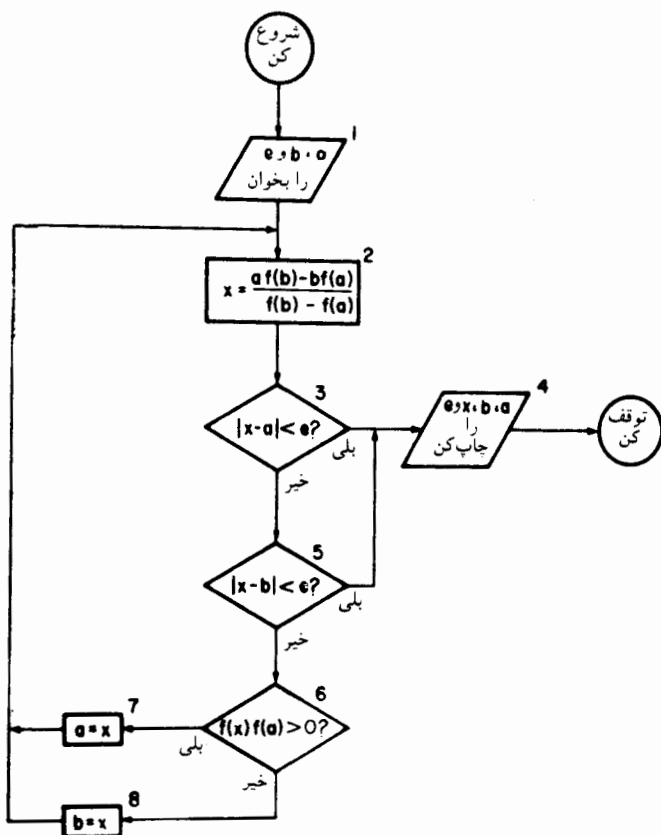


نکاتی برای مطالعه

- الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟
- ب) منظور بلوکهای ۵، ۶ و ۷ را توضیح دهید.
- پ) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که این فرایند همواره درست بهمداز  $M$  مرحله خاتمه پذیرد.
- ت) فلوچارت بالا را چنان تغییر دهید که این فرایند به مجردی که  $|f(x)| < e$  توقف کند.
- ث) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.
- ج) این برنامه کامپیوتری را برای حل معادله  $x + \cos x = 0$  به کار برید.

## ۲- روش نابجایی (گام ۸)

فرض کنید معادله مورد نظریه صورت  $f(x) = 0$  باشد.



## نکاتی برای مطالعه

الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟

ب) منظور بلوکهای ۳ و ۵ را شرح دهید.

پ) تحت چه شرایطی فرایند بالا ممکن است با خطای بزرگی برای  $x$  توقف کند؟

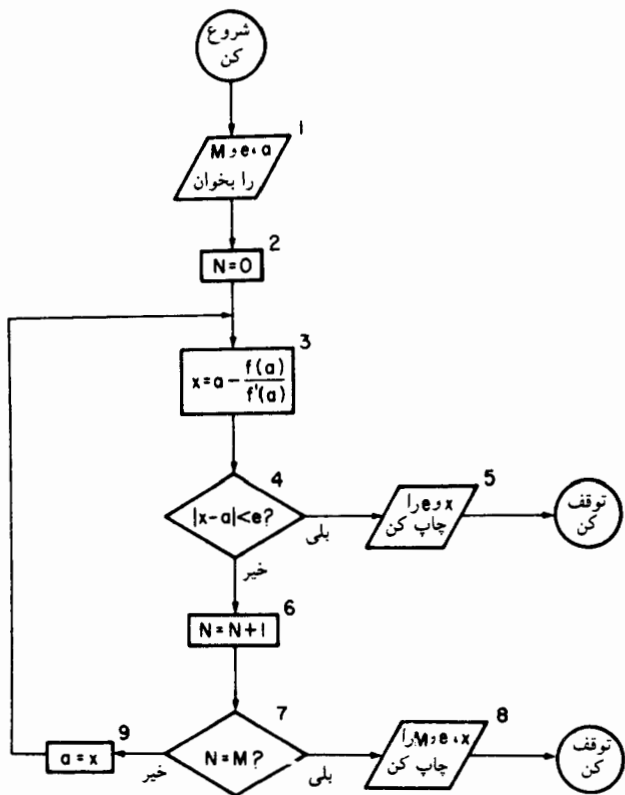
ت) فلوجارت بالا را چنان اصلاح کنید که این فرایند به محض اینکه  $|f(x)| < \epsilon$  توقف کند.

ث) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.

ج) این برنامه کامپیوتری را برای حل معادله  $x + \cos x = 0$  به کار ببرید.

۳- روش نیوتن - رفسون (گام ۱۰)

فرض کنید که معادله مورد نظر به صورت  $f(x) = 0$  باشد.



چند نکته برای مطالعه

- (الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟
- (ب) چرا  $M$  در بلوک خروجی ۸ منظور شده است؟
- (پ) اگر  $f'(a)$  خیلی کوچک باشد، چه اتفاقی می افتد؟
- (ت) فلوجارت بالا را چنان اصلاح کنید که وقتی  $f(a)$  خیلی کوچک باشد عمل مناسبی انجام پذیرد.
- (ث) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.
- (ج) این برنامه کامپیوتری را برای حل معادله  $x + \cos x = 0$  به کار ببرید.



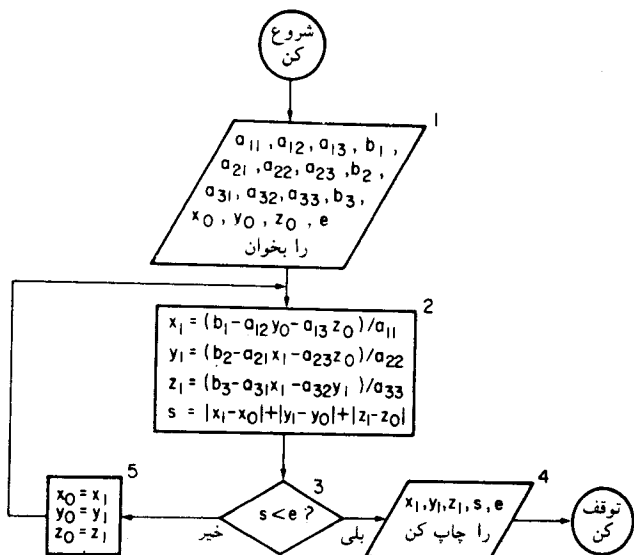
۴- روش تکراری گاوس - سایدل (گام ۱۳)

فرض کنید دستگاه عبارت باشد از:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$



چند نکته برای مطالعه

(الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟

(ب) منظور از عدد  $\epsilon$  چیست؟

(پ) فلوجارت بالا را چنان اصلاح کنید که حفاظی برای واگرایی یا همگرایی کند وجود داشته باشد (با فلوجارت ۳ مقایسه شود).

(ت) فلوجارت بالا را برای حل يك دستگاه کلی  $n \times n$  مانند  $Ax = b$  اصلاح کنید.

(ث) برای الگوریتم فوق يك برنامه کامپیوتری بنویسید.

(ج) این برنامه کامپیوتری را برای حل دستگاه ذیل به کار ببرید:

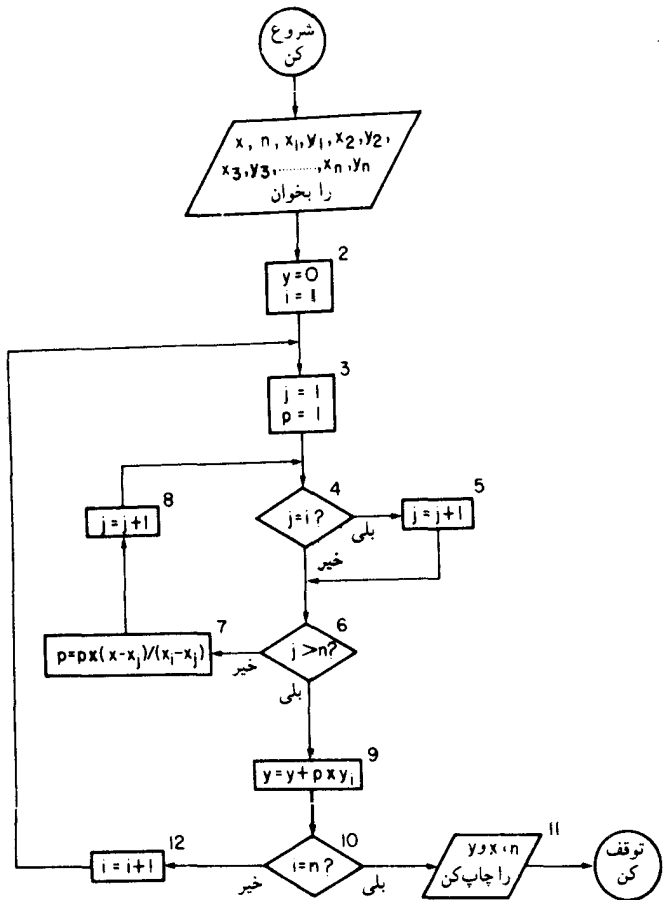
$$8x + y - 2z = 5$$

$$x - 7y + z = 9$$

$$2x + \quad \quad 9z = 11.$$

۵- درونیابی لاگرانژ (گام ۲۲)

با فرض اینکه  $y_1 = y(x_1)$ ،  $y_2 = y(x_2)$ ،  $\dots$ ،  $y_n = y(x_n)$ ، مطلوب است  $y(x)$ .

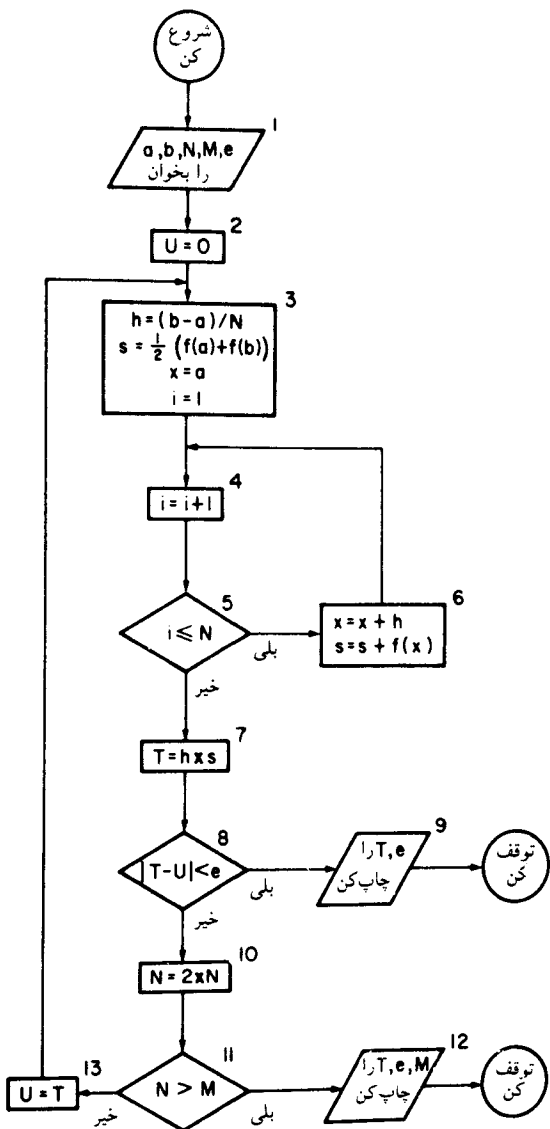


نکاتی برای مطالعه

- الف) منظور از بلوکهای ۴ و ۵ چیست؟  
 ب) در بلوک ۹، مقدار  $p$  (با جملات جبری) چیست؟  
 پ) در بلوک ۹، مقدار  $y$  (با جملات جبری) چیست؟  
 ت) از فلوجارت بالا با داده‌های  $x=۱۰۵$ ،  $x_1=۰$ ،  $x_2=۲۰۵$ ،  $y_1=۱$ ،  $y_2=۴۰۷$ ،  $x_3=۳$ ،  $y_3=۳۰۱$ ، استفاده کنید.  
 ث) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.  
 ج) این برنامه کامپیوتری را در مورد داده‌های (ت) بالا به کار ببرید.

۶- قاعدة ذوزنقه‌ای (گام ۲۷)

فرض کنید انتگرال مورد نظر به صورت  $\int_a^b f(x) dx$  باشد.



چند نکته برای مطالعه

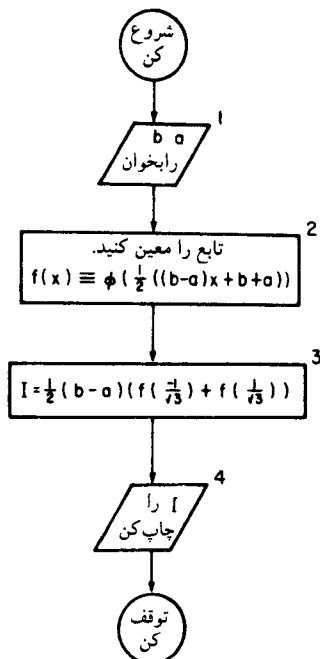
الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟

- (ب) مقدار  $T$  بعد از بلوک ۷ (با جملات جبری) چیست؟  
 (پ) منظور از بلوکهای ۸، ۱۰ و ۱۱ چیست؟  
 (ت) چرا  $M$  در بلوک خروجی ۱۲ منظور شده است؟  
 (ث) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.  
 (ج) این برنامه کامپیوتری را جهت محاسبه انتگرالهای زیر به کار ببرید:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{و} \quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x^3}.$$

## ۷- فرمولهای انتگرال گیری گاوس (کام ۳۰)

فرض کنید انتگرال مورد نظر به صورت  $\int_a^b \phi(u) du$  باشد. از دستور دو نقطه ای گاوس استفاده کنید.



چند نکته برای مطالعه

- الف) منظور از بلوک ۲ چیست؟  
 ب) برای به دست آوردن الگوریتمی مبتنی بر دستور سه نقطه ای گاوس، چه تغییراتی لازم است؟  
 پ) فلوجارت بالا را چنان اصلاح کنید که، جهت محاسبه انتگرال فوق درحد خطای قابل اغماض  $e$ ، از تقسیمات جزء متوالی بازه  $(a$  و  $b)$  استفاده کند (با فلوجارت  $e$  مقایسه شود).  
 ت) برای الگوریتم بالا (به طریقی که در قسمت پ) اصلاح گردید) يك برنامه کامپیوتری بنویسید.  
 ث) این برنامه کامپیوتری را جهت محاسبه انتگرالهای زیر به کار ببرید:

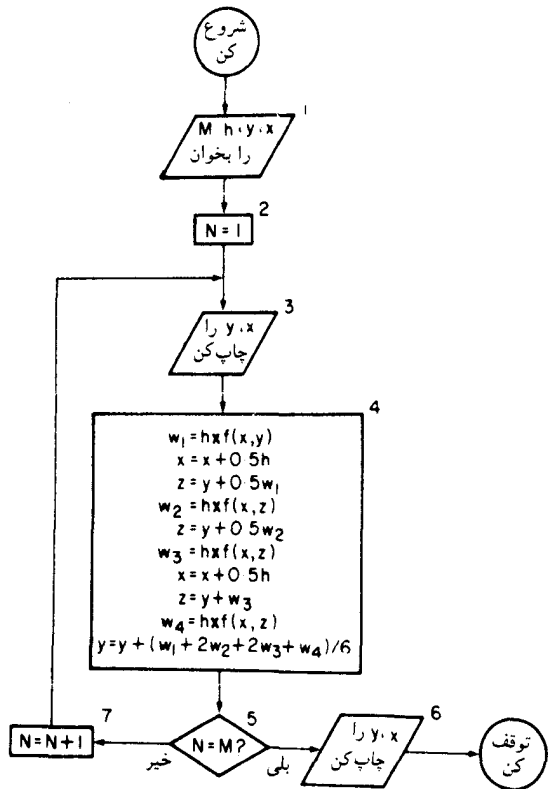
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad \text{و} \quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x^3}$$

## ۸- روش رانگ-کوتا (گام ۳۱)\*

فرض کنید معادله مورد نظر به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ باشد.}$$

از روش مرتبه چهار معمولی استفاده کنید.



چند نکته برای مطالعه

- (الف) موارد استفاده مقادیر ورودی چه هستند؟
- (ب) بین بلوک ۲ و بلوک ۶ تابع  $f$  چند بار محاسبه می شود؟
- (پ) جهت استفاده از روش مرتبه دو رانگ-کوتا فلوجارت بالا را اصلاح کنید.
- (ت) برای الگوریتم فوق یک برنامه کامپیوتری بنویسید.
- (ث) این برنامه کامپیوتری را جهت حل معادله  $y' = x - y$ ، با شروع از  $x = 0$ ،  $y = 1$  و گرفتن ۱۰ گام به طول ۱۰ به کار ببرید.

## فهرست منابع

آنچه ذیلاً آمده است لیست کوتاهی است از کتابهایی که ممکن است جهت مطالعات تکمیلی، برهانهای حذف شده در این کتاب درسی، یا مطالعه بیشتر در زمینه آنالیز عددی، به کار گرفته شود.

### Calculus

Thomas, *Calculus and Analytic Geometry*<sup>1</sup> (Addison - Wesley, 1967).

### Computer Science

Davis, *Introduction to Electronic Computers* (McGraw-Hill, 1971).

Forsythe, Keenan, Organick and Stenberg, *Computer Science* (Wiley, 1969).

### Linear Algebra

Murdoch. *Linear Algebra for Undergraduates* (Wiley, 1962).

### Numerical Analysis

Acton, *Numerical Methods that work* (Harper and Row, 1970).

Conte and de Boor, *Elementary Numerical Analysis* (Mc Graw - Hill, 1972).

Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra* (Dover, 1959).

Fox and Mayers, *Computing Methods for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, 1968).

### Tables

Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).

---

۱. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، چاپ دوم. ترجمه علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۶۲.

## جواب تمرینها

کام ۱

محل خطا با ستاره مشخص شده است. توجه داشته باشید که استفاده از هر دو دستور، خطاهای از نوع (الف) و (ب) را در برمی گیرد.

$$T \approx 2 \times 3.14 \times \sqrt{751981} \approx 6228 \times \sqrt{0.0765} \quad -1$$

$$\approx 6228 \times 0.277$$

$$\approx 1724 \quad \text{ثانیه}$$

$$R \approx 0.028 \times 3.14 \times 56225 \times \sqrt{2 \times 981 \times 650} \quad -2$$

$$\approx 4946 \times 1129$$

$$\approx 5.58 \times 10^3 \quad \text{. ثانیه / سانتیمتر مکعب}$$

کام ۲

$$5.19 \times 10^{-3}, 2.96844 \times 10^2, 8.0059 \times 10^{-1}, 1.2345 \times 10^1 \quad -1$$

$$.00247 \quad 0.347 \quad 3.47 \quad (الف) \quad -2$$



(ب)  $۳۴۷۷۸۲$  ،  $۳۴۷۷۸$  ،  $۰۳۴۷$  و  $۰۰۳۴۴$

(پ)  $۳۴۸$  ،  $۳۴۸$  ،  $۰۳۴۸$  و  $۰۰۳۴۸$

(ت)  $۳۴۷۷۸۲$  ،  $۳۴۷۷۸$  ،  $۰۳۴۸$  و  $۰۰۳۵$

کام ۳

(الف) نتیجه مورد نظر  $۱۳۵۷$  است،  $۰۰۱ = ۰۰۵ + ۰۰۵ = \text{Max}|e_{abs}|$

بنابراین جواب  $۰۰۱ \pm ۱۳۵۷$ ، یا درست تا  $۳S$ ،  $۱۳۶$  است.

(ب) نتیجه مورد نظر  $۰۰۱$  است،  $\text{Max}|e_{abs}| = ۰۰۱$ ، و لذا، با وجودی

که مؤلفه ها تا  $۵S$  درست هستند ولی، جواب ممکن است حتی تا  $۱S$  هم درست نباشد! این پدیده به اذ دست دادن رقم با معنی یا به حذف معروف است.

(پ) نتیجه  $۱۳۳۶۵۱$  است،

$$\text{Max}|e_{abs}| = (۴۲۷ + ۳۱۳) \times ۰۰۵ = ۰۰۳۷$$

و لذا جواب عبارت است از  $۰۰۳۷ \pm ۱۳۳۶۵۱$  یا، درست تا  $۲S$ ، عبارت است از  $۱۳$ .

(ت) جواب مورد نظر  $۱۸۵۶۷۶ -$  است و

$$\text{Max}|e_{abs}| \approx ۰۵۱۳ \times ۰۰۵ + ۹۴۸ \times ۰۰۰۵ + ۰۰۵$$

$$\approx ۰۰۱۲،$$

لذا جواب عبارت است از  $۰۰۱۲ \pm ۱۸۵۶۷۶ -$  یا، درست تا  $۱S$ ، عبارت است از  $۲ -$ .

(ث) نتیجه  $\dots ۱۱۰۹$  است و

$$\text{Max}|e_{rel}| \approx \frac{\text{Max}|e_{abs}|}{۱۱۰۹} \approx \frac{۰۰۵}{۰۲۵} \approx \frac{۰۰۵}{۲۸۴} + \frac{۰۰۵}{۰۶۴} \approx ۰۰۳۰،$$

لذا جواب  $۰۰۳۳ \pm ۱۱۰۹$  است یا، درست تا  $۲S$ ،  $۱۱$  است.

(ج) جواب مورد نظر  $۰۴۷$  است،  $\text{Max}|e_{abs}| = ۷ \times ۰۰۵ = ۰۰۳۵$ ،

و لذا جواب عبارت است از  $۰۰۳۵ \pm ۰۴۷$  که حتی نمی توانیم نتیجه را تا  $۱S$  هم تضمین کنیم.

کام ۴

۱- (الف)  $۱۲۰۱ \times ۱۰^۲ \rightarrow ۱۲۰ \times ۱۰^۳$

(ب)  $۶۱۹ \times ۱۰^۲ + ۰۳۶۱ \times ۱۰^۲ = ۶۵۵۱ \times ۱۰^۲ \rightarrow ۶۵۵ \times ۱۰^۳$

$$(ب) \quad 370 \times 10^1 \rightarrow 37 \times 10^2$$

$$(ت) \quad 583 \times 10^2 \rightarrow 5829 \times 10^2 = 5861 \times 10^2 - 32 \times 10^2$$

$$(ث) \quad 364 \times 10^2 \rightarrow 36600 \times 10^2$$

$$(ج) \quad 333 \times 10^1 \rightarrow 330000 \times 10^0$$

$$(ح) \quad 125 \times 10^3 \rightarrow 125000 \times 10^3$$

$$(خ) \quad -869 \times 10^{-6} \rightarrow \dots, \times 10^{-5} - 869300$$

۲- چون اندازه و علامت خطاهای اولیه معلوم نیستند، با در نظر گرفتن بدترین حالت برای خطاهای اولیه، از نتایج گام ۳ اندازه‌ما کزیمم خطای مجتمع  $E$  را برآورد می‌کنیم. جهت برآورد خطای منتشر شده برای اعمال جمع و تفریق، از  $\text{Max}|e_{abs}| = |e_1| + |e_2|$  و برای اعمال ضرب و تقسیم از

$$\text{Max}|e_{rel}| \approx \left| \frac{e_1}{x^*} \right| + \left| \frac{e_2}{y^*} \right|$$

استفاده می‌کنیم. اندازه خطای تولید شده با  $\varepsilon$  نشان داده می‌شود.

$$\varepsilon = 0.001 \times 10^3,$$

$$\text{Max}|e_{abs}| = 0.005 \times 10^2 + 0.005 \times 10^2 \quad (\text{الف})$$

$$= 0.01 \times 10^2, \quad E = 0.002 \times 10^3.$$

$$\varepsilon = 0.001 \times 10^2, \quad (\text{ب})$$

$$\text{Max}|e_{abs}| = 0.005 \times 10^2 + 0.005 \times 10^1 = 0.0055 \times 10^2,$$

$$E = 0.0065 \times 10^2.$$

$$\varepsilon = 0, \quad \text{Max}|e_{abs}| = 0.005 \times 10^2 + 0.005 \times 10^2 \quad (\text{ب})$$

$$= 0.01 \times 10^2,$$

$$E = 0.1 \times 10^1 \quad (\text{نسبتاً بزرگ}).$$

(ت) نظیر (ب) است.

$$\varepsilon = 0.004 \times 10^2, \quad \text{Max}|e_{rel}| \approx \frac{0.005}{360} + \frac{0.005}{101}, \quad (\text{ث})$$

$$\text{Max}|e_{abs}| \approx 0.005 \times (101 + 360) \times 10^2 \approx 0.023 \times 10^2,$$

$$E \approx 0.027 \times 10^2.$$

$$\varepsilon = 0, \text{Max}|e_{abs}| \approx 0.0005 \times (7750 + 4742) \times 10^0 \quad (\text{ج})$$

$$= 0.006 \times 10^0$$

$$E \approx 0.0006 \times 10^1.$$

$$\varepsilon = 0, \text{Max}|e_{rel}| \approx \frac{0.0005}{6745} + \frac{0.0005}{5716}, \quad (\text{ج})$$

$$\text{Max}|e_{abs}| \approx \frac{0.0005 \times 11761}{6745 \times 5716} \times 1725 \times 10^3 \approx 0.0002 \times 10^3,$$

$$E \approx 0.0002 \times 10^3.$$

$$\varepsilon \approx 0.0003 \times 10^{-6}, \text{Max}|e_{rel}| \approx \frac{0.0005}{2786} + \frac{0.0005}{3729}, \quad (\text{ج})$$

$$\text{Max}|e_{abs}| \approx \frac{0.0005 \times 6715}{2786 \times 3729} \times 8769 \times 10^{-6} \approx 0.0028 \times 10^{-6},$$

$$E \approx 0.0031 \times 10^{-6}.$$

$$b - c = 57685 \times 10^1 - 57641 \times 10^1 = 0.044 \times 10^1 \rightarrow \quad (\text{الف}) \quad 3$$

$$47400 \times 10^{-1}.$$

$$a(b - c) = 67842 \times 10^{-1} \times 47400 \times 10^{-1}$$

$$= 3071048 \times 10^{-2} \rightarrow 30710 \times 10^{-1}.$$

$$ab = 67842 \times 10^{-1} \times 57685 \times 10^1$$

$$= 387896770 \times 10^0 \rightarrow 37890 \times 10^1.$$

$$ac = 67842 \times 10^{-1} \times 57641 \times 10^1$$

$$= 387595722 \times 10^0 \rightarrow 37860 \times 10^1.$$

$$ab - ac =$$

$$37890 \times 10^1 - 37860 \times 10^1 = 0.030 \times 10^1 \rightarrow 30000 \times 10^{-1}.$$

جواب به دست آمده (با عملیات تا 6) عبارت است از  $3071048 \times 10^{-2}$ ، با حداکثر خطای منتشر شده  $0.0003 \times 10^{-6}$  (ولذا تنها می توان به اولین رقم اعتماد کرد!).

(ب)

$$a+b = 92812 \times 10^1 + 0004631 \times 10^1 = 9285831 \times 10^1 \\ \rightarrow 92858 \times 10^1.$$

$$(a+b)+c = 92858 \times 10^1 + 0008340 \times 10^1 \\ = 9294140 \times 10^1 \rightarrow 92941 \times 10^1.$$

$$b+c = 40631 \times 10^{-1} + 8340 \times 10^{-1} \\ = 120971 \times 10^{-1} \rightarrow 12097 \times 10^0.$$

$$a+(b+c) = 92812 \times 10^1 + 0012097 \times 10^1 \\ = 9293297 \times 10^1 \rightarrow 92932 \times 10^1.$$

جواب به دست آمده (با عملیات تا ۶) عبارت است از  $9293297 \times 10^1$ ، با حداکثر خطای منتشر شده  $0.000051 \times 10^1$ .

کام ۵

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, \dots -1$$

$$\cos x = \cos 0 - x \sin 0 - \frac{x^2}{2!} \cos 0 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

(i) -۲ خطی: چند جمله‌ای مطلوب بر حوزه  $0.1 < x < 0.1$  عبارت است از  $1+x$ .

(ii) درجه دوم: چند جمله‌ای مطلوب بر حوزه  $0.3 < x < 0.3$  عبارت است از  $1+x + (1/2)x^2$ .

(iii) درجه سوم: چند جمله‌ای مطلوب بر حوزه  $0.5 < x < 0.5$  عبارت است از

$$1+x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

۳- داریم:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

که در آن برای هر  $x$  بین ۰ و ۱ داریم:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} < \frac{1^{n+1} e^1}{(n+1)!}.$$

لذا  $R_n < 1/2 \times 10^{-5} \approx 543656$ ، مشروط بر اینکه  $(n+1)! \geq 2e \times 10^5$ ؛ یعنی باین شرط که داشته باشیم  $n=9$  (از این رو، ۱۰ جمله)، زیرا  $9! = 362880$ .

$$p_0 = 1 \qquad q_0 = 0 \qquad -4$$

$$p_1 = p_0(3r_1) + (-2) = 1r_1, \qquad q_1 = q_0(3r_1) + (1) = 1$$

$$p_2 = p_1(3r_1) + (2) = 5r_1^2, \qquad q_2 = q_1(3r_1) + (1r_1) = 4r_1$$

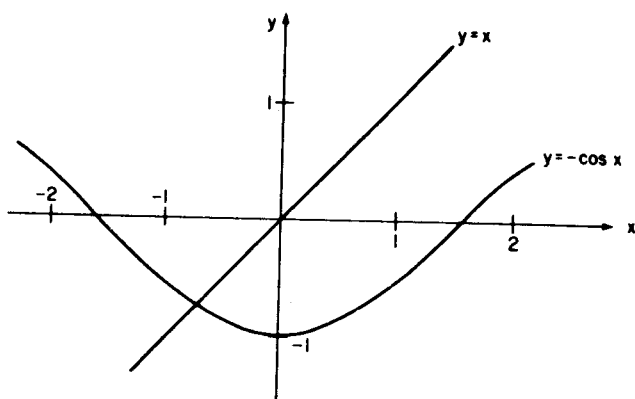
$$p_3 = p_2(3r_1) + (3) = 19r_1^3, \qquad q_3 = q_2(3r_1) + (5r_1) = 18r_1^2$$

برای محاسبه  $p(3r_1)$  تنها ۳ عمل ضرب و ۳ عمل جمع لازم است، حال آنکه  $3 + 2 \times 3r_1 + 2 \times 3r_1 \times 3r_1 - 2 \times 3r_1 \times 3r_1 + 3r_1 \times 3r_1 \times 3r_1$  به ۵ عمل ضرب و ۳ عمل جمع نیاز دارد.

### گام ۶

منحنیهای موردنظر، در شکل ۱۶ (صفحه ۱۹۲)، و به شیوه‌ای مشابه شیوه‌های بخش (آ) از گام ۶، رسم شده‌اند و ما را به این نتیجه می‌رسانند که یک ریشه حقیقی در نزدیکی  $x = -0.7$  موجود است. جدول بندی زیر این مطلب را تأیید می‌کند:

$x$	-۰.۷	-۰.۸	-۰.۷۵
$\cos x$	۰.۷۶۴۸	۰.۶۹۶۷	۰.۷۳۱۷
$x + \cos x$	۰.۰۶۴۸	-۰.۱۰۳۳	-۰.۰۱۸۳



شکل ۱۶. نمودارهای  $y=x$  و  $y=-\cos x$

### گام ۷

۱- در گام ۶ دیدیم که ریشه مورد نظر در بازه  $(-0.7, -0.75)$  قرار دارد. با تنصیفات پی در پی، دنباله ذیل متشکل از بازه‌های شامل ریشه به دست می‌آید:  $(-0.725, -0.75)$ ،  $(-0.7375, -0.75)$ ،  $(-0.75, -0.74375)$ ،  $(-0.74, -0.74)$ . بنابراین ریشه مورد نظر تا  $D2$  برابر است با  $-0.74$ .

۲- ریشه تا  $D3$  برابر است با  $-0.615$ .

### گام ۸

۱- تابع  $f(x)$  را جدول بندی کنید:

$x$	$f(x)$
۰	-۲
۰.۲	-۱.۴
۰.۶	-۰.۲۷
۰.۸	+۰.۲۳

ریشه‌ای در بازه  $0.6 < x < 0.8$  موجود است.

داریم:

$$x = \frac{1}{0.23 + 0.27} \left| \begin{array}{cc} 0.6 & -0.27 \\ 0.8 & 0.23 \end{array} \right|$$

$$= \frac{0.138 + 0.216}{0.50} = 0.708,$$

$$f(x) = f(0.708)$$

$$= 2 \sin(0.708) + 0.708 - 2$$

$$= 1.3006 + 0.708 - 2$$

$$= 0.0086.$$

چون  $f(0.6)$  و  $f(0.708)$  مختلف‌العلامه هستند، ریشه موردنظر در بازه  $0.78 < x < 0.6$  واقع است. با تکرار فرایند فوق داریم:

$$\bar{x} = \frac{1}{0.0086 + 0.27} \left| \begin{array}{cc} 0.6 & -0.27 \\ 0.708 & 0.0086 \end{array} \right|$$

$$= \frac{0.00516 + 0.19116}{0.2786} = 0.7047.$$

چون  $f(\bar{x}) = f(0.7047) = 0.0003$  معلوم می‌شود که ریشه بین  $0.6$  و  $0.7047$  قرار دارد. لذا:

$$\bar{x} = \frac{1}{0.0003 + 0.27} \left| \begin{array}{cc} 0.6 & -0.27 \\ 0.7047 & 0.0003 \end{array} \right| = 0.7046$$

محاسبه می‌شود.

با تکرار مجدد این فرایند بازهم (تا  $4D$ )  $0.7046$  به دست می‌آید. لذا  $0.705$  را می‌توان به طور یقین به عنوان جواب اختیار کرد. توجه کنید که برای تمام  $\bar{x}$ های محاسبه شده  $f(\bar{x})$  مثبت است.

۲- فرض کنید که  $f(x) = (3 \sin x - x) - 1/x$ . توجه می‌کنیم که  $f(0.7) = -0.1959$  و  $f(0.9) = 0.3389$ ؛ پس، ریشه موردنظر احاطه می‌شود. با کار کردن تا ۴ رقم اعشار نتایج ذیل به دست می‌آیند.

(الف) روش تنصیف، دنبالهٔ بازه‌های زیر را به دست می‌دهد:

$$(۰۷۷۵ و ۰۷۷۵)، (۰۷۷۵ و ۰۷۸)، (۰۷۷ و ۰۷۸)، (۰۷۷ و ۰۷۷)$$

$$(۰۷۶۵۷ و ۰۷۶۲۵)، (۰۷۶۲۵ و ۰۷۶۸۸)، (۰۷۶۲۵ و ۰۷۷۵)، (۰۷۶۲۵ و ۰۷۶۲۵)$$

$$(۰۷۶۳۳ و ۰۷۶۲۹)، (۰۷۶۳۳ و ۰۷۶۲۵)، (۰۷۶۴۱ و ۰۷۶۲۵)$$

چون  $f(۰۷۶۳۱) = ۰۰۰۰۰۰$ ، این فرایند خاتمه می‌یابد.

(ب) از روش نابجایی با  $a = ۰۷$  و  $b = ۰۰۹$  نتیجه می‌شود  $\bar{x} = ۰۷۷۳۳$ .

چون  $f(۰۷۷۳۳) = +۰۰۰۲۹۰$ ، این فرایند با  $a = ۰۷$  و  $b = ۰۷۷۳۳$  تکرار

می‌شود تا  $x = ۰۷۶۳۸$  به دست آید. با در نظر گرفتن  $a = ۰۷$  و  $b = ۰۷۶۳۸$

(چون  $f(۰۷۶۳۸) = +۰۰۰۰۲۰$ ) نتیجه می‌شود  $\bar{x} = ۰۷۶۳۲$  و  $f(\bar{x}) = ۰۰۰۰۰۲$ .

بالاخره به ازای  $a = ۰۷$  و  $b = ۰۷۶۳۲$  نتیجه می‌شود  $\bar{x} = ۰۷۶۳۱$ . توجه کنید که

تمام  $f(\bar{x})$ ها مثبت هستند.

(پ) از روش وتری با  $x_0 = ۰۷$ ،  $x_1 = ۰۰۹$  نتیجه می‌شود  $x_2 = ۰۷۷۳۳$ ،

$x_3 = ۰۷۶۱۴$  و  $x_4 = ۰۷۶۳۱$ . برای این مثال، روش وتری به وضوح کاراترین سه

روش است.

۳- فرض کنید  $f(x) = x + \cos x$ . در گام ۷ دریافتیم که ریشهٔ مورد نظر در بازهٔ

$(-۰۷۳۷۵ و -۰۷۴۳۷۵)$  قرار دارد. از روش نابجایی با  $a = -۰۷۵$ ،

و  $b = -۰۷۳$  (و با استفاده از  $f(a) = -۰۰۱۸۳۱$ ، و  $f(b) = ۰۰۱۵۱۷$ ).

نتیجه می‌شود که  $\bar{x} = -۰۷۳۹۰۶$  چون

$$f(-۰۷۳۹۰۶) = ۰۰۰۰۰۰۴،$$

این فرایند با  $a = -۰۷۵$  و  $b = -۰۷۳۹۰۶$  تکرار می‌شود تا  $\bar{x} = -۰۷۳۹۰۸$

به دست آید. از آنجا که  $f(-۰۷۳۹۰۸) = ۰۰۰۰۰۰۱$  می‌توان ریشه را (تا  $D4$ )

برابر با  $-۰۷۳۹۱$  گرفت.

## گام ۹

۱- با استفاده از فرمول تکرار

$$x_{n+1} = ۰۵ + \sin x_n$$

تنها شش تکرار ذیل لازم می‌شود:

$$x_1 = ۱۳۴۱۴۷$$

$$x_2 = ۱۴۷۳۸۲$$

$$x_3 = ۱۴۹۵۳۰$$



$$x_4 = 1.49715$$

$$x_5 = 1.49729$$

$$x_6 = 1.49730.$$

توجه کنید که در نزدیکی ریشه داریم:  $\phi'(x) = \cos x \approx 0.07$ ؛ بنابراین، همگرایی سریع (و «یکطرفه») است.

۲- در گام ۷ دیدیم که ریشه مورد نظر تا  $2D$  برابر است با  $0.74$  - با استفاده از فرمول تکرار

$$x_{n+1} = -\cos x_n$$

و با  $x_0 = -0.74$  داریم:

$$x_1 = -0.73847$$

$$x_2 = -0.73950$$

$$x_3 = -0.73881$$

$$x_4 = -0.73927$$

$$x_5 = -0.73896$$

$$x_6 = -0.73917$$

$$x_7 = -0.73903$$

$$x_8 = -0.73912$$

$$x_9 = -0.73906$$

$$x_{10} = -0.73910.$$

چون  $x_9$  و  $x_{10}$  تا  $4D$  مثل هم هستند، می توان ریشه را برابر با  $0.7391$  - گرفت. توجه کنید که در نزدیکی ریشه  $0.67$  -،  $\phi'(x) = \sin x \approx -0.67$ ، و لذا همگرایی کند (و «نوسانی») است.

کام ۱۰

۱- چون  $x > 0$ ، ریشه  $f(x) = \log_3 x + x = 0$  باید در بازه  $1/3 < x < 1$ ، که در آن  $\log_3 x < 0$ ، قرار گیرد. اگر  $x_0 = 0.25$  حدس اولیه باشد،

$$\begin{aligned} f(0.25) &= \log_e(0.75) + 0.25 \\ &= -0.2877 + 0.25 \\ &= -0.0377. \end{aligned}$$

چون

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1,$$

$$f'(0.25) = 5$$

و

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.25 + \frac{0.0377}{5} \\ &= 0.25 + 0.0075 \\ &= 0.2575. \end{aligned}$$

لذا:

$$\begin{aligned} f(0.2575) &= \log_e(0.7425) + 0.2575 \\ &= -0.2581 + 0.2575 \\ &= 0.0006 \text{ و} \end{aligned}$$

$$f'(0.2575) = 3.883 + 1 = 4.883$$

و

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.2575 + \frac{0.0006}{4.883} \\ &= 0.2575 + 0.0001 \\ &= 0.2576. \end{aligned}$$

چون  $f(0.2576) = -0.0001$  نتیجه می‌گیریم که ریشه مورد نظر تا  $4D$  برابر است با  $0.2576$ . توجه کنید که برای فرایند نیوتن - رفسون تنها ۲ یا ۳ گام لازم است، در صورتی که برای روش تکراری مبتنی بر

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} e^{-x_n}$$

۸ گام لازم بود.

$$x^k = a \quad -۲$$

$$f(x) = x^k - a = 0$$

$$f'(x) = kx^{k-1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}}$$

به ازای  $k = -1$ ، جهت محاسبه وارونها، بدون استفاده از عمل تقسیم، يك فرمول تکراری داریم:

$$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$$

$$a = 10, x_0 = 1 \quad -۳$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{10}{1} \right) = 5.5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( 5.5 + \frac{10}{5.5} \right) = 3.766$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( 3.766 + \frac{10}{3.766} \right) = 3.196$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( 3.196 + \frac{10}{3.196} \right) = 3.1625$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( 3.1625 + \frac{10}{3.1625} \right) = 3.1628$$

$$x_6 = \frac{1}{2} \left( 3.1628 + \frac{10}{3.1628} \right) = 3.1628$$

بنابراین،  $\sqrt{10}$  تا  $4D$  برابر است با  $3.1628$ .

۴- در گام ۷ دیدیم که ریشه تا  $2D$  برابر با  $0.74 -$  است. با انتخاب  $x_0 = -0.74$  و  $f(x) = x + \cos x$  که در نتیجه  $f'(x) = 1 - \sin x$  داریم:

$$x_1 = -0.74 - \frac{(-0.000153)}{1.67429} = -0.73909$$

$$x_2 = -0.73909 - \frac{(-0.000001)}{1.67361} = -0.73908$$

چون  $x_1$  و  $x_2$  تا  $4D$  مثل هم هستند. می توان ریشه را برابر با  $0.7391 -$  اختیار کرد.

## گام ۱۱

تنها برای سؤالهای ۱ و ۲ جوابهای کامل را ارائه می کنیم.

$m$	ماتریس افزوده				مقابله
	۱	۱	-۱	۰	۱
	۲	-۱	۱	۶	۸
	۳	۲	-۴	-۴	-۳
	۱	۱	-۱	۰	۱
-۲		-۳	۳	۶	۶
-۳		-۱	-۱	-۴	-۶
	۱	۱	-۱	۰	۱
		-۳	۳	۶	۶
$-\frac{1}{3}$			-۲	-۶	-۸

ماندهها

حل به طریق جایگذاری از پایین

$$0 - (2 + 1 - 3) = 0$$

$$-2x_3 = -6 \rightarrow x_3 = 3$$

$$6 - (4 - 1 + 3) = 0$$

$$-3x_2 + 9 = 6 \rightarrow x_2 = 1$$

$$-4 - (6 + 2 - 12) = 0$$

$$x_1 + 1 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

با عملیات تا  $2D$  (گرد شده)

$m$	ماتریس افزوده				مقابله
	۵۶	۳۸	۱۲	۱۴	۱۲۰
	۳۱	۷۱	-۴۷	۵۱	۱۰۶
	۱۴	-۳۴	۸۳	۲۴	۸۷
	۵۶	۳۸	۱۲	۱۴	۱۲۰
-۰۵۵۴		۴۹۹	-۵۳۶	۴۳۲	۳۹۵
-۰۲۵۰		-۴۳۵	۸۰۰	۲۰۵	۵۷۰
	۵۶	۳۸	۱۲	۱۴	۱۲۰
		۴۹۹	-۵۳۶	۴۳۲	۳۹۵
+۰۸۷۲			۳۳۳	۵۸۲	۹۱۴(۹۱۵)

حل به طریق جایگذاری از پایین

$$۳۳۳z = ۵۸۳ \rightarrow z = ۱۷۵$$

$$۴۹۹y - ۵۳۶ \times ۱۷۵ = ۴۳۲ \rightarrow y = ۲۷۵$$

$$۵۶x + ۳۸ \times ۲۷۵ + ۱۲ \times ۱۷۵ = ۱۴ \rightarrow x = -۱۹۹$$

مانده‌ها

$$۱۴ - (-۱۱۱۴ + ۱۰۴۵ + ۲۱۰) = -۰۰۱$$

$$۵۱ - (-۶۱۷ + ۱۹۵۳ - ۸۲۳) = -۰۰۳$$

$$۲۴ - (-۲۷۹ - ۹۳۵ + ۱۴۵۳) = ۰۰۱$$

$$(i) -۳ \quad x = ۲۵۵, y = -۹, z = ۲; \text{ مانده‌ها } ۰, ۰, ۰$$

$$(ii) \quad x = -۴۳۰, y = -۲۴۲, z = ۵۰۷; \text{ مانده‌ها } ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰$$

و ۰۰۱ - (با عملیات تا  $2D$ )

## گام ۱۲

۱- اگر ثابتها دارای هیچ خطایی نبودند، جواب دقیق عبارت می‌بود از  $x = ۲۰۶$  و  $y = ۱۰۲$ . با در نظر گرفتن خطاها، حوزه جوابها عبارت است از  $۲۰۵۷ \leq x \leq ۲۰۶۳$  و  $۱۰۱۷ \leq y \leq ۱۰۲۳$ .

$$(i-۲) \quad x = ۱۰۲, \quad y = ۲۰۳$$

$$(ii) \quad x = ۱, \quad y = ۱, \quad z = ۲$$

$$(iii) \quad x_1 = ۱۰۲, \quad x_2 = ۳۰۵, \quad x_3 = ۶۰۴$$

۳- بدون انقباض محوری،  $x = ۱۰۰۰۴$  و  $y = ۰۰۴۹۹۸$ . با انقباض محوری،

$$x = ۱۰۰۰۰, \quad y = ۰۰۵۰۰۰$$

## گام ۱۳

$$S_3 = |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| + |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| + |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| \quad -۱$$

با ادامه جدول بخش ۳ برای يك سطر اضافی، مقادیر تکرار چهارم یعنی  $x^{(4)}$  به دست می‌آیند، بدین ترتیب:

۴	۰۰۹۹۹۹۱۷	۰۰۹۹۹۹۹۳	۱۰۰۰۰۰۱۷
---	----------	----------	----------

سپس  $S_3$  چنین به دست می‌آید:

$$S_3 = ۰۰۰۰۱۲۲۶ + ۰۰۰۰۰۳۰۴ + ۰۰۰۰۰۲۱۵ = ۰۰۰۰۱۷۴۵.$$

$$(i-۲) \quad \text{معادلات مرتب شده:} \quad ۲۰x + ۳y - ۲z = ۵۱$$

$$(جهت قرار گرفتن بزرگترین ضرایب) \quad ۲x + ۸y + ۴z = ۲۵$$

$$\text{روی قطر اصلی)} \quad x - y + ۱۰z = -۷$$

دوابط تراجعی:

$$x^{(k+1)} = ۲۰۵۵ - ۰۰۱۵y^{(k)} + ۰۰۱z^{(k)}$$

$$y^{(k+1)} = ۳۰۱۲۵ - ۰۰۲۵x^{(k+1)} - ۰۰۵z^{(k)}$$

$$z^{(k+1)} = -۰۰۷ - ۰۰۱x^{(k+1)} + ۰۰۱y^{(k+1)}.$$

با انتخاب  $S_k < 0.00005$  به عنوان معیار توقف، نتایج زیر را خواهیم داشت:

تکرار $k$	$x^k$	$y^k$	$z^k$	$S_k$ (تا $\Delta D$ )
۰	۰	۰	۰	۵۷۴۴۰۰
۱	۲۷۵۵۰	۲۷۴۸۸	-۰.۷۰۶	۰۹۹۹۰۰
۲	۲۷۱۰۶	۲۷۹۵۲	-۰.۶۱۵	۰۰۹۳۷۰
۳	۲۷۰۴۵۷	۲۷۹۲۱۱	-۰.۶۱۲۵	۰۰۰۸۰۹
۴	۲۷۰۵۰۵۹	۲۷۹۱۸۶۰	-۰.۶۱۳۲۰	۰۰۰۰۵۸
۵	۲۷۰۵۰۸۹۰	۲۷۹۱۸۸۷۸	-۰.۶۱۳۲۰۱	۰۰۰۰۰۶
۶	۲۷۰۵۰۸۴۸	۲۷۹۱۸۸۸۹	-۰.۶۱۳۱۹۶	۰۰۰۰۰۰
۷	۲۷۰۵۰۸۴۷	۲۷۹۱۸۸۸۶	-۰.۶۱۳۱۹۶	

توجه کنید که دقت عملیات به طور تصاعدی افزایش می یابد.

جواب تا  $4D$ :  $x = 270508$ ,  $y = 279189$ ,  $z = -0.6132$ .

(ii)  $x = 0.1124$ ,  $y = 0.1236$ ,  $z = 0.1236$ ,  $w = 0.1124$ .

کام ۱۴

خوب دقت کنید: هر چند جوابها در اینجا داده شده اند، ولی دانشجویان نباید قبل از انجام مقابله های پیشنهادی روی عملیات خود به آنها نگاه کنند. جوابها تا  $3D$  داده شده اند.

۱- (الف) (حل کامل)

$m$	A	I	مقابله	عمل سطری
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۱)
	۶ ۱۹ ۱۲	۰ ۱ ۰	۳۸	(۲)
	۲ ۸ ۱۴	۰ ۰ ۱	۲۵	(۳)
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۴) = (۱)
-۳	۰ ۱ ۰	-۳ ۱ ۰	-۱	(۵) = (۲) - ۳(۱)
-۱	۰ ۲ ۱۰	-۱ ۰ ۱	۱۲	(۶) = (۳) - ۱(۱)
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۷) = (۱)
	۰ ۱ ۰	-۳ ۱ ۰	-۱	(۸) = (۵)
-۲	۰ ۰ ۱۰	۵ -۲ ۱	۱۴	(۹) = (۶) - ۲(۵)
ماتریس معکوس		$\begin{matrix} ۸۷۵ & -۲۷۶ & -۰۷۲ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ ۰۷۵ & -۰۷۲ & ۰۷۱ \end{matrix}$		(امتحان کنید که $(AA^{-1} = I$

توجه: ستون اول  $A^{-1}$  عبارت است از  $\begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ ، که ازحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

به طریق جایگذاری از پایین به دست می آید. ستون دوم ازحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_5 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$



و ستون سوم از حل

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_8 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} 0.046 & -0.0605 & 1.031 \\ 0.248 & -0.0403 & 0.398 \\ -0.362 & +0.851 & -1.023 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 0.705 & 2.544 & -2.761 \\ -1.371 & 0.806 & 1.609 \\ 2.013 & -1.808 & -0.030 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$x = \begin{bmatrix} 252500 \\ -92000 \\ 22000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 22700 \\ -12000 \\ 02400 \end{bmatrix} \quad \text{۲- الف)}$$

$$x = \begin{bmatrix} -42349 \\ -22448 \\ 52133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 02426 \\ -02005 \\ -02172 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$x = \begin{bmatrix} 62648 \\ 02103 \\ -12761 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 22381 \\ 22937 \\ -22827 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$x$	$f(x) = x^3$	تفاضلات اول	دوم	سوم	چهارم
۱	۱	۷			
۲	۸		۱۲		
۳	۲۷	۱۹		۶	۰
۴	۶۴	۳۷		۶	۰
۵	۱۲۵	۶۱		۶	
۶	۲۱۶	۹۱			

$x$	$f(x) = e^x$	تفاضلات اول	دوم	سوم	چهارم
۰٫۱	۰٫۱۰۵۱۷۱	۵۶۶۶۳			
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳۴	۵۹۵۶۹	۲۹۰۶		
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰۳	۶۲۶۲۲	۳۰۵۳	۱۴۷	۱۲
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۲۵	۶۵۸۳۴	۳۲۱۲	۱۵۹	۴
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۵۹	۶۹۲۰۹	۳۳۷۵	۱۶۳	۱۰
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۶۸	۷۲۷۵۷	۳۵۴۸	۱۷۳	۹
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲۵	۷۶۴۸۷	۳۷۳۰	۱۸۲	۱۰
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱۲	۸۰۴۰۹	۳۹۲۲	۱۹۲	
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲۱				

فقط در تفاضلات مرتبه چهارم نشانه‌ای از يك «مزاحمت» دیده می‌شود.

کام ۱۶

$$. - 0.000002, 0.000018, 0.000320, 0.006263 \quad (i - 1)$$

$$. - 0.000002, 0.000016, 0.000354, 0.007275 \quad (ii)$$

$$. - 0.000002, 0.000338 \quad (iii)$$

$$. 0.000016 \text{ در هر حالت} \quad (iv)$$

$$. 0.000306 \text{ در هر حالت} \quad (v)$$

$$f(x) = x \text{ را در نظر بگیرید.} \quad (i - 2)$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta^2(\Delta f_j) \quad (ii)$$

$$= \Delta^2(f_{j+1} - f_j)$$

$$= \Delta(\Delta f_{j+1} - \Delta f_j)$$

$$= \Delta(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)$$

$$= f_{j+2} - 2f_{j+1} + 2f_{j+1} - f_j.$$

$$\nabla^2 f_j = \nabla^2(\nabla f_j) \quad (iii)$$

$$\nabla^2(f_j - f_{j-1})$$

$$= \nabla(\nabla f_j - \nabla f_{j-1})$$

$$= \nabla(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})$$

$$= f_j - 2f_{j-1} + 2f_{j-1} - f_{j-2}.$$

$$\delta^2 f_j = \delta^2(\delta f_j) \quad (iv)$$

$$= \delta^2(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}})$$

$$= \delta(\delta f_{j+\frac{1}{2}} - \delta f_{j-\frac{1}{2}})$$

$$= \delta(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})$$

$$= f_{j+\frac{2}{2}} - 2f_{j+\frac{1}{2}} + 2f_{j-\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{2}{2}}.$$

کام ۱۷  
(i-1)

$x$	$f(x) = x^4$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰	۰۰۰۰۰۰				
		۱			
۰٫۱	۰٫۰۰۰۰۱		۱۴		
		۱۵		۳۶	
۰٫۲	۰٫۰۰۰۱۶		۵۰		۲۴
		۶۵		۶۰	
۰٫۳	۰٫۰۰۰۸۱		۱۱۰		۲۴
		۱۷۵		۸۴	
۰٫۴	۰٫۰۰۲۵۶		۱۹۴		۲۴
		۳۶۹		۱۰۸	
۰٫۵	۰٫۰۰۶۲۵		۳۰۲		۲۴
		۶۷۱		۱۳۲	
۰٫۶	۰٫۱۲۹۶		۴۳۴		۲۴
		۱۱۰۵		۱۵۶	
۰٫۷	۰٫۲۴۰۱		۵۹۰		۲۴
		۱۶۹۵		۱۸۰	
۰٫۸	۰٫۴۰۹۶		۷۷۰		۲۴
		۲۴۶۵		۲۰۴	
۰٫۹	۰٫۶۵۶۱		۹۷۴		
		۳۴۳۹			
۱٫۰	۱٫۰۰۰۰۰				

$x$	$f(x) = x^4$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
۰	۰٫۰۰۰۰	۰			
۰٫۱	۰٫۰۰۰۰	۲			
۰٫۲	۰٫۰۰۰۲	۲	۲		
۰٫۳	۰٫۰۰۰۸	۶	۴	۶	
۰٫۴	۰٫۰۰۲۶	۱۸	۱۲	۸	-۱
۰٫۵	۰٫۰۰۶۳	۳۷	۱۹	۷	۴
۰٫۶	۰٫۰۱۳۰	۶۷	۳۰	۱۱	۲
۰٫۷	۰٫۰۲۴۰	۱۱۰	۴۳	۱۳	۴
۰٫۸	۰٫۰۴۱۰	۱۷۰	۶۰	۱۷	-۱
۰٫۹	۰٫۰۶۵۶	۲۴۶	۷۶	۱۶	۶
۱٫۰	۱٫۰۰۰۰	۳۴۴	۹۸	۲۲	

بدترین خطای گردشده عبارت است از ۰.۳۶.

-۲

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
۰	۳			
		-۱		
۱	۲		۶	
		۵		۶
۲	۷		۱۲	
		۱۷		۶
۳	۲۴		۱۸	
		۳۵		۶
۴	۵۹		۲۴	
		۵۹		
۵	۱۱۸			

داده‌ها به وسیله یک چند جمله‌ای درجه سوم برازش شده‌اند.

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
۲	۳۲۰۶۷۱	۳۳۴۱۷		
۳	۶۲۴۰۸۸	۳۴۱۶۹	۷۵۲	
۴	۹۲۸۲۵۷	۳۴۹۲۷	۷۵۸	۶
۵	۱۳۲۳۱۸۴	۳۵۶۹۱	۷۶۴	۶
۶	۱۶۲۸۸۷۵	۳۶۴۹۱	۸۰۰	۳۶
۷	۲۰۲۵۳۶۶	۳۷۲۰۷	۷۱۶	-۸۴
۸	۲۴۲۲۵۷۳	۳۸۰۱۹	۸۱۲	۹۶
۹	۲۸۲۰۵۹۲	۳۸۸۰۷	۷۸۸	-۲۴
۱۰	۳۱۲۹۳۹۹	۳۹۶۰۱	۷۹۴	۶
۱۱	۳۵۲۹۰۰۰	۴۰۴۰۱	۸۰۰	۶
۱۲	۳۹۲۹۴۰۱	۴۱۲۰۷	۸۰۶	۶
۱۳	۴۳۲۰۶۰۸			

چون این تابع يك تابع درجه سوم است انتظار داریم که  $\Delta^3$  ثابت باشد. از هر يك از  $6+36=6+36$ ،  $6-36=-30$ ،  $6+96=102$ ، و  $6-24=-18$  استفاده می کنیم تا نتیجه بگیریم که  $\varepsilon=30$  و از آنجا

$$f(7) = 2075366 - 0.00030 = 2075336$$

که مبین اشتباهی از نوع تکرار رقمها (ر. ک. گام ۲) است.

-۲

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
0	13246	785		
1	134031	776	-9	-27
2	134807	740	-36	81
3	135547	785	45	-80
4	136322	750	-35	26
5	137082	741	-9	22
6	137823	754	13	-62
7	138577	705	-49	62
8	139282	718	13	-20
9	200000	711	-7	-1
10	200711	703	-8	
11	201414			



اشتباهات، به وضوح در  $x=3$  و  $x=7$  هستند. با استفاده از روش مثال دوم بالا برآورد می کنیم که:

$$\varepsilon_2 \approx \frac{62+62}{6} \approx 21 \text{ و } \varepsilon_1 \approx \frac{-81-80}{6} \approx -27$$

تصحیحهای لازم عبارتند از:

$$f(3) = 175547 + 070027 = 175574 \text{ (گام ۲ ر.ك.)}$$

$$f(7) = 178577 - 070021 = 178556. \text{ و}$$

در مورد دومی  $f(7) = 178557$  بیشتر محتمل به نظر می رسد (تکرار ارقام).

بنابراین، تفاضلات مرتبه سوم تصحیح شده عبارت خواهند بود از ۰، ۰، ۱، -۱، ۲، -۲ و ۰، ۱ و -۱.

گام ۱۹

۱- جدول تفاضلی:

$x$	$f(x) = \cos x$	$\Delta$	$\Delta^2$
$80^\circ$	0.1736		
		-28	
$80^\circ 10'$	0.1708		-1
		-29	
$80^\circ 20'$	0.1679		0
		-29	
$80^\circ 30'$	0.1650		1
		-28	
$80^\circ 40'$	0.1622		-1
		-29	
$80^\circ 50'$	0.1593		

$$\begin{aligned} \cos 80^\circ 35' &= f(80^\circ 30') + 0.05 \Delta f(80^\circ 30') & (i) \\ &= 0.1650 + 0.05(-0.00028) = 0.1636. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 80^\circ 35' &= 0.1650 + 0.05(-0.00028) & (ii) \\ &+ (0.05)(0.05) - 0.05(-0.00001) \\ &= 0.1636. \end{aligned}$$

(تصحیح مرتبه دوم ۰۰۰۰۰۱۲۵ + است.)

۲- جدول تفاضلی:

$x$	$f(x) = \tan x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
$80^\circ$	۵۷۶۷۱			
		۹۸		
$80^\circ 10'$	۵۷۷۶۹		۴	
		۱۰۲		-۱
$80^\circ 20'$	۵۷۸۷۱		۳	
		۱۰۵		۰
$80^\circ 30'$	۵۷۹۷۶		۳	
		۱۰۸		۲
$80^\circ 40'$	۶۷۰۸۴		۵	
		۱۱۳		
$80^\circ 50'$	۶۷۱۹۷			

تفاضلات مرتبه دوم تقریباً ثابت هستند، که در نتیجه، یک تقریب درجه دوم مناسب است: با قراردادن  $\theta = 1/2$

$$\begin{aligned} \tan 80^\circ 35' &\approx f(80^\circ 35') + 0.05 \Delta f(80^\circ 30') - (0.05)^2 \Delta^2 f(80^\circ 30') \\ &= 57976 + 0.05(0.108) - (0.05)^2(0.0005) = 67029. \end{aligned}$$

$x$	$f(x) = e^x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
۰٫۱۰	۱٫۱۰۵۱۷			
		۵۶۶۶		
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱	
		۵۹۵۷		۱۵
۰٫۲۰	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶	
		۶۲۶۳		۱۴
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰	
		۶۵۸۳		۱۸
۰٫۳۰	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸	
		۶۹۲۱		۱۶
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴	
		۷۲۷۵		
۰٫۴۰	۱٫۴۹۱۸۲			

$$e^{0.14} = f(0.14) \approx f(0.1) + \frac{4}{\Delta} (0.005666) \quad (i)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{4}{\Delta} \left(-\frac{1}{\Delta}\right) (0.000291) + \frac{1}{6} \frac{4}{\Delta} \left(-\frac{1}{\Delta}\right) \left(-\frac{6}{\Delta}\right) (0.000015)$$

$$= 1.10517 + 0.04532(4) - 0.00023(3) + 0.00000(5)$$

$$= 1.15027.$$

$$e^{0.315} = f(0.315) \approx f(0.3) + \frac{3}{\Delta} (0.06583) \quad (ii)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{3}{10} \frac{13}{10} (0.000320) + \frac{1}{6} \frac{3}{10} \frac{13}{10} \frac{23}{10} (0.000014) \\
& = 1.34986 + 0.01974(9) + 0.00062(4) + 0.00002(1) \\
& = 1.37025.
\end{aligned}$$

۲- این رابطه مسلماً برای  $j=0$  و  $j=1$  برقرار است، زیرا:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) \Rightarrow f(x_0+h) = (1+\Delta)f(x_0).$$

حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم: فرض می‌کنیم که این رابطه برای  $j=k$  برقرار باشد، یعنی

$$f_k = f_0 + k\Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^k f_0,$$

که در آن، طبق معمول داریم  $f_j = f(x_0 + jh)$

لذا:

$$\Delta f_k = \Delta f_0 + k\Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^3 f_0 + \dots + \Delta^{k+1} f_0,$$

ولی

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k,$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + \Delta f_k \\
&= f_0 + (k+1)\Delta f_0 + \left\{ \frac{k(k-1)}{2} + k \right\} \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^{k+1} f_0 \\
&= f_0 + (k+1)\Delta f_0 + \frac{(k+1)k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^{k+1} f_0;
\end{aligned}$$

یعنی، رابطه مورد نظر برای  $j=k+1$  هم برقرار است. بنا براین، به استقرا نتیجه می‌گیریم که رابطه برای  $j=0, 1, 2, \dots$  برقرار است. با مراجعه به بخش ۴ از گام ۲، توجه کنید که با قرار دادن

$$\theta = j = 0, 1, 2, \dots,$$

داریم:

$$f_j = f(x_j) = P_n(x_j).$$

۳- جدول تفاضلی مربوط، در جواب ۲ از گام ۱۷ داده شده است.

چون  $f_0 = 3$ ،  $\Delta f_0 = -1$ ،  $\Delta^2 f_0 = 6$ ،  $\Delta^3 f_0 = 6$  و  $\Delta^4 f_0 = 0$

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6} \Delta^3 f_0$$

$$= 3 - \theta + 3\theta(\theta-1) + \theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$= \theta^3 - 2\theta + 3.$$

حال،  $x = x_0 + \theta h = \theta$  (زیرا  $x_0 = 0$  و  $h = 1$ )، و لذا، تنها چند جمله‌ای هم محل برای چهار درایهٔ اول جدول عبارت است از

$$P_3(x) = x^3 - 2x + 3.$$

دانشجویان می‌توانند بررسی کنند که چند جمله‌ای ماربر هر چهار نقطهٔ مجاور جدولی، همان چند جمله‌ای هم محل درجهٔ سوم فوق است؛ از این مطلب نتیجه می‌شود که

$$f(x) \equiv P_3(x);$$

یعنی، همان طور که با تفاضلات مرتبهٔ سوم ثابت (به‌طور دقیق) بیان شد، خود تابع جدولی هم يك چند جمله‌ای درجهٔ سوم است.

### گام ۲۱

جدول تفاضلی مربوط، در جواب به‌سؤال ۱ از گام ۲۰ داده شده است.

(i) دستور استرلینگ؛  $\theta = 1/5$

$$f(0.31) = 1.34986 + \frac{1}{5} \frac{1}{2} (0.06583 + 0.06921)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{25} (0.00338) + \frac{1}{6} \frac{1}{55} \left(-\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (0.00018 + 0.00016)$$

$$= 1.34986 + 0.01350(4) + 0.00006(8) - 0.00000(5)$$

$$= 1.36343.$$

(ii) دستور اورت؛  $\theta = 1/5$ ،  $\bar{\theta} = 4/5$

$$f(0.31) = \frac{4}{5} (1.34986) + \frac{1}{6} \frac{4}{55} \left(-\frac{1}{5}\right) (0.00338)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{5}(1741907) + \frac{161}{655} \left( -\frac{4}{5} \right) (0700354) \\
 & = 1707988(1) - 0700016(2) + 0728381(4) - 0700011(3) \\
 & = 1736343.
 \end{aligned}$$

(iii) دستور بس:  $\theta = 073$ .

$$\begin{aligned}
 f(07315) &= \frac{1}{4}(1734986 + 1741907) + (-072)(0706921) \\
 & + \frac{1}{4}(073)(-077) \frac{1}{4}(0700328 + 0700354) \\
 & + \frac{1}{6}(073)(-077)(-072)(0700016) \\
 & = 1738446(5) - 0701384(2) - 0700036(3) + 0700000(1) \\
 & = 1737026.
 \end{aligned}$$

(iv) دستور اورت:  $\bar{\theta} = 077, \theta = 073$ .

$$\begin{aligned}
 f(07315) &= (077)(1734986) + \frac{1}{6}(177)(077)(-073)(0700328) \\
 & + (073)(1741907) + \frac{1}{6}(173)(073)(-077)(0700354) \\
 & = 0794490(2) - 0700020(1) + 0742572(1) - 0700016(1) \\
 & = 1737026.
 \end{aligned}$$

کام ۲۲

ضرایب لاگرانژ عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 L_0(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-5)(-6)}, \quad x_0 = -2 \text{ برای} \\
 L_1(x) &= \frac{(x+2)(x-1)(x-3)(x-4)}{1(-2)(-4)(-5)}, \quad x_1 = -1 \text{ برای}
 \end{aligned}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-3)(x-4)}{3 \times 2(-2)(-3)} \quad \text{برای } x_1 = 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-4)}{5 \times 4 \times 2(-1)} \quad \text{برای } x_2 = 3$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{6 \times 5 \times 3 \times 1} \quad \text{برای } x_3 = 4$$

لذا:

$$\begin{aligned} f(0) &= L_0(0) \times 46 + L_1(0) \times 4 + L_2(0) \times 2 + L_3(0) \times 156 \\ &\quad + L_4(0) \times 484 \\ &= \frac{1}{15} (-92 + 36 + 40 - 468 + 484) \\ &= 0. \end{aligned}$$

کام ۲۳

۱- برای به دست آوردن جدول تفاضل تقسیم شده، نقاط را چنین مرتب می‌کنیم:  
 $x_0 = 27, x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 64$ ؛ (درایه‌ها در ۱۰<sup>۵</sup> ضرب شده‌اند):

$x$	$f(x)$			
۲۷	۳۰۰۰۰۰۰			
		۵۲۶۳		
۸	۲۰۰۰۰۰۰		-۳۴۷	
		۱۴۲۸۶		۳۸۴
۱	۱۰۰۰۰۰۰		-۱۰۷۱۴	-۶
		۱۰۰۰۰۰		۱۶۵
۰	۰۰۰۰۰۰۰		-۱۴۸۸	
		۶۲۵۰		
۶۴	۲۰۰۰۰۰۰			

به موجب دستور نیوتن داریم :

$$\begin{aligned}
 f(20) &= f(27) + (-7) f(27, 8) + (-7)(+12) f(27, 8, 1) \\
 &\quad + (-7)(+12)(+19) f(27, 8, 1, 0) \\
 &\quad + (-7)(+12)(+19)(+20) f(27, 8, 1, 0, 64) \\
 &= 3 - 7(0.005263) - 84(-0.000347) - 1596(0.000284) \\
 &\quad - 31920(-0.000006) \\
 &= 3 - 0.36841 + 0.29148 - 0.452864 + 0.191520 \\
 &= -1.229037(!).
 \end{aligned}$$

چون جملات نزولی نیستند، لذا به این نتیجه نمی‌توان زیاد اطمینان داشت. دانشجویان ممکن است به خاطر بیاورند که این مثال راجهت تحذیری در مورد استفاده از دستور درونیایی لاگرانژ، در بخش ۳ از گام ۲۲، نقل کردیم. با تفاضلات تقسیم شده، لااقل می‌توان فهمید که درونیایی برای  $f(20)$  فاقد اعتبار است!

۲- i) برای به دست آوردن طرح تفاضل تقسیم شده، نقاط را چنین مرتب می‌کنیم:

$$x_4 = 4, x_3 = 3, x_2 = -2, x_1 = 1, x_0 = -1$$

	$x$	$f(x)$		
$k=0$	-1	4	0	
$k=1$	1	4	14	
			-14	1
$k=2$	-2	46	18	2
			22	11
$k=3$	3	156	51	
			328	
$k=4$	4	484		



لذا:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f(-1) + (+1)f(-1, 1) + (+1)(-1)f(-1, 1, -2) \\
 &\quad + (+1)(-1)(+2)f(-1, 1, -2, 3) \\
 &\quad + (+1)(-1)(+2)(-3)f(-1, 1, -2, 3, 4) \\
 &= 4 + 1 \times 0 - 1 \times 14 - 2 \times 1 + 6 \times 2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(ii) برای به دست آوردن طرح ایکن، نقاط را مجدداً چنین مرتب می کنیم:

$$. x_4 = 4, x_3 = 3, x_2 = -2, x_1 = 1, x_0 = -1$$

	$x$	$f(x)$				$x_k - x$	
$k=0$	-1	4				-1	
$k=1$	1	4	4			1	
$k=2$	-2	46	-38	-10		-2	
$k=3$	3	156	42	-15	-12	3	
$k=4$	4	484	100	-28	-16	0	4

اعتبار این درونیایی مشکوک است. جملات دستور تفاضل تقسیم شده نیوتن به اندازه کافی نزولی نیستند (با (i) مقایسه شود)، در طرح ایکن، روی قطر به یک مقدار مکرر بر نمی خوریم.

-۳

$x$	$f(x)$				$x_k - x$	
1	۲۷۳۹۱۹				-1	
3	۲۷۳۹۳۸	۲۷۳۹۲۸(۵)			+1	
0	۲۷۳۹۱۳	۲۷۳۹۲۵	۲۷۳۹۲۷(۳)			-2
4	۲۷۳۹۵۱	۲۷۳۹۲۹(۷)	۲۷۳۹۲۷(۳)	۲۷۳۹۲۷(۳)	+2	

## گام ۲۴

۱- ریشه  $f(x) = x + \cos x$  در بازه  $-0.08 < x < -0.07$  قرار دارد؛ در واقع،

$$f(-0.08) = -0.01033$$

و

$$f(-0.07) = +0.0648.$$

چون  $f(x)$  به طور صریح معلوم است، لذا به آسانی می‌توان آن را (مثلاً، با تنصیف بازه به طور پی در پی) در نقاط جدید جدول بندی و از درونیابی معکوس خطی استفاده کرد:

$$f(-0.075) = -0.0183, \theta = \frac{0 + 0.0183}{0.0648 + 0.0183} = 0.2202$$

و از آنجا داریم:  $x = -0.075 + (0.2202)(0.05) = -0.07390$ ؛ همچنین

$$f(-0.0725) = +0.0235, \theta = \frac{0 + 0.0183}{0.0235 + 0.0183} = 0.4378$$

و از آنجا داریم:  $x = -0.075 + (0.4378)(0.025) = -0.07391$ ؛ و نیز

$$f(-0.07375) = +0.0027, \theta = \frac{0 + 0.0183}{0.0027 + 0.0183} = 0.8714$$

و از آنجا داریم:  $x = -0.075 + (0.8714)(0.0125) = -0.07391$ ؛

اگر  $x = -0.07391$  را امتحان کنیم، داریم:  $f(-0.07391) = 0.0000$ .

۲- با افزایش  $x$ ، تابع  $f(x) = 3xe^x$  نیز افزایش می‌یابد؛ در نتیجه تنها يك  $x$  وجود دارد که  $f(x) = 1$ . در واقع، در گام ۷ مشاهده کردیم که  $0.27 < x < 0.25$ ، و این بازه برای درونیابی معکوس خطی به قدر کافی کوچک است: چون  $f(0.27) = 1.0611$  و  $f(0.25) = 0.9630$ ، داریم:

$$\theta = \frac{1.0000 - 0.9630}{1.0611 - 0.9630} = 0.3772,$$

و لذا داریم:  $x = 0.25 + (0.3772)(0.02) = 0.2575$ ؛

اگر  $x = 0.258$  را امتحان کنیم، خواهیم داشت  $f(0.258) = 1.0018$ ، که به  $f(x) = 1$  نزدیکتر است تا  $0.9969 = f(0.257)$ . (با اینکه مقدار تا  $3D$  فوراً از يك درونیابی معکوس خطی به دست می‌آید، ولی وقتی دقت بیشتر مورد نیاز باشد، ممکن است روش تنصیف توصیف شده در گام ۷ را ترجیح بدهیم.)

۳- اگر صورت صریح تابع معلوم نباشد، که در نتیجه جدول بندی مجدد هم به آسانی انجام پذیر نیست، می توان از درون یابی معکوس تکراری استفاده کرد. جدول تفاضلی مربوط چنین است:

$x$	$f(x)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
۲	۳۲۰۶۷۱	۳۳۴۱۷		
۳	۶۲۴۰۸۸	۳۴۱۶۹	۷۵۲	
۴	۹۲۸۲۵۷	۳۴۹۲۷	۷۵۸	۶
۵	۱۳۲۳۱۸۴	۳۵۶۹۱	۷۶۴	۶
۶	۱۶۲۸۸۷۵	۳۶۴۶۱	۷۷۰	۶
۷	۲۰۲۵۳۳۶	۳۷۲۳۷	۷۷۶	۶
۸	۲۴۲۲۵۷۳	۳۸۰۱۹	۷۸۲	۶
۹	۲۸۲۰۵۹۲	۳۸۸۰۷	۷۸۸	۶
۱۰	۳۱۲۹۳۹۹	۳۹۶۰۱	۷۹۴	۶
۱۱	۳۵۲۹۰۰۰	۴۰۴۰۱	۸۰۰	۶
۱۲	۳۹۲۹۴۰۱	۴۱۲۰۷	۸۰۶	
۱۳	۴۳۲۰۶۰۸			

برای یافتن  $x$  به طوری که  $f(x) = 10$ ، می توان از درونیایی معکوس مبتنی بردستور پیشرو نیوتن استفاده کرد:

$$\theta_1 = \frac{10 - 98257}{374927} = \frac{01743}{374927} = 04990 \approx 005,$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{374927} \left\{ 01743 - \frac{1}{2}(005)(-095)(00764) \right\} \\ &= \frac{1}{374927} \left\{ 01743 + 00018 \right\} = 00504. \end{aligned}$$

تصحیحاتی بیشتر قابل اغماض هستند، و لذا

$$x = 4 + 00504 = 40504.$$

برای یافتن  $x$  به طوری که  $f(x) = 20$ ، می توان درونیایی معکوس مبتنی بردستور اورت را انتخاب کرد:

$$\theta_1 = \frac{1}{36461} (20 - 168875) = \frac{31125}{36461} = 085365 \approx 085$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{36461} \left\{ 31125 + \frac{1}{6}(085)(-015)[(-115)(00770) \right. \\ &\quad \left. - (115)(00776) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36461} \{ 31125 + (002125)(02321) \}$$

$$= \frac{31125 + 00049}{36461} = 08550$$

تصحیحاتی بیشتر قابل اغماض هستند، و در نتیجه

$$x = 6 + 08550 = 68550.$$

(البته دانشجویان ممکن است ترجیح بدهند که از فرم مبتنی بردستور پیشرو نیوتن استفاده کنند.)

برای یافتن  $x$  به طوری که  $f(x) = 40$ ، می توان درونیایی معکوس مبتنی بردستور پیشرو نیوتن را انتخاب کرد. لذا:

$$\theta_1 = \frac{f(x) - f_j}{\nabla f_j},$$

$$\theta_2 = \frac{f(x) - f_j - \frac{1}{2}\theta_1(\theta_1 + 1)\nabla^2 f_j}{\nabla f_j},$$

و غیره. در نتیجه:

$$\theta_1 = \frac{40 - 3999401}{420401} = \frac{0.0599}{420401} = 0.0148 \approx 0.015$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{0.0599 - \frac{1}{2}(0.015)(1.015)(0.0800)}{420401} \\ &= \frac{0.0599 - 0.0006}{420401} = 0.0147 \end{aligned}$$

و تصحیحهای بیشتر هم قابل اغماض هستند، و لذا

$$x = 12 + 0.0147 = 12.0147.$$

اینک امتحان کردن بادر و نیایی مستقیم را مورد توجه قرار می‌دهیم. از دستور پیشرو نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} f(420504) &= 988257 + (0.0504)(374927) \\ &\quad + \frac{1}{2}(0.0504)(-0.9496)(0.0764) \\ &= 10900 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f(628550) &= 1628875 + (0.8550)(36461) \\ &\quad + \frac{1}{2}(0.8550)(-0.1450)(0.0776) \\ &= 20900, \end{aligned}$$

حال آنکه به موجب دستور پرسو نیوتن داریم:

$$\begin{aligned}
 f(1220147) &= 3999401 + (020147)(420401) \\
 &\quad + \frac{1}{4}(020147)(120147)(020800) \\
 &= 402000.
 \end{aligned}$$

بالاخره چند جمله‌ای درجه سوم  $f(x)$  را تعیین و از آن برای امتحان کردن جواب استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f_j + \theta \Delta f_j + \frac{1}{2} \theta(\theta-1) \Delta^2 f_j + \frac{1}{6} \theta(\theta-1)(\theta-2) \Delta^3 f_j \\
 &= 998257 + (x-4)(394927) + \frac{1}{2}(x-4)(x-5)(020764) \\
 &\quad + \frac{1}{6}(x-4)(x-5)(x-6)(020006) \\
 &= \{998257 - 4(394927) + 10(020764) - 20(020006)\} \\
 &\quad + \left\{394927 - \frac{9}{2}(020764) + \frac{37}{3}(020006)\right\} x \\
 &\quad + \left\{\frac{1}{2}(020764) - \frac{5}{2}(020006)\right\} x^2 + \frac{1}{6}(020006)x^3 \\
 &= 020001x^3 + 020367x^2 + 391563x - 393931.
 \end{aligned}$$

لذا:

$$f(420504) = 999999$$

$$f(628550) = 2020001$$

$$f(1220147) = 4020001.$$

در هر حالت مقدار حاصل از درونیایی معکوس تکراری با دقت  $3D$  واقعاً برابر با مقدار نظیر از تابع است.

کام ۲۵

۱- جدول زیر مقادیر خط و سهمی برای  $y$ ، خطاهای مربوط، و همچنین مربع خطاها را نشان می‌دهد.

معادله خط:

$$y = 2.13 + 0.2x$$

معادله سهمی:

$$y = -1.2 + 2.7x - 0.36x^2$$

$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	1	3	4	3	4	2
مقدار $l =$ خط $y$	2.33	2.53	2.73	2.93	3.13	3.33
خطای خط $(y-l)$	-1.33	0.47	1.27	0.07	0.87	-1.33
$(y-l)^2$	1.769	0.221	1.613	0.005	0.757	1.769
مقدار $y$ $p =$ سهمی	1.14	2.76	3.66	3.84	3.30	2.04
خطای سهمی $(y-p)$	-0.14	0.24	0.24	-0.84	0.70	-0.04
$(y-p)^2$	0.0196	0.0576	0.1156	0.7056	0.4900	0.0016
						$= S$ (سهمی)
						1.390
						$= S$ (خط)
						6.134

۲- پس از محاسبه  $n$ ،  $\sum x$ ،  $\sum y$ ،  $\sum x^2$ ،  $\sum xy$  و درج آنها در معادلات نرمال، و حل معادلات حاصل خواهیم داشت:

(i) معادلات نرمال:

$$2379 = 8c_1 + 348c_2$$

$$104971 = 348c_1 + 15260c_2$$

خطکترین مربعات:

$$y = -0.38 + 0.0077x$$

پیش بینی: وقتی  $x = 38$  درصد نیکل ( $y$ ) (تا  $2D$ ) عبارت است از ۰.۲۵۵.

(ii) معادلات نرمال:

$$348 = 6c_1 + 219c_2$$

$$13659 = 219c_1 + 8531c_2$$

خطکترین مربعات:

$$y = -6999 + 1778x$$

پیش بینی: وقتی  $x = 48$  فروش ( $y$ ) عبارت است از  $78745 (78745 \times 10000 \text{ تومان})$ .

۴- شکل ماتریسی معادلات نرمال (ر. ک. سؤال ۳) عبارت است از:

$$\begin{matrix} \sum y = 9, \\ \sum xy = 24, \end{matrix} \text{ اعضای مندرج در ماتریسها، } \begin{matrix} 9 \\ 24 \\ 72 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

و غیره هستند.

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 = -0.2572 + 2.3144x - 0.4286x^2 \quad \text{جواب:}$$

$$S = 0.6286 (4D \text{ تا})$$

۵- جهت مینیمم کردن

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - c_1 - c_2 \sin x_i)^2$$

لازم است که  $c_1$  و  $c_2$  را محاسبه کنیم.



اما  $\frac{\partial S}{\partial c_1} = \sum -2(y_i - c_1 - c_2 \sin x_i)$  و

$\frac{\partial S}{\partial c_2} = \sum -2(y_i - c_1 - c_2 \sin x_i) \sin x_i$

لذا معادلات نرمال به صورت زیر نوشته می شود:

$\sum y_i = 4c_1 + (\sum \sin x_i)c_2$

و

$\sum y_i \sin x_i = (\sum \sin x_i)c_1 + (\sum \sin^2 x_i)c_2$

با جدول بندی کردن

$x_i$	$y_i$	$\sin x_i$	$y_i \sin x_i$	$\sin^2 x_i$
۰	۰	۰	۰	۰
$\pi/6$	۱	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۲۵
$\pi/۲$	۳	۱	۳	۱
$۵\pi/6$	۲	۰٫۵	۱	۰٫۲۵
$\Sigma$	۶	۲	۴٫۵	۱٫۵

و حل معادلات

$6 = 4c_1 + 2c_2$

$4.5 = 2c_1 + 1.5c_2$

$c_2 = 3$  و  $c_1 = 0$

به دست می آوریم:

کام ۲۶

۱- دستور تفاضل پسر نیوتن را در نظر بگیرید:

$$f(x) = f(x_j + \theta h) \approx [1 + \theta \nabla + \frac{1}{2} \theta(\theta+1) \nabla^2 + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 + \dots] f_j$$

$$f'(x) = \frac{1}{h} \frac{df}{d\theta} \approx \frac{1}{h} \left[ \nabla + \left(\theta + \frac{1}{2}\right) \nabla^2 + \frac{3\theta^2 + 6\theta + 2}{6} \Delta^2 + \dots \right] f_i,$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \frac{d^2f}{d\theta^2} \approx \frac{1}{h^2} \left[ \nabla^2 + (\theta + 1) \Delta^2 + \dots \right] f_i.$$

۲- جدول تفاضلی:

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰			
		۲۴۷۰		
۱۰۰۵	۱۰۰۲۴۷۰		-۵۹	
		۲۴۱۱		۵
۱۰۱۰	۱۰۰۴۸۸۱		-۵۴	
		۲۳۵۷		۴
۱۰۱۵	۱۰۰۷۲۳۸		-۵۰	
		۲۳۰۷		۱
۱۰۲۰	۱۰۰۹۵۴۵		-۴۹	
		۲۲۵۸		۶
۱۰۲۵	۱۰۱۱۸۰۳		-۴۳	
		۲۲۱۵		
۱۰۳۰	۱۰۱۴۰۱۸			

توجه کنید که  $h = ۰.۰۰۵$ . لذا:

(i)

$$\begin{aligned} f'(۱۰۰۰) &\approx ۲۰ \left[ \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 \right] f(۱۰۰۰) \\ &= ۲۰ (۰.۰۰۲۴۷۰ + ۰.۰۰۰۰۲۹۵ + ۰.۰۰۰۰۰۱۷) \\ &= ۰.۰۵۰۰۲۴. \\ f''(۱۰۰۰) &\approx (۲۰)^2 [\Delta^2 - \Delta^3] f(۱۰۰۰) \\ &= ۴۰۰ (-۰.۰۰۰۰۵۹ - ۰.۰۰۰۰۰۵) \end{aligned}$$

البته مقادیر درست عبارتند از:

$$f'(1000) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1000} = 0.05,$$

$$f''(1000) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \Big|_{x=1000} = -0.025;$$

با وجودی که داده‌ها تا  $5D$  درستند، ولی نتایج به ترتیب تنها تا  $3D$  و  $1D$  دقیق هستند.

(ii)

$$f'(1030) \approx 20 \left[ \nabla + \frac{1}{4}\nabla^2 + \frac{1}{8}\nabla^3 \right] f(1030)$$

$$= 20(0.052215 - 0.00021(5) + 0.00002)$$

$$= 0.4391.$$

$$f''(1030) \approx (20)^2 [\nabla^2 + \nabla^3] f(1030)$$

$$= 400(-0.00043 + 0.00006)$$

$$= -0.148.$$

مقادیر درست تا  $4D$  عبارتند از  $0.4385$  و  $-0.1687$ .

۳- (i) اگر حول  $x = x_j$  بسط داده شود داریم:

$$f(x_j + h) = f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_j) + \dots,$$

بنابراین:

$$\frac{1}{h}(f(x_j + h) - f(x_j)) = f'(x_j) + \frac{1}{2}hf''(x_j) + \dots$$

و

$$\text{خطا} \approx \frac{1}{2}hf''(x_j).$$

(ii) اگر حول  $x = x_j + \frac{1}{2}h$  بسط داده شود، خواهیم داشت:

$$f(x_j+h) = f\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) + \frac{1}{\varphi} h f'\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) \\ + \frac{1}{\lambda} h^{\varphi} f''\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) + \frac{1}{\varphi \lambda} h^{\varphi} f'''(x_j + \frac{1}{\varphi} h) + \dots,$$

$$f(x_j) = f\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) - \frac{1}{\varphi} h f'\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) \\ + \frac{1}{\lambda} h^{\varphi} f''\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) - \frac{1}{\varphi \lambda} h^{\varphi} f'''(x_j + \frac{1}{\varphi} h) + \dots$$

لذا:

$$\frac{f(x_j+h) - f(x_j)}{h} = f'\left(x_j + \frac{1}{\varphi} h\right) + \frac{1}{\varphi \varphi} h^{\varphi} f'''(x_j + \frac{1}{\varphi} h) + \dots$$

$$\text{خطا} \approx \frac{1}{\varphi \varphi} h^{\varphi} f'''(x_j + \frac{1}{\varphi} h).$$

(iii) اگر حول  $x = x_j$  بسط داده شود داریم:

$$f(x_j + \varphi h) = f(x_j) + \varphi h f'(x_j) + \frac{\varphi}{\lambda} h^{\varphi} f''(x_j) + \frac{\varphi}{\varphi} h^{\varphi} f'''(x_j) + \dots$$

بنابراین:

$$\frac{f(x_j + \varphi h) - \varphi f(x_j + h) + f(x_j)}{h^{\varphi}} = f''(x_j) + h f'''(x_j) + \dots,$$

$$\text{خطا} \approx h f'''(x_j).$$

(iv) و اگر حول  $x = x_j + h$  بسط داده شود داریم:

$$f(x_j + \varphi h) = f(x_j + h) + h f'(x_j + h) + \frac{1}{\varphi} h^{\varphi} f''(x_j + h) \\ + \frac{1}{\varphi} h^{\varphi} f'''(x_j + h) + \frac{1}{\varphi \varphi} h^{\varphi} f^{(\varphi)}(x_j + h) + \dots,$$

$$f(x_j) = f(x_j + h) - h f'(x_j + h) + \frac{1}{\varphi} h^{\varphi} f''(x_j + h) \\ - \frac{1}{\varphi} h^{\varphi} f'''(x_j + h) + \frac{1}{\varphi \varphi} h^{\varphi} f^{(\varphi)}(x_j + h) + \dots$$

بنابراین:

$$\frac{1}{h^2} (f(x_j + 2h) - 2f(x_j + h) + f(x_j)) = f''(x_j + h) + \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(x_j + h) + \dots,$$

$$\text{خطا} \approx \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(x_j + h).$$

کام ۲۷

۱- با  $b - a = 1000 - 100 = 900$  می‌توان مقادیر  $h = 0.30$ ،  $h = 0.15$ ،  $h = 0.10$  را انتخاب کرد. اگر  $T(h)$  نمایانگر تقریب متناظر با نواری به عرض  $h$  باشد داریم:

$$T(0.30) = \frac{0.30}{2} (1000000 + 1014018) = 0.32102(7).$$

$$\begin{aligned} T(0.15) &= \frac{0.15}{2} (1000000 + 1014018) + (0.15)(1007238) \\ &= 0.16051(4) + 0.16085(7) = 0.32137(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0.10) &= \frac{0.10}{2} (1000000 + 1014018) \\ &+ (0.10)(1004881 + 1009545) \\ &= 0.10700(9) + 0.21442(6) = 0.32143(5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(0.05) &= \frac{0.05}{2} (1000000 + 1014018) + \\ &+ (0.05)(1002470 + 1004881 + 1007238 + 1009545 \\ &+ 1011803) \\ &= 0.05350(5) + 0.26796(9) = 0.32147(4). \end{aligned}$$

در واقع جواب تا  $8D$  برابر است با  $0.32148537$  و در نتیجه می‌توان مشاهده کرد



$x$	۰	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵
$f(x)$	۱٫۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۹۰۹۰۹۱	۰٫۸۳۳۳۳۳	۰٫۷۶۹۲۳۱	۰٫۷۱۴۲۸۶	۰٫۶۶۶۶۶۷
$x$	۰٫۶	۰٫۷	۰٫۸	۰٫۹	۱٫۰	
$f(x)$	۰٫۶۲۵۰۰۰	۰٫۵۸۸۲۳۵	۰٫۵۵۵۵۵۶	۰٫۵۲۶۳۱۶	۰٫۵۰۰۰۰۰	

با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون،

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{0.1}{3} \left[ 1 + 4(0.909091 + 0.769231 + 0.666667 + 0.588235 + 0.526316) + 2(0.833333 + 0.714286 + 0.625000 + 0.555556) + 0.500000 \right]$$

$$= 0.6931(5).$$

(توجه کنید که جهت مقابله با خطای گرد شده لازم است عملیات را دست کم تا  $5D$  انجام

دهیم، و نیز توجه کنید که تا  $6D$ ،  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 0.693147$ ،

گام ۲۹

به جدول تفاضلی (که ذیلا آمده است) رجوع کنید:

(i)  $x_0 + h = 0.92$ ,  $x_0 = 0.88$  (تفاضلات پیشرو)

$$\int_{0.88}^{0.92} f(b) dx \approx 0.04(1.2097 + 0.5518 - 0.0009(6) + 0.0001)$$

$$= 0.04(1.2606)$$

$$= 0.0504.$$

(ii)  $x_0 + h = 0.92$ ,  $x_0 = 0.88$  (تفاضلات پسرو)

$$\int_{0.88}^{0.92} f(x)dx \approx 0.04(1.2097 + 0.0470(\Delta) + 0.0033(\Delta^2) + 0.0004(\Delta^3))$$

$$= 0.04(1.2496)$$

$$= 0.504.$$

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0.88	0.8087	684			
0.89	0.8771	731	50	7	
0.90	0.9505	791	57	12	5
0.91	1.0296	860	69	12	0
0.92	1.1156	941	81	14	2
0.93	1.2097	1036	95	20	6
0.94	0.3133	1152	115	24	4
0.95	1.2282	1290	139	33	9
0.96	1.3574	1462	172	42	9
0.97	1.5036	1676	214	58	16
0.98	1.8712	1948	272		
1.00	2.0660				



با تغییر متغیر داریم:

$$u = \frac{1}{4}(x+1).$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{4}(x+1)} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dx}{4+x}$$

فرمول دو نقطه‌ای:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+u} du &\approx \frac{1}{3-0.57735027} + \frac{1}{3+0.57735027} \\ &= 0.412771 + 0.279537 \\ &= 0.692308 \end{aligned}$$

که تا  $2D$  درست است.

فرمول چهار نقطه‌ای:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+u} du &\approx 0.34785485 \left\{ \frac{1}{3-0.86113631} + \frac{1}{3+0.86113631} \right\} \\ &+ 0.65214515 \left\{ \frac{1}{3-0.33998104} + \frac{1}{3+0.33998104} \right\} \\ &\approx 0.347855 [0.467538 + 0.258991] \\ &+ 0.652145 [0.375937 + 0.299403] \\ &= (0.347855)(0.726529) + (0.652145)(0.675340) \\ &= 0.693147 \text{ (درست تا } 6D \text{)}. \end{aligned}$$

$$y_2 = 1 + 0.2(0.1 + 1.1) = 1.242$$

$$y_3 = 1.1 + 0.2(0.2 + 1.242) = 1.3984$$

$$y_4 = 1.242 + 0.2(0.3 + 1.3984) = 1.58168$$

$$y_5 = 1.3984 + 0.2(0.4 + 1.58168) = 1.794736.$$

که دارای خطایی تقریباً برابر با ۰۰۰۵ است (بابخش (ب) از گام ۳۱ مقایسه کنید).

$$y_{n+1} = y_n - 0.2x_n y_n^2 = y_n(1 - 0.2x_n y_n) \quad -2$$

$$y_1 = 2(1 - 0.2 \times 0 \times 2) = 2$$

$$y_2 = 2(1 - 0.2 \times 0.2 \times 2) = 1.84$$

$$y_3 = 1.84(1 - 0.2 \times 0.4 \times 1.84) = 1.56915$$

$$y_4 = 1.56915(1 - 0.2 \times 0.6 \times 1.56915) = 1.27368$$

$$y_5 = 1.27368(1 - 0.2 \times 0.8 \times 1.27368) = 1.0412.$$

جواب درست عبارت است از  $y(x) = 2/(1+x^2)$ ، لذا  $y(1) = 1$  و خطا در  $y_5$  تقریباً برابر است با ۰۰۱۴.

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

abscissa	طول
absolute error	خطای مطلق
acceleration	شتاب
accumulated error	خطای مجتمع
Adams - Bashforth method	روش ادمز - بشفورث
Aitken's interpolating method	روش درونیابی ایتکن
algorithm	الگوریتم
approximation	تقریب
– to functions	تقریب به توابع
asymptotic series	سری مجانبی
augmented matrix	ماتریس افزوده
back - substitution	جایگذاری از پایین
backward differences	تفاضلات پسرو
Bessel function	تابع بسل
Bessel's interpolating formula	دستور درونیابی بسل
bisection method	روش تنصیف
blunder	خط
central difference	تفاضل مرکزی
– operator	عملگر تفاضل مرکزی

Chebyshev polynomials	چند جمله‌ایهای چبیشف
– series	سری چندجمله‌ایهای چبیشف
check column	ستون امتحان
chopping	بریدن
– error	خطای بریدن
coefficient matrix	ماتریس ضرایب
collocation polynomial	چندجمله‌ای هم‌محل
convergence	همگرایی
curve	منحنی
– fitting	برازش منحنی
data	داده‌ها
definite integral	انتگرال معین
derivative	مشتق
difference	تفاضل
– notation	نماد تفاضل
– table	جدول تفاضل
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
differentiation	دیفرانسیل‌گیری
effectiveness	کارآیی
elementary	مقدماتی
elimination	حذف
equation	معادله
error	خطا
– generation	تولید خطا
estimate	تخمین
existence	وجود

expansion	بسط
exponent	نما
false position	نا بجایی
– flow - chart	فلو چارت نا بجایی
fan of errors	پره خطاها
finite differences	تفاضلات منتهای
floating point arithmetic	حساب ممیز سیار
flow - chart	فلو چارت
forward differences	تفاضلات پیشرو
– operator	عملگر تفاضلات پیشرو
Fourier series	سری فوریه
function	تابع
generation	تولید
graph	نمودار
ill - conditioning	بد حالت بودن
increment	نمو
initial value	مقدار اولیه
integration	انتگرال گیری
interpolating polynomial	چند جمله‌ای درونیاب
interpolation	درونیابی
interval	بازه
inverse	معکوس
– interpolation	درونیابی معکوس
iteration	تکرار
iterative	تکراری
– method	روش تکراری

– procedure	روند تکراری
least square approximation	تقریب کمترین مربعات
linear	خطی
locating roots	تعیین محل ریشه‌ها
mantissa	مانتیس
matrix	ماتریس
– inversion	معکوس کردن ماتریس
mean	میانگین
– value	مقدار میانگین
measurement	اندازه‌گیری
– error	خطای اندازه‌گیری
method	روش
midpoint	نقطه میانی
– method	روش نقطه میانی
mistake	اشتباه
model	قالب
multistep method	روش چندگامی
nonlinear	غیرخطی
normal	نرمال
normalized	نرمال شده
notation	علامت‌گذاری، نماد‌گذاری
number	عدد
numerical	عددی
– differentiation	دیفرانسیل‌گیری عددی
– integration	انتگرال‌گیری عددی
– method	روش عددی

operations	اعمال [عملیات]
operator	عملگر
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
orthogonal	متعامد
– functions	توابع متعامد
– polynomials	چند جمله‌ایهای متعامد
parabola	پاره‌ای
parameter	پارامتر
partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
partial range integration formulae	دستورهای انتگرال‌گیری حوزه جزئی
piecewise polynomial	چند جمله‌ای تکه‌ای
pivot	محور
– element	عضو محوری
– row	سطر محوری
pivotal condensation	انقباض محوری
polynomial	چند جمله‌ای
– approximation	تقریب چند جمله‌ای
principle	اصل
propagation	انتشار
quadratic	درجه دوم، مرتبه دوم
– approximation	تقریب درجه دوم
– convergence	همگرایی مرتبه دوم
– interpolation	درون‌یابی درجه دوم
quadrature	کوادراتور
range	حوزه

recursive	تراجعی
– procedure	روند تراجعی
relative error	خطای نسبی
remainder	باقیمانده
– term	جمله باقیمانده
repeated root	ریشه مکرر
residuals	مانده‌ها
root	ریشه
rounding	گرد کردن
round off error	خطای گرد شده
scientific notation	نمادگذاری علمی
secant method	روش وتری
series	سری
– expansion	بسط به سری
shift operator	عملگر انتقال
significant figure	رقم بامعنی
simple	ساده
– iteration method	روش تکرار ساده
single step method	روش تک‌گامی
sketching curve	رسم منحنی
solution	جواب
spline functions	توابع اسپلاین
square root	جذر
step	گام
– length	طول گام
substitution	جایگذاری
table	جدول



three - point integration	انتگرال گیری سه نقطه‌ای
transcendental	متعالی
– equation	چند جمله‌ای متعالی
– function	تابع متعالی
transformation	تبدیل
trapezoidal rule	قاعده ذوزنقه‌ای
triangular	مثلثی
– form	شکل مثلثی
– matrix	ماتریس مثلثی
truncation	برش
– error	خطای برشی
two - point integration	انتگرال گیری دو نقطه‌ای
uniqueness	یکتایی
zero	صفر

## واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

figures	ارقام
significant figures	- با معنی
mistake	اشتباه
principle	اصل
operations	اعمال
transformation operations	- تبدیل
elementary operations	- مقدماتی
algorithm	الگوریتم
propagation	انتشار
integral	انتگرال
definite integral	- معین
integration	انتگرال گیری
two - point integration	- دو نقطه‌ای
three - point integration	- سه نقطه‌ای
numerical inegration	- عددی
initial	اولیه
interval	بازه
remainder	باقیمانده
ill - conditioning	بدحالت بودن
curve - fitting	برازش منحنی

truncation	برش
chopping	بریدن
expansion	بسط
series expansion	- به سری
taylor expansion	- تیلر
parameter	پارامتر
fan of errors	پره خطا
continuous	پیوسته
function	تابع
spline function	- اسپلاین
transcendental function	- متعالی
weight function	- وزن
transformation	تبدیل
estimate	تخمین
recursive	تراجمی
interchange	تعویض
differences	تفاضلات
backward differences	- پسرو
forward differences	- پیشرو
divided differences	- تقسیم شده
finite differences	- متناهی
central differences	- مرکزی
approximation	تقریب
approximation to functions	- به توابع
quadratic approximation	- درجه دوم
iteration	تکرار

iterative	تکراری
orthogonal polynomials generation	توابع متعامد تولید
substitution	جایگذاری
forward substitution	- از بالا
backward substitution	- از پایین
table	جدول
square root	جذر
term	جمله
solution	جواب
polynomial	چند جمله ای
interpolating polynomial	- درونیاب
collocation polynomial	- هم محل
elimination	حذف
arithmetic	حساب
range	حوزه
blunder	خطب
error	خطا
measurement error	- ی اندازه گیری
truncation error	- ی برشی
chopping error	- ی بریدن
round off error	- ی گرد شده
rounding error	- ی گرد کردن
accumulated error	- ی مجتمع
absolute error	- ی مطلق

propagated error	- ی منتشر شده
relative error	- ی نسبی
quadratic	درجه دوم [مرتبه دوم]
interpolation	درونیابی
linear interpolation	- خطی
quadratic interpolation	- درجه دوم
inverse interpolation	- معکوس
formula	دستور
sketching curves	رسم منحنی
method	روش
simple iteration method	- تکرار ساده
iterative method	- تکراری
single step method	- تک گامی
bisection method	- تنصیف
multistep method	- چند گامی
elimination method	- حذفی
false position method	- نابجایی
midpoint method	- نقطه میانی
secant method	- وتری
root	ریشه
double root	- مضاعف
repeated root	- مکرر
procedure	روند
subinterval	زیر بازه
column	ستون
check column	- امتحان

series	سری
asymptotic series	- مجانبی
row	سطر
pivotal row	- محوری
parabola	سهمی
acceleration	شتاب
form	شکل
triangular form	- مثلثی
zero	صفر
abscissa, length	طول
step length	- گام
number	عدد
numerical	عددی
element	عضو
pivotal element	- محوری
notation	علامت گذاری
scientific notation	- علمی
operator	عملگر
shift operator	- انتقال
flow - chart	فلو چارت
rule	قاعده
trapezoidal rule	- دوزنقه‌ای
Simpson's rule	- سیمپسون
midpoint rule	- نقطه میانی
model	قالب

mathematical model	- ریاضی
effectiveness	کارآیی
least squares	کمترین مربعات
quadrature	کوادراتور
step	گام
rounding	گرد کردن
matrix	ماتریس
augmented matrix	- افزوده
coefficient matrix	- ضرایب
triangular matrix	- مثلثی
mantissa	مانتیس
normalized matrix	- نرمال شده
residuals	مانده‌ها
transcendental	متعالی
orthogonal	متعامد
finite	متناهی
triangular	مثلثی
order	مرتبه
central	مرکزی
derivative	مشتق
partial derivative	- جزئی
differentiation	مشتق‌گیری
equation	معادله
algebraic equation	- جبری
linear equation	- خطی
quadratic equation	- درجه دوم

differential equation	— دیفرانسیل
nonlinear equation	— غیرخطی
transcendental equation	— متعالی
value	مقدار
initial value	— اولیه
floating point	ممیزسیار
false position	نا بجایی
exponent	نما
representation	نمایش
number representation	— اعداد
increment	نمو
graph	نمودار
existence	وجود
weight	وزن
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
quadratic convergence	— مرتبهٔ دوم
uniqueness	یکتایی



## فهرست راهنما

بازه ۱۴	ارقام با معنی ۸، ۹
باقیمانده ۲۲	اشتباهات ۹
بدحالت بودن ۶۲، ۶۵	اصل کمترین مربعات ۱۴۵
برآزش منحنی ۱۰۵، ۱۳۷، ۱۳۹	اعشاری ۸
برآورد ۱۷۵	اعضای محوری ۵۶
برش ۹، ۲۱، ۱۰۶، ۱۲۷، ۱۶۱	اعمال
بریدن ۹	- تبدیل ۵۵
بسط	- مقدماتی ۵۵
- به سری ۲۱، ۲۳	الگوریتم ۱۱
- تیلر ۲۲، ۴۴، ۱۵۴	انتشار خطاها ۱۱، ۱۲، ۹۳
پره خطا ۹۳	انتگرال گیری
تابع	- دو نقطه ای گاوس ۱۶۵
- متعالی ۳، ۲۶	- سه نقطه ای گاوس ۱۶۶
- وزن ۱۶۶	- عددی ۱۵۲، ۱۵۷، ۱۶۹
تبدیل ۵۵	انتگرال معین ۷۷
تعیین محل ریشه ها ۲۸	انقباض محوری ۶۱
تفاضلات ۷۸	اوپلر ۱۷۵
	ایتنکن ۱۲۴، ۱۲۷، ۱۳۵

۱۲۹ - در مشتق گیری عددی	۸۳ - پسرو
۶ - ی اندازه گیری	۸۳ - پیشرو
۱۵۹، ۱۴۹، ۲۲، ۲۱، ۹ - ی برشی	۱۳۲، ۱۲۵ - تقسیم شده
۱۶۵	۹۳، ۹۱، ۸۷، ۸۲، ۷۸ - متناهی
۹ - ی بریدن	تقریب
۸۹، ۷۹، ۷۵، ۶۱، ۹ - ی گرد شده	۲۱ - به توابع
۱۴۹، ۱۰۹	۱۵۷ - درجه دوم
۶ - ی گرد کردن	۲۴، ۲۳ - توابع متعامد
۳۲، ۱۸، ۱۳، ۱۱ - ی مجتمع	۱۳، ۱۱ - تولید خطا
۱۱ - ی مطلق	۶۰، ۵۸، ۵۴ - جایگذاری از پایین
۱۸، ۱۳، ۱۱ - ی منتشر شده	۷۸، ۲۸ - جدول
۱۲ - ی نسبی	
درونیایی ۱۱۹، ۱۱۲، ۱۰۶، ۱۰۰، ۷۷	چیشف ۱۶۶، ۱۳۹، ۲۳
۱۲۵	چند جمله ای ۲۵، ۲۶، ۲۳
۱۲۲، ۱۰۰ - خطی	۱۳۷ - تکه ای
۱۰۳، ۱۰۰ - درجه دوم	۱۶۶، ۱۳۹، ۲۳ - چیشف
۱۳۱ - معکوس	۱۰۲، ۱۰۱ - درونیاب
دستگاه معادلات خطی ۷۰، ۶۶، ۶۵، ۵۱	۱۶۶ - لاگور
دستور	۱۶۶، ۱۳۹، ۲۳ - لواندر
۱۶۱ - انتگرال گیری حوزه جزئی	۱۶۶ - های متعامد
۱۶۴ - انتگرال گیری گاوس	۱۶۶ - هر میت
۱۶۲ - تفاضل پسرو نیوتن	۱۲۷، ۱۲۷، ۱۲۲، ۱۱۰ - هم محل
۱۶۲ - تفاضل پیشرو نیوتن	۱۶ - حساب ممیز سیار
۱۱۴ - درونیایی استرلینگک	۲۲ - حوزه همگرایی
۱۳۲، ۱۱۵ - درونیایی اورت	۹ - خبط
۱۱۴ - درونیایی بسل	۱۳۷، ۶۰، ۵ - خطا

سرعت همگرایی ۳۷، ۳۸، ۴۸	- درونبایی لاگرانژ ۱۱۹
سری ۲۱	- درونبایی نیوتن ۱۰۶
- تیلر ۲۱، ۲۳، ۳۸، ۴۲، ۱۱۰، ۱۷۰	- دونقطه‌ای گاوس ۱۶۵
- چبیشف ۲۳	- سه نقطه‌ای گاوس ۱۶۶
- فوریه ۲۳	دقت قاعدهٔ دوزنقه‌ای ۱۵۴
- مجانبی ۲۲	دقت قاعدهٔ سیمپسون ۱۵۸
	دوتایی ۸
عملکرد ۸۲	
- انتقال ۸۲	روش
- تفاضل پسرو ۸۳	- ادمز - بشفورث ۱۷۲
- تفاضل پیشرو ۸۳	- اوپلر ۱۷۰
- تفاضل مرکزی ۸۴	- اینتکن ۱۲۷
- مقدار میانگین ۱۱۲	- تکرار ساده ۴۴، ۴۰
	- تکراری گاوس - سایدل ۶۶
فلوچارت ۴، ۱۷۵	- تکراری نیوتن - رفسون ۴۴
- درونبایی لاگرانژ ۱۸۰	- تک گامی ۱۷۱
- روش تکراری گاوس - سایدل ۱۷۹	- تنصیف ۳۱
- روش تنصیف ۱۷۶	- چند گامی ۱۷۱
- روش رانگک - کوتا ۱۸۴	- حذفی گاوس ۵۱، ۵۳
- روش نابجایی ۱۷۷	- رانگک - کوتا ۱۷۰
- روش نیوتن - رفسون ۱۷۸	- میلن ۱۷۲
- فرمولهای انتگرال گیری گاوس ۱۸۳	- نابجایی ۱، ۳۵، ۴۶
- قاعدهٔ دوزنقه‌ای ۱۸۱	- نقطهٔ میانی ۱۷۱
فهرست منابع ۱۸۵	- وتری ۳۷، ۴۴
	ریشه ۲۶، ۲۸، ۳۱
قاعده	- مضاعف ۳۲
- دوزنقه‌ای ۱۵۲	- مکرر ۳۲
- سیمپسون ۱۵۷، ۱۶۵	ستون امتحان ۵۷، ۷۳

قالب ریاضی ۲	- درجهٔ دوم ۲۶
کشف اشتباهات ۹۳	- دیفرانسیل ۳، ۶، ۱۶۹
کمترین مربعات ۱۳۷، ۱۴۰	- غیرخطی ۲۶
کوادراتور ۱۵۲، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۶۱	- متعالی ۲۷
- گاوسی ۱۶۶	- نرمال ۱۴۱
گرد کردن ۹، ۶	- مقدار اولیه ۱۶۹
ماتریس ۵۳	ممیزسیار ۱۶
- افزوده ۵۳، ۷۱	نما ۸
- ضرایب ۵۳، ۷۰	نمادگذاری علمی ۹
مانتیس ۸	نمایش اعداد ۸
- نرمال شده ۱۶	همگرایی
مانده‌ها ۵۸	- روش تکرار ساده ۴۲
متعالی ۳، ۲۷	- روش تنصیف ۳۲
مشتق ۷۷، ۱۴۷	- روش گاوس - سایدل ۶۸
- جزئی ۱۴۱	- روش نابجایی ۳۷
مشتق گیری عددی ۱۴۷	- روش نیوتن - رفسون ۴۷
مضارب ۵۵، ۶۲	- روش وتری ۳۸
معادلات	- مرتبهٔ دوم ۴۸
- جبری ۳	یکتایی ۱۰۹