نظریه اندازه و انتگرال

دکتر فریبا بهرامی - حسین فضلی

نظریهٔ اندازه و انتگرال

با تأکید بر حل مسئله

قابل استفاده برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و کارشناسی ارشد

تألیف :

دکتر فریبا بهرامی

حسین فضلی

انتشارات حفیظ

سرشناسه	: بهرامی، فریبا، ۱۳۵۱-
عنوان و نام پدیدآور	:نظریه‌اندازه‌وانتگرال‌باتاکیدبر حل مسئله مخصوص دانشجویان کارشناسی‌ارشد/ فریبا بهرامی، حسین فضلی.
مشخصات نشر	: تهران: حفیظ، ۱۳۹۰.
مشخصات ظاهری	:۱۷۶ص.:مصور
شابک	: ۳۲۰۰۰ ریال 978-964-177-077-0
یادداشت	:عنوان به انگیسی :.measure theory and integral
یادداشت	:واژه نامه.
موضوع	:حساب انتگرال -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:حساب انتگرال -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	: اندازه‌گیری -- نظریه
شناسه افزوده	:فضلی ،حسین، ۱۳۶۴-
رده‌بندی کنگره	:۱۳۹۰ ۶ن۹ب/QA ۳۰۹
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۵/۴۳۰۷۶
شماره کتابشناسی ملی	:۲۳۶۸۵۸۱

نام کتاب:............................ نظریه اندازه و انتگرال

ناشر:............................ انتشارات حفیظ ۰۹۱۲۱۸۹۰۸۲۴-۶۶۷۲۲۱۸۱

ناشر همکار:............................ انتشارات قلم یوسف ۶۶۷۲۵۳۷۲

تالیف .... فریبا بهرامی - حسین فضلی

لیتوگرافی............................ سنا ۶۶۴۱۹۵۹۵

چاپ............................ الهادی

نوبت چاپ:............................ اول/ ۱۳۹۰

تیراژ:............................ ۱۰۰۰ نسخه

قیمت:............................ ۳۲۰۰۰ ریال

شابک ۰-۰۷۷-۱۷۷-۹۶۴-۹۷۸ ISBN: 978-964-177-077-0

انتشارات حفیظ: تهران خیابان انقلاب بعد از پارک دانشجو ساختمان ۱۰۳۲ واحد ۱۱

کتاب حفیظ: تهران خیابان انقلاب خیابان ۱۲ فروردین نرسیده به روانمهر پلاک ۲۳۳

فهرست مطالب

پیش‌گفتار مؤلفان:

مبحث انتگرال یکی از مباحث قدیمی و بخش بسیار مهمی در حساب و دیفرانسیل می‌باشد. پیدایش نظریه‌های متفاوت انتگرال مانند نظریه‌ی انتگرال ریمان، انتگرال ریمان توسیع‌یافته، انتگرال لبگ، انتگرال پرون[1]، انتگرال دانژوا[2] و ... دلیل بر اهمیت این شاخه از ریاضیات است. یکی از اولین نظریه‌های مدرن انتگرال توسط ریمان معرفی شد. انتگرال ریمان تعریف طبیعی و نسبتاً ساده از انتگرال است و ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان، مهندسان و بسیاری دیگر بطور مکرر از این انتگرال استفاده می‌کنند. اما مطالعه و تحقیق در آنالیز پیشرفته، نیاز به نظریه‌ای از انتگرال با خواص بیشتری در فضایای همگرایی دارد. ما بر این اعتقادیم که نظریه‌ی انتگرال ریمان بایستی نقطه‌ی شروع نظریه‌ی انتگرال باشد و آشنایی هرچه بیشتر خواننده با این نظریه، می‌تواند در درک و فهم زیبایی نظریه انتگرال لبگ موثر واقع شود. هدف اصلی ما در این کتاب معرفی مقدماتی نظریه‌ی اندازه به منظور مطالعه‌ی دقیق و پایه‌ای انتگرال لبگ است که در سال‌های اخیر توانسته است اهمیت و کاربرد خود را در توسیع آنالیز مدرن نشان دهد.

فصل اول کتاب را به بیان و یادآوری مفاهیم و تعاریف بنیادی و مورد نیاز در سراسر کتاب اختصاص داده‌ایم. هدف از این فصل مقدماتی، بیان برخی نمادها، اصطلاحات و قضایایی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در واقع با توجه به نیاز مطالب مورد بحث در فصول آتی به تعاریف و قضایای مقدماتی در نظریه‌ی مجموعه‌ها و آنالیز ریاضی و تسهیل در امر ارجاع به قضایا و تعاریف مورد نیاز، ما را بر آن داشت تا این فصل مقدماتی را به رشته تحریر درآوریم.

فصل دوم کتاب به نظریه‌ی اندازه اختصاص دارد. در ابتدا به ارائه‌ی تاریخچه‌ی مختصری از این نظریه و چگونگی پیدایش آن پرداخته‌ایم. سپس مجموعه‌های اندازه‌پذیر را مبتنی بر مفهوم سیگما-جبر بیان کرده و بدین ترتیب روی مجموعه‌ای دلخواه، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌ها بنام مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با خواصی مشترک جمع کرده و فضایی ساختیم که بتوان مفهوم تابع اندازه را روی این فضا پیاده ساخت. قبل از ساخت فضای اندازه، برخی فضاهای اندازه‌پذیر مهم و اساسی مانند فضای برل اندازه‌پذیرها و فضاهای حاصل‌ضربی با بعد متناهی و نامتناهی را معرفی کرده‌ایم. سپس تابع مجموعه‌ای بنام تابع اندازه را روی فضاهای اندازه‌پذیر تعریف و بدین طریق فضای اندازه را معرفی کرده‌ایم. به منظور معرفی فضای اندازه‌ی لبگ، مفهوم جدیدی با عنوان اندازه‌ی خارجی را تعریف کرده‌ایم و در

---

[1] Perron Integral

[2] Denjoy Integral

نهایت با مقایسه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر و مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر، این فصل را به پایان رسانده‌ایم.

فصل سوم کتاب به بحث انتگرال لبگ می‌پردازد. با ارائه‌ی تاریخچه‌ای مختصر از این نظریه‌ی تاریخی، به سراغ تعریف توابع اندازه‌پذیر می‌رویم. سپس توابع ساده و در واقع بلوک‌های ساختمانی نظریه‌ی انتگرال را معرفی و با تعریف انتگرال این توابع، مفهوم انتگرال لبگ را بر اساس این تعاریف معرفی و قضایایی بسیار مهم مانند قضیه‌ی همگرایی یکنوا و قضیه‌ی تسلطی لبگ را اثبات می‌کنیم. سپس به مقایسه‌ی دو نظریه‌ی انتگرال ریمان و لبگ در قالب قضایا می‌پردازیم. بعد فضاهای کلاسیک L^p را مطالعه و کامل بودن این فضاها را ثابت خواهیم کرد. در نهایت این فصل با معرفی انواع همگرایی‌ها و بیان ارتباط مابین آنها خاتمه می‌یابد.

کتاب حاضر در حدود ۷۰% مباحث درس ۴ واحدی آنالیز حقیقی کارشناسی ارشد را دربر می‌گیرد و برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و دانشجویان سال اول کارشناسی ارشد برای تمامی گرایش‌های ریاضیات کاربردی، محض و آمار نگاشته شده است. فرض بر این است که خواننده گرامی با مباحث اصول آنالیز ریاضی، برخی مقدمات جبر خطی و توپولوژی عمومی آشناست.

در اینجا وظیفه اخلاقی خود می‌دانیم، از خانم سیما آغچی و آقای وحید حسینی‌کیا به خاطر خواندن متن قبل از چاپ و ارائه‌ی نظراتی ارزشمند، صمیمانه تشکر نماییم. در نهایت از تمامی عزیزان خواننده استدعا داریم نظرات و پیشنهادات خود را با آدرس الکترونیکی زیر منتقل نمایند تا در چاپهای بعد مورد استفاده قرار گیرد.

با امید به اینکه این کتاب در نظر علاقمندان علم بویژه افرادی که به ریاضیات عشق می‌ورزند، مقبول افتد.

دکتر فریبا بهرامی - حسین فضلی

دانشگاه تبریز - تابستان ۱۳۹۰

bahrami.fazli@gmail.com

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم بنیادی

هدف از این فصل مقدماتی، بیان برخی نمادها، اصطلاحات و قضایایی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در واقع با توجه به نیاز مطالب مورد بحث در فصول آتی به مقدماتی در نظریه‌ی مجموعه‌ها و اصولی مقدماتی در آنالیز ریاضی و تسهیل در امر ارجاع به قضایا و تعاریف مورد نیاز، ما را بر آن داشت تا این فصل مقدماتی را به رشته تحریر درآوریم. اثبات یک نتیجه فقط در صورتی ارائه شده است که کاملاً ناآشنا باشد. از نماد $\exists$ برای "وجود" و $\forall$ برای "به ازای هر" و $\Longrightarrow$ برای "در نتیجه" استفاده خواهیم کرد. انتهای اثبات نماد $\blacksquare$ را قرار خواهیم داد.

۱.۱ نظریه‌ی مجموعه‌ها

اگرچه مجموعه‌ی جهانی، یعنی مجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها، به مفهوم مطلق آن وجود ندارد، اما می‌توان فرض را بر این اصل استوار کرد که تمام مجموعه‌هایی که از این به بعد در این کتاب آورده می‌شوند، زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه‌ی ثابت مانند X هستند که می‌توان آن را به عنوان یک مجموعه‌ی جهانی به معنای محدود آن در نظر گرفت. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\emptyset$ نشان می‌دهیم. $x \in E$، یعنی اینکه x عضوی از مجموعه‌ی E است. $E \subseteq F$ است اگر هر عضو E عضوی از F نیز باشد. $E \subset F$ (E زیرمجموعه‌ی سره‌ی F) یعنی $E \subseteq F$ و $x \in F$ وجود دارد که x عضوی از E نیست ($x \notin E$). متمم E^c از E، مجموعه نقاطی از X است که در E نباشد. تعریف E^c وابسته به X است. اجتماع دو مجموعه را با $E \cup F$ و اجتماع خانواده‌ای از مجموعه‌ها را به صورت $\cup_{\alpha \in \Gamma} E_\alpha$ که در آن Γ مجموعه‌ی اندیس‌گذار است، نشان خواهیم داد. به همین ترتیب اشتراک دو مجموعه را با $E \cap F$ و ... نشان می‌دهیم. قوانین دمورگان، روابط مابین اجتماع و اشتراک خانواده‌ای

از مجموعه‌ها را بیان می‌کند. در واقع

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha^c \quad , \quad \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha^c.$$

تفاضل و **تفاضل متقارن** دو مجموعه‌ی E و F را به ترتیب به صورت $E - F = E \cap F^c$ و $E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$ تعریف می‌کنیم. حاصل‌ضرب دکارتی $X \times Y$ مجموعه‌ی جفت‌های مرتب $\{(x,y); \quad x \in X \ , \ y \in Y\}$ است. اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$، اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$، اعداد صحیح را با $\mathbb{Z} = \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\}$ و اعداد گویا را با نماد $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{P}(X)$ را نمادی برای گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های X در نظر خواهیم گرفت.

۲.۱ حد دنباله‌ای از مجموعه‌ها

در این بخش، قصد داریم برای دنباله‌ای از مجموعه‌ها حد تعریف کنیم، تا یاریگر ما در ارائه‌ی نظریه‌ی اندازه که اساس آن مجموعه‌ها هستند، باشد و مفاهیم ریاضی به صورتی رساتر بیان شوند.

تعریف ۱.۱. فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. گوییم دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ صعودی است و می‌نویسیم $E_n \uparrow$، اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n \subseteq E_{n+۱}$ و به همین ترتیب گوییم دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نزولی است و می‌نویسیم $E_n \downarrow$، اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n \supseteq E_{n+۱}$ باشد. دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را یکنوا گوییم اگر صعودی یا نزولی باشد.

حال به تعریف حد دنباله‌ای از مجموعه‌ها می‌پردازیم. به همین خاطر مشابه تعریف حد برای دنباله‌ای از اعداد ابتدا حدود بالایی و پایینی را برای دنباله‌ای از مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. حد بالایی و پایینی دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$، از زیرمجموعه‌های X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

تعریف ۳.۱. فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$، دنباله‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد. اگر

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$$

آنگاه گوییم دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگراست و مقدار مشترک آن‌ها را برابر با حد $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ در نظر می‌گیریم. در صورتی که $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n \neq \liminf\limits_{n\to\infty} E_n$، آنگاه گوییم $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ موجود نیست.

حال می‌خواهیم در قالب لمی پر کاربرد، ضمن بیان برخی ویژگی‌های حدود بالایی و پایینی دنباله‌ای از مجموعه‌ها، روشی بسیار مناسب برای پیدا کردن حدود بالایی و پایینی دنباله‌ها ارائه دهیم.

لم ۴.۱. **اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه**

الف) $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n = \{$ نقاطی که به همه‌ی E_nها، به جز تعداد متناهی از آن‌ها متعلق است $\}$

ب) $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n = \{$ نقاطی که به تعداد نامتناهی از E_nها متعلق است $\}$

پ) $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$

اثبات : **الف)** فرض می‌کنیم $x \in X$ باشد. اگر x متعلق به تمامی E_nها، به جز تعداد متناهی از آن‌ها باشد، آنگاه

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_0\ x \in E_k, \implies x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = \liminf_{n\to\infty} E_n.$$

بالعکس، اگر

$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} E_n &\implies x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \\ &\implies x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} E_k, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \\ &\implies x \in E_k, \qquad \forall k \geq n_0. \end{aligned}$$

ب) مشابه قسمت قبلی است.

پ) با توجه به دو قسمت قبل بدیهی است.

■

مثال ۵.۱. فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، تعریف شده به صورت

$$E_1 = [0, 1],\ E_3 = [0, \frac{1}{3}],\ E_5 = [0, \frac{1}{5}], \cdots, E_{2n+1} = [0, \frac{1}{2n+1}], \cdots$$

$$E_۲ = [۰, ۲],\ E_۴ = [۰, ۴],\ E_۶ = [۰, ۶], \cdots, E_{۲n} = [۰, ۲n], \cdots$$

آنگاه

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \{\text{نقاطی که به همه‌ی } E_n\text{ها، به جز تعداد متناهی از آن‌ها متعلق است}\} = \{۰\}$$

و

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \{\text{نقاطی که به تعداد نامتناهی از } E_n\text{ها متعلق است}\} = [۰, \infty)$$

تذکر ۱.۶. اگر $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای یکنوا باشد، آنگاه حد بالایی و پایینی‌اش برابر است. در واقع، اگر $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} E_n = \cup_{n=۱}^{\infty} E_n$ و اگر نزولی باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} E_n = \cap_{n=۱}^{\infty} E_n$

۳.۱ رابطه و تابع

تعریف ۱.۷. یک رابطه از مجموعه‌ی X به مجموعه‌ی Y، یک زیرمجموعه از $X \times Y$ است. اگر $X = Y$ باشد، به جای استفاده از عبارت، یک رابطه از X به X، معمولاً از عبارت، یک رابطه روی X استفاده خواهیم کرد. اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، آنگاه نماد xRy، بدین معناست که $(x, y) \in R$.

تعریف ۱.۸. یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X، رابطه‌ای مانند R روی X است که

۱- به ازای هر $x \in X$، $(x, x) \in R$،

۲- اگر $(x, y) \in R$، آنگاه $(y, x) \in R$،

۳- اگر $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$، آنگاه $(x, z) \in R$.

اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X و $x \in X$ باشد، آنگاه $\{y \in X : (x, y) \in R\}$ را کلاس هم‌ارزی عنصر $x \in X$ گوییم. گردایه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی، گردایه‌ای دوبدو مجزا از زیرمجموعه‌های X با اجتماعی برابر با X را تشکیل می‌دهند. اثبات این مطلب را می‌توانید در تمامی کتاب‌های مقدماتی نظریه‌ی مجموعه‌ها بیابید.

تعریف ۱.۹. یک رابطه مانند f از X به Y، را یک تابع از X به Y گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، فقط یک $y \in Y$ وجود داشته باشد که $(x, y) \in f$. این رابطه را معمولاً به صورت $f : X \to Y$ می‌نویسیم. X را دامنه‌ی f و $f(X)$ را برد f گوییم. از روی تابع $f : X \to Y$

می‌توان رابطه‌ی دیگری از Y به X به صورت $\{(y,x) : (x,y) \in f\} \subseteq Y \times X$، تعریف کرد. این رابطه را با $f^{-1} : Y \to X$ نشان داده و نگاره‌وارون تابع f می‌نامیم. تابع $f : X \to Y$ را یک‌به‌یک گوییم، هرگاه $f(x_1) = f(x_2)$ تنها زمانی رخ دهد که $x_1 = x_2$. f را پوشا گوییم، هرگاه $f(X) = Y$ و دوسویی گوییم هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد. در صورتی که f یک تابع دوسویی باشد، آنگاه رابطه‌ی $f^{-1} : Y \to X$، نه تنها یک تابع است، بلکه یک تابع دوسویی است.

تعریف ۱۰.۱. اگر $f : X \to Y$ یک تابع و $E \subseteq X$ و $F \subseteq Y$ باشد، آنگاه تصویر E و تصویر وارون F را تحت f به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(E) := \{f(x) \in Y : x \in E\}, \quad f^{-1}(F) := \{x \in X : f(x) \in F\}.$$

به آسانی می‌توان نشان داد، در صورتی که $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه $f(\cup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Gamma} f(E_\alpha)$ و $f(\cap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha\in\Gamma} f(E_\alpha)$ و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که f تابعی یک‌به‌یک باشد. همچنین

- $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(E_\alpha)$,
- $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(E_\alpha)$.
- $f^{-1}(E^c) = f^{-1}(Y - E) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(E) = \left(f^{-1}(E)\right)^c$,

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی باشند، آنگاه عبارات

$$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y) \quad , \quad \mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \quad , \quad \mathrm{card}(X) \geq \mathrm{card}(Y)$$

به ترتیب (از چپ به راست) بدین معنااند که تابعی مانند $f : X \to Y$ وجود دارد که یک‌به‌یک، دوسویی، پوشا است. همچنین

۱- گوییم $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ است، اگر تابعی یک‌به‌یک چون $f : X \to Y$ موجود باشد، اما هیچ تابع پوشا از X به Y موجود نباشد.

۲- $\mathrm{card}(X) > \mathrm{card}(Y)$ اگر تابعی پوشا چون $f : X \to Y$ موجود باشد، اما هیچ تابع یک‌به‌یک از X به Y موجود نباشد.

تعریف ۱.۱۲. مجموعه‌ی X را

- متناهی گوییم، هرگاه به ازای $n \in \mathbb{N}$ای، $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(\{1, 2, \ldots, n\})$.
- نامتناهی گوییم، هرگاه متناهی نباشد.
- شمارا گوییم، هرگاه $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$. هر مجموعه‌ی شمارای نامتناهی را می‌توان به صورت $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ نشان داد.
- ناشمارا گوییم، هرگاه $\mathrm{card}(X) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

قضیه ۱.۱۳. حاصل‌ضرب متناهی و اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

اثبات : مرجع [۱۴] را ببینید. ■

قضیه‌ی زیر که به **قضیه‌ی کانتور** معروف است، بیان می‌کند، مجموعه‌های شمارا در بین مجموعه‌های نامتناهی از نظر اندازه کوچکترین هستند.

قضیه ۱.۱۴. اگر X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، آنگاه $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$.

اثبات : مرجع [۱۴] را ببینید. ■

می‌توان ثابت کرد $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mathbb{R}$ هم ارزند و در نتیجه از قضیه‌ی کانتور، $\mathbb{R}$ ناشماراست. $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ را با حرف اختصاری $\mathfrak{c}$ و $\mathrm{card}(\mathbb{N})$ را با $\aleph_0$ نشان می‌دهیم. در مورد اعداد اصلی ترتیب زیر برقرار است

$$0 < 1 < 2 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} < 2^{2^{\mathfrak{c}}} < \ldots.$$

با توجه به روابط فوق طبیعی است چنین سوالی پیش آید که

- آیا عدد اصلی α موجود است که $\aleph_0 < \alpha < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ؟ به زبان مجموعه‌ها، آیا هیچ زیرمجموعه‌ی ناشمارای $\mathbb{R}$ وجود دارد که عدد اصلی‌اش از عدد اصلی $\mathbb{R}$ کوچکتر باشد؟

کوشش کانتور و بسیاری از ریاضیدانان برجسته‌ی آن زمان در حل این مسئله به نتیجه نرسید. بنابراین به ناچار معتقد بر این شدند که آن را به عنوان یک اصل قبول نمایند.

فرضیه‌ی پیوستار: عدد اصلی مانند α که در $\aleph_0 < \alpha < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ صدق نماید، وجود ندارد.

۴.۱ سری‌های نامرتب

تعریف ۱۵.۱. حد بالایی و پایینی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی را به ترتیب، به صورت

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right).$$

تعریف می‌کنیم. گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگراست، هرگاه حدود بالایی و پایینی‌اش متناهی بوده و برابر باشند. در این صورت مقدار مشترک آن‌ها را حد $\{x_n\}$ نامیده و با نماد $\lim_{n\to\infty} x_n$ نشان می‌دهیم. اگر $\{x_n\}$ همگرا نباشد، آنگاه آن را واگرا گوییم.

هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی عددی دلخواه باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ را یک سری نامتناهی یا فقط یک سری با مولد x_n گوییم. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگراست، اگر دنباله‌ی $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد و در غیر این صورت سری را واگرا گوییم. همانطور که مشاهده می‌کنید، در این سری اندیس‌های مولد سری با ترتیب $\dots > 3 > 2 > 1$ روی $\mathbb{N}$ مرتب شده‌اند. اگر به جای $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی دلخواهی مانند X، بدون ترتیب مشخصی قرار دهیم، آیا می‌توان سری نامرتب $\sum_{x\in X} u_x$ را تعریف کرد؟

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم $u : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه روی مجموعه‌ی X و $\mathcal{F}_X$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی X باشد. به ازای هر $F \in \mathcal{F}_X$،

$$s_F =: \sum_{x\in F} u_x,$$

که در آن $u_x = u(x)$، را مجموع جزئی سری می‌نامیم. گوییم سری $s_F = \sum_{x\in X} u_x$ مجموع‌پذیر است اگر $s \in \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که

$$\forall\varepsilon > 0, \ \ \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}_X, \ \ \forall F \in \mathcal{F}_X, \ \ F_\varepsilon \subset F \Longrightarrow |s_F - s| < \varepsilon.$$

آنگاه s را مجموع سری گوییم. به آسانی می‌توان نشان داد که مجموع هر سری مجموع‌پذیر یکتاست.

قضیه ۱۷.۱. اگر $u : X \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی باشد، آنگاه سری $\sum_{x\in X} u_x$ مجموع‌پذیر است اگر و تنها اگر $M > 0$ای چنان موجود باشد که به ازای هر $F \in \mathcal{F}_X$، $s_F \leq M$. در این حالت داریم

$$s = \sum_{x\in X} u_x = \sup\{s_F : F \in \mathcal{F}_X\}. \tag{1.1}$$

اثبات : فرض کنیم s مجموع سری باشد، آنگاه با قرار دادن $\varepsilon = ۱$، می‌توان $F_۱ \in \mathcal{F}_X$ را چنان یافت که به ازای هر $F_۱ \subset F$ داشته باشیم $|s - s_F| < ۱$ و در نتیجه $s_F < s + ۱$. حال اگر $F \in \mathcal{F}_X$ زیرمجموعه‌ی دلخواه و متناهی از X باشد، آنگاه $F_۱ \subset F \cup F_۱$ و در نتیجه $s_F \leq s_{F_۱ \cup F} < s + ۱$. بنابراین $M := s + ۱$ یک کران بالا برای گردایه‌ی تمام مجموع‌های جزئی است. بالعکس، اگر M کران بالایی برای گردایه‌ی تمام مجموع‌های جزئی سری باشد و s تعریف شده در (۱.۱) باشد، آنگاه با توجه به تعریف سوپریمم، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ می‌توان $F_\varepsilon \in \mathcal{F}_X$ را چنان پیدا کرد که $s - \varepsilon < s_{F_\varepsilon} \leq s$ باشد. در نتیجه به ازای هر $F \in \mathcal{F}_X$ و شامل F_ε، داریم $s - \varepsilon < s_F \leq s$ و این دقیقاً بدین معناست که $\sum_{x \in X} u_x = s$. ■

تعریف ۱.۱۸. گوییم سری $\sum\limits_{x \in X} u_x$ مجموعی برابر با $+\infty$ دارد و می‌نویسیم $\sum_{x \in X} u_x = +\infty$، هرگاه به ازای هر $M \in \mathbb{R}$، $F_M \in \mathcal{F}_X$ چنان موجود باشد که $s_{F_M} = \sum_{x \in F_M} u_x > M$.

قضیه ۱.۱۹. فرض کنیم $u : X \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی روی مجموعه‌ی X باشد که $\sum_{x \in X} u_x$ مجموع‌پذیر است، آنگاه $D = \{x \in X : u_x \neq ۰\}$ شماراست.

اثبات : فرض می‌کنیم $S = \sum_{x \in X} u_x < \infty$. قرار می‌دهیم

$$D_n = \{x \in X : u_x > ۱/n\}.$$

آنگاه D_n متناهی است. در واقع $|D_n| < nS$. حال از اینکه $D = \cup_{n=۱}^{\infty} D_n$، حکم بدست می‌آید. ■

قضیه ۱.۲۰. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و $\{X_n\}_{n=۱}^{\infty}$ افرازی از X باشد. اگر $u : X \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که $\sum_{x \in X} u_x$ مجموع‌پذیر است، آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sum_{x \in X_n} u_x$ مجموع‌پذیر است و سری نامرتب $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sum_{x \in X_n} u_x\right)$ نیز مجموع‌پذیر است و در این حالت، داریم

$$\sum_{x \in X} u_x = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sum_{x \in X_n} u_x \right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sum_{x \in X_n} u_x \right).$$

در صورتی که $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{x \in X_n} |u_x|\right)$ مجموع‌پذیر باشد، آنگاه عکس مطلب نیز برقرار است.

اثبات : مرجع [۲۳] فصل را ببینید. ■

۵.۱ توپولوژی و فضاهای متریک

تعریف ۲۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. گردایه‌ی $\Im$ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X گوییم، هرگاه

۱- $\emptyset, X \in \Im$،

۲- نسبت به اجتماع دلخواه بسته باشد،

۳- نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد.

در این صورت $(X, \Im)$ را یک **فضای توپولوژیک** گوییم و عناصر $\Im$ را مجموعه‌های باز این فضا می‌نامیم. در فضای توپولوژیک $(X, \Im)$،

- زیرمجموعه‌ی E از X را بسته گوییم، هرگاه E^c مجموعه‌ای باز باشد.
- درون زیرمجموعه‌ی E از X را، اجتماع تمام مجموعه‌های باز مشمول در E گوییم و با E° نشان می‌دهیم. E° بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول در E است.
- بستار زیرمجموعه‌ی E از X را اشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل E گوییم و با $\overline{E}$ نشان می‌دهیم. $\overline{E}$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته شامل E است.
- مرز ∂E از E را به صورت $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$ تعریف می‌کنیم.
- E را در X چگال گوییم، هرگاه $\overline{E} = X$.
- زیرمجموعه‌ی E از X را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز E شامل زیرپوشش متناهی باشد.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \to [\circ, \infty)$ را یک متر روی X نامیم، هرگاه

۱- $d(x, y) = \circ$ است اگر و تنها اگر $x = y$،

۲- به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$،

۳- به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

اگر d یک متر روی X باشد، آنگاه دوتایی (X, d) را یک **فضای متریک** نامیم. در فضای متریک (X, d)،

- مجموعه‌ی $\{x \in X : d(x, x_{\circ}) < r\}$ را گوی باز به مرکز $x_{\circ} \in X$ و به شعاع $r > \circ$، گوییم و با $B(x_{\circ}, r)$ نشان می‌دهیم.
- زیرمجموعه‌ی G از X را باز گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in G$، $r_x > \circ$ای چنان موجود باشد که $B(x, r_x) \subseteq G$.
- زیرمجموعه‌ی E، در فضای متریک (X, d) را کراندار گوییم، هرگاه $x_{\circ} \in X$ و $r > \circ$ای چنان موجود باشد که $E \subseteq B(x_{\circ}, r)$.
- گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ کشی است، هرگاه $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = \circ$.
- گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به $x \in X$ است، هرگاه $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \circ$.
- یک مجموعه
  - G_δ است، اگر به صورت اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز باشد.
  - F_σ است، اگر به صورت اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته باشد.

مثال ۲۳.۱. با توجه به اینکه $(\circ, ۱] = \cup_{n=۱}^{\infty}[\frac{۱}{n}, ۱] = \cap_{n=۱}^{\infty}(\circ, ۱ + \frac{۱}{n})$، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ای می‌تواند هم G_δ و هم F_σ باشد.

مثال ۲۴.۱. تابع $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، تعریف شده به صورت

$$d(x, y) = |x - y| = \left\{\sum_{k=۱}^{n}(x_k - y_k)^۲\right\}^{۱/۲}, \ x = (x_۱, ..., x_n), \ \ y = (y_۱, ..., y_n),$$

یک متر است. این متر به متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ معروف است.

توجه داشته باشیم که گردایه‌ی مجموعه‌های باز یک فضای متریک در اصول سه‌گانه‌ی فضای توپولوژیک صدق می‌کند و در نتیجه یک فضای توپولوژیک است. گردایه‌ی مجموعه‌های باز فضای متریک $(\mathbb{R}^n, d)$ که d متر اقلیدسی است را توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}^n$ نامیم.

تعریف ۲۵.۱. فرض کنیم $(X_۱, d_۱)$ و $(X_۲, d_۲)$ دو فضای متریک باشند. تابع $f : X_۱ \to X_۲$ را در $x \in X_۱$ پیوسته گوییم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای چنان موجود باشد که

$B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. تابع f را روی $E \subseteq X_1$ پیوسته گوییم، هرگاه در هر نقطه‌ی E تابعی پیوسته باشد. می‌توان نشان داد $f: X_1 \to X_2$ تابعی پیوسته روی X_1 است، اگر و تنها اگر تصویر وارون هر مجموعه‌ی باز در X_2، مجموعه‌ای باز در X_1 باشد.

تعریف ۲۶.۱. برای هر مجموعه‌ی ناتهی E در فضای متریک (X,d)، تابع $d(.,E): X \to [0,\infty)$ تعریف شده به صورت

$$d(x,E) := \inf\{d(x,y) : y \in E\}.$$

را تابع فاصله روی مجموعه‌ی E می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۱. در فضای متریک (X,d)، تابع فاصله روی زیرمجموعه‌ی E از X، تابعی پیوسته است.

اثبات : مرجع [۱] فصل ۱ را ببینید. ■

نتیجه ۲۸.۱. در هر فضای متریک (X,d)، هر مجموعه‌ی بسته، G_δ و هر مجموعه‌ی باز، F_σ است.

اثبات : فرض کنیم F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از (X,d) باشد. قرار می‌دهیم

$$G_n = \{x \in X : d(x,F) < 1/n\}$$

از اینکه تابع فاصله پیوسته است، G_n باز و بوضوح $F = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ است. بنابراین F، G_δ است. از اینکه متمم هر مجموعه‌ی باز، مجموعه‌ای بسته است، پس هر مجموعه‌ی باز، F_σ است. ■

قضیه ۲۹.۱. (لیندلف[1]). فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه زیرمجموعه‌ای شمارا $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \subset \Gamma$ چنان موجود است که

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\alpha_k}.$$

اثبات : مرجع [۴] فصل ۱ را ببینید. ■

در حالت کلی فضای متریک (X,d) را لیندلف گوییم، هرگاه هر پوشش باز X، یک زیرپوشش شمارا داشته باشد. بنابراین با توجه به قضیه‌ی قبل، $\mathbb{R}^n$ لیندلف است.

---

[1] Lindelöf

قضیه ۱.۳۰. **هر مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت اجتماع شمارا از بازه‌های باز و مجزا نوشت.**

اثبات : مرجع [۴] فصل ۱ را ببینید. ■

قضیه ۱.۳۱. **(هاینه-برل[۲]) زیرمجموعه‌ی $K \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها بسته و کراندار باشد.**

اثبات : مرجع [۱۲] فصل ۱ را ببینید. ■

۱.۶ توابع محدب و برخی نامساوی‌های مقدماتی

تعریف ۱.۳۲. تابع حقیقی مقدار Ψ تعریف شده روی بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ را محدب گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in I$ و هر $\alpha \in (۰, ۱)$، داشته باشیم

$$\Psi(\alpha x + (۱-\alpha)y) \leq \alpha\Psi(x) + (۱-\alpha)\Psi(y). \qquad (۱.۲)$$

Ψ را اکیداً محدب روی I گوییم، هرگاه نابرابری (۱.۲)، به ازای هر $x \neq y$، به صورت اکید باشد.

قضیه ۱.۳۳. **اگر Ψ تابعی محدب روی بازه‌ی باز $I \subseteq \mathbb{R}$ باشد، آنگاه**

الف) به ازای هر $u, v, w \in I$ که $u < v < w$، داریم

$$\frac{\Psi(v)-\Psi(u)}{v-u} \leq \frac{\Psi(w)-\Psi(u)}{w-u} \leq \frac{\Psi(w)-\Psi(v)}{w-v},$$

ب) مشتق چپ و راست Ψ در هر نقطه‌ی $x_۰ \in I$ موجود و متناهی است و $\Psi'_-(x_۰) \leq \Psi'_+(x_۰)$. همچنین به ازای هر $x_۱, x_۲ \in I$ که $x_۱ < x_۲$ است، داریم

$$\Psi'_+(x_۱) \leq \frac{\Psi(x_۲)-\Psi(x_۱)}{x_۲-x_۱} \leq \Psi'_-(x_۲),$$

که در آن $\Psi'_-(x_۰)$ و $\Psi'_+(x_۰)$ به ترتیب مشتقات چپ و راست Ψ در $x_۰$ هستند.

پ) به ازای هر $x_۰ \in I$ و هر $m \in [\Psi'_-(x_۰), \Psi'_+(x_۰)]$، داریم

$$\Psi(x) \geq m(x-x_۰) + \Psi(x_۰), \quad \forall x \in I.$$

---

[۲] Heine-Borel

اثبات : مرجع [۲۶] فصل ۳ بخش ۱۴ را ببینید. ■

قضیه ۳۴.۱. اگر Ψ تابعی مشتق‌پذیر روی بازه‌ی باز I با تابع مشتق صعودی باشد، آنگاه Ψ روی I محدب است.

اثبات : فرض کنیم $x, y \in I$، $x < y$ و $\alpha \in (۰, ۱)$ باشد. قرار می‌دهیم $z = \alpha x + (۱ - \alpha)y$. آنگاه $x < z < y$. حال از قضیه‌ی مقدار میانگین ζ_x, ζ_y با شرط $x < \zeta_x < z < \zeta_y < y$ موجودند که

$$\frac{\Psi(z) - \Psi(x)}{z - x} = \Psi'(\zeta_x), \qquad \frac{\Psi(y) - \Psi(z)}{y - z} = \Psi'(\zeta_y),$$

از اینکه Ψ' تابعی صعودی بر I است، داریم

$$\frac{\Psi(z) - \Psi(x)}{z - x} \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(z)}{y - z},$$

حال با تلفیق رابطه‌ی فوق و تساوی‌های زیر نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

$$z - x = (۱ - \alpha)(y - x), \qquad y - z = \alpha(y - x).$$

■

نتیجه ۳۵.۱. اگر Ψ تابعی دوبار مشتق‌پذیر روی بازه‌ی باز I و Ψ'' تابعی نامنفی روی I باشد، آنگاه Ψ روی I محدب است. همچنین اگر $\Psi'' > ۰$ روی I باشد، آنگاه Ψ تابعی اکیداً محدب روی I است.

اثبات : از اینکه Ψ'' روی I نامنفی است، پس Ψ' روی I صعودی است. بنابراین از قضیه‌ی ۳۴.۱، Ψ تابعی محدب روی I است. حال فرض می‌کنیم Ψ'' روی I مثبت است. بنابه برهان خلف، فرض می‌کنیم $x, y \in I$ با شرط $x \neq y$ و $\alpha \in (۰, ۱)$ چنان موجود باشد که

$$\Psi(\alpha x + (۱ - \alpha)y) = \alpha\Psi(x) + (۱ - \alpha)\Psi(y).$$

قرار می‌دهیم $z = \alpha x + (۱ - \alpha)y$. آنگاه $x < z < y$. حال از قضیه‌ی مقدار میانگین ζ_x, ζ_y با شرط $x < \zeta_x < z < \zeta_y < y$ موجودند که

$$\frac{\Psi(z) - \Psi(x)}{z - x} = \Psi'(\zeta_x), \qquad \frac{\Psi(y) - \Psi(z)}{y - z} = \Psi'(\zeta_y),$$

با قرار دادن فرض خلف در روابط فوق، داریم $\Psi'(\zeta_y) = \Psi'(\zeta_x)$. بنابراین با استفاده‌ی دوباره از قضیه‌ی مقدار میانگین روی Ψ'' در بازه‌ی (ζ_x, ζ_y)، می‌توان $\zeta \in (\zeta_x, \zeta_y)$ را چنان یافت که

$$\Psi''(\zeta) = \frac{\Psi'(\zeta_y) - \Psi'(\zeta_x)}{\zeta_y - \zeta_x} = ۰,$$

و این یک تناقض است. ■

مثال ۳۶.۱. نامساوی یانگ: فرض کنیم $a, b > ۰$، $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ که در آن $p, q > ۱$ است. آنگاه

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

و تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $a^p = b^q$.

حل : با توجه به نتیجه‌ی ۳۵.۱، تابع $\exp(x)$، تابعی اکیداً محدب روی $\mathbb{R}$ است. بنابراین

$$\exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \leq \frac{۱}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{۱}{q}\exp(\ln b^q),$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\ln a^p = \ln b^q$ یا به عبارتی $a^p = b^q$.

مثال ۳۷.۱. فرض کنیم $a, b \geq ۰$، و $p \geq ۱$ مقادیری حقیقی باشند. آنگاه

$$(a+b)^p \leq ۲^{p-۱}(a^p + b^p).$$

حل : اگر $p = ۱$، آنگاه حکم بدیهی است. از طرفی، برای $p > ۱$، از نتیجه‌ی ۳۵.۱، تابع x^p روی $(۰, \infty)$ تابعی محدب است. بنابراین

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^p \leq \frac{۱}{۲}(a^p + b^p),$$

و در نتیجه $(a+b)^p \leq ۲^{p-۱}(a^p + b^p)$.

فصل ۲

نظریه اندازه

امیل برل[1] (۱۹۵۶ – ۱۸۷۱) یکی از ریاضی‌دانان مشهور فرانسوی و از پیشگامان نظریه‌ی اندازه و کاربرد آن در نظریه‌ی احتمال است. مهم‌ترین تحقیقات وی در همان دوران جوانی و در دهه‌ی ۱۸۹۰ انجام گرفت. برل در این دهه توانست تحقیقات اساسی روی اصول و نظریه‌ی احتمالات، آنالیز فاصله، سری‌های نامتناهی و نظریه‌ی اندازه انجام دهد. در سال ۱۸۹۶ اثباتی برای قضیه‌ی پوانکاره ارائه داد که قریب به بیست سال ریاضی‌دانان زیادی در جستجوی آن بودند. بعد از جنگ جهانی اول، به مسائل سیاسی گروید و به فعالیت‌های سیاسی پرداخت. از جمله فعالیت‌های سیاسی برل در طول این دوران، عضویت در مجمع ملی فرانسه، وزیر نیروی دریایی و عضو مقاومت فرانسه در جنگ جهانی دوم می‌باشد. البته در این دوران نیز از ریاضیات دور نماند. کرسی دروس مختلف ریاضیات در دانشگاه سوربن و عضویت در موسسه تحقیقاتی هانری پوانکاره از ۱۹۲۸ تا زمان مرگش، از جمله فعالیت‌های ریاضی وی بود. مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر، قضیه‌ی هاینه-برل، پارادوکس برل-کولموگوروف و لم برل-کانتلی و ... از جمله قضایا و مفاهیم مشهور ریاضی و منتسب به این ریاضی‌دان برجسته می‌باشند.

۱.۲ مقدمه

محاسبه‌ی اندازه‌ی اشکال مختلف هندسی، همواره به عنوان یکی از مسائل مهم و اساسی در علم ریاضیات بوده و است. چنین دغدغه‌ای دانشمندان ریاضی را بر آن داشت تا با ارائه‌ی نظریه‌ای مبتنی

[1] Èmile Borel

بر اساس واقعیات مورد انتظار پاسخگوی مسائل مورد نظر باشند. در شکل‌گیری هر نظریه‌ای از اندازه همواره سعی بر این بوده است که این نظریه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

- دو شئ متشابه در یک فضا، اندازه‌ی برابری داشته باشند.
- اندازه‌ی جزء نسبت به کل، همواره کمتر یا مساوی باشد.
- اگر شئ‌ای به قسمت‌های مجزا تقسیم شود، اندازه‌ی کل برابر با مجموع اندازه‌های اجزای تقسیم شده باشد.
- اندازه‌ی نقاط در فضای یک بعدی، اندازه خطوط در فضای دوبعدی و اندازه یک صفحه در فضای سه بعدی برابر با صفر باشد.

انتظار بیان شده در بند چهارم توجه ما را به وابستگی اندازه نسبت به فضای مورد نظر معطوف می‌سازد. همانطور که می‌دانیم مجموعه‌های ریاضی برای بیان مفاهیم طبیعی از جمله حد و پیوستگی باید ساختار ریاضی به خود بگیرند. به عنوان نمونه برای بیان مفهومی کاربردی به نام مشتق، نیاز به تعریف مفاهیمی بنیادی مانند حد و پیوستگی داریم و این مفاهیم در فضاهای توپولوژیک معنا پیدا می‌کنند. اگر کمی دقیق شویم می‌بینیم جهت ارائه‌ی نظریه‌ی انتگرال ذاتاً به اندازه در فضا و مجموعه‌های اندازه‌پذیر نیاز داریم. به عنوان مثال ریمان[۲] این کار را با طول بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و مساحت مستطیل‌ها در $\mathbb{R}^۲$ و ... شروع کرد. در این فصل سعی بر این است که با گذاشتن مفهوم اندازه روی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی دلخواه X آن را به فضای اندازه‌پذیر تبدیل، سپس با تعریف تابعی بنام تابع اندازه روی این فضا، هر یک از عناصر این فضا را اندازه‌دار نموده و بدین ترتیب فضایی می‌سازیم که آماده‌ی پذیرش مفهوم انتگرال توابع روی این فضاها باشد. با این توصیفات، برای توسیع نظریه‌ی انتگرال به صورتی مدرن، ابتدا نظریه‌ی اندازه[۳] شکل گرفت. این نظریه در اواخر قرن نوزدهم توسط ریاضی‌دانانی چون جی. پئانو،[۴] سی. ژردان[۵] و ای. برل پا گرفت تا اینکه در اوایل قرن بیستم ریاضی‌دان برجسته‌ی فرانسوی بنام اچ. لبگ[۶] با الهام از کارهای قبلی، در مقاله‌ای تاریخی در ۱۹۰۱ نظریه‌ای انقلابی راجع به اندازه ارائه داد. لبگ در این مقاله اندازه‌ی خارجی و اندازه‌ی داخلی را با تکیه بر پوشش‌های نامتناهی و شمارا ارائه و مجموعه‌ای را اندازه‌پذیر تعریف کرد که اندازه‌ی خارجی و داخلی‌اش باهم برابر بودند. در نهایت سی. کاراتئودوری[۷] در ۱۹۱۴ معیاری برای اندازه‌پذیری بر

[۲] Riemann
[۳] Measure theory
[۴] G. Peano
[۵] C. Jordan
[۶] H. Lebesgue
[۷] C. Carathéodory

مبنای اندازه‌ی خارجی تعریف شده توسط لبگ ارائه داد که ما امروزه گردایه‌ی مجموعه‌های صادق در معیار کاراتئودوری را با عنوان گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر می‌شناسیم.

در این فصل مباحث مربوط به نظریه‌ی اندازه را بطور کامل مطرح می‌کنیم. روند ارائه‌ی مطالب بدین‌گونه است که ابتدا بطور مجرد فضای اندازه را روی مجموعه‌ای دلخواه مانند X بیان می‌کنیم. اما از آنجا که در بیشتر مفاهیم کاربردی، فضای کارمان فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد، قسمت اعظم توجه خودمان را روی اندازه‌ی لبگ یعنی طبیعی‌ترین پیمانه برای اندازه‌گیری زیرمجموعه‌های فضای اقلیدسی و خواص و ویژگی‌های اساسی این اندازه مبذول خواهیم کرد.

۲.۲ مجموعه‌های اندازه‌پذیر

تعریف ۱.۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشد. گردایه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را یک σ-جبر روی X گوییم، هرگاه

۱- $X \in \mathcal{A}$،

۲- اگر $E \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$،

۳- اگر $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n \in \mathcal{A}$، آنگاه $E \in \mathcal{A}$، به عبارتی دیگر $\mathcal{A}$ تحت اجتماع شمارا بسته باشد.

هر گاه $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X باشد آنگاه دوتایی $(X, \mathcal{A})$ را یک **فضای اندازه‌پذیر** و اعضای $\mathcal{A}$ را **مجموعه‌های اندازه‌پذیر** گوییم.

نتایج تعریف: فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X باشد، آنگاه

الف) از اینکه $\emptyset = X^c$، داریم $\emptyset \in \mathcal{A}$.

ب) در شرط (۳) از تعریف σ-جبر، با فرض $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$ ، معلوم می‌شود $\mathcal{A}$ تحت اجتماع متناهی بسته است، به عبارت دیگر، اگر به ازای هر $i = 1, 2, \cdots, n$، $E_i \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $\cup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}$.

پ) از اینکه $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = (\cup_{n=1}^{\infty} E_n^c)^c$، لذا $\mathcal{A}$ تحت اشتراک متناهی و شمارا بسته است.

ت) از آنجا که $E \backslash F = E \cap F^c$، بنابراین اگر $E, F \in \mathcal{A}$، داریم $E \backslash F \in \mathcal{A}$.

تعریف ۲.۲. اگر در تعریف ۱.۲، شرط (۳) به حالت متناهی تقلیل یابد، آنگاه $\mathcal{A}$ را یک **جبر** روی X می‌نامیم. بنابراین از نتایج تعریف، قسمت (ب) نتیجه می‌شود که هر σ-جبر روی X خود یک جبر روی X است.

تعریف ۳.۲. گردایه‌ی $\mathcal{S}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک نیم‌جبر روی X گوییم، هرگاه

۱- $\emptyset, X \in \mathcal{S}$

۲- اگر $E, F \in \mathcal{S}$، آنگاه $E \cap F \in \mathcal{S}$،

۳- اگر $E \in \mathcal{S}$، آنگاه E^c را بتوان به صورت اجتماع متناهی و مجزا از عناصر $\mathcal{S}$ نوشت.

بحث را با ارائه‌ی لمی بسیار مهم با عنوان لم مجزاسازی، ادامه می‌دهیم که در تمام بخش‌های این فصل مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم ۴.۲. (لم مجزاسازی). **فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ زیرمجموعه‌هایی از X باشند. در این صورت مجموعه‌های $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ چنان موجودند که**

الف) به ازای هر $j \in \mathbb{N}$، $F_j \subseteq E_j$.

ب) برای $j \neq k$، $F_j \cap F_k = \emptyset$.

پ) $\bigcup_{j=1}^{n} F_j = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ و $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

اثبات : مجموعه‌های F_j را چنین می‌سازیم:

$$F_1 = E_1,$$

$$F_2 = E_2 - E_1,$$

$$F_3 = E_3 - (E_1 \cup E_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n = E_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

در این صورت بوضوح تمامی شرایط لم برقرارند. ■

نتیجه ۵.۲. **اگر $\mathcal{G}$ یک جبر روی X باشد، آنگاه $\mathcal{G}$ یک σ-جبر روی X است اگر نسبت به اجتماع شمارا و مجزا بسته باشد.**

اثبات : فرض کنیم $\{E_j\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{G}$ باشد. آنگاه با توجه به لم مجزاسازی، دنباله‌ای مجزا مانند $\{F_j\}$ در $\mathcal{G}$ چنان موجود است که $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. حال از اینکه $\mathcal{G}$ نسبت به اجتماع شمارای مجزا بسته است، $\mathcal{G}$ یک σ-جبر است. ■

مثال ۶.۲. اگر $\mathcal{G}$ یک جبر متناهی باشد (شامل تعداد متناهی عضو باشد)، آنگاه $\mathcal{G}$ یک σ-جبر است.

مثال ۷.۲. اگر X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد آنگاه $\mathcal{P}(X)$ و $\{\emptyset, X\}$، بوضوح σ-جبر روی X هستند. این σ-جبرها به ترتیب بزرگترین و کوچکترین σ-جبر ممکن روی X نامیده می‌شود.

مثال ۸.۲. اگر f نگاشتی از X به روی Y و $\mathcal{A}$، σ-جبری روی Y باشد، آنگاه با توجه به مطالب بیان شده در صفحه‌ی ۵، به آسانی می‌توان ثابت کرد $f^{-1}(\mathcal{A})$، σ-جبری روی X است.

مثال ۹.۲. فرض نماییم X یک مجموعه‌ی شمارش‌ناپذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : \text{شماراست } E^c \text{ یا } E\}$$

در این صورت $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X است.

حل: بوضوح $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ و $\mathcal{A}$ تحت متمم‌گیری بسته است. حال فرض کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$. هرگاه هر E_n شمارا باشد، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ شماراست و در نتیجه $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. از طرفی اگر E_kای شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه E_k^c شماراست و از اینکه $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c \subseteq E_k^c$، داریم $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

مثال ۱۰.۲. روی خط حقیقی $\mathbb{R}$، گردایه‌ی متشکل از $\emptyset$ و تمام زیرمجموعه‌هایی به شکل $(a, b]$، (نیم بازه‌ها)، که در آن $-\infty \le a < b \le +\infty$ و $(a, \infty) = (a, \infty]$ می‌باشد، یک نیم‌جبر روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۱.۲. اگر $\mathcal{S}$ یک نیم‌جبر روی X باشد، در این صورت گردایه‌ی $\mathcal{G}$، متشکل از اجتماع‌های متناهی و مجزا از اعضای $\mathcal{S}$ یک جبر روی X است.

حل: بوضوح $\emptyset \in \mathcal{G}$، فرض کنیم $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{S}$. از فرض به ازای هر $1 \le m \le n$، $A_m^c = \bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j$، که در آن $B_m^1, \cdots, B_m^{J_m}$، اعضای مجزا از $\mathcal{S}$ می‌باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)^c &= \bigcap_{m=1}^{n}\left(\bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j\right)\\ &= \bigcup\left\{B_1^{j_1} \cap \cdots \cap B_n^{j_m} \; ; \quad 1 \le j_m \le J_m, 1 \le m \le n\right\}\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{G}$، تحت متمم‌گیری بسته است. حال فرض نماییم $\cup_{i=1}^{n} E_i$ و $\cup_{j=1}^{m} F_j$ اعضایی دلخواه از $\mathcal{G}$ باشند، آنگاه

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} (F_j \setminus \cup_{i=1}^{n} E_i)\right) \in \mathcal{G}$$

پس $\mathcal{G}$ تحت اجتماع متناهی نیز بسته است و در نتیجه یک جبر روی X است. با وجود این، $\mathcal{G}$ در حالت کلی نمی‌تواند یک σ-جبر باشد. به عنوان مثال، با فرض $X = \mathbb{R}$، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $A_n = (n - \frac{1}{2}, n] \in \mathcal{G}$ است ولی $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ را نمی‌توان به صورت اجتماع تعداد متناهی از عناصر S نوشت و در نتیجه $\mathcal{G}$ یک σ-جبر روی $\mathbb{R}$ نیست.

۳.۲ σ-جبر تولید شده یا پدید آمده توسط یک گردایه

این بحث را با لمی ساده در مورد σ-جبر شروع می‌کنیم.

لم ۱۲.۲. **اشتراک هر تعداد از σ-جبرها روی X، خود یک σ-جبر روی X است.**

اثبات : به خواننده واگذار می‌شود. ■

تعریف ۱۳.۲. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{E}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X و S خانواده‌ی تمام σ-جبرهای روی X و شامل $\mathcal{E}$ باشد. توجه داریم که S شامل $\mathcal{P}(X)$ است و در نتیجه ناتهی است. گیریم

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in S\};$$

$\sigma(\mathcal{E})$ را σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{E}$ می‌نامیم. بوضوح $\sigma(\mathcal{E})$ کوچکترین σ-جبر روی X شامل $\mathcal{E}$ است.

مثال ۱۴.۲. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و $E \subseteq X$ باشد، آنگاه σ-جبر تولید شده توسط $\{E\}$ عبارت است از $\{\emptyset, X, E, E^c\}$.

مثال ۱۵.۲. : σ-جبر توصیف شده در مثال ۹.۲، همان σ-جبر تولید شده توسط زیرمجموعه‌های تک نقطه‌ای X است. در واقع

$$\{E \subseteq X : \text{شماراست } E^c \text{ یا } E\} = \sigma\left(\{\{x\} : x \in X\}\right).$$

قضیه ۱۶.۲. **اگر $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ باشد آنگاه** $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$.

اثبات : از اینکه $\sigma(\mathcal{E}_2)$ شامل $\mathcal{E}_2$ است، پس $\sigma(\mathcal{E}_2)$، σ-جبری شامل $\mathcal{E}_1$ است و در نتیجه $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. ■

نمادگذاری : به ازای هر گردایه‌ی دلخواه $\mathcal{E}$ از زیرمجموعه‌های X و به ازای هر زیرمجموعه‌ی دلخواه A از X، $\mathcal{E} \cap A$ را به صورت $\{E \cap A : E \in \mathcal{E}\}$ تعریف می‌کنیم. σ-جبر تولید شده توسط

$\mathcal{E}\cap A$ از زیرمجموعه‌های A را با $\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اندیس A در σ_A نشان می‌دهد که $\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)$، σ-جبری روی A می‌باشد.

قضیه ۱۷.۲. فرض می‌کنیم $\mathcal{E}$ گردایه‌ی دلخواهی از زیرمجموعه‌های X و $A\subseteq X$ باشد. در این صورت $\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)=\sigma(\mathcal{E})\cap A$.

اثبات : از اینکه به ازای هر زیرمجموعه‌ی A از X، $\sigma(\mathcal{E})\cap A$، σ-جبری از زیرمجموعه‌های A است و $\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{E})$، داریم $\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)\subseteq\sigma(\mathcal{E})\cap A$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\sigma(\mathcal{E})\cap A\subseteq\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)$. بدین منظور تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{R}:=\{(E\cap A^c)\cup B: E\in\sigma(\mathcal{E}),\ B\in\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)\}.$$

بوضوح $X\in\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}$ تحت اجتماع شمارا بسته است. حال فرض می‌کنیم $K\in\mathcal{R}$، آنگاه

$$K=(E\cap A^c)\cup B;\qquad E\in\sigma(\mathcal{E}),\quad B\in\sigma_A(\mathcal{E}\cap A),\tag{۱.۲}$$

در این صورت با توجه به اینکه $E\cap A^c\subseteq X\cap A^c$ و $B\subseteq A$، داریم

$$\begin{aligned}K^c &= X-K=[(X\cap A^c)\cup A]-[(E\cap A^c)\cup B]\\ &= [(X\cap A^c)-(E\cap A^c)]\cup(A-B).\end{aligned}$$

اما $(X\cap A^c)-(E\cap A^c)=E^c\cap A^c$ و لذا $K^c=(E^c\cap A^c)\cup(A-B)$. پس $K^c\in\mathcal{R}$ و در نتیجه $\mathcal{R}$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های X است. حال از اینکه، به ازای هر $K\in\mathcal{R}$، به فرم (۱.۲)، $K\cap A=B\in\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)$، پس $\mathcal{R}\cap A\subseteq\sigma_A(\mathcal{E}\cap A)$. از طرفی هر $E\in\mathcal{E}$ را می‌توان به صورت $(E\cap A^c)\cup(E\cap A)$ نوشت. پس $\mathcal{R}$، σ-جبری شامل $\mathcal{E}$ است. بنابراین

$$\sigma(\mathcal{E})\cap A\subseteq\mathcal{R}\cap A\subseteq\sigma_A(\mathcal{E}\cap A).$$

و این رابطه اثبات را کامل می‌کند. ■

۴.۲ مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر

در دنیای ریاضیات، هر مفهوم جدید به دنبال ارتباط با مفاهیم قبلی می‌گردد، چرا که در سایه‌ی این ارتباط است که می‌توانند خود را نشان دهند. قبلاً با مفهوم توپولوژی روی یک مجموعه مانند X

(گردایه‌های زیرمجموعه‌های X بنام مجموعه‌های باز) آشنایی دارید. اکنون به دنبال این هستیم که آیا از روی زیرمجموعه‌های باز X، می‌توان σ-جبری روی فضای توپولوژی X تولید کرد؟

تعریف ۱۸.۲. **مجموعه‌های برل فضای توپولوژیک** $(X, \Im)$، اعضای σ-جبر تولید شده بوسیله‌ی مجموعه‌های باز این فضا (یعنی توسط $\Im$)، می‌باشند.

σ-جبر تمام مجموعه‌های برل $(X, \Im)$ را با $\mathcal{B}_X$ نشان داده و اعضای آن را برل اندازه‌پذیرهای X خواهیم گفت. از اینکه هر مجموعه‌ی بسته برل اندازه‌پذیر است، بستار هر مجموعه‌ی دلخواه برل اندازه‌پذیر است. بطور مشابه، درون و مرز هر مجموعه‌ی دلخواه نیز برل اندازه‌پذیر است. همین‌طور مجموعه‌هایی به فرم F_σ و G_δ برل اندازه‌پذیرند.

تذکر ۱۹.۲. لازم به ذکر است که تا حال تعاریف مختلفی برای مجموعه‌های برل ارائه شده است. به عنوان مثال کوراتوسکی[۸] [۱۸]، مجموعه‌های برل را در یک فضای متریک، کوچکترین گردایه شامل تمام مجموعه‌های بسته که نسبت به اجتماع و اشتراک شمارا بسته است و یا معادلاً کوچکترین گردایه شامل تمام مجموعه‌های باز که نسبت به اشتراک شمارا و اجتماع شمارای مجزا بسته است، تعریف می‌کند.[۹] برای مشاهده معادل بودن تعاریف فوق با یکدیگر و معادل بودن آن با تعریف اصلی، مسئله‌ی حل شده‌ی ۶ همین فصل را ببینید.

قضیه ۲۰.۲. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ **(برل اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی) توسط هر یک از گردایه‌های زیر تولید می‌شود، به عبارتی اگر**

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\} & \mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\} & \mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a < b\} \\ \mathcal{E}_4 = \{[a,b) : a < b\} & \mathcal{E}_5 = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{E}_7 = \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\} & \mathcal{E}_8 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\} & \end{array}$$

آنگاه $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \cdots = \sigma(\mathcal{E}_8) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

اثبات : فرض کنیم $\mathcal{E}_0$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت

- $\mathcal{E}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$، زیرا هر مجموعه‌ی باز را می‌توان به صورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز نوشت، قضیه‌ی ۳۰.۱ را ببینید. بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.
- $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$، زیرا $(a,b) = \cup_{n=N}^{\infty}[a + 1/n, b - 1/n]$ که در آن N را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $a + \frac{1}{N} < b - \frac{1}{N}$. بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$.
- $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$، زیرا $[a,b] = \cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n, b]$، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$.

---

[۸] Kuratowski

[۹] مطلب ذکر شده بصورت مستقیم از منبع [۱۸] بیان نشده است و به نقل از منبع [۱] می‌باشد.

- $\mathcal{E}_{۳} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۴})$، زیرا

$$(a,b] = \Big[\bigcup_{n=N}^{\infty}[a+۱/n, b)\Big]\bigcup\Big[\bigcap_{n=N}^{\infty}[\frac{a+b}{۲}, b+۱/n)\Big]$$

که در آن عدد طبیعی N را به حد کافی بزرگ اختیار می‌کنیم که $\frac{a+b}{۲} < b + \frac{۱}{N}$ و $a + \frac{۱}{N} < b$ باشد، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۳}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۴})$..

- $\mathcal{E}_{۴} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۵})$، زیرا $[a,b) = [a,\infty) \cap [b,\infty)^c$، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۴}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۵})$.
- $\mathcal{E}_{۵} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۶})$، زیرا $[a,\infty) = (-\infty, a)^c$، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۵}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۶})$.
- $\mathcal{E}_{۶} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۷})$، زیرا $(-\infty, a) = \cup_{n=۱}^{\infty}(-\infty, a - ۱/n]$، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۶}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۷})$.
- $\mathcal{E}_{۷} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۸})$، زیرا $(-\infty, a] = (a,\infty)^c$ ، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۷}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_{۸})$.
- $\mathcal{E}_{۸} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$، که بوضوح برقرار است، بنابراین $\sigma(\mathcal{E}_{۸}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

و بدین ترتیب برهان قضیه کامل است. ■

لم ۲۱.۲. **اگر $(X, \Im)$ یک فضای توپولوژیک و Y زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد، آنگاه مجموعه‌ی برل فضای توپولوژی $(Y, \Im_Y)$ ($\Im_Y$ توپولوژی القایی $\Im$ روی Y)، تحدید گردایه‌ی مجموعه‌های برل X روی Y است. به عبارتی**

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_X\},$$

اثبات : می‌دانیم

$$\Im_Y = \{G \cap Y : G \in \Im\} = Y \cap \Im,$$

حال با بکار بردن قضیه‌ی ۱۷.۲، داریم

$$\mathcal{B}_Y = \sigma(Y \cap \Im) = Y \cap \sigma(\Im) = Y \cap \mathcal{B}_X = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_X\}.$$

■

۵.۲ کلاس‌های یکنوا

در این بخش گردایه‌ی جدیدی از مجموعه‌ها را معرفی می‌کنیم که کاربرد فراوانی در مباحث مربوط به نظریه‌ی اندازه از جمله بررسی منحصر بفردی اندازه‌ی بدست آمده از یک اندازه‌ی خارجی وفضاهای حاصل‌ضربی و ... دارد.

تعریف ۲.۲۲. گردایه‌ی $\mathcal{M}$ از زیرمجموعه‌های X را یک کلاس یکنوا گوییم، هرگاه $\mathcal{M}$ نسبت به اجتماع شمارای صعودی و اشتراک شمارای نزولی بسته باشد، به عبارتی

الف) اگر $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n \in \mathcal{M}$، آنگاه $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

ب) اگر $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $F_n \in \mathcal{M}$، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}$.

مثال ۲.۲۳. هر σ-جبر روی مجموعه‌ی دلخواه X، یک کلاس یکنوا روی X است.

مثال ۲.۲۴. در حالت کلی یک توپولوژی روی X نمی‌تواند یک کلاس یکنوا روی X باشد.

به آسانی می‌توان نشان داد هر جبر از زیرمجموعه‌های X که یک کلاس یکنوا باشد، یک σ-جبر روی X است (مسئله ۲ همین فصل را ببینید). همچنین اشتراک هر تعداد دلخواه از کلاس‌های یکنوا روی مجموعه‌ی دلخواه X، یک کلاس یکنوا روی X است. بنابراین می‌توان کوچکترین کلاس یکنوا شامل گردایه‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های X را تعریف کرد:

تعریف ۲.۲۵. به ازای هر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$، اشتراک کلیه کلاس‌های یکنوا شامل $\mathcal{C}$، کوچکترین کلاس یکنوای منحصر بفرد شامل $\mathcal{E}$ می‌باشد که آن را کلاس یکنوای تولید شده توسط $\mathcal{E}$ نامیده و با $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۲۶. اگر $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر روی X و $\sigma(\mathcal{G})$ و $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ به ترتیب σ-جبر و کلاس یکنوای تولید شده توسط $\mathcal{G}$ باشند، آنگاه $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

اثبات : از اینکه هر σ-جبر، کلاس یکنواست پس $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$. حال برای اثبات عکس مطلب با توجه به اینکه هر جبر که کلاس یکنوا باشد σ-جبر است، کافی است ثابت کنیم $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ یک جبر است. اثبات را در چند گام جداگانه انجام می‌دهیم:

گام ۱: به ازای هر $E \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$، تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{M}_E(\mathcal{G}) := \{F \in \mathcal{M}(\mathcal{G}) \ : \ E \cup F,\ E \backslash F,\ F \backslash E \in \mathcal{M}(\mathcal{G})\},$$

بوضوح و با توجه به تعریف، مشاهده می‌کنیم $\emptyset, E \in \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ و اینکه اگر $F \in \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ باشد، آنگاه $E \in \mathcal{M}_F(\mathcal{G})$.

گام ۲: ثابت می‌کنیم $\mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ کلاس یکنواست. فرض می‌کنیم $\{F_n\}_1^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی در $\mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ باشد، آنگاه داریم

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \backslash E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \backslash E) \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$$

$$E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$$

$$E \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cup F_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$$

و روندی مشابه را می‌توان برای دنباله نزولی اعمال کرد. بنابراین به ازای هر $E \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$، $\mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ یک کلاس یکنواست.

گام ۳: فرض می‌کنیم $E \in \mathcal{G}$. ثابت می‌کنیم $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. با توجه به گام قبل، کافی است ثابت کنیم $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. فرض می‌کنیم $F \in \mathcal{G}$، آنگاه از اینکه $\mathcal{G}$ جبر است

$$E \cup F,\ E \setminus F,\ F \setminus E \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{G})$$

بنابراین $F \in \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. پس $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$.

گام ۴: نشان می‌دهیم اگر $E \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$، آنگاه $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. برای اثبات فرض می‌کنیم $F \in \mathcal{G}$، آنگاه از گام ۳، $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}_F(\mathcal{G})$. از اینکه $E \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$، پس $E \in \mathcal{M}_F(\mathcal{G})$ و با توجه به گام ۱، $F \in \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. بنابراین $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ و در نتیجه $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$.

گام ۵: بالاخره نشان می‌دهیم $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ یک جبر است و این اثبات را کامل می‌کند. فرض می‌کنیم $E, F \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$. از اینکه $E \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$، از گام ۴ داریم $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$ و در حالت خاص، $F \in \mathcal{M}_E(\mathcal{G})$. حال با توجه به تعریف $\mathcal{M}_E(\mathcal{G})$، نتیجه می‌گیریم $E \cup F,\ E \setminus F \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$.
از طرفی $X \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{G})$، و این جبر بودن $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ را اثبات می‌کند. ■

قضیه‌ی فوق چگونگی ساخت σ-جبر تولید شده توسط جبر $\mathcal{G}$ را به ما نشان نمی‌دهد، بلکه توجه ما را به این نکته جلب می‌کند که به جای مطالعه‌ی σ-جبر تولید شده توسط جبر $\mathcal{G}$، می‌توان کلاس یکنوای تولید شده توسط جبر $\mathcal{G}$ را مطالعه کرد. در بسیاری از کاربردها، کار با کلاس یکنوا آسان‌تر از کار با σ-جبر می‌باشد.

۶.۲ فضاهای حاصل‌ضربی با بعد متناهی

هدف ما در این بخش ساخت یک فضای اندازه‌پذیر جدید با استفاده از دو یا چند فضای اندازه‌پذیر است. در واقع می‌خواهیم به این سوال پاسخ دهیم که چگونه می‌توان حاصل‌ضرب دکارتی دو فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A}_X)$ و $(Y, \mathcal{A}_Y)$ را به طور طبیعی به یک فضای اندازه‌پذیر تبدیل کرد؟

تعریف ۲۷.۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی باشند. حاصل‌ضرب دکارتی X و Y را با

$X \times Y$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X \times Y = \{(x,y) : \quad x \in X \quad , \quad y \in Y\}.$$

اگر $E \subseteq X$ و $F \subseteq Y$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $E \times F = \{(x,y) : \ x \in A,\ y \in B\}$ را یک مستطیل در $X \times Y$ می‌نامیم.

تعریف ۲.۲۸. اگر $(X, \mathcal{A}_X)$ و $(Y, \mathcal{A}_Y)$ دو فضای اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $E \times F$ را یک مستطیل اندازه‌پذیر در $X \times Y$ گوییم هرگاه $E \in \mathcal{A}_X$ و $F \in \mathcal{A}_Y$.

حال چنین سوالی پیش می‌آید که اگر $(X, \mathcal{A}_X)$ و $(Y, \mathcal{A}_Y)$ دو فضای اندازه‌پذیر باشند، آیا $(X \times Y, \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y)$ یک فضای اندازه‌پذیر است؟ جواب منفی است. مثال زیر را ببینید.

مثال ۲.۲۹. فرض کنید $X = \{a,b\}$ و $E = \{a\}$ باشد. آنگاه $\mathcal{A}_X = \{\emptyset, E, E^c, X\}$ یک σ-جبر روی X است. اما $(X \times X, \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_X)$ یک فضای اندازه‌پذیر نیست، زیرا

$$E^c \times E^c, E \times E \in \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_X \quad , \quad (E^c \times E^c) \cup (E \times E) \notin \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_X$$

قضیه ۲.۳۰. گیریم $\{S_i\}_{i=1}^n$ دنباله‌ای از نیم‌جبرها روی $\{X_i\}_{i=1}^n$ باشد. آنگاه $\prod_{i=1}^n S_i$ یک نیم‌جبر روی $\prod_{i=1}^n X_i$ است.

اثبات : بوضوح $\emptyset = \emptyset \times \ldots \times \emptyset \in \prod_{i=1}^n S_i$ و $\prod_{i=1}^n X_i \in \prod_{i=1}^n S_i$. با توجه به اتحاد

$$\left(\prod_{i=1}^n E_i\right) \bigcap \left(\prod_{i=1}^n F_i\right) = \prod_{i=1}^n (E_i \cap F_i).$$

$\prod_{i=1}^n S_i$ نسبت به اشتراک متناهی بسته است. فرض کنیم $\prod_{i=1}^n E_i \in \prod_{i=1}^n S_i$ باشد. از اینکه $E_i \in S_i$ است، پس دنباله‌ای مجزا و متناهی مانند $\{E_{i,k_i} : k_i = 0, \ldots, p_i\}$ از عناصر S_i موجود است که $\cup_{k_i=0}^{p_i} E_{i,k_i} = X_i$ و $E_{i,0} = E_i$. آنگاه

$$\prod_{i=1}^n X_i = \left(\bigcup_{k_1=0}^{p_1} E_{1,k_1}\right) \times \ldots \times \left(\bigcup_{k_n=0}^{p_n} E_{n,k_n}\right) = \bigcup_{k_1=0}^{p_1} \ldots \bigcup_{k_n=0}^{p_n} (E_{1,k_1} \times \ldots \times E_{n,k_n}).$$

حال از اینکه $\{E_{1,k_1} \times \ldots \times E_{n,k_n} : k_1 = 0, \ldots, p_1, \ldots, k_n = 0, \ldots, p_n\}$ دنباله‌ای مجزا در $\prod_{i=1}^n S_i$ و $E_1 \times \cdots \times E_n = E_{1,0} \times \cdots E_{n,0}$ است، $(E_1 \times \cdots \times E_n)^c$ به صورت

اجتماع مجزا و متناهی از عناصر $\prod_{i=1}^n S_i$ است. ■

تعریف ۳۱.۲. فرض کنیم $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i=1}^n$ دنباله‌ای متناهی از فضاهای اندازه‌پذیر باشد. σ-جبر تولید شده توسط

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \left\{\prod_{i=1}^n E_i : E_i \in \mathcal{A}_i\right\}$$

را با نماد $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ نشان داده و دوتایی $(\prod_{i=1}^n X_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ را **فضای اندازه‌پذیر حاصل‌ضربی** می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۲. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی و $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ باشد. در این صورت تابع $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ با ضابطه‌ی $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ را **تابع تصویری** می‌نامیم.

تذکر ۳۳.۲. هر تابع تصویری پوشاست و به ازای هر $E_\alpha \subseteq X_\alpha$ داریم $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta\in A} E_\beta$ که در آن به ازای هر $\beta \neq \alpha$، $E_\beta = X_\beta$. همچنین $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$. بنابراین

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \subseteq X_\alpha\} \subseteq \{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha : E_\alpha \subseteq X_\alpha\}.$$

لم ۳۴.۲. فرض کنیم $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i=1}^n$ دنباله‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sigma\left(\{\pi_i^{-1}(E_i) : E_i \in \mathcal{A}_i\}\right).$$

اثبات : با توجه به تعریف ۳۱.۲ و تذکر ۳۳.۲، واضح است. ■

قضیه ۳۵.۲. فرض کنیم $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i=1}^n$ دنباله‌ای متناهی از فضاهای اندازه‌پذیر باشد که هر $\mathcal{A}_i$ توسط $\mathcal{E}_i$ تولید شده باشد. اگر $X_i \in \mathcal{E}_i$ باشد، آنگاه $\mathcal{F} = \{\pi_i^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}_i\}$ مولدی برای $\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ است.

اثبات : بوضوح $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. از طرفی به آسانی می‌توان نشان داد، به ازای هر i، گردایه‌ی

$$\{E \subseteq X_i : \pi_i^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F})\}$$

یک σ-جبر روی X_i و شامل $\mathcal{E}_i$ است و در نتیجه شامل $\mathcal{A}_i$ است. به عبارتی دیگر

$$\{\pi_i^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}_i,\ \ i = 1, ..., n\} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$$

و در نتیجه $\otimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ و حکم برقرار است. ■

قضیه ۳۶.۲. $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

اثبات : فرض کنید به ازای $i = 1, ..., n$ ،$X_i = \mathbb{R}$ و $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{R}^n$. با توجه به قضیه‌ی ۳۵.۲، $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_i}$ توسط $\{\pi_i^{-1}(G_i) : G_i,\ i = 1, ..., n$ مجموعه‌ی باز X_i است$\}$ تولید می‌شود و از اینکه این مجموعه‌ها در X باز هستند،

$$\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} \subseteq \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

حال با توجه به اینکه هر مجموعه‌ی باز $X = \mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌هایی به فرم $\prod_{i=1}^{n} G_i$ نوشت که به ازای هر i، مجموعه‌ی G_i در X_i باز است، داریم

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_X \subseteq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}_{X_i} = \bigotimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

■

۷.۲ فضاهای حاصل‌ضربی با بعد نامتناهی

در بخش قبل دیدیم که چگونه می‌توان از دو فضای اندازه‌پذیر یا بطور کلی تعداد متناهی فضای اندازه‌پذیر، یک فضای اندازه‌پذیر جدید تولید کرد. در این بخش مطالب ارائه شده در بخش قبل را به ابعاد نامتناهی (شمارا یا ناشمارا) توسیع می‌دهیم. در واقع روی خانواده‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر کار خواهیم کرد. درست مانند بخش قبل نیاز به حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها داریم.

تعریف ۳۷.۲. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی و $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ و $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ نگاشت تصویری باشد و به ازای هر $\alpha \in A$ ، $\mathcal{A}_\alpha$ یک σ–جبر روی X_α باشد. در این صورت σ–جبر **حاصل‌ضربی** روی X عبارت از σ–جبر تولید شده توسط

$$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \ ; \quad E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \ , \ \alpha \in A\}$$

می‌باشد که با نماد $\bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ نشان خواهیم داد.

لم ۳۸.۲. با توجه به نمادهای استفاده شده در تعریف بالا، اگر A شمارا باشد، آنگاه

$$\sigma\left(\left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha \ : \ E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\right\}\right) = \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$$

اثبات : اگر $E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$، آنگاه $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta\in A} E_\beta$، که در آن $E_\beta = X_\beta, \beta \neq \alpha$ از طرف دیگر داریم $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ و در نتیجه

$$\left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha \ : \ E_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\right\} \subseteq \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha,$$

و بدین ترتیب حکم برقرار است. ■

قضیه ۳۹.۲. فرض کنید A یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار دلخواه و $\{(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر باشد که به ازای هر $\alpha \in A$، $\mathcal{E}_\alpha$ مولدی برای $\mathcal{A}_\alpha$ است. آنگاه

الف) $\bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ توسط گردایه‌ی $\mathcal{F}_1 = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha,\ \alpha \in A\}$ تولید می‌شود.

ب) اگر A شمارا و به ازای هر $\alpha \in A$، $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$، آنگاه

$$\sigma\left(\left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha \ : \ E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\right\}\right) = \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$$

اثبات : الف) بوضوح $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ است. از طرفی به آسانی می‌توان نشان داد گردایه‌ی $\{E \subseteq X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)\}$ یک σ-جبر روی X_α و شامل $\mathcal{E}_\alpha$ است و در نتیجه شامل $\mathcal{A}_\alpha$ است. به عبارتی به ازای هر $\alpha \in A$ و $E \in \mathcal{A}_\alpha$، $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{F}_1)$ و در نتیجه $\bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1)$.

ب) اگر $E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$، آنگاه $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta\in A} E_\beta$، که در آن $E_\beta = X_\beta, \beta \neq \alpha$، از طرف دیگر داریم $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \Pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$، بنابراین

$$\sigma\left(\left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha \ : \ E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha\right\}\right) = \sigma(\mathcal{F}_1) = \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha.$$

■

۸.۲ تابع اندازه

تعریف ۴۰.۲. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه روی $\mathcal{A}$ (یا روی $(X, \mathcal{A})$)، تابعی است مانند $\mu : \mathcal{A} \longmapsto [0, \infty]$، بطوریکه در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱- $\mu(\emptyset) = 0$،

۲- هر گاه $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

این خاصیت را **خاصیت جمعی شمارایی** تابع اندازه گوییم.

سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ که X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X و μ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است را یک **فضای اندازه** خواهیم گفت.

تعریف ۴۱.۲. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{G}$ یک جبر از زیرمجموعه‌های X باشد. یک **پیش اندازه** روی $\mathcal{G}$ (یا روی $(X, \mathcal{G})$) تابعی است مانند $\mu_0 : \mathcal{G} \longmapsto [0, \infty]$، بطوریکه در شرایط زیر صدق کند:

۱- $\mu_0(\emptyset) = 0$،

۲- اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{G}$ باشد که $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{G}$، آنگاه

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).$$

قضیه ۴۲.۲. احکام زیر برای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ برقرار است.

الف) اگر $\{E_i\}_1^n$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$ (خاصیت جمعی متناهی).

ب) اگر $E \in \mathcal{A}$ موجود باشد بطوریکه $\mu(E) < \infty$، آنگاه شرط (۱) در تعریف اندازه زائد است.

پ) اگر $E, F \in \mathcal{A}$ و $E \subseteq F$، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$. همچنین اگر $\mu(E) < \infty$ باشد، آنگاه داریم $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$. (خاصیت یکنوایی).

ت) اگر $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. (خاصیت زیرجمعی شمارا).

اثبات: الف) قرار می‌دهیم $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset$. حال نتیجه از شرایط (۱) و (۲) در تعریف تابع اندازه بدست می‌آید.

ب) بطور مشابه قرار می‌دهیم $E_1 = E$ و $E_2 = \emptyset$. حال خاصیت جمعی متناهی بیان شده در قسمت (الف) نتیجه را بدست می‌دهد.

پ) از اینکه $E \subseteq F$، داریم $F = E \cup (F - E)$ و $E \cap (F - E) = \emptyset$. بنابراین از خاصیت جمعی متناهی داریم

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E), \tag{۲.۲}$$

حال اگر $\mu(E) < \infty$، آنگاه در رابطه (۲.۲)، می‌توان $\mu(E)$ را به طرف اول منتقل کرد، بدون اینکه وضعیت تعریف نشده‌ی $\infty - \infty$ پیش آید. در نتیجه $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

ت) به ازای هر $k \geq 1$، قرار می‌دهیم $F_k = E_k - \cup_{i=1}^{k-1} E_i$ و $F_1 = E_1$. در این صورت F_kها مجزایند و داریم $\cup_1^\infty F_i = \cup_1^\infty E_i$. حال با بکار بردن خاصیت یکنوایی و جمعی شمارایی تابع اندازه داریم

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

■

تعریف ۴۳.۲. فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یا اندازه‌ی μ را

۱- متناهی گوییم، اگر $\mu(X) < \infty$.

۲- σ-متناهی گوییم، هرگاه دنباله‌ای مانند $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازه‌ی متناهی موجود باشد بطوریکه $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.

۳- شبه‌متناهی گوییم، هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E با اندازه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر مانند $F \subset E$ موجود باشد بطوریکه $0 < \mu(F) < \infty$. به عبارت دیگر

$$\forall E, \quad E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) = \infty \Longrightarrow \exists F, \quad F \in \mathcal{A}, \quad F \subset E, \quad 0 < \mu(F) < \infty.$$

واضح است که هر فضای اندازه‌ی متناهی، یک فضای اندازه‌ی σ-متناهی و هر فضای اندازه‌ی σ-متناهی، یک فضای اندازه‌ی شبه متناهی است. اما عکس مطالب همواره درست نیست. مسئله‌ی ۱۰

همین فصل را ببینید.

مثال ۴۴.۲. σ–جبر مثال ۹.۲ را در نظر می‌گیریم و تابع μ را روی $\mathcal{A}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mu(E) = \begin{cases} \circ & \text{شماراست } E, \\ \text{۱} & \text{شماراست } E^c. \end{cases}$$

در این صورت μ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است، زیرا $\mu(\emptyset) = \circ$. حال فرض می‌کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبدو مجزا در $\mathcal{A}$ و $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ باشد. اگر به ازای هر n، E_n شمارا باشد E نیز شماراست و داریم $\mu(E) = \circ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. اگر E_kای ناشمارا باشد، آنگاه E_k^c شماراست و از رابطه $\bigcup_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} E_n \subseteq E_k^c$، $\bigcup_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} E_n$ شماراست. بنابراین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq k$، E_n شماراست. در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E_k) = \text{۱} = \mu(E)$$

پس μ یک تابع اندازه است.

مثال ۴۵.۲. **(اندازه‌ی شمارشی).** فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه باشد. فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{P}(X))$ را در نظر می‌گیریم. تابع μ_c را روی $\mathcal{P}(X)$، به ازای هر $E \subseteq X$، تعریف می‌کنیم:

$$\mu_c(E) = \begin{cases} |E| & \text{متناهی } E, \\ \infty & \text{نامتناهی } E. \end{cases}$$

که در آن $|E|$ را تعداد عناصر E است. به آسانی دیده می‌شود که μ_c یک اندازه روی $\mathcal{P}(X)$ است. این اندازه متناهی (σ–متناهی) است، اگر X متناهی (شمارا) باشد.

مثال ۴۶.۲. **(اندازه‌ی دیراک).** فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و $x_\circ \in X$ یک عنصر ثابت باشد. تابع $\delta_{x_\circ} : \mathcal{P}(X) \to [\circ, \infty]$ را به صورت

$$\delta_{x_\circ}(E) = \begin{cases} \text{۱} & x_\circ \in E, \\ \circ & x_\circ \notin E. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $\delta_{x_\circ}$ یک اندازه‌ی متناهی روی $\mathcal{P}(X)$ است.

قضیه ۴۷.۲. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

الف) (پیوستگی از پایین). اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ دنباله‌ای صعودی باشد، آنگاه

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

ب) (پیوستگی ازبالا). اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ دنباله‌ای نزولی و $\mu(E_1) < \infty$ باشد، آنگاه

$$\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

اثبات : الف) فرض کنیم $E_0 = \emptyset$. قرار می‌دهیم $F_n = E_n - E_{n-1}$، بوضوح F_nها مجزا و $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. بنابراین

$$\begin{aligned} \mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(F_m) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} F_m\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

ب) به ازای هر $n \geq 1$، قرار می‌دهیم $F_n = E_1 - E_n$. در این صورت دنباله‌ی $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای صعودی است و داریم $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = E_1 - (\cap_{n=1}^{\infty} E_n)$. حال از نتیجه‌ی بدست آمده در قسمت قبلی و با بکار بردن قسمت (پ) از قضیه‌ی ۴۲.۲، داریم

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n))$$

و از اینکه $\mu(E_1) < \infty$، می‌توان از طرفین رابطه $\mu(E_1)$ را حذف کرد. بنابراین نتیجه‌ی مطلوب بدست خواهد آمد.

■

لم ۴۸.۲. در قضیه‌ی ۴۷.۲ قسمت (ب)، به جای شرط $\mu(E_1) < \infty$، می‌توان σ-متناهی بودن فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را قرار داد.

اثبات : با توجه به تعریف فضای اندازه σ-متناهی، فرض می‌کنیم $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$، که X_i ها مجزا و با اندازه‌ی متناهی‌اند. قرار می‌دهیم $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$. در این صورت

$$\mu(E) = \mu\left(E \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \cap X_i)\right) \quad (۳.۲)$$

از طرفی به ازای هر iی ثابت، دنباله‌ی $\{E_n \cap X_i\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای نزولی و $\mu(E_1 \cap X_i) < \infty$ است. بنابراین از قسمت (ب) قضیه‌ی قبل و رابطه‌ی (۳.۲)، داریم

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(E_n \cap X_i),$$

حال از اینکه جملات سری مثبت است، می‌توان جای مجموع و حد را تعویض کرد. بنابراین

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_n \cap X_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

■

تذکر ۴۹.۲. در قضیه‌ی ۴۷.۲، قسمت (ب)، به جای $\mu(E_1) < \infty$، می‌توان شرط $\mu(E_n) < \infty$، به ازای $n > 1$ای قرار داد، چرا که حذف $n - 1$ جمله‌ی ابتدای دنباله هیچ تاثیری بر اشتراک اعضای دنباله نخواهد داشت.

تذکر ۵۰.۲. شرط $\mu(E_1) < \infty$ در قضیه‌ی ۴۷.۲، ضروری است، زیرا اگر μ اندازه‌ی شمارشی روی $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ باشد، آنگاه با فرض $E_n = \{j \in \mathbb{N} \;:\; j \geq n\}$، دنباله‌ی نزولی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بدست می‌آوریم که $\mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(\emptyset) = 0$، در حالی که به ازای هر n، $\mu(E_n) = \infty$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$.

تعریف ۵۱.۲. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

الف) $E \in \mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی پوچ گوییم، هرگاه E اندازه‌پذیر بوده $\mu(E) = 0$ باشد. توجه داشته باشید که خاصیت زیرجمعی شمارا نتیجه می‌دهد که اجتماع شمارایی از مجموعه‌های پوچ، یک مجموعه‌ی پوچ است.

ب) گوییم خاصیت p تقریباً همه‌جا (با علامت اختصاری ت.ه)، روی $E \in \mathcal{A}$ برقرار است، هرگاه مجموعه نقاطی از E که خاصیت p برقرار نباشد، زیرمجموعه‌ی، مجموعه‌ی پوچی مانند N باشد.

به عنوان مثال، اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f و g توابعی حقیقی مقدار روی X باشند، آنگاه عبارت $f > g$ت.ه روی X، بدین معناست که

$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \subseteq N \in \mathcal{A}, \qquad \mu(N) = 0.$$

سوالی که پیش می‌آید این است که آیا زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی پوچ، اندازه‌پذیر است؟ جواب منفی است مگر آنکه فضای اندازه کامل باشد. تعریف زیر را ببینید:

تعریف ۵۲.۲. فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را فضای اندازه **کامل** گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی پوچ $\mathcal{A}$، متعلق به $\mathcal{A}$ باشد، به عبارتی دیگر

$$\forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) = ۰ \implies \{F : F \subset E\} \subseteq \mathcal{A}.$$

مثال ۵۳.۲. فرض کنیم $X = \{۱, ۲, ۳\}$ و $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{۱\}, \{۲, ۳\}\}$. μ را روی $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(X) = \mu\{۱\} = ۱, \mu(\emptyset) = \mu\{۲, ۳\} = ۰$$

در این صورت $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه کامل نیست، زیرا مجموعه‌ی $\{۲, ۳\}$ یک مجموعه‌ی پوچ است اما $\{۳\} \notin \mathcal{A}$.

قضیه ۵۴.۲. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} : \ \mu(N) = ۰\}$ و

$$\bar{\mathcal{N}} = \{F \subseteq X : \exists N \in \mathcal{N}, F \subseteq N\} \quad , \quad \overline{\mathcal{A}} = \{E \cup F; \ E \in \mathcal{A}, F \in \bar{\mathcal{N}}\}.$$

آنگاه

الف) $\overline{\mathcal{A}}$ یک σ-جبر روی X است.

ب) $\overline{\mathcal{A}}$ کوچکترین σ-جبر شامل $\mathcal{A}$ و تمام زیرمجموعه‌های عناصر پوچ $\mathcal{A}$ است، به عبارتی دیگر $\sigma(\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{N}}) = \overline{\mathcal{A}}$ و نتیجه بگیرید $\overline{\mathcal{A}}$ کوچکترین σ-جبر کامل شامل $\mathcal{A}$ روی X است.

پ) یک توسیع منحصر بفرد $\overline{\mu}$ از μ وجود دارد بطوریکه $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ یک فضای اندازه‌ی کامل است.

اثبات: الف) چون $\mathcal{A}$ و $\mathcal{N}$ هر دو نسبت به اجتماع شمارا بسته‌اند، پس $\overline{\mathcal{A}}$ نیز نسبت به اجتماع شمارا بسته است. حال فرض می‌کنیم $E \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$ باشد، در این صورت Nای از $\mathcal{N}$ موجود است که $F \subset N$ و داریم

$$(E \cup F) = (E \cup N) - (N - F) = (E \cup N) \cap (N - F)^c$$

پس خواهیم داشت

$$(E\cup F)^c=(E\cup N)^c\cup(N-F)$$

و از اینکه $(E\cup N)^c\in\mathcal{A}$ و $(N-F)\subset N$، بسته بودن $\overline{\mathcal{A}}$ نسبت به متمم بدست می‌آید. پس $\bar{\mathcal{A}}$ یک σ-جبر روی X می‌باشد.

ب) بوضوح $\mathcal{A}\cup\overline{\mathcal{N}}\subseteq\overline{\mathcal{A}}$ و در نتیجه $\sigma(\mathcal{A}\cup\overline{\mathcal{N}})\subseteq\overline{\mathcal{A}}$. برای اثبات عکس شمول، فرض می‌کنیم $\mathcal{M}$، σ-جبری از زیرمجموعه‌های X شامل $\mathcal{A}\cup\overline{\mathcal{N}}$ باشد. آنگاه شامل تمام مجموعه‌هایی به فرم $E\cup F$ است که $E\in\mathcal{A}$ و $F\in\overline{\mathcal{N}}$. بنابراین شامل $\overline{\mathcal{A}}$ است و در نتیجه $\overline{\mathcal{A}}$ کوچکترین σ-جبر کامل از زیرمجموعه‌های X شامل $\mathcal{A}$ است.

پ) تابع $\overline{\mu}:\overline{\mathcal{A}}\to[0,\infty]$ را چنین تعریف می‌کنیم: به ازای هر $E\cup F\in\overline{\mathcal{A}}$، که $E\in\mathcal{A}$ و $F\in\overline{\mathcal{N}}$ است قرار می‌دهیم

$$\overline{\mu}(E\cup F)=\mu(E)$$

$\overline{\mu}$ خوش تعریف است، زیرا اگر $E_1\cup F_1=E_2\cup F_2$ که $F_j\subset N_j\in\mathcal{N}$، داریم $E_1\subset E_2\cup N_2$، پس $\mu(E_1)\leq\mu(E_2)+\mu(N_2)$ و در نتیجه $\mu(E_1)\leq\mu(E_2)$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\mu(E_2)\leq\mu(E_1)$، بنابراین $\mu(E_1)=\mu(E_2)$. پس $\overline{\mu}(E_1\cup F_1)=\overline{\mu}(E_2\cup F_2)$. در ضمن به آسانی می‌توان ثابت کرد $\overline{\mu}$ یک اندازه روی $\overline{\mathcal{A}}$ است. حال فرض کنیم $E\cup F$ عنصر پوچ و دلخواه از $\overline{\mathcal{A}}$ باشد که $E\in\mathcal{A}$ و $F\subseteq N\in\mathcal{N}$ و $K\subset E\cup F$ باشد. از اینکه $\overline{\mu}(E\cup F)=0$ داریم $\mu(E)=0$، بنابراین $E\in\mathcal{N}$. در نتیجه

$$\mu(E\cup N)\leq\mu(E)+\mu(N)=0\Rightarrow\mu(E\cup N)=0$$

پس $E\cup N\in\mathcal{N}$ و از اینکه $K\subseteq E\cup F\subset E\cup N$ خواهیم داشت $K\in\overline{\mathcal{N}}$، بنابراین از قسمت (ب)، $K\in\overline{\mathcal{A}}$. پس $\overline{\mu}$ یک اندازه‌ی کامل روی $\overline{\mathcal{A}}$ است. فرض کنیم $\overline{\eta}$ توسیع دیگری از μ روی $\overline{\mathcal{A}}$ و $E\cup F$ عنصری دلخواه از $\overline{\mathcal{A}}$ باشد. از اینکه $F-E\subset F\subset N\in\mathcal{N}$ داریم $F-E\in\overline{\mathcal{A}}$. پس $\overline{\eta}(F-E)\leq\overline{\eta}(N)=\mu(N)=0$ و بنابراین $\overline{\eta}(F-E)=0$. حال با توجه به آنچه که بیان شد، داریم

$$\overline{\eta}(E\cup F)\;=\;\overline{\eta}(E\cup(F-E))$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\eta}(E) + \overline{\eta}(F - E)) \\
&= \mu(E) + \overline{\eta}(F - E) \\
&= \mu(E) \\
&= \overline{\mu}(E \cup F).
\end{aligned}
$$

و نتیجه می‌گیریم $\overline{\mu}$ منحصربفرد است. ■

۹.۲ تولید اندازه

همانطور که در ابتدای فصل بیان کردیم، نظریه‌ی اندازه در واقع تعمیم مفاهیمی مانند طول یک پاره خط روی خط حقیقی یا مساحت یک سطح در صفحه است. با توجه به بخش‌های قبلی، واضح است که می‌توان روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌های متفاوتی ساخت، اما سوال اینجاست که آیا می‌توان فضای اندازه‌ای روی $\mathbb{R}^n$ بنا کرد که با پیمانه‌های طبیعت سازگار باشد؟ به عبارتی دیگر، آیا فضای اندازه‌ای مانند $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ وجود دارد بطوریکه

الف) هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^n$ اندازه‌پذیر باشد، یعنی $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

ب) $m(Q) = ۱$، که در آن $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : ۰ \leq x_j \leq ۱,\ j = ۱, ..., n\}$.

پ) اگر E و F همنهشت باشند، به عبارتی اگر E را بتوان توسط انتقال، چرخش یا انعکاس به F تبدیل کرد، آنگاه $m(E) = m(F)$.

سوالی که پیش می‌آید، این است که آیا چنین فضای اندازه‌ای موجود است؟ آیا تمامی این شرایط باهم سازگارند؟ نخستین بار **ویتالی**[۱۰] در سال ۱۹۰۵ با ارائه‌ی مثالی نشان داد که متأسفانه این اصول باهم سازگار نیستند. مثال زیر را ببینید.

مثال ۵۵.۲. فرض کنیم فضای اندازه‌ای چون $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), m)$ وجود دارد که در تمامی خواص ذکر شده در بالا صدق کند. در این صورت رابطه‌ی $\sim$ را بر $[۰, ۱]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $[۰, ۱]$ است، لذا بازه‌ی $[۰, ۱]$ را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. با اصل انتخاب از هر کلاسی، یک عنصر انتخاب می‌کنیم و مجموعه‌ی بدست

---

[۱۰] Vitali

آمده را V می‌نامیم. از اینکه هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است، پس V اندازه‌پذیر است. از اینکه $\mathbb{Q}$ شماراست، می‌توان فرض کرد

$$\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{r_1, r_2, .., r_n, ...\}$$

به ازای هر n، قرار می‌دهیم

$$V_n = V + r_n = \{r_n + x, \quad x \in V\}.$$

ثابت می‌کنیم اگر $n \neq m$ باشد، آنگاه $V_n \cap V_m = \emptyset$. اگر $x \in V_n \cap V_m$، آنگاه $x_1 \neq x_2 \in V$ چنان موجودند که $x = r_n + x_1$ و $x = r_m + x_2$ و در نتیجه، $x_1 - x_2 = r_m - r_n \in \mathbb{Q}$، بنابراین $x_1 \sim x_2$ و این با طرز ساختار V در تناقض است. حال از پایایی m نسبت به انتقال، نتیجه می‌گیریم، به ازای هر n، $m(V_n) = m(V)$. به علاوه $[0, 1] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2]$. بنابر خاصیت جمعی شمارای m داریم

$$m([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) \leq 3$$

اگر $m(V) = 0$ باشد، آنگاه $0 \leq 1$ و یک تناقض است. اگر $m(V) \neq 0$، آنگاه $3 \leq \infty$ و باز یک تناقض است. بنابراین $\mathbb{R}$ شامل زیرمجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است.

تعریف ۵۶.۲. اگر روند بکار رفته در ساخت مجموعه‌ی V در مثال بالا را روی $\mathbb{R}$ پیاده نماییم مجموعه‌ی ویتالی را بدست خواهیم آورد. در واقع رابطه $\sim$ را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

از اینکه $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathbb{R}$ است، لذا $\mathbb{R}$ را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند. بنابراین هر رده‌ی هم‌ارزی به فرم

$$V_x = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$$

است. با اصل انتخاب از هر کلاسی، یک عنصر انتخاب می‌کنیم و مجموعه‌ی بدست آمده را مجموعه‌ی ویتالی می‌نامیم.

تذکر ۵۷.۲. با توجه به تعریف مجموعه‌ی ویتالی،

- فقط یکی از این رده‌ها شامل تمام اعداد گویا است. باقی رده‌ها، زیرمجموعه‌های مجزایی از اعداد گنگ است.
- تعداد این رده‌های هم‌ارزی مجزا ناشماراست. زیرا هر رده هم‌ارزی شماراست در حالی که اجتماع این رده‌ها برابر با $\mathbb{R}$ است.
- این مجموعه، مجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است. مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۹ همین فصل را ببینید.

با توجه به مثال بیان شده، برای ساخت فضای اندازه‌ی دلخواه‌مان، مجبور به تضعیف یکی از ویژگی‌های سه‌گانه‌ی بیان شده در بالا هستیم. از طرفی بطور طبیعی، مایل به حذف ویژگی‌های بیان شده در (ب) و (پ) نیستیم و در نتیجه مجبور به تضعیف شرط (الف) هستیم. برای نیل به این هدف، ابتدا مفهوم اندازه‌ی خارجی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۵۸.۲. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه باشد. تابع مجموعه‌ای $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [\circ, \infty]$، یک **اندازه‌ی خارجی** نامیم، هرگاه

۱- $\mu^*(\emptyset) = \circ$،

۲- μ^* یکنوا باشد، به ازای هر $E_1, E_2 \subseteq X$ که $E_1 \subseteq E_2$، $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$،

۳- μ^* زیرجمعی شمارا باشد، به ازای هر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$، $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

با توجه به تعریف ارائه شده برای اندازه‌ی خارجی مشاهده می‌کنیم که μ^* به علت نداشتن خاصیت جمعی شمارا، نمی‌تواند یک اندازه روی $\mathcal{P}(X)$ باشد. در ۱۹۱۴ کاراتئودوری معیاری برای برای بدست آوردن گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X که μ^* روی آن زیرگردایه، دارای خاصیت جمعی شمارا باشد، ارائه داد. تعریف زیر را ببینید.

تعریف ۵۹.۲. فرض می‌کنیم μ^* یک اندازه‌ی خارجی روی X باشد. زیرمجموعه‌ی $E \subseteq X$ را اندازه‌پذیر (یا μ^*-اندازه‌پذیر) نامیم، اگر به ازای هر $A \subseteq X$، تساوی زیر برقرار باشد

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{۴.۲}$$

گردایه‌ی تمام مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر را با $\mathcal{A}^*$ نشان داده و تحدید μ^* روی $\mathcal{A}^*$ را با μ نشان می‌دهیم.

$$\mu^*|_{\mathcal{A}^*} = \mu.$$

تذکر ۶۰.۲. با توجه به تعریف فوق، بوضوح $\emptyset$ اندازه‌پذیر بوده و $\mathcal{A}^*$ نسبت به متمم‌گیری بسته است.

تذکر ۶۱.۲. از رابطه‌ی $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ و زیرجمعی بودن اندازه‌ی خارجی، داریم

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{۵.۲}$$

بنابراین، برای اثبات اندازه‌پذیری یک مجموعه‌ی دلخواه مانند E، کافی است، فقط عکس نامساوی ذکر شده در (۵.۲) را بررسی کنیم.

تذکر ۶۲.۲. با توجه به تذکر قبل، مجموعه‌ی E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subseteq X$ با $\mu^*(A) < \infty$، نامساوی زیر برقرار باشد

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

لم ۶۳.۲. **گردایه‌ی مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر، نسبت به اجتماع متناهی بسته است.**

اثبات : فرض می‌کنیم $E_۱, E_۲ \in \mathcal{A}^*$. از اینکه $E_۲$ اندازه‌پذیر است، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A \cap E_۱) = \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲) + \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲^c) \tag{۶.۲}$$

$$\mu^*(A \cap E_۱^c) = \mu^*(A \cap E_۱^c \cap E_۲) + \mu^*(A \cap E_۱^c \cap E_۲^c) \tag{۷.۲}$$

حال با جمع روابط (۶.۲) و (۷.۲)، به همراه اندازه‌پذیری $E_۱$، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲) + \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲^c) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E_۱^c \cap E_۲) + \mu^*(A \cap E_۱^c \cap E_۲^c)\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

با جایگزین کردن $A \cap (E_۱ \cup E_۲)$ به جای A، در تساوی (۸.۲)، داریم

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (E_۱ \cup E_۲)) &= \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲) + \mu^*(A \cap E_۱ \cap E_۲^c) \\ &\quad + \mu^*(A \cap E_۱^c \cap E_۲) \qquad (\forall A \subseteq X).\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

حال با ترکیب روابط (۸.۲) و (۹.۲)، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_۱ \cup E_۲)) + \mu^*(A \cap (E_۱ \cup E_۲)^c)$$

بنابراین $E_1 \cup E_2$ اندازه‌پذیر است. پس با استقراء، $\mathcal{A}^*$ نسبت به اجتماع متناهی بسته است. ■

با استفاده از لم فوق و تذکر ۶۰.۲، نتیجه زیر را داریم

نتیجه ۶۴.۲. گردایه‌ی مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر، یک جبر از زیرمجموعه‌های X است.

لم ۶۵.۲. فرض کنیم $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{A}^*$ و دوبدو مجزایند. در این صورت به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big)\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j).$$

اثبات : فرض کنیم $E_1, E_2 \in \mathcal{A}^*$ و $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. آنگاه از رابطه‌ی (۹.۲) در لم قبل، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

حال با استقراء به آسانی می‌توان رابطه‌ی فوق را به هر تعداد متناهی تعمیم داد. ■

لم ۶۶.۲. گردایه‌ی مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر، یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های X است.

اثبات : با توجه به لم مجزاسازی و جبر بودن $\mathcal{A}^*$، کافی است ثابت کنیم $\mathcal{A}^*$، نسبت به اجتماع شمارای مجزا بسته است. بدین منظور فرض می‌کنیم $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر دوبدو مجزا در $\mathcal{A}^*$ باشد. با توجه به تذکر ۶۱.۲، برای اثبات اندازه‌پذیری $\cup_{j=1}^{\infty} E_j$، کافی است به ازای هر $A \subseteq X$، نشان دهیم

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^c\Big) \tag{۱۰.۲}$$

از اینکه $\mathcal{A}^*$ یک جبر است، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $\cup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{A}^*$. بنابراین به ازای هر $A \subseteq X$،

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big)^c\Big)$$

حال از لم قبلی و رابطه‌ی $A \cap \Big(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^c \subseteq A \cap \Big(\cup_{j=1}^{n} E_j\Big)^c$ و یکنوایی اندازه‌ی خارجی،

به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^c\Big) \tag{۱۱.۲}$$

با حدگیری از طرفین نامساوی، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^c\Big) \tag{۱۲.۲}$$

از طرفی دیگر با استفاده از خاصیت زیرجمعی شمارای اندازه‌ی خارجی، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A \cap E_j)\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_j)$$

با ترکیب نامساوی فوق با نامساوی (۱۲.۲)، به ازای هر $A \subseteq X$، خواهیم داشت

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)^c\Big)$$

بنابراین $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}^*$ و این یعنی $\mathcal{A}^*$ یک σ-جبر از زیرمجموعه‌های X است. ■

لم ۶۷.۲. تحدید μ از اندازه‌ی خارجی μ^*، روی $\mathcal{A}^*$، یک تابع اندازه روی $\mathcal{A}^*$ است.

اثبات : برای اثبات کافی است نشان دهیم μ^*، جمعی شمارا روی $\mathcal{A}^*$ است. فرض می‌کنیم $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوبدو مجزا در $\mathcal{A}^*$ باشد. با قرار دادن $A = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ در رابطه (۱۲.۲)، خواهیم داشت

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j).$$

حال عکس نامساوی از خاصیت زیرجمعی شمارای اندازه‌ی خارجی بوضوح برقرار است. بنابراین

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j).$$

و در نتیجه جمعی شمارا بودن μ ثابت می‌شود. ■

لم ۶۸.۲. فرض کنید μ^* یک اندازه‌ی خارجی روی زیرمجموعه‌های X باشد. اگر $E \subseteq X$ و $\mu^*(E) = \circ$، آنگاه E اندازه‌پذیر بوده و $\mu(E) = \circ$.

اثبات : از یکنوایی اندازه‌ی خارجی، به ازای هر $A \subseteq X$، داریم

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A),$$

بنابراین با توجه به تذکر ۶۱.۲، E اندازه‌پذیر است. ■

نتیجه ۶۹.۲. اندازه‌ی μ، روی σ-جبر $\mathcal{A}^*$، اندازه‌ای کامل است.

اثبات : با توجه به یکنوایی اندازه‌ی خارجی و لم قبلی، حکم نتیجه می‌شود. ■

قضیه ۷۰.۲. فرض می‌کنیم $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ که $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ و $\rho : \mathcal{E} \to [\circ, \infty]$ چنان باشد که $\rho(\emptyset) = \circ$. به ازای هر $E \subseteq X$، تعریف می‌کنیم:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E}, \quad E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}. \qquad (۱۳.۲)$$

آنگاه μ^*، یک اندازه‌ی خارجی روی X است.

اثبات : به ازای هر $E \subseteq X$، دنباله‌ی $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ چنان موجود است که $E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ (به ازای هر j، می‌توان E_j را برابر با X گرفت). بنابراین μ^* معنی‌دار است. بوضوح $\mu^*(\emptyset) = \circ$ و به ازای هر $E \subseteq F$، $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$، زیرا هر پوشش F، پوششی برای E نیز است. حال نشان می‌دهیم μ^* زیرجمعی شماراست. فرض می‌کنیم $\{A_j\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ و $\varepsilon > \circ$ دلخواه باشد. با توجه به تعریف μ^*، به ازای هر j، دنباله‌ی $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$، چنان موجود است که $A_j \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ و

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \qquad (۱۴.۲)$$

حال با جمع نامساوی‌های بیان شده در (۱۴.۲) از $j = 1$ تا ∞، داریم

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon \qquad (۱۵.۲)$$

همچنین از رابطه‌ی $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \cup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ و تعریف μ^*،

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \tag{۱۶.۲}$$

حال از روابط (۱۵.۲) و (۱۶.۲)، داریم

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon,$$

بالاخره از اینکه ε دلخواه است، نامساوی مورد نظر حاصل خواهد شد. ■

تذکر ۷۱.۲. با مفروضات قضیه‌ی ۷۰.۲، μ^* بزرگترین اندازه‌ی خارجی حاصل از توسیع ρ است. به عبارتی اگر ν یک اندازه‌ی خارجی روی X باشد که

$$\nu(E) = \mu^*(E) = \rho(E), \qquad (\forall E \in \mathcal{E})$$

آنگاه به ازای هر $E \subseteq X$، $\nu(E) \leq \mu^*(E)$. برای مشاهده‌ی این امر، فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی دلخواه از عناصر $\mathcal{E}$ برای E باشد. در این صورت با توجه به خاصیت یکنوایی و زیرجمعی اندازه‌ی خارجی

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

حال با اینفیمم‌گیری از طرفین نامساوی بالا داریم

$$\nu(E) \leq \mu^*(E).$$

تذکر ۷۲.۲. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۷۰.۲،

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : E_j \in \mathcal{A}, \quad E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j\right\} \tag{۱۷.۲}$$

یک اندازه‌ی خارجی روی $\mathcal{P}(X)$ است. تابع مجموعه‌ای μ^* را اندازه‌ی خارجی تولید شده توسط تابع اندازه‌ی μ می‌نامیم.

لم ۷۳.۲. اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و μ^* تعریف شده در رابطه‌ی (۱۷.۲) باشد، آنگاه

الف) به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، $\mu^*(E) = \mu(E)$.

ب) هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $\mathcal{A}$، مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌پذیر است.

اثبات: الف) فرض کنیم $E \in \mathcal{A}$ و $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ پوششی برای E از عناصر $\mathcal{A}$ باشد. با قرار دادن $F_n = E \cap (E_n - \cup_{j=1}^{n-1} E_i)$، مشاهده می‌کنیم $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{A}$ با اجتماعی برابر با E است. بنابراین

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

و در نتیجه $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. عکس نامساوی بوضوح برقرار است زیرا دنباله‌ی $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ که $E_1 = E$ و به ازای هر $j \geq 2$، $E_j = \emptyset$ پوششی از عناصر $\mathcal{A}$ برای E است.

ب) فرض کنیم $E \in \mathcal{A}$ و $A \subseteq X$ دلخواه باشد. از تعریف اندازه‌ی خارجی، به ازای هر $\varepsilon > 0$، دنباله‌ای مانند $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ چنان موجود است که $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ و

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{۱۸.۲}$$

حال از اینکه $E \in \mathcal{A}$، داریم

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap E\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap E^c\right) \tag{۱۹.۲}$$

با تلفیق روابط (۱۸.۲) و (۱۹.۲) به همراه بهره‌گیری از خواص زیرجمعی شمارا و یکنوایی μ، داریم

$$\mu^*(A)+\varepsilon \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap E\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap E^c\right) \geq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

بالاخره از اینکه ε دلخواه است، E مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌پذیر است.

■

مثال ۷۴.۲. فرض کنید

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} : \text{شماراست } E^c \text{ یا } E\}$$

$\mathcal{A}$ یک σ-جبر است. مثال ۹.۲ را ببینید. همچنین در مثال ۴۴.۲، نشان دادیم

$$\mu(E) = \begin{cases} \circ & \text{شماراست } E, \\ \text{۱} & \text{شماراست } E^c. \end{cases}$$

یک اندازه روی $\mathcal{A}$ تعریف می‌کند. حال μ^* را اندازه خارجی تولید شده توسط μ در نظر می‌گیریم، در واقع به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : E_j \in \mathcal{A}, \quad E \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

آیا μ^* جمعی شماراست؟ به عبارتی آیا هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$، μ^*-اندازه‌پذیر است؟ برای پاسخ به این سوال فرض می‌کنیم E زیرمجموعه‌ای شمارا از $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $E \in \mathcal{A}$ و با توجه به لم ۷۳.۲، $\mu^*(E) = \mu(E) = \circ$. اگر E زیرمجموعه ناشمارایی از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\mu^*(E) \leq \mu^*(\mathbb{R}) = 1$. حال فرض می‌کنیم $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ پوششی برای E باشد، آنگاه از ناشمارایی E می‌توان نتیجه گرفت $j_\circ$ای چنان موجود است که $E_{j_\circ}$ ناشماراست. بنابراین

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \geq \mu(E_{j_\circ}) \geq 1.$$

پس $\mu^*(E) = 1$ اگر و تنها اگر E ناشمارا باشد. قرار می‌دهیم $\mathbb{R} = (-\infty, \circ] \cup (\circ, \infty)$، داریم

$$1 = \mu^*(\mathbb{R}) < \mu^*((-\infty, \circ]) + \mu^*((\circ, \infty)) = 2.$$

و این نشان می‌دهد μ^* جمعی شمارا نیست.

مثال ۷۵.۲. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی، $x_\circ \in X$ و $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X شامل $\{x_\circ\}$ باشد. به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، تعریف می‌کنیم

$$\mu(E) := \begin{cases} \circ & x_\circ \notin E, \\ 1 & x_\circ \in E. \end{cases}$$

فرض می‌کنیم μ^* اندازه‌ی خارجی تولید شده توسط μ روی X باشد. به ازای هر $E \subseteq X$، $\mu^*(E)$ برابر با یک یا صفر است. (X پوششی برای تمام زیرمجموعه‌هاست). اگر $x_\circ \in E$ باشد، آنگاه بوضوح $\mu^*(E) = 1$. اگر $\mu^*(E) = 1$ باشد، آنگاه $x_\circ \in E$. زیرا در غیر این صورت $X - \{x_\circ\}$

پوششی برای E بوده و در نتیجه $\mu^*(E) = ۰$. بنابراین به ازای هر $E \subseteq X$،

$$\mu^*(E) = \begin{cases} ۰ & x_۰ \notin E, \\ ۱ & x_۰ \in E. \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم هر زیرمجموعه‌ی X مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌پذیر است. با توجه به آنچه گفته شد، به ازای هر $E \subseteq X$، اگر $\mu^*(E) = ۱$ باشد، آنگاه $\mu^*(E^c) = ۰$ و بالعکس. بنابراین

$$\mu^*(X) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c),$$

حال با توجه به متناهی بودن $\mu^*(X)$ و مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۳، E اندازه‌پذیر است و در نتیجه مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌ناپذیر وجود ندارد.

۱۰.۲ مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}$

همانطور که در ابتدای بخش ۹.۲ بیان کردیم، هدف ما تولید یک اندازه روی $\mathbb{R}$ است که در حالت طبیعی، اندازه‌ی یک بازه برابر با طول بازه باشد. قبل از بیان این اندازه، ابتدا نمادهایی را که در سرتاسر این بخش استفاده خواهیم کرد، بیان می‌کنیم.
نمادگذاری : $\mathcal{I}_o$ گردایه‌ی تمام بازه‌های باز $\mathbb{R}$ و مجموعه‌ی $\emptyset$ و $\mathcal{I}_{oc}$ گردایه‌ی تمام بازه‌های نیم‌باز $\mathbb{R}$ به صورت $(a,b]$ و مجموعه‌ی $\emptyset$ و $\mathcal{I}_{co}$ گردایه‌ی تمام بازه‌های نیم‌باز $\mathbb{R}$ به صورت $[a,b)$ و مجموعه‌ی $\emptyset$ و $\mathcal{I}_c$ گردایه‌ی تمام بازه‌های بسته $\mathbb{R}$ و مجموعه‌ی $\emptyset$، در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشیم که $(a,\infty) = (a,\infty]$ و $(-\infty,b) = [-\infty,b)$ است و در نهایت گردایه‌ی تمام بازه‌های $\mathbb{R}$ به همراه مجموعه‌ی $\emptyset$ را با $\mathcal{I}$ نشان می‌دهیم.

به ازای هر بازه‌ی دلخواه I با نقاط ابتدایی و انتهایی $a,b \in \mathbb{R}$، فرض می‌کنیم $l(I) = b - a$، در صورتی که I بازه‌ای بیکران در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $l(I) = \infty$ و $l(\emptyset) = ۰$. همچنین روی هر دنباله‌ی شمارا و مجزای $\{I_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $\mathcal{I}$ قرار می‌دهیم $l(\cup_{n=۱}^{\infty} I_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} l(I_n)$. معمولاً به جای $l(I)$ از نماد $|I|$ نیز استفاده خواهیم کرد. حال تابع $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [۰,\infty]$ را به صورت

$$m^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{n=۱}^{\infty} l(I_n) : (I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}_o,\ \bigcup_{n=۱}^{\infty} I_n \supset E \Big\},$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۷۰.۲، m^* یک اندازه‌ی خارجی روی $\mathbb{R}$ است که آن را اندازه‌ی خارجی لبگ روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم. گردایه‌ی تمام مجموعه‌های m^*-اندازه‌پذیر را

مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر نامیده و با نماد $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم. همچنین تحدید m^* روی $\mathcal{L}$ را با m نشان خواهیم داد. با توجه به مطالب فوق، سه‌تایی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را فضای اندازه‌ی لبگ روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم.

تذکر ۷۶.۲. همانطور که دیدید اندازه‌ی خارجی m^* را با پوشش گردایه‌ی بازه‌های باز $\mathcal{I}_o$ تعریف کردیم. می‌توان این پوشش را گردایه‌ی $\mathcal{I}_c$، $\mathcal{I}_{co}$ و یا $\mathcal{I}_{oc}$ در نظر گرفت. در تمامی حالات، اندازه‌ی خارجی بدست آمده به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$، یکسان خواهد بود. مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۴ همین فصل را ببینید.

قضیه ۷۷.۲. **اندازه‌ی خارجی هر فاصله‌ی بسته‌ی $[a, b]$، برابر با طول آن است.**

اثبات : به ازای هر $\varepsilon > 0$، داریم $[a, b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ و در نتیجه با توجه به تعریف اندازه‌ی خارجی $m^*([a, b]) \leq |(a-\varepsilon, b+\varepsilon)| = b - a + 2\varepsilon$. از اینکه $\varepsilon > 0$ دلخواه است، داریم $m^*([a, b]) \leq b - a$. برای اثبات عکس نامساوی، پوشش باز و دلخواه $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ را برای $[a, b]$ که در آن $I_k = (a_k, b_k)$ در نظر می‌گیریم. از اینکه $[a, b]$ فشرده است Nای موجود است که $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}(a_k, b_k)$. حال با اندیس‌گذاری مجدد، می‌توان n بازه‌ی $I_k = (a_k, b_k)$، را طوری بدست آورد که $a_1 < a$ و $b < b_n$ و به ازای هر $1 \leq k \leq n-1$، داشته باشیم $a_{k+1} < b_k$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| &\geq \sum_{k=1}^{n}|I_k| = (b_n - a_n) + (b_{n-1} - a_{n-1}) + \ldots + (b_1 - a_1) \\
&= b_n - (a_n - b_{n-1}) - (a_{n-1} - b_{n-2}) - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1 \\
&\geq b_n - a_1 \geq b - a.
\end{aligned}$$

بنابراین، $m^*([a, b]) \geq b - a$. و در نتیجه اندازه‌ی خارجی هر فاصله‌ی بسته‌ی $[a, b]$، برابر با طول آن است. ■

نتیجه ۷۸.۲. **اندازه‌ی خارجی هر فاصله‌ی باز (a, b)، برابر با طول آن است.**

اثبات : از اینکه

$$[a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subseteq (a, b) \subseteq [a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}]$$

بنابراین از خاصیت یکنوایی اندازه‌ی خارجی و قضیه‌ی ۷۷.۲ داریم

$$b - a - \varepsilon \leq m^*((a, b)) \leq b - a + \varepsilon.$$

و از اینکه $\varepsilon > ۰$ دلخواه است؛ داریم $m^*((a, b)) = b - a$. ■

به همین ترتیب، اندازه‌ی خارجی هر فاصله‌ی بیکران I برابر با $+\infty$ است، زیرا به ازای هر عدد حقیقی و مثبت M، بازه‌ای بسته مانند $J \subset I$، موجود است بطوریکه $m^*(I) > m^*(J) = M$ و از اینکه M را به اندازه‌ی کافی می‌توان بزرگ اختیار کرد، $m^*(I) = +\infty$. همچنین از اینکه، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\{x\} \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$، نتیجه می‌گیریم اندازه‌ی خارجی هر مجموعه‌ی یکانی صفر است، بنابراین از خاصیت زیرجمعی شمارا، اندازه‌ی خارجی هر مجموعه‌ی شمارا صفر است و بنابه لم ۶۸.۲، هر مجموعه‌ی شمارا اندازه‌پذیر است. به همین ترتیب از اینکه $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$، نتیجه می‌گیریم اندازه خارجی هر بازه‌ی نیم‌بازه نیز برابر با طول آن است.

قضیه ۷۹.۲. فرض کنید m^* اندازه‌ی خارجی لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت $E \subseteq \mathbb{R}$ لبگ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \in \mathcal{I}_o$،

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \tag{۲۰.۲}$$

اثبات : اگر E لبگ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه بوضوح رابطه‌ی (۲۰.۲) برقرار است. بالعکس فرض می‌کنیم رابطه‌ی (۲۰.۲) برقرار باشد. با توجه به تذکر ۶۲.۲، کافی ثابت کنیم به ازای هر $A \subset \mathbb{R}$ با شرط $m^*(A) < \infty$، تساوی زیر برقرار است

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

بدین منظور پوشش $\{I_n\} \subseteq \mathcal{I}_o$ را برای A در نظر می‌گیریم. در این صورت با توجه به (۲۰.۲)، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $m^*(I_n) = m^*(I_n \cap E) + m^*(I_n \cap E^c)$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(m^*(I_n \cap E) + m^*(I_n \cap E^c) \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap E^c) \\
&\geq m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E) \Big) + m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E^c) \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)\cap E\right)+m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)\cap E^c\right)\\ &\geq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c), \end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از این حقیقت ناشی می‌شود که اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی عددی با جملات نامنفی باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. حال با اینفیمم‌گیری از طرفین نامساوی داریم

$$m^*(A)\geq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c),$$

و در نتیجه اثبات قضیه کامل است. ■

قضیه ۸۰.۲. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{L}$ **(**$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ **مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر** $\mathbb{R}$ **با توپوژی معمولی است).**

اثبات : با توجه به قضیه‌ی ۲۰.۲، مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی عبارت از کوچکترین σ-جبر تولید شده توسط گردایه‌ی $\{(a,\infty);a\in\mathbb{R}\}$ می‌باشد. حال با توجه به σ-جبر بودن $\mathcal{L}$، کافی است ثابت کنیم به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، بازه‌ی (a,∞) لبگ اندازه‌پذیر است. مطابق قضیه‌ی ۷۹.۲، کافی است ثابت کنیم به ازای هر $I\in\mathcal{I}_o$،

$$m^*(I)=m^*(I\cap(a,\infty))+m^*(I\cap(a,\infty)^c),$$

به ازای هر $I\in\mathcal{I}_o$ داریم

$$I=I\cap\mathbb{R}=I\cap\{(a,\infty)\cup(a,\infty)^c\}=\{I\cap(a,\infty)\}\cup\{I\cap(a,\infty)^c\}.$$

حال از اینکه $I\cap(a,\infty)$ و $I\cap(a,\infty)^c$ یا بازه‌اند یا تهی و از اینکه مجزا بوده و اجتماع آنها برابر با I می‌باشد، داریم

$$l(I)=l(I\cap(a,\infty))+l(I\cap(a,\infty)^c),$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۷۷.۲ و نتایج آن داریم

$$m^*(I)=m^*(I\cap(a,\infty))+m^*(I\cap(a,\infty)^c),$$

در نتیجه (a,∞) لبگ اندازه‌پذیر است. ■

تعریف ۸۱.۲. فرض می‌کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد.

الف) به ازای هر $E \subseteq X$ و $x_\circ \in X$، می‌نویسیم $E + x_\circ = \{x + x_\circ : x \in E\}$ و آن را $x_\circ$-انتقال E می‌نامیم.

ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، می‌نویسیم $\alpha E = \{\alpha x : x \in E\}$ و آن را α-گسترش E می‌نامیم.

لم ۸۲.۲. احکام زیر برای انتقال و گسترش مجموعه‌ها برقرار است.

- $(E + x_1) + x_2 = E + (x_1 + x_2)$
- $(E + x)^c = E^c + x$
- $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow E_1 + x \subseteq E_2 + x$
- $(\cup_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) + x = \cup_{\alpha\in\Gamma}(E_\alpha + x)$
- $(\cap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha) + x = \cap_{\alpha\in\Gamma}(E_\alpha + x)$
- $\beta(\alpha E) = (\alpha\beta)E$
- $(\alpha E)^c = \alpha E^c$

اثبات : به عهده خواننده است. ■

قضیه ۸۳.۲. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}$، $x \in \mathbb{R}$ و α عددی حقیقی و مخالف صفر باشد. آنگاه

الف) $m^*(E + x) = m^*(E)$.

ب) $m^*(\alpha E) = |\alpha| m^*(E)$.

اثبات : فقط قسمت (الف) را اثبات می‌کنیم. $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. پوشش بازی مانند $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازه‌های باز برای E موجود است بطوریکه

$$m^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

چون $E + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n + x)$،

$$m^*(E + x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n + x| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(E) + \varepsilon$$

چون ε دلخواه است، پس

$$m^*(E+x) \leq m^*(E) \tag{۲۱.۲}$$

می‌توان نوشت $E = E + x - x$ و لذا رابطه‌ی (۲۱.۲) نتیجه می‌دهد

$$m^*(E) = m^*((E+x)-x) \leq m^*(E+x) \tag{۲۲.۲}$$

از روابط (۲۱.۲) و (۲۲.۲) نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید. ■

قضیه ۸۴.۲. الف) فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ نسبت به انتقال پایاست، به عبارتی دیگر به ازای هر $E \in \mathcal{L}$ و $x \in \mathbb{R}$، داریم $E + x \in \mathcal{L}$ و $m(E+x) = m(E)$. همچنین با فرض $\mathcal{L} + x = \{E + x : E \in \mathcal{L}\}$، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم $\mathcal{L} + x = \mathcal{L}$.

ب) به ازای هر $E \in \mathcal{L}$ و $\alpha \in \mathbb{R} \neq ۰$، داریم $\alpha E \in \mathcal{L}$ و $m(\alpha E) = |\alpha| m(E)$. همچنین با فرض $\alpha\mathcal{L} = \{\alpha E : E \in \mathcal{L}\}$، داریم $\alpha\mathcal{L} = \mathcal{L}$.

اثبات : الف) فرض می‌کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ دلخواه باشد، با توجه به قضیه‌ی ۸۳.۲،

$$\begin{aligned}
& m^*(A \cap (E+x)) + m^*(A \cap (E+x)^c) \\
= \; & m^*([A \cap (E+x)] - x) + m^*([A \cap (E+x)^c] - x) \\
= \; & m^*\left((A-x) \cap E\right) + m^*\left((A-x) \cap E^c\right) \\
= \; & m^*(A-x) = m^*(A)
\end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از لم ۸۲.۲ و تساوی سوم از اندازه‌پذیری E حاصل شده است. بنابراین $E + x \in \mathcal{L}$. پس $m(E+x) = m^*(E+x) = m^*(E) = m(E)$. نشان دادیم به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $\mathcal{L} + x \subseteq \mathcal{L}$. حال با فرض $-x \in \mathbb{R}$ به جای x، $\mathcal{L} - x \subseteq \mathcal{L}$. بنابراین $\mathcal{L} = \mathcal{L} - x + x \subseteq \mathcal{L} + x$ و در نتیجه $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} + x$.

ب) با توجه به اندازه‌پذیری E داریم

$$m^*(\frac{۱}{\alpha}A) = m^*(\frac{۱}{\alpha}A \cap E) + m^*(\frac{۱}{\alpha}A \cap E^c), \tag{۲۳.۲}$$

حال با توجه به روابط زیر

$$m^*(\frac{1}{\alpha}A) = \frac{1}{|\alpha|}m^*(A),$$
$$m^*(\frac{1}{\alpha}A \cap E) = m^*(\frac{1}{\alpha}A \cap \frac{1}{\alpha}\alpha E) = \frac{1}{|\alpha|}m^*(A \cap \alpha E),$$
$$m^*(\frac{1}{\alpha}A \cap E^c) = m^*(\frac{1}{\alpha}A \cap \frac{1}{\alpha}\alpha E^c) = \frac{1}{|\alpha|}m^*(A \cap \alpha E^c),$$

با قرار دادن روابط فوق در معادله‌ی (۲۳.۲) و با ضرب طرفین در $|\alpha|$، داریم

$$m^*(A) = m^*(A \cap \alpha E) + m^*(A \cap \alpha E^c),$$

که نشان می‌دهد αE اندازه‌پذیر است. بنابراین داریم

$$m(\alpha E) = m^*(\alpha E) = |\alpha| m^*(E) = |\alpha| m(E)$$

نشان دادیم به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\alpha\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$. بنابراین $\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathcal{L} \subseteq \alpha\mathcal{L}$ و در نتیجه $\alpha\mathcal{L} = \mathcal{L}$.

■

لم ۸۵.۲. فرض کنید E زیرمجموعه‌ی دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه

الف) به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای باز چون O چنان موجود است که $E \subseteq O$ و

$$m^*(E) \leq m(O) \leq m^*(E) + \varepsilon,$$

ب) مجموعه‌ای G_δ چون G چنان موجود است که $E \subseteq G$ و $m(G) = m^*(E)$.

اثبات : الف) کافی است حالتی را بررسی کنیم که $m^*(E) < \infty$. با توجه به تعریف اندازه‌ی خارجی، به ازای هر $\varepsilon > 0$، پوشش $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازه‌های باز برای E چنان موجود است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(E) + \varepsilon$$

قرار می‌دهیم $O = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. در این صورت $E \subseteq O$ و با توجه به خواص یکنوایی و

زیرجمعی شمارایی اندازه‌ی خارجی داریم

$$m^*(E) \leq m(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(E) + \varepsilon$$

ب) برای اثبات این قسمت، با توجه به قسمت قبلی، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی باز G_n شامل E موجود است بطوریکه

$$m^*(E) \leq m(G_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

حال با قرار دادن $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

■

قضیه ۸۶.۲. به ازای هر $E \subset \mathbb{R}$ عبارات زیر معادلند:

الف) E اندازه‌پذیر است.

ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای باز چون O چنان موجود است که $E \subseteq O$ و $m^*(O - E) < \varepsilon$.

پ) مجموعه‌ی G_δ چون G چنان موجود است که $E \subseteq G$ و $m^*(G - E) = 0$.

ت) به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه بسته‌ای چون F چنان موجود است که $F \subseteq E$ و $m^*(E - F) < \varepsilon$.

ث) مجموعه‌ی F_σ چون V چنان موجود است که $V \subseteq E$ و $m^*(E - V) = 0$.

اثبات : ابتدا ثابت می‌کنیم (**الف**)⇐ (**ب**). با توجه به لم ۸۵.۲، مجموعه‌ی بازی چون O چنان موجود است که $m(O) \leq m(E) + \varepsilon$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $m(E) < \infty$. آنگاه از قضیه‌ی ۴۲.۲، قسمت (پ)، $m(O - E) = m(O) - m(E)$ و در نتیجه حکم برقرار است.

(۲) $m(E) = \infty$. در این صورت قرار می‌دهیم

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad , \qquad E_n = E \cap [-n, n].$$

از اینکه $m(E_n) < \infty$، مجموعه‌ای باز چون O_n چنان موجود است که

$$E_n \subseteq O_n \quad , \qquad m(O_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

حال با قرار دادن $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$، داریم $E \subseteq O$ و $O - E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n - E_n)$. در نتیجه

$$m(O - A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

برای اثبات (ب)$\Leftarrow$ (پ)، کافی است روندی مشابه قسمت دوم لم ۸۵.۲ را بکار برید. حال نشان می‌دهیم (پ)$\Leftarrow$ (الف). اگر (پ) برقرار باشد، آنگاه $E = G - (G - E)$ اندازه‌پذیر است، زیرا تفاضل دو مجموعه‌ی اندازه‌پذیر است. توجه داریم که هر مجموعه با اندازه‌ی خارجی صفر، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. بنابراین سه شرط اول معادلند.

حال برای اثبات (الف)$\Leftarrow$ (ت)، توجه می‌کنیم اگر E اندازه‌پذیر باشد، آنگاه E^c نیز چنین است. بنابراین از (ب)، مجموعه‌ای باز چون $E^c \subseteq O$ چنان موجود است که $m(O - E^c) < \varepsilon$. بنابراین $F = \mathbb{R} - O$ مجموعه‌ای بسته مشمول E است و $m(E - F) = m(O - E^c) < \varepsilon$. برای اثبات (ت)$\Leftarrow$ (ث)، با توجه به قسمت قبل، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی بسته‌ای مانند $F_n \subseteq E$ چنان موجود است که $m^*(E - F_n) < 1/n$. قرار می‌دهیم $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. آنگاه V یک مجموعه‌ی F_σ و مشمول در E است و از اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m^*(E - V) < 1/n$، داریم $m^*(E - V) = 0$. بالاخره اگر (ث)، برقرار باشد، آنگاه E اندازه‌پذیر است زیرا اجتماع دو مجموعه‌ی اندازه‌پذیر است. پس شرایط (الف)، (ت) و (ث) معادلند و در نتیجه حکم در حالت کلی برقرار است. ∎

قضیه ۸۷.۲. فرض کنید $E \subset \mathbb{R}$ با $m^*(E) < \infty$ باشد. آنگاه E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای چون W متشکل از اجتماع متناهی بازه‌ی باز متناهی چنان موجود باشد که $m^*(W \triangle E) < \varepsilon$. توجه داشته باشید که $W \triangle A = (W - A) \cup (A - W)$.

اثبات : ابتدا فرض می‌کنیم E اندازه‌پذیر باشد. از تعریف اندازه‌ی خارجی، به ازای هر $\varepsilon > 0$، پوشش $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازه‌های باز برای E چنان موجود است که $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$. حال از اینکه $m(E) < \infty$، Nای موجود است که $\sum_{n=N+1}^{\infty} |I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. با قرار دادن $W = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$، داریم

$$m(W \triangle E) \leq m(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n - E) + m(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

حال شرط کافی را اثبات می‌کنیم. از اینکه به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای چون W متشکل از

اجتماع متناهی بازه‌ی باز چنان موجود است که $m^*(W\triangle E) < \varepsilon$. بنابراین، $m^*(E-W) < \varepsilon$.
با توجه به تعریف اندازه‌ی خارجی، پوشش $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازه‌های باز برای $E - W$ چنان موجود است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < m^*(E-W) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

در این صورت مجموعه‌ی $G = W \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ مجموعه‌ای باز شامل E است و

$$m^*(G-E) \le m^*(W-E) + m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n) < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

بنابراین از قضیه‌ی ۸۶.۲، قسمت (ب)، مجموعه‌ی E اندازه‌پذیر است. ■

تذکر ۸۸.۲. در قضیه‌ی فوق‌الذکر، به جای بازه‌های باز می‌توان بازه‌های بسته و یا بازه‌های نیم‌باز قرار داد. در واقع با فرض اینکه شرایط قضیه برقرار باشد، ابتدا بازه‌های باز $I_1, \ldots, I_N$ را بدست می‌آوریم، آنگاه به ازای هر $i = 1, \ldots, N$، بازه‌ی نیم‌باز $J_i \subset I_i$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $m(I_i - J_i) < \varepsilon/N$ باشد. در این صورت

$$m\Big(E\triangle \bigcup_{i=1}^{N} J_i\Big) \le m\Big(E\triangle \bigcup_{i=1}^{N} I_i\Big) + m\Big(\bigcup_{i=1}^{N} I_i \triangle \bigcup_{i=1}^{N} J_i\Big) \le 2\varepsilon.$$

که نامساوی‌های بالا از رابطه‌ی $E\triangle F \subseteq (E\triangle G)\cup(G\triangle F)$ و خاصیت یکنوایی اندازه بدست آمده است.

تذکر ۸۹.۲. با توجه به قضیه‌ی لیندلف و نتیجه‌ی آن که هر مجموعه‌ی باز را می‌توان به صورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز و مجزا نوشت، می‌توان بازه‌های بدست آمده در قضیه‌ی ۸۷.۲، را به صورت مجزا اختیار کرد. در واقع در اثبات قضیه، $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$ مجموعه‌ای باز است و در نتیجه $\cup_{n=1}^{\infty} I_n = \cup_{n=1}^{\infty} I'_n$ که در آن $\{I'_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا از بازه‌های باز است. حال کافی است به جای $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ی $\{I'_n\}_{n=1}^{\infty}$ را قرار داد و باقی اثبات را مشابه قبلی ادامه داد.

تذکر ۹۰.۲. در قضیه‌ی ۸۷.۲، فرض $m(E) < \infty$ ضروری است. به عنوان مثال فرض کنید $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ که در آن به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n = (n - \frac{1}{2}, n)$ می‌باشد. آنگاه $E \in \mathcal{L}$ و $m(E) = \infty$. گیریم $\{I_1, \ldots, I_N\}$ گردایه‌ای دلخواه و مجزا از بازه‌های متناهی در $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه

$N_\circ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $\cup_{n=1}^{N} I_n \subseteq (-N_\circ, N_\circ)$. در نتیجه

$$E\Delta \bigcup_{n=1}^{N} I_n \supseteq E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n \supseteq E - (-N_\circ, N_\circ) = \bigcup_{n=N_\circ+1}^{\infty} E_n.$$

بنابراین داریم

$$m\Big(E\Delta \bigcup_{n=1}^{N} I_n\Big) \geq m\Big(\bigcup_{n=N_\circ+1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=N_\circ+1}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=N_\circ+1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

از اینکه هر بازه‌ی باز در $\mathbb{R}$ دارای اندازه‌ی لبگ مثبت است، بنابراین هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر لبگ که شامل یک بازه باشد، اندازه‌ی لبگ آن مقداری مثبت است و در نتیجه اندازه‌ی لبگ هر مجموعه‌ی باز مثبت است. اما عکس این مطلب درست نیست، به عنوان مثال، مجموعه‌ی اعداد گنگ در بازه‌ی $(0, 1)$ اندازه‌ای برابر با یک را دارد، در حالی که شامل هیچ بازه‌ای نیست. در این ارتباط به مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۶، همین فصل رجوع نمایید.

حال در وضعیتی هستیم که ارتباط دقیق مابین مجموعه‌های برل اندازه پذیر و لبگ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار دهیم. همانطور که می‌دانیم هر مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است، در حالی که عکس این مطلب برقرارنیست. به عبارتی دیگر مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر چنان موجود است که برل اندازه‌پذیر نیست و ما در بخش‌های بعدی چنین مجموعه‌ای را معرفی خواهیم کرد. سوال اینجاست که چگونه و با مضاف کردن چه زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ به مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر، می‌توان آن را به گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر توسیع داد. برای پاسخ این سوال قضیه‌ی زیر را ببینید.

قضیه ۹۱.۲. گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر $\mathcal{L}$ روی $\mathbb{R}$، کامل شده‌ی گردایه‌ی مجموعه‌های برل اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}$، $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ می‌باشد. به عبارتی دیگر اگر $\mathcal{B}_\circ = \{N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \ m(N) = 0\}$ که در آن m اندازه‌ی لبگ است و

$$\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = \{E \cup F,\ \ E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \ F \subseteq N,\ \ \ N \in \mathcal{B}_\circ\}.$$

آنگاه $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$.

اثبات: از اینکه فضای اندازه‌ی لبگ، فضای اندازه‌ی کاملی است، داریم $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \subseteq \mathcal{L}$. حال ثابت می‌کنیم $\mathcal{L} \subseteq \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$. فرض می‌کنیم $E \in \mathcal{L}$. آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۸۶.۲، مجموعه‌ی F_σ چون F

چنان موجود است که $F \subseteq E$ و $m(E-F) = \circ$ و مجموعه‌ی G_δ چون G چنان موجود است که $E \subseteq G$ و $m(G-E) = \circ$. قرار می‌دهیم $E = (E-F) \cup F$. از اینکه $F_\sigma \subseteq \mathcal{B}_\mathbb{R}$، $F \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. حال قرار می‌دهیم $N = G - F$. در این صورت $E - F \subseteq N \in \mathcal{B}_\circ$ و

$$m(G-F) = m(G-E) + m(E-F) = \circ$$

و این اثبات را کامل می‌کند. ■

قضیه‌ی فوق الذکر بیان می‌کند که هر مجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر تقریباً همه‌جا با یک مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر برابر است. همانطور که می‌دانیم فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ را با تحدید اندازه لبگ روی $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ می‌توان به فضای اندازه تبدیل کرد که در این صورت اندازه‌ی هر بازه‌ی دلخواه برابر با طول طبیعی آن است. از طرفی بدیهی است که روی یک فضای اندازه‌پذیر می‌توان بیشمار تابع اندازه تعریف کرده و آن را به یک فضای اندازه تبدیل کرد. بنابراین روی برل اندازه‌پذیرها نیز می‌توان بیشمار تابع اندازه تعریف کرد. اما خواهیم دید تابع اندازه‌ی منحصر بفردی روی برل اندازه‌پذیرها موجود است که اندازه‌ی هر بازه‌ی باز برابر با طول آن بازه است و آن همان تحدید اندازه‌ی لبگ روی فضای اندازه‌پذیر برل است.

برای نیل به این هدف، گردایه‌ی $\mathcal{I}_{oc}$ یعنی گردایه‌ی تمام بازه‌های نیم‌باز $\mathbb{R}$ به صورت $(a, b]$ یا (a, ∞) و مجموعه‌ی تهی را در نظر می‌گیریم. بوضوح اشتراک هر دو بازه‌ی نیم‌باز یک بازه‌ی نیم‌باز است و متمم هر بازه‌ی نیم‌باز یک بازه‌ی نیم‌باز یا اجتماع دو بازه‌ی نیم‌باز است. با توجه به مثال ۱۱.۲، گردایه‌ی $\mathcal{G}$ متشکل از اجتماع‌های متناهی و مجزا از نیم‌بازه‌ها یک جبر است و قضیه‌ی ۲۰.۲ نشان می‌دهد که σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{G}$ همان گردایه‌ی برل اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}$ است.

قضیه ۹۲.۲. فرض کنید $\mathcal{G}$ جبر متشکل از اجتماع‌های متناهی و مجزا از نیم‌بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و m اندازه‌ی لبگ و μ یک اندازه دلخواه روی $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ باشد. اگر این دو اندازه روی $\mathcal{G}$ باهم برابر باشند، آنگاه $\mu = m$.

اثبات : قرار می‌دهیم

$$\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : \mu(E) = m(E)\}$$

نشان می‌دهیم $\mathcal{B}$ یک کلاس یکنواست. ابتدا فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی در $\mathcal{B}$ باشد. آنگاه از پیوستگی از پایین تابع اندازه داریم

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

در نتیجه $\cup_{n=۱}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$. حال فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی در $\mathcal{B}$ باشد. با توجه به تذکر ۷۱.۲، از اینکه اندازه‌ی لبگ m، σ-متناهی است، پس اندازه‌ی μ نیز σ-متناهی است. حال از لم ۴۸.۲، داریم

$$m\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n\right)$$

بنابراین گردایه‌ی $\mathcal{B}$ یک کلاس یکنوا شامل $\mathcal{G}$ است. در نتیجه $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ که در آن $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ کوچکترین کلاس یکنوا شامل $\mathcal{G}$ است. حال قضیه‌ی ۲۶.۲ نتیجه می‌دهد که $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و در نتیجه حکم برقرار است. ∎

۱۱.۲ کاردینال مجموعه‌های لبگ و برل اندازه‌پذیر

همانطور که می‌دانیم هر مجموعه با اندازه مثبت ناشماراست، ولی عکس مطلب برقرار نیست یعنی ممکن است مجموعه‌ای از اندازه صفر باشد ولی شمارا نباشد. مدتها تصور می‌شد که مجموعه‌های پوچ، حداکثر می‌توانند شمارای نامتناهی باشند، اما کانتور با ارائه‌ی مثالی از یک زیرمجموعه‌ی ناشمارا نشان داد که چنین فرضی درست نیست. ابتدا به چگونگی ساخت این مجموعه می‌پردازیم.

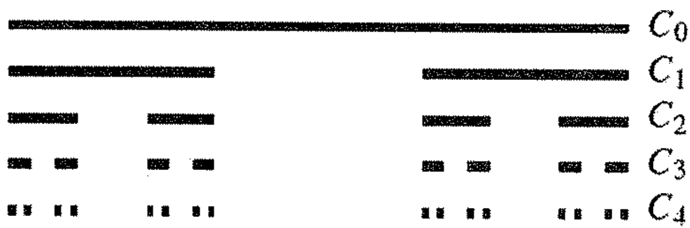
فرض می‌کنیم $C_۰ = [۰, ۱]$. مجموعه‌ی $C_۱$ را با حذف بازه‌ی باز یک سوم میانی از $C_۰$ بدست می‌آوریم. به عبارت دیگر

$$C_۱ = C_۰ - (\tfrac{۱}{۳}, \tfrac{۲}{۳}) = [۰, \tfrac{۱}{۳}] \cup [\tfrac{۲}{۳}, ۱].$$

بنابراین $C_۱$ به صورت اجتماع دو بازه‌ی بسته است. حال مجموعه‌ی $C_۲$ را با حذف دو بازه‌ی باز یک سوم میانی از هر دو بازه‌ی $[۰, \frac{۱}{۳}]$ و $[\frac{۲}{۳}, ۱]$ از $C_۱$ بدست می‌آوریم. به عبارتی دیگر

$$C_۲ = [۰, \tfrac{۱}{۹}] \cup [\tfrac{۲}{۹}, \tfrac{۳}{۹}] \cup [\tfrac{۶}{۹}, \tfrac{۷}{۹}] \cup [\tfrac{۸}{۹}, ۱].$$

با ادامه‌ی این فرآیند، مشاهده می‌کنیم که مجموعه‌ی C_n به صورت اجتماع ۲^n بازه‌ی بسته است که طول هر یک از این بازه‌ها برابر با $\frac{۱}{۳^n}$ و مجموعه‌ی $C_{n+۱}$ را با حذف یک سوم میانی از ۲^n بازه‌ی C_n بدست می‌آوریم که در نهایت به صورت اجتماع $۲^{n+۱}$ بازه‌ی بسته خواهد بود. بنابراین دنباله‌ای مانند $\{C_n\}$ را در $[۰, ۱]$ بدست می‌آوریم که $C_۱ \supset C_۲ \supset C_۳ \dots$. شکل زیر را ببینید:



با این مقدمات مجموعه‌ی کانتور را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۹۳. (مجموعه‌ی کانتور). فرض می‌کنیم دنباله‌ی $\{C_n\}_{n=۱}^{\infty}$، دنباله‌ی تعریف شده در بالا باشد. مجموعه‌ی کانتور را با C نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C := \bigcap_{n=۱}^{\infty} C_n.$$

C ناتهی است زیرا

$$۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۳}, \frac{۱}{۹}, \ldots \in C.$$

فرض کنید $x \in [۰, ۱]$ باشد. در این صورت بسط x در مبنای ۳ به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n}$ است که در آن هر a_n برابر ۰، ۱ یا ۲ است. این نمایش یکتاست مگر اینکه x به فرم $p۳^{-k}$ که p, k اعداد صحیح هستند (می‌توان فرض کرد $p = ۱, ۲$. چرا؟) که در این صورت x دارای نمایش‌های زیر است

$$\begin{aligned} x &\underset{۳}{=} ۰/۰\cdots a_k ۰۰\cdots && (۱)\\ &\underset{۳}{=} ۰/۰\cdots(a_k - ۱)۲۲۲\cdots && (۲) \end{aligned}$$

که در آن $a_k = p$ است. اگر همواره از نمایش (۲) استفاده نماییم، آنگاه

$a_۱ = ۱$ اگر و تنها اگر $\frac{۱}{۳} < x < \frac{۲}{۳}$,

$a_۱ \neq ۱,\ a_۲ = ۱$ اگر و تنها اگر $\frac{۱}{۹} < x < \frac{۲}{۹}$ یا $\frac{۷}{۹} < x < \frac{۸}{۹}$,

و به همین ترتیب تا آخر. همچنین با فرض $x = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j ۳^{-j}$ و $y = \sum_{j=۱}^{\infty} b_j ۳^{-j}$ آنگاه $x < y$ اگر و تنها اگر nای موجود باشد که $a_n < b_n$ و به ازای هر $j < n$، $a_j = b_j$ باشد. بنابراین مجموعه‌ی کانتور، مجموعه‌ی تمام $x \in [۰, ۱]$ است که در بسط اعشاری مبنای سه آن‌ها

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ تمامی a_j ها مخالف ۱ باشند.

قضیه ۹۴.۲. **مجموعه‌ی کانتور C در خواص زیر صدق می‌کند:**

الف) **C یک مجموعه لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر است.**

ب) **C یک مجموعه‌ی ناشماراست. در واقع کاردینال C برابر با $\mathfrak{c}$ است.**

اثبات : **الف)** با توجه به تعریف، C اشتراک شمارایی از بازه‌های بسته است و در نتیجه یک مجموعه‌ی بسته است، بنابراین مجموعه‌ای برل اندازه‌پذیر و در نتیجه لبگ اندازه‌پذیر است. حال از اینکه $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی نزولی در $[0,1]$ است و $m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ است، داریم

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

ب) فرض کنید $x \in C$ باشد. بنابراین $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ است که به ازای هر n، $a_n = 0$ یا $a_n = 2$ است. تابع $\phi : C \to [0,1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}, \qquad b_n = \frac{a_n}{2}.$$

بوضوح ϕ خوش‌تعریف و پوشاست. در واقع از اینکه هر $x \in [0,1]$ را می‌توان به صورت بسط دودویی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ که $b_n = 0$ یا $b_n = 1$ است، نوشت، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n}\right).$$

بنابراین C هم‌ارز با $\mathbb{R}$ است. بخش ۵.۱ را ببینید.

■

لم ۹۵.۲. **کاردینال گردایه‌ی لبگ اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}$ برابر با $2^{\mathfrak{c}}$ است، به عبارتی $\mathcal{L}$ با $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ هم‌ارز است.**

اثبات : با توجه به قضیه‌ی قبل، مجموعه‌ی کانتور C، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر و مجموعه‌ای ناشماراست. از طرفی فضای اندازه‌ی لبگ $\mathbb{R}$ یک فضای اندازه‌پذیر کامل است، پس هر زیرمجموعه‌ی C نیز اندازه‌پذیر است و در نتیجه $\mathcal{L}$ با $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ هم‌ارز است. ■

نشان دادیم گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر با گردایه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ هم‌ارز است. طبیعی است چنین سوالی پیش آید: آیا $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$؟

- ویتالی در ۱۹۰۵ با استفاده از خاصیت انتقال اندازه‌ی لبگ و با یاری گرفتن از اصل انتخاب، توانست مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر را بسازد.
- اف. برنشتاین[۱۱] در ۱۹۰۸ با استفاده از خاصیت منتظم بودن اندازه‌ی لبگ و با یاری گرفتن از اصل انتخاب، توانست مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر را بسازد.
- اچ. رادماکر [۱۲] در ۱۹۱۶، با یاری گرفتن از اصل انتخاب، نشان داد هر مجموعه با اندازه‌ی خارجی مثبت، شامل مجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است.
- اولام[۱۳] در ۱۹۳۰ با پذیرش فرض پیوستاری، نشان داد تابع اندازه‌ای مانند μ روی $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ وجود ندارد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $\mu(\{x\}) = ۰$. فصل ۳ مرجع [۱۵] را ببینید.

با توجه به آنچه گفته شد، نتیجه می‌گیریم $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ است.

در قضیه‌ی ۹۱.۲ نشان دادیم که گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر $\mathcal{L}$، کامل شده‌ی گردایه‌ی برل اندازه‌پذیرهای $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$، است. بنابراین $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. طبیعی است بپرسیم: آیا مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر که برل اندازه‌پذیر نباشد، وجود دارد؟ به عبارتی دیگر آیا گردایه‌ی برل اندازه‌پذیرها زیرمجموعه‌ی سره‌ی گردایه‌ی لبگ‌اندازه‌پذیر هستند؟ پاسخ مثبت است. یک روش برای جواب دادن به این سوال مقایسه اعداد اصلی این دو گردایه است. در واقع می‌توان ثابت کرد عدد اصلی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ برابر با $\mathfrak{c}$ است. البته اثبات این مطلب از حوصله این کتاب خارج است و علاقمندان پیگیر این مطلب، می‌توانند فصل ۴ بخش ۵ منبع [۱۵] ویرایش دوم صفحه‌ی ۱۱۰ را ببینند. روش دوم برای جواب به این سوال، معرفی مجموعه‌ای است که لبگ اندازه‌پذیر بوده و در عین حال برل اندازه‌پذیر نباشد. البته یک روش ساخت چنین مجموعه‌ای نیاز به معرفی مفهومی جدید به نام توابع اندازه‌پذیر دارد که در فصل بعد، پس از معرفی توابع اندازه‌پذیر، چنین مجموعه‌ای را خواهیم ساخت. این بخش را با معرفی تابعی بسیار مهم در آنالیز که در ساختن مثال‌های نقض کاربرد فراوانی دارد، به پایان می‌رسانیم:

تعریف ۹۶.۲. (تابع کانتور). گیریم C مجموعه‌ی سه‌-سه‌ای کانتور باشد. تابع $\phi : C \to [۰, ۱]$ را

---

[۱۱] F. Bernstein

[۱۲] H. Rademacher

[۱۳] Ulam

به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(x) := \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۲} \frac{۱}{۲^n}, \qquad x \in C, \quad x = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n ۳^{-n} \ \ a_n = ۰ \text{ یا } ۲.$$

در اثبات قضیه‌ی ۹۴.۲، نشان دادیم $\phi : C \to [۰, ۱]$ تابعی پوشاست. حال نشان می‌دهیم ϕ تابعی صعودی روی مجموعه‌ی کانتور است. بدین منظور فرض می‌کنیم $x, y \in C$ و $x < y$، آنگاه با نوشتن بسط اعشاری آن‌ها در مبنای ۳، به صورت

$$x = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n}, \quad y = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{b_n}{۳^n}, \quad a_n, b_n = ۰ \text{ یا } ۲,$$

Nای چنان موجود است که به ازای هر $n < N$، $a_n = b_n$، $a_N = ۰$ و $b_N = ۲$. در واقع

$$x \underset{۳}{=} ۰/a_۱a_۲\cdots a_{N-۱}۰a_{N+۱}\cdots, \qquad a_n = ۰ \text{ یا } ۲,$$

$$y \underset{۳}{=} ۰/a_۱a_۲\cdots a_{N-۱}۲b_{N+۱}\cdots, \qquad b_n = ۰ \text{ یا } ۲.$$

آنگاه

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_{n=۱}^{N-۱} \frac{a_n}{۲^{n+۱}} + \frac{۰}{۲^{n+۱}} + \sum_{n=N+۱}^{\infty} \frac{a_n}{۲^{n+۱}} \\
&\leq \sum_{n=۱}^{N-۱} \frac{a_n}{۲^{n+۱}} + \sum_{n=N+۱}^{\infty} \frac{۲}{۲^{n+۱}} \\
&= \sum_{n=۱}^{N-۱} \frac{a_n}{۲^{n+۱}} + \frac{۲}{۲^{N+۱}} \\
&\leq \sum_{n=۱}^{N-۱} \frac{a_n}{۲^{n+۱}} + \frac{۲}{۲^{N+۱}} + \sum_{n=N+۱}^{\infty} \frac{b_n}{۲^{n+۱}} \\
&= \phi(y)
\end{aligned}$$

و در نتیجه ϕ تابعی صعودی روی مجموعه‌ی کانتور C است. حال تابع $\Phi : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ تعریف شده به صورت

$$\Phi(x) = \sup\{\phi(y) : y \in C, \ \ y \leq x\}.$$

را تابع کانتور می‌نامیم. با توجه به صعودی بودن تابع ϕ روی C و تعریف فوق‌الذکر، اگر $x \in C$ باشد، آنگاه $\Phi(x) = \phi(x)$. اگر $x \notin C$، آنگاه x متعلق به بازه‌ای حذف شده مانند (a_n, b_n) در ساخت مجموعه‌ی کانتور است که $a_n \in C$. آنگاه $\Phi(x) = \phi(a_n) = \phi(b_n)$. بدین ترتیب از اینکه $\phi(\frac{۱}{۳}) = \phi(\frac{۲}{۳}) = \frac{۱}{۲}$، (توجه داشته باشید که $\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}$ ابتدا و انتهای بازه‌ی حذف شده درمرحله‌ی اول ساخت مجموعه‌ی کانتور است). بنابراین داریم

$$\Phi(x) = \frac{۱}{۲}, \qquad x \in \left(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right).$$

همچنین از اینکه $\phi(\frac{۱}{۹}) = \phi(\frac{۲}{۹}) = \frac{۱}{۴}$ و $\phi(\frac{۷}{۹}) = \phi(\frac{۸}{۹}) = \frac{۳}{۴}$، داریم

$$\Phi(x) = \frac{۱}{۲^۲}, \quad x \in \left(\frac{۱}{۳^۲}, \frac{۲}{۳^۲}\right), \qquad \Phi(x) = \frac{۳}{۲^۲}, \quad x \in \left(\frac{۷}{۳^۲}, \frac{۸}{۳^۲}\right).$$

بنابراین با فرض اینکه $I_{۱,۱}$ بازه‌ی حذف شده در مرحله‌ی اول و $I_{۲,۱}$ و $I_{۲,۲}$ بازه‌های حذف شده در مرحله‌ی دوم و $I_{k,۱}$، $\cdots$، $I_{k,۲^{k-۱}}$ بازه‌های حذف شده در مرحله‌ی kام، ساخت مجموعه‌ی کانتور باشد، خواهیم داشت

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & x \in I_{۱,۱} \\ \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۳}{۲^۲}, & x \in I_{۲,۱}, I_{۲,۲} \\ \frac{۱}{۲^۳}, \frac{۳}{۲^۳}, \frac{۵}{۲^۳}, \frac{۷}{۲^۳}, & x \in I_{۳,۱}, I_{۳,۲}, I_{۳,۳}, I_{۳,۴} \\ \vdots & \\ \frac{۱}{۲^k}, \cdots, \frac{۲^k-۱}{۲^k}, & x \in I_{k,۱}, \cdots, I_{k,۲^{k-۱}} \\ \vdots & \end{cases}$$

قضیه ۹۷.۲. تابع کانتور $\Phi : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ در خواص زیر صدق می‌کند:

الف) Φ روی $[۰, ۱]$ تابعی صعودی است.

ب) Φ روی $[۰, ۱]$ تابعی پیوسته است.

اثبات : الف) فرض می‌کنیم $x < y$ عناصری در دامنه‌ی Φ باشند. داریم

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sup\{\phi(c) : c \in C, \; c \leq x\} \\ &\leq \sup\{\phi(c) : c \in C, \; c \leq y\} \\ &= \Phi(y). \end{aligned}$$

که در آن نامساوی بیان شده، از این حقیقت ناشی می‌شود که اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از B باشد، آنگاه $\sup A \leq \sup B$.

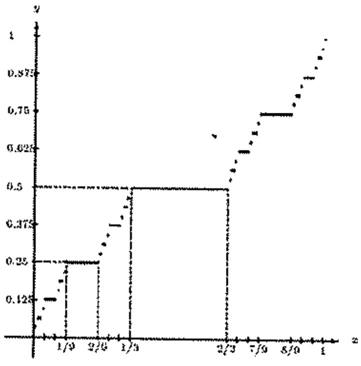
ب) از اینکه Φ تابعی صعودی است، به ازای هر $x_\circ \in (\circ, 1)$، داریم

$$\Phi(x_\circ^-) \leq \Phi(x_\circ) \leq \Phi(x_\circ^+),$$

که در آن $\Phi(x_\circ^-)$ و $\Phi(x_\circ^+)$ به ترتیب حدود چپ و راست تابع Φ در $x_\circ$ می‌باشد. اگر $\Phi(x_\circ) < \Phi(x_\circ^+)$، آنگاه هیچ مقداری از Φ نمی‌تواند در بازه‌ی $(\Phi(x_\circ), \Phi(x_\circ^+))$ قرار بگیرد و این متناقض با پوشا بودن تابع Φ است. بنابراین به ازای هر $x_\circ \in (\circ, 1)$، $\Phi(x_\circ^+)$ برابر با $\Phi(x_\circ)$ است و در نتیجه Φ از راست پیوسته است. بطور مشابه می‌توان نشان داد Φ در هر نقطه از $(\circ, 1)$ از چپ نیز پیوسته است. با روندی مشابه نشان داده می‌شود Φ در نقاط ابتدایی و انتهایی $\circ, 1$ نیز پیوسته است. بنابراین Φ تابعی پیوسته روی $[\circ, 1]$ است.

■

با توجه به آنچه گفته شد، تابع کانتور را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.



شکل ۱.۲: تابع کانتور

۱۲.۲ مسائل حل شده

مسئله ۱. فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X و $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$، مجموعه‌های مجزا و ناتهی باشد. آنگاه $\mathcal{A}$ ناشماراست.

جواب: به ازای هر زیرمجموعه‌ی $I \subset \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $F_I = \cup_{n\in I} E_n$ متعلق به $\mathcal{A}$ است. از طرفی به ازای هر $I, J \subset \mathbb{N}$، که $I \neq J$ داریم $F_I \neq F_J$. حال از اینکه گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های

$\mathbb{N}$ ناشماراست، نتیجه می‌گیریم $\mathcal{A}$ ناشماراست.

مسئله ۲. **فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X و مجموعه‌های $E, F \in \mathcal{A}$ چنان باشند که $F \subset E$ و E شامل تعداد نامتناهی از اعضای $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه حداقل یکی از دو مجموعه‌ی F یا $E - F$ شامل تعداد نامتناهی از اعضای $\mathcal{A}$ است.**

جواب : قرار می‌دهیم

$$\mathcal{M} = \{Z \in \mathcal{A} : \quad Z \subseteq F\} \qquad , \qquad \mathcal{N} = \{Z \in \mathcal{A} : \quad Z \subseteq E - F\}.$$

فرض می‌کنیم $\text{card}(\mathcal{M})$ و $\text{card}(\mathcal{N})$ متناهی باشد. تابع $f : \{Z \in \mathcal{A} : Z \subseteq E\} \to \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ را به صورت

$$f(Z) = (Z \cap F, Z \cap (E - F)),$$

در نظر می‌گیریم. به آسانی می‌توان نشان داد f تابعی یک‌به‌یک است و در نتیجه

$$\text{card}(\{Z \in \mathcal{A} : Z \subseteq E\}) \leq \text{card}(\mathcal{M}) \ \text{card}(\mathcal{N}) < \infty.$$

و این یک تناقض است.

مسئله ۳. **آیا σ-جبر شمارای نامتناهی وجود دارد؟**

جواب : خیر. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. ثابت می‌کنیم اگر $\mathcal{A}$ نامتناهی باشد، آنگاه ناشماراست. از اینکه $\mathcal{A}$ نامتناهی است، $F_1 \in \mathcal{A} - \{\emptyset, X\}$ موجود است. با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۲ از همین فصل، حداقل یکی از مجموعه‌های F_1 یا $X - F_1$ شامل تعداد نامتناهی از اعضای $\mathcal{A}$ است. E'_1 را اولین مجموعه‌ای می‌نامیم که شامل تعداد نامتناهی از عناصر $\mathcal{A}$ است. مجموعه‌ی بعدی را E_1 می‌نامیم. از اینکه E'_1 شامل تعداد نامتناهی از عناصر $\mathcal{A}$ است، پس $F_2 \subset E'_1$ و $F_2 \in \mathcal{A}$ موجود است. باز از مسئله‌ی حل شده‌ی ۲، حداقل یکی از مجموعه‌های F_2 یا $E'_1 - F_2$ شامل تعداد نامتناهی از اعضای $\mathcal{A}$ است. E'_2 را اولین مجموعه‌ای می‌نامیم که شامل تعداد نامتناهی از عناصر $\mathcal{A}$ است. مجموعه‌ی بعدی را E_2 می‌نامیم (توجه داریم که $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). حال روند فوق را روی E'_2 اعمال می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم. بدین ترتیب می‌توان دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر مجزای $\mathcal{A}$ را بدست آورد. حال از مسئله‌ی حل شده‌ی ۱ از همین فصل، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{A}$ ناشماراست.

مسئله ۴. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mathcal{E}$ مولدی برای $\mathcal{A}$ و $A \in \mathcal{A}$ باشد، آنگاه زیرگردایه‌ی شمارایی مانند $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ چنان موجود است که $A \in \sigma(\mathcal{E}')$.

جواب : قرار می‌دهیم

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X : \exists \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}, \quad \text{card}(\mathcal{E}') \leq \aleph_۰, \ A \in \sigma(\mathcal{E}')\}.$$

بوضوح $\mathcal{M}$ تحت متمم‌گیری بسته است و $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$. گیریم $A_۱, A_۲, .. \in \mathcal{M}$ باشد. در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، زیرگردایه‌ی شمارایی مانند $\mathcal{E}_n$ از $\mathcal{E}$ چنان موجود است که $A_n \in \sigma(\mathcal{E}_n)$. قرار می‌دهیم $\mathcal{E}' = \cup_{n=۱}^{\infty} \mathcal{E}_n$. آنگاه $\mathcal{E}'$ شماراست و $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{E}')$. بنابراین $\mathcal{M}$ تحت اجتماع شمارا نیز بسته است و در نتیجه $\mathcal{M}$، σ-جبری شامل $\mathcal{E}$ است و حکم نتیجه می‌شود.

نتیجه: اگر $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{A} = \bigcup \left\{\sigma(\mathcal{E}'), \quad \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}, \quad \text{card}(\mathcal{E}') \leq \aleph_۰ \right\}.$$

مسئله ۵. فرض می‌کنیم $\mathcal{E}$ و $\mathcal{A}$ گردایه‌های دلخواهی از زیرمجموعه‌های X باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱- اگر $E \in \mathcal{E}$، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$،

۲- $\mathcal{A}$ تحت اشتراک شمارا بسته باشد،

۳- $\mathcal{A}$ تحت اجتماع شمارای مجزا بسته باشد.

در این صورت

الف) با ارائه‌ی مثالی نشان دهید، $\mathcal{A}$ در حالت کلی یک σ-جبر روی X نیست.

ب) $\sigma(\mathcal{E})$ برابر با کوچکترین گردایه‌ی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X و شامل $\mathcal{E}$ می‌باشد که در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌کند.

جواب :

الف) با فرض $X = \{۰, ۱\}$ و $\mathcal{E} = \{\{۰\}\}$ و $\mathcal{A} = \{\{۱\}\}$، مشاهده می‌کنیم که $\mathcal{A}$ در شرایط ۳-۱ صدق می‌کند ولی نسبت به عمل متمم‌گیری بسته نیست.

ب) فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X، شامل $\mathcal{E}$ می‌باشد که در شرایط ۱ - ۳ صدق می‌کند. (توجه داریم که چنین گردایه‌ای وجود دارد، زیرا گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های

X تمامی ویژگی‌های بیان شده را داراست، همچنین اشتراک تمام چنین گردایه‌هایی، خود چنین گردایه‌ای است). از اینکه $\sigma(\mathcal{E})$ در شرایط ۱ - ۳ صدق می‌کند، $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. گیریم $\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{A} : E^c \in \mathcal{A}\}$ آنگاه $\mathcal{F}$ تحت متمم‌گیری بسته و با توجه به شرط ۱، $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. حال کافی است نشان دهیم $\mathcal{F}$ یک σ-جبر است. زیرا در این صورت $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$ و در نتیجه $\mathcal{A} = \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$، زیرا $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

اثبات σ-جبر بودن $\mathcal{F}$ را در سه مرحله انجام می‌دهیم:

- $\mathcal{F}$ تحت تفاضل بسته است.

فرض می‌کنیم $E, F \in \mathcal{F}$، آنگاه $E^c, F^c \in \mathcal{F}$. از اینکه $\mathcal{A}$ تحت اشتراک شمارا بسته است، $E - F = E \cap F^c \in \mathcal{A}$. از طرفی از اینکه $\mathcal{A}$ تحت اجتماع شمارای مجزا بسته است و $(E - F)^c = E^c \cup (E \cap F)$، داریم $(E - F)^c \in \mathcal{A}$. بنابراین $E - F \in \mathcal{F}$. با توجه به اینکه $\mathcal{F}$ ناتهی است، نتیجه می‌گیریم $\emptyset \in \mathcal{F}$ و در نتیجه $X \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ تحت اجتماع متناهی بسته است و در نتیجه یک جبر است.

فرض می‌کنیم $E, F \in \mathcal{F}$، آنگاه E, F, E^c و F^c همگی متعلق به $\mathcal{A}$ هستند. آنگاه

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \in \mathcal{A}$$

با توجه به مرحله‌ی اول و تجزیه‌ی مجزای $E \cup F$ به صورت

$$(E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E) = E \cup F$$

داریم $(E \cup F) \in \mathcal{A}$ و در نتیجه $E \cup F \in \mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ تحت اجتماع شمارای مجزا بسته است و در نتیجه یک σ-جبر است.

فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا در $\mathcal{A}$ است و با توجه به شرط ۳، $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. از طرفی $\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ و با توجه به شرط ۲، داریم $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} E_n^c \in \mathcal{A}$. بنابراین $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$ و در نتیجه $\mathcal{F}$ یک σ-جبر است.

مسئله ۶. نشان دهید

الف) مجموعه‌های برل فضای توپولوژیک $(X, \Im)$، کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X، شامل تمام مجموعه‌های باز و بسته‌ی این فضاست که تحت اشتراک شمارا و اجتماع شمارای مجزا بسته است.

ب) مجموعه‌های برل فضای متریک (X, d)، کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X، شامل تمام مجموعه‌های باز است که تحت اشتراک شمارا و اجتماع شمارای مجزا بسته است.

پ) مجموعه‌های برل فضای متریک (X, d)، کوچکترین گردایه از زیرمجموعه‌های X، شامل تمام مجموعه‌های بسته است که تحت اشتراک شمارا و اجتماع شمارا بسته است.

جواب :

الف) مسئله‌ی حل شده‌ی ۵ قسمت (ب) را ببینید.

ب) با توجه به نتیجه‌ی ۲۸.۱، هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای متریک، G_δ است. بنابراین هر گردایه از زیرمجموعه‌های X، شامل مجموعه‌های باز که تحت اشتراک شمارا بسته است، شامل مجموعه‌های بسته نیز است. حال با بکار بردن قسمت (الف)، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

پ) اثبات دقیقا مشابه قسمت (ب) است. توجه داشته باشید که هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای متریک، مجموعه‌ای F_σ است.

مسئله ۷. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mathfrak{M}$ گردایه‌ی تمام توابع اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد. اگر به ازای هر $\mu_۱, \mu_۲ \in \mathfrak{M}$، $\mu_۳ \in \mathfrak{M}$ چنان موجود باشد که $\mu_۳ \geq \max\{\mu_۱, \mu_۲\}$، آنگاه تابع $\nu : \mathcal{A} \to [۰, \infty]$، تعریف شده به صورت

$$\nu(E) := \sup\{\mu(E) : \quad \mu \in \mathfrak{M}\},$$

یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

جواب : بوضوح ν تابعی خوش‌تعریف از $\mathcal{A}$ به $[۰, \infty]$ است . فرض می‌کنیم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت به ازای هر $\mu \in \mathfrak{M}$،

$$\mu\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \nu(E_n),$$

بنابراین

$$\nu\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \nu(E_n).$$

برای اثبات عکس نامساوی، کافی است حالتی را بررسی کنیم که به ازای هر n، $\nu(E_n) < \infty$ باشد. فرض می‌کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. از تعریف ν، به ازای هر k ، $۱ \leq k \leq n$، اندازه‌ای

چون $\mu_k \in \mathfrak{M}$ وجود دارد که $\nu(E_k) - \frac{\varepsilon}{n} < \mu_k(E_k)$. حال با استفاده از فرض مسئله و استقراء، $\mu \in \mathfrak{M}$ای موجود است که به ازای هر $1 \leq k \leq n$، داریم $\mu_k \leq \mu$. بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\nu(E_k) - \varepsilon &< \sum_{k=1}^{n}\mu_k(E_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)\\ &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) \leq \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big)\\ &\leq \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big).\end{aligned}$$

از اینکه $\varepsilon >$ دلخواه است، داریم $\sum_{k=1}^{n}\nu(E_k) \leq \nu\left(\cup_1^\infty E_k\right)$. بالاخره هنگامی که n را به بینهایت میل دهیم، داریم $\sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_k) \leq \nu\left(\cup_1^\infty E_k\right)$. و در نتیجه ν یک اندازه روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ است.

نتیجه: اگر $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه روی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه تابع $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ تعریف شده به صورت $\mu(E) = \sup\{\mu_n(E) : E \in \mathcal{A}\}$، یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

مسئله ۸. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ که $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$، **یک فضای اندازه‌پذیر و** $f : X \to [0, \infty)$ **تابعی دلخواه باشد. به ازای هر** $E \in \mathcal{A}$، **قرار می‌دهیم** $\mu_f(E) = \sum_{x\in E} f(x)$ **و** $\mu_f(\emptyset) = 0$. **نشان دهید** μ_f **یک اندازه روی** $(X, \mathcal{A})$ **است.**

جواب : فرض کنیم $\mathcal{F}_X$، گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی X باشد. به ازای هر $F \in \mathcal{F}_X$، قرار می‌دهیم $\mu_F := \sum_{x\in F} f(x)\delta_x$ که در آن δ_x اندازه‌ی دیراک است. با توجه به مسئله‌ی ۵، به ازای هر $F \in \mathcal{F}_X$، μ_F یک تابع اندازه روی $\mathcal{A}$ است. از طرفی با توجه به تعاریف و قضایای مربوط به سری‌های نامرتب و ناشمارا در بخش ۱.۴، به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، داریم

$$\mu_f(E) = \sup\{\mu_F(E) : F \in \mathcal{F}_X\},$$

بنابراین با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی قبل، μ_f یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است. توجه داشته باشید که اندازه‌های شمارشی و دیراک، حالت خاصی از این اندازه است. در واقع با قرار دادن $f(x) = 1$ اندازه‌ی شمارشی و با قرار دادن $f(x) = \delta_{x_0}$ اندازه‌ی دیراک در x_0 را بدست خواهیم آورد.

مسئله ۹. (لم برل-کانتلی). فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ با $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ باشد، نشان دهید $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty} E_n) = 0$.

جواب : با توجه به تعریف، $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} E_k$. قرار می‌دهیم $F_n = \cup_{k=n}^{\infty} E_k$. آنگاه دنباله‌ی $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی با شرط

$$\mu(F_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

می‌باشد. بنابراین از خاصیت پیوستگی از بالای تابع اندازه داریم

$$\begin{aligned} \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k). \end{aligned}$$

از اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$، بنابراین $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = 0$ و در نتیجه حکم برقرار است. (روش حل دیگری از این مسئله را می‌توانید در مسائل حل شده‌ی فصل بعدی ببینید).

مسئله ۱۰. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\mathcal{E} = \{E_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ گردایه‌ای دوبدو مجزا در $\mathcal{A}$ باشد که به ازای هر $\alpha \in \Gamma$، $\mu(E_\alpha) > 0$. نشان دهید $\mathrm{card}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

جواب : فرض می‌کنیم $\mathcal{F}_\Gamma$ گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی مجموعه‌ی اندیس‌گذار Γ باشد. از خواص جمعی متناهی و یکنوایی تابع اندازه، به ازای هر $F \in \mathcal{F}_\Gamma$، داریم

$$\sum_{\alpha\in F} \mu(E_\alpha) = \mu\left(\bigcup_{\alpha\in F} E_\alpha\right) \leq \mu(X),$$

با سوپرمم‌گیری از طرفین نامساوی، داریم

$$\sum_{\alpha\in\Gamma} \mu(E_\alpha) = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} \mu(E_\alpha) : F \in \mathcal{F}_\Gamma\right\} < \infty,$$

حال از قضیه‌ی ۱۹.۱، نتیجه می‌گیریم $\mathcal{E}$ شماراست.

مسئله ۱۱. فرض می‌کنیم μ^* یک اندازه‌ی خارجی روی X و $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی صعودی از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) \leq \mu^*\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right). \tag{۲۴.۲}$$

همچنین اگر به ازای هر $E \subseteq X$، مجموعه‌ی μ^*-اندازه‌پذیری مانند $F \supset E$ چنان موجود باشد که $\mu^*(E) = \mu^*(F)$، (F را پوشش اندازه‌پذیر E گویند)، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$.

جواب : $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی است و μ^* یکنواست، بنابراین دنباله‌ی عددی $\{\mu^*(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ نیز دنباله‌ای صعودی در $\overline{\mathbb{R}}$ است و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$ در $\overline{\mathbb{R}}$ موجود است. حال با توجه به یکنوایی μ^*، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu^*(E_n) \leq \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ که به همراه رابطه‌ی $\lim_{n\to\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu^*\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

حال اگر هر $E \subseteq X$، پوشش μ^*-اندازه‌پذیر داشته باشد، آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی μ^*-اندازه‌پذیر F_n موجود است که $E_n \subseteq F_n$ و $\mu^*(E_n) = \mu^*(F_n) = \mu(F_n)$ که در آن μ تحدید μ^* روی مجموعه‌های μ^*-اندازه‌پذیر است. حال از اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n \subseteq F_n$ است داریم $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} F_n$. آنگاه

$$\begin{aligned}
\mu^*(\lim_{n\to\infty} E_n) &\overset{۱}{=} \mu^*(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \mu^*(\liminf_{n\to\infty} F_n) \\
&\overset{۲}{=} \mu(\liminf_{n\to\infty} F_n) \overset{۳}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mu(F_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu^*(F_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \mu^*(E_n) \overset{۴}{=} \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n).
\end{aligned}$$

که در آن تساوی‌ها و نامساوی‌ها به علت:

۱- دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است. بخش ۲.۱ را ببینید.

۲- مجموعه‌های F_n همگی اندازه‌پذیرند و در نتیجه $\liminf_{n\to\infty} F_n$ نیز اندازه‌پذیر است.

۳- مسئله‌ی ۷ را ببینید.

۴- $\{\mu^*(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)$ موجود است.

و بالاخره با توجه به نامساوی (۲۴.۲)، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

مسئله ۱۲. **فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و μ^* اندازه‌ی خارجی تولید شده توسط μ باشد، نشان دهید $E \subseteq X$، μ^*-اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \in \mathcal{A}$،**

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

جواب : بنابه تذکر ۶۲.۲، کافی است ثابت کنیم به ازای هر $F \subseteq X$ با $\mu^*(F) < \infty$،

$$\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c).$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. آنگاه بنابه خاصیت مشخصه‌ی اینفیمم، پوشش $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ برای F چنان موجود است که $\mu^*(F) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. با توجه به فرض، به ازای $n \in \mathbb{N}$، $\mu(A_n) \geq \mu^*(A_n \cap E) + \mu^*(A_n \cap E^c)$، در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mu^*(F) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n \cap E) + \mu^*(A_n \cap E^c)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap E^c) \\
&\geq \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c),
\end{aligned}$$

که در آن تساوی بیان شده از یادآوری صفحه‌ی ۵۰ بدست آمده است. حال از اینکه $\varepsilon > 0$ دلخواه است، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

مسئله ۱۳. **اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و μ^* اندازه‌ی خارجی تولید شده توسط μ باشد، آنگاه $E \subseteq X$، μ^*-اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mu^*(X) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$.**

جواب : فرض کنیم E، μ^*-اندازه‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $A \subseteq X$،

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

حال با قرار دادن $A = X$، داریم $\mu^*(X) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$. بالعکس، فرض کنیم $E \subseteq X$

چنان باشد که تساوی بالا برقرار باشد. از اینکه هر مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$، μ^*-اندازه‌پذیر است، داریم

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \qquad \mu^*(E^c) = \mu^*(E^c \cap A) + \mu^*(E^c \cap A^c).$$

با جمع تساوی‌های بالا و با بهره‌گیری از فرض داده شده،

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(E) + \mu^*(E^c) \\ &= [\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E^c \cap A)] + [\mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E^c \cap A^c)] \\ &\geq \mu^*(A) + \mu^*(A^c) \geq \mu^*(X). \end{aligned}$$

که در آن نامساوی‌ها از خاصیت زیرجمعی μ^* بدست آمده است. بنابراین

$$\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = [\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E^c \cap A)] + [\mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E^c \cap A^c)].$$

با توجه به نامساوی $\mu^*(A^c) \leq \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E^c \cap A^c)$ و متناهی بودن طرفین تساوی بالا، داریم $\mu^*(A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E^c \cap A)$. حال بنابه مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۲، E مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌پذیر است.

مسئله ۱۴. با توجه به نمادهای بیان شده در بخش ۱۰.۲، به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mu_o^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : (I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}_o,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}, \\ \mu_{oc}^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : (I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}_{oc},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}, \\ \mu_{co}^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : (I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}_{co},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}, \\ \mu_c^*(E) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : (I_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{I}_c,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E\right\}, \end{aligned}$$

نشان دهید $\mu_o^*(E) = \mu_{oc}^*(E) = \mu_{co}^*(E) = \mu_c^*(E)$.

جواب : نشان می‌دهیم به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$، $\mu_o^*(E) = \mu_c^*(E)$. $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی برای E در $\mathcal{I}_o$ باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم $I_n = (a_n, b_n)$ و $J_n = [a_n - \varepsilon/2^{n+1}, b_n + \varepsilon/2^{n+1}]$ باشد. آنگاه $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ پوششی برای

E در $\mathcal{I}_c$ بوده و $\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) + \varepsilon$. بنابراین $\mu_c^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) + \varepsilon$. حال با اینفیمم‌گیری از طرفین نامساوی داریم $\mu_c^*(E) \leq \mu_o^*(E) + \varepsilon$ و از اینکه $\varepsilon > 0$، دلخواه است داریم $\mu_c^*(E) \leq \mu_o^*(E)$. برای اثبات عکس نامساوی، به ازای هر پوشش $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ از $\mathcal{I}_c$ برای $E \subseteq \mathbb{R}$، دنباله‌ی $\{(a_n - \varepsilon/2^{n+1}, b_n + \varepsilon/2^{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ را از $\mathcal{I}_o$ تعریف می‌کنیم و با روندی کاملاً مشابه نشان می‌دهیم $\mu_o^*(E) \leq \mu_c^*(E)$. بنابراین $\mu_c^*(E) = \mu_o^*(E)$. به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\mu_o^*(E) = \mu_{oc}^*(E)$ و $\mu_o^*(E) = \mu_{co}^*(E)$.

مسئله ۱۵. **فرض می‌کنیم X یک فضای متریک و $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای باشد. $E \in \mathcal{A}$ را منتظم گوییم، هرگاه**

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(G) : \text{باز } G,\ G \in \mathcal{A},\ E \subseteq G\} \\ &= \sup\{\mu(K) : \text{فشرده } K,\ K \in \mathcal{A},\ K \subseteq E\},\end{aligned}$$

اندازه‌ی μ را منتظم گوییم، هرگاه تمام عناصر $\mathcal{A}$ منتظم باشد. نشان دهید اندازه‌ی لبگ روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، منتظم است.

جواب : فرض می‌کنیم $E \in \mathcal{L}$. با توجه به قضیه‌ی ۸۵.۲، به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ای باز شامل E مانند G_0، چنان موجود است که $m(G_0) \leq m(E) + \varepsilon$. در نتیجه

$$\inf\{m(G) : \text{باز } G,\ E \subseteq G\} \leq m(G_0) \leq m(E) + \varepsilon.$$

از طرفی به ازای هر مجموعه‌ی باز G شامل E، داریم $m(E) \leq m(G)$ و در نتیجه تساوی اول برقرار است. برای اثبات تساوی بعدی، ابتدا فرض می‌کنیم E کراندار باشد. با توجه به قضیه‌ی ۸۶.۲، مجموعه‌ی بسته‌ای مانند $K \subseteq E$ (E کراندار است و در نتیجه K مجموعه‌ای فشرده است) وجود دارد که $m(E-K) < \varepsilon$. حال از اینکه E کراندار است، داریم $m(E-K) = m(E) - m(K)$. بنابراین

$$m(E) \leq m(K) + \varepsilon \leq \sup\{\mu(K) : \text{فشرده } K,\ K \in \mathcal{A},\ K \subseteq E\} + \varepsilon.$$

از طرفی به ازای هر مجموعه‌ی فشرده‌ی K مشمول E، داریم $m(K) \leq m(E)$ و در نتیجه تساوی مورد نظر در حالتی که E کراندار باشد، برقرار است. حال فرض می‌کنیم E کراندار نباشد. قرار می‌دهیم $E_j = E \cap (j, j+1]$. با توجه به آنچه گفته شد، به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ی فشرده‌ی K_j مشمول در E_j، چنان موجود است که $m(K_j) \geq m(E_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}$. قرار می‌دهیم $H_n =$

$\cup_{j=-n}^{n}K_j$. آنگاه H_n مجموعه‌ای فشرده، مشمول در E و $m(H_n) \geq m(\cup_{j=-n}^{n}E_j) - \varepsilon$.
حال از اینکه $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\cup_{j=-n}^{n}E_j)$ و صعودی بودن دنباله‌ی $\{H_n\}$، داریم

$$\sup_n m(H_n) = \lim_{n\to\infty} m(H_n) \geq m(E) - \varepsilon,$$

لذا $n_\circ$ای موجود است که $m(H_{n_\circ}) \geq m(E) - \varepsilon$ و در نتیجه تساوی در حالت کلی برقرار است.

مسئله ۱۶. **فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی مثبت باشد. نشان دهید به ازای هر $\alpha \in (\circ, 1)$، بازه‌ای باز و متناهی مانند I موجود است که $\alpha m(I) < m(E \cap I)$.**

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم $m(E) < \infty$. از خاصیت منتظم بودن اندازه‌ی لبگ (مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۵) و خاصیت مشخصه‌ی اینفیمم، مجموعه‌ای باز مانند G شامل E موجود است که

$$m(E) + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) m(E)}_{\varepsilon} > m(G), \tag{۲۵.۲}$$

از اینکه G مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}$ است، پس می‌توان آن را به صورت اجتماع شمارا و مجزا از بازه‌های باز $\{I_n\}$ در $\mathbb{R}$ نوشت و در نتیجه $m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$. بنابراین

$$m(E) = m(E \cap G) = m\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap I_n).$$

حال با قرار دادن $m(G)$ و $m(E)$ در (۲۵.۲)، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap I_n).$$

بنابراین $n_\circ \in \mathbb{N}$ای چنان موجود است که $m(I_{n_\circ}) < \frac{1}{\alpha} m(E \cap I_{n_\circ})$. قرار می‌دهیم $I = I_{n_\circ}$.
در این صورت I بازه‌ای باز و متناهی است که $\alpha m(I) < m(E \cap I)$.

بالاخره فرض می‌کنیم $m(E) = \infty$. از اینکه اندازه‌ی لبگ σ-متناهی است، زیرمجموعه‌ی $E_\circ$ از E با اندازه‌ی متناهی وجود دارد. آنگاه با بکار بردن نتیجه‌ی فوق روی $E_\circ$، می‌توان بازه‌ای مانند I را چنان بدست آورد که $\alpha m(I) < m(E_\circ \cap I) \leq m(E \cap I)$.

مسئله ۱۷. **فرض کنید $E \in \mathcal{L}$ و $\alpha \in (\circ, 1)$ باشد. نشان دهید**

الف) **اگر به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $m(E \cap (a, b)) \leq \alpha(b - a)$ باشد، آنگاه $m(E) = \circ$.**

ب) اگر به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $m(E \cap (a, b)) \geq \alpha(b - a)$ باشد، آنگاه $m(E^c) = ۰$.

جواب :

الف) فرض کنیم $m(E) > ۰$ باشد. آنگاه با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۶، $a, b \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $m(E \cap (a, b)) > \alpha(b - a)$ و این متناقض با فرض مسئله است.

ب) فرض کنیم $m(E^c) > ۰$ و $\beta = ۱ - \alpha$ باشد. با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۶، $a, b \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $\beta(b - a) < m(E^c \cap (a, b))$. با جمع این نامساوی و نابرابری داده شده در فرض و استفاده از معیار کاراتئودوری روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E، داریم

$$|(a, b)| = m(E \cap (a, b)) + m(E^c \cap (a, b)) > (\alpha + \beta)(b - a) = b - a,$$

و این یک تناقض است.

مسئله ۱۸. **به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$، مجموعه‌ی تفاضلی E را با نماد $\Delta(E)$ نشان داده و به صورت**

$$\Delta(E) = \{x - y : x, y \in E\},$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر $E \in \mathcal{L}$ چنان باشد که $m(E) > ۰$، آنگاه $\alpha > ۰$ای وجود دارد که $[-\alpha, \alpha] \subseteq \Delta(E)$.

جواب : اگر $m(E) > ۰$ باشد، آنگاه با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۶، بازه‌ی باز و متناهی I چنان موجود است که

$$\frac{۳}{۴}m(I) < m(E \cap I).$$

قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{۱}{۲}m(I)$. آنگاه به ازای هر $x \in [-\alpha, \alpha]$، $I \cup (I + x)$ یک بازه بوده و

$$m(I \cup (I + x)) \leq m(I) + |x| \leq m(I) + \alpha = \frac{۳}{۲}m(I),$$

از اینکه به ازای هر $x \in [-\alpha, \alpha]$، $(E \cap I) \cup ((E \cap I) + x) \subseteq I \cup (I + x)$، داریم

$$m((E \cap I) \cup ((E \cap I) + x)) \leq m(I \cup (I + x)) \leq \frac{۳}{۲}m(I).$$

حال اگر $x \in [-\alpha, \alpha]$ موجود باشد که $(E \cap I) \cap ((E \cap I) + x) = \emptyset$، آنگاه از خواص جمعی

متناهی و پایایی انتقال اندازه‌ی لبگ، داریم

$$\begin{aligned} m\Big((E\cap I)\cup((E\cap I)+x)\Big) &= m(E\cap I)+m((E\cap I)+x)\\ &= ۲m(E\cap I)\\ &> \frac{۳}{۲}m(I), \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین به ازای هر $x\in[-\alpha,\alpha]$، $(E\cap I)\cap((E\cap I)+x)\neq\emptyset$ و در نتیجه $[-\alpha,\alpha]\subseteq E-E$.

مسئله ۱۹. **مجموعه‌ی ویتالی تعریف شده در تعریف ۵۶.۲، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر است.**

جواب : فرض کنیم V مجموعه‌ی ویتالی باشد. با توجه به ساخت این مجموعه،

$$\Delta(V)\cap\mathbb{Q}=\{x-y:x,y\in V\}\cap\mathbb{Q}=\{۰\}.$$

پس $\Delta(V)$ نمی‌تواند شامل یک بازه باشد. بنابراین از مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۸، مجموعه‌ی V یا اندازه‌ناپذیر است یا $m(V)=۰$ است. از طرفی $\mathbb{R}=\cup_{r\in\mathbb{Q}}(V+r)$. بنابراین اگر $m(V)=۰$ باشد، آنگاه به ازای هر $r\in\mathbb{Q}$، $m(V+r)=۰$ است و در نتیجه $m(\mathbb{R})=۰$ و این یک تناقض است. بنابراین V اندازه‌ناپذیر است.

مسئله ۲۰. **نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ با اندازه‌ی خارجی مثبت، شامل یک مجموعه‌ی لبگ اندازه‌ناپذیر است.**

جواب : فرض کنیم E زیرمجموعه‌ی دلخواهی از $\mathbb{R}$ با $m^*(E)>۰$ و V مجموعه‌ی ویتالی تعریف شده در ۵۶.۲ باشد. به ازای هر $r\in\mathbb{Q}$ قرار می‌دهیم $V_r=V+r$. آنگاه دنباله‌ی $\{V_r\}$ دنباله‌ای مجزا و $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}V_r=\mathbb{R}$ است. بنابراین

$$E=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E\cap V_r)\qquad,\qquad m^*(E)\leq\sum_{r\in\mathbb{Q}}m^*(E\cap V_r). \tag{۲۶.۲}$$

اگر به ازای هر $r\in\mathbb{Q}$، مجموعه‌ی $E\cap V_r$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $m(E\cap V_r)=۰$، زیرا در غیر این صورت، با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۸، $\Delta(E\cap V_r)$ شامل یک بازه است و از اینکه

$$\Delta(E\cap V_r)\subset\Delta(V).$$

پس $\Delta(V)$ شامل یک بازه است و این متناقض با ساخت مجموعه‌ی ویتالی است. بنابراین از رابطه‌ی (۲۶.۲) به همراه $m^*(E) > 0$، نتیجه می‌گیریم $r \in \mathbb{Q}$ موجود است که $E \cap V_r$ اندازه‌ناپذیر است و این همان زیرمجموعه‌ی اندازه‌ناپذیر E است.

مسئله ۲۱. **فرض کنید m^* اندازه‌ی خارجی لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد.**

الف) **دنباله‌ای مانند $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ و دوبدو مجزا مثال بزنید که**

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

ب) **دنباله‌ای نزولی مانند $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ مثال بزنید که $m^*(E_1) < \infty$ و**

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^*(E_n).$$

پ) **آیا می‌توان دنباله‌ای صعودی مانند $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ مثال زد که**

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > \lim_{n\to\infty} m^*(E_n).$$

ت) **دنباله‌ای مانند $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ مثال بزنید که $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ لبگ اندازه‌پذیر ولی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ی $\cup_{k=1}^{n} E_k$ مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر باشد.**

جواب :

الف) فرض می‌کنیم V مجموعه‌ی ویتالی و $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ شمارشی از اعداد گویا باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم $V_n = (V + r_n) \cap [0, 1]$. حال به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $E_n = V_n$. در این صورت دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای دوبدو مجزا از زیرمجموعه‌های اندازه‌ناپذیر $\mathbb{R}$ با اجتماعی برابر با $[0, 1]$ است. همچنین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m^*(E_n) > 0$ (اگر $m^*(E) = 0$ باشد، آنگاه E اندازه‌پذیر است) و بنابه خاصیت انتقال اندازه‌ی خارجی لبگ، اندازه‌ی خارجی عناصر این دنباله، همگی با یکدیگر برابر است. بنابراین

$$1 = m([0, 1]) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \infty.$$

ب) فرض می‌کنیم $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ همان دنباله‌ی تعریف شده در قسمت (الف) باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $E_n = \cup_{k=n}^{\infty} V_k$. در این صورت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی است. همچنین از اینکه V_nها دوبدو مجزایند، داریم $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. در ضمن به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m^*(E_n) \geq m(V_n) = m^*(V) > 0$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} m^*(E_n) > 0$. بنابراین $0 = m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^*(E_n)$.

پ) خیر. با توجه به قضیه‌ی ۸۵.۲ قسمت (ب) و با تعبیر بکار رفته در مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۱، هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$، پوشش اندازه‌پذیر دارد و در نتیجه از مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۱، به ازای هر دنباله‌ی صعودی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، داریم $m^* \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(E_n)$.

ت) فرض می‌کنیم V مجموعه‌ی ویتالی و $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ شمارشی از اعداد گویا باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $E_n = V + r_n$. در این صورت $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$ و در نتیجه مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است. در حالی که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $\cup_{k=1}^{n} E_k$ لبگ اندازه‌ناپذیر است. در واقع از اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m^*(\cup_{k=1}^{n} E_k) \geq m^*(E_n) > 0$ است، لذا اگر $\cup_{k=1}^{n} E_k$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه از مسئله‌ی حل شده‌ی ۱۸، $\Delta(\cup_{k=1}^{n} E_k)$ شامل یک بازه حول صفر است و این متناقض با

$$\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap \mathbb{Q} = \{r_i - r_j, \quad 1 \leq i, j \leq n\},$$

درستی تساوی فوق، از این حقیقت ناشی می‌شود که دنباله‌ی $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای مجزا از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است و در نتیجه

$$\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \bigcup_{1 \leq i,j \leq n} \{x - y : x \in E_i,\ y \in E_j\},$$

از طرفی به آسانی و با توجه به ساختار این مجموعه‌ها، می‌توان نشان داد به ازای هر $i, j \in \mathbb{N}$،

$$\{x - y : x \in E_i,\ y \in E_j\} \cap \mathbb{Q} = \{r_i - r_j\}.$$

مسئله ۲۲. **فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با $m(E) = \alpha$ باشد. آنگاه به ازای هر $\beta \in (0, \alpha)$، مجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر $A \subseteq E$ چنان موجود است که $m(A) = \beta$.**

جواب : تابع $f:\mathbb{R}\to[0,\alpha]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x)=m(E\cap(-\infty,x]),$$

به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ و با فرض $x>y$، داریم

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(y)\right| &= \left|m(E\cap(-\infty,x])-m(E\cap(-\infty,y])\right|\\ &= m(E\cap(y,x])\le|x-y|.\end{aligned}$$

بنابراین f تابعی پیوسته است. (f تابعی لیپ‌شیتز از مرتبه‌ی یک و در نتیجه بطور یکنواخت پیوسته است). از طرفی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. حال از قضیه‌ی مقدار میانی، به ازای هر $\beta\in(0,\alpha)$، $x_\beta\in\mathbb{R}$ موجود است که $f(x_\beta)=\beta$. بنابراین $A=E\cap[-\infty,x_\beta]$.

۱۳.۲ مسائل

۱. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد. گردایه‌ی $\Re\subset\mathcal{P}(X)$ را یک حلقه گوییم، اگر تحت اجتماع متناهی و تفاضل بسته باشد. حلقه‌ی بسته تحت اجتماع شمارا را σ–حلقه نامیم. نشان دهید

الف) هر حلقه (σ–حلقه) تحت اشتراک متناهی (شمارا) بسته است.

ب) اگر $\Re$ یک حلقه (σ–حلقه) باشد، آنگاه $\Re$ یک جبر (σ–جبر) است اگر و تنها اگر $X\in\Re$.

پ) اگر $\Re$ یک σ–حلقه باشد، آنگاه $\{E\subset X: E\in\Re \text{ یا } E^c\in\Re\}$ یک σ–جبر است.

ت) اگر $\Re$ یک σ–حلقه باشد، آنگاه $\{E\subset X: E\cap F\in\Re,\ \ \forall F\in\Re\}$ یک σ–جبر است.

۲. نشان دهید جبر $\mathcal{G}$ روی X یک σ–جبر روی X است اگر و تنها اگر تحت اجتماع شمارای صعودی بسته باشد.

۳. در مثال ۹.۲، قرار دهید $\mathcal{G}=\{E\subseteq\mathbb{R}: \text{متناهی است } E^c \text{ یا } E\}$. نشان دهید $\mathcal{G}$ یک جبر روی X است اما در حالت کلی σ–جبر نیست.

۴. فرض کنید f تابعی دلخواه از X به Y باشد. نشان دهید

الف) اگر $\mathcal{M}$ یک σ–جبر روی Y باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{M})=\{f^{-1}(E):E\in\mathcal{M}\}$ یک σ–جبر روی X است.

ب) اگر $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی X و f تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه $f(\mathcal{A})$ یک σ-جبر روی Y است.

پ) اگر $\mathcal{E}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد، آنگاه $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

۵. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه روی $\mathcal{A}$ و $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد. تابع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n$ را روی $\mathcal{A}$ به صورت

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n\right)(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n(E).$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mu_n$ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

۶. با ارائه‌ی مثالی نشان دهید اگر μ و ν دو تابع اندازه روی فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ باشند، آنگاه در حالت کلی تابع $\mu \vee \nu = \max\{\mu, \nu\}$ یک تابع اندازه روی $(X, \mathcal{A})$ نمی‌تواند باشد.

۷. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ باشد. نشان دهید

$$\mu\big(\liminf_{n\to\infty} E_n\big) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

و اگر $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$ باشد، آنگاه $\mu\big(\limsup_{n\to\infty} E_n\big) \ge \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

۸. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه، $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ و مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه‌ی متناهی مانند E چنان موجود باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$E_n \subseteq E, \quad \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E).$$

نشان دهید به ازای هر $F \in \mathcal{A}$، $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n \cap F) = \mu(E \cap F)$.

۹. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی با $\mu(X) = 1$ باشد. گوییم دو مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E و F مستقل‌اند اگر $\mu(E \cap F) = \mu(E) \cdot \mu(F)$ باشد. نشان دهید اگر E و F مستقل باشند، آنگاه E و F^c و همچنین دو مجموعه‌ی E^c و F^c مستقل‌اند.

۱۰. نشان دهید

الف) هر فضای اندازه‌ی σ-متناهی، یک فضای اندازه‌ی شبه متناهی است. در ضمن با ارائه‌ی مثالی نشان دهید عکس مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

ب) فضای اندازه‌ی σ-متناهی مانند $(X, \mu, \mathcal{A})$ مثال بزنید که شامل زیرفضای اندازه‌ای باشد که σ-متناهی نیست. (منظور از زیرفضای اندازه‌ی فضای اندازه‌ی $(X, \mu, \mathcal{A})$، فضای اندازه‌ای مانند $(X, \mu, \mathcal{M})$ است که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$).

۱۱. فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{P}(X), \mu_f)$ با تابع اندازه‌ی $\mu_f(E) = \sum_{x\in E} f(x)$ و $\mu_f(\emptyset) = 0$ که $f : X \to [0, \infty)$ تابعی دلخواه است، در نظر بگیرید. نشان دهید

الف) فضای $(X, \mathcal{P}(X), \mu_f)$، شبه متناهی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f(x) < \infty$.

ب) فضای $(X, \mathcal{P}(X), \mu_f)$، σ-متناهی است اگر و تنها اگر شبه متناهی بوده و مجموعه‌ی xهایی که $f(x) > 0$ می‌باشد، یک مجموعه‌ی شمارا باشد.

۱۲. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی شبه متناهی و E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه‌ی نامتناهی باشد. نشان دهید به ازای هر $C > 0$، مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $F \subset E$ موجود است که $C < \mu(F) < \infty$.

۱۳. با ارائه‌ی مثالی، نشان دهید اجتماع هر تعداد دلخواه از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در یک فضای اندازه، همواره یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر نیست.

۱۴. فرض کنید μ^* یک اندازه‌ی خارجی روی مجموعه‌ی X و $E \subseteq X$ با اندازه‌ی خارجی متناهی باشد. نشان دهید اگر F مجموعه‌ی μ^*-اندازه‌پذیری باشد که $F \subseteq E$ و $\mu(F) = \mu^*(E)$، آنگاه E مجموعه‌ای μ^*-اندازه‌پذیر است (μ تحدید μ^* روی گردایه‌ی μ^*-اندازه‌پذیرهاست).

۱۵. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و μ^* اندازه‌ی خارجی تولید شده توسط μ باشد. نشان دهید

الف) به ازای هر $E \subseteq X$، $F \in \mathcal{A}$ شامل E چنان موجود است که $\mu^*(E) = \mu^*(F)$.

ب) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از زیرمجموعه‌های X باشد، آنگاه

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n).$$

۱۶. فرض کنید m^* اندازه‌ی خارجی لبگ روی $\mathbb{R}$ و $E, F \subseteq \mathbb{R}$ باشند. نشان دهید

الف) اگر مجموعه‌ی بازی مانند G چنان موجود باشد که $E \subseteq G$ و $F \cap G = \emptyset$، آنگاه

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F),$$

ب) اگر فاصله‌ی E و F مقداری مثبت باشد، به عبارتی اگر

$$d(E,F)=\inf\{|x-y| : x\in E,\ y\in F\}>\circ.$$

آنگاه $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$.

۱۷. فرض کنید E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با $m(E)>\circ$ باشد. نشان دهید

الف) $x,y\in E$ چنان موجود است که $x-y$ گویاست.

ب) $x,y\in E$ چنان موجود است که $x-y$ گنگ است.

پ) $\alpha>\circ$ای چنان موجود است که به ازای هر $|x|\leq\alpha$، مجموعه‌ی $E\cap(E+x)$ ناتهی است.

۱۸. فرض کنید E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر و $V\subseteq E$ باشد که V مجموعه‌ی ویتالی تعریف شده در ۵۶.۲ است. نشان دهید $m(E)=\circ$.

۱۹. فرض کنید $E\subseteq\mathbb{R}$ مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی باشد که در نمایش دهدهی آن‌ها رقم ۷ وجود ندارد. نشان دهید E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر است.

۲۰. نشان دهید هر گردایه‌ی دلخواه از زیرمجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر دوبدو مجزا از $\mathbb{R}$ که هر یک اندازه‌ی مثبت دارد، شماراست.

۲۱. گردایه‌ی μ^*-اندازه‌پذیرهای اندازه‌ی خارجی تعریف شده در مثال ۷۴.۲ را بدست آورید.

۲۲. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. نشان دهید به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، بازه‌ای باز با نقطه میانی x مانند I_x چنان موجود است که

$$m^*(E\cap I_x)=m^*(E\cap I_x^c)=\frac{m^*(E)}{۲}.$$

فصل ۳

نظریه انتگرال لبگ

هانری لبگ در ۲۸ ژوئن ۱۸۷۵ در شهر بووه‌ی[۱] فرانسه متولد شد. در ۱۹ سالگی وارد دانش‌سرای عالی پاریس، جایی که معلمان آینده‌ی دبیرستان‌ها را تربیت می‌کنند، شد و تا ۲۲ سالگی آنجا بود و دراین دوران افتخار شاگردی امیل برل را داشت. وی در دوره‌ی سه ساله‌ی (۱۹۰۱-۱۸۹۹) که مشغول آماده‌سازی رساله‌ی دکتری بود، توانست در ۱۹۰۱ مقاله‌ی کوتاهی در گزارش جلسات پاریس به چاپ برساند که مبنای رساله‌ی دکتری او قرار گرفت. این مقاله به همراه نوشته‌هایی از امیل برل راجع به نظریه‌ی اندازه، نقطه‌ی عطف مهمی در تحول آنالیز حقیقی بشمار آمده و در واقع پایه و شالوده‌ی آنالیز مدرن را تشکیل داد. شهرت وی بیشتر به خاطر نظریه‌ی انتگرال منتسب به خودش می‌باشد که در واقع تعمیمی از نظریه‌ی انتگرال ریمان است. او همچنین سهم بزرگی در دیگر زمینه‌های ریاضیات، از جمله توپولوژی، نظریه‌ی پتانسیل و آنالیز فوریه داشته است. لبگ در ۲۶ ژوئیه ۱۹۴۱ در پاریس دیده از جهان فرو بست.

۱.۳ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم به تشریح نظریه‌ای از انتگرال بپردازیم که حدود یک قرن پیش توسط هانری لبگ پایه‌گذاری شد. لبگ با تکیه بر اندازه، توانست روش جدید و هوشمندانه‌ای از نحوه‌ی انتگرال‌گیری را ارائه دهد که حوزه‌ی عمل آن، علیرغم توسیع آنالیز مدرن، توانست بسیاری از

---

[۱] Beauvais

کاستی‌های نظریه‌ی انتگرال ریمان را رفع نماید. ابتدا با فرض بر اینکه خواننده با نحوه‌ی انتگرال‌گیری ریمان آشناست، با ارائه‌ی مثالی ملموس، تفاوت نحوه‌ی انتگرال‌گیری لبگ و ریمان را نشان می‌دهیم.

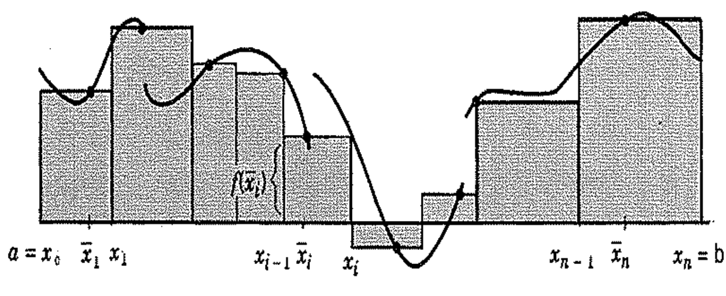
فرض کنید ریمان و لبگ باهم وارد اتاقی شده و با تعدادی کیسه پر از اسکناس که روی هر کدام از کیسه‌ها تعداد اسکناس‌ها نوشته شده است، مواجه می‌شوند. (چه خوب...). حال اولین سوالی که برایشان پیش می‌آید این است که چقدر پول در این اتاق وجود دارد؟

ریمان مسئله را بدین گونه حل می‌کند. او روی تک تک کیسه‌ها را نگاه می‌کند. ۲ ریال، ۳ ریال، ۵ ریال، ۳ ریال، ۳ ریال ، ۲ ریال و ... . سپس با جمع تک تک آن‌ها مقدار پول موجود را بدست می‌آورد و اما لبگ...

لبگ مسئله را بدین گونه حل می‌کند. او ابتدا کیسه‌ها را بر حسب تعداد اسکناس‌ها طبقه‌بندی می‌کند. ۲ کیسه‌ی ۲ ریالی، ۳ کیسه‌ی ۳ ریالی، ۱ کیسه‌ی ۵ ریالی و ... . سپس تعداد کیسه‌ها را بر مقادیر اسکناس موجود در آن‌ها ضرب و با یکدیگر جمع کرده و در نهایت مقدار پول موجود در اتاق را بدست می‌آورد.

همانطور که دیدید هر دو جواب یکسان هستند، اما روش محاسبه‌ی متفاوتی دارند. حال به نظر شما کدام یک حق بیشتری باید بگیرد. ریمان یا لبگ؟

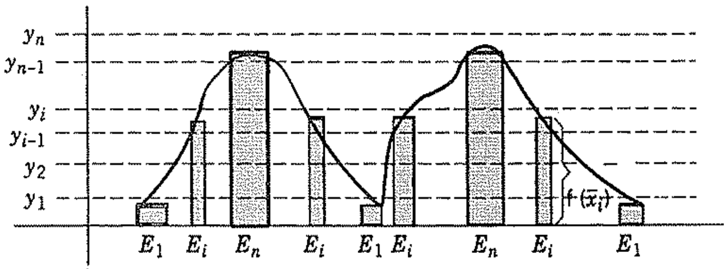
با این توصیفات اگر بخواهیم تفاوت روش‌های انتگرال‌گیری ریمان و لبگ را به زبان ریاضی بیان کنیم، می‌بینیم که در انتگرال‌گیری از تابع دلخواه f، تفاوت روش آنها در نحوه‌ی افراز آن‌ها است. ریمان دامنه‌ی تابع را افراز و مجموع ریمان را به عنوان تقریبی از مساحت زیر نمودار در نظر می‌گیرد، در حالی‌که لبگ برد تابع را افراز و مجموع لبگ را بدست می‌آورد. شکل‌های زیر گویای مطالب مذکورند:



شکل ۳.۱: مجموع‌یابی به روش ریمان

مجموع ریمان : $f(\overline{x_1})(x_1-x_0)+\cdots+f(\overline{x_i})(x_i-x_{i-1})+\cdots+f(\overline{x_n})(x_n-x_{n-1}).$

که در آن $\overline{x_i}$ نقطه‌ای دلخواه در $[x_{i-1}, x_i]$ و f تابعی کراندار روی بازه‌ی $[a, b]$ است.



شکل ۲.۳: مجموع‌یابی به روش لبگ

$$\text{مجموع لبگ} \quad : \quad f(\overline{x_1})m(E_1) + \cdots + f(\overline{x_i})m(E_i) + \cdots + f(\overline{x_n})m(E_n).$$

که در آن $E_i = f^{-1}([y_{i-1}, y_i))$ها مجموعه‌هایی لبگ اندازه‌پذیر و $\overline{x_i}$ نقطه‌ای دلخواه در E_i است.

در این مفهومِ نو از انتگرال، مزایای متعددی نهفته و آشکار است: از جمله مزایای بدیهی آن، یکی این است که توابع بیشتری از توابع ریمان انتگرال‌پذیر را در بر می‌گیرد. این نظریه از انتگرال، چنان تعمیم هوشمندانه‌ای از انتگرال ریمان را ارائه می‌دهد که کارل. بی. بویر[۲] در کتاب تاریخ ریاضیات [۸]، در تحسین این نظریه چنین می‌گوید: «انتگرال ریمان بر تمام مطالعات راجع به انتگرال غلبه داشت تا آنکه لبگ به عنوان ارشمیدسِ عصرِ تعمیم درآمد». در واقع، اینجا از سویی اشاره به آن می‌شود که روش‌های انتگرال و حاصل‌جمع‌های ریمان همان حاصل‌جمع‌های یونان باستان هستند که برای محاسبه‌ی مساحت‌های اشکال محدود به خم‌های نامستقیم به کار می‌رفتند و از سوی دیگر نقش برجسته‌ی ارشمیدس در علوم یونان باستان، بلکه در همه‌ی اعصار تاریخ، به لبگ نیز داده شده است.[۳]

از جمله مزایای پنهان آن، یکی پایداری مفهوم در مسائل گذر به حد است، قضایای همگرایی معروفی که مشهورترین آن قضیه‌ی تسلطی لبگ است و لبگ در رساله‌ی دکترایش بدان اشاره کرده است. اما مهمترین مزیت انتگرال لبگ، قضایای کمال در مورد فضای L^1 و سایر فضاهای L^p است که چند سال بعد توسط فردریک ریس[۴] و فیشر[۵] در ۱۹۰۷، کشف شد. اینجا مزیت انتگرال لبگ بر

[۲] C. B. Boyer

[۳] به نقل از: مقاله‌ی تاریخی لبگ در انتگرال. ارسلان شادمان. مجله‌ی تاریخ علم، شماره‌ی چهارم، ۱۳۸۴

[۴] Riesz

[۵] Fischer

انتگرال ریمان فوق‌العاده است. بدون شک کشف ریس-فیشر که بر پایه انتگرال لبگ بنا شد، مبنای تحول عظیم و رشد آنالیز تابعی در طول قرن بیستم، اعم از تئوری فضاهای هیلبرت و باناخ، فضای سوبولف و ... گردید.[۶]

در این فصل مباحث مربوط به انتگرال لبگ را، به شکلی ملموس مطرح خواهیم کرد. بحث را با معرفی توابع اندازه‌پذیر آغاز کرده، سپس به تعریف توابع ساده، توابعی که بلوک‌های ساختمانی نظریه‌ی انتگرال‌گیری را تشکیل می‌دهند، پرداخته و انتگرال‌گیری لبگ را روی این توابع تعریف می‌کنیم تا بتوانیم انتگرال لبگ را برای توابع اندازه‌پذیر که در واقع، حد دنباله‌ای از توابع ساده می‌باشند، پیاده سازیم. سپس به مقایسه‌ی انتگرال‌های ریمان و لبگ و مطالعه‌ی فضاهای L^p می‌پردازیم و در نهایت فصل را با معرفی همگرایی در اندازه و ارتباط آن با دیگر همگرایی‌ها، خاتمه خواهیم داد.

۲.۳ توابع اندازه‌پذیر

در بخش قبل، مجموع لبگ را با فرض اندازه‌پذیری مجموعه‌های

$$E_i = f^{-۱}([y_{i-۱}, y_i)) = \{x : y_{i-۱} \leq f(x) < y_i\},$$

توانستیم تعریف کنیم. مشاهده می‌کنیم که اندازه‌پذیری این مجموعه‌ها ارتباط مستقیمی با تابع f دارد. در واقع گردایه توابعی که لبگ برای تعریف انتگرال خود انتخاب کرد، از ویژگی خاصی برخوردارند. در حالت کلی و در فضاهای اندازه‌ی مجرد، چنین توابعی را توابع اندازه‌پذیر نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. اگر $(X, \mathcal{A}_X)$ و $(Y, \mathcal{A}_Y)$ دو فضای اندازه‌پذیر باشند، آنگاه تابع $f : X \to Y$ را $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-اندازه‌پذیر یا بطور خلاصه اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه تصویر وارون هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در $\mathcal{A}_Y$، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر در $\mathcal{A}_X$ باشد. به عبارتی f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر $E \in \mathcal{A}_Y$، $f^{-۱}(E) \in \mathcal{A}_X$ باشد.

اگر $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f را $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر گوییم، اگر $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-اندازه‌پذیر باشد. در حالت خاص، f را لبگ اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{L})$. به همین ترتیب f را برل اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. به آسانی می‌توان ثابت کرد، اگر $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ دو σ-جبر روی X باشند که $\mathcal{A}_۱ \subseteq \mathcal{A}_۲$، آنگاه هر تابع $\mathcal{A}_۱$-اندازه‌پذیر، تابعی $\mathcal{A}_۲$-اندازه‌پذیر است. بنابراین هر تابع برل اندازه‌پذیر، تابعی لبگ اندازه‌پذیر است.

---

[۶] به نقل از همان منبع.

مثال ۲.۳. تابع $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ که $\mathcal{A}=\{X,\emptyset\}$، $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر f تابعی ثابت روی X باشد.

مثال ۳.۳. اندازه‌ی خارجی μ^* را روی $\mathbb{R}$ به صورت

$$\mu^*(E)=\begin{cases} |E| & \text{متناهی } E, \\ \infty & \text{نامتناهی } E. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $(\mathbb{R},\mathcal{A}^*,\mu)$ فضای اندازه‌ای باشد که در آن $\mathcal{A}^*$، σ-جبر متشکل از μ^*-اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}$ و μ تحدید μ^* روی $\mathcal{A}^*$ است. با استفاده از معیار کاراتئودوری به آسانی می‌توان نشان داد، تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، اندازه‌پذیرند. حال اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه تصویر وارون هر مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بوده و در نتیجه اندازه‌پذیر است. بنابراین هر تابع دلخواه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $\mathcal{A}^*$-اندازه‌پذیر است.

لم ۴.۳. فرض می‌کنیم $f:(X,\mathcal{A}_X)\to(Y,\mathcal{A}_Y)$ و $g:(Y,\mathcal{A}_Y)\to(Z,\mathcal{A}_Z)$ توابعی اندازه‌پذیر باشند. آنگاه $gof:(X,\mathcal{A}_X)\longrightarrow(Z,\mathcal{A}_Z)$ تابعی $(\mathcal{A}_X,\mathcal{A}_Z)$-اندازه‌پذیر است.

اثبات : نتیجه‌ی مستقیم تعریف است. ■

لم ۵.۳. اگر $\mathcal{A}_Y=\sigma(\mathcal{E})$ باشد، آنگاه تابع $f:(X,\mathcal{A}_X)\to(Y,\mathcal{A}_Y)$ تابعی $(\mathcal{A}_X,\mathcal{A}_Y)$-اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $E\in\mathcal{E}$، $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}_X$.

اثبات : فرض می‌کنیم به ازای هر $E\in\mathcal{E}$، $f^{-1}(E)\in\mathcal{A}_X$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A}=\left\{E\subseteq Y: f^{-1}(E)\in\mathcal{A}_X\right\}.$$

از اینکه $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$، پس $\emptyset\in\mathcal{A}$. از طرفی با توجه به مسئله‌ی ۴ فصل قبل، $\mathcal{A}$ یک σ-جبر شامل $\mathcal{E}$ است. بنابراین $\mathcal{A}_Y\subseteq\mathcal{A}$ و در نتیجه f تابعی $(\mathcal{A}_X,\mathcal{A}_Y)$-اندازه‌پذیر است. ■

نتیجه ۶.۳. اگر X و Y دو فضای متریک (یا توپولوژیک) باشند، آنگاه هر تابع پیوسته $f:X\to Y$ تابعی $(\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y)$-اندازه‌پذیر است.

اثبات : می‌دانیم f پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر وارون هر مجموعه‌ی باز Y، مجموعه‌ای باز در X باشد. حال کافی است لم ۵.۳ را بکار ببرید. ■

لم ۷.۳. اگر $(X,\mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f:X\to\mathbb{R}$، آنگاه عبارات زیر هم‌ارزند

الف) f تابعی $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر است.

ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}$.

پ) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}([\alpha, \infty)) \in \mathcal{A}$.

ت) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$.

ث) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{A}$.

ج) اگر $\mathcal{O}$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}$.

ح) اگر $\mathcal{C}$ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

اثبات: مطالب بیان شده در بخش ۵.۱ و لم‌های ۵.۳ و ۲۰.۲ را ببینید. ■

مثال ۸.۳. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $E \subseteq X$ باشد. تابع مشخصه[۷] χ_E،

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E, \\ ۰ & x \in E^c. \end{cases}$$

تابعی $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر روی X است اگر و تنها اگر $E \in \mathcal{A}$. زیرا به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & \alpha \geq ۱, \\ E \in \mathcal{A} & ۰ \leq \alpha < ۱, \\ X \in \mathcal{A} & \alpha < ۰. \end{cases}$$

عکس مطلب واضح است.

تذکر ۹.۳. با توجه به مثال مذکور در بالا،

- متناظر با یک مجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر، تابعی لبگ اندازه‌پذیر می‌توان تعریف کرد. بنابراین عدد اصلی توابع لبگ اندازه‌پذیر بزرگتر یا مساوی ۲^c است. از طرفی عدد اصلی کلیه‌ی توابع حقیقی-مقدار روی $\mathbb{R}$ برابر با ۲^c است. بنابراین گردایه‌ی توابع لبگ اندازه‌پذیر هم‌ارز گردایه‌ی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر است.
- متناظر با هر مجموعه‌ی لبگ اندازه‌ناپذیر، تابعی لبگ اندازه‌ناپذیر وجود دارد.

---

[۷] Characteristic function

مثال ۱۰.۳. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q}, \\ ۰ & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

در نظر بگیرید. در این صورت $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ و با توجه به مثال ۸.۳، تابعی لبگ اندازه‌پذیر است. توجه داشته باشید که f در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیست.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و f تابعی روی X و $E \in \mathcal{A}$ باشد. گوییم f روی E اندازه‌پذیر است، اگر به ازای هر $F \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$، $f^{-۱}(F) \cap E \in \mathcal{A}$.

لم ۱۲.۳. **فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه**

الف) اگر f تابعی اندازه‌پذیر روی $E \in \mathcal{A}$ باشد، آنگاه روی هر زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیر E نیز تابعی اندازه‌پذیر است.

ب) اگر $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ و $E = \cup_{n=۱}^{\infty} E_n$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، f تابعی اندازه‌پذیر روی E_n باشد، آنگاه f تابعی اندازه‌پذیر روی E است.

اثبات : آسان است و به خواننده واگذار می‌شود. ∎

نمادگذاری : اگر به مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دو عضو $+\infty$ و $-\infty$ را مضاف نماییم، مجموعه‌ی حاصل را با نماد $[-\infty, \infty]$ یا $\mathbb{R}^*$ نشان داده و آن را مجموعه اعداد حقیقی گسترش یافته می‌نامیم. جمع، تفاضل و ضرب را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$x \pm \infty = \pm\infty, \qquad \infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$x.(\pm\infty) = \pm\infty \ (x > ۰), \qquad x.(\pm\infty) = \mp\infty \ (x < ۰).$$

$\infty - \infty$ را تعریف نشده و $۰.\infty$ را برابر با صفر در نظر می‌گیریم. همچنین برل اندازه‌پذیرهای $\mathbb{R}^*$ را به صورت $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^*} = \{E \subseteq \mathbb{R}^* : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^*} = \sigma(\{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}).$$

کافی است ابتدا نشان دهید دو σ-جبر طرف راست باهم برابرند سپس توجه داشته باشید که

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n=۱}^{\infty} (n, \infty], \qquad \{-\infty\} = \bigcap_{n=۱}^{\infty} [-\infty, -n).$$

تابع $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ را $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر گوییم، هرگاه $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^*})$-اندازه‌پذیر باشد.

قضیه ۱۳.۳. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f, g : X \to \mathbb{R}$ توابعی $\mathcal{A}$-اندازه‌پذیر و $c \in \mathbb{R}$ باشد. آنگاه توابع زیر همگی اندازه‌پذیرند.

$$f+g,\quad f^۲,\quad |f|^p\,(p>۰),\quad \frac{۱}{g}\,(X \text{ روی } g \neq ۰),\quad cf,\quad fg,\quad \frac{f}{g}\,(X \text{ روی } g \neq ۰)$$

$$f^+,\qquad f^- \quad f \vee g = \max\{f(x), g(x)\},\qquad f \wedge g = \min\{f(x), g(x)\},$$

که در آن f^+ و f^- به ترتیب قسمت‌های مثبت و منفی f هستند. در واقع

$$f^+ = \max\{f(x), ۰\},\qquad f^- = \max\{-f(x), ۰\},$$

اثبات : به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f(x) + g(x) > \alpha$ است اگر و تنها اگر عدد گویایی مانند q چنان موجود باشد که $f(x) > q > \alpha - g(x)$ ($\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است). بنابراین

$$\{x \in X : f(x)+g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in Q} \{x \in X : f(x) > q\} \cap \{x \in X : g(x) > \alpha - q\}.$$

و در نتیجه $f+g$ اندازه‌پذیر است. اگر $\alpha < ۰$ باشد، آنگاه $\{x \in X : f^۲(x) \leq \alpha\} = \emptyset$ و اگر $\alpha \geqq ۰$ باشد، آنگاه

$$\{x \in X : f^۲(x) \leq \alpha\} = f^{-۱}\left([-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}]\right).$$

و در نتیجه $f^۲$ اندازه‌پذیر است. روندی مشابه نشان می‌دهد که اگر c یک عدد ثابت باشد، آنگاه cf و $|f|^p$ نیز به ازای $p > ۰$، توابعی اندازه‌پذیر است. همچنین به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$\left\{x \in X : \frac{۱}{g(x)} > \alpha\right\} = \begin{cases} \{x : g(x) > ۰\} & \alpha = ۰, \\ \{x : g(x) > ۰\} \cap \{x : g(x) < ۱/\alpha\} & \alpha > ۰, \\ \{x : g(x) > ۰\} \cup \{x : g(x) < ۱/\alpha\} & \alpha < ۰. \end{cases}$$

بنابراین اگر تابع اندازه‌پذیر g روی X مخالف صفر باشد، آنگاه $\frac{۱}{g}$ نیز تابعی اندازه‌پذیر است. حال با توجه به اتحادهای زیر

$$f^+ = \frac{|f| + f}{۲},\qquad f^- = \frac{|f| - f}{۲},$$

$$f \vee g = \frac{f+g+|f+g|}{۲}, \qquad f \wedge g = \frac{f+g-|f+g|}{۲},$$
$$fg = \frac{(f+g)^۲ - f^۲ - g^۲}{۲}, \qquad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{۱}{g}.$$

اثبات قضیه کامل است. ■

تعریف ۱۴.۳. فرض کنیم $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^*$ باشد. به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \cdots\},$$

در این صورت $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی در $\mathbb{R}^*$ و در نتیجه حدش موجود و برابر با اینفیمم آن است. حد دنباله‌ی $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را حد بالای $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{b_۱, b_۲, b_۳, \cdots\}.$$

حد پایین $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز بطور مشابه قابل تعریف است. در واقع کافی است قرار دهیم

$$b_k = \inf\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \cdots\},$$

در این صورت $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی در $\mathbb{R}^*$ و در نتیجه حدش موجود و برابر با سوپرمم آن است. حد دنباله‌ی $\{b_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را حد پایین $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{b_۱, b_۲, b_۳, \cdots\}.$$

می‌توان نشان داد $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$. در صورتی که حدود بالایی و پایینی یک دنباله در $\mathbb{R}^*$ موجود و برابر باشند، گوییم حد دنباله موجود است و مقدار مشترک آن‌ها را برابر حد دنباله در نظر می‌گیریم و اگر این مقدار در $\mathbb{R}$ باشد، دنباله را همگرا گوییم.

حال فرض می‌کنیم $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع $\mathbb{R}^*$-مقدار روی مجموعه‌ی X باشد. در این صورت توابع $\inf_n f_n$، $\sup_n f_n$، $\liminf_n f_n$ و $\limsup_n f_n$ به صورت موضعی تعریف می‌شوند. در واقع

$$\left(\inf_n f_n\right)(x) = \inf_n f_n(x), \qquad \left(\sup_n f_n\right)(x) = \sup_n f_n(x),$$
$$\left(\liminf_n f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \left(\limsup_n f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

گوییم دنباله‌ی $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ نقطه به نقطه به تابع $f(x)$ همگراست و می‌نویسیم $f_n(x) \to f(x)$ یا $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، اگر به ازای هر $x \in X$،

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

دنباله‌ی $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ را یکنوا گوییم، اگر به ازای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای یکنوا در $\mathbb{R}^*$ باشد.

قضیه ۱۵.۳. **اگر $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع $\mathbb{R}^*$-مقدار اندازه‌پذیر روی $(X, \mathcal{A})$ باشد، آنگاه توابع**

$$g_1(x) = \sup_n f_n(x), \qquad g_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$
$$g_2(x) = \inf_n f_n(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

همگی اندازه‌پذیرند. اگر $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ به ازای هر $x \in X$، موجود باشد، آنگاه f نیز اندازه‌پذیر است.

اثبات : به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} g_1^{-1}((\alpha, \infty]) &= \{x \in X : \sup_n f_n(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > \alpha\}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g_2^{-1}([-\infty, \alpha)) &= \{x \in X : \inf_n f_n(x) < \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) < \alpha\}, \end{aligned}$$

بنابراین g_1 و g_2 اندازه‌پذیرند. در حالت کلی به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، تابع $h_k(x) = \sup_{n\geq k} f_n(x)$ اندازه‌پذیر است. بنابراین $g_3 = \inf_k h_k$ تابعی اندازه‌پذیر است. به همین ترتیب g_4 نیز اندازه‌پذیر است. بالاخره اگر f موجود باشد، آنگاه $f = g_3 = g_4$ و در نتیجه f اندازه‌پذیر است. ■

تذکر ۱۶.۳. توجه داشته باشید که در حالت کلی، سوپرمم و اینفیمم هر تعداد دلخواه از توابع اندازه‌پذیر، نمی‌تواند تابعی اندازه‌پذیر باشد. به عنوان مثال، اگر E مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر

باشد، آنگاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، توابع $\chi_{E\cap\{a\}}$ و $-\chi_{E\cap\{a\}}$ توابعی اندازه‌پذیرند، در حالی که

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} \chi_{E\cap\{a\}} = \chi_E, \quad \inf_{a\in\mathbb{R}} -\chi_{E\cap\{a\}} = -\chi_E.$$

در فصل قبل مفهوم خاصیت تقریباً همه‌جا را بیان کردیم. به عنوان مثال گفتیم در فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$، $f = g$ ت.ه، اگر $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر باشد. عاقلانه است، بپرسیم در صورتی که $f = g$ ت.ه باشد، آیا از اندازه‌پذیری f، می‌توان اندازه‌پذیری g را نتیجه گرفت؟ جواب منفی است. مثال زیر را ببینید.

مثال ۱۷.۳. فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$X = \{۱, ۲, ۳, ۴\}, \quad \mathcal{A} = \{\{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \emptyset, X\}$$

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{۱, ۲\}) = ۰, \qquad \mu(X) = \mu(\{۳, ۴\}) = ۲$$

حال توابع $f, g : X \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = ۱, \qquad g(x) = \begin{cases} ۱ & x \neq ۱ \\ ۰ & x = ۱, \end{cases}$$

در این صورت $f = g$ ت.ه. روی X است، در حالی که f اندازه‌پذیر است (تابعی ثابت است) و g اندازه‌ناپذیر است ($g^{-۱}(\{۰\}) = \{۱\}$ مجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است).

لم ۱۸.۳. در فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$، عبارات زیر برقرارند اگر و تنها اگر μ اندازه‌ای کامل باشد:

الف) اگر f اندازه‌پذیر و $f = g$ ت.ه. روی X باشد، آنگاه g تابعی اندازه‌پذیر است.

ب) اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و $f_n \to f$ ت.ه. روی X باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

اثبات : الف) فرض کنیم μ یک اندازه‌ی کامل، f تابعی اندازه‌پذیر و $f = g$ ت.ه. روی X باشد، قرار می‌دهیم $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. بنابه فرض E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و $\mu(E) = ۰$. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، داریم

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} \;=\; \{x \in E^c : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : g(x) > \alpha\}$$

$$= \underbrace{(\{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap E^c)}_{*} \cup \underbrace{\{x \in E : g(x) > \alpha\}}_{**}$$

مجموعه‌ی $(*)$ اندازه‌پذیر است، زیرا اشتراک دو مجموعه‌ی اندازه‌پذیر است. مجموعه‌ی $(**)$ نیز اندازه‌پذیر است، زیرا μ کامل و $\{x \in E : g(x) > \alpha\} \subseteq E$ و $\mu(E) = ۰$ است. بالعکس، فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای با اندازه‌ی صفر و F زیرمجموعه‌ای دلخواه از E باشد. از اینکه E اندازه‌پذیر است، پس χ_E تابعی اندازه‌پذیر است. در این صورت χ_F تابعی است که تقریباً همه‌جا با χ_E برابر است. بنابه فرض χ_F اندازه‌پذیر است و در نتیجه F اندازه‌پذیر است. پس μ اندازه‌ای کامل است.

ب) فرض کنیم μ یک اندازه‌ی کامل و $E = \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}$. بنابه فرض E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و $\mu(E) = ۰$. حال با فرض اینکه g حد f_n روی X باشد، داریم $f = g$ **ت.ه.** از اینکه g اندازه‌پذیر است، از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم f اندازه‌پذیر است. عکس مطلب مشابه قسمت (الف) است.

■

۳.۳ انتگرال توابع ساده

در این بخش، ابتدا به معرفی توابعی می‌پردازیم که بلوک‌های ساختمانی نظریه‌ی انتگرال‌گیری را تشکیل می‌دهند. برای تعریف انتگرال توابع، ابتدا انتگرال توابع ساده که ملموس‌اند را تعریف، سپس نشان می‌دهیم هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان توسط توابع ساده تقریب زد و بدین ترتیب، انتگرال توابع را در حالت کلی به کمک انتگرال توابع ساده تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۹.۳. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. یک **تابع ساده**[۸] روی X، ترکیب خطی متناهی با ضرایب حقیقی از توابع مشخصه روی X است. به عبارتی $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ساده است اگر و تنها اگر بردش یک مجموعه‌ی متناهی در $\mathbb{R}$ باشد. در واقع، داریم

$$\varphi = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \chi_{E_i},$$

که در آن $E_۱, \ldots, E_n$ دوبدو مجزا و $X = \cup_{i=۱}^{n} E_i$ و $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ حقیقی و متمایز از یکدیگرند. این نمایش از تابع ساده را **نمایش استاندارد** آن می‌نامیم. در این فصل برای نمایش تابع ساده

---

[8] Simple function

از نمایش استاندارد آن استفاده خواهیم کرد. در مثال ۸.۳، دیدیم که تابع مشخصه‌ی χ_E، اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد تابع ساده‌ی φ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر E_iها اندازه‌پذیر باشند. همچنین اگر φ تابعی ساده روی X باشد، آنگاه φ روی هر $E \subseteq X$ نیز تابعی ساده است. در واقع از اینکه برد φ روی X مجموعه‌ای متناهی است، برد φ روی E نیز متناهی است.

لم ۲۰.۳. اگر $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ توابعی ساده روی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $c_۱$ و $c_۲$ اعداد حقیقی و دلخواه باشند، آنگاه $c_۱\varphi_۱ + c_۲\varphi_۲$ و $\varphi_۱\varphi_۲$، توابعی ساده روی X هستند.

اثبات : به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

تعریف ۲۱.۳. فرض کنیم $\varphi = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ یک تابع ساده‌ی اندازه‌پذیر با نمایش استاندارد روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد، آنگاه **انتگرال لبگ** φ روی $E \in \mathcal{A}$ را به صورت

$$\int_E \varphi(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mu(E \cap E_i).$$

تعریف می‌کنیم. (همانطور که قرارداد کردیم $۰ = \pm\infty \cdot ۰$ در نظر می‌گیریم). توجه داشته باشید که این مقدار ممکن است برابر با $\pm\infty$ باشد. در صورتی که $\int_E \varphi(x)\, d\mu(x)$ تعریف شده باشد (به صورت $\infty - \infty$ نباشد)، گوییم انتگرال φ روی E موجود است. همچنین اگر $\int_E \varphi(x)\, d\mu(x)$ موجود و متناهی باشد، φ را **انتگرال‌پذیر** روی E گوییم. در ضمن برای راحتی به جای $\int_E \varphi(x)\, d\mu(x)$ از $\int_E \varphi\, d\mu$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۲.۳. فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم. توابع ساده‌ی $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ را به صورت

$$\varphi_۱(x) = \begin{cases} ۱ & x \in [۰, ۱] \cap Q^c, \\ ۰ & \text{غیره}. \end{cases} \qquad \varphi_۲(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q^c, \\ ۰ & x \in Q. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_۱\, dm = ۱ \cdot ۱ + ۰ \cdot \infty = ۱, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_۲\, dm = ۱ \cdot \infty + ۰ \cdot ۰ = \infty$$

بنابراین هر دو انتگرال موجود و $\varphi_۱$ انتگرال‌پذیر است.

مثال ۲۳.۳. فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم. تابع ساده‌ی $\varphi_{۳}$ را به صورت

$$\varphi_{۳}(x) = \begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ -۱ & x < ۰, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{۳}\, dm = (۱ \cdot \infty) + (-۱ \cdot \infty) = \infty - \infty.$$

بنابراین انتگرال $\varphi_{۳}$ تعریف نشده است.

قضیه ۲۴.۳. **فرض کنیم φ و ψ توابعی ساده، اندازه‌پذیر و نامنفی روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$، E و F مجموعه‌هایی دلخواه و اندازه‌پذیر باشند.**

الف) اگر E از اندازه‌ی صفر باشد، آنگاه $\int_E \varphi\, d\mu = ۰$.

ب) به ازای هر $c \geq ۰$، $\int_E c\varphi\, d\mu = c \int_E \varphi\, d\mu$.

پ) $\int_E \varphi\, d\mu = \int_X \varphi \chi_E\, d\mu$.

ت) اگر $E \cap F = \emptyset$، آنگاه $\int_{E\cup F} \varphi\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_F \varphi\, d\mu$.

ث) اگر φ و ψ تقریبا همه‌جا روی E برابر باشند، آنگاه $\int_E \varphi\, d\mu = \int_E \psi\, d\mu$.

ج) $\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi\, d\mu$.

ح) اگر $\varphi \leq \psi$ روی E باشد، آنگاه $\int_E \varphi\, d\mu \leq \int_E \psi\, d\mu$.

اثبات : **الف)**، (ب) و (پ) نتیجه‌ی مستقیم تعریف هستند.

ت) با توجه به تعریف و با فرض اینکه $\varphi = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ نمایش استاندارد φ باشد، داریم

$$\begin{aligned} \int_{E\cup F} \varphi\, d\mu &= \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap (E \cup F)) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap E) + \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap F) \\ &= \int_E \varphi\, d\mu + \int_F \varphi\, d\mu. \end{aligned}$$

ث) با توجه به فرض، $\{x \in E : \varphi(x) \neq \psi(x)\} \subseteq N$ که $\mu(N) = ۰$. در این صورت با

توجه به قسمت‌های (الف) و (ت)، داریم

$$\begin{aligned}\int_E \varphi\, d\mu &= \int_{E-N} \varphi\, d\mu + \int_N \varphi\, d\mu = \int_{E-N} \varphi\, d\mu \\ &= \int_{E-N} \psi\, d\mu = \int_{E-N} \psi\, d\mu + \int_N \psi\, d\mu = \int_E \psi\, d\mu.\end{aligned}$$

ج) فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$ و $\sum_{j=۱}^{n} \beta_j \chi_{F_j}$ به ترتیب نمایش‌های استاندارد φ و ψ باشند. گردایه‌ای از عناصر مجزا در $\mathcal{A}$ را به صورت

$$\{G_{i,j} = E_i \cap F_j : i = ۱, ..., m,\ j = ۱, ..., n\}$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت $X = \cup_{i=۱}^{m} \cup_{j=۱}^{n} G_{i,j}$ و داریم

$$\int_X \varphi\, d\mu = \sum_{i=۱}^{m} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=۱}^{m} \alpha_i \left[\sum_{j=۱}^{n} \mu(G_{i,j})\right] = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \alpha_i \mu(G_{i,j}).$$

و بطور مشابه

$$\int_X \psi\, d\mu = \sum_{j=۱}^{n} \beta_j \mu(F_j) = \sum_{j=۱}^{n} \beta_j \left[\sum_{i=۱}^{m} \mu(G_{i,j})\right] = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \beta_j \mu(G_{i,j}).$$

از طرف دیگر از اینکه مقادیر $\varphi + \psi$ روی $G_{i,j}$ برابر با $\alpha_i + \beta_j$ است، داریم

$$\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} (\alpha_i + \beta_j)\mu(G_{i,j}).$$

با توجه به روابط بالا داریم $\int_X (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_X \varphi\, d\mu + \int_X \psi\, d\mu$. حال با بهره‌گیری از قسمت (پ)، حکم برقرار است. همچنین اگر $\varphi \le \psi$ روی E باشد، آنگاه روی هر $G_{i,j} \cap E \neq \emptyset$، $\alpha_i \le \beta_j$ و در نتیجه

$$\int_E \varphi\, d\mu = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \alpha_i \mu(G_{i,j} \cap E) \le \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} \beta_j \mu(G_{i,j} \cap E) = \int_E \psi\, d\mu,$$

و این قسمت (ح) را اثبات می‌کند.

■

لم ۲۵.۳. فرض کنیم φ تابعی ساده، نامنفی و اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. آنگاه تابع $\nu : \mathcal{A} \to [\circ, \infty]$، تعریف شده به صورت

$$\nu(E) = \int_E \varphi \, d\mu,$$

یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است.

اثبات : بوضوح $\nu(\emptyset) = \circ$. فرض کنیم $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ نمایش استاندارد φ و $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر دوبدو مجزا در $\mathcal{A}$ و $F = \cup_{j=1}^{\infty} F_j$. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_F \varphi \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(E_i \cap F\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap F_j)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_j} \varphi \, d\mu,\end{aligned}$$

بنابراین ν یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است. ■

قضیه ۲۶.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد.

الف) اگر $f : X \to [\circ, \infty]$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده‌ی اندازه‌پذیر چنان موجود است که $\circ \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq f$ و φ_n نقطه به نقطه به f همگراست. همچنین روی هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است، این همگرایی یکنواخت است.

ب) اگر $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده‌ی اندازه‌پذیر چنان موجود است که $\circ \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \ldots \leq |f|$ و φ_n نقطه به نقطه به f همگراست. همچنین روی هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است، این همگرایی یکنواخت است.

اثبات : الف) به ازای هر $n = 1, 2, \cdots$، تعریف می‌کنیم $F_n = \{x : f(x) \geq 2^n\}$ و

$$E_{n,k} = \{x : k 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) 2^{-n}\}, \qquad k = \circ, 1, \cdots, 2^{2n} - 1.$$

از اینکه f اندازه‌پذیر است، به ازای هر $n, k \in \mathbb{N}$، F_n و $E_{n,k}$ اندازه‌پذیرند.حال به ازای هر

$n = 1, 2, \cdots$، توابع ساده و اندازه‌پذیر را به صورت

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\chi_{E_{n,k}} + 2^n\chi_{F_n}.$$

تعریف می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$. به عبارتی ثابت می‌کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. بدین منظور دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $f(x) \geq 2^n$، آنگاه $\varphi_n(x) = 2^n \leq 2^{n+1} = \varphi_{n+1}(x)$.

(۲) $f(x) < 2^n$، آنگاه $k \in \{0, 1, ..., 2^{2n} - 1\}$ موجود است که

$$k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}.$$

بنابراین $(2k)2^{-n-1} \leq f(x) < 2(k+1)2^{-n-1}$ و در نتیجه

$$\varphi_n(x) = k2^{-n} = (2k)2^{-n-1} \leq \varphi_{n+1}(x)$$

بنابراین $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی است. حال نشان می‌دهیم این دنباله، نقطه به نقطه به f همگراست. فرض کنیم $x_0 \in X$ باشد. اگر $f(x_0) < \infty$ باشد، آنگاه Nای موجود است که $f(x_0) < 2^N$. در این صورت به ازای هر $n \geq N$، $f(x_0) < 2^n$. بنابراین $k \in \{0, 1, ..., 2^{2n} - 1\}$ موجود است که $k2^{-n} \leq f(x_0) < (k+1)2^{-n}$. بنابراین به ازای هر $n \geq N$، داریم

$$0 \leq f(x_0) - \varphi_n(x_0) < \frac{1}{2^n}$$

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = f(x_0)$. اگر $f(x_0) = \infty$، آنگاه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\varphi_n(x_0) = 2^n$. پس $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \infty$.

حال فرض کنیم f روی $A \subseteq X$ کراندار باشد. در این صورت N_1ای چنان موجود است که به ازای هر $x \in A$، $f(x) < 2^{N_1}$. از طرفی به ازای هر $\varepsilon > 0$، N_2ای چنان موجود است که $\frac{1}{2^{N_2}} < \varepsilon$. قرار می‌دهیم $N = \max\{N_1, N_2\}$. آنگاه به ازای هر $n \geq N$، داریم

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

و در نتیجه $\varphi_n(x)$ روی A بطور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.

ب) از اینکه f اندازه‌پذیر است، f^+ و f^- (قسمت‌های مثبت و منفی f) هر دو اندازه‌پذیر و نامنفی‌اند. بنابراین با توجه به قسمت (الف) دنباله‌ای از توابع ساده‌ی اندازه‌پذیر نامنفی و صعودی $\{\varphi_n^+\}$ و $\{\varphi_n^-\}$ وجود دارند که به ترتیب به f^+ و f^- به صورت نقطه به نقطه و روی هر مجموعه‌ای که f کراندار است، بطور یکنواخت همگراست. بنابراین با قرار دادن $\varphi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^-$ حکم بدست می‌آید. از طرفی دیگر $|\varphi_n| = \varphi_n^+ + \varphi_n^-$ و از صعودی بودن φ_n^+ و φ_n^- ها نتیجه می‌گیریم

$$\circ \leq |\varphi_1| \leq \cdots \leq |\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq \cdots \leq |f| = f^+ + f^-.$$

و در نتیجه حکم برقرار است. ■

۴.۳ انتگرال توابع نامنفی

نمادگذاری : در این بخش فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را ثابت در نظر گرفته و $L^+(E)$ را گردایه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $E \in \mathcal{A}$ مانند $f : E \to [\circ, \infty]$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۷.۳. اگر $f \in L^+(E)$ باشد، آنگاه انتگرال لبگ f یا برای سادگی، انتگرال f روی $E \in \mathcal{A}$ را با نماد $\int_E f\, d\mu$ نشان داده و به صورت

$$\int_E f\, d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi\, d\mu : \circ \leq \varphi \leq f, \ \text{ساده و اندازه‌پذیر است } \varphi\right\}.$$

تعریف می‌کنیم. توجه داشته باشید که این مقدار ممکن است برابر $+\infty$ باشد. در صورتی که $\int_E f\, d\mu$ متناهی باشد، f را **انتگرال‌پذیر** گوییم.

لم ۲۸.۳. اگر ψ تابعی ساده و اندازه‌پذیر با نمایش استاندارد $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ باشد، آنگاه

$$\sup\left\{\int_E \varphi\, d\mu : \circ \leq \varphi \leq \psi, \ \text{ساده و اندازه‌پذیر است } \varphi\right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap E).$$

به عبارتی تعاریف ارائه شده برای انتگرال ψ در ۲۱.۳ و ۲۷.۳ مقادیر یکسانی را بدست می‌دهند.

اثبات : با توجه به قضیه‌ی ۲۴.۳ قسمت (ح)، به آسانی می‌توان معادل بودن این تعاریف را بدست آورد. ■

تعریف ارائه شده در ۲۷.۳، برای محاسبه‌ی مقدار انتگرال کمی پیچیده است. در واقع، این تعریف، صرفاً، یک تعریف ریاضی از انتگرال بوده و بیشتر برای مقاصد تحلیلی انتگرال کاربرد دارد.

در لم زیر می‌خواهیم تعریف ساده‌تری از انتگرال توابع نامنفی و اندازه‌پذیر را بیان کنیم که نه تنها به عنوان ابزاری مناسب در تجزیه و تحلیل قضایای مرتبط با انتگرال، بلکه روشی ساده‌تر برای محاسبه‌ی انتگرال لبگ را ارائه می‌دهد.

لم ۲۹.۳. اگر $f \in L^+(E)$، $E \in \mathcal{A}$ و $\{\hat{\varphi}_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E)$ باشد که نقطه به نقطه روی E به f همگراست، آنگاه

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu.$$

توجه داشته باشید که قضیه‌ی ۲۶.۳، وجود چنین دنباله‌ای را تضمین می‌کند.

اثبات : فرض کنیم $\{\hat{\varphi}_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E)$ و همگرا به f باشد. نشان می‌دهیم

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu = \sup\left\{\int_E \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f,\ \text{ساده و اندازه‌پذیر است } \varphi\right\}.$$

فرض کنیم φ تابعی ساده، اندازه‌پذیر، نامنفی و $0 \leq \varphi \leq f$ روی E باشد. با توجه به فرض، روی E، $\sup_n \hat{\varphi}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n = f \geq \varphi$ و در نتیجه $\int_E \varphi\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu$. بنابراین

$$\sup\left\{\int_E \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f,\ \text{ساده و اندازه‌پذیر است } \varphi\right\} \leq \lim_{n\to\infty} \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu.$$

از طرفی، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu \in \left\{\int_E \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f,\ \text{ساده است } \varphi\right\}.$$

حال از صعودی بودنِ دنباله‌ی $\{\int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu\}$، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu = \sup_n \int_E \hat{\varphi}_n\, d\mu \leq \left\{\int_E \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f,\ \text{ساده و اندازه‌پذیر } \varphi\right\}.$$

بنابراین حکم برقرار است. ■

مثال ۳۰.۳. فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} dm$،

دنباله‌ی صعودی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده در $L^+(\mathbb{R})$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ \frac{1}{2^2} & 1 < x \leq 2, \\ 0 & 2 < x. \end{cases}$$

آنگاه $\int_{[1,\infty)} \varphi_1 \, dm = \int_{[1,2)} \varphi_1 \, dm = 1 \cdot \frac{1}{2^2}$.

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ 1/(\frac{3}{2})^2 & \frac{2}{2} < x \leq \frac{3}{2}, \\ 1/(\frac{4}{2})^2 & \frac{3}{2} < x \leq \frac{4}{2}, \\ 1/(\frac{5}{2})^2 & \frac{4}{2} < x \leq \frac{5}{2}, \\ 1/(\frac{6}{2})^2 & \frac{5}{2} < x \leq \frac{6}{2}, \\ 0 & 3 < x. \end{cases}$$

آنگاه $\int_{[1,\infty)} \varphi_2 \, dm = 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}\right)$. در حالت کلی

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ 1/(1 + \frac{k}{2^{n-1}})^2 & 1 + \frac{(k-1)}{2^{n-1}} < x \leq 1 + \frac{k}{2^{n-1}}, \quad 1 \leq k \leq n2^{n-1}, \\ 0 & n + 1 < x. \end{cases}$$

$$\int_{[1,\infty)} \varphi_n \, dm = 2^{n-1} \left[\frac{1}{(2^{n-1}+1)^2} + \cdots + \frac{1}{((n+1)2^{n-1})^2}\right].$$

می‌توان نشان داد $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی و نقطه به نقطه به $\frac{1}{x^2}$ روی $[1,\infty)$ همگراست. از طرفی

$$\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+2)(2^{n-1}+1)} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{((n+1)2^{n-1}+1)(n+1)2^{n-1}} < \int_{[1,\infty)} \varphi_n \, dm$$

$$< \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}(2^{n-1}+1)} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{((n+1)2^{n-1}-1)(n+1)2^{n-1}},$$

و در نتیجه $\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n-1}}} - \frac{1}{n+1+\frac{1}{2^{n-1}}} < \int_{[1,\infty)} \varphi_n \, dm < 1 - \frac{1}{n+1}$. لذا با توجه به لم ۲۹.۳،

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} \varphi_n \, dm = 1.$$

قضیه ۳۱.۳. فرض کنید $f, g \in L^+(X)$. آنگاه

الف) اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر باشد، آنگاه $\int_E f\,d\mu = 0$.

ب) اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و $f \leq g$ روی E باشد، آنگاه $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.

پ) اگر E و F مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر و $E \subseteq F$ باشد، آنگاه $\int_E f\,d\mu \leq \int_F f\,d\mu$.

ت) اگر E و F مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر و $E \cap F = \emptyset$ باشد، آنگاه

$$\int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu.$$

ث) اگر $c \geq 0$ و E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$.

ج) اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu$.

اثبات: **الف)** و (ب) نتیجه‌ی مستقیم تعریف است.

پ) نامساوی $\chi_F f \geq \chi_E f$ به همراه قسمت (ب) حکم را ثابت می‌کند.

ت) فرض کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E\cup F)$ و همگرا به f روی $E\cup F$ باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}
\int_{E\cup F} f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_{E\cup F}\varphi_n\,d\mu\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_E \varphi_n\,d\mu + \int_F \varphi_n\,d\mu\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_F \varphi_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu.
\end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از قسمت (ت) قضیه‌ی ۲۴.۳ بدست آمده است.

ث) فرض کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E)$ و همگرا به f روی E باشد. آنگاه به ازای هر $c \geq 0$، $\{c\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E)$ و همگرا به cf روی E است. حال با بکار بردن لم ۲۹.۳، داریم

$$c\int_E f\,d\mu = c\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E c\varphi_n\,d\mu = \int_E cf\,d\mu.$$

ج) فرض کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده در $L^+(E)$ و همگرا به f روی E باشد.

تعریف می‌کنیم

$$\hat{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & x \in E, \\ \circ & x \notin E. \end{cases}$$

آنگاه $\{\hat{\varphi}_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $L^+(X)$ و همگرا به $f\chi_E$ روی X است. حال با توجه به لم ۲۹.۳، داریم

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \hat{\varphi}_n\, d\mu = \int_X f\chi_E\, d\mu.$$

■

حال می‌خواهیم قضیه‌ای را بیان و اثبات کنیم که به **قضیه‌ی همگرایی یکنوا**[۹] معروف است. اهمیت این قضیه در برقراری ارتباط بین حد و انتگرال دنباله‌ای از توابع است.

قضیه ۳۲.۳. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $L^+(E)$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ روی E باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \sup_n \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

اثبات : از اینکه دنباله‌ی $\{\int f_n\}$، دنباله‌ای صعودی در $\mathbb{R}^*$ است، بنابراین $\lim \int_E f_n\, d\mu$ موجود و برابر با $\sup_n \int_E f_n\, d\mu$ است. (ممکن است برابر با $+\infty$ باشد). از طرفی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \leq f$، پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f$ و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \leq \int_E f d\mu. \tag{۱.۳}$$

حال فرض می‌کنیم φ تابعی ساده و اندازه‌پذیر با $\circ \leq \varphi \leq f$ باشد. $\alpha \in (\circ, ۱)$ را دلخواه در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\} \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots).$$

از صعودی و اندازه‌پذیر بودن دنباله‌ی $\{f_n\}$، نتیجه می‌گیریم $\{E_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی و اندازه‌پذیر است. همچنین $E = \cup_{n=۱}^{\infty} E_n$، در واقع به ازای هر $x \in E$، اگر $f(x) = \circ$، آنگاه $x \in E_۱$ و اگر $f(x) > \circ$، آنگاه از اینکه $\alpha < ۱$، داریم $f(x) > \alpha\varphi(x)$ و در نتیجه nای چنان موجود

[۹] Monotone Convergence Theorem

است که $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$. همچنین

$$\int_E f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi\, d\mu \qquad (n = ۱, ۲, ...).$$

با حدگیری از طرفین رابطه‌ی فوق و بکاربردن لم ۲۵.۳ و خاصیت پیوستگی از پایین تابع اندازه داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \geq \alpha \int_E \varphi\, d\mu. \qquad (۲.۳)$$

از اینکه رابطه‌ی (۲.۳) به ازای هر $۱ > \alpha > ۰$ برقرار است، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \geq \int_E \varphi\, d\mu. \qquad (۳.۳)$$

بالاخره از به اینکه رابطه‌ی (۳.۳)، به ازای هر تابع ساده φ، که $f \leq \varphi \leq ۰$، برقرار است، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu \geq \int_E f\, d\mu. \qquad (۴.۳)$$

و در نتیجه، حکم از روابط (۱.۳)، و (۴.۳)، بدست می‌آید. ■

تذکر ۳۳.۳. در لم ۲۹.۳، روش نسبتاً ساده‌تر و عملی‌تری را برای محاسبه‌ی انتگرال تابع نامنفی f بیان کردیم. محاسبات طولانی و خسته کننده در بدست آوردن توابع ساده‌ی صعودی و همگرا به f، مشکلی اساسی در این روش است. با این وجود، قضیه‌ی همگرایی یکنوا، به ما می‌گوید که انتگرال لبگ تابع نامنفی و اندازه‌پذیر f را روی E می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu,$$

که در آن، $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی و دلخواه در $L^+(E)$ و نقطه به نقطه همگرا به f است.

مثال ۳۴.۳. فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی $\int_{[۰,\infty)} x\, dm$، دنباله‌ی صعودی $\{f_n\}$ را به صورت $f_n(x) = \min\{x, n\}$ روی $[۰, \infty)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\int_{[۰,\infty)} f_n(x)\, dm = \int_{[۰,n)} x\, dm + \int_{[n,\infty)} n\, dm \geq \int_{[n,\infty)} n\, dm = \infty,$$

و در نتیجه $\int_{[0,\infty)} x\, dm = +\infty$.

تذکر ۳.۳۵. در قضیه‌ی همگرایی یکنوا، صعودی بودن دنباله‌ی $\{f_n\}$ ضروری است. به عنوان مثال در فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، با تعریف دنباله‌ی $\{f_n\}$ به صورت

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ 1 & x \geq n, \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم دنباله‌ی $\{f_n\}$ نزولی و همگرا به صفر است و در نتیجه $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0$. در حالی که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \infty$ و لذا $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \infty$.

قضیه ۳.۳۶. (قضیه‌ی لوی[10]). فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $E \in \mathcal{A}$ باشد.

الف) اگر $f_1, \cdots, f_N$ توابعی در $L^+(E)$ باشند، آنگاه

$$\int_E \sum_{n=1}^{N} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n\, d\mu.$$

ب) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^+(E)$ باشد، آنگاه

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

اثبات : الف) فرض کنیم f_1 و f_2 توابعی در $L^+(E)$ باشند. در این صورت با توجه به قضیه‌ی ۳.۲۶، می‌توان دنباله‌هایی صعودی $\{\varphi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ از توابع ساده در $L^+(E)$ را چنان یافت که به ترتیب به f_1 و f_2 همگرایند. بنابراین دنباله‌ی $\{\varphi_n+\psi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده‌ی صعودی در $L^+(E)$ و همگرا به $f_1 + f_2$ است. حال با بکار بردن قضایای همگرایی یکنوا و ۳.۲۴ قسمت (ج)، داریم

$$\begin{aligned}\int_E (f_1 + f_2)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_E (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n\, d\mu \\ &= \int_E f_1\, d\mu + \int_E f_2\, d\mu.\end{aligned}$$

[10] Levi

بنابراین با استقراء، به ازای هر $N \in \mathbb{N}$، داریم

$$\int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, d\mu.$$

ب) از اینکه دنباله‌ی $\{f_n\}$ در $L^+(E)$ است، بنابراین دنباله‌ی $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $L^+(E)$ و همگرا به $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ است. حال با بکار بردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا، داریم

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu &= \int_E \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \, d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۳۷.۳. فرض کنیم $f, g \in L^+(X)$ باشد. اگر f روی $E \in \mathcal{A}$ انتگرال‌پذیر و به ازای هر $x \in E$، $g(x) \leq f(x)$ باشد، آنگاه g نیز روی E انتگرال‌پذیر است و داریم

$$\int_E (f - g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu.$$

اثبات : از قضیه‌ی ۳۶.۳ قسمت (الف)، داریم

$$\int_E f \, d\mu = \int_E (f - g) \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

از اینکه طرف چپ متناهی است، جملات طرف راست نیز باید متناهی باشد و در نتیجه g روی E انتگرال‌پذیر است. ■

مثال ۳۸.۳. فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنیم که محاسبه‌ی مجموع

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} x^n (1 - x) dm$$

به صورت مستقیم کار آسانی نیست. در واقع بدست آوردن انتگرال لبگ توابع $\{x^n(1-x)\}_{n=1}^{\infty}$ با ابزارهای قابل دسترس، محاسبات طولانی و ملال‌آوری دارد. بدین منظور به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض

می‌کنیم $f_n(x) = x^n(۱ - x)$. در این صورت به ازای هر $x \in [۰, ۱]$، دنباله‌ی $\{f_n\}$، دنباله‌ای در $L^+([۰, ۱])$ است و

$$\sum_{n=۰}^{\infty} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=۰}^{m} (x^n - x^{n+۱}) = \lim_{m\to\infty} (۱ - x^{m+۱}) = \chi_{[۰,۱)}(x).$$

حال با بهره‌گیری از قضیه‌ی ۳۶.۳، داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \int_{[۰,۱]} x^n(۱ - x)\, dm = \int_{[۰,۱]} \sum_{n=۰}^{\infty} x^n(۱ - x)\, dm = \int_{[۰,۱]} \chi_{[۰,۱)}\, dm = ۱.$$

مثال ۳۹.۳. تابع $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که به ازای هر $x \in C$ که C مجموعه‌ی سه‌–سه‌ای کانتور است، $f(x) = ۰$ و روی هر بازه‌ی حذف شده به طول $\frac{۱}{۳^n}$، $f(x) = n$. (تعریف مجموعه‌ی کانتور را می‌توانید در فصل قبل، بخش ۱۱.۲ ببینید). انتگرال لبگ تابع f را روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ بیابید.

حل: با فرض اینکه $I_{۱,۱}$ بازه‌ی حذف شده در مرحله‌ی اول و $I_{۲,۱}, I_{۲,۲}$ بازه‌های حذف شده در مرحله‌ی دوم و $I_{n,۱}, \cdots, I_{n,۲^{n-۱}}$ بازه‌های حذف شده در مرحله‌ی nام، ساخت مجموعه‌ی کانتور باشد، خواهیم داشت

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \in C \\ n & x \in I_{n,۱}, \cdots, I_{n,۲^{n-۱}}. \end{cases}$$

به عبارتی $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} n\chi_{(\bigcup_{k=۱}^{n} I_{n,۲k-۱})}$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \int_{[۰,۱]} f\, dm &= \int_{[۰,۱]} \left[\sum_{n=۱}^{\infty} n\chi_{(\bigcup_{k=۱}^{n} I_{n,۲k-۱})}\right] dm \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \left[\int_{[۰,۱]} n\chi_{(\bigcup_{k=۱}^{n} I_{n,۲k-۱})}\right] dm \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} n\,۲^{n-۱}\frac{۱}{۳^n} \\ &= \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n\right) = \frac{۳}{۲}\sum_{k=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^k = ۳. \end{aligned}$$

لم ۴۰.۳. فرض کنیم $f \in L^+(X)$ و تابعی انتگرال‌پذیر روی X باشد، در این صورت مجموعه‌ی $E = \{x : f(x) = \infty\}$، مجموعه‌ای با اندازه‌ی صفر است و در نتیجه f ت.هـ متناهی روی X است. همچنین مجموعه‌ی $F = \{x : f(x) > ۰\}$ یک مجموعه‌ی σ-متناهی است.

اثبات : قرار می‌دهیم $E_n = \{x : f(x) \geq n\}$. آنگاه $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر و $E = \cap_{n=۱}^{\infty} E_n$ است. از طرفی

$$\mu(E_۱) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq ۱\}) = \int_{E_۱} ۱ \, d\mu \leq \int_{E_۱} f \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu < \infty,$$

بنابراین از خاصیت پیوستگی از بالای تابع اندازه، داریم

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \int_{E_n} n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \int_{E_n} f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \int_X f = ۰.$$

حال قرار می‌دهیم $F_n = \{x : f(x) \geq \frac{۱}{n}\}$. آنگاه دنباله‌ی $\{F_n\}$ صعودی و $F = \cup_{n=۱}^{\infty} F_n$. از طرفی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\mu(F_n) = n \int_{F_n} \frac{۱}{n} \, d\mu \leq n \int_{F_n} f \, d\mu \leq n \int_X f \, d\mu < \infty$$

بنابراین حکم برقرار است. ∎

تذکر ۴۱.۳. عکس مطلب در لم ۴۰.۳، برقرار نیست. به عنوان مثال در فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، تابع $f(x) = x\chi_{[۰,\infty)}(x)$، **ت.هـ** متناهی روی $\mathbb{R}$ است. در واقع $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$، تهی است و لذا از اندازه‌ی صفر است، در حالی که f تابعی انتگرال‌پذیر نمی‌باشد (مثال ۳۴.۳، را ببینید).

قضیه ۴۲.۳. (پیوستگی انتگرال نسبت به اندازه). فرض کنیم $f \in L^+(X)$ و تابعی انتگرال‌پذیر باشد. آنگاه

$$\forall \varepsilon > ۰, \quad \exists \delta > ۰, \quad \forall E \in \mathcal{A}, \quad \mu(E) \leq \delta \implies \int_E f \, d\mu < \varepsilon.$$

اثبات : دنباله‌ی $\{f_n\}$ را به صورت $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی و نقطه به نقطه همگرا به f است. بنابه قضیه‌ی همگرایی یکنوا، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu,$$

بنابراین به ازای هر $\varepsilon > ०$، $N \in \mathbb{N}$ای موجود است که به ازای هر $n \geq N$،

$$\int_X f\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu = \int_X (f - f_n)\, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{۲}.$$

که در آن تساوی بیان شده از انتگرال‌پذیری f و نتیجه‌ی ۳۷.۳ بدست آمده است. حال با انتخاب $\delta = \frac{\varepsilon}{۲N}$، به ازای هر $E \in \mathcal{A}$ که $\mu(E) < \delta$ باشد، داریم

$$\int_E f\, d\mu = \int_E (f - f_N)\, d\mu + \int_E f_N\, d\mu \leq \int_E (f - f_N)\, d\mu + N\mu(E) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

■

تذکر ۴۳.۳. در قضیه‌ی قبل انتگرال‌پذیری f ضروری است. به عنوان مثال، در فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، فرض کنیم $f(x) = x\chi_{[०,\infty)}(x)$. آنگاه $\int_{\mathbb{R}} f\, dm = \infty$ و در نتیجه f انتگرال‌پذیر نیست. فرض کنیم $\varepsilon = ۱$ باشد. در این صورت به ازای هر $\delta > ०$، $n \in \mathbb{N}$ای چنان موجود است که $\frac{۱}{n} < \delta$. قرار می‌دهیم $E_n = [n, n + \frac{۱}{n})$. آنگاه $m(E_n) = \frac{۱}{n} < \delta$، در حالی که

$$\int_{E_n} f\, dm = ۱ + \frac{۱}{۲n^۲} > \varepsilon.$$

لم ۴۴.۳. اگر $f \in L^+(X)$، آنگاه $\int_X f\, d\mu = ०$ اگر و تنها اگر f ت.ه روی X صفر باشد.

اثبات : اگر f ت.ه روی X برابر با صفر باشد، آنگاه با توجه به تعریف انتگرال، $\int_X f\, d\mu = ०$. برای اثبات عکس مطلب، قرار می‌دهیم $E_n = \{x : f(x) \geq \frac{۱}{n}\}$. آنگاه

$$\{x : f(x) > ०\} = \bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n.$$

بنابراین اگر f ت.ه برابر با صفر نباشد، آنگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $\mu(E_n) > ०$ و در نتیجه

$$\int_X f\, d\mu \geq \int_{E_n} f\, d\mu \geq \frac{۱}{n}\mu(E_n) > ०.$$

و این یک تناقض است. ■

لم ۴۵.۳. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $L^+(E)$ و ت.ه روی E به $f \in L^+(E)$ همگرا باشد، آنگاه $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$.

اثبات : فرض کنیم $F = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. آنگاه $F \subseteq \bar{F}$ که $\bar{F}$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با $\mu(\bar{F}) = 0$ است. بنابراین تساوی‌های $f = f\chi_{\bar{F}^c}$ و $f_n = f_n\chi_{\bar{F}^c}$ **ت.ه** روی E برقرار است. حال با بکار بردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا روی دنباله‌ی صعودی $\{f_n\chi_{\bar{F}^c}\}$ و همگرا به $f\chi_{\bar{F}^c}$، داریم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f\chi_{\bar{F}^c}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\chi_{\bar{F}^c}\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$$

■

قضیه ۴۶.۳. (لم فاتو[۱۱]). اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^+(E)$ باشد، آنگاه

$$\int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$$

اثبات : با توجه به تعریف، $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n} f_k$. از طرفی دنباله‌ی $\{\inf_{k\geq n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای صعودی در $L^+(E)$ است، بنابراین از قضیه‌ی همگرایی یکنوا داریم

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu &= \int_E \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} f_k)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E(\inf_{k\geq n} f_k)\,d\mu\\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_E \inf_{k\geq n} f_k\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.\end{aligned}$$

که در آن تساوی سوم از این حقیقت ناشی می‌شود که دنباله‌ی $\{\inf_{k\geq n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی در $\mathbb{R}^*$ است و در نتیجه حدش موجود و برابر با حد پایینی‌اش است. همچنین از اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\inf_{k\geq n} f_k \leq f_n$، نامساوی آخری نتیجه می‌شود و حکم برقرار است. ■

نتیجه ۴۷.۳. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^+(E)$ و ت.ه روی E به تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f همگرا باشد، آنگاه

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$$

اثبات : اگر به ازای هر $x \in E$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ باشد، آنگاه حکم بلافاصله از لم فاتو بدست می‌آید. روند اثبات در صورتی که f_n **ت.ه** روی E به f همگرا باشد، دقیقاً مشابه روند اثبات لم ۴۵.۳ است. ■

[۱۱] Fatou's Lemma

تذکر ۴۸.۳. در لم فاتو نامساوی می‌تواند به صورت اکید برقرار باشد. به عنوان مثال در فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم $f_n(x) = \chi_{[n,n+۱]}(x)$. در این صورت به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = ۰$. در حالی که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = ۱$. آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm = ۰ < ۱ = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm.$$

تذکر ۴۹.۳. در لم فاتو نامنفی بودن دنباله شرط ضروری است. در واقع، در فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، با فرض $f_n(x) = -\frac{۱}{n}\chi_{[۰,n]}(x)$. در این صورت روی $\mathbb{R}$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰$، در حالی که

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm = ۰ > -۱ = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm.$$

۵.۳ انتگرال توابع اندازه‌پذیر

در بخش قبل انتگرال توابع نامنفی اندازه‌پذیر را تعریف و قضایای مربوط به آن را بیان و اثبات کردیم. در این بخش، پا را فراتر نهاده و قید نامنفی بودن را حذف و مفاهیم بخش قبل را روی کلیه‌ی توابع اندازه‌پذیر توسیع می‌دهیم. در این بخش نیز فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را ثابت در نظر می‌گیریم.

یادآوری : اگر $f : X \to \mathbb{R}^*$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه

$$f^+(x) = \max\{f(x), ۰\} \quad , \quad f^-(x) = \max\{-f(x), ۰\},$$

را به ترتیب قسمت‌های مثبت و منفی f گوییم.

تعریف ۵۰.۳. اگر $f : X \to \mathbb{R}^*$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، آنگاه انتگرال لبگ تابع f روی $E \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

در صورتی که این مقدار تعریف شده باشد (به صورت $\infty - \infty$ نباشد)، آنگاه گوییم انتگرال تابع f موجود است. در ضمن اگر $\int_E f\, d\mu$ موجود و متناهی باشد، آنگاه گوییم f **انتگرال‌پذیر** است. گردایه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر و انتگرال‌پذیر $f : X \to \mathbb{R}^*$، روی $E \in \mathcal{A}$ را با $\mathfrak{L}^۱(E)$ نشان خواهیم داد.

تذکر ۵۱.۳. الف) انتگرال f روی $E \in \mathcal{A}$ موجود است اگر و تنها اگر حداقل یکی از مقادیر $\int_E f^+ d\mu$ و $\int_E f^- d\mu$ متناهی باشد.

ب) f روی $E \in \mathcal{A}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر هر دو مقدار $\int_E f^+ d\mu$ و $\int_E f^- d\mu$ موجود و متناهی باشد.

پ) از اینکه $|f| = f^+ + f^-$، مشاهده می‌کنیم f روی $E \in \mathcal{A}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ روی $E \in \mathcal{A}$ انتگرال‌پذیر باشد.

نتیجه ۵۲.۳. اگر $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ باشد، آنگاه f تابعی تقریباً همه‌جا متناهی روی E است. همچنین $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$، یک مجموعه‌ی σ-متناهی است.

اثبات : از اینکه $f \in \mathfrak{L}^1(E)$، پس $|f| \in \mathfrak{L}^1(E)$. حال با بکار بردن قضیه‌ی ۴۰.۳، برای $|f|$ نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. ■

قضیه ۵۳.۳. گردایه‌ی توابع $\mathfrak{L}^1(E)$، یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ و انتگرال یک تابعک خطی روی این فضا است، به عبارتی اگر $f, g \in \mathfrak{L}^1(E)$ و $a \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه $af + g \in \mathfrak{L}^1(E)$ و

$$\int_E (af+g)\, d\mu = a\int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.$$

اثبات : با توجه به تذکر ۵۱.۳ و اینکه $|af+g| \leq |a||f| + |g|$، نتیجه می‌گیریم $\mathfrak{L}^1(E)$ یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی است. فرض می‌کنیم $a \geq 0$، آنگاه $(af)^+ = af^+$ و $(af)^- = af^-$. بنابراین

$$\int_E af\, d\mu = \int_E af^+\, d\mu - \int_E af^-\, d\mu = a\int_E f\, d\mu.$$

حال فرض کنیم $a = -1$، آنگاه $(-f)^+ = f^-$ و $(-f)^- = f^+$. بنابراین

$$\int_E (-f)\, d\mu = \int_E f^-\, d\mu - \int_E f^+\, d\mu = -\int_E f\, d\mu.$$

بالاخره اگر $a < 0$، آنگاه $af = -|a|f$ و در نتیجه

$$\int_E af\, d\mu = -\int_E |a|f\, d\mu = -|a|\int_E f\, d\mu = a\int_E f\, d\mu.$$

پس به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $\int_E af\, d\mu = a\int_E f\, d\mu$. حال فرض می‌کنیم $h = f + g$. آنگاه

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \implies h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

بنابراین از قضیه‌ی ۳۶.۳ داریم

$$\int_E h^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu + \int_E g^-\, d\mu = \int_E h^-\, d\mu + \int_E f^+\, d\mu + \int_E g^+\, d\mu,$$

حال با توجه به متناهی بودن جملات طرفین تساوی، داریم

$$\begin{aligned}\int_E h\, d\mu &= \int_E h^+\, d\mu - \int_E h^-\, d\mu\\ &= \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu + \int_E g^+\, d\mu - \int_E g^-\, d\mu\\ &= \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.\end{aligned}$$

■

لم ۵۴.۳. اگر $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ باشد، آنگاه $|\int_E f\, d\mu| \leq \int_E |f|\, d\mu$ و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که f ت.ه. مثبت یا ت.ه. منفی روی E باشد.

اثبات : برای اثبات نابرابری،

$$\left|\int_E f\, d\mu\right| = \left|\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu\right| \leq \int_E f^+\, d\mu + \int_E f^-\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu.$$

فرض کنیم تساوی برقرار باشد و $\int_E f\, d\mu \geq 0$. آنگاه $\int_E |f|\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ و در نتیجه $\int_E (|f| - f)\, d\mu = 0$. حال از رابطه‌ی $|f| - f \geq 0$ و لم ۴۴.۳، نتیجه می‌گیریم f و $|f|$ تقریباً همه‌جا روی E برابرند و در نتیجه، f ت.ه. مثبت روی E است. اگر $\int_E f\, d\mu < 0$ باشد، آنگاه $\int_E |f|\, d\mu = -\int_E f\, d\mu$ و در نتیجه $\int_E (|f| + f)\, d\mu = 0$. با استدلالی مشابه، نتیجه می‌گیریم $-f$ و $|f|$ ت.ه. برابرند و در نتیجه، f ت.ه. منفی روی E است. ■

نتیجه ۵۵.۳. اگر $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$ باشد، آنگاه

الف) اگر f ت.ه. روی X صفر باشد، آنگاه $\int_X f\, d\mu = 0$.

ب) اگر $f \leq g$ روی X باشد، آنگاه $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.

پ) توابع f و g ت.هـ. روی X برابرند اگر و تنها اگر $\int_X |f-g|\,d\mu = ۰$ اگر و تنها اگر به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$.

اثبات : الف) اگر f ت.هـ. روی X برابر با صفر باشد، آنگاه $|f|$ ت.هـ. روی X برابر با صفر است. حال لم قبلی و لم ۴۴.۳ نتیجه را بدست می‌دهد.

ب) از اینکه $g = f + (g-f)$، داریم

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X (g-f)^+\,d\mu - \int_X (g-f)^-\,d\mu.$$

با توجه به فرض ت.هـ. روی X $g - f \geq ۰$ و در نتیجه $(g-f)^-$ ت.هـ. روی X برابر با صفر است. بنابراین حکم از تساوی بالا و قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

پ) اگر توابع f و g ت.هـ. روی X برابر باشند، آنگاه $|f-g|$ ت.هـ. روی X برابر با صفر است. بنابراین از لم ۴۴.۳، $\int_X |f-g|\,d\mu = ۰$. حال فرض می‌کنیم $\int_X |f-g|\,d\mu = ۰$، آنگاه با توجه به لم ۵۴.۳، به ازای هر $E \in \mathcal{A}$ داریم

$$\left|\int_E f\,d\mu - \int_E g\,d\mu\right| \leq \int_X \chi_E|f-g|\,d\mu \leq \int_X |f-g|\,d\mu = ۰.$$

بنابراین $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$. بالاخره فرض می‌کنیم به ازای هر $E \in \mathcal{A}$ تساوی $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ برقرار باشد. بنابه برهان خلف فرض کنیم f و g ت.هـ. روی X برابر نباشند، آنگاه حداقل یکی از توابع $(f-g)^+$ و $(f-g)^-$ روی مجموعه‌ای با اندازه‌ی مثبت غیر صفر خواهد بود. فرض کنیم

$$E = \{x : (f-g)^+ > ۰\},$$

از اندازه‌ی مثبت باشد. در این صورت $(f-g)^-$ روی E برابر با صفر خواهد شد. بنابراین

$$\int_E f\,d\mu - \int_E g\,d\mu = \int_E (f-g)^+\,d\mu > ۰$$

و این یک تناقض است.

■

لم ۵۶.۳. فرض کنیم $f : X \to \mathbb{R}^*$ تابعی اندازه‌پذیر، E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و F زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از E باشد.

الف) اگر انتگرال f روی E موجود باشد، آنگاه انتگرال f روی F موجود است.

ب) اگر f روی E انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی F نیز انتگرال‌پذیر است.

اثبات : از اینکه انتگرال f روی E موجود است، پس حداقل یکی از انتگرال‌های $\int_E f^+ d\mu$ و $\int_E f^- d\mu$ متناهی است. حال با بهره‌گیری از قضیه‌ی ۳۱.۳ قسمت (پ)، نتیجه‌ی مورد نظر بدیهی است. اثبات قسمت بعدی نیز دقیقاً مشابه همین قسمت است. ■

لم ۵۷.۳. فرض کنیم $f : X \to \mathbb{R}^*$ تابعی اندازه‌پذیر، E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و انتگرال f روی E موجود باشد.

الف) اگر $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبدو مجزا چنان باشد که $\cup_{i=1}^{n} E_i = E$ باشد، آنگاه

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, d\mu.$$

ب) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبدو مجزا چنان باشد که $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ باشد، آنگاه

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu.$$

پ) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد که $\lim_{n\to\infty} E_n = E$، آنگاه

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu.$$

اثبات : مسئله‌ی حل شده‌ی ۹ از همین فصل را ببینید. ■

تذکر ۵۸.۳. قسمت (پ) در لم قبلی بیان می‌کند که اگر $\int_E f d\mu$ موجود باشد، آنگاه می‌توان آن را به عنوان حد دنباله‌ای صعودی مانند $\{\int_{E_n} f\, d\mu\}$ از اعداد حقیقی توسیع یافته محاسبه کرد. توجه داشته باشید که عکس مطلب بیان شده در قسمت (پ) در حالت کلی درست نیست. در واقع اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد که $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ و f چنان تابعی باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\int_{E_n} f d\mu$ موجود و $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu$ موجود باشد، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $\int_E f d\mu$ موجود است. مثال زیر را ببینید.

مثال ۵۹.۳. فرض کنیم $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ فضای اندازه‌ی لبگ و $E = [0, \infty)$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $E_n = [0, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$ باشد. در این صورت $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های لبگ

اندازه‌پذیر بوده و $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ با قرار دادن $F_\circ = \emptyset$ و $F_n = E_n - E_{n-1}$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = (-1)^n, \quad x \in F_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

آنگاه $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m(F_n) = \frac{1}{n}$ و در نتیجه

$$\int_{E_n} f\, dm = \int_{\bigcup_{k=1}^n F_k} f\, dm = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} f\, dm = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k},$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n} \in \mathbb{R}.$$

در حالی که داریم

$$\int_E f^+\, dm = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty,$$

و

$$\int_E f^- dm = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty.$$

بنابراین $\int_E f\, dm = \int_E f^+\, dm - \int_E f^-\, dm$ موجود نیست.

قضیه ۶۰.۳. فرض کنیم $f : X \to \mathbb{R}^*$ **تابعی اندازه‌پذیر روی** $E \in \mathcal{A}$، $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ **دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر،** $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ و $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu < \infty$ **باشد. آنگاه** $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ و $\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu$.

اثبات : به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم $f_n = |f|\chi_{E_n}$. در این صورت دنباله‌ی $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی، نامنفی و $\lim_{n\to\infty} f_n = |f|$ روی E است. حال از قضیه‌ی همگرایی یکنوای لبگ،

$$\int_E |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, d\mu < \infty.$$

بنابراین $|f| \in \mathfrak{L}^1(E)$ و در نتیجهٔ $f \in \mathfrak{L}^1(E)$ است. بالاخره با توجه به لم ۵۷.۳ قسمت (پ) داریم $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu$. ■

در دنیای علم ریاضی، پایداری یک مفهوم ریاضی در مسائل گذر از حد، یکی از شاخصه‌های

اهمیت و قدرتمندی آن مفهوم ریاضی محسوب می‌شود. به زبانی ساده‌تر، هر مفهوم ریاضی که با مفروضات ضعیف‌تری بتواند در مسئله‌ی گذر از حد پایا باشد، به همان قدر مفهومی ارزشمند خواهد بود. در طی مثال‌هایی دیدیم که در حالت کلی حدِ انتگرال یک دنباله از توابع با انتگرالِ حد دنباله برابر نیست (تذکر ۳۵.۳ را ببینید) و در نتیجه مفهوم انتگرال لبگ در حالت کلی به مانند مفهوم انتگرال ریمان در مسئله‌ی گذر از حد پایدار نیست. مثال زیر را ببینید.

مثال ۶۱.۳. دنباله‌ی $\{f_n\}$ را روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f_n(x) = \begin{cases} ۱ & x = r_۱, r_۲, \cdots, r_n, \\ ۰ & \text{غیره}. \end{cases}$$

که در آن $\{r_۱, r_۲, \cdots, r_n, \cdots\}$ شمارشی از اعداد گویای بازه‌ی $[۰, ۱]$ است. در این صورت $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر روی بازه‌ی $[۰, ۱]$ است و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $\int_۰^۱ f_n(x)\,dx = ۰$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int_۰^۱ f_n(x)\,dx = ۰$، اما $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ و $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ تابعی ریمان انتگرال‌پذیر نیست. بخش ۶.۳ را ببینید.

به منظور مقایسه و ارزشیابی این دو نظریه از انتگرال به لحاظ مسئله‌ی گذر از حد، به یادآوری قضیه‌ی گذر از حد برای نظریه‌ی انتگرال ریمان می‌پردازیم.

یادآوری : اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر روی بازه‌ی $[a, b]$ باشد و بطور یکنواخت به تابعی مانند f روی $[a, b]$ همگرا شود، آنگاه

الف) f **تابعی ریمان انتگرال‌پذیر روی $[a, b]$ است.**

ب) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$.

همانطور که در یادآوری بیان کردیم، تعویض جای انتگرال و حد، بدون فرض همگرایی یکنواخت میسر نیست و این یکی از نقاط ضعف نظریه‌ی انتگرال ریمان محسوب می‌شود. حال مسئله‌ی گذر از حد را برای انتگرال لبگ، در قالب قضیه‌ای مشهور به قضیه‌ی **همگرایی تسلطی لبگ**[۱۲] بیان و ثابت می‌کنیم، سپس با استفاده از این قضیه، در قضیه‌ی ۶۴.۳، قدرتمندی نظریه‌ی انتگرال لبگ را نسبت به نظریه‌ی انتگرال ریمان، از نقطه نظر مسئله‌ی گذر از حد به اثبات می‌رسانیم.

قضیه ۶۲.۳. فرض کنیم $f_n, f : X \to \mathbb{R}^*$ **توابعی اندازه‌پذیر و $f_n(x)$ ت.هـ. روی X به f همگرا باشد. اگر $g \in \mathfrak{L}^۱(X)$ چنان موجود باشد که ت.هـ. روی X داشته باشیم**

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots), \tag{۵.۳}$$

---

[۱۲] Lebesgue's Dominated Convergence Theorem

آنگاه $f \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

اثبات : با توجه به فرض (۵.۳)، داریم $|f| \leq g$ و در نتیجه $f \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد، به ازای هر $x \in X$،

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad , \qquad |f_n(x)|\leq g(x) \quad (n=۱,۲,۳,\ldots),$$

زیرا توابع ت.هـ. مساوی از دید انتگرال‌گیری غیرقابل تمیزند. (نتیجه‌ی ۵۵.۳ را ببینید). از اینکه $|f_n| \leq g$، بنابراین با بکار بردن لم فاتو روی دنباله‌های نامنفی $g - f_n \geq ۰$ و $g + f_n \geq ۰$، داریم

$$\int_X g\,d\mu+\int_X f\,d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X(g+f_n)\,d\mu=\int_X g\,d\mu+\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu,$$

$$\int_X g\,d\mu-\int_X f\,d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X(g-f_n)\,d\mu=\int_X g\,d\mu-\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu,$$

بنابراین

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\geq\int_X f\,d\mu\geq\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

و در نتیجه حکم برقرار است. ■

نتیجه ۶۳.۳. با مفروضات قضیه‌ی قبل، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\,d\mu=۰.$$

اثبات : از اینکه ت.هـ. روی X، $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ و $|f_n| \leq g$، بنابراین ت.هـ. روی X، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty}|f_n-f|=۰ \quad , \quad |f_n-f|\leq|f_n|+|f|\leq ۲g\in\mathfrak{L}^{۱}(X),$$

حال قضیه‌ی تسلطی لبگ حکم را بدست می‌دهد. ■

قضیه ۶۴.۳. فرض کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{L}^{۱}(X)$ و بطور

یکنواخت همگرا به تابع f باشد. آنگاه $f \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$ و

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

اثبات : فرض کنیم f_n بطور یکنواخت به f همگراست. در این صورت به ازای $\varepsilon = ۱$، $N \in \mathbb{N}$ای چنان موجود است که به ازای هر $x \in X$، داریم $|f(x)| < |f_N(x)| + ۱$. حال از متناهی بودن فضای اندازه و اینکه $f_N \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$، نتیجه می‌گیریم $f \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$. باز از همگرایی یکنواخت f_n به f و با فرض $\varepsilon = ۱$، $N \in \mathbb{N}$ای چنان موجود است که به ازای هر $x \in X$ و هر $n \geq N$، داریم

$$|f_n(x)| < (|f(x)| + ۱) \in \mathfrak{L}^{۱}(X),$$

حال با بکار بردن قضیه‌ی تسلطی لبگ، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. ■

قضیه ۶۵.۳. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{L}^{۱}(X)$ باشد، بطوریکه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < \infty, \tag{۶.۳}$$

آنگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ ت.ه. روی X همگرا و متعلق به $\mathfrak{L}^{۱}(X)$ است و

$$\int_X \sum_{n=۱}^{\infty} f_n\,d\mu = \sum_{n=۱}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

اثبات : با توجه قضیه‌ی ۳۶.۳ و شرط (۶.۳)، داریم

$$\int_X \sum_{n=۱}^{\infty} |f_n|\,d\mu = \sum_{n=۱}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < \infty.$$

بنابراین $g = \sum_{n=۱}^{\infty} |f_n| \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$. پس از لم ۴۰.۳، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} |f_n(x)|$ ت.ه. متناهی روی X است و در نتیجه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ ت.ه. روی X همگراست. از اینکه به ازای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$\left|\sum_{n=۱}^{m} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=۱}^{m} |f_n(x)| \leq \sum_{n=۱}^{\infty} |f_n(x)| = g \in \mathfrak{L}^{۱}(X),$$

بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x) \in \mathfrak{L}^{۱}(X)$. حال با بهره‌گیری از قضیه‌ی تسلطی لبگ روی دنباله‌ی

$\{\sum_{n=1}^{m} f_n(x)\}_{m=1}^{\infty}$، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

■

تذکر ۶۶.۳. با توجه به قضیه فوق‌الذکر ۶۵.۳، اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{L}^1(X)$ باشد بطوریکه

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = \infty$.

۶.۳ مقایسه انتگرال ریمان و لبگ

در این بخش با یادآوری مفاهیم اساسی نظریه‌ی انتگرال ریمان و نمادهای مربوطه، به ارتباط دقیق این دو نظریه می‌پردازیم.

تعریف ۶۷.۳. مجموعه‌ی متناهی از نقاط $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ را یک **افراز** برای بازه‌ی $[a, b]$ گوییم، هرگاه

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

برای افراز $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ از $[a, b]$،

$$\|P\| := \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

را نرم افراز P گوییم. اگر P_1 و P_2 افرازهایی از $[a, b]$ باشند، بطوریکه $P_1 \subseteq P_2$ باشد، آنگاه گوییم P_2 تظریفی از P_1 است.

تعریف ۶۸.۳. فرض کنیم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار و $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد. قرار می‌دهیم

$$m_i := \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad , \quad M_i := \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

با توجه به نمادهای بالا، مجموع بالایی و پایینی تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$L(P,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad , \quad U(P,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

انتگرال پایینی و بالایی ریمان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{L(P,f) : \text{است } [a,b] \text{ افرازی از } P\},$$

و

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{U(P,f) : \text{است } [a,b] \text{ افرازی از } P\}.$$

از اینکه f تابعی کراندار فرض شده و بازه‌ی $[a,b]$ کراندار است، انتگرال‌های پایینی و بالایی ریمان هر دو موجود و کراندارند. به راحتی می‌توان نشان داد انتگرال بالایی ریمان همواره از انتگرال پایینی ریمان بزرگتر یا مساوی است و اگر انتگرال‌های پایینی و بالایی ریمان باهم برابر باشند، آنگاه گوییم f روی بازه‌ی $[a,b]$ **ریمان انتگرال‌پذیر** است و مقدار مشترک آن‌ها را انتگرال ریمان f روی بازه‌ی $[a,b]$ در نظر گرفته و با نماد $\int_a^b f$ نشان می‌دهیم. حال برای حسن ختام در بحث مربوط به انتگرال ریمان، قضیه‌ای را بدون اثبات بیان می‌کنیم. خواننده‌ی علاقمند برای مشاهده‌ی اثبات این قضایا می‌تواند منبع [۱۵] فصل اول را ببیند.

قضیه ۶۹.۳. فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. آنگاه

الف) اگر f تابعی پیوسته باشد، آنگاه f ریمان انتگرال‌پذیر است.

ب) اگر دنباله‌ی $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$، از افرازهای $[a,b]$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{n\to\infty} (U(P_n,f) - L(P_n,f)) = 0$$

آنگاه f ریمان انتگرال‌پذیر بوده و

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n,f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n,f).$$

پ) اگر f ریمان انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ از افرازهای $[a,b]$ چنان موجود است که P_n تظریفی از P_{n-1} بوده و $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ و $\lim_{n\to\infty} (U(P_n,f) - L(P_n,f)) = 0$.

حال به ارتباط مابین گردایه توابع ریمان انتگرال‌پذیر و لبگ انتگرال‌پذیر می‌پردازیم.

قضیه ۷۰.۳. اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f تابعی لبگ انتگرال‌پذیر بوده و

$$\int_a^b f\,dx = \int_{[a,b]} f\,dm.$$

اثبات : با توجه به کرانداری تابع f و از اینکه $m([a,b]) < \infty$ می‌باشد، برای اثبات انتگرال‌پذیری f، کافی است ثابت کنیم f تابعی اندازه‌پذیر است. از ریمان انتگرال‌پذیری f و با بهره‌گیری از قضیه ۶۹.۳، دنباله‌ی $\{P_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از افرازهای $[a,b]$ چنان موجود است که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، P_n تظریفی از $P_{n-۱}$ بوده و $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = ۰$ و

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f).$$

به ازای هر $n \geq ۱$ و $x \in [a,b]$، قرار می‌دهیم

$$\Psi_n(x) := \sum_{i=۱}^{n} m_i \chi_{[x_{i-۱},x_i)}(x) \quad , \quad \Phi_n(x) := \sum_{i=۱}^{n} M_i \chi_{[x_{i-۱},x_i)}(x).$$

در این صورت به ازای هر $n \geq ۱$، توابع ساده‌ی Φ_n و Ψ_n توابعی لبگ انتگرال‌پذیر بوده و

$$\int_{[a,b]} \Psi_n\,dm = L(P_n, f) \quad , \quad \int_{[a,b]} \Phi_n\,dm = U(P_n, f).$$

همچنین به ازای هر $x \in [a,b]$،

$$\Psi_n(x) \leq f(x) \leq \Phi_n(x). \tag{۷.۳}$$

از اینکه P_n تظریفی از $P_{n-۱}$ است، دنباله‌ی $\{\Psi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی و دنباله‌ی $\{\Phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی و در نتیجه $\{\Phi_n - \Psi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای نامنفی از توابع ساده و اندازه‌پذیر بوده و لذا از لم فاتو داریم

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \liminf_{n\to\infty}(\Phi_n - \Psi_n)\,dm &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_{[a,b]}(\Phi_n - \Psi_n)\,dm\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \Phi_n\,dm - \limsup_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \Psi_n\,dm
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{n\to\infty} U(P_n, f) - \limsup_{n\to\infty} L(P_n, f) \\
&= \circ
\end{aligned}
$$

بنابراین از لم ۴۴.۳، نتیجه می‌گیریم تساوی

$$\liminf_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \limsup_{n\to\infty} \Psi_n(x).$$

به صورت ت.ه. روی $[a,b]$ برقرار است. حال از رابطه‌ی (۷.۳) به همراه یکنوایی و کرانداری دنباله‌های $\{\Phi_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{\Psi_n\}_{n=۱}^{\infty}$، تساوی

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x),$$

به صورت ت.ه. روی $[a,b]$ برقرار است. بنابراین f تابعی اندازه‌پذیر و در نتیجه انتگرال‌پذیر است. از طرفی با استفاده از قضیه‌ی همگرایی یکنوای لبگ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \Psi_n \, dm = \int_{[a,b]} f \, dm.$$

بنابراین

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} \int \Psi_n \, dm = \int_{[a,b]} f.$$

و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. ■

تذکر ۷۱.۳. با توجه به قضیه‌ی ۷۰.۳، برای محاسبه‌ی مقدار انتگرال لبگ توابع ریمان انتگرال‌پذیر، کافی است مقدار انتگرال ریمان تابع را محاسبه کنیم و این کار با قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، برای بسیاری از توابع امری بسیار ساده است. البته توجه به این نکته ضروری است که از تلفیق این قضیه و لم ۵۷.۳ قسمت (پ)، در صورتی که شرایط لم ۵۷.۳ برقرار باشد، می‌توان روش بسیار مفیدی در محاسبه‌ی مقدار انتگرال لبگ تابع f روی بازه‌ی بیکران $[a,\infty)$ یا $(-\infty,a]$ بدست آورد. با مشاهده‌ی مثال زیر و مقایسه‌ی آن با مثال ۳۰.۳، زیبایی و کارایی قضیه‌ی فوق‌الذکر را بیش از پیش خواهید دید.

مثال ۷۲.۳. فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه‌ی $\int_{[۱,\infty)} \frac{۱}{x^۲} dm$، با توجه به اینکه تابع $\frac{۱}{x^۲}$ تابعی نامنفی روی بازه‌ی $[۱,\infty)$ است، بنابراین انتگرال این تابع روی این

بازه موجود است (ممکن است $+\infty$ باشد)، بنابراین از لم ۵۷.۳ قسمت (پ)، داریم

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2}\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{1}{x^2}\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

که در آن تساوی اول از قسمت (پ) لم ۵۷.۳ و تساوی دوم از قضیه‌ی ۷۰.۳، بدست آمده است.

تذکر ۷۳.۳. عکس قضیه‌ی ۷۰.۳، برقرار نیست. در واقع با تعریف تابع f روی بازه $[0, 1]$ در فضای اندازه‌ی لبگ، به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]. \end{cases}$$

f تابعی اندازه‌پذیر بوده و ت.هـ. $f = 0$ می‌باشد و در نتیجه $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$. در حالی که به ازای هر افراز دلخواه از بازه‌ی $[0, 1]$، مجموع بالایی ریمان برابر یک و مجموع پایینی‌اش برابر با صفر است و در نتیجه f تابعی ریمان انتگرال‌پذیر نیست.

در مثال بیان شده در تذکر ۷۳.۳، با توجه به تعریف ریمان انتگرال‌پذیری نشان دادیم f تابعی ریمان انتگرال‌پذیر نیست. اما قضیه‌ی زیر روش دیگری را برای تشخیص ریمان انتگرال‌پذیری توابع کراندار ارائه می‌دهد. این قضیه، گردایه‌ی توابع ریمان انتگرال‌پذیر روی بازه‌ی $[a, b]$ را به صورتی دقیق مشخص کرده و محدودیت گردایه توابع ریمان انتگرال‌پذیر را نیز نشان می‌دهد.

قضیه ۷۴.۳. فرض کنیم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **تابعی کراندار باشد. آنگاه** f **تابعی ریمان انتگرال‌پذیر روی** $[a, b]$ **است اگر و تنها اگر ت.هـ. پیوسته روی** $[a, b]$ **باشد.**

اثبات : به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم P_n، Φ_n و Ψ_n همان تعاریف مذکور در برهان قضیه‌ی ۷۰.۳ را داشته باشند. ابتدا فرض می‌کنیم f تابعی ریمان انتگرال‌پذیر باشد. با نگاهی دوباره به برهان قضیه‌ی ۷۰.۳، می‌بینیم مجموعه‌ای پوچ اندازه مانند E چنان موجود است که

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x), \quad \forall x \in [a, b] - E \tag{۸.۳}$$

قرار می‌دهیم $F = (\cup_{n=1}^{\infty} P_n) \cup E$. بوضوح F دارای اندازه لبگ صفر است. ثابت می‌کنیم f روی $[a, b] - F$ پیوسته است. برای اثبات این ادعا، فرض می‌کنیم $x_0 \in [a, b] - F$ و $\varepsilon > 0$

دلخواه باشد. با توجه به رابطه‌ی (۸.۳)، چنان nای موجود است که

$$f(x_\circ) - \Psi_n(x_\circ) < \varepsilon \quad , \quad \Phi_n(x_\circ) - f(x_\circ) < \varepsilon.$$

فرض می‌کنیم زیربازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ با نقاط ابتدایی و انتهایی در P_n باشد که $x_\circ \in (x_{i-1}, x_i)$. در این صورت $\Phi_n(x_\circ) = M_i$ و $\Psi_n(x_\circ) = m_i$. پس هرگاه $x \in (x_{i-1}, x_i)$ باشد، آنگاه

$$-\varepsilon < m_i - f(x_\circ) \leq f(x) - f(x_\circ) \leq M_i - f(x_\circ) < \varepsilon.$$

حال از اینکه (x_{i-1}, x_i) یک همسایگی $x_\circ$ است، نامساوی اخیر نشان از پیوستگی f در $x_\circ$ است و در نتیجه f ت.هـ. پیوسته است.

بالعکس فرض می‌کنیم f تابعی ت.هـ. پیوسته باشد. فرض کنیم f در $x_\circ \in [a, b]$ پیوسته باشد. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای چنان موجود است که

$$\sup_{x \in (x_\circ - \delta, x_\circ + \delta)} f(x) \; - \inf_{x \in (x_\circ - \delta, x_\circ + \delta)} f(x) < \varepsilon.$$

به ازای nهای به حد کافی بزرگ، بازه‌ای با نقاط ابتدایی و انتهایی از P_n شامل $x_\circ$ در بازه $(x_\circ - \delta, x_\circ + \delta)$ قرار خواهد گرفت و در نتیجه $\Phi_n(x_\circ) - \Psi_n(x_\circ) < \varepsilon$ خواهد بود. حال از اینکه ε دلخواه است، پس $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x_\circ) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x_\circ)$ و در نتیجه تساوی $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x)$ به صورت ت.هـ. روی $[a, b]$ برقرار است. با توجه به آنچه بیان شد و با بهره‌گیری از قضیه‌ی همگرایی تسلطی لبگ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \Phi_n \, dm &= \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} \Phi_n \, dm \\
&= \int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} \Psi_n \, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \Psi_n \, dm,
\end{aligned}$$

و در نتیجه f تابعی ریمان انتگرال‌پذیر است. ■

نتیجه ۷۵.۳. هر تابع یکنوا و در نتیجه هر تابع با تغییر کراندار روی بازه‌ی دلخواه $[a, b]$، تابعی ریمان انتگرال‌پذیر است.

اثبات : تعداد نقاط پیوستگی هر تابع یکنوا شماراست و در نتیجه از اندازه‌ی صفر است. از طرفی هر تابع با تغییر کراندار را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. ■

مثال ۷۶.۳. فرض کنید $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \\ 1 & \text{غیره}. \end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد، مجموعه نقاط ناپیوستگی f برابر با $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ است. بنابراین f تابعی ریمان انتگرال‌پذیر است و در نتیجه لبگ انتگرال‌پذیر است و هر دو انتگرال باهم برابرند. از طرفی ت.ه. $f = 1$ است و لذا انتگرال لبگ f برابر با یک است. بنابراین انتگرال ریمان f نیز برابر با یک است.

چنانچه دیدیم، گردایه توابع ریمان انتگرال‌پذیر زیرگردایه‌ای از توابع لبگ انتگرال‌پذیر شد و در نتیجه لبگ در توسیع نظریه‌ی انتگرال ریمان موفق عمل کرده است. حال منطقی است، چنین سوالی شود که انتگرال‌های ریمان ناسره با انتگرال‌های لبگ چه رابطه‌ای دارند؟ آیا مشابه انتگرال ریمان، می‌توان نتیجه گرفت که اگر انتگرال ریمان ناسره‌ی یک تابع موجود باشد، آنگاه انتگرال لبگ‌اش موجود است؟ ابتدا به یادآوری تعاریف مربوط به انتگرال‌های ناسره می‌پردازیم.

تعریف ۷۷.۳. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار روی $[a, \infty)$ و به ازای هر $b > a$، تابعی ریمان انتگرال‌پذیر روی $[a, b]$ باشد و $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ موجود باشد. در این صورت این حد را انتگرال ریمان ناسره‌ی نوع اول f نامیده و با نماد $\int_a^\infty f(x)dx$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که $\int_a^\infty f = l \in \mathbb{R}^*$، اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله‌ی $\{b_n\}$ که $b_n \geq a$ و $b_n \to \infty$، دنباله‌ی $\{\int_a^{b_n} f\}$ دارای حد l باشد. انتگرال ناسره‌ی نوع اول $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ نیز بطور مشابه قابل تعریف است. انتگرال $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ را نیز به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx, \qquad (a \in (-\infty, \infty)).$$

بدیهی است که مجموع طرف دوم این تساوی مستقل از انتخاب a است.

تعریف ۷۸.۳. فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ کراندار نباشد، ولی به ازای هر $a < c < b$، تابعی کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر روی $[c, b]$ باشد. اگر $\lim_{c\to a} \int_c^b f(x)dx$ موجود باشد، آنگاه این حد را انتگرال ریمان ناسره‌ی نوع دوم f نامیده و با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهیم. a را نقطه‌ی

غیر عادی تابع f گوییم. تعریف انتگرال ریمان ناسره‌ی نوع دوم $\int_a^b f(x)dx$ در صورتی که b نقطه‌ی غیرعادی f باشد، نیز بطور مشابه است.

مثال ۷۹.۳. تابع $f : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) := \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}, \quad x \in [n-۱, n), \;\; n = ۱, ۲, \ldots$$

بوضوح f روی هر زیربازه‌ی بسته و کراندار از $[\circ, \infty)$ تابعی کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر است. فرض می‌کنیم به ازای هر $m = ۱, ۲, \ldots$، $I_m = [\circ, m]$ باشد. آنگاه

$$\int_{I_m} f(x)\, dx = \sum_{n=۱}^{m} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n},$$

و در نتیجه

$$\lim_{m\to\infty} \int_{I_m} f(x)\, dx = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} = \ln ۲$$

حال با محاسباتی ساده می‌توان نشان داد

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\circ}^{b} f(x) dx = \ln ۲.$$

لذا انتگرال ریمان ناسره‌ی $\int_{\circ}^{\infty} f(x)dx$ موجود است، اما f لبگ انتگرال‌پذیر نیست. زیرا در این صورت باید $|f|$ لبگ انتگرال‌پذیرباشد، در حالی که با توجه به لم ۵۷.۳ قسمت (ب)، داریم

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, dm = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{[n-۱,n)} |f|\, dm = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \infty,$$

مثال ۸۰.۳. تابع $f : [\circ, ۱] \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n|I_n|} & x \in I_n, \\ \circ & x = \circ. \end{cases}$$

که در آن به ازای هر $n \in N$، $I_n = (\frac{۱}{۲^n}, \frac{۱}{۲^{n-۱}}]$. مشاهده می‌کنیم که f روی $[\circ, ۱]$ تابعی بیکران است، اما به ازای هر $\circ < c < ۱$، Nای چنان موجود است که $c \in I_N$ و در نتیجه

$\bigcup_{n=1}^{N} I_n \supseteq [c, 1]$. بنابراین روی $[c, 1]$، $|f(x)| \leq \frac{2N}{N+1}$. از طرفی اگر N فرد باشد، آنگاه

$$\int_{[c,1]} f(x)\, dx \leq 1 - \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N},$$

و اگر N زوج باشد، آنگاه

$$\int_{[c,1]} f(x)\, dx \leq 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1},$$

و در نتیجه به ازای هر $0 < c < 1$، f روی $[c, 1]$ کراندار و ریمان انتگرال‌پذیر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد، انتگرال ریمان ناسره‌ی نوع دوم $\int_0^1 f(x)\, dx$ موجود و برابر با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ است. در حالی که f لبگ انتگرال‌پذیر نیست. زیرا در این صورت باید $|f|$ لبگ انتگرال‌پذیرباشد، در حالی که با توجه به لم ۵۷.۳ قسمت (ب)، داریم

$$\int_{[0,1]} |f|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

تذکر ۸۱.۳. همانطور که در مثال‌های ۷۹.۳ و ۸۰.۳، دیدیم، نظریه‌ی انتگرال لبگ قادر به توسیع نظریه‌ی انتگرال ریمان ناسره نیست. یکی از تفاوت‌های نظریه‌ی انتگرال لبگ و انتگرال ریمان ناسره، در این ویژگی نهفته است که اگر انتگرال لبگ تابع f روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E موجود باشد و $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبدو مجزا و اندازه‌پذیر با اجتماعی برابر با E باشد، آنگاه

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu, \tag{۹.۳}$$

در حالی که انتگرال ناسره‌ی ریمان فاقد این خاصیت است. به عنوان مثال، تابع مثال ۷۹.۳ را در نظر بگیرید. حال دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبدو مجزای $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&E_1 = [0, 1), && E_2 = [1, 2), && E_3 = [3, 4),\\
&E_4 = [2, 3), && E_5 = [5, 6), && E_6 = [7, 8),\\
&E_7 = [4, 5), && E_8 = [9, 10), && E_9 = [11, 12),\\
&\vdots && \vdots && \vdots
\end{aligned}$$

در این صورت $[\circ, \infty) = \cup_{n=\text{۱}}^{\infty} E_n$ و

$$\begin{aligned}\ln \text{۲} = \int_{\circ}^{\infty} f(x)dx &\neq \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\, dx \\ &= \text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}} - \frac{\text{۱}}{\text{۸}} + \frac{\text{۱}}{\text{۷}} - \cdots \\ &= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \ln \text{۲}.\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که سری

$$\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}} - \frac{\text{۱}}{\text{۸}} + \cdots .$$

تجدیدآرایشی از سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^{n-\text{۱}}}{n}$ است که هر جمله‌ی مثبت قبل از دو جمله‌ی منفی این سری قرار گرفته است. در حالت کلی، اگر $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n$ تجدیدآرایشی از سری $\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} \frac{(-\text{۱})^{n-\text{۱}}}{n}$ باشد که هر α جمله‌ی مثبت، قبل از β جمله‌ی منفی از این سری قرار بگیرد، آنگاه[۱۳]

$$\sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a_n = \ln \text{۲} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \ln \frac{\alpha}{\beta}.$$

این مثال نشان می‌دهد که نمی‌توان نظریه‌ای از انتگرال را بنا کرد که هم در شرط (۹.۳) بیان شده در بالا صدق کند و هم توسیعی از انتگرال ریمان ناسره باشد. بنابراین نمی‌توان انتظار ساخت نظریه‌ای از انتگرال بود که توسیعی بر هر دو نظریه‌ی انتگرال ریمان ناسره و انتگرال لبگ باشد.

این بخش را با بیان و اثبات قضیه‌ای که ارتباط دقیق بین انتگرال‌های ریمان ناسره‌ی نوع اول و انتگرال لبگ را بیان می‌کند، به پایان می‌بریم.

قضیه ۸۲.۳. **فرض کنیم $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ چنان تابعی باشد که روی هر بازه‌ی بسته و کراندار از $[a, \infty)$ ریمان انتگرال‌پذیر است. آنگاه f لبگ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر انتگرال ریمان ناسره $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ موجود و متناهی باشد و در این حالت داریم**

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_{[a,\infty)} f(x)\, dm.$$

[۱۳] مثلاً مسئله‌ی ۳.۷.۳ را در کتاب «مسائلی در آنالیز ریاضی ۱»، تألیف $W.J.Kaczor$ و $M.T.Nowak$، ترجمه‌ی حسین فضلی–سیما آغچی ، انتشارات حفیظ، ببینید.

اثبات : ابتدا فرض می‌کنیم f روی $[a,\infty)$ تابعی لبگ انتگرال‌پذیر باشد. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی در $[a,\infty)$ و واگرا به $+\infty$ باشد. آنگاه با توجه به قضایای ۶۰.۳ و ۷۰.۳ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n} f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,a_n]} f\,dm = \int_{[a,\infty)} f\,dm < \infty,$$

بنابراین $\int_a^\infty f\,dx$ موجود، متناهی و $\int_a^\infty f\,dx = \int_{[a,\infty)} f\,dm$. بالعکس فرض می‌کنیم $\int_a^\infty |f|dx$ موجود و متناهی باشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,a_n)} |f|dm = \lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n} |f|dx < \infty,$$

حال با توجه به قضیه‌ی ۶۰.۳ ، f تابعی لبگ انتگرال‌پذیر روی $[a,\infty)$ بوده و

$$\int_{[a,\infty)} f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,a_n)} f\,dm = \lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n} f\,dx = \int_a^\infty f\,dx.$$

■

۷.۳ فضاهای L^p

در این بخش فضای توابع انتگرال‌پذیر را توسیع داده و فضای جدیدی بنام فضای L^p می‌سازیم. فضاهای L^p را فضاهای لبگ نیز می‌نامند. درست چند سال بعد از اینکه لبگ نظریه‌ی تاریخی انتگرال خود را عرضه کرد، ریس-فیشر کلاس توابع L^p را معرفی کردند. این فضاها نه تنها به عنوان یک فضای باناخ در آنالیز تابعی یا یک فضای برداری توپولوژیکی در ریاضیات بلکه در علم فیزیک، احتمالات، مهندسی و سایر علوم کاربرد قابل ملاحظه‌ای دارند. پیدایش این فضاها ابزار بسیار مناسبی را مهیا نمود تا پدیده‌های عجیب فیزیکی، به زبان ریاضی قابل بیان و فهم شوند که این کار با خلق فضاهای سوبولف و توابع تعمیم‌یافته با استفاده از مفاهیم فضاهای L^p صورت پذیرفت. بحث را با یادآوری تعاریف و قضایای اساسی در مباحث مربوط به فضاهای برداری نرم‌دار پی می‌گیریم.

تعریف ۸۳.۳. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد. تابع $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ را یک نرم روی فضای برداری V گوییم، هرگاه

۱- $\|v\| = 0$ اگر و تنها اگر $v = 0$،

۲- به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $v \in V$، $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$،

۳- به ازای هر $v, w \in V$، $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ (نابرابری مثلثی).

دوتایی $(V, \|\cdot\|)$ را یک فضای برداری نرم‌دار گوییم.

تعریف ۸۴.۳. فرض کنیم $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای برداری نرم‌دار و $\{v_n\}$ دنباله‌ای در V باشد.

الف) گوییم دنباله‌ی $\{v_n\}$ همگراست، اگر $v \in V$ موجود باشد $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = ۰$.

ب) گوییم دنباله‌ی $\{v_n\}$ کشی است، اگر به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که به ازای هر $m, n \geq N$، $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$.

پ) فضای نرم‌دار $(V, \|.\|)$ را یک فضای باناخ یا یک فضای نرم‌دار کامل گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی کشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۸۵.۳. فرض کنیم $\{v_i\}$ دنباله‌ای در فضای نرم‌دار $(V, \|.\|)$ باشد. سری $\sum_{i=۱}^{\infty} v_i$ را همگرا گوییم، هرگاه دنباله‌ی $\{\sum_{i=۱}^{n} v_i\}$ همگرا باشد و همگرای مطلق گوییم هرگاه سری $\sum_{i=۱}^{\infty} \|v_i\|$ همگرا باشد.

قضیه ۸۶.۳. **فضای نرم‌دار $(V, \|\cdot\|)$ یک فضای کامل است اگر و تنها اگر هر سری همگرای مطلق، یک سری همگرا باشد.**

اثبات : مرجع [۱۲] فصل ۵ را ببینید. ■

تعریف ۸۷.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و $۰ < p < \infty$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{۱/p}$$

و

$$\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}^* : \text{اندازه‌پذیر } f \text{ , } \|f\|_p < \infty\}.$$

توجه داریم که برای راحتی به جای نماد $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ از نمادهای $\mathfrak{L}^p(\mu)$، $\mathfrak{L}^p(X)$ یا $\mathfrak{L}^p$ استفاده خواهیم کرد.

لم ۸۸.۳. **اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $p \in (۰, \infty)$ باشد. آنگاه فضای $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است.**

اثبات : فرض کنیم $f, g \in \mathfrak{L}^p$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد. آنگاه

$$|\alpha f + g|^p \leq [۲|\alpha| \max\{|f|, |g|\}]^p \leq (۲|\alpha|)^p\{|f|^p + |g|^p\}$$

بنابراین با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی، داریم $\alpha f + g \in \mathfrak{L}^p$. ■

حال می‌خواهیم ببینیم، آیا تابع $\|\cdot\|_p : \mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, \infty)$ با تعریف

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p},$$

می‌تواند یک نرم روی فضای برداری $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد؟ با نگاهی به لم ۴۴.۳، مشاهده می‌کنیم که در حالت کلی، تابع $\|\cdot\|_p$ در شرط اول تعریف نرم در ۸۳.۳، صادق نیست و در واقع تنها تابع ثابت صفر نیست که نرمش برابر با صفر است، بلکه برای هر تابع اندازه‌پذیر f که ت.ه. برابر با صفر است، داریم $\|f\|_p = 0$. برای حل این مشکل، ابتدا یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی فضای $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸۹.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. توابع $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ را هم‌ارز گوییم و می‌نویسیم $f \sim g$، هرگاه تساوی $f = g$ به صورت ت.ه. برقرار باشد.

به آسانی می‌توان نشان داد رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ است. به ازای هر $f \in \mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$، کلاس هم‌ارزی f را با نماد $[f]$ نشان می‌دهیم. حال تعریف می‌کنیم

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] : f \in \mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)\},$$

از اینکه $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ افرازی از $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ است. در فضای $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$، به ازای هر کلاس هم‌ارزی $[f]$ و $[g]$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha[f] = [\alpha f], \quad [f] + [g] = [f + g],$$

توجه داشته باشید که $\alpha[f]$ و $[f] + [g]$ تعریف شده در بالا، مستقل از انتخاب f و g در کلاس هم‌ارزی $[f]$ و $[g]$ می‌باشد. عنصر صفر این فضا را با نماد $[0]$ نشان می‌دهیم. توجه داریم که کلاس هم‌ارزی $[0]$، گردایه‌ی تمام توابع در $\mathfrak{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ و ت.ه. برابر با تابع ثابت صفر است.

قضیه ۹۰.۳. فضای $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$، به ازای هر $p \in (0, \infty)$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است و تابع $\|\cdot\|_p : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, \infty)$ تعریف شده به صورت

$$\|[f]\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p}. \tag{۱۰.۳}$$

برای $p \geq ۱$ یک نرم روی این فضاست.

اثبات : با توجه به تعریف فضای برداری، به آسانی می‌توان نشان داد فضای $\boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu)$، برای $p > ۰$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است. برای اثبات قسمت بعدی، ابتدا توجه داریم که تابع تعریف شده در $(*)$ خوش تعریف است. در واقع اگر $[f] = [g]$ باشد، آنگاه ت.هـ. $f = g$ و در نتیجه $\|[g]\|_p = \|[f]\|_p$. فرض می‌کنیم $[f], [g] \in \boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد. آنگاه اگر $\|[f]\|_p = ۰$، آنگاه با توجه به لم ۴۴.۳، f ت.هـ. برابر با صفر است و در نتیجه $[f] = [۰]$. از طرفی اگر $[f] = [۰]$، آنگاه f ت.هـ. برابر با صفر است و در نتیجه $\|[f]\|_p = ۰$. همچنین

$$\|[\alpha f]\|_p = \left[\int_X |\alpha f|^p d\mu\right]^{۱/p} = |\alpha| \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{۱/p} = |\alpha| \|[f]\|_p.$$

از اینکه $[f], [g] \in \boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu)$، آنگاه از نتیجه‌ی بیان شده در ۵۲.۳، توابع $|f|$ و $|g|$ ت.هـ. روی X متناهی‌اند. بنابراین از مثال ۳۷.۱، به ازای هر $p \geq ۱$، نامساوی زیر به صورت ت.هـ. روی X برقرار است

$$|f + g|^p \leq ۲^{p-۱}\{|f|^p + |g|^p\},$$

حال با انتگرال گیری از طرفین نامساوی داریم،

$$\begin{aligned} \|[f + g]\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \\ &\leq ۲^{p-۱} \left\{\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu\right\} \\ &= ۲^{p-۱} \left(\|[f]\|_p^p + \|[g]\|_p^p\right), \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعاریف پیوست الف دوتایی $(\boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$، به ازای هر $p \geq ۱$ یک فضای برداری p-نرم‌دار است و در نتیجه یک فضای نرم‌دار است. ■

فضای $\boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای تابعی نیست، بلکه فضایی است که عناصرش کلاس‌های هم‌ارزی از توابع هستند. به منظور تسهیل در بیان، معمولاً این کلاس‌های هم‌ارزی را به عنوان یک تابع در نظر می‌گیریم و از f به جای $[f]$ استفاده می‌کنیم. در واقع تابع f را به عنوان نماینده‌ای از کلاس $[f]$ در نظر خواهیم گرفت. در این فضا $f = g$، بدین معناست که $f - g$ ت.هـ. برابر با صفر است. همچنین برای راحتی از نمادهای $\boldsymbol{L^p}(\mu)$، $\boldsymbol{L^p}(X)$ یا $\boldsymbol{L^p}$ به جای نماد $\boldsymbol{L^p}(X, \mathcal{A}, \mu)$ استفاده خواهیم کرد.

حال به بیان و اثبات برخی نامساوی‌های مهم در فضاهای $\mathfrak{L}^p$ می‌پردازیم.

نمادگذاری : اعداد حقیقی $p, q \in (۱, \infty)$ را مزدوج هم گوییم، هرگاه $۱/p + ۱/q = ۱$ باشد. همچنین $p = ۱$ و $q = \infty$ را نیز مزدوج هم می‌نامیم.

قضیه ۹۱.۳. (نامساوی هلدر[۱۴]). فرض کنیم $۱ < p < \infty$ و q مزدوج p باشد. اگر f و g توابعی اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ باشد، آنگاه

$$\|fg\|_۱ \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{۱۱.۳}$$

بالاخص، اگر $f \in \mathfrak{L}^p$ و $g \in \mathfrak{L}^q$ باشد، آنگاه $fg \in \mathfrak{L}^۱$ و در این حالت تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای ثوابتی مانند α, β با $\alpha.\beta \neq ۰$، تساوی $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ به صورت ت.ه. برقرار باشد.

اثبات : اگر $\|f\|_p = \infty$ یا $\|g\|_q = \infty$ باشد، نامساوی بدیهی است. اگر $\|f\|_p = ۰$ یا $\|g\|_q = ۰$ باشد، آنگاه $fg = ۰$ ت.ه. و نامساوی مورد نظر بوضوح برقرار است. فرض می‌کنیم $\|f\|_p > ۰$ و $\|g\|_q > ۰$ باشد. قرار می‌دهیم $a = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ و $b = \frac{|g|}{\|g\|_q}$. (توجه داشته باشید که توابع $|f|$ و $|g|$ ت.ه. روی X متناهی‌اند). حال با استفاده نامساوی یانگ (بخش ۶.۱ را ببینید)، داریم

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{۱}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{۱}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}, \tag{۱۲.۳}$$

حال با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، داریم

$$\int_X \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q}\, d\mu \leq \int_X \left(\frac{۱}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{۱}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \right)\, d\mu = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱, \tag{۱۳.۳}$$

و در نتیجه نابرابری (۱۱.۳) برقرار است. برای اثبات قسمت بعدی، مشاهد می‌کنیم که تساوی در (۱۳.۳) برقرار است اگر و تنها اگر ت.ه. روی X، تساوی در (۱۲.۳) برقرار باشد. از طرفی با توجه به نامساوی یانگ، تساوی در (۱۲.۳) برقرار است اگر و تنها اگر ت.ه. روی X، $\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$. بنابراین $\alpha = \|g\|_q^q$ و $\beta = \|f\|_p^p$. ■

در اثبات قضیه‌ی ۹۰.۳، نشان دادیم به ازای هر $f, g \in \mathfrak{L}^p$، نامساوی p-مثلثی به صورت

$$\|f+g\|_p^p = ۲^{p-۱} \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right),$$

[۱۴] Hölder's Inequality

برقرار است و در نتیجه با توجه به مطالب بیان شده در پیوست **الف** نامساوی مثلثی که در فضاهای $\mathfrak{L}^p$، به نامساوی مینکوفسکی معروف است، برقرار است. حال بدون رجوع به پیوست **الف** و به صورتی مستقیم می‌خواهیم نشان دهیم، نابرابری مثلثی در فضاهای $\mathfrak{L}^p$ برقرار است.

قضیه ۹۲.۳. (نامساوی مینکوفسکی[۱۵]). فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ و $f, g \in \mathfrak{L}^p$، آنگاه

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{۱۴.۳}$$

و به ازای $1 < p < \infty$، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای ثوابتی نامنفی مانند α, β با $\alpha.\beta \neq 0$، تساوی $\alpha f = \beta g$ به صورت ت.هـ. برقرار باشد.

اثبات : با توجه به مفروضات، $|f|^p$ و $|g|^p$ توابعی انتگرال‌پذیرند و در نتیجه f و g توابعی **ت.هـ.** روی X متناهی‌اند. بنابراین می‌توان از امکان بی‌معنی بودن عبارت $f(x)+g(x)$ و یا نامتناهی بودنش چشم‌پوشی کرد. حال با بکار بردن نابرابری مثلثی، **ت.هـ.** روی X داریم

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &= |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

اگر $p = 1$ باشد، آنگاه نامساوی (۱۴.۳) با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی (۱۵.۳) بدست می‌آید. فرض می‌کنیم $p > 1$ و q مزدوج p باشد. آنگاه با انتگرال‌گیری از طرفین نابرابری (۱۵.۳) داریم

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \tag{۱۶.۳}$$

حال با بکار بردن نامساوی هلدر روی هر یک از عبارات سمت راست نامساوی فوق، داریم

$$\begin{aligned} \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu &\leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q \\ &= \|f\|_p \cdot \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

و به همین ترتیب

$$\int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \cdot \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/q}. \tag{۱۸.۳}$$

[۱۵] Minkowski's Inequality

با تلفیق روابط (۱۶.۳)، (۱۷.۳) و (۱۸.۳) داریم

$$\|f+g\|_p = \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1-(1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

برای اثبات قسمت بعدی، با توجه به روند اثبات، مشاهده می‌کنیم که تساوی در رابطه‌ی (۱۴.۳) رخ می‌دهد اگر و تنها اگر تساوی در رابطه‌ی (۱۶.۳) و روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳) رخ دهد. از طرفی تساوی در رابطه‌ی (۱۶.۳) به ازای نقاطی از X رخ می‌دهد که $f(x)$ و $g(x)$ هم‌علامت باشند. همچنین با توجه به قضیه‌ی قبل، تساوی در روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳)، هنگامی رخ می‌دهد که ت.ه. روی X،

$$\alpha|f(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} = \beta|g(x)|^p,$$

و در نتیجه $\alpha f = \beta g$. ■

تذکر ۹۳.۳. به ازای $p \in (0,1)$، تابع $\|\cdot\| : L^p(X,\mathcal{A},\mu) \to [0,\infty)$، تعریف شده به صورت

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu\right]^{1/p},$$

یک نرم روی فضای $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ نیست. در واقع در فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$، با فرض $f = \chi_{[0,1/2)}$ و $g = \chi_{[1/2,1)}$، داریم $\|f+g\|_p = 1$ و $\|f\|_p + \|g\|_p = 2^{1-\frac{1}{p}}$ و در نتیجه به ازای هر $p \in (0,1)$، $\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$.

همانطور که در ابتدای فصل بیان کردیم، اوج مزیت نظریه‌ی انتگرال لبگ نسبت به انتگرال ریمان همزمان با اثبات کامل بودن فضای نرم‌دار L^p توسط ریس-فیشر پدیدار شد. این ویژگی فضاهای L^p را در قالب قضیه‌ی زیر بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹۴.۳. فرض کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه و $p \in [1,\infty)$ باشد. آنگاه فضای L^p یک فضای نرم‌دار کامل است.

اثبات : فرض می‌کنیم $\{f_k\} \subset L^p$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = B < \infty$ باشد. با توجه به قضیه‌ی ۸۶.۳ کافی است نشان دهیم، سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ در L^p همگراست. بدین منظور قرار می‌دهیم

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k| \quad , \quad G = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|.$$

(توجه داریم $\{G_n\}$ دنباله‌ای صعودی است و در نتیجه G قابل تعریف است). حال با استفاده از نامساوی مینکوفسکی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|G_n\|_p \leq \sum_{k=۱}^{n} \|f_k\|_p \leq B.$$

از طرفی $G_n \uparrow G$ و در نتیجه $G_n^p \uparrow G^p$. حال از قضیه‌ی همگرایی یکنوا، داریم

$$\int_X G^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X G_n^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|G_n\|_p^p \leq B^p < \infty.$$

بنابراین $G \in L^p$ و در نتیجه $G(x) < \infty$ ت.ه. روی X است. پس سری $\sum_{k=۱}^{\infty} f_k$ ت.ه. همگراست و $|\sum_{k=۱}^{\infty} f_k| \leq G$. لذا

$$\sum_{k=۱}^{\infty} f_k \in L^p \quad , \quad \left|\sum_{k=۱}^{n} f_k - \sum_{k=۱}^{\infty} f_k\right|^p \leq (۲G)^p \in \boldsymbol{L}^۱,$$

بالاخره با استفاده از قضیه‌ی همگرایی تسلطی لبگ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |\sum_{k=۱}^{n} f_k - \sum_{k=۱}^{\infty} f_k|^p d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=۱}^{n} f_k - \sum_{k=۱}^{\infty} f_k|^p d\mu = ۰,$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=۱}^{n} f_k - \sum_{k=۱}^{\infty} f_k\|_p^p = ۰$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=۱}^{n} f_k - \sum_{k=۱}^{\infty} f_k\|_p = ۰$. ■

برای تکمیل مباحث مربوط به به فضاهای L^p، فضای جدیدی از توابع بنام فضای توابع اساساً کراندار را معرفی و برخی خواص و ویژگی‌های این فضای تابعی را بیان می‌کنیم. فضای توابع اساساً کراندار در یک فضای اندازه، بنحوی جایگزین توابع کراندار در فضاهای متریک هستند. اعضای فضای جدید، توابع ت.ه. کراندارند و روی یک مجموعه با اندازه‌ی صفر می‌توانند هر رفتاری را داشته باشند.

تعریف ۳.۹۵. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $f : X \to \mathbb{R}^*$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{M \geq ۰ \ : \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = ۰\} \\ &= \inf\{M \geq ۰ \ : \ |f(x)| \leq M \ \text{ت.ه. روی } X\}, \end{aligned}$$

(قرارداد می‌کنیم که $\inf \emptyset = +\infty$) و قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}^* : \text{اندازه‌پذیر } f \,,\, \|f\|_\infty < \infty\}.$$

$\mathfrak{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ را فضای توابع اساساً کراندار گوییم. توجه داریم که برای راحتی به جای نماد $\mathfrak{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ از نمادهای $\mathfrak{L}^p(\mu)$، $\mathfrak{L}^\infty(X)$ یا $\mathfrak{L}^\infty$ استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۹۶.۳. (نامساوی‌های هلدر و مینکوفسکی برای حالت $p = ۱$ و $q = \infty$). **فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ توابعی اندازه‌پذیر باشند، آنگاه**

الف) $\|fg\|_۱ \leq \|f\|_۱ \|g\|_\infty$. **اگر** $f \in \mathfrak{L}^۱$ **و** $g \in \mathfrak{L}^\infty$ **باشد، آنگاه** $\|fg\|_۱ = \|f\|_۱ \|g\|_\infty$ **اگر و تنها اگر** $|g(x)| = \|g\|_\infty$ **به صورت ت.هـ. روی** $A = \{x \in X : f(x) \neq ۰\}$ **باشد.**

ب) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

اثبات : آسان است و به خواننده واگذار می‌شود. در واقع کافی است به این نکته توجه کنیم که نابرابری $|f| \leq \|f\|_\infty$ ت.هـ. روی X برقرار است. ■

تعریف ۹۷.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. فضای $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ را گردایه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی $\mathfrak{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ با رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ (ت.هـ. برابر روی X) تعریف می‌کنیم. جمع و ضرب اسکالر را در این فضا مشابه L^p تعریف می‌کنیم. در اینجا نیز، به منظور تسهیل در امر بیان، عناصر این فضا که در واقع کلاس‌های هم‌ارزی هستند، به صورت تابع نشان می‌دهیم.

لم ۹۸.۳. **فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای برداری است و تابع $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to [۰, \infty)$ تعریف شده به صورت**

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq ۰ \ : \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = ۰\},$$

یک نرم روی این فضاست.

اثبات : اینکه $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای برداری نرم‌دار است، نتیجه‌ی فوری قضیه‌ی ۹۶.۳ است. برای اثبات کمال $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$، فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی در این فضا باشد. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که به ازای هر $m, n \geq N$،

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \tag{۱۹.۳}$$

از طرفی از اینکه به ازای هر $n, m \in \mathbb{N}$، ت.ه. روی X داریم

$$|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \tag{۲۰.۳}$$

مجموعه‌ی $E = \cup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$ که $E_{n,m}$، مجموعه نقاطی از X است که نابرابری بالا برقرار نیست، مجموعه‌ای پوچ اندازه بوده و روی $X - E$، $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ و در نتیجه $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی در فضای اقلیدسی روی $X - E$ است. حال با توجه به رابطه‌ی (۱۹.۳) و (۲۰.۳)، $\{f_n\}$، روی $X - E$ بطور یکنواخت همگراست. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & x \in X - E, \\ 0 & x \in E. \end{cases}$$

از رابطه‌ی (۲۰.۳) و با توجه به اینکه روی $X - E$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، به ازای هر $n \geq N$ و هر $x \in X - E$، داریم $|f - f_n| \leq \varepsilon$. بنابراین به ازای هر N و هر $n \geq N$ و هر $x \in X - E$، داریم $|f| \leq |f_n| + \varepsilon$ و در نتیجه $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. همچنین به ازای هر $n \geq N$، $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ و این نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. ■

حال به جواب این سوال که چه رابطه‌ی شمولی مابین این فضاها به ازای pهای مختلف می‌تواند وجود داشته باشد، می‌پردازیم. بحث را با مثال زیر شروع می‌کنیم.

مثال ۹۹.۳. فرض کنید $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ فضای اندازه‌ی لبگ و $p, q \in [1, \infty]$ با شرط $p < q$ باشد. در این صورت $a \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $p < a < q$. فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{a}}}\chi_{[0,1]}(x)$ و $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{a}}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. در این صورت $f \in \mathfrak{L}^p$ ولی $f \notin \mathfrak{L}^q$. همچنین $g \in \mathfrak{L}^q$ ولی $g \notin \mathfrak{L}^p$.

مثال فوق‌الذکر نشان می‌دهد که در حالت کلی، هیچ رابطه‌ی شمولی مابین فضاهای $\mathfrak{L}^p$ به ازای pهای مختلف وجود ندارد. اما در صورتی که فضای اندازه، متناهی باشد، می‌توان ثابت کرد $\mathfrak{L}^1$ بزرگترین فضا و $\mathfrak{L}^\infty$ کوچکترین فضا، مابین فضاهای $\mathfrak{L}^p$ است.

لم ۱۰۰.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $0 < p < q \leq \infty$ باشد. آنگاه به ازای هر $f \in \mathfrak{L}^p$، داریم

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}},$$

و در نتیجه $\mathfrak{L}^q \subseteq \mathfrak{L}^p$.

اثبات : اگر $q = \infty$ باشد، آنگاه

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_X ۱ \, d\mu = \|f\|_\infty^p \, \mu(X).$$

اگر $q < \infty$ باشد، آنگاه با بکار بردن نامساوی هلدر با اعداد مزدوج $\frac{q}{p}$ و $\frac{q}{q-p}$ داریم

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \cdot ۱ \, d\mu \leq \||f|^p\|_{\frac{q}{p}} \|۱\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p \, \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}.$$

و در نتیجه حکم برقرار است. ■

لم ۱۰۱.۳. **فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $۰ < p < q < r \leq \infty$ باشد. آنگاه** $\mathfrak{L}^p \cap \mathfrak{L}^r \subseteq \mathfrak{L}^q$ و $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{۱-\lambda}$ **که در آن** $\lambda = \frac{q^{-۱}-r^{-۱}}{p^{-۱}-r^{-۱}}$.

اثبات : اگر $r = \infty$، آنگاه از اینکه $\|f\|_\infty \leq |f|$، داریم $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$ و $\lambda = \frac{p}{q}$. بنابراین

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{۱-(p/q)} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{۱-\lambda}. \tag{۲۱.۳}$$

حال فرض می‌کنیم $r < \infty$. با بکار بردن نامساوی هلدر با اعداد مزدوج $\frac{p}{\lambda q}$ و $\frac{r}{(۱-\lambda)q}$ داریم

$$\begin{aligned}\int_X |f|^q \, d\mu &= \int_X |f|^{\lambda q}|f|^{(۱-\lambda)q} \, d\mu \leq \||f|^{\lambda q}\|_{p/\lambda q} \||f|^{(۱-\lambda)q}\|_{r/(۱-\lambda)q} \\ &= \left[\int_X |f|^p\right]^{\lambda q/p} \left[\int_X |f|^r\right]^{(۱-\lambda)q/r} = \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(۱-\lambda)q}.\end{aligned}$$

و در نتیجه حکم برقرار است. ■

یک نمونه‌ی مهم از فضاهای L^p با توجه به اندازه‌ی شمارشی μ_c روی فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ بدست می‌آید. اگر $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ فضای اندازه‌ی شمارشی باشد، آنگاه فضای $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ را «فضای L^p کوچک» نامیده و با $l^p(\mathbb{N})$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که تنها مجموعه‌ی از اندازه‌ی صفر فضای اندازه‌ی شمارشی، مجموعه‌ی تهی است و در نتیجه هر کلاسی از فضای $l^p(\mathbb{N})$ فقط شامل یک عنصر است. با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۷ از همین فصل، برای هر تابع دلخواه $f : \mathbb{N} \to [۰, \infty]$ (تمامی توابع در این فضا اندازه‌پذیرند)، داریم $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$.

بنابراین $\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p\right)^{1/p}$. در نتیجه به ازای هر $p \in (0,\infty)$

$$l^p(\mathbb{N}) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* : \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < \infty \right\}.$$

همچنین با توجه به اینکه، تنها مجموعه‌ی پوچ فضای اندازه‌ی شمارشی، مجموعه‌ی تهی است، به آسانی می‌توان نشان داد

$$\inf\{M \geq 0 \ : \ |f(n)| \leq M,\ n \in \mathbb{N} \ \text{ت.هـ روی } X\} = \sup\{|f(n)| : n \in \mathbb{N}\},$$

بنابراین $\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ و در نتیجه

$$l^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^* : \sup_n \|f(n)| < \infty \right\}.$$

فضاهای $l^p(\mathbb{N})$، بر خلاف فضاهای L^p کلی، همواره قیاس‌پذیرند. قضیه‌ی زیر را ببینید.

قضیه ۱۰۲.۳. فرض کنیم $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ **فضای اندازه‌ی شمارشی و** $0 < p < q \leq \infty$ **باشد. آنگاه** $l^p(\mu_c) \subseteq l^q(\mu_c)$ **و** $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

اثبات : داریم $\|f\|_\infty^p = \sup_n |f(n)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p$ و در نتیجه $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$. حال اگر $q < \infty$، آنگاه از رابطه‌ی (۲۱.۳) در لم ۱۰۱.۳، داریم،

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-(p/q)} \leq \|f\|_p^{p/q} \|f\|_p^{1-(p/q)} = \|f\|_p.$$

■

تذکر ۱۰۳.۳. عکس شمول در قضیه‌ی قبل برقرار نیست. در واقع با فرض $p < q$ و $f(n) = n^{-1/p}$، داریم $f \in l^q(\mathbb{N})$ ولی $f \notin l^p(\mathbb{N})$.

۸.۳ انواع همگرایی و ارتباط مابین آن‌ها

در این بخش با یادآوری انواع مختلف همگرایی‌های بیان شده در بخش‌های قبل، به معرفی همگرایی جدیدی بنام همگرایی در اندازه پرداخته، سپس به بررسی روابط مابین انواع همگرایی‌ها، در فضاهای اندازه‌ی کلی و متناهی خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۰۴.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و f تابعی اندازه‌پذیر در این فضا باشد. گوییم دنباله $\{f_n\}$،

الف) **ت.هـ** به تابع اندازه‌پذیر f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$، اگر

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\} \subseteq N \in \mathcal{A} \quad , \quad \mu(N) = 0.$$

ب) **بطور یکنواخت** به تابع f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، N_εای چنان موجود باشد که به ازای هر $n \geq N$ و هر $x \in X$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

پ) **در اندازه** به تابع f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

به عبارتی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$، ثابت $N_{\varepsilon,\delta}$ چنان موجود است که به ازای هر $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$،

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \delta.$$

ت) دنباله توابع $\{f_n\} \subset \mathfrak{L}^p$ در $\mathfrak{L}^p$ با $p > 0$ به $f \in \mathfrak{L}^p$ همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} f$، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، N_εای موجود باشد که به ازای هر $n \geq N$، $\|f_n(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$.

قبل از بیان و اثبات ارتباط مابین همگرایی‌های مختلف، ابتدا به بیان برخی ویژگی‌ها و خواص اساسی مربوط به همگرایی در اندازه می‌پردازیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد دنباله توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ در اندازه به f همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، ثابت N_ε چنان موجود باشد که

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$

لم ۱۰۵.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر با $\mu(\{f > 0\}) > 0$ باشد. آنگاه $\varepsilon > 0$ای چنان موجود است که $\mu(\{f \geq \varepsilon\}) > 0$.

اثبات : بوضوح $\{f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \frac{1}{n}\}$. حال با استفاده از خاصیت زیرجمعی شمارای تابع اندازه داریم

$$0 < \mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

لذا حداقل یکی از جملات طرف راست نامساوی مخالف صفر بوده و این اثبات را کامل می‌کند. ■

قضیه ۱۰۶.۳. فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر و f و g توابعی اندازه‌پذیر باشند. آنگاه

الف) اگر $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$، آنگاه به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $af_n + bg_n \xrightarrow{\mu} af + bg$.

ب) اگر $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow{\mu} g$، آنگاه f و g ت.هـ برابرند.

اثبات : الف) فرض می‌کنیم $a, b \neq ۰$ باشند. با توجه به رابطه‌ی زیر

$$|af_n(x)+bg_n(x)-[af(x)+bg(x)]| \leq |a||f_n(x)-f(x)|+|b||g_n(x)-g(x)|,$$

داریم

$$\{x \in X : |af_n(x) + bg_n(x) - [af(x) + bg(x)]| \geq \varepsilon\}$$
$$\subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{۲|a|}\right\} \cup \left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{۲|b|}\right\}.$$

حال حکم مورد نظر ازخاصیت یکنوایی و زیرجمعی شمارایی تابع اندازه بدست می‌آید.

ب) به برهان خلف فرض می‌کنیم $\mu(\{f \neq g\}) > ۰$، به عبارتی $\mu(\{|f - g| > ۰\}) > ۰$ لذا از لم قبلی $\varepsilon > ۰$ ای چنان موجود است که $\mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) > ۰$. همچنین از اینکه به ازای هر n، $|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$، داریم

$$\{|f - g| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{۲}\right\} \cup \left\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{۲}\right\}.$$

حال با توجه به خواص یکنوایی و زیرجمعی تابع اندازه داریم

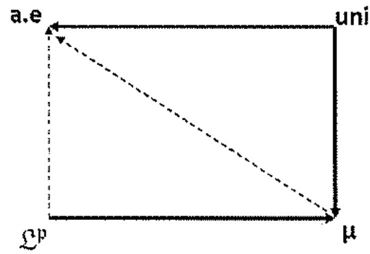
$$\mu\left(\{|f - g| \leq \varepsilon\}\right) \leq \mu\left(\left\{|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{۲}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{۲}\right\}\right).$$

بالاخره با میل دادن هر دو جمله از طرفین راست نامساوی و استفاده از مفروضات قضیه داریم $\mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) = ۰$ و این یک تناقض است.

■

نمودار زیر روابط مابین انواع همگرایی‌های مذکور در بالا را بدون فرض شرایطی روی فضای اندازه نشان می‌دهد. هر پیکان پر به معنی استلزام و هر پیکان خط‌چین بدین معناست که یک زیردنباله از دنباله‌ی مفروض در جهت مشخص شده همگراست. به عنوان مثال، وجود پیکانی پر از uni به a.e بدین معناست که اگر دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر بطور یکنواخت همگرا به تابع

اندازه‌پذیر f باشد، آنگاه $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا به f همگراست و وجود پیکان خط‌چین از μ به a.e بدین معناست که اگر دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع اندازه‌پذیر در اندازه همگرا به تابع اندازه‌پذیر f باشد، آنگاه زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ از $\{f_n\}$ چنان موجود است که تقریباً همه‌جا به f همگراست.



شکل ۳.۳: ارتباط مابین انواع همگرایی‌ها در حالت کلی

حال به اثبات روابط موجود در نمودار نشان داده شده در بالا در قالب قضایا می‌پردازیم. به آسانی و با توجه به تعاریف ارائه شده مشاهده می‌کنیم اگر دنباله‌ی $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگرا به تابع اندازه‌پذیر f باشد، آنگاه $\{f_n\}$ ت.هـ و در اندازه همگرا به تابع اندازه‌پذیر f است.

قضیه ۱۰۷.۳. **فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و در اندازه همگرا به تابع اندازه‌پذیر f باشد، آنگاه زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_j}\} \subseteq \{f_n\}$ چنان موجود است که ت.هـ همگرا به f است.**

اثبات : فرض کنیم $f_n \xrightarrow{\mu} f$. در این صورت برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$، ثابت $n_۱ \in \mathbb{N}$، چنان موجود است که

$$\mu\left(\{x \in X : |f_{n_۱}(x) - f(x)| \geq \frac{۱}{۲}\}\right) < \frac{۱}{۲},$$

و برای $\varepsilon = \frac{۱}{۲^۲}$، ثابت $n_۲ \in \mathbb{N}$ با شرط $n_۲ > n_۱$ چنان موجود است که

$$\mu\left(\{x \in X : |f_{n_۲}(x) - f(x)| \geq \frac{۱}{۲^۲}\}\right) < \frac{۱}{۲^۲},$$

و به این ترتیب، به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، ثابت $n_k \in \mathbb{N}$ با شرط $n_k > n_{k-۱}$ چنان موجود است که

$$\mu\left(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{۱}{۲^k}\}\right) < \frac{۱}{۲^k},$$

به ازای هر k، قرار می‌دهیم $E_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{۱}{۲^k}\}$. حال تعریف می‌کنیم

$E = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=m}^{\infty} E_k$. آنگاه به ازای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_k) \leq 2^{-m+1}.$$

و در نتیجه $\mu(E) = 0$. همچنین، هرگاه $x \notin E$، آنگاه mای چنان هست که $x \notin \cup_{k=m}^{\infty} E_k$ و در نتیجه به ازای هر $k \geq m$، $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$. بنابراین به ازای هر $x \in E^c$، $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ و لذا f_{n_k} ت.هـ همگرا به f است. ■

قضیه ۱۰۸.۳. فرض کنید $0 < p < \infty$ باشد. اگر $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} f$، آنگاه $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

اثبات : به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه فرض کنیم $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. آنگاه

$$\int_X |f_n - f|^p \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^p \geq \varepsilon^p \mu(E_{n,\varepsilon}).$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p = 0$. ■

نتیجه ۱۰۹.۳. اگر $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} f$، آنگاه زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_j}\} \subseteq \{f_n\}$ چنان موجود است که ت.هـ همگرا به f است.

اثبات : حکم از تلفیق قضایای ۱۰۷.۳ و ۱۰۸.۳ بدست می‌آید. ■

حال می‌خواهیم با ارائه مثال‌هایی عدم برقراری باقی روابط را در شکل بالا نشان دهیم.

مثال ۱۱۰.۳. فرض کنیم $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ فضای اندازه لبگ باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq e^n, \\ 0 & \text{غیره}. \end{cases}$$

آنگاه $f_n \xrightarrow{\text{uni}} 0$ و در نتیجه $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} 0$ و $f_n \xrightarrow{m} 0$. اما به ازای هر $p \in (0, \infty)$،

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} n^{-p} e^n = \infty.$$

مثال ۱۱۱.۳. فرض کنیم $([0,\infty), \mathcal{L} \cap [0,\infty), m)$ فضای اندازه لبگ باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{غیره}. \end{cases}$$

آنگاه $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} \circ$ و $f_n \xrightarrow{m} \circ$. همچنین به ازای هر $p \in (\circ, \infty)$، f_n در $\mathfrak{L}^p$ همگرا به صفر است. در واقع $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = \circ$. اما بطور یکنواخت همگرا نیست.

مثال ۱۱۲.۳. فرض کنیم $([\circ, ۱], \mathcal{L} \cap [\circ, ۱], m)$ فضای اندازه لبگ باشد. بازه‌های

$$[\circ, ۱],\ [\circ, \frac{۱}{۲}],\ [\frac{۱}{۲}, ۱],\ [\circ, \frac{۱}{۳}],\ [\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}],\ [\frac{۲}{۳}, ۱],\ [\circ, \frac{۱}{۴}],\ \dots,\ [\frac{۳}{۴}, ۱],\ \dots$$

را در نظر می‌گیریم. حال فرض می‌کنیم f_n تابع مشخصه‌ی nامین بازه از این فهرست باشد. نشان می‌دهیم $\{f_n\}$ در $\mathfrak{L}^p$ همگرا به تابع ثابت صفر است. داریم

$$\|f_۱\|_p^p = ۱,\ \|f_۲\|_p^p = \frac{۱}{۲},\ \|f_۳\|_p^p = \frac{۱}{۲},\ \|f_۴\|_p^p = \frac{۱}{۳},\ \dots \|f_۶\|_p^p = \frac{۱}{۳},\ \|f_۷\|_p^p = \frac{۱}{۴}, \dots$$

و بدین ترتیب به ازای هر $n \geq ۱ + \dots + m = \frac{m(m+۱)}{۲}$،

$$\|f_n - \circ\|_p^p = \int_{[\circ,۱]} f_n^p \leq \frac{۱}{m},$$

و در نتیجه $\{f_n\}$ در $\mathfrak{L}^p$ همگرا به تابع ثابت صفر است و در نتیجه در اندازه نیز همگرا به صفر است. اکنون فرض می‌کنیم $x \in [\circ, ۱]$ دلخواه باشد. آنگاه دنباله‌ی $\{f_n(x)\}$ زیردنباله‌ای فقط متشکل از صفر و زیردنباله‌ی دیگری فقط متشکل از یک دارد و در نتیجه دنباله‌ی $\{f_n\}$ در هیچ نقطه‌ای از $[\circ, ۱]$ همگرا نیست.

مثال ۱۱۳.۳. فرض کنیم $([\circ, \infty), \mathcal{L} \cap [\circ, \infty), m)$ فضای اندازه لبگ باشد. تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} ۱ & n - ۱ \leq x \leq n, \\ \circ & \text{غیره}. \end{cases}$$

آنگاه $\{f_n\}$ ت.هـ همگرا به تابع ثابت صفر است اما در اندازه همگرا نیست و در نتیجه بطور یکنواخت و در $\mathfrak{L}^p$ همگرا به تابع ثابت صفر نیست.

حال به بیان ارتباط مابین همگرایی تقریباً همه‌جا و همگرایی یکنواخت می‌پردازیم. ارتباط تنگاتنگ این دو نوع همگرایی، حاصل تلاش ریاضی‌دان روسی، دی. اگوروف[۱۶] می‌باشد که ما آن را در قالب قضیه‌ای به نام قضیه‌ی اگوروف بیان و ثابت می‌کنیم.

[۱۶] D. Egoroff

قضیه ۱۱۴.۳. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و تقریباً همه‌جا همگرا به تابع اندازه‌پذیر f باشد. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $E \subseteq X$ چنان موجود است که $\mu(E) < \varepsilon$ و روی E^c، $f_n \xrightarrow{\text{uni}} f$.

اثبات : بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم f_n روی کل X نقطه به نقطه همگرا به f است. به ازای هر $n, k \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم

$$E_n(k) = \cup_{m=n}^{\infty}\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

آنگاه به ازای هر kی ثابت و هر $n \in \mathbb{N}$، $E_{n+1}(k) \subseteq E_n(k)$. از اینکه به ازای هر $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ داریم $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$. حال از متناهی بودن فضای اندازه و نزولی بودن دنباله‌ی $\{E_n(k)\}$ نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n(k)) = 0$. بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $k \in \mathbb{N}$، چنان $n_k \in \mathbb{N}$ موجود است که $\mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$. قرار می‌دهیم $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. آنگاه $\mu(E) < \varepsilon$ و به ازای هر $n > n_k$ و $x \notin E$، داریم $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. بنابراین f_n بطور یکنواخت همگرا روی E^c به f است. ■

تذکر ۱۱۵.۳. شرط متناهی بودن فضای اندازه در قضیه‌ی اگوروف ضروری است. مسئله‌ی حل شده‌ی ۲۱ از همین فصل را ببینید.

تذکر ۱۱۶.۳. قضیه‌ی اگوروف قابل توسیع برای حالت $\varepsilon = 0$ نیست. به عنوان مثال با فرض $f_n(x) = x^n$ روی بازه $(0, 1)$، این دنباله نقطه به نقطه همگرا به تابع ثابت صفر است، اما $\{f_n\}$ روی هیچ $E \subseteq (0, 1)$ با اندازه‌ای برابر با یک نمی‌تواند بطور یکنواخت همگرا باشد. در واقع اگر E زیرمجموعه‌ای از بازه‌ی $(0, 1)$ با اندازه‌ی یک باشد، آنگاه به ازای هر $\delta > 0$، $B(1, \delta) \cap E \neq \emptyset$ و در نتیجه به ازای n، $\sup_{x\in E} f_n(x) = 1$ بوده و این یعنی $\{f_n\}$ بطور یکنواخت نمی‌تواند همگرا به صفر روی هر زیرمجموعه‌ی E با اندازه‌ای برابر با یک باشد.

تذکر ۱۱۷.۳. با نگاهی به برهان قضیه‌ی اگوروف، مشاهده می‌کنیم که متناهی بودن فضای اندازه تنها در همگرایی دنباله‌ی $\{\mu(E_n(k))\}_{n=1}^{\infty}$ به صفر استفاده شد. بنابراین هر شرطی که بتواند به ازای n_0ای، متناهی بودن $E_{n_0}(k)$ را به ازای هر k، نتیجه دهد، می‌تواند جایگزین شرط متناهی بودن فضای اندازه در قضیه‌ی اگوروف گردد. به عنوان مثال، اگر تابع انتگرال‌پذیری روی X مانند g چنان موجود باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|f_n| \leq g$ باشد، آنگاه از انتگرال‌پذیری g و اینکه به ازای هر

$k, n \in \mathbb{N}$، $E_n(k) \subseteq \{x \in X : |g(x)| > \frac{۱}{۲k}\}$، داریم

$$\mu(E_n(k)) \leq \mu(\{x \in X : |g(x) > \frac{۱}{۲k}\}) \leq \int_X |g|\, d\mu < \infty,$$

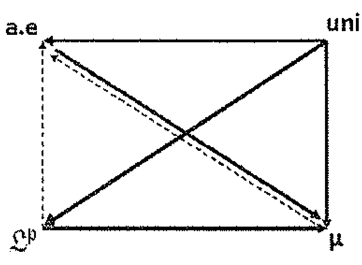
نتیجه ۱۱۸.۳. **فرض کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی باشد. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و تقریباً همه‌جا همگرا به تابع اندازه‌پذیر f باشد، آنگاه $f_n \xrightarrow{\mu} f$.**

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. بنابه قضیه‌ی اگوروف، زیرمجموعه $E \subseteq X$ چنان موجود است که $\mu(E) < \varepsilon$ و f_n روی E^c بطور یکنواخت همگرا به f است. در نتیجه $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به ازای هر $x \in E^c$ و به ازای هر $n \geq N$، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. بنابراین به ازای هر $n \geq N$،

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) \leq \mu(E) < \varepsilon,$$

و در نتیجه $f_n \xrightarrow{\mu} f$. ■

به آسانی می‌توان نشان داد، در فضای اندازه‌ی متناهی، همگرایی یکنواخت مستلزم همگرایی در $\mathfrak{L}^p$ است. روند اثبات دقیقاً مشابه اثبات قضیه‌ی ۶۴.۳، می‌باشد. با توجه به قضایا و نتایج بیان شده، می‌توان نمودار مربوط به ارتباط مابین انواع همگرایی‌ها را به صورت زیر ترسیم کرد:



شکل ۴.۳: ارتباط مابین انواع همگرایی‌ها در فضای اندازه‌ی متناهی

مثال زیر به همراه مثال ۱۱۲.۳، مثال‌های نقضی برای اثبات عدم وجود پیکان در شکل را ارائه می‌دهند.

مثال ۱۱۹.۳. فضای اندازه‌ی $([۰, ۲], \mathcal{L} \cap [۰, ۲], m)$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \frac{۱}{n} \leq x \leq \frac{۲}{n}, \\ ۰ & \text{غیره.} \end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$ و در نتیجه $f_n \xrightarrow{m} f$. اما بطور یکنواخت و در $\mathfrak{L}^p$ همگرا نیست.

۹.۳ مسائل حل شده

در این بخش فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را ثابت در نظر می‌گیریم.

مسئله ۱. نشان دهید هر تابع یکنوای $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی برل اندازه‌پذیر است.

جواب: فرض کنیم E مجموعه نقاط ناپیوستگی f باشد. از اینکه f تابعی یکنواست، پس E شماراست. با توجه به لم ۱۲.۳، کافی است نشان دهیم f روی E و E^c تابعی برل اندازه‌پذیر است. بوضوح f روی E برل اندازه‌پذیر است، زیرا به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((a, \infty)) \cap E$ شماراست و در نتیجه برل اندازه‌پذیر است. از طرفی f روی E^c تابعی پیوسته است، بنابراین به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((a, \infty)) = G \cap E^c$ که G مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}$ است. بنابراین

$$f^{-1}((a, \infty)) \cap E^c = G \cap E^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

توجه داشته باشید که E شماراست و در نتیجه E و E^c برل اندازه‌پذیرند.
یادآوری : اگر $(X, \Im)$ یک فضای توپولوژیک باشند و $Y \subseteq X$ باشد، آنگاه $E \subseteq Y$ در Y نسبت به توپولوژی القایی باز است اگر و تنها اگر زیرمجموعه‌ی بازی از X مانند G موجود باشد که $E = G \cap Y$.

مسئله ۲. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی یک به یک و پیوسته باشد. نشان دهید تصویر هر مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر توسط f یک مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر است.

جواب: با توجه به مطالب بیان شده در یادآوری صفحه‌ی ۵ از اینکه f یک به یک است، به ازای هر $E, F \subseteq \mathbb{R}$ داریم $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$ و $f(E - F) = f(E) - f(F)$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq \mathbb{R} : f(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}.$$

ادعا می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک σ-جبر است. در واقع از اینکه f یک‌به‌یک است، به ازای هر $E \subseteq \mathbb{R}$ داریم $f(E^c) = f(\mathbb{R} - E) = \mathbb{R} - f(E)$. بنابراین $\mathcal{A}$ نسبت به عمل متمم‌گیری بسته است. همچنین با فرض اینکه $\{E_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه $f(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ و در نتیجه $\mathcal{A}$

نسبت به اجتماع شمارا بسته است. در ضمن پیوستگی و یک به یک بودن f، اکیداً یکنوایی آن را نتیجه می‌دهد و در نتیجه $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ یا $f([a,b]) = [fb), f(a)]$. لذا $\mathcal{A}$ شامل تمام بازه‌های بسته و در نتیجه شامل تمام مجموعه‌های برل است. پس $f\left(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

مسئله ۳. مثالی بیاورید که

الف) f **تابعی اندازه‌پذیر و** A **مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر ولی** $f(A)$ **لبگ اندازه‌ناپذیر است.**

ب) g **تابعی اندازه‌پذیر و** B **مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر باشد که** $g^{-۱}(B)$ **لبگ اندازه‌ناپذیر است.**

پ) مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر که برل اندازه‌پذیر نباشد.

جواب :

الف) فرض کنیم Φ تابع کانتور تعریف شده در ۹۶.۲ باشد. تابع Φ را روی کل $\mathbb{R}$ به صورت

$$\Phi(x) = ۰, \quad x < ۰, \quad , \quad \Phi(x) = ۱, \quad x > ۱.$$

توسیع داده و قرار می‌دهیم $f(x) = x + \Phi(x)$. از اینکه Φ تابعی صعودی و پیوسته است، بنابراین تابع f اکیداً صعودی و پیوسته از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است و در نتیجه تابعی یک‌به‌یک است. با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۲، تصویر هر مجموعه برل اندازه‌پذیر توسط f مجموعه‌ای برل اندازه‌پذیر است. فرض کنیم

$$C = [۰, ۱] - \bigcup_{n=۱}^{\infty} (a_n, b_n),$$

که C مجموعه‌ی کانتور و دنباله‌ی $\{(a_n, b_n)\}$، دنباله‌ی بازه‌های حذف شده از بازه‌ی $[۰, ۱]$ در ساخت مجموعه‌ی کانتور است. ابتدا نشان می‌دهیم $m(f(C)) = ۱$.

$$\begin{aligned} m(f([۰,۱] - C)) &= m\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} f((a_n, b_n))\right) = \sum_{n=۱}^{\infty} m(f((a_n, b_n))) \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} m((a_n + \Phi(a_n), b_n + \Phi(b_n))) \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} m((a_n, b_n)) = ۱. \end{aligned}$$

از اینکه تصویر بازه‌ی $[\circ, 1]$ تحت تابع f بازه‌ی $[\circ, 2]$ است، داریم

$$2 = m([\circ, 2]) = m\big(f(C)\big) + m\big(f([\circ, 1] - C)\big) = m\big(f(C)\big) + 1.$$

بنابراین ۱ $= m(f(C))$. حال با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی ۲۰، فصل اول، مجموعه‌ی $f(C)$ شامل مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر مانند V است. قرار می‌دهیم $A = f^{-1}(V)$. در این صورت $A \subseteq C$ و در نتیجه مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است (زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی پوچ لبگ، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است)، در حالی که $f(A) = f\big(f^{-1}(V)\big) = V$ مجموعه‌ای اندازه‌ناپذیر است.

ب) کافی قرار دهید

$$g = f^{-1} \quad , \quad B = f^{-1}(V).$$

که در آن f و V تابع و مجموعه‌ی تعریف شده در قسمت (الف) بالاست.

پ) قرار دهید $A = f^{-1}(V)$ که V مجموعه اندازه‌ناپذیر تعریف شده در قسمت (الف) است. در این صورت A اندازه‌پذیر است ولی برل اندازه‌پذیر نیست. در واقع اگر برل اندازه‌پذیر باشد، آنگاه از یک‌به‌یک بودن f، $f(A) = V$ باید برل اندازه‌پذیر باشد که تناقض پیش می‌آید.

مسئله ۴. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید تصویر هر زیرمجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر تحت f، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر است، اگر و تنها اگر تصویر هر زیرمجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر $A \subseteq [a, b]$، تحت f مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر باشد.

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم، تابع پیوسته‌ی f در شرط زیر صدق کند

$$E \subseteq [a, b], \quad m(E) = \circ \implies m(f(E)) = \circ, \tag{۲۲.۳}$$

اگر A زیرمجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر از $[a, b]$ باشد، آنگاه با توجه به قضیه‌ی ۸۶.۲، مجموعه‌ای F_σ مانند $F \subseteq A$ و مجموعه‌ای پوچ مانند $E \subseteq [a, b]$، چنان موجود است که $A = F \cup E$. از اینکه $f(A) = f(F) \cup f(E)$، که در آن $f(F)$ مجموعه‌ای F_σ و $m(f(E)) = \circ$ است، نتیجه می‌گیریم $f(A)$ مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است. (توجه داشته باشید که هر زیرمجموعه‌ی بسته و کراندار در $\mathbb{R}$، مجموعه‌ای فشرده و تصویر هر مجموعه‌ی فشرده تحت تابعی پیوسته مجموعه‌ای فشرده است). حال فرض کنیم تصویر هر مجموعه‌ی لبگ اندازه‌پذیر تحت f مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر باشد. اگر شرط (۲۲.۳)، برقرار نباشد، آنگاه مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر با اندازه‌ی صفر مانند $E_\circ$

چنان موجود است که $m(f(E_\circ)) > \circ$. بنابراین از مسئله‌ی حل شده‌ی ۲۰، فصل قبل، $f(E_\circ)$ شامل مجموعه‌ای لبگ اندازه‌ناپذیر مانند V است. از اینکه $V \subseteq f(E_\circ)$، لذا $A \subseteq E_\circ$ چنان موجود است که $V = f(A)$. از طرفی اندازه‌ی لبگ، اندازه‌ای کامل است و در نتیجه A مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است. بنابراین $f(A)$ لبگ اندازه‌پذیر است و این یک تناقض است.

مسئله ۵. نشان دهید، در فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، هر تابع لبگ اندازه‌پذیر f، ت.ه. با تابعی برل اندازه‌پذیر مانند g برابر است.

جواب : فرض کنیم f تابعی لبگ اندازه‌پذیر باشد. اگر $f = \chi_E$ که $E \in \mathcal{L}$، آنگاه از اینکه فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ کامل شده‌ی فضای اندازه‌ی $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, m)$ است، پس $B, B_\circ \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ موجود است $m(B_\circ) = \circ$ و $E = B \cup F$ که $F \subseteq B_\circ$. بنابراین با قرار دادن $g = \chi_B$ حکم برای توابع مشخصه برقرار است. از طرفی هر تابع ساده ترکیب خطی متناهی از توابع مشخصه است و در نتیجه هر تابع ساده‌ی لبگ اندازه‌پذیر ت.ه. با تابعی ساده و برل اندازه‌پذیر برابر است. در حالت کلی، از اینکه f تابعی لبگ اندازه‌پذیر است، پس دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده‌ی لبگ اندازه‌پذیر چنان موجود است که نقطه به نقطه همگرا به f است. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض می‌کنیم ψ_n تابعی ساده و برل اندازه‌پذیر باشد که روی $X - E_n$، $\varphi_n = \psi_n$ که $E_n \in \mathcal{L}$ و $m(E_n) = \circ$ است. فرض می‌کنیم $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq B_\circ \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ که $m(B_\circ) = \circ$ است. (توجه داشته باشید که چنین فرضی ممکن است، زیرا $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \circ$ و اینکه مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر کامل شده‌ی مجموعه‌های برل اندازه‌پذیر است). قرار می‌دهیم $g = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{R}-B_\circ} \psi_n$. در این صورت g حد دنباله‌ای از توابع برل اندازه‌پذیر است و در نتیجه تابعی برل اندازه‌پذیر است و روی $X - B_\circ$ برابر با f است و در نتیجه حکم برقرار است.

مسئله ۶. فرض کنیم $f : X \to \mathbb{R}^*$ چنان تابعی باشد که به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، $\int_E f\, d\mu$ موجود و نامنفی است، نشان دهید f روی X تقریباً همه‌جا نامنفی است.

جواب : فرض کنیم مجموعه‌ای مانند E با اندازه‌ی مثبت موجود باشد که $E = \{x : f(x) < \circ\}$. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $E_n = \{x : f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$. در این صورت $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(E) > \circ$. پس $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است که $\mu(E_{n_\circ}) > \circ$ و در نتیجه $\int_{E_{n_\circ}} f d\mu \leq -\frac{1}{n_\circ}\mu(E_{n_\circ}) < \circ$ که یک تناقض است.

مسئله ۷. فرض کنید $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ فضای اندازه‌ی شمارشی و $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه روی این فضا باشد. ضمن بیان نحوه‌ی انتگرال‌گیری تابع f در این فضا، قضیه‌ی همگرایی یکنوا، لم فاتو، قضیه‌ی تسلطی لبگ و قضیه‌ی لوی را در این فضا بیان کنید.

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم f تابعی نامنفی روی $\mathbb{N}$ باشد و $\{f(۱), f(۲), ..., f(n), ...\}$ برد f باشد. تعریف می‌کنیم

$$\varphi_n(j) := \begin{cases} f(j) & j = ۱, ..., n, \\ ۰ & \text{غیره}. \end{cases}$$

در این صورت $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع ساده و همگرا به تابع f است. (توجه داریم که هر تابعی در این فضا اندازه‌پذیر است). حال با توجه به قضیه‌ی همگرایی یکنوا، داریم

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_n \, d\mu_c = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=۱}^{n} f(j) = \sum_{j=۱}^{\infty} f(j).$$

در حالت کلی، اگر f تابعی حقیقی مقدار روی فضای اندازه‌ی شمارشی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c &= \int_{\mathbb{N}} f^+ \, d\mu_c - \int_{\mathbb{N}} f^- \, d\mu_c \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \max\{f(n), ۰\} + \sum_{n=۱}^{\infty} \min\{f(n), ۰\}. \end{aligned}$$

و در صورتی که انتگرال f موجود باشد، به عبارتی حداقل یکی از سری‌های $\sum_{n=۱}^{\infty} \max\{f(n), ۰\}$ یا $\sum_{n=۱}^{\infty} \min\{f(n), ۰\}$ همگرا باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c &= \sum_{n=۱}^{\infty} \max\{f(n), ۰\} + \sum_{n=۱}^{\infty} \min\{f(n), ۰\} \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} f(n). \end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم از این حقیقت ناشی می‌شود که اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی ازاعداد حقیقی باشند که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ هر دو در $\mathbb{R}^*$ موجود و حداقل یکی از آنها متناهی باشد، آنگاه $\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n + b_n)$ در $\mathbb{R}^*$ موجود است و داریم $\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n$. با توجه به توضیحات بیان شده و اینکه می‌دانیم f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ انتگرال‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ در فضای اندازه‌ی شمارشی انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ بطور مطلق همگرا باشد و در این حالت داریم $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$. حال به آسانی می‌توان قضایای مورد نظر را در این فضا بیان کرد. قبل از بیان این قضایا، توجه

داریم که هر تابع در این فضا در واقع یک دنباله از اعداد حقیقی است . در نتیجه می‌توان به رسم همیشگی آن را به صورت $\{a_n\}$ نشان داد. همچنین هر دنباله از توابع، در واقع یک دنباله‌ی دوگانه می‌باشد و می‌توان آن را به صورت $\{a_{nm}\}$ نشان داد.

۱- **قضیه‌ی همگرایی یکنوا:** اگر $\{a_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوگانه از اعداد حقیقی نامنفی باشد که به ازای هر $m \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $a_{n,m} \leq a_{n+1,m}$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}.$$

۲- **لم فاتو:** اگر $\{a_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوگانه از اعداد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه

$$\sum_{m=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{n,m} \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}.$$

۳- **همگرایی تسلطی لبگ:** اگر $\{a_{nm}\}$ دنباله‌ای دوگانه و $\{b_m\}$ دنباله‌ای از از اعداد حقیقی باشند که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $|a_{n,m}| \leq b_m$ و سری $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ همگرای مطلق و $\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$ موجود باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |a_m| < \infty$ و

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m.$$

۴- **قضیه‌ی لوی:** اگر $\{a_{nm}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوگانه از اعداد حقیقی نامنفی باشد، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

مسئله ۸. فرض کنید f تابعی نامنفی و اندازه‌پذیر روی X و λ تابعی تعریف شده روی $\mathcal{A}$ به صورت $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$ باشد. نشان دهید λ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است و به ازای هر g اندازه‌پذیر و نامنفی روی X داریم

$$\int_X g\, d\lambda = \int_X fg\, d\mu.$$

جواب : بوضوح $\lambda(\emptyset) = 0$. حال از اینکه $f \in L^+(X)$ است، دنباله‌ای صعودی از توابع ساده و اندازه‌پذیر مانند $\{\varphi_n\}$ چنان موجود است که $\varphi_n \uparrow f$. فرض کنیم $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر

مجزا در $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) &= \int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i}\varphi_n\,d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{E_i}\varphi_n\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f\,d\mu.\end{aligned}$$

که در آن تساوی سوم از لم ۲۵.۳ و تساوی چهارم از صعودی بودن φ_n ها و قسمت (۱) از جواب مسئله‌ی حل شده‌ی ۷ همین فصل، حاصل شده است و در نتیجه λ یک تابع اندازه روی $\mathcal{A}$ است. برای اثبات قسمت بعدی، ابتدا فرض می‌کنیم g تابعی ساده و اندازه‌پذیر با نمایش استاندارد به صورت $g=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_X g\,d\lambda &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{E_i} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_X \alpha_i\chi_{E_i} f\,d\mu\\ &= \int_X f\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}\,d\mu = \int_X fg\,d\mu.\end{aligned}$$

در حالت کلی، از اینکه $g\in L^+(X)$ است، دنباله‌ای صعودی از توابع ساده و اندازه‌پذیر مانند $\{\varphi_n\}$ چنان موجود است که $\varphi_n\uparrow g$. آنگاه دنباله‌ی $\{f\varphi_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه‌پذیر و همگرا به fg است. حال با بکار بردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا،

$$\int_X g\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_X f\varphi_n\,d\mu = \int_X fg\,d\mu.$$

مسئله ۹. لم ۵۷.۳ را اثبات کنید.

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم f تابعی نامنفی باشد. در این صورت نتایج مورد نظر با توجه به مسئله‌ی حل شده‌ی قبل واضح است. حال فرض می‌کنیم f تابعی اندازه‌پذیر باشد که انتگرالش روی $E\in\mathcal{A}$ موجود است. در این صورت برای قسمت (الف)، داریم

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} f^+\,d\mu - \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} f^-\,d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{E_i} f^+ \, d\mu - \int_{E_i} f^- \, d\mu\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} f \, d\mu.$$

برای اثبات قسمت (ب)، داریم

$$\begin{aligned}\int_E f \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+ \, d\mu - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^- \, d\mu\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{E_n} f^+ \, d\mu - \int_{E_n} f^- \, d\mu\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu.\end{aligned}$$

و بالاخره برای اثبات قسمت (پ)، فرض کنیم $F_1 = E_1$ و $F_n = E_n - E_{n-1}$ برای $n \geq 2$ باشد. آنگاه $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دوبدو مجزا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر بوده و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\cup_{k=1}^{n} F_k = E_n$ و $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n = E$. بنابراین با توجه به قسمت‌های قبل داریم

$$\begin{aligned}\int_E f \, d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k} f \, d\mu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{k=1}^{n} F_k} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f \, d\mu.\end{aligned}$$

مسئله ۱۰. (لم برل-کانتلی). فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{A}$ با $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ باشد. نشان دهید تقریباً هر $x \in X$، حداکثر در تعداد متناهی از E_kها می‌تواند قرار داشته باشد.

جواب : فرض می‌کنیم E مجموعه‌ی تمامی نقاطی از X باشد که در تعداد نامتناهی E_k قرار دارند. کافی است ثابت کنیم $\mu(E) = 0$ است. قرار می‌دهیم

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \quad (x \in X).$$

به ازای هر $x \in X$، هر یک از جملات این سری برابر با یک یا صفر است. بنابراین $x \in E$ است اگر و تنها اگر $g(x) = \infty$. از طرفی با توجه به تعریف انتگرال،

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty,$$

حال از لم ۳.۴۰، g تقریباً همه‌جا متناهی است و در نتیجه $\mu(E) = \circ$ و حکم ثابت می‌شود.

مسئله ۱۱. فرض کنیم $f \in \mathfrak{L}^{1}([\circ, 1], \mathcal{L}\cap[\circ, 1], m)$ چنان باشد که به ازای هر $E \in \mathcal{L}\cap[\circ, 1]$ با $m(E) > \circ$، داریم

$$\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f dm\right) \in [\circ, 1],$$

نشان دهید $m(\{x \in [\circ, 1] : f(x) \notin [\circ, 1]\}) = \circ$.

جواب : از اینکه $[\circ, 1]^c$ در $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای باز است، پس می‌توان آن را بصورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز و مجزا نوشت. فرض کنیم $[\circ, 1]^c = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ باشد که در آن G_n بازه‌ای باز به مرکز a_n و به شعاع r_n است. در این صورت

$$\begin{aligned} \{x \in [\circ, 1] : f(x) \notin [\circ, 1]\} &= \{x \in [\circ, 1] : f(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\} \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n), \quad (۳.۲۳) \end{aligned}$$

از اینکه f تابعی اندازه‌پذیر است، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f^{-1}(G_n)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. با توجه به (۳.۲۳) کافی است ثابت نماییم به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $m(f^{-1}(G_n)) = \circ$. قرار می‌دهیم $E_n = f^{-1}(G_n)$. بنابه برهان خلف، فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $m(E_n) > \circ$. آنگاه بنابه فرض،

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f\, dm - a_n\right| &= \left|\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n}(f(x) - a_n)\, dm\right| \\ &\le \frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n}|f(x) - a_n|\, dm \\ &\le r_n. \end{aligned}$$

به عبارتی

$$\left(\frac{1}{m(E_n)}\int_{E_n} f dm\right) \in G_n \subseteq [\circ, 1]^c.$$

و این با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه $m(E_n) = \circ$ و حکم ثابت می‌شود.

مسئله ۱۲. در فضای اندازه‌ی لبگ، نشان دهید $\int_{[\circ, 1]} \cos x \ \ln x \, dm = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

جواب: از اینکه $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \ln x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \ln x$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|\, dm = \int_0^1 |f_n(x)|\, dm = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

و با توجه به اینکه، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} < \infty$، بنابراین شرایط قضیه‌ی ۶۵.۳، برقرار است و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \cos x \ln x\, dm &= \int_{[0,1]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ln x\, dm \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ln x\, dm \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \end{aligned}$$

مسئله ۱۳. در فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\, dm = 1.$$

جواب: فرض می‌کنیم $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)$. می‌توان ثابت کرد $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی و همگرا به $\exp(x)$ است[17] حال با بکار بردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا، داریم

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\, dm \\ = &\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \chi_{[0,n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\, dm \\ = &\int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,n]}(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \exp(-2x)\, dm \\ = &\int_{[0,\infty)} \exp(-x)\, d\mu = 1. \end{aligned}$$

[17] اگر $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ باشد، آنگاه به ازای هر $x > 0$، دنباله‌ی $\{a_n\}$ کراندار، اکیداً صعودی است. برای اثبات می‌توانید مسئله‌ی ۳۶.۱.۲ را در کتاب «مسائلی در آنالیز ریاضی ۱»، تألیف $W.J.kaczor$ و $M.T.Nowak$، ترجمه‌ی حسین فضلی–سیما آغچی ، انتشارات حفیظ، ببینید.

توجه داشته باشید که برای محاسبه‌ی انتگرال لبگ $\int_{[\circ,\infty)} \exp(-x)\, d\mu$ از قضیه‌ی ۸۲.۳، استفاده کرده‌ایم.

مسئله ۱۴. فرض کنید $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ یک فضای اندازه و $(Y, \mathcal{A}_Y)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر $f : (X, \mathcal{A}_X) \to (Y, \mathcal{A}_Y)$ تابعی $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-اندازه‌پذیر و $g : (Y, \mathcal{A}_Y, \mu f^{-1}) \to \mathbb{R}^*$ تابعی $\mathcal{A}_Y$-اندازه‌پذیر باشد. نشان دهید g انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر gof تابعی انتگرال‌پذیر باشد و در این حالت داریم

$$\int_Y g\, d\mu f^{-1} = \int_X gof\, d\mu.$$

تعریف μf^{-1} را در مسئله‌ی ۱ همین فصل ببینید.

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم g تابع مشخصه روی مجموعه‌ی E از $\mathcal{A}_Y$ باشد. در این صورت gof تابع مشخصه روی $f^{-1}(E)$ است و در این حالت

$$\int_Y g\, d\mu f^{-1} = \int_X gof\, d\mu = \mu(f^{-1}(E)).$$

بنابراین نتیجه‌ی مورد نظر برای حالتی که g تابع مشخصه باشد، برقرار است. حال با توجه به خطی بودن تابعک انتگرال، نتیجه برای حالتی که g تابعی ساده باشد، درست است. برای اثبات مطلب در حالت کلی، اگر g تابعی نامنفی باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۲۶.۳، دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده‌ی صعودی، نامنفی و اندازه‌پذیر چنان موجود است که روی Y نقطه به نقطه به g همگراست. بنابراین $\{\varphi_n of\}$ دنباله‌ای صعودی و نامنفی از توابع اندازه‌پذیر و نقطه به نقطه همگرا به gof است. حال با بکار بردن قضیه‌ی همگرایی یکنوا داریم

$$\int_Y g\, d\mu f^{-1} = \lim_{n\to\infty} \int_Y \varphi_n\, d\mu f^{-1} = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n of\, d\mu = \int_X gof\, d\mu.$$

و در نهایت، اگر g تابعی $\mathbb{R}^*$ مقدار باشد، آنگاه با مجزا کردن قسمت‌های مثبت و منفی و با بهره‌گیری از مطالب قبلی، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

مسئله ۱۵. فرض کنید $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$ باشد. نشان دهید

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dm = \int_{\mathbb{R}} g(-x)\, dm = \int_{\mathbb{R}} g(x+c)\, dm.$$

جواب : توابع حقیقی مقدار و برل اندازه‌پذیر $f_1(x) = -x$ و $f_2(x) = x + c$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر

می‌گیریم. در این صورت به ازای هر $E \in \mathcal{L}$، $mf_1^{-1}(E) = mf_2^{-1}(E) = m(E)$. بنابراین توابع اندازه‌ی mf_1^{-1} و mf_2^{-1} با اندازه‌ی لبگ روی مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر برابرند. حال با توجه به مسئله‌ی قبل، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

مسئله ۱۶. **فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر روی X و $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$ باشد. نشان دهید** $\lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) = 0$.

جواب : به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، قرار می‌دهیم $\lambda(E) = \int_E |f| \, d\mu$. از مسئله‌ی حل شده‌ی ۸، λ یک اندازه روی $\mathcal{A}$ است. از طرفی $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است و از انتگرال‌پذیری f، $\lambda(E_1) < \infty$. حال با توجه به مفروضات داریم

$$\lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0,$$

که در آن تساوی آخر، از پیوستگی از بالای اندازه بدست آمده است.

مسئله ۱۷. **فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی باشد. نشان دهید $f : X \to [0, \infty)$ تابعی انتگرال‌پذیر روی X است اگر و تنها اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n)$ که $E_n = f^{-1}([n, n+1))$ است، همگرا باشد.**

جواب : ابتدا فرض می‌کنیم f انتگرال‌پذیر روی X باشد. با توجه به تعریف، $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجزا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اجتماعی برابر با X است. لذا با بهره‌گیری از لم ۵۷.۳ قسمت (ب)، داریم

$$\infty > \int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n),$$

حال فرض می‌کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n)$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(E_n)$ همگراست[18] بنابراین

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} (n+1) \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(E_n) < \infty,$$

و در نتیجه f روی X انتگرال‌پذیر است.

---

[18] اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری‌هایی با جملات مثبت باشند که از مرحله‌ای به بعد $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$، آنگاه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد. برای اثبات می‌توانید مسئله‌ی ۳.۲.۳ از منبع مذکور در پاورقی صفحه‌ی ۱۶۱ ببینید.

مسئله ۱۸. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر روی X باشد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\int_X |f_n|^۲ \, d\mu \leq \alpha \in \mathbb{R},$$

و $\{f_n\}$ نقطه به نقطه همگرا به صفر روی X باشد. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = ۰$

جواب : فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. با توجه به قضیه‌ی اگوروف، $E \subseteq X$ چنان موجود است که $\mu(E) < \varepsilon$ و $\{f_n\}$ روی $X - E$ بطور یکنواخت همگرا به صفر است. حال با بکار بردن نامساوی هلدر داریم

$$\begin{aligned} \int_X |f_n| \, d\mu &= \int_E |f_n| \, d\mu + \int_{X-E} |f_n| \, d\mu \\ &\leq \left(\int_E |f_n|^۲ \, d\mu \right)^{\frac{۱}{۲}} \mu(E)^{\frac{۱}{۲}} + \int_{X-E} |f_n| \, d\mu \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۶۴.۳،

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu \leq \alpha^{\frac{۱}{۲}} \cdot \mu(E)^{\frac{۱}{۲}} < \sqrt{\alpha\varepsilon}.$$

و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = ۰$

مسئله ۱۹. فرض کنید $\{p_i\}_{i=۱}^n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و بزرگتر اکید از یک باشند و $p > ۱$ چنان باشد که $\sum_{i=۱}^n \frac{۱}{p_i} = \frac{۱}{p}$. اگر به ازای هر $i \in \{۱, \cdots, n\}$ $f_i \in \mathfrak{L}^{p_i}(X)$ باشد، آنگاه $f_۱ \cdots f_n \in \mathfrak{L}^p(X)$ و

$$\|f_۱ \cdots f_n\|_p \leq \|f_۱\|_{p_۱} \cdots \|f_n\|_{p_n}. \tag{۲۴.۳}$$

جواب : حکم را با استقراء، ثابت می‌کنیم. برای حالت $n = ۲$ از اینکه $|f_۱| \in \mathfrak{L}^{p_۱}(X)$ و $|f_۲| \in \mathfrak{L}^{p_۲}(X)$ است، پس $|f_۱|^p \in \mathfrak{L}^{\frac{p_۱}{p}}(X)$ و $|f_۲|^p \in \mathfrak{L}^{\frac{p_۲}{p}}(X)$. حال با استفاده از نامساوی هلدر داریم

$$\left(\int_X |f_۱|^p |f_۲|^p \right)^{\frac{۱}{p}} \leq \left(\left(\int_X (|f_۱|^p)^{\frac{p_۱}{p}} \right)^{\frac{p}{p_۱}} \left(\int_X (|f_۲|^p)^{\frac{p_۲}{p}} \right)^{\frac{p}{p_۲}} \right)^{\frac{۱}{p}}$$

$$= \left(\int_X |f_1|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_X |f_2|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

حال فرض می‌کنیم رابطه‌ی (۲۴.۳)، برای $n = k$ برقرار است. آنگاه برای $n = k+1$،

$$0 < \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_{k+1}} = \frac{1}{\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p}} < 1,$$

که نشان می‌دهد $\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p} > 1$. بنابراین از فرض استقراء، $f_1 \cdots f_k \in \mathfrak{L}^{\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p}}(X)$ و

$$\left(\int_X (f_1 \cdots f_k)^{\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p}}\right)^{\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p}} \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

حال با استفاده از حالت $n = 2$، نتیجه می‌گیریم $(f_1 \cdots f_k) f_{k+1} \in \mathfrak{L}^p$ و

$$\begin{aligned} \|(f_1 \cdots f_k) f_{k+1}\|_p &\leq \|f_1 \cdots f_k\|_{\frac{pp_{k+1}}{p_{k+1}-p}} \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}} \\ &\leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k} \|f_{k+1}\|_{p_{k+1}}. \end{aligned}$$

مسئله ۲۰. (نامساوی ینسن[19]). فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضای اندازه‌ای با $\mu(X) = 1$، $f : X \to (a,b)$ تابعی انتگرال‌پذیر و $\Psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد که $\Psi o f$ انتگرال‌پذیر است. نشان دهید

$$\Psi\left(\int_X f\, dm\right) \leq \int_X \Psi o f\, dm,$$

جواب : قرار می‌دهیم $x_0 = \int_X f\, d\mu$. بوضوح $x_0 \in (a,b)$. فرض کنیم m مقداری دلخواه مابین مشتق چپ و راست Ψ در نقطه‌ی x_0 باشد. آنگاه با استفاده از قضیه‌ی ۳۳.۱، قسمت (پ)، به ازای هر $x \in X$، داریم

$$\Psi(f(x)) \geq m(f(x) - x_0) + \Psi(x_0),$$

حال با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی، نتیجه‌ی مورد نظر بدست می‌آید.

مسئله ۲۱. شرط متناهی بودن فضای اندازه در قضیه‌ی اگوروف ۱۱۴.۳، ضروری است.

جواب : فضای اندازه‌ی $([0,\infty), \mathcal{L} \cap [0,\infty), m)$ و دنباله توابع $f_n(x) = \chi_{[n,\infty)}$ را روی این فضا در نظر بگیرید. این دنباله نقطه به نقطه به تابع $f(x) = 0$ همگراست. نشان می‌دهیم به ازای

[19] Jensen's inequality

هر $\varepsilon > \circ$، زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیری مانند E از $[\circ, \infty)$ وجود ندارد بطوریکه $m(E) < \varepsilon$ و f_n روی $[\circ, \infty) - E$ بطور یکنواخت همگرا به تابع ثابت صفر باشد. در واقع با فرض وجود چنین زیرمجموعه‌ای، داریم $m([\circ, \infty) - E) = \infty$ و در نتیجه $[\circ, \infty) - E$ مجموعه‌ای بیکران است. لذا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in ([\circ, \infty) - E) \cap [n, \infty)$ وجود دارد. بنابراین $f_n(x_n) = ۱$ و این متناقض با همگرایی یکنواخت f_n به تابع ثابت صفر روی $[\circ, \infty) - E$ است.

مسئله ۲۲. (قضیه‌ی لوسین). **فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی لبگ اندازه‌پذیر و $\varepsilon > \circ$ دلخواه باشد. نشان دهید مجموعه‌ای فشرده مانند $K \subseteq [a, b]$ چنان موجود است که $m([a, b] - K) < \varepsilon$ و تحدید f روی K تابعی پیوسته است.**

جواب : فرض کنیم $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده، لبگ اندازه‌پذیر و نقطه به نقطه همگرا به f باشد. به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه نقاط ناپیوستگی φ_n متناهی است. پس مجموعه نقاط ناپیوستگی دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ شماراست و در نتیجه از اندازه‌ی صفر است. حال فرض می‌کنیم $O_۱$ پوششی باز برای این مجموعه نقاط ناپیوستگی باشد که $m(O_۱) < \frac{\varepsilon}{۲}$. (چنین پوششی با توجه به قضیه‌ی ۸۵.۲ موجود است). بنابراین روی مجموعه‌ی بسته‌ی $F = [a, b] - O_۱$، دنباله‌ی توابع $\{\varphi_n\}$ پیوسته و همگرا به f است. حال با استفاده از قضیه‌ی اگوروف، مجموعه‌ی $E \subseteq F$ با شرط $m(E) < \frac{\varepsilon}{۴}$ موجود است که φ_n بطور یکنواخت به تابع f روی $F - E$ همگراست. از اینکه دنباله‌ی $\{\varphi_n\}$ پیوسته و همگرایی یکنواخت است، نتیجه می‌گیریم f روی $F - E$ تابعی پیوسته است.حال فرض می‌کنیم $O_۲$ پوششی باز برای E چنان باشد که

$$m(O_۲) < m(E) + \frac{\varepsilon}{۴} < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

بنابراین با قرار دادن $K = [a, b] - (O_۱ \cup O_۲)$ نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

مسئله ۲۳. **فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\mathfrak{M}$ گردایه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر روی این فضا باشد. تابع $d : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to [\circ, \infty]$ را به صورت**

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{۱ + |f - g|}\, d\mu,$$

در نظر بگیرید. نشان دهید

الف) دوتایی $(\mathfrak{M}, d)$ یک فضای متریک است. (دو تابع را برابر گوییم هر ت.هـ. برابر باشند).

ب) دنباله‌ی $\{f_n\} \subseteq \mathfrak{M}$ در اندازه به f همگراست اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = ۰$. با مثالی نشان دهید متناهی بودن فضای اندازه، ضروری است.

جواب : برای اثبات قسمت (الف)، با توجه به تعریف فضای متریک در ۲۲.۱ و تعریف تابع d، بوضوح شرایط اول و دوم برقرار است. از طرفی نامساوی مثلثی را نیز می‌توان از نامساوی زیر نتیجه گرفت

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{۱+|f(x)-g(x)|} \leq \frac{|f(x)-h(x)|}{۱+|f(x)-h(x)|} + \frac{|h(x)-g(x)|}{۱+|h(x)-g(x)|}.$$

حال به ازای هر $\varepsilon > ۰$، قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. با توجه به اینکه به ازای هر $x \geq ۰$ و $\varepsilon > ۰$، نامساوی $x \geq \varepsilon$ برقرار است اگر و تنها اگر $\frac{x}{۱+x} \geq \frac{\varepsilon}{۱+\varepsilon}$، نتیجه می‌گیریم $E_n = \{x \in X : \frac{|f_n(x)-f(x)|}{۱+|f_n(x)-f(x)|} > \frac{\varepsilon}{۱+\varepsilon}\}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{۱+\varepsilon}\mu(E_n) &\leq \int_X \frac{|f_n(x)-f(x)|}{۱+|f_n(x)-f(x)|}\, d\mu \\
&= \int_{E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{۱+|f_n(x)-f(x)|}\, d\mu + \int_{X-E_n} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{۱+|f_n(x)-f(x)|}\, d\mu \\
&\leq \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{۱+\varepsilon}\mu(X-E_n).
\end{aligned}$$

و این رابطه (ب) را ثابت می‌کند. برای نشان دادن اینکه، متناهی بودن فضای اندازه ضروری است، فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ را در نظر می‌گیریم و دنباله توابع $\{f_n\}$ را با ضابطه‌ی $f_n(x) = \frac{۱}{n}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم. بوضوح $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگراست، در حالی که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f_n(x)-f(x)|}{۱+|f_n(x)-f(x)|}\, dm = \int_{\mathbb{R}} \frac{۱}{n+۱}\, dm = \infty.$$

۱۰.۳ مسائل

در این بخش نیز فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ثابت در نظر می‌گیریم.

۱. فرض کنید $(Y, \mathcal{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{M})$ تابعی $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$-اندازه‌پذیر باشد. تابع $\mu f^{-۱} : \mathcal{M} \to [۰, \infty]$ را به صورت $\mu f^{-۱}(E) = \mu(f^{-۱}(E))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\mu f^{-۱}$ یک اندازه روی $\mathcal{M}$ است.

۲. فرض کنید $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ چنان باشد که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر است. نشان دهید f لزوماً تابعی اندازه‌پذیر نیست.

۳. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی چگالی از $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید تابع $f : X \to \mathbb{R}^*$، اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in A$، $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$ باشد.

۴. با ارائه‌ی مثالی نشان دهید، اندازه‌پذیری تابع $|f|$ نمی‌تواند دلیلی بر اندازه‌پذیری تابع f باشد.

۵. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^+(X)$ و $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \leq f$ باشد. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

۶. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع نزولی در $L^+(X)$ و $\int_X f_۱ \, d\mu < \infty$ باشد. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$. با مثالی نشان دهید شرط $\int_X f_۱ \, d\mu < \infty$ ضروری است.

۷. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی X و نقطه به نقطه همگرا به تابع انتگرال‌پذیر f روی X و $\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ باشد. نشان دهید به ازای هر $E \in \mathcal{A}$، $\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu$. با مثالی نشان دهید شرط $\int_X f \, d\mu < \infty$ ضروری است.

۸. فرض کنید $\{f_n\}$، $\{g_n\}$ و $\{h_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی X باشند که ت.ه. روی X، $g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$ و

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x).$$

نشان دهید اگر h و g توابعی انتگرال‌پذیر روی X و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X h \, d\mu, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

آنگاه f تابعی انتگرال‌پذیر روی X است و داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

۹. در فضای اندازه‌ی لبگ $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، با دلایل کافی نشان دهید

الف) $\int_{[۰,\infty)} \frac{x}{\exp(x)-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$.

ب) $\lim_{n\to\infty} \int_{[۰,n]} x^n(۱ - \frac{x}{n})^n \, dm = n!$.

پ) $\sum_{n=۱}^{\infty} \int_{[۰,۱]} |nx^{n-۱} - (n+۱)x^n| \, dm = \infty$. (تذکر ۶۶.۳، را ببینید).

۱۰. فرض کنید f تابعی لبگ انتگرال‌پذیر باشد. نشان دهید $F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t) \, dm$ تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ است.

۱۱. فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر روی X باشد. مقدار حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\ln\left(1+\left(\frac{|f|}{n}\right)^2\right)\,d\mu.$$

راهنمایی : به ازای هر $x\geq 0$، داریم $\ln(1+x^2)\leq x$.

۱۲. فرض کنید f تابعی انتگرال‌پذیر روی X باشد. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon>0$، مجموعه‌ای مانند $E\in\mathcal{A}$ چنان موجود است که $m(E)<\varepsilon$ و f روی E^c کراندار است.

۱۳. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و E مجموعه نقاط ناپیوستگی f باشد. نشان دهید اگر مجموعه نقاط حدی E متناهی باشد، آنگاه $m(E)=0$.

۱۴. فرض کنید $f\in\mathfrak{L}^2(X)\cap\mathfrak{L}^4(X)$ و $\int_X f^2\,d\mu=\int_X f^3\,d\mu=\int_X f^4\,d\mu$. نشان دهید ت.ه. داریم $f(x)\in\{0,1\}$.

۱۵. فرض کنید $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ فضای اندازه‌ی لبگ و $f\in\mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$ باشد. نشان دهید $\frac{1}{f}\notin\mathfrak{L}^1(\mathbb{R})$.

۱۶. فرض کنید $p\in(1,\infty)$ و q مزدوج p و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{L}^p$ همگرا به $f\in\mathfrak{L}^p$ در $\mathfrak{L}^p$ باشد. نشان دهید به ازای هر $g\in\mathfrak{L}^q$،

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g\,d\mu=\int_X fg\,d\mu.$$

۱۷. فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ و $(X',\mathcal{A}',\mu')$ دو فضای اندازه‌ی متناهی با $\mu(X)=\mu'(X')$ و توابع اندازه‌پذیر $f:X\to\mathbb{R}$ و $g:X'\to\mathbb{R}$ **تجدیدآرایش** یکدیگر باشند، یعنی به ازای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، داشته باشیم

$$\mu\{x\in X\ :\ f(x)>\alpha\}=\mu'\{x\in X'\ :\ g(x)>\alpha\}.$$

نشان دهید

الف) به ازای هر مجموعه‌ی برل اندازه‌پذیر $A\subset\mathbb{R}$، $\mu\left(f^{-1}(A)\right)=\mu'\left(g^{-1}(A)\right)$.

ب) اگر $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی برل اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\varphi o f$ تجدیدآرایشی از $\varphi o g$ است.

پ) اگر $f\in\mathfrak{L}^1(X)$ باشد، آنگاه $g\in\mathfrak{L}^1(X')$ و $\int_X f\,d\mu=\int_{X'} g\,d\mu'$.

ت) به ازای $p\in[1,\infty)$، اگر $f\in\mathfrak{L}^p(X)$ باشد، آنگاه $g\in\mathfrak{L}^p(X')$ و $\|f\|_p=\|g\|_p$.

۱۸. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی دلخواه، p و q مزدوج یکدیگر و $p \in [1, \infty)$ و $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ باشد. نشان دهید

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\int_X fg \, d\mu : \; g \in \mathfrak{L}^q(X), \quad \|g\|_q = 1\right\}.$$

اگر μ اندازه‌ای شبه متناهی باشد، آنگاه حکم برای $p = \infty$ نیز برقرار است.

۱۹. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{L}^p$ و نقطه به نقطه همگرا به $f \in \mathfrak{L}^p$ باشد. نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$ اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

۲۰. گوییم دنباله توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ **کشی در اندازه** است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$

نشان دهید دنباله‌ی $\{f_n\}$ کشی در اندازه است اگر و تنها اگر تابعی اندازه‌پذیر مانند f چنان موجود باشد که f_n در اندازه به f همگرا باشد.

۲۱. در قضایای همگرایی یکنوا، تسلطی لبگ و لم فاتو، همگرایی در اندازه را به جای شرط همگرایی نقطه به نقطه جایگزین کرده و نشان در این حالت نیز حکم برقرار است.

۲۲. فرض کنید $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ فضای اندازه‌ی شمارشی باشد. نشان دهید دنباله توابع اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ در اندازه به تابع اندازه‌پذیر f همگراست اگر و تنها اگر $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگرا به f باشد.

۲۳. فرض کنید $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی متناهی و $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و به ترتیب همگرا به توابع اندازه‌پذیر f و g در اندازه باشند. نشان دهید $\{f_n g_n\}$ در اندازه به fg همگراست. همچنین با ارائه‌ی مثالی نشان دهید شرط متناهی بودن فضای اندازه ضروری است.

پیوست الف

p-نرم

در کل این پیوست، V یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی و $p \in [۱, \infty)$ است.

تعریف الف.۱. تابع $\|\cdot\| : V \to [۰, \infty)$ را یک **p-نرم** روی فضای برداری V گوییم، هرگاه

۱- $\|v\| = ۰$ اگر و تنها اگر $v = ۰$،

۲- به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $v \in V$، $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$،

۳- به ازای هر $v, w \in V$، $\|v + w\|^p \leq ۲^{p-۱}(\|v\|^p + \|w\|^p)$. (نامساوی p-مثلثی).

دوتایی $(V, \|\cdot\|)$ را یک فضای برداری p-نرم‌دار گوییم.

لم الف.۲. هر نرم معمولی روی V یک p-نرم روی v است.

اثبات : با توجه به مثال ۳۷.۱، به ازای هر $v, w \in V$، داریم

$$\|\frac{v + w}{۲}\|^p \leq (\frac{\|v\| + \|w\|}{۲})^p \leq \frac{\|v\|^p + \|w\|^p}{۲},$$

و در نتیجه $\|\cdot\|$ یک p-نرم است. ■

تعریف الف.۳. فرض کنیم $K \subseteq V$ باشد. گوییم K محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $v, w \in K$ و $\alpha \in [۰, ۱]$، $\alpha v + (۱ - \alpha)v \in K$ باشد.

لم الف.۴. فرض کنیم $\|\cdot\| : V \to [۰, \infty)$ تابعی صادق در شرایط (۱) و (۲) در تعریف p-نرم باشد. آنگاه $\|\cdot\|$ یک نرم روی V است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی $K = \{v \in V : \|v\| \leq ۱\}$ محدب باشد.

اثبات : اگر $\|\cdot\|$ یک نرم باشد، آنگاه بوضوح K محدب است. بالعکس، فرض کنیم K مجموعه‌ای محدب و $v, w \in V$ دلخواه باشند. می‌توان فرض کرد $v \neq \circ$ و $w \neq \circ$. قرار می‌دهیم $v' = \frac{v}{\|v\|}$ و $w' = \frac{w}{\|w\|}$. آنگاه $v', w' \in K$. پس به ازای هر $\alpha \in [\circ, ۱]$، $\alpha v' + (۱ - \alpha)w' \in K$. بنابراین با قرار دادن $\alpha = \frac{\|v\|}{\|v\|+\|w\|}$، داریم

$$\|\frac{v}{\|v\| + \|w\|} + \frac{w}{\|v\| + \|w\|}\| = \|\alpha v' + (۱ - \alpha)w'\| \leq ۱,$$

در نتیجه $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. ■

قضیه الف.۵. هر p- نرم روی V یک نرم روی V است.

اثبات : نشان می‌دهیم $K = \{v \in V : \|v\| \leq ۱\}$ مجموعه‌ای محدب است. فرض می‌کنیم $v, w \in K$. آنگاه داریم

$$\|v + w\|^p \leq ۲^{p-۱}(\|v\|^p + \|w\|^p) \leq ۲^{p-۱}(۱ + ۱) = ۲^p,$$

پس $\frac{۱}{۲}v + \frac{۱}{۲}w \in K$، زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه $\|\frac{۱}{۲}v + \frac{۱}{۲}w\| > ۱$ و در نتیجه $\|v + w\|^p > ۲^p$ و این یک تناقض است. تعریف می‌کنیم

$$A = \{\frac{k}{۲^n} : n \in \mathbb{N},\ k = \circ, ۱, ..., n\},$$

ادعا می‌کنیم به ازای هر $\alpha \in A$، داریم $\alpha v + (۱ - \alpha)w \in K$. ادعا را با استقراء روی n، ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۱$ باشد، حکم ثابت شده است. فرض می‌کنیم حکم برای حالت n برقرار است. آنگاه به ازای هر $k = \circ, ۱, ..., n$، داریم

$$\begin{aligned} \frac{k}{۲^{n+۱}}v + (۱ - \frac{k}{۲^{n+۱}})w &= \frac{\frac{۲k}{۲^{n+۱}}v + (۲ - \frac{۲k}{۲^{n+۱}})w}{۲} \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{k}{۲^n}v + (۱ - \frac{k}{۲^n})w\right) + \frac{۱}{۲}w \in K \end{aligned}$$

اما اگر $k = n + ۱$ باشد، آنگاه

$$\frac{n + ۱}{۲^{n+۱}}v + (۱ - \frac{n + ۱}{۲^{n+۱}})w = \frac{\frac{n+۱}{۲^n}v + (۲ - \frac{n+۱}{۲^n})w}{۲}$$

$$= \frac{\frac{n}{۲^n}v + (۱ - \frac{n}{۲^n})w}{۲} + \frac{\frac{۱}{۲^n}v + (۱ - \frac{۱}{۲^{n+۱}})w}{۲}$$

و بدین طریق ادعای مورد نظر به اثبات می‌رسد.

حال فرض می‌کنیم $\alpha \in [۰, ۱]$ و $u = \alpha v + (۱ - \alpha)w$ باشد. از اینکه A در $[۰, ۱]$ چگال است، می‌توان دنباله‌ای نزولی مانند $\{a_n\}$ از عناصر A را چنان یافت که $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. قرار می‌دهیم $\beta_n = \frac{۱-a_n}{۱-\alpha}$. بوضوح $۰ \leq \beta_n \leq ۱$، $\lim_{n\to\infty}\beta_n = ۱$ و $\frac{a_n+\beta_n-۱}{a_n} \leq ۱$. از اینکه $\frac{a_n+\beta_n-۱}{a_n}v \in K$ و $a_n \in A$، نتیجه می‌گیریم

$$\beta_n u = \alpha\beta_n v + (۱ - \alpha)\beta_n w = a_n \frac{a_n + \beta_n - ۱}{a_n} v + (۱ - a_n)w \in K.$$

بالاخره، از اینکه به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\beta_n\|u\| = \|\beta_n u\| \leq ۱$، با میل دادن n به بینهایت داریم $\|u\| \leq ۱$ و در نتیجه $u \in K$. ■

کتاب‌نامه

[1] **C. D. Aliprantis, K. C. Border,** Infinite Dimensional Analysis; Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Inc. 1999.

[2] **C.D. Aliprantis, O. Burkinshaw,** Principles of Real Analysis; Academic Press. 1998.

[3] **R. B. Ash,** Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, Inc 1972.

[4] **G. de Barra,** Measure Theory and Integration; Ellis Horwood Ltd, 1981.

[5] **R. G. Bartle,** The Element of Integration; John Wiley and Sons, New York, 1981.

[6] **H. Belbachir, M. Mirzavaziri, M. Sal Moslehian,** q-Norms Are Rellay Norms, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, volume 3, 2006.

[7] **V. I. Bogachev,** Measure Theory Vol.1; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[8] **C. B. Boyer,** A History of Mathematics, Wiley International Edition, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[9] **F. Burk,** Lebesgue Measure and Integration aAn Introduction, John Wiley & Sons, Inc. 1998.

[10] **G.R. Burton,** Variational problems on classes of rearrangements, and multiple configurations for steady vortices. Ann. Inst. H. Poincare-Anal. Nonlineare 6 (1989) 295-319.

[11] **N. L. Carothers,** Real Analysis; Cambridge Univercity Press, New York, 2000.

[12] **G. B. Folland,** Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications; John Wiley and Sons, New York, 1985.

[13] **P. Halmos,** Measure Theory; Van Nostrand, New York, 1950.

[14] **P. Halmos,** Naive Set Theory; Van nostrand, Princeton 1960.

[15] **K. R. Inder,** An Introduction to Measure and Integration. Alpha Science International Ltd. 2005.

[16] **F. Jones,** Lebesgue Integration on Euclidean Space, Jones and Bartlett Publishers, Inc. 2001.

[17] **W.J. Kaczor, M.T. Nowak,** Problems in Mathematical Analysis III, Integration, American Mathematical Society. 2003.

[18] **K. Kuratowski,** Introduction to Set Theory and Topology; revised 2d. English ed. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 101, Warsaw: Pergamon Press, 1972.

[19] **H. L. Royden,** Real Analysis; 3rd ed., Macmillan, New York, 1988.

[20] **H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick** Real Analysis; 4rd ed., Pearson Education Asia Limited and China Machine Press, 2010.

[21] **W. Rudin,** Principles of Mathematical Analysis; McGraw-Hill, New York, 1964.

[22] **W. Rudin,** Real and Complex Analysis; Mc Graw-Hill Book Comp. 1966.

[23] **H. Sohrab,** Real Analysis; Birkhäuser Boston 2003.

[24] **S. M. Srivastava,** A Course on Borel Sets; Springer-Verlag New York, Inc. 1998.

[25] **S. J. Taylor,** Introduction to Measure and Integration; Cambridge Univercity Press, New York, 1966.

[26] **J. Yeh,** Real Analysis: Theory of Measure and Integration; World Scientific, 2006.