

نسبیت خاص و عام و کیهانشناختی

ولفگانگ ریندلر

نسبیت خاص و عام و کیهانشناختی

ولفگانگ ریندلر

ترجمهٔ رضا منصوری، حسین معصومی همدانی

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار ویرایش دوم
۲	پیشگفتار ویرایش اول
۵	۱. طلوع و افول فضای مطلق
۵	۱-۱ تعریف نسبیت
۶	۲-۱ قوانین نیوتون
۷	۳-۱ تبدیل گالیله‌ای
۸	۴-۱ مجموعه همه چارچوبهای لخت
۸	۵-۱ نسبیت نیوتونی
۹	۶-۱ فضای مطلق نیوتون
۹	۷-۱ ایراداتی بر فضای مطلق نیوتون
۱۰	۸-۱ اتر ماکسول
۱۰	۹-۱ اتر ماکسول کجا است؟
۱۱	۱۰-۱ نظریه اتر لورنتس
۱۲	۱۱-۱ اصل نسبیت
۱۳	۱۲-۱ براهینی به سود اصل نسبیت
۱۴	۱۳-۱ نسبیت ماکسولی
۱۴	۱۴-۱ سرچشمه‌های نسبیت عام
۱۵	۱۵-۱ اصل ماخ
۱۶	۱۶-۱ نتایج اصل ماخ
۲۰	۱۷-۱ کیهانشناخت
۲۱	۱۸-۱ جرم لختی و جرم گرانشی

۲۳	۱۹-۱ اصل هم‌ارزی
۲۵	۲۰-۱ اصل هم‌ارزی نیمه‌نیرومند
۲۶	۲۱-۱ پیامدهای اصل هم‌ارزی
۲۹	۲. سینماتیک اینشتینی
۲۹	۱-۲ ویژگیهای اصلی نسبیت خاص
۳۲	۲-۲ دربارهٔ ماهیت قوانین فیزیکی
۳۳	۳-۲ یک استدلال نوعی و قدیمی نسبیتی
۳۴	۴-۲ نسبیت همزمانی
۳۶	۵-۲ شبکهٔ مختصات
۳۸	۶-۲ تبدیل لورنتس
۴۱	۷-۲ خصوصیات تبدیل لورنتس
۴۵	۸-۲ صورتهای هذلولوی تبدیلات لورنتس
۴۷	۹-۲ نمایش نموداری تبدیل لورنتس
۴۹	۱۰-۲ جهان‌نما و جهان‌نگار
۵۰	۱۱-۲ انقباض طول
۵۱	۱۲-۲ پارادوکسهای انقباض طول
۵۳	۱۳-۲ اتساع زمان
۵۶	۱۴-۲ پارادوکس دوقلوها
۵۸	۱۵-۲ تبدیل سرعت
۶۰	۱۶-۲ ویژه شتاب
۶۳	۱۷-۲ نسبیت خاص بدون اصل دوم
۶۶	۳. اپتیک (نورشناخت) اینشتینی
۶۶	۱-۳ پدیدهٔ کشش
۶۷	۲-۳ پدیدهٔ دوپلر
۷۰	۳-۳ ابیراهی و شکل ظاهری اجسام متحرک
۷۵	۴. فضا‌زمان و چاربردارها
۷۵	۱-۴ فضا‌زمان
۷۷	۲-۴ سه‌بردارها
۸۱	۳-۴ چاربردارها

۸۵	۴-۴ چارتانسورها
۸۶	۵-۴ نمودار سه بعدی مینکوفسکی
۸۹	۶-۴ حرکت موج
۹۳	۵. مکانیک ذره نسبیتی
۹۳	۱-۵ حوزه اعتبار قوانین نیوتون
۹۴	۲-۵ چرا گرانش به طور طبیعی در نسبیت خاص نمی‌گنجد
۹۶	۳-۵ جرم لختی نسبیتی
۹۷	۴-۵ صورتبندی چاربرداری مکانیک نسبیتی
۱۰۰	۵-۵ نکته‌ای در مورد چاربردهای گالیله‌ای
۱۰۱	۶-۵ هم‌ارزی جرم و انرژی
۱۰۳	۷-۵ چارچوب مرکز تکانه
۱۰۶	۸-۵ تپله‌های نسبیتی
۱۰۷	۹-۵ انرژی آستانه
۱۰۸	۱۰-۵ سه نیرو و چارنیرو
۱۱۱	۱۱-۵ امواج دوبروی
۱۱۳	۱۲-۵ فوتونها. پدیده کامپتون
۱۱۵	۱۳-۵ تانسور انرژی غبار
۱۱۸	۶. نسبیت و الکترودینامیک
۱۱۸	۱-۶ تبدیل بردارهای میدان
۱۲۲	۲-۶ انحراف مغناطیسی ذرات باردار
۱۲۳	۳-۶ میدان حاصل از بار در حال حرکت یکنواخت
۱۲۵	۴-۶ میدان یک جریان مستقیم بینهایت
۱۲۸	۷. مفاهیم اساسی نسبیت عام
۱۲۸	۱-۷ سطوح خمیده
۱۲۸	۲-۷ فضاهاى خمیده با بعد بیشتر
۱۳۴	۳-۷ فضاهاى ریمانی
۱۳۹	۴-۷ برنامه‌ای برای نسبیت عام
۱۴۲	۵-۷ اثر گرانشی دوپلر
۱۴۴	۶-۷ متریک میدانهای ایستا

۱۴۹	۷-۷ ژئودزیکهای میدان ایستا
۱۵۳	۸. فرمولبندی رسمی نسبیت عام
۱۵۳	۱-۸ تانسورها در نسبیت عام
۱۶۳	۲-۸ معادلات میدان خلا نسبیت عام
۱۶۷	۳-۸ جواب شوارتس شیلد
۱۷۵	۴-۸ پرتوها و مدارها در فضای شوارتس شیلد
۱۸۳	۵-۸ افق شوارتس شیلد، و رمیش گرانشی، و سیاهچاله‌ها
۱۹۲	۶-۸ فضای کروسکال و میدان شتاب یکنواخت
۲۰۰	۷-۸ یک "اثبات" نسبیت عامی برای $E = mc^2$
۲۰۳	۸-۸ یک موج گرانش با جبهه تخت
۲۱۳	۹-۸ قوانین فیزیک در فضا زمان خمیده
۲۱۸	۱۰-۸ معادلات میدان در حضور ماده
۲۲۵	۱۱-۸ از متریک شوارتس شیلد اصلاح شده تا فضای دوسیه
۲۳۱	۱۲-۸ تقریب خطی بر نسبیت عام
۲۳۸	۹. کیهانشناسی
۲۳۸	۱-۹ واقعتهای اساسی
۲۴۴	۲-۹ اشکالات آشکار کیهانشناخت پیش-نسبیتی
۲۴۸	۳-۹ نسبیت کیهانشناختی: اصل کیهانشناختی
۲۵۰	۴-۹ مدل میلن
۲۵۵	۵-۹ متریک روبرتسون-واکر
۲۶۰	۶-۹ مدل‌های لاستیکی، انتقال به سرخ، و افق
۲۶۸	۷-۹ مقایسه با رصد
۲۷۳	۸-۹ دینامیک کیهانی بر طبق نظریه شبه-نیوتونی
۲۷۷	۹-۹ دینامیک کیهانی بر مبنای نسبیت عام
۲۸۲	۱۰-۹ مدل‌های فریدمان
۲۹۲	۱۱-۹ باز هم مقایسه با رصد
۲۹۷	۱۲-۹ واریسی اصل ماخ
۳۰۰	پیوست الف
۳۰۰	مؤلفه‌های تانسور خمش برای متریکهای قطری

پیشگفتار ویرایش دوم

اکنون که باز می‌نگریم، ویرایش اول این کتاب صرفاً مثل طرح یک کتاب به نظر می‌رسد. ویرایش حاضر، اگر محصول نهایی نباشد، تقریب خوبی از آن است. فهرست مطالب تغییر اندکی نشان می‌دهد؛ زیرا سازمان اولیه کتاب رضایت‌بخش بوده است. هدف اصلی کتاب — اینکه نسبت به طور مفهومی ارائه شود — نیز تغییر نکرده است. برای ریچارد کوران (آن‌گونه که پاسکال یوردان گزارش می‌کند و نمونه می‌آورد) این اعتقاد راسخی شده بود که اثبات ایده‌آل از طریق درک کردن است نه محاسبه، و برای من نیز این اعتقاد بسیار خوشایند بوده است. هر جا که محاسبه ضروری است، کوشیده‌ام آن را تا حد امکان به طور واضح ارائه کنم، تا مانعی در راه درک مطلب پیش نیاید. یکی از تغییرهای واضح در این ویرایش اضافه شدن بخش جدیدی درباره فضای کروسکال است، دیگری درباره امواج گرانشی تخت، و سومی درباره نسبت عام خطی شده؛ همچنین تمرینهای زیادی افزوده شده است، و نیز دو پیوست: یکی فهرست مؤلفه‌های انحنا برای متریک قطری (عامتر از "فرمول دینگله" قبلی)، و دیگری معادلات ماکسول به شکل تانسوری. البته عمده‌ترین تغییرها و افزوده‌ها در لابه‌لای متن اعمال شده است. بخشهای زیادی کاملاً از نو نوشته شده است، برهانهای زیادی منسجم‌تر شده است، مطالب جنبی افزوده شده است، و البته تحولات جدید هم منظور شده است. با وجود این کاملاً آگاهم که، در اثر زیادی بار اطلاعات، کتابی غیر دائرةالمعارفی مانند این کتاب به راحتی می‌تواند بی‌واسطگی و وضوح مطالب خود را از دست بدهد. بنابراین، دست آخر، در انتخاب مطالب جدید تابع اشتیاقی بوده‌ام که احساس می‌کرده‌ام با آن بتوانم این مطالب را ارائه کنم.

از تمام کسانی که زحمت نقد ویرایش اول را کشیده‌اند متشکرم. به ویژه از بانس هوفمان، کینث یاکوب، و روبرت گودی. این ویرایش جدید را به آنها خیلی مدیونم. مضافاً باید تشکر کنم از یورگن اهلرز، به خاطر حمایت پیوسته‌ی وی از این پروژه، و به خاطر خواندن بخشی از ویرایش جدید با دقت انتقادی. همچنین ممنونم از ایور روبینسون، رومان سکسل، و بتاتریس تینسلی برای گفتگوهای گسترده‌ای که منجر به ایده‌های جدید در بعضی بخشهای کتاب شد.

دالاس، بهمن ۱۳۵۶ / فوریه ۱۹۷۷

ولفگانگ ریندلر

پیشگفتار ویرایش اول

این کتاب کوششی است تا نظریهٔ نسبیت را به تمامی دسترس دانشجویان سالهای آخر دورهٔ کارشناسی قرار بدهد، و در عین حال به اندازهٔ کافی مطالب جدید و ساده‌سازی برهانهای قدیمی را در بردارد تا معلم خیره را خسته نکند. سهمی که برای نسبیت خاص، نسبیت عام، و کیهانشناسی در نظر گرفته‌ایم تقریباً مساوی است. گرچه بهتر است کتاب در یک سال تدریس شود، اما می‌توان با حذف معقول بعضی مطالب آن را در یک نیمسال هم تدریس کرد. در هر صورت، امیدوارم که سبک و سطح کتاب، جدا از ملاحظات برنامه‌ریزی درسی، خوانندگان و سיעتری را جلب کند. نسبیت عام، یعنی نظریهٔ نوین گرانش که در آن ذره‌های آزاد در امتداد "مستقیم‌ترین" خط ممکن در فضا-زمان خمیده حرکت می‌کنند، و کیهانشناسی، با دینامیک آن برای کل عالم خمیده، نه تنها برای پیش متعادل دانشمند از جهان ضروری است، بلکه برخی از بزرگترین دستاوردهای فکری در فیزیک نوین را عرضه می‌کند. اگر چه گاهی زینتی محسوب می‌شود، و در اثر فشار تخصص‌گرایی از برنامهٔ درسی مقطع تحصیلات تکمیلی حذف می‌شود. نسبیت خاص به زحمت از این مهلکه جان به در برده است، و تنها به‌عنوان یک درس تدارکاتی، با کمترین تأکید بر ایده‌های شگفت‌آورش عرضه می‌شود. پس چه فرصتی بهتر از اینکه از این موضوعها به خاطر خودشان لذت برده شود نه به‌عنوان انجام وظیفهٔ دانشجویی! حتی نسبیت عام هم، با وجود شهرتش در موانع ریاضیاتی، در این مرحله دستیافتنی است. هر کس که حساب دیفرانسیل و انتگرال را تا مشتق‌گیری جزئی، بردارها را تا مرحلهٔ مشتق‌گیری از آنها، و مفیدترین روش تقریب یعنی قضیهٔ دو جمله‌ای را بلد باشد، باید بتواند این کتاب را بخواند. سطح ریاضی کتاب بسیار تدریجی رشد می‌کند. چار بردارها در میانهٔ راه نسبیت خاص معرفی می‌شوند، و به‌اندازهٔ کافی به کار برده می‌شوند تا شکی نماند که آنها وسیله‌اند نه تئین. و البته، هیچ رهیافت جدی به نسبیت عام بدون تانسورها امکان ندارد. به همین دلیل، تانسور در محل مناسب (در فصل ۸) وارد شده است، اما تا حد ممکن نامشهود، تا آنجا که آنهایی که بنابر عادت چند پاراگراف را رج می‌زنند احتمالاً متوجه آن نخواهند شد. با وجود این، خوانندهٔ علاقه‌مند، که آمادهٔ تأمل و تفکر است، به اندازهٔ کافی به حساب تانسوری برمی‌خورد تا به درک بنیادی تمام برهانهای تانسوری نسبیتی برسد. تجربهٔ برخورد با تانسورها و هندسهٔ ریمانی در عمل ممکن است او را به یادگیری بیشتر این مباحث برانگیزد.

در ترتیب ارائهٔ مطالب این کتاب سنت‌شکنی شده است. بجز چند استثناء، معمولاً تعریف

نیوتون از چارچوب لخت برای نسبیت خاص هم پذیرفته می‌شود، و اصل هم‌ارزی هم تا جایی که در نسبیت عام به آن نیاز نباشد وارد نمی‌شود. آنوقت است که دانشجو ناگهان درمی‌یابد که در زمینه‌ای غلط کار می‌کرده است، یعنی می‌فهمد که چارچوبهای نیوتونی چارچوبهای مناسب برای نسبیت خاص نیستند. عذر این روش را تا هنگامی می‌توان پذیرفت که به نسبیت عام، و به‌خصوص به اصل هم‌ارزی، به دیده تردید نگاه شود. وقتی آنها را پذیرفتیم، که اکثر متخصصان امروزی پذیرفته‌اند، بهتر است که از همان ابتدا تصویر سازگاری ارائه بدهیم. این است که در این کتاب نه تنها اصل هم‌ارزی، که حتی اصل مایخ (با قدری محافظه‌کاری)، و قدری هم کیهانشناسی پیش‌قرول نسبیت خاص شده است تا آن‌را در منظر مناسبی قرار بدهد. سپس به دقت به نسبیت خاص پرداخته می‌شود، با گوشه چشمی دائمی به فیزیک، اما تأکید بر ایده‌ها، نه بر جزئیات تجربی قدری همپوشی با کتاب قبلی من نسبیت خاص اجتناب‌ناپذیر بوده است، اما تکرار واقعی بسیار کم است، و بسیاری مباحث مشترک به گونه‌ای دیگر بررسی شده است. مطمئن هستم دوستداران کتاب "نسبیت خاص" من از خواندن این قسمتها نیز سود خواهند برد. بعد فصل "ساده" ای در باب نسبیت عام می‌آید، کم و بیش تا حدی که بدون استفاده از تانسورها می‌توان رفت. فصل بعدی (فصل ۸) احتمالاً سخت‌ترین فصل کتاب است، اما از مطالب بعد از بخش ۸-۴ می‌توان در مرور اول چشم پوشید، مگر نگاهی به بخش ۸-۱۰. فصل آخر، در باب کیهانشناسی، گرچه دقیق و با جزئیات است، دوباره آسانتر می‌شود. آنهایی که علاقه‌شان در درجه اول به این زمینه است می‌توانند آن‌را مستقل از بقیه کتاب بخوانند. در پایان متن مجموعه‌ای بیش از ۱۳۰ تمرین وجود دارد که به دقت جمع‌آوری شده است. به شدت توصیه می‌کنم که حتی خوانندگان "گذری" هم به این تمرینها توجه کنند. گرچه حل کامل آنها اغلب ذکاوت خاص می‌طلبد، اما حتی خواندن دقیق آنها متضمن اشراف مفیدی خواهد بود. به‌علاوه، دانشجو باید به کنجکاوی خود میدان کامل بدهد و خود را عادت بدهد که دائماً برای خودش مسئله کشف و حل بکند. سرانجام یک هشدار: در چندین بخش یکاها به گونه‌ای انتخاب شده است تا سرعت نور یک بشود، باید این‌را در هنگام مقایسه فرمولها به‌خاطر داشت.

این یادداشتها کامل نخواهد بود مگر با ابراز تشکر صمیمانه از دوستانم استاد یورگن اهلرز که پیش‌نویس کتاب را با تمام جزئیاتش خواند، و پیشنهادهای اصلاحی بیشماری ارائه کرده است، و من با خوشوقتی آنها را پذیرفته‌ام. همچنین از استاد کارلو کاتانتو و هیئت علمی مؤسسه ریاضی "گوئیدو کاستل نووویو"ی دانشگاه رم، که بخشی از این کتاب در این مؤسسه نوشته شد، به خاطر میزبانی گرم و بحثهای آموزنده‌شان بسیار ممنونم. از مقامات "مرکز جنوب غربی برای مطالعات پیشرفته" نیز به خاطر اعطای فرصت مطالعاتی تشکر می‌کنم.

رم، اردیبهشت ۱۳۴۸ / آوریل ۱۹۶۹

ولفگانگ ریندلر

طلوع و افول فضای مطلق

۱-۱ تعریف نسبیت

نظریه نسبیت در واقع نظریه‌ای است فیزیکی از فضا و زمان؛ ما عمداً فیزیکی می‌گوییم و نه فلسفی، زیرا این نظریه را می‌توان به طور تجربی آزمود. چون تمام فیزیک در فضا و زمان روی می‌دهد، پس اغلب قوانین بنیادی فیزیک باید اصلاح و همگام شوند با این "تقارنهای" جدید فضا و زمان. این امر فیزیک نسبیتی را پیش می‌آورد که پیشگوییهای غریبی می‌کند، ولی با وصف این تجربه آن را به خوبی تأیید کرده است.

در آغاز معنی اصلی نسبیت در فیزیک، نفی فضای مطلق بود. اما این اصطلاح اکنون به معنی دو نظریه معروف اینشتین، نسبیت خاص (۱۹۰۵) و نسبیت عام (۱۹۱۵) به کار می‌رود. نسبیت خاص، فضای مطلق را به مفهوم ماکسولی آن به عنوان "اتر" — یعنی محل نور و به طور کلی میدانهای الکترومغناطیسی — نفی کرد، اما نسبیت عام فضای مطلق به مفهوم نیوتونی آن را، یعنی معیار بی‌شتابی، نیز نابود ساخت. (مهمتر اینکه، نظریه‌های اینشتین بدون قصد و نقشه قبلی، مفهوم زمان مطلق را نیز نفی کرد. دربارهٔ نکتهٔ اخیر در فصل بعد بحث خواهیم کرد.) چون این مفاهیم بنیادی‌اند، فصل اول را به بحث کوتاهی اختصاص خواهیم داد که حول سه پرسش زیر دور می‌زند: فضای مطلق چیست؟ چرا باید نفی شود؟ چگونه باید نفی شود؟

تعریف جدیدتر و مثبت نسبیت از نظریه‌های موجود نسبیت حاصل شده است. طبق این تعریف،

نسبیت هر نظریه فیزیکی، با گروه تبدیلیایی بیان می شود که قانونهای آن نظریه را تغییر نمی دهند و از این رو، مثلاً تقارنهای فضایی و زمانی آن نظریه را توصیف می کنند. مثلاً چنانکه خواهیم دید، مکانیک نیوتونی دارای نسبیت گروه گالیله ای است، نسبیت خاص دارای نسبیت گروه پوانکاره (یا گروه "عام" لورنتس) است. نسبیت عام دارای نسبیت گروه کامل تبدیلیهای هموار یک به یک است، و کیهانشناسیهای مختلف دارای نسبیت تقارنهای گوناگونی هستند که عالم بزرگ مقیاس از آن برخوردار است. حتی نظریه ای که فقط در فضای مطلق اقلیدسی اعتبار داشته باشد، به شرط آنکه این فضا از لحاظ فیزیکی همگن و همسانگرد باشد، دارای یک نسبیت گروه چرخشها و جابه جاییهاست.

۲-۱ قوانین نیوتون

سه قانون نیوتون در مکانیک را یادآوری می کنیم، که قانون اول آن (قانون گالیله) در واقع حالت خاصی از قانون دوم است:

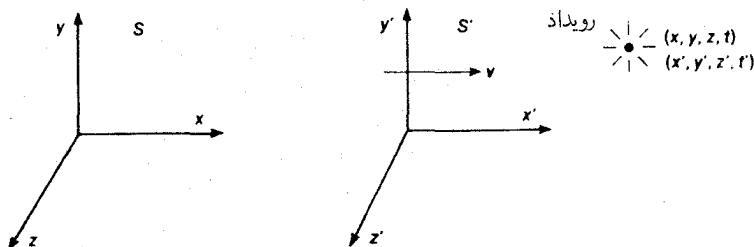
الف) ذرات آزاد با سرعت ثابت حرکت می کنند (یعنی با شتاب صفر، یا به عبارت دیگر، با سرعت ثابت در امتداد خط راست).

ب) نیروی برداری وارد بر یک ذره برابر است با حاصلضرب جرم آن در شتاب برداری آن: $f = ma$. (این قانون صرفاً تعریف نیرو نیست، زیرا منشأ نیروهای مختلف از قوانین جداگانه ای تبعیت می کند، مثلاً قانون هوک، قانون کولن، و حتی قانون سوم نیوتون.)

ج) نیروهای کنش و واکنش برابر و مختلفالعلامت اند، مثلاً اگر ذره A نیروی f را بر ذره B وارد کند، B نیز نیروی $-f$ را بر A وارد می کند. (اگر کنش از راه دور صورت گیرد، فرض زمان مطلق، یعنی همزمانی مطلق، در این قانون مستتر است.)

قوانین فیزیکی معمولاً نسبت به یک چارچوب مرجع که تعریف کمیات فیزیکی ای چون سرعت و شتاب و غیره را امکانپذیر می سازد، بیان می شوند. از میان چارچوبهای مرجع، چارچوبهای صلب بر چارچوبهای دیگر مرجع اند و در میان چارچوبهای صلب، چارچوبهای لخت ممتازند. قوانین نیوتون در چارچوبهای نوع اخیر اعتبار دارند.

چارچوب مرجع صلب کلاسیک، تعمیم تخیلی جسم صلب است. مثلاً زمین چارچوب صلبی را در سراسر فضا به دست می دهد که مرکب از تمامی نقاطی است که "به طور صلب" نسبت به زمین و نسبت به یکدیگر ساکن اند. با انتخاب سه صفحه دو به دو برهم عمود در این چارچوب، و اندازه گیری x, y, z به عنوان فاصله از این صفحات، می توانیم به شیوه های مختلف، یک دستگاه مختصات متعامد دکارتی، S ، را به چنین چارچوبی وابسته سازیم. همچنین باید مختص زمانی t نیز تعریف شود تا از این دستگاه بتوان برای سیاهه کردن رویدادها استفاده کرد. چارچوب صلبی را که از چنین مختصاتی برخوردار باشد چارچوب دکارتی می نامیم. توصیف بالا بر این فرض مبتنی است که هندسه چنین چارچوبی اقلیدسی است، و این امر تا سال ۱۹۱۵ مسلم شمرده می شد. قانون اول نیوتون آزمونی است برای مشخص کردن و بیرون کشیدن چارچوبهای لخت از



شکل ۱-۱

میان چارچوبهای صلب: هنگامی چارچوب صلب را لخت می‌نامیم که ذرات آزاد نسبت به آن بی‌شتاب حرکت کنند. اما، چون همه ذرات تحت تأثیر گرانش‌اند، هیچ ذره‌ای در نزدیکی یک جرم سنگین، "آزاد" (از نیرو) نیست. از این رو معیار حرکت یکنواخت فقط در مناطقی از چارچوب صادق است که "به اندازه کافی از هر ماده جاذبی دور باشند".

از لحاظ تجربی، چارچوب "ثوابت" مدتها، با دقت قابل ملاحظه‌ای، لخت شمرده می‌شد و چارچوب مرجع اساسی برای قوانین نیوتون به شمار می‌رفت. امروزه که می‌دانیم حتی کهکشان ما می‌چرخد و عالم انبساط می‌یابد، می‌توان به جای "ثوابت" چارچوب صلبی را نشان داد که در آن، از دید ما، همه کهکشانها در امتداد شعاع دور می‌شوند، یعنی چارچوبی که نسبت به عالم دور دست متقارن است. وقتی از چارچوب "ثوابت" سخن می‌گوییم، در واقع منظور ما چارچوب اخیر است.

۱-۳ تبدیل گالیله‌ای

حال دو چارچوب دکارتی $S(x, y, z, t)$ و $S'(x', y', z', t')$ را، همانطور که در شکل ۱-۱ نشان داده شده است، در "پیکربندی معیار" در نظر می‌گیریم. S' در راستای x چارچوب S با سرعت یکنواخت v حرکت می‌کند و محورهای متناظر S' و S ، که در زمان $t = t' = 0$ بر هم منطبق بوده‌اند، در تمام مدت حرکت با هم موازی‌اند. فرض بر این است که یكاهای یکسانی برای فاصله و زمان در هر دو دستگاه به کار می‌رود. مثلاً می‌توان ساعتها را در هر دو چارچوب ارتعاشات اتم سزیم همزمان کرد، و خط‌کشها را می‌توان با طول موج یک خط طیفی مورد توافق، به شیوه‌ای که با روشهای تداخل معین می‌شود، مدرج ساخت. فرض کنید که مختصات یک رویداد (مثلاً جرقه زدن یک چراغ یا برخورد دو ذره) نسبت به S و S' ، به ترتیب (x, y, z, t) و (x', y', z', t') باشد. در این صورت، چون vt فاصله بین دو مبدأ مکانی است روابط کلاسیک (یا "مقبول فهم متعارف") بین دو مجموعه مختصات با تبدیل گالیله‌ای با صورت معیار زیر به دست می‌آید

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1-1)$$

$t' = t$ جهانی بودن، یا مطلق بودن، زمان را بیان می‌کند و معمولاً مسلم گرفته می‌شود. مشتق‌گیری از ۱-۱ فوراً ما را به تبدیل کلاسیک سرعت رهنمون می‌شود، که مؤلفه‌های سرعت ذرات متحرک را در S به مؤلفه‌های سرعت در S' مربوط می‌کند:

$$u'_1 = u_1 - v, \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3 \quad (2-1)$$

که در آن

$$(u_1, u_2, u_3) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$$

و

$$(u'_1, u'_2, u'_3) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$$

بنابراین اگر من با سرعت ۲ کیلومتر در ساعت (u'_1) در اتوبوسی راه بروم که با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت (v) حرکت می‌کند، سرعت من نسبت به جاده (u_1)، ۳۲ کیلومتر در ساعت خواهد بود. این امر در نسبیت صادق نیست.

۴-۱ مجموعه همهٔ چارچوبهای لخت

اگر چارچوب S در شکل ۱-۱ لخت باشد، S' نیز لخت است، زیرا رابطهٔ ۱-۱ معادلات خطی حرکت ذرات را در S به معادلات خطی مشابهی در S' تبدیل می‌کند و چارچوب مرجع دکارتی‌ای که معادلات حرکت ذرات در آن خطی باشند، لخت است. به عکس، هر چارچوب لخت باید نسبت به هر چارچوب لخت دیگر، حرکت یکنواخت (حرکتی با سرعت برداری ثابت و بدون چرخش) داشته باشد، زیرا اگر حرکت نسبی نایکنواخت باشد، قانون اول نیوتون در دو چارچوب صدق نخواهد کرد. بنابراین ردهٔ چارچوبهای لخت متشکل است از چارچوب بنیادی ثابت به اضافهٔ همهٔ چارچوبهای دیگری که نسبت به آن حرکت یکنواخت دارند. طبق نظر نیوتون، همهٔ این چارچوبهای لخت گسترش زمانی و مکانی نامحدود دارند، یعنی t, z, y, x از منهای بینهایت تا به اضافهٔ بینهایت تغییر می‌کنند.

۵-۱ نسبیت نیوتونی

نه فقط قانون اول نیوتون بلکه قانون دوم و قانون سوم او در تمامی چارچوبهای لخت معتبرند. زیرا در نظریهٔ نیوتون هم f و هم m ، طبق اصل موضوع او، بین چارچوبهای لخت ناورد هستند (و تجربه نیز این نکته را — دست کم به طور تقریبی — تأیید می‌کند) و می‌توان دید که a نیز تحت تبدیل گالیه ناورد است. بنابراین مکانیکی که بر این سه قانون مبتنی باشد در تمامی چارچوبهای لخت یکسان است. نیوتون، مانند گالیه، این واقعیت را با مثال کشتی‌ای نشان داد که چه ساکن

باشد و چه در حرکت یکنواخت، همهٔ حرکات و همهٔ پدیده‌های مکانیکی به شیوهٔ یکسانی در آن رخ می‌دهند. این خصوصیت مکانیک نیوتونی را اغلب نسبیت نیوتونی (یا گالیله‌ای) می‌خوانند.

۱-۶ فضای مطلق نیوتون

به دلیل این "نسبیت"، حرکت یکنواخت چارچوب لخت را نمی‌توان در داخل آن با آزمایشهای مکانیکی، که خود تابع نظریهٔ نیوتون‌اند، تشخیص داد. اما شتاب مطلق است: هر چند ممکن است من شک داشته باشم که کشتی‌ام در حرکت است یا هنوز در لنگرگاه است؛ اگر یکبار با کوه یخی برخورد کند، هیچ شکی در این موضوع نخواهم داشت. طبق نظر نیوتون، ذره در برابر حرکت یکنواخت، با هر سرعتی که باشد، مقاومت نمی‌کند، اما در برابر هرگونه تغییری در سرعت، یعنی شتاب، مثبت یا منفی، مقاومت می‌کند. این نکته را قانون دوم نیوتون دقیق بیان می‌کند: ثابت m در معادلهٔ $f = ma$ معیاری است برای سنجش لختی ذره، یعنی مقاومت آن در برابر شتاب. و در اینجا شاید پرسید: شتاب نسبت به چه؟ پاسخ این سؤال از لحاظ عملی ساده است: نسبت به هر یک از چارچوبهای لخت. اما این پاسخ از لحاظ فیزیکی و از لحاظ ذوقی به هیچ‌وجه خرسندکننده نیست و نیوتون از این نکته کاملاً آگاه بود. چه چیزی باعث می‌شود که ردهٔ چارچوبهای لخت، به عنوان معیار بی‌شتابی، از دیگر چارچوبها متمایز شوند؟ نیوتون پاسخی برای این پرسش نیافت و در عوض اصل وجود فضای مطلق را وضع کرد. فرض بر این است که این فضای مطلق با هر ذره‌ای برهم کنش دارد، به نحوی که در برابر شتاب یافتن آن مقاومت می‌کند. نیوتون فضای مطلق را با چارچوب مرکز جرم منظومهٔ شمسی یکی گرفت و اخلاف او آن را با چارچوب ثوابت یکسان دانستند. اما از لحاظ منطقی می‌توان آن را با هر چارچوب لخت دیگری فرض کرد.

۱-۷ ایراداتی بر فضای مطلق نیوتون

مفهومی که نیوتون از فضای مطلق داشت همواره منتقدانی داشته است، از هویگنس و لایب‌نیتس و اسقف برکلی، که حدوداً معاصر نیوتون بودند، تا ارنست ماخ در قرن نوزدهم و اینشتین در قرن بیستم. همهٔ اینها براهین کلی علیه فضای مطلق اقامه کرده‌اند:

الف) فضای مطلق صرفاً "رضعی و من‌درآوردی" است و هیچ چیزی را توضیح نمی‌دهد. و آن را می‌توان به نظر اولیهٔ کپلر مانند کرد که می‌گفت فرستگان سیارات را در مدارشان به پیش می‌رانند، یا به تمثیل نوین شیاما^۱ که برای توضیح راز آبرسانایی، که تا این اواخر ناگشوده بود، "شیطانک"هایی را در درون فلزات دست‌اندرکار می‌شمرد.

ب) هیچ راه یکتایی برای مشخص کردن فضای مطلق نیوتون، از میان ردهٔ نامتناهی چارچوبهای لخت، وجود ندارد.

ج) "تصور چیزی که کنش دارد اما مورد کنش واقع نمی‌شود [فضای مطلق] با فهم علمی انسان تعارض دارد." این الفاظ از اینشتین است اما او اصل فکر را به ماخ نسبت می‌دهد، و در هر حال نیرومندترین اشکالی است که به فضای مطلق گرفته شده است. این اشکال نه فقط فضای مطلق را (که نظریه نیوتون می‌تواند بی‌آن سرکند)، بلکه مجموعه همه چارچوبهای لخت را مورد سؤال قرار می‌دهد. اما این حقیقت به قوت خود باقی است که چارچوبهای لخت بسیار واقعی‌اند. بدین معنی که در نظریه نیوتون، و در واقع در تجربه ما، نقشی کانونی دارند. اما نظریه نیوتون هیچ توجیه قانع‌کننده‌ای برای وجود آنها به دست نمی‌دهد. گیریم دو کره کشسان از محور مشترکی آویزانند. یکی از آن دو می‌چرخد و "شکم می‌دهد" اما دیگری ساکن است و تغییر شکل نمی‌یابد؛ دشوار می‌توان دریافت که این دو کره چگونه "پی می‌برند" که کدام یک می‌چرخد و بنابراین باید شکم بدهد.

۸-۱ اتر ماکسول

مدتی چنین می‌نمود که "اتر" ماکسول می‌تواند با فضای مطلق نیوتون یکی شمرده شود و بنابراین جوابی به اشکالات بالا بدهد. چنانکه می‌دانیم، در نظریه ماکسول یک ثابت c پیدا می‌شود که بعد سرعت دارد، و تعریف اصلیش نسبت یکای بار الکتروستاتیکی بر یکای بار الکترودینامیکی است و آن را می‌توان با آزمایشهای ساده آزمایشگاهی، که در آن بار و جریان دخالت دارند، تعیین کرد. علاوه بر این، نظریه ماکسول پیش‌بینی کرد که اختلال میدان الکترومغناطیسی در خلأ با همین سرعت c انتشار می‌یابند؛ به عبارت دیگر، وجود امواج الکترومغناطیسی را پیش‌بینی کرد. نکته حیرت‌انگیز این بود که c درست با سرعتی که برای حرکت نور در خلأ شناخته شده بود، تطابق داشت و ماکسول بر این پایه فوراً حدس زد که نور باید موج الکترومغناطیسی باشد. (در آن زمان، c هنوز بقیه فیزیک را تصرف نکرده بود؛ نشانه بخت بد ماکسول بود اگر معلوم می‌شد که نور موج گرانشی است!) ماکسول برای آنکه محیطی برای چنین امواجی، و نیز برای هرگونه "گرنش" الکترومغناطیسی بیابد، مفهوم قدیمی "اتر درخشان" را از گور بیرون کشید. فرض این نکته که چارچوب "اتر ساکن" بر چارچوب "ثوابت" منطبق است، معقول به نظر می‌آمد.

۹-۱ اتر ماکسول کجا است؟

موفقیت عظیم نظریه ماکسول تا حدود سال ۱۸۶۰/۱۲۴۰، دیگران را به تلاش شدید برای یافتن شاهد مستقیمی بر وجود اتر، واداشت. به ویژه سعی می‌شد که "رانس اتر" نسبت به زمین، یعنی سرعت زمین نسبت به اتر هنگام گردش به دور خورشید، تعیین شود. معروفترین این آزمایشها، آزمایش مایکلسون و مورلی است (۱۸۸۷)، که در آن یک علامت نوری یک بار در جهتی که برای رانش اتر فرض می‌شد و بار دیگر در جهت عمود بر آن، از چشمه‌ای به آینه‌ای تابانده می‌شد و بازتاب می‌یافت، و قصدشان این بود که به کمک روشهای ظریف تداخل، یک تفاوت زمانی میان حرکت در این دو جهت اندازه‌گیری کنند. تمثیل معروف شناگری که در رودی شنا می‌کند، اساس این

آزمایش را روشن می‌سازد: رفت و برگشت با شنا در عرض رودخانه کمتر از رفت و برگشت همان مسافت با شنا در امتداد جریان آب، طول می‌کشد (مسائل ۱-۱ و ۱-۲ را ببینید). اما مایکلسون و مورلی موفق به ثبت هیچ‌گونه تفاوت زمانی‌ای نشدند. چون سرعت مداری زمین 3^0 کیلومتر در ثانیه است، فارغ از نحوه جریان اتر در درون منظومه شمسی می‌توان انتظار داشت که رانش اتر دست‌کم در لحظه‌ای از سال، به این اندازه باشد، و دستگاه مایکلسون و مورلی به خوبی قابلیت آن را داشت که چنین رانشی را ثبت کند. آزمایشهای بسیار بعدی، که به همان دقت و ظرافت طرح شده بودند، همه دریافتن رانش اتر ناکام شدند. این تبیین سطحی و سردستی که زمین اتر مجاور خود را تماماً با خود "می‌کشد"، به دلیل ابراهمی رصد شده نور ستاره‌ها در خور اعتنا نبود. بنابراین کم‌کم معلوم شد که اتر ماکسول به اندازه فرشتگان فرضی کیپلر در تبیین پدیده‌های مشاهده شده "بی‌فایده" است. علاوه بر این، نظریه الکترومغناطیسی با معمای پیچیده‌ای روبرو شد: هر طور که دنبال نور "بدویم"، سرعت نور نسبت به ما تغییر نمی‌کند و این نحوه رفتار از دیدگاه سینماتیک کلاسیک کلاً محال و بی‌معنی است.

۱-۱۰ نظریه اتر لورنتس

نظریه اتر لورنتس در حدود ۱۹۰۹ راهی برای گریز از این مشکلات نشان داد.^۱ از لحاظ منطقی، این نظریه باید مقدم بر نظریه نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵) می‌بود، اما به یک اعتبار فقط نیمی از آن پیش از نظریه اینشتین تکوین یافت.^۲ این نظریه مبتنی بود بر فرض انقباض طول و اتساع زمان. فیتز جرالده در سال ۱۸۸۹^۳ و مستقل از او لورنتس در سال ۱۸۹۲ فرض کردند که اگر جسمی درون اتر با سرعت v در حرکت باشد طولش در امتداد حرکت به اندازه ضریب $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ کاهش می‌یابد، و این نکته آزمایش مایکلسون-مورلی را "تبیین" می‌کرد (تمرینهای ۱-۱ و ۱-۲). سپس لارمور در ۱۸۹۸ و باز هم مستقل از او لورنتس پیش از ۱۹۰۴ — هنگام جستجو برای یافتن تبدیلی که معادلات ماکسول را تغییر ندهد — یک تبدیل زمانی کشف کردند که می‌شد آن را چنین تفسیر کرد که ساعت‌هایی که با سرعت v درون اتر حرکت می‌کنند، به اندازه همان ضریب γ کند کار می‌کنند (یعنی عقب می‌مانند). این نکته می‌توانست نتیجه منفی آزمایشهایی چون آزمایش کندی-تورندایک^۴ را تبیین کند — این آزمایش شبیه آزمایش مایکلسون و مورلی است با این تفاوت که دو ساق آن با هم مساوی نیستند و چند هفته ادامه می‌یابد تا تغییرات رانش اتر نیز مورد آزمایش قرار گیرد (تمرین ۱-۳). اما این‌گونه آزمایشها تا مدتها بعد (۱۹۳۲) انجام نگرفت و لارمور و لورنتس به تعبیر فیزیکی معادله خود پی نبردند و آن را فقط "فوت کوزه‌گری" ریاضی پنداشتند. فقط بعد از اینکه اینشتین انقباض طول و اتساع زمان را بر مبنای دیگری کشف کرد، لورنتس این دو پدیده را به عنوان دو فرضیه همزاد، که نظریه اتر او بر آنها مبتنی بود، پذیرفت و به کار برد. ذکر این نکته از اهمیت کار سلف

1. Erlichson H, 1973, *Am J Phys*, **41**, 1068. 2. Rindler W, 1970, *Am J Phys*, **38**, 1111. 3. Brush S G, 1967, *Isis*, **58**, 230. 4. Kennedy-Thorndike

بزرگ اینشتین نمی‌گاهد بلکه موانعی را که بر سر راه اندیشه‌های انقلابی واقعی هست نشان می‌دهد. تا مدتی نظریه لورنتس راه دیگری در برابر نظریه اینشتین محسوب می‌شد، زیرا از لحاظ مشاهداتی با آن هم‌ارز بود و کمتر از آن با پیشداوریهای کلاسیک تعارض داشت. اما از آن بسیار کمتر زیبا بود و نکته مهمتر اینکه کمتر از آن به نتایج جدید راه می‌برد. نظریه لورنتس هر چند مبتنی بر چارچوب مرجع اتر است، اما تا آنجا که پیش‌بینیهای مشاهده‌پذیر گواهی می‌دهند، به تقارن بین چارچوبهای لخت منجر می‌شود، زیرا از فرض انقباض طول و اتساع زمان نسبت به اتر، این نتیجه به دست می‌آید که میله‌ها و ساعتی که با سرعت v در درون هر چارچوب لخت حرکت می‌کنند، به نظر می‌آید که با همان ضریب $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ نسبت به آن چارچوب کوتاه می‌شوند و کند کار می‌کنند. بنابراین، این نظریه در معرض اشکالی شبیه اشکال (ب) بخش ۱-۷ است.

۱-۱۱ اصل نسبیت

راه حل اینشتین برای معمای اتر قاطعتر بود، او گرهی را که با دست باز نمی‌شد با شمشیر گشود و در اصل نسبیت معروف خود اظهار داشت که "همه چارچوبهای لخت برای انجام دادن همه آزمایشهای فیزیکی، کاملاً هم‌ارزند". توجه داشته باشید که این اصل، تعمیم اصل نسبیت صرفاً مکانیکی نیوتون به سراسر فیزیک است.^۱ در نظر اول، چنین می‌نماید که اصل اینشتین چیزی جز پذیرش صمیمانه نتایج منفی همه آزمایشهای رانش اتر نیست. اما او جستجوی "تیین"های خاص برای این نتایج را رها کرد و در عوض این نتایج را به عنوان شاهد تجربی بر وجود یک اصل اساسی نوین طبیعت به کار برد، و بدین طریق مسیر امور را دگرگون کرد: اکنون نوبت آن بود که پیشگوییهای به عمل آید. چیزی نگذشت که بر اساس اصل اینشتین (و بر اساس این واقعیت تجربی که سرعت نور در همه چارچوبهای لخت یکسان است) یک نظریه جدید و کامل به وجود آمد که نسبیت خاص نام گرفت. هدف این نظریه آن بود که تمامی قوانین فیزیک را، هر جا که لازم باشد، تغییر دهد و اصلاح کند تا در همه چارچوبهای لخت به یکسان معتبر باشند. امروزه، پس از گذشت بیش از هفتاد سال، توفیق عظیم این نظریه، تردید در مقدمات اصلی آن را ناممکن ساخته است. از جمله نتایجی که از این نظریه به دست آمده است نسبیت همزمانی، مکانیک جدیدی که در آن جرم با سرعت افزایش می‌یابد، فرمول $E = mc^2$ ، و وابسته کردن امواج به ذرات از سوی دو بروی را می‌توان نام برد. اصل نسبیت یک اصل کلی است که شکست همه آزمایشهای رانش اتر را "تیین" می‌کند، همچنانکه اصل پایستگی انرژی شکست همه اقداماتی را که برای ساختن ماشینی با حرکت دائم صورت گرفته است "تیین" می‌کند. پدیده‌های انقباض طول و ساعت‌های کندرو (که نظریه لورنتس

۱. در واقع به نظر می‌رسد این هویگنس بوده که تشخیص داده است این اصل اهمیت عمیقی در مکانیک دارد و تنها یک خاصیت قوانین نیوتون نیست. مرجع زیر (خصوصاً صفحه ۱۸۳) را ببینید:

بر آنها مبتنی است) در نسبیت خاص نیز ظاهر می‌شوند، منتهی از یک دیدگاه دیگر، اما کار نسبیت خاص، مانند هر نظریه مناسب دیگر، به روشن کردن واقعیاتی که پیش از آن معلوم شده بود محدود نماند، بلکه قلمروهای کاملاً تازه‌ای را گشود. وضعیت را می‌توان به وضع نجوم در زمانی مانند کرد که دستگاه پیچیده زمین مرکزی (که نظیر نظریه لورنتس بود)، راه را به روی اندیشه‌های رهایی‌بخش کپرنیک و گالیله و نیوتون گشود، در هر دو مورد، توفیق از طریق تغییر چارچوب مرجع حاصل شد، اما اگر زمانی هواداری از دیدگاه خورشید مرکزی شهامت سیاسی لازم داشت، طرفداری از نسبیت خاص نیازمند شجاعت علمی بود، زیرا هنگامی که این نظریه را در مورد انتشار نور به کار بریم فوراً با مفاهیم کلاسیکی که از زمان و فضا داریم تعارض پیدا می‌کند (بخش ۱-۹). از نشانه‌های نوع اینشتین این بود که پی برد می‌توان این مفاهیم را رها کرد.

۱۲-۱ براهینی به سود اصل نسبیت

هر چند توفیق نظریه نسبیت خاص نیرومندترین برهانی است که امروز می‌توان در تأیید اصل نسبیت آورد، با این حال، از همان آغاز دست‌کم سه نوع برهان مختلف ممکن بود به سود آن اقامه کرد که هنوز هم اعتبار دارند:

الف) نتیجه منفی همه آزمایشهای رانش اتر. اینشتین چندان از این موضوع استفاده نکرد و این نکته از نقل قولی که از او شده است معلوم است [بند (ب)]. اما می‌دانیم که از جوانی تحت‌تأثیر این نظر تحصیلان^۱ بود که در فیزیک برای "مشاهده‌ناپذیرها" (مثل اتر) جایی نیست.

ب) "نسبیتی" بودن آشکار نظریه ماکسول، که اگر هم روح آن نسبیتی نباشد. این نکته در نظر اینشتین اهمیت فراوان داشت. او دریافت که وارد کردن اصل نسبیت در نظریه ماکسول باعث صرفه‌جویی در فکر می‌شود، عبارات زیر ترجمه ابتدای مقاله معروف اوست:

می‌دانیم که الکترودینامیک ماکسول، به صورتی که امروزه فهمیده می‌شود، وقتی در مورد اجسام متحرک به کار رود به عدم تقارنهایی منجر می‌شود که ظاهراً ذاتی پدیده‌ها نیستند. مثلاً برهم‌کنش الکترودینامیکی یک آهنربا و یک رسانا را در نظر می‌گیریم. در این مورد پدیده مشاهده‌پذیر فقط به حرکت نسبی آهنربا و رسانا بستگی دارد، اما نظر متعارف، میان دو حالت که در هر کدام یکی از این دو حرکت می‌کند، تمایز قاطعی قائل است. زیرا اگر آهنربا حرکت کند و رسانا ساکن باشد، در جوار آهنربا یک میدان الکتریکی با انرژی الکتریکی معین تولید می‌شود و این میدان در مناطقی که قسمتی از رسانا در آن قرار دارد جریانی به وجود می‌آورد. اما اگر آهنربا ساکن باشد و رسانا در حرکت، هیچ میدان الکتریکی‌ای در جوار آهنربا تولید نمی‌شود. با این حال در داخل رسانا یک نیروی محرک الکتریکی داریم، که هیچ انرژی متناظر با آن وجود ندارد، بلکه — با توجه به تساوی حرکت نسبی در دو حالت مورد بحث — سبب می‌شود که جریانه‌های الکتریکی، با همان شدت و در همان مسیری که در مورد قبل توسط نیروی الکتریکی تولید می‌شد، به وجود آید.

1. *Annalen der Physik*, 1905, 17, 891.

مثالهایی از این نوع، و نیز ناکام شدن کوششهایی که برای کشف حرکت زمین نسبت به "واسطه انتقال نور" انجام گرفته است، نشان می‌دهد که پدیده‌های الکترودینامیکی نیز مانند پدیده‌های مکانیکی، هیچ خصوصیتی که متناظر با مفهوم سکون مطلق باشد ندارند. و در عوض این اندیشه را به ذهن راه می‌دهند که ... در هر چارچوب مرجعی که قوانین مکانیک در آن صادق است باید قوانین الکترودینامیک نورشناخت یکسانی معتبر باشند. ما این حدس را (که از این پس اصل نسبیت نامیده می‌شود) اصل موضوع خود قرار می‌دهیم.

ج) وحدت فیزیک. این برهان متأخرتر از براهین پیش است. روزبه‌روز آشکارتر می‌شود که فیزیک را نمی‌توان به شاخه‌های کاملاً مستقل تقسیم کرد، مثلاً هیچ آزمایش الکترومغناطیسی‌ای بدون استفاده از اجزای مکانیکی ممکن نیست و هیچ آزمایش مکانیکی مستقل از ساختمان الکترومغناطیسی ماده نیست، و غیره. اگر یک اصل نسبیت دقیق برای مکانیک وجود دارد، پس قسمت بزرگی از الکترومغناطیس، یعنی قسمتی که با ساختمان ماده سروکار دارد، نیز باید نسبیتی باشد. اما وقتی قسمتی از الکترومغناطیس نسبیتی است، چرا همه آن نباشد؟ سخن کوتاه، اگر فیزیک تقسیم‌ناپذیر است یا سراسر آن باید تابع اصل نسبیت باشد یا هیچ قسمتی از آن. و چون اصل نسبیت در مکانیک بسیار بدیهی است، معتبر دانستن آن در تمامی فیزیک دست‌کم حدس خوبی است.

۱-۱۳ نسبیت ماکسولی

نکته طنزآمیز اینکه، مطابق اصل نسبیت، اندازه‌گیری‌های واقعی‌ای که در چارچوبهای لخت انجام می‌گیرند، توسط تبدیلات لورنتس به هم مربوط می‌شوند نه توسط تبدیلات گالیله (این نکته را در بخش ۲-۶ خواهیم دید). قبلاً تبدیلات لورنتس را تبدیلاتی می‌شناختند که معادلات ماکسول را از لحاظ صوری تغییر نمی‌دهد، اما معنی و مدلول فیزیکی آنها ناشناخته مانده بود. چون مدتها تصور می‌شد که تبدیلات گالیله چارچوبهای لخت را به هم مربوط می‌سازند، نظریه ماکسول را "نانسبیتی" می‌پنداشتند. اما اکنون معلوم می‌شود که این نظریه کاملاً "نسبیتی" است، و در میان همه نظریه‌های فیزیکی تنها نظریه‌ای است که نیاز به تغییر در پرتو نسبیت خاص ندارد. از سوی دیگر، نظریه نیوتون که همواره یک اصل نسبیت را شامل بوده است، با تبدیلات لورنتس تعارض دارد و باید تغییر یابد.

۱-۱۴ سرچشمه‌های نسبیت عام

هر چند نسبیت خاص مفهوم اتر، یعنی فضای مطلق در نقش ماکسولی آن را کاملاً نفی کرد هنوز نه می‌توانست فضای مطلق در نقش نیوتونی آن، یعنی علت ساختار لخت مطلق جهان، را تبیین کند و نه می‌توانست چیز دیگری را به جای آن بنشانند. نسبیت خاص وابستگی شدیدی به مفهوم چارچوبهای لخت دارد، اما این راز که چرا این چارچوبها رده ممتازی را در طبیعت تشکیل می‌دهند و معیار بی‌شتابی (و نیز عرصه ساده‌ترین نحو صورتبندی همه قوانین فیزیکی) به شمار می‌آیند، همچون پیش

ناگشوده بود. گشودن این راز، یا دست کم روشن کردن آن، کاری بود که نسبیت عام باید انجام می داد. اغلب گفته می شود که پیدایش نسبیت عام نتیجه شکست کوششهای گوناگون برای اصلاح نظریه گرانش نیوتون (عکس مجذور فاصله) بود، تا به نحو رضایت بخشی در چارچوب نسبیت خاص جا بگیرد. البته نسبیت عام نظریه جدیدی است درباره گرانش که به جای نظریه نیوتون نشسته، و این نکته هر چند شاید همواره در کار محاسبه درست نباشد، علی الاصول صحیح است. با این حال روشن است که مهمترین عاملی که اینشتین را به نسبیت عام راهبر شد، اشتیاق فلسفی او بود به اینکه نقش فضای مطلق را از فیزیک به کلی حذف کند. بنابراین نمی توانست به نظریه ای در باب گرانش که مبتنی بر نسبیت خاص باشد، حتی اگر این نظریه رضایت بخش هم می بود، قناعت کند، زیرا نسبیت خاص با مسلم گرفتن وجود چارچوبهای لخت آغاز می شود. بنابراین اینشتین ناچار بود که از نسبیت خاص فراتر برود و در این وظیفه ای که برعهده داشت دینی را که به فیزیکدان و فیلسوف آلمانی ارنست ماخ (۱۸۳۶-۱۹۱۶) داشت از روی وفاداری و به تکرار یادآور می شد. شاید ذکر این نکته منصفانه باشد که ماخ نیز در عوض از بابت تراش دادن و تکمیل و تکرار اندیشه های نسبیت گرایانه خود درباره لختی، مدیون اینشتین است.

۱-۱۵ اصل ماخ

اندیشه های ماخ درباره لختی، که نطفه آن در نوشته های اسقف برکلی بسته شده بود، تقریباً از این قرار است: (الف) فضا فی نفسه "چیزی نیست، بلکه صرفاً انتزاعی است از کل روابط فاصله ای میان ماده، (ب) لختی هر ذره ناشی از یک نوع برهم کنش میان آن ذره و بقیه جرمهای عالم است (که متأسفانه هنوز مشخص نشده است)، (ج) معیارهای موضعی بی شتابی، از روی نوعی میانگین حرکات همه ذرات عالم تعیین می شوند، (د) تنها چیزی که در مکانیک اهمیت دارد حرکت نسبی همه جرمهاست. از این رو ماخ می نویسد: "... فرقی نمی کند که زمین را دور محور خود در چرخش بدانیم، یا زمین را ساکن و ستارگان را به دور آن در گردش بینداریم ... قوانین لختی باید به نوعی در نظر گرفته شوند که از فرض دوم همان نتایج فرض اول به دست آید." شاید ذکر این نکته حائز اهمیت باشد که حتی پیش از اینشتین، ماخ خود و پیروانش را "نسبیت گرا" می نامید. یک کره کشسان چرخان، در ناحیه استوای خود بیضوی شکل می شود. نیوتون به این پرسش که کره از کجا "پی می برد" که می چرخد و بنابراین باید شکل بیضوی به خود بگیرد. چنین پاسخ می داد که کره کنش فضای مطلق را "حس می کند"، اما پاسخ ماخ چنین بود که کره کنش جرمهای کیهانی را که به دور آن می گردند "حس می کند". به نظر نیوتون، چرخش نسبت به فضای مطلق، نیروهای مرکز گریز (لخت) را به وجود می آورد که از نیروهای گرانشی کاملاً متمایزند. به نظر ماخ، نیروهای مرکز گریز، نیروهای گرانشی اند، یعنی حاصل اثر جرم بر جرم اند. اینشتین بر این مجموعه اندیشه ها نام اصل ماخ را اطلاق کرد. البته این اندیشه ها بدان صورت که توسط ماخ بیان شده بود حالت جنینی داشت، زیرا نظریه کمی ای که پدیده فرضی اثر "القای

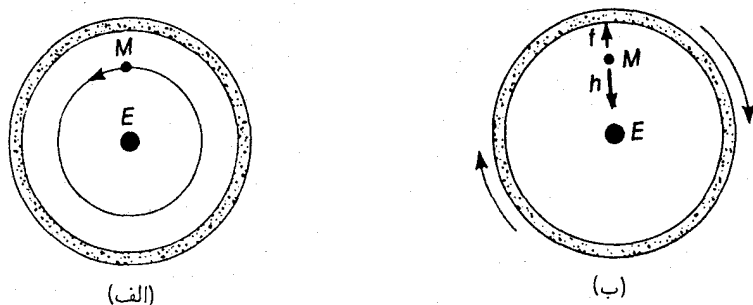
جرم“ را توضیح دهد، به وجود نیامده بود. اینشتین در یکی از مراحل راهی که به سوی نظریه نسبیت عام می‌پیمود، چنین حدس زد که شاید تفاوت نظریه عکس مجذور نیوتون با نظریه تام و تمامی درباره گرانش، از نوع تفاوت یک نظریه ساده الکتریکی مبتنی بر قانون کولن با نظریه نهایی ماکسول است. در واقع، در سال ۱۹۵۳، شیاما^۱ نظریه‌ای از نوع نظریه ماکسول را در باب گرانش، که در سال ۱۸۷۲ توسط تیسران^۲ پیشنهاد شده بود، احیا کرد و بسط داد و دریافت که این نظریه تا اندازه زیادی حاوی اصل ماخ است: نیروهای لخت با ”میدان تابش“ گرانشی عالم متناظر و متناسب با عکس فاصله‌اند. اما متأسفانه، این نظریه، نسبیت را از جهات دیگر نقض می‌کند. مثلاً به خلاف بار که در نظریه ماکسول ضرورتاً ناورداست، جرم در نسبیت خاص همراه با سرعت تغییر می‌کند. همچنین، به دلیل رابطه $E = mc^2$ انرژی بستگی گرانشی یک جسم دارای جرم (منفی) است، و بنابراین جرم یک دستگاه نمی‌تواند برابر با مجموع جرمهای اجزای آن باشد، و حال آنکه در نظریه ماکسول بار (مشابه جرم) دقیقاً جمع‌پذیر است، و این نتیجه مستقیم خطی بودن آن نظریه است. راه حل اینشتین برای مشکل لختی به مراتب پیچیده‌تر از نظریه ماکسول از آب درآمد، با این حال، در ”تقریب اول“ به نظریه نیوتون تبدیل می‌شود و در ”تقریب دوم“ واقعاً خصوصیات ماکسولی دارد. اما اینکه نسبیت عام به چه اعتبار واقعاً ”ماخی“ است، هنوز مسئله‌ای است مورد بحث (بخش ۹-۱۲ را ببینید). با این حال باید توجه داشت که (۱) اصل ماخ ریشه در سینماتیک کلاسیک دارد، و (۲) این اصل ”میدانها“ را، به عنوان محتوای احتمالی فضا، در نظر نمی‌گیرد. بنابراین نفس صورتبندی کردن آن در چارچوب فیزیک نوین مسئله‌ای دشوار و مورد تردید است.^۳

۱-۱۶ نتایج اصل ماخ

گاهی ادعا می‌شود که اصل ماخ محتوای فیزیکی ندارد، زیرا چون ”آزمایش کردن“ با عالم امکان‌پذیر نیست، نمی‌توان این اصل را آزمود. هیچ‌گاه نمی‌توان حکم کرد که عامل ایجاد لختی، فضای مطلق است یا جرمهای کیهانی، و بنابراین انتخاب یکی از این دو، مسئله‌ای فلسفی است تا فیزیکی. اما چنین نیست، و حتی بدون یاری گرفتن از یک نظریه مبسوط، اصل ماخ به پاره‌ای پیشگوییهای آزمودنی نانیوتونی رهنمون می‌شود:

الف) تذکر زیرین را از شیاما داریم: در ۱۹۲۶ تحقیق شد که کهکشان ما، تا حدودی مانند یک دستگاه منظومه‌ای عظیم، می‌چرخد و دوره آن در نزدیکی خورشید ۲۵۰ میلیون سال است. قبلاً کانت این چرخش را برای توجیه شکل تخت کهکشان (که راه شیری در آسمان گواه آن است) فرض کرده بود؛ همچنین اگر چنین چرخشی وجود نداشته باشد خورشید ظرف مدت ۲۰ میلیون

1. *Mon Not R Astron Soc*, 1953, 113, 34; Sciamia D W, 1959, *The Unity of the Unwers*, New York, Doubleday and Co, Inc, especially Chapters 7-9. 2. F Tisserand
3. Misner W C, K Thorne K S, and Wheeler J A, 1973, *Gravitation*, Freeman W H and Co, 21.12.

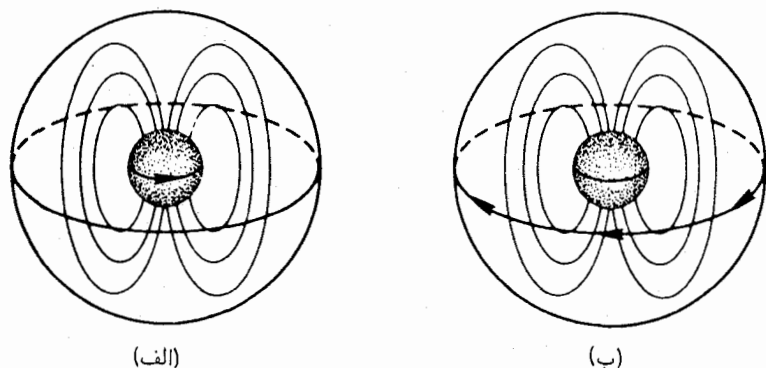


شکل ۲-۱

سال به مرکز کهکشان سقوط می‌کند. اگر ماح از این چرخش آگاهی داشت اصل او، او را به فرض وجود یک عالم عظیم برون کهکشانی که وجود آن تا مدتها بعد هنوز از راه مشاهده معلوم نشده بود— راهنمایی می‌کرد، تا معیار سکون در کهکشان جور شود. از سوی دیگر، یک پیرو صادق نیوتون، در چرخش کهکشان هیچ نکته قابل توجهی نمی‌دید.

ب) یک آونگ فوکو را در نظر بگیرید که از سه پایه‌ای که محض سادگی کار در قطب شمال قرار داده شده آویزان است. صفحه نوسان این آونگ، در حین حرکت زمین، نسبت به عالم ثابت است. حال فرض کنید که بتوانیم تمام جرمهای کیهانی را بجز زمین حذف کنیم. طبق نظر نیوتون، این کار بر آزمایش آونگ هیچ تأثیری نخواهد گذاشت اما طبق نظر ماح، آونگ در صفحه‌ای که نسبت به زمین ثابت است— که اکنون معیار آشکار و منحصر به فرد بی‌شتابی است— نوسان خواهد کرد. حال بیاییم و جرمهای کیهانی را کم کم از نو وارد کنیم، تا جایی که اثر لختی زای آنها دوباره غالب شود. با این حال، به دلیل پیوستگی، این اثر هیچ‌گاه غلبه مطلق نخواهد یافت، بلکه زمین همواره سهمی در “سوی لختی” موضعی خواهد داشت و بنابراین صفحه نوسان آونگ را، هر چند جزئی، در جهت دوران خود با خود خواهد کشید. با داشتن دستگاهی که به اندازه کافی دقیق باشد، این پدیده نانیوتونی را می‌توان اندازه گرفت. اخیراً پیشنهاد شده است که به جای آونگ فوکو شاید بتوان از صفحه مدار ماهواره‌ای که در مدار قطبی به دور زمین می‌گردد، استفاده کرد. (ج) دو نمودار زیر را در نظر بگیرید که دستگاه زمین-ماه-عالم را نشان می‌دهد، و در آن عالم

به صورت طرح‌وار توسط یک پوسته جرم‌دار نشان داده شده است. شکل ۲-۱ (الف)، دیدگاه “متعارف” را نشان می‌دهد و شکل ۲-۱ (ب) دیدگاهی را که از لحاظ نسبی با آن هم‌ارز است: از این دیدگاه، ماه ساکن است و عالم می‌گردد. چنانکه دیدیم، طبق نظر ماح، “قانون لختی باید طوری در نظر گرفته شود که از فرض دوم همان نتایج فرض اول به دست آید.” بنابراین عالم‌گردان باید یک نیروی مرکز‌گریز تولید کند که با نیروی جاذبه زمین، h ، مقابله کند. (و همین نیرو است که باعث برآمده شدن زمین در ناحیه استوا می‌شود.) همچنین از سوی عالم باید یک نیروی کوریولیس ایجاد شود که اثر آن چرخاندن صفحه آونگ فوکو است. بنابراین با یک قیاس سراسر می‌توان



شکل ۳-۱

انتظار داشت که در درون هر پوستهٔ چرخان نیروهای کوچک مرکزگرایز و کوریولیس به وجود می‌آید — این نیز پدیده‌ای است کاملاً نیوتونی^۱ علاوه بر این، با توجه به شکل ۳-۱ (الف) نیرویی (مثلاً موشکی) لازم است تا زمین از حالت سکون خارج شود و در راستای معینی شتاب بگیرد. اما این مسئله را چنین نیز می‌توان تعبیر کرد که زمین نیرویی لازم دارد تا در درون عالمی که نسبت به آن شتاب دارد، ساکن بماند. بنابراین از طریق تعمیم، می‌توان انتظار داشت که هرگاه جرمهای مجاور ذره‌ای شتاب بیابند، بر آن ذره نیرویی وارد شود که در راستای شتاب باشد.

(د) اصل ماخ با نفی فضای مطلق در واقع متضمن این نکته است که نه تنها گرانش بلکه تمامی فیزیک باید رجوعی به چارچوبهای مرجح لخت نداشته باشد و در واقع هوادار نسبیت در سراسر فیزیک است. در نتیجه، این اصل حتی برهم‌کنش لختی و الکترومغناطیسی را نیز متضمن است، مثلاً کره‌ای نارسانا و با بار مثبت را در نظر بگیرید که می‌چرخد. از هر بار روی کره، یک جریان دایره‌ای و در نتیجه یک میدان مغناطیسی پدید می‌آید. شکل‌های ۳-۱ (الف) و ۳-۱ (ب) دیدگاه متعارف و دیدگاه ماخ معادل آن را از کره، عالم، و میدان مغناطیسی مربوط، نمایش می‌دهند. باز هم از طریق قیاس، می‌توان گفت که درون هر پوستهٔ چرخان کروی که در داخل آن بار ساکن باشد، باید یک میدان مغناطیسی به وجود آید.^۲

۱. به انتهای بخش ۸-۱۲ مراجعه کنید. هانس تیرینگ در

Thirring H, 1918, *Phys Zeits*, **19**,33; 1921, **22**, 29

برمبنای نسبیت عام این مسئله را بررسی کرده است. مورد (ب) را تیرینگ و لنزه در

Thirring H and Lense J, 1918, *Phys Zeits*, **19**, 156

بررسی کرده‌اند؛ واقعاً پدیده‌هایی شبیه به نوعی که حدس زده شدند پیدا شدند. خود اینشتین برمبنای طرح اولیهٔ نسبیت عام اثرهای مشابهی را یافته بود و طی نامه‌ای به تاریخ ۱۹۱۳/۱۲۹۲ آن را به اطلاع ماخ رسانده بود (Misner C W, etal همان کتاب).

۲. اهلرز و ریندلر این حدس را بر مبنای نسبیت عام در:

Ehlers J and Rindler W, 1971, *Phys Rev*, **D 4**, 3543.

ها) طبق اصل ماخ نباید انتظار داشت که یک ذرهٔ آزمونی در درون عالمی که از جهات دیگر تهی است، هیچ‌گونه لختی محسوسی (جز "لختی خودی") داشته باشد. وارد کردن جرمهای دیگر به این عالم، به تدریج به ذره لختی می‌بخشد. بنابراین، باز هم از طریق تعمیم، می‌توان انتظار داشت که لختی هر ذره در نزدیکی جرمهای بزرگ افزایش یابد و علاوه بر این، حتی می‌توان انتظار داشت که این لختی، برحسب نحوهٔ توزیع جرم، خواص راستایی داشته باشد. (در نظریه‌ای از سنخ نظریهٔ ماکسول، یقیناً چنین است.) اما معلوم شده است که لختی در بخشی از عالم که ما در آن زندگی می‌کنیم، تا درجهٔ بالایی از صحت، همسانگرد است. از این نکته، کسانی نتایجی گرفته‌اند: نخست اینکه چون ماده در همسایگی دیوار به دیوار ما (خورشید، سیارات، و غیره) آشکارا ناهمسانگرد است، بنابراین بخش غالب اثر القای جرم باید از مادهٔ دوردست ناشی شود: قانونی از نوع " $1/r$ " با این مطلب سازگار است. دوم اینکه مادهٔ دوردست، یعنی عالم، باید نسبت به ما همسانگرد باشد. این نتایج، کفهٔ همسانگردی تقریبی عالم را، که از طریق نوری مشاهده شده است، سنگین‌تر می‌کند و جوابی است به مدلهای ناهمسانگرد گوناگونی که برای عالم پیشنهاد شده است. از سوی دیگر، می‌توان استدلال کرد که تغییر راستایی لختی، یا در واقع هر گونه تغییر آن، مشاهده‌ناپذیر است، زیرا هر دستگاهی که برای اندازه‌گیری آن طرح شود خود تحت تأثیر این پدیده قرار می‌گیرد و مانع مشاهدهٔ آن می‌شود. اگر اصل هم‌ارزی نیرومند اینشتین (بخش ۱-۹) صحیح باشد، یقیناً این نکته درست خواهد بود.

حتی اگر استدلال اخیر صحیح باشد، باز هم مثالهای (الف) تا (د) به خوبی نشان می‌دهند که اصل ماخ محتوای فیزیکی دارد. از سوی دیگر، تاکنون صحت این اصل از طریق تجربی تحقیق نشده است و نیز، چنانکه یادآور شدیم، صورتبندی نوین آن دشوار و مورد تردید است. بنابراین، با وجود جاذبه‌ای که این اصل از لحاظ زیباشناسی دارد، باید در برابر آن هشیاری به خرج داد. به‌ویژه روش ماخ برای رفع اشکالات وارد بر فضای مطلق، یعنی نفی فضا به‌عنوان یک "شیء"، شاید بیش از اندازه افراطی باشد. به مهم‌ترین اشکال وارد بر فضای مطلق، یعنی اینکه این فضاکنش دارد اما مورد کنش واقع نمی‌شود، می‌توانیم با حفظ وجود مستقل فضا پاسخ دهیم، بدین طریق که برهم‌کنش فضا را با ماده ممکن بدانیم، و این کاری است که در نسبیّت عام صورت می‌گیرد. هر چند، چنانکه قبلاً گفتیم، با کمال تعجب هنوز منزلت منطقی نسبیّت عام در برابر اصل ماخ کاملاً روشن نشده است. بلکه یک نکته مسلم است: اصل ماخ سرچشمهٔ ثمربخشی از حدسهایی اغلب موجه بوده است، که نسبیّت عام آنها را به صورت کمی بررسی کرده است. اغلب این حدسها به "کشش لختی" توسط جرمهای شتابدار یا چرخان مربوط می‌شده است. اصل ماخ راهی برای درک شهودی این پدیده‌ها پیش‌پا می‌نهد و حال آنکه رهیافت نسبیّت عام بسیار ریاضی است.

۱۷-۱ کیهانشناخت

از اصل مآخ چنین برمی آید که تأثیر موضعی کل عالم را باید به حساب آورد. بنابراین بد نیست که حتی در این مرحله ابتدایی ویژگیهای مهم عالم را، بدان صورت که امروزه بر ما معلوم است، مرور کنیم. کهکشان ما تقریباً شامل $۱۰^{۱۱}$ ستاره است. و این رقم اغلب اشیایی را که با چشم غیرمسلح در آسمان شب دیده می شوند، شامل می شود. آن سوی کهکشان ما، کهکشانهایی کم و بیش شبیه به آن وجود دارد، که مثل سکه های یک ریالی که به فاصله یک متر از یکدیگر قرار گرفته باشند در فضا پراکنده اند. بخش "شناخته شده" عالم، که شعاع آن در حدود $۱۰^۹$ سال نوری است، شامل تقریباً $۱۰^{۱۱}$ کهکشان است. این کهکشانها با چنان سرعتی از هم دور می شوند که، اگر این دور شدن را در طول زمان یکنواخت فرض کنیم، باید بگوییم که عالم مشاهده پذیر در حدود $۱۰^{۱۰}$ سال نوری پیش از این، گوی فشرده ای بوده است. با این حال، به دلایل پسندیده ای می توان گفت که این دور شدن، در طول زمان، یکنواخت نبوده است. مثلاً شاید پس از رویداد "مهبانگ" در جهان، گرانش این حرکت را کند کرده باشد. این واقعیات، تجدیدنظر در تعریفی را که در آغاز از چارچوبهای لخت کردیم، لازم می سازد. به عنوان مدل ممکن و بسیار ساده شده ای برای جهان، ردیفی نامتناهی از کهکشانها را فرض کنید که به طور کم و بیش یکنواخت در سراسر فضا پراکنده باشد و دوهذو از هم دور شوند، مانند ردیفی از مهره ها که در درون یک اسفنج لاستیکی قرار گرفته باشند و این اسفنج را با سرعت متغیر، اما یکسان در تمام جهات، بکشیم. این مدل از اصل کیهانشناختی، که طبق آن تمام کهکشانها نسبت یکسانی با کل عالم دارند، پیروی می کند. این اصل را عملاً تمام کیهانشناختهای نوین، تا حدودی به دلایل تجربی و بیشتر محض ساده شدن کار، پذیرفته اند. این اصل، مثلاً فرض یک عالم متناهی "جزیره وار" و غوطه ور در فضای نامتناهی را، نفی می کند، زیرا چنین عالمی حاوی "دورترین" کهکشانهاست که از سنخ معمول نیستند.

اما چگونه می توان چارچوبهای لخت نیوتونی را که گسترش نامتناهی دارند، در این عالم تعیین کرد؟ اگر مرکز کهکشان ما در چنین چارچوبی ساکن باشد، آیا، طبق اصل کیهانشناختی یا صرفاً به دلیل تقارن، مرکز هر کهکشان دیگری نسبت به چنین چارچوب لختی ساکن نخواهد بود؟ اما این چارچوبهای لخت دیگر، نسبت به چارچوب کهکشان ما یکنواخت حرکت نمی کنند. علاوه بر این، در چه قسمتی از چارچوب لخت ما ذره های آزاد از قانون اول نیوتون تبعیت می کنند؟ حداکثر در همسایگی کهکشان ما. ذره آزمونی که در میان کهکشانهای دوردست باشد، تحت تأثیر همان نیروی گرانشی قرار می گیرد که همه کهکشانها را به سوی یکدیگر، و به ویژه به سوی ما، می کشد. جز در همسایگی نزدیک ما هیچ ناحیه ای وجود ندارد که از هر گونه ماده جاذبی "به اندازه کافی دور" باشد، و در آن ذرات نسبت به ما حرکت یکنواخت داشته باشند. و بنابراین، چارچوبهای گسترده لخت در چنین عالمی نمی توانند وجود داشته باشند.

از اصل مآخ، به وضوح چنین برمی آید که در چنین شرایطی مرکز هر کهکشانی معیار موضعی اصلی بی شتابی است و خطوط دید که از این نقطه به کهکشانهای دیگر (نه به ستاره های خود کهکشان

که ممکن است چرخش داشته باشند) وصل می‌شوند، معیار موضعی بی‌چرخشی؛ و این دو، روی هم، یک چارچوب لخت موضعی را تشکیل می‌دهند. چارچوبهای لخت، دیگر گسترش نامتناهی ندارند و همه نسبت به هم به طور یکنواخت حرکت نمی‌کنند. اگر عالم به صورت نایکنواخت انبساط یابد، چارچوبی که به طور موضعی لخت باشد، در فاصله‌ای دور دیگر لخت نیست. با این حال، باز هم در هر نقطه مجموعه‌ای نامتناهی از چارچوبهای لخت وجود دارد که همه نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند.

۱۸-۱ جرم لختی و جرم گرانشی

اینشتین در سال ۱۹۰۷/۱۲۸۶ در اصل هم‌ارزی خود، از طریق کلی‌تر و دیدگاهی دیگر، تقریباً به همین نتیجه رسید. (در آن زمان هنوز انبساط عالم معلوم نشده بود.) اینشتین کار خود را با نظری دقیق‌تر به مفهوم "جرم" آغاز کرد. به این نکته گاهی توجه نمی‌شود که دست‌کم دو نوع جرم کاملاً متمایز به نظریه مکانیکی و گرانشی نیوتون راه می‌یابند، که عبارت‌اند از: (الف) جرم لختی که در قانون دوم نیوتون به صورت نسبت بین نیرو و شتاب پیش می‌آید و بنابراین مقاومت جسم را در برابر شتاب اندازه می‌گیرد، و (ب) جرم گرانشی، که آن را می‌توان مشابه گرانشی بار الکتریکی دانست و در معادله نیروی جاذبه میان دو جرم

$$f = \frac{Gmm'}{r^2} \quad (۳-۱)$$

دیده می‌شود (G ثابت گرانش است).

گذشته از این، می‌توان میان جرم گرانشی کنشگر و جرم گرانشی کنش‌پذیر نیز تمایز قائل شد، یعنی میان جرمی که علت میدان است و جرمی که میدان بر آن اثر می‌کند، به دلیل تقارن معادله ۳-۱ (که ناشی از قانون سوم نیوتون است)، در نظریه نیوتون هیچ تفاوت اساسی‌ای میان جرم گرانشی کنشگر و کنش‌پذیر وجود ندارد. اما در نسبیت عام مفهوم جرم کنش‌پذیر اصلاً پیش نمی‌آید و فقط با جرم کنشگر — که آفریدگار میدان است — سروکار داریم.

در طبیعت نسبت جرم گرانشی و جرم لختی همه ذرات، یکی است و در واقع معمولاً با انتخاب یکای مناسب، مثلاً با انتخاب ذره واحدی به‌عنوان یکای هر دو، آنها را با هم برابر می‌گیرند. تناسب این دو جرم را اوتووش^۱ نخست در ۱۸۸۹ و سرانجام در ۱۹۲۲، با دقت ۵ قسمت در ۱۰^۱، تحقیق کرد. او دو وزنه برابر را که جنسشان یکی نبود از دو بازوی یک ترازوی پیشگی دقیق که در امتداد شرقی-غربی قرار داشت آویزان کرد. چون نیروی گریز از مرکز بر جرم لختی وارد می‌شود، اگر جرم لختی دو وزنه برابر نباشد در هر جا از زمین جز در دو قطب و استوا، جفت نیرویی تولید می‌شود. با تغییری زیرکانه در آزمایش اوتووش، با استفاده از نیروی گریز از مرکز مداری زمین که راستای آن هر ۱۲ ساعت یک بار عوض می‌شود و بنابراین قابل تقویت از طریق تشدید است، زل^۲، کروتکوف^۳، و دیکی^۴ (پرینستون، ۱۹۶۴) دقت آزمایش را تا یک قسمت در ۱۰^{۱۱}، و براگینسکی^۵ و پانوف^۶

(مسکو ۱۹۷۱) دقت آن را حتی تا یک قسمت در $۱۰^{۱۲}$ افزایش دادند.

تناسب جرم گرانشی و جرم لختی را گاه اصل هم‌ارزی "ضعیف" می‌خوانند. خصوصیتی که کاملاً با این اصل هم‌ارزاست این است که در میدان گرانشی همه ذرات دارای شتاب یکسان هستند، زیرا حاصلضرب میدان در جرم کنش‌پذیر نیرو است و حاصل تقسیم نیرو بر جرم لختی، شتاب است. بنابراین مسیری که یک ذره در فضا و زمان می‌پیماید اصلاً به ذره‌ای که انتخاب می‌شود بستگی ندارد. یگانگی مسیر در میدان گرانشی را، با گسترش خفیفی در یافته‌های اصلی گالیله، اصل گالیله می‌نامند. (آزمایشهایی را که می‌گویند گالیله روی برج کج پیزا انجام داد، به یاد آورید!) زمانی این پرسش مطرح شد که آیا جرم هم‌ارزی استمی (از طریق رابطه $E = mc^2$) در اصل هم‌ارزی ضعیف صدق می‌کند یا نه. سوترز^۱ در ۱۹۱۰، آزمایش اوتووش را با استفاده از وزنه‌ای از جنس اورانیم اکسید، که انرژی بستگی آن بسیار زیاد است، تکرار کرد و به پرسش فوق پاسخ مثبت داد. امروزه که دقت آزمایش بسیار افزایش یافته است، همین نتیجه را می‌توان با وزنه‌های "معمولی" از روی آزمایش دیکی و دیگران به دست آورد. در این اواخر پرسش دیگری مطرح شده است، و آن اینکه آیا پادماده از اصل گالیله تبعیت می‌کند یا بالا می‌افتد. آزمایش مستقیم با پوزیترون و غیره فوق‌العاده دشوار است. اما محاسباتی که شیف^۲ براساس مکانیک کوانتومی انجام داده است نشان می‌دهد که مقدار پوزیترونهای مجازی در ماده معمولی آنقدر هست که اگر پوزیترونها به بالا بیفتند اثر آن در آزمایش اوتووش-دیکی محسوس خواهد بود. بنابراین، مسلم به نظر می‌رسد که حتی پادماده نیز در اصل هم‌ارزی ضعیف صدق می‌کند.

تناسب جرم لختی و جرم گرانشی مواد مختلف، واقعیتی است بسیار در خور توجه. نظریه نیوتون به هیچ‌وجه این واقعیت را تبیین نمی‌کند بلکه آن را به‌عنوان یک اصل موضوع، که ظاهراً تصادفی و عرضی است، می‌پذیرد. نبودن این اصل آسیمی به نظریه نیوتون نمی‌رساند: نظریه نیوتون بدون این اصل، شبیه نظریه حرکت ذرات باردار تحت اثر نیروی جاذبه کولنی خواهد بود، بدین صورت که ذراتی با جرم (لختی) برابر حامل بارهای (گرانشی) متفاوت خواهند بود. اما اصل گالیله یکی از اجزای اصلی نسبیت عام است و این نظریه بدون آن نمی‌تواند ادامه حیات دهد.

تذکر این نکته بد نیست که اصل ماخ تا اندازه‌ای به تبیین یکی بودن جرم لختی و جرم گرانشی کنش‌پذیر نزدیک می‌شود. مثلاً وضعی را که در شکل ۱-۲ (ب) نمایش داده شده است در نظر بگیرید که در آن عالم چرخان، میدان القایی f را در محل قرار گرفتن ماه پدید می‌آورد تا با جاذبه زمین مقابله کند. البته می‌توان چنین تصور کرد که القا بر یک نوع "بار"، یعنی جرم لختی، اثر می‌کند و جاذبه بر نوع دیگر، یعنی جرم گرانشی. اما وقتی هر دو جرم را "بار" شناختیم، بسیار طبیعی‌تر است که آنها را یکی بدانیم — همچنانکه در نظریه ماکسول، یک بار واحد هم تحت تأثیر میدان کولنی قرار می‌گیرد و هم تحت تأثیر میدان القایی. در این صورت، در شکل ۱-۲ (ب)، عالم و زمین با هم تشریک مساعی می‌کنند تا در محل قرار گرفتن ماه یک میدان صفر به وجود آورند، که در این نقطه هر ذره‌ای ساکن می‌ماند.

۱-۱۹ اصل هم‌ارزی

در مورد سه قانون نیوتون، اصل هم‌ارزی "ضعیف"، "نسبیت" دیگری را ایجاب می‌کند و نیز لازمه آن است. این "نسبیت" در نظریه نیوتون مستتر است و هر چند با نسبیتی که در بخش ۱-۵ مورد بحث قرار گرفت تفاوت دارد، با این حال، مانند آن ما را به تعمیم خود به سراسر فیزیک فرا می‌خواند. این نسبیت چنین است: اتاقک آسانسوری را فرض کنید که طناب پشتیبان آن را قطع کنیم تا درون یک گذرگاه طویل تحت تأثیر کشش گرانشی زمین، سقوط آزاد کند. نظریه نیوتون پیش‌بینی می‌کند که سیر فیزیک در "آزمایشگاه" در حال سقوط درست مانند سیر آن در یک دستگاه بی‌شتاب است که از هر گونه ماده جاذبی کاملاً به دور باشد، یعنی در یک چارچوب کاملاً لخت.

به آسانی می‌توان به علت این امر پی برد: در مورد ذره‌ای که به دلخواه این سو و آن سو کشیده می‌شود، فرض کنید که f و f_G به ترتیب نیروی کل و نیروی گرانشی نسبت به زمین (زمین در اینجا چارچوب لخت فرض می‌شود) و m_I و m_G جرم لخت و جرم گرانشی باشند. در این صورت $f = m_I a$ و $f_G = m_G g$ که در آن a شتاب ذره و g شدت میدان گرانشی و در نتیجه شتاب اتاقک است. شتاب ذره نسبت به اتاقک برابر است با $a - g$ و در نتیجه نیرو نسبت به اتاقک عبارت است از $(a - g)m_I$. اگر $m = m_G$ نیروی فوق برابر است با نیروی ناگرانشی $f - f_G$ بنابراین قانون دوم نیوتون (که قانون اول را نیز شامل است) در اتاقک برقرار است و همین امر در مورد قانون سوم نیوتون صادق است. اثر گرانش در داخل اتاقک "مرتفع" شده است.

اینشتین در اصل هم‌ارزی خود یک بار دیگر فرض کرد که بقیه فیزیک نیز در این مورد با مکانیک همراهی دارد. او این اصل را وضع کرده که "همه دستگاههای لخت موضعی که بی‌چرخش و در حال سقوط آزاد باشند، از لحاظ انجام دادن همه آزمایشهای فیزیکی هم‌ارزند". (بی‌چرخشی را می‌توان به کمک یکی از آزمونهای بدیهی مکانیکی آزمون؛ مثلاً دیواره‌های آزمایشگاه هنگام سقوط آزاد نباید تحت فشار قرار گیرند یا - اگر آجرهای آن به هم محکم نشده باشند - نباید از هم جدا شوند.) شواهدی که برای توجیه اصل هم‌ارزی هست در بخش ۱-۲۰ مورد بحث قرار خواهد گرفت. بنابراین طبق نظر اینشتین، آزمایشگاهی که در حال سقوط آزاد است، حتی اگر نزدیک جرمی با شتاب زیاد باشد، کاملاً هم‌ارز با آزمایشگاهی است که بدون اینکه نسبت به ستارگان ثابت حرکت کند در فضا غوطه‌ور است. هر یک از آزمایشگاههای بی‌چرخش و در حال سقوط آزاد، یک چارچوب لخت موضعی را تشکیل می‌دهند. همه چارچوبهای لخت موضعی در یک رویداد، ضرورتاً نسبت به هم یکنواخت حرکت می‌کنند اما چارچوبهای لخت موضعی که از هم دورند ممکن است نسبت به هم شتاب داشته باشند. بدین ترتیب، اینشتین از طریق استدلالی متفاوت به نتایجی شبیه نتایجی که در بخش ۱-۱۷ دیدیم، دست یافت. پیداست که در هر رویداد، رده چارچوبهای لخت موضعی که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند، همان رده چارچوبهای لخت است که در نسبیت خاص مورد بحث قرار می‌گیرد، و نسبیت خاص اکنون نظریه‌ای می‌نماید که کاربرد موضعی دارد. (در نسبیت خاص از چارچوبهای لخت متفاوت برای نگریستن به یک رویداد واحد استفاده می‌شود و بنابراین هیچ‌گاه نیاز به دستگاههای

مرجعی که از هم بسیار دور باشند نداریم.) پیش از پی بردن به اصل هم‌ارزی، تنها راه فهم اصل نسبیت این بود که آن را به چارچوب‌های لخت نیوتونی که گسترش نامتناهی دارند، مربوط بدانند؛ یعنی مربوط به چارچوب ثابت و همهٔ چارچوب‌هایی که نسبت به آن حرکت یکنواخت دارند. البته برای اطمینان، فقط بخش‌هایی از این چارچوب‌ها را که گرانش در آن وجود ندارد، یعنی نواحی دقیقاً لخت را که ذرات آزاد در آن از قانون اول نیوتون تبعیت می‌کنند، در نظر می‌گرفتند. زیرا فرض بر این است که قوانین فیزیکی در چارچوب‌های لخت بیشترین سادگی را خواهند داشت، از جمله اینکه همسانگرد خواهند بود، و در ناحیه‌هایی که "پوشش گرانشی" وجود دارد، مثلاً در روی زمین، همسانگردی را نمی‌توان حتی در مورد فیزیک "ناگرانشی" مسلم انگاشت. (در بخش ۱-۲۱ دلایل این ظن را خواهیم دید.) بنابراین، به بیان دقیق، به نظر می‌رسید که فیزیک نسبیت خاص فقط در آزمایشگاه‌های فرضی میان اخترى، کاربرد دارد. اصل هم‌ارزی این وضع را یکسره دگرگون کرد. این اصل، اصل نسبیت را هم گسترده‌تر کرد و هم محدودتر، بدین معنی که بسیاری چارچوب‌های دیگر را به حوزهٔ آن درآورد، اما گسترش آنها را محدود ساخت؛ همهٔ ناحیه‌ها را به یکسان در دسترس نسبیت خاص قرار داد، اما نسبیت خاص را به صورت یک نظریهٔ موضعی درآورد. در آینده هر جا که از اصل نسبیت سخن می‌گوییم، تلویحاً آن را با اصل هم‌ارزی یکی خواهیم شمرد.

یکی از نتایج اصل هم‌ارزی این است که نه تنها می‌توان با سقوط آزاد گرانش را از بین برد، بلکه می‌توان از طریق شتاب آن را به وجود آورد. مثلاً موشکی را در نظر بگیرید که روی زمین بر سکوی خود قرار دارد. این موشک، به عنوان یک آزمایشگاه فیزیک، از موشک دیگری که از زمین برخاسته و بالای سکوی خود قرار دارد قابل بازشناختن نیست. و این موشک دوم را هم از موشک دیگری که درون چارچوب لخت موضعی خود با شتاب g در حرکت است، و مثلاً در فضای بیکران است، نمی‌توان بازشناخت، زیرا همهٔ چارچوب‌های لخت موضعی هم‌ارزند. و این مطلب گفتهٔ ما را ثابت می‌کند. چنانکه شیاما خاطرنشان کرده است، این صورت بیان اصل هم‌ارزی را اصل ماخ مستقیماً تأیید می‌کند. موشکی که در فضای بیکران است عالم را می‌بیند که با شتاب از کنارش می‌گذرد. عالم شتابدار یک میدان گرانشی در داخل موشک به وجود می‌آورد. بنابراین جای تعجب نیست اگر همهٔ فرایندهای فیزیکی در داخل موشک همان مسیری را طی کنند که در میدان گرانش زمین دارند: هر یک از دو میدان گرانشی درست همانند دیگری است.

از سوی دیگر، مواردی را می‌توان تصور کرد که اصل هم‌ارزی با اصل ماخ به ظاهر تعارض دارد. مثلاً اگر دو کورهٔ یکسان با سرعت برابر در چارچوب لخت موضعی خود بچرخند و یکی از آن دو مثلاً A در فضای بیکران باشد و دیگری، یعنی B در نزدیکی یک جرم سنگین، آیا B نباید بیش از A شکل بیضوی بیابد — زیرا طبق اصل ماخ می‌توان انتظار داشت که لختی آن بیشتر باشد — و آیا این مسئله با اصل هم‌ارزی مابینت ندارد؟ برای گریز از این تعارض راهی وجود دارد: زمان در نزدیکی جرم‌های سنگین در واقع کندتر می‌گذرد (خود این امر چنانکه در بخش ۱-۲۱ خواهیم دید یکی از پیامدهای اصل هم‌ارزی است) و بنابراین A چرخش B را کندتر از چرخش

خودش می‌بیند. اما چون می‌بیند که B به اندازه خودش شکل بیضوی یافته است نتیجه می‌گیرد که یا لختی B بیشتر است، یا ضریب کشسانی آن کوچکتر است و یا هر دو. در موارد دیگری که این تعارض ظاهری وجود دارد می‌توان براهین مشابهی اقامه کرد.

البته گرانش را فقط در صورتی می‌توان از یک آزمایشگاه حذف کرد که میدان موازی باشد. در موارد دیگر، گسترش قابل قبول فضا و زمان در یک چارچوب لخت موضعی، بستگی به صحت و دقت مورد نیاز دارد. مثلاً اگر اتاقک آسانسوری را رها کنیم تا به مرکز زمین فرو افتد، دو نقطه که در آغاز در دو گوشه کف اتاقک در حال سکون باشند به تدریج به هم نزدیک می‌شوند و سرانجام در مرکز به هم می‌رسند. همچنین دو ذره آزاد که در آغاز در اتاقک در حال سکون باشند و یکی بالای دیگری واقع باشد، به تدریج به هم نزدیک می‌شوند. با این حال، این‌گونه جفتهای ذرات را، با دقتی که بخواهیم، می‌توانیم نسبت به هم ساکن بدانیم، به شرط آنکه ابعاد اتاقک و مدت آزمایش را به نحو مناسب محدود کنیم. اصل نسبیت وجود یک معیار ممتاز سکون را نفی می‌کند، با این حال، چنین معیاری عملاً در همه جای عالم به صورت موضعی وجود دارد؛ و آن چارچوبی است که اساساً توسط مجموعه موضعی کهکشانه تعیین می‌شود. و نیز هر چند طبق اصل نسبیت، هیچ یک از قوانین شناخته شده فیزیک در آن چارچوب خاص، شکل ویژه‌ای به خود نمی‌گیرد، با این حال (چنانکه بوندی^۱ خاطر نشان کرده است) اگر قانونی چنین شکل ویژه‌ای به خود بگیرد از لحاظ منطقی تعجب ندارد. همچنین روشن است که در اتاقکی که آزادانه به سوی زمین حرکت می‌کند، عملاً یک جهت ممتاز حرکت وجود دارد. با این حال طبق اصل هم‌ارزی، همه قوانین شناخته شده فیزیک، درون اتاقک همسانگرد به نظر می‌رسند.

۱-۲۰ اصل هم‌ارزی نیمه نیرومند

اصل هم‌ارزی اینشتین گاهی اصل هم‌ارزی "نیرومند" خوانده می‌شود تا از حالتی که این اصل به مکانیک نیوتونی محدود است، و اصل هم‌ارزی "ضعیف" نام دارد، متمایز شود. یک اصل هم‌ارزی "نیمه نیرومند" (یا "موضعی") نیز وجود دارد. این اصل، هم‌ارزی کامل همه آزمایشگاههای آزاد و بی‌چرخشی را، به صورت موضعی، بیان می‌دارد و متضمن آن است که در هر جا یک نسبیت خاص موضعی برقرار است، و این نسبیت خاص دارای محتوای عددی مخصوص به خود است. اما این اصل حاوی این تصور است که ممکن است برای مناطق و زمانهای مختلف عالم محتواهای عددی مختلفی وجود داشته باشد. (سرعت نور، "ثابت" گرانش، "ثابت" ساختار ریز، و غیره.) قوانین "واقعی"، که تقریبهای موضعی آنها در نسبیت‌های خاص موضعی مختلف دیده می‌شود، شاید شامل مشتق این "ثابت‌های" متغیر نیز باشند. اما در اینجا باید گفت که هر قانون فیزیکی را همواره می‌توان تعمیم داد و بسیار پیچیده‌تر کرد، بی‌آنکه از مرزهای نظری و آزمایشی به هیچ وجه خارج شویم؛ و بدون فرضیهایی که به سادگی مربوط می‌شود، پیشرفت در فیزیک امکان ندارد. بنابراین جز در مواردی که دلایل بسیار کافی وجود داشته باشد، نباید در پی پیچیدگی رفت. با

این حال، این سخن درست است که جز سادگی، براهین دیگری که به سود اصل هم‌ارزی اقامه می‌شوند در واقع همه فقط به اصل هم‌ارزی نیمه نیرومند مربوط می‌شوند:

الف) چنانکه قبلاً در مورد اصل نسبیت دیدیم، می‌توان به وحدت فیزیک متوسل شد، که برطبق آن سراسر فیزیک باید در خصوصیات تبدیلی با مکانیک شریک باشد.

ب) موردی که اغلب نقل می‌شود، آزمون تجربی و موفق دو پیشگویی است که بر پایه اصل هم‌ارزی صورت گرفته است (بخش ۱-۲۱).

ج) نسبیت عام هنوز هم رضایتبخش‌ترین نظریه نوینی است که در باب گرانش عرضه شده است و نسبیت عام شامل اصل هم‌ارزی است. نسبیت عام بر اصل هم‌ارزی نیرومند مبتنی است. چنانکه بعداً خواهیم دید، اصل هم‌ارزی امکان می‌دهد که نسبیت عام را به طریق معینی از همه نسبیت‌های خاص موضعی بسازیم. همچنانکه یک سطح منحنی را می‌توان به طور تقریبی از بسیاری از اجزای تخت ساخت. اما نسبیت عام را، در صورت لزوم می‌توان با روشی نسبتاً ساده، طوری تعمیم داد که اصل هم‌ارزی نیمه نیرومند را شامل شود. چنین تعمیمی، مثلاً به دست پاسکال یوردان^۱ صورت گرفته است، که معتقد است پاره‌ای واقعیت‌های زمین‌شناختی دلالت بر تغییر "ثابت" گرانش در طول قرون دارد. بعدها برانز^۲ و دیکی نظریه یوردان را توسعه دادند.^۳

باید انصاف داد که شواهد تجربی برای اصل هم‌ارزی (چه نیرومند و چه نیمه نیرومند) بسیار ضعیف است. دو آزمونی که در بالا در بند (ب) ذکر کردیم، به دو جنبه از انتشار نور مربوط می‌شوند و اگر ماهیت ذره‌ای نور (فوتونها) را قبول کنیم، می‌توانیم ادعا کنیم که آنچه تحت این دو آزمون قرار می‌گیرد در واقع اصل هم‌ارزی ضعیف است. همچنین موفقیت نسبیت عام را در به دست آوردن مجدد نتایج مسلم کلاسیک در مورد گرانش، نمی‌توان شاهد کافی بر درستی اصل هم‌ارزی دانست، چرا که نظریه نیوتون همین کار را بدون اصل هم‌ارزی می‌کرد. بهترین شواهد از چندتایی نتایج "پس-نیوتونی" نسبیت عام، که تحت آزمون قرار گرفته‌اند، فراهم می‌شود. اما حتی این نتایج را هم می‌توان به کمک نظریه‌هایی که منکر اصل هم‌ارزی هستند به دست آورد. بنابراین جاذبه اصل هم‌ارزی بیشتر از لحاظ نظری است، با این حال آنقدر قوی است که بیشتر خیرگان آن را پذیرفته‌اند.

۱-۲۱ پیامدهای اصل هم‌ارزی

اصل هم‌ارزی مستقیماً به دو نتیجه جالب منجر می‌شود. نخست اینکه اصل هم‌ارزی متضمن این معنی است که نور در میدان گرانشی خم می‌شود، گویی از ذراتی ساخته شده است که با سرعت c حرکت می‌کنند. دلیل این امر چنین است: اتاکی را در نظر بگیرید که، مثلاً روی زمین درون یک

1. Pascual Jordan 2. Brans

۳. برخی رصدهای اخیر (مثلاً شش سال فاصله‌یابی لیزری ماه) به نظر می‌رسد مستقیماً علیه تغییرات قابل توجه ثابت گرانش گواهی می‌دهند. داده‌های دیگر [مثلاً رصدهای بسیار دقیق انحراف نور (بخش ۲-۱۱)] بیش از پیش به نفع نسبیت عام هستند در مقابل نظریه برانز و دیکی.

گذرگاه آسانسور، در حال سقوط آزاد است. فرض کنید که یک جرعه نور در داخل اتاق عمود بر جهت حرکت آن زده شود. طبق اصل هم‌ارزی، این جرعه، در داخل اتاق در امتداد یک خط مستقیم به طور یکنواخت حرکت می‌کند. اما چون، در حالی که جرعه نور در داخل اتاق حرکت یکنواخت دارد، خود اتاق با شتاب حرکت می‌کند، مسیر نور نسبت به زمین در واقع باید، مانند مسیر یک پرتابه، خمیده و سهمی شکل باشد. این استدلال واقعاً بسیار درخور توجه است، زیرا صرفاً از این واقعیت که نور با سرعت متناهی حرکت می‌کند، استنتاج می‌کنیم که "نور وزن دارد"؛ بدون اینکه مطلقاً فرض دیگری درباره نور کرده باشیم. بنابراین، گرانش مسیر همه پدیده‌هایی را که در یک چارچوب لخت با سرعت متناهی حرکت می‌کنند (به‌ویژه امواج گرانشی؟) به صورت یک مسیر موضعاً خمیده درمی‌آورد. از این امر این حدس نیرومند به ذهن راه می‌یابد که کشفی که در اینجا کرده‌ایم ویژگی جدید نور نیست، بلکه ویژگی جدید فضا در حضور جرم است، یعنی خمیدگی. اگر خود فضا خمیده باشد، همه پدیده‌هایی را که طبیعتاً راست خط هستند، وادار می‌کند که روی "ریلها"ی خمیده بیفتند. (این خمیدگی فضا - در واقع خمیدگی فضا و زمان - اساس نسبیّت عام است و اصل گالیله را نیز "تبین" می‌کند.)

دوم اینکه اصل هم‌ارزی متضمن این معنی است که نوری که در یک میدان گرانشی رو به پایین حرکت می‌کند، دستخوش انتقال به آبی می‌شود. برای توضیح این امر، فرض کنید در لحظه‌ای که اتاق را رها می‌کنیم یک پرتو نور عمودی از سقف اتاق وارد شود. طبق اصل هم‌ارزی، ناظر A که روی کف اتاق قرار دارد و هنگام گذشتن از کنار ناظر ساکن B که بیرون اتاق است پرتو نور را مشاهده می‌کند، هیچ انتقال دوپلری بین سقف و کف اتاق مشاهده نمی‌کند. اما در لحظه‌ای که A پرتو نور را مشاهده می‌کند، اتاق در حال حرکت است و B نسبت به A رو به امواج نور حرکت می‌کند. چون A هیچ انتقال دوپلری مشاهده نمی‌کند، B هنگام مشاهده همان نور باید شاهد یک انتقال به آبی باشد، و این امر گنّه ما را اثبات می‌کند. به عکس، نوری که در جهت خلاف یک میدان گرانشی حرکت کند، دستخوش انتقال به سرخ می‌شود. [همین نتیجه را می‌توان از نظریه فوتون و با توسل به رابطه پلانک به دست آورد (تمرین ۷-۱۰)]. در نتیجه، اگر اتمهایی را که ارتعاش می‌کنند (نور صادر می‌کنند) "ساعت" محسوب کنیم، نتیجه می‌گیریم که ساعتی که در پتانسیلهای کمتر نصب شده باشند از ساعتی که در پتانسیلهای بیشتر نصب شده باشند، کندتر کار می‌کند. این پدیده "اتساع گرانشی زمان" نام دارد. در واقع، به سبب این پدیده، ساعت اتمی معیار آمریکا، که از سال ۱۹۶۹ در اداره ملی استانداردها در بولدر، واقع در ایالت کلورادوی آمریکا، در ارتفاع ۱۶۲۰ متری سطح دریا نگاهداری می‌شود، از ساعت همانند آنکه در رصدخانه سلطنتی گرینویچ در ارتفاع ۲۴ متری سطح دریا قرار دارد هر سال در حدود ۵ میلیونیم ثانیه جلو می‌افتد، و حال آنکه تقریب ذاتی صحت هر دو ساعت، یک میلیونیم ثانیه در سال است.

انتقال دوپلر گرانشی که پیش‌بینی شده بود، در آزمایشهای بسیار حساسی که عبارت بود از فروفرستادن نور از برجی به ارتفاع ۲۱ متر (!) در هاروارد، توسط پوند^۱ و ربکا^۲ در سال ۱۹۶۰ و با

دقت بیشتر (تا ۱٪) توسط پوند و اسنایدر^۱ در ۱۹۶۴، مشاهده شد (تمرین ۱-۱۱). این پدیده قبلاً، بر مبنای پیشنهاد اینشتین، با دقت کمتر، در نور صادر شده از ستاره‌های بسیار چگال مشاهده شده بود. خمیدگی گرانشی نور تاکنون در آزمایشهای زمینی محض، مشاهده نشده است. چنین مشاهده‌ای می‌تواند اصل هم‌ارزی را مستقیماً به‌محک آزمون بزند. در فاصله‌های نجومی، نظریهٔ خمیدگی نور یک نوع پیچیدگی دارد، و آن اینکه باید معین کرد فضاهای سه‌بعدی موضعی که در مسیر نور قرار دارند، چگونه با هم "تکه‌دوزی" می‌شوند. این کار در نسبت عام به شیوه‌ای "خمیده" صورت می‌گیرد، و مقدار خمیدگی‌ای که در حول یک جرم مرکزی حاصل می‌شود دو برابر مقداری است که از تکه‌دوزی "مسطح" فضاهای سه‌بعدی موضعی به‌دست می‌آید.^۲ از سوی دیگر، یک نظریهٔ قدیمی نسبیتی (نظریهٔ نوردشتروم^۳)، که شامل اصل هم‌ارزی نیز هست، فضاهای سه‌بعدی موضعی حول یک جرم مرکزی را با خمیدگی‌ای خلاف خمیدگی‌ای که در نسبت عام دارند، با هم تکه‌دوزی می‌کرد و در نتیجه خمیدگی‌ای کلی نور برابر صفر می‌شد.^۴

روش سنتی آزمودن پیشگویی نسبیت عام، عبارت بود از مشاهدهٔ موضع ظاهری مجموعه‌ای از ستاره‌ها در نزدیکی خورشید به‌هنگام کسوف، و مقایسهٔ آن با موضع "واقعی" این ستاره‌ها در آسمان شب شش ماه بعد. دقت این آزمایش (حدود ۲۰٪) از آزمایش معروف ادینگتون، در ۱۹۱۹ که نخستین آزمایش از این نوع بود، تاکنون چندان افزایش نیافته است. اما اندازه‌گیریهای اخیر فومالون^۵ و سرامک^۶ (۱۹۷۵)، در مورد خمیدگی امواج رادیویی صادر از سه اخترش در میدان خورشید، که سالی یک‌بار از نزدیک خورشید می‌گذرند (و بدون کسوف مشاهده‌پذیرند)، خمیدگی نسبت عامی را با دقت ۱٪ تأیید کرده است. در حال حاضر تحقیقات بیشتری با اخترشها در دست انجام گرفتن است و انتظار می‌رود که به‌زودی حتی نتایج دقیقتری به‌دست آید.

دو پیامد اصل هم‌ارزی که در بالا مورد بحث قرار گرفت نشان می‌دهند که نواحی گرانشی چارچوبهای لخت نیوتونی را کاملاً لخت (یعنی همسانگرد و همگن) تصور کردن برای پدیده‌های "ناگرانشی" خطرناک است. این پیامدها نشان می‌دهند که گرانش را نمی‌توان از بقیهٔ فیزیک جدا کرد یا به‌عبارت پرآب و رنگتر گرانش "رنگی" نیست که بر روی بقیهٔ فیزیک زده شود. قبلاً در بند (د) از بخش ۱-۱۶ دلایلی برای این امر یافته بودیم.

1. Snider

۲. به بخش ۳-۸، بند شامل معادلهٔ ۸-۴۵ و ادامهٔ آن مراجعه کنید.

3. Nordström

۴. تصادفاً این مثال ناقص کوششهایی است که گاه و بیگاه برای به‌دست آوردن کامل انحراف نور نسبت عامی از اصل هم‌ارزی به‌تهایی انجام می‌شود. برای مراجع دیگر در این زمینه

Rindler W, 1968, *Am J Phys*, **36**, 540.

5. Fomalont 6. Sramek

سینماتیک اینشتینی

۱-۲ ویژگیهای اصلی نسبیت خاص

در این فصل استخراج پیامدهای "اصل موضوع اول" اینشتین را آغاز می‌کنیم و این اصل را که پیش از این در مکانیک مقام والایی داشته است، به سراسر فیزیک تعمیم می‌دهیم. اینشتین جرقه‌ای از نظریه الکترومغناطیس را چاشنی این اصل کرد، و آن "اصل موضوع دوم" وی بود که می‌گوید نور در خلأ در همه چارچوبهای لخت به‌طور مستقیم و با سرعت ثابت c حرکت می‌کند: پس از آنکه توفان انفجار فرونشست، اصل کهن نسبیت هسته ریاضی جدید خود را، که تبدیل لورنتس است، آشکار کرد؛ و حال آنکه پیش از آن "عقل سلیم" حکم می‌کرد که این هسته "باید" تبدیل گالیه باشد.

دلیل این امر این است که اگر وجود تقارن کامل بین همه چارچوبهای لخت را، مطابق اصل نسبیت، قبول کنیم و "اصل موضوع دوم" نیوتون را درباره وجود زمان مطلق، که همه چارچوبهای لخت را در بر می‌گیرد، بپذیریم، ناگزیر تبدیل گالیه تبدیلی خواهد بود که مختصات دکارتی را که در واقع اندازه‌گیری می‌شوند، به هم ارتباط می‌دهد. اما اگر به‌رغم حکم "عقل سلیم" اصرار داشته باشیم که قانون انتشار نور اینشتین را در همه چارچوبهای لخت معتبر بدانیم، ناگزیر مختصات به‌وسیله تبدیل لورنتس به هم مربوط خواهند شد. البته بدیهی است که قانون اخیر را نمی‌توان با تبدیل گالیه آشتی داد، زیرا تبدیل گالیه متضمن قانون کلاسیک جمع سرعتهاست که به‌موجب

آن، یک علامت نوری که در چارچوب S با سرعت c حرکت می‌کند در هر چارچوب دیگری که نسبت به S حرکت یکنواخت دارد هر سرعتی می‌تواند داشته باشد بجز c (معادله ۱-۲).

اصل موضوع دوم اینشتین را می‌توان به سه گزاره زیر تبدیل کرد: در هر چارچوب لخت نور به‌طور مستقیم، با سرعت ثابت، و مستقل از حرکت منبع، سیر می‌کند. در این صورت، مستقل بودن سرعت نور از چارچوب از اصل نسبیت نتیجه می‌شود؛ محدود بودن آن را هم رومر^۱ مدتها پیش، یعنی در ۱۶۷۵ نشان داده بود. (او دریافت که فاصله زمانی بین دو رصد متوالی گرفت قمر یو^۲ توسط مشتری، هنگامی که زمین هر چه به مشتری نزدیک می‌شود کمتر و هنگامی که از آن دورتر می‌شود، بیشتر می‌شود.) انتشار مستقیم نور نیز واقعیتی تجربی است و آن را نمی‌توان صرفاً از روی تقارن پیشگویی کرد، زیرا چه بسا که نور مرکب از ذرات پیچان و گردان باشد. سرانجام، چنین به نظر می‌رسد که وابسته نبودن سرعت نور به منبع را تحلیل دوسویه، در مورد ستاره‌های مزدوجی که به دور مرکز مشترکی می‌گردند، نشان داده باشد. در این ستاره‌ها، بیشینه انتقال به سرخ یکی از آنها همزمان با بیشینه انتقال به آبی دیگری است. اما فوکس^۳ در صحت این استدلال تردید کرده است. به اعتقاد او ممکن است ستاره‌های مزدوج را ابری از گاز پوشانده باشد، و این ابر گازی نور صادر از آنها را از نو با سرعت یکسان در همه جهات منتشر کند (طبق "قضیه خاموشی" اولد^۴ و اسن^۵). شاهد مستقیم آزمایشگاهی بر مستقل بودن سرعت نور از منبع، در سال ۱۹۶۳/۱۳۴۲ به دست آمد.^۶ با این حال، قویترین پشتیبان اصل موضوع دوم، یعنی سه‌گزاره‌ای که در آغاز این بند بیان کردیم، موفقیت همه‌جانبه بررسی نور توسط ماکسول به‌عنوان یک پدیده موجی الکترومغناطیسی است.

فیزیک مبتنی بر دو اصل موضوع اینشتین، نسبیت خاص نام دارد، اما پس از به دست آوردن تبدیلات لورنتس با اصل موضوع دوم دیگر کاری نداریم. حال می‌توانیم اصل موضوع اول را به صورت ریاضی از نو بیان کنیم: برای اینکه یک قانون فیزیکی در همه چارچوبهای لخت معتبر باشد، بیان صوری ریاضی آن در یک چارچوب لخت، باید تحت تبدیل لورنتس به خودش تبدیل شود. بنابراین، به موجب اصل موضوع اول، قوانین جدید باید "هموردای لورنتسی" باشند. مکانیک نیوتونی هموردای گالیه‌ای است اما هموردای لورنتسی نیست و از این رو با نسبیت خاص سازگاری ندارد. وظیفه نسبیت خاص این است که همه قوانین موجود فیزیکی را مرور کند و به کمک تبدیلات لورنتس آنها را به‌محک اصل نسبیت بزند و قوانین ناقص را به‌نحو مناسب اصلاح کند. این اصلاحات، هر چند از لحاظ بسیاری از کاربردهای جدید اهمیت دارند، در بیشتر موارد کلاسیک قابل چشمپوشی هستند و به همین دلیل پیش از این کشف نشده بودند. با این حال، شایان توجه است که از لحاظ صورت ریاضی نسبیت خاص، بسیاری از این قوانین جدید نه به دست آوردنشان دشوار است و نه در زیبایی دست‌کمی از نظایر کلاسیک خود دارند.^۷

1. Roemer 2. Io 3. Fox J G, *Am J Phys*, 1962, 30, 297. 4. Ewald 5. Oseen
6. Filippas T A and Fox J G, 1964, *Phys Rev*, 135, B 1071.

۷. با وجود این، در برخی زمینه‌های نوین، مانند نظریه کوانتومی سیستمهای برهم‌کنش‌دار، هنوز مشکلاتی بنیادی

در پایان این فصل ثابت می‌کنیم که اصل نسبیت به خودی خود (با اضافه کردن چند فرض معقول) فقط با دو تبدیل، یعنی تبدیل گالیلو و تبدیل لورنتس سازگار است و لاغیر. بنابراین، از لحاظ منطقی می‌توان به جای اصل موضوع دوم اینشتین از هر پدیده دیگری که مختص نسبیت خاص باشد — یعنی با اصل نسبیت سازگار باشد ولی با تبدیل گالیلو سازگار نباشد — استفاده کرد، و امروزه بسیاری از این‌گونه پدیده‌ها را می‌شناسیم. در هر حالت، نظریه حاصل باید نسبیت خاص باشد. پس جزئیات رفتار نور (یعنی وابسته نبودن سرعت آن به منبع) ستونی نیست که نسبیت خاص تنها بر آن استوار باشد، یا با فروریختن آن درهم بریزد. اهمیت این اصل برای اعتبار نظریه نسبیت از هیچ‌یک از پیشگوییهای این نظریه بیشتر نیست.

نسبیت خاص نه تنها به قوانین جدید می‌انجامد بلکه روش سودمندی برای حل مسائل نیز به دست می‌دهد، و آن امکان رفتن از یک چارچوب به چارچوب دیگر است. که در بسیاری از موارد مسئله را ساده‌تر می‌کند (بخش ۲-۳). زیرا اگر در انتخاب چارچوب مرجع جدید هوشمندی به خرج دهیم، هر چند مجموعه قوانین فیزیک همان قانونهای قبلی است، اما گاهی پیکربندی مسئله ساده‌تر و تقارن آن بیشتر می‌شود، مجهولات آن کاهش می‌یابد و مجموعه قوانین فرعی مربوط بدان راحت‌تر می‌شود.

اگر اصل هم‌ارزی را بپذیریم، نسبیت خاص به یک نظریه موضعی و تقریبی تبدیل می‌شود، زیرا گزاره‌های این نظریه به چارچوبهای کاملاً لخت مربوط می‌شود و این چارچوبها فقط به صورت موضعی و تقریبی می‌توانند تحقق یابند. دلیل اینکه در مورد کاملاً لخت بودن چارچوبها اصرار داریم، این است که می‌خواهیم در این چارچوبها همسانگردی و همگنی را کامل فرض کنیم. از جمله می‌خواهیم فرض کنیم که مسیر نور در هر جهتی راست خط است، و نیز اگر منبعی با سرعت معین حرکت کند. حرکت آن در هر جهتی که باشد، پدیده دوپلر واحدی از آن مشاهده خواهد شد چنانکه در بخش ۱-۲۱ دیدیم، در چارچوبهای گسترده نیوتونی لخت، این فرضها را نمی‌توان، با اطمینان، معتبر دانست. ما قوانین فیزیک را در چارچوبهای کاملاً لخت به ساده‌ترین صورت برقرار می‌دانیم، و اصل هم‌ارزی راه عملی یافتن این‌گونه چارچوبها را به ما نشان می‌دهد. این قوانین، به صورت آرمانی قوانینی هستند که برقرار بودن آنها در آزمایشگاههای زمینی از طریق مشاهده تحقیق شده است، و البته این آزمایشگاهها را نمی‌توان چارچوبهای کاملاً لخت محسوب کرد.

اکنون شاید خواننده بپرسد که وقتی نظریه نیوتون با نسبیت خاص ناسازگار است، و نسبیت خاص با چارچوبهای لخت سروکار دارد، و چارچوبهای لخت بر پایه قانون اول نیوتون تعریف می‌شوند، آیا اشکالی در جایی از کار ما وجود ندارد؟ پاسخ منفی است. زیرا قانون اول نیوتون با نسبیت خاص سازگار است، و نسبیت خاص در واقع آن را می‌پذیرد. با این حال، برای متمایز کردن چارچوبهای لخت از همه چارچوبهای صلب، می‌توان محض صرفه جویی، به جای قانون اول نیوتون از قانون انتشار نور استفاده کرد.

۲-۲ در باره ماهیت قوانین فیزیکی

شاید اکنون مناسب باشد که درباره "حقیقت داشتن" قانونهای فیزیکی توضیحی بدهیم. اندیشه نو که سخت تحت تأثیر اینشتین است - حتی بهترین قوانین فیزیک را هم بیان حقیقت مطلق نمی‌داند، بلکه بیان تقریبی حقیقت می‌شمارد، و نیز، به خلاف نظریه بیکن^۱ و حتی ماخ^۲، این قوانین را صرفاً خلاصه‌ای از واقعیات تجربی، که هر جوینده سختکوش و "عاری از پیشداوری" بتواند بدانها دست یابد نمی‌پندارد.^۳ در تنظیم این واقعیات قوه ابداع بشری ناگزیر دخالت می‌کند، و از این رو نظریه فیزیکی آمیزه‌ای است ذهنی از مفاهیم تعاریف و قوانین، که مدلی برای بخشی از طبیعت محسوب می‌شود؛ و بیش از آنکه بگوید طبیعت چیست، از چگونگی آن سخن می‌گوید. هر چند بدیهی است که توافق با تجربه شرط مفید بودن نظریه است، اما توافق با تجربه، هر قدر هم باشد، هیچ‌گاه نمی‌تواند نظریه‌ای را ثابت کند؛ زیرا دقت هیچ آزمایشی (مگر اینکه فقط شامل شمردن باشد) نمی‌تواند بینهایت باشد و نیز هیچ‌گاه نمی‌توان تمام موارد مربوط را آزمود. از سوی دیگر، عدم توافق با تجربه، جز در صورتی که بتوان نظریه‌ای به همان سادگی یافت که جای آن را بگیرد، ضرورتاً به نفی نظریه منجر نمی‌شود، بلکه فقط ممکن است به محدود شدن "حوزه اعتبار کافی" که برای آن مدل شناخته شده است، بینجامد. در دراین‌مورد کافی است قوانین نیوتون را درباره مکانیک ذرات مثال بیاوریم، که امروزه معلوم شده است در مورد ذراتی که حرکتشان بسیار سریع باشد صادق نیستند، یا نظریه گرانشی نیوتون را، که امروزه معلوم شده است در مورد جزئیات ظریف نظریه مدار سیارات کفایت ندارد. با این حال، چون قوانین "صحیح‌تر" نسبیتی از لحاظ ریاضی پیچیده‌ترند، قوانین نیوتون، در هر مورد که دقت شناخته شده آنها کافی باشد، همچنان به‌کار می‌روند.

با اینکه نسبیت خاص یکی از نظریه‌های کاملاً مسلم فیزیکی است و صحت آن واقعاً در میلیونها آزمایش تحقیق شده است، حتی در مورد آن نیز بهتر است چندان تعصب نداشته باشیم. شاید روزی معلوم شود که یکی از قوانین نسبیت خاص در حدود دقتی که تاکنون حاصل شده یا به فکر کسی راه نیافته است، مثلاً در زمینه‌هایی که در آخر بخش ۱-۱۹ دیدیم، کفایت ندارد. برای اینکه به دام خطا نیفتیم باید توجه داشته باشیم که هر نظریه علمی مدلی بیش نیست، و باید

1. Bacon 2. Mach

۳. همان‌گونه که اینشتین در سال ۱۹۵۲/۱۳۳۱ نوشت: "البته هیچ راه منطقی برای ارائه یک نظریه وجود ندارد."

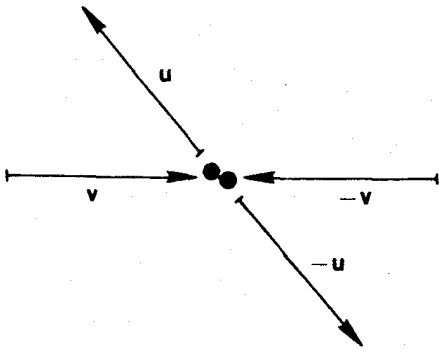
Shankland R S, 1964, *Am J Phys*, **32**, 16, p 35

چهار شرط اساسی داشته باشد: سادگی (یا به قول اینشتین، "زیبایی")، انسجام درونی، سازگاری با دیگر مفاهیم علمی روز و "توافق" کافی با تجربه. یک شرط ثانوی نیز هست که پوپر^۱ در مورد آن اصرار دارد و آن امکان ابطال تجربی است. نظریه‌های علمی نباید مغرور و از خودراضی باشند و ناگزیر به انجماد دچار شوند، بلکه هر چه نظریه‌ای بهتر باشد، شمار پیشگوییهای آن، که ابطال آن را امکانپذیر می‌سازد بیشتر است. و نکته آخر اینکه نظریه علمی نباید طوری باشد که برای مقابله با هر نتیجه متناقض با آن، دائماً به اصلاحات و تغییرات موضعی و موقتی نیازمند باشد.

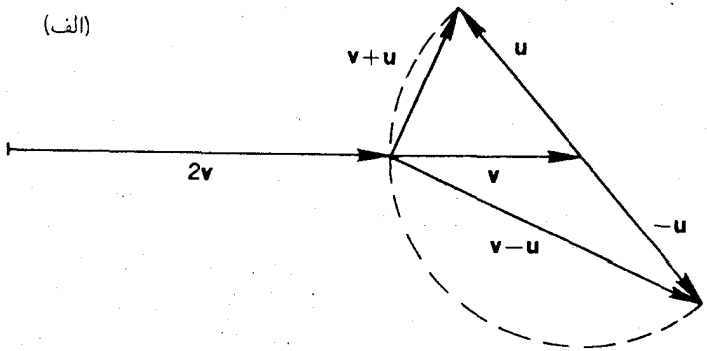
۲-۳ یک استدلال نوعی و قدیمی نسبیتی

با مثال کوتاه زیر می‌خواهیم گوشه‌ای از قدرت و رنگ و بوی استدلالهای نسبیتی را که از این پس خواهیم دید، نشان دهیم و برای سادگی و روشنی، یک مثال نیوتونی را انتخاب می‌کنیم. صورت اینشتینی همین مسئله را بعداً خواهیم دید (بخش ۵-۸ را ببینید). می‌خواهیم نتیجه‌ای به دست آوریم که بیلاردبازها با آن آشنا هستند، و آن اینکه اگر کره‌ای کاملاً کُشسان را به کره‌ای ساکن و مشابه آن بزنیم، مسیرهای واگرای دو کره پس از برخورد برهم عمود خواهند بود. اگر کره متحرک با سرعت $2v$ نسبت به میز حرکت کند، خود را به چارچوب لختی که در همان جهت با سرعت v حرکت می‌کند منتقل می‌کنیم. در این چارچوب دو کره به طور متقارن، با سرعت $v \pm v$ به هم نزدیک می‌شوند [شکل ۲-۱ (الف)] و نتیجه برخورد روشن است: به موجب اصل پایستگی تکانه، یا صرفاً به دلیل تقارن، سرعتهای دو کره پس از برخورد مساوی و مختلف‌العلامت اند (مثلاً $\pm u$) و طبق اصل پایستگی انرژی، باید مقدار عددی آنها مساوی مقدار عددی v باشد (یعنی $u = v$). اکنون با در دست داشتن این اطلاعات، می‌توانیم با افزودن v به همه سرعتها به چارچوب میز بازگردیم و بدین ترتیب به شکل ۲-۱ (ب) برسیم. در این شکل روشن است که پس از برخورد، سرعتها عبارت‌اند از $v \pm u$ و با رسم دایره‌ای که مرکز آن نوک پیکان نمایش دهنده v باشد، نتیجه مطلوب، به موجب هندسه مقدماتی، حاصل می‌شود. راه دیگر این است که داریم $v^2 - u^2 = 0$ (برای مثالهای دیگری از نسبیت نیوتونی، تمرینهای ۲-۱ تا ۳-۲).

اینشتین دریافت که چنین استدلالهایی در الکترومغناطیس نیز ممکن است و این امر در مسیر او به سوی نسبیت خاص بسیار مؤثر بود. قبلاً (بخش ۱-۱۲) سرآغاز مقاله معروفی را که اینشتین در ۱۹۰۵ نوشته است نقل کردیم، که در آن نسبیت ظاهری القای الکترومغناطیسی بحث می‌شود. او همچنین در اواخر عمر، در سال ۱۹۵۲ (در نامه‌ای به یک کنگره علمی) می‌نویسد: "چیزی که مرا کم‌وبیش مستقیماً به نسبیت خاص رهنمون کرد این بود که اعتقاد داشتم نیروی الکترومغناطیسی وارد بر یک جسم [باردار] که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، چیزی جز یک میدان الکتریکی [در چارچوب سکون جسم] نیست."^۲



(الف)



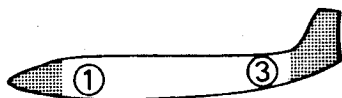
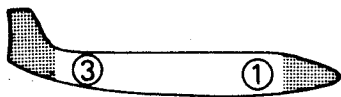
(ب)

شکل ۱-۲

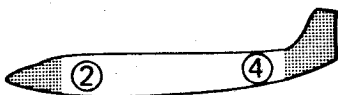
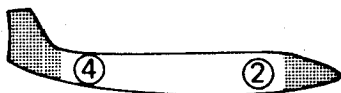
۲-۴ نسبیت همزمانی

از دیدگاه کلاسیک، زمان عبارت از توالی منظم لحظه‌های جهانی یا "برشهای تاریخ" است، "بودن در یک لحظه واحد" معیار همزمانی است و این معیار، مطلق است. اما یکی از نتایج مستقیم پذیرش دو اصل موضوع نسبیت خاص این است که همزمانی باید نسبی باشد.

ما در اینجا تعریف عملی زیر را برای همزمانی انتخاب می‌کنیم: دو رویداد \mathcal{P} و \mathcal{Q} را که در دو نقطه P و Q از چارچوب S رخ می‌دهند همزمان گوییم هرگاه علامتی نوری که از نقطه M ، وسط پاره خط PQ ، در S گسیل شود به \mathcal{P} و \mathcal{Q} برسد. همچنین می‌توانیم شرط همزمانی را چنین بیان کنیم که علامتهای نوری که از \mathcal{P} و \mathcal{Q} گسیل می‌شوند در M به هم برسند؛ یا اینکه اگر به‌طور همزمان از دو توپ مشابه که در M واقع‌اند دو گلوله شلیک کنیم، به \mathcal{P} و \mathcal{Q} برسند. اگر چارچوبهایی لخت را برای سراسر فیزیک همگن و همسانگرد فرض کنیم، این سه تعریف باید هم‌ارز باشند. دو ساعت که در P و Q قرار گرفته باشند می‌توانند وقت خود را با آزمایشهایی از این نوع تنظیم کنند، و می‌توانند انتظار داشته باشند که از آن پس، به دلیل همگنی و همسانگردی



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲

همیشه همزمان بمانند.

حال تصور کنید که هواپیمایی تندرو از فراز سر ما بگذرد و یک لامپ درست وسط سالن هواپیما خاموش شود. در این صورت مسافرانی که در جلو و عقب سالن نشسته‌اند این جرقه را در یک زمان می‌بینند — مثلاً در لحظه‌ای که ساعتشان سه واحد را نشان می‌دهد. اکنون فرض کنید که این جرقه را از روی زمین مشاهده کنیم. در چارچوب مرجع ما نیز نور با یک سرعت رو به جلو و عقب حرکت می‌کند. بنابراین مسافرانی که روی صندلیهای عقب نشسته‌اند، و روبه علامت نوری حرکت می‌کنند جرقه نور را پیش از مسافران صندلیهای جلو، که از علامت نوری حرکت می‌کنند جرقه نور را پیش از مسافران صندلیهای جلو، که از علامت نوری دور می‌شوند، دریافت می‌کنند. قسمت بالای شکل ۲-۲ (الف) یک عکس فوری را که در لحظه رسیدن علامت نوری به عقب سالن برداشته‌ایم، نشان می‌دهد. چون در این لحظه هنوز علامت نوری به جلو سالن نرسیده است، ساعت‌های جلو هواپیما کمتر از سه واحد را نشان می‌دهند — مثلاً یک واحد را نشان می‌دهند (برحسب واحدی کوچکتر از ثانیه!). این دو قرائت مختلف ساعتها در چارچوب ما دو رویداد همزمان‌اند، بنابراین همزمانی نسبی است.

حالا هواپیمای دیگری را که با همان سرعت اما در جهت مخالف حرکت می‌کند، به مسئله اضافه می‌کنیم. اگر وقتی که عکس فوری برمی‌داریم هواپیمای دوم درست موازی هواپیمای اول

باشد—چنانکه در شکل ۲-۲ (الف) می‌بینیم— آنگاه به دلیل تقارن، قرائت ساعتهای هواپیمای دوم نیز دو واحد با هم اختلاف خواهند داشت— مثلاً ۳ و ۱ خواهد بود— به شرط آنکه تنظیم صفر ساعتها درست انتخاب شده باشد. حالا توجه کنید: جلو هواپیمای دوم در لحظه ۳ (طبق ضبط هواپیمای اول) از مقابل هواپیمای اول می‌گذرد، اما عقب آن زودتر، یعنی در لحظه ۱ به هواپیمای اول می‌رسد. بنابراین هواپیمای اول، هواپیمای دوم را از خودش کوتاهتر می‌شمارد. این پدیده انقباض نسبی طول نام دارد. به تقارن کامل این پدیده توجه کنید: هواپیمای دوم نیز هواپیمای اول را از خودش کوتاهتر می‌شمارد.

اکنون عکس فوری دیگری را در نظر بگیرید که در لحظه‌ای که عقب دو سالن از مقابل هم می‌گذرد، گرفته شود. روشن است که تفاوت قرائت ساعتهای هر یک از هواپیماها درست ۲ واحد خواهد بود، اما قرائت واقعی ساعتها به طول هواپیماها و سرعت آنها بستگی خواهد داشت. فرض کنید که مانند شکل ۲-۲ (ب)، قرائت این ساعتها ۴ و ۲ باشد. باز هم دقت کنید: در عکس فوری (الف)، ساعت عقبی هواپیمای اول ۲ واحد جلوتر از ساعتی در هواپیمای دیگر است که درست از کنارش می‌گذرد، اما در عکس فوری (ب) همین ساعت اصلاً از ساعت دیگر جلوتر نیست. بنابراین، ساعت عقبی هواپیمای اول، در مقایسه با ساعتی همزمان شده هواپیمای دوم عقب‌مانده است. این پدیده اتساع نسبی زمان نام دارد. در این مورد نیز به تقارن کامل این پدیده نسبت به دو هواپیما توجه کنید.

باید توجه داشت که هر چند به جای نور می‌توان از گلوله‌های توپ یا از سیگنالهای صوتی در هوای آرام و غیره، برای تعریف همزمانی در هر چارچوب لخت استفاده کرد، اما اگر از چنین روشهایی استفاده کنیم برهانهای فوق عقیم خواهند بود. نور چیز خاصی است، سرعت آن در همه چارچوبها یکی است و بنابراین می‌توان جرقة واحدی را برای همزمان کردن ساعتها در چارچوبهای مختلف به‌کار برد.

همچنین باید توجه داشته باشیم که همزمان کردن ساعتها (یا معادل با آن، تعریف همزمانی) به یک اعتبار، کاری قراردادی است. مثلاً می‌توانیم در تمام چارچوبهای لخت زمان یکی از چارچوبها را اختیار کنیم. اما این کار عملاً اشکالاتی دارد، به این معنی که توصیف مختصاتی فیزیکی، در این چارچوب لخت کلی، دیگر همسانگرد نخواهد بود؛ مثلاً سرعت مختصاتی نور، یا گلوله‌های توپ، به جهت بستگی پیدا خواهد کرد. بنابراین ما همزمان‌سازی یکتایی را که برای هر چارچوب اختیار شود، ترجیح می‌دهیم، زیرا این نوع همزمان‌سازی، فیزیک را گذشته از عالم واقع، از لحاظ توصیف مختصاتی نیز همسانگرد می‌سازد.

۲-۵ شبکه مختصات

پیش از آنکه به تبدیل مختصات بیردازیم، به جاست که نحوه تعریف مختصات را در یک چارچوب خاص، روشن کنیم. بدیهی‌ترین راه برای اندازه‌گیری فاصله، استفاده از مقیاسهای صلب است.

اما این مقیاسها در فیزیک شهرت خوبی ندارند، و شاید دلیل واقعی آن این باشد که از لحاظ اتمی ساختمانهای پیچیده‌ای هستند؛ و اندازه‌گیری فواصل به روشهای راداری، با استفاده از نور و ساعت، اساسی‌تر و حتی عملی‌تر به نظر می‌رسد. با این حال، باید توجه داشت که اگر یک نوع معیار صلب برای طول وجود نداشته باشد، ثابت بودن سرعت نور امری صرفاً قراردادی خواهد بود. برهان ضعیفتری که اغلب علیه استفاده از مقیاسهای صلب می‌آورند این است که این مقیاسها اگر به طریق خاصی شتاب بیابند، به موجب سینماتیک نسبیتی، صلب باقی نمی‌مانند. با این حال، فرض وجود مقیاسهای "کشسان"، که به شرط ملایم بودن شتاب پس از حذف شتاب شکل اصلی خود را باز می‌یابند، هیچ اشکالی منطقی ندارد، و در استفاده از این مقیاسها در چارچوبهای لخت، برای ثبت فواصل، جای تردید نیست.

با این مقدمات، فرض می‌کنیم ناظری که در مبدأ یک چارچوب لخت قرار دارد ساعت معیاری در اختیار دارد و فاصله خود را با هر ذره با فرستادن یک علامت نوری به آن ذره و دریافت بازتابش آن و ضرب کردن زمانی که می‌گذرد در $c/2$ به دست می‌آورد. آنگاه با اندازه‌گیری زوایا با تئودولیت مقادیر (x, y, z) مربوط به آن ذره به دست می‌آید. می‌توانیم در تمام "نقاط شبکه‌ای" $(\pm m, \pm n, \pm p)$ — که در آن m و n و p عدد صحیح‌اند — ذرات آزمون آزادی در حال سکون قرار دهیم و با انتخاب واحدهای مناسب، فاصله این ذرات را به دلخواه به هم نزدیک کنیم. چون بنا به فرض، در یک چارچوب کاملاً لخت هستیم، این ذرات به حالت سکون باقی می‌مانند. می‌توان چنین تصور کرد که روی هر یک از این ذرات ساعتی نصب شده است که درست‌المنشای ساعت اصلی است که در مبدأ قرار دارد. این ساعتها را می‌توان با علامتی که در زمان t_0 از مبدأ گسیل می‌شود، میزان کرد؛ بدین معنی که هر ساعت شبکه‌ای وقتی علامت را دریافت می‌دارد روی $t_0 + r/c$ تنظیم می‌شود، که در آن r فاصله آن نقطه شبکه از مبدأ است و قبلاً معین شده است. بر مبنای نظریه کلاسیک، روشن است که با این فرایند همه ساعتها در "چارچوب اتر" به نحو رضایت‌بخشی همزمان می‌شوند؛ به طوری که، طبق تعریف همزمانی در بخش پیش، هر دو ساعت دلخواه، زمان واحدی را برای رویدادهای همزمان ثبت می‌کنند. اما تنها کاری که نسبیت با قوانین کلاسیک می‌کند این است که مزیت چارچوب اتر را بر دیگر چارچوبهای لخت از بین می‌برد. بنابراین، فرایند فوق برای همزمان کردن ساعتها در هر دستگاه لختی معتبر است. وقتی که بدین کار موفق شدیم، یعنی وقتی "شبکه" را درست کردیم و آنرا از لحاظ زمانی و فضایی مدرج ساختیم، می‌توانیم تئودولیتها و علامتهای نوری را رها کنیم. یعنی اکنون دیگر می‌توانیم مختصات همه رویدادها را به صورت موضعی — یعنی مستقیماً در محل وقوع رویدادها — با ناظرهای کمکی مناسب، قرائت کنیم.^۱ البته اگر بتوانیم مقیاسهای صلب را در ذهن متصور کنیم، همچنان می‌توانیم هر دو ساعت شبکه‌ای دلخواه را توسط یک مقیاس صلب به هم مربوط سازیم.

ذکر مجدد این نکته بد نیست که به جای سیگنالهای نوری می‌توان از "علامتها"ی دیگری چون گلوله توپ نیز برای مدرج کردن و همزمان کردن شبکه مختصات استفاده کرد. تنها چیزی که

نیاز داریم این است که ناظر مبدأ مختصات پرتابه‌های معیاری، مثلاً در زمان t_0 ، در جهات مختلف شلیک کند. سرعت u پرتابه را می‌توان عددی دلخواه اختیار کرد که فقط واحد فاصله را با آن تثبیت می‌کنیم. (راه دیگر این است که سرعت گلوله را در مبدأ اندازه بگیریم، یا حتی آن را به صورت نظری محاسبه کنیم.) زوایا را می‌توان از روی امتداد لولهٔ توپ اندازه گرفت. هر ناظر کمکی، وقتی گلوله‌ای که از مبدأ شلیک شده است از کنار او می‌گذرد، باید از توپ مشابه گلولهٔ مشابهی شلیک کند. اگر این گلوله در زمان t به مبدأ برسد، فاصلهٔ ناظر تا مبدأ در لحظه‌ای که «علامت کنترل» را دریافت کرده است، $\frac{1}{2}u(t - t_0)$ و قرائت ساعت او در آن لحظه $(t + t_0)/2$ بوده است. البته در سراسر این گفته‌ها، قانون اول نیوتون مفروض است.

۲-۶ تبدیل لورنتس

اکنون دو چارچوب لخت دلخواه S و S' را که شبکه‌های مختصات در آنها برقرار شده است در نظر می‌گیریم. (معمولاً چارچوب لخت را مجموعهٔ ذرات آزادی می‌دانیم که در آن چارچوب ساکن‌اند، و مختصات را یک ساختمان اضافی می‌شماریم.) می‌خواهیم رابطهٔ میان مختصات S ، یعنی (x, y, z, t) و مختصات S' یعنی (x', y', z', t') را برای یک رویداد دلخواه به دست آوریم. اولاً این رابطه باید خطی باشد — همچنانکه تبدیل گالیله ۱-۱ خطی است. این امر (که بدیهی هم نیست) نتیجهٔ مستقیم تعریف چارچوبهای لخت است. زیرا فقط تحت یک تبدیل خطی، معادلات حرکت ذرات آزاد در S به معادلات خطی در S' تبدیل می‌شوند. در واقع این شرط، به خودی خود، فقط ایجاب می‌کند که تبدیلات خطی کسری باشند؛ یعنی مختصات S به صورت نسبت توابع خطی از مختصات S' باشند و مخرج همهٔ این کسرها یکی باشد.^۱ با این حال، اگر وجود رویدادهای متناهی در S را که مختصات آنها در S' نامتناهی باشد، به دلایل فیزیکی منتفی بدانیم، در این صورت باید مخرج کسرها ثابت و تبدیل مورد نظر خطی باشد.^۲

به دلیل این خطی بودن، ثابت بودن مقادیر x', y', z' ، ثابت بودن و یکنمایی مقادیر dx/dt ، dy/dt و dz/dt را ایجاب می‌کند. بنابراین هر چارچوب لخت نسبت به هر چارچوب لخت دیگر، حرکت انتقالی یکنواخت دارد. همچنین از لوازم خطی بودن این است که امتداد محورهای S' نسبت به S ثابت بماند؛ و نیز، مانند حالت کلاسیک، می‌توان مختصات را نسبت به S و S' در «پیکربندی معیار»^۳ که در بخش ۱-۳ شرح دادیم، انتخاب کرد. (این نکته نسبتاً واضح است.^۴) ویژگی اساسی دیگر این است که S و S' سرعتهای برابر و مختلف‌العلامت به هم نسبت

1. Fock V, 1959, *The Theory of Space Time and Gravitation*, Pergamon Press, Appendix A.

۲. همین محدودیت از این فرض نیز به دست می‌آید که اجسام با حرکت یکنواخت به اجسام با حرکت یکنواخت تبدیل می‌شوند (پایستگی موازیت). برهان دیگری برای خطی بودن از ثابت بودن سرعت نور به دست می‌آید. مثلاً RSR ص ۱۷ را ببینید.

می‌دهند (مثلاً $\pm v$). زیرا، به دلیل پیوستگی روشن است که چارچوبی چون S'' "بین S " و S' وجود دارد، به طوری که سرعت S و S' نسبت به S'' مساوی و مختلف‌العلامت است. اما عملی را که در S برای تعیین سرعت S' انجام می‌گیرد می‌توان آزمایشی در S'' دانست. عمل نظیر آنکه در S' انجام گیرد، تصویر آینه‌ای آزمایش S'' است. و بنابراین، به دلیل همسانگرد بودن S'' ، از هر دو آزمایش باید یک نتیجه عددی به دست آید، پس گفته ما ثابت می‌شود.

حال مختصات را در S و S' در پیکربندی معیار شکل ۱-۱ در نظر بگیرید. در این صورت صفحات مختصات $y = 0$ و $y' = 0$ همواره برهم منطبق خواهند بود. اما به دلیل خطی بودن، y' به صورت $Ax + By + Cz + Dt + E$ است، و بنابراین $A = C = D = E = 0$ ، و

$$y' = By \quad (1-2)$$

که در آن B ثابتی است که شاید به v بستگی داشته باشد. حال جهت محورهای x و z را در S و S' معکوس می‌کنیم. این کار نمی‌تواند تأثیری بر ۱-۲ داشته باشد، اما نقش S و S' را با هم عوض می‌کند. در این صورت، شکل ۱-۱، همچنان به اعتبار خود باقی است، اما نمادهای پریم‌دار و بی‌پریم جایشان را با هم عوض می‌کنند. بنابراین باید داشته باشیم

$$y = By'$$

و در نتیجه $B = \pm 1$. مقدار منفی را بلافاصله می‌توان رها کرد، زیرا برای $v \rightarrow 0$ باید به طور پیوسته داشته باشیم $y' \sim y$. برهان مشابهی می‌توان برای z آورد و بنابراین به روابط

$$y' = y \quad z' = z \quad (2-2)$$

که دو جزء "بدیهی" تبدیل‌اند، می‌رسیم. حال، چون x' ، بر حسب مختصات بدون پریم، خطی است، و چون به ازای $x = vt$ باید داشته باشیم $x' = 0$ ، بنابراین x' باید به صورت

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (3-2)$$

باشد که در آن γ عددی است ثابت و احتمالاً تابع v . همچنین چون به ازای $x' = -vt'$ باید داشته باشیم $x = 0$ ، داریم

$$x = \gamma'(x' + vt') \quad (4-2)$$

که γ' هم ثابتی است از نوع γ ، حال دوباره جهت محورهای x و x' را در S و S' معکوس می‌کنیم. در این صورت، با نشانیدن قرینه‌های x و x' به جای آنها در ۲-۳، داریم

$$x' = \gamma(x + vt)$$

و نیز با معکوس کردن نقشها در ۲-۴ داریم

$$x' = \gamma'(x + vt)$$

و در نتیجه

$$\gamma' = \gamma \quad (5-2)$$

روشن است که γ باید مثبت باشد، چون x و x' در $t = 0$ تماماً افزایش می‌یابند. اما از "اصل موضوع دوم" (ثابت بودن سرعت نور) می‌دانیم که $x = ct$ مستلزم $x' = ct'$ است و به عکس. با قرار دادن این مقادیر در ۲-۳ و ۲-۴ و با استفاده از ۲-۵ خواهیم داشت

$$ct' = \gamma t(c - v), \quad ct = \gamma t'(c + v)$$

با ضرب کردن دو طرف معادلات بالا در یکدیگر و حذف t' به دست می‌آوریم

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (6-2)$$

(چنانکه در بالا دیدیم، در اینجا به ریشه مثبت نیاز داریم.) این تابع v ، به "ضریب لورنتس" معروف است که نقش مهمی در نظریه نسبیت دارد. با حذف x' بین ۲-۳ و ۲-۴ سرانجام به نتیجه زیر می‌رسیم

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

بدین ترتیب، با گردآوری نتایج به دست آمده، معادلات تبدیل معیار لورنتس را داریم

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (7-2)$$

اگر یک قانون فیزیکی تحت این تبدیلات و تحت چرخشهای فضایی، انتقالهای فضایی، و انتقالهای زمانی ناوردا باشد، در این صورت بین هر دو دستگاه مختصات لخت نیز ناوردا خواهد بود. زیرا به آسانی می‌توان دید که تبدیل کلی بین دو چارچوب لخت، که مختصاتشان معیار باشند اما لزوماً در پیکربندی معیار نباشند، مرکب از تبدیلات زیر است: (۱) یک چرخش و انتقال فضایی (برای آنکه محور x چارچوب S بر امتداد حرکت مبدأ S' منطبق شود)؛ (۲) یک انتقال زمانی (برای آنکه مبدأ دو چارچوب در $t = 0$ برهم منطبق شود)؛ (۳) یک تبدیل لورنتس معیار؛ و سرانجام چرخش فضایی و انتقال زمانی دیگری که ما را به مختصات S' می‌رساند. تبدیل حاصل، تبدیل عام لورنتس یا تبدیل یوانکاره نام دارد. چون هر حلقه از این زنجیره تبدیلات، خطی است، حاصل آن هم خطی است.

۷-۲ خصوصیات تبدیل لورنتس

در بخش پیش ثابت کردیم که اگر تبدیلی وجود داشته باشد که نیازهای نسبیت خاص را برآورد، آن تبدیل ۷-۲ است. اما هنوز تحقیق نکرده‌ایم که تبدیل لورنتس ۷-۲ در واقع این نیازها را برمی‌آورد. نکته اول اینکه ما برای به دست آوردن روابط ۷-۲ فقط از سیگنالهایی در راستای x استفاده کردیم؛ بنابراین باید تحقیق کنیم که هر سیگنال نوری دلخواه در S متناظر با یک سیگنال نوری در S' است. نکته دوم اینکه فرض اقلیدسی بودن هندسه فضا در S و S' باید در این تبدیلات محترم شمرده شود. و نکته سوم اینکه، برای اینکه هیچ چارچوب ممتازی وجود نداشته باشد، لازم است که اگر دو چارچوب از طریق تبدیلات لورنتس با چارچوب سومی مربوط شوند، آن دو چارچوب را هم یک تبدیل لورنتس به یکدیگر مربوط سازد. این خصوصیات تبدیلات لورنتس در بندهای (الف) تا (ج) در زیر آزموده می‌شود. خصوصیات دیگر در بندهای (د) تا (ز) مورد بحث قرار می‌گیرد.

(الف) هرگاه Δx و Δy و غیره بیانگر تفاضل متناهی مختصات $x_1 - x_2$ و $y_1 - y_2$ و غیره مربوط به رویدادهای \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 باشند، آنگاه با قراردادن مختصات \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 در ۷-۲ و تفریق نتایج تبدیل زیر را خواهیم داشت

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \Delta y' = \Delta y, \Delta z' = \Delta z, \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2) \quad (۸-۲)$$

اگر به جای عمل تفریق از روابط ۷-۲ ديفرانسیل بگیریم، روابطی یکسان با روابط فوق، اما به صورت ديفرانسیلی به دست خواهیم آورد:

$$dx' = \gamma(dx - vdt), dy' = dy, dz' = dz, dt' = \gamma(dt - vdx/c^2) \quad (۹-۲)$$

بنابراین، تفاضلهای متناهی مختصات و نیز ديفرانسیل آنها، در همان معادلات تبدیل مختصات صدق می‌کنند. البته این خاصیت در همه تبدیلهای خطی همگن وجود دارد.

(ب) اتحاد

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (۱۰-۲)$$

یکی از نتایج صرفاً جبری ۸-۲ است. (همین اتحاد را به صورت دیفرانسیلی می‌توان از ۹-۲ نتیجه گرفت.) مقدار مشترک این دو صورت مجذوری را مربع بازهٔ Δs^2 بین دو رویداد \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 می‌نامند:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (۱۱-۲)$$

این مقدار، گاه مثبت است، گاه صفر است، و گاه منفی. برای دو رویداد که بر یک سیگنال نوری واقع باشند، این مقدار صفر است، زیرا فاصله‌ای که سیگنال نوری می‌پیماید، $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$ برابر است با $c \Delta t$. بنابراین اتحاد ۱۰-۲ نشان می‌دهد که هر سیگنال نوری دلخواه در S متناظر است با یک سیگنال نوری در S' ، و به عکس. یادآور می‌شویم که "متریک" اقلیدسی $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ با این خاصیت که نور در همهٔ راستاها با سرعت c سیر می‌کند سازگار است.

مربع بازهٔ Δs^2 حتی تحت تبدیلات عام لورنتس ناورداست. این تبدیلات که در آخر بخش ۶-۲ تعریف شده‌اند، دو چارچوب لخت دلخواه با محورهای معیار را به هم مربوط می‌سازند، و مرکب‌اند از تبدیلات معیار لورنتس، چرخشهای فضایی، و انتقالهای زمانی و فضایی زیرا این مقدار تحت تبدیلات معیار لورنتس ناورداست، همچنین تحت چرخش (که هر یک از مقادیر $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ را ثابت نگاه می‌دارد) ناورداست، و بالاخره تحت انتقال (که هیچ‌یک از مقادیر Δx ، Δy ، Δz و Δt را تغییر نمی‌دهد) هم ناورداست. به عکس، می‌توان ثابت کرد که — اگر انعکاس زمانی و فضایی ($t \rightarrow -t$ و غیره) را کنار بگذاریم — تبدیلات عام لورنتس عامترین تبدیلاتی هستند که Δs^2 را ثابت نگاه می‌دارند.

(ج) با حل مستقیم جبری ۷-۲ برای x و y و z داریم

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad (۱۲-۲)$$

و بنابراین وارون ۷-۲ یک تبدیل لورنتس است با پارامتر $-v$ به جای v . و این امر را می‌توان از ملاحظات مربوط به تقارن انتظار داشت. (البته ۱۲-۲ به صورت دیفرانسیلی و Δ یی نیز صادق است.) همچنین می‌توان دید که برآیند دو تبدیل لورنتس با پارامترهای v_1 و v_2 نیز تبدیلی است به صورت ۷-۲ با پارامتر $v = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2 / c^2)$. v (تحقیق مستقیم این رابطه اندکی دشوار و خسته‌کننده است، اما در بخش ۸-۲ راه ساده‌ای برای رسیدن به آن ارائه خواهیم داد.) این دو ویژگی یعنی تقارن و تراگذری نشان می‌دهد که تبدیلات لورنتس، به زبان فنی، تشکیل یک

“گروه” می‌دهند. به دلیل این دو ویژگی، اگر S و S' و S'' سه دستگاه مختصات باشند به طوری که S توسط تبدیلات لورنتس به S' و S'' مربوط شود، در آن صورت — به دلیل تقارن — S' نیز توسط یک تبدیل لورنتس به S مربوط می‌شود و بنابراین — به دلیل تعدی — S' توسط یک تبدیل لورنتس به S'' مربوط می‌شود. همچنین می‌توان اثبات کرد که تبدیلات عام لورنتس نیز یک گروه تشکیل می‌دهند، و بدین طریق همهٔ دستگاه‌های مختصات معیار از یک حیثیت و اعتبار برخوردار می‌شوند، و این نکته مایهٔ تعجب نیست.

در نظریهٔ اتر لورنتس (بخش ۱-۱۰) از فرض انقباض طول و انبساط زمان نسبت به اتر، نتیجه می‌شود که هر چارچوب لخت را یک تبدیل لورنتس به چارچوب اتر مربوط می‌کند، اما خصوصیت گروهی نشان می‌دهد که به رغم برتری مفهومی چارچوب اتر، این چارچوب از لحاظ سینماتیک با تمام چارچوبهای لخت دیگر هم‌ارز است.

د) برای $v \neq 0$ ضریب لورنتس γ همواره بزرگتر از یک است، هر چند وقتی v کوچک باشد، چندان از یک بزرگتر نیست. مثلاً تا وقتی $v/c < 1/7$ (که با این سرعت دور زمین را می‌توان در یک ثانیه پیمود)، γ از 1.01 کوچکتر است؛ وقتی که $v/c = \sqrt{3/2} = 0.866$ ، $\gamma = 2$ ؛ و وقتی که $v/c = 0.9900995$ (به تعداد $2n$ رقم ۹)، γ تقریباً برابر است با 10^n ، بنابراین، چنانکه مقایسهٔ ۲-۷ و ۱-۱ نشان می‌دهد، وقتی v کوچک باشد، تبدیل گالیله تقریب خوبی است برای تبدیل لورنتس. به بیان دیگر، وقتی به طور صوری قرار دهیم $c \rightarrow \infty$ ، تبدیل لورنتس به تبدیل گالیله بدل می‌شود.

ه) ظهور مختصهٔ فضایی x در تبدیل زمان در ۲-۷ بیان ریاضی نسبیت همزمانی است، و متضمن این معنی است که دو رویداد با t یکسان t' یکسان ندارند.

ماکس فون لاوه^۱ تذکر داده است که هرگاه استوانه‌ای به دور محور x در چارچوب S' حرکت دورانی یکنواخت داشته باشد، اگر از دستگاه متعارف دیگر S که استوانه نسبت به آن علاوه بر حرکت چرخشی حرکت انتقالی نیز دارد به طور همزمان نگاه کنیم، می‌بینیم که استوانه تاب برداشته است. این امر را می‌توان به شیوه‌های مختلف توجیه کرد، به ویژه می‌توان آن را نمایش ساده‌ای از نسبیت همزمانی دانست. استوانه را مرکب از برشهای مدور بسیار در نظر بگیرید، که هر برش با چرخش خودکار یک ساعت را انجام می‌دهد. اگر شعاعهای موازی دلخواه این برشها را به عنوان “عقربکها”ی ساعتها در نظر بگیریم، همهٔ این ساعتها در S' همزمان‌اند. اما در S ساعتها همزمان نیستند، پس عقربکها موازی نیستند، پس استوانه تاب برداشته به نظر می‌آید! (اگر سرعت زاویه‌ای استوانه در S' ، ω باشد، با قراردادن $t = 0$ و $x = 1$ در ۲-۷ درمی‌یابیم که در S مقدار تاب برداشستگی (پیمایش) در واحد طول برابر است با $\gamma\omega v/c^2$).

و) به جای نور، از هر پدیده‌ای که سرعت آن در خلأ همواره یکسان باشد، می‌توانیم برای به دست آوردن تبدیلات لورنتس استفاده کنیم، و چون فقط یک تبدیل می‌تواند معتبر باشد. بنابراین همهٔ این‌گونه پدیده‌ها (امواج گرانش، ادراک ورای حسی) باید با سرعت نور منتشر شوند. به ویژه امواج

الکترومغناطیسی، با وجود اینکه سرعتشان در محیطهای شفاف مختلف فرق می‌کند، باید در خلأ درست با سرعت c سیر کنند.

ز) وقتی $v = c$ ، γ بینهایت می‌شود، و $v > c$ به مقادیر موهومی می‌انجامد. بنابراین، سرعت نسبی دو چارچوب لخت باید کمتر از سرعت نور باشد، زیرا مقادیر حقیقی و متناهی مختصات در یک چارچوب، باید با مقادیر حقیقی و متناهی در هر چارچوب دیگر متناظر باشند.

در واقع، اگر اصرار داشته باشیم که علیت ناوردا بماند، می‌توان ثابت کرد که سرعت ذرات، و سرعت هیچ "سیگنال" فیزیکی، نمی‌تواند از c بیشتر باشد. زیرا فرایند دلخواهی را فرض کنید که از طریق آن رویداد \mathcal{P} علت رویداد \mathcal{Q} شود (یا از طریق آن اطلاعی از \mathcal{Q} به \mathcal{P} فرستاده شود) و سرعت این فرایند نسبت به یک چارچوب S ، $U > c$ باشد. مختصات را در S طوری انتخاب کنید که هر دو رویداد بر محور x واقع شوند، و فاصله زمانی و مکانی آنها را $\Delta t > 0$ و $\Delta x > 0$ فرض کنید. در این صورت، طبق ۸-۲، در چارچوب دوم S' داریم

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{vU}{c^2} \right) \quad (۱۳-۲)$$

در این صورت، به‌ازای $v < c$ و $v < U < c$ ، داریم $\Delta t' < 0$. بنابراین چارچوبهای لختی وجود خواهد داشت که در آنها \mathcal{P} بر \mathcal{Q} مقدم خواهد بود، یعنی در این چارچوبها علت و معلول جابه‌جا می‌شوند یا اطلاع، از گیرنده به فرستنده فرستاده می‌شود.

از جمله عجایب دیگر اینکه در چنین وضعی می‌توانیم به‌آینده خود پی ببریم. زیرا اگر بتوان از نقطه‌ای چون P به نقطه‌ای چون Q (در یک چارچوب S') سیگنالی فرستاد که پیش از ترک P به Q برسد، آنگاه، به‌دلیل تقارن، سیگنال را می‌توان فوراً از Q به P برگرداند، به‌طوری که پیش از ترک Q ، یعنی پیش از آنکه سیگنال اصلی P را ترک کند، به P برسد. در این صورت شخصی که در P واقع است، می‌تواند نسبت به رویدادهایی که در P رخ می‌دهند معرفت قبلی داشته باشد و آنها را به‌دلخواه خنثی کند؛ و این امر به تناقضات عظیم می‌انجامد.

از سوی دیگر، محدود بودن سرعت به c ضامن ناوردایی علیت است. زیرا اگر دو رویداد بر خطی که با محور x زاویه θ می‌سازد در S روی دهند (بدین‌طریق کلیت رویدادها را نسبت به S و S' محدود نمی‌کنیم)، و بتوان این دو رویداد را در S توسط سیگنالی با سرعت $u \leq c$ به هم مربوط کرد، با قرار دادن $u \cos \theta$ به‌جای u در ۱۳-۲ می‌بینیم که به‌ازای همه مقادیر v که بین $\pm c$ قرار داشته باشند، Δt و $\Delta t'$ دارای یک علامت هستند.

تذکر این نکته بد نیست که سرعت متقابل "دو ذره یا دو فوتون" نسبت به هر چارچوب S ، ممکن است تا $2c$ برسد. این سرعت، آهنگ زمانی تغییر بردار $\Gamma_2 - \Gamma_1$ است که دو ذره را به هم متصل می‌سازد. فرض می‌کنیم که بردار موقعیت و سرعت دو ذره به‌ترتیب Γ_1 ، Γ_2 و u_1 و u_2

باشد، در این صورت مانند سینماتیک کلاسیک داریم

$$(d/dt)(r_2 - r_1) = u_2 - u_1$$

مثلاً سرعت متقابل دو فوتون که روی امتداد مشترکی در جهت خلاف هم حرکت می‌کنند، درست ۲c است. سرعت سیگنال‌هایی که حامل هیچ‌گونه اطلاعی نیستند — مثلاً نور نورافکنی که سطح تکه ابری را می‌روبد — می‌تواند به هر اندازه که بخواهیم بزرگ باشد (بخش ۲-۹). یکی از پیامدهای حد نسبیتهای سرعت این است که "اجسام صلب" و "سیالهای تراکم‌ناپذیر"، حتی به‌عنوان صورتهای آرمانی یا حالت‌های حدی، نیز نمی‌توانند موجود باشند؛ زیرا چنین اجسامی، طبق تعریف می‌توانند سیگنالها را فوراً [با سرعت بینهایت] انتقال دهند. در نسبیت، جسمی که در نقاط مختلف خود به‌طور همزمان تحت اثر نیروهای مختلف باشد، در آغاز به‌هر نیرو طوری پاسخ می‌دهد که گویی هیچ‌یک از نیروهای دیگر وجود ندارد؛ زیرا مدت زمان معینی طول می‌کشد که اثر نیروهای دیگر به‌هر نقطه برسد. بنابراین در نسبیت، هر جسمی دارای بینهایت درجه آزادی است. همچنین جسمی که در یک چارچوب شکل خود را حفظ می‌کند، اگر دارای شتاب باشد ممکن است در چارچوب دیگری تغییر شکل یافته به‌نظر آید. نمونه این امر را در استوانه‌ی لانه دیدیم. به‌عنوان مثالی ساده‌تر میله‌ای را در دستگاه S' در نظر بگیرید که ضمن حرکت با شتاب a در امتداد y' موازی x' می‌ماند. معادله‌ی حرکت آن، $y' = \sqrt{2}at'^2$ ، با تبدیل لورنتس به $y = \sqrt{2}a\gamma^2(t - vx/c^2)^2$ تبدیل می‌شود، و بنابراین در هر لحظه $t = \text{const.}$ میله در چارچوب متعارف S شکل تکه‌ای از یک سهمی را دارد. با این حال، حتی اجسام شتابدار هم ممکن است دستخوش "حرکت صلب" شوند؛ و این مفهومی است که در بخش ۲-۱۶ تعریف خواهد شد.

۲-۸ صورت‌های هذلولوی تبدیلات لورنتس

برای پاره‌ای از مقاصد، بهتر است در تبدیل لورنتس به‌جای "پارامتر سرعت v "، "پارامتر هذلولوی ϕ " را بنشانیم. ϕ با یکی از چهار معادله‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\cosh \phi = \gamma, \quad \sinh \phi = \frac{v}{c}\gamma, \quad \tanh \phi = \frac{v}{c} \quad (14-2)$$

$$e^\phi = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \left[\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}\right]^{1/2} \quad (15-2)$$

(برای آنکه ϕ یکتا باشد، باید به نخستین معادله از این معادلات، شرط یکسان بودن علامت ϕ و v را افزود. روابط $\cosh \phi = \cos i\phi$ و $i \sinh \phi = \sin i\phi$ را یادآوری می‌کنیم. به‌کمک این

روابط هر اتحاد مثلثاتی را می‌توان به اتحادی برحسب توابع هذلولوی تبدیل کرد. به‌ویژه داریم $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ که هم‌ارزی اولین و دومین رابطه از روابط ۱۴-۲ را از آن نتیجه می‌گیریم. همچنین به‌یاد می‌آوریم که $\cosh \phi \pm \sinh \phi = \exp(\pm \phi)$ و در نتیجه رابطه اول از روابط ۱۵-۲ به‌دست می‌آید. با قراردادن روابط اول و دوم ۱۴-۲ در تبدیل معیار لورنتس ۷-۲ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}x' &= x \cosh \phi - ct \sinh \phi, & y' &= y, & z' &= z \\ct' &= -x \sinh \phi + ct \cosh \phi\end{aligned}\quad (16-2)$$

که ”چرخشی“ در صفحه x و ct را تداعی می‌کند. [در واقع، از لحاظ صوری، چرخشی با زاویه $i\phi$ است در صفحه x و ict ، بدین اعتبار، عبارت $x^2 + (ict)^2$ را حفظ می‌کند.] با جمع و تفریق کردن دو معادله غیربدهی ۱۶-۲، صورت مفیدتری از تبدیل لورنتس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}ct' + x' &= e^{-\phi}(ct + x), & y' &= y, & z' &= z \\ct' - x' &= e^{\phi}(ct - x)\end{aligned}\quad (17-2)$$

با ضرب کردن دو معادله غیربدهی ۱۷-۲ در یکدیگر و مجذور کردن دو معادله دیگر، به‌دست می‌آوریم

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (18-2)$$

چون ۱۷-۲ به‌صورت دیفرانسیلی یا به‌صورت Δ یی نیز برقرار است، می‌توانیم معادله ۱۰-۲ یا صورت دیفرانسیلی آن را نیز از آن استنتاج کنیم.

شکل معادله ۱۷-۲ — بدون زحمت — نشان می‌دهد که معکوس تبدیل لورنتس با پارامتر هذلولوی ϕ تبدیل لورنتسی است با پارامتر $-\phi$ (یعنی تبدیلی است با پارامتر سرعتی $-v$ به‌جای v ، چنانکه قبلاً در ۱۲-۲ به‌دست آوردیم)؛ همچنین برآیند دو تبدیل لورنتس با پارامترهای هذلولوی ϕ_1 و ϕ_2 تبدیل لورنتسی است با پارامتر $\phi = \phi_1 + \phi_2$. رابطه متناظر میان پارامترهای سرعتی این دو تبدیل با قراردادن مقادیر در اتحاد هذلولوی مشابه اتحادی که $\tan(\phi_1 + \phi_2)$ را به‌دست می‌دهد فوراً از ۱۴-۲ حاصل می‌شود

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = (\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2) / (1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2) \quad (19-2)$$

که چنین است

$$v = (v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2 / c^2) \quad (2-20)$$

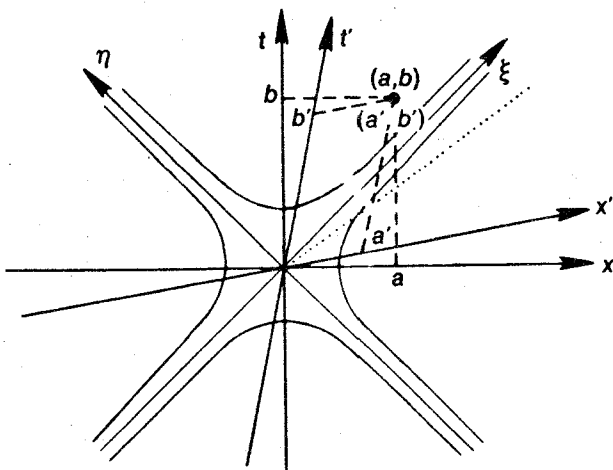
این سرعت، البته باید سرعت چارچوب سوم نسبت به چارچوب اول باشد و بنابراین نمایش "مجموع نسبیته" سرعتهای (همخط) v_1 و v_2 است.

در اینجا نکته مفیدی را تذکر می‌دهیم که در جای دیگر نیز می‌توانستیم آن را یادآور شویم. هنگام بررسی مسئله‌ای در نسبیت خاص یا هنگام محاسبه، به‌ویژه برای اولین بار، اغلب می‌توان از c ها چشمپوشی کرد، یعنی می‌توان برحسب یک‌گانه‌ی کارکرد که در آن $c = 1$ ، c ها را بعداً می‌توان از طریق استدلالهای مربوط به ابعاد، در سراسر مسئله یا مستقیماً در جواب آن درج کرد. مثلاً اگر روابط تا ۲-۲۰ را بدون c به‌دست می‌آوردیم، کاملاً روشن بود که مقدار c^2 را باید در کجا وارد کنیم، زیرا فقط با استفاده از c می‌توانستیم ابعاد [دو طرف معادله] را متوازن سازیم.

۹-۲ نمایش نموداری تبدیل لورنتس

در این بخش سروکار ما منحصراً با رفتار تبدیلی x و t تحت تبدیلات معیار لورنتس است و از y و z که در هر حال تغییری نمی‌کنند چشم می‌پوشیم. مهمترین چیزی که تبدیل لورنتس را از تبدیل کلاسیک گالیله متمایز می‌کند این است که در این تبدیل، مختصات زمانی و مکانی هر دو تبدیل می‌شوند و مهمتر اینکه در تبدیل هر کدام دیگری نیز ظاهر می‌شود، یا، مانند تبدیل مختصات x و y تحت چرخش محورها در صفحه دکارتی x و y ، با هم "آمیخته" می‌شوند. قبلاً شباهت صوری ۲-۱۶ را با چرخش متذکر شدیم، اما از لحاظ فیزیکی سرشت تبدیل لورنتس با چرخش تفاوتی مهم دارد. این تفاوت را نمایش نموداری به‌خوبی روشن می‌کند.

نخست به‌یاد می‌آوریم که تبدیل مختصات (x, t) به (x', t') را به‌دو صورت می‌توان در نظر گرفت. یا فرض می‌کنیم نقطه (x, t) به نقطه (x', t') روی همان مجموعه محورها حرکت می‌کند؛ یعنی تبدیل را به‌صورت حرکتی در فضای t و x تصور می‌کنیم. این دید، دید "کنشگر" یا فعال است. یا اینکه (x', t') را فقط برحسب تازه‌ای برای همان نقطه سابق (x, t) می‌انگاریم. این دید، دید "گنش‌پذیر" یا انفعالی است. در نسبیت خاص، دید کنش‌پذیر مناسبتر است و نمایش نموداری معیار، مطابق با آن انتخاب می‌شود (شکل ۲-۳). رویدادها همین که نسبت به یک مجموعه x و t از محورها مشخص شدند، ثابت می‌مانند و فقط محورها تغییر می‌کنند. (برای نمایش کنشگر ترین ۲-۱۳ را ببینید.) محض سهولت کار، یک‌گانه‌ی را انتخاب می‌کنیم که در آن $c = 1$. معمولاً محوره‌های x و t را (که به چارچوب S) عمود بر هم رسم می‌کنیم اما این کار عملی است قراردادی معنی فیزیکی ندارد. معادله "لحظه‌ها"ی S در S به‌صورت $t = \text{const.}$ است و متناظر با خطوط افقی است؛ اما تاریخچه (یا "جهانخط") هر نقطه ثابتی که بر محور فضایی x از S



شکل ۳-۲

واقع باشد متناظر است با یک خط قائم، یعنی $x = \text{const.}$ (باید میان محور x در شکل ۳-۲ و محور "فضایی" در فضای x, y, z ، تمایز قایل شویم. این دومی را می‌توان یکی از سه سیم دو به دو عمود برهم دانست.) معادله لحظه‌ها در S' ، $t' = \text{const.}$ و بنابراین طبق ۷-۲ $t - vx = \text{const.}$ است. بنابراین در نمودار ما، این معادلات متناظر با خطوطی هستند به شیب v . به‌ویژه محور x' ($t' = 0$) متناظر است با $t = vx$. همچنین معادله جهانخط نقاط ثابت واقع بر محور فضایی x' ، $x' = \text{const.}$ است، و بنابراین، طبق ۷-۲ $x - vt = \text{const.}$ است. در نمودارها این خطوط، خطوطی هستند با شیب v نسبت به محور t . به‌ویژه محور t' ($x' = 0$) متناظر است با $x = vt$. بنابراین محورهای S' با محورهای همتای خود در S ، دو زاویه مساوی می‌سازند، اما به‌خلاف مورد چرخش محورها، که علامت این دو زاویه یکی است، در تبدیل لورنتس علامت این دو زاویه مخالف یکدیگر است.

برای مدرج کردن محورهای پیریم‌دار، هذلولیهای $\pm 1 = x^2 - t^2$ را رسم می‌کنیم. چون این هذلولیها بر هذلولیهای $\pm 1 = x'^2 - t'^2$ منطبق‌اند، همه محورها را در نقاطی با زمان یکه یا فاصله یکه از مبدأ قطع می‌کنند. سپس می‌توان به‌دلیل خطی بودن، این یکه‌ها را در طول محورها تکرار کرد. نمودار نحوه قرائت مختصات (a', b') یک رویداد معین را نسبت به S' نشان می‌دهد: باید در امتداد خطوطی با x' یا t' ثابت، از رویداد به روی محورها برویم.

به‌تبدیل لورنتس می‌توان به چشم دیگری نیز نگاه کرد: از روابط ۱۷-۲ متوجه می‌شویم که اثر این تبدیل در واقع عبارت است از کشیدن محور $+45^\circ$ درجه $\xi = t + x$ به‌اندازه ضریب e^ϕ و منقبض کردن محور -45° درجه $\eta = t - x$ به‌اندازه همان ضریب. محورهای ξ و η (ξ', η') را می‌توان با وارد کردن عمودهایی از نقاط مدرج محورهای x و t (یا x', t') مدرج کرد، زیرا مقدار

$t + x$ یا $t - x$ (یعنی $t' - x'$ یا $t' + x'$) در امتداد این عمودها ثابت است. نمودارهایی چون شکل ۲-۳ را نمودار مینکوفسکی می‌خوانند، و در پاره‌ای از انواع مسائل نسبیتی، بسیار مفید و روشن‌گرند. مثلاً می‌توان با استفاده از این نمودارها یک تصور تقریبی و ابتدایی از جواب مسئله به‌دست آورد. اما نباید این نمودارها را در همه موارد به‌کار برد، زیرا فایده آنها محدود است، و برهانهای تحلیلی یا جبری عموماً بسیار نیرومندترند.

به‌عنوان مثال ساده‌ای از کاربرد این نمودارها، یک سیگنال سریعتر از نور را که حاوی هیچ اطلاعاتی نیست، و در واقعیت می‌تواند رخ بدهد، در نظر می‌گیریم. مثلاً اگر تیغه شیبدار گیوتینی از کنار یک قطعه مسطح سقوط کند، اگر زاویه شیب تیغه نسبت به قطعه را به‌اندازه کافی کوچک کنیم، محل تقاطع این دو می‌تواند با هر سرعت زیادی که خواسته باشیم حرکت کند. همچنین اگر نورافکنی را با سرعت کافی بچرخانیم، سرعت لکه نوری که از آن روی ابرها می‌افتد می‌تواند هر اندازه که خواسته باشیم زیاد باشد. در شکل ۲-۳ چنین سیگنالی را که در امتداد محور x دستگاه S واقع می‌شود با یک خط نقطه‌چین نشان داده‌ایم تا معلوم شود که این سیگنال، سلسله‌ای از رویدادهاست نه یک شیء متحرک. چون زاویه بین محوره‌های x' و t' می‌تواند کلیه مقادیر بین 0° و 180° را اختیار کند، چارچوبی مانند S' وجود دارد که در آن سرعت این سیگنال بینهایت است (یعنی سیگنال در نمودار بر محور x' منطبق می‌شود)، و نیز دستگاههایی وجود دارد که این سیگنال در آنها در جهت فضایی معکوس حرکت می‌کند. اگر این سیگنال حاوی اطلاعاتی می‌بود، در مورد اخیر لازم بود فرض کنیم که این علامت با همان جهت فضایی قبلی اما در گذشته حرکت می‌کند.

۲-۱۰ جهان‌نما و جهان‌نگار

در نسبت تشخیص آنچه ناظر می‌بیند از آنچه پس از وقوع رویدادها می‌داند، مهم است. آنچه ناظر در هر لحظه خاص بالقوه یا بالفعل می‌بیند یا از آن عکس می‌گیرد، جهان‌نمای او در آن لحظه نام دارد. این مفهوم از لحاظ نظری بسیار پیچیده است و از لحاظ عملی چندان اهمیت ندارد، زیرا آنچه شخص در هر لحظه می‌بیند ترکیبی است از رویدادهایی که پیش از آن به‌تدریج، و در زمانهای دور و دورتر روی داده است. (فقط در کیهانشناسی جهان‌نما اهمیت پیدا می‌کند، زیرا داده اصلی ما همان است.) مفهومی که از آن بسیار سودمندتر است مفهوم جهان‌نگار است. جهان‌نگار را، چنانکه از نام آن برمی‌آید، می‌توان نگاشت رویدادها بفضای لحظه‌ای $t = t$ ناظر فرض کرد؛ این یک نوع عکس فوری سه‌بعدی به‌اندازه طبیعی است که به‌طور همزمان در همه جا برداشته می‌شود، یا لحظه‌ای است که در چارچوب مرجع فضایی ناظر منجمد شده است. جهان‌نگار را می‌توان با تشریح مساعی ناظرهای کمکی "نقاط شبکه‌ای" یک چارچوب لخت خاص تهیه کرد؛ بدین‌صورت که هریک از ناظرها دور و بر خود را در لحظه $t = t$ که از پیش معین شده است بنگارد.

وقتی تسامحاً از "طول شیء در S " یا "یک عکس فوری که در S برداشته می‌شود" یا "تاب برداشتن استوانه متحرک" و نظایر آن سخن می‌گوییم، همه جا منظور ما جهان‌نگار است، مگر آنکه به‌خلاف آن تصریح کنیم. آنچه عموماً اهمیت دارد همان جهان‌نگار است. این یادآوریه‌ها، در فصل بعد به‌کار می‌آید، زیرا که در آنجا ثابت خواهیم کرد که اجسام متحرک منقبض می‌شوند. این انقباض راجع به جهان‌نگار است. اینکه چشم ما شیء متحرک را واقعاً چگونه می‌بیند، امر دیگری است و زیاد هم مهم نیست. اهمیت آن فقط از این لحاظ است که چنانکه در ۳-۲ خواهیم دید، در نسبت پاره‌ای از واقعیات بصری بسیار جالب‌اند.

۲-۱۱ انقباض طول

دو چارچوب لخت S و S' را در پیکربندی معیار در نظر بگیریم. فرض کنید میله‌ای به طول $\Delta x'$ در S' به‌حالت سکون در امتداد محور x' قرار داشته باشد. می‌خواهیم طول میله را در S ، که میله نسبت به آن با سرعت v حرکت می‌کند پیدا کنیم. برای اینکه طول میله را در هر چارچوب لختی که میله در آن به‌طور طولی حرکت می‌کند اندازه بگیریم، باید دو سر آن را به‌طور همزمان اندازه‌گیری کنیم. بنابراین فرض کنید که دو رویداد به‌طور همزمان در دو سر میله در S رخ دهند و ۲-۸ را به‌کار برید. چون $\Delta t = 0$ ، داریم $\Delta x' = \gamma \Delta x$ و اگر به‌جای Δx و $\Delta x'$ به‌ترتیب نمادهای خاص‌تر L و L_0 را به‌کار ببریم، داریم

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} L_0 \quad (2-21)$$

این رابطه، به‌صورت کاملاً کلی نشان می‌دهد که طول یک جسم در جهت حرکت آن با سرعت ثابت v به‌اندازه ضریب $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ کاهش می‌یابد.

روشن است که بیشترین طولی که به‌جسمی که حرکت یکنواخت دارد نسبت داده می‌شود، در چارچوب سکون آن یعنی در چارچوبی که سرعت جسم نسبت به آن صفر است. این طول L_0 ، طول سکون یا ویژه‌طول جسم خوانده می‌شود. از سوی دیگر، اگر طول جسم را در دستگاہی اندازه بگیریم که در آن سرعت جسم به‌سرعت نور میل می‌کند، طول آن به سمت صفر میل می‌کند.

عبارتی که پس از ۲-۲۱ آمده است با آنچه فیتزجرالد و لورنتس برای توجیه نتیجه منفی آزمایش‌های رانش اتر فرض کردند، یکسان است؛ با این تفاوت که آن دو بر عبارت "سرعت یکنواخت v قید" "نسبت به اتر" را می‌افزودند. طبق نظر لورنتس، سازوکاری که باعث انقباض می‌شد یک نوع افزایش نیروهای همگیری (دوسشی) الکتریکی بود که ساختمان اتمی را فشرده‌تر می‌کرد. اما نسبت از توجیه این پدیده برحسب نیرو و نظایر آن می‌گذرد، و با این حال آن را ناگزیر می‌داند و پیشگویی می‌کند. (این پیشگویی قابل مقایسه با پاره‌ای از پیشگویی‌هایی است که بر مبنای اصل

پایستگی انرژی به عمل می‌آید.) این پدیده در نسبیت اساساً پدیده‌ای هندسی و "تصویری" است،^۱ شبیه نگرستن به یک خطکش ساکن که با صفحهٔ شبکهٔ چشم موازی نیست. سرعت یکنواخت دادن در نسبیت، متناظر است با شبه چرخشی در فضا-زمان (بخش ۲-۹). چشم ما هر چند در اصل برای دریافت تأثیرهای دوبعدی طرح شده است، به مرور زمان طوری تربیت شده است که بعد سومی را نیز حس کند و آن را در نظر آورد. از این رو است که اگر میله‌ای در فضا بچرخد، از کوتاه شدن آن تعجب نمی‌کنیم. اگر سرعت نور کم و انقباض طولی که در سرعت‌های "عادی" پیش می‌آید قابل ملاحظه می‌بود، آنگاه چشم ما یاد می‌گرفت که بعد چهارم یعنی زمان را هم درک کند؛ و همچنانکه در مورد میله‌ای که در فضا چرخیده باشد می‌توانیم با قراردادن چشم خود در موضع مناسب طول اصلی میله را دریابیم، می‌توانستیم با حرکت دادن چشم خود همراه میله، انقباض نسبیتی طول را خنثی سازیم. آنگاه چشم به سرعت یاد می‌گرفت که به این پدیده به چشم یک پدیدهٔ "هندسی" نگاه کند.

طبق اصل نسبیت، از پیش معلوم است که اگر دو ناظر A و B خط‌کشهایی را که در امتداد خط مشترک حرکتشان واقع‌اند مقایسه کنند، و A خطکش B را کوتاه‌تر از خطکش خودش ببیند، آنگاه B هم خطکش A را کوتاه‌تر خواهد دید. با توجه به مشابه تصویری، این امر تعجب‌انگیز نیست؛ زیرا اگر دو ناظر که نسبت به هم ساکن‌اند خط‌کشهای خود را به اندازهٔ زاویهٔ معینی نسبت به خط دید خود کج کنند، وضعی متناظر با این وضع رخ می‌دهد. شکل ۲-۲ از بخش ۲-۴ تقارن انقباض طول را به خوبی نشان می‌دهد. در نظریهٔ لورنتس این تقارن تصادفی است و تنها از راه محاسبه می‌توان آن را دید زیرا، همان‌طور که قبلاً هم متذکر شدیم، در این نظریه علت انقباض طول در ممتاز بودن چارچوب اتر است.

۲-۱۲ پارادوکسهای انقباض طول

انقباض نسبیتی طول به هیچ‌وجه "پنداری" نیست، بلکه به تمام معنی واقعی است و هر چند تا به حال کسی برای تحقیق صحت آن به آزمایش مستقیم دست نزده است، شک نیست که چنین کاری اصولاً ممکن است. موردی را ذکر می‌کنیم که قبول داریم غیر واقعی است: شخصی را در نظر بگیرید که میله‌ای به طول ۲۰ متر به طور افقی در دست دارد و می‌خواهد به داخل گاراژی به طول ۱۰ متر برود. این شخص با سرعت $v = 0.866c$ می‌دود، تا γ خود را مساوی ۲ بکند و طول میله‌اش به ۱۰ متر برسد. بهتر است قید کنیم که در ته گاراژ یک قالب و زین بتونی وجود دارد؛ بنابراین این پرسش که آیا سرانجام میله در چارچوب لخت گاراژ ساکن می‌شود یا به عکس، موردی ندارد. پس مرد با میله‌ای که در دست دارد (و اکنون منقبض شده است) به داخل گاراژ می‌دود و دوستش در را بلافاصله پشت سر او می‌بندد. تردیدی در امکانپذیری بودن این آزمایش،
۱. تذکرات بعدی تا انتهای بند فوق صرفاً به منظور دریافتی شهودی آورده شده‌اند، و در این مرحله تفهیم منظور نبوده است.

یعنی در واقعی بودن انقباض طول، نداریم. وقتی میله در چارچوب سکون گاراژ متوقف می‌شود، در واقع "در فضا زمان چرخیده" است و گرایش دارد که، در صورت امکان طول اصلی خود را نسبت به گاراژ بازیابد. این است که اگر از برخورد جان سالم به در برد، یا باید خم شود و یا در گاراژ را بشکافد و از آن بیرون بزند.

در اینجا ممکن است "پارادوکسی" به ذهن خواننده خطور کند و آن اینکه چه بر سر تقارن پدیده می‌آید؟ مگر نه این است که طول گاراژ نسبت به شخص دونده فقط ۵ متر است؟ بله، درست است. پس میله ۲۰ متری چگونه می‌تواند در داخل گاراژ ۵ متری جا بگیرد؟ بسیار خوب، ببینیم که در چارچوب سکون میله چه رخ می‌دهد. در حالت اخیر، گاراژ در گوشه به طرف میله ساکن حرکت می‌کند و به دلیل وجود دیوار بتونی حتی پس از برخورد هم به حرکت خود ادامه می‌دهد و سر میله را در این حرکت با خود می‌برد. اما ته میله همچنان در حال سکون است، زیرا به دلیل محدود بودن سرعت انتشار هر نوع سیگنالی نمی‌تواند "دریابد" که ته میله به دیوار گاراژ اصابت کرده است. حتی اگر "سیگنال" (در این مورد موج ضربه‌ای کشسان) با سرعت نور در طول میله حرکت کند پیش از رسیدن به ته آن باید ۲۰ متر راه بیامید و حال آنکه در همین مدت در گاراژ فقط باید ۱۵ متر حرکت کند. اگر v برابر با $۰.۷۵c$ باشد، در این مسابقه طرفین مساوی خواهند شد. اما v برابر با $۰.۸۶۶c$ است و بنابراین نه فقط میله داخل گاراژ جا می‌گیرد بلکه چیزی هم کم می‌آورد؛ (میله حتی می‌تواند در داخل گاراژی که طول آن در حال سکون ۰.۴ متر و در حال حرکت ۲.۷ متر است جا بگیرد. در این حالت، در گاراژ باید ۱۷.۳ متر راه بیامید و موج ضربه‌ای ۲۰ متر. و برای اینکه طرفین در این مسابقه با هم مساوی شوند [یعنی میله در داخل گاراژ کاملاً جا بگیرد و جای اضافی هم باقی نماند]، لازم است که نسبت سرعت‌های آنها ۱۷.۳ به ۲۰ یعنی ۰.۸۶۵ به یک باشد.)

این داستان یک نتیجه مهم دارد و آن اینکه هر نتیجه‌ای که با استدلال صحیح در یک چارچوب دلخواه به دست می‌آوریم باید درست باشد؛ به خصوص هنگامی که از یک چارچوب دلخواه دیگر به آن می‌نگریم باید درست باشد. تا وقتی که قوانین فیزیکی که به کار می‌بریم لورنتس ناوردا هستند، باید هر نتیجه‌ای در هر دستگاه دیگری به نحوی قابل توجیه باشد، هر چند شاید آن توجیه با توجیهی که نتیجه در دستگاه اول دارد به کلی متفاوت باشد. در این مورد "پیشگویی" اینشتین را به یاد می‌آوریم که نیروی وارد بر یک بار الکتریکی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند برابر با یک نیروی الکتریکی در چارچوب سکون آن بار است.

مثال دیگری را در نظر می‌گیریم: میله‌ای به طول سکون L بالای سوراخی به قطر $L/۲$ که روی میز همواری حفر شده است، می‌لغزد. وقتی که ضریب لورنتس میله ۱۰ باشد، طول آن $۱/۵$ قطر سوراخ می‌شود و وقتی از بالای سوراخ می‌گذرد تحت اثر نیروی گرانش به داخل سوراخ می‌افتد حداقل به اندازه‌ای که میله را از حرکت بازدارد.^۱ این نتیجه در چارچوب سکون میله نیز،

۱. این نقض تصمیم ما است بر به کارگیری صرفاً دستگاه‌های لخت؛ خواننده متمایل به داشتن وجدان راحت می‌تواند

که در آن قطر سوراخ فقط $L/2^0$ است، باید صادق باشد. و این امر فقط هنگامی می‌تواند رخ دهد که سر میله "صلب" به داخل سوراخ خم شود (پایان بخش ۲-۷). علاوه بر این، وقتی که سر میله به انتهای سوراخ اصابت می‌کند، ته آن چنانکه در مورد اول دیدیم، ناچار همچنان به حرکت خود ادامه می‌دهد و به سوراخ داخل می‌شود (چون نمی‌داند که سر میله متوقف شده است).

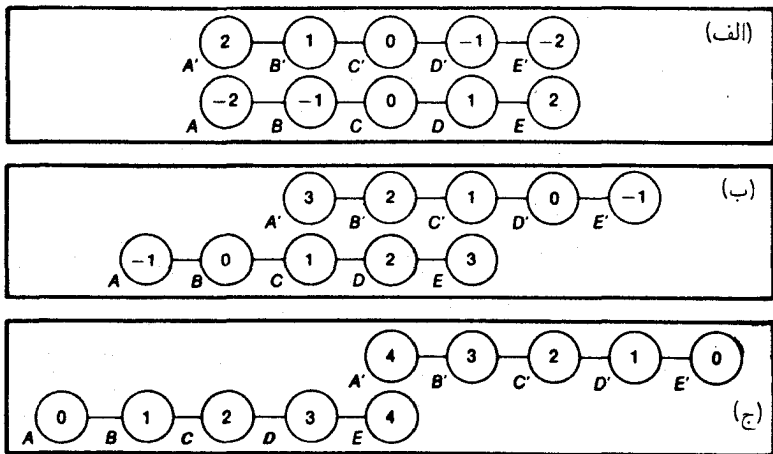
۱۳-۲ اتساع زمان

باز هم دو چارچوب لخت S و S' را در پیکربندی معیار در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که یک ساعت معیار در S' تثبیت شده باشد و دو رویداد را در آن ساعت در نظر می‌گیریم که ساعت برای آنها زمانهای t'_1 و t'_2 را ثبت کند و فاصله زمانی آنها $\Delta t'$ باشد. می‌بینیم که در S زمان Δt به این رویدادها نسبت داده می‌شود. از صورت Δt یی ۱۲-۲ بلافاصله می‌بینیم که چون $\Delta x' = 0$ ، پس $\Delta t = \gamma \Delta t'$ ، یا با نشانیدن نمادهای خاص T و T_0 به ترتیب به جای Δt و $\Delta t'$

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (22-2)$$

از اینجا می‌توانیم این نتیجه کلی را بگیریم که ساعتی که با سرعت یکتواخت در یک چارچوب لخت S حرکت می‌کند، نسبت به ساعتی که در S ساکن است به اندازه ضریب $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ کند کار می‌کند. پس واضح است که آهنگ ساعت در چارچوب سکونش بیشترین مقدار را دارد و آن را ویژه آهنگ آن می‌گویند. از سوی دیگر، وقتی که سرعت به c نزدیک شود، آهنگ ساعت به صفر نزدیک می‌شود.

اگر یک ساعت آرمانی در یک چارچوب لخت حرکت ناپکتواخت داشته باشد، فرض می‌کنیم که شتاب به خودی خود هیچ تأثیری بر آهنگ ساعت ندارد، یعنی آهنگ لحظه‌ای ساعت فقط طبق رابطه بالا به سرعت لحظه‌ای آن بستگی دارد. این را فرض ساعت می‌نامیم و نیز می‌توان آن را تعریف ساعت "آرمانی" محسوب کرد. البته به هیچ وجه همه ساعتها با این معیار تطبیق نمی‌کنند. مثلاً روشن است که یک ساعت آونگی که با فنر کار می‌کند و وزنه آونگ آن توسط دو فنر به دو سوی جعبه متصل شده است (و بنابراین بدون گرانس هم کار می‌کند) وقتی به سمت "بالا" شتاب بیابد آهنگش سریعتر می‌شود. از سوی دیگر، همچنانکه سگسل تأکید کرده است، مطلق بودن شتاب تضمین می‌کند که ساعت‌های آرمانی را علی‌الاصول می‌توان ساخت، و برای این کار کافی است که به جای نیروی گرانس، که به پایین سوراخ عمل می‌کند، فرض کند که میله از بالا تحت تأثیر پرتاب ذرات شن قرار دارد نتیجه یکی خواهد بود. برای بحث کامل این پارادوکس مرجع زیر را ببینید



شکل ۴-۲

ساعت دلخواهی را اختیار کنیم، تأثیر شتاب را بر آن مشاهده کنیم و آنگاه یک شتاب‌سنج و یک سرو و سازوکار را که تأثیرات شتاب را دقیقاً خنثی می‌کنند به آن متصل سازیم. به خلاف شتاب، تأثیر سرعت ۲-۲ را نمی‌توان از بین برد. چنانکه خواهیم دید برخی از ساعتهای طبیعی (مثل اتمهای در حال ارتعاش، مزونهای در حال واپاشی) با دقت بسیار با فرضیه ساعت مطابقت دارند، و عموماً وقتی که نیروهای محرک درونی ساعت از نیروی شتاب‌دهنده بسیار بزرگتر باشند، این وضع رخ می‌دهد.

در مورد حرکت ناپیکنواخت یک جسم بینهایت کوچک نیز فرض مشابهی می‌کنند، بدین معنی که رابطه بین طول جسم در راستای حرکت و ویژه طول آن فقط طبق رابطه ۲-۲ به سرعت لحظه‌ای آن v بستگی دارد. این فرض را فرض طول می‌نامیم.

اتساع زمان هم مثل انقباض طول باید متقارن باشد. اگر یک ناظر لخت می‌بیند که ساعتهای ناظر لخت دیگری کند کار می‌کنند، ناظر دوم هم باید حرکت ساعتهای ناظر اول را کند ببیند. شکل ۴-۲ که در واقع تعمیمی از شکل ۲-۲ است به طور مشروح نشان می‌دهد که چرا چنین است. ساعتهای معیار همزمان A, B, C, \dots و A', B', C', \dots به فواصل معین و مساوی روی محورهای x دو چارچوب S و S' ، که در پیکربندی معیار هستند، وصل شده‌اند. شکل ۴-۲ سه عکس فوری را که ناظری در چارچوب کمکی S'' ، در فواصل زمانی مناسب گرفته است نشان می‌دهد. سرعت S و S' نسبت به S'' مساوی و با علامت مختلف است. البته چون همزمانی نسبی است، در هر عکس فوری دیده می‌شود که همه ساعتهای S و S' زمانهای متفاوتی را نشان می‌دهند. فرض کنید که همه ساعتهای این نمودار، ثانیه را نشان می‌دهند. چنانکه می‌توان دید، در شکل ۴-۲ (الف)، A' از A چهار ثانیه جلوتر است، در شکل ۴-۲ (ب) فقط ۲ ثانیه از C جلوتر است و در شکل ۴-۲ (ج) قرائت آن با E مساوی است. بنابراین A' همواره از ساعتهای S عقب

می‌ماند و همچنین E از ساعت‌های S' عقب می‌ماند، و در واقع همه ساعت‌های این نمودار، با یک آهنگ از ساعت‌های چارچوب دیگر عقب می‌ماند. خواننده علاقه‌مند می‌تواند سرعت نسبی S و S' و فاصله میان ساعت‌ها را در وضعیتی که در شکل ۲-۴ نموده شده است به آسانی محاسبه کند. البته فقط یک مجموعه از جوابهایی که به دست می‌آورد درست است (تمرین ۲-۱۱).

اتساع زمان، مانند انقباض طول واقعی است و در آزمایش تأیید شده است. مثلاً برخی از مزونها (میونها)یی که در پرتوهای کیهانی از ارتفاعات بالای جو به زمین می‌رسند، عمرشان آنقدر کم است که اگر اتساع زمان در کار نباشد، حتی اگر با سرعت نور هم حرکت کنند، زمانی که برای پیمودن این مسافت لازم دارند از طول عمر آنها به اندازه ضرایبی از مرتبه 10^6 بیشتر است. روسی^۱ و هال در $1941/1942$ زمان لازم برای حرکت این‌گونه مزونها بین قله کوه واشنگتن و دامنه آن را اندازه گرفتند و دریافتند که طول عمر آنها طبق رابطه $2-22$ اتساع یافته است. در $1968/1947$ آزمایش‌هایی هم‌ارز با آزمایش‌های فوق در "حلقه انبارنده" آزمایشگاه سرن با میونها (در $12 \approx \gamma$) انجام گرفت^۲ و این نتایج را با دقت شگفت‌آور یک درصد دقیقتر ساخت و علاوه بر آن نشان داد که با این دقت، شتابهای تا $g \approx 10^{11}$ (!) تأثیری در اتساع زمان میون ندارند. شاید کسی اشکال بگیرد که میونها ساعت نیستند، جواش این است که برهان اتساع زمان را در مورد هر تغییر یا فرایند زمانی، و از جمله در مورد واپاشی میون و حتی طول عمر آدمی، می‌توان به کار برد. (برای پی بردن به این مطلب، کافی است ساعتی را تصور کنیم که همراه میون یا فضاورد سفر می‌کند.)

مورد بسیار جالب دیگری از اتساع زمان را در "کانونی شدن نسبی" ذراتی با بار الکتریکی، که در کارکرد شتابدهنده‌های پرنرزی ذرات نقشی دارد، می‌توان دید. به دلیل دافعه متقابل الکتروستاتیکی، خوشه ساکنی از الکترونها (یا پروتونها) با سرعتی خاص گسترش می‌یابد. اما در باریکه‌هایی که با سرعت زیاد حرکت می‌کنند، دیده می‌شود که الکترونها با سرعتی بسیار کمتر پخش می‌شوند. اگر خوشه ساکن را یک نوع ساعت فرض کنیم، در اینجا جلوه بارزی از کند شدن ساعت متحرک را تقریباً به چشم می‌بینیم، جلوه دیگری از این پدیده، که پدیده عرضی دوپلر خوانده می‌شود، در بخش ۳-۲ مورد بحث قرار می‌گیرد. (این پدیده نیز به تأیید فرضیه ساعت در مورد برخی از ساعت‌های طبیعی انجامیده است.) اما شاید مستقیم‌ترین قرینه برای انبساط زمان — هر چند دقت آن فقط در حدود 10% است — در سال 1971 توسط هافل و کیتینگ داده شد: این دو ساعت‌های بسیار دقیق سزیمی را در هواپیماهای تجاری قرار دادند و به سفر دور دنیا فرستادند.^۳

1. Rossi
2. Perkins D H, 1972, *Introduction to High Energy Physics*, Addison-Wesley, Pub Co, p 192.

3. Hafele J C, and Keating R, 1972, *Science*, **177**, 166.

در نتیجه پرواز به سمت شرق و غرب، می‌شد بین اثرهای ناشی از سرعت را از اثر "اتساع زمان گرانشی"، که در بخش ۱-۲۱ از آن صحبت شد، تشخیص داد. در سال $1954-55$ گروهی از دانشگاه مرلند تجربه‌های مشابهی را با هواپیماهای خاصی انجام دادند، و دقت را تا 1% افزایش دادند.

۱۴-۲ پارادوکس دوقلوها

اتساع زمان نیز، مانند انقباض طول، هرگاه از سوی دو ناظر مختلف نگریسته شود، ممکن است به یک پارادوکس ظاهری منجر شود، و در واقع این پارادوکس، که پارادوکس ساعتها یا پارادوکس دوقلوها (یا پارادوکس لاتژون) نام دارد، قدیمی‌ترین پارادوکس نسبیتی است. این پارادوکس را به آسانی می‌توان حل کرد، اما جاذبه عظیم عاطفی آن همچنان آتش بحث را روشن نگاه می‌دارد، زیرا نسلی از پس نسل دیگر ابتدا از این پارادوکس حیرت می‌کنند، سپس از درک راز آن (گاهی به اشتباه) به هیجان درمی‌آیند، و آنگاه فوراً و چنانکه گویی کسی قبلاً به این رازی نبرده است، نتیجه کار خود را به چاپ می‌رسانند. در واقع، مقالاتی که درباره این مبحث منتشر شده از شمار بیرون است، اما مضمون مشترک و مفید این مقالات بیش از چند صفحه نمی‌شود. اما گرچه کسی از اینکه میله بلندی را داخل گاراژ کوتاهی جای دهد و نظایر آن به هیجان در نمی‌آید، تصور اینکه انسان به یک سفر سریع فضایی برود و بعد از چند سال به زمین بازگردد و ببیند که در این مدت هزاران سال بر عمر زمین افزوده شده است — این آب حیات جدید — همیشه باعث تحریک قوه تخیل است. چنانکه دیدیم، اگر ساعت معیار A به طریقی در بین ساعت‌های معیار شبکه‌ای و همزمان یک چارچوب لخت حرکت کند، دائماً از این ساعت‌ها عقب می‌ماند. در نتیجه اگر A را در یک چارچوب لخت به یک سفر رفت و برگشت ببریم، مثلاً از مبدأ ببریم و به O بازگردانیم، این ساعت از ساعت B که در O مانده است، عقب می‌ماند. اگر یکی از دوقلوها با ساعت A حرکت کند و دیگری در کنار B بماند، وقتی این دو دوباره یکدیگر را می‌بینند دوقلوی B از دوقلوی A پیرتر خواهد بود، زیرا هر یک از این دو نسبت به ساعت خود با همان آهنگ پیر می‌شود.

پارادوکس ما این است: آیا A (اسم ساعت‌ها را به اشخاص می‌دهیم) هم حق ندارد بگوید که او در جای خودش ساکن مانده است و B به یک سفر رفت و برگشت رفته است؟ و در نتیجه وقتی دوباره یکدیگر را می‌بینند B باید جوانتر از او باشد؟ پاسخ منفی است، و همین پاسخ منفی پارادوکس را حل می‌کند. بدین معنی که B در یک چارچوب لخت واحد به حالت سکون باقی می‌ماند، و حال آنکه A ، در ساده‌ترین حالت که عبارت است از یک حرکت یکنواخت رفت و برگشت — مثلاً از زمین به یک ستاره نزدیک و بالعکس — دست‌کم باید به مدت کوتاهی شتاب ببیند و از چارچوب B به چارچوب دیگری منتقل شود سپس بار دیگر به مدت کوتاهی حرکتش کند شود (شتاب منفی پیدا کند) تا دور بزند و برگردد، و سرانجام برای آنکه در B متوقف شود بار دیگر باید شتاب منفی پیدا کند. A این شتاب‌ها را (چه مثبت و چه منفی) حس می‌کند و بنابراین نمی‌تواند به این توهم دچار شود که در حال سکون باقی‌مانده است. البته از این سه شتاب، دوتای اول و آخر زیاد مهم نیستند، زیرا سن دو نفر را می‌توان "هنگام عبور" هم با هم مقایسه کرد، اما از شتاب دوم گریزی نیست. با این حال، ممکن است کسی بگوید که در مورد رفت و برگشت بالا، در "قسمت اعظم زمان"، یعنی در زمانهایی که سقوط آزاد می‌کند، بین A و B تقارن برقرار است. سه شتاب نامتقارن

را می‌توان به دوره‌های زمانی کوتاه محدود کرد و این دوره‌ها را می‌توانیم هر قدر که بخواهیم کوتاه‌تر کنیم (یعنی زمانهایی که B اندازه می‌گیرد، وگرنه زمانهایی که A اندازه می‌گیرد حتی از آن هم کوتاه‌تر است). پس چطور می‌شود که یک اثر نامتقارن بزرگ تولید می‌شود و مهمتر اینکه، این اثر متناسب با بخشهای متقارن حرکت است؟ اما قضیه عجیبتر از این نیست که دو راننده α و β از نقطه O به P و از نقطه P به Q می‌روند (سه نقطه روی یک خط مستقیم قرار دارند)، β مستقیم حرکت می‌کند اما α در نقطه P از این مسیر منحرف می‌شود و به نقطه R در خارج مسیر می‌رود و از آنجا به Q برمی‌گردد. رفتار این دو راننده کاملاً شبیه هم است، با این تفاوت که α در نقاط P و R فرمان اتومبیل خود را کمی می‌چرخاند و سرعت خود را به مدت کوتاهی تغییر می‌دهد. اما وقتی دو راننده در Q به هم می‌رسند قرائت کیلومتر شمار آنها با هم تفاوت بسیار زیادی دارد! می‌توان چنین گفت که تفاوت نهایی سن دوقلوا در خلال شتابگری اولیه A و دور شدن آن از B پدید می‌آید. در خلال این دوره، هر قدر هم که کوتاه باشد، اگر γ مثلاً به 2 برسد، A خواهد دید که بیش از نصف سفر رفت خود را به‌انجام رسانده است! زیرا او خود را به چارچوبی انتقال داده است که در آن فاصله بین زمین و هدف آسمانی‌اش نصف شده است (انقباض طول)، و این نصف شدن هر طور که فکر کنید برای A واقعی است. بدین ترتیب A سفر رفت خود را تقریباً در نصف زمانی که B به آن نسبت می‌دهد، تمام می‌کند و همین تحلیل برای سفر برگشت هم درست است. همچنین می‌توان گفت که تفاوت نهایی سن دوقلوا در خلال دوره معینی بعد از دور زدن A ، یعنی بین دورزدن A و زمانی که B این دورزدن را می‌بیند، پدید آمده است. فرض کنید که A سفرش را با گذشتن از کنار B شروع می‌کند و در همان لحظه ساعتش را با ساعت B همزمان می‌کند. در این صورت A و B تا وقتی که A دور زده است کاملاً متقارن خواهند بود. پس از دور زدن، بلافاصله A خواهد دید که ساعت B تندتر کار می‌کند، چرا که او اکنون به طرف سیگنالهای صادر شده از B حرکت می‌کند؛ از سوی دیگر، B قبل از آنکه دور زدن A را ببیند، نمی‌تواند آهنگ ساعت A را سریعتر ببیند. از آن به بعد است که دوباره وضعیت متقارن خواهد شد و این تقارن تا پایان ادامه خواهد یافت. بنابراین A طی نیمی از سفر خود تیکهای آهسته و طی نیمی دیگر از آن تیکهای تند دریافت کرده است، در صورتی که B بیش از نصف زمان خودش را تیکهای آهسته دریافت کرده است. اگر بر A و B زمان کل یکسانی گذشته باشد، استدلال ما ایجاب می‌کند که تعداد تیکهایی که B از ساعت A دریافت کرده است کمتر از تعداد تیکهایی باشد که A از B دریافت می‌کند — تناقض. همین تناقض، به طریق اولی، بروز خواهد کرد اگر در B زمانی کمتر از آنچه در A گذشته است بگذرد. پس زمانی که در B گذشته است بیشتر از آن چیزی است که در A می‌گذرد. [اینکه چرا این استدلال در نورشناخت "اتری" کلاسیک صحیح نیست، جالب است: در آنجا، تیکهای بلند و کوتاه برای A و B به یک اندازه طول نمی‌کشند.]

چنین بحثهایی شاید آموزنده و سرگرم کننده باشند، اما اساسی نیستند. آنها فقط خودسازگاری

نظریه را نشان می دهند و فقدان تقارن بین دوقلوهای A و B را بیان می کنند. اما به محض نشان دادن عدم تقارن بین دوقلوی A و B پارادوکس از بین می رود. شاید، شیما پرمعناترین توصیف را درباره این پارادوکس کرده باشد: او گفته است، این همان وضعیتی است که در آزمایش نیوتون با دو دلو آب پیش می آید— یکی از دلوها از زیر دلو دیگر که ساکن است آویزان شده و دوران می کند. اگر این دو تمامی محتوای جهان بودند، آنگاه اینکه سطح آب در یک دلو تخت و در دلو دیگر منحنی است، یک پارادوکس بود. اما چارچوبهای لخت دارای موجودیت واقعی نیز هستند و نسبت به چارچوبهای لخت تقارنی بین دو دلو نیست و تقارنی بین دوقلوها نیز وجود ندارد.

باید دقت کرد که پارادوکس ساعت به کلی مستقل از فرض ساعت است. هرگونه تأثیری را که چنین شتابهایی ممکن است بر ساعت یا اندام زنده داشته باشند، می توان صرفاً با بیشتر کردن زمان سقوط آزاد، کم کرد.

و بالاخره، هشداری علیه یک خرافه، یک خلط معنایی، و یک بی دقتی. مورد خرافه این است که نسبیت خاص را نمی توان در مورد پدیده های شامل شتاب به کار برد: این مطلب باعث شد که نویسندگانی ادعا کنند که برای حل پارادوکس ساعت باید از نسبیت عام استفاده شود. در واقع، نسبیت خاص را می توان در مورد تمامی فیزیک در چارچوبهای لخت به کار برد و در چنین چارچوبهایی نسبیت عام به سادگی به نسبیت خاص تبدیل می شود. خلط معنایی این است که برخی نویسندگان صرف کاربرد ریاضیات (“هموردای”) نسبیت عام را، حتی در چارچوبهای لخت، “نسبیت عام” می نامند. استفاده از نسبیت عام، با این مفهوم، در مورد پارادوکس ساعت، صد البته که عاری از اشکال است. اشکال وقتی بروز می کند که نویسنده نسبیت عام را وارد معرکه می کند تا از فرض ساعت اجتناب کند و این واقعیت را نادیده بگیرد که حتی در نسبیت عام هم فرض ساعت چیزی جز یک فرض نیست.

۱۵-۲ تبدیل سرعت

یک بار دیگر، دو چارچوب S و S' را در پیکربندی معیار در نظر بگیرید. فرض کنید که \mathbf{u} سرعت برداری یک ذره در S باشد. می خواهیم \mathbf{u}' ، سرعت آن ذره در S' ، را بیابیم. اگر ذره یکنواخت حرکت کند، داریم

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\Delta x / \Delta t, \Delta y / \Delta t, \Delta z / \Delta t) \quad (23-2)$$

$$\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3) = (\Delta x' / \Delta t', \Delta y' / \Delta t', \Delta z' / \Delta t') \quad (24-2)$$

که در آنها، نموها را در مورد دو رویداد دلخواه برای ذره به کار برده ایم. اگر $2-8$ را در $2-24$ قرار دهیم، تمامی صورتها و مخرجها را بر Δt تقسیم کنیم و حاصل را با $2-23$ مقایسه کنیم فرمول تبدیل سرعت به دست می آید:

$$u'_1 = \frac{u_1 - v}{1 - u_1 v / c^2}, \quad u'_2 = \frac{u_2}{\gamma(1 - u_1 v / c^2)}, \quad u'_3 = \frac{u_3}{\gamma(1 - u_1 v / c^2)} \quad (25-2)$$

این فرمولها را، البته، می‌توان هم در مورد سرعتهای زیر نور و هم در مورد سرعتهای فوق نور به کار برد و مثلاً برای تبدیل سرعت لکه نوری حاصل از نورافکن بخش ۲-۹ کاملاً از آن استفاده کرد. این روابط برای تبدیل سرعتهای لحظه‌ای در حرکات نایکناخت نیز به کار می‌روند، که این با رفتن به حد $dx/dt \rightarrow \Delta x/\Delta t$ و غیره، در آخرین مرحله استدلال نتیجه می‌شود. این موضوع را با استفاده از شکل دیفرانسیلی ۲-۸، یعنی ۲-۹ نیز می‌توان اثبات کرد.

به این نکته توجه کنید که وقتی $v \ll c$ یا $c \rightarrow \infty$ ، چگونه ۲-۲ به فرمول کلاسیک ۲-۱ تبدیل می‌شود.

بدون هیچ تلاش اضافی و صرفاً با عوض کردن علائم پریم دار و بی‌پریم و تبدیل v به $-v$ می‌توان روابط معکوس را به دست آورد. (چرا که اگر به جای علائم بی‌پریم، پریم دار و به جای پریم دارها، دوبار پریم دار بگذاریم، مسلماً تبدیلی از S' به S'' که با سرعت v نسبت به S' حرکت می‌کند به دست می‌آوریم. جایگزین کردن v با $-v$ ، در مرحله آخر، S'' را به S تبدیل می‌کند.) در نتیجه

$$u_1 = \frac{u'_1 + v}{1 + u'_1 v/c^2}, \quad u_2 = \frac{u'_2}{\gamma(1 + u'_1 v/c^2)}, \quad u_3 = \frac{u'_3}{\gamma(1 + u'_1 v/c^2)} \quad (26-2)$$

معادلات ۲-۲۶ را می‌توان اینطور هم تعبیر کرد که $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ، «برایند» سرعت $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ و $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ را به دست می‌دهند و جای فرمول کلاسیک $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}'$ را می‌گیرند. در این نقش، این روابط را فرمولهای جمع سرعت نسبی می‌خوانند (معادله ۲-۲۰). البته، برای آنکه چنین جمعی معنی داشته باشد، محورهای S و S' باید هم جهت باشند، هر چند لازم نیست در پیکربندی معیار باشند. شاید ذکر این نکته ضروری باشد که در حالت کلی جمع نسبی \mathbf{u}' با \mathbf{v} و \mathbf{v} با \mathbf{u}' با هم هم‌ارز نیستند — هر چند بزرگی برآیند در دو حالت یکی است. مثلاً، اگر $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ و $\mathbf{u}' = (0, u', 0)$ به سادگی دیده می‌شود که $\mathbf{v} + \mathbf{u}' = (v, u'/\gamma(v), 0)$ ، حال آنکه $\mathbf{u}' + \mathbf{v} = (v/\gamma(u'), u', 0)$ ، در اینجا «+» نشان‌دهنده «جمع نسبی» است. اینکه بزرگیهای $\mathbf{u}' + \mathbf{v}$ و $\mathbf{v} + \mathbf{u}'$ همواره با هم مساوی‌اند از تقارن رابطه ۲-۲۷ نتیجه می‌شود که در زیر به دست می‌آید (با توجه به اینکه $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = u'_1 v$).

اگر بزرگی سرعتهای متناظر را در S و S' به ترتیب با u و $u' = (u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3)^{1/2}$ نشان دهیم، آنگاه از شکل دیفرانسیلی ۲-۱۰ و ۲-۱۲ داریم

$$dt'^2 (c^2 - u'^2) = dt^2 (c^2 - u^2) = dt'^2 \gamma^2(v) (1 + u'_1 v/c^2)^2 (c^2 - u^2).$$

و از اینجا فرمول مهم زیر به دست می‌آید

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2 (c^2 - u'^2) (c^2 - v^2)}{(c^2 + u'_1 v)^2} \quad (27-2)$$

اگر $u' < c$ و $v < c$ ، آنگاه سمت راست رابطه مثبت خواهد بود و نتیجه می‌شود $u < c$. پس برآیند دو سرعت کمتر از c ، همواره کمتر از c خواهد بود. این نشان می‌دهد که هر تعداد نمو سرعت (کمتر از c) به ذره‌ای در چارچوب سکون لحظه‌ایش بدهیم، هرگز نسبت به یک چارچوب لخت مفروض به سرعت نور نخواهد رسید. بدین ترتیب سرعت نور در نسبیت نقش سرعت بینهایت را بازی می‌کند، چرا که هیچ "مجموعه" از سرعت‌های کمتر از c نمی‌تواند با آن برابر شود. به عبارت کلی‌تر، رابطه ۲۷-۲ نشان می‌دهد که اگر $v < c$ (شرطی که در مورد دو چارچوب لخت برقرار است)، آنگاه به ترتیب $c \geq u$ نتیجه می‌دهد $c \geq u'$ و برعکس.

اگر ۲۷-۲ را بر حسب $\gamma(u)$ ، $\gamma(u')$ ، و $\gamma(v)$ بنویسیم به معادله‌ای می‌رسیم که پس از جذر گرفتن، اولین رابطه از دو رابطه مفید زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{\gamma(u)}{\gamma(u')} = \gamma(v) \left(1 + \frac{u'v}{c^2} \right), \quad \frac{\gamma(u')}{\gamma(u)} = \gamma(v) \left(1 - \frac{u'v}{c^2} \right) \quad (28-2)$$

رابطه دوم را هم با روش عموماً معتبر تعویض علائم پریم دار و بی پریم و جایگزین کردن v با $-v$ به دست آورده‌ایم. (تذکر قبل از ۲۶-۲ را ببینید.) روابط بالا نشان می‌دهند که چگونه عامل γ یک ذره متحرک تبدیل می‌شود.

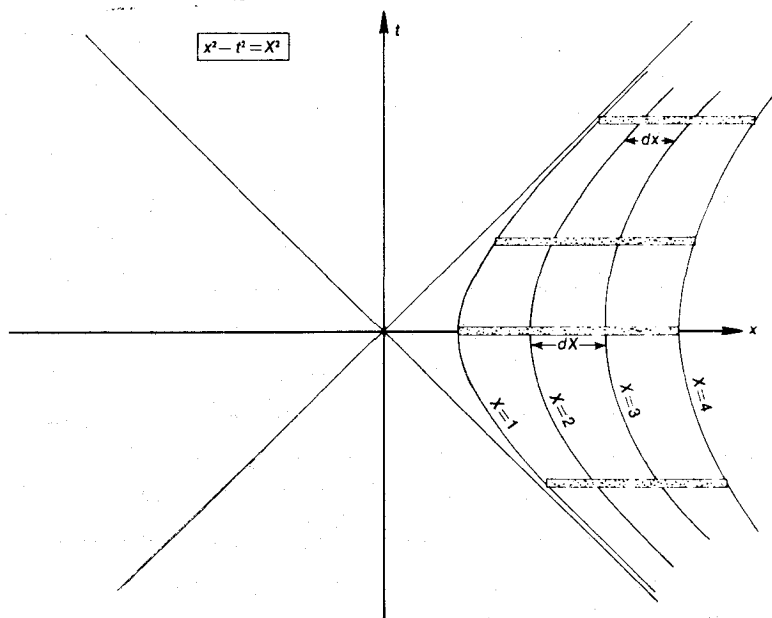
۱۶-۲ ویژه شتاب

مفهوم ویژه شتاب برای مطالعه حرکت نایکنواخت مفهوم مهمی است. ویژه شتاب را شتاب ذره نسبت به چارچوب سکون لحظه‌ایش تعریف می‌کنند. در اینجا تنها حرکت یک بعدی، مثلاً در امتداد محور x چارچوب S ، را بررسی خواهیم کرد. فرض کنید S' (که با S بیکرندی معیار است) چارچوب سکون لحظه‌ای ذره‌ای باشد که با سرعت u حرکت می‌کند، به طوری که در یک لحظه $u' = v$ و $u = v$ ، اما v ثابت است، درحالی که u و u' ثابت نیستند. بنابراین از ۲۶-۲ پس از اندکی محاسبه نتیجه می‌گیریم

$$du = \gamma^{-2}(u) du' \quad (29-2)$$

اگر ویژه شتاب را با α نشان دهیم، خواهیم داشت $du' = \alpha dt'$ و با توجه به اتساع زمان $dt' = dt/\gamma(u)$. بنابراین $du = \alpha dt/\gamma^2(u)$ ، یعنی

$$\alpha = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-2/2} \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} [\gamma(u)u] \quad (30-2)$$



شکل ۵-۲

این رابطه، تبدیل شتاب از چارچوب سکون به یک چارچوب دلخواه را می‌دهد. در نتیجه، برای دو چارچوب دلخواه S و S' (که جهت نسبی حرکتشان با جهت حرکت ذره یکسان است) خواهیم داشت

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{du}{dt} = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{du'}{dt'} \quad (۳۱-۲)$$

توجه کنید که شتاب تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نیست.

اگر α ثابت باشد، می‌توان بلافاصله از ۲-۳ نسبت به t انتگرال گرفت (با انتخاب $t = 0$ به‌ازای $u = 0$)، آن‌را حل کرد تا u به‌دست آید، یک بار دیگر انتگرال گرفت و با انتخاب ثابت انتگرال‌گیری مناسب، معادله حرکت زیر را به‌دست آورد

$$x^2 - c^2 t^2 = c^4 / \alpha^2 \quad (۳۲-۲)$$

به این دلیل است که حرکت راست‌خط با ویژه شتاب ثابت، حرکت "هذلولوی" نامیده می‌شود (شکل ۵-۲). (از محاسبات متناظر کلاسیک خواهیم داشت $x = 1/2 \alpha t^2 + \text{const.}$ ، یعنی حرکت "سه‌موی" است.) توجه کنید که $\alpha = \infty$ نتیجه می‌دهد $x = \pm ct$ ، و بدین ترتیب شتاب ویژه فوتون را می‌توان بینهایت دانست. همچنین توجه داشته باشید که بنا به شکل ۵-۲ فوتونی که در فاصله c^2/α از ذره‌ای که به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است منتشر شود نمی‌تواند به آن برسد.

حالا معادله:

$$x^2 - c^2 t^2 = X^2 \quad (۳۳-۲)$$

را به ازای مقادیر مختلف پارامتر X در نظر بگیرید. به ازای هر X ثابت، این معادله ذره‌ای را نمایش می‌دهد که با ویژه شتاب ثابت c^2/X حرکت می‌کند، و چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، نمایش‌دهنده معادلات حرکت نقاط میله‌ای هم هست که در جهت "حرکت صلب" دارد.

منظور از حرکت صلب حرکتی است که طی آن هر عنصر حجم کوچک جسم نسبت به یک چارچوب لخت مفروض همواره در جهت حرکت متناسب با ضریب لورنتس لحظه‌هایش کوتاه شود. بنابراین هر عنصر حجم کوچک در چارچوب سکون لحظه‌هایش ابعاد خود را خواهد داشت و این نشان می‌دهد که تعریف ذاتی است، یعنی چارچوب ناورداست. به علاوه، این نشان می‌دهد که در خلال حرکت صلب هیچ‌گونه تنش کشسان به وجود نمی‌آید. جسمی که در حال حرکت صلب است، نمی‌تواند شروع به دوران کند، چرا که محیطهای دایره‌ای که با نقاط جسم توصیف می‌شوند باید کوتاه شوند، درحالی‌که شعاع آنها باید ثابت بماند و این محال است. پس، به‌طور کلی، حرکت یک نقطه از جسمی که در حال حرکت صلب است، حرکت تمام نقاط آن را مشخص می‌کند.

از معادله ۳۳-۲، می‌توان (با مشتق‌گیری ضمنی) سرعت u و ضریب γ متناظر با آن را در مورد ذره‌ای که با شرط $X = \text{const.}$ حرکت می‌کند به دست آورد:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{c^2 t}{x} \quad \gamma(u) = \frac{x}{X} \quad (۳۴-۲)$$

اکنون حرکت دو ذره را که با چنین شرطی حرکت می‌کنند و پارامتر X آنها به اندازه dX اختلاف دارد در نظر می‌گیریم؛ در هر زمان ثابت t ، از ۳۳-۲ و آنگاه از ۳۴-۲ به دست می‌آوریم

$$dx = \frac{X dX}{x} = \frac{dX}{\gamma(u)} \quad (۳۵-۲)$$

بدین ترتیب، در هر لحظه $t = \text{const.}$ دو ذره با فاصله مختصاتی dx ، که با عکس ضریب γ آنها متناسب است، از هم جدا شده‌اند و در نتیجه "حرکت صلب" دارند؛ به علاوه dX را می‌توان فاصله ویژه دو ذره دانست. چون این مطلب برای هر دو ذره همسایه در مجموعه‌ای که با ۳۳-۲ نمایش داده می‌شود معتبر است، کل آن مجموعه، مانند میله صلب بدون تنش، "حرکت صلب" خواهد داشت. شکل ۵-۲ وضعیت چنین میله‌ای را در لحظات مختلف $t = \text{const.}$ نشان می‌دهد. واحدها را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم $c = 1$. میله را نمی‌توان به مقادیر منفی X کشاند، چرا که مجانبهای نمودار نشان‌دهنده مسیرهای فوتون هستند؛ اگر رسم شکلها را تا $X = 0$ ادامه دهیم، میله "بیک فوتون ختم می‌شود".

توجه به این نکته جالب است که بنابر اصل هم‌ارزی، ناظری که در یک $X = X_0$ ثابت همراه میله حرکت می‌کند. امکان دارد دچار این خطا شود که در یک میدان گرانشی ایستا به شدت c^2/X_0 قرار دارد. یک کلاف کامل از این میله‌ها، مثلاً به طول یک آسمانخراش، ممکن است ناظران همراه را به این شبهه بیندازد که دارند در یک آسمانخراش صلب، غوطه‌ور در یک میدان گرانشی ایستا زندگی می‌کنند و شدت این میدان طوری است که با افزایش فاصله کم می‌شود. با این روش نمی‌توان میدان گرانشی یکنواخت پدید آورد.

۱۷-۲ نسبیت خاص بدون اصل دوم

در این بخش نتایج اصل نسبیت را بدون در نظر گرفتن "اصل دوم" یعنی بدون ناوردا گرفتن سرعت نور بررسی می‌کنیم. با این حال، اقلیدسی و همسانگرد بودن را فرض خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم که در بخش ۶-۲ معادلات ۲-۲ تا ۵-۲ را (با $\gamma > 0$) بدون اصل دوم، و صرفاً با توسل به اقلیدسی و همسانگرد بودن چارچوبهای لخت به دست آوردیم. ما به لحاظ دقت خاطر نشان کردیم که درجه بندی شبکه مختصاتی، بدون استفاده از علائم نوری ممکن است. اکنون به معادلات ۲-۲ تا ۵-۲ باز می‌گردیم. حذف x' بین ۳-۲ و ۴-۲ نتیجه می‌دهد

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x \right) = \gamma \left(1 - \frac{v}{V^2} x \right) \quad (36-2)$$

که در آن V^2 را به جای $(\gamma^2 - 1)/\gamma^2 u^2$ قرار داده‌ایم. (توجه دارید که V^2 می‌تواند منفی باشد.) پس

$$0 < \gamma = \left(1 - v^2/V^2 \right)^{-1/2} \quad (37-2)$$

معادله ۳۶-۲ همراه با معادلات قبلی

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (38-2)$$

تبدیلات کامل ما را تشکیل می‌دهد. این تبدیلات از نوع لورنتسی هستند که در آنها V^2 جای c^2 را گرفته است و ما از این پس آنها را تبدیلات لورنتس V^2 می‌نامیم.

اکنون نشان می‌دهیم که اگر دو چارچوب لخت دلخواه با یک تبدیل لورنتس V^2 به هم مربوط شوند، آنگاه تمام چارچوبهای لخت با همان تبدیل لورنتس V^2 به هم مربوط خواهند شد؛ یعنی V^2 که در زنجیره استدلال ما به v وابسته بود، در واقع وابسته به آن نیست. برای روشن شدن مطلب

فرض کنید که چارچوب S' با چارچوب S در پیکربندی معیار و سرعت نسبی آنها v است و همچنین فرض کنید که S' با یک تبدیل لورنتس V^2 به S مربوط می‌شود. چارچوب دلخواهی مانند S'' را در نظر بگیرید که با S' در پیکربندی معیار است و سرعت نسبی آن u است و فرض کنید که S' و S'' با یک تبدیل لورنتس U^2 به هم مربوط می‌شوند. آنگاه

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/V^2) \quad (39-2)$$

$$x'' = \gamma'(x' - ut'), \quad t'' = \gamma'(t' - ux'/U^2) \quad (40-2)$$

که در آنها γ و γ' به ترتیب ضرایب لورنتس مربوط به V و U هستند. اگر ۳۹-۲ را در ۴۰-۲ قرار دهیم، تبدیل بین S و S'' را خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma\gamma' \left(1 + \frac{uv}{V^2}\right) \left(x - \frac{u+v}{1+uv/V^2}t\right) \\ t'' &= \gamma\gamma' \left(1 + \frac{uv}{U^2}\right) \left(t - \frac{u/U^2 + v/V^2}{1+uv/U^2}x\right) \end{aligned} \quad (41-2)$$

اینها نشاندهنده هیچ نوع تبدیل لورنتسی نخواهند بود مگر آنکه داشته باشیم $U^2 = V^2$. اما باید نشاندهنده تبدیل لورنتس باشند؛ پس $U^2 = V^2$ ، و بنابراین تبدیل بین S' و S'' یک تبدیل لورنتس V^2 است و V^2 مستقل از سرعت نسبی است چرا که u را دلخواه گرفتیم.

اگر $V^2 = \infty$ (یعنی $V^{-2} = 0$ برای اجتناب از وارد شدن بینهایتها در روابط، می‌شد تمام روابط را برحسب V^{-2} نوشت)، آنگاه گروه تبدیلات گالیله را خواهیم داشت. حالت $V^2 < 0$ با دورانه‌های حقیقی در x و Kt متناظر است (که در آن $K^2 = -V^2$):

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - Kt \sin \theta \\ Kt' &= x \sin \theta + Kt \cos \theta \end{aligned} \quad (42-2)$$

در اینجا $\cos \theta = \gamma v/K$ ، $\sin \theta = \gamma v/K$. اگر x و t معنایی را که در این متن دارند داشته باشند، گروه متناظر با تبدیلات بالا خواص غیرفیزیکی بسیاری خواهد داشت. مثلاً اعمال مکرر تبدیل پایین سرعت (θ کوچک) می‌تواند به نتیجه θ بی بین $\pi/2$ و π ، و بنابراین به $\gamma < 0$ منجر شود که با شرط ما تضاد دارد. همچنین، گروه در $\theta = \pi/2$ یک ناپوستگی سرعت بینهایت ($v = K \tan \theta$) دارد، که انعکاس زمان ($t' = -t$) و در نتیجه معکوس شدن علیت را ممکن می‌سازد. آشکار است که حالت $V^2 < 0$ باید کنار گذاشته شود.

بدین ترتیب، اصل نسبیت به خودی خود (همراه با اقلیدسی بودن و همسانگردی) مستلزم آن است که تمام چارچوبهای لخت یا با تبدیلات گالیله به هم مربوط شوند، یا با تبدیلات لورنتس با

یک V^2 مشخص و مثبت. در اینجاست که نقش "اصل دوم" در نسبیت روشن می‌شود: اصل دوم صرفاً باید یکی از این دو گروه تبدیلات را متمایز کند. هر اصل دومی که با اصل نسبیت سازگار و با تبدیلات گالیله ناسازگار باشد، گروه تبدیلات لورنتسی را نتیجه می‌دهد. با این حال برای آنکه ثابت جهانی V^2 مشخص شود، لازم است که اصل دوم کمی باشد. مثلاً عبارتی مانند "همزمانی مطلق نیست"، هر چند گروه لورنتس را نتیجه می‌دهد، مقدار V^2 را نمی‌تواند مشخص کند. از طرف دیگر، عبارتی مانند "در سرعت $3c/5$ اتساع زمانی به نسبت $5/4$ خواهیم داشت"، نه تنها گروه لورنتس بلکه یک گروه لورنتس (با $V^2 = c^2$) را نتیجه می‌دهد. بعداً خواهیم دید که افزایش جرم نسبیتی، یا رابطه معروف $E = mc^2$ ، و سایر روابط مشابه، می‌توانند به عنوان اصل دوم به کار روند. موضوع این بخش را از دیدگاه دیگری هم می‌توانیم بررسی کنیم. این دیدگاه که فیزیکی‌تر است بر اساس قضیهٔ دوشقی زیر قرار دارد: یا می‌توان ذرات را به هر سرعت بزرگ دلخواهی رساند، یا نمی‌توان. فرض کنید که نمی‌توان. در این صورت، به بیان ریاضی، باید یک کمترین کران بالایی c برای سرعت ذرات در هر چارچوب لخت موجود باشد. بنا به اصل نسبیت، این کران باید در تمام چارچوبهای لخت یکسان باشد. به علاوه، سرعت c چه برای پدیده‌های فیزیکی قابل حصول باشد، چه نباشد— باید به خودش تبدیل شود. کافی است این ادعا را در مورد حرکتی که در امتداد محورهای x مشترک چارچوبهای S و S' انجام می‌شود اثبات کنیم. اگر c در S ، به $c' > c$ در S' تبدیل شود، آنگاه بنابر پیوستگی، سرعتهای ذراتی که در S کمی کمتر از c هستند، در S' ، با سرعتهایی بیش از c متناظر خواهند بود. از سوی دیگر، اگر c به $c' < c$ در S' تبدیل شود، آنگاه سرعتهای ذرات بزرگتر از c' (اما کمتر از c) در S' با سرعتهایی بزرگتر از c در S متناظر خواهد بود. زیرا تبدیل سرعت باید یکنوا باشد تا در هر دو صورت، حداقل روی محورهای x ، تک‌مقداری شود، بدین ترتیب، روی محورهای x ، سرعت c ناوردا خواهد بود و حال می‌توان تبدیلات لورنتس را به روشی که در بخش ۲-۶ دیدیم به دست آورد. اگر کرانی برای سرعتهای ذرات وجود نداشته باشد، آنگاه هر رویدادی با $t > 0$ در S را می‌توان به طور علی به رویداد مبدأ $t' = t = 0 = x' = y' = z' = 0$ وصل کرد. بنابراین برای هر رویدادی با $t > 0$ باید داشته باشیم $t' > 0$. به همین نحو برای هر رویدادی با $t < 0$ باید داشته باشیم $t' < 0$. در نتیجه $t = 0$ باید با $t' = 0$ متناظر باشد، و از این موضوع با استدلالی مشابه آنچه برای ۲-۲ داشتیم، معلوم می‌شود که $t' = t$ ؛ و این مستقیماً به تبدیلات گالیله می‌انجامد. [نمونه‌هایی از استنتاجهای اولیهٔ تبدیلات لورنتس بدون استفاده از اصل انتشار نور توسط ایگناتوفسکی^۱ و پارس چاپ شده است. هر چند، این مقالات مانند بسیاری مقالات دیگر که بعداً اسم خواهیم برد، عمدتاً ناشناخته مانده‌اند.]

اپتیک (نورشناخت) اینشتینی

۱-۳ پدیده کشش

نسبیت برای مسئله‌ای که ذهن نظریه‌دانان قبل از نسبیت را به شدت مشغول کرده بود، جوابی ساده داشت. سؤال این بود که مایع جاری تا چه حد نور را با خود خواهد "کشید". هوای جاری مسلماً صوت را به طور کامل با خود می‌کشد، اما وضعیت در اپتیک متفاوت است: براساس نظریه‌های اتری، می‌شد انتظار داشت که اصلاً کششی در کار نباشد، چرا که نور اختلال اتر است و نه مایع. با این حال آزمایشهای مختلف کششی را نشان می‌دادند: به نظر می‌رسید که مایع در امتداد حرکت خود به‌تر نیرو وارد می‌کند و آن را تا حدی با خود می‌کشد. اگر سرعت نور در مایع ساکن u' باشد و ترتیبی دهیم که مایع با سرعت v حرکت کند، آنگاه سرعت نور نسبت به محیط خارج به شکل زیر به دست می‌آید

$$u = u' + kv, \quad k = 1 - 1/n^2 \quad (1-3)$$

که در آن k "ضریب کشش" است، عددی بین صفر و یک که نشان می‌دهد مایع چه کسری از سرعتش را به اتر در برگیرنده‌اش داده است، و n ضریب شکست c/u' مایع است. پنجاه سال قبل از اینشتین، فرنل موفق شد، بر مبنای فرض اتر، توضیح موجهی برای این روابط ارائه دهد. از

دیدگاه نسبیت خاص، رابطه ۱-۳ چیزی جز جمع نسبیتهای سرعتها نیست! نور نسبت به مایع با سرعت u' حرکت می‌کند و مایع نسبت به ناظر با سرعت v ، و بنابراین (رابطه ۲-۲)

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{(c/n) + v}{1 + v/cn} \approx c \left(\frac{1}{n} + \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{v}{cn} \right) \approx u' + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2-3)$$

در پرانتز آخر، از جملاتی که مرتبه‌شان v^2/c^2 بوده صرف‌نظر شده است. اینشتین رابطه جمع سرعتها را در مقاله سال ۱۹۰۵ خود ارائه داده بود، اما عجیب است که دو سال دیگر طول کشید تا لاوه این کاربرد زیبا را برای آن بیابد.

۲-۳ پدیده دوپلر

حتی در نظریه پیش از نسبیت هم، اگر ساعتی را که از ما دور می‌شود نگاه کنیم، به نظرمان خواهد رسید که از ساعت ساکن کندتر کار می‌کند. چرا که وقتی این ساعت مثلاً "دو" را نشان می‌دهد، دورتر از وقتی است که "یک" را نشان می‌دهد، و نوری که از آن می‌آید علاوه بر آنکه یک یکای زمان دیرتر منتشر شده است، زمان بیشتری طول می‌کشد تا به ما برسد. اگر به جای ساعت، اتم در حال ارتعاش را که از ما می‌گریزد تماشا کنیم، باز به همان دلیل، بسامدی که مشاهده می‌کنیم، از بسامد اتم ساکن کوچکتر خواهد بود، یا به عبارت دیگر، طیف اتم انتقال به سرخ خواهد داشت. عکس ماجرا وقتی اتفاق می‌افتد که "ساعتها" به جای دور شدن از هم، به یکدیگر نزدیک شوند. چنین پدیده‌هایی برای امواج صوتی در هوا هم اتفاق می‌افتد، و تمامی اینها به نام فیزیکدان اتریشی دوپلر، نامگذاری شده‌اند.

نسبیت تصحیحی در پدیده دوپلر اپتیکی انجام داد: به دلیل اتساع زمان برای ساعت یا اتم دورشونده، ساعت دورشونده باید باز هم کندتر دیده شود و برای اتم دورشونده باید انتقال به سرخ بیشتری مشاهده شود. (در اصل، این تصحیح را باید برای پدیده دوپلر آکوستیکی نیز انجام داد: ولی هر چند که اتمهای ارتعاش کننده غالباً با سرعتهای متسع‌کننده زمان حرکت می‌کنند، منتشرکننده‌های صوت کند هستند، و به همین دلیل در عمل نیازی به تصحیح آکوستیکی نیست.)

فرض کنید که چشمه نوری در چارچوب مرجع S حرکتی یکنواخت با سرعت u دارد، و فرض کنید که مؤلفه شعاعی لحظه‌ای سرعت نسبت به ناظر مبدأ O برابر u_r باشد. در این صورت در زمان Δt_0 که ناظر همراه C برای فاصله زمانی بین انتشار دو "قله موج" متوالی (یا دو تیک متوالی ساعت) اندازه می‌گیرد، فاصله چشمه از O به اندازه $O \gamma(u) u_r \Delta t_0$ افزایش می‌یابد (اتساع زمان!). در نتیجه، فاصله زمانی بین انتشار دو قله موج از نظر O و C به ترتیب برابر

$\Delta t_0 \gamma(u) + \Delta t_0 \gamma(u) u_r/c$ و Δt_0 خواهد بود. نسبت این زمانها انتقال دوپلر خواهد بود:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 + u_r/c}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = 1 + \frac{u_r}{c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + O\left(\frac{u^2}{c^2}\right) \quad (3-3)$$

در اینجا λ_0 ویژه طول موج است (که توسط C مشاهده می شود) و λ طول موجی است که O اندازه می گیرد. (رابطه پیش از نسبتی فاقد ضریب لورنتس بود، اما چنین رابطه ای فقط در چارچوب اتر معتبر شناخته می شد. در چارچوبهای دیگر، این رابطه و استنتاج آن مشکل می شد.) در بسط سری، پدیده دوپلر "خالص" $1 + u_r/c$ ، از اثر اتساع زمان $1/2 u^2/c^2$ تا مرتبه نشان داده شده جدا شده است.

توجه کنید که وقتی حرکت چشمه مطلقاً شعاعی است، $u_r = u$ و معادله ۳-۳ به شکل زیر درمی آید

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c} \right)^{1/2} \quad (4-3)$$

داشتن رابطه ای بین λ و λ' ، طول موجهایی که دو ناظر O و O' ، در یک رویداد معین، به باریکه ای فرودی با منشأ نامشخص نسبت می دهند، مفید خواهد بود. فرض کنید O و O' به ترتیب چارچوبهای معمولی S و S' را داشته باشند و فرض کنید که جهت منفی باریکه با محور x چارچوب S ، زاویه α بسازد. همچنین، بی آنکه کلیت قضیه از بین برود، فرض کنید باریکه از چشمه ای که نسبت به S' ساکن است خارج شود. در این صورت با قراردادن $\lambda' = \lambda_0 = v$ و $u_r = v \cos \alpha$ در رابطه ۳-۳ خواهیم داشت

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 + (v/c) \cos \alpha}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (5-3)$$

در نسبت حتی برای چشمه ای که حرکتش صرفاً عرضی است، انتقال دوپلر وجود دارد و این انتقال البته به تمامی، در اثر اتساع زمان روی می دهد. از اینجا راه دیگری برای تحقیق وجود اتساع زمان در طبیعت پیدا می شود، مثلاً این موضوع را می توان با آزمایشهای روتور تحقیق کرد. اما در چنین آزمایشهایی، یا چشمه حرکت یکنواخت ندارد و یا "ناظر" (گیرنده). اگر چشمه حرکت نایکنواخت داشته باشد، می توان با پذیرفتن فرضهای طول و ساعت، اعتبار رابطه ۳-۳ را حفظ کرد. در این صورت ویژه طول موج λ_0 ، طول موجی خواهد بود که در چارچوب سکون لخت لحظه ای اندازه گیری شده است و u و u_r سرعت لحظه ای و سرعت شعاعی آن در چارچوب ناظر خواهند بود. اگر ناظر هم شتاب داشته باشد، باز رابطه صادق است، چرا که چنین ناظری همان

اندازه‌گیریهای زمان و طول موضعی را انجام خواهد داد که ناظر لخت همراه لحظه‌ای او انجام می‌دهد. در این صورت u و u_r باید در لحظه تابش در چارچوب سکون ناظری که پرتو را دریافت می‌کند اندازه‌گیری شود. (خواننده نباید امکان چنین تعمیم‌هایی را برای روابط نسبی در آینده از نظر دور بدارد.) بالعکس، می‌توان انتقال دوپلر را در هر چارچوب مناسب دلخواهی در رویداد دریافت محاسبه کرد و سپس با استفاده از معادله ۳-۵، آن را به چارچوب سکون ناظر مطلوب برد. با استفاده از این روشها، حالا دیگر محاسبه انتقال دوپلر از محیط به مرکز روتور و برعکس، بسیار آسان است. محاسبه انتقال دوپلر بین دو نقطه دلخواه روتور که احتمالاً از لحاظ عملی اهمیت دارد، مسئله‌ای طولانی و کسل‌کننده است. ما برای دور زدن این مشکل تدریجی اندیشیده‌ایم. قرص بزرگی را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب لخت S با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. به این قرص، در نقاط P_0 و P_1 ، به فاصله‌های r_0 و r_1 از مرکز به ترتیب یک چشمه نوری و یک گیرنده متصل شده است. چون سیگنال‌هایی که از P_0 به P_1 گسیل می‌شوند، زمان حرکتشان در S یکی است، دو سیگنال متوالی در S با اختلاف زمانی یکسان Δt منتشر و دریافت خواهند شد. این اختلاف با اختلاف ویژه‌زمانهای $\Delta t/\gamma(\omega r_1)$ و $\Delta t/\gamma(\omega r_0)$ در P_0 و P_1 برابر خواهند بود. اما این ویژه‌زمانها با طول موجهای موضعی λ_0 و λ_1 که در آن نقاط مشاهده می‌شوند متناسب‌اند و

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\gamma(\omega r_0)}{\gamma(\omega r_1)} \quad (۳-۶)$$

برای اندازه‌گیری پدیده دوپلر عرضی (یعنی، اتساع زمان) اولین راهی که به نظر می‌رسد این است که چشمه را در محیط و گیرنده را در مرکز روتور قرار دهیم؛ ولی، در عمل درست عکس این کار (که در اصل اتساع زمان را برای گیرنده اندازه می‌گیرد و نه برای چشمه) توسط هی،^۱ شیفر،^۲ کرنشاو،^۳ و انگلستاف^۴ در ۱۹۶۰، با استفاده از تشدید موسباوئر انجام گرفته است. نتیجه، با توجه به خطای آزمایش که باید چند درصد باشد با پیشگویی‌هایی نظری تطابق دارد. در ضمن، این آزمایش براعتبار فرضیه ساعت افزود، زیرا "ساعتی" که روی گیرنده قرار داشت به وضوح شتاب می‌گرفت (تا حدود $10^4 \times 6$) و هیچ اثر قابل اندازه‌گیری مشاهده نشد.

تا قبل از آزمایشهای روتور، مشکل می‌شد به عرضی بودن حرکت چشمه اطمینان کرد (مثلاً، به عرضی بودن حرکت یونهای هیدروژن سریع). کوچکترین مؤلفه شعاعی می‌تواند اثر عرضی بودن حرکت را از بین ببرد. ایوزه^۵ و استیلول^۶ (در ۱۹۳۸) با زیرکی از یک حرکت رفت و برگشت استفاده کردند، به نحوی که پدیده دوپلر مرتبه اول حذف شد و آنها توانستند با دقت قابل ملاحظه‌ای سهم اتساع زمان را تعیین کنند.

در پدیده دوپلر "گرمایی" نیز می‌توان به همین ترتیب سهم مرتبه اول پدیده را حذف کرد. هسته پرتوزای وابسته به یک بلور داغ حرکت گرمایی تصادفی و سریعی دارد. به دلیل تصادفی بودن

حرکت، میانگین اثرات دوپلر (کلاسیک) مرتبه اول از بین می‌رود، اما اثر مرتبه دوم که وابسته به سرعت‌های میانگین مربعی است باقی می‌ماند. این سرعتها در ۱۹۶۰، توسط ربکا^۱ و پاوند^۲ محاسبه شد و یک بار دیگر انتقال دوپلر با استفاده از تشدید موسباوئر مشاهده شد. این بار هم نتایج تجربی با نظریه کامل، البته با خطای حدود ۱۰٪ (خطای مورد انتظار آزمایش) بود در توافق قرار گرفت. یکی از نتایج جانبی این آزمایش تأیید جدی فرضیه ساعت بود: "ساعت‌های" هسته‌ای علی‌رغم شتابشان که تا $10^{16} g$ (!) می‌رسید تنها به نسبت $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ کند شده بودند.

۳-۳ ابیراهی و شکل ظاهری اجسام متحرک

وقتی در باران رانندگی می‌کنیم، به نظرمان می‌رسد که قطرات باران مایل حرکت می‌کنند. همین‌طور وقتی دو ناظر زاویه بین یک پرتو نور فرودی و امتداد حرکت نسبیشان را اندازه‌گیری می‌کنند، در حالت کلی به یک نتیجه نمی‌رسند. به این پدیده که مسلماً قبل از نسبیت شناخته شده بود ابیراهی می‌گویند. فرمول نسبیتی در مورد ابیراهی هم درست مانند پدیده دوپلر، نسبت به فرمول قبلی نیاز به تصحیح دارد ولی فرمول حاصل برای تمام جفت ناظرها معتبر خواهد بود، درحالی‌که فرمول پیش نسبیتی تنها در صورتی که یکی از ناظرها نسبت به چارچوب اتر ساکن بود، شکل ساده خود را داشت.

برای به دست آوردن روابط اساسی ابیراهی، یک سیگنال نوری فرودی در نظر بگیرید که جهت منفی آن با محورهای x چارچوبهای S و S' ، به ترتیب زوایای α و α' بسازد. فرمول سرعت نسبیتی ۲-۲۵ را می‌توان با فرض $u_1 = -c \cos \alpha$ و $u_1' = -c \cos \alpha'$ برای این سیگنال به کار برد و نتیجه گرفت

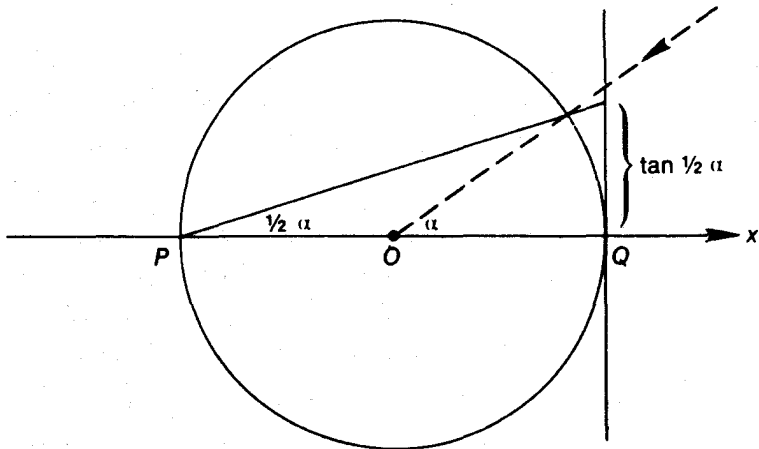
$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + v/c}{1 + (v/c) \cos \alpha} \quad (7-3)$$

همچنین، از ۲-۲۵ می‌توان فرمول دیگری به دست آورد (بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که سیگنال به طور لحظه‌ای در صفحه xy قرار دارد):

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma [1 + (v/c) \cos \alpha]} \quad (8-3)$$

جالبترین شکل فرمول ابیراهی وقتی به دست می‌آید که فرمولهای ۳-۷ و ۳-۸ را در اتحاد مثلثاتی

$$\tan \frac{1}{2} \alpha' = \sin \alpha' / (1 + \cos \alpha')$$



شکل ۱-۳

قرار دهیم و نتیجه بگیریم

$$\tan \frac{1}{\gamma} \alpha' = \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2} \tan \frac{1}{\gamma} \alpha \quad (9-3)$$

در مورد پرتوهایی که با زاویه α و α' خارج می‌شوند، در فرمولهای بالا c را با $-c$ عوض می‌کنیم. ابیراهی ایجاب می‌کند که فی‌المثل وقتی زمین در مدارش حرکت می‌کند، ستاره‌های با جهت ظاهری ثابت در طول سال، بیضیهای کوچکی (با قطر بزرگ تقریباً ۴۱ ثانیه قوسی) را طی کنند. همچنین، ابیراهی اعوجاجهای معینی را در شکل ظاهری اجسام گسترده‌ای که حرکت یکنواخت دارند سبب می‌شود. چرا که: وقتی ناظر نسبت به مدل مخروطی پرتوهایی که از جسم به چشم او می‌رسند حرکت می‌کند، از دید چارچوب سکون جسم ابیراهیهای نقاط مختلف آن با هم فرق خواهند داشت. به عبارت دیگر، از دید چارچوب سکون ناظر، نورهایی که از نقاط مختلف جسم متحرک می‌آیند، در زمانهای متفاوتی به چشم ناظر خواهند رسید و بنابراین مثل آن است که در زمانهای متفاوتی در گذشته منتشر شده‌اند؛ در نتیجه، به نظر می‌آید که نقاط دورتر جسم نسبت به نقاط نزدیکتر در خلاف جهت حرکت جابه‌جا می‌شوند.

در مورد شکل ظاهری اجسامی که حرکت یکنواخت دارند، نتایج نسبیستی قدری نامنتظره‌اند. ما استدلال هوشمندانه راجر پن‌روز^۱ را دنبال می‌کنیم. ابتدا حول مبدأ فضایی هر ناظر، کره‌ای به قطر واحد رسم می‌کنیم تا محورهای x منفی و مثبت را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند (شکل ۱-۳). هر چیزی را که ناظر در یک لحظه خاص می‌بیند می‌توان روی این کره نقش کرد ("آسمان" ناظر). سپس نقاط روی کره را به طریق افکنش کنجنگاری از نقطه P روی صفحه مماس در Q ("صفحه تصویر" ناظر) می‌نگاریم. یادآوری می‌کنیم که زاویه روبه‌رو به قوسی از دایره که رأسش در محیط

است، نصف زاویه‌ای است که رأسش در مرکز باشد و ما از این موضوع در نمودار استفاده کرده‌ایم (برای یک پرتو تابنده). بنابراین رابطه ۳-۹ دقیقاً چنین مفهومی دارد: دو ناظری که به‌طور لحظه‌ای انطباق دارند، هر چیزی را که نگاه کنند، تصویر آن روی "صفحات تصویر" صرفنظر از اختلاف مقیاسی که پیش می‌آید یکسان است.

اکنون، کره صلب Z را در جایی از چارچوب ناظر لخت O' در حال سکون در نظر بگیرید. ناظر در آسمان خودش طرحی دایره‌ای از Z می‌بیند و طرحی دایره‌ای از آن بر صفحه تصویرش می‌افکند (زیرا تصویر دایره‌های روی کره تحت افکنش کنجنگاری، خط راست یا دایره بر روی صفحه خواهد بود). البته Z ، نسبت به ناظر دیگر O حرکت می‌کند. با وجود این، بنا بر نظریه ما، تصویری که ناظر O روی صفحه تصویرش خواهد دید، تنها از نظر اندازه با تصویری که O' می‌بیند فرق دارد و بنابراین دایره‌ای خواهد بود. در نتیجه، تصویر "آسمانی Z " هم دایره‌ای خواهد بود.

به این ترتیب، علی‌رغم (یا به عبارت صحیح‌تر: به دلیل انقباض طول، چرا که اگر انقباض طول وجود نداشت، طرح اعوجاج پیدا می‌کرد) انقباض طول همه ناظرها کره متحرک را با یک طرح دایره‌ای نمایش می‌دهند! با استدلال مشابهی می‌توان دید که خطوط راست (میله‌های) متحرک، در حالت کلی، به شکل قوس دایره‌ای دیده خواهند شد و بشقابهای پرنده یا چرخهای دوچرخه‌هایی که حرکت سریع دارند به شکل بومرنگ درمی‌آیند.

روش جالب دیگری برای مطالعه شکل ظاهری اجسام متحرک وجود دارد که کمتر واقعی است در این روش از چیزی به نام "عکسبرداری آبرفوری" استفاده می‌شود. اینها عکسهایی با زمان عکسبرداری یکسان هستند که از تاباندن نور موازی که از چشم می‌آید بر روی صفحه عکاسی‌ای که عمود بر پرتوها قرار داده می‌شود به دست می‌آیند. مثلاً می‌شود با قرار دادن جسمی در جلوی خورشید و انداختن سایه آن بر روی صفحه عکاسی یک عکس ابرفوری از طرح آن جسم تهیه کرد. به علاوه، آنچه چشم از یک جسم کوچک و دور می‌بیند (یا عکسی که یک دوربین عکاسی معمولی از آن می‌گیرد) تقریب خوبی از یک عکس ابرفوری است. اکنون، به نتیجه شگفت‌انگیز زیر (که توسط ترل^۱ بیان شده است) می‌رسیم: تمام عکسهای ابرفوری که در زمان و مکان معینی از جسمی که در حال حرکت یکنواخت است توسط ناظرانی که در حرکت یکنواخت هستند گرفته می‌شوند یکسانند. به‌ویژه، اتمام این عکسها با عکس ابرفوری که در چارچوب سکون جسم گرفته می‌شود یکسان هستند.

برای اثبات این موضوع^۲، دو فوتون P و Q را در نظر بگیرید که روی مسیرهای مستقیم موازی به فاصله Δx (نسبت به چارچوبی مانند S) شانه‌به‌شانه هم حرکت می‌کنند. اکنون دو رویداد

1. Terrell

۲. این نحوه استدلال از مرجع زیر اقتباس شده است

دلخواه \mathcal{P} و \mathcal{Q} را به ترتیب در P و Q در نظر بگیرد. اگر \mathcal{Q} به فاصله زمانی Δt بعد از \mathcal{P} اتفاق بیفتد، آنگاه فاصله فضای بین \mathcal{P} و \mathcal{Q} برابر $(\Delta r^2 + c^2 \Delta t^2)^{1/2}$ خواهد بود و بنابراین، با توجه به ۱-۲ فاصله مجزوری بین \mathcal{P} و \mathcal{Q} برابر $-\Delta r^2$ خواهد بود و این مستقل از فاصله زمانی بین دو رویداد است. اما اگر فوتونها در کنار هم حرکت نکنند مثلاً اگر Q به فاصله Δl از P جلوتر باشد، آنگاه فاصله زمانی بین \mathcal{P} و \mathcal{Q} برابر است با $[(\Delta r^2 + (c\Delta t + \Delta l)^2)^{1/2}]$ و فاصله مجزوری مستقل از Δt نخواهد بود. ولی، چون فاصله مجزوری ناورداست (و از آنجا که پرتوهای موازی به پرتوهای موازی تبدیل می‌شوند)، نتیجه می‌گیریم هر دو فوتونی که در یک چارچوب در طول مسیرهای موازی به فاصله Δr شانه‌به‌شانه هم حرکت می‌کنند، در تمام چارچوبهای دیگر نیز دقیقاً همین کار را خواهند کرد. اکنون به یاد بیاوریم که عکس ابرفوری از برخورد دسته‌ای از فوتونها که در کنار هم روی مسیرهای موازی حرکت می‌کنند بر یک صفحه عکاسی که عمود بر مسیر آنهاست پدید می‌آید. بدین ترتیب ما ثابت کردیم، این فوتونها که در امتداد خطوط موازی با هم حرکت می‌کنند در تمام چارچوبهای لخت دارای فاصله فضایی یکسان خواهند بود و بنابراین معادل بودن عکسهای ابرفوری اثبات می‌شود.

فرض کنید که مثلاً ناظر مبدأ O در S جسم کوچکی را در $t = 0$ روی محور y خود ($\alpha = 90^\circ$) ببیند. همچنین فرض کنید که این جسم در چارچوب S' ساکن است. ناظر مبدأ O' در S' این جسم را در زاویه $90^\circ < \alpha'$ که با رابطه $3-9$ داده می‌شود خواهد دید. اگر این جسم مکعبی باشد که اضلاعش با محورهای مختصات S و S' موازی‌اند، واضح است که O' مکعب را چرخیده خواهد دید و نه رودرروی خودش. نکته عجیب این است که O هم برخلاف انتظار به جای یک مکعب رودرروی منقبض شده، مکعبی چرخیده و منقبض نشده خواهد دید! نکته عجیب‌تر اینکه نزدیک پنجاه سال از ظهور نسبیت خاص می‌گذشت که این حقایق ساده در مورد دیدن کشف شد (البته فرمول اساسی ابیراهی به همراه فرمول دوپلر در مقاله ۱۹۰۵ اینشتین آمده بود). ممکن است خواننده علاقه‌مند مسائل متنوع دیگری در مورد دیدن مطرح کند، ولی ما این بحث را ادامه نمی‌دهیم، چرا که به نظر می‌رسد مفاهیم موجود در این‌گونه مسائل محدود است. برخلاف پدیده دوپلر و پدیده کشش، تاکنون ابیراهی به آزمایشی که هدف آن آزمون نسبیت خاص باشد منجر نشده است. با وجود این، ابیراهی مثال خوب دیگری از کارایی نسبیت خاص است. قبل از اینشتین، به دست آوردن فرمول ابیراهی برای دو چارچوب مانند S و S' درحالی‌که "باد اتر" در جهت دلخواه در S می‌وزید — حتی با فرض ماهیت ذره‌ای (فوتون) برای نور، همچنانکه ما فرض کردیم — کار پیچیده‌ای بود. براساس نظریه موجی نور، تبدیلات گالیله اصلاً باعث ابیراهی برداریکه موج نمی‌شوند و این باعث معرفی مفهوم "باریکه‌ها" می‌شد که جهشان الزاماً با جهت برداریکه موج یکسان نیست. در نسبیت، تحلیل موجی مسئله به اندازه تحلیل ذره‌ای آن سراسر است

۱. باید توجه داشت که اساس پدیده دوران نسبیتی نیست. در فیزیک کلاسیک هم چنین دورانی وجود خواهد داشت منتهی با قدری اعوجاج.

است (تمرین ۳-۱۴). پس اینکه فکر کنیم، نسبیّت همیشه "کار را مشکل می‌کند" غلط است. در اپتیک قضیه کاملاً برعکس است.

فضازمان و چاربردارها

۱-۴ فضازمان

اینشتین به ما آموخت که رویدادها را داده‌های اساسی فیزیک بدانیم. او اهمیت چارچوبهای لخت و ناظرهای لخت را به ما نشان داد. همچنین او بود که دریافت هر ناظر لخت زمانی دارد که فقط برای شخص او معتبر است، و بنابراین دارای "فضاهای سه‌بعدی لحظه‌ای" خاصی است که از تمامی نقاط (x, y, z, t) با مختص زمانی ثابت تشکیل می‌شوند. اما کسی که به ما آموخت مجموعه رویدادهای جهان را "نقاط" یک خمینه مطلق چهاربعدی به نام "فضازمان" بشماریم، ریاضیدانی به نام مینکوفسکی (۱۹۰۸/۱۲۸۷) بود. ناظرهای لخت مختلف، برشهای مختلف به فضازمان می‌دهند و هر برش را "لحظه" می‌نامند؛ و در واقع همان‌طور که با انتخاب محورهای x و y می‌توان تمامی صفحه اقلیدسی را مختص‌بندی کرد، هر ناظر لخت با x و y و z و t معیار خود تمامی فضازمان را مختص‌بندی می‌کند. در شکل ۲-۳ فضازمانی که از دو بعد آن چشمپوشی شده است دیده می‌شود، اما از روی همین شکل می‌توان دریافت که ناظرهای مختلف برشهای لحظه‌ای گوناگونی به فضازمان می‌دهند (مثلاً محورهای x و x') و محور زمانی آنها با هم تفاوت دارد. در فضازمان خطهای خاصی با تاریخچه ذرات مادی متناظرند و به حق "جهانخط ذرات" نام گرفته‌اند، و اگر ذرات مربوط آزاد باشند، این خطوط مستقیم‌اند. اجسام دارای بعد، دارای "جهان‌لوله"هایی در فضازمان هستند.

البته در فیزیک نیوتونی نیز، که تبدیل گالیله بر آن حاکم است، می توان فضا زمان را تعریف کرد و آن را برای رسم نمودارهای مختلف به کار برد. در این باره همه ناظرها در مورد برش دادن فضا زمان و تقسیم آن به لحظه ها توافق دارند، اما محور زمانی آنها همچنان با هم فرق می کند (هر محور عبارت است از جهانخط مبدأ آن ذرات)، و باز هم ذرات آزاد جهانخط مستقیم، و اجسام دارای بعد جهان لوله دارند.

اما فضا زمان نسبی فقط طرح مناسبی برای رسم نمودارها نیست، بلکه یک فضای متریک چهار بعدی است.^۱ برای هر دو نقطه از فضا زمان، می توان "بازه":

$$\Delta s = (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)^{1/2} \quad (۱-۴)$$

را که نظیر "فاصله" است تعریف کرد. این بازه مطلق است، یعنی مقدار آن برای هر ناظر لختی که با استفاده از مختصات معیار آن را اندازه بگیرد [بخش ۲-۷ (ب)]، فرق نمی کند. چنانکه مینکوفسکی ثابت کرده است، وجود "متریک" فضا زمان ۱-۴ پیامد ریاضی مهمی دارد؛ یعنی از آن یک نوع حساب برداری ("چاربردارها") حاصل می شود که به خوبی با نیازهای نسبیت خاص سازگار است. علاوه بر این، فضا زمانی که به این متریک مجهز شده باشد، اندیشه هایی را که ما به شهود در مورد جهان فیزیکی داریم از یک مبنای مطلق (یعنی مستقل از ناظر و مستقل از مختصات) برخوردار می کند، و این مبنای مطلق چیزی است که به نظر می آمد با نفی فضای مطلق و زمان مطلق برای همیشه از میان رفته است. مینکوفسکی چنان از کشفی که کرده بود به هیجان آمد که گفت: "از این پس، از زمان به تنهایی و مکان به تنهایی سایه ای بیش نخواهد ماند و فقط نوعی وحدت این دو وجود واقعیت مستقل خواهد داشت"، و نیز "به اعتقاد من قوانین فیزیکی شاید کاملترین صورت بیان خود را در روابط متقابل میان جهانخطها بیابند." (هنگام بحث در نظریه نسبیت عام خواهیم دید که این سخن چقدر پیامبرانه بوده است.) مینکوفسکی شایسته آن است که پدر "بعد چهارم" نامیده شود - اگرچه پوانکاره قبلاً آن را پیشگویی کرده بود.

در فضا زمان گالیله ای، که در آن بین رویدادها فقط یک "فاصله زمانی" مطلق Δt وجود دارد، چنین اموری ممکن نیست. فاصله مکانی $(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$ تابع حرکت ناظر است و هیچ "متریک" ناوردای گالیله ای، که هر چهار مقدار Δx ، Δy ، Δz ، و Δt را شامل باشد، وجود ندارد. بنابراین، فضا زمان گالیله ای نامتریک است و چاربردارهای گالیله ای "بی هنجار" اند و از این رو چندان قابل استفاده نیستند (با این حال بخش ۵-۵ را ببینید).

در اینجا بحث کوتاهی درباره مفهوم فیزیکی Δs ، یا به عبارت بهتر Δs^2 می کنیم گرچه بعداً چند بار فرصت خواهیم داشت که این بحث را از سر بگیریم. روشن است که رابطه $\Delta s^2 = 0$ فقط و فقط آنگاه برای دو رویداد معین \mathcal{P} و \mathcal{Q} برقرار است که آن دو را بتوان توسط یک سیگنال ۱. در واقع ریاضیدانان آن را "شبه متریک" می نامند، زیرا مربع فاصله برای برخی جفت نقطه ها حذف شده و برای سایرین منفی می شود.

نوری به هم وصل کرد. اگر $\Delta s^2 > 0$ ، در هر چارچوب لخت دلخواه، $c^2 < \Delta r^2 / \Delta t^2$ (که در آن $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$) و بنابراین می‌توان ناظری را که با سرعت یکنواخت کمتر از c حرکت می‌کند از یکی از رویدادها به رویداد دیگر فرستاد. در چارچوب سکون ناظر اخیر، $\Delta r = 0$ و $\Delta s = c\Delta t$. بنابراین در حالت $\Delta s^2 > 0$ ، Δs نمایشگر c ضربدر فاصله زمانی \mathcal{P} و \mathcal{Q} در چارچوب لختی است که در آن \mathcal{P} و \mathcal{Q} در یک نقطه رخ می‌دهند. همچنین هرگاه $\Delta s^2 < 0$ ، آنگاه $|\Delta s|$ برابر با فاصله مکانی \mathcal{P} و \mathcal{Q} در چارچوب لختی است که \mathcal{P} و \mathcal{Q} در آن همزمان باشند، و چنین چارچوبی همواره وجود دارد. قسمت اول این گفته واضح است و قسمت دوم از فرمول تبدیل لورنتس $\Delta t' = \gamma (\Delta t - v\Delta x/c^2)$ نتیجه می‌شود. زیرا اگر در چارچوب S که به دلخواه انتخاب شده است داشته باشیم $\Delta t \neq 0$ ، با قراردادن محور x در امتداد مکانهای \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، مقادیر Δy و Δz صفر می‌شوند. و بنابراین $\Delta x / \Delta t > c$ ؛ و از این رو از رابطه $v = c^2 / (\Delta x / \Delta t) < c$ چارچوب مورد نیاز S' ، که در آن $\Delta t' = 0$ ، حاصل می‌شود.

به‌عنوان آخرین نکته، توجه خواننده را به اتحاد

$$\Delta s'^2 = \Delta t'^2 \left(c^2 - \frac{\Delta r'^2}{\Delta t'^2} \right) \quad (۲-۴)$$

جلب می‌کنیم که مقدار $\Delta r / \Delta t$ ، یعنی “سرعت سیگنال” از \mathcal{P} به \mathcal{Q} ، را به‌وضوح به سیگنال Δs^2 مربوط می‌سازد.

۲-۴ سه بردارها

پیش از پرداختن به معرفی چاربردارها، بد نیست که مروری در خصوصیات برجسته سه بردارها، یعنی بردارهای “معمولی” بکنیم. هرکسی که به هندسه سه بعدی یا مکانیک پرداخته باشد، از قدرت حساب برداری آگاه است. اما رمز این قدرت در چیست؟ البته اولین رمز، کوتاه‌نویسی روابط است و مقایسه میان صورت نرده‌ای و صورت برداری قانون دوم نیوتون این نکته را روشن می‌کند

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= ma_1 \\ f_2 &= ma_2 \\ f_3 &= ma_3 \end{aligned} \right\} \mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

این مثال البته بسیار ضعیف است. انسان وقتی کتابهای قدیمی فیزیک و هندسه را نگاه می‌کند تعجب می‌کند که چگونه در پیچ‌وخم سه دسته از معادلات نرده‌ای وابسته به مختصات، می‌توان به‌واقعیت فیزیکی که پشت این معادلات است پی برد. با این حال کوتاه‌نویسی، گرچه به‌خودی‌خود

اغلب بسیار ثمربخش است، فقط یک جنبه مسئله است. جنبه دیگر، از بین رفتن وابستگی به مختصات است که هم اکنون از آن یاد کردیم: بردارها مطلق اند.

هنگام بررسی فیزیک و هندسه فضای سه بعدی اقلیدسی، هر "ناظری" می تواند هر نقطه ای را که بخواهد به عنوان مبدأ انتخاب کند و در هر راستایی که بخواهد مختصات x ، y ، z معیار خود را (که مختصات راستگرد متعامد دکارتی هستند) برپا سازد. اما آیا این سخن بدین معنی است که به تعداد دستگاههای مختصات، فضا وجود دارد؟ پاسخ منفی است، زیرا پشت همه "مشاهدات" ذهنی، فضای واحدی وجود دارد که دارای عناصر و خصوصیات مطلق است، که همه ناظرها در مورد آنها توافق دارند، مثلاً نقاط و خطهای راست معین، فاصله بین خطوط و نقاط خاص، زاویه بین خطوط و غیره. چون حساب برداری این مقادیر مطلق را بدون تقید به مختصات بررسی می کند، مطلق بودن آنها نمایان می شود. هر رابطه ای مانند $a = b + c$ یا $a \cdot b = 5$ که بتوان آن را به صورت برداری بیان کرد، لزوماً مطلق است. اما گزاره ای چون $f_1 = f_2$ که مثلاً ناظری (در مورد نیرویی) به زبان می آورد و شکل برداری ندارد، فقط از لحاظ ذهنی درخور توجه است. سه بردار (دکارتی) a به صورت سه گانی عددی (a_1, a_2, a_3) که به انتخاب چارچوب مرجع دکارتی (x, y, z) بستگی دارد، تعریف می شود.^۱ عملیات گوناگون برداری را می توان به کمک این "مؤلفه"ها تعریف کرد، مثلاً

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

اما این عملیات را می توان به صورت مطلق (یعنی مستقل از مختصات) تعبیر کرد، مثلاً خود a را می توان چنین تعبیر کرد که دارای طول و امتداد معینی است، $a + b$ را می توان طبق قاعده متوازی الاضلاع تعبیر کرد، و غیره. فقط عملیاتی که معنی مطلق دارند می توانند به حساب برداری راه یابند. ناظری که می خواهد صحت یک معادله برداری را بیازماید می تواند مستقیم عمل کند، یعنی مقادیر مطلق طول و زاویه را اندازه بگیرد، اما در این صورت باید "آبرناظر" باشد؛ ناظرهایی که ما در نظر داریم فقط دارای یک شبکه مختصاتی معیار هستند، و در واقع آنها را می توان با چنین شبکه ای مشخص کرد. یعنی آنها فقط می توانند مقادیر مؤلفه های بردارها را قرائت کنند، و بنابراین وقتی می خواهند صحت رابطه ای چون $a = b + c$ را بیازمایند، هر یک از آنها مجموعه ای از سه معادله برداری $a_i = b_i + c_i$ ($i = 1, 2, 3$) به دست می آورد که از ناظری به ناظر دیگر فرق می کنند. اما این معادلات با همه صادق اند و یا همه کاذب. اگر یک معادله برداری (یعنی معادله ای بر حسب مؤلفه های بردارها) در یک دستگاه مختصات صادق باشد در همه دستگاههای

۱. به زبان فنی، a تابعی از مجموعه سیستمهای مختصات دکارتی (x, y, z) به فضای \mathbf{R}^3 (سه تاییهای عددی)

$$a(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$$

مختصات صادق است: و این برجسته‌ترین خصوصیت حساب برداری است. به زبان فنی، صورت معادلات برداری (یعنی معادلاتی برحسب مؤلفه‌های بردارها) تحت چرخش به دور مبدأ و انتقال محورها ناورداست، و این دورانها و انتقالها "ناظرها"ی مختلف را در فضای اقلیدسی به هم مربوط می‌کنند و در واقع "گروه نسبیت" فضای اقلیدسی را تشکیل می‌دهند. دلیل ناوردا بودن صورت این معادلات بعداً معلوم خواهد شد.

نمونه اصلی سه بردار، بردار جابه‌جایی $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ است که دو نقطه را در فضای اقلیدسی به هم متصل می‌کند. مؤلفه‌های این بردار تحت انتقال محورها تغییر نمی‌کنند و تحت چرخش حول مبدأ دستخوش همان تبدیلی (خطی و همگن) می‌شوند که خود مختصات را تغییر می‌دهد [بخش ۲-۷ الف] مثلاً

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \alpha_{11}\Delta x + \alpha_{12}\Delta y + \alpha_{13}\Delta z \\ \Delta y' &= \alpha_{21}\Delta x + \alpha_{22}\Delta y + \alpha_{23}\Delta z \\ \Delta z' &= \alpha_{31}\Delta x + \alpha_{32}\Delta y + \alpha_{33}\Delta z\end{aligned}\quad (۳-۴)$$

که در آن α ها توابع خاصی از زوایایی هستند که چرخش را مشخص می‌سازند. هر کمیتی که دارای سه مؤلفه (a_1, a_2, a_3) باشد و تحت تغییرات مختصات مورد نظر (یعنی چرخش و انتقال) درست مانند $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ دستخوش تبدیل ۳-۴ شود، سه بردار نامیده می‌شود. این خاصیت هر چند در کتابهای مقدماتی به صراحت اظهار نمی‌شود، اما در این فرض رایج که هر سه برداری را می‌توان توسط یک بردار جابه‌جایی (یک "پاره‌خط جهت‌دار") در فضای اقلیدسی نمایش داد، مستتر است. توجه داشته باشید که "بردار" مکان، $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ، یک نقطه نسبت به یک ناظر، فقط تحت چرخش، بردار است و تحت انتقال، بردار نیست! بردار صفر $(0, 0, 0) = \mathbf{0}$ طبق رابطه ۳-۴ یک سه بردار است. این بردار را معمولاً به غلط با $\mathbf{0}$ یعنی بدون علامت برداری نمایش می‌دهند. مثلاً می‌نویسند $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

از ۳-۴ نتیجه می‌گیریم که اگر مؤلفه‌های دو سه بردار در یک دستگاه مختصات یکسان باشند، در همه دستگاههای مختصات نیز یکسان خواهند بود؛ زیرا مجموعه مؤلفه‌های جدید هر دو بردار، از ترکیب خطی واحدی از مؤلفه‌های قدیم به دست می‌آیند. اگر هر یک از بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ مانند $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ تبدیل شوند، به دلیل خطی بودن ۳-۴ بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ نیز همان‌گونه تبدیل می‌شود؛ از این رو حاصل جمع بردارها نیز یک بردار است. همچنین اگر k یک ناوردای زنده‌ای باشد (که اغلب به اختصار "زنده‌ای" یا "ناوردا" خوانده می‌شود)، یعنی عددی حقیقی و مستقل از دستگاه مختصات باشد، باز هم از رابطه ۳-۴ روشن است $k\mathbf{a}$ که به صورت (ka_1, ka_2, ka_3) تعریف می‌شود، بردار است.

اگر (x, y, z) نقطه‌ای روی یک منحنی در فضا باشد، روشن است که طول وتر

$$\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$$

تحت تبدیلات مورد نظر، کمیتی نرده‌ای است. اگر طرفین ۳-۴ را بر Δl تقسیم کنیم و Δl را به سمت صفر میل دهیم، می‌بینیم که "مماس یکه"

$$t = \left(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl} \right) \quad (4-4)$$

نیز بردار است. این بردار را معمولاً به صورت dx/dl می‌نویسند. حال از هندسه به مکانیک نیوتونی روی می‌آوریم و ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که روی این منحنی حرکت می‌کند. فاصله زمانی میان دو رویداد که در این ذره رخ می‌دهند، یک کمیت نرده‌ای است. اگر طرفین ۳-۴ را بر Δt تقسیم کنیم و Δt را به سمت صفر میل دهیم می‌بینیم که سرعت $u = dx/dt$ بردار است. اگر در رابطه ۳-۴، a_1, a_2, a_3 را به جای $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ قرار دهیم، به آسانی درمی‌یابیم که مشتق هر بردار a نسبت به یک نرده‌ای (که با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های آن تعریف می‌شود)، بردار است. بنابراین شتاب $(du_1/dt, du_2/dt, du_3/dt) = du/dt = a$ بردار است. اگر u و a را در جرم m (که نرده‌ای است) ضرب کنیم دو بردار دیگر، یعنی تکانه $p = mu$ و نیروی $f = ma$ به دست می‌آید. می‌بینیم که هر پنج بردار اساسی t, u, a, p, f با عملیات برداری از بردار اولیه $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ حاصل می‌شوند.

به هر سه بردار $a = (a_1, a_2, a_3)$ یک مقدار نرده‌ای بسیار مهم وابسته است که هنجار یا بزرگی (یا قدر مطلق) آن بردار نام دارد که آن را به صورت $|a|$ یا صرفاً به صورت a می‌نویسند و با رابطه

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad a \geq 0 \quad (5-4)$$

تعریف می‌کنند. ناوردا بودن این کمیت نتیجه مستقیم ناوردا بودن مربع هنجار بردار اولیه، یعنی $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ تحت چرخش و انتقال است؛ یعنی نتیجه وجود متریک ناوردای فضای اقلیدسی است. اگر a و b دو بردار باشند، آنگاه $a + b$ هم بردار است و هنجار آن باید ناوردا باشد. اما

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{aligned}$$

و چون a^2 و b^2 ناوردا هستند، نتیجه می‌گیریم که "حاصلضرب زده‌ای"

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (۶-۴)$$

ناورداست، یعنی مستقل از مختصات است. اگر این مورد اولین برخورد ما با بردارها باشد، باید به دنبال معنای مطلق (یعنی مستقل از مختصات) $a \cdot b$ که از پیش می‌دانیم باید وجود داشته باشد، بگردیم و اگر به یک دستگاه مختصات خاص برویم، خیلی زود می‌توانیم به آن پی ببریم. به آسانی می‌توان دید که حاصلضرب $a \cdot b$ ، که توسط ۶-۴ تعریف می‌شود، از قانون جابه‌جایی $a \cdot b = b \cdot a$ ، قانون پخش‌پذیری $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ، و قانون لایب‌نیستی مشتق‌گیری $d(a \cdot b) = da \cdot b + a \cdot db$ تبعیت می‌کند. همچنین توجه داشته باشید که $a \cdot a = a^2$ ، که آن را به صورت $a^2 = a^2$ نیز می‌توان نوشت.

۳-۴ چاربردارها

اکنون می‌توانیم از طریق مشابه‌سازی با سه بردارها به ساختن حساب چاربرداری بپردازیم، و به آسانی می‌توان حدس زد که سرانجام چه به دست خواهیم آورد: حسابی برداری به دست خواهیم آورد که صورت معادلات آن تحت تبدیلات کلی لورنتس (بند آخر از بخش ۲-۶) ناورداست، یعنی معادلات آن از خصوصیتی که اصل نسبیت همه قوانین فیزیکی اقتضا می‌کند، برخوردارند، بدین طریق در اغلب موارد فقط از روی صورت قانونی که فرض یا پیشنهاد می‌شود، می‌توان دریافت که آیا این قانون ناوردای لورنتسی است یا نه، و این امر ما را در ساختن فیزیک نسبیتی یاری می‌کند. اما در اینجا باید گفت که همه قوانین ناوردای لورنتسی را نمی‌توان به صورت روابطی میان چاربردارها و زده‌ایها بیان کرد، بلکه برای بیان برخی از این قوانین به "چارتانسورها" نیاز داریم. (اما برای بیان قوانین دیگر به چیزی بیشتر نیاز نیست. حتی "قوانین اسپینوری" را می‌توان به صورت تانسوری بیان کرد.) در بخش ۴-۴ به بحث مجملی درباره چارتانسورها می‌پردازیم.

نمونه اولیه چاربردارها، چاربردار جابه‌جایی $\Delta R = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ بین دو رویداد است.^۱ همه چاربردارها را می‌توان به صورت یک چنین جابه‌جایی نمایش داد. دستگاههای مختصات مجاز، مختصات "معیار" ناظرهای لخت‌اند، و بنابراین تبدیلهای مناسب همان تبدیلهای کلی لورنتس هستند (که مرکب از انتقالها، چرخشهایی حول مبدأ فضایی، و تبدیلهای لورنتس معیارند). با استفاده از این تبدیلات، یک مشابه چهاربعدی روابط ۳-۴ برای هر جفت چارچوب لخت به دست می‌آید که به جای ۹ ثابت α ، ۱۶ ثابت دارد. همیشه برای نمایش سه بردارها از حروف سیاه کوچک و برای نمایش چاربردارها از حروف سیاه بزرگ استفاده می‌کنیم. تحت انتقالهای زمانی و فضایی، مؤلفه‌های ΔR (و بنابراین مؤلفه‌های هر چاربردار) تغییر نمی‌کنند؛ تحت چرخش

۱. مؤلفان دیگر (نظیر RSR) نمونه اولیه را $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t)$ عنوان کردند که امتیاز آن این است که در این حساب همه مؤلفه‌های یک چاربردار (یا چارتانسور) همیشه دارای ابعاد فیزیکی یکسان هستند.

فضایی حول مبدأ سه مؤلفه اول $\Delta \mathbf{R}$ (و بنابراین سه مؤلفه اول هر چاربردار) مانند یک سه‌بردار تبدیل می‌شوند، اما مؤلفه چهارم تغییر نمی‌کند؛ و تحت تبدیل لورنتس معیار، مؤلفه‌های چاربردار، درست به‌صورتی که در ۸-۲ دیدیم تبدیل می‌شوند. چار“بردار” مکان $\mathbf{R} = (x, y, z, t)$ فقط تحت تبدیلهای کلی و همگن لورنتس، یعنی تبدیلهایی که مختصات رویداد $(\circ, \circ, \circ, \circ)$ را تغییر نمی‌دهند، بردار محسوب می‌شود. بردار صفر $(\circ, \circ, \circ, \circ) = \circ$ ، یک چاربردار واقعی است. حاصل‌جمع، حاصلضرب نرده‌ای، و مشتق نرده‌ای چاربردارها نظیر سه‌بردارها تعریف می‌شود و همه چاربردار محسوب می‌شوند.

یک کمیت نرده‌ای مهم تحت تبدیلهای کلی لورنتس، مربع بازه Δs^2 ، یا به‌صورت دیفرانسیلی ds^2 است. با این‌حال، در اغلب موارد بهتر است به‌جای آن از بازه ویژه‌زمان $d\tau$ که با رابطه زیر تعریف می‌شود، استفاده کنیم

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \quad (7-4)$$

وجه تسمیه این کمیت این است که برای ذره متحرک، $d\tau$ برابر زمان dt است که ساعت متصل به‌ذره اندازه می‌گیرد، زیرا در چارچوب سکون لحظه‌ای ذره روابط $dx = dy = dz = 0$ برقرارند. بنابراین عجیب نیست اگر در مواردی که در فرمولهای کلاسیک dt وجود دارد در فرمولهای مشابه نسبیتی آنها $d\tau$ ظاهر شود. مثلاً اگر (x, y, z, t) مؤلفه‌های یک ذره متحرک باشند، با تقسیم مشابه چهاربعدی ۳-۴ بر $\Delta\tau$ و میل دادن $\Delta\tau$ به سمت صفر درمی‌یابیم که رابطه

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (8-4)$$

چاربرداری است که چارسرعت ذره نام دارد. این رابطه واقعاً مشابه ۴-۴ است و \mathbf{U} را می‌توان بردار مماس بر جهان‌خط ذره در فضا‌زمان دانست. حال از ۷-۴ داریم

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

که در آن u سرعت ذره است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) \quad (9-4)$$

که چیز شگفت‌انگیزی نیست. چون $dx/d\tau = (dx/dt)(dt/d\tau) = u\gamma(u)$ ، و غیره، بنابراین

می‌بینیم که

$$\mathbf{U} = \gamma(u) (u_1, u_2, u_3, 1) = \gamma(u) (\mathbf{u}, 1) \quad (10-4)$$

در بسیاری از موارد می‌بینیم که سه مؤلفهٔ اول یک چاربردار مؤلفه‌های یک سه‌بردار آشنا (یا مضربی از آنها) است، و در این‌گونه موارد از نمادگذاری که نمونهٔ آن را در ۱۰-۴ می‌بینیم استفاده می‌کنیم. مشتق‌های نرده‌ای چاربردارها (که با مشتق‌گیری از مؤلفه‌ها تعریف می‌شوند)، مانند مشتق‌های نرده‌ای سه‌بردارها، خود چاربردارند. مثلاً

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{R}}{d\tau^2} \quad (11-4)$$

چاربرداری است که چارشتاب نام دارد، رابطهٔ این چاربردار با سه‌شتاب \mathbf{a} به‌سادگی رابطهٔ \mathbf{U} با \mathbf{u} نیست. با استفاده از ۹-۴ داریم

$$\mathbf{A} = \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma \mathbf{u}, \gamma) = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a}, \frac{d\gamma}{dt} \right) \quad (12-4)$$

و از این رابطه می‌توان دریافت که مؤلفه‌های \mathbf{A} در چارچوب سکون لحظه‌ای ذره، ($u = 0$) با رابطهٔ

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}, 0) \quad (13-4)$$

داده می‌شود، زیرا مشتق γ دارای ضریب u است. بنابراین $\mathbf{A} = 0$ ، فقط و فقط آن‌گاه که ویژه‌شتاب یعنی هنجار سه‌شتاب در چارچوب سکون—صفر باشد. اما چارسرعت \mathbf{U} هرگز صفر نمی‌شود.

هنجار یا بزرگی $|\mathbf{V}|$ یا V چاربردار $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ با رابطهٔ

$$V^2 = -V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 + c^2 V_4^2 \quad (14-4)$$

تعریف می‌شود، و ناوردا بودن آن نتیجهٔ ناوردا بودن مربع هنجار بردار اصلی، یعنی

$$-\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 + c^2 \Delta t^2$$

است. درست به همان صورت که در ۴-۶ دیدیم، از نوردایی $|V|$ و $|W|$ و $|V+W|$ نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب زنده‌ای $V \cdot W$ ، که با رابطه

$$V \cdot W = -V_{\uparrow}W_{\uparrow} - V_{\downarrow}W_{\downarrow} - V_{\leftarrow}W_{\leftarrow} + c^{\uparrow}V_{\leftarrow}W_{\leftarrow} \quad (15-4)$$

تعریف می‌شود، ناورداست. مثلاً اگر U و A را در چارچوب سکون ($u = 0$) ملاحظه کنیم، از ۴-۱۰ و ۴-۱۳ درمی‌یابیم که در این چارچوب

$$U \cdot A = 0 \quad (16-4)$$

اما چون $U \cdot A$ ناورداست، نتیجه‌ای که گرفتیم مستقل از چارچوب است. بنابراین چارسرعت و چارشتاب "متعامد" اند.

اگر A ، B ، و C چاربردارهای دلخواه باشند، از روی تعریفها به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad A \cdot A = A^{\uparrow} \quad (17-4)$$

$$d(A \cdot B) = dA \cdot B + A \cdot dB \quad (18-4)$$

از ۴-۱۰ داریم

$$U^{\uparrow} = c^{\uparrow} \quad (19-4)$$

(خواننده هشیار پیش از محاسبه، در ۴-۱۰، $u = 0$ قرار می‌دهد. چرا؟) اگر از رابطه اخیر برحسب τ مشتق بگیریم—طرف چپ را به صورت $U \cdot U$ در نظر بگیریم—معادله ۴-۱۶ را می‌توانیم دوباره به دست آوریم. هنجار چارشتاب از ۴-۱۳ آشکار است

$$A^{\uparrow} = -\alpha^{\uparrow} \quad (20-4)$$

که در آن α ویژه شتاب است.

حال در مفهوم مطلق حاصلضرب زنده‌ای تحقیق می‌کنیم. چون تبدیلات لورنتس اساساً به حرکت مربوط می‌شوند، انتظار داریم که این مدلول بیشتر یک مفهوم سینماتیک باشد تا یک مفهوم هندسی محض U و V را چارسرعت دوزره فرض می‌کنیم و $U \cdot V$ را در چارچوب سکون ذره اول در نظر می‌گیریم که ذره دوم نسبت به آن مثلاً با سرعت v حرکت می‌کند. در این صورت، به موجب ۴-۱۰ و ۴-۱۵ داریم

$$U \cdot V = c^{\uparrow} \gamma(v) \quad (21-4)$$

بنابراین $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ برابر است با c^2 ضربدر ضریب لورنتس مربوط به سرعت نسبی دو ذره. البته چارسرعتها، بردارهای دلخواهی نیستند، و یکی از دلایل این امر این است که هنجار آنها همواره c است. یک فرمول گویا و اندکی کلی‌تر در تمرین ۴-۱۲ ذکر شده است.

۴-۴ چارتانسورها

طرح تبدیل نوعی ۳-۴ را در مورد سه بردار \mathbf{a} می‌توان به صورت فشرده

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} a_j \quad (22-4)$$

نوشت، و به همین ترتیب تبدیل مشابه چاربردار \mathbf{A} را می‌توان به صورت

$$A'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \alpha_{\mu\nu} A_\nu \quad (23-4)$$

نوشت. در مواردی که مقادیر شاخصها از ۱ تا ۴ تغییر می‌کنند، طبق رسم از حروف یونانی استفاده می‌کنیم.

چارتانسورها نیز، مانند چاربردارها، با رفتاری که تحت تبدیلات کلی لورنتس دارند، تعریف می‌شوند، اما تعداد مؤلفه‌های آنها بیش از چهار است. مثلاً چارتانسوری از ردهٔ ۲، دارای ۴ مؤلفهٔ $A_{\mu\nu}$ است که از قاعدهٔ تبدیل

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{\sigma, \tau=1}^4 \alpha_{\mu\sigma} \alpha_{\nu\tau} A_{\sigma\tau} \quad (24-4)$$

تبعیت می‌کنند، که در آن مقادیر α همان مقادیر ۲۳-۴ هستند. در حالت کلی، چارتانسوری از مرتبهٔ n دارای 4^n مؤلفه است که با n شاخص نوشته می‌شوند و شبیه رابطهٔ ۲۴-۴ تبدیل می‌شوند. بنابراین، چاربردارها در واقع چارتانسورهایی از مرتبهٔ ۱ هستند و بسیاری از خصوصیات اصلی آنها میان همهٔ چارتانسورها مشترک است. از جمله اینکه صورت معادلات چارتانسوری (یعنی معادلاتی برحسب مؤلفه‌های آنها) تحت تبدیلات کلی لورنتس ناورد است، و نیز حاصل جمع، حاصلضرب زرده‌ای، و مشتق زرده‌ای چارتانسورها (که با عملیات مربوط روی مؤلفه‌های آنها تعریف می‌شوند)، خود چارتانسورند. یکی از راههای ساده برای ساختن تانسوری از مرتبهٔ دوم، تشکیل دادن حاصلضرب "خارجی" $A_\mu B_\nu$ (یا حاصلضرب "انسوری") دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} است (که گاهی به صورت $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ نوشته می‌شود). برخی از ترکیبات مؤلفه‌های چارتانسورها هم، که با حاصلضرب زرده‌ای $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ چاربردارها متناظرند، نقش مهمی در نظریهٔ تانسورها ایفا می‌کنند.

تحت تبدیلات خطی مختصات $x'_\mu \rightarrow x_\mu, \Delta x_\mu$ ها مانند dx_μ ها یعنی

$$dx'_\mu = \sum \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu \quad (25-4)$$

تبدیل می شوند. پس می بینیم که ضرایب $\alpha_{\mu\nu}$ در ۴-۲۳ در واقع همان مشتقات جزئی $\partial x'_\mu / \partial x_\nu$ هستند. تانسورهای که با استفاده از این ضرایب تعریف می شوند، تانسورهای "پادهموردا" خوانده می شوند. طبقه دیگری از تانسورها که همزاد تانسورهای پاد همورداست—تانسورهای "هموردا"—با قراردادن $\partial x_\mu / \partial x'_\nu$ به جای α ها در ۴-۲۳ تعریف می شود. مشتق تابعی نرده‌ای از مکان، مثلاً $\varphi: \varphi_\mu = \partial \varphi / \partial x_\mu$ ، نمونه ساده‌ای از تانسورهای نوع اخیر است.

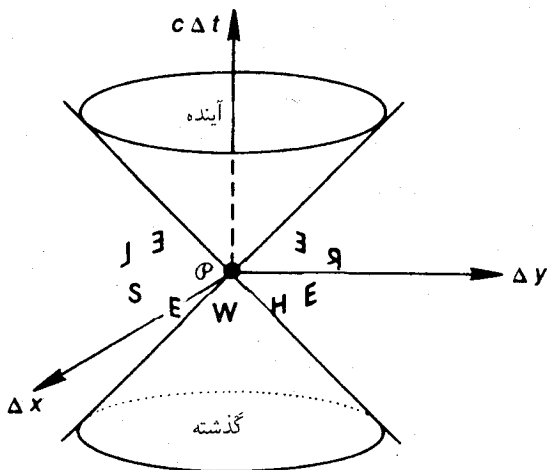
در اینجا بیش از این به این مطالب نمی پردازیم، زیرا آنچه گفتیم برای استفاده در بخشهای ۵-۱۳ و ۶-۱ کافی است. بحث در نظریه تانسورها را در بخش ۸-۱، منتهی از دیدی کلی تر، از سر می گیریم. باید تذکر دهیم که در اینجا، و تا آغاز بخش ۸-۱ قراردادی را که، از آن پس بدان پایبند خواهیم ماند نادیده می گیریم. قرارداد این است: فقط مؤلفه‌های تانسورهای هموردا را با شاخص پایین نمایش می دهیم. اما مؤلفه‌های تانسورهای پادهموردا را با شاخص بالا نمایش می دهیم.

۴-۵ نمودار سه بعدی مینکوفسکی

مورد خاصی هست که شباهت میان سه فضای اقلیدسی و فضا زمان (و بین سه بردارها و چاربردارها) در آن از اعتبار ساقط می شود. برخلاف متریک سه فضای $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ، که همیشه مثبت است، متریک فضا زمان ممکن است مثبت، صفر، یا منفی باشد (و در نتیجه مربع هنجار چاربردارها هم ممکن است مثبت یا صفر یا منفی باشد). نتیجه این امر این است که فضا زمان همسانگرد نیست، یعنی همه تغییر مکانهایی که از رویداد مفروض \mathcal{P} می توان داشت، هم‌ارز نیستند، بلکه این تغییر مکانها بر حسب علامت مربع هنجارشان، به سه طبقه تقسیم می شوند. تغییر مکانهایی که Δs^2 آنها صفر است، تغییر مکانهایی با $\Delta s^2 > 0$ را از تغییر مکانهایی با $\Delta s^2 < 0$ جدا می کنند. چنانکه قبلاً گفتیم، تغییر مکانهایی که Δs^2 آنها صفر است، متناظر با رویدادهایی هستند که می توان آنها را با یک سیگنال نوری به \mathcal{P} وصل کرد، و پیداست که در معادله

$$c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (26-4)$$

صدق می کنند. اگر از یکی از بعدهای فضایی، مثلاً از بعد z چشمپوشی کنیم، معادله اخیر در مجموعه‌ای از محورهای دکارتی $\Delta x, \Delta y$ ، و $c \Delta t$ که متناظر با ناظر خاصی است، یک مخروط قائم دوار را نمایش می دهد (شکل ۴-۱). اما این مخروط، که مخروط تهی یا مخروط نور نام دارد، مطلق است (یعنی به هیچ ناظر خاصی بستگی ندارد)؛ و بنابراین تفکیک رویدادها به سه



شکل ۱-۴

طبقه نسبت به \mathcal{P} نیز مطلق است. در فضا زمان کامل، مخروط تهی در \mathcal{P} ، که مجموعه‌ای از رویدادها فرض می‌شود، تاریخچهٔ جبههٔ نور کروی π است که به \mathcal{P} همگرا و دوباره از آن رویداد واگرا می‌شود. در شکل ۱-۴، π به دایره‌ای در صفحهٔ فضایی xy تبدیل شده است که، با گذشت زمان، به \mathcal{P} منتهی می‌شود و دوباره از آن رو به بیرون گسترش می‌یابد. رویدادهایی که مربع هنجار تغییر مکان آنها نسبت به \mathcal{P} مثبت است داخل مخروط قرار دارند یعنی در ناحیه‌ای واقع‌اند که محور زمان در آن واقع است اما رویدادهایی که مربع هنجار تغییر مکان آنها نسبت به \mathcal{P} مثبت است داخل مخروط قرار دارند یعنی در ناحیه‌ای واقع‌اند که محور زمان در آن واقع است اما رویدادهایی که مربع هنجار تغییر مکان آنها نسبت به \mathcal{P} منفی است خارج این مخروط قرار دارند. در فضا زمان کامل، رویدادهای نوع اول، درون جبههٔ نور کروی π قرار می‌گیرند. چنانکه در ۲-۴ دیدیم، Δs^2 بین دو رویداد هرگاه و فقط آنگاه مثبت است که سرعت سیگنالی که از یکی از دو رویداد به دیگری می‌رود کمتر از c باشد. بنابراین همهٔ رویدادهایی که با حضور ذره‌ای در \mathcal{P} ملازمه داشته باشند درون مخروط قرار دارند. به عکس، همهٔ تغییر مکانهای برداری، که از \mathcal{P} شروع و به داخل مخروط ختم می‌شوند، با جهانخطهای ممکن ذرات، که از \mathcal{P} می‌گذرند، متناظرند: بنابراین با ناظرهای لخت ممکن متناظرند، و بنابراین با محورهای x ممکن در فضا زمان متناظرند، و از این رو زمان‌گونه خوانده می‌شوند. هیچ ذره‌ای نمی‌تواند هم در \mathcal{P} و هم در رویدادی خارج مخروط حاضر باشد، تغییر مکانهای متناظر با این وضع را فضاگونه می‌گویند و به دلایل بدیهی، تغییر مکانهایی از \mathcal{P} را که روی مخروط واقع می‌شوند، نورگونه یا تهی می‌نامند. همهٔ چاربردارها را، برحسب اینکه مربع هنجار آنها مثبت یا منفی یا صفر باشد، به زمان‌گونه یا تهی یا فضاگونه طبقه‌بندی می‌کنیم. مثلاً چارسرعت u زمان‌گونه است، اما چارشتاب A فضاگونه است. توجه داشته باشید که یک

چاربردار ممکن است تهی باشد ولی صفر نباشد، یعنی همه مؤلفه‌های آن صفر نباشند. قبلاً (در بخش ۲-۷) دیدیم که اگر در هر چارچوب دلخواهی بتوان دو رویداد را با سیگنالی با سرعت $v \leq c$ به هم وصل کرد، همه ناظرها در مورد ترتیب و تقدم و تأخر زمانی آنها با هم توافق خواهند داشت. بنابراین، همه ناظرها وقوع رویدادهایی را که روی پارچه بالایی مخروط و داخل آن قرار دارند، بعد از \mathcal{P} می‌دانند، و می‌گوئیم که این رویدادها آینده مطلق \mathcal{P} را تشکیل می‌دهند. همچنین رویدادهایی که روی پارچه پایینی مخروط و داخل آن قرار دارند گذشته مطلق \mathcal{P} را تشکیل می‌دهند. رویدادهایی که در ناحیه باقیمانده واقع می‌شوند، جای دیگر را تشکیل می‌دهند. چون هیچ ناظر لختی نمی‌تواند هم در \mathcal{P} و هم در یکی از رویدادهایی که بعداً رخ می‌دهند حضور داشته باشد، بنابراین به هیچ‌وجه نمی‌توان وقوع این رویدادها را در همان محل \mathcal{P} فرض کرد و بدین دلیل است که ناحیه مربوط به این رویدادها را "جای دیگر" می‌نامیم. اگر ناظرهای لخت مختلف فاصله زمانی بین \mathcal{P} و رویداد دیگری را که در "جای دیگر" واقع است اندازه بگیرند، مقادیری که به دست می‌آورند همه مقادیر بین منفی بینهایت تا مثبت بینهایت را می‌تواند داشته باشد (معادله ۲-۱۳).

در هر رویداد، مخروط تهی، "دانه‌ای" در فضا زمان نقش می‌کند که در فضای همسانگرد اقلیدسی مشابه‌ای ندارد، اما به نحوی ساخت بلوری را به یاد می‌آورد. نور در امتداد این دانه سیر می‌کند و همه نقاط جهانخطهای ذرات باید درون مخروط تهی قرار داشته باشند.

نمودار مینکوفسکی شکل ۲-۳ از سنخ همان نمودار فضا زمان شکل ۱-۴ است که مبدأ معینی دارد اما از یک بعد دیگر آن هم چشمپوشی شده است. بنابراین شکل ۱-۴ را هم می‌توان یک نمودار سه بعدی مینکوفسکی دانست و، مانند شکل ۲-۳، از آن برای نمایش و حل مسائل نسبیت خاص استفاده کرد. در واقع، این نمودار، نگاشت فضا زمان به روی فضای اقلیدسی است. اما باید توجه داشت که این نمودار در طولها و زوایا ایجاد و ایچش می‌کند، و بردارهایی که طولشان در روی نمودار مساوی به نظر می‌آید، معلوم نیست که حتماً "طول مینکوفسکیایی $|A|$ " آنها هم یکی باشد. مثلاً اگر هذلولی شکل ۲-۳ را حول محور t بگردانیم، یک هذلولوی دوار در شکل ۱-۴ به دست می‌آوریم که مکان هندسی همه تغییر مکانهایی است که مربع بازه آنها از \mathcal{P} ، ± 1 است. همچنین بردارهایی که در روی نمودار متعامد به نظر می‌آیند لزوماً "متعامد مینکوفسکیایی" نیستند، یعنی معلوم نیست که $A \cdot B = 0$ باشد، نمونه‌ای از این گونه بردارها محورهای ξ و η در شکل ۲-۳ است. به عکس، محورهای x' و t' متعامد مینکوفسکیایی هستند اما در نمودار، متعامد به نظر نمی‌آیند. از سوی دیگر، روشن است که حاصل جمع بردارها در روی نمودار متناظر با "حاصل جمع مینکوفسکیایی $A + B$ " است، همچنین بردارهای متوازی در روی نمودار، متناظر با بردارهای "متوازی مینکوفسکیایی" هستند (بدین معنی که $A = kB$ ، که در آن k حقیقی است)، و نیز "نسبت مینکوفسکیایی" این گونه بردارها، k ، همان نسبتی است که در روی نمودار آشکار است. در نتیجه قضایایی از نوع زیر را از روی نمودار می‌توان به دست آورد: حاصل جمع هر تعداد بردار

تهی یا زمان‌گونه روبه آینده، برداری است تهی یا زمان‌گونه؛ و فقط به شرطی تهی است که همه عوامل جمع تهی و موازی باشند.

هر بردار $\mathbf{V} = (v, V_f)$ را که زمان‌گونه $(v^2 < c^2 V_f^2)$ و رو به آینده $(V_f > 0)$ باشد، می‌توان طبق رابطه $\mathbf{V} = (V/c) \mathbf{U}$ به صورت حاصلضرب ضرب یک عدد مثبت در چارسرعت \mathbf{U} بیان کرد. در بداهت این امر شکی نیست، زیرا هر برداری با هنجار c را می‌توان به صورت یک چارسرعت تعبیر کرد. راه دیگر استفاده از عملیات زیر است

$$\mathbf{V} = V_f \left(\frac{v}{V_f}, 1 \right) = \frac{V}{c} \left(\frac{cV_f}{V}, 1 \right) = \frac{V}{c} \gamma(u) (\mathbf{u}, 1) = \frac{V}{c} \mathbf{U} \quad (27-4)$$

که در آن همه مؤلفه‌ها نسبت به چارچوب معین S اندازه‌گیری شده‌اند. حال چارچوب دوم S_0 را در نظر بگیرید که خود دارای چارسرعت \mathbf{U} است. در چارچوب اخیر $\mathbf{U} = (0, 0, 0, 1)$ و در نتیجه $\mathbf{V} = (0, 0, 0, Vc^{-1})$. روشن است که سرعت S_0 نسبت به S همانا $\mathbf{u} = \mathbf{v}/V_f$ است. در واقع با موازی گرفتن محور زمان S_0 با \mathbf{V} مؤلفه‌های فضایی \mathbf{V} را جذب کرده‌ایم. (اگر \mathbf{V} رو به گذشته باشد، همین استدلال را می‌توان در مورد $-\mathbf{V}$ انجام داد) برای هر چاربردار \mathbf{W} در S می‌توانیم دوتا از مؤلفه‌های فضایی آن (مثلاً W_x و W_y) را جذب کنیم، و برای این منظور کافی است که محورهای فضایی S_0 را بچرخانیم. آنگاه چنانکه در شکل ۲-۳ می‌بینیم، اگر \mathbf{W} تهی نباشد، می‌توانیم محور t' یا x' را در امتداد \mathbf{W} اختیار کنیم و بدین طریق یک مؤلفه دیگر \mathbf{W} را هم جذب کنیم؛ این مؤلفه یا W_1 است (چنانکه در مورد پیش دیدیم) و یا اگر \mathbf{W} فضاگونه باشد، W_4 است. این ساده‌سازها اغلب بسیار مفیدند.

۴-۶ حرکت موج

برای ارائه نمونه‌ای از تواناییهای چاربردارها، در این بخش به بررسی ویژگیهای تبدیلی موجهای تخت می‌پردازیم. رشته‌ای از "آشفته‌گیا" یا "قله‌های موج" تخت را در نظر بگیرید که ماهیتشان معلوم نیست، با هم به اندازه طول موج λ فاصله دارند در امتداد برداریکه $\mathbf{n} = (l, m, n)$ با سرعت w نسبت به چارچوب S حرکت می‌کنند. معادله صفحه‌ای a در S که قائم بر آن \mathbf{n} و فاصله آن از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ باشد، عبارت است از

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = p$$

اگر این صفحه با سرعت w انتشار یابد، معادله آن به صورت زیر است

$$l\Delta x + m\Delta y + n\Delta z = w\Delta t$$

که در آن Δt زمان اندازه‌گیری شده از لحظه‌ای است که صفحه از نقطه P_0 می‌گذرد، و $\Delta x = x - x_0$ و غیره. معادلهٔ مجموعه‌ای از این‌گونه صفحات متحرک، که فاصله از صفحهٔ متوالی آنها λ باشد، همین معادلهٔ اخیر است که به طرف راست آن مقدار $N\lambda$ اضافه می‌شود (N عددی است صحیح). و این معادله را (پس از جذب علامت منفی در N) می‌توان به صورت

$$\mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{R} = N, \quad (N \text{ هر عدد صحیح دلخواه}) \quad (28-4)$$

نوشت که در آن

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{n}, \frac{w}{c^2} \right) = \nu \left(\frac{\mathbf{n}}{w}, \frac{1}{c^2} \right) \quad (29-4)$$

و $\nu = w/\lambda$ بسامد است. به عکس، هر معادله‌ای را که دارای صورت 28-4 باشد، در S نمایشگر مجموعه‌ای از صفحات متحرک هم فاصله می‌شناسیم که λ و \mathbf{n} و w آنها با معادلهٔ 29-4 تعیین می‌شود. گرچه نمی‌دانیم که \mathbf{L} واقعاً چاربردار است یا نه، آن را شبیه چاربردارها نوشته‌ایم. با این حال فرض کنید که 28-4 را مستقیماً به یک چارچوب دلخواه S' تبدیل کنیم. چون مؤلفه‌های $\Delta \mathbf{R}$ دستخوش تبدیل کلی لورنتس، یعنی تبدیلی خطی و همگن، می‌شوند، طرف چپ یک چند جمله‌ای خطی همگن برحسب $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t'$ خواهیم داشت و طرف راست همان N خواهد بود

$$\mathbf{L}' \cdot \Delta \mathbf{R}' = N$$

که در آن $\Delta \mathbf{R}'$ به جای $(\Delta x', \dots, \Delta t')$ نشسته است و \mathbf{L}' عبارت است از ضرایب این مؤلفه‌ها که به ترتیب بر $-1, -1, -1, c^2$ تقسیم شده‌اند. بنابراین در S' نیز برای این آشفتگی مجموعه‌ای از صفحات هم‌فاصله متحرک داریم. همچنین به دلیل ناوردایی حاصلضرب نرده‌ای، یقیناً از 28-4 نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{T}' \cdot \Delta \mathbf{R}' = N$$

که در آن \mathbf{T}' تبدیل شدهٔ برداری مؤلفه‌های \mathbf{L} در S' است. به‌ازای هر مقدار N ، یک صفحه از مجموعهٔ صفحات متحرک مشخص می‌شود: بنابراین، برای هر رویدادی که روی یکی از صفحات قرار داشته باشد با تفریق کردن دو معادلهٔ اخیر از یکدیگر داریم

$$(\mathbf{L}' - \mathbf{T}') \cdot \Delta \mathbf{R}' = 0 \quad (30-4)$$

یقیناً چاربردار $\Delta \mathbf{R}'$ را می‌توان یافت که از یکدیگر استقلال خطی داشته باشند و به رویدادهایی در روی صفحات مربوط شوند و بنابراین در معادله ۳-۴ صدق کنند؛ مثلاً بردارهایی از نوع $(a, 0, 0, 0)$ و $(0, b, 0, 0)$ و $(0, 0, c, 0)$ و $(0, 0, 0, d)$. اما این امر مستلزم آن است که $(\mathbf{L}' - \mathbf{T}') = 0$ و یا $\mathbf{L}' = \mathbf{T}'$ باشد؛ به عبارت دیگر، مستلزم آن است که مؤلفه‌های \mathbf{L} در واقع مانند مؤلفه‌های چاربردارها تبدیل شوند. بنابراین \mathbf{L} چاربردار است. \mathbf{L} را چاربردار بسامد می‌نامند. حال دو چارچوب معمول S و S' را در پیکربندی معیار و در یک موج تخت را با بسامد ν و سرعت w در راستای $\mathbf{n} = -(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ در نظر بگیرید. مؤلفه‌های بردار بسامد S از رابطه

$$\mathbf{L} = \left(\frac{-\nu \cos \alpha}{w}, \frac{-\nu \sin \alpha}{w}, 0, \frac{\nu}{c^2} \right) \quad (31-4)$$

به دست می‌آیند. اگر این مؤلفه‌ها را طبق روابط ۲-۲ تبدیل کنیم، مؤلفه‌های بردار بسامد را در S' به دست می‌آوریم

$$\frac{\nu' \cos \alpha'}{w'} = \frac{\gamma \nu (\cos \alpha + vw/c^2)}{w} \quad (32-4)$$

$$\frac{\nu' \sin \alpha'}{w'} = \frac{\nu \sin \alpha}{w} \quad (33-4)$$

$$\nu' = \nu \gamma \left(1 + \frac{v}{w} \cos \alpha \right) \quad (34-4)$$

معادله اخیر پدیده دوپلر را برای امواج با سرعت‌های مختلف و به ویژه برای امواج نور ($w = c$) نمایش می‌دهد. و در مورد اخیر می‌توان دید که این فرمول با فرمول قبلی ۳-۵ معادل است. از ۳۲-۴ و ۳۳-۴ فرمول کلی ابیراهی موج را به دست می‌آوریم

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma (\cos \alpha + vw/c^2)} \quad (35-4)$$

در حالت خاص $w = c$ می‌توان دید که این فرمول با فرمولهای قبلی ۳-۷ و ۳-۸ معادل است، و در واقع برابر با خارج قسمت آن دو فرمول است.

سرتانجام، برای به دست آوردن تبدیل w می‌توانیم مقادیر ناخواسته را در معادلات ۳۲-۴ تا ۳۴-۴ حذف کنیم، اما راه ساده‌تر استفاده از نوردایی $|\mathbf{L}|^2$ است. اگر این مقدار را در چارچوبهای S و S' بنویسیم، خواهیم داشت

$$\nu^2 \left(1 - \frac{c^2}{w^2} \right) = \nu'^2 \left(1 - \frac{c^2}{w'^2} \right) \quad (36-4)$$

و بنابراین با استفاده از ۴-۳۴ داریم

$$1 - \frac{c^2}{w'^2} = \frac{(1 - c^2/w^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + v \cos \alpha/w)^2} \quad (۴-۳۷)$$

این فرمول مشابه فرمول ۲-۲۷ نیست. دلیلش این است که اگر ذره‌ای در یک چارچوب سوار بر قله موج و در راستای قائم حرکت کند، در حالت کلی در چارچوب دیگر چنین نیست: در آنجا نیز سوار بر قله موج است اما در راستای قائم نیست. تنها استثنا حالت $w = c$ است.



مکانیک ذره نسبیتی

۵-۱ حوزه اعتبار قوانین نیوتون

مکانیک نیوتونی از نوع لورنتس-ناوردا نیست. بنابراین— حتی پیش از آشکار شدن نارساییهای تجربی جدی در مکانیک قدیم، برنامه نسبیت خاص ایجاب می‌کرد که مکانیکی جدیدی ساخته شود. مکانیک جدید به مکانیک “نسبیتی” معروف است. این نامگذاری چندان مناسب نیست^۱، زیرا همان‌طور که دیده‌ایم، مکانیک نیوتونی هم نسبیتی است، منتهی تحت گروه تبدیلات “غلط” (گالیه). نظریه نیوتون خدمات ارزشمندی به نجوم کرده است (مثلاً پیشگویی مدارهای بیضوی و سیاره‌ها به‌عنوان نظریه اساسی مورد استفاده قرار گرفته، و در تعداد بیشماری از کاربردهای زمینی اعتبار خود را به اثبات رسانده است. پس این نظریه نمی‌تواند به‌کلی غلط باشد. در واقع، پیش از قرن بیستم، تنها یک مورد شکست برای مکانیک نیوتونی تصور می‌شد و آن پیشروی حسیض سیاره عطارد بود که به میزان ۴۳ ثانیه قوسی در قرن بیشتر از محاسبه نیوتونی بود! از زمان ظهور شتابدهنده‌های ذرات، نارساییهای زیادی در قوانین نیوتون آشکار شده است، درحالی‌که مکانیک جدید در تمامی این موارد توصیفهای صحیحی را ارائه می‌دهد. (چنانکه می‌دانید، در مکانیک نیوتونی دو “تصحیح” اعمال شده است، یکی به دلیل نسبیت و دیگری به دلیل نظریه کوانتومی.

۱. نام “مکانیک لورنتس-ناوردا” مناسبتر است.

در اینجا صرفاً تصحیح نسبیتی را بررسی می‌کنیم.) مکانیک قدیم در حوزه وسیعی از کاربردها عملاً مکانیک جدید را در برمی‌گیرد (این حوزه حرکت‌هایی را شامل می‌شود که سرعتشان در مقایسه با سرعت نور کم است) و در واقع حوزه اعتبار مکانیک قدیم را به صورت تابعی از دقت مورد نظر مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، اگر ضرایب گامای به کاررفته در حرکت‌های مختلف از یک بیشتر باشد، مکانیک قدیم نتیجه غلط خواهد داد. در برخوردهای آزمایشگاهی ذرات بنیادی، ضرایب گامای از مرتبه 10^4 غیرعادی نیست و ضرایب گامایی از مرتبه 10^{11} در پروتوئهای پرتوکیهانی دیده شده است. در چنین حالت‌هایی، مکانیک نیوتونی نه تنها اندکی نادرست، بلکه به کلی غلط است. با این حال، بدون تردید نظریه نیوتون، در محدوده حرکت‌های کند، هنوز هم به دلایل مفهومی و سهولت تکنیکی مورد استفاده قرار خواهد گرفت؛ و به عنوان یک ساختار منطقی، کامل، و خدشه‌ناپذیر همچون هندسه اقلیدسی به حیات خود ادامه خواهد داد. البته، نباید از این نظریه بی حساب و کتاب به عنوان مدلی از طبیعت، استفاده کرد.

۲-۵ چرا گرانش به طور طبیعی در نسبیت خاص نمی‌گنجد

در این فصل تنها به مکانیک ذره در غیاب گرانش می‌پردازیم و برای مبحث برخوردها مکانیک جدیدی در چارچوب نسبیت خاص خواهیم ساخت. تلاش‌های زیادی هم به منظور ابداع نظریه‌های جدید گرانش در چارچوب نسبیت خاص صورت گرفته است، اما این کار تنها با پرداخت بهای سنگین چشمپوشی از اصل هم‌ارزی یا تعبیر "طبیعی" نسبیت خاص می‌تواند انجام شود.

گاهی استدلال می‌شود، چون اتاقک‌هایی که در دو طرف کره زمین در حال سقوط آزاد هستند (مثلاً) نسبت به هم شتاب می‌گیرند، محال است که نسبیت خاص، آنطور که اصل هم‌ارزی ایجاب می‌کند، در آنها برقرار باشد؛ و همچنین محال است که نسبیت خاص، آنطور که لازمه یک نظریه گرانش نسبیت خاصی است، در چارچوب گسترده‌ای که نسبت به زمین ساکن است برقرار باشد. اما چرا این استدلال به نظریه نیوتون، که در آن اصل هم‌ارزی (ضعیف) برقرار است، لطمه‌ای وارد نمی‌کند؟ در سینماتیک کلاسیک، تبدیلات گالیله نه تنها ارتباط بین دو چارچوب لخت را بیان می‌کند، بلکه هر دو چارچوب صلبی که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند نیز با این تبدیلات به هم مربوط می‌شوند. بنابراین با همین تبدیلات، اعضای هر مجموعه موضعی در حال سقوط آزاد و همچنین چارچوب‌های لخت گسترده به هم مربوط می‌شوند؛ و این واقعیت که مکانیک بی‌گرانش نیوتونی در چارچوب‌های موضعی در حال سقوط آزاد صادق است، اشکالی پدید نمی‌آورد. چنین وضعیتی در نسبیت خاص هم امکان دارد و بدین ترتیب استدلال بالا درست نیست.

اولین شرط برقراری یک نظریه گرانش نسبیت خاصی وجود چارچوب لختی، مانند S ، است، آنقدر بزرگ که بتواند تمام دستگاه‌های گرانشی مورد نظر را در برگیرد، مثلاً ستاره‌ای را همراه با سیاراتش. بنابر نسبیت خاص، باید فرض کرد که هندسه "حقیقی" چارچوب S اقلیدسی است، هر چند این امکان هم وجود دارد که هندسه خط‌کش‌های واقعی با این هندسه تطبیق نکند. همچنین

باید وجود یک زمان مختصاتی با تمام خصوصیات نسبیت خاصی را فرض کرد، و ما قبلاً دیدیم که ساعتهای واقعی با چنین زمانی تطابق ندارند: این ساعتها در نزدیکی جرمهای بزرگ، بنا به اصل هم‌ارزی کند خواهند شد (بخش ۱-۲۱). فرض کنید بسامد یک ساعت واقعی ساکن در S ، ν باشد که رابطه آن با بسامد مختصاتی، در رویدادی مانند \mathcal{P} ، به صورت $\nu = k\nu_0$ ($k \neq 1$) است. ابتدا، فرض کنید که خط‌کشهای واقعی با فواصل مختصاتی در S مطابقت دارند. در این صورت سرعت نور، که وقتی با ساعتها و خط‌کشهای واقعی اندازه‌گیری شود c است (با توجه به اصل هم‌ارزی و فرضیه‌های ساعت و طول)، برحسب اندازه‌های مختصاتی k و c خواهد بود. حال، S' را چارچوب لخت دیگری در نظر بگیرید که نسبت به S با سرعت v حرکت می‌کند. بنا به نسبیت خاص، مختصات در این دو چارچوب باید با تبدیلات لورنتس به هم مربوط شوند. یک سیگنال نوری را در \mathcal{P} در نظر بگیرید که در S در امتداد v حرکت می‌کند. چون سرعت این سیگنال در S برابر k و c است و c تنها سرعت مختصاتی ناورد است (معادله ۲-۲۵)، سرعت آن در چارچوب S' ، $k'c$ خواهد بود نه kc ، که در آن $k' \neq k$ است. همچنین با توجه تبدیلات لورنتس سرعت چارچوب S نسبت به S' برابر $-v$ است. بنابراین، سرعتهایی که ناظرهای ساکن در این دو چارچوب به هم نسبت می‌دهند (به عنوان سرعتهای اندازه‌گیری شده با ساعتها و خط‌کشهای واقعی)، به ترتیب، عبارت‌اند از v/k و $-v'/k$ ، یعنی نامساوی هستند. اما این مهم است (بند سوم از بخش ۲-۶). تنها راه چاره این است که فرض کنیم در میدان گرانش، خط‌کشها با همان ضریب k که ضریب کند شدن ساعتهاست، کوتاه می‌شوند. بدین ترتیب سرعتهای مختصاتی موضعی با سرعتهایی که عملاً اندازه‌گیری می‌شوند، برای تمام اثرها و به‌ویژه سرعت نور، برابر خواهند بود. باقی می‌ماند پیدا کردن معادلات میدان، که چگونگی تعیین میدان توسط چشمه (و در نتیجه ضریب k)، و همچنین پیدا کردن قوانین حرکت، که چگونگی حرکت بار آزمون در میدان را مشخص می‌کند. می‌توان فرض کرد که نور در فضای مختصاتی S در مسیر مستقیم منتشر می‌شود. این فرض مانع خم شدن نور — بنا به اصل هم‌ارزی — در فضای تعیین شده توسط خط‌کشهای واقعی نمی‌شود.^۱ چنین فضایی حالا خمیده است (بخش ۷-۲ را ببینید). نظریه گرانش نسبیت خاصی نوردشتروم، اساساً بر این مینا است.

با این همه "نسبیت خاصی" دانستن چنین نظریه‌هایی به تعبیری غیرطبیعی است. فضای مختصاتی S که مبنای نظریه فرض می‌شود، هیچ معنای فیزیکی ندارد و صرفاً یک نقشه است. توصیف طبیعی‌تر این نظریه‌ها آن است که (مانند نسبیت عام) نظریه‌های فضای خمیده به حساب

۱. به زبان فنی، این‌گونه نظریه‌ها به دلیل تطابق کندشدن ساعتها با کوتاه شدن میله‌ها، دارای یک فضا-زمان واقعی "تخت هم‌دیس"، \bar{S} هستند. بنابراین ژئودزیکهای نورگونه در \bar{S} با ژئودزیکهای نورگونه در S متناظرند. انتشار نور بر ژئودزیکهای نورگونه ظاهراً طبیعی‌ترین قانونی است که می‌توان فرض کرد، چرا که با اصل هم‌ارزی و قانون نسبیت خاصی معمولی در S سازگار است. حالا درک این نکته آسان است که چرا این نظریه‌ها برای انحراف نور در اطراف جرم متناهی، از بینهایت تا بینهایت، مقدار صفر را پیشگویی می‌کنند. علت آن است که در بینهایت S و \bar{S} یکی می‌شوند و مسیر در S مستقیم است.

آیند. اما در آن صورت این محدودیت که باید یک "نقشه" مختصاتی مینکوفسکیایی تخت با خواصی معین وجود داشته باشد، ساختگی به نظر می‌رسد و به همین دلیل است که در نسبیت عام چنین فرضی کنار گذاشته می‌شود.

۳-۵ جرم لختی نسبیتی

هر چند رهیافتهای زیادی به مکانیک جدید "برخوردهای نقطه‌ای" و ذره در میدانهای خارجی وجود دارد، نتیجه تمام این رهیافتهای یکسان است. اگر نظریه نیوتونی، که به خوبی از عهده آزمایشها برآمده، در "حد حرکت کند" برقرار باشد و از پیچیدگیهای غیرلازم اجتناب شود، آنگاه تنها یک مکانیک لورنتس-ناوردا وجود خواهد داشت. به علاوه، این مکانیک از زیبایی و ظرافت بسیاری برخوردار است و از هر نظریه جایگزینی که برایش تصور شود خیلی آسانتر است.

کار خود را با این فرض شروع می‌کنیم که شاید بتوان قانون پایستگی تکانه نیوتونی را به نحوی مناسب اصلاح کرد. چنانکه تکانه p ، مربوط به یک ذره، به صورت حاصلضرب جرم لختی در سرعت تعریف شود:

$$p = mv \quad (۱-۵)$$

جرم لختی، که نیازی نیست ناوردا فرض شود، با قانون زیر تعریف می‌شود: نسبتهای m را می‌توان با برخورد دادن مثلاً دو ذره و به کار بردن قانون پایستگی تکانه برای سرعتهای مشاهده شده مشخص کرد.

اکنون، برخورد بسیار آهسته دو ذره کروی مشابه A و A' را در نظر بگیرید که قبل از برخورد، به ترتیب در چارچوبهای لخت S و S' ساکن هستند. به دلیل تقارن، باید مؤلفه سرعت عمود (بر محورهای x) این دو کره پس از برخورد، در چارچوب خودشان، مساوی و مخالف هم باشد: بزرگی این مؤلفه را با u نشان می‌دهیم. بنابر ۲-۲۶، سرعت عمودی A' نسبت به S برابر خواهد بود با $u/\gamma(v)(1 + u'v/c^2)$ که u' سرعت قبل از برخورد ذره A' در چارچوب S' در امتداد x' است. بدین ترتیب، پایستگی تکانه عمودی در S چنین نوشته می‌شود

$$Mu = \frac{M'u}{\gamma(v)(1 + u'v/c^2)} \quad (۲-۵)$$

که در آن M و M' به ترتیب جرم قبل از برخورد A و A' است، که در S اندازه‌گیری می‌شوند، هستند. حالا u و u' را به سمت صفر میل دهید، یعنی برخورد را آهسته‌تر انجام دهید. در این صورت M به سمت M_0 ، جرم سکون یک ذره و M' به سمت m ، جرم ذره مشابه در سرعت v میل

می‌کند. اگر در این حالت حدی ۲-۵ را بنویسیم — طرفین را به u تقسیم کنیم — خواهیم داشت

$$m = \gamma(v)m_0 \quad (۳-۵)$$

در صورتی که تکانه پایسته باشد، این نتیجه اجتناب‌ناپذیر است. هرچند، باید نشان داده شود که با چنین تعریفی از جرم، پایستگی تکانه در کلیه برخوردها، یک شرط لورنتس-ناورد است. این کار را در بخش ۴-۵ انجام خواهیم داد. توجه کنید که، بنابر ۳-۵، جرم لختی ذره با افزایش v از مقدار حداقل m_0 در $v = 0$ تا بینهایت در $c \rightarrow v$ افزایش می‌یابد. این موضوع نباید خیلی شگفت‌آور باشد، چرا که لازم است فرایندی در طبیعت وجود داشته باشد تا از افزایش سرعت ذرات و رسیدن آنها به سرعت‌هایی بالاتر از سرعت نور جلوگیری کند.

در مورد ذرات شتابدار، باید به‌طور ضمنی اصلی را بپذیریم که به آن فرضیه جرم (مشابه فرضیه‌های قبلی در مورد ساعت و طول) می‌گویند؛ به این معنی که جرم از طریق ۳-۵، تنها به‌سرعت لحظه‌ای بستگی دارد و نه به شتاب.

معادله ۳-۵، نطفه تساوی مشهور جرم-انرژی اینشتین را در خود دارد. چرا که، اگر ۳-۵ را تا مرتبه دوم، با توجه به فرضیه دوجمله‌ای، بسط دهیم، خواهیم داشت

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx m_0 + \frac{(1/2)m_0 v^2}{c^2} \quad (۴-۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که جرم لختی ذره‌ای که حرکت می‌کند از جرم سکون آن به اندازه $1/2 m_0 v^2/c^2$ برابر انرژی جنبشی آن بیشتر است (با این فرض که عبارت نیوتونی برای انرژی جنبشی تقریباً درست باشد). در نتیجه، دیده می‌شود که انرژی در جرم سهیم است، آن‌هم به‌نحوی که با فرض کلی اینشتین در مورد تساوی جرم-انرژی، بنابر رابطه

$$E = mc^2 \quad (۵-۵)$$

مطابقت دارد. توجه کنید که اگر این رابطه درست باشد، آنگاه پایستگی انرژی معادل است با پایستگی جرم لختی. البته، هنوز باید نشان دهیم که (الف) پایستگی جرم لختی یک شرط لورنتس-ناورد است و (ب) این شرط با قانون پایستگی تکانه که پیشنهاد شد سازگار است.

۴-۵ صورتبندی چاربرداری مکانیک نسبیتی

سوالات مهمی چون لورنتس-ناوردایی و سازگاری قوانینی که در بخش قبل مطرح شد، با استفاده از حساب پر قدرت چاربرداری به بهترین وجهی قابل تشریح‌اند. روش ما مبتنی است بر حدس زدن

صورت چاربرداری قوانین نسبیتی، در هر حال، مانند اغلب موارد مشابه، در اعماق ذهن خود حدسهایی داریم یا نتایج را می‌دانیم. در مورد اخیر، نتایج آزمایش را که در بخش پیش به دست آوردیم، در اختیار داریم.

بی‌فایده نیست که بحث را با ذکر لم مهمی از نظریه بردارها شروع کنیم: اگر مؤلفه خاصی از یک چاربردار V ، در تمام چارچوبهای لخت صفر باشد، آنگاه خود بردار باید صفر باشد. زیرا اگر ابتدا فرض کنیم که یکی از مؤلفه‌های فضایی V همواره صفر است و سپس، بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه بخورد، آن مؤلفه را اولین مؤلفه فرض کنیم. در صورت وجود چارچوبی که مؤلفه y یا z در آن غیر صفر باشد می‌توان نشان داد با دورانی که محور مورد نظر را با محور x عوض می‌کند، غیر صفر کردن مؤلفه x امکان دارد و این خلاف فرض است؛ از طرف دیگر، اگر چارچوبی وجود داشته باشد که در آن مؤلفه زمانی V غیر صفر باشد، با تبدیل لورنتسی از نوع ۲-۷ می‌توان یک مؤلفه x غیر صفر تولید کرد که خلاف فرض است. اکنون فرض کنید که مؤلفه زمانی V همواره صفر است. آنگاه در صورت وجود چارچوبی که در آن یکی از مؤلفه‌های فضایی غیر صفر باشد، بدون آنکه کلیت مسئله از بین برود، این مؤلفه را اولین مؤلفه می‌گیریم، و تبدیل لورنتس را به‌کار می‌بریم: حال مؤلفه چهارم غیر صفری پدید می‌آید که فرض را نقض می‌کند. بدین ترتیب لم مورد نظر که آن را لم مؤلفه صفر می‌نامیم اثبات می‌شود.

حالا فرض می‌کنیم که به هر ذره یک مقدار زنده‌ای وابسته است که مشخصه حالت داخلی آن ذره است، این مقدار زنده‌ای را جرم سکون (یا ویژه جرم) m_0 می‌نامیم. (قوانینی که برای جرم سکون فرض می‌شود، باعث خواهد شد که این مقدار زنده‌ای با جرم نیوتونی که ذره به‌هنگام حرکت کند از خود نشان می‌دهد یکسان باشد.) در مرحله بعد، مشابه با تکانه نیوتونی \mathbf{u} ، چارنکانه

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{U} = m_0 \gamma(u)(\mathbf{u}, 1) = (\mathbf{p}, m) \quad (6-5)$$

را تعریف می‌کنیم که در آن \mathbf{U} چار سرعت ۴-۱۰ ذره است و \mathbf{p} و m در همین معادله تعریف شده‌اند، یعنی

$$m = \gamma(u)m_0 \quad (7-5)$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (8-5)$$

این کمیتها را به ترتیب جرم (لختی) نسبیتی و تکانه نسبیتی می‌نامیم. در اینجا فرض می‌کنیم که $u < c$ و $m_0 \neq 0$. هر چند، همان‌طور که در بخش ۵-۱۲ با جزئیات نشان خواهیم داد، وارد کردن ذراتی با جرم سکون صفر که با سرعت c حرکت می‌کنند—مثلاً فوتونها—که دارای m و \mathbf{p} متناهی نیستند—در نظریه امکانپذیر است. بیشتر مطالبی را که در مورد ذرات معمولی اثبات می‌کنیم، می‌توان در مورد ذراتی هم که جرم سکونشان صفر است اثبات کرد.

در هر برخوردی که بین دو ذره با چارتکانه P_1 و P_2 قبل از برخورد، و P_3 و P_4 بعد از برخورد انجام گیرد، پایستگی چارتکانه

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad (۹-۵)$$

بهوضوح یک شرط لورنتس-ناورد است. به عبارت دیگر به دلیل ۵-۶، قوانین پایستگی جداگانه زیر را خواهیم داشت:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (۱۰-۵)$$

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \quad (۱۱-۵)$$

(این معادلات را، بهوضوح، می توان به برخوردهایی تعمیم داد که در آنها بیش از دو ذره شرکت می کنند، یا در آنها ذراتی کمتری یا بیشتری ذراتی غیر از آنچه وارد برخورد شده اند، خارج شوند.) به علاوه، اعتبار ۵-۱۰ در همه چارچوبها، اعتبار ۵-۱۱ را در تمام چارچوبها ایجاب می کند و برعکس؛ این نتیجه را می توان فوراً از به کار بردن "لم مؤلفه صفر" در مورد بردار $P_1 + P_2 - P_3 - P_4$ به دست آورد.

در بخش قبل اثبات کردیم که اگر تکانه ای به صورت mu پایسته باشد، آنگاه جرم m باید به شکل ۵-۷ باشد، یعنی تکانه باید تکانه "نسبیتی" باشد که در ۵-۸ تعریف شده است. در این بخش نشان دادیم که پایستگی تکانه و جرم نسبیتی در کنار هم قانونی لورنتس-ناوردا پدید می آورند، ۵-۹، و وجود یکی از این دو مستلزم وجود دیگری است. و سرانجام، نشان دادیم که در حرکت های کند m به m_0 و p به mu_0 تبدیل می شود. بنابراین، هرگاه، چارچوبهایی وجود داشته باشند که در آنها تمام حرکات مربوط به یک برخورد معین کند باشد، آنگاه در چنین چارچوبهایی قانون پایستگی تکانه نسبیتی ۵-۱۰ به مشابه نیوتونی خود تبدیل خواهد شد و همین طور ۵-۱۱. (این رابطه، یکسانی m_0 را با جرم نیوتونی نشان می دهد.) در زمانی که مکانیک جدید بنا می شد، در هیچ موردی جز مورد ذکر شده، هیچ گونه سابقه ای وجود نداشت. ناچار صورتبندی نظریه، پذیرش عام ۵-۱۰ را به عنوان اصل، همراه با نتیجه اش ۵-۱۱، قویاً ایجاب می کرد (یا به عکس)، یعنی پذیرش ۵-۹ را که معادل بیان قبلی است. این موضوع با آزمایشهایی که بعدها انجام شد به طور کامل به تأیید رسید و هم اکنون مبنای مکانیک نسبیتی است.

از رابطه ۵-۶ دو عبارت معادل برای مجذور نرم P به دست می آوریم

$$P^2 = c^2 m_0^2 = c^2 m^2 - p^2 \quad (۱۲-۵)$$

که از آنها می‌توان رابطه مهم زیر را به دست آورد

$$p^2 = c^2(m^2 - m_0^2) \quad (۱۳-۵)$$

علاوه بر این، عبارتهای زیر را در مورد ضرب زردهای دو چارتکانه P_1 و P_2 ، مربوط به ذراتی که با سرعت نسبی v حرکت می‌کنند، به دست می‌آوریم

$$P_1 \cdot P_2 = c^2 m_{01} m_{02} = c^2 m_1 m_2 \gamma(v) \quad (۱۴-۵)$$

که در آنها m_{01} جرم سکون ذره اول، و m_2 جرم ذره دوم در چارچوب سکون ذره اول است. برای پیدا کردن عبارتهای بالا، ابتدا با استفاده از ۶-۵، حاصلضرب $P_1 \cdot P_2$ را در چارچوب سکون هر یک از ذرات پیدا می‌کنیم. (همان‌طور که ۴۴-۵ باز هم صادق خواهد داد، حتی اگر ذره فوتون شد رابطه ۱۴-۵ باز هم صادق خواهد بود. اگر هر دو ذره فوتون باشند، آنگاه ۱۴-۵ نامعین می‌شود و حاصلضرب از رابطه ۴۵-۵ به دست می‌آید.)

سرانجام، برخورد کشسان بین دو ذره را در نظر بگیرید؛ منظور از برخورد کشسان، برخوردی است که در آن جرم سکون هر ذره تغییر نکند. اگر تکانه‌های قبل از برخورد را با \mathbf{P} و \mathbf{Q} و تکانه‌های بعد از برخورد را با \mathbf{P}' و \mathbf{Q}' نشان دهیم، خواهیم داشت $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{P}' + \mathbf{Q}'$ ، که پس از مجذور کردن به $P^2 + Q^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P'^2 + Q'^2 + 2\mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q}'$ تبدیل می‌شود. اما بنا به فرض، $P^2 = P'^2$ و $Q^2 = Q'^2$. نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q}' \quad (۱۵-۵)$$

این قضیه مفید را لم برخورد کشسان می‌نامیم. (حتی اگر یکی از "ذرات" یا هر دو "ذره" فوتون باشند، باز این رابطه صادق خواهد بود؛ جرم سکون فوتون بعد از برخورد تغییر نمی‌کند و همواره صفر است.) بنابراین ۱۴-۵، دیده می‌شود، معادله ۱۵-۵ به این معنی است که سرعتهای نسبی ذرات قبل و بعد از برخورد کشسان برابر است. از این دیدگاه لم برخورد کشسان در نظریه نیوتون هم صادق است.

۵-۵ نکته‌ای در مورد چاربردارهای گالیله‌ای

در مقایسه با چاربردارهای مینکوفسکیایی، می‌توان چاربردارهای "گالیله" را بردارهایی تعریف کرد که تحت تبدیلات عام گالیله مانند $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ تبدیل می‌شوند (منظور از تبدیلات گالیله، تبدیلات ۱-۱ است همراه با دورانهای فضایی و انتقالهای فضایی و زمانی). صفر بودن مؤلفه‌های فضایی یک چاربردار گالیله‌ای در تمام چارچوبهای لخت، سبب می‌شود که مؤلفه زمانی آن هم

صفر باشد، چرا که در غیر این صورت می‌توان با یک تبدیل گالیله‌ای، در چارچوبی خاص مؤلفه فضایی غیرصفر به وجود آورد. واضح است که $(\mathbf{u}, 1)$ چاربرداری گالیله‌ای است (چاربردار نمونه را در کمیت نرده‌ای $m_0/\Delta t$ ضرب کنید و از حاصل حد بگیرید)، و بنابراین، همان‌طور که در حالت نسبیستی داشتیم، پایستگی تکانه نیوتونی $m_0 \mathbf{u}$ تحت تبدیلات گالیله، مستلزم پایستگی جرم نیوتونی m_0 است. اما عکس قضیه صحیح نیست!

۵-۶ هم‌ارزی جرم و انرژی

جرم نیوتونی را اغلب به شکل مبهمی "مقدار ماده" تصور می‌کردند، و در نتیجه پایستگی جرم با پایستگی ماده یکسان گرفته می‌شد. اما پایستگی جرم نسبیستی، ۵-۱۱، پدیده کاملاً متفاوتی را بیان می‌کند. از آنجا که جرم نسبیستی وابسته به سرعت است، پایستگی آن بیشتر شبیه پایستگی کلاسیک انرژی جنبشی در برخوردهای کاملاً کشسان است، با این تفاوت که پایستگی جرم نسبیستی در تمام برخوردها مفروض گرفته می‌شود. بنابراین، مستقل از مطالبی که در بخش ۵-۳ گفته شد، می‌توان از یک دیدگاه صرفاً صوری، رابطه ۵-۱۱ را بیان‌کننده پایستگی انرژی کل دانست و ضمناً فرض کرد که انرژی کل هر ذره ضربی است از جرم لختی آن. اینکه این ضرب c^2 است از رابطه ۵-۴ معلوم می‌شود.

در واقع، در سراسر فیزیک نسبیستی، به شواهدی برمی‌خوریم که هم‌ارزی جرم و انرژی را براساس رابطه زیر نشان می‌دهند

$$E = mc^2 \quad (5-16)$$

رابطه ۵-۴ به ما نشان داد که انرژی جنبشی در جرم کل ذره (حداقل، در پایین‌ترین مرتبه) سهیم است. پس هر انرژی دارای جرم است، چرا که هر انرژی قابل تبدیل به انرژی جنبشی است. فرض کنید که مثلاً دو ذره در دمای اتاق برخوردی ناکشسان می‌کنند و یک دوتایی ساکن تشکیل می‌دهند. این دوتایی، ΔE واحد انرژی گرمایی از دست می‌دهد و به دمای اتاق می‌رسد. بنابر پایستگی انرژی، ΔE برابر انرژی جنبشی اولیه ذرات است؛ اما از طرفی بنابر پایستگی جرم، درست بعد از برخورد، جرم دوتایی به اندازه $\Delta E/c^2$ از جرم سکون آن در دمای اتاق بیشتر است. در نتیجه، انرژی گرمایی هم طبق رابطه ۵-۱۶ در جرم سهیم است.

در بخش ۵-۱۰ خواهیم دید که کار انجام شده توسط یک نیروی نسبیستی بر روی یک ذره نیز دقیقاً طبق رابطه ۵-۱۶ در جرم ذره سهیم می‌شود. شواهد دیگر را در نظریه ماکسول می‌یابیم: مثلاً چگالی انرژی کلین $(e^2 + h^2)/4\pi$ و چگالی تکانه تامسون $e \times \mathbf{h}/4\pi c$ ، در مورد تابش (وقتی که \mathbf{e} و \mathbf{h} برابر و متعامدند) به $e^2/4\pi$ و $e^2/4\pi c$ تبدیل می‌شوند، به نحوی که تکانه = (سرعت) $\times (c^2/انرژی)$. حتی نسبیت عام هم از این هم‌ارزی حمایت می‌کند

(بخش ۷-۸ را ببینید). نتیجه نهایی این است که شرط لورنتس-ناوردایی، تمام قوانین پایستگی ممکن را به شدت محدود می‌کند و اساساً تنها یک کمیت پایسته وابسته به سرعت غیرجهتی (آنطور که انرژی باید باشد) می‌تواند وجود داشته باشد که m است؛ همچنین تنها یک کمیت جهتی پایسته وابسته به سرعت می‌تواند باشد، که آن هم چنانکه دیدیم mu است؛ این دو کمیت یا هر دو پایسته‌اند یا هیچ‌کدام.

شواهد نظری که به هنگام پیشنهاد فرمول $E = mc^2$ در دست اینشتین بود، بر سهیم بودن انرژی در جرم دلالت داشت (مانند مثالی که در مورد انرژی جنبشی داشتیم). برابر نهادن تمام جرم با انرژی کاری بود که نوعی اعتقاد زیباشناختی طلب می‌کرد که آن هم خصوصیت بارز اینشتین بود. یکی از مهمترین خواص انرژی تبدیل‌پذیری آن به انواع مختلف انرژی است و در رابطه ۵-۱۶ این ادعا به طور ضمنی نهفته است که تمام جرم یک ذره می‌تواند به انرژی قابل استفاده تبدیل شود. اگر ذرات بنیادی فناپذیر بودند سازگاری کامل با نسبیت خاص وجود داشت. در این صورت انرژی صرفاً در جرم سهیم می‌بود و انرژی قابل استفاده یک ذره مرکب عبارت بود از $c^2(m - q)$ ، که q جرم سکون کل ذرات بنیادی تشکیل‌دهنده ذره مرکب است. در دستگاه‌های آزاد ذرات، هر یک از مجموعه‌های $\sum c^2 m$ ، $\sum c^2 q$ ، $\sum c^2(m - q)$ به طور جداگانه پایسته بودند، اما تنها جمع آخری را می‌شد انرژی نامید. فرض جسورانه ۵-۱۶ اخیراً تأیید تجربی زیادی کسب کرده است، مخصوصاً باید به مواردی چون مشاهده تجربی "نابودی زوج" که طی آن یک ذره بنیادی و پادذره آن یکدیگر را نابود و به مقدار معادل انرژی تشعشعی آزاد می‌کنند؛ و به واپاشی خودبه‌خودی نرونهاي خنثی که محصول واپاشی زوجهای فوتون است؛ و به برخوردهایی اشاره کرد که در آنها ذراتی بنیادی غیر از آنچه وارد برخورد شده‌اند، با جرم سکون کل متفاوت، پدید می‌آیند. باید بین انرژی جنبشی T که به واسطه حرکت ذره بدان تعلق گرفته است:

$$T = c^2(m - m_0) \quad (17-5)$$

و انرژی داخلی ذره $m_0 c^2$ فرق گذاشته شود. برای یک ذره "عادی"، این انرژی داخلی عظیم است: در هر گرم جرم 9×10^{20} ergs انرژی نهفته است، چیزی در حدود انرژی بمب هیروشیما (۲۰ کیلو تن). بخش بسیار کوچکی از این انرژی به حرکت گرمایی مولکولهای تشکیل‌دهنده ذره مربوط می‌شود و می‌توان آن را به صورت گرما آزاد کرد؛ بخشی در نیروهای چسبندگی بین مولکولی و بین اتمی قرار دارد که بعضی اوقات می‌توان در انفجارهای شیمیایی آن را آزاد کرد؛ بخش دیگر ممکن است در اتمهای برانگیخته باشد و به صورت تابش گسیل شود؛ مقدار بیشتری هم در پیوندهای هسته‌ای قرار دارد و گاهی می‌توان آن را آزاد کرد، چنانکه در بمب اتمی این کار را می‌کنیم. اما بخش بسیار بزرگ انرژی (حدود ۹۹٪) در جرم ذرات نهایی نهفته است و بیش از این چیزی نمی‌توان درباره‌اش گفت. با این حال، این بخش انرژی را هم در شرایط مناسب می‌توان آزاد ساخت، مثلاً

در شرایطی که ماده و پاد ماده یکدیگر را نابود می‌کنند. بدین ترتیب، در حالت کلی، جرم سکون پایسته نخواهد بود.

نوعی از انرژی که سهمی در جرم ندارد، انرژی پتانسیل وابسته به موقعیت است. در مکانیک کلاسیک، به ذره‌ای که در میدان الکترومغناطیسی (یا گرانشی) حرکت می‌کند غالباً انرژی پتانسیلی نسبت می‌دهند، به نحوی که مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل آن ثابت بماند. این یک روش مفید "دفترداری" است، اما پایستگی انرژی را می‌توان با قراردادن کسر انرژی معادل با انرژی جنبشی‌ای که ذره کسب می‌کند در حساب بدهکار میدان نیز حفظ کرد. در نسبیت، دلایل خوبی برای اتخاذ روش دوم داریم، هر چند روش اول هم گاهی می‌تواند مانند راهی میان‌بر مورد استفاده قرار گیرد: مقام "واقعی" بخشهای مختلف انرژی، دیگر صرفاً ناشی از قرارداد نیست، چرا که انرژی — همچون جرم — دارای گرانش است.

بنابر فرض اینستین، هر شکلی از انرژی دارای جرمی معادل است: (الف) اگر همهٔ جرمها گرانش ایجاد کنند و از آن اثر بپذیرند، باید انتظار داشته باشیم که حتی (انرژی) میدان الکترومغناطیسی هم جاذبهٔ گرانشی وارد کند، و برعکس، نور در اثر گرانش خم شود (این موضوع را قبلاً با استدلال دیگری پیشگویی کردیم). (ب) باید انتظار داشته باشیم که میدان گرانشی خود تولید گرانش کند. (ج) تابشی که خورشید در فضا می‌ریزد معادل است با بیش از چهار میلیون تن جرم در ثانیه! تابشی که جرم و سرعت دارد، باید تکانه هم داشته باشد؛ بنابراین، تابشی که از خورشید خارج می‌شود، سهمی (کوچک) در انحراف دم ستارگان دنباله‌دار به طرف دور شدن از خورشید دارد. (عامل مهمتر در این انحراف "بار خورشیدی" است). (د) موتور الکتریکی‌ای که (با باتری) در انتهای کلکی کار گذاشته شده است و توسط تسمه‌ای، چرخ طیار سنگینی را که در انتهای دیگر کلک قرار گرفته به حرکت درمی‌آورد، انرژی و در نتیجه جرم به چرخ طیار انتقال می‌دهد؛ و بنابر قانون پایستگی تکانه، کلک باید در جهت مخالف شتاب بگیرد. (ه) اجسام کشیده شده یا فشرده شده به واسطهٔ انرژی کشسانی ذخیره شده در آنها جرمشان (اندکی) بیشتر است. (و) جرم کل مؤلفه‌های جدا از هم یک هستهٔ اتمی پایدار همواره از جرم خود هسته بیشتر است، چون که برای شکستن هسته علیرغم مخالفت نیروهای بستگی هسته‌ای باید به هسته انرژی (یعنی جرم) داد. این دلیل پدیدهٔ مشهود "گاستی جرم" است. با این حال، اگر هسته‌ای به دور هستهٔ جدید شکسته شود، جرم آنها می‌تواند بیشتر یا کمتر از جرم هستهٔ اولیه باشد. (در مورد هستهٔ اتمهای سبک، معمولاً جرم هسته‌های جدید بیشتر است، حال آنکه در مورد اتمهای سنگین، هستهٔ اولیه جرم بیشتری دارد.) در مورد اول انرژی از طریق "شکافت" و در مورد دوم از طریق "همجوشی" رها می‌شود.

۷-۵ چارچوب مرکز تکانه

یک بار دیگر، بد نیست بحث خود را با لمی از نظریهٔ بردارها آغاز کنیم. در بخش ۴-۵ دیدیم که به ازای هر چاربردار زمان‌گونهٔ مفروض v ، در چارچوبی مانند S_0 وجود دارد که در آن مؤلفه‌های

بردار به شکل (V_1, V_2, V_3, V_4) درمی‌آیند. علاوه بر این، علامت مؤلفه چهارم ناورداست، چرا که V یا "به سمت" آینده مطلق است ($V_4 > 0$) یا گذشته مطلق ($V_4 < 0$). اگر W بردار زمان‌گونه دیگری باشد که با V "همسو" است (یعنی $V_4 W_4 > 0$)، آنگاه در S_0 خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |V + W|^2 &= c^2 (V_1 + W_1)^2 - W_2^2 - W_3^2 - W_4^2 \\ &= V^2 + W^2 + 2c^2 V_4 W_4 > 0 \end{aligned} \quad (18-5)$$

بنابراین مجموع دو بردار زمان‌گونه همسو بردار زمان‌گونه دیگری است که به‌وضوح با بردارهای اولیه همسو است. با تکرار استدلال، دیده می‌شود که این قضیه برای هر تعدادی از بردارهای زمان‌گونه همسو صادق است. این است لیم ما.

حال، در چارچوب S ، دستگاهی متناهی از ذرات را در نظر بگیرید که تحت تأثیر هیچ نیرویی غیر از برخوردهای متقابل نیستند. جرم کل این دستگاه \bar{m} ، تکانه کل آن \bar{p} ، و چارتکانه کل آن \bar{P} را به‌صورت مجموع کمیتهای متناظر ذرات منفرد تعریف می‌کنیم:

$$\bar{m} = \sum m, \quad \bar{p} = \sum p, \quad \bar{P} = \sum P = \sum (p, m) = (\bar{p}, \bar{m}) \quad (19-5)$$

(رابطه ۶-۵). بنا بر قوانین پایستگی، هر سه کمیت در طول زمان ثابت خواهند بود. ظاهراً کمیت \bar{P} که مجموع چاربردارهاست، خود باید چاربردار باشد. اما در اینجا نکته ظریفی وجود دارد. اگر همه ناظرها بر سر آنکه کدام بردارهای P سازنده مجموع $\sum P$ هستند توافق داشتند، آنگاه $\sum P$ آشکاراً یک بردار بود. اما هر ناظری این مجموع را در یک لحظه در چارچوب خودش تشکیل می‌دهد، که ممکن است باعث شود ناظرهای مختلف از P های مختلفی برای ساختن $\sum P$ استفاده کنند. برای اثبات اینکه، با توجه به نکته بالا، $\sum P$ باز هم یک بردار است، می‌توان از یک نمودار فضازمانی از نوع شکل ۱-۴ استفاده کرد؛ چشمپوشی از بعد z ، استدلال را روشنتر می‌کند بدون آنکه از اعتبار آن بکاهد. هر همزمانی در S با صفحه‌ای "افقی" مانند π در نمودار نشان داده می‌شود ولی همزمانی در چارچوب دیگری چون S' با صفحه‌ای "شیبدار" مثل π' در نمودار نمایش داده می‌شود. در S ، $\sum P$ روی صفحه‌هایی مانند π جمع زده می‌شود، و در S' روی صفحه‌هایی مانند π' . اما، نشان می‌دهیم که در S' ، مستقل از اینکه روی π یا π' جمع زده شود، همان $\sum P$ به‌دست می‌آید. یک حرکت (نگاشت) پیوسته از π' به π را در نظر بگیرید. همین‌طور که π' کج می‌شود، هر کدام از P های واقع بر آن ثابت می‌ماند (ذره‌ها میان برخوردها حرکت یکنواخت دارند) مگر آنکه π' برخوردی را بربود؛ اما در این مورد جمع جزئی $\sum P$ ، که در برخورد وارد می‌شود، بنا بر پایستگی تکانه، ثابت می‌ماند. بنابراین هر ناظر، بدون تأثیر بر مقدار مجموع تکانه‌ها، می‌تواند P های خود را روی همان صفحه π جمع بزند، پس \bar{P} واقعاً یک چاربردار است.

که در آن $u' = (0, u'_y, 0)$ ، و در ۳-۶ u اکنون برابر است با $(v, u'_y/\gamma, 0)$ (معادله ۲-۲۶). مساوی قرار دادن مؤلفه‌های z مربوط به ۳-۶ و ۱۰-۶، بنابر ۷-۲، نتیجه می‌دهد

$$e'_y - \frac{u'_y h'_y}{c} = \gamma \left(e_y + \frac{v h_y}{c} - \frac{u'_y h_y}{\gamma c} \right)$$

که با توجه به ۷-۶ می‌دهد $h'_y = h_y$ (تبدیل مربوط به مؤلفه x ۱۰-۶ معادله ۹-۶ را تجدید می‌کند؛ و به همین روش می‌توان ۸-۶ را دوباره به دست آورد). نتایج را جمع‌آوری می‌کنیم

$$e'_x = e_x, \quad e'_y = \gamma \left(e_y - \frac{v h_y}{c} \right), \quad e'_z = \gamma \left(e_z - \frac{v h_z}{c} \right) \quad (۱۱-۶)$$

$$h'_x = h_x, \quad h'_y = \gamma \left(h_y + \frac{v e_y}{c} \right), \quad h'_z = \gamma \left(h_z - \frac{v e_z}{c} \right) \quad (۱۲-۶)$$

برای نشان دادن سازگاری نتایج، اکنون لازم است تحقیق کنیم که با تبدیلات به دست آمده چارنیروی لورنتس ۳-۶ یک چاربردار است. با صورتبندی فعلی مسئله، این کار سر راست، اما پر زحمت است و بهتر است قبول کنیم که نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.

خواننده علاقه‌مند می‌تواند تحقیق کند که با توجه به معادلات ۱۱-۶ و ۱۲-۶ و طبق تعریف بخش ۴-۴، مؤلفه‌های e و h عملاً تشکیل یک چارتانسور پادوردای مرتبه دو می‌دهد:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & h_z & -h_y & -e_x/c \\ -h_z & 0 & h_x & -e_y/c \\ h_y & -h_x & 0 & -e_z/c \\ e_x/c & e_y/c & e_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۳-۶)$$

به این ترتیب، مناسبترین ابزار ریاضی برای الکترودینامیک نظری حساب چارتانسور است. با استفاده از این حساب می‌توان چهار معادله معمولی ماکسول را به صورت دو معادله تانسوری بر حسب "تانسور میدان $A_{\mu\nu}$ " نوشت و آنگاه نوردایی این معادلات تحت تبدیلات لورنتس بدیهی خواهد بود (پیوست ۲). این نوردایی را می‌توان با استفاده مستقیم از ۱۱-۶ و ۱۲-۶ با زحمت بسیار تحقیق کرد. این تحقیق مستقیم هیچ‌گونه دستاورد مفهومی ندارد. همچنین، با روشهای تانسوری می‌توان کاملاً به سهولت تحقیق کرد که چارنیروی لورنتس ۳-۶ در واقع چاربرداری است که از ضرب q/c در "حاصلضرب داخلی $A_{\mu\nu}$ " و U_μ به دست می‌آید.

هنوز هم، برای بسیاری از کاربردها معادلات ۱۱-۶ و ۱۲-۶، و حساب چاربرداری کاملاً مناسب است. مثلاً، تحقیق این نکته که عبارت زیر تحت تبدیلات عام لورنتس ناوردا هستند، با

استفاده مستقیم از این معادلات، مشکل نیست:

$$h^2 - e^2 \quad (\text{الف } ۱۴-۶)$$

$$e \cdot h \quad (\text{ب } ۱۴-۶)$$

این کمیتها بهوضوح تحت دوران و انتقال فضایی ناوردا هستند (به دلیل شکل سه برداریشان) و ناوردایی تحت انتقال زمانی هم بدیهی است؛ آنچه می ماند ناوردایی تحت تبدیل معیار لورنتس است که باید تحقیق شود. از دیدگاه فعلی ما، چندان واضح نیست که این دو الزاماً تنها ناوردهای میدان هستند، درحالی که نظریه تانسوری این را به آسانی نشان می دهد.

چیزی که در معادلات ۱۱-۶ و ۱۲-۶ بسیار واضح است، در هم آمیختن e و h تحت تبدیلات لورنتس است. مثلاً یک میدان " e خالص"، یا یک میدان " h خالص" در یک چارچوب، در چارچوب دیگر هم مؤلفه e و هم مؤلفه h خواهد داشت. (همان طور که اینشتین به درستی خاطر نشان کرد، آن میدان مغناطیسی که بار متحرکی را منحرف می کند — حتی اگر هیچ گونه میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، مثلاً در اطراف یک سیم حامل جریان — در چارچوب سکون بار به صورت میدان الکتریکی دیده می شود.) مسلماً، e یا h خالص وجود ندارد: میدان الکترومغناطیس عام را نمی توان با رفتن به یک چارچوب مناسب به یکی از این دو میدان تبدیل کرد، چرا که در آن صورت ناوردای $e \cdot h$ باید صفر شود.

از سوی دیگر، تحلیل ما نشان می دهد هر سه نیروی f (با منشأ الکتروستاتیکی یا غیر آن) که در چارچوبی مانند S مستقل از سرعت ذراتی است که بر آنها اثر می کند و جرم سکون آنها را تغییر نمی دهد، باید نیرویی از نوع لورنتسی باشد؛ و همچنین این نیرو در هر چارچوب دیگری چون S' به سرعت بستگی خواهد داشت — مگر اینکه بر حسب اتفاق میدان در S موازی با حرکت S' باشد. چرا که چار نیروی ۲-۶ در S را می توان با چار نیروی ۳-۶ در حالت خاص $qe = f$ و $h = 0$ یکی گرفت؛ و از آن پس ۳-۶ که یک چار بردار است، نیرو را در تمام چارچوبها خواهد داد. همان طور که از ۱۲-۶ برمی آید، این نیرو در S' دارای مؤلفه h خواهد بود مگر اینکه داشته باشیم $e_2 = e_3 = 0$ ؛ و این همان حالت استثنایی است که ذکر کردیم.

۲-۶ انحراف مغناطیسی ذرات باردار

ذره آزادی با جرم سکون m و بار q در میدان مغناطیسی خالص و یکنواخت h ، عمود بر خطوط نیرو، تزیق می شود؛ چه پیش می آید؟ پاسخ دقیق این سؤال در تحلیل مغناطیسی ذرات بنیادی در اتاقک حباب و همچنین طراحی شتابدهنده ها دارای اهمیت است. بنابر قانون نیروی لورنتس

$$\mathbf{f} = \frac{q\mathbf{u} \times \mathbf{h}}{c} \quad (۱۵-۶)$$

وارد می‌شود که بر سرعت \mathbf{u} عمود است. بنابراین، شتاب \mathbf{a} در امتداد \mathbf{f} (معادله ۳۷-۵) و در نتیجه عمود بر \mathbf{u} و \mathbf{h} است. بنابراین، (الف) حرکت در صفحه‌ای عمود بر \mathbf{h} انجام می‌شود و (ب) سرعت u ثابت است (چرا که $u \cdot d\mathbf{u}/dt = u \cdot du/dt = 0$).

به علاوه، از ۳۷-۵ داریم $a = quh/cm_0\gamma$. در نتیجه، انحراف زاویه‌ای در یکای زمان برابر است با

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{|d\mathbf{u}|}{udt} = \frac{a}{u} = \frac{qh}{cm_0\gamma} \quad (۱۶-۶)$$

و بدین ترتیب، ذره دایره‌ای به شعاع

$$r = \frac{u}{\omega} = \frac{cm_0 u \gamma}{qh} \quad (۱۷-۶)$$

را با سرعت زاویه‌ای ω طی خواهد کرد و بنابراین دوره تناوب آن برابر خواهد بود با

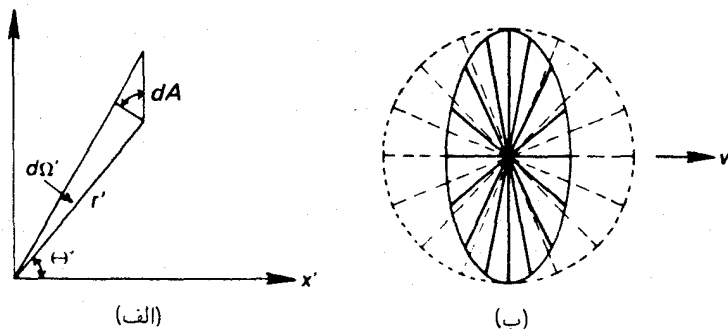
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi cm_0 \gamma}{qh} \quad (۱۸-۶)$$

رابطه مشابه در مکانیک کلاسیک فاقد γ و در نتیجه دوره تناوب مستقل از زمان است. در سرعت‌های بالا γ خود را نشان می‌دهد و همین امر، به عنوان مثال، تبدیل شتابدهنده سیکلوترون را به سنکروترون الزامی کرد: مدار بزرگتر، دوره تناوب بیشتر.

۳-۶ میدان حاصل از بار در حال حرکت یکنواخت

محاسبه میدان بار q که در حال حرکت یکنواخت است، برای نشان دادن قدرتی که نسبت خاص به نظریه الکترومغناطیس می‌دهد، مثال خوبی است. محاسبه با این روش متداول در نسبیت انجام می‌شود که ابتدا وضعیت را در چارچوبی که همه چیز در آن واضح است بررسی می‌کنیم و بعد نتایج را به یک چارچوب عام تبدیل می‌کنیم. در این مورد، در چارچوب سکون ذره S' ، همه چیز معلوم است و تنها با یک میدان کولنی به شکل زیر سروکار داریم

$$\mathbf{e}' = \left(q/r'^2 \right) (x', y', z'), \quad \mathbf{h}' = 0, \quad (r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (۱۹-۶)$$



شکل ۱-۶

فرض کرده‌ایم که ذره در مبدأ است. حالا به چارچوب S می‌رویم که در آن ذره با سرعت $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ در حال حرکت است. در S ، میدان را در لحظه $t = 0$ که ذره از مبدأ می‌گذرد حساب می‌کنیم. با توجه به ۱۲-۶ (با $h' = 0$)، معکوس ۱۱-۶ و ۷-۲ (با $t = 0$)، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= (v/c)(0, e_r, e_r), \quad \mathbf{e} = (e'_1, \gamma e'_r, \gamma e'_r) = (q\gamma/r'^2)(x, y, z) \\ r'^2 &= \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 r^2 - (\gamma^2 - 1)(y^2 + z^2) \\ &= \gamma^2 r^2 \left[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (20-6)$$

که در آن θ زاویه بین بردار $\mathbf{r} = (x, y, z)$ و محور x است. پس،

$$\mathbf{h} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \frac{q\mathbf{r}}{\gamma^2 r^3 \left[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta \right]^{3/2}} \quad (21-6)$$

جالب اینجاست که جهت میدان الکتریکی در $t = 0$ از نقطه‌ای که بار در این لحظه در آنجا قرار دارد به خارج است، گرچه (به علت متناهی بودن سرعت بخش هر اثر) این امر نمی‌تواند به علت بودن بار در آن نقطه باشد. توجه کنید که هم شدت میدان الکتریکی و هم شدت میدان مغناطیسی در هر جهت معینی مثل $1/r^2$ کاهش می‌یابند. وابستگی زاویه‌ای شدت میدان الکتریکی هم جالب توجه است: بیشترین مقدار در صفحه عمود بر \mathbf{v} است و کمترین مقدار در جلو و عقب آن.

طبق معمول می‌توان مدلی ساخت که در آن چگالی خطوط میدان نماینده شدت میدان باشد. یک قطعه پلکسی‌گلاس ساکن در S' در نظر بگیرید که خطوط نیروی همسانگرد q در S' روی آن "حک" شده‌اند. زاویه فضایی باریکه نازکی از خطوط در سطح مقطع dA از x در نقطه (x', y', z') برابر است با $dA x'/r'^2 = dA \cos \theta / r'^2$ [شکل ۱-۶ الف]. این قطعه در S با سرعت v حرکت می‌کند و همه مؤلفه‌های x به اندازه ضریب γ^{-1} فشرده می‌شوند؛

فضایی متناظر برابر است با $d\Omega = dAx/r^2$ ، که از آنجا با استفاده از ۶-۲۰ داریم

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{x'r^2}{xr'^2} = \frac{\gamma r^2}{r'^2} = \frac{1}{\gamma^2 [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (22-6)$$

از مقایسه با ۶-۲۱ برای میدان الکتریکی به دست می‌آوریم

$$e = \frac{qd\Omega'}{r'^2 d\Omega} = \frac{n}{d\Sigma}$$

که در آن " $n = qd\Omega'$ " تعداد خطوط نیروی حک شده در باریکه در S' است و $d\Sigma = r'^2 d\Omega$ سطح مقطع متعامد باریکه در S است. چون در این مدل تعداد خطوط حک شده در $d\Omega$ و در $d\Omega'$ یکسان است، پس می‌بینیم که چگالی این خطوط بیانگر شدت میدان الکتریکی در S و نیز در S' است. به عبارت دیگر، خطوط نیرو به‌مانند سیمهای صلب متصل به‌بار تبدیل می‌شوند! شکل ۶-۱۶ (ب) این امر را نشان می‌دهد.

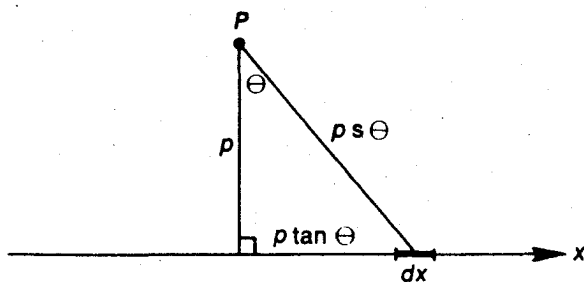
البته، این نتیجه صرفاً مبتنی بر قوانین الکتروستاتیک است و می‌توان آن را بدون استفاده صریح از نسبیت خاص به دست آورد. لورنتس که از همین طریق به این نتیجه رسیده بود، از آن برای تبیین انقباض طول اجسام مادی استفاده کرد: حالا که میدان الکترومغناطیسی بارهای بنیادی "منقبض" می‌شود، پس ماده هم باید بشود، اگر که از چنین بارهایی تشکیل شده باشد. (برهان لورنتس نمی‌توانست وجود نیروهای هسته‌ای و غیره را در نظر بگیرد.)

برای محاسبه میدان یک بار شتابدار نمی‌توان روش ابتدایی بالا را به‌کار برد — مگر اینکه بخواهیم به جزئیات بیشتر و با فرضهای بیشتر بپردازیم. روش متعارف از چارناتسویل استفاده می‌کند، که در نظریه کامل الکترومغناطیس بسیار اهمیت دارد، ولی از بحث ما فراتر می‌رود.

۶-۴ میدان یک جریان مستقیم بینهایت

به عنوان آخرین مثال از استدلال نسبیتی، در نظریه الکترومغناطیس، میدان یک جریان مستقیم بینهایت را به دست می‌آوریم. از محاسبه میدان یک توزیع بار روی خط مستقیم بینهایت و ایستا، با چگالی خطی یکنواخت σ (شکل ۶-۲) شروع می‌کنیم. چون بار ایستاست، میدان مغناطیسی نخواهیم داشت. بنابه تقارن، میدان الکتریکی در هر نقطه P در امتداد عمود بر خط از نقطه P خواهد بود؛ در نتیجه کافی است مؤلفه‌های میدان در این راستا در نظر گرفته شوند. از شکل برمی‌آید که سهمی که جزء خطی dx در آن راستا در میدان الکتریکی دارد برابر است با

$$de = \frac{\sigma_0 dx}{(ps \theta)^2} \cos \theta \quad (23-6)$$



شکل ۲-۶

که در آن θ زاویه‌ای است که جزء خطی از P با عمود p می‌سازد. چون $x = p \tan \theta$ پس $dx = ps^2 \theta d\theta$ و بنابراین از ۲۳-۶ داریم

$$e = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sigma_0}{p} \cos \theta d\theta = \frac{2\sigma_0}{p} \quad (24-6)$$

حالا فرض کنید بار خطی بینهایت با ویژه چگالی خطی σ_0 با سرعت v نسبت به چارچوب S حرکت می‌کند. به علت انقباض طول، چگالی خطی آن σ در S برابر $\gamma\sigma_0$ است، و متناظر است با جریان $i = \gamma\sigma_0 v$. گیریم بار خطی روی محور x' از چارچوب S' باشد. آنگاه بنابر محاسبه بالا، تنها مؤلفه غیر صفر میدان در نقطه نوعی $P(0, p, 0)$ در S' برابر است با

$$e'_y = \frac{2\sigma_0}{p} \quad (25-6)$$

با استفاده از روابط معکوس ۱۱-۶ و ۱۲-۶، که از تبدیل نمادهای پریم دار و بی‌پریم و نیز نوشتن $-v$ به جای v به دست می‌آید، این میدان را به چارچوب S تبدیل می‌کنیم، داریم

$$e_1 = 0, \quad e_2 = \frac{2\gamma\sigma_0}{p} = \frac{2\sigma}{p}, \quad e_3 = 0$$

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \frac{2\gamma\sigma_0 v}{pc} = \frac{2i}{pc} \quad (26-6)$$

توجه کنید که شدت میدان مغناطیسی تنها v/c برابر میدان الکتریکی است؛ اثر آن روی باری که با سرعت u حرکت می‌کند (معادله ۱-۶) باز هم به اندازه ضریبی از مرتبه u/c کمتر می‌شود. به علاوه، در یک جریان آزمایشگاهی حدود چند آمپر، v تنها چند میلی‌متر بر ثانیه است. همان‌گونه که شروین^۱ گفته است، به سختی می‌توان پذیرفت که این میدان مغناطیسی، که یک ضریب c^2 در

مخرج دارد، همان "نیروی کار" الکتریکی مسؤول کارکرد موتورها و ژنراتورهاست. از طرف دیگر با در نظر گرفتن اینکه این نیرو ناشی از تبدیل یک میدان صرفاً الکتریکی به چارچوب دیگری با یک سرعت کم نسبت به چارچوب اولیه است، فرنج^۱ متذکر شده است که: چه کسی می‌گوید نسبت تنها در سرعت‌های قابل قیاس با سرعت نور مهم می‌شود. علت این است که هر جریان معمولی مقدار زیادی بار را به حرکت درمی‌آورد: حدوداً در هر سانتی‌متر مکعب سیم 10^{23} الکترون آزاد وجود دارد. اگر این نیروی الکتریکی خنثی نمی‌شد مقدارش وحشتناک می‌شد - از مرتبه بزرگی دو میلیون تن وزن روی یک سانتی‌متر مکعب دیگری در فاصله ۱۰ کیلومتری.

البته، این نیرو در یک جریان "واقعی" داخل یک سیم خنثی می‌شود. یک چنین جریانی متناظر است با دو توزیع بار خطی برهم نهاده شده، یکی در حرکت و دیگری ساکن. یونهای مثبت فلزی ساکن اند درحالی‌که الکترونها آزاد حرکت می‌کنند، مثلاً با سرعت v . - قبل از روشن کردن جریان، یونها به مانند یک ردیف صندلی‌اند که الکترونها روی آنها می‌نشینند. بعد از شروع جریان، گویی که الکترونها "صندلی بازی" می‌کنند و به‌طور هماهنگ هر الکترون سعی می‌کند یک صندلی خالی برای نشستن بیابد و هیچ تجمع الکترونها پیش نمی‌آید. به این معنی که الکترونها در حرکت به همان اندازه از یکدیگر دورند که یونهای ساکن هستند. پس چگالی خطی یونها و الکترونها برابر است و در دستگاه آزمایشگاه مخالف، مثلاً $\pm\sigma$ ، و جریان برابر است با $i = \sigma v$. همان‌گونه که از ۲۶-۶ دیده می‌شود میدانهای الکتریکی دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند، در صورتی که میدان مغناطیسی مانند قبل با $2i/pc$ داده می‌شود.

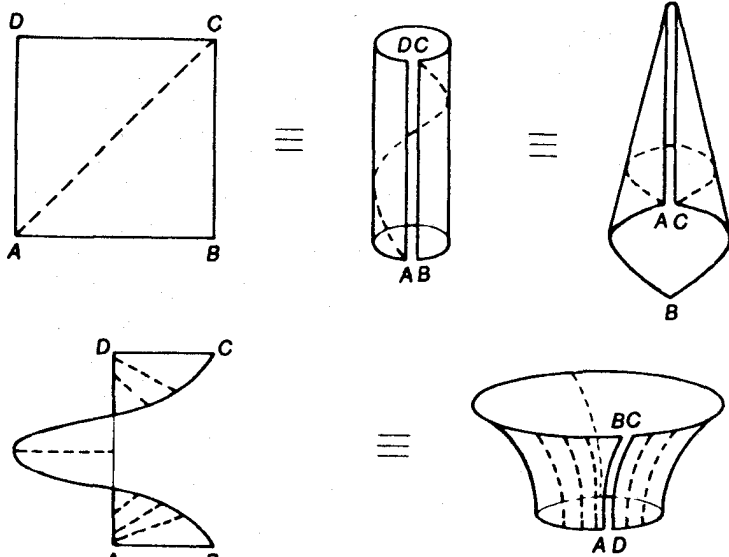
اکنون بار آزمونی را در نظر بگیرید که با سرعت v به موازات سیم حرکت می‌کند. به این بار نیرویی در جهت $\mathbf{U} \times \mathbf{h}$ وارد می‌شود، یعنی به‌طور شعاعی به طرف یا دور از سیم. این بار در چارچوب سکون، جایی که تنها میدان e می‌تواند اثر بگذارد، دو بار خطی متحرک مثبت و منفی می‌بیند که شدت خطی آنها، به‌طور عددی، کمی متفاوت است. به علت انقباض طول هرگاه شدتهای خطی در دستگاه آزمایشگاه مساوی و خلاف جهت باشند، در دستگاه دیگری که به موازات سیم حرکت می‌کند نمی‌تواند چنین بماند. همین اختلاف است که میدان e خالصی پدید می‌آورد که باعث شتاب بار در دستگاه سکونش می‌شود. این به نوعی صریح‌ترین نمود انقباض طول است - انقباضی که ناشی از اختلاف سرعتی است در حدود چند میلی‌متر در ثانیه!



مفاهیم اساسی نسبت عام

۱-۷ سطوح خمیده

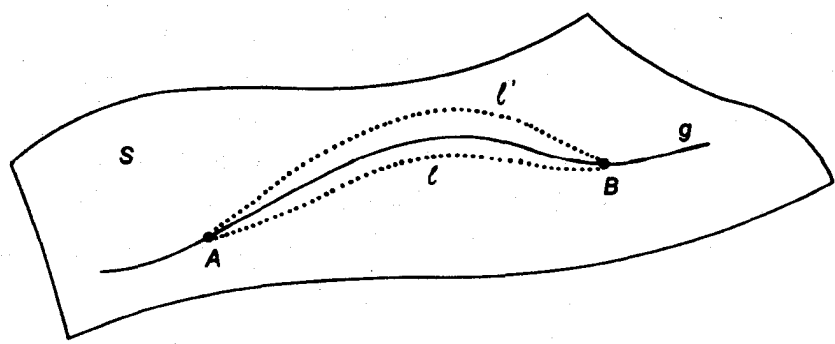
یکی از انقلابی‌ترین خواص نسبت عام استفادهٔ اصولی آن از فضای خمیده (در واقع فضا زمان خمیده) است. گرچه هر کس به‌طور شهودی می‌داند که سطح خمیده چیست، یا بهتر بگوییم چگونه به‌نظر می‌آید، با وجود این اکثر مردم هنگام تعمیم این مفهوم به سه‌بعد یا بیشتر سردرگم می‌شوند. علت عمدهٔ این امر این است که تجسم یک فضای چهاربعدی که یک فضای سه‌بعدی در آن خمیده به‌نظر بیاید برای آنها ممکن نیست. پس ما ابتدا سعی می‌کنیم معنی ذاتی خمیدگی سطح را دریابیم، یعنی خمیدگی سطح بدون ارجاع به فضایی که آن را در برمی‌گیرد. خواص ذاتی سطح خواصی هستند که تنها به‌رابطهٔ اندازه‌ها در سطح بستگی دارند، یعنی خواصی که یک نژاد هوشمند از موجودات دوبعدی که حرکت و استعداد دید و اندازه‌گیری آنها کاملاً محدود به سطح است، می‌تواند تعیین کند. مثلاً یک صفحهٔ کاغذ مسطح و صفحهٔ دیگری که تقریباً به‌شکل استوانه یا تقریباً به‌شکل یک مخروط خمیده شده است با یکدیگر هم‌ارزند (شکل ۱-۷). (اگر استوانه یا مخروط بسته شده باشند، این سطوح هنوز به‌طور "موضعی" هم‌ارزند ولی نه به‌طور "سراسری"). به‌همین طریق یک مارپیچ‌وار (پلکان مارپیچ) با یک زنجیروار تقریباً بسته هم‌ارز است (زنجیروار سطحی است که از چرخش شکل یک زنجیر که آزادانه آویخته شده باشد، تولید می‌شود)، و نظایر



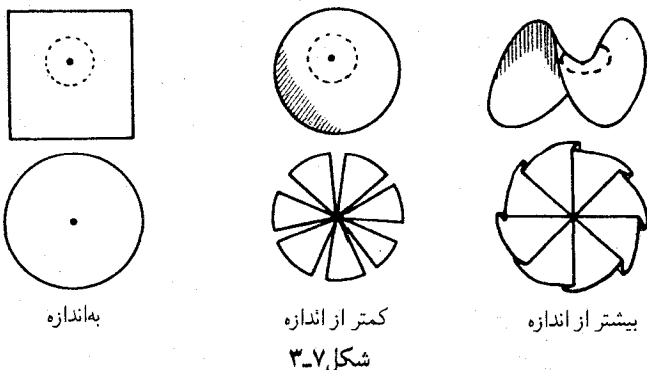
شکل ۱-۷

آن. خواص ذاتی را می‌توان آن خواصی تصور کرد که وقتی سطح را بدون کشش یا پارگی خم کنیم حفظ شوند.

یک خاصیت ذاتی مهم سطح را در مجموعه خطوط ژئودزیک آن می‌توان دید. اینها خطوطی هستند که فاصله هر دو نقطه روی آنها کمترین مقدار را دارد. به شرط آنکه آن دو نقطه "به اندازه کافی" به یکدیگر نزدیک باشند. (مثل دایره عظیمه بر روی کره، که البته برای مسیرهای طولانی‌تر از نصف محیط دایره، دیگر دارای حداقل طول نیستند). مثلاً اگر در شکل ۲-۷، A و B دو نقطه به اندازه کافی نزدیک به یکدیگر روی ژئودزیک g از سطح S باشند، طول تمام خطوط مجاورتی که A و B را به یکدیگر وصل می‌کنند (مثل l و l') بزرگتر از آن قسمت g که بین A و B است



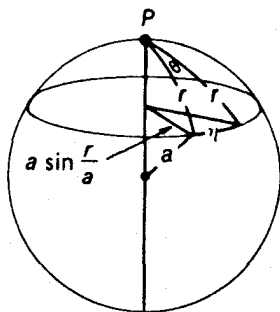
شکل ۲-۷



خواهد بود. ژئودزیکها چون تنها به اندازه فاصله‌ها در سطح بستگی دارند، ذاتی‌اند، یعنی اگر سطح خم شود همچنان، ژئودزیک می‌مانند (خطوط بریده در شکل ۱-۷).

حال ببینیم موجودات دوبعدی به چه طریق خمیدگی یا خمش جهان خود را کشف می‌کنند. بر طبق اصل فرما می‌توان فرض کرد که نور در این جهان در امتداد ژئودزیکها سیر می‌کند. پس جهان هر ناظری در نظرش مسطح (تخت) می‌آید و قابل تمایز از صفحه مماس بر آن نیست. بنابراین ناظر باید کاری بیش از دیدن انجام دهد، او باید اندازه بگیرد. صفحه، کره، و زین از جمله مثالهای بارزی هستند که بدانها می‌پردازیم. بر روی هر کدام دایره ژئودزیک کوچکی به شعاع r رسم می‌کنیم، منظور از این دایره ژئودزیک مکان هندسی نقطاتی است که بتوان آنها را توسط یک ژئودزیک به طول r به مرکزی متصل کرد (شکل ۳-۷). عملاً این کار را می‌توان توسط یک طناب کشیده که یک سر آن در مرکز دایره محکم شده باشد، انجام داد. سپس می‌توانیم (یا انسانهای تخت می‌توانند)، C ، محیط، و A ، مساحت، این دایره‌ها را اندازه بگیریم (یا بگیرند). در صفحه مقادیر معمولی "اقلیدسی" $C = 2\pi r$ و $A = \pi r^2$ را به دست می‌آوریم. در صورتی که برای A و C بر روی کره مقادیری کمتر و بر روی زین مقادیری بیشتر به دست می‌آوریم. این موضوع مثلاً هنگامی آشکار می‌شود که این دایره‌ها را ببریم و سعی کنیم آنها را بر روی صفحه‌ای تخت کنیم. کلاهک کروی پاره می‌شود (چون سطح آن بسیار کم است) در حالی که کلاهک زینی چین می‌خورد (چون سطح آن بسیار زیاد است). در شکل ۴-۷ برای به دست آوردن یک نتیجه کمی، دو ژئودزیک رسم کرده‌ایم که در قطب شمال کره‌ای به شعاع a با هم زاویه θ می‌سازند. بنابر تعریف به چنین کره‌ای خمشی برابر با $K = 1/a^2$ نسبت می‌دهیم. فرض کنید فاصله عمودی بین ژئودزیکها در نقطاتی به فاصله r از P برابر η باشد. با استفاده از هندسه مقدماتی و رشته تیلور برای سینوس داریم

$$\eta = \theta \left(a \sin \frac{r}{a} \right) = \theta \left(r - \frac{r^3}{6a^2} + \dots \right) = \theta \left(r - \frac{1}{6} K r^3 + \dots \right) \quad (1-7)$$



شکل ۴-۷

و در نتیجه

$$C = 2\pi \left(r - \frac{1}{6}Kr^3 + \dots \right), \quad A = \pi \left(r^2 - \frac{1}{12}Kr^4 + \dots \right) \quad (۲-۷)$$

در اینجا برای به دست آوردن $A = \int C dr$ از رابطه استفاده کرده‌ایم. این بسطها دو رابطه مختلف زیر را برای K به دست می‌دهند

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - C}{r^3} = \frac{12}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - A}{r^4} \quad (۳-۷)$$

می‌توان نشان داد که فرمول ۱-۷ تا مرتبه نشان داده شده برای هر سطحی که به اندازه کافی مشتق پذیر باشد صادق است. به عبارت دیگر گسترش ژئودزیکهای همسایه‌ای که در راستاهای مختلف از P رسم شوند، تا مرتبه سوم r ، همواره به صورت ۱-۷ است که در آن K عددی است که تنها به P بستگی دارد. این عدد خمش (گاوسی) سطح در نقطه P نامیده می‌شود. بنابراین فرمولهای ۲-۷ و ۳-۷ به طور کاملاً عام به کار می‌آیند. پس خمش زین منفی است.

همچنین می‌توان نشان داد هر سطحی که در همه جای آن $K = 0$ است، حتماً به طور ذاتی صفحه است و هر سطحی که در هر نقطه آن $K = 1/a^2$ است، ذاتاً کره‌ای است به شعاع a . (مگر به دلیل "همانیهای توپولوژیکی" احتمالی، بخش ۵-۹ را ببینید.)

۲-۷ فضاهای خمیده با بعد بیشتر

اندیشه‌های مربوط به هندسه ذاتی سطوح را می‌توان به فضاهایی با بعد بیشتر مثل فضای سه بعدی خودمان، بسط داد. از جمله، ژئودزیکها در هر بعدی درست مانند حالت دوبعدی تعریف می‌شوند. از آنجا می‌توان دو قضیه مهم برای فضاهایی که به اندازه کافی "خوشرفتار" هستند اثبات کرد: (الف) برای هر نقطه و هر راستای مفروض، ژئودزیک یکتایی وجود دارد، و (ب) در همسایگی

یک نقطه مفروض P که به اندازه کافی کوچک باشد، می توان هر نقطه را توسط ژئودزیک یکتایی به نقطه P وصل کرد.

ساختن کره های ژئودزیک به شعاع r (به عوض دایره هایی به این شعاع) و مقایسه اندازه سطح یا حجم آنها با مقادیر اقلیدسی می تواند تعمیمی برای خمیدگی از دوطرفه به سه بعد محسوب شود. از لحاظ منطقی کاملاً قابل تصور است که اندازه گیری های دقیقی از این نوع، انحراف فضای ما را از فضای تخت (مسطح) نشان دهد. گاوس کبیر خودش چندین آزمایش برای تعیین خمیدگی فضا انجام داد، اما با دستگاه های موجود، در آن زمان یا امروز، نمی توان مستقیماً چیزی کشف کرد.

با وجود این تعمیم فرمول $3-7$ بسیار نابخسته است. مشخص کردن کامل خواص خمیدگی فضاهایی که بیش از دوطرفه دارند به بیش از یک عدد نیاز دارد. تمام ژئودزیک های منشعب از نقطه P را در امتداد های q و p که در نقطه P توسط دو جهت p و q معین می شوند، در نظر می گیریم. می گوئیم که این ژئودزیکها یک صفحه ژئودزیک گذرا بر نقطه P تولید می کنند. خمش این صفحه در نقطه P ، یعنی K را خمش فضا در P به ازای جهت (p, q) ، یا $K(p, q)$ می نامیم. (K هنگامی کاملاً مشخص می شود که به ازای سه بعد در شش راستا و به ازای چهار بعد در 20 راستا معلوم باشد.) در فضای خمیده، صفحه ژئودزیک، مشابه صفحه گذرا بر یک نقطه (در فضای تخت) است، با این تفاوت که صفحه ژئودزیک عموماً تنها در همان یک نقطه دارای خواص تعریف کننده خویش است. اگر نور در امتداد ژئودزیکها پخش شود، پس ناظر نقطه P هر مولد را یک خط مستقیم می بیند، و بنابراین کل صفحه ژئودزیک از آن نقطه یک صفحه به نظر می آید.

اگر K ، خمش در نقطه P ، مستقل از جهت باشد، می گوئیم که P یک نقطه همسانگرد است. در این صورت تمام اطلاعات مربوط به خمیدگی، در شناسایی مساحت S و یا حجم V یک کره ژئودزیک کوچک به شعاع r (و یا در ابعاد بیشتر تعمیم مناسبی از آن) نهفته است. به راحتی می توان دید که در سه بعد، S و V با فرمولهای زیر داده می شوند

$$S = 4\pi \left(r^2 - \frac{1}{3} K r^4 + \dots \right), \quad V = \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - \frac{1}{5} K r^5 + \dots \right) \quad (4-7)$$

رابطه اول از $3-7$ به دست می آید: نسبت S به مقدار اقلیدسی $4\pi r^2$ باید برابر با مجذور نسبت η به مقدار اقلیدسی θr باشد. سپس فرمول دوم از رابطه $V = \int S dr$ به دست می آید. اگر تمام نقاط یک فضا همسانگرد باشند می توان نشان داد که خمش در تمام نقاط آن یکسان است (قضیه شورا). در این حالت می گوئیم که فضا دارای خمش ثابت است. قضیه شورا را باختصار می توان چنین بیان کرد که همسانگردی تمام نقاط، متضمن همگنی است.

۱. در فیزیک کلاسیک این فرض طبیعی است. در نسبیت عام چون سرعت مختصاتی نور هنگام وجود ماده گرانش دار تغییر می کند، پس سریعترین مسیر نور عموماً یک ژئودزیک در فضای سه بعدی نیست، بلکه همواره ژئودزیک در فضازمان چهار بعدی است.

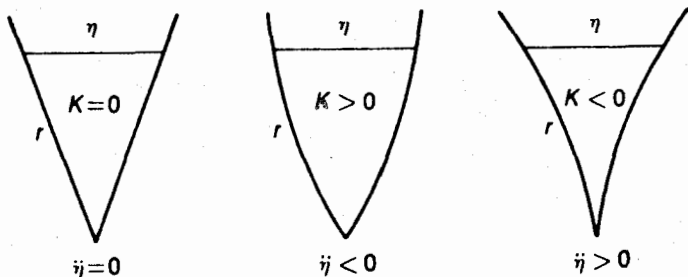
لحظه‌ای از مبحث خارج می‌شویم و به‌عنوان مثال به‌بحث در مشابه سه‌بعدی یک کره، یعنی فضایی سه‌بعدی با خمش ثابت و مثبت، مثلاً $1/a^2$ ، می‌پردازیم. با استفاده از ۷-۱ می‌توان صورت دقیق فرمولهای ۷-۴ را برای چنین کره‌ای به‌دست آورد

$$S = 4\pi a^2 \sin^2 \frac{r}{a}, \quad V = 2\pi a^2 \left(r - \frac{a}{2} \sin \frac{2r}{a} \right) \quad (5-7)$$

ابتدا یک کره معمولی دوبعدی با خمش $1/a^2$ را در نظر می‌گیریم. ببینیم اگر دایری حول یک نقطه مفروض رسم کنیم چه اتفاقی می‌افتد. با ازدیاد شعاع ژئودزیک r ابتدا محیط دایره‌ها زیاد می‌شود، اما پس از رسیدن به یک بیشینه (ماکزیموم) دوباره کوچک می‌شود و سرانجام به‌ازای $r = \pi a$ به‌صفر می‌رسد. (دقت کنید در اینکه دایره کوچک، دایره بزرگتر قبلی را در بردارند، هیچ نکته غیرمنطقی‌ای وجود ندارد.) اگر در یک کره سه‌بعدی S_3 با خمش $1/a^2$ زندگی می‌کردیم و کره‌های ژئودزیک هم‌مرکزی به‌دور خود رسم می‌کردیم، می‌دیدیم که مساحت آنها ابتدا با افزایش شعاع ژئودزیک r زیاد می‌شود (اما نه به‌سرعت حالت اقلیدسی) تا به‌ازای شعاع $r = 1/2 \pi a$ به بیشینه $4\pi a^2$ ، که حجم $\pi^2 a^2$ را در برمی‌گیرد، برسد (با ۷-۵ مقایسه شود). پس از آن کره‌های متوالی، انقباض می‌یابند و سرانجام به‌کره‌ای با شعاع $r = \pi a$ می‌رسیم که دارای مساحت صفر است و باین‌حال در برگیرنده تمام فضای ماست: در واقع سطح آن یک نقطه است و آن نقطه متقاطری یا "پادپا"ی ماست. گرچه حجم کره سه‌بعدی متناهی و برابر با $2\pi^2 a^3$ است، ولی مرزی وجود ندارد. مرکزی هم وجود ندارد: هر نقطه‌ای با نقطه دیگر هم‌ارز است. هر صفحه ژئودزیک S_2 یک کره دوبعدی است. داخل و خارج آن نیمه‌های یکسانی از S_3 هستند، درست همان‌طور که دایره عظیمه، کره دوبعدی را به دو قسمت یکسان تقسیم می‌کند. اگر بادکنکی را در S_3 باد کنیم، سطح آن افزایش می‌یابد تا هنگامی که به‌نظر ما تخت و مسطح بیاید، سپس سطح آن کم می‌شود و سرانجام ما را تنگ در برمی‌گیرد. (یک مورد مشابه، حالت فردی است که بر روی کره "دایره باد می‌کند".) آنچه گفتیم آن‌طور که به‌نظر می‌رسد تخیلی نیست، بلکه در اولین مدل کیهانشناختی‌ای که اینشتین مطرح کرد، فضای سه‌بعدی ما دقیقاً از این نوع در نظر گرفته شده بود. حال می‌خواهیم مفهوم انحراف ژئودزیکی را بیان کنیم که با آنچه قبلاً انجام دادیم رابطه نزدیک دارد. اگر از معادله سوم ۷-۱ نسبت به r دوبار مشتق بگیریم، با تقریب مرتبه اول چنین می‌یابیم

$$\ddot{\eta} = -K\eta \quad (\circ \equiv d/dr) \quad (6-7)$$

پس می‌توان آهنگ دوم (مشتق دوم) (یا "انحراف") دو ژئودزیک را که با زاویه کوچکی یکدیگر را قطع می‌کنند به‌عنوان معیار بسیار مستقیمی از خمش یک سطح به‌کار برد (شکل ۷-۵). (فرمول ۷-۶ در واقع برای هر دو ژئودزیک مجاور صادق است، حتی اگر آن دو در محدوده موردنظر یکدیگر را قطع نکنند. این امر را می‌توان با قطع مورب دو ژئودزیک با ژئودزیک سوم دریافت.) فرض کنید در فضای



شکل ۵-۷

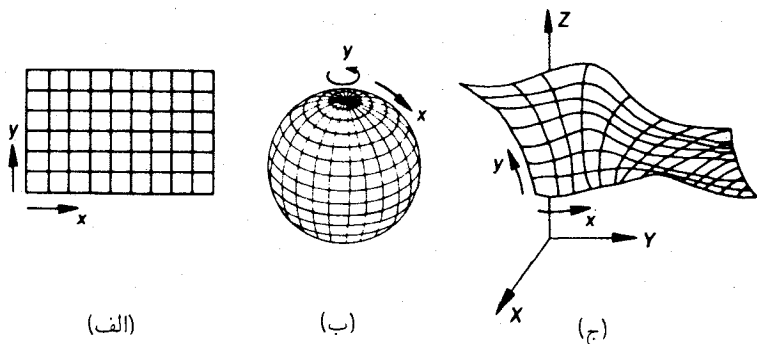
n بعدی V_n دو ژئودزیک مجاور g_1 و g_2 رسم کرده‌ایم که از نقطه P می‌گذرند. این دو، صفحه ژئودزیک یکتایی گذرا بر نقطه P تعریف می‌کنند، که خود دو مولد آن هستند و به علاوه نسبت به آن صفحه ژئودزیک نیز، ژئودزیک هستند. زیرا اگر مثلاً g_1 کوتاهترین راه از A به B در V_n باشد، راه کوتاهتری بین A و B روی این صفحه ژئودزیک وجود نخواهد داشت. بنابراین گسترش یا پخش g_1 و g_2 خمش صفحه ژئودزیک و در نتیجه خمش V_n در نقطه P را برای جهت متناظر با g_1 و g_2 اندازه می‌گیرد.

۳-۷ فضاهای ریمانی

در دو بخش گذشته قضایایی از شاخه‌ای از ریاضیات را که به "هندسه ریمانی" موسوم است، بدون اثبات، آزادانه نقل کردیم، و ضمناً فرض کردیم که فضاهای خمیده مورد بحث در واقع ریمانی هستند. اکنون باید این فرض را بیازماییم. ما نمی‌توانیم بر روی یک سطح خمیده همانند یک صفحه (که در آن "خطوط مختصاتی" شبکه‌ای از مربعات کامل تشکیل می‌دهند) مختصات دکارتی معین کنیم، چه اگر می‌توانستیم، ذاتاً صفحه‌ای می‌داشتیم. برخی سطوح به دلیل خواص تقارنی، مختصاتی "طبیعی" القا می‌کنند، همچون صفحه، یا کره، که برای مشخص کردن نقاط روی آن معمولاً متمم عرض (x) و طول (y) انتخاب می‌شوند (شکل ۶-۷). در حالت کلی، بر روی هر سطح می‌توان دو خانواده از خطوط مختصاتی دلخواه رسم کرد و آنها را به ترتیب با برجسبهای $\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ و $\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ نشان داد، و آنگاه می‌توان این قسمتها را، با هر ظرافتی که بخواهیم، به قسمتهای کوچکتر تقسیم کرد. شبکه مختصاتی حاصل ممکن است متعامد باشد، یا نباشد. اگر فرض کنیم که این سطح در یک فضای اقلیدسی سه‌بعدی با مختصات (X, Y, Z) غوطه‌ور است [شکل ۶-۷ (ج)]، آنگاه مختصات آن در معادلاتی به صورت زیر صدق خواهد کرد

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = Z(x, y) \quad (۷-۷)$$

که فرض می‌کنیم به دفعات دلخواه مشتق‌پذیرند. به طور مثال برای کره‌ای به شعاع a که مرکز آن در مبدأ مختصات واقع باشد، داریم



شکل ۷-۶

$$X = a \sin x \cos y, \quad Y = a \sin x \sin y, \quad Z = a \cos x$$

چون فاصله بین نقاط مجاور در فضای اقلیدسی با رابطه

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (۸-۷)$$

داده می شود، پس فاصله بر روی سطح چنین خواهد بود

$$d\sigma^2 = (X_x dx + X_y dy)^2 + (Y_x dx + Y_y dy)^2 + (Z_x dx + Z_y dy)^2 \quad (۹-۷)$$

در اینجا شاخصهای پایین ۱ و ۲ به ترتیب مشتقگیری جزئی نسبت به x و y را نشان می دهند. روشن است که ۹-۷ را می توان به صورت زیر نوشت

$$d\sigma^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \quad (۱۰-۷)$$

که در آن E, F, G تابعی از x و y هستند. (این روش در مورد کره رابطه

$$d\sigma^2 = a^2 dx^2 + a^2 \sin^2 x dy^2$$

را به دست می دهد که می توان آن را مستقیماً به کمک هندسه مقدماتی نیز به دست آورد.) هرگاه مجذور دیرفرانسیل مسافت $d\sigma^2$ توسط یک صورت دیرفرانسیلی درجه دوم همگن برحسب مختصات سطح داده شود، مانند ۷-۱۰، می گوئیم که $d\sigma^2$ یک متریک ریمانی و سطح مربوطه یک سطح ریمانی است. البته همه متریکها نباید حتماً چنین صورتی داشته باشند: به طور مثال برای یک سطح دوبعدی می توان یک متریک غیر ریمانی $d\sigma^2 = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ تعریف کرد و هندسه

حاصل را بررسی کرد. (هندسه حاصل از چنین متریکهای عامتری، هندسه فینسلری است.) وجه تمایز متریک ریمانی از متریکهای دیگر در این است که هندسه ریمانی موضعاً اقلیدسی است: در هر نقطه مفروض P_0 کمیات E ، F ، و G در $0-1$ فقط عدد هستند، که مثلاً آنها را E_0 ، F_0 ، و G_0 می‌نامیم، بنابراین در نقطه P_0 ، $d\sigma^2$ را به صورت مجموع چند مجذور می‌نویسیم

$$d\sigma^2 = \left(E_0^{1/2} dx + \frac{E_0}{E_0^{1/2}} dy \right)^2 + \left(G_0 - \frac{F_0^2}{E_0} \right) dy^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 \quad (11-7)$$

که در آن

$$\tilde{x} = E_0^{1/2} x + \frac{F_0}{E_0^{1/2}} y, \quad \tilde{y} = \left(G_0 - \frac{F_0^2}{E_0} \right)^{1/2} y$$

پس تبدیل مختصاتی وجود دارد (دراقع بینهایت تبدیل) که متریک را در هر نقطه از پیش‌گزیده‌ای، "اقلیدسی" (یعنی مجموعه مجذوره‌های چند دیفرانسیل می‌کند. برعکس اگر مختصاتی چون \tilde{x} و \tilde{y} موجود باشند که متریک در یک نقطه P_0 برحسب آن اقلیدسی شود، این متریک در نقطه P_0 برحسب مختصات عام باید ریمانی باشد، زیرا تبدیلی چون $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y)$ و $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y)$ از مختصات به خاص باید موجود باشد، و بنابراین

$$d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = (\tilde{x}_1 dx + \tilde{x}_2 dy)^2 + (\tilde{y}_1 dx + \tilde{y}_2 dy)^2$$

که برحسب x و y ریمانی است. اکنون می‌بینیم که برای پیشگویی صورت فرمول $0-1$ می‌توانستیم از به کار بردن فضای فرور صرف‌نظر کنیم. کافی بود اصل را تنها براین قرار دهیم که سطح موضعاً اقلیدسی است، یعنی به‌ازای هر نقطه مفروض می‌توان خطوط مختصات را چنان رسم کرد که در آن نقطه $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$ باشد.

این اندیشه‌ها را می‌توان مستقیماً از سطح به فضاها با بعد بیشتر تعمیم داد. بر روی این‌گونه فضاها نیز (طبق تعریف) مانند سطوح می‌توان مختصات (گاوسی) دلخواهی ترسیم کرد. به‌طور مثال در سه‌بعد، می‌توان سه خانواده از سطوح مختصات ترسیم کرد و بر آنها برحسب $x = \text{const.}$ ، $y = \text{const.}$ و $z = \text{const.}$ نهاد. حال اگر متریکی شبیه به $0-1$ وجود داشته باشد، گوییم که فضا ریمانی است، و اگر و فقط اگر فضا موضعاً اقلیدسی باشد، ریمانی خواهد بود.

اقلیدسی بودن موضعی یک متریک، اقلیدسی بودن موضعی هندسه ذاتی را تضمین می‌کند. مثلاً محیط یک دایره ژئودزیک کوچک تا پایینترین مرتبه برابر $2\pi r$ است و بنابراین زاویه مسطح کامل حول یک نقطه برابر 2π است، زاویه فضایی کامل حول یک نقطه برابر 4π است، مجموع زوایای

یک مثلث ژئودزیک کوچک تا پایینترین مرتبه برابر π است، و غیره. از طرف دیگر محیط دایره‌ای در فضای دوبعدی با متریک (فینسلری) $(dx^2 + dy^2)^{1/2}$ ، مثلاً مکان هندسی $r^2 = (x^2 + y^2)^{1/2}$ برای r کوچک، حتی تا پایینترین مرتبه برابر با $2\pi r$ نخواهد بود.

نتیجه مفیدی که باید به‌خاطر داشت این است که در دو یا سه بعد (اما نه در ابعاد بالاتر) همواره می‌توان مختصاتی متعامد پیدا کرد، یعنی مختصاتی که متریک برحسب آنها هیچ جمله‌ای که حاصلضرب دیفرانسیلها باشد، ندارد. بنابراین در مورد دو بعد می‌توان در 10^{-7} ، F را در همه جا صفر کرد.

اکنون نوبت تعمیمی است که هر چند از لحاظ صوری بسیار مختصر است، اما برای مقاصد ما حیاتی است. این تعمیم عبارت از مجاز شمردن متریکهایی است که "مثبت معین" نیستند: روشن است که بر روی یک سطح حقیقی به‌ازای هر dx و $dy \neq 0$ داریم $d\sigma^2 > 0$ ، اما این شرط برای قسمت اعظم نظریه، اساسی نیست. هر متریک ریمانی "غیر معین" موضعاً متناظر است با یک متریک "شبه اقلیدسی" (متریک فقط شامل مجذور دیفرانسیلهاست، اما علامت برخی از آنها منفی است)، مثلاً متناظر با نشانگان $(- + +)$ داریم: $dx^2 + dy^2 - dz^2$. می‌توان نشان داد که نشانگان یک متریک ناورد است، یعنی با فرض حقیقی بودن مختصات، به هر طریقی که متریک به مجموع مجذور دیفرانسیلها درآورده شود (در یک نقطه مفروض، چون معمولاً این کار در تمام نقاط ممکن نیست)، توزیع علامتهای مثبت و منفی همواره یکسان خواهد بود. یک مثال برای فضای ریمانی با نشانگان $(- - +)$ ، فضا زمان نسبیت خاص (که بعد از این به نام فضای مینکوفسکی، M_2 از آن نام می‌بریم) با متریک $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ است. البته این مثال خاصی است زیرا این فضا نه تنها ریمانی است، بلکه به‌طور همه‌جایی شبه اقلیدسی است. اینکه ds در اینجا یک فاصله خط‌کشی ساده نیست، تأثیری بر بیان ریاضی مطلب ندارد.

در این مورد نیز، مانند مورد فضاهای مثبت معین، معادله دیفرانسیل ژئودزیکها، از شرط طول مانا، $\sigma \int |ds| = 0$ ، به‌دست می‌آید. اما در فضاهای غیرمعین ژئودزیکها دیگر منحنیهایی با طول کمینه (می‌نیموم) نیستند، بلکه عموماً همسایه‌هایی با طول بیشتر یا کمتر دارند. ژئودزیکهای با طول بیشینه، یعنی ژئودزیکهایی که برای آنها $ds^2 > 0$ یا $[0 <]$ است، تنها هنگامی وجود دارند که نشانگان تنها دارای یک علامت مثبت (منفی) باشد (با تمرین $7-7$ مقایسه کنید). علامت ds^2 در امتداد یک ژئودزیک می‌تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد، اما می‌توان نشان داد که این علامت باید ثابت باشد. ژئودزیکها در هر فضای اقلیدسی، متناظر با معادلاتی خطی برحسب مختصات اقلیدسی هستند.

معادله دیفرانسیل ژئودزیکها را می‌توان چنین نیز تفسیر کرد: ژئودزیکها "موضعاً مستقیم" هستند، یعنی انحنای آنها در فضای اقلیدسی مماس موضعی صفر است. از اینجا روش تجربی زیر جهت یافتن ژئودزیکهای یک سطح به‌دست می‌آید: نوار کاغذی نازکی را می‌بریم و خط مستقیمی در امتداد وسط آن رسم می‌کنیم. سپس نوار را، تکه تکه بدون آنکه تا بردارد با احتیاط

روی سطح می‌چسبانیم. خط رسم شده یک ژئودزیک بر روی سطح خواهد بود. بهترین راه تجسم خمیدگی در فضاهایی با متریک غیرمعیین از طریق انحراف ژئودزیک است. در این‌گونه فضاها همانند فضاهای دیگر مفاهیم "نقطهٔ همسانگرد" و "خمش ثابت" مصداق دارند، اما همسانگردی یک نقطهٔ همسانگرد فقط محدود به خمش است. مثلاً نقاط M_2 به معنی عام همسانگرد نیستند (به دلیل مخروط نور)، با وجود این معادلهٔ ۶-۷ با $K = 0$ در تمام راستاها صادق است. ما بعدها به فضاهای غیرمعیین با خمش ثابت برخورد خواهیم کرد که در آنها فرمول ۶-۷ با $K \neq 0$ نیز در تمام جهات صادق است.

با شناخت متریک، تمام روابط فاصله‌ای در فضا شناخته می‌شوند و از آنجا آنچه برای شناخت ذاتی فضا لازم است به دست می‌آید. مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل ژئودزیکها تنها شامل مختصات و ضریب متریک است (یعنی تعمیم ضرایب E, F, G در ۷-۱۰)، همچنین است فرمول خمش K در هر جهت مفروض، و غیره. مسلماً در هر دو فضایی که ذاتاً هم‌ارز باشند، می‌توان مختصاتی تعریف کرد که متریکها برحسب آن یکسان باشند (کافی است دو فضا را بر یکدیگر منطبق کنیم و مختصات یکی را بر دیگری نقش کنیم). برعکس، اگر بتوان با گزینش مختصات مناسبی متریکها را یکسان کرد، فضاها به‌طور ذاتی هم‌ارزند. (با جفت کردن نقاط متناظر می‌توان یکی را بر دیگری "نگاشت"). از این رو واژهٔ کوتاه‌تر "ایزومتریک" به جای "ذاتاً هم‌ارز" به کار برده می‌شود. این نتیجه ما را به مسئلهٔ مهمی می‌رساند. دو فضا که در ظاهر دارای متریکهای کاملاً متفاوتی هستند، می‌توانند ایزومتریک باشند. مثلاً از چهار متریک زیر

$$dx^2 + x^2 dy^2, \quad (4x^2 + y^2)dx^2 + (2xy - 4x)dxdy + (1 + x^2)dy^2$$

$$y^2 dx^2 + x^2 dy^2, \quad ydx^2 + xdy^2$$

هر سه متریک اول نمایندهٔ صفحهٔ معمولی هستند، اما آخری این‌طور نیست. اولی در واقع متریک معمولی قطبی $dr^2 + r^2 d\theta^2$ با نمادگذاری غیر متعارف است، اما هنوز می‌توان آن را بازشناخت. دومی از مختصات معمولی اقلیدسی \tilde{x}, \tilde{y} با تبدیل بی‌نام و نشان زیر به دست می‌آید

$$\tilde{x} = x^2 - y \quad \tilde{y} = xy$$

خواننده نخواهد توانست (و بهتر است سعی هم نکند) که با عجله منشأ سومی را حدس بزند، گرچه آن نیز از تبدیل مختصات اقلیدسی \tilde{x} و \tilde{y} به دست می‌آید. برای فضاهایی که خمش آنها ثابت است (مثل صفحه) قضیهٔ پرتوانی داریم که به ما کمک می‌کند. دو فضا که دارای بعد، نشانگان، و خمش ثابت یکسان باشند، ایزومتریک‌اند [در نتیجه هر فضای تخت ($K = 0$) باید با فضای شبه اقلیدسی هم‌نشانگان آن ایزومتریک باشد]. اما مسئلهٔ کلی حکم کردن دربارهٔ هم‌ارزی دو متریک

دلخواه (موسوم به "مسئله هم‌ارزی" فرمهای دیفرانسیلی درجه دوم)، به خصوص در عمل، بسیار مشکل است.

۴-۷ برنامه‌ای برای نسبیت عام

چنانکه در بخش ۲-۵ دیدیم، اگر اصل هم‌ارزی را بپذیریم، حضور ماده گرانش‌دار مانع از وجود دستگاههای لخت گسترده می‌شود. بنابراین فضا-زمان در حالت عام همان M_4 تخت آشنا نخواهد بود. (اصل هم‌ارزی، تنها با فرض ثبات سرعت نور، مسیرهای خمیده نور را پیش‌بینی می‌کند و بدین طریق دلیل قوی دیگری بر له خمش به دست می‌دهد — با ابتدای بخش ۱-۱۲ مقایسه کنید.) با وجود این، باز هم به دلیل هم‌ارزی فضا-زمان باید موضعاً M_4 باشد، یعنی موضعاً شبه اقلیدسی، پس ریمانی است! زیرا بر طبق اصل هم‌ارزی می‌توان در هر رویداد \mathcal{P} (دست کم در خلأ) یک چارچوب مرجع موضعی پیدا کرد، یعنی یک دستگاه مختصات موضعی x, y, z, t با این خاصیت که بازه بین \mathcal{P} و رویدادهای مجاور توسط رابطه زیر داده شود

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (12-7)$$

اصل هم‌ارزی، به صورت اصلی آن، در داخل ماده، مثلاً در داخل زمین که در آن نمی‌توان آزمایشگاه مادی "در حال سقوط آزاد" داشت به کار نمی‌آید؛ با وجود این فرض خواهیم کرد که فضا-زمان داخل ماده، ریمانی است و دارای نشانگان $(- - - +)$ است. زیرا هرچه باشد، ماده اکثراً از خلأ تشکیل شده است. برای اینکه به ds^2 در داخل ماده مفهومی بدهیم حفرة کوچکی در نقطه مورد نظر در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در اثر تعبیه این حفرة، ds^2 تغییر محسوس نداشته باشد. این روش، شبیه به روش معیار در مورد تعریف میدان نیوتونی در داخل ماده است.

قبول ساخت ریمانی جهان، اینشتین را به طرح درخشانش برای نسبیت عام هدایت کرد. فضا-زمان در حضور اجرام گرانش‌دار می‌تواند خمیده باشد. پس شاید مسیر ذرات آزمایشی آزاد، ژئودزیکهایی در این فضای خمیده چهاربعدی باشد و بنابراین شاید نور نیز در خلأ در امتداد ژئودزیکهای صفر (که در امتداد آن $ds^2 = 0$) سیر می‌کند. در فیزیک نیوتونی فضای مطلق "ریلها"یی فراهم می‌کند که ذرات آزاد در غیاب گرانش (یا هر نیروی دیگری) در امتداد آنها حرکت می‌کنند. در نظریه اینشتین فضا-زمان این ریلها را در غیاب نیروهای دیگر فراهم می‌کند، زیرا دیگر نیروی گرانشی وجود ندارد: گرانش جذب هندسه شده است.

اما فضا-زمان چگونه می‌تواند خمیده باشد؟ از آنجایی که اکنون ساخت فضا-زمان تعیین‌کننده اثرهای گرانشی و لختی است، اصل ماخ به ما می‌گوید که تعیین‌کننده ساخت فضا-زمان تنها ماده گرانش‌دار عالم است. کار عظیمی که حتی نبوغ اینشتین را سالها به خود مشغول کرده بود کشف

معادلات میدان بود، یعنی معادلاتی که به طور کمی چگونگی رابطه محتوای مادی فضا-زمان را با متریک آن پیش‌بینی کند.

پس نسبیت عام نظریهٔ میدانی است که در آن هندسه نقش میدان را بازی می‌کند. در نسبیت عام هیچ‌گونه "کنش از دور" که با حد سرعت نسبیت خاص مغایرت داشته باشد موجود نیست. یک ذره مستقیماً از منبعها متأثر نمی‌شود بلکه از میدانی متأثر می‌شود که منبعها در مجاورتش ساخته‌اند.

امکان تعیین هندسهٔ دیرانسپیل فضای سه‌بعدی ما توسط "نیروهای خارجی" را حتی برنهارد ریمان در درس افتتاحیهٔ مشهورش در سال ۱۸۵۴/۱۲۳۳ پیشنهاد کرده بود. تصور اینکه اگر ریمان گرانش را به‌مثابه خمندۀ فضا در نظر می‌گرفت فیزیک به‌چه راهی می‌رفت، بسیار جالب است. یک قانون حرکت ژئودزیکی حتی در آن زمان، چندان دور از ذهن نبود. مثلاً در مکانیک کلاسیک معلوم شده بود که مسیر ذرهٔ محدود به یک سطح خمیده، بدون سایش یا بدون تأثیر نیروی خارجی، یک ژئودزیک همان سطح است. البته تعمیم مستقیم این مطلب، یعنی پیروی هر ذره در میدان گرانشی از ژئودزیکهای فضای سه‌بعدی خمیده، را می‌توان بلافاصله رد کرد. زیرا هر ژئودزیک توسط جهت اولیه‌اش به طرزی یکتا تعیین می‌شود، درحالی‌که مدار گرانشی به جهت و سرعت اولیه وابسته است و اما در فضا-زمان جهت اولیه شامل سرعت نیز هست و این واقعیت به خودی خود می‌توانست اندیشهٔ در نظر گرفتن خمینهٔ چهاربعدی زمان و فضا را که در آن مسیرهای گرانشی ژئودزیک هستند، به ذهن راه دهد. یک چنین فرضیهٔ ژئودزیکها دو کشف بنیادی گالیله را در مکانیک در برمی‌گیرد: (الف) مسیر یک ذره در زمان و فضا، در میدان گرانشی مستقل از ذره است و (ب) قانون لختی، که بر طبق آن یک ذرهٔ آزاد "در زمان و فضا حرکت مستقیم دارد". اما اکنون ذره تا آن حد مستقیم حرکت می‌کند که حرکت مستقیم در فضا-زمان خمیده امکان دارد. این فرضیه مفهوم جرم گرانشی کنش‌پذیر و جرم لخت را از نظریهٔ گرانش حذف می‌کند و نیز معمای برابری این دو را حل می‌کند: این برابری در تصویر نیوتونی، هم نتیجه و هم لازمهٔ قانون ژئودزیکهاست، اما در مورد فضا-زمان اولین گونهٔ آن بدون شک مثبت قطعی می‌بود، و کسی چه می‌داند که برای رسیدن به نشانگان مینکوفسکیایی و سرانجام به نسبیت خاص به‌عنوان گونهٔ موضعی این نظریه، چقدر طول می‌کشید

اما بوتهٔ اندیشه‌های ریمان برای برافروختن باید تا آمدن اینشتین صبر می‌کرد. اکنون با در نظر داشتن طرح کلی اینشتین به برخی از جزئیات نظر می‌افکنیم. مفهوم بازهٔ ds بین رویدادهای مجاور \mathcal{P} و \mathcal{Q} در فضا-زمان، گرچه پیچیده‌تر از مفهوم فاصله بین نقاط روی یک سطح در فضای

۱. با مقایسه با اصل هامیلتون (۱۸۳۴/۱۲۱۳) و با دلتالی از نوع آنچه در بخش ۷-۷ خواهیم آورد، متریک آن به صورت تقریبی چنین تعیین می‌شود

$$(V^2 - 2\varphi) dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

که در آن φ پتانسیل نیوتونی و V یک سرعت جامع و نسبتاً بزرگ است.

سه‌بعدی است، با وجود این یک کمیت فیزیکی کاملاً معین است. بازه‌های منشعب از \mathcal{P} را می‌توان بنابر تعریف با اندازه‌گیریهایی معمولی در یک آزمایشگاه کاملاً مدرج کوچک که در حال سقوط آزاد و بدون چرخش باشد، یا به عبارت دیگر در یک دستگاه لخت موضعی، معین کرد. از آنجایی که متریک برحسب مختصات گاوسی فضا-زمان دارای 10° ضریب است (شبهه به E و F و G در $7-10^\circ$) پس در حالت کلی برای تعیین کامل متریک در دانستن 10° بازه در نقطه \mathcal{P} کافی است. (این ده بازه دلخواه نباید تماماً بازهٔ صفر باشد: می‌توان نشان داد که بازه‌های صفر، متریک را با تقریب یک ضریب، معین می‌کنند. اما لازم نیست هیچیک از آنها فضاگونه باشد.) در مورد بازه‌های صفر و زمان‌گونه در عمل می‌توانیم از دستگاه‌های لخت موضعی صرف‌نظر کنیم. اگر بتوان یک سیگنال نوری از \mathcal{P} به \mathcal{Q} یا برعکس فرستاد، پس s^2 متناظر آن در هر دستگاه لخت موضعی صفر است و بنابراین در تمام دستگاه‌های مختصات، صفر خواهد بود. اگر بتوان ساعتی را که در حال سقوط آزاد است از \mathcal{P} به \mathcal{Q} فرستاد، پس ds در یک دستگاه لخت موضعی برابر خواهد بود با c ضربدر ویژه‌زمان طی شده در ساعت و بنابراین در تمام دستگاه‌های مختصات چنین خواهد بود. اما اندازه‌گیری مستقیم بازه‌های فضاگونه مشکل‌تر است. مثلاً می‌توان ترتیبی داد که دو سریک خط‌کش بدون چرخش در حال سقوط آزاد همزمان در \mathcal{P} و \mathcal{Q} باشد، در این صورت ویژه‌طول آن مقدار $|ds|$ را اندازه خواهد گرفت. اما جهت تأمین تلاقی همزمان آن با \mathcal{P} و \mathcal{Q} ، خط‌کش باید حامل ساعت‌های همزمان شده باشد، که این را نمی‌توان چندان بهتر از دستگاه لخت موضعی دانست. برای اندازه‌گیری بازه‌های فضاگونه روشهایی بدون خط‌کش می‌توان اندیشید. مثلاً در میان همهٔ ناظرهایی که از \mathcal{P} به حال سقوط آزاد می‌گذرند، یک دسته ناظر وجود دارد که می‌تواند یک سیگنال راداری را طوری از \mathcal{P} به \mathcal{Q} بفرستد و بازگرداند که انتشار و دریافت آن به ترتیب در بازه‌های زمانی یکسانی قبل و بعد از \mathcal{P} اتفاق بیفتد. در این صورت ds برابر است با فاصلهٔ راداری \mathcal{Q} از این ناظران. (یک نمودار مینکوفسکیایی که نمایانگر یک چارچوب لخت موضعی در \mathcal{P} باشد، این مطلب را روشن می‌کند.)

چنانکه دیدیم یک ساعت در سقوط آزاد (که بنابر فرض از یک ژئودزیک پیروی می‌کند) در امتداد جهانخط خود $\int ds c^{-1}$ را نشان می‌دهد. اگر این ساعت، که ساعتی "آرمانی" فرض می‌شود، از مسیر آزاد خود مثلاً تحت اثر موتوریک موشک یا یک میدان الکتریکی بیرون رانده شود، در این صورت بنابر فرضیهٔ ساعت‌ها در هر چارچوب مرجع لخت در امتداد خود همواره $\int ds c^{-1}$ را نشان خواهد داد. بدین ترتیب به صورت نسبیت عامی فرضیهٔ ساعت‌ها می‌رسیم: هر ساعت آرمانی، چه آزاد باشد و چه نباشد، در امتداد جهانخط خود $\int ds c^{-1}$ را نشان می‌دهد.

جهانخط‌های ذرات آزاد در فضای شبه اقلیدسی M_4 دارای معادلات خطی هستند، و بنابراین فرضیهٔ ژئودزیک‌ها حتماً در مورد آنها صدق می‌کند. خاصیت پیشینگی این ژئودزیک‌ها در M_4 نیز مشهود است: اگر ذرهٔ آزاد A از رویداد \mathcal{P} به رویداد \mathcal{Q} حرکت کند، ساعتی که به A متصل است در امتداد این جهانخط $\int ds c^{-1}$ را نشان خواهد داد. و هر ساعت روی ذرهٔ دیگری چون B که در \mathcal{P} یا \mathcal{Q} حاضر باشد، باید زمان کمتری را نشان دهد، زیرا B را می‌توان در دستگاه

سکون A همچون برادر دوقلوی مسافر بخش ۲-۱۴ در نظر گرفت که جواتر باز می‌گردد. شاید تصور شود که استدلال فوق را می‌توان برای اثبات فرضیهٔ ژئودزیکها در فضا زمانهای عام به‌کار برد. فرض کنید ذرهٔ آزاد A در داخل یک آزمایشگاه در حال سقوط آزاد، L ، در مدار دایره‌ای حول یک جرم می‌چرخد. آیا نمی‌توان یک ذرهٔ مجاور B را به‌عنوان یک دوقلو در دستگاه L در نظر گرفت؟ اشکال استدلال در این است که فرض می‌کند یک چارچوب لخت موضعی در یک زمان گسترده موجود است، درحالی‌که وجود یک دستگاه لخت موضعی را تنها در همسایگی نزدیک یک رویداد مفروض، می‌توان فرض کرد. در واقع هیچ "اثبات" مستقیمی برای قانون حرکت ژئودزیک وجود ندارد. با این حال، معادلاتی که اینشتین سرانجام وضع کرد، به‌طور ضمنی شامل این قانون است.

"بافت" نسبیت خاصی فضا زمان، یعنی وجود مخروطهای صفر در هر رویداد و وجود سه نوع جابه‌جایی (زمان‌گونه، فضاگونه، نورگونه) نیز از طریق چارچوبهای مرجع لخت بر فضا زمان نسبیت عام نقش بسته است. این مخروطها دیگر همواره با یکدیگر "موازی" نیستند و مولدهای آنها (جهانخطهای نور) دیگر "مستقیم" نیست. اما باز هم جهانخط هر ذره در هر یک از نقاط خود درون مخروط قرار دارد و هر فوتونی در امتداد مخروط حرکت می‌کند. لابد خواننده بی‌صبرانه منتظر است ببیند آیا واقعاً فضا زمانهایی وجود دارند که بتوان آنها را با موقعیتهای گرانشی آشنا یکی دانست و آیا ژئودزیکهای این فضا زمانها تقریبی از مسیرهای نیوتونی هستند. زیرا نباید فراموش کرد که نظریهٔ گرانشی نیوتونی با پدیده‌های مشاهده شده در گسترهٔ عظیمی از کاربردهای کلاسیک تقریباً توافق کامل دارد و هر نظریهٔ رقیب دیگر باید، در حدود خطاهای مشاهدات کلاسیکی، همان پیشگوییها را بکند. ما در بخشهای ۷-۶ و ۷-۷ به مقایسهٔ نظریهٔ اینشتین با نیوتون در چند مورد ساده خواهیم پرداخت و در بخش ۷-۵ ابزار سودمندی برای این کار فراهم خواهیم کرد.

۷-۵ اثر گرانشی دوپلر

برای استدلالهایی که در بخش بعدی خواهیم کرد، به فرمولبندی کمی اثر گرانشی دوپلر که قبلاً در بخش ۱-۲۱ به‌طور کیفی مورد بحث قرار گرفت، نیاز داریم. اتاقت آسانسوری به ارتفاع dl را در نظر بگیرید که از حالت سکون در یک میدان گرانشی با شدت g به‌پایین انداخته می‌شود و در همان زمان فوتونی با بسامد ν از سقف کابین به‌کف آن فرستاده می‌شود. بنابراین هم‌ارزی این سیگنال نوری برای رسیدن به کف احتیاج به زمان $dt = dl/c$ دارد، که در این مدت کف اتاقت با سرعت $du = g dl/c$ نسبت به گذرگاه آسانسور حرکت می‌کند. و باز بنابراین هم‌ارزی هیچ‌گونه تغییری در بسامد فوتون در داخل اتاقت متحرک مشاهده نمی‌شود. بنابراین می‌توان گفت که ناظر B که در داخل گذرگاه آسانسور به‌فاصلهٔ dl از نقطهٔ صدور فوتون ساکن است (از فاصلهٔ $\frac{1}{2}gdt^2$ که کف اتاقت در زمان dt طی می‌کند صرف‌نظر می‌کنیم) با سرعت du روبه موجی

با بسامد ν حرکت می‌کند، و بنابراین یک انتقال (به آبی) دوپلری مشاهده می‌کند که تا مرتبه اول با فرمول کلاسیک زیر داده می‌شود (با ۳-۵ مقایسه شود)

$$\frac{\nu + d\nu}{\nu} = \frac{c + du}{c} = 1 + \frac{gdl}{c^2}, \quad \text{یا} \quad \frac{d\nu}{\nu} = \frac{gdl}{c^2} \quad (۱۳-۷)$$

البته B یک ناظر لخت نیست. با وجود این در اینجا (و در هر شرایط مشابه آن) می‌توان فرض کرد B همان را اندازه می‌گیرد که یک ناظر B' (لخت) در حال سقوط آزاد که در هر لحظه نسبت به B ساکن است اندازه می‌گیرد. مجوز این امر، فرضیه طولها و ساعتهاست، که برطبق آنها اندازه‌گیریهای خط‌کشها و ساعت‌های B ، گرچه شتاب یافته‌اند، با اندازه‌گیریهای B' در هر لحظه مطابقت دارند. فرمول ۱۳-۷ را در مورد یک سیگنال نوری که با خطوط میدان زاویه α تشکیل می‌دهد نیز می‌توان تعمیم داد. در اینجا نیز از همان اتاقک استفاده می‌کنیم، اما حالا معادله ۳-۵، معادله ۷-۱۳ را با این تفاوت به دست می‌دهد که به جای du عبارت $du \cos \alpha$ و بنابراین به جای gdl عبارت $gdl \cos \alpha$ می‌نشیند. پس با نمادگذاری برداری داریم

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{\mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}}{c^2} \quad (۱۴-۷)$$

که در آن $d\mathbf{l}$ مسیر سیگنال را اندازه می‌گیرد. اگر بتوان میدان \mathbf{g} را (مانند نظریه نیوتونی) از پتانسیل φ برطبق معادله زیر به دست آورد

$$\mathbf{g} = -\text{grad } \varphi \quad (۱۵-۷)$$

آنگاه برای یک مسیر بینهایت کوچک $d\mathbf{l}$ داریم $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{l} = -d\varphi$. با نشان دادن این رابطه در ۷-۱۴ داریم

$$d\nu/\nu = -d\varphi/c^2 \quad (۱۶-۷)$$

یا با انتگرال‌گیری روی یک مسیر نوری متناهی

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \exp\left(\frac{-\Delta\varphi}{c^2}\right) \quad (۱۷-۷)$$

که در آن ν_0 و ν به ترتیب بسامدهای ابتدایی و انتهایی و $\Delta\varphi$ نوکلی پتانسیل روی مسیر است. نظریه اثر گرانشی دوپلر را می‌توان برای به دست آوردن نتیجه جالب دیگری نیز به کار برد و آن انشعاع گرانشی زمان است. اگر دو ساعت معیار در نقاطی با اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ در یک میدان

گرانشی تثبیت شده باشند ساعتی که در نقطه با پتانسیل کمتر تثبیت شده است، بنابر قضاوت طرفین، با ضریب دوپلر $D = \exp(-\Delta\varphi/c^2)$ کندتر از ساعتی که در نقطه با پتانسیل بیشتر تثبیت شده است کار می‌کند. زیرا فرض کنید یک یک ساعت مورد مشاهده، همزمان با قله موج نوری باشد که توسط آن مشاهده می‌شود. پس ضریب دوپلر دقیقاً به ما می‌گوید که این یک‌تکهها در محل ساعت ناظر با چه بسامدی مشاهده می‌شود، و گفته ما ثابت است.

دو ساعت معیار را که ابتدا همزمان اند کنار یکدیگر قرار دارند، در نظر می‌گیریم. سپس یکی از آنها را به مکانی با پتانسیل کمتر می‌بریم و برای مدتی آنجا نگاه می‌داریم و سرانجام برمی‌گردانیم. اگر خطای وارد در اثر رفت و برگشت ساعت را کنار بگذاریم، این ساعت مسلماً نسبت به ساعت ثابت زمان را به اندازه ضریب D کندتر نشان می‌دهد، اما آنچه ضمن حرکت روی می‌دهد، مستقل از اتساع کلی در مکانی است که پتانسیل کمتر دارد، و بنابراین می‌تواند تحت الشعاع آن قرار گیرد. بنابراین "دوقلویی" که در محل با پتانسیل کمتر قرار دارد از آنکه در محل با پتانسیل بیشتر است جوانتر می‌ماند (ضریب اتساع مربوط روی سطح زمین، نسبت به بینهایت، برابر است با $1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$). به راستی که خرید متاع "جوانی" از راه زندگی کردن بر روی یک سیاره بس چگال بسیار ارزانتر تمام می‌شود تا از راه گشت زدن سریع در فضا. زیرا انرژی مصرف شده در مورد دوم مستقیماً متناسب است با ضریب اتساعی که به دست می‌آید (منهای یک)، درحالی‌که در مورد اول متناسب با لگاریتم آن ضریب است.

۶-۷ متریک میدانهای ایستا

اکنون می‌خواهیم به کشف فضا-زمان یک میدان گرانشی ایستا بپردازیم. چنین میدانی را یک جسم بزرگ ساکن با جرم زیاد و شکل دلخواه، می‌تواند تولید کند. برای فضای سه‌بعدی این میدان که می‌تواند کاملاً خمیده باشد، مجموعه‌ای اختیاری از مختصات x_1, x_2, x_3 را در نظر می‌گیریم. برای تخصیص مختص زمانی t به رویدادها، ساعت‌هایی (که قرائت آنها از یک نقطه به نقطه دیگر به‌طور پیوسته تغییر می‌کند) در نقاط شبکه‌ای از سطوح مختصاتی $x_i = \text{const.}$ و $i = 1, 2, 3$ در فضای ایستای سه‌بعدی این میدان یک دسته مختصات اختیاری x_1, x_2, x_3 تعریف می‌کنیم که ممکن است اقلیدسی نباشد: امکان خمیده بودن این فضای سه‌بعدی زیاد است. متریک فضا-زمان مثل همیشه یک صورت درجه دوم از دیفرانسیلهای مختصات خواهد بود

$$ds^2 = A dt^2 + B dx_1 dt + \dots + E dx_1^2 + \dots + H dx_1 dx_2 + \dots \quad (18-7)$$

در حالت کلی ضرایب متریک A, B, C ، و غیره توابعی از همه مختصات هستند. آیا درحالت (میدان) ایستا می‌توان فرض کرد که همه آنها مستقل از زمان‌اند؟ نه، مگر آنکه t به‌طور صحیح

انتخاب شود: حتی متریک مینکوفسکیایی ۱۲-۷ را که مستقل از زمان است می‌توان با تعریف یک مختص زمانی "بد" t' ، مثلاً توسط تبدیل $t = xt'$ وابسته به زمان کرد. (تبدیل فوق جمله‌های وابسته به زمان در متریک تولید می‌کند، زیرا به جای dt جمله $tdt' + t'dx$ می‌نشیند.) مختص زمانی‌ای که متریک را مستقل از زمان کند، "خوب" خوانده می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم که شرط لازم و کافی برای وابسته نبودن ضرایب متریک به زمان این است که: (الف) آن سیگنالهای نوری که دارای مسیرهای یکسان هستند، همواره دارای زمان مختصاتی یکی هستند. و (ب) نمو زمان مختصاتی dt در هر نقطه ثابت مضارب ثابتی از نموهای ویژه زمان ds/c در آن نقطه است. بدیهی است که شرط (ب) معادل است با استقلال زمانی A در ۱۸-۷. برای اثبات سیگنال نوری را در مسیر نامشخص

$$x_i = x_i(u), \quad i = 1, 2, 3 \quad (19-7)$$

در نظر می‌گیریم که در آن u یک پارامتر است. این سیگنال در رابطه $ds^2 = 0$ صدق می‌کند

$$Adt^2 + B(dx_1/du) du dt + \dots + E(dx_1/du)^2 du^2 + \dots + H(dx_2/du)(dx_2/du) du^2 + \dots = 0$$

که به شکل کلی

$$Adt^2 + P du dt + Q du^2 = 0 \quad (20-7)$$

است. در اینجا بستگی P و Q به زمان تنها از طریق ضرایب متریک است. این معادله عموماً دو جواب برای dt/du متناظر با دو سوی مسیر بینهایت کوچک طی شده، به دست می‌دهد و این دو جواب هنگامی مستقل از زمان‌اند، که ضرایب متریک مستقل از زمان باشند. از آنجا که زمان مختصاتی برای یک مسیر متناهی از انتگرال‌گیری یکی از جوابهای ۲۰-۷ حاصل می‌شود، پس شرایط (الف) و (ب) شرایطی لازم‌اند. برای اثبات لازم بودن شرط، ابتدا مسیرهای بینهایت کوچکی را در نظر می‌گیریم که دو مختص فضایی آنها، x_2 و x_3 ، ثابت است. آنگاه ۲۰-۷ به این صورت

$$Adt^2 + B(dx_1/du) du dt + E(dx_1/du)^2 du^2 = 0$$

درمی‌آید و برای جوابهای مستقل از زمان، B و E باید مستقل از زمان باشند. (اگر از روی شرایط (ب) A مستقل از زمان نباشد، A ، B ، و E می‌توانند ضریب وابسته به زمان مشترکی داشته باشند که از این معادله حذف شود.) به طریق مشابه C ، D ، F ، و G هم مستقل از زمان حاصل

می‌شوند. پس از آن مسیرهایی را در نظر بگیریم که فقط یکی از مختصات فضایی آنها، مثلاً x_1 ، ثابت نگه‌داشته شود. این عمل H را مستقل از زمان به دست می‌دهد و I و J هم به طریق مشابه به دست می‌آیند. بدین ترتیب شرایط ما برقرار می‌شود.

برای اینکه عملاً یک مختص زمانی "خوب" پیدا کنیم، ابتدا متذکر می‌شویم که شرط (الف) به روشنی با این شرط هم‌ارز است که هر دو ساعت (مختصاتی) بنابر قضاوت طرفین، دارای آهنگهای مساوی هستند، یا با این شرط که هیچ سیگنالی، آن‌طور که ساعتهای مختصاتی اندازه می‌گیرند، دستخوش انتقال بسامد نمی‌شود. اما چنانکه در بخش ۷-۵ دیدیم اگر یک سیگنال از پتانسیل φ_1 به پتانسیل φ_2 برسد بسامدهای آن، که توسط ساعتهای معیار ثابت در این پتانسیلها اندازه‌گیری می‌شود، ν_1 و ν_2 باشد، آنگاه

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \exp \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} = \frac{\exp(-\varphi_2/c^2)}{\exp(-\varphi_1/c^2)} \quad (21-7)$$

پس آهنگ طبیعی هر ساعت مختصاتی را به اندازه ضریب

$$D = \exp\left(-\frac{\varphi}{c^2}\right) \quad (22-7)$$

تند می‌کنیم، که در آن φ پتانسیل در محل ساعت است. آنگاه در محل هر ساعت $dt = Dds/c$ واضح است که شرط (ب) ارضا می‌شود. به علاوه، این تصحیح منجر به ارضای شرط (الف) نیز می‌شود، زیرا حالا $\bar{\nu}$ بسامد مختصاتی سیگنالها، با ν ویژه بسامد، در رابطه $\bar{\nu} = \nu/D$ صدق می‌کنند، به طوری که بنابر ۲۱-۷، $\bar{\nu}_2 = \bar{\nu}_1$ و بسامد مختصاتی هیچ سیگنالی منتقل نمی‌شود. بنابراین ساعتهای ما هماهنگ شده‌اند و زمان "خوبی" را نشان می‌دهند.

در واقع، در فرایند همزمان‌سازی فوق از مفهوم پتانسیل نیوتونی می‌توان اجتناب کرد. کافی است آهنگ طبیعی هر ساعت مختصاتی را به اندازه ضریب D ، افزایش دهیم. این کار اتساع زمان آن را نسبت به یک ساعت معیار مفروض مثلاً در نقطه Z خنثی می‌کند. آنگاه می‌توان φ را با ۲۲-۷ تعریف کرد و ۲۱-۷ را به دست آورد. زیرا با فرض ایستا بودن میدان، تمام سیگنالهای مثلی از Z به P_1 به P_2 به Z در نقطه Z مدت یکسانی در راهند؛ اما از آنجا که ترتیبی دادیم تا سیگنالها از Z به P_1 و از P_2 به Z همواره مدت یکسانی در راه باشند پس باید این امر برای سیگنالهای از P_1 به P_2 نیز صادق باشد. در نتیجه باید $\bar{\nu}_2 = \bar{\nu}_1$ ، و بنابراین ۲۱-۷ برقرار است. به این ترتیب کل فرایند از هر گونه تردیدی در مورد تقریب عاری است، که در به دست آوردن اولیه ۲۱-۷ مستقر بوده است. توجه کنید که، مانند مورد نیوتونی، φ تا یک ثابت جمع‌پذیر K معین است. افزایش φ به اندازه K هم‌ارز است با انتقال نقطه صفر Z به نقطه‌ای با پتانسیل $-K$ و مدرج‌سازی مجدد زمان مختصاتی به اندازه ضریب $-\exp(-K/c^2)$.

تنها چیزی که باقیمانده است، همزمان کردن قرائت ساعتهاست به طوری که متریک هنوز هم ساده تر شود. برای نیل به این هدف، لازم است تفاوت میان میدانهای ایستا و مانا را بحث کنیم. دو خاصیت ممکن زیر را برای میدانها در نظر بگیرید: (الف) استقلال از زمان و (ب) برگشت پذیری در زمان. مقصود از (الف) این است که امکان دارد یک مختص زمانی "خوب" پیدا کنیم که برحسب آن ضرایب متریک مستقل از زمان باشد. مقصود از (ب) این است که برحسب هر زمان "خوب" — برای هر حرکت ممکن یک فوتون، حرکت معکوس آن در زمان نیز امکانپذیر است. (پس نتیجه می گیریم که این خاصیت در مورد ذرات آزمون نیز برقرار است.) هر میدانی که شرط (الف) در آن صدق کند، مانا خوانده می شود. به طور مثال میدان گرانشی روی یک کره در حال دوران، میدانی ماناست که از شرط (ب) پیروی نمی کند. میدانهایی که هر دو شرط (الف) و (ب) در آنها برقرار باشد ایستا خوانده می شوند. اکنون ثابت می کنیم که ایستایی متناظر است با وجود یک مختص زمانی t ، که نه تنها متریک برحسب آن مستقل از زمان است بلکه جملات ضربدری زمان-فضا (مثل $dt dx$) نیز در آن وجود ندارد. فرض کنیم زمان "خوب" t را انتخاب کرده باشیم. برای یک شعاع نوری در جهت فضایی داریم $(dx_1, 0, 0) ds^2 = 0$ و $dx_2 = dx_3 = 0$ پس برای متریک $7-18$ به دست می آوریم

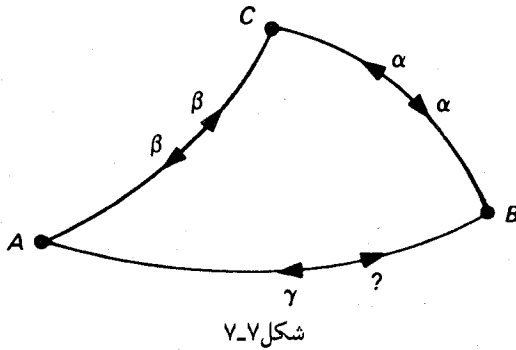
$$A dt^2 + B dx_1 dt + E dx_1^2 = 0$$

برای اینکه سیگنال نوری در زمان برگشت پذیر باشد، باید این معادله مقادیر مساوی و مخالف برای dt/dx_1 به دست دهد، یعنی باید $B = 0$ باشد. به همین طریق می توان برای صفر بودن ضرایب $dt dx_2$ و $dt dx_3$ استدلال کرد. برعکس اگر تمام جمله های ضربدری dt حذف شوند، جمله با ضریب P در $7-2$ وجود نخواهد داشت و بنابراین هر سیگنال نوری بینهایت کوچک، برگشت پذیر خواهد بود. از آنجا که سیگنالهای نوری متناهی با انتگرال گیری از سیگنالهای بینهایت کوچک به دست می آیند، پس حکم ما اثبات می شود.

سرانجام نشان می دهیم که با شرط ایستایی میدان، چطور می توان به همزمانی قرائت ساعتها دست یافت. فرض کنیم ساعتها هماهنگ هستند (همزمانی آنها). حال قرائت ساعتها را با ساعت دلخواه C طوری همزمان می کنیم که یک سیگنال از هر ساعت A به C و یا از C به A به زمان مختصاتی یکسانی احتیاج داشته باشد. قبل از این همزمانی ممکن است سیگنالی که در زمان $t_C = 0$ از ساعت C ، انتشار یافته است در زمان $t_A = \lambda$ به A برسد، درحالی که سیگنال منتشر شده در $t_A = 0$ از A ممکن است در $t_C = \mu$ به C برسد. برای رسیدن به زمان یکسان برای دو سفر، کافی است ساعتی را که در A است دوباره میزان کنیم، به طوری که

$$t_A \rightarrow t'_A = t_A + \frac{1}{\nu} (\mu - \lambda)$$

در این صورت، زمان سفر مختصاتی در هر یک از دو سو $1/2(\lambda + \mu)$ می شود. حال اگر همه



ساعتها این چنین با C همزمان شده باشند، قرائت هر دو ساعت دلخواه نیز با یکدیگر همزمان خواهد بود. چه اگر فرض کنیم زمان مختصاتی برای سفر یک فوتون از C به B به A و بازگشت به C به ترتیب برابر با α و β باشد (شکل ۷-۷)، به طوری که زمان کلی در C سپری می شود برابر با $\alpha + \beta + \gamma$ باشد. بنابر فرضیه ما، این سفر در جهت عکس نیز ممکن است و زمان کل سپری شده همان مقدار قبلی خواهد بود. از آنجا که مسیرهای CA و BC زمانهای β و α را لازم دارند، AB ضرورتاً زمان γ را لازم خواهد داشت، و حکم ما ثابت است. هنگامی که آهنگ و قرائت ساعت‌های مختصاتی ما به ترتیب فوق هماهنگ شد، متریک ۷-۱۸ به صورت زیر خلاصه می شود

$$ds^2 = Adt^2 - d\sigma^2 \quad (23-7)$$

که در آن $d\sigma^2$ یک صورت درجه دوم مستقل از زمان بر حسب دیفرانسیل مختصات فضایی dx_i است. پس برای $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$ (جهانخط یک ساعت مختصاتی) داریم $ds^2 = Adt^2$. اما از آنجا که آهنگ طبیعی ساعتها را تماماً تغییر داده ایم، به طوری که $dt = D(c^{-1}ds)$ در نتیجه $A = c^2/D^2 = c^2 \exp(2\varphi/c^2)$ و از آنجا ۷-۲۳ به صورت زیر در می آید

$$ds^2 = \exp\left(\frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (24-7)$$

برای یک سیگنال نوری، $ds^2 = 0$ و از آن رو $d\sigma = \pm D^{-1}cdt$ ، که نشان می دهد $d\sigma$ فاصله "راداری" در فضای سه بعدی است یعنی ویژه زمان یک "پژواک" نوری ضربدر $c/2$. اما خطکشهای کوچک ساکن در میدان نیز فاصله راداری را اندازه می گیرند و این موضوع را می توان با انجام دادن آزمایش در دستگاه لخت ساکن موضعی آنها و توسل جستن به فرضیه طولها و ساعتها دریافت. پس $d\sigma^2$ همان متریک فضایی فضای سه بعدی میدان ماست. اما پیشگویی صورت دقیق آن به معادلات میدان احتیاج دارد. [در یک نظریه نسبیتی خاص از نوعی که در بخش ۲-۵ بحث کردیم $d\sigma^2$ باید $\exp(2\varphi/c^2)$ ضربدر یک ۳-متریک تخت باشد].

بدین طریق صورت کلی متریک فضا-زمان هر میدان ایستا به صورت رابطه ۷-۲۴ به دست می‌آید. انتقال بسامد ν_2/ν_1 در نور بین نقاطی با پتانسیلهای φ_1 و φ_2 دقیقاً توسط ۷-۲۱ داده می‌شود. تنها، مسئله تعیین محتوای φ به کمک پتانسیل نیوتونی است که به نظر می‌رسد در اینجا مبنای تقریبی داشته باشد، یعنی استدلالی که ما را از طریق ۷-۱۴ به ۷-۱۷ می‌کشاند. اما در واقع می‌توان با روشهای تانسوری نشان داد که به شرط محاسبه ۷-۱۵ در دستگاه لخت ساکن موضعی نقطه، φ در ۷-۲۴ دقیقاً توسط ۷-۱۵ با شدت میدان ربط دارد (که این کمیت اکنون به صورت منهای ویژه‌شتاب برداری یک نقطه ثابت در متریک $d\sigma^2$ تعریف می‌شود) (تمرین ۸-۶).

۷-۷ ژئودزیکهای میدان ایستا

کاربرد اصلی متریک فضا-زمان را در محاسبه مسیره‌های نور و ذره در میدان، به عنوان ژئودزیکهای متریک، می‌بینیم. ما در بخش گذشته صورت کلی متریک یک میدان ایستا ۷-۲۴ را، با توجه به عدم قطعیتی که در قسمت فضایی آن وجود دارد، به دست آوردیم. اما ملاحظات ابعادی دلالت بر این دارد که مرتبه بزرگی انحراف نسبی تمام ضرایب متریک از مقادیر نسبیتی خاص آنها در یک میدان ضعیف یکسان است. اما اختلاف ضریب $c^2 dt^2$ ، یعنی $1 + 2\varphi/c^2 \approx \exp(2\varphi/c^2)$ ، با واحد معمولاً کوچک است. مثلاً، در سرتاسر میدان خارجی خورشید، داریم

$$|2\varphi/c^2| < 0.5 \times 10^{-6}$$

بنابراین، فضا-زمان حتی حول یک جسم وزین مثل خورشید تقریباً مینکوفسکیایی خواهد بود. فرض کنید $d\sigma^2$ را توسط یک متریک فضای تخت، مثل $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ ، تقریب می‌کنیم. آیا بدین ترتیب ۵۰٪ عدم دقت در مسئله وارد کرده‌ایم؟ پاسخ بستگی به مورد دارد: برای مسیره‌های نوری، آری. از طرف دیگر، در مورد مدارهای "آهسته" ($v \ll c$)، سهم ضریب $c^2 dt^2$ بسیار بیشتر از ضرایب فضایی است. اگر $c^2 dt^2$ را تقریباً یک بگیریم، گرانش را عمدتاً کنار گذاشته‌ایم و اگر $d\sigma^2$ را با فضای تخت تقریب کنیم، فقط اشتباه کوچکی وارد می‌شود. این نکته را می‌توان به طریق زیر دریافت. در بین یک دسته جهانخط مجاور هم که دو رویداد را در فضا-زمان به یکدیگر وصل می‌کنند، ژئودزیک زمان‌گونه از همه طولانی‌تر است. در یک M_2 که مختصری تغییر شکل یافته باشد، جهانخط حرکت آهسته تقریباً موازی محور زمان است. بنابراین تغییر شکل بعد زمان اثری از مرتبه یک بر روی طول آن خط دارد، درحالی‌که اثر تغییر شکل ابعاد فضایی تنها از مرتبه دو است. جهت یک بحث کمی، متریک ایستای $Bd\sigma^2 - Ac^2 dt^2 = ds^2$ (تخت) را در نظر می‌گیریم. اختلاف A و B با واحد، انحراف از M_2 را اندازه می‌گیرد. برای جهانخط ذره‌ای با سرعت مختصاتی $v = d\sigma/dt$ ، داریم $ds^2 = dt^2(Ac^2 - Bv^2)$. بنابراین نسبت انحراف فضایی به انحراف زمانی برابر است با نسبت $c^2 : v^2$. مثلاً، برای همه سیاراتی که به دور خورشید

می‌گردند داریم $v < 50 \text{ km/s}$ ، پس $v^2/c^2 < 3 \times 10^{-8}$ ، که کوچک بودن سهم فضایی را نشان می‌دهد. اما در مورد ذرات سریع به‌خصوص برای نور، این سهم حتی در میدانهای ضعیف هم ممکن است قابل‌ملاحظه باشد و چنین نیز هست.

اکنون نوبت آزمون بزرگ است. با توجه به ملاحظات فوق، ژئودزیکهای "حرکت آهسته" متریک ۲۳-۷ که در آن $d\sigma^2$ توسط یک ۳-متریک تخت تقریب شده باشد، باید با تقریب خوب، مدارهای آشنای نیوتونی را در یک میدان "ضعیف" به‌دست دهند. در غیر این صورت، این مشکل را نمی‌توان با هیچ معادله‌ی میدانی که صورت دقیق $d\sigma^2$ را به ما بدهد حل کرد، و در نتیجه طرح نسبیت عام را باید رها کرد.^۱ با انجام محاسباتی تا مرتبه اول، جمله $\exp(2\varphi/c^2)$ را با $1 + 2\varphi/c^2$ تقریب می‌کنیم، به طوری که ۲۴-۷ به صورت زیر درآید

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (25-7)$$

که در آن $d\sigma^2$ تخت فرض شده است. برای جهانخط ذره‌ای بین رویدادهای \mathcal{P}_1 و \mathcal{P}_2 در زمانهای مختصاتی t_1 و t_2 داریم

$$\int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} (c^2 + 2\varphi - v^2)^{1/2} dt \quad (26-7)$$

که در آن $v = d\sigma/dt$ سرعت مختصاتی ذره است. برای اینکه جهانخط ژئودزیک باشد، این انتگرال باید بیشینه باشد. حال اگر φ/c^2 و v^2/c^2 هر دو نسبت به یک کوچک باشند، داریم

$$(c^2 + 2\varphi - v^2)^{1/2} = c \left[1 + (2\varphi - v^2)/c^2\right]^{1/2} \approx c \left[1 + \left(\varphi - \frac{1}{2}v^2\right)/c^2\right]$$

و بنابراین

$$\int_{\mathcal{P}_1}^{\mathcal{P}_2} ds = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \left(c^2 + \varphi - \frac{1}{2}v^2\right) dt = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt \quad (27-7)$$

که در آن U را به جای $\varphi + c^2$ ، و T را به جای $\frac{1}{2}v^2$ نشانده‌ایم. اما تعریف پتانسیل نیوتونی، با تقریب یک ثابت جمع‌پذیر، دلخواه است، و بنابراین U به اندازه φ پتانسیل مناسبی است؛ و T همان انرژی جنبشی نیوتونی ذره بر یکای جرم است. پس می‌بینیم که شرط بیشینه بودن آخرین انتگرال رابطه ۲۷-۷، همان اصل هامیلتونی است که می‌گوید، انتگرال $\int (T - U) dt$ برای مسیر یک ذره کمینه است (در فرمول ما جمله‌ها جابه‌جا شده‌اند، زیرا U ثابت بزرگ c^2 را در بردارد که

۱. پی بردن به اینکه به کدام قانون هندسی دیگری درباره حرکت می‌توان متوسل شد دشوار است.

$U - T$ را مثبت می‌کند). بدین طریق می‌بینیم که ژئودزیکهای حرکت آهسته در تقریب اول، واقعاً با مدارهای نیوتونی مطابقت دارند. لحظه‌ای که اینشتین توسط محاسباتی از این نوع دریافت که فرضیه ژئودزیکهایش "کار می‌کند" بی‌گمان لحظه‌ای از یاد رفتنی بوده است.

نتیجهٔ اخیر خصلت "انسان-ساخته" نظریه‌های فیزیکی را به خوبی نشان می‌دهد. تبیین مدارهایی که به طریق تجربی شناخته شده‌اند، توسط دو مدل کاملاً متفاوت همچون گرانش جهانی نیوتون و قانون ژئودزیکهای اینشتین، نکته‌ای است که به راستی در خور توجه است.

در یک مورد بسیار ساده، قانون ژئودزیکها را حتی از دیدگاه ابتدایی تری می‌توان نشان داد. یک جرم متقارن کروی m را در نظر بگیرید که دور از همهٔ اجرام دیگر قرار داشته باشد. پتانسیل نیوتونی φ آن برابر است با $-mG/r$ که در آن G ثابت گرانش و r فاصله از مرکز جرم است. ما مختصات قطبی معمولی ϕ, θ ، و r را برای $d\sigma^2$ اختیار می‌کنیم. تحت این شرایط، متریک ۲۵-۷ به صورت زیر درمی‌آید

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (28-7)$$

اکنون به دنبال مدارهای دایره‌ای حول جرم مرکزی می‌گردیم. می‌دانیم که مکانیک کلاسیک وجود این‌گونه مدارها را، مثلاً در فاصلهٔ r از m و با سرعت زاویه‌ای ثابت، ممکن می‌داند: تنها شرطی که لازم داریم برابری نیروی مرکز‌گریز $\omega^2 r$ با نیروی گرانشی Gm/r^2 است، پس

$$\omega^2 = Gm/r^3 \quad (29-7)$$

این، البته نمونهٔ خاصی از قانون سوم کپلر است. اکنون، از دیدگاه اینشتین آغاز می‌کنیم، به دنبال یک مدار دایره‌ای در فضا زمان ۲۸-۷ می‌گردیم که s را بیشینه کند. فرض می‌کنیم که این مدار در صفحهٔ استوای $\theta = \pi/2$ قرار دارد و دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = d\phi/dt$ است. بنابراین، طبق ۲۸-۷ برای یک دور کامل مثلاً از زمان t_1 تا t_2 داریم

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) - r^2 \omega^2 \right\}^{1/2} dt = \left\{ \quad \right\}^{1/2} \frac{2\pi}{\omega} \quad (30-7)$$

به ازای یک ω معین، s هنگامی بیشینه است که عبارت داخل دو ابرو بیشینه باشد، و این هنگامی روی می‌دهد که

$$\frac{d}{dr} \left\{ \quad \right\} = \frac{2Gm}{r^2} - 2r\omega^2 = 0$$

که با رابطه $۷-۲۹$ هم‌ارز است.

در واقع روش بیشینه‌سازی که در مورد $۷-۳۰$ به‌کار بستیم، درست آن روشی نیست که برای ژئودزیکها مناسب است. ژئودزیکها در میان همه منحنیهای همسایه‌ای که دو نقطه ثابت را به هم می‌پیوندند بزرگترین بازه طول را دارا هستند. درست است که تغییرات r در $۷-۳۰$ منحنیهای مجاور هم تولید می‌کند، اما این منحنیها هیچ نقطه (رویداد) مشترکی ندارند. با وجود این، همین‌که بدین طریق بیشینه‌ای به دست می‌آید، نشان می‌دهد که شاید این همان بیشینه مربوط (به ژئودزیک) باشد. (روش ما شبیه است به روش آزمایشی یافتن ژئودزیکهای روی کره به‌عنوان بزرگترین دایره در بین یک دسته دایره موازی.) و در واقع محاسبات دقیق، ژئودزیکهای متریک $۷-۲۸$ ، $۷-۲۹$ را به‌عنوان یک جواب به دست می‌دهد (آخر بخش $۸-۴$ را ببینید).

آنچه تا به حال گفته شد هنوز نسبیت عام نیست، بلکه فقط معقول بودن طرح اینشتین برای نسبیت عام را نشان می‌دهد. در نسبیت عام برای یافتن یک متریک با توسل به تقریبهای نیوتونی نیازی نیست، بلکه در عوض از معادلات میدان استفاده می‌شود؛ و برای یافتن ژئودزیکها یا هر خاصیت هندسی دیگر فضازمانهای مورد بحث لزومی به استفاده از روشهای تقریبی نیست، زیرا نظریه زیبا و بسیار پیشرفته هندسه ریمانی را در اختیار داریم. تصادفاً، این نمونه‌ای کلاسیک است که چگونه تخیلات یک ریاضیدان محض (هندسه n بعدی ریمان مربوط به سال ۱۸۵۴ و حساب تانسوری ریچی مربوط به آن) بعدها نقل مجلس فیزیکدانان می‌شود. تا اینجا ما از این محاسبات ریاضی تا حد ممکن طفره رفته‌ایم ولی بالاخره اکنون باید نظری سریع بدان بیفکنیم.

اما قبل از انجام این کار در فصل بعدی، باید مطالب قبلی را به‌جمال مرور کنیم. از لحاظ تاریخی دو اصل نقش اساسی در تدوین نسبیت عام داشته‌اند: اصل ماح اینشتین را برای فراتر رفتن از نسبیت خاص برانگیخت، و اصل هم‌ارزی راه را نشان داد. امروزه به‌هنگام پرداختن به نسبیت عام قطعاً می‌توان از اصل ماح صرف‌نظر کرد. اصل هم‌ارزی کفایت نکردن نسبیت خاص را برای پرداختن به گرانش نشان می‌دهد؛ به‌علاوه نشان می‌دهد که فضازمان تخت، که در نسبیت خاص آن را می‌بایم، تقریب موضعی از فضازمانی است که به‌طور سراسری ریمانی است. آنگاه اصل گالیله قانون ژئودزیک حرکت را پیش روی ما می‌گذارد، که به نوبه خود راز برابری جرم لختی و جرم گرانشی انفعالی را برملا می‌کند. اکثر نسبیت‌دانان جدید هنوز اصل هم‌ارزی را به‌عنوان یک راهنمای شهودی در ارائه نسبیت عام معتبر می‌شمارند. ولی برخی، مانند سینج آن‌را نادقیق و نالازم و مردود می‌شمارند و نسبیت عام را صرفاً مبتنی بر این اصل می‌دانند که فضازمان به‌طور موضعی مینکوفسکیایی و به‌طور سراسری ریمانی است و معادلات میدان اینشتین در آن برقرارند. در هر حال، چیزی شبیه به اصل هم‌ارزی لازم است تا راهنمای تطبیق قوانین فیزیک ناگرانشی با فضای خمیده جدید باشد (همان‌طور که در بخش $۸-۹$ خواهیم دید).



فرمولبندی رسمی نسبیت عام

۸-۱ تانسورها در نسبیت عام

هر چند ما در این کتاب از تانسورها چندان زیاد استفاده نمی‌کنیم، با این حال برای فهم درست نسبیت عام نمی‌توان از تانسورها صرف‌نظر کرد و حتی معادلات میدان را هم نمی‌توان بدون آنها بیان کرد. در این فصل خطوط اصلی نظریهٔ تانسورها را در حدی که لازم داریم ترسیم خواهیم کرد. از جمله به تانسور متریک، معادلات ژئودزیک، مشتق مطلق و تانسور خمیدگی خواهیم پرداخت. خواننده می‌تواند ابتدا نظری سطحی به این مطالب بیندازد و بعدها هر جا که لازم دید به آن رجوع کند.

تانسورهای چهاربندی (چارتانسورهای) نسبیت خاص به دستگاه مختصات "معیار" (x, y, z, t) وابسته‌اند، بدین معنی که تنها در نظر گرفتن مؤلفه‌های چارتانسور نسبت به هر یک از این دستگاهها کفایت می‌کند. این دستگاهها توسط تبدیلات عام لورنتس به یکدیگر وابسته‌اند و همان‌طور که دیدیم، قانونی وجود دارد که نحوهٔ تبدیل مؤلفه‌های چارتانسور را هنگام به‌کار بستن تبدیل لورنتس در مختصات، بیان می‌کند. در نسبیت عام، مانند هندسهٔ ریمانی، دستگاههای مختصات عامتری به‌ما تحمیل می‌شوند و بنابراین بهتر است از مختصات کاملاً دلخواه (گاوسی) استفاده کنیم. لزومی ندارد که این مختصات مدلول مستقیم فیزیکی داشته باشند و اغلب حتی مختص ممیزی که بتوان آن را زمان انگاشت، وجود ندارد. به‌طور مثال، می‌توان حتی در

M_2 (فضازمان تخت نسبیت خاص) از یک دسته مختصات معیار (x, y, z, t) به یک دسته مختصات گاوسی چون

$$x^1 = x + 2y, x^2 = 2x - y, x^3 = \exp(z + 2t), x^4 = \exp(z - 2t)$$

رفت که هیچ‌گونه مدلول مستقیم فیزیکی ندارد.

براین مبنای مؤلفه‌های تانسورها در نسبیت عام نسبت به دستگاههای مختصات دلخواه معین می‌شوند. این تانسورها الزاماً موضعی هستند، یعنی وابسته به نقطه‌ای در فضازمان‌اند. هنگامی که یک دستگاه مختصات گاوسی به دستگاهی دیگر تبدیل می‌شود، مؤلفه‌های هر تانسور از یک تبدیل نوعی پیروی می‌کنند که عموماً به نقطه‌ای که تانسور در آن واقع است بستگی دارد. مدل یک تانسور مرتبه یک پادوردای A^μ (بردار)، دیفرانسیل مختص dx^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) است. از آنجا که طبق سنت، تانسورهای پادوردا را با شاخص بالا مشخص می‌کنند (قبلاً در این کتاب از این سنت غفلت کرده‌ایم)، اکنون خود مختصات را نیز با شاخص بالا نوشته‌ایم تا dx^μ بدان صورت هست، یعنی یک بردار پادوردا، ظاهر شود. با وجود این تقاضاهای مختصات Δx^μ فقط تحت تبدیلات خطی، و خود مختصات x^μ تنها تحت تبدیلات خطی همگن، مانند مؤلفه‌های یک بردار رفتار می‌کنند، زیرا فقط در این صورت مانند dx^μ تبدیل می‌شوند.

اکنون تبدیل مختصات x^μ به x'^μ را در نظر بگیرید. (روشی که در حال حاضر اعمال می‌شود این است که دستگاه مختصات جدید — مؤلفه‌های تانسوری در این دستگاه را با پریم گذاشتن روی شاخص نشان دهند نه با گذاشتن پریم روی حرف اصلی. بنابراین μ و μ' را درست مانند μ و ν دو شاخص مختلف می‌دانیم. قبلاً در این کتاب از این قرارداد نیز چشم پوشیدیم.) بنابراین، بنابر قاعدهٔ زنجیری، دیفرانسیلهای مختصات چنین تبدیل می‌شوند

$$dx^{\mu'} = \sum_{\mu=1}^4 p_{\mu}^{\mu'} dx^\mu, \quad p_{\mu}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad (1-8)$$

و این مدل تبدیل برای هر بردار پادورداست. با اختیار کردن قرارداد جمع‌زنی اینشتین، می‌توانیم رابطهٔ بالا را بدون علامت \sum بنویسیم

$$dx^{\mu'} = p_{\mu}^{\mu'} dx^\mu \quad (2-8)$$

بر طبق این قرارداد هرگاه شاخصی در یک جمله یک بار در بالا و یک بار در پایین پیش بیاید، عمل جمع باید روی تمام مقادیر آن صورت گیرد (مثلاً $A_{\mu}^{\mu} = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 + A_4^4$). از این به بعد ما این قرارداد را به‌کار خواهیم برد.

اگر بنویسیم

$$p_{\mu'}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \quad (3-8)$$

و p های دیگر را به همین طریق تعریف کنیم، بنابر قاعده زنجیری داریم

$$p_{\mu'}^{\mu} p_{\mu''}^{\mu'} = p_{\mu''}^{\mu} \quad (4-8)$$

که μ'' به دستگاه مختصات سوم $x^{\mu''}$ مربوط می شود. به خصوص

$$p_{\mu'}^{\mu} p_{\nu}^{\mu'} = \delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (5-8)$$

در اینجا δ_{ν}^{μ} دلتای کرونکر است که توسط معادله آخر تعریف می شود. این رابطه نشان می دهد که ماتریسهای $(p_{\mu'}^{\mu})$ و $(p_{\mu}^{\mu'})$ وارون یکدیگرند.

دو نوع p که در ۱-۸ و ۳-۸ تعریف شدند ضرایبی هستند که در تعریف یک تانسور عام داخل می شوند. این ضرایب معمولاً ثابت نیستند بلکه وابسته به مکان اند. مدل یک تانسور مرتبه یک هموردا B_{μ} (که بردار نیز خوانده می شود)، "گردان" یک تابع زده ای φ است (یعنی تابعی که مقدار آن در هر نقطه با تغییر مختصات تغییر نمی کند):

$$\varphi_{\mu'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu'}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \right) p_{\mu'}^{\mu} = \varphi_{\mu} p_{\mu'}^{\mu} \quad (6-8)$$

اگر اعداد $A_{\nu}^{\mu, \dots}$ تحت تبدیل مختصات $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'}$ بر طبق قالب خطی

$$A_{\nu}^{\mu, \dots} = A_{\nu}^{\mu, \dots} p_{\mu}^{\mu'} \dots p_{\nu'}^{\nu} \dots \quad (7-8)$$

تبدیل شوند، گوئیم که این اعداد مؤلفه های یک تانسور مرتبه n هستند که نسبت به شاخصهای μ, \dots, ν پادوردا و نسبت به شاخصهای ν, \dots, μ هموردایند (جمع شاخصها n). به ازای هر شاخص روی $A \dots$ یک p وجود دارد، و در سمت راست عمل جمع روی همه شاخصهای بی پریم انجام می شود. (تحت تبدیل مختصات "متعامد" که مربوط به سه بردارهاست، فرقی میان هموردایی و پادوردایی نیست، به طوری که سه بردارها را می توان بدون هیچ تفاوتی با شاخص بالا یا با شاخص پایین نوشت.) مهمترین خاصیت تانسورهای عام، همچون چارانسورها، این است که هر گاه یک

اتحاد بین دو دسته مؤلفه‌های تانسوری نظیر $A^\mu = B^\mu$ در یک دستگاه مختصات برقرار باشد، در هر دستگاه مختصات دیگری نیز برقرار است و اثبات این نکته را می‌توان آنرا از ۷-۸ دریافت. در نتیجه، می‌توان همیشه مطمئن بود که معادلات تانسوری بیانگر واقعیات فیزیکی یا هندسی‌اند، یعنی بیانگر واقعیاتی هستند که از دستگاه مختصاتی که برای توصیف آنها به‌کار رفته است فراتر می‌روند. خاصیت مهم دیگر تبدیل ۷-۸، خاصیت گروهی است [شبه خاصیت گروهی تبدیل لورنتس - بخش ۷-۲ (ج)]. برای اثبات به‌عنوان نمونه، ۶-۸ را در $p_\nu^{\mu'}$ ضرب می‌کنیم و با توجه به ۵-۸ چنین به‌دست می‌آوریم

$$\varphi_{\mu'} p_\nu^{\mu'} = \varphi_{\mu} \delta_\nu^\mu = \varphi_\nu$$

پس تقارن اثبات می‌شود. همچنین اگر $\varphi_{\mu''} = \varphi_{\mu'} p_{\mu''}^{\mu'}$ از ۶-۸ و ۴-۸ داریم

$$\varphi_{\mu''} = \varphi_{\mu} p_{\mu''}^{\mu'} p_{\mu'}^{\mu''} = \varphi_{\mu} p_{\mu''}^{\mu}$$

پس تراگذری (تراپایی) اثبات می‌شود. در نتیجه این خواص گروهی می‌توانیم برای ساختن یک تانسور، ابتدا مؤلفه‌های آنرا به‌طور دلخواه در یک دستگاه مختصات مشخص کنیم و سپس با استفاده از قانون تبدیل تانسورها ۷-۸ مؤلفه‌های آنرا در هر دستگاه دیگر تعریف کنیم. آنگاه خواص گروهی، ارتباط تانسوری همه مؤلفه‌ها را تأمین می‌کند. زیرا مثلاً اگر چنین رابطه‌ای میان φ_{μ} با $\varphi_{\mu'}$ و $\varphi_{\mu''}$ باشد، به‌صورت تانسوری با φ_{μ} (به دلیل تقارن) و در نتیجه با $\varphi_{\mu''}$ (به دلیل تراگذری) مرتبط است.

تانسور صفر، تانسوری است که تمام مؤلفه‌هایش صفر باشد - و این خاصیت، با توجه به ۷-۸ در هر دستگاه مختصاتی صادق است. ناوردهای زده‌ای (که اغلب فقط زده‌ایها یا ناوردها نامیده می‌شوند) اعدادی هستند که از تبدیلات مختصات تأثیر نمی‌پذیرند. آنها را می‌توان همچون تانسورهای رده صفر انگاشت! حاصل جمع تانسورهایی که شکل شاخصی آنها یکی است در تانسورها توسط عملهای متناظر بر روی مؤلفه‌های تانسورها تعریف می‌شود و مسلماً خود نیز تانسور خواهد بود. به همین ترتیب است حاصلضرب خارجی تانسورها، مثل $A_{\mu\nu\sigma} B_\tau^p$. ادغام، عمل تانسوری مهم دیگری است. این عمل جمع روی یک جفت شاخص است که یک بار در بالا و یک بار در پایین آمده باشد، مثل $A_{\mu\nu}^{\mu}$ ، که مرتبه تانسور را به اندازه ۲ کم می‌کند. مثلاً

$$A_{\mu\nu}^{\mu'} = A_{\mu\nu}^\sigma \delta_\sigma^\mu p_{\nu'}^\mu = A_{\mu\nu}^\mu p_{\nu'}^\mu \quad \text{و بنابراین} \quad A_{\mu\nu}^{\sigma'} = A_{\mu\nu}^\sigma p_\mu^\mu p_\nu^\nu p_{\sigma'}^\sigma$$

ادغام در حاصلضرب خارجی، مثلاً $A_{\mu\nu} B^\mu$ ، را حاصلضرب داخلی می‌نامند. اگر در یک ادغام تمام شاخصها مصرف شوند، مثلاً در $A_{\mu\nu} B^\mu C^\nu$ ، نتیجه عمل یک کمیت زده‌ای است.

آخرین عمل جبری روی تانسورها جایگشت شاخصهاست، به طور مثال اگر مؤلفه‌های تانسور $A_{\mu\nu}$ به صورت یک مدل مربع شکل، شبیه یک ماتریس، نمایش داده شود، آنگاه $A_{\nu\mu}$ ها مؤلفه‌های قالب "ترانهاده" را نشان می‌دهند و همان طور که از ۸-۷ به وضوح برمی‌آید، تشکیل یک تانسور می‌دهند. بنابراین می‌توانیم جمعهای تانسوری مثل $A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$ و معادلات تانسوری مثل $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ تشکیل دهیم.

متریک یک فضا زمان عام را می‌توان به صورت

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}) \quad (۸-۸)$$

نوشت که در آن $g_{\mu\nu}$ ها تابع مختصات اند. تحت تغییر مختصات $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ ۸-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu'} p_{\mu'}^\mu dx^{\nu'} p_{\nu'}^\nu = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$$

که در آن

$$g_{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu} p_{\mu'}^\mu p_{\nu'}^\nu \quad (۹-۸)$$

این نشان می‌دهد که $g_{\mu\nu}$ یک تانسور است. شبیه فضاهاى اقلیدسی، مربع اندازه برداری چون A^μ و متعامد بودن دو بردار A^μ و B^μ چنین تعریف می‌شود

$$A^\nu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu, \quad g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = 0$$

دقت کنید که این تعاریف با تعاریف قبلی ما در مورد چار بردارها، با

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, c^2)$$

سازگار است. دو مختصه x^μ و x^ν را متعامد می‌نامند اگر $g_{\mu\nu}$ متناظر با آنها صفر شود. دلتای کرونکر یک تانسور است، زیرا

$$\delta_\nu^\mu p_\mu^\nu p_{\nu'}^\nu = p_\nu^\mu p_{\nu'}^\nu = \delta_{\nu'}^\mu$$

در نتیجه عناصر ماتریس (مقارن) وارون $(g_{\mu\nu})$ ، یعنی $g^{\mu\nu}$ ها، مؤلفه‌های یک تانسور پادوردا هستند زیرا به طور یکتا توسط معادله $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$ تعریف می‌شوند، و این معادله تانسوری و

بنابراین عام است؛ به شرطی که $g^{\mu\nu}$ ها تانسور باشند. $g_{\mu\nu}$ ها و $g^{\mu\nu}$ ها برای تعریف بالا و پایین بردن شاخصها مصرف می‌شوند. مثلاً با در دست داشتن A_μ ، تعریف می‌کنیم $A^\mu := g^{\mu\nu} A_\nu$ ؛ و با در دست داشتن B^μ ، B_μ را چنین تعریف می‌کنیم: $B_\mu := g_{\mu\nu} B^\nu$ و به همین ترتیب از معادلات $C^\mu_\nu = g^{\mu\sigma} C_{\sigma\nu}$ و غیره. این اعمال اغلب در سرتاسر یک معادله به‌کار بسته می‌شوند، مثلاً هر یک از معادلات $A_\mu + B_\mu = C_\mu$ و $A^\mu + B^\mu = C^\mu$ متضمن دیگری است. قاعدهٔ "آلاکلنگی" را، که رابطهٔ $A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$ نمونه‌ای از آن است، می‌توان به‌آسانی تحقیق کرد.

از بخش ۷-۴ به‌خاطر می‌آوریم که اگر طبق معمول $c = 1$ فرض شود، s ویژه‌زمان را در امتداد یک مسیر زمان‌گونه اندازه می‌گیرد. اکنون فرض کنید یک ذره دارای جهانخطی است، که معادلهٔ پارامتری آن

$$x^\mu = x^\mu(s) \quad (10-8)$$

است. این معادلهٔ مختصات را در هر لحظه از ویژه‌زمان آن به‌دست می‌دهد. آشکار است که مشتق dx^μ/ds یک بردار است، زیرا

$$\frac{dx^{\mu'}}{ds} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} p_{\mu'}^{\mu'} \quad (11-8)$$

اما $d^2 x^\mu/ds^2$ بردار نیست. زیرا اگر از ۸-۱۱ مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{d^2 x^{\mu'}}{ds^2} = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} p_{\mu'}^{\mu'} + \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d}{ds} (p_{\mu'}^{\mu'}) \quad (12-8)$$

و جملهٔ آخر معمولاً صفر نیست. این استدلال نشان می‌دهد که مشتق نرده‌ای یک تانسور معمولاً تانسور نیست، و دلیلش این است که p ها (به‌خلاف وضعی که در نظریهٔ چارانسورها دارند) عموماً ثابت نیستند.

با این حال، راهی برای تعریف مشتقهای خاصی از تانسورها که خود نیز تانسورند وجود دارد، و به‌علاوه این مشتق در یک دستگاه لخت موضعی به مشتق معمولی تبدیل می‌شود. برای این منظور به نمادهای کریستوفل $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ نیاز داریم که با معادلهٔ زیر (قرارداد جمع!) تعریف می‌شوند

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (g_{\tau\nu,\sigma} + g_{\tau\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\tau}) \quad (13-8)$$

در این معادله و از این به بعد، ویرگول مشتق جزئی را نشان می‌دهد: $g_{\tau\nu,\sigma} = (\partial/\partial x^\sigma) g_{\tau\nu}$. این Γ ها مؤلفه‌های یک تانسور نیستند. چنانکه خواهیم دید این کمیتها در مبدأ هر دستگاه لخت موضعی صفر می‌شوند.

اکنون، اگر A^μ برداری پادوردا باشد، می توان اثبات کرد که DA^μ/ds که با معادله

$$\frac{D}{ds}A^\mu = \frac{d}{ds}A^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu \frac{dx^\sigma}{ds} \quad (14-8)$$

تعریف می شود، یک تانسور است و آن را مشتق مطلق A^μ در جهت dx^μ می نامند. (مشتق مطلق تانسورهای دیگر به طریقی مشابه تعریف می شوند، معادله ۸-۲۴). اگر همان طور که اثبات خواهیم کرد Γ ها در مبدأ هر دستگاه لخت موضعی صفر شوند، این مشتق در آنجا به مشتق معمولی تبدیل می شود. مثلاً $(D/ds)(dx^\mu/ds)$ در دستگاه لخت موضعی به d^2x^μ/ds^2 تبدیل می شود. اما عبارت اخیر را به عنوان چارشتاب ذره مورد نظر می شناسیم، پس اگر معلوم شود که صفر شدن این بردار

$$\frac{D}{ds} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (15-8)$$

معادله دیفرانسیل یک ژئودزیک، یعنی جواب دقیق مسئله بیشینه کردن $\int |ds|$ ، را به دست می دهد، نباید متعجب شویم. معادله ۱۵-۸ شبیه است به معادله کلاسیک $\mathbf{a} = \sum \mathbf{f}$ برای شتاب در یک چارچوب مرجع نالخت، که در آن $\sum \mathbf{f}$ نشاندهنده نیروی لختی است (مثل نیروی کوریولیس) که بر یکای جرم وارد می شود. بنابراین Γ ها شبیه نیروهای لختی هستند که در اثر حرکت دستگاه مرجع پیدا می شوند. و این توضیحی است برای اینکه چرا Γ ها در چارچوب لخت موضعی صفر می شوند.

معادله ۱۵-۸ را می توانیم فوراً به ازای متریک ۷-۲۵ با $dy d\sigma^2$ اقلیدسی بیازماییم. اگر $x^\mu = (x, y, z, t)$ باشد، داریم $(g_{\mu\nu}) \approx \text{diag}(-1, -1, -1, c^2 + 2\varphi)$ و بنابراین $(g^{\mu\nu}) \approx \text{diag}(-1, -1, -1, 1/c^2 + 2\varphi)$. همه $g_{\mu\nu}$ ها جز $g_{\varphi\varphi}$ ثابت اند. پس، بنابر ۸-۱۳ از تمام $\Gamma_{\mu\nu}^i$ ها، تنها

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (16-8)$$

مخالف صفر است. برای ذره ای که آهسته حرکت کند، $ds \approx c dt$ است و بنابراین سه معادله اول ۱۵-۸ به

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (17-8)$$

یعنی $\mathbf{a} = -\text{grad } \varphi$ تبدیل می شوند، درحالی که معلوم می شود معادله آخر، با همان تقریب، یک اتحاد است. بدین ترتیب، تطابق ژئودزیکهای حرکت آهسته با مدارهای نیوتونی اندکی مستقیم تر (از اصل هامیلتون) مشخص می شود.

یکی از مهمترین نتایج برای پروراندن و فرمولبندی نسبیت عام این است: حول هر نقطه مفروض P در یک فضای n بعدی ریمانی می‌توان دستگاه مختصاتی ساخت که در آن Γ ها در نقطه P صفر می‌شوند. ابتدا مختصات دلخواه y^μ را برمی‌گزینیم. ژئودزیک دلخواه $y^\mu = y^\mu(s)$ را که از P می‌گذرد در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم " a^μ بردار مماس" آن در نقطه P باشد. حال اگر Q بر روی این ژئودزیک و به فاصله s از P قرار داشته باشد، می‌توان آن را در مختصات جدید چنین نشان داد

$$x^\mu = a^\mu s \quad (18-8)$$

برحسب مختصات جدید، معادله همه ژئودزیکهایی که از P می‌گذرند به صورت ۱۸-۸ است، و بنابراین در $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$ صدق می‌کنند. اکنون مقایسه با ۱۵-۸ نشان می‌دهد که Γ ها در نقطه P صفرند. مختصاتی که Γ ها برحسب آنها در نقطه P صفر شوند، مختصات "ژئودزیک" در نقطه P خوانده می‌شود. در واقع تعداد مختصات ژئودزیک در P نامتناهی است. رابطه میان هر دو تا از این‌گونه مختصات مثلاً x^μ و " $x^{\mu'}$ موضعاً خطی" است، یعنی در نقطه P

$$p_{\mu\nu}^{\mu'} = \partial^\nu x^{\mu'} / \partial x^\mu \partial x^\nu = 0$$

و هر دستگاهی که چنین رابطه‌ای با یک دستگاه ژئودزیک داشته باشد، خود نیز ژئودزیک است. زیرا در نقطه P تانسور ۱۵-۸ در هر دستگاه ژئودزیک به $d^2 x^\mu / ds^2$ تبدیل می‌شود، و بنابراین جمله آخر ۱۲-۸ صفر می‌شود؛ یعنی به‌ازای همه ژئودزیکهای گذرا بر P

$$p_{\mu\nu}^{\mu'} (dx^\mu / ds) (dx^\nu / ds) = 0$$

و بنابراین $p_{\mu\nu}^{\mu'} = 0$. عکس این استدلال نیز صحیح است، و بدین ترتیب حکم ما ثابت می‌شود. همچنین یادآور می‌شویم که Γ ها و مشتقهای اول g همه با هم صفر می‌شوند. این نتیجه‌ای است از ۱۳-۸ و "معکوس" آن یعنی

$$g_{\mu\nu,\sigma} = g_{\mu\tau} \Gamma_{\nu\sigma}^\tau + g_{\nu\tau} \Gamma_{\mu\sigma}^\tau \quad (19-8)$$

اهمیت نتیجه بالا برای نسبیت عام از این‌رو است که دستگاههای مختصات ژئودزیک در رویداد \mathcal{D} از فضا-زمان، علاوه بر تمام دستگاههایی که توسط تبدیلات خطی موضعی از آنها به دست می‌آیند در واقع چارچوبهای لخت موضعی در \mathcal{D} هستند. برای اثبات، دستگاه ژئودزیک دلخواهی را در \mathcal{D} در نظر می‌گیریم. ابتدا با یک تبدیل خطی، مجذورها را در \mathcal{D} کامل می‌کنیم — همانطور که

در ۷-۱۱ کردیم— تا یک دستگاه مختصات مینکوفسکیایی موضعی x, y, z, t به دست آوریم که مبدأ آن در \mathcal{P} باشد. حال تاریخچهٔ مجموعهٔ نقاط $x, y, z = \text{const.}$ را در نظر می‌گیریم. چون در \mathcal{P} ، $\partial g_{\mu\nu} / \partial t = 0$ است، پس فاصلهٔ بین این‌گونه نقاط همسایه در نزدیکی \mathcal{P} ثابت است. بنابراین چارچوب ما صلب است. به علاوه هر یک از نقاط آن یک ژئودزیک ترسیم می‌کند، زیرا $x, y, z = \text{const.}$ و $t = s$ در معادلهٔ “موضعی” ژئودزیکها $d^2 x^\mu / ds^2 = 0$ صدق می‌کند. بنابراین، دستگاه آزادانه “سقوط” می‌کند، و حکم ما ثابت می‌شود. دقت کنید که چارچوبهای لخت موضعی فقط دستگاههایی موضعیاً مینکوفسکیایی (یعنی موضعیاً متعامد) نیستند: این دستگاهها را می‌توان از هر دستگاه مختصاتی، صرفاً با درآوردن جملات به صورت مجموع چند مجذور در \mathcal{P} به دست آورد. چارچوبهای لخت موضعی را (مانند تمام دستگاههای ژئودزیک) می‌توان به طور هندسی توسط یک شبکهٔ مختصات که به طور موضعی شبکه‌ای ژئودزیک است و به طور خطی مدرج شده است مشخص کرد. این امر را می‌توان با یک فضای دوبعدی خمیده، مثلاً کره، نمایش داد. مختصات قطبی معمولی θ و ϕ (شکل ۷-۶) ژئودزیک نیستند، مگر در نقاط روی استوا: تنها در آنجاست که خطوط مختصات موضعیاً (در واقع به طور همه‌جایی) ژئودزیک هستند.

انتقال موازی اندیشه‌ای است که با اندیشهٔ مختصات ژئودزیک در فضاهای ریمانی ارتباط نزدیک دارد. برای اینکه بردار A^μ را در امتداد یک منحنی از پیش تعیین شده‌ای انتقال دهیم، به یک دستگاه ژئودزیک موضعی در نقطهٔ P از منحنی می‌رویم و در آن دستگاه انتقال موازی در نقطهٔ P را توسط $dA^\mu / ds = 0$ تعریف می‌کنیم. با مراجعه به ۸-۱۴ می‌بینیم که معادلهٔ تانسوری $DA^\mu / ds = 0$ در همهٔ دستگاههای مختصات صادق است. پس این معادلهٔ انتقال موازی است. هم‌ارز این عمل در روی یک سطح خمیده از این قرار است: روی یک تکه کاغذ تخت، یک منحنی دلخواه و یک میدان برداری موازی در امتداد این منحنی رسم کنید. نوار باریکی که از یک طرف به این منحنی محدود باشد، ببرید و آن را روی سطح بچسبانید. در نتیجه میدان برداری در امتداد منحنی روی سطح نیز موازی خواهد بود. دقت کنید که بنا بر ۸-۱۵ هر ژئودزیک بردار مماس خود dx^μ / ds را در امتداد خودش به طور موازی انتقال می‌دهد، و می‌توان آن را به همین صورت نیز تعریف کرد. به عنوان کاربرد اندیشهٔ فوق در فضا زمان سقوط آزاد یک ژيروسکوپ آزمونی (یک ذرهٔ آزمونی چرخنده) را در نظر بگیرید. می‌توان انتظار داشت که محور آن در امتداد مسیر ژئودزیکی‌اش به طور موازی انتقال یابد. این یک مبنای نظری برای آزمون ژيروسکوپی نسبیت عام است که اخیراً پیشنهاد شده است و شامل فرستادن یک ژيروسکوپ در مداری آزاد به دور زمین است. (استدلایهای قانع‌کننده‌تر دینامیکی نیز به همین پیش‌بینی منجر می‌شود.)

تانسوری که نقشی بنیادی در نسبیت عام بازی می‌کند، تانسور خمیدگی ریمان $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ است که چنین تعریف می‌شود (برای جزئیات نمادگذاری، ۸-۱۳ را ببینید)

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\mu_{\tau\rho} \Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\tau\sigma} \Gamma^\tau_{\nu\rho} \quad (۸-۲۰)$$

آیا $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ تانسوری است از سنخی که چهار شاخص آن نشان می‌دهد؟ این امر بدیهی نیست، اما از روی تعریف فوق می‌توان آن را اثبات کرد. در فضا زمان چهاربعدی دارای $4^4 = 256$ مؤلفه است، اما به علت تقارنهای خاص آن، تنها 20 تا از این مؤلفه‌ها مستقل‌اند. بهترین راه نمایش این تقارنها توسط نوع کاملاً هموردای آن $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau} R_{\nu\rho\sigma}^{\tau}$ است:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 \quad (21-8)$$

دقت کنید که به دلیل بافت Γ ها (با ۸-۱۳ مقایسه کنید)، $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ را کاملاً می‌توان از $g_{\mu\nu}$ ها و مشتقات اول و دوم آنها ساخت. چون تانسور است، پس نمی‌توان باگزینش یک دستگاه مختصات خاص آن را صفر کرد. زیرا در این صورت، بنابر ۸-۷، در هر دستگاهی صفر می‌شود. بنابراین، این تانسور حتی در چارچوب لخت موضعی نیز عموماً مخالف صفر است. در فضای تخت (مثل M_4) البته مختصاتی هستند که g ها را ثابت و بنابراین Γ ها را در همه جا صفر می‌کنند، در نتیجه، در فضای تخت $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} \equiv 0$ است. عکس آن نیز صادق است. پس شرط لازم و کافی برای تخت بودن (یعنی اقلیدسی یا شبه‌اقلیدسی) بودن یک فضا این است که $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} \equiv 0$ باشد. یک راه برای دریافتن چگونگی رابطه میان $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ و مفهوم هندسی خمیدگی، مطالعه "انحراف ژئودزیک" است. دو ژئودزیک مجاور هم و تقریباً موازی را در نظر می‌گیریم و بردار عمود بر هر دو، و نیز متصل‌کننده آن دو را η^{μ} می‌نامیم. با کمک معادله ۸-۱۵ می‌توان نشان داد

$$\frac{D^{\nu}\eta^{\mu}}{ds^{\nu}} = \frac{D}{ds} \left(\frac{D\eta^{\mu}}{ds} \right) = \left(R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} U^{\nu} U^{\rho} \right) \eta^{\sigma} \quad (22-8)$$

که در آن $U^{\nu} = dx^{\nu}/ds$ برای یکی از ژئودزیکهاست. این رابطه را با ۷-۶ مقایسه کنید. [به دست آوردن فرمولی برای خمیدگی $K(U^{\mu}, \eta^{\mu})$ فضا به‌ازای جهت (U^{μ}, η^{μ}) از رابطه ۸-۲۲ کار سختی نیست، اما آن را لازم نداریم.] اتفاقاً در این مورد یک راه عملی برای کشف مؤلفه‌های $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ در فضا زمان وجود دارد. مجموعه‌ای از ذرات آزمونی آزاد و مجاور هم را در نظر می‌گیریم (عموماً چهار ذره کفایت می‌کند) و چارسرعت U^{μ} آنها و 20 مؤلفه از شتابهای متقابل $D^{\nu}\eta^{\mu}/ds^{\nu}$ آنها را اندازه می‌گیریم؛ این مقادیر را در ۸-۲۲ می‌نشانیم و آن را برای 20 مؤلفه مستقل تانسور خمیدگی حل می‌کنیم.

سرانجام، مشتق هموردای یک تانسور دلخواه را نیز باید یادآور شد. تعریف آن چنین است

$$A_{\nu\dots\sigma}^{\mu\dots} = A_{\nu\dots\sigma}^{\mu\dots} + \Gamma_{\tau\sigma}^{\mu} A_{\nu\dots\tau}^{\dots} + \dots - \Gamma_{\nu\sigma}^{\tau} A_{\tau\dots}^{\mu\dots} - \dots \quad (23-8)$$

در اینجا مانند ۸-۱۳، " σ "، به جای $\partial/\partial x^{\sigma}$ نشسته است، و به‌ازای هر شاخص پادوردای $A_{\nu\dots\sigma}^{\mu\dots}$ یک جمله مثبت Γ و به‌ازای هر شاخص هموردا یک جمله منفی Γ داریم. می‌توان نشان داد که

مشتق هموردا تانسوری است که یک شاخص هموردا، یعنی σ ، بیش از $A^{\mu\dots}$ دارد. این مشتق در مبدأ مختصات ژئودزیک (جایی که $\Gamma_{\tau\sigma}^{\mu} = 0$ است) به مشتق جزئی معمولی تبدیل می‌شود. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که مشتق هموردا $g^{\mu\nu}$ ، $g_{\mu\nu}$ و δ_{ν}^{μ} صفر است؛ همچنین نتیجه می‌شود که عمل "σ" خطی است و از قاعده لایب‌نیتس پیروی می‌کند. رابطه میان مشتق مطلق با مشتق هموردا چنین است

$$\frac{D}{ds} A^{\mu\dots} = A^{\mu\dots;\sigma} \left(\frac{dx^{\sigma}}{ds} \right) \quad (24-8)$$

بنابراین مشتق مطلق در مبدأ مختصات ژئودزیک به مشتق معمولی تبدیل می‌شود (همانطور که در مورد خاص ۸-۱۴ دیده‌ایم). در نتیجه این مشتق نیز خطی است و از قاعده لایب‌نیتس پیروی می‌کند. مشتق‌های دوم هموردا را نمی‌توان جابه‌جا کرد، مگر در مورد نزده‌ایها. می‌توان ثابت کرد که برای یک نزده‌ای φ ، $\varphi_{;\sigma;\tau} = \varphi_{;\tau;\sigma}$ ، اما برای یک بردار A^{μ} .

$$A^{\mu}_{;\sigma;\tau} - A^{\mu}_{;\tau;\sigma} = -A^{\rho} R^{\mu}_{\rho\sigma\tau} \quad (25-8)$$

۲-۸ معادلات میدان خلأ نسبیت عام

میدان گرانش نیوتونی g را در همسایگی هر رویداد مفروض \mathcal{P} می‌توان به صورت زیر تفکیک کرد

$$g = g_0 + \Delta_0 g$$

که در آن g_0 میدان در \mathcal{P} است و $\Delta_0 g$ توسط همین معادله تعریف می‌شود. چون g_0 با رفتن به هر چارچوب لخت موضعی S_0 (در سقوط آزاد) "حذف" می‌شود، آنچه که از میدان g_0 در چارچوب S_0 در \mathcal{P} حس می‌شود، میدان $\Delta_0 g$ است که به میدان کشندی موسوم است. چنانکه از این نامگذاری برمی‌آید، این نوعی از میدان است که کشنده (جزر و مد‌های روی زمین را تولید می‌کند، زیرا زمین (جدا از چرخش) تشکیل چارچوبی را می‌دهد که در میدان گرانشی مرکب خورشیدماه در حال سقوط آزاد است. همچنین، میدانی که در روی زمین باعث می‌شود دو ذره آزاد روی یک خط افقی مشترک در داخل آسانسوری که در حال سقوط است به هم نزدیک شوند، همان میدان کشندی است. نیروهای کشندی همواره نشانه‌ای هستند از یک میدان گرانشی ذاتی، یعنی میدانی که نمی‌توان آن را به گرانش چارچوب مرجع نسبت داد. نیروهای کشندی تنها نیروی گرانشی‌اند که می‌توان آنها را به صورت تانسوری نمایش داد، زیرا قسمت ناکشندی را می‌توان همواره در یک چارچوب لخت موضعی حذف کرد. راه کشف نیروهای کشندی، مشاهده

مجموعه‌ای از ذرات آزمونی آزاد است که همسایهٔ یکدیگر باشند. اگر میان آنها شتاب نسبی وجود داشته باشد، آنگاه نیروهای کشندی نیز موجودند. بنابراین نیروهای کشندی و تانسور خمیدگی با هم پیش می‌آیند. (۲۲-۸) و روابط بعد از آن را ببینید) و تانسور خمیدگی باید معیاری برای سنجش نیروهای کشندی باشد.

اما هر میدان گرانش نیوتونی g از یک پتانسیل φ به روش معمولی اشتقاق پذیر است (معادلهٔ ۷-۱۵)

$$g_i = -\partial\varphi/\partial x^i = -\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (26-8)$$

φ_i در اینجا توسط معادلهٔ آخر تعریف می‌شود. (همینطور φ_{ij} نمایانگر $\partial^2\varphi/\partial x^i\partial x^j$ است.) بنابراین شتاب نسبی دو ذرهٔ آزمونی که توسط بردار رابط سه‌بعدی کوچک η^i از هم جدا می‌شوند چنین است

$$d^2\eta^i/dt^2 = dg_i = -\varphi_{ij}\eta^j \quad (27-8)$$

که در آن قرارداد جمع باز هم به‌کار رفته است. بنابراین میدان ذاتی را مشتق دوم پتانسیل تعیین می‌کند. حال نشان می‌دهیم که این مشتقات دوم در معادلهٔ پواسون صدق می‌کنند

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_{ii} = 4\pi G\rho \quad (28-8)$$

این، "معادلهٔ میدان" نظریهٔ گرانشی نیوتون است که میدان را با منابع آن مرتبط می‌سازد. این رابطه، اساساً همان قانون عکس مجذور است که به‌صورت موضعی نوشته شده است. اما، ابتدا میدانهای خلأ مثل میدان حول خورشید مورد توجه ماست که در این صورت $\rho = 0$ است و معادلهٔ پواسون به معادلهٔ لاپلاس تبدیل می‌شود

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_{ii} = 0 \quad (29-8)$$

مقایسهٔ ۲۷-۸ با ۲۲-۸ نشان می‌دهد که $R^\mu_{\nu\rho\mu} U^\nu U^\rho$ متناظر با φ_{ij} است. بنابراین معادلهٔ زیر مشابه‌ای است برای معادلهٔ لاپلاس ۲۹-۸ در فضا زمان

$$R^\mu_{\nu\rho\mu} U^\nu U^\rho = 0 \quad (30-8)$$

در اینجا نیز عمل جمع بر روی شاخص تکراری μ و نیز شاخصهای ν و ρ منظور شده است. اگر قرار باشد این رابطه، مستقل از U^μ ، که بالاخره به یک ذرهٔ خاص مربوط است، صادق باشد، باید

$$R_{\nu\rho\mu}^{\mu} =: R_{\nu\rho} = 0 \quad (31-8)$$

تانسور $R_{\nu\rho}$ را که با معادله بالا تعریف می‌شود، تانسور ریچی می‌نامند. (تانسور بودن آن به این دلیل است که از "ادغام" تانسور $R_{\nu\rho\mu}^{\mu}$ حاصل می‌شود.) به دلیل ۸-۲۱ این تانسور دارای خاصیت تقارن زیر است

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (32-8)$$

پس تعداد مؤلفه‌های مستقل آن 10 است. بنابراین آنچه از قیاس نیوتونی به عنوان معادلات میدان خلا نسبیت عام نتیجه می‌شود، صفر شدن 10 مؤلفه تانسور ریچی است. و این همان پیشنهادی بود که اینشتین در سال $1915/1294$ کرد و از بوه امتحان به خوبی بیرون آمده است: نسبیت عام، که توسط معادلات میدان فوق (و تعمیم آن به داخل ماده — بخش ۸-۸) تکمیل می‌شود، نه تنها در چارچوب خطاهای تجربی به همان نتایج نیوتونی که با مشاهدات مطابقت دارند می‌رسد، بلکه در مواردی چون "سه اثر قاطع" (اثر گرانشی دوپلر، خمیدگی نور، و پیشروی حضيض سیارات) که در آن نسبیت عام تفاوت قابل مشاهده‌ای با نظریه نیوتون دارد، نسبیت عام صحیح از آب درمی‌آید. با این حال، معادلات میدان تأثیری روی اثر گرانشی دوپلر که اصل هم‌ارزی آن را پیشگویی می‌کند (بخش ۷-۵) ندارد. بنابراین، این اثر را نمی‌توان آزمون به‌خصوصی برای معادلات میدان اینشتین دانست، هر چند یکی از پایه‌های نسبیت عام، یعنی اصل هم‌ارزی، را می‌آزماید.

اما چرا به جای یک معادله میدان نظریه نیوتون $8-29$ ، باید ده معادله در نسبیت عام باشد؟ دلیلش این است که معادلات میدان باید متریک را به‌طور کامل یعنی همه $g_{\mu\nu}$ ها را معین کند و تعداد آنها درست ده‌تاست، زیرا $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ است. این ده $g_{\mu\nu}$ در واقع نقش یک پتانسیل φ در نظریه نیوتون را دارند. این تشابه را به طرق مختلف می‌توان بیان کرد. متریک $7-25$ قبلاً رابطه نزدیک g_{44} را با φ در آن دستگاه مختصات به‌خصوص نشان داد، و اگر مختصات به دلخواه تغییر یابند تمام $g_{\mu\nu}$ ها با φ مربوط خواهند شد. همچنین نقش اصلی هر پتانسیل را به یاد می‌آوریم: چنانکه مثلاً در $8-26$ دیدیم، مشتقات اول پتانسیل رابطه مستقیم با نیرو (یعنی با شتاب) دارند. در نظریه ماکسول، به جای پتانسیل نرده‌ای نیوتونی φ ، یک پتانسیل چاربرداره Φ_{μ} داریم، به طوری که چارشتاب توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} = \frac{q}{cm_0} \sum_{\tau,\nu} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial \Phi_{\nu}}{\partial x^{\tau}} - \frac{\partial \Phi_{\tau}}{\partial x^{\nu}} \right) \frac{dx^{\nu}}{ds} \quad (33-8)$$

(پیوست ۲) معادلهٔ متناظر آن در نسبیت عام ۸-۱۵ است، که آن را می‌توان بدین صورت نوشت

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\frac{1}{2} \sum_{\tau, \nu, \sigma} g^{\mu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\tau} \right) \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \quad (۳۴-۸)$$

این معادله g ها را در نقش پتانسیل نشان می‌دهد. پس نسبیت عام را می‌توان از لحاظ صوری یک نظریهٔ گرانشی میدان با یک پتانسیل تانسوری $g_{\mu\nu}$ دانست.

همان‌طور که از تعریف $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ به‌وضوح دیده می‌شود، معادلات میدان ۸-۳۱، برحسب پتانسیل، معادلات دیفرانسیل رتبهٔ دواند (یعنی شامل مشتقاتی دوم $g_{\mu\nu}$ هستند نه بیشتر). این مورد نیز به حالت (خلاً) نیوتونی ۸-۲۹ و حالت (خلاً) ماکسولی شباهت دارد (پیوست ۲)، یعنی

$$\sum_{\mu, \nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \quad (۳۵-۸)$$

با این حال، معادلات میدان اینشتین، برخلاف معادلات میدان نیوتون با ماکسول، غیرخطی‌اند: این معادلات حاوی حاصلضرب g ها و مشتقات آنهاست. اما، همان‌طور که در بخش ۱-۱۵ متذکر شدیم، هیچ نظریهٔ خطی (که جوابهایش از اصل برهم‌نهی برخوردار است) نمی‌تواند اثرهای گرانشی خود گرانش را به حساب آورد.

آخرین نکته اینکه آیا، پس از همهٔ این صحبتها، تعداد معادلات میدان ۸-۳۱ زیادی نیست؟ آیا، با فرض شرایط کرانه‌ای مناسب، ده معادلهٔ دیفرانسیل، ده $g_{\mu\nu}$ مجهول را به‌طور یکتا تعیین نمی‌کنند؟ با این حال مسلم است که نمی‌خواهیم $g_{\mu\nu}$ ها را به‌طور یکتا پیدا کنیم، زیرا باید آزادی تغییر مختصات در فضا-زمان را داشته باشیم تا بتوانیم این متریک را به هر متریک هم‌ارز آن تبدیل کنیم. در واقع نظر ما این است که در تعیین $g_{\mu\nu}$ چهار درجهٔ آزادی داشته باشیم، متناظر با چهار تابع دلخواه $x^{\mu'} = x^\mu(x^{\mu'})$ که یک تغییر مختصات را مشخص می‌کند. تصادفاً، معادلات میدان در چهار اتحاد دیفرانسیلی صدق می‌کند (بخش ۸-۱)، بنابراین، معادلات میدان عملاً تنها شش قید دیفرانسیلی برای $g_{\mu\nu}$ ها قائل می‌شوند، که دقیقاً همان تعداد لازم است.

بنابراین، معادلات میدان $R_{\mu\nu} = 0$ از هر دیدگاه نظری درست به نظر می‌آیند. مسلم است که معادلاتی ساده‌تر و در ضمن سازگار با اندیشه‌های بنیادی نسبیت عام وجود ندارد. و باید خاطر نشان ساخت که معادلات میدان، گزینشی هستند نه اثباتی؛ یعنی جزء اصول (اکسیومهای) یک نظریه‌اند. قدم منطقی بعدی این است که ببینیم آیا این معادلات نتایج اثبات‌پذیری را به‌طور صحیح پیشگویی می‌کنند.

۳-۸ جواب شوارتس شیلد

اولین و مهمترین جواب دقیق معادلات میدان اینشتین در سال ۱۹۱۶/۱۲۹۵ توسط شوارتس شیلد پیدا شد. این جواب، متریک فضا-زمان است حول یک جرم m با تقارن کروی، که ممکن است خود این جرم توسط یک توزیع جرم با تقارن کروی، که به فاصله‌ای از آن قرار دارد، احاطه شده باشد. برای به دست آوردن آن، ابتدا از تقارن وضعیت استفاده می‌کنیم تا متریک را در حد امکان خلاصه کنیم. چون پیکربندی مورد نظر ما ایستاست، پس استدلال بخش ۷-۶ را می‌توان به کار بست، و با گزینش یک زمان مختصاتی مناسب می‌توان متریک را به صورت ۷-۲۴ درآورد. دنباله‌ای از کره‌های مرجع هم‌مرکز با m را تصور کنید، که هر کدام از یک شبکه از خط‌کشهای "بی‌وزن" (یعنی بسیار بسیار سبک) ساخته شده‌اند، به طریقی که گرانش آنها را فشرده نمی‌کند. تقارن کروی متضمن این است که فضای سه‌بعدی همان فضای اقلیدسی E_3 است که صرفاً تغییر شکل شعاعی یافته است. کره‌های مرجع، خودشان تغییر شکل نخواهند یافت، اما آهنگ افزایش سطح آنها با فاصله از m ممکن است با آهنگ اقلیدسی متفاوت باشد. از طرفی، متریک E_3 را می‌توان بدین صورت درآورد

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

در اینجا r و θ و ϕ مختصات قطبی معمولی هستند، که به ترتیب فاصله از مبدأ، انحراف از محور z ، و زاویه به دور محور z را اندازه می‌گیرند. حال دنباله‌ای از کره‌های $r = \text{const.}$ متشکل از خط‌کشها را در E_3 در نظر بگیرید، و فرض کنید هر نقطه شبکه‌ای روی کره‌های مرجع با مختصات r و θ و ϕ خود مشخص شده باشد. سپس یک دگردهی شعاعی این فضا را به دور مبدأ در نظر می‌گیریم درحالی‌که مختصات "نقاشی شده" را حفظ می‌کنیم. در این صورت، r دیگر لزوماً فاصله خط‌کشی از مبدأ را اندازه نمی‌گیرد، اما فواصل بر روی کره‌های مرجع، چون هنوز با خط‌کشها مطابقت دارند، تغییری نمی‌کنند. بنابراین معنی مختص شعاعی r اکنون فقط این است که مساحت کره $r = r_0$ برابر $4\pi r_0^2$ است. مختصات زاویه‌ای معنی قبلی خود را حفظ خواهند کرد. ژئودزیکهای فضایی گذرا بر مبدأ ($\theta, \phi = \text{const.}$)، به دلیل تقارن، ژئودزیک خواهند ماند، و نیز همچنان مسیره‌های ممکن برای نور و ذرات خواهند بود. حال تفاوت متریک فضایی با متریک قطبی تخت بالا این است که جمله $e^B dr^2$ به جای dr^2 نشسته است که B تابعی از r است. بنابراین، ۷-۲۴ را می‌توان بدین صورت نوشت

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (۳۶-۸)$$

در اینجا A و B تابعی از r هستند که باید توسط معادلات میدان تعیین شوند. واضح است که انتظار داریم متریکی که به دست می‌آوریم تفاوت زیادی با تقریب قبلی ما ۷-۲۸ نداشته باشد، اما این قضاوت را به عهده معادلات میدان می‌گذاریم.

چون متریکهای "متعامد" (یعنی متریکهایی شبیه ۳۶-۸ بدون جمله‌های ديفرانسیلی مختلط، که متریکهای "قطری" نیز خوانده می‌شوند) بسیار ریش می‌آیند، بنابراین ما در پیوست ۲ مؤلفه‌های تانسور ریچی را برای عامترین متریک از این نوع صورتبندی کرده‌ایم. این مؤلفه‌ها ارزش آن را دارند که یک‌بار برای همیشه محاسبه شوند، و هر وقت لازم شد صرفاً بدان صورت ارجاع داده شود. به‌خصوص، چون در هر فضای سه‌بعدی مختصات متعامد مجاز هستند، هر متریک ایستا ۲۴-۷ را می‌توان در مختصات متعامد نوشت و بنابراین آن را می‌توان بدین صورت بررسی کرد.

اگر شاخصهای ۱، ۲، ۳، ۴ به ترتیب منسوب به t, ϕ, θ, r باشند و اگر علامت پریم، مشتق نسبت به r را نشان دهد، برای متریک ۳۶-۸ چنین می‌یابیم

$$R_{11} = \frac{1}{r} A'' - \frac{1}{r} A' B' + \frac{1}{r} A'^2 - B'/r \quad (37-8)$$

$$R_{22} = e^{-B} \left[1 + \frac{1}{r} r (A' - B') \right] - 1 \quad (38-8)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (39-8)$$

$$R_{44} = -e^{A-B} \left(\frac{1}{r} A'' - \frac{1}{r} A' B' + \frac{1}{r} A'^2 + A'/r \right) \quad (40-8)$$

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu \quad \text{هرگاه} \quad (41-8)$$

معادلات میدان خلأ مستلزم این است که برای همه شاخصها $R_{\mu\nu} = 0$ باشد. بنابراین از ۳۷-۸ و ۴۰-۸ داریم

$$A' = -B' \quad (42-8)$$

بنابراین $A = -B + k$ که در آن k ثابت است. رجوع به ۳۶-۸ نشان می‌دهد که تغییر ساده $t \rightarrow e^{-k/2} t$ در مقیاس زمانی، k را جذب خواهد کرد؛ فرض کنیم این کار انجام شده باشد (این کار متناظر است با افزودن یک ثابت به پتانسیل ϕ در ۲۴-۷)، آنگاه

$$A = -B$$

با این شرط از ۳۸-۸ چنین به دست می‌آید

$$e^A (1 + rA') = 1$$

یا، با قرار دادن $e^A = \alpha$ داریم

$$\alpha + r\alpha' = (r\alpha)' = 1$$

از این معادله می‌توان فوراً انتگرال گرفت، در نتیجه

$$\alpha = 1 - \frac{2m}{r}$$

در این مرحله $2m -$ صرفاً یک ثابت انتگرال‌گیری است. چون ما فقط ترکیبی از معادلات $R_{11} = 0$ و $R_{22} = 0$ را به‌کار برده‌ایم، حال باید نشان دهیم که جواب ما در این معادلات به‌طور جداگانه صدق می‌کند. می‌توان نشان داد که این امر، مگر به‌ازای $r = 0$ و $r = 2m$ که نقاط تکین‌اند، صادق است.

بنابراین به متریک زیر دست یافته‌ایم

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (43-8)$$

اکنون این متریک را با $28-7$ مقایسه می‌کنیم که ژئودزیک‌های آن، چنانکه دیدیم، مستقل از هر ضریب (کوچک) dr^2 به‌مدارهای نیوتونی به دور جرم m نزدیک می‌شوند. در نتیجه m در $43-8$ همان جرم جسم مرکزی، در یک‌گانه‌ای است که در آن $G = c = 1$ است. (برای برگشت به یک‌گانه‌ای معمولی باید به جای m ، Gm/c^2 و به جای t ، ct را بنویسیم.) برحسب این یک‌گانه جرم زمین برابر 44° سانتی‌متر و جرم خورشید برابر 147 کیلومتر است.

دقت کنید که ما در محاسبات بالا هیچ‌گاه فرض نکردیم که فضا زمان در بینهایت، تخت (یعنی مینکوفسکیایی) است، با این حال متریک $43-8$ دارای این خاصیت است؛ پس این خاصیت باید صرفاً نتیجهٔ تقارن کروی، ایستایی، و معادلات میدان خلا باشد.

حتی اگر جرم کروی m توسط یک توزیع جرم با تقارن کروی در ورای کرهٔ Σ به‌شعاع مختصاتی r_0 محاط شده باشد، باز هم استدلالی که به $43-8$ انجامید، به‌کار می‌آید: متریک $43-8$ بین m و Σ صادق است. این به‌نوبهٔ خود به‌مشابهٔ نسبیتهٔ آن قضیهٔ نیوتونی می‌انجامد که می‌گوید، اگر کرهٔ Σ تهی باشد، داخل آن هیچ میدان گرانشی موجود نیست. چه در این صورت برای اجتناب از تکینگی باید در $43-8$ ، $m = 0$ قرار دهیم که نتیجهٔ آن فضای مینکوفسکی در درون Σ است، و این متناظر است با نبودن گرانش.

بیرکھوف نشان داده است ($1923/1302$) که برای به‌دست آوردن متریک $43-8$ حتی فرض ایستایی نیز لزومی ندارد و تنها چیزی که لازم است، تقارن کروی است.^۱ بنابراین حتی یک

۱. برای اثبات کامل به‌مقالهٔ زیر مراجعه کنید

جرم تپنده متقارن کروی نیز، که ماده تپنده متقارن کروی در ورای Σ آن را احاطه کرده است، منجر به همان متریک بین جرم و Σ می‌شود.

بررسی این متریک نشان می‌دهد که برخلاف آنچه ما در بخش ۷-۷ جهت سهولت کار فرض کردیم، هر جرم، فضای سه‌بعدی دور خود را خم می‌کند. البته این خمیدگی عموماً بسیار کوچک است و مقدار آن روی یک "صفحه" تقارن که از مبدأ می‌گذرد (مثلاً مکان هندسی نقاط $\theta = \pi/2$) برای مختص r برابر است با $-m/r^3$. این مقدار روی سطح زمین برابر است با $-27 \times 10^{-27} \text{ cm}^{-2}$ ، و روی سطح خورشید برابر است با $-4 \times 10^{-28} \text{ cm}^{-2}$. می‌توان اثبات کرد (تمرین ۸-۹) که هندسه فضایی ذاتی چنین "صفحه‌ای" با متریک

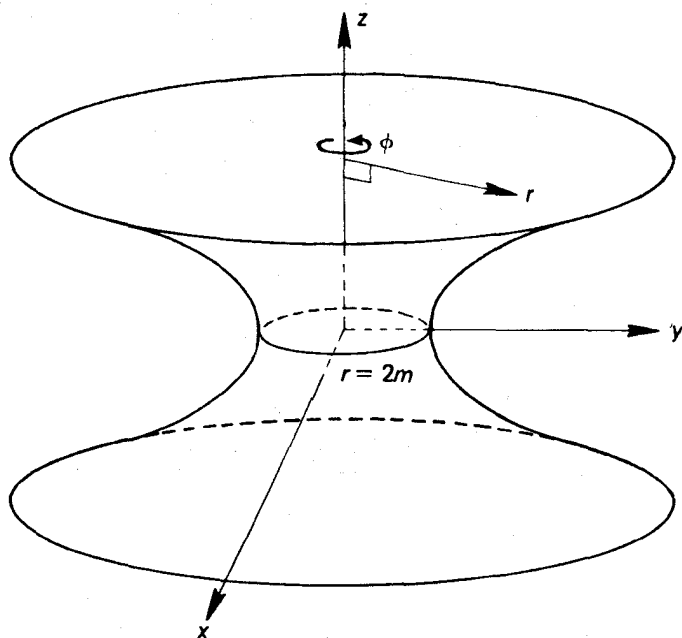
$$d\sigma^2 = dr^2 / (1 - 2m/r) + r^2 d\phi^2$$

همان هندسه فضایی ذاتی نیمه‌بالا سهمیوار فلام است که با دوران سهمی

$$z^2 = \lambda m (y - 2m), \quad x = 0 \quad (44-8)$$

در فضای سه‌بعدی اقلیدسی حول محور z تولید می‌شود؛ r متناظر با $(x^2 + y^2)^{1/2}$ و ϕ متناظر با زاویه حول محور z است (شکل ۸-۱). البته، تنها قسمتی از سهمی فلام به‌کار ما می‌آید که متناظر با شعاعهای r بزرگتر از جرم مرکزی است، متریک خلأ ما در درون جرم صادق نیست. خواننده لابد متوجه شده است که در $r = 2m$ که به شعاع شوارتس‌شیلد موسوم است و متناظر با دایره کمر سهمیوار است، اتفاق غریبی در ۸-۴۳ رخ می‌دهد. اگر معنی ds^2 را به‌خاطر بیاوریم، می‌بینیم که در این شعاع ساعت‌های معیار از کار می‌افتند و طول مختصاتی خط‌کشهای شعاعی صفر می‌شود. درباره این پدیده‌ها بعداً بحث خواهیم کرد. فعلاً تنها متذکر می‌شویم که شعاع شوارتس‌شیلد برای اجسام "معمولی" کاملاً در داخل آنها قرار دارد، و در این محل به‌هر حال نمی‌توان جواب خلأ ۸-۴۳ را به‌کار بست؛ مثلاً این شعاع برای خورشید برابر است با ۲٫۹ کیلومتر، برای زمین ۸۸ سانتی‌متر، و برای یک پروتون $10^{-52} \times 2.4$ سانتی‌متر (با این حال بخشهای ۸-۵ و ۸-۶ را ببینید). خمیدگی فضا، گرچه کوچک است، اما در دو پدیده "پس‌نیوتونی"، یعنی انحراف نور و پیشروی حضیض سیارات، سهم مهمی دارد. اگر در ۸-۴۳ به‌جای جمله دوم سمت راست فقط $-dr^2$ را قرار دهیم و ژئودزیکهای آن را محاسبه کنیم دو سوم پیشروی حضیض و یک دوم انحراف نور را به‌دست می‌آوریم.

شاید بد نباشد که نحوه سهمی شدن هندسه فضا را در این پدیده‌ها مستقیماً نیز دریا بیم. فرض کنید که با تخت‌انگاشتن هندسه فضا، مدار سیاره تقریباً دایره‌ای است به شعاع متوسط a و حضیض آن احتمالاً دارای مقداری پیشروی است، مانند منحنی C در شکل ۸-۲ (الف). در حقیقت "صفحه" این مدار، در اولین تقریب، مخروط مماس بر سهمی فلام با شعاع $r = a \cos \psi$



شکل ۱-۸

است [شکل ۲-۸ (ب)]، و چنانکه به سادگی می‌توان از ۴۴-۸ محاسبه کرد، زاویه کوچک ψ برابر است با

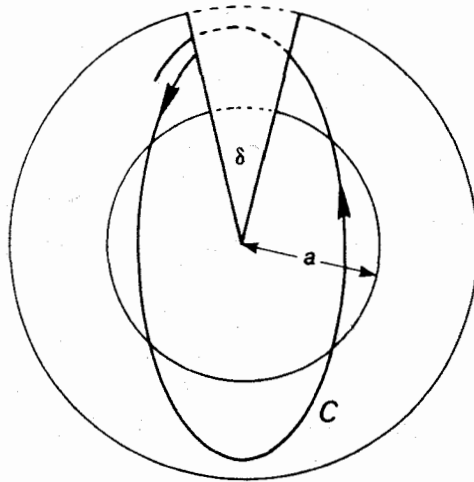
$$\psi \approx \frac{dz}{dy} = \frac{4m}{z} \quad (45-8)$$

برای اینکه صفحه‌ای را که در محاسبه با فضای تخت با آن سروکار داشتیم به صورت این مخروط درآوریم، باید از آن گوه‌ای با زاویه δ ببریم، به طوری که

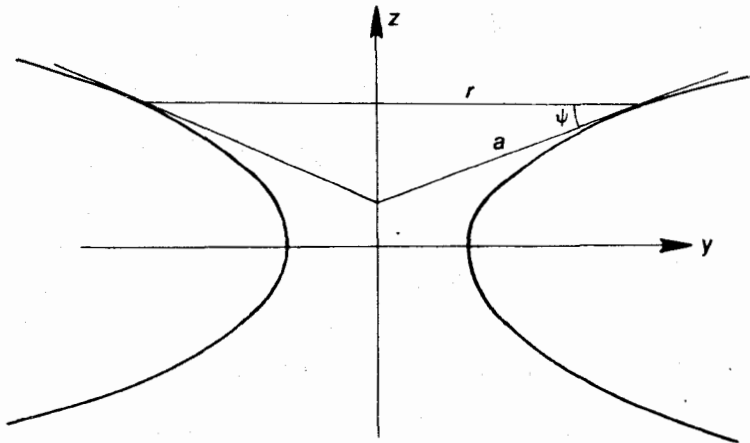
$$\begin{aligned} a(2\pi - \delta) &= 2\pi r = 2\pi a \cos \psi \\ &\approx 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2}\psi^2\right) \end{aligned} \quad (46-8)$$

روشن است که δ سهم هندسه فضا در پیشروی حضيض به شمار می‌آید. با حل ۴۶-۸ و جایگذاری از ۴۴-۸ و ۴۵-۸ (به ازای $y = r \gg m$) خواهیم داشت

$$\delta \approx \frac{2\pi m}{r} \quad (47-8)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲-۸

در بخش ۲-۸ خواهیم دید که این مقدار یک سوم کل پیشروی حضيض است. به همین طریق می‌توان سهم هندسه فضا را در خمیدگی نور دریافت. اگر یک نوار کاغذی دراز باریک مستطیل شکل را که خط مستقیمی در وسط آن رسم شده است (و متناظر است با مسیر مستقیم نور در فضای تخت)، بدون آنکه چین بردارد به نیمه بالای سهمیوار فلام بچسبانیم، و سپس از محور z در نقطه‌ای با z زیاد به آن بنگریم، خطی را که وسط رسم شده خمیده می‌بینیم، و

این درست همان سهم هندسه فضا در انحراف نور است. اگر همان طور که اصل هم‌ارزی در مورد پرتو نور ایجاب می‌کند خط وسط خودش نسبت به نوار اندکی خمیدگی داشته باشد، در آن صورت هنگام چسباندن نوار به سهموی، مقدار خمیدگی این خط بیشتر به نظر خواهد آمد. چنانکه در بخش ۱-۲۱ دیدیم، اصل هم‌ارزی، خمیدگی دقیق نور را در فضای ایستا به طور موضعی به دست می‌دهد. اکنون درمی‌یابیم که معنی آن چیست: مقصود فضای تختی است که بر فضای سه‌بعدی ایستا مماس است. و این متناظر است با عنصرهای کوچک صفحه مماس بر سهمیوار فلام. برای اینکه نحوه جفت‌وجور شدن این عنصرهای صفحه مماس را با یکدیگر و تشکیل دادن قسمتی از یک سهموی را دریابیم، به معادلات میدان نیاز داشتیم.

زاویه δ که در ۸-۴۷ محاسبه شد و در شکل ۸-۲ نشان داده شد، به‌وضوح بیانگر سهم هندسه فضا در پیشروی محور یک ژيروسکوپ آزمونی، که در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور جرم m می‌چرخد، نیز هست، به شرط آنکه محور در صفحه مدار قرار داشته باشد (در غیر این صورت این سهم مربوط می‌شود به تصویر محور بر این صفحه). سهم دیگری نیز در این پیشروی وجود دارد، به نام حرکت تقدیمی توماس، که پدیده‌ای است مختص فضای تخت: یک دسته چارچوب لخت را در نظر بگیرید که طوری حرکت می‌کنند که مسیر فضایی مبدأ هر یک بر دایره‌ای به شعاع r مماس است، به طریقی که ما هنگام گردش به دور این دایره با سرعت زاویه‌ای ثابت ω ، با سرعت نسبی صفر با این مبدأها تلاقی کنیم؛ اگر هر دو چارچوب پشت سرهم تصور کنند که جهت محورهایشان نسبت به هم چرخشی ندارد، با این حال پس از اینکه یک دور کامل حول دایره چرخیدیم، محورهای آخرین چارچوب به اندازه زاویه $\omega^2 r^2 / 2\pi$ و در سوی مخالف سوی مدار، نسبت به محورهای اولین چارچوب، چرخش خواهند داشت (تمرین ۲-۲۹). در مورد اخیر، این مقدار بنابر ۷-۲۹ برابر با $\pi m/r$ است. اما در مورد یک ژيروسکوپ آزادانه در حال سقوط باشد، سو معکوس می‌شود: این چارچوب میدان است که نسبت به ژيروسکوپ، که خود "آزاد" است، دارای حرکت تقدیمی توماس است. اثر کل، یعنی اثر هندسی و اثر توماس، برابر $3\pi m/r$ و $\pi m/r$ همان سوی مدار است، و به تقدیم فوکو-دوسیته مشهور است.

هنگام استفاده از متریک شوارتس شیلد ۸-۴۳، به خصوص در نجوم، مسلماً باید مدلول فیزیکی مختصات را درک کرد. درباره مدلول مختص t قبلاً در بخش ۷-۶ بحث شد. مدلول θ و ϕ به اندازه کافی روشن است، یعنی بر روی کره مختصاتی، $r = \text{const.}$ همان "مکمل عرض" و طول معمولی هستند. اگر m از شیشه می‌بود و ما می‌توانستیم از مرکز کره بیرون آن را مشاهده کنیم، می‌دیدیم که θ و ϕ به ترتیب همان زوایای معمولی با محور z و حول محور z هستند که بر روی نور صادر از یک رویداد اندازه‌گیری می‌شوند. (زیرا به دلیل تقارن — همان طور که محاسبه نیز نشان می‌دهد — مسیر نور می‌تواند $\phi = \text{const.}$ و θ باشد.) "فاصله به دست آمده از

۱. اگرچه ۸-۴۳ به داخل جرم m گسترش نمی‌یابد، اما تنها ضرایب dt^2 و dr^2 می‌توانند شکل مختلفی در آن داشته باشند، و این ضرایب بر استدلال پاراگراف حاضر اثری ندارند.

اندازه ظاهری“ از همین نقطه مشاهده خواهد بود، مقصود فاصله‌ای است که از خارج قسمت قطر یک شیء دور بر زاویه $d\alpha$ ، که تحت آن در مرکز رؤیت می‌شود، به دست می‌آید. زیرا طول یک خطکش در روی کره مرجع $r = \text{const.}$ با اختلاف مختصات $d\theta$ و $d\phi$ بنابر ۸-۴۳ برابر $r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)^{1/2} = r d\alpha$ است.

البته این تنها یکی از راههای ممکن برای اندازه‌گیری فاصله شعاعی است. راه دیگر این است که خطکشها را کنار هم قرار دهیم: این روش متناظر است با فاصله در امتداد سهمیوار فلام (با شکل ۸-۱ مقایسه کنید). با انتگرال‌گیری شعاعی از قسمت فضایی ۸-۴۳ می‌توان به چنین فواصل خطکشی رسید. چون

$$\int \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr = r \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} + 2m \log \left[(r - 2m)^{1/2} + r^{1/2} \right]$$

برای فاصله خطکشی بین مختصات r_1 و r_2 تقریباً مقدار زیر را به دست می‌آوریم

$$\sigma \approx r_2 - r_1 + m \log \frac{r_2}{r_1} \quad (48-8)$$

اگر مقدار زیر انتگرال را تقریباً برابر $1 + m/r$ بگیریم می‌توانیم مستقیماً نیز بدین نتیجه برسیم. بنابراین در میدان خورشید، افزونی فاصله خطکشی بر فاصله مختصاتی از سطح خورشید تا زمین برابر است با ۸ کیلومتر، یعنی اختلافی برابر یک قسمت در $10^7 \times 2$.

راه دیگر اندازه‌گیری فاصله، استفاده از رادار است. فرض کنید سیگنالی رادیویی از مختص r_1 به r_2 می‌فرستیم که در r_2 باز می‌تابد و پس از اینکه مدت ویژه‌زمان $2T$ در r_1 سپری می‌شود، به r_1 می‌رسد. پس فاصله راداری از r_1 به r_2 برابر است با $R = cT$ و با برحسب واحدهایی که در آن $c = 1$ است، $R = T$. برای این سیگنال داریم $ds^2 = 0$ ، بنابراین از ۸-۴۳ خواهیم داشت

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - 2m/r} = \pm \left(1 + \frac{2m}{r - 2m}\right) dr \quad (49-8)$$

از انتگرال‌گیری در امتداد مسیر و در هر یک از دو جهت، یک زمان مختصاتی سپری شده به دست می‌آید

$$\int dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2m}{r - 2m}\right) dr \quad (50-8)$$

برای برگرداندن این زمان به ویژه زمان T باید آن را در ضریب انبساط زمان $(1 - 2m/r_1)^{1/2}$ در محل مشاهده ضرب کرد. بنابراین چنین می‌یابیم

$$R = T = \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{1/2} \left[r_2 - r_1 + 2m \log \left(\frac{r_2 - 2m}{r_1 - 2m} \right) \right]$$

دیگر روشهای عملیاتی تعریف فاصله، از جمله کاربرد اختلاف منظر یا روشنایی ظاهری یک منبع دور و غیره، را می‌توان تماماً به طرز مشابهی با فاصله مختصاتی مرتبط ساخت. این روشها عموماً هم‌ارز نیستند، و بدین سبب است که وقتی در نسبیت عام از سرعت نسبی اشیاء بسیار دور از هم صحبت می‌کنیم، باید جانب احتیاط را رعایت کنیم.

۴-۸ پرتوها و مدارها در فضای شوارتس شیلد

نتیجه‌ای که می‌توان فوراً از متریک شوارتس شیلد ۴۳-۸ به دست آورد، انتقال گرانشی دوپلر در نوری است که از نقطه‌ای با مختص شعاعی r_1 به نقطه‌ای با مختص شعاعی r_2 می‌رود. لازم نیست که این نقاط را بر روی یک بردار شعاعی فرض کنیم. نظریه لازم در بخش ۶-۷ اثبات شده است: در هر متریک ایستای ۲۴-۷ نسبت بسامد دریافت شده (ν_1) به بسامد منبع مشابهی در محل گیرنده (ν_2)، دقیقاً توسط ۲۱-۷ داده می‌شود. این عبارت، جذر نسبت ضریب dt^2 در محل فرستنده بر ضریب dt^2 در محل گیرنده است. در مورد متریک ۴۳-۸ داریم

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left[\frac{1 - (2m/r_1)}{1 - (2m/r_2)} \right]^{1/2} \quad (51-8)$$

از متریک ۲۵-۷، که با تقریب خطی عبارت $\exp(2\varphi/c^2)$ از ۲۴-۷ به دست آمد، و با استفاده از پتانسیل نیوتونی به عنوان φ ، دقیقاً به همین نتیجه می‌رسیم. دقیق بودن این نتیجه ناشی از تقریب قبلی و همچنین به خاطر گزینش فعلی مختص شعاعی است، زیرا معلوم نیست که کدام یک از فواصل ناهم‌ارز در فضای خمیده، متناظر با فاصله در پتانسیل نیوتونی است. با این وصف، فرمول ۵۱-۸ را تا اولین تقریب (رتبه یک) نسبت به m/r (و این برای تمام تعاریف فاصله یکسان است)، می‌توان بدون استفاده از معادلات میدان از اصل هم‌ارزی پیشگویی کرد. در نتیجه، تحقیق این فرمول تا رتبه اول — که از طریق تجربیات زمینی مذکور در بخش ۱-۲۱ انجام می‌پذیرد — اصل هم‌ارزی را تأیید می‌کند، اما آن را نمی‌توان به خصوص مؤید معادلات میدان نسبیت عام دانست. در حال حاضر، متأسفانه نمی‌توان به تحقیق رتبه دوم این فرمول اندیشید. برای به دست آوردن مسیرهای دقیق نور و ذره در متریک شوارتس شیلد، باید معادلات ژئودزیک ۱۵-۸ را حل کرد. این معادلات را می‌توان به کمک Γ هایی که در پیوست ۱ آمده است برقرار

کرد، که ما از ذکر برخی از جزئیات آن صرفنظر می‌کنیم.^۱ بعد از محاسبه معلوم می‌شود که معادله متناظر با $\mu = 2$ متضمن این است که مسیرها (مثل نظریه نیوتون) "تخت" هستند، مثلاً: اگر ذره‌ای (یا پرتو نوری) ابتدا در صفحه $\theta = \pi/2$ حرکت کند، بعداً هم در همین صفحه حرکت خواهد کرد؛ در نتیجه، بدون اینکه به کلیت مسئله خدش‌های وارد شود، فرض می‌کنیم که حرکت در همان صفحه انجام می‌پذیرد. در این صورت معادلات باقیمانده را می‌توان (بدون تقریب) به یک جفت معادله بسیار مناسب زیر تبدیل کرد

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = h, \quad (h = \text{const.}) \quad (52-8)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2, \quad \left(u = \frac{1}{r}\right) \quad (53-8)$$

دقت کنید که معادله 52-8 برای متریک فضای تخت 28-7 نیز (به‌ازای $G = c = 1$) به همین صورت است، درحالی‌که در معادله 53-8 دو جمله اضافی در سمت راست موجود است، یعنی

$$m \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + 2mu \frac{d^2 u}{d\phi^2} \quad (54-8)$$

از طرف دیگر، در نظریه نیوتون تکانه زاویه‌ای کمیتی است پایسته، یعنی

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h \quad (55-8)$$

و قانون عکس مجذور متضمن برقراری معادله زیر است

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{m}{r^2} + r \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad (56-8)$$

جمله آخر شتاب گریز از مرکز است. معادله 56-8 را می‌توان با استفاده از معادله 55-8 به شکل زیر درآورد

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} \quad (57-8)$$

۱. این جزئیات را می‌توان به‌طور مثال در کتاب زیر یافت

می‌یابد و سرانجام قابل مشاهده می‌شود. پس تقریب دوم ما برابر است با

$$u = \frac{m}{h^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{3m^2}{h^2} e \phi \sin \phi \right) \\ \approx \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos \left(1 - \frac{3m^2}{h^2} \right) \phi \right] \quad (61-8)$$

که در اینجا از فرمول

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

و تقریبهای $\cos \beta \approx 1$ و $\sin \beta \approx \beta$ برای زاویه کوچک β استفاده کرده‌ایم. این معادله نشان می‌دهد که u (و بنابراین r) تابعی متناوب از ϕ است با دوره تناوب

$$\frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} > 2\pi$$

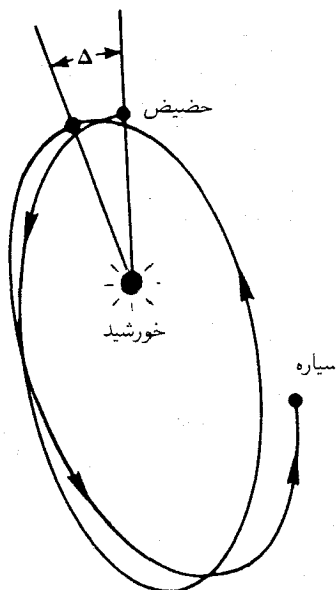
پس مقادیر r ، که البته یک بیضی تقریبی رسم می‌کند، فقط کمی پس از اینکه بردار شعاعی یک دور کامل زد شروع به تکرار می‌کنند. پس این مدار را می‌توان همچون بیضی انگاشت که به دور یکی از کانونهایش می‌چرخد (دارای "تقدیم" است) (شکل ۸-۳)، و این تقدیم در هر دور برابر است با

$$\Delta = \frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} - 2\pi \approx \frac{6\pi m^2}{h^2} \approx \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} \quad (62-8)$$

در اینجا از رابطه نیوتونی

$$\frac{2m}{h^2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{a(1 - e^2)} \quad (63-8)$$

استفاده کرده‌ایم که با قراردادن $\phi = 0, \pi$ از ۵۸-۸ به دست می‌آید، a نیم‌محور اطول و r_1 و r_2 مقادیر کمینه و بیشینه r یعنی $a(1 \pm e)$ هستند. این همان انتقال حضیض مشهور ایشتینی است. اگر متریک تخت ۷-۲۸ به کار رود، دو جمله اضافی ۵۴-۸ در سمت راست ۵۳-۸ پیش می‌آید که می‌توان با آنها کاملاً مانند جمله $3mu^2$ رفتار کرد؛ یعنی با جایگزین کردن ۵۸-۸ و با استفاده مجدد از انتگرالهای خاص ۸-۶۰ به همان نتیجه ۶۱-۸ می‌رسیم، با این تفاوت که اکنون جمله $\sin \phi$ در $2/3$ ضرب می‌شود که در نتیجه دو سوم کل انتقال حضیض نسبیت عامی



شکل ۳-۸

حاصل می‌شود. حداقل برای مدارهای دایره‌ای باید علت یک سوم "گمشده" را، همان‌گونه که در ۴۷-۸ دیدیم، در هندسه فضا جستجو کرد.

شاید خواننده در صحت فرضی که در ۶۱-۸ کردیم و ϕ را کوچک گرفتیم شک کرده باشد، زیرا ϕ در واقع مرتباً زیاد می‌شود. با این حال می‌توان از صورت فرمول ۵۳-۸ نتیجه گرفت که به‌ازای شرایط اولیه‌ای که به بیضیهای تقریبی منجر می‌شود، π تابعی است کاملاً متناوب از ϕ ، به‌گونه‌ای که قسمتی از مسیر که از تحلیل ما به دست می‌آید، معرف بقیه مسیر است. از طرف دیگر جوابهایی وجود دارند که هیچ مشابه نیوتونی ندارند، مانند مدارهایی که ماریچوار به سوی مرکز می‌روند.^۱

دقت نسبی در رصد حضيض سیارات نه تنها به اندازه Δ ، بلکه به خروج از مرکز دوره تناوب مدار نیز بستگی دارد. از این لحاظ عطارد مناسبترین مورد است [دوره تناوب = ۸۸ روز؛ $a = 5.8 \times 10^{12} \text{ cm}$ ؛ $e = 0.2$ ؛ $m(\text{خورشید}) = 1.5 \times 10^5 \text{ cm}$ برحسب یکاهای معمولان]. مقدار انتقال حضيض عطارد در صد سال زمینی که عملاً رصد می‌شود برابر است با $41'' + 0.74''$ (ثانیه قوسی). نظریه نیوتونی اختلال، تمام این اثر به‌استثنای $43''$ آن را بر مبنای تأثیر سایر سیارات و علل دیگر توضیح می‌دهد. اما این $43''$ اختلاف مدتها معمای

۱. برای مثال مراجعه کنید به

افزودن این جواب به ۸-۶۵، تقریب دوم زیر را به دست می‌دهد

$$u = \frac{\sin \phi}{R} + \frac{3m}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) \quad (66-8)$$

مسلم است که به ازای مقادیر بزرگ r ، ϕ بسیار کوچک است، پس $\sin \phi \approx \phi$ و $\cos 2\phi \approx 1$ بنابراین اگر معادله ۸-۶۶ را به حد $u \rightarrow 0$ برویم، می‌بینیم که $\phi \rightarrow \phi_\infty$ که در آن

$$\phi_\infty = -\frac{2m}{R}$$

در نتیجه، به دلیل تقارن، قدر مطلق انحراف کل پرتو برحسب رادیان برابر است با

$$\frac{4m}{R} \quad (67-8)$$

برای مثال، این مقدار در مورد پرتوی که از لبه خورشید بگذرد، برابر است با ۷۵ ر". آزمون آن از این طریق بوده است که مکان دانسته ستاره‌هایی که به هنگام کسوف کامل نزدیک لبه خورشید دیده می‌شوند با مکان رصد شده آنها مقایسه شده است. اخیراً نیز این آزمون توسط رصد رادیویی اخترشناسی که با خورشید تقریباً در یک امتدادند انجام گرفته است (بخش ۱-۲۱). توافق رصد با پیشگویی، رضایتبخش بوده است و مقدار $2m/R$ را که بر مبنای نظریه نیوتونی می‌توان پیشگویی کرد، به طور یقین رد می‌کند. مدار ۸-۵۸ را در نظر بگیرید که در آن (برای مطابقت با شکل ۸-۴) جمله $\sin \phi$ را به جای $\cos \phi$ می‌نشانیم. برای فوتونی که از کنار لبه خورشید می‌گذرد $h = Rc$ است. بنابراین با نشاندن $\phi = 1/2\pi$ در ۸-۵۸ (و $c = 1$) داریم

$$e = \frac{R}{m} - 1 \approx \frac{R}{m} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R} = \frac{m}{R^2}(1+e)$$

زیرا $R/m \gg 1$ است. اکنون، اگر همان‌گونه که با ۸-۶۶ رفتار کردیم، در معادله ۸-۵۸ نیز به حد $u \rightarrow 0$ برویم، چنین می‌یابیم

$$\phi_\infty = -1/e = -m/R$$

(سلدنر^۱ در سال ۱۸۰۱/۱۱۹۰ چنین محاسبه‌ای را انجام داده بود.) متریک فضای تخت ۷-۲۸ نیز، از طریق معادله ۸-۵۳ و ۸-۵۴ و روند بالا تنها به نصف انحراف کل نسبیت عامی منجر می‌شود.

در مورد "معادله فوتون" ۶۴-۸ نکته متفاوت دیگری وجود دارد و آن وجود مسیرهای نوری دایره‌ای است: زیرا روشن است که این معادله دارای جواب خاص $u = 1/3m$ و یا $r = 3m$ است. (این مدارها سه برابر مدارهای نوری دایره‌ای نیوتونی متناظر خود هستند، زیرا اگر مقادیر $\omega = c/r = 1/r$ و $G = 1$ را در ۲۹-۷ قرار دهیم نتیجه $r = m$ به دست می‌آید.) مدار $r = 3m$ (همان‌گونه که بررسی شکل ۱-۸ بی‌درنگ نشان می‌دهد) یک مسیر ژئودزیک در فضای سه بعدی نیست. (اگر زمان مطلق می‌بود، بر مبنای اصل فرما، که در واقع در نسبیت عام نیز صادق است، انتظار وجود چنین مسیری می‌رفت.) اما اگر ضریب dt^2 در یک متریک ایستا ثابت باشد، مسیر نوری یک ژئودزیک سه‌بعدی است (تمرین ۵-۸).

نکته قابل ذکر اینکه مدارهای دایره‌ای ذره‌ها در متریک شوارتس‌شیلد ۴۳-۸ دقیقاً از قانون کپلر ۲۹-۷ تبعیت می‌کنند، یعنی برحسب یکاهای اخیر

$$\omega^2 = \frac{m}{r^3} \quad (68-8)$$

که در آن $\omega = d\phi/dt$ البته دقیق بودن این تناظر معنی فیزیکی ندارد، زیرا بین مختصات نیوتونی و نسبیت عامی هیچ تناظری که به خوبی تعریف شده باشد وجود ندارد. برای به دست آوردن ۶۸-۸ از ۵۳-۸ نیز می‌توان استفاده کرد، اما راه سرراست‌ترین است که از معادله ژئودزیک به ازای $\mu = 1$ (با قراردادن $\theta = \pi/2$) استفاده شود. به ازای متریک ۳۶-۸ داریم (پانوشت صفحه ۱۷۶ را ببینید)

$$r'' + \frac{1}{r} (dB/dr) r'^2 - r e^{-B} \phi'^2 + \frac{1}{r} e^{A-B} (dA/dr) t'^2 = 0 \quad (69-8)$$

که در اینجا پریم نماینده مشتق d/ds است. با نشانیدن $r = \text{const.}$ و قراردادن مقدار A ، ۶۸-۸ بی‌درنگ به دست می‌آید. دقت کنید که این نتیجه مستقل از B است (که حذف می‌شود) و بنابراین در مورد متریک فضای تخت ۲۸-۷ نیز صادق است.

سرانجام، g یعنی شدت میدان را در متریک شوارتس‌شیلد ۴۳-۸ در نظر می‌گیریم. g را می‌توان در هر نقطه متریک ۲۴-۷، برطبق تذکرات پایان بخش ۶-۷ از طریق $g = -\text{grad } \varphi$ حساب کرد. از مقایسه ۴۳-۸ با ۲۴-۷، برحسب یکاهای اخیر، چنین می‌یابیم

$$\varphi = \frac{1}{r} \log \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \quad (70-8)$$

۱. تذکر: اگر g کوتاهترین فاصله بین دو نقطه در فضای کامل باشد، هیچ مسیر کوتاهتری در زیر فضا نمی‌تواند وجود داشته باشد، و واضح است که $r = 3m$ کوتاهترین راه بین هر دو نقطه بر روی سهموی نیست.

بنابراین میدان مسلماً شعاعی است و قدر مطلق آن برابر است با

$$g = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{d\sigma} = \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \quad (71-8)$$

که در آن σ نماینده فاصله خطکش است و از ۴۳-۸ می‌توان دید که $dr/d\sigma$ برابر $(1 - 2m/r)^{1/2}$ است. دقت کنید که g در فاصله شعاع شوارتس شیلد $r = 2m$ بینهایت می‌شود. در نتیجه هر ذره که در فضا در $r = 2m$ در حال سکون باشد یک فوتون است. (تذکر بعد از ۳۲-۲ را ببینید).

۵-۸ افق شوارتس شیلد، رمبش گرانشی، و سیاهچاله‌ها

یکی از خصوصیات میدان شوارتس شیلد که مدتها مورد سوءتفاهم بوده است، مکان هندسی نقاط $r = 2m$ از متریک:

$$ds^2 = \alpha dt^2 - \alpha^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad \left(\alpha = 1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (72-8)$$

است که از این پس آن را افق می‌نامیم. اکنون به بحث درباره افق، به هنگامی که خارج از جرم قرار داشته باشد، می‌پردازیم. در واقع متریک ۷۲-۸ را به‌ازای تمام مقادیر غیرمنفی r مطالعه می‌کنیم و فرض می‌کنیم که در $r > 0$ خلأ حاکم است و جرم m کاملاً به $r = 0$ محدود است. (بعداً معلوم خواهد شد که ساخت هندسی مکان هندسی $r = 0$ با ساخت نقطه کاملاً متفاوت است و به همین دلیل از اینکه آن را یک "نقطه" جرم‌دار بنامیم اجتناب می‌کنیم.) اگر به مراحل اصلی محاسبه متریک ۷۲-۸ رجوع کنیم به‌آسانی خواهیم دید که این متریک به‌ازای $r > 2m$ و $r < 2m$ در معادلات میدان خلأ نسبیت عام صدق می‌کند.

با این حال، در داخل افق، مدل‌های مختلفاً نسبتاً متفاوت است. در اینجا ضریب متریک dt^2 منفی و ضریب dr^2 مثبت است. معادله هیچ ذره یا فوتونی نمی‌تواند $r = \text{const.}$ باشد، زیرا این امر متضمن $ds^2 < 0$ است، درحالی‌که ds^2 برای رویدادهای مجاور هم بر روی (جهانخط) یک ذره برابر مجذور ویژه زمان است و بنابراین مثبت است؛ و برای فوتون برابر صفر است. در واقع r اکنون یک مختص "زمان" است، بدین معنی که r نمی‌تواند به‌ازای هیچ ذره یا فوتونی ثابت بماند. گرچه r ، θ ، و ϕ برحسب کره‌های مرجع $r = \text{const.}$ در داخل افق نیز همان مدل‌های هندسی خارج از افق را دارند، اما نمی‌توان به این کره‌ها از طریق شبکه‌های مادی ساکن تحقق بخشید. البته برای توضیح این امر نباید گفت که دیگر نمی‌توان در مقابل گرانش مقاومت کرد، زیرا ماده (یا نور) می‌تواند هم در راستایی که r افزایش می‌یابد حرکت کند و هم در راستایی که r کاهش می‌یابد. در واقع گزینش راستایی برای پیشروی "زمان r " در داخل افق با ماست. r برای تمام

ذرات یا فوتونها یا افزایش می‌یابد و یا کاهش، و هر حالتی غیر از این منجر به نقض علیت می‌شود. دقت کنید که متریک شوارتس شیلد در داخل افق ایستا نیست بلکه ضرایب آن وابسته به زمان هستند. علت این وابستگی همان‌گونه که خواهیم دید گزینش "بد" مختصات نیست، بلکه دلیل آن نامانایی ذاتی فضا-زمان درونی است. ما بعداً دربارهٔ مدلول t در داخل افق بحث خواهیم کرد. سالها عقیده بر این بود یک تکینگی واقعی در مکان $r = 2m$ وجود دارد، بدین معنی که فیزیک موضعی در آن مکان غیرعادی می‌شود. (همان‌گونه که بانندی متذکر شده است، اگر جرم گرانشی کنشگر به‌عوض مثبت بودن منفی می‌بود، بدون شک تکینگی شوارتس شیلد به‌عنوان دلیلی برای اثبات اینکه این جرم باید منفی باشد به‌کار گرفته می‌شد، زیرا مثبت بودن جرم به تکینگی منجر می‌شود ...) اما لومتر در سال ۱۹۳۳/۱۳۱۲ دریافت که تکینگی شوارتس شیلد به‌هیچ‌وجه یک تکینگی فیزیکی نیست، بلکه صرفاً یک تکینگی مختصاتی است، یعنی تکینگی‌ای که فقط ناشی از گزینش دستگاه مختصات است؛ بدین معنی که ناظری که در یک اتاقک کوچک در حال سقوط آزاد است، بدون اینکه کمترین چیزی حس کند، به داخل کره $r = 2m$ می‌رود.

تکینگی‌های مختصاتی را می‌توان بسیار ساده تولید کرد. مثلاً صفحهٔ اقلیدسی با متریک معیار $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$ را در نظر بگیرید و مختص جدید ξ را با معادله

$$\xi = \frac{1}{3}x^3 \quad (۷۳-۸)$$

تعریف کنید. این یک رابطهٔ یک به یک بین x و ξ است. روشن است که با این گزینش متریک به‌صورت زیر درمی‌آید

$$d\sigma^2 = (3\xi)^{-2/3} d\xi^2 + dy^2$$

این متریک در $\xi = 0$ دارای یک تکینگی است که تکینگی‌ای مختصاتی است، بدین دلیل که با تعریف متغیر "جدید" توسط معادلهٔ ۷۳-۸ می‌توان آن را کاملاً از بین برد. البته در حالت کلی نحوهٔ از بین بردن یک تکینگی مختصاتی یا حتی تشخیص مختصاتی بودن یا نبودن آن، به‌این اندازه بدیهی نیست. یکی از راههای پاسخ دادن به‌سؤال اخیر این است که ناوردهای تانسور خمیدگی (۱۴) ترکیب از مؤلفه‌های آن، که مستقل از مختصات اند و با روشهای معیار تانسوری ساخته می‌شوند) را حساب کنیم و ببینیم آیا این ناوردها هنگامی که به‌سوی تکینگی میل می‌کنیم متناهی می‌مانند: اگر متناهی بمانند، تکینگی احتمالاً فیزیکی نیست. (با این حال ممکن است تکینگی فیزیکی باشد: مثلاً همهٔ مؤلفه‌های خمیدگی در نزدیکی رأس یک مخروط صفرند!) پس از لومتر چند تن دیگر ماهیت مختصاتی تکینگی شوارتس شیلد را مجدداً کشف کردند، اما معلوم نیست که چرا شناخت این واقعیت در حالت کلی اینقدر به‌درازا کشید. سرانجام مقاله

معروف کروسکال^۱ کار را تمام کرد. این مقاله حاوی مختصات جدید و مهمتر از آن یک توپولوژی جدید برای فضای شوارتس شیلد بود.

برای بررسی تکنیکی شوارتس شیلد، ابتدا در متریک ۸-۷۲ سیگنالهای نوری شعاعی را در نظر می‌گیریم. این سیگنالها در $d\theta, d\phi = \text{const.}$ و $ds^2 = 0$ صدق می‌کند. ما در معادله ۸-۴۹ برای سیگنالهای درون‌رو علامت منفی را اختیار می‌کنیم و به روش ۸-۵۰ چنین می‌یابیم

$$t = -r - 2m \log |r - 2m| + v \quad (8-74)$$

که در آن v یک ثابت انتگرال‌گیری است و سیگنالهای نوری را از یکدیگر متمایز می‌کند. این ثابت در واقع برابر است با زمان مختصاتی t که سیگنال در آن زمان از "مرز $r = r_0$ " می‌گذرد. در اینجا r جواب معادله $0 = r + 2m \log |r - 2m|$ است (که عددی است بین $2m$ و $2m + 1$ با یک تعریف مشخص). معادله ۸-۷۴ هم در داخل و هم در خارج افق نماینده یک سیگنال نوری است. اما چون با $r \rightarrow 2m, t \rightarrow +\infty$ می‌رود، چنین به نظر می‌رسد که سیگنال خارجی نمی‌تواند به داخل افق نفوذ کند و ما خواهیم دید که گناه این امر به گردن مختص زمان است. با وجود این، به دلیل ناپیوستگی مختصات، روشن نیست که آیا سیگنالهایی که v آنها در داخل و خارج برابر است یکی هستند یا نه.

اکنون v را به عنوان یک مختص (شبه-)زمانی جدید برای رویدادها برمی‌گزینیم: بدین ترتیب که بر هر رویداد برجسب v سیگنال نوری شعاعی و درون‌رو را که می‌فرستد (یا روی آن واقع است) قرار می‌دهیم. بنابراین، از ۸-۷۴ داریم

$$dt = dv - \alpha^{-1} dr \quad (8-75)$$

اگر این رابطه را در متریک ۸-۷۲ بنشانیم، این متریک به صورت زیر ("صورت ادینگتون-فینکلشتاین") در می‌آید

$$ds^2 = \alpha dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (8-76)$$

1. Kruskal M D, 1960, *Phys Rev*, **119**, 1743.

به نظر می‌رسد که کروسکال اشتباهاً کشف اصلی را به ای کازنر در سال ۱۹۲۱/۱۳۰۰ نسبت داده است. سی فرونزادال کار کازنر را در *Phys Rev*, 1959, **110**, 778 شرح داده و تصحیح کرده است. اما ای اس ادینگتون [*Nature*, 1924, **113**, 192] در واقع اولین کسی بود که متریک شوارتس شیلد را به صورتی تبدیل کرد که در $r = 2m$ تکنیکی نداشت، اما به نظر می‌رسد که خود متوجه این امر نشده بود. ضمناً، مقاله وی درای یک غلط چاپی گمراه‌کننده است: در معادله ۲ باید به جای $r - 2m$ ، $r - m$ باشد. [فینکلشتاین *Ann Soc Sci*, **110**, 965] تبدیل ادینگتون را از نو کشف کرد. مقاله لومتر در *Ann Soc Sci Bruxelles*, 1933, **A53**, 51 است. جی چکرس تقریباً همزمان مختصات کروسکال را کشف کرد:

این متریک به ازای تمام مقادیر $r > 0$ منظم است. متریک ۷۶-۸ بجز در $r = 0$ و $r = 2m$ در معادلات (تانسوری) میدان خلأ نسبیت عام صدق می‌کند، زیرا ۷۲-۸ در این معادلات صدق می‌کند و معادلات تانسوری تحت تبدیل مختصات اعتبار خود را حفظ می‌کنند. به علاوه، ضرایب متریک ۷۶-۸ و مشتقهای اول و دوم آنها در $r = 2m$ پیوسته‌اند، بنابراین ۷۶-۸ باید حتی در $r = 2m$ ، در معادلات میدان صدق کند.

اکنون می‌بینیم که هر چند بر مبنای ۷۴-۸ سیگنالهای نوری را نمی‌توان در امتداد افق به یکدیگر وصل کرد، سیگنال $v = \text{const.}$ در ۷۶-۸ هنگام عبور از $r = \infty$ به $r = 0$ با هیچ‌گونه بی‌نظمی روبه‌رو نمی‌شود و مسلماً یک سیگنال می‌ماند. پس در امتداد افق هیچ چیز به خصوصی روی نمی‌دهد و در واقع با تبدیل مختصات ۷۴-۸ تکنیکی شوارتس شیلد از میان می‌رود. (v را بدین دلیل "شبه-زمان" نامیدیم که امکان دارد برای فوتونها ثابت بماند.)

دقت کنید که گزینش سیگنالهای درون‌رو، گزینش راستای زمان را در درون افق تعیین می‌کند، بدین معنی که r باید کاسته شود. اگر به جای آن، سیگنالهای برون‌رو را برگزیده بودیم، معادلات ۷۴-۸ و ۷۶-۸ به ترتیب به صورت زیر در می‌آمدند

$$t = r + 2m \log|r - 2m| + u \quad (77-8)$$

$$ds^2 = \alpha du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (78-8)$$

معادله $u = \text{const.}$ متناظر است با یک سیگنال نوری که از $r = 0$ به $r = \infty$ می‌رود. پس در این حالت "زمان" درونی r افزایش می‌یابد.

اما در خارج افق مسلماً سیگنالهایی هستند که در هر دو راستا سیر می‌کنند. سیگنالهای برون‌رو باید از فضای درونی بیایند که r آن افزایش یافته است، و سیگنالهای درون‌رو باید به فضای درونی‌ای بروند که r آن کاهش یافته است. بنابراین برای ارتباط بین سیگنالهای نوری، باید دو فضای درونی را، که ایزومتریک‌اند اما سوی زمان آنها متفاوت است، به فضای برونی وصل کرد: یکی، به اصطلاح، در گذشته (پیش از $t = -\infty$)، و دیگری در آینده (پس از $t = +\infty$). ما در واقع به فضای برونی دیگری نیز که سوی زمان آن متفاوت باشد نیاز داریم. زیرا متریک ۷۶-۸ گذشته از سیگنالهای نوری که در $v = \text{const.}$ صدق کنند سیگنالهایی را نیز که "به‌طور موضعی سوی مخالف دارند" و در معادله زیر صدق می‌کنند مجاز می‌شمارد

$$v = 2(r + 2m \log|r - 2m|) + \tilde{v} \quad \text{یعنی} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{2}{\alpha} \quad (79-8)$$

\tilde{v} در اینجا یک ثابت انتگرال‌گیری است. با نشان دادن ۷۹-۸، صورت هم‌ارز زیر را برای ۷۹-۸ می‌یابیم

$$t = r + 2m \log|r - 2m| + \tilde{v} \quad (80-8)$$

این رابطه شبیه به ۸-۷۷ است، با این تفاوت که به سیگنالی مربوط می‌شود که در داخل افق دارای r کاهنده باشد، یعنی چنین سیگنالی باید از فضای بیرونی‌ای بیاید که دارای t کاهنده است. فضاهای داخلی با r کاهنده و افزایشده را به ترتیب I_1 و I_2 و فضاهای خارجی با r کاهنده و افزایشده را به ترتیب O_1 و O_2 می‌نامیم، و در آینده از این نمادگذاری استفاده خواهیم کرد. چنین به نظر می‌رسد که جرم در $r = 0$ تقسیم شده است: قسمتی از آن در I_1 است و قسمتی در I_2 . توضیح کامل این توپولوژی ظاهراً پیچیده‌تریک شوارتس شیلد، تنها با تعریف فضای کروسکال امکانپذیر است.

همان‌گونه که در ۸-۷۱ دیدیم هر "ذره" ساکن روی افق باید فوتون باشد. و از ۸-۷۶ و ۸-۷۸ درمی‌یابیم که $r = 2m$ و $\phi = \text{const.}$ و θ در واقع می‌تواند یک مسیر "شعاعی" فوتون باشد. در واقع می‌توان افق را همچون یک جبهه نور (بالقوه) انگاشت، که نسبت به فضای خارج ساکن است. "به سوی" داخل یا خارج بودن این جبهه بستگی دارد به اینکه کدام دو ناحیه از چهار ناحیه شوارتس شیلد را از هم جدا می‌کند. مثلاً فوتونی که از O_1 به I_2 می‌رود باید هنگام رسیدن به افق طوری باشد که گویی جبهه نوری به سوی خارج است؛ بدین دلیل که فوتونها نمی‌توانند از یکدیگر پیشی گیرند. به همین ترتیب، فوتونی که از I_1 به O_1 می‌رود طوری به افق می‌رسد که گویی جبهه نوری به سوی داخل است.

اکنون می‌پردازیم به بحث مختصری دربارهٔ ژئودزیکهای شعاعی در فضای شوارتس شیلد. در این بخش و بخش گذشته پاره‌ای از معادلات ژئودزیک ۸-۱۵ را برای متریک شوارتس شیلد ذکر کردیم. به‌ازای $\mu = 4$ این معادلات چنین‌اند

$$t'' + \left(\frac{dA}{dr}\right) r' t' = 0 \quad \left(e^A = \alpha', \equiv \frac{d}{ds}\right) \quad (81-8)$$

دقت کنید که دو معادله "شعاعی" ۸-۶۹ و ۸-۸۱ در اثر تبدیل t به $-t$ تغییر نمی‌کنند، و این نشان می‌دهد که هر حرکت شعاعی نسبت به t برگشت‌پذیر ($-t$) "برگشت‌پذیر" یا برگشت‌پذیر (زمانی) است. یک جواب فوری معادله ۸-۸۱، $t = \text{const.}$ است، که یکی از مسیرهای ممکن برای ذره درون افق است. یک انتگرال اول و کلی این معادله به صورت زیر است

$$t' = ke^{-A} = \frac{k}{\alpha}, \quad (k = \text{const.}) \quad (82-8)$$

با نشانیدن این جواب در ۸-۶۹ (با $A = -B$ و $\phi' = 0$) می‌توان آن را حل کرد و چنین یافت

$$r' = \pm (k^2 - \alpha)^{1/2} \quad (83-8)$$

معادله ۸-۸۲ به ما می‌گوید که به‌ازای ذره‌ای که از فاصله بسیار دور و حالت سکون فرو می‌افتد نخست $dt/ds \approx 1$ است و بنابراین از 8.82×10^8 با $k \approx 1$ با قرار دادن $k = 1$ در $8-82$ و $8-83$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dt}{dr} = \frac{-r^{3/2}}{(r - 2m)\sqrt{(2m)}} \cdot \frac{ds}{dr} = -\frac{r^{1/2}}{\sqrt{(2m)}} \quad (84-8)$$

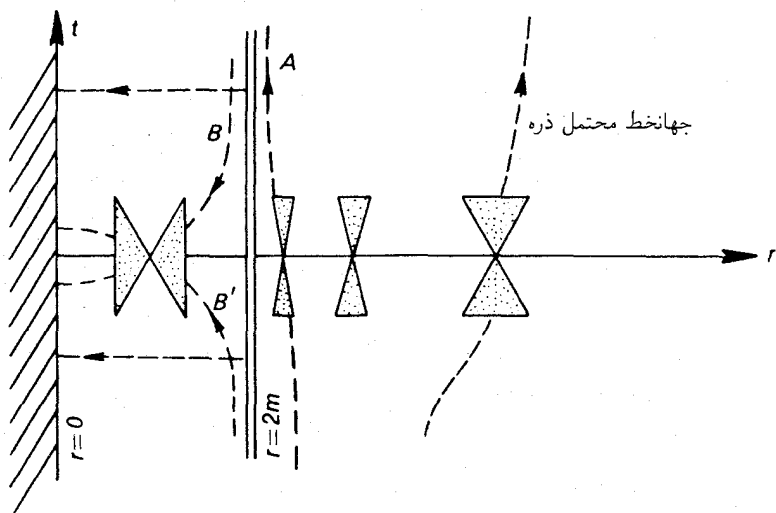
آنگاه از انتگرال‌گیری بین دو سطح r_1 و r_2 ($r_2 < r_1$) خواهیم داشت

$$\int dt = \frac{1}{\sqrt{(2m)}} \int_{r_2}^{r_1} \frac{r^{3/2} dr}{(r - 2m)}, \quad \int ds = \frac{1}{\sqrt{(2m)}} \int_{r_2}^{r_1} r^{1/2} dr \quad (85-8)$$

اولین انتگرال وقتی $r_2 \rightarrow 2m$ ، واگرا می‌شود، بنابراین ذره افق را در $t = \infty$ قطع می‌کند. از طرف دیگر، دومین انتگرال در $r_2 = 2m$ سره می‌ماند و مقدار آن تا وقتی که $r_2 = 0$ می‌شود متناهی است. روشن است که این جواب به دلیل پیوستگی‌اش نماینده یک مسیر است. گزینش $k = 1$ محاسبات ما را ساده‌تر کرد، اما این گزینش در نتیجه کلی تأثیری ندارد: هر ذره‌ای که در حال سقوط آزاد باشد افق را در $t = \infty$ قطع می‌کند، اما در ویژه‌زمانی به $r = 0$ می‌رسد که متناهی است. این وضعیت در حالتی که زمان معکوس شود نیز برقرار است: یعنی اگر حرکت یک ذره آزاد برون‌رونده را به عقب برگردانیم، درمی‌یابیم که آن ذره افق را در $t = -\infty$ قطع می‌کند در صورتی که مدتی قبل از آن، که برحسب ویژه‌زمان متناهی است، $r = 0$ را ترک کرده است.

اکنون به واقعیت بسیار مهم زیر دقت کنید. به محض اینکه ذره‌ای افق را قطع کند و به داخل برود (یعنی به داخل I_2 : هیچ ذره‌ای نمی‌تواند به داخل I_1 برود)، دیگر نه هرگز می‌تواند بیرون بیاید و نه می‌تواند سیگنالی به خارج بفرستد. علتش این است که افق دور I_2 یک جبهه نور برون‌سوی است. به علاوه، وقتی که ذره به داخل برود، نیروی کشندی بینهایت (خمیدگی بینهایت!) در $r = 0$ سرانجام آن را نابود می‌کند و هیچ نیروی پس‌زنده‌ای نمی‌تواند آن را از این سرنوشت نجات دهد. بیشینه ویژه‌عمر در داخل افق برابر πm است (به استثنای عمر ذراتی که از I_1 به I_2 می‌روند: بیشینه ویژه‌عمر آنها $2\pi m$ است). زیرا اگر به $8-72$ بنگریم، می‌بینیم که هر چند dr نمی‌تواند در امتداد جهانخط ذره در داخل افق صفر شود، به‌ازای هر dr مفروض هر سهم از جانب dt ، $d\theta$ ، یا $d\phi$ از ds خواهد کاست، زیرا ضریب متریک آنها منفی است. در نتیجه بیشینه ویژه‌زمان به‌ازای جهانخط $\phi = \text{const.}$ و θ و t حاصل می‌شود که برابر است با

$$\int_0^{2m} \left(\frac{2m}{r} - 1 \right)^{-1/2} dr = \pi m \quad (86-8)$$



شکل ۵-۸

همان‌گونه که دیدیم این نوع جهانخطها در واقع ژئودزیک هستند، اما دنباله ژئودزیکهایی که از I_1 یا O_2 وارد می‌شوند نیستند.

برخی از نتایج بالا را می‌توان بر روی "نمودار شوارتس شیلد"، شکل ۵-۸، نمایش داد. این نمودار نقشه‌ای است از فضای شوارتس شیلد r و t ، یعنی نقشه‌ای است از رویدادهایی که تنها روی یک راستای شعاعی $\phi = \text{const.}$ و θ قرار دارند. (با چرخاندن شکل ۵-۸ حول محور t و اندازه‌گیری ϕ به عنوان زاویه حول این محور، می‌توان نقشه‌ای سه بعدی از مقطع $\theta = \pi/2$ فضای شوارتس شیلد تولید کرد.) دقت کنید که این نمودار عمداً یک پارگی در افق $r = 2m$ دارد. این پارگی برای این است که نشان دهد در امتداد این خط پیوستگی وجود ندارد. این خط، یک خط شاخه است که دو فضای درونی و دو فضای برونی را محدود می‌کند. پیکان روی جهانخطها با این فرض رسم شده‌اند که ما O_1 و I_2 را نمایش داده‌ایم و نقشه O_2 و I_1 را می‌توان در زیر آن طوری تجسم کرد که این دو نقشه در افق از روی هم بگذرند. در نمودار مخروطهای نوری گوناگونی رسم شده‌اند که بخشهای سایه‌دار آنها رابطه‌ای زمان‌گونه با رأس مخروط دارند. چند خط نیز مشخص شده است که می‌توانند جهانخط باشند. چنانکه دیدیم، ذرات تنها در $t = \pm\infty$ می‌توانند افق را قطع کنند و از ناحیه خارجی به ناحیه داخلی (و یا به عکس) وارد شوند. در این نمودار تمام رویدادهای روی افق به استثنای یک رویداد به بینهایت برده شده؛ بدین معنی که تمام قسمت متناهی خط $r = 2m$ در شکل ۵-۸ نماینده یک رویداد منفرد است. این امر را می‌توان مثلاً با در نظر گرفتن بازه بین دو خط $t = \text{const.}$ دریافت که، به دلیل صفر شدن ضریب متریک dt^2 وقتی $r \rightarrow 2m$ ، بازه به سمت صفر میل می‌کند. جهانخطهای $t = \text{const.}$ در داخل

افق نماینده ذرات آزادی هستند که $r = 0$ را در I_1 ترک می‌کنند، به طرف افق صعود می‌کنند و پس از قطع کردن آن وارد I_2 می‌شوند تا دوباره به $r = 0$ برگردند. جهانخطی مثل B در I_2 می‌تواند امتداد جهانخطی مثل A در O_1 باشد. اما جهانخط $-t$ برگشته B' ، که این نیز در I_2 ممکن است، نمی‌تواند از O_1 بیاید! این خط در واقع از O_2 می‌آید و امتداد $-t$ برگشته (برگشته زمانی) جهانخط A است. دقت کنید: با وجود اینکه یک تکینگی اصیل نه زمان‌گونه است و نه فضاگونه، "مکان هندسی جرم $r = 0$ " که یک تکینگی اصیل است، همچون حد خطهای فضاگونه $(r = \text{const.} < 2m)$ به نظر می‌رسد — این کاملاً برخلاف جهانخطهای زمان‌گونه‌ای است که به ذرات معمولی وابسته می‌سازیم.

بحث درباره افق شوارتس شیلد هر چند پانزده سال پیش شاید چیزی بیش از یک تمرین ذهنی نبود، و بیشتر از این جهت مورد توجه قرار داشت که چند خاصیت کاملاً غیرقابل انتظار فضا-زمان را پیش چشم جلوه‌گر می‌کرد. اما امروزه با توجه به رمبش گرانشی و سیاهچاله‌ها در اختریف یک و (احتمالاً حتی در میکروفیزیک) از لحاظ عملی توجه فراوانی بدان می‌شود. از لحاظ نظری افق یک جرم بدون شک ممکن است در خارج آن قرار داشته باشد. به طور مثال کره‌ای با چگالی یکنواخت ρ و شعاع R در نظر بگیرید. جرم آن را می‌توان با مسامحه (یعنی بدون در نظر گرفتن جرم هم‌ارز انرژی اتصال گرانشی خمیدگی و غیره) برابر $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ و بنابراین شعاع شوارتس شیلد آن را برابر $\frac{8}{3}\pi R^2 \rho$ گرفت. برای اینکه این شعاع بیش از R باشد فقط لازم است که

$$R > \left(\frac{3}{8\pi\rho}\right)^{1/2} \quad \text{یا} \quad \frac{8}{3}\pi R^2 \rho > 1 \quad (87-8)$$

باشد. بنابراین اجرام کروی با هر چگالی می‌توانند افق خود را آشکار سازند، تنها به شرط اینکه R به اندازه کافی بزرگ باشد.

شعاع شوارتس شیلد یک کهکشان متعارف با جرمی از مرتبه بزرگی 10^{45} گرم از مرتبه بزرگی 10^{17} سانتی‌متر است. چون شعاع یک کهکشان متعارف از مرتبه 10^{23} سانتی‌متر است، پس اگر این کهکشان به اندازه یک ضریب خطی از مرتبه 10^6 انقباض یابد، به داخل افق خود خواهد رفت. در یک چنین کهکشان متعارفی ستاره‌ها همچون سرسوزنی هستند که به فاصله 50 کیلومتر از یکدیگر قرار دارند. انقباض فوق ستاره‌های سرسوزنی را به فاصله 5 سانتی‌متری یکدیگر می‌کشاند، که هنوز از تماس با هم بسیار به دورند بنابراین اگر کهکشان ابزار بازدارنده‌ای (مانند چرخش) نداشته باشد، نیروی گرانش خودش آن را به درون افق خواهد مکید. [از لحاظ نظری، موجودات هوشمند می‌توانند با دفع قسمت (کوچکی) از ماده هر ستاره کهکشان مانع از حرکت آن شوند (تمرین 5-19)]. مابقی ستاره‌ها به مرکز خواهند افتاد. اما به محض اینکه کهکشان به افق خود داخل شود، دیگر به هیچ طریقی نمی‌توان از رمبش کامل آن، که بسیار سریع رخ می‌دهد (در عرض چند ماه)، جلوگیری کرد. کهکشان دیگر از خارج قابل رؤیت نیست، مگر توسط فوتونهایی که هنگام

حضور در خارج از افق انتشار داده است. آخرین فوتون برای رسیدن به ما زمانی نامتناهی احتیاج دارد و هنگامی که به ما می‌رسد انتقال قرمز آن نامتناهی خواهد بود. چنین کهکشان‌هایی گرچه از لحاظ نظری همواره قابل رؤیت است، اما به‌زودی از نظر پنهان می‌شود: می‌گوییم که کهکشان به "سیاهچاله" تبدیل شده است. از طرف دیگر میدان گرانش آن بدون تغییر پابرجا خواهد ماند (بر طبق قضیهٔ بیرکهورف) و این امر می‌تواند منجر به کشف آن شود. برخی اخترشناسان براین عقیده‌اند که تعداد زیادی کهکشان وجود دارند که کلاً یا جزئاً رمبیده‌اند.

هنوز چیزی از کشف اختروشها — کهکشان‌هایی مرموز و فوق‌فعال که ظاهراً دورترین کهکشانها هستند — در سال ۱۹۶۳/۱۳۴۲ نگذشته بود که رمبش هستهٔ یک کهکشان و فرورفتن آن به درون افق به تدریج به عنوان منبع انرژی اختروشها مورد توجه قرار گرفت. هنگامی که در سال ۱۹۶۸/۱۳۴۷ تپ‌اخترها کشف شدند، وجود سیاهچاله‌هایی که جرم آنها در حدود جرم ستاره‌ها باشد، ممکن شناخته شد و روشن شد که مادهٔ ستاره‌ای تحت شرایطی می‌تواند — به‌توسط گرانش خودش — الکترونها را به درون پروتونها فشرده و نوترونهای حاصل را تنگ به هم بسته و یک نوع ابرهسته با قطر نسبتاً کوچک (چند کیلومتر) اما چگالی بسیار زیاد (از مرتبهٔ $10^{14} \times 3$ گرم بر سانتی‌متر مکعب) ایجاد کند که نتیجهٔ آن یک ستارهٔ نوترونی یا "تپ‌اختر" است. علت این نامگذاری، وجود تپهای رادیویی کامل است که تپ‌اختر در اثر چرخش انتشار می‌دهد. جزئیات فرایند تشکیل تپ‌اختر پیچیده است و همواره واکنشهای گرم‌هسته‌ای را در بر دارد. هنگامی که جرم ستاره بیش از هشت برابر جرم خورشید باشد، ستاره هنگام "فشرده شدن" افق شوارتس شیلد را قطع می‌کند و به‌جای تپ‌اختر یک سیاهچالهٔ ستاره‌ای حاصل می‌شود. تنها در کهکشان ما ممکن است میلیونها عدد از این سیاهچاله‌ها موجود باشد. امید می‌رود که به‌طور مثال از طریق کنش گرانشی که چنین سیاهچاله‌ای روی ستارهٔ (مزدوج) نزدیک خود وارد می‌سازد بتوان به بازشناسی آنها موفق شد. ممکن است به‌زودی شاهد بازشناسی اولین سیاهچاله باشیم و آن شاید منظومهٔ مزدوج دجاجه X - ۱ باشد که به‌همین منظور از سال ۱۹۷۱/۱۳۵۰ سخت مورد مطالعه قرار گرفته است. اما گرچه هر سال بر شمار قرائن افزوده می‌شود، این مطلب هنوز به‌طور قطعی اثبات نشده است.

باید تذکر داد که برای سیاهچاله‌ای که در نتیجهٔ رمبش گرانشی پدید می‌آید (برخلاف سیاهچاله‌ای که همچون جرمی منفرد در $\theta = 0$ خلق شده است) نواحی I_1 و O_2 شوارتس شیلد وجود ندارد. ردپای تمام سیگنالهای برون‌رو در O_1 را می‌توان تا سطح جسم قبل از رمبش، یعنی تا رویدادهایی که متعلق به O_1 هستند و نه I_1 ، تعقیب کرد. به همین ترتیب، سیگنالهای "برون‌سو" $8-8^\circ$ در I_2 از سطح جسم در I_2 سرچشمه می‌گیرند و نه از O_2 . پس متریک ادینگتون-فینکلشتاین ۸-۷۶ تمام فضا زمان خارج از جرم رمبیده را می‌پوشاند.

همچنین باید تذکر داد از آنجا که ستاره‌ها و کهکشانها دارای تکانهٔ زاویه‌ای قابل ملاحظه هستند، ممکن است قبل از مرحلهٔ رمبش، مرحله‌ای پیش آید که در آن ستاره یا کهکشان دارای چرخش بسیار سریع است؛ که در این مورد نمی‌توان متریک شوارتس شیلد را دقیقاً به‌کار برد. برای اجرام

مرکزی چرخان تعمیم معروفی از این متریک به نام متریک کرا^۱ ۱۳۴۲/۱۹۶۳ وجود دارد. اما این متریک نیز دارای افق است و واقعیهای کیفی رمبش آن‌گونه در بالا به اجمال بیان شد، در مورد این متریک نیز صادق است.

۸-۶ فضای کروسکال و میدان شتاب یکنواخت

در بخش گذشته پیچیدگیهایی از متریک شوارتس شیلد کشف کردیم که غیرمنتظره بودند. از جمله اینکه رابطه بین دو ناحیه درونی I_1 و I_2 و دو ناحیه برونی O_1 و O_2 چیست؟ یا اینکه چرا دو افق، یکی جبهه نوری برون سوی و دیگری جبهه نوری درون سوی، وجود دارد؟ تعریف مختصات کروسکال و فضای کروسکال (پانوشت صفحه ۱۸۶ را ببینید) به این سؤاها و سؤالهای دیگر جواب داد. ولی ما قبل از بحث درباره آنها، وضعیت مشابه ساده‌تری را در نظر می‌گیریم که در روشن کردن نتایج کروسکال و سؤالهای بالا بسیار مؤثر خواهد بود. این وضعیت ساده عبارت است از در نظر گرفتن فضای معمولی مینکوفسکی M_4 از یک نقطه نظر مساعد غیرمعمول: یعنی از نقطه نظر یک موشک شتابدار.

تبدیل زیر را از مختصات معمولی x, y, z, t در M_4 به مختصات جدید X, Y, Z, T در نظر بگیرید

$$t = X \sinh T, \quad x = X \cosh T, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (88-8)$$

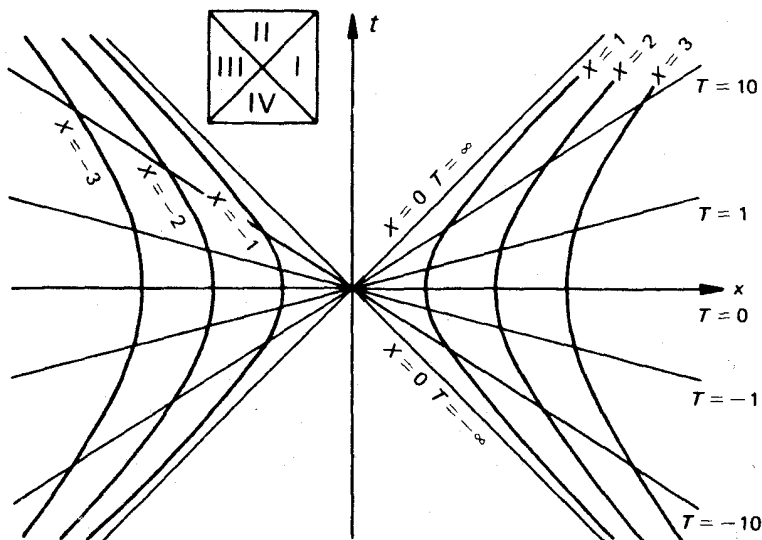
این تبدیل متضمن روابط زیر است

$$x^2 - t^2 = X^2, \quad t/x = \tanh T \quad (89-8)$$

و

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \end{aligned} \quad (90-8)$$

از مقایسه معادله اول ۸۹-۸ با ۳۳-۲ می‌توان دریافت هر نقطه که دارای X, Y, Z ثابت باشد، حرکتی هذلولوی به موازات محور X اجرا می‌کند که ویژه‌شتاب آن $(c = 1) 1/X$ است. متریک ۹۰-۸ متریکی است ایستا که صورت آن از نوع عام ۷-۲۴ است و قسمت فضایی آن اقلیدسی است. این متریک، در واقع، متریکی است که با میدان ایستای موجود در یک آسمانخراش موشکی با حرکت هذلولوی، آن‌گونه که در بخش ۲-۱۶ آمده است، وفق داده شده است. شکل ۸-۶ نمودار



شکل ۸-۶

مینکوفسکیایی این موشک است. این شکل، در اصل همان شکل ۲-۵ است که دو چیز به آن اضافه شده است. یکی خطوط مستقیمی که از مبدأ منشعب می‌شوند و اینها خطوطی هستند با ثابت T ($t/x = \text{const.}$) و بنابراین نماینده لحظاتی از زمان موشک هستند. دیگر اینکه موشک دومی که تصویر آینه‌ای موشک اول است اضافه کرده‌ایم به‌گونه‌ای که شتاب آن در راستای منفی محور x و متناظر با مقادیر منفی X باشد. معادلات ۸-۸۸ تا ۸-۹۰ در هر دو مورد به‌کار می‌آید. البته زمان مختصاتی T در موشک دوم به سمت عقب، یعنی از $+\infty$ تا $-\infty$ جریان دارد.

“کف پایین ($X = 0$)” هر دو موشک از فوتون درست شده است. با وجود اینکه این فوتونها به راکت “چسبیده‌اند” (مگر به‌ازای $t = 0$ ، یعنی هنگام تعویض کف پایین موشکها)، می‌توان فوتونهایی را که نسبت به موشک درون‌سوی و یا برون‌سوی هستند از یکدیگر تمیز داد. پیش از $t = 0$ ، فوتونها برون‌سوی هستند؛ علامات و ذراتی که از ناحیه ۴ نمودار می‌شوند، به فوتونهایی برمی‌خورند که خلاف جهت آنها در حرکت‌اند. پس از $t = 0$ فوتونها درون‌سوی هستند سیگنالها و ذراتی که از موشک به‌ناحیه ۲ وارد می‌شوند به فوتونهایی برمی‌خورند که خلاف جهت آنها در حرکت‌اند. دقت کنید که ذره وارد شده به‌ناحیه ۲ دیگر نه می‌تواند به یک موشک بازگردد و نه می‌تواند سیگنالی پس بفرستد. در واقع، مخروط نوری مبدأ $t = \pm x$ افقی برای دستگاه دو موشک است: افق گذشته $(t, 0)$ به درون موشکها نفوذپذیر است، افق آینده $(t > 0)$ به برون موشکها نفوذپذیر است.

خواننده مسلماً متوجه شابهت موجود بین این موشکها با مورد شوارتس‌شیلد شده است. نواحی ۱ و ۳ در شکل ۸-۶ به‌ترتیب متناظرند با نواحی برونی شوارتس‌شیلد O_1 و O_2 . ناحیه ۲

جدول ۱-۸

	ناحیه ۱ ($X > 0$) و ناحیه ۳ ($X < 0$)	ناحیه ۲ ($X > 0$) و ناحیه ۴ ($X < 0$)
$t =$	$X \sinh T$	$X \cosh T$
$x =$	$X \cosh T$	$X \sinh T$
$t/x =$	$\tanh T$	$\coth T$
$x^2 - t^2 =$	X^2	$-X^2$

متناظر با I_2 است که به درون آن از O_1 می‌توان سیگنال فرستاد. ناحیه ۴ متناظر با I_1 است که از آن می‌توان به درون O_1 و O_2 سیگنال فرستاد و نیز می‌توان از آن مستقیماً و بدون رفتن به برون افق به درون I_2 ذره فرستاد. یک دسته آسمانخراشهای باریک در نظر بگیرید، که همچون میخهایی روی یک گردو، در فضای برونی شوارتس شیلد O_1 به‌طور عمودی بر روی افق ایستاده‌اند. هر یک از این آسمانخراشها متناظر است با موشک ناحیه ۱. با این تفاوت که "شدت میدان" در آسمانخراش موشکی همانند $1/X$ تغییر می‌کند، درحالی‌که این تغییر در مورد آسمانخراش شوارتس شیلد برطبق ۷۱-۸ داده می‌شود. از اینکه بگذریم، شباهت خوب است و ما آن را بهتر نیز می‌کنیم.

اما ابتدا برای تسهیل شباهت، متریک شوارتس شیلد ۷۲-۸ را کمی ساده‌تر می‌کنیم. یکاها را به‌گونه‌ای برگزیده‌ایم تا $c = G = 1$ باشد. اما چون سه یکا در اختیار داریم (طول، زمان، و جرم) می‌توانیم به‌ازای جرم مفروض m ، آنها را به‌گونه‌ای برگزینیم که $m = 1/4$ شود. با این فرض و با نوشتن T و R به‌جای t و r ، متریک ۷۲-۸ به صورت زیر درمی‌آید

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{2R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{1}{2R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (91-8)$$

اکنون، افق این متریک در $R = 1/2$ است.

به‌شکل ۶-۸ باز می‌گردیم و می‌بینیم که مختصات T ، X تا به‌حال در نواحی ۲ و ۴ تعریف نشده‌اند. اما این مختصات را می‌توان در آن نواحی نیز تعریف کرد و بدین ترتیب از آنها در تمام فضای مینکوفسکی می‌توان استفاده کرد. رابطه بین مختصات جدید و قدیم را در هر چهار ناحیه در جدول ۱-۸ گرد آورده‌ایم.

این تعاریف در نواحی ۲ و ۴ منجر به متریک زیر می‌شود

$$ds^2 = -X^2 dT^2 + dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (92-8)$$

این متریک کاملاً رضایتبخش است ولی صورت آن با ۹۰-۸ متفاوت است. برای اجتناب از این

نقص، مختص X را تغییر می‌دهیم و R را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$${}^2R - 1 = x^2 - t^2 = \begin{cases} X^2 & \text{نواحی ۱ و ۳} \\ -X^2 & \text{نواحی ۲ و ۴} \end{cases} \quad (۹۳-۸)$$

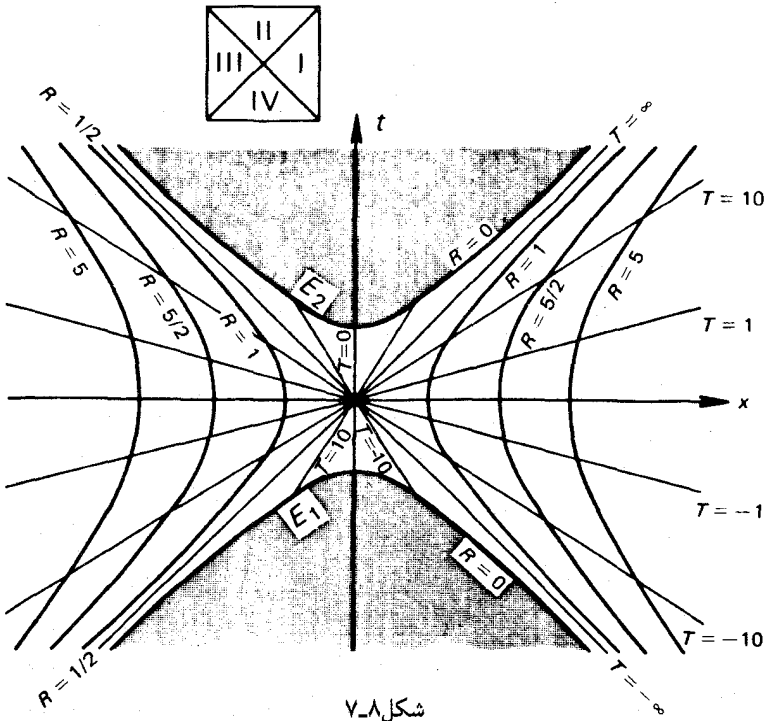
تا متریک مینکوفسکی ۸-۹۰ به صورت زیر درآید

$$ds^2 = ({}^2R - 1) dT^2 - ({}^2R - 1)^{-1} dR^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (۹۴-۸)$$

این متریک همه جا تعریف شده است مگر روی افق که در آن ۸-۹۴ دارای یک تکنیکی مختصاتی است. ذراتی که به ازای آنها $1/2 > R = \text{const.}$ است، در یکی از موشکها ساکن‌اند. (علامت R برخلاف X موشکها را از یکدیگر متمایز نمی‌کند.) در نواحی ۲ و ۴، R مختص زمان است و در ناحیه ۲ به عقب و در ناحیه ۴ به جلو می‌رود. این نواحی با تاریخچه موشک پر نشده‌اند، اما در صورت لزوم می‌توان آنها را با تاریخچه "پرتابه‌ای" پر کرد. مجموعه مسیره‌های آزاد گذرا بر مبدأ را می‌توان همچون مولدی برای نواحی ۲ و ۴ انگاشت. تندی (تمرین ۲-۲۲) آنها را می‌توان با T اندازه گرفت و مجذور ویژه‌زمان آنها از مبدأ را با ${}^2R - 1$.

متریک شوارتس شیلد دارای یک تکنیکی حقیقی در $R = 0$ است. متریک ۸-۹۴ در اینجا تکنیکی ندارد اما می‌توان تکنیکی ای مصنوعی در آن ایجاد کرد: فضای مینکوفسکی را با بریدن دو ناحیه متناظر با $R < 0$ ، که در شکل ۸-۷ با سایه مشخص شده‌اند، ناقص می‌کنیم. کرانه‌های این نواحی (یعنی دو شاخه هذلولی $x^2 - t^2 = 1$) را "لبه"های E_1 و E_2 می‌نامیم. فضای مینکوفسکی ناقص شده را می‌توان به یک تعبیر عالمی با طول عمر متناهی دانست. تمام مسیره‌های آزاد از E_1 شروع می‌شوند و به E_2 ختم می‌شوند: E_1 متناظر است با تولد عالم و E_2 متناظر با مرگ آن است. گرچه برای ویژه‌زمان کل مسیره‌های آزاد حدی وجود ندارد، اما آنها همگی متناهی هستند. زندگی جاودانه تنها خارج از افق می‌تواند وجود داشته باشد، که لازمه آن دور شدن از افق با شتابی بی‌وقفه است.

درک این عالم، با وجود سادگی‌اش، از نقطه نظر سرنشینان موشک با متریک ۸-۹۴ نسبتاً مشکل است. اول اینکه آنها در دنیایی زندگی می‌کنند که به ظاهر تغییر نمی‌کند و برای آنها تصور متناهی بودن عالم خودشان به سختی امکانپذیر است. دوم اینکه یک محاسبه ساده نشان می‌دهد (تمرین ۸-۲۰) تمام ذراتی که این سرنشینان از سطح $R = R_0$ از حالت سکون رها می‌کنند، پس از ویژه‌زمان یکسان $({}^2R_0)^{1/2}$ به لبه E_2 می‌رسند. بنابراین سرنشینان موشک تمایل به این فکر پیدا خواهند کرد (کاملاً به اشتباه) که E_2 صفحه‌ای است موازی با کف پایین که در فاصله ثابتی زیر آن قرار دارد. حتی بدتر، این سرنشینان E_1 و E_2 را یکی خواهند انگاشت، زیرا تمام ذرات آزاد نیز که در موشک ظاهر می‌شوند و فوراً در $R = R_0$ به حال سکون در می‌آیند، E_1



شکل ۷-۸

را به اندازه ویژه زمان $\sqrt{2R_0}$ قبلاً ترک کرده‌اند. این امر منجر به اشکالاتی می‌شود. مثلاً فوتونهای پایین باید بین دو موشک تعویض شوند: هنگامی که موشکها برای یک لحظه با هم تماس حاصل می‌کنند، صفحه‌های E_1 و E_2 کجا هستند؟ اما ما باید با این سرنشینان احساس همدردی کنیم. هر چه باشد ما نیز متمایل به این تصور هستیم که مکان $R = 0$ شوارتس شیلد (از نقطه نظر ناحیه ایستای برونی) یک نقطه فضایی منفرد است و مرکز همیشگی کره افق است که هر سیگنال شعاعی از آن شروع و به آن ختم می‌شود. اما این اشتباه است! سردرگمی موشک نشینان هنگامی محو می‌شود که با فضای مینکوفسکی، مختصات مینکوفسکی x, y, z و t و نمودار مینکوفسکی در شکل ۷-۸ آشنا شوند. ما "شوارتس شیلد" نشینان نیز هنگامی موضوع را به روشنی درمی‌یابیم که با فضای کروسکال، مختصات کروسکال و نمودار کروسکال آشنا شویم.

فضای کروسکال چیست؟ شکل ۷-۸ را می‌توان به عنوان یک نقشه برای این فضا، یعنی به عنوان یک نمودار کروسکال، به‌کار برد! اگر x و t مختصات کروسکال باشند (نمادنگاری معمولتر برای آنها u و v است) صفحه فضایی کروسکال K_2 چنین است^۱

$$ds^2 = \left[\frac{1}{2Re^{\sqrt{R}}} \right] (dt^2 - dx^2) - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (95-8)$$

۱. کروشها را در اینجا و در زیر جهت سهولت بعدی نشانده‌ایم.

که در آن R تابعی است از $x^2 - t^2$ و به‌گونه‌ی ضمنی توسط رابطه‌ی زیر تعریف شده است

$$\left[e^{2R} \right] (2R - 1) = x^2 - t^2 \quad (۹۶-۸)$$

متأسفانه این معادله جواب صریحی برحسب توابع ابتدایی ندارد. متریک کروسکال ۸-۹۵ به‌ازای $R > 0$ منظم است، اما در $R = 0$ دارای یک تکینگی خمش است و بنابراین یک کرانه‌ی ذاتی دارد. این متریک، همان‌گونه که در زیر خواهیم دید، در معادلات میدان خلأ اینشتین صدق می‌کند و در هر "لحظه $t = \text{const.}$ " دارای تقارن کروی است. (x را باید همچون یک مختص شعاعی انگاشت.) نمودار کروسکال نمایانگر تنها یک راستای شعاعی $\phi = \text{const.}$ و θ از تمام فضای کروسکال است. دقت کنید که خطوط $\pm 45^\circ$ در شکل ۸-۷، به‌عنوان نمودار کروسکال، هنوز هم نماینده‌ی مسیرهای (شعاعی) نور هستند: این خطوط، بنابر تقارن، ژئودزیک‌اند و برای آنها ds^2 است. همچنین دقت کنید که متریک کروسکال تحت تبدیلات همگن لورنتس در x و t ناوردا هستند، زیرا این تبدیلات $x^2 - t^2$ و $dx^2 - dt^2$ را ابقا می‌کنند. این ناوردایی، به‌طور مثال، نشان می‌دهد که قسمتهایی از خطوط $T = \text{const.}$ که توسط E_1 و E_2 قطع می‌شوند، همگی دارای "طول" ویژه‌ی یکسانی هستند، زیرا می‌توان آنها را با فرمول لورنتس به یکدیگر تبدیل کرد. این خاصیت همچنین نشان می‌دهد که هذلولیهای $R = \text{const.}$ ($R > 1/2$) متناظر با حرکت‌هایی هستند که ویژه‌ی شتاب آنها ثابت است (زیرا هر یک از نقاط آنها را می‌توان با یک تبدیل لورنتس به رأس برد)، و نیز اینکه در هر ربع (دایره) همه‌ی مقاطع $T = \text{const.}$ همانندند.

ما می‌توانیم از طریق جدول ۸-۱ در سراسر فضای کروسکال یک مختص T تعریف کنیم. R یک مختص دیگر است که توسط ۸-۹۶ تعریف می‌شود. با این ترتیب می‌توان به‌گونه‌ای سرراست نشان داد که متریک کروسکال ۸-۹۵ برحسب این مختصات با متریک شوارتس شیلد ۸-۹۱ هم‌ارز است، یعنی با

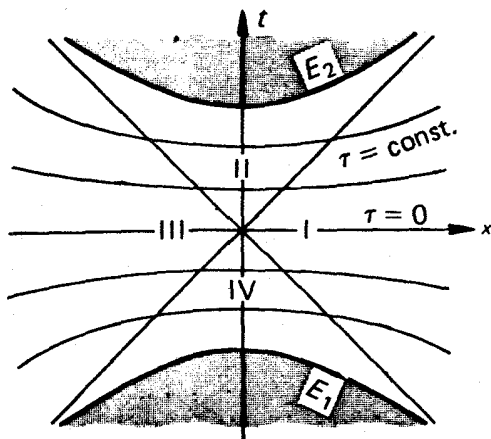
$$ds^2 = \left(\frac{2R-1}{[2R]} \right) dT^2 - \left(\frac{2R-1}{[2R]} \right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (۹۷-۸)$$

البته این هم‌ارزی همه جا صادق است، به استثنای روی افق $R = 1/2$. پس می‌بینیم که متریک کروسکال ۸-۹۵، به استثنای $R = 1/2$ ، همه جا در معادلات میدان خلأ اینشتین صدق می‌کند. از خاصیت پیوستگی (با بعد از ۸-۷۶ مقایسه کنید) نتیجه می‌شود که متریک کروسکال حتی در اینجا نیز صدق می‌کند. همچنین می‌بینیم که فضای کروسکال فضای کاملی است که دربرگیرنده‌ی چهار ناحیه‌ی شوارتس شیلد O_1 و O_2 و I_1 و I_2 به ترتیب در چهارربع خود ۱، ۲، ۳، و ۴ است (مقصود از فضای کامل فضایی است که هر ژئودزیک آن تا بینهایت گسترش‌پذیر باشد و یا به یک تکینگی ختم شود). اکنون می‌توان "آسمان‌خراش‌های شوارتس شیلد" را (که ما به میخهایی بر روی یک گردو تشبیه کردیم) همچون موشک‌هایی انگاشت که در فضای کروسکال تحت شتاب هستند.

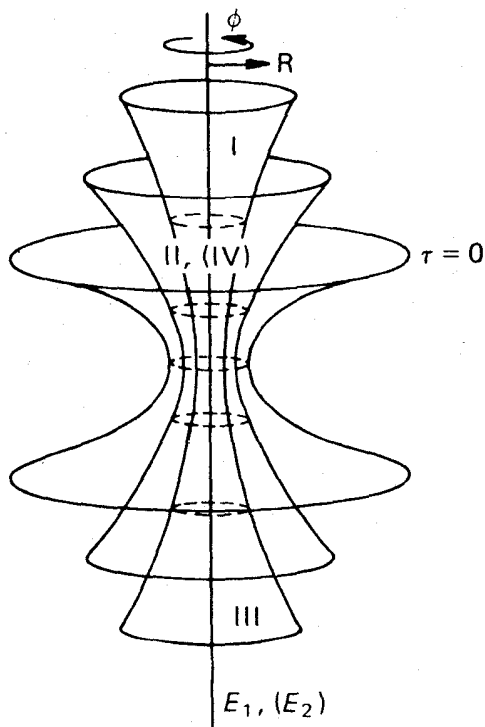
به تشابه صوری با وضعیت موشک نسبیت خاصی توجه کنید: K_2 و M_2 ناقص در جدول ۱-۸ و شکل ۷-۸ شریک‌اند. معادلات ۹۵-۸ و ۹۶-۸ و ۹۷-۸ و جدول ۱-۸ بیانگر رابطه بین K_2 و متریک شوارتس‌شیلد هستند. همین معادلات، بدون جمله‌های داخل کروشه (و با کنار گذاشتن جملات با θ و ϕ) بیانگر رابطه بین M_2 ناقص و متریک موشک هستند (با کنار گذاشتن جملات دارای Y و Z).

برای دستیابی به بینشی از توپولوژی فضای کروسکال، آن را با یک رشته سطوح با "زمان ثابت" برش می‌دهیم. البته اینکه کدام "زمان" را ثابت نگاه داریم تا حد زیادی اختیاری است. برای این منظور زمان τ را که با مدت متناهی K_2 منطبق شده است بر زمان کروسکال t ترجیح می‌دهیم. برای تعریف این زمان می‌توان به‌طور مثال از دسته هذلولیهای هم‌کانون با E_1 و E_2 در نمودار کروسکال به‌عنوان سطوح تراز در این نمودار استفاده کرد [شکل ۸-۸ (الف)]. سطح $t = 0$ را با یک کرهٔ دوبعدی کامل به‌شعاع R در فضای کامل کروسکال است. بازه‌هایی که در امتداد یک منحنی $\tau = \text{const.}$ هستند بیانگر فاصلهٔ این کره‌ها از یکدیگرند. ما در نمایش نموداری خود مجبوریم که بعدها یک بعد فضا را کنار بگذاریم: برای این منظور با قرار دادن $\theta = \pi/2$ برشهای نوعی به‌دست می‌آوریم. در این صورت هر نقطه از نمودار کروسکال نمایندهٔ دایره‌ای به شعاع R خواهد بود. اگر هر خط $\tau = \text{const.}$ را دنبال کنیم، می‌بینیم که این دایره‌ها از یک شعاع کمینه (روی محور t) شروع می‌شوند و در هر دو راستا به بینهایت می‌رسند هر برش یک نوع سهموی فلام است (با شکل ۱-۸ مقایسه کنید) و برش $\tau = 0$ در واقع دقیقاً یک سهموی فلام است، زیرا که متناظر است با برش $T = 0$ متریک شوارتس‌شیلد. بقیهٔ برشهای $\tau = 0$ دارای کمر باریکتری هستند. شکل ۸-۸ (ب) رشتهٔ کامل برشها را نشان می‌دهد. عالم در مقام یک خط بینهایت E_1 به ناگهان از عدم ظاهر می‌شود و فوراً به‌صورت یک شیپور دوسره کشیده و دراز درمی‌آید، تا سرانجام به‌صورت سهموی فلام درآید که دارای دهانهٔ بیشینه و کمر بیشینه است. پس از آن کل این رشته وارونه می‌شود و در یک آن به خط E_2 برمی‌گردد و سپس دوباره محو می‌شود. دقت کنید که چگونه هنگام باز شدن برشها، دو افق (دایره‌های خط‌چین) با شتاب به‌سمت یکدیگر می‌روند و با سرعت نور برشها را طی می‌کنند. درحالی‌که نواحی ۱ و ۳ (خارج از افقها) بزرگ می‌شوند و ناحیهٔ ۴ (بین دو افق) کوچک می‌شود. هنگامی که افقها یکدیگر را قطع می‌کنند، ناحیهٔ ۴ کاملاً محو می‌شود و ناحیهٔ ۲ ظاهر می‌شود. به‌همین ترتیب ناظری که دارای R ثابت است در امتداد برشها حرکت می‌کند.

برای فضای کروسکال برش قابل توجه دیگری وجود دارد که در زیر به آن می‌پردازیم، همان هذلولیهای هم‌کانون شکل ۸-۸ را گرفته، اما در محل تقاطع آنها با هذلولی $R = 1/2 + \varepsilon$ که بسیار نزدیک به افق است، آنها را در امتداد $T = \text{const.}$ ادامه می‌دهیم [خطوط پر رنگ در شکل ۸-۸ (الف)]. این برشها اصولاً هر کدام از نیمه‌های دو سهموی فلام تشکیل شده‌اند (متناظر با $T = \text{const.}$ و $R = 1/2 + \varepsilon$) که توسط قسمتی از شیپور دو سر شکل ۸-۸ که بین افقها



(الف)



(ب)

شکل ۸-۸

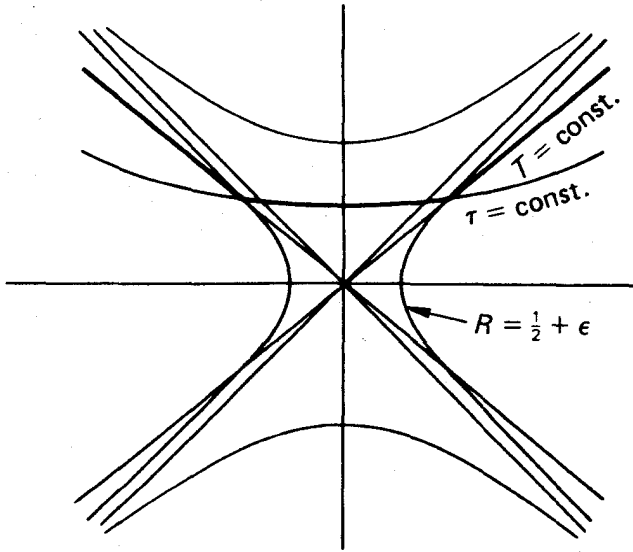
(دقیقاً افقها "به علاوه اسپیلون") قرار دارد به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر نیمه‌های سهموی فلام را به‌گونه‌ای اغراق‌آمیز صفحه انگاریم، برشهای ما آن‌گونه که در شکل ۸-۹ (ب) نشان داده شده است به‌نظر خواهند آمد. صفحه‌ها با "چاله" افقی خود بدون تغییر می‌مانند، درحالی‌که "گردن" بین آنها از طول بینهایت و دهنهٔ صفر به‌طول صفر (در زمانی که افقها به‌آن طرف می‌روند)، دوباره به‌حالت اول، تغییر شکل می‌دهد. ناظری که روی یکی از صفحه‌ها ساکن است از رفتار دینامیک (پویای) گردن چیزی نمی‌بیند. اگر وی بتواند در مقابل جاذبهٔ چاله مقاومت کند و در خارج چاله بماند، می‌تواند جاودانه زندگی کند. اما اگر از افق بگذرد و به داخل چاله بیفتد، همان‌گونه که در بخش ۸-۵ دیدیم، در ویژه‌زمانی متناهی، به تکینگی می‌رسد، یعنی در داخل گردن در حال انقباض چلانده می‌شود. دقت کنید که یک مکان منفرد $[\phi = \text{const.}]$ خط پرنرنگ در شکل ۸-۹ (ب) متناظر با نمودار کروسکال است. موشکهای "مقابل هم" در نمودار کروسکال که کف پایین آنها در زمان $t = 0$ تعویض می‌شود، در شکل ۸-۹ (ب) به‌صورت K_1 و K_2 نمایش داده شده‌اند. این موشکها، برخلاف K_1 و K'_1 ، مقابل و متقاطع یکدیگر نسبت به افق نیستند! شکل ۸-۹ (ب) به‌خوبی نشان می‌دهد که چگونه دو فضای خارجی ۱ و ۳ می‌توانند همزمان در یک افق کروی دوعبده [در شکل ۸-۹ (ب) یک دایره] مشترک باشند بدون اینکه در رویدادی با سیگنالی وجه اشتراک داشته باشند.

بسیاری از آنچه که در بخش گذشته حیرت‌آور می‌نمود، اکنون با وجود فضای کروسکال روشن می‌شود. به‌خصوص می‌توان دید که هر دو ربع مجاور هم، در فضای کروسکال را می‌توان به‌گونه‌ای منظم با یک متریک ادینگتون-فینکلشتاین به‌صورت ۸-۷۶ یا ۸-۷۷ پوشاند.

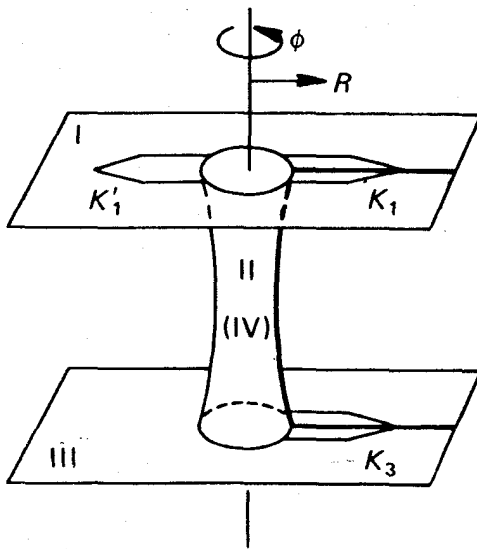
فضای کروسکال، گرچه بدون شک از لحاظ نظری بسیار جالب است، آیا دارای کاربردهای عملی نیز هست؟ فعلاً شاید خیر. یک شیء رمبیده - که فضازمان آن همان‌گونه که در بخش گذشته متذکر شدیم فاقد نواحی O_2 و I_1 یعنی نواحی ۳ و ۴ است - نمی‌تواند فضای کروسکال را تولید کند. و هیچ‌گونه شواهدی که بر وجود فضاهای کامل کروسکال در طبیعت دلالت داشته باشد وجود ندارد. جان ویلر و مکتب وی زمانی امیدوار بودند که یک نظریهٔ هندسی ذرات بنیادی بسازند که در آن فضاهای کروسکال و تعمیمهای "بار برقی‌دار" آن و یک فضازمان (مشبک) زنبوری با "کرم-چاله‌هایی" از نوع کروسکال نقش اصلی را بازی کنند. ("مادهٔ بدون ماده" و "بار بدون بار" و "هندسه همه چیز است"). اما به‌نظر می‌رسد که این اندیشهٔ زیبا به‌موانع غیرقابل عبوری برخورد کرده است.

۸-۷ یک "اثبات" نسبیت عامی برای $E = mc^2$

همان‌گونه که در بخش ۵-۶ دیدیم، از طریق نسبیت خاص می‌توان به‌سادگی نشان داد که هر نوع انرژی بر طبق رابطهٔ $E = mc^2$ جرم را افزایش می‌دهد (زیرا در مورد انرژی جنبشی چنین است و هر نوع انرژی به انرژی جنبشی قابل تبدیل است). اما عکس این قضیه، یا انرژی بودن جرم،



(الف)



(ب)

یعنی انرژی دست‌یافتنی، در ابتدا فرضیه‌ای صرف بود که اثبات تجربی آن — نابودی متقابل ماده و پاد ماده — دهها سال طول کشید. در نسبیت عام، برای بیرون کشیدن μc^2 یکای انرژی از جرم μ ، به‌گونه‌ای پیوسته، عملاً یک دستور کار وجود دارد. این دستور می‌گوید که جرم μ را آهسته به افق یک سیاهچاله با جرم m نزدیک کنید و انرژی حاصل را جمع کنید. چرا آهسته؟ دلیل آن صرفاً جلوگیری از هدر دادن انرژی جنبشی به نفع سیاهچاله است.

اگر جرم μ را به‌گونه‌ای بخواخت روی یک پوسته‌ی کروی \sum هم‌مرکز با سیاهچاله، مثلاً در شعاع $r = r_0$ توزیع کنیم، تجزیه و تحلیل شفافتر خواهد شد بدون اینکه در نتیجه تغییری حاصل شود. اینکه می‌گوییم \sum دارای جرم μ است بدین معنی است که نیروی وارد از m بر یک عنصر سطح dS متعلق به \sum برابر است با $\mu ds/4\pi r_0^2$ ضربدر g در رابطه ۸-۷۱. در اصل، ناظران روی \sum می‌تواند با بریدن dS این نیرو را اندازه بگیرند.

اکنون فرض کنید \sum منقبض می‌شود و به شعاع $r = r_1$ می‌رسد. هنگام انقباض این حلقه، میدان بر روی آن کار انجام می‌دهد و این کار می‌تواند به‌صورت انرژی کشسان در \sum جمع شود. این انرژی به‌نوبه خود می‌تواند به فوتون تبدیل شود و از \sum به ناظر مانا در $r = r_0$ پس فرستاده شود و در آنجا ذخیره و یا به ماده تبدیل شود. فرض کنیم این فرایند به‌گونه‌ای پیوسته روی می‌دهد طوری که \sum همواره جرم μ خود را حفظ می‌کند. کاری که میدان هنگام انقباض از شعاع r به $r - dr$ روی \sum انجام می‌دهد برابر است با [با ۸-۷۱ و ۸-۷۰ مقایسه کنید]

$$dW = -\mu g d\sigma = -\mu d\varphi = -\frac{\mu m dr}{\alpha(r)r^2}, \quad \alpha(r) = 1 - \frac{2m}{r} \quad (98-8)$$

هنگامی که این کار به فوتون تبدیل شود و به r_0 فرستاده شود، انرژی متناظر dE که دریافت می‌شود به‌اندازه ضریب دوپلر ۸-۵۱ کاهش می‌یابد، زیرا بار انرژی هر فوتون متناسب با بسامد آن است

$$dE = -\frac{\mu m dr}{\alpha(r)^{1/2} \alpha(r_0)^{1/2} r^2} \quad (99-8)$$

در نتیجه انرژی کل که در r_0 دریافت می‌شود برابر است با

$$E = \mu m \alpha(r_0)^{-1/2} \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{\alpha(r)^{1/2} r^2} = \frac{1}{2} \mu \alpha(r_0)^{-1/2} \int_{\alpha(r_1)}^{\alpha(r_0)} \frac{d\alpha}{\alpha(r)^{1/2}} \\ = \mu \left[1 - \frac{\alpha(r_1)^{1/2}}{\alpha(r_0)^{1/2}} \right] \quad (100-8)$$

هنگامی که $r_1 \rightarrow 2m$ می‌رود این مقدار دقیقاً برابر با μ (در یکاهای معمول برابر با μc^2) می‌شود. این فرایند زمانی که \sum به‌درون افق بیفتد الزاماً متوقف می‌شود. بنابراین، همان‌گونه که ادعا شد،

پس از محو شدن Σ در درون افق، انرژی جمع شده در r_0 برابر با انرژی هم‌ارز Σ یعنی μc^2 است. البته باید گفت که زمان لازم برای انجام این فرایند بینهایت است، زیرا آخرین فوتون که از Σ فرستاده می‌شود در زمان $t = \infty$ به r_0 می‌رسد.

در اینجا این سؤال پیش می‌آید که آیا این انرژی را واقعاً از Σ بیرون کشیده‌ایم یا از میدان؟ بهترین طریق جواب به این سؤال این است که نشان دهیم به هنگام تکمیل فرایند بالا، میدان تغییر نکرده است و صرفاً نقش یک واسط (کاتالیزور) را داشته است: یعنی ضمن اینکه میدان روی Σ کار انجام می‌دهد، Σ نیز با فوتونهایی که می‌فرستد بر روی میدان کار انجام می‌دهد. برای اثبات اینکه میدان تغییر نکرده است، ابتدا متذکر می‌شویم که بنابر قضیهٔ بیرکھوف (مقایسه کنید با بخش ۸-۳) مسلماً میدان خارج از r_0 تغییر نکرده است. جهش شدت میدان در امتداد پوستهٔ انرژی r_0 که سرانجام تولید شده است نمی‌تواند تفاوت زیادی با مقدار (کوچک) کلاسیک متناظر با آن داشته باشد. حال اگر این روند بر جرم مؤثر سیاهچاله می‌افزود و در اثر آن میدان شوارتس شیلد بین افق و r_0 تغییر می‌کرد، این افزایش جرم می‌توانست در اثر تکرار فرایند بالا ازدیاد نامعینی داشته باشد، و در نتیجه جهش بزرگی در امتداد r_0 تولید کند. پس نتیجه می‌گیریم که میدان، در واقع، هیچ تغییر نکرده است. بنابراین ما تمام جرم Σ را به انرژی تبدیل کرده‌ایم، بدون اینکه هیچ چیز دیگری را تغییر داده باشیم.

به‌عنوان یک نتیجهٔ جنبی متذکر می‌شویم که با وجود اینکه سیاهچالهٔ Σ را "از حالت سکون به درون افق" جذب کرده است، جرم آن تغییر نکرده است. و منظور از اینکه شمارهٔ ذرات بنیادی داخل یک سیاهچاله نامعین است همین است.

۸-۸ یک موج گرانش با جبههٔ تخت

اختلالات خمیدگی در فضا-زمان باید برحسب انتظار با سرعت نور پخش شوند و بدین‌گونه باعث بروز "پرتوهای گرانشی" شوند. بررسیهای نظری زیادی، که بیشتر روشهای تقریبی گوناگون را به‌کار گرفته‌اند، صحت این امر را نشان داده است. اما برخی جوابهای دقیق معادلات میدان خلا اینشتین به‌وضوح نمایانگر امواج گرانشی هستند و ما در اینجا یکی از ساده‌ترین آنها را که "موج ساندویچی بینهایت با جبههٔ مستوی" است بررسی می‌کنیم. این موج از نوعی نیست که بتوان آن را توسط منبع معقولی تولید کرد، بلکه باید آن را ازلی دانست. با وجود این، خواص جالبی دارد که می‌توان انتظار داشت در وضعیتهای پرتوی عامتر نیز به‌کار آیند. دقت کنید که موج گرانش باید در معادلات میدان خلا صدق کند. امواج گرانش گرچه می‌توانند حامل انرژی گرانشی باشند، اما این انرژی صریحاً تشکیل یک جملهٔ منبع در نظریهٔ اینشتین را نمی‌دهد. [بند (د) صفحهٔ ۲۲۰ را ببینید]، و ما فرض خواهیم کرد که در مسیر آن هیچ نوع دیگر انرژی (مانند جرم، میدان الکترومغناطیسی و غیره) وجود ندارد.

نمایهٔ هر موج نرده‌ای $p = f(x)$ که با سرعت c در راستای x پخش شود پس از زمان

t توسط معادله $p = f(x - ct)$ داده می‌شود. در اینجا ما $c = 1$ اختیار خواهیم کرد و بر طبق سنت می‌نویسیم $p = g(t - x)$ که در آن $g(x) = f(-x)$ است. ما با الهام از مشابه الکترومغناطیسی انتظار داریم که امواج گرانش عرضی باشند، یعنی فضا-زمان را تنها در راستاهای عمود بر خط قائم موج مختل کنند. بدین‌گونه به بررسی متریک‌هایی به صورت زیر می‌رسیم

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - p^2 dy^2 - q^2 dz^2 \quad (10-1-8)$$

که در آن p و q تنها توابعی از

$$u = t - x$$

هستند. "اختلال" در هر زمان t تنها در صفحه y, z وجود دارد و با سرعت نور پخش می‌شود. ما با این فرض که جمله‌ای به صورت $dydz$ وجود ندارد، قید دیگری وارد کرده‌ایم و چنانکه خواهیم دید این قید، در ساده‌ترین وضع، معادل‌گزینش محورهای y و z در "صفحه‌های قطبش" موج است.

محاسبه تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ و تانسور ریمان $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ برای متریک 10-1-8 با رجوع به پیوست ۱ سراسر است. از این طریق چنین درمی‌یابیم که معادلات میدان خلاً $R_{\mu\nu} = 0$ وقتی صادق‌اند که اگر و تنها اگر

$$\frac{p''}{p} + \frac{q''}{q} = 0 \quad (10-2-8)$$

که در آن پریم نشان‌دهنده مشتق بر حسب u است. ضمناً متریک هنگامی تخت است ($R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$) که اگر و تنها اگر

$$p'' = q'' = 0 \quad (10-3-8)$$

دقت کنید که این شرط آخر هم‌ارز است با اینکه p و q توابعی خطی از u باشند. ساده‌ترین راه غیربدیهی برای اینکه معادله 10-2-8 صادق باشد این است که p و q را به صورت زیر برگزینیم

$$p = \cos ku, \quad q = \cosh ku \quad (10-4-8)$$

چنانکه خواهیم دید این گزینش از لحاظ فیزیکی نیز اساسی‌ترین است. اما، فرض نخواهیم کرد که 10-4-8 همه‌جا صادق باشد. هدف ما ساختن یک موج ساندوچی است، یعنی ساختن یک

منطقه خمیدگی (-دار) است که دو صفحه موازی آنرا احاطه کرده باشند و با سرعت نور در راستای قائم بر صفحه‌ها پخش شود، و فضا، در صورت امکان، در دو طرف ساندویچ تخت باشد. شکل ۸-۱۰ یک طرح سه‌بعدی از چنین موجی را در لحظه $t = \text{const.}$ و شکل ۸-۱۰ (ب) "نمودار مینکوفسکی" آنرا نشان می‌دهد. (باید مراقب بود تا در دو نمودار، فضای دو طرف منطقه موج، همانند حالتی که موج وجود ندارد، صرفاً ادامه یکدیگر انگاشته نشوند.)

ما از آنجا که مجبوریم سه جواب معادلات میدان خلأ اینشتین را به یکدیگر بدوزیم (دو جواب در خارج و یکی در داخل ساندویچ)، پس ابتدا باید "شرایط اتصال"^۱ را روشن کنیم. در نظریه‌های نیوتون و ماکسول، همان‌گونه که خواننده اطلاع دارد، پتانسیل و مشتقهای اول آن باید پیوسته باشد، در غیر این صورت منابع مربوطه دارای تمرکز سطحی هستند. معنی فیزیکی این شرط آن است که شدت میدان نباید دارای جهش ناگهانی باشد. در نسبیت عام نیز به‌گونه‌ای مشابه پیوستگی ضرایب متریک $g_{\mu\nu}$ و مشتقات اول آن لازم است، مگر هنگام عبور از یک تمرکز سطحی جرم. معنی فیزیکی این شرط را می‌توان از معادلات ژئودزیک ۸-۱۵ دریافت: شتاب مختصاتی ذرات آزمونی (که معیاری برای نیرو نسبت به دستگاه مختصات است) نباید جهش ناگهانی داشته باشد. بنابراین شرط لازم در متریک ۸-۱۰ پیوستگی q و p' و q' است.

اگر فرض کنیم که صفحه‌های جلو و عقب موج به ترتیب دارای معادلات $u = a^2$ و $u = 0$ هستند و اگر فرض کنیم که قبل از عبور موج $q = p = 1$ و در داخل ساندویچ $p = \cos(u/a)$ و $q = \cosh(u/a)$ است، مسلماً شرایط اتصال در $u = 0$ صدق خواهند کرد. و اگر قرار است فضا زمان پس از موج تخت باشد، p و q باید در آنجا خطی باشند. صورت دقیق p و q توسط مقدار و مشتق آنها در $u = a^2$ در داخل موج معین می‌شود، زیرا این مقادیر باید در امتداد اتصال پیوسته باشند. از این طریق به نتیجه زیر می‌رسیم [با شکل ۸-۱۱ (الف) مقایسه شود]

$$u \leq 0: p = 1, q = 1$$

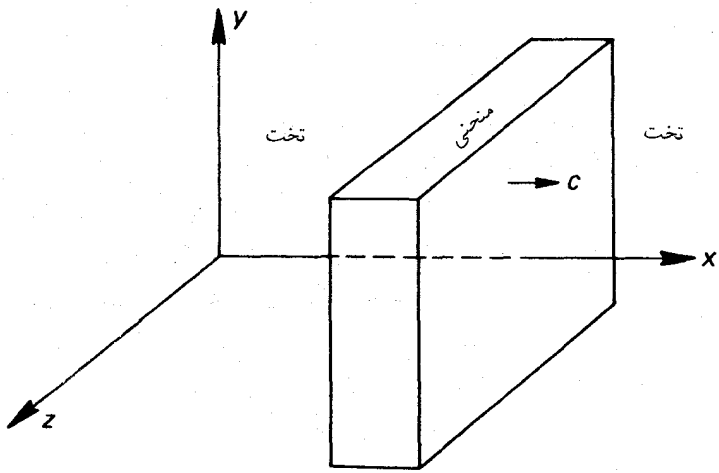
$$0 \leq u \leq a^2: p = \cos\left(\frac{u}{a}\right), q = \cosh\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$a^2 \leq u: p = (\cos a + a \sin a) - \left(\frac{u}{a}\right) \sin a$$

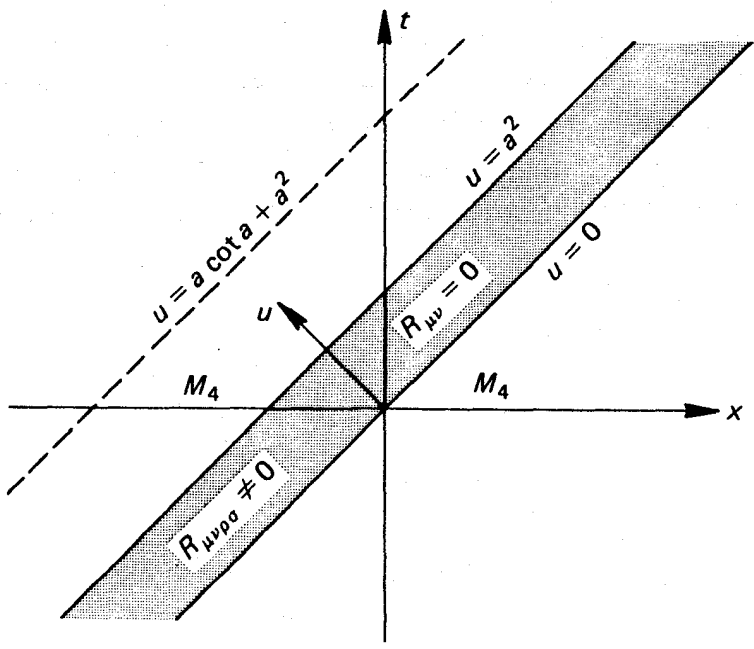
$$q = (\cosh a - a \sinh a) + \left(\frac{u}{a}\right) \sinh a \quad (8-105)$$

اکنون سؤال می‌کنیم که عبور موج چه تأثیری روی ذرات آزمونی دارد؟ برای جواب به این سؤال احتیاج به لم ساده‌ای داریم. این لم می‌گوید که معادلات

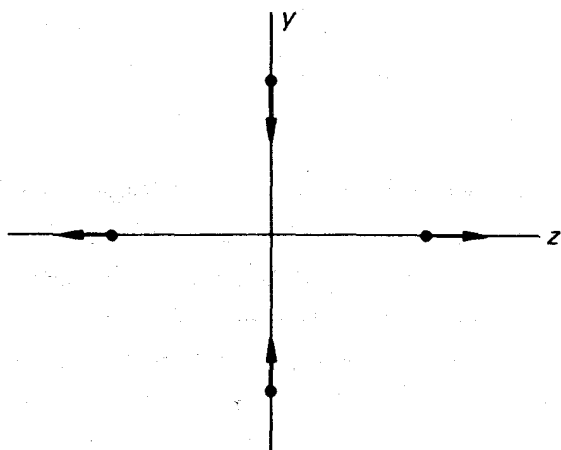
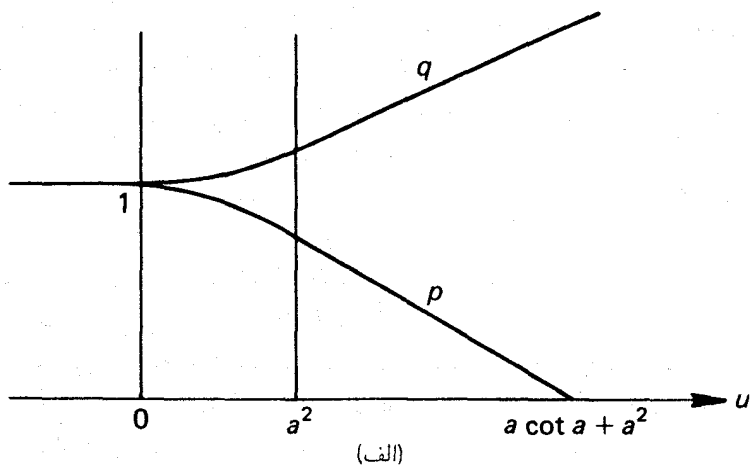
$$x, y, z = \text{const.} \quad (8-106)$$



(الف)



(ب)



شکل ۸-۱۱

در متریک ۸-۱۰، و یا به طور عام در هر متریکی که فاقد جملات ضربداری در dt باشد و ضریب dt^2 واحد (یا ثابت) باشد، نماینده ژئودزیکهای زمانگونه (یعنی جهانخطهای ممکن برای ذرات) هستند. زیرا از معادله ۸-۱۳ (به ازای x^1, x^2, x^3, x^4) می توان دید که برای این نوع متریکها $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = 0$ است. معادلات ۸-۱۰۶ متضمن $ds^2 = dt^2$ هستند، بنابراین $dt/ds = 1$ و $d^2t/ds^2 = 0$ است. پس تمام معادلات ۸-۱۵ صادق اند. خاصیت زمانگونه بودن نیز واضح است.

اکنون "غبار آزمونی" را در نظر بگیرید که در دستگاه مختصات مینکوفسکی x, y, z, t قبل از ورود موج در حال سکون است. حرکت ذرات این غبار در هر زمان توسط معادلات $x, y, z = \text{const.}$ بیان می‌شود. دو ذره غبار را که تنها فاصله کوچک dy روی محور y آنها را از یکدیگر جدا می‌کند مورد دقت قرار می‌دهیم. فاصله فضایی آنها در طول زمان برابر است با $|ds| = p dy$. همین فاصله فضایی برای دو ذره که تنها فاصله کوچک dt روی محور z آنها را از یکدیگر جدا می‌کند برابر است با $|ds| = q dz$. بنابراین، هنگام عبور موج فاصله تمام ذرات در امتداد محور y کاهش می‌یابد [$p = \cos(u/a)$ کاهش می‌یابد]، درحالی‌که فاصله آنها در امتداد محور z افزایش می‌یابد [شکل ۸-۱۱ (ب)].

اکنون می‌توانیم معادلات میدان را به‌گونه‌ای هندسی تفسیر کنیم. بار دیگر دو ذره آزمونی را در نظر بگیرید که تنها فاصله کوچک dy در امتداد محور y آنها را از یکدیگر جدا می‌کند و هر دو در امتداد ژئودزیکهای $x, y, z = \text{const.}$ حرکت می‌کنند. فاصله عمودی این دو ژئودزیک در فضای y و t ، که هر دو در آن قرار دارند، برابر است با $\eta = p dy$. برای این ژئودزیکها داریم $ds = dt = du$ بنابراین

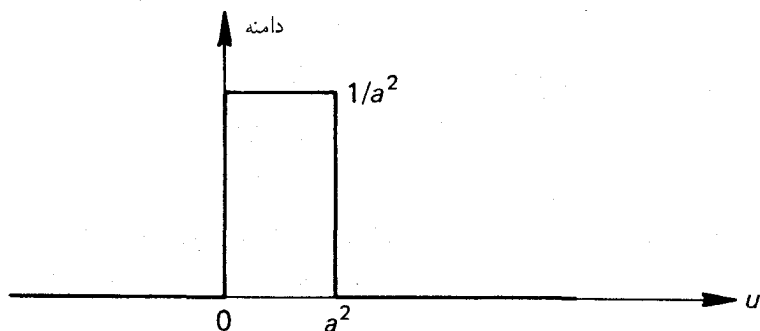
$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = \frac{d^2 \eta}{du^2} = p'' dy$$

اکنون مقایسه با ۷-۵ نشان می‌دهد که $-p''/p$ دقیقاً خمیدگی منطقه موج را، در جهتی که توسط فضای y و t معین می‌شود، اندازه می‌گیرد. به‌همین ترتیب، $-q''/q$ خمیدگی را در جهتی که توسط فضای z و t معین می‌شود اندازه می‌گیرد. از معادلات میدان ۸-۱۰۲ چنین برمی‌آید که این خمیدگیها باید مساوی ولی با علامت مخالف باشند. خمیدگی از لحاظ عددی به‌ازای جهتایی که توسط t و راستایی دیگر در صفحه y و z معین می‌شود مسلماً کمتر است. پس محورهای y و z در "صفحه قطبش" موج قرار دارند. بدیهی است که در این صورت بیشینه عددی این خمیدگی، یعنی $|q''/q| = |p''/p|$ را به‌عنوان دامنه موج می‌گیریم. بنابراین معادله ۸-۱۰۵ بیانگر موجی است با دامنه ثابت $1/a^2$ ، یعنی یک "موج مربعی"، همان‌گونه که در شکل ۸-۱۲ نشان داده شده است. سطح زیر این منحنی با دامنه به‌خصوص، برابر با واحد است. اگر $a \rightarrow 0$ برود، یک موج تپی به‌دست می‌آید، که باید آن را اساسی‌ترین موج مستوی انگاشت. معادلات ۸-۱۰۵ در این حالت حدی به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$u \leq 0: p = q = 1$$

$$u \geq 0: p = 1 - u, q = 1 + u \quad (107-8)$$

همان‌گونه که از یک رشته تپ می‌توان یک نیروی پیوسته تولید کرد، از روی هم سوار کردن (انتگرال گرفتن) یک رشته امواج تپی می‌توان هر موج ساندویچی دلخواه تولید کرد.



شکل ۸-۱۲

پس از عبور موج (۸-۱۰۵ یا ۸-۱۰۷)، p به گونه‌ای خطی به سمت صفر می‌رود. بنابراین چنین به نظر می‌رسد که همه ذرات غبار که روی خطوط $x, z = \text{const.}$ هستند به هنگام $u = a \cot a + a^2$ در یک کانون "متمرکز" می‌شوند. این موضوع سه سؤال تشویش‌آمیز برمی‌انگیزد: (الف) نقطه تجمع ذرات بر روی خط $x, z = \text{const.}$ در کجا خواهد بود، و چرا در آنجا و نه روی همان خط در چایی دیگر؟ (ب) ذرات دور چگونه به رویداد متمرکز می‌رسند بدون اینکه سریعتر از نور حرکت کنند؟ و (ج) آیا صفر شدن p متضمن یک تکینگی متریک نیست؟ آیا امواجی را که در آنها p و یا q بتوانند صفر شوند باید به دلیل غیر فیزیکی بودن طرد کنیم؟ خیر: اولاً می‌توان نشان داد که حداقل p یا q باید به صفر برسند؛ ثانیاً مشکلات ظاهراً فیزیکی در رابطه با اثر متمرکز در کانون فقط ظاهری هستند؛ و ثالثاً تکینگی متریکی تنها یک تکینگی مختصاتی است. از این جهت (و نیز از برخی جهات دیگر نیز) مفیدتر این است که p و q را بر حسب دو تابع جدید L و β بیان کنیم، که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$p = Le^{\beta}, \quad q = Le^{-\beta} \quad (8-108)$$

بنابراین

$$pq = L^2, \quad \frac{p}{q} = e^{2\beta} \quad (8-109)$$

دقت کنید که برای برقراری شرایط اتصال باید L و β هر دو مشتق آنها، مانند p و q ، پیوسته

باشند. از ۸-۱۰۸ چنین می‌یابیم

$$\frac{p''}{p} = \frac{1}{L} \left[(L'' + \beta'^2 L) + (\beta'' L + 2\beta' L') \right]$$

$$\frac{q''}{q} = \frac{1}{L} \left[(L'' + \beta'^2 L) - (\beta'' L + 2\beta' L') \right] \quad (۱۱۰-۸)$$

در اینجا می‌توان معادلهٔ دوم را با نشاندن $-\beta$ به جای β از معادلهٔ اول به دست آورد. پس می‌بینیم که معادلات میدان ۸-۱۰۲ هم‌ارزند با

$$\beta = \pm \int \left(-\frac{L''}{L} \right)^{1/2} du, \quad \text{یعنی} \quad L'' + \beta'^2 L = 0 \quad (۱۱۱-۸)$$

و علاوه براین شرط تخت بودن ۸-۱۰۳ می‌گوید

$$\beta'' L + 2\beta' L' = 0 \quad (۱۱۲-۸)$$

اگر قبل از عبور موج p و q هر دو مثبت و ثابت باشند (که بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد)، L و β نیز ثابت‌اند و $L > 0$ است. اگر β ثابت باشد موج وجود ندارد؛ اگر β تغییر کند، L'' باید در جایی منفی شود که صفر شدن L را تضمین می‌کند. اما L که صفر شود، p نیز صفر خواهد شد. مگر اینکه e^β دارای یک قطب باشد تا آن را جبران کند. اما در این صورت q صفر خواهد شد. بنابراین صفر شدن حداقل یکی از این ضرایب و از آنجا وجود یک تکینگی در متریک ۸-۱۰ غیرقابل اجتناب است. این تکینگی در تاریخچهٔ پروگرامنشی باعث سردرگمی شده بود، به طوری که حتی زمانی اینشتین در وجود امواج گرانشی شک کرد. در سال ۱۹۵۶/۱۳۳۵ آی رابینسون نشان داد که این تکینگی صرفاً یک تکینگی مختصاتی است و ما در یک مورد خاص آن را نشان می‌دهیم.

ابتدا مزیت دیگر توابع L و β را یادآور می‌شویم. با استفاده از این توابع می‌توان از طریق معادلهٔ ۸-۱۱۱ به تعداد دلخواه جواب تولید کرد و برای این کار کافی است L را برگزینیم و β را توسط انتگرال‌گیری بیابیم. (اگر بخواهیم از معادلهٔ ۸-۱۰۴ استفاده کنیم، باید یک معادلهٔ دیفرانسیل حل کنیم.) برای منطقهٔ پس-موج راحت‌تر این است که به p و q بازگردیم. بدین ترتیب که آنها را در داخل منطقهٔ موج حساب می‌کنیم و به‌گونهٔ خطی ادامه می‌دهیم. اما باید دقت کرد که L'' نیز باید پیوسته باشد، زیرا L'' از طریق ۸-۱۱۱ به β' مربوط می‌شود.

اکنون گزینش بسیار خاص زیر را در نظر بگیرید

$$L = L_0, \quad \beta = \beta_0 \left(u \leq -a^2 \right); \quad L = 1 - u, \quad \beta = 0 \left(u \geq 0 \right) \quad (۱۱۳-۸)$$

که در آن L و β ثابت‌هایی مناسب‌اند، و دو قسمت خطی L باید از طریق منطقه موج به‌گونه‌ای به‌یکدیگر متصل شوند که L و L' و $L'' (< 0)$ پیوسته باشند. دقت کنید که بر مبنای فرض ما منطقه موج در $u = 0$ خاتمه می‌یابد. فضا-زمان پس-موج متناظر با ۸-۱۱۳ دارای متریک زیر است

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (1 - u)^2(dy^2 + dz^2) \quad (114-8)$$

در این حالت، تمام ذرات آزمونی غبار که در اصل در صفحه $x = x_0$ ساکن‌اند در زمان $t = 1 + x_0$ در یک کانون متمرکز می‌شوند [خوانندگان آشنا با کیهانشناخت تشخیص خواهند داد که متریک ۸-۱۱۴ برای صفحه $x = x_0$ با $dx^2 = 0$ یک عالم دوبعدی روبرتسون-واکر با "ضریب انبساط" $R(t) = (1 + x_0 - t)$ است؛ با بخش ۹-۵ مقایسه کنید.] تبدیل زیر که مختصات جدید T, Z, Y, X را به دست می‌دهد همه جا منظم است مگر در $u = 1$:

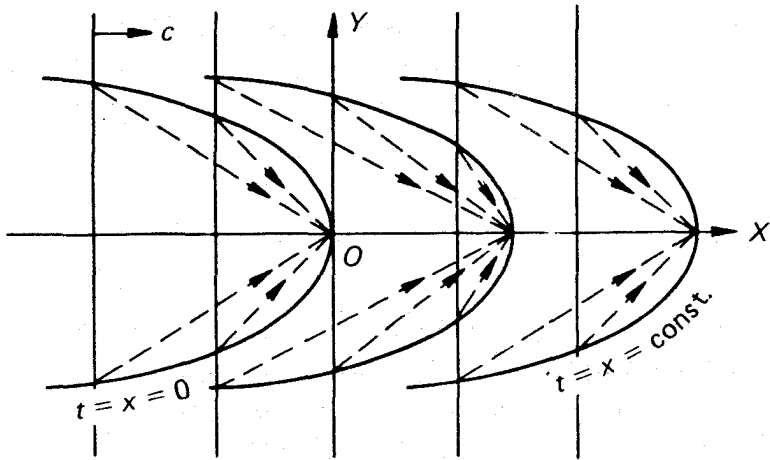
$$\begin{aligned} T &= t - \frac{1}{2}(1 - u)(y^2 + z^2) \\ X &= x - \frac{1}{2}(1 - u)(y^2 + z^2) \\ Y &= (1 - u)y \\ Z &= (1 - u)z \end{aligned} \quad (115-8)$$

این تبدیل متریک ۸-۱۱۴ را به صورت مینکوفسکیایی زیر درمی‌آورد که اثبات آن سراسر است

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (116-8)$$

این رابطه نشان می‌دهد که $u = 1$ صرفاً یک تکیگی مختصاتی متریک ۸-۱۱۴ است. در حالت عام نیز می‌توان تبدیل مشابهی به صورت مینکوفسکیایی یافت. در حقیقت این دستگاه مختصات T, Z, Y, X است که در شکل ۸-۱۰ (الف) در پشت موج باید نشان داده شود. برای دیدن اینکه چگونه ذرات آزمونی‌ای که ابتدا در فضای x, y, z, t در حال سکون هستند، پس از گذشتن موج به کانونهای مربوط سیر می‌کنند، می‌توانیم از دستگاه T, Z, Y, X استفاده کنیم. یک دسته ذره را در نظر بگیرید که روی خط $x, z = \text{const.}$ در متریک ۸-۱۱۴ قرار دارند و به عنوان مثالی خاص، جهانخطهای زیر را به ازای مقادیر ثابت مختلف m در نظر بگیرید

$$x = 0, \quad y = m, \quad z = 0, \quad t = t \quad (117-8)$$



شکل ۸-۱۳

معادله سوم بیانگر این است که ما t را هم به عنوان پارامتر و هم به عنوان مختص به کار می‌بریم. تبدیل این جهانخطها چنین است

$$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)m^2, \quad Y = (1-t)m, \quad Z = 0, \quad T = t - (1-t)m^2 \quad (۱۱۸-۸)$$

می‌بینیم که این خطها بر محور X عمود نیستند بلکه دارای ضریب زاویه $2/m$ هستند. از آنجا که این خطوط در $x = 0$ صدق می‌کنند، ذرات همگی در زمان $t = 0$ ($u = 0$) از منطقه موج خارج می‌شوند؛ پس ذرات در مختصات جدید به ازای $T = -1/\sqrt{2}m^2$ و $X = -1/\sqrt{2}m^2$ از این منطقه خارج می‌شوند، یعنی نه همزمان و نه روی یک صفحه. با وجود این پشت این موج در هر لحظه هنوز یک صفحه است، یعنی $X = \text{const.}$ زیرا معادله آن $t = x$ به $T = X$ تبدیل می‌شود. بنابراین در فضای X, Y, Z, T تصویر زیر به دست می‌آید. یک موج تخت بر روی ذرات می‌وزد اما تأثیر آن صرفاً عرضی نیست بلکه یک مؤلفه سرعت به جلو به ذرات می‌دهد، به استثنای ذراتی که بر محور X قرار دارند. تمام ذراتی که روی سهمی $X = -1/\sqrt{2}Y^2$ و $Z = 0$ قرار دارند (شکل ۸-۱۳) تنها در یک رویداد $(1, 0, 0, 0)$ به ازای پارامتر $t = 1$ متمرکز می‌شوند. زمان سیر آنها $1 + 1/\sqrt{2}m^2$ و مسافتی که سیر می‌کنند $(m^2 + 1/4m^4)^{1/2}$ است. چون $m^2 + 1/4m^4 > (1 + 1/\sqrt{2}m^2)^2$ است، پس هیچ‌یک از ذرات حد سرعت نسبیتی را نمی‌شکنند. (البته این امر از پیش نیز به جهت ماهیت زمان‌گونه‌ای ۸-۱۱۷ آشکاراست.) مجذور بازه در امتداد هر یک از این مسیرها برابر واحد است. اگر سهمی را حول محور X دوران دهیم یک سهمی دوار به دست می‌آید با این خاصیت که تمام ذرات روی آن در زمان $T = 1$ در رأس

آن متمرکز می‌شوند. از این سه‌میویها می‌توان یک رشته کامل رسم کرد که همگی همانند و هم‌محور هستند، و هر کدام متناظرند با یک مکان هندسی $t = x = \text{const.}$ در فضای X, Y, Z و هر کدام معین‌کننده یک دسته ذره‌اند که موج‌گذرنده متمرکز می‌کند. (در حالت عام موج ۱۰۸-۱۰ ذرات را روی یک خط متمرکز می‌کند و نه روی یک نقطه تنها، اما خواص تمرکز اساساً همان است که اینجا بحث شد.)

یک سؤال دیگر باقی می‌ماند: چرا کانونها همگی روی محور X قرار دارند و نه روی خط دیگری مثل $Z = \text{const.}, Y = \text{const.}$ ؟ جواب سؤال این است که تمام ذرات روی صفحه مفروض $x = \text{const.}$ هم‌ارزند. اثر موج در این است که از آنها یک عالم همگن در حال انقباض می‌سازد. هر کدام حق دارند خود را "مرکز" این انقباض بدانند، هر کدام حق دارند نقشه این عالم را در چارچوب سکون لخت (پس-موج) خودش بکشد. (نقشه‌کشهای آمریکایی و اروپایی نیز قاره‌های مربوط خود را در مرکز دنیا رسم می‌کنند، و بدون شک اگر دنیا در حال جمع شدن بود، هر یک قاره خود را در حالت سکون در نظر می‌گرفت.) دستگاه لخت X, Y, Z, T در معادلات ۱۱۵-۸ آن دستگاهی است که به ذرات روی محور x وابسته است. ما به خوبی می‌توانستیم برای ذرات روی خط $z = z_0$ ، $y = y_0$ ارجحیت قائل شویم. در این صورت به جای y و z در معادلات ۱۱۵-۸ به ترتیب $y - y_0$ و $z - z_0$ را می‌نشانیم. تصویری که به دست می‌آید همانند بالا بود، با این تفاوت که ذراتی که ابتدا ساکن بودند حالا در حرکت خواهند بود.

بیش از یک دهه است که ور در دانشگاه مرلند اقدامات پیشاهنگانه‌ای برای کشف امواج گرانشی‌ای انجام داده است، که ظاهراً از رویدادهایی شدید در نواحی مرکزی کهکشانی ما می‌آیند. گرچه به نظر می‌آید که داده‌های وی به‌گونه‌ای آماری از دریافت چنین امواجی حمایت می‌کنند، اما پژوهشگران دیگر در نقاط مختلف دنیا تاکنون قادر به تکرار نتایج وی نبوده‌اند. یکی از مسائل جاری یافتن یک سازوکار نظری قابل قبول است (در این رابطه سیاهچاله‌ها تحت بررسی قرار گرفته‌اند) که بتوانند پرتوگرانشی با توان بسیار زیادی را که برای دیدن روی دستگاه و بر لازم است تولید کند.

۹-۸ قوانین فیزیک در فضا زمان خمیده

براهین ما تاکنون منجر به این شناخت شدند که فضا زمان عموماً خمیده است. در چنین فضا زمانی نسبت خاص (که یک نظریه فضای تخت است) تنها به‌گونه‌ای تقریبی و موضعی به‌کار می‌آید، درست همان‌گونه که هندسه اقلیدسی روی کره تقریباً و موضعاً به‌کار می‌آید. با این ترتیب قوانین دقیق فیزیک (غیرگرانشی) در فضا زمان خمیده چگونه‌اند؟ به‌طور مثال قوانین حاکم بر برخورد ذرات یا میدانهای آهنربایی در فضای شوارتس‌شیلد کدام‌اند؟ برای اینکه مبدا خواننده در انتظار تجدیدنظر مهم دیگری باشد و مأیوس شود اجماًلاً می‌گوییم که انتقال از قوانین فضای تخت به قوانین فضای خمیده اصولاً بدیهی است. اندیشه‌های اصلی این انتقال چنین‌اند:

(الف) تعریف کمیتهای فیزیکی و قوانین حاکم بر آنها در ماهیت اصول (اکسیوماها) نهفته

است؛ صورتبندی و تطبیق آنها قضیه‌ای است که جنبهٔ توجیه دارد و قابل اثبات نیست. (ب) آنچه که می‌توان به‌طور منطقی از یک قانون در فضا-زمان خمیده انتظار داشت این است که آن قانون مستقل از زمان باشد، در حد امکان ساده باشد، و دیگر اینکه در حالت خاص فضا-زمان مینکوفسکی به قانون نسبیت خاصی متناظر با آن (در صورتی که معلوم باشد) تبدیل شود. (ج) مشتق‌های مطلق و هموردا در فضا-زمان مینکوفسکی با مختصات معیار (به دلیل صفر بودن Γ ها) به ترتیب به مشتق‌های عادی و جزئی تبدیل می‌شوند.

اولین قدم ما این خواهد بود که تعریفها و قانونهای نسبیت خاصی را به صورت تانسوری بیان کنیم. اما از آنجا که تانسورها را در حالت عام برحسب مؤلفه‌های شاخص‌دار بسط داده‌ایم، از این نمادگذاری برای چارتانسورهای نسبیت خاصی (با $4-3$ یا $4-2$ مقایسه کنید) نیز استفاده خواهیم کرد. علامتگذاری بردارها با حروف سیاه مانند $4-8$ را کنار خواهیم گذاشت. به‌طور مثال، تعریف $4-8$ را برای چارسرعت یک ذره می‌توان چنین نوشت (با فرض $c = 1$)

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (119-8)$$

اما چون dx^μ/ds تحت هر تبدیل مختصات همچون یک تانسور رفتار می‌کند، پس می‌توان تعریف U^μ را از یک چارتانسور به یک تانسور عام در M_4 عمومیت داد. برای این کار کافی است تعریف $119-8$ را برای هر دستگاه مختصات دلخواه در M اختیار کنیم. اکنون دیگر بسط همین تعریف به فضا-زمانهای خمیده گامی طبیعی است. به همین دلیل تعریف تکانهٔ چهاربعدی $5-6$ با صورت مؤلفه‌ای آن

$$P^\mu = m_0 U^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \quad (120-8)$$

برای هر فضا-زمان دلخواه اختیار می‌شود. حال قانون پایستگی تکانه $5-9$ را در نظر بگیرید

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu \quad (121-8)$$

با تعریف جدید P^μ که عمومیت دارد، می‌توان این قانون را نیز مستقیماً در فضا-زمانهای دلخواه به‌کار برد.

در تعریف چارنبرو، $5-3$ ، با اشکالات کوچکی برخورد می‌کنیم

$$F^\mu = \frac{d}{ds} P^\mu = \frac{d}{ds} \left(m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right) \quad (122-8)$$

قسمتهای دوم و سوم این معادله تانسورهای عام هستند (با ۸-۱۲ مقایسه کنید). در عوض

$$F^\mu = \frac{D}{ds} P^\mu = \frac{D}{ds} \left(m_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right) \quad (۱۲۳-۸)$$

را در نظر بگیرید (با ۸-۱۵ مقایسه کنید). در این معادله قسمتهای دوم و سوم تانسورهای عام‌اند و به‌علاوه ۸-۱۲۳ برحسب مختصات معیار در M_4 به ۸-۱۲۲ تبدیل می‌شوند. از این جهت ما ۸-۱۲۳ را به‌عنوان تعریف نیرو در فضا زمانهای دلخواه قبول می‌کنیم. فرض کنید که در نسبت خاص بتوانیم چارنیرو را از پتانسیل نرده‌ای φ برحسب قانون

$$F_\mu = -k\varphi_{,\mu} \quad (۱۲۴-۸)$$

با نمادگذاری ۸-۹ به‌دست آوریم. (دقت کنید که ما، به‌دلیل هموردا بودن عضو سمت راست معادله بالا، صورت هموردای F^μ یعنی $g_{\mu\nu} F^\nu$ را به‌کار برده‌ایم.) این معادله را می‌توان مستقیماً در فضا زمانهای دلخواه به‌کار گرفت. اما اگر معادلات میدان خلاً نسبت خاصی برای φ به‌صورت

$$g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu\nu} = 0 \quad (۱۲۵-۸)$$

باشند، نمی‌توان آنها را مستقیماً به‌کار گرفت. تانسور عامی که برحسب مختصات معیار در M_4 به $\varphi_{,\mu\nu}$ تبدیل می‌شود، $\varphi_{;\mu\nu}$ است (خلاصه نوشته $\varphi_{;\mu\nu} = \varphi_{\mu;\nu}$). پس معادله‌ای که آن را در هر فضا زمان دلخواه می‌پذیریم، چنین است

$$g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu\nu} = 0 \quad (۱۲۶-۸)$$

اکنون باید روند تعمیم قوانین و تعاریف نسبت خاصی روشن شده باشد:

(د) اگر قوانین و تعاریف نسبت خاصی تنها در برگیرنده عباراتی باشند که بتوان آنها را مستقیماً همچون تانسورهای نسبت عامی تعبیر کرد، آنگاه می‌توان آنها را مستقیماً در فضا زمانهای دلخواه به‌کار برد. باید به‌جای مشتقات عادی و جزئی تانسورهای رده ≤ 1 ، (که نمی‌توان آنها را این چنین تعبیر کرد) به‌ترتیب مشتقاتی مطلق و هموردا نشانند.

بدین ترتیب قوانین و تعاریف تعمیم‌یافته مستقل از مختصات خواهند بود و در M_4 با مختصات معیار به‌صورتی نسبت خاصی تبدیل می‌شوند و در نتیجه در شرایط اصلی ما صدق می‌کنند. روند فوق را می‌توان تا حدی برحسب اصل هم‌ارزی توجیه کرد. اصل هم‌ارزی در صورتبندی اولیه و نسبتاً مبهم آن می‌گوید که قوانین فیزیک (ناگرانشی) در تمام چارچوبهای موضعی لخت همانندند، و در واقع با قوانینی که در نسبت خاص کشف شده‌اند همانندند. اما چارچوبهای موضعی لخت

نواحی کوچکی از فضا زمان تخت نیستند. بلکه آنها، همان‌گونه که در بخش ۸-۱ دیدیم، دستگایهای مختصات موضعی خاصی در یک فضا زمان خمیده دلخواه‌اند، با این خاصیت که در مبدأ آنها که رویدادی منفرد است— خطوط مختصات متعامدند و Γ ها برابر صفرند. محدودیتهایی که در اینجا برای اصل هم‌ارزی باید قائل شد، هنوز روشن نیست. اما با در نظر گرفتن روند (د) برای تولید قوانین در فضای خمیده، می‌توان اصل هم‌ارزی را با دقت بیشتر صورتبندی کرد:

(ه) قوانین و تعاریف فیزیک (ناگرانشی) در مبدأ هر چارچوب موضعی لخت— در صورت امکان— به صورت نسبیت خاصی خودشان تبدیل می‌شوند.

تمام مثالهایی که تاکنون زده‌ایم، از جمله ۸-۱۱۹، در این شرط صدق می‌کنند. اما این شرط به‌ازای قوانین عامی که در آنها مشتقهای دوم (یا بالاتر) مطلق یا هموردای تانسورهای از رده $1 \leq$ وارد می‌شوند مصداق ندارد. زیرا این مشتقها عموماً به مشتقهای دوم (یا بالاتر) عادی یا جزئی متناظر خود در مبدأ چارچوب موضعی لخت تبدیل نمی‌شوند. بنابراین به نظر می‌رسد که تنها مدل اول اصل هم‌ارزی قوانینی هستند که مشتقهای بالای تانسورهای از رده $1 \leq$ را در بر ندارند. مسلماً این امر مربوط به این واقعیت است که یک چارچوب موضعی لخت در رتبه دوم تقریب از لخت بودن منحرف می‌شود.

اصل هم‌ارزی به هنگام کاربردش (آن‌گونه که در بالا در بند (ه) صورتبندی شده است) همچون یک اصل جفت کمینه، یعنی بین گرانش— از طریق خمیدگی— و مابقی فیزیک، عمل می‌کند. علتش این است که این اصل از ورود جمله‌های خمشی “غیر ضروری” به داخل قوانین عام جلوگیری می‌کند. به‌طور مثال معادله میدان ۸-۱۲۵ را نه تنها به صورت ۸-۱۲۶ بلکه به صورت

$$g^{\mu\nu}\varphi_{;\mu\nu} = R\varphi \quad (8-127)$$

نیز می‌توان تعمیم داد، که در آن “ R ناوردای خمیدگی $R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ ” است. این قانون نیز در فضای مینکوفسکی به ۸-۱۲۵ تبدیل می‌شود. اما ما ۸-۱۲۷ را بر مبنای اصل هم‌ارزی رد می‌کنیم، زیرا در مبدأ یک چارچوب موضعی لخت تانسور خمشی برعکس Γ ها صفر نمی‌شود، بنابراین ۸-۱۲۷ برعکس ۸-۱۲۶ در مبدأ یک چارچوب موضعی لخت به ۸-۱۲۵ تبدیل نمی‌شود.

متأسفانه روند (د) وقتی با مشتقهای دوم یا بالاتر تانسورهای رده $1 \leq$ سروکار پیدا کنیم مبهم می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم یک عبارت نسبیت خاصی به صورت $A^{\mu}_{\sigma\tau}$ را که البته با $A^{\mu}_{\tau\sigma}$ هم‌ارز است تعمیم دهیم. تعمیمهای متناظر یعنی $A^{\mu}_{\sigma\tau}$ و $A^{\mu}_{\tau\sigma}$ هم‌ارز نیستند: این دو تعمیم در یک جمله خمشی اختلاف دارند (با ۸-۲۵ مقایسه کنید). در این‌گونه موارد ابهام محکهای دیگری برای گزینش باید پیش کشیده شوند. مسئله‌ای با این ماهیت عملاً در تعمیم معادلات ماکسول پیش می‌آید.

در این رابطه قانونی که به خصوص مورد توجه است قانونی است که رفتار ماده با توزیع پیوسته از آن تبعیت می‌کند. ما تانسور انرژی را برای غبار مانند ۵-۴۹ اما به مضمون عام چنین تعریف

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu \quad (۱۲۸-۸)$$

و صورت تعمیم یافته قانون ۵۱-۵ چنین است

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\tau\nu} T^{\tau\nu} + \Gamma^{\nu}_{\tau\nu} T^{\mu\tau} = 0 \quad (۱۲۹-۸)$$

در مورد ملاحظاتی که دارای تنشهای درونی اند، تعریف پیچیده‌تری برای $T^{\mu\nu}$ وجود دارد، اما ۱۲۹-۸ را به رابطه $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ صادق می‌مانند.

ضمناً دقت کنید که روند (د) قانون حرکت آزاد نسبیت خاصی، $(d/ds)(dx^\mu/ds) = 0$ را به قانون ژئودزیک نسبیت عامی $(D/ds)(dx^\mu/ds) = 0$ منتقل می‌کند. البته این انتقال نیز مانند تمام انتقال‌های این چنینی، قانون فضای خمیده را اثبات نمی‌کند: مقام منطقی این انتقال تنها یک حدس است.

بنابر قواعد این بخش همه نیروهای نسبیت خاصی (الکترومغناطیسی، کشسانی، برخوردی، و غیره) دارای یک هم‌تا در نسبیت عام هستند، یعنی اکنون این نیروها بازیگرانی هستند در یک صحنه جدید. در بین تمام نیروهای کلاسیکی، تنها گرانش است که هم‌تایی در نسبیت عام ندارد: به قول ویتاکر گرانش به عوض اینکه یکی از بازیگران باشد، "قسمتی از صحنه" شده است. در واقع گرانش "هندسی" شده است. سالها امید می‌رفت که با نوعی بسط و گسترش هندسه می‌توان الکترومغناطیس را نیز در هندسه جذب کرد ("نظریه‌های میدان وحدت یافته")، اما پس از کشف نیروهای اساسی دیگر (نیروهای هسته‌ای)، این کوششها جذابیت خود را به مقدار زیادی از دست دادند. با وجود این کشفیات اخیر متخصصان فیزیک ذره‌ای روح جدیدی در این کالبد دمیده است. سرانجام خوب است به یاد بیاوریم که هدف اصلی اینشتین در ابداع نسبیت عام ایجاد نظریه‌ای بود که تحت تمام تبدیلات مختصات صادق باشد ("اصل هموردایی") و نه نظریه‌ای که به تبدیلات لورنتس وابسته باشد. او فکر می‌کرد که به این ترتیب خواسته ماخ در طرد فضای مطلق، یعنی طرد هر هندسه موجود که ماده بر آن بی‌اثر باشد، خودبه‌خود برآورده می‌شود. اما همان‌گونه که کرچمان نشان داد و اینشتین نیز از آن تقدیر کرد (۱۹۱۸/۱۲۹۷) وی اشتباه کرده بود. زیرا حتی اگر همه فضا زمان مینکوفسکیایی باشد و نسبیت خاص دقیقاً صادق باشد، می‌توان قوانین نسبیت خاص را به کمک روشهای همین بخش به صورتی نوشت که در هر دستگاه مختصات صادق باشد. با این حال، این امر به هیچ‌وجه از اهمیت فیزیکی چارچوبهای لخت و در نتیجه از اهمیت معیار مطلق ناشتایی نمی‌کاهد. به عبارت دیگر ممکن است فضا زمان دارای ساختاری بیش از دستگاه مختصات لازم برای توصیف آن باشد. این اواخر اندرسون^۱ محکی را صورتبندی کرد که از دست

1. Anderson J L, 1967, *Principles of Relativity Physics*, New York, Academic Press.

اینشتین دررفته بود. اما این امر باعث سقوط یا ایستادگی نسبیت عام نمی‌شود. آنچه امروزه مهمتر انگاشته می‌شود، اصل ماهیت ریمانی فضا زمان است. به این ترتیب لزوم مختصات دلخواه و قوانین تانسوری (اصل هموردایی اینشتین) نتیجه فرعی آن می‌شود.

۱۰-۸ معادلات میدان در حضور ماده

همان‌گونه که در بخش ۸-۲ دیدیم معادلات میدان خلأ اینشتین $R_{\mu\nu} = 0$ مشابه معادله لاپلاس $\sum \varphi_{ii} = 0$ است که حاکم بر پتانسیل نیوتون در فضای خالی است. اگر بخواهیم به بحث در مورد میدان گرانش در حضور ماده بپردازیم—مثلاً در یک ابر غبار، یا درون زمین، و یا عملاً در عالم (که در اولین تقریب می‌توان محتویات آن را غبار پیوسته گرفت)—آنگاه نیاز به نسبیت عامی داریم که دیگر هم‌ارز با معادله لاپلاس نیست، بلکه هم‌ارز است با معادله پواسون:

$$\sum \varphi_{ii} = 4\pi G\rho \quad (۱۳۰-۸)$$

معادلات میدان نسبیت عام باید ماده را با هندسه (مشابه φ) مرتبط سازند. چون در حالت خلأ این معادلات باید تبدیل به $R_{\mu\nu} = 0$ شوند (این را پذیرفته‌ایم)، پس یک نامزد مسلم برای سمت چپ معادلات نسبیت عام $R_{\mu\nu}$ است. تانسور انرژی $T^{\mu\nu}$ نامزدی است که به همین اندازه برای سمت راست مسلم است، و همان‌گونه که دیدیم چگالی ρ یکی از مؤلفه‌های آن (در مختصات چارچوب موضعی لخت) است. اما چون نمی‌توان تانسورهای هموردا و ناهموردا را مساوی هم قرار داد، بنابراین ابتدا $R_{\mu\nu}$ را به صورت ناهموردای آن درمی‌آوریم

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma} \quad (۱۳۱-۸)$$

در این صورت بدیهی‌ترین معادلات میدان چنین است

$$R^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (۱۳۲-۸)$$

که در آن κ ثابت "جفت" مناسبی است و علامت منفی جهت سهولت بعدی نشانده شده است. این معادلات دلالت بر این دارند که در فضا زمان تخت باید $T^{\mu\nu} = 0$ باشد و به نظر می‌رسد که این امر مطالعات ما را بر روی ملاءهای پیوسته در نسبیت خاص بی‌اثر می‌کند: بدین معنی که هیچ ملاء پیوسته‌ای در نسبیت خاص نمی‌تواند موجود باشد. اما این چیزی است که انتظارش می‌رفت، زیرا حضور ماده فضا زمان را خم می‌کند. از طرف دیگر در بخش ۸-۳ دیدیم که چگونه حتی جرم بسیار زیادی چون زمین یا خورشید به طور موضعی خمیدگی بسیار کوچکی ایجاد می‌کنند.

بنابراین κ در معادله ۸-۱۳۲ بسیار کوچک است و خمیدگی‌ای که از وجود توزیع "متعارف" جرم در آزمایشگاه‌های فضای تخت ناشی شود کاملاً قابل اغماض خواهد بود. در هر حال، اگر ۸-۱۲۹ را بپذیریم، ۸-۱۳۲ متضمن رابطه زیر خواهد بود

$$R_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (8-133)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که در هندسهٔ ریمانی (بنابر اتحاد بیانکی)

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0, \quad (R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \quad (8-134)$$

بنابراین ۸-۱۳۳ ایجاب می‌کند که

$$R_{;\nu} = R_{;\nu} = 0 \quad (8-135)$$

زیرا مشتق هموردا، خطی است و از قاعدهٔ لایب‌نیتس تبعیت می‌کند، و مشتق هموردای تمام g ها نیز صفر است و مشتق هموردای یک‌نرده‌ای همان مشتق جزئی است. اما ۸-۱۳۲ متضمن $T_{;\nu} = 0$ خواهد بود که محدودیتی بی‌دلیل برای $T^{\mu\nu}$ است. به‌طور مثال، در مورد غبار داریم $T = c^2 \rho$ و این لازم نیست ثابت باشد. از این‌رو معادلات ۸-۱۳۲ قابل قبول نیستند. اما مراجعه به ۸-۱۳۴ نشان می‌دهد که معادلات

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (8-136)$$

ایراد اخیر را رفع خواهند کرد: این معادلات خودبه‌خود $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ را برقرار می‌کنند. در واقع همین معادلات را اینشتین در سال ۱۹۱۵/۱۲۹۴ به‌عنوان معادلات میدان عام خود ارائه داد. (جالب اینجاست که هیلبرت ریاضیدان که به‌تازگی به‌کارهای اینشتین تمایل نشان داده بود مستقیماً به‌همان نتایج رسید و درست پنج روز قبل از اینکه اینشتین ثمرهٔ سالها پژوهش سخت خود را به‌فرهنگستان پروس در برلین^۱ ارائه دهد، کار خود را به‌فرهنگستان سلطنتی علوم در گوتینگن ارائه داد.) از ضرب ۸-۱۳۶ در $g_{\mu\nu}$ درمی‌یابیم (به‌یاد داشته باشید که $\delta_{\mu}^{\sigma} = g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}$)

$$R = \kappa T \quad \text{مثلاً} \quad R - 2R = -\kappa T \quad (8-137)$$

1. Mehra J, 1974, *Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation*, Reidel Pub Co, especially p. 25.

بنابراین شکل دیگری برای نوشتن ۸-۱۳۶ صورت زیر است

$$R^{\mu\nu} = -\kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \quad (۱۳۸-۸)$$

چند تذکر: (الف) در خلأ $T^{\mu\nu} = 0$ است، و در این صورت معادلات میدان به $R^{\mu\nu} = 0$ تبدیل می‌شوند که با $R_{\mu\nu} = 0$ هم‌ارز است. (ب) چهار اتحاد دیفرانسیلی ۸-۱۳۴، که دو طرف معادلات میدان از آن تبعیت می‌کنند، باعث می‌شوند که g ها به‌گونه‌ای یکتا به‌دست نیایند بلکه با چهار درجه آزادی باقیمانده بتوان تبدیلات مختصات دلخواهی را به‌کار بست (با آخر بخش ۸-۲ مقایسه کنید). (ج) تصحیح ۸-۱۳۲ به ۸-۱۳۶، همان‌گونه که اهلرز تذکر داده است، کاملاً مشابه است با روش معمول وارد کردن جریان جابه‌جایی در معادلات ماکسول: لزوم این تغییر در آنجا به دلیل قانون پایستگی بار است و در اینجا به دلیل قانون پایستگی انرژی و تکانه (یعنی به علت $T_{;\nu}^{\mu\nu}$). (د) معادلات میدان برحسب $g_{\mu\nu}$ و مشتقات آن ناخطی است، و این بدان معنی است که جوابها را نمی‌توان روی هم نهاد. مثلاً میدان یک کره برابر با جمع میدانهای دو نیمکره نیست. همین ناخطی بودن است که باعث می‌شود گرانش، بدون اینکه نماینده‌ای در جملات منبع $T_{\mu\nu}$ داشته باشد، همچون منبع خودش عمل کند: جمله‌های ناخطی "میدان میدان" را برحسب تفاضل میدان کل و مجموع میدانهای اجزاء به‌دست می‌دهد. و واقعاً انرژی میدان گرانش را نمی‌توان همچون یک جمله منبعی نمایش داد، زیرا مقرآن نامشخص است: بنابر اصل هم‌ارزی می‌توان میدان را در هر رویداد با یک "تبدیل از بین برد". (اما هر نوع انرژی دیگر—مثل انرژی میدانهای ماکسولی—را باید در $T_{\mu\nu}$ به حساب آورد.) به علاوه بنابر خاصیت ناخطی، معادلات میدان متضمن برهم‌کنش منابع، یعنی متضمن قوانین برهم‌کنشگر حرکت، هستند (پاراگراف شامل ۸-۱۴۷ را ببینید). می‌توان نشان داد که معادلات میدان ۸-۱۳۶ عامترین معادلاتی هستند که دارای خواص مطلوب زیرند: (الف) خصلت تانسوری دارند؛ (ب) بالاترین مشتق g را که در بردارند از درجه دوم است، و این مشتقات $T^{\mu\nu}$ را تنها به صورت خطی در بردارند؛ (ج) شرط $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ برای آنها یک اتحاد است؛ (د) فضا زمان تخت را به عنوان یک جواب خاص در غیاب ماده در بردارند. اینشتین سرانجام شرط آخر را حذف کرد و بدین ترتیب توانست معادلات میدانی که کمی عامتر بودند ارائه دهد، یعنی

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (۱۳۹-۸)$$

که در آن Λ یک ثابت جهانی است. این ثابت می‌تواند مثبت، منفی، و یا صفر باشد و مانند R دارای بعد (فیزیکی) خمیدگی فضایی، یعنی $[L^{-2}]$ است. از آنجا که نقش عمده آن در کیهانشناخت است، آن را ثابت "کیهانشناختی" خوانده‌اند، و البته ممکن است که رصدها وجود این جمله را در

این مبحث تحمیل کنند. ^۱ بنابر تخمینهای جاری $10^{-54} \text{cm}^{-2} < |\Lambda|$ است (بخش ۹-۱۱) و در این صورت نشان خواهیم داد که در تمام وضعیتهای غیر کیهانشناختی می توان از Λ چشم پوشید. از ۸-۱۳۹، مانند ۸-۱۳۷ درمی یابیم که

$$R = \kappa T + 4\Lambda \quad (140-8)$$

که بنابر آن می توان ۸-۱۳۹ را به صورت زیر نیز نوشت

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} - \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T \right) \quad (141-8)$$

واضح است که این معادلات در غیاب ماده فضازمانهای تخت همه جایی را دربر ندارند، زیرا در این حالت به

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} \quad (142-8)$$

تبدیل می شوند که متضمن خمیدگی است. هر فضا که از رابطه ای از نوع ۸-۱۴۲ تبعیت کند، فضای اینشتین خوانده می شود. هر فضا با خمیدگی ثابت یک فضای اینشتین است، اما عکس آن تنها در فضایی که سه بعد داشته باشد صادق است.

مقدار عددی κ را در معادلات میدان اینشتین باید، مثل ثابت نیوتون، از طریق تجربی به دست آورد. اما در عمل از ثابت نیوتون، که معین شده است، استفاده می کنند و صرفاً نظریه اینشتین را با نظریه نیوتون در یک حد مناسب، که هر دو نظریه به یکدیگر می گرایند و ثابتهای خود را در بردارند، مقایسه می کنند. موردی این چنین، توزیع بسیار ضعیف و شبه ایستای غبار است. متریک ۷-۲۵ به ازای $d\sigma^2$ تخت، حتی به گونه ای حدی هنگامی که φ پتانسیل نیوتونی است، در معادلات اینشتین صدق نمی کند. اما متریک زیر از این خاصیت برخوردار است

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (143-8)$$

فرض کنیم $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t)$ به طوری که در تقریب اول

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, c^2)$$

۱. همان گونه که خواهیم دید، اثر Λ مثبت، ضدیت در مقابل گرانش است. زمانی اینشتین برای ساختن یک عالم ایستا به آن نیاز داشت. امروزه، ممکن است برای اینکه عالم در حال انبساطی با شتاب داشته باشیم، چنانچه فراین رصدی بر آن دلالت داشته باشند، به آن نیازمندیم.

و معکوس آن $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, c^{-2})$ باشد. ما ضمن محاسبه مؤلفه‌های تانسور ریچی متریک ۱۴۳-۸ (پیوست ۱)، از حاصلضرب هر دو جمله از φ/c^2 و φ_i/c^2 و φ_{ij}/c^2 که همگی نسبت به یک کوچک فرض شده‌اند، چشمپوشی می‌کنیم. (ما برای مشتقها از نمادنگاری شاخصی استفاده می‌کنیم که در ۲۶-۸ و دنبالش آن تعریف شد.) بنابراین چنین می‌یابیم

$$R^{\mu\nu} = -c^{-2} \sum \varphi_{;i} \text{diag}(1, 1, 1, c^{-2}) \quad (144-8)$$

اگر ماده از غبار شبه‌ایستا با چگالی ρ باشد، و $T^{\mu\nu}$ توسط ۱۲۸-۸ داده شده باشد، همه $T^{\mu\nu}$ ها صفرند مگر $T^{zz} = \rho$ ؛ بنابراین $T = c^2 \rho$ و از آنجا

$$T^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} T = \frac{1}{4} c^2 \rho \text{diag}(1, 1, 1, c^{-2}) \quad (145-8)$$

همان‌گونه که دیدیم (مقایسه کنید با آخر بخش ۶-۷) φ را در ۱۴۳-۸ باید همان پتانسیل نیوتونی دانست. بنابراین φ در معادله پواسون ۱۳۰-۸ صدق خواهد کرد. در نتیجه ۱۴۴-۸ و ۱۴۵-۸ به شرطی در معادلات میدان ۱۳۸-۸ صدق خواهند کرد که

$$\kappa = \frac{\Lambda \pi G}{c^4} = 2.073 \times 10^{-48} \text{s}^2 \text{cm}^{-1} \text{gm}^{-1} \quad (146-8)$$

این مقدار ثابت گرانش اینشتین است که پذیرفته شده است.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم حذف جمله Λ را در همه کاربردهایش بجز کاربردهای کیهانشناختی توجیه کنیم. (ضمناً به تذکری که پس از ۱۵۴-۸ آمده است مراجعه کنید.) به عنوان مثال منظومه شمسی را در نظر می‌گیریم، که در آن هر مؤلفه تانسور ریمان $R_{\nu\sigma\rho}^{\mu}$ که ترکیب خاصی از خمیدگیها در یک نقطه مفروض است، دارای مرتبه بزرگی m/r^3 (قبل از ۴۴-۸ را ببینید) است. در اینجا $m = 1.47 \text{ km}$ جرم خورشید است برحسب بکاهایی که در آنها $c = G = 1$ است، و r فاصله از خورشید است. این مقدار تا مدار پلوتو از 10^{-29} cm^{-2} $\times 6$ تجاوز می‌کند و مسؤول دینامیک دستگاه است. حدوداً می‌توان گفت که اثر Λ ایجاد یک خمیدگی فضا-زمان از مرتبه بزرگی Λ (از طریق ۱۴۲-۸) است که "از پیش موجود است" و بنابر تخمینهای کیهانشناختی کوچکتر از 10^{-52} cm^{-2} است. بنابراین Λ در منظومه شمسی، و در میدانهای با "نیرومندی" مشابه، کاملاً بی‌اهمیت است. طریق شهودی دیگر این است که Λ را (از طریق ۱۴۱-۸) همچون یک چگالی (منفی) که "از پیش موجود است" بینگاریم. Λ در این مقام متناظر است با حداکثر 10^{-29} g/cm^2 ، یعنی کمتر از یک اتم هیدروژن در هر دسی متر مکعب فضا. در اینجا نیز بی‌اهمیتی آن در کاربردهای غیر کیهانشناختی آشکار است. اما در کیهانشناخت که خمیدگی میانگین به‌طور

کامل ناشی از چگالی میانگین عالم ($\sim 10^{-30} \text{ g/cm}^3$) و جمله Λ است، ممکن است که این دو "جمله منبعی" در سمت راست ۸-۱۴۱ قابل مقایسه شوند.

متریک تقریبی ۸-۱۴۳ با پتانسیل نیوتونی φ ، تحت شرایطی بسیار عامتر از آنچه ما فرض کردیم پابرجاست. جرم نه لازم است غبار باشد و نه شبه‌ایستا. در آن نواحی از متریک که خلاست صرفاً لازم است که φ و مشتقات آن کوچک باشند (تا معادلات میدان صادق باشند). اگر بخواهیم که ۸-۱۴۳ را در نواحی منبع نیز به‌کار بندیم، لازم است که مؤلفه غالب $T^{\mu\nu}$ ، $T^{zz} = \rho$ باشد. پس لازم است که منابع ضعیف باشند، آهسته حرکت کنند، و تشهای درونی آنها کوچک باشد (با بعد از ۸-۱۸۳ مقایسه کنید). نظریه نیوتونی را می‌توان تحت این شرایط و برای پیشگویی حرکت ذرات آزمونی آهسته همچون اولین تقریب بر نظریه اینشتین انگاشت. بررسی دقیقتر نشان می‌دهد که این تقریب از لحاظ نظری بسیار خوب است. بدین ترتیب می‌توان از همه رصدهای مکانیک سماوی نیز، که مطابقت بسیار عالی با نظریه گرانش نیوتونی دارند، در تأیید نظریه اینشتین نام برد. متریک ۸-۱۴۳ در واقع بردی فراتر از تقریب نیوتونی دارد، بدین معنی که با آن می‌توان (با تقریب خوبی بر نسبیت عام کامل) حرکت ذرات آزمونی سریع و حتی نور را پیشگویی کرد. به‌طور خلاصه مقدار انحرافی که این متریک برای نور در خلا به‌دست می‌دهد دو برابر انحرافی است که نظریه نیوتونی برای ذره‌ای با سرعت c پیش‌بینی می‌کند. (اگر بخواهیم از نسبیت عام برای پیشگویی مسیر نور در یک ملاً استفاده کنیم یا باید این ملاً آنقدر رقیق باشد که سرعت نور را تغییر ندهد و یا به‌جای فرضیه ژئودزیک صفر باید از روشهایی استفاده کرد که اصولاً ماکسولی هستند. اگر گامی دیگر به‌بیش برداریم و منابعی را در نظر بگیریم که با سرعت دلخواه حرکت می‌کنند، دیگر به‌عنوان تقریب اول نسبیت عام به نظریه نیوتون نمی‌رسیم، بلکه تعمیمی از نظریه نیوتون به‌دست می‌آوریم که آشکارا خصوصیات ماکسولی دارد و نظریه نیوتون بخش "کولنی" آن را تشکیل می‌دهد (بخش ۸-۱۲). چون به‌دست آوردن جوابهای دقیق و جالب برای معادلات میدان نسبیت عام، جز در موارد بسیار متقارن، دشوار است، از این "تقریب خطی" به‌جای آن استفاده فراوان شده است (هر چند که همیشه معلوم نیست تقریبی که بدین وسیله بر نظریه کامل به‌دست می‌آوریم تا چه اندازه خوب است). مثلاً از این تقریب برای اثبات اثرهای "القایی" گوناگونی که بر پایه اصل ماخ پیش‌بینی می‌شود استفاده شده است (بخش ۱-۱۶). همچنین تحقیق درباره امواج گرانشی اول بار بدین وسیله انجام شد.

یکی از خصوصیات جالب معادلات میدان اینشتین این است که قانون حرکت ژئودزیکی را که در آغاز به‌عنوان اصلی جداگانه عرضه شده بود در بردارند. اما در نظریه‌هایی که معادلات میدان آنها خطی است برهم‌کنش منابع باید توسط اصول جداگانه (مثلاً توسط قانون نیروی لورنتس در نظریه ماکسول) مشخص شوند. زیرا، اگر دو جواب برای دستگاه معادلات خطی یک میدان در نظر بگیرید که هر یک به‌ازای منبعی که به‌طریق دلخواه حرکت می‌کنند به‌دست آمده است. برهم‌نهاد این معادلات و حرکات نیز باید در معادله میدان صدق کند و لذا این معادلات متضمن

هیچ‌گونه برهم‌کنش منابع نیستند. اما در نظریه‌های غیرخطی برهم‌نهی غیرممکن است: هر منبع، منبع دیگر را "حس" می‌کند. در نسبیت عام این امر به قانون ژئودزیک منجر می‌شود. اثبات کلی آن طولانی و دشوار است؛ ما فقط به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که چنین اثباتی (در مجموعه‌ای از مقالات که اینشتین و همکارانش از سال ۱۹۲۷/۱۳۱۶ به بعد نوشتند) ارائه شده است، هر چند که شاید دقت و انسجام آن آنقدر نباشد که ریاضیدانان را راضی نگهدارد. اما در حالت خاص ذرات غبار این اثبات ساده است و این امر در واقع شگفت‌آور نیست، زیرا معادلات میدان طوری ساخته شده‌اند که خودبه‌خود متضمن $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ هستند و به‌ازای غبار در فضا‌زمان تخت قبلاً برایمان روشن شده است که این معادله متضمن حرکت ژئودزیک است (بخش ۵-۱۳). در فضا‌زمان عام از ۱۲۸-۸ و ۱۲۹-۸ داریم

$$\left(\rho_{\circ} U^{\mu} U^{\nu}\right)_{;\nu} = 0$$

یا به صورت بسط یافته:

$$U^{\mu} \left(\rho_{\circ} U^{\nu}\right)_{;\nu} + \rho_{\circ} U_{;\nu}^{\mu} U^{\nu} = 0 \quad (147-8)$$

با ضرب این رابطه در $g_{\mu\tau} U^{\tau}$ داریم

$$c^2 \left(\rho_{\circ} U^{\nu}\right)_{;\nu} + \rho_{\circ} g_{\mu\tau} U^{\tau} U_{;\nu}^{\mu} U^{\nu} = 0 \quad (148-8)$$

اما $U_{;\nu}^{\mu} U^{\nu} = A^{\mu}$ ، یعنی چارشتاب (آنطور که در مختصات چارچوب لخت موضعی دیده می‌شود)، و بنابراین جمله دوم ۱۴۸-۸، که عبارت است از $\rho_{\circ} \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$ ، صفر می‌شود، در نتیجه جمله اول هم صفر می‌شود. اگر این مقادیر را در ۱۴۷-۸ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{D}{ds} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right) = 0 \quad \text{یعنی} \quad A^{\mu} = 0 \quad \text{یعنی} \quad U_{;\nu}^{\mu} U^{\nu} = 0$$

و این درست معادله یک ژئودزیک است. وقتی یک ذره غبار در یک ابر غبار (که ممکن است ابرغبار بسیار کوچکی باشد) از یک ژئودزیک تبعیت کند، البته بسیار متحمل به نظر می‌آید که هر ذره آزمونی آزاد نیز از یک ژئودزیک تبعیت کند.

سرانجام چند کلمه‌ای درباره "حل کردن" معادلات میدان بیان می‌کنیم. در نسبیت عام وضع با تمام نظریه‌های دیگر میدان تفاوت بسیار دارد. مثلاً در نظریه نیوتونی کار خود را با یک دستگاه مختصات که کاملاً تعریف شده است و می‌توانیم توزیع چگالی ρ را نسبت به آن مشخص سازیم،

آغاز می‌کنیم. آنگاه کار ما فقط حل معادلهٔ پواسون مربوطه برای پتانسیل φ است. در نظریهٔ ماکسول نیز وضع تقریباً به‌همین صورت است. اما در نسبیت عام کار را با یک دستگاه مختصات که کاملاً تعریف شده است آغاز نمی‌کنیم، بلکه برعکس در پی یافتن چنین دستگاهی هستیم. بنابراین نمی‌توانیم $T^{\mu\nu}$ ای را که در دست داریم به‌سادگی در طرف راست معادلات میدان قرار دهیم، زیرا بجز با ارجاع به یک دستگاه مختصات راهی برای شناسایی مؤلفه‌های $T^{\mu\nu}$ وجود ندارد. نظراً می‌توان با ابداع $g_{\mu\nu}$ های دلخواه و تهیهٔ سیاهه‌ای از $T_{\mu\nu}$ های متناظر با آنها از ۸-۱۳۶ فهرستی درست کرد، آنگاه در هر وضع خاص باید سعی کرد که جفت $(g_{\mu\nu}, T^{\mu\nu})$ مربوط به آن را پیدا کرد و عملاً از هر دو راه با هم استفاده می‌شود: مثلاً از تقارن وضعیت فیزیکی مدل خاصی برای g حدس زده می‌شود که توابع مجهولی را دربر دارد؛ آنگاه T ها را می‌توان برحسب این توابع مجهول بیان کرد و سرانجام این توابع مجهول را با قراردادن T ها و g ها در معادلات میدان تعیین کرد.

۸-۱۱ از متریک شوارتس شیلد اصلاح شده تا فضای دوسپته

ما در بخش ۸-۳ عامترین متریک ایستا با تقارن کروی را در رابطه با معادلات میدان خلاً اصلی اینشتین یافتیم. (یادآوری می‌کنیم که بنابر قضیهٔ بیرکهوف، فرض ایستایی را می‌توان حذف کرد: این فرض نتیجهٔ تقارن کروی است.) اکنون می‌توانیم آن برهان را در مورد معادلات میدان خلاً "اصلاح شده" اینشتین ۸-۱۴۲ به‌کار بندیم. فرض ایستایی را دوباره می‌پذیریم، گرچه قضیهٔ بیرکهوف در اینجا مشابه‌ای دارد که می‌گوید نتایج فوق نیز مستقل از این فرض هستند. پس ما با متریکی به‌صورت ۸-۳۶ شروع می‌کنیم که $R_{\mu\nu}$ های آن با ۸-۳۷ تا ۸-۴۱ داده شده‌اند. اما حالا به‌جای $R_{\mu\nu} = 0$ باید $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ باشد. در این حالت نیز درمی‌یابیم که $A' = -B'$ و $A = -B$. سپس از معادلهٔ $R_{r2} = \Lambda g_{r2}$ درمی‌یابیم که

$$e^A (1 + rA') = 1 - \Lambda r^2 \quad (8-149)$$

و یا با نشاندن

$$\alpha + r\alpha' = (r\alpha)' = 1 - \Lambda r^2$$

بنابراین

$$\alpha = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \quad (8-150)$$

که در آن $-m$ دوباره یک ثابت انتگرال‌گیری است. به‌سادگی می‌توان اثبات کرد که این جواب جداً در تمام معادلات $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ صدق می‌کند. بدین ترتیب جوابی پیدا کرده‌ایم که اساساً یکتا

است و از تمام شرایط پیروی می‌کند

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (151-8)$$

مقایسه با متریک ۷-۲۴ نشان می‌دهد که مدارهای آهسته در فضای ۸-۱۵۱ به‌گونه‌ای تقریبی متناظرند با مدارهای نیوتونی تحت پتانسیل مرکزی

$$\varphi = -\frac{m}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2 \quad (152-8)$$

و برحسب یک‌گانه‌ای که در آن $c = G = 1$ است. جمله اول را می‌بینیم که همان اثر نیوتونی یک جرم m است، و بنابراین باز هم باید m را همان جرم متقارن کروی بدانیم که در مرکز قرار دارد. جمله Λ متناظر است با یک نیروی مرکزی دافعه با مرتبه $1/3\Lambda r$ ، که کاملاً مستقل از جرم مرکزی است. اثر آن را بر مدارها می‌توان با ردیابی محاسباتی که به معادلات مدار قبلی ۸-۵۲ و ۸-۵۳ منجر شد دریافت. معادله اول تغییر نمی‌کند، اما به‌جای معادله دوم به معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 - \frac{\Lambda}{3h^2u^3} \quad (153-8)$$

می‌توان نشان داد که در این معادله اثر اصلی جمله اضافی Λ یک تقدیم اضافی حسیض است که مقدار آن برابر است با

$$\Delta = \frac{\pi\Lambda h^6}{m^2} = \frac{\pi\Lambda a^2(1-e^2)^2}{m} \quad (154-8)$$

مثلاً اگر Λ تقریباً برابر با 10^{-42} cm^{-2} باشد، در مورد عطارد این مقدار برابر با یک ثانیه قوسی در هر قرن خواهد بود. چون این مقدار قابل کشف است، پس Λ نمی‌تواند به‌این بزرگی باشد.

این استنتاج یک حاصل جنبی مفید از به‌دست آوردن متریک ۸-۱۵۱ است. حاصل دیگر فضایی است که در حد $m \rightarrow 0$ به‌دست می‌آید

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (155-8)$$

این متریک را دوسیه در سال ۱۹۱۷/۱۲۹۶ در رابطه با کیهانشناخت کشف کرد و در این رابطه هنوز نیز نقش مهمی را بازی می‌کند. متریک دوسیه نیز کاملاً مانند متریک شوارتس شیلد دارای یک تکینگی در $r = (\frac{3}{\Lambda})^{1/2}$ است، با این شرط که $\Lambda > 0$ باشد. اما این تکینگی نیز، همان‌گونه که خواهیم دید، مانند تکینگی شوارتس شیلد دارای ماهیتی کاملاً مختصاتی است. این جواب، اگر از امکان متعارف تبدیل مختصات چشم ببوشیم، یکتا جواب ایستای معادلات میدان خلأ اصلاح شده اینشتین ۱۴۲-۸ است که نسبت به یک نقطه مفروض دارای تقارن کروی است و در آن نقطه منظم است: هر m مخالف صفر در ۱۵۱-۸ مبدأ را به صورت یک تکینگی ذاتی درمی‌آورد. بنابر قضیه بیرکهوف که در بالا نقل شد، حتی اگر فرض ایستایی را رها کنیم، هیچ حل دیگری وجود ندارد. بنابراین اگر معادلات $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ بر یک دنیای خالی حاکم باشند، فضای دوسیه جانشین فضای مینکوفسکی می‌شود. البته اگر فضا زمان به دست آمده تنها حول یک نقطه می‌توانست متقارن کروی باشد، عیب بزرگی برای این معادلات محسوب می‌شد. اما متریک ۱۵۵-۸ در واقع نماینده شبه کره‌ای با خمش $-\frac{1}{3}\Lambda$ است و می‌توان آن را با هر رویداد (r, θ, ϕ, t) به عنوان مبدأ جدید به همان صورت بیان کرد. برای اثبات این امر، ابتدا فرض کنید که Λ مثبت است، مثلاً

$$\frac{3}{\Lambda} = a^2 \quad (a > 0) \quad (156-8)$$

سپس فضای مینکوفسکی پنج بعدی M_5 را با مختصات X, Y, Z, W و متریک زیر در نظر بگیرید

$$ds^2 = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2) \quad (157-8)$$

و در آن شبه کره S_4^- را با معادله زیر در نظر بگیرید

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 - T^2 = a^2 \quad (158-8)$$

(این فضایی است با خمیدگی ثابت $K = -1/a^2$). فضای ۱۵۵-۸ را می‌توان به طور ایزومتري در S_4^- توسط معادلات زیر نگاشت

$$\begin{aligned} X &= r \sin \theta \cos \phi \\ Y &= r \sin \theta \sin \phi \\ Z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (159-8)$$

و به ترتیب برحسب اینکه $r \leq a$ باشد

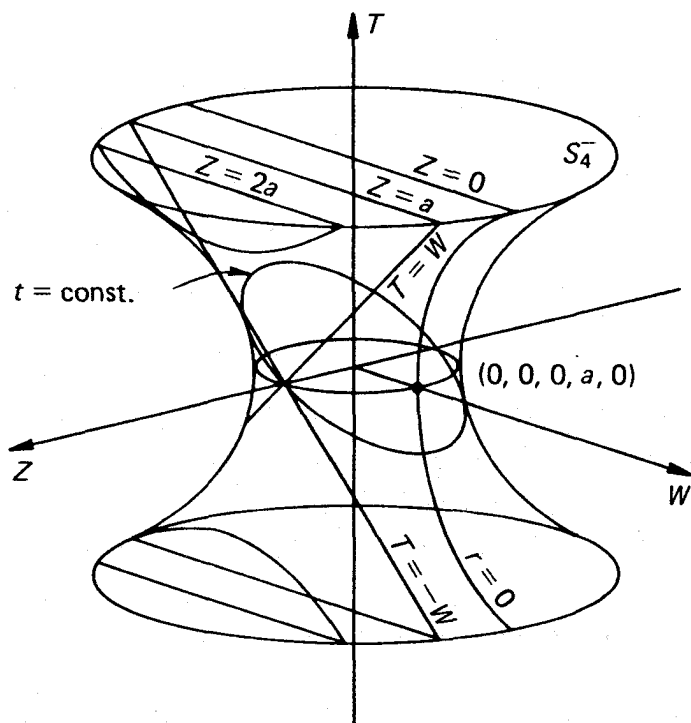
$$\begin{aligned} W &= a \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \cosh \frac{t}{a} \\ T &= a \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \sinh \frac{t}{a} \end{aligned} \quad (۱۶۰-۸)$$

یا

$$\begin{aligned} W &= a \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \sinh \frac{t}{a} \\ T &= a \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \cosh \frac{t}{a} \end{aligned} \quad (۱۶۱-۸)$$

که در هر دو مورد ریشه مثبت را اختیار می‌کنیم. بر طبق این معادلات، به‌ازای هر t, ϕ, θ, r داریم $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 - T^2 = a^2$ یعنی هر رویداد (r, θ, ϕ, t) روی S_F^- نگاشته می‌شود. همسنج بودن نگاشت را می‌توان به‌سادگی با نشان دادن $۱۵۹-۸$ تا $۱۶۱-۸$ در $۱۵۷-۸$ و رسیدن به $۱۵۵-۸$ اثبات کرد. اما ما فضای $۱۵۵-۸$ را تنها در یک نیمه S_F^- نگاشته‌ایم؛ زیرا این نگاشت همواره از $W + T \geq 0$ تبعیت می‌کند، پس برای پوشاندن کامل S_F^- احتیاج به یک کپی دیگر از $۱۵۵-۸$ داریم که در نیمه دیگر S_F^- نگاشته می‌شود (برای این منظور ریشه‌های منفی را در $۱۶۰-۸$ و $۱۶۱-۸$ برمی‌گزینیم). دقت کنید که حالا تکینگی $r = (3/\Lambda)^{1/2}$ در اثر تبدیل از بین رفته است: متریک $۱۵۷-۸$ همه جا منظم است.

شکل $۱۴-۸$ نموداری از S_F^- است که در آن دو بعد X و Y حذف شده‌اند. پس معادله آن می‌شود $Z^2 + W^2 - T^2 = a^2$ ، که هر گاه در فضای اقلیدسی سه‌بعدی Z, W, T نگاشته شود، یک هذلولیوار دوار است، همان‌گونه که این نمودار نشان می‌دهد. این تصویر نماینده خط فضایی نمونه‌وار $\theta = 0$ است که از مبدأ فضایی $۱۵۵-۸$ می‌گذرد؛ البته نماینده تمام خط است. یعنی $-\infty \leq r \leq +\infty$. چون $Z = r$ ، پس نیمه "جلویی" $S_F^- (Z > 0)$ متناظر است با مقادیر مثبت r . هذلولیهایی که صفحه‌های $Z = \text{const.}$ روی S_F^- قطع می‌کنند متناظرند با خطوط $r = \text{const.}$ ، درحالی‌که هذلولیها و بیضیهایی که صفحه‌های $T/W = \text{const.}$ روی S_F^- قطع می‌کنند متناظرند با خطوط $t = \text{const.}$ این نمودار خواص جالب زیادی دارد. مثلاً مولدهای (راست‌خط) هذلولی (مانند $T = W$) متناظرند با مسیرهای نور. مقطعیهای نورگونه هذلولیوار ناشی از صفحه‌های گذرا بر مبدأ متناظرند با جهانخطهای ژئودزیک. مقطعیهای زمان‌گونه ناشی از صفحه‌های دلخواه متناظرند با جهانخطهایی با ویژه شتاب ثابت.^۱ هذلولیوار شکل $۱۴-۸$



شکل ۸-۱۴

نوعی نمودار کروسکال است برای متریک دوسپته، که ارتباطش با آن متریک بسیار شبیه است به ارتباط نمودار کروسکال شکل ۸-۷ با متریک شوارتس شیلد. بررسی جزئیات وجوه گوناگون این شباهت را به عهده خواننده علاقه‌مند می‌گذاریم. اما یک وجه آن را، یعنی تکنیکی دوسپته را در مورد سو تعبیر بود. حتی اینشتین و وایل ابتدا آن را واقعی و نشانی از وجود ماده می‌پنداشتند؛ به همین علت ابتدا آن را "افق جرم" نامیدند. اما توضیح آن زودتر از مورد شوارتس شیلد پیدا شد. ادینگتون قطعاً آن را در سال ۱۹۲۰/۱۲۹۹ به‌طور کامل درک کرده بود.^۱ این تکنیکی در تصویر ۸-۱۴ متناظر است با مسیرهای نور $T = \pm W$ ، و در فضای دوسپته کامل یک جبهه نور کروی است که نسبت به ناظر در " $r = 0$ ساکن ایستاده" است (اما جهت انتشار خود را نسبت به او در میانه راه جاودانگی، در $T = 0$ عوض می‌کند). افق در فضای شوارتس شیلد جبهه نور یکسانی است که نسبت به تمام ناظرها در r و θ ثابت در خارج آن "ساکن ایستاده" است، در صورتی که

1. Eddington A S, 1920, *Space, Time, and Gravitation*, Chapter X, Cambridge University Press, (and New York, Harper Torchbooks, 1959); and *The Mathematical Theory of Relativity*, 1924, p 166, Cambridge University Press.

در فضای دوسویه هر ناظر در سقوط آزاد افق خودش را دارد که خودش در مرکز آن است. هنوز مانده که ادعای خود را، مبنی بر اینکه هر رویداد در $۱۵۵-۸$ هم ارز است با هر رویداد دیگر، اثبات کنیم. برای این کار نشان می‌دهیم که S_4^- ، به عنوان یک زیرفضای M_5 ، را می‌توان چنان حرکت داد که هر نقطه آن، مانند $(X_0, Y_0, Z_0, W_0, T_0)$ ، به نقطه $(0, 0, 0, a, 0)$ برود. این کار را در سه گام زیر انجام می‌دهیم

$$(X_0, Y_0, Z_0, W_0, T_0) \rightarrow (0, 0, -, W_0, T_0) \rightarrow (0, 0, 0, -, T_0) \rightarrow (0, 0, 0, a, 0)$$

گام اول را می‌توان مسلماً با یک چرخش سه بعدی در X, Y, Z انجام داد، و دومی را با دورانی دوبعدی در Z و W ؛ چون هر نقطه روی S_4^- بنابر $۱۵۸-۸$ دارای یک بردار موضع فضاگونه است، پس می‌توان با یک تبدیل لورنتس مناسب در T و W به گام آخر رسید. هر یک از این سه تبدیل متریک $۱۵۷-۸$ و $۱۵۸-۸$ را حفظ می‌کنند. بنابراین، اگر تناظر $۱۵۹-۸$ تا $۱۶۱-۸$ همواره برقرار باشد، حرکت‌های فوق نقطه مفروض در متریک $۱۵۵-۸$ را به رویداد مبدأ $[t = 0 = \tau]$ متناظر با $(0, 0, 0, a, 0)$ روی S_4^- انتقال می‌دهد. پس متریک $۱۵۵-۸$ حول این نقطه جدید صادق است و ادعای ما اثبات شده است.

ما باز هم در مبحث کیهانشناخت به فضای دوسویه و افق آن برخوایم خورد. اغلب فضای $۱۵۵-۸$ را به ازای $\Lambda < 0$ فضای پاد دوسویه می‌نامند. اهمیت کیهانشناختی این فضا قدری کمتر از آن فضای دوسویه است، اما این فضا از لحاظ نظری بی‌اهمیت نیست. این فضا نیز یک شبه‌کره (اما با خمیدگی مثبت) است و نسبت به تمام نقاطش متقارن است و می‌توان آن را کاملاً شبیه به مورد $\Lambda > 0$ بررسی کرد. حال فرض کنید

$$\frac{\ddot{r}}{\Lambda} = -a^2 \quad (a > 0) \quad (۱۶۲-۸)$$

در این مورد باید یک فضای شبه‌مینکوفسکی پنج بعدی \tilde{M}_5 را با متریک زیر

$$ds^2 = dT^2 + dW^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2) \quad (۱۶۳-۸)$$

و در آن شبه کره S_4^+ را با معادله زیر در نظر بگیریم

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2 - T^2 = -a^2 \quad (۱۶۴-۸)$$

(این فضایی است با خمیدگی ثابت $K = 1/a^2$). به سادگی می‌توان اثبات کرد که تبدیل

$$W = a \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \cos \frac{t}{a}$$

$$T = a \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{1/2} \sin \frac{t}{a} \quad (165-8)$$

به همراه $159-8$ فضای $155-8$ را (با $162-8$) به گونه‌ای همسنج به کل S_+^+ می‌نگارد. S_+^+ را نیز مانند S_+^- می‌توان با فرونشاندن بعدهای X و Y توسط یک هذلولوی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی نمایش داد، که معادله آن $W^2 + T^2 - Z^2 = a^2$ است. ظاهر آن همان است که در شکل $14-8$ نمایش داده شده است و تنها محورهای T و Z باید جابه‌جا شوند. یک خاصیت غریب نگاشت $165-8$ این است که نقاط $r, \theta, \phi = \text{const.}$ به یک دایره ("افقی") روی هذلولوی تبدیل می‌شوند که با محور تقارن زاویه t/a تشکیل می‌دهند. بنابراین اگر در یک نقطه $t = 2\pi a$ آرام نشسته باشیم و بگذریم که زمان طی شود، پس از گذر زمان $t = 2\pi a$ تاریخچه زندگی خود را دنبال خواهیم کرد! مسلماً این یک خاصیت ناخواسته نگاشت است، زیرا متریک $155-8$ اصلاً متضمن این نوع بسته شدن جهانخطها نیست. اما با تصحیح توپولوژیکی این نگاشت می‌توان از آن برحذر ماند. به جای اینکه مکان هندسی $W^2 + T^2 - Z^2 = a^2$ به عنوان یک هذلولوی عادی انگاشته شود، می‌توان آن را همچون یک "طومار هذلولوی" انگاشت که دور خود پیچیده شده است؛ ما هر بار که به دور یک دایره $Z = \text{const.}$ ($t: t_0 \rightarrow t_0 + 2\pi a$) پیچیده‌ایم، صرفاً روی لایه دیگری از طومار رفته‌ایم و نه جایی که شروع کرده‌ایم؛ و بدین ترتیب اشکالی با علیت نخواهیم داشت.

۱۲-۸ تقریب خطی بر نسبیت عام

این فصل را با بخشی مختصر از موضوعی به نام تقریب خطی پایان می‌دهیم که دارای کاربردهای پراهمیت و عملی بسیاری از امواج گرانشی تا فیزیک سیاهچاله‌هاست. این تقریب بر نسبیت عام، گرچه در کاربردش باید دقت زیاد به خرج داد (زیرا این روش گاهی نتایجی به دست می‌دهد که به هیچ طریقی به نتایج نظریه کامل نزدیک نیست)، اما معمولاً به‌کار بردن آن بسیار ساده‌تر از خود نسبیت عام است. این بخش از لحاظ تغییر و تبدیلهای محاسبه‌ای کمی سخت‌تر از بخشهای پیش است و شاید بهتر است در اولین مطالعه از آن صرفنظر شود.

فرض کنید یک میدان گرانش ضعیف داریم، یعنی فضازمانی که تفاوت آن با فضای تخت مینکوفسکی اندک است. آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (166-8)$$

در اینجا $\eta_{\mu\nu}$ متریک معمول مینکوفسکی و $\eta^{\mu\nu}$ معکوس آن به شرح زیر است

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, -1, -1, c^2) \\ \eta^{\mu\nu} &= \text{diag}(-1, -1, -1, c^{-2})\end{aligned}\quad (167-8)$$

و h ها به اندازه‌ای کوچک فرض می‌شوند که حاصلضرب آنها قابل چشمپوشی باشد. همچنین فرض می‌کنیم که دو مشتق اول h دارای همان رتبه کوچکی h ها باشند. (به یاد بیاورید که مشتق اول g ها معیاری هستند برای مجموع نیروی لختی و گرانشی روی ذره‌های ساکن در دستگاه مختصات و دیگر اینکه مشتق‌های دوم معیاری هستند برای خمیدگی فضا-زمان، یعنی برای نیروهای کشندی.) در این حالت نمادهای کریستوفل ۱۳-۸ برابرند با

$$2\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = h_{\nu,\sigma}^{\mu} + h_{\sigma,\nu}^{\mu} - h_{\nu\sigma}^{\mu}, \quad (168-8)$$

هنگام بالا و پایین بردن شاخصهای جمله‌هایی که h در بردارند، تنها قسمتهای اصلی $g_{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ یعنی $\eta_{\mu\nu}$ و $\eta^{\mu\nu}$ سهم هستند. اگر از حاصلضرب Γ ها که تنها حاصلضرب h ها را در بردارند چشمپوشی کنیم، از تعریف ۲۰-۸ چنین می‌یابیم

$$2R_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu\sigma}^{\sigma} = \square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\nu\sigma}^{\sigma} - h_{\nu,\mu\sigma}^{\sigma} \quad (169-8)$$

که در آن

$$\square \equiv \dots_{,\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (170-8)$$

با کمی تغییر می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$2R_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu,\nu\sigma}^{\sigma} - \gamma_{\nu,\mu\sigma}^{\sigma} \quad (171-8)$$

که در آن

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (172-8)$$

اکنون یک تبدیل مناسب مختصات ما را از دست جملات γ دار در ۸-۱۷۱ نجات می‌بخشد. برای این منظور تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (173-8)$$

که در آن ξ ها و مشتقات آن دارای همان رتبه کوچکی h ها هستند. g ها مانند تانسورها تبدیل می‌شوند (با ۸-۹ مقایسه کنید)، بنابراین با یک نمادگذاری مشخص زیر داریم

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \tilde{g}_{\rho\sigma} (\partial\tilde{x}^\rho/\partial x^\mu) (\partial\tilde{x}^\sigma/\partial x^\nu) \\ &= \tilde{g}_{\rho\sigma} (\delta_\mu^\rho + \xi_{,\mu}^\rho) (\delta_\nu^\sigma + \xi_{,\nu}^\sigma) \end{aligned}$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (174-8)$$

از نظریه معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که هر معادله به صورت

$$\square \xi^\mu = \gamma^{\mu,\sigma} \quad (175-8)$$

را می‌توان به‌ازای ξ^μ حل کرد. فرض کنید که ξ^μ در ۸-۱۷۳ توسط این معادله معین شود. آنگاه محاسبه‌ای کوتاه با استفاده از ۸-۱۷۴ و ۸-۱۷۵ نشان می‌دهد که

$$\tilde{\gamma}_{,\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (176-8)$$

و این به‌نوبت خود تانسور ریچی ۸-۱۷۱ را در مختصات جدید به صورت $\tilde{R}_{\mu\nu} = 1/2 \square \tilde{h}_{\mu\nu}$ خلاصه می‌کند. از این به بعد ما از علامت "مد" در نشان دادن دستگاه مختصات جدید دوری می‌جوئیم و بنابراین می‌نویسیم

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} \quad (177-8)$$

برای ناوردای خمیدگی R چنین می‌یابیم

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \square h \quad (178-8)$$

و برای تانسور اینشتین

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\square\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) = \frac{1}{2}\square\gamma_{\mu\nu} \quad (179-8)$$

بدین ترتیب معادلات میدان اینشتین ۱۳۶-۸ یا ۱۳۸-۸ به صورت (هم‌ارز) زیر در می‌آیند

$$\square\gamma_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad \square h_{\mu\nu} = -2\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \quad (180-8)$$

معادله ۱۸۰-۸ نشان می‌دهد که $T_{\mu\nu}$ و $h_{\mu\nu}$ دارای مرتبه کوچکی یکسان‌اند و بنابراین از حاصلضرب T و Γ ها می‌توان چشم پوشید و در این تقریب $T_{;\nu}^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu}$ می‌شود (با ۱۲۹-۸ مقایسه کنید). اما $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ و بنابراین هر $\gamma_{\mu\nu}$ که در ۱۸۰-۸ صدق کند خودبه‌خود در "شرط مختصاتی" ۱۷۶-۸ و بنابراین در معادله ۱۷۹-۸ صدق می‌کند. نام "تقریب خطی" برای این نظریه از اینجاست که معادلات ۱۸۰-۸، معادلات میدان خطی هستند. $h_{\mu\nu}$ و $\gamma_{\mu\nu}$ حداقل در این تقریب، در معادله موج با سرعت c در فضا زمان خالی صدق می‌کنند. بنابراین اختلالات میدان با سرعت نور در خلأ پخش خواهند شد. اما در این میان باید بین امواج گرانشی اصیل، یعنی امواج خمشی، و "امواج مختصاتی" صرف تمایز قائل شد.

اگر منابع به‌گونه‌ای آهسته که قابل اغماض باشد حرکت کنند، و تنش آنها صفر باشد، آنگاه از ۱۲۸-۸ داریم

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, 0, c^2\rho), \quad T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T = \text{diag}\frac{1}{2}c^2\rho(1, 1, 1, c^2) \quad (181-8)$$

و از آنجا با ۱۸۰-۸

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{h_{44}}{c^2} \quad (182-8)$$

در نتیجه حرکت آهسته منابع، تغییرات میدان نیز آهسته خواهد بود، آن‌گونه که $\square h_{\mu\nu} \approx -\nabla^2 h_{\mu\nu}$ و ۱۸۰-۸ تبدیل می‌شود به

$$\nabla^2 \frac{1}{2}h_{44} = 4\pi G\rho \quad (183-8)$$

اکنون به متریک ۱۴۳-۸ با پتانسیل نیوتونی $\varphi = 1/2 h_{44}$ دست یافته‌ایم.

در حالت عام می‌توان از معادلات ۸-۱۸۰ با روشهای معیار انتگرال گرفت. به عنوان مثال، اولی انتگرال زیر را که از لحاظ فیزیکی مفید است به دست می‌دهد

$$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^2} \iiint \frac{[T_{\mu\nu}] dV}{r} \quad (۱۸۴-۸)$$

در اینجا [] بدان معنی است که مقداری را که توسط زمان سیر نور تا مبدأ r "کند" شده است باید در نظر گرفت.

به عنوان مثال، دستگاهی را در نظر بگیرید که از منابع در حال حرکت مانا تشکیل شده باشد (مثلاً یک پوسته جرم دار کروی). پس تمام γ ها مستقل از زمان خواهند بود. اگر ما از تنش و از حاصلضرب سرعت منابع (که کاملاً قانونی نیست^۱) چشمپوشی کنیم، تانسور انرژی ۸-۱۲۸ چنین می‌شود

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & -c^2 \mathbf{v} \\ -c^2 \mathbf{v} & c^2 \rho \end{pmatrix} \quad (۱۸۵-۸)$$

در اینجا ρ به جای یک ماتریس صفر 3×3 نشسته است و بنابراین از ۸-۱۸۴ داریم

$$\gamma_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (۱۸۶-۸)$$

به ازای ذرات آزمونی آهسته داریم $ds = c dt$. اگر مشتق نسبت به t را با نقطه نشان دهیم، سه معادله حرکت ژئودزیک اول چنین می‌شود (با ۸-۱۵ مقایسه کنید)

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{\mu\nu}^i \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (۱۸۷-۸)$$

$$= -\left(\gamma_{\mu,\nu}^i - \frac{1}{c} \gamma_{\mu\nu}^i, -\frac{1}{c} \eta_{\mu}^i \gamma_{,\nu} - \frac{1}{c} \eta_{\nu}^i \gamma_{,\mu} + \frac{1}{c} \eta_{\mu\nu} \gamma_{,\nu}^i \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (۱۸۸-۸)$$

ما در اینجا از ۸-۱۶۸ و ۸-۱۷۲ در ۸-۱۸۷ نشانده‌ایم و از $\gamma = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} = -h$ استفاده کرده‌ایم. به علاوه $\gamma = c^{-2} \gamma_{\mu\nu}$. حال اگر فرض کنیم $\dot{x}^\mu = (u^i, 1)$ باشد و از حاصلضربهای u چشم‌پوشیم، معادله ۸-۱۸۸ تبدیل می‌شود به

$$\ddot{x}^i = -\gamma_{\mu,j}^i u^j + \gamma_{j\mu}^i u^j + \frac{1}{c} \gamma_{\mu\nu}^i$$

این را می توان به صورت برداری زیر نوشت

$$\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \text{curl } \mathbf{a}) = - \left[\mathbf{e} + \frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) \right] \quad (189\text{-}8)$$

که در آن (با ۱۸۴-۸ و ۱۸۵-۸ مقایسه کنید)

$$\varphi = -\frac{1}{4} \gamma_{22} = G \iiint \frac{[\rho] dV}{r}, \quad \mathbf{a} = -\frac{c}{4} \gamma_{2i}^i = \frac{1}{c} G \iiint \frac{[\rho \mathbf{u}] dV}{r} \quad (190\text{-}8)$$

و

$$\mathbf{e} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{h} = \text{curl } \mathbf{a} \quad (191\text{-}8)$$

شبهه صوری موجود با نظریهٔ ماکسول قابل توجه است. تنها تفاوتها چنین اند: علامت منفی در ۱۸۹-۸ (زیرا نیرو جاذب است)؛ ضریب G در ۱۹۰-۸ (به علت گزینش یکاها)؛ و ضریب جدید ۴ در ۱۹۱-۸.

هانس تیرینگ در سال ۱۹۱۸/۱۲۹۷ میدان گرانشی درون یک پوستهٔ کروی در حال دوران با جرم m و شعاع R و سرعت زاویه‌ای ω را در نظر گرفت. اما می دانیم که بنابر نظریهٔ ماکسول میدان الکتریکی \mathbf{e} داخل یک چنین پوسته‌ای با بار q برابر صفر است، زیرا میدان (مغناطیسی) \mathbf{h} برابر است با

$$\mathbf{h} = \frac{2}{3} \frac{q\omega}{cR} \quad (192\text{-}8)$$

بنابراین نیروی وارد بر واحد بار که با سرعت \mathbf{u} حرکت کند برابر است با

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{h} = \frac{2}{3} \frac{q}{c^2 R} \mathbf{u} \times \omega \quad (193\text{-}8)$$

حال از شباهت فرمولهای ۱۸۹-۸ تا ۱۹۱-۸ با فرمولهای متناظر ماکسولی آنها روشن است که در مسئلهٔ تیرینگ شتاب (کوریولیس-گونه) برابر است با

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\Lambda}{3} \frac{Gm}{c^2 R} \mathbf{u} \times \omega \quad (194\text{-}8)$$

و این درست عبارتی است که تیرینگ پیدا کرد.

به همین ترتیب می‌دانیم که میدان مغناطیسی خارج از یک توپ در حال دوران باردار برابر است با

$$\mathbf{h} = \frac{3}{5} \frac{R^2 q}{c} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right) \quad (195-8)$$

در اینجا R شعاع توپ، q بار، $\boldsymbol{\omega}$ سرعت زاویه‌ای، و \mathbf{r} بردار موضع نقطه میدان نسبت به مرکز توپ است. بنا بر فرایند برگردان ما، می‌بینیم که میدان "مغناطوگرانشی" خارج از یک توپ مشابه با جرم m برابر خواهد بود با

$$\mathbf{h} = \frac{12}{5} \frac{R^2 G m}{c} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right) \quad (196-8)$$

و شتاب کوریولیس یک ذره آزمونی برابر است با

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{h})$$

این نتیجه اولین بار توسط تیرینگ و لِنز در سال ۱۹۱۸/۱۲۹۷ ارائه شد.

کیهانشناسی

۱-۹- واقعیت‌های اساسی

علم جدید احساس حجب و حیا را نسبت به کل عالم به مقدار زیادی از میان برده است. دانشمندان اطمینان دارند که با هوشمندی کافی، استقامت، زمان، و پول می‌توان هر آنچه را که در فراسوی ستاره‌هاست دریافت. آنها معتقدند که آنچه روی زمین و در مجاورت آن می‌بینند نماینده خوبی است از اجسام و قوانین طبیعی، و اینکه ”در آن بالاها“ چیزی به نظر نمی‌رسد که نتوان آن را با دانشی که ”این پایین‌ها“ به دست آمده است توضیح داد، پیشگویی و یا برونیابی کرد. آنها بر این باورند که اکنون بخشی از عالم را می‌توان بررسی کرد، که گرچه تناسبی با اندازه کل عالم — که شاید نامتناهی باشد — ندارد، اما با خصوصیات بزرگ مقیاس آن متناسب است. بدون این پیش‌متهورانه، پیشرفت در کیهانشناسی بسیار اندک می‌بود. با وجود تطابق‌های عددی مشخصی، که با آنها آشنا خواهیم شد، و به‌زحمت می‌توان آنها را تصادفی دانست، به نظر می‌رسد طبیعت نیز این پیش‌بینش را تأیید می‌کند.

به این ترتیب کیهانشناسان ”مدلهای“ نظری می‌سازند و باور دارند که این مدلها، با توجه به خصوصیات بزرگ مقیاس عالم، در کل نماینده عالم هستند. آنها این مدلها را با عالمی که منجمان رصد می‌کنند مقایسه می‌کنند. کیهانشناسی نظری نوین از نسبت عام اینشتین الهام می‌گیرد، که یک دینامیک سازگار و نیز امکانات نظری غریبی همچون عالم بسته ولی نامحدود به دست

می‌دهد. از نسبیت عام، درست زمانی که منجمان لازم تشخیص دادند، مدل‌های در حال انبساط (دوسیت، فریدمان) به‌دست آمد. باری، در کیهانشناسی نیز همان موردی پیش آمد که در ریاضیات اغلب پیش می‌آید: هنگامی که مسائل قدیمی و مشکل سرانجام با روش‌های پیچیده حل می‌شوند، راه‌حلهای بسیار ساده‌تر تازه آشکار می‌شوند. در دوران پیش از نسبیت تصور می‌شد که نظریه نیوتون برای بررسی عالم همچون یک کل ناکافی است، به‌خصوص به‌خاطر بینهایت‌های اجتناب‌ناپذیری که در پتانسیل پیش می‌آیند. اما یک دهه پس از اینکه کیهانشناسی نسبیتی ساخته و پرداخته شد، ناگهان روشن شد که از نظریه نیوتونی هم (با تغییرات کوچکی که "واضح" به‌نظر می‌رسید) می‌توان مدل‌های متعددی برای عالم شبیه به مدل‌های نسبیت عامی به‌دست آورد. تنوع این مدل‌ها آن اندازه بود که بتوانند تا مدتها بعد از آن در مقام مقایسه با عالم واقعی برآیند.

قبل از اینکه به مبحث در مورد نظریه‌های کیهانشناسی بپردازیم ابتدا به برخی اطلاعات و داده‌ها نگاه می‌کنیم. اولین مسئله مبتلا به کیهانشناسان توزیع فضایی ستاره‌ها و کهکشانهاست. در نظر کپرنیک نیز، همچون بطلمیوس، ستاره‌ها به یک فلک بلورین متصل بودند، منتها حالا خورشید در مرکز آن بود و نه زمین. اما توماس دیگس در سال ۱۵۷۶/۹۵۵ به‌جای این فلک توزیع یکنواختی از بینهایت ستاره در سرتاسر فضا در نظر گرفت. طوری که ستاره‌های کم نور دورتر باشند. جوردانو برونو نیز همین توزیع را مطرح کرد، و عجب این جاست که یک قرن قبل از آن نیکولای کوسایی آن را پیش‌بینی کرده بود. اما برخلاف دیگس که هنوز خورشید را سلطان آسمانها می‌دانست، سلطانی که "بر قوانین حرکت حاکم است و آنها را برای دیگران تعیین می‌کند." برونو خورشید را آن‌طور که هست شناخت: ستاره‌ای در میان بسیاری دیگر. نیوتون بعدها از این تصور بینهایت بودن حمایت کرد. وی معتقد بود که اگر عالم متناهی می‌بود "به مرکز کل فضا فرومی‌ریخت و تشکیل یک جرم کروی عظیم می‌داد." اما ماده که به‌طور یکنواخت سرتاسر فضای بینهایت پخش باشد... بخشی از آن به‌سوی یک جرم و بخشی به‌سوی دیگر میل می‌کنند... و لابد خورشید و ثوابت به این ترتیب تشکیل شده‌اند (۱۶۹۲/۱۰۷۱). محتوای حقیقتاً انقلابی این سطور تصور تکامل در عالم و نیز گرانش به عنوان عامل سازوکار چگالش است.

به‌علاوه، نیوتون تشخیص داد که ستاره‌ها از هم بسیار دورند. او فرض کرد که ستاره‌ها همگی نظیر خورشیدند و می‌دانست که نور اجسام درخشان با عکس مجذور فاصله کم می‌شود. از این طریق نور ستاره‌ها را با بخشی از خورشید که از سوراخی دیده می‌شد مقایسه کرد و چنین برآورد کرد که ستاره‌ها باید حداقل ۱۰۰۰۰۰ بار دورتر باشند تا خورشید. در واقع، رقم اصلی برای نزدیکترین ستاره حدود ۲۷۰۰۰۰ است.

تصور انقلابی بعدی مربوط است به سالهای حدود ۱۱۲۹/۱۷۵۰ و به‌افراد مختلفی همچون

1. raigeth and geeveth lawes of motion to ye rest.

۲. البته این کاملاً درست نیست. فضا که مطلق باشد، دوران می‌تواند از رمیش عالم جلوگیری کند. در واقع قضیه به‌عکس است، یعنی این عالم نامتناهی است که با نظریه گرانش نیوتون سازگاری ندارد. در بخش ۹-۲ به این مسئله خواهیم پرداخت.

سوئدنبورگ، لامبرت، رایت، و کانت نسبت داده می‌شود. همه آنها درباره "عالمهای جزیره‌ای" نوشتند، و متناهی بودن کهکشان را تشخیص دادند، و وجود منظومه‌های ستاره‌ای مشابهی را در اعماق فضا به حدس دریافتند. "سحابی"های مختلفی که منجمان دیده بودند همگی نامزد مناسبی برای این نقش جدید بودند. کانت شکل کهکشان را به خوبی دریافت ("ستاره‌ها در یک صفحه مشترک جمع شده‌اند" — همان‌گونه که راه شیری می‌نمایاند) و به این ترتیب ظاهر بیضی شکل برخی سحابیها را از طریق قرصهایی که مایل دیده می‌شوند توضیح داد. مسیه در سال ۱۷۸۳/۱۱۶۲ فهرستی از ۱۰۳ تا از این نوع سحابیها تهیه کرد، و ویلیام هرشل با تلسکوپ انعکاسی ۴۸ اینچی قوی خود تا قبل از مرگش در سال ۱۸۲۲/۱۲۰۱ کمتر از ۲۵۰۰ سحابی رصد نکرد. هرشل با رصدهای خود حامی بزرگ نظریه عالم پر-جزیره شد، گرچه بعداً روشن شد که بسیاری از دلایل او کاملاً اشتباه بودند. او تقسیم مهم سحابیها را به دو دسته کهکشانی و برون-کهکشانی پیش‌بینی کرد. ادله به نفع این نظریه هرشل فراز و نشیبهای زیادی طی کرد، و اصولاً تحقیق آن احتیاج به تکامل قابلیت عظیم رصدی داشت که آهسته پیش می‌رفت. اوج این دوره انتظار یک جدل تاریخی بود که در کنفرانسهای پی‌درپی از ۱۹۱۷ تا ۱۹۲۴ میان منجمان جریان داشت، تا سرانجام در اول ژانویه ۱۹۲۵ ناگهان خاتمه یافت: هابل، با کمک تلسکوپ جدید (۱۹۱۷/۱۲۹۶)، ۲٫۵ متری مونت ویلسون، تصویر ستاره‌ها را در سه سحابی تفکیک کرده بود. چون بعضی از این ستاره‌ها قیفاووسی بودند، او توانست بدون هیچ تردید فواصل برون-کهکشانی آنها را تحقیق کند. تنها یک خاصیت اصلی عالم، آن‌طور که امروزه می‌شناسیم، هنوز مجهول بود: انبساط آن. اسلیفر، از ۱۹۱۲/۱۲۹۱ به بعد طیف بعضی سحابیهای پرنور را رصد کرده بود. بسیاری از آنها انتقال به سرخ نشان می‌دادند، که آشکار می‌کرد این سحابیها احتمالاً در حال فرارند. اما هنوز ضابطه‌ای برای تعیین فاصله وجود نداشت. حالا هابل معیار "روشن‌ترین ستاره" خود را برای تعیین فاصله به‌کار برد و با همکاری هوماسون بررسی انتقال به سرخ را به سحابیهای کم‌نور نیز گسترش داد. سرانجام در سال ۱۹۲۹/۱۳۰۸ او می‌توانست قانون مشهور خود را اعلام کند: "همه کهکشانها (صرفنظر از حرکت‌های تصادفی) از ما دور می‌شوند و سرعت آنها متناسب است با فاصله آنها از ما" عصر جدید کیهانشناسی شروع شده بود.

بیست‌و‌اندی سال بعد تلسکوپهای بزرگ ۲٫۵ و ۵ متری عمدتاً مشغول افزودن به دانش ما از عالم بودند. اما ساخت رادار به‌هنگام جنگ جهانی دوم منجر به ایجاد نجوم رادیویی پس از جنگ شد، ساعت‌های اتمی و کامپیوترهای الکترونیکی روشهای جدیدی برای پردازش داده‌ها به‌دست دادند؛ تجربه با بالون، موشک، و ماهواره جو مزاحم زمین را بی‌اثر کرد؛ روبش فوتوالکتریکی محدودیت امولسیون فیلم عکاسی را دور زد؛ نجوم پرتو ایکس و نوترینویی در حال ظهورند. به‌علاوه کامپیوترها پژوهشهای نظری را در زمینه تکامل ستاره‌ها و کهکشانها که قبلاً غیرقابل تصور بودند ممکن ساخته‌اند.

ما از جزئیات رشد دانش نوین می‌گذریم و تنها به سیاه‌برداری از آن دسته از یافته‌های اصلی

نجومی می‌پردازیم که به‌کارمان بیاید.^۱ از ستاره‌ها شروع می‌کنیم. امروزه می‌دانیم که آنها را کتورهای گرما هسته‌ای عظیمی هستند و چرخه‌هایی می‌بیمایند که به‌خوبی شناخته شده است و می‌دانیم که مسیر دقیق چرخه آنها عمدتاً به‌جرم آنها بستگی دارد. برای آنکه تصویری از اندازه آنها داشته باشیم کافی است بدانیم که زمین با مدار ماه به‌راحتی در اغلب آنها، به‌انضمام خورشید جا می‌گیرد. چشم غیرمسلح حدود ۷۰۰۰ تایی آنها را می‌بیند، هرکهکشان نوعی حدود $۱۰^{۱۱}$ تایی آنها را در بردارد. (اکثر ما تصور ذهنی از عددی به‌این اندازه نداریم. مثالهای زیر کمک می‌کنند: یک مایل کتاب را کنار هم بچینید. تعداد حروف این کتب حدوداً برابر $۱۰^{۱۱}$ است. یا اتاقی مکعبی شکل به ابعاد $۵ \times ۵ \times ۵$ متر در نظر بگیرید. تعداد ته سوزن لازم برای پرکردن آن حدوداً برابر $۱۰^{۱۱}$ است.) توزیع ستاره‌ها در یک کهکشان بسیار تنک و نامتراکم است. فاصله آنها از یکدیگر از مرتبه ده سال نوری است. مدلی به‌مقیاس در نظر بگیرید که در آن ستاره‌ها به‌اندازه ته سوزن هستند. در این مدل فاصله ستاره‌ها از هم ۵ km و منظومه شمسی (تا مدار پلوتون) دایره‌ای به‌قطر ۱ cm به‌دور خورشیدی به‌اندازه ته‌سنجاق است. شعاع هر کهکشان نوعی حدود $۱۰^۴ \times ۳$ سال نوری است که از همسایه‌اش $۱۰^۶ \times ۳$ سال نوری فاصله دارد، و به‌طور تفاضلی با دوره‌ای حدود $۱۰^۰$ میلیون سال می‌چرخد. مانند یک سکه یک ریالی، ضخامتش یک دهم شعاعش است و سکه‌هایی از این نوع که به فاصله یک متر از هم قرارگیرند مدل خوبی برای توزیع کهکشانشناخت است. حدود $۱۰^{۱۱}$ کهکشان در محدوده برد تلسکوپ ۵ متری مونت‌پالومار است. در مقیاس سکه‌ای، دورترین آنها ۲٫۵ کیلومتر از ما فاصله دارد، درحالی‌که دورترین اختروش شناخته شده بیش از ده کیلومتر از ما فاصله دارد. مشکل دیگری هم وجود دارد: کهکشانشناخت نیز در فضا توزیع یکنواختی ندارند، بلکه تمایل به تشکیل خوشه دارند. کهکشانشناختی منفرد استثنا هستند: اکثر آنها متعلق به خوشه‌هایی از ۲ تا ۱۰۰۰ و گاهی تا ۱۰۰۰۰ کهکشان هستند که ظاهراً گرانث آنها را به‌هم می‌پیوند. شواهدی هست که خوشه‌ها نیز به‌نوبه خود خوشه و یا "ابرخوشه" تشکیل می‌دهند. در اینجا شاید مناسب باشد ذکر از مدل "سلسله مراتبی" عالم از چارلیه بکنیم، که گرچه طرفداران زیادی پیدا نکرده است، اما برپایه تصور جالبی استوار است. لامبرت هم در سال $۱۷۶۱/۱۱۴۰$ حدسیاتی زده بود که احتمالاً منظومه‌های شمسی مختلف حول مرکز مشترکی می‌گردند، و شاید این ابر منظومه‌ها به نوبه خود به‌دور مرکز دیگری بگردند، "و کجا باید توقف کرد؟" شبیه به همین تصور، چارلیه در سالهای ۱۹۰۸ تا ۱۹۲۲ نظریه‌ای کیهانشناختی ساخت و پرداخت که در آن کهکشانشناختی تشکیل خوشه می‌دهند، خوشه‌ها تشکیل ابرخوشه می‌دهند، و همین‌طور تا بینهایت. اگر ابعاد را مناسب اختیار کنیم، می‌توان عالمی ساخت که چگالی متوسط آن صفر باشد. [یک مثال خیلی ساده: فرض کنید

۱. برای جزئیات می‌توانید مراجع زیر را ببینید

Sciama D W, 1971, *Modern Cosmology*, Cambridge University.

Unsöld A, 1977, *The New Cosmos*, Springer - Verlag, 2nd ed.

خوشه مرتبه n دارای p^n ستاره به وزن m در یک حجم kq^n باشد. چگالی متوسط آن برابر است با $(m/k)(p/q)^n$ ، و به این ترتیب هرگاه $q < p$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\rho \rightarrow 0$. به این ترتیب می توان از بینهایت‌های ذاتی در بررسیهای نیوتونی عالم همگن، که البته چگالی متوسط آن متناهی است، اجتناب کرد. عالمهای چارلیهای همگن نیستند: هیچ حجم V آفندر بزرگ نیست که نوعی باشد، زیرا همیشه خوشه‌هایی با حجم بزرگتر از V وجود دارد که در V نماینده‌ای ندارد. اما این مدلها امروزه اندکی بیش از یک کنجکاو به حساب می‌آیند. حالا می‌پردازیم به همسانگردی و همگنی ظاهری عالم، انبساط، چگالی، و عمر آن.

به نظر می‌آید که کهکشانها کمابیش به طور همسانگرد به دور ما توزیع شده‌اند و در تمام جهات به طور یکسان از ما دور می‌شوند. با توجه به ماده داخل کهکشان خودمان، که تا حدی مانع دید است، ظاهراً هیچ جهتی در آسمان امتیازی بر دیگری ندارد. اخیراً با مشاهده تابش میکروموجی "زمینه" (تقریباً ۳K)، که ظاهراً بازمانده منشأ انفجار داغ در عالم است اعتقاد ما به همسانگردی عالم از محل ممتازمان راسخ‌تر شده است. این تابش با همسانگردی زیاد بر زمین می‌تابد، (انتهای بخش ۹-۴ را ببینید) آلف و هرمان در سال ۱۹۴۸/۱۳۲۷ بر مبنای نظریه "مهبانگ" گاموف این تابش را پیش‌بینی کردند. کشف نهایی و تصادفی این تابش توسط پنزیاس و ویلسون در سال ۱۹۶۵/۱۳۴۴ یکی از قویترین شواهد برای وقوع مهبانگ است.

تحقیق همگنی عالم، یعنی اینکه نواحی دور عالم شبیه به ناحیه خودماست، بسیار دشوارتر است. مشکل اصلی این است که ما آن نواحی را آن‌طور که میلیاردها سال پیش بودند می‌بینیم، اما نمی‌دانیم دقیقاً چند میلیارد سال پیش، و در هر صورت نمی‌دانیم در آن زمان ناحیه خودمان دقیقاً به چه شکل بوده است. زیرا شناخت ما از تکامل کهکشانها ناقص است، در آن مقیاس مطلوب نشانه مورد اعتمادی برای فاصله‌سنجی (نشانگر فاصله) نداریم، دانش پیشینی از هندسه فضا و نیز از آهنگ گذشته انبساط عالم نداریم. بنابراین تقریباً هر صدی از کهکشانهای واقعاً دور می‌تواند با همگنی موافقت داشته باشد. البته در همسایگی نزدیکتر خودمان به نظر می‌رسد همگنی میان مناطقی به قطر حدود 10^8 سال نوری برقرار باشد.

هابل در سال ۱۹۲۹/۱۳۰۸ رقم 540 km/s بر مگاپارسک را برای آهنگ انبساط عالم تعیین کرد. [پارسک (pc) یکای فاصله معمول منجمان و برابر است با $3.08 \times 10^{18} \text{ cm}$ یا 3.26 سال نوری، یک مگاپارسک (Mpc) برابر 10^6 پارسک است.] این عدد، که ثابت هابل نامیده می‌شود، چندین بار کاملاً مورد تجدید نظر قرار گرفته است، و اغلب کمتر شده است و دلیل آن افزایش دقت و ظرافت در گامهایی بوده است که منجر به تعیین فواصل کیهانی می‌شوند. امروزه بهترین برآورد نزدیک به 50 (km/s) Mpc است، که متناظر با افزایش فاصله 1% در 2×10^8 سال است. البته باید تأکید کرد که "ثابت" هابل ممکن است با زمان تغییر کند — ولی نه به سرعت تخمینهایی که ذکر شد! مقایسه با یک ورقه پلاستیکی که به طور همسانگرد منبسط می‌شود و روشنگر این مطلب است: هرگاه در هر لحظه دو نقطه روی ورقه به فاصله یک سانتی‌متر سرعت نسبی H داشته

باشند، آنگاه نقطه‌هایی که فاصله‌شان x سانتی‌متر است، سرعت نسبی xH دارند، و H ثابت هابل است. اما هیچ دلیلی نداریم که زوج نقاط به فاصلهٔ یک سانتی‌متر همیشه سرعت نسبی یکسانی داشته باشند، آهنگ انبساط ممکن است تغییر کند، و حتی مقدار H ممکن است از مثبت به منفی (انقباض) تغییر کند. [H ثابت متضمن انبساط نمایی است: $x = x_0 \exp(Ht)$]. دو تذکر دیگر در مورد ثابت هابل بلافاصله به ذهن می‌رسد. اول اینکه انبساط الزاماً ناشی از جملهٔ Λ در معادلات میدان تصحیح یافتهٔ اینشتین (معادلهٔ ۸-۱۳۹) نیست؛ آفرینش عالم از مه‌بانگ باید، بدون توجه به معادلات میدان، دوره‌ای از انبساط به دنبال داشته باشد. و دوم اینکه ابعاد خوشه‌های کهکشانی و ساختارهای کوچکتر (کهکشانها، منظومه‌های سیاره‌ای، و غیره) که پیوند گرانش دارند در اثر انبساط عالم تغییر نمی‌کند. دیدیم که متریک شوارتس‌شیلد (و در نتیجه مدارهای سیاره‌ای آن) با وجود یک توزیع جرم همسانگرد و در حال انبساط به‌دور آن تغییر نمی‌کند. از لحاظ نظری حالت کلی نیز بر همین منوال است. (به‌علاوه اگر همه چیز یکسان منبسط شود — آنها، مقیاسها، ناظرها، ستاره‌ها، کهکشانها — هیچ چیز منبسط نمی‌شود.)

عامل دیگری که به برآورد موضعی فاصلهٔ کیهانی بستگی دارد چگالی نسبی عالم است. چگالی متوسط ناشی از کهکشانها حدود $2 \times 10^{-21} \text{ g/cm}^3$ حدس زده می‌شود، گرچه نمی‌توان مقادیری به بزرگی $10^{-21} \times 6$ را مردود دانست. البته این تنها یک حد پایینی برای چگالی متوسط کنونی تمام ماده است، این رقم می‌تواند، به علت وجود مادهٔ میان کهکشانی، نوترینوها، امواج گرانشی، و غیره که هنوز آشکار نشده‌اند، بسیار بیشتر باشد. اما دلایل دیگری وجود دارد که چگالی کیهانی نباید خیلی بیشتر از $6 \times 10^{-21} \text{ g/cm}^3$ باشد. اینها معمولاً دلایل اختر فیزیکی‌اند، مانند دلایلی که بر پایهٔ فراوانی نسبی هلیوم و دوتریم، که امروزه مشاهده می‌شود، قرار دارد. بعداً خواهیم دید که چگالی کیهانی عامل بسیار حساسی است، که تعیین می‌کند آیا انحنای عالم مثبت است یا منفی؛ و نیز اینکه آیا انبساط آن نامحدود است یا اینکه محکوم به رمبش مجدد است.

سن عالم نیز عامل بسیار حساسی است — البته، اگر اصلاً بتوان سن مشخصی به آن نسبت داد، چون ممکن است سن آن بینهایت باشد. سن زمین را از زمان تشکیل پوسته‌اش می‌توان به‌دقت از بررسی واپاشی پرتوزا تعیین کرد، که رقم $10^9 \times (3 \pm 0.5)$ سال به‌دست می‌آید. روشن است که عالم نمی‌تواند جوانتر از این باشد. کاربرد نظریه‌های تکامل ستاره‌ها در "خوشه‌های کروی" (در ستاره‌هایی که در مدارهایی از کهکشان ما می‌گردند) نشان می‌دهد که عمر آنها از مرتبهٔ $10^9 \times 14$ سال است. برآورد کاملاً مستقل دیگری برای سن عالم را می‌توان از فراوانی نسبی برخی عناصر سنگین، که فراوردهٔ واپاشی پرتوزا هستند، به‌دست آورد. این برآوردها (بر مبنای مدل‌های تکامل کهکشانها) اشاره به عمری میان $10^9 \times 6$ تا $10^9 \times 20$ سال دارند. برآورد دیگری هم از ثابت هابل می‌توان به‌دست آورد: اگر عالم به‌طور خطی با آهنگ کنونی اش منبسط شده باشد، می‌باید حدود $10^9 \times 20$ سال پیش شروع به انبساط کرده باشد. اما (به شرطی که دافعهٔ ناشی از

آن نداشته باشیم) انتظار داریم که انبساط آن آهسته شده باشد، به طوری که عمر آن، در واقع، باید کمتر از $10^9 \times 20$ سال باشد.

در مابقی کتاب می‌پردازیم به بررسی آنچه که می‌توان آن را کیهانشناسی میان کهکشان‌ها نامید — سینماتیک و دینامیک عالم کهکشانها، کیهانشناسی فروکهکشانی، یا «کیهانزایی» — بررسی تشکیل عناصر، ستاره‌ها، و کهکشانها از مخلوطی از ذرات بنیادی در تعادل ترمودینامیکی (مهبانگ داغ) — به فیزیک هسته‌ای و اتمی بستگی دارد و کاملاً خارج از محدوده بحث ماست. این البته به لحاظ فلسفی بسیار جالب است، زیرا به یک معنی در جایی شروع می‌کند که داروین ختم کرده است. اگر داروین و زیست‌شناسی نوین می‌توانند ظهور انسان را از خاک بی‌جان توضیح دهند، کیهانزایی هم می‌تواند ظهور زمین، خورشید، و کهکشانها را از مادهٔ آمورف، تنها به کمک قوانین لایتغیر طبیعت و یک مهبانگ پر انرژی توضیح دهد.

همین‌که این تکامل کیهانی قطع شد، دیگر به سختی می‌توان از یک نتیجه‌گیری دیگر با اهمیت فلسفی زیاد گریخت: حیات باید در سراسر عالم وجود داشته باشد. تعداد ستاره‌ها، تا آنجا که می‌شناسیم، بسیار زیاد است (حدود 10^{22})، برابر تعداد سرسوزنهای لازم برای پر کردن یک حجم 20 کیلومتر مکعبی). و به نظر می‌رسد که منظومه‌های سیاره‌ای گهگاه به همراه چگالش ستاره‌ها ایجاد می‌شوند. پس — حتی اگر تنها در یک سیاره از یک میلیون، یا از یک میلیون میلیون، حیات به وجود آید — بسیار محتمل است که این حیات روی میلیاردها سیاره به وجود آمده باشد.^۱ این اوج انقلاب کپرنیکی است: ما به هیچ وجه مرکزیتی در عالم نداریم. این امر — در صورت لزوم — حتی می‌تواند اندازه‌ای برای عالم تعیین کند: احتمالاً عالمی به اندازه‌ای کوچکتر نمی‌توانست ضامن بقای نهایی و شکوفایی تام تمدنی باشد.

۹-۲ اشکالات آشکار کیهانشناخت پیش-نسبیتی

با نگاه به گذشته مشکل می‌توان دریافت که چطور منجمان قرن نوزدهم تا این اندازه متمایل به این اندیشه بودند که عالم باید ایستا و بینهایت باشد. این تصویر که یک دستهٔ متناهی از ستاره‌ها (یا سحابیها) در اثر انفجار اولیه در هر جهت پرتاب می‌شوند و سرانجام گرانش از انبساط آنها جلوگیری می‌کند و آنها را برمی‌گرداند تا به آتشگوی دیگری بکشاند، مسلماً در چارچوب امکانات نیوتونی است. یک عالم متناهی نیز که دورانی جاودانه دارد و در نتیجه از رمبش آن جلوگیری می‌شود می‌تواند در همین چارچوب موجود باشد. آیا ظاهر ایستا و نامتناهی عالم تا این اندازه الزامی بود که دیگر نتوان آن را مورد سؤال قرار داد؟ و نیز، چگونه می‌توانستند نسلهایی که پس از ژول و هلمهولتز — که با اندیشهٔ پایستگی انرژی بزرگ می‌شوند — انتظار داشته باشند که ستاره‌ها بدون دریافت انرژی قابل توجهی از اطراف خود برای همیشه بسوزند. اما در اینجا به خاطر بیابوریم که منبع انرژی

۱. البته، باید اذعان داشت که اقلیتی از زیست‌شناسان هنوز معتقدند که احتمال منشأ خودبه‌خود حیات به اندازه‌ای کم است که زمین ممکن است تنها سیارهٔ عالم باشد که روی آن حیات وجود دارد.

ستاره‌ای هنوز کاملاً ناشناخته بود و کسی خواب $E = mc^2$ را هم نمی‌دید، بنابراین شاید آنها حق داشتند تصور کنند که در یک جرم متناهی مخزن نامتناهی انرژی نهفته است (نتیجه‌ای که از ذره نقطه‌وار بینهایت نزدیک تحت گرانش نیوتونی حاصل می‌شود).

بهر دلیل، عالم می‌باید ایستا و نامتناهی باشد و این به اشکالاتی منجر می‌شد. اشکال اول به‌خاطر نظریه نیوتون بود. یک توزیع ماده همگن و نامتناهی (مثلاً از ستاره‌ها) را در سراسر فضا در نظر بگیرید که ابتدا ایستاست، چه اتفاق خواهد افتاد؟ اگر بخواهیم بر مبنای نقل و قول مذکور در بخش ۹-۱ نظر دهیم، باید بگوییم که نیوتون ظاهراً فکر می‌کرد این یک پیکربندی در حال تعادل است. با اعتقاد به فضای مطلق، وی احتمالاً به تقارن متوسل می‌شد و چنین استدلال می‌کرد که نیروی برآیند روی هر ستاره باید صفر شود و بنابراین هیچ حرکتی نمی‌تواند روی دهد. [بدون فضای مطلق، یک توزیع نامتناهی می‌تواند تحت گرانش انقباض همگانی و همگن داشته باشد: حرکت هیچ ستاره‌ای نسبت به مابقی ممتاز نیست.]

اما عالم ایستای نیوتون دارای یک اشکال نهانی است. فرض کنید از این عالم ایستا یک کره جرم‌دار متناهی جدا کنیم. میدان داخل این کاواک چه خواهد بود؟ از طریق انتگرال‌گیری پتانسیل نمی‌توان جوابی به‌دست آورد: زیرا انتگرال واگراست و بینهایت می‌شود. اگر میدان داخل صفر باشد، هنگامی که ماده دوباره داخل می‌شود، تحت گرانش خودش دچار رمبش خواهد شد. پس به‌نظر می‌رسد که عالم نامتناهی بیرون کاواک باید در درون آن یک نیروی گریز از مرکز تولید کند. اما اگر از میدان حاصل از تعداد نامتناهی پوسته کروی جرم‌دار حول کاواک انتگرال بگیریم، صفر به‌دست می‌آید. ریشه این دردسر در عدم وجود جوابی از نوع $\varphi = \text{const.}$ برای معادله پواسون است.

این موضوع باعث شد که نویمان در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵ پتانسیل زیر

$$\varphi = -\frac{mG}{r} e^{-r\sqrt{\lambda}}, \quad (\lambda = \text{const.} \approx 0) \quad (1-9)$$

را به‌جای پتانسیل نیوتون پیشنهاد کند. (دقت کنید که این پتانسیل همان صورت پتانسیل مزونی بوکاوا را دارد که در سال ۱۹۳۵/۱۳۱۴ پیشنهاد شد.) در این مورد به‌جای معادله پواسون $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho$ داریم

$$\nabla^2 \varphi - \lambda \varphi = 4\pi G \rho \quad (2-9)$$

۱. از این به بعد برای تأکید بر معنی استقلال از مختصات، به‌جای عملگر $\nabla^2 \varphi$ ، $\sum \varphi_{;i}$ را می‌نویسیم. خاطرنشان می‌کنیم که در مورد تقارن کروی $[\varphi = \varphi(r)]$ ، داریم $\nabla^2 \varphi = \varphi'' + (2/r)\varphi'$.

که به‌وضوح دارای جواب ثابت زیر در یک عالم همگن است

$$\varphi = -\frac{4\pi G\rho}{\lambda} \quad (3-9)$$

(از انتگرال‌گیری ۱-۹ در سراسر فضا به‌ازای یک توزیع پیوسته ماده نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید.) اکنون می‌بینیم که خود-نیروی متناهی جرم درون کواک کروی و فرضی ما دقیقاً با یک نیروی گریز از مرکز متناهی و متناسب با $(4/3)\pi G\rho r^2$ که کل جرم بیرونی تولید می‌کند، جبران می‌شود. شباهت صوری قابل‌توجه بین معادلات ۸-۱۳۹ که اصلاح شده معادلات اصلی اینشتین ۸-۱۳۶ است و معادله اصلاح شده پواسون توسط نویمان ۹-۲ جالب است که هر دو یک هدف داشتند و آن مجوزی برای وجود یک عالم ایستاست. با کمال تعجب، ۸-۱۳۹ در اولین تقریب به ۹-۲ تبدیل نمی‌شود، بلکه به‌اصلاح دیگری از معادله پواسون یعنی

$$\nabla^2\varphi + c^2\Lambda = 4\pi G\rho \quad (4-9)$$

تبدیل می‌شود، که با روشی مشابه روشهای بخش ۸-۱۰ می‌توان آن‌را نشان داد. این معادله نیز با این شرط که $c^2\Lambda = 4\pi G\rho$ باشد (این رابطه دقیقاً در عالم ایستای اینشتین صادق است) دارای یک جواب ثابت یعنی $\varphi = 0$ ، در حضور ماده همگن، است.

عامترین اصلاح معادله پواسون که با روح اصلاحات اینشتین در معادلات خودش سازگار باشد باید از سه شرط پیروی کند: (الف) حفظ خصلت زنده‌ای، (ب) حفظ خطی بودن، و (ج) پیش نیامدن مشتقات بالاتر از مشتق دوم پتانسیل. این شرایط به‌طور یکتا منجر به‌صورت زیر می‌شوند

$$\nabla^2\varphi + A\varphi + B = 4\pi G\rho \quad (5-9)$$

که ۲-۹ و ۴-۹، هر دو موردهای خاصی از آن هستند. [در چارچوب نیوتونی ضرایب A و B می‌توانند توابعی از زمان باشند—مثلاً می‌توانند وابسته به‌چگالی عالم در حال انبساط باشند. از طرف دیگر در نظریه اینشتین Λ باید یک ثابت مطلق طبیعت باشد و آزادی‌ای جز این ندارد.] اگر A یا B یا هر دو مخالف صفر باشند، معادله ۵-۹ به‌ازای فضای خالی ($\rho = 0$) دارای جوابهای غیرثابت و بی‌تکینگی است: با فرض همسانگرد و منظم بودن، یک رشته نمایی از r در ۵-۹ با $\rho = 0$ قرار می‌دهیم و آن‌را به‌ازای ضرایب حل می‌کنیم. نتیجه این است

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{6}(B + A\varphi_0) [r^2 + AO(r^2)] \quad (6-9)$$

این جوابی است که باید در کواک کروی مورد بحث ما از آن استفاده کرد، و در مقابل خود-نیروی ماده‌ای که جدا شده است ایجاد توازن می‌کند. در مورد معادله ۲-۹ ($B = 0$, $A = -\lambda$) می‌توان

این میدان را ناشی از جرم خارج دانست. اما در مورد معادله ۹-۴ $(A = 0, B = c^2 \Lambda)$ مقام یک چگالی فضا $c^2 \Lambda / 4\pi G$ - که از پیش موجود است - عمل می‌کند، گویی که خود فضا ماده را دفع می‌کند. این چنین است اثر Λ اینشتین به زبان نیوتونی.

دستکاری قانون عکس مجذور نیوتون (آن‌گونه که در معادلات پواسون تجسم شده است) تنها یک راه گریز از مشکلی است که یک عالم نامتناهی در چارچوب کلاسیک با آن مواجه است. راه دیگر حذف فضای مطلق و مجاز شمردن انبساط یا انقباض عالم است. گرچه این شق دوم اصلاح معادله پواسون را بیهوده می‌کند، با این وصف می‌توان هر دو کار را انجام داد تا به عامترین نظریه رسید. در نسبیت عام چیزی شبیه به این اتفاق افتاد: اینشتین جمله Λ را وارد کرد تا یک عالم ایستا را ممکن سازد، حتی هنگامی که دیگر این کار بی‌ربط بود، جمله Λ حفظ شد - گرچه نه توسط اینشتین.

ایراد مهم دیگری برعالم نامتناهی همگن و ایستای پیش-نسبیتی، کاملاً مستقل از نظریه گرانش، وارد است که به پارادوکس اولبرس^۱ معروف است، این پارادوکس می‌گوید که اگر ستاره‌ها با نور یکسان و بدون تغییر بدرخشند، و فضا اقلیدسی باشد، آنگاه باید تمام آسمان در چنین عالمی به‌گونه‌ای یکنواخت همچون خورشید به نظر آید. مخروط پرتو باریکی را در نظر بگیرید که به چشم وارد می‌شود. این مخروط باید از سطح یک ستاره بیاید. اما سطح مقطع آن متناسب با r^2 تغییر می‌کند، درحالی‌که درخشندگی ظاهری یکای سطح متناسب با $1/r^2$ کاهش می‌یابد، پس نور جمع شده در مخروط مستقل از محل منشأ آن است، پس این نور به اندازه‌ای است که گویی از خورشید سرچشمه می‌گیرد، به این ترتیب پارادوکس به دست می‌آید. امروزه فرضی که بیش از همه بلافاصله مورد سؤال قرار می‌گیرد، سوخت جاودانه ستاره‌هاست. توضیح دیگری که مشهور عام است (شه‌زو^۲، ۱۱۲۳/۱۷۴۴) جذب نور توسط ملاً میان-ستاره‌ای است: اما همان‌گونه که بوندی خاطرنشان ساخته است، در این مورد پس از مدتی ملاً همان اندازه که جذب می‌کند تابش خواهد کرد. یک هندسه متناهی و بسته نیز کمکی نمی‌کند: مخروط پرتوهای مورد بحث ما ممکن است قبل از برخورد با یک ستاره به اجبار چند بار "دور عالم" بزند و متناسب با r^2 پخش نشود، اما تغییر پخش آن و تغییر درخشندگی ستاره هنوز هم وارون یکدیگر خواهد بود، و بر برهان فوق لطمه‌ای وارد نمی‌شود. اما در عالمی که گذشته آن متناهی است می‌توان از مسئله اولبرس اجتناب کرد. در این عالم، هنگامی که به دورتر می‌نگریم، در واقع به گذشته زمان می‌نگریم و فراتر از فاصله‌ای معین دیگر چیزی نخواهیم دید: جایی که دنیا هنوز نبوده است. عالمی نیز که به اندازه کافی در انبساط باشد می‌تواند از مسئله اولبرس اجتناب کند، حتی اگر - مانند نظریه "حالت پایا" - گذشته‌ای

۱. برای تاریخچه جالب پیشینه آن مرجع زیر را ببینید

Jaki S L, 1967, "Olbers', Halley's, or Whose Paradox?", *Am J Phys*, **35**, 200.

2. Cheseaux

نامتناهی داشته باشد و درخشندگی متوسط در یکای حجم ثابت بماند. زیرا در این صورت نور منابع دور طوری انتقال به سرخ خواهند یافت (و بنابر رابطه پلانک $E = h\nu$ به گونه‌ای از انرژی آنها کاسته خواهد شد)، که مجموع آنها متناهی می‌ماند و حتی قابل چشمپوشی می‌شود.

۳-۹ نسبت کیهانشناختی: اصل کیهانشناختی

امروزه گرچه دیگر فرض اقلیدسی بودن و یا ایستا بودن یک عالم مدل ارزشی ندارد، اما عملاً تمام کیهانشناسیهای نوین شامل فرض همگنی عالم هستند. این فرض باعث می‌شود که مدل‌های "معقول" همچون عالم‌های جزیره‌ای (که در آنها کهکشانهای دور دست از سنخ متعارف نیستند) و نیز عالم‌های سلسله مراتبی و چارلیه‌ای (که در آن هیچ حجمی به آن اندازه بزرگ نیست که از سنخ متعارف باشد) حذف شوند. همگنی فرض ساده‌کننده‌ای است که توان زیادی دارد. جایی که عالم‌های مدل ناهمگن ما را درگیر مسائل هندسه سراسری می‌کند، زیبایی مدل‌های همگن در این است که می‌توان آنها را اصولاً به گونه‌ی موضعی بررسی کرد: هر بخشی نماینده کل است.

اغلب کیهانشناختیهای نوین فرض همسانگردی را نیز در بردارند. صرف نظر کردن از این فرض راحت تر است تا از فرض همگنی، و باعث ایجاد مشکلات بیش از حد نیز نمی‌شود. مثلاً بحث درباره عالمی که آهنگ انبساط آن در راستاهای x و y و z متفاوت است. خیلی سخت تر از بحث در عالمی با انبساط همسانگرد نیست. اما عامترین مدل همگن که همسانگرد نباشد هنوز پیچیده است. از آنجا که بنابر رصدهای موجود چنین پیچیدگی الزامی به نظر نمی‌رسد، معمولاً همسانگردی، مسلم فرض می‌شود. [تنها در محث عالم‌های بسیار اولیه کمی پس از مهبانگ — ممکن است مدل‌های ناهمسانگرد لازم شوند.] فرض همسانگردی از هر نقطه مفروض متضمن همگنی است (اما نه به عکس). این را می‌توان به سادگی دریافت؛ فرض کنید عالم در یک لحظه در همسایگی دو نقطه A و B خواص گوناگونی داشته باشد. در این صورت این خاصیت در نقطه C با فاصله یکسان از A و B به صورت عدم وجود همسانگردی ظاهر می‌شود.

فرض همگنی بزرگ — مقیاس اغلب همراه با فرض همسانگردی مقیاس — بزرگ، اصل کیهانشناختی خوانده می‌شود. تا آنجا که بر مبنای رصدهای امروزی می‌توان قضاوت کرد، قراین لازم برای ترک این اصل وجود ندارد. به عکس، همسانگردی کاملاً خوبی که از مکان ما در عالم مشاهده می‌شود دلیلی است بر تأیید اصل کیهانشناختی: صرفاً بر مبنای احتمالات، به سختی می‌توان گفت که ما در مکان ممتازی از عالم هستیم، بنابراین ظن ما بر وجود همسانگردی در همه جاست، و همان گونه که دیدیم این متضمن همگنی است. باید یادآور شد که اصل کیهانشناختی یک "اصل" فیزیک نظیر پایستگی انرژی نیست. مقام آن صرفاً مقام یک فرضیه کار است.

یک اصل کامل کیهانشناختی نیز وجود دارد که کیهانشناخت "حالت پایا"ی بوندی و گلد (۱۹۴۸/۱۳۲۷) بر مبنای آن قرار دارد. این اصل می‌گوید که عالم علاوه بر همسانگرد و همگن

بودن فضایی، برحسب زمان نیز همگن است، یعنی سیمای میانگین آن در هر زمان یکسان است. این عالم آغاز و انتها ندارد، و این خاصیت از لحاظ فلسفی بسیار جالب است. هنگامی که عالم منبسط می‌شود، لازم است که برای پرکردن رخنه ایجاد شده به اندازه کافی ماده جدید خلق شود. این امر یک تخطی عمدی از قانون پایستگی انرژی است، اما نه به مقدار "زیاد": آنچه لازم است خلق خودبه‌خود حدوداً یک اتم هیدروژن در ۶۰ کیلومتر مکعب فضا در سال است. حسن دیگر نظریه حالت پایا منجر شدن آن به مدل یکتایی است که در این مقام نسبت به ابطال تجربی شکست‌پذیر است (با آخر بخش ۲-۲ مقایسه کنید). این نظریه حدود دو دهه از شهرت زیادی برخوردار بود و هواداران بسیار داشت. اما شواهد رصدی علیه آن (شمارش چشمه‌های رادیویی، توزیع اختروشها، تابش ۳K و غیره) تا آن حد فزونی یافته است که دیگر کمتر کسی هنوز از آن دفاع می‌کند.

اصل کیهانشناختی و اصل کامل کیهانشناختی (و هر فرض تقارن مشابهی) را می‌توان به عنوان معرف یک نوع "نسبیت عالم" انگاشت، یعنی یک گروه تبدیلات که عالم بزرگ مقیاس تحت آن به خود تبدیل می‌شود. و تنها به همین دلیل می‌توانیم هر کیهانشناسی را که مبنای آن برچنین اصولی قرار داشته باشد همچون یک نظریه نسبیت (با بخش ۱-۱ مقایسه کنید) در نظر بگیریم، و اصطلاح "نسبیت کیهانشناختی" در عنوان کتاب و نیز عنوان این بخش به همین معنی است. روشن است که عالم واقعی، در جزئیاتش بی‌نظم است و مناطق وسیعی از آن خالی است و تنها نقاطی از آن مرکز تجمع جرم با انواع اندازه‌ها و اشکال است. برای اینکه با زبان ریاضی به دینامیک سینماتیک این معجون پردازیم باید آن را به گونه‌ای آرمانی درآوریم. هر کهکشان، اگر از برخی حرکات آهسته و ویژه آن بگذریم، به نظر می‌رسد که از حرکتی "طبیعی" پیروی می‌کند که به مکان آن در عالم وابسته است. شکل پخش و یکنواخت شده این حرکات طبیعی تشکیل شاره کیهانی را می‌دهد، که مفهومی است که از آن برای بحث در مورد سینماتیک عالم استفاده می‌شود. ما می‌توانیم آن را همچون مجموعه‌ای از ذرات متحرک تصور کنیم که فضا را پر می‌کنند (ذرات اساسی) و هر یک از آنها مرکز بالقوه یک کهکشان یا یک خوشه کهکشانی است. بعد از این هرگاه در یک مدل از کهکشانها صحبت می‌کنیم، منظورمان در حقیقت ذرات اساسی خواهد بود. و تصور این است که هر ذره اساسی حامل یک ناظر اساسی است. آنچه که دقیقاً همگن و همسانگرد فرض می‌شود همین شاره کیهانی است.

تاکنون از مفهوم همگنی صرفاً به شهود استفاده کرده‌ایم. اما در یک عالم در حال انبساط همگنی فضایی مفهومی نیست که به همان سادگی موقعیتهای ایستا باشد. تصور شهودی ما این است که این مفهوم به معنی هم‌ارزی همه آن "نمونه"‌های فضایی عالم است که به اندازه کافی بزرگ باشند. اما در چه زمان؟ همسایگی ما در حال حاضر احتمالاً با یک صد میلیون سال پیش خودش فرق می‌کند، چه رسد به نواحی دیگر. بنابراین این مقایسه زمان را در بر می‌گیرد و نسبت به ما نشان داده است که با زمان باید محتاطانه رفتار کرد. تعریف زیر که از واگر است، از این مشکل

دوری می‌جوید: معنی همگنی این است که مجموعهٔ رصدهایی که یک ناظر اساسی روی عالم می‌تواند انجام دهد همان است که هر ناظر اساسی دیگری روی عالم انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، اگر در سراسر زمان، ما در اینجا و ناظرانی در کیهانهای دیگر، می‌توانستند همهٔ رصدها را ثبت کنند — مثل چگالی و توزیع راستایی کیهانها، آهنگ انبساط آنها و غیره همراه با زمانهایی که رصد انجام یافته است (مثلاً با ساعت‌های سزیمی معیار)، آنگاه همگنی با تطابق همهٔ این رصدهای ثبت شده هم‌ارز بود (البته تا یک انتقال ممکن در زمان).

این نوع همگنی یک نتیجهٔ مهم دارد و آن وجود کیهانی است، یعنی یک رشتهٔ لحظات مطلق برای سراسر عالم. در واقع خود عالم همگن، اگر در حال تغییر باشد، می‌تواند در هر نقطه به صورت عامل مناسبی برای هم‌زمان کردن عمل کند. برای این منظور کافی است مبدأ زمانی ساعت‌های سزیمی را که در بند قبل از آن صحبت شد به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که تمام رصدهای ثبت شده را یکسان کند. در این صورت نتیجهٔ قرائتها، T ، زمان کیهانی را تعریف می‌کند؛ روشن است که این T ویژه‌زمان در هر کیهان است. اگر عالم ایستا و یا در حالت پایا باشد، در آن صورت می‌توان ساعتها را طوری تنظیم کرد، مثلاً به‌کمک سیگنالهای دوطرفه همانند روش بخش ۷-۶، که با زمان کیهانی بخوانند. ما در تمام موارد فرض خواهیم کرد که این کار انجام شده است.

۹-۴ مدل میلن^۱

اکنون با ختم مطالب تاریخی به مدلی از عالم می‌پردازیم که بسیار ساده و مبتکرانه است. این مدل، که میلن در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ آن را ساخت، بسیاری از خواص مشترک با مدل‌های پیچیده‌تر را به‌زیبایی نمایش می‌دهد و گرچه ظاهراً مشهود نیست اما از اصل کیهانشناختی نیز تبعیت می‌کند. میلن در برابر یک زمینهٔ فضای خالی مینکوفسکی M_4 و با چشمپوشی کامل از گرانش، بینهایت ذرهٔ آزمون (بدون جرم و بدون حجم) در نظر گرفت که در یک رویداد آفرینشی یکتا \mathcal{L} در تمام راستاها و با تمام سرعت‌های ممکن پرتاب شده‌اند. می‌خواهیم به این موقعیت از چارچوب لخت خاص $S(x, y, z, t)$ بنگریم و فرض کنیم که \mathcal{L} در مبدأ آن، O ، و در زمان $t = 0$ روی داده است. تمام ذرات آزادند و حرکت آنها یکتواخت است و به‌طور شعاعی از O دور می‌شوند و دارای همهٔ سرعت‌های ممکن کمتر از c هستند. پس ما در S تصویری داریم مانند تویی از غبار که مرز آن دست‌نیافتنی است و با سرعت نور منبسط می‌شود. قانون متناسب بودن سرعت — فاصلهٔ هابل در هر لحظهٔ $t = \text{const.}$ در S دقیقاً نسبت به O صادق است: یعنی سرعت ذره در فاصلهٔ r/t ، r است. ابتدا به‌نظر نمی‌رسد که این مدل هنوز نامزد مناسبی برای یک مدل عالم نوین باشد. زیرا (الف) ظاهراً دارای مرکز یکتایی است و (ب) ظاهراً یک عالم “جزیره”‌ای است. ایراد دوم را فعلاً کنار می‌گذاریم و به اولی می‌پردازیم: از لحاظ سینماتیک مرز ماده همچون یک جبههٔ نور کروی رفتار می‌کند که در \mathcal{L} منتشر شده باشد، و بنابراین هر ذره، چون ذره \mathcal{L} وجود

داشته است، خود را مرکز این جبهه در نظر می‌گیرد! به علاوه چون همه ذرات در \mathcal{L} برهم منطبق اند به طور یکنواخت حرکت می‌کنند. از دید هر ذره نقش حرکت در مجموع به گونه‌ای است که همه ذرات به طور شعاعی و البته یکنواخت از او دور می‌شوند. سؤال باقیمانده این است که آیا توزیع چگالی حول یک ذره می‌تواند همسانگرد باشد.

برای بررسی این سؤال، فرض کنید ویژه‌زمان سپری شده پس از پیدایش هر ذره τ باشد. در این صورت اگر n_0 ویژه‌چگالی ذره‌ای در هر ذره مفروض P باشد، داریم

$$n_0 = \frac{N}{\tau^3} \quad (N = \text{const.}) \quad (7-9)$$

زیرا کره کوچکی حول P که شامل تعداد ثابتی ذره باشد با سرعت ثابت du مربوط به دورترین ذره منبسط می‌شود و بنابراین شعاع آن dur است و حجم آن $(4\pi/3)du^3 r^3$. روشن است که به ازای بیشینه تقارن باید N را در مکان هر ذره یکسان برگزینیم.

اگر ذره P در S به فاصله r از مبدأ در باشد، برای هر رویداد در P داریم

$$\tau = \frac{t}{\gamma(u)}, \quad u = \frac{r}{t} \quad (8-9)$$

بنابراین چون یکای ویژه‌حجم در P به $1/\gamma(u)$ در S کاهش می‌شود، پس چگالی ذره در P نسبت به S برابر است با

$$n = \frac{\gamma(u)N}{\tau^3} = \frac{\gamma^4(u)N}{t^3} = \frac{Nt}{(t^2 - r^2/c^2)^{3/2}} \quad (9-9)$$

روشن است که، به عکس، چگالی نسبت به O ذره مبدأ که با $9-9$ تعریف شده است در مکان هر ذره به N/τ^3 کاهش می‌شود و بنابراین این چگالی نسبت به هر ذره مبدأ دیگر به $9-9$ کاهش می‌شود. بنابراین توزیع چگالی‌ای که باید حول هر ذره در مختصات نسبیّت خاصی صادق باشد همین است. دقت کنید که چگونه این چگالی در لبه $r = ct$ به سمت بینهایت می‌رود. به علاوه، زمان کیهانی، آن‌گونه که در انتهای بخش گذشته تعریف شد، در مدل میلن برابر τ است: تعیین این زمان در عالم از طریق $9-9$ است.

اکنون می‌بینیم که مدل میلن از اصل کیهانشناختی پیروی می‌کند. یعنی همگن و همسانگرد است. در سینماتیک پیش-نسبیتی نزاع بین عالمهای "جزیره‌ای" و اصل کیهانشناختی ناشی از این است که کهکشانهایی که در لبه (یا حتی نزدیک آن) قرار دارند از سنخ متعارف نیستند. مدل میلن نشان می‌دهد که چگونه در سینماتیک نسبیتی می‌توان از این نزاع اجتناب کرد. بنابر برابری از خود کهکشانهای، هیچ کهکشانی در لبه و یا نزدیک لبه قرار ندارد.

گرچه ماهیت جزیره‌ای عالم میلن اصل کیهانشناختی را نقص نمی‌کند، اما ناقص محک دیگری است که می‌توان آن را لازمهٔ عالمهای مدل دانست: کامل بودن. روشن است که در عالم میلن رویدادهایی هستند که در آنها هیچ کهکشانی حضور ندارد (مثلاً خارج از "لبه" $r = ct$) اما با وجود این می‌توانند برهم‌کنشی با کهکشانها داشته باشند (مثلاً توسط آنها دیده شوند). مدل‌هایی را که برای مبنا "بیش از شارهٔ کیهانی فضا اشغال می‌کنند" ناکامل می‌خوانند. اما مدل میلن در اینجا تنها نیست. تعدادی نه اندک از مدل‌های کیهانشناختی که به‌طور جدی مورد نظر قرار گرفته‌اند مبتلابه این عیب هستند.

اینک شق دیگری از توصیف مدل میلن و پیروان شق دیگری برای متریک این مدل عرضه می‌کنیم که نه تنها فی‌نفسه آموزنده است بلکه در واقع معیاری است برای همهٔ مدل‌هایی که از اصل کیهانشناختی پیروی می‌کنند. بنابراین راه را برای مقایسه‌های بعدی ما هموار خواهد کرد. برای این منظور زمان کیهانی را برای مختص زمان اختیار می‌کنیم و مختصات فضا را به‌گونه‌ای برمی‌گزینیم که "همراه" باشند، یعنی که مختصات ذرات اساسی با وجود حرکت نسبی ثابت باشد — همچون نقاط شبکه در یک شبکهٔ دکارتی در حال انبساط که برحسب دائمی داشته باشند. مثلاً مجموعهٔ (u, θ, ϕ) نسبت به چارچوب مرجع S را می‌توان به‌عنوان مختصات همراه برگزید. بدین ترتیب، متریک معمول M_4 را نسبت به چارچوب مفروض S برحسب مختصات قطبی کروی در نظر بگیرید:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (10-9)$$

و فرض کنید مبدأ $r = t = 0$ با رویداد آفرینش میلن φ مطابقت دارد. اکنون زمان را به‌زمان کیهانی τ و u را به مختص همراه جدید ρ که مناسب‌تر است تبدیل می‌کنیم:

$$\tau = t (1 - u^2/c^2)^{1/2}, \quad \rho = u (1 - u^2/c^2)^{-1/2}, \quad (u = r/t) \quad (11-9)$$

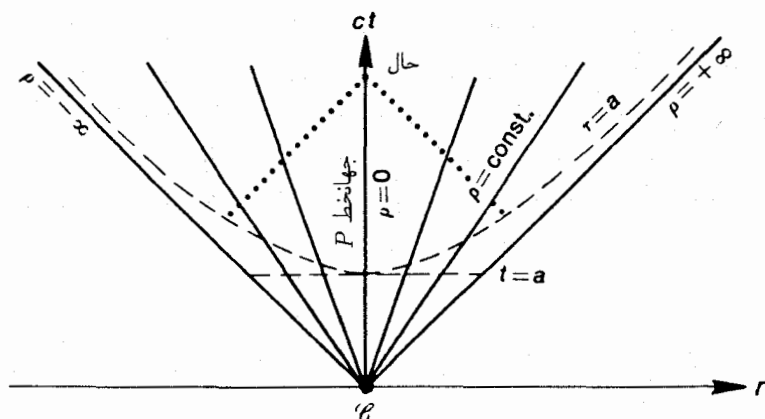
باکمک

$$r = c\tau \sinh \psi, \quad t = \tau \cosh \psi, \quad (\sinh \psi = \rho) \quad (12-9)$$

و یک محاسبهٔ ساده به‌صورت جدیدی از متریک می‌رسیم:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - c^2 \tau^2 \left\{ \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (13-9)$$

ρ را به‌جای چگالی نگیرید. متأسفانه سنت است که در این رابطه از ρ استفاده شود.



شکل ۱-۹

با فرونشاندن دوبعد فضا می‌توانیم رابطه بین مختصات جدید و قدیم را در شکل ۱-۹ نمایش دهیم، که در آن r و t مختصات وابسته به ذره اساسی P در مبدأ S ($r = 0$) هستند. خطوط $\rho = \text{const.}$ بین $\rho = \pm\infty$ (یعنی $u = \text{const.}$ بین $\pm c$) نمایندهٔ جهانخطهای ذرات اساسی هستند، درحالی‌که خطوط $\rho = \pm\infty$ نمایندهٔ لبهٔ دسترس‌ناپذیر هستند. هر خط $t = a = \text{const.}$ نمایندهٔ یک نقشهٔ عالم در فضای اقلیدسی "شخصی P " با مختصات θ, ϕ ، r و در یک لحظه از زمان "شخصی P "، یعنی t ، است. همهٔ این نقشه‌ها عالم را همچون یک توپ متناهی به شعاع ct نشان می‌دهند، که چگالی ذره‌ای آن بدون حد به سمت لبه افزایش می‌یابد. از طرف دیگر هر هذلولی $\tau = a = \text{const.}$ (یعنی $c^2 t^2 - r^2 = c^2 a^2$) نمایندهٔ نقشه‌ای است که میلن آن را نقشهٔ "همگانی" (یا فضای همگانی) می‌نامد، یعنی بخشی از فضا-زمان در یک لحظه از زمان "همگانی τ ". این نقشه در همسایگی هر ذرهٔ اساسی P با نقشهٔ شخصی $t = a/P$ مطابق است. در واقع می‌توان این نقشه را همچون ترکیبی از نقشه‌های شخصی موضعی عالم انگاشت که همه در یک زمان کیهانی τ ساخته شده‌اند. این نقشه نشان می‌دهد که کهکشانهای همگی در یک مقام هستند و عالم بسط نامتناهی دارد و چگالی ذره‌ای آن یکنواخت است و برابر است با N/τ^2 (با ۷-۹ مقایسه کنید).

اکنون نشان می‌دهیم که هر نقشهٔ عمومی در مدل میلن یک فضای سه‌بعدی با انحنای منفی و ثابت $K = -1/c^2 \tau^2$ است. ^۱ متریک آن با نشان دادن $\tau = \text{const.}$ در ۱۳-۹ به دست می‌آید:

$$d\sigma^2 = c^2 \tau^2 \left\{ \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (۱۴-۹)$$

عبارت داخل { } نمایندهٔ فضایی است با انحنای ثابت $K = -1$ ، درحالی‌که $d\sigma^2$ نمایندهٔ

۱. با این فرض که عمر فعلی عالم $\tau \approx 10^{10}$ سال است، داریم $K \approx 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$.

فضایی با انحنای ثابت $1/c^2 \tau^2 -$ است (ضرب یک متریک در یک ضریب ثابت، مثلاً A ، باعث افزایش تمام فواصل به اندازه ضریب A و بنابراین باعث کاهش انحنای در همه جا به اندازه ضریب $1/A^2$ می شود، که می توان آن را به سادگی از معادله ۶-۷ دریافت). برای اثبات این حکم گویم که $\{ \}$ به روشنی حول مبدأ $\rho = 0$ همسانگرد است و همه خطوط $\theta, \phi = \text{const.}$ ژئودزیک اند (با ابتدای بخش ۳-۸ مقایسه کنید). فاصله شعاعی در $\{ \}$ برابر است با

$$\psi = \int_0^\rho \frac{d\rho}{(1 + \rho^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} \rho \quad (15-9)$$

فاصله عمودی بین دو ژئودزیک که از مبدأ می گذرند و زاویه $d\omega$ تشکیل می دهند برابر است با

$$\eta = \rho d\omega = \sinh \psi d\omega$$

در نتیجه $\eta = \eta$ (با ۶-۷ مقایسه کنید) و $K = -1$. پس مبدأ $d\sigma^2$ نقطه ای است همسانگرد با انحنای $1/c^2 \tau^2 -$. اما هر نقطه $d\sigma^2$ با مبدأ هم ارز است، زیرا تمام کهکشانیها در عالم میلن هم ارزند، پس حکم ما اثبات می شود.

بنابراین، درحالی که متریک ۹-۱۰ صرفاً زمینه فضا زمانی مدل میلن را به دست می دهد، ۹-۱۳ بازگوکننده این زمینه و بیش از آن است. این متریک شاره کیهانی مدل را به عنوان دنباله ای از فضاهای همگانی ۹-۱۴ با انحنای ثابت مشخص می کند که این فضاها با گذشت زمان کیهانی متناسب با "CT منبسط" می شوند. در بخش بعد این اندیشه را در مورد مدل های دلخواهی که از اصل کیهانشناختی تبعیت کنند تعمیم خواهیم داد.

برای نمایش سینماتیک تابش میکروموج ۳K می توان به خوبی از مدل ساده میلن استفاده کرد. چنین تخمین زده می شود که ۳۰۰۰۰۰۰ سال پس از مهبانگ — خیلی قبل از اینکه چگالش کهکشانی شروع شود — عالم تا حدی خنک شده بود که ماده و تابش گرمایی مجزا شدند و هر یک جداگانه راه خود را رفتند. این لحظه کیهانی را می توان در شکل ۹-۱ با $a = \tau$ نشان داد. بدین ترتیب منحنی خط چین منبع مؤثر تابشی است که امروزه رصد می شود. مسلماً هرچه زمان جلوتر می رود. تابشی که (خطوط نقطه چین در شکل ۹-۱) هر ناظر (مثلاً P) دریافت می کند از ذرات اساسی دورتری می آیند و بنابراین انتقال به سرخ آن بیشتر است. همسانگردی رصد شده تابش میکروموجی که وارد می شود دلالت بر این دارد که منابع آن باید در تمام راستاها به یک اندازه نیرومند و به یک اندازه دور باشند. البته، در "حال حاضر" در هر راستا تنها یک منبع رصد می شود. با این وصف همسانگردی این زیرمجموعه از "منابع" را، در عالمی که جدا از این موارد ناهمسانگرد است، به سختی می توان توضیح داد. ضمناً دقت کنید که چگونه P می تواند در زمان "حال" — دست کم از لحاظ نظری — ذرات اساسی را با هر ویژه سن $T < 0$ ببیند، هر قدر هم که T کوچک باشد. در صورتی که حداقل در مدل میلن رویداد آفرینش را، نمی تواند ببیند.

۵-۹ متریک روبرتسون-واکر

نتیجه‌ای را که در زیر به دست می‌آوریم بعداً مورد احتیاج خواهد بود: اگر $k = 1, -1, 0$ باشد، متریک:

$$dl^2 = \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (16-9)$$

نماینده یک فضای سه‌بعدی با خمش ثابت k است. این نتیجه به‌ازای $k = 0$ بدیهی است، و به‌ازای $k = -1$ در بخش گذشته اثبات شد. اگر $k = 1$ باشد، ابتدا می‌توان براهین پیرو ۱۴-۹ را با شرایط جدید وفق داد و بدین ترتیب نشان داد که مبدأ نقطه‌ای است همسانگرد با خمش یک. اکنون $\rho = \sin^{-1} \psi$ است. سپس هم‌ارزی همهٔ نقاط متریک ۱۶-۹ را برقرار می‌کنیم، بدین ترتیب که به‌گونه‌ای کاملاً شبیه به برهان پیرو ۱۵۵-۸ نشان می‌دهیم که تبدیل

$$\begin{aligned} X &= \rho \sin \theta \cos \phi & Z &= \rho \cos \theta \\ Y &= \rho \sin \theta \sin \phi & W &= (1 - k\rho^2)^{1/2} \end{aligned}$$

فضای ۱۶-۹ را به‌طور ایزومتریک به (شبه)کرة با معادله

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + kW^2 = k \quad (17-9)$$

در فضای چهاربعدی (شبه) اقلیدسی با متریک

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + kW^2 \quad (18-9)$$

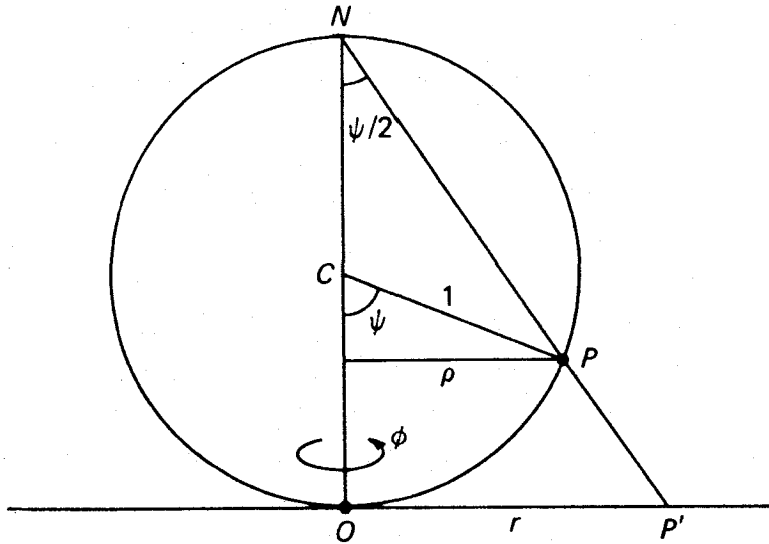
تبدیل می‌کند. آنگاه هم‌ارزی نقاط به روش بخش ۱۱-۸ برقرار می‌شود. این برهان هر دو مورد $k = \pm 1$ را دربر می‌گیرد و بدین ترتیب نتیجه‌ای را که در بخش گذشته به‌ازای $k = -1$ پیدا کردیم دوباره برقرار می‌کند.

ضمناً تذکر می‌دهیم که تبدیل

$$dl^2 = \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} \quad (19-9)$$

به مختص شعاعی جدید r ، متریک ۱۶-۹ را به‌صورت زیر درمی‌آورد

$$\rho = r / \left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right) \quad (20-9)$$



شکل ۲-۹

اگر ۱۶-۹ یا ۱۹-۹ را در ضریب ثابت A^2 ضرب کنیم، متریکهایی که به دست می‌آیند متعلق به فضاهایی با انحنای ثابت k/A^2 هستند (با بعد از ۱۴-۹ مقایسه کنید).
مدلول هندسی مختصات ρ و r یک نقطه P ، در مورد $k=1$ ، در شکل ۲-۹ نمایش داده شده است. این شکل نماینده کره‌ای است که از نشاندن $\theta = \pi/2$ در ۱۶-۹ یا ۲۰-۹ به دست می‌آید، و این "صفحه ژئودزیک" ای است از سطح متعارف که بر مبدأ O می‌گذرد شکل ۲-۹ و نیز معادلات زیرگویای خود هستند

$$\rho = \sin \psi, \quad r = 2 \tan(\psi/2), \quad \sin \psi \equiv \frac{2 \tan(\psi/2)}{1 + \tan^2(\psi/2)} \quad (21-9)$$

$$dl^2 = d\psi^2 + \rho^2 d\phi^2 = \frac{d\rho^2}{(1 - \rho^2)} + \rho^2 d\phi^2 \quad (22-9)$$

در مورد $k = -1$ هیچ تغییری بدین سادگی برای ρ و r وجود ندارد.
اکنون برای بررسی سینماتیک عامترین مدل کیهانشناختی در چارچوب نسبیت عام که از اصل کیهانشناختی (یعنی همگنی و همسانگردی) پیروی می‌کند آماده هستیم. فرض می‌کنیم که توزیع کهکشانشناختی به اندازه کافی پراکنده است تا با انتشار نور، که به صورت ژئودزیک نورگونه است، تداخل نکند. براین مبنا یک صورت معیار و مهم برای متریک برحسب زمان کیهانی و مختصات فضایی همراه به دست می‌آوریم. این متریک را فریدمان در سال ۱۹۲۲/۱۳۰۱ پیدا کرد —وی ظاهراً اولین کسی بود که سینماتیک و دینامیک یک عالم در حال انبساط را به طور جدی و به گونه‌ای

منظم مورد بررسی قرار داد.

قبلاً در بخش ۳-۹ دیدیم که در این حالت یک زمان کیهانی وجود دارد (از این به بعد آن را با t نمایش می‌دهیم) که در (مکان) هر کهکشان به ویژه زمان تبدیل می‌شود و رصدهای یکسان را از کهکشانهای گوناگون به یکدیگر مرتبط می‌سازد. اگر موقتاً دلخواه همراه را با $x^i (i = 1, 2, 3)$ نشان دهیم، هیچ جمله ضربداری $dt dx^i$ در متریک وجود نخواهد داشت. زیرا اگر یک جفت ذره اساسی را در نظر بگیرید که فاصله آنها با شرط $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ برابر dx^i باشد، آنگاه همان‌گونه که در بخش ۷-۶ دیدیم (با این تفاوت که حالا ضرایب متریک ممکن است به t بستگی داشته باشد) وجود یک جمله $dt dx^1$ متضمن این خواهد بود که اگر از دو ذره در یک زمان t سیگنالهایی به سوی یکدیگر گسیل شوند، این سیگنالها در زمان t نامساوی به ذره‌ها خواهند رسید، که این ناقض اصل کیهانشناختی است. به علاوه چون $dx^i = 0$ (به‌ازای هر i) باید متضمن $ds = c dt$ باشد (زیرا t ویژه‌زمان هر کهکشان است)، متریک باید به صورت زیر باشد

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (23-9)$$

که در آن $d\sigma^2$ ، متریک فضای همگانی، شامل dx^i است و نه dt که ضرایب آن احتمالاً به t بستگی دارند. اینک گسترش زمانی یک مثلث کوچک را در نظر بگیرید که از سه ذره اساسی مجاور هم تشکیل شده است. بنابر همسانگردی حول هر رأس، زوایا باید ثابت بمانند، زیرا زاویه فضایی کل حول هر ذره اساسی 4π می‌ماند. پس، چون هندسه موضعاً اقلیدسی است، نسبت اضلاع باید ثابت بماند. این بدان معنی است که زمان تنها از طریق یک ضریب مشترک، مثلاً $R^2(t)$ ، می‌تواند وارد شود. بنابراین

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) dl^2 \quad (24-9)$$

که در آن dl^2 همراه و مستقل از زمان است و $R(t)$ نماینده تابع انبساط عالم، و یا دقیق‌تر، فضای همگانی است. ما تنها با براهین تقارنی به این صورت متریک دست یافتیم، برای اثبات سازگاری با نسبییت عام، باید نشان دهیم که نقطه همراه $x^1, x^2, x^3 = \text{const.}$ می‌تواند نماینده یک کهکشان باشد، یعنی ردپای این نقطه در هر متریک ۲۴-۹ یا حتی ۲۳-۹ یک ژئودزیک زمان‌گونه باشد. اما این موضوع مستقیماً از نتیجه بحثی که به دنبال ۸-۱۰۶ آمد به دست می‌آید.

اگر مشتق نسبت به t را با نقطه نشان دهیم، برای فاصله لحظه‌ای بین کهکشانهای مجاور $d\sigma = R dl$ چنین می‌یابیم

$$\frac{d\sigma}{d\sigma} = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \text{مثلاً} = H(t) \quad (25-9)$$

و این همان قانون هابل موضعی است. در نتیجه می‌بینیم که $H(t)$ ثابت هابل است. اما به دلیل فرض همسانگردی مدل، همه نقاط فضای همگانی باید "نقاط همسانگرد" باشند (بخش ۷-۲)، پس، بنابر قضیه شور، dl^2 باید نماینده یک فضای ریمانی سه‌بعدی با انحنا ثابت باشد بنابراین می‌توان آن را به صورت مضرب ثابتی از $9-16$ یا $9-20$ درآورد (انتهای بخش ۷-۳). اما این ثابت را می‌توان در ضریب $R^2(t)$ در $9-24$ ادغام کرد، به گونه‌ای که $9-24$ سرانجام به یکی از دو صورت هم‌ارز زیر درآید

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (26-9)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(1 + 1/4kr^2)^2} \right\} \quad (27-9)$$

ما توافق بر این می‌کنیم که k ، شاخص انحنا، تنها مقادیر ± 1 یا 0 را اختیار می‌کند: پس انحنا فضای همگانی $k/R^2(t)$ خواهد بود. مختصات ρ (یا r) و θ و ϕ البته همراه هستند؛ واضح است که ϕ و θ مختصات زاویه‌ای معمول روی هر کره $\rho = \text{const.}$ (یا r) هستند؛ که این کره‌ها همواره همان کهکشانشان را دربردارند. بنابر همسانگردی، θ و ϕ باید در امتداد پرتوهای نور که از مبدأ می‌گذرند ثابت باشند. (این موضوع را می‌توان از روی فرض ژئودزیکیهای صفر اثبات کرد.) بنابراین θ و ϕ همان مختصات زاویه‌ای و رؤیتی نسبت به مبدأ هستند. و مسلماً هر ذره اساسی را می‌توان به عنوان مبدأ اختیار کرد.

از شکل ۹-۲ چنین برمی‌آید که به ازای $k = 1$ ، گستره مختص ρ از 0 تا 1 است، یعنی تنها نیمی از فضای همگانی را می‌پوشاند (و باعث ایجاد یک تکینگی مختصاتی در "استوا" می‌شود)، درحالی‌که r ، با گستره 0 تا ∞ ، کاملاً آن را می‌پوشاند. به ازای $k = -1$ ، ρ و r هر دو کاملاً فضای همگانی را می‌پوشانند و به ترتیب گستره‌ای از 0 تا ∞ و از 0 تا 2 دارند.

مدل میلین متناظر است با $9-26$ به ازای $k = -1$ و $R(t) = ct$ البته نباید متعجب بود که مدل میلین در اینجا نیز یافت می‌شود، زیرا این مدل از تمام فرضهای فوق پیروی می‌کند. معادله‌های $9-26$ و $9-27$ نیز مانند $9-13$ نه تنها هندسه فضا-زمان مورد بحث را مشخص می‌کنند، بلکه مشخص کننده‌ی شماره کیهانی یعنی نقش حرکت کهکشانشان نیز هستند.

گرچه ما در این بخش نسبیّت عام را پیش فرض قرار داده‌ایم، اما تنها سه استفاده از آن کرده‌ایم: (الف) که فضا-زمان ریمانی است، (ب) که ds/c ویژه‌زمان را در مکان هر ذره اساسی اندازه می‌گیرد، (ج) که نور در امتداد ژئودزیکیهای صفر سیر می‌کند. روبرتسون و واکر در دو مقاله مهم و مستقل از هم و تقریباً هم‌زمان (در سال $1935/1934$ بر مبنای روشهای نظریه گروهها) کشف کردند که این خواص عملاً در اصل کیهانشناختی نهفته است، یعنی فرض همسانگردی و همگنی شماره کیهانی متضمن وجود یک متریک ریمانی $9-27$ با خواص (ب) و (ج) است. در

نتیجه متریک ۹-۲۷ که حالا معمولاً آن را متریک روبرتسون-واکر می‌نامند، گرچه فریدمان خیلی پیش از آنها آن را در نسبیت عام کشف کرده بود. در مورد همهٔ مدل‌هایی که از اصل کیهانشناختی پیروی می‌کنند، حتی آنهایی که خارج از چارچوب نسبیت عام هستند، به‌کار می‌آید. به‌خصوص می‌توان از آن در نظریهٔ حالت پایا و کیهانشناسی نیوتونی استفاده کرد. اما خواص آن بدون نسبیت عام کمتر است: نسبیت عام ضرایب آن را محدود نمی‌کند، ژئودزیک‌های زمان‌گونهٔ آن الزاماً نمایندهٔ مسیر ذرات آزاد نیستند، و $c^{-1} \int ds$ الزاماً ویژه‌زمان را در امتداد مسیره‌های دلخواه اندازه نمی‌گیرد. اما، t نمایندهٔ زمان کیهانی است، نور در امتداد ژئودزیک‌های صفر سیر می‌کند، ذرات اساسی متناظر با r ، θ ، ϕ ثابت هستند و قسمت فضایی نمایندهٔ یک عنصر فاصله (موضعیاً "فاصلهٔ راداری") فضای همگانی است.

تا اینجا توانستیم با اصل کیهانشناختی به‌تنهایی پیش برویم. دو عنصر آزاد متریک روبرتسون-واکر، $R(t)$ ، k را تنها با فرضهای اضافی دیگر می‌توان معین کرد اگر منظور روش نظری باشد، و یا احتمالاً از طریق رصد عالم واقعی می‌توان بدانها رسید. البته رصد بدون اینکه نظریهٔ بیشتری در دسترس باشد چشم‌انداز بسیار محدودی دارد. مثلاً انحنای فضای همگانی، k/R^2 تا اندازه‌ای قراردادی است (عالم میلن را به‌خاطر بیاورید، که در آن هر ناظر اساسی دارای یک فضای شخصی تخت است) و به هر حال به اندازه‌ای کوچک است (مثلاً در مورد عالم میلن در حال حاضر $\sim 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$) که نوسانهای اجرام مجاور بر آن غالب خواهند بود. یا وجود این، همان‌گونه که در بخش ۹-۷ خواهیم دید می‌توان آن را در اصل از رصدهای نجومی به‌دست آورد، با این شرط که به‌توان آنها را به "مرتبهٔ سوم" رساند. این‌گونه رصدها مقدار فعلی ثابت هابل \dot{R}/R ، و بالقوه مقدار فعلی برخی از اولین نسبتهای \ddot{R}/R ، \dot{R}/R را نیز به‌دست می‌دهند، اما فقط همین. بنابراین، برای پیشرفت بیشتر باید بیشتر نظریه وارد کنیم.

یک رهیافت نظری توسل به اصول عام است. مثلاً برخی کیهانشناسان تصور کرده‌اند که اصل ماخ خواستار عالمی متناهی و بسته است. این به نوبهٔ خود گاهی تصور انتخاب $k = 1$ را ایجاب می‌کند، که در واقع این چنین نیست. به‌ازای $k \leq 0$ نیز می‌توان عالمهای بسته و متناهی گرچه گاهی مصنوعی، ساخت (تمرین ۷-۶)، البته با کمک "همانی‌سازیهایی توپولوژیکی" ای که همسانگردی سراسری مدل را از بین می‌برد اما همگنی و همسانگردی موضعی را حفظ می‌کند. باید در نظر داشت که متریک فضا را تنها به‌گونهٔ موضعی معین می‌کند. مثلاً اگر متریک $dx^2 + dy^2$ را داشته باشیم، بسیار ساده لوحانه است که فرض کنیم الزاماً با یک صفحهٔ نامتناهی سروکار داریم: سروکار ما ممکن است با یک استوانه، یا حتی با یک سطح بسته و متناهی باشد، که از لحاظ توپولوژیکی با چنبره هم‌ارز است. و این از بریدن یک مربع از صفحه و مشخص کردن هر دو نقطهٔ مقابل هم روی اضلاع نتیجه می‌شود. و باز متریک یک کرهٔ یکه الزاماً متضمن این نیست که ما یا یک سطح بسته با مساحت 4π سروکار داریم. ممکن است با سطحی به مساحت 2π سروکار داشته باشیم که از مشخص کردن نقاط متقاطر روی کره به‌دست می‌آید. در این صورت به هنگامی که نیم‌دور

به دور کره بگردیم، دوباره همان جایی خواهیم بود که شروع کرده‌ایم. (و گذشته از تمایلات تجربی ما، چنین سطحی، به خودی خود، "غیر محتمل" تر از یک کره نیست. این مثالها نشاندهنده فنی هستند که در بستن فضای عمومی یک مدل روبرتسون-واکر با $k = -1$ و $k = 0$ درگیر آن هستیم، گرچه در مورد $k = -1$ آنقدرها بدهی نیست. از طرف دیگر، در مورد $k = 0$ این فن کاملاً شبیه بستن یک صفحه است. ضمناً فرایند وارون "باز کردن" یک فضا با انحنای ثابت و مثبت و نامتناهی ساختن آن (اگر متریک مثبت-معین باشد) غیرممکن است.

فرض دیگری که اصولاً پیشینی است، اصل "کامل" کیهانشناختی بوندی و گلد است: این دو با عنوان کردن یک تقارن دیگر برای مدل آن را یکتا ساختند. همان‌گونه که در بخش ۹-۳ متذکر شدیم، مدل حالت پایا نه تنها از اصل کیهانشناختی پیروی می‌کند، بلکه همواره وجه یکسانی را عرضه می‌کند. این مدل باید پایستگی موضعی انرژی را نقض کند، پس نمی‌تواند در نسبت عام پایستگی موضعی انرژی در آن بنا شده است، معتبر باشد. با وجود این متریک روبرتسون-واکر ۹-۲۷ به کار می‌آید. از آنجا که در این مدل $H(t)$ باید ثابت باشد، ۹-۲۵ متضمن این است که

$$R = a \exp(Ht)$$

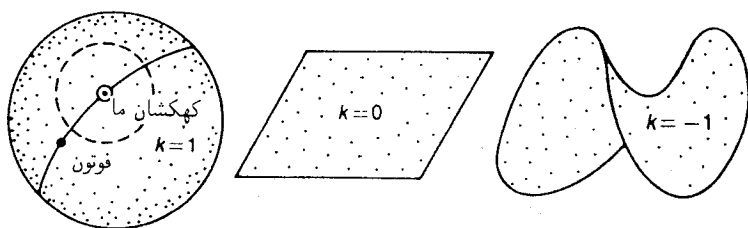
و این به ازای a ثابت، که می‌توان آن را بایک تبدیل t در نما ادغام کرد، ممکن می‌شود. چون انحنای $k/R^2(t)$ نیز باید ثابت باشد. پس k باید الزاماً صفر شود. بنابراین متریک مربوطه چنین است

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2Ht} \left\{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (28-9)$$

اکنون این مدل از لحاظ سینماتیک کاملاً مشخص شده است. روش دیگر برای مشخص کردن مدل روبرتسون-واکر، روش دینامیکی، یعنی به کار بردن نظریه گرانش، است. این روش در نسبت عام به مشروط کردن متریک به معادلات میدان می‌انجامد، و در یک نظریه شبه نیوتونی منجر به کاربرد یک معادله پواسون با شبه پواسون می‌شود. ما این روشها را در بخش ۹-۸ و ۹-۹ و چگونگی استفاده از رصدها را در بخش ۹-۷ مورد بحث قرار خواهیم داد. اما ابتدا در نظر داریم "مدلی برای این مدل" را شرح دهیم که به تجسم صورتبندی فوق کمک می‌کند.

۹-۶ مدل‌های لاستیکی، انتقال به سرخ، و افق

با فرونشاندن یک بعد فضا و گزینش ساده‌ترین صورت توپولوژیکی فضا، می‌توانیم فضای همگانی را برای سه نوع متریک روبرتسون-واکر (متناظر با -1 و 0 و 1) با یک کره، یک صفحه



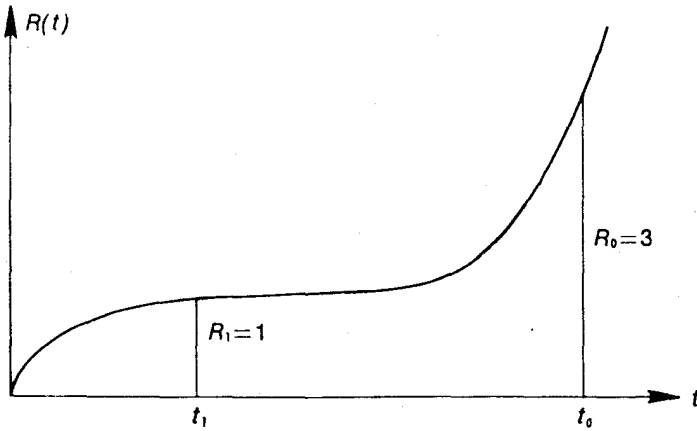
شکل ۹-۳

نامتناهی که در همه جا موضعاً شبیه به زمین است (شکل ۹-۳) نشان دهیم. چون فضای همگانی عموماً منبسط یا منقبض می‌شود، کره را همچون یک بادکنک پلاستیکی تصور می‌کنیم که به دلخواه می‌توان باد آن را زیاد یا کم کرد، و دو سطح دیگر را نیز ساخته شده از یک غشای پلاستیکی که نظیر آن قابل انبساط و انقباض باشد تصور می‌کنیم. حرکت بادکنک شاید برای تصور راحت‌ترین باشد و ما بیشتر از آن به عنوان نماینده هر سه نوع صحبت خواهیم کرد. فاصله روی غشا عملاً متناظر است با $d\sigma$ در ۹-۲۳. نقاط مادی روی غشا نماینده شاره کیهانی هستند و یک مجموعه برگزیده از آنها متناظر با کهکشانهاست. این نقاط مادی بر روی غشا با نقطه نشان داده شده‌اند و توزیع آنها تقریباً یکنواخت است. چون $\pm 1/R^2(t)$ انحنای فضای همگانی در حالت‌های $k = \pm 1$ است، پس $R(t)$ متناظر است با شعاع بادکنک، یا متناظر است با شعاع یکی از دو کره‌ای که در زمین جا می‌گیرد (یکی بالا، یکی پایین). در تمام موارد فاصله میان کهکشانها به عنوان یک تابع وابسته به زمان متناسب است با $R(t)$. در مورد صفحه این تنها تعبیر برای $R(t)$ است، زیرا غیر از این هیچ بهنجارش ذاتی برای آن وجود ندارد.

برای به مدل درآوردن زمان کیهانی، باید در سرتاسر فضای سه‌بعدی اقلیدسی E_3 که مدل‌های لاستیکی در آن غوطه‌ورند یک زمان مطلق فرض کنیم، زمانی که ساعت‌های اساسی، با وجود حرکت نسبت به E_3 ، بدون اتساع زمان نشان می‌دهند.

به سادگی می‌توان نشان داد که مسیر فضایی ژئودزیکهای صفر در متریک روبرتسون-واکر ژئودزیکهای معمول در فضای همگانی هستند، و این به لحاظ تقارن نیز آشکار است. بنابراین در مدل لاستیکی، نور در امتداد ژئودزیکها، یعنی روی کره در امتداد دایره‌های عظیمه و یا روی صفحه در امتداد خطوط مستقیم، پخش می‌شود. به ازای یک سیگنال نوری داریم $ds^2 = 0$ و از آنجا $d\sigma/dt = c$ (معادله ۹-۲۳). این بدان معنی است که در مدل لاستیکی فوتونها مانند حشرات آرمانی با سرعت ثابت c روی غشا و در امتداد ژئودزیکها می‌خزند.

اکنون همه خواص متریک روبرتسون-واکر دقیقاً با مدل لاستیکی نمایش داده می‌شود. به عنوان



شکل ۹-۴

اولین کاربرد ساده، فرمول انتقال به سرخ کیهانشناختی را اثبات می‌کنیم

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \quad (9-29)$$

که در آن $z = \Delta\lambda/\lambda$ و λ طول موج نوری است که یک کهکشان دور در زمان کیهانی t_1 گسیل می‌دارد و ما آن را در زمان t_0 با طول موج $\lambda + \Delta\lambda$ دریافت می‌کنیم. اگر دو زالو پشت سر هم بر روی مسیری که منبسط نمی‌شود بزنند، در انتهای مسیر همان اندازه از یکدیگر دورند که به هنگام ترک محل اولیه بودند. اما اگر این مسیر متناسب با $R(t)$ منبسط یا منقبض شود، فاصله میان آن دو به هنگام دریافت و گسیل نور دارای نسبت $R(t_0)/R(t_1)$ خواهد بود. اگر به جای دو زالو دو قله موج دنبال هم را بنشانیم، معادله ۹-۲۹ را به دست می‌آوریم. دقت کنید که انتقال به سرخ کیهانشناختی واقعاً یک اثر انبساطی است و نه یک اثر سرعتی.

این واقعیت که انتقال به سرخ در نور همه اشیای کیهانی که امروزه مشاهده می‌شود تنها به "شعاع عالم" هنگام گسیل آن نور بستگی دارد، منجر به پیشنهادی از جانب شک洛夫سکی^۱ در سال ۱۹۶۷/۱۳۴۶ شد که توضیح جالبی در مورد غالب بودن مقادیر ۲ $\approx z$ در بین اختروشها بود که در آن زمان به صورت معما بود. بر مبنای این توضیح صرفاً لازم است فرض کنیم که شعاع عالم در گذشته نسبتاً دوری به ازای مقداری تقریباً برابر یک سوم مقدار فعلی آن شه‌مانا بوده است. [شکل ۹-۴ را که در آن از نمادگذاری واضح $R(t_1) = R_1$ ، $R(t_0) = R_0$ استفاده کرده‌ایم، ببینید.] بدین ترتیب ممکن است که یک اختروش چندین بار دورتر از دیگری به ما باشد، اما تا وقتی که شعاع عالم هنگام گسیل نور یکسان بوده باشد، انتقال به سرخ مشاهده شده یکسان خواهد

بود. گرچه این خوشه‌ای بودن اولیه انتقال به سرخ اختروشها به دور $z = 2$ اکنون کاذب شناخته می‌شود، اما این مثال به خوبی نشان می‌دهد که z نشانگر باوفایی برای فواصل کیهانی نیست. معادله ۹-۲۹ را می‌توان مستقیماً از متریک رویرتسون-واکر ۹-۲۶ نیز به دست آورد، که البته وضوح کمتری دارد. هر سیگنال نوری در $ds^2 = 0$ صدق می‌کند، بدین ترتیب دو سیگنال متوالی از یک کهکشان به مختص ρ_1 به کهکشان مبدأ در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_0 + \Delta t_1}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} \quad (۳۰-۹)$$

اما انتگرال روی یک گستره کوتاه Δt برابر است با عبارت زیر انتگرال ضرب ضربدر Δt ، پس ۹-۳۰ متضمن این رابطه است

$$\frac{c\Delta t_1}{R(t_1)} = \frac{c\Delta t_0}{R(t_0)} \quad (۳۱-۹)$$

اگر دو "سیگنال" را با دو قله موج متوالی یکسان بدانیم، فرمول ۹-۲۹ نتیجه می‌شود. به عنوان کاربرد دیگری از مدل لاستیکی مختصراً به روشن ساختن دو مفهوم برای افق که در کیهانشناخت مصرف می‌شوند می‌پردازیم.^۱ برای مشخص بودن کامل بحث عالمی با انحنای مثبت را در نظر می‌گیریم. گرچه براهین ما در هر سه مورد به گونه‌ای یکسان به کار می‌آیند. در شکل ۹-۳ کهکشان خودمان و یک فوتون را که در امتداد یک ژئودزیک به سوی ما حرکت می‌کند نشان کرده‌ایم. امکان دارد بادکنک با چنان آهنگی "باد شود" که فوتون هرگز به ما نرسد. همان گونه که ادینگتون گفته است: "نور مانند دونده‌ای است در مسیری که منبسط می‌شود و علامت پایان (ما) همواره از وی دور می‌شود." در چنین موردی دو دسته فوتون (واقعی یا مجازی) روی هر ژئودزیک گذرا بر ما وجود دارد: آنها که در زمانی متناهی به ما می‌رسند و آنها که به ما نمی‌رسند. این دو دسته را انبوهه فوتونهایی که دقیقاً در $t = \infty$ به ما می‌رسند از یکدیگر جدا می‌کند - این فوتونها در نمودار با دایره خط چین نشان داده شده‌اند. اما در مدل کامل یک جبهه نور کروی تشکیل می‌دهند که بر روی ما همگرا می‌شوند. این جبهه نور را افق رویداد ما می‌نامند، و وجود و حرکت آن به شکل تابع $R(t)$ بستگی دارد. رویدادهایی که فراسوی این افق رخ می‌دهند برای همیشه فراسوی امکانات توان رصد ما قرار دارند (یعنی اگر بر روی کهکشان خود بمانیم). گاهی، در تناقض با نسبیت خاص، گفته می‌شود که کهکشانها در افق با جریانی به سرعت نور از ما دور

۱. جزئیات بیشتر را می‌توان در

می‌شوند. [زیرا ممکن است (اما الزامی نیست) که افق نسبت به ما "مانا" باشد، و واضح است که کهکشانها باید با سرعت نور از آن بگذرند — زیرا افق از آنها عبور می‌کند.] اما حد سرعت نسبیّت خاصی تنها در مورد اشیایی صادق است که در چارچوب لخت سکون یک ناظر قرار دارند، و ناظران کیهانی که افق دارند دارای چارچوبهای لخت سکون گسترده نیستند.

از همان نمودار می‌توان برای تصور مفهوم افق ذره نیز استفاده کرد. فرض کنید اولین فوتونهایی که کهکشان خود ما هنگام رویداد مهبانگ گسیل داشته است هنوز در اطراف هستند و نیز فرض کنید دایره خط‌خطی در نمودار، مکان فعلی آنها را نشان می‌دهد. در مدل کامل به‌جای آن یک جبهه نور کروی خواهیم داشت که از ما دور می‌شود. این جبهه به هنگام دور شدن، کهکشانهای بیشتر و بیشتری را می‌روید و این کهکشانها برای اولین بار ما را می‌بینند. اما بنابر تقارن، در آن لحظه کیهانی که یک کهکشان برای اولین بار ما را می‌بیند، ما نیز آن را برای اولین بار می‌بینیم. بنابراین این جبهه نوری، که آن را افق ذره متعلق به ما می‌نامند، در هر لحظه کیهانی کهکشانها را به دو دسته تقسیم می‌کند، یکی آنها که در دید ما هستند و دیگری بقیه کهکشانها.

به‌دست آوردن فرمولهای دقیق افق از متریک روبرتسون-واکر کاملاً آسان است. معادله حرکت (رابطه ρ و t) یک فوتون که از مختصات ρ_1 و t_1 به طرف کهکشان مبدأ (ما) گسیل می‌یابد، بنابر ۹-۳۰، چنین است

$$\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}} = \int_{t_1}^t \frac{cdt}{R(t)} \quad (32-9)$$

چون هر دو عبارت زیر انتگرال مثبت است، با افزایش t ، ρ کاهش می‌یابد. فرض کنید، به‌ازای یک جفت مقادیر ثابت (ρ_1, t_1) ، هنگامی که $t \rightarrow \infty$ ، ρ به سمت یک حد مثبت میل کند. دراین صورت فوتونی که از نقطه (ρ_1, t_1) گسیل می‌شود، هرگز به مبدأ نمی‌رسد، و بنابراین (ρ_1, t_1) رویدادی در فراسوی افق رویداد است. شرط وجود چنین افقی این است^۱

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{dt}{R(t)} < \infty \quad (33-9)$$

و از آنجا مختص ρ_1 افق در زمان دلخواه t_1 برابر است با

$$\psi(\rho_1) \equiv \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}} \equiv \begin{cases} \sin^{-1} \rho_1 & (k = 1) \\ \rho_1 & (k = 0) \\ \sinh^{-1} \rho_1 & (k = -1) \end{cases} = \int_{t_1}^{\infty} \frac{cdt}{R(t)} \quad (34-9)$$

۱. اگر $k = 1$ باشد، این مطلب نیاز به توضیح بیشتر دارد که باید به مطالب بعد از ۹-۳۵ رجوع شود.

که در آن $\psi(\rho_1)$ با اولین معادله تعریف می‌شود. به‌طور مثال می‌بینیم که برای مدل حالت مانای ۹-۲۸ یک افق رویداد در:

$$\rho_1 = \left(\frac{c}{H}\right) e^{-Ht_1} \quad (۳۵-۹)$$

وجود دارد که متناظر است با فاصله خط‌کشی ثابت $\sigma = c/H$ در فضای همگانی. از طرف دیگر مدل میلن ۹-۱۳ افق رویداد ندارد.

اگر مدلی دارای یک مهبانگ در آینده باشد [مثلاً $R(t_w) = 0$ ، حال $t_w > t$]، باید تعریف افق رویداد را اصلاح کرد: در این صورت، این جبهه نور است که در زمان $t = t_w$ به ناظر می‌رسد. در نتیجه به جای حد بالای انتگرالهای ۹-۳۳ و ۹-۳۴ که بینهایت است باید t_w را نشانند.

هنگامی که $k = 1$ ، ρ به مقادیر کوچکتر از واحد محدود می‌شود، درحالی‌که انتگرال زمان در ۹-۳۴ از $\pi/2$ بیشتر می‌شود. در این صورت فاصله "زاویه‌ای" به دور عالم (با شکل ۹-۲ مقایسه کنید)، یعنی خود ψ ، متغیر مناسبتری است. در این حالت برای رسیدن به افق ممکن است مجبور شویم از استوا ($\rho = 1, \psi = \pi/2$) و یا از نقطه پادپا ($\psi = \pi$) فراتر رویم و یا حتی چندین بار به دور عالم بگردیم. گرچه گزاره‌های مربوط به افقها صحت صوری خود را در این حالت نیز حفظ می‌کنند، اما مدلول فیزیکی آنها تغییر می‌کند. مثلاً فوتونی که از افق رویدادها می‌آید در زمان $t = \infty$ حتماً به ما می‌رسد، اما ممکن است که قبلاً ضمن سفرش به دور عالم چندین بار از کنار ما گذشته باشد.

اگر نوری که "ما" به هنگام پیدایش گسیل داشته‌ایم "اکنون" به مختص متناهی ρ_1 رسیده باشد، پس در حال حاضر ($t = t_1$) یک افق ذره در $\rho = \rho_1$ وجود خواهد داشت. معادله ۹-۳۲ را می‌توان با معکوس کردن حدود t_1 و t برای یک فوتون برونرو به کار برد. اگر در آن معادله $\rho = 0$ و $-\infty$ یا $t = 0$ قرار دهیم [$-\infty$ برای مواردی است که تعریف $R(t)$ تا مقادیر منفی و نامحدود t گسترش می‌یابد]: مختص ρ_1 ، یا عامتر ψ ، متعلق به افق ذره را به دست می‌آوریم

$$\psi(\rho_1) = \int_0^{t_1} \frac{cdt}{R(t)}, \quad \text{یا} \quad = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} \quad (۳۶-۹)$$

به شرطی که $R(t)$ در شرط وجود یک افق ذره صدق کند:

$$\int_0^{t_1} \frac{dt}{R(t)} < \infty, \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} < \infty \quad (۳۷-۹)$$

در مدلهایی با افق ذره هیچ دو کلهکشانی تا زمانی که افقهایشان به هم نرسیده‌اند، با یکدیگر ارتباط علی قبلی نداشتند. اگر که یک مهبانگ وجود داشته باشد، هر یک با سرعتی بیش از نور

از دیگری به طرفی پرتاب می‌شود، اما چون انحنای بینهایت است، هیچ ناحیه‌ای به آن اندازه کوچک نیست که نسبت خاص با اصرار مفرط بر شرط $v < c$ ، در آن به‌کار آید. تمام این موارد ممکن است غریب به نظر آید. اما اگر افق ذره اصلاً موجود نباشد، مدل "ناقص" است (با مطلب بعد از ۹-۹ مقایسه کنید). زیرا، در غیر این صورت فوتونهای آفرینشی اکنون کجا می‌بودند؟ مسلماً در جایی از فضا که در آن هیچ کهکشانی موجود نیست. بنابراین مهبانگ حداقل یکی از این "عیوب" را در بردارد.

بعضی مدلها تنها یک افق رویداد دارند (مثلاً مدل حالت مانا)، بعضی تنها دارای یک افق ذره هستند [مثلاً مدل اینشتین-دوسیته‌ای که در آن $R(t) \propto t^{2/3}$]. بسیاری هر دو را دارند (مثلاً تمام مدلهای همسانگرد ناخالی نسبت عام با تغییر علامت انحنای و یا "در حال نوسان")؛ و برخی هیچ‌کدام را ندارند (مثلاً مدل میلن). همه مدلهای مهبانگی در نسبت عام که همسانگرد و ناخالی هستند یک افق ذره دارند.

برخی دیگر از خواص افق ذره و افق رویداد را در زیر یادآور می‌شویم:

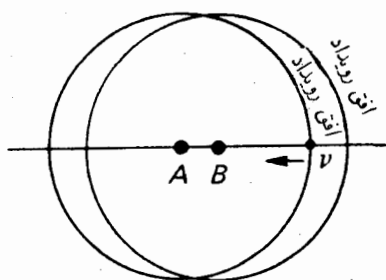
(الف) هر کهکشان که درون افق رویداد A باشد، بجز خود A ، سرانجام از آن خارج می‌شود، زیرا اگر B چنین کهکشانی باشد، آنگاه فوتون افق A در جهت AB در درون افق رویداد B است [شکل ۹-۵ (الف)]، و بنابراین در زمان کیهانی متناهی (یا قبل از t_0) به B خواهد رسید. و البته که این وقتی پیش می‌آید که B از افق رویداد A خارج بشود.

(ب) هر کهکشان B در داخل افق رویداد A برای همیشه از A قابل رؤیت خواهد بود. زیرا خود افق رویداد آخرین نظر از B را به A ارائه می‌دهد. در مدلهایی که انبساط بینهایت دارند، تاریخچه B و هنگامی که به افق رویداد A نزدیک می‌شود، از A با بینهایت تأخیر دیده می‌شود و نور آن بینهایت انتقال به سرخ دارد، زیرا هنگام دریافت، R بینهایت است (با ۹-۲۹ مقایسه کنید). در مدلهای ریمان، نور B ، هنگامی که B به افق رویداد نزدیک می‌شود، بینهایت انتقال به آبی خواهد داشت، زیرا هنگام دریافت، R صفر است.

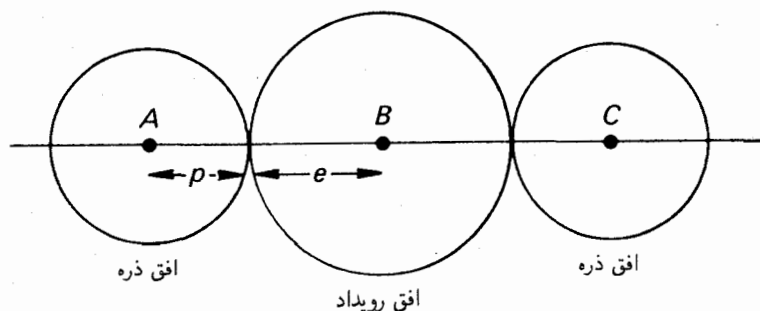
(ج) هنگامی که افق ذره A به کهکشانی می‌رسد، آن کهکشان از A قابل رؤیت می‌شود و نور آن در مدلهای مهبانگی بینهایت انتقال به سرخ خواهد داشت و در مدلهایی که انبساط گذشته نامحدودی دارند بینهایت انتقال به آبی خواهد داشت (مثلاً در مدلی با $R \propto \cosh t$ زیرا R به هنگام گسیل، در مدل اولی صفر و در دومی بینهایت است).

(د) اگر مدلی اصلاً دارای افق رویداد نباشد، هر رویداد در هر کهکشان از هر کهکشان دیده می‌شود. زیرا وجود یک رویداد غیرقابل رؤیت متضمن وجود یک افق رویداد است.

(ه) اگر مدلی اصلاً دارای افق ذره نباشد، هر ناظری می‌تواند، در صورت لزوم با دور شدن از کهکشان مبدأ خود، در هر رویداد در هر کهکشان حاضر باشد. زیرا در اصل تنها محدودیت برای دور شدن این ناظر پیش-مخروط (مخروط نور پیشرو) او است. اما این مخروط، اگر همه کهکشانها همیشه در داخل آن نبوده باشند، یک افق ذره خواهد بود.



(الف)



(ب)

شکل ۵-۹

و) اگر یک افق رویداد موجود باشد، یک ناظر نمی‌تواند عموماً از هر دو رویداد دلخواه آگاهی داشته باشد، حتی اگر سفر کنند. زیرا مثلاً دو رویداد متقاطع هم را در خارج از یک افق رویداد در نظر بگیرید. پیش-مخروط آنها نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند. اما برای آگاهی داشتن از هر رویدادی باید در پیش-مخروط آن بود (و بنابراین باید در آن ماند).

ز) فرض کنید مدلی دارای یک افق ذره و یک افق رویداد است که شعاع فعلی آنها به ترتیب p و e است. شکل ۵-۹ (ب) را در نظر بگیرید که توضیح آن در خودش است. از آنجا که افق ذره A سرانجام به B می‌رسد ولی فراتر نمی‌رود، کهکشانهایی که دورتر از $p + e$ باشند هرگز در A رؤیت نخواهد شد. از آنجا که ناظری که ابتدا در A است، حداکثر تا B می‌تواند سفر کند، نمی‌تواند از رویدادهایی که فراتر از $p + 2e$ باشند آگاه شود، حتی اگر سفر کند. از آنجا که هیچ کهکشانی فراتر از C نمی‌تواند به B نور بفرستد، ناظر A ، حتی اگر سفر کند، نمی‌تواند کهکشانهایی فراتر از $2p + 2e$ را رؤیت کند.

ح) افق ذره و افق رویداد، اگر هر دو موجود باشند، باید در طول عمر مدل یکدیگر را قطع کنند. زیرا افق ذره در محل ذره اساسی وابسته به آن بوده است و افق رویداد در این محل خواهد بود.

ط) هنگامی که یک مدل در زمان پس می‌رود، افق رویداد، افق ذره خواهد شد و به عکس رجوع به مدل لاستیکی این را روشن می‌سازد.

۷-۹ مقایسه با رصد

اخترشناسان انتقال به سرخ را مستقیماً رصد می‌کنند و آن را با "قدر" کهکشانی مرتبط می‌سازند، که اینقدر در کاربرد اخترشناختی به معنای درخشندگی ظاهری است که به روش معینی بهنجار شده است. برای اینکه بتوان این رصدها و رصدهای دیگر را با نظریه مقایسه کرد، لازم است که نظریه، رابطه‌هایی میان کمیت‌های رصدپذیر پیشگویی کند. در این بخش چندین رابطه از این نوع را به دست خواهیم آورد.

ابتدا کمی از مطلب دور می‌شویم تا برخی مفاهیم "فاصله" را در کیهانشناسی مورد بحث قرار دهیم. خواهیم دید که تعریف‌های گوناگون و "معقول" فاصله، همان‌گونه که در فضای شوارتس شیلد (با بخش ۳-۸ مقایسه کند) دیدیم، هم‌ارز نیستند. مثلاً می‌توان ویژه‌فاصله بین دو کهکشان P و Q را تعریف کرد: این فاصله را یک دسته ناظران اساسی بر روی ژئودزیک فضایی بین P و Q اندازه می‌گیرند که خط‌کشها را در یک لحظه کیهانی به دنبال هم قرار می‌دهند (و متناظر است با فاصله روی مدل لاستیکی). بنابراین، ویژه‌فاصله σ از مبدأ تا یک کهکشان در مختص ρ ، در زمان t ، برابر است با

$$\sigma = \int_0^{\rho} d\sigma = R(t) \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}} = R(t)\psi(\rho) \quad (38-9)$$

(۲۳-۹، ۲۶-۹، و ۳۴-۹). به‌طور مثال، افق رویداد ۳۵-۹ در مدل حالت پایا دارای ویژه‌فاصله ثابت c/H از ناظر است. مثال جالب‌توجه‌تر، "مرز کروی" در عالم میلن است که فاصله آن از هر ناظر در مختصات مینکوفسکیایی شخصی‌اش ct است، و ویژه‌فاصله آن از هر ناظر همیشه بینهایت است.

مثلاً روش‌های عملی برای اندازه‌گیری فاصله در نجوم، توسط اختلاف‌منظر، رادار، اندازه‌گیری ظاهری، یا توسط درخشندگی ظاهری است. تنها دو روش آخر مورد توجه ما هستند. فاصله S (تصحیح نشده) بر مبنای اندازه‌گیری ظاهری یک شیء (مثلاً یک کهکشان) که سطح مقطع آن dA است و می‌بینیم که یک زاویه فضایی کوچک dw تشکیل می‌دهد، توسط معادله زیر تعریف می‌شود

$$S = (dA/dw)^{1/2} \quad (39-9)$$

یعنی توسط این فرمول ساده که عمداً از هر انحراف ممکن هندسه فضا از هندسه فضای اقلیدسی چشم می‌پوشد. و به همین ترتیب، L ، فاصله (تصحیح نشده) بر مبنای درخشندگی ظاهری یک

شیء با درخشندگی ذاتی B و درخشندگی ظاهری b چنین تعریف می‌شود

$$L = (B/b)^{1/2} \quad (40-9)$$

که باز هم عمداً از هر انحراف ممکن از وضع ایستای کلاسیکی چشمپوشی شده است: B شار انرژی بر یکای سطح بر یکای زمان در فاصله واحد از چشمه است که در اینجا همچون یک چشمه نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شود، و b همان شار در فاصله ناظر است. (رابطه بین "قدر" نجومی m و b با این معادله داده می‌شود: $m = -2.5 \log_{10} b + \text{const.}$)

بنابر ۹-۲۶، سطح یک کره در مختص ρ_1 در زمان t_1 به‌وضوح $4\pi R_1^2 \rho_1^2$ است، و زاویه فضایی آن در مبدأ 4π است. در نتیجه، بنابر همسانگردی و تناسب، زاویه فضایی‌ای که در مبدأ ژئودزیکهای فضایی به سطح dA در مختص ρ_1 در زمان t_1 تشکیل می‌دهند برابر است با $d\omega = dA/R_1^2 \rho_1^2$ ؛ و این زاویه فضایی‌ای است که وقتی نور گسیل شده در لحظه t_1 به مبدأ می‌رسد dA تحت آن زاویه دیده می‌شود. [مدل بادکنکی می‌تواند به روشن شدن این مطلب کمک کند که زاویه فضایی در لحظه کیهانی گسیل معین می‌شود: هر کهکشان را همچون قرص سختی در نظر بگیرید که مرکز آن به بادکنک در حال انبساط چسبیده است.] بنابراین

$$S = R_1 \rho_1 \quad (41-9)$$

اکنون، فرض کنید که یک چشمه با درخشندگی ذاتی B در مبدأ قرار دارد و نور آن روی کره‌ای مشاهده می‌شود که مرکز آن در مبدأ است، با شماره کیهانی حرکت می‌کند، و در زمان t_0 مختص شعاعی آن $\bar{\rho}_1$ است. اگر کره ساکن باشد، شار کل انرژی‌ای که در یکای زمان از آن می‌گذرد مستقل از شعاعش خواهد بود و بنابراین برابر با $4\pi B$ خواهد بود، زیرا نزدیک چشمه و در حد هندسه اقلیدسی صادق است. اما، به دلیل حرکت کره، از انرژی $E = h\nu$ که هر فوتون حمل می‌کند به اندازه ضریب دوپلر کاسته می‌شود (اثر پلانک) و، به‌علاوه، از تعداد فوتونهای که در یکای زمان وارد می‌شوند به‌اندازه ضریب دوپلر کاسته می‌شود، زیرا زمان بین ورود فوتونهای "پشت سرهم" همچون طول موج تغییر می‌کند (اثر تعداد). بنابراین از رابطه ۹-۲۹ شار کلی که از کره خارج می‌شود برابر است با $4\pi BR_1^2/R_0^2$ ، و از یکای سطح کره برابر است با

$$b = \frac{BR_1^2}{\bar{\rho}_1^2 R_0^2} \quad (42-9)$$

بنابر تقارن، ρ_1 مختص شعاعی چشمه (در مبدأ) نسبت به ناظر (روی کره) برابر خواهد بود با مختص ناظر نسبت به چشمه، بنابراین از ۹-۴۲ با مراجعه به ۹-۴۰ و ۹-۴۱ نتیجه می‌گیریم که

$$L = \rho_1 R_0^2 / R_1 = S(1+z)^2 \quad (43-9)$$

اکنون، به خاطر مرتبط ساختن z با L ، یا هم‌ارز با آن، z با b ، این معادله را با ۲۹-۹ ترکیب می‌کنیم. با نمادگذاری

$$R_0 = R, \quad R_0 - R_1 = \Delta \quad (44-9)$$

تنها برای این بخش، می‌توانیم با شرط $|z| < 1$ (که البته برای برخی رصدهای اخیر صادق نیست) معادله ۲۹-۹ را به صورت زیر درمی‌آوریم

$$R_1 = R(1+z)^{-1} = R(1 - z + z^2 - \dots)$$

و از آنجا

$$\Delta = R(z - z^2 + \dots) \quad (45-9)$$

سپس با استفاده از ۳۲-۹ و نمادگذاری ۳۴-۹ برای سیگنالی که در t_0 به مبدأ می‌رسد داریم

$$\psi(\rho_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{cdR}{R(t)\dot{R}(t)} \quad (46-9)$$

نقطه در اینجا و پس از این d/dt را نشان می‌دهد. اگر آخرین انتگرال را همچون تابعی f از R_1 در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را همچون یک سری تیلور حول R_0 با نمو Δ بسط دهیم:

$$\psi(\rho_1) = f(R) - f'(R)\Delta + \frac{1}{2}f''(R)\Delta^2 + \dots$$

و با توجه به اینکه مشتق هر انتگرال نسبت به حد پایینی‌اش منفی آن انتگرال است، به دست آوریم

$$\psi(\rho_1) = \frac{c}{R\dot{R}}\Delta + \frac{c}{2} \frac{R\ddot{R}/\dot{R} + \dot{R}}{R^2\dot{R}^2}\Delta^2 + \dots \quad (47-9)$$

که در آن R و مشتقهای آن در زمان t_0 حساب می‌شوند، که با قرارداد ۴۴-۹ ما سازگار است. از آنجا که $\rho = 1$ در مدل با انحنای مثبت متناظر است با استوا نسبت به مبدأ، واضح است که برای اغلب کهکشانهای مشهود $\rho \ll 1$ ، حتی اگر -1 یا $k = 0$ ؛ بنابراین اگر ما تنها توانهای دوم را حفظ کنیم، داریم

$$\psi(\rho_1) = \rho_1 + \frac{1}{6}k\rho_1^2 + \dots \approx \rho_1$$

پس اگر از ۴۵-۹ در ۴۷-۹ بنشانیم، می‌یابیم

$$\rho_1 = \frac{c}{R}z + \frac{c}{2} \frac{R\ddot{R} - \dot{R}^2}{R^3} z^2 + \dots \quad (48-9)$$

که این را به نوبه خود می‌توان به شکل دیگری از ۴۳-۹ که در زیر آمده است نشان داد

$$L = R\rho_1 (\lambda + z)$$

حاصل می‌شود

$$\frac{L}{c} = \frac{R}{R}z + \frac{\lambda}{2} \frac{R\ddot{R} + R\dot{R}^2}{R^3} z^2 + \dots \quad (49-9)$$

و سرانجام، با وارون کردن [در ۴۹-۹ می‌نشانیم $z = a_1(L/c) + a_2(L/c)^2 + \dots$ و ضرایب را مساوی قرار می‌دهیم تا a ها به دست آیند]:

$$z = \frac{\dot{R}}{R} \frac{L}{c} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) \frac{L^2}{c^2} + \dots^* \quad (50-9)$$

در حد فواصل کم، تمام تعریفهای "معقول" فاصله هم‌ارز می‌شوند؛ و با این فرض که در فواصل کم فرمول کلاسیکی دوپلر $z = u/c$ به کار می‌آید، می‌توانیم در اولین تقریب، به عنوان یک امتحان، قانون هابل $u = HL$ (با ۲۵-۹ مقایسه کنید) را از ۵۰-۹ برخوانیم. معمولاً برای مقایسه ۵۰-۹ با رصدهای (z, b) (یا $(B/b)^{1/2}$) را جانشین L می‌کنیم و فرض می‌کنیم که B برای تمام کهکشانشناها، و در همه زمانها، حداقل در گستره رصدها، ثابت معینی است. با نشان دادن ۴۳-۹ در ۴۹-۹، سری زیر را برای S ، یعنی فاصله بر مبنای اندازه ظاهری، می‌یابیم

$$\frac{S}{c} = \frac{R}{R}z + \frac{\lambda}{2} \frac{R\ddot{R} - 3R\dot{R}^2}{R^3} z^2 + \dots \quad (51-9)$$

* برای اینکه از چگونگی همگرایی این سری (و سریهای مشابه) باخبر شویم، می‌توانیم برای چند مدل مشخص مقدار دقیق جمله‌های ۵۰-۹ را حساب کنیم، مثلاً (الف) $R(t) = \exp(Ht)$ ، $k = 0$ ؛ (ب) $R(t) = t$ ، $k = 0$. نتیجه به‌ازای انتقال به سرخ ۲۵ = z ، و تا یک جمله پیش از آنچه که در ۵۰-۹ آمده است، بدین قرار است

(الف) $0.25 = 0.312 - 0.097 + 0.061 + \dots$

(ب) $0.25 = 0.278 - 0.039 + 0.014 + \dots$

البته برای مقدار z کوچکتر، همگرایی بهتر می‌شود.

که با وارون کردن، حاصل می‌شود

$$z = \frac{\dot{R}}{R} \frac{S}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{3\dot{R}^2}{R^2} \right) \frac{S^2}{c^2} + \dots \quad (52-9)$$

اگر $(dA/dw)^{1/2}$ را به جای S بنشانیم، و فرض کنیم که dA اصولاً (برای کهکشانهای، یا خوشه‌های کهکشانی) ثابت است، می‌توان این فرمول را با رابطهٔ رصدی (z, dw) ، که البته کمتر از رابطهٔ معمول (z, b) قابل اعتماد است، مقایسه کرد.

فرمولهای ۹-۵۰ یا ۹-۵۲، که آنها را تا هر مرتبه‌ای می‌توان ادامه داد، می‌توانند در اصل از طریق رصد، مقادیر فعلی \dot{R}/R ، \ddot{R}/R ، و k/R^2 را (که آخری در جمله‌های درجهٔ سوم ظاهر می‌شود) به دست دهند. اما، در عمل مشکلات به اندازه‌ای زیادند که تنها \dot{R}/R ، یعنی ثابت هابل با اطمینان معلوم است، حتی در منفی یا مثبت بودن \ddot{R} اطمینان نیست. محدودیتی را که باید در نظر داشت این است که برای اشیای بسیار دور ($z > 1$) بسط بالا دیگر معتبر نیست، و مقایسه را باید بین رصد و مدل خاصی به شکل (انتگرال) بدون تقریب انجام داد.

رابطهٔ تجربی دیگری که اخترشناسان به دست آورده‌اند (هم‌پختیکی و هم‌رادیویی) تعداد کهکشانهایی است در یکای زاویهٔ فضایی از آسمان، که انتقال به سرخ آنها از یک z مفروض کوچکتر است، و یا اینکه درخشندگی آنها از یک b مفروض کوچکتر است. این "شمارش چشمه‌ها" به وضوح توزیع کهکشانی را در عمق، یعنی به صورت شعاعی، بررسی می‌کند. فرض می‌کنیم که $R(t)$ یک تابع یکنواخت افزاینده است به طوری که z های بزرگتر متناظر با t_1 های کوچکتر (با ۹-۲۹ مقایسه کنید)، بنابراین گسیل زودتر، و فاصلهٔ بیشتر باشند. مخروطی با زاویهٔ فضایی ω در نظر بگیرید که از مبدأ فضای همگانی شروع می‌شود و در مختص شعاعی ρ_1 پایان می‌پذیرد. همان‌گونه که قبلاً در این بخش دیدیم، سطحی که این مخروط از یک کره در مختص ρ و در زمان "حال" t_0 می‌برد برابر است با $\omega R^2 \rho^2$ ، و بنابراین ویژه حجم فعلی مخروط برابر است با

$$\begin{aligned} V &= \omega R^2 \int_0^{\rho_1} \rho^2 \frac{d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}} \\ &= \omega R^2 \int_0^{\rho_1} \rho^2 \left(1 + \frac{1}{4}k\rho^2 + \dots \right) d\rho \end{aligned}$$

با ضرب V در n_0 چگالی فعلی ذره‌ها، که می‌توان آن را به صورت موضعی برآورد کرد، N تعداد کل کهکشانهایی را که فعلاً در مخروط هستند به دست می‌آوریم، و البته اگر پایستگی موضعی داشته باشیم این تعداد مستقل از زمان است:

$$N = n_0 V = n_0 \omega R^2 \left(\frac{1}{3}\rho_1^3 + \frac{1}{10}k\rho_1^5 + \dots \right) \quad (53-9)$$

ρ مختص متناظر با کهکشانی را که اکنون با انتقال به سرخ z مشاهده می‌شود در ۹-۴۸ به دست آوردیم. نشانیدن این مختص در ۹-۵۳ فرمول لازم را برای N تعداد کهکشانهایی که با انتقال به سرخ کمتر از z در یک زاویه فضایی ω از آسمان دیده می‌شوند، به دست می‌دهد

$$N = n_0 \omega c^3 \left\{ \frac{R^3}{\dot{R}^3} \frac{z^3}{3} + \left(\frac{\ddot{R}R^3}{\dot{R}^5} - \frac{R^3}{\dot{R}^3} \right) \frac{z^2}{2} + \dots \right\} \quad (54-9)$$

فرمول متناظر برای نظریه حالت پایا (که در آن پایستگی موضعی ذره‌ها نقص می‌شود) به آسانی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N &= n_0 \omega c^3 H^{-3} \int_0^z z^3 (1+z)^{-3} dz \\ &= n_0 \omega c^3 H^{-3} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{3}{4} z^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (55-9)$$

با نشانیدن از ۹-۵۰ و ۹-۴۰ می‌توان این فرمولها را فوراً به روابط (N, b) تبدیل کرد. مدتهاست که شمارش چشمه‌های رادیو-اخترشناختی ظاهراً با رابطه‌ای که این چنین از ۹-۵۵ برای نظریه حالت مانا به دست می‌آید در تعارض است.

۹-۸ دینامیک کیهانی برطبق نظریه شبه-نیوتونی

اکنون به بررسی دینامیکی مدل روبرتسون-واکر می‌پردازیم. از آنجا که "کلوخه‌ای" بودن ماده درون عالم واقعی را مشکل می‌توان به طریق ریاضی بررسی کرد، عموماً از یک ابزار نظری استفاده می‌شود و آن اینکه محتوای مادی خورد می‌شد و به صورت غبار در نظر گرفته می‌شود که به صورت همگن توزیع شده است. فرض براین است که این عالم "غباری" که ماده در آن پخش شده است و عالم دیگری که در آن همان غبار به صورت کلوخه‌ای تجمع یافته است. در کل، تحت گرانش رفتار دینامیکی یکسانی دارند. به خاطر بیاورید (مقایسه کنید با بخش ۵-۱۳) که منظور از "غبار" در اصطلاح فنی آن ملاً پیوسته‌ای است که چگالی دارد اما عاری از کنشهای درونی و حتی فشار است. و معمولاً به نظر نمی‌رسد که ویژه حرکت کهکشانها، و حضور میان کهکشانی

۱. فرض کنید $R(t) = e^{Ht}$ ، $k = 0$ و $t_0 = 0$. آنگاه مختص ρ ، زمان گسیل t و انتقال به سرخ z از ۹-۴۶ و ۹-۲۹ توسط رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{H}{c} \rho = e^{-Ht} - 1 = z \quad (11)$$

تعداد کهکشانها در واحد ویژه حجم ثابت است. مثلاً n_0 . پس تعداد در زاویه فضایی ω بین مختصات ρ و $\rho + d\rho$ در زمان گسیل t برابر است با $n_0 \omega e^{3Ht} \rho^2 d\rho$. از این رابطه و ۱، رابطه ۹-۵۵ بلافاصله به دست می‌آید.

احتمالی نوترینوهای آشکار نشده، میدانهای مغناطیسی، پرتوهای کیهانی، کوانتومها (مثلاً گراویتونها) و هیدروژن و غیره فشار قابل توجهی بدان بیفزایند. (چنانکه خواهیم دید، اثر نظری فشار به هر حال نه از طریق یک کنش کشسان مستقیم، که تنها از طریق جرم بسیار کم هم ارز انرژی آن است که انبساط را کند می‌کند.) بنابراین چنین به نظر می‌رسد که این ایده‌آل‌سازی با غبار قابل توجیه است، مگر در مراحل بسیار اولیهٔ عالم که بسیار چگال بوده است.

نظریهٔ گرانش نیوتون را باید قدری تصحیح کرد تا بتوان آن را در مورد کل عالم به کار برد. این تصحیحات را میلن و مک کری در سال ۱۳۱۳/۱۹۳۴ شروع کردند و بعداً هکمن و شوکینگ آن را دقیق ساختند.^۱ برای این منظور لازم است ایدهٔ فضای مطلق، اما نه زمان مطلق، رها شود. فضای همگانی و هر فضای شخصی همان E_3 ی تخت و بینهایت است. اما E_3 ی شخصی یک ناظر اساسی تنها به صورت موضعی، یعنی در نزدیکی‌اش لخت است. ناظرهای اساسی دور از هم ممکن است نسبت به هم شتاب داشته باشند. قانون عکس مجذور نیوتون به صورت موضعی‌اش، یعنی معادلهٔ پواسون، بدون تغییر به کار می‌آید. (کل این نظریه را می‌توان با تصحیح خواص تبدیلی پتانسیل، به طور سراسری سازگار ساخت؛ اما چون این تبدیل در محاسبات اخیر ما بی‌تأثیر است، به آن نخواهیم پرداخت.) فرض می‌شود که نور در فضای همگانی راست‌خط-وار و با سرعت موضعی ثابت c نسبت به ناظرهای اساسی منتشر می‌شود و این هم ارز است با انتشار کلاسیکی در اثری که در انبساط عالم شریک است. و برای ذرات، قانون حرکت متعارف $\ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } \varphi$ را می‌پذیریم.

قبل از پرداختن به کیهانشناسی نسبیّت عامی بهتر است نظریهٔ "شبه-نیوتونی" ای را که نتیجه می‌شود مطالعه کنیم، زیرا این نظریه اصولاً منجر به همان معادله‌ها و همان مدلها می‌شود، و از آنجا که ما معادله‌ها و مدلهای نیوتونی را بیشتر به شهود درک می‌کنیم، این معادلات باعث می‌شوند که معادلات و مدلهای نسبیّت عامی، که به طریق بسیار انتزاعی تری پیش می‌آیند، بهتر درک شوند. با استدلال ساده‌ای می‌توان دریافت که چرا نظریهٔ موضعی نیوتون باید مدلهایی ارائه دهد که حتی به طور سراسری با مدلهای نسبیّت عامی مطابقت دارد: نسبیّت عام در حد حرکتهای آهسته و میدانهای ضعیف به نظریهٔ نیوتون تبدیل می‌شود؛ از طرف دیگر میدانهای کیهانی به طور موضعی ضعیف و حرکتهای کیهانی آهسته هستند، بنابراین دینامیک کیهانی اینشتین و نیوتون به طور موضعی هم‌ارزند، و سرانجام دانش موضعی در یک عالم همگن همان دانش سراسری است.

از آنجا که ما فضای همگانی را E_3 ی تخت فرض می‌کنیم، استدلال همراه با یک مثلث از ذرات اساسی که به ۹-۲۴ منجر شد، نشان می‌دهد که متریک مربوط به شارّهٔ کیهانی در حالت

۱. در مقالهٔ زیر افکار متهورانه‌ای در این زمینه خواهید یافت

نیوتونی به صورت زیر است

$$d\sigma^2 = R^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

و یا با تبدیل به مختصات قطبی

$$d\sigma^2 = R^2(t) \left\{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}$$

که در هر دو مورد مختصات فضایی همراه اند و t زمان مطلق است. اکنون متریک فضا-زمان ریمانی زیر را می‌سازیم

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (56-9)$$

این فضا دارای شاره کیهانی مورد نظر است؛ ژئودزیکهای صفر آن دقیقاً همان مسیرهای نوری هستند که فرض کرده‌ایم؛ و ds/c زمان مطلق را در محل هر ذره اساسی اندازه می‌گیرد. پس ما در واقع قضیه روبرتسون-واکر (با بخش ۹-۵ مقایسه کنید) را برای مورد خاص کیهانشناسی شبه-نیوتونی برقرار کرده‌ایم.

نقطه شروع ما برای دینامیک، معادله پواسون است

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho \quad (57-9)$$

که در آن چگالی ρ تابعی است از زمان مطلق و نه از مکان. از آنجا که ما تقارن کروی به دور هر ناظر اساسی P را فرض می‌کنیم، و از آنجا که φ در یک محیط پیوسته نمی‌تواند به طور موضعی بینهایت شود، پس ما (همانند بخش ۹-۲) جوابی را جستجو می‌کنیم به صورت $\varphi = a + b\sigma + c\sigma^2 + d\sigma^3 + \dots$ که در آن σ فاصله از P در فضای اقلیدسی شخصی P است. و می‌یابیم که این جواب، صرفنظر از یک ثابت جمعی دلخواه، صورت یکتای زیر را دارد

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2 \quad (58-9)$$

معادلات حرکت نیوتونی برای حرکت شعاعی به $\ddot{\sigma} = -d\varphi/d\sigma$ تبدیل می‌شود، پس در این مورد داریم

$$\ddot{\sigma} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\sigma = -\frac{GM'}{\sigma^2} \quad (59-9)$$

که در آن M' جرم داخل کره‌ای به شعاع r است. بنابراین ذرات چنان به مرکز یک کره جذب می‌شوند که گویی جرم آن کره در مرکزش جمع شده است و هیچ چیز در خارج نیست. اگر r مکان یک کهکشان Q نسبت به P را به دست دهد، آنگاه $M' = \text{const.}$ (نسبت به زمان)، زیرا هنگامی که فضای همگانی منبسط می‌شود هیچ کهکشانی از این کره خارج نمی‌شود و هیچ کهکشانی به این کره وارد نمی‌شود. ("معادله یوستگی" نیوتونی در این مورد این چنین بیان می‌شود.) اما r فاصله بین یک زوج کهکشان مثل P و Q ضریبی از $R(t)$ ، مثلاً $hR(t)$ است؛ با نشان دادن آن در ۹-۵۹، معادله دیفرانسیل زیر برای $R(t)$ به دست می‌آید

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \quad (۹-۶۰)$$

که در آن $M = M'/h^3$ جرم داخل کره‌ای به شعاع $R(t)$ است. (از این به بعد دوباره هرگاه لازم باشد توابع R ، \dot{R} ، \ddot{R} ، و غیره را برای مقادیر عام این توابع و نه فقط مانند بخش ۹-۷ به ازای مقدار خاص $t = t_0$ چنین می‌نویسیم.)

با پذیرفتن یک معادله پواسون تصحیح یافته ۹-۵ می‌توانیم نظریه را یک قدم دیگر تعمیم دهیم تا مقایسه بعدی با مدل‌های نسبیتی آسانتر شود. چنانکه در ۹-۶ دیدیم، این معادله منجر به یک جمله σ^2 اضافی در φ می‌شود (اصل برهم‌نهی!)، که البته اختیاری است مگر اینکه $A = 0$. بنابراین صورت محدودتر ۹-۴ را ترجیح می‌دهیم، که تنها جواب با تقارن کروی و منظم آن، صرفنظر از یک ثابت جمعی، چنین است

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2 - \frac{1}{6}c^2\Lambda\sigma^2 \quad (۹-۶۱)$$

اگر همانند ۹-۵۸ تا ۹-۶۰ پیش برویم، به جای ۹-۶۰ به دست می‌آوریم

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R + \frac{c^2\Lambda R}{3} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{c^2\Lambda R}{3} \quad (۹-۶۲)$$

با ضرب کردن این معادله دیفرانسیل در $2\dot{R}$ ، فوراً یک انتگرال اول آن را به دست می‌آوریم

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} - \tilde{k}c^2 \quad (۹-۶۳)$$

که در آن

$$C = 2GM = \frac{8}{3}\pi G\rho R^3 \quad (۹-۶۴)$$

و $\bar{k}c^2 -$ صرفاً یک ثابت انتگرال‌گیری است که به خاطر سهولت بعدی به این صورت نوشته است. چون R به طور ذاتی بهنجار نشده است، می‌توانیم، حداقل در مواردی که $\bar{k} \neq 0$ است یک شرط بهنجارش برای آن قائل شویم: مقیاس R را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\bar{k} = \pm 1 \quad \text{یا} \quad 0 \quad (۹-۶۵)$$

\bar{k} در واقع نشانگر انرژی است. اگر $\Lambda = 0$ از ۹-۶۳ می‌بینیم که اگر $\bar{k} = -1$ یا $\bar{k} = +1$ فاصله دو کهکشان به ترتیب با سرعت نسبی متناهی یا صفر به بینهایت می‌رسد: اگر $\bar{k} = +1$ این فاصله نمی‌تواند بینهایت شود و عالم بر روی خود فرو می‌ریزد. بنابراین، از آنجا که جمله Λ باید به طور موضعی قابل اغماض باشد، پس $\bar{k} = \pm 1$ بیانگر تمایز بین کهکشانهایی است که به طور موضعی سرعت نسبی آنها بیشتر یا کمتر از سرعت فرار است. اکنون معادله‌ای در نسبیت عام به دست می‌آوریم که به طور صوری با معادله ۹-۶۳ یکسان است، بنابراین بحث جوابهای این معادله را تا آنجا به تعویق می‌اندازیم.

۹-۹ دینامیک کیهانی بر مبنای نسبیت عام

دینامیک نسبیت عام در معادلات میدان اینشتین خلاصه می‌شود. که ما آن را برای مقاصد کیهانشناختی به صورت کلی آن ۸-۱۳۹، یعنی با جمله به اصطلاح کیهانشناختی $\Lambda g^{\mu\nu}$ ، به کار می‌بریم. تا به حال براهین گوناگونی بر علیه وجود این جمله آورده شده است: اول اینکه وارد کردن آن صرفاً از افکار ثانوی اینشتین بوده است (اما: دیر کشف شدن بهتر است تا هرگز کشف نشدن)؛ دوم اینکه که خود اینشتین سرانجام آن را رد کرد (اما: شخصیت را نمی‌توان هرگز جایگزین برهان علمی کرد)؛ سوم اینکه با وجود این جمله، دیگر نظریه نسبیت خاص، که به خوبی جا افتاده است، حالت خاصی از نسبیت عام نخواهد بود (اما: جمله Λ به طور موضعی کاملاً مشاهده‌ناپذیر است)؛ چهارم اینکه ساختگی است (اما: از دیدگاه صوری، همان‌گونه که یک ثابت جمعی به هر انتگرال نامعین تعلق دارد، این جمله نیز به معادلات میدان تعلق دارد)؛ پنجم اینکه معادلات پواسون در نظریه نیوتون و معادلات ماکسول در الکترودینامیک را به طریق مشابهی می‌توان تصحیح کرد (اما: از جمله Λ به طور موضعی چشمپوشی می‌شود، ولی از لحاظ کیهانشناختی ممکن است معادلات پواسون و ماکسول احتیاج به تصحیح مشابهی داشته باشند)؛ ششم اینکه این جمله نماینده یک انبساط فضا است که علت آن ماده نیست، یعنی میدانی که دارای تأثیر است اما نمی‌توان بر روی آن تأثیر گذاشت (اما: در نسبیت عام فضا و ماده از طریق معادلات میدان ارتباط نزدیک با یکدیگر دارند، و هیچ تصویر مکانیکی مجاز نیست)؛ هفتم اینکه هرگز نباید قانون مشکلتی را در نظر گرفت، مگر اینکه معلوم شود که قانون ساده‌تر دیگر قابل دفاع نیست (اما: در کیهانشناسی — به خصوص در مورد روبرتسون-واکر — مشکلات فنی کوچک‌اند، و بنابر پژوهشهای اخیر جمله Λ ممکن است

به‌راستی برای توضیح تجربیات رصدی مورد نیاز باشد؛ هشتم (و فنی‌تر) اینکه وجود یک جمله Λ در هندسه امکان کوانتیدن گرانش را برهم می‌زند [اما: بنا بر حدس زلدوویچ ممکن است از افت و خیزهای کوانتومی در خلأ طبیعتاً یک تانسور انرژی $(\Lambda/\kappa)g_{\mu\nu}$ سر درآورد، به‌طوری که بتوان جمله Λ را بخشی از چشمه‌ها انگاشت و نه بخشی از هندسه]. در این مورد می‌توان برهان عارفانهٔ ادینگتون را برله جمله Λ متذکر شد: "اگر یک طول مستقل و فی‌نفسه برای مقایسه وجود نباشد (مثلاً، $\Lambda^{-1/2}$) یک الکترون هرگز نمی‌تواند تصمیم بگیرد که چه اندازه باشد."

پس، در این معادلات میدان عام باید متریک فضازمان و تانسور انرژی محتوای فضازمان — برحسب این متریک — همزمان صدق کنند. خوشبختانه در کیهانشناسی می‌توانیم تنها با براهین تقارنی متریک را تا حد زیادی محدود کنیم. در واقع، همان‌گونه که دیدیم، متریک روبرتسون-واکر که به‌کار همهٔ عالمهای همگن و همسانگرد می‌آید تنها دو عنصر آزاد در بردارد: $R(t)$ تابع انبساط (یا "شعاع عالم")، و t شاخص انحناء، چنانکه خواهیم دید معادلات میدان این دو پارامتر را محدود خواهند کرد.

همان‌گونه که در بخش گذشته شرح دادیم، بهتر است که مادهٔ عالم را "غبار" بینگاریم. تانسور انرژی غبار توسط $8\pi G \rho U^\mu U^\nu$ داده می‌شود، یعنی $T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$ ، که در آن ρ_0 ویژه چگالی و U^μ چارسرعت $dx^\mu/d\tau$ متعلق به غبار است. در مدل روبرتسون-واکر غبار همه‌جا نسبت به ناظر موضعی اساسی در سکون است و بنابراین ρ را به‌جای ρ_0 می‌نویسیم، U^μ سرعت شارۀ کیهانی است و بنابراین اگر

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t) \quad (66-9)$$

و اگر برای متریک روبرتسون-واکر در مختصات دکارتی صورت $9-27$ را به‌کار ببریم، یعنی که $dx^2 + dy^2 + dz^2$ در صورت $\{ \quad \}$ باشد، داریم

$$U^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

در نتیجه تنها مؤلفهٔ غیر صفر $T^{\mu\nu}$ برابر است با $T^{44} = \rho$ ، که متضمن معادلهٔ زیر است

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, 0, c^4 \rho) \quad (67-9)$$

هنگام به‌کار بستن معادلات میدان $8-139$ ، که ما آنها را به‌صورت "هموردا" (یعنی با شاخصهای پایین به‌جای بالا) به‌کار خواهیم برد، کار اصلی محاسبهٔ مؤلفه‌های "تانسور اینشتین" تصحیح یافته

است^۱

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (۶۸-۹)$$

اما، کافی است به مقادیری که در بیوست (الف) آمده است مراجعه کنیم. بنابراین برای متریک ۲۷-۹ (به صورت دکارتی) چنین می‌یابیم

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G_{33}}{g_{33}} = -\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} - \frac{k}{R^2} + \Lambda \quad (۶۹-۹)$$

$$\frac{G_{44}}{g_{44}} = -\frac{3\dot{R}^2}{R^2c^2} - \frac{3k}{R^2} + \Lambda \quad (۷۰-۹)$$

و وقتی $\mu \neq \nu$ ، آنگاه $G_{\mu\nu} = 0$ می‌شود. با نشاندن ۶۹-۹، ۷۰-۹ و ۶۷-۹ در معادلات میدان

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (۷۱-۹)$$

دو شرط زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = 0, \left(= -\frac{\Lambda\pi G\rho}{c^2} \right) \quad (۷۲-۹)$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{\Lambda\pi G\rho}{3c^2} \quad (۷۳-۹)$$

در ۷۲-۹ بدون اثبات— در پراتر یک جمله فشار به جای صفر در سمت راست نشانده‌ایم، که تنها تصحیح در معادلات ۷۲-۹ و ۷۳-۹ را که در صورت حضور یک فشار p لازم می‌شود نشان می‌دهد.

معادله‌ای را که از تقریب ۷۳-۹ از ۷۲-۹ به دست می‌آید، جهت مراجعه بعدی، متذکر می‌شویم:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G\rho}{3} \left(-\frac{4\pi G\rho}{c^2} \right) \quad (۷۴-۹)$$

با ضرب کردن سمت چپ ۷۳-۹ در R^2 و مشتق‌گیری، سمت چپ معادله ۷۲-۹ ضربدر $\dot{R}R^2$ ، و بنابراین صفر، به دست می‌آید. در نتیجه

$$\frac{\Lambda}{3}\pi G\rho R^3 = C = \text{const.} \quad (۷۵-۹)$$

۱. R را در اینجا نباید با R ضریب انبساط اشتباه گرفت. متأسفانه در این مورد نمادگذاری متعارف تداخل پیدا می‌کند.

(با معادله ۶۴-۹ مقایسه کنید). روشن است که این معادله بیانگر ثابت بودن جرم در یک کره کوچک همراه به شعاع مثلاً hR است. (برای کره‌های بزرگ ممکن است که حجمها ناقلیدسی و چارجوبها ناختم باشند و انرژی جنبشی در جرم سهم داشته باشد، که همه این موارد تعبیر فوق را مشکل می‌سازند. بنابراین ۷۵-۹ رابطه نسبی پیوستگی است و باید توجه کرد که چگونه این رابطه در نسبیت عام نتیجه معادلات میدان است و نه یک فرض جداگانه، آن چنانکه در نظریه نیوتون است. با نشاندن ۷۵-۹ در ۷۳-۹ معادله‌ای به دست می‌آید که از لحاظ صوری با معادله شبه-نیوتونی، ۶۳-۹ یکسان است:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} - kc^2 \quad (76-9)$$

و باز باید توجه کرد که چگونه این "معادله حرکت" کیهان از معادلات میدان نسبیت عام نتیجه می‌شود، و نه آن طور که در نظریه شبه-نیوتونی بود (با بعد از ۵۸-۹ مقایسه کنید) لزومی به فرض معادله حرکت نیست.

پس معادلات ۷۲-۹ و ۷۳-۹ متضمن ۷۵-۹ و ۷۶-۹ هستند. برعکس ۷۵-۹ و ۷۶-۹ به وضوح متضمن ۷۳-۹ و نیز متضمن ۷۲-۹ است مگر اینکه $\dot{R} = 0$ (زیرا نتیجه مشتق‌گیری از ۷۶-۹ هم‌ارز است با \dot{R} ضربدر ۷۲-۹). معادله ۷۶-۹ را به نام کاشف آن معادله دیفرانسیل فریدمان می‌نامند. این معادله همراه با ۷۵-۹ در واقع نماینده محدودیتهای نسبیت عام در مدل "غباری" روبرتسون-واکر است. در بخش بعدی جوابهای آن را بررسی خواهیم کرد. اما ابتدا به ذکر تشابهات آن با معادله شبه-نیوتونی ۶۳-۹ می‌پردازیم.

در نسبیت عام شاخص پیچیدگی k جایگزین "شاخص انرژی" نیوتونی \tilde{k} در معادله فریدمان می‌شود. در همه مدل‌های نیوتونی فضای همگانی را تحت فرض می‌کنیم، یعنی $\tilde{k} = 0$. از این رو تنها آن مدل‌های نسبیت عامی که دارای $\tilde{k} = 0$ هستند می‌توانند از لحاظ هندسی دارای مشابه‌های دقیق نیوتونی باشند؛ در این صورت اگر $\tilde{k} = 0$ را برگزینیم تا دینامیکها مطابق شوند، مدل‌های یکسان خواهیم داشت. گرچه مدل‌های نسبیت عامی با $\tilde{k} = \pm 1$ به طور موضعی مشابه همتهای نیوتونی خود با $\tilde{k} = \pm 1$ هستند، یعنی صورت تابعی $R(t)$ آنها یکی است، اما فضای همگانی آنها خمیده است. مقایسه ما نشان می‌دهد که اگر انرژی جنبشی موضعی بیش از انرژی فرار باشد در نسبیت عام خمیدگی منفی تولید می‌شود، و اگر کمتر باشد خمیدگی مثبت تولید می‌شود. با وجود ثابت هابل، روشن است که انرژی فرار متناسب است با چگالی کیهانی؛ بنابراین زیاد منجر به عالم بسته و چگالی کم منجر به عالم باز می‌شود.

نتیجه جالب دیگر این شباهت نیوتونی، تعبیر اثر نسبیتی یک فشار احتمالی است. معادله ۷۴-۹ بدون جمله فشار هم‌ارز است با ۶۲-۹، که در سمت راست آن اصولاً نیرو قرار دارد و شتاب سمت چپ را تولید می‌کند. دو جمله نیرو در سمت راست ۶۲-۹ را قبلاً تعبیر کرده‌ایم.

حضور یک جمله نسبیتی فشار متناظر است با یک جمله سوم نیرو

$$-\frac{4\pi G\rho R}{c^2} \quad (77-9)$$

در ۹-۶۲ که در همان راستای گرانش اثر می‌کند. پس فشار انبساط را آهسته می‌کند و این آهستگی به دو طریق است. اول، بدین علت که چگالی ρ را افزایش می‌دهد (به دلیل هم‌ارز جرمی انرژی تراکمی‌ای که تولید می‌کند)؛ این اثر به‌طور ضمنی در جمله ρ ۹-۷۴ نهفته است. جمله صریح فشار را به‌سختی می‌توان به‌شهود تعبیر کرد. اگر از معادله ۹-۷۴ با جمله فشار به‌عقب بازگردیم، درمی‌یابیم که این معادله نتیجه معادله پواسون تصحیح یافته زیر است

$$\nabla^2\varphi + c^2\Lambda = 4\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (78-9)$$

اما چرا فشار از طریق فشار هیچ‌گونه اثر انبساطی ندارد؟ توضیح آن این است که فشار یکنواخت هیچ‌گاه باعث حرکت نمی‌شود، بلکه تنها شیب (گرادیان) فشار — دست‌کم در یک دستگاه لخت مفروض — می‌تواند. تازه، چرا فشار همان‌گونه که گرانش دستگاه‌های لخت را به‌طرف هم می‌کشد، آنها را از یکدیگر دور نمی‌کند؟ البته پاسخ این است که گرانش در مورد این خاصیت بین نیروها منحصر به‌فرد است.

روش ما در به‌دست آوردن معادله پیوستگی ۹-۷۵ در غیاب فشار معادله زیر را با حضور فشار به‌دست می‌دهد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi G\rho R^3}{3c^2}\right) = -\frac{4\pi Gp\dot{R}R^2}{c^2} \quad (79-9)$$

اگر برای حجم $\frac{4\pi}{3}(hR)^3$ یک کره کوچک همراه V را قرار دهیم، آخرین معادله را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$d(c^2\rho V) = -pdV = -pSd\sigma \quad (80-9)$$

که در آن S مساحت و σ شعاع کره است. تعبیر این معادله دوباره همان تعبیر "پیوستگی" است: هنگامی که این کره کوچک انبساط می‌یابد فشار داخل کار $pSd\sigma$ را روی ماده خارج انجام می‌دهد؛ بدین ترتیب مقداری متناظر از انرژی باید در داخل از بین برود (به‌خاطر بیاورید که $c^2\rho$ به‌جای چگالی کل انرژی نشسته است). معادله پواسون و معادله پیوستگی در نظریه شبه-نیوتونی مستقل

از یکدیگرند؛ بنابراین، جز بر مبنای شباهت با نسبیّت عام، نمی‌توان برای توجیه معادلهٔ تصحیح یافتهٔ پواسون ۷۸-۹ از ۸۰-۹، که فرض کردن آن طبیعی می‌نماید، استفاده کرد.

قبل از اینکه ادامه دهیم، بهتر است معادلات خود را یک آزمون عددی بکنیم، تا ببینیم که بیراهه نرفته باشیم. اگر برای سهولت فرض کنیم $k = \Lambda = 0$ ، می‌توانیم معادلهٔ ۷۳-۹ را با مراجعه به ۲۵-۹ به صورت

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} \pi G \rho$$

بنویسیم اگر برای H مقدار 50 (km/s)/Mpc را که در حال حاضر مورد قبول است بپذیریم، می‌یابیم $\rho = 4 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$. این مقدار حدوداً ده برابر مقدار دلخواه ماست. اما یک انتخاب معقول (منفی) k/R^2 می‌تواند معادله را متوازن کند و بدین ترتیب به نظر می‌رسد دینامیک ما معتبر باشد.

۱۰-۹ مدل‌های فریدمان

اکنون می‌پردازیم به بحث در مورد جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل فریدمان ۷۶-۹، با این قصد که تمام عالمهای "غباری" نسبیّت عام را که همسانگرد و همگن هستند به دست آوریم و رده‌بندی کنیم. اینها را مدل‌های "فریدمان" می‌نامند. به کار بردن یک‌گانه‌هایی که برحسب آنها $c = 1$ مناسبتر است، در این صورت معادلهٔ فریدمان چنین می‌شود

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} - k =: F(R), \quad \left(C = \frac{\Lambda}{3} \pi G \rho R^2 \right) \quad (81-9)$$

نماد $F(R)$ صرفاً اختصاری است برای سه‌جملهٔ پیشین آن، پراکنش تکرار معادلهٔ ۷۵-۹ است و تنها عملکرد آن تعیین ρ است پس از اینکه R از معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آید. جواب این معادله را به‌طوری صوری و به‌صورت انتگرال می‌توانیم چنین بنویسیم

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{F}} \quad (82-9)$$

و با استفاده از توابع بیضوی می‌توان به جواب کامل رسید. چنانکه خواهیم دید در موارد خاصی می‌توان این جواب را برحسب توابع ابتدایی به دست آورد. اما در حالت عام کافی است و بیشتر آموزنده است که به جای یک تحلیل دقیق یک تحلیل کمی ارائه دهیم. این بحث را با سه تذکر عام شروع می‌کنیم:

الف) گزینش پارامترهای C, Λ, k ، و مقدار اولیه $\dot{R}(t_0)$ و علامت $\dot{R}(t_0)$ ، مدل فریدمان را به طور یکتا معین می‌کند. زیرا در این صورت از معادله ۹-۸۱، $R(t)$ به دست می‌آید و از آنجا می‌توان اصولاً به طور یکتا جواب را به روش تکرار به دست آورد، مگر اینکه $\dot{R}(t_0) = 0$. در این صورت می‌توانیم به معادله ۹-۷۲ برگردیم تا $\ddot{R}(t_0)$ را به دست آوریم و دوباره می‌توانیم جواب را به روش تکرار به دست آوریم.

ب) از آنجا که $R = 0$ تکینگی معادله فریدمان است، هیچ جواب ناتکین $R = R(t)$ نمی‌تواند از $R = 0$ بگذرد. بنابراین جوابهای ناتکین کاملاً مثبت یا منفی هستند. به علاوه، این جوابها به صورت زوج $\pm R(t)$ پیش می‌آیند: علت این است که، به دلایل فیزیکی، باید $\rho \geq 0$ و این متضمن آن است که علامت C را باید همان علامت R برگزید، اما در آن صورت تبدیل $R \rightarrow -R$ تأثیری بر معادله ۹-۸۱ ندارد و این حکم فوق را اثبات می‌کند. بنابراین از آنجا که تنها R^2 در متریک روبرتسون-واکر پیش می‌آید، با اصرار بر اینکه $C \geq 0$ و $R \geq 0$ ما هیچ جوابی را مستثنی نمی‌کنیم.

ج) معادله ۹-۸۱ تحت تغییر $t \rightarrow -t$ یا $t \rightarrow t + \text{const.}$ نیز ناورد است. تغییر اولی متضمن این است که متناظر با هر جواب $R(t)$ یک جواب "زمان-وارون ($R(-t)$)" وجود دارد (مثلاً متناظر با هر عالم در حال انبساط یک عالم در حال انقباض وجود دارد)؛ و تغییر دومی متضمن این است که هر جواب $R(t)$ نماینده مجموعه کامل جوابهای $R(t + \text{const.})$ است، که این صرفاً بیانگر "همگنی زمان" است، بدین معنی که مبدأ زمان از لحاظ فیزیکی به حساب نمی‌آید. با در نظر داشتن این خواص ما جوابها را چنان بهنجار می‌کنیم که از زوج $R(\pm t)$ جواب انبساطی نسبت به انقباضی با ترجیح بیان شود و از مجموعه $R(t + \text{const.})$ در صورت امکان جوابی را ترجیح می‌دهیم که در $t = 0$ دارای $R = 0$ باشد.

پیرو وارون‌پذیری زمان و تذکر (الف) خاطر نشان می‌کنیم که هر مدل فریدمان نوسانی (یعنی، مدلی که دارای مهبانگ در آینده و گذشته باشد) زمان-متقارن است. زیرا، این مدل با فرض R_{\max} و C, Λ, k ، یکتاست و حول R_{\max} زمان-متقارن است.

مدلهای ایستا

بهرتر است ابتدا حساب مدلهای ایستا را یکسره کنیم، یعنی مدلهایی که در آنها $\dot{R} \equiv 0$ ، چنانکه پس از ۹-۷۶ متذکر شدیم این حالت استثنایی است که در آن معادله فریدمان کفایت نمی‌کند و هر دو معادله ما در ۹-۷۲ و ۹-۷۳ باید جداگانه صادق باشند. این معادلات به شرطی به $\dot{R} \equiv 0$ منجر می‌شوند که

$$\frac{k}{R^2} = \Lambda = 4\pi G\rho, \quad (\sim 10^{-58} \text{cm}^{-2}) \quad (۸۳-۹)$$

(در برانتز مقدار $4\pi G\rho$ متناظر با: $\rho = 10^{-31} \text{g/cm}^3$ داده شده است، که نوعاً کوچکی Λ را

نشان می‌دهد.) معادلهٔ ۸۳-۹ البته متضمن $\rho = \text{const.}$ است، و ما برای یک جواب معنی‌دار فیزیکی لازم داریم $\rho > 0$ و بنابراین $k = +1$. این مقدار جواب موسوم به عالم اینشتین را به دست می‌دهد، که همان اولین مدل نسبیت عامی است که (در سال ۱۹۱۷/۱۲۹۶) توسط اینشتین) پیشنهاد شد. دقت کنید، همان‌گونه که در بخش ۷-۲ بحث شد قسمت فضایی این مدل یک کرهٔ سه‌بعدی است. این مدل در آن زمان خاصیت مطلوبی برای کاشفش داشت. اما با کشف انبساط عالم دیگر نقش خود را به عنوان یک مدل واقعی باید از دست می‌داد.

تنها امکان باقیمانده، که کمتر فیزیکی است ولی هنوز به عنوان یک مورد حدی قابل قبول است، و در ۸۳-۹ صدق می‌کند مورد $\rho = 0$ ، $k = \Lambda = 0$ و ثابت دلخواه $R = R_0$ است. در این صورت تبدیل $r \rightarrow Rr$ در متریک روبرتسون-واکر به یک متریک معیار برای فضای مینکوفسکی منجر می‌شود، و در نتیجه این مدل نمایندهٔ غبار "آزمون" ساکنی است ($\rho = 0$) که یک چارچوب لخت بی‌پایان را به طور همگنی پر می‌کند.

مدلهای تهی

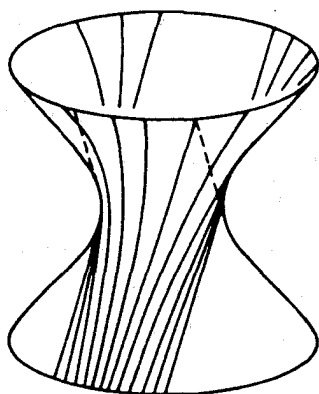
مدلهایی که چگالی صفر دارند، مانند مدل میلن یا مدل بالا، واقعی نیستند اما مثالهایی هستند روشن و آموزنده برای هندسه‌ها و سینماتیکیهای ممکن. بنابراین در قدم بعد به رده‌بندی آنها می‌پردازیم. با قرار دادن $C = 0$ ، ۸۲-۹ به صورت ابتدایی زیر درمی‌آید

$$t = \int \left(\frac{1}{3} \Lambda R^2 - k \right)^{-1/2} dR \quad (84-9)$$

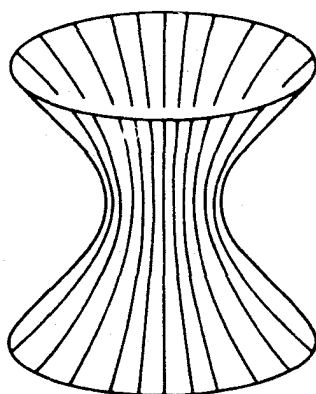
که دارای جوابهای زیر است [بجز (الف)، که در بالا به دست آوردیم]

$\Lambda = 0, k = 0,$	$R = \text{ثابت دلخواه}$	(الف)	
$\Lambda = 0, k = -1,$	$R = t$	(ب)	
$\Lambda > 0, k = 0,$	$R = \exp(t/a)$	} $a = \frac{3}{\Lambda} ^{1/2}$	
$\Lambda > 0, k = 1,$	$R = a \cosh(t/a)$		(ج)
$\Lambda > 0, k = -1,$	$R = a \sinh(t/a)$		(د)
$\Lambda < 0, k = -1,$	$R = a \sin(t/a)$		(ه)
			(و)

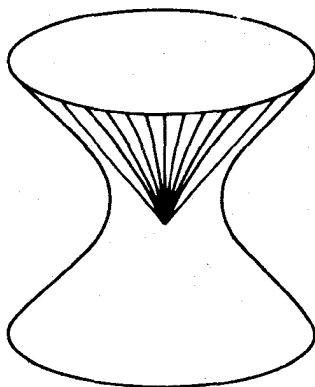
با مدل‌های (الف) و (ب) آشنا شدیم: (الف) مدل تهی ایستاست و (ب) مدل میلن است: این دو دارای زمینهٔ فضازمانی یکسان (M_4) ولی شاره‌های کیهانی (یعنی نقش حرکت‌های) گوناگون هستند. سه مدل (ج) و (د) و (ه) نیز همین‌طورند: زمینهٔ فضازمانی هر سه فضای دوسویهٔ S_4^- است (بخش ۸-۱۱). [تنها در مورد مدل‌های تهی ممکن است چنین حالتی پیش آید: مدل‌های ناتهی با شاره‌های کیهانی گوناگون دارای فضازمانهای گوناگون هستند.] از پیش روشن است که مدل‌های



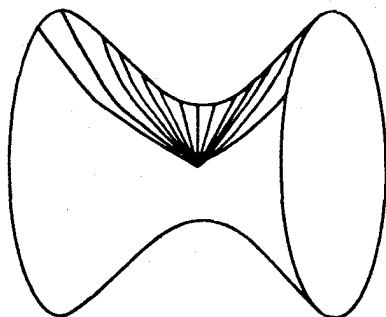
مدل (ج)



مدل (د)



مدل (ه)



مدل (و)

شکل ۹-۶

(ج) و (د) و (ه) دارای فضا زمان مشترک دوسویه هستند، زیرا همان گونه که در بخش ۸-۱۱ دیدیم، S^2_+ به طور یکتا فضا زمان تهی ای است که در معادلات تصحیح یافته اینشتین با $\Lambda > 0$ صدق می کند و به دور هر نقطه همسانگرد فضایی است؛ و هر سه مدل مورد بحث این خواص را داراست. البته شماره های آنها گوناگون است و شکل ۹-۶ این را نمایش می دهد. سه نمودار اول آن هذلولی وار شکل ۸-۱۴ را نشان می دهد که نمایانگر فضا زمان دوسویه ای است که دو بعد فضایی آن فرونشانده شده است. همان طور که در جای خود متذکر شدیم، جهان خطهای ژئودزیک با مقاطع صفحه ای زمان گونه هذلولی وار گذرا بر مرکز متناظرند. با نمادگذاری شکل ۸-۱۴ می توان نشان داد که شماره های (ج)، (د)، و (ه) به ترتیب با مقطعیهای صفحه ای که خطوط $Z = 0$ ، $T + W = 0$

محور T ؛ و محور W را در بردارند متناظرند. تبدیلهای لورنتس گونه فضا زمان (تخت) محاط می‌تواند در مدل‌های (ج) و (د) هر یک از این جهانخطهای ذرات اساسی را به جهانخط "مرکزی" ببرد، که این هم‌ارزی تمام این خطها را نشان می‌دهد.

مدل (ج) عالم دوسیه مشهور است، که از لحاظ سینماتیکی با عالم حالت پایا یکسان است. پس این مدل مثلاً دارای یک افق رویداد است. این مدل گرچه در نسیت عام به این علت که تهی است غیرواقعی می‌نماید، اما حدی را تشکیل می‌دهد که تمام مدل‌های با انبساط بی‌پایان و $\Lambda > 0$ به سوی آن می‌روند. زیرا انبساط بی‌پایان ($R \rightarrow \infty$) در یک مدل عام سرانجام باعث می‌شود که جمله Λ در طرف راست معادله ۹-۸۱ غلبه کند، که این متضمن:

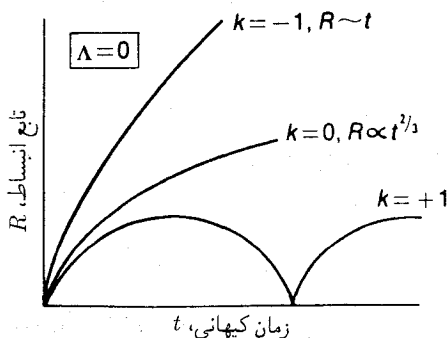
$$R \sim \exp(\Lambda/3)^{1/2} t$$

است (ثابت ضربی را می‌توان با یک تبدیل t جذب کرد)؛ در نهایت k/R^2 انحای مدل و $3C/8\pi GR^2$ چگالی آن کوچک می‌شوند و بدین ترتیب حتی $k=0$ و $\rho=0$ به‌طور موضعی تقریب خوبی هستند. پس حکم ما اثبات می‌شود. در نتیجه، به‌طور مثال تمام مدل‌های با انبساط بی‌پایان و $\Lambda > 0$ دارای یک افق رویداد هستند. در شکل ۹-۶ (ج) افق وابسته به ناظر اساسی "مرکزی" به‌صورت یک جفت خط‌چین نشان داده شده است. به‌همین ترتیب می‌توان در (د) و (ه) افق را توسط یک جفت مولد موازی نمایش داد، که نمودار به‌خوبی مدلول آن را به‌عنوان جبهه نوری که در آینده بینهایت به‌ناظر اساسی وابسته می‌رسد نشان می‌دهد. به‌خوبی می‌توان دید که "تکنیکی دوسیه" که در بخش ۸-۱۱ مورد بحث قرار گرفت چیزی جز افق رویداد ناظر واقع در مبدأ نیست.

مدل (د) مشابه مدل ایستای (الف) در S_F^- است، اما این مدل تنها در لحظه متناظر با دایره کمر هذلولیوار ایستاست. شاره آن تمام S_F^- را پر می‌کند. ذرات اساسی آن تا حالت کمیته نزدیکی می‌ربند و سپس تحت اثر دافعه Λ تا فاصله بینهایت منبسط می‌شوند.

مدل (ه) مشابه مدل میلن (ب) در S_F^- است. این مدل در S_F^- از یک کره غبار آزمون‌ی در حال انبساط تشکیل می‌شود، که یک جبهه تورکروی آن را احاطه کرده است. اما دافعه Λ انبساط آن را سرعت بخشیده است. شباهت آن را با مدل میلن می‌توان به‌وضوح از این امر دریافت که متریک روبرتسون-واکر (ه) عملاً به‌ازای مقادیر کوچک t همان ۹-۱۳ است.

به‌همان دلیل، مدل (و) شبیه مدل میلن در فضای پاد-دوسیه S_F^+ است (بخش ۸-۱۱)؛ انبساط این کره غبار سرانجام در اثر جاذبه Λ متوقف می‌شود و دوباره می‌ربند. شاره آن متناظر است با بخشهای مرکزی (پاد-) هذلولیوار که محوری عمود بر تقارن را در برمی‌گیرند. به‌راحتی می‌توان از نمودار ۹-۶ دید که (ج) و (و) همگی مانند مدل میلن ناکامل هستند ("فضای بیشتر از شاره کیهانی").



شکل ۹-۷

مدلهای ناتهی با $\Lambda = 0$

نشان دادن $\Lambda = 0$ و یک مقدار متناهی برای C در ۹-۸۱ اصولاً سه نوع معادله، که به گزینش k بستگی دارد، به دست می‌دهد. در هر یک از این سه مورد داشتن جواب برحسب توابع ابتدایی ممکن است. این جواب، اگر $k = 0$ باشد، بسیار ساده است

$$R = \left(\frac{9}{4}C\right)^{1/3} t^{2/3}, \quad (k = 0)$$

مدل متناظر، عالم اینشتین-دوسیته نامیده می‌شود. دو امکان دیگر چنین‌اند

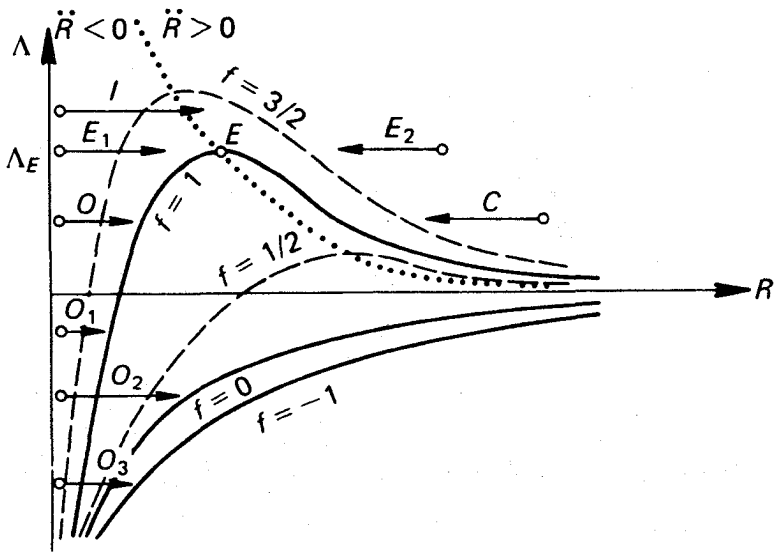
$$\left. \begin{aligned} t &= C \left[\sin^{-1} \sqrt{X} - \sqrt{(X - X^2)} \right], & (k = 1) \\ t &= C \left[\sqrt{(X + X^2)} - \sinh^{-1} \sqrt{X} \right], & (k = -1) \end{aligned} \right\} X = R/C$$

اولی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$R = \frac{1}{4}C(1 - \cos \psi), \quad t = \frac{1}{4}C(\psi - \sin \psi)$$

که می‌بینیم یک چرخزاد است، این جواب گاهی عالم اینشتین-فریدمان نامیده می‌شود. رفتار کیفی دومی را می‌توان به راحت‌ترین طریق مستقیماً از معادله دیفرانسیل برخوردار: مقدار \dot{R} از بینهایت کاهش می‌یابد و به یک نزدیک می‌شود. این مدل به‌ازای t بزرگ عالم میل را تقریب می‌کند. نمودارهای هر سه مدل در شکل ۹-۷ نشان داده شده است. دقت کنید که جمله C به‌ازای R های کوچک در سمت راست ۹-۸۱ همواره غالب است، از این رو تمام مدل‌های مه‌بانگ‌دار ناتهی در رفتار:

$$R \sim (9C/4)^{1/3} t^{2/3}$$



شکل ۸-۹

نزدیک $t = 0$ شریک‌اند. به‌خصوص می‌توان دید که آنها همگی دارای یک افق ذره هستند. به‌علاوه، به‌علت تقارن زمانی مدل‌های نوسانی، و به‌این علت که تحت برگشت زمان افق ذره به افق رویداد تبدیل می‌شود، می‌توان دید که تمام مدل‌های نوسانی ناتهی دارای افق ذره و رویداد هر دو هستند.

مدل‌های ناتهی با $\Lambda \neq 0$ اگر مقادیر دلخواه Λ را مجاز بدانیم، تعداد مدل‌های ممکن افزایش می‌یابد. باز فرض می‌کنیم $C \neq 0$ با رسم

$$f(R, \Lambda) = m = \text{const.} \quad (۸۵-۹)$$

منحنی تراز تابع (با ۸۱-۹ مقایسه کنید)

$$f(R, \Lambda) = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda R^2}{3} = \dot{R}^2 + k \quad (۸۶-۹)$$

به‌ازای مقدار ثابتی برای $C > 0$ ، در یک نمودار (R, Λ) ، مانند شکل ۸-۹، می‌توان یک جواب کیفی معادله دیفرانسیل فریدمان را به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر Λ را برحسب R رسم می‌کنیم،

که در آن

$$\Lambda = \left(m - \frac{C}{R}\right) \frac{3}{R^2} = \frac{3(mR - C)}{R^2} \quad (۸۷-۹)$$

و به m مقادیر متوالی، مثلاً -۱ ، ۰ ، $۱/۲$ ، ۱ ، $۳/۲$ ، \dots را، می‌دهیم. برحسب اینکه $m \leq ۰$ یا $m > ۰$ ، این منحنیها دارای دو شکل مشخص هستند. در مورد اول منحنیها کاملاً زیر محور R قرار دارند، اما از زیر به‌طور یکنواخت به‌این محور نزدیک می‌شوند. در مورد دوم محور R را (در $R = C/m$) قطع می‌کنند، به یک بیشینه می‌روند و سپس از بالا مجانب‌وار به‌محور R نزدیک می‌شوند. در تمام موارد نزدیک $R = ۰$ داریم $\Lambda \sim -3C/R^3$.

منحنیهای تراز ۱ و ۰ و -۱ از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند: این منحنیها به‌ترتیب متناظرند با مکان هندسی $\ddot{R} = ۰$ در موارد ۱ و ۰ و -۱ که $k = ۱$ می‌بینیم که مکان هندسی $\ddot{R} = ۰$ (که در نمودار توسط خط چین مشخص شده است) با معادله زیر داده می‌شود

$$\Lambda = \frac{3C}{2R^2} \text{ یعنی } 2\ddot{R} = \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{C}{R^2} + \frac{2\Lambda R}{3} = 0 \quad (۸۸-۹)$$

این مکان هندسی مطابق است با بیشینه‌های منحنیهای تراز، زیرا برای آنها:

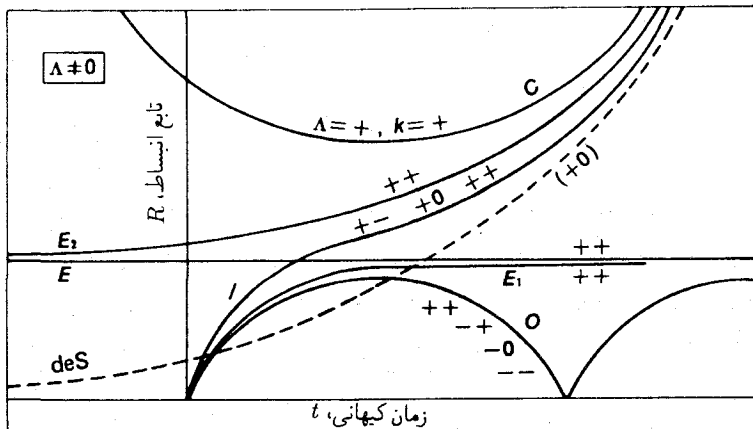
$$\frac{d\Lambda}{dR} = -\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda}\right) = 0$$

بالای این مکان هندسی، $\ddot{R} > ۰$ و پایین آن، $\ddot{R} < ۰$. نقطه بیشینه خم تراز $f = ۱$ (با علامت E در نمودار) مختصات زیر را دارد

$$R = \frac{3C}{2}, \quad \Lambda = \frac{4}{9C^2} =: \Lambda_E \quad (۸۹-۹)$$

یعنی، دقیقاً همان مقادیر متناظر با عالم ایستای اینشتین (مقایسه کنید با ۸۱-۹ و ۸۳-۹)؛ علت نماد Λ_E نیز همین است. در نتیجه تمام مشتقات $R(t)$ در E صفر می‌شود.

چون مدلهای فریدمان با شرط $\Lambda = \text{const.}$ مشخص می‌شوند، پس برای به‌دست آوردن جوابها می‌توان در شکل ۸-۹ از نقطه‌ای شروع کرد که به لحاظ فیزیکی قابل قبول باشد ($\dot{R} > ۰!$) و به‌طور افقی امتداد دارد. مقادیر روی خم تراز، به‌سبب معادله دیفرانسیل فریدمان و تعریف f ، مقدار \dot{R}^2 را (پس از گزینش k)، و از آنجا شیب خم جواب را، به‌استثنای علامت آن، به‌دست می‌دهد.



شکل ۹-۹

اگر از $R = 0$ و $\Lambda < 0$ شروع کنیم الزاماً یک عالم نوسانی به دست می‌آوریم. برحسب اینکه -1 و 0 و 1 باشد، $k = 1$ و 0 و 1 باشد، خمهای تراز بحرانی به ترتیب $f = 1$ ، 0 ، و -1 خواهند بود؛ این خمها قطع نمی‌شوند، زیرا در ورای آنها \dot{R} منفی است. پس $R(t)$ خم جواب ما با شیب \dot{R} بینهایت شروع می‌شود که به تدریج کاهش می‌یابد و در خم بحرانی صفر می‌شود. اما در نمودار در آن نقطه، $\dot{R} < 0$ ، پس \dot{R} باید باز هم کاهش یابد؛ چون نمی‌توان خم تراز بحرانی را قطع کرد، به نیمه کاهش‌یابنده یک مدل نوسانی دست می‌یابیم، به این ترتیب که در امتداد همان خط افقی (O_1, O_2) ، و یا O_3 به $R = 0$ می‌رویم، و این بار مقادیر منفی \dot{R} را برمی‌گزینیم. تمام خمهای جواب متناظر در شکل ۹-۹ با O نشان داده شده‌اند.

اگر از $R = 0$ و $\Lambda > 0$ شروع کنیم و $k = 0$ یا -1 برگزینیم، هیچ خم تراز با عث توقف نمی‌شود؛ \dot{R} ابتدا از مقدار اولیه بینهایت خود تا یک کمینه در مکان هندسی $\dot{R} = 0$ کاهش می‌یابد و سپس دوباره افزایش می‌یابد. نتیجه یک عالم با تغییر انحناست که به عنوان یک عالم لوماتر نیز شناخته شده است (I در شکل‌های ۹-۸ و ۹-۹).

گزینه‌ش $k = 1$ و $\Lambda > 0$ جوابهایی با تنوع غنی‌تر به دست می‌دهد. در این حالت خم تراز بحرانی $f = 1$ است. به ازای نقطه شروع در $R = 0$ در شکل ۹-۸، اگر $\Lambda > \Lambda_E$ عالمهای با تغییر خم‌ش و اگر $\Lambda < \Lambda_E$ باشد عالمهای نوسانی (O) به دست می‌آوریم. اگر $\Lambda = \Lambda_E$ ، به خم بحرانی در بیشینه‌اش، E ، نزدیک می‌شویم؛ در آنجا تمام مشتقات R صفر می‌شوند و خم جواب تخت می‌شود و به صورت یک خط راست درمی‌آید. این مدل متناظر است با یک عالم با مهبانگ که به طور مجانبی به عالم ایستای اینشتین نزدیک می‌شود (E_1 در شکل‌های ۹-۸ و ۹-۹). دقت کنید که با انتخاب $\Lambda > \Lambda_E$ ولی نزدیک به Λ_E می‌توان مدلهایی ساخت که خم نمودار آن نقطه عطف دارد و بنابر آن مدل عالم در دوره‌هایی شبه‌مانا خواهد بود، که البته این دوره‌ها

می‌توانند به دلخواه طولانی باشند. مانند نمودار شکل ۹-۴. هرگاه در شکل ۸-۹ از سمت دیگر برآمدگی خم بحرانی (یعنی از R بزرگ) شروع کنیم و افقی به سمت چپ بیاییم، \dot{R} از مقادیر بزرگ به صفر کاهش می‌یابد ($\dot{R} > 0$)، و نیمی از عالم (به شکل خم) زنجیره‌ای را به دست می‌آوریم (C)؛ نیم دیگر متناظر است با پس رفتن در همان امتداد افقی با علامت معکوس \dot{R} . مدلهای زنجیره‌ای نیز، مانند مدلهای نوسانی و به همان دلیل، نسبت به نقطه مانای خود تقارن زمانی دارند. توجه کنید که برای مقادیر C و Λ یکسان ($k = 1$) می‌توان، بسته به مقدار اولیه R ، دو مدل متفاوت داشت. به همین ترتیب، هرگاه برای $\Lambda = \Lambda_E$ از راست به نقطه بحرانی E نزدیک شویم، مدلی به دست می‌آوریم که گسترش بینهایت آن کاهش می‌یابد و مجانبدار به مدل ایستای اینشتین می‌رسد؛ البته ترجیح این است که مدل زمان-وارون آن اختیار شود: E_2 در شکلهای ۸-۹ و ۹-۹. بنابراین، برای $\Lambda = \Lambda_E$ ($k = 1$) سه مدل، به انضمام مدل ایستای اینشتین، وجود دارد.

خیمهای شکل ۹-۹ مدلهای گوناگون را نشان می‌دهند؛ علامت Λ و k به ترتیب از چپ به راست روی خیمها نموده شده است. (خم خط چین، برخلاف فرض $C \neq 0$ ، عالم خالی دوسویه را نشان می‌دهد؛ علت رسم آن نشان دادن نقش آن است به عنوان "مدل مجانبی" برای تمام مدلهای با $\Lambda > 0$ و با انبساط ابدی. از هر دو شکل ۸-۹ و ۹-۹ دیده می‌شود که عالم اینشتین ناپایدار است: کمترین اختلال آن را به مسیر E_1 (انقباضی) یا E_2 (انبساطی) می‌کشاند. علت فیزیکی این ناپایداری روشن است: کمی انقباض موجب افزایش ρ می‌شود، درحالی‌که چگالی "دائم $-\Lambda/4\pi G$ " ثابت می‌ماند. همین باعث ختم تعادل و انقباض بیشتر می‌شود. کمی انبساط نیز به دلیلی مشابه موجب انبساط بیشتر می‌شود. در واقع، گاهی مدل انبساطی E_2 به عنوان مدل اینشتین مختل شده تلقی می‌شود، و بر مبنای این تفصیل آن را عالم ادینگتون-لوماتر می‌نامند. دیدیم که تمام مدلهای $C = 0$ یا $\Lambda = 0$ را می‌توان با توابع ساده نمایش داد. برای $k = 0$ نیز همین طور است. به جهت تکمیل بحث این نتایج را نیز ذکر می‌کنیم

$$R^{\dot{r}} = \frac{3C}{2\Lambda} \left[\cosh(3\Lambda)^{1/2} t - 1 \right], \quad (\Lambda > 0)$$

$$R^{\dot{r}} = \left(\frac{3C}{-2\Lambda} \right) \left[1 - \cos(-3\Lambda)^{1/2} t \right], \quad (\Lambda < 0)$$

سرانجام نکته‌ای را در مورد تکینگی اولیه $R = 0$ در مدل مهبانگ متذکر می‌شویم. زمانی تصور می‌شد این تکینگی ناشی از این فرض تصنعی است که ذرات اصلی دقیقاً به طور شعاعی حرکت می‌کنند. و اگر این ذرات در امتداد خطوطی حرکت می‌کردند که کمی منحرف بودند، در گذشته به یکدیگر نمی‌رسیدند و عالم ورجهیده بود. اما نشان داده شده است (پنروز، هاوکینگ، ایس) که مدلهای عالم باید، حتی تحت شرایط بسیار عام و واقعی‌تر، یک یا چند تکینگی در گذشته داشته باشند. البته، این امکان هنوز وجود دارد که نوعی یا حتی اکثر انواع ماده بتوانند

جلوی تکینگی را بگیرند، و نوعی عالم ورجهیده پیش رو باشد.

۹-۱۱ باز هم مقایسه با رصد

گرچه متریک روبرتسون-واکر را با شرایط دینامیکی محدود کرده‌ایم، اما هنوز امکان انتخاب مدل بسیار گسترده است. داده‌های رصدی ممکن است تأثیر چندانی در انتخاب از میان مدل‌های نامحدود روبرتسون-واکر نداشته باشند، اما اگر مدل‌هایی را در نظر بگیریم که به لحاظ دینامیکی ممکن‌اند، آنگاه داده‌های رصدی در اصل راه انتخاب را می‌نمایاند. برای این منظور سه تابع زیر مفیدند

$$H = \frac{\dot{R}}{R}, \quad q = -\frac{\ddot{R}}{R\dot{R}^2} = -R\ddot{R}/\dot{R}^3, \quad \sigma = \frac{4\pi G\rho}{3H^2} \quad (90-9)$$

که در آن q و σ بی‌بعدند، درحالی‌که H بعد (زمان)^{-۱} را دارد. H را "ثابت" هابل می‌نامند، یا مناسبتر پارامتر هابل؛ q پارامتر شتاب، و σ که الزاماً مثبت است، پارامتر چگالی. علی‌الاصول، باید بتوان مقدار این پارامترها را با رصد تعیین کرد: H و q را مثلاً از ۹-۵ و σ را با تخمینی برای ρ .

برحسب این توابع می‌توان به بازنویسی (الف) معادله ۹-۷۵، (ب) معادله ۹-۷۴، و (ج) تفاضل میان ۹-۷۲ و سه برابر ۹-۷۳ پرداخت (هنوز در بکاهایی کار می‌کنیم که $c = 1$):

$$\sigma = \frac{C}{2H^2 R^2} \quad C = 2\sigma_0 H_0^2 R_0^2 \quad (\text{الف}) \quad (91-9)$$

$$\sigma - q = \Lambda/3H^2; \quad \Lambda = 3H_0^2 (\sigma_0 - q_0) \quad (\text{ب}) \quad (92-9)$$

$$3\sigma - q - 1 = k/H^2 R^2; \quad k = H_0^2 R_0^2 (3\sigma_0 - q_0 - 1) \quad (\text{ج}) \quad (93-9)$$

اولین قسمت از معادله‌های بالا بیانگر یک جواب برای هر ثابت C ، Λ ، و k است؛ و چون اینها ثابت‌اند، تابع بیانگر آنها را می‌توان در هر لحظه حساب کرد، مثلاً در لحظه فعلی $t = t_0$ ؛ شاخص 0 نیز همین معنی را دارد. توجه کنید که

$$\Lambda = 0 \leftrightarrow \sigma = q \quad (94-9)$$

و دراین صورت

$$k \geq 0 \leftrightarrow \sigma, q \geq \frac{1}{3} \quad (\Lambda = 0) \quad (95-9)$$

از قسمت دوم معادله‌های فوق دیده می‌شود که با دانستن H_0 ، q_0 ، و σ_0 می‌توان ابتدا Λ و k/R_0^2 (که k و R_0 را به دست می‌دهد مگر برای $k = 0$ که در این صورت R_0 به هر حال دلخواه خواهد بود) و سپس C را حساب کرد. واضح است که در این صورت Λ ، k ، C ، و R_0 یک مدل فریدمان را مشخص می‌کنند. اما متأسفانه این برنامه ساده در عمل کارساز نیست: عدم تعیین فعلی در تعیین q_0 و σ_0 ، و تا اندازه‌ای در H_0 ، به اندازه‌ای زیاد است که نمی‌توان از این مقادیر استنتاج مستقیمی کرد. روبرتسون به این فکر افتاد که این سه داده نادقیق را با داده چهارمی، یعنی t_0 یا عمر عالم، مرتبط کند. آنگاه می‌توان برخی مدلها را به این علت که بسیار جوان یا پیرند حذف کرد. ابتدا به مسئله نسبتاً خاص در مورد سن عالم می‌پردازیم که به تخمینهای زیاد برای H_0 مربوط می‌شود. نمودار $R(t)$ را بر حسب t ، مانند شکل ۹-۴، در نظر بگیرید. مماس در نقطه t_0 محور t را در نقطه $R_0/\dot{R}_0 = 1/H_0$ در سمت چپ t_0 (با فرض $\dot{R} > 0$) قطع می‌کند. هرگاه \ddot{R} تا لحظه t_0 منفی بوده باشد خم در سمت راست مماسش قرار دارد، و سن مدل کمتر از "سن هابلی $1/H_0$ " است. اگر آن‌طور که تا چند سال پیش تصور می‌شد H_0 حدود 10^0 کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک باشد، سن هابلی می‌شود $10^9 \times 97$ سال، که با سن برآورد شده از دینامیک خوشه‌های کروی یعنی $10^9 \times 14$ سال در تعارض است. البته این تعارض تنها با این شرط پیش می‌آید که \ddot{R} تاکنون منفی بوده باشد، که اگر فرض $\Lambda = 0$ درست است (شکل ۹-۷ یا معادله ۹-۷۴). اگر مقادیر مثبت Λ را جایز بدانیم این تعارض پیش نمی‌آید (شکل ۹-۹)، و تخمینهای پایین امروزی برای H_0 نیز برای رفع این تعارض کفایت می‌کند.

برگردیم به مورد عام، و با پیروی از روبرتسون با نشانیدن از معادلات ۹-۹۱ تا ۹-۹۳ در معادله فریدمان ۸۱-۹ به دست می‌آوریم

$$y^2 = H_0^2 \left\{ 2\sigma_0 y^{-1} + (\sigma_0 - q_0) y^2 + 1 + q_0 - 3\sigma_0 \right\}, \quad y = \frac{R}{R_0} \quad (9-96)$$

این معادله را هم، مانند معادله اولیه، می‌توان با انتگرال‌گیری حل کرد؛ و چون علاقه‌مند به سن فعلی مدل‌هایی با عمر متناهی هستیم، فرض می‌کنیم $R(0) = 0$ و انتگرال معین می‌گیریم

$$H_0 t_0 = \int_0^{t_0} H_0 dt = \int_0^1 \{ \quad \}^{-1/2} dy = f(\sigma_0, q_0) \quad (9-97)$$

در آکولاد توخالی همان است که در رابطه ۹-۹۶ آمده است، و $f(\sigma_0, q_0)$ را معادله آخر تعیین می‌کند. این تابع را می‌توان به سهولت با کامپیوتر محاسبه کرد و جدولی از مقادیر متناظر σ_0 ، q_0 ، و $H_0 t_0$ به دست داد.

معادله ۹-۹۶ تابع $R(t)$ را، مگر تا یک تغییر مقیاس مستقل در R و t ، تعیین می‌کند؛ زیرا می‌توان آن را به صورت $\dot{R}^2/\dot{R}_0^2 = \{ \quad \}$ نوشت. اما معادله ۹-۹۳، \dot{R}_0 را به طور یکتا تعیین

می‌کند (مگر برای $k = 0$)، پس تغییر مقیاس R و t باید یکسان باشد (مگر برای $k = 0$). بنابراین، چون σ_0 و q_0 و $H_0 t_0$ از طریق ۹۷-۹ مرتبط‌اند، هر دوتایی از آنها یک مدل مه‌بانگ فریدمانی را مشخص می‌کند، مگر تا یک تغییر مقیاس از نوعی که گفته شد. (به‌ارای برخی مقادیر σ_0 ، q_0 دو مدل فریدمان وجود دارد—یکی با گذشتهٔ متناهی و دیگری نامتناهی، مانند O و C در شکل‌های ۸-۹ و ۹-۹. تحلیل فعلی ما دومی را ندیده می‌گیرد.) پیرو تینسلی^۱، ما نیز $H_0 t_0$ و $\log \sigma_0$ را به‌عنوان مختصات برای نمودار روبرتسون^۲، شکل ۹-۱۰، اختیار می‌کنیم، که هر نقطهٔ روی آن یک مدل فریدمان را نشان می‌دهد. محدودیت ρ_0 و t_0 یک ناحیه را ممتاز می‌کند که تمام مدل‌های پذیرفتنی در آن واقع می‌شوند؛ فعلاً این محدودیتها بیشتر از محدودیت‌های روی q_0 تأیید شده‌اند (بخش ۹-۱). با وجود این، روی نمودار روبرتسون، با افزودن "مشاهده‌پذیر" چهارمی به σ_0 ، t_0 و H_0 ، خم‌های تراز q_0 را نیز رسم کرده‌ایم.

این نمودار خط مهم مرزی میان مدل‌هایی با $\Lambda > 0$ و $\Lambda < 0$ ، و نیز میان مدل‌هایی با $k > 0$ و $k < 0$ را نشان می‌دهد؛ این مرزها را می‌توان به‌ترتیب به‌راحتی از ۹۲-۹ و ۹۳-۹ به‌دست آورد. مدل‌های نوسانی و غیرنوسانی نیز در این نمودار کاملاً تفکیک شده‌اند: چنانکه از شکل ۸-۹ مشخص است، خط مرزی مربوط، که روی یا فوق آن مدلها نوسان نمی‌کنند، برای مدل‌های با $k \leq 0$ معادل $\Lambda = 0$ است، و برای $k > 0$ معادل $\Lambda = \Lambda_E$. معادلهٔ خم اولی

$$\sigma_0 - q_0 = 0 \quad (98-9)$$

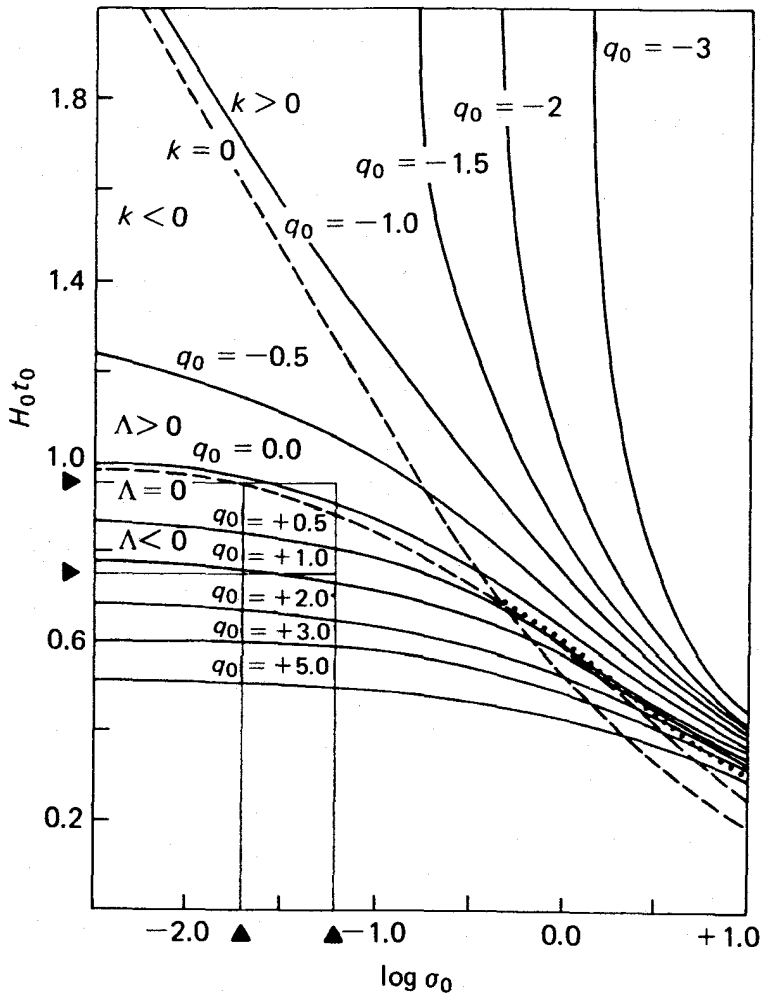
و دومی

$$27(\sigma_0 - q_0)\sigma_0^2 = (3\sigma_0 - q_0 - 1)^2 \quad (99-9)$$

است، که با نشاندن $\Lambda = \Lambda_E = 4/9C^{-2}$ و $k = 1$ در ۹۱-۹ تا ۹۳-۹ به‌دست می‌آید. این دو

1. Tinsley

۲. روبرتسون، با گرفتن مقدار معینی برای H_0 ، از t_0 و $\log \rho_0$ استفاده کرد. اما مختصات تینسلی این مزیت را دارند که، برای هر مقدار جدید H_0 ، لازم نیست دوباره آنها را مقیاس‌بندی کنیم. به‌علاوه، محدودیت‌های تجربی چگالی بر روی σ_0 است و نه ρ_0 : تعیین دینامیکی جرم خوشه‌های کهکشانی بستگی دارد به رصد حرکت‌های نسبی، که در رابطهٔ $v^2 \propto m/r$ صدق می‌کند؛ اما v را می‌توان به‌صورت انتقال به سرخ رصد کرد، پس $m \propto r$. چگالی باز متضمن تقسیم دیگری است بر (فاصله)^۲، به‌طوری که $H^2 \propto \rho^{-2}$ (فاصله) $\propto \rho$ —چون عدم تعیین در پارامتر هابل \dot{R}/R تنها در مخرج است، دوباره می‌توان صورت را از طریق انتقال به سرخ رصد کرد.
۳. با استفاده از نتایج محاسباتی به‌دست آمده توسط



شکل ۹-۱۰

خم و نیز خم

$$3\sigma_0 - q_0 - 1 = 0$$

(۹-۱۰)

که متناظر است با $k = 0$ ، همگی یکدیگر را در نقطه $\sigma_0 = q_0 = 1/2$ قطع می‌کنند. پس می‌بینیم که در نمودار روبروتسون تمام نقاط زیرخطی که از مکان هندسی $\Lambda = 0$ برای $\sigma_0 < 1/2$ و مکان هندسی ۹-۹ برای $\sigma_0 > 1/2$ تشکیل شده است (نقطه چین در نمودار) متناظرند با مدل‌های نوسانی، و تمام نقاطی که روی یا بالای این خط واقع‌اند متناظرند با مدل‌های غیرنوسانی.

[البته، به‌ازای هر مدل نوسانی دو زمان کیهانی وجود دارد (متقارن نسبت به زمان ماکزیموم انبساط) که متناظرند با یک زوج از مقادیر σ_0 و q_0 . نمودار روبرتسون زمان گذشته را می‌دهد، متناظر با دوره انبساط؛ زیرا مثبتی است بر ریشه مثبت در ۹۷-۹، یعنی روی $H_0 > 0$ ، که یک واقعیت تجربی قطعی است].
اتحاد عددی

$$\sigma_0 = 2.66 \times 10^{28} \frac{\rho_0}{h^2} \quad (10-1-9)$$

که در آن ρ_0 برحسب g/cm^3 و

$$h = \frac{H_0}{100} \quad (10-2-9)$$

برحسب $(\text{km/s})/\text{Mpc}$ است، اتحاد به‌دردخوری است. با استفاده از آن می‌توان "گستره محتمل" چگالی عالم، یعنی

$$\rho_0 = 2 - 6 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3 \quad (10-3-9)$$

را به‌صورت

$$\sigma_0 = 0.2 - 0.6, \quad \log \sigma_0 = (-1.7) - (-1.02) \quad (10-4-9)$$

نوشت، به‌این شرط که برای h هم محتملترین مقدار ۰.۵ را اختیار کنیم. به‌ازای همین مقدار h ، محتملترین مقدار برای سن عالم

$$t_0 = 14 - 18 \times 10^9 \text{ سال} \quad (10-5-9)$$

متناظر می‌شود با

$$H_0 t_0 = 0.74 - 0.95 \quad (10-6-9)$$

این گستره‌ها را در شکل ۹-۱۰ مشخص کرده‌ایم. اگر می‌توانستیم به این گستره‌ها اعتماد کنیم، می‌باید به‌نتیجه $k < 0$ برسیم، یعنی اینکه انحنای عالم منفی است (و بنابراین نامتناهی است). البته، علامت Λ و q_0 باز هم نامشخص می‌ماند، و نیز اینکه آیا عالم همواره منبسط خواهد شد یا

اینکه دوباره خواهد رمبید. اما اگر، به دلایل فلسفی، فرض کنیم $\Lambda = 0$ ، باید نتیجه می‌گرفتیم که عالم دائماً منبسط می‌شود. نمی‌خواهیم به هیچ‌یک از این پرسشها جواب نهایی بدهیم. این مثالی است از کاربرد نمودارهایی از نوع نمودار روبرتسون.^۱ هرگاه به تخمینهای قبلی اعتماد بکنیم، می‌توانیم گستره ممکن برای Λ ، q_0 ، و k/R_0^2 را تعیین کنیم. گستره q_0 از شکل ۹-۱۰ بر خوانده می‌شود:

$$-0.2 < q_0 < 1/2 \quad (107-9)$$

با استفاده از h بنابر تعریف ۹-۱۰۲، از ۹۲-۹ و ۹۳-۹ به دست می‌آوریم

$$\Lambda = 3.5 \times 10^{-56} h^2 (\sigma_0 - q_0) \text{ cm}^{-2} \quad (108-9)$$

$$k/R_0^2 = 1.2 \times 10^{-56} h^2 (3\sigma_0 - q_0 - 1) \text{ cm}^{-2} \quad (109-9)$$

حالا نشانند از معادلات ۹-۱۰۴ و ۹-۱۰۷ در این معادلات (با $h = 0.5$) به تخمینهای زیر منجر می‌شود

$$-10^{-56} \text{ cm}^2 < \Lambda < 0.2 \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \quad (110-9)$$

$$-6.4 \times 10^{-56} \text{ cm}^2 < \frac{k}{R_0^2} < -1.9 \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2} \quad (111-9)$$

۱۲-۹ واری اصل ماخ

اکنون به انتهای بررسیمان از نسبت رسیده‌ایم. خوب است به اختصار به اصل ماخ برگردیم، و ببینیم آیا این اصل، که در ابداع نسبت عام به شدت مؤثر بوده است، حقیقت در نسبت عام ادا شده است یا خیر؟ به یاد داشته باشید که، بنابر ماخ، فضا به خودی خود در فیزیک نقشی نداشته است و بنابراین وجود نداشته است. از طرف دیگر، در نسبت عام فضا نقش دارد، گرچه به صورت فضازمان چهاربعدی. فضازمان کاملاً هر حرکت آزادی را تعیین می‌کند (یعنی هر حرکتی تحت

۱. برای اطلاع از گوناگونی استدلالهایی که اخیراً برای مشخص‌تر کردن مدلها به کار رفته است، و نیز از "ناپایداری" این استدلالها، مثلاً، رجوع کنید به

Gott III J R, Gunn J E, Schramm D N, and Tinsley B M, 1974, *Astrophys J*, **194**, 543; *Sci Am*, March 1976, **234**:62.

Schramm J E, Gunn J E, Tinsley B M, 1972, *Nature*, **257**, 454.

لختی و گرانش)؛ پرسش اینجاست که آیا توزیع ماده هم، به نوبت خود، فضا زمان را کاملاً معین می‌کند. اگر بکند، آنگاه می‌توان فضا زمان را تنها یک یدک ریاضیاتی به حساب آورد، و چنانکه ماخ مطرح می‌کند، این تنها پیکربندی نسبی ماده است که به حساب می‌آید.

قبل از پرداختن به این پرسش، لازم است گفته شود که نسبیت عام دست‌کم در یک مورد، که بسیاری آن را شدیدترین مخالفت ماخ-اینشتین به فضای مطلق تلقی می‌کنند، جوابگوست و آن این مورد است که فضای مطلق تأثیر می‌گذارد ولی نمی‌توان روی آن تأثیر گذاشت: فضا زمان هم روی جرم (به صورت میدان) اثر می‌گذارد و هم می‌توان با جرم روی آن اثر گذاشت (با تغییر انحناء). شاید پیروان ماخ با این فضای نامطلق راضی‌تر باشند تا نبود فضا.

در وضع فعلی، مطمئناً فضا بیش از تنها یک مفهوم کمکی است. مثلاً بنابر معادلات میدان، فضای تخت مینکوفسکی با نبود کامل ماده سازگار است، و با وصف این تعیین‌کننده هر حرکت آزاد است. به علاوه، در کنار فضای مینکوفسکی جوابهای ناکین دیگری از معادلات میدان تصحیح نشده وجود دارد (مانند فضای تاؤ-ب-نات^۱، و فضای اوشوات-شوکینگ^۲). بنابراین یک پیکربندی مادی (در این مورد هیچ ماده) می‌تواند منجر به میدانهای ناهم‌ارز بشود. احتمالاً این مربوط است به وجود امواج گرانشی: فضای مینکوفسکی با امواج گرانشی (انحناء!) که از میان آن می‌گذرد با فضای مینکوفسکی یکی نیست؛ ولی هنوز در معادلات میدان خلأ صدق می‌کند.

البته نبود کامل ماده یک وضعیت واقعی نیست. اما حتی اگر ماده باشد ضمانتی برای جواب یکسان نداریم. معادلات میدان اینشتین معادلات دیفرانسیل‌اند، پس الزاماً در جوابهای آن تا حدی اختیار وجود دارد که تنها با اطلاعات اضافی می‌توان آن را محدود کرد، مانند شرایط مرزی. چنانکه دیدیم، در مورد جواب شوارتس-شیلد تقارن کروی برای اطمینان از یکتایی جواب کافی است. در کیهانشناسی نیز، با قبول اصل کیهانشناختی (و مقداری برای Λ) فضا زمان به صورت یکتا از طریق چگالی و نقش حرکت در یک لحظه کیهانی تعیین می‌شود. اما روشن نیست که در مواردی با توزیع ماده عامتر (مثلاً با تقارن کمتر) شرایط مرزی مختلف منجر به جوابهای مختلف نشوند. به عبارت دیگر، می‌توان انتظار داشت که دو میدان متفاوت متناظر با یک محتوی مادی باشند — مثلاً یک میدان موضعی که به دو امتداد متفاوت خلأ تا بینهایت به طور هموار متصل شده باشد.

حتی جوابهای "پادماخی" برای معادلات میدان با ماده وجود دارد. منظورمان از آن مدل‌هایی برای عالم است که در آن "لختی نمای" موضعی (مثلاً یک آونگ فوکو) نسبت به توزیع سراسری

۱. به عنوان مثال مراجع زیر را ببینید

Misner C W, 1967, Lectures in Applied Mathematics, *Am Math Soc*, 8, 160, (Relativity Theory and Astrophysics, I), ed by J ehlers.

2. Ozsvath I and Schücking E, 1962, in *Recent Developments in General Relativity*, 339, New York, Pergamon Press.

ماده می‌چرخد. مهمترین این نوع جوابها عالم گودل^۱ است (که در کیهانشناسی به‌عنوان یک مدل همگن ولی ناهمسانگرد مهم است) و متریک کیر (نمایشگر یک جسم چرخان در عالم خالی).

ماخ و اینشتین اصل ماخ را همچون یک قاعدهٔ گزینش برای نظریه‌های گرانش به حساب می‌آوردند. تفسیر ملایم این است که به آن همچون یک قاعدهٔ گزینش برای جوابهای نظریه‌های گرانش نگاه شود، تا بتوان جوابهای "نامافی" را حذف کرد. رینه^۲ و دیگران به این نوع قواعد گزینشی پرداخته‌اند. البته می‌توان این قواعد را مانند "شرایط مرزی" دانست که برای کامل کردن نظریه‌ای مبتنی بر معادلات دیفرانسیل لازم است. شیاما رهیافت دیگری دارد و لختی را توسط انتگرالهایی بیان می‌کند که، گرچه ضمنی، نشان می‌دهند چگونه در برخی عالمها از چشمه‌ها ناشی می‌شود. روشهای رینه و شیاما را به‌زحمت می‌توان به‌کار بست، مگر در وضعیتهایی با تقارن خاص.

در نتیجه، به‌زحمت بتوان از این استنتاج گریخت که نسبیت عام تنها بخشی از برنامهٔ ماخ را محقق کرده است. اینشتین، به‌جای حذف کامل فضا، تنها آن را نامطلق کرد؛ و جالب اینکه، اینشتین به‌جای گرانشی دانستن نیروهای لختی، یعنی طبق تصور ماخ، بیان آن به‌صورت ماده‌ای که "بار" لختی را می‌کشد، نیروهای گرانشی را به‌عنوان لختی که فضا آن را تعیین می‌کند، بیان کرد. باید اذعان داشت که، نظریه‌پردازان کوانتومی امروزه تمایلی به اصل ماخ ندارند. آنها اشاره می‌کنند که نه تنها ماده مورد بحث فیزیک است، بلکه میدانها نیز هستند، و نیز اینکه تمام فضا‌زمان پر است از میدانها و ذرات بنیادی. حتی در نبود ماده، میدانها ذرات مجازی زمینه‌ای تشکیل می‌دهند که اصلاً نمی‌توان از آن چشم پوشید. به این زمینه، که موضعاً لورنتس ناورداست، می‌توان همچون یک اتر مدرن نگریست؛ و چون انرژی ندارد، سهمی در انحنا ندارد، پس اثر مستقیمی در نسبیت عام ندارد. اما وجود پیشینی برای فضا‌زمان فرض می‌کند، که ماده آن را خلق نمی‌کند بلکه تنها تغییر می‌دهد.

هرچه باشد، اگر اینشتین واقعاً می‌خواست چارچوبی برای اصل ماخ در نسبیت عامش بیاید، احتمالاً باید نتیجه گرفت که او هم، مانند کریستوف کولمب، به هدفش نرسید. به‌رغم این، در هر دو مورد، عجیب غنی است کشف انجام شده و عجیب فراموش شده هدف اصلی!

1. Gödel K, 1949, *Rev Mod Phys*, **21**, 447.

2. Raine

پیوست الف

مؤلفه‌های تانسور خمش برای متریکهای قطری

یکی از خسته‌کننده‌ترین محاسبات نسبیت عام تعیین نمادهای کریستوفل $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ ، تانسور خمش ریمان $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ، تانسور ریچی $R_{\mu\nu}$ ، ناوردای خمش R ، و تانسور اینشتین $G_{\mu\nu}$ برای یک متریک فضازمان معین است. روشهای گوناگونی برای کوتاه کردن این محاسبات وجود دارد، اما بهتر است به جای اینکه هر بار محاسبه را از ابتدا شروع کنیم، جدولهایی برای چند شکل استاندارد متریک تهیه کنیم. در این پیوست با شکل کلی یک متریک چهاربعدی قطری

$$ds^2 = A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + C(dx^3)^2 + D(dx^4)^2 \quad (\text{الف-۱})$$

کار می‌کنیم. در اینجا A, B, C ، و D توابع دلخواهی از مختصات اند. به‌عنوان یک نتیجهٔ جنبی، بدون کار اضافی، مؤلفه‌های خمش متریکهای قطری دو-سه‌بعدی زیر

$$ds^2 = A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2, \quad ds^2 = A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + C(dx^3)^2 \quad (\text{الف-۲})$$

هم به‌دست می‌آیند.

قاعدهٔ ۱. مؤلفه‌های $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ ، $R_{\mu\nu}$ ، $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ، و R متریکهای دو-سه‌بعدی الف-۲ به‌این ترتیب از فرمولهای چهاربعدی به‌دست می‌آیند که در حالت سه‌بعدی بگذاریم $D = 1$ (نه صفر!) و

ضرایب باقیمانده را مستقل از x^2 بگیریم، و در حالت دوبعدی بگذاریم $C = D = 1$ و ضرایب باقیمانده را مستقل از x^3 و x^4 بگیریم.

یادآوری می‌کنیم که هر متریک دو-یا سه‌بعدی‌ای را می‌توان "قطری کرد"، یعنی با تبدیل مختصات مناسبی به شکل الف-۲ درآورد؛ همچنین هر متریک فضازمان ایستار (رجوع کنید به متن پس از رابطه ۸-۳۶)، و نیز بسیاری از متریکهای دیگر را. در ادامه کار نمادهای

$$\alpha = \frac{1}{2A}, \quad \beta = \frac{1}{2B}, \quad \gamma = \frac{1}{2C}, \quad \delta = \frac{1}{2D} \quad (\text{الف-۳})$$

و نیز

$$A_{\mu} = \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}}, \quad B_{\nu} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^{\nu} \partial x^{\nu}} \quad (\text{الف-۴})$$

را به کار می‌بریم. به این ترتیب، از تعریف ۸-۱۳ مستقیماً نتیجه می‌شود که

$$\Gamma_{\nu}^{\nu} = 0, \quad \Gamma_{\nu}^{\nu} = -\alpha B_{\nu}, \quad \Gamma_{\nu}^{\mu} = \alpha A_{\mu} \quad (\text{الف-۵})$$

که در آن $\mu = 1, 2, 3, 4$. از این Γ های نوعی همه Γ ها را می‌توان، با جایگشتهایی واضح، به دست آورد (مثلاً $\Gamma_{\nu}^{\nu} = -\beta C_{\nu}$ ، $\Gamma_{\nu}^{\nu} = \delta D_{\nu}$ ، و غیره). قویاً به خواننده توصیه می‌کنیم که جدول کاملی از مؤلفه‌ها تهیه کند و آن را در دسترس داشته باشد. این توصیه ما نه تنها در مورد این روابط، بلکه در مورد همه روابط مشابه در تمام این پیوست است.

از این Γ ها تانسور خمش $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ را بر اساس تعریف ۸-۲۰ و معادله پیش از رابطه ۸-۲۱ به دست می‌آوریم. مؤلفه‌های نوعی زیر به دست می‌آیند

$$R_{1234} = 0 \quad (\text{الف-۶})$$

$$2R_{1212} = -A_{22} + \alpha A_2 A_2 + \beta A_2 B_2 + \gamma A_2 C_2 \quad (\text{الف-۷})$$

$$2R_{1212} = -A_{22} - B_{11} + \alpha(A_1 B_1 + A_1^2) + \beta(A_2 B_2 + B_1^2) - \gamma A_2 B_2 - \delta A_2 B_2 \quad (\text{الف-۸})$$

باز هم، بقیه مؤلفه‌ها را می‌توان با استفاده از جایگشت، و نیز دسته اول تقارنهای ۸-۲۱، از روی این مؤلفه‌های نوعی به دست آورد. برای به دست آوردن فرمولهای دو-سه‌بعدی باید از قاعده ۱ استفاده کرد.

در گام بعدی، تانسور $R_{\mu\nu}$ را براساس تعریف ۸-۳۱ به دست می آوریم. نوعاً نتیجه می شود که

$$R_{12} = \begin{array}{l|l} \gamma C_{12} & +\delta D_{12} \\ -\gamma^{\nu} C_{1} C_{2} & -\delta^{\nu} D_{1} D_{2} \\ -\alpha\gamma A_{2} C_{1} & -\alpha\delta A_{2} D_{1} \\ -\beta\gamma B_{1} C_{2} & -\beta\delta B_{1} D_{2} \end{array} \quad (\text{الف-۹})$$

$$R_{11} = \begin{array}{l|l|l} \beta A_{22} & +\gamma A_{22} & +\delta A_{22} \\ +\beta B_{11} & +\gamma C_{11} & +\delta D_{11} \\ -\beta^{\nu} B_{1}^{\nu} & -\gamma^{\nu} C_{1}^{\nu} & -\delta^{\nu} D_{1}^{\nu} \\ -\alpha A_{1}(\circ & +\beta B_{1} & +\gamma C_{1} & +\delta D_{1}) \\ -\beta A_{2}(\alpha A_{2} & +\beta B_{2} & -\gamma C_{2} & -\delta D_{2}) \\ -\gamma A_{2}(\alpha A_{2} & -\beta B_{2} & +\gamma C_{2} & -\delta D_{2}) \\ -\delta A_{2}(\alpha A_{2} & -\beta B_{2} & -\gamma C_{2} & +\delta D_{2}) \end{array} \quad (\text{الف-۱۰})$$

همه مؤلفه های دیگر با جایگشت های واضحی از روی این دو مؤلفه به دست می آیند. خط چینها جملاتی را نشان می دهند که، به ترتیب، در مورد متریک های دو-سه بعدی باقی می ماند (قاعده ۱).
 ناوردای خم $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ می شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R = & \alpha\beta(A_{22} + B_{11} - \alpha A_{2}^{\nu} - \beta B_{1}^{\nu} - \alpha A_{1} B_{1} - \beta A_{2} B_{2} + \gamma A_{2} B_{2} + \delta A_{2} B_{2}) \\ & + \alpha\gamma(A_{22} + C_{11} - \alpha A_{2}^{\nu} - \gamma C_{1}^{\nu} - \alpha A_{1} C_{1} + \beta A_{2} C_{2} - \gamma A_{2} C_{2} + \delta A_{2} C_{2}) \\ & + \beta\gamma(B_{22} + C_{22} - \beta B_{2}^{\nu} - \gamma C_{2}^{\nu} + \alpha B_{1} C_{1} - \beta B_{2} C_{2} - \gamma B_{2} C_{2} - \delta B_{2} C_{2}) \\ & + \alpha\delta(A_{22} + D_{11} - \alpha A_{2}^{\nu} - \delta D_{1}^{\nu} - \alpha A_{1} D_{1} + \beta A_{2} D_{2} + \gamma A_{2} D_{2} - \delta A_{2} D_{2}) \\ & + \beta\delta(B_{22} + D_{22} - \beta B_{2}^{\nu} - \delta D_{2}^{\nu} + \alpha B_{1} D_{1} - \beta B_{2} D_{2} + \gamma B_{2} D_{2} - \delta B_{2} D_{2}) \\ & + \gamma\delta(C_{22} + D_{22} - \gamma C_{2}^{\nu} - \delta D_{2}^{\nu} + \alpha C_{1} D_{1} + \beta C_{2} D_{2} - \gamma C_{2} D_{2} - \delta C_{2} D_{2}) \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۱})$$

توجه کنید که ضریب $1/4$ در طرف چپ، براساس قاعده ۱، در حالت های دو-سه بعدی هم همان $1/4$ است.

سرانجام، مؤلفه‌های نوعی تانسور اینشتین $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2 Rg_{\mu\nu}$ به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$G_{12} = R_{12}$$

$$\alpha G_{11} =$$

$$\begin{aligned} & \beta\gamma(-B_{22} - C_{22} + \beta B_2^2 + \gamma C_2^2 - \alpha B_1 C_1 + \beta B_2 C_2 + \gamma B_3 C_3 - \delta B_4 C_4) \\ & + \beta\delta(-B_{22} - D_{22} + \beta B_2^2 + \delta D_2^2 - \alpha B_1 D_1 + \beta B_2 D_2 - \gamma B_3 D_3 + \delta B_4 D_4) \\ & + \gamma\delta(-C_{22} - D_{22} + \gamma C_2^2 + \delta D_2^2 - \alpha C_1 D_1 - \beta C_2 D_2 + \gamma C_3 D_3 + \delta C_4 D_4) \end{aligned}$$

(الف-۱۳)

مؤلفه‌های دیگر را می‌توان با جایگشت از روی این مؤلفه‌ها به دست آورد. اما توجه کنید که در اینجا دیگر قاعده ۱ درست نیست.

پیوست ب

طرز "ساخت" نظریهٔ ماکسول

در این پیوست نظریهٔ ماکسول را به عنوان یک نظریهٔ میدان "طبیعی" در چارچوب نسبیت خاص به دست می آوریم. به عنوان پیش نیاز، خواننده باید لا اقل بخشی از محاسبات فصل ۸ را انجام داده باشد تا با عملیات پایهٔ تانسوری آشنا شده باشد. تانسورهایی که به کار می بریم، چارتانسورهای نسبیت خاص، متناظرند با مختصات استاندارد x, y, z, t ، اما با نمادگذاری فصل ۸، به یاد داشته باشید که در این صورت مشتقگیری پاره ای یک عمل همورد است. روشن است که این کار را، با استفاده از مدل بخش ۸-۹، به سادگی می توان به فضازمانهای خمیده هم تعمیم داد.

دیدیم (رجوع کنید به متن پس از رابطهٔ ۵-۳۱) که سه نیروی f ای که بر ذره ای وارد می شود، اگر در یک چارچوب لخت مستقل از سرعت ذره باشد، در یک چارچوب لخت دیگر به یک سه نیروی تابع سرعت تبدیل می شود. پس شرط استقلال از سرعت، یک شرط ناوردایی لورنتسی برای سه نیروها، یا میدانهای سه نیرو، نیست.

اما می شد فرض کرد که میدان چار نیرویی F^{μ} وجود دارد که اثر آن بر یک ذرهٔ معین مستقل از چار سرعت ذره، U^{μ} ، است. از اینجا، با استفاده از ۵-۳۱، نتیجه می شود که سه نیرو برابر است با

$$f = \gamma^{-1}(u)(F^1, F^2, F^3) \quad (ب-۱)$$

و این البته، چنانکه انتظار می رفت، به سه سرعت ذره، u ، بستگی دارد. اما در این صورت رابطهٔ $F \cdot U = 0$ به ازای هر چار سرعت U ذره درست نخواهد بود (مگر اینکه F صفر باشد). پس

این میدان نیرو بر هر ذره‌ای اثر کند جرم سکون آن را تغییر می‌دهد (رابطهٔ ۵-۳۳) — این حالتی است که آن را کنار می‌گذاریم. (با اینهمه، چنین میدانهایی در نظریهٔ مزونها وارد می‌شوند.)
 پس از این حالت، ساده‌ترین حالت — که عملاً هم در نظریهٔ ماکسول وارد می‌شود — میدان نیرویی است که تابعی خطی از سرعت ذره‌ای باشد که میدان بر آن اثر می‌کند. در نسبیت خاص، این حالت به‌طور طبیعی به‌شکل زیر درمی‌آید

$$F^\mu = \frac{q}{c} A_\nu^\mu U^\nu \quad (\text{ب-۲})$$

در اینجا "ضرایب" A_ν^μ در این رابطهٔ خطی باید تانسوری باشند تا معادله لورنتس ناوردا شود، " q بار" متناظر با ذره‌ای است که نیرو بر آن وارد می‌شود، و c برای این وارد شده است که عبارتهایی که در آینده به‌دست می‌آوریم ساده‌تر شوند. باید توجه کرد که q ، برخلاف مثلاً جرم، مستقل از سرعت است زیرا برای اینکه ویژگی تانسوری ب-۲ محفوظ بماند، q باید اسکالر باشد. یعنی مقدار آن در همهٔ چارچوبها برابر با مقدارش در چارچوب لخت ذره باشد. A_ν^μ را تانسور میدانی می‌گیریم که مستقل از باری است که از طریق نیروی ب-۲، تحت تأثیر آن قرار می‌گیرد.
 اگر بخواهیم که نیروی ب-۲ جرم سکون ذره‌ای را که این نیرو بر آن وارد می‌شود تغییر ندهد، با استفاده از ۵-۳۳، لازم است داشته باشیم

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = 0$$

یا

$$g_{\sigma\mu} F^\sigma U^\mu = F_\mu U^\mu = A_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \quad (\text{ب-۳})$$

چون این رابطه باید در مورد هر چارسرعتی درست باشد، لازم است که

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \quad (\text{ب-۴})$$

یعنی تانسور میدان باید پادمتقارن باشد.

این میدان، طبق معادلهٔ ب-۲ بر بارها اثر می‌کند. برعکس، بارها چطور بر میدان اثر می‌کنند؟ پاسخ این سؤال را معادلات میدان می‌دهند. یکی از مشخصات یک نظریهٔ میدان این است که اثر چشمه‌ها ممکن است (اما لازم نیست) از طریق میدان و با سرعتی متناهی منتشر شود؛ در این صورت میدان است که در نهایت بر ذرات آزمون اثر می‌کند نه اینکه چشمه‌ها مستقیماً با نوعی "کنش از راه دور" اثر کنند. به این ترتیب، معادلات میدان معادلات دیفرانسیل‌اند، معادلاتی

که نشان می‌دهند چشمه چه اثری بر میدان در نزدیکی خود دارد و هر بخش میدان چه اثری بر میدان در نقاط همسایه‌اش. نظریه نیوتون را هم می‌توان با یک نظریه میدان بیان کرد (اما در اینجا اثر چشمه آن در میدان منتشر می‌شود). معادله میدان این نظریه $\text{div} g = -4\pi G\rho$ است (رجوع کنید به روابط ۲۸-۸ و ۲۶-۸).

مشابه $\text{div} g$ در نظریه ما A_{ν}^{μ} است نه F_{μ}^{μ} . چون نمی‌شود در معادلات میدان کمیت‌هایی وارد شوند که به سرعت ذرات آزمون بستگی دارند. از طرف دیگر، انتظار داریم که سرعت چشمه بر میدان تأثیر داشته باشد، و این به‌سادگی از این فرض می‌آید که اثر چشمه و میدان باید متقابل باشد: چون اثر میدان بر بارهای آزمون به سرعت این بارها بستگی دارد، اثر چشمه بر میدان هم باید به سرعت چشمه بستگی داشته باشد. پس به اینجا می‌رسیم که این معادله را پیشنهاد کنیم

$$A_{\nu}^{\mu} = k\rho_0 U^{\mu} = kJ^{\mu} \quad (۵-ب)$$

در اینجا k عددی ثابت، U^{μ} چار سرعت چشمه و ρ_0 ویژه چگالی بار (یعنی بار بر واحد حجم همراه چشمه) است که کمیتی اسکالر است. چگالی چار جریان J^{μ} نیز با همین معادله تعریف می‌شود.

طبیعی است فرض کنیم که این بار پایسته است، یعنی تفاضل باری که از حجم معینی خارج می‌شود از باری که به آن حجم وارد می‌شود، به بار درون آن حجم اضافه می‌شود. با استدلالی کاملاً مشابه با آنچه پس از معادله ۵-۵۲ آمد، می‌توان معادله‌ای کاملاً مشابه با ۵-۵۲ به‌دست آورد:

$$J_{,\mu}^{\mu} = 0 \quad (۶-ب)$$

این معادله پیوستگی در نظریه ماست. یکی از ویژگیهای خوب انتخاب ۵-ب به‌عنوان معادلات میدان این است که معادله پیوستگی ۶-ب از این معادلات نتیجه می‌شود، زیرا

$$kJ_{,\mu}^{\mu} = A_{,\nu\mu}^{\mu\nu} = 0 \quad (۷-ب)$$

که این رابطه اخیر ناشی از پادتقارن $A^{\mu\nu}$ و تقارن مشتق‌های دوم است. اما: تانسور میدان $A_{\mu\nu}$ شش مؤلفه مستقل از هم دارد (به‌خاطر پادتقارن $A_{\mu\nu}$ ، فقط شش تا از ۱۶ مؤلفه آن، مربوط به یک تانسور کلی از مرتبه دو، مستقل‌اند) و بردار چشمه فقط چهار مؤلفه مستقل از هم دارد. پس معادلات دیگری هم لازم است. یک راه برای به‌دست آوردن این معادلات آن است که $A_{\mu\nu}$ را، به‌شکل زیر، از چار پتانسیل Φ_{μ} به‌دست بیاوریم

$$A_{\mu\nu} = \Phi_{\mu,\nu} - \Phi_{\nu,\mu} \quad (۸-ب)$$

در این صورت Φ_μ باید، از طریق معادلهٔ

$$g^{\nu\sigma}(\Phi_{\mu,\nu\sigma} - \Phi_{\nu,\mu\sigma}) = kJ_\mu \quad (۹-ب)$$

از J^μ به دست بیاید. این معادله حاصل جایگذاری ب-۸ در ب-۵ است. یک شرط لازم برای رابطهٔ ب-۸ عبارت است از

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = 0 \quad (۱۰-ب)$$

این را به سادگی می‌توان تحقیق کرد. عکس این قضیه هم در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل ثابت می‌شود: ب-۱۰ شرطی کافی برای وجود یک چارتانسیل Φ_μ است که در ب-۸ صدق کند. (این را با شرط مشابه $B_{\mu,\nu} - B_{\nu,\mu} = 0$ برای وجود پتانسیل اسکالر φ ، که در رابطهٔ $B_\mu = \varphi_{,\mu}$ صدق کند، مقایسه کنید.)

ممکن است که دو پتانسیل متفاوت Φ_μ و $\tilde{\Phi}_\mu$ به یک میدان $A_{\mu\nu}$ منجر شوند. اگر چنین باشد، روشن است که بردار $\psi_\mu = \tilde{\Phi}_\mu - \Phi_\mu$ باید در رابطهٔ $\psi_{\nu,\mu} - \psi_{\mu,\nu} = 0$ صدق کند. از اینجا نتیجه می‌شود که اسکالری مثل φ وجود دارد که $\psi_\mu = \varphi_{,\mu}$ ، یعنی

$$\tilde{\Phi}_\mu = \Phi_\mu + \varphi_{,\mu} \quad (۱۱-ب)$$

پس هر دو چارتانسیلی که به یک میدان منجر شوند، اختلافشان در گرادیان یک اسکالر است. این گرادیان، یا "پیمانه"، را می‌توان چنان انتخاب کرد که داشته باشیم

$$\tilde{\Phi}_{,\mu}^\mu = 0 \quad (۱۲-ب)$$

کافی است معادلهٔ $g^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu\nu} = 0$ یعنی

$$\square\varphi = -g^{\mu\nu}\Phi_{\mu,\nu} \quad (۱۳-ب)$$

برآورده شود. \square عبارت است از

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۱۴-ب)$$

در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل ثابت می‌شود که این معادله برای φ جواب دارد. (رجوع کنید به روابط ۸-۱۸۰ و ۸-۱۸۴). پس بی‌آنکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توان فرض کرد که پتانسیل

در رابطه ب-۱۲ صدق می‌کند. در این صورت معادلات میدان ب-۹ از هم واجفتیده می‌شوند و به شکل

$$\square \Phi_{\mu} = k J_{\mu} \quad (\text{ب-۱۵})$$

در می‌آیند. توجه کنید که در نقاطی که بار وجود نداشته باشد، این معادله یک معادله موج با سرعت انتشار c برای Φ_{μ} است. پس آشفتگیهای پتانسیل، و در نتیجه میدان، با سرعت نور منتشر می‌شود. اکنون اصول نظریهٔ ماکسول پیش روی ماست. سه بردارهای \mathbf{e} و \mathbf{h} را چنان تعریف می‌کنیم که

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & h_x & -h_y & ce_1 \\ -h_x & 0 & h_z & ce_2 \\ h_y & -h_z & 0 & ce_3 \\ -ce_1 & -ce_2 & -ce_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ب-۱۶})$$

(این را با رابطه ۶-۱۳ اشتباه نگیرید؛ در آنجا $A^{\mu\nu}$ وارد شده است.) سپس روابط ۵-۳۵ و ۴-۱۰ را در ب-۲ بگذارید. نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{f} = q \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{h}}{c} \right) \quad (\text{ب-۱۷})$$

پس ب-۲ با قانون نیروی لورنتس هم‌ارز است. با تعریف چگالی بار ρ و بردار سه‌جریان \mathbf{j} براساس معادلات زیر

$$J^{\mu} = \rho_0 U^{\mu} = \rho_0 \gamma(u)(\mathbf{u}, 1) = (\mathbf{j}, \rho) \quad (\text{ب-۱۸})$$

(رجوع کنید به بحث پیش از رابطه ۵-۴۸)، دیده می‌شود که اگر بگیریم $k = 4\pi/c$ ، رابطه ب-۵ هم‌ارز می‌شود با

$$\text{div } \mathbf{e} = 4\pi\rho, \quad \text{curl } \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} \quad (\text{ب-۱۹})$$

ب-۱۰ نیز هم‌ارز است با

$$\text{div } \mathbf{h} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (\text{ب-۲۰})$$

اما معادلات ب-۱۹ و ب-۲۰ همان معادلات ماکسول به شکل استانداردند. سرانجام، با تعریف پتانسیل اسکالر φ و سه بردار پتانسیل \mathbf{a} از طریق معادلهٔ

$$\Phi_\mu = (-\mathbf{a}, c\varphi) \quad (\text{ب-۲۱})$$

از معادلهٔ ب-۸ به این روابط آشنا می‌رسیم:

$$\mathbf{e} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \quad \mathbf{h} = \text{curl } \mathbf{a} \quad (\text{ب-۲۲})$$

مسائل

مسائل را طوری مرتب کرده‌ایم که بیشتر با ترتیب عرضه مطالب در متن کتاب سازگار باشد تا ترتیب از آسان به مشکل.

توجه: به‌طورکلی مسائل نسبیّت را باید در دستگاه یکا‌هایی حل کرد که در آن $c = 1$ گرفته می‌شود. ضریب c را می‌توان بعداً در سرتاسر مسئله وارد کرد یا آنکه با موازنه ابعاد فیزیکی آن را در جواب مسئله قرار داد. (تذکرهاى آخر بخش ۸-۲ را مطالعه کنید.)

فصل ۱

۱-۱ رودخانه‌ای به عرض l با سرعت v جریان دارد. شناگری با سرعت $V (> v)$ نسبت به آب شنا می‌کند. او ابتدا از نقطه P روی یکی از ساحلها تا نقطه‌ای روی همان ساحل و به فاصله l از نقطه P ، در خلاف جهت جریان شنا می‌کند و بعد فوراً به P برمی‌گردد. ثابت کنید که زمان کل شنا برابر است با $2Vl/(V^2 - v^2)$. در مرحله بعد، این شناگر از نقطه P به نقطه مقابل روی ساحل دیگر می‌رود و به P برمی‌گردد. ثابت کنید که این بار زمان کل برابر می‌شود با $2l/(V^2 - v^2)^{1/2}$.

۱-۲ با توجه به مسئله قبل، شکل ساده‌شده‌ای از آزمایش مایکلسون-مورلی را عرضه می‌کنیم. آزمایشگاهی با سرعت v درون اتر فرضی حرکت می‌کند. در این آزمایشگاه، دو میله یکسان، یکی در امتداد "رانش اتر" و دیگری عمود بر آن قرار دارد. اگر سرعت نور c نسبت به اتر ثابت باشد، و اگر طولها در امتداد رانش اتر به نسبت $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2}$ کوتاه شوند (نظریه لورنتس)، ثابت کنید که سیگنالهای نوری گسیل شده در امتداد هر دو میله زمان یکسانی برای رفت و برگشت بین دو انتهای میله لازم خواهند داشت. [علاوه براین، خواننده علاقه‌مند می‌تواند نشان دهد - با محاسبه‌ای که احتمالاً در چارچوب اتر ساده‌تر است - که برای یک میله معین بدون توجه به جهت قرار گرفتن آن داخل آزمایشگاه زمان رفت و برگشت نور یکسان خواهد بود؛ خواننده باید در نظر داشته باشد که تنها مؤلفه‌ای از طول میله که موازی رانش اتر است کوتاه‌تر می‌شود.] در عمل،

یک باریکه نوری شکافته می‌شود و در امتداد دو "بازو"ی مساوی و متعامد رفت و برگشت داده؛ باریکه‌ها را پس از بازگشت به نقطهٔ صدور تداخل می‌دهند. آنگاه دستگاه آزمایش را دوران می‌دهند و به مشاهده تغییر احتمالی در طرح، تداخلی می‌پردازند، بدین ترتیب وردهای جهتی زمان رفت و برگشت نور را بررسی می‌کنند.

۳-۱ جزئیات تحلیلی را که از آزمایش کندی-تورنرندیک در زیر می‌آوریم، تکمیل کنید. این آزمایش با فرض اینکه خورشید نسبت به اتر دارای سرعتی متناهی است پیش‌بینی شده است. (آیا این فرض معقول است؟ توجه کنید که کهکشان ما دوران می‌کند و همچنین حرکت تصادفی کوچکی نسبت به سایر کهکشانها دارد.) در نتیجه، سرعت زمین نسبت به اتر که با v نشان داده می‌شود ممکن است از روزی به روز دیگر دستخوش تغییر شود. (چرا؟) در این آزمایش، دو بازوی عمود برهم که مبدأ مشترک و طولهای نامساوی l_1 و l_2 دارند به‌کار می‌روند. نوری با بسامد ν از چشمه‌ای که در مبدأ دو میله قرار دارد شکافته می‌شود و در طول دو میله سفر رفت و برگشت خود را انجام می‌دهد؛ نورهایی که به مبدأ بازگشته‌اند تداخل داده می‌شوند. انقباض طول (مانند آزمایش مایکلسون-مورلی) ایجاب می‌کند که زمانهای بین شکافتگی و ترکیب مجدد باریکه‌های نوری که در طول دو بازو حرکت کرده‌اند، به ترتیب $2c^{-1}\gamma l_1$ و $2c^{-1}\gamma l_2$ باشد، جایی که $\gamma = [1 - (v^2/c^2)]^{-1/2}$. تفاوت تعداد موجها در طول این دو مسیر عبارت است از $2c^{-1}\gamma\nu(l_1 - l_2)$. این عدد با تغییر v عوض می‌شود، چرا که γ به v بستگی دارد. نتیجه منفی (یعنی عدم تغییر نقش تداخلی در آزمایشها در طی یک ماه) لازم می‌آورد که $\gamma\nu$ یعنی اتساع زمان، ثابت باشد.

۴-۱ بنابر نظریه لورنتس، انقباض طول و اتساع زمان باعث می‌شود که مقدار اندازه‌گیری شدهٔ سرعت رفت و برگشت نور در تمام جهتها، در آزمایشگاه S که ممکن است نسبت به چارچوب اتر AS با سرعتی مانند $c < v$ حرکت کند، برابر c باشد. با این حال نشان دهید که اگر ساعتها در S طوری هماهنگ شوند که رویدادهای همزمان در AS با رویدادهای همزمان در S ، مطابقت کند، سرعت رفت یا برگشت نور در S بستگی به جهت خواهد داشت. در مرحله بعد، ثابت کنید که حتی می‌توان سرعت یکطرفهٔ نور را در S ، در تمام جهات برابر c کرد به شرط آنکه تنظیم ساعتها طوری در S انجام شود که همزمانی ساعتها در هر صفحهٔ عمود بر خط حرکت با همزمانی در AS مطابقت کند، اما ساعتایی که در صفحاتی به فاصلهٔ v در S قرار دارند، به اندازهٔ vx/c^2 برابر یکای زمانی S ، با ساعتایی که در AS قرار دارند، در مبدأ زمان اختلاف داشته باشند. [یک راه اثبات ادعای بالا آن است که نشان دهیم، فرضهای فوق ایجاب می‌کنند که مختصات AS و S با تبدیلات لورنتس به هم مربوط شوند. این تبدیلات در بخش ۲-۶ داده شده‌اند؛ این تبدیلات سیگنالهایی با سرعت c را به سیگنالهایی با سرعت c تبدیل می‌کنند، بخش ۲-۷ (ب).]

۵-۱ می‌دانید که جریان الکتریکی در یک سیم راست در اطراف خود خطوط نیروی مغناطیسی دایره‌ای بوجود می‌آورد، طوری که اگر عقربهٔ مغناطیسی را بالای یک جریان افقی بیاویزیم، در وضعیتی افقی عمود بر جریان قرار می‌گیرد. از اصل نسبیت نتیجه بگیرید که در حالت کلی، به

مغناطیس کوچکی که در میدان الکتریکی ایستا حرکت داده شود، گشتاور نیرویی وارد خواهد شد. آیا اثبات مستقیماً از نظریهٔ ماکسول آسان است؟

۶-۱ هر بار الکتریکی که در یک میدان مغناطیسی ایستا حرکت کند، نیرویی عمود بر امتداد حرکت و عمود بر میدان، احساس خواهد کرد. از اصل نسبیت نتیجه بگیرید که بنابراین باید بتوان با حرکت دادن یک مغناطیس در مجاورت یک بار الکتریکی ساکن، بار را به حرکت در آورد. آیا اثبات مستقیم این موضوع با کمک نظریهٔ ماکسول آسان است؟

۷-۱ در دستگاه مختصات دکارتی معینی که نسبت به ستارگان ثابت ساکن است، میله‌ای مغناطیسی روی محور z از $z = -1$ تا $z = +1$ قرار گرفته است؛ یک گلولهٔ آقطی باردار در نقطهٔ $(1, 0, 0)$ گذاشته شده است؛ یک پوستهٔ جرم‌دار کروی به مرکز مبدأ مختصات، تمامی این دستگاه را احاطه کرده است. وقتی پوسته حول محور z دوران کند، گلولهٔ آقطی به کدام سمت حرکت خواهد کرد؟ (قطبیدگی مغناطیس، علامت بار و جهت دوران را به حساب آورید.)

۸-۱ اگر اصل ماکسول درست باشد، شدت میدان گریز از مرکز f در هر نقطه از درون پوستهٔ جرم‌داری که با سرعت زاویه‌ای ω (شکل ۱-۲ (ب)) دوران می‌کند باید — دست‌کم در تقریب اول — با ω^2 و فاصلهٔ عمودی r از محور دوران متناسب باشد. چرا؟ به علاوه، فرض کنید که f با جرم پوستهٔ M و عکس شعاع پوستهٔ R متناسب باشد، یعنی $f = k\omega^2 r M/R$ که k ثابت است. اگر عالم را به شکل سادهٔ گویبی عظیم از مادهٔ رقیقی به چگالی 10^{-21}g/cm^3 در نظر بگیریم که شعاع آن 10^{21}cm باشد، ثابت کنید برحسب یکاهای cgs داریم $k \approx 1.6 \times 10^{-28}$. (در بعضی از نظریات کیهانشناسی، چنین شعاع ”مؤثر“ی برای عالم اطراف هر ناظر وجود دارد.) تیرینگ در مقالهٔ مشهوری بر مبنای نسبیت عام، بدون استفاده از هیچ فرضی در مورد چگالی و شعاع جهان، نتیجه می‌گیرد $k \sim 10^{-29}$. توافق این دو مقدار از نظر مرتبهٔ بزرگی بسیار قابل توجه‌تر از اختلاف آنهاست.

۹-۱ در نظریهٔ نیوتونی، جرم لختی (m_I) و جرم گرانشی اثرگذار و اثرپذیر (m_A و m_P)، نه تنها در یک دستگاه یکاهای مناسب از نظر عددی مساوی‌اند، بلکه همگی مثبت هستند. حال امکان وجود جرم‌های منفی را بررسی می‌کنیم. آیا امکان دارد m_I تمامی ذرات منفی باشد؟ آیا ممکن است برخی ذرات دارای m_I منفی باشد درحالی‌که بقیهٔ ذرات دارای m_I مثبت هستند؟ (یک برخورد رو دررو را در نظر بگیرید.) اکنون فرض کنید m_I برای تمامی ذرات مثبت است. یک ذرهٔ عادی و یک ذرهٔ ”غیرعادی“ (با $m_A = m_P < 0$) تحت اثر گرانش متقابل خود چگونه حرکتی می‌توانند داشته باشند؟ دو ذرهٔ غیرعادی در اثر گرانش متقابلشان چه حرکتی می‌توانند داشته باشند؟ یک ذرهٔ غیرعادی در میدان گرانشی زمین چگونه حرکتی می‌تواند انجام دهد؟ آیا وجود ذرات غیرعادی می‌تواند قانون سوم نیوتون، یا اصل گالیله را نقض کند؟ یک ذرهٔ عادی و ذره‌ای با (الف) $m_A > 0$ و $m_P < 0$ ، (ب) $m_A < 0$ و $m_P > 0$ ، تحت اثر گرانش متقابلشان چه حرکتی می‌توانند انجام دهند؟ آیا وجود ذراتی از نوع اخیر می‌تواند قانون سوم نیوتون یا اصل

گالیله را نقض کند؟

۱-۱۰ با اعتقاد به اینکه تابش از باری الکتریکی که نسبت به یک دستگاه لخت شتاب دارد سرچشمه می‌گیرد، آیا می‌توانید از اصل هم‌ارزی نتیجه بگیرید که باری که نسبت به میدان گرانشی زمین ساکن است تابش کند؟ آیا پاسخ شما پایستگی انرژی را نقض می‌کند؟ با توجه به اصل هم‌ارزی، آیا می‌توان انتظار داشت باری که در میدان گرانشی زمین در حال سقوط آزاد است تابش کند؟ آیا یک فیزیکدان پیش از نسبت می‌توانست انتظار داشته باشد که هیچیک از این دو بار تابش کند؟ توجه داشته باشید که تابش پدیده ساده و مطلقاً که ممکن است تصور بشود، نیست.^۱

۱-۱۱ در آزمایش آسانسور که در بند دوم بخش ۱-۲۱ بحث شده، ثابت کنید که سرعت نسبی ناظرهای A و B برابر است با gl/c ، که g شتاب گرانشی و l ارتفاع اتاقک است. دستگاههای موساوتری وجود دارند که می‌توانند انتقال دوپلر ایتمیکی مربوط به سرعتهای چشمه‌ای حدود 10^{-4} cm/s (یا ۴ mm بر ساعت!) را با خطایی قابل اغماض اندازه‌گیری کنند. یک چشمه نوری که بر فراز برجی در حال سکون است، با یکی از این دستگاهها که در پای برج قرار داده شده، آزمایش می‌شود. ارتفاع برج را چقدر بگیریم تا "پدیده دوپلر گرانشی" قابل اندازه‌گیری باشد؟ [~ 30 m]

فصل ۲

۲-۱ فرض کنید که از قانون پایستگی انرژی اطلاع دارید ولی در مورد قانون پایستگی تکانه چیزی نشنیده‌اید. با استفاده از نسبیت نیوتونی (بخش ۲-۳) و ملاحظات مربوط به تقارن، ثابت کنید که اگر تپله بیلاردی با تپله ساکنی برخورد رودررو کند، و در این برخورد انرژی تلف نشود، تپله دوم سرعت تپله اول را به دست می‌آورد، درحالی‌که تپله اول به حالت سکون کلی درمی‌آید. آیا می‌توانستید این مسئله را مستقیماً، بدون توسل به نسبیت حل کنید؟

۲-۲ صفحه تخت سنگینی با سرعت یکنواخت v در امتداد عمود برخورد در چارچوبی لخت حرکت می‌کند. در این صفحه، تپلی را با سرعت u در امتدادی که با عمود بر صفحه زاویه θ می‌سازد پرتاب می‌کنیم. با این فرض که جرم صفحه بینهایت است (پس زده نمی‌شود) و اتلاف انرژی وجود ندارد، از نسبیت نیوتونی استفاده کنید و نشان دهید که توپ صفحه را با سرعت w در امتدادی که با عمود بر صفحه زاویه ϕ می‌سازد ترک می‌کند، طوری که

$$\frac{u}{w} = \frac{\sin \phi}{\sin \theta}, \quad \frac{u \cos \theta + v}{u \sin \theta} = \cot \phi$$

۲-۳ در مکانیک نیوتونی جرم ذرات ناورد است، یعنی مقدار آن در تمام چارچوبهای لخت یکسان است. به‌علاوه، در هر برخورد، جرم پایسته است، یعنی جرم کل ذراتی که وارد برخورد می‌شوند با جرم کل ذراتی که از برخورد خارج می‌شوند (و امکان دارد با ذرات ورودی متفاوت

1. Kovetz A and Tauber G E, 1969, *Am J Phys*, 37, 382.

باشند) برابر است. این قانون پایستگی جرم را از ناوردا بودن جرم، پایستگی تکانه و نسبیت نیوتونی نتیجه بگیرید. [راهنمایی: فرض کنید \sum^* برای حاصل جمعی به کار رود که در آن جملات اندازه‌گیری شده قبل از یک برخورد معین با علامت مثبت و جملات اندازه‌گیری شده پس از برخورد با علامت منفی وارد شوند. در این صورت پایستگی تکانه با $\sum^* m\mathbf{u} = 0$ بیان می‌شود. همچنین اگر کمیت‌های پریمدار به چارچوب لختی که نسبت به چارچوب اولی با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند مربوط باشند، به ازای تمام \mathbf{u} ها خواهیم داشت $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$. به همین ترتیب ثابت کنید که اگر در برخوردی انرژی جنبشی $\sum mu^2/2$ در تمام چارچوب‌های لخت پایسته باشد، آنگاه جرم و تکانه نیز باید پایسته باشند.

۴-۲ الف) نموداری با دقت قابل قبول رسم کنید که تغییرات $\gamma(v)$ را بر حسب v ، به ازای v بین صفر و c ، نشان دهد. (ب) تقریبی را که در بخش ۲-۷ برای γ داده شده است اثبات کنید. [راهنمایی: $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = (1 - v/c)(1 + v/c)$].

۵-۲ روابط مفید زیر را اثبات کنید

$$\gamma v = c(\gamma^2 - 1)^{1/2}, \quad c^2 d\gamma = \gamma^3 v dv, \quad d(\gamma v) = \gamma^2 dv$$

۶-۲ اگر دو رویداد در چارچوب لخت S در یک نقطه روی دهند، ثابت کنید که ترتیب زمانی در تمام چارچوب‌های لخت یکسان خواهد بود و همچنین کمترین فاصله زمانی در S به این دو رویداد نسبت داده می‌شود. این مسئله را به روش جبری حل کنید و بعد به کمک نمودار مینکوفسکی آن را توضیح دهید. (در شکل ۲-۳، می‌توان نشان داد که مماس بر هر هذلولی $t^2 - x^2 = \text{const.}$ در نقطه تقاطع با محور t' موازی است با محور x' و برعکس.)

۷-۲ ثابت کنید که ترتیب زمانی دو رویداد در تمام چارچوب‌های لخت یکسان خواهد بود اگر و تنها اگر بتوان آنها را با سیگنالی که سرعتش برابر سرعت نور یا کمتر از آن باشد به هم وصل کرد. (بندی را که شامل رابطه ۲-۱۳ می‌شود نگاه کنید). نتیجه را به کمک نمودار مینکوفسکی توضیح دهید.

۸-۲ دو رویداد را که مختصات (x, y, z, t) آنها نسبت به چارچوب لخت S عبارت‌اند از $(0, 0, 0, 0)$ و $(2, 0, 0, 1)$ در نظر بگیرید (اعداد در دستگاه یک‌گاهی داده شده‌اند که در آن $c = 1$). سرعت‌های چارچوب‌هایی را بیابید که با S در پیکربندی معیار هستند و در آنها (الف) دو رویداد همزمان هستند، (ب) رویداد دوم، یک واحد زمان از رویداد اول جلوتر باشد. آیا چارچوبی وجود دارد که در آن رویدادهای مزبور در یک نقطه اتفاق افتند؟ $(4c/5, 1/2c)$

۹-۲ آزمایش واقع‌گرایانه‌تری از آزمایش گاراز و نیزه بخش ۲-۱۲ ابداع کنید، طوری که بتوان انقباض طول را به‌طور تجربی، با دستگاه‌های حساس اندازه گرفت.

۱۰-۲ "ساعت نوری" تشکیل شده است از دو آینه که در دو انتهای میله‌ای قرار گرفته‌اند و یک فوتون می‌تواند بین آن دو رفت و آمد کند. بدون استفاده از فرض اتساع زمان، ثابت کنید که

وقتی این ساعت در یک چارچوب مرجع (الف) حرکت طولی، (ب) حرکت عرضی، دارد به میزانی که انتظار می‌رود کند خواهد شد. [راهنمایی: در حالت (الف) از سرعت‌های "متقابل" فوتون و آینه‌ها استفاده کنید.]

۱۱-۲ در شکل ۲-۴، سرعت نسبی چارچوب‌های S و S' را به دست آورید، همچنین فاصله ساعت‌های مجاور در هر چارچوب و سرعت نسبی S' و S'' را تعیین کنید. $c[\sqrt{2}/3]$ ، $[\sqrt{2}c/2, \sqrt{2} \times 300000 \text{ km}]$

۱۲-۲ کامپیوتری در MIT برای نشان دادن تأثیر تبدیلات لورنتس فعال با سرعت دلخواه $v < c$ ، بر رویدادهای صفحه (x, t) برنامه‌ریزی شده است؛ تصاویر روی صفحه نمایش پرتوهای کاندی ظاهر می‌شود. محورهای متعام x و t روی صفحه با واحدهایی نمایش داده می‌شوند که همواره $c = 1$ است. متصدی دستگاه با قلم نوری نقاط مختلفی را که نشان‌دهنده رویداد در چارچوب S است مشخص می‌کند، و بعد "دگمه سرعت" را "فشار می‌دهد" تا سرعت به مقدار مورد نظر v برسد. سرعت از صفر شروع شده به طور پیوسته افزایش می‌یابد؛ با این کار، رویدادها به موقعیت جدیدشان می‌روند، که با مختصات جدید x و t آنها در S' مشخص می‌شود. چارچوب S' نسبت به S با سرعت v حرکت می‌کند. ثابت کنید: (الف) هر نقطه منفرد، یک هذلولی را ترسیم می‌کند، (ب) نقاطی که روی نیمسازهای b_1 و b_2 ، نیمسازهای زوایای بین دو محور x و t قرار دارند، در طول همین نیمسازها حرکت می‌کنند، (ج) هر سه نقطه همخط، همخط باقی می‌مانند، (د) دو خط موازی از نقاط، موازی می‌مانند، (ه) خطی از نقاط (غیر از b_2) که بر b_1 عمود است، عمود بر b_1 حرکت می‌کند. و سرانجام راهی پیشنهاد کنید تا با این وسیله انقباض طول و اتساع زمان را نشان دهیم.

۱۳-۲ چارچوب‌های S و S' ، دو پیکربندی معیار هستند. در S' ، میله‌ای که موازی محور x' است در امتداد y' با سرعت u حرکت می‌کند. نشان دهید که این میله در S نسبت به محور x مایل است و با آن زاویه $\tan^{-1}(\gamma uv/c^2)$ می‌سازد. همچنین نشان دهید میله‌ای که حرکتی دلخواه دارد اما در طول حرکت در S' موازی محور y' باقی می‌ماند، در S موازی محور y خواهد ماند. [برای حل کردن بخش اول مسئله راه‌های زیادی وجود دارد؛ یکی از راه‌ها آن است که فواصل نقاط مختلف میله از محورهای x را ساعت‌هایی در نظر بگیریم.]

۱۴-۲ دو چارچوب S و S' در پیکربندی معیار هستند. در S ، تیغه گیوتینی که شیب ملایمی دارد و در صفحه (x, y) واقع است در امتداد y سقوط می‌کند و از کنار مکعبی که در سطح محور x قرار دارد طوری می‌گذرد که نقطه تقاطع تیغه و مکعب با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت می‌کند. در چارچوبی مانند S' ، همانطور که دیده‌ایم، نقطه تقاطع در جهت مخالف حرکت می‌کند. توضیح دهید که از نقطه نظر S' ، چگونه این امر ممکن است.

۱۵-۲ فرض کنید میله‌ای که در آخر بخش ۲-۷ تشریح شد روی محور x' ، بین نقاط $0^\circ = x' = l'$ و $0^\circ = x' = l'$ به‌ازای تمام زمان‌های $t' < 0^\circ$ در حال سکون باشد، و در زمان $t' = 0^\circ$ این میله شتابدار

شود. در یک نمودار x, y دنباله‌ای از عکسهای فوری این میله در S را مشخص کنید، از حالتی شروع کنید که میله روی محور x و مستقیم است.

۱۶-۲ در چارچوب S' ، میله مستقیمی در صفحه x' و y' با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω به طور پاد ساعتگرد حول مرکزش که روی مبدأ ثابت شده است، می‌چرخد. در زمان t' ، میله روی محور x' قرار دارد. شکل دقیق میله را در چارچوب عادی دیگری مانند S ، در زمان $t = 0$ بیابید، و نموداری برای تشریح این شکل بکشید. همچنین نشان دهید که اگر میله در S' بر x' عمود باشد، در S مستقیم دیده خواهد شد.

۱۷-۲ در بخش ۱۴-۲ دوقلوهای A و B را بررسی کردیم که برای یکدیگر سیگنالهایی می‌فرستند که به حساب خودشان در فاصله‌های زمانی مساوی فرستاده می‌شود؛ B در یک چارچوب لخت ساکن است، درحالی‌که A دور می‌شود، دور می‌زند و برمی‌گردد. با استفاده از مختصات B ، یک نمودار مینکوفسکی رسم کنید که جهانخطهای دوقلوه‌ها و سیگنالهای آنها را نشان دهد. همچنین مجموعه‌ای از همزمانیهای A را چه در طول سفر رفت و چه سفر برگشت او رسم کنید. توجه داشته باشید که اگر A دفعتاً دور بزند، بخشی متناهی از وسط جهانخط B برای او وجود خارجی نخواهد داشت.

۱۸-۲ در چارچوب لخت مفروضی، دو ذره، همزمان از نقطه‌ای مفروضی، با سرعتهای مساوی v و در جهتهای عمود برهم شلیک می‌شوند. سرعت هر ذره نسبت به ذره دیگر چقدر خواهد بود؟ $[v^2(2 - (v^2/c^2))]^{1/2}$

۱۹-۲ با توجه به نمادگذاری بخش ۱۵-۲ ثابت کنید که در مورد سرعتهای همخط از $u = v + u'(-v)$ نتیجه می‌شود. ثابت کنید که اگر دو ذره در چارچوب مفروضی به طور همخط و با سرعتهای u و v حرکت کنند، سرعت نسبی آنها $|u + (-v)|$ خواهد بود.

۲۰-۲ دو ذره که به فاصله 10^6 m از هم قرار دارند، به طور همخط حرکت می‌کنند. سرعت ذره جلویی 999 km/s و سرعت ذره عقبی 1000 km/s نسبت به چارچوب S است. به زمان S ، چقدر طول می‌کشد تا این دو ذره برخورد کنند؟

۲۱-۲ میله‌ای به طول ویژه 8 cm در چارچوب لخت S ، با سرعت $0.8c$ ، حرکت طولی دارد. این میله از کنار ذره‌ای که در S با سرعت $0.8c$ در جهت مخالف حرکت می‌کند می‌گذرد. به زمان S ، چه مدت طول می‌کشد تا ذره طول میله را طی کند؟

۲۲-۲ تبدی ϕ را برای ذره‌ای که با سرعت u حرکت می‌کند، به صورت $\phi = \tanh^{-1}(u/c)$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که تبدیهای همخط جمع‌پذیرند، یعنی اگر تبدی A نسبت به B برابر ϕ باشد و تبدی B نسبت به C برابر ψ باشد، آنگاه A نسبت به C تبدی $\phi + \psi$ خواهد داشت.

۲۳-۲ چند بار نمو سرعت متوالی $1/2c$ لازم است تا از چارچوب سکون لحظه‌ای به سرعت $0.999c$ (الف) $0.999c$ (ب) برسیم؟ [راهنمایی: $\tanh 0.5 = 0.999$ ، $\tanh 2.65 = 0.999$]

۲۴-۲ با فرض $\phi = \tanh^{-1}(u/c)$ و $e^{\phi} = z$ ، ثابت کنید که n نمو سرعت متوالی u از چارچوب سکون لحظه‌ای، سرعت $c(z^n - 1)/(z^n + 1)$ را به وجود می‌آورد.

۲۵-۲ ذره‌ای که در چارچوب لخت S حرکت می‌کند، در چارچوب سکون خود دارای شتاب α است که بر v ، یعنی سرعت ذره در S ، عمود است. شتاب ذره در S چیست؟ آیا این شتاب بر v عمود است؟

۲۶-۲ یک تکه کش وقتی آنقدر کشیده شود که طولش به دو برابر حالت عادی برسد پاره می‌شود. در زمان $t = 0$ ، تمام نقاط این کش از حالت سکون بدون کشش و مستقیم، شتاب طولی می‌گیرند و با ویژه‌شتاب ثابت α حرکت می‌کنند. ثابت کنید که در زمان $t = \sqrt{3}c/\alpha$ کش پاره می‌شود.

۲۷-۲ حرکت راستخط با ویژه‌شتاب ثابت α را که با معادلات ۳۲-۲ تا ۳۴-۲ توصیف شده است در نظر بگیرید. فرض کنید τ ویژه‌زمانی باشد که برای ذره متحرک می‌گذرد و وقتی $t = 0$ داریم $\tau = 0$. در این صورت خواهیم داشت $d\tau/dt = [1 - (u^2/c^2)]^{1/2}$. اینک روابط زیر را ثابت کنید

$$at/c = \sinh(\alpha\tau/c), \quad \alpha x/c^2 = \cosh(\alpha\tau/c)$$

$$u/c = \tanh(\alpha\tau/c), \quad \gamma(u) = \cosh(\alpha\tau/c)$$

توجه دارید که سومین رابطه را می‌توان به صورت $c\phi = \alpha\tau$ نوشت که در آن ϕ تندی است.

۲۸-۲ با این فرض که g ، شتاب گرانش در سطح زمین 980 cm/s^2 ، و هر سال $10^7 \times 365$ ثانیه است. ثابت کنید که برحسب یکاهای سال و سال نوری داریم $g \approx 1$. موشکی از حال سکون در چارچوب لخت S با ویژه‌شتاب ثابت g راه می‌افتد (و بدین ترتیب، بیشترین آسایش را برای مسافرتش فراهم می‌کند). عامل لورنتس این موشک را نسبت به S ، وقتی که ساعت موشک زمانهای 10 سال، 1 سال، 1 روز τ را نشان می‌دهد. به دست آورید فاصله‌ها و زمانهای متناظر در S را نیز بیابید. اگر موشک به زمان خودش 10 سال شتاب بگیرد و بعد 10 سال در جهت مخالف شتاب بگیرد و از سرعتش کم کند و آنگاه تمامی این حرکات را در جهت مخالف تکرار کند، کل زمانی که در S در غیاب موشک می‌گذرد چقدر است؟ $[36 \times 10^7 = \gamma, 13 \times 10^7, 36 \times 10^7 = x, 36 \times 10^7 = \gamma, 12 \times 10^7 = x, 12 \times 10^7 = \gamma]$

۲۹-۲ دو چارچوب لخت S و S' در بیکر بندی معیار هستند. چارچوب سوم S'' با سرعت v در امتداد v حرکت می‌کند و محورهای آن با محورهای S' موازی است. اگر امتداد حرکت

نسبی S و S'' با محورهای x و x'' ، به ترتیب زوایای θ و θ'' بسازد، ثابت کنید که

$$\tan \theta = v'/v\gamma(v), \quad \tan \theta'' = v'\gamma(v')/v$$

[راهنمایی: از ۲۶-۲ استفاده کنید.] میل $\delta\theta$ ی S'' نسبت به S با $\theta'' - \theta$ تعریف می‌شود. اگر $v \ll c$ باشد، ثابت کنید که $\delta\theta = vv'/2c^2$. اگر ذره‌ای در چارچوب مفروض S با سرعت $v \ll c$ حرکت دایره‌ای انجام دهد و میل نسبی چارچوبهای سکون لحظه‌ای متوالی، مثلاً S' و S'' ، همواره صفر باشد، ثابت کنید که پس از یک دوران کامل؛ چارچوب سکون لحظه‌ای به اندازه زاویه $\pi v^2/c^2$ در جهت مخالف حرکت کج خواهد شد. [”تقدیم تانس” راهنمایی: یک مماس و شعاع دایره را بر محورهای x' و x'' منطبق بگیرید. در آن صورت شعاع $a = v^2 dt/dv$]

فصل ۳

۱-۳ در سالهای پیش از ابداع نسبیت، تلسکوپی را در روی زمین که بنا به فرض در داخل اتر حرکت می‌کرد، روی یک ستاره میزان و سپس از آب پر کردند؛ با وجود این، تنظیم تلسکوپ برای ستاره برهم نخورد و ستاره روی تارهای رتیکول باقی ماند. به‌طور کیفی نشان دهید که این فقط در صورتی امکانپذیر است که اتر تا حدودی توسط آب کشیده شود. [آزمایش آیری، ۱۸۷۱/۱۲۵۰].

۲-۳ وضعیتی را توصیف کنید که در آن فرمولهای نسبیتی و کلاسیک انتقال دوپلری را مخالف هم پیشگویی کنند، یعنی $\lambda/\lambda_0 > 1$ و $\lambda/\lambda_0 < 1$ [راهنمایی: رابطه ۳-۳ را ببینید].

۳-۳ یک چشمه نور با سرعت $c/2$ در امتداد محور y و یک ناظر با سرعت $c/2$ در امتداد x حرکت می‌کند. فاصله چشمه از مبدأ هنگام گسیل یک سیگنال برابر است با فاصله ناظر از مبدأ هنگام دریافت سیگنال. ناظر چه اثر دوپلری را می‌بیند؟ $[(2\sqrt{2} + 1)/(2\sqrt{2} - 1)]$

۴-۳ یک سکوی دایره‌ای به شعاع r که مرکز آن در یک چارچوب مرجع لخت ثابت است، با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. انتقال دوپلری نوری را که از یک چشمه در مرکز به ناظری بر لبه سکوی می‌رسد، به هر دو روشی که در پاراگراف بعد از رابطه ۵-۳ توصیف شد، محاسبه و آن را با رابطه ۶-۳ مقایسه کنید.

۵-۳ در میله‌ای که به صورت هذلولوی حرکت می‌کند (بخش ۱۶-۲) یک سیگنال نور از چشمه ساکن در نقطه $X = X_1$ به ناظر ساکن در $X = X_2$ روی میله می‌رسد. ثابت کنید که λ_2/λ_1 انتقال دوپلری نور، با X_2/X_1 برابر است. [راهنمایی: به شکل ۵-۲ مراجعه و آن را به چارچوبی تبدیل کنید که در آن ناظر در لحظه دریافت سیگنال در حال سکون باشد].

۶-۳ با استفاده از روابط ۵-۳ و ۸-۳ رابطه زیر را میان انتقال دوپلری و ابیراهی به دست آورید

$$\lambda/\lambda' = \sin \alpha / \sin \alpha'$$

۷-۳ فرض کنید Δt و $\Delta t'$ اختلاف زمانی در دو چارچوب متعارف S و S' باشد که بین دو رویداد روی یک فوتون آزاد رخ می‌دهد. اگر بسامد فوتون در این چارچوبها ν و ν' باشد ثابت کنید که $\nu/\nu' = \Delta t/\Delta t'$. آیا این رابطه را به صورت دیگری حدس می‌زدید؟ [راهنمایی: از نتایج مسئله قبل استفاده کنید.]

۸-۳ با تعویض نمادهای پریم‌دار و بدون پریم و قرار دادن $-v$ به جای v در فرمول دوپلر ۵-۳، فرمول ابیراهی زیر را به دست آورید

$$\gamma^2 [1 + (v/c) \cos \alpha] \times [1 - (v/c) \cos \alpha']$$

همین را از رابطه ۸-۳ نتیجه بگیرید. چرا این روش یک تکنیک معتبر برای استخراج روابط جدید است؟

۹-۳ یک دیسک دایره‌ای، که محور آن بر محور x چارچوب S منطبق است، در یک نقطه با x منفی ثابت شده است. به دقت توصیف کنید که ناظرهای مختلفی که از مبدأ می‌گذرند و در امتداد محور x با سرعت‌های متغیر از $-c$ تا $+c$ در حرکت‌اند این دیسک را چگونه می‌بینند. به خصوص، سرعت‌های خیلی زیاد با علامت مثبت را در نظر بگیرید. آیا همین وضعیت در نظریهٔ پیش‌نسبیتی خیلی متفاوت است؟ اگر ناظر را ثابت و دیسک را متحرک در نظر بگیریم، شاید نتایج بالا کمتر تعجب‌آور باشد.

۱۰-۳ دو ناظر که در یک آن برهم منطبق‌اند به سمت یک شیء کوچک و دور در حرکت‌اند. این شیء به نظر یکی از این دو ناظر دو برابر دیگری می‌رسد. سرعت نسبی آنها را پیدا کنید. [۳c/۵]

۱۱-۳ یک وسیلهٔ آتش‌بازی که در حال سکون منفجر می‌شود، جرقه‌هایش را به طور یکنواخت در تمام جهتها پراکنده می‌کند. اما وسیلهٔ آتش‌بازی که با سرعت زیاد در حرکت است، بیشتر جرقه‌هایش در جهت رو به جلو گسیل می‌شود. این وضعیت بیشتر شبیه به چشمهٔ نوری است که در چارچوب سکون به صورت همسانگرد تابش می‌کند. ثابت کنید هنگامی که چشمهٔ نور با سرعت v حرکت می‌کند، نیمی از تمامی فوتونهایش را در یک مخروط رو به جلو، که نیم‌زاویهٔ آن با $\cos \theta = v/c$ داده می‌شود، می‌تاباند. [این زاویه ممکن است کاملاً کوچک باشد؛ به دلایل روشن این پدیده را "اثر چراغ جلو" می‌نامند.]

۱۲-۳ یک پرتو نور از آینهٔ تختی که با سرعت v در جهت عمود بر آینه پیش می‌رود بازمی‌تابد. ثابت کنید که زاویه‌های تابش و بازتاب با رابطهٔ زیر

$$\frac{\tan(\frac{1}{2}\theta)}{\tan(\frac{1}{2}\phi)} = \frac{(c+v)}{(c-v)}$$

و طول موجهای قبل و بعد از بازتاب، λ_1 و λ_2 با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{c \cos \theta + v}{c \cos \phi - v} = \frac{c + v \cos \theta}{c - v \cos \theta}$$

۱۳-۳ ذره‌ای با سرعت یکنواخت u در چارچوب مرجع S حرکت می‌کند و با محور مثبت x زاویه α می‌سازد. ثابت کنید:

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\gamma(v) [\cos \alpha - (v/u)]} = \frac{\tan \alpha}{\gamma(v) [1 - (v/u) \cos \alpha]}$$

و آن را با روابط ۷-۳ و ۸-۳ مقایسه کنید.

۱۴-۳ رابطه $x \cos \alpha + y \sin \alpha = -ct$ را در چارچوب مرجع S در نظر بگیرید. این رابطه به‌ازای مقادیر ثابت α نمایش صفحه‌ای است که با سرعت c در جهت عمود بر صفحه پیش می‌رود؛ این جهت با صفحه (x, y) موازی است و با محور منفی x زاویه α می‌سازد. بدیهی است که ما می‌توانیم این صفحه را جبهه نور بنامیم. چارچوب x, y, t را مستقیماً به چارچوب معمولی S' تبدیل کنید، و از رابطه حاصل فرمول ابیراهی زیر را برای عمود بر موج به‌دست آورید

$$\tan \alpha' = \sin \alpha / \gamma [\cos \alpha + (v/c)]$$

این رابطه معادل روابط ۷-۳ و ۸-۳ است. از این رو، ابیراهی جبهه‌موجها در نسبیت خاص همان ابیراهی پرتوهاست. تحقیق کنید که سرعت موج در S' برابر c است.

۱۵-۳ با استفاده از شکل ۱-۳ و تصویرهای آن یک طرح تقریبی رسم کنید و نشان دهید که چگونه برخی ناظرهای لخت می‌توانند یک چرخ (یا قرص) با حرکت یکنواخت را به‌شکل بومرنگ ببینند. ۱۶-۳ مکعبی که اضلاع آن موازی محورهای مختصات است با ضریب لورنتس ۳ در امتداد محور x یک چارچوب لخت حرکت می‌کند. با پرتوهای نور موازی محور z ، یک «عکس فوق سریع» از این مکعب در صفحه $z = \text{const.}$ گرفته می‌شود. این عکس فوق سریع را به‌دقت رسم کنید.

فصل ۴

۱-۴ مؤلفه‌های یک چارچوب در چارچوب مرجع S عبارت‌اند از V_1, V_2, V_3 و V_4 . این مؤلفه‌ها را در چارچوبهای زیر بنویسید: (الف) چارچوب مرجعی که بر S منطبق است اما جهت محوره‌های x و z آن معکوس شده است، (ب) چارچوب مرجعی که بر S منطبق است اما صفحه (x, y) حول مبدأ به‌اندازه 45° چرخیده و سپس به‌اندازه ۳ واحد در جهت z منتقل شده است، و (ج) چارچوب مرجعی که در پیکربندی استاندارد نسبت به S حرکت می‌کند.

۲-۴ ثابت کنید که برای هر قطعهٔ راست خط در فضا زمان $\Delta s = \int ds$ که در آن Δs با رابطهٔ ۱-۴ و ds برحسب دیفرانسیلهای dt و غیره تعریف می‌شود. [راهنمایی: فرض کنید معادلهٔ قطعه عبارت است از $x = At + B$, $y = Ct + D$, $z = Et + F$ و $t_1 \leq t \leq t_2$].

۳-۴ (الف) با استفاده از این واقعیت که $U = \gamma(u, 1)$ مانند چاربردار تبدیل می‌شود، معادلات تبدیل ۲۵-۲ و ۲۸-۲ را به‌دست آورید. (ب) به‌همین طریق، با استفاده از خواص تبدیل A ، معادلهٔ ۳۰-۲ را دوباره به‌دست آورید و تمرین ۲۵-۲ را حل کنید.

۴-۴ ناظر لخت O دارای چارسرعت U دورهٔ P دارای چارشتاب (متغیر) A است. اگر $A = 0$ ، U ، چه نتیجه‌ای دربارهٔ سرعت P در چارچوب سکون O می‌توانید بگیرید؟ [راهنمایی: بررسی را در چارچوب سکو O انجام دهید].

۵-۴ ذره‌ای با سرعت ثابت u در چارچوب لخت S روی دایره‌ای به معادلهٔ $x^2 + y^2 - r^2 = 0 = z$ حرکت می‌کند. مؤلفه‌های چارشتاب ذره را هنگامی که محور y منفی را قطع می‌کند پیدا کنید. مؤلفه‌های متناظر را در چارچوب سکون ذره (که محورهای آن موازی با محورهای S است) و همچنین مؤلفه‌های سه‌شتاب را در این چارچوب پیدا کنید. [در تمامی موارد مؤلفهٔ دوم $\gamma^2 u^2 / r$ است و سایر مؤلفه‌ها حذف می‌شوند].

۶-۴ ذره‌ای با ویژه‌شتاب ثابت α در خط راست حرکت می‌کند. اگر U چارسرعت، A چارشتاب، و $c = 1$ باشد ثابت کنید که $\mathbf{A} = (d/d\tau)\mathbf{A} = \alpha^2 \mathbf{U}$ که در آن τ ویژه‌زمان ذره است. [راهنمایی: تمرین ۲۷-۲] به‌عکس، ثابت کنید که این معادله، بدون اینکه بدانیم α ویژه‌شتاب یا ثابت است، این هر دو واقعیت را نشان می‌دهد. [راهنمایی: از رابطهٔ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = 0$ مشتق بگیرید و نشان دهید که $-\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \alpha^2$].

سرانجام، از طریق انتگرال‌گیری نشان دهید که این معادله‌گویای حرکت راست خط در چارچوب لخت مناسب است و از این‌رو، در واقع، حرکت هذلولوی است.

۷-۴ با استفاده از ساده‌سازی که در پایان بخش ۵-۴ بحث شد، ثابت کنید که هر چاربرداری که نسبت به یک بردار زمان‌گونه یا صفر عمود باشد (بجز بردار صفر در مورد دوم) باید فضاگونه باشد، اما دو بردار فضاگونه می‌توانند برهم عمود باشند.

۸-۴ ثابت کنید که علامت مؤلفهٔ چهارم هر چاربردار صفر یا زمان‌گونه تحت تبدیل لورنتس عام ناورد است. بسته به منفی یا مثبت بودن این علامت، این بردارها را گذشته-سو یا آینده-سو می‌نامند. این امر را در یک نمودار مینکوفسکی سه‌بعدی نشان دهید.

۹-۴ ثابت کنید که مجموع دو چاربردار زمان‌گونه همسو (هر دو-در جهت آینده یا گذشته) یک بردار زمان‌گونه همسو با آنهاست. اگر یکی از دو بردار یا هر دو صفر باشند باز هم این نتیجه صادق است؟ این موضوع را در یک نمودار سه‌بعدی مینکوفسکی نشان دهید.

۱۰-۴ مجموعهٔ رویدادهایی را که یک ناظر لخت در زمان $t = t_0$ خود همزمان می‌بیند، فضای سه‌بعدی $t = t_0$ لحظه‌ای ناظر می‌نامند. نشان دهید که اتصال هر دو رویداد در یک

چنین فضایی به همدیگر بر جهانخط ناظر عمود است و، از طرف دیگر، هر دو رویدادی که اتصال آنها به همدیگر بر جهانخط ناظر عمود باشد، توسط ناظر همزمان دیده می‌شوند.

۱۱-۴ آیا چاربردار یکتایی که به سه چاربردار فضاگونه مستقل خطی مفروض عمود است لزوماً زمان‌گونه است؟ چهار رویداد را، که هیچکدام از آنها (توی) (یا روی) مخروط نوری (جلو یا عقب) دیگری قرار نمی‌گیرد، در نظر بگیرید. آیا همیشه یک چارچوب لخت وجود دارد که این رویدادها در آن همزمان باشند؟

۱۲-۴ ثابت کنید که برای هر دو بردار زمان‌گونه آینده-سوی V_1 و V_2 داریم

$$V_1 \cdot V_2 = V_1 V_2 \cosh \phi_{12}$$

که در آن ϕ_{12} دو "زاویه هذلولوی" میان V_1 و V_2 ، برابر است با تبدی نسبی ذره‌هایی با جهانخط V_1 و V_2 . [راهنمایی: روابط ۲۱-۴ و ۲۷-۴ را ببینید.] وانگهی ثابت کنید که ϕ جمع‌پذیر است؛ یعنی، برای هر سه بردار هم صفحه V_1, V_2, V_3 (متناظر با سه ذره که در یک چارچوب مرجع لخت در امتداد خط ثابتی حرکت می‌کنند) داریم

$$\phi_{13} = \phi_{12} + \phi_{23}$$

برای دو بردار فضاگونه W_1 و W_2 می‌توانیم بنویسیم

$$W_1 \cdot W_2 = W_1 W_2 \cos \theta_{12}$$

معنی فیزیکی θ_{12} چیست؟

۱۳-۴ با استفاده از ناوردایی $L \cdot U$ که در آن U چار سرعت چارچوب S' است، رابطهٔ ابراهمی موجی ۳۴-۴ را به دست آورید.

۱۴-۴ "حتی اگر تمامی آزمایشهای فیزیکی موضعی کاملاً قطعی باشند، و یک ناظر کاملترین ابزار گردآوری داده‌ها را در اختیار داشته باشد، و پیشینیان او کاملترین ثبت رویدادها را برای او به جا گذاشته باشند، باز هم نخواهد توانست آیندهٔ خود را با قطعیت پیشگویی کند." این موضوع را توجیه کنید. [راهنمایی: مخروط نور ناظر را در نظر بگیرید.]

فصل ۵

۱-۵ برای اینکه انرژی جنبشی یک ذره با انرژی سکون آن برابر شود، با چه سرعتی باید حرکت

کند؟ [۰، ۸۶۶ر]

۲-۵ یک گلولهٔ توپ یک کیلوگرمی با چه سرعتی حرکت کند تا انرژی آن برابر انرژی یک پروتون پرتوکیهانی، با ضریب $\gamma = 10^{11}$ ، باشد؟ $(\sim 5m/s)$

۳-۵ جرم یک اتم هیدروژن 1.00814 amu ، جرم نوترون 1.00866 amu ، و جرم اتم هلیم (دو اتم هیدروژن و دو نوترون) برابر 4.00388 amu است. انرژی بستگی را به صورت کسری از انرژی کل اتم هلیم پیدا کنید.

۴-۵ انرژی تابشی خورشید با آهنگ 1.94 کالری بر دقیقه بر سانتی متر مربع به زمین می رسد. با فرض اینکه فاصلهٔ خورشید $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ، و یک کالری $4.18 \times 10^7 \text{ erg}$ باشد، جرم کل تلف شدهٔ خورشید در هر ثانیه، و همچنین نیروی وارد از تابش خورشیدی بر یک قرص سیاه به قطر زمین (12800 km) را در محل زمین پیدا کنید. $(5.8 \times 10^{22} \text{ dyne}, 4.3 \times 10^9 \text{ kg})$.
راهنمایی: نیرو برابر است با تکانهٔ جذب شده در واحد زمان.

۵-۵ ذره‌ای با چارتکانهٔ P را ناظری با چارسرعت U می بیند. ثابت کنید که انرژی ذره نسبت به ناظر P است. [راهنمایی: به مؤلفه‌ها در یک چارچوب مناسب نگاه کنید].

۶-۵ ذره (گلوله)‌ای به جرم سکون M که با سرعت u_1 حرکت می کند به طور کشسان با یک ذرهٔ ساکن (هدف) به جرم سکون m برخورد سر به سر می کند. بعد از برخورد گلوله با سرعت u_2 به حرکت خود ادامه می دهد. ثابت کنید که در مکانیک نیوتونی $(u_2/u_1) = (M-m)/(M+m)$ ، به گونه‌ای که، برای دو ذرهٔ معین، نسبت انرژی اولیه به انرژی نهایی گلوله از سرعت اولیهٔ آن مستقل است. در نسبیت، ثابت کنید که

$$\gamma_2 = (\gamma_1 + k)/(k\gamma_1 + 1)$$

که در آن $k = 2mM/(m^2 + M^2)$ و $\gamma_1 = \gamma(u_1)$ و $\gamma_2 = \gamma(u_2)$. توجه کنید که با $\gamma_1 \rightarrow \infty$ به طور یکنوا $1/k \rightarrow \gamma_2$ ، به گونه‌ای که اکنون یک حد مطلق برای انرژی که گلوله می تواند حفظ کند وجود دارد؛ از این رو، در سرعت‌های برخورد زیاد، انتقال نسبی انرژی از گلوله به هدف تقریباً کامل است، حتی اگر جرم سکون آنها خیلی متفاوت باشد. [راهنمایی: معادله‌های پایستگی انرژی و تکانه را بنویسید، با به توان دو رساندن، v و γ هدف را حذف کنید، u_1 و u_2 را برحسب γ_1 و γ_2 بیان کنید، و یک بار دیگر به توان دو برسانید تا یک معادلهٔ درجه دوم برحسب γ_1 و γ_2 به دست آید. توجه کنید که $\gamma_1 - \gamma_2$ باید ضریب این معادلهٔ درجه دوم باشد. چرا؟]
۷-۵ بردار مکان مرکز جرم یک سیستم از ذرات در هر چارچوب لخت به صورت

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum m\mathbf{r} / \sum m$$

هرگاه فقط نیروهای برخورد بر ذرات وارد شود، ثابت کنید که

$$\dot{\mathbf{r}}_{CM} = \mathbf{u}_{CM} (\equiv d/dt)$$

یعنی، مرکز جرم با سرعت چارچوب CM حرکت می‌کند. [راهنمایی: $\sum m \dot{\mathbf{r}}$ ، $\sum m \ddot{\mathbf{r}}$ ثابت‌اند؛ $\sum \dot{m} \mathbf{r}$ بین برخوردها صفر است، و به هنگام برخورد می‌توان \mathbf{r} را از ذرات شرکت‌کننده فاکتورگیری کرد: $\mathbf{r} \sum \dot{m} = 0$].

۸-۵ ذره‌ای با جرم سکون m در حالت سکون در چارچوب S' گرم می‌شود، و انرژی آن با آهنگ q واحد بر ثانیه افزایش می‌یابد. با استفاده از تعریف ۲۹-۵ نیروی نسبیتی وارد بر ذره را در یک چارچوب متعارف، S ، پیدا کنید. اگر بعد از گرم شدن ذره با آهنگ q سرد شود، این نیرو چقدر است؟

۹-۵ ثابت کنید که چارنیروی \mathbf{F} و چارسرعت \mathbf{U} یک ذره با جرم سکون متغیر m_0 ، با فرمول $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = c^2 dm_0 / dt$ به هم مربوط می‌شوند، که در آن τ ویژه‌زمان ذره است. با رابطه ۳۳-۵ مقایسه کنید. [راهنمایی: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ را در یک چارچوب مناسب در نظر بگیرید].

۱۰-۵ ذره‌ای با ویژه‌جرم ثابت در یک چارچوب مرجع لخت در خط راست حرکت می‌کند. ثابت کنید که حاصلضرب ویژه‌جرم و ویژه‌شتاب لحظه‌ای آن برابر است با بزرگی سه نیروی نسبیتی وارد بر ذره در آن چارچوب. [راهنمایی: روابط ۲-۳ و ۲۹-۵ را ببینید]. همچنین ثابت کنید که وقتی حرکت راست خط نیست این موضوع الزاماً صدق نمی‌کند.

۱۱-۵ از تمرین قبل نتیجه بگیرید که نیروی نسبیتی وارد بر ذره با ویژه‌جرم ثابت در حرکت راست خط، در میان چارچوبهای لختی که در امتداد مسیر ذره حرکت می‌کنند، ناورداست. آنگاه این نتیجه را از خواص تبدیل چارنیروی \mathbf{F} دوباره استخراج کنید.

۱۲-۵ ذره آزادی با یک ریسمان بدون وزن کشیده می‌شود. آیا نیرو یا شتاب لزوماً در امتداد ریسمان بر ذره اثر می‌کند؟ [راهنمایی: در S فرض کنید که ذره در امتداد خط $y - mx = 0 = z$ کشیده می‌شود و سپس آن را به S' منتقل کنید]. با تمرین ۶-۱۰ مقایسه کنید.

۱۳-۵ (الف) ثابت کنید که، در مکانیک نسبیتی همچون مکانیک کلاسیک آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ذره‌ای با تکانه خطی \mathbf{p} در فاصله برداری \mathbf{r} از نقطه اختیاری P برابر است با $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ ، گشتاور نیروی \mathbf{f} حول نقطه P . (ب) برای حرکت ناشی از یک نیروی عکس مجذور که جرم سکون را حفظ می‌کند، $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}/r^3$ ($k = \text{const.}$)، معادله انرژی $m_0 \gamma c^2 - k/r = \text{const.}$ را به دست آورید. [راهنمایی: رابطه ۳۴-۵ را ببینید].

۱۴-۵ (نوسانگر هماهنگ نسبیتی) ذره‌ای با ویژه‌جرم ثابت m_0 ، که در امتداد محور x یک چارچوب لخت حرکت می‌کند، به وسیله نیروی نسبیتی $-m_0 k^2 x$ جذب مبدأ می‌شود. اگر دامنه نوسان حاصل a باشد، ثابت کنید که دوره تناوب T برابر است با

$$(4/c) \int_0^a \gamma(\gamma^2 - 1)^{-1/2} dx$$

$$\gamma = 1 + 1/2 k^2 c^{-2} (a^2 - x^2)$$

[راهنمایی: به جزئیات این محاسبه بپردازید: $\gamma^2 du/dt = -k^2 x$ که در آن $\gamma = \text{const.} - 1/2 k^2 x^2$ = جواب داده شده $u \gamma^2 du = -k^2 x dx$; $\gamma = [1 - (u^2/c^2)]^{-1/2}$ جواب داده شده $[.T = 2 \int_0^a (1/u) dx =$

۱۵-۵ با مقایسه رابطه ۴-۳ و تمرین ۳-۱۳ تحقیق کنید که ابراهی مسیر عمود بر موجی که با سرعت c^2/u حرکت می‌کند دقیقاً برابر است با مسیر ذره‌ای که با سرعت u در حرکت است. ۱۶-۵ ثابت کنید که نتیجه برخورد میان دو ذره متمایز (با جرم سکون صفرا یا متناهی) نمی‌تواند یک تک فوتون باشد، همچنین ثابت کنید که هیچ تک ذره با جرم سکون متناهی نمی‌تواند به یک تک فوتون فروپاشد. [راهنمایی: پایستگی تکانه]

۱۷-۵ ثابت کنید اگر فوتونی با چارته‌کانه P را دو ناظر با چارسرعت U_1 و U_2 ببینند، نسبت بسامدهایی که این دو ناظر به فوتون نسبت می‌دهند برابر است با

$$U_2 \cdot P / U_1 \cdot P$$

رابطه ۳-۵ را دوباره به دست آورید.

۱۸-۵ در یک چارچوب اولیه S ، دو فوتون با بسامدهای ν_1 و ν_2 به ترتیب، در جهت‌های مثبت و منفی x حرکت می‌کنند. سرعت چارچوب مرکز جرم این فوتونها را پیدا کنید $[v/c = (\nu_1 - \nu_2) / (\nu_1 + \nu_2)]$.

۱۹-۵ فرض کنید جزء m از جرم سکون کل زمین، M ، به فوتون تبدیل می‌شود و مستقیماً در جهت مداری زمین به طرف جلو می‌تابد، به گونه‌ای که بر اثر واکنش آن جرم باقیمانده زمین به سکون کامل می‌رسد (و در نتیجه روی خورشید سقوط می‌کند). اگر سرعت مداری زمین u (۳۰ km/s) باشد، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است

$$\frac{(M - m)}{M} = \frac{(c - u)^{1/2}}{(c + u)^{1/2}}$$

که در آن $m/M \approx u/c \approx 1/10000$. همچنین ثابت کنید که اگر جرم، نه به صورت نور، بلکه به صورت ماده از زمین خارج شود، آنگاه کسری از جرم سکون زمین که باید از آن جدا شود بیشتر است. [راهنمایی: فرض کنید انرژی و تکانه کل فوتونهای خارج شده E و E/c باشد و از پایستگی انرژی و تکانه استفاده کنید.]

۵-۲۰ اگر از برخورد میان یک فوتون و یک فوتون ساکن، یک نوترین و یک پی‌مزون حاصل شود، بسامد آستانه فوتون را برحسب n جرم سکون پروتون یا نوترین (با فرض مساوی بودن) و m جرم پی‌مزون پیدا کنید $[\nu = c'(m^2 + 2mm)/2hn]$.

۵-۲۱ ذره‌ای با جرم سکون m از حالت سکون به ذره‌ای با جرم سکون m' و یک فوتون وامی‌باشد. انرژیهای مجزای این محصولات نهایی را پیدا کنید. [جواب: $c'(m^2 \pm m'^2)/2m$].
[راهنمایی: از استدلال چاربرداری استفاده کنید.]

فصل ۶

۶-۱ معادلات معکوس روابط ۶-۱۱ و ۶-۱۲ را بنویسید؛ یعنی، روابطی که مؤلفه‌های بدون پیریم میدان را برحسب مؤلفه‌های پیریم‌دار به دست می‌دهد.

۶-۲ اگر در یک رویداد معین یک میدان الکترومغناطیسی در رابطه‌های $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0$ و $h^2 < e^2$ صدق کند، ثابت کنید چارچوبی وجود دارد که در آن $\mathbf{e} = 0$. همچنین ثابت کنید که تعداد بینهایت از این چارچوبها وجود دارد که همه در حرکت نسبی همخط هستند. [راهنمایی: محورهای فضایی مناسبی انتخاب و سپس از معادلات تبدیل ۶-۱۱ استفاده کنید.]

۶-۳ اگر در یک رویداد معین $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} \neq 0$ ، ثابت کنید که چارچوب مرجعی وجود دارد که در آن \mathbf{e} و \mathbf{h} موازی‌اند. همچنین ثابت کنید که تعداد بینهایت از این چارچوبها وجود دارد که همه در حرکت نسبی همخط هستند. [راهنمایی: چارچوب ویژه‌ای هست که در جهت $\mathbf{e} \times \mathbf{h}$ نسبت به چارچوب عمومی حرکت می‌کند.]

۶-۴ ثابت کنید که معادلهٔ خلأ ماکسول

$$\frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{\partial e_2}{\partial y} + \frac{\partial e_3}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

(یعنی $\text{div } \mathbf{e} = 0$) تنها در صورتی در تمام چارچوبهای لخت صادق است که معادلات ماکسول

$$\frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z} = \frac{\partial e_1}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_3}{\partial x} = \frac{\partial e_2}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial e_3}{\partial t} \quad (4)$$

(یعنی $\text{curl } \mathbf{h} = \partial \mathbf{e} / \partial t$) نیز در همهٔ چارچوبها صادق باشد (یکهاها طوری انتخاب شده‌اند که $c = 1$) [راهنمایی: از این رابطه استفاده کنید]

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - v \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

(چرا این رابطه درست است؟) و نیز معکوس رابطهٔ ۱۱-۶ برای تبدیل رابطهٔ ۱ و به دست آوردن رابطهٔ ۲ در S' . دقت کنید که چگونه این مسئله جریان جابه‌جایی ماکسول $\partial \mathbf{e} / \partial t$ را توجیه می‌کند.

۵-۶ مسیر یک ذرهٔ باردار الکتریکی که در زاویه‌ای غیر از زاویهٔ قائم نسبت به خطوط نیرو، به داخل یک میدان مغناطیسی یکنواخت (و موازی) پرتاب می‌شود چگونه است؟ با استدلال دقیق توضیح دهید.

۶-۶ یک میدان الکتریکی یکنواخت $(\mathbf{e} = \mathbf{e}_0, a, \mathbf{e}_0)$ و یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{h} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0, \Delta a / 3)$ در چارچوب مرجع S برقرار است. ذره‌ای با جرم سکون m_0 و بار q از حالت سکون روی محور x چارچوب S رها می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا ذره به محور x برگردد؟ [جواب: $32aq / 70\pi cm_0$. راهنمایی: وضعیتی را در یک چارچوب مرجع در نظر بگیرید که در آن میدان الکتریکی صفر می‌شود.]

۷-۶ حرکت یک ذرهٔ باردار الکتریکی که در جهت موازی با خطوط میدان به داخل یک میدان الکتریکی یکنواخت (موازی) پرتاب می‌شود چگونه است؟

۸-۶ اگر میدان الکترومغناطیسی در روابط $\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0$ و $\mathbf{e}^2 = \mathbf{h}^2$ صدق کند با دلایل کافی می‌توان گفت که این میدان "تابشی" است. ثابت کنید که میدان یک بار پرسرعت ($v \approx c$) در صفحه‌ای که ذره را در بردارد بر جهت حرکت آن عمود است اساساً تابشی است.

۹-۶ دو ذرهٔ مشابه با بار الکتریکی q ، پهلو به پهلو هم در امتداد خطوط موازی با محور x ، به فاصلهٔ r از همدیگر و با سرعت v در چارچوب مرجع S حرکت می‌کنند. نیرویی را که هر ذره در چارچوب S بر دیگری وارد می‌کند، از دو راه، تعیین کنید: (الف) با استفاده از روابط ۶-۲۱ و ۱-۶، و (ب) با تبدیل نیروی کولنی از چارچوب مرجع ساکن S' به چارچوب S ، به کمک خاصیت چارچوبداری رابطهٔ ۵-۳۱، و به‌ازای $dm'/dt' = 0$ (چرا؟). توجه کنید که این نیرو از نیروی نظیر در چارچوب مرجع ساکن کوچکتر است، درحالی‌که هر جرم به وضوح بزرگتر است. در اینجا ما دلایل دینامیکی برای اثر "کانونی‌کنندهٔ نسبیتی" می‌بینیم درحالی‌که قبلاً آن را صرفاً از ملاحظات سینماتیکی به دست آوردیم. (آخرین پاراگراف بخش ۲-۳۱ را ببینید.) آیا این دلایل دینامیکی به اتساع زمان انتظاری یک "ساعت ابر الکترونی" منجر می‌شوند؟ همچنین با مراجعه به راه (الف) تعیین نیروی وارد بر هر ذره از طرف ذرهٔ دیگر، توجه کنید که همچنانکه v به c نزدیک می‌شود نیروهای الکتریکی و مغناطیسی هر کدام بینهایت، اما اثرهای آنها حذف می‌شود.

۶-۱۰ به جای دوبار مساوی مسئله پیش که پهلو به پهلو هم حرکت می‌کردند، اکنون دوبار مخالف را که با سرعت ثابت یکسان، اما نه پهلو به پهلو، در حرکت‌اند در نظر بگیرید. با هر دو روش پیشنهادی، نیروهای وارد بر این بارها را تعیین کنید، و نشان دهید که این نیروها در امتداد خط واصل بارها (مثلاً یک میله نارسانا) اثر نمی‌کنند بلکه، به ظاهر جفت نیرویی تشکیل می‌دهند که می‌کوشد به‌گونه‌ای خط واصل را بچرخاند تا بر خط حرکت عمود شود. (تروتون و نوبل، در یک آزمایش مشهور در سال ۱۹۰۳/۱۲۸۲، به دنبال این جفت نیروی بارهای ساکن در آزمایشگاه، بدون موفقیت، گشتند؛ با این فرض که بارها نسبت به اتر در حرکت‌اند. در آن زمان اینکه واکنش میله می‌توانست در یک خط با خودش نباشد، شناخته شده نبود، و نتیجه صفر آزمایش گیج‌کننده به نظر می‌رسید. اما به هر حال، این آزمایش به پذیرش بعدی نسبت کمک کرد.)

۶-۱۱ بر طبق نظریهٔ ماکسول، بار نه تنها ناورداست (یعنی اندازهٔ هر بار در تمامی چارچوبها یکسان است) بلکه پایستار نیز هست (یعنی، بار کل موجود در یک آزمایش، همیشه ثابت می‌ماند). با وجود این توضیح دهید که چرا یک سیم مستقیم حامل جریان ممکن است در یک چارچوب مرجع از لحاظ الکتریکی خنثی و در چارچوب مرجع دیگر بار خالص داشته باشد (همچنانکه در بخش ۶-۴ مشاهده کردیم).

۶-۱۲ گفتیم که مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی، که در هر چارچوب مرجع لختی به صورت ۶-۱۳ آرایش یافته‌اند، یک تانسور تشکیل می‌دهند که به صورت ۶-۲۴ تبدیل می‌شود. این گفته را با تبدیل یک میدان الکترومغناطیسی خالص به شدت e در راستای z چارچوب S ، به چارچوب معمولی S' بیازمایید و نتیجه را با استفاده از فرمولهای تبدیل ۶-۱۱ و ۶-۱۲ تحقیق کنید.

۶-۱۳ با یک مثال نشان دهید که قضیهٔ ون‌دام و ویگنر که بنابر آن انرژی و تکانهٔ کل هر سیستم از ذرات که از راه دور برهم‌کنش می‌کنند نمی‌تواند در تمام چارچوبهای لخت ثابت بماند. به همین دلیل است که طبق نظریه‌های میدان (ماکسول) خود میدان می‌تواند تکانه و انرژی حمل کند، به‌گونه‌ای که قوانین پایستگی تنها بر کل سیستم میدان و ذرات حاکم است. [راهنمایی: دو ذرهٔ باردار مشابه را در نظر بگیرید که همزمان از حالت سکون در نقاط مختلف یک چارچوب لخت معین آزاد می‌شوند.]

فصل ۷

۷-۱ کدام یک از موارد زیر ذاتی یک سطح دوبعدی است

(الف) خاصیت راستخط بودن یک خط

(ب) زاویه‌ای که دو منحنی با هم می‌سازند

(ج) خاصیت مماس بودن دو خم در یک نقطهٔ معین بر همدیگر

(د) طول یک خم میان دو نقطه از آن

(ه) کوتاهترین فاصله میان دو نقطهٔ معین در سطح

(و) سطح محدود به یک خم بسته

زا انحنای عمود یک سطح در یک جهت معین (یعنی، انحنای مقطع حاصل از تقاطع سطح با صفحه‌ای که شامل عمود در نقطه مورد نظر است).

(ح) انحنای "ژئودزیک" یک خم روی سطح (یعنی، انحنای تصویر خم در نقطه مورد نظر، بر صفحه مماس در آن نقطه). [در واقع، می‌توان نشان داد که ژئودزیکهای روی یک سطح، دقیقاً همان خمهایی هستند که انحنای ژئودزیک آنها در همه جا صفر می‌شود].

۲-۷ خط l میان فضای V و زیرفضای V' از V مشترک است (یعنی، l می‌تواند بر سطح V' در فضای سه‌بعدی اقلیدسی V واقع شود). ثابت کنید که اگر l در V ژئودزیک باشد، در V' نیز ژئودزیک است؛ برای نشان دادن اینکه عکس این قضیه صادق نیست، چند مثال بیاورید.

۳-۷ انحنای هر خم تخت (یا در واقع هر خم) بنابه تعریف آهنگ چرخش مماس (برحسب رادیان) نسبت به فاصله در امتداد خم است؛ مقدار آن برابر است با $\lim (2z/r^2)$ هنگامی که $r \rightarrow 0$ ، که در آن r فاصله در امتداد مماس در نقطه مورد نظر و z فاصله عمودی از مماس تا خم است. اما، معادله $z = f(x, y)$ را برای یک سطح اختیاری، اگر به اندازه کافی خوشرفتار باشد، می‌توان برای مقادیر کوچک x, y به صورت سری تیلور بیان کرد:

$$z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \dots$$

اگر صفحه (x, y) را صفحه مماس بر سطح و نقطه تماس را مبدأ انتخاب کنیم، معادله بالا به صورت ساده زیر درمی‌آید (با حذف توانهای ۳ و بالاتر)

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

با استفاده از این نکته ثابت کنید که بیشینه و کمینه انحنای عمود یک سطح [تمرین ۱-۷ (و)] در راستاهای متعامد پدید می‌آید. گاوس قضیه‌ای بسیار مهم اثبات کرد که حاصلضرب دو فرین (غیرذاتی یا "عرضی") انحنای عمود برابر است با خمش (ذاتی) K . از این رو، اگر ستون فقرات و دنده‌های اسب، که در شکل ۳-۷ با زین جور درمی‌آید، به صورت موضعی به دایره‌هایی به شعاع a و b نزدیک شوند، خمش K در مرکز زین برابر است با $-1/ab$.

۴-۷ مماس بر هر منحنی بسته در صفحه (که خود را قطع نمی‌کند) در یک دور همواره برابر $\Delta = 2\pi$ می‌چرخد. زاویه Δ ی^۱ متناظر در سطح خمیده عموماً 2π نیست. بنابر قضیه مشهور گاوس-بونه، $\Delta - 2\pi$ برابر است با $\iint K ds$ ، یعنی انتگرال خمش گاوسی بر روی سطح خمیده. کراهی به شعاع a را که یک "مثلث ژئودزی" به وسیله سه قوس-دایره‌ای بزرگ تشکیل می‌شود در نظر بگیرید؛ قوسها در هر رأس زاویه قائمه می‌سازند. این قضیه را برای هر دو مساحتی که به وسیله

۱. Δ ، نواحی زاویه است که در صفحات مماسی متوالی هر محل اندازه‌گیری می‌شوند.

این مثلث بسته می‌شوند، بیازمایید. [توجه کنید که، با توجه به مطلب داخل کروشۀ تمرین ۷-۱ (ح)، Δ هیچ سهمی در امتداد ژئودزیک ندارد.]

۷-۵ کره‌ای به شعاع a و بر روی آن یک "دایرة ژئودزیک" به شعاع r را در نظر بگیرید (شکل ۷-۴). برای پیدا کردن زاویۀ کل Δ ، که مماس بر دایره در یک دور به آن اندازه می‌چرخد، مخروط مماس بر کره را در امتداد دایره رسم کنید. سپس مخروط را باز کنید و زاویۀ رأس آن اندازه بگیرید. از این رو طریق ثابت کنید که:

$$\Delta = 2\pi \cos(r/a)$$

تحقیق کنید که این رابطه با قضیۀ گاوس-بونه (تمرین قبل)، برای هر دو "داخل" ممکن دایره، سازگاری دارد.

۷-۶ اغلب تصور می‌رود که کره تنها سطح دوبعدی با انحنای ثابت است که هم متاهی است و هم بیکران. اما، سطح تخت نیز می‌تواند متاهی و بیکران باشد. کافی است یک مستطیل در صفحه رسم کنید، نواحی خارج مستطیل را در نظر نگیرید و نقاط متقابل بر روی اضلاع متقابل را "یکی بگیرید". بدیهی است که سطح حاصل مساحت متاهی دارد، اما، مرز ندارد. هر نقطه، یک نقطه داخلی است، زیرا می‌تواند در یک دایره که کاملاً در صفحه قرار دارد محاط شود: دایرة اطراف هر نقطه روی یک ضلع به صورت دو نیمدایره دیده می‌شود، که چون دو نیمه "یکی شده" اند، به هم متصل‌اند: چنین دایره‌ای در اطراف رأسها (همه یکی شده) در چهار قسمت دیده می‌شود. اما، برخلاف صفحه، این سطح دارای توپولوژی چنبره‌ای است و از این رو، همسانگردی سراسری ندارد. (به عنوان مثال، طولهای ژئودزیک رسم شده در جهت‌های مختلف از یک نقطه معین را در نظر بگیرید.) با وجود این به خاطر تخت بودن خود، همسانگردی موضعی دارد.

روی یک رویه با خمش منفی نیز می‌توان چنین ساختاری را، که البته پیچیده‌تر است، ایجاد کرد. از یک نقطه آن هشت ژئودزیک به طول مساوی r ، که هر کدام زاویۀ 45° با بعدی می‌سازد، رسم می‌کنیم. سپس هشت ژئودزیک را که نقاط انتهایی آنها را به هم وصل می‌کند رسم می‌کنیم. در مورد زوایای رئوس "هشت ضلعی ژئودزیک" حاصل برحسب مساحت کل آن چه توضیحی می‌توانید بدهید؟ فرض کنید بتوان r انتخاب کرد که این زوایا 45° شوند، و آن را انتخاب کنید. رئوس را، به ترتیب، A, B, C, D, E, F, G, H بنامید و ژئودزیکهای جهندار زیر را یکی بگیرید: $AB = DC, BC = ED, EF = HG, FG = AH$. تصویری رسم کنید و تحقیق کنید که (الف) هر نقطه بر روی یک ضلع، غیر از رأس، یک نقطه داخلی است. (ب) تمامی هشت رأس یکی شده هستند و یک نقطه داخلی تشکیل می‌دهند. (ج) در تمامی این نقاط خمش همانند "داخل" است. آیا همین شگرد را می‌توان برای چهار یا شش ضلعی به کار برد؟ بدیهی است که ساختارهای مشابهی برای سه فضای تخت و با وضوح خیلی کمتر برای سه فضای با خمش منفی ثابت، وجود دارد.

۷-۷ برای اثبات اینکه ژئودزیکها در فضاهاى شبه-ریمانى عموماً نه طول کمینه دارند نه بیشینه، محور x فضای مینکوفسکی M_2 را در نظر بگیرید. با داشتن معادله خطی $x = \sigma$ ، $y = z = t = 0$ (یک پارامتر است)، این خط ژئودزیک است. خمهای مجاور این خط، مثلاً $x = 2$ و $x = 0$ ، متشکل از دو بخش مستقیم، یکی از $(0, 0, 0, 0)$ به (a, b, c, d) و دیگری از (a, b, c, d) به $(2, 0, 0, 0)$. نشان دهید که به ازای a, b, c, d مناسب، طول $\int |ds|$ این خمهای مجاور می‌تواند از ۲ بیشتر یا کمتر باشد. اما می‌دانیم که ژئودزیکهای زمان‌گونه در M_2 بیشینه هستند.

۷-۸ گیریم فضا زمان دور از اجرام گرانش دار، به جای اینکه مینکوفسکی باشد، چارفضایی است با خمش ثابت ناصفر. علی‌الاصول، چگونه می‌توانیم این فرضیه را بیازماییم؟ مقایسه شعاع با سطح هر دو کره ژئودزیک می‌تواند جزئی از آزمون باشد، اما از این طریق نه توزیع فاصله ژئودزیکهای صفر یا زمان‌گونه را و نه ژئودزیکهای فضاگونه با جدایی زمان‌گونه را می‌توان تحقیق کرد. چگونه می‌توان تمامی این موارد را کنترل کرد؟ [راهنمایی: یک نمودار سه بعدی مینکوفسکی رسم کنید.]

۷-۹ واضح است که گرانش برآهنگ نوسان یک ساعت آونگی اثر دارد. ساعت آونگی، در یک میدان قویتر تندتر کار می‌کند یا کندتر؟ آیا این موضوع به اتساع گرانشی زمان مربوط می‌شود؟
 ۷-۱۰ با استفاده از رابطه پلانک، $E = h\nu$ ، برای انرژی یک فوتون، نتیجه ۷-۱۳ را به دست آورید: فوتون، ضمن "سقوط" در یک میدان گرانشی، درست مانند ذره، انرژی می‌گیرد، زیرا فوتونها و ذرات به همدیگر قابل تبدیل‌اند، یا صرفاً به این دلیل که ما فوتونها را ذرات حدی در نظر می‌گیریم. اما چون سرعت فوتون افزایش نمی‌یابد، بسامد آن باید افزایش یابد. [توجه: وقتی ما جرم لختی فوتون، $h\nu/c^2$ ، را برابر جرم گرانشی آن بگیریم، اصل هم‌ارزی ضعیف وارد بحث می‌شود.]

۷-۱۱ ماهواره‌ای در مدار دایره‌ای به شعاع r حول زمین (به شعاع R) از معادله ۷-۲۹ تبعیت می‌کند. ساعت معیار C روی ماهواره با ساعت مشابه C_0 بر روی زمین مقایسه می‌شود. ثابت کنید که نسبت آهنگهای این دو ساعت با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{\nu}{\nu_0} \approx 1 + \frac{Gm}{Rc^2} - \frac{2Gm}{rc^2}$$

توجه کنید که فقط اگر $r > 3R/2$ (یعنی $r - R > 3184 \text{ km}$) این مقدار از یک بیشتر می‌شود.

۷-۱۲ سه ساعت همزمان شده A, B, C را در نظر بگیریم که در یک میدان گرانشی ایستا ساکن‌اند (شکل ۷-۷). فرض کنید زمان مختصاتی برای نوری که در امتداد AB, BC ، و CA در حرکت است، به ترتیب ۱، ۱، و ۵ ثانیه باشد، که البته در فضای مینکوفسکی، یعنی در غیاب گرانش، ناممکن است. میدان گرانشی یک تک جرم کروی متمرکز را در نظر بگیرید و در آن "مثلی" را مشخص کنید که داده‌های بالا به صورت کیفی در مورد آن به کار برود. [راهنمایی: می‌دانیم که

ساعت‌های معیار در پتانسیل گرانشی کم نسبت به ساعت‌های واقع در پتانسیل صفر کندتر کار می‌کنند؛ و فرض کنید که بخش فضایی متریک تخت است.]
۷-۱۳ در نظریه نیوتون، هر میدان گرانشی نسبت به فضای مطلق با پتانسیل نرده‌ای

$$\varphi = - \iiint (\rho/r) dV$$

کاملاً توصیف می‌شود، که در هر لحظه روی تمام فضا انتگرال‌گیری می‌شود؛ خود میدان می‌شود $-\text{grad } \varphi$. اگر میدان مانا باشد، φ مستقل از زمان است، و از این رو هیچ میدان مانایی وجود ندارد که ایستا نیز نباشد. به‌عنوان مثال، یک میدان "گرانش" مانند میدانی که ناظر ساکن روی یک میز چرخان با حرکت یکنواخت، مشاهده می‌کند در فضای مطلق نیوتونی مانند ندارد. با وجود این، می‌توان یک پتانسیل نرده‌ای پایستار روی میز چرخان تعریف کرد که فقط متناظر با نیروی گریز از مرکز باشد، زیرا نیروی کوریولیس عمود بر حرکت ذره اثر می‌کند و در نتیجه هیچ کاری انجام نمی‌دهد. چون نیروی گریز از مرکز $\omega^2 r$ است (که در آن ω سرعت زاویه‌ای، و r فاصله از مرکز است) پتانسیل با رابطه $\frac{1}{2}\omega^2 r^2 -$ بیان می‌شود. اگر این رابطه را در ۷-۲۱ قرار دهیم، یک انتقال بسامد به دست می‌آوریم میان نقطه‌ای در شعاع r و مرکز که تا مرتبه اول، با نتایج قبلی ما، رابطه ۳-۶، سازگار است. اما، این سازگاری دقیق نیست. زیرا ما از این واقعیت چشم پوشیده‌ایم که نیروی وارد بر یکای جرم ساکن در میدان، که توسط ناظر ساکن در میدان اندازه‌گیری می‌شود $\omega^2 r$ نیست، بلکه برابر است با $\omega^2 r \gamma^2(\omega r)$. (چرا؟ نشان دهید که (اگر $c = 1$) پتانسیل متناظر عبارت است از $\frac{1}{2} \log(1 - \omega^2 r^2)$ ، و در صورتی که این مقدار را در رابطه ۷-۲۱ قرار دهیم، دقیقاً با ۳-۶ سازگار است. مثال کنونی، همانند مثال میدان شتاب یکنواخت (بخش ۸-۶)، از این لحاظ جالب توجه است که به کمک آن می‌توان یک انتقال بسامد غیر بینهایت کوچک معین را، به‌طور متناوب، با ملاحظات صرفاً سینماتیکی یا صرفاً گرانشی تعبیر کرد.

فصل ۸

توجه: در صورت لزوم از فرمولهای پیوست استفاده کنید.

۸-۱ برای متریک قطبی صفحه، $dr^2 + r^2 d\theta^2$ ، نمادهای Γ_{jk}^i کریستوفل ($r = x^1$ ، $\theta = x^2$) را حساب کنید و تحقیق کنید که $\theta = \text{const.}$ در معادله‌های ژئودزیک ۸-۱۵ صدق می‌کند.

۸-۲ ثابت کنید که متریک $y^2 dx^2 + x^2 dy^2$ نمایش صفحه اقلیدسی است. [راهنمایی:

تحقیق کنید که تمامی مؤلفه‌های تانسور خمش صفر است؛ تقارن‌ها را فراموش نکنید ۸-۲۱].

۸-۳ ثابت کنید که متریک $y dx^2 + x dy^2$ نمایش یک فضای خمیده است. [راهنمایی:

حداقل یک مؤلفه از تانسور خمش پیدا کنید که مخالف صفر باشد].

۴-۸ مختصه x^μ را زمان‌گونه، نورگونه، یا فضاگونه می‌گویند، در صورتی که خطوط مختصات متناظر $x^\mu = \text{const.}$ ، $x^\nu \neq \mu$ به ترتیب زمان‌گونه، نورگونه یا فضاگونه باشد. متریک مینکوفسکی $dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ را برحسب دو مختصه زمان‌گونه و دو مختصه فضاگونه بیان کنید. [راهنمایی: برای تعیین دو محور مختصه زمان‌گونه، به نمودار مینکوفسکی مراجعه کنید. توجه: در این صورت در متریک "جملات ضربداری" وجود خواهد داشت، زیرا دو جهت زمان‌گونه نمی‌توانند متعامد باشند، تمرین ۴-۷] متریک مینکوفسکی را برحسب (الف) چار مختصه زمان‌گونه، (ب) چار مختصه فضاگونه، و (ج) دو مختصه نورگونه و دو مختصه فضاگونه نیز بیان کنید.

۵-۸ خم $x^\mu = x^\mu(u)$ ، در صورتی ژئودزیک است که در معادله‌های ۸-۱۵ با قرار دادن u به جای قوس s صدق کند. در این صورت u را پارامتر "آفین" در امتداد ژئودزیک می‌نامند و می‌توان نشان داد که، بجز در حالت نورگونه، یک تابع خطی از s است. ثابت کنید که هر ژئودزیک متریک $ds^2 = dt^2 - d\sigma^2$ (که در آن متریک سه‌بعدی مستقل از t است) یک مسیر (فضایی) ژئودزیک را در متریک $d\sigma^2$ طی می‌کند. [راهنمایی: بدون از دست دادن عمومیت، فرض کنید که $d\sigma^2$ قطری است.]

۶-۸ با توجه به رابطه ۷-۲۴ و این واقعیت که هر ۳ متریک را می‌توان قطری کرد، مشاهده می‌شود که می‌توان عامترین متریک ایستا را به صورت

$$ds^2 = A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + C(dx^3)^2 + D(dt)^2$$

نوشت، که در آن A, B, C ، و D فقط تابع x^1, x^2 ، و x^3 هستند و $D = \exp 2\varphi$ ($c = 1$). ثابت کنید که $A^\mu = D/ds(dx^\mu/ds)$ ، چارشتاب یک ذره ساکن در مختصات فضایی، عبارت است از $(0, -\varphi_1/A, -\varphi_2/B, -\varphi_3/C)$. با قراردادن $A = B = C = -1$ برای چارچوب لخت موضعی، مشاهده می‌کنیم که چارشتاب ذره برابر است با $(\text{grad}\varphi, 0)$. اما رابطه ۴-۱۳ نشان می‌دهد که a ، سه‌شتاب این ذره، همچنانکه قبلاً در بخش ۷-۶ به تقریب ثابت شد، دقیقاً برابر است با $\text{grad}\varphi$.

۷-۸ تقارن تانسور ریچی را ثابت کنید، (رابطه ۸-۳۲).

۸-۸ ثابت کنید که برای جرم کروی متراکم m ، "سرعت فرار" نیوتونی (یعنی، کمینه سرعتی که ذره پرتاب می‌شود تا به بینهایت برسد) در فاصله $r = 2Gm/c^2$ از مرکز برابر c است. در دستگاه یکاهای متریک ۸-۴۳، این مقدار دقیقاً برابر است با شعاع شوارتس شیلد $r = 2m$. [البته، شباهت فیزیکی با مورد شعاع شوارتس شیلد به این سادگی نیست.]

۹-۸ متریک هر سطح دوار، مانند شکل ۸-۱، را می‌توان (با مختصه زاویه z) به صورت

$$d\sigma^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$

نوشت (توضیح دهید). با برابر قرار دادن این مقدار با $r^2 d\phi^2 / [1 - (2m/r)] + dz^2$ را به صورت

تابعی از r برای سهمیوار فلام^۱ پیدا کنید. با رابطه ۸-۴۴ مقایسه کنید. همچنین نشان دهید که، اگر m منفی باشد، هیچ‌گونه سطح دوار واقعی همراه آن متریک وجود ندارد.

۸-۱۰. رابطه ۷-۶ را در مورد نصف‌النهارهای مجاور سهمیوار فلام (مقطعه‌های تخت حاوی محور) ۸-۴۴ به‌کار ببرید، تا انحنای آن را به‌صورت تابعی از r پیدا کنید. $[-m/r^3]$

۸-۱۱. با به‌کار بردن فرمول ۷-۶ در مورد ذراتی که در امتداد یک بردار شعاعی سقوط می‌کنند، انحنای فضا-زمان شوارتس شیلد را در جهتی که با dr و dt تعیین می‌شود پیدا کنید. [راهنمایی: از نیروی کشندی نیوتونی $(G = 1) dg = (2m/r^2)dr$ استفاده کنید.] همین‌طور، ثابت کنید که برای هر سمتگیری dt و $d\phi$ ، هنگامی که $d\theta = 1/2\pi$ است، انحنای برابر است با m/r^2 .

۸-۱۲. با استفاده از رابطه ۸-۶۸، ویژه‌زمان $\Delta\tau_0$ را تعیین کنید که بر هر ذره در یک دور می‌گذرد هنگامی که در یک مدار دایره‌ای به شعاع r حول جرم m دوران می‌کند. نسبت $\Delta\tau_0$ به $\Delta\tau_1$ ، متناظر با ویژه‌زمان متناظر را که در یک نقطه ساکن روی جرم مرکزی، به شعاع R ، سپری می‌شود $\Delta\tau_1$ می‌نامیم. نسبت $\Delta\tau_0$ به $\Delta\tau_1$ را به‌دست آورید و با فرمول تقریبی که در تمرین ۷-۱۱ به‌دست آمد مقایسه کنید.

۸-۱۳. ذره‌ای در مدار دایره‌ای حول یک جرم کروی دوران می‌کند. در لحظه‌ای که این ذره از نقطه معین P عبور می‌کند، ذره دیگری، که آزادانه حرکت می‌کند، در جهت شعاعی روبه‌خارج از P می‌گذرد و سرعت آن طوری است که هم‌زمان با ذره اول به نقطه P برمی‌گردد. با استفاده از نتایج تمرین قبل، ثابت کنید که این دو ذره می‌توانند ویژه‌زمانهای متفاوتی میان انطباقهای متوالی خود ثبت می‌کنند. (در این متن مقدار دقیق اختلاف میان ویژه‌زمانها مورد نظر نیست). توجه کنید که در اینجا با نوعی "پارادوکس" دوقلو سروکار داریم که در آن دوقلوها در چارچوب مرجع سکون خود هیچگاه شتاب نمی‌گیرند.

۸-۱۴. سرعت مختصاتی نور در فضای شوارتس شیلد ۸-۴۳، در مختصه r ، (الف) در جهت شعاعی، (ب) در جهت عرضی چقدر است؟ $[1 - 2m/r, (1 - 2m/r)^{1/2}]$. آیا این موضوع نتایج فیزیکی دارد؟

۸-۱۵. نشان دهید زمان مختصاتی‌ای که طول می‌کشد تا یک سیگنال نوری در فضای شوارتس شیلد ۸-۸۸ از r_0 دوباره به r_0 برسد و نزدیکترین فاصله‌اش به مرکز مختصه شعاعی p داشته باشد برابر است با

$$\Delta t = 2 \int_p^{r_0} \left\{ \alpha^{-2} + \alpha^{-1} p^2 (r^2 - p^2)^{-1} \right\}^{-1/2} dr, \alpha = 1 - \frac{2m}{r}$$

معادله مسیر را به تقریب $r \cos \theta = p$ و $\phi = 0$ بگیرید، یعنی خطی که نسبت به مختصات

“راست” است. با چشمپوشی از مجذورهای p/m می‌توان نشان داد که این انتگرال برابر است با

$$2x_0 \left(1 - m/r_0 \right) + 4m \log \left\{ (r_0 + x_0)/p \right\}, \quad x_0 = (r_0^2 - p^2)^{1/2}$$

تحقیق کنید که این مقدار از $2x_0$ (مقدار انتگرال به‌ازای $m = 0$) بیشتر است، و خیلی بیشتر وقتی p کوچک باشد. اگر سیگنال بین دو مقدار نامساوی از r ، مثلاً r_0 و r_1 ، حرکت کند، نشان دهید که پاسخ بالا را می‌توان به‌راحتی اصلاح کرد. در اینجا تأخیر زمانی ناشی از کند شدن ساعتهای استاندارد و تغییر هندسه نزدیک به جرم مرکزی است؛ برخلاف انتقال گرانشی دوپلر، که فقط ناشی از کند شدن ساعتهاست. این امر شاپیرو^۱ را برآن داشت تا “آزمون چهارم” نسبیّت عام را پیشنهاد کند؛ در این آزمون زمانی که طول می‌کشد تا یک سیگنال رادار، در مسیرش برای انعکاس از سطح یک سیاره، از نزدیکی خورشید بگذرد مقایسه می‌شود با زمان لازم برای طی همان مسیر بدون تأثیر خورشید.^۲

۸-۱۶ به‌طور اصولی اما با جزئیات کامل توضیح دهید که چگونه می‌توان یک مسئله برخورد شامل “ذرات آزمون” را (یعنی ذراتی که به دلیل کوچکی جرم هیچ تأثیری بر میدان ندارند) در فضا زمان خمیده حل کرد. به‌عنوان مثال، ذره‌ای را در نظر بگیرید که به‌طور موقت در $r = 9m/4$ در متریک رابطه ۸-۴۳ در حال سکون است. ذره دیگری که به‌طرف مبدأ سقوط می‌کند، با این ذره برخورد سر به‌سر می‌کند. اگر این برخورد کشسان باشد، و اگر سرعت مختصاتی dr/dt ذرات بلافاصله بعد از برخورد مساوی و در جهت مخالف باشند، $\pm 4/45$ ، سرعت مختصاتی ذره در حال سقوط در لحظه قبل از برخورد چقدر است؟ [۴۰/۳۶۹-]

۸-۱۷ چاربردار ξ_μ را با مؤلفه‌های آن در متریک ۸-۷۲ شوارتس‌شیلد تعریف کنید: $\xi_\mu = (0, 0, 0, \alpha)$. ثابت کنید که $\xi_{\nu;\mu} = -\xi_{\mu;\nu}$ (بردارهایی را که در این معادله صدق کنند بردارهای کیلینگ می‌نامند). اگر $U^\mu = dx^\mu/ds$ ، نشان دهید کمیت $U^\mu \xi_\mu$ در امتداد هر ژئودزیک شوارتس‌شیلد ثابت است [راهنمایی: نسبت به s مشتق مطلق بگیرید]. با استفاده از این امر رابطه میان ضریبهای γ را، که با ساعتها و خط‌کشهای استاندارد ساکن در این متریک اندازه‌گیری می‌شود، برای هر دو نقطه‌ای که یک ذره در حال سقوط آزاد از آن می‌گذرد، به‌دست آورید. با معادله انرژی تمرین ۵-۱۳ (ب) مقایسه کنید. این نتیجه را به متریک ایستای استاندارد ۷-۲۴ تعمیم بدهید و با معادله انرژی نیوتون، $\varphi + 1/2 v^2 = \text{const.}$ ، مقایسه کنید.

۸-۱۸ معادلات ژئودزیک فضای شوارتس‌شیلد ۸-۷۲ را بنویسید و صورتهای مذکور در متن، یعنی معادلات ۸-۵۲، ۸-۵۳، و ۸-۶۹ را به‌دست آورید.

1. Shapiro

۲. برای نتایجی که اکنون این پیشگوییها را با دقت ۵٪ تأیید می‌کند رجوع کنید به:

۱۹-۸ متریک $ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$ را (که در واقع در بخش ۸-۶ به تفصیل بررسی شده است) به خودی خود در نظر بگیرید، با بررسی آن به عنوان یک متریک ایستای خاص، ۷-۲۴، با $c = 1$ انتقال بسامد ν_1/ν_2 بین هر دو نقطه $X = X_1$ و $X = X_2$ را در این متریک به دست آورید. با تمرین ۳-۵ مقایسه کنید. با استفاده از شکل پتانسیل φ نشان دهید نیرویی که به ناظر ساکن در مختصه X وارد می شود برابر است با $1/X$. از بخش ۲-۱۶ بیاد بیاورید که این نیرو، در واقع، ویژه شتاب ناظر است.

۸-۲۰ در وضعیت شکل ۸-۶، ثابت کنید ویژه زمان لازم برای سقوط یک ذره ساکن روی موشک "تراز" $X = X_2$ به تراز پایتتر ($X_1 < X_2$) همواره برابر است با $(X_2^2 - X_1^2)^{1/2}$ ؛ همچنین زمان مختصاتی لازم نیز همواره T یعنی $\{ (X_2^2 - X_1^2)^{1/2} / X_1 \} \tanh^{-1}$ است. [راهنمایی: جهانخط ذره مماس است بر هذلولی X_1 . چرا؟ یک تبدیل لورنتس در نظر بگیرید که هذلولی را به خودش و مماس را به مماس رأس تبدیل می کند.]

۸-۲۱ برای متریک تمرین ۸-۱۹، نمادهای کریستوفل و معادلات ژئودزیک حرکت در جهت X را به دست آورید. با استفاده از رابطه ۸-۸۸ جوابهای این معادلات را به مختصه های x و t مینکوفسکی تبدیل کنید و نشان دهید که x و t خطی هستند.

۸-۲۲ ثابت کنید که: (الف) مسیرهای نور در فضایی با متریک تمرین ۸-۱۹ نمدایره است با معادله نوعی $X^2 + Y^2 = a^2$, $X > 0$ ؛ (ب) سرعت مختصاتی نور در هر نقطه با مختصه X و در هر جهت برابر X است؛ (۳) هیچ حد بالایی زمان مختصاتی که یک سیگنال نوری لازم دارد تا در جهت X از نقطه X (بزرگتر از صفر) به X_1 (بزرگتر از X)، یا برعکس، برسد وجود ندارد، به شرط آنکه X به اندازه کافی به صفر نزدیک باشد.

۸-۲۳ در روابط ۸-۸۸ تا ۸-۹۰ نشان دادیم که فضای مینکوفسکی M_4 از یک موشک چگونه "به نظر می رسد". به همین طریق، با اعمال یک دوران با سرعت زاویه ای ثابت ω به محورهای x و y ، متریک مانای M_4 را، آن طور که از یک سکوی دوران بخواخت "دیده می شود" به دست آورید. ضریب مجذور دیرناسیل زمان "سکو" را در این متریک به انتقال سرخ و نیروی مرکزگرا مربوط کنید. [راهنمایی: بخش ۷-۶ و تمرین ۷-۱۳ را ببینید. تنها زمان مختصاتی "خوب" برای سکو زمان مختصه M_4 است.]

۸-۲۴ فرض کنید میدان چارنیروی F_{μ} (در فضا زمان تخت یا خمیده) را بتوان از پتانسیل نرده ای ϕ به دست آورد: $F_{\mu} = \Phi_{,\mu}$ ثابت کنید جرم سکون ذراتی که در این میدان حرکت می کنند بر طبق رابطه $m_0 = \Phi/c^2 + \text{const.}$ تغییر می کند [راهنمایی: تمرین ۹-۵].

۸-۲۵ ثابت کنید که هر فضای دوبعدی ریمانی یک فضای اینشتینی است. [راهنمایی: هر متریک دوبعدی را می توان قطری کرد.] همچنین با استفاده از رابطه ۸-۱۳۴، ثابت کنید که از رابطه ۸-۱۴۲، به استثنای فضای دوبعدی، رابطه $\Lambda = \text{const.}$ به دست می آید.

۸-۲۶ با استفاده از روشهایی شبیه به روشهایی که به دنبال رابطه ۸-۵۹ آمدند و با فرض

$e \ll 1$ ، پیشروی حضيض اضافی (رابطه ۸-۱۵۴) ناشی از جمله Λ در معادلات اینشتین را به دست آورید. معادله ۸-۱۵۳ را می‌توانید فرض شده بگیرید.

فصل ۹

۹-۱ با توجه به مثالهای ما از مقیاس کیهانشناختی (یعنی، سکه به جای کهکشان) قضیه زیر (از نظریه نیوتون) را درباره مدل مقیاس شده سیستمی از اجسام که تحت گرانش متقابل یکدیگر حرکت می‌کنند ثابت کنید؛ در این مدلها همه اجسام به چگالی یکسان کوچک شده‌اند: مدار اجسام در این مدل، تحت گرانش متقابل یکدیگر، از لحاظ شکل و زمان شبیه به مدار سیستم اصلی است. ۹-۲ مشابه مدل میلن را در فضای کروسکال در نظر بگیرید: فرض کنید غبار آزمون در امتداد خطوط (ژئودزیک) $const. = T$ در ربع II و IV نمودار کروسکال حرکت می‌کند (شکل ۸-۷). این "عالم" همسانگرد نیست، اما همگن است: تمامی جهانخطهای بنیادی هم‌ارزند. (همچنانکه دیدیم، می‌توان آنها را با استفاده از تبدیلات لورنتس به یکدیگر تبدیل کرد.) تحول هندسی این عالم، یعنی توالی فضاهای عمومی $const. = R$ از E_1 تا E_2 ، را توصیف کنید. ارتباط زمان کیهانی با R چگونه است؟

۹-۳ با در نظر گرفتن حجم و جرم یک کره کوچک با شعاع مختصاتی ثابت r در متریک نظریه حالت پایا (رابطه ۹-۲۸)، ثابت کنید که جرم dM که حجم V در زمان d خلق می‌شود از رابطه $dM = 3H\rho V dt$ به دست می‌آید. با فرض اینکه (در دستگاه cgs) $H = 1.5 \times 10^{-18}$ ، $\rho = 2 \times 10^{-21}$ یک سال تقریباً برابر 3.2×10^7 ، و جرم هر اتم هیدروژن تقریباً برابر 1.7×10^{-24} است، ثابت کنید که، برای حفظ چگالی، باید هر ۶۰ سال یک اتم هیدروژن جدید در هر کیلومتر مکعب خلق شود.

۹-۴ از روی تقارن می‌توان فرض کرد که ذرات آزاد در متریک روبرتسون-واکر (معادله ۹-۲۷) می‌توانند حرکت ژئودزیک شعاعی ($\theta, \phi = const.$) داشته باشند. با رجوع به پیوست ۱، با $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, \theta, \phi, t)$ و $c = 1$ ، معادله ژئودزیک زیر را به دست آورید

$$t'' - (g_{11}\dot{R}/R)r'^2 = 0$$

که در آن هر پریم نشاندهنده d/ds است. با استفاده از خود متریک این معادله را به صورت

$$t''/(t^2 - 1) = -\dot{R}/R$$

درآورید تا با انتگرال‌گیری از آن به دست آورید

$$t'^2 - 1 = A/R^2(t)$$

که در آن A یک ثابت (مثبت) اختیاری است. این معادله دیفرانسیل عام برای ژئودزیکهای شعاعی زمان‌گونه است. توجه کنید که مختصه شعاعی به‌طور صریح داخل این معادله نمی‌شود، و بنابراین باید بتوان آن را در مورد شکل دیگر متریک (رابطه ۹-۲۶) نیز به‌کار برد.

۵-۹ به‌طور اصولی اما با جزئیات کامل توضیح دهید که اگر کسی در فضای روبرتسون-واکر علاقه‌مند به بررسی سفر میان کهکشانهایی باشد که ویژه فاصله کیهانی آنها در خلال سفر به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد، آنگاه مسئله‌هایی چون تمرین ۲-۲۸ (در باره مسافتی که یک موشک با ویژه‌شتاب ثابت زیاد طی می‌کند) را چگونه باید حل کرد. [راهنمایی: تمرین ۴-۶]

۶-۹ در عالم روبرتسون-واکر با انبساط بینهایت (رابطه ۹-۲۶)، یک ذره از مبدأ با سرعت v_0 پرتاب می‌شود. ثابت کنید که این ذره، در نهایت (همچنانکه $t \rightarrow \infty$) در شاره کیهانی به‌حالت سکون درمی‌آید. [راهنمایی: معادله ژئودزیک ۹-۴ را به‌صورت $\gamma v = A^{1/2}/R(t)$ درآورید، که در آن $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ و v سرعت موضعی نسبت به شاره کیهانی است.] در حالت خاص، اگر $k = 0$ و ذره در $t = t_0$ پرتاب شود، ثابت کنید که در مختصه ρ_0 به سکون می‌رسد:

$$\rho_0 = \int_{t_0}^{\infty} \frac{adt}{R(R^2 + a^2)^{1/2}}, \quad a = \frac{R(t_0)v_0}{(1 - v_0^2)^{1/2}}$$

اگر انتگرال واگرا شود، مثلاً اگر $R = t^{1/2}$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۷-۹ از شکل ۹-۶ برای توضیح نموداری نتیجه تمرین ۹-۶، که بنابر آن هر ذره با حرکت آزاد سرانجام نسبت به شاره کیهانی به سکون می‌رسد، برای مورد عالم میلن استفاده کنید. ρ مختصه ذره بنیادی، چقدر باشد تا ذره‌ای با حرکت آزاد که در زمان $\tau = a$ از مبدأ فضایی با سرعت u گسیل می‌شود تنها در آینده زمانی بینهایت بتواند به آن برسد [$\rho = u(c^2 - u^2)^{1/2}$].

۸-۹ بر طبق قانون تابش "جسم سیاه" پلانک، چگالی انرژی فوتونها در گستره بسامد ν_0 تا $\nu_0 + d\nu_0$ برابر است با

$$du_0 = \lambda \pi h \nu_0^2 c^{-2} (e^{h\nu_0/kT_0} - 1)^{-1} d\nu_0 \quad (1)$$

که در آن k ثابت بولتزمن و T_0 دمای مطلق است. شاخصهای پایین صفر نشان می‌دهد که کمیت‌های مختلف در لحظه کیهانی معین t_0 بررسی شده‌اند. فرض کنید تابش مورد بحث عالم روبرتسون-واکر با تابع انبساط $R(t)$ را به‌طور یکنواخت پر می‌کند و ما می‌توانیم از برهم‌کنش آن با ماده کیهانی چشمپوشی کنیم. همچنانکه این عالم منبسط یا منقبض می‌شود آیا این تابش ماهیت "جسم سیاه" (رابطه ۱) خود را حفظ می‌کند؟ و اگر حفظ می‌کند با چه قانون دمایی؟ جزئیات استدلال زیر را بنویسید: $du/du_0 = R_0^4/R^4$ و $\nu/\nu_0 = R_0/R$ و از این رو رابطه ۱ بدون شاخص پایین، به شرط آنکه $T/T_0 = R_0/R$ باشد.

۹-۹ در صورت وجود افق رویداد، ثابت کنید که در هر راستا دورترین کهکشانی که یک ناظر اگر "اکنون" حرکت کند، می‌تواند به آن برسد، کهکشانی است که "اکنون" بر افق رویداد در آن راستا واقع است.

۱۰-۹ اگر یک عالم مدل هم افق رویداد و هم افق ذره داشته باشد، ثابت کنید که بر هر خط دید، دورترین کهکشانی که از آن پژواک راداری (از لحاظ نظری) می‌تواند دریافت شود کهکشانی است که در آن این افقها همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۱-۹ با مراجعه به مدل لاستیکی، و با در نظر گرفتن عالمهایی که گذشته یا آینده متناهی یا نامتناهی دارند، یک استدلال صریح برای ویژگی (ط) در پایان بخش ۹-۶ به دست بدهید؛ یعنی که اگر در مدلی زمان به عقب برگردد، نقش افق رویداد و افق ذره عوض می‌شود.

۱۲-۹ با مراجعه به مدل لاستیکی، عامترین عالمی (همسانگرد و همگن) را توصیف کنید که در آن دو کهکشان معین، که ناظری مشخص در یک جهت و در یک زمان معین آنها را با انتقال به سرخ غیر صفر یکسان و در فاصله یکسان بنابر اندازه ظاهری می‌بیند، یکی از آنها در ویژه فاصله دو برابر دیگری قرار داشته باشد.

۱۳-۹ یک عالم روبرتسون-واکر با $R = ct$ و $k = 1$ در نظر بگیرید. در این مدل، هر ناظر می‌تواند به کمک نوری که از دو سوی متقاطع دریافت می‌کند، هر کهکشانی را ببیند. ثابت کنید که انتقال به سرخهای D_1 و D_2 دو نوری که همزمان از دو جهت مخالف از یک کهکشان می‌آید در رابطه زیر صدق می‌کند

$$D_1 D_2 = \exp(2\pi)$$

۱۴-۹ جزئیات استدلال زیر را که درباره شرط اجتناب از پارادوکس اولبرس در مدل‌های روبرتسون-واکر است، بنویسید: رابطه ۹-۴۰ و ۹-۴۳، برای چگالی انرژی تابش در مبدأ در زمان t_0 ، ناشی از یک چشمه با درخشندگی ذاتی B داریم $BR^2/c\rho^2R_0^2$ (با حذف شاخص پایین ۱ و نوشتن R به جای R_1 و مانند آن). فرض کنید n تعداد کهکشانها در واحد حجم مختصاتی همراه (در مدل‌های پایستار دقیقاً ثابت)، و $B(t)$ درخشندگی ذاتی یک کهکشان متوسط به صورت تابعی از زمان کیهانی باشد. در این صورت، چگالی انرژی تابشی در مبدأ، ناشی از یک پوسته ماده کیهانی در شعاع مختصاتی ρ با ضخامت مختصاتی $d\rho$ برابر است با

$$du = \frac{B(t)R^2(t)}{c\rho^2R_0^2} \times \frac{n^4\pi\rho^2 d\rho}{(1 - k\rho^2)^{1/2}}$$

وقتی روی تمامی پوسته‌هایی که در آن لحظه به مبدأ نور می‌دهند جمع بزنیم. باید سرعت متناهی نور را در نظر بگیریم، و سهم هر پوسته را برطبق زمان گسیل نور به حساب آوریم. از رابطه ۹-۲۶

برای نور ورودی داریم

$$-c \dot{t} = R(t) dp / (\lambda - k\rho^2)^{1/2}$$

به این ترتیب چگالی انرژی ناشی کل در مبدأ با رابطه زیر داده می شود

$$u = \frac{4\pi n}{R_0^2} \int_{-\infty}^t R(t) B(t) dt$$

که در آن حد پایین انتگرال باید مطابق مدل موجود برای تمامی زمانهای کیهانی منفی، یا فقط از یک لحظه کیهانی معین ($t = 0$) به بعد، انتخاب شود. اگر B ثابت فرض شود، شرط اجتناب از چگالی انرژی بینهایت عبارت است از همگرایی انتگرال $\int R(t) dt$ برای کل گذشته مدل. [راهنمایی: (الف) خمش فضایی k تأثیری بر نتیجه ندارد. (ب) در مورد عالمهای بسته، هر کهکشان ممکن است چندین بار به شارکل اندازه گیری شده در مبدأ بیفزاید، و نور آن چندین بار عالم را گشت بزند. (ج) هیچ کسری برای جذب احتمالی نور گسیل شده از کهکشان تا مبدأ در نظر گرفته نشده است.] با این فرضها، کدام یک از مدلهای فریدمان (بخش ۹-۱۰) مشکل اولبرس دارد؟

۹-۱۵ با استفاده از استدلال تمرین پیش ثابت کنید که در نظریه حالت پایا $u = \pi \bar{n} B / H$ که در آن \bar{n} تعداد ثابت کهکشانها در واحد حجم ویژه، و B درخشندگی ذاتی ثابت یک کهکشان متوسط است.

۹-۱۶ با استفاده از فرمول ثابت کنید که در تمام مدلهای روبرتسون-واکر با $k = 0$ ، ویژه فاصله σ (در لحظه گسیل نور) و فاصله S مبتنی بر ابعاد ظاهری یکی است. به کمک مدلهای لاستیکی نشان دهید که چرا چنین است، و چرا این موضوع در موارد $k = \pm 1$ صادق نیست.

۹-۱۷ برای مدل میلن ۹-۱۳ [که در آن برحسب نمادگذاری رابطه ۹-۲۶، $R(t) = ct$ و $k = -1$] ثابت کنید که برای هر سیگنال نوری از ρ_1 در t_1 تا مبدأ در t_0 ، داریم $\psi(\rho_1) = \log(t_0 / t_1)$ ؛ و بنابراین رابطه زیر را میان سه "فاصله" یا جسم در زمان کیهانی t_1 ، که در بخش ۹-۷ توصیف شد، به دست آورید:

$$L/S = \exp(2\sigma/ct_1)$$

همچنین ثابت کنید که S همان فاصله "معمولی" جسم در ویژه زمان t_1 آن در چارچوب سکون مینکوفسکی ناظر است؛ و نیز σ و L برای ذرات نزدیک به مرز "ناظر" عالم به دلخواه بزرگ می شود.

۹-۱۸ برای مدل حالت پایای ۹-۲۸، رابطه زیر را میان S و L به دست آورید

$$L/S = (1 - HS/c)^{-2}$$

با استفاده از این رابطه فاصله افق رویداد، $\sigma = c/H$ ، را به دست آورید. چرا مقدار بینهایت L نشاندهنده افق رویداد در این مدل است اما در مدل میلن نیست؟

۹-۱۹ جزئیات استدلال زیر را که بنا به آن تنها مدل‌های (صفر-فشار) فریدمان، با خمش چارفضای ثابت دقیقاً شش مدل تهی هستند، کامل کنید؛ دو ژئودزیک زمان‌گونه مجاور خاص را، که از مبدأ می‌آیند، در نظر بگیرید، مثلاً جهانخطهای دو کهکشان با مختصه شعاعی r به فاصله مختصات همراه کوچک dl . زمان کیهانی t ، که روی هر ذره بنیادی ویژه‌زمان است، به ازای $\dot{c} = 1$ ، به صورت "فاصله" در امتداد این ژئودزیکها عمل می‌کند. هر اتصال فضاگونه آنها در زمان ثابت t ، و به اندازه $\eta = R(t)dl$ بر آنها عمود است. واضح است که $\dot{\eta} = \dot{R}(t)dl = (\dot{R}/R)\eta$ اما مقایسه با رابطه ۶-۷ نشان می‌دهد که خمش ثابت وجود ندارد مگر اینکه $\dot{R} = -KR$ ، $\rho = 0$ (و در ضمن، $K = -\Lambda/3$) یا $\rho = \text{const.} \neq 0$ ، یعنی به عالم اینشتین منجر می‌شود. اما این موضوع را می‌توان برطرف کرد. در این صورت، فقط مدل‌های تهی می‌توانند خمش ثابت داشته باشند. با مراجعه به فهرست بعد از رابطه ۸۴-۹ معلوم می‌شود که، در واقع، همه آنها خمش ثابت دارند. کاملاً جدا از قید معادلات میدان، می‌توان نشان داد که این شش متریک روبرتسون-واکر تنها متریک‌هایی هستند که خمش ثابت دارند. این موضوع به‌طور شهودی از شکل ۹-۶ دیده می‌شود (کدام شاره کیهانی دیگر را می‌توان برای دو چارفضای با خمش ثابت S_+^2 و S_-^2 در نظر گرفت؟) و نیز از بررسی مشابهی برای شاره‌های کیهانی ممکن در M_4 .

۹-۲۰ یک تحلیل کیفی مشابه با تحلیل شکل ۹-۸ می‌توان برای مدل‌های با فشار نیز ارائه داد. در اینجا نیز نکته عمده رسم منحنیهای $\dot{R}^2 = \text{const.}$ بر روی نمودار (Λ, R) است. برای این کار، از ۹-۷۹ رابطه $d\rho/dR = -3(\rho + pc^{-2})/R$ را به دست آورید و سپس از ۹-۷۳ شرط زیر را برای فرینهای این منحنیها استخراج کنید

$$\frac{d\Lambda}{dR} = -\frac{6k}{R^2} + \frac{24\pi Gc^{-2}(\rho + pc^{-2})}{R} = 0$$

اگر $k = 0$ یا $k = -1$ باشد، با فرض $\rho, p \geq 0$ مکانهای هندسی $\dot{R}^2 = 0$ هیچ‌گونه فرینی ندارد و کاملاً شبیه به مکانهای هندسی حالت بی‌فشار است، خود مدلها به هم شبیه هستند؛ نوسانی برای $\Lambda < 0$ و منبسط‌شونده برای $\Lambda \geq 0$. اما اگر $k = 1$ ، تحلیل پیچیده می‌شود، زیرا در این صورت $(\rho + pc^{-2})$ تابع صریح R نیست. می‌توان نشان داد که در $p = 0$ به جای یک فرین ممکن است چندین فرین برای R مثبت وجود داشته باشد.^۱

۱. مثلاً رجوع کنید به

فهرست راهنما

- | | |
|---|--|
| <p>~ گرانشی ۲۷، ۱۴۲-۱۴۴، ۱۷۵،
۳۳۲، ۳۱۳</p> <p>~ فشار در کیهانشناسی ۲۸۰-۲۸۱، ۳۴۱
~ موسیاوتر ۳۱۳، ۷۰</p> <p>اخترش ۲۸، ۱۹۱، ۲۴۹، ۲۶۲
ادغام تانسوری ۱۵۶
اسقف برکلی ۸، ۱۴
اصل ۲۱، ۲۲
~ فرما ۱۳۰</p> <p>~ کیهانشناختی ۲۰، ۲۴۸، ۲۵۰
~ گالیله ۲۱، ۲۲، ۲۷، ۱۴۰، ۳۱۲</p> <p>~ ماخ ۱۵، ۱۶، ۱۴-۱۸، ۲۲، ۲۴، ۲۵،
۱۴۰، ۲۱۷، ۲۵۹، ۲۹۷-۲۹۹، ۳۱۲</p> <p>~ موضوع اول نسبیت ۲۹، ۳۰، ۶۲-۶۴
~ نسبیت ۱۱-۱۴، ۳۱۲
~ هامیلتون ۱۴۰، ۱۵۰
~ هم‌ارزی ۲۰، ۲۲-۲۹، ۹۴-۹۵، ۱۳۹،
۱۷۳، ۲۱۵، ۳۱۳</p> <p>~ ضعیف ۱۸، ۲۲، ۲۴
~ قوی ۱۸، ۲۴، ۲۵
~ نیرومند ۲۵
~ نیمه‌نیرومند ۲۵
~ هموردایی ۲۱۷</p> <p>اصلاح معادله پواسون ۲۴۴، ۲۴۷، ۲۷۶، ۲۷۷</p> | <p>آزمایش
~ آیری ۳۱۸</p> <p>~ تروتون و نوبل ۳۲۸
~ روتور ۶۹، ۷۰
~ فوکو ۱۶
~ کندی-تورندایک ۱۱، ۳۱۱
~ ماهواره‌ای ۱۶، ۱۶۱، ۱۶۲، ۳۳۱
~ مایکلسون-مورلی ۱۰، ۳۱۰
آزمون زیروسکوپی نسبیت عام ۱۶۱
آشفته‌گیهای حرکت موج ۸۹
آینده مطلق ۸۸</p> <p>ابرخوشه ۲۴۱
ابراهی ۱۰، ۷۰-۷۴، ۹۱، ۳۱۸، ۳۱۹
اتحاد بیانکی ۲۱۹
اثر ۹-۱۱، ۱۲
اتساع زمان ۱۰، ۱۱، ۳۶، ۵۳-۵۶، ۶۷، ۳۱۴
~ گرانشی ۲۷، ۵۵، ۱۴۳
~ نسبیتی ۳۶
اتم بور ۱۱۳
اثر</p> <p>~ چراغ جلو ۳۱۹
~ دوپلر ۲۷، ۱۷۵، ۳۱۳</p> |
|---|--|

بردار(های)	افق
بزرگی ~ ۱۵۸، ۱۵۷، ۸۰	جرم ۲۲۹
~ صفر ۷۹، ۸۱	~ درکیهانشناسی ۲۶۳-۲۶۸، ۲۸۶، ۲۸۷،
~ کیلینگ ۳۳۵	۲۸۸، ۳۳۹
~ متعامد ۸۴، ۱۵۷	~ در فضای دوسپته ۲۲۹
~ میدان الکترومغناطیسی ۱۱۹-۱۲۲	~ ذره ۲۶۴-۲۶۸، ۲۸۷، ۳۳۹
بمب هیروشیما ۱۰۲، ۱۰۳	~ رویداد ۲۶۳-۲۶۸، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸،
بیلیاردبازهای نیوتونی ۳۳	۳۳۹
پارادوکس	~ شوارتس شیلد ۱۸۳-۱۹۲
~ اولبرس ۲۴۷، ۳۳۹، ۳۴۰	~ ویژه شتاب ۱۹۲-۱۹۵
~ دوقلو ۵۶-۵۹، ۳۱۶، ۳۳۴	انبساط جهان ۱۹، ۲۰، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۸۳، ۲۸۴،
پارامتر	انتقال
~ چگالی ۲۹۲	~ دوپلر گرانشی ۲۷
~ شتاب ۲۹۲	~ موازی ۱۶۱
پایستگی	انحراف
~ انرژی ۱۰۲	~ ژئودزیکی ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۳۳
~ بار ۳۲۸	~ مغناطیسی ذرات باردار ۱۲۲
~ جرم ۹۹، ۱۰۰	انحنای)
~ چارتکانه ۹۹	~ ژئودزیک ۳۲۹
قانون ~ تکانه نیوتونی ۹۶، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۳۱۳	~ عمود ۳۲۹
پایین بردن شاخصها ۱۵۸	اندازه ظاهری ۲۶۸، ۳۴۰، ۳۴۱
پتانسیل نیوتونی ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۶۴،	فاصله ~ ۱۷۳، ۱۷۴، ۲۶۸، ۳۴۱
۱۶۵، ۳۳۲	~ یک شیء ۲۶۸-۲۷۲، ۲۹۲-۲۹۷
پدیده	اندازه عالم ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
~ دوپلر ۶۶، ۶۸	انرژی
~ اپتیکی ۶۶-۶۸، ۹۱	~ آستانه ۱۰۷
~ عرضی ۶۷، ۶۸	~ بستگی گرانشی ۱۵
~ گرمایی ۶۹	پایستگی ~ ۱۰۲
~ کامپتون ۱۱۳-۱۱۵	~ پتانسیل ۱۰۲، ۱۰۳
~ کشش ۶۶-۶۷	~ تشعشعی خورشید ۱۰۲
~ ناگرانشی ۲۸	~ جنبشی ۹۶، ۹۷، ۱۰۲
پراش الکترونی ۱۱۳	~ داخلی ۱۰۲، ۱۰۳
پوشش گرانشی ۲۳	انقباض طول ۱۰، ۳۶، ۵۰، ۵۳، ۵۷، ۱۲۵-۱۲۷،
	پارادوکسهای ~ ۵۱-۵۳

- تایش حاصل از مهبانگ ۲۴۲، ۲۴۸، ۲۵۴
 تابع انبساط عالم ۲۵۷
 تانسور(های)
- ~ انرژی ۱۱۵-۱۱۷
 ~ الکترومغناطیسی ۱۱۷
 ~ اینشتین ۲۷۸، ۳۰۳
 ~ پادهموردا ۸۶، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶
 تراگذاری ~ ۱۵۶
 تقارن ~ ۱۵۶
 حاصلضرب خارجی ~ ۱۵۶
 حاصلضرب داخلی ~ ۱۵۶
 ~ خمش ریمان ۱۶۱، ۳۰۳-۳۰۰
 ~ در نسبیت خاص ۸۱، ۸۳-۸۴
 ~ در نسبیت عام ۱۵۳-۱۶۳
 ~ ریچی ۱۶۵، ۳۰۲
 ~ صفر ۱۵۶
 ~ میدان الکترومغناطیسی ۱۲۱،
 ۳۰۵-۳۰۹
 ~ هموردا ۸۶، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶
- تبدیل
 ~ یوانکاره ۵، ۴۱
 ~ گالیه‌ای ۶، ۱۳، ۲۹، ۳۰، ۴۳، ۶۴، ۹۳،
 ۱۱۸
 ~ لورنتس ۱۳، ۲۹، ۳۰، ۳۸-۴۹، ۶۳،
 ۱۱۸، ۳۱۵
 تراگذاری ~ ۴۲
 تقارن ~ ۴۲
 صورتهای هذلولوی ~ ۴۵
 ~ عام ۴۱، ۸۱
 ~ عام و ناوردا ۱۲۱
 ~ کلی ۸۱
 معیار ~ ۴۰
 نمایش نموداری ~ ۴۷-۴۹
 تپ‌اخترها ۱۹۱
 تحلیل دوسیه ۳۰، ۲۲۵، ۲۳۹
- تراکم‌ناپذیر ۴۵
 تساوی انرژی و جرم ۱۲، ۹۷، ۹۹-۱۰۲، ۱۰۸،
 ۱۰۹، ۲۰۰، ۲۰۳
 تساوی جرم و انرژی ۱۲، ۹۷، ۹۹-۱۰۲،
 ۱۰۸-۱۱۰، ۲۰۰-۲۰۳
 تعریف کلاسیک کار ۱۱۱
 تقدیم فوکه-دوسیه ۱۷۳
 تقریب خطی بر نسبیت عام ۲۳۱-۲۳۵
 تکانه ۹۶-۱۰۰، ۱۰۳-۱۰۵، ۱۱۱، ۱۱۲
 پایستگی ~ ۹۶، ۹۹، ۱۰۱، ۳۱۳
 ~ نسبی ۹۸، ۹۹
 تکینگی
 ~ شوارتس‌شیلد ۱۸۴-۱۸۵، ۲۰۹، ۲۱۰،
 ۲۱۱، ۲۲۸، ۲۹۱
 ~ مختصاتی ۱۸۴
 تندی ۳۱۶
 تپله‌های نسبی ۱۰۶
 ثابت
 ~ کیهانشناختی ۲۲۰-۲۲۵، ۲۴۶، ۲۴۷،
 ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۹۶، ۲۹۷
 ~ گرانش اینشتین ۲۲۲
 ~ گرانش نیوتون ۲۲۲
 ~ هابل ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۵۸، ۲۹۲
 جای دیگر ۸۸
 جرم ۲۰-۲۲، ۹۶-۹۷، ۹۹-۱۰۲
 ~ سکون ۹۶، ۹۷
 ~ عرضی و طولی ۱۱۱
 کاستی ~ ۱۰۳
 ~ گرانشی ۲۰، ۳۱۲
 ~ اثرپذیر ۳۱۲
 ~ اثرگذار ۳۱۲
 ~ لختی ۲۰، ۹۶-۹۷
 پایستگی ~ ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

چگالی ۳۰۶	~ نسبیتی ۹۶-۱۰۰
~ چارجریان ۳۰۶	جسم صلب ۴۵
~ کیهانی ۲۴۳	جهانخط ۷۵، ۷۶
~ ویژه ۱۱۵	~ یک ساعت مختصاتی ۱۴۸
	جهان
حاصلضرب	~ لوله ۷۵
~ تانسوری ۸۵	~ نگار ۴۹
~ زده‌ای ۸۴	~ نما ۴۹
حرکت	
~ صلب ۶۵، ۶۲، ۴۵	چاربردار ۸۴-۸۳، ۸۱-۷۶
~ طبیعی نور ۹	~ بسامد ۹۱
~ موج ۹۲-۸۹	~ جابه‌جایی ۸۱
~ نایکناخت ۷	~ زمان‌گونه ۱۴۲، ۸۷
	~ فضاگونه ۱۴۲، ۸۷
خاصیت	~ گاليله‌ای ۱۰۱، ۱۰۰، ۷۶
~ ذاتی ژئومتریک ۱۲۹	~ مخروط ۱۴۲، ۸۸
~ گروه تبدیلات لورنتس ۴۲	~ همسو ۱۰۴
~ گروه معادلات تانسور ۱۵۶	چارپتانسیل ۳۰۶، ۱۲۵
	چارتنکانه ۹۸
خمش	چارچوب
~ ثابت فضا ۲۵۶-۲۵۵، ۱۳۸، ۱۳۲	~ ثوابت ۶
~ گاوسی ۱۳۱	~ دکارتی ۵
خمیدگی	~ سکون ۸۳
~ امواج رادیویی ۲۸	~ صلب ۵
~ برمبنای پیشنهادی اصل هم‌ارزی ۲۷	~ لخت ۵، ۷، ۸، ۹، ۲۸، ۳۰، ۳۱، ۴۳
~ گرانشی نور ۲۷	۵۸
خمیده	~ موضعی ۱۳۹، ۲۵، ۲۴، ۲۳، ۲۰
~ فضای ۱۳۴-۱۳۱	۱۶۱
~ فضای غیرمعین ژئودزیکی ~ ۱۳۷	~ مرجع ۵
~ یک سطح ۱۳۱-۱۲۸	~ مرکز تنکانه ۱۰۵-۱۰۳
	چارسرعت ۲۱۵، ۲۱۴، ۸۸، ۸۷، ۸۲
~ دجاجه ۱- X ۱۹۱	~ متعامد ۸۲
~ دلتای کرونکر ۱۵۵	چارشتاب ۱۵۹، ۱۵۸، ۸۸، ۸۷، ۸۳
دینامیک	~ متعامد ۸۴
~ کیهانی ۲۷۷-۲۷۳	چارنیرو ۱۱۱-۱۰۸
~ نسبیتی ۲۸۰-۲۷۷	

- ذرات اساسی ۲۴۹
- تبدیلات ~ ۶۱، ۶۰
- یکنواخت ۱۹۲-۲۰۰
- شدت میدان گرانشی در متریک شوارتس شیلد ۱۸۲
- شرایط اتصال ۲۰۵
- شرایط مرزی ۲۹۹
- شعاع شوارتس شیلد ۱۷۰
- شکافت ۱۰۳
- شکل ظاهری اجسامی که حرکت یکنواخت دارند ۷۳-۷۱
- شمارش چشمه‌ها ۲۷۳، ۲۷۲، ۲۴۹
- ستارگان ۱۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۲۴۰
- ~ ثابت ۲۳
- سرعت متقابل ۴۴، ۴۵
- سطح ریمانی ۱۳۵
- سنکروترون ۱۲۳
- سه‌بردار ۷۷-۷۸
- تبدیلات ~ ۷۶-۷۸، ۷۹
- سه‌بعدی ۱۳۳
- سه‌میوار فلام ۱۷۰-۱۷۳، ۳۳۴
- سه‌نیرو ۱۰۸-۱۱۱
- سیالهای تراکم‌ناپذیر ۴۵
- سیاهچاله‌ها ۱۹۰-۱۹۴
- سیکلوترون ۱۲۳
- سیگنال ۴۴، ۴۹، ۵۸، ۳۱۶
- شاخص
- ~ انحنای ۲۵۸
- ~ پادهموردایی ۸۵، ۸۶، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷
- ~ هموردایی ۸۵، ۸۶، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶
- شماره کیهانی ۲۴۹
- شبکه مختصات ۳۶-۳۹
- شبه‌متریک ۷۶
- شتاب
- صفحه ژئودزیک ۱۳۱
- ضریب لورنتس ۳۹، ۴۰، ۴۳
- تبدیلات ~ ۶۰
- عالم
- ~ ادینگتون-لوماتر ۲۹۱
- ~ اینشتین-دوسیته ۲۶۶، ۲۸۵
- ~ اینشتین-فریدمان ۲۸۷
- ~ چارلیه ۲۴۱-۲۴۸
- ~ چگالی ۲۴۳، ۲۴۴
- ~ دینامیکی ۲۷۳-۲۷۷
- زندگی در ~ ۲۴۳
- ~ سلسله مراتبی ۲۴۱، ۲۴۸
- سن ~ ۲۴۳، ۲۹۳
- ~ گودل ۲۹۹
- ~ لوماتر ۲۹۰
- ~ منتهای ۲۰
- ~ میلان ۲۵۰-۲۵۴، ۲۵۸، ۲۶۶، ۲۶۸
- ۲۸۵، ۳۴۱
- ~ نسبی ۱۳۳، ۱۳۴، ۲۲۰، ۲۸۹، ۲۹۰
- ~ همگن ۲۴۲، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰

- غبار ۱۱۵
- ~ حرکت ژئودزیک ۱۴۰، ۱۴۱، ۲۱۷، ۲۲۳
- فرض
- ~ در حالت خاص ذرات غبار ۲۲۴
- ~ ساعت ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۷۰
- ~ دوم نیوتون ۵، ۶، ۱۰۸
- ~ سوم نیوتون ۵، ۶، ۱۰۹، ۱۱۰، ۳۱۲
- ~ طول ۵۴
- ~ فضای خمیده فیزیکی ۲۳۹
- ~ فیزیک در فضا زمان خمیده ۲۱۳
- ~ جرم ۹۷
- ~ ماهیت ~ فیزیک ۳۲-۳۳
- ~ گالیه ۵، ۱۴۰
- ~ نیروی لورنتس ۱۰۹، ۳۰۸
- ~ نیوتون، حوزه اعتبار کافی ۳۲، ۹۳-۹۴
- ~ هابل ۲۴۰، ۲۵۸
- ~ قرارداد جمع زنی اینشتین ۱۵۴
- قضیه
- ~ بیرکوف ۱۶۹، ۲۲۵، ۲۲۷
- ~ روبرتسون-واکر ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۷۵
- ~ شور ۱۳۲، ۲۵۸
- ~ گاوس-بونه ۳۳۰
- ~ ون-دام-ویگنر ۲۲۸
- ~ قله‌های موج ۸۹
- ~ کار ۱۱۰، ۱۱۱
- ~ کاستی جرم ۱۰۳
- ~ کانونی‌کننده نسبی ۵۵، ۳۲۷
- ~ کشش لختی ۱۴
- ~ کوانتوم ۱۱۱
- ~ کهکشان ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۴۰
- ~ کیهانزایی ۲۴۴
- ~ کیهانشناخت ۱۹-۲۰، ۲۳۸-۲۹۹
- ~ نسبییت عام ۲۷۷-۲۹۲
- ~ نیوتونی ۲۴۴-۲۴۶، ۲۷۴-۲۷۷
- قانون
- ~ اسپینوری ۸۱
- ~ اول نیوتون ۵، ۶، ۷، ۸، ۲۰، ۳۱، ۳۸
- ~ تبدیل سرعت اینشتینی ۵۸-۶۰
- ~ گالیه ۷
- ~ ایزومتریک ۱۳۸
- ~ اینشتینی ۲۲۰، ۳۳۶
- ~ پاددوسیته ۲۳۰
- ~ پادماخی ۲۹۸
- ~ تاؤب-نات ۲۹۸
- ~ تخت ۱۶۲
- ~ دوسیته ۲۲۵-۲۲۸، ۲۸۵
- ~ ریمانی ۱۳۴-۱۳۸
- ~ سه‌بعدی موضعی ۲۷
- ~ شخصی ۲۵۳
- ~ کروسکال و میدان شتاب یکنواخت ۱۹۲-۲۰۰
- ~ متریک ۷۶
- ~ مطلق ۸-۹، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۷۶، ۲۹۸
- ~ ایراداتی بر ~ ۸
- ~ مینکوفسکی ۱۳۷، ۱۹۲، ۱۹۳
- ~ همگانی ۲۵۳
- ~ فضا زمان ۷۵-۷۷
- ~ گالیه‌ای ۷۵-۷۶
- ~ گذشته مطلق ۸۸
- ~ گرانش (ی)
- ~ اتساع زمان ~ ۲۷، ۱۴۳

میدانهای ~ ایستا ۱۴۶، ۱۴۷، ۳۳۲
 گروه
 ~ گالیلهای ۵
 ~ لورنتس ۴۳، ۶۴
 گسیل انرژی ۱۱۱
 لم برخورد کشسان ۱۰۰
 لم مؤلفه صفر ۹۸

متریک ۷۶، ۱۳۵، ۱۳۶
 ~ ادینگتون-فینکلشتاین ۱۸۵، ۱۹۱
 ~ روبرتسون-واکر ۲۵۵-۲۶۰
 ~ ریمانی ۱۳۴، ۱۳۵
 ~ شوارتس شیلد ۱۶۷-۱۸۳
 ~ اصلاح شده ۲۲۵-۲۲۶
 فاصله در ~ ۱۷۴
 مدار در ~ ۱۵۷-۱۸۳
 ~ کیر ۱۵۶، ۲۹۹
 ~ کروسکال ۱۹۶، ۱۹۷
 متعامد مینکوفسکیایی ۸۸
 متوازی مینکوفسکیایی ۸۸
 مختصات
 ~ ژئودزیک ۱۶۰، ۱۶۱
 ~ قطبی کروی ۲۵۲
 ~ گاوسی ۱۳۶، ۱۵۳
 ~ متعامد ۱۳۷
 ~ همراه ۲۰۵
 مخروط
 ~ تهی ۸۶، ۸۷، ۱۴۲
 ~ نور ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۱۴۲
 مدل

~ جهان ناکامل ۲۵۲، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۸۶
 ~ کیهانشناختی فریدمان ۲۸۲-۲۹۲
 مربع بازه ۴۲، ۱۴۱
 مرتبه یک تانسور ۸۵، ۱۵۶، ۱۵۷

مرکز جرم ۳۲۳
 مسئله هم‌ارزی درجه دوم ۱۳۹
 مشاهده‌ناپذیرها ۱۲
 مشتق
 قانون لایب‌نیتسی ~ گیری ۸۱-۸۴
 ~ مطلق ۱۵۹، ۱۶۳، ۲۱۶
 ~ هم‌ورد ۱۶۲، ۲۱۶
 معادله

~ یواسون ۱۶۴، ۲۱۸، ۲۲۲، ۲۷۵
 ~ پیوستگی ۱۱۶، ۳۰۶
 ~ دوبروی ۱۱۲
 ~ دیفرانسیل ژئودزیک ۱۵۹
 ~ دیفرانسیل فریدمان ۲۸۰، ۲۸۲
 ~ ماکسول ۱۳، ۱۱۸، ۲۲۰، ۳۰۹
 ~ میدان نسبیت عام ۱۳۹، ۱۴۰
 ۲۱۸-۲۲۴
 مقیاسهای صلب ۳۶
 میدان

~ الکترومغناطیسی جریان مستقیم
 ۱۲۵-۱۲۷
 تبدیل ~ الکترومغناطیسی ۱۱۸-۱۲۲
 تمرکز ~ گرانشی ۲۱۲
 ~ گرانشی ایستا ۱۴۴-۱۵۲، ۳۳۲
 ~ گرانشی ذاتی ۱۶۳
 موج

~ الکترومغناطیسی ۹، ۳۰۸
 ~ دوبروی ۱۲، ۱۱۱-۱۱۳
 قله‌های ~ ۸۹
 ~ گرانشی ۹، ۲۰۳-۲۱۳، ۲۳۴
 ~ تپی ۲۰۸
 دامنه ~ ۲۰۸
 ~ همزمانی ۱۱۳
 مهبانگ ۱۹، ۲۴۲، ۲۶۵
 ~ داغ ۲۴۴
 میکروسکوپ الکترونی ۱۱۳

- نابودی زوج ۱۰۲
 ناظر اساسی ۲۴۹
 نامتربیک ۶۲
 ناوردا (ی) ۱۵۶، ۷۹
 ~ خمش ۳۰۲، ۲۱۶
 ~ گاليله‌ای ۹۳، ۳۰
 ~ لورنتسی ۹۳، ۸۲، ۸۱، ۳۰
 ~ میدان الکترومغناطیسی ۱۲۱
 ~ زده‌ای ۱۵۶، ۸۱، ۷۹
 ~ بی‌علیت ۴۴
 نسبیت (ی)
- اصل موضوع اول ~ ۶۴-۶۲، ۳۰، ۲۹
 ~ خاص ۱۲۶-۲۹، ۲۶، ۱۴
 ~ بدون اصل موضوع دوم ۶۵-۶۳، ۳۰
 تعریف ~ ۳۰، ۱۲، ۴
 ویژگی‌های اصلی ~ ۳۱-۲۹
 یک نظریهٔ موضعی ~ ۳۱، ۲۵، ۲۴
 ۳۲
 ~ عام ۹۶، ۹۵، ۵۸، ۲۷، ۲۶، ۲۲، ۱۴، ۵
 ۲۳۸-۱۲۸
 آزمون چهارم ~ ۳۳۵
 اثر قاطع ~ ۱۶۵
 برنامه‌ای برای ~ ۱۴۲-۱۳۹
 تقریب خطی بر ~ ۲۳۵-۲۳۱
 ~ کیهانشناختی ۲۵۰، ۲۴۹
 مجموع ~ سرعتها ۵۹، ۴۷
 ~ نیوتونی ۳۱۳، ۱۰۱، ۳۴-۳۳، ۸
 نشانگان ۱۳۷
 نظریه
- ~ برانزو دیکی ۲۶
 ~ بیکن ۳۲
 ~ حالت پایا ۲۴۸، ۲۶۰، ۲۶۵، ۲۶۶
 ۲۷۳، ۲۶۸
 ~ گرانش نسبیت خاص ۹۴-۹۶
- ~ گرانشی نیوتون ۲۲، ۳۱، ۳۲، ۹۳، ۱۶۴
 ۳۳۲، ۲۷۷-۲۷۴، ۱۶۵
 ~ لورنتس ۱۰-۱۱، ۱۲، ۴۳، ۵۰، ۳۱۱
 ~ ماکسول ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۲۲، ۳۰
 ۱۰۱، ۱۱۸، ۱۶۵، ۱۶۶، ۳۰۴-۳۰۹
 ۳۱۲
 ~ میدان وحدت‌یافته ۲۱۷
 ~ نوردشتروم ۲۸
 نقطهٔ همسانگرد ۱۳۲
 نمادهای کریستوفل ۱۵۸، ۳۰۰، ۳۰۱
 نمودار
 ~ روبرتسون ۲۹۴-۲۹۷
 ~ مینکوفسکی ۴۹، ۸۶-۸۸
 (نوری)
 انتشار موج ~ ۲۹، ۳۰
 حرکت طبیعی ~ ۹
 خمیدگی گرانشی ~ ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۹۵
 ۱۰۳، ۱۷۳، ۱۷۸-۱۸۰
 قانون انتشار ~ ۲۹، ۳۰
 نوسانگر هماهنگ نسبیتی ۳۲۴
 نیروی
 ~ کشندی ۱۶۳، ۱۶۴ -
 ~ کوریولیس ۱۷، ۱۸، ۳۳۶
 ~ نسبیتی ۱۰۹
 واپاشی مزون ۵۴، ۵۵
 وحدت فیزیک ۱۳، ۲۶
 ویژه
 ~ جرم ۹۷، ۹۸
 ~ زمان ۸۲، ۱۴۱
 ~ شتاب ۶۰، ۸۳
 ~ طول ۵۴
 ~ فاصله ۲۶۸، ۳۴۰
- همانی‌سازی توپولوژیکی ۱۳۱، ۲۵۹، ۳۳۰

همسانگردی عالم ۲۴۸، ۲۴۲

هنجاریک بردار ۸۲، ۸۰

هندسه

~ ریمانی ۱۳۴

~ فینسلری ۱۳۶

همجوشی ۱۰۳

همزمانی ۱۴۷، ۱۴۶، ۳۷

تعریف ~ ۳۵، ۳۴

موج ~ ۱۱۳

نسبیت ~ ۴۳، ۳۴، ۱۲