[redacted]

نظریه صف

ویرایش جدید

[redacted]

تالیف:
دکتر محمد مدرس

نظریهٔ صف

محمد مدرس یزدی

مرکز نشردانشگاهی، تهران

مرکز نشردانشگاهی
۵۸۳

صنایع
۱

نظریهٔ صف
تألیف دکتر محمد مدرس یزدی
ویراستهٔ علیرضا جباری
مرکز نشردانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: معراج
۱۸۰۰ ریال

مدرس یزدی، محمد
نظریهٔ صف
ص.ع. به انگلیسی Mohammad Modarres Yazdi. Queuing theory
واژه‌نامه: ص.
کتابنامه: ص.
۱. صف‌بندی، نظریه. الف. مرکز نشردانشگاهی. ب. عنوان.
T۵۷/۹ ۵۱۹/۸۲

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه
فصل ۶. مدلهای نمایی درسیستمهای صف	۱۲۳
۱.۶ فرایند تولد ومرگ	۱۲۴
۲.۶ بیان فرایند تولد ومرگ درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف	۱۲۵
۳.۶ مدل $M/M/1$	۱۲۸
۴.۶ مدل $M/M/1/K$ ـ سیستم باظرفیت متناهی	۱۳۴
۵.۶ مدل $M/M/m$	۱۳۶
۶.۶ مدل $M/M/m/K$	۱۴۲
۷.۶ مدل $M/M/\infty$	۱۴۴
۸.۶ مدل $M/M/m/C$ ـ مدل‌نمایی با جمعیت متناهی	۱۴۴
۹.۶ مدلهای نمایی با آهنگ ورود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر	۱۴۶
۱۰.۶ دورهٔ مشغول‌بودن وبیکاری سیستم درمدل $M/M/1$	۱۴۸
۱۱.۶ دورهٔ گذرا درمدلهای نمایی	۱۴۹
مسائل	۱۵۲
فصل ۷. سیستمهای مارکوفی	۱۶۰
۱.۷ یك مثال	۱۶۱
۲.۷ مدل $M/M/1$ با ورود گروهی	۱۶۳
۳.۷ مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی	۱۶۸
۴.۷ مدل $M/E_r/1$	۱۷۲
۵.۷ مدل $E_r/M/1$	۱۷۶
۶.۷ نظم اولویت	۱۷۹
۷.۷ شبکه‌های صف	۱۹۰
مسائل	۲۰۱
فصل ۸. سیستمهای صف غیرمارکوفی	۲۱۰
۱.۸ مدل $M/G/1$	۲۱۰
۲.۸ مدل $M/G/1$ با ورود گروهی	۲۱۹
۳.۸ مدل $M/G/m$	۲۲۰
۴.۸ مدل $G/M/1$	۲۲۲
مسائل	۲۳۱
فصل ۹. بهینه‌سازی سیستمهای صف	۲۳۵
۱.۹ ظرفیت بهینه وهزینه‌های یك سیستم صف	۲۳۵

عنوان صفحه

بسم‌الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

نظریهٔ‌صف یکی از مهمترین زمینه‌های کاربرد نظریهٔ احتمالات و فرایندهای تصادفی است. با توجه به نقش و اهمیت اقتصادی و اجتماعی صف درزمینه‌های مهندسی، مخابرات، سیستمهای حمل و نقل، کامپیوتر، خدمات، تولید، و سیستمهای اجتماعی، بسیاری از مهندسان و ریاضیدانان از سالها قبل به‌تحقیق دراین زمینه پرداخته‌اند. دراین تحقیقات، همگام با بسط روشهای تحلیلی به‌ارائهٔ کاربردهای جدید نیز توجه زیادی شده است.

با توجه به توسعهٔ گستردهٔ نظریهٔ‌صف، اکنون سالهاست که تدریس آن منحصر به‌رشته‌های ریاضی و آمار نیست، بلکه به‌آموزش آن دررشته‌های مهندسی صنایع، مخابرات، کامپیوتر، مدیریت، اقتصاد، آمار و ریاضی، و نظایر اینها اهمیت زیادی داده می‌شود. کتاب حاضر، دردرجهٔ اول برای استفادهٔ دانشجویان کارشناسی وکارشناسی ارشد رشته‌های فوق تألیف شده‌است، اما درعین‌حال می‌تواند مورد استفادهٔ مهندسان و سایر کسانی قرار گیرد که به‌نوعی با طراحی و تحلیل سیستمهای اقتصادی، اجتماعی، و مهندسی‌سروکار دارند. بدین لحاظ، درنگارش کتاب سعی شده است که مفاهیم اصلی و کاربردی تحت‌الشعاع اثباتهای پیچیدهٔ ریاضی‌واقع نشود؛ باوجود این‌ازبیان مبانی ریاضی و آماری‌مربوطه نیزصرف‌نظر نشده است، زیرا اساساً نظریهٔ صف برپایهٔ اصول ریاضی بنا نهاده شده است.

درفصل اول کتاب، به ارائهٔ تعریف سیستمهای صف و برخی تعاریف مقدماتی لازم برای درك نظریهٔ‌صف پرداخته‌ایم.

فصل‌دوم کتاب، به‌اختصاربه‌مرور احتمالات می‌پردازد و به‌خصوص به‌اهمیت‌کاربرد احتمال‌شرطی وامید ریاضی‌شرطی درمحاسبهٔ عبارتهای احتمالی تأکید می‌شود. درفصلهای سوم‌وچهارم، فرایندهای احتمالی، به‌خصوص، نقش‌توزیع‌نمایی و فرایند پواسون وفرایند مارکوف مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بسیاری ازکتابهای نظریهٔ صف، تنها اشاره‌ای به‌این مباحث می‌شود و بررسی بیشتر را به‌کتابهای مربوط به‌فرایندهای تصادفی واگذار می‌کنند. لیکن، چون در دانشگاههای ما درس فرایندهای تصادفی پیش‌نیاز نظریهٔ صف

نیست، دراین کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود. بدین‌ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درك مفاهیم نظریهٔ صف فراهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صف و تشریح رابطه‌های مربوط به این سیستمها، صرف‌نظر از ویژگیهای‌آن می‌پردازیم. درسه‌فصل ششم و هفتم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صف بررسی می‌شوند. درفصل‌نهم نیز نحوهٔ بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل‌تغییر (یا متغیرهای تصمیم) درسیستمهای صف مورد بحث قرار می گیرند.

درهمهٔفصول کتاب، مثالهای‌حل‌شدهٔ متعددی ارائه‌می‌شود. این مثالهاکاربردهای‌نظریهٔ صف را نیز نشان می‌دهند. درپایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل‌نشده برای تمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های‌کاربرد مدلها ارائه می‌شود.

دراینجا لازم است ازهمهٔ دانشجویانی‌که در تصحیح جزوات، و ارائهٔ پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکرکنم. از همکاری دست‌اندرکاران مرکزنشردانشگاهی، به‌خصوص کارکنان حوزهٔ فنی‌مهندسی سپاسگزارم.

محمد مدرس

۱

سیستمهای صف

انتظار در صف هرچند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجتناب‌ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می‌انجامد، روبه‌رو می‌شوند. اوقاتی که در صفهای اتوبوس، ناهارخوری، خرید و نظایر آنها به‌هدر می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است. درجوامع امروزی، صفهای مهمتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، و اجتماعی آنها به‌مراتب بیش از نمونه‌های سادهٔ فوق است. از آن‌جمله می‌توان صفهای حاصل از ترافیك شهری، و نیز صفهایی را که درفرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صف دیگر استثنا نیست و به‌صورت قاعده درآمده است.

از بین بردن نتایج نامساعد انتظار در صف بدون شناخت خصائص این پدیده امکانپذیر نیست. **نظریهٔ صف**، که به مطالعهٔ صفها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیرعوامل تشکیل‌دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلا از میان برد، اما می‌توان که ضایعات ناشی از آن را حتی‌الامکان کاهش داد.

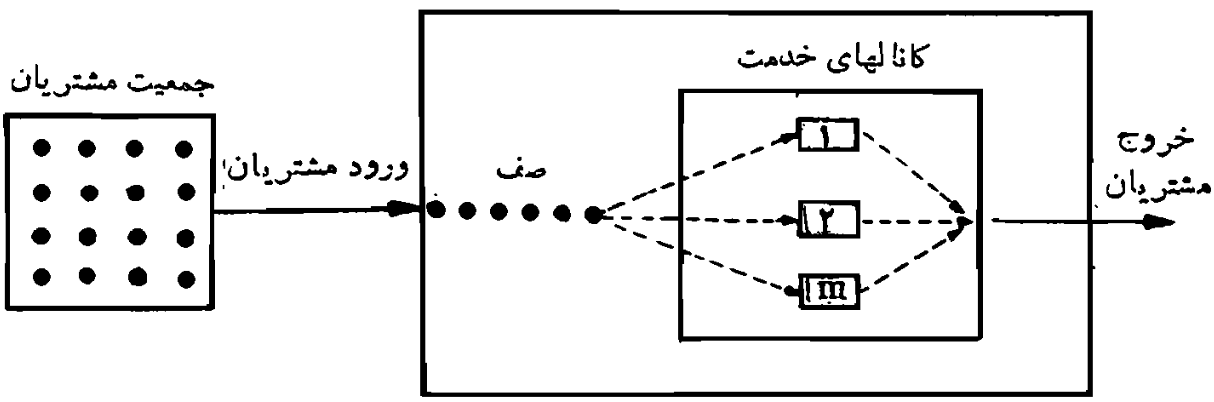
۱.۱ اجزای سیستم صف

صف چیست؟ سیستمی را در نظر بگیرید کـه خدمتی را ارائه می‌کند. متقاضیانـی برای دریافت این خدمت مراجعه می‌کنند، که آنها را اصطلاحاً **مشتری** می‌نامند. خدمت‌مورد‌نظر توسط شخص، ماشین و یا امکانات دیگر، که **خدمت‌دهنده** نامیده می‌شوند، ارائه می‌شود. هنگامی که یك مشتری جهت دریـافت خدمت موردنظر به سیستم مراجعه می‌کند، دوحالت ممکن است اتفاق بیفتد. اگـر حداقل یکی از خدمت‌دهندگان بیکار باشد، بلافاصله ارائهٔ خـدمت به مشتری جدیـد شروع می‌شود. اما چنانچه تمـام خدمت‌دهندگان مشغول به کار باشند، مشتری باید منتظر بماند؛ و بدین‌ترتیب، **صف** تشکیل می‌شود. بنابراین، درهرسیستمی کـه خدمتی را عرضه می‌کند، چنانچه در یـك لحظه تعداد مشتری بیش از ظرفیت سیستم (یعنی تعداد خدمت‌دهندگان) باشد، بی‌شك صف تشکیل خواهد شد. یادآوری می‌کنیم که مشتری و خدمت دهنده لزومـاً انسان نیستند و صف مورد بحث نیز لزومـاً معنای فیزیکی نخواهد داشت. مثلا سیستم تعمیرات یك کارخانه را در نظر بگیرید. ماشینی که خراب شده است و منتظر تعمیرکار است، مشتری محسوب می‌شود. در ایـن مدت، این ماشین در محل استقرار خود جا می‌گیرد، نه در یك صف فیزیکی؛ امـا چون منتظر دریافت خدمت است، نوعی از صف، به‌معنای مورد بحث دراین مبحث، محسوب می‌شود.

مشتریهای بالقوهٔ سیستم، یا به‌عبارت دیگر مجموعهٔ مشتریهایی که امکان دارد برای دریافت خدمت ارائه شده مراجعه‌کنند، را **جمعیت مشتریان بالقوه** می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق یك سیستم صف را، به طورکلی، مطابق شکل ۱.۱ می‌توان نشان داد.

مطابق شکل فوق، مشتری، که عنصری از جمعیت مشتریان بالقوه است، وارد سیستم می‌شود. اگر خدمت دهندگان بیکار نباشند، این مشتری در صف منتظر می‌ماند، تا نوبت به او برسد. پس از دریافت خدمت مورد نظر، از سیستم خارج می‌شود. اگر حداقل یکی از خدمت دهندگان بیکار باشد، مشتری بدون انتظار در صف، خدمت مورد نظر را دریافت و سیستم را ترك می‌کند.



شکل ۱.۱ اجزای یك سیستم صف.

۲.۱ معیارهای ارزیابی یك سیستم صف
برای سنجش عملکرد یک سیستم صف، عمدتاً از سه معیار زیر بهره می‌گیرند؛ اگرچه، برحسب مورد می‌توان از معیارهای دیگر نیز استفاده کرد.

۱. **طول صف** (تعداد مشتریهایی که در صف منتظر دریافت خدمت هستند) یا تعداد مشتریان داخل سیستم.

۲. **زمان انتظار** هرمشتری درصف یا سیستم. لازم به‌یادآوری است که مدت انتظار در سیستم، مجموع زمان انتظار در صف به اضافهٔ مدت زمانی است که مشتری در حال دریافت خدمت است.

۳. **درصدی از زمان** که سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است (یا درصدی از زمان که سیستم مشغول به‌کار است).

باید درنظر داشت که، در اکثر سیستمها، معیارهای فوق ماهیت تصادفی دارند. در نتیجه، معیار ارزیابی سیستم، امید ریاضی این متغیرهای تصادفی خواهد بود.

۳.۱ ورودیهای سیستم
عملکرد سیستم به عوامل متعدد (یا **ورودیهای سیستم**) بستگی دارد، که عمده‌ترین آنها عبارت‌اند از:

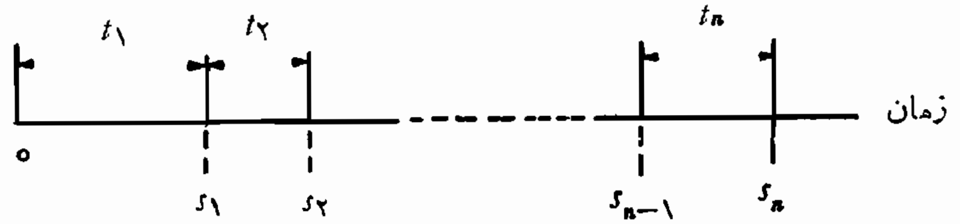
الف. الگوی ورود مشتری
بازدهی سیستم و معیارهای ارزیابی آن، یعنی طول صف، مدت انتظار و درصد بیکاری سیستم، بستگی به تعداد مشتریهایی دارد که مراجعه می‌کنند. طبیعتاً هرچه تعداد مراجعین بیشتر باشد، طول صف ومدت‌زمان انتظار مشتری زیادتر و درصدبیکاری سیستم کمتر است. فرض کنید که اولین مشتری در زمان s_1، دومی در زمان s_2 و به همین‌ترتیب nامین مشتری در زمان s_n وارد سیستم شوند. **زمان بین دو ورود متوالی** مشتریها را می‌توان به‌شرح زیر تعریف کرد:

$$t_1 = s_1$$

$$t_2 = s_2 - s_1$$

$$t_n = s_n - s_{n-1}$$

برای مشخص کردن **الگوی ورود** مشتری، مشخص کردن $t_1, t_2 \ldots t_n \ldots$ ضروری است. با توجه به اینکه زمان ورود مشتریها ماهیت تصادفی دارد، بدیهی است که‌زمانهای بین دو ورود متوالی نیز متغیرهای تصادفی هستند. برای بررسی دقیق رابطه‌های ریاضی حاکم بر سیستم صف و محاسبهٔ معیارهای ارزیابی آن، شناخت تابع توزیع این متغیرهای



شکل ۲۰۱ زمان ورود و فاصلهٔ زمانی بین دو ورود متوالی مشتریها

تصادفی ضرورت دارد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $A(x)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$A(x)=p(t\leqslant x) \tag{۱۰۱}$$

یك کمیت مفید برای بررسی الگوی ورود مشتری، **آهنگ ورود مشتری** است، که طبق تعریف میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. آهنگ ورود مشتری را معمولا با λ نشان می‌دهند. بدیهی است که λ برابر با عکس میانگین زمان بین دو ورود متوالی است. مثلا، ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید، که در آن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت و برابر با نیم‌ساعت باشد. دراین‌صورت، تعداد مشتریهایی که درساعت وارد سیستم می‌شوند، برابر با ۲ است.

ورود مشتریها به‌صورت انفرادی، یا به‌صورت گروهی است. در مورد ورودهای گروهی، مثلا، ورود مشتریانی که همزمان به وسیلهٔ اتوبوس وارد یك مهمانخانهٔ بین راه می‌شوند، غالباً با دو متغیر تصادفی سروکار داریم: یکی زمان بین دو ورود متوالی گروهها و دیگری تعداد مشتریهای هرگروه.

عامل مهم دیگر، **همگن**بودن یا نبودن الگوی‌ورودمشتریها برحسب زمان‌است. آهنگ ورود مشتری می‌تواند در زمانهای مختلف ثابت، و یاغیرثابت باشد. مثلا، الگوی ورود مشتری به‌یك سیستم تلفن، که در آن تعداد متقاضیان‌مکالمه درساعات شبانه‌روز یکسان‌نیست، غیرثابت است.

در برخی از سیستمها، آهنگ ورود مشتری به‌طول صف نیز بستگی دارد. مثلا، اگر طول صفی زیاد باشد، ممکن است مشتری از ورود به این سیستم صف منصرف شود و به سیستم دیگری مراجعه کند. لذا درچنین سیستمی، آهنگ ورود مشتری آرامتر از آهنگ ورود مشتری در سیستم متشابهی است که صف طولانی ندارد.

ب. الگوی خدمت‌دهی

شناخت **الگوی خدمت دهی** (مدت زمانی که ارائهٔ خدمت بدیك مشتری طول می‌کشد) نیز برای سنجش عملکرد سیستم ضرورت دارد. بدیهی است هرچه مدت خدمت‌دهی کمتر باشد، طول صف و زمان انتظار مشتریها نیز کمتر خواهدشد. مدت زمان خدمت هم معمولا

ماهیت تصادفی دارد، و لذا برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم، تابع توزیع این متغیر تصادفی باید معلوم باشد. فرض کنید که مدت خدمت‌دهی به‌یك مشتری برابر با X باشد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $B(X)$ نشان دهیم، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$B(X)=p[X\leqslant x] \qquad (۲\cdot۱)$$

آهنگ خدمت‌دهی، طبق تعریف، عبارت از میانگین تعداد مشتریانی است که در واحد زمان از یك خدمت‌دهنده خدمت دریافت می‌کنند. اگر آهنگ خدمت‌دهی را با μ نشان دهیم، بدیهی است که بین μ و مدت خدمت دهی، یعنی X، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\mu=\frac{1}{E(X)} \qquad (۳\cdot۱)$$

از طرف دیگر، **آهنگ خروج مشتریان** را می‌توان میانگین تعداد مشتریانی تعریف کرد که در واحد زمان از سیستم خارج می‌شوند. بدیهی است که آهنگ خروج مشتریان بستگی به آهنگ خدمت‌دهی، تعداد خدمت‌دهنده و تعداد مشتریهای داخل سیستم دارد. مثلا، اگر سیستم فقط دارای یك خدمت‌دهنده و این خدمت‌دهنده نیز دائماً مشغول به‌کار باشد، آهنگ خروج مشتریان و آهنگ خدمت‌دهی یکسان خواهد بود.

مدت خدمت‌دهی، ممکن است مستقل از طول صف و یا وابسته به‌آن باشد. مثلا، در صورتی که طول صف زیاد شود، خدمت‌دهنده ممکن است (مثلا با استفاده از ابزار بهتر) بر سرعت کار خود بیفزاید.

در این الگو نیز مدت خدمت‌دهی ممکن است نسبت به زمان ثابت یا متغیر باشد. مثلا، اگر خدمت‌دهنده ماشینی باشد که در اثر فرسودگی کارایی آن پایین بیاید، طبعاً با مرور زمان مدت‌زمان خدمت‌دهی نیز افزایش می‌یابد.

خدمت‌دهنده نیز ممکن است همزمان به ارائهٔ خدمت به‌یك یا چند مشتری بپردازد.

ج. تعداد خدمت‌دهندگان

تعداد خدمت‌دهندگان در بازدهٔ سیستم مؤثر است. این خدمت‌دهندگان به‌صورت موازی عمل می‌کنند؛ یعنی، هرکدام به‌طور مستقل به‌یکی از مشتریها خدمت می‌دهند. گاهی به‌جای خدمت دهنده، از عبارت **کانال خدمت** استفاده می‌شود.

د. ظرفیت صف

منظور از **ظرفیت صف** حداکثر تعداد مشتریانی است که می‌توانند در صف قرار گیرند.

ظرفیت صف یا بینهایت، یا متناهی است. متناهی بودن ظرفیت صف می‌تواند ناشی از محدودیت فضای داخل سیستم مورد نظر باشد. در حالتی که ظرفیت صف متناهی باشد، ورود مشتریها تا زمانی ادامه می‌یابد که طول صف کمتر از ظرفیت آن باشد و از آن‌پس، از ورود مشتری جلوگیری می‌شود. درچنین حالتی فرض براین است که این مشتری دیگر منتظر نماند و از مراجعهٔ مجدد به‌سیستم منصرف گردد.

هـ. جمعیت مشتریان بالقوه

طول صف و مدت زمان انتظار در صف و همچنین بیکار بودن سیستم، به جمعیت مشتریان (یعنی **مشتریان بالقوهٔ سیستم**) نیز بستگی دارد. اگر تعداد مشتریانی که می‌توانند مراجعه کنند (به‌عنوان مثال، تعداد مشتریان یك سیستم تلفن در یك شهر بزرگ) خیلی زیاد باشد، جمعیت مشتریان را می‌توان نامتناهی فرض‌کرد؛ ولی، درمواردی جمعیت مشتریان ممکن است متناهی باشد. این حالت از جمله در مورد ماشینهایی‌که در یك کارگاه ممکن است خراب شوند و منتظر تعمیر بمانند، صدق می‌کند.

و. نظم سیستم

منظور از **تنظیم سیستم**، نحوهٔ انتخاب مشتریهای داخل صف برای ارائهٔ خدمت است. دریك‌سیستم، موقعی که یکی از خدمت‌دهندگان بیکار وآمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود، ضابطه‌های مختلفی برای انتخاب مشتری بعدی می‌تواند وجود داشته باشد. متداولترین روش، در نظر گرفتن **نوبت** است؛ یعنی اینکه کسی که زودتر وارد سیستم شده، و جلوتر از همه در صف قرار گرفته باشد، زودتر انتخاب می‌شود. این نظم را FIFO[1] می‌نامند. در برخی سیستمها ممکن است انتخاب مشتری برخلاف ضابطهٔ فوق باشد؛ یعنی، آن مشتری انتخاب شود که دیرتر از همه وارد سیستم شده است. نامه‌هایی که برای تایپ روی میز ماشین‌نویس انباشته می‌شود، معمولا با این ضابطه ماشین می‌شود. به این نظم LIFO[2] می‌گویند. پایه دیگری برای انتخاب، ممکن است تصادف باشد، که SIRO[3] نامیده می‌شود؛ این مورد از جمله انتخاب قطعات یدکی در یك انبار را شامل می‌شود.

درنظر گرفتن **اولویت** برای مشتریهای مختلف، یکی ازمباحث مهم نظریهٔ صف است. در بسیاری از سیستمها، اهمیت مشتریها متفاوت است. برای گروههای مختلف مشتری، برحسب اهمیتی که برای سیستم دارند، اولویتهای گوناگون درنظر گرفته می‌شود. در بعضی از سیستمها، برخی از مشتریان ازچنان اولویت بالایی برخوردارند، که به محض ورود به‌سیستم، ارائهٔ خدمات به آنها شروع می‌شود. درمورد این مشتریها، خدمت دهنده موظف

---

1. First-In First-Out   2. Last-In First-Out
3. Service In Random Order

است بلافاصله کار خدمت دهی به آنها را شروع کند و حتی اگر لازم باشدکار خدمت‌دهی به مشتریهای دیگر را نیمه تمام بگذارد. در بعضی از سیستمها ارائهٔ خدمت نیمه تمام نمی‌ماند، اما به مشتریایی با اولویت بالا، خدمت خارج از نوبت ارائه می‌شود.

ز. مراحل خدمت

در بعضی از سیستمها، خدمت ارائه شده شامل چند مرحله است. مثلا، برای دریافت‌مجوز ازیك سازمان دولتی باید چندین مرحله را پشت سر گذاشت. سیستمهایی با خدمات چند مرحله‌ای انواع مختلف دارند،که از جمله می‌توان سیستمهایی با مراحل خدماتی سری، موازی و ترکیبی از سری و موازی را نام برد

۴.۱ نحوه نمایش یك سیستم صف

یك سیستم صف را درحالت کلی به‌طور قراردادی به‌صورت $A/B/M/K/C/Z$ نشان می‌دهند. هرکدام ازشش حرف فوق معرف یکی ازعوامل اصلی سیستم است. A یا $A(X)$ تابع توزیع زمان بین دو ورود، B یا $B(X)$ تابع توزیع مدت خدمت‌دهی، m تعداد خدمت دهنده، K ظرفیت صف، C جمعیت مشتریان و Z نظام سیستم را نشان می‌دهد.

در قرارداد فوق، به جای A یا B، برحسب اینکه چه تابع توزیعی داشته باشند، از حروف زیر به‌عنوان کد استفاده می‌شود:

تابع توزیع	کد
نمایی	M
ارلانگی با r مرحله	E_r
قطعی	D
کلی	G

اگر ظرفیت صف بینهایت باشد، چهارمین حرف (یعنی K) و اگر جمعیت مشتریان بالقوه بینهایت باشد، پنجمین حرف (یعنی C) را می‌توان حذف کرد. همچنین اگر نظم سیستم برمبنای نوبت (یعنی FIFO) باشد، ششمین حرف نیز حذف می‌شود.

مثلا، $M/M/۳$ معرف سیستم صفی است که زمان بین ورود متوالی دومشتری به‌صورت نمایی، مدت خدمت‌دهی به صورت نمایی و تعداد خدمت‌دهنده ۳ است. دراین سیستم، ظرفیت صف و جمعیت مشتریان بالقوه، بینهایت فرض شده ونظام سیستم بر مبنای رعایت نوبت است.

$D/E_۵/۱/۱۰۰/\mathrm{LIFO}$ معرف سیستم صفی است که‌درآن زمان بین ورود متوالی

مشتریها ثابت (قطعی)، مدت خدمت طبق توزیع ارلانگی ۵ مرحله‌ای، سیستم دارای یك خدمت‌دهنده، ظرفیت آن ۱۰۰، جمعیت مشتریان نامتناهی و تنظیم سیستم به‌صورت LIFO است.

۵.۱ زمینه‌های کاربرد نظریهٔ صف

همان طور که گفته شد، اهمیت نظریهٔ صف ازکاربرد وسیع آن در سیستمهای صنعتی و اجتماعی ناشی می‌شود. در زیر به بعضی از این‌کاربردها اشاره می‌کنیم.

الف. سیستمهای مخابراتی

قدیمی‌ترین زمینهٔ استفاده از نظریهٔصف، سیستمهای مخابراتی‌است. در واقع باید گفت که این نظریه درخدمت مخابرات به‌وجودآمد. در اوائل قرن بیستم ارلانگ[1] در بارهٔ ظرفیت خطوط تلفن به مطالعه پرداخت. شبکهٔ مخابرات، سیستم صفی است که مشتریها برای مکالمه به آن مراجعه می‌کنند. چون امکان ندارد که برای هر دو نفر مشترك، یك‌خط تلفن اختصاصی ایجادشود، لذا کلا تعداد محدودی خط تلفن برای استفادهٔ همهٔ مشترکین به‌وجود می‌آید. اگر در یك لحظه تعداد خطوط موجود تکافوی همهٔ نیازها را ندهد، صف تشکیل می‌شود.

بررسی ارلانگ، در قالب نظریه‌های ریاضی، احتمالات و آمار، به تدریج توسعه یافت و نظریهٔ صف به‌وجود آمد. در دورهٔ بعد از جنگ دوم جهانی، که با رشد سریع تحقیق در عملیات و علوم و فنون وابسته بـه آن همراه بود، نظریهٔ صف نیزکاربردهای متعدد دیگری یافت؛ اما، مخابرات همچنان یکی از مهمترین‌کاربردهای این رشته است.

ب. شبکهٔ حمل و نقل

به‌طورکلی شبکه‌های حمل و نقل نوعی سیستم صف‌اند. خدمتی که عرضه می‌شود، حمل بار و مسافر از یك نقطه به نقطهٔ دیگر است. خدمت‌دهندگان ممکن است وسایل حمل و نقل و شبکهٔ راهها باشند. محدود بودن این خدمت‌دهندگان به ایجاد صف می‌انجامد؛ مثلا، در یك شبکهٔ اتوبوسرانی شهری، خدمت‌دهندگان، اتوبوسها هستند. بـه‌علت محدودیت تعداد آنها، صف مشتریها، که دراینجا شهروندان‌اند، تشکیل می‌شود. مثال دیگر، تراکم اتومبیلها پشت چراغ قرمز است. در اینجا، اتومبیلها مشتری سیستم و فضای چهار راه خدمت دهنده محسوب می‌شود. مطالعهٔ حمل و نقل و ترافیك‌از دیدگاههای مختلف، یکـی از عمده‌ترین کاربردهای نظریهٔ صف است.

---

1. Erlang

ج. فرودگاهها و بنادر

فرودگاهها و بنادر، گرچه جزئی از مجموعهٔ کل حمل و نقل هستند، به‌علت اهمیتی که دارند، درنظریهٔ صف به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. باندفرودگاه را می‌توان یك خدمت‌دهنده به‌حساب آورد. در هر لحظه فقط یك هواپیما (در فرودگاههای بزرگتر چند باند و چند هواپیما) می‌تواند روی باند بنشیند و یا از آن بلند شود. به‌این ترتیب، در فرودگاههای پررفت و آمد، هواپیمایی برای نشستن روی باند ممکن است مدتی (درحال پرواز در بالای فرودگاه) در صف انتظار بماند. عین همین موضوع در بنادر نیز ممکن است اتفاق بیفتد، کشتیها، به علت محدودیت امکانات تخلیه و بارگیری، ممکن است حتی ماهها در انتظار بمانند. در فرودگاهها و بنادر، سیستمهای صفی نیز به‌طور جنبی به‌وجود می‌آیند؛ نظیر: ارائهٔ خدمات به مسافر، بارگیری کامیونها در انبارهای توشه و نظایر آنها.

د. بیمارستانها و مراکز بهداشتی

می‌توان بیمارستان، یا حتی یك بخش آن را، یك سیستم صف فرض کرد. بیماران، مشتری و امکانات درمان (نظیر اطاق‌عمل، تزریقات، آزمایشگاه و...)، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند.

ه. شبکهٔ پستی کشور

خدمتی که ارائه می‌شود، انتقال نامه و بسته‌های پستی از مبدأ مشخص به مقصد مورد نظر است. در اینجا مشتری، نامه و خدمت‌دهنده، امکانات پست، نظیر نامه‌رسان، وسایل حمل و نقل بسته‌های پستی، و ماشینهای تفکیك نامه محسوب می‌شود.

و. سیستم تعمیر و نگهداری تأسیسات صنعتی

در این مورد ماشینهایی که خراب می‌شوند، نقش مشتری را دارند، و خدمتی که ارائه می‌شود انواع تعمیرات اضطراری و نگهداریهای برنامه‌ریزی شده است. خدمت‌دهندگان، تعمیرکاران و ابزار تعمیر هستند. برخلاف مثالهای بالا، که در آنها جمعیت مشتریان عملا نامتناهی بود، در این حالت جمعیت مشتریان فقط ماشین‌آلات کارخانه، و در نتیجه متناهی است.

ز. فرایند تولید کارخانجات

در یك خط تولید (مثلا مونتاژ نهایی)، قطعاتی که باید به هم متصل شوند، مشتری، و امکانات تولید، نظیر کارگران و ابزارها، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند. تعادل خط موقعی به‌وجود می‌آید که ورود مشتری به‌سیستم (یعنی حرکت قطعات از یك مرحلهٔ تولید به‌مرحلهٔ بعدی) متناسب با ظرفیت خط مونتاژ باشد؛ درغیر این‌صورت، یا صفی از قطعات به‌وجود

می‌آید، یا امکانات تولید بدون استفاده می‌ماند. در این حالت، برخلاف حالت قبلی،ورود مشتری معمولاً به صورت قطعی (با تقریب کافی) است.

نظریهٔ صف در زمینه‌های دیگر از جمله کامپیوتر، دادگاههای قضایی، ادارات دولتی، سیستم آموزش عالی، سیستمهای خدماتی (مانند پمپ بنزین، باجهٔ فروش بلیط ...) و سیستم موجودیها کاربردهای گسترده‌ای دارد.

مسائل

۱. اجزای سیستمهای صف زیر (نوع خدمت، خدمت دهنده، مشتری، صف، و جمعیت مشتریان) را مشخص کنید.

الف. بانك

ب. انبار ابزار کارخانه

ج. مرکز اورژانس شهر

د. جرثقیل هوایی در سالن کارخانه

ه. مخزن سد آب

و. خط تولید محصولی با سه نوع عملیات و یك مورد بازرسی در انتهای خط

ز. باجهٔ عوارض در ابتدای بزرگراه

۲. سیستم انبارداری محصولی را درنظر بگیرید، که تعداد موجودی آن محصول به‌اضافه تعدادی که سفارش‌داده‌شده‌است، همیشه‌برابر با N باشد. به‌عبارت دیگر، موقعی که‌یك‌واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحدی دیگر از محصول سفارش داده شود. سیستم صفی را برای این مسئله تعریف کنید. خدمت‌دهنده، مشتری، نظم سیستم، زمان بین دو ورود مشتریها،و مدت‌زمان خدمت را مشخص کنید.

۳. پارکینگ اتومبیلی را با ظرفیت معین به‌صورت سیستم درنظر بگیرید، اجزای آن، یعنی نوع خدمت، خدمت‌دهندگان و تعداد آنها، مشتری، جمعیت مشتریان بالقوه، همگن بودن یا نبودن آهنگ ورود مشتری، مدت‌زمان خدمت، آهنگ خدمت‌دهی، و آهنگ خروج مشتری و طول صف را مشخص کنید.

۴. در یك سیستم صف، تعداد مشتریهایی که بین لحظهٔ صفر تا t مراجعه می‌کنند، را با $N(t)$ و زمان ورود مشتری n ام را با s_n بیان می‌کنیم. نشان دهید که

$$P[N(t)=n]=P[s_n\leqslant t \quad , \quad s_{n+1}>t]$$

و

$$P[N(t)\geqslant N]=P[s_n\leqslant t]$$

$$P[N(t)=n]=P[s_n\leqslant t]-P[s_{n+1}\leqslant t]$$

۲

مروری بر احتمالات

در این فصل به‌مرور بر بعضی از تعاریف و مفاهیم نظریهٔ احتمال می‌پردازیم. برای بررسی جزئیات و درك عمیقتر مطالب، پیشنهاد می‌کنیم که به کتابهایی که در این‌زمینه نوشته شده است؛ مثلا، کتابهای شمارهٔ ۵ و ۱۰، در لیست منابع و مآخذ، مراجعه شود.

۱.۲ فضای نمونه، پیشامد و احتمال

آزمایش یا تجربه‌ای را در نظر بگیرید که نتیجهٔ آن‌را نتوان بـه‌صورت قطعی، از قبل پیش‌بینی کرد؛ زیرا، به‌عامل شانس یا تصادف بستگی‌دارد. **فضای نمونه** عبارت‌ازمجموعهٔ نتیجه‌هایی است که می‌توان از این آزمایش انتظار داشت.

مثال ۱.۲ سیستم صفی را در نظر بگیرید که مدت زمان ارائهٔ خدمت درآن عموماً به‌صورت قطعی قابل پیش‌بینی نیست. فرض کنید که تجربه نشان داده است کـه مدت‌زمان خدمت در این سیستم، بین ۵ تا ۱۰دقیقه است. در این‌صورت فضای نمونهٔ این آزمایش عبارت است از:

$$S=\{x|۵\leqslant x\leqslant ۱۰\}$$

مثال ۲.۲ یـك مشتری وارد یك سیستم صف می‌شود، که حداکثر ظرفیت آن ۱۰ است. این مشتری نمی‌تواند پیش‌بینی کندکه هنگام ورودش چند مشتری دیگرهم درسیستم

هستند. باوجود این، چون ظرفیت سیستم ۱۰ است، می‌توان اطمینان‌داشت که در هر لحظه بیش از ۱۰ مشتری در سیستم حضور ندارند. بنابراین، چنانچه نتیجهٔ آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از:

$$S=\{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$$

بادانستن فضای‌نمونه، اگرچه نمی‌توان نتیجهٔ قطعی آزمایش را پیش‌بینی کرد، اما می‌توان مطمئن بود که نتیجهٔ حاصله‌فقط عنصری ازمجموعهٔ فضای نمونه خواهدبود. هرزیرمجموعهٔ فضای نمونه را یك **پیشامد** می‌نامند. اگر S فضای نمونهٔ یك آزمایش باشد، مجموعهٔ E را در صورتی پیشامد می‌نامیم که

$$E\subset S \tag{۱.۲}$$

در مثال ۱.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ زیر باشد

$$E=\{x|۵\leqslant x\leqslant ۶\}$$

در این پیشامد فقط بررسی خدمتهایی که کمتر از ۶ دقیقه طول می‌کشند، مـد نظر است.

در مثال ۲.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ $E=\{۰\}$ باشد، که دراین‌صورت، هنگام ورود مشتری مورد نظر، سیستم خالی است.

احتمال وقوع یك پیشامد. در یك آزمایش، کـه فضای نمونهٔ آن S است، احتمال وقوع پیشامدی مانند E، که داخل این فضاست، براساس سه اصل زیر تعریف می‌شود:

(۲.۲) الف. $$۰\leqslant P(E)\leqslant ۱$$

(۳.۲) ب. $$P(S)=۱$$

ج. چنانچه $E_۱$ و $E_۲$ دو پیشامد فضای S باشد و فصل مشترکی هـم نداشته باشند (یعنی $E_۱E_۲=\phi$)

$$P(E_۱\bigcup E_۲)=P(E_۱)+P(E_۲) \tag{۴.۲}$$

طبق این اصل، احتمال اینکه نتیجهٔ آزمایش حداقل یکی از دو پیشامد فوق باشد، برابر با مجموع احتمالات آنهاست.

چند نتیجه‌گیری

با استفاده از سه‌اصل فوق می‌توان نتیجه‌گیریهای‌زیر را ارائه کرد، که درمحاسبهٔ‌احتمالات پیشامدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.

$$P(E^c)=۱-P(E) \tag{۵.۲}$$

که E^c مکمل مجموعهٔ E است، یعنی

$$E \cdot E^c = \varnothing, \quad E \bigcup E^c = S$$

۲. اگر $E_1 \subset E_2$ باشد

$$P(E_1) \leqslant P(E_2) \qquad (۶.۲)$$

۳. دو مجموعهٔ E_1 و E_2، که اشتراك آنها لزوماً مجموعهٔ تهی نیست، را در نظر بگیرید

$$P(E_1 \bigcup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) \qquad (۷.۲)$$

۴. فضای نمونهٔ S، که دارای N عنصر است، را در نظر بگیرید، یعنی

$$S = \theta\{1, 2, \ldots, N\}$$

چنانچه نتیجهٔ آزمایش بتواند هرکدام از عناصر فوق، با شانس مساوی، باشد

$$P(1) = P(x) = \ldots = P(N) = \frac{1}{N} \qquad (۸.۲)$$

۲.۲ متغیر تصادفی

در اکثر موارد به‌جای بررسی پیشامدها بـه‌طور مستقیم، از مفهوم **متغیر تصادفی** بـرای بررسی پدیده‌های احتمالی استفاده می‌کنند. این‌کار باعث تـسهیل محاسبات می‌شود. برحسب تعریف، متغیر تصادفی عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به‌این ترتیب، بـه‌هر عنصر فضای نمونه، عددی اختصاص داده می‌شود. بدیهی است کـه می‌توان متغیرهای تصادفی متعددی را روی یك فضای نمونهٔ مشخص تعریف کرد.

در مثال ۲.۲ می‌توان متغیرهای تصادفی X و Y را به‌شرح زیر تعریف کرد:

X عبارت است از مدت زمان ارائه خدمت. این متغیر تصادفی می‌تواند همهٔ اعداد بین ۵ تا ۱۰ را انتخاب کند و Y چنین تعریف می‌شود

$$Y = \begin{cases} \text{۰ اگر مدت زمان خدمت کمتر از ۶ دقیقه باشد،} \\ \text{۱ اگر مدت زمان خدمت بیش‌از ۶ دقیقه باشد،} \end{cases}$$

این متغیر تصادفی فقط می‌تواند مقادیر صفر و یك را انتخاب کند. همان‌طور کـه مشاهده می‌شود، با وجود اینکه در آزمایش مورد نظر فقط یك فضای نمونه وجود دارد، متغیرهای تصادفی مختلف روی آن تعریف شده است. معمولا متغیر تصادفی طوری تعریف می‌شـود که راحت‌تر بتوان هدف مورد نظر را بیان‌کرد. دراین‌مثال، اگر فقط زمان ارائه خدمت

مد نظر باشد، تعریف X مناسب است. چنانچه فرض شود که اگر مدت خدمت بیش از ۶ دقیقه طول بکشد جریمه‌ای بـه آن تعلق می‌گیرد، تنها طبقه‌بندی کـه می‌تواند مدنظر باشد این است که خدمتها یا مشمول جریمه می‌شود (یعنی بیشتر از ۶ دقیقه طول می‌کشد)، و یا نمی‌شود (کمتر یا مساوی ۶ دقیقه طول می‌کشد). در این حالت، فرضاً بین زمان خدمت ۷ دقیقه‌ای و ۸ دقیقه‌ای تفاوتی وجود ندارد.

از طرف دیگر، هر پیشامد را نیز می‌توان برحسب متغیر تصادفی به‌شکل $(X=x)$ یا $(X\leqslant x)$ بیان کرد.

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X (که بـه‌اختصار آنرا تابع توزیع می‌نامند)، به‌ازای تمام مقادیر x (از $-\infty$ تا $+\infty$) به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(x)=P(X\leqslant x) \qquad (۹.۲)$$

براساس این تعریف، می‌توان نتیجه‌گیری کرد کـه تابع توزیع متغیر تصادفی X دارای خواص زیر نیز هست:

الف. تابع توزیع تابعی افزاینده است. اگر $a\leqslant b$ باشد

$$F(a)\leqslant F(b) \qquad (۱۰.۲)$$

ب. مقدار تابع توزیع در $-\infty$ صفر است و در $+\infty$ به‌سمت یك میل می‌کند، یعنی

$$\lim_{x\to-\infty} E(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} E(x)=1 \qquad (۱۱.۲)$$

ج. رابطهٔ زیر به‌ازای همهٔ مقادیر $a\leqslant b$ همواره برقرار است،

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=F(b)-F(a)$$

د. چنانچه در نقطه‌ای مانند x تابع توزیع منقطع باشد،

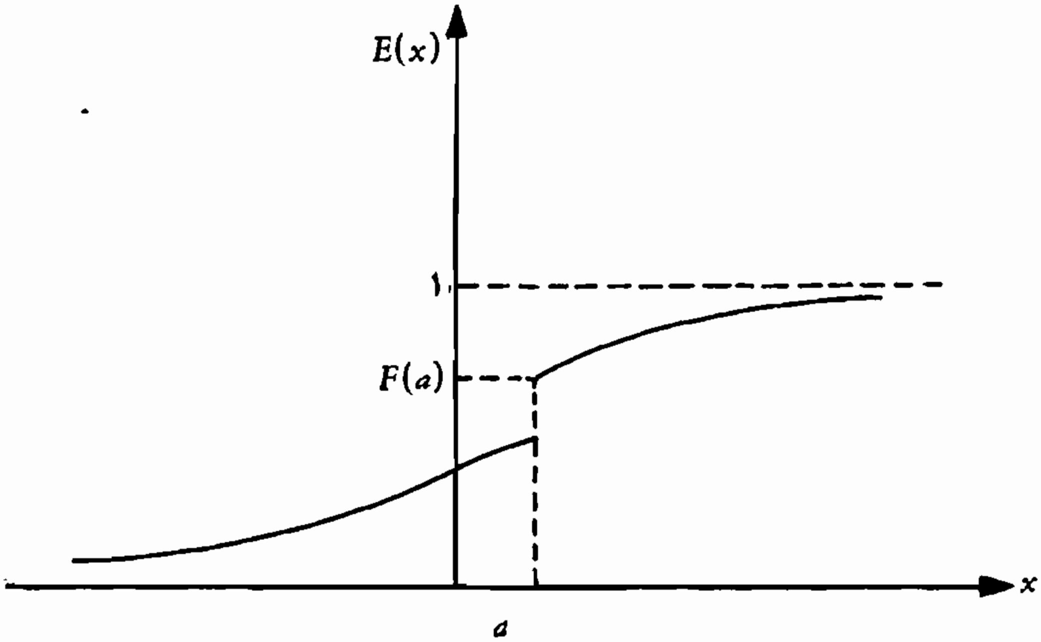
$$F(x)=\lim_{y\to 0} F(x+y) \qquad (۱۲.۲)$$

و

$$\lim_{y\to 0} F(x-y)<F(x) \qquad (۱۳.۲)$$

یعنی در چنین نقطه‌ای مقدار تابع از شاخهٔ سمت راست منحنی تابع بـه دست می‌آید و با توجه به‌خاصیت افزاینده بودن تابع، این‌مقدار از مقادیر شاخهٔ سمت چپ بیشتر است. به‌عبارت دیگر $F(x)$ تابعی است که از **سمت راست پیوسته** است. شکل ۱.۲ این موضوع را نشان می‌دهد.

متغیر تصادفی بر دو نوع است. **گسسته** و **پیوسته**.



شکل ۱۰۲ خاصیت پیوستگی از سمت راست در یك تابع توزیع

الف. متغیر تصادفی گسسته

چنانچه متغیری تصادفی فقط مقادیر یك **مجموعهٔ قابل شمارش** را انتخاب کند، به‌آن **متغیر تصادفی گسسته** می‌گویند. تعداد عناصر این مجموعه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. برحسب تعریف، **تابع احتمال** این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(a)=P(X=a) \qquad (۱۴.۲)$$

که a یکی از عناصر مجموعهٔ قابل شمارش فوق است. مجموع احتمالات، به‌ازای تمام عناصر این مجموعه برابر با یك است، یعنی

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a) \qquad (۱۵.۲)$$

در عمل، گاهی استفاده از مفهوم تابع توزیع یك متغیر تصادفی راحت‌تر ازمفهوم تابع احتمال است. تابع توزیع را می‌توان برحسب تابع احتمال، به‌شرح زیربیان‌کرد.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{a=-\infty}^{x} p(a) \qquad (۱۶.۲)$$

مثال ۳.۲ یك متغیر تصادفی دارای تابع احتمالی به‌شرح زیر است:

$$p(۰)=۰٫۲ \qquad p(۱)=۰٫۱, \qquad p(۲)=۰٫۱, \qquad p(۴)=۰٫۲,$$
$$p(۵)=۰٫۳, \qquad p(۶)=۰$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را تعیین‌کنید.

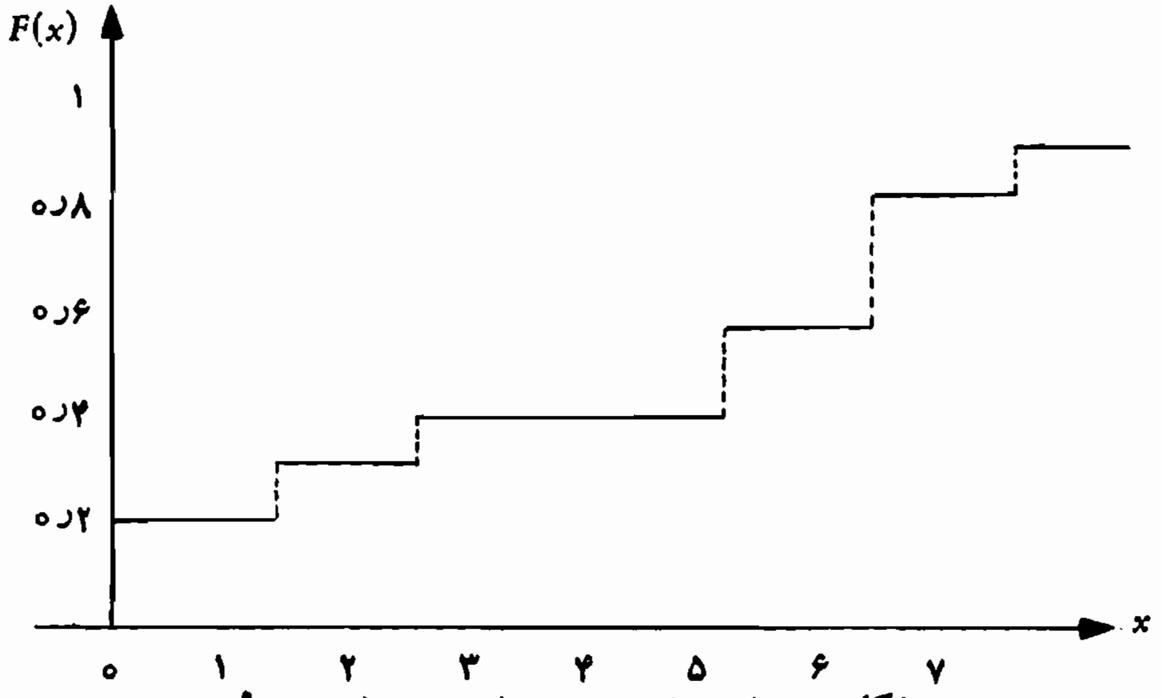
حل: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی را به‌شرح زیرمی‌توان بیان‌کرد:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & 0\leqslant x<1 \\ 0.3 & 1\leqslant x<2 \\ 0.4 & 2\leqslant x<4 \\ 0.6 & 4\leqslant x<5 \\ 0.9 & 5\leqslant x<6 \\ 1 & 6\leqslant x \end{cases}$$

منحنی $F(x)$ نسبت‌به x درشکل ۲.۲ نشان داده شده است از طرف دیگر، با معلوم بودن تابع توزیع یک‌متغیر تصادفی‌گسسته، می‌توان تابع احتمال آن‌را تعیین کرد. دراین‌مورد، مقدار تابع احتمال در همهٔ نقاط برابر با صفر است، به‌استثنای نقاطی‌که در آنها تابع توزیع دارای جهش است. درچنین نقاطی مقدار تابع احتمال برابر با مقدارجهش است. با مراجعه به‌شکل فوق، صحت این امر روشن می‌شود.

تعدادی از توابع توزیع اهمیت خاصی دارندکه مهمترین آنها عبارت‌اند از:

توزیع برنولی. برحسب تعریف، هر متغیر تصادفی‌که فقط بتواند دو مقدار مشخص را انتخاب‌کند، دارای تابع توزیع برنولی است. بـه‌عنوان نمونه، آزمایشی را در نظر بگیریدکه نتیجه‌آن صرفاً موفقیت یا شکست باشد براین‌اساس، متغیری تصادفی رامی‌توان تعریف‌کردکه فقط مقادیر یک و صفر را انتخاب‌کند، بـه‌ترتیب، معرف موفقیت و شکست آزمایش هستند. چنانچه p احتمال موفقیت و $(1-p)$ احتمال شکست آزمایش بـاشد،



شکل ۲.۲ تابع توزیع متغیر تصادفی در مثال ۲.۳

تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(1)=p, \quad p(0)=1-p \qquad (17.2)$$

توزیع دوجمله‌ای. فرض کنید که n آزمایش برنولی (با نتایج موفقیت یا شکست) مستقلا انجام شود. تعداد موفقیتهای این مجموعه آزمایشها، متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای، به‌شرح زیر است

$$p(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad , \quad x=0, 1, \cdots, n \qquad (18.2)$$

که p احتمال موفقیت هر آزمایش برنولی است.

توزیع هندسی. دراین‌مورد نیز فرض کنید که تعدادی آزمایش برنولی مستقلاانجام شود. چنانچه X را تعداد آزمایشها تا اولین موفقیت در نظر بگیریم، X متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شرح زیر است.

$$p(X)=p(1-p)^{X-1} \quad , \quad X=0, 1, 2, \cdots \qquad (19.2)$$

توزیع پواسون. متغیر تصادفی x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. اگر

$$p(x)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^x}{x!} \quad , x=0, 1, 2, 3, \cdots \qquad (20.2)$$

به‌علت اهمیت توزیع پواسون در نظریهٔ صف، دربارهٔ آن به‌تفصیل در فصل سوم بحث خواهیم کرد.

ب. متغیر تصادفی پیوسته

چنانچه متغیری تصادفی بتواند همهٔ مقادیر یك مجموعهٔ غیرقابل شمارش (پیوسته) را انتخاب کند، به‌آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند. مثلا، مدت زمان ارائه خلعت در یك سیستم صف معمولا یك‌متغیر تصادفی پیوسته است. هرمتغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع آن، یعنی $F(x)$ مشخص می‌شود. در مقایسه با تابع احتمال در مورد متغیرهای تصادفی گسسته، **تابع چگالی** در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$f(x)=\frac{d}{da}F(x) \qquad (21.2)$$

متقابلا، تابع توزیع یك متغیر تصادفی پیوسته،برحسب **تابع چگالی** آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad (۲۲.۲)$$

احتمال وقوع یك پیشامد را می‌توان با استفاده از تابع توزیع یا تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته به‌دست آورد.

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(y)dy \qquad (۲۳.۲)$$

در واقع، احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی بین دو عدد a و b باشد، برابر با مساحت زیر منحنی تابع چگالی در همین فاصله است (شکل ۳.۲). از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۲۳.۲)، احتمال اینکه یك متغیر تصادفی پیوسته، دقیقاً مقدار مشخصی مانند a را انتخاب کند، برابر با صفر است، یعنی

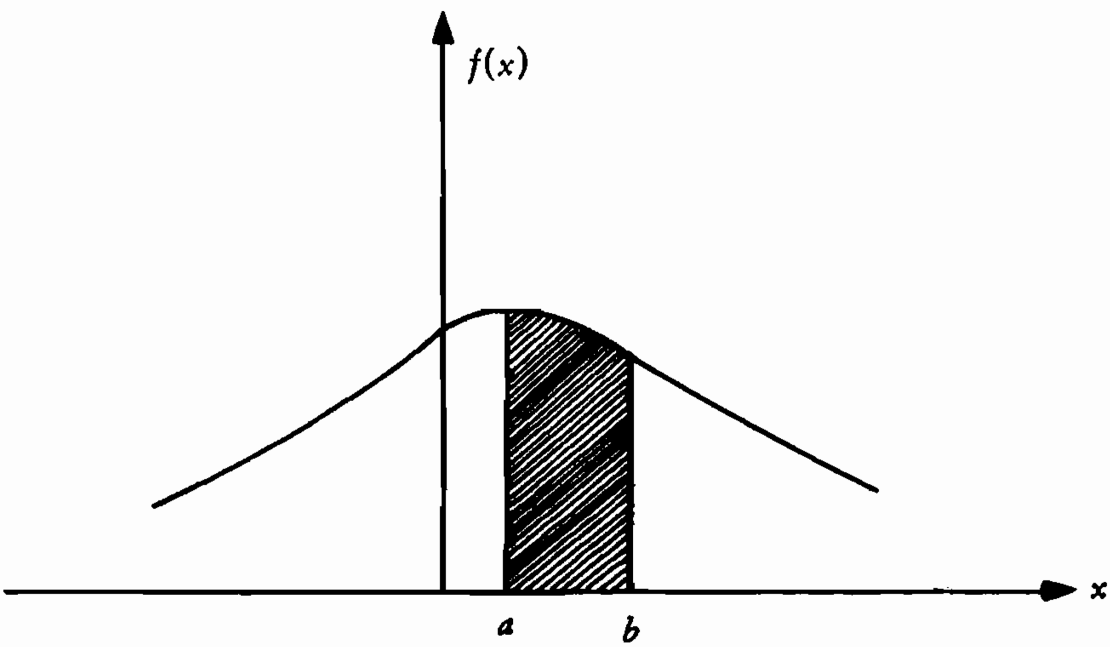
$$P(X=a)=\int_{-a}^{a} f(x)dx=0 \qquad (۲۴.۲)$$

در نتیجه، می‌توان نشان داد که

$$P(X<a)=P(X\leqslant a) \qquad (۲۵.۲)$$

ضمناً، با توجه به‌رابطه‌های (۱۱.۲) و (۲۳.۲)، مساحت زیر منحنی تابع چگالی برابر با یك خواهد بود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \qquad (۲۶.۲)$$



شکل ۳.۲ تابع چگالی یك متغیر تصادفی پیوسته

در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعدادی از آنها از اهمیت بیشتری برخوردارهستند، که عبارت‌اند از: **توزیع نمایی؛ توزیع گاما؛ توزیع ارلانگی؛ توزیع فوق‌نمایی؛ توزیع نرمال.**
سه نوع توزیع اول را به تفصیل در فصل سوم مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای مطالعهٔ بیشتردرمورد توابع‌توزیع‌فوق نمایی‌ونرمال به‌مراجع‌فصل ۵ و ۱۰ مراجعه‌شود.

۳.۲ امید ریاضی

امید ریاضی یك متغیر تصادفی گسسته مانند X، که با $E(X)$ نشان داده می‌شود، برحسب تعریف، عبارت است‌از:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = E[X] \qquad (۲۷.۲)$$

که X_iها مقادیر ممکنی هستند که متغیر تصادفی می‌تواند انتخاب کند. چنانچه متغیر تصادفی پیوسته باشد، امید ریاضی آن، از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (۲۸.۲)$$

قضیهٔ ۱.۲: به‌ازای تمام اعداد ثابت a و b، رابطه‌های زیر صادق است.

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad (۲۹.۲)$$

$$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y) \qquad (۳۰.۲)$$

امید ریاضی، تابعی از متغیر تصادفی است.

در مواردی، ممکن است بـه جای محاسبهٔ امید ریاضی متغیر تصادفی، امید ریاضی تابعی چون g از آن مـد نظر باشد، که دراین حالت، طبق تعریف، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x)p(x) \quad , \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \qquad (۳۱.۲)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad , \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \qquad (۳۲.۲)$$

حالت خاصی که کاربردهای متعدد دارد، محاسبهٔ **گشتاور nاُم** یك متغیر تصادفی، بـه‌شکل $E(X^n)$ به‌ازای $n \geqslant 1$ است. (گشتاور اول، همان میانگین متغیر تصادفی است).

واریانس متغیر تصادفی

واریانس یك متغیر تصادفی، به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{var}(X)=E[(X-E[X])^{2}] \qquad (۳۳.۲)$$

واریانس شاخصی است که پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی را نسبت به‌میانگین آن می‌سنجد. می‌توان نشان داد که چگونه واریانس را می‌شود از رابطه زیر به‌دست آورد.

$$\mathrm{var}(X)=E[X^{2}]-(E[X])^{2} \qquad (۳۴.۲)$$

۴.۲ تابع توزیع توأم

دو متغیر تصادفی X و Y را درنظر بگیرید، که **تابع توزیع توأم** آنها به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(X,\ Y)=P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y) \qquad (۳۵.۲)$$

در عبارت فوق احتمال اینکه هردوپیشامد اتفاق بیفتند، مدنظر است.

تابع توزیع هر کدام از این متغیرهای تصادفی را می‌توان از تابع توزیع توأمشان به‌دست آورد. برای این منظور با تخصیص همهٔ مقادیرممکن به‌متغیر تصادفی دیگر، آن را بی‌اثر می‌سازیم. بدین ترتیب،

$$F_X(x)=P[X\leqslant x, Y<\infty]=\lim_{y\to\infty} F(x,\ y)=F(x,\ \infty) \qquad (۳۶.۲)$$

در عبارت فوق، $F_X(x)$ معرف تابع توزیع X، بـه تنهایی، است و **توزیع نهایی** نامیده می‌شود.

چنانچه دو متغیر تصادفی مـورد نظر پیوسته باشد، یك تـابع چگالی توأم، مانند $f(x,\ y)$ رابطهٔ آنها را مشخص می‌سازد. در این‌صورت، احتمال اینکه مقادیر ایـن دو متغیر از مجموعهٔ مشخصی انتخاب شود، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$P\{(X,\ Y)\in C\}=\iint_{(x,y)\in C} f(x,\ y)\,dx\,dy \qquad (۳۷.۲)$$

در این حالت، تابع توزیع توأم آنها نیز به‌همین صورت به‌دست می‌آید.

$$F(a,\ b)=P(X\leqslant a,\ Y\leqslant b) \qquad (۳۸.۲)$$

از طرف دیگر، تابع چگالی توأم را نیز می‌توان از تابع توزیع توأم به‌دست آورد.

$$f(a,\ b)=\frac{\partial^{2}}{\partial a\partial b}F(a,\ b) \qquad (۳۹.۲)$$

با استفاده از تابع چگالی توأم، می‌توان تابع چگالی هر متغیر تصادفی را جداگانه محاسبه کرد

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy \qquad (۴۰.۲)$$

مثال ۴.۲ دو متغیر تصادفی X و Y را، که تابع چگالی توأم آنها به‌شرح زیر است، درنظر بگیرید. $F_Y(y)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x,\ y)=\begin{cases}2y(x-y)e^{-(x+y)} & ,\quad 0<x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant x\\ 0 & ,\quad \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\int_{-\infty}^{y} f(x,\ y)\,dx+\int_{y}^{\infty} f(x,\ y)\,dx$$

در انتگرال اول عبارت فوق، چون مقدار x از y کوچکتر است، تابع چگالی توأم و در نتیجه مقدار انتگرال برابر با صفر است. پس‌از انتگرالگیری جزء به‌جزء قسمت دوم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f_Y(y)=2y$$

پیشامدها و متغیرهای تصادفی مستقل

دو پیشامد E_1 و E_2 را مستقل می‌نامند، اگر رابطهٔ زیر در مورد آنها صدق کند.

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2) \qquad (۴۱.۲)$$

به‌همین‌ترتیب، دومتغیر تصادفی X و Y درصورتی مستقل هستند که به‌ازای همهٔ مجموعه‌های عددی A و B رابطهٔ زیر صادق باشد:

$$P\{X\in A,\ Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\} \qquad (۴۲.۲)$$

بنابراین، از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که به‌ازای تمام مقادیر عددی x و y خواهیم‌داشت،

$$F(x,\ y)=F_X(x)F_Y(y) \qquad (۴۳.۲)$$

$$P(x,\ y)=P_X(x)P_Y(y) \qquad (۴۴.۲)$$

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y) \quad (۴۵.۲)$$

و

$$E(XY)=E(X)E(Y) \quad (۴۶.۲)$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{cov}(X, Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \quad (۴۷.۲)$$

رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\operatorname{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \quad (۴۸.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مورد دو متغیر تصادفی مستقل، مقدار کوواریانس برابر با صفر است.

واریانس مجموع دو متغیر تصادفی

قضیه ۲.۲ رابطهٔ زیر همیشه صدق می‌کند.

$$\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+۲\operatorname{cov}(X, Y) \quad (۴۹.۲)$$

چنانچه دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، واریانس مجموع آنها برابر با مجموع واریانسهای آنهاست.

۵.۲ احتمال شرطی

منظور از احتمال شرطی یک پیشامد، مثلا $P(E|F)$، احتمال اتفاق افتادن پیشامد E است، مشروط براینکه پیشامد F اتفاق افتاده باشد. بدین‌ترتیب، با درنظر گرفتن اطلاعات جدیدی که در مورد اتفاق افتادن پیشامد F داریم، و همچنین رابطهٔ بین E و F، قضاوت بهتری دربارهٔ احتمال اتفاق افتادن یا نیفتادن پیشامد E خواهیم داشت.

احتمال شرطی با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)} \quad (۵۰.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، چنانچه دو پیشامد فوق مستقل باشند، طبق رابطهٔ (۴۱.۲) نتیجهٔ عبارت فوق $P(E)$ خواهد بود. یعنی، پیشامد F تأثیری بر روی E نخواهد داشت.

مثال ۵.۲ فرض کنید سه سکه را پرتاب می کنیم. احتمال پیشامد E، آمدن حداقل ۲ شیر در سه پرتاب، را در حالتهای زیر محاسبه کنید.

الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی: در این حالت فضای نمونه دارای هشت عنصر است، که در چهار عنصر آن حداقل دو شیر وجود دارد. لذا

$$P(E) = ۰٫۵$$

ب. با اطلاع از اینکه نتیجهٔ اولین پرتاب، شیر بوده است: این پیشامد، یعنی شیر بودن نتیجه اولین پرتاب، را با F نشان می‌دهیم. بنابراین، هدف، محاسبهٔ $P(E|F)$ است. این عبارت را می‌توانیم مستقیماً و یا با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲) به دست آوریم. محاسبهٔ مستقیم به‌شرح زیر انجام می‌شود.

$$P(E|F) = P(\text{یك یا دو شیر آمدن نتیجه در دو آزمایش باقیمانده})$$

$$= ۱ - P(\text{خط آمدن نتیجه در هر دو آزمایش باقیمانده})$$

$$= ۱ - ۰٫۲۵ = ۰٫۷۵$$

چنانچه بخواهیم از رابطه (۴۸.۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت.

$$P(EF) = P(\text{آمدن حداقل دو شیر، مشروط بر شیر آمدن سکه در پرتاب اول})$$

$$= P(\text{شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب به‌اضافهٔ شیر آمدن نتیجهٔ حداقل یکی از دو پرتاب دیگر})$$

$$= \frac{۳}{۸}$$

و

$$P(F) = P(\text{شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب شیر})$$

$$= ۰٫۵$$

لذا طبق رابطهٔ (۵۰.۲)

$$P(E|F) = ۰٫۷۵$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در دو حالت فوق، الف و ب، اگرچه یك پدیدهٔ مشخص و منحصر به‌فرد (به دست آمدن حداقل دو شیر در سه پرتاب) مورد بررسی قرار گرفته است، چون اطلاعات موجود در این دو حالت متفاوت است، نتایج به‌دست‌آمده نیز یکسان نیست.

مثال ۶.۲ دو مشتری وارد یك سیستم شده‌اند. به فرض اینکه هر مشتری به‌احتمال ۰٫۶ مرد باشد، احتمال مرد بودن هر دو مشتری، پیشامد E، را در سه حالت زیر حساب کنید.

الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی

$$P(E)=(0.6)(0.6)=0.36$$

ب. با دانستن اینکه اولین مشتری مرد است (پیشامد F)

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$P(EF)=P(\text{مرد بودن هر دو مشتری و همچنین مرد بودن اولین مشتری})$$

$$P(\text{مرد بودن هر دو مشتری})=0.36$$

و

$$P(F)=0.6$$

در نتیجه

$$P(E|F)=0.6$$

ج. با دانستن اینکه حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد G)

$$P(E|G)=\frac{P(EG)}{P(G)}$$

$$P(EG)=0.36$$

$$P(G)=1-P(\text{زن بودن هر دو مشتری})=1-0.16=0.84$$

در نتیجه

$$P(E|G)=\frac{0.36}{0.84}=\frac{3}{7}=0.43$$

درصورتی که پیشامدها برحسب متغیر تصادفی بیان شده باشند، رابطه (۵۰-۲) همچنان معتبر است و به‌یکی از شکلهای زیر بیان می‌شود:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,\,Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۱-۲)$$

$$P(X\leqslant x|Y=y)=\frac{P(X\leqslant x,\,Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۲-۲)$$

(مشروط براینکه در دو عبارت فوق مخرج کسر برابر با صفر نباشد)

مثال ۷-۲ تعداد مشتریانی‌که در ساعت اول وارد سیستمی می‌شوند را با X وتعداد

ا تهایی راکه در دومین ساعت وارد می‌شوند با Y نشان می‌دهیم. فرض می کنیم که این‌دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون و با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند. تابع توزیع X را با آگاهی از اینکه $X+Y=n$ است، حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۴.۲) و با توجه به‌اینکه X و Y مستقل هستند، داریم

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,\ X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k,\ Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع دومتغیر تصادفی با توزیع پواسون نیز دارای توزیع پواسون (با پارامتری برابر با مجموع پارامترها) خواهد بود. بنابراین

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\ \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

بدین ترتیب، متغیر تصادفی X، با معلوم بودن $X+Y=n$، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ خواهد بود.

۶.۲ امید شرطی

امیدریاضی X، مشروط براینکه متغیر تصادفی‌دیگری‌مانند Y مقدارمشخصی مانند y را انتخاب کند، به‌شکل $E(X|Y=y)$ نشان داده می‌شود. درحالتی‌که Y گسسته باشد، امید شرطی را می‌توان نظیر هر متغیر تصادفی دیگر، به‌شرح زیر محاسبه کرد:

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y) \qquad (۵۳.۲)$$

درحالتی‌که Y پیوسته باشد، امید شرطی را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد.

$$E(X|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,\, y)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)\, dx} \qquad (۵۴.۲)$$

مثال ۷.۲ در مثال (۴.۲)، امید شرطی $E(X|Y=y)$ را محاسبه کنید.
حل: پس از انتگرالگیری صورت کسر به‌صورت جزءبه‌جزء و با استفاده از نتیجهٔ مثال فوق، تساوی زیر به‌دست می‌آید.

$$E(X|Y=y)=y+۲$$

۷.۲ به‌کارگیری احتمال شرطی در محاسبهٔ امید ریاضی یك متغیر تصادفی

اگر محاسبهٔ $E(X)$ به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نباشد، می‌توان با استفاده از یك متغیر تصادفی دیگر مانند Y و به‌کمك قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

قضیه ۳.۲ رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

(۵۵.۲) الف. اگر Y گسسته باشد، $E[X]=\sum_y E\{X|Y=y\}P\{Y=y\}$

(۵۶.۲) ب. اگر Y پیوسته باشد، $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)\, dy$

اثبات: X و Y می‌توانند پیوسته یا گسسته باشند. در نتیجه، چهار حالت مختلف ممکن است اتفاق بیفتد. برای نمونه، حالتی‌را درنظر بگیرید که هردو متغیر تصادفی X و Y گسسته باشد. در این‌صورت، رابطهٔ فوق به‌شکل زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned}
\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y\sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\}\\
&= \sum_y\sum_x x\,\frac{P\{X=x,\, Y=y\}}{P\{Y=y\}}\,P\{Y=y\}\\
&= \sum_y\sum_x xP\{X=x,\, Y=y\}\\
&= \sum_x x\sum_y P\{X=x,\, Y=y\}\\
&= \sum_x xP\{X=x\}\\
&= E[X].
\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای اینکه بتوان از قضیهٔ فوق جهت محاسبهٔ $E(X)$ استفاده نمود، لازم است که بتوان متغیر تصادفی جدیدی مانند Y پیدا کرد، که، اولاً تابع توزیع آن و، ثانیاً رابطهٔ وابستگی بین X و Y، یعنی $E(X|Y=y)$، مشخص باشد.

مثال ۸۰۲ سکه‌ای را در نظر بگیرید، که احتمال آمدن شیر در موقع پرتاب آن p فرض می‌شود. این سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر به‌دست آید. اگر N معرف تعداد پرتابهای سکه تا اولین شیر باشد، $E(N)$ را حساب کنید.

حل: از رابطهٔ (۶۰۲) برای محاسبهٔ $E(N)$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید متغیر جدیدی معرفی کرد، که هم تابع توزیع آن وهم چگونگی رابطهٔ آن با متغیر تصادفی مورد نظر، یعنی N، معلوم باشد. این متغیر تصادفی جدید، نتیجهٔ اولین پرتاب، به‌شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Y=\begin{cases} ۱ & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب شیر باشد} \\ ۰ & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب خط باشد} \end{cases}$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۵۵۰۲) و با درنظر گرفتن اینکه احتمال آمدن شیر در هرپرتاب p باشد، داریم:

$$E(N)=E(N|Y=۱)P(Y=۱)+E(N|Y=۰)P(Y=۰)$$
$$=pE(N|Y=۱)+(۱-p)E(N|y=۰)$$

بدیهی است که

$$E(N|Y=۱)=۱$$

حال فرض کنید که نتیجهٔ اولین پرتاب شیر نباشد، یعنی $Y=۰$ باشد. دراین‌صورت، با توجه به‌اینکه پرتابها مستقل از یکدیگرند، میانگین تعداد پرتابهای لازم بعد از اولین پرتاب، برابر با $E(N)$ خواهد بود. یعنی

$$E(N|Y=۰)=۱+E(N)$$

در نتیجه

$$E(N)=p+(۱-p)[۱+E(N)]$$

یا

$$E(N)=\frac{۱}{p}$$

۸.۲ کاربرد احتمال شرطی در محاسبهٔ احتمال یك پیشامد

چنانچه محاسبهٔ مستقیم یك پیشامد دشوار یا غیر ممکن باشد، می‌توان با استفاده از رابطه‌های احتمال شرطی، شبیه رابطه‌های مربوط به امید شرطی، و طبق قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

قضیهٔ ۴.۲ رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

(۵۷.۲) الف. اگر Y گسسته باشد، $P(A)=\sum_y P(A|Y=y)P(Y=y)$

(۵۸.۲) ب. اگر Y پیوسته باشد، $P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y=y)f(y)\,dy$

اثبات: متغیر تصادفی X را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ اتفاق بیفتد،} \\ ۰ & \text{اگر } A \text{ اتفاق نیفتد،} \end{cases}$$

بدیهی است که طبق تعریف میانگین متغیر تصادفی، میانگین X عبارت است از:

$$E(X)=P(A)$$

از طرف دیگر، طبق تعریف امید شرطی داریم:

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y)=P(X=۱|Y=y)=P(A|Y=y)$$
(۵۹.۲)

با استفاده از رابطه‌های (۵۹.۲) و (۵۵.۲)، این قضیه به‌شرح زیر ثابت می‌شود:

$$P(A)=E(X)=\sum_y E(X|Y=y)P(Y=y)=\sum_y P(A|Y=y)P(Y=y)$$

مثال ۹.۲ تعداد مشتریهایی که هر روز به‌یك سیستم مراجعه می‌کنند، متغیر تصادفی با توزیع پواسون و میانگین آن ۱۰ مشتری در روز است. هر مشتری با احتمال ۶ر۰ و مستقل از سایر مشتریها، از دریافت خدمت منصرف، و از سیستم خارج می‌شود. احتمال اینکه در یك روز مشخص ۱۵ مشتری برای دریافت خدمت بمانند، چیست؟

حل: تعداد مشتریهایی که برای دریافت خدمت می‌مانند را X می‌نامیم. بنابراین، سؤال مسئله، محاسبهٔ $P(X=۱۵)$ است. به جای محاسبهٔ مستقیم، از احتمال شرطی، یعنی رابطهٔ (۵۸.۲)، استفاده می‌کنیم. برای این منظور، از متغیر تصادفی N، تعداد مشتریهایی که در روز مراجعه می‌کنند، کمك گرفته می‌شود. به‌این ترتیب،

(۶۰.۲) $$P(X=۱۵)=\sum_{n=۱۵}^{\infty} P(X=۱۵|N=n)P(N=n)$$

در رابطهٔ فوق، بدیهی است که چنانچه $n<15$ باشد (یعنی تعداد کل مراجعین به سیستم کمتر از ۱۵ مشتری باشد)، امکان اینکه ۱۵ مشتری خدمت دریافت کرده باشند، وجود ندارد. اما، اگر $n \geqslant 15$ باشد، می‌دانیم که هر مشتری که وارد شده است، به‌احتمال ۴ر۰ خدمت دریافت کرده، و به‌احتمال ۶ر۰ خدمت دریافت نکرده‌است. بنابراین، با یک توزیع دوجمله‌ای سروکار داریم، که در آن $P=0.4$ و $k=15$ است

$$P\{X=k|N=n\}=\begin{cases}\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}, & \text{مشروط براینکه } n\geqslant k\\ 0, & \text{مشروط براینکه } n<k\end{cases}$$

با جایگزینی عبارت فوق در رابطهٔ (۶۰.۲) و با در نظر گرفتن اینکه N دارای توزیع پواسون است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}P\{X=k\}&=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{P^k(1-P)^{n-k}e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\\&=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(\lambda P)^k(\lambda(1-P))^{n-k}e^{-\lambda}}{n!}\\&=\frac{e^{-\lambda}(\lambda P)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^{n-k}}{(n-k)!}\\&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^i}{i!}\\&=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}e^{\lambda(1-P)}\\&=e^{-\lambda P}\frac{(\lambda P)^k}{k!}\end{aligned}$$

در نتیجه، X دارای توزیع پواسون با میانگین ($\lambda P=4$) است.

مثال ۱۱.۲ چنانچه X و Y متغیرهای تصادفی نمایی با پارامترهای λ و μ باشند، احتمال $P(X<y)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۵۸.۲)، با فرض اینکه $X=x$ باشد، احتمال پیشامد $(X<Y)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(X<Y)=\int_0^{\infty}P(X<Y|X=x)f(x)\,dx$$

مفهوم $P(X<Y|X=x)$، احتمال بزرگتر بودن Y از متغیر تصادفی X است، به شرط اینکه مقدار x مشخص باشد. بنابراین،

$$P[X<Y|X=x]=P[Y>x]=\mu e^{-\mu x}$$

قسمت آخـر رابطهٔ فوق، با استفاده از فرض نمایی بودن متغیر تصادفی Y بـه‌دست آمده است. در نتیجه

$$P(X<Y)=\int_{0}^{\infty}(e^{-\mu x})(\lambda e^{-\lambda x})\,dx$$

یا

$$P(X<Y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (۶۱.۲)$$

۹.۲ فرمول بیز

فرمول احتمال شرطی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$P(A|B)=\frac{P(A|B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲)، نتیجه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \qquad (۶۲.۲)$$

مثال ۱۰.۲ محصولات کارخانه‌ای در دو کارگاه تولید می‌شـود. در کارگاه اول، ۹۰ درصد کالاهـا و در کارگاه دوم فقط ۴۰ درصد آنها بـا استانـدارد تطبیق می‌کند. چنانچه یك‌واحدکالا با استاندارد تطبیق کند، بـا چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟ فرض می‌کنیم میزان تولید کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است.

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A. کالا ازگروه یك انتخاب شده باشد؛

B. کالا با استاندارد تطبیق‌کند.

بنابراین مسئلهٔ مـورد نظر محاسبهٔ $P(A|B)$ است. اجـزای رابطهٔ (۶۲.۲) را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=0.9$$
$$P(B|A^c)=0.4$$

$$P(A)=\text{۰٫۷۵}$$

و در نتیجه

$$P(A|B)=\frac{(\text{۰٫۹})(\text{۰٫۷۵})}{(\text{۰٫۹})(\text{۰٫۷۵})+(\text{۰٫۴})(\text{۰٫۲۵})}=\frac{\text{۲۷}}{\text{۳۱}}$$

۱۰.۲ تابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور یك متغیر تصادفی، به‌ازای تمام مقادیر t به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$M_X(t)=E[e^{tX}]$$

$$=\begin{cases}\sum_x e^{tx}P(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد،}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX}f(y)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد،}\end{cases} \qquad (\text{۶۳.۲})$$

مثال ۱۱.۲ فرض کنید که X متغیری تصادفی با توزیع پواسون و پارامتر λ است. تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$M_X(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}p(n)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$

$$=e^{\lambda(e^t-1)}$$

(در رابطهٔ فوق، بسط سری $e^x=\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$، که در آن $x=\lambda e^t$ است، به کار گرفته شده است).

مثال ۱۲.۲ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y با توزیع نمایی و پارامتر μ عبارت است از:

$$M_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}\mu e^{-\mu y}dy=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

رابطهٔ فوق فقط در مورد مقادیر $t<\mu$ صادق است.

علت اصلی اینکه $M_X(t)$ را تابع مولد گشتاور می‌نامند، این است که با استفاده از آن می‌توان تمام گشتاورهای متغیر تصادفی را به‌دست آورد.

قضیه ۵.۲ گشتاور nاُم متغیر تصادفی X، یعنی $E(X^n)$، برابر با مشتق nاُم تابع مولد گشتاور آن متغیر تصادفی به‌ازای $t=\text{۰}$ است.

$$\left.\frac{dM_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0}=E(X^n) \quad , \quad n=1, 2, \dots \qquad (۶۴.۲)$$

اثبات: مشتقهای اول و دوم و ... nام تابع مولد گشتاور عبارت‌اند از:

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\frac{dE(e^{tX})}{dt}=E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right)=E(Xe^{tX})$$

و

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}[E(Xe^{tX})]=E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right]=E(X^2e^{tX})$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{d^nM_X(t)}{dt^n}=E(X^ne^{tX})$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رابطه‌های فوق چنانچه مقدار $t=0$ در نظر گرفته شود، $E(X^n)$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳.۲ گشتاورهای اول و دوم یك متغیر تصادفی X با توزیع پواسون و پارامتر λ عبارت است از:

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lambda e^t\cdot e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0}=\lambda$$

$$E(X^2)=e^{\lambda(e^t-1)}[(\lambda e^t)^2+\lambda e^t]\Big|_{t=0}=\lambda^2+\lambda$$

با استفاده از دوگشتاور اول، $\mathrm{var}\,(x)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathrm{var}\,(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

مثال ۱۴.۲ گشتاورهای اول و دوم یك متغیر تصادفی y با توزیع نمایی و پارامتر μ عبارت است از

$$E(Y)=\left.\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^2\right|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(Y^2)=\left.\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\right|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2}$$

با استفاده از دوگشتاور اول، $\mathrm{var}\,(Y)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد

$$\operatorname{var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

یکی از عمده‌ترین کاربردهای تابع مولد گشتاور، به‌دست آوردن تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل است، که از قضیهٔ زیر نتیجه‌گیری می‌شود. (تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را اصطلاحاً پیچش توابع توزیع X و Y می‌گویند).

قضیهٔ ۶.۲ تابع مولـد گشتاور مجموع دو متغیر تصادفی مستقل X و Y برابر بـا حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور در آنهاست، یعنی

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t) \tag{۶۵.۲}$$

اثبات: براساس تعریف تابع مولّد گشتاور و خاصیت مستقل‌بودن متغیرهای تصادفی X و Y داریم،

$$\begin{aligned}M_{X+Y}(t)&=E[e^{t(X+Y)}]=E[e^{tX}\cdot e^{tY}]=E(e^{tX})E(e^{tY})\\&=M_X(t)\cdot M_Y(t)\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۲ دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. اگر این دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون بـا پارامترهـای λ_1 و λ_2 باشند، تابع توزیع Z، کـه مجموع این دو متغیر تصادفی است، را به‌دست آورید.

حل: طبق مثال ۱۳.۲، تابع مولّد گشتاور این دو متغیر تصادفی عبارت است از:

$$M_X(t)=e^{\lambda_1(e^t-1)} \tag{۶۶.۲}$$

و

$$M_Y(t)=e^{\lambda_2(e^t-1)} \tag{۶۷.۲}$$

طبق قضیه ۶.۲تابع مولد گشتاور Z از رابطه (۶۵.۲) به‌دست می‌آید.

$$M_Z(t)=e^{\lambda_1(e^t-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^t-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

لذا نتیجه‌گیری می‌شود که، Z دارای توزیع پواسون با پارامتر $(\lambda_1+\lambda_2)$ است.

۱۱.۲ سریهای همگرا

در فصلهای بعـدی، بـه‌کرات بـا **سریهای همگرا** برخورد خـواهیم داشت. یك سری، مجموعه‌ای از اعداد به‌شکل a_1 و a_2 ... است، که آنها را جملات سری و a_n را جملهٔ عمومی آن می‌نامند. منظور از همگرا (یا متقارب) بودن یك سری آن است کـه مجموع

جملات آن عددی متناهی باشد. به‌زبان ریاضی، یك سری همگراست، اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

جملات یك سری می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما در نظریهٔ صف معمولا با جملات مثبت سروکار خواهیم داشت. بنابراین، در این مبحث فقط به‌این حالت خاص می‌پردازیم.

چند خاصیت اصلی سریهای همگرا عبارت است از:

الف ۱. در یك سری همگرا، جملهٔ عمومی nام به‌سمت صفر میل می کند، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad (۶۸.۲)$$

باید توجه داشت‌که این خاصیت، شرط کافی نیست و ممکن است در سریهای غیرهمگرا نیز وجود داشته باشد. لیکن، اگر حد نهایی جمله‌ای صفر نباشد، می‌توان استنتاج کرد که آن سری همگرا نیست.

۲. سری نمایی. اگر جملهٔ عمومی یك سری بــه شکل $a_n = x/n!$ و $x < 1$ باشد، مجموع جملات آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^x \qquad (۶۹.۲)$$

۳. اگر جملهٔ عمومی یك سری به‌شکل nx^{n-1} و $x < 1$ باشد، مجموع جملات آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

اما، از رابطهٔ (۶۷.۲) نتیجه می‌شود، که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (۷۰.۲)$$

اگر محاسبهٔ مجموع تعدادی محدود از اعضای این سری مدنظر باشد، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1}=\frac{1-x^N-Nx^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-x^N}{(1-x)^2}-\frac{Nx^N}{1-x} \quad (۷۱.۲)$$

ب. اگر حد خارج‌قسمت دوجملهٔ متوالی یك سری، یعنی $a_n/(a_n+1)$، همواره از عددی کوچکتر از واحد، مانند k، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

ج. اگـر حد جمله $(a_n)^{1/n}$ از عددی کوچکتر از واحد، مانند k، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

در این قسمت، چند نمونه سری همگرا با جملات مثبت را که درنظریهٔ صف مورد استفاده قرار می‌گیرد، بررسی می‌کنیم.

۱۲.۲ سری تصاعد هندسی

اگرمیان جملات یك سری، رابطهٔ زیر برقرار باشد، به آن سری تصاعد هندسی می‌گویند.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\dots=\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

یا

$$a_n=a_1q^{n-1}\dots$$

q را قدر نسبت تصاعد می‌گویند اگر $q<1$ باشد، مجموع جملات سری عبارت‌است‌از:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-q} \quad (۷۲.۲)$$

اگرمجموع تعدادی متناهی از جملات مدنظر باشد،

$$\sum_{n=1}^{N} a_n=\frac{a_1-a_{N+1}}{1-q} \quad (۷۳.۲)$$

در رابطهٔ فوق، شرط $q<1$ ضرورت ندارد.

۱۳.۲ تبدیل z

تبدیل z، که‌گاهی به‌آن تابع مولّد نیز می‌گویند، نقش وکاربردی شبیه تابع مولّد گشتاور دارد. این‌نوع تبدیل منحصراً برای متغیرهای تصادفی گسسته (و به‌طورعام توابع گسسته) به‌کار گرفته می‌شود.

متغیر تصادفی گسستهٔ x را در نظر بگیرید که فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند. چنانچه تابع احتمال این متغیر تصادفی به‌شرح زیر باشد،

$$p_i = P[X = i]$$

در این‌صورت، تبدیل z در مورد این متغیر تصادفی برحسب تعریف عبارت است از:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \qquad (۷۴\cdot۲)$$

به‌شرط اینکه z طوری انتخاب شود که $p_i z^i$ سری همگرا باشد. برای نمونه اگر $|z| < ۱$ باشد، این شرط همواره برقرار است.

مثال ۱۶۰۲ اگر X دارای توزیع هندسی باشد، تبدیل z آنرا محاسبه‌کنید.

حل: تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = p(1-p)^i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

طبق تعریف $P(z)$ برای این متغیر تصادفی به‌شرح زیر است.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(1-p)^i z^i = P \sum_{i=0}^{\infty} [(1-p)z]^i$$

با در نظر گرفتن مجموع سری هندسی، نتیجه می‌شود که

$$P(z) = \frac{p}{1-pz} \qquad (۷۵\cdot۲)$$

مثال ۱۷۰۲ تبدیل z یك متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای را محاسبه‌کنید.

حل: تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = P(X = i) = (i^n) p^i q^{n-i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

و تبدیل z آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n}{i}\right) (pz)^i q^{n-i}$$

(باید در نظر داشت که به‌ازای $i \geqslant n+1$ رابطه $p_i = 0$ برقرار است). با توجه به‌بسط سری دوجمله‌ای، نتیجه می‌شود که:

$$P(z) = (q + pz)^n \qquad (۷۶\cdot۲)$$

تعیین p_i با استفاده از تبدیل z

رابطه بین p_i، ($i = 0, 1, \dots n$) و $P(z)$ رابطه‌ای منحصر به‌فرد است و با مشخص بودن هر کدام، امکان محاسبه دیگری وجود دارد.

قضیهٔ ۷۰۲ چنانچه تبدیل z یك متغیر تصادفی $P(z)$ باشد، در این‌صورت تابع توزیع احتمال آن، متغیری تصادفی به‌شرح زیر خواهد بود:

$$p_0 = P(z)\big|_{z=0} \tag{۷۷۰۲}$$

$$p_n = \frac{1}{n!}\frac{d\,P(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} \quad , \; n = 1, 2, \cdots \tag{۷۸۰۲}$$

اثبات: با توجه به‌اینکه

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots \tag{۷۹۰۲}$$

$$P'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 \tag{۸۰۰۲}$$

$$P''(z) = 2p_2 + 3!\,p_3 z \tag{۸۱۰۲}$$

در روابط فوق، اگر $z = 0$ باشد، روابط (۷۷۰۲) و (۷۸۰۲) به‌ازای $n = 1, 2$ اثبات می‌شود. به‌همین ترتیب، رابطهٔ (۷۸۰۲) به‌ازای مقادیر $n \geqslant 3$ نیز ثابت می‌شود.

مثال ۱۸۰۲ اگر تبدیل z یك‌متغیر تصادفی $e^{-\lambda(1-z)}$ باشد، تابع توزیع احتمال مربوطه را تعیین کنید.

حل: طبق روابط (۷۷۰۲) و (۷۸۰۲) نتیجه می‌شود

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad , \; n \geqslant 1$$

یعنی x دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است.

در این مثال، تابع توزیع احتمال فوق را از تعریف تبدیل z نیز می‌توان محاسبه کرد، زیرا با استفاده از بسط سری نمایی خواهیم داشت.

$$P(z) = e^{-\lambda(1-z)} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\cdot z^n$$

در نتیجه $\quad P_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$

بعضی از خواص تبدیل z را به‌شرح زیر می‌توان بیان کرد.

$$P(1) = 1 \tag{۸۲۰۲}$$

$$E(X)=P'(1) \qquad (۸۳.۲)$$

$$\operatorname{var}(X)=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2 \qquad (۸۴.۲)$$

به‌ازای $z=1$، از رابطه‌های (۷۸.۲) و (۷۹.۲) و (۸۰.۲) خواص فوق استنتاج می‌شود.

قضیهٔ ۸.۲ اگر X_1 و X_2، متغیرهای تصادفی مستقل، و $P_1(z)$ و $P_2(z)$، به‌ترتیب معرف تبدیل z آنها، و $X=X_1+X_2$ باشد، در این‌صورت تبدیل z متغیر تصادفی X، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(z)=P_1(z)P_2(z) \qquad (۸۵.۲)$$

اثبات: فرض کنید

$$q_i=P[X_2=i] \quad و \quad p_i=P[X_1=i]$$

بنابراین

$$P(X=n)=P(X_1+X_2=n)=\sum_{n=0}^{n}P(X_1=i)P(X_2=n-i)=\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}$$

در نتیجه

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X+n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}=\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i\sum_{n=i}^{\infty}q_{n-i}z^{n-i}$$

$$=p_1(z)p_2(z)$$

قضیهٔ ۹.۲ اگر تبدیل z یك متغیر تصادفی مانند x برابر با $P(z)$ باشد، تبدیل z متغیر تصادفی bx برابر با $bp(z)$ است. (b عددی ثابت است).

کاربرد تبدیل z در حل معادلات تفاضلی

یکی از مهمترین کاربردهای تبدیل z، حل **معادلات تفاضلی** است، که در آنها توابعی وجود دارند که متغیرهایشان عدد صحیح هستند، برای نمونه

$$(\lambda+\mu)p_n=\mu_{n+1}+\lambda p_{n-1} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

یا

$$f(n+2)-f(n+1)-f(n)=0 \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اولین دستگاه معادلات، توابع مورد نظر p_n و در دومی $f(n)$ هستند. متغیرهای این توابع n است، که فقط مقادیر عدد صحیح را انتخاب می‌کند. (در

دستگاه معادلات اولی λ و μ پارامترهای ثابت هستند).
هدف از حل دستگاه معادلات تفاضلی، پیدا کردن مقادیر تابع به‌ازای متغیرهای مختلف، یعنی ... $p_1, p_2,$ است، به‌طوری که در دستگاه معادلات صدق کند. کاربرد حل معادلات تفاضلی در مثالهای زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۱۹.۲ معادلات تفاضلی زیر را با استفاده از تبدیل z حل کنید:

$$p_{n+1}-(1+a)p_n+ap_{n-1}=0 \quad , \quad n=1, 2, \cdots \qquad (86.2)$$

و

$$p_1-ap_0=0$$

فرض بر این است که p_n معرف تابع احتمال یك متغیر تصادفی است.

حل: تبدیل z توابع p_n را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

ضمناً عبارات معادلهٔ (۸۶.۲) را در z^n ضرب و همه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}z^n-(1+a)\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n+a\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}z^n=0 \qquad (87.2)$$

طبق تعریف مربوط به $P(z)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}z^n=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1}z^{n+1}=\frac{1}{z}[P(z)-p_0-p_1z]$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n=P(z)-p_0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}z^n=z_1\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}z^{n-1}=zP(z)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{n-i}z^n=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i z^i\sum_{n=i}^{\infty} p_{n-i}z^{n-i}=L(z)P(z)$$

پس‌از جایگزینی روابط فوق در رابطهٔ ۷۹.۲ نتیجه می‌شود که

$$P(z)=\frac{\mu p_0(1-z)}{\mu(1-z)-z[\lambda-L(z)]}$$

با استفاده از رابطهٔ فوق مقادیر p_n محاسبه می‌شود.

مسائل

۱. در ظرفی سه توپ، یك توپ سفید، یك توپ سیاه و یك توپ قرمز وجود دارد. یك توپ به‌طور تصادفی از آن برمی‌داریم. آن‌گاه این توپ را مجدداً به‌ظرف برمی‌گردانیم و توپی دیگر را از آن برمی‌داریم. فضای نمونهٔ این آزمایش چیست؟ احتمال اینکه هر دو توپ سفید باشند، چیست؟ احتمال اینکه یك توپ سیاه و یك توپ سفید باشد، چیست؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که توپ برداشته شده از ظرف مجدداً برگردانیده نشود.

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که در ظرف چهار توپ، دو توپ سفید، یك توپ سیاه، و یك توپ قرمز، وجود داشته باشد.

۴. به‌جای استفاده از فضای نمونه، با استفاده از متغیر تصادفی مناسب، مسئلهٔ ۳ را مجدداً حل کنید.

۵. متغیر تصادفی X، فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند، نشان دهید که

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(X>m)$$

۶. در ظرفی n توپ وجود دارد، که با شماره‌های ۱ و ۲ و ... و n مشخص شده‌اند. یك توپ را به‌طور تصادفی انتخاب و پس از یادداشت کردن شمارهٔ آن، به‌ظرف برمی‌گردانیم. این کار را ادامه می‌دهیم، تا اینکه توپی برای دومین بار برداشته شود، که در این‌صورت متوقف می‌شویم. چنانچه X را تعداد دفعات آزمایش فرض کنیم، نشان دهید که $P(k)=P(X=k)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$P(k)=(k-1)!\binom{n}{k-1}\frac{k-1}{n^k}\quad,\quad k=2,3,\dots,n+1$$

آن‌گاه با استفاده از روش و نتیجهٔ مسئلهٔ ۵، تابع توزیع X را تعیین کنید. ضمناً نشان دهید که میانگین X از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E(X)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

۷. شخصی در آزمونی شرکت و یکی از نمرات الف، ب، ج، د و ه را دریافت می‌کند. چنانچه نمرهٔ الف بگیرد، برنده اعلام می‌شود و دیگر در این آزمون شرکت نمی‌کند. چنانچه نمرهٔ او ه باشد هم، حق شرکت مجدد در آزمون را ندارد. درغیر این دوحالت، او در آزمون شرکت می‌کند تا یکی از دو نمرهٔ فوق را دریافت کند. فرض کنید که نتیجهٔ آزمونها مستقل از یکدیگر و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و ه به‌ترتیب P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 باشد. فضای نمونهٔ این مسئله را بنویسید. نشان دهید کـه احتمال توقف شرکت در آزمون به‌علت گرفتن نمرهٔ الف، برابر با نتیجهٔ رابطهٔ زیر است:

$$\frac{P_1}{P_1+P_5}$$

۸. تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه تاس اول ۵ باشد، چقدر است، مشروط بر اینکه بدانیم مجموع دو تاس برابر با ۸ بوده است؟

۹. احتمال اینکه در یك روز K مشتری به سیستمی مـراجعه‌کنند را P_k فـرض می‌کنیم. احتمال اینکه در دو روز جمعاً ۱۵ مشتری به‌این سیستم مراجعه کنند، چقدر است؟ فـرض کنید که تعداد مشتریهایی که در روزهای مختلف مراجعه می‌کنند مستقل از یکدیگر است.

۱۰. با فقط یکی از n کلید موجود، می‌توانیم دری را بازکنیم. در دوحالت زیر، احتمال اینکه در دفعهٔ iام بتوان در را بازکرد، چقدر است؟ میانگین و واریانس تعداد کلیدهای امتحان شده را در هر دو حالت زیر حساب کنید.

الف. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته شوند.

ب. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته نشوند.

۱۱. از ۱۵ عدد توپ موجود، نه عدد آن نو است. دربازی اول سه توپ به‌طورتصادفی انتخاب می‌کنیم. پس‌از بازی، آنها را برگشت می‌دهیم. در بازی دوم سه توپ دیگر را، بازهم به‌طورتصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هرسه توپ نو باشند، چیست؟ (فرض می‌شود که توپهای مصرف شده در بازی اول دیگر نو محسوب نمی‌شوند).

۱۲. در ظرفی ۵ توپ‌سفید و ۷ توپ‌سیاه و درظرف دیگر، سه توپ‌سفید و ۱۲ توپ‌سیاه وجود دارد. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگـر نتیجه شیر باشد، از ظرف شمارهٔ ۱،و اگر خط باشد از ظـرف شمارهٔ ۲، توپی برمی‌داریم. اگر توپی کـه برداشته‌ایم سفید باشد، با چه احتمالی نتیجهٔ پرتاب سکه شیر بوده است؟

۱۳. در مثال ۴.۲، آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند؟ چرا؟

۱۴. شش دانشجوی دانشکدهٔ «الف» و شش دانشجوی دانشکدهٔ «ب»، در یك آزمایشگاه ثبت‌نام کرده‌اند. برای آزمایش، آنها را بـه‌طور تصادفی به دو گـروه تقسیم کرده‌اند. احتمال اینکه درگروه اول nنفردانشجوی دانشکدهٔ «الف» جای‌گرفته باشند، چقدراست؟

۱۵. یك متغیر تصادفی در فاصلهٔ (۱، ۱ −) دارای تـابع چگالی $C(1-X^2)$ است. مقدار C را تعیین کنید. تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه کنید. احتمال اینکه X بین صفر تا ۷۵ر۰ باشد، چقدر است؟

۱۶. متغیرهای تصادفی مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ را درنظربگیرید، که دارای تابع توزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۱ و ۰) هستند. متغیرتصادفی جدید M را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$$M = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نشان دهیدکه تابع توزیع M عبارت خواهد بود از:

$$F_M(x) = x^n, \quad \text{مشروط براینکه} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

تابع چگالی این متغیر تصادفی را به‌دست آورید.

۱۷. متغیری تصادفی، مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را با احتمال مساوی انتخاب می‌کند. با استفاده از تابع مولد گشتاور ایـن متغیر تصادفی، مقدار $E(x)$ و $E(x^2)$ را به دست آورید و نتایج به‌دست آمده را با محاسبهٔ مستقیم این گشتاورها مقایسه کنید.

۱۸. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y را در نظر بگیرید. فرض کنیدکه X دارای توزیع نمایی و Y دارای تابع توزیع دلخواه G باشد. مقدار رابطهٔ زیر را حساب کنید:

$$P(X < Y)$$

۱۹. فرض کنیدکه X معرف تعداد پرتابهای تاس تا آمدن اولین عدد ۶ و Y معرف تعداد پرتابها تا آمدن اولین عدد ۱ باشد. کمیتهای زیر را حساب کنید

$$E(X|Y=3), \quad E(X|Y=1), \quad E(X)$$

۲۰. فرض کنیدکه $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل وهمه دارای تابع توزیع یکسان هستند. از طرف دیگر N نیز متغیر تصادفی است. ثابت‌کنیدکه

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$$

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\operatorname{var}(X) + (E(X))^2 \operatorname{var}(N)$$

۲۱. متغیر تصادفی X را در نظر بگیریدکه دارای تابع پواسون با پارامتر Y است. اگر Y نیز یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر m باشد، در این‌صورت تابع‌توزیع X را به‌دست آورید.

۲۲. چگالی مشترك X و Y عبارت است‌از:

$$f(x,y)=\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y},\quad 0<x<\infty,\quad 0<y<\infty$$

مقدار $E(X|Y=y)$ را به‌دست آورید.

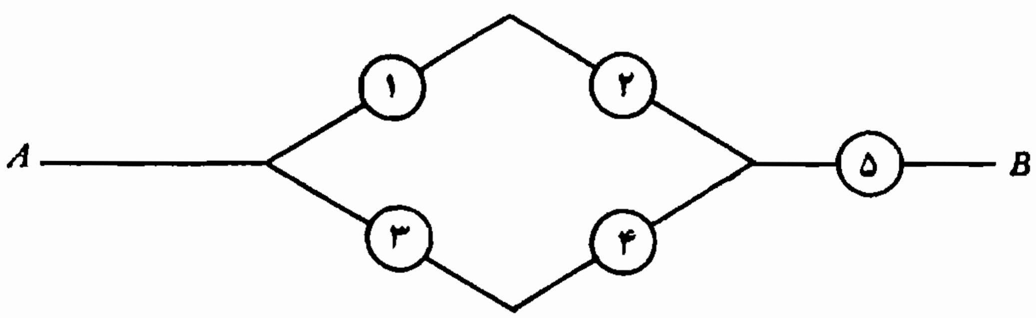
۴۲. اگر X یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، $E(X|X>1)$ را محاسبه کنید.

۴۳. در دو کفه ترازو، دو وزنه می‌گذاریم، کـه هر کدام از آنها متغیری تصادفی است، اولی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و واریانس ۱ و دومی دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (۵۰، ۰) است. احتمال اینکه وزنهٔ اولی سنگین‌تر باشد، چقدر است؟

۴۵. احتمال اینکه در یك تیراندازی تیر به‌هدف بخورد برابر بـا $(3000\,D^{-2})$ است، که در آن D فاصلهٔ تیرانداز تـا هدف فرض می‌شود. چنانچه هدف متحرك و فـاصلهٔ آن نیز متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت از فاصلهٔ ۱۰۰ تا ۲۰۰ باشد، در این‌صورت‌احتمال برخورد تیر به هدف را به‌دست آورید.

۴۶. در یك ظرف ۶ توپ سفید و ۴ توپ سیاه وجود دارد. عدد n را به‌طور تصادفی از بین اعداد (۶,۵,۴,۳,۲,۱) انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه n عدد توپ از ظرف برمی‌داریم. احتمال اینکه همهٔ توپها سفید باشد، چیست؟

۴۷. یك مدار بـرقی در شکل نشان داده شده است. در طول یك آزمایش، جزء شمارهٔ i $(i=1,2,\dots,5)$ به‌احتمال P_i ازکار می‌افتد وعبور جریان ازآن امکان‌ندارد. احتمال اینکه در انتهای آزمایش جریان از A به B عبور کند، چقدر است؟



۴۸. در کارخانه‌ای یك نمونهٔ سه‌تایی از کالایی برای بازرسی انتخاب شده است. اگـر در این کارخانه ۵ خط تولید مشابه وجود داشته باشد، احتمال اینکه این کالاها ازخطوط مختلف انتخاب‌شده باشد، چقدر است؟ (یا به‌عبارت دیگر احتمال اینکه دو عدد یا بیشتر از کالا روی یك خط تولید شده باشد، چقدر است؟

۴۹. در مورد هر تبدیل z به‌شرح زیر، تابع f_n مربوطه را تعیین‌کنید. (f_n لزوماً تابع احتمال نیست)

الف. $$P(z)=\frac{10}{1-z}$$

ب. $$P(z)=\frac{8}{1-5z}$$

ج. $$P(z)=\frac{8z}{(1-5z)^2}$$

د. $$P(z)=3e^z$$

۳۰. تابع f_n مربوط به‌تبدیل z به‌شرح زیر را تعیین کنید.

$$P(z)=\frac{1+12z}{1-z+6z^2}$$

راهنمایی: $P(z)$ را به‌مجموع دو کسر تبدیل کنید که مخرج آنها درجه یك و صورت آنها فاقد متغیر z باشد.

۳۱. معادلهٔ تفاضلی زیر را حل کنید.

$$p_{n+2}-5p_{n+1}+6p_n=0$$

که $p_0=0$ و $p_1=1$ است.

۳

توزیع نمایی[1] و فرایند پواسون

در نظریهٔ صف، **توزیع نمایی، فرایند پواسون و توزیع ارلانگی** نقش اساسی دارند. مدلهایی که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ویا مدت خدمت‌دهی آنها متغیری تصادفی با توزیع نمایی است، ساده‌ترین حالتها محسوب می‌شوند. در بسیاری از موارد نیز متغیرهای تصادفی فوق را می‌توان، با تقریب کافی، دارای توزیع نمایی فرض کرد. ضمناً خواهیم دیدکه توزیع نمایی و فرایند پواسون با یکدیگر رابطهٔ نزدیك دارند و در واقع به یك پدیدهٔ واحد از دو دید مختلف می‌نگرند.

در فصول بعد، مدلهای صفی را که براساس فرایند پواسون ساخته شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهیم

۱.۳ توزیع نمایی

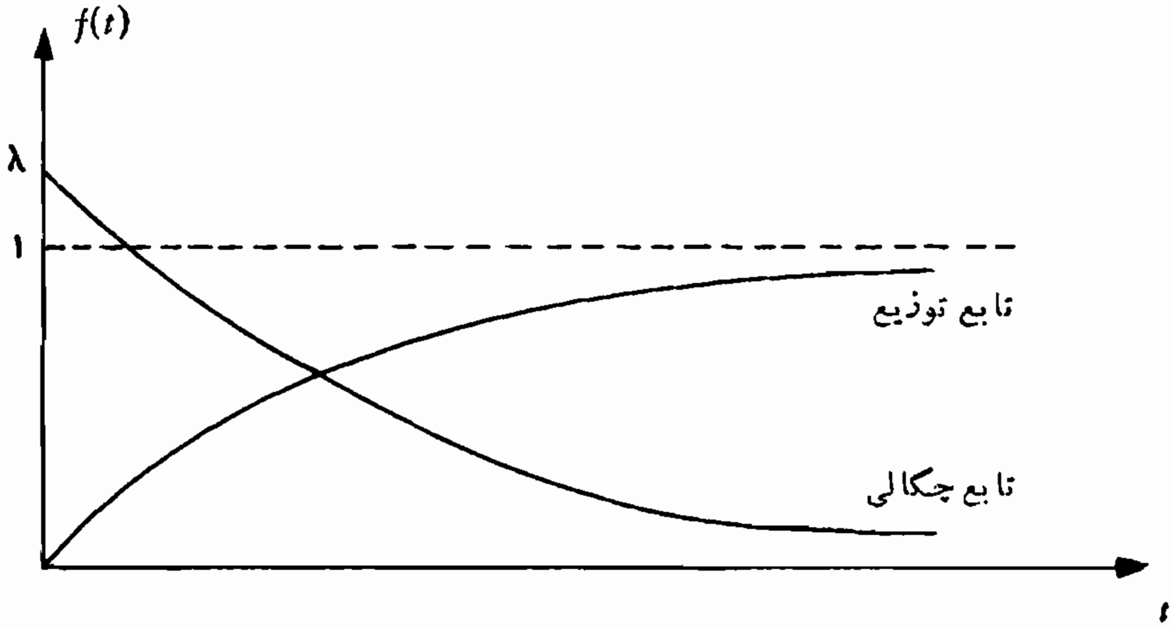
تعریف. متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی است. اگر، به‌ازای تمام مقادیر $x \geqslant 0$. تابع چگالی آن به‌شکل زیر باشد (λ پارامتر مدل نامیده می‌شود).

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (۱.۳)$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را (به‌ازای $x \geqslant 0$) به‌شرح زیر محاسبه می‌کنند.

---

۱. در بعضی از کتب و مقالات به‌این متغیر تصادفی، نمایی منفی هم می‌گویند.



شکل ۱۰۳ تابع چگالی و تابع توزیع نمایی

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{0}^{x} f(y)\,dy=1-e^{-\lambda x} \qquad (۲.۳)$$

به‌همین ترتیب،

$$P(X>x)=e^{-\lambda x} \qquad (۳.۳)$$

محاسبهٔ میانگین و واریانس توزیع نمایی

میانگین این متغیر تصادفی به‌شرح زیر محاسبه‌می‌شود:

$$E(X)=\int_{0}^{\infty}(x)(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{1}{\lambda} \qquad (۴.۳)$$

واریانس را می‌توان از تابع مولّد گشتاور به‌دست آورد، که عبارت است‌از:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{0}^{\infty}(e^{tx})\,(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}\ ,\ (t<\lambda \text{ با فرض}) \qquad (۵.۳)$$

با مشتقگیری از این‌تابع، می‌توان گشتاورهای مختلف و از جمله $E(X^2)$ را حساب کرد.

$$E(X^2)=\frac{d^2M(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\bigg|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2} \qquad (۶.۳)$$

و

$$\operatorname{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (۷.۳)$$

(میانگین این متغیر تصادفی را نیز می‌توان با مشتقگیری از تابع مولد گشتاور به دست آورد، که همان $1/\lambda$ حاصل می‌شود).

۲.۳ خواص توزیع نمایی

الف. خاصیت بدون حافظه بودن

مهمترین خاصیت توزیع نمایی این‌است که گذشتهٔ آن نقشی درآینده‌اش ندارد. فرض کنید که زمان وقوع یک اتفاق، متغیری تصادفی با توزیع نمایی باشد. اگر تا لحظهٔ معینی، مثلا s، این اتفاق نیفتاده باشد، می‌توان از این مدت زمان صرف‌نظر کرد و مبدأ زمان را به این لحظه (لحظهٔ s به‌جای صفر) انتقال داد.

مثلا، اگر خراب شدن ماشینی دارای توزیع نمایی باشد و پس‌از مدتی، مثلا سه سال، ماشین مزبور هنوز خراب نشده باشد، خاصیت بدون حافظه بودن آن حکم می‌کند که سه سال گذشته را باید فراموش کرد و زمان حال را مبنای محاسبات در نظر گرفت. بدین ترتیب، احتمال خراب شدن این ماشین کهنه با احتمال خراب شدن ماشین نو معادل آن یکسان است. برای بیان این موضوع به‌زبان ریاضی، فرض کنید که X، متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای تمام مقادیر X و s رابطهٔ زیر صادق است

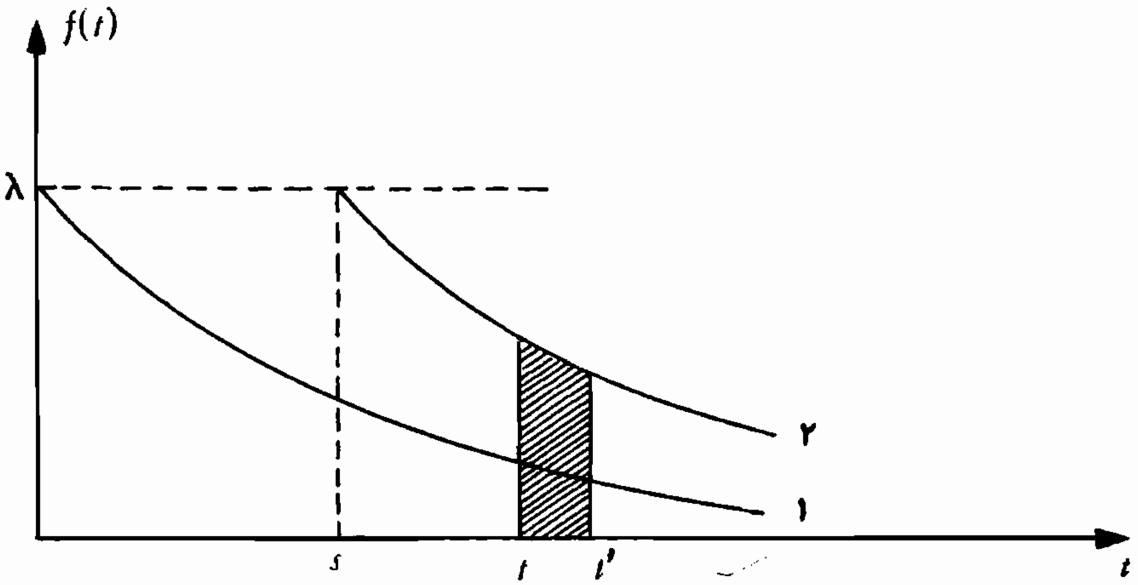
$$P[X>s+x|X>s]=P[X>x] \qquad (۸.۳)$$

هر دو طرف رابطهٔ فوق، احتمال خراب‌نشدن ماشین را، حداقل تا لحظهٔ X (نسبت‌به‌زمان فعلی) نشان می‌دهند. طرف سمت راست، مربوط به ماشین نو است، درحالی‌که عبارت سمت چپ به‌ماشینی مربوط است که تا این لحظه عمری به‌اندازهٔ s داشته است. برای اثبات رابطهٔ ۸.۳، از خاصیت احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی

$$P(X>s+x|X>s)=\frac{P(X>s+x,\ X>s)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{P(X>s+x)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda x}=P(X>x)$$

این پدیده را می‌توان با کمک منحنیهای شکل ۲.۳ نیز نشان داد. فرض کنید که منحنی شمارهٔ ۱ نشاندهندهٔ تابع چگالی متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است. می‌خواهیم حساب کنیم با چه‌احتمالی ماشین درفاصلهٔ t تا t' خراب می‌شود. اگر درلحظهٔ صفر باشیم، این‌احتمال برابر بامساحت زیرمنحنی درهمین فاصله است. اما اگر درلحظهٔ s باشیم وماشین‌هنوز خراب‌نشده باشد، این احتمال برابر با مساحت زیرمنحنی شمارهٔ (۲) درهمین‌فاصله‌است، زیرا به‌علت‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مبدأ زمان به‌لحظهٔ



شکل ۲۰۳ خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی

s انتقال می‌یابد. به‌طوری‌که مشاهده می‌شود، در این حالت مقدار احتمال بیشتر از حالت قبلی است.

مثال ۱۰۳ فرض کنید که مدت مکالمات تلفنی، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۵ دقیقه است. شخصی به‌یك تلفن عمومی مراجعه و مشاهده می‌کند که شخص دیگری در حال مکالمه است، اما معلوم نیست که مکالمه‌اش از چه زمانی شروع شده‌است؟ احتمال اینکه این شخص مجبور شود بیش‌از یك ساعت منتظر آزاد شدن تلفن بماند، چقدر است؟

حل: چون متغیر تصادفی نمایی بدون حافظه است، می‌توان فرض کرد که مکالمه از همان لحظه آغاز شده است. از طرف دیگر، چون میانگین مکالمه ۵ دقیقه است، پارامتر λ برابر با $\boxed{۱/۵}$ خواهد بود. اگر مدت زمان مکالمهٔ تلفن‌کننده را X فرض کنیم،

$$P(X>۶۰)=e^{-۶۰(۱/۵)}=e^{-۱۲}$$

$\frac{1}{5}$

قضیهٔ ۱۰۳ تنها متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه، نمایی است

اثبات: متغیر تصادفی X، که بدون حافظه است، را درنظربگیرید. طبق این‌خاصیت، رابطهٔ (۸۰۳) به‌ازای تمام مقادیر X و s برقراراست. از طرفی، براساس احتمال شرطی، داریم.

$$P(X>t+s|X>s)=\frac{P(X>t+s,\ X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} \qquad (۹۰۳)$$

بااستفاده از رابطه‌های (۸۰۳) و (۹۰۳)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P(X>t+s)=P(X>s)P(X>t) \qquad (۱۰۰۳)$$

نسبت به s مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{ds}P(X>t+s)=P(X>t)\frac{d}{ds}P(X>s) \qquad (۱۱.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به‌این موضوع که تابع چگالی مشتق تابع توزیع است، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{ds}P(X>s)=\frac{d}{ds}[1-P(X\leqslant s)]=-\frac{d}{ds}P(X\leqslant s)=-f(s) \qquad (۱۲.۳)$$

که $f(s)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌ازای مقدار s است. از رابطه‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) نتیجه‌گیری می‌شود که

$$\frac{d}{ds}P(X>s+t)=-f(s)P(X>t)$$

ابتدا طرفین را بـر $P(X>t)$ تقسیم می‌کنیم. از طرفی، چون نتایج فوق به‌ازای تمام مقادیر s صادق است، آن‌را به‌طور دلخواه مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dP(X>t)}{P(X>t)}=-f(0)ds \qquad (۱۳.۳)$$

از طرفین انتگرال معین (از صفر تا t) گرفته می‌شود، که حاصل آن عبارت است‌از:

$$L_n[P(X>t)]=-f(0)\cdot t$$

یا

$$P(X>t)=e^{-f(0)t} \qquad (۱۴.۳)$$

رابطهٔ (۱۴.۳) نشان می‌دهد که X دارای توزیع نمایی با پارامتر $f(0)$ است.

در نظریهٔ صف، استفاده از خاصیت بدون حافظه بودن، محاسبات را بسیار آسانتر می‌کند، زیرا می‌توان با صرف‌نظر کردن از اتفاقات گذشته، هر زمانی را بـه عنوان مبدأ محاسبات در نظر گرفت. اگـر زمان بین دو ورود متوالی مشتریها، دارای توزیع نمایی باشد، اطلاع از زمان ورود مشتریهای قبلی ضرورتی ندارد.

مثال ۲.۳ فرض کنید که مدت زمانی‌کـه یك مشتری در داخل سیستم می‌گذراند، متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴۰ دقیقه باشد. احتمال اینکه یك مشتری حداقل یك ساعت در سیستم باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه یك مشتری حـداقل یك ساعت در سیستم باشد، درحالی که می‌دانیم تـا این لحظه حداقل نیم‌ساعت را در سیستم گذرانده، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X را مدت‌زمان توقف مشتری درسیستم فرض می‌کنیم. می‌دانیم

که میانگین توقف مشتری ۴۰ دقیقه (یا دو سوم ساعت) است. بنابراین، $\lambda = ۱/۵$
به‌این ترتیب، جواب اولین سؤال عبارت است از:

$$P(X > ۱) = e^{-\lambda} = e^{-۱/۵}$$

اما در مورد دومین سؤال، با درنظر گرفتن خاصیت بدون حافظه بودن این متغیر تصادفی،

$$P(X > ۱ | X > ۰/۵) = P(X > ۰/۵) = e^{-(۱/۵)(۰/۵)} = e^{-۰/۷۵}$$

ب. حداقل چندمتغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی، یک‌متغیر تصادفی با توزیع نمایی‌است

برای تشریح این خاصیت، سیستم‌صفی را با n خدمت‌دهنده درنظر بگیرید. فرض کنیددر زمانی که یک‌مشتری جدید واردسیستم می‌شود، همهٔ خدمت‌دهندگان مشغول‌هستند. درضمن، صفی هم تشکیل نشده است. در این‌صورت، مدت زمانی‌که مشتری باید در صف منتظر بماند، عبارت‌است‌از فاصلهٔ زمانی ورود او تا لحظه‌ای‌که حداقل یکی‌از خدمت‌دهندگان آزاد می‌شود. به عبارت دیگر، مدت انتظار او، که البته متغیر تصادفی است، حداقل چند متغیر تصادفی دیگر (مدت خدمت‌دهی خدمت‌دهندگان) است. می‌خواهیم نشان دهیم‌که اگر این متغیرهای تصادفی دارای توزیع نمایی باشند، حداقل آنها نیز دارای توزیع نمایی خواهد بود. پارامتر این توزیع نمایی نیز، مجموع پارامترهای متغیرهای تصادفی تشکیل‌دهندهٔ آن است.

به‌بیان ریاضی، اگر $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی و پارامترهای $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ و همچنین $X = \min\{X_۱, X_۲, \dots, X_n\}$ باشد،

$$P(X > x) = P(\min\{X_۱, X_۲, \dots, X_n\} > x)$$

از طرف دیگر، اگر حداقل چند متغیر تصادفی، از عددی مانند X کوچکتر نباشد، بدیهی است‌که هرکدام از این متغیرهای تصادفی نیز از این عدد‌کوچکتر نخواهد بود. بنابراین،

$$P(\min\{X_۱, X_۲, \dots, X_n\} > x) = P(X_۱ > x, X_۲ > x, \dots, X_n > x)$$

و چون فرض شده است‌که متغیرهای تصادفی موردبحث مستقل‌اند،

$$P(X > x) = P(X_۱ > x)P(X_۲ > x) \dots P(X_n > x) = e^{-(\lambda_۱ + \lambda_۲ + \dots + \lambda_n)x}$$

این خاصیت را می‌توان در مورد الگوی ورود مشتریان نیز در نظر گرفت. فرض کنیدکه سیستم دارای n نوع مشتری و زمان بین دو ورود متوالی هر نوع مشتری نیز متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. در این‌صورت، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها (صرف‌نظر از نوع مشتری)، برابر با حداقل زمانهای بین دو ورود مشتریهای مختلف

خواهد بود، که طبق خاصیت فوق،متغیر تصادفی با توزیع نمایی است.

مثال ۳.۳ سیستم صفی را در نظر بگیرید که دو خدمت دهنده داشته باشد. مدت زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. میانگین خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اولی را ۱۰ دقیقه و توسط دومی را ۱۵ دقیقه فرض می‌کنیم. یك مشتری جدید وارد سیستم می‌شود. در زمان ورود او هردو خدمت‌دهنده مشغول بوده‌اند و درصف نیزمشتری دیگری وجود ندارد. چنانچه در لحظهٔ ورود این مشتری جدید، ۱۲ دقیقه از زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ شمارهٔ ۱ و ۸ دقیقه ازخدمت شمارهٔ ۲ گذشته‌باشد، به‌سؤالات زیر جواب دهید؟

الف. احتمال اینکه مشتری‌جدید حداکثر ۳ دقیقه درصف منتظر بماند، چقدراست؟

ب. میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صف را حساب کنید.

حل: براساس میانگین مدت زمان خدمت، پارامترهای متغیر تصادفی نمایی برای خدمت‌دهندهٔ اول برابر با ۱۰/۱ و برای دومی برابر با ۱۵/۱ خواهد بود. با استفاده از خاصیت الف، (بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی)؛ می‌توانیم‌فرض‌کنیم که خدمت‌دهندگان از لحظهٔ ورود مشتری‌جدیدکار خود را شروع کرده‌اند. بنابراین، مبدأ زمان‌را همین‌لحظه در نظر می‌گیریم. اما، مدت زمانی که مشتری جدید درصف صرف می‌کند، متغیر تصادفی X برابر با حداقل مدت زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندگان ۱ و ۲ است. لذا، متغیر تصادفی X، طبق خاصیت ب، دارای توزیع نمایی با پارامتر مجموع پارامترها، یعنی ۶/۱ است. پس،

$$P(X \leqslant ۳) = ۱ - e^{-(۱/۶)(۳)} = ۱ - e^{-۰٫۵}$$

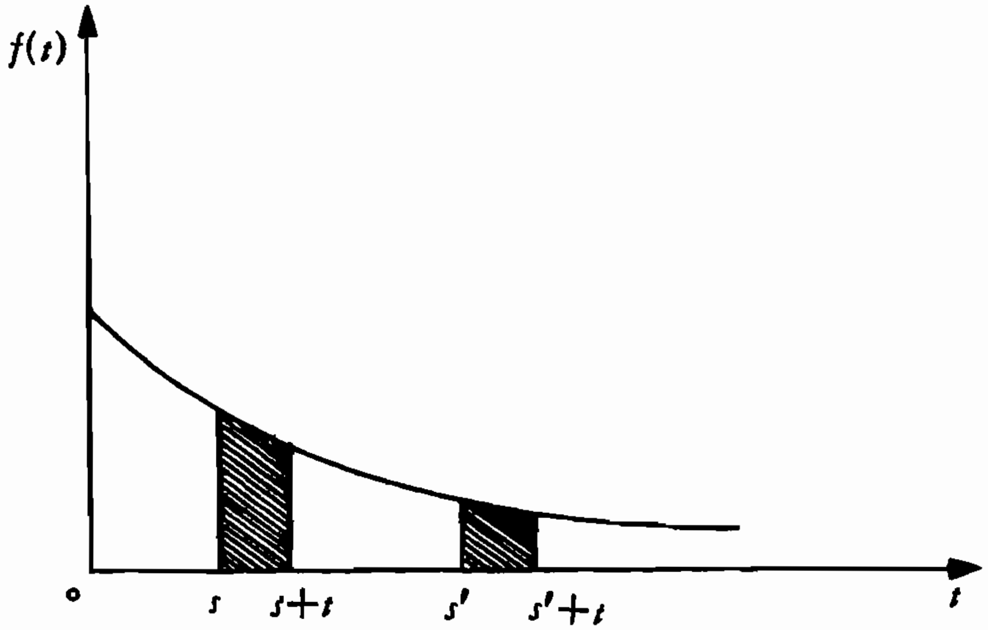
$$E(X) = \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱}{\lambda_۱ + \lambda_۲} = ۶ \quad \text{دقیقه}$$

بنابراین، مشتری باید ۶ دقیقه در صف منتظر بماند، درحالی که اگر در سیستم فقط خدمت‌دهندهٔ اول‌کار می‌کرد، می‌بایست ۱۰ دقیقه صبر می‌کرد. (و اگر فقط خدمت‌دهندهٔ دوم کار می‌کرد، به ۱۵ دقیقه وقت نیاز بود).

ج. نزولی بودن تابع چگالی

این خاصیت از روی منحنی به وضوح مشخص است. برای روشن شدن این خاصیت، دو زمان s و s' را در نظر بگیرید (که $s < s'$). احتمال وقوع یك پیشامد، در فاصلهٔ $(s, s+t)$ از احتمال وقوع همان‌پیشامد در فاصلهٔ $(s', s'+t)$ بیشتر است (در هر دو حالت t یکسان فرض می‌شود). این موضوع در شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

مثال عددی زیر به‌روشن شدن موضوع کمك می‌کند. محاسبات، مربوط به‌توزیع نمایی با میانگین یك است



شکل ۳.۳ نزولی بودن تابع چگالی متغیر تصادفی نمایی

$$P\left(\circ \leqslant X \leqslant \frac{۱}{۲}\right) = \circ/۳۹۳$$

$$P\left(\frac{۱}{۲} \leqslant X \leqslant ۱\right) = \circ/۲۳۸$$

$$P\left(۱ \leqslant X \leqslant \frac{۳}{۲}\right) = \circ/۱۴۵$$

$$P\left(\frac{۳}{۲} \leqslant X \leqslant ۲\right) = \circ/\circ۸۸$$

$$P(۲ \leqslant X \leqslant ۲/۵) = \circ/\circ۵۳$$

براساس محاسبات فوق، یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی مقادیر کوچك را با احتمال زیاد و مقادیر بزرگتر را با احتمال کمتر انتخاب می‌کند. در این مثال، احتمال انتخاب مقادیر کوچکتر از مقدار میانگین، بیش‌از ۰٫۶۳۱ است، درحالی‌که احتمال انتخاب‌مقادیر بیش‌از آن کمتر از ۰٫۳۶۹ خواهد بود.

از این خاصیت بدین ترتیب استفاده می‌کنند که درصورتی می‌توان گفت که مدت خدمت‌دهی دارای توزیع نمایی است که احتمال طولانی بودن مدت خدمت کم باشد و درعوض بیشتر خدمتها درمدتی کوتاه (در مقایسه با میانگین) بداتمام برسد. بداین‌ترتیب، اگر در سیستمی، مدت خدمت‌دهی ثابت و یا تقریباً ثابت باشد، نمی‌توان گفت که خدمت‌دهی با توزیع نمایی انجام می‌شود.

یکی دیگر از مواردی که می‌توان مدت خدمت‌دهی را، طبق این خاصیت، متغیری

تصادفی با توزیع نمایی دانست، به شرح زیراست:

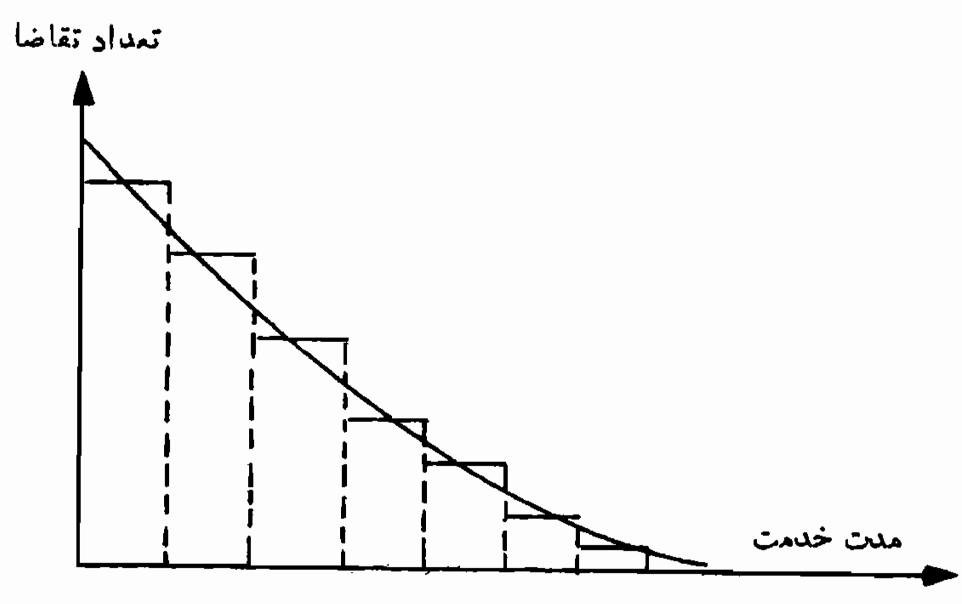
سیستمی را در نظر بگیرید که دارای انواع مختلف مشتری (مثلا n نوع) باشد. با مراجعه به‌شکل ۴.۳، فرض کنید که تعداد مشتریهای نوع ۱ زیاد ولی مدت خدمت‌دهی به آنان کوتاه (وتقریباً ثابت)، تعداد مشتریهای نوع ۲ تا حدی کمتر ولی مدت‌خدمت‌دهی به آنان بیشتر، و همین‌طور تا مشتریان نوع nام که تعدادشان خیلی کم و مدت‌ارائهٔ‌خدمت به آنان طولانی است. دراین‌صورت، منحنی حاصل معرف مقدار تقاضا ومدت خدمت‌دهی خواهد بود، که با تقریب کافی، نشاندهندهٔ متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. مثلا، بیمارستانی را در نظر بگیرید. معمولا، تقاضا برای خدمات کوتاه مدت مانند تزریقات و پانسمان زیاد، ولی برای خدمات طولانی مانند جراحی توأم با بستری شدن کمتر است.

یك مكالمهٔ تلفنی را در نظر بگیرید. درصدی بالا از مکالمات کوتاه و درصدکمی‌از آنها طولانی هستند. درنتیجه، رابطهٔ بین تعداد و مدت خدمت معمولا با الگوی شکل ۴.۳ تطابق دارد و لذا می‌توان گفت که مدت زمان مکالمه، متغیر تصادفی نمایی است.

۵. در توزیع نمایی، احتمال وقوع پیشامد در زمان کوتاه Δt تقریباً برابر با $\lambda\Delta t$ است

یعنی چنانچه تا لحظهٔ مشخصی پیشامد مورد نظر به‌وقوع نپیوسته باشد، احتمال اتفاق افتادن آن در فاصلهٔ کوتاه Δt متناسب با λ است. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(X\leqslant x+\Delta t\,|\,X>x)}{\Delta t}=\lambda \qquad (۱۵.۳)$$



شکل ۴.۳ حالتی که انواع مختلف مشتری با زمانهای مختلف خدمت‌دهی وجود دارد

این خاصیت را به‌شرح زیر می‌توان اثبات کرد.

$$P(X \leqslant x+\Delta t | X > x) = P(X \leqslant \Delta t) = ۱ - e^{-\lambda \Delta t}$$

$$= ۱ - \left[۱ - \lambda t + \frac{(\lambda t)^{۲}}{۲!} - \frac{(\lambda t)^{۳}}{۳!} + \cdots \right] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

(در عبارت فوق، ابتدا از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی و سپس از بسط e^x استفاده شده است). منظور از $o(x)$ مجموعهٔ توابعی است که به‌ازای xهای کوچك، یك بینهایت کوچك درجه دوم به‌بالا هستند. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta x \rightarrow ۰} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = ۰ \qquad (۱۶.۳)$$

به‌عنوان نمونه، تابع $x^{۲}$ از نوع $\Delta(x)$ است، درحالی‌که تابع x شامل این مجموعه نمی‌شود.

براساس خاصیت «د»، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در فرایند پواسون احتمال اینکه در یك فاصلهٔ کوتاه زمانی Δt، همزمان دو پیشامد اتفاق بیفتد، بینهایت کوچك درجه دوم است. بنابراین، هیچ‌گاه دو پیشامد همزمان به‌وقوع نمی‌پیوندد.

ورود کاملا تصادفی

با توجه به‌قضیهٔ فوق، ورود پواسون را گاهی **ورود کاملا تصادفی** هم می‌گویند، زیرا احتمال ورود یك مشتری در فاصلهٔ کوتاه Δt مستقل از زمان گذشته است و فقط بستگی به‌مدت Δt و λ دارد.

۳.۳ فرایند شمارشی

این‌فرایند معرف تعداد پیشامدهایی است که تا لحظهٔ معینی‌اتفاق افتاده‌است. درحالت کلی، چنانچه $\{N(t), t \geqslant ۰\}$ معرف یك‌فرایندشمارشی باشد، به‌ازای $t \geqslant ۰$، $N(t)$ نشاندهندهٔ تعداد پیشامدهایی است که از لحظهٔ صفر تا t صورت گرفته است. نمونه‌های فرایندهای شمارشی عبارت‌اند از:

- تعداد حوادث رانندگی که در یك شهر و در مدتی معین اتفاق می‌افتد.
- تعداد بچه‌هایی که در مدت معینی در یك بیمارستان متولد می‌شوند.
- تعداد مشتریانی که تا لحظهٔ t وارد یك‌سیستم صف‌شده و یا از آن خارج‌شده‌اند.

براساس این تعریف، $N(t)$ فقط می‌تواند اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب کند. ضمناً فرایند شمارشی تابعی افزاینده (برحسب t) است، یعنی به‌ازای $t < t'$ داریم:

$$N(t) \leqslant N(t')$$

از طرف دیگر، تعداد پیشامدهایی که بین t و t' اتفاق می‌افتد، برابر با $N(t') - N(t)$ خواهد بود. ضمناً فرض می‌کنیم که $N(0) = 0$، یعنی شمارش پیشامدها از لحظهٔ صفر شروع شود.

در یك فرایند شمارشی، ممکن است خاصیت رشد مستقل وجود داشته باشد. معنای این خاصیت این است که تعداد پیشامدهایی که در یك فاصلهٔ زمانی معین رخ می‌دهد (یا به‌عبارت دیگر، مقدار رشد $N(t)$ در این فاصله)، مستقل از تعداد پیشامدهایی است که در یك فاصلهٔ زمانی دیگر اتفاق می‌افتد (به‌فرض اینکه این دو فاصلهٔ زمانی غیرمشترك باشند). مثلا، در یك سیستم صف، خاصیت رشد مستقل در الگوی ورود مشتری آن بدین معناست که تعداد مشتریهایی که فرضاً بین ساعت ۹ تا ۱۰ وارد می‌شوند، ارتباطی با تعداد مشتریهایی که قبلا، مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد شده‌اند، ندارد.

خاصیت دیگری که در یك فرایند شمارشی می‌تواند وجود داشته باشد، خاصیت رشد ثابت است. معنای این خاصیت آن است که تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی معینی پیش می‌آید، مستقل از زمان وقوع آنهاست و فقط بستگی به طول مدت آن دارد. مثلا، اگر خاصیت رشد ثابت در الگوی ورود مشتری به یك سیستم صف صدق کند، تعداد مشتریهایی که مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد می‌شوند، با تعداد مشتریانی که در هر ساعت دیگر، مثلا ۱۱ تا ۱۲ وارد می‌شوند، تابع توزیع یکسانی دارد. اما، اگر در یك سیستم، ورود مشتریها در زمانهای مختلف متفاوت باشد، دیگرخاصیت رشد ثابت صدق نمی‌کند. مثلا در یك جایگاه فروش بنزین، میانگین تعداد مشتریهای مراجعه‌کننده (اتومبیلها) از ساعت ۸ تا ۹ خیلی بیشتر از میانگین تعداد مشتریهایی است که بین ساعات ۲۲ تا ۲۳ مراجعه کنند.

۴.۳ فرایند پواسون

فرایند پواسون حالت خاصی از فرایند شمارشی محسوب می‌شود.

تعریف. فرایند شمارشی $\{N(t), t \geqslant 0\}$ را فرایند پواسون با پارامتر λ می‌نامند، اگر تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی t، مثلا از زمان s تا زمان $s+t$ اتفاق می‌افتد، طبق توزیع پواسون و (به‌ازای تمام مقادیر s و t)، به‌شرح زیر باشد

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (۱۷.۳)$$

ضمناً فرض می‌کنیم که خاصیت رشد مستقل نیز وجود داشته باشد.

براساس تعریف فوق، خاصیت رشد ثابت نیز مسلماً وجود خواهد داشت، زیرا رابطهٔ فوق به‌ازای تمام مقادیر s و t صادق است. درنتیجه:

$$P[N(s+t)-N(s)=n]=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (۱۸.۳)$$

در اینجا لازم است که بـه تفاوت فرایند پواسون و توزیع پواسون نیز اشاره شود. در توزیع پواسون تنها پارامتر λ مطرح است. درحالی‌که درفرایند پواسون علاوه‌براین پارامتر، با زمان (t) نیز سروکار داریم. اگر در توزیع پواسون به‌جای پارامتر λ، λt را قرار دهیم، فرایند پواسون به‌دست می‌آیـد. از طرف دیگر، بـه‌ازای مقدار ثابتی از t، مقدار λt نیز ثابت خواهد بود و فرایند پواسون به‌توزیع پواسون تبدیل می‌شود.

میانگین و واریانس در فرایند پواسون

اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد،

$$E[N(t)]=\sum_{i=0}^{\infty} nP(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\lambda t \qquad (۱۹.۳)$$

(در محاسبهٔ فـوق از بسط سـری e^x استفاده شده است). همان‌طور کـه مشاهده می‌شود، میانگین تعداد پیشامدها بستگی مستقیم بـه زمان دارد. در واقع، λ معرف میانگین تعداد پیشامدها درواحدزمان است. برای محاسبهٔ واریانس، ابتدا $E[N^۲(t)]$ را حساب‌می‌کنیم.

$$E[N^۲(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} n^۲e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=(\lambda t)^۲+\lambda t \qquad (۲۰.۳)$$

درنتیجه

$$\mathrm{var}\,[N(t)]=\{E[N(t)]\}^۲-E[N^۲(t)]=(\lambda t)^۲-(\lambda t)^۲+\lambda t=\lambda t \quad (۲۱.۳)$$

لازم به‌یادآوری است که می‌توان میانگین و واریانس را با استفاده از تابع مولدگشتاور به‌دست آورد. تابع مولدگشتاور فرایند پواسون عبارت است از:

$$M_{N(t)}(s)=e^{-\lambda t(e^s-۱)}$$

۵.۳ رابطهٔ بین فرایند پواسون و توزیع نمایی

فرض‌کنید که تعداد پیشامدها طبق فرایند پواسون باشد. اگـر اولین پیشامد در زمان $s_۱$، دومی در $s_۲$ و بالاخره nامین پیشامد در زمان s_n صورت گیرد و زمانهای بین دو پیشامد را به‌ترتیب $T_n, \dots, T_۲, T_۱$ بنامیم، یعنی $T_۱=S_۱$ و $T_۲=S_۲-S_۱$ و $T_n=s_n-s_{n-۱}$ باشد. در این‌صورت می‌توان ثابت کرد که $T_n, \dots, T_۲, T_۱$ متغیرهای تصادفـی مستقل بـا توزیع نمایی هستند. پارامتر این متغیرهـای تصادفی همان پارامتر فرایند پـواسون

خواهد بود. اثبات ریاضی این موضوع به‌شرح زیر است.

ابتدا نشان خواهیم داد که T_1 دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است، زیرا

$$P(T_1>x)=P(X \text{ روی ندادن هیچ پیشامدی تا زمان })=P[N(x)=0]=e^{-\lambda x}$$

در مرحلهٔ بعد، بااستفاده از روابط زیر، نمایی بودن T_2 اثبات می‌شود.

$$P(T_2>x|T_1=s)=P(s+x \text{ تا } s \text{ روی‌ندادن هیچ پیشامد درفاصلهٔ زمانی }|T_1=s)$$
$$=P(s+x \text{ تا } s \text{ روی‌ندادن هیچ پیشامدی درفاصلهٔ زمانی })=e^{-\lambda x}$$

(در رابطهٔفوق، تساوی دوم از خاصیت رشدثابت ناشی می‌شود). به‌همین‌ترتیب، می‌توان همین خاصیت را برای T_3 و T_4 و ... نشان داد.

بنابراین، می‌توان گفت کـه فرایند پواسون و توزیع نمایی دو روی یك سکه‌اند. فرایند پواسون تعداد پیشامدهـا را مشخص‌مـی‌کند و توزیع نمایی فاصلهٔ بین دو پیشامد متوالی را نشان می‌دهد. مثلا، دریك سیستم‌صف، اگر ورود مشتریها طبق فرایند پواسون باشد، می‌تـوان گفت زمـان بین دو ورود متوالی مشتریها براساس توزیع نمایی است. عکس این موضوع نیز صادق است.

مثال ۴۰۳ مشتریهای یك‌بانك براساس فرایندپواسون مراجعه می‌کنند.درهر ساعت، به‌طورمتوسط ۱۰ نفر مشتری وارد می‌شوند.پس‌از باز شدن بانك درصبح، احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول کسی مراجعه نکند، چقدراست؟ احتمال اینکه بین ورود هفتمین وهشتمین مشتری وقفه‌ای حداقل برابر یك ساعت پیش بیاید، چقدر است؟

حل: پارامتر فرایند پواسون عبارت است از $\lambda=10$. طبق بحث فوق، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع نمایی با پارامتر پواسون (۱۰) است. بنابراین،

$$P(T_1>0/25)=e^{-(10)(0/25)}=e^{-2/5}$$
$$P(T_8>1)=e^{-10}$$

(در رابطه‌هـای فوق، T_1 معرف زمان ورود اولین مشتری و T_8 معرف زمـان بین ورود هفتمین و هشتمین مشتری است و ضمناً ۱۵ دقیقه به ۰٫۲۵ ساعت تبدیل شده است).

ارتباط بین فرایند پواسون و توزیع نمایی را به‌صورت ساده‌تر نیز می‌توان نشان داد. اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون باشد، در هـر لحظه طبق خاصیت رشد مستقل، پیشامدهای‌ازآن‌لحظه به‌بعد را می‌توان مستقل از گذشته فرض‌کرد. به‌عبارت‌دیگر، مبدأ زمان را می‌توان همین لحظه در نظرگرفت. بدین ترتیب، زمان پیشامد بعدی،متغیری تصادفی است که فاقد حافظه است. ضمناً میانگین تعداد پیشامدها از این لحظه تا t برابر با λt است، که با خاصیت «د» توزیع نمایی تطبیق‌می‌کند. بنابراین، زمان بین دوپیشامد متوالی هم متغیری تصادفی با توزیع نمایی است.

۶.۳ خواص فرایند پواسون

قضیهٔ ۲.۳ اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ فرایندهای پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند، در این‌صورت فرایند $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ نیز فرایند پواسون، با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ خواهد بود.

اثبات: می خواهیم ثابت کنیم که $P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$. برای نشان‌دادن این موضوع از تابع مولد گشتاور استفاده می کنیم. می‌دانیم که

$$M_{N(t)}(s)=M_{N_1(t)}(s)\cdot M_{N_2(t)}(s) \tag{۲۲.۳}$$

اما تابع تولیدگشتاور این فرایند، همان‌طور که قبلا گفته شد. عبارت‌است از:

$$M_{N(t)}(s)=\{e^{-\lambda_1 t(e^s-1)}\}\{e^{-\lambda_2 t(e^s-1)}\}=e^{-\lambda t(e^s-1)}$$

که تابع مولدگشتاور فرایند پواسون با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ است.

از این قضیه می‌توان نتیجه‌گیری کرد که اگر سیستمی دارای n نوع مشتری باشد، و هر نوع مشتری، مستقل از سایر مشتریها و براساس فرایند پواسون وارد سیستم شود، ورود کل مشتریها نیز مجموعاً براساس فرایند پواسون خواهد بود. این موضوع قبلا در هنگام بحث دربارهٔ توزیع نمایی (خاصیت ب) نیز مطرح‌شد (ارتباط بین این‌دوموضوع را به‌صورت تمرین نشان دهید).

قضیهٔ ۳.۳ سیستمی‌را درنظر بگیرید که ورودمشتریها به آن براساس فرایندپواسون، $N(t)$ و دارای پارامتر λ است. مشتریها از دو نوع ۱ و ۲ هستند. هر مشتری با احتمال P از نوع ۱ و با احتمال $1-P$ از نوع ۲ است. اگر تعداد مشتریهای نوع ۱ که وارد سیستم می‌شوند را با $N_1(t)$ و نوع ۲ را با $N_2(t)$ نشان دهیم، $N_1(t)$ و $N_2(t)$ نیز به‌صورت فرایند پواسون و مستقل از یکدیگر خواهند بود. پارامتر فرایند اولی λP و دومی $\lambda(1-P)$ است.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$P[N_1(t)=n]=e^{-(\lambda P)t}\frac{(\lambda Pt)^n}{n!} \tag{۲۳.۳}$$

برای محاسبهٔ این احتمال، پیشامد مورد نظر را مشروط به تعداد کل مشتریهای وارد شده می‌کنیم.

$$P[N_1(t)=n]=\sum_m P[N_1(t)=n|N(t)=m]P[N(t)=m] \tag{۲۴.۳}$$

اما، احتمال اینکه تا زمان t کلا n مشتری از نوع ۱ وارد شده باشد، درحالی‌که جمعاً m مشتری وارد سیستم شده است، براساس توزیع دوجمله‌ای است.

$$P[N_1(t)=n|N(t)=m]=\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}$$

بنابراین

$$P[N_1(t)=n]=\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

$$=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(1-P)^{m-n}}{(m-n)!}(\lambda t)^{m-n}$$

سری فوق بسط سری از نوع e^x است. پس

$$P[N_1(t)=n]=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}e^{\lambda t(1-P)}=e^{-\lambda Pt}\frac{(\lambda Pt)^n}{n!}$$

مثال ۵.۳ مثال شماره ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر هر مشتری با احتمال ۰٫۸ مرد باشد، به‌سؤالات زیر پاسخ دهید.

احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول باز شدن بانك در صبح، هیچ مردی مراجعه نکند، چقدر است؟

احتمال اینکه بین ورود دهمین زن‌و یازدهمین زن بیش از یك ساعت فاصله بیفتد، چقدر است؟

حل: طبق قضیهٔ فوق، ورود مشتریان مرد و همچنین ورود مشتریان زن طبق فرایند پواسون است. میانگین تعداد مشتریان مردی که در یك ساعت مراجعه می‌کنند، برابر با ۸ = (۰٫۸)(۱۰) و میانگین تعداد مشتری‌زن برابر با ۲ = (۰٫۲)(۱۰) است. بنابراین اگر T_i و T'_i به‌ترتیب معرف زمانهای بین دو ورود مشتریهای مرد و زن باشد،

$$P(T_1>0.25)=e^{-(8)(0.25)}=e^{-2}$$

$$P(T'_{11}>1)=e^{-(2)(1)}=e^{-2}$$

مثال ۶.۳ مثال شمارهٔ ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. میانگین زمان ورود مشتری دهم چقدر است؟

حل: چون

$$S_{10}=T_1+T_2+\cdots+T_{10}$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که T_iها دارای توزیع نمایی و مستقل هستند، لذا

$$E(S_{10})=10E(T_1)=10(0.1)=1$$

قضیهٔ ۴۰۳ فرایند شمارشی $\{N(t), t \geqslant 0\}$، با مشخصات زیر، یك فرایند پواسون با پارامتر λ است

الف. $N(0)=0$

ب. دارای خاصیتهای رشد مستقل باشد (یعنی تعداد پیشامدهـا در فواصل زمانی مجزا، مستقل از یکدیگر باشد)

ج. احتمال وقوع یك پیشامد در فاصلهٔ کوتاه s متناسب بـا این فاصله باشد، یعنی $P[N(s)=1]=\lambda s+o(s)$

د. احتمال وقوع بیش از یك پیشامد در فاصلهٔ کوتـاه s وجود نداشته باشد، یعنی $P[N(s)\geqslant 2]=o(s)$ (همان‌طورکه قبلا گفتیم، منظور از $o(x)$ تابعی بینهایت‌کوچك از درجهٔ ۲ است، یعنی

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$$

اثبات: برای سهولت محاسبات از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$P_n(t)=P[N(t)=n] \tag{۲۵.۳}$$

بدین‌ترتیب، $P_n(t)$ معرف احتمال وقوع n پیشامد تا لحظهٔ t است. برای اینکه نشان‌دهیم فرایند مورد نظر پواسون است، باید ثابت‌کنیم‌که

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

برای این منظور از معادلات دیفرانسیل به‌شرح زیر استفاده می‌کنیم. ابتدا $P_n(t)$ را بـا بهره‌گیری از خاصیت امید شرطی محاسبه می‌کنیم:

$$P_n(t+s)=P[N(t+s)=n]=\sum_{m=0}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]$$
$$P[N(t)=m]$$

رابطهٔ فوق را می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}P_n(t+s)=&\sum_{m=0}^{n-2}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]P_{n-1}(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n]P_n(t)\\&+\sum_{m=n+1}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\end{aligned}$$

اما طبق فرضهای ب و ج رابطه‌های زیر را داریم. اگر $m \leqslant n-2$ باشد،

$$P[N(t+s)=n|N(t)=m]=P[s\ \text{وقوع بیش از یک پیشامد درمدت زمان}]=o(s)$$

و همچنین

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]$$
$$=P[s\ \text{وقوع دقیقاً یک پیشامد در مدت زمان}]=\lambda s+o(s)$$

و

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n]=P[s\ \text{وقوع هیچ پیشامد در فاصلهٔ زمانی}]$$
$$=1-P[s\ \text{وقوع یک پیشامد یا بیشتر در فاصلهٔ زمانی}]=1-\lambda s+o(s)$$

با جایگزینی عبارات فوق و در نظر گرفتن اینکه مجموع چند تابع $o(s)$ نیز تابعی به‌شکل $o(s)$ خواهد بود، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{P_n(t+s)-P_n(t)}{s}=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t)+\frac{o(s)}{s}$$

حال، موقعی که s به‌سمت صفر میل می‌کند و با در نظر گرفتن مفهوم مشتق تابع، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$P'_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t) \quad , \quad n=0, 1, 2, \dots \qquad (۲۶.۳)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۵.۳)، ابتدا $P_0(t)$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌گاه نتیجه را برای محاسبهٔ $P_1(t)$ به‌کار می‌گیریم. این‌کار را ادامه می‌دهیم تا جواب سایر معادلات نیز به دست آید. بنابراین

$$P'_0(t)=-\lambda P_0(t)$$

درنتیجه

$$P_0(t)=Ke^{-\lambda t}$$

از شرط اولیه $P_0(0)=1$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \qquad (۲۷.۳)$$

که معرف فرایند پواسون است. در حالت کلی به‌ازای $n=1, 2, \dots$، رابطهٔ (۲۵.۳) را می‌توان به‌شکل زیرهم نشان داد.

$$e^{\lambda t}[P'_n(t)+\lambda P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

در نتیجه،

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \qquad (۲۸.۳)$$

اکنون، با استفاده از روش استقرا می‌توان قضیه‌را ثابت کرد. یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای $(n-1)$، فرایند موردبحث پواسون است، پس،

$$P_{n-1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۲۹.۳)$$

حال، می‌توان از روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) نتیجه گرفت که

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۳۰.۳)$$

یا

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}+C$$

از شرط اولیه $P_n(0)=0$ استفاده می‌کنیم. $C=0$ به‌دست می‌آید وقضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۵.۳ (تابع توزیع زمـان ورود مشتری، مشروط بر اینکه تعـداد مشتریهای وارد شده معلوم باشد).

فرض کنید که ورود مشتریها براساس فرایند پواسون است. اگر بدانیم که درفاصلهٔ $(0, t)$ دقیقاً یك مشتری وارد شده است (ولـی نمی‌دانیم کـه در چه‌لحظه‌ای وارد شده است)، تابع توزیع ورود او براساس متغیر تصادفی یکنواخت (درهمین فاصله) خواهد بود.

اثبات: اگر T معرف زمان ورود این مشتری باشد.

$$P[T\leqslant x|N(t)=1]=\frac{P[T\leqslant x, N(t)=1]}{P[N(t)=1]} \qquad (۳۱.۳)$$

$=P($وارد نشدن هیچ مشتری در فاصلهٔ زمانی x تا t، و وارد شدن یك مشتری در فاصلهٔ زمانی ۰ تا $x)$

$$=\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)}=\frac{x}{t}$$

قضیهٔ فوق را می‌تـوان تعمیم داد. اگر بدانیم تـا لحظهٔ مشخصی دقیقاً n نفر وارد سیستم شده‌اند، می‌توان فرض کرد کـه هر مشتری طبق توزیع یکنواخت وارد شده است و ورود مشتریهای مختلف مستقل از یکدیگر است.

مثال ۷.۳ تعداد مشتریهایی که به‌یك سیستم صف مراجعه می‌کنند، به‌صورت توزیع

...ون با میانگین ۵ر۰ مشتری درساعت است. اگر درسه ساعت اول دومشتری مراجعه ... باشند، احتمال اینکه هر دو مشتری در ساعت اول آمده باشند، چقدر است؟

حل: طبق قضیهٔ ۵.۳، هر کدام از این دو مشتری، بـراساس توزیع یکنواخت، در ... سه‌ساعت مراجعه‌کرده‌اند. بنابراین، احتمال ورود هر مشتری درساعت اول یک‌سوم ... احتمال ورود هر دو مشتری در ساعت اول یک‌نهم است.

۷.۳ تابع توزیع ارلانگی

... اهمیت نقش **تابع توزیع ارلانگی** (یاگاما) در سیستمهای صف، در ایـن بخش ... و بررسی‌خواص آن می‌پردازیم.

در فصول بعدی خواهیم دیدکه ساده‌ترین مدلهای صف آنهایی هستندکـه براساس ... تصادفی نمایی ساخته شده‌اند. خاصیت بدون حافظه بودن ایـن متغیر تصادفی، حل ... نمایی را بسیار آسان می‌سازد. بنابراین، بدیهی است که حتی‌الامکان سعی‌می‌شود ... صف درچارچوب مدلهای نمایی فورموله شوند. با وجود این، مسلماً همهٔ آنها را ... توان در این قالب جا داد. متغیرهای تصادفی، نظیر مدت زمان خدمت و یا زمان بین ... ورود مشتریها در سیستمهای صف، از توابع توزیع متنوعی پیروی می‌کنند.

تابع توزیع ارلانگی، اگرچه ازنظر سادگی محاسباتی درحد توزیع نمایی‌نیست، ... مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به‌متغیر تصادفی نمایی نزدیکتر است و در مواردی‌با ... آن به متغیرهـای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بدون حافظه بودن ... استفاده می‌کند. مزیت عمدهٔ آن نسبت به‌توزیع نمایی این است‌کـه در عمل پدیده‌هـای ... تصادفی بسیاری را می‌توان برحسب آن بیان‌کرد.

تعریف. متغیر تصادفی x را، که دارای تابع چگالی به شرح زیـر باشد، ارلانگی ... نامند.

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} \quad , \quad x\geqslant 0 \qquad (۳۲.۴)$$

λ و r پارامترهای ارلانگی و هردو مقادیر مثبتی هستند. علاوه براین، r همیشه عددصحیح است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این‌متغیر تصادفی دارای حالت خاص توزیع گاماست، ... در آن پارامتر r فقط اعداد صحیح را انتخاب می‌کند. (در توزیع گاما، r، هرعـدد مثبتی را می‌تواند انتخاب کند؛ بنابراین، چون به‌ازای rهای غیر عدد صحیح $(r-1)!$ بی‌معناست، به‌جای آن $\Gamma(r)$ به‌کارگرفته می‌شود. در حالت‌های خاص، که r عددصحیح باشد، مفهوم هردو عبارت یکسان است.

میانگین متغیر تصادفی ارلانگی برابر با r/λ و واریانس آن برابر با r/λ^2 وتابع مولدگشتاور آن $(\lambda/(\lambda-t))^r$ است.

قضیهٔ ۶.۳ مجموع n متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامترهای λ، یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای (λ و n) است.

اثبات: متغیرهای تصادفی مستقل نمایی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ پارامترهای آنها و Y مجموع آنها باشد، همان‌طور کـه قبلا گفته شد تابع مولد گشتاور Y برابر بـا حاصل‌ضرب تـوابع تولید گشتاور $X_1, X_2, \dots, X_n$ است. یعنی

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

از طرف دیگر، می‌دانیم کـه تابع مولد گشتاور X_i برابر $\lambda/\lambda-t$ است. بنابراین، تابع مولد گشتاور Y برابر بـا $(\lambda/\lambda-t)^n$ خواهد بود، که می‌دانیم این تابع مولد گشتاور مربوط به‌یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای λ و n است.

میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را از قضیهٔ فوق نیز می‌توان به دست آورد. ازآنجاکه یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای λ و n معادل مجموع n متغیر تصادفی مستقل نمایی بـا پارامتر λ است، میانگین و واریانس آنهم n برابر میانگین و واریانس یك‌متغیر تصادفی نمایی است. از این‌راه نیز می‌توان میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را محاسبه کرد، که با نتایج قبلی تطبیق می‌کند.

قضیهٔ ۷.۳ اگـر ورود مشتریها براساس فرایند پواسون باشد، زمان ورود مشتری nام، یعنی s_n، متغیری تصادفی با توزیع ارلانگی و باپارامترهای λ و n است.

اثبات: می‌دانیم که s_n، زمان ورود مشتری nام، برابر با مجموع فواصل زمانی بین ورودهای متوالی n مشتری است، یعنی

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

که T_i زمان بین ورود مشتری $(i-1)$ ام و مشتری iام است. چون T_iها مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر λ هستند، لذا طبق قضیهٔ (۶.۳) متغیر تصادفی s_n نیز دارای‌تابع توزیع ارلانگی خواهد بود.

اثر تغییرات پارامتر r

همان‌طورکه گفتیم، متغیر تصادفی ارلانگی با دو پارامتر λ و r مشخص می‌شود. از طرف دیگر، این متغیر تصادفی را می‌توان مجموع r متغیر تصادفی نمایی بـا پارامتر λ فرض کرد. حال مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی را در نظر بگیرید که میانگین آنها مقدار ثابت K (یعنی $r/\lambda = K$) باشد. در این‌صورت، با تغییر r، پارامتر λ نیزمتناسب با آن تغییر می‌کند. به‌عنوان نمونه، اگر r دو برابر شود، λ نیز باید دو برابر گردد تا مقدار K ثابت بماند. بـه‌عبارت دیگر، در چنین حالتی تعداد متغیرهـای نمایی دو برابر

می‌شود، اما میانگین هر کدام از آنها به‌نصف تقلیل می‌یابد. به‌این‌ترتیب، میانگین ارلانگی ثابت می‌ماند.

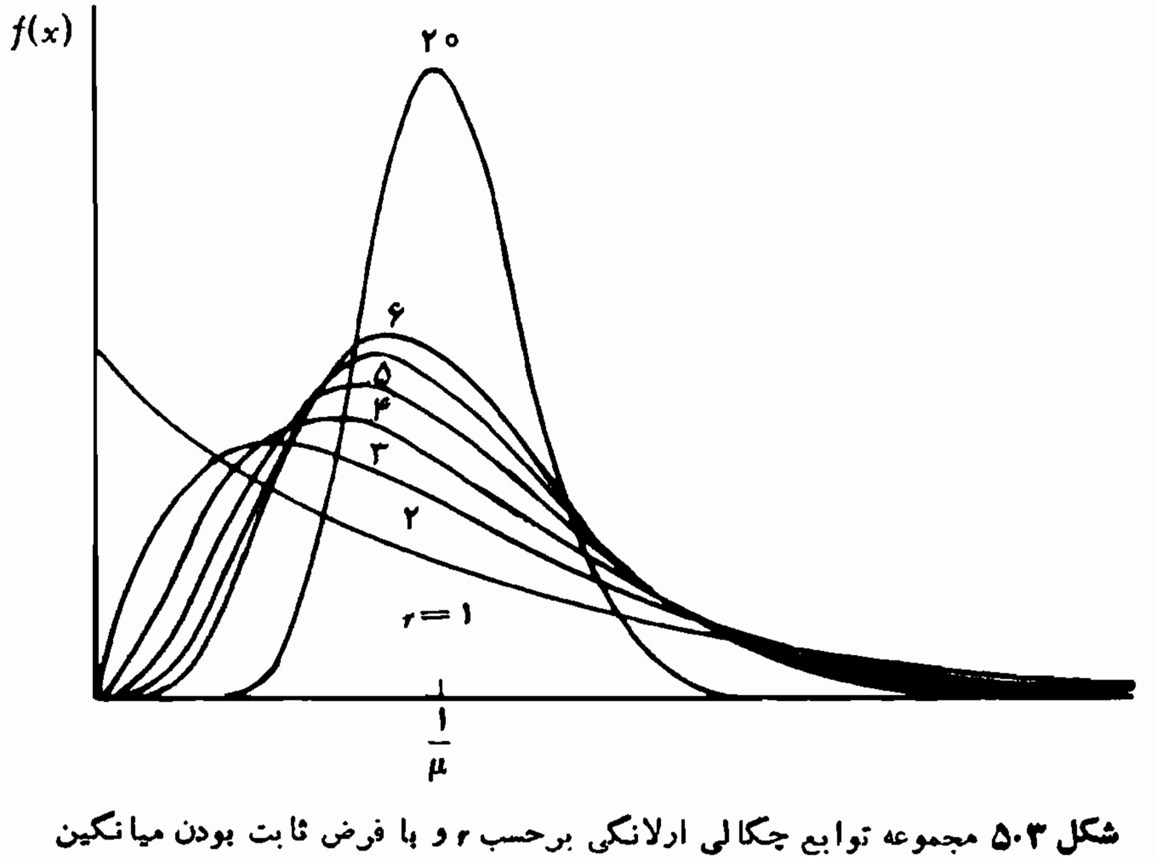
با توجه به مراتب فوق، اثر تغییرات r را برای مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی با میانگین ثابت K بررسی می‌کنیم. درحالتهای خاص، که $r=1$ است، توزیع ارلانگی به‌نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر r توابعی مختلف به‌دست می‌آید،که درشکل ۵.۳ نشان داده شده است. ضمناً طبق قضیه حد مرکزی در احتمالات، موقعی‌که r افزایش یابد، تابع چگالی (۳۰.۳) به‌سمت تابع چگالی نرمال میل می‌کند.

چنانچه $r=\infty$ اختیارشود، تابع توزیع فوق دیگر ماهیت تصادفی نخواهدداشت و فقط مقداری ثابت، برابر با K، اختیار خواهد کرد. این موضوع را می‌توان با استفاده از رابطهٔ کلی میانگین و واریانس توزیع ارلانگی نشان داد، زیرا در حالت کلی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\operatorname{var}(X)=\frac{r}{\lambda^{2}}=\frac{[E(X)]^{2}}{r} \qquad (۳۳.۳)$$

حال، اگر مقدار میانگین ثابت و برابر با K باشد و $r\to\infty$، واریانس نیز به‌صفر میل می‌کند. می‌دانیم که اگر واریانس یك متغیر تصادفی برابر با صفر باشد، آن متغیر ثابت و قطعی است.

با توجه به‌شکل ۵.۳، مشاهده می‌شود که مجموعهٔ توابع ارلانگی بسیار متنوع‌هستند



شکل ۵.۳ مجموعه توابع چگالی ارلانگی برحسب r و با فرض ثابت بودن میانگین

و می‌توان داده‌های آماری بسیاری‌از متغیرهای تصادفی را با یکی از توابع این‌مجموعه منطبق ساخت. فرض‌کنید‌که داده‌های آماری یك متغیر تصادفی، مثلا مدت زمـان ارائهٔ خدمت دریك سیستم‌صف دراختیار باشد. از روی این‌داده‌ها می‌توان میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را تخمین زد. بـا توجه به‌متنوع بـودن توزیع ارلانگی، امکان زیادی وجود دارد کـه داده‌های مورد نظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگی، همین خاصیت تنوع آن است‌که بسیاری از متغیرهای تصادفی واقعی را می‌توان در قالب آن جای داد.

معمولا در جـریان حل مسائلی کـه در آن با متغیر تصادفی ارلانگی سروکار داشته باشیم، با حل انتگرالهای بسیار پیچیده و مفصل برخورد می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ‌زیر، درمواردی می‌توان محاسبات را ساده‌تر کرد.

قضیهٔ ۸.۳ تابع توزیع ارلانگی بـا پارامترهای λ و r را از رابطهٔ زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \qquad (۳۴.۳)$$

اثبات: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt$$

$$=1-\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق، از تغییر متغیری به‌شکل $y=t-x$ استفاده می‌کنیم.

$$F(x)=1-\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda(y+x)}\frac{(y+x)^{r-1}}{(r-1)!}dy \qquad (۳۵.۳)$$

بااستفاده از بسط دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(y+x)^{r-1}=\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}x^k y^{r-1-k} \qquad (۳۶.۳)$$

بنابراین، رابطهٔ (۳۲.۳) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda y}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x^k y^{r-1-k}}{(r-1-k)!k!} \qquad (۳۷.۳)$$

یا

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!(r-1-k)!}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{r-k-1}dy \qquad (۳۸.۲)$$

انتگرال فوق برابر با $(r-1-k)!$ است؛ زیرا، طبق خاصیت تابع گاما رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Gamma(\alpha)=\int e^{-u}u^{\alpha-1}du=(\alpha-1)! \qquad (۳۹.۲)$$

(در عبارت فوق $u=\lambda y$ است). به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۸.۳ یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه است. یك مشتری در صف منتظر و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به‌مشتری دیگری است. احتمال اینکه مشتری موردنظر در صف، بیش‌ازیك ساعت دیگر در سیستم بماند، چقدر است؟

حل: مدت زمان انتظار این مشتری در سیستم از دو قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول، زمان انتظار او در صف، که برابر با مدت زمان دریافت خدمت مشتری دیگر است و آن‌را با X_1 نشان می‌دهیم. قسمت دوم مدت زمانی است که خود او خدمت دریافت می‌کند و با X_2 بیان می‌شود؛ بنابراین، اگر مدت زمان ماندن این مشتری در سیستم را با Y نشان دهیم، $Y=X_1+X_2$ خواهد بود. از طرفی چون X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی نمایی هستند، Y یك متغیر تصادفی ارلانگی است. میانگین خدمت توسط یك خدمت‌دهنده ۳ مشتری در ساعت یعنی $\mu=3$ است. لذا Y دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای $(2, 3)$ است. هدف مسئله، محاسبهٔ $P(Y>1)$ است. طبق قضیهٔ (۸.۳) خواهیم داشت.

$$P(Y>1)=e^{-\mu}\sum_{k=0}^{1}\frac{(\mu)^k}{k!}=e^{-\mu}\left[\frac{(\mu)^0}{0!}+\frac{\mu}{1!}\right]=4e^{-3}$$

مسائل

۱. مدت تعمیر ماشینی براساس توزیع نمایی و میانگین یك و نیم ساعت است. احتمال اینکه تعمیر این ماشین بیش‌از ۱۲ ساعت طول بکشد چقدر است؟ احتمال اینکه تعمیر ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد، درحالی‌که می‌دانیم تا این لحظه ۱۱ ساعت طول کشیده، چقدر است؟

۲. در یك آزمایش‌که ۴ ساعت به‌طول می‌انجامد، از لامپی استفاده می‌شود که عمر آن متغیری تصادفی با میانگین ۵ ساعت است. احتمال اینکه قبل‌از پایان آزمایش، این‌لامپ بسوزد را در چهار حالت زیر حساب‌کنید:

الف. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، نو است.
ب. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، قبلا ۵ ساعت کارکرده است.
ج. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ نو، است.
د. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ قبلا ۵ ساعت کارکرده است.

۳. تعداد تصادفات یك جاده بر اساس فرایند پواسون است. فرض می‌شود که به‌طورمتوسط هر دو ساعت یك بار یك تصادف اتفاق می‌افتد. احتمال اینکه بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ حداقل سه تصادف اتفاق بیفتد، چقدر است؟ احتمال اینکه در ۲۴ ساعت تصادفی نباشد، چقدر است؟

۴. در تعمیرگاهی، دو ماشین الف و ب در حال تعمیر هستند. مدت زمان تعمیر هر دو ماشین، نمایی و دارای میانگین، به‌ترتیب ۲ ساعت و ۳ ساعت است. احتمال اینکه ماشین «ب» زودتر تعمیر شود، چقدر است؟

۵. دو نوع جزوهٔ درسی برای تکثیر به‌چاپخانه فرستاده می‌شود. نوع الف که تعدادنسخهٔ معدودی از آن لازم است. و نوع ب که تعداد زیادی نسخه از آن گرفته می‌شود. تعداد جزوه‌هایی که به‌چاپخانه می‌رسد، براساس فرایندپواسون با میانگین ۱۶ عدد از نوع الف و ۱۰ عدد از نوع ب در هر ساعت است. اگر الان ساعت ۱۰:۳۸ باشد و بدانیم که آخرین جزوهٔ نوع الف در ساعت ۱۰:۲۵ و آخرین جزوهٔ نوع ب در ساعت ۱۰:۱۸ به‌چاپخانه رسیده است،
الف. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ سه جزوه به‌چاپخانه برسد، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ دوجزوهٔ نوع الف و یك‌جزوهٔ نوع ب برسد، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه اولین جزوه‌ای که به‌چاپخانه می‌رسد از نوع الف باشد، چقدر است؟
د. آیا در فاصلهٔ بین آمدن دو جزوهٔ فوق (یعنی در ساعتهای ۱۰:۱۸ و ۱۰:۲۵) ممکن است سه جزوهٔ دیگرهم به‌چاپخانه رسیده باشد؟ احتمال آن چقدر است؟
ه. اگرتا ساعت ۹ تعداد ۱۲ جزوه ازنوع الف رسیده باشد، میانگین کل تعدادجزوه‌های رسیده به‌چاپخانه تا ساعت ۹ چقدر است؟ (فرض می‌کنیم وقت شروع‌کارسیستم ساعت ۷ بوده است).

۶. از جاده‌ای که عرض آن تقریباً معادل یك اتومبیل است، اتومبیلها طبق فرایند پواسون (با میانگین سه اتومبیل در هر دقیقه)، عبور می‌کنند. شخصی بدون توجه به‌اتومبیلها، عرض جاده را در ۱۰ ثانیه طی می‌کند. احتمال اینکه سالم از جاده بگذرد، چقدر است؟

۷. مسئلهٔ ۶ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض‌کنید که مدت عبور این شخص متغیر تصادفی

با توزیع نمایی ومیانگین ۱۰ ثانیه است. احتمال اینکه این شخص سالم از جاده بگذرد، چیست؟

۸. کامیونی دارای ۱۰ چرخ، دو چرخ روی محـور جلو و هشت چرخ روی محور عقب است. فرض کنید مسافتی که طی می‌شود تا یکی از لاستیکها پنچر شود متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط لاستیك جلو کامیون ۱۰ هزار کیلومتر و لاستیك عقب ۸۰۰۰ کیلومتر را بدون پنچر شدن طی می‌کند.
الف. احتمال اینکه پس‌از طی m کیلومتر، هیچ‌کدام از لاستیکها پنچر نشود، چقدراست؟
ب. اگـر اولین لاستیك در کیلومتر Y پنچر شود، تـابع توزیع Y و همچنین $E(Y)$ را به‌دست آورید.
ج. تابع توزیع تعداد لاستیکهای پنچر شده تا کیلومتر ۵۰ هزار را محاسبه کنید.

۹. یك کارگاه تولیدی دارای سه ماشین صنعتی است. مسئول هر ماشین پس‌از مدتی کار، جهت تنظیم مجدد و کنترل قطعات تولید شده، مدتی هم آن‌را خاموش می‌کند. مدت‌زمان روشن‌بودن وهمچنین خاموشی ماشینها، متغیرهای تصادفی نمایی و مستقل هستند. میانگین مدت زمان روشن بودن ماشین اول را ۳۰ دقیقه و مدت زمان روشن بودن ماشینهای دوم و سوم را هرکـدام ۲۰ دقیقه، میانگین مدت زمـان خاموشی ماشین اول را ۱۵ دقیقه و مدت زمان خاموشی ماشینهای دوم و سوم را هرکدام ۱۰ دقیقه فرض می‌کنیم. یك لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید و فرض کنید که ۳ دقیقه از روشن شدن ماشین اول، ۸ دقیقه از روشن شدن ماشین دوم و ۱۳ دقیقه از روشن شدن ماشین سوم گذشته است و هر سه‌ماشین هنوز روشن هستند.
الف. احتمال‌اینکه ماشین شمارهٔ ۱ بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ موردنظرخاموش شود، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه یکی از ماشینها زودتـر از همه، بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس از لحظهٔ مورد نظر خاموش شود، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یك زودتر از همه خاموش شود، چقدر است؟
د. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یك زودتر از همه خاموش شود و این خاموشی بین ۸ تـا ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ مورد نظر اتفاق بیفتد، چقدر است؟

۱۰. مثال ۳.۳ (سیستم صف و دو خدمت‌دهنده) را مجدداً در نظر بگیرید. احتمال اینکه مشتری جدیدی بعد از هـر دو مشتری از سیستم خـارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید، قبل‌از یکی‌از دو مشتری قدیمی از سیستم خارج شود، چقدراست؟ احتمال اینکه مشتری جدید قبل‌از مشتری شمارهٔ ۱ خارج شود، چقدر است؟

۱۱. کارخانه‌ای که دارای ۲ ماشین مشابه تزریق پلاستیك است، درصدد بستن قراردادی برای تولید انبوه قطعه‌ای پلاستیکی است. مدت قرارداد طوری است کـه فقط دو هزار

ساعت وقت برای تولید در اختیار است. هر ماشین تا موقعی که خراب نشده می‌تواند ۱۰ عدد قطعهٔ موردنظر را درساعت تولیدکند، ولی چنانچه ماشین خراب شود، بادرنظر گرفتن زمان لازم برای تعمیرات، دیگر نمی‌توان از آن ماشین برای این تولید بخصوص استفاده کرد. مدت زمانی کـه ماشین بدون خراب شدن می‌تواند کار کند، طبق برآورد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین هزار ساعت است.

الف. احتمـال اینکه بتوان ۴۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولیدکرد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه بتوان حداقل ۲۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولیدکرد، چقدر است؟

ج. به سؤال بند ب مجدداً پاسخ‌دهید، مشروط براینکه محدودیت هزار ساعت وقت وجود نداشته باشد.

۱۲. ماشینی که دارای ۵ موتور مشابه مستقل است، درصورتی کار می‌کندکـه حداقل سه موتور آن سالم باشد. اگر فرض کنیم که احتمال خراب شدن هـر موتور دارای توزیع نمایی است، تابع چگالی کارکرد این ماشین را به‌دست آورید.

۱۳. دستگاهی دارای سه نوع لامپ مخصوص است‌کـه آنها را A و B و C می‌نامیم. عمر هر سه لامپ نمایی و میانگین آنها به ترتیب ۲۰۰ و ۴۰۰ و ۳۰۰ ساعت است. هر لامپ‌که بسوزد، بلافاصله با یك لامپ نو، از نوع خودش، تعویض می‌شود.

الف. احتمال اینکه اولین لامپ نوع A بین ۶۰۰ تا ۱۲۰۰ ساعت کارکند، چیست؟

ب. احتمال اینکه اولین لامپ نوع A قبل‌از اولین لامپ نوع B بسوزد، چیست؟ احتمال اینکه اولین لامپی که می‌سوزد از نوع A باشد، چیست؟

ج. احتمال اینکه تعداد لامپهایی که در ۱۲۰۰ ساعت اول می‌سوزد بیش‌از سه عدد باشد، چیست؟ (مجموع هر سه نوع)

د. احتمال‌اینکه‌بعدازسوختن‌دومین‌لامپ نوع A، اولین‌لامپ‌نوع B هنوز سالم باشد، چیست؟

۱۴. یك کارگاه مبلسازی را در نظر بگیرید کـه مراجعهٔ مشتریها بـه‌آن بر اساس فرایند پواسون است. در این کارگاه، فقط یك‌گروه سازندهٔ مبل وجود دارد.

الف. در کـدام یك از دو حالت زیر می‌توان ایـن کارگاه را یك سیستم صف از نـوع $M/M/1$ فرض‌کرد؟ چرا؟

حالت ۱. کارگاه سفارش انواع مختلف مبل و میز و صندلی را قبول می‌کند

حالت ۲. کارگاه تولید فقط یك نوع میز مشخص را به‌صورت سریسازی قبول می‌کند

ب. فرض‌کنید مشتریهایی کـه مراجعه می‌کنند بـر دو نوع‌اند، یعنی به‌احتمال ۷۰ درصد مشتری جدید و به احتمال ۳۰ درصد مشتری قدیمی هستند. احتمال اینکه در هفتهٔ اول دو مشتری جدید و یك مشتری قدیمی مراجعه کنند، چقدر است؟ احتمال اینکه بعداز هشتمین مشتری جدید، یك مشتری قدیمی مراجعه‌کند، چقدر است؟

ج. اگر در طول سال دقیقاً ۲۶ مشتری مراجعه‌کرده باشند، احتمال اینکه در هفتهٔ دوم یك مشتری مراجعه‌کرده باشد، چقدر است؟

احتمال اینکه در هر هفته دقیقاً یك مشتری مراجعه کرده باشد، چقدر است؟

۱۵. اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد، $E[N(t) \cdot N(t+s)]$ را حساب کنید.

۱۶. بیمارانی که به‌یك بیمارستان مراجعه می‌کنند، با احتمال ۰٫۱ احتیاج به‌بستری‌شدن دارند. اگر مراجعهٔ آنها بر‌اساس فرایند پواسون با میانگین ۳ نفر در ساعت باشد، احتمال اینکه در شش ساعت اول ۱۰ بیمار بستری شوند، چقدر است؟

۱۷. سیستمی درساعت ۸ صبح شروع به‌کارمی‌کند. ورود مشتریها براساس فرایندپواسون است. فرض کنید تا ساعت ۱۱ صبح، جمعاً ۵ نفر وارد سیستم شده‌اند. احتمال اینکه بین ساعت ۹ تا ۹:۱۵ یك نفر وارد شده باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه حداقل ۳نفروارد شده باشند، چقدر است؟

۱۸. متغیرهای تصادفی مستقل X_i، $(i=1, 2, \ldots, n)$، را در نظر بگیرید. هر متغیر به احتمال P مقداریك و به‌احتمال $(1-P)$ مقدارصفر را انتخاب می‌کند. متغیر تصادفی جدیدی به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

ثابت کنید که متغیر تصادفی فوق دارای توزیع پواسون است، به‌فرض اینکه N نیزدارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد.

۱۹. تعداد تصادفات یك اتومبیل در سال براساس توزیع پواسون با میانگین n است. چنانچه عمر این اتومبیل دارای توزیع نرمال (با میانگین m) باشد، میانگین تعداد تصادفات را در مدت عمر این ماشین حساب کنید.

۲۰. به یك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند. اگر به‌طور متوسط ساعتی ۸ مشتری به‌سیستم مراجعه کنند، با چه احتمالی مشتری چهارم قبل‌از نیم‌ساعت‌اول وارد سیستم می‌شود؟

۲۱. دو نوع مشتری به‌فروشگاهی مراجعه می‌کنند. ورود هر دو مشتری براساس فرایند پواسون، به‌ترتیب دارای پارامترهای ۵ و ۱۰ نفر در ساعت است.
الف. احتمال اینکه اولین مشتری که وارد می‌شود از نوع ۱ باشد، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه پنجمین مشتری نوع ۱ قبل‌از دومین‌مشتری نوع ۲ واردشود، چقدراست؟

۲۲. مشتریهای یك‌سیستم طبق‌فرایندپواسون با آهنگ ۱۲ مشتری درساعت واردمی‌شوند. اگر در ۱۰ ساعت اول ۱۰۰ مشتری وارد شده باشند، احتمال اینکه درچهار ساعت آخر ۵۰ نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۲۳. در یك اداره، کمیسیونی درخواستهای متقاضیان را هر ماه یك بار بررسی می‌کند،

این متقاضیان طبق فرایند پواسون بـا آهنگ λ مراجعه می‌کنند. برای اینکه مدت انتظار آنها کمتر شود، تصمیم گرفته شده است کـه این کمیسیون یك‌بار نیز در طول ماه جلسه تشکیل دهـد. نشان دهید برای اینکه مـدت زمان انتظار متقاضیان حداقل شود، بهترین تصمیم این است که جلسهٔ اضافی این کمیسیون در وسط هر ماه تشکیل شود.

۲۴. عمر یك قطعهٔ حساس ماشینی طبق توزیع نمایی بـا پارامتر λ است. ایـن قطعه را به‌دو دلیل عوض می‌کنند. که یا خراب شود و یا عمرش به T برسد. میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا لامپی را عوض کنند، چقدر است؟

۲۵. چنانچه فاصلهٔ زمانی بین هر دو ورود متوالی مشتریها به‌سیستم، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ و مستقل از یکدیگر باشد، ثابت‌کنید‌که تعداد مشتریهایی‌که در فاصلهٔ صفر تا t وارد می‌شوند براساس فرایند پواسون با پارامتر λ است.

راهنمایی: از نتیجهٔ مسئلهٔ شماره ۴ فصل اول و همچنین قضیهٔ ۸.۳ استفاده‌کنید.

۲۶. در یك کارخانه، به‌طور متوسط هر چهار روز یك‌بار یك حادثه اتفاق می‌افتد. زمان بین دو حادثهٔ متوالی نمایی فرض می‌شود. ۲۵ درصد این حوادث منجر به مجروح شدن افراد می گردد و بقیه آنها جزئی هستند.

الف. احتمال اینکه در هشت روز آینده چهار حادثه اتفاق بیفتد، چیست؟

ب. احتمال اینکه درهشت روز آینده هیچ حادثهٔ منجر به‌مجروح‌شدن اتفاق نیفتد، چیست؟

ج. احتمال اینکه اولین حادثه‌ای‌که اتفاق می‌افتد جزئی باشد، چیست؟ چرا؟

د. احتمال اینکه در یك روز حداقل یك حادثـه جزئی اتفاق بیفتد. ولـی حادثهٔ منجـر به‌مجروح شدن اتفاق نیفتد، چیست؟

ه. خسارت روزانهٔ ناشی‌از n حادثه، معادل $۱۰۰۰۰+۲۰۰۰n$ برآورد می‌شود(چنانچه حادثه‌ای اتفاق بیفتد، طبیعتاً خسارتـی هم وارد خواهـد شد). میانگین خسارت روزانهٔ ناشی‌از حوادث را تعیین‌کنید.

و. در بیست روزگذشته دوحادثه اتفاق افتاده است. احتمال اینکه هر دو حادثه دریکی‌از روزهای اول یا دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟ احتمال اینکه یکی از آنها در روز اول‌و دیگری در روز دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟

۲۷. ماشینهایی که دارای دو موتور هستند، بـرای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. مدت زمان تعمیر هر موتور (و نه هر ماشین) دارای توزیع نمایی بـا میانگین ۱۰ دقیقه است. احتمال اینکه فقط یك موتور هـر ماشین خراب باشد، ۵۰ درصد و احتمال اینکه هر دو موتور خراب باشند، نیز برابر با ۵۰ درصد است. میانگین و واریانس مدت‌زمان تعمیر هر ماشین را به‌دست آورید.

۲۸. مسافری در لحظهٔ t به ایستگاه اتوبوس می‌رسد. اتوبوسها طبق فرایند پواسون بـا پارامتر λ وارد ایستگاه می‌شوند. زمان انتظار این مسافر را W می‌نامیم. تابع توزیع و

انتظار W را می‌خواهیم تعیین کنیم. مشخص کنید کـه کدام یك از جوابهای زیر صحیح است (و یا احتمالاً هیچ کدام صحیح نیست).

الف. طبق خاصیت پواسون، $E(W)=\frac{1}{\lambda}$

ب. ورود مسافر در فاصلهٔ بین دو ورود اتوبوسهای متوالی کاملاً تصادفی بوده است. لذا زمان ورود او را طبق توزیع یکنواخت در نظر می‌گیریم که میانگین آن نصف زمان بین دو ورود متوالی اتوبوسهاست؛ پس،

$$E(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

۲۹. یك مدل $M/M/1$، کـه در آن آهنگ ورود مشتریها λ و آهنگ خدمت‌دهی μ است را در نظر بگیرید. در یك لحظه مشخص سیستم خالی است. مدت زمانی که از این لحظه به بعد طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود را E فرض می‌کنیم. نشان دهید که

$$P(E>t)=\frac{\mu e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda}$$

۳۰. در یك جاده، اتومبیلها طبق فرایند پـواسون عبور می‌کنند (بـا پارامتر λ). شخصی می‌خواهد عـرض این جاده را طی کند. مدت زمان عبور او ثابت و برابر بـا T است. بنابراین، موقعی می‌تواند این کار را انجام دهد کـه زمان بین عبور دو اتومبیل متوالی از T کمتر نباشد. N را تعداد اتومبیلهایی در نظر بگیرید کـه از جلو این شخص عبور می‌کنند تا فرصت عبور برای او پیدا شود. تابع توزیع N چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار این شخص چیست؟

۳۱. سفر یك سفینهٔ فضایی به‌زمان T نیاز دارد. اجسام موجود در فضا ممکن است با این سفینه تصادف کنند و آن را از بین ببرند. این اجسام طبق فرایند پواسون (λ) جلو سفینه ظاهر می‌شوند. اگر چنین جسمی در مسیر سفینه قرار گیرد، با احتمال P_1 تصادف می‌کند و با احتمال $1-P_1$ ازکنار آن می‌گذرد. سفینه مورد نظر بـرای دفاع از خود، دارای موشکهایی است که بمحض مشاهدهٔ چنین اجسامی به‌طرف آنها شلیك می‌شوند. هر موشك با احتمال P_2 جسم مقابل را از بین می‌برد. اگـر سفینه دارای دو موشك باشد، احتمال اینکه سفرش را با موفقیت به‌پایان برساند، چیست؟

۳۲. یك گروه شکارچی‌را برای به‌دام انداختن یك‌جفت‌حیوان اعزام کرده‌اند. هرحیوانی که بدام می‌افتد، با احتمال P نر و با احتمال $(1-P)$ ماده است. اگر N معرف تعداد حیواناتی باشدکه به‌دام می‌افتند تا یك جفت به‌دست آید، $E(N)$ را محاسبه کنید. فرض کنید تعداد حیواناتی کـه به‌دام می‌افتند، طبق فرایند پواسون و T مدت زمانی است کـه

بـرای این‌کار تعیین شده است. احتمال اینکه ایـن گروه بتواند در ایـن مدت یك جا
به‌دست آورد، چیست؟

اکنون فرض کنید کـه قبل‌از زمان T، ماموریت این گروه بـه‌پایان رسیده اس
میانگین مدت زمانی که‌مصرف کرده‌اند، چیست؟

۳۳. مسئلهٔ ۲۳ فصل دوم را با استفاده از مفهوم خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع نما
مجدداً حل کنید.

۳۴. با استفاده از تابع مولد گشتاور نشان دهیدکـه در توزیع ارلانگی اگر r بـه‌سـ
بینهایت میل کند، تابع چگالی آن مقدار ثابتی خواهد شد.

۴

زنجیره‌های مارکوف

چون بسیاری از سیستمهای صف بر اساس **فرایند مارکوف** ساخته شده‌اند، لذا در این فصل ابتدا به بررسی اجمالی مفهوم این فرایند و سپس با تفصیل بیشتر به بحث در مورد حالتهای خاص آن به نام **زنجیره‌های مارکوف** و **زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته** می‌پردازیم.

۱.۴ فرایند مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف، می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند، به سه دورهٔ «گذشته»،«حال» و «آینده» تقسیم کنیم، «آیندهٔ» این فرایند بستگی به مسیری که در «گذشته» طی کرده است، ندارد و تنها به موقعیت آن در زمان «حال» وابسته است. مثلاً، فرایند پواسون نوعی فرایند مارکوف است، زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یك لحظهٔ معین به بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن افتاده است. به‌عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آیندهٔ این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظهٔ t_n، کافی است.

خاصیت مارکوفی یك فرایند را می‌توان به‌زبان ریاضی نیز نشان داد. مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را درنظر بگیرید. اگر $X(t)$ طبق فرایند مارکوف عمل کند، به‌ازای تمام مقادیر $x_1, x_2, \ldots$ و x_n رابطهٔ زیر برقرار است.

$$P[X(t_{n+1}) \leqslant x | X(t_n) = x_n, \ldots, X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1]$$
$$= P[X(t_{n+1}) \leqslant x | X(t_n) = x_n] \qquad (۱.۴)$$

فرایندهای مارکوف را، به‌طورکلی، برحسب دو عامل طبقه‌بندی می‌کنند:

الف. پارامتر t، که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. گسسته بودن t را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار سیستم تنها در مقاطع مشخصی از زمان مطالعه می‌شود. در صورتی که t گسسته باشد، $X(t)$ با متغیرهای تصادفی به شکل $X_1, X_2, \ldots$ و X_n جایگزین می‌شود.

ب. مجموعهٔ مقادیری راکه $X(t)$ می‌تواند انتخاب کند، برحسب تعریف، حالت سیستم می‌نامند. حالت سیستم نیز می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

۲.۴ زنجیره‌های مارکوف

زنجیره‌های مارکوف حالت خاصی از فرایند مارکوف است، که در آن هم پارامتر t وهم حالت سیستم، فقط مقادیر گسسته را انتخاب مـی‌کند. بر این اساس، یـك رشته متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots$ و X_n را زنجیرهٔ مارکوف می‌نامند، اگر بـه‌ازای تمام مقادیـر n، و تمام حالتهای i و j رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1} = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \qquad (۲.۴)$$

در اینجا به n، **مرحله** نیز گفته می‌شود.

مثال ۱.۴ نقطه‌ای فیزیکی را درنظر بگیرید که روی خطی مستقیم حرکت می‌کند. در هر حرکت، این نقطه به احتمال P به اندازهٔ یك میلی‌متر به‌جلو و بـه احتمال $1-P$ به‌همین‌اندازه به‌عقب می‌رود. اگر $X(t)$، یعنی حالت‌سیستم را موقعیت این‌نقطه روی‌خط درنظر بگیریم، $X(t)$ یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد؛ زیرا موقعیت نقطه درحرکتهای بعدی، تنها به‌وضعیت فعلی‌آن بستگی دارد و مستقل از مسیری است که‌در گذشته طی‌کرده است (این فرایند را **قدم‌زدن تصادفی** نیز می‌گویند)

احتمال تغییر حالت سیستم از i به j، یا به عبارت دیگر احتمال حرکت نقطه روی خط به شرح زیر است:

$$P[X_{n+1} = i+1 | X_n = i] = P$$

$$P[X_{n+1} = i-1 | X_n = i] = 1-P$$

$$P[X_{n+1}=j|X_n=i]=0 \quad \text{اگر } j\neq i+1 \text{ یا } j\neq i-1 \text{ باشد،}$$

زنجیره‌های مارکوف همگن، حالت خاصی از زنجیرهٔ مارکوف است که در آن احتمال گذار سیستم از هرحالت به حالت دیگر مستقل از مرحلهٔ آن (n) باشد. به‌بیان ریاضی، زنجیرهٔ مارکوف را درصورتی همگن می‌نامیم که به‌ازای تمام مقادیر i و j و n رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1}=j|X_n=i]=P[X_1=j|X_0=i]=P_{ij} \tag{۳.۴}$$

بنابراین، در یك زنجیرهٔ مارکوف همگن، P_{ij} معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به j است. از این به‌بعد، فرض می‌کنیم که زنجیره‌های مارکوف مورد بررسی، همگن هستند.

زنجیرهٔ مارکوف مثال ۱.۴ از نوع همگن است، زیرا احتمال حرکت نقطه به‌جلو یا عقب بستگی به تعداد حرکتهای انجام شده تا آن لحظه ندارد.

ماتریس گذار

ماتریس گذار، ماتریسی است که عنصر تشکیل دهندهٔ آن در سطر i و ستون j، مقدار P_{ij} (احتمال تغییر حالت سیستم از i به j) است. اگر فرض کنیم که تعداد حالتهای سیستم M است، ماتریس گذار آن به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_{11}P_{12} & \cdots\cdots\cdots & P_{1M} \\ P_{21}P_{22} & \cdots\cdots\cdots & P_{2M} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ P_{M1}P_{M2} & \cdots\cdots\cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \tag{۴.۴}$$

بدیهی است که تمام عناصر این ماتریس غیرمنفی است. مجموع عناصر هر سطر برابر با یك است (مجموع عناصر یك ستون لزوماً یك نیست). با توجه به نامتناهی بودن تعداد حالتهای سیستم، ابعاد ماتریس نیز می‌تواند نامتناهی باشد.

درمثال ۱.۴، حالت سیستم می‌تواند بین هر عدد صحیح، از منهای بینهایت تا به‌اضافهٔ بینهایت تغییر کند. به‌همین ترتیب ماتریس گذار نیز دارای ابعاد نامتناهی خواهد بود.

$$\mathbf{P}=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & q & \circ & p & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & \circ & p & & & & \\ & & & & q & \circ & p & & & \\ & & & & & q & \circ & p & & \\ & & & & & & q & \circ & p & \cdots \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}\end{array} \qquad (۵۰۴)$$

در ماتریس فوق $q = ۱ - p$ و در سایر محلها مقدار احتمال صفر است.

بـه‌طورکلی، هر ماتریس مربع که تمام عناصر آن غیر منفی و مجموع عناصر هر سطر آن برابر با یك باشد را **ماتریس مارکوف** می‌نامند.

مثال ۴.۴ فرض کنید که درآمد شخصی در روز Y باشد. Y متغیری تصادفی است که‌فقط‌اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند و $P[Y=i]=a_i$ است. بدیهی است‌که $\sum\limits_{C=\circ}^{\infty} a_i = ۱,\ a_i \geqslant \circ$. چنانچه X_n معرف مجموع درآمد آن شخص در n روز اول باشد X_n یك زنجیرهٔ مارکوف است، زیرا با دانستن درآمدآن شخص در n روز اول می‌توان تابع توزیع مجموع درآمد $(n+۱)$ روز اول را محاسبه‌کرد. ماتریس‌گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌شرح زیر است

$$\mathbf{P}=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4& \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix} a_\circ & a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots \\ \circ & a_\circ & a_۱ & a_۲ & \cdots \\ \circ & \circ & a_\circ & d_۱ & \cdots \end{bmatrix}\end{array}$$

گذار m مرحله‌ای

با استفاده از ماتریس گذار، رابطهٔ بیـن حالتهای سیستم در دو مرحلـهٔ متوالـی مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، با دانستن حالت هرمرحله، می‌توان تابع توزیع حالت سیستم را در مرحلهٔ بعد تعیین‌کرد. در این قسمت می‌خواهیم تعیین کنیم که چه رابطه‌ای بین حالت سیستم دریك مرحله و حالت‌آن در m مرحلهٔ بعد موجود است. به‌عبارت دیگر، سؤالی که

مطرح می‌شود این است که اگر درمرحله‌ای، حالت سیستم i باشد (یعنی $X_n=i$)، احتمال اینکه پس از m مرحله، حالت سیستم به j برسد (یعنی $X_{n+m}=j$)، چقدر است؟

بدیهی است با داشتن ماتریس گذار، می‌توان تابع توزیع X_{n+1} را به‌دست آورد. با دانستن حالت مرحلهٔ $n+1$، تابع توزیع X_{n+2} و به‌همین ترتیب $X_{n+3}, \ldots\ldots, X_{n+m}$ به‌دست می‌آید. لیکن، هدف این است که بتوان رابطهٔ مستقیم بین X_n و X_{n+m} را مستقیماً معین کرد. برای این منظور ابتدا قرارداد زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف الف. $P_{ij}^{(m)}$ احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در m مرحله است، یعنی،

$$P_{ij}^{(m)}=P[X_m=j|X_0=i] \qquad (۶.۲)$$

ب. ماتریس گذار m مرحله‌ای ماتریسی است که اجزای آن $P_{ij}^{(m)}$ باشند، یعنی،

$$\mathbf{P}^{(m)}=\begin{bmatrix} P_{11}^{(m)} & \cdots\cdots\cdots & P_{1M}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1}^{(m)} & \cdots\cdots\cdots & P_{MM}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (۷.۲)$$

بنابراین برای تعیین رابطهٔ بین‌حالتهای سیستم در m مرحله، شناخت $P^{(m)}$ ضروری است. برای تعیین $P^{(m)}$ قضیهٔ زیر را می‌توان به‌کار گرفت.

قضیهٔ ۱.۴ الف. به ازای تمام حالتهای i و j و برای هر K و K' رابطهٔ زیر برقرار است

$$P_{ij}^{(k+k')}=\sum_{s=0}^{\infty} P_{is}^{(k)}P_{sj}^{(k')} \qquad (۸.۲)$$

ب.

$$\mathbf{P}^{(m)}=P\cdot P\ldots\ldots\ldots\ldots P=P^m \qquad (۹.۲)$$

(رابطهٔ (۸.۲) که بـه رابطهٔ C-K[1] معـروف است، بیان‌کنندهٔ ایـن حقیقت است

---

1. Chapman-Kolomogrov

که احتمال تغییر حالت سیستم از i بــه j در $(k+k')$ مرحله، برابر بـا مجموع تغییر حالتهای سیستم از i به‌هر حالت دیگرسیستم، مثلا s در k مرحله و سپس از s به j در k' مرحله است.)

اثبات: با استفاده از معادلات شرطی نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{ij}^{(k+k')}=P[X_{k+k'}=j|X_0=i]= \tag{۱۰.۴}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} P[X_{k+k'}=j|X_k=s,\ X_0=i]\times P[X_k=s|X_0=i]=\sum_{s=0}^{\infty} P_{sj}^{(k')}P_{is}^{(k)}$$

رابطهٔ (۱۰.۴) را به‌صورت ماتریس نیز می‌توان نوشت

$$P^{(k+k')}=P^{(k)}\,.\,P^{(k')} \tag{۱۱.۴}$$

چون رابطهٔ (۱۱.۴) به‌ازای تمام مقادیر k و k' صادق است، لذا

$$P^{(m)}=P\cdot P^{(m-1)}$$

از طرف دیگر

$$P^{(m-1)}=P\cdot P^{(m-2)}$$

و به‌همین ترتیب

$$P^{(2)}=P\cdot P$$

درنتیجه،

$$P^{(m)}=P.\,P\ldots P=P^m$$

مثال ۳.۴ زنجیرهٔ مارکوفی را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شرح زیر باشد (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ فرض کنید)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ & ۰ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۵ & ۰٫۲۵ \\ ۰ & ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را به‌دست آورید:

$P_{13}^{(2)}$ (احتمال اینکه سیستم از حالت ۱ شروع و پس‌از دو مرحله بـه‌ ۳ برسد) و

همچنین $P_{31}^{(2)}$

حل:

$$\mathbf{P}^{(2)}=P\cdot P=\begin{bmatrix} 0/625 & 0/3125 & 0/0625 \\ 0/3125 & 0/5 & 0/1875 \\ 0/1875 & 0/5625 & 0/25 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$P_{13}^{(2)}=0/0625$$

$$P_{31}^{(2)}=0/1875$$

مقادیر فوق را می‌توان مستقیماً، یا با استفاده از رابطه‌های (۸.۴) نیز به‌دست‌آورد. مثلا

$$P_{13}^{(2)}=P_{11}P_{13}+P_{12}P_{23}+P_{13}P_{33}=0/0625$$

که در واقع این عبارت حاصل‌ضرب سطر اول در ستون سوم ماتریس‌گذار است.

محاسبهٔ تابع توزیع حالت سیستم در هر مرحله

ممکن است در مواردی تعیین تابع‌توزیع سیستم درمرحلهٔ n مدنظر باشد. به‌عبارت دیگر، ممکن است هدف محاسبهٔ $P(X_n=j)$ به‌ازای حالتهای مختلف j و مراحل n باشد. این احتمال راگاهی به‌صورت $\pi_j^{(n)}$ نشان می‌دهند. چنانچه تابع توزیع حالت‌سیستم درمرحلهٔ شروع، یعنی $P(X_0=i)$، به‌ازای تمام حالتها مشخص باشد، بااستفاده ازمفهوم احتمال شرطی‌وماتریس‌گذار خواهیم داشت:

$$\pi_j^{(n)}=P(X_n=j)=\sum_i P[X_n=j|X_0=i]\times P[X_0=i]=\sum_i P_{ij}^{(n)}\cdot\pi_i^{(0)} \quad (12.4)$$

یا

$$\pi^{(n)}=\pi^{(0)}\times P^{(n)} \quad (13.4)$$

$\pi^{(0)}$ و $\pi^{(n)}$ بردارهایی هستندکه عناصر تشکیل‌دهندهٔ آنها $\pi_i^{(0)}$ و $\pi_i^{(n)}$ است.

محاسبهٔ احتمال حالت سیستم در چند مرحلهٔ مختلف

با دانستن حالت فعلی سیستم و ماتریس گذار می‌توانیم تابع توزیع حالت سیستم را در یك یا چند مرحلهٔ بعد به‌دست آوریم؛ اما، ممکن است مسیر مشخصی از حرکت آیندهٔ سیستم مدنظر باشد. مثلا، محاسبهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$P[X_1=j,X_2=k|X_0=i]=P[X_2=k|X_1=j,X_0=i]P[X_1=j|X_0=i]$$

$$=P_{jk}\cdot P_{ij}$$

بنابراین، احتمال فوق برابر است با حاصل‌ضرب تغییر حالت سیستم از i به j و سپس از j به k. بـه همین ترتیب، احتمال حرکت در چند حالت مشخص و در مراحل مختلف را می‌توان محاسبه کرد، یعنی

$$P(X_n=q,\ X_{n-۱}=k,\ \cdots,\ X_۱=j|X_۰=i)=P_{ij}\cdots P_{kq} \qquad (۱۴.۴)$$

مثال ۴.۴ زنجیرهٔ مارکوف مثال ۳.۴ را در نظر بگیرید. به فرض اینکه در ابتدا سیستم بتواند حالتهای ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالات مساوی انتخاب کند، مقادیر احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$A_۱=P(X_۳=۲|X_۰=۱)$$

$$A_۲=P(X_۳=۲)$$

$$A_۳=P(X_۳=۲,\ X_۲=۳,\ X_۱=۲|X_۰=۱)$$

$$A_۴=P(X_۳=۲,\ X_۲=۳,\ X_۱=۲)$$

حل: جملهٔ اول معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ بـه ۲ در سه مرحله است. به‌عبارت دیگر

$$A_۱=P_{۱۲}^{(۳)}=\frac{۲۳}{۶۴}$$

جمله دوم معرف احتمال بـودن سیستم در حالت ۲ است، درحالی‌کـه از موقعیت آن در شروع مراحل اطلاعی نداریم. بـه عبارت دیگر، حالت سیستم در مرحلهٔ صفر می‌توانـد هرکدام از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باشد. با استفاده از احتمال شرطی،

$$A_۲=\sum_{i=۱}^{۳} P(X_۳=۲|X_۰=i)P(X_۰=i)=\frac{۱}{۳}(P_{۱۲}^{(۳)}+P_{۲۲}^{(۳)}+P_{۳۲}^{(۳)})$$

$$=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲۳}{۶۴}+\frac{۳۰}{۶۴}+\frac{۳۴}{۶۴}\right)=\frac{۷}{۱۶}$$

جملهٔ سوم معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ و سپس از ۲ به ۳ و پس از آن از ۳ به ۲ است. لذا

$$A_۳=P_{۱۲}P_{۲۳}P_{۳۲}=(۰٫۲۵)(۰٫۲۵)(۰٫۷۵)=\frac{۳}{۶۴}$$

جملهٔ چهارم شبیه جمله سوم است. با این تفاوت کـه از موقعیت سیستم در شروع مراحل

ا... ... نداریم. بنابراین، با استفاده از احتمالات شرطی داریم:

$$A_4=\sum_{i=1}^{3} P(X_3=2,\ X_2=3,\ X_1=2|X_0=i)P(X_0=i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{64}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{64}$$

۳.۴ طبقه‌بندی حالتهای سیستم در یک زنجیرهٔ مارکوف

این بخش به طبقه‌بندی حالتهای سیستم و معرفی چند واژهٔ مربوط به آن می‌پردازیم. ... ، از این طبقه‌بندی، به‌کارگیری آن برای بررسی **احتمالات حدی** در زنجیرهٔ مارکوف ...

تعریف. حالت i به‌حالت j **دسترس‌پذیر** است، اگر این امکان وجود داشته باشد که ... لا سیستم بتواند از i بـه j انتقال پیدا کند. چنین گذاری ممکن است در یک مرحله ... ام نشود، ولی به‌هرحال امکانپذیر است. به‌زبان ریاضی، i به j دسترسی دارد، اگـر ... ان حداقل یک مقدار n پیدا کرد که به‌ازای آن $P_{ij}^{(n)}>0$ باشد. اگر سیستم از i به j ... سی داشته باشد، آن‌را به‌صورت $i\to j$ نشان می‌دهند.

تعریف. دو حالت i و j باهم **مرتبط** هستند اگر $i\leftrightarrow j$؛ به‌عبارت دیگر، اگرهر دو ... ا... به‌هم دسترسی داشته باشند. بدیهی است‌که چون $P_{ii}^{(0)}=1$، هر حالت با خودش‌هم ... است.

مثال ۵.۴ زنجیرهٔ مارکوف با ماتریس‌گذاری بـه شرح زیـر را در نظر بگیرید (... التهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ می‌نامیم).

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

... الت ۱ به ۲ و ۲ به ۱ دسترس‌پذیر است، زیرا $P_{12}=1$ و $P_{21}=0{,}5$، یعنی $1\leftrightarrow 2$. ... الت ۱ به ۳ نیز دسترس‌پذیر است، زیـرا از ۱ می‌توان به ۲ و از ۲ به ۳ گذر کرد. ... $1\to 3$؛ بـه‌عبـارت دیگـر $1\to 2\to 3$ و طبق تعـریف کـلی $P_{13}^{(2)}=0{,}5>0$. ... همین ترتیب، می‌توان نشان داد که همهٔ حالتها باهم مرتبط هستند.

مثال ۶.۴ زنجیرهٔ مارکوفی بـا ماتریس‌گذاری بـه شرح زیر را در نظر بگیرید (... التهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌نامیم)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰٫۳ & ۰٫۷ & ۰ & ۰ \\ ۰٫۲ & ۰٫۲ & ۰٫۳ & ۰٫۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حالت ۱ و ۲ باهم مرتبط هستند، ازحالت ۳ می‌توان به‌تمام حالتها گذر کرد، ولی ازسایر حالتها نمی‌توان به‌حالت ۳ دسترسی پیدا کرد، یعنی ۲→۳ ولی ۳↛۲. از حالت ۴ نیز به‌هیچ حالت دیگری (غیراز خودش) نمی‌توان دسترسی یافت.

تعریف. الف. مجموعهٔ تمام حالتهایی که بـا هم در ارتباط باشند را **یك كلاس** می‌نامند.

ب. سیستمی کـه فقط دارای یك کلاس باشد، یعنی تمام حالتهای آن باهم مرتبط باشند، را **سیستم یکپارچه** می‌نامند.

ج. مجموعـه‌ای از حالتها را **بسته** می‌نامند، اگـر امکان دسترسی از هیچ‌کدام از حالتهای این مجموعه به‌هیچ‌کدام از حالتهای خارج از آن وجود نداشته باشد، یعنی P_{ij} (به‌ازای تمام حالتهای i داخل مجموعه و j خارج از مجموعه) برابر با صفر باشد.

د. اگر حالتی مانند i، به‌تنهایی مجموعه‌ای بسته را تشکیل دهد، به‌آن حالت جاذب می‌گویند، که در این صورت $p_{ii}=۱$ است.

طبق تعاریف فـوق، زنجیرهٔ مارکوف مثال ۵.۴ فقط دارای یـك کلاس است و در نتیجه یك سیستم یکپارچه است، در حالی کـه زنجیرهٔ مارکوف مثال ۶.۴ دارای سه کلاس، یعنی $\{۱, ۲\}$ و $\{۳\}$ و $\{۴\}$ است. ضمناً در مثال ۶.۴ حالت ۴ یك **حالت جاذب** است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم یکپارچه مجموعهٔ بسته‌ای است کـه هیچ‌کدام از زیرمجموعه‌های آن نمی‌توانند مجموعهٔ بسته باشد.

قضیهٔ ۲.۴ اگر $i\leftrightarrow j$ و $j\leftrightarrow k$، پس $i\leftrightarrow k$.

اثبات: چون $j\leftrightarrow i$، بنابراین می‌توان دو عدد مانند n و n' را پیدا کرد که

$$P_{ji}^{(n')}>۰\ ,\ P_{ij}^{(n)}>۰ \qquad (۱۵.۴)$$

به‌همین ترتیب، چون $j\leftrightarrow k$، دو عدد m و n وجود دارد که

$$P_{kj}^{(n)}>۰\ ,\ P_{jk}^{(m)}>۰ \qquad (۱۶.۴)$$

بنابراین

$$P_{ik}^{(n+m)}=\sum_{s=۰}^{\infty} P_{is}^{(n)}\cdot P_{sk}^{(m)} \geqslant P_{ij}^{(n)}\cdot P_{jk}^{(m)}>۰ \qquad (۱۷.۴)$$

... نتیجه $k \leftrightarrow i$. با همین روش می‌توان نشان داد که $i \leftrightarrow k$.

مثال ۵.۴ را مجدداً در نظر بگیرید. چون ۲↔۱ و ۳↔۲، لذا طبق قضیهٔ فوق حالتهای ۱ و ۳ نیز باهم مرتبط هستند.

تعریف. فرض کنید کـه حالت سیستم در یك مرحله i باشد. احتمال اینکه در مراحل بعدی سیستم به i برگردد را با f_i نشان می‌دهیم. حالت i را **برگشت‌پذیر** می‌نامیم اگر $f_i = 1$ باشد. به‌همین ترتیب، اگر $f_i < 1$ باشد، حالت i **گذرا** نامیده می‌شود.

به‌این ترتیب، اگر سیستم به‌حالت برگشت‌پذیری مانند i برسد، در یکی ازمراحل بعدی به‌طور حتم به‌این حالت برمی‌گردد. لیکن، چنانچه از یك حالت گذرا شروع کند، لزوماً به‌آن حالت برنمی‌گردد، اگرچه امکان رسیدن به‌آن حالت هم برایش وجود دارد.

مثال ۶.۴ را در نظر بگیرید. حالت ۳ گذراست، زیرا اگر سیستم از این حالت به‌هرحالت دیگر برود، امکان بازگشت آن‌وجود ندارد. دراین مثال، $f_1 = 1$، $f_2 = 1$، $f_3 = 0/2$ و $f_4 = 1$ است. درنتیجه‌حالت ۳ گذرا و حالتهای ۱ و ۲ و ۴ برگشت‌پذیر هستند. برای نمونه مقدار f_1 را محاسبه می‌کنیم.

$$f_1 = P[\text{شروع سیستم از ۱ و برگشت مجدد آن به ۱ در یکی از مراحل بعد}]$$

$$= 1 - P[\text{شروع سیستم از ۱ و هرگز برنگشتن آن به ۱}] =$$

اما اینکه سیستم از ۱ شروع کند وهرگز به ۱ برنگردد به‌معنای آن‌است که از ۱ به‌حالت ۲ برود و از این مرحله به‌بعد فقط در حالت ۲ بماند. احتمال این‌کار برابر است با

$$\lim_{n \to \infty} (0/5)(0/7)^n = 0$$

پس $f_1 = 1$ است.

میانگین تعداد دفعات برگشت به‌یك حالت

براساس این تعریف، اگر حالت i برگشت‌پذیر باشد و سیستم وارد این حالت شود، حتماً در آینده (نزدیك یا دور) سیستم مجدداً به i برمی‌گردد. به‌همین ترتیب، فرایند مجدداً از i شروع می‌شود و باز طبق ایـن تعریف، به‌همین حالت برمی‌گردد. درنتیجه، بـا تکرار این‌کار می‌توان گفت که تعداد دفعاتی که سیستم وارد حالت i می‌شود، نامتناهی است.

اما اگر حالت i گذرا باشد و سیستم از این‌حالت شروع کند، به‌احتمال f_i مجدداً به i برمی‌گردد و به‌احتمال $(1 - f_i)$ هرگز بازنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، احتمال اینکه سیستم از i شروع کند، پس‌از مدتی به i برگردد و از آن پس هرگز به‌این حالت مراجعه نکند، عبارت از $f_i(1 - f_i)$ است. در حالت کلی، احتمال اینکه سیستم دقیقاً n مرتبه‌به i برگردد وپس‌ازآن هرگز برنگردد برابر $f_i^n(1 - f_i)$ است. همان‌طور که مشاهده‌می‌شود،

مقدار این احتمال دارای توزیع هندسی است، کـه میانگین آن $f_i / (1-f_i)$ خواهد بود، درنتیجه، میانگین تعداد دفعاتی‌که سیستم به i برمی‌گردد عددی متناهی است.
برای اثبات قضیهٔ زیـر، ازخاصیت فوق درمـورد حالتهای برگشت‌پذیر و گذرا، به‌منظور محاسبهٔ تعداد دفعاتی‌که سیستم به‌آنها برمی‌گردد، استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۳.۴ دریك زنجیرهٔ مارکوف، چنانچه در مورد حالتی ازسیستم، مثلا i، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} pii^{(n)}$ نامتناهی باشد، آن حالت بـرگشت‌پذیر، واگر عددی متناهی باشد، آن حالت گذراست.

اثبات: احتمال اینکه سیستم از i شروع کند و مجدداً درمرحلهٔ n به‌حالت i برسد، برابر با $pii^{(n)}$ است. دراین مرحله، تعداد دفعاتی کـه سیستم به i می‌رسد یا صفر یا یك است. بنابراین، میانگین تعداددفعات مراجعهٔ سیستم به‌حالت i درمرحلهٔ n برابربا $Pii^{(n)}$ است. بدین‌ترتیب، $\sum_{n=1}^{\infty} pii^{(n)}$ معرف میانگین تعداد دفعاتی است که سیستم در دراز مدت به i برمی‌گردد. براساس آنچه‌که قبلا گفته‌شد، برای حالت i درصورتی‌که برگشت‌پذیر باشد، این مقدار نامتناهی وبرای حالت‌گذرا عددی متناهی است.
درمثال ۵.۴، می‌توان با استفاده ازقضیهٔ فوق برگشت‌پذیربودن حالتهای سیستم را بررسی‌کرد.
درمورد حالت ۳

$$P_{33} = 0{,}3$$

$$P_{33}^{(2)} = P_{31}P_{13} + P_{32}P_{23} + P_{33}P_{33} + P_{34}P_{43} = 0{,}09$$

$$P_{33}^{(3)} = (0{,}3)^3$$

$$\vdots$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{33}^{(n)} = \frac{0{,}3}{1-0{,}3} = \frac{3}{7}$$

درنتیجه حالت ۳ گذراست. به‌همین‌ترتیب، می‌توان نشان دادکه سایرحالتها برگشت‌پذیر هستند. (به مسئلهٔ ۲۷ همین فصل مراجعه شود).

قضیهٔ ۴.۴ در یك زنجیرهٔ مـارکـوف با تعداد متناهی حالتها، تمام حالتهای آن نمی‌تواند گذرا باشد.

اثبات: فرض‌کنیدکه تعداد حالات این زنجیره متناهی و برابربا M و همگی گذرا

باشد، یکی از حالتها، مثلا۱، را درنظر بگیرید. بعد ازمدتی متناهی، فرضاً t_1، سیستم دیگر هرگز به ۱ برنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، بعد ازمدتی، مثلا t_2، سیستم نمی‌تواند به‌حالت ۲ برسد. بنابراین، بعد ازگذشت‌مدت‌زمان معینی، سیستم به‌هیچ‌کدام ازحالتها برنمی‌گردد، واین امکانپذیر نیست. پس تعدادی از حالتهای سیستم اجباراً باید برگشت‌پذیر باشد.

قضیهٔ ۵.۴ اگر $j \leftrightarrow i$ و i برگشت‌پذیر باشد، j نیز برگشت‌پذیر خواهد بود.

اثبات: چون i و j با هم مرتبط هستند، پس دوعـدد صحیح مثلا m و m' می‌توان یافت که رابطه‌های زیر درموردآنها برقرارباشد.

$$P_{ij}^{(m')} > 0 \quad , \quad P_{ji}^{(m)} > 0 \tag{۱۸.۴}$$

بنابراین، بـا استفاده از معادلـهٔ $C-K$، رابطهٔ زیـر به‌ازای تمام مقادیر $n \geqslant m+m'$، صادق است.

$$P_{jj}^{(n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} \cdot P_{ii}^{(n-m-m')} \cdot P_{ij}^{(m')}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(m')} \sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ii}^{(n-m-m')} \tag{۱۹.۴}$$

اما چون i برگشت‌پذیر و اعداد m و m' اعدادی مشخص و متناهی هستند، لذا

$$\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{ii}^{(n-m-m')} = \infty$$

درنتیجه، عبارت (۱۹.۴) نیز بینهایت و j برگشت‌پذیراست.

قضیهٔ ۶.۴ اگر $j \leftrightarrow i$ و i گذرا باشد، دراین صورت j نیز گذراست.

اثبات: اگر j برگشت‌پذیر باشد، طبق قضیهٔ قبلی i هم برگشت‌پذیر خواهد بود و این خلاف فرض است.

قضیهٔ ۷.۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه بـا تعداد حالات متناهی، تمام حالتها برگشت‌پذیر هستند.

اثبات: طبق دوقضیهٔ قبل، تمام‌حالتها باید یابرگشت‌پذیر ویا گذرا باشند. ازطرف دیگر، می‌دانیم دریك زنجیرهٔ مـارکوف بـا تعداد حالات متناهی، تمام آنها نمی‌توانند گذرا باشند، پس همه برگشت‌پذیرهستند.

تعریف. میانگین تعداد مراحلی که طول می‌کشد تا سیستم ازحالت i شروع کند و مجدداً به i برگردد، را با M_i نشان می‌دهند وبـه‌آن میانگین زمان برگشت می‌گویند. با این تعریف، حالت برگشت‌پذیر را به دو گروه تقسیم می‌کنیم:

الف. **برگشت‌پذیر مثبت** اگر $M_i < \infty$ باشد

ب. **برگشت‌پذیر تهی** اگر $M_i = \infty$ باشد

قضیهٔ ۸.۴ اگر $i \leftrightarrow j$ و i بـرگشت‌پذیر مثبت باشد، i نیز بـرگشت‌پذیـر مثبت خواهد بود.

ضمناً در یك سیستم بایر حیه با تعداد حالات متناهی، تمام حالتهای آن برگشت‌پذیر مثبت هستند.

تعریف. اگر سیستم از i شروع کند و بعداً فقط در مراحل d۲ و d۳ و... بتواند به i برگردد، می‌گوییم حالت i دارای **دوره** بـرابـر با d است. بدین‌ترتیب، به‌ازای تمام مقادیرعدد صحیح n، به استثنای $n=d, 2d, 3d$ رابطهٔ $P_{ii}^{(n)}=0$ برقراراست. درحالت خاص، اگر $d=1$، اصطلاحاً می‌گوییم i نادوره‌ای است.

۴.۴ احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف

یکی از ویژگیهای زنجیره‌هـای مارکوف این است کـه تحت شرایطی، حالت سیستم در دراز مدت مستقل از حالت اولیهٔ آن است. بـرای روشن شدن این موضوع، $P_{ik}^{(m)}$ و $P_{jk}^{(m)}$ را درنظر بگیرید. این دومقدار درحالت کلی بـا یکدیگر متفاوت هستند. به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه سیستم در m مرحلهٔ دیگر به حالت k برسد، بستگی به‌حالت فعلی آن دارد. اما تحت شرایطی، هـرچه m افزایش یابد، مقادیـر احتمالات فوق به یکدیگر نزدیکتر و درنهایت یکی می‌شوند. درنتیجه، صرف‌نظرازاینکه سیستم ازچه‌حالتی شروع کند، احتمال اینکه در درازمدت به‌حالت k بـرسد، مقداری ثابت است کـه این مقدار را به π_k نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، سیستم از هرحالتی، مثلا i شروع کند، خواهیم داشت:

$$\pi_k=\lim_{m\to\infty} P_{ik}^{(m)} \qquad (۲۰.۴)$$

به‌همین ترتیب، بدیهی است کـه اگر حرکت سیستم در درازمدت مستقل ازحالت شروع آن باشد، رابطهٔ زیر نیز صدق می‌کند.

$$\pi_k=\lim_{n\to\infty} P(X_n=k)=\lim_{n} \pi_k^{(n)} \qquad (۲۱.۴)$$

مثال ۷.۴ زنجیرهٔ مارکوف زیررا درنظربگیرید.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۸ \\ ۰٫۶ & ۰٫۴ \end{bmatrix}$$

ماتریسهای گذار ۲ و ۴ و ۸ مرحله‌ای این زنجیرهٔ مارکوف عبارت است از:

$$\mathbf{P}^{(2)}=\begin{bmatrix} ۰٫۵۲ & ۰٫۴۸ \\ ۰٫۳۶ & ۰٫۶۴ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(4)}=\begin{bmatrix} 0/4432 & 0/5568 \\ 0/4176 & 0/5824 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(8)}=\begin{bmatrix} 0/4289 & 0/5711 \\ 0/4283 & 0/5717 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می کنید، صرف‌نظر ازاینکه ازچه حالتی شروع کرده‌ایم، به‌تدریج عناصر یك ستون ماتریس به یکدیگر نزدیك می‌شوند. به‌عبارت دیگر، صرف‌نظر از اینکه از چه حالتی شروع کرده باشیم، درنهایت با احتمال ثابتی به حالتهای ۱ یا ۲ می‌رسیم. بدین‌ترتیب، در چنین حالتی‌که **احتمالات حدی** وجود داشته باشد، موقعی که $n \to \infty$، ماتریس $\mathbf{P}^{(n)}$ هم به ماتریسی میل می‌کند، که تمام عناصر هرستون آن، مثلا ستون i ام، برابر با π_i باشد.

دراین بخش با استفاده از قضایای زیر، شرایط وجود احتمالات حدی دریك سیستم و همچنین نحوهٔ محاسبهٔ آنها را درسیستمهای یکپارچه و نادوره‌ای، سیستمهای یکپارچه با دورهٔ d وسپس سیستمهای غیر یکپارچه بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۴ یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با حالتهای نادوره‌ای را درنظر بگیرید. دراین زنجیرهٔ مارکوف،

الف. احتمالات حدی همیشه وجود دارد، یعنی صرف‌نظرازاینکه سیستم ازچه‌حالتی شروع کند، در درازمدت با احتمال ثابت π_j به‌حالت j گذر می‌کند.

ب. اگر حالتهای سیستم برگشت‌پذیر مثبت باشد، به‌ازای تمام حالتها π_j عددی مثبت است.

ج. اگر حالتهای سیستم گذرا ویا برگشت‌پذیر تهی باشند. به‌ازای تمام حالتها، π_j برابر با صفر است.

قضیهٔ ۱۰.۴ دریك سیستم یکپارچه با حالتهای برگشت‌پذیر مثبت و نادوره‌ای (که آن را همه سویی می‌نامند) مقادیر احتمالات حدی π_j با حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i \cdot P_{ij}\,,\ j=0,1,2,\dots \qquad (22.4)$$

یا

$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots)=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots)\cdot p \qquad (23.4)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1 \qquad (24.4)$$

که $\mathbf{P}$ ماتریس انتقال زنجیرهٔ مارکوف است. مقادیر π_j را، که از روابط (۲۳.۴) و (۲۴.۴) به‌دست می‌آید، اصطلاحاً **توزیع ثابت** زنجیرهٔ مارکوف نیز می‌گویند. (باید توجه داشت که دستگاه معادلات (۲۱.۴) و (۲۲.۴) دارای یك معادلهٔ زاید است و لذا پس از حذف یکی از معادلات، (۲۳.۴) تعداد معادلات و مجهولها برابر خواهد شد).

مثال ۸.۴ زنجیرهٔ مارکوف مثال ۷.۴ را درنظر بگیرید. این سیستم یکپارچه و نادوره‌ای است. ضمناً چون تعداد حالتهای آن متناهی است، لذا تمام حالتها برگشت‌پذیر مثبت هستند. احتمالات حدی را می‌توان طبق قضیهٔ ۹.۴ محاسبه کرد، یعنی

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2)\begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۸ \\ ۰٫۶ & ۰٫۴ \end{bmatrix}$$

و

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود که: $\pi_1 = ۰٫۴۲۸۶$ و $\pi_2 = ۰٫۵۷۱۴$. می‌بینیم که در محاسبات مستقیم مثال ۷.۴ نیز، احتمالات حدی به این اعداد نزدیك می‌شوند. π_1 و π_2 به‌ترتیب معرف درصدی از اوقات است که سیستم در دراز مدت در حالت ۱ یا ۲ توقف می‌کند.

احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف با دورهٔ d

دراین مورد نیز، حالت سیستم دردرازمدت بستگی به‌حالت شروع آن ندارد. لیکن، چنانچه $n \to \infty$، کمیت $p_{jj}^{(n)}$ مقدار ثابتی نخواهد داشت، بلکه گاهی مقدار آن صفر و گاهی π_j است. به‌عبارت دقیقتر، مقدارحد احتمال فوق بستگی به n دارد. اگر n را برابر $md+k$ نشان دهیم (که m عددی صحیح است و $h = ۰, ۱, \ldots d-۱$)، $\lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}^{(md+k)}$ به‌ازای $k=۰$ برابر π_j و به‌ازای بقیهٔ مقادیر آن برابر با صفر خواهد بود. برای روشن شدن این موضوع، لازم به یادآوری است که براساس تعریف، اگر درزمان شروع (مرحلهٔ صفر)، حالت سیستم مثلا j باشد، فقط درمراحل d، $۲d$، $۳d$ و ... سیستم می‌تواند به j برگردد. بدیهی است در مراحل دیگر، مثلا در $۱, d+۱, ۲d+۱, \ldots$ نیز سیستم به حالتهای دیگری غیر از i خواهد رفت.

به‌این ترتیب، اگر حد ماتریس $P^{(n)}$ را به‌دست آوریم، به‌جای یك ماتریس، دارای d ماتریس حدی خواهیم بود، که در هرماتریس فقط تعدادی ازعناصر سطر i ام برابر با π_i و بقیه صفر خواهد بود (بستگی به‌حالت در مرحلهٔ شروع دارد). برای به‌دست آوردن مقادیر π_i از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۱۰۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با دورهٔ d، مقدار احتمالات حدی π_j را می‌توان از رابطه‌های زیر به‌دست‌آورد:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)\cdot P \qquad (۲۵.۴)$$

$$\sum_{i=0} \pi_i = d \qquad (۲۶.۴)$$

نکتهٔ قابل توجه دراین قضیه این است که مجموع احتمالات حدی، به‌جای اینکه برابر با ۱ باشد برابر با d است. علت این امر این است که درمرحلهٔ $(md+k)$، سیستم فقط می‌تواند تعدادمشخصی ازحالتها را انتخاب کند. درنتیجه $\sum_i \pi_i = ۱$ فقط‌مربوط به‌حالتهای i است، که امکان رسیدن به‌آنها دراین مرحله‌وجود دارد وبا توجه به‌اینکه d نوع ماتریس حدی وجود دارد، لذا $\sum_i \pi_i = d$ نیز صادق است.

مثال ۹۰۴ زنجیرهٔ مارکوف زیر را درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰/۲۵ & ۰/۷۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، دارای‌دوره‌ای برابربا ۳است (این موضوع را تحقیق‌کنید). فرض‌کنیدکه درشروع کار، سیستم درحالت ۲ باشد. درمرحلهٔ دوم، این سیستم با احتمال ۱ به‌حالت ۱ می‌رود. در مرحلهٔ سوم (به‌ترتیب با احتمالهای ۰/۲۵ و ۰/۷۵) به‌یکی از حالتهای سه وچهار گذر می‌کند. در مرحلهٔ چهارم مجدداً به‌حالت ۲ برمی‌گردد واین کار مرتب ادامه پیدا می‌کند. بدین‌ترتیب، درمورد حالت ۱ خواهیم داشت: $\pi_1 = ۱$؛ زیرا، این سیستم درمراحل دوم، پنجم وهشتم و... به‌احتمال ۱ به‌این حالت می‌رسد ودر سایر مراحل امکان دسترسی به این حالت برای آن وجود ندارد. به همین ترتیب، $\pi_2 = ۱, \pi_3 = ۰/۲۵, \pi_4 = ۰/۷۵$همین‌نتایج را می‌توان ازقضیهٔ ۱۱۰۴ نیز به‌دست‌آورد. ماتریسهای حدی این زنجیرهٔ مارکوف عبارت‌اند از:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^{۳m} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{(۳m+۱)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(۳m+۲)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

همان طور کـه ماتریسهای فوق نشان می‌دهند، درهمهٔ آنها، مثلا $\pi_۳ = ۱/۴$ است. یعنی، صرف‌نظر از حالت شروع، سیستم درهـر d مرحله یك‌بـار بـا احتمال ۱/۴ به‌حالت ۳ می‌رسد. چنانچه ازحالت ۳ یـا ۴ شروع کنیم، درمراحل ۳، ۶، $۳dm$،... واگر ازحالت ۱ شروع کنیم، درمراحل ۱، ۴، ۷ و $۳dm+۱$، واگر ازحالت ۲ شروع کنیم در مراحل ۲، ۵ و ۸ و $۳m+۲$ می‌توانیم به این حالت برسیم. ماتـریسهای حدی، این موضوع را نشان می‌دهند.

باتوجه به تعریف M_j، که قبلا ارائه شد، این کمیت معرف میانگین تعداد مراحلی است که طی آن سیستم از j شروع می‌کند و مجدداً به j می‌رسد. دردرازمدت رابطهٔ بین M_j واحتمالهای حدی را می‌توان از قضیهٔ زیر به‌دست‌آورد.

قضیهٔ ۱۲.۴ در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، رابطهٔ زیـر بـه‌ازای تمام مقادیر j صادق است

$$\pi_j = \frac{d}{M_j} \tag{۲۷.۴}$$

(d می‌تواند یك نیز باشد، یعنی حالتها بدون دوره باشند)

مثال ۱۰.۴ درزنجیرهٔ مارکوف مثال ۹.۴ مقادیر M_j را به‌دست‌آورید.

حل: براساس رابطهٔ (۲۷.۴)،

$$M_۱ = M_۲ = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$M_۳ = \frac{۳}{۰٫۲۵} = ۱۲$$

$$M_۴ = \frac{۳}{۰٫۷۵} = ۴$$

می‌توانیم این مقادیر را مستقیماً نیز به‌دست‌آوریم، که:

$$M_i = \sum_{n=۱}^{\infty} n \cdot P(T_i = n)$$

۸. T_i = تعداد مراحلی است که در راه داریم تا از i شروع کنیم ومجدداً به i برگردیم.

۹. بعنوان نمونه:

$$P(T_1=3)=1$$

و

$$P(T_1=n)=0 \quad , \quad n\neq 3$$

۱۰. نتیجه

$$M_1=3$$

۱۱. بهازای تمام مقادیر m

$$P(T_2=3m)=\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

۱۲. بهازای تمام مقادیر n که مضربی از ۳ نباشد،

$$P(T_2=n)=0$$

۱۳. نتیجه،

$$M_2=\sum_{m=1} 3m\cdot P(T_2=3m)=12$$

احتمالات حدی درزنجیره‌های مارکوف غیریکپارچه

اگر سیستم یکپارچه نباشد، عملا هر کلاس آن می‌تواند نقش یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه را بازی کند. فرض کنیدکه درحالت i باشیم. دوحالت ممکن است اتفاق بیفتد. اول اینکه i گذرا باشد. دراین صورت سیستم درنهایت ازاین حالت وکلاس مربوط بـه‌آن خارج می‌شود وهرگز به‌آن برنمی‌گردد. که‌دراین‌حال $\pi_i=0$ است. لیکن چنانچه i برگشت‌پذیر (اعم ازمثبت یا تهی) باشد، سیستم ازاین مرحله فقط وارد حالتهایی می‌شودکه با i مرتبط باشد وهرگز از کلاس مربوط بـه‌این حالت خارج نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، بقیهٔ حالتها عملا حذف می‌شوند و در واقع با یك زنجیرهٔ مـارکوف‌کوچکتر ولی یکپارچه سروکار خواهیم داشت وررابطه‌های مربوط به‌سیستمهای یکپارچه را می‌توان اعمال کرد.

۵.۴ زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته

همان‌طورکه در ابتدای این فصل گفتیم، دریك فرایند مارکوف هم پارامتر t وهم حالت سیستم $X(t)$ می‌توانند یا گسسته ویا پیوسته باشند. دریك زنجیرهٔ مارکوف هردوعامل‌فوق

گسسته هستند (و به‌همین دلیل، به‌آنها زنجیره‌های مارکوف بازمان گسسته نیز می‌گویند). **زنجیره‌های مارکوف بازمان پیوسته**، حالت خاصی از فرایند مارکوف هستند، که در آنها پارامتر t پیوسته است، اما فرض می‌شودکه $X(t)$، حالت سیستم، همچنان گسسته است. درزنجیره‌های مارکوف با زمان گسسته، فرض می‌شود که تغییرحالت سیستم فقط در انتهای هرمرحله صورت می‌گیرد (ویا اینکه فقط درانتهای هرمرحله حالت سیستم مشاهده می‌شود)، درحالی‌که‌درزنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته، چنین محدودیتی وجودندارد و درنتیجه، حالت سیستم می‌تواند در هرلحظه تغییر کند.

تعریف. فرایند مارکوف $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته (یا به اختصار زنجیره‌های مارکوف پیوسته) می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر s و t رابطهٔ زیر برقرارباشد:

$$P[X(t+s)=j|X(s)=i,\ X(u)=x(u),\ u\leqslant s] \quad (۲۸.۴)$$
$$=P[X(t+s)=j|X(s)=i]$$

اگر رابطهٔ فوق مستقل از s باشد، این گونه زنجیرهٔ مارکوف را **همگن** می‌نامند. به‌عبارت دیگر، احتمال انتقال سیستم ازیك حالت به‌حالت دیگر، به‌ازای تمام مقادیر i و j و t ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{ij}(t)=P[X(t+s)=j|X(s)=i]=P[X(t)=j|X(0)=i] \quad (۲۹.۴)$$

به‌این ترتیب، $P_{ij}(t)$ احتمال گذار سیستم ازحالت i به j درمدت t است (دراین فصل، تنها به‌بررسیِ زنجیره‌های مارکوف پیوستهٔ همگن می‌پردازیم).

شکل ۱.۴ حرکت سیستم به حالتهای گوناگون را نسبت به‌زمان نشان می‌دهد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، در هرلحظه اززمان، سیستم می‌تواند یکی ازحالتهای ممکن را انتخاب کند. درهرحالت، سیستم مدتی متوقف و سپس به‌حالت دیگر گذر می‌کند. مدت زمان توقف درهرحالت متغیری تصادفی است.

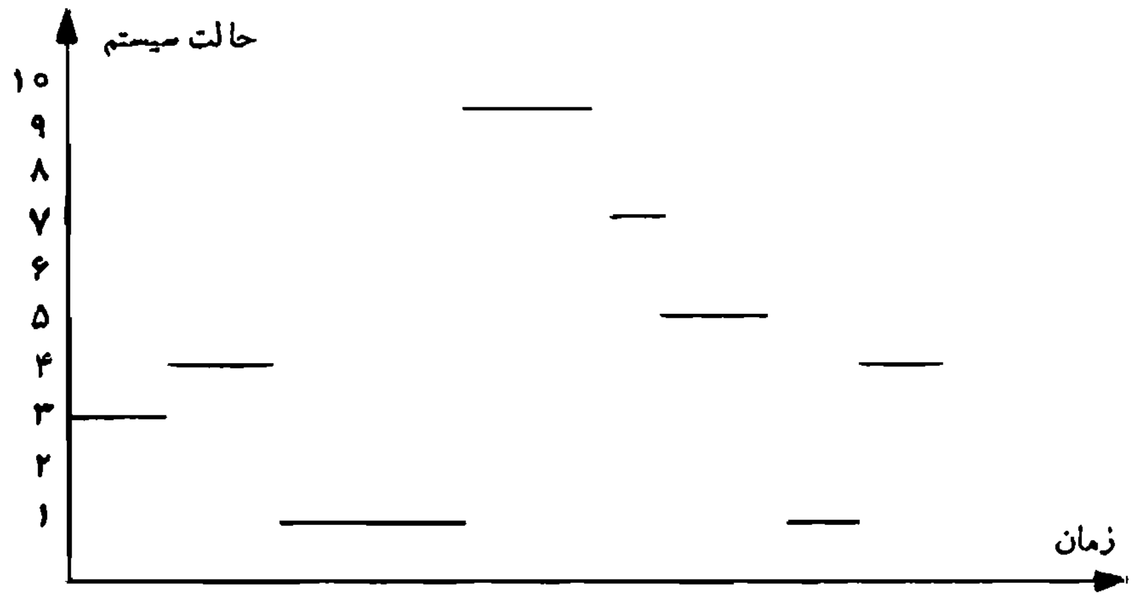
مثال ۱۱.۴ هر فرایند پواسون، یك زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته است، زیرا براساس خاصیت رشد مستقل، تعداد پیشامدها درفاصلهٔ زمانی (s) تا $(s+t)$، مستقل از تعداد مشتریهایی است‌که تا لحظهٔ s وارد شده‌اند. دراین فرایند، رابطهٔ (۲۹.۴) به‌شرح زیر خواهد بود:

اگر $j \geqslant i$ باشد،

$$P_{ij}(t)=P[t \text{ تعداد پیشامدها درمدت زمان } = j-i]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

اگر $j<i$ باشد،

$$P_{ij}(t)=0$$



شکل ۱.۴ گذار سیستم به‌حالتهای مختلف نسبت به‌زمان در یك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته

تابع توزیع مدت‌زمان توقف در یك حالت

هنگامی که سیستم وارد حالتی می‌شود، تا مدتی در آن حالت می‌ماند وسپس به‌حالت دیگری گذار می‌کند. اگر مدت‌زمانی که سیستم درحالت i می‌ماند را با T_i نشان دهیم، این متغیر تصادفی دارای توزیع‌نمایی است. علت این امر را می‌توان به‌شرح زیر بیان‌کرد:

فرض‌کنید که سیستم درلحظه‌ای‌که‌آن را لحظهٔ صفرمی‌نامیم، وارد حالت i شده وتا لحظهٔ s از آن‌حالت‌خارج‌نشده‌باشد. باتوجه‌به‌خاصیت مارکوفی این فرایند، روندحرکت آیندهٔ آن مستقل از مدت زمانی است‌که سیستم درحالت i گذرانیده است. لذا، احتمال اینکه درفاصلهٔ زمانی s تا $t+s$، سیستم همچنان درحالت i باقی بماند، برابراست با احتمال اینکه حالت سیستم ازاین لحظه، به‌مدت t، تغییرنکند. بنابراین

$$P(T_i>t+s|T_i>s)=P(T_i>t) \qquad (۳۰.۴)$$

از طرف دیگر، طبق قضیهٔ ۱.۳، تنها متغیر تصادفی با خاصیت فوق، دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. مقدار این پارامتر را بعداً محاسبه خواهیم‌کرد.

ماتریس گذار و ماتریس آهنگ‌گذار

درمورد زنجیره‌های مارکوف پیوسته، دو نوع ماتریس را درموردگذار حالتها می‌توان معرفی‌کرد، یکی ازآنها، که **ماتریس‌گذار** نامیده وبا $\mathbf{P}(t)$ نشان داده‌می‌شود، دارای همان مفهوم ماتریس انتقال درزنجیرهای مارکوف گسسته است. هرعنصر این ماتریس، $P_{ij}(t)$، معرف احتمال‌گذار سیستم از i به j درمدت t است. به‌این‌ترتیب، این ماتریس خودتابعی ازپارامتر t خواهد بود.

حالت خاص این ماتریس، $P(0)$، باتوجه به‌عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن به‌شرح زیراست:

$$P_{ii}(0)=1$$

به‌ازای $j \neq i$ ،

$$P_{ij}(0)=0$$

بنابراین، این ماتریس به‌شکل **ماتریس یکه** درمی‌آید، یعنی:

$$P(0)=I$$

ماتریس دیگری که می‌تواند گذار حالتها را بیان کند، **ماتریس آهنگ‌گذار** است، که با $\mathbf{Q}$ نشان داده می‌شود. عناصر تشکیل دهندهٔ این ماتریس، q_{ij}، به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

الف. اگر $i \neq j$ باشد،

$$q_{ij}=\lim_{t \to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=\frac{d}{dt}P_{ij}(t) \qquad (۳۱.۴)$$

با درنظرگرفتن اینکه $P_{ij}(t)$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از i به j در مدت‌زمان t است، q_{ij} نشاندهندهٔ آهنگ تغییرحالت سیستم[1] از i به j خواهد بود.

ب. اگر $i=j$ ،

$$q_{ii}=-\sum_{i \neq j} q_{ij} \qquad (۳۲.۴)$$

ازطرف دیگر، رابطهٔ (۳۲.۴) را با کمك رابطهٔ (۳۱.۴) می‌توان به‌شرح زیربیان کرد:

$$q_{ii}=-\sum_{j \neq i}\frac{d}{dt}P_{ij}(t)=\frac{d}{dt}[-1+P_{ii}(t)]=\frac{d}{dt}P_{ii}(t) \qquad (۳۳.۴)$$

به‌این ترتیب، عناصر قطری ماتریس $\mathbf{Q}$ همگی منفی هستند ومجموع عناصر هرسطر برابر با صفر خواهد بود.

باتوجه به‌رابطهٔ (۳۰.۴)، $(-q_{ii})$ معرف آهنگ تغییر حالت از i به مجموعهٔ حالتهای دیگر و q_{ii} معرف آهنگ ماندن سیستم در i است.

مثال ۱۱.۴ را مجدداً درنظر بگیرید. ماتریس آهنگ‌گذار این زنجیرهٔ مارکوف، درسطر i عبارت است از:

$$q_{ij}=0 \quad , \quad j \geqslant i+2 \quad \text{یا} \quad j<i$$

$$q_{i,i+1}=\lambda$$

$$q_{i,i}=-\lambda$$

ارتباط ماتریس آهنگ گذار با ماتریس گذار را می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر مشخص ساخت.

$$\mathbf{Q}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{P(t)-I}{t}=\frac{d}{dt}P(t)\bigg|_{t=0} \qquad (۳۴.۴)$$

محاسبهٔ پارامتر تابع توزیع T_i

همانطور که قبلا گفتیم T_i دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. از طرف دیگر طبق خاصیت «د» توزیع‌نمایی، پارامتر آن معرف آهنگ وقوع پیشامد موردنظر است. لذا پارامتر متغیر تصادفی T_i برابر با $(-q_{ii})$ خواهدبود. به‌این ترتیب،

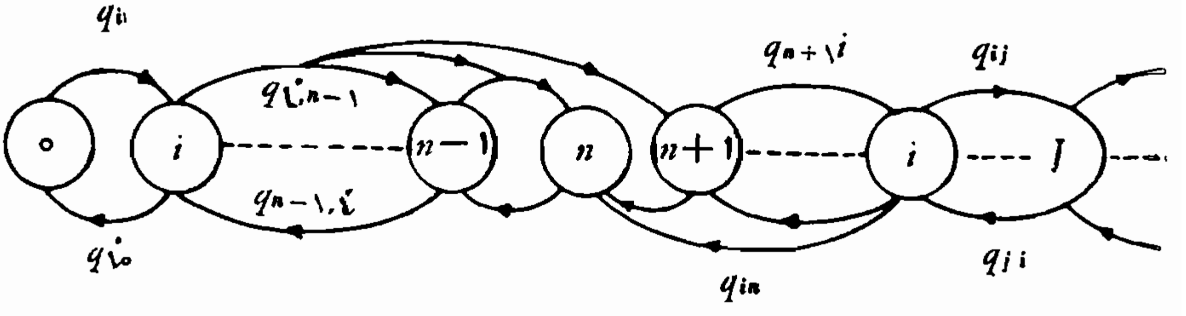
$$P(T_i>x)=e^{q_{ii}x}$$

نمودار آهنگ

رابطهٔ بین حالتهای یك سیستم مارکوفی را می‌توان بـا **نمودار آهنگ** نشان داد. دراین نمودار، گرهها معرف حالت سیستم وشاخه‌ها نشاندهندهٔ امکان‌گذار ازهرحالت به‌حالتهای دیگر است. اندازه‌های روی شاخه‌ها، q_{ij}، بـراساس تعریف فوق، نشاندهندهٔ آهنگ تغییر حالت سیستم از i به j است. درنمودار آهنگ، q_{ii} ها نشان داده‌نمی‌شوند.

معادلهٔ C-K

دراینجا نیزشبیه زنجیره‌های مارکوف گسسته، رابطه‌ای به‌شکل زیر، درمورد همهٔ حالتهای i و j وزمانهای t_1 و t_2 صدق می‌کند.



شکل ۴.۴ نمودار آهنگ یك سیستم مارکوف.

قضیهٔ ۱۳.۴

$$P_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k P_{ik}(t_1)P_{kj}(t_2) \qquad (۳۵.۴)$$

اثبات:

$$P_{ij}(t_1+t_2)=P[X(t_1+t_2)=j|X(0)=i]=\sum_k P[X(t_1+t_2)=j|$$

$$X(t_1)=k,\ X(0)=i]P[X(t_1)=k|X(0)=i]$$

ازطرف دیگر، طبق خاصیت مارکوفی

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)k,\ X(0)=i]=$$

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)=k]=P_{kj}(t_2)$$

و همچنین

$$P[X(t_1)=k|X(0)=i]=P_{ik}(t_1)$$

معادلهٔ $C\text{-}K$ را می‌توان به‌صورت ماتریسی و به شکل زیر نیز نوشت:

$$P(t_1+t_2)=P(t_1)\times P(t_2) \qquad (۳۶.۴)$$

نحوهٔ محاسبهٔ $P(t)$ معادلات پیشرو و پسرو

طبق رابطهٔ (۳۴.۴)، می‌توان $\mathbf{Q}$ را از $P(t)$ به‌دست‌آورد. اما درعمل معمولا $\mathbf{Q}$ را به‌سادگی وبراساس اطلاعات مربوط به‌ساختارزنجیرهٔ مارکوف می توان مشخص ساخت، درحالی‌که به‌دست آوردن $P(t)$ به‌طور مستقیم مشکل یا غیرممکن است. لذا، ضرورت داردکه $P(t)$ با استفاده از $\mathbf{Q}$ محاسبه شود. برای انجام این‌کاررابطهٔ (۳۶.۴) را مجدداً درنظربگیرید. اگر ازطرفین نسبت به t_2 مشتق‌گیری‌کنیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial P(t_1+t_2)}{\partial t_2}=P(t_1)\frac{\partial P(t_2)}{\partial t_2}$$

دررابطهٔ فوق، مقدار t_2 را برابر با صفر و t_1 را برابر t انتخاب می‌کنیم. چنانچه رابطهٔ (۳۴.۴) را هم درنظربگیریم، نتیجه‌می‌شود که

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q \qquad (۳۷.۴)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به‌نام **معادلات پیشرو** $C\text{-}K$ موسوم است.

درمحاسبات فوق، اگر ازرابطهٔ (۳۶.۴) نسبت به t_1 مشتقگیری کنیم، به جای رابطهٔ (۳۷.۴) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید، که «معادلهٔ پسرو C-K» نامیده می‌شود.

$$\frac{dP(t)}{dt}=\mathbf{Q}\cdot P(t) \qquad (۳۸.۴)$$

مثال ۱۲.۴ ماشینی را درنظر بگیرید که یا درحال کارکردن ویا درتعمیرگاه تحت تعمیراست. فرض می‌کنیم مدت‌زمان کار این ماشین متغیری تصادفی بـا توزیع‌نمایی و پارامتر λ ومدت تعمیرنیزدارای توزیع‌نمایی با پارامتر μ است. اگر درلحظهٔ صفرماشین مشغول کار باشد، احتمال اینکه درلحظهٔ $t=۱۵$ نیز درحال کارکردن باشد، چقدراست؟

حل: سیستم دارای دوحالت مشغول به‌کار (۱) و درحال تعمیر (۲) است. ماتریس احتمال گذار این سیستم دارای اجزای زیراست:

$$q_{۱۲}=\lambda \qquad q_{۲۱}=\mu$$

$$q_{۱۱}=-\lambda \quad q_{۲۲}=-\mu$$

پس

$$\begin{bmatrix} \frac{dP_{۱۱}(t)}{dt} & \frac{dP_{۱۲}(t)}{dt} \\ \frac{dP_{۲۱}(t)}{dt} & \frac{dP_{۲۲}(t)}{dt} \end{bmatrix}=\mathbf{Q}\cdot P(t)=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{۱۱}(t) & P_{۱۲}(t) \\ P_{۲۱}(t) & P_{۲۲}(t) \end{bmatrix}$$

یا

$$\frac{dp_{۱۱}(t)}{dt}=-\lambda[p_{۱۱}(t)-p_{۲۱}(t)]$$

$$\frac{dp_{۲۱}(t)}{dt}=\mu[p_{۱۱}(t)-p_{۲۱}(t)]$$

اولی را در μ ودومی را در λ ضرب و باهم جمع می‌کنیم

$$\mu\frac{dp_{۱۱}(t)}{dt}+\lambda\frac{dp_{۲۱}(t)}{dt}=۰$$

انتگرال می‌گیریم:

$$\mu p_{۱۱}(t)+\lambda p_{۲۱}(t)=C$$

باتوجه به‌شرایط‌اولیه، $p_{۱۱}(۰)=۱$ و $p_{۲۱}(۰)=۰$ نتیجه می‌شودکه، $C=\mu$ ودرنتیجه

$$\lambda p_{۲۱}(t)=\mu[۱-p_{۱۱}(t)]$$

این رابطه را دراولین معادلهٔ دیفرانسیل فوق قرارمی‌دهیم. درنتیجه

$$\frac{dp_{۱۱}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)p_{۱۱}(t)+\mu$$

یا

$$\frac{۱}{\lambda+\mu}\frac{dp_{۱۱}(t)}{dt}=-\left[p_{۱۱}(t)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]$$

درنتیجه،

$$\frac{dp_{۱۱}(t)}{p_{۱۱}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=-(\lambda+\mu)dt$$

$$\log_e\left[p_{۱۱}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]=-(\lambda+\mu)t+\log_e C$$

یا

$$p_{۱۱}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

براساس شرایط اولیه $Pii(۰)=۱$، درنتیجه

$$۱-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=C$$

و

$$C=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

و به‌این ترتیب،

$$P_{۱۱}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

دراین مسئله، پیداکردن $P_{۱۱}(۱۵)$ مدنظر است، پس

$$P_{۱۱}(۱۵)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-۱۵(\lambda+\mu)}$$

تبدیل زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته به‌زنجیرهٔ مارکوف معمولی
همان‌طور که گفته‌شد تفاوت دو زنجیرهٔ مارکوف فوق دراین است که درزنجیرهٔ مارکوف گسسته‌تغییرحالتها درواحد زمان بررسی می‌شود، درحالی‌که درزنجیرهٔ مارکوف پیوسته، زمانی‌که سیستم دریك حالت می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی است. حال اگردر زنجیرهٔ مارکوف پیوسته، واحدزمان را مدت‌زمانی بدانیم‌که سیستم دریك حالت می‌ماند، می‌توان آن را به‌زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کرد. دراین صورت، اجزای ماتریس انتقال آن به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{P}_{ii}=0 \qquad (۳۹.۴)$$

$$\mathbf{P}_{ij}=\left(\frac{1}{q_{ii}}\right)q_{ij} \qquad (۴۰.۴)$$

(برای اثبات رابطهٔ (۳۹.۴)، به‌مثال شمارهٔ ۶.۲ فصل ۲ مراجعه شود).

مثال ۱۳.۴ فرایند پواسون را مجدداً درنظربگیرید. اگرحالت سیستم n باشد، یعنی اینکه تااین لحظه n پیشامد اتفاق افتاده است. همان‌طورکه گفته شد، این فرایندیك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. اگر واحد زمان را زمان بین دو پیشامد درنظربگیریم، به‌زنجیرهٔ مارکوف گسسته با ماتریس گذار زیرتبدیل می‌شود:

$$P_{nn}=0$$

$$P_{n,n+1}=1$$

$$P_{nj}=0\,,\ j\neq n+1$$

۶.۴ روابط حدی در زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته

دراینجا نیزمی‌خواهیم تابع توزیع حالت سیستم را دردرازمدت، $(t\to\infty)$ تعیین کنیم. قضیهٔ زیرکه مشابه‌آن درزنجیرهٔ مارکوف گسسته ارائه شد، می‌تواند روابط حدی رادر حالت پایدار به‌دست‌آورد.

قضیهٔ ۱۴.۴ اگرسیستم یکپارچه باشد، دراین صورت، حد $P_{ij}(t)$ به‌سمت عددی میل می‌کندکه آن را π_j می‌نامیم، یعنی

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\pi_j$$

ضمناً اگر تمام حالات برگشت‌پذیر مثبت باشند، که دراین‌صورت سیستم را ارگودیك (*Ergodic*) می‌نامند، مقداراحتمالات حدی نیز ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\sum_j \pi_i q_{ji}=0 \quad , \quad i=1,2,\cdots\cdots \qquad (۴۱.۴)$$

و

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad (۴۲.۴)$$

رابطهٔ (۴۱.۴) را به‌شکل ماتریس زیر می‌توان نشان داد:

$$[\pi_1, \pi_2, \cdots\cdots]\mathbf{Q} = 0 \qquad (۴۳.۴)$$

دراینجا $\mathbf{Q}$ ماتریس آهنگ گذار و π_j معرف درصدی از زمان است‌که سیستم درحالت i می‌ماند.

استفاده ازنمودار آهنگ برای محاسبهٔ روابط حدی

رابطهٔ (۴۱.۴) را می‌توان با کمك نمودار آهنگ نیز به‌دست آورد. برای هرحالت، مثلا i، رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر درمی‌آوریم:

$$\pi_i q_{ii} = \sum_{j\neq i} \pi_j q_{ji} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots\cdot$$

اما می‌دانیم‌که

$$q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}$$

درنتیجه

$$\sum_{j\neq i} \pi_i q_{ij} = \sum_{j\neq i} \pi_j q_{ji} \qquad (۴۴.۴)$$

جملات سمت‌چپ مربوط به‌آهنگ گذار خروجی از i به‌بقیهٔ حالتها وجملات سمت‌راست مربوط به‌آهنگ‌گذار ازسایـر حالتها به i است. هـرجمله حاصل‌ضرب دوکمیت است. اولی آهنگ گذار ازیك حالت به‌حالت دیگر، q_{ij}، ودیگری احتمال بودن سیستم درحالت مبدأ، π_i، است. بـدیهی است کـه، بـا توجه به‌اینکه رابطهٔ (۴۱.۴) برای به‌دست‌آوردن روابط حدی است، مقادیر احتمالات موردنظر نیز مربوط به‌درازمدت خواهد بود.

به‌این‌ترتیب، برای محاسبهٔ روابط حدی می‌توان ازنمودار آهنگ استفاده‌کرد. برای این‌منظورمجموع $\pi_n q_{nj}$ های خروجی و ورودی هرحالت را مساوی یکدیگر قرارمی‌دهیم. این گونه معادلات را **معادلات تعادلی** نیز می گویند.

مثال ۱۴.۴ زنجیرهٔ مارکوفی که ماتریس آهنگ گذار آن به‌شرح‌زیر است را درنظر بگیرید

$$Q=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۲ & -۶ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۴ & -۹ & ۵ \\ ۰ & ۳ & ۳ & -۶ \end{bmatrix}$$

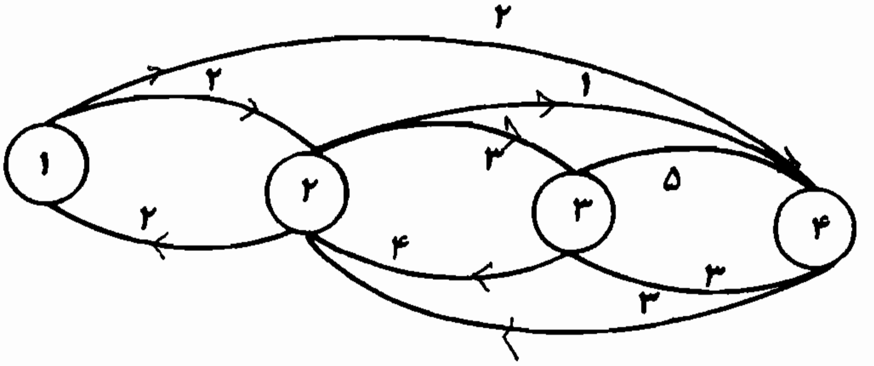
رابطه‌های حدی برای این زنجیره با استفاده از رابطه‌های (۴۲.۴) و (۴۳.۴) به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$[\pi_۱ \ \ \pi_۲ \ \ \pi_۳ \ \ \pi_۴]Q=۰$$

با

$$\begin{cases} -۴\pi_۱+۲\pi_۲=۰ \\ ۲\pi_۱-۶\pi_۲+۴\pi_۳+۳\pi_۴=۰ \\ ۳\pi_۱-۹\pi_۳+۳\pi_۴=۰ \\ ۲\pi_۱+\pi_۲+۵\pi_۳-۶\pi_۴=۰ \\ \pi_۱+\pi_۲+\pi_۳+\pi_۴=۱ \end{cases} \qquad (۴۵.۴)$$

معادلات فوق را می‌توانیم بـا استفاده از معادلات تعادلی نیز به‌دست آوریم. برای این‌کار ابتدا نمودار آهنگ این مسئله‌را رسم می‌کنیم. چون این زنجیره‌دارای چهار حالت است، نمودار آهنگ نیز دارای چهار گره‌است که هر گره معرف یك حالت است. مقادیر مربوط به‌آهنگ گذار از هرحالت به حالت دیگر نیز روی نمودار نشان داده شده است. معادلات تعادلی را برای هر گره (حالت)، می‌نویسیم:



حالت ۱:

مقادیر مربوط به خروج از حالت ۱ ، $(۲+۲)\pi_۱$

مقادیر مربوط به‌ورود به‌حالت ۱ ، $۲\pi_۲$

درنتیجه با استفاده ازمعادلهٔ تعادلی داریم: $۴\pi_۱ = ۲\pi_۲$

حالت ۲: $(۲+۳+۱)\pi_۲ = ۲\pi_۱ + ۴\pi_۳ + ۳\pi_۴$

حالت ۳: $(۴+۵)\pi_۳ = ۳\pi_۲ + ۳\pi_۴$

حالت ۴: $(۳+۳)\pi_۴ = ۲\pi_۱ + \pi_۲ + ۵\pi_۳$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، معادلات فوق همان معادلات (۴۵.۴) هستند، که مستقیماً از روی نمودار آهنگ و براساس معادلات تعادلی به‌دست آمده‌اند، پس ازحل معادلات فوق، احتمالات حدی به‌دست می‌آیند.

مسائل

۱. دریك‌سیستم مخابراتی، پیامها به‌شکل صفرویك ارسال می‌شوند. هرپیام باید ازمراحل مختلف بگذرد. فرض‌کنیدکه یك پیام با احتمال P بدون تغییر یك مرحله را طی می‌کند. اگر X_n معرف حالت یك پیام (صفر و یك) درمرحلهٔ n ام باشد، نشان دهیدکه X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد. ماتریس گذار را بنویسید.

۲. درهریك از دوظرف موجود، سه‌توپ وجوددارد. سه‌عدد ازتوپها سفید وسه عدد دیگر قرمز است. هردفعه به‌طورهمزمان ازهرظرف یك‌توپ به‌طورتصادفی برمی‌داریم ودرظرف دیگر قرارمی‌دهیم. اگر X_n معرف تعداد توپهای سفید ظرف اول پس از n دفعه برداشتن باشد، نشان دهیدکه X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل‌می‌دهد. ماتریس گذارآن را بنویسید.

۳. سکه‌ای که احتمال‌آمدن شیر درآن P است، را پرتاب می‌کنیم. $X_n = k$ معرف‌این است که تاکنون k نوبت متوالی (و ازجمله در پرتاب n ام) شیرآمده است. X_n را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید وماتریس‌گذار آن را بنویسید.

۴. درظرفی پنج‌توپ سفید و چهارتوپ قرمز وجود دارد. هردفعه یك توپ را به‌طور تصادفی ازظرف برمی‌داریم وسپس آن توپ به‌اضافهٔ دو توپ همرنگ‌آن را مجدداً به ظرف برمی‌گردانیم. فرض‌کنید X_n معرف رنگ توپی باشدکه دردفعهٔ n ام ازظرف برداشته‌ایم. (این مدل به‌مدل $Polya$ معروف است).

زنف تابع توزیع X_n را به دست آورید. برای این منظور، با استفاده از روش

استقرا[۱] نشان دهید که احتمال انتخاب یك توپ سفید همیشه برابر ۵/۹ است.
ب. آیا X_n یك زنجیرهٔ مارکوف همگن را تشکیل می‌دهد؟
ج. Y_n را تعداد توپهای سفید موجود در ظرف قبل از n امین برداشت در نظر بگیرید. آیا Y_n زنجیرهٔ مارکوف است؟ در صورتی که جواب مثبت است، ماتریس گذار را بنویسید.

۵. انباری را درنظر بگیرید که کالایی را عرضه می‌کند. تقاضا برای این کالا درطول هفته می‌تواند با احتمال یکسان، صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد. در انتهای هر هفته سفارش کالا انجام می‌شود و بلافاصله تأمین می‌گردد، اما انبار مجبور است که کالا را فقط در بسته‌های سه‌تایی بخرد. اگر درطول هفته مشتری مراجعه کرد و کالا موجود نبود، سفارش او همچنان محفوظ می‌ماند و پس از تأمین کالا به‌او تحویل داده می‌شود. لذا، سطح موجودی منفی به‌معنای سفارش تأمین نشده است. ضابطهٔ سفارش به‌این ترتیب است که چنانچه موجودی درانتهای هفته به‌میزانی کمتر از ۲ (۱ یا کمتر) برسد، حداقل سفارش ممکن داده می‌شود، تا میزان موجودی به ۲ یا بیشتر برسد (با درنظر گرفتن اینکه فقط سفارش با ضرایب ۳ امکانپذیر است). نشان‌دهید که‌میزان موجودی درانتهای هفته، قبل وهمچنین بعد ازسفارش، به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف است.
ماتریس گذار این دو زنجیرهٔ مارکوف را بنویسید.

۶. درمسئلهٔ یك، با روش استقرا نشان دهید که،

$$\mathbf{P}^{(n)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2P-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2P-1)^n\end{bmatrix}$$

۷. مسئلهٔ یك را مجدداً بافرض $P=0/9$ درنظربگیرید. احتمال اینکه یك‌پیام صفر پس‌از گذشتن‌از ۵ مرحله بازهم به‌شکل صفر باشد، چقدراست؟ اگر پیامی‌پس‌از گذشتن‌از ۵ مرحله به‌شکل صفر باشد، احتمال اینکه در شروع مراحل هم به‌شکل صفر بوده‌باشد، چقدراست، مشروط براینکه تعداد پیامهای صفر در مرحلهٔ شروع، ۲ برابر پیامهای یك بوده‌باشد؟

۸. فرایند X_n را درنظر بگیرید که فقط مقادیر صفر ویك و دو را انتخاب می‌کند. فرض کنید که عبارت زیر، بسته به‌اینکه n فرد یا زوج باشد، برابر با P_{ij} یا P'_{ij} است.

$$P\{X_{n+1}=j|X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0\}$$

۱. برای این‌منظور، ابتدا ثابت‌کنید که رابطهٔ فوق به‌ازای $n=1$ صدق می‌کند. آن‌گاه، نشان دهید که اگر رابطهٔ به‌ازای n صادق باشد به‌ازای $(n+1)$ نیزصادق است.

P_{ij} و P'_{ij} را از ماتریسهای زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\mathbf{P}=\begin{vmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{P'}=\begin{vmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{vmatrix}$$

آیا X_n یك زنجیرهٔ مارکوف همگن تشکیل می‌دهد؟ اکنون حالت سیستم را به صورت $Y_n=(a/b)$ نشان می‌دهیم، که a مقادیر صفر ویك و دو را می‌گیرد(یعنی همان حالتهای قبلی) و b نشان‌دهندهٔ زوج یا فرد بودن‌مقدار n است. این‌فرایند را درچارچوب یك‌زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

۹. سه زنجیرهٔ مارکوف، که ماتریسهای گذار آنها به‌شرح زیراست را درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

کدام حالتها برگشت‌پذیرند؟ دورهٔ برگشت را برای هرحالت محاسبه کنید.

۱۰. زنجیرهٔ مارکوفی با سه‌حالت ۱ و ۲ و ۳ وبا ماتریس‌گذار زیرمفروض است. اگردر ابتدا سیستم درحالت ۱ باشد، احتمال اینکه پس ازدومرحله مجدداً درحالت ۱ قرار گیرد. چقدراست؟ آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از تعداد مراحل بسیارزیاد، به‌چه احتمالی درحالت ۱ خواهد بود؟

$$\begin{vmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

۱۱. یك زنجیرهٔ مارکوف ۸ × ۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید $j \leftrightarrow i$، نشان‌دهید که حداکثر در ۸ مرحله می‌توان از i به j رسید.

۱۲. در مسئلهٔ یك، آیا احتمال حدی وجود دارد؟ جوابهای به‌دست آمده را باجواب مسئلهٔ شش مقایسه کنید.

۱۳. پنج نفر روی یك دایره ایستاده‌اند و مشغول توپ‌بازی هستند. هر کسی توپ را دراختیار داشته باشد، به‌طور شانسی برای دیگران پرتاب می‌کند. احتمال اینکه کسی که توپ در اختیارش است، پس از دو پرتاب مجدداً توپ را دراختیار داشته باشد، چقدر است؟ پس ازپنج پرتاب، و در درازمدت، احتمال اینکه توپ دراختیار این شخص قرار گیرد، چقدر است؟

۱۴. ماتریس گذار یك زنجیرهٔ مارکوف را درنظر بگیرید، که مجموع عناصر هرستون آن برابر بایك باشد. اگر این ماتریس یکپارچه و نادوره‌ای، ودارای M حالت باشد، نشان دهید که در درازمدت رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود:

$$\pi_j = \frac{1}{M} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, M$$

۱۵. فرض کنید که X_n معرف مجموع پرتابهای n طاس باشد. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۴ رابطهٔ زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n \text{ مضربی ازعدد نه بودن})$$

راهنمایی: فرض کنید که Y_n معرف مابه‌التفاوت X_n با بزرگترین مضرب q که از X_n کوچکتراست باشد، ماتریس گذار Y_n را بنویسید ونشان دهید که مجموع عناصر ستونهای آن برابر بایك است. آن‌گاه ازنتیجه مسئلهٔ ۱۴ استفاده کنید.

۱۶. در هردست مسابقه بین دوتیم الف و ب، تیم الف به‌احتمال ۴ر۰ برنده می‌شود. تیمی برنده است که سه‌دست را ببرد و پس از آن بازی متوقف می‌شود.

الف) این مسئله را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

ب. بااستفاده ازرابطه‌های زنجیره‌ای مارکوف، این احتمال راکه بازی درسه دست تمام شود، حساب کنید.

ج) بااستفاده ازروابط زنجیره‌های مارکوف، این احتمال را که تیم الف برنده شود، حساب کنید.

۱۷. دریك سیستم موجودی، فرض می‌شود که میزان تقاضا درهر هفته متغیری تصادفی با توزیع پواسون ومیانگین ۲ است. چنانچه میزان موجودی درانتهای هفته صفریا یك باشد، مقدار سفارش به‌اندازه‌ای خواهدبودکه سطح موجودی به ۴ برسد. اما اگر موجودی در

پایان هفته دو یا بیشتر باشد، سفارشی داده نمی‌شود. فرض می‌کنیم که کالای سفارش شده بلافاصله به‌انبار می‌رسد و چنانچه تقاضایی درطول هفته به‌علت نداشتن موجودی تأمین نشود، آن تقاضا از دست رفته تلقی می‌شود. این مسئله را به شکل یك زنجیرهٔ مارکوف فورموله کنید وماتریس گذار آن را بنویسید. تابع توزیع مقدارموجودی کالا را دردراز-مدت به‌دست آورید.

۱۸. زنجیرهٔ مارکوف پیوسته‌ای باسه‌حالت (۰ و۱ و۲) وماتریس آهنگ گذار زیر مفروض است

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -0.6 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & 1.2 & -1.2 & 0 \\ 2 & 0.6 & 0.2 & -0.8 \end{array}$$

الف. نمودار آهنگ آن را رسم کنید

ب. احتمال اینکه دردرازمدت سیستم درحالت صفر باشد، چقدراست؟

۱۹. زنجیرهٔ مارکوف پیوستهٔ مسئلهٔ ۱۸ را به زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کنید.

۲۰. بااستفاده ازروابط حدی درزنجیرهٔ مارکوف پیوسته، احتمالات حدی مدل مسئلهٔ ۱۸ را محاسبه کنید ونتایج حاصله را با نتایج به‌دست آمده ازنمودار آهنگ مقایسه کنید.

۲۱. نشان دهید که ماتریس زیرمعرف ماتریس گذار یك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. آن گاه ماتریس آهنگ گذار را به‌دست آورید.

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix} 0.6+0.4e^{-5t} & 0.4-0.4e^{-5t} \\ 0.6-0.6e^{-5t} & 0.4+0.6e^{-5t} \end{bmatrix}$$

۲۲. نمودار آهنگ مسئلهٔ ۲۱ را رسم کنید وسپس احتمال بودن سیستم را درهریك از دو حالت (دردرازمدت) حساب کنید. این نتایج را مستقیماً ازروی ماتریس $\mathbf{P}(t)$ نیز به‌دست آورید.

۲۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل پیشرو و پسرو (C-K) مربوط بـه مسئلهٔ ۱۸ را بنویسید.

۲۴. با استفاده ازمعادلات پیشرو(یا پسرو) C-K، تـابع توزیع $P_n(t)$ درفرایند پواسون را به‌دست آورید.

۲۵. ثابت کنید که در درازمدت ($n \to \infty$)، رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$P(X_n=j\,|\,X_{n+1}=i)=p_{ij}\frac{\pi_j}{\pi_i}$$

۲۶. درمثال ۶.۴، باروش استقرا نشان دهیدکه به‌ازای تمام مقادیر n، مقدار هرکدام از احتمالات زیر حداقل برابر با ۳ر۰ است. آن گاه ثابت کنیدکه حالتهای ۱ و ۲ برگشت‌پذیر هستند.

$$(p_{۲۲}^{(n)}, p_{۲۱}^{(n)}, p_{۱۲}^{(n)}, p_{۱۱}^{(n)})$$

۲۷. با فرض دانستن ماتریس آهنگ گذار، با استفاده ازرابطهٔ پیشرو یا پسرو $(C\text{-}K)$، ماتریس‌گذار مسئلهٔ ۲۱ را به‌دست‌آورید

راهنمایی: ازرابطه‌های $\frac{dp_{۱۱}(t)}{dt}-\frac{dp_{۲۱}(t)}{dt}$ وهمچنین $\frac{۳dp_{n}(t)}{dt}+\frac{۲p_{۲۱}(t)}{dt}$ استفاده کنید.

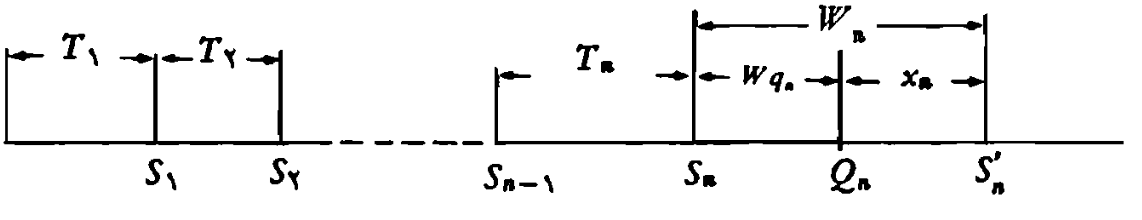
۵

چارچوب کلی سیستمهای صف

دراین فصل، چارچوب و رابطه‌های کلی حاکم بر سیستمهای صف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنین رابطه‌هایی درمورد همهٔ سیستمها صادق است و بستگی به شرایط ویژهٔ آنها ندارد. حالتهای خاص را درفصول بعد بررسی می‌کنیم.

۱.۵ بیان ترسیمی سیستم برحسب زمان

فرض کنیدکه اولین مشتری در زمان s_1، دومی در s_2 و n امین مشتری درزمان s_n وارد سیستم می‌شود. فاصلهٔ زمانی بین ورود مشتری $(n-1)$ ام و مشتری n ام را با T_n نشان



شکل ۱.۵ رابطهٔ بین ورود، خروج و مدت انتظار مشتریان درسیستم

می‌دهیم. یك مشتری، فرضاً مشتری شماره n، پس از ورود، مدتی درصف می‌ماند وسپس درلحظهٔ Q_n شروع بـه دریافت خدمت می‌کند، و بـالاخره در زمان S'_n از سیستم خارج می‌شود. مدت زمان انتظار این مشتری درصف را با Wq_n، مدت‌زمان توقف او درسیستم را با W_n ومدت‌زمان دریافت خدمت را با x_n نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب، رابطه‌های زیر میان این پارامترها برقراراست.

$$Wq_n = Q_n - S_n \qquad (۱.۵)$$

$$W_n = S'_n - S_n \qquad (۲.۵)$$

$$x_n = S'_n - Q_n \qquad (۳.۵)$$

$$W_n = Wq_n + x_n \qquad (۴.۵)$$

روابط فوق، درشکل ۱.۵ نشان داده شده است.

تعداد مشتریهایی را که تا لحظهٔ t وارد سیستم شده‌اند بـا $X(t)$ و تعداد مشتریهایی را که تا این لحظه خارج شده‌اند با $X'(t)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر،

$$X(t) = \{n:\ S_n \leqslant t ، S_{n+1} > t\} \qquad (۵.۵)$$

$$X'(t) = \{n:\ S'_n \leqslant t ، S'_{n+1} > t\} \qquad (۶.۵)$$

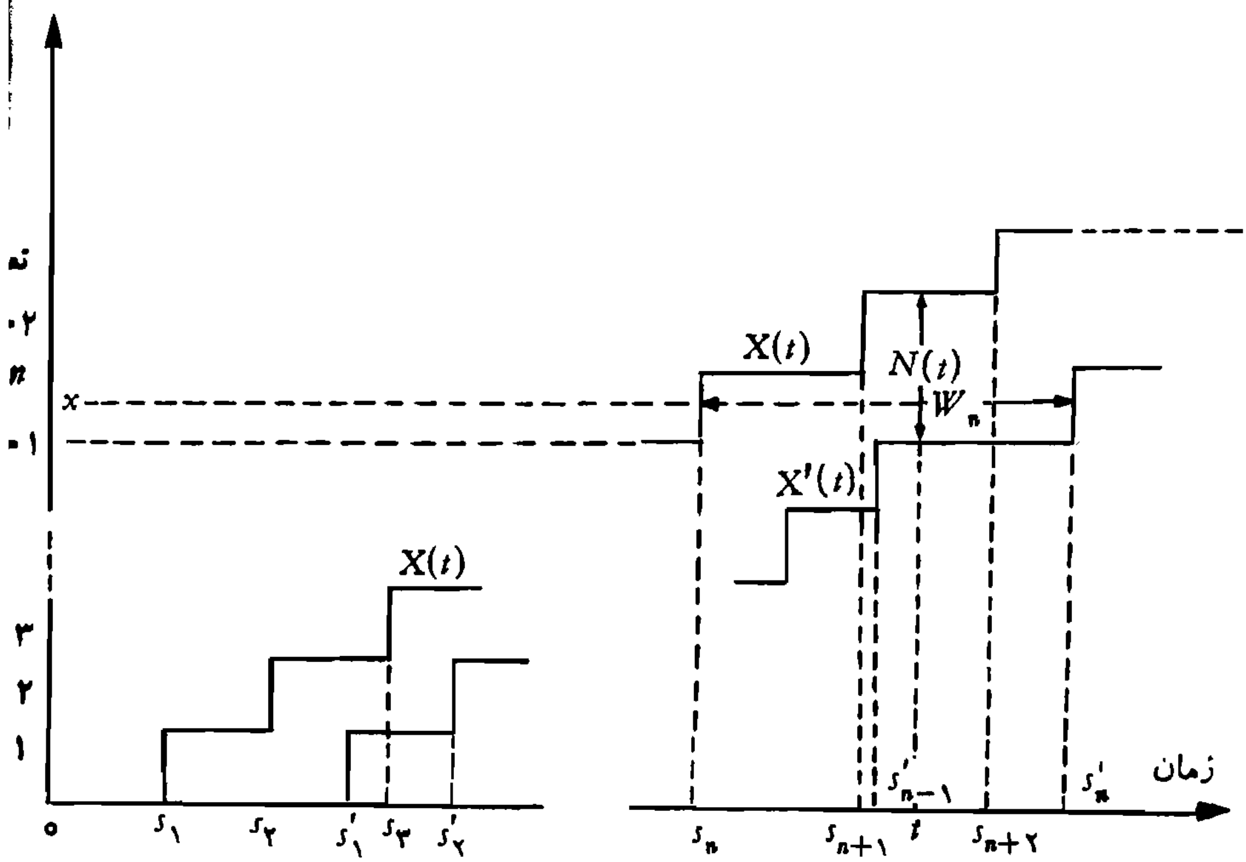
اگر تعداد مشتریهای داخل سیستم را درلحظهٔ t با $N(t)$ بیان کنیم

$$N(t) = X(t) - X'(t) \qquad (۷.۵)$$

شکل ۲.۵، منحنی تغییرات $X(t)$ و $X'(t)$ را نسبت بـه زمان نشان می‌دهد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، درزمانهای S_n، $(n = ۱, ۲, \ldots)$ مقدار تابع $X(t)$ و درزمانهای S'_n، مقدارتابع $X'(t)$ دارای جهشی برابرواحد است. فاصلهٔ عمودی بین این دوتابع، درلحظهٔ t، معرف تعداد مشتریهای داخل سیستم دراین لحظه، یعنی $N(t)$، خواهـد بود. از طرف دیگر، فاصلـهٔ افقی بین محور عمودی (یعنی $t = ۰$) در ارتفاع x، $(n-۱ < x < n)$ تا منحنی $X(t)$، بیانگر زمـان ورود مشتری n ام، یعنی S_n وفاصلهٔ افقی بین $X(t)$ و $X'(t)$ درهمین فاصله معرف زمان انتظار مشتری n ام درسیستم، یعنی W_n خواهد بود.

۲.۵ دورهٔ گذرا و دورهٔ پایدار سیستم

معیارهای عمدهٔ بررسی یك سیستم نظیر میانگین تعداد مشتریها درسیستم، زمان انتظار یك مشتری درسیستم (و یـا صف) و درصد بیکاری سیستم معمولا ماهیت تصادفی دارد ولـذا میانگین آنها باید مبنای ارزیابی سیستم قرارگیرد. اما، میانگین ویا سایرکمیتهای مربوط به‌آنها نیز خود تابعی اززمان است. دربسیاری ازسیستمها، موقعی که زمان از حد مشخصی

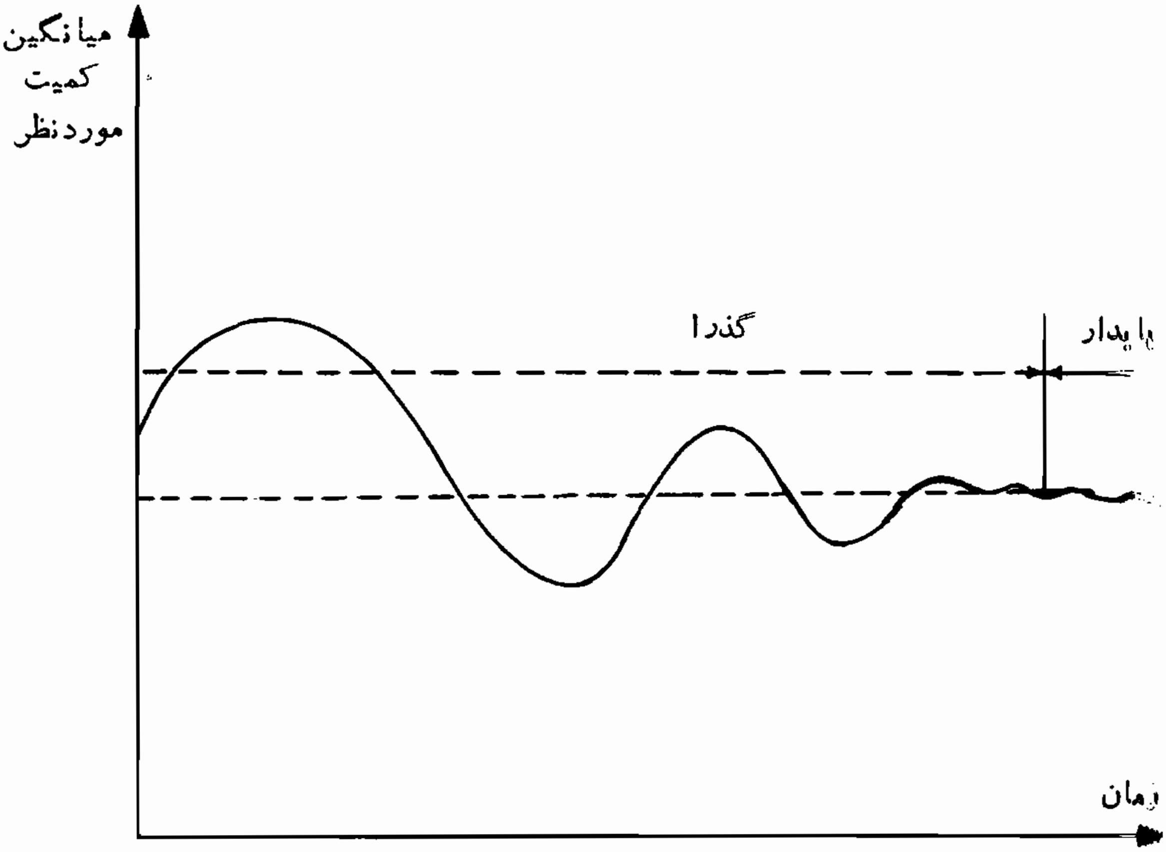


شکل ۳.۵ منحنی تغییرات تعداد مشتریهای سیستم نسبت به‌زمان

تجاوز کند، این کمیتها به سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند. مثلاً، اگر سیستم درزمان شروع کار، با تعداد زیادی مشتری روبه‌رو باشد، بدیهی است که طول صف زیاد خواهد بود؛ اما، ممکن است به‌تدریج طول صف کم شود و بعد از مدتی میانگین آن تقریباً ثابت بماند. میانگین طول صف در درازمدت (یا میانگین مدت زمان انتظار مشتری درصف) معمولاً بستگی به‌شرایط اولیهٔ سیستم ندارد.

با این مقدمه، **دورهٔ گذرا** را مدت زمانی تعریف می‌کنیم که وضعیت سیستم (میانگین معیارهای ارزیابی وسایرعوامل مربوط به‌آن) تغییر می‌کند. این دوره معمولاً زمان شروع کار سیستم را در برمی‌گیرد و در آن شرایط اولیه روی تغییرات وضعیت سیستم تأثیر می‌گذارد. **دورهٔ پایدار** دوره‌ای است که تغییرات سیستم درآن مستقل از زمان و شرایط اولیهٔ‌سیستم است. شکل ۳.۵ نشان می‌دهد که میانگین یکی ازمعیارهای ارزیابی، درشروع کار سیستم درحال نوسان است؛ اما، پس از گذشت مدتی، تقریباً ثابت می‌ماند.

بدیهی است که شرایط دورهٔ گذرا، جز در مورد مطالعات خاص، نمی‌تواند مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد، بلکه آنچه اهمیت دارد تغییرات آن در درازمدت و دردورهٔ پایداراست. ازاین‌رو، درنظریهٔ صف بررسی معیارهای ارزیابی سیستم، دردورهٔ پایدار (در



شکل ۳.۵ دوره‌های گذرا و پایدار

...ازمدت) انجام می‌شود، اگرچه بررسیهای محدودی هم درزمینهٔ تغییرات سیستم دردورهٔ ... به عمل می‌آید. ضمناً باید درنظر داشت که مطالعهٔ سیستم دردورهٔ گذرا کاری ...ار مشکل، و درمورد بسیاری ازسیستمها، غیرممکن است.

همهٔ سیستمها لزوماً دارای دورهٔ پایدار نیستند. مثلا، اگر آهنگ ورود مشتری بیش ... آهنگ خروج آن باشد، طول‌صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌سمت بینهایت میل‌می‌کند. ...ن سیستمی هرگز به‌حالت پایدار نمی‌رسد.

۳.۵ رابطهٔ بین معیارهای ارزیابی یك سیستم صف

...ا استفاده ازشکل ۱.۵، می‌توان مدت زمان انتظار یك مشتری مشخص درسیستم و یا صف ...مچنین تعداد مشتریهای سیستم را درهرلحظه تعیین‌کرد. بیکاری یا مشغول بودن خدمت‌...ندگان درزمانهای مختلف، نیز ازشکل ۲.۵ به‌دست می‌آید. بدیهی است‌که برای تعیین ...ارهای ارزیابی سیستم، اطلاعات مربوط به یك مشتری خاص نمی‌تواند مدنظر باشد، ...له اطلاعات مربوط به مجموعهٔ مشتریها ملاك ارزیابی تواند بود. باید توجه داشت‌که ...ی یك مشتری مشخص هم، اگر دوبار به‌سیستم مراجعه‌کند، معمولا به دو نتیجه متفاوت ...ی‌رسد، که علت آن ماهیت احتمالی متغیرهای سیستم است. ضمناً، همان‌طورکه گفته شد

معیارهای ارزیابی با توجه به‌شرایط دورهٔ پایدارسیستم تعیین خواهد شد.

برای ارزیابی سیستم در درازمدت، معیارهای عمده عبارت‌اند از:

L = میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت

L_q = میانگین تعداد مشتریان درصف در درازمدت

W = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم در درازمدت

W_q = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درصف در درازمدت

π_n = احتمال بودن n مشتری درسیستم در درازمدت

بدیهی است که معیارهای فوق در صورتی دارای معنا خواهد بود که سیستم به دورهٔ پایدار برسد. به‌بیان ریاضی، معیارهای فوق را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد:

$$L=\lim_{t\longrightarrow\infty}\{EN(t)\} \qquad (۸.۵)$$

$$W=\lim_{t\longrightarrow\infty} E\ (\text{مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم}) \qquad (۹.۵)$$

$$\pi_n=\lim_{t\longrightarrow\infty} P_n(t)=\lim_{t\longrightarrow\infty} P\ (t \text{ بودن } n \text{ مشتری درسیستم درلحظهٔ }) \qquad (۱۰.۵)$$

W_q و L_q نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شوند.

استنتاج لیتل

رابطه‌های بین معیارهای ارزیابی یك سیستم در دراز مدت، با استفاده از استنتاج لیتل، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید. این رابطه‌ها که در نظریهٔ صف اهمیت خاصی دارند، درمورد تمام سیستمهای صف صادق هستند.

$$L=\lambda W \qquad (۱۱.۵)$$

$$Lq=\lambda W_q \qquad (۱۲.۵)$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu} \qquad (۱۳.۵)$$

در رابطهٔ فوق، λ معرف آهنگ مراجعهٔ مشتری، یا میانگین تعداد بالقوهٔ مشتریانی است که درواحد زمان وارد سیستم می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌فرض ثابت‌بودن λ، L و W متناسب با یکدیگرند. به‌عبارت دیگر، هرچه میانگین‌مدت زمان انتظار مشتریان بیشتر باشد (یعنی سیستم شلوغتر باشد)، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم نیز بیشتر می‌شود. از یك‌طرف، تعداد مشتریهایی که‌داخل‌سیستم‌هستند، مستقیماً بستگی به‌آهنگ ورود مشتریان دارد. از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۱۳.۵)، میانگین مدت زمانی که یك مشتری درسیستم

می‌گذرانند، برابر است با میانگین مدت زمانی که در صف می‌گذرانند به‌اضافه مدت‌زمانی که مشغول دریافت خدمت است.

دراینجا از اثبات دقیق ریاضی استنتاج لیتل صرف‌نظر می‌کنیم. لیکن، برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که سیستم درزمان t باشد. برحسب تعریف، متوسط زمانی را که یک مشتری درسیستم گذرانیده است، W_t می‌نامیم. براین اساس، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ t درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با:

تعداد مشتریهایی که تا این لحظه وارد سیستم شده‌اند ضرب در W_t

$$W_t \cdot X(t) \qquad (۱۴.۵)$$

از طرف دیگر، مجموع مدت زمانی که مشتریها در واحد زمان درسیستم صرف می‌کنند، برابر با میانگین تعداد مشتریان درسیستم است. درنتیجه، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ t درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با

$$E[N(t)] \cdot t \qquad (۱۵.۵)$$

از رابطه‌های (۱۴.۵) و (۱۵.۵) نتیجه می‌شود.

$$E[N(t)] = \frac{X(t)}{t} \cdot W_t \qquad (۱۶.۵)$$

$X(t)/t$ بیانگرمتوسط تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان (درفاصلهٔ صفر تا t) وارد سیستم شده‌اند و برحسب تعریف، آهنگ ورود مشتریان نامیده می‌شود.

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{t} \qquad (۱۷.۵)$$

دررابطه (۱۶.۵)، اگر t به‌سمت بینهایت میل کند، درواقع رابطهٔ اول لیتل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵) به‌دست می‌آید.

رابطهٔ بین L و π_n

باتوجه به‌اینکه L، برحسب‌تعریف، میانگین تعدادمشتریها درسیستم است و با درنظر گرفتن رابطهٔ کلی محاسبهٔ میانگین، می‌توان L را به‌شرح زیرمحاسبه‌کرد:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P\,(\text{بودن } n \text{ مشتری در سیستم}) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \qquad (۱۸.۵)$$

محاسبهٔ L با استفاده از تبدیل z

اگر تبدیل z احتمالات حدی را با $P(z)$ نشان دهیم، یعنی

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n$$

$$L=\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} \qquad (۱۹.۵)$$

زیرا

$$\frac{dP(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty}n\pi_n z^{n-1}$$

اگر $z=1$ باشد، رابطهٔ (۱۹.۵) به‌رابطهٔ (۱۸.۵) تبدیل می‌شود. به‌همین ترتیب

$$Lq=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot P(\text{بودن } n \text{ مشتری در صف})$$

ازطرف دیگر، درسیستمی با m خدمت‌دهنده، اگرجمعیت مشتریان برابر با n باشد، طول صف برابر با $(n-m)$خواهد بود، لذا

$$Lq=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_m \qquad (۲۰.۵)$$

۴.۵ دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن یك سیستم صف

هرسیستم صف مدتی **بیکار** می‌ماند. این دوره ازخروج آخرین مشتری شروع می‌شود و با ورود اولین مشتری‌بعدی پایان می‌یابد. پس‌از آن، **دورهٔ مشغول بودن** سیستم شروع می‌شود و ادامه‌می‌یابد تا زمانی‌که تمام مشتریها ازسیستم‌خارج شوند. آن‌گاه، **دورهٔ بیکاری** مجدداً آغاز می‌گردد و همین روند ادامه می‌یابد. مجموعهٔ یك دورهٔ بیکاری ومشغول‌بودن را یك **چرخهٔ اشتغال سیستم**می‌گویند. درشکل ۴.۵ دوره‌های‌بیکاری با $I_1, I_2, \dots I_n$ و دوره‌های کار با B_1، $B_2, \dots B_n$ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سیستم به‌طور متناوب دوره‌های بیکاری و مشغول بودن را می‌گذراند. اولین چرخهٔ اشتغال سیستم، مدت زمان I_1+B_1 و n امین چرخهٔ آن I_n+B_n است. با توجه به تصادفی‌بودن زمانهای ورود مشتری و مدت خدمت، بدیهی است که دوره‌های بیکاری ومشغول‌بودن (و طبیعتاً چرخه‌های‌اشتغال) معمولا متغیر تصادفی‌هستند. اگر در درازمدت، P_b را درصدی ازاوقات بدانیم‌که سیستم مشغول به‌کار است.

شکل ۴.۵ دوره‌های بیکاری و مشغول‌بودن و چرخه‌های اشتغال

$$P_b=\lim_{n\to\infty}\frac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{I_1+B_1+I_2+B_2+\cdots+I_n+B_n} \qquad (۲۱.۵)$$

در حالتی که متغیرهای تصادفی I_1، I_2، ...، I_n مستقل و دارای توزیع یکسان و همچنین B_1 و B_2 و... نیزدارای همین خاصیت باشند، طبق قانون اعداد بزرگ خواهیم‌داشت:

$$P_b=\frac{E(B)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۲.۵)$$

که $E(I)$ و $E(B)$ به‌ترتیب معرف میانگین دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن سیستم در دراز مدت هستند ومقدار آنها برای مدلهای خاص در فصلهای بعدی محاسبه خواهد شد.

به‌همین‌ترتیب، درصد بیکاری سیستم در درازمدت برابربا $1-P_b$ است. ازطرف دیگر، طبق تعریف، درصدی اززمان کــه سیستم فاقد مشتری است را با π_0 نشان می‌دهیم. بنابراین، تحت شرایط فوق،

$$\pi_0=\frac{E(I)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۳.۵)$$

۵.۵ ضریب بهره‌وری

همان‌طور که قبلا گفتیم، یکی از معیارهای ارزیابی سیستم درصدی اززمان است‌که سیستم کار می‌کند. برای نشان دادن این معیار، ازعاملی به‌نام **ضریب بهره‌وری** استفاده مـــی‌شود، که تعریف آن به‌شرح زیراست:

$$\rho=\frac{\text{میانگین کل تقاضا برای دریافت خدمت در واحد زمان}}{\text{کل ظرفیت سیستم برای ارائهٔ خدمت در واحد زمان}} \qquad (۲۴.۵)$$

طبق این تعریف، هرچه مقدار ρ بزرگترباشد، تقاضا زیادتراست وسیستم باید کار بیشتری انجام دهد وصف طولانیترخواهدشد. برعکس، هرچه ρ کوچکترباشد، طول صف کوتاهتر است، اما درمقابل، ازامکانات سیستم استفاده‌کمتری به‌عمل می‌آید.

قضیهٔ ۱.۵ دریك سیستم صف با m خدمت‌دهنده، که λ و μ به‌ترتیب معرف آهنگ ورود وآهنگ خدمت است، ضریب بهره‌وری ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{\lambda}{m\mu} \qquad (۲۵.۵)$$

اثبات: برای محاسبهٔ ρ در رابطهٔ (۲۴.۵)، واحد سنجش صورت و مخرج کسر را تعداد مشتریان درنظر می‌گیریم. درنتیجه،

صورت کسر = میانگین مشتریانی که درواحد زمان مراجعه می‌کنند $=\lambda$

مخرج = (میانگین تعداد خدمت‌دهنده) × (میانگین ظرفیت خدمت‌دهی یك‌خدمت‌دهنده)

$=(\mu)(m)$

بدیهی است که $\rho<1$ بدین معناست که ظرفیت سیستم از تقاضای وارده به‌آن کمتر است وطول صف مرتب افزایش می‌یابد تا سرانجام به‌بینهایت می‌رسد. ضمناً، در بسیاری ازحالتها نشان داده می‌شودکه $\rho=1$ نیز مربوط به‌یك سیستم ناپایدار است. بدین‌ترتیب معمولا موقعی سیستم پایدار است‌که $\rho<1$ باشد.

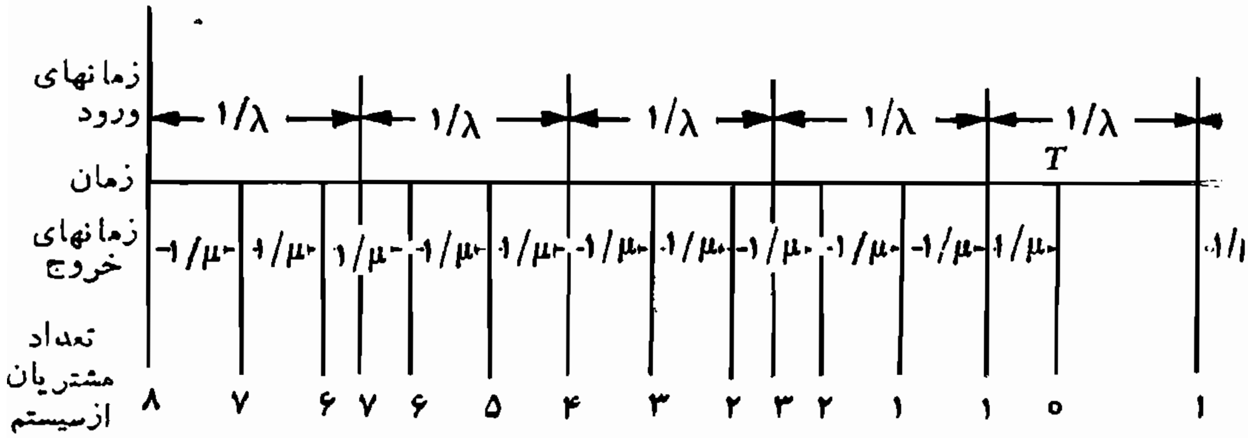
۶.۵ سیستمهای صف‌قطعی

دراین بخش، برای تشریح یك سیستم صف، حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که تمام متغیرهای آن قطعی است. معمولا، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، متغیرهای تصادفی هستند. درسیستمهای صف قطعی، دومتغیر فوق همواره قطعی فرض می‌شود. به‌بیان ریاضی می‌توان گفت که دراین سیستمها، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و همچنین مدت‌زمان خدمت، متغیرهای تصادفی هستندکه واریانس آنها برابر با صفراست.

مطابق با قراردادهایی که‌درفصل اول تشریح شد، سیستمهای قطعی را درحالت کلی با $D/D/\ldots$ نشان می‌دهند. آهنگ ورود مشتری، طبق معمول بـا λ وآهنگ خدمت با μ بیان می‌شود. اگرمشتریها به‌طورانفرادی واردسیستم شوند وبه گونه‌ای انفرادی هم‌خدمت دریافت کنند، مدت‌زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دقیقاً برابر با $1/\lambda$ ومدت‌زمان دریافت خدمت نیز برابر با $1/\mu$ خواهد بود.

ابتدا حالت سادهٔ $D/D/1$ را درنظربگیرید. طبق قرارداد، دراین سیستم یك خدمت‌دهنده وجود دارد، و محدودیتی نیز ازنظر ظرفیت سیستم و جمعیت مشتریان مطرح نیست. بدیهی است‌که سیستم درصورتی می‌تواند در درازمدت پایدار بماندکه $\rho<1$ یا $\lambda<\mu$ باشد.

به‌عبارت دیگر، سرعت‌خدمت‌دهی درچنین شرایطی‌باید بیش ازتقاضا برای دریافت خدمت باشد. درغیر این‌صورت، طول صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌بینهایت خواهد رسید. فرض کنیدکه درلحظهٔ شروع کارسیستم، n مشتری آمادهٔ دریافت خدمت باشند واز آن پس، زمان بین دو ورود $1/\lambda$ باشد. درابتدا، برای ارائهٔ خدمت به مشتریهایی که منتظر هستند، خدمت‌دهنده باید مرتباً کارکند. پس از مدتی که خدمات معوقه ارائه شد، فقط به مشتریان جدید خدمت داده می‌شود. به عبارت دیگر، از لحظهٔ شروع اشتغال سیستم، تا زمان مشخصی، مثلا T، خدمت‌دهنده دائماً مشغول به‌کاراست وازآن پس درصدی ازاوقات را کار می‌کند (که با ρ نشان داده می‌شود). شکل ۵.۵ معرف این سیستم است. در این سیستم فرض شده است‌که درلحظهٔ شروع‌کارسیستم ۸ مشتری درصف منتظر دریافت خدمت بوده‌اند. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، ازلحظهٔ صفر تا T، خدمت‌دهنده مرتباً درحال ارائهٔ خدمت است. از این لحظه به‌بعد، مدتی کارمی‌کند وسپس بیکار می‌ماند. درشکل فوق دورهٔ مشغول‌بودن $1/\mu$ و دورهٔ بیکاری $(1/\lambda-1/\mu)$ وچرخهٔ اشتغال سیستم به‌مدت $1/\lambda$



شکل ۵۰۵ زمانهای ورود و خروج وتعداد مشتریان درمدل $D/D/1$

است. دراین سیستم، دورهٔ گذرا T است و پس از آن دورهٔ پایدار شروع می‌شود. دردورهٔ پایدار هیچ مشتری درصف منتظر نمی‌مانـد و صفی نیـز تشکیل نمی‌شود. بدین‌ترتیب، رابطه‌های لیتل نیز برقرار خواهد بود. طول مدت دورهٔ گذرا، T، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

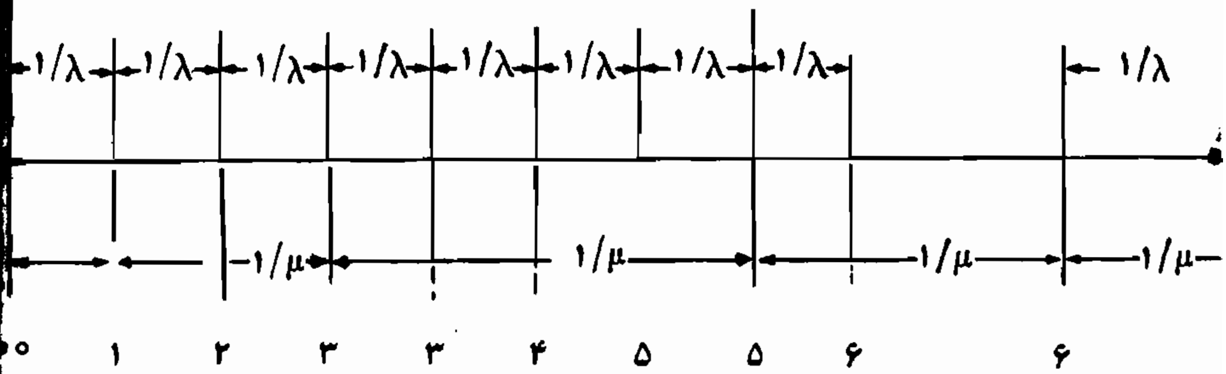
$$[\lambda T]+n=[\mu T] \tag{۲۶.۵}$$

که n تعداد مشتریهای اولیه است. منظور از $[x]$ مقدار گردشدهٔ x بـه‌عدد صحیح است، به‌طوری که

$$x-1\leqslant[x]\leqslant n$$

حال مدل $D/D/1/K$، کـه درآن ظرفیت سیستم متناهی، وبرابربا K است، را درنظر بگیرید. دراین سیستم هم مشتریها بـا آهنگ λ مـراجعه می‌کنند. لیکن، همه آنها لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند، زیـرا هنگامی‌که سیستم دارای K مشتری باشد، از پذیرش مشتری جدید خودداری می‌کند واین مشتری نمی‌توانـد درصف منتظر بماند وبه ناچار از دریافت خدمت محروم خواهد ماند. به‌این‌ترتیب، آهنگ ورود مشتریان کمتر از λ است که آن را با $\bar{\lambda}$ نشان‌می‌دهیم. بنابراین، درواحد زمان به‌طورمتوسط تعداد $(\lambda-\bar{\lambda})$ مشتری از ورود به‌سیستم بازمی‌مانند. برای اینکه سیستم به‌حالت پایدار برسد، فقط لازم است‌که $\bar{\lambda}$ (ونه λ) از μ کوچکتر باشد.

برای سهولت محاسبات، فرض کنیدکه درلحظهٔ شروع‌کار سیستم تعداد مشتریهایی کـه منتظر می‌مانند برابر با صفر درنظر گرفته شود. ضمناً، فرض می‌کنیم که $\lambda>\mu$ باشد. (درحالتی‌که $\lambda<\mu$ باشد، ورود و خروج مشتریها دقیقاً مانند حالت $D/D/1$ است، که قبلا مورد بررسی قـرار گـرفت). شکل ۶.۵ این سیستم را بیان می‌کند. در ایـن سیستم فـرض شـده است کـه $\lambda=3\mu$ و $K=6$ اولین مشتری در زمـان $1/\lambda$ وارد مـی‌شود



شکل ۶.۵ زمانهای ورود و خروج و تعداد مشتریان درمدل $D/D/1/6$

و بلافاصله ارائهٔ خدمت به‌او شروع می‌شود. چون آهنگ خدمت‌دهی کندتر ازآهنگ ورود مشتری است، لذا مرتباً به‌طول صف اضافه‌می‌شود تاموقعی که‌سیستم پرشود (یعنی $N(t)=6$) دراین هنگام، ازورود مشتری‌جلوگیری به‌عمل‌می‌آید. ازاین‌لحظه به‌بعد، با خروج یك مشتری، مشتری جدیدی وارد سیستم می‌شود واین‌کار ادامه می‌یابد. دراین مدل نیز طول دورهٔ گذرا، T، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (با فرض اینکه λ/μ برابرعدد صحیحی مانند m باشد).

$$T=\frac{K}{\lambda-\mu} \qquad (۲۷.۵)$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، بعد از دورهٔ گذرا، تعداد مشتریان داخل سیستم همواره برابر K است، اما قبل ازآن، تعداد مشتریان ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$N(t)=X(t)-X'(t)=[\lambda t]-\left[\frac{t-1/\lambda}{1/\mu}\right]=[\lambda t]-[\mu t-\mu/\lambda] \qquad (۲۸.۵)$$

بنابراین، به‌طورخلاصه

$$N(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } t\leqslant 1/\lambda \text{ باشد،} \\ [\lambda t]-[\mu t-\mu/\lambda] & \text{اگر } 1/\lambda\leqslant t\leqslant T\text{،} \\ K & \text{اگر } t>T\text{،} \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، باتوجه به‌شکل ۶.۵ مشاهده می‌شود که بعد ازدورهٔ گذرا، که T است، تعداد مشتری درسیستم همواره K باقی می‌ماند. درهمین مثال، از هر سه مشتری که مراجعه‌کنند، دقیقاً یکی ازآنها وارد سیستم می‌شود و دو مشتری دیگر از ورود باز می‌مانند. بنابراین، $\bar{\lambda}=1/3\lambda$ و $\rho=\lambda/\mu=1$. برای نشان دادن صحت رابطهٔ لیتل باید توجه داشت که در درازمدت $L=6$ است. مدت‌زمان انتظاریك مشتری برابر با $6/\mu$ است، زیرا در

لحظهٔ ورود یك مشتری دقیقاً ۵ مشتری دیگر در سیستم هستند واین مشتری باید صبر کند تا آنها خارج‌شوند، یعنی $W_q = ۵/\mu$ و به‌همین‌ترتیب $W = ۶/\mu$. درنتیجه با درنظر گرفتن فرض $\lambda = ۳\mu$، نتیجه می‌شود،

$$\bar{\lambda} W = \frac{\lambda}{۳} \cdot \frac{۶}{\mu} = ۲\frac{\lambda}{\mu} = ۶$$

مسائل

۱. دریك سیستم صف با دوخدمت دهنده، ورود و خروج مشتریها طبق جدول زیر است. فرض می‌کنیم که انتخاب مشتری درصف براساس نوبت باشد. میانگین زمان انتظار مشتریها، طول‌صف، وتعداد افرادی که در حال گرفتن خدمت هستند، آهنگ ورود مشتری و آهنگ خدمت‌دهی را محاسبه‌کنید. نمودار جمعیت مشتریان را نسبت به‌زمان رسم کنید.

شمارهٔ مشتری	ساعت ورود	ساعت خروج
۱	۱	۱ : ۳۰
۲	۱ : ۱۰	۱ : ۲۵
۳	۱ : ۲۰	۱ : ۴۰
۴	۱ : ۳۵	۱ : ۵۵
۵	۲ : ۱۰	۲ : ۴۰
۶	۲ : ۱۵	۲ : ۳۵
۷	۲ : ۲۰	۲ : ۵۵
۸	۲ : ۳۰	۲ : ۵۸
۹	۳ : ۰۵	۳ : ۳۵
۱۰	۳ : ۰۸	۳ : ۲۰
۱۱	۳ : ۱۵	۳ : ۳۲
۱۲	۳ : ۱۹	۳ : ۴۰
۱۳	۳ : ۳۶	۰۰۰۰

۲. دریک سیستم $D/D/۱/۷$ آهنگ خدمت دهی بـرابـر بایک پنجم و آهنگ مراج
مشتری برابر بـا یک سوم است. میانگین زمان انتظار هر مشتری درصف، در دراز مدن
چیست؟ ضریب بهره‌وری را محاسبه کنید. صحت رابطه‌های روابط لیتل را نشان دهید. آ
این‌سیستم حالت پایدار دارد؟

۳. ثابت کنید که درهر سیستم صف بایک خدمت دهنده، همیشه رابطه‌های زیر برقرار است

$$۱-\pi_۰=۱-\rho \qquad ۲-L=L_q+(۱-\pi_۰) \qquad ۳-L=L_q+\rho$$

٦

مدلهای نمایی درسیستمهای صف

مقدمه

منظور از مدلهای نمایی، مدلهایی است که در آنها، دومتغیر تصادفی زیر دارای توزیع‌نمایی باشد:

الف. زمان بین دو ورود متوالی مشتریها

ب. مدت خدمت

مدلهای نمایی از مهمترین نمونه‌های سیستمهای صف هستند. اهمیت آنها از آنجا ناشی می‌شود که از نظر محاسباتی ساده‌ترین مدلها محسوب می‌شوند و درعین حال، بسیاری از مسائل واقعی را می‌توان درچارچوب آنها گنجانید.

طبق آنچه که درفصل اول گفته شد، برای بیان سیستمهای صف و طبقه‌بندی آنها، ازقراردادی به‌شکل $A/B/m/K/C/Z$ استفاده می‌شود. اگر زمان بین‌دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی باشد، حرف M جایگزین A می‌شود. به همین ترتیب، در صورتی که‌مدت خدمت هم‌نمایی باشد، به‌جای حرف B حرف M قرارمی‌گیرد. بنابراین، مدلهای نمایی، به طور کلی، به صورت $M/M/...$ نشان داده می‌شوند. در نظریهٔ صف، به‌مدلهای نماییْ **فرایند تولد و مرگ** هم می‌گویند.

دراین فصل، ویژگیهای عمومی مدلهای نمایی درحالت کلی وخصوصیات آنها در حالات خاص را مورد بررسی قراردهیم.

۱.۶ فرایند تولد ومرگ

برای تشریح این فرایند، جمعیتی را درنظر بگیرید که تعداد آن هر لحظه می‌تواند افزایش یابد (تولد)، و یا از آن کاسته گردد (مرگ). دریك سیستم صف، مشتریهای داخل سیستم معرف جمعیت فوق‌الذکر است. در فرایند تولد ومرگ، ورود مشتری جدید درحکم تولد وخروج یکی ازمشتریها (پس ازدریافت خدمت)، در حکم مرگ محسوب می‌شود. ضمناً، ویژگی‌عمدهٔ فرایند تولد ومرگ این‌است که‌فاصلهٔ زمانی بین دوتولد یا دومرگ براساس توزیع‌نمایی است. به‌عبارت‌دیگر، دراین‌فرایند، تعداد تولدها یامرگها دریك فاصلهٔ‌زمانی مشخص براساس فرایندپواسون است. به‌تعبیردقیقتر، فرایندتولد ومرگ براساس فرضهای زیر ایجاد می‌شود.

فرض ۱. یك لحظهٔ مشخص را درنظر بگیرید، که جمعیت سیستم درآن برابر با n باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تایك تولد صورت گیرد (یك مشتری جدید واردشود)، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ_n است. به‌عبارت دیگر، احتمال ورود یك مشتری درفاصلهٔ کوتاه Δt متناسب با طول Δt و λ_n، و به‌طور دقیقتر برابراست با $\lambda_n\Delta t+o(\Delta t)$. به همین ترتیب، احتمال ورود بیش ازیك مشتری در فاصلهٔ کوتاه Δt، صفر، یا به‌طور دقیقتر برابر با $o(\Delta t)$ است. آهنگ ورود مشتری (یا آهنگ تولد)، یعنی λ_n، می‌تواند به‌جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمان فرض می‌شود. λ_0 لزوماً برابر با صفرنیست

فرض ۲. یك لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید که درآن جمعیت سیستم برابر با n باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك مرگ صورت‌گیرد (یا یك مشتری خارج شود). متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر μ_n است. آهنگ خروج مشتری (یا مرگ)، یعنی μ_n، نیز می‌تواند به جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمان فرض می‌شود. μ_0 برابر با صفر است زیرا جمعیت منفی معنا ندارد.

بنابراین، ازفرضهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که درفرایند تولد ومرگ، درهرلحظه حداکثر یك مشتری وارد یاخارج می‌شود. علت این امراین است‌که ورود وخروج مشتریها طبق فرایند پواسون است. می‌دانیم‌که دریك فرایند پواسون، دو پیشامد همزمان نمی‌تواند رخ دهد.

آهنگ تولد (یا ورود مشتری)، یعنی λ_n، و همچنین آهنگ مرگ، یعنی μ_n، در سیستمهای مختلف می‌توانند متفاوت باشد. یك حالت خاص، $\lambda_n=\lambda$ یا $\mu_n=\mu$ (به‌ازای $n=1, 2, \ldots$) است. درحالت خاص دیگر، $\lambda_n=n\lambda$ و یا $\mu_n=n\mu$ است. دراین حالت، متناسب با افزایش جمعیت، آهنگ ورود یا خروج نیز افزایش می‌یابد.

طبق فرضهای فوق، درمدت زمان کوتاه، جمعیت مشتریهای داخل سیستم حداکثر یك نفر افزایش یا کاهش می‌یابد، مشروط براینکه طبق فرایند تولد ومرگ عمل کند.

۲.۶ بیان فرایند تولد ومرگ درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف

تعداد مشتری داخل سیستم را دریك لحظه، حالت سیستم تعریف کنید. طبق خاصیت فرایند تولد ومرگ، افزایش یاکاهش این تعداد مشتری، فقط بستگی به‌حالت سیستم دارد ومستقل از گذشتهٔ آن است، بنابراین، خاصیت مارکوفی بودن درمورد این فرایند صادق است. ضمناً، مدت زمانی هم‌که طول‌می‌کشد تاحالت سیستم تغییر کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌این‌ترتیب، این فرایند درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف پیوسته قرارمی گیرد.

برای مشخص‌کردن ماتریس آهنگ‌گذار، باید عناصر این ماتریس، یعنی q_{ij} را، به‌ازای تمام مقادیر i و j، محاسبه‌کرد. می‌دانیم‌که طبق تعریف، به‌ازای $i \neq j$،

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{p(\Delta t \text{ درمدت } \text{، } j \text{ به } i \text{ تغییرحالت سیستم از })}{\Delta t}$$

بنابراین، اگر $j = i + 1$ باشد (یك تولد)،

$$q_{i,\,i+1} = \lambda_i \tag{۱.۶}$$

واگر $j = i - 1$ باشد (یك مرگ)،

$$q_{i,\,i-1} = \mu_i \tag{۲.۶}$$

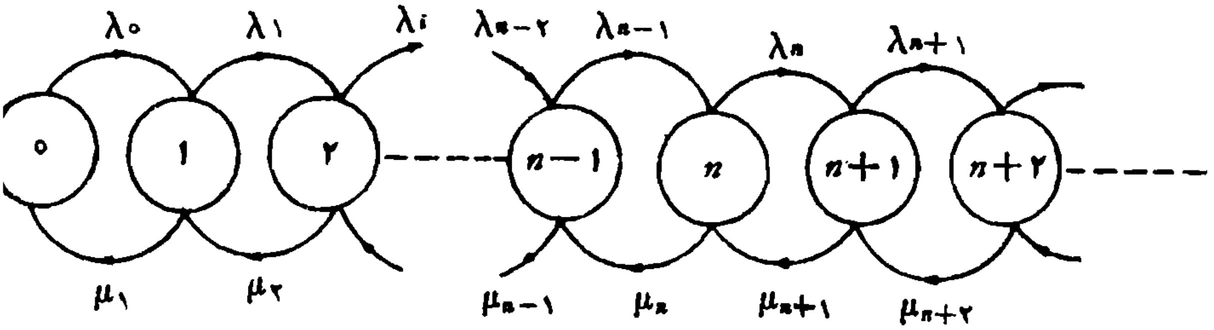
وجود خواهد داشت. در سایر موارد

(۳.۶) اگر $j \# i-1$ یا $j \# i+1$ باشد، $q_{ij} = 0$ خواهد بود.

به این‌ترتیب، ماتریس آهنگ گذار فرایند تولد ومرگ به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{bmatrix} \tag{۴.۶}$$

به‌جای استفاده از ماتریس فوق، می‌توان از نمودارآهنگ برای نشان‌دادن فرایند مارکوف استفاده کرد. چنین نمودار آهنگی درشکل ۱.۶ نشان داده شده‌است. همان‌طور که‌مشاهده می‌شود، در فرایند تولد ومرگ، از یك حالت، تنها می‌توان به‌حالتهای مجاور آن حرکت کرد.



شکل ۱۰۶ نمودار آهنگ درفرایند تولد و مرگ

معادلهٔ تعادلی درسیستمهای نمایی

همان‌طور که قبلاً گفته شد، π_n معرف این حالت است که در درازمدت n مشتری درسیستم باشد. به‌عبارت دیگر، π_n نشان‌دهندهٔ درصدی از زمان است که سیستم دارای n مشتری است. به‌بیان ریاضی

$$\pi_n = \lim_{t \to \infty} p[N(t) = n] \qquad (۵.۶)$$

برای محاسبهٔ π_n درفرایند تولد و مرگ، شکل ۱۰۶ به‌کار گرفته می‌شود. ابتدا از حالت صفر، که هیچ مشتری درسیستم وجود ندارد، شروع می کنیم. همان طورکه نمودار آهنگ نشان می‌دهد، حالت سیستم فقط درصورتی تغییر می کندکه یك مشتری جدید وارد شود. دراین صورت، حالت سیستم نیز «یك» خواهد شد. تغییر حالت سیستم ازصفر به‌یك (یعنی ورود یك مشتری) با آهنگ λ_0 انجام می‌شود. به همین‌ترتیب، با درنظر گرفتن این مطلب که ورود به‌حالت صفرنیز فقط با تغییر حالت سیستم از یك به‌صفر امکانپذیر است، آهنگ ورود به‌این حالت نیز برابر بـا μ_1 خواهد بود. درنتیجه، معادلهٔ تعادلی درحالت صفر برابراست با

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \qquad (۶.۶)$$

اکنون حالت ۱ را درنظر بگیریـد. تغییر حالت سیستم، به دو طریق، ورود مشتری جدید (با آهنگ λ_1) یـا خروج تنها مشتری داخل سیستم (با آهنگ μ_1) میسر است. از طرف دیگر، از دوطریق نیز می‌توان به‌حالت ۱ رسید: از حالت صفر با ورود یك مشتری یا از حالت ۲ با خروج یکی ازمشتریهای داخل سیستم. بنابراین، معادلهٔ تعادلی برای این حالت عبارت است از:

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 \qquad (۷.۶)$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ تعادلی برای حالت n به‌شرح زیرخواهد بود:

$$(\lambda_n+\mu_n)\pi_n=\lambda_{n-1}\pi_{n-1}+\mu_{n+1}\pi_{n+1} \qquad (۸.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶.۶) و (۷.۶) و (۸.۶) نتیجه می‌شود:

$$\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \qquad (۹.۶)$$

$$\pi_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \qquad (۱۰.۶)$$

$$\vdots$$

$$\pi_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_n}\pi_0 \qquad (۱۱.۶)$$

برای سهولت از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$C_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\quad n=1,2,\cdots \qquad (۱۲.۶)$$

درنتیجه رابطهٔ (۱۱.۶) را می‌توان به‌صورت زیرخلاصه‌کرد:

$$\pi_n=C_n\pi_0 \quad , \quad n=1,2,\dots \qquad (۱۳.۶)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n=1$$

یا

$$\pi_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\pi_0=\pi_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\right]=1$$

درنتیجه

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}C_i} \qquad (۱۴.۶)$$

به این ترتیب، با استفاده از رابطه‌های (۱۲.۶) و (۱۳.۶) و (۱۴.۶) تابع توزیع تعداد مشتری در سیستم، دردرازمدت، به‌دست می‌آید.

شرط پایدار بودن سیستمهای نمایی

باتوجه به‌رابطهٔ (۱۴.۶)، ملاحظه‌می‌شودکه درصورتی π_0 مثبت است که $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ متناهی، یعنی سری C_1 و C_2 و... همگرا باشد. اگرچنین نباشد $\pi_0 = 0$ خواهدبود. به‌همین‌ترتیب، ازرابطهٔ (۱۳.۶) نتیجه می‌شودکه به‌ازای تمام مقادیر n، $\pi_n = 0$ است. درنتیجه، احتمال اینکه سیستم خالی یا دارای n مشتری باشد $(n = 1, 2, \dots)$، برابر با صفراست. معنای این موضوع این است‌که دردرازمدت، تعداد مشتریهای داخل سیستم از هرعددی مانند n بیشتر (یعنی برابر با بینهایت) است. درچنین حالتی سیستم ناپایدار است. بنابراین، در فرایند تولد ومرگ شرط پایداری سیستم این است‌که

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty \qquad (۱۵.۶)$$

محاسبهٔ معیارهای ارزیابی مدلهای نمایی

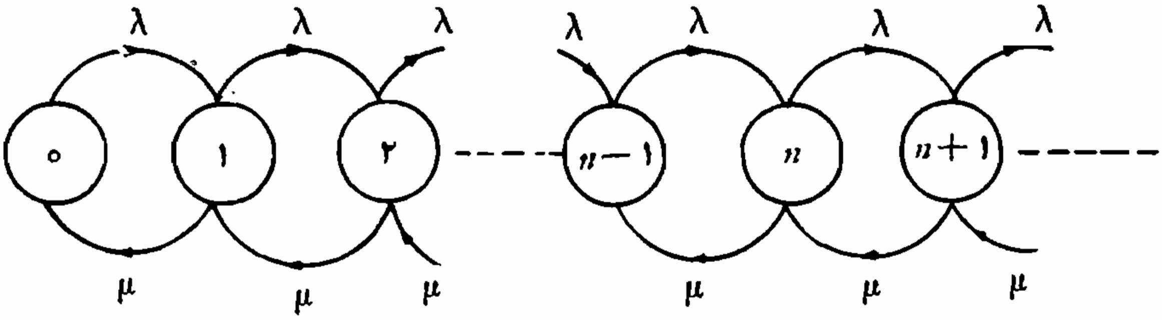
پس ازمحاسبهٔ π_0 و π_n (به‌ازای $n = 1, 2, \dots$)، میانگین تعداد مشتری درسیستم، یعنی L از رابطهٔ (۱۷.۵) به‌دست می‌آید. آن‌گاه، با استفاده ازروابط موسوم به استنتاج لتیل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵)، معیار دیگر ارزیابی، میانگین مدت زمان انتظار مشتری درسیستم یا W، به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، L_q و W_q را می‌توان با کمك روابط (۱۲.۵) و (۱۳.۵) محاسبه کرد.

بررسی نمونه‌های خاص مدلهای نمایی

درادامهٔ این بخش، انواع مدلهای نمایی را بررسی و معیارهای ارزیابی آنها را به‌دست می‌آوریم. برای تعیین این معیارها، ابتدا λ_n و μ_n را به‌ازای nهای مختلف مشخص و π_0 و π_n را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه به‌بررسی L و W وسایر عوامل می‌پردازیم. درتمام این مدلها فرض می‌کنیم‌که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین خدمت‌نمایی است.

۳.۶ مدل $M/M/1$

این مدل متداولترین نمونهٔ مدل صف است، که به مدل کلاسیك نیزموسوم است. دراین‌مدل ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون با پارامتر λ است. آهنگ ورود مشتری مستقل ازجمعیت



شکل ۲.۶ نمودار آهنگ مدل کلاسیک

داخل سیستم فرض می‌شود. لذا، به‌ازای ...$n=۰, ۱, ۲$، $\lambda_n=\lambda$ است. ازطرف دیگر، چون یك خدمت دهنده بیشتر وجود ندارد، آهنگ خروج مشتریان برابر با آهنگ خدمت خواهد بود. در نتیجه، به‌ازای ...,$n=۱, ۲$، $\mu_n=\mu$ است. دراین مدل، $\mu_\circ=\circ$ فرض شده است، زیرا درصورتی که مشتری درسیستم نباشد، خدمت‌دهی هم وجود ندارد.

نمودار آهنگ این مدل مطابق شکل ۲.۶ است.

براساس رابطهٔ (۱۲.۶)

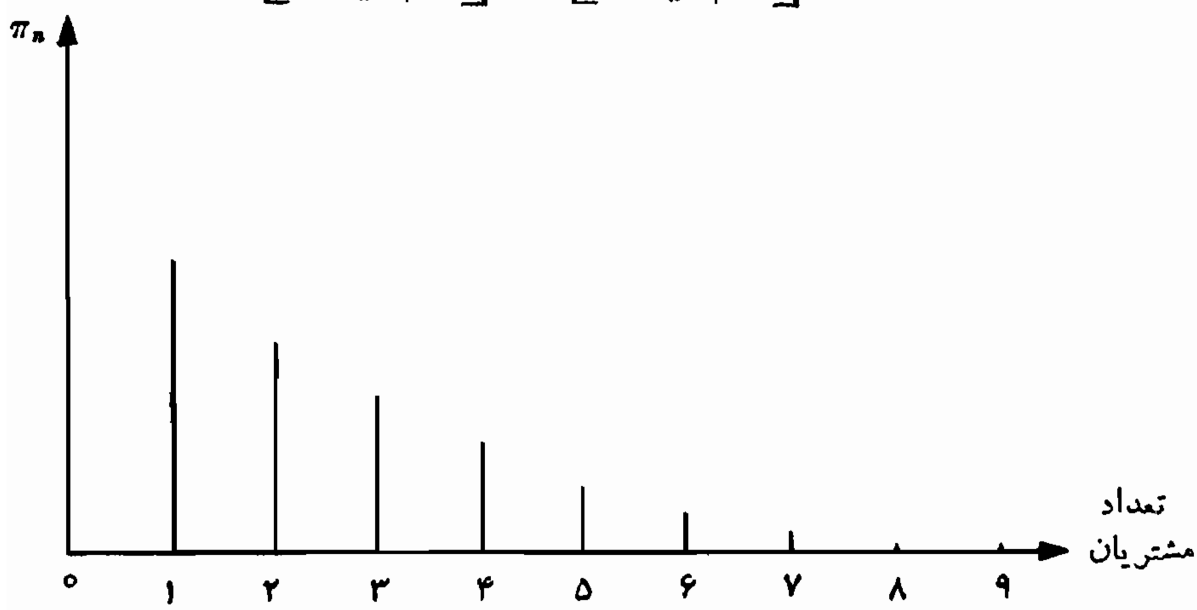
$$C_n=\frac{\lambda_\circ\lambda_۱\cdots\cdots\lambda_{n-۱}}{\mu_۱\mu_۲\cdots\cdots\mu_n}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

اما برحسب تعریفی که از ضریب بهره‌وری به‌عمل آمد، $\rho=\lambda/\mu$ است.

$$C_n=\rho^n \qquad (۱۶.۶)$$

درنتیجه، بافرض $\rho<۱$

$$\pi_\circ=\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}C_n\right]^{-۱}=\left[۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\rho^n\right]^{-۱}=۱-\rho \qquad (۱۷.۶)$$



شکل ۳.۶ احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت، مدل $M/M/۱$.

و

$$\pi_n = C_n \rho^n = (1-\rho)\rho^n \qquad (۱۸.۶)$$

شکل ۳.۶، احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم را در درازمدت نشان می‌دهد.

مثال ۱.۶ کتابخانه‌ای عمومی که فقط یك کتابدار دارد را درنظر بگیرید. اعضای کتابخانه طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۰ نفر درساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یك عضو رسیدگی کند، متغیری تصادفی با میانگین ۵ دقیقه است. درچند درصد وقت، این کتابدار بیکار است؟ احتمال اینکه ۳ نفر منتظر باشند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند، چقدراست؟

حل: در این مدل $\lambda = ۱۰$ و $\mu = ۱۲$ است. به‌عبارت دیگر، به‌طورمتوسط درهرساعت ده‌نفر واردکتابخانه می‌شوند و کتابدار ظرفیت ارائهٔ خدمت به ۱۲ نفر درساعت را دارد. بدین ترتیب

$$\rho = \frac{۱۰}{۱۲}$$

درصد بیکاری کتابدار برابر با π_0 است وطبق رابطهٔ (۱۷.۶) به‌دست می‌آید.

$$\pi_0 = 1-\rho = \frac{1}{6}$$

احتمال اینکه سه نفر منتظر دریافت خدمت ازکتابدار باشند، برابر با π_4 است، زیرا اگر ۴ نفر درسیستم باشند، یکی از آنها مشغول دریافت خدمت است و سه نفر دیگر درصف منتظر هستند. طبق رابطهٔ (۱۸.۶)

$$\pi_4 = (1-\rho)\rho^4 = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^4 = ۰٫۰۸$$

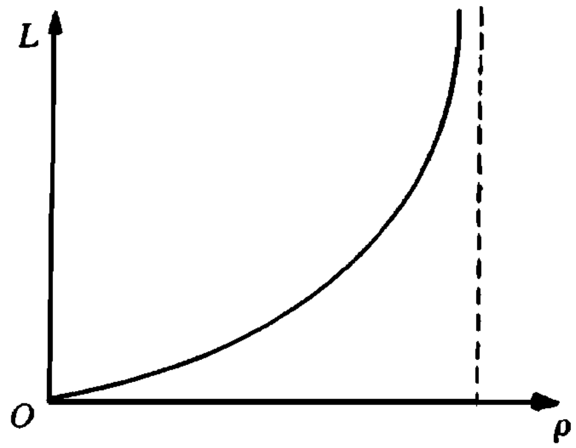
محاسبهٔ L

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\,\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

از رابطهٔ (۷۰.۲) درمورد بسط سریها نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

پس



شکل ۴.۶ رابطهٔ بین L و ρ درمدل $M/M/1$

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (۱۹.۶)$$

رابطهٔ بین L و ρ درشکل ۴.۶ نشان داده‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ρ باید کوچکتر از یك باشد. درغیر این‌صورت طول صف بینهایت و سیستم ناپایدار خواهد شد.

میانگین طول صف یا L_q را نیز می‌توان حساب کرد. درهر لحظه چنانچه سیستم دارای n مشتری باشد، طول صف برابر با $(n-1)$ خواهد بود. لذا،

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\,\pi_n-\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n$$

جملهٔ اول برابر L و جملهٔ دوم برابر با $(1-\pi_0)$ است. پس،

$$L_q=L-(1-\pi_0)=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۰.۶)$$

محاسبهٔ مدت زمان انتظار درسیستم

فرض کنید T_s معرف مدت‌زمان انتظار درسیستم و T_q مدت‌زمان انتظار درصف باشد. می‌دانیم که، طبق تعریف

$$W_q=E(T_q)\ \ ,\ \ W=E(T_s)$$

W و W_q را می‌توان با استفاده از رابطهٔ «لیتل» به‌دست آورد،که

$$W=\frac{\rho^L}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (۲۱.۶)$$

$$W_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۲.۶)$$

مثال ۲.۶ مثال ۱.۶ را مجدداً درنظر بگیرید. به‌طور متوسط یك مشتری چه‌مدت منتظرمی‌ماند تا کتابدار به تقاضای او رسیدگی کند؟ چند نفر به‌طور متوسط منتظر هستند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند؟ از لحظهٔ ورود یك مشتری تا لحظه‌ای‌که کار او تمام شود، به‌طور متوسط چه‌مدت طول می‌کشد؟

حل: سه سؤال موردنظر به‌ترتیب مبین مقادیر W_q و L_q و W است، که ازرابطه‌های (۲۲.۶)، (۲۰.۶) و (۲۱.۶) به‌دست می‌آید.

$$W_q=\frac{۱۰}{۱۲(۲)}=\frac{۱۰}{۲۴} \text{ ساعت} = ۲۵ \text{ دقیقه}$$

$$L_q=\frac{۱۰۰}{۱۲(۲)}=\frac{۱۰۰}{۲۴} \text{ ساعت} = ۴٫۱۷ \text{ دقیقه}$$

$$W=\frac{۱}{۲} \text{ ساعت} = ۳۰ \text{ دقیقه}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود $W=W_q+۱/\mu$ است.

تابع توزیع مدت‌زمان انتظار مشتری درمدل $M/M/۱$

چنانچه علاوه‌بر میانگین زمان انتظار مشتری در سیستم یا صف، که از رابطه‌های (۲۱.۶) و (۲۲.۶) به‌دست می‌آیند، اطلاعات بیشتری موردنیاز باشد، باید توابع توزیع این متغیرهای تصادفی را با استفاده ازقضیهٔ زیر تعیین کرد.

قضیهٔ ۱.۶ چنانچه T_s و T_q به‌ترتیب معرف مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم وصف، دریك مدل $M/M/۱$ باشند، خواهیم داشت

$$P(T_q=۰)=\pi_۰=۱-\rho \qquad (۲۳.۶)$$

$$P(T_q>x)=\rho e^{-\mu(۱-\rho)t} \qquad (۲۴.۶)$$

$$P(T_s>x)=e^{-\mu(۱-\rho)t} \qquad (۲۵.۶)$$

اثبات. رابطهٔ (۲۳.۶) واضح است. نحوهٔ اثبات رابطه‌های (۲۴.۶) و (۲۵.۶) مشابه است و فقط به‌اثبات آخرین رابطه می‌پردازیم. فرض کنید که در لحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، تعداد مشتریها در سیستم N باشد. در این‌صورت، با استفاده از روابط احتمال شرطی خواهیم داشت.

$$P(T_s>x)=\sum_{n=۰}^{\infty} P(T_s>x|N=n)P(N=n) \qquad (۲۶.۶)$$

ازطرف دیگر، مدت‌زمانی که‌این مشتری درصف منتظر می‌ماند، برابراست با:

$$T_q = X_1 + \cdots + X_n$$

که X_i معرف مدت‌زمان دریافت خدمت توسط مشتری i ام است. به‌همین‌ترتیب

$$T_s = T_q + X_{n+1}$$

که X_{n+1} نشاندهندهٔ مدت زمـان دریافت خدمت توسط خود مشتری است. چون مجموع $n+1$ متغیر تصادفی مستقل‌نمایی با پارامتر μ است، یك‌متغیرتصادفی ارلانگی با پارامترهای n و μ خواهد شد، بنابراین

$$P(T_s > x | N=n) = P(\sum_{i=1}^{n+1} X_i > x) = \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} d_j \qquad (۲۷.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸.۶) و (۲۷.۶) رابطهٔ (۲۶.۶) را محاسبه می‌کنیم.

$$P(T_s > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1-\rho) \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} dy$$

$$= \mu(1-\rho) \int_x^{\infty} e^{-\mu y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} dy \qquad (۲۸.۶)$$

ازطرف دیگر با بهره‌گیری ازبسط سریهای نمایی نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} = e^{\rho \mu y} = e^{\lambda y} \qquad (۲۹.۶)$$

پس از جایگزینی رابطهٔ فوق و محاسبهٔ انتگرال، رابطهٔ (۲۵.۶) اثبات می‌شود. مشاهده می‌شودکه T_s دارای توزیع نمایی با پارامتر $(\mu - \lambda)$ است. میانگین این متغیر تصادفی نمایی برابراست با

$$W = E(T_s) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

که قبلا با استفاده از استنتاج لتیل به‌دست آمد.

مثال ۳.۶ درمثال ۲.۶، احتمال اینکه مشتری اصلا منتظرنماند، چقدراست؟ احتمال اینکه حداقل یك ساعت منتظربماند، چقدراست؟

$$P(T_q=0)=\pi_0=1-\rho=\frac{1}{6}$$

$$P(T_q>1)=\frac{5}{6}e^{-12(\frac{1}{6})}=\frac{5}{6}e^{-2}=0/11$$

محاسبهٔ احتمال طول مطلوب صف درمدل $M/M/1$

دربسیاری از سیستمها این موضوع اهمیت داردکه طول صف ازحد معینی مثلا n تجاوز نکند. درصدی از اوقات که طول صف بیش از حد مطلوب باشد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$P(\text{طول صف}>n)=P(\text{بودن } n+1 \text{ مشتری در سیستم})=\sum_{i=n+2}^{\infty}\pi_i$$

$$=\sum_{i=n+2}^{\infty}\rho^i(1-\rho)=\rho^{n+2} \qquad (۳۰.۶)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این احتمال به‌طور تصاعدی کاهش می‌یابد.

مثال ۴.۶ درمثال ۱.۶، احتمال اینکه تعداد اعضای کتابخانه‌که منتظرند تا نوبت آنها برسد بیش از ۵ نفر باشد، چقدراست؟

$$P(\text{طول صف}>5)=\overset{n+2}{\rho^7}=\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

۴.۶ مدل $M/M/1/K$. سیستم باظرفیت متناهی

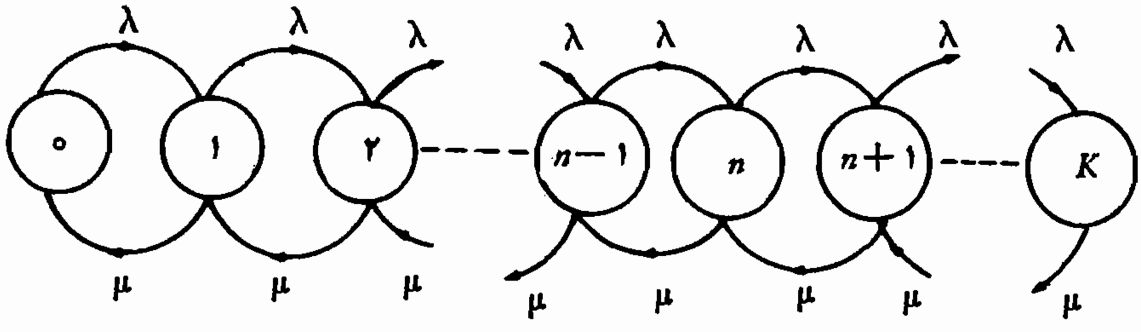
این مدل از همه‌نظر مثل مدل قبلی است، بـه‌استثنای اینکه درآن ظرفیت سیستم متناهی و برابربا K است. بـه علت این محدودیت، چنانچه مجموعاً K مشتری درسیستم بمانند، از ورود مشتریهای جدید جلوگیری‌می‌شود. درضمن‌فرض براین است‌که مشتریهایی که به‌علت نبودن جا وارد سیستم نمی‌شوند، مجدداً مراجعه نمی‌کنند.

دراین سیستم داریم

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda\ , & n<K\\ 0\ , & n\geqslant K\end{cases} \qquad (۳۱.۶)$$

$$\mu_n=\mu \quad , n=1,2,\cdots K \qquad (۳۲.۶)$$

نمودارآهنگ این مدل درشکل ۵.۶ نشان داده شده است.



شکل ۵.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/1/K$

محاسبهٔ آهنگ ورود مشتریان

دراین مدل، آهنگ مراجعهٔ مشتریها را با λ و آهنگ ورود آنها را بـا $\bar{\lambda}$ نشان می‌دهیم. این دوکمیت معمولاً با یکدیگر متفاوت هستند؛ زیرا، تمام مشتریهایی کـه مراجعه می‌کنند لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند. درصدی از مشتریها به‌علت تکمیل ظرفیت از ورود به سیستم بازمی‌مانند، که این درصد برابراست بادرصدی اززمان که سیستم دارای K مشتری است. به‌این‌ترتیب، ازورود π_k درصد مراجعین جلوگیری به‌عمل می‌آید وفقط $(1-\pi_k)$ درصد مراجعین وارد می‌شوند.

$$\bar{\lambda}=\lambda(1-\pi_k) \tag{۳۳.۶}$$

ضریب بهره‌وری ρ

دراین مدل، ضریب بهره‌وری طبق تعریف بـرابـر با $\rho=\frac{\bar{\lambda}}{\mu}$ و طبق‌خـاصیت ایـن سیستم همواره کوچکتر ازیك است. دراین مدل λ/μ می‌تواند مقداری بیش ازیك داشته باشد و درعین حال سیستم پایـدار بماند، زیـرا تعداد مشتریهای داخل سیستم هرگز به بینهایت نمی‌رسد وحداکثر تعداد آنها K خواهد بود.

محاسبهٔ احتمالات حدی

طبق رابطهٔ (۱۲.۶)

$$C_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=r^n & ,\ n\leqslant K\\ 0 & ,\ n>K\end{cases} \tag{۳۴.۶}$$

(درعبارت فوق، (λ/μ) را با r نشان می‌دهیم تا از $\rho=(\bar{\lambda}/\mu)$ متمایز گردد.)

ازرابطهٔ (۱۴.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_0=(1+\sum_{n=1}^{k}C_n)^{-1}=\frac{1-r}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۵.۶)$$

به‌همین ترتیب، طبق رابطهٔ (۱۳.۶)،

$$\pi_n=\frac{(1-r)r^n}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۶.۶)$$

درحالت خاصی که $r=1$ باشد

$$\pi_n=\frac{1}{k+1} \qquad (۳۷.۶)$$

محاسبهٔ L و L_q و W و W_q

$$L=\sum_{n=0}^{k}n\pi_n=\frac{(1-r)r}{1-r^{k+1}}\sum_{n=0}^{k}nr^{n-1}$$

از طرف دیگر

$$\sum_{n=0}^{k}nr^{n-1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{d(r^n)}{dr}=\frac{d}{dr}\sum_{n=0}^{k}r^n=\frac{d}{dr}\left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right)=\frac{1-(k+1)r^{k+1}}{(1-r)^2}$$

پس

$$L=\frac{r}{1-r}-\frac{(k+1)r^{k+1}}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۸.۶)$$

به‌همین ترتیب

$$L_q=L-(1-\pi_0)=L-\frac{r(1-r^k)}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۹.۶)$$

برای محاسبهٔ W و W_q، ازروابط لیتل استفاده‌می‌کنیم. باید توجه‌داشت که دراین‌رابطه‌ها آهنگ ورود مشتری $\bar{\lambda}$ است (نه λ). بنابراین، بـا مشخص بودن L و L_q می‌توان W و W_q را نیز به‌دست‌آورد.

۵.۶ مدل $M/M/m$

این مدل m خدمت‌دهنده دارد. ازنظر ظرفیت صف وجمعیت مشتری هـم محدودیتی برای

آن فرض نمی‌شود. دراین مدل، به‌ازای تمام مقادیر n، آهنگ ورود مشتری ثابت وبرابربا λ است. آهنگ خدمت‌دهی هر خدمت دهنده μ فرض می‌شود. چنانچه تعداد مشتری داخل سیستم برابربا n باشد، دوحالت پیش‌می‌آید. یکی اینکه $n<m$ باشد، که دراین صورت n خدمت‌دهنده مشغول به‌کارند و آهنگ خروج مشتریها برابر با $n\mu$ است. دوم اینکه $n\geqslant m$ باشد، که دراین حالت حداکثر m خدمت‌دهنده کار می‌کنند وآهنگ خروج برابر با $m\mu$ است. پس به‌طورخلاصه،

$$\mu_n=\begin{cases} n\ , & n\leqslant m \\ m\ , & m<n \end{cases} \tag{۴۰.۶}$$

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۶.۶ نشان داده شده است.

بنابراین

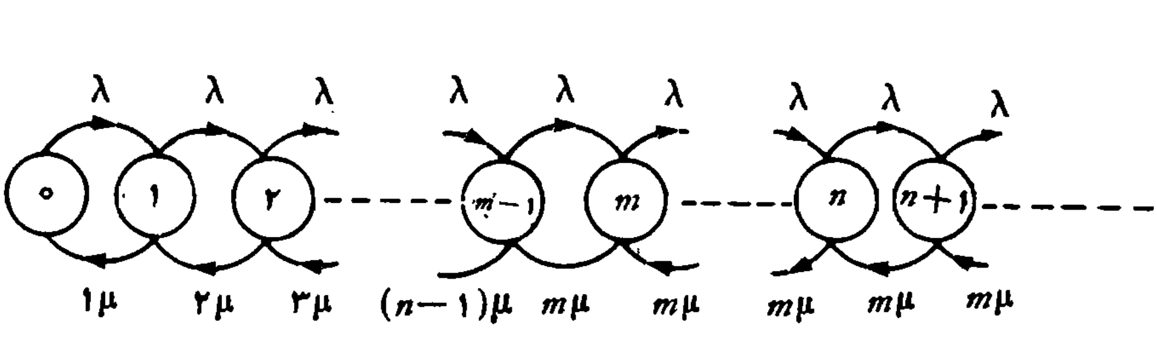
$$C_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\ \mu_n}=\begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\dfrac{1}{n!} & ,\ n<m \\ \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\dfrac{1}{m!}\ \dfrac{1}{m^{n-m}}, & n\geqslant m \end{cases} \tag{۴۱.۶}$$

درنتیجه

$$\pi_0=\left[1+\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\times\frac{1}{m^{n-m}}\right]^{-1}$$

پس ازساده‌شدن، رابطهٔ فوق به‌شکل زیرخلاصه می‌شود.

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}\ \frac{1}{(1-\rho)}\right]^{-1} \tag{۴۲.۶}$$



شکل ۶.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/m$

که درآن $\rho=\lambda/m\mu$ است. فرض می‌شود که $\rho<1$ باشد، درغیر این‌صورت، سیستم به حالت پایدار نمی‌رسد. برای محاسبهٔ π_n، از رابطهٔ (۱۳.۶) استفاده می کنیم.

$$\pi_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{\pi_0}{n!} & , n\leqslant m\\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{\pi_0 m^{m-n}}{m!} & , n\geqslant m\end{cases} \qquad (۴۳.۶)$$

حالتهای خاص:

$$\pi_0=\frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad M/M/2\ (۴۴.۶)$$

$$\pi_0=\frac{1-\rho}{1+2\rho+1/5\rho^2}\pi_0=\frac{1-\rho}{1+2\rho+1/5\rho^2} \qquad M/M/3\ (۴۵.۶)$$

محاسبهٔ L_q و W_q و L و W درمدل $M/M/m$

$$L_q=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{\pi_0}{m!}(m)^{m-n}$$

$$=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)(\rho)^{n-m}$$

یا

$$L_q=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (۴۶.۶)$$

درحالت خاص $M/M/2$،

$$L_q=\frac{2\rho^3}{1-\rho^2} \qquad (۴۷.۶)$$

برای محاسبه W_q، W و L از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود..

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}$$

$$L=\lambda W=\lambda\left(W_q+\frac{1}{\mu}\right)=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$$

$$L=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{\lambda}{\mu}$$

محاسبهٔ تابع توزیع مدت‌زمان انتظار درمدل $M/M/m$

دراینجانیز T_qرا مدت‌زمان انتظارمشتری‌درصف‌و T_sرا مدت‌زمان انتظارمشتری درسیستم تعریف می‌کنیم. تابع توزیع T_q براساس قضیهٔ زیر محاسبه می‌شود. تابع توزیع T_s را نیز به‌روش مشابه می‌توان به‌دست‌آورد.

قضیهٔ ۲.۶

$$P[T_q=0]=1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{\pi_0}{(1-\rho)m!} \qquad (۴۸.۶)$$

$$P[T_q>t]=[1-P(T_q=0)]e^{-(m\mu-\lambda)t} \qquad (۴۹.۶)$$

اثبات. ابتدا $P(T_q=0)$ را به‌دست مـی‌آوریم. $T_q=0$ به‌معنای این است که‌در موقع ورود مشتری موردنظر، نه‌تنها صفی تشکیل‌نشده، بلکه حداقل‌یکی ازخدمت‌دهندگان نیز بیکار است. به‌عبارت دیگر حداکثر $m-1$ مشتری درسیستم هستند. بنابراین،

$$P(T_q=0)=\sum_{n=0}^{m-1}\pi_n=\pi_0\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!} \qquad (۵۰.۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۴۲.۶) خواهیم داشت.

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{\pi_0}-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{1-\rho}$$

پس ازجایگزینی عبارت فوق دررابطهٔ (۵۰.۶)، رابطهٔ (۴۸.۶) ثابت می‌شود.

برای اثبات رابطهٔ (۴۹.۶)، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. اگر جمعیت داخل‌سیستم را N فرض‌کنیم، مشتری موردنظردرصورتی درصف منتظرمی‌ماندکه درزمان ورود اوحداقل m مشتری درسیستم باشند. بنابراین،

$$P(T_q>t)=\sum_{n=m}^{\infty}P(T_q>t|N=n)\pi_n \qquad (۵۱.۶)$$

مدت‌زمان انتظاراین مشتری (بـه فرض اینکه m مشتری دیگر درلحظهٔ ورود او درسیستم

باشند)، برابر با مدت‌زمانی است که‌طول می‌کشد تا $(n-m+1)$ مشتری ازسیستم خار[ج]
شوند، یعنی،

$$T_q = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-m+1}$$

که X_i عبارت از زمـان بین خروج مشتریهای شمارهٔ $(i-1)$ و i است. X_i ها متغیرها[ی]
تصادفی نمایی بـا پارامتر $m\mu$ هستند، زیرا تمام خدمت‌دهندگـان مشغول‌انـد و آهن[گ]
خدمت‌دهی هر کدام برابر با μ است. بـدین‌ترتیب، T_q دارای تـابع توزیع ارلانگی
پارامترهای $(m\mu)$ و $(n-m+1)$ است.
در نتیجه

$$P(T_q > t \mid N=n) = \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

پس ازجایگزینی رابطهٔ فوق در (۵۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$P(T_q > t) = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy \qquad (۵۲.۶)$$

پس از قـرار دادن مقدار π_n در رابطهٔ (۴۳.۶) و تغییرمحل انتگرال و مجموع، راب[طهٔ]
(۵۲.۶) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$P(T_q > t) = (m\mu)\frac{\pi_0}{m!}\int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (m^{m-n}) \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

$$= \frac{\mu \pi_0}{(m-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

اما می‌دانیم که

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!} = e^{\lambda y}$$

وقضیه ثابت می‌شود.

مثال ۵.۶ به‌یك تعمیر گـاه یخچال، به‌طور متوسط هـر دوساعت یك‌بار یك مشتر[ی]
مراجعه می‌کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون ومدت‌زمان تعمیریخچال نیزنمایی فر[ض]
می‌شود. فقط یك تعمیرکار وجود دارد

الف. اگر به‌طور متوسط هریخچال به‌مدت ۴ ساعت درتعمیرگاه بماند، تعیین‌کن[ید]
که میانگین تعداد یخچالهایی که هنوز تعمیرشان شروع نشده، چقدراست؟

ب. اگر بخواهیم مدت زمـان ۴ ساعت فوق بـه ۲٫۵ ساعت کاهش یابد، حداق[ل]

به چند تعمیرکار نیاز داریم؟

حل: مدل صف دراین سیستم $M/M/1$ است. چون ورود مشتریها طبق توزیع پواسون است، لذا زمان بین دو ورود متغیر تصادفی نمایی با میانگین دوساعت یعنی $1/\lambda = 2$ ویا $\lambda = 0.5$ مشتری درهرساعت است. هر یخچال به‌طورمتوسط ۴ ساعت در تعمیرگاه می‌ماند. یعنی، $W = 4$. ازطرف دیگر

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - 0.5}$$

در نتیجه $\mu = 0.75$. به‌عبارت دیگر تعمیرکارمی‌تواند درهرساعت به‌طور متوسط به‌اندازهٔ ۷۵ر۰ یخچال را تعمیر کند. اگر بخواهیم میانگین تعداد یخچالهای تعمیر نشده را تعیین کنیم، باید L_q را محاسبه‌کنیم. اما می‌دانیم که

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(0.5)^2}{(0.75)(0.75 - 0.5)} = \frac{4}{3}$$

اگربخواهیم مدت‌زمان انتظارکاهش یابد، یعنی $W \leqslant 2.5$ شود، باید تعداد خدمت‌دهنده‌ها را افزایش بدهیم.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{0.5} + \frac{1}{0.75} \leqslant 2.5$$

یا

$$L_q \leqslant \frac{7}{12}$$

از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۴۶.۶)،

$$L_q = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

که

$$\rho = \frac{0.5}{m(0.75)} = \frac{2}{3m}$$

و π_0 ازرابطهٔ (۴۲.۶) به‌دست می‌آید.

ابتدا $m = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{2}{\cdots} + \frac{1}{\cdots}\right)^{-1} = 0.5$$

و

$$L_q=\frac{0.5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{12}$$

درنتیجه کلا دو تعمیرکار کافی است.

۶.۶ مدل $M/M/m/K$

دراین مدل فرض می‌شود که $m\leqslant K$ باشد. درنتیجه،

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda & , n<K-1\\ 0 & , n\geqslant K\end{cases} \tag{۵۳.۶}$$

و

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu & , \quad n\leqslant m\\ m\mu & , \quad m\leqslant n\leqslant K\\ 0 & , \quad K<n\end{cases} \tag{۵۴.۶}$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۱۲.۶) خواهیم داشت.

$$C_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!} & , \quad n<m\\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\,\frac{1}{m^{n-m}} & , \quad m\leqslant n\leqslant K\\ 0 & , \quad K<n\end{cases} \tag{۵۵.۶}$$

همان‌طور کـه قبلا درمـدل $M/M/1/K$ گفتیم، آهنگ ورود مشتریان لزوماً λ نیست، زیرا تعدادی ازمشتریهایی که مراجعه می‌کنند به‌دلیل تکمیل ظرفیت، وارد سیستم نمی‌شوند. اگر آهنگ ورود مشتری را $\bar{\lambda}$ بنامیم، دراینجا نیز $\bar{\lambda}=\lambda(1=\pi_k)$ است. دراین مدل، $\rho=\bar{\lambda}/m\mu$ همواره کوچکترازیك است. ضمناً مقدار $\lambda/m\mu$، که می‌تواند بزرگتر ازیك باشد، را با r نشان می‌دهیم.

بااستفاده ازرابطهٔ (۱۴.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{k}r^{n-m}\right]^{-1} \quad (۵۶.۶)$$

درحالت خاصی‌که $r=1$ باشد، رابطهٔ فوق به‌صورت زیردرمی آید:

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}(K-m+1)\right]^{-1} \quad (۵۷.۶)$$

برای محاسبهٔ L_q ازرابطه (۱۸.۵) استفاده می‌شود که درنتیجه:

$$L_q=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\cdot\frac{r}{(1-r)^2}\left[1-r^{k-m+1}-(1-r)(K-m+1)r^{k-m}\right] \quad (۵۸.۶)$$

و به‌همین ترتیب،

$$L=L_q+m-\pi_0\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{m-n}{n!} \quad (۵۹.۶)$$

W و W_q نیز از روابط لیتل حاصل می‌شوند.

مدل ارلانگی $(M/M/m/m)$

حال، حالت خاصی را درنظر بگیرید که $K=m$ باشد. درچنین مدلی فرض می‌کنیم که سیستم گنجایش هیچ صفی را ندارد وظرفیت سیستم منحصر به‌تعداد مشتریهایی است که می‌توانند خدمت دریافت کنند. (تعداد خدمت‌دهندگان). مثلا، دریك شبکهٔ تلفن، اگر m کانال ارتباطی باشد، درهر لحظه به‌همین تعداد هم مشتریها می‌توانند تلفن بزنند. چنانچه دریك لحظه که تمام خطوط تلفن اشغال است، یك متقاضی جدید تلفن بزند، نه‌تنها قادر به‌مکالمه نیست، بلکه حتی نوبت اوهم محفوظ نخواهد بود. درچنین حالت خاصی،

$$\pi_0=\left(\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\right)^{-1} \quad (۶۰.۶)$$

$$\pi_m=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}\left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\right]^{-1} \quad (۶۱.۶)$$

رابطهٔ (۶۱.۶) به **رابطهٔ ارلانگی** موسوم است. دراین رابطه π_m معرف درصدی از زمان است که تمام خطوط تلفن اشغال هستند ومکالمهٔ جدید امکانپذیر نیست. π_m می‌تواند یکی ازمعیارهای اصلی ارزیابی سیستم تلفن باشد.

۷.۶ مدل $M/M/\infty$

دراین مدل فرض براین است که ازنظر تعداد خدمت‌دهندگان محدودیتی وجود ندارد. می‌توان چنین تصور کرد که درچنین سیستمی هر لحظه‌که یك مشتری جدید وارد شود، یك خدمت‌دهنده نیز آمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود. دراین مدل به‌ازای تمام مقادیر n، $\lambda_n=\lambda$ است. برای تعیین μ_n، باید درنظر داشت‌که اگرچه سیستم می‌تواند بینهایت خدمت‌دهنده داشته باشد، اما اگر n مشتری درسیستم باشند، فقط n خدمت‌دهنده نیز مشغول به‌کار هستند و درنتیجه

$$\mu_n=n\mu$$

بنابراین

$$C_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}$$

به‌این‌ترتیب،

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}}=e^{-\lambda/\mu} \tag{۶۲.۶}$$

و

$$\pi_n=C_n\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot e^{-\lambda/\mu} \tag{۶۳.۶}$$

میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم (L) را نیزمی‌توان محاسبه کرد.

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}n\pi_n=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\lambda/\mu}\frac{1}{n!}=\frac{\lambda}{\mu}e^{-\lambda/\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

یا

$$L=\frac{\lambda}{\mu} \tag{۶۴.۶}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت متناسب با آهنگ ورود مشتری است و نسبت معکوس با آهنگ خدمت دهی دارد.

۸.۶ مدل $M/M/m/C$. مدل نمایی با جمعیت متناهی

دراین مدل فرض می‌کنیم تعداد مشتریهای بالقوهٔ سیستم متناهی است. به‌عبارت دیگر،

حداکثر تعداد مشتریهایی که به‌سیستم مراجعه می‌کنند، برابر با عددی متناهی، مثلا C است. یکی ازکاربردهای این مدل، برنامه‌ریزی تعمیر ونگهداری است. اگر تعداد تعمیرکاران یك کارخانه را m وتعداد ماشینهای آن کارخانه‌که ممکن است خراب شوند را C فرض کنیم، بایك سیستم صف سروکار داریم، که می‌توان درآن ماشینها را مشتری وتعمیرکاران را خدمت‌دهنده تصورکرد. بدیهی است که دراین مورد جمعیت مشتریان متناهی و برابر با C است. این سیستم را درصورتی می‌توان یك مدل نمایی باجمعیت متناهی نامید، که هم مدت‌زمان تعمیر یك ماشین و هم مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك ماشین خراب شود را نمایی فرض کنیم. درهر لحظه ماشینهارا می‌توان به‌دو گروه‌تقسیم کرد. گروه اول، ماشینهایی که خراب‌شده‌اند یا تحت تعمیر یا منتظر تعمیر هستند. گروه دوم ماشینهایی که سالم هستند. ولی هرلحظه ممکن است‌خراب شوند.

مدت‌زمان سالم‌بودن هرماشین، قبل ازخراب‌شدن‌آن را متغیرتصادفی باتوزیع‌نمایی وپارامتر λ فرض می‌کنیم. اگر تعداد ماشینهای خراب برابربا n باشد، مجموعاً $(C-n)$ ماشین، سالم هستند، که مشتریهای بعدی سیستم محسوب می‌شوند. دراین حالت، زمان ورود اولین مشتری، در واقع زمانی است که اولین ماشین سالم خراب می‌شود. بنابراین، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تــا اولین ماشین خراب شود، یك متغیرتصادفی، وبرابر با حداقل $(C-n)$ متغیر تصادفی نمایی است. همان طورکــه می‌دانیم، چنین متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر $\mu(C-n)$ است. بنابراین به‌ازای تمام مقادیر $n<C$ خواهیم داشت:

$$\lambda_n=(C-n)\lambda \qquad (۶۵.۶)$$

و

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu & , \quad n\leqslant m \\ m\mu & , \quad m<n\leqslant C \\ 0 & , \quad C<n \end{cases} \qquad (۶۶.۶)$$

و

$$C_n=\begin{cases} \dfrac{C!}{(C-n)!n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad n\leqslant m \\[2ex] \dfrac{C!}{(C-n)!m!m^{n-m}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \quad m\leqslant n\leqslant C \\[2ex] 0 & , \quad C<n \end{cases}$$

یا

$$C_n=\begin{cases}\binom{C}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n\leqslant m\\ \binom{C}{n}\frac{n!}{m!}\cdot m^{m-n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & ,\ m\leqslant n\leqslant C\end{cases} \qquad (۶۷.۶)$$

و با استفاده از رابطهٔ $\pi_0=\left[1+\sum_{n=1}^{C}C_n\right]^{-1}$، می‌توان مقدار π_0 را محاسبه کرد.

محاسبهٔ آهنگ ورود درمدل $M/M/m/C$

طبق آنچه گفته‌شد، دراین مدل λ معرف پارامتر متغیر تصادفی نمایی مربوط به عمریك ماشین است، که مستقل از دیگر ماشینها فرض شده است. به‌عبارت دیگر، $1/\lambda$ میانگین مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا یك مشتری مشخص وارد سیستم شود. بدین‌ترتیب، آهنگ ورود مشتری بستگی به تعداد مشتریهایی دارد که خارج ازسیستم هستند. اگر $\bar{\lambda}$ را آهنگ ورود مشتری بنامیم، با استفاده از رابطهٔ (۶۵.۶) خواهیم داشت.

$$\bar{\lambda}=\sum_{n=0}^{C}\lambda_n\cdot\pi_n=\sum_{n=0}^{C}(C-n)\lambda\pi_n=\lambda C\sum_{n=0}^{C}\pi_n-\lambda\sum_{n=0}^{C}n\pi_n$$

درنتیجه، با استفاده از این‌خاصیت‌که $\sum_{n=1}^{C}\pi_n=1$ و $L=\sum_{n=1}^{C}n\pi_n$، خواهیم داشت

$$\bar{\lambda}=\lambda(C-L) \qquad (۶۸.۶)$$

به‌این ترتیب، در رابطه‌های لیتل نیز باید از $\bar{\lambda}$ به‌عنوان آهنگ ورود مشتری استفاده‌کرد، یعنی

$$W=\frac{L}{\bar{\lambda}}=\frac{L}{\lambda(C-L)} \qquad (۶۹.۶)$$

و

$$W_q=\frac{L_q}{\bar{\lambda}}=\frac{L_q}{\lambda(C-L)} \qquad (۷۰.۶)$$

۹.۶ مدلهای نمایی با آهنگ ورود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر

در اکثر مدلهای قبلی، آهنگ ورود مشتری وهمچنین آهنگ خدمت‌دهی یك خدمت‌دهنده

را ثابت ومستقل از تعداد مشتریهای داخل سیستم فرض کردیم. درعمل، ممکن است آهنگ ورود مشتری یا آهنگ خدمت‌دهی، بستگی به‌طول‌صف داشته‌باشد. مثلا، درمدل $M/M/m//C$، که قبلا مورد بررسی قرار گرفت، آهنگ ورود مشتری، λ_n، بستگی به n یعنی تعداد مشتریهای داخل سیستم داشت.

نمونه‌های متعددی وجود دارد که آهنگ ورود مشتری و یا آهنگ خدمت متأثر از طول صف خواهد بود. مثلا، سیستمی را درنظر بگیرید که در آن عمل «**امتناع**» وجوددارد؛ بدین معنا که بعضی ازمشتریها با مشاهدهٔ یك صف طولانی درسیستم، از ورود به‌آن امتناع می‌کنند. فرض کنید که λ_0 معرف آهنگ مراجعهٔ مشتریها باشد. آهنگ ورود به‌سیستم، لزوما λ_0 نیست و هرچه جمعیت مشتریهای داخل سیستم افزایش یابد، به‌تعدادکسانی که امتناع می‌کنند افزوده می‌شود.

اگر λ_n معرف آهنگ ورود مشتری به‌سیستم درلحظه‌ای باشدکه تعداد مشتریهای داخل سیستم n است، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود.

$$\lambda_n = b_n \lambda_0 \qquad (۷۱.۶)$$

که b_n پارامتری است بین صفر ویك که نسبت به n کاهنده است، یعنی

$$0 \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant 1 \qquad (۷۲.۶)$$

به‌این ترتیب، درصورتی که n مشتری درسیستم باشند، فقط درصدی ازمراجعین، یعنی b_n، وارد می‌شوند. با توجه به‌شرایط سیستم، b_n می‌تواند به‌شکل $(n+1)^{-1}$، $(n^2+1)^{-1}$، $(n+1)^{-\alpha}$، که درآن α عددی مثبت است، یا $e^{-\alpha n}$ (با α مثبت) ونظایر اینها باشد.

مدل دیگری را نیز می‌توان نام بردکه آهنگ ورود مشتریان به‌آن بستگی به طول صف دارد وآن حالتی است‌که بعضی ازمشتریها **انصراف** خود را از ایستادن درصف اعلام می‌دارند. درچنین سیستمهایی، اگرچه مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، وارد سیستم هم می‌شوند، و به صف‌ملحق می‌گردند، بعضی‌از آنها منصرف‌می‌شوند وسیستم را ترك می‌کنند. مدت‌زمانی راکه یك مشتری درصف می‌ماند، قبل ازاینکه سیستم را ترك‌کند می‌توان متغیری تصادفی فرض کرد، که دارای توزیع‌نمایی با پارامتر γ است. چون انصراف مشتریها را مستقل ازیکدیگر فرض می‌کنیم، مدت‌زمانی‌که طول می‌کشد تا اولین مشتری از ادامهٔ توقف درصف منصرف شود، متغیری تصادفی و برابر با حداقل n متغیرتصادفی نمایی است. بنابراین، طبق خاصیت توزیع نمایی، مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری منصرف شود، متغیرتصادفی نمایی با پارامتر $n\gamma$ است.

برای محاسبهٔ μ_n درسیستمهای با انصراف، فرض‌کنیدکه دریك لحظه n مشتری در سیستم باشند، تغییر حالت سیستم از n به $n-1$ به دو علت صورت می‌گیرد، یا ارائهٔ خدمت به‌یك مشتری تمام می‌شود ویا یکی ازمشتریها از ادامهٔ توقف درصف منصرف می‌گردد. بنابراین، مثلا درمدل $M/M/1$، آهنگ تغییر حالت از n به $n-1$ برابر با

$\mu+n\gamma$ است.

دربعضی ازسیستمها، آهنگ خدمت‌دهی نیزمی‌تواند با افزایش طول صف، افزایش یابد. مثلا، دریك‌سیستم ممکن‌است‌چندنوع آهنگ خدمت‌دهی وجود داشته‌باشد. درصورتی که تعداد مشتریهای داخل سیستم از حدی معین کمتر باشد، آهنگ خدمت‌دهی μ فرض می‌شود. با افزایش جمعیت سیستم، خدمت‌دهنده با استفاده ازابزار بهتر آهنگ خدمت‌دهی را مثلا به μ' افزایش می‌دهد. به‌همین ترتیب، باافزایش بیشترجمعیت، آهنگ خدمت‌دهی نیزمجدداً بیشتر می‌شود. دربعضی ازسیستمها تغییر آهنگ خدمت را به‌صورت زیرمی‌توان نشان داد:

$$\mu_n=\alpha_n\mu_1 \qquad (۷۳.۶)$$

که μ_1 و μ_n به‌ترتیب آهنگ خدمت به فرض وجود ۱ و n مشتری درسیستم است و α_n عددی بزرگتر ازیك فرض می‌شود. در مواردی α_n را می‌توان n^a فرض‌کردکه n عددی مثبت است.

درتمام مدلهای فوق، تعداد خدمت‌دهندگان نیزمؤثراست. مثلا، درمدل $M/M/m$، که امتناع مشتریها نیز درآن امکانپذیر است، پارامتر b_n دررابطهٔ (۷۱.۶) خیلی بیشتر از مدل $M/M/1$ است، زیرا مشتری، خارج‌قسمت تعداد مشتریهای داخل سیستم برتعداد خدمت‌دهندگان را مدنظر قرارمی‌دهد.

۱۰.۶ دورهٔ مشغول بودن و بیکاری سیستم در مدل $M/M/1$

همانطورکه‌درفصل پنجم گفتیم، هرسیستم‌صف به‌تناوب دوره‌های بیکاری وکار را طی‌می‌کند. براساس قرارداد، p_b معرف درصدی از اوقات است‌که، در درازمدت، سیستم کارمی‌کند ومقدار این‌کمیت ازرابطهٔ (۲۰.۵) به‌دست می‌آید.

درمورد مدل $M/M/1$، درصد بیکاری سیستم π_0 و درصد مشغول بودن سیستم $\rho=1-\pi_0$ است. مدت زمان بیکاری، فاصلهٔ بین زمان خالی‌شدن سیستم تا زمان ورود مشتری بعدی است. با توجه به‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مدت‌زمان بیکاری متغیری است تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر λ، ومیانگین آن عبارت‌است از:

$$E(I)=\frac{1}{\lambda} \qquad (۷۴.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۱.۵) و (۷۴.۶) وهمچنین $p_b=1-\pi_0$ نتیجه می‌شودکه

$$E(B)=\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

با استفاده ازرابطهٔ (۱۷.۶)،

$$E(B)=\frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (۷۵.۶)$$

اگر $N(B)$ معرف تعداد مشتریانی باشدکه دریك دورهٔ مشغول بودن سیستم خدمت دریافت می‌کنند،

$$E(B)=E[N(B)]\cdot\frac{1}{\mu}$$

یا

$$E[N(B)]=\frac{\mu}{\mu-\lambda}=\frac{1}{1-\rho} \qquad (۷۶.۶)$$

۱۱.۶ دورهٔ گذرا درمدلهای نمایی

دراین قسمت تنها بـه‌چارچوب روابط مربوط به دورهٔگـذرا می‌پردازیم. قضیهٔ زیر چنین چارچوبی را ارائـه می‌کند. یکی از مباحثی کـه درمـورد دورهٔ گـذرا مطرح می‌شود، چگونگی حل معادلات دیفرانسیل حاصل از قضیهٔ زیراست، که خارج ازبحث این کتاب است.

قضیه. در هرفرایند تولد و مرگ، احتمال وجود n مشتری درسیستم، درلحظهٔ t، از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیربه‌دست می‌آید:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \qquad (۷۷.۶)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)\mu_{n+1}p_{n+1}(t)\ ,\ n\geqslant 1 \qquad (۷۸.۶)$$

اثبات. برحسب تعریف

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\longrightarrow 0}\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}$$

ازطرف دیگر

$$p_0(t+\Delta t)=P[N(t+\Delta t)=0]=\sum_{i=0}^{\infty}P[N(t+\Delta t)$$
$$=0|N(t)=i]P[N(t)=i]$$

اما طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد ومرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=\circ|N(t)=\backslash]$$
$$=P[(t,t+\Delta t)\text{ یك مرگ درفاصلهٔ }|N(t)=i]=\mu_{\backslash}\Delta t+\circ(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=\circ|N(t)=\circ]$$
$$=P[\Delta t\text{ هیچ تولد درفاصلهٔ }|N(t)=\circ]=\backslash-\lambda_{\circ}\Delta t+\circ(\Delta t)$$

وبه‌ازای $i\geqslant ۲$

$$P[N(t+\Delta t)=\circ|N(t)=i]=P[\Delta t\text{ تعداد } i \text{ مرگ درفاصلهٔ }|N(t)=i]=\circ(\Delta t)$$

یا

$$P_{\circ}(t+\Delta t)=[\backslash-\lambda_{\circ}\Delta t+\circ(\Delta t)]P_{\circ}(t)+[\mu_{\backslash}\Delta t+\circ(\Delta t)]P_{\backslash}(t)+\circ(\Delta t)$$

درنتیجه، این رابطه را می‌توان به‌صورت زیرنوشت که‌درحد، همان‌اولین معادلهٔدیفرانسیل موردنظر است.

$$\frac{dp_{\circ}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to\circ}\frac{p_{\circ}(t+\Delta t)-p_{\circ}(t)}{\Delta t}=-\lambda_{\circ}p_{\circ}(t)+\mu p_{\backslash}(t)$$

ازطرف دیگر، به‌ازای $n\geqslant ۱$

$$P_n(t+\Delta t)=\sum_{i=\circ}^{\infty}P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=i]P[N(t)=i]$$
$$=P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n-\backslash]p_{n-\backslash}(t)+P[N(t+\Delta t)$$
$$=n|N(t)=n]+P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n+\backslash]p_{n+\backslash}(t)$$
$$+\sum_{\substack{i=\circ\\ i\neq n-\backslash,\, i\neq n+\backslash}}^{\infty}P[N(t+\Delta t)=i|N(t)=i]p_n(t)$$

مجدداً طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n-\backslash]=\lambda_{n-\backslash}\Delta t+\circ(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n]=\backslash-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t+\circ(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n+\backslash]=\mu_{n+\backslash}\Delta t+\circ(\Delta t)$$

درنتیجه می‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیـرنوشت وحد آن را به‌دست‌آورد، که همان

دستگاه معادلات مربوط به‌صورت مسئله است.

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{t}$$
$$=-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)$$

حالت خاص: فرایند تولد خالص

اگر فرض کنیم، به‌ازای $n=1,2,3,\ldots$، $\mu_n=0$ است، یعنی فقط تولد اتفاق می‌افتد، دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید. به‌ازای تمام مقادیر n، $\lambda_n=\lambda$ فرض می‌شود.

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$$

حل این معادلات به‌جواب زیرمنجرمی‌شود.

$$p_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n-1}$$

که معرف یك فرایند پواسون است، که البته این نتیجه از قبل هم قابل پیش‌بینی بود.

محاسبهٔ رابطه‌های صف دردورهٔ پایداری با استفاده ازرابطه‌های دورهٔ گذرا

اگرسیستم به‌دورهٔ پایدار برسد، رابطهٔ $\pi_n=\lim\limits_{t\to\infty}p_n(t)$، به‌ازای تمام مقادیر n وجودخواهد داشت ومقدار π_n نیزمستقل ازشرایط شروع کار سیستم، ثابت خواهد بود. درنتیجه،

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_0(t)}{dt}=\frac{d\pi_0}{dt}=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_n(t)}{dt}=\frac{d\pi_n}{dt}=0$$

به‌این ترتیب معادلات دیفرانسیل قضیهٔ فوق درحد به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$

$$(\lambda_n+\mu_n)\pi_n=\lambda_{n-1}\pi_{n-1}+\mu_{n+1}\pi_{n+1}$$

این رابطه‌ها، همان روابط (۶.۶) و (۸.۶) است، که قبلاً با استفاده از معادلهٔ تعادلی به‌دست آمده بودند و رابطهٔ (۱۱.۶) نیز از آنها نتیجه‌گیری شده بود.

مسائل

۱. در تعمیرگاهی که دارای یك تعمیرکار است، ماشینها طبق فرایند پواسون برای تعمیر (به‌طور متوسط هر روز ۲ ماشین) به‌تعمیرگاه وارد می‌شوند. مدت‌زمان تعمیر نمایی با میانگین ۱/۳ روز فرض می‌شود.

الف. به‌طور متوسط هر ماشین چه‌مدت در تعمیرگاه است؟

ب. احتمال اینکه در یك لحظه بیش از ۵ ماشین در تعمیرگاه باشد، چیست؟

۲. زمان بین دو ورود متوالی مراجعین یك تلفن عمومی، نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه، و مدت زمان هر تلفن نیز نمایی با میانگین ۳ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه کسی برای تلفن‌زدن مراجعه کند و مجبور شود که صبر کند، چقدر است؟

ب. به‌طور متوسط، در هر لحظه، چند نفر منتظر هستند که تلفن بزنند؟

ج. احتمال اینکه مدت زمان تلفن یکی از مراجعین بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

د. احتمال اینکه مدت‌زمان انتظار یکی از مراجعین در صف بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

ه. در چه درصدی از زمان، این تلفن مشغول نیست؟

و. به‌دلایلی تعداد مراجعین اضافه شده است، به‌طوری که میانگین انتظار هر مشتری در صف به ۳ دقیقه رسیده است. به‌طور متوسط، هر چند دقیقه‌ای یك نفر برای تلفن‌زدن مراجعه می‌کند؟

۳. در یك کارگاه، کارهای سفارشی براساس فرایند پواسون با میانگین ۲۵ قطعه در ساعت می‌رسد. مدت‌زمان لازم برای ساخت هر قطعه، براساس توزیع نمایی است و به‌طور متوسط در هر ساعت ۳۰ قطعه ساخته می‌شود.

الف. احتمال اینکه در یك لحظه کارگاه فاقد کار سفارشی باشد، چقدر است؟

ب. میانگین تعداد کارهای سفارشی که منتظر هستند، چند عدد است؟

ج. احتمال اینکه یك کار بیش از ۲۰ دقیقه در صف نماند، چقدر است؟

د. احتمال اینکه در یك لحظه ۸ تا ۱۰ کار در صف منتظر بمانند، چقدر است؟

ه. اگر تعداد کارهای سفارشی ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعداد کارهای انجام نشده چه تغییری می‌کند؟

و. اگر سرعت کار ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعداد کارهای انجام‌نشده چه‌تغییری

می کند؟

۴. مسئلهٔ شمارهٔ ۵ فصل سوم را درنظربگیرید. فرض می کنیم که دراین چاپخانه سه‌ماشین فتوکپی مشابه وجود داشته باشد. با هر ماشین می‌توان به‌طور متوسط ۱۸ جزوهٔ نوع الف یا ۶ جزوهٔ نوع ب را درساعت تکثیر کرد. سیاست چاپخانه این است که جزوه‌های نوع الف با ماشین شمارهٔ ۱ و جزوه‌های نوع ب با ماشینهای شمارهٔ ۲ و ۳ تکثیرشوند.

الف. جزوه‌های نوع الف و ب به‌طور متوسط چه‌مدت درچاپخانه می‌مانند؟

ب. احتمال اینکه تکثیر جزوهٔ نوع الف یا ب بلافاصله پس ازرسیدن به‌چاپخانه انجام شود، چقدراست؟

ج. فرض کنید چنانچه تعداد جزوه‌های نوع الف در چاپخانه به سه عدد برسد. شخصی برای کمك کردن به‌مسئول ماشین‌فرستاده می‌شود، که‌دراین صورت می‌توان هرساعت به‌جای ۱۷ جزوه ۲۰ جزوه را به‌طور متوسط تکثیر کرد. نمودارآهنگ این مدل را رسم کنید و با استفاده ازآن به سؤال بند الف مجدداً پاسخ‌دهید.

۵. دریك سیستم نمایی آهنگ ورود وخروج مشتریها به‌شرح زیراست.

$$\lambda_n=\begin{cases} \lambda & , \quad n\leqslant ۲ \\ ۲\lambda & , \quad n> ۲ \end{cases} \qquad , \ \mu_n=۱۰ \quad , \quad n\geqslant ۱$$

احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چیست؟ تحت چه شرایطی سیستم به‌حالت پایدارمی‌رسد؟ این سیستم را چگونه تفسیرمی کنید؟

۶. درمدل $M/M/۱$، احتمال اینکه مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم، بیش‌از مدت زمان میانگین انتظار مشتریها درسیستم باشد، چقدراست؟

۷. اتومبیلها طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۵ اتومبیل درساعت وارد یك مغازهٔ تعویض روغن می‌شوند، که فقط یك نفر درآنجا کارمی کند. مدت زمان تعویض روغن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط می‌توان روغن ۷ اتومبیل را درساعت تعویض کرد. فضای موجود فقط اجازهٔ توقف سه اتومبیل را می‌دهد(که شامل اتومبیلی که درحال تعویض روغن است نیزمی‌شود).

الف. به‌طور متوسط درهرلحظه چند اتومبیل دراین مغازه وجود دارد؟

ب. چند درصد صاحبان اتومبیلها به‌علت محدودیت جا ازتعویض روغن دراین مغازه منصرف می‌شوند؟

۸. مسئلهٔ شمارهٔ ۱۴ فصل سوم را درنظربگیرید.

الف. احتمال اینکه پس ازمراجعه یك مشتری، ساخت مبل او بلافاصله شروع شود، چیست؟ احتمال اینکه‌یك مشتری بیش ازهشت‌هفته معطل شود تا مبل خود را دریافت کند، چیست؟

ب. فرض کنید مدیریت کارگاه تصمیم گرفته است درهرلحظه بیش از K کارانجام نشده را قبول نکند. K را طوری محاسبه کنید که اولا، درصد بیکاری به بیش ازیك سوم اوقات نرسد و ثانیا، بطور متوسط بیش از دوکار انجام نشده درکارگاه نباشد. با این تصمیم، کارگاه در سال (۵۲ هفته) به‌طور متوسط چندکار قبول می‌کند؟ چند درصد مشتریهای خود را ازدست می‌دهد؟

۹. اتومبیلها بر اساس فرایند پواسون وارد یك تعمیرگاه می‌شوند. متوسط زمان بین دو ورود نیم ساعت است. مدت زمان تعمیر، نمایی با میانگین ۲۴ دقیقه فرض می‌شود. اگر اتومبیلی واردشود وفضای محوطهٔ تعمیرگاه‌پر باشد، ازقبول این اتومبیل‌خودداری‌می‌شود. فضای محوطهٔ تعمیرگاه‌باید گنجایش چند اتومبیل را داشته‌باشد تابتوان حداقل ۵۰ درصد اتومبیلهایی را که مراجعه می‌کنند قبول کرد؟

۱۰. برای تلفنهای راه دور، متقاضیان به یك شعبهٔ مخابرات،که دارای امکانات برای دو مکالمه است، مراجعه می‌کنند. در شلوغترین ساعت روز به‌طور متوسط ۱۵ تقاضای مکالمه درساعت وجوددارد وفاصلهٔ بین دونفرمراجعه‌کننده متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی است. مدت‌زمان هرمکالمه نیز نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه‌کسی مراجعه‌کند وبتواند بلافاصله تلفن بزند، چقدراست؟

ب. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درصف چقدراست؟

۱۱. کارخانه‌ای دارای ۱۲ ماشین مشابه است. کارهایی‌که ارجاع می‌شود، برمبنای فرایند پواسون با میانگین ۱۸ کار در ساعت است. متوسط نرخ تولید به‌ازای‌هرماشین، ۵ کار درساعت است ومدت زمان انجام آنها نیز نمایی فرض می‌شود

الف. میانگین تعداد ماشینهای بیکار چقدر است؟

ب. تابع توزیع تعداد کارهایی‌که منتظر می‌مانند را به‌دست‌آورید.

۱۲. دریك دفتر سه‌منشی کار می‌کنند. کارهایی‌که به‌این منشیها ارجاع می‌شود، طبق فرایند پواسون است. درهشت ساعت‌کاراین منشیها به‌طورمتوسط ۲۰ کاربه‌آنها ارجاع می‌شود. مدتی که یك منشی برای هرکار باید صرف‌کند، دارای توزیع‌نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه است.

الف. درچه درصدی اززمان همهٔ منشیها مشغول‌اند؟

ب. درچه درصدی اززمان هرمنشی مشغول است؟

ج. اززمان ارجاع یك‌کار، تا اتمام آن به‌طورمتوسط چقدرطول می‌کشد؟

۱۳. در یك بانك، دریافت توسط یك نفر وپرداخت توسط شخص دیگری انجام می‌شود. متوسط مدت دریافت یا پرداخت مربوط به‌هرمشتری ۳ دقیقه‌است واین مدت متغیرتصادفی با توزیع نمایی فرض می‌شود. ورود مشتریها برای‌پرداخت ودریافت طبق فرایندپواسون است. به‌طور متوسط هر ساعت ۱۶ نفر برای پرداخت و ۱۴ نفر برای دریافت مراجعه

می‌کنند. مدت زمـان انتظار هـرمشتری چقدر است؟ اگر هـردو کارمند بانك، هم کارهای دریافت وهم پرداخت را انجام‌دهند، میانگین مدت‌زمان انتظارهرمشتری چقدرخواهدشد؟

۱۴. در مرکز اطلاعات یك اداره، دونفر مأمور با کمك سه‌خط تلفن به‌سؤالات مراجعین پاسخ می‌گویند. سؤال‌کنندگان براساس فرایند پواسون تلفن می‌زنند (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۰ نفر) مدت‌زمان لازم برای پاسخ، نمایی با متوسط ۵ دقیقه فرض می‌شود. اگر هردو مأمور مشغول باشند ونفر سومی تلفن بزند، دراین صورت این شخص پشت خط‌سوم منتظر می‌ماند تـا نوبت به‌او برسد. اما چنانچه‌کسی تلفن بزند وهـر سه‌خط اشغال باشد، سؤال‌کننده اجباراً منصرف می‌شود (یا بعداً تلفن می‌زندکه دراین‌صورت حقی برای نوبت تلفن قبلی خود نخواهد داشت)

الف. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند. نمودارآهنگ آن را رسم‌کنید.
ب. احتمال اینکه‌کسی تلفن بزند وبه‌علت اشغال‌بودن هر سه‌خط منصرف شود، چیست؟
ج. احتمال اینکه‌کسی تلفن بزند وبلافاصله به‌سؤالش پاسخ داده‌شود، چیست؟
د. احتمال اینکـه کسـی تلفن بزند وبرای دریافت پاسخ مجبور شود پشت‌خط صبرکند، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار او دراین حالت چقدراست؟

۱۵. ورود هواپیماها به فرودگـاه طبق فرایند پواسون بـا میانگین ۱۸ هواپیما درساعت است. مدت‌زمان استفاده ازباند فرودگاه برای هرهواپیما براساس توزیع‌نمایی بامیانگین ۲٫۵ دقیقه است. اگر بخواهیم به احتمال بیش از ۸۰ درصد هیچ هواپیمایی منتظرنماند چندباند موردنیازاست؟

۱۶. دریك فروشگاه که فقط یك صندوقدار دارد، مشتریها براساس فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. (بامیانگین ۱۰ نفر درساعت). مدت‌زمانی‌که صندوقدارصرف هرمشتری می‌کند، متغیری تصادفی بـا توزیع نمایی است. اگر فقط یك نفرمشتری درصندوق باشد، میانگین این متغیرتصادفی ۴٫۵ دقیقه خواهد بود، امـا چنانچه تعداد مشتری بیش از یك‌نفر باشد، یك نفر دیگر به‌صندوقدارکمك می‌کند واین زمان به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد.
الف. نمودارآهنگ این مدل را رسم‌کنید ومعادلات تعادلی‌را بنویسید.
ب. تابع توزیع تعداد مشتریها را درصندوق به‌دست‌آورید.
ج. میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری را درصف محاسبه‌کنید.

۱۷. دریك فروشگاه مراجعه مشتریها بـراساس فـرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۲ مشتری). مدت زمـان خرید،نمایی بـا میانگین ۴ دقیقه وفروشگاه دارای یك فروشنده است.
الف. میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری درفروشگاه را به‌دست‌آورید.
ب. احتمال اینکه حداکثر سه مشتری درسیستم باشد، چیست؟
ج. حال فرض‌کنیدکه اگر تعداد مشتری درفروشگاه به‌بیش از دو (سه یا بیشتر) برسد،دو

فروشنده مشغول به‌کار می‌شوند واگر تعداد به‌بیش ازچهار برسد، به‌هر فروشنده یك‌دستیار داده می‌شود، به‌طوری‌که مدت زمان خدمت به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد. نمودار آهنگ را رسم کنید.

د. در بند ج، احتمال اینکه دوفروشنده مشغول به‌کار باشند، چیست؟

ه. در بند ج، میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری درفروشگاه را به‌دست آورید.

۱۸. با استفاده ازنتایج $M/M/m/K$، رابطهٔ π_0 رابرای حالت $M/M/m$ تعیین کنید.

۱۹. رابطهٔ (۷۵.۶) را مستقیماً براساس تعریف B به‌دست‌آورید.

۲۰. رابطه‌های(۷۲.۶)، (۷۵.۶) و (۷۶.۶) را برای $M/M/2$ نیز به‌دست آورید.

۲۱. یك‌سیستم صف با ۵ خدمت‌دهنده را درنظربگیرید. یك‌مشتری وارد می‌شود وملاحظه می‌کندکه ۱۰ نفردرصف هستند. مدت‌زمان خدمت توسط هرخدمت‌دهنده، نمایی بامیانگین ۱۰دقیقه فرض‌می‌شود.

الف. میانگین مدت‌زمانی راکه طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود به‌دست‌آورید.

ب. میانگین مدت‌زمانی را که این مشتری درصف می‌گذراند به‌دست‌آورید.

ج. میانگین‌مدت‌زمانی راکه طول‌می‌کشد تااین مشتری ازسیستم‌خارج‌شود به‌دست‌آورید.

د. اگر بعد از ورود این مشتری از ورود مشتریهای بعدی جلوگیری بــه‌عمل‌آید، میانگین مدت‌زمانی‌که طول می‌کشد تا سیستم خالی شود، چقدراست؟

۲۲. شرکتی می‌تواند برای انجام کارهای کامپیوتری خود، بایکی از دو مرکز «الف» یا «ب» قرارداد ببندد. هر مرکز از تعدادی عناصر مختلف تشکیل شده‌است. تعداد عناصریك مرکزکه خراب می‌شوند، طبق فرایند پواسون وبا آهنگ a_1 و a_2 درهرساعت (به‌ترتیب برای مراکزالف‌و ب) است. تعمیرهرعنصری‌که خراب بشود، بلافاصله‌توسط یك‌تعمیرکار جداگانه آغاز می‌گردد. تعداد این تعمیرکاران درحدی است‌که هرگز هیچ عنصری منتظر تعمیرکار نمی‌ماند. مدت‌زمان تعمیر هرعنصر،نمایی وبا میانگین b_1 و b_2 ساعت (به‌ترتیب برای مراکزالف‌وب)فرض می‌شود. چنانچه حتی یك عنصر هرمرکز خراب باشد،ادامهٔ‌کار متوقف می‌شود.

الف. درچند درصد اوقات، هرمرکزکار می‌کند؟

ب. چنانچه خسارت توقف هرساعت کارCوهزینهٔ‌کرایه‌هرساعت مرکزالف و ب به‌ترتیب S_1 و S_2 باشد، دراین‌صورت باکدام مرکز باید قرارداد بست؟

۲۳. برای تعمیر ۱۰ ماشین، ۲ نفر تعمیرکار تعیین شده‌اند. مدت‌زمان کارکردن هرماشین، قبل از خراب‌شدن، متغیری تصادفی بــا توزیع نمایی ومیانگین ۵ ساعت است. میانگین مدت‌زمان تعمیر، که طبق توزیع‌نمایی است، ۴۰ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین تعداد ماشینهای خراب چقدراست؟

پ. میانگین مدت‌زمانی‌که یك ماشین منتظر تعمیرکار می‌ماند، چقدراست؟
ج. اگر این دو تعمیرکار باهم کار کنند و درآن واحد فقط یك ماشین را تعمیر کنند، مدت زمان تعمیر به ۲۰ دقیقه کاهش می‌یابد. آیا این نحوهٔ کار بهتراست؟

۲۴. سیستم صفی با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید. اگر مدت زمان انتظار یك مشتری درصف زیاد طول بکشد، احتمالا ازدریافت خدمت‌منصرف وازصف وسیستم خارج می‌شود. مدت‌زمانی‌که هرمشتری، قبل ازمنصرف‌شدن، درصف می گذراند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر r است. نمودار آهنگ را دراین مدل رسم کنید. احتمال اینکه دریك لحظه سیستم خالی باشد، چقدراست؟

۲۵. دریك‌کارگاه ۳ ماشین ودو تعمیرکاروجود دارد. مدت‌زمانی که ماشین‌کارمی‌کند (قبل ازخراب‌شدن) متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰ ساعت و مدت‌زمان تعمیر نیزنمایی با میانگین ۸ ساعت است. به‌طورمتوسط درهرلحظه چندماشین خراب‌است؟ درچه‌درصدی ازاوقات، هردو تعمیرکار مشغول‌کار هستند؟ نمودارآهنگ این مسئله را رسم‌کنید وماتریس آهنگ‌گذار را بنویسید.

۲۶. دریك تعمیرگاه، اتومبیلها براساس فرایند پواسون مراجعه‌می‌کنند. زمان‌بین دوورود اتومبیلها،نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه فرض می‌شود. مدت‌زمان تعمیرنیز،نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است اگر هراتومبیل به‌مساحتی حدود ۵ مترمربع نیازداشته باشد، تعیین‌کنید مساحت محوطهٔ پارکینگ اتومبیلها چقدر باید باشد تا با احتمال ۹۰ درصد، هراتومبیل که به تعمیرگاه مراجعه می‌کند بتواند دراین محوطه پارك‌کند ومجبور نباشد درخیابان منتظر بماند تا تعمیرش‌شروع شود.

۲۷. تعمیرکاری مسئول ۵ ماشین‌است. مدت‌زمانی‌که‌هرماشین بدون خراب‌شدن می‌تواند کارکند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی وبا میانگین ۲ ساعت است. مدت‌زمان تعمیر هر ماشین نیزدارای توزیع نمایی است. این تعمیرکار می‌تواند به‌طورمتوسط ۳ ماشین را در ساعت تعمیرکند.
الف. احتمال اینکه همهٔ ماشینها مشغول‌کار باشند، چقدراست؟
ب. میانگین تعداد ماشینهایی‌که منتظر تعمیرهستند، چقدراست؟
ج. اگر این تعمیرکار مسئولیت ۶ ماشین را قبول کند، به‌سؤالات بندهای «الف» و «ب» مجدداً پاسخ دهید.

۲۸. تنها متخصص یك تعمیرگاه ۸۰ درصد اوقات مشغول به کار و ۲۰ درصد اوقات به علت نبودن‌کار بیکار است. ماشینها طبق فرایند پواسون، با آهنگ روزانه ۲ ماشین برای تعمیر، می‌رسد. مدت زمان تعمیر یك ماشین نمایی فرض می‌شود. دستمزد تعمیرکار و سایر هزینه‌های تعمیرگاه روزانه ۵۰۰ تومان است. اگر ماشینی‌که برای تعمیر به تعمیرگاه می‌رسد، بلافاصله‌تعمیرنشود، باید با هزینهٔ ۱۰۰ آن را انبارکرد (مدت انبارشدن تأثیری

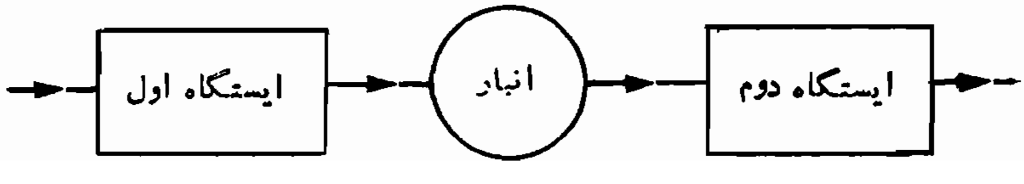
بـــر هزینه ندارد). علاوه بـــراینها، چنانچه مدت زمان توقف ماشین درتعمیرگاه بیش از دوروز باشد، باید جریمه‌ای برابر با ۱۰۰ نیز پرداخت شود.
الف. میانگین مدت‌زمان تعمیر چند روزاست؟
ب. به‌طور متوسط روزانه چند ماشین از این تعمیرگاه خارج می‌شوند؟
ج. به‌طور متوسط هزینهٔ تعمیر هرماشین چقدراست؟

۲۹. دریك بخش تخصصی کارخانـه‌ای چهارماشین مخصوص وجود دارد، که ادارهٔ آنها نیازبه تخصص ویژه‌دارد. متخصصین واجد شرایط که دراین‌کارخانه استخدام می‌شوند، با توجه به‌تقاضای بازار و دریافت پیشنهادهای استخدامی جدید بعد ازمدتی‌کار خود را ترك می‌کنند. مدتی کـه یك متخصص دراین کارخانه می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۲ سال است. تعداد متخصصینی کـه برای استخدام مراجعه می‌کنند، براساس فرایند پواسون بامیانگین سالی ۵ متقاضی است. چنانچه‌چهارمتخصص دراستخدام کارخانه باشند، از استخدام جدید خودداری می‌شود.
الف. این‌مسئله را به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف پیوسته نشان دهید و آهنگ‌گذار آن را رسم کنید.
ب. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند؟
ج. چنددرصد ازمتقاضیان استخدام نمی‌شوند؟
د. درهر لحظه، به‌طور متوسط چند ماشین به‌علت نبودن متخصص‌کار نمی‌کند؟

۳۰. ورود مشتریهای یك سیستم طبق فرایند پواسون با میانگین ۳۰ مشتری درساعت است. ۹۰ درصد مشتریهایی که وارد سیستم می‌شوند، چنانچه مشاهده‌کنند کـه حداقل سه‌مشتری دیگردرصف ایستاده‌اند از واردشدن به‌سیستم منصرف می‌شوند. مدت‌زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی ومیانگین ۴ دقیقه است. نمودار آهنگ را رسم و میانگین تعداد مشتریهایی راکه درصف هستند محاسبه‌کنید.

۳۱. مدت‌زمان معاینهٔ هـــر مریض توسط یك پزشك، نمایی است. این پزشك می‌تواند هر ساعت بـــه‌طور متوسط ۱۰ مریض را معاینه‌کند. مـــراجعهٔ بیماران طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۲ مراجعه درساعت است، ولی درصورتی‌که ۱۰ بیمار منتظر باشند، بیش از ۸۰ درصد مراجعین منتظر نمی‌مانند و به‌سایر پزشکان مراجعه می‌کنند. نمودار آهنگ‌را رسم‌کنید. چند درصد اوقات این پزشك بیکاراست؟

۳۲. یك خط تولید از دوایستگاه پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات پس ازطی‌ایستگاه اول به‌انبارنیم ساختهٔ‌بین دوایستگاه وازآنجا به‌ایستگاه دوم می‌روند. ظرفیت انبار،متناهی



وبرابر با N است. مدت‌زمانی که یك قطعه درایستگاههای اول ودوم می‌گذراند، دارای توزیع‌نمایی باپارامترهای به‌ترتیب μ_1 و μ_2 است. مواد اولیه ورودی ایستگاه اول به‌طور نامتناهی موجود است ومحدودیتی هم برای انبارکردن خروجی ایستگاه دوم وجود ندارد. ولی چنانچه انبار بین دوایستگاه پرشود، تولید درایستگاه اول هم متوقف می‌شود.

الف. با تعریف حالت مناسب، این مدل را به‌شکل یك زنجیرهٔ مارکوف نشان‌دهید.

ب. این مدل با کدام مدل فرایند تولد ومرگ تطبیق می‌کند؟

ج. چه‌درصدی از اوقات تولید درهرکدام ازایستگاهها متوقف می‌شود؟

۳۳. دریك مدل $M/M/1$، چنانچه λ و μ دوبرابر شوند (به‌طور جداگانه وهمچنین به‌طور همزمان)، معیارهای ارزیابی چه تغییری می‌کند؟

۳۴. دریك مرکزآموزش کامپیوتر، دونفر مربی وپنج نفردانشجو کار می‌کنند. دانشجویان برنامه‌های خود را می‌نویسند و اگر اشکالی پیش بیاید با یکی ازمربیان مطرح می‌کنند. به‌طور متوسط مدت زمانی که یك دانشجوبدون برخورد با اشکالی کارمی‌کند، متغیرتصادفی نمایی با میانگین ۲ ساعت است. مدت زمان رفع اشکال نیز طبق توزیع‌نمایی با میانگین یك ربع ساعت فرض می‌شود.

الف. نمودار آهنگ را رسم کنید.

ب. احتمال اینکه دریك لحظه هردو مربی بیکار باشند، چیست؟

ج. احتمال اینکه یك دانشجو اشکال داشته‌باشد و مجبور باشد صبرکندتامربیها بیکار شوند، چیست؟ میانگین این انتظارچقدر است؟

۷

سیستمهای مارکوفی

دراین‌فصل، سیستمهای‌صفی راکه درچارچوب فرایند مارکوف قرارمی‌گیرند، موردبررسی قرارمی‌دهیم. ازآنجاکه‌رابطه‌های فرایند مارکوف، به‌ویژه در درازمدت، نسبتاً ساده است، سعی می‌کنیم مسائل صف را حتی‌الامکان طوری فورمولبندی کنیم‌که‌بتوان ازخواص مارکوفی بهره‌گرفت. همان طورکه قبلا گفتیم، درصورتی‌یك فرایند را مارکوفی می‌نامند که‌درهرلحظه‌بتوان حرکت‌آیندهٔ آن را تنها براساس‌حالت فعلی‌آن‌پیش‌بینی‌کرد و به‌دانستن مسیر حرکت گذشته نیازی نباشد.

فرمولبندی یك‌مسئلهٔ صف، معمولا با تعریف حالت سیستم شروع می‌شود. اصولا حالت سیستم را می‌توان به شکلهای مختلف تعریف کرد، اما همهٔ آنها لزوماً به‌سیستمهای مارکوفی منتهی نمی‌شوند. بنابراین، نکتهٔ اصلی در فرمولبندی یك مسئلهٔ صف، انتخاب مناسب حالتهای آن است. همان‌طورکه قبلا گفتیم، مدلهای فرایند تولد ومرگ حالتهای خاصی از سیستمهای مارکوفی هستند، مشروط براینکه تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت درنظربگیریم. اما، چنانچه‌درسیستمهای دیگرهم حالت سیستم به‌همین‌ترتیب تعریف شود، لزوماً درچارچوب فرایند مارکوف قرارنمی‌گیرند؛ لذا، برحسب مورد و با درنظر گرفتن شرایط، مجموعه حالتهای مناسبی را باید تعریف‌کرد. چنانچه غیرازاین عمل شود، درمسئلهٔ موردنظر، خاصیت فرایند مارکوف به‌کارگرفته‌نمی‌شود. درنتیجه، بررسی تحلیلی آن معمولا بسیارپیچیده وگاهی غیرممکن می‌شود.

همان طورکه درمبحث زنجیره‌های مارکوف پیوسته گفته شد، مدت زمانی‌که سیستم در هرکدام ازحالتها توقف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. می‌توان ازاین خاصیت برای انتخاب مجموعهٔ حالتها استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، برای اینکه سیستمی‌درچارچوب فرایند مارکوف گنجانیده شود،ضرورت داردکه‌حالتهای آن بادرنظر گرفتن خاصیت فوق تعریف شود.

بعد ازاینکه مجموعه حالتهای سیستم تعریف و مشخص شد، باید احتمالات حدی سیستم را محاسبه‌کرد. همان طورکه گفته شد، زنجیره‌های مارکوف پیوسته را معمولا با ماتریس آهنگ گذار آن، یعنی $\mathbf{Q}$، مشخص می‌کنند. آن‌گاه با استفاده ازقضیهٔ حدی، احتمالات حدی یعنی π_j ها را محاسبه می‌کنند. از طرف دیگر، می‌دانیم‌که با استفاده از نمودارآهنگ می‌توان همین نتیجه رامستقیماً به‌دست‌آورد. به‌عبارت دیگر، q_{ij} ها (آهنگ انتقال سیستم از i به j) را مستقیماً روی نمودارآهنگ نشان می‌دهیم. آن‌گاه، معادلات حدی را می‌نویسیم،که این‌کار دقیقاً معادل استفاده ازنتایج قضیهٔ حدی است. بنابراین، در عمل معمولا راحت‌ترین روش برای محاسبه π_j ها استفاده ازنمودارآهنگ است.

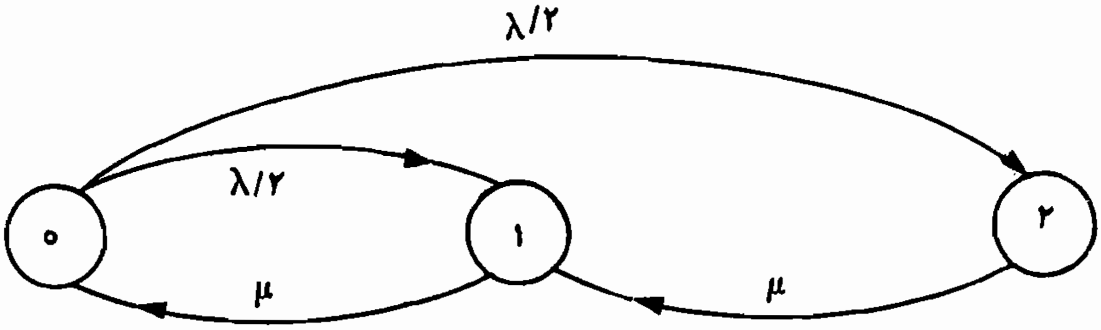
بعد از محاسبهٔ احتمالات حدی، سایر اطلاعات موردنیاز نظیر امید ریاضی طول صف، امید ریاضی زمان انتظار ونظایر اینها را می‌توان به‌دست آورد.

۱.۷ یك مثال

ماشینهایی راکه دارای دوموتور هستند. برای تعمیر به‌تعمیرگاهی می‌فرستند. پنجاه درصد ماشینهایی که به تعمیرگاه‌آورده می‌شوند، هردو موتورشان خراب‌است و ۵۰٪ بقیه فقط یك‌موتورشان نیاز به‌تعمیر دارد. فرض‌کنیدکه زمان بین دوورود متوالی ماشینها متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر λ ومدت‌زمان تعمیر هرموتور نیز نمایی با پارامتر μ است. اگر ماشینی در تعمیرگاه باشد، از قبول ماشین جدید خودداری می‌شود. احتمال اینکه ماشینی برای تعمیر به‌تعمیرگاه‌آورده شود، ولی به‌علت وجود ماشین دیگری درتعمیرگاه، تعمیر نشود، چقدر است؟

حل: اگر حالت سیستم را تعداد ماشینهای داخل تعمیرگاه درنظر بگیریم، مدل حاصله فرایند مارکوف نخواهد بود. برای اینکه این موضوع نشان داده شود، حالتی را درنظربگیرید که یك ماشین درتعمیرگاه باشد. مدت زمان توقف سیستم دراین حالت برابربا مدت‌زمان تعمیرماشین است،که‌این متغیرتصادفی دارای توزیع لزوماً نمایی‌نیست (به‌احتمال ۵۰ درصد نمایی وبه احتمال ۵۰ درصد ارلانگی است). همان‌طورکه قبلا گفتیم، برای اینکه مسئله را به‌شکل فرایند مارکوف فورموله‌کنیم، لازم است‌که حالتها طوری تعریف شوندکه مدت توقف سیستم درهرحالت نمایی باشد.

اکنون، حالت سیستم را تعداد موتورهای تعمیر نشده درنظربگیرید. با این تعریف، سیستم دارای سه‌حالت صفر، یك و دو است. شکل ۱.۷ نمودارآهنگ این مدل را نشان



شکل ۱۰۷ نمودار آهنگ مثال تعمیرگاه

می‌دهد. آهنگ گذار سیستم ازصفر به‌یك برابر با آهنگ ورود یك ماشین با یك موتور خراب است (یعنی $\lambda/2$). بـه‌همین ترتیب، آهنگ‌گذار از صفر به‌دو نیز برابربا $\lambda/2$ است. از طرف دیگر، تغییرحالت سیستم از یك بـه دو امکانپذیر نیست، زیرا وقتی هنوز یك موتور تعمیر نشده در تعمیرگـاه باقی مانده باشد، ماشین دیگری اجازه ورود ندارد. آهنگ گذارسیستم از۲ به ۱ ویا از ۱ به‌صفر معادل آهنگ تعمیر یك‌موتور، یعنی μ است.

با مشخص شدن نمودارآهنگ، می‌توان احتمالات حدی، یعنی π_iها، را با استفاده ازروابط تعادلی به‌شرح زیرمحاسبه‌کرد.

گره ۰: $$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$

گره ۱: $$\mu\pi_1=\frac{\lambda}{2}\pi_0+\mu\pi_2$$

گره ۲: $$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \text{ و } \mu\pi_2=\frac{\lambda}{2}\pi_0$$

ازحل معادلات فوق، نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_2=\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\,,\quad \pi_1=\frac{2\lambda}{2\mu+3\lambda}\,,\quad \pi_0=\frac{2\mu}{2\mu+3\lambda} \tag{۱۰۷}$$

همان طورکه گفته شد، می‌توانیم به‌جای استفاده ازنمودارآهنگ ازقضیهٔ احتمالات حدی استفاده‌کنیم، که دراین مسئله ماتریس‌آهنگ‌گذار عبارت است از:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \\ \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{۲۰۷}$$

از رابطهٔ $[\pi_0 \pi_1 \pi_2]Q=0$ می‌توان π_0 و π_1 و π_2 را به‌دست آورد، که با نتایج قبلی مطابق خواهد کرد.

اکنون می‌توان به سؤال موردنظر پاسخ داد. احتمال اینکه ماشینی به تعمیرگاه مراجعه کند و از قبول آن خودداری شود، برابر است با احتمال اینکه یك ماشین در تعمیرگاه باشد؛ و به‌عبارت دیگر، برابر است با احتمال وجود یك یا دو موتور تعمیر نشده در تعمیرگاه، یعنی $\pi_1+\pi_2$.

۲.۷ مدل $M/M/1$ با ورود گروهی

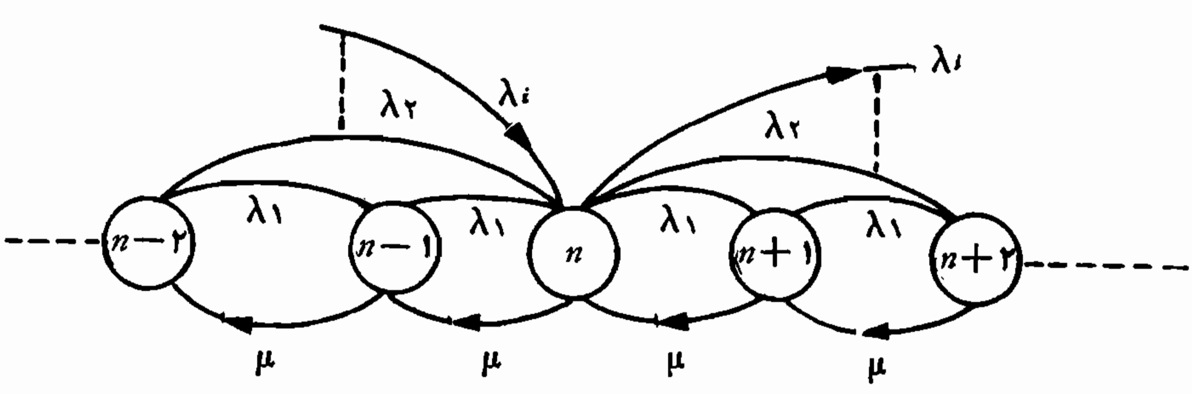
در این مدل، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها را متغیری تصادفی با توزیع نمایی (و پارامتر λ) فرض می‌کنیم. لیکن، هربار به جای یك مشتری، گروهی مشتری وارد سیستم می‌شوند و تعداد آنها نیز متغیری تصادفی است. احتمال اینکه یك گروه مشتری از i مشتری تشکیل شده باشد را برابر با p_i فرض می‌کنیم. طبیعتاً

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad (۳.۷)$$

نمودار آهنگ این مدل در شکل ۲.۷ نشان داده شده است.

طبق قضیهٔ ۳.۳، اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون و هر پیشامد به‌احتمال p_i از نوع خاصی باشد، تعداد پیشامدها از این نوع خاص نیز یك فرایند پواسون با پارامتر λp_i تشکیل می‌دهد. با توجه به‌این قضیه، تعداد گروههایی که وارد سیستم شوند و از i مشتری تشکیل شده باشند، فرایندی پواسون با پارامتر $\lambda_i=\lambda p_i$ خواهد بود. به این ترتیب، آهنگ ورود مشتریان برابر است با

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \qquad (۴.۷)$$



شکل ۲.۷ نمودار آهنگ مدل نمایی با ورود گروهی.

معادلات تعادلی را می‌توان با استفاده از نمودار آهنگ، شکل ۲.۷، به‌شرح زیر نوشت.

$$\lambda\pi_{\circ}=\mu\pi_{\backslash} \qquad (۵.۷)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\mu\pi_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\pi_{n-k}\ ,\ n=۱,۲,\dots$$

پس از حل این دستگاه معادلات، $\pi_{\circ}$ را به‌شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\pi_{\circ}=۱-\frac{\lambda\sum_{i=\circ}^{\infty}ip_i}{\mu} \qquad (۶.۷)$$

چنانچه متغیر تصادفی N را تعداد مشتریهای هر گروه بدانیم، میانگین آن عبارت خواهد بود از:

$$E(N)=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i \qquad (۷.۷)$$

از طرف دیگر، آهنگ ورود مشتریان عبارت از میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. این کمیت برابر با میانگین تعداد گروهها ضرب در میانگین تعداد مشتریان هرگروه است. بنابراین، آهنگ ورود مشتری برابر است با

$$\lambda\sum_{i=\circ}^{\infty}ip_i \qquad (۸.۷)$$

به‌این ترتیب، رابطهٔ (۶.۷) به‌رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\pi_{\circ}=۱-\rho \qquad (۹.۷)$$

پس ازمحاسبهٔ $\pi_{\circ}$، مقادیر π_n به‌ازای $n=۱,۲,\dots$ ازمعادلات (۵.۷) به‌دست می‌آید.

محاسبهٔ L درمدل $M/M/۱$ با ورود گروهی

پس ازمحاسبه π_n ها مقدار L ازرابطهٔ (۱۷.۵) محاسبه می‌شود. می‌توان نشان داد مقدار L به‌شرح زیرخواهد بود.

$$L=\frac{\rho}{۱-\rho}+\frac{\rho\left[\frac{E(N^۲)}{E(N)}-۱\right]}{۲(۱-\rho)} \qquad (۱۰.۷)$$

که $E(N)$ میانگین تعداد مشتریهای هرگروه و $E(N^۲)$ امیدریاضی مجذورآنهاست. همان‌

طور کـه مشاهده می‌شود، اگـر در هر گروه فقط یك مشتری وجود داشته باشد، یعنی مدل $M/M/۱$ برقرار باشد، رابطهٔ L نیز به‌همان رابطهٔ مربوط به $M/M/۱$ تبدیل خواهدشد.

مثال ۲۰۷ یك سیستم صف $M/M/۱$ بـا ورود گروهی را در نظر بگیرید. تعداد گروههایی که وارد سیستم می‌شوند، براساس فرایند پواسون با میانگین هرساعت ۳ گروه است. تعداد مشتریهای هر گروه متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شکل زیر است.

$$p_i = P[N=i] = (۰{,}۶)(۰{,}۴)^{i-۱}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تـا تنها خدمت دهنده به‌یك مشتری خدمت ارائه‌کند، متغیری تصادفی ونمایی بـا میانگین ده‌دقیقه است. احتمال اینکه دردرازمدت n مشتری در سیستم باشد، چیست؟ L را محاسبه‌کنید.

حل: طبق مفروضات، $\lambda = ۳$، $\mu = ۶$ و $\lambda_n = ۱{,}۸(۰{,}۴)^{n-۱}$ است. طبق توزیع هندسی $E(N)$ و $E(N^۲)$ به‌شرح زیرمحاسبه می‌شوند:

$$E[N] = \frac{۱}{۰{,}۶}$$

$$E[N^۲] = \mathrm{Var}[N] + E[N^۲] = \frac{۰{,}۴}{۰{,}۳۶} + \frac{۱}{۰{,}۳۶} = \frac{۱{,}۴}{۰{,}۳۶}$$

$\pi_۰$ ازرابطهٔ (۹.۷) به‌دست می‌آید.

$$\pi_۰ = ۱ - \frac{\lambda E[N]}{\mu} = \frac{۱}{۶}$$

با استفاده ازرابطهٔ (۵.۷)مقادیر π_n را محاسبه می‌کنیم، اگر چه‌فقط برای تعداد متناهی n چنین‌محاسباتی‌عملی‌است. برای نمونه، بادرنظر گرفتن $\lambda = ۳$، $\lambda_۱ = ۱{,}۸$ و $\lambda_۲ = ۰{,}۷۲$ خواهیم داشت:

$$\pi_۱ = \frac{\lambda}{\mu}\pi_۰ = \frac{۱}{۱۲}$$

به‌همین ترتیب،

$$\pi_۲ = \frac{۰{,}۹}{۱۲} = ۰{,}۰۷۵$$

و

$$\pi_۳ = \frac{(۰{,}۹)^۲}{۱۲} = ۰{,}۰۶۷۵$$

و با استفاده از رابطهٔ (۱۰.۷)،

$$L=\frac{50}{6}.$$

حالت خاص. حال فرض کنید کـه تعداد مشتریهای هر گروه دقیقاً برابر با b است، دراین‌صورت با درنظر گرفتن اینکه $\rho=\lambda b/\mu$ است،

$$L=\frac{\rho(1+b)}{2(1-\rho)} \tag{۱۱.۷}$$

و

$$W=\frac{1+b}{2\mu(1-\rho)} \tag{۱۲.۷}$$

مثال ۳.۷ درقسمت کنترل کیفیت کارخانه‌ای نمونه‌های ۱۵ تایی طبق فرایندپواسون (به‌طور متوسط ۸ نمونه در ساعت) وارد می‌شود. مدت زمـان بررسی هر قطعه، نمایی با میانگین ۰٫۲۵ دقیقه است. تمام نمونه‌ها باید موردبررسی قرارگیرند. به‌طورمتوسط در هرلحظه چند قطعه درقسمت کنترل کیفیت یـافت می‌شود؟ مدت زمـان انتظار هرقطعه برای بررسی چقدر است؟

حل: این مسئله، یك مـدل $M/M/1$ با ورود گروهی (دقیقاً $b=15$) و همچنین $\lambda=8$ و $\mu=240$ و $\rho=\lambda b/\mu=0.5$ است. طبق رابطه‌هـای (۱۱.۷) و (۱۲.۷)، $L=8$ و (ساعت) $W=0.066$ یا (دقیقه) $W=4$ و (دقیقه)$W_q=3.5$ خواهد بود.

محاسبهٔ π_n با استفاده ازتبدیل z

مقدار π_n ($n=1, 2, \ldots$) را با استفاده ازتبدیل z نیزمی‌توان محاسبه کرد. (برای مطالعهٔ بیشتر در مـورد تبدیل z به‌فصل دوم بخش ۱۲ مراجعه شود). فرض کنید $P(z)$ و $K(z)$ به‌ترتیب معرف تبدیل z مقادیر π_n و p_n باشند. به‌عبارت دیگر

$$K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n \quad \text{و} \quad P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n \tag{۱۳.۷}$$

دراین صورت، مقدار $P(z)$ ازرابطهٔ زیرحاصل می‌شود:

$$P(z)=\frac{\mu\pi_0(1-z)}{\mu(1-z)-\lambda z[1-K(z)]} \tag{۱۴.۷}$$

اثبات این رابطه درمثال ۲۲.۲ ارائه شده است (با فرض $L(z)=\lambda K(z)$)

با استفاده ازخواص تبدیل z و رابطهٔ $P(z)$ بـا π_0، می‌تـوان π_n را محاسبه کرد.

ضمناً، با درنظر گرفتن رابطه (۱۹.۵) می‌دانیم که

$$L=\frac{dP(z)}{dz}\bigg|_{z=۱}$$

مثال ۴.۷ مثال ۲.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. دراین مدل

$$K(z)=\sum_{i=۱}^{\infty}p_i z^i=\frac{۰٫۶z}{۱-۰٫۴z} \qquad (۱۵.۷)$$

و

$$۱-K(z)=\frac{۱-z}{۱-۰٫۴z}$$

با درنظر گرفتن اینکه $\pi_۰=۱/۶$ و $\rho=۵/۶$ و $\mu=۶$ است، رابطهٔ (۱۴.۷) به‌شرح زیر ساده می‌شود:

$$P(z)=\frac{۱-۰٫۴z}{۶[۱-۰٫۹z]}$$

از طرف دیگر با استفاده از خاصیت تصاعد هندسی،

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(۰٫۹z)^n=\frac{۱}{۱-۰٫۹z}$$

بنابراین،

$$P(z)=\frac{۱}{۶}\left[\sum_{n=۰}^{\infty}(۰٫۹z)^n-۰٫۴\sum_{n=۰}^{\infty}(۰٫۹)^n z^{n+۱}\right]$$

برای محاسبه π_n، ازرابطهٔ کلی زیراستفاده می‌شود:

$$\pi_n=\frac{۱}{n!}\,\frac{dP(z)}{dz}\bigg|_{z=۰}=\frac{(۰٫۹)^{n-۱}}{۱۲}$$

و

$$L=\frac{dP(z)}{dz}\bigg|_{z=۱}=\frac{۵۰}{۶}$$

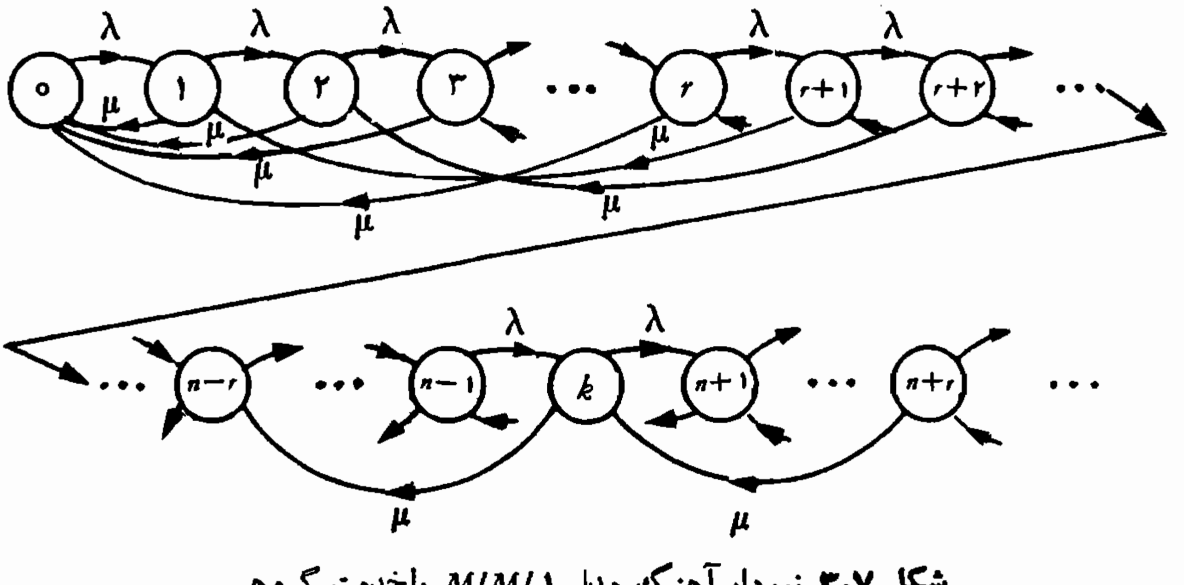
ضمناً L را می‌توان از رابطهٔ (۱۷.۵) وبا استفاده ازمقادیر π_n، که ازرابطهٔ فوق به‌دست می‌آید، نیزمحاسبه کرد.

۳.۷ مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی

دراین‌مدل، فرض می‌کنیم که هرخدمت‌دهنده، هر بار به‌جای یك مشتری به‌گروهی ازمشتریها، به‌طور همزمان، خدمت ارائه می‌کند. مدت خدمت، نمایی با پارامتر μ است. ورودمشتریها براساس فرایند پواسون با آهنگ λ درنظرگرفته می‌شود. ضمناً فرض می‌کنیم که مشتریها به‌صورت انفرادی وارد سیستم می‌شوند. موقعی کـه یك خدمت دهنده بیکار می‌شود، به‌طور همزمان به‌خدمت r مشتری می‌پـردازد. چنانچه تعداد مشتریهایی کـه درصف منتظر هستند کمتر از r باشد، سیستم می‌تواند به‌دونوع مختلف عمل کند. نوع اول این است که خدمت دهنده باهمان تعداد مشتری کار را شروع کند و منتظرنماندکه تعداد مشتریها به‌حدنصاب r برسد. در نوع دوم، خدمت‌دهنده باید دقیقاً به r مشتری خدمت ارائه کند. دراین صورت، سیستم منتظر می‌ماند تا تعداد مشتریهای داخل صف به r برسد.

ابتدا نوع اول را درنظر بگیریـد. تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت تعریف می‌کنیم. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، به‌دودلیل حالت سیستم تغییرمی‌کند. یکی ورود مشتری جدید با آهنگ λ است، که در این صورت به‌تعداد مشتریها یکی اضافـه می‌شود و حالت سیستم نیز به‌همین‌ترتیب تغییرمی‌کند. علت دیگر تغییرحالت سیستم، اتمام کارخدمت دهنده است، که دراین‌صورت از تعداد مشتریهای داخل سیستم نیزکاسته می‌شود. درمورد اخیر، تغییرحالت سیستم بستگی به‌حالت فعلی‌آن دارد. اگر حالت‌سیستم مساوی با یا بیشتر از r باشد، تعداد مشتریانی‌که خارج می‌شوند برابربا r است. امـا اگر حالت سیستم کمتر از r باشد، خدمت‌دهنده نیز به‌همین تعداد مشتری خدمت ارائه‌کرده است وتمام مشتریها خارج می‌شوند وحالت سیستم به‌صفر می‌رسد.

با استفاده ازنمودار آهنگ، معادلات‌تعادلی را به‌شرح زیرمی‌نویسیم:



شکل ۳.۷ نمودار آهنگ مدل $M/M/1$ باخدمت گروهی

$$\lambda\pi_0=\mu(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_r) \qquad (16.7)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r} \quad , \; n\geqslant 1 \qquad (17.7)$$

(همان طورکه نمودار آهنگ نشان می‌دهد، دراین مدل فرض شده است که اگر تعداد مشتریهایی که درحال دریافت خدمت هستندکمتر از r باشد ومشتری جدیدی وارد شود، به‌این مشتری نیز بلافاصله وهمزمان با سایرمشتریها خدمت ارائه خواهد شد. چنانچه این فرض صدق نکند، از حالتهای ۲، ۳،... r لزوماً برگشت به‌صفرصورت نمی‌گیرد. فرض کنیدکه درلحظهٔ شروع خدمت، فقط دومشتری درصف و $r>2$ باشد. اگر دراثنای ارائه خدمت یك مشتری جدید هم وارد شود، باید درصف منتظر بماند، بنابراین، پس ازارائهٔ خدمت این دومشتری سیستم را ترك می‌کنند، ولی حالت سیستم به‌یك می‌رسد)

دستگاه معادلات شماره‌های (۱۶.۷) و (۱۷.۷) را می‌توان با استفاده از تبدیل z و یا **معادلهٔ مشخصه** حل کرد، روش دوم به حل معادلهٔ زیر،که به‌معادلهٔ مشخصه موسوم است، منجر می‌شود.

$$\mu x^{r+1}-(\lambda+\mu)x+\lambda=0 \qquad (18.7)$$

معادلهٔ فوق ازدرجهٔ $(r+1)$ است و می‌تواند حداکثر دارای همین تعداد ریشه باشد. بدیهی است عدد یك همواره یکی از ریشه‌هاست. از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم که این معادله فقط دارای یك ریشه بین صفر و یك است که آن‌را x_0 می‌نامیم. پس ازمحاسبهٔ x_0، جواب معادلات تعادلی(۱۶.۷) و (۱۷.۷) به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_0=1-x_0 \qquad (19.7)$$

$$\pi_n=(1-x_0)x_0^n \quad , \quad n=1,2,\cdots \qquad (20.7)$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، احتمالات حدی دراین مدل مشابه معادلات حدی درمدل $M/M/1$ است؛ مگر دراین موردکه به جای ρ مقدار x_0 قرار گرفته است. لذا می‌توان نشان دادکه رابطه‌های زیرنیز برقراراست:

$$L=\frac{x_0}{1-x_0} \qquad (21.7)$$

$$W=\frac{x_0}{\lambda(1-x_0)} \qquad (22.7)$$

مثال ۵.۷ دریك سیستم صف، خدمت دهنده می‌تواند به‌طور همزمان حداکثر به دو مشتری خدمت ارائه‌کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون باآهنگ ۱۵ مشتری درساعت ومدت زمان خدمت نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم چقدراست؟ احتمال اینکه بیش ازچهارمشتری درسیستم باشد، چقدراست؟

حل: مفروضات مسئله $Z=r$ و ۱۵ $=\lambda$ و ۱۰ $=\mu$ است. معادلهٔ مشخصه برای این مسئله، طبق رابطهٔ (۱۸.۷) عبارت است از:

$$۱۰x^۳-۲۵x+۱۵=۰$$

این دستگاه معادله دارای سه ریشه به‌شرح زیر است

$$\frac{-\sqrt{۷}-۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۷}-۱}{۲}\ ,\ ۱$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، فقط یکی از ریشه‌ها، یعنی $۰/۸۲۳=۲/۱-\sqrt{۷}$، عددی بین صفر ویك است، که آن را با $x_۰$ نشان می‌دهیم. لذا

$$L=\frac{۰/۸۲۳}{۱-۰/۸۲۳}=۴/۶۵$$

واحتمال اینکه بیش ازچهارمشتری درسیستم باشند، برابراست با

$$\sum_{i=۵}^{\infty}\pi_i=(۱-x_۰)\sum_{i=۵}^{\infty}x_۰^i=x_۰^۵=۰/۳۸$$

حال مدل $M/M/۱$ با خدمت گروهی را در نظر بگیرید، که خدمت‌دهنده فقط به r مشتری خدمت می‌دهد. دراین مدل، چنانچه خدمت‌دهنده بیکار شود، اما تعداد مشتریهای داخل صف کمتر از r باشد، ارائهٔ خدمت انجام نمی‌شود. خدمت‌دهنده منتظرمی‌ماند تا مشتریهای جدیدی وارد سیستم شوند ودرلحظه‌ای که r امین مشتری وارد می‌شود، کارخود را شروع می‌کند. نمودارآهنگ این مدل درشکل ۴.۷ نشان داده شده است. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، دراین مدل فقط به گروههای r عددی خدمت ارائه می‌شود و تفاوت آن با مدل شکل ۳.۷ مربوط به‌حالتهای ۱ تا $r-۱$ است.

با استفاده ازنمودارآهنگ، معادلات تعادلی به‌شرح زیر نوشته می‌شود:

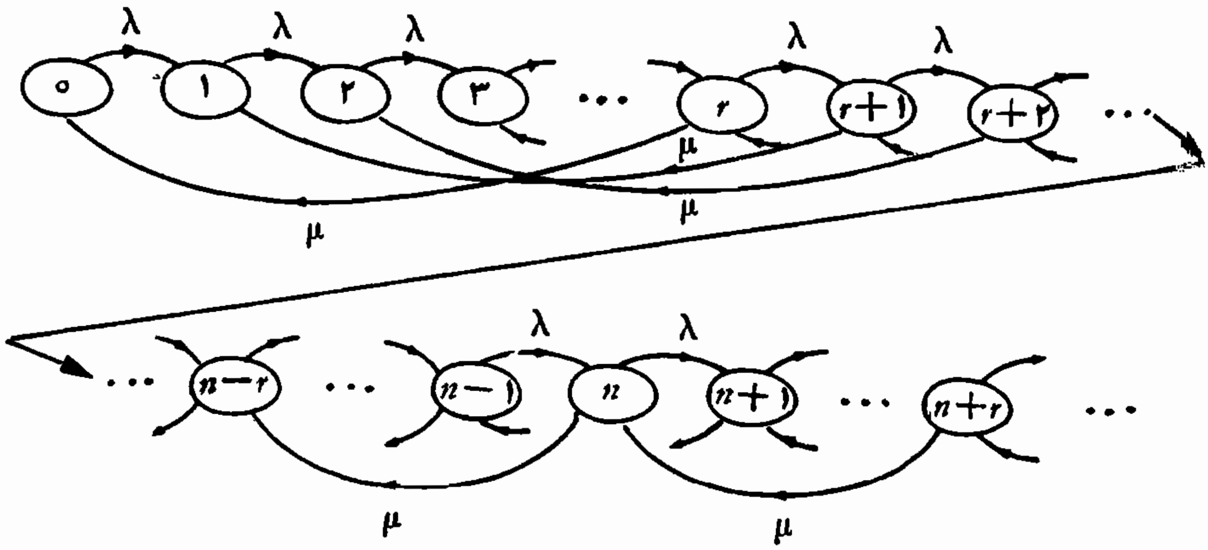
$$\lambda\pi_۰=\mu\pi_r \tag{۲۳.۷}$$

$$\lambda\pi_n=\lambda\pi_{n-۱}+\mu\pi_{n+r}\quad,\quad ۱\leqslant n<r \tag{۲۴.۷}$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-۱}+\mu\pi_{n+r}\quad,\quad r\leqslant n \tag{۲۵.۷}$$

برای حل معادلات فوق، مجدداً معادلهٔ مشخصهٔ (۱۸.۷) را حل می‌کنیم و $x_۰$ را به‌دست می‌آوریم. می‌توان نشان دادکه دراین مدل، احتمالات حدی عبارت‌اند از:

$$\pi_۰=\frac{۱-x_۰}{r} \tag{۲۶.۷}$$



شکل ۴.۷ نمودار آهنگ مدل‌نمایی با خدمت گروهی (دقیقاً r مشتری)

$$\pi_n=\frac{۱-x_\circ^{n+۱}}{r}\quad,\quad ۱\leqslant n<r \qquad (۲۷.۷)$$

$$\pi_n=\pi_\circ\frac{\lambda}{\mu}\cdot x_\circ^{n-r}\quad,\quad n\geqslant r \qquad (۲۸.۷)$$

مثال ۶.۷ درمثال ۵.۷ فرض کنید که خدمت‌دهنده دقیقاً به‌دومشتری خدمت می‌دهد؛ یعنی، صبرمی‌کند تا حداقل دومشتری درصف منتظر باشند، تا ارائهٔ خدمت را شروع کند. دراین‌صورت، مسئله را مجدداً حل کنید.

حل: معادلهٔ مشخصه دراین مورد نیز تفاوتی نمی‌کند. بنابراین $x_\circ=$ ۰٫۸۲۳ و

$$\pi_\circ=۰٫۰۸۹$$

از رابطهٔ (۲۱.۷)

$$\pi_۱=\frac{۱-x_\circ^۲}{۲}=۰٫۱۶$$

به‌ازای $n\geqslant ۲$ از رابطه (۲۲.۷)

$$\pi_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_\circ\cdot x_\circ^{n-۲}=۰٫۱۳۲۸x_\circ^{n-۲}$$

درنتیجه

$$L=\sum_{n=۱}^{\infty}n\pi_n=\pi_۱+\sum_{n=۲}^{\infty}n\pi_n=۰٫۱۶+۰٫۱۳۲۸\sum_{n=۲}^{\infty}nx_\circ^{n-۲}$$

ازطرف دیگر، طبق رابطهٔ (۷۵۰۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x_0^{n-1} = \frac{1}{(1-x_0)^2} = ۳۱٫۹$$

بنابراین،

$$L = ۰٫۱۶ + \frac{۰٫۱۳۲۸}{x_0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n x_0^{n-1} - 1\right] = ۵٫۱۵$$

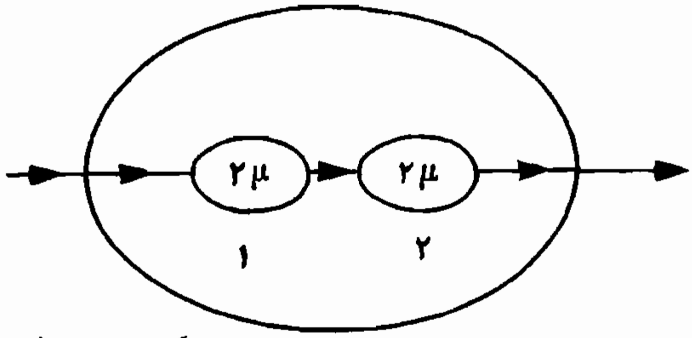
و

$$\sum_{i=5}^{\infty} \pi_i = ۰٫۱۳۲۸ \sum_{n=5}^{\infty} x_0^{n-2} = ۰٫۴۱$$

همان‌طور که مشاهده‌می‌شود، هم‌مقدار L وهم مجموع احتمالات‌افزایش یافته‌است (چرا؟).

۴.۷ مدل $M/E_r/1$

در این سیستم، مشتریها براساس فرایند پواسون بـا آهنگ λ وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت تابع توزیع ارلانگی (با r مرحله) فرض می‌شود. همان طور که درفصل سوم گفتیم، به‌علت انعطاف بسیار زیادتابع توزیع ارلانگی، بسیاری ازمتغیرهای تصادفی را می‌توان با تقریب مناسب درقالب آن جـا داد. ازطرف دیگر، برای اینکه بتوان ازخاصیت بدون حافظه‌بـودن توزیع نمایی استفاده کرد، می‌تـوان متغیرتصادفـی ارلانگی را به‌چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. فرض‌کنیدکه میانگین یك متغیرتصادفی ارلانگی $1/\mu$ وپارامتر دیگر آن $r = 2$ باشد. با استفاده ازخاصیت متغیر تصادفی‌ارلانگی، می‌توان آن رامجموع دومتغیرتصادفی نمایی فرض کرد، که میانگین هـر کدام ازآنها برابر $1/2\mu$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر، اگرمدت‌زمان خدمت براساس توزیع E_2 بامیانگین $1/\mu$ باشد، می‌توان فرض‌کردکه دراین سیستم، خدمت از دومرحلهٔ پشت‌سرهم تشکیل شده است، که مدت‌زمان خدمت درهرمرحله، نمایی بـا پارامتر 2μ است (شکل ۵.۷). بدین‌ترتیب، باوجود اینکه خدمت مـوردنظر عملا فقط ازیك مرحله تشکیل شده‌است، می‌تـوان فرض‌کردکه به‌طور



شکل ۵.۷ خدمت‌دهنده با توزیع ارلانگی دومرحله‌ای

ریاضی از دومرحلهٔ مجزا به‌وجود آمـده است. به‌عبارت دیگر، مشتری ابتدا مرحلهٔ ۱ را می‌گذراند، که نمایی و دارای میانگین $۱/۲\mu$ است. سپس وارد مرحلهٔ ۲ می‌شود ودرآنجا نیز به‌طور متوسط به‌مدت $۱/۲\mu$ برای دریافت خدمت می‌ماند. پس ازطی هر دومرحله، مشتری سیستم را ترک می‌کند. چون عملا، دومرحلهٔ خدمت قابل تفکیك نیست (فقط از نظر ریاضی به دو مـرحله تقسیم می‌شود). لـذا در هرلحظه فقط یك مشتری دریکی از مراحل خدمت است ومرحلهٔ دیگرآن خالی ازمشتری است.

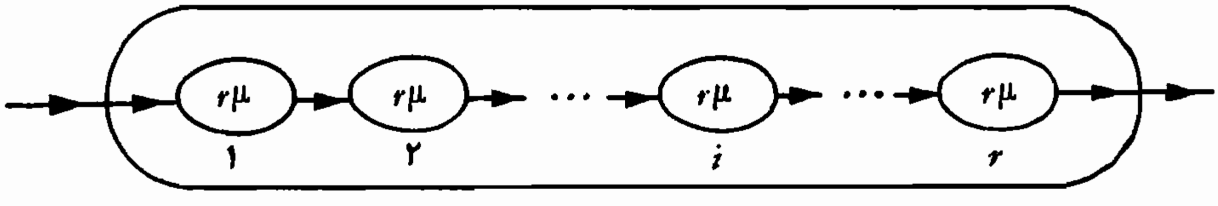
با استفاده از تعبیر فوق می‌توان ازمزایـای خاصیت مارکوفی درمحاسبات استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، اگر مرحله‌ای که مشتری درحال گذرانیدن آن است را حالت سیستم تعریف کنیم، باتوجه به‌خاصیت بـدون حافظه‌بودن تـوزیع نمایی می‌توان فرض کرد که مشتری درست درهمین لحظه وارد این مـرحله شده است. بـه این ترتیب، تنها اطلاعات مورد نیاز این است که مشتری چند مرحله را گذرانیده است. بنابراین، با تعریف مناسب برای حالت سیستم، می‌توان مسئله را به‌یك فرایند مارکوف تبدیل کرد.

استدلال فوق درموردتجزیهٔ یك تابع توزیع ارلانگی با پارامتر r نیزصادق است. می‌توان فرض کرد که این متغیر ازمجموع r متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $r\mu$ تشکیل شده است (شکل ۶.۷). دراینجا نیز اگر حالت سیستم را تعداد مراحل طی‌شده توسط مشتری وهمچنین تعداد مشتریهای منتظردرصف تعریف کنیم، دارای یك سیستم مارکوفی خواهیم بود.

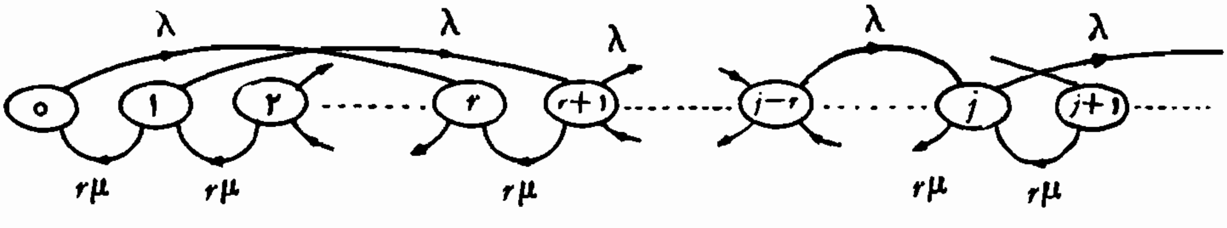
اگر سیستم دارای یك مشتری است کـه ۲ مرحلهٔ خدمت را گـذرانیده است، این مشتری باید $r-۲$ مرحلهٔ دیگر را هم بگذراند؛ یعنی، حالت سیستم برابر با $r-۲$ است واگر غیر ازایـن مشتری ۳ مشتری دیگـر نیز در صف باشند، حالت سیستم بـرابـر با $۳r+(r-m)$ خواهد بود. به‌طور کلی، طبق تعریف فوق، اگر n مشتری درسیستم باشند ویکی ازآنها m مرحله را گذرانیده باشد، حالت سیستم عبارت است از:

$$j=(n-۱)r+(r-m) \quad , \quad m\leqslant r$$

با توجه بـه‌تعریف حالت سیستم، نمودار آهنگ این مـدل مطابق شکل ۷.۷ خواهد بود.



شکل ۶.۷ تجزیهٔ یك متغیر تصادفی ارلانگی r مرحله‌ای



شکل ۷.۷ نمودار آهنگ مدل $M/E_r/1$

همان‌طور که‌نمودار آهنگ نشان می‌دهد، به‌محض ورود یك مشتری، حالت سیستم افزایش برابر با r پیدا می‌کند، زیرا هرمشتری جدید باید r مرحله خدمت را بگذراند. چون تعداد مراحل خدمت، حالت سیستم تعریف شده‌است؛ بنابراین، باپایان کار خدمت دهنده، حالت سیستم به‌اندازهٔ یك واحد کاهش می‌یابد؛ لیکن، آهنگ خدمت‌دهی، طبق آنچه گفته‌شد برابر با $r\mu$ است.

معادلات تعادل دراین مدل، براساس نمودار آهنگ، عبارت‌انداز:

$$\lambda\pi'_0 = r\mu\pi'_1 \qquad (۲۹.۷)$$

$$(\lambda+r\mu)\pi'_j = r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j=1, 2, \cdots, r-1 \qquad (۳۰.۷)$$

$$(\lambda+r\mu)\pi_j = \lambda\pi'_{j-r}+r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j=r, r+1, \cdots \qquad (۳۱.۷)$$

درمعادلات‌فوق، π'_j معرف‌احتمال وجود j مرحلهٔ‌خدمت‌انجام نشدهٔ مشتریهاست. دربررسی یك سیستم صف، آنچه بیشترمطرح است این است که چند مشتری درسیستم هستند. چنانچه π_n را احتمال وجود n مشتری درسیستم تعریف کنیم،

$$\pi_n = \sum_{j=(n-1)r+1}^{rn} \pi'_j \quad , \quad n=1, 2, \cdots \qquad (۳۲.۷)$$

چون مقادیر π'_j ازمعادلات ۳۰.۷ و ۳۱.۷ به‌دست می‌آید، می‌توان π_n را ازرابطهٔ (۳۲.۷) محاسبه کرد؛آن‌گاه، معیارهای ارزیابی را با استفاده ازرابطهٔ (۱۷.۵) و استنتاج لیتل حساب می‌کنیم، که نتیجهٔ آنها به‌شرح زیر خواهد بود:

$$L_q = \frac{1+r}{2r}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+r}{2r}\cdot\frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۳.۷)$$

در رابطهٔ فوق، $\rho=\lambda/\mu$ است.

$$W_q = \frac{1+r}{2r}\cdot\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۴.۷)$$

$$W = W_q+\frac{1}{\mu} \quad , \quad L=\lambda W \qquad (۳۵.۷)$$

حالتهای خاص

اگر $r=1$ باشد، مدل فوق تبدیل بــه $M/M/1$ می‌شود و رابطه‌های فوق با روابطی که قبلا برای این مدل به‌دست‌آوردیم تطبیق می‌کند.

اگر $r=\infty$ باشد، توزیع ارلانگی به متغیر قطعی و غیراحتمالی تبدیل می‌شود و

مدل حاصل $M/D/1$ خواهد بود. درنتیجه، بـرای این مدل معیارهای ارزیابی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید.

$$L_q=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۶.۷)$$

$$W_q=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۷.۷)$$

مثال ۷.۷ مرکز اورژانس یك شهرکـوچك را درنظر بگیریدکـه فقط دارای یك آمبولانس است. تقاضا برای ارسال آمبولانس طبق فرایند پواسون به‌این مرکزمی‌رسد. میانگین زمان بین هر دوتقاضای متوالی دوساعت است. مدت‌زمانی کـه طول می‌کشد تا آمبولانس ازاین مرکز به‌محل حضور یك بیمار برسد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۱۰ دقیقه است. اگر یك بیمارتلفن بزندکـه برایش آمبولانس بفرستند، احتمال اینکه آمبولانس بلافاصله فرستاده شود، چقدراست؟ میانگین مدت‌زمـان انتظاریك بیمار برای اینکه آمبولانس به‌منزلش برسد، چقدراست؟

حل: این سیستم یك مدل $M/E_2/1$ است. مدت زمـان خدمت از مجموع دومتغیر تصادفی نمایی تشکیل می‌شودکه عبارت اززمان رفت وبرگشت آمبولانس است. بنابراین، مدت زمان خدمت دارای توزیع E_2 بـا میانگین ۲۰ دقیقه است. بدین‌ترتیب، $\mu=3$ و $\lambda=1/2$. احتمال اینکه‌آمبولانس بلافاصله برسد، برابر با π_0 است و

$$\pi_0=1-\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{6}$$

مدت‌زمان انتظارمشتری درصف، طبق رابطه (۳۱.۷)

$$W_q=\frac{1+2}{4}\cdot\frac{0/5}{3(3-0/5)}=\frac{1}{20}\text{ ساعت}=3\text{ دقیقه}$$

میانگین زمان انتظار یك مشتری تا لحظهٔ رسیدن آمبولانس عبارت ازمجموع زمان‌انتظار درصف (یعنی ۳ دقیقه) و مدت‌زمان رفتن آمبولانس ازمرکز به‌منزل او (یعنی ۱۰ دقیقه) است؛ بنابراین، باید به‌طورمتوسط ۱۳ دقیقه منتظر بماند.

مثال ۸.۷ در یك سیستم صف، ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بـا میانگین ۲۰ مشتری درساعت است. دراین سیستم، دونفرخدمت‌دهنده‌کارمی‌کنند. مدت‌زمان خدمت‌دارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۴ دقیقه است. اگر به‌جای این دوخدمت‌دهنده، یك‌ماشین خریداری شود، که‌همان خدمت را انجام دهد، مدت‌زمان خدمت چقدر باید باشد تا تعداد مشتریهای داخل سیستم حداقل افزایش را بیابد؟

حل: سیستم فعلی یك مدل $M/M/2$ و سیستم پیشنهادی یك مدل $M/D/1$ است.

L را دردوحالت باید مقایسه کرد. درهر دوسیستم $\lambda = ۲۰$ است

مدل $M/M/۲$:

دراین حالت $\mu = ۱۵$ و $\rho = ۲۰/۳۰ = ۲/۳$ است. طبق رابطهٔ (۴۴.۶)

$$\pi_{\circ} = \frac{۱-\rho}{۱+\rho} = \frac{۱}{۵}$$

واز رابطهٔ (۴۶.۶) و استنتاج لیتل،

$$L = ۲{,}۴$$

مدل $M/D/۱$

هدف تعیین μ (یا ρ) است به‌طوری که $L \leqslant ۲{,}۴$ باشد. اما دراین مدل $r = \infty$ است، لذا ازرابطهٔ (۳۶.۷) نتیجه می‌شود که

$$L_q = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\rho^۲}{۱-\rho} \tag{۳۸.۷}$$

و

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\rho^۲}{۱-\rho} + \rho \leqslant ۲{,}۴$$

درنتیجه

$$\mu \geqslant ۲۵ \qquad \text{یا} \qquad \rho \leqslant ۰{,}۸$$

پس مدت‌زمان خدمت باید کمتر از ۲٫۴ دقیقه باشد.

۵.۷ مدل $E_r/M/۱$

دراین مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع ارلانگی (با r مرحله) و مدت زمان خدمت‌نمایی است. دراینجا نیزمی‌توان فرض کرد که زمان بین دوورود مشتریها به r مرحلهٔ نمایی تقسیم می‌شود. به‌عبارت دیگر، می‌توان تصور کرد که مشتری قبل از ورود به‌سیستم، باید r مرحلهٔ فرضی را در خارج ازسیستم بگذراند. وزمان گذراندن اولین مرحلهٔ آن بلافاصله پس ازورود مشتری قبلی به‌سیستم شروع می‌شود. بدیهی است که عملا

چنین حالتی وجود ندارد، ولی ازنظر ریاضی، گذرانیدن m مرحلهٔ فرضی با توزیع E_r تطبیق می‌کند. به‌این‌ترتیب، پس ازورود هرمشتری، با وجود اینکه هنوز ازمشتری بعدی خبری نیست، می‌توان تصور کردکه اولین مرحلهٔ ورود را شروع کرده است.

تعریف حالت سیستم

تعداد مراحل ورودی‌که مشتریهای سیستم طی کرده‌اند را حالت می‌نامیم. هر مشتری داخل سیستم، در واقع تمام r مرحله را طی‌کرده است. بدین‌ترتیب، اگر مشتری‌آینده، که به‌طور فرضی درحال گذرانیدن مراحل ورودی است، تاکنون‌از m مرحله‌گذشته‌باشد و n مشتری دیگر نیز داخل سیستم باشند، حالت سیستم به‌شرح زیر بیان می‌شود:

$$j=nr+m$$

باتعریف حالت سیستم به‌شرح‌فوق، نمودار آهنگ این مدل را می‌توان مطابق شکل (۸۰۷) نشان داد.

π'_j معرف‌احتمال بودن سیستم درحالت j، دردرازمدت است. لذا، معادلات تعادل این‌مدل به‌شرح زیراست

$$r\lambda\pi'_0=\mu\pi'_r \tag{۳۹۰۷}$$

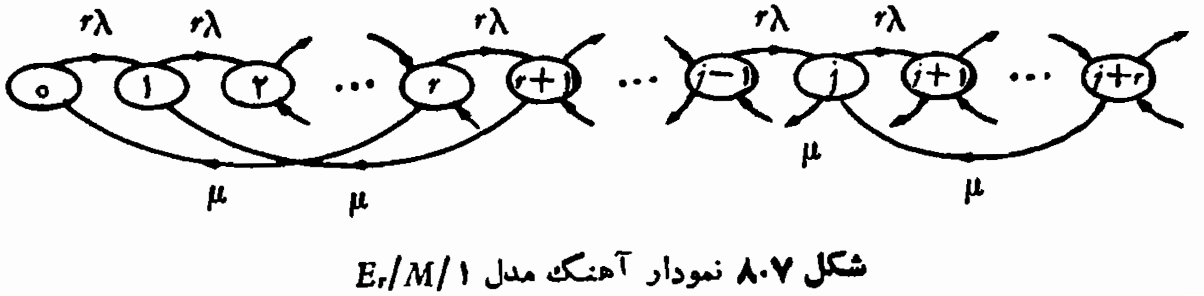
$$r\lambda\pi'_j=r\cdot\lambda\pi'_{j-1}+\mu\pi'_{j+r}\ ,\quad 1\leqslant j\leqslant r-1 \tag{۴۰۰۷}$$

$$(r\lambda+\mu)\pi'_j=r\lambda\pi'_{j-1}+\mu\pi'_{j+r}\ ,\quad r\leqslant j \tag{۴۱۰۷}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، ساختار این مدل با مدل $M/M/1$ (خدمت‌گروهی که دقیقاً به‌r مشتری‌خدمت‌می‌دهد) تطبیق می‌کند، با این تفاوت‌که دراین مدل همه جا به‌جای λ پارامتر $r\lambda$ وجود دارد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی، دراینجا نیز ازمعادلهٔ مشخصهٔ سیستم، شبیه آنچه که درمدل $M/M/1$ با خدمت‌گروهی ارائه شد، استفاده می‌شود. در این مدل، معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\mu x^{r+1}-(r\lambda+\mu)x+r\lambda=0 \tag{۴۲۰۷}$$

دراینجا نیز، فقط یکی ازریشه‌های این معادله، که آن را x_0 می‌نامیم، عددی بین صفر و



شکل ۸۰۷ نمودار آهنگ مدل $E_r/M/1$

یك است. $\pi'_\circ$ و π'_n نیز ازرابطه‌های (۲۶.۷) و (۲۷.۷) و (۲۸.۷) به‌دست می‌آیند.

ازآنجاکه دراین مدل نیز، هدف‌محاسبهٔ تابع توزیع، تعداد مشتریهای داخل‌سیستم (ونه تعداد مراحل‌کارهای انجام نشده) است، لذا π_n را احتمال بودن n مشتری در سیستم دردرازمدت تعریف می‌کنیم. رابطه π_n و π'_n به‌شرح زیراست

$$\pi_n=\sum_{j=nr}^{(n+1)r-1}\pi'_j \ , \ n=\circ,1,2,\cdots \qquad (۴۳.۷)$$

بدین‌ترتیب، پس ازمحاسبه π'_j با استفاده ازمعادلهٔ‌مشخصه، می‌توان π_n را نیزازرابطهٔ فوق به‌دست آورد.

$$\pi_\circ=\frac{1-x_\circ}{r}+\frac{1-x_\circ^2}{r}+\cdots+\frac{1-x_\circ^r}{r} \qquad (۴۴.۷)$$

طبق رابطهٔ (۱۸.۷)، به‌ازای $j\geqslant r$ وبا جایگزینی $r\lambda$ به‌جای λ،

$$\pi'_j=\pi'_\circ\frac{r\lambda}{\mu}x_\circ^{j-r}$$

درنتیجه، به‌ازای $n\geqslant r$ وبا استفاده ازرابطهٔ (۴۳.۷)،

$$\pi_n=\frac{\pi'_\circ r\lambda}{\mu}[x_\circ^{-r}+x_\circ^{1-r}+\cdots+x_\circ^{-1}](x_\circ^r)^n=A(x_\circ^r)^n \qquad (۴۵.۷)$$

که

$$A_n=\frac{\pi'_\circ r\lambda}{\mu}[x_\circ^{-r}+x_\circ^{1-r}+\cdots+x_\circ^{-1}] \qquad (۴۶.۷)$$

بنابراین، پس ازحل معادلهٔ مشخصه، π_n به‌سهولت قابل محاسبه است. برای محاسبهٔ L از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi_n=A\frac{x_\circ^r}{(1-x_\circ^r)^2} \qquad (۴۷.۷)$$

سایرمعیارهای ارزیابی را نیز با استفاده از رابطه‌های لیتل به‌دست می‌آوریم.

مثال ۹.۷ دریك مدل $E_2/M/1$ اگـر $\lambda=5$ و $\mu=8$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ این مدل عبارت است از:

$$8x^3-18x+10=\circ$$

تنها ریشهٔ بین صفر ویك معادلهٔ فوق عدد ۷۲۵ر۰ است؛ به‌این‌ترتیب،

$$\pi_0=\pi'_0+\pi'_1=\frac{1-x_0}{2}+\frac{1-x_0^2}{2}=0.375$$

وبرای محاسبهٔ π_n، ابتدا از رابطهٔ (۴۵.۷) مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\frac{1-x_0}{2}\cdot\frac{10}{8}[x_0^{-2}+x_0^{-1}]=0.564$$

و

$$\pi_n=(0.564)(0.725^2)^n \quad , \quad n\geqslant 1$$

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجموع π_n برابر با یك است)
به‌همین ترتیب، ازرابطهٔ (۴۷.۷) نتیجه می‌شود که:

$$L=\frac{0.564(0.725)}{[1-(0.725)^2]^2}=1.31$$

و

$$W=\frac{L}{\lambda}=0.263$$

و

$$L_q=L-\frac{\lambda}{\mu}=0.692$$

و

$$W_q=W-\frac{1}{\mu}=0.138$$

۶.۷ نظم اولویت

تا اینجا فرض براین بود که نظم سیستم براساس نوبت (یا $FIFO$) است. به‌عبارت‌دیگر، هرمشتری که زودتر وارد شود، زودتر هم خدمت دریافت می‌کند. لیکن، درعمل نظمهای دیگری هم وجود دارد. در **نظم‌اولویت**، مشتریها از نظر اهمیت یکسان نیستند. اگر یك مشتری نسبت به مشتریهای دیگر اولویت داشته‌باشد، زودتر خدمت دریافت می‌دارد، حتی اگر دیرتر ازآنان وارد سیستم شده‌باشد.

از نظر کلی، دو نوع نظم اولویت وجود دارد، که عبارت اند از: نظم **اولویت با حق انقطاع و اولویت بدون حق انقطاع**. در نظم اولویت با حق انقطاع، اگر مشتری با اولویت بالاتر وارد سیستم شود و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به مشتری با اولویت پایینتر باشد، خدمت دهنده موظف است کار خود را نیمه‌تمام گذارد و به مشتری با اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم حتی مشتریی که مشغول گرفتن خدمت است نیز، باید تا پایان دریافت خدمت توسط مشتری با اولویت بالاتر صبر کند. مثلا، بیمارستان را می‌توان سیستمی با نظم اولویت و حق انقطاع تصور کرد. زیرا فرضاً، به‌بیماری که احتیاج به‌عمل جراحی فوری داشته باشد، خارج از نوبت رسیدگی می‌شود و حتی ممکن است پزشک، که مشغول معاینهٔ یك بیمار عادی است، نیز کارش را نیمه تمام بگذارد تا به‌این بیمار فوری بپردازد.

در نظم اولویت بدون حق انقطاع، اگر چه به‌مشتری با اولویت بالاتر زودتر خدمت ارائه می‌شود، این مشتری باید صبر کند تا خدمت‌دهنده کارش را تمام کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم موقعی که ارائهٔ خدمت به‌یك مشتری شروع شود، به‌دلیل ورود یك مشتری با اولویت بالاتر، خدمت فعلی قطع نخواهد شد.

در نظم اولویت، بین مشتریهای یك گروه که دارای اولویت یکسان باشند، نوبت رعایت می‌شود. مطابق قرارداد، گروه ۱ در بالاترین اولویت قرار دارد، و پس از آن به‌ترتیب گروههای ۲ و ۳ هستند.

باید توجه داشت که در نظم اولویت، معیارهای کلی سیستم ثابت می‌ماند. وجود اولویت، چیزی را که تغییر می‌دهد، زمان انتظار مشتریهای گروههای مختلف است. به‌عبارت دیگر، اگر بدون درنظر گرفتن اولویت، میانگین زمان انتظار هرمشتری در سیستم W باشد، با درنظر گرفتن اولویت، میانگین مدت انتظار هرمشتری بازهم W خواهد بود؛ اما، مشتری دارای اولویت بالاتر، کمتر از W و مشتری دارای اولویت پایینتر، بیشتر از W درسیستم می‌ماند. در این قسمت، هدف تعیین مدت‌زمان انتظار مشتریهایی با اولویتهای گوناگون است.

برای بحث درمورد نتایج نظم اولویت، ازقراردادهای زیر استفاده می‌کنیم:

λ_i آهنگ ورود مشتری گروه i و $\lambda=\sum_i \lambda_i$،

W_{qi} و W_i، به‌ترتیب معرف میانگین زمان انتظار هرمشتری گروه i درصف و سیستم؛ و

L_{qi} و L_i به‌ترتیب معرف میانگین تعداد مشتریهای گروه i درصف و سیستم است.

قضیهٔ ۱۰۷ یك مدل $M/M/m$ با N گروه مشتری (از نظر اولویت) و بدون حق انقطاع را درنظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به‌همهٔ گروهها یکسان (با آهنگ μ) باشد،

$$W_{qi}=\frac{1}{AB_{i-1}B_i}\quad , \quad i=1,\dots,N \tag{۴۸۰۷}$$

که A و B_i به‌شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$A=(m!)(m\mu-\lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}}{j!}+m\mu \tag{۴۹.۷}$$

و

$$B_0=1 \tag{۵۰.۷}$$

و

$$B_i=1-\frac{\sum_{j=1}^{i}\lambda_j}{m\mu}\quad,\quad i=1,\dots,N \tag{۵۱.۷}$$

حالت خاص. درمدل $M/M/1$ رابطهٔ (۴۸.۷) به‌شکل روابط زیرساده می‌شود:

$$W_{q1}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)} \tag{۵۲.۷}$$

و

$$W_{qi}=\frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1-\lambda_2-,\dots,-\lambda_{i-1})(\mu-\lambda_1-,\dots,-\lambda_i)}\quad,\quad i=2,\dots,N \tag{۵۳.۷}$$

پس ازمحاسبهٔ W_{qi}، سایرمعیارهای ارزیابی ازاستنتاج لیتل به‌دست می‌آید. ضمناً بدیهی است که حالت تعادل موقعی وجود داردکه $\rho=\sum\lambda_i/m\mu<1$ باشد. اما اگر $\rho\to 1$، یعنی $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=m\mu$ باشد، فقط میانگین مدت زمان مشتریهای گروه N (یعنی پایینترین اولویت) به‌بینهایت می‌رسد. ازطرف دیگر، همان‌طورکه مشاهده می‌شود، گروههایی با اولویت بالاتر، کمتر منتظرمی‌مانند. روش کلی اثبات این قضیه، بعداً درهمین بخش ارائه می‌شود.

مثال ۱۰.۷ تعداد دعاویی که به‌دادگاهی می‌رسد، براساس فرایندپواسون (با میانگین ماهی ۱۰ عدد) است. تنها قاضی این دادگاه می‌تواند به‌طورمتوسط به ۱۲ پرونده درماه رسیدگی کند. مدت‌زمان رسیدگی به‌هر پرونده نیزدارای توزیع نمایی فرض می‌شود. دعاوی ازنظر این دادگاه برسه‌نوع‌اند: اضطراری، مهم و عادی، که به‌ترتیب با اولویتهای ۱ و ۲ و ۳ هستند و مقدارآنها به‌طورمتوسط به‌ترتیب ۱۰٪، ۲۰٪ و [illegible] موارد دعاوی است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا به‌یک پرونده رسیدگی [illegible]

است؟ تعداد پرونده‌های هر نوع ازدعاوی در دادگاه چقدر است؟

حل: دراین مدل $\mu = ۱۲$، $\lambda = ۱۰$، $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = ۲$، $\lambda_۳ = ۷$ و $\rho = ۱۰/۱۲$ است. اگــر اولویت رعایت نمی‌شد، $W_q = ۵/۱۲$ و $L = ۵$ بود، اما با درنظر گرفتن اولویت و با استفاده ازرابطه‌های (۵۱.۷) و (۵۲.۷) نتیجه می‌شود:

$$W_{q_۱} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_۱)} = ۰٫۰۷۵ \text{ ماه}$$

$$W_{q_۲} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_۱)(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲)} = ۰٫۱ \text{ ماه}$$

و

$$W_{q_۳} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲)(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲-\lambda_۳)} = ۰٫۵۵۵$$

اما میانگین کل مدت انتظار مشتری درسیستم، بــا توجه به‌اینکه تعداد مشتریهای هر گروه یکسان نیست، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W_q = \frac{\lambda_۱}{\lambda} W_{q_۱} + \frac{\lambda_۲}{\lambda} W_{q_۲} + \frac{\lambda_۳}{\lambda} W_{q_۳} = \frac{۵}{۱۲} \qquad (۵۴.۷)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانگین مدت‌زمان انتظار برای کل مشتریها تغییر نمی‌کند. اما

$$L_۱ = L_{q_۱} + \frac{\lambda_۱}{\mu} = \lambda_۱ W_{q_۱} + \frac{\lambda_۱}{\mu} = ۰٫۱۶$$

و

$$L_۳ = ۴٫۴۷۲ \qquad\qquad L_۲ = ۰٫۳۶۸$$

و

$$L = L_۱ + L_۲ + L_۳ = ۵$$

که دراین مورد نیز میانگین کل تعداد مشتریهای داخل سیستم تغییر نمی‌کند.

مثال ۱۱.۷ مثال ۱۰.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. اگر تعداد قاضی از یك نفر به‌دو نفر افزایش یابد، میانگین مدت‌زمان انتظار مشتریها چگونه تغییر خواهدکرد؟

حل: اگر در نظم اولویت، اولویت رعایت نشود، مدل حاصل یك مدل $M/M/۲$ خواهد بود. دراین‌صورت،

$$\pi_{\circ}=\frac{۱۴}{۳۴} \quad \text{و} \quad \rho=\frac{۱۰}{۲۴}$$

و طبق رابطهٔ (۴۸.۶)

$$L_q=۰/۱۷۵$$

و

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=۰/۰۱۷۵$$

اما براساس نظام اولویت، طبق روابط (۴۹.۷) و (۵۰.۷) و (۵۱.۷) داریم:

$$A=۹۷/۱۲$$

$$B_{\circ}=۱, \qquad B_{۱}=۰/۹۵۸, \qquad B_{۲}=۰/۸۷۵, \qquad B_{۳}=۰/۵۸۳$$

درنتیجه، از رابطهٔ (۴۸.۷)

$$W_{q_۱}=۰/۰۱۰۶$$

$$W_{q_۲}=۰/۰۱۲۲$$

$$W_{q_۳}=۰/۰۲$$

ومیانگین زمان انتظار کل مشتریها عبارت است از:

$$W_q=۰/۰۱۷۵$$

که با نتیجهٔ حاصل ازمدل، بدون درنظر گرفتن نظم اولویت، تطبیق می‌کند.

درسیستمی که‌در آن نظم‌اولویت رعایت می‌شود، ممکن است نوع خدمت موردنیاز مشتریهای گروههای مختلف نیزیکسان نباشد. فرض‌کنید μ_i معرف میانگین تعدادمشتریهای نوع i است،که توسط یك خدمت دهنده، در زمان واحد خدمت دریافت می‌دارند. دراین صورت، نتایج یك نظم اولویت طبق قضیهٔ زیربیان می‌شود.

قضیهٔ ۲۰۷ یك مدل $M/M/۱$ بـا N گروه مشتری (از نظر اولویت) وبدون حق انقطاع را درنظربگیرید. اگر آهنگ خدمت‌دهی به‌مشتریهای گروه i برابربا μ_i باشد،

$$W_{qi}=\frac{\sum_{j=۱}^{N}\frac{\lambda_j}{\mu_j^۲}}{\left[۱-\frac{\lambda_۱}{\mu_۱}-,\dots,-\frac{\lambda_{i-۱}}{\mu_{i-۱}}\right]\left[۱-\frac{\lambda_۱}{\mu_۱}-,\dots,-\frac{\lambda_i}{\mu_۱}\right]} \qquad (۵۵.۷)$$

(که $\lambda_0 = 0$ است)
(همان طور که مشاهده مـی‌شود، اگر $\mu_N = \mu_2 = \mu_1 = \mu$ باشد، رابطهٔ فـوق به‌روابط (۵۲۰۷) و (۵۳۰۷) تبدیل خواهد شد). روش کلی اثبات این قضیه بعداً ارائه می‌شود.

مثال ۱۲۰۷ مثال ۱۰۰۷ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که‌نوع خدمت گروههای مختلف با یکدیگر متفاوت باشد ($\mu_1 = 15$ ، $\mu_2 = 12$ ، $\mu_3 = 11$ است) دراین صورت میانگین مدت‌زمان انتظار هر گروه مشتری درصف را محاسبه کنید.

حل: ابتدا صورت کسر W_{qi} را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_j}{\mu_j^2} = \frac{1}{225} + \frac{2}{144} + \frac{7}{121} = 0/0762$$

درنتیجه،

$$W_{q1} = \frac{0/0762}{1 - \frac{1}{15}} = 0/0816$$

$$W_{q2} = \frac{0/0762}{\left(1 - \frac{1}{15}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)} = 0/1065$$

$$W_{q3} = \frac{0/0762}{\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12} - \frac{7}{11}\right)} = 0/7626$$

نظم اولویت با حق انقطاع

همان طورکه گفتیم، دراین نـظم تـا زمانی کـه مشتریهای دارای اولویت بالاتر درسیستم هستند، از ارائـهٔ خدمت به‌مشتریهای دارای اولـویت پایینتر خودداری می‌شود. درچنین سیستمی، حتی اگرموقع ورودمشتری دارای اولویت بالاتر، خدمت‌دهنده درحال خدمت‌دهی به مشتری دارای اولویت پایینتر باشد، موظف است‌که کار خود را قطع‌کند و بلافاصله به مشتری دارای اولویت بالاترخدمت ارائه‌کند. ادامهٔ‌خدمت قطع‌شده موقعی شروع‌می‌شود که دیگر مشتری دارای اولویت بالاتر درسیستم نباشد. بـدین‌ترتیب، ارائهٔ خدمت به‌یک مشتری ممکن است چندبار قطع شود.

درنظم اولویت باحق انقطاع، می‌توان تصورکردکه‌سیستم برای خدمت به‌مشتریهای اولویت اول ایجاد شده است و فقط درمواقع بیکاری به‌مشتریهای گروههای بعدی خدمت داده می‌شود. به همین تـرتیب، وجود مشتریهایی بـا اولویت شمارهٔ ۳ و ۴ و ... بر کار

مشتریهای دارای اولویت ۱ و ۲ هیچ اثری نخواهد داشت.

قضیهٔ ۳.۷ یك مدل $M/M/1$ با N گروه مشتری (از نظر اولویت) وحق انقطاع را درنظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به همهٔ گروهها یکسان باشد،

$$W_1=\frac{1}{\mu-\lambda_1} \tag{۵۶.۷}$$

$$W_i=\frac{\mu}{(\mu-\lambda_1-,\dots,-\lambda_{i-1})(\mu-\lambda_1-,\dots,-\lambda_i)} \quad i=2,\dots,N \tag{۵۷.۷}$$

اثبات. رابطهٔ (۵۶.۷) واضح است. زیرا دراین سیستم می‌توان تصور کرد که ارائهٔ خدمت فقط برای گروه ۱ است، مگر در وقت بیکاری که به سایر گروهها هم خدمت ارائه می‌شود. دراین صورت برای گروه ۱، یك مدل $M/M/1$ خواهیم داشت.

حال گروه ۱ و ۲ را با هم درنظر بگیریم. وجود گروههای دیگر هیچ تأثیری بر این دو گروه ندارد، لذا اگر میانگین مدت زمان انتظارمجموع مشتریهای ۱ و ۲ را با $W_{1,2}$ نشان دهیم، می‌توان با استفاده از مدل $M/M/1$ این مقدار را محاسبه کرد. لیکن باید درنظرداشت که آهنگ ورود مجموع مشتریهای ۱ و ۲ برابر با λ_2 و λ_1 است. لذا، طبق رابطهٔ (۲۱۰.۶)

$$W_{1,2}=\frac{1}{\mu-\lambda_1-\lambda_2}$$

اما

$$W_{1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_2$$

با دانستن W_1 و $W_{1,2}$ می‌توان W_2 را محاسبه کرد. به‌همین ترتیب W_3 و... به‌دست می‌آید ورابطهٔ (۵۷.۷) حاصل می‌شود.

مثال ۱۴.۷ مثال ۱۰.۷ را با فرض حق انقطاع مجدداً درنظر بگیرید. دراین صورت

$$W_1=\frac{1}{12-1}=\frac{1}{11}$$

$$W_2=\frac{12}{(12-1)(12-1-2)}=\frac{4}{33}$$

$$W_3=\frac{12}{(12-1-2)(12-1-2-7)}=\frac{2}{3}$$

ومیانگین مدت‌زمان انتظار کل مشتریها برابر است با:

$$W=\frac{\lambda_1}{\lambda}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}W_2+\frac{\lambda_3}{\lambda}W_3=\frac{1}{2}$$

می‌دانیم که بدون درنظر گرفتن اولـویت نیزهمین نتیجه برای کل سیستم به‌دست می‌آید. ضمناً W_{q_1} و W_{q_2} و W_{q_3} را با استفاده از استنتاج لیتل می‌توان محاسبه کرد، که عبارتند از: ۰٫۰۰۷۵، ۰٫۰۳۸ و ۰٫۰۵۸. همان طور که‌مشاهده می‌شود، دراین حالت مدت‌زمان انتظار مشتریهای گـروه ۱ و ۲ نسبت بـه نظم اولویت بدون حق انقطاع کمتر و درمورد مشتریهای گروه ۳ نسبت به این نظم بیشتر شده‌است. به‌عبارت دیگر، اگرچه زمان انتظار درکل سیستم تغییر نمی‌کند، نظم اولویت باحق انقطاع به‌نفع گروههای ۱ و ۲ و به‌زیان گروه ۳ تمام شده است.

حال همین مثال را برای $M/M/2$ درنظر بگیرید (که به‌جای یك قاضی دوقاضی در دادگاه کار کنند). همان طور که گفته شد، وجود گروههای ۲ و ۳ اثری بـر گروه ۱ ندارد. و می‌توان تصور کرد که سیستم فقط به‌این گروه خدمت می‌دهد. لذا، درمورد گروه ۱، مدل $M/M/2$ با $\lambda=1$ و $\mu=12$ را خواهیم داشت. به این ترتیب W_{q_1} محاسبه می‌شود. حال مجموع گروههای ۱ و ۲ را درنظر بگیرید. دراین‌حالت، می‌توان تصور کرد که گروه ۳ نقشی ندارد. لذا، $W_{q_{1,2}}$ ازمدل $M/M/2$ با آهنگ ورود $\lambda_1+\lambda_2$ محاسبه می‌شود وپس از آن W_{q_2} ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W_{q_{1,2}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_{q_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_{q_2}$$

و به‌همین ترتیب W_{q_3} محاسبه خواهد شد.

اگر فقط گروه یك درنظر گرفته شود، با استفاده ازمدل $M/M/2$ و با $\lambda=1$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود:

$$W_1=0.0835$$

اگر فقط گروههای یك و دو درنظر گـرفته شود، بـا استفاده از مـدل $M/M/2$ و با $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=3$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود

$$W_{1,2}=0.0846$$

باتوجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_2$$

نتیجه می‌شود:

$$W_{2}=0.08515$$

به‌همین ترتیب، اگر تمام گروهها درنظر گرفته شود،

$$W_{1,2,3}=0.1008$$

وبا توجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2,3}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i W_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

نتیجه می‌شود:

$$W_{3}=0.1075$$

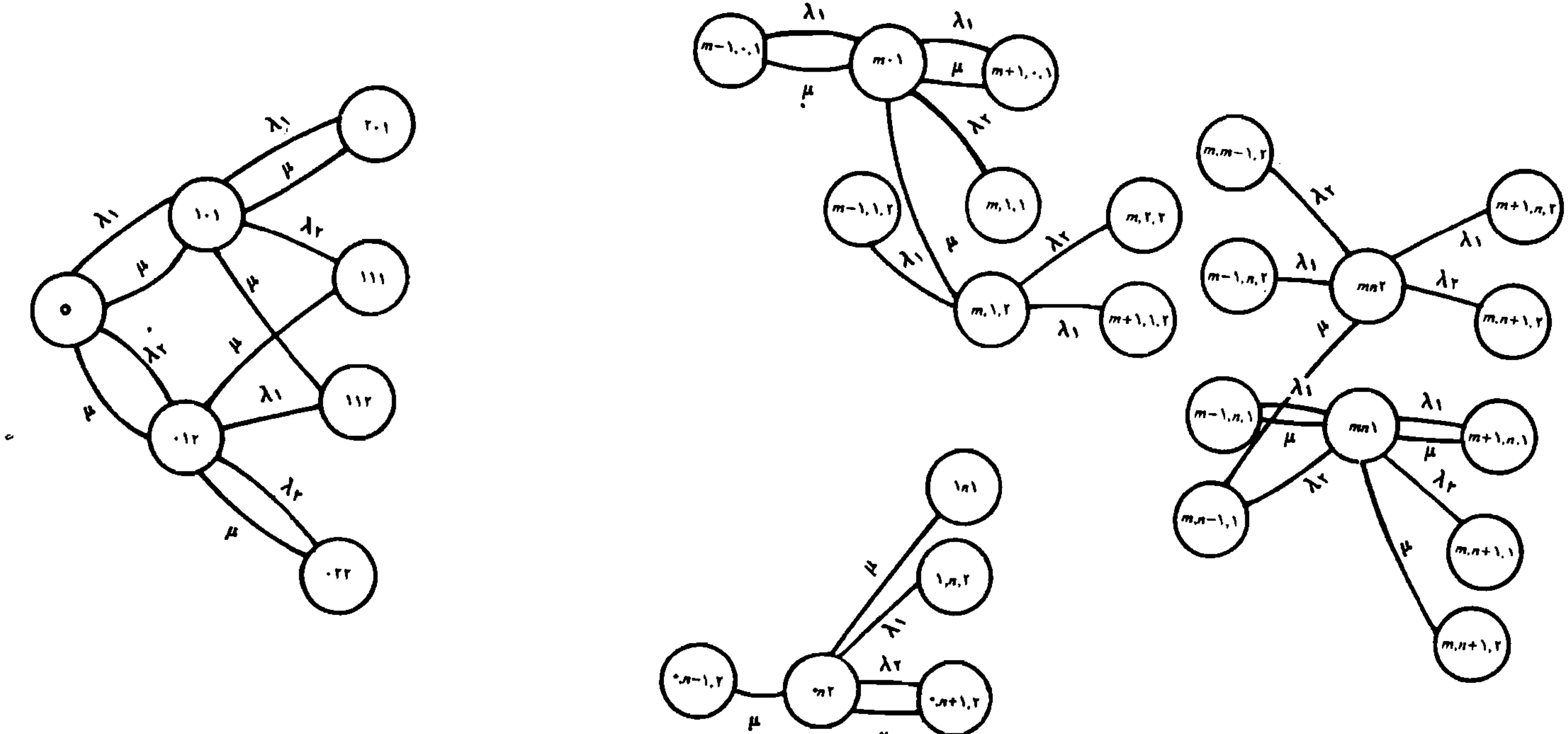
اثبات قضیهٔ ۱۰۷ اثبات این قضیه را فقط درساده‌ترین حالت آن درنظرمی‌گیریم، که مشتریها ازنظراولویت فقط به دوگروه تقسیم می‌شوند.

برای اینکه بتوانیم مسئله را درچارچوب یك فرایند مارکوف فورموله کنیم،حالت سیستم را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم.

حالت سیستم بـا سه حرف (mnr) مشخص می‌گردد،که m معرف تعداد مشتریهای نوع ۱ (با اولویت بالاتر) در سیستم، n تعداد مشتریهای نوع ۲ (با اولویت پایینتر) در سیستم و r نشاندهندهٔ شمارهٔ اولویت‌مشتری‌است،که درحال خدمت گرفتن‌است. مثلاً،حالت (۱۰و۸و۲) به‌معنای این است‌که ۱۰ مشتری بااولویت ۱و۸ مشتری بااولویت ۲ درسیستم هستند وضمناً یکی ازمشتریهای بـا اولویت ۲ در حال گرفتن خدمت است. بنابراین، ۱۰ مشتری نوع ۱ و۷ مشتری‌نوع۲ درصف‌هستند. استثنائاً حالت‌صفررا بایك عددنشان‌می‌دهیم.

نمودارآهنگ این مـدل درشکل ۹.۷ نشان داده شده است. بـراساس این نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به‌شرح زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{cases}
\lambda\pi_0=\mu(\pi_{101}+\pi_{012}) & \\
(\lambda+\mu)\pi_{101}=\lambda_1\pi_0+\mu(\pi_{201}+\pi_{112}) & \\
(\lambda+\mu)\pi_{012}=\lambda_2\pi_0+\mu(\pi_{111}+\pi_{022}) & \\
(\lambda+\mu)\pi_{m01}=\lambda_1\pi_{m-1,0,1}+\mu(\pi_{m+1,0,1}+\pi_{m12}) & ,\quad m>1\\
(\lambda+\mu)\pi_{0n2}=\lambda_2\pi_{0,n-1,2}+\mu(\pi_{1n1}+\pi_{0,n+1,2}) & ,\quad n>1\\
(\lambda+\mu)\pi_{1n1}=\lambda_2\pi_{1,n-1,1}+\mu(\pi_{2n1}+\pi_{1,n+1,2}) & ,\quad n>1\\
(\lambda+\mu)\pi_{mn2}=\lambda_1\pi_{m-1,1,2} & ,\quad m>1\\
(\lambda+\mu)\pi_{mn1}=\lambda_1\pi_{m-1,n,1}+\lambda_2\pi_{m,n-1,1}+\mu(\pi_{m+1,n,1}+\pi_{m,n+1,2}) & \\
 & ,\quad m>1,\ n>0
\end{cases}$$



شکل ۷-۹ نمودار آهنگ مدل M/M/1 با دو گروه اولویت

$$(\lambda+\mu)\pi_{mn2}=\lambda_1\pi_{m-1,n,2}+\lambda_2\pi_{m,n-1,2} \quad , \quad m\geqslant 0,\ n\geqslant 1 \qquad (۵۸.۷)$$

ازطرف دیگر، احتمال بودن n مشتری درسیستم ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_n=\sum_{m=0}^{n-1}(\pi_{n-m,m,1}+\pi_{m,n-m,2}) \qquad (۵۹.۷)$$

باتوجه به‌اینکه احتمال بودن n مشتری درسیستم (صرف‌نظر از وابستگی به‌نوع اولویت آنها) بستگی به‌ضابطهٔ انتخاب‌مشتری ندارد، مقداراین‌احتمال برابر π_n درمدل $M/M/1$ است، یعنی

$$\pi_n=(1-\rho)\rho^n \qquad (۶۰.۷)$$

به‌همین ترتیب، درصد مشغول‌بودن سیستم، صرف‌نظر ازاینکه خدمت‌دهنده به‌کدام گروه خدمت می‌دهد، برابر با ρ است. از طرفی، درصدی از زمان‌که خدمت‌دهنده به مشتریهای نوع ۱ و ۲ خدمت می‌دهد، متناسب با تعداد مشتریهای نوع ۱ و ۲، یعنی λ_1 و λ_2 است، بنابراین

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\rho=\frac{\lambda_1}{\mu} \qquad (۶۱.۷)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn2}=\frac{\lambda_2}{\mu} \qquad (۶۲.۷)$$

بااستفاده ازمعادلات تعادلی‌وروابط (۵۹.۷) تا (۶۲.۷) می‌توان نتایج کلی زیررا به‌دست آورد،که حالت خاص رابطه‌های (۵۲.۷) و (۵۳.۷) هستند.

$$L_1=\frac{(\lambda_1/\mu)(1+\rho-\lambda_1/\mu)}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$L_{q1}=\frac{\rho\lambda_1/\mu}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$W_{q1}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)}$$

$$L_2=\frac{(\lambda_2/\mu)(1-\lambda_1/\mu+\rho\lambda_1/\mu}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$

$$L_{q2}=\frac{\rho\lambda_2/\mu}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$

$$W_{q2}=\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_1)}$$

۷.۷ شبکه‌های صف

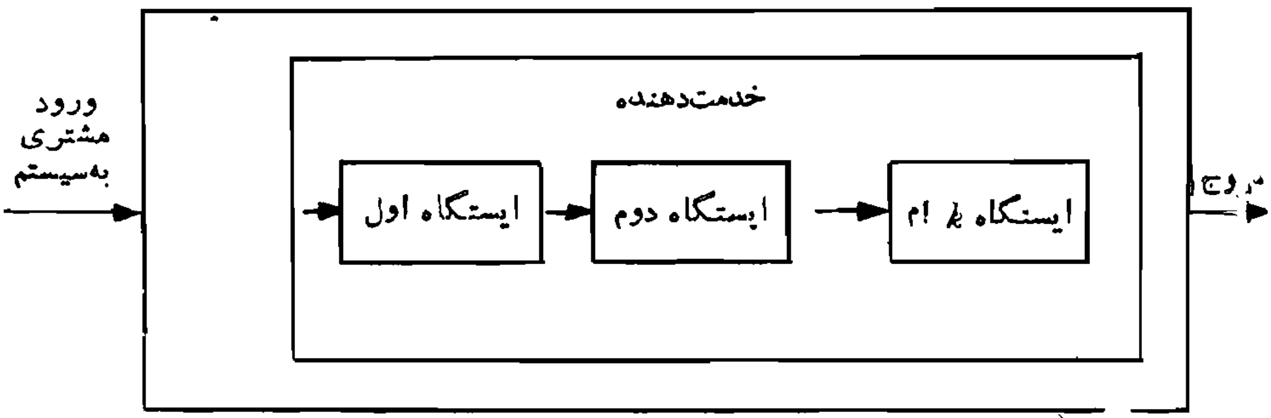
درسیستمهای صفی که دربخشهای قبل موردبررسی قرارگرفتند، خدمت ازیك مرحله تشکیل شده بود. به عبارت دیگر، درچنین سیستمهایی فقط یك نوع خدمت ارائه می‌شود وهمهٔ مشتریها برای دریافت آن مراجعه می کنند. درعمل، سیستمهایی دیگرهم وجود دارندکه در آنها چند نوع خدمت عرضه می‌شود وهر مشتری برای دریافت تعدادی ازآنها (ونه لزوماً همهٔ آنها) مراجعه‌می کند. درواقع، این سیستمها را می‌توان مجموعهٔ‌چندسیستم فرعی فرض کرد، که هر کدام ازآنها با داشتن تعدادی خدمت‌دهنده، مستقلا خدمت مشخصی را ارائه می‌دهند، ولی ازنظرورود مشتری، به‌یکدیگروابسته هستند. دراین‌سیستمها، مجموعهٔ خدمت دهندگانی که یك نوع خدمت عرضه می کنند، را ایستگاه خدمت می‌نامند.

برای نمونه، تعمیرگاه‌اتومبیلی را درنظربگیریدکه‌درآن تعمیرکاران مختلف مشغول به‌کارهستند. دراین‌تعمیرگاه، هرگروه تعمیرکاررا، که وظیفه مشخصی (مثلا صافکاری، میزان فرمان، تنظیم موتور و...) را انجام می‌دهد، یك ایستگاه خدمت می‌گویند. در هر ایستگاه خدمت، یك یاچند خدمت‌دهنده (تعمیرکار) به‌طورموازی‌کارمی کنند. یك مشتری (اتومبیل) ممکن است فقط به‌یك نوع تعمیر (ایستگاه خدمت) نیازداشته باشد،ولی اتومبیلهایی هم به‌چندقسمت تعمیرگاه‌مراجعه می کنند. این‌اتومبیلها پس ازدریافت خدمت ازیك تعمیرکار، ازخدمت تعمیرکاران نوع دیگر هم استفاده می‌کنند. دراین تعمیرگاه، اگرچه هرگروه تعمیرکار (ایستگاه خدمت) ازنظر ارائهٔ خدمت مستقل است، اما با توجه به‌اینکه مراجعین آنها ممکن است خروجیهای سایر ایستگاههای خدمت باشند، لذا نمی‌توان هر ایستگاه خدمت را یك سیستم صف مستقل وجدا ازسایرایستگاهها تلقی‌کرد.

دراین بخش، حالت خاصی ازشبکه‌های صف مورد بررسی قرارمی گیرد، که ورود مشتریها به آن طبق فرایند پواسون ومدت‌زمان دریافت هرنوع خدمت، نمایی است.

شبکه‌های سری

دراین سیستمها، تعدادی ایستگاه خدمت به طور سری قرار گرفته‌اند. هر مشتری ابتدا به‌ایستگاه شمارهٔ یك مراجعه وپس ازدریافت خدمت به‌ایستگاه‌دوم و به‌همین‌ترتیب به‌سایر ایستگاهها مراجعه می‌کند. همان‌طورکه در شکل ۱۰.۷ مشاهده می‌شود خدمت‌دهنده، در واقع مجموع ایستگاههای خدمت است. ورود مشتریها به سیستم طبق فرایند پواسون با پارامتر λ ومدت‌زمان خدمت درهر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. درایستگاه شماره i، (به‌ازای $i=1, 2, \ldots, K$)، تعداد خدمت‌دهنده m_i ومیانگین مدت‌زمان خدمت $1/\mu_i$ است. در یك سیستم سری، همهٔ مشتریها متقاضی هر K نوع خدمت هستند و ضمناً ترتیب



شکل ۱۰.۷ یك سیستم صف با خدمت‌دهنده‌های سری

دریافت خدمت نیز برای همه یکسان است. به‌این ترتیب، مشتری پس ازورود به‌سیستم در صف ایستگاه اولی منتظر می‌مانـد. پس از دریافت خدمت درایستگاه اول، به‌صف دومین ایستگاه می‌پیوندد. بالاخره پس ازدریافت خدمت از K امین ایستگاه هم از سیستم خارج می‌شود.

یك خط تولید را درنظر بگیرید. هر قطعه، ایستگاههای مختلف کار را طی می‌کند تا ازخط خارج شود. البته بدیهی است که درخطوط تولید مدت‌زمان دریافت خدمت لزوماً نمایی نیست.

ظرفیت صف درایستگاههای مختلف می‌تـوانـد متناهی یـا نامتناهی باشد. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که ظرفیت صف درهمه‌ایستگاهها نامتناهی باشد. درچنین حالتی، وبا استفاده ازقضایای زیرنشان داده‌می‌شودکه هرایستگاه‌خدمت را می‌توان یك مدل‌نمایی $M/M/m$ فرض کرد، که ورود مشتریها به‌آن طبق فرایند پواسون با پارامتر λ است.

قبل ازبحث در بـارهٔ رابطه بین ایستگاههای خدمت در یك شبکهٔ سری، ابتدا لازم است تابع‌توزیع زمان‌بین دوخروج متوالی مشتریهای یك سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

قضیهٔ ۴.۷ دریك سیستم صف، اگـر $\rho < 1$ باشد، آهنگ خروج مشتریها برابر با آهنگ ورود آن و اگر $\rho \geqslant 1$ باشد، آهنگ خروج بـرابـر با مجموع آهنگ خدمت مشتریهاست.

درقضیهٔ فوق‌باید درنظرداشت‌که اگر $\rho \geqslant 1$ باشد، بدیهی است که خدمت‌دهندگان، دائماً مشغول خدمت هستند و درنتیجه آهنگ خروج برابر با ظرفیت کل خدمت‌دهندگان، یعنی $m\mu$ است. امـا اگر $\rho < 1$ باشد، طبیعتاً خدمت‌دهندگان به‌طور متوسط (ρ) درصد اوقات مشغول ارائهٔ خدمت هستند وآهنگ خروج،کمتر ازظرفیت آنها، و برابربا آهنگ ورود مشتریهاست.

مثال ۱۴.۷ یك مدل $M/M/2$ را درنظربگیرید، کـه طبق‌آن درهرساعت به‌طور متوسط ۳۰ مشتری وارد می‌شوند. مدت زمـان خدمت، نمایی بـا میانگین ۳ دقیقه است. درنتیجه، هرخدمت‌دهنده می‌تواند به‌۲۰ مشتری وکل سیستم به‌۴۰ مشتری درساعت خدمت

ارائه کند. اما چون تعداد مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، کمتر ازاین تعداد است، لذا درهر ساعت به‌طور متوسط فقط ۳۰ مشتری خدمت دریافت و از سیستم خارج می‌شوند. دراین مثال، اگر آهنگ ورود مشتریها از ۳۰ به ۵۰ تغییر کند، $\rho>1$، وظرفیت خدمت‌دهندگان کمتر از میزانی است که بتوانند تقاضای مشتریان را تـامین‌کنند ولذا طول صف مرتب افزایش می‌یابد و به‌بینهایت می‌رسد. بدین‌ترتیب، خدمت دهندگان همواره بایدکار کنند و درنتیجه آهنگ خروج برابر با ۴۰ خواهد بود.

با استفاده ازقضیهٔ زیر، نشان داده می‌شودکه درمدلهای نمایی نه تنها آهنگ خروج برابر با آهنگ ورود مشتریهاست، بلکه تابع توزیع زمان بین دو خروج متوالی مشتریها نیزبا تابع‌توزیع زمان بین‌دو ورودآنها یکسان است (به‌شرط اینکه $\rho<1$ وظرفیت صف نامتناهی باشد).

قضیهٔ ۵.۷ در یـک مدل $M/M/1$ بـا $\rho<1$ و بـدون تناهی در ظرفیت صف، زمان بین دوخروج متوالی مشتریها، متغیر تصادفی‌نمایی با پارامترλ (آهنگ ورودمشتریها) است.

اثبات. یك لحظهٔ مشخص را، که یك مشتری ازسیستم خارج می‌شود، درنظر بگیرید. زمان بین دوخروج متوالی مشتریها، درواقع مـدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود. این متغیر تصادفـی را بـا E نشان می‌دهیم و هـدف محاسبه $P(E>t)$ است. حال فرض‌کنید کـه درلحظهٔ خروج مشتری موردنظر، تعداد مشتری در سیستم برابر با N باشد. دراین صورت،

$$P(E>t)=P(E>t|N=0)P(N=0)+P(E>t|N>0)P(N>0) \tag{۶۳.۷}$$

با استفاده از روابط موجود درمدل $M/M/1$ داریم:

$$P(N>0)=\rho \quad , \quad P(N=0)=\pi_0=1-\rho \tag{۶۴.۷}$$

از طرف دیگر، اگردرلحظهٔ موردنظر، تعدادی مشتری دیگر هم درسیستم باشند، مدت‌زمان E، یا مدت‌زمانی که‌طول می‌کشد تامشتری بعدی ازسیستم خارج شود، برابربا مدت‌زمان دریافت خدمت (یا X) توسط مشتری بعدی است. لذا،

$$P(E>t|N>0)=P(X>t)=e^{-\mu t} \tag{۶۵.۷}$$

اما، چنانچه درلحظهٔ خروج مشتری مـوردنظر، هیچ مشتری دیگری درسیستم نباشد، مدت زمانی‌که طول می‌کشد تا مشتری بعدی خارج شود، برابر با مجموع مدت زمانی‌که طول می‌کشد تااولین مشتری واردسیستم شود (یعنی T) ومدت‌زمان دریافت خدمت توسط‌همین مشتری (یعنی X) است. لذا

$$P(E>t|N=0)=P(T+X>t)=\frac{\mu e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda}. \qquad (۶۶.۷)$$

(اثبات رابطهٔ فوق درمسئلهٔ شمارهٔ ۲۹ فصل ۳ خواسته شده است)
پس از جایگزین کردن روابــط (۶۴.۷) و (۶۵.۷) و (۶۶.۷) در رابطهٔ (۶۳.۷) نتیجه می‌شود که،

$$P(E>t)=e^{-\lambda t}$$

قضیهٔ فوق در مــورد مدلهای $M/M/m$ نیز صادق است. قضیهٔ زیــر، بدون اینکه اثبات آن ارائه شود، این موضوع را بیان می کند

قضیهٔ ۶.۷ دریك مدل $M/M/m$، بــا $\rho<1$ و بدون متناهی بودن ظرفیت، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ (آهنگ ورود مشتریها) است

با استفاده ازقضیهٔ زیر، شبکه‌های سری را می‌توان تحلیل کرد.

قضیهٔ ۷.۷ یك سیستم سری بــا K ایستگاه خدمت را درنظر بگیرید. ورود مشتریها به‌سیستم (یا ورود مشتریها به‌ایستگاه اول) براساس فرایند پواسون (با پارامتر λ) ومدت زمان خدمت درهرایستگاه، نمایی فرض می‌شود. درهر ایستگاه تعدادی خدمت‌دهنده مشغول خدمت هستند. دراین صورت، هر ایستگاه خدمت را می‌توان یك مدل مستقل $M/M/m$ تصور کرد، که آهنگ ورود به‌آن همان آهنگ ورود مشتریها به‌سیستم (λ) است، مشروط بــراینکه درهمه ایستگاهها ظرفیت صف نامتناهــی، ومجموع آهنگ خدمت دهی خدمت دهندگان آن ایستگاه از λ بیشتر باشد.

اثبات: در مورد اولین ایستگاه موضوع روشن است. طبق قضیهٔ ۶.۷، مشتریها طبق فرایند پواسون بــا آهنگ λ از ایستگاه اول خارج و به ایستگاه دوم وارد می‌شوند. لذا، ایستگاه‌دوم نیز یك مدل $M/M/m$ باآهنگ ورود λ است. به‌همین‌ترتیب، بقیهٔ ایستگاهها را نیز می‌توان سیستمهای مستقل $M/M/m$ تصور کرد.

بااستفاده ازقضیهٔ ۷.۷ وبا توجه به‌اینکه‌می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، محاسبهٔ معیارهای ارزیابــی سیستم سری به سهولت انجام می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $\pi_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ معرف احتمال بودن n_1 مشتری درمرحلهٔ اول، n_2 مشتری درمرحله دوم و n_k مشتری درمرحله n ام باشد،

$$\pi_{n_1,n_2,\dots,n_k}=(\pi^{(1)}_{n_1})(\pi^{(2)}_{n_2})\dots(\pi^{k}_{n_k}) \qquad (۶۷.۷)$$

که $\pi^{(i)}_{n_i}$ معرف احتمال بودن n_i مشتری درایستگاه i ام است.

به‌همین‌ترتیب،

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_k \qquad (۶۸.۷)$$

که L_i میانگین تعداد مشتریهایی است کـه درمـرحلهٔ i درحال دریافت خدمت هستند، و براساس روابط مدل $M/M/m$ قابل محاسبه است. درمورد سایر معیارهای ارزیابی نیز به‌همین ترتیب عمل می‌شود

مثال ۱۵.۷ در یك تعمیرگاه، تعمیر یك ماشین از سه مرحله تشکیل می‌شود. مرحلهٔ اول پیاده‌کردن ماشین، مرحلهٔ دوم تشخیص و رفع عیب ومـرحلهٔ سوم سوارکردن ماشین است. مدت‌زمان لازم برای اجرای هـر مرحله، متغیرتصادفی نمایی است، ومیانگین آنها به‌ترتیب ۲ و ۴ و ۱ روزاست. تقاضا برای تعمیر ماشین بـراساس فرایند پواسون است و به‌طور متوسط هـر ۱۰ روز یك ماشین برای تعمیر به‌این تعمیرگاه می‌رسد. درمرحلهٔ سوم دوتعمیرکارکار می‌کنند، ولی در مراحل اول ودوم فقط یك تعمیرکارمشغول است. احتمال اینکه دریك لحظه فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، چیست؟ احتمال اینکه دومشتری در سیستم باشند، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدراست؟

حل: این مدل یك سیستم سری با سه ایستگاه خدمت است، که در آن

$$m_3=2,\quad m_1=m_2=1,\quad \mu_2=\frac{1}{4},\quad \mu_1=\frac{1}{2},\quad \lambda=\frac{1}{10}$$

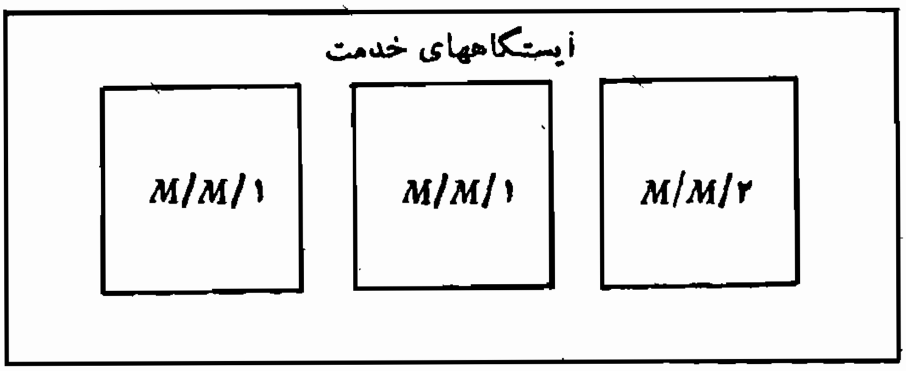
است (شکل ۱۱.۷). درهرسه ایستگاه $\rho_i<1$ است.

احتمال اینکه در یك لحظه‌فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، برابر است با اینکه مراحل‌اول ودوم مستقلا فاقد مشتری ومرحلهٔ سوم دارای‌مشتری‌باشد، یعنی به‌ازای $n>0$

$$\pi_{0,n,0}=(1-\rho_1)(\rho_2)(\pi_0^{(3)})=(0.8)(0.4)\frac{0.95}{1.05}=0.29$$

احتمال اینکه دونفر مشتری درسیستم باشند، بـرابـربا π_{n_1,n_2,n_3} است، بـه‌شرط اینکه، $n_1+n_2+n_3=2$. بدین‌ترتیب، این احتمال برابراست با

$$\pi_{2,0,0}+\pi_{1,1,0}+\pi_{1,0,1}+\pi_{0,0,2}+\pi_{0,2,0}+\pi_{0,1,1}=0.15$$



شکل ۱۱.۷ سیستم سری مربوط به مثال

ومیانگین زمان انتظار درسیستم برابراست با:

$$W_{\circ}=W_{1}+W_{2}+W_{3}=۳٫۱۷ \text{ روز}$$

باید توجه داشت که درشبکه‌های سری، اگرچه برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، ولی این موضوع به‌معنای آن نیست که مدت زمان انتظار یك مشتری مشخص دریك ایستگاه مستقل از مدت زمان انتظار او درسایر ایستگاهها باشد. مسئلهٔ ۳۰ آخر همین فصل، این موضوع را نشان می‌دهد. لیکن، برای مشتریها به‌طور متوسط (و نه برای هرمشتری مشخص) معیارهای ارزیابی را می‌توان براساس استقلال ایستگاهها به‌دست آورد.

سیستمهای سری با ظرفیت متناهی صف

حال فرض کنید که ظرفیت صف در بعضی ازایستگاههای خدمت متناهی باشد. به‌عنوان *نمونه*، یك ایستگاه را درنظر بگیرید که ظرفیت صف درآن برابربا صفر (یا هرعدد دیگر) باشد. دراین صورت، امکان دارد که یك مشتری پس ازدریافت خدمت ازمرحلهٔ قبلی وارد این ایستگاه‌شود ومواجه با تکمیل بودن ظرفیت این ایستگاه گردد. درچنین حالتی دواتفاق می‌تواند بیفتد.

۱. این مشتری ازسیستم خارج شود و خدمتی را که درایستگاههای بعدی ارائه می‌شود، ازسیستمهای دیگری دریافت کند. دراین حالت، فرض می‌شود که این مشتری دیگر به‌این سیستم برنمی‌گردد.

۲. این مشتری درایستگاه قبلی منتظر بماند. دراین حالت، خدمت دهندهٔ ایستگاه قبلی اجباراً ازادامهٔ خدمت به مشتریهای دیگر باز می‌ماند؛ زیرا، فضا ویا امکانات ارائهٔ خدمت توسط این مشتری اشغال شده‌است.

مثال ۱۶۰۷ سیستم صفی را درنظر بگیرید که از دوایستگاه خدمت به‌طور سری تشکیل شده است. ظرفیت صف درهردوایستگاه برابربا صفراست. ورود مشتریها به‌سیستم براساس فرایند پواسون با پارامتر λ و زمان خدمت درهرایستگاه دارای توزیع نمایی با پارامترهای μ_1وμ_2فرض‌می‌شود. چنانچه مشتری پس‌ازپایان‌دریافت خدمت ازایستگاه اول، به‌علت پربودن ایستگاه دوم نتواند وارد آن ایستگاه شود، اجبار دارد که درهمان ایستگاه اول منتظر بماند. دراین سیستم حالتهای مختلف عبارت‌اند از:

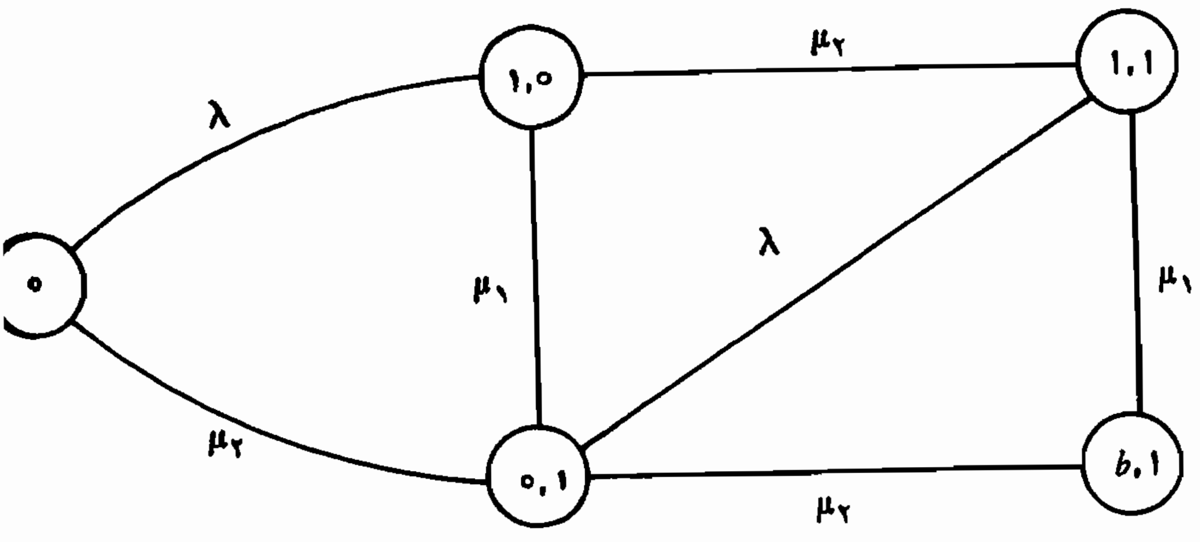
۱. $(\circ)$ هردو ایستگاه خالی است.

۲. $(\circ,1)$ ایستگاه اول دارای مشتری وایستگاه دوم خالی است.

۳. $(1,\circ)$ ایستگاه اول خالی و ایستگاه دوم دارای مشتری است.

۴. $(1,1)$ در هردو ایستگاه یك مشتری درحال دریافت خدمت است.

۵. $(1,b)$ درایستگاه اول مشتری خدمت را دریافت داشته و منتظراست که ایستگاه



شکل ۱۲۰۷ نمودار آهنگ مثال ۱۶.۷

دوم خالی شود و یک مشتری هم در ایستگاه دوم مشغول دریافت خدمت است.

باید توجه داشت که حالتهای شمارهٔ ۴ و ۵ با یکدیگر متفاوت‌اند، اگرچه درهردو حالت دومشتری، هر مشتری دریک ایستگاه، وجود دارد. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۱۲۰۷ نشان داده شده است. معادلات تعادلی دراین سیستم به‌شرح زیرند.

$$\lambda\pi_0 = \mu_2\pi_{0,1}$$

$$\mu_1\pi_{1,0} = \lambda\pi_0 + \mu_2\pi_{11}$$

$$(\lambda+\mu_2)\pi_{0,1} = \mu_1\pi_{1,0} + \mu_2\pi_{b,1}$$

$$(\mu_2+\mu_1)\pi_{11} = \lambda\pi_{0,1}$$

$$\mu_2\pi_{b,1} = \mu_1\pi_{1,1}$$

پس ازحل دستگاه معادلات فوق، محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم ممکن می‌شود.

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} + \frac{\mu_1\lambda^2}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right]^{-1}$$

شبکه‌های صف درحالت کلی

دریک شبکهٔ صف، که لزوماً یک سیستم سری نیست، فرض می‌شود که K ایستگاه خدمت وجود دارد. مشتری نیاز به خدمات بعضی از ایستگاهها دارد و ضمناً ترتیب مراجعهٔ او نیز از قبل مشخص نیست. بدین‌ترتیب، مشتری وقتی وارد سیستم می‌شود، برای اولین بار ممکن است به هرکدام ازایستگاههای خدمت مراجعه کند. پس از دریافت خدمت از این ایستگاه، به‌هرکدام از ایستگاههای دیگرمی‌تواند وارد شود. بدین‌ترتیب، مشتریهای هر

ایستگاه یا مستقیماً از خارج وارد می‌شوند یا از ایستگاههای دیگر مراجعه می‌کنند. شبکه‌های صف بسیارمتنوع هستند وحل اکثر آنها، با روشهای تحلیلی ممکن نیست. حالت خاصی که **شبکه‌های جاکسون** نامیده می‌شود، براساس مفروضات زیراست.

مفروضات شبکه‌های صف جاکسون

الف. ورود مشتریها ازخارج سیستم به‌ایستگاه خدمت شمارهٔ j طبق فرایند پواسون با آهنگ λ'_j (به‌ازای $j=1, 2, \ldots K$) است.
ب. مدت‌زمان خدمت درایستگاه شمارهٔ j، متغیری تصادفی ونمایی با پارامتر μ_j و مستقل از مدت خدمت درسایر ایستگاهها فرض می‌شود.
ج. ظرفیت صف درهمهٔ ایستگاهها نامتناهی است.
د. یك مشتری که از ایستگاه i خارج می‌شود، به‌احتمال p_{ij} برای دریافت خدمت به‌ایستگاه j مراجعه می‌کند. احتمال اینکه مشتری پس از دریافت خدمت از ایستگاه i، از سیستم خارج شود را با p_{i0} نشان می‌دهند.
حالت خاص سیستم سری یك حالت خاص از شبکه‌های جاکسون فرض‌می‌شود، که در آن

$$p_{k0}=1,\quad p_{i,i+1}=1,\quad \lambda'_j(j=1, 2, \ldots K \text{ به‌ازای})=0,\quad \lambda'_1=\lambda$$

آهنگ ورود مشتریان به‌هرایستگاه

همان‌طور که گفته شد، ورودیهای هر ایستگاه بردونوع‌اند، یا ازخارج سیستم ویا ازسایر ایستگاهها. بنابراین، اگر λ_j معرف **آهنگ ورود مشتریها به‌ایستگاه** j ام باشد،

$$\lambda_j=\lambda'_j+\sum_{j=1}^{K}\lambda_i p_{ij}\ ,\quad j=1, 2, \ldots, K \qquad (69.7)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $\lambda_i P_{ij}$ آهنگ مشتریهایی است که پس ازدریافت خدمت در ایستگاه i ام به ایستگاه j مراجعه می‌کنند.

بازخورد

درحالت کلی، یك مشتری‌پس ازدریافت خدمت درایستگاه j ام، ممکن‌است بازهم به‌همین ایستگاه برگردد، تا مجدداً خدمت دریافت کند. به‌این‌حالت بازخورد می‌گویند. بازخورد می‌تواند بلافاصله باشد، یعنی $P_{jj}>0$ ویا مشتری پس ازمراجعه به‌ایستگاههای مختلف مجدداً به‌ایستگاه j برگردد.
برای نمونه یك قطعه، درخط تولید، ممکن است پس از گذرانیدن یك ایستگاه،

به‌علت عدم تطابق بـا استانـداردهای کنترل کیفیت، مجدداً به همان ایستگاه برای اصلاح فرستاده شود.

قضیهٔ ۸.۷ دریك شبکه صف بامفروضات فوق، اگرتمام حالتها بدون بازخورد باشند، ورودی تمام ایستگاهها براساس فرایند پواسون است.

بدین‌ترتیب، دریك شبکه صف بـا مفروضات فوق وبـدون بازخورد، هر ایستگاه مستقل وبه صورت یك مدل‌نمایی عمل می‌کند.

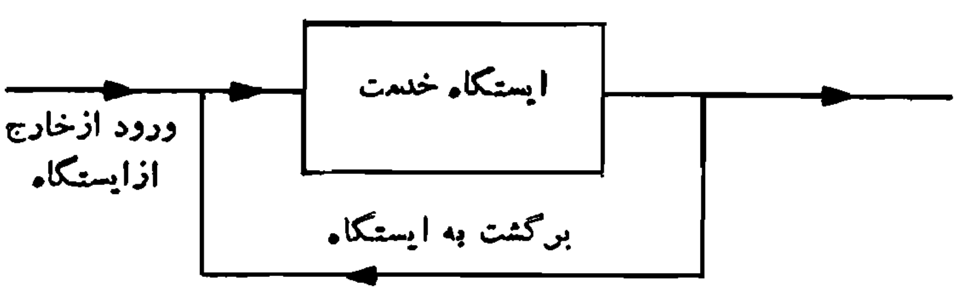
اما چنانچه یك ایستگاه خدمت دارای بازخورد (اعم از مستقیم یا غیر مستقیم) باشد ورودی کلی بـه آن ایستگاه، دیگر طبق فرایند پواسون نخواهد بود. درشکل ۱۳.۷، چنین ایستگاهی نشان داده شده است. مشتریهایی کـه برای دریافت خدمت مراجعه می‌کنند، بر دو نوع‌اند. تعدادی ازآنها از خارج سیستم وارد می‌شوند و تعدادی ازآنها هم‌مشتریهای قبلی ایستگاه هستند، که برای دریافت خدمت مجدد به‌ایستگاه برمی‌گردند. دراین ایستگاه، حتی اگر تعداد مشتریهایی که از خارج سیستم مراجعه می‌کنند، بر اساس فرایند پواسون باشد، چون مشتریهای‌بازخوردی، فرایند پواسون تشکیل نمی‌دهند، لذاکل ورودی سیستم لزوماً طبق فرایند پواسون نیست.

نکته جالب توجه این است‌که حتی درمورد سیستمهایی‌که بازخورد دارند، اگرچه ورودی ایستگاهها دیگرنمی‌توانـد براساس فرایند پواسون باشد ونتیجتاً هرایستگاه طبق مدلـی‌نمایی عمل‌نمی‌کند، ولی با استفاده ازقضیه زیر، روابطی به‌دست می‌آیدکه می‌توان نظیرمدلهای مستقل با آنها برخوردکرد.

قضیهٔ ۹.۷ یك شبکهٔ صف با مفروضات فوق (با بازخورد و یا بدون بازخورد) را، که درهمهٔ ایستگاههای آن $\rho<1$ و ظرفیت صف نامتناهی است، درنظر بگیرید. دراین‌صورت، دردرازمدت رابطهٔ زیرهمیشه برقراراست:

$$\pi_{n_1,n_2\ldots n_K}=\sum_{j=1}^{K}\pi_{n_j}^{(j)}$$

که $\pi_{n_j}^{(j)}$ معرف احتمال بودن n_j مشتری درایستگاه J و $\pi_{n_1,n_2\ldots n_K}$ معـرف بـودن n_1



شکل ۱۳.۷ ایستگاه خدمت با بازخورد

مشتری در ایستگاه اول، n_2 مشتری درایستگاه دوم و... n_K مشتری درایستگاه K ام است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه ایستگاهها، سیستمهای نمایی نیستند، برای محاسبهٔ تابع توزیع تعداد مشتریان، می‌توان سیستم را دارای K مدل نمایی مستقل فرض کرد. به‌همین‌ترتیب،

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_K$$

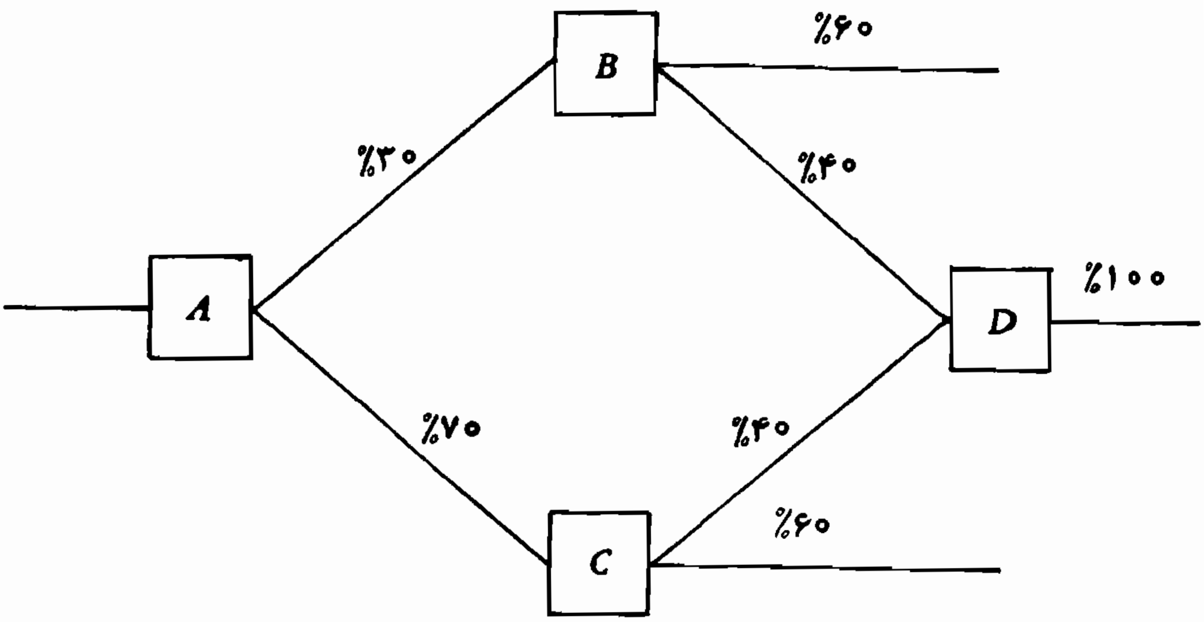
که L_i معرف میانگین تعداد مشتری درایستگاه i ام است.

مثال ۱۷۰۷ دریك درمانگاه، بیماران ابتدا برای ثبت‌نام و تکمیل پرونده به‌قسمت A مراجعه می‌کنند. این درمانگاه دارای سه پزشك B و C و D است. ۳۰ درصد بیماران به‌پزشك B و ۷۰ درصد بقیه‌به C مراجعه می‌کنند. هرکدام ازاین دوپزشك نیز ۴۰درصد بیماران خود را برای تکمیل معاینات به پزشك D ارجاع می‌دهند. تعداد بیمارانی‌که به این درمانگاه مراجعه می‌کنند، فرایندی پواسون با میانگین ساعتی ۱۶ بیمار است. مدت‌زمان ثبت‌نام وتکمیل پرونده وهمچنین معاینهٔ بیماران، متغیرهای تصادفی نمایی بامیانگین به‌ترتیب ۳، ۷٫۵ و۳٫۷۵ و ۷٫۵ دقیقه است. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدر است؟

حل: این سیستم صف یك شبکهٔ جاکسون وبدون بازخورد است. این شبکه را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد (شکل ۱۴۰۷).

دراین مدل،

$$p_{BO}=0.6,\ p_{BD}=0.4,\ p_{AC}=0.7,\ p_{AB}=0.3,\ \lambda'_B=\lambda'_C=\lambda'_D=0$$



شکل ۱۴۰۷ شبکهٔ مثال ۱۷۰۷

$\lambda'_A = ۱۶,\ \mu_۴ = ۸,\ \mu_۳ = ۱۶,\ \mu_۲ = ۸,\ \mu_۱ = ۲۰,\ p_{D۰} = ۱,\ p_{C۰} = ۰٫۶,$
$p_{CD} = ۰٫۴,$

دراین مدل چون هیچ کـدام از ایستگاهها بازخورد ندارند، لـذا ورودی‌آنها طبق فرایند پواسون است، ضمناً

$$\lambda_A = ۱۶$$
$$\lambda_B = (۰٫۳)(۱۶) = ۴٫۸$$
$$\lambda_C = (۰٫۷)(۱۶) = ۱۱٫۲$$
$$\lambda_D = (۰٫۴)(۴٫۸) + (۰٫۴)(۱۱٫۲) = ۶٫۴$$
$$\rho_D = ۰٫۸,\ \rho_C = ۰٫۷,\ \rho_B = ۰٫۶ \qquad ,\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰٫۸,$$

اگر $\pi_0^{(i)}$ را معرف احتمال خالی‌بودن ایستگاه i بگیریم، خواهیم داشت:

$$\pi_0^{(۴)} = ۰٫۲,\ \pi_0^{(۳)} = ۰٫۳,\ \pi_0^{(۲)} = ۰٫۴,\ \pi_0^{(۱)} = ۰٫۲$$

هرایستگاه را می‌توان مستقلا یك مدل $M/M/۱$ تصور کرد. لذا،

$$L_۴ = ۴, \quad L_۳ = \frac{۷}{۳}, \quad L_۲ = ۱٫۵\ ,\ L_۱ = ۴$$

درنتیجه طول صف برابراست با:

$$L = \frac{۷۱}{۶} = ۱۱٫۸۳۳$$

ازطرف دیگر، امید ریاضی مدت زمان انتظار یك مشتری برابر با امید ریاضی مدت‌زمان انتظار او در هـر ایستگاه است؛ ولی، مشتریها به‌همهٔ ایستگاهها نمی‌رونـد. درواقع، همهٔ مشتریها ایستگاه ۱ را طی می‌کنند، ۳۰ درصد آنها بـه‌ایستگاه دوم می‌روند، ۷۰ درصد آنها به‌ایستگاه سوم و ۴۰ درصد به‌ایستگاه چهارم می‌روند، لذا

$$W = W_۱ + ۰٫۳\, W_۲ + ۰٫۷\, W_۳ + ۰٫۴\, W_۴$$

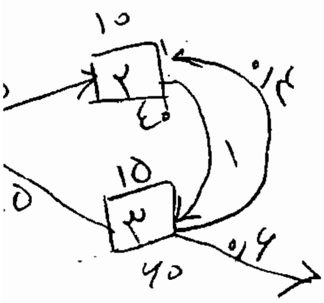
W_i میانگین مدت‌زمان انتظار یك مشتری درایستگاه i ام است و چون هرایستگاه، یك‌مدل $M/M/۱$ محسوب می‌شود، لذا محاسبهٔ آنها نیزبـا استفاده ازرابطهٔ W در $M/M/۱$ انجام می‌شود؛ یعنی،

$$W_۲ = \frac{۵}{۱۶},\ W_۳ = \frac{۵}{۲۴},\ W_۴ = \frac{۵}{۴۸}, \quad W = ۰٫۷۴ \text{ ساعت‌است}$$

می‌توان بررسی کرد که رابطهٔ $L=\lambda W$ همچنان صادق است.

مثال ۱۸۰۷ یك سیستم صف را درنظر بگیرید، که سه ایستگاه خدمت ۱ و ۲ و ۳ داشته باشد. ورود مشتریها از خارج به این ایستگاهها طبق فرایند پواسون به‌ترتیب با آهنگ ۵ و ۱۰ و ۱۵ است. مدت زمان خدمت، نمایی، به ترتیب با آهنگ ۱۰ و ۴۰ و ۶۰ است. مشتریهایی که از ایستگاه ۱ خارج می‌شوند، بـا احتمالات مساوی بـه‌ایستگاههای ۲ و ۳ می‌روند. مشتریهایی که از ایستگاه ۲ خارج می‌شوند، همگی به‌ایستگاه ۳ می‌روند. چهل درصد مشتریهای ایستگاه ۳ به‌ایستگاه ۲ برمی‌گردند و بقیه ازسیستم خارج می‌شوند. L و W را محاسبه کنید.

حل: این سیستم یك شبکهٔ صف با بازخورد است. اگر آهنگ ورود به ایستگاههای ۱ و ۲ و ۳ را به‌ترتیب $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ بنامیم، طبق رابطهٔ (۶۸۰۷)،



$$\lambda_۱=۵$$

$$\lambda_۲=۱۰+۰/۵\lambda_۱+۰/۴\lambda_۳$$

$$\lambda_۳=۱۵+۰/۵\lambda_۱+\lambda_۲$$

نتیجه می‌شود که: $\lambda_۱=۵$ و $\lambda_۲=۳۲/۵$ و $\lambda_۳=۵۰$ است

به این ترتیب،

$$L=L_۱+L_۲+L_۳=\frac{۳۱}{۳}\ ,\quad \rho_۳=\frac{۵}{۶}\ ,\quad \rho_۲=۰/۸۱۲۵\ ,\quad \rho_۱=۰/۵$$

برای محاسبهٔ W از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود. لازم به یادآوری است که آهنگ ورود به سیستم $۳۰=۱۵+۱۰+۵=\lambda'_۱+\lambda'_۲+\lambda'_۳$ است، که این مقدار برابربا مجموع آهنگ ورود به‌ایستگاههای مختلف نخواهد بود. دررابطهٔ لیتل، منظور ازآهنگ ورود، میانگین کل مشتریهایی است که درواحدزمـان ازخارج سیستم وارد آن می‌شوند. بنابراین، مشتریهای هر ایستگاه را، که ممکن است چندبار وارد ایستگاههـای مختلف شوند، باید فقط یك‌بار درکل سیستم منظور کرد. بدین ترتیب

$$W=\frac{L}{\lambda'_۱+\lambda'_۲+\lambda'_۳}=\frac{۳۱}{۹۰}$$

مسائل

۰۹ دریك سیستم صف، ورود مشتریها براساس‌فرایند پواسون (با آهنگ λ) انجام‌می‌شود. این سیستم دارای دوخدمت‌دهنده‌است. مدت ارائهٔ خدمت‌توسط‌هرکدام ازخدمت‌دهندگان دارای تـوزیع‌نمایی (بـا پارامترهای $\mu_۱$ و $\mu_۲$) است. اگرسیستم خالی باشد، مشتری به

احتمال ۴ر۰ خدمت‌دهندهٔ اولی و به احتمال ۶ر۰ خدمت‌دهندهٔ دومی را انتخاب می‌کند، اما، اگرحداقل یکی ازخدمت‌دهندگان مشغول باشند، مشتری حق انتخاب خدمت‌دهنده را ندارد.

این مسئله را به‌شکل یك سیستم مارکوفی فورموله و نمودار آهنگ آن را رسم کنید ومعادلات تعادلی آن را بنویسید (حل‌معادلات‌لازم نیست). میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را برحسب احتمالات حدی به‌دست آورید. میانگین‌تعداد خدمت‌دهندگان بیکار چقدر است؟ احتمال اینکه یك مشتری ازخدمت‌دهندهٔ اولی خدمت دریافت کند، چقدراست؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظر بگیرید، که در آن $\mu_2 > \mu_1$ است. اگر هر دو خدمت دهنده بیکار باشند، مشتری همواره خدمت‌دهندهٔ یك و درغیراین‌صورت هرخدمت‌دهنده‌ای را که بیکار باشد انتخاب می‌کند. به‌سؤالات مسئلهٔ ۱ مجدداً پاسخ دهید. درچه‌درصدی اززمان، هرکدام ازخدمت‌دهندگان بیکارند؟

۳. ماشینهایی که‌دارای سه‌موتورهستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. به‌طور متوسط، هرچهار ساعت یك ماشین به تعمیرگاه می‌رسد وفرض می‌شودکه ورود ماشینها براساس فرایند پواسون است. مدت زمان تعمیر هرموتور (و نه هرماشین)، دارای توزیع نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه‌است. درهرلحظه فقط یك موتور می‌تواند تحت تعمیرباشد.
الف. حالت سیستم را تعداد موتورهای داخل تعمیرگاه‌تعریف کنید. نمودار آهنگ‌را رسم کنید و معادلات تعادلی آن را بنویسید.
ب. این مسئله طبق چه‌مدلی‌است؟ میانگین مدت‌زمانی که یك ماشین داخل‌تعمیرگاه‌می‌ماند، چقدراست؟

۴. درمسئلهٔ دوم، فرض‌کنیدکه هرسه موتورماشین لزوماً احتیاج به‌تعمیرندارند. به‌احتمال ۱/۳ یك موتور، به‌احتمال ۱/۳ دوموتور و به‌احتمال ۱/۳ هرسه‌موتور احتیاج به‌تعمیر دارند. دراین صورت، این مسئله را مجدداً حل کنید.

۵. یك سیستم صف بـایك خدمت‌دهنده را درنظربگیرید، که دونوع مشتری به‌آن مراجعه می‌کنند. مشتریهای نـوع ۱ برنوع ۲ اولـویت دارند. ورود هردونوع مشتری براساس فرایند پواسون (با میانگین به‌ترتیب ۱ و ۵ در ساعت) است. مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. اولویت باداشتن حق‌انقطاع فرض می‌شود.
الف. میانگین مدت‌زمان انتظاردرسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را حساب کنید.
ب میانگین مدت‌زمـان انتظار درسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم، به‌فرض اینکه اولویت منظورنشود را ازبند الف محاسبه کنید.
ج) معادلات تعادلی این مدل رابنویسید

۶. درقسمت‌باریك فرودگاه‌بسته‌های محتوی‌چمدانها را برای بازرسیهای امنیتی‌می‌آورند.

زمان بین آمدن هردو بسته، نمایی بامیانگین ۲۰ دقیقه فرض می‌شود. در ۵۰ درصد بسته‌ها، شش چمدان و در ۵۰ درصد دیگر، چهارچمدان وجوددارد. مدت‌زمان بازرسی یك‌چمدان، نمایی با میانگین ۳ دقیقه فرض می‌شود.

الف. اگر فقط یك بازرس وجود داشته باشد، احتمال اینکه بیکار باشد، چیست؟ احتمال اینکه فقط یك چمدان دیگر دربازرسی مانده باشد، چیست؟

ب. چنانچه سه‌بازرس کار کنند، نمودار آهنگ را رسم کنید و معادلات تعادلی را بنویسید.

۷. دریك‌کورهٔ الکتریکی، مدت‌زمان حرارت‌دادن قطعات، نمایی بامیانگین دوساعت‌است. سه‌قطعه را به‌طورهمزمان می‌توان داخل کوره جا داد، اما درصورت نبودن قطعات، کوره را بایك یا دوقطعه هم راه‌اندازی می‌کنند. رسیدن قطعات برای اعمال حرارتی در کوره، طبق فرایند پواسون با آهنگ ۲٫۵ ساعت است. میانگین طول قطعاتی که منتظرهستند تا داخل کوره شوند، چقدر است؟

۸. برای حمل اتومبیلها از عرض یك رودخانه، از قایقی مخصوص استفاده می‌شود، که گنجایش پنج اتومبیل را دارد. اتومبیلها طبق فرایند پواسون، بامیانگین ساعتی ۱۵ دستگاه برای عبوراز رودخانه مراجعه می‌کنند. مدت رفت و برگشت قایق متغیری تصادفی باتوزیع نمایی است وبه‌طور متوسط ۱۲ دقیقه طول می‌کشد. احتمال اینکه اتومبیلی مراجعه کند و بلافاصله سوارقایق‌شود و از رودخانه عبور کند، چقدراست؟ میانگین تعداد اتومبیلهایی‌که عبور می‌کنند، چقدراست؟ (فرض می‌کنیم که قایق حتماً باید پرشود تا حرکت کند).

۹. مشتریها طبق‌فرایندپواسون‌واردسیستم‌می‌شوند. تعدادمشتری واردشده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ نفرفرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه‌طول می‌کشد. میانگین طول صف را، درصورتی‌که مدت زمان خدمت، نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با $K = ۳$) باشد، محاسبه کنید.

۱۰. درمحل انبارابزار کارخانه‌ای دوانباردار کار می‌کنند. اولی مسئول تحویل ابزار ماشین‌آلات و دومی مسئول تحویل سایر ابزارآلات است. کارگران برای دریافت ابزار طبق فرایند پواسون ($\lambda = ۲۵$ درساعت) وارد انبار می‌شوند و ۴۰٪ آنان متقاضی ابزار ماشین‌آلات هستند. مدت‌زمان تحویل ابزار، نمایی بامیانگین۳ دقیقه است. بررسی انجام شده نشان می‌دهد که اگر هر دو انباردار مشترکاً کار کنند، مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط به ۱/۸ دقیقه کاهش می‌یابد و تابع توزیع آن $E_۲$ خواهد بود. کدام روش بهتراست؟

۱۱. برای ادارهٔ ماشینی می‌توان یکی از دونفر داوطلب را استخدام کرد. اولی با این ماشین ۶ واحد محصول موردنظر و دومی ۵ واحد آنرا در روز، به‌طور متوسط تولید می‌کنند. مدت زمان تولید توسط اولی، نمایی و توسط دومی ارلانگی با $r = ۲$ است. کدام یك ازاین دونفر را باید استخدام کرد؟ فرض کنید که تقاضا برای تولیدمحصول طبق فرایند پواسون با پارامتر λ است.

۱۲. قسمت کنترل کیفیت کارخانه‌ای، قطعات معیوبی راکه با استانداردها تطبیق نمی‌کنند

برای اصلاح وتنظیم مجدد بـه قسمت تولید برمی‌گرداند. فرض می کنیم که به‌طورمتوسط هر ۱٫۵ دقیقه، یك قطعه معیوب شناخته می‌شود وفاصلهٔ زمانی بین فرستادن هر دوقطعه نمایی است. برای اصلاح این قطعات یکی‌از دو روش زیر را می‌توانیم انتخاب‌کنیم.

کدام روش قطعات معیوب را پس از اصلاح زودتر به‌تولید برمی گرداند؟

الف. به کارگیری دو تعمیرکار،که هرکدام می‌توانند به‌طور متوسط یك قطعه را در ۲٫۵ دقیقه تعمیرکنند. مدت‌زمان تعمیر نمایی فرض شود.

ب. استفاده ازیك ماشین که هرقطعهٔ معیوب را دقیقاً در ۱٫۲۵ دقیقه تعمیرمی‌کند.

ج. در بند الف، احتمال اینکه کارگـر شمارهٔ یك بیکار بـاشد، چیست؟ مقدار احتمال را برحسب تابعی از ρ به‌دست‌آورید.

۱۳. مدل $M/E_4/1$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که ظرفیت صف صفر است. نمودار آهنگ را رسم کنید. احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چقدراست؟

۱۴. مشتریها طبق فرایندپواسون واردسیستم می‌شوند. تعداد مشتری وارد شده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ است. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه است. میانگین طول صف را برحسب اینکه مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با ۳ مرحله) باشد، محاسبه‌کنید

۱۵. دریك مـدل $M/E_2/2/2$ نمودار آهنگ را رسم و L و W را محاسبه و صحت رابطهٔ لیتل را درمورد آنها تحقیق‌کنید. فرض‌کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 8$ است.

۱۶. دریك مدل $E_2/M/2/2$، نمودارآهنگ را رسم و L و W رامحاسبه کنید. فرض کنید $\lambda = 25$ و $\mu = 15$ است.

۱۷. سه نوع مشتری به‌یك سیستم مراجعه‌می‌کنند. ورود مشتریهای نوع ۱ و۲ و ۳ براساس فرایند پواسون وبه‌ترتیب بـا میانگین ۲ و ۳ و ۶ مشتری درساعت است. مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، توسط تنها خدمت‌دهندهٔ سیستم، نمایی وبا میانگین ۴ دقیقه است.

الف. میانگین مدت زمان انتظار درصف وهمچنین میانگین طول صف را درمورد هرنوع مشتری، دردوحالت زیرحساب‌کنید:

۱. درصورتی‌که ارائهٔ خدمت به‌مشتریهای هرسه‌گروه برحسب نوبت انجام شود؛

۲. درصورتی‌که‌مشتریهای نوع ۱ ازبالاترین اولویت ومشتریهای نوع ۲ ازاولویت بعدی برخوردار باشند (بدون حق انقطاع)

ب. ارتباط بین میانگین زمان انتظار وهمچنین طول صف حالت ۲ را با حالت ۱ مشخص کنید.

۱۸. مسئلهٔ ۱۷ را، بـا فرض اینکه سیستم دارای نظم اولویت باحق انقطاع است، مجدداً حل کنید.

۱۹. معادلات تعادلی را برای حالتهای mn ۱ و mn ۲، مدل $M/M/1$ با نظم اولویت و حق‌انقطاع بنویسید.

۲۰. مسئلهٔ۱ فصل ششم را درنظر بگیرید، فرض کنید که ماشینهای تعمیر شده را برای کنترل می‌فرستند.
الف. احتمال اینکه فاصله زمانی بین دو ماشینی که برای کنترل می‌فرستند، حداقل سه روز طول بکشد، چیست؟
ب. حال فرض کنید که به‌جای اینکه تمام ماشینها را برای کنترل بفرستند، فقط ۵۰ درصد آنها را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنند و برای کنترل می‌فرستند. مدت‌زمان کنترل، نمایی با میانگین ۱/۸ روز فرض می‌شود. اگر ماشینی برای کنترل فرستاده شود، به‌طور متوسط، ازلحظهٔ اتمام تعمیر تا لحظهٔ خروج آن ازسیستم چقدرطول می‌کشد؟
ج. دربند ب، فرض کنید که ماشینها را یك درمیان (نه به‌صورت تصادفی)، برای کنترل می‌فرستند؟ جواب بند ب را مجدداً بررسی کنید؟

۲۱. دریك مدل $M/M/1$ با نظم اولویت وبدون حق‌انقطاع و با دوگروه مشتری، آهنگ ورود مشتریهای گروههای ۱ و ۲ به‌ترتیب λ_1 و λ_2 وآهنگ خدمت‌دهی به‌آنها μ_1 و μ_2 است. دراین نظم، نشان‌دهید میانگین مدت‌زمان خدمت برای کل سیستم، یعنی W_q کمتر ازحالتی است که نظم اولویت وجود ندارد، به‌شرط اینکه $\mu_1 > \mu_2$ باشد.

۲۲. درمثال ۱۶.۷، با فرض اینکه $\lambda = 10$ و $\mu_1 = 20$ و $\mu_2 = 30$، احتمالات حدی و L و W را محاسبه کنید. چند درصد مشتریها نمی‌توانند وارد سیستم شوند؟

۲۳. مسئلهٔ ۲۲ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که مشتری پس ازدریافت خدمت از مرحلهٔ اول، درصورتی مرحلهٔدوم را می‌گذراند که آن مرحله‌خالی باشد. درغیراین‌صورت سیستم را ترك می‌کند.
الف. مجدداً به‌سؤالات مسئلهٔ ۲۲ جواب دهید.
ب. چه‌درصدی از مشتریهایی که وارد سیستم می‌شوند، هر دومرحله را می‌گذرانند.

۲۴. سوپرمارکتی را درنظر بگیرید که مشتریهایش کالاهای موردنیاز خود را شخصاً از قفسه‌ها انتخاب می‌کنند و سپس پول آن را به‌صندوقدار می‌پردازند. مدت‌زمان انتخاب کالا وهمچنین مدت‌زمان محاسبهٔ قیمت کالا در صندوق، نمایی با میانگین به‌ترتیب ۱۵دقیقه و ۵ دقیقه است. ورود مشتریها به‌این سوپرمارکت طبق فرایند پواسون است. در هرساعت به‌طور متوسط سی مشتری مراجعه می‌کنند. حداقل چند صندوقدار برای این سوپرمارکت لازم است، میانگین مدت زمان توقف یك مشتری دراین سوپرمارکت (بافرض حداقل بودن تعداد صندوقداران) چقدراست؟

۲۵. دریك شبکهٔ سری، سه‌ایستگاه‌خدمت وجوددارد. ورود مشتریها به‌این‌شبکه طبق‌فرایند

پواسون با آهنگ $\lambda=5$ وآهنگ خدمت در سه ایستگاه بـه‌ترتیب ۶ و ۸ و ۴ و تعداد خدمت‌دهنده درآنها به‌ترتیب ۲ و ۱ و ۲ و ظرفیت صف درهر سه‌ایستگاه نامتناهی است. احتمال خالی‌بودن سیستم چقدراست؟ احتمال اینکه درسیستم ۳ مشتری وجود داشته باشد چقدراست؟ L و W را محاسبه‌کنید.

۲۶. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً درنظر بگیرید، بـا این تفاوت کـه ظرفیت صف درایستگاه سوم برابر با ۳ است. آن‌گاه، به‌سؤالات مطرح شده پاسخ مناسب ارائه‌کنید.

۲۷. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صف درایستگاههای دوم وسوم برابربا صفراست. معادلات تعادلی‌را بنویسید. L و W را محاسبه‌کنید.

۲۸. در یك هتل، رستوران و چایخوری کنار یکدیگر قرار دارند. مـراجعهٔ مشتریها از خارج به این هتل، طبق فرایند پواسون است. هرساعت به طور متوسط ۳۰ مشتری به هتل مراجعه می‌کنند، ۶۰ درصـد آنها مستقیماً بـه رستوران و بقیه بـه چایخوری می‌رونـد. بعد از صرف غـذا ۸۰ درصد مشتریهـای رستوران بـه‌چایخوری و ۳۰ درصد مشتریهای چایخوری به‌رستوران مراجعه می‌کنند. لیکن، هیچ مشتری دوبار به‌رستوران یا چایخوری نمی‌رود. مدت زمان ارائهٔ خدمت در هـر دو قسمت، نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. در هر لحظه، بـه‌طور متوسط چند نفر در رستوران وچند نفر در چـایخوری هستند (بعد از دریافت غذا یاچای مشتریها به‌فضای خارج‌رستوران وچایخوری می‌روند.) به‌طورمتوسط یك مشتری چه‌مدت دراین هتل است؟ اگرکسی بخواهد به‌هر دوقسمت مراجعه‌کند، به‌طور متوسط چه‌مدت درهتل است؟

۲۹. خط تولید یك‌کارخانـه از دومرحله تشکیل شده‌است. کارهـای سفارشی طبق فرایند پواسون باآهنگ ساعتی سـه‌واحد به‌کارخانه ارجاع می‌شود. درمرحلهٔ اول‌که ماشینکاری است، مدت‌زمان خدمـت، نمایی بـا میانگین ۱۵ دقیقه است. امـا در مرحلهٔ دوم، هردو قطعه، که از ماشینکاری خارج شده‌اند، به‌طور همزمان آبکاری می‌شوند. مدت‌زمان آبکاری نیز، نمایی بـا میانگین ۳۰ دقیقه است. (آبکاری یك قطعهٔ تنها، مقرون بـه‌صرفه نیست)، به‌طور متوسط هرکار ارجاع‌شده چه‌مدت درکارخانه است؟

۳۰. یك‌شبکهٔ سری با دوایستگاه خدمت‌را درنظربگیرید، که ورود مشتریها براساس‌فرایند پواسون ومدت‌زمان خدمت درهرایستگاه، نمایی با آهنگهای خدمت ۲۰ و ۱۰ (به‌ترتیب برای ایستگاههای ۱ و۲) است. درهرایستگاه یك خدمت‌دهنده مشغول به‌کاراست. درلحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، ایستگاه دوم خالـی است. دردوحالت زیـر، احتمال اینکه این مشتری درایستگاه دوم معطل نشود، چیست؟

الف. مشروط براینکه می‌دانیم درصف ایستگاه اول منتظر نمی‌ماند.

ب. مشروط براینکه می‌دانیم درصف ایستگاه اول‌منتظرمی‌ماند (دراین حالت ثابت‌کنید که احتمال اینکه این مشتری درصف ایستگاه دوم منتظربماند، حداقل برابر با ۲/۳ است).

۴۱. دریك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده، مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda = ۴$ درساعت‌واردمی‌شوند. مدت‌زمان خدمت، نمایی بامیانگین ۶ دقیقه است. هرمشتری پس‌از دریافت‌خدمت با احتمال ۰٫۸ از سیستم خارج می‌شود، ولی بااحتمال ۰٫۲ مجدداً وارد سیستم می‌شودودرانتهای صف منتظر می‌ماند. بنابراین، هر مشتری ممکن است چندبار خدمت دریافت کند.

الف. آیا این سیستم یك‌مدل $M/M/۱$ است؟

ب. احتمال اینکه یك مشتری پنج‌بار خدمت دریافت‌کند، چیست؟ میانگین تعداد دفعاتی‌که یك مشتری خدمت دریافت می‌کند، چقدراست؟

ج. احتمال اینکه پنج‌مشتری درسیستم باشند، چیست؟ L را محاسبه‌کنید.

ه. میانگین مدت‌زمان دریافت خدمت برای هرمشتری چقدراست؟

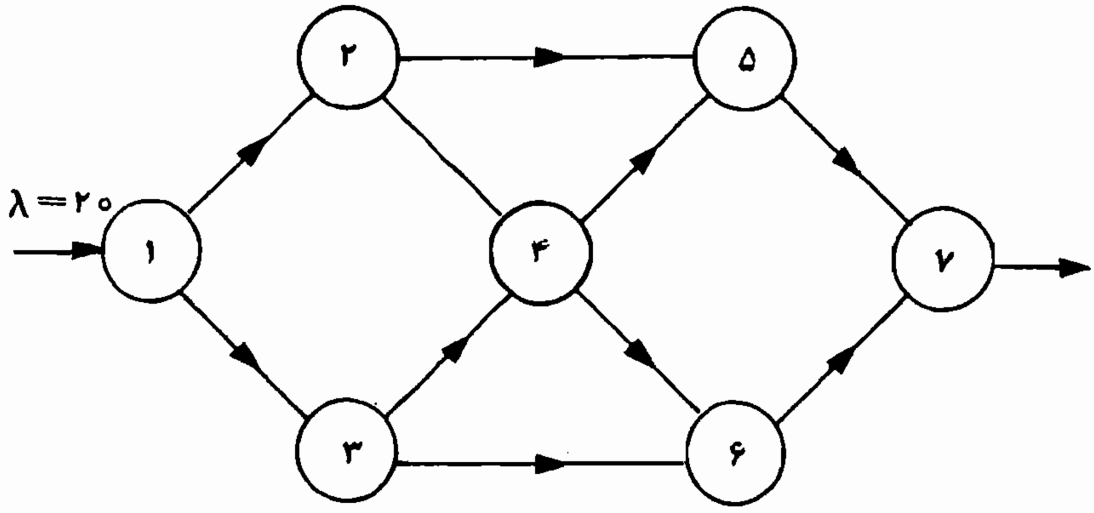
۴۲. دریك‌شرکت‌مهندسی‌مشاور، طراحی‌سیستمی‌ازهشت مرحله تشکیل‌شده‌است. مدت‌زمان اجرای هرمرحله، نمایی با میانگین دوهفته است. تقاضا برای طراحی سیستمها طبق‌فرایند پواسون با میانگین هر ۲۰ هفته یك‌بار می‌رسد. در دوحالت زیر، مدت‌زمان انتظار هرکار (طراحی یك سیستم) چقدرطول می‌کشد؟ باچه مدلی تطبیق می‌کند؟

الف. یك مهندس، طراحی هرهشت مرحله را انجام می‌دهد.

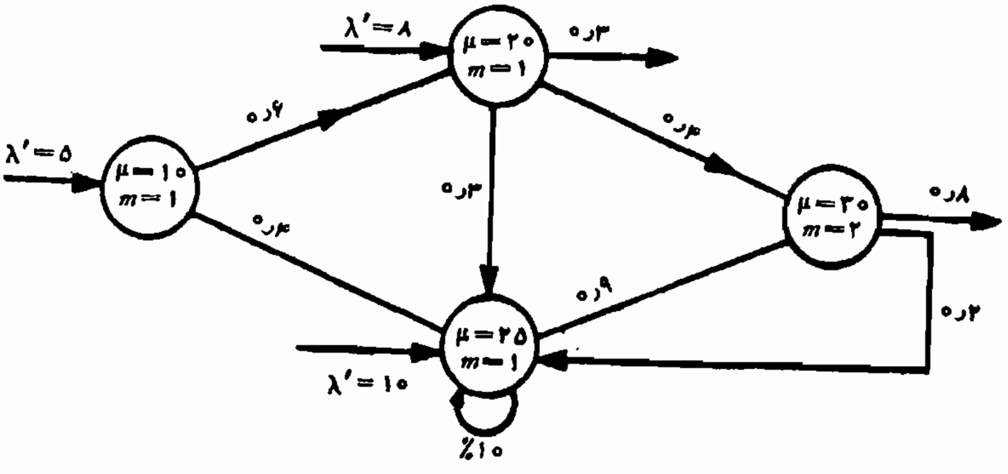
ب. برای طراحی هرمرحله یك مهندس وجود دارد.

۴۳. یك‌مدل $M/M/۱/۱$ را درنظر بگیرید، که آهنگ ورود وخدمت درآن به‌ترتیب۸و ۱۲ باشد. تفاوت این مدل با $M/M/۱$ این است که دراین سیستم، علاوه برمشتریهای عادی یك مشتری مخصوص نیز مراجعه می‌کند، که ازاولویت با حق انقطاع برخوردار است. این مشتری‌پس ازدریافت خدمت‌مدتی خارج‌ازسیستم‌است ودوباره به‌سیستم مراجعه می‌کند. مدت‌زمان بودن این مشتری درخارج ازسیستم، متغیرتصادفی نمایی با میانگین ۵ است. آهنگ مراجعهٔ این مشتری را به‌دست آورید. یك مشتری عادی را درنظربگیرید. تابع توزیع تعداد دفعات قطع خدمت این مشتری به‌علت‌آمدن مشتری مخصوص را تعیین کنید.

۴۴. یك شبکهٔ‌صفی را درنظربگیریدکه ایستگاههای‌آن طبق شبکهٔ زیراست. ورودمشتریها فقط به‌ایستگاه یك وطبق فرایند پواسون است ($\lambda = ۲۰$). مدت‌زمان خدمت درهرایستگاه، نمایی فرض می‌شود. آهنگ خدمت در ایستگاههای یك تا هفت به‌ترتیب، ۳۵، ۲۰، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۱۵ و ۳۰ است. در هرایستگاه فقط یك خدمت‌دهنده‌مشغول به‌کار است. در هر ایستگاه‌که خروجیهای‌آن به دوایستگاه دیگروارد می‌شوند، فرض‌براین است‌که هرمشتری با احتمال مساوی به‌یکی ازآن دوایستگاه مراجعه می‌کند. L و W را برای هرایستگاه و کل سیستم به‌دست‌آورید. آیا هرایستگاه یك مدل $M/M/۱$ است؟



۳۵. یک شبکهٔ صف را درنظر بگیرید، که ایستگاههای آن طبق شبکهٔ زیر است. ورود مشتریها از خارج سیستم به هر ایستگاه طبق فرایند پواسون و مدت زمان خدمت درهر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. سایر اطلاعات موردنظر روی شبکه نشان داده شده‌است. L و W را برای هر ایستگاه و کل سیستم به‌دست آورید. آیا هرایستگاه یک‌مدل $M/M/m$ است؟



۳۶. یک خط تولید ازدوایستگاه‌پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات، طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی ۲۰ قطعه به‌ایستگاه اول می‌رسند. در هرایستگاه، پس ازعملیاتی که روی هرقطعه انجام می‌شود، سه‌حالت می‌تواند اتفاق بیفتد. یاقطعه با استانداردها تطبیق می‌کند وسالم شناخته می‌شود، یا قطعه سالم شناخته نمی‌شود و مجدداً برای تعمیر به‌همان ایستگاه برگردانده می‌شود، یا غیرقابل اصلاح است وبه‌عنوان ضایعات از خط تولیدکنار گذاشته می‌شود. مدت‌زمان کار روی هر قطعه، متغیر تصادفی نمایی است وزمان اجرای عملیات روی قطعه برای‌اولین‌بار، بازمان تعمیرات تفاوتی نمی‌کند. اطلاعات مربوط به‌ایستگاهها درجدول صفحهٔ بعد خلاصه‌شده‌است. میانگین تعداد قطعات داخل سیستم‌را به‌دست آورید.

ایستگاه	میانگین مدت اجرای عملیات (دقیقه)	درصد قطعات غیر قابل قبول ولی قابل اصلاح	درصد قطعات غیر قابل اصلاح
۱	۱٫۵	۳۰	۱۰
۲	۲	۲۰	۵

۸

سیستمهای صف غیرمارکوفی

دراین‌فصل، مدلهایی را موردبررسی قرارمی‌دهیم، که درآنها فقط یکی ازدومتغیرتصادفی زمان بین دو ورود متوالی مشتریها یا مدت زمان خدمت دارای تابع توزیع نمایی است، دراین مدلها، خاصیت بدون حافظه‌بودن سیستم دیگر برقرار نیست، زیرا متغیرهای فوق‌نمایی نیستند. با وجود این، با استفاده ازخاصیت بدون حافظه بودن،همان متغیرتصادفی‌که دارای توزیع نمایی است، در مقاطعی از زمان سیستم می‌تواند دارای خاصیت مارکوفی باشد وهمین خاصیت مبنای تحلیل سیستم خواهد بود.

۱.۸ مدل $M/G/1$

براساس قراردادی که‌درفصل اول ارائه‌شد، دراین مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها نمایی است. اما، مدت‌زمان خدمت می‌تواند هرمتغیرتصادفی باتابع توزیع دلخواه باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را بـا $b(t)$ نشان می‌دهیم. در این مدل نیز، آهنگ ورود مشتری λ وآهنگ خدمت μ فرض می‌شود.

بیان مدل $M/G/1$ به‌شکل یك زنجیرۀ مارکوف

برای استفاده ازخاصیت مارکوفی، فرایندی احتمالی را کـه درآن حالت سیستم به‌شرح

زیر تعریف شده باشد، درنظر می‌گیریم.

$X_n =$ تعداد مشتری درسیستم درهنگام خروج n امین مشتری

می‌خواهیم نشان دهیم که X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد. به‌طوری که مشاهده می‌شود، دراین سیستم هر مرحله، فاصلهٔ زمانی بین دو خروج متوالی مشتریها تعریف شده است. بدیهی است که مدت زمان واقعی هرمرحله ثابت نیست، بلکه متغیری تصادفی است، که تابع چگالی آن $b(t)$ فرض شده است. برای اینکه ثابت کنیم مجموعهٔ متغیرهای تصادفی X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد، باید نشان دهیم که X_{n+1} فقط به X_n بستگی دارد. این موضوع را ازرابطهٔ زیرمی‌توان استنتاج کرد:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A, & \text{اگر } X_n \geqslant 1 \text{ باشد} \\ A, & \text{اگر } X_n = 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱.۸)$$

که A عبارت ازتعداد مشتریهایی است که درطول مدت‌زمان ارائهٔ یك خدمت وارد سیستم می‌شوند. قسمت اول رابطهٔ فوق‌بدیهی است. برای روشن‌شدن قسمت دوم آن، فرض کنید که درلحظهٔ خروج n امین مشتری، در سیستم مشتری دیگری نباشد، یعنی $X_n = 0$. پس از مدتی، مشتری بعدی یعنی مشتری $(n+1)$ ام وارد می‌شود و بلافاصله شروع به دریافت خدمت می‌کند. اگر در مدت زمانی که این مشتری مشغول دریافت خدمت است، A مشتری جدید وارد شوند، بدیهی است که در زمان خروج او همین تعداد مشتری هنوز در سیستم هستند.

به‌این ترتیب، چون مجموعهٔ متغیرهـای تصادفی X_n، یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد، لازم است که ماتریس گذار آن نیز مشخص شود. برای سهولت در نشان دادن این ماتریس، ازقرارداد زیر استفاه می‌شود:

$$q_n = P[A = n] \qquad (۲.۸)$$

به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه در طول مدت ارائهٔ یك خدمت، n مشتری وارد شوند را با q_n نشان می‌دهیم.

حال با استفاده از رابطه‌های(۱.۸) و(۲.۸) می‌توان ماتریس گذار را به‌شکل‌زیرنشان‌داد.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \qquad (۳.۸)$$

برای محاسبهٔ q_n، ازرابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. چنانچه S، مدت‌زمان ارائه خدمت متغیر تصادفی پیوسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \int_0^\infty P(A=n|S=x)b(x)dx$$

ازطرف دیگر

$$P(A=n|S=x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

درنتیجه

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}b(x)dx \qquad (۴.۸)$$

بامشخص‌بودن $b(x)$، مقدار q_n، $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ محاسبه می‌شود.

اگر متغیر تصادفی مدت‌زمان خدمت گسسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \sum_s P(A=n|S=s)p_S = \sum_s e^{-\lambda s}\frac{(\lambda_S)^n}{n!}p_S \qquad (۵.۸)$$

محاسبهٔ معیارهای ارزیابی درمدل $M/G/۱$

قضیهٔ ۱.۸ دریک مدل $M/G/۱$، بافرض $\rho<۱$، معیارهای ارزیابی با استفاده از رابطهٔ زیر، که به‌نام رابطهٔ پلاچك خینکین[1] یا به‌طور اختصار $(P-K)$ موسوم است، محاسبه می‌شود

$$L_q = \frac{\rho^۲ + \lambda^۲ \operatorname{Var}(S)}{۲(۱-\rho)} \qquad (۶.۸)$$

که $\operatorname{Var}(S)$ معرف واریانس مدت‌زمان خدمت است. ازطرف دیگر، میانگین مدت‌زمان خدمت $E(S) = ۱/\mu$ است. بنابراین،

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E(S) \qquad (۷.۸)$$

سایرمعیارهای ارزیابی با استفاده ازاستنتاج لیتل به‌دست می‌آیند، برای نمونه

$$L = L_q + \rho$$

(همان‌طورکه مشاهده می‌شود، برای تعیین معیارهای ارزیابی در مدل $M/G/۱$، تنها اطلاعات موردنیاز، میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت است ونیازی به‌دانستن تابع

1. Pollaczek - Khintchine

توزیع خدمت نیست)

اثبات: براساس تعریف، L میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت است؛ یعنی،

$$L=\lim_{n\to\infty}E(X_n) \tag{۸.۸}$$

برای محاسبهٔ L، ابتدا رابطهٔ (۱.۸) را به‌شرح زیر بیان می‌کنیم:

$$X_{n+1}=X_n+A-Y \tag{۹.۸}$$

که درعبارت فوق، Y متغیری تصادفی است، که به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$Y=\begin{cases} 1, & \text{اگر } X_n>0 \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } X_n=0 \text{ باشد} \end{cases} \tag{۱۰.۸}$$

براساس این تعریف، رابطه‌های زیر نیز صدق می‌کند:

$$Y^2=Y \tag{۱۱.۸}$$

و

$$\lim_{n\to\infty}E(YX_n)=L\ ,\ \ YX_n=X_n \tag{۱۲.۸}$$

آن‌گاه، میانگین طرفین رابطه (۹.۸) وسپس امید ریاضی مجذور طرفین همان رابطه را، درحالی‌که $n\to\infty$، به‌دست می‌آوریم.

$$E(X_{n+1})=E(X_n)+E(A)-E(Y) \tag{۱۳.۸}$$

$$E(X_{n+1}^2)=E(X_n^2)+E(A^2)+E(Y^2)-2E(YX_n)-2E(AY)+2E(AX_n) \tag{۱۴.۸}$$

باتوجه به‌اینکه متغیر تصادفی A مستقل از Y و X_n است و با درنظرگرفتن رابطهٔ (۸.۸)، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}E(AX_n)=E(A)\cdot L \tag{۱۵.۸}$$

وبااستفاده ازرابطه‌های (۱۲.۸)، (۱۴.۸) و (۱۵.۸)، دردرازمدت، نتیجه می‌شود که:

$$E(A^2)+E(Y^2)-2L-2E(A)E(Y)+2E(A)L=0 \tag{۱۶.۸}$$

(درعبارت فوق، رابطهٔ $E(X_{n+1}^2)=E(X_n^2)$، دردرازمدت، به‌کارگرفته شده‌است).
برای به‌دست‌آوردن L ازرابطهٔ فوق، لازم است‌که میانگین و گشتاور دوم متغیرهای Y و A محاسبه شود.

$$E(A)=\int_{0}^{\infty}E(A|S=x)\,b(x)\,dx \qquad (۱۷.۸)$$

اما چون ورود مشتریها طبق فرایند پواسون است، بنابراین:

$$E(A|S=X)=\lambda X \qquad (۱۸.۸)$$

درنتیجه

$$E(A)=\lambda\int_{0}^{\infty}Xb(X)dX=\lambda E(S) \qquad (۱۹.۸)$$

در رابطهٔ فوق، مقدار انتگرال، بر اساس تعریف میانگین برابر $E(S)$ است. از طرفی بر اساس تعریف آهنگ خدمت‌دهی، داریم

$$E(S)=\frac{1}{\mu} \qquad (۲۰.۸)$$

و

$$E(A)=\frac{\lambda}{\mu}=\rho \qquad (۲۱.۸)$$

ازطرف دیگر، با استفاده ازرابطه‌های (۱۱.۸) و (۱۳.۸) و (۲۱.۸) خواهیم داشت.

$$E(Y)=E(Y^{2})=E(A)=\rho \qquad (۲۲.۸)$$

برای محاسبهٔ L ازرابطهٔ (۱۶.۸)، تنها چیزی که باقی می‌ماند محاسبهٔ $E(A^{2})$ است، که برای این کار، ازرابطهٔ واریانس وهمچنین (۲۱.۸) استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{Var}(A)=E(A^{2})-(E(A))^{2}$$

یا

$$E(A)^{2}=\mathrm{Var}(A)+\rho^{2}=\rho+\lambda^{2}\,\mathrm{Var}(S)+\rho^{2} \qquad (۲۳.۸)$$

باجایگزینی عبارات مربوطه در (۱۶.۸) رابطهٔ $P-K$ ثابت می‌شود

حالت خاص $M/M/1$

دراین حالت

$$\mathrm{Var}(S)=\frac{1}{\mu^{2}}$$

دراین حالت طبق رابطهٔ $(P-K)$،

$$L=\rho+\frac{\rho^{2}+(\lambda/\mu)^{2}}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\rho^{2}}{1-\rho}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

که همان نتیجه به‌دست آمده درمدل $M/M/1$ است.

مثال ۱۰۸ در یك سیستم صف، مشتریها طبق فـرایند پواسون وارد می‌شوند. فاصلهٔ زمانی بین‌دو ورود مشتریهـا بـه‌طور متوسط ۴۵ دقیقه است. مدت‌زمـان خدمت متغیری تصادفی است که هیستوگرام آن به‌شرح زیرخلاصه می‌شود.

مدت‌زمان خدمت (دقیقه)	۱۰	۱۵	۲۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
درصد (p_s)	۵	۱۰	۲۰	۲۵	۲۰	۱۰	۱۰

معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه‌کنید

حل:

$$\frac{1}{\mu}=E(S)=32/25 \text{ دقیقه}$$

$$E(S^{2})=1186/25$$

$$\mathrm{Var}(S)=E(S^{2})-[E(S)]^{2}=146/1878 \qquad mm^{2}$$

$$\lambda=\frac{1}{45}$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{32/25}{45}$$

طبق رابطهٔ $(P-K)$

$$L_q=1/034$$

و

$$L=L_q+\rho=1/75$$

احتمالات حدی درمورد $M/G/1$

اگر π_n معرف وجود n مشتری در لحظهٔ خروج یك مشتری باشد، بـا توجه به‌اینکه سیستم

یکپارچه و همه حالتها برگشت‌پذیر مثبت بـا دورهٔ یك هستند، طبق قضیهٔ احتمالات حدی زنجیره‌ای مارکوف، خواهیم داشت:

$$\pi_n = q_n \pi_0 + \sum_{i=1}^{n+1} q_{(n-i+1)} \pi_i \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (۲۴.۸)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

پس از حل دستگاه‌معادلات فوق و با درنظر گرفتن $\pi_0 = 1 - \rho$، مقادیر π_n، $(n = 1, 2, \dots)$ به‌دست می‌آید. ضمناً می‌توان نشان داد که تبدیل z مقادیر π_n عبارت است از:

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\,Q(z)}{Q(z) - z} \qquad (۲۵.۸)$$

که $Q(z)$ تبدیل z کمیتهای q_n است؛ یعنی،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n \qquad (۲۶.۸)$$

بنابراین، پس ازمحاسبهٔ q_n، ابتدا $Q(z)$ وسپس $\pi(z)$ را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه از $\pi(z)$ مقادیر π_n، $(n = 0, 1, 2, \dots)$ به‌دست می‌آید.

توجه: بایـد توجه داشت کـه اگرچه ماتریس‌گذار زنجیرهٔ مـارکوف فقط برای زمانهای خروج مشتریها تعریف شده‌است، ودرنتیجه π_n و معیارهای ارزیـابی فقط برای همین لحظات به دست آمـده است، ثابت می‌شود کـه دراین مدل π_n و سایر معیارهـای ارزیابی برای لحظات دیگر نیزمعتبراست.

مثال ۲.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر S مدت‌زمان خدمت باشد، طبق رابطهٔ (۵.۸)

$$q_n = P(A = n) = \sum_s e^{-\lambda s} \frac{(\lambda S)^n}{n!} p_s$$

بنابراین، باتوجه به‌اینکه $\lambda = ۱/۴۵$ است

$$q_0 = ۰٫۵۰۷۵, \quad q_1 = ۰٫۳۲۵۶, \quad q_2 = ۰٫۱۲۳۶, \dots$$

ازطرف دیگر

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{۳۲٫۲۵}{۴۵} = ۰٫۲۸۳$$

با استفاده ازرابطه‌های (۲۴.۸)

$$\pi_0 = q_0\pi_0 + q_0\pi_1$$
$$\pi_1 = q_1\pi_0 + q_1\pi_1 + q_0\pi_2$$

در نتیجه

$$\pi_1 = 0/275, \quad \pi_2 = 0/184, \quad \pi_3 = 0/106$$

مثال ۳.۸ یک‌مدل $M/M/1$ را درنظر بگیرید. این‌مدل حالت‌خاصی از $M/G/1$ است، که تابع توزیع مدت‌زمان خدمت‌آن دارای توزیع‌نمایی است، یعنی،

$$b(t) = \mu e^{-\lambda t}$$

طبق رابطهٔ (۴.۸)

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\mu e^{-\mu x}dx = \frac{\mu}{n!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}dx$$

وطبق رابطهٔ (۲۶.۸)،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^\infty q_n z^n = \mu\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}(\lambda x)^n dx$$

$$= \mu\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda x z)^n}{n!}\, dx = \mu\int e^{-(\lambda+\mu)x}e^{\lambda z x}dx = \frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda z}$$

وطبق رابطهٔ (۲۵.۸)

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z)-z} = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

برطبق‌آنچه‌که‌درمورد تبدیل z گفته‌شد، تبدیل z مجموعهٔ ρ^n، $(n = 0, 1, 2)$ مساوی‌است با $1/1-\rho z$. در نتیجه،

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n \;, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

دورهٔ اشتغال و بیکاری درمدل $M/G/1$

دراین مدل نیزچون ورود مشتریها براساس فرایندپواسون است، مدت‌زمان بیکاری سیستم دارای توزیع‌نمایی (با پارامتر λ) است، لذا

$$E(I)=\frac{1}{\lambda} \tag{۲۷.۸}$$

ازطرف دیگر، دراین مدل نیز $\pi_0 = 1 - \rho$ است. بدین‌ترتیب، دررابطهٔ (۲۲.۵) پس از جایگزینی π_0 و $E(I)$ نتیجه می‌شود، که

$$E(b)=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{E(S)}{1-\lambda E(S)} \tag{۲۸.۸}$$

ومیانگین تعداد مشتریانی که دریك دورهٔ اشتغال به‌آنها خدمت ارائه می‌شود، برابراست با

$$E(N_b)=\mu\, E(b)=\frac{1}{1-\lambda E(S)} \tag{۲۹.۸}$$

نظم اولویت درمدل $M/G/1$

یك مدل $M/G/1$ را درنظر بگیرید، کـه N گروه مشتری با اولویتهای مختلف (و بدون حق انقطاع) داشته باشد. مدت‌زمان خدمت این‌گروهها با یکدیگرمتفاوت است. فرض کنید S_i مدت خدمت مشتری گروه i باشد. دراین صورت میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درگروه i ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید (گروه ۱ بالاترین اولویت را دارد)

$$W_{q_1}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2[1-\lambda_1 E(S_1)]} \tag{۳۰.۸}$$

$$W_{q_i}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2\left[1-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j E(S_j)\right]\left[1-\sum_{j=1}^{i}\lambda_j E(S_j)\right]} \tag{۳۱.۸}$$

باید توجه داشت که درحالت خاص $M/M/1$، که $E(S_i)=1/\mu_i$ و $E(S_i^2)=2/\mu_i^2$ است،ازرابطه‌های‌فوق‌نتایجی‌به‌دست‌می‌آیدکه قبلا برای $M/M/1$ ارائه شد.

روش اثبات رابطه‌های فوق یك مشتری گروه یك را، که بالاترین اولویت رادارد، درنظربگیرید. اگر در زمـان ورود اویك مشتری ازگروه پایینتر، درحال دریافت خدمت باشد، تا زمان خروج او این مشتری بایـد صبرکند و ازآن پس می‌توان تصورکردکه در سیستم فقط مشتری گروه ۱ وجود دارد. بنابراین، میانگین مدت‌زمان انتظار اوعبارت‌است ازمجموع‌زمان‌موردنیاز برای دریافت‌خدمت‌مشتریی که‌درزمان‌ورود اومشغول‌دریافت‌خدمت است به‌اضافهٔ مجموع‌زمان‌لازم برای‌خروج مشتریهای‌هم گروه‌خوداو.همین‌استدلال‌درمورد

همهٔ گروههای دیگر نیز صدق می‌کند (به‌مسئلهٔ شمارهٔ ۱۱ همین بخش مراجعه‌شود).

مثال ۴.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید دونوع مشتری به این سیستم مراجعه می‌کنند. مدت‌زمان خدمت، که درمثال ۱.۸ ارائه شده‌است، فقط مختص مشتریهای دارای اولویت بالاست، که ۳۰٪ کل مراجعین را تشکیل می‌دهند. مدت‌زمان دریافت خدمت هفتاد درصد مشتریها، که از اولویت پایینتری برخوردارند، ثابت و برابر با نیم‌ساعت‌است. میانگین مدت‌زمان انتظارهر گروه ازمشتریها را محاسبه کنید.

حل: دراین مدل داریم:

$$\lambda_1 = \frac{0/3}{45} \qquad \lambda_2 = \frac{0/7}{45}$$

$$E(S_1) = 32/25 \qquad E(S_1^2) = 1186/25$$

$$E(S_2) = 30 \qquad E(S_2^2) = 900$$

درنتیجه، ازرابطهٔ (۳۰.۸)

$$W_{q_1} = 13/95 \text{ دقیقه}$$

$$W_{q_2} = 43/83 \text{ دقیقه}$$

ومیانگین کل سیستم

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_{q_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_{q_2} = 34/77 \text{ دقیقه}$$

۲.۸ مدل $M/G/1$ با ورود گروهی

دراین مدل نیز، فرض می‌شود که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی، با پارامتر λ است؛ لیکن، هربار به‌جای یك مشتری،گروهی مشتری وارد می‌شوند. احتمال اینکه هرگروه از j مشتری تشکیل شده باشد را با p_j نشان می‌دهیم. بنابراین $\lambda_j = \lambda p_j$، معرف میانگین تعداد گروههای متشکل از J مشتری است،که درواحد زمان واردمی‌شوند. اگر N تعداد مشتریهای یك گروه باشد،

$$E(N) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, p_j$$

دراین مدل، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L_q=\frac{\rho^{۲}+[\lambda E(N)]^{۲}\,\mathrm{Var}\,(S)}{۲(۱-\rho)}+\frac{\rho\left[\frac{E(N^{۲})}{E(N)}-۱\right]}{۲(۱-\rho)} \qquad (۳۲.۸)$$

یادآوری می‌کنیم که دررابطهٔ فوق، آهنگ ورود مشتری $\lambda E(N)$ و

$$\rho=\frac{\lambda E(N)}{\mu}=\lambda E(N)\,E(S)$$

است. درحالت خاصی که تعداد مشتری درهر گروه، ۱ نفرباشد، جملهٔ دوم حذف می‌شود، زیرا، $E(N^{۲})=E(N)=۱$ است.

مثال ۵.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً درنظربگیرید، بااین تفاوت که زمان بین دو ورود گروهی به‌طور متوسط یک‌ساعت وربع وهرگروه بااحتمال ۵۰ درصد یک‌مشتری، بااحتمال ۲۵ درصد دومشتری وبا احتمال ۲۵ درصد سه‌مشتری دارد. میانگین طول صف را محاسبه کنید.

حل:

$$E(N)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}(۲)+\frac{۱}{۴}(۳)=\frac{۷}{۴}\ ,\ \lambda=\frac{۱}{۷۰}$$

$$E(N^{۲})=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}(۴)=\frac{۱}{۴}(۹)=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\rho=\lambda E(N)\,E(S)=۰٫۷۵۲۵$$

وطبق رابطهٔ (۳۲.۸)،

$$L_q=۳٫۰۴$$

۳.۸ مدل $M/G/m$

دراین مدل ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بـا آهنگ λ، مدت زمان خدمت متغیری تصادفی دلخواه با تابع چگالی $b(t)$ است و سیستم دارای m خدمت‌دهنده است.

درمدل $M/G/m$، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$L_q=\frac{r^{m-۱}[\lambda^{۲}\,\mathrm{Var}\,(S)+r^{۲}]}{۲(m-۱)!\,(m-r)^{۲}\left[\sum_{j=۰}^{m-۱}\frac{r^j}{j!}+\frac{r^m}{(m-۱)!\,(m\cdots r)}\right]} \qquad (۳۳.۸)$$

که $r=\lambda/\mu=\lambda E(S)$ است.

درحالت خاص، که $m=۱$ باشد، رابطهٔ فوق به‌رابطهٔ $(P-K)$ تبدیل می‌شود.

۴.۸ مدل $G/M/1$

دراین مدل، مدت‌زمـان خدمت دارای توزیع‌نمایـی فرض می‌شود. لیکن، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری تصادفی است، که می‌تواند هرنوع تابع توزیع دلخواهی را داشته باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با $a(t)$ بیان می‌کنیم. با توجه به تعریف آهنگ ورود مشتری (λ) و بـا درنظر گرفتن اینکه میانگین زمـان بین دو ورود متوالی برابر با $1/\lambda$ است، می‌توان λ را برحسب $a(t)$ به‌شرح زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^t t\,a(t)dt$$

درحالتی که‌زمان بین دوورود متوالی‌مشتریها متغیر تصادفی گسسته‌باشد وفقط مقادیرمشخص $t_1, t_2, \ldots$ را با احتمالات $P_1, P_2, \ldots$ انتخاب کند، λ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty} t_i\, p_i$$

بیان مدل $G/M/1$ برحسب زنجیرهٔ مارکوف

حالت سیستم را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$Y_n =$ تعداد مشتری درسیستم درلحظهٔ ورود مشتری nاُم

متغیرهـای تصادفی Y_n یك زنجیرهٔ مـارکوف تشکیل می‌دهند؛ زیرا X_{n+1}، فقط به X_n بستگی دارد. رابطهٔ زیر این موضوع را نشان می‌دهد

$$X_{n+1}=X_n+1-B \qquad (۳۴.۸)$$

که B معرف تعداد مشتریهایی است که‌درفاصلهٔ زمانی بین دوورود متوالی مشتریها خدمت دریافت‌می‌کنند. برای بیان ماتریس‌گذاراین زنجیرهٔ مارکوف، ابتدا مقادیر b_i رابه‌ازای $i=0, 1, 2, \ldots$ وبه‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$$b_i=P[B=i] \qquad (۳۵.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & \cdots \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 1-\sum_{i=1}^{n} b_i & b_n & b_{n-1} & \cdots \end{bmatrix} \qquad (۳۶.۸)$$

برای روشن شدن اینکه ماتریس گذار فوق چگونه به‌دست‌آمده است، چندعنصر آن را به‌شرح زیرمحاسبه می‌کنیم. دراین محاسبات ازرابطهٔ (۳۴.۸) استفاده می‌شود.

$$p_{01}=P[X_{n+1}=1|X_n=0]=P[B=0]=b_0$$

$$p_{02}=P[X_{n+1}=2|X_n=0]=P[B=-1]=0$$

$$p_{00}=P[X_{n+1}=0|X_n=0]=P[B\geqslant 1]=1-b_0$$

رابطهٔ آخر، مربوط به محاسبهٔ P_{00} (وهمچنین سایر مقادیر P_{i0}) بامحاسبهٔ عناصردیگر ماتریس متفاوت است. دررابطهٔ فوق، فرض می‌شودکه درلحظهٔورود یك مشتری مشخص، سیستم خالی باشد. بنابراین، بلافاصله خدمت به‌او شروع می‌شود. احتمال اینکه درلحظهٔ ورود مشتری بعدی سیستم بازهم خالی باشد، این است‌که ارائهٔ خدمت به‌مشتری موردنظر تمام شده باشد؛ لیکن، باید توجه داشت‌که بعد از رفتن این مشتری وقبل ازورود مشتری بعدی خدمت‌دهنده مدتی بیکارمی‌ماند. بنابراین، اگرچه دراین فاصله فقط به‌یك مشتری خدمت ارائه شده است، امکان ارائه خدمت به‌بیش ازیك مشتری وجود داشته است. به‌این ترتیب، P_{00} معادل است با اینکه در فاصلهٔ بین دو ورود متوالی مشتریها حداقل به‌یك مشتری خدمت داده شود.

برای به‌دست‌آوردن مقادیر b_i ازرابطهٔ زیراستفاده می‌شود:

$$b_i=\int_0^\infty e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^i}{i!}a(t)\,dt \qquad (۳۷.۸)$$

احتمالات حدی درمدل $G/M/1$

درزنجیرهٔ مارکوفی که تشریح شد، تعداد مشتریهای داخل سیستم درلحظهٔ ورود را حالت سیستم تعریف‌کردیم. باتوجه به‌اینکه زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیرتصادفی بدون حافظه نیست، احتمالات مربوط به‌تعداد مشتریها درسیستم درلحظات مختلف متفاوت است. اگر π_i، طبق معمول معرف بودن i مشتری درسیستم دریك لحظه‌دلخواه و P_i معرف احتمال بودن i مشتری درسیستم، درلحظهٔ یك ورود باشد، P_i و π_i لزوماً یکی نیستند. در زنجیرهٔ مارکوف موردبحث، فقط امکان به‌دست‌آوردن احتمالات حدی P_i وجود دارد. بنابراین، ابتدا معیارهای ارزیابی را فقط برای لحظه‌های ورود حساب می‌کنیم وآن‌گاه به‌معیارهای ارزیابی درحالت‌کلی می‌پردازیم.

باتوجه به‌اینکه این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه وتمام حالتهای آن برگشت‌پذیرمثبت و نادوره‌ای هستند، با استفاده ازقضیهٔ احتمالات‌حدی، معادلات تعادلی درمدل $G/M/1$ به‌شرح زیرخواهد بود.

$$P_0=\sum_{i=0}^{\infty} P_i\left[1-\sum_{k=0}^{i} b_k\right] \qquad (۳۸.۸)$$

$$P_n=\sum_{i=n-1}^{\infty} P_i\, b_{i-n+1}, \quad n=1, 2, \ldots \qquad (۳۹.۸)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n=1 \qquad (۴۰.۸)$$

همان طور کـه درمبحث زنجیره‌هـای مارکوف گفتیم، یکی ازمعادلات فوق زائد محسوب می‌شود ولذا برای حل این دستگاه نیازی به‌معادلهٔ شمارهٔ (۳۸.۸) نیست.

مثال ۶.۸ یك‌مدل $G/M/1$ را درنظر بگیرید، که درآن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت وبرابر با ۱۵ دقیقه ومدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. این مدل از نوع $D/M/1$ است، کـه درآن $\lambda=4$ و $\mu=6$ و $\rho=2/3$ است. این مدل را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

حل: ابتدا مقادیر b_n را به‌ازای $n=0, 1, 2, \ldots$ وبا توجه به‌ثابت‌بودن زمان بین دو ورود محاسبه‌می کنیم.

$$b_n=P(B=n)=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!}=\frac{e^{-1/5}(1/5)^n}{n!} \qquad (۴۱.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این مدل به‌شرح زیرخواهد بود:

$$p_{i,j}=\begin{cases} P[B=i+1-j]=e^{-1/5}\dfrac{(1/5)^{i+1-j}}{(i-j+1)!} & , \quad 1\leqslant j\leqslant i+1 \\ 1-\sum_{k=0}^{i} P(B=k) & , \quad j=0 \\ 0 & , \quad i+2\leqslant j \end{cases}$$

برای نمونه

$$p_{01}=P[B=0]=e^{-1/5}$$

$$p_{52}=P[B=4]=e^{-1/5}\frac{(1/5)^4}{4!}=0/047$$

$$p_{20}=1-b_0-b_1-b_2=1-e^{-1/5}\left[1+1/5+\frac{(1/5)^2}{2}\right]=0/191$$

قضیهٔ ۲۰۸ پس از حل دستگاه معادلات (۳۹۰۸) و (۴۰۰۸)، احتمالات حدی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$P_n=(1-x_0)x_0^n \quad , \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (۴۲۰۸)$$

که x^0 عددی بین صفر ویك وجواب معادلهٔ مشخصهٔ زیر است.

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n \qquad (۴۳۰۸)$$

اثبات: به‌فرض‌اینکه معادلهٔ (۴۳۰۸) جوابی بین صفر و یك داشته باشد، باجایگزینی P_n ازرابطهٔ (۴۲۰۸) در رابطهٔ (۳۸۰۸)، صحت این قضیه نشان داده می‌شود.

مثال ۷۰۸ احتمالات حدی را درمثال ۶۰۸ به‌دست‌آورید.

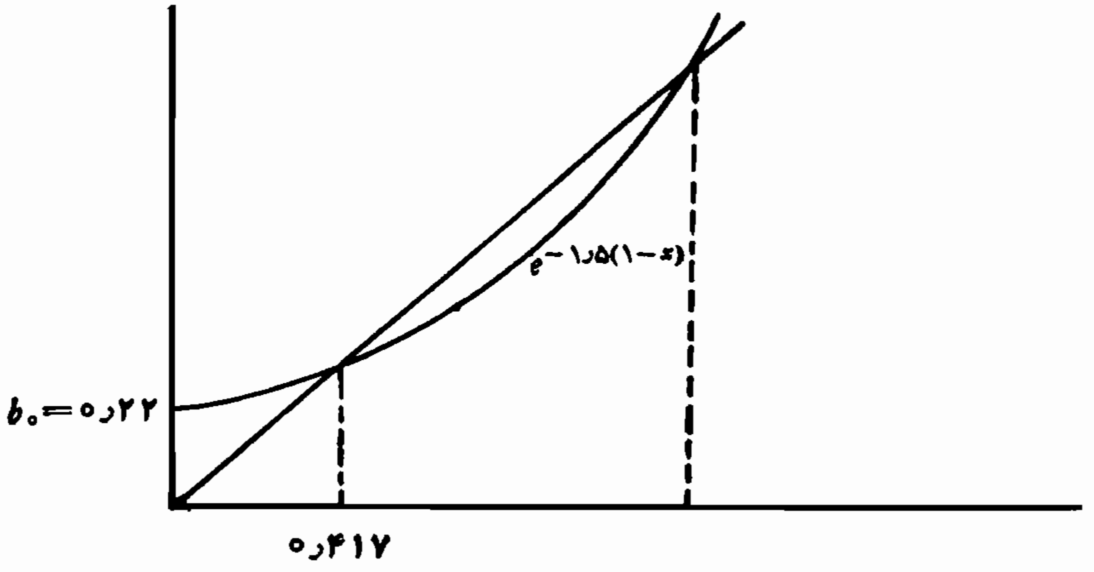
حل: برای حل معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳۰۸) از رابطهٔ (۴۱۰۸) استفاده می‌شود. درنتیجه

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}x^n e^{-1/5}\frac{(1/5)^n}{n!}=e^{-1/5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/5x)^n}{n!}$$

یا

$$x=e^{-1/5(1-x)}$$

برای حل این معادلـهٔ مشخصه از روش تـرسیمی استفاده مـی‌شود. ازیك طرف، معادلهٔ $y_1=e^{-1/5(1-x)}$ و از طرف دیگر تابع $y_2=x$، که نیمساز محورهای مختصات است، رسم می‌شود. محل تلاقی آنها به‌ازای $x_0=0/417$، جواب موردنظر درمعادلهٔ مشخصه است. درنتیجه



شکل ۱۰۸ روش ترسیمی برای حل معادلهٔ مشخصهٔ مثال ۷۰۸

$$P_0=(1-x_0)=0/583$$

$$P_n=(0/583)(0/417)^n$$

قضیهٔ ۳.۸ معادلهٔ مشخصهٔ (۴۲.۸) معادل رابطهٔ زیر است:

$$x=\int_0^\infty e^{-\mu t(1-x)}\,a(t)dt \tag{۴۴.۸}$$

واگر زمان بین دوورود مشتریها متغیر تصادفی گسسته باشد، معادلهٔ مشخصه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x=\sum_t e^{\mu t(1-x)}.\,P(T=t) \tag{۴۵.۸}$$

که T، معرف زمان بین دو ورود مشتریهاست، که مقادیر گسستهٔ t را انتخاب می‌کند.

اثبات: اگر درمعادلهٔمشخصه(۴۳.۸)، به‌جای b_nمقدار آن‌ازرابطهٔ(۳۷.۷) جایگزین شود،

$$x=\sum_{n=0}^\infty x^n\int_0^\infty e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!}\,a(t)dt=\int_0^\infty e^{-\mu t}a(t)\sum_{n=0}^\infty\frac{(\mu tx)^n}{n!}\,dt$$

چون رابطهٔ $\sum\frac{(\mu tx)^n}{n!}=e^{\mu tx}$ برقرار است. لذا پس‌از جایگزینی وانتگرالگیری، رابطهٔ (۴۵.۸) به‌دست می‌آید. رابطهٔ (۴۵.۸) نیز با روشی مشابه ثابت می‌شود

مثال ۸.۸ معادلهٔ مشخصهٔ مثال (۶.۸) را با استفاده ازقضیهٔ فوق به‌دست آورید.

حل: چون زمـــان بین دو ورود ثابت است، ازرابطهٔ (۴۵.۸) استفاده می‌شود. در این مدل،

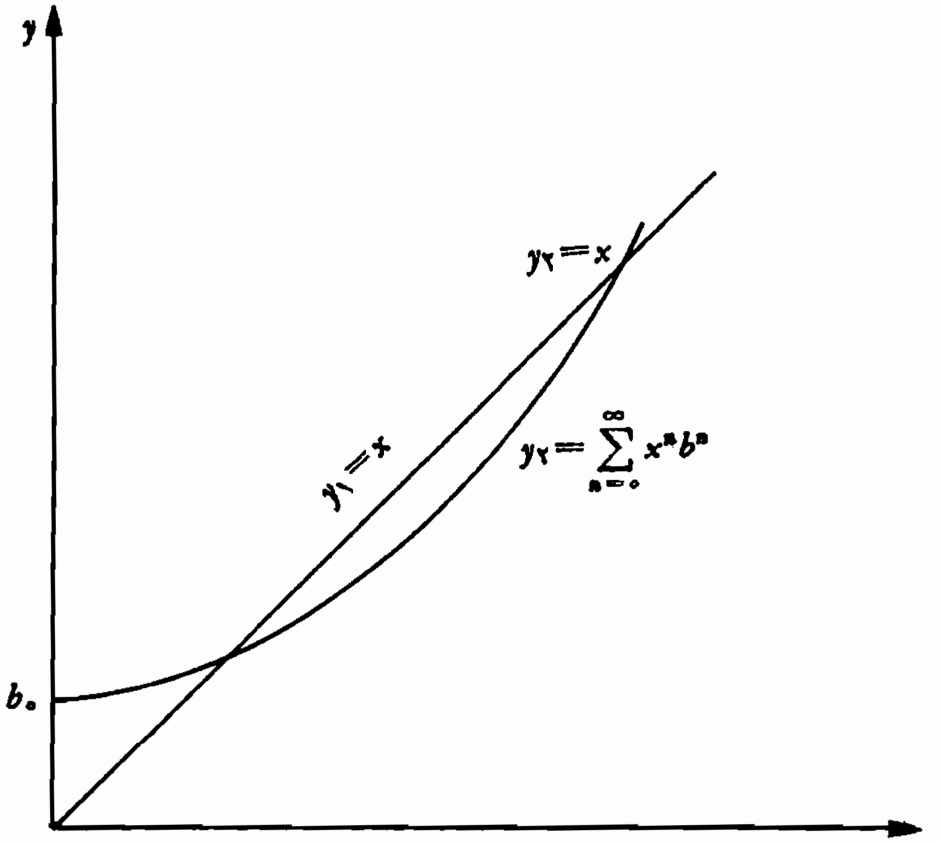
$$P\left(T=\frac{1}{4}\right)=1$$

و درنتیجه

$$x=e^{-1/5(1-x)}$$

قضیهٔ ۴.۸ درمدل $G/M/1$، اگر $\rho<1$ باشد، معادلهٔمشخصهٔ (۴۳.۸) فقط دارای یك جواب x_0 بین صفر و یك خواهد بود واگـــر $\rho\geqslant 1$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ مذکور در فاصلهٔ صفر تا یك هیچ جوابی نخواهد داشت.

اثبات: برای به دست آوردن جواب معادلهٔ مشخصه، دوطرف آن را جـــداگانه بر یك دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم. تابع $y_1=\sum_{n=0}^\infty x^n b_n$ محور y هـــا را در نقطهٔ b_0 قطع می‌کند. این تابع به‌ازای تمام مقادیر $x\geqslant 0$ افزاینده ومحدب است، زیرا مشتقهای اول و دوم آن مقادیری مثبت است. بنابراین، این تابع و تابع $x=y_2$ حداکثر



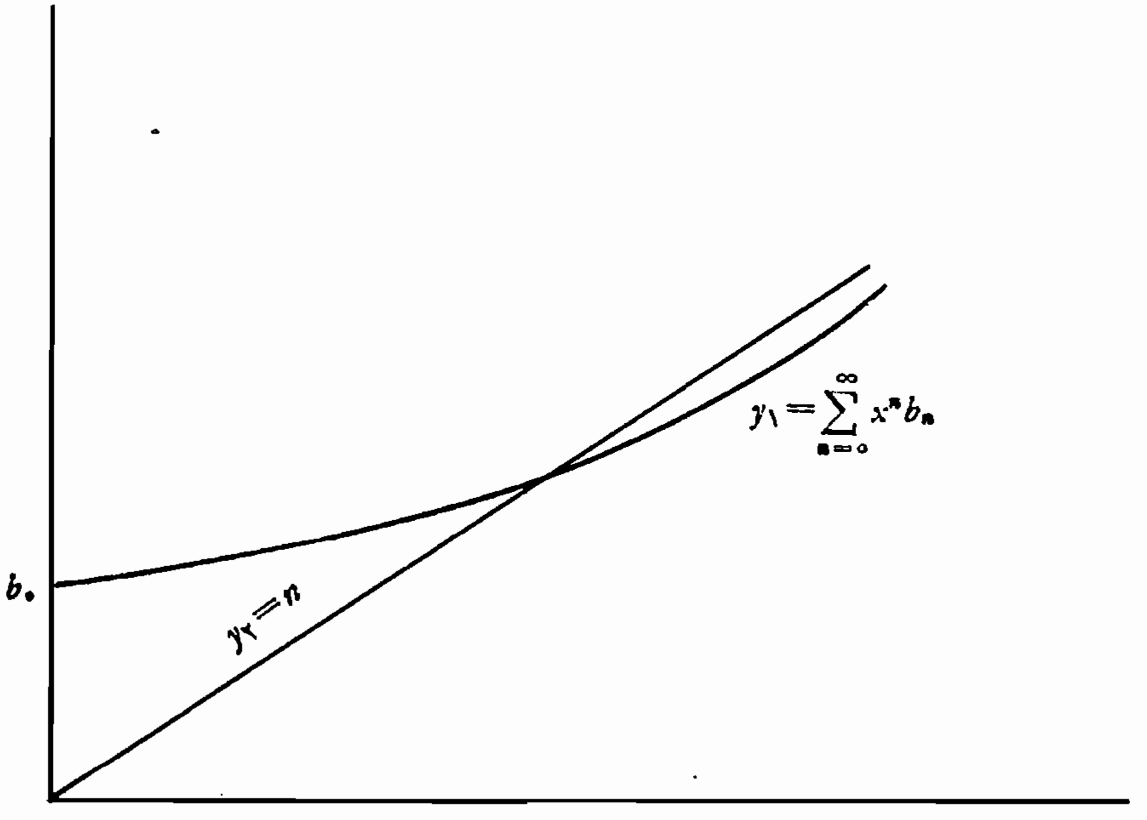
شکل ۲۰۸ روش ترسیمی حل معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$

دردو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. از طرف دیگر، بـه‌سادگی معلوم می‌شود، که یکی از نقاط تقاطع این دوتابع‌همواره درنقطهٔ $x=1$ اتفاق‌می‌افتد. بنابراین، این‌دوتابع حداکثر در یك نقطهٔ دیگر بـا یکدیگر تلاقی دارند. دراین مورد، دوحالت اتفاق می‌افتد. درحالت اول، که درشکل ۲۰۸ نشان داده شده است، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x=1$ بزرگتر ازیك است، که دراین‌صورت، دریك نقطه درفاصلهٔ صفر تایك، این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند. درحالت دوم، که درشکل ۳۰۸ نشان داده شده‌است، دومنحنی درفاصلهٔ صفر تایك‌یکدیگررا قطع نمی‌کنند، زیرا، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x=1$ حداکثر برابر با یك است.

ازطرف دیگر، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x=1$ برابراست با:

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=1}=\left.\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} b_n\right|_{x=1}=\sum_{n=0}^{\infty} n b_n$$

همان‌طورکـه مشاهده می‌شود، عبارت سمت راست معرف میانگین تعداد خدمتهایی است که درفاصلهٔ بین دو ورود ارائـه می‌شود واین مقدار برابراست بـا μ/λ، زیرا میانگین تعداد موارد خدمت درواحد زمان μ ومیانگین مدت‌زمان بین دو ورود $1/\lambda$ است. بدین‌ترتیب، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x=1$، برابر با $1/\rho$ است. و همان‌طورکه گفتیم،



شکل ۳.۸ معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$، در حالتی‌که $\rho \geqslant 1$ باشد.

اگر مانند شکل ۲.۸، ضریب زاویـه، بزرگتر از یك یا $\rho > 1$ باشد، معادلهٔ مشخصه، یك جواب بین صفر ویك دارد؛ درغیر این صورت، دراین فاصله جوابی برای معادلهٔ مشخصه وجود نخواهد داشت.

مثال ۹.۸ احتمالات حدی مـدل $M/M/1$ را با استفاده از نتایج مدل $G/M/1$ به‌دست‌آورید.

حل: با استفاده ازرابطهٔ (۴۴.۸) وبا درنظرگرفتن اینکه $a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ است،

$$x=\int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-x)}\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\mu x}$$

یا

$$\mu x^2-(\lambda+\mu)x+\lambda=0$$

ریشه‌های این‌معادله عبارت‌اند از:

$$x=\rho \text{ و } 1$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، یکی از ریشه‌ها همواره یك است. دراین مدل، اگر $\rho<1$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله $x_0=\rho$، عـددی بین صفر و یك است. اگر $\rho \geqslant 1$ باشد، سیستم

ناپایدار است. درحالت پایدار، احتمالات حدی برابر است با:

$$\pi_n = (1 - x_0)x_0^n = (1-\rho)\rho^n$$

که با نتایج قبلی که درمدل $M/M/1$ به‌دست آمد، تطبیق می‌کند.

معیارهای ارزیابی در مدل $G/M/1$

تااینجا نحوهٔ محاسبهٔ احتمالات حدی و به‌تبع آن معیارهای ارزیابی سیستم درلحظهٔ ورود به‌دست آمد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی درکل سیستم به‌شرح زیرعمل می‌کنند.

نحوهٔ محاسبهٔ W و W_q

یك مشتری را درنظر بگیرید. مدت زمان انتظار این مشتری درصف بستگی به‌تعداد مشتریهایی دارد که درلحظهٔ ورود این مشتری درسیستم هستند. بنابراین، برای محاسبهٔ این معیار ازرابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$W_q = E(T_q) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T_q | N = n)P_n$$

اگر درلحظهٔ ورود این مشتری، تعداد مشتریهایی که در سیستم هستند، برابر با n باشد، مدت‌زمان انتظار او درصف برابر با مجموع مدت‌زمان خدمت همهٔ مشتریهای قبل‌از اوست. ازطرفی، میانگین مدت‌زمان خدمت هرمشتری برابر با $1/\mu$ است. لذا،

$$E(T_q | N = n) = \frac{n}{\mu}$$

درنتیجه

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} \cdot (1 - x_0)x_0^n = \frac{(1-x_0)x_0}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n x_0^{n-1}$$

با استفاده ازنتیجهٔ سری $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1/(1-x_0)^2$، خواهیم‌داشت:

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1-x_0)} \tag{۴۶.۸}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-x_0)} \tag{۴۷.۸}$$

وبا استفاده ازاستنتاج لیتل

$$L=\lambda W=\frac{\rho}{1-x_0} \qquad (۴۸.۸)$$

$$L_q=\frac{\rho \cdot x_0}{1-x_0} \qquad (۴۹.۸)$$

ازطرف دیگر، دراین مدل نیزشبیه سایرمدلهایی که یك خدمت‌دهنده دارند،

$$\pi_0=1-\rho$$

ومی‌توان نشان داد که

$$\pi_n=\rho(1-x_0)x_0^{n-1}\ , \qquad n\geqslant 1 \qquad (۵۰.۸)$$

مثال ۱۰.۸ معیارهای ارزیابی مدل $M/M/1$ را با استفاده ازمدل $G/M/1$ به‌دست آورید.

حل: طبق نتیجهٔ مثال (۹.۸)، در مدل $M/M/1$، ریشهٔ معادلهٔ مشخصه، $x_0=\rho$ است (به‌شرط اینکه $\rho<1$ باشد). درنتیجه

$$\pi_n=(1-\rho)\rho^n$$

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

مثال ۱۱.۸ دریك مدل $G/M/1$، که مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۸۰ دقیقه است، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری گسسته است، که مقدار آن ۸ یا ۱۰ یا ۱۲ یا ۱۴ دقیقه با احتمالات، به ترتیب ۴ر۰، ۳ر۰، ۲ر۰ و ۱ر۰ است. معیارهای ارزیابی این مدل را محاسبه کنید.

حل: دراین مدل، میانگین مدت‌زمان بین دو ورود برابر است با،

$$\frac{1}{\lambda}=(8)(0.4)+(10)(0.3)+(12)(0.3)+(14)(0.1)=10 \text{ دقیقه}$$

بنابراین، $\lambda = ۱/۱۰$ و $\mu = ۱/۸$ و $\rho = ۰٫۸$ است.

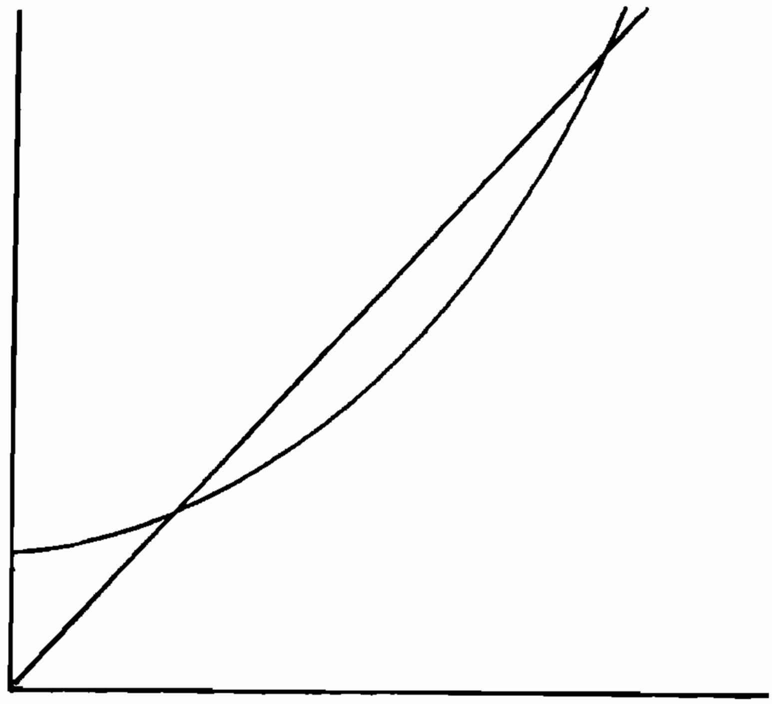
معادلهٔ مشخصهٔ این مدل، طبق رابطهٔ (۴۵.۸) به‌صورت رابطهٔ زیر درمی‌آید:

$$x = ۰٫۴\, e^{-(۱-x)} + ۰٫۳ e^{-۱٫۲۵(۱-x)} + ۰٫۲ e^{-۱٫۵(۱-x)} + ۰٫۱ e^{-۱٫۷۵(۱-x)}$$

چون $\rho < ۱$ است، طبق قضیهٔ (۳.۸) معادلهٔ مشخصهٔ فوق دارای یك جواب x_0 است، كه مقدارآن عددی بین صفر ویك است. برای محاسبهٔ x_0، جدول زیر را تهیه می‌کنیم:

x	مقدارسمت راست معادلهٔ مشخصه
۰	۰٫۲۹۵
۰٫۲	۰٫۳۷۵
۰٫۴	۰٫۴۷۷
۰٫۶	۰٫۶۰۹
۰٫۸	۰٫۷۸
۱	۱

درشکل ۴.۸، دو طرف معادلـهٔ مشخصه بـا استفاده ازنتایج جدول فوق رسم شده است. جواب حاصل $x_0 = ۰٫۶۴$ است.



شکل ۴.۸ روش ترسیمی برای حل مثال ۱۱.۸

در نتیجه،

$$\pi_0 = 1 - \rho = 0/2$$

$$\pi_n = \rho(1 - x_0)x_0^{n-1} = 0/288(0/64)^{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

$$W = \frac{1}{\mu(1 - x_0)} = 22/22 \text{ دقیقه}$$

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1 - x_0)} = 14/22 \text{ دقیقه}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - x_0} = 2/22$$

$$L_q = \frac{\rho x_0}{1 - x_0} = 1/42$$

می‌توان L را ازرابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = 0/288 \sum_{n=1}^{\infty} n\, 0/64^{n-1} = \frac{0/288}{(1 - 0/64)^2} = 2/22$$

مسائل

۱. به‌بخش تزریقات یك درمانگاه، که فقط یك مأمور دارد، هر ساعت به‌طور متوسط ۱۰ نفر مریض مراجعه‌می‌کنند. ورود این مریضها طبق فرایند پواسون است. مدت‌زمان تزریق، متغیر تصادفی یکنواخت و بین سه تا ۶ دقیقه است. به‌طور متوسط درهر لحظه چند نفر مریض دراین بخش هستند؟ به‌طورمتوسط یك مریض چه مدت دراین درمانگاه وقت صرف می‌کند؟

۲. درمسئلهٔ ۱، اگر مدت‌زمان انجام تزریقات ثابت و برابر با ۴٫۵ باشد، به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظربگیرید. فرض‌کنیدکه‌مریضها برای دریافت یکی ازچهارنوع خدمت مراجعه‌می‌کنند. مدت‌زمان ارائهٔ هرخدمت ثابت وطبق جدول زیراست. به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

نوع خدمت	مدت‌زمان (دقیقه)	درصد مشتریهای متقاضی این نوع خدمت
۱	۳	۲۰
۲	۴	۳۰
۳	۵	۳۰
۴	۶	۲۰

۴. درمسائل ۱ و ۳، واریانس تعداد بیماران درمانگاه را محاسبه کنید.

۵. دریك مرکز کنترل کیفیت، تعداد قطعاتی‌که برای‌بازرسی می‌رسند، طبق فرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ۱۲ دقیقه یك قطعه). مدت زمان بازرسی، متغیر تصادفی و نرمال‌با میانگین ۸ دقیقه و واریانس ۳۲ (دقیقه) است. چنانچه به‌جای بازرس فعلی یك ماشین اتوماتیك‌قراردهیم، مدت‌زمان‌بازرسی‌قطعی (غیراحتمالی) خواهدشد. مدت‌زمان بازرسی توسط‌این ماشین‌بایدچقدر باشد‌تامیانگین‌تعداد قطعاتی که‌درمرکز کنترل کیفیت‌هستند، تغییر نکند؟

۶. دریك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون با پارامتر ۱۰ مشتری در ساعت وارد می‌شوند، مدت‌زمان خدمت، طبق توزیع یکنواخت، بین ۳ تا ۵ دقیقه است.

الف. احتمال خالی‌بودن سیستم چیست؟

ب. میانگین مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم چیست؟

ج. اگرمدت‌زمان خدمت ثابت باشد، مقدار آن چقدربایدباشد تاجواب‌بند ب تغییری‌نکند

۷. دریك سیستم صف، ورود مشتریها براساس فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۹مشتری است. نتایج زمان‌سنجی درمورد مدت زمان خدمت (برحسب دقیقه) به‌شرح زیر است.

۸٫۳، ۵٫۹، ۱٫۸، ۶٫۳، ۲٫۵، ۱۰٫۲، ۷٫۸، ۵٫۵، ۴٫۲، ۷٫۱، ۶٫۲، ۳٫۹، ۴٫۲، ۷٫۳، ۷٫۲، ۹٫۵، ۴٫۸، ۵٫۲، ۶، ۵٫۵، ۴٫۸، ۳٫۵، ۸٫۴، ۱۰٫۳، ۶٫۱، ۴٫۸، ۵، ۲٫۹، ۵٫۱، ۴٫۵

معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه کنید.

۸. به یك سیستم صف، هرساعت به‌طورمتوسطده مشتری طبق فرایند پواسون واردمی‌شوند. این‌سیستم‌فقط‌یك خدمت‌دهنده دارد، لیکن مشتریها متقاضی‌دونوع‌خدمت هستند ۸۰درصد مشتریها متقاضی خدمت نوع ۱ و۲۰ درصد بقیه متقاضی خدمت نوع دوهستند. مدت‌زمان هردو خدمت، نمایی با میانگینهای به‌ترتیب ۲ و ۴ دقیقه است.

الف. میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت را در کل سیستم تعیین کنید

ب. میانگین طول صف را محاسبه کنید.

ج. چنانچه ظرفیت صف حداکثر سه‌باشد، نمودار آهنگ‌را رسم کنید. دراین‌حالت احتمال اینکه از ورود یك مشتری جلوگیری شود، چیست؟
د. دربند «ج»، احتمال اینکه یك مشتری که وارد سیستم شده است، بتواند بلافاصله خدمت دریافت کند، چیست؟

۹. به یك ایستگاه تولید، هر ۵ر۸ دقیقه یك‌بـار، قطعه‌ای می‌رسد. این مـدت زمان قطعی (غیراحتمالی) است. مدت‌زمان کار روی هرقطعه دراین ایستگاه، نمایی با میانگین ۶دقیقه است. میانگین تعداد قطعات دراین ایستگاه در دوحالت زیرچقدر است؟
الف. لحظهٔ ورود یك قطعهٔ جدید
ب. دریك لحظهٔ مشخص

۱۰. یك مدل $M/G/۱/۴$، که آهنگ ورود مشتریها به آن‌درهرساعت برابر ۳ است، را درنظر بگیرید. مدت‌زمان خدمت، ثابت وبرابر با ۱۵دقیقه است. این مدل را به‌یك زنجیرهٔ مارکوف (گسسته) تبدیل و ماتریس‌گذار آن‌را بنویسید. احتمالات حدی این ماتریس را به‌دست‌آورید. این احتمالات حدی را بااحتمالات حدی مدل $M/G/۱$، با همان‌آهنگ ورود وآهنگ خدمت مقایسه‌کنید.

۱۱. یك لحظهٔ‌مشخص را درنظربگیرید، که یك مشتری واردیك سیستم $M/G/۱$ می‌شود. نشان دهید که میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تـا اولین مشتری خارج شود، برابربا $\lambda/۲E(S^۲)$ است، که درآن λ آهنگ ورود مشتری و s مدت‌زمان خدمت است.

۱۲. مسئلهٔ ۳۴ فصل هفتم را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت در ایستگاه ۷، متغیر تصادفی باتوزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۵ر۳ و ۵ر۰) است.

۱۳. در مسئلهٔ ۹ احتمال اینکه موقع خارج‌شدن یك قطعه ازسیستم، دوقطعهٔ دیگرهم درآن ایستگاه باشد، چیست؟ احتمال اینکه موقع واردشدن یك قطعه به سیستم، دوقطعهٔ دیگر هم درآن ایستگاه باشد، چیست؟

۱۴. مسئلهٔ ۵ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت مشتریهای گروه ۱، ثابت(۶ دقیقه) و زمان خدمت مشتریهای گروه ۲ متغیرتصادفی باتوزیع نرمال (با میانگین ۶ دقیقه وواریانس ۲۰) است.

۱۵. مسئلهٔ ۶ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید؛ با این تفاوت که مدت‌زمان بازرسی چمدانها دارای توزیع یکنواخت درفاصلهٔ ۲ تا ۴ دقیقه است.

۱۶. مسائل ۱ و۳ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت کـه تعداد مسئولین تزریقات به‌جای یکی دونفر باشد.

۱۷. یك مدل $M/G/\infty$ را درنظر بگیرید. تابع توزیع مدت‌زمان خدمت، $B(t)$ فرض

می‌شود. یك لحظهٔ مشخص مانند s را درنظر بگیرید. ثابت کنید:
الف. احتمال اینکه یکی ازمشتریهایی که قبل از لحظهٔ s وارد سیستم شده است، هنوز آن‌را ترك نکرده باشد، برابراست.

$$p=\frac{1}{s}\int_{0}^{s}B(s-x)dx$$

ب. احتمال اینکه درلحظهٔ s تعداد n مشتری درسیستم باشد، برابراست،

$$e^{-\lambda ps}\frac{(\lambda ps)^{n}}{n!}$$

که درآن λ آهنگ ورود مشتری است.

۹

بهینه‌سازی سیستمهای صف

۱.۹ ظرفیت بهینه و هزینه‌های یك سیستم صف

هدف از بهینه‌سازی درسیستمهای‌صف، تعیین ظرفیت آنهاست، به‌طوری‌که نه باعث اتلاف بیش ازحد وقت مشتریها شود ونه اینکه ظرفیت سیستم آن قدرزیاد انتخاب شودکه از سرمایه‌گذاری انجام شده و هزینه‌های عملیاتی مربوط به‌ارائهٔ خدمت استفادهٔ کامل به‌عمل نیاید. به‌عبارت دیگر، ظرفیت بهینهٔ سیستم ظرفیتی است که‌مجموع هزینه‌ها را حداقل کند. دریك سیستم، هزینه‌ها را به‌طورکلی می‌توان به‌دو گروه تقسیم کرد.

الف. هزینهٔ خدمت‌دهی. درهر سیستم، کاهش طول صف و زمان انتظار مشتری از طریق افزایش ظرفیت ارائهٔ خدمت آن امکانپذیر می‌شود . این‌کار مستلزم تقبل هزینه‌هایی است‌که صرف‌خرید ونصب تجهیزات جدید ویا صرف استخدام افراد اضافی برای ارائهٔ خدمت‌می‌گردد. مثلا، برای افزایش ظرفیت تخلیهٔ یك‌بندر، اسکلهٔ جدیدساخته وتجهیزات لازم نظیر جرثقیلها اضافه شود و همزمان با آن به‌استخدام وآموزش افراد جدید اقدام گردد،که همهٔ این امور مستلزم هزینه‌های اضافی است. بنابراین، گسترش ظرفیت توأم با افزایش هزینهٔ بهره‌برداری، نگهداری، استهلاك وخسارت ناشی از رکود سرمایه‌است.

ب. هزینهٔ اتلاف وقت درصف. وقت مشتری از نظراقتصادی ـ اجتماعی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. در سیستمهای مختلف و بسته به‌نوع مشتریها این ارزشها متفاوت است. برای نمونه، اتلاف ناشی از هرساعت انتظارکشتی درلنگرگاه

برای تخلیه یا بارگیری، هزینهٔ گزافی است که به‌صورت خسارت پرداخت می‌شود. عدم استفاده ازماشینی کـه در کارخانه خراب شده ومنتظر تعمیراست، باعث کاهش میزان تولید خواهد شد. علاوه براینهـا، در سیستمهای تجارتی، درانتظار گذاشتن بیش ازحد مشتری باعث ازدست دادن او وهمچنین ازدست‌دادن سودهای محتمل خواهد شد. دربیمارستان، اتلاف وقت مشتری (مریض) درصف ممکن است به‌قیمت جانش تمام شود.

بدیهی است که دونوع هزینهٔ فوق بـا یکدیگر هم جهت نیستند وافزایش یکی باعث کاهش دیگری می‌شود. بهینه‌سازی سیستم صف بـه‌معنای تعیین ظرفیت آن است، به‌طوری که مجموع هردونوع هزینه حداقل شود. بدیهی است کـه چون عوامل تعیین‌کنندهٔ هزینه ماهیت تصادفی دارند، تنها می‌توان میانگین هزینه‌ها را محاسبه وحداقل کرد.

همان‌طورکه درفصلهای قبل مشاهده شد، تعیین ظرفیت سیستم خارج ازمقولهٔ تئوری صف است. درعمل ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌این‌ترتیب تعیین می‌شودکه، به‌فرض معلوم بودن پارامترهای آن، معیارهـای ارزیـابی (طول صف، زمـان انتظار، ضریب بهره‌وری و...) مشخص و بـراساس آنها، دونوع هزینهٔ فـوق را محاسبه می‌کنند. آن‌گاه، تأثیر تغییرات پارامترها برمعیارهای ارزیابی ودرنتیجه بـرهزینه‌های کل سیستم مجدداً بررسی می‌شود. تغییر پارامترها تا آنجا ادامه پیدا می‌کند، که بالاخره جوابی که هزینه‌ها را حداقل کند به‌دست آید.

۲.۹ تابع هزینه

هزینه‌های یك سیستم صف به‌طورکلی بستگی بـه نوع و ماهیت آن دارد. دراین بخش، بعضی ازانواع هزینه‌را، که درسیستمهای مختلف وجود دارد، تشریح می‌کنیم. مواردخاصی نیز وجود داردکه باید جداگانه آنها را بررسی کرد.

عمده‌ترین هزینه‌ها درسیستم صف عبارت‌اند از:

الف. هزینهٔ نگهداری یك خدمت‌دهندهٔ بیکار درواحد زمان (C_1). چـون میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی که مشغول ارائـهٔ خدمت هستند، برابربا $(L-L_q)$ است، میانگین کل هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندگان بیکار برابربا $C_1(m-L+L_q)$ است، که در آن m معرف تعداد خدمت‌دهندگان است.

ب. هزینهٔ عملیاتی مربوط به‌یك خدمت‌دهنده که مشغول ارائهٔ خدمت است (C_2). میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی کـه مشغول ارائهٔ خدمت هستند، طبق‌آنچه کـه دربند الف گفتیم برابربا $(L-L_q)$ است و درنتیجه مقدارکل این نوع هزینه برابربا $C_2(L-L_q)$ است.

دربعضی ازسیستمها ممکن‌است C_1 با C_2 برابرباشد، اما لزوماً همیشه چنین نیست.

هزینهٔ سرمایه‌گذاری روی یك خدمت دهنده یا ایجاد فضای سیستم در واحد زمان (C_3). این هزینه شامل هزینهٔ استهلاك و بازگشت سرمایهٔ مصرف‌شده جهت تهیهٔ تجهیزات

وامکانات لازم برای ارائهٔ خدمت است. کل این هزینه‌ها درواحد زمان C_3m است. (اگر C_3 مربوط به هزینهٔ ایجاد فضایی اضافی در سیستم باشد، کل هزینه به صورت C_3K بیان می‌شود)

د. هزینهٔ ازدست‌دادن‌مشتری (C_4). این هزینه را سیستم موقعی متحمل می‌شود که به‌دلیل تکمیل ظرفیت یا اتخاذ سیاستهای دیگر ازورود یك مشتری جلوگیری به‌عمل آید، یا اینکه خود مشتری به‌علت تراکم ازورود به‌سیستم منصرف شود. اگر λ آهنگ مراجعهٔ مشتریهاو $\bar{\lambda}$ آهنگ ورود آنها به‌سیستم باشد، کل خسارتی که سیستم بابت ازدست‌دادن مشتری درواحد زمان متحمل می‌شود، برابر با $C_4(\lambda-\bar{\lambda})$ است.

ه. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری درصف درواحد زمان (C_5). کل هزینهٔ اتلاف وقت مشتریها درصف درواحد زمان برابر C_5L_q است.

و. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری در هنگام دریافت خدمت درواحد زمان (C_6). کل هزینهٔ اتلاف وقت‌مشتریهایی که‌درحال دریافت خدمت‌هستند، برابر با $C_6(L-L_q)$ است.

باید توجه داشت که در بسیاری ازموارد $C_5=C_6$ است؛ اما درمواردی میزان این دوهزینه متفاوت است. ضمناً بدیهی است که چهار هزینهٔ نوع اول هزینه‌های ارائهٔ خدمت ودونوع هزینهٔ آخرهزینه‌های مربوط به‌مشتری است. علاوه برهزینه‌های فوق، برحسب‌مورد و شرایط هزینه‌های متعدد دیگری نیز وجود دارند. مثلا، دریك سیستم که ورود مشتریها به آن به‌صورت گروهی انجام می‌شود، ممکن است هر ورود گروهی هزینه‌ای را نیز در بر داشته باشد (مثلا هزینهٔ حمل مشتریها یاهزینهٔ پذیرش وثبت اطلاعات). هزینه‌های بالاسری کل سیستم ونظایر اینها را نیز می‌توان نام برد. لیکن، با توجه به‌تنوع سیستمهای صف ضروری است که‌درهنگام بررسی هرسیستم، هزینه‌های آن باتوجه به‌شرایط ویژه‌اش به‌طور مشخص مورد مطالعه‌قرارگیرد.

بدین ترتیب، با توجه به‌مطالب فوق، درحالت کلی تابع هزینهٔ یك سیستم صف را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد.

$$C=C_1(m-L+L_q)+C_2(L-L_q)+ \qquad (۱.۹)$$
$$C_3m+C_4(\lambda-\bar{\lambda})+C_5L_q+C_6(L-L_q)$$

یا

$$C=(C_1+C_3)m+(-C_1+C_2+C_6)(L-L_q)+ \qquad (۲.۹)$$
$$C_5L_q+C_4(\lambda-\bar{\lambda})$$

دربسیاری ازمدلها، تعدادی ازهزینه‌های فوق‌وجود ندارد. ضمناً همان‌طور که‌گفتیم بعضی ازسیستمها نیزهزینه‌های خاصی دارند، که به‌تابع فوق اضافه می‌شوند.

۳.۹ متغیرهای تصمیم در سیستمهای صف

هرسیستم صف، نظیرسایر سیستمها دارای پارامترهای قابل‌کنترلی است،که به آنها متغیر تصمیم می‌گویند. با تغییر و تنظیم این متغیرها، ظرفیت سیستم نیز تغییر می‌کند. متغیرهای تصمیم سیستم، طبیعتاً بستگی به نوع وماهیت آن دارد؛ لیکن، عمده‌ترین آنها را می‌توان به‌شرح زیرنام برد:

- تعداد خدمت‌دهندگان
- آهنگ خدمت‌دهی
- آهنگ ورود مشتریان
- ظرفیت صف
- جمعیت مشتریان

همان طور که‌مشاهده می‌کنیم، متغیرهای تصمیم فوق، عمدتاً همان ورودیهای سیستم‌هستند، بنابراین، چنانچه این ورودیها قابل کنترل باشند، ظرفیت سیستم را نیزمی‌توان تغییرداد، درعمل ممکن است همزمان چند متغیر تصمیم را دراختیار داشته باشیم،که به‌این‌ترتیب در تغییرظرفیت سیستم انعطاف‌پذیری بیشتری وجود خواهد داشت.

دراین بخش، طی مثالهایی نمونه‌های بهینه‌سازی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

مثال ۱.۹ تأثیر تغییرات درتعداد خدمت‌دهندگان برتابع هزینه درمدل $M/M/m$ را بررسی کنید.

حل: در این مدل، چون λ و μ ثابت فرض می‌شود، لـذا فقط هزینه‌هایی را منظور می‌کنیم‌که وابسته به‌تعداد خدمت‌دهندگان، یعنیm باشد. ازطرف دیگر،طبق معادلهٔ بالای صفحهٔ ۱۳۹، $L-L_q=\lambda/\mu$ ومستقل از m است. لذا تابع هزینه به‌شرح زیرخواهدبود.

$$C(m)=(C_1+C_2)m+C_5L_q \qquad (۳.۹)$$

که C_1 و C_2 و C_5، طبق تعاریف بخش قبل به‌ترتیب معرف هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندهٔ بیکار، هزینهٔ‌سرمایه‌گذاری روی یك خدمت‌دهنده وهزینهٔ اتلاف وقت مشتری درصف است. هزینه‌هـای مستقل از m، از تـابع هزینه حذف شده است. بـرای تعیین m، تهیهٔ جدولی به‌شرح زیرلازم است.

m	π_0	L_q	$C(m)$

از جدول فوق، مقادیـر $C(m)$ بـه‌ازای مقادیر مختلف m بـه‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب، مقدار بهینهٔ m نیز مشخص می‌شود. بـدیهی است‌که حداقل مقدار m باید طوری

باشد که $\rho < 1$ شود. از طرفی، در جدول فوق حداکثر مقدار m نیز محدود خواهد بود، زیرا نشان داده می‌شود که با افزایش m ابتدا هزینهٔ کل $C(m)$ کاهش می‌یابد و از آن‌پس شروع به افزایش می‌کند. به عبارت دیگر، با افزودن تعداد خدمت‌دهنده‌ها ابتدا کاهش هزینه‌های مربوط به‌مشتریان قابل توجه‌است، اما به‌تدریج آهنگ کاهش آن نسبت به‌افزایش هزینهٔ خدمت‌دهی کمتر می‌شود. بدین‌ترتیب، افزایش m تا آنجا ادامه می‌یابد، که کل هزینه‌ها رو به‌کاهش باشد و به‌محض اینکه افزایش آن شروع شد، متوقف می‌شود.

مثال ۲.۹ تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را در یك‌مدل $M/M/m$، که در آن $\lambda = 15$ و $\mu = 10$ است، تعیین کنید. فرض می‌کنیم که هزینهٔ هرساعت وقت خدمت‌دهنده ۱۲۰ و هزینهٔ هر ساعت وقت مشتری ۳۶۰ باشد. (فرض براین است که برای افزایش تعداد خدمت‌دهندگان احتیاج به‌سرمایه‌گذاری نیست و ولذا $C_2 = 0$ است).

حل: در این‌مدل چون‌مقدار ρ باید کوچکتر از ۱ باشد، حداقل تعدادخدمت‌دهندگان $m = 2$ است. جدول زیر را تهیه می‌کنیم

$C(m)$	L_q	π_0	m
۱٫۹۲۸۵	۹۳۴٫۲۸	۰٫۱۴۲۸۵	۲
۰٫۲۳۶۸	۴۴۵٫۳	۰٫۲۱۰۳	۳
۰٫۰۴۴۷	۴۹۶٫۱	۰٫۲۲۱	۴

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان برابر با ۳ است.

مثال ۳.۹ در یك مدل $M/M/m/K$، تأثیر تغییر همزمان m و K را تعیین کنید.

حل: در این مدل برای افزایش ظرفیت خدمت دهی می‌توان هم تعداد خدمت‌دهنده وهم فضای سیستم را افزایش داد. برای به‌دست‌آوردن تابع هزینه، رابطهٔ (۱.۹)، باید توجه‌کرد که $L - L_q = \bar{\lambda}/\mu$ است، که $\bar{\lambda}$ معرف آهنگ ورود مشتریان (ونه آهنگ ورود مراجعین) است. از طرف دیگر $\bar{\lambda}$ خود تابعی از K است. بنابراین، درتابع هزینهٔ این مدل، (تابع ۲.۹)، باید $\lambda - \bar{\lambda}$ را مساوی πK وهزینهٔ سرمایه‌گذاری را $C_2 K$ (به‌جای $C_2 m$) درنظر گرفت.

مقادیر بهینهٔ m و K را از راه جستجو می‌توان به‌دست آورد. با توجه به‌شرایط، معمولا افزایش K بیش ازمقدار معین مقدور نیست؛ لذا، اگرحداکثر آن را با $\bar{K}$ نشان دهیم، با توجه به‌اینکه $m \leqslant K$ است، جدولی به‌شرح زیر تهیه می‌کنیم، که عناصر جدول $C(m, K)$ است.

$C(m,K^\alpha)$	K^α	$\bar{K}$	....	۲	۱	K/m

در این جدول، K^α معرف ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌ازای مقدار ثابت m و $C(m,K^\alpha)$ نشاندهندهٔ حداقل کل هزینه‌های سیستم است. به فرض اینکه تعداد خدمت‌دهندگان برابر با m باشد. سپس، حداقل مقادیر $C(m,K^\alpha)$ ازستون آخر جدول به‌دست می‌آید، که به‌این‌ترتیب مقادیر بهینهٔ m و K مشخص می‌شود.

مثال ۴.۹ یك‌کارگاه تولیدی را درنظر بگیرید، که کارهای سفارشی مشتریان را می‌پذیرد. به‌علت محدودیت فضای انبار، حداکثر تعداد مشتریهایی که پذیرفته می‌شوند، محدود است. هدف، تعیین تعداد ماشینهایی که سفارشات مشتریان با آن انجام می‌شود و همچنین تعیین ظرفیت سیستم است، به‌طوری‌که هزینه‌ها حداقل شود. مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی بامیانگین ۱۵ دقیقه و ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بامیانگین هر ساعت ۱۶ مشتری است. هزینه‌های مختلف به‌شرح زیراست

هزینهٔ ایجاد یك واحد ظرفیت سیستم (درواحد زمان): $C_3=10$
(افزایش فضا برای نگهداری یك مشتری جدید)
هزینهٔ عدم استفاده ازیك ماشین درواحد زمان: $C_1=100$
هزینهٔ عملیاتی یك ماشین درواحد زمان: $C_2=200$
سود حاصل ازانجام کار مشتری (یا خسارت ازدست دادن مشتری): $C_4=300$
خسارت حاصل ازتأخیر درانجام کار مشتری (درواحد زمان): $C_5=C_6=150$

حل: تابع هزینهٔ این مدل عبارت است از:

$$C(m,K)=100m+10K+250(L-L_q)+150L_q+4800\pi_k$$

ازطرف دیگر،

$$L-L_q=\frac{\bar{\lambda}}{\mu}=\frac{\lambda(1-\pi_k)}{\mu}=\frac{16}{4}(1-\pi_k)=4-4\pi_k$$

درنتیجه

$$C(m,K)=100m+10K+150L_q+3800\pi_k+1000$$

K/m	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	K^{α} بهینه
۲	۲۵۵۸	۲۴۰۹	۲۴۳۰	۲۵۴۴	۲۶۴۷	۲۷۸۹	۲۹۴۰	۳۰۹۵	۳۲۵۲	...	...	۳
۳	—	۲۰۴۲	۱۸۲۲	۱۷۵۵	۱۷۶۳	۱۸۱۶	۱۸۹۷	۱۹۹۷	۲۱۱۱	...	...	۵
۴	—	—	۱۶۲۰	۱۳۸۶	۱۲۷۴	۱۲۲۶	۱۲۱۴	۱۲۲۶	۱۲۵۴	۱۲۹۳	۱۳۴۴	۸
۵	—	—	—	۱۳۰۶	۱۱۰۳	۹۹۴	۹۳۷	۹۰۷	۸۹۵	۸۹۴	۹۰۸	۱۱
۶	—	—	—	—	۱۱۰۵	۹۵۶	۸۷۹	۸۴۰	۸۲۲	۸۱۵	۸۱۶	۱۱
۷	—	—	—	—	—	۱۰۰۸	۹۱۷	۸۷۵	۸۵۷	۸۵۳	۸۵۵	۱۱
۸	—	—	—	—	—	—	۹۹۶	۹۴۹	۹۳۳	۹۳۰	۹۳۴	۱۱

عدد ۱۰۰۰ را می‌توان از تابع هزینه حذف کرد، چون متغیرهای تصمیم بر آن تأثیری ندارند، با استفاده از جدول زیر، تأثیر تغییرات m و K بر تابع هزینه بررسی می‌شود.

همان‌طور کـه مشاهده می‌شود، حـداقل هزینه به‌ازای $m=۶$ و $K=۱۱$ حاصل می‌شود و مقدار هزینهٔ بهینه برابر با ۸۱۵ است.

مثال ۵٫۹ دریك کارخانـه‌کـه دارای ۳۰ ماشین است، هـدف تعیین تعداد بهینهٔ تعمیرکاران است. مدت‌زمان تعمیر هـرماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت و مدت‌زمانی که ماشین‌کارمی‌کند (قبل ازاینکه خراب‌شود) نیزدارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۲۴۰ ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی ۱۰۰۰ تومان وحقوق هرساعت کارتعمیرکار را ۳۰۰ تومان فرض می‌کنیم.

حل: دراین مدل $C=۳۰$، $\mu=۱/۳۰$ و $\lambda=۱/۲۴۰$ و $C_۱=C_۲=۱۰۰$ و $C_۵=C_۶=۵۰۰۰$ و $C_۳=C_۴=۰$ است. لذا تابع هزینه عبارت است از:

$$C(m)=۱۰۰m+۱۰۰۰L$$

برای تعیین m ازجدول زیراستفاده می‌کنیم

$C(m)$	L	π_0	m
۷۸۶۲	۶٫۹۶	۰٫۰۴	۳
۴۵۶۹	۳٫۳۷	۰٫۱۶۸	۴
۳۴۷۲	۱٫۹۷	۰٫۳	۵
۳۱۴۴	۱٫۳۴	۰٫۴	۶
۳۱۰۷	۱٫۰۰۷	۰٫۴۸	۷
۳۲۰۱	۰٫۸	۰٫۵۴	۸

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به‌ازای $m=۷$ به‌دست می‌آید.

مثال ۶٫۹ درطراحی یك پارکینگ، هدف، تعیین فضای آن است. موقعی‌که ظرفیت پارکینگ تکمیل باشد، اتومبیلها به‌پـارکینگهای دیگر می‌روند و این پارکینگ از سود حاصله محروم خواهد شد. اتومبیلها طبق فرایند پـواسون بامیانگین هرساعت ۴۰ دستگاه وارد می‌شوند. مدت توقف هراتومبیل دارای توزیع نمایی بـا میانگین نیم‌ساعت است. هزینهٔ ایجاد فضا برای پارك اتومبیل (درواحد زمان) برابربا ۲ وسود حاصله درهرساعت برابربا ۵ است.

حل: این مسئله، یك مدل $M/M/m/m$ یا مدل ارلانگی است. دراین مدل، $\lambda=40$، $\mu=2$، $C_3=2$ و $C_4=5$ و $C_1=C_2=C_5=C_6=0$ است. تابع هزینهٔ دراین مدل به‌شرح زیراست:

$$C(m)=2m+200\pi_m$$

برای به‌دست آوردن m ازجدول زیراستفاده می‌کنیم.

$C(m)$	π_m	m
۶۰٫۱	۰٫۰۵	۲۵
۵۹٫۴۳	۰٫۰۳۷	۲۶
۵۹٫۳۶	۰٫۰۲۶	۲۷
۵۹٫۷۵	۰٫۰۱۸	۲۸

بنابراین، تعداد بهینهٔ اتومبیل در پارکینگ برابربا ۲۷ است.

مثال ۷.۹ دریك مدل $M/M/1$، خدمت‌دهنده ماشینی است که می‌توان سرعت آن را تنظیم کرد. اگر آهنگ خدمت را μ فرض کنیم، هزینهٔ عملیاتی وهمچنین هزینهٔ بیکاری هرماشین بستگی به μ دارد، که آن را با $f(\mu)$ نشان می‌دهیم.

حل: باتوجه به‌اینکه تنها متغیر تصمیم دراین مدل μ است، تابع هزینهٔ مربوط به‌شرح زیرخواهد بود:

$$C(\mu)=f(\mu)+C_5L_q+C_6(L-L_q)$$

به‌جای L و L_q مقادیر مربوطه را جایگزین می‌کنیم، درنتیجه

$$C(\mu)=f(\mu)+\frac{C_5\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}+C_6\frac{\lambda}{\mu}$$

برای به‌دست آوردن حداقل آن، از رابطهٔ فوق مشتقگیری می‌کنیم (به‌شرط اینکه $C(\mu)$ قابل مشتقگیری باشد). درنتیجه،

$$\frac{dC(\mu)}{d\mu}=f'(\mu)-\frac{C_5\lambda^2(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}-\frac{C_6\lambda}{\mu^2}=0$$

درحالت خاص که $C_5=C_6$ باشد، نتیجه‌می‌شود که به‌ازای مقداربهینهٔ μ

$$f'(\mu)=\frac{C_5\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$$

اگر $f(\mu)$ تابعی خطی از μ، مثلاً $f(\mu) = a\mu + b$ باشد،

$$a = \frac{C_\Delta \lambda}{(\mu - \lambda)^2}$$

که به‌این‌ترتیب مقدار بهینهٔ μ به‌دست می‌آید.

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_\Delta \lambda}{a}} \qquad (۲.۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، دراین مدل $\mu^* > \lambda$، یعنی $\rho < 1$ است.

مثال ۸.۹ دریك خط تولید، سرعت ماشینی را می‌توان تغییر داد. تعداد قطعات تولید شده با این ماشین بین ۶۰ تا ۹۰ قطعه درساعت است. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین هر ساعت ۲۰۰۰ تومان است، به‌شرط اینکه باحداقل سرعت‌کار کند. ولی چنانچه سرعت‌آن افزایش یابد، هزینه نیز متناسباً وبا رابطه‌ای خطی افزایش خواهد یافت. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین باحداکثر سرعت برابر با ۲۶۰۰ تومان است. اگر تعداد قطعاتی‌که برای تولید سفارش می‌شود، طبق توزیع پواسون با میانگین ۵۰ قطعه در ساعت، وخسارت حاصل از تأخیرکار درهرساعت برابربا ۲۵۰ تومان باشد، سرعت بهینهٔ ماشین را تعیین‌کنید.

حل: دراین مدل $f(\mu) = ۲۰\mu + ۸۰۰$ است.

به‌این‌ترتیب، $a = ۲۰$، $b = ۸۰۰$ و $\lambda = ۵۰$ و $C_\Delta = ۲۵۰$ است. طبق رابطهٔ (۲.۹)

$$\mu^* = ۷۵$$

۴.۹ انتخاب محل سیستم صف

فرض‌کنید جمعیت مشتریان بالقوهٔ یك سیستم در منطقه‌ای پراکنده باشند. رفت و برگشت این مشتریان مستلزم صرف‌وقت ودر نتیجه هزینه‌است. هدف، تعیین محل یا محلهای مناسب استقرار سیستم است، به‌طوری‌که کلّ هزینه‌ها، که شامل هزینهٔ رفت و برگشت مشتریان نیز می‌شود، حداقل شود. بنابراین، برای محاسبهٔ میزان هزینه، لازم است که میانگین زمان رفت وبرگشت مشتریان نیز تعیین گردد.

توزیع جمعیت مشتریان

فرض می‌شود که متقاضیان دریافت خدمت (مشتریان)، در منطقهٔ موردنظر به‌طور یکنواخت پراکنده هستند.

معیار تعیین فاصله

دو نقطهٔ هندسی A و B بـا مختصات (a, b) و (a', b') را درنظر بگیرید. فاصلهٔ بین این دونقطه را برحسب نیاز وشرایط، با معیارهای مختلف می‌توان اندازه‌گیری کرد. دومعیار مهم اندازه‌گیری فاصله عبارت‌اند از:

الف. فاصلهٔ هندسی بین دونقطه، یعنی

$$d=[(a-a')^{۲}+(b-b')^{۲}]^{۰٫۵}$$

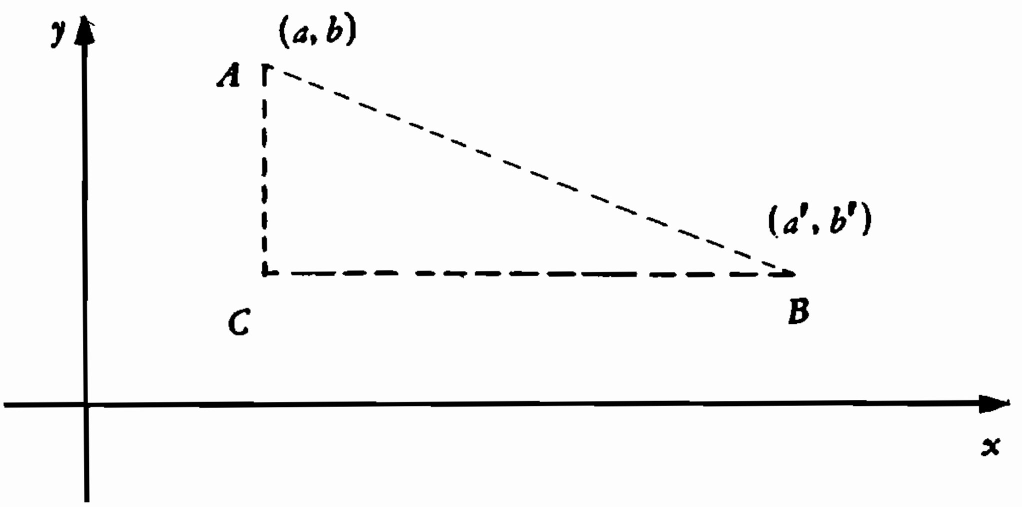
(درشکل ۱.۹، فاصلهٔ مستقیم AB، معرف فاصلهٔ هندسی است.)

ب. فاصلهٔ خطی که فرض می‌شود، مشتری در امتداد محورهای مختصات حرکت می‌کند. برای نمونه، دریك شهررفت وآمد درامتداد خیابانها ویا دریك کارخانه‌درامتداد جاده‌ها ومسیرهـای مشخص انجام می‌شود. درشکل ۱.۹، فاصلهٔ خطی بین دونقطهٔ A و B عبارت ازمجموع فواصل AC و CB وبرابراست با

$$d=|X|+|Y|=|a-a'|+|b-b'|$$

که $|X|$، فاصله درامتداد محور x ها و $|Y|$، فاصله درامتداد محور y هاست؛ یعنی، برای محاسبهٔ $|X|$،که میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مبدأ مختصات درامتداد محور x هاست، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. بادرنظرگرفتن اینکه‌مشتریان، طبق توزیع‌یکنواخت درداخل مستطیل پراکنده‌اند، احتمال اینکه یك مشتری درسمت راست یا چپ محور y ها قرارداشته باشد، به‌ترتیب برابربا $a/a+b$ و $b/a+b$ است. از طرف دیگر، میانگین فاصلهٔ‌طی‌شده توسط‌مشتری سمت‌راست وچپ محور y ها،به‌ترتیب $a/۲$ و $b/۲$ است؛لذا،

$$|X|=\frac{a}{۲}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{۲}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲(a+b)} \qquad (۵.۹)$$



شکل ۱.۹ فاصلهٔ هندسی وخطی بین دو نقطه

به‌همین ترتیب،

$$|Y|=\frac{c^{۲}+d^{۲}}{۲(c+d)}$$

ومیانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت هرمشتری عبارت است از:

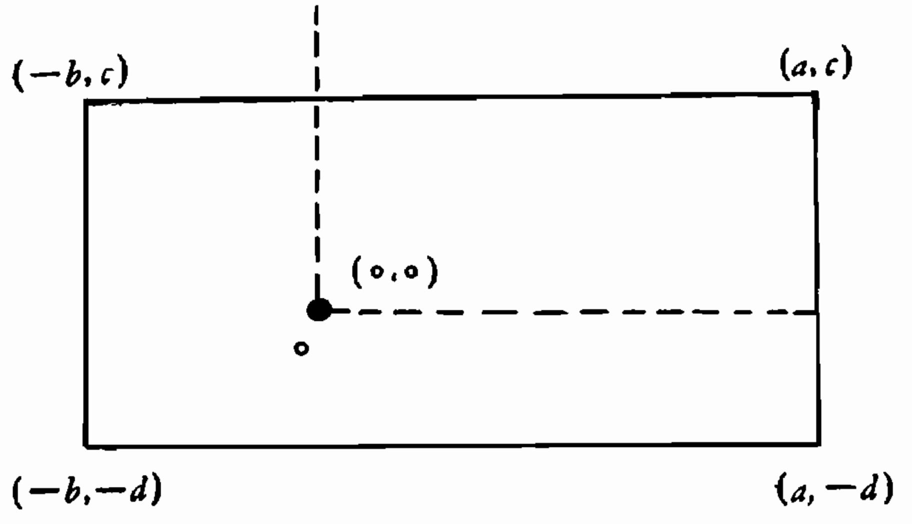
$$E(T)=۲|X|+۲|Y|=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{a+b}+\frac{c^{۲}+d^{۲}}{c+b}$$

چنانچه تعیین‌محل ایستگاه خدمت مدنظر باشد، باید a و b و c و d را طوری تعیین کردکه $E(T)$ حداقل شود. بایدتوجه داشت‌که $a+b$ برابربا $|X|=CB$ و $|Y|=AC$ است. علت به‌کارگرفتن قدرمطلق نیز مثبت بودن فاصله‌هاست.

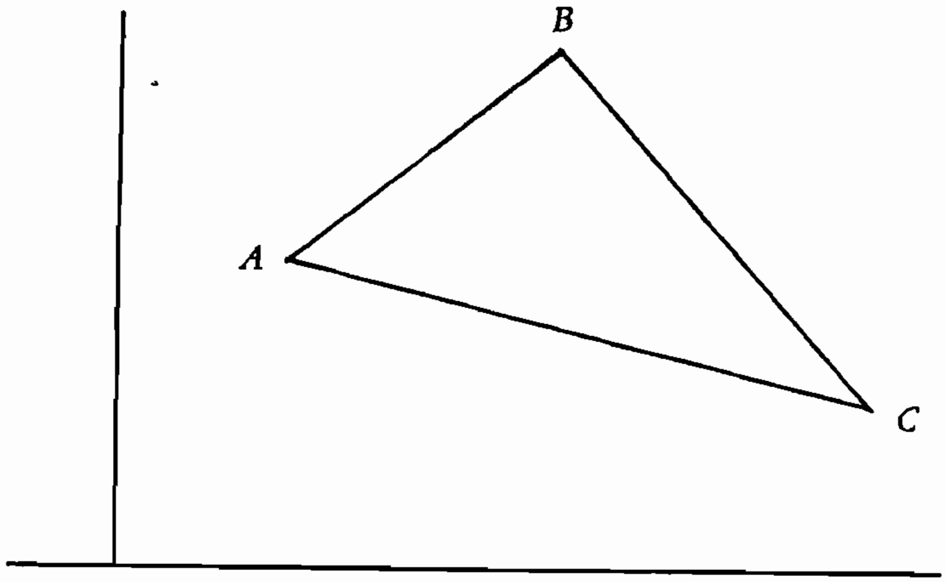
مثال ۹.۹ فرض‌کنید مشتریان یك‌سیستم درداخل یك مستطیل، طبق توزیع‌یکنواخت پراکنده‌اند. ایستگاه‌خدمت درنقطه‌ای درداخل این مستطیل‌قراردارد. میانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت یك مشتری را به‌دست‌آورید. اگر هدف، حداقل‌کردن این‌کمیت باشد، بهترین نقطهٔ استقرار ایستگاه خدمت کجاست؟

حل: ایستگاه خدمت‌را به‌عنوان‌مبدأ مختصات جدید تعیین‌می‌کنیم. مختصات گوشه‌های مستطیل روی شکل نشان داده شده است. حال فرض کنید، یك مشتری مشخص درنقطه‌ای به‌مختصات (x, y) قرار گرفته باشد. مسافت خطی که‌این مشتری باید درامتداد محور xها طی‌کند، برابربا $|x|$ (طول مستطیل)،و $c+d$ برابربا عرض مستطیل وثابت است، لذا $E(T)$ به‌ازای $a=b$ و $c=d$ حداقل می‌شود. به‌عبارت دیگر، بهترین نقطه برای استقرار ایستگاه خدمت، مرکز مستطیل است.

مثال ۱۰.۹ جمعیت‌مشتریان درداخل‌مثلث ABC، طبق‌توزیع‌یکنواخت‌پراکنده‌اند. اگر ایستگاه خدمت، درنقطه‌ای خارج ازمثلث قرار گرفته باشد، میانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا ایستگاه خدمت را محاسبه‌کنید.



شکل ۲.۹ مربوط به‌مثال ۹.۹



شکل ۳.۹ پراکندگی مشتریان مثال ۱۰.۹

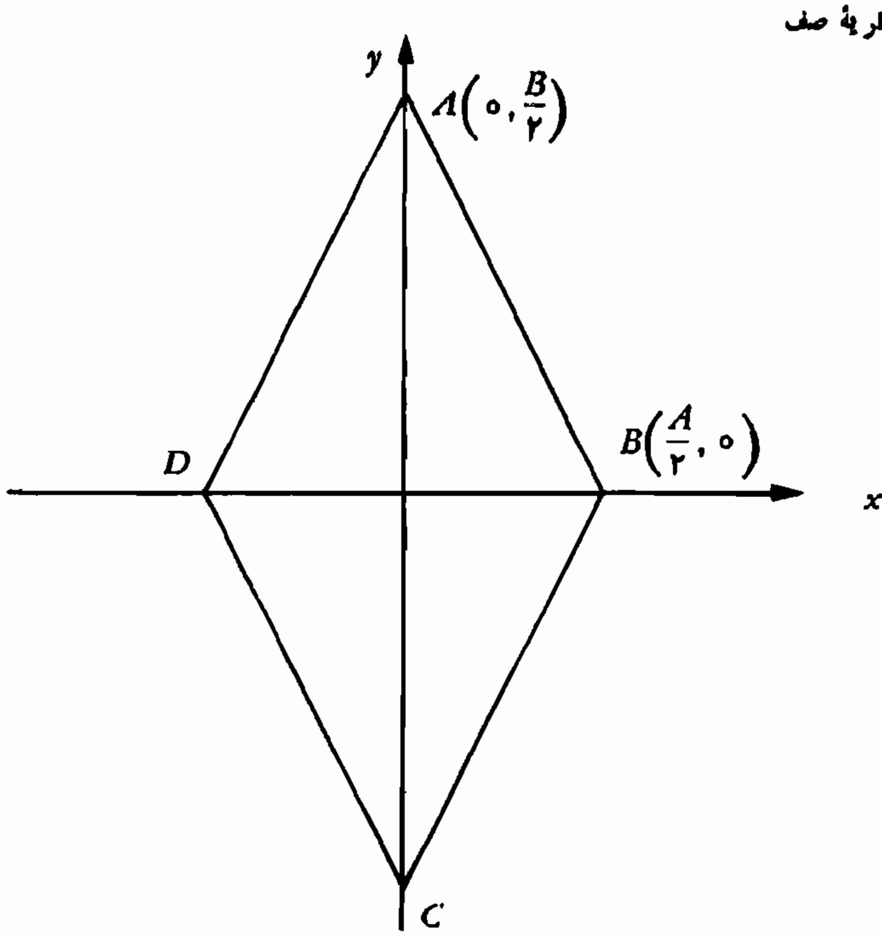
حل: ایستگاه‌خدمت را به‌عنوان مبدأ مختصات انتخاب می کنیم. مختصات رئوس مثلث نسبت به‌این مبدأ مختصات (a, a') و (b, b') و (c, c') خواهد بود. اگرمیانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا مبدأ مختصات را با استفاده ازاحتمال شرطی به‌دست آوریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد کـه تمام مشتریها درمرکز ثقل مثلث (در محل تقاطع میانه‌ها) قراردارند، که فاصلهٔ آن تاهر رأس دو برابر فاصلهٔ آن تاضلع مقابل مربوط به‌همان رأس است. لذا، دراین مثال مختصات نقطهٔ تقاطع میانه برابر است با $(a'+b'+c')/۳$, $(a+b+c)/۳$ و درنتیجه، میانگین فـاصلهٔ مشتری تـا ایستگاه خدمت (مبدأ مختصـات) برابراست با:

$$|X|+|Y|=\frac{۱}{۳}(a+b+c+a'+b'+c')$$

مثال ۱۱.۹ مشتریان یك‌سیستم صف به‌طوریکنواخت درداخل یك‌لوزی باقطرهایی به‌طول A و B، مطابق شکل ۴.۹ پراکنده‌اند وایستگاه خدمت مربوط به‌آن نیز در مرکز لوزی قراردارد. میانگین فاصلهٔ هرمشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست آورید.

حل: دراینجا نیزمبدأ مختصات را برایستگاه خدمت منطبق می کنیم. مختصات رئوس لـوزی در شکل نشان داده شده است. بـرای محاسبهٔ $|X|$، از احتمال شرطـی استفاده می‌کنیم. مشتریها یـا درسمت راست محور y ها (یعنی درمثلث ABC) ویا درسمت چپ آن (یعنی درمثلث ADC) قراردارند. مساحت این دومثلث باهم برابراست، ولذا مشتری با احتمال ۰٫۵ می‌تواند در هـر کدام ازمثلثها قرارداشته باشد. میانگین فاصلهٔ مرکز ثقل هر مثلث تا مبدأ مختصات، درامتداد محور x ها برابربا $A/۶$ است. به‌این‌ترتیب

$$|X|=\frac{۱}{۲}\times\frac{A}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{A}{۶}=\frac{A}{۶}$$



شکل ۴.۹ پراکندگی مشتریان، مثال ۱۱.۹

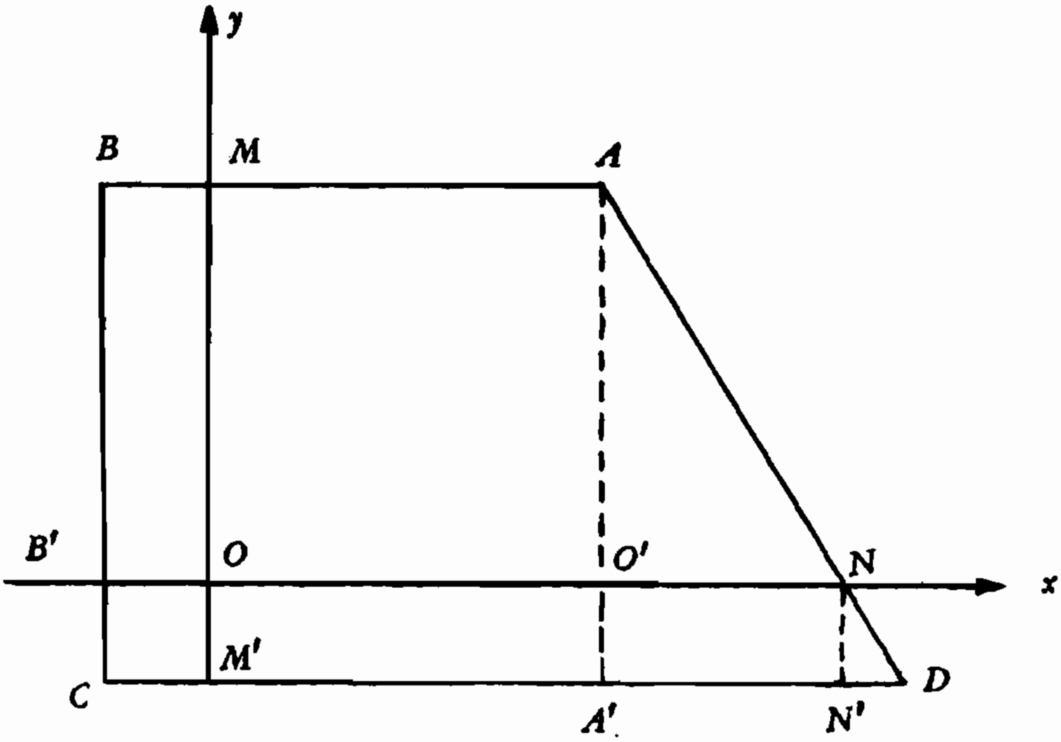
به‌همین ترتیب، $|Y|$ به‌دست می‌آید. لذا،

$$|X|+|Y|=\frac{A+B}{\text{۶}}$$

باید توجه داشت‌که دراین مثال نمی‌توان فرض‌کردکـه مرکز ثقل همهٔ مشتریها درمرکز لوزی قراردارد، زیرا جهت حرکت مشتریها دردومثلث بایکدیگرمتفاوت است. واگرکل لوزی را یکجا درنظر بگیریم، جهت حرکت مخالف مشتریها، بـاعث می‌شودکه میانگین فاصلهٔ آنها برابربا صفرشود، که این امرصحیح نیست.

مثال ۱۲.۹ مشتریهای یك سیستم صف داخل ذوزنقه $ABCD$ پراکنده‌اند وایستگاه خدمت در داخـل آن، مطابـق شکل۵.۹ قـرار دارد. مختصات رئوس ذوزنقه (۲ ,۵)، (۲ ,۲—) و(۱— ,۲—) و (۱— ,۷) است. میانگین فاصلهٔ هرمشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست آورید.

حل: برای محاسبهٔ $|X|$ ازاحتمال شرطی استفاده مـی‌کنیم. مشتریها یـا درمستطیل $BCM'M$ یا درمستطیل $MM'A'A$ و یا درمثلث $AA'D$ قراردارند. احتمال بودن یك مشتری در هرکدام ازاین سه قسمت، متناسب بـا مساحت‌آنها یعنی ۶/۲۴ و ۱۵/۲۴ و ۳/۲۴ است. میانگین فاصلهٔ افقی مرکزثقل این سه‌قسمت تا مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱، ۲٫۵ و ۱۷/۳ است. به‌این‌ترتیب،



شکل ۵.۹ پراکندگی مشتریان مثال ۱۲.۹

$$|X|=\frac{۶}{۲۴}(۱)+\frac{۱۵}{۲۴}(۲٫۵)+\frac{۳}{۲۴}\left(\frac{۱۷}{۳}\right)=۲٫۵۲$$

به‌همین ترتیب، برای محاسبهٔ $|Y|$، ذوذنقه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم، که‌عبارت‌اند از: مستطیل $B'BAO'$، مستطیل $B'CN'N$، مثلث $AO'N$ و مثلث NND. احتمال بودن مشتریها در این قسمتها به‌ترتیب برابر با ۱۴/۲۴، ۳۵/۷۲، ۴/۷۲، ۱/۷۲ است. میانگین فاصلهٔ عمودی مرکز ثقل این قسمتها با مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۵ و ۲/۳ و ۲/۳ است. لذا

$$|Y|=\frac{۱۴}{۲۴}(۱)+\frac{۲۵}{۷۲}(۰٫۵)+\frac{۴}{۷۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)+\frac{۱}{۷۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)=۰٫۸۵۳$$

مثال ۱۳.۹ درسطح یك شهر بزرگ، که جمعیت آن به‌طور یکنواخت پراکنده است، می‌خواهیم تعدادی ایستگاههای خدمت مشابه ایجاد کنیم. منطقهٔ تحت پوشش هر ایستگاه دارای مساحتی برابر با S است ومی‌تواند مربع یا لوزی (باقطرهای‌مساوی) باشد. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مرکزخدمت درکدام ازدوشکل فوق‌الذکر کمتر است.

حل: چون مساحت هر منطقه برابر با S است؛ لذا، طول هر ضلع مربع برابر با $\sqrt{S}$ وطول هرقطر لوزی برابر با $\sqrt{۲S}$ است. طبق نتایج مثال ۹.۹، درمورد مربع،

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{S}}{۲}$$

وطبق نتیجهٔ مثال ۱۱.۹،

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{2S}}{3}$$

همان طور که‌مشاهده می‌شود، میانگین فاصلهٔ طی‌شده توسط یك مشتری درمنطقه‌ای به‌شکل لوزی‌کمتر ازهمین فاصله درمنطقه‌ای به‌شکل مربع است.

درحالت‌کلی ثابت می‌شود که اگر بخواهیم منطقهٔ بزرگی را به‌مناطق‌کوچکتر تقسیم ودر هر کدام یك ایستگاه خدمت مستقر کنیم، بهترین روش این است که منطقه را به‌تعدادی مناطق‌کوچکتر به‌شکل لوزی تقسیم کنیم و ایستگاههای خدمت درمراکز این‌لوزیها قرار گیرد. ضمناً اگرمعیارسنجش فاصلهٔ هندسی‌باشد، منطقه را باید به‌تعدادی دایره تقسیم‌کرد.

مسائل

۱. درمسئلهٔ ۲۷ فصل ۶، اگرحقوق تعمیرکارساعتی ۳۰۰ تومان وهزینهٔ قطع تولید به‌ازای هرماشین ــ ساعت ۲۰۰۰ تومان باشد، تعداد بهینهٔ ماشینهای تحت مسئولیت این تعمیرکار چقدر است؟

۲. درانبار ابزار یك کارخانــه ۸۸ نفرکار می‌کنند. مدت‌زمانی کــه هرکارمند انبار برای بررسی و تحویل ابزار صرف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین ۸ر۰ دقیقه‌است. میانگین فاصلهٔ زمانی بین دومتقاضی ابزار، که طبق توزیع نمایی فرض‌می‌شود، ۵ر۱ دقیقه‌است. حقوق وسایرهزینه‌های مربوط به‌هرکارمند ۱۵۰ تومان درساعت وحقوق تکنیسینهایی‌که مراجعه می‌کنند (وهزینه‌های ناشی از تعطیل‌کار آنها) ۳۰۰ تومان درساعت فرض می‌شود. مقداربهینهٔ M را تعیین‌کنید.

۳. دریك سیستم صف، که ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۱۰مشتری است، یکی ازدوخدمت‌دهنده را می‌تــوان استخدام کرد، که دستمزدآنها به‌ترتیب ساعتی ۷۰ و ۹۰ تومان است. مدت زمان خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اول و دوم به‌ترتیب دارای توزیع نمایی (بامیانگین ۴ دقیقه) وتوزیع نرمال (بامیانگین ۳ دقیقه و انحراف معیار ۱ دقیقه) است. هزینهٔ وقت مشتری هر ساعت ۱۲۰ تــومان است. کدام خدمت‌دهنده مناسبتر است؟

۴. دریك کارخانه، هرماشین مدتی‌کار می‌کند وبعد ازآن احتیاج به‌تعمیردارد. مدت‌زمان کارکردن وهمچنین تعمیرآن متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین به‌ترتیب، ۸ ساعت و۴۵ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هر ماشین بسته بــه اینکه درحال کار یــا درحال تعمیرباشد، به‌ترتیب ۱۵۰۰ تومان و ۸۰۰ تومان است. تعداد بهینهٔ ماشینهایی که یك‌نفرکارگر مسئول تعمیر آنهاست، چقدراست؟ اگرکلاً ۲۰ ماشین وجودداشته‌باشد ویك‌کارگرمسئول‌ماشینهای

مشخصی‌نباشد، بلکه هرکارگر بتواند به‌تعمیر هرماشین خراب بپردازد، تعداد بهینهٔ کارگران موردنیاز را تعیین کنید:

۵. درمسئلهٔ ۴، اگر هزینهٔ نگهداری هر ماشین، صرف‌نظر از اینکه کاربکند یا نکند، برابر با ۱۵۰۰ تومان باشد، به سؤالات مطرح‌شده در بالا مجدداً پاسخ دهید.

۶. دریك سیستم صف مشتریها طبق‌فرایند پواسون (بامیانگین هرساعت ۱۲ مشتری) وارد می‌شوند. مدت‌زمان خدمت دارای‌توزیع نرمال (بامیانگین ۴ دقیقه وانحراف معیار ۵ر۱ دقیقه) است. هرساعت وقت مشتری ۲ برابر وقت خدمت‌دهنده ارزش دارد. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را طوری تعیین کنید که‌کل هزینه‌ها حداقل شود.

۷. می‌خواهیم تعداد بهینهٔ‌ماشینهای فتوکپی موردنیازمؤسسه‌ای را تعیین‌کنیم. تعدادکارهای فتوکپی این مؤسسه دارای‌توزیع پواسون (بامیانگین هرساعت ۶۰ کار) ومدت‌زمان چاپ هرکاری دارای توزیع‌نمایی بـا میانگین ۱۰ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرماشین، شامل استهلاك وحقوق متصدی ماشین هـرساعت ۵۰۰ تـومان ومستقل ازتعداد کار چاپ شده با ماشین است. میانگین هزینهٔ کاغذ و سایـر هزینه‌های متغیر هر کار برابر با ۴۰ تومان است. چنانچه‌کاری برسد و مـاشین فتوکپی بیکار نباشد، بلافاصله به‌صورت سفارش به‌بیرون از مؤسسه ارسال می‌شود. میانگین هزینهٔ هرکار فتوکپی درخارج ازمؤسسه ۱۸۰ تومان‌است. باهدف حداقل‌کردن هزینه، چند ماشین فتوکپی لازم است؟

۸. درمسئلهٔ ۷، اگر مدت‌زمـان چاپ دارای تـوزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۱۲ ,۸) باشد، به‌سؤال مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

۹. به‌یك بندرهرروز به‌طورمتوسط ۵ کشتی طبق توزیع پواسون وارد می‌شوند. هزینه‌های روزانهٔ مربوط به‌یك اسکله برابربا نصف خسارت روزانه‌ای‌است‌که به‌یك‌کشتی، که‌منتظر تخلیه است، پرداخت می‌شود (بابت زمان تخلیه، خسارتی پرداخت نمی‌شود). مدت‌زمان تخلیهٔ هرکشتی دارای توزیع نمایی با میانگین یك روزاست. تعداد بهینهٔ اسکلهٔ موردنیاز این بندر را تعیین‌کنید.

۱۰. به‌یك پمپ‌بنزین هر ساعت، به‌طور متوسط ۱۲۵ اتومبیل طبق فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. مدت زمـان خدمت، نمایی بـا میانگین ۳۰ دقیقه فرض می‌شود. سود حاصل از فروش بنزین به‌هر اتومبیل ۲۰ تـومان وهزینه هردستگاه اتومبیل ساعتی ۳۰ تومان است. اگر طول صف زیاد بـاشد، بعضی ازمشتریها، طبق جدول زیر، ازورود به‌این پمپ بنزین منصرف می‌شوند.

طول صف	درصد مشتریهایی که از ورود منصرف می‌شوند.
۵ — ۱۰	۵
۱۱ — ۱۵	۲۰
۱۶ — ۲۰	۴۰
۲۱ — ۲۵	۶۰
بیش از ۲۶	۸۰

تعداد بهینهٔ پمپها را محاسبه کنید

۱۱. یك مدل $M/M/m$ که آهنگ ورود و خدمت در آن به‌ترتیب ۸ و ۱۲ است، را درنظر بگیرید. هزینهٔ نگهداری هر خدمت‌دهنده هرساعت ۳۵۰ تومان است. چنانچه فقط یك مشتری درسیستم باشد، خسارت پرداخت شده به اوساعتی ۸۰۰ تومان است. اما اگر بیش ازیك مشتری درسیستم باشد، به سایر مشتریها (ازمشتری شمارهٔ ۲ به‌بعد) خسارتی معادل با ساعتی ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌شود. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را تعیین کنید.

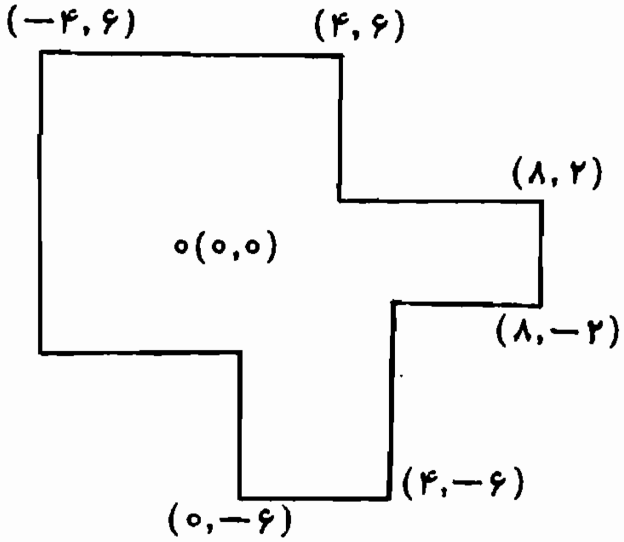
۱۲. دریك ایستگاه، که به‌بازرسی قطعات ساخته‌شده می‌پردازد، می‌توان یکی از دو روش بازرسی را اتخاذکرد. در روش‌اول، که هزینهٔ آن ۱۵۰۰ تومان است، مدت‌زمان بازرسی دارای توزیع‌نمایی با میانگین نیم ساعت است. درروش دوم، که هزینهٔ آن معادل ۱۲۰۰ است، بازرسی از دوفعالیت مستقل تشکیل می‌شود، که مدت زمان اجرای هرکدام ازآنها دارای توزیع ارلانگی با پارامتر ۲ $=r$ است. میانگین مدت زمان فعالیتهای اول و دوم این روش، به‌ترتیب، برابربا ۱۲ و ۲۴ دقیقه است. تعداد قطعاتی که برای بازرسی به‌این ایستگاه می‌رسند، براساس فرایند پواسون است ومیانگین فاصلهٔ رسیدن دوقطعهٔمتوالی ۴۰ دقیقه فرض می‌شود. خسارت حاصل ازدیررسیدن هرقطعه برابربا ۸۰۰ تومان است. کدام روش ازنظرهزینه بهتراست؟

۱۳. یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید، ورود مشتریها گروهی است. زمان بین ورود دوگروه متوالی، دارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۲۵ دقیقه است. تعداد مشتریهای هر گروه هم متغیرتصادفی پواسون بامیانگین ۶ مشتری فرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت نیزنمایی بامیانگین ۳ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرمشتری درساعت بسته‌به‌اینکه درصف باشد یا درحال خدمت، به‌ترتیب، برابربا ۳۰۰ و ۵۰۰ است. میانگین هزینهٔ این سیستم را درساعت محاسبه کنید.

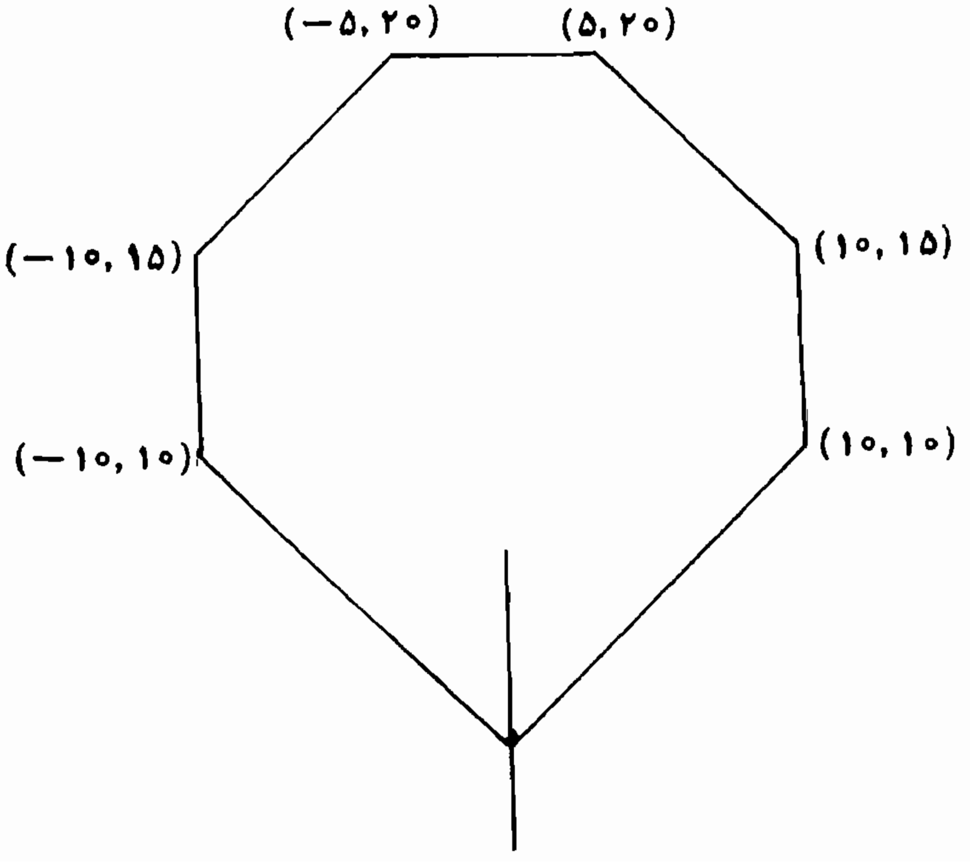
۱۴. درکارگاهی قطعات سفارشی، با ماشینی که سرعت آن قابل تنظیم است، ساخته می‌شود. مدت‌زمان ساختن هرقطعه، دارای توزیع نمایی است ومیانگین آن بین ۵ تا ۱۵ دقیقه قابل تنظیم است. هزینهٔ ساخت قطعه، بستگی به‌سرعت ماشین دارد. اگر میانگین زمان ساخت قطعه، x دقیقه باشد، هزینهٔ ساخت آن درهر دقیقه برابربا $300x^{-2}$ است.

خسارت دیرکـرد ساخت هر قطعه در دقیقه برابر با ۶۰۰ است. ورود قطعات به کارگاه بر اساس فرایند پواسون (با میانگین هـر ۱۸ دقیقه یک‌بار) است. سرعت بهینهٔ ماشین را حساب کنید.

۱۵. ایستگاه خدمت درمبدأ مختصات شکل زیرقراردارد. مختصات گوشه‌ها نیزنشان داده شده است. مشتریان در کل مساحت مـربـوطه، طبق توزیع یکنواخت، پراکنده شده‌اند. میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت تعیین کنید.



۱۶. درشکل زیر، با فرض پراکندگی یکنواخت مشتریان در سطح کل آن، میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت، که برمبدأ مختصات منطبق است، محاسبه کنید.



۱۷. کارگاهی به‌شکل‌مستطیل را درنظربگیرید که ابعادآن ۸۰ × ۵۰ متراست. می‌خواهیم چند انبار ابزار در این کارگاه بسازیم. محلهای مناسب برای ایجاد انبار، نقاط وسط ضلعهای مستطیل است. مشتریان انبار، تکنسینها و کارگران هستند، که درسطح کارگاه به‌طور یکنواخت پراکنده‌اند. هرمتقاضی ابزار به‌نزدیکترین انبار مراجعه می‌کند. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا انبار را درحالتهای زیرمحاسبه‌کنید:

الف. فقط یك انبار دروسط ضلع بزرگ مستطیل ایجاد شود.

ب. فقط یك انبار دروسط ضلع کوچك مستطیل ایجاد شود.

ج. دوانبار دروسط ضلعهای بزرگ مستطیل ایجاد شود.

د. دوانبار دروسط ضلعهای کوچك مستطیل ایجاد شود.

ه. یك انبار دروسط ضلع کوچك و یکی دروسط ضلع بزرگ ایجادشود.

و. چهارانبار دروسطهای اضلاع مستطیل ایجاد شود.

مرجعها

1. Cinlar, Erhan; *Introduction to Stochastic Process*, Printice Hall, New York, 1975.
2. Cooper, Robert B.: *Introduction to Queueing Theory*, 2nd edition, Elsevier North – Holland, New York, 1981
3. Gross, D. & C.M. Harris: *Fundamentals of Queueing*, 2nd edition, Wiley, New York, 1984.
4. Hillier, F.S. & G.J. Lieberman: *Introduction to Operations Research*, 4th ed., Holden – Day Inc., Oakland, 1986.
5. Hines, W. W. & D. C. Montgomery: *Probability & Statistics in Engineering & Management Science*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.
6. Karlin S. & H. Taylor: *First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
7. Kleinrock, L.: *Queueing System. Vol. I. Theory*, Wiley New York, 1975.
8. Kleinrock, L.: *Queueing Systems, Vol I: Theory*. Wiley, New York, 1975.
9. Newell, G. F.: *Applications of Queueing Theory*, 2nd ed., Chapman & Hall, London, 1982.
10. Parzen, E.: *Modern Probability Theory & its Application*, Wiley, New York, 1960.
11. Ross S. M.: *Applied Probability Models With Optimization*

Applications, Holden – Day, Inc., Sanfrancisco, 1970.
12. Ross, S. M.: Introdution to Probability Models, 3rd ed., Academic Press, New York, 1985.
13. White, J. A., J. W. Schimidt & G. K. Bennett: *Analysis of Queueing Systems*, Academic Press, New York, 1975.

واژه‌نامه

departure rate	آهنگ خروج
arrival rate	آهنگ ورود
Conditional probability	احتمال شرطی
Little's result	استنتاج لیتل
independent increment	افزایش مستقل
service pattern	الگوی خدمت‌دهی
balking	امتناع
expected value	امید ریاضی
conditional expectation	امید شرطی
standard deviation	انحراف معیار
firstin - firstout	به‌ترتیب
optimization	بهینه‌سازی
convulution	پیچش
independent events	پیشامدهای مستقل
dependent events	پیشامدهای وابسته
density function	تابع چگالی
probability distribution function	تابع توزیع احتمال
cumulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
joint distribution Function	تابع توزیع توأم

convex Function	تابع محدب
moment generation Function	تابع مولدگشتاور
approximation	تقریب
Erlangen distribution	توزیع ارلانگی
Bernoulli distribution	توزیع برنولی
poisson distribution	توزیع پواسون
marginal distribution	توزیع حاشیه‌ای
limiting distribution	توزیع حدی
binomial distribution	توزیع دوجمله‌ای
hyper_exponential distribution	توزیع فوق نمایی
deterministic distribution	توزیع قطعی
Gamma distribution	توزیع گاما
normal distribution	توزیع نرمال
exponential distribution	توزیع نمایی
geometric distribution	توزیع هندسی
uniform distribution	توزیع یکنواخت
customers population	جمعیت مشتریان بالقوه
busy cycle	چرخهٔ اشتغال سیستم
ergodic state	حالت ارگودیك
null recurrent state	حالت برگشت‌پذیر تهی
positive recurrent state	حالت برگشت‌پذیر مثبت
steady - state	حالت پایدار
absorbing state	حالت جاذب
state of the system	حالت سیستم
server	خدمت‌دهنده
bulk service	خدمت گروهی
busy period	دورهٔ اشتغال سیستم
waiting time	زمان انتظار
inter-arrival time	زمان بین دو ورود

continuous time Markov chain	زنجیرهٔ مارکوف بازمان پیوسته
imbeded Markov chain	زنجیرهٔ محاطی مارکوف
series	سری
networks of queue	شبکه‌های صف
queue, waiting line	صف
utilization factor	ضریب بهره‌وری
finite capacity	ظرفیت متناهی
infinite capacity	ظرفیت نامتناهی
poisson process	فرایند پواسون
pure birth process	فرایند تولد خالص
stochastic process	فرایند تصادفی
Markov process	فرایند مارکوف
bayes' formula	فرمول بیز
sample space	فضای نمونه
law of large numbers	قانون اعداد بزرگ
central limit theorem	قضیهٔ حد مرکزی
covariance	کوواریانس
transition rate matrix	ماتریس آهنگ گذار
transition matrix	ماتریس گذار
Markov matrix	ماتریس مارکوف
square matrix	ماتریس مربع
unit matrix	ماتریس یکه
independent random variables	متغیرهای تصادفی مستقل
countable set	مجموعهٔ قابل شمارش
polya model	مدل پولیا
exponential models	مدلهای نمایی

communication of states	مرتبط بودن حالتها
backward equation	معادلهٔ پسرو
forward equation	معادلهٔ پیشرو
difference equation	معادلهٔ تفاضلی
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
Kolmogorov equation	معادلهٔ کولموگروف
characteristic equation	معادلهٔ مشخصه
mean recurrence time	میانگین زمان برگشت
aperiodic	نادوره‌ای
system Discipline	نظم سیستم
rate diagram	نمودار آهنگ
variance	واریانس
convergence	همگرایی
homogenous	همگن