ستاد انقلاب فرهنگی
مرکز نشر دانشگاهی

ترجمهٔ عبدالحمید دادالله

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها

پ. ر. هالموس

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها

تألیف: پ. ر. هالموس

ترجمه: عبدالحمید دادالله

مرکز نشر دانشگاهی

فهرست

پیشگفتار مؤلف

همهٔ ریاضیدانان در این نکته اتفاق نظر دارند که هر ریاضیدانی باید قدری نظریهٔ مجموعه‌ها بداند، اما وقتی می‌خواهند این مقدار را تعیین کنند اختلاف نظرها شروع می‌شود. این کتاب نظر من است در این باب. هدف این کتاب این است که حقایق اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها را به دانشجوی مبتدی ریاضیات عالی بیاموزد و این کار را با کمترین قیل و قال فلسفی و صورتگرایی منطقی انجام دهد. دیدگاهی که در سراسر کتاب اختیار شده، دیدگاه کسی است که در آینده ریاضیدان خواهد شد و مشتاق است که به مطالعهٔ گروهها، انتگرالها یا بسلاها بپردازد. از این دیدگاه، مفاهیم و روشهای این کتاب برخی از همان ابزارهای متداول ریاضیات است، و متخصصان خبره چیز تازه‌ای در آن نخواهند یافت.

با اینکه ذکر منابع و ارجاعات، به شیوهٔ محققان، در چنین کتابی که صرفاً به تشریح موضوع اختصاص‌دارد بیجاست، اما دانشجویی که به نظریهٔ مجموعه‌ها، برای نفس موضوع، علاقه‌مند می‌شود باید بداند که این مبحث به آنچه در این کتاب آمده ختم نمی‌شود. کتاب *نظریهٔ مجموعه‌های* هاوسدرف[1] هنوز هم یکی از زیباترین منابع فاضلانه در این زمینه است، و *نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها* اثر سوپز[2] کتابی است بسیار خواندنی، با کتابشناسی جامع و امروزی، که اخیراً به مجموعهٔ آثاری که در این زمینه هست اضافه شده است.

در نظریهٔ مجموعه‌ها، واژه‌های «طبیعی» و «اصل موضوعی» دو واژهٔ متقابل‌اند. بهترین توصیفی که از روش ما در این کتاب می‌توان کرد این است که آن را نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها از دیدگاه طبیعی بنامیم: به این اعتبار اصل موضوعی است که چند اصل موضوع برای نظریهٔ مجموعه‌ها بیان شده و مبنای همهٔ برهانهای بعدی قرار گرفته است، و به این اعتبار طبیعی است که زبان و نمادهای آن همان زبان و نمادهای ریاضیات غیرصوری (و در عین حال صوری کردنی) معمولی است. دیدگاه طبیعی از جهت مهم دیگری نیز در این کتاب غلبه دارد: ما نظریهٔ مجموعه‌ها را مجموعه‌ای از واقعیات می‌دانیم که اصول موضوع چکیدهٔ مختصر و مفید آنهاست، و حال آنکه از دیدگاه اصل موضوعی رسمی، روابط منطقی بین اصول موضوع مختلف، در مرکز توجه و بررسی قرار دارند. در هندسه،

---

1. Hausdorff   2. Suppes

آن بررسی را کاملاً طبیعی می‌دانیم که کار خود را فقط با اعمال شهودی، از قبیل تا کردن کاغذ و منطبق کردن شکلها پیش می‌برد، و در قطب دیگر، بررسی اصل موضوعی صرف، بررسیی است که در آن به اصول موضوع هندسه‌های نااقلیدسی مختلف نیز به همان اندازه توجه می‌شود که به اصول موضوع هندسهٔ اقلیدسی. مشابه روش این کتاب در هندسه، این است که صرفاً یک مجموعهٔ معقول از اصول موضوع را فقط به قصد توصیف هندسهٔ اقلیدسی بررسی کنیم.

شاید بهتر می‌بود که به جای نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها، این کتاب را طرحی کلی از مبانی نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها بنامیم. واژهٔ «مبانی» به خواننده هشدار می‌دهد که همه چیز را در این کتاب نخواهد یافت، و «طرح کلی» به او هشدار می‌دهد که حتی آنچه بیان شده نیز ناقص است. سبک نگارش کتاب معمولاً آن قدر غیررسمی است که گاهی شکل محاوره می‌یابد. فقط معدودی از قضایا ثابت شده‌اند، و در مورد بیشتر موضوعات، چنانکه در درسهای توصیفی مرسوم است، به بیان قضیه و ارائهٔ طرحی کلی از برهان آن اکتفا شده است. بااینکه در این کتاب فقط معدودی تمرین هست که رسماً چنین عنوانی دارند، بخش اعظم کتاب چیزی جز یک رشتهٔ دراز از تمرینها و راهنماییهایی برای حل آنها نیست. خواننده باید همواره از خود بپرسد که آیا راه پی‌بردن از یک راهنمایی به راهنمایی بعدی را می‌داند یا نه، و بنابراین اگر سرعت خود را در مطالعه بسیار کمتر از حد معمول یافت نباید دلسرد شود.

غرض این نیست که بگوییم مطالب این کتاب بیش از اندازه دشوار یا عمیق است، حقیقت این است که مفاهیم آن بسیار انتزاعی‌اند و بنابراین خوکردن به آنها به صرف وقت نیاز دارد. اما یکی از بدیهیات ریاضی این است که هرچه دامنهٔ کاربرد قضیه‌ای وسیعتر باشد عمق آن کمتر است. کار دانشجو در یادگیری نظریهٔ مجموعه‌ها این است که در کلیات ناآشنا و اساساً کم عمق غوطه‌ور شود تا به جایی برسد که با این مفاهیم کاملاً آشنا شده بتواند آنها را بی‌هیچ تلاش آگاهانه‌ای به کار برد. به عبارت دیگر، نظریهٔ عمومی مجموعه‌ها در واقع چیز بدیهی و پیش پا افتاده‌ای است، اما اگر می‌خواهید ریاضیدان شوید باید آن را کمی بشناسید. و این «کم» همین است: آن را بخوانید، جزء وجود خود کرده فراموشش کنید!

پ. ر. هالموس

بخش ۱
اصل موضوع گسترش

یک گلهٔ گرگ، یک خوشهٔ انگور یا یک فوج کبوتر، مثالهایی هستند از مجموعه‌هایی از اشیا. از مفهوم ریاضی مجموعه می‌توان به عنوان اساسی برای تمامی ریاضیات امروزی استفاده کرد. هدف این کتاب کوچک عرضه کردن و پروردن خواص بنیادی مجموعه‌هاست. ضمناً برای پرهیز از یکنواختی اصطلاح، گاهی به جای مجموعه، دسته خواهیم گفت. واژهٔ «رده» نیز به همین معنی به کار می‌رود، ولی در این کار، مختصر خطری نهفته است؛ زیرا «رده» در برخی از نحوه‌های رهیافت به نظریهٔ مجموعه‌ها معنای فنی خاصی دارد. کمی بعد، دوباره مجال بازگشت به این مطلب را خواهیم یافت.

بحث ما یک چیز را شامل نمی‌شود و آن تعریف مجموعه است. وضع ما شبیه رهیافت آشنای اصل موضوعی به هندسهٔ مقدماتی است. آن رهیافت نیز تعریفی از نقطه و خط نمی‌دهد، بلکه به توصیف کارهایی می‌پردازد که با این مفاهیم می‌توان انجام داد. در شیوهٔ شبه اصل موضوعی که در اینجا در پیش گرفته‌ایم، فرض بر این است که خواننده درکی معمولی، انسانی، شهودی (و غالباً نادرست) از ماهیت مجموعه دارد و هدف از تشریح نظریه، توصیف برخی از انبوه کارهایی است که می‌توان به طور صحیح با مجموعه‌ها انجام داد.

مجموعه‌ها، آن‌گونه که معمولاً تصور می‌شوند، دارای عنصر یا عضو هستند. عضو یک مجموعه ممکن است یک گرگ، یک حبهٔ انگور و یا یک کبوتر باشد. دانستن این نکته که یک مجموعه نیز می‌تواند عضوی از مجموعه‌ای دیگر باشد مهم است. ریاضیات پر است از مثالهایی از مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها. مثلاً، خط مجموعه‌ای از نقاط است، مجموعهٔ همهٔ خطوط صفحه، یک مثال طبیعی از مجموعه‌ای از مجموعه‌ها(ی نقاط) است. هر چند این نکته که مجموعه‌ها می‌توانند به عنوان عنصر ظاهر شوند ممکن است شگفت‌آور باشد، ولی شگفت‌آورتر از آن این است که برای هدفهای ریاضی لازم نیست هیچ عنصر دیگری [بجز مجموعه‌ها] در نظر گرفته شود. بخصوص در این کتاب، ما منحصراً به مطالعهٔ

مجموعه‌ها، مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها، و برجهایی مشابه کـه گاهی نیز ارتفاع و پیچیدگی هراس‌آوری می‌یابند، خواهیم پرداخت و لاغیر. گـاهی، ممکن است از مجموعهٔ کلم‌پیچها، پادشاهان و امثال اینها، بـه عنوان مثال، صحبت کنیم، ولـی چنین مواردی را بایـد همواره فقط به عنوان تمثیلات روشنگر تعبیر کرد نه به عنوان بخشی از نظریه‌ای که داریم می‌سازیم.

مفهوم اصلی نظریهٔ مجموعه‌ها، کـه در بررسیهای کـاملاً اصل موضوعی عمده‌ترین مفهوم اولیه (تعریف نشده) است، مفهوم تعلق است. چنانچه x متعلق به A باشد (x عنصری از A باشد A شامل x باشد) خواهیم نوشت

$$x \in A.$$

کاربرد این شکل خاص حرف یونانی اپسیلون به عنوان علامت تعلق، به قدری معمول شده که تقریباً هر کاربرد دیگری از آن متروک گشته است. بیشتر نویسندگان $\in$ را در نظریهٔ مجموعه‌ها به کار می‌برنـد و در صورت نیاز بـه پنجمین حرف الفبای یونانی، از علامت ε استفاده می‌کنند.

شاید انحراف مختصری از بحث اصلی و تـأملی در بـاب آداب استفاده از حـروف الفبای لاتین در نظریهٔ مجموعه‌ها، خالی از فایده نباشد. استفاده از حروف کوچک و بزرگ به صورتی که در بند قبل دیدیم، هیچ دلیل الزام‌آوری ندارد. می‌تـوانستیم عباراتی چـون $x \in y$ و $A \in B$ هم بنویسیم (و غالباً نیز خـواهیم نوشت)، بـا این حال هـر وقت ممکن باشد، به طور غیررسمی، وضع یک مجموعه را در سلسله مراتب خاصی از مجموعه‌ها کـه مورد بررسی ماست، بـا این قرارداد مشخص خواهیم کـرد کـه حروف اول الفبا نشان‌دهندهٔ عناصر، و حروف آخر الفبا نمایشگر مجموعه‌های حاوی آنها هستند، همچنین، حـروف نسبتاً ساده مشخص‌کنندهٔ اعضا و حروف بزرگتر و پر زرق و برق‌تر نمایانگر مجموعـه‌های حاوی آنها خواهند بود. امثله: $x \in A$، $A \in X$، $X \in \mathcal{C}$.

یکی از روابط ممکن میان مجموعـه‌ها، کـه مقدماتی‌تر از تعلق است، تساوی است. تساوی دو مجموعهٔ A و B را همیشه با علامت آشنای

$$A = B$$

نمایش می‌دهیم و عدم تساوی A و B را نیز به صورت

$$A \neq B$$

می‌نویسیم.

اساسی‌ترین خاصیت تعلق، رابطه‌اش با تساوی است کـه می‌توان آن را بـه صورت زیر فرمولبندی کرد:

اصل موضوع گسترش. دو مجموعه با هم مساوی‌اند اگر و فقط اگر دارای عناصر یکسان باشند.

و یا در قالب عبارتی با جلوهٔ بیشتر ولی وضوح کمتر: یک مجموعه با گسترش خود مشخص می‌شود.

دانستن این مطلب مهم است که اصل موضوع گسترش، صرفاً خاصیتی نیست که در مورد تساوی ضرورت منطقی داشته باشد بلکه حکمی غیربدیهی دربارهٔ تعلق است. یکی از راههای درک این موضوع، توجه به وضع مشابهی است که در آن، اصلی مشابه اصل موضوع گسترش برقرار نیست. مثلاً فرض کنید به جای مجموعه‌ها، انسانها را مورد نظر قرار دهیم، و اگر x و A انسان باشند، هر وقت x جد A باشد، بنویسیم $x \in A$. (اجداد شخص عبارت‌اند از والدین او، والدین والدین او، والدین آنها و همین‌طور تا آخر.) اصل موضوع گسترش در اینجا می‌گوید که: هرگاه دو شخص با هم مساوی باشند، آنگاه اجدادشان یکی هستند (این، قسمت «فقط اگر» اصل است و درست است)، و نیز هرگاه دو شخص اجدادشان یکی باشند آنگاه با هم مساوی‌اند (این، قسمت «اگر» اصل است و غلط است).

هرگاه A و B دو مجموعه باشند و هر عضو A، عضو B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است، یا B شامل A است، و می‌نویسیم

$$A \subset B$$

یا

$$B \supset A.$$

از عبارت تعریف چنین برمی‌آید که هر مجموعه را باید مشمول خود پنداشت ($A \subset A$)؛ برای بیان این امر می‌گویند که شمول مجموعه‌ها انعکاسی است. (توجه کنید که، به همین معنی، تساوی نیز انعکاسی است.) چنانچه A و B دو مجموعه باشند به طوری که $A \subset B$ و $A \neq B$، از اصطلاح حقیقی (زیرمجموعهٔ حقیقی، شمول حقیقی) استفاده خواهد شد. هرگاه A، B، و C مجموعه‌هایی باشند که $A \subset B$ و $B \subset C$، آنگاه $A \subset C$. برای بیان این امر می‌گویند که شمول مجموعه‌ها متعدی است. (تساوی از این خاصیت نیز برخوردار است.).

هرگاه A و B دو مجموعه باشند به قسمی که $A \subset B$ و $B \subset A$، آنگاه عناصر A و B یکی هستند و در نتیجه، بنابر اصل موضوع گسترش، $A = B$. برای بیان این مطلب می‌گویند که شمول مجموعه‌ها پادمتقارن است. (در این مورد، شمول مجموعه‌ها رفتاری مغایر با تساوی دارد. تساوی متقارن است، به این معنی که هرگاه $A = B$، آنگاه لزوماً $B = A$.) در واقع اصل موضوع گسترش را می‌توان به این صورت، مجدداً فرمولبندی کرد: هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $A = B$ آن است که $A \subset B$ و $B \subset A$. به این دلیل، اثبات تساوی دو مجموعهٔ A و B تقریباً همیشه به دو بخش تقسیم می‌شود: اول نشان می‌دهیم که $A \subset B$ و بعد نشان می‌دهیم که $B \subset A$.

توجه داشته باشید که تعلق ($\in$) و شمول ($\subset$)، در واقع دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند. یکی از وجوه مهم اختلاف در بالا دیده می‌شود، و آن اینکه رابطهٔ شمول همیشه انعکاسی است در حالی که انعکاسی بودن تعلق به هیچ‌وجه معلوم نیست، یعنی: $A \subset A$ همیشه درست است ولی آیا $A \in A$ هیچگاه درست خواهد بود؟ مطمئناً این رابطه در

مورد هیچ مجموعهٔ معقولی کـه تا کنون دیده شده درست نیست. بـا استدلالی مشابه، توجه کنید کـه شمول متعدی است حال آنکـه تعلق چنین نیست. در این مـورد مثالهایی از زندگی روزمره، مثلاً تشکیلات بزرگـی کـه اعضایشان خـود سازمانهایی هستند، به فکـر خوانندهٔ مشتاق راه خواهد یافت.

بخش ۲
اصل موضوع تصریح

همهٔ اصول اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها، به استثنای اصل موضوع گسترش، به منظور تولید مجموعه‌های جدید از مجموعه‌های قبلی طرح شده‌اند. اولین و مهمترین این اصول مجموعه‌ساز، اجمالاً چنین می‌گوید: هر حکم معقولی دربارهٔ عناصر یک مجموعه، زیر-مجموعه‌ای از آن مجموعه را مشخص می‌کند، یعنی زیرمجموعهٔ متشکل از عناصری که آن حکم دربارهٔ آنها صادق است.

قبل از فرمولبندی دقیق این اصل، به یک مثال توجه می‌کنیم. فرض کنید A مجموعهٔ تمام مردان باشد. جملهٔ «x متأهل است» به ازای برخی عناصر x از A درست و به ازای برخی نادرست است. اصلی که در صدد نمایش آن هستیم، اصلی است که انتقال از مجموعهٔ مفروض A را به زیرمجموعه‌ای از A که توسط این جمله مشخص می‌شود (یعنی مجموعهٔ تمام مردان متأهل) توجیه می‌کند. به منظور نشان دادن نحوهٔ تولید این زیرمجموعه آن را معمولاً به صورت

$$\{x \in A : \text{است متأهل } x\}$$

نمایش می‌دهند.

همچنین

$$\{x \in A : \text{نیست متأهل } x\}$$

نمایش دهندهٔ مجموعهٔ تمام مردان مجرد است؛ و

$$\{x \in A : \text{است (ع)آدم ،} x \text{ پدر}\}$$

مجموعه‌ای است که فقط شامل دو عضو هابیل و قابیل است و

$$\{x \in A : \text{است هابیل پدر } x\}$$

مجموعه‌ای است که فقط شامل حضرت آدم(ع) است و لاغیر. هشدار: جعبه‌ای که فقط یک کلاه داخل آن است با خود آن کلاه یکی نیست، و همچنین آخرین مجموعه در فهرست مثالهای فوق را نباید با خود حضرت آدم اشتباه کرد. مشابه گرفتن مجموعه‌ها و جعبه‌ها،

نقاط ضعف بسیاری دارد، ولی گاهی تصویری روشنگر از موضوعات مورد بحث ارائه می‌دهد.

برای فرمولبندی عمومی و دقیق اصلی که زمینه‌ای برای مثالهای فوق باشد، چیزی کم داریم تعریف جمله است. این هم تعریفی عجولانه و غیرصوری: دو نوع اساسی جمله وجود دارد، یکی جمله‌هایی که بیان تعلق می‌کنند،

$$x \in A;$$

و دیگری جمله‌هایی که بیانگر تساوی‌اند،

$$A = B.$$

همهٔ جمله‌های دیگر، از این دو نوع جملهٔ بسیط، با استفادهٔ مکرر از عملگرهای متعارف منطقی، به دست می‌آیند و تنها شرط این کار رعایت وضوح و مختصری از قواعد دستور زبان است. جهت روشنتر (و طولانی‌تر) کردن تعریف، لازم است فهرستی از «عملگرهای متعارف منطقی» و قواعد دستور زبان نیز ضمیمهٔ تعریف شوند. فهرستی کافی (و در واقع بیش از حد نیاز) از عملگرهای منطقی شامل هفت عملگر زیر است:

و،
یا (به مفهوم «یا ... یا ... یا هر دو»)،
چنین نیست که،
اگر ... آنگاه ... (یا ایجاب می‌کند)،
اگر و فقط اگر،
... ی هست (یا وجود دارد) که،
برای هر.

قواعد جمله‌سازی را نیز به صورت زیر می‌توان توصیف کرد: (۱) عملگر «چنین نیست که» را قبل از یک جمله قرار دهید و نتیجه را بین دو پرانتز محصور کنید. (علت وجودی پرانتزها، در اینجا و از این به بعد، تضمین وضوح است. ضمناً توجه کنید که وجود آنها، ما را از دیگر علائم نقطه‌گذاری بی‌نیاز می‌کند. از آنجا که بلدرت از همهٔ پرانتزهایی که در تعریف جمله‌ها مورد نیاز است استفاده می‌شود، ما همواره آن مقدار از پرانتزها را که حذفشان باعث اشتباه نمی‌شود، حذف خواهیم کرد. در روش معمول ریاضی، که در این کتاب دنبال می‌شود، از انواع مختلف پرانتز، با اندازه‌ها و شکلهای گوناگون استفاده می‌شود، ولی غرض از این کار صرفاً تسهیل در خواندن است.) (۲) عملگرهای «و» یا «یا» یا «اگر و فقط اگر» را بین دو جمله قرار دهید و نتیجه را بین دو پرانتز محصور کنید. (۳) محلهای نقطه‌چین را در «اگر... آنگاه...» با دو جمله پر کنید و نتیجه را بین دو پرانتز محصور کنید. (۴) محل نقطه‌چین را در «... ی هست که» و یا «برای هر ...» با یک حرف پر کنید و به دنبال حاصل، یک جمله قرار دهید و نتیجه را بین دو پرانتز محصور کنید. (اگر حرف مزبور در این جمله وجود نداشته باشد، جای نگرانی نیست. طبق قراردادی

طبیعی و معمولی، مفهوم جملهٔ «yی هست که $(x \in A)$» همان مفهوم جملهٔ «$x \in A$» است؛ و اگر حرفی که به کار می‌بریم قبلاً در «. . .ی هست که» یـا «برای هـر . . .»های دیگری استفاده شده باشد باز جای هیچ نگـرانی نیست، به خاطر داشته باشید کـه «xی هست کـه $(x \in A)$» به همان مفهوم «yی هست که $(y \in A)$» است و از اینجا نتیجه می‌شود کـه با تغییر عاقلانهٔ علائم و حرف، همواره می‌توان از تداخل حروف جلوگیری کرد.)

اکنون می‌تـوانیم اصل عمدهٔ نظریـهٔ مجموعـه‌هـا را، کـه غالباً بـه نـام آلمانیش *Aussonderungsaxiom* خوانده می‌شود، فرمولبندی کنیم.

اصل موضوع تصریح. متناظر با هر مجموعهٔ A و هر شرط $S(x)$، مجموعـه‌ای چون B وجود دارد کـه اعضای آن دقیقاً آن عناصر x از A هستند کـه شرط $S(x)$ بـرای آنها صادق است.

در اینجا منظور از «شرط» همان جمله است. نماد $S(x)$ به منظور نشان دادن این است کـه حرف x در جملهٔ $S(x)$ آزاد است، یعنی x در جملهٔ $S(x)$ حداقل یک بار بدون معرفی شدن توسط یکی از دو عبارت «xی هست که» و یا «برای هر x» ظاهر شده است. از اصل گسترش مستقیماً نتیجه می‌گیریم که اصل موضوع تصریح، مجموعهٔ B را به طور یگانه تولید می‌کند. برای اینکه نشان دهند کـه مجموعهٔ B از مجموعهٔ A و $S(x)$ به دست آمـده است، مرسوم است که می‌نویسند

$$B = \{x \in A : S(x)\}.$$

به عنون کاربردی آموزنده و جالب از اصل موضوع تصریح، جملهٔ

چنین نیست که $(x \in x)$

را بـه عنوان $S(x)$ در نظر بگیریـد. راحت‌تر است کـه در اینجا و از این پس، بـه جای «چنین نیست که $(x \in A)$» بنویسیم «$x \notin A$» (و یـا «$x \in' A$»). با این نمادگذاری، نقش $S(x)$ حالا توسط

$$x \notin x$$

ارائه می‌شود. نتیجه می‌گیریم مجموعهٔ A هرچه باشد، اگر $B = \{x \in A : x \notin x\}$ آنگـاه برای هر y

(*) $y \in B$ اگر و فقط اگر $(y \in A,\ y \notin y)$

آیا ممکن است که $B \in A$؟ ذیلاً ثابت می‌کنیم که جواب منفی است. در واقع اگر $B \in A$ آنگاه یا $B \in B$ (که هرچند نامحتمل است ولـی معلوم نیست ناممکن باشد) و یـا $B \notin B$. اگر $B \in B$ در این صورت به موجب (*)، فرض $B \in A$ نتیجه می‌دهد $B \notin B$، که تناقض است، و اگر $B \notin B$ آنگاه، باز به موجب (*)، فرض $B \in A$ نتیجه می‌دهد $B \in B$، که این هـم تناقضی دیگر است. بدین طریق اثبات محال بودن $B \in A$ کامل می‌شود، بنابراین باید داشته باشیم $B \notin A$. جـالب‌ترین قسمت این نتیجه این است کـه چیزی وجـود دارد (یعنی مجموعهٔ B) که بـه مجموعهٔ A متعلق نیست. در بحث فـوق، مجموعـهٔ A مجموعهٔ کامـلاً

غیرمشخصی بود، به عبارت دیگر ما ثابت کرده‌ایم که

هیچ چیزی شامل همه چیز نیست؛

و یا چشمگیرتر از آن

مجموعهٔ جامع وجود ندارد.

«مجموعهٔ جامع» در اینجا به مفهوم «عالم سخن» به کار رفته است. یعنی مجموعهٔ جامع، در هر بحث خاص، مجموعهٔ تمام عناصری است که در بحث وارد می‌شوند.

در رهیافتهای قدیمیتر (ماقبل اصل موضوعی) به نظریهٔ مجموعه‌ها، وجود مجموعهٔ جامع مسلم شمرده می‌شد و استدلالی که در بند قبل از نظر گذشت به پارادکس راسل[1] معروف بود. نتیجهٔ اخلاقی اینکه همواره، و بخصوص در ریاضیات، «بی‌مایه فطیر است». برای مشخص کردن یک مجموعه کافی نیست که وردی بخوانیم (مثلاً جمله‌ای چون «$x \notin x$»)، بلکه لازم است مجموعه‌ای نیز در دست داشته باشیم که ورد را به اعضای آن مجموعه بدمیم.

---

1. Russell

بخش ۳
زوجهای نامرتب

تا اینجا می‌توان گفت که باد در غربال بیخته‌ایم. برای اینکه چیزی در غربال داشته باشیم، رسماً فرض می‌کنیم که

مجموعه‌ای وجود دارد.

چون ما بعداً فرض وجودی عمیقتر و مفیدتری را فرمولبندی خواهیم کرد، نقش این فرض موقتی است. یکی از نتایج این فرض به ظاهر بی‌آزار این است که مجموعه‌ای بی‌هیچ عضو وجود دارد. در واقع اگر A مجموعه‌ای باشد، اصل موضوع تصریح را با جملهٔ «$x \neq x$» (یا، هر جملهٔ همیشه غلط دیگر) در مورد A به کار می‌گیریم. نتیجه مجموعهٔ $\{x \in A : x \neq x\}$ است و واضح است که این مجموعه هیچ عضوی ندارد. اصل گسترش ایجاب می‌کند که فقط یک مجموعهٔ بدون عضو وجود داشته باشد. علامت معمول برای این مجموعه

$$\varnothing$$

است و این مجموعه، مجموعهٔ تهی خوانده می‌شود.

مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دیگر است، به عبارت دیگر، برای هر مجموعهٔ A، $\varnothing \subset A$. برای اثبات این مطلب، می‌توانیم به صورت زیر استدلال کنیم. باید ثابت شود که هر عضو $\varnothing$ به A تعلق دارد. چون $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، شرط خود بخود برقرار است. این استدلال درست است ولی شاید قانع کننده نباشد. چون این مورد نمونه‌ای از پدیده‌ای است که بارها با آن روبرو می‌شویم، یعنی جمله‌ای شرطی که به «انتفای مقدم» برقرار است، بد نیست که به خوانندهٔ کم تجربه تذکری دهیم. برای آنکه ثابت کنیم چیزی در مورد مجموعهٔ تهی صادق است، ثابت می‌کنیم که صادق نبودن آن محال است. مثلاً، چگونه ممکن است که رابطهٔ $\varnothing \subset A$ غلط باشد؟ فقط در صورتی که $\varnothing$ شامل عنصری باشد که به A متعلق نباشد. این امر محال است، زیرا $\varnothing$ اصلاً عنصری ندارد. نتیجه: $\varnothing \subset A$ غلط نیست و بنابراین برای هر مجموعهٔ A، $\varnothing \subset A$.

نظریهٔ مجموعه‌هایی که تا اینجا پرورده‌ایم هنوز چیز نسبتاً حقیری است، زیرا تنها چیزی که می‌دانیم این است که تنها یک مجموعه وجود دارد و آن هم تهی است. آیا به‌قدر کافی مجموعه وجود دارد که بتوان اطمینان یافت که هر مجموعه‌ای عضو مجموعهٔ دیگری است؟ آیا می‌توان گفت که به ازای هر دو مجموعه، مجموعهٔ سومی وجود دارد که شامل آن دو مجموعه است؟ در مورد هر سه، چهار و یا هر تعداد مجموعه چطور؟ به اصل مجموعه‌ساز جدیدی احتیاج داریم که پاسخگوی چنین سؤالاتی باشد و اصل زیر شروع خوبی است.

اصل موضوع زوج‌سازی. به‌ازای هر دو مجموعه، مجموعه‌ای وجود دارد که آن دو مجموعه به آن تعلق دارند.

توجه کنید که این اصل چیزی جز پاسخ مثبت به دومین سؤال بالا نیست. جهت رفع نگرانی، اجازه دهید عجالتاً خاطرنشان سازیم که در فوق از کلماتی چون «دو»، «سه»، و «چهار»، به عنوان مفاهیمی ریاضی که بعداً تعریف خواهیم کرد استفاده نشده است، بلکه در حال حاضر از چنین کلماتی صرفاً به عنوان کوته نوشت زبانی برای عبارت «چیزی و چیز دیگری»، که به دفعات مناسب تکرار شود، استفاده می‌کنیم. بنابراین، به طور مثال، اصل موضوع زوج‌سازی در شکل غیراختصاری خود، چنین می‌گوید که اگر a و b مجموعه‌هایی باشند، در این صورت مجموعه‌ای چون A وجود دارد به طوری که $a \in A$ و $b \in A$.

یکی از نتایج اصل موضوع زوج‌سازی (و در واقع فرمولبندی معادل دیگری برای آن) این است که به‌ازای هر دو مجموعه، مجموعه‌ای وجود دارد که فقط شامل آن دو مجموعه است و لاغیر. در واقع اگر a و b دو مجموعه باشند و A مجموعه‌ای باشد به طوری که $a \in A$ و $b \in A$، در این صورت اگر اصل موضوع تصریح را با جملهٔ «$x = a$ یا $x = b$» در مورد A به کار گیریم، نتیجه مجموعهٔ

$$\{x \in A : x = a \text{ یا } x = b\}$$

است که بوضوح فقط شامل a و b است. اصل موضوع گسترش ایجاب می‌کند که تنها یک مجموعه با چنین خاصیتی وجود داشته باشد. علامت معمول برای این مجموعه

$$\{a, b\}$$

است که زوج (یا برای تأکید در تفاوت این مفهوم با مفهومی که بعداً خواهیم داشت، زوج نامرتب) تشکیل شده از a و b نام دارد.

اگر موقتاً، جملهٔ «$x = a$ یا $x = b$» را با $S(x)$ نمایش دهیم، می‌توانیم اصل موضوع زوج‌سازی را بدین صورت بیان کنیم که مجموعه‌ای چون B وجود دارد به طوری که

$$x \in B \text{ اگر و فقط اگر } S(x) \qquad (*)$$

اصل موضوع تصریح، هنگامی که در مورد مجموعه‌ای چون A به‌کار رود، وجود مجموعه‌ای چون B را بیان می‌کند، به طوری که

$$x \in B \text{ اگر و فقط اگر } (x \in A \text{ و } S(x)) \qquad (**)$$

ارتباط بین (*) و (**)، مورد نمونه‌وار چیزی است که بارها رخ می‌دهد. همچنان که (*) حالت خاص کاذبی از (**) است، همهٔ اصول مجموعه‌ساز دیگر نیز حالات خاص کاذبی از اصل موضوع تصریح هستند. همهٔ آنها وجود مجموعه‌هایی را بیان می‌کنند که توسط یک شرط خاص مشخص می‌شوند؛ اگر قبلاً وجود مجموعه‌ای که شامل همهٔ عناصر مشخصی باشد معلوم باشد، در این صورت وجود مجموعه‌ای که فقط شامل آن عناصر باشد در واقع به عنوان حالت خاصی از اصل موضوع تصریح نتیجه می‌شود.

اگر a مجموعه‌ای باشد، می‌توان زوج نامرتب $\{a, a\}$ را تشکیل داد. این زوج نامرتب توسط

$$\{a\}$$

نمایش داده می‌شود و مجموعهٔ تک عضوی a نام دارد و توسط این گزاره که این مجموعه a را به عنوان تنها عضو شامل است، به طور یگانه مشخص می‌گردد. بنابراین، به طور مثال، $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ مجموعه‌های کاملاً متفاوتی هستند، اولی هیچ عضوی ندارد در حالی که دومی شامل عضو منحصر بفرد $\varnothing$ است. گفتن $a \in A$ معادل این است که بگوییم $\{a\} \subset A$.

اصل موضوع زوج‌سازی تضمین می‌کند که هر مجموعه، عضو مجموعه‌ای دیگر است و هر دو مجموعه توأماً عضو مجموعهٔ سومی هستند. (سؤالات متناظر در مورد «سه»، «چهار»، و یا تعداد بیشتری مجموعه را بعداً جواب خواهیم داد.) یک توضیح مناسب دیگر این است که از فرضیاتی که تا به حال کرده‌ایم در واقع می‌توان وجود مجموعه‌های بسیاری را استنباط کرد. مثلاً مجموعه‌های $\varnothing$، $\{\varnothing\}$، $\{\{\varnothing\}\}$، $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ و امثال اینها را در نظر بگیرید، همچنین زوجهایی چون $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ را که از هر دوتا از مجموعه‌های فوق تشکیل می‌شود، همچنین زوجهایی که از دو به دوی زوجهای فوق تشکیل می‌شود، و نیز زوجهایی که از یک مجموعهٔ تک عضوی و یکی از زوجهای بالا تشکیل می‌شود، و به همین طریق الی غیرالنهایه.

تمرین. آیا همهٔ مجموعه‌هایی که به این طریق به دست می‌آیند، از هم متمایزند؟

قبل از ادامهٔ مطالعه در نظریهٔ مجموعه‌ها، لحظه‌ای درنگ می‌کنیم تا در مورد مسئله‌ای که به نمادگذاری مربوط می‌شود بحث کنیم. به نظر طبیعی می‌آید که مجموعهٔ B را که توسط (*) توصیف شده با $\{x : S(x)\}$ نمایش دهیم؛ در حالت خاصی که در آنجا بررسی شد

$$\{x : x = b \text{ یا } x = a\} = \{a, b\}.$$

از این به بعد هر جا که مناسب و مجاز باشد، از این نمادگذاری استفاده خواهیم کرد. یعنی هرگاه $S(x)$ شرطی به روی x باشد، به طوری که xهایی که $S(x)$ مشخص می‌کند تشکیل یک مجموعه دهند، در این صورت می‌توان آن مجموعه را با

$$\{x : S(x)\}$$

نمایش داد. در حالتی که A یک مجموعه و $S(x)$ جملهٔ $(x \in A)$ باشد، مجازیم که

مجموعهٔ $\{x : S(x)\}$ را تشکیل دهیم و در واقع

$$\{x : x \in A\} = A.$$

اگر A یک مجموعه و $S(x)$ جملهٔ دلخواهی باشد، در این صورت مجازیم که مجموعهٔ $\{x : S(x) \text{ و } x \in A\}$ را تشکیل دهیم و این مجموعه همان مجموعهٔ $\{x \in A : S(x)\}$ است.
به عنوان مثالهایی دیگر، یادآوری می‌کنیم

$$\{x : x \neq x\} = \varnothing$$

و

$$\{x : x = a\} = \{a\}.$$

در حالاتی که $S(x)$ جملهٔ $(x \notin x)$ و یا $S(x)$ جملهٔ $(x = x)$ است، xهایی که مشخص می‌شوند، تشکیل یک مجموعه نمی‌دهند.

با وجود قاعدهٔ کلی «بی‌مایه فطیر است»، گفتن اینکه بعضی از مجموعه‌ها در واقع مجموعه نیستند و حتی هرگز نباید نامی از آنها برد، تا اندازه‌ای نامطبوع به نظر می‌رسد. بعضی از رهیافتها به نظریهٔ مجموعه‌ها، سعی در تعدیل این نقطهٔ ضعف دارند، بدین‌معنی که منظماً از این مجموعه‌های غیرقانونی استفاده می‌کنند، ولی آنها را مجموعه نمی‌نامند، نامی که قاعدتاً بر این‌گونه مجموعه‌ها می‌نهند «رده» است. توضیح دقیق ماهیت رده‌ها و نحوهٔ استفاده از آنها از لحاظ رهیافت فعلی ما، بیمورد است. اجمالاً، یک رده را می‌توان توسط یک شرط (جمله)، و حتی «تعمیم» یک شرط، مشخص کرد.

بخش ۴

اجتماعها و اشتراکها

اگر A و B دو مجموعه باشند، طبیعی است که گاهی بخواهیم اعضای آنها را در مجموعه‌ای فراگیر متحد کنیم. یکی از راههای توصیف چنین مجموعهٔ فراگیری این است که شرط کنیم این مجموعه همهٔ عناصری را که حداقل به یکی از دو عضو زوج $\{A, B\}$ تعلق دارند، شامل باشد. این نحوهٔ فرمولبندی، خود بخود نوعی تعمیم وسیع را به ذهن راه می‌دهد، بدین‌معنی که چنین ساختمانی، نه فقط در مورد یک زوج مجموعه، بلکه در مورد هر دستهٔ دلخواه از مجموعه‌ها قابل اعمال است. به عبارت دیگر، آنچه لازم داریم اصل مجموعه‌ساز زیر است.

اصل موضوع اجتماع. برای هر دسته از مجموعه‌ها، مجموعه‌ای وجود دارد که شامل همهٔ عناصری است که حداقل به یکی از مجموعه‌های دستهٔ مفروض متعلق باشند.

به زبان دیگر: برای هر دستهٔ $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای چون U وجود دارد به طوری که اگر Xی در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $x \in X$ آنگاه $x \in U$. (توجه کنید که «Xی» به‌همان مفهوم «حداقل یک X» است.)

مجموعهٔ فراگیر U که در بالا توصیف شد، ممکن است بیش از حد فراگیر باشد و شامل عناصری نیز باشد که به هیچیک از مجموعه‌های X در $\mathcal{C}$ متعلق نباشند. این مشکل بسهولت چاره‌پذیر است، کافی است که اصل موضوع تصریح را به کار بریم و مجموعهٔ

$$\{x \in U : x \in X \text{ که } \mathcal{C} \text{ هست در } X\text{ی}\}$$

را تشکیل دهیم. (شرطی که در اینجا به کار رفته، ترجمهٔ مصطلحی است از «Xی هست که ($X \in \mathcal{C}$ و $x \in X$)» که از نظر ریاضی پذیرفتنی‌تر است.) از این، نتیجه می‌گیریم که برای هر x، شرط لازم و کافی برای آنکه x متعلق به این مجموعه باشد این است که به ازای Xی در $\mathcal{C}$، x متعلق به X باشد. اگر نمادگذاری را تغییر دهیم و مجموعهٔ جدید را مجدداً

U بنامیم آنگاه

$$U = \{x : x \in X \text{ که } X \text{ در } \mathcal{C} \text{ هست}\}.$$

مجموعهٔ U اجتماع دستهٔ $\mathcal{C}$ از مجموعه‌ها خوانده می‌شود؛ توجه کنید که اصل گسترش، یگانگی این مجموعه را تضمین می‌کند. ساده‌ترین نماد برای U، که حتی در صورت استفاده محبوبیتی در مجامع ریاضی ندارد،

$$\bigcup \mathcal{C}$$

است. بیشتر ریاضیدانها چیزی چون

$$\bigcup \{X : X \in \mathcal{C}\}$$

یا

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$$

را ترجیح می‌دهند. برای موارد خاصی، علائم دیگری نیز وجود دارد که در موقع مقتضی، توصیف خواهند شد.

در حال حاضر، مطالعهٔ خود را در مورد نظریهٔ اجتماعها به ساده‌ترین حقایق منحصر می‌کنیم. ساده‌ترین این حقایق عبارت‌اند از

$$\bigcup \{X : X \in \varnothing\} = \varnothing,$$

و پس از آن

$$\bigcup \{X : X \in \{A\}\} = A.$$

با نمادگذاری خشک و ساده‌ای که در بالا ذکر شد، واقعیات فوق را به صورت

$$\bigcup \varnothing = \varnothing$$

و

$$\bigcup \{A\} = A$$

می‌توان بیان کرد. اثبات این روابط مستقیماً از تعاریف نتیجه می‌شود.

اجتماع یک زوج مجموعه (که به هر حال منشأ کل بحث بود) کمی عینی‌تر و ملموستر است. در این حالت از علامت مخصوصی استفاده می‌شود:

$$\bigcup \{X : X \in \{A, B\}\} = A \cup B.$$

از تعریف عمومی اجتماع نتیجه می‌گیریم که $x \in A \cup B$ اگر و فقط اگر x به A یا به B و یا به هر دو متعلق باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود که

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}.$$

اکنون به ذکر چند واقعیت در مورد اجتماع یک زوج مجموعه می‌پردازیم که بسهولت قابل اثبات‌اند:

$$A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{(جابجایی)،}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{(شرکت‌پذیری)،}$$

$$A \cup A = A \quad \text{(خودتوانی)،}$$

$$A \subset B \text{ اگر و فقط اگر } A \cup B = B.$$

هر دانشجوی ریاضی باید حداقل یک بار در عمر خود، این روابط را ثابت کند. اثبات این روابط بر خواص ابتدایی عملگر منطقی یا، که متناظر با اجتماع مجموعه‌هاست مبتنی است.

واقعیت دیگری که همچون روابط پیش ساده اما بسیار الهام بخش است، این است که

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}.$$

این رابطه، راه تعمیم مفهوم زوج را به ما الهام می‌دهد. می‌نویسیم

$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$$

خود معادله، طرف چپش را تعریف می‌کند. در طرف راست، جا دارد که حداقل یک جفت پرانتز وجود داشته باشد، ولی با توجه به قانون شرکت‌پذیری، حذف آنها به هیچ وجه باعث سوء تعبیر نمی‌شود. چون بسهولت می‌توان ثابت کرد که

$$\{a, b, c\} = \{x : x = a \text{ یا } x = b \text{ یا } x = c\}.$$

نتیجه می‌گیریم که برای هر سه مجموعهٔ دلخواه، مجموعه‌ای وجود دارد که شامل آنهاست و لاغیر. طبیعی است اگر این مجموعهٔ یگانه را سه‌تایی (نامرتب) تشکیل شده توسط این سه مجموعه بخوانیم. نحوهٔ تعمیم اصطلاحات و نمادگذاریی که بدین‌طریق معرفی شد، به موارد دیگر (چهارتایی و غیره) واضح است.

تشکیل اجتماع، موارد تشابه بسیاری با یک عمل دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها دارد. اگر A و B دو مجموعه باشند، اشتراک A و B، مجموعهٔ

$$A \cap B$$

است که به صورت

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$$

تعریف می‌شود. این تعریف نسبت به A و B متقارن است، اگر چه چنین به نظر نمی‌رسد. داریم

$$A \cap B = \{x \in B : x \in A\},$$

و در واقع، از آنجا که $x \in A \cap B$ اگر و فقط اگر x به هر دوی A و B متعلق باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}.$$

واقعیتهای اساسی مربوط به اشتراک و حتی نحوهٔ اثبات آنها، شبیه واقعیتهای اساسی مربوط به اجتماع است:

$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cap A = A,$$

$$A \subset B \text{ اگر و فقط اگر } A \cap B = A.$$

تعداد زوجهایی از مجموعه‌ها که اشتراک آنها تهی است آن‌قدر زیاد است که می‌توان نام خاصی بر این‌گونه مجموعه‌ها نهاد: اگر $A \cap B = \varnothing$، مجموعه‌های A و B را مجزا

می‌نامند. گاهی همین نام به یک دسته از مجموعه‌ها نیز اطلاق می‌شود، تا معلوم شود که هر دو مجموعهٔ متمایز از مجموعه‌های این دسته مجزا هستند؛ گاه نیز این‌گونه موارد را دستهٔ مجموعه‌های دو بدو مجزا می‌نامند.

دو واقعیت مفید زیر دربارهٔ اجتماع و اشتراک، هر دو عمل را توأماً دربردارند:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

این اتحادها را قوانین پخشی می‌گویند. به عنوان نمونه‌ای از نحوهٔ اثبات روابط در نظریهٔ مجموعه‌ها، رابطهٔ دوم را ثابت می‌کنیم. اگر x به طرف چپ تعلق داشته باشد، آنگاه یا x به A متعلق است و یا به هر دوی B و C. اگر x متعلق به A باشد آنگاه x هم به $A \cup B$ متعلق است و هم به $A \cup C$؛ و اگر x به هردوی B و C، تعلق داشته باشد، باز هم x هم به $A \cup B$ و هم به $A \cup C$ تعلق دارد. نتیجه می‌گیریم که x به هر حال به طرف راست تعلق دارد. پس ثابت می‌شود که طرف راست شامل طرف چپ است. برای اثبات اینکه طرف چپ نیز شامل طرف راست است، کافی است توجه کنیم که اگر x هم به $A \cup B$ و هم به $A \cup C$ متعلق باشد در این صورت x یا به A و یا به هر دوی B و C متعلق است.

تشکیل اشتراک دو مجموعهٔ A و B و یا به عبارت دیگر تشکیل اشتراک زوج $\{A, B\}$ از مجموعه‌ها، حالت خاصی از عملی است که بسیار کلی‌تر است. (از این لحاظ نیز نظریهٔ اشتراک از نظریهٔ اجتماع پیروی می‌کند.) وجود عمل عمومی اشتراک مبتنی بر این واقعیت است که برای هر دستهٔ غیرتهی از مجموعه‌ها، مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً شامل عناصری است که به هر یک از مجموعه‌های آن دسته تعلق دارند. به عبارت دیگر: برای هر دستهٔ غیرتهی $\mathcal{C}$، مجموعه‌ای چون V وجود دارد به طوری که $x \in V$ اگر و فقط اگر برای هر X در $\mathcal{C}$، $x \in X$. برای اثبات این حکم، فرض می‌کنیم A مجموعهٔ خاصی در $\mathcal{C}$ باشد (چون $\mathcal{C} \neq \varnothing$، این فرض موجه است) و می‌نویسیم

$$V = \{x \in A : x \in X \text{ ،}\mathcal{C} \text{ در } X \text{ برای هر}\}$$

(معنی شرط فوق این است که «برای هر X (اگر $X \in \mathcal{C}$ آنگاه $x \in X$).») وابستگی V به انتخاب دلخواه A، پنداری بیش نیست، در واقع

$$V = \{x : x \in X \text{ ،}\mathcal{C} \text{ در } X \text{ برای هر}\}.$$

مجموعهٔ V را اشتراک دستهٔ $\mathcal{C}$ از مجموعه‌ها می‌خوانند و اصل گسترش یگانگی آن را تضمین می‌کند. علامت معمول برای آن نیز شبیه علامت اجتماع است، یعنی به جای استفاده از علامت

$$\bigcap \mathcal{C},$$

که هر چند اعتراضی به آن نمی‌توان کرد ولی چندان رایج نیست، مجموعهٔ V را معمولاً توسط

$$\bigcap \{X : X \in \mathcal{C}\}$$

و یا

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X$$

نمایش می‌دهند.

تمرین: شرط لازم و کافی برای آنکه $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ این است که $C \subset A$. توجه کنید که این شرط مستقل از مجموعهٔ B است.

بخش ۵
مکملها و توانها

اگر A و B دو مجموعه باشند، تفاضل B از A که بیشتر به مکمل نسبی B در A معروف است، مجموعهٔ $A - B$ است که با رابطهٔ

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که در این تعریف، فرض $B \subset A$ لازم نیست؛ با این حال برای آنکه واقعیات اساسی مربوط به مکمل‌گیری را هرچه ساده‌تر ثبت کنیم، فرض می‌کنیم (فقط در این بخش) همهٔ مجموعه‌هایی که ذکر می‌شوند، زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای چون E هستند و همه مکملها (مگر در مواردی که تصریح شود) نسبت به این مجموعه تشکیل می‌شوند. در چنین مواردی (که بسیار رایج هستند)، ساده‌تر این است که به جای نوشتن مکرر مجموعهٔ زمینه، همواره آن را به خاطر داشته باشیم، این کار باعث تسهیل نمادگذاری می‌گردد. علامتی که معمولاً برای نشان دادن مکمل (موقتاً) مطلق (در مقابل مکمل نسبی) A به کار می‌رود، A' است. بر حسب این علامت، واقعیتهای اساسی مکمل‌گیری را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$(A')' = A,$$
$$\varnothing' = E, \quad E' = \varnothing,$$
$$A \cap A' = \varnothing, \quad A \cup A' = E,$$

$A \subset B$ اگر و فقط اگر $B' \subset A'$.

مهمترین احکام مربوط به مکملها، قوانینی است که به قوانین دمورگان[1] معروف‌اند:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

(بزودی خواهیم دید که قوانین دمورگان، نه تنها در مورد یک زوج مجموعه، بلکه در مورد اجتماع و اشتراک دسته‌های بزرگی از مجموعه‌ها نیز صادق‌اند.) این واقعیتها مستلزم این

---

1. De Morgan

است که قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها معمولاً به صورت زوج زوج باشند. اگـر در یک رابطهٔ شمولی، یا معادله‌ای که شامل اجتماع، اشتراک، و یا مکمل زیرمجموعه‌هایی از E است، به جای هر مجموعـه، مکمل آن و بـه جای اجتماع، اشتراک، و بالعکس، قـرار دهیم و همهٔ شمولها را معکوس کنیم، نتیجهٔ کار یک قضیهٔ دیگر خواهد بود. این واقعیت را گاهی اصل همزادی مجموعه‌ها می‌نامند.

حال به ذکر چند تمرین ساده در بارهٔ مکمل گیری می‌پردازیم.

$$A - B = A \cap B'.$$

$A - B = \varnothing$ اگر و فقط اگر $A \subset B$.

$$A - (A - B) = A \cap B.$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

$$A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap C').$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C') \subset A \cup B.$$

هرگاه A و B دو مجموعـه بـاشند، تفاضل متقارن A و B (یا جمع بولی آنها) مجموعـهٔ $A + B$ است که به صورت

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

تـعـریف مـی‌شود. این عمل جابجـایـی ($A + B = B + A$) و شرکت‌پـــذیـر ($(A + (B + C) = (A + B) + C)$) است و همچنین $A + \varnothing = A$ و $A + A = \varnothing$.

شاید حالا وقت آن باشد که به یک قسمت بدیهی نظریهٔ اشتراک کـه گـاهی باعث سردرگمی می‌شود، نظم دهیم. برای شروع، به خاطر بیاورید کـه اشتراک، تنها برای دسته‌های غیرتهی از مجموعـه‌ها تعریف شد، علت این است کـه به کـار بردن همان رهیافت در مورد دستهٔ تهی، هیچ مجموعه‌ای را تعریف نمی‌کند. چه xهایی توسط جملهٔ

برای هر X در $\varnothing$، $x \in X$

مشخص می‌شونـد؟ طبق معمول سؤالهای مـربوط به $\varnothing$، صورت منفی سؤال را ساده‌تـر می‌توان جواب داد: چه xهایی در شرط مذکور صدق نمی‌کنند؟ اگر برای هر X در $\varnothing$، $x \in X$ درست نباشد، در این صورت باید Xی در $\varnothing$ وجود داشته باشد به طوری کـه $x \notin X$. ولی چون اصلاً هیچ Xی در $\varnothing$ وجود ندارد، چنین امری محال است. نتیجه: هیچ x ی نیست که نتواند در شرط مذکور صدق کند و یـا، به طور معادل، هر xی در آن شرط صدق می‌کند. به عبارت دیگر، xهایی کـه شرط مذکور مشخص می‌کند، شامل همهٔ اعضای مجموعهٔ جامع (که وجود ندارد) است. هیچ مسئلهٔ عمیقی در اینجا مطـرح نیست؛ اینکه ما، فقط به این دلیل که در جایی از کارمان ممکن است مجموعـه‌ای تهی از کـار درآیـد، دائم مجبور باشیم قید و استثنا قائل شویم، اسباب دردسر است. اما چه کار می‌توان کرد؟ زندگی است دیگر.

اگر، چنانکه موقتاً توافق کـرده‌ایم، تـوجه خـود را تنها بـه زیرمجموعه‌هـای یک مجموعهٔ مشخص E معطوف داریم، به نظر می‌رسد که حالت نامطلوبی که در بند قبلی مطرح شد، برطرف می‌شود. نکته این است که در این حالت می‌تـوانیم اشتراک دستهٔ $\mathcal{C}$ (از زیرمجموعه‌های E) را به صورت مجموعهٔ

$$\{x \in E : x \in X \text{ ، } \mathcal{C} \text{ در } X \text{ برای هر }\}$$

تعریف کنیم. این کار به هیچ‌وجه جنبهٔ انقلابی ندارد، زیرا در مورد هر دستهٔ غیرتهی از مجموعه‌ها، تعریف جدید با تعریف قبلی توافق دارد. تفاوت در نحوهٔ برخورد دو تعریف با دستهٔ تهی است؛ طبق تعریف جدید $\bigcap_{X \in \emptyset} X$ مساوی E است. (در مورد کدام عضو x از E، ممکن است، شرط «برای هر X در $\emptyset$، $x \in X$» درست نباشد؟) تفاوت صرفاً یک مسئلهٔ زبانی است. با اندکی تعمق معلوم می‌شود تعریف جدیدی که برای اشتراک دستهٔ $\mathcal{C}$ از زیر مجموعه‌های E ارائه شد، در واقع همان تعریف قدیمی در مورد اشتراک دستهٔ $\mathcal{C} \cup \{E\}$ است و اشتراک اخیر هرگز تهی نیست.

تاکنون زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ E را مورد بررسی قرار داده‌ایم؛ آیا خود این زیرمجموعه‌ها تشکیل یک مجموعه می‌دهند؟ اصل زیر تضمین می‌کند که جواب مثبت است.

اصل موضوع توانها. برای هر مجموعه، دسته‌ای از مجموعه‌ها وجود دارد که (در میان اعضای خود) شامل همهٔ زیرمجموعه‌های آن مجموعهٔ مفروض است.

به عبارت دیگر، اگر E یک مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ای (دسته‌ای) چون $\mathcal{P}$ وجود دارد به طوری که اگر $X \subset E$ آنگاه $X \in \mathcal{P}$.

مجموعهٔ $\mathcal{P}$ که در بالا توصیف شد، ممکن است بیش از حد مطلوب بزرگ باشد و بجز زیرمجموعه‌های E شامل عناصر دیگری نیز باشد. این مشکل بسهولت علاج‌پذیر است؛ کافی است اصل موضوع تصریح را به‌کار گیریم و مجموعهٔ $\{X \in \mathcal{P} : X \subset E\}$ را تشکیل دهیم. (به خاطر بیاورید که «$X \subset E$» همان چیزی را می‌گوید که «برای هر x (اگر $x \in X$ آنگاه $x \in E$)».) از آنجا که برای هر X، شرط لازم و کافی برای آنکه X متعلق به این مجموعه باشد این است که X زیرمجموعهٔ E باشد، نتیجه می‌گیریم که اگر نمادگذاری را تغییر دهیم و این مجموعه را همچنان $\mathcal{P}$ بنامیم، آنگاه

$$\mathcal{P} = \{X : X \subset E\}.$$

مجموعهٔ $\mathcal{P}$، مجموعهٔ توانی E نام دارد و اصل موضوع گسترش، یگانگی آن را تضمین می‌کند. وابستگی $\mathcal{P}$ را به E با نوشتن $\mathcal{P}(E)$ به جای $\mathcal{P}$ نمایش می‌دهند.

چون مجموعهٔ $\mathcal{P}(E)$ در مقایسه با E بسیار بزرگ است، ارائهٔ مثال ساده نیست. اگر $E = \emptyset$، وضع به اندازهٔ کافی روشن است: مجموعهٔ $\mathcal{P}(\emptyset)$ مجموعهٔ تک عضوی $\{\emptyset\}$ است. مجموعهٔ توانی مجموعه‌های تک عضوی و زوجهای نامرتب را نیز بسادگی می‌توان توصیف کرد؛ داریم

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

و

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

مجموعهٔ توانی یک سه‌تایی نامرتب، شامل هشت عضو است. خواننده احتمالاً می‌تواند حکم کلی را که شامل همهٔ این احکام می‌شود حدس بزند (و بدین وسیله از او اثبات این حکم را می‌خواهیم): مجموعهٔ توانی یک مجموعهٔ متناهی با، مثلاً، n عضو دارای 2^n عضو

است. (البته مفاهیمی چون «متناهی» و «۲"» هنوز برای ما رسماً معتبر نیستند، ولی این امر نباید مانع توافق غیررسمی در مورد معنای آنها بشود.) قرار گرفتن n به عنوان توان (n-امین توان ۲) تا حدودی بیان می‌کند که چرا مجموعهٔ توانی به این نام نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{C}$ دسته‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ E باشد (یعنی $\mathcal{C}$ یک زیردستهٔ $\mathcal{P}(E)$ باشد)، در این صورت می‌نویسیم

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X' \in \mathcal{C}\}.$$

(برای اطمینان از اینکه شرطی که در تعریف به کار گرفته شد، یک جمله به معنی دقیقاً فنی کلمه است، باید آن را به صورتی شبیه عبارت زیر بازنویسی کرد:

Yی هست که [$Y \in \mathcal{C}$ و برای هر x ($x \in X$ اگر و فقط اگر ($x \in E$ و $x \notin Y$))].

معمولاً در مواقعی که بخواهیم علاوه بر مفاهیم اولیهٔ منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها از کوتاهنوشتهای تعریف شده نیز استفاده کنیم، از اینگونه توضیحات می‌دهیم. در واقع چنین ترجمه‌ای چندان نیازمند هوش سرشار نیست و ما غالباً از آن صرف‌نظر می‌کنیم.) معمولاً، اجتماع و اشتراک دستهٔ $\mathcal{D}$ با علائم

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X' \quad \text{و} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X'$$

نمایش داده می‌شوند. برحسب این نمادگذاری، صورت کلی قوانین دمورگان چنین می‌شود:

$$\Big(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\Big)' = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X'$$

و

$$\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\Big)' = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X'.$$

اثبات این اتحادها، مستقیماً از تعاریف مربوطه نتیجه می‌شود.

تمرین. ثابت کنید که

$\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$ و $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

این احکام را می‌توان به صورت

$$\bigcap_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{X \in \mathcal{C}} X\Big)$$

و

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}\Big(\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X\Big)$$

تعمیم داد. برای نمادگذاریی که این تعمیمها توسط آن ارائه شده‌اند، تفسیر قابل قبولی بیابید و سپس آنها را ثابت کنید. دو واقعیت ابتدائی دیگر عبارت‌اند از

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(E)} X = \varnothing,$$

اگر $E \subset F$ آنگاه $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.

در مورد جابجایی دو عملگر $\mathcal{P}$ و $\bigcup$ نکتهٔ عجیبی وجود دارد: نشان دهید که E همیشه مساوی $\bigcup_{X \in \mathcal{P}(E)} X$ است (یعنی $E = \bigcup \mathcal{P}(E)$)، ولی نتیجهٔ به کار گرفتن $\mathcal{P}$ و $\bigcup$ روی E به ترتیب عکس، مجموعه‌ای است که E زیرمجموعهٔ آن، و معمولاً زیرمجموعهٔ حقیقی آن، است.

بخش ۶
زوجهای مرتب

اینکه اعضای مجموعهٔ A را به ترتیب خاصی مرتب کنیم، یعنی چه؟ برای مثال فرض کنید مجموعهٔ A، چهارتایی $\{a, b, c, d\}$ است و می‌خواهیم این اعضا را با ترتیب

$$c\ b\ d\ a$$

در نظر بگیریم. حتی بدون تعریف دقیقی از معنی این کار، می‌توانیم آن را طوری انجام دهیم که از لحاظ نظریهٔ مجموعه‌ها معقول باشد. مثلاً، می‌توانیم در هر نقطهٔ خاص از این ترتیب، مجموعهٔ تمام اعضایی را که در آن نقطه و یا قبل از آن نقطه قرار دارند، در نظر بگیریم و به این طریق مجموعه‌های

$$\{c\}, \{c, b\}, \{c, b, d\}, \{c, b, d, a\}$$

را به دست بیاوریم. سپس می‌توانیم این کار را ادامه دهیم و مجموعهٔ (و یا اگر به نظر مناسب‌تر می‌آید، دستهٔ)

$$\mathcal{C} = \{\{a, b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{c\}\}$$

را که دقیقاً همان مجموعه‌ها را به عنوان عضو داراست، در نظر بگیریم. به منظور تأکید بر این نکته که با مفهوم شهودی و احتمالاً غیرروشن ترتیب، موفق به تولید چیزی ساده و استوار، یعنی مجموعهٔ بی‌پیرایه و سادهٔ $\mathcal{C}$ گشته‌ایم، عناصر $\mathcal{C}$ و اعضای این عناصر، در بالا، به صورتی آشفته معرفی شده‌اند. (خوانندهٔ آشنا به کار لغت‌نویسی شاید بتواند به وجود روشی در ورای این اغتشاش پی برد.)

اجازه دهید برای مدتی وانمود کنیم که معنی ترتیب را می‌دانیم. فرض کنید که با نگاه اجمالی و عجولانه‌ای به آنچه در بند قبل آمد، تنها چیزی که می‌توانیم به دست آوریم مجموعهٔ $\mathcal{C}$ باشد؛ آیا می‌توانیم با استفاده از این مجموعه به ترتیبی که منشأ وجود آن است پی ببریم؟ بسهولت می‌بینیم که جواب مثبت است. اعضای $\mathcal{C}$ را (که خود مجموعه هستند) مورد آزمایش قرار می‌دهیم، تا آن عضوی را که زیرمجموعهٔ همهٔ اعضای دیگر است پیدا کنیم، چون $\{c\}$ این شرط را برمی‌آورد (و هیچ عضو دیگری قادر به برآوردن آن نیست)،

می‌فهمیم که c باید اولین عضو باشد. سپس دنبال کوچکترین عضو بعدی $\mathcal{C}$، یعنی عضوی که زیرمجموعهٔ همهٔ اعضای باقیمانده در $\mathcal{C}$، پس از خروج $\{c\}$، باشد می‌گردیم، چون $\{b, c\}$ این شرط را برمی‌آورد (و هیچ عضو دیگری قادر به برآوردن آن نیست)، می‌فهمیم که b باید دومین عضو باشد. با ادامه دادن این روش (فقط دو قدم دیگر لازم است)، از مجموعهٔ $\mathcal{C}$ به همان ترتیب داده شده برای مجموعهٔ A می‌رسیم.

نتیجهٔ اخلاقی اینکه ممکن است معنی دقیق مرتب کردن اعضای مجموعهٔ A را ندانیم، ولی می‌توانیم به هر ترتیب روی A، مجموعه‌ای چون $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های A را به طریقی نسبت دهیم که ترتیب اولیه به طور یگانه از مجموعهٔ $\mathcal{C}$ به دست آید. (یک تمرین نسبتاً مشکل: یک مشخصهٔ ذاتی مجموعه‌هایی از زیرمجموعه‌های A را که با ترتیب خاصی از اعضای A متناظرند، پیدا کنید. چون «ترتیب» هنوز برای ما هیچ‌گونه معنی رسمی ندارد، کل سؤال رسماً بی‌معنی است. ادامهٔ بحث، وابسته به حل این تمرین نیست، ولی خواننده در تلاش برای یافتن پاسخ، درس با ارزشی خواهد آموخت.) در فوق، گذر از یک ترتیب اعضای A به مجموعهٔ $\mathcal{C}$ و بالعکس، برای یک چهارتایی تشریح شد؛ در مورد یک زوج، همه چیز حداقل دو چندان ساده‌تر می‌شود. اگر $A = \{a, b\}$ و اگر در ترتیب مورد نظر، a اولین عضو باشد، در این صورت $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$؛ اگر b اولین عضو باشد، آنگاه $\mathcal{C} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$.

زوج مرتب a و b، که a اولین مؤلفه و b دومین مؤلفهٔ آن باشد، مجموعهٔ (a, b) است که به صورت

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

تعریف می‌شود. هرقدر هم انگیزهٔ این تعریف قانع کننده باشد، هنوز باید ثابت کنیم که نتیجه واجد آن خاصیت اصلیی است که یک زوج مرتب باید داشته باشد تا مستحق این نام شود. باید ثابت کنیم که هرگاه (a, b) و (x, y) دو زوج مرتب باشند و اگر $(a, b) = (x, y)$ آنگاه $a = x$ و $b = y$. برای اثبات، ابتدا توجه می‌کنیم که اگر اتفاقاً a و b مساوی باشند، در این صورت زوج مرتب (a, b)، همان مجموعهٔ تک عضوی $\{\{a\}\}$ است. بعکس، اگر (a, b) یک مجموعهٔ تک عضوی باشد، خواهیم داشت $\{a\} = \{a, b\}$، بنابراین $b \in \{a\}$ و در نتیجه $a = b$. حال فرض کنید $(a, b) = (x, y)$. اگر $a = b$، آنگاه (a, b) و (x, y)، هر دو مجموعه‌های تک عضوی خواهند بود و در نتیجه $x = y$؛ از آنجا که $\{x\} \in (a, b)$ و $\{a\} \in (x, y)$، نتیجه می‌گیریم که a، b، x و y، هر چهارتا، با هم مساوی‌اند. اگر $a \neq b$، آنگاه (a, b) و (x, y)، هر یک دقیقاً شامل یک مجموعهٔ تک عضوی است که بترتیب $\{a\}$ و $\{x\}$ هستند. و نتیجتاً $a = x$. چون در این حالت (a, b) و (x, y)، هر یک دقیقاً شامل یک زوج نامرتب (که تک عضوی نیست) نیز می‌باشد که بترتیب $\{a, b\}$ و $\{x, y\}$ است نتیجه می‌شود $\{a, b\} = \{x, y\}$، و بنابراین، بخصوص $b \in \{x, y\}$. چون b نمی‌تواند مساوی x باشد (زیرا در این صورت خواهیم داشت $a = x$ و $x = b$ و در نتیجه $a = b$) پس باید داشته باشیم $b = y$ و اثبات کامل است.

اگر A و B دو مجموعه باشند، آیا مجموعه‌ای شامل همه زوجهای مرتب (a, b) وجود دارد به طوری که a در A و b در B باشد؟ بسهولت می‌توان دید که پاسخ مثبت است. در واقع اگر $a \in A$ و $b \in B$، آنگاه $\{a\} \subset A$ و $\{b\} \subset B$ و بنابراین $\{a, b\} \subset A \cup B$. چون علاوه براین $\{a\} \subset A \cup B$، نتیجه می‌گیریم که $\{a\}$ و $\{a, b\}$ هر دو عضو $\mathcal{P}(A \cup B)$ هستند. این امر ایجاب می‌کند که $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(A \cup B)$، و بنابراین عضوی از $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ باشد. به عبارت دیگر، هرگاه $a \in A$ و $b \in B$، آنگاه $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. به‌محض دانستن این موضوع، می‌توان بسادگی اصل موضوع تصریح و اصل موضوع گسترش را به کار گرفت و مجموعهٔ یگانهٔ $A \times B$ را به دست آورد که دقیقاً از زوجهای مرتب (a, b) به قسمی که $a \in A$ و $b \in B$ تشکیل یافته است. این مجموعه، حاصلضرب دکارتی A و B نامیده می‌شود و چنین مشخص می‌شود

$$A \times B = \{x : x = (a, b) \text{ که به طوری هست } a \text{ یی در } A \text{ و } b \text{ یی در } B\}.$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه، مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است (یعنی، مجموعه‌ای است که هر یک از اعضایش زوج مرتب است)، هر زیرمجموعهٔ حاصلضربی دکارتی نیز چنین است. دانستن صحت عکس این قضیه نیز از لحاظ فنی حائز اهمیت است: هرمجموعه‌ای از زوجهای مرتب، زیرمجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی دو مجموعه است. به عبارت دیگر، اگر R مجموعه‌ای باشد که هر یک از اعضایش زوج مرتب باشد، آنگاه دو مجموعهٔ A و B وجود دارند به طوری که $R \subset A \times B$. اثبات این مطلب ساده است. فرض کنید $x \in R$، در نتیجه، a یی و b یی هست که $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. مسئله بیرون آوردن a و b از داخل آکولادهاست. چون اعضای R مجموعه هستند، می‌توانیم اجتماع این اعضا را تشکیل دهیم، و چون x یکی از این مجموعه‌هاست، اعضای x به این اجتماع تعلق دارند. چون $\{a, b\}$ یکی از اعضای x است، می‌توانیم، برحسب علامت‌گذاریی که قبلاً آن را خشک دانستیم، بنویسیم $\{a, b\} \in \bigcup R$. یک جفت از آکولادها حذف شد؛ اکنون همین کار را مجدداً برای حذف جفت دیگر آکولادها انجام می‌دهیم. بدین منظور اجتماع مجموعه‌های عضو $\bigcup R$ را تشکیل می‌دهیم. چون $\{a, b\}$ یکی از این مجموعه‌هاست، نتیجه می‌گیریم که اعضای $\{a, b\}$ به این اجتماع تعلق دارند و بنابراین a و b هر دو متعلق به $\bigcup \bigcup R$ هستند. و این به وعده‌ای که در بالا دادیم جامه عمل می‌پوشاند. به منظور نمایش R به صورت زیرمجموعه‌ای از یک $A \times B$، می‌توانیم هر دوی A و B را همان $\bigcup \bigcup R$ در نظر بگیریم. اغلب بهتر است که A و B را تا حد امکان کوچک اختیار کنیم. برای انجام این کار، کافی است اصل موضوع تصریح را به کار گیریم و مجموعه‌های

$$A = \{a : ((a, b) \in R) \text{ که هست } b \text{ یی}\}$$

$$B = \{b : ((a, b) \in R) \text{ که هست } a \text{ یی}\}$$

را تعریف کنیم. این مجموعه‌ها، بترتیب، تصویر R بر روی مختص اول و دوم نامیده می‌شوند. با تمام اهمیتی که امروزه نظریهٔ مجموعه‌ها دارد، در آغاز، بعضی از محققین آن را نوعی بیماری تلقی می‌کردند و امیدوار بودند که ریاضیات بزودی از این بیماری نجات

یابد. به همین دلیل، بسیاری از بررسیهای نظریهٔ مجموعه‌ها بیمارگونه نامیده شدند، و این اصطلاح، که هنوز در عرف ریاضی متداول است، معمولاً به چیزی اطلاق می‌شود که مقبول گوینده نیست. تعریف صریح زوج مرتب، $(a,b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$، غالباً به عنوان بخشی از نظریهٔ بیمارگونهٔ مجموعه‌ها تنزل مقام می‌یابد. برای رضایت کسانی که معتقدند این تعریف واقعاً مستحق چنین عنوانی است، توجه می‌دهیم که این تعریف، کار خود را انجام داده است و از این به بعد هرگز مورد استفادهٔ مجدد ما قرار نخواهد گرفت. آنچه باید بدانیم این است که زوجهای مرتب توسط مؤلفه‌های اول و دوم خود مشخص می‌شوند و خود نیز به طور یگانه این دو مؤلفه را معین می‌کنند، می‌توانیم حاصلضرب دکارتی را تشکیل دهیم، و همچنین هرمجموعه از زوجهای مرتب زیرمجموعهٔ یک حاصلضرب دکارتی است، حال مهم نیست که از چه راهی به این نتایج می‌رسیم.

پی بردن به سرچشمهٔ بی‌اعتمادی و شکی که بسیاری از ریاضیدانها در مورد تعریف صریح زوج مرتب دارند، کار ساده‌ای است. اشکال در این نیست که چیزی را غلط گفته یا فراموش کرده‌ایم؛ خواص عمدهٔ مفهومی که ما تعریف کرده‌ایم همگی درست‌اند (آنچنان که شهود می‌طلبد) و هیچیک از خواص درست را هم از قلم نینداخته‌ایم. اشکال در این است که این مفهوم دارای بعضی خواص نامربوط نیز هست که عارضی و گیج کننده‌اند. قضیهٔ $(a, b) = (x, y)$ اگر و فقط اگر $a = x$ و $b = y$، از نوع چیزهایی است که انتظار داریم در مورد زوجهای مرتب بیاموزیم. از طرف دیگر، این امر که $\{a, b\} \in (a, b)$، بیش از آنکه از خواص ذاتی مفهوم باشد، از جمله خواص عجیب و غریب تعریف است.

گرچه اتهام تصنعی بودن تعریف وارد است، ولی استفاده از آن به صرفه‌جویی در مفاهیم می‌ارزد. می‌توانستیم مفهوم زوج مرتب را به عنوان یکی دیگر از مفاهیم اولیه معرفی کنیم و به طریق اصل موضوعی آن را از همهٔ خواص درست، بی‌کم و بیش، برخوردار سازیم. در بعضی از نظریه‌ها، این کار انجام می‌گیرد. ریاضیدان در به خاطر سپردن چند اصل موضوع اضافی و فراموش کردن چند امر عارضی مخیر است. روشن است که انتخاب یکی از این دو به سلیقهٔ او بستگی دارد. این نوع انتخابها غالباً در ریاضیات پیش می‌آید؛ به عنوان مثال، در همین کتاب، ما در مورد تعاریف انواع مختلف عدد مجدداً با آنها مواجه خواهیم شد.

تمرین. اگر A، B، X، و Y مجموعه‌های دلخواهی باشند، آنگاه

$$(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X),$$
$$(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y),$$
$$(A - B) \times X = (A \times X) - (B \times X).$$

اگر $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$ آنگاه $A \times B = \varnothing$، و بالعکس. اگر $A \subset X$ و $B \subset Y$ آنگاه $A \times B \subset X \times Y$، و (به شرط اینکه $A \times B \neq \varnothing$) بالعکس.

بخش ۷
رابطه‌ها

با استفاده از زوجهای مرتب، می‌توانیم نظریهٔ ریاضی رابطه‌ها را به زبان نظریهٔ مجموعه‌ها فرمولبندی کنیم. منظور ما از رابطه، چیزی شبیه ازدواج (بین مردان و زنان) یا تعلق (بین اعضا و مجموعه‌ها) است. به بیان صریح‌تر، آنچه که ما آن را رابطه خواهیم خواند، گاهی رابطهٔ دوتایی نامیده می‌شود. یک مثال از رابطهٔ سه‌تایی، پدر و مادر کسی بودن در میان انسانهاست (آدم و حوا پدر و مادر قابیل هستند). در این کتاب، فرصت بررسی نظریهٔ روابط سه‌تایی، چهارتایی و یا روابط پیچیده‌تر را نخواهیم یافت.

با بررسی رابطهٔ مشخصی، چون ازدواج، ممکن است وسوسه شویم که زوجهای مرتب معینی را در نظر بگیریم، یعنی زوجهایی را که در آن x یک مرد و y یک زن است و x با y ازدواج کرده است. هنوز تعریف مفهوم عمومی رابطه را ندیده‌ایم، ولی به نظر قابل قبول می‌رسد که هر رابطه‌ای، درست مانند مثال ازدواج، باید به طور منحصر به‌فرد مجموعهٔ زوجهای مرتبی را که اولین مؤلفهٔ آنها با دومین مؤلفه دارای همان رابطه است، مشخص کند. اگر ما رابطه را بشناسیم، مجموعه را می‌شناسیم و از آن بهتر، اگر مجموعه را بشناسیم، رابطه را می‌شناسیم. به عنوان مثال، اگر مجموعهٔ زوجهای مرتب متناظر با رابطهٔ ازدواج به ما داده شود، حتی اگر تعریف ازدواج را نیز فراموش کرده باشیم، همیشه می‌توانیم معین کنیم که مرد x و زن y، زن و شوهر هستند یا نه. کافی است ببینیم که زوج مرتب (x, y) به این مجموعه تعلق دارد یا نه.

ممکن است ندانیم که رابطه چیست، ولی می‌دانیم که مجموعه چیست و بررسی اخیر ارتباط نزدیکی بین روابط و مجموعه‌ها برقرار می‌کند. در بررسی دقیق روابط در نظریهٔ مجموعه‌ها از همین ارتباط روشنگر استفاده می‌شود. ساده‌ترین کار این است که رابطه را همان مجموعهٔ متناظر با آن تعریف کنیم و ما همین کار را انجام می‌دهیم، یعنی رابطه را به عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب تعریف می‌کنیم. به عبارت صریح، مجموعهٔ R یک رابطه است اگر هرعضو R یک زوج مرتب باشد و البته این بدان معنی است که اگر $z \in R$

آنگاه xی و yی وجود دارد به طوری که $z = (x, y)$. اگر R رابطه‌ای باشد، گاهی مناسب است که $(x, y) \in R$ را به صورت

$$x\, R\, z$$

بیان کنیم و همچون زبان روزمره بگوییم که x با y رابطهٔ R دارد.

کم جاذبه‌ترین روابط، رابطهٔ تهی است (برای اثبات اینکه $\varnothing$ مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، دنبال عضوی از $\varnothing$ بگردید که زوج مرتب نباشد.) یک مثال کم جاذبهٔ دیگر حاصلضرب دکارتی دو مجموعهٔ X و Y است. اکنون به مثال نسبتاً جذابتری می‌پردازیم: فرض کنید X یک مجموعه و R مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, y) در $X \times X$ باشد، به طوری که $x = y$. رابطهٔ R همان رابطهٔ تساوی اعضای X است و اگر x و y در X باشند آنگاه $x\, R\, y$ همان معنی $x = y$ را دارد. فعلاً یک مثال دیگر کافی است: فرض کنید X یک مجموعه و R مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, A) در $X \times \mathcal{P}(X)$ باشد به طوری که $x \in A$. این رابطه، همان رابطهٔ تعلق بین اعضای X و زیرمجموعه‌های X است و اگر $x \in X$ و $A \in \mathcal{P}(X)$ آنگاه $x\, R\, A$ همان معنی $x \in A$ را دارد.

در بخش قبل دیدیم که متناظر با هر مجموعهٔ R از زوجهای مرتب، دو مجموعه به نامهای *تصویرهای* R بر روی مؤلفه‌های اول و دوم وجود دارد. در نظریهٔ رابطه‌ها، این دو مجموعه به *قلمرو* و *برد* (اختصاراً $\operatorname{dom} R$ و $\operatorname{ran} R$) معروف‌اند، یادآوری می‌شود که این دو توسط

$$\operatorname{dom} R = \{x : (x\, R\, y) \text{ که هست } y\text{ی}\}$$

و

$$\operatorname{ran} R = \{y : (x\, R\, y) \text{ که هست } x\text{ی}\}$$

تعریف می‌شوند. اگر R رابطهٔ ازدواج باشد، یعنی $x\, R\, y$ به این معنی باشد که x مرد و y زن است و x و y زن و شوهرند، آنگاه $\operatorname{dom} R$ مجموعهٔ مردان متأهل و $\operatorname{ran} R$ مجموعهٔ زنان شوهردار است. در رابطهٔ $\varnothing$، دامنه و برد هر دو تهی هستند. اگر $R = X \times Y$ آنگاه $\operatorname{dom} R = X$ و $\operatorname{ran} R = Y$. اگر R رابطهٔ تساوی در X باشد آنگاه $\operatorname{dom} R = \operatorname{ran} R = X$. اگر R رابطهٔ تعلق بین اعضای X و اعضای $\mathcal{P}(X)$ باشد، آنگاه $\operatorname{dom} R = X$ و $\operatorname{ran} R = \mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$.

اگر رابطهٔ R، زیرمجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ باشد (یعنی $\operatorname{dom} R \subset X$ و $\operatorname{ran} R \subset Y$)، محض سهولت، گاهی گفته می‌شود که R رابطه‌ای از X به Y است. به جای اینکه بگوییم رابطه‌ای از X به X، می‌توانیم بگوییم رابطه‌ای در X. رابطهٔ R در X انعکاسی است هرگاه برای هر x در X داشته باشیم $x\, R\, x$؛ و متقارن است هرگاه $x\, R\, y$ ایجاب کند که $y\, R\, x$؛ و متعدی است هرگاه از $x\, R\, y$ و $y\, R\, z$ نتیجه بشود $x\, R\, z$. (تمرین: برای هر یک از این سه خاصیت، رابطه‌ای پیدا کنید که آن خاصیت را نداشته و دو خاصیت دیگر را داشته باشد.) رابطه‌ای در یک مجموعه، رابطهٔ هم‌ارزی است هرگاه انعکاسی، متقارن، و متعدی باشد. کوچکترین رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ X، رابطهٔ تساوی در X و بزرگترین رابطهٔ هم‌ارزی در آن، رابطهٔ $X \times X$ است.

بین رابطه‌های هم‌ارزی در مجموعهٔ X و دسته‌های معینی از زیرمجموعه‌های X (که افراز خوانده می‌شوند) ارتباط نزدیکی موجود است. یک افراز X، دستهٔ دو بدو مجزای $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های غیرتهی X است که اجتماع آنها مساوی X باشد. اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی در X باشد و $x \in X$، ردهٔ هم‌ارزی x نسبت به R، مجموعهٔ تمام اعضای y در X است به طوری که $x\ R\ y$. (در این مورد، زیر فشار سنت، ناگزیر از کلمهٔ «رده» استفاده می‌کنیم.) مثالها: اگر R رابطهٔ تساوی در X باشد، آنگاه هر ردهٔ هم‌ارزی، یک مجموعهٔ تک عضوی است. اگر $R = X \times X$، آنگاه خود X تنها ردهٔ هم‌ارزی است. برای نمایش ردهٔ هم‌ارزی x نسبت به R، هیچ علامت متعارفی وجود ندارد، ما اغلب آن را با x/R نمایش می‌دهیم و برای نمایش مجموعهٔ تمام رده‌های هم‌ارزی از علامت X/R استفاده می‌کنیم. (X/R را، «X به پیمانهٔ R» می‌خوانیم. تمرین: با ارائهٔ شرطی که زیرمجموعهٔ X/R را از مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ دقیقاً مشخص کند، نشان دهید که X/R، در واقع، یک مجموعه است.) حال برای چند لحظه‌ای R را فراموش کنید و مجدداً با افراز $\mathcal{C}$ از X شروع کنید. رابطه‌ای که آن را با $X/\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم، به این صورت در X تعریف می‌شود که

$$x\ X/\mathcal{C}\ y$$

فقط در صورتی که x و y هر دو به یک عضو $\mathcal{C}$ متعلق باشند. $X/\mathcal{C}$ را رابطهٔ القا شده توسط افراز $\mathcal{C}$ می‌خوانیم.

در بند قبل دیدیم که چگونه به هر رابطهٔ هم‌ارزی در X، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X، و به هر افراز X، رابطه‌ای در X نسبت داده می‌شود. برای بیان ارتباط بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها، می‌توان گفت که گذر از $\mathcal{C}$ به $X/\mathcal{C}$، دقیقاً در جهت عکس‌گذر از R به X/R است؛ به عبارت صریح‌تر، اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی در X باشد، آنگاه مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی افرازی است که رابطهٔ R را القا می‌کند و اگر $\mathcal{C}$ افرازی از X باشد، آنگاه رابطهٔ القا شده توسط $\mathcal{C}$، رابطهٔ هم‌ارزیی است که مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی آن، درست همان $\mathcal{C}$ است.

برای اثبات، از یک رابطهٔ هم‌ارزی R شروع می‌کنیم. چون هر x حداقل به یکی از رده‌های هم‌ارزی تعلق دارد (مثلاً $x \in x/R$)، روشن است که اجتماع رده‌های هم‌ارزی، برابر با کل X است. اگر $z \in x/R \cap y/R$، آنگاه $x\ R\ z$ و $z\ R\ y$، و در نتیجه $x\ R\ y$. نتیجه می‌گیریم که اگر دو ردهٔ هم‌ارزی عضو مشترکی داشته باشند، مساوی‌اند یا به عبارت دیگر، دو ردهٔ هم‌ارزی متمایز، همواره مجزا هستند. بنابراین مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی، یک افراز است. طبق تعریف، وقتی می‌گوییم دو عضو به یک مجموعه (ردهٔ هم‌ارزی) از این افراز تعلق دارند، یعنی آن دو عضو با یکدیگر رابطهٔ R دارند. بدین ترتیب نیمهٔ اول ادعای ما اثبات می‌شود.

نیمهٔ دوم ساده‌تر است. با یک افراز $\mathcal{C}$ شروع می‌کنیم و رابطه‌ای را که توسط آن القا می‌شود در نظر می‌گیریم. چون هر عضو X به حداقل یک مجموعه از $\mathcal{C}$ متعلق است، پس خاصیت انعکاسی که می‌گوید x و x به یک عضو $\mathcal{C}$ متعلق هستند برقرار است.

خاصیت تقارنی می‌گوید که اگر x و y هر دو به یک مجموعه از $\mathcal{C}$ متعلق باشند آنگاه y و x نیز به یک مجموعه از $\mathcal{C}$ تعلق دارند، و این نیز بوضوح صادق است. خاصیت تعدی می‌گوید که اگر x و y هر دو به یک مجموعه از $\mathcal{C}$ و y و z نیز هر دو به یک مجموعه از $\mathcal{C}$ متعلق باشند، آنگاه x و z نیز هر دو به یک مجموعه از $\mathcal{C}$ تعلق دارند، و این هم بوضوح برقرار است. ردهٔ هم‌ارزی x در X، درست همان مجموعه‌ای از $\mathcal{C}$ است که x به آن تعلق دارد. بدین‌ترتیب اثبات همهٔ آنچه قول داده بودیم، کامل می‌شود.

بخش ۸

توابع

اگر X و Y دو مجموعه باشند، یک تابع از (یا روی) X به (یا در) Y رابطه‌ای است چون f به طوری که $\operatorname{dom} f = X$ و برای هر x در X، یک عنصر یگانهٔ y در Y وجود دارد به طوری کـه $(x, y) \in f$. شرط یگانگـی را می‌توان، به صورت زیر، صریحاً فرمولبندی کرد: هرگاه $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$، آنگاه $y = z$. برای هر x در X، y یگانه‌ای که به ازای آن $(x, y) \in f$ با $f(x)$ نمایش داده مـی‌شود. در مـورد توابـع، این علامت و علامتهای دیگری که با تغییرات جزئی در آن حاصل می‌شوند، علائم دیگـری را کـه برای روابط عمومیتر به کار می‌روند، متروک ساخته‌اند. از این به بعد اگر f یک تابع باشد، به جای $(x, y) \in f$ یا $y\ f\ x$، خواهیم نوشت $f(x) = y$. عنصر y، مقداری کـه تابع به ازای شناسهٔ x می‌پذیرد (یا می‌گیرد) نامیده می‌شود. به طور معادل می‌تـوان گفت f، x را به y می‌فرستد یا می‌نگارد و یا تبدیل می‌کند. کلمات نگاشت، تبدیل، تناظر، و عملگر برخی از انبوه کلماتی هستند که گاهی به عنوان مترادف تابع به کار می‌روند. نماد

$$f : X \to Y$$

گاهی به عنـوان کوتاهنوشتی برای «f تـابعی از X به Y است» به کار می‌رود. مجموعـهٔ تمام توابع از X به Y، زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تـوانی $\mathcal{P}(X \times Y)$ است و توسط Y^X نمایش داده می‌شود.

از فهرست مترادفات فوق، نـوعی فعالیت استنباط می‌شود، و این امر باعث شده کـه برخی از محققان از تعریف تابع به عنوان چیزی که هست، نه چیزی که کاری انجام می‌دهد، احساس ناخرسندی کنند. این ناخرسندی در به کارگیری لغات متفاوت تجلی می‌یـابد؛ یعنی کلمهٔ تابع به چیز غیرقابل تعریفی که عملی را انجام می‌دهد اختصاص می‌یابد و مجموعه‌ای از زوجهای مرتب که ما آن را تابع خوانده‌ایم، نمودار تابع خوانده می‌شود. یافتن مثالهایی از توابع، به مفهوم دقیق این کلمه در نظریهٔ مجموعـه‌ها، هم در ریاضیات و هم در زنـدگی روزمره، کاری است ساده. برای این منظور، تنها چیزی کـه احتیاج داریم اطلاعات جدول.

بندی شده‌ای است که لازم هم نیست به صورت اعداد باشد. یک مثال دفترچهٔ راهنمای شهر است که در آن متغیرهای تابع، شهروندان و مقادیر تابع نشانیهای آنهاست.

مفاهیم قلمرو و برد را برای روابط عموماً، و به طریق اولی برای توابع، تعریف کرده‌ایم. طبق تعریف، قلمرو تابع f از X به Y، مساوی X است، ولی برد آن الزاماً مساوی Y نیست، بلکه برد شامل عناصری چون y در Y است که برای آنها عنصری چون x در X وجود داشته باشد به طوری که $y = f(x)$. اگر برد f مساوی Y باشد، می‌گوییم f، X را بروی Y می‌نگارد. اگر A زیرمجموعه‌ای از X باشد، ممکن است بخواهیم مجموعهٔ همهٔ اعضای y در Y را در نظر بگیریم که به ازای هر یک، xی در A وجود دارد به طوری که $y = f(x)$. این زیرمجموعهٔ Y، نقش A تحت f خوانده می‌شود و غالباً آن را با $f(A)$ نمایش می‌دهند. این علامت گرچه بد است ولی فاجعه‌آفرین نیست. بد بودن آن از این لحاظ است که اگر A اتفاقاً هم عضو X و هم زیرمجموعهٔ X باشد (که گرچه بعید است ولی به هیچ‌وجه ناممکن نیست) در این صورت نماد $f(A)$ مبهم می‌شود. یعنی نمی‌دانیم که آیا معنی آن مقدار f در خود A است و یا مجموعهٔ مقادیر f به ازای اعضای A؟ به پیروی از سنت معمول در ریاضیات، ما این علامت بد را به کار می‌بریم و به متنی که این علامت در آن به کار رفته است توجه می‌کنیم، و در موارد نادری که لازم باشد، با افزودن توضیحات لغوی از اشتباه جلوگیری می‌کنیم. توجه کنید که نقش خود X تحت f، همان برد f می‌باشد و خصیصهٔ «برو» بودن f را، با نوشتن $f(X)=Y$ می‌توان بیان کرد.

اگر X زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ Y باشد، تابع f که توسط $f(x) = x$ برای هر x در X، تعریف می‌شود، نگاشت شمولی (یا نشاندن) X در Y نامیده می‌شود. عبارت «تابع f که توسط . . . تعریف می‌شود» در این‌گونه موارد بسیار متداول است، و منظور از آن، این است که در واقع تابعی یگانه وجود دارد که در شرط مفروض صدق می‌کند. در حالت خاصی که مورد نظر ماست، این موضوع به قدر کافی روشن است، زیرا از ما خواسته شده است که مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, y) در $X \times Y$ را که $x = y$، در نظر بگیریم. ملاحظات مشابهی در هر مورد دیگر صادق است، و به پیروی از شیوهٔ معمول ریاضی، معمولاً تابع را با توصیف مقدار آن، y، به ازای هر شناسهٔ x، توصیف خواهیم کرد. هر چند چنین توصیفی گاهی طولانی‌تر و پر زحمت‌تر از توصیف مستقیم مجموعهٔ متناظر (از زوجهای مرتب) است، با وجود این، اکثر ریاضیدانها توصیف شناسه-مقدار را از دیگر توصیفها روشنتر می‌دانند.

نگاشت شمولی X در X، نگاشت همانی روی X خوانده می‌شود. (به زبان روابط، نگاشت همانی روی X، همان رابطهٔ تساوی در X است.) اگر چون گذشته $X \subset Y$، آنگاه بین نگاشت شمولی X در Y و نگاشت همانی روی Y ارتباطی وجود دارد؛ این ارتباط حالت خاصی از یک روش کلی جهت ساختن توابع کوچک از توابع بزرگ است. مثلاً، اگر f تابعی از Y به Z و X زیرمجموعه‌ای از Y باشد، در این صورت یک راه طبیعی برای ساختن تابعی، چون g، از X به Z وجود دارد؛ بدین‌طریق که برای هر x در X، $g(x)$ را مساوی $f(x)$ تعریف می‌کنیم. تابع g، تحدید f به X، و f، توسیع g به Y

خوانده می‌شوند و معمولاً می‌نویسیم $g = f \mid X$. تعریف تحدید را می‌توان با نوشتن $(f \mid X)(x) = f(x)$ برای هر x در X نیز بیان کرد؛ همچنین توجه کنید که $\operatorname{ran}(f \mid X) = f(X)$. نگاشت شمولی زیرمجموعه‌ای از Y، تحدید نگاشت همانی Y به همان زیرمجموعه است.

اینک یک مثال ساده ولی مفید از توابع. دو مجموعهٔ دلخواه X و Y را در نظر می‌گیریم و تابع f از $X \times Y$ بروی X را توسط $f(x, y) = x$ تعریف می‌کنیم. (شخص وسواسی خواهد گفت که به جای $f(x, y)$ باید $f((x, y))$ نوشته می‌شد، ولی هیچکس چنین کاری نکرده است.) تابع f، تصویر $X \times Y$ بروی X خوانده می‌شود. این اصطلاح در اینجا به معنایی متفاوت با معنای سابق آن به کار رفته است، ولی این تفاوت چندان شدید نیست. اگر $R = X \times Y$، آنگاه چیزی که قبلاً تصویر R بروی اولین مؤلفه نام گرفت، در زبان فعلی، برد تصویر f خوانده می‌شود.

یک مثال پیچیده‌تر و به همان نسبت با ارزش‌تر از تابع را می‌توان به طریق زیر به دست آورد. فرض کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی در X و f تابعی از X بروی X/R باشد که توسط $f(x) = x/R$ تعریف شود. تابع f را گاهی نگاشت متعارف از X به X/R می‌خوانند.

اگر f تابعی دلخواه از X بروی Y باشد، آنگاه یک راه طبیعی برای تعریف یک رابطهٔ هم‌ارزی R در X وجود دارد؛ هرگاه $f(a) = f(b)$، می‌نویسیم $a\ R\ b$ (که در آن a و b در X هستند). برای هر عضو y در Y، فرض می‌کنیم $g(y)$ مجموعهٔ تمام اعضای x در X باشد به طوری که $f(x) = y$. از تعریف R نتیجه می‌گیریم که برای هر y، $g(y)$ یک ردهٔ هم‌ارزی R است؛ به عبارت دیگر، g تابعی است از Y بروی مجموعهٔ X/R که از رده‌های هم‌ارزی R تشکیل می‌شود. تابع g دارای خاصیت ویژهٔ زیر است: هرگاه u و v اعضای متمایز Y باشند، آنگاه $g(u)$ و $g(v)$ اعضای متمایز X/R هستند. تابعی که همواره اعضای متمایز را بروی اعضای متمایز می‌نگارد، یک بیک (معمولاً تناظر یک‌بیک) خوانده می‌شود. در میان مثالهای فوق، نگاشتهای شمولی، یک بیک هستند، ولی جز در چند مورد خاص پیش پا افتاده، نگاشتهای تصویر یک بیک نیستند. (تمرین: کدام موارد خاص؟)

جهت معرفی جنبهٔ بعدی نظریهٔ مقدماتی توابع، باید لحظه‌ای از بحث اصلی منحرف شویم و بخش کوچکی از تعریف نهایی اعداد طبیعی را، که بعداً به تفصیل به آن خواهیم پرداخت، بیان کنیم. در حال حاضر تعریف همهٔ اعداد طبیعی ضروری نیست؛ تنها چیزی که لازم داریم تعریف اولین سه عدد طبیعی است. چون فعلاً جای بیان مقدمات روشنگر طولانی نیست، مستقیماً به تعریف می‌پردازیم، گرچه موقتاً باعث اعجاب و نگرانی برخی از خوانندگان شود. این هم تعریف: صفر و یک و دو را به صورت

$$۰ = \varnothing،\quad ۱ = \{\varnothing\}،\quad \text{و}\quad ۲ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، ۰ مجموعهٔ تهی است، ۱ مجموعهٔ تک عضوی $\{۰\}$، و ۲ زوج $\{۰, ۱\}$ است. توجه کنید که در ورای این عبارات به ظاهر جنون‌آمیز، روشی نهفته

است؛ تعداد اعضای مجموعه‌های ۰، ۱ و ۲ (به مفهوم متعارف کلمهٔ عدد) بترتیب صفر، یک، و دو است.

اگر A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ X باشد، تابع مشخصهٔ A، تابع χ از X به ۲ است طوری که ۱ $= \chi(x)$ هرگاه $x \in A$، و ۰ $= \chi(x)$ هرگاه $x \in X - A$. وابستگی تابع مشخصهٔ A به مجموعهٔ A را می‌توان با نوشتن χ_A به جای χ نشان داد. تابعی که به هر زیرمجموعهٔ A از X (یعنی به هر عضو $\mathcal{P}(X)$) تابع مشخصهٔ A (یعنی عضوی از 2^X) را نسبت می‌دهد تناظری یک بیک بین $\mathcal{P}(X)$ و 2^X است. (در حاشیه: به جای عبارت «تابعی‌که به هر عضو A از $\mathcal{P}(X)$، عضو χ_A از 2^X را نسبت می‌دهد» معمولاً از کوتاهنوشت «تابع $A \to \chi_A$» استفاده می‌شود. در این نحوهٔ بیان، به‌عنوان مثال، تصویر $X \times Y$ بروی X را می‌توان تابع $x \to (x, y)$ و نگاشت کانونی از یک مجموعهٔ X با رابطهٔ R بروی X/R را می‌توان تابع $x \to x/R$ خواند.)

تمرین. (الف) نشان دهید $Y^\varnothing$ دقیقاً یک عضو دارد که همان $\varnothing$ است، چه Y تهی باشد و چه غیرتهی، و (ب) اگر X غیرتهی باشد، آنگاه $\varnothing^X$ تهی است.

بخش ۹
خانواده‌ها

گاهی برد تابع از خود تابع مهمتر محسوب می‌شود. در چنین مواردی، هم اصطلاحات و هم علائم دستخوش تغییرات اساسی می‌شوند؛ به‌عنوان مثال، فرض کنید x تابعی از مجموعهٔ I به مجموعهٔ X باشد (نوع انتخاب حروف، خود نشان می‌دهد که امر غریبی در پیش داریم) عضوی از قلمرو I را اندیس، I را مجموعهٔ اندیس، برد تابع را مجموعهٔ اندیس شده، خود تابع را خانواده، و مقدار تابع x در اندیس i را، که با x_i نمایش داده می‌شود، جزء خانواده می‌نامند. (این اصطلاحات به طور قطعی تثبیت نشده‌اند ولی یکی از انواع متعارف در میان انواع دیگری است که، با وجود اختلافات جزئی، با این نوع خویشاوندی دارند. از این پس، منحصراً از این اصطلاحات استفاده خواهیم کرد.) یکی از راههای مرسوم برای انتقال معنی علائم و نشان دادن تأکید، که گرچه غیرقابل قبول است ولی عموماً آن را پذیرفته‌اند، این است که از یک خانوادهٔ $\{x_i\}$ از X، یا یک خانوادهٔ $\{x_i\}$ از هر آنچه عضو X باشد، صحبت کنیم و در صورت لزوم مجموعهٔ اندیس I را توسط عبارات توضیحیی چون $(i \in I)$ نشان دهیم. بنابراین، به‌عنوان مثال، عبارت «خانوادهٔ $\{A_i\}$ از زیر-مجموعه‌های X» معمولاً به عنوان نمایش دهندهٔ تابع A از مجموعهٔ اندیس I به مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ تلقی می‌شود.

هرگاه $\{A_i\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، اجتماع برد خانواده، به اجتماع خانوادهٔ $\{A_i\}$، یا اجتماع مجموعه‌های A_i موسوم است و علامت متعارف برای آن، بسته به اینکه تأکید بروی مجموعهٔ اندیس I مهم باشد یا نباشد، بترتیب

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{یا} \quad \bigcup_i A_i$$

است. از تعریف اجتماع، مستقیماً نتیجه می‌گیریم که $x \in \bigcup_i A_i$ اگر و فقط اگر به ازای حداقل یک i، x متعلق به A_i باشد. اگر $I = ۲$، یعنی اگر برد خانوادهٔ $\{A_i\}$، زوج نامرتب $\{A_۰, A_۱\}$ باشد، آنگاه $\bigcup_i A_i = A_۰ \cup A_۱$. توجه داشته باشید که اگر به جای خانواده‌ای از مجموعه‌ها، دسته‌ای دلخواه از مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، چیزی از کلیت

موضوع کاسته نمی‌شود، زیرا هر دسته از مجموعه‌ها، برد یک خانواده است. در واقع اگر $\mathcal{C}$ دسته‌ای از مجموعه‌ها باشد، فرض می‌کنیم که خود $\mathcal{C}$ نقش مجموعهٔ اندیس را ایفا می‌کند و نگاشت همانی روی $\mathcal{C}$ را به عنوان خانواده در نظر می‌گیریم.

قوانین جبری حاکم بر اجتماع یک زوج از مجموعه‌ها را می‌توان به اجتماعهای دلخواه تعمیم داد. به عنوان مثال، فرض کنید $\{I_j\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها و قلمرو آن، مثلاً، J باشد؛ قرار دهید $K = \bigcup_j I_j$ و فرض کنید $\{A_k\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها با قلمرو K باشد. در این صورت به‌آسانی می‌توان ثابت کرد

$$\bigcup_{k\in K} A_k = \bigcup_{j\in J} \left(\bigcup_{i\in I_j} A_i\right)$$

که صورت تعمیم یافتهٔ قانون شرکت‌پذیری برای اجتماع است. تمرین: صورت تعمیم یافتهٔ قانون جابجایی را فرمولبندی و اثبات کنید.

اجتماع تهی معنی دارد (و مساوی تهی است)، ولی اشتراک تهی بی‌معنی است. به استثنای این مورد پیش‌پا افتاده، اصطلاحات و نمادگذاریهای مربوط به اشتراک در همهٔ موارد با اصطلاحات و نمادگذاریهای مربوط به اجتماع توازی دارد. مثلاً، اگر $\{A_i\}$ خانواده‌ای غیرتهی از مجموعه‌ها باشد، اشتراک برد خانواده، اشتراک خانوادهٔ $\{A_i\}$، یا اشتراک مجموعه‌های A_i نامیده می‌شود و علامت متعارف برای آن، برحسب اینکه تأکید بروی مجموعهٔ اندیس I مهم باشد یا نباشد، بترتیب

$$\bigcap_i A_i \quad \text{یا} \quad \bigcap_{i\in I} A_i$$

است. (منظور از «خانوادهٔ غیرتهی» خانواده‌ای است که قلمرو آن، I، تهی نباشد.) از تعریف اشتراک، مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر $I \neq \varnothing$، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه x متعلق به $\bigcap_i A_i$ باشد این است که برای هر i، x متعلق به A_i باشد.

صورتهای تعمیم یافتهٔ قوانین جابجایی و شرکت‌پذیری برای اشتراک را می‌توان به همان روش معمول در مورد اجتماع، فرمولبندی و اثبات کرد، یا با استفاده از قوانین دمورگان، می‌توان آنها را از قوانین مربوط به اجتماع به دست آورد. این موارد، تقریباً بدیهی بوده و نتیجتاً چندان جالب نیستند. اتحادهای جبری، آن اتحادهایی هستند که هم اجتماع و هم اشتراک را توأماً شامل‌اند. بنابراین اگر $\{A_i\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد و $B \subset X$، آنگاه

$$B \cap \bigcup_i A_i = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

و

$$B \cup \bigcap_i A_i = \bigcap_i (B \cup A_i);$$

این معادلات، تعمیم ضعیفی از قوانین پخشی است.

تمرین. هرگاه $\{A_i\}$ و $\{B_j\}$ خانواده‌هایی از مجموعه‌ها باشند، آنگاه

$$\left(\bigcup_i A_i\right) \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

و

$$\left(\bigcap_i A_i\right) \cup \left(\bigcap_j B_j\right) = \bigcap_{i,j} (A_i \cup B_j).$$

توضیح نمادگذاری: نمادی چون $\bigcup_{i,j}$، کوتاهنوشت $\bigcup_{(i,j)\in I\times J}$ است.

در تعمیم مفهوم حاصل‌ضرب دکارتی، معمولاً از نمادگذاریهای مربوط به خانواده‌ها استفاده می‌شود. حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ X و Y را به‌عنوان مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, y)، به قسمی‌که x در X و y در Y است، تعریف کردیم. بین این مجموعه و مجموعهٔ خاصی از خانواده‌ها، یک تناظر یک بیک طبیعی وجود دارد. در واقع زوج نامرتب دلخواهی چون $\{a, b\}$، به قسمی که $a \neq b$، مفروض است و مجموعهٔ Z متشکل از تمام خانواده‌های z را که توسط $\{a, b\}$ طوری اندیس شده‌اند که $z_a \in X$ و $z_b \in Y$، در نظر بگیرید. اگر تابع f از Z به $X \times Y$ توسط $f(z) = (z_a, z_b)$ تعریف شود، در این صورت f همان تناظر یک بیک موعود است. تفاوت میان Z و $X \times Y$ تنها در نمادگذاری است. در تعمیم حاصل‌ضرب دکارتی، Z به جای $X \times Y$ تعمیم داده می‌شود. (نتیجتاً در انتقال از حالت خاص به حالت کلی، اصطکاک مختصری بین اصطلاحات وجود دارد. در این باره کاری نمی‌توان کرد، زیرا در واقع زبان ریاضی، امروزه بدین‌گونه به‌کار می‌رود.) اکنون تعمیم، کار ساده‌ای است. اگر $\{X_i\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد $(i \in I)$، حاصل‌ضرب دکارتی این خانواده، طبق تعریف، مجموعهٔ تمام خانواده‌های $\{x_i\}$ است به طوری که برای هر i در I، $x_i \in X_i$. برای حاصل‌ضرب دکارتی، نمادهای متعددی وجود دارد که امروزه کم و بیش به کار می‌روند، اما در این کتاب آن را با

$$\bigtimes_i X_i \quad \text{یا} \quad \bigtimes_{i\in I} X_i$$

نمایش خواهیم داد.

واضح است که اگر همهٔ X_iها مساوی مجموعهٔ X باشند، آنگاه $\bigtimes_i X_i = X^I$. اگر I زوج $\{a, b\}$، به قسمی که $a \neq b$، باشد، مرسوم است که $\bigtimes_{i\in I} X_i$ را همان حاصل‌ضرب دکارتی $X_a \times X_b$، که قبلاً تعریف شد، محسوب دارند و اگر I مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ باشد، در این صورت نیز $\bigtimes_{i\in I} X_i$ را با خود X_a یکسان می‌دانند. سه‌تایی‌های مرتب، چهارتایی‌های مرتب و غیره را می‌توان به عنوان خانواده‌هایی که مجموعهٔ اندیس آنها، بترتیب، سه‌تایی نامرتب، چهارتایی نامرتب و غیره است تعریف کرد.

فرض کنید $\{X_i\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها $(i \in I)$ و X حاصل‌ضرب دکارتی آن باشد. اگر J زیرمجموعه‌ای از I باشد، آنگاه با هر یک از اعضای X، طبعاً، یکی از اعضای حاصل‌ضرب دکارتی جزئی $\bigtimes_{i\in J} X_i$ متناظر است. جهت تعریف این تناظر، به خاطر بیاورید که هر عضو x از X، خود یک خانوادهٔ $\{x_i\}$، یعنی مآلاً تابعی روی I است؛ عضو متناظر از $\bigtimes_{i\in J} X_i$، مثلاً y، با تحدید آن تابع به J به دست می‌آید. به طور صریح، قرار می‌دهیم $y_i = x_i$ هرگاه $i \in J$. تناظر $y \to x$، تصویر X بروی $\bigtimes_{i\in J} X_i$ نامیده می‌شود و فعلاً آن را با f_J نمایش می‌دهیم، و بویژه اگر J مجموعه‌ای تک عضوی باشد، مثلاً $J = \{j\}$، در این صورت f_J را، به جای $f_{\{j\}}$، با f_j نمایش خواهیم داد. کلمهٔ «تصویر» کاربردهای متعدد دارد: اگر $x \in X$، مقدار f_j در x، یعنی x_j را نیز تصویر x بروی X_j و یا مختص jام می‌نامند. تابعی بروی یک حاصل‌ضرب دکارتی، چون

X، تابع چند متغیره، و بخصوص تابعی بروی حاصل‌ضرب دکارتی $X_a \times X_b$، تابع دو متغیره نامیده می‌شود.

تمرین. ثابت کنید

$$\left(\bigcup_i A_i\right) \times \left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_{i,j} \left(A_i \times B_j\right),$$

همچنین ثابت کنید که همین معادله در مورد اشتراک نیز برقرار است (مشروط بر اینکه قلمرو خانواده‌های مربوطه غیرتهی باشد)، همچنین (با ملاحظات مناسب در مورد خانواده‌های تهی) ثابت کنید که به ازای هر اندیس j، $\bigcap_i X_i \subset X_j \subset \bigcup_i X_i$؛ و نیز ثابت کنید اشتراک و اجتماع را در واقع می‌توان به عنوان جوابهای نهائی این شمولها، مشخص کرد. یعنی اگر برای هر اندیس j، $X_j \subset Y$، آنگاه $\bigcup_i X_i \subset Y$، و نیز $\bigcup_i X_i$، تنها مجموعه‌ای است که در این شرط کمینگی صدق می‌کند. رابطهٔ مربوط به اشتراک را نیز به همین نحو می‌توان فرمولبندی کرد.

بخش ۱۰
معکوسها و ترکیبها

وابسته به هر تابع f، مثلاً، از X به Y، تابع دیگری از $\mathcal{P}(X)$ به $\mathcal{P}(Y)$ وجود دارد، و آن تابعی است که به هر زیرمجموعهٔ A از X زیرمجموعهٔ نقش $f(A)$ از Y را نسبت می‌دهد (و اغلب آن را هم f می‌نامند). رفتار جبری نگاشت $A \longrightarrow f(A)$، همهٔ انتظارات ما را برآورده نمی‌کند. درست است که اگر $\{A_i\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد آنگاه $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ (اثبات؟)، ولی معادلهٔ نظیر این معادله، در مورد اشتراک عموماً غلط است (مثال؟) و نیز ارتباط بین نقشها و مکملها رضایتبخش نیست.

از تناظر بین اعضای X و اعضای Y، همواره می‌توان یک تناظر خوش‌رفتار بین زیرمجموعه‌های X و زیرمجموعه‌های Y، به دست آورد، ولی راه این کار مستقیم و از طریق تشکیل نقشها نیست، بلکه معکوس و از طریق تشکیل نقشهای معکوس است. اگر تابع مفروض f از X به Y را داشته باشیم، فرض کنید f^{-1}، معکوس f، تابعی از $\mathcal{P}(Y)$ به $\mathcal{P}(X)$ باشد به طوری که اگر $B \subset Y$، آنگاه

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

در قالب کلمات: $f^{-1}(B)$ دقیقاً متشکل از عناصری از X است که f آنها را بتوی B می‌نگارد، مجموعهٔ $f^{-1}(B)$، نقش معکوس B تحت f نامیده می‌شود. شرط لازم و کافی برای اینکه f، X را بروی Y بنگارد، این است که نقش معکوس هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از Y تحت f، زیرمجموعه‌ای غیرتهی از X باشد. (اثبات؟) شرط لازم و کافی برای اینکه f یک بیک باشد این است که نقش معکوس هر مجموعهٔ تک عضوی در برد تابع، تحت f مجموعه‌ای تک عضوی در X باشد.

اگر شرط اخیر برقرار باشد، نماد f^{-1} غالباً تعبیر دیگری نیز می‌یابد، یعنی به عنوان تابعی قلمداد می‌شود که قلمرو آن برد تابع f است و مقدار آن در هر y در برد f، برابر با x یگانه‌ای در X است که به ازای آن $y = f(x)$. به عبارت دیگر، در مورد توابع یک بیک می‌توان نوشت $f^{-1}(y) = x$ اگر و فقط اگر $y = f(x)$. این کاربرد

نمادگذاری، با تعبیر اول ما از f^{-1} کمی ناسازگار است، اما وجود این دو معنا به هیچ‌وجه باعث اشتباه نمی‌شود.

ارتباط بین نقشها و نقشهای معکوس درخور بررسی کوتاهی است.

اگر $B \subset Y$، آنگاه

$$f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

اثبات. اگر $y \in f(f^{-1}(B))$ آنگاه $y = f(x)$، به ازای xی در $f^{-1}(B)$؛ این بدان معنی است که $y = f(x)$ و $f(x) \in B$، و نتیجتاً $y \in B$.

اگر f، X را بروی Y بنگارد، آنگاه

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

اثبات. اگر $y \in B$، آنگاه $y = f(x)$ به ازای xی در X و نتیجتاً به ازای xی در $f^{-1}(B)$؛ یعنی $y \in f(f^{-1}(B))$.

اگر $A \subset X$، آنگاه

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

اثبات. اگر $x \in A$، آنگاه $f(x) \in f(A)$، یعنی $x \in f^{-1}(f(A))$.

اگر f یک بیک باشد، آنگاه

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

اثبات. اگر $x \in f^{-1}(f(A))$ آنگاه $f(x) \in f(A)$ و نتیجتاً $f(x) = f(u)$ به ازای uیی در A، از اینجا نتیجه می‌گیریم که $x = u$ و در نتیجه $x \in A$.

رفتار جبری f^{-1} استثناپذیر نیست، اگر $\{B_i\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Y باشد، آنگاه

$$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

و

$$f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$

اثبات این روابط ساده است. مثلاً، اگر $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i)$ آنگاه $f(x) \in B_i$ برای هر i، پس $x \in f^{-1}(B_i)$ برای هر i، و نتیجتاً $x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$. همهٔ مراحل این استدلال برگشت‌پذیرند. همچنین تشکیل نقشهای معکوس با مکمل‌گیری جابجایی‌پذیر است، یعنی برای هر زیرمجموعهٔ B از Y

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

در واقع اگر $x \in f^{-1}(Y - B)$، آنگاه $f(x) \in Y - B$، پس $x \notin f^{-1}(B)$ و نتیجتاً $x \in X - f^{-1}(B)$؛ همهٔ مراحل برگشت‌پذیرند. (توجه کنید که معادلهٔ اخیر در واقع نوعی قانون جابجایی است و می‌گوید که اگر مکمل گرفته و به دنبال آن معکوس بگیریم، به همان نتیجه می‌رسیم که اگر معکوس می‌گرفتیم و به دنبال آن مکمل.)

بحث معکوسها نشان می‌دهد که کاری را که یک تابع انجام می‌دهد، می‌توان به تعبیری خنثی کرد، نکتهٔ بعدی که خواهیم دید این است که گاهی کار دو تابع را می‌توان در یک مرحله انجام داد. به عبارت صریح، اگر f تابعی از X به Y و g تابعی از Y به Z

باشند، آنگاه هر عضو برد f متعلق به قلمرو g است و نتیجتاً $g(f(x))$ برای هر x در X با معنی است. تابع h از X به Z که توسط $h(x) = g(f(x))$ تعریف می‌شود، ترکیب توابع f و g نام دارد و با $g \circ f$، یا ساده‌تر از آن با gf، نمایش داده می‌شود. (چون فرصت بررسی انواع دیگر ضرب توابع را نداریم، در این کتاب فقط از علامت اخیر که ساده‌تر است استفاده خواهیم کرد.)

توجه کنید که ترتیب عوامل، در نظریهٔ ترکیب توابع مهم است. برای اینکه بتوان gf را تعریف کرد، باید برد f زیرمجموعهٔ قلمرو g باشد و برای اینکه چنین رابطه‌ای برقرار باشد، لازم نیست که رابطهٔ عکس آن نیز برقرار باشد. حتی اگر fg و gf هر دو را بتوان تعریف کرد ــ و این امر هرگاه مثلاً f، X را به Y و g، Y را به X بنگارد محتمل است ــ لزومی ندارد که توابع fg و gf مساوی باشند، به عبارت دیگر، ترکیب توابع الزاماً، جابجایی نیست.

ترکیب توابع ممکن است جابجایی نباشد، ولی همواره شرکت‌پذیر است. اگر f، X را به Y و g، Y را به Z و h، Z را به U بنگارد، در این صورت می‌توانیم ترکیب h را با gf، و ترکیب hg را با f تشکیل دهیم. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که نتیجه در هر دو حال یکی است.

ارتباط بین معکوس‌گیری و ترکیب مهم است و مواردی مثل آن در همهٔ ریاضیات دیده می‌شود. اگر f، X را بتوی Y و g، Y را بتوی Z بنگارد، در این صورت f^{-1}، $\mathcal{P}(Y)$ را به $\mathcal{P}(X)$ و g^{-1}، $\mathcal{P}(Z)$ را به $\mathcal{P}(Y)$ می‌نگارد. در این حالت، ترکیبهایی که می‌توان تشکیل داد gf و $f^{-1}g^{-1}$ هستند، می‌خواهیم ثابت کنیم که تابع دومی معکوس تابع اولی است. اثبات: اگر $x \in (gf)^{-1}(C)$ هرگاه $x \in X$ و $C \subset Z$، آنگاه $g(f(x)) \in C$، پس $f(x) \in g^{-1}(C)$ و درنتیجه $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$؛ مراحل استدلال برگشت‌پذیرند.

عکس کردن و ترکیب توابع، حالات خاص اعمال مشابهی هستند که در مورد رابطه‌ها می‌توان انجام داد. بنابراین، بخصوص، به ازای هر رابطهٔ R از X به Y، یک رابطهٔ معکوس (یا وارون) R^{-1} از Y به X وجود دارد؛ طبق تعریف $y\,R^{-1}\,x$ یعنی $x\,R\,y$. مثال: اگر R رابطهٔ تعلق از X به $\mathcal{P}(X)$ باشد، آنگاه R^{-1}، رابطهٔ شمول از $\mathcal{P}(X)$ به X است. یکی از نتایج مستقیم تعاریف مربوطه این است که $\operatorname{dom} R^{-1} = \operatorname{ran} R$ و $\operatorname{ran} R^{-1} = \operatorname{dom} R$. اگر رابطهٔ R تابع باشد، احکام معادل $x\,R\,y$ و $y\,R^{-1}\,x$ را می‌توان به صورت احکام معادل $R(x) = y$ و $x \in R^{-1}(\{y\})$، نوشت.

به علت دشواریهای مربوط به خاصیت جابجایی، باید هنگام تعمیم مفهوم ترکیب توابع جانب احتیاط را رعایت کرد. ترکیب روابط R و S را در صورتی می‌توان تعریف کرد که R رابطه‌ای از X به Y و S رابطه‌ای از Y به Z باشد، رابطهٔ مرکب T، از X به Z، را با $S \circ R$ یا به صورت ساده‌تر با SR نمایش می‌دهند و بدین صورت تعریف می‌کنند که $x\,T\,z$ اگر و فقط اگر عضوی چون y در X وجود داشته باشد به طوری که $x\,R\,y$ و $y\,S\,z$. به عنوان یک مثال آموزنده فرض کنید، مثلاً، R به معنی «پسر» و S به

معنی «برادر» در مجموعهٔ انسانهای مذکر باشد. به عبارت دیگر، $x\,R\,y$ یعنی x پسر y است و $y\,S\,z$ یعنی y برادر z است. در این صورت رابطهٔ مرکب SR به معنی «پسر برادر» است (سؤال: معانی R^{-1}، S^{-1}، RS و $S^{-1}R^{-1}$ چیست؟) اگر R و S هر دو تابع باشند، آنگاه $x\,R\,y$ و $y\,S\,z$ را می‌توان، بترتیب، به صورتهای $R(x) = y$ و $S(y) = z$ نیز نوشت. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $z = S(R(x))$ اگر و فقط اگر $x\,T\,z$، بنابراین ترکیب توابع در واقع حالت خاص چیزی است که گاهی ضرب رابطه‌ای خوانده می‌شود.

خواص جبری عکس کردن و ترکیب در مورد روابط و توابع یکی است. از جمله اینکه ترکیب، تنها به طور اتفاقی جابجایی است ولی همواره شرکت‌پذیر است و نیز همواره از طریق معادلهٔ $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$، با عکس کردن مرتبط است. (اثبات؟)

از جبر روابط فرمولهای جالبی به دست می‌آید. فرض کنید موقتاً تنها روابط روی یک مجموعهٔ X را در نظر بگیریم و بخصوص فرض کنید I رابطهٔ تساوی در X باشد (که همان نگاشت همانی روی X است) رابطهٔ I به‌عنوان واحد ضربی عمل می‌کند، به‌این معنی که برای هر رابطهٔ R در X، $IR = RI = R$. سؤال: آیا ارتباطی میان I، RR^{-1} و $R^{-1}R$ وجود دارد؟ سه خاصیتی را که رابطهٔ هم‌ارزی را تعریف می‌کنند، می‌توان به‌کمک اصطلاحات جبری به صورت زیر فرمولبندی کرد: انعکاسی یعنی $I \subset R$، تقارنی یعنی $R \subset R^{-1}$، و تعدی یعنی $RR \subset R$.

تمرین. (در همهٔ موارد فرض کنید f تابعی از X به Y است.) (الف) اگر g تابعی از Y به X باشد به طوری که gf نگاشت همانی روی X باشد، آنگاه f یک بیک است و g، Y را بروی X می‌نگارد. (ب) شرط لازم و کافی برای اینکه برای هر دو زیرمجموعهٔ A و B از X، $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$، این است که f یک بیک باشد. (پ) شرط لازم و کافی برای اینکه به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $f(X - A) \subset Y - f(A)$ این است که f یک بیک باشد. (ت) شرط لازم و کافی برای اینکه به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $Y - f(A) \subset f(X - A)$، این است که f، X را بروی Y بنگارد.

بخش ۱۱
اعداد

دو چقدر است؟ کلی‌تر بگوییم، چگونه باید اعداد را تعریف کنیم؟ به منظور تدارک پاسخ، مجموعهٔ X را در نظر می‌گیریم و دستهٔ P، متشکل از تمام زوجهای نامرتب $\{a, b\}$ را به طوری که a و b در X باشند و $a \neq b$ تشکیل می‌دهیم. بدیهی به‌نظر می‌رسد که همهٔ مجموعه‌های P یک خاصیت مشترک دارند، و آن، خاصیت تشکیل یافتن از دو عضو است. بنابراین وسوسه می‌شویم که خاصیت «دوبودن» را به عنوان خاصیت مشترک تمام مجموعه‌های دستهٔ P تعریف کنیم، ولی بر این وسوسه باید غلبه کرد، زیرا چنین تعریفی، سرانجام از نظر ریاضی بی‌معنی است. «خاصیت» چیست؟ از کجا می‌دانیم که تنها یک خاصیت مشترک میان همهٔ مجموعه‌های P وجود دارد؟

پس از قدری تفکر، ممکن است راهی بیابیم که بدون استفاده از عبارات مبهمی چون «خاصیت مشترک»، اندیشه‌ای را که تعریف پیشنهادی ما بر آن مبتنی است، حفظ کنیم. در کار ریاضی بسیار معمول است که خاصیتی را با مجموعه‌ای، یعنی مجموعهٔ تمام اشیائی که دارای آن خاصیت‌اند، یکی می‌گیرند؛ چرا در اینجا این کار را نکنیم؟ به عبارت دیگر، چرا «دو» را همان مجموعهٔ P تعریف نکنیم؟ چنین کاری گاهی انجام می‌گیرد ولی کاملاً رضایتبخش نیست. مشکل این است که پیشنهاد تعدیل شدهٔ فعلی ما، به مجموعهٔ P و در نتیجه نهایتاً به X وابسته است. در بهترین حالت، این طرح، دوبودن را به مجموعه‌ای که زیرمجموعهٔ X نیست تعمیم دهیم.

برای گریز از این مشکل، دو راه وجود دارد. یک راه این است که خود را به مجموعهٔ خاصی محدود نکنیم، بلکه به جای آن همهٔ زوجهای نامرتب ممکن $\{a, b\}$ را، با شرط $a \neq b$، در نظر بگیریم. این زوجهای نامرتب تشکیل یک مجموعه نمی‌دهند، و برای آنکه پایهٔ تعریف دو را برآنها قرار دهیم، لازم است که کل نظریهٔ مورد بررسی را توسعه دهیم تا جایی که «نامجموعه‌ها» (رده‌ها)ی نظریه‌ای دیگر را شامل شود. این کار شدنی است، ولی ما به‌آن نمی‌پردازیم، بلکه راه دیگری را در پیش می‌گیریم.

ریاضیدانان چگونه متر را تعریف می‌کنند؟ توسط روندی مشابه آنچه که طرحی از آن در بالا رسم کردیم و شامل دو مرحلهٔ زیر است. مرحلهٔ اول این است که شیئی را انتخاب می‌کنیم که یکی از نمونه‌های مورد نظر مفهومی است که می‌خواهیم آن را تعریف کنیم، به عبارت دیگر شیئی را انتخاب می‌کنیم که به دلایل شهودی و عملی بیش از هر شیء دیگر شایستهٔ آن است که یک متر طول نام بگیرد. در مرحلهٔ دوم مجموعهٔ تمام چیزهایی را که طولشان با آن شیء منتخب یکی است تشکیل می‌دهیم (توجه کنید که برای این کار لازم نیست بدانیم متر چیست)، و متر را به عنوان مجموعه‌ای که بدین طریق ساخته می‌شود تعریف می‌کنیم.

اما متر در واقع چگونه تعریف می‌شود؟ مثال بالا را طوری انتخاب کردیم که از پاسخ سؤال اخیر روشی برای تعریف اعداد به ذهن راه یابد. نکته این است که در تعریف متداول متر، مرحلهٔ دوم حذف می‌شود، یعنی برحسب قراردادی کم و بیش دلخواه چیزی را انتخاب می‌کنند و طول آن را متر می‌نامند. اگر بگویند که این تعریف تسلسل‌آمیز است («طول» یعنی چه؟) بسادگی می‌توان آن را به یک تعریف ملموس و خدشه ناپذیر تبدیل کرد، زیرا مآلاً هیچ چیز نمی‌تواند مانع آن شود که متر را به صورت همان شیء انتخاب‌شده تعریف کنیم. اگر چنین رهیافتی که بر پایهٔ نمایش عملی استوار است در پیش گرفته شود، توضیح اینکه چه وقت «یک متر بودن» قابل حمل به شیء دیگری است، به همان سادگی مورد پیشین است، و آن درست وقتی است که طول شیء جدید به اندازهٔ طول شیء استاندارد منتخب باشد. مجدداً یادآوری می‌کنیم که تعیین اینکه دو شیء هم طول‌اند، تنها به یک عمل سادهٔ مقایسه بستگی دارد و نیازمند در دست داشتن تعریف دقیقی از طول نیست.

با الهام گرفتن از ملاحظاتی که در بالا ذکر شد، قبلاً ۲ را به صورت مجموعهٔ بخصوصی تعریف کردیم که (به زبان شهودی) درست دو عضو دارد. مجموعهٔ استاندارد چگونه انتخاب شد؟ و چگونه باید مجموعه‌های استاندارد دیگر را برای اعداد دیگر انتخاب کرد؟ هیچ‌گونه دلیل ریاضی الزام‌آوری وجود ندارد که از میان پاسخهای مختلف این سؤال، یکی را بر دیگری ترجیح دهیم. کل مسئله عمدتاً منوط به سلیقه است. و احتمالاً، راهنمای ما در کار انتخاب باید ملاحظات مربوط به سادگی و صرفه‌جویی باشد. برای آنکه انگیزهٔ این انتخاب خاص متداول را به دست دهیم فرض کنید یک عدد، مثلاً ۷، قبلاً به صورت یک مجموعه (با هفت عضو) تعریف شده باشد. در این صورت ۸ را چگونه باید تعریف کرد؟ به عبارت دیگر کجا می‌توان مجموعه‌ای با درست هشت عضو یافت؟ می‌توانیم هفت عضو را در مجموعهٔ ۷ بیابیم، چه چیز را باید به عنوان هشتمین عضو به‌آنها اضافه کنیم؟ یک پاسخ معقول به پرسش اخیر، خود عدد (مجموعهٔ) ۷ است، پیشنهاد این است که ۸ به عنوان مجموعه‌ای که از هفت عضو ۷ به اضافهٔ خود ۷ تشکیل یافته است، تعریف شود. توجه کنید که طبق این پیشنهاد هر عدد مساوی مجموعهٔ اعداد قبل از خود خواهد بود.

بند پیشین، ساختمانی را در نظریهٔ مجموعه‌ها به ما الهام می‌دهد که گرچه برای هر مجموعه‌ای با معنی است ولی تنها در ساختن اعداد مورد توجه است. برای هر مجموعهٔ x، x^+، تالی x را به صورت مجموعه‌ای که با اضافه کردن x به اعضای x به دست می‌آید

تعریف می‌کنیم، به عبارت دیگر

$$x^+ = x \cup \{x\}.$$

(تالی x اغلب با x' نمایش داده می‌شود.)

اکنون برای تعریف اعداد طبیعی آمادگی داریم. در تعریف ۰ (صفر) به عنوان مجموعه‌ای با صفر عضو، هیچ‌گونه اختیاری نداریم، باید (چون گذشته) بنویسیم

$$۰ = \varnothing.$$

اگر هر عدد طبیعی باید مساوی مجموعهٔ اعداد قبل از خود باشد، در مورد تعریف ۱ یا ۲ و یا ۳ نیز دستمان بسته است، و باید بنویسیم

$$۱ = ۰^+ \ (= \{۰\}),$$
$$۲ = ۱^+ \ (= \{۰, ۱\}),$$
$$۳ = ۲^+ \ (= \{۰, ۱, ۲\}),$$

و به همین ترتیب. عبارت «و به همین ترتیب» به این معنی است که ما در اینجا از علائم متداول استفاده می‌کنیم و در آینده، بدون توضیح یا پوزشخواهی، دست خود را در به کار گرفتن نمادهای اعدادی چون «۴» یا «۹۵۶» باز خواهیم گذاشت.

از آنچه تا به حال گفته شده نتیجه نمی‌شود که ساختمان تالی‌ها را می‌توان الی غیرالنهایه در درون یک مجموعه انجام داد. بنابراین به یک اصل جدید در نظریهٔ مجموعه‌ها نیاز داریم.

اصل موضوع بینهایت. مجموعه‌ای وجود دارد که شامل ۰ و شامل تالی هر یک از اعضای خود است.

وجه تسمیهٔ این اصل باید روشن باشد. ما هنوز بینهایت را تعریف دقیق نکرده‌ایم ولی به نظر معقول می‌آید که مجموعه‌هایی از آن نوع را که اصل موضوع بینهایت توصیف می‌کند، نامتناهی نام دهیم.

فعلاً، می‌گوییم که مجموعهٔ A یک مجموعهٔ تالی است اگر $۰ \in A$، و نیز $x^+ \in A$ هرگاه $x \in A$. با این زبان، اصل موضوع بینهایت صرفاً می‌گوید که یک مجموعهٔ تالی وجود دارد. چون اشتراک هر خانوادهٔ (غیرتهی) از مجموعه‌های تالی، خود یک مجموعهٔ تالی است (اثبات؟) اشتراک همهٔ مجموعه‌های تالی که زیرمجموعهٔ A باشند، مجموعهٔ تالی ω است. مجموعهٔ ω زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ تالی است. در واقع اگر B مجموعهٔ تالی غیرمشخصی باشد، آنگاه $A \cap B$ نیز یک مجموعهٔ تالی است. چون $A \cap B \subset A$، پس مجموعهٔ $A \cap B$ یکی از مجموعه‌هایی است که در تعریف ω دخیل‌اند. نتیجه می‌گیریم که $\omega \subset A \cap B$ و در نتیجه $\omega \subset B$. خاصیت کمینگی ω که بدین طریق مسلم شد، هویت ω را به طور یگانه تعیین می‌کند؛ اصل موضوع گسترش تضمین می‌کند که تنها یک مجموعهٔ تالی که زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ تالی دیگر است می‌تواند وجود داشته باشد. طبق تعریف، یک عدد طبیعی عضوی از این مجموعهٔ تالی کمین، یعنی ω، است. این

تعریف اعداد طبیعی، رونوشت دقیقی است از توصیفی شهودی که طبق آن این اعداد از ۰، ۱، ۲، ۳، «و غیره» تشکیل یافته‌اند. ضمناً بسیاری از کسانی که در این مبحث کار می‌کنند، با کاربرد نمادی که ما برای مجموعهٔ اعداد طبیعی اختیار کردیم (ω) موافق‌اند، ولی به هیچ‌وجه نمی‌توان گفت که اکثریت قاطع ایشان این انتخاب را تأیید می‌کنند. در این کتاب، از این علامت تحت ضوابط و منحصراً به معنایی که در بالا تعریف کردیم استفاده خواهیم کرد.

احساس ناراحتی خفیفی که ممکن است در مورد تعریف اعداد طبیعی به خواننده دست دهد، کاملاً طبیعی و در بیشتر موارد موقتی است. اشکال کار در این مورد، چنانکه قبلاً هم یک بار دیگر (در تعریف زوجهای مرتب) دیدیم، این است که شیء تعریف شده دارای یک ساختار اضافی و نامربوط است که مزاحم به نظر می‌رسد (ولی در واقع اشکالی ایجاد نمی‌کند). ما دلمان می‌خواهد بشنویم که تالی ۷، ۸ است، ولی شنیدن اینکه ۷ زیرمجموعهٔ ۸ است، یا ۷ عضوی از ۸ است ناخوشایند است. ما از این روساخت اعداد طبیعی تنها تا زمانی استفاده خواهیم کرد که مهمترین خواص اعداد طبیعی را استنتاج می‌کنیم، و از آن پس این روساخت را می‌توان، بی‌آنکه آسیبی به جایی برسد، فراموش کرد.

خانوادهٔ $\{x_i\}$ را که مجموعهٔ اندیس آن یا یک عدد طبیعی و یا مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی باشد یک دنباله (بترتیب متناهی یا نامتناهی) می‌نامیم. اگر $\{A_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها باشد که مجموعهٔ اندیس آن عدد طبیعی n^+ است، آنگاه اجتماع این دنباله را با

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \cup \cdots \cup A_n$$

نمایش می‌دهیم. اگر مجموعهٔ اندیس ω باشد، نماد

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

را به کار می‌بریم. اشتراک و حاصلضرب دکارتی دنباله‌ها را نیز به صورتهای

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \cap \cdots \cap A_n ،$$

$$\times_{i=0}^{n} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \times \cdots \times A_n ،$$

و

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots ،$$

$$\times_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{یا} \quad A_0 \times A_1 \times A_2 \times \cdots$$

نمایش می‌دهیم. کلمهٔ «دنباله» در نوشته‌های ریاضی به چند صورت مختلف به کار می‌رود، ولی این اختلاف بیشتر در علامت است تا در مفهوم. در یکی از این صورتها که از همه رایجتر است به جای ۰، از ۱ شروع می‌کنند، به عبارت دیگر مرجع آن خانواده‌ای است که مجموعهٔ اندیسش $\omega - \{0\}$ است نه ω.

بخش ۱۲

اصول موضوع پئانو[1]

اکنون به یک بحث فرعی می‌پردازیم؛ هدف از این کار این است که خواننده را به طور گذرا با حساب اعداد طبیعی آشنا کنیم. از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها، این عمل، تجمل دلچسبی است.

مهمترین چیزی که دربارهٔ مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی، ω، می‌دانیم این است که مجموعهٔ تالی منحصر بفردی است که زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ تالی دیگر است. وقتی می‌گوییم ω یک مجموعهٔ تالی است یعنی

(الف) $\qquad 0 \in \omega$

(که در آن، $\varnothing = 0$)، و نیز

(ب) $\qquad$ اگر $n \in \omega$ آنگاه $n^+ \in \omega$

(که در آن $n^+ = n \cup \{n\}$). خاصیت کمینگی ω را می‌توان چنین بیان کرد که اگر یک زیرمجموعهٔ S از ω مجموعه‌ای تالی باشد آنگاه $S = \omega$. به صورت دیگر و با اصطلاحات ابتدائی‌تر،

(پ) $\qquad$ اگر $S \subset \omega$، همچنین $0 \in S$، و $n \in S$ ایجاب کند که $n^+ \in S$ آنگاه $S = \omega$.

خاصیت (پ)، به **اصل استقرای ریاضی** معروف است. حال به این فهرست خواص ω دو خاصیت دیگر اضافه می‌کنیم:

(ت) $\qquad$ برای هر n در ω، $n^+ \neq 0$،

و

(ث) $\qquad$ اگر n و m در ω باشند و اگر $n^+ = m^+$، آنگاه $n = m$.

اثبات (ت) ساده است؛ از آنجا که n^+ همواره شامل n بوده و 0 تهی است، روشن است که n^+ با 0 متفاوت است. اثبات (ث) واضح نیست و متکی بر دو قضیهٔ کمکی است. قضیهٔ

---

1. Peano

اول مدعی است که آنچه نباید رخ دهد، در واقع رخ نمی‌دهد. گرچه ممکن است نکاتی را که در اثبات پیش می‌آیند، به نظر ناخوشایند و بیگانه با روح حساب، که انتظار دیدنش را در نظریهٔ اعداد طبیعی داریم، بیابید، با این حال هدف وسیله را توجیه می‌کند. قضیهٔ دوم معطوف به رفتاری است که کاملاً به آنچه هم اکنون نفی کردیم، شبیه است. اما در این مورد، بررسیهای به ظاهر تصنعی به یک نتیجهٔ ایجابی منجر می‌شوند: یعنی همواره اتفاق نسبتاً نامنتظره‌ای رخ می‌دهد. این دو قضیه به صورت زیرند: (۱) هیچ عدد طبیعی زیر-مجموعهٔ هیچیک از اعضای خود نیست، و (۲) هر عضو یک عدد طبیعی، زیرمجموعهٔ آن است. گاهی مجموعه‌ای را که همهٔ اعضایش ($\in$) زیرمجموعه‌اش ($\subset$) نیز باشند، مجموعهٔ متعدی می‌نامند. به عبارت دقیقتر، وقتی که می‌گوییم E متعدی است یعنی اگر $x \in y$ و $y \in E$، آنگاه $x \in E$. (کاربرد لغت متعدی را در نظریهٔ روابط، که با معنای اخیر مختصر تفاوتی دارد، به یاد آورید.) در این زبان، (۲) می‌گوید هر عدد طبیعی متعدی است.

اثبات (۱) کاربردی نمونه‌وار از اصل استقرای ریاضی است. فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی مانند n باشد که زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضای خود نیستند. (به عبارت صریح: $n \in S$ اگر و فقط اگر $n \in \omega$ و برای هر x در n، n زیرمجموعهٔ x نیست.) از آنجا که ۰ زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضایش نیست، نتیجه می‌شود $0 \in S$. حال فرض کنید $n \in S$. چون n زیرمجموعهٔ n است، می‌توان نتیجه گرفت که n عضو n نبوده و بنابراین n^+ زیر-مجموعهٔ n نیست. n^+ زیرمجموعهٔ چه چیزی می‌تواند باشد؟ اگر $n^+ \subset x$، آنگاه $n \subset x$، و در نتیجه (چون $n \in S$) $x \notin n$. از این مطلب نتیجه می‌شود که n^+ نه می‌تواند زیرمجموعهٔ n باشد و نه زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضای n. یعنی n^+ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضای n^+ باشد و در نتیجه $n^+ \in S$. اکنون نتیجهٔ مطلوب (۱)، از (پ) استنتاج می‌شود.

اثبات (۲) نیز استقرایی است. این بار فرض کنید که S مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی متعدی باشد. (به عبارت صریح: $n \in S$ اگر و فقط اگر $n \in \omega$ و برای هر x در n، x زیر-مجموعهٔ n باشد.) شرط $0 \in S$، «به انتفای مقدم» برقرار است. حال فرض کنید $n \in S$. اگر $x \in n^+$ آنگاه یا $x \in n$ و یا $x = n$. در حالت اول $x \subset n$ (چون $n \in S$)، و در نتیجه $x \subset n^+$؛ در حالت دوم، به دلایلی واضحتر $x \subset n^+$. از این امر نتیجه می‌گیریم که هر عضو n^+، زیرمجموعهٔ n^+ است و یا به عبارت دیگر $n^+ \in S$. حال نتیجهٔ مطلوب (۲) از (پ) به دست می‌آید.

اکنون می‌توانیم به اثبات (ث) بپردازیم. فرض کنید n و m اعداد طبیعی باشند و $n^+ = m^+$. چون $n \in n^+$، نتیجه می‌شود که $n \in m^+$ و بنابراین یا $n \in m$ و یا $n = m$. با همین استدلال، یا $m \in n$ و یا $m = n$. اگر $n \neq m$، آنگاه باید داشته باشیم $n \in m$ و $m \in n$. چون n به موجب (۲) متعدی است، نتیجه می‌گیریم که $n \in n$. اما چون $n \subset n$، این مطلب با (۱) در تناقض است و اثبات کامل می‌شود.

احکام (الف) ـ (ث) به اصول موضوع پئانو معروف‌اند و زمانی سرچشمهٔ تمامی دانش ریاضی تصور می‌شدند. با این اصول (و به کمک اصول نظریهٔ مجموعه‌ها که قبلاً دیده‌ایم) می‌توان اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی، و اعداد مختلط را تعریف کرد و

خواص متعارف حسابی و تحلیلی آنها را به دست آورد. چنین برنامه‌ای از حوصلهٔ این کتاب بیرون است و خوانندهٔ علاقه‌مند به آسانی می‌تواند آن را در نوشته‌های دیگر بیابد و فرا بگیرد.

از استقرا، اغلب نه تنها برای اثبات، بلکه جهت تعریف نیز استفاده می‌شود. مثلاً فرض کنید f تابعی از مجموعهٔ X به همان مجموعهٔ X بوده و a عضوی از X باشد. سعی در تعریف دنبالهٔ نامتناهی $\{u(n)\}$ از اعضای X (یعنی تابع u از ω به X) به طریقی مانند $u(\circ) = a$، $u(\text{۱}) = f(u(\circ))$، $u(\text{۲}) = f(u(\text{۱}))$ و به همین ترتیب، به نظر طبیعی می‌رسد. اگر تعریف کنندهٔ فرضی تحت فشار قرار بگیرد که عبارت «و به همین ترتیب» را توضیح دهد، می‌تواند به استقرای ریاضی متوسل شود. یعنی می‌تواند بگوید منظور از آن جز این نیست که ما $u(\circ)$ را a تعریف کرده و سپس به طریق استقرا، برای هر n، $u(n^+)$ را به عنوان $f(u(n))$ تعریف می‌کنیم. ممکن است این سخن موجه به نظر برسد، ولی برای توجیه یک حکم وجودی کافی نیست. اصل استقرای ریاضی، درواقع بسهولت ثابت می‌کند که حداکثر یک تابع وجود دارد که همهٔ شرایطی را که بیان شده است، برمی‌آورد، ولی وجود چنین تابعی را ثابت نمی‌کند. بنابراین به نتیجهٔ زیر نیاز داریم.

قضیهٔ بازگشت. اگر a عضوی از مجموعهٔ X و f تابعی از X به X باشد، آنگاه یک تابع u از ω به X وجود دارد، به طوری که $u(\circ) = a$ و برای هر n در ω، $u(n^+) = f(u(n))$.

اثبات. به خاطر بیاورید که تابعی از ω به X نوع خاصی از زیرمجموعه‌های $\omega \times X$ است؛ ما u را صراحتاً به عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب خواهیم ساخت. بدین منظور، دستهٔ $\mathcal{C}$ متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های A از $\omega \times X$ را به طوری‌که $(\circ, a) \in A$ و $(n^+, f(x)) \in A$ هرگاه $(n, x) \in A$ در نظر می‌گیریم. چون خود $\omega \times X$ دارای این خواص است، دستهٔ $\mathcal{C}$ ناتهی است. بنابراین می‌توانیم u، اشتراک همهٔ مجموعه‌های دستهٔ $\mathcal{C}$ را تشکیل دهیم. ازآنجاکه به آسانی می‌توان دید که خود u به $\mathcal{C}$ تعلق دارد، فقط باید ثابت کنیم که برای هر عدد طبیعی n، حداکثر یک عضو x از X وجود دارد به طوری که $(n, x) \in u$. (به عبارت صریح: اگر هر دوی (n, x) و (n, y) متعلق به u باشند آنگاه $x = y$.) اثبات استقرایی است. فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی n باشد که برای آنها $(n, x) \in u$ به ازای حداکثر یک x صادق است. ثابت خواهیم کرد که $\circ \in S$ و هرگاه $n \in S$ آنگاه $n^+ \in S$.

آیا $\circ$ به S تعلق دارد؟ اگر تعلق نداشته باشد، دست کم برای یک bی متمایز از a داریم $(\circ, b) \in u$. در این صورت مجموعهٔ $u - \{(\circ, b)\}$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این مجموعهٔ کاهش یافته هنوز شامل $(\circ, a)$ است (چون $a \neq b$)، و همچنین اگر شامل (n, x) باشد شامل $(n^+, f(x))$ نیز خواهد بود. دلیل ادعای دوم این است که چون $n^+ \neq \circ$، پس عضوی که حذف کرده‌ایم مساوی $(n^+, f(x))$ نیست. به عبارت دیگر،

$\{(\circ, b)\} \in \mathcal{C}$ — u. ولی این نتیجه ناقض این واقعیت است که u کوچکترین مجموعه در $\mathcal{C}$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $\circ \in S$.

حال فرض کنید که $n \in S$؛ یعنی یک عضو یگانهٔ x در X وجود دارد به طوری که $(n, x) \in u$. چون $(n, x) \in u$، نتیجه می‌گیریم که $(n^+, f(x)) \in u$. اگر n^+ متعلق به S نباشد، آنگاه دست کم برای یک y متمایز از $f(x)$، $(n^+, y) \in u$. حال مجموعهٔ $u - \{(n^+, y)\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که این مجموعهٔ کاهش یافته شامل $(\circ, a)$ است (چون $\circ \neq n^+$) و همچنین اگر شامل مثلاً (m, t) باشد، شامل $(m^+, f(t))$ نیز خواهد بود. در واقع اگر $m = n$، آنگاه t باید همان x باشد، و از آنجا که $y \neq f(x)$، مجموعهٔ کاهش یافته شامل $(n^+, f(x))$ است. از طرف دیگر، اگر $m \neq n$، از آنجا که $m^+ \neq n^+$، مجموعهٔ کاهش یافته شامل $(m^+, f(t))$ است. به عبارت دیگر $\{(n^+, y)\} \in \mathcal{C}$ — u. و بازهم این نتیجه ناقض این واقعیت است که u کوچکترین مجموعهٔ $\mathcal{C}$ است. و می‌توان نتیجه گرفت که $n^+ \in S$.

بدین طریق اثبات قضیهٔ بازگشت کامل می‌شود. هر کاربرد قضیهٔ بازگشت را تعریف به استقرا می‌گویند.

تمرین. ثابت کنید که هرگاه n عددی طبیعی باشد، آنگاه $n \neq n^+$؛ همچنین اگر $n \neq \circ$ آنگاه به ازای یک عدد طبیعی m، $n = m^+$. ثابت کنید ω متعدی است. ثابت کنید اگر E زیرمجموعه‌ای غیرتهی از یک عدد طبیعی باشد، آنگاه یک عضو k در E وجود دارد به طوری که هرگاه m یک عضو متمایز از k در E باشد، آنگاه $k \in m$.

بخش ۱۳
حساب

تعریف جمع برای اعـداد طبیعی، مثالی نمونه‌وار از تعـریف به استقراست. در واقـع از قضیهٔ بازگشت نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی m یک تابع s_m از ω به ω وجود دارد به طوری که $s_m(\circ) = m$ و نیز $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$ برای هـر عـدد طبیعـی n؛ مقدار $s_m(n)$، طبق تعریف، مجموع $m + n$ است. خواص عمومی جمع در حساب با به‌کارگرفتن مکرر اصل استقرای ریاضی ثابت می‌شونـد. بنابراین، بـه عنوان مثال، جمع شرکت‌پـذیر است. یعنی هرگاه k و m و n سه عدد طبیعی باشند

$$(k + m) + n = k + (m + n).$$

اثبات با استقرا روی n و به طریق زیر صورت می‌گیرد. چون $(k + m) + \circ = k + m$ و $k + (m + \circ) = k + m$، معادلـه به ازای $n = \circ$ برقرار است. اگـر معادلـه به ازای n برقرار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
(k + m) + n^+ &= ((k + m) + n)^+ && \text{(طبق تعریف)}\\
&= (k + (m + n))^+ && \text{(طبق فرض استقرا)}\\
&= k + (m + n)^+ && \text{(بازهم طبق تعریف جمع)}\\
&= k + (m + n^+) && \text{(ایضاً)}
\end{aligned}$$

و استدلال کـامل است. اثبات اینکـه جـمع جابجایـی است (یعنی بـرای هـر m و n، $m + n = n + m$) اندکی دردسر دارد و ممکن است نتوان بـا مواجههٔ مستقیم موفق به انجـام دادن آن شد. راه کـار این است کـه ابتـدا بـا استقـرا روی n ثابت کنیـم کـه (۱) $\circ + n = n$ و (۲) $m^+ + n = (m + n)^+$ و سپس با استقرا روی m و به کمک (۱) و (۲) به اثبات معادلهٔ جابجایی مطلوب بپردازیم.

برای تعریف ضرب و تـوان و استنتاج خـواص اساسی حسابی آنها، از شیوه‌هـای مشابهی استفاده می‌شود. برای تعریف ضرب، قضیهٔ بـازگشت را به کار می‌گیریم تـا توابع p_m را به دست آوریم، به طوری که $p_m(\circ) = \circ$ و نیز $p_m(n^+) = p_m(n) + m$ برای

هر عـدد طبیعـی n. در این صورت، مقـدار $p_m(n)$ طبق تعریف، حاصل‌ضرب $m \cdot n$ است. (اغلب، نقطه حذف می‌شود.) ضرب شرکت‌پذیر و جابجایی است؛ برای اثبات، بایـد نظیر همان شیوه‌ای که در مورد جمع عمل شد به کار رود. قانون پخش (یعنی اینکه به ازای هر سه عدد طبیعی k و m و n داریم $k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n$) نتیجهٔ آسان دیگری از اصل استقرای ریـاضی است. (از استقرا روی n استفاده کنید.) هـر کس کـه بدین طـریق مجموع و حاصل‌ضرب را به دست آورده باشد، نبایـد هیچ مشکلی در مـورد تـوان داشته باشد. قضیهٔ بازگشت، تـوابع e_m را بـه دست می‌دهـد، بـه طـوری کـه $e_m(0) = 1$ و $e_m(n^+) = e_m(n) \cdot m$ برای هر عـدد طبیعی n؛ مقدار $e_m(n)$، طبق تعریف، توان m^n است. کشف و تثبیت خواص توان و همچنین جزئیات اثبات احکام مربوط به ضرب را می‌توان با اطمینان به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار کرد.

مبحث بعدی که شایستهٔ قدری توجه است، نظریهٔ ترتیب در مجموعـهٔ اعـداد طبیعی است. به همین منظور ما به بررسی محتاطانهٔ این سؤال می‌پردازیم کـه کـدام عدد طبیعی به کدام عدد طبیعی دیگر متعلق است. رسماً می‌گـوییم دو عـدد طبیعی m و n مقایسه‌پذیرنـد، هرگاه $m \in n$ یا $m = n$ و یا $n \in m$. حکم: دو عدد طبیعی همواره مقایسه‌پذیرنـد. اثبات این حکم در چند مرحله صورت می‌گیرد و بدین‌منظور معرفی چند نماد، مناسب خواهد بود. برای هر n در ω مجموعهٔ تمام mهایی را در ω کـه با n قابل مقایسه‌اند $S(n)$ می‌نـامیم و فرض می‌کنیم S مجموعـهٔ تمام nهایی است کـه $S(n) = \omega$. بـر حسب این اصطلاحات، می‌خـواهیم ثابت کنیم کـه $S = \omega$. اثبات را بـا نشان دادن $S(0) = \omega$ (یعنی $0 \in S$) شروع می‌کنیم. روشن است که $S(0)$ شامل 0 است. اگـر $m \in S(0)$، آنگاه چون $m \in 0$ غیرممکن است، یا $m = 0$ (که در این صورت $0 \in m^+$) و یا $0 \in m$ (که در این صورت، باز هم $0 \in m^+$). بنابراین در هر حال، اگـر $m \in S(0)$ آنگاه $m^+ \in S(0)$؛ پس ثابت می‌شود که $S(0) = \omega$. اثبات را با نشان دادن اینکه اگر $S(n) = \omega$ آنگاه $S(n^+) = \omega$، کامل می‌کنیم. این واقعیت کـه $0 \in S(n^+)$ نیاز به برهان ندارد (چون $n^+ \in S(0)$)؛ باقی می‌ماند اثبات اینکه اگر $m \in S(n^+)$ آنگاه $m^+ \in S(n^+)$. چون $m \in S(n^+)$، بنابراین یا $n^+ \in m$ (کـه در آن صورت $n^+ \in m^+$ (ایضاً) و یـا $m \in n^+$. در حالت اخیر، یا $m = n$ (که در آن صورت $m^+ = n^+$)، یا $m \in n$. حالت آخر، خـود برحسب رفتار m^+ و n به دو قسمت تفکیک می‌شود: چـون $m^+ \in S(n)$، یـا بایـد داشته بـاشیم $n \in m^+$، یا $n = m^+$، و یا $m^+ \in n$. امکان اول با موقعیت فعلی (یعنی با $m \in n$) ناسازگار است. زیرا که اگر $n \in m^+$، آنگاه یا $n \in m$ و یا $n = m$، بنابراین، در هر حال $n \subset m$ و ما می‌دانیم که هیچ عدد طبیعی، زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضای خود نیست. پس از هر دو امکان باقیمانده نتیجه می‌گیریم که $m^+ \in n^+$، و اثبات کامل است.

بند قبل متضمن این معنی است کـه اگر m و n در ω باشند، آنگاه حداقل یکی از سه امکان ($m \in n$، $m = n$، $n \in m$) باید متحقق باشد؛ بسادگی می‌توان دریافت که همواره تنها یکی از ایـن روابط برقرار است. (دلیل آن کاربرد دیگـری از این واقعیت است کـه یک عدد طبیعـی زیرمجموعهٔ هیچیک از اعضای خـود نیست.) یک نتیجهٔ دیگـر بند قبل

این است که اگـر n و m اعداد طبیعی متمایز باشند، آنگاه شرط لازم و کافـی برای اینکه $m \in n$ این است کـه $m \subset n$. در واقع استنتاج $m \subset n$ از $m \in n$، همان متعدی بودن n است. بعکس، اگر $m \subset n$ و $m \neq n$، آنگاه $n \in m$ نمی‌توانـد برقرار بـاشد (چون در این صورت m زیرمجموعهٔ یکی از اعضای خود خواهد بود) و بنابراین $m \in n$. اگر $m \in n$ یا هم‌ارز با آن، m زیرمجموعهٔ حقیقی n باشد، می‌نویسیم $m < n$ و می‌گوییم m کوچکتر از n است. اگر بدانیم که m یـا کوچکتر از n و یـا مساوی n است می‌نـویسیم $m \leqq n$. توجه کنید کـه $\leqq$ و $<$ روابطی در ω هستند. اولـی انعکـاسی است ولـی دومی نیست، هیچیک متقارن نبوده و هر دو متعدی هستند. اگر $m \leqq n$ و $n \leqq m$، آنگاه $m = n$.

تمرین. ثابت کنید که اگر $m < n$ آنگـاه $m + k < n + k$ و ثابت کنید کـه اگـر $m < n$ و $k \neq 0$ آنگاه $m \cdot k < n \cdot k$. ثابت کنید کـه اگر E یک مجموعهٔ غیرتهی از اعداد طبیعی باشد، آنگاه یک عنصر k در E وجود دارد به طوری کـه، برای هر m در E، $k \leqq m$.

دو مجموعهٔ E و F را (که لزومی ندارد زیرمجموعه‌های ω باشند) همتوان می‌گویند و با علامت $E \sim F$ نشان می‌دهند اگر یک تناظر یک بیک بین آنها برقرار باشد. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که همتوانی به این معنی، برای زیرمجموعه‌هـای یک مجموعهٔ X، یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ است.

هر زیرمجموعهٔ حقیقی یک عدد طبیعی n با یک عدد طبیعی کوچکتر (یعنی بـا یکی از اعضای n) همتوان است. اثبات این حکم استقرایی است. اثبات بـرای $n = 0$ واضح است. اگر حکم برای n صادق باشد و E یک زیرمجموعهٔ حقیقی n^+ بـاشد، آنگـاه یا E یک زیرمجموعهٔ حقیقی n است کـه فرض استقرا نتیجه‌بخش است، یـا $E = n$ است کـه نتیجه واضح است، و یا $n \in E$. در حالت اخیر، یک عدد k را در n، به طوری کـه در E نباشد، می‌یابیم و تابـع f را روی E تـوسط $f(i) = i$ هرگـاه $i \neq n$ و $f(n) = k$، تعریف می‌کنیم. واضح است که f یک بیک است و E را به n می‌نگـارد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که تصویر E تحت f یا مساوی n است و یـا (به دلیل فرض استقرا) بـا یکی از اعضای n همتوان است. پس خود E همواره با یکی از اعضای n^+ همتوان است.

این واقعیتی نسبتاً تکاندهنده است که مجموعه‌ای می‌تواند با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود همتوان باشد. برای مثال، اگر تابع f از ω به ω با $f(n) = n^+$ برای هـر n در ω تعریف شود، آنگاه f یک تناظر یک بیک بین مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی و زیرمجموعـهٔ حقیقی آن متشکل از اعـداد طبیعی غیرصفر است. بد نیست بدانیم که اگـر چه مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی دارای این خاصیت غریب است، ولی هر عدد طبیعی مشخص رفتار معقولی دارد. به عبارت دیگر، اگر $n \in \omega$، آنگاه n با هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی خـود، همتوان نیست. این نکته برای $n = 0$ واضح است. حال فرض کنید که برای n صادق بوده و f یک تناظر یک‌بیک از n^+ به یک زیرمجموعهٔ حقیقی E از n^+ است. اگر $n \notin E$، آنگاه تحدید f به n

تناظری یک بیک بین n و یک زیرمجموعهٔ حقیقی n می‌باشد، و این با فرض استقرا تعارض دارد. اگر $n \in E$، آنگاه n با $E - \{n\}$ همتوان بوده و بنابراین، طبق فرض استقرا $n = E - \{n\}$، از اینجا نتیجه می‌شود که $E = n^+$، که ناقض این فرض است که E زیرمجموعهٔ حقیقی n^+ است.

مجموعهٔ E متناهی خوانده می‌شود اگر با یک عدد طبیعی همتوان باشد، در غیر این صورت نامتناهی است.

تمرین. با استفاده از این تعریف ثابت کنید ω نامتناهی است.

یک مجموعه می‌تواند حداکثر با یک عدد طبیعی همتوان باشد. (اثبات: می‌دانیم که از هر دو عدد طبیعی متمایز، یکی باید عضو دیگری و در نتیجه زیرمجموعهٔ حقیقی آن باشد، از بند قبل نتیجه می‌شود که آن دو نمی‌توانند همتوان باشند.) می‌توان نتیجه گرفت که یک مجموعهٔ متناهی هیچ‌گاه با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود همتوان نیست، به عبارت دیگر، تا وقتی که با مجموعه‌های متناهی سر و کار داریم، همواره کل از هر یک از اجزایش بزرگتر است.

تمرین. با استفاده از این نتیجهٔ تعریف تناهی، ثابت کنید ω نامتناهی است.

همچنین چون هر زیرمجموعهٔ یک عدد طبیعی با یک عدد طبیعی همتوان است. نتیجه می‌شود که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی E، طبق تعریف، عدد طبیعی یگانه‌ای است که همتوان با E است، و ما آن را با $\#(E)$ نمایش خواهیم داد. واضح است که اگر تناظر بین E و $\#(E)$ به زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعهٔ X محدود شود، حاصل تابعی است از یک زیرمجموعهٔ مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ به ω. این تابع به طرز مطلوبی با روابط و اعمال متعارف روی مجموعه‌ها، مرتبط می‌گردد. مثلاً اگر E و F مجموعه‌هایی متناهی باشند به طوری که $E \subset F$، آنگاه $\#(E) \leqq \#(F)$ (علت این است که چون $E \sim \#(E)$ و $F \sim \#(F)$، نتیجه می‌گیریم که $\#(E)$ با یک زیرمجموعهٔ $\#(F)$ همتوان است.). مثال دیگر این حکم است که اگر E و F مجموعه‌هایی متناهی باشند، آنگاه $E \cup F$ نیز متناهی است، مضافاً به اینکه هرگاه E و F مجزا باشند، آنگاه $\#(E \cup F) = \#(E) + \#(F)$. مرحلهٔ حساس در راه اثبات، این است که اگر m و n اعداد طبیعی باشند، آنگاه مکمل m نسبت به حاصل‌جمع $m + n$ با n همتوان است؛ این واقعیت کمکی توسط استقرا روی n اثبات می‌شود. به شیوه‌ای مشابه ثابت می‌شود که اگر E و F مجموعه‌هایی متناهی باشند، آنگاه مجموعه‌های $E \times F$ و E^F نیز متناهی هستند و علاوه براین

$$\#(E \times F) = \#(E) \cdot \#(F) \quad \text{و} \quad \#(E^F) = \#(E)^{\#(F)}.$$

تمرین. اجتماع یک مجموعهٔ متناهی از مجموعه‌های متناهی، متناهی است. اگر E متناهی باشد آنگاه $\mathcal{P}(E)$ نیز متناهی است و علاوه بر آن $\#(\mathcal{P}(E)) = 2^{\#(E)}$. اگر E مجموعه‌ای غیرتهی و متناهی از اعداد طبیعی باشد، آنگاه یک عنصر k در E وجود دارد به طوری که برای هر m در E، $m \leqq k$.

بخش ۱۴

ترتیب

در سراسر ریاضیات و بخصوص در تعمیم عمل شمارش از مجموعه‌های متناهی به مجموعه‌های نامتناهی، نظریهٔ ترتیب نقش مهمی ایفا می‌کند. تعاریف اصلی ساده‌اند. تنها چیزی که باید به خاطر داشت این است که انگیزهٔ اولیه خود را از خواص شناخته شدهٔ «کوچکتر از یا مساوی با» می‌گیریم نه از خواص «کوچکتر از». این انتخاب، دلیل عمده‌ای ندارد، و تنها دلیل آن این است که با تعمیم «کوچکتر از یا مساوی با» بیشتر مواجه خواهیم شد و در بررسیهای جبری خوش رفتارتر است.

رابطهٔ R در مجموعهٔ X پادمتقارن خوانده می‌شود اگر برای هر x و y در X برقراری همزمان $x\,R\,y$ و $y\,R\,x$ نتیجه بدهد $x = y$. یک ترتیب جزئی (یا گاهی ترتیب) در یک مجموعهٔ X، یک رابطهٔ انعکاسی، پادمتقارن، و متعدی در X است. مرسوم است که برای بیشتر ترتیبهای جزئی در بیشتر مجموعه‌ها تنها از یک علامت (یا حرف چاپی دیگری که با آن خویشی نزدیک داشته باشد) استفاده شود. علامت معمول، علامت آشنای نامساوی است. بنابراین یک ترتیب جزئی در X را می‌توان به عنوان یک رابطهٔ $\leqq$ در X تعریف کرد به طوری که برای هر x و y و z در X داشته باشیم (الف) $x \leqq x$، (ب) اگر $x \leqq y$ و $y \leqq x$ آنگاه $x = y$، و (پ) اگر $x \leqq y$ و $y \leqq z$ آنگاه $x \leqq z$. علت ذکر صفت «جزئی» این است که بعضی از پرسشهای مربوط به ترتیب ممکن است بی‌پاسخ بماند. اگر برای هر x و y در X، یا $x \leqq y$ و یا $y \leqq x$، آنگاه $\leqq$ یک ترتیب تمام (همچنین گاهی، ساده، یا خطی) نامیده می‌شود. مجموعهٔ تماماً مرتب را اغلب زنجیر می‌نامند.

تمرین. شرایط پادمتقارن بودن و تمامیت را برای یک رابطهٔ R، به کمک معادلاتی که شامل R و معکوس آن باشند، بنویسید.

طبیعی‌ترین مثال برای ترتیب جزئی (و نه تمام) رابطهٔ شمول است. به عبارت صریح،

برای هر مجموعهٔ X، رابطهٔ $\subset$ یک ترتیب جزئی در مجموعهٔ توانی X، یعنی $\mathcal{P}(X)$، است؛ این ترتیب، تمام است هرگاه و فقط آنگاه که X تهی یا مجموعه‌ای تک عضوی باشد. یک مثال مشهور از ترتیب تمام، رابطهٔ «کوچکتر از یا مساوی با» در مجموعهٔ اعداد طبیعی است. رابطهٔ توسیع توابع، ترتیب جزئی جالبی است که بسیار هم دیده می‌شود. به بیان صریح: برای مجموعه‌های مفروض X و Y، فرض‌کنید F مجموعهٔ تمام توابعی باشد که قلمرو آنها زیرمجموعهٔ X و برد آنها زیرمجموعهٔ Y باشد. رابطهٔ R را در F توسط $f\ R\ g$، در صورتی که $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$ و برای هر x در $\operatorname{dom} f$، $f(x) = g(x)$ تعریف کنید؛ به عبارت دیگر، $f\ R\ g$ به این معنی است که f تحدید g و یا به طور معادل g توسیع f است. اگر به خاطر بیاوریم که توابع در F به هر حال زیرمجموعه‌های خاصی از حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ هستند، در می‌یابیم که $f\ R\ g$ به همان معنی $f \subset g$ است و توسیع، حالت خاصی از شمول است.

مجموعهٔ جزئاً مرتب، مجموعه‌ای است همراه با یک ترتیب جزئی در آن. این‌گونه «همراه بودن» را می‌توان به صورت زیر فرمولبندی دقیق کرد: مجموعهٔ جزئاً مرتب، زوج مرتب $(X, \leqq)$ است که در آن X یک مجموعه و $\leqq$ یک ترتیب جزئی در X است. این نوع تعریف در ریاضیات بسیار متداول است و هر ساختمان ریاضی، تقریباً همواره عبارت از یک مجموّعه «همراه با» مجموعه‌ها و توابع و یا روابط مشخص دیگری است. راه قابل قبول برای دقت بخشیدن به چنین تعاریفی ارجاع به زوجهای مرتب، سه‌تایی‌های مرتب، یا هر چیز دیگری است که مناسب باشد. اما این تنها راه نیست، به عنوان مثال، توجه کنید که اگر ترتیبی جزئی را بشناسیم قلمرو آن را نیز شناخته‌ایم. بنابراین اگر ترتیبی جزئی را به عنوان یک زوج مرتب توصیف کنیم، قطعاً اضافه‌گویی کرده‌ایم؛ زیرا مؤلفهٔ دوم بتنهایی همان مقدار آگاهی را می‌رساند. با این حال، در جاهایی که با زبان و نمادگذاری سر و کار داریم، شیوهٔ مرسوم همواره بر استدلال صرف غلبه می‌کند. رفتار ریاضی قابل قبول (برای ساختمانهای ریاضی به طور کلی و در اینجا برای مجموعه‌های جزئاً مرتب) این است که روش زوجهای مرتب را درست بدانیم، و فراموش کنیم که مؤلفهٔ دوم مهم است و طوری صحبت کنیم که گویی فقط مؤلفهٔ اول دارای اهمیت است. به پیروی از شیوهٔ مرسوم، اغلب عباراتی چون «فرض کنید X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است» را به کار خواهیم برد در حالی که مقصود اصلی ما این است که «فرض کنید X قلمرو یک ترتیب جزئی باشد». قراردادهای زبانی مشابهی در مورد مجموعه‌های تماماً مرتب یعنی در مورد مجموعه‌های جزئاً مرتبی که ترتیب آنها تمام است، نیز به کار می‌رود.

در نظریهٔ مجموعه‌های جزئاً مرتب از اصطلاحات بسیاری استفاده می‌شود که به دلیل نزدیک بودن معنای فنی آنها به معانی ضمنی روزمره‌شان، کم و بیش توصیف کنندهٔ خود هستند. مشخصاً، فرض کنید X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب و x و y اعضای X باشند. می‌نویسیم $y \geqq x$ در صورتی که $x \leqq y$، به عبارت دیگر $\geqq$ معکوس رابطهٔ $\leqq$ است. اگر $x \leqq y$ و $x \neq y$، می‌نویسیم $x < y$ و می‌گوییم x کمتر از یا کوچکتر از y است، و یا x یک مقدم y است. به صورت دیگر، تحت همان شرایط می‌نویسیم $y > x$ و می‌گوییم y

بیشتر از یا بزرگتر از x است، و یا y یک تالی x است. رابطهٔ $>$ طوری است که (الف) برای هیچ دوعضو x و y، $x > y$ و $y > x$ توأماً برقرار نیست، و (ب) اگر $x > y$ و $y > z$ آنگاه $x > z$ (یعنی $>$ متعدی است). بعکس اگر $>$ رابطه‌ای در X باشد که در (الف) و (ب) صدق کند و $x \leqq y$ به معنی $x > y$ یا $x = y$ تعریف شود، آنگاه $\leqq$ یک ترتیب جزئی در X است.

ارتباط بین $\leqq$ و $>$ را می‌توان به روابط دلخواه تعمیم داد. یعنی برای هر رابطهٔ مفروض R در یک مجموعهٔ X می‌توانیم رابطهٔ S را در X به صورت $x\ S\ y$ هرگاه $x\ R\ y$ و $x \neq y$ تعریف کنیم و بعکس برای هر رابطهٔ S در X می توانیم رابطهٔ R را در X به صورت $x\ R\ y$ هرگاه یا $x\ S\ y$ و یا $x = y$ تعریف کنیم. جهت داشتن شیوه‌ای مختصر برای اشاره به انتقال از R به S و بالعکس می‌گوییم که S رابطهٔ اکید متناظر با R و R رابطهٔ ضعیف متناظر با S است. می‌گوییم که رابطه‌ای در X، «X را به طور جزئی مرتب می‌کند» هرگاه یا خود آن رابطه و یا رابطهٔ ضعیف متناظر با آن یک ترتیب جزئی در X باشد.

اگر X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد و $a \in X$، مجموعهٔ $\{x \in X : x < a\}$ پارهٔ آغازی‌ای است که توسط a مشخص می‌گردد و معمولاً توسط $s(a)$ نمایش داده می‌شود. مجموعهٔ $\{x \in X : x \leqq a\}$ پارهٔ آغازی ضعیفی است که توسط a مشخص می‌گردد و به صورت $\bar{s}(a)$ نمایش داده می‌شود. در مواردی که تأکید بر تمایز بین پاره‌های آغازی و پاره‌های آغازی ضعیف حائز اهمیت باشد، نوع اول را پاره‌های آغازی اکید می‌نامیم. به‌طورکلی کلمات «اکید» و «ضعیف» بترتیب معطوف به $>$ و $\leqq$ هستند. بنابراین به عنوان مثال، پارهٔ آغازی مشخص‌شده توسط a را می‌توان به عنوان مجموعهٔ تمام مقدمهای a و یا، محض تأکید، به عنوان مجموعهٔ تمام مقدمهای اکید توصیف کرد؛ همچنین پارهٔ آغازی ضعیف مشخص شده توسط a متشکل از تمام مقدمهای ضعیف a است. اگر $x \leqq y$ و $y \leqq z$ می‌توان گفت که y بین x و z است؛ هرگاه $x > y$ و $y > z$ آنگاه y اکیداً بین x و z است. هرگاه $x > y$ و نیز اگر هیچ عضوی اکیداً بین x و y نباشد، می‌گوییم x مقدم بلافصل y، و یا y تالی بلافصل x است.

اگر X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد (که ممکن است بخصوص تماماً مرتب نیز باشد) آنگاه ممکن است X عضوی چون a داشته باشد به طوری که برای هر x در X، $a \leqq x$. در این صورت می‌گوییم a کمترین (کوچکترین، اولین) عضو X است. پادمتقارن بودن ترتیب، نتیجه می‌دهد که اگر X کمترین عضوی داشته باشد، این کمترین عضو یگانه است. همچنین، اگر X عضوی چون a داشته باشد به‌طوری که برای هر x در X، $x \leqq a$، آنگاه a بیشترین (بزرگترین، آخرین) عضو X است، این عضو نیز (البته در صورت وجود) یگانه است. مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی، ω (با ترتیب معمولی آن برحسب بزرگی) مثالی از یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است با اولین عضو (یعنی ۰) و بدون آخرین عضو. همین مجموعه، اگر ترتیبش را معکوس کنیم، دارای آخرین عضو بوده ولی فاقد اولین عضو است.

در مجموعه‌های جزئاً مرتب، فرق مهمی بین کمترین عضو با اعضای کمین موجود

است. اگر، همچون قبل، X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد، عضو a از X را عضو کمین X گویند در صورتی‌که هیچ عضوی از X اکیداً کوچکتر از a نباشد. یعنی a کمین است اگر از $x \leqq a$ نتیجه بگیریم که $a = x$. به عنوان مثال، دستهٔ $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعهٔ غیرتهی X را با ترتیب شمول در نظر بگیرید. هر مجموعهٔ تک عضوی، یک عضو کمین $\mathcal{C}$ است، ولی پیداست که $\mathcal{C}$ کمترین عضو ندارد (مگر آنکه خود X مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد). همچنین بین بزرگترین عضو و اعضای بیشین تمایز قائل می‌شویم؛ عضو بیشین X عضوی چون a است به طوری که X شامل هیچ عضوی نباشد که اکیداً بزرگتر از a باشد. یعنی a بیشین است اگر از $a \leqq x$ نتیجه بگیریم که $a = x$. می‌گویند عضو a از مجموعهٔ جزئاً مرتب X یک کران پایین برای زیرمجموعهٔ E از X است هرگاه برای هر x در E، $a \leqq x$؛ همچنین a یک کران بالا برای E است، هرگاه برای هر x در E، $x \leqq a$. ممکن است یک مجموعهٔ E، اصلاً کران پایین یا کران بالا نداشته باشد و یا تعداد زیادی داشته باشد، که در حالت اخیر ممکن است هیچیک از آنها به E متعلق نباشند. (امثله؟) فرض کنید E_* مجموعهٔ تمام کرانهای پایین E در X و E^* مجموعهٔ تمام کرانهای بالای E در X باشد. آنچه هم‌اکنون گفته شد به این معنی است که E_* یا $E \cap E_*$ ممکن است تهی باشند. اگر $E \cap E_*$ تهی نباشد، آنگاه مجموعه‌ای تک عضوی خواهد بود که از کمترین عضو E، که یگانه است، تشکیل می‌شود. همین نکات در مورد E^* نیز صادق است. اگر اتفاقاً مجموعهٔ E_* دارای بزرگترین عضو a که حتماً یگانه است باشد، آنگاه a بزرگترین کران پایین یا اینفیموم E نامیده می‌شود، و برای نشان دادن آن معمولاً از کوته‌نوشتهای g.l.b. و inf استفاده می‌شود. اما چون تلفظ کوته نوشت اول دشوار است، حتی بآسانی نمی‌توان به خاطر سپرد که g.l.b. مربوط به کران بالا (بیشترین) و یا کران پایین (کمترین) است. بنابراین تنها علامت دوم را به کار خواهیم گرفت. پس $\inf E$ عضو یگانه‌ای از X (احتمالاً خارج از E) است که یک کران پایین برای E است و بر هر کران پایینی E مسلط است (یعنی از هر کران پایینی E بزرگتر است). تعاریف مربوط به کران دیگر، کاملاً مشابه است. اگر E^* دارای کمترین عضو a (که حتماً یگانه است) باشد، آنگاه a کوچکترین کران بالا (l.u.b.) یا سوپرموم (sup) E خوانده می‌شود.

مفاهیم مربوط به مجموعه‌های جزئاً مرتب را بآسانی می‌توان بیان کرد، ولی جذب آنها به مدتی وقت نیاز دارد. از این‌رو، به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که مثالهای زیادی جهت نمایش حالات مختلف رفتارهای ممکن مجموعه‌های جزئاً مرتب و زیر مجموعه‌های آنها تدارک ببیند، و برای کمک به او در این مهم، ذیلاً سه مجموعهٔ جزئاً مرتب خاص و بعضی خواص جالب آنها را توصیف می‌کنیم. (الف) در این مثال، مجموعهٔ ما $\omega \times \omega$ است. جهت اجتناب از هرگونه اشتباه احتمالی، ترتیبی که قصد معرفی آن را داریم توسط نماد بیطرف R نمایش می‌دهیم. اگر (a, b) و (x, y) زوجهای مرتبی از اعداد طبیعی باشند، آنگاه $(a, b)\, R\, (x, y)$ طبق تعریف یعنی $۲^b\,(۲a + ۱) \leqq ۲^y\,(۲x + ۱)$ (در اینجا علامت نامساوی نمایشگر ترتیب معمولی اعداد طبیعی است). خواننده‌ای که در مورد کسرها تجاهل نمی‌کند، متوجه خواهد شد که آنچه هم‌اکنون تعریف شد، جز از لحاظ نمادگذاری،

همان ترتیب معمولی برای $\frac{2a+1}{2^b}$ و $\frac{2x+1}{2^y}$ است. (ب) این بار هم مجموعهٔ مورد نظر $\omega \times \omega$ است. باز هم برای نمایش ترتیب، از یک نماد بیطرف، مثلاً S، استفاده می‌کنیم. اگر (a, b) و (x, y) زوجهای مرتبی از اعداد طبیعی باشند، آنگاه $(a, b)\ S\ (x, y)$ طبق تعریف به این معنی است که یا a اکیداً کوچکتر از x است (به مفهوم متداول) و یا در غیر این صورت $a = x$ و $b \leqq y$. به علت شباهت این ترتیب با نحوهٔ تنظیم لغات در کتابهای لغت (قاموسها) این ترتیب به نام ترتیب قاموسی $\omega \times \omega$ نامیده می‌شود. (پ) بار دیگر مجموعهٔ ما $\omega \times \omega$ است. در این مورد رابطهٔ ترتیب، مثلاً T، طوری است که $(a, b)\ T\ (x, y)$، طبق تعریف، یعنی $a \leqq x$ و $b \leqq y$.

بخش ۱۵

اصل موضوع انتخاب

برای دستیابی به عمیقترین نتایج دربارهٔ مجموعه‌هـای جزئاً مرتب، احتیاج به ابزار جدیدی از نظریهٔ مجموعه‌ها داریم؛ بنابراین بسط نظریهٔ ترتیب را آن قدر به تعویق می‌اندازیم که به این ابزار جدید مجهز شویم.

بحث را با تذکر این نکته شروع می‌کنیم که یک مجموعه یا تهی است و یا غیرتهی، و در صورت غیرتهی بـودن، طبق تعریف، دارای عنصری است. این نکته قابل تعمیم است. اگر X و Y دو مجموعه باشند و اگر یکی از آنها تهی باشد آنگـاه حاصل‌ضرب دکـارتی $X \times Y$ تهی است. اگر هیچیک از X یا Y تهی نباشد، آنگـاه یک عنصر x در X و یک عنصر y در Y وجود دارد و نتیجه می‌شود کـه زوج مرتب (x, y) به حـاصل‌ضرب دکارتی $X \times Y$ تعلق دارد و بنابراین $X \times Y$ غیرتهی است. ملاحظات فوق حالتهـای $n = ۱$ و $n = ۲$ از حکم زیر را تشکیل می‌دهند: اگـر $\{X_i\}$، مثلاً برای i در n، دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، آنگـاه شرط لازم و کـافی برای تهی بودن حاصل‌ضرب دکارتی آنها این است که دست کم یکی از آنها تهی باشد. این حکم بسادگی با استقرا روی n ثابت می‌شود. (حالت $n = ۰$ بـه بحث لغزنده‌ای دربـارهٔ تـابع تهی منتهی می‌شود، خوانندهٔ بیعلاقه می‌تواند استقرا خود را به جای ۰، از ۱ شروع کند.)

با تعمیم قسمت غیربدیهی حکم بند قبل (یعنی لزوم آن) به خانـواده‌هـای نامتناهی، اصل مهم زیر در نظریهٔ مجموعه‌ها به دست می‌آید:

اصل موضوع انتخاب. حاصل‌ضرب دکارتی یک خانوادهٔ غیرتهی از مجموعه‌های غیرتهی، غیرتهی است.

به عبارت دیگر، اگر $\{X_i\}$ خانواده‌ای از مجموعـه‌های غیرتهی بـاشد کـه تـوسط مجموعهٔ غیرتهی I اندیس شده باشد، آنگاه یک خانوادهٔ $\{x_i\}$، $i \in I$، وجود دارد به طوری

که برای هر i در I، $x_i \in X_i$.

فرض کنید $\mathcal{C}$ دسته‌ای غیرتهی از مجموعه‌های غیرتهی باشد، می‌توانیم $\mathcal{C}$ را به‌عنوان یک خانواده در نظر بگیریم و یا، به عبارت بهتر، تنها با به کار گرفتن خود $\mathcal{C}$ در نقش مجموعهٔ اندیس و استفاده از نگاشت همانی روی $\mathcal{C}$ به‌عنوان اندیسگر، آن را به یک مجموعهٔ اندیس شده تبدیل کنیم. در این صورت اصل موضوع انتخاب می‌گوید که حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های $\mathcal{C}$ حداقل دارای یک عضو است. عضو این حاصل‌ضرب دکارتی، طبق تعریف تابعی (خانواده‌ای مجموعهٔ اندیس شده‌ای) است که قلمرو آن مجموعهٔ اندیس (در این حالت خود $\mathcal{C}$) و مقدار آن در هر اندیس به مجموعه‌ای تعلق دارد که همان اندیس را داراست. نتیجه: تابعی چون f با قلمرو $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که اگر $A \in \mathcal{C}$ آنگاه $f(A) \in A$. این نتیجه، بویژه درحالتی که $\mathcal{C}$ دستهٔ تمام زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعهٔ غیرتهی X باشد، صادق است. در این حالت حکم بدین صورت درمی‌آید که یک تابع f با قلمرو $\mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$ وجود دارد به طوری که اگر A در آن قلمرو قرار گیرد آنگاه $f(A) \in A$. به‌زبان شهودی، تابع f را می‌توان به صورت انتخاب همزمان یک عضو از هر مجموعه توصیف کرد، وجه تسمیهٔ این اصل موضوع همین است. (تابعی که، به این مفهوم، از هر زیرمجموعهٔ غیرتهی مجموعهٔ X یک عضو «انتخاب می‌کند»، تابع انتخاب برای X خوانده می‌شود.) دیده‌ایم که اگر دستهٔ مجموعه‌هایی که از آنها انتخاب می‌کنیم متناهی باشد، امکان انتخاب همزمان را می‌توان بسادگی از آنچه حتی پیش از بیان اصل موضوع انتخاب می‌دانسته‌ایم نتیجه گرفت؛ نقش اصل موضوع انتخاب این است که امکان انتخاب را در حالات نامتناهی تضمین می‌کند.

دو نتیجهٔ اصل موضوع انتخاب در بند قبل (یکی در مورد مجموعهٔ توانی یک مجموعه و دیگری در مورد دسته‌های کلیتر از مجموعه‌ها) در واقع تنها صورتهای دیگری از بیان این اصل هستند. قبلاً، بررسی این موضوع که اصل موضوع انتخاب، تا چه حد در اثبات هر یک از نتایج خود دخیل است، مهم شمرده می‌شد. یافتن راه دیگری برای اثبات، بدون اتکا به اصل موضوع انتخاب یک پیروزی تلقی می‌شد؛ و عکس آن، یعنی اثبات اینکه آن نتیجه، معادل اصل موضوع انتخاب است (البته به فرض سایر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها) به معنی شکستی افتخارآمیز بود. هر چیز دیگر بین این دو، اسباب آشفتگی خاطر بود. به‌عنوان نمونه (و یک تمرین) این حکم را که هر رابطه شامل تابعی است با همان قلمرو، ذکر می‌کنیم. نمونهٔ دیگر: اگر $\mathcal{C}$ دسته‌ای از مجموعه‌های غیرتهی دو بدو مجزا باشد، آنگاه مجموعه‌ای چون A وجود دارد به طوری که برای هر C در $\mathcal{C}$، $A \cap C$ یک مجموعهٔ تک عضوی است. این احکام، هر دو، نمونه‌هایی از انبوه احکامی هستند که معادل بودن آنها با اصل موضوع انتخاب معلوم شده است.

به عنوان نمایشی از کاربرد اصل موضوع انتخاب، به این حکم که اگر مجموعه‌ای نامتناهی باشد آنگاه زیرمجموعه‌ای همتوان با ω دارد توجه کنید. یک استدلال غیررسمی می‌تواند به شکل زیر صورت گیرد. اگر X نامتناهی باشد آنگاه بویژه غیرتهی است (یعنی همتوان با ۰ نیست)؛ بنابراین دارای عضوی است، مثلاً x_0. چون X همتوان با ۱ نیست، مجموعهٔ

$X - \{x_0\}$ تهی نیست، پس دارای عضوی است، مثلاً x_1. همین استدلال را الی‌غیرالنهایه تکرار کنید. مثلاً قدم بعدی این است که بگوییم $X - \{x_0, x_1\}$ تهی نیست و بنابراین دارای عضوی است چون x_2. حاصل یک دنبالهٔ غیرمتناهی $\{x_n\}$ از اعضای متمایز X است؛ فهوالمطلوب. طرحی که از اثبات ارائه دادیم دست کم این حسن را داراست که به مهمترین اندیشه‌ای که اثبات بر آن مبتنی است پایبند می‌ماند؛ بدین معنی که عمل انتخاب عضوی از یک مجموعهٔ غیرتهی بینهایت‌بار تکرار می‌شود. ریاضیدانی که در مورد اصل موضوع انتخاب تجربه دارد، اغلب به این‌گونه استدلالهای غیررسمی می‌پردازد، تجربهٔ او، او را قادر می‌سازد که با یک نظر سریع، راه دقیقتر کردن اثبات را دریابد. با توجه به مقاصدی که ما داریم، بهتر است نگاه عمقی‌تری به آن بیندازیم.

فرض کنید f، یک تابع انتخاب برای X باشد، یعنی f تابعی باشد از دستهٔ تمام زیرمجموعه‌های غیرتهی X به X، به‌طوری که برای هر A در قلمرو f، $f(A) \in A$. فرض کنید $\mathcal{C}$ دستهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی X است. چون X نامتناهی است نتیجه می‌شود که اگر $A \in \mathcal{C}$، آنگاه $X - A$ غیرتهی است و بنابراین متعلق به قلمرو f است. تابع g را از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{C}$ با رابطهٔ $g(A) = A \cup \{f(X - A)\}$ تعریف کنید. در قالب الفاظ: $g(A)$ با الحاق عضوی که f از $X - A$ می‌گزیند به A به دست می‌آید. قضیهٔ بازگشت را در مورد تابع g به کار می‌بندیم؛ می‌توان حرکت را، مثلاً، با مجموعهٔ $\varnothing$ شروع کرد. نتیجه این است که یک تابع U از ω به $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $U(0) = \varnothing$ و، برای هر عدد طبیعی n، $U(n^+) = U(n) \cup \{f(X - U(n))\}$. حکم: اگر $v(n) = f(X - U(n))$ آنگاه v یک تناظر یک‌بیک از ω به X است و در نتیجه ω در واقع با یک زیرمجموعهٔ X (یعنی برد v) همتوان است. برای اثبات حکم، سلسله‌ای از ملاحظات مقدماتی را در کار وارد می‌کنیم؛ اثبات آنها بسادگی از تعریفشان نتیجه می‌شود. اول: برای هر n، $v(n) \notin U(n)$. دوم: برای هر n، $v(n) \in U(n^+)$. سوم: اگر n و m اعدادی طبیعی باشند و $n \leqq m$، آنگاه $U(n) \subset U(m)$. چهارم: اگر n و m اعدادی طبیعی باشند و $n < m$، آنگاه $v(n) \neq v(m)$. (دلیل: $v(n) \in U(m)$ ولی $v(m) \notin U(m)$). از آخرین ملاحظه نتیجه می‌گیریم که v، اعداد طبیعی متمایز را به روی اعضای متمایز X می‌نگارد، حال کافی است که به خاطر بیاوریم که از هر دو عدد طبیعی متمایز، یکی اکیداً کوچکتر از دیگری است.

اثبات کامل است و اکنون می‌دانیم که هر مجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای همتوان با ω دارد. این نتیجه، که در اینجا نه چندان به خاطر جذابیت ذاتی خود بلکه به عنوان مثالی از کاربرد صحیح اصل موضوع انتخاب ثابت شد، یک نتیجهٔ جالب دارد و آن اینکه، یک مجموعه نامتناهی است اگر و فقط اگر با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود همتوان باشد. بخش «اگر»، که آن را از قبل می‌دانیم، چیزی جز این نمی‌گوید که یک مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود همتوان باشد. برای اثبات بخش «فقط اگر»، فرض کنید X نامتناهی و v تناظری یک‌بیک از ω به X باشد. هرگاه x متعلق به برد v باشد، مثلاً $x = v(n)$، قرار می‌دهیم $h(x) = v(n^+)$ و اگر x در برد v نباشد، قرار می‌دهیم

$h(x) = x$. تحقیق اینکه h تناظری یک بیک از X به خودش است کار ساده‌ای است. چون برد h زیرمجموعه‌ای حقیقی از X است (این برد $v(0)$ را شامل نیست)، اثبات نتیجه کامل می‌شود. ددکیند[1] از این نتیجه به عنوان تعریف بینهایت استفاده کرده است.

1. Dedekind

بخش ۱۶
لم تسورن[1]

هر قضیهٔ وجودی، مدعی وجود چیزی است که متعلق به یک مجموعهٔ مشخص و دارای خواص مشخصی است. بسیاری از قضایای وجودی را می‌توان طوری فرمولبندی (و یا در صورت لزوم فرمولبندی مجدد) کرد که مجموعهٔ مورد نظر، مجموعه‌ای جزئاً مرتب و خاصیت اصلی، بیشینگی باشد. هدف بعدی ما بیان و اثبات مهمترین قضیه از این نوع است.

لم تسورن. اگر X یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد که هر زنجیر آن یک کران بالا داشته باشد، آنگاه X شامل یک عضو بیشین است.

بحث: به خاطر بیاورید که هر زنجیر یک مجموعهٔ تماماً مرتب است. منظور از یک زنجیر «در X»، زیرمجموعه‌ای است از X که خود به عنوان یک مجموعهٔ جزئاً مرتب، تماماً مرتب باشد. اگر A زنجیری در X باشد، فرض لم تسورن وجود یک کران بالا را برای A در X تضمین می‌کند ولی وجود چنین کرانی را برای A در A تضمین نمی‌کند. نتیجهٔ لم تسورن تضمین وجود یک عنصر a در X است با این خاصیت که اگر $a \leqq x$، آنگاه ناگزیر $a = x$.

اندیشهٔ اساسی در اثبات این لم، شبیه همان اندیشه‌ای است که در بحث قبلی پیرامون مجموعه‌های نامتناهی به کار گرفته شد. چون طبق فرض X تهی نیست، لذا دارای عضوی است، مثلاً x_0. اگر x_0 بیشین باشد کار ما همین‌جا پایان می‌یابد. اگر نباشد، آنگاه عضوی چون x_1 وجود دارد که اکیداً از x_0 بزرگتر است. اگر x_1 بیشین باشد، کار ما همین‌جا پایان می‌یابد در غیر این صورت کار را ادامه می‌دهیم. یعنی این استدلال را الی غیرالنهایه تکرار می‌کنیم؛ نهایتاً استدلال باید به یک عضو بیشین منتهی گردد.

---

1. Zorn

آخرین جمله، احتمالاً کمتر از هر قسمت دیگر استدلال قانع کننده است، زیرا انبوهی از مشکلات را پنهان می‌دارد. مثلاً، امکان زیر را در نظر بگیرید. ممکن است که استدلال پس از بینهایت بار تکرار، به یک دنبالهٔ نامتناهی از اعضای غیربیشین منتهی شود، در این صورت چه باید کرد؟ پاسخ این است که برد این چنین دنبالهٔ نامتناهیی، زنجیری در X است و در نتیجه دارای یک کران بالاست؛ کاری که باید کرد این است که استدلال را تماماً از سر بگیریم و این کار را از همان کران بالا شروع کنیم. حداقل باید گفت این امر که دقیقاً چه وقت و چگونه این معرکه پایان می‌پذیرد مبهم است. این مشکل را چاره نمی‌توان کرد، باید به اثبات دقیق پرداخت. ساختمان اثبات از آنچه تسرملو[1] قبلاً ارائه داده اقتباس شده است.

اثبات. اولین قدم، جایگزینی ترتیب جزئی مجرد با ترتیب شمول در یک دستهٔ مناسب از مجموعه‌هاست. به عبارت دقیقتر، برای هر x در X پارهٔ آغازی ضعیف $\bar{s}(x)$ را که از x و تمام مقدمهای آن تشکیل می‌شود در نظر می‌گیریم. $\mathcal{S}$، برد تابع $\bar{s}$ (از X به $\mathcal{P}(X)$)، دستهٔ خاصی از زیرمجموعه‌های X است که البته می‌توان آن را دسته‌ای که توسط شمول (جزئاً) مرتب شده فرض کرد. تابع $\bar{s}$ یک بیک است و شرط لازم و کافی برای اینکه $\bar{s}(x) \subset \bar{s}(y)$ این است که $x \leqq y$. با توجه به این موضوع، مسئلهٔ یافتن یک عضو بیشین در X همان مسئلهٔ یافتن یک مجموعهٔ بیشین در $\mathcal{S}$ است. فرض مربوط به زنجیرها در X، مستلزم گزارهٔ متناظر در مورد زنجیرها در $\mathcal{S}$ است (و در واقع با آن معادل است).

فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام زنجیرها در X باشد؛ هر یک از اعضای $\mathcal{A}$ به ازای حداقل یک x در X، زیرمجموعهٔ $\bar{s}(x)$ است. دستهٔ $\mathcal{A}$ دسته‌ای غیرتهی از مجموعه‌هاست که توسط شمول جزئاً مرتب شده است و هرگاه $\mathcal{C}$ زنجیری در $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه اجتماع مجموعه‌های $\mathcal{C}$ (یعنی $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$) متعلق به $\mathcal{A}$ است. چون هر مجموعه در $\mathcal{A}$ زیر سلطهٔ یکی از مجموعه‌های $\mathcal{S}$ است، انتقال از $\mathcal{S}$ به $\mathcal{A}$ نمی‌تواند به معرفی هیچ عضو بیشین جدیدی منجر گردد. یکی از مزایای دستهٔ $\mathcal{A}$، صورت نسبتاً مشخص‌تری است که فرض زنجیر به خود می‌گیرد؛ یعنی به جای اینکه بگوییم هر زنجیر $\mathcal{C}$ در $\mathcal{S}$ یک کران بالا دارد، می‌توان به طور صریح گفت که اجتماع مجموعه‌ها در $\mathcal{C}$، که به طور قطع یک کران بالا برای $\mathcal{C}$ است، یکی از اعضای $\mathcal{A}$ است. مزیت فنی دیگر $\mathcal{A}$ این است که شامل همهٔ زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های خود است؛ این موضوع توسعه دادن تدریجی به مجموعه‌های غیربیشین را در $\mathcal{A}$ به صورت «یک عضو، یک عضو»، ممکن می‌سازد.

حال می‌توان ترتیب جزئی مفروض در X را فراموش کرد. از این پس یک دستهٔ غیرتهی $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ غیرتهی X را در نظر می‌گیریم که مقید به دو شرط است: همهٔ زیرمجموعه‌های هر مجموعه در $\mathcal{A}$ عضو $\mathcal{A}$ اند، و اجتماع هر زنجیر از مجموعه‌های $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ قرار دارد. توجه کنید که اولین شرط نتیجه می‌دهد $\varnothing \in \mathcal{A}$. اکنون باید ثابت کنیم که در $\mathcal{A}$ یک مجموعهٔ بیشین وجود دارد.

---

1. Zermelo

فرض‌کنید f یک تابع انتخاب برای X باشد، یعنی f تابعی از دستهٔ تمام زیرمجموعه‌های غیرتهی X به X باشد به طوری که برای هر A در قلمرو f، $f(A) \in A$. برای هر مجموعهٔ A در $\mathscr{A}$ فرض کنید $\hat{A}$ مجموعهٔ تمام اعضای x از X باشد که الحاق آنها به A منجر به یک مجموعه در $\mathscr{A}$ شود؛ به عبارت دیگر $\hat{A} = \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathscr{A}\}$. تابع g را از $\mathscr{A}$ به $\mathscr{A}$ بدین صورت تعریف می‌کنیم: اگر $\hat{A} - A \neq \varnothing$، آنگاه $g(A) = A \cup \{f(\hat{A} - A)\}$؛ و اگر $\hat{A} - A = \varnothing$، آنگاه $g(A) = A$. از تعریف $\hat{A}$ نتیجه می‌شود که $\hat{A} - A = \varnothing$ اگر و فقط اگر A بیشین باشد. بنابراین برحسب این اصطلاحات آنچه باید ثابت کنیم این است که یک مجموعهٔ A در $\mathscr{A}$ وجود دارد به طوری که $g(A) = A$. خاصیت مهم g این است که $g(A)$ (که همواره شامل A است) حداکثر یک عضو بیش از A دارد.

اکنون برای تسهیل بیان به یک تعریف موقتی می‌پردازیم. خواهیم گفت که زیر دستهٔ $\mathscr{J}$ از $\mathscr{A}$ یک برج است هرگاه

(الف) $\varnothing \in \mathscr{J}$،
(ب) اگر $A \in \mathscr{J}$، آنگاه $g(A) \in \mathscr{J}$،
(پ) اگر $\mathscr{C}$ یک زنجیر در $\mathscr{J}$ باشد، آنگاه $\bigcup_{A \in \mathscr{C}} A \in \mathscr{J}$.

برجها به طور قطع وجود دارند؛ یکی از آنها خود دستهٔ $\mathscr{A}$ است. چون اشتراک یک دسته از برجها خود یک برج است، بویژه، نتیجه می‌شود که اگر $\mathscr{J}_0$ اشتراک همهٔ برجها باشد، آنگاه $\mathscr{J}_0$ کوچکترین برج است. اولین هدف ما اثبات این است که برج $\mathscr{J}_0$ یک زنجیر است.

می‌گوییم مجموعهٔ C در $\mathscr{J}_0$ مقایسه‌پذیر است هرگاه با هر مجموعه در $\mathscr{J}_0$ قابل مقایسه باشد؛ یعنی اگر $A \in \mathscr{J}_0$، آنگاه یا $A \subset C$ و یا $C \subset A$. گفتن اینکه $\mathscr{J}_0$ زنجیر است به این معنی است که همهٔ مجموعه‌ها در $\mathscr{J}_0$ مقایسه پذیرند. مجموعه‌های مقایسه‌پذیر به طور قطع وجود دارند؛ $\varnothing$ یکی از آنهاست. در دو پاراگراف آینده توجه خود را به مجموعهٔ مقایسه‌پذیر دلخواه ولی موقتاً ثابت C معطوف می‌کنیم.

فرض کنید $A \in \mathscr{J}_0$ و A یک زیرمجموعهٔ حقیقی C باشد. حکم: $g(A) \subset C$. علت این است که چون C مقایسه‌پذیر است، یا $g(A) \subset C$ و یا C زیرمجموعه‌ای حقیقی از $g(A)$ است. در حالت اخیر، A زیرمجموعه‌ای حقیقی از یک زیرمجموعهٔ حقیقی $g(A)$ است، و این با این امر که $g(A) - A$ حداکثر یک مجموعهٔ تک عضوی است، منافات دارد.

اکنون دستهٔ $\mathscr{U}$ را متشکل از تمام مجموعه‌های A در $\mathscr{J}_0$ که یا $A \subset C$ و یا $g(C) \subset A$ در نظر می‌گیریم. دستهٔ $\mathscr{U}$ تا حدی از دستهٔ مجموعه‌های مقایسه‌پذیر با $g(C)$ در $\mathscr{J}_0$ کوچکتر است؛ در واقع اگر $A \in \mathscr{U}$، آنگاه چون $C \subset g(C)$، یا $A \subset g(C)$ و یا $g(C) \subset A$. حکم: $\mathscr{U}$ برج است. چون $\varnothing \subset C$، اولین شرط برجها برقرار است.

برای اثبات دومین شرط، یعنی، اگر $A \in \mathscr{U}$ آنگاه $g(A) \in \mathscr{U}$، بحث را به سه حالت تقسیم می‌کنیم. اول: A زیرمجموعهٔ حقیقی C است؛ که در این صورت، طبق پاراگراف قبل، $g(A) \subset C$، و در نتیجه $g(A) \in \mathscr{U}$. دوم: $A = C$، که در این صورت $g(A) = g(C)$، بنابراین $g(C) \subset g(A)$، و در نتیجه $g(A) \in \mathscr{U}$. سوم: $g(C) \subset A$، که در این حالت $g(C) \subset g(A)$، و در نتیجه $g(A) \in \mathscr{U}$. سومین شرط برجها یعنی اینکه اجتماع یک زنجیر در $\mathscr{U}$ متعلق به $\mathscr{U}$ است، بیواسطه از تعریف $\mathscr{U}$ نتیجه می‌شود. نتیجه: $\mathscr{U}$ یک برج و زیرمجموعهٔ $\mathscr{J}_\circ$ است و بنابراین، چون $\mathscr{J}_\circ$ کوچکترین برج است، $\mathscr{U} = \mathscr{J}_\circ$.

بررسیهای قبل نتیجه می‌دهد که برای هر مجموعهٔ مقایسه‌پذیر C، مجموعهٔ $g(C)$ نیز مقایسه‌پذیر است. دلیل: برای مجموعهٔ مفروض C که همچون پیش به $\mathscr{U}$ تعلق دارد، این امر که $\mathscr{U} = \mathscr{J}_\circ$ به این معنی است که اگر $A \in \mathscr{J}_\circ$، آنگاه یا $A \subset C$ (که در این صورت $A \subset g(C)$) و یا $g(C) \subset A$.

اکنون می‌دانیم که $\varnothing$ مقایسه‌پذیر است و g مجموعه‌های مقایسه‌پذیر را به روی مجموعه‌های مقایسه‌پذیر می‌نگارد. چون اجتماع یک زنجیر از مجموعه‌های مقایسه‌پذیر خود مقایسه‌پذیر است، نتیجه می‌شود که مجموعه های مقایسه‌پذیر (در $\mathscr{J}_\circ$) تشکیل یک برج می‌دهند و در نتیجه شامل همهٔ $\mathscr{J}_\circ$ هستند؛ و این همان چیزی است که می‌خواستیم در مورد $\mathscr{J}_\circ$ اثبات کنیم.

چون $\mathscr{J}_\circ$ زنجیر است، اجتماع تمام مجموعه‌های $\mathscr{J}_\circ$، مثلاً A، خود مجموعه‌ای در $\mathscr{J}_\circ$ است. چون این اجتماع شامل همهٔ مجموعه‌های $\mathscr{J}_\circ$ است، نتیجه می‌شود که $g(A) \subset A$؛ و چون همواره $A \subset g(A)$، نتیجه می‌شود که $A = g(A)$، و اثبات لم تسورن کامل است.

تمرین. لم تسورن با اصل موضوع انتخاب معادل است. [راهنمایی برای اثبات: برای مجموعهٔ مفروض X، توابع f را به طوری که $\operatorname{dom} f \subset \mathscr{P}(X)$، $\operatorname{ran} f \subset X$، و برای هر A در قلمرو f، $f(A) \in A$ در نظر بگیرید. این توابع را توسط گسترش توابع مرتب کنید. با استفاده از لم تسورن یک بیشین میان آنها بیابید و ثابت کنید که هرگاه f بیشین باشد آنگاه $\operatorname{dom} f = \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$.] هر یک از عبارات زیر را در نظر بگیرید و ثابت کنید که آنها نیز با اصل موضوع انتخاب معادل‌اند. (الف) هر مجموعهٔ جزئاً مرتب دارای یک زنجیر بیشین است (یعنی زنجیری که زیرمجموعهٔ حقیقی هیچ زنجیر دیگری نیست). (ب) هر زنجیر در یک مجموعهٔ جزئاً مرتب، زیرمجموعهٔ یک زنجیر بیشین است. (پ) هر مجموعهٔ جزئاً مرتب که در آن هر زنجیر دارای کوچکترین کران بالاست، خود دارای یک عضو بیشین است.

بخش ۱۷

خوش ترتیبی

مجموعه‌های جزئاً مرتب ممکن است کوچکترین عضو نداشته باشند. و حتی در صورت داشتن، کاملاً امکان دارد که بعضی از زیرمجموعه‌های آنها فاقد چنین عضوی باشند. یک مجموعهٔ جزئاً مرتب، خوش ترتیب (و ترتیب آن، خوش ترتیبی) نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمجموعهٔ غیرتهی آن دارای کوچکترین عضو باشد. یکی از نتایج این تعریف، که حتی پیش از پرداختن به ذکر هر گونه مثال یا مثال ناقض درخور توجه است، این است که هر مجموعهٔ خوش ترتیب، تماماً مرتب است. در واقع اگر x و y اعضای یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند، آنگاه $\{x, y\}$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از آن مجموعهٔ خوش ترتیب است و در نتیجه دارای کوچکترین عضو است و برحسب اینکه کوچکترین عضو آن x یا y باشد، خواهیم داشت $x \leqq y$ یا $y \leqq x$.

برای هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ تمام مقدمهای n (یعنی طبق تعاریف ما، مجموعهٔ n) مجموعه‌ای خوش ترتیب (که برحسب بزرگی مرتب شده) می‌باشد و همین حکم در مورد ω، مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی نیز صادق است. مجموعهٔ $\omega \times \omega$ با تعریف $(a, b) \leqq (x, y)$ به معنی $۲^b(۲a + ۱) \leqq ۲^y(۲x + ۱)$ یک مجموعهٔ خوش ترتیب نیست. یکی از راههای پی‌بردن به این موضوع، توجه به این نکته است که برای هر a و b، $(a, b + ۱) \leqq (a, b)$. از این نکته نتیجه می‌شود که کل مجموعهٔ $\omega \times \omega$ فاقد کوچکترین عضو است. بعضی از زیرمجموعه‌های $\omega \times \omega$ دارای کوچکترین عضوند. مثلاً، مجموعهٔ E متشکل از همهٔ زوجهای مرتب (a, b) را به طوری که $(۱, ۱) \leqq (a, b)$ در نظر بگیرید؛ کوچکترین عضو این مجموعه $(۱, ۱)$ است. هشدار: اگر به E به عنوان یک مجموعهٔ جزئاً مرتب مستقل نگاه کنیم، باز هم خوش ترتیب نیست. مشکل این است که با اینکه خود E دارای کوچکترین عضو است، ولی بسیاری از زیرمجموعه‌هایش فاقد چنین عضوی هستند. به عنوان مثال به مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (a, b) در E، به طوری که $(a, b) \neq (۱, ۱)$ توجه کنید. یک مثال دیگر: $\omega \times \omega$ با ترتیب قاموسی خود، خوش-

ترتیب است.

یکی از واقعیات دلچسب در مورد مجموعه‌های خوش ترتیب این است که می‌توان، به طریقی شبیه استقرای ریاضی، به اثبات احکامی در مورد اعضایشان پرداخت. به عبارت دقیق، فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ خوش ترتیب X باشد، و همچنین فرض کنید که هرگاه به ازای یک عضو x از X، تمامی پارهٔ آغازی $s(x)$ زیرمجموعهٔ S باشد، آنگاه خود x نیز متعلق به S باشد؛ **اصل استقرای ترابایایان** مدعی است که در چنین شرایطی باید داشته باشیم $S = X$. به بیان معادل: اگر در مجموعه‌ای وجود همهٔ ماقبلهای اکید عضوی مستلزم وجود آن عضو باشد، آن مجموعه باید شامل همه چیز باشد.

قبل از بررسی اثبات چند یادآوری لازم است. اصل استقرای معمولی و اصل استقرای ترابایایان دو وجه تمایز آشکار دارند. یک: اصل اخیر، به جای اینکه از مقدم هر عضو به آن عضو راه ببرد، به هر عضو از طریق مجموعهٔ تمام مقدمهای آن دست می‌یابد. دو: در اصل اخیر هیچ گونه فرضی در مورد عضو آغازگر (همچون صفر) وجود ندارد. اولین فرق، مهم است؛ زیرا در یک مجموعهٔ خوش ترتیب، ممکن است عضوی دارای مقدم بلافصل نباشد. به آسانی می‌توان ثابت کرد که بیان فعلی، هرگاه در مورد ω به کار رود، معادل اصل استقرای ریاضی است؛ اما اگر اصل استقرای ریاضی در مورد یک مجموعهٔ خوش ترتیب نامشخصی اعمال شود، معادل اصل استقرای ترابایایان نیست. به عبارت دیگر، دو گزاره در حالت کلی معادل یکدیگر نیستند و معادل بودن آنها در مورد ω، موقعیتی میمون ولی خاص است.

حال یک مثال. فرض کنید X، ω^+ باشد، یعنی $X = \omega \cup \{\omega\}$. در X ترتیبی تعریف می‌کنیم، بدین طریق که اعضای ω را طبق معمول مرتب می‌کنیم و شرط می‌کنیم که برای هر n در ω، $n < \omega$. حاصل کار، مجموعه‌ای خوش ترتیب است. سؤال: آیا یک زیرمجموعهٔ حقیقی S از X وجود دارد به طوری که $0 \in S$، و $n + 1 \in S$ هرگاه $n \in S$؟ جواب: بلی، مثلاً $S = \omega$. دومین فرق بین استقرای معمولی و استقرای ترابایایان (یعنی لازم نبودن عنصر آغازگر در مورد اخیر) بیشتر مربوط به زبان می‌شود تا مفهوم. اگر x_0 کوچکترین عضو X باشد، آنگاه $s(x_0)$ تهی است و نتیجتاً $s(x_0) \subset S$ وفرض اصل استقرای ترابایایان ایجاب می‌کند که x_0 متعلق به S باشد.

اثبات اصل استقرای ترابایایان تقریباً بدیهی است. اگر $X - S$ تهی نباشد، آنگاه کوچکترین عضوی دارد، مثلاً x. از این نتیجه می‌شود که هر عضو پارهٔ آغازی $s(x)$ متعلق به S و نتیجتاً، طبق فرض استقرا، x متعلق به S است؛ و این تناقض است (زیرا x نمی‌تواند هم به S و هم به $X - S$ متعلق باشد) و نتیجه این است که $X - S$ به‌هرحال تهی است.

می‌گوییم مجموعهٔ خوش ترتیب A امتداد مجموعهٔ خوش ترتیب B است، هرگاه در وهلهٔ اول B زیرمجموعهٔ A باشد، و علاوه بر این B یک پارهٔ آغازی A نیز باشد، و بالاخره ترتیب اعضای B همان ترتیب آنها در A باشد. بنابراین هرگاه X مجموعه‌ای خوش ترتیب و a و b اعضای X باشند به طوری که $b < a$، آنگاه $s(a)$ امتداد $s(b)$ و

X قطعاً هم امتداد $s(a)$ و هم امتداد $s(b)$ است.

اگر $\mathscr{C}$ دسته‌ای دلخواه از پاره‌های آغازی یک مجموعهٔ خوش ترتیب باشد، آنگاه $\mathscr{C}$ نسبت به رابطهٔ امتداد، یک زنجیر است. این بدان معنی است که $\mathscr{C}$ دسته‌ای از مجموعه‌های خوش ترتیب است با این خاصیت که از هر دو عضو متمایز این دسته، یکی امتداد دیگری است، عکس این مطلب نیز به نوعی صادق است و در موارد بسیاری به‌کار می‌آید. **اگر دستهٔ $\mathscr{C}$ از مجموعه‌های خوش ترتیب، نسبت به امتداد، زنجیر باشد و اگر U اجتماع مجموعه‌های $\mathscr{C}$ باشد، آنگاه یک خوش ترتیبی منحصر بفرد از U وجود دارد به طوری که U امتداد هر یک از اعضای $\mathscr{C}$ (متمایز از خود U) است.** اجمالاً، اجتماع زنجیری از مجموعه‌های خوش ترتیب، خوش ترتیب است. ولی بیان مطلب به این اختصار، خطرناک است، چون توضیح نمی‌دهد که مقصود، «زنجیر» نسبت به امتداد است. اگر ترتیبی که در کلمهٔ «زنجیر» مستتر است، همان شمول ترتیب نگهدار تصور شود، در این صورت نتیجه اعتبار نخواهد داشت.

اثبات ساده است. هرگاه a و b در U باشند، آنگاه مجموعه‌های A و B در $\mathscr{C}$ وجود دارند به طوری که $a \in A$ و $b \in B$. چون یا $A = B$ و یا یکی از A و B امتداد دیگری است، نتیجه می‌شود که در هر دو صورت a و b هر دو به یک مجموعه در $\mathscr{C}$ متعلق‌اند. ترتیب U به این صورت تعریف می‌شود که هر زوج $\{a, b\}$ را به همان صورتی مرتب کنیم که در آن مجموعه در $\mathscr{C}$ که شامل آنهاست مرتب شده‌اند. چون $\mathscr{C}$ زنجیر است، این ترتیب بدون ابهام مشخص می‌شود. (راه دیگر برای تعریف ترتیب موعود در U، توجه بدین نکته است که ترتیبهای مفروض، در مجموعه‌های $\mathscr{C}$، مجموعه‌هایی از زوجهای مرتب‌اند و سپس اجتماع همهٔ آن مجموعه‌های زوجهای مرتب را تشکیل دهیم.)

تحقیق مستقیم نشان می‌دهد که رابطه‌ای که در بند قبل تعریف شد، در واقع یک ترتیب است و علاوه بر این، ما در هر مرحله از ساختمان آن اختیاری از خود نداشتیم (یعنی ترتیب نهایی، به طور یگانه توسط ترتیبهای داده شده تعیین می‌شد). همچنین اثبات اینکه رابطهٔ حاصل در واقع یک خوش ترتیبی است سرراست است. هر زیرمجموعهٔ غیرتهی U باید با یکی از مجموعه‌های $\mathscr{C}$ اشتراکی غیرتهی داشته باشد و در نتیجه باید در آن مجموعه دارای اولین عضو باشد؛ این واقعیت که $\mathscr{C}$ یک زنجیر امتدادی است متضمن این معنی است که اولین عضو ناگزیر اولین عضو U نیز هست.

تمرین. زیرمجموعهٔ A از مجموعهٔ جزئاً مرتب X در X هم‌پایان است هرگاه برای هر x از X یک عضو a از A وجود داشته باشد به طوری که $x \leqq a$. ثابت کنید که هر مجموعهٔ تماماً مرتب، یک زیرمجموعهٔ هم‌پایان خوش ترتیب دارد.

اهمیت خوش ترتیبی از قضیهٔ زیر ناشی می‌شود که از آن علاوه بر سایر نکات می‌توان پی برد که کاربرد اصل استقرای ترابا‌پایان بسیار وسیعتر از آن است که در یک نگاه سرسری می‌توان دید.

قضیهٔ خوش ترتیبی. هر مجموعه را می‌توان خوش ترتیب کرد.

بحث. راه بهتری برای بیان این قضیه (که کمتر مرسوم است) این است: برای هر مجموعهٔ X، یک خوش ترتیبی با قلمرو X وجود دارد. هشدار: به هیچ‌وجه لازم نیست که این خوش ترتیبی با هرگونه ساختمانی که احتمالاً مجموعهٔ مورد نظر از قبل داراست، رابطه‌ای داشته باشد. به طور مثال، اگر خواننده برخی از مجموعه‌های جزئاً مرتب یا تماماً مرتب را بشناسد که ترتیب آنها قطعاً خوش ترتیب نیست، نباید بسرعت نتیجه بگیرد که موفق به کشف تناقضی شده است. تنها نتیجه‌ای که باید گرفت این است که بعضی از مجموعه‌ها را می‌توان به طرق مختلف مرتب کرد، که برخی خوش ترتیب‌اند و برخی نیستند، و این را قبلاً هم می‌دانستیم.

اثبات. لم تسورن را به کار می‌گیریم. برای مجموعهٔ مفروض X، دستهٔ $\mathscr{W}$ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های خوش ترتیب X را در نظر بگیرید. به عبارت صریح: هر عضو $\mathscr{W}$، یک زیرمجموعهٔ A از X است به همراه یک خوش ترتیبی از A. $\mathscr{W}$ را توسط امتداد، جزئاً مرتب می‌کنیم.

دستهٔ $\mathscr{W}$ تهی نیست چون به طور مثال $\varnothing \in \mathscr{W}$. اگر $X \neq \varnothing$، اعضای دلچسب‌تری از $\mathscr{W}$ را می‌توان نمایش داد، یکی از این اعضا $\{(x, x)\}$ به ازای هر عضو مشخص x از X است. اگر $\mathscr{C}$ زنجیری در $\mathscr{W}$ باشد، آنگاه U، اجتماع مجموعه‌های $\mathscr{C}$، دارای خوش‌ترتیبی یگانه‌ای است که U را «بزرگتر» از (یا مساوی) هر یک از مجموعه‌های $\mathscr{C}$ می‌سازد و این درست همان چیزی است که بحث قبلی ما در مورد امتداد به ثمر رساند. این بدان معنی است که صحت فرض اصلی لم تسورن تحقیق شده و در نتیجه یک مجموعهٔ خوش ترتیب بیشین، مثلاً M، در $\mathscr{W}$ وجود دارد. مجموعهٔ M باید با کل مجموعهٔ X مساوی باشد. دلیل: اگر x یکی از اعضای X باشد که در M نیست، آنگاه با قرار دادن x بعد از تمام اعضای M، می‌توان M را توسعه داد. فرمولبندی دقیق این توصیف روشن ولی غیرصوری را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. با بر طرف کردن این مانع اثبات قضیهٔ خوش ترتیبی کامل می‌شود.

تمرین. ثابت کنید یک مجموعهٔ تماماً مرتب خوش ترتیب است اگر و فقط اگر مجموعهٔ مقدمهای اکید هر عضو خوش ترتیب باشد. آیا چنین شرطی در مورد مجموعه‌های جزئاً مرتب نیز صادق است؟ ثابت کنید که قضیهٔ خوش ترتیبی مستلزم اصل موضوع انتخاب است (و در نتیجه با آن اصل موضوع و لم تسورن معادل است). ثابت کنید اگر R یک ترتیب جزئی در مجموعهٔ X باشد آنگاه یک ترتیب تمام S در X وجود دارد به طوری که $R \subset S$؛ به عبارت دیگر هر ترتیب جزئی را می‌توان بدون توسعهٔ قلمرو، گسترش داده و به یک ترتیب تمام تبدیل کرد.

بخش ۱۸

بازگشت ترا با پایان

فرایند «تعریف به استقرا»، یک همانند ترا با پایان نیز دارد. با قضیهٔ بازگشت معمولی، تابعی روی ω ساخته می‌شود؛ مادهٔ خام این کار، یافتن روشی برای تعیین مقدار تابع در هر عضو غیرصفر n، با استفاده از مقدار تابع در عضو ماقبل n است. این همانند ترا با پایان، یک تابع روی هر مجموعهٔ خوش ترتیب W می‌سازد. مادهٔ خام این کار یافتن روشی برای تعیین مقدار تابع در هر عضو a از W با استفاده از مقدار تابع در تمام مقدمهای a است.

برای آنکه بتوانیم نتیجه را دقیقتر بیان کنیم به معرفی چند مفهوم کمکی می‌پردازیم. اگر a عضوی از مجموعهٔ خوش ترتیب W و X مجموعه‌ای دلخواه باشد، آنگاه منظور از دنباله‌ای از نوع a در X، تابعی از پارهٔ آغازی a در W به X است. برای a در ω^+، دنباله‌هایی از نوع a همان چیزی هستند که قبلاً دنباله می‌نامیدیم، و برحسب اینکه $a < \omega$ یا $a = \omega$، متناهی یا نامتناهی نامیده می‌شوند. اگر U تابعی از W به X باشد، آنگاه برای هر a در W، تحدید U به پارهٔ آغازی a، $s(a)$، مثالی از دنباله‌ای از نوع a است، در دنبالهٔ بحث خواهیم دید که بهتر است این دنباله را (به جای $(U \mid s(a))$) با U^a نمایش دهیم.

یک تابع دنباله‌ای از نوع W در X، تابعی است چون f، که قلمرو آن متشکل از تمام دنباله‌های از نوع a در X، به ازای تمام اعضای a در W، و برد آن زیرمجموعهٔ X است. اجمالاً، تابع دنباله‌ای نشان می‌دهد که چگونه به طول یک دنباله «بیفزاییم»؛ هرگاه دنباله‌ای داشته باشیم که تا عضوی از W ادامه داشته باشد (ولی شامل آن عضو نباشد) می‌توان با استفاده از یک تابع دنباله‌ای، یک عضو دیگر به این دنباله افزود.

قضیهٔ بازگشت ترا با پایان. اگر W مجموعه‌ای خوش ترتیب و f تابعی دنباله‌ای از نوع W در مجموعهٔ X باشد، آنگاه یک تابع یگانهٔ U از W به X وجود دارد به طوری که برای هر a در W، $U(a) = f(U^a)$.

اثبات. یگانگی را می‌توان بآسانی از راه استقرای ترا با پایان ثابت کرد. جهت

اثبات وجود، به یاد می‌آوریم که تابعی از W به X، زیرمجموعهٔ خاصی از $W \times X$ است؛ U را به طور صریح به صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب خواهیم ساخت. زیرمجموعهٔ A از $W \times X$ را f-بسته می‌نامیم اگر دارای خاصیت زیر باشد: هرگاه $a \in W$ و t دنباله‌ای از نوع a و زیرمجموعهٔ A باشد، (یعنی برای هر c در پارهٔ آغازی $s(a)$، $(c, t(c)) \in A$)، آنگاه $(a, f(t)) \in A$. چون خود $W \times X$، f-بسته است، چنین مجموعه‌هایی وجود دارند؛ فرض کنید U اشتراک همهٔ آنها باشد. چون U نیز f-بسته است، تنها کاری که باقی می‌ماند اثبات تابع بودن U است. به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که برای هر c در W، حداکثر یک عضو x در X وجود دارد به طوری که $(c, x) \in U$. (به عبارت صریح: اگر (c, x) و (c, y) هر دو متعلق به U باشند، آنگاه $x = y$.) اثبات استقرایی است. فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعضای c در W باشد که در مورد آنها $(c, x) \in U$ برای حداکثر یک x برقرار است. ثابت خواهیم کرد که اگر $s(a) \subset S$، آنگاه $a \in S$.

گفتن $s(a) \subset S$ به این معنی است که اگر $c < a$ در W، آنگاه عضو یگانهٔ x در X وجود دارد به طوری که $(c, x) \in U$. تناظر $c \to x$ که بدین صورت تعریف می‌شود دنباله‌ای از نوع a، مثلاً t، است و $t \subset U$. اگر a متعلق به S نباشد، آنگاه به ازای یک y متمایز از $f(t)$، $(a, y) \in U$. حکم: مجموعهٔ $U - \{(a, y)\}$، f-بسته است. یعنی اگر $b \in W$ و r دنباله‌ای از نوع b و زیرمجموعهٔ $U - \{(a, y)\}$ باشد، آنگاه $(b, f(r)) \in U - \{(a, y)\}$. در واقع اگر $b = a$، آنگاه r باید (طبق فرض یگانگی قضیه) همان t باشد، و دلیل اینکه این مجموعهٔ کاهش یافته شامل $(b, f(r))$ است این است که $f(t) \neq y$؛ از طرف دیگر، اگر $b \neq a$، آنگاه دلیل اینکه مجموعهٔ کاهش یافته شامل $(b, f(r))$ است این است که U، f-بسته (و $b \neq a$) است. این امر ناقض این واقعیت است که U کوچکترین مجموعهٔ f-بسته است، و می‌توان نتیجه گرفت که $a \in S$.

اثبات حکم وجودی قضیهٔ بازگشت ترابایان، کامل است. کاربرد قضیهٔ بازگشت ترابایان را تعریف توسط استقرای ترابایان می‌نامند.

بحث خود را با بخش مهمی از نظریهٔ ترتیب ادامه می‌دهیم، که ضمناً می‌توان به کمک آن نحوهٔ کاربرد قضیهٔ بازگشت ترابایان را نیز نشان داد.

دو مجموعهٔ جزئاً مرتب را (که بخصوص می‌توانند تماماً مرتب و یا حتی خوش-ترتیب باشند) متشابه می‌گوییم هرگاه یک تناظر یک بیک ترتیب نگهدار بین آنها وجود داشته باشد. به عبارت صریحتر، وقتی می‌گوییم که مجموعه‌های جزئاً مرتب X و Y متشابه‌اند (به زبان نمادها: $X \cong Y$) منظور این است که تناظر یک بیکی، مثل f، از X بروی X وجود دارد به طوری که هرگاه a و b در X باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $f(a) \leqq f(b)$ (در Y) این است که $a \leqq b$ (در X). تناظری چون f، گاهی تشابه خوانده می‌شود.

تمرین. ثابت کنید که تشابه، $<$ را حفظ می‌کند (به همان مفهومی که تعریف فوق، حفظ

$\leqq$ را اقتضا می‌کند) و نیز یک تابع یک بیک که یک مجموعهٔ جزئاً مرتب را بروی دیگری بنگارد تشابه است اگر و فقط اگر $>$ را حفظ کند.

نگاشت همانی بروی یک مجموعهٔ جزئاً مرتب X یک تشابه از X بروی X است. هرگاه X و Y دو مجموعهٔ جزئاً مرتب و f تشابهی از X بروی Y باشد، آنگاه (چون f یک بیک است) تابع معکوس f^{-1} از Y بروی X وجود دارد که بی‌هیچ ابهامی تعریف می‌شود، و f^{-1} نیز تشابه است. بعلاوه هرگاه g تشابهی از Y بروی مجموعهٔ جزئاً مرتب Z باشد، آنگاه ترکیب gf تشابهی از X بروی Z است. از این نکات نتیجه می‌گیریم که هرگاه توجه خود را منحصر به یک مجموعهٔ بخصوص E بکنیم و نتیجتاً تنها آن ترتیبهای جزئی را که قلمرویشان زیرمجموعهٔ E است در نظر بگیریم، آنگاه تشابه، یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ مجموعه‌های جزئاً مرتبی است که بدین طریق به دست می‌آیند. همچنین حتی اگر حوزهٔ فعالیت را محدودتر کنیم و تنها آن خوش ترتیبی‌هایی را که قلمرویشان زیر-مجموعهٔ E است در نظر بگیریم، تشابه یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ مجموعه‌های خوش ترتیبی است که بدین طریق به دست می‌آیند. با اینکه تشابه را برای مجموعه‌های جزئاً مرتب به کلیترین صورت تعریف کردیم و می‌توان موضوع را در آن سطح مطالعه کرد، با این حال ازین پس توجه ما صرفاً معطوف به تشابه مجموعه‌های خوش ترتیب خواهد بود.

کاملاً امکان دارد که مجموعهٔ خوش ترتیبی با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود متشابه باشد؛ برای مثال مجموعه‌های همهٔ اعداد طبیعی و همهٔ اعداد زوج را در نظر بگیرید (طبق تعریف عدد طبیعی m زوج است، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $m = ۲n$. نگاشت $n \to ۲n$ یک تشابه از مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی بروی مجموعهٔ همهٔ اعداد زوج است.) به هرحال، تشابه یک مجموعهٔ خوش ترتیب با بخشی از آن نوع بسیار خاصی از نگاشت است. در واقع هرگاه f تشابهی از مجموعهٔ خوش ترتیب X به خودش باشد، آنگاه $a \leqq f(a)$، برای هر a در X. اثبات، مستقیماً مبتنی بر تعریف خوش ترتیبی است. اگر اعضایی چون b وجود داشته باشند که $f(b) < b$، آنگاه ازین میان یکی از همه کوچکتر است. اگر $a < b$ و b همان کوچکترین عضو باشد، آنگاه $a \leqq f(a)$ از اینجا نتیجه می‌گیریم که بخصوص به ازای $a = f(b)$، $f(b) \leqq f(f(b))$. اما چون $f(b) < b$، از ترتیب نگهدار بودن f نتیجه می‌شود که $f(f(b)) < f(b)$؛ پس تنها راه گریز از تناقض این است که ممتنع بودن $f(b) < b$ را بپذیریم.

حاصل بند قبل، سه نتیجهٔ بسیار مفید دارد. اولین این نتایج، این است که هرگاه دو مجموعهٔ خوش ترتیب، چون X و Y، متشابه باشند، آنگاه تنها یک تشابه بین آنها وجود دارد. در واقع فرض کنید که g و h هر دو تشابه‌هایی از X بروی Y باشند و قرار دهید $f = g^{-1}h$. چون f تشابهی از X بروی خود آن است، نتیجه می‌شود که برای هر a در X، $a \leqq f(a)$. یعنی برای هر a در X، $a \leqq g^{-1}(h(a))$. با اعمال g بر طرفین نامساوی اخیر، درمی‌یابیم که برای هر a در X، $g(a) \leqq h(a)$. موقعیت نسبت به g و h متقارن است، و بنابراین همچنین می‌توان نتیجه گرفت که برای هر a در X، $h(a) \leqq g(a)$. نتیجه: $g = h$.

نتیجهٔ دوم این است که یک مجموعهٔ خوش ترتیب هیچ‌گاه با یکی از پاره‌های آغازی خود متشابه نیست. در واقع اگر X مجموعه‌ای خوش ترتیب، a عضوی از X و f تشابهی از X بروی $s(a)$ باشد، آنگاه بخصوص $f(a) \in s(a)$، بنابراین $f(a) < a$، و این غیر-ممکن است.

سومین و اصلی‌ترین نتیجه، قضیهٔ مقایسه‌پذیری برای مجموعه‌های خوش ترتیب است. حکم این است که هرگاه X و Y دو مجموعهٔ خوش ترتیب باشند، آنگاه یا X و Y با یکدیگر متشابه‌اند، و یا یکی از آنها با یک پارهٔ آغازی از دیگری متشابه است. برای اثبات، صرفاً جهت تمرین، از قضیهٔ بازگشت ترابا پایان استفاده می‌کنیم، با اینکه اجتناب از این کار کاملاً ساده است. فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعهٔ خوش ترتیب غیرتهی باشند که هیچیک از آنها با هیچ پارهٔ آغازی از دیگری متشابه نیست؛ ثابت می‌کنیم که تحت این این شرایط، X باید با Y متشابه باشد. فرض کنید $a \in X$ و t دنباله‌ای از نوع a در Y باشد؛ به عبارت دیگر t تابعی از $s(a)$ به Y است. فرض می‌کنیم $f(t)$، در صورت وجود کرانهای بالای اکید برد t در Y، کوچکترین آنها و در غیر این صورت کوچکترین عضو Y باشد. برحسب اصطلاحات قضیهٔ بازگشت ترابا پایان، تابع f که بدین صورت مشخص می‌شود، یک تابع دنباله‌ای از نوع X در Y است. فرض کنید U تابعی باشد که قضیهٔ بازگشت ترابا پایان وجود آن را به این شرایط نسبت می‌دهد. یک استدلال ساده (به کمک استقرای ترابا پایان) نشان می‌دهد که برای هر a در X، تابع U پارهٔ آغازی مشخص شده توسط a در X را به‌طور یک بیک بروی پارهٔ آغازی مشخص شده توسط $U(a)$ در Y می‌نگارد. این امر ایجاب می‌کند که U تشابه باشد، و اثبات کامل است.

اکنون به طرح کلی طریقهٔ اثبات دیگری که در آن از قضیهٔ بازگشت ترابا پایان استفاده نمی‌شود، می‌پردازیم. فرض کنید $X_\circ$ مجموعهٔ تمام اعضای a از X باشد که به ازای آنها یک عضو b در Y وجود دارد به طوری که $s(a)$ با $s(b)$ متشابه است. برای هر a در $X_\circ$، عضو b را در Y که متناظر با a است (و به صورت یگانه مشخص می‌شود) به صورت $U(a)$ بنویسید، و فرض کنید $Y_\circ$ برد U باشد. نتیجه می‌شود که یا $X_\circ = X$ و یا در غیر این صورت $X_\circ$ یک پارهٔ آغازی از X است و $Y_\circ = Y$.

تمرین. هر زیرمجموعهٔ یک مجموعهٔ خوش ترتیب X، یا با خود X و یا با یک پارهٔ آغازی از X متشابه است. هرگاه X و Y مجموعه‌های خوش ترتیب باشند و $X \cong Y$ (یعنی X با Y متشابه باشد)، آنگاه تشابه، کوچکترین کران بالای هر زیرمجموعه از X را (در صورت وجود) بروی کوچکترین کران بالای تصویر آن مجموعه می‌نگارد.

بخش ۱۹
اعداد اوردینال

تالی مجموعهٔ x یعنی x^+ را به صورت $x \cup \{x\}$ تعریف کردیم و سپس ω را به عنوان کوچکترین مجموعه‌ای که شامل 0 است و در صورت دارا بودن x، x^+ را نیز شامل است ساختیم. اگر با ω شروع کنیم و تالی آن، ω^+ را تشکیل دهیم و سپس تالی ω^+ را هم بسازیم و به همین ترتیب الی غیرالنهایه ادامه دهیم، چه پیش می‌آید؟ به عبارت دیگر آیا به همان مفهومی که ω فراتر از 0، 1، 2، ... و غیره است، چیزی فراتر از ω، ω^+، $(\omega^+)^+$، ... و غیره وجود دارد؟

این پرسش، مجموعه‌ای چون T را طلب می‌کند که شامل ω باشد و هر عضو T (به استثنای خود ω) را بتوان با تشکیل مکرر تالیها از ω به دست آورد. به منظور فرمولبندی دقیق این خواسته چند اصطلاح خاص و موقتی را معرفی می‌کنیم. تابع f را که قلمرو آن مجموعهٔ مقدمهای عدد طبیعی n است (به عبارت دیگر $\operatorname{dom} f = n$) یک تابع ω-تالی می‌نامیم هرگاه $f(0) = \omega$ (مشروط به اینکه $n \neq 0$ و در نتیجه $0 < n$) و $f(m^+) = (f(m))^+$ به ازای $m^+ < n$. اثباتی ساده، به کمک استقرای ریاضی، نشان می‌دهد که برای هر عدد طبیعی n تابع ω-تالی یگانه‌ای با قلمرو n وجود دارد. وقتی می‌گوییم چیزی مساوی ω است و یا آن را می‌توان با تشکیل مکرر تالیها از ω به دست آورد، به این معنی است که آن چیز به برد یک تابع ω-تالی تعلق دارد. فرض کنید $S(n, x)$ جمله‌ای باشد که می‌گوید «n یک عدد طبیعی است و x متعلق به برد تابع ω-تالی با قلمرو n است.» مجموعهٔ T به طوری که $x \in T$ اگر و فقط اگر $S(n, x)$ به ازای یک n برقرار باشد، چیزی است که در جستجویش هستیم. چنین مجموعه‌ای به همان اندازه فراتر از ω است که ω فراتر از 0 است.

می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی n، مجازیم مجموعهٔ $\{x : S(n, x)\}$ را تشکیل دهیم. به عبارت دیگر، برای هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ $F(n)$ وجود دارد به طوری که $x \in F(n)$ اگر و فقط اگر جملهٔ $S(n, x)$ درست باشد. ارتباط بین n و $F(n)$ بسیار شبیه یک تابع به

نظر می‌رسد. با این حال، خواهیم دید که هیچیک از روشهای مجموعه‌سازی که تاکنون دیده‌ایم برای اثبات وجود مجموعهٔ F، متشکل از زوجهای مرتب، به طوری که $(n, x) \in F$ اگر و فقط اگر $x \in F(n)$، قدرت کافی ندارد. برای دست یافتن به این وضع مطلوب، به اصل موضوع دیگری در نظریهٔ مجموعه‌ها (آخرین اصل) نیاز داریم. اصل جدید اجمالاً می‌گوید که با هر کار معقولی که بتوان با اعضای یک مجموعه کرد، یک مجموعه به دست می‌آید.

اصل موضوع جایگزینی. هرگاه $S(a, b)$ جمله‌ای باشد به طوری که برای هر a در مجموعهٔ A، مجموعهٔ $\{b : S(a, b)\}$ را بتوان ساخت، آنگاه یک تابع F با قلمرو A وجود دارد به طوری که $F(a) = \{b : S(a, b)\}$ برای هر a در A.

وقتی می‌گوییم $\{b : S(a, b)\}$ را می‌توان ساخت، منظورمان البته این است که مجموعهٔ $F(a)$ وجود دارد به طوری که $b \in F(a)$ اگر و فقط اگر $S(a, b)$ درست باشد. اصل موضوع گسترش ایجاب می‌کند که تابعی که در اصل موضوع جایگزینی توصیف می‌شود، توسط جمله و مجموعهٔ داده شده، به طور یگانه مشخص گردد. وجه تسمیهٔ این اصل موضوع این است که به کمک آن می‌توان از یک مجموعهٔ موجود با جایگزینی چیزی نو به جای هر یک از اعضایش، مجموعه‌ای جدید ساخت.

کاربرد اصلی اصل موضوع جایگزینی، در گسترش عمل شمارش تا فراسوی اعداد طبیعی است. از دیدگاه فعلی، خاصیت اصلی هر عدد طبیعی این است که مجموعه‌ای است خوش ترتیب و در آن هر پارهٔ آغازی که توسط هر عضو مشخص می‌شود، مساوی همان عضو است. (به خاطر بیاورید که اگر m و n اعداد طبیعی باشند، آنگاه $m < n$ به معنی $m \in n$ است، این امر مستلزم آن است که $n = \{m \in \omega : m < n\}$.) این خاصیتی است که عمل شمارش گسترش یافته بر آن مبتنی است؛ تعریف اساسی در این حوزهٔ مفاهیم را مرهون فون نویمان[1] هستیم. یک عدد اوردینال به صورت مجموعهٔ خوش ترتیب α تعریف می‌شود، به طوری که برای هر ξ در α، $\xi = s(\xi)$؛ در اینجا نیز چون قبل، $s(\xi)$ پارهٔ آغازی $\{\eta \in \alpha : \eta < \xi\}$ است.

مجموعهٔ ω، متشکل از تمام اعداد طبیعی، مثالی از یک عدد اوردینال است که عددی طبیعی نیست. این به آن معنی است که هم اکنون می‌توانیم بیش از توانایی قبلی خود «بشماریم»؛ زیرا در حالی که پیش از این تنها اعداد در دسترس ما اعضای ω بودند، حال خود ω را نیز در اختیار داریم. همچنین ω^+ تالی ω را نیز در اختیار داریم، ترتیب این مجموعه همان ترتیب بدیهی یک خوش ترتیبی است که در شرایط لازم برای اعداد اوردینال صدق می‌کند. در واقع اگر $\xi \in \omega^+$ آنگاه طبق تعریف تالی یا $\xi \in \omega$، که در این صورت از قبل می‌دانیم $\xi = s(\xi)$، یا در غیر این صورت $\xi = \omega$، که در این صورت طبق تعریف

---

1. von Neumann

ترتیب $\omega = s(\xi)$، یعنی باز هم $\xi = s(\xi)$. استدلالی که هم اکنون ارائه شد کاملاً عمومیت دارد و ثابت می‌کند که اگر α عددی اوردینال باشد α^+ نیز چنین است. نتیجه می‌گیریم که فرایند شمارش ما، اکنون گسترش یافته و ω، ω^+، $(\omega^+)^+$ و غیره را الی غیر-النهایه در برمی‌گیرد.

در این نقطه به بحث قبلی خود در این باره که در ورای ω چه رخ می‌دهد برمی‌گردیم. اصل موضوع جایگزینی بسادگی نتیجه می‌دهد که یک تابع منحصر بفرد F بر ω وجود دارد به طوری که برای هر عدد طبیعی n، $F(0) = \omega$ و $F(n^+) = (F(n))^+$. برد این تابع برای ما مجموعه‌ای قابل توجه است و از آن مهمتر مجموعه‌ای است که از اجتماع مجموعهٔ ω با برد تابع F تشکیل می‌شود. به دلایلی که تنها پس از نگاهی گذرا به حساب اعداد اوردینال روشن می‌گردد، این اجتماع را معمولاً با $\omega 2$ نمایش می‌دهند. اگر با وامگیری مجدد از نمادهای حساب اوردینالها، $F(n)$ را برابر با $\omega + n$ قرار دهیم، آنگاه مجموعهٔ $\omega 2$ را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای که از همهٔ n ها (n در ω) و همهٔ $\omega + n$ ها (n در ω) تشکیل می‌شود، توصیف کرد.

اکنون بآسانی می‌توان تحقیق کرد که $\omega 2$ یک اوردینال است. البته این تحقیق به تعریف ترتیب در $\omega 2$ بستگی دارد. در این نقطه، هم تعریف و هم اثبات را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم و توجه رسمی ما معطوف به چند نکتهٔ کلی می‌گردد که واقعیتهای مربوط به $\omega 2$ را به عنوان حالات خاص ساده‌ای در بردارند.

یک ترتیب (جزئی یا تمام) در مجموعهٔ X، به طور یگانه، توسط پاره‌های آغازیش مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، هرگاه R و S دو ترتیب در X باشند و هرگاه برای هر x در X، مجموعهٔ تمام R-مقدمهای x مساوی مجموعهٔ تمام S-مقدمهای x باشد، آنگاه R و S مساوی‌اند. این حکم، چه مقدمها به عنوان مقدم اکید در نظر گرفته شوند و چه نشوند، واضح است. این حکم بخصوص در مورد مجموعه‌های خوش ترتیب صادق است. از این حالت خاص نتیجه می‌شود که اگر خوش ترتیب کردن یک مجموعه به این قصد که از آن عددی اوردینال بسازیم اصلاً ممکن باشد، در این صورت این کار فقط یک راه دارد. آن مجموعه، بتنهایی برای ما مشخص می‌کند که رابطه‌ای که آن را عدد اوردینال می‌کند، چه باید باشد؛ اگر آن رابطه در شرایط فوق صدق بکند، آنگاه آن مجموعه یک عدد اوردینال است و در غیر این صورت خیر. گفتن $\xi = s(\xi)$ به این معنی است که مقدمهای ξ باید همان اعضای ξ باشند. بنابراین، رابطهٔ مورد نظر همان رابطهٔ تعلق است. اگر $\xi < \eta$ به معنی $\xi \in \eta$، وقتی که ξ و η اعضای یک مجموعهٔ α باشند، تعریف شود، آنگاه نتیجه یا یک خوش ترتیبی از α است، به طوری که برای هر ξ در α، $\xi = s(\xi)$، و یا نیست، در حالت اول α یک عدد اوردینال است و در حالت دوم نیست.

این بحث مقدماتی اعداد اوردینال را با ذکر نام چند اوردینال اولیه خاتمه می‌دهیم. بعد از ۰، ۱، ۲، ... نوبت ω است و بعد از ω، $\omega + 1$، $\omega + 2$، ...، $\omega 2$ می‌آید. بعد از $\omega 2 + 1$ (یعنی تالی $\omega 2$)، $\omega 2 + 2$ و سپس $\omega 2 + 3$ می‌آید و بعد از همهٔ جملات دنباله‌ای که چنین شروع می‌شود $\omega 3$ است. (در این مرحله کاربرد دیگری از اصل

موضوع جایگزینی لازم است). سپس $\omega 3 + 1$، $\omega 3 + 2$، $\omega 3 + 3$، ...، و پس از همهٔ آنها نوبت $\omega 4$ است. به همین طریق، بترتیب به ω، $\omega 2$، $\omega 3$، $\omega 4$، ... دست می‌یابیم. حاصل به‌کار گرفتن اصل موضوع جایگزینی چیزی است که، به همان مفهومی که ω به دنبال اعداد طبیعی می‌آید، به دنبال همهٔ این اعداد می‌آید؛ آن چیز ω^2 است. پس از آن همه چیز از نو شروع می‌شود: $\omega^2 + 1$، $\omega^2 + 2$، ...، $\omega^2 + \omega$، $\omega^2 + \omega + 1$، $\omega^2 + \omega + 2$، ...، $\omega^2 + \omega 2$، $\omega^2 + \omega 2 + 1$، ...، $\omega^2 + \omega 3$، ...، $\omega^2 + \omega 4$، ...، $\omega^2 2$، ...، $\omega^2 3$، ...، ω^3، ...، ω^4، ...، ω^ω، ...، $\omega^{(\omega^\omega)}$، ...، $\omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}$، .... عدد بعدی، بعد از همهٔ اینها ε_0 است؛ سپس $\varepsilon_0 + 1$، $\varepsilon_0 + 2$، ...، $\varepsilon_0 + \omega$، ...، $\varepsilon_0 + \omega 2$، ...، $\varepsilon_0 + \omega^2$، ...، $\varepsilon_0 + \omega^\omega$، ...، $\varepsilon_0 2$، ...، $\varepsilon_0 \omega$، ...، $\varepsilon_0 \omega^\omega$، ...، ε_0^2، ....

بخش ۲۰

مجموعه‌های اعداد اوردینال

عدد اوردینال، طبق تعریف، نوع خاصی از مجموعه‌های خوش ترتیب است؛ ذیلاً به بررسی خواص ویژهٔ آن می‌پردازیم.

ابتدایی‌ترین واقعیت این است که هر یک از اعضای عدد اوردینال α، در عین حال زیرمجموعهٔ α نیز هست. (به عبارت دیگر، هر عدد اوردینال یک مجموعهٔ متعدی است.) در واقع اگر $\xi \in \alpha$، آنگاه $s(\xi) = \xi$ مستلزم این است که هر عضو ξ یک مقدم ξ در α، و در نتیجه بخصوص عضوی از α است.

هرگاه ξ عضوی از عدد اوردینال α باشد، آنگاه چنانکه هم اکنون دیدیم، ξ زیرمجموعهٔ α است و نتیجتاً یک مجموعهٔ خوش ترتیب است (نسبت به ترتیبی که از α به ارث می‌برد). حکم: ξ در واقع یک عدد اوردینال است. اگر $\eta \in \xi$ آنگاه پارهٔ آغازی مشخص شده توسط η در ξ، همان پارهٔ آغازی مشخص شده توسط η در α است، چون پارهٔ آغازی اخیر مساوی η است. پارهٔ آغازی قبلی نیز چنین است. راه دیگر فرمولبندی همین نتیجه این است که بگوییم، هر پارهٔ آغازی یک عدد اوردینال، یک عدد اوردینال است.

نکتهٔ قابل توجه بعدی این است که اگر دو عدد اوردینال متشابه باشند، آنگاه مساوی‌اند. برای اثبات، فرض کنید α و β اعدادی اوردینال و f تشابهی از α بروی β باشد. نشان خواهیم داد که برای هر ξ در α، $f(\xi) = \xi$. این حکم بآسانی با استفاده از استقرای ترابا پایان ثابت می‌شود. قرار می‌دهیم $S = \{\xi \in \alpha : f(\xi) = \xi\}$. برای هر ξ در α، کوچکترین عضو α که به $s(\xi)$ تعلق ندارد خود ξ است. چون f تشابه است، نتیجه می‌گیریم که کوچکترین عضو β که به تصویر $s(\xi)$ تحت f تعلق ندارد، $f(\xi)$ است. این احکام مستلزم آن‌اند که اگر $s(\xi) \subset S$، آنگاه $f(\xi)$ و ξ اعداد اوردینالی هستند که پاره‌های آغازیشان یکی است، و نتیجتاً $f(\xi) = \xi$. بنابراین ثابت کرده‌ایم که اگر $s(\xi) \subset S$ آنگاه $\xi \in S$. اصل استقرای ترابا پایان نتیجه می‌دهد که $S = \alpha$، و از آن نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \beta$.

اگر α و β اعداد اوردینال باشند، آنگاه، بخصوص، مجموعه‌هایی خوش ترتیب‌اند

و نتیجتاً یا با هم متشابه‌اند و یا در غیر این صورت یکی از آنها با یک پارهٔ آغازی دیگری متشابه است. هرگاه مثلاً β با یک پارهٔ آغازی از α متشابه باشد، آنگاه با یکی از اعضای α متشابه است وچون هرعضو α یک عدد اوردینال است نتیجه می‌گیریم که β عضو α است و، باز هم به عبارتی دیگر، α امتدادی از β است. اکنون می‌دانیم که اگر α و β اعداد اوردینال متمایزی باشند، آنگاه احکام

$$\beta \in \alpha,$$

$$\beta \subset \alpha,$$

α امتدادی از β است،

با یکدیگر معادل‌اند و در صورت برقرار بودن آنها می‌توان نوشت

$$\beta < \alpha.$$

آنچه هم اکنون ثابت کردیم این است که هر دو عدد اوردینال مقایسه پذیرند، یعنی اگر α و β اعداد اوردینال باشند، آنگاه یا $\alpha = \beta$، یا $\alpha < \beta$، و یا $\beta < \alpha$.

نتیجهٔ پاراگراف قبل را می‌توان چنین بیان کرد که هرمجموعه از اعداد اوردینال تماماً مرتب است. در واقع از این هم می‌توان فراتر رفت و گفت: هر مجموعه از اعداد اوردینال خوش‌ترتیب است. فرض‌کنید E مجموعه‌ای غیرتهی از اعداد اوردینال وα عضوی ازE باشد. اگر برای هر β در E، $\alpha \leqq \beta$، آنگاه α کوچکترین عضو E است و فبهاالمراد. در غیر این صورت عضو β در E وجود دارد به طوری که $\beta < \alpha$، یعنی $\beta \in \alpha$؛ در این صورت $\alpha \cap E$ غیرتهی است. چون α یک مجموعهٔ خوش ترتیب است، $\alpha \cap E$ دارای کوچکترین عضو است، مثلاً α_0. حال اگر $\beta \in E$، آنگاه یا $\alpha \leqq \beta$ (که در این صورت $\alpha_0 < \beta$) و یا $\beta < \alpha$ (که در این صورت $\beta \in \alpha \cap E$ و در نتیجه $\alpha_0 \leqq \beta$). بدین طریق ثابت می‌شود که E کوچکترین عضوی دارد که همان α_0 است.

بعضی از اعداد اوردینال متناهی‌اند؛ آنها همان اعداد طبیعی (اعضای ω) هستند، بقیه ترابایایان خوانده می‌شوند. مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی، ω، کوچکترین عدد اوردینال ترابایایان است. هر عدد اوردینال متناهی (بجز ۰) دارای یک مقدم بلافصل است. اگر عدد اوردینال ترابایایان α دارای مقدم بلافصلی چون β باشد، آنگاه، همچون اعداد طبیعی، $\alpha = \beta^+$. همهٔ اعداد اوردینال ترابایایان مقدم بلافصل ندارند؛ این چنین اعدادی، اعداد حدی خوانده می‌شوند.

حال فرض کنید $\mathscr{C}$ دسته‌ای از اعداد اوردینال باشد. چون، چنانکه هم اکنون دیدیم، $\mathscr{C}$ یک زنجیر امتدادی است، نتیجه می‌شود که α، اجتماع مجموعه‌های $\mathscr{C}$، یک مجموعهٔ خوش ترتیب است به طوری که برای هر ξ در $\mathscr{C}$، که متمایز از α باشد، α امتدادی از ξ است. پارهٔ آغازی مشخص شده توسط یک عضو α، همان پارهٔ آغازی است که توسط همان عضو در هر مجموعه‌ای از $\mathscr{C}$ که شامل آن عضو باشد، مشخص می‌شود، و این امر ایجاب می‌کند که α یک عدد اوردینال باشد. هرگاه $\xi \in \mathscr{C}$، آنگاه $\xi \leqq \alpha$؛ یعنی عدد α یک کران بالا برای اعضای $\mathscr{C}$ است. هرگاه β کران بالای دیگری برای $\mathscr{C}$ باشد، آنگاه $\xi \subset \beta$، برای هر $\xi \in \mathscr{C}$، و بنابراین طبق تعریف اجتماع، $\alpha \subset \beta$. این امر ایجاب می‌کند

که α کوچکترین کران بالای $\mathscr{C}$ باشد؛ بدین طریق ثابت کردیم که هر مجموعه‌ای از اعداد اوردینال یک سوپرموم دارد.

آیا مجموعه‌ای وجود دارد که دقیقاً از همهٔ اعداد اوردینال تشکیل یافته باشد؟ بآسانی می‌توان دریافت که پاسخ این سؤال لزوماً منفی است. زیرا هرگاه چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد، آنگاه می‌توانیم سوپرموم تمام اعداد اوردینال را تشکیل دهیم. این سوپرموم، یک عدد اوردینال خواهد بود که بزرگتر از یا مساوی هر عدد اوردینال دیگر است. به هر حال چون برای هر عدد اوردینال، یک عدد اوردینال اکیداً بزرگتر (مثلاً تالی آن) وجود دارد، چنین چیزی غیرممکن است؛ یعنی صحبت از «مجموعهٔ» تمام اعداد اوردینال بی معنی است. تناقضی که مبتنی بر فرض وجود چنین مجموعه‌ای است به پارادوکس بورالی-فورتی[1] معروف است. (بورالی-فورتی نام یک نفر است نه دو نفر!)

هدف بعدی ما این است که نشان دهیم مفهوم عدد اوردینال آن چنان هم که به نظر می‌رسد عجیب نیست؛ بلکه در واقع، هر مجموعهٔ خوش ترتیب، از نظر همهٔ جنبه‌های اساسی شبیه یک عدد اوردینال است. «شباهت» در اینجا بـه معنی فنی تشابه است. یک بیان غیر-صوری از این قضیه این است که هر مجموعهٔ خوش ترتیب را می‌توان «شمرد».

قضیهٔ شمارش. هر مجموعهٔ خوش ترتیب، با یک عدد اوردینال یگانه متشابه است.

اثبات. چون در مورد اعداد اوردینال، تشابه همان تساوی است، یگانگی واضح است. حال فرض کنید X مجموعه‌ای خوش ترتیب باشد و عضو a از X طوری باشد که هر پارهٔ آغازی مشخص شده توسط یکی از مقدمهای a، با یک عدد اوردینال (لزوماً یگانه) متشابه است. اگر $S(x, \alpha)$ جمله‌ای باشد که می‌گوید «α یک عدد اوردینال است و $\alpha \cong s(x)$»، آنگاه برای هر x در $s(a)$، مجموعهٔ $\{\alpha : S(x, \alpha)\}$ را می‌توان تشکیل داد؛ در واقع این مجموعه یک مجموعهٔ تک عضوی است. اصل موضوع جایگزینی وجود مجموعه‌ای را ایجاب می‌کند که دقیقاً از اعداد اوردینالی که با پاره‌های آغازی مشخص شده توسط مقدمهای a متشابه‌اند، تشکیل شده است. از این امر نتیجه می‌گیریم که چه a تالی بلافصل یکی از مقدمهای خود و چه سوپرموم همهٔ آنها باشد، $s(a)$ با یک عدد اوردینال متشابه است. با این استدلال، مقدمات به کار گرفتن اصل استقرای ترا باپایان آماده می‌شود و نتیجه این است که هر پارهٔ آغازی در X با یک عدد اوردینال متشابه است. این واقعیت، به نوبهٔ خود، کاربرد دیگری از اصل موضوع جایگزینی را توجیه می‌کند که درست همانند کاربردی است که در فوق داشتیم؛ نتیجهٔ نهایی همان‌گونه که می‌خواستیم این است که X با یک عدد اوردینال متشابه است.

---

1. Burali-Forti

بخش ۲۱

حساب اوردینالها

برای تعریف اعمال حسابی بروی اعداد طبیعی، از قضیهٔ بازگشت استفاده کـردیم، و در پی آن ثابت کردیم که آن اعمال از طرق مختلف و مطلوبی با اعمال نظریهٔ مجموعه‌ها مرتبطاند. به طور مثال، می‌دانیم که تعداد اعضای اجتماع دو مجموعـهٔ مجزا و متناهی E و F بـرابر $\#(E) + \#(F)$ است. اکنون تذکر می‌دهیم کـه از این واقعیت نیز می‌تـوانستیم برای تعریف جمع استفاده کنیم. یعنی اگر m و n اعدادی طبیعی باشند، می‌تـوانیم مجموع آنها را با یافتن دو مجموعهٔ مجزای E و F، به طوری کـه $\#(E) = m$ و $\#(F) = n$، و قرار دادن $m + n = \#(E \cup F)$ تعریف کنیم.

متناظر با آنچه در مورد اعـداد طبیعی انجام گـرفت و آنچه می‌توانست انجام گیرد، دو رهیافت رایج به حساب اوردینالها وجود دارد. تـا حدی به منظور تنوع و تا حدی بـه علت اینکه قضیهٔ بازگشت در این مبحث چندان طبیعـی بـه نظر نمی‌رسد، بـه جای رهیافت بازگشتی، ما بر رهیافت نظریهٔ مجموعه‌ها تأکید خواهیم کرد.

در شروع بحث یـادآور می‌شویم کـه یک راه کم و بیش واضح بـرای تـرکیب دو مجموعهٔ خوش ترتیب و تولید یک مجموعهٔ خوش ترتیب جدید وجـود دارد. به زبان غیر- صوری، این راه این است که یکی از آنها را می‌نویسیم و سپس دیگری را به دنبالش قرار می‌دهیم. اگر سعی کنیم که این مطالب را دقیقاً بیان کنیم، بلافاصله بـا این مشکل مواجه می- شویم که آن دو مجموعـه ممکن است مجزا نباشند. اعضای مشترک آن دو مجموعـه را در کجا باید قرار دهیم؟ راه نجات از این مشکل، مجزا کردن مجموعـه‌هاست. این کار را می- توان با رنگ‌آمیزی اعضای آنها با رنگهای متفاوت صورت داد. به زبـانی ریاضی‌تر، بـه جای اعضای مجموعـه‌ها همان اعضا را بـه همراه یک شیء مشخص کننده مـی‌نشانیم و از دو شیء متفاوت برای دو مجموعه استفاده می‌کنیم. به زبانی کاملاً ریاضی: اگر E و F دو مجموعهٔ دلخواه باشند، فرض می‌کنیم $\hat{E}$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب $(x, 0)$ به قسمی کـه x در E، و $\hat{F}$ مجموعـهٔ تمام زوجهای مرتب $(x, 1)$ به قسمی کـه x در F، باشند. روشن

است که مجموعه‌های $\hat{E}$ و $\hat{F}$ مجزایند. یک تناظر یک بیک بدیهی بین E و $\hat{E}$ ($x \to (x, 0)$) و نیز تناظر یک بیک دیگری بین F و $\hat{F}$ ($x \to (x, 1)$) وجود دارد، از این تناظرها می‌توان برای انتقال هر نوع ساختمانی که احتمالاً E و F دارا هستند (مثل ترتیب) به $\hat{E}$ و $\hat{F}$ استفاده کرد. نتیجه می‌گیریم که هرگاه با دو مجموعه، با ساختمانی اضافی یا بدون آن، مواجه شدیم، همواره می‌توان آنها را با مجموعه‌هایی مجزا، با همان ساختمان، جایگزین کرد و نتیجتاً بدون اینکه چیزی از کلیت موضوع کاسته شود، می‌توان فرض کرد که آن دو مجموعه از اول مجزا بوده‌اند.

قبل از اعمال این ساختمان در مورد حساب اوردینالها، می‌بینیم که این موضوع را می‌توان به خانواده‌های دلخواهی از مجموعه‌ها، تعمیم داد. در واقع اگر $\{E_i\}$ یک خانواده باشد، مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x, i) به قسمی که x در E_i باشد را به صورت $\hat{E}_i$ می‌نویسیم (به عبارت دیگر $\hat{E}_i = E_i \times \{i\}$). خانوادهٔ $\{\hat{E}_i\}$ دو بدو مجزاست و نیز آنچه را خانوادهٔ $\{E_i\}$ می‌توانست انجام دهد، می‌تواند انجام دهد.

حال فرض کنید E و F دو مجموعهٔ خوش ترتیب مجزا باشند. ترتیب را در $E \cup F$ به طریقی تعریف می‌کنیم که زوجهای متعلق به E و همچنین زوجهای متعلق به F با همان ترتیب سابق باقی بمانند و هر عضو E قبل از هر عضو F قرار گیرد. (به زبان صوری محض: اگر R و S، بترتیب، ترتیبهای مفروض E و F باشند، فرض می‌کنیم $E \cup F$ توسط $R \cup S \cup (E \times F)$ مرتب شده است.) خوش ترتیب بودن E و F ایجاب می‌کند که $E \cup F$ نیز خوش ترتیب باشد. مجموعهٔ خوش ترتیب $E \cup F$ را، جمع اوردینالی مجموعه‌های خوش ترتیب E و F می‌نامند.

یک راه ساده و قابل توجه برای تعمیم جمع اوردینالی به تعدادی نامتناهی عامل جمع وجود دارد. فرض کنید $\{E_i\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های خوش ترتیب مجزا باشد که توسط مجموعهٔ خوش ترتیب I اندیس‌گذاری شده است. جمع اوردینالی این خانواده، اجتماع $\bigcup_{i \in I} E_i$ است که به طریق زیر مرتب می‌شود. اگر a و b اعضای این اجتماع باشند و $a \in E_i$ و $b \in E_j$، آنگاه $a < b$ به این معنی است که یا $i < j$ و یا در غیر این صورت $i = j$ و در ترتیب مفروض E_i، a مقدم بر b است.

حالا دیگر تعریف جمع برای اعداد اوردینال مثل آب خوردن است. برای هر مجموعهٔ خوش ترتیب X فرض می‌کنیم $\operatorname{ord} X$ عدد اوردینال یگانه‌ای باشد که با X متشابه است. (اگر X متناهی باشد، آنگاه $\operatorname{ord} X$ همان عدد طبیعی $\#(X)$ است که قبلاً تعریف شد.) اگر α و β اعدادی اوردینال باشند، فرض کنید A و B دو مجموعهٔ خوش ترتیب مجزا باشند به طوری که $\operatorname{ord} A = \alpha$ و $\operatorname{ord} B = \beta$، و همچنین فرض کنید C جمع اوردینالی A و B باشد. مجموع $\alpha + \beta$ طبق تعریف، عدد اوردینال مجموعهٔ C است. پس $\operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B = \operatorname{ord} C$. توجه به این نکته مهم است که مجموع $\alpha + \beta$ مستقل از انتخاب خاص مجموعه‌های A و B است و هر زوج از مجموعه‌های مجزا با همان اعداد اوردینال، به همان نتیجه منتهی می‌شود.

این ملاحظات را می‌توان بدون اشکال به حالت نامتناهی گسترش داد. اگر $\{\alpha_i\}$

خانواده‌ای خوش ترتیب از اعداد اوردینال باشد که توسط مجموعهٔ خوش ترتیب I اندیس‌گذاری شده است، فرض کنید $\{A_i\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های خوش ترتیب دو به دو مجزا باشد به‌طوری که برای هر i، $\text{ord } A_i = \alpha_i$. فرض کنید A جمع اوردینالی خانوادهٔ $\{A_i\}$ باشد. مجموع $\sum_{i\in I} \text{ord } A_i$، طبق تعریف، عدد اوردینال مجموعهٔ A است، پس $\sum_{i\in I} \text{ord } A_i = \text{ord } A$. در اینجا نیز نتیجهٔ نهایی مستقل از انتخاب دلخواه مجموعه‌های خوش ترتیب A_i است و هر انتخاب دیگر (با همان اعداد اوردینال) به همان نتیجه منتهی خواهد شد.

برخی از خواص جمع اعداد اوردینال خوب و باقی بدند. در بخش خوب پرونده، اتحادهای

$$\alpha + ۰ = \alpha,$$
$$۰ + \alpha = \alpha,$$
$$\alpha + ۱ = \alpha^+,$$

و قانون شرکت‌پذیری

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

وجود دارند. حکم پسندیدهٔ دیگر اینکه $\alpha < \beta$ اگر و فقط اگر یک عدد اوردینال γ، غیر-صفر، وجود داشته باشد به طوری که $\beta = \alpha + \gamma$. اثبات همهٔ این احکام، مقدماتی است.

تقریباً همهٔ ناهنجاری رفتار جمع، ناشی از برقرار نبودن قانون جابجایی است. نمونه: $\omega = ۱ + \omega$ (ولی همان‌گونه که در بالا دیدیم، $\omega \neq ۱ + \omega$). بد رفتاری جمع برخی از واقعیتها را در مورد ترتیب، که به شهود بر ما معلوم است، بیان می‌کند. به طور مثال، اگر عضو جدیدی را به جلوی یک دنبالهٔ نامتناهی (از نوع ω) اضافه کنیم، نتیجه با آنچه در آغاز کار داشته‌ایم متشابه است. ولی اگر آن را به انتهای دنباله اضافه کنیم، تشابه از بین می‌رود؛ زیرا مجموعهٔ قبلی دارای آخرین عضو نبود، در حالی که مجموعهٔ جدید دارای چنین عضوی است.

مهمترین کاربرد جمع نامتناهی، ایجاد انگیزه برای مطالعهٔ حاصل‌ضرب و تسهیل آن است. اگر A و B مجموعه‌هایی خوش ترتیب باشند، طبیعی است اگر حاصل‌ضرب آنها را به عنوان حاصل B بار جمع کردن A با خودش تعریف کنیم. برای معنی بخشیدن به این نکته، باید قبل از هر چیز یک خانوادهٔ دو بدو مجزا از مجموعه‌های خوش ترتیبی که هر یک با A متشابه است و به وسیلهٔ مجموعهٔ B اندیس‌گذاری شده، بسازیم. دستورالعمل کلی برای انجام این کار، در این مورد نیز بخوبی کارساز است؛ یعنی برای هر b در B، کافی است قرار دهیم $A_b = A \times \{b\}$. حال اگر تعریف جمع اوردینالها را به صورتی که در مورد خانوادهٔ $\{A_b\}$ صادق است بررسی کنیم، به فرمولبندی تعریف زیر هدایت خواهیم شد. حاصل‌ضرب اوردینالی دو مجموعهٔ خوش ترتیب A و B همان حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ با عکس ترتیب قاموسی است. به عبارت دیگر اگر (a, b) و (c, d) در $A \times B$ باشند، آنگاه $(a, b) < (c, d)$ به این معنی است که یا $b < d$ و یا در غیر این صورت $b = d$ و $a < c$.

اگر α و β اعدادی اوردینال باشند، فرض کنید A و B دو مجموعهٔ خوش ترتیب باشند به طوری که $\text{ord } A = \alpha$ و $\text{ord } B = \beta$، و همچنین فرض کنید C حاصل‌ضرب اوردینالی A و B باشد. حاصل‌ضرب $\alpha\beta$، طبق تعریف عدد اوردینال مجموعهٔ C است، پس $(\text{ord } A)(\text{ord } B) = \text{ord } C$. ضرب، بدون ابهام و مستقل از انتخاب دلخواه مجموعه‌های خوش ترتیب A و B، تعریف می‌شود. راه دیگر این است که از هرگونه دلخواه بودن اجتناب کنیم، بدین‌طریق که به یاد بیاوریم که دسترس‌پذیرترین مجموعهٔ خوش ترتیب با عدد اوردینال α، خود عدد اوردینال α است (و به همین ترتیب در مورد β).

ضرب نیز مانند جمع دارای خواص خوب و بد است. برخی از این خواص خوب عبارت‌اند از اتحادهای

$$\alpha 0 = 0,$$
$$0\alpha = 0,$$
$$\alpha 1 = \alpha,$$
$$1\alpha = \alpha,$$

قانون شرکت‌پذیری

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

قانون پخشی چپ

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

و اینکه اگر حاصل‌ضرب دو عدد اوردینال صفر باشد، آنگاه یکی از آن دو باید صفر باشد. (توجه داشته باشید که ما از قرارداد متعارف در مورد تقدم ضرب بر جمع استفاده می‌کنیم؛ $\alpha\beta + \alpha\gamma$ نمایشگر $(\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$ است.)

قانون جابجایی، و همچنین بسیاری از نتایج آن، برای ضرب برقرار نیستند. به طور مثال $\omega = 2\omega$ (یک دنبالهٔ نامتناهی از زوجهای مرتب را مجسم کنید)، ولی $\omega \neq \omega 2$ (یک زوج مرتب از دنباله‌های نامتناهی را مجسم کنید). قانون پخشی راست نیز برقرار نیست؛ یعنی $(\alpha + \beta)\gamma$ در حالت کلی با $\alpha\gamma + \beta\gamma$ متفاوت است. مثال: $\omega = 2\omega = (1 + 1)\omega$ ولی $\omega 2 = \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$.

درست همان‌گونه که تکرار جمع به تعریف ضرب اوردینالی منتهی شد، از تکرار ضرب نیز می‌توان برای تعریف توان اوردینالی استفاده کرد. همچنین می‌توان به توان رساندن را از طریق قضیهٔ بازگشت نیز بررسی کرد. جزئیات دقیق این مطلب، بخشی از نظریهٔ وسیع و بسیار تخصصی اعداد اوردینال است. ما در اینجا، به اشاره‌ای به تعریف و ذکر ساده‌ترین نتایج آن قانع خواهیم بود. برای تعریف α^β (که در آن α و β اعداد اوردینال هستند) از تعریف به استقرای ترابایان (روی β) استفاده می‌کنیم. با قرار دادن $\alpha^0 = 1$ و $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta\alpha$ شروع کرده اگر β یک عدد حدی باشد، α^β را به عنوان سوپرموم اعدادی به شکل α^γ، به قسمی که $\beta > \gamma$، تعریف می‌کنیم. اگر این طرح کلی تعریف با دقت فرمولبندی شود، نتیجه خواهد شد که

$$0^\alpha = 0 \ (\alpha \geqq 1),$$
$$1^\gamma = 1,$$
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma,$$
$$\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma.$$

قوانین آشنای توان، همگی برقرار نیستند؛ به عنوان مثال، $(\alpha\beta)^\gamma$ در حالت کلی با $\alpha^\gamma\beta^\gamma$ متفاوت است. مثال: $\omega = ۴^\omega = (۲ \cdot ۲)^\omega$ ولی $\omega^۲ = \omega \cdot \omega = ۲^\omega \cdot ۲^\omega$.

هشدار: علامت توان برای اعداد اوردینال در اینجا و پس از این، با کاربرد قبلی ما از آن نمی‌خواند. مجموعهٔ نامرتب ۲^ω، متشکل از تمام توابع از ω به ۲، و مجموعهٔ خوش‌ترتیب ۲^ω یعنی کوچکترین کران بالای دنباله‌ای از اعداد اوردینال ۲، ۲ . ۲، ۲ . ۲ . ۲، و غیره، به هیچ وجه یکی نیستند. کاری در این باره نمی‌توان کرد، زبان ریاضی در هر دو حوزه کاملاً تثبیت شده است. اگر در یک موقعیت خاص، متن نشان ندهد که کدامیک از دو تعبیر را باید برگزید، در این صورت تذکرات شفاهی صریح باید داده شود.

بخش ۲۲

قضیهٔ شرودر-برنشتاین[1]

هدف از شمارش، مقایسهٔ اندازهٔ یک مجموعه با دیگری است؛ آشناترین روش شمارش اعضای یک مجموعه این است که آنها را به ترتیبی مناسب، مرتب کنیم. نظریهٔ اعداد اوردینال، انتزاع هوشمندانه‌ای از این روش است، ولی به تعبیری در دست یافتن به این هدف چندان موفق نیست. این به آن معنی نیست که اعداد اوردینال بی‌فایده‌اند، بلکه کاربرد اصلی آنها در جایی دیگر، مثلاً در توپولوژی، است که بسیاری مثالها و مثالهای ناقض روشنگر از آنها فراهم می‌آید. در ادامهٔ بحث، هر چند گوشهٔ چشمی به اعداد اوردینال خواهیم داشت، ولی دیگر در مرکز توجه ما نخواهند بود. (بد نیست بدانیم که در واقع می‌توان بکلی از این اعداد صرف نظر کرد. نظریهٔ اعداد کاردینال را می‌توان به کمک اعداد اوردینال یا بدون کمک آنها بنا کرد، و هر یک از این ساختارها مزایایی دارد.) با این تذکرات مقدماتی جنبی، به مسئلهٔ مقایسهٔ اندازهٔ مجموعه‌ها باز می‌گردیم.

مسئله، مقایسهٔ اندازهٔ مجموعه‌هایی است که اعضای آنها، به نظر نمی‌رسد هیچ‌گونه ارتباطی با هم داشته باشند. حکم کردن در این مورد که جمعیت فرانسه بیشتر است یا جمعیت پاریس بسیار آسان است. ولی، مقایسهٔ عمر جهان برحسب ثانیه با جمعیت پاریس برحسب الکترون، به همان سهولت نیست. به عنوان چند مثال ریاضی، زوجهای زیر از مجموعه‌ها را که برحسب مجموعهٔ کمکی A تعریف شده‌اند، در نظر بگیرید: (الف) $X = A$، $Y = A^+$؛ (ب) $X = \mathcal{P}(A)$، $Y = 2^A$؛ (پ) X برابر با مجموعهٔ تمام نگاشتهای یک‌یک از A به خودش و Y مساوی مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی A است. در هر مورد می‌توان پرسید که کدامیک از مجموعه‌های X و Y، اعضای بیشتری دارند. مسئله این است که ابتدا تعبیر دقیقی برای این سؤال بیابیم و سپس آن را پاسخ دهیم.

قضیهٔ خوش ترتیبی می‌گوید که هر مجموعه را می‌توان خوش ترتیب کرد. در مورد

---

1. Schröder-Bernstein

مجموعه‌های خوش ترتیب چیزی در دست داریم که به نظر می‌آید مقیاس معقولی از اندازهٔ آنها باشد، و آن همان اعداد اوردینال این مجموعه‌هاست. آیـا با این دو تذکـر مسئله حل می‌شود؟ برای مقایسهٔ اندازهٔ X و Y، آیا کـافی است کـه هر یک را خوش ترتیب کنیم و سپس $\text{ord}\ X$ و $\text{ord}\ Y$ را مقایسه کنیم؟ پاسخ، به قاطعترین صورت، منفی است. مشکل این است که هر مجموعه را می‌توان به طرق متعددی، خـوش ترتیب کـرد. عـدد اوردینال یک مجموعهٔ خوش ترتیب، بیش از آنکه خود مجموعه را اندازه‌گیری کند، خوش ترتیبی آن را اندازه می‌گیرد. بـه عنوان یک مثال ملموس، مجموعـهٔ تمام اعـداد طبیعی، ω، را در نظـر بگیرید و با قرار دادن ۰ بعد از هر چیز دیگـر، یک ترتیب جدیـد عرضه کنید. (به عبارت دیگر، اگر n و m اعداد طبیعی غیرصفر باشند، آنها را بـه همان صورت معمول مرتب کنید، ولی اگر $n = 0$ و $m \neq 0$ در این صورت m را قبل از n قـرار دهید.) نتیجه یک خوش‌ترتیبی از ω است؛ عدد اوردینال این خوش ترتیبی، $\omega + 1$ است.

اگر X و Y مجموعه‌هایی خوش ترتیب باشند، آنگاه شرط لازم و کـافی برای اینکه $\text{ord}\ X < \text{ord}\ Y$، این است که X با یک پارهٔ آغازی از Y متشابه باشد. نتیجه می‌گیریم که حتی بدون اینکه چیزی دربارهٔ اعـداد اوردینال بدانیم، می‌تـوان انـدازهٔ اوردینالی دو مجموعهٔ خوش ترتیب را مقایسه کرد، تنها چیزی کـه باید بـدانیم مفهوم تشابه است. تشابه، برای مجموعه‌های مرتب تعریف شد؛ در مـورد مجموعـه‌های غیرمـرتب دلخواه، همتوانی مفهوم مرکزی است. (بـه خاطر بیاوریـد کـه دو مجموعـهٔ X و Y را همتوان می‌خوانیم، $X \sim Y$، در صورتی که یک تناظر یک بیک بین آنها وجود داشته باشد.) اگـر همتوانی را جانشین تشابـه کنیم، در این صورت از چیزی شبیه پیشنهاد بند قبل می‌تـوان استفاده کرد. نکته این است که اگر تنها مقایسهٔ اندازه‌ها مورد نظر بـاشد، لزومی ندارد کـه حتی معنای اندازه را بدانیم.

اگر X و Y دو مجموعه باشند به طوری کـه X با یک زیرمجموعهٔ Y همتوان باشد، خواهیم نوشت

$$X \precsim Y.$$

این نماد موقتی بوده و مستحق یک نـام دائمی نیست. ولـی تا وقتی که پابرجاست، مناسب است که راهی برای اشاره به آن داشته باشیم. یک راه معقول این است که بگوییم Y بر X مسلط است. مجموعهٔ تمام زوجهای مـرتب (X, Y) از زیرمجموعـه‌های مجموعـهٔ E، به طوری که $X \precsim Y$، تشکیل یک رابطه در مجموعـهٔ توانی E می‌دهـد. خودنماد، بعضی از خواص مفهومی را که نمایش می‌دهد بدرستی القا می‌کند. زیرا ایـن نماد یـادآور ترتیبهای جزئی است و از آنجا کـه یک ترتیب جزئی انعکـاسی، پادتقارنی و متعدی است، می‌توان انتظار داشت که تسلط نیز دارای خواص مشابهی باشد.

خواص انعکاس و تعدی، هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنند. چون هر مجموعـهٔ X با یک زیرمجموعه خود (یعنی X) همتوان است، نتیجه می‌شود کـه برای هر X، $X \precsim X$. هرگاه f یک تناظر یک بیک بین X و زیرمجموعـه‌ای از Y و g یک تناظر یک بیک بین Y و زیرمجموعه‌ای از Z باشد، آنگـاه می‌توان g را به بـرد f محدود کـرد و نتیجه را با f

ترکیب نمود. نتیجه این است که X با زیرمجموعه‌ای از Z همتوان است. به عبارت دیگر اگر $X \precsim Y$ و $Y \precsim Z$، آنگاه $X \precsim Z$.

سؤال مورد توجه، سؤال مربوط به خاصیت پادتقارنی است. اگر $X \precsim Y$ و $Y \precsim X$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $X = Y$؟ محال است؛ (چون) فرضهای ما در صورت همتوان بودن X و Y، صادق‌اند و لزومی ندارد که مجموعه‌های همتوان الزاماً مساوی باشند. در این صورت دربارهٔ دو مجموعه که فقط می‌دانیم هر یک با زیرمجموعه‌ای از دیگری همتوان است، چه می‌توان گفت؟ پاسخ در قضیهٔ مشهور و مهم زیر گنجانیده شده است.

قضیهٔ شرودر-برنشتاین. هرگاه $X \precsim Y$ و $Y \precsim X$، آنگاه $X \sim Y$.

تذکر. توجه کنید، عکس قضیه، که ضمناً صورت تقویت شده‌ای از خاصیت انعکاسی است، بسادگی از تعریف تسلط نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید f یک نگاشت یک بیک از X به Y و g یک نگاشت یک بیک از Y به X باشد. مسئله، ساختن یک تناظر یک بیک بین X و Y است. مناسب است فرض کنیم که مجموعه‌های X و Y دارای هیچ عضو مشترکی نیستند. اگر چنین فرضی صادق نباشد، می‌توان به سادگی و بدون اینکه این فرض اضافی از کلیت مسئله بکاهد، آن را برقرار ساخت.

عضو x از X را پدر عضو $f(x)$ در Y و همچنین عضو y از Y را پدر $g(y)$ در X خواهیم خواند. هر عضو x از X دارای دنباله‌ای نامتناهی از اخلاف خود، یعنی $f(x)$، $g(f(x))$، $f(g(f(x)))$، و غیره است و به همین ترتیب اخلاف عضو y از Y، $g(y)$، $f(g(y))$، $g(f(g(y)))$، و غیره است. از این تعریف نتیجه می‌شود که هر عضو دنباله، از اخلاف هر یک از اعضای قبل از خود است؛ همچنین خواهیم گفت که هر عضو دنباله، یکی از اسلاف هر یک از اعضای بعد از خود است.

برای هر عضو (در X یا در Y) یکی از سه حالت زیر باید رخ دهد. اگر به پیگیری اسلاف یک عضو تا حد امکان ادامه دهیم، در این صورت یا در نهایت به عضوی از X خواهیم رسید که فاقد پدر است (این یتیم‌ها، درست همان اعضای $X - g(Y)$ هستند)، یا سرانجام به عضوی بدون پدر از Y خواهیم رسید ($(Y - f(X))$) و یا سلسلهٔ اسلاف الی‌غیرالنهایه ادامه می‌یابد. فرض کنید X_X مجموعهٔ تمام اعضایی از X باشد که در خود X تولید شده‌اند (یعنی، X_X متشکل از اعضای $X - g(Y)$ و تمامی اخلاف این اعضا در X است). همچنین فرض کنید X_Y مجموعهٔ تمام اعضایی از X باشد که در Y تولید شده‌اند (یعنی، X_Y متشکل از تمامی اخلاف اعضای $Y - f(X)$ در X است)، و بالاخره فرض کنید X_∞ مجموعهٔ تمام اعضایی از X باشد که هیچیک از اسلافشان بی‌پدر نیست. همچنین، Y را هم به سه مجموعهٔ Y_X، Y_Y، و Y_∞ تفکیک می‌کنیم.

هرگاه $x \in X_X$، آنگاه $f(x) \in Y_X$، و در واقع تحدیـد f به X_X یک تناظر یک یک بین X_X و Y_X است. هرگـاه $x \in X_Y$، آنگـاه x به قلمرو تـابع معکوس g^{-1} متعلق بوده و $g^{-1}(x) \in Y_Y$؛ در واقع تحدید g^{-1} بـه X_Y یک تناظر یک یک بین X_Y و Y_Y است. و بالاخره، هرگاه $x \in X_\infty$، آنگـاه $f(x) \in Y_\infty$، و تحدید f بـه X_∞ یک تناظر یک یک بین X_∞ و Y_∞ است؛ به بیانی دیگر، هرگاه $x \in X_\infty$، آنگـاه $g^{-1}(x) \in Y_\infty$، و تحدید g^{-1} بـه X_∞، یک تناظـر یک به یک بین X_∞ و Y_∞ است. از بـه هم پیوستن این سه تناظر یک یک، به تناظری یک یک بین X و Y دست می‌یابیم.

تمرین. فرض کنید f نگاشتی از X به Y و g نگاشتی از Y بـه X باشد. ثابت کنید زیر مجموعه‌های A و B، بترتیب، از X و Y وجود دارند به طوری که $f(A) = B$ و $g(Y - B) = X - A$. از این نتیجه می‌توان بـرای ارائهٔ اثباتـی از قضیهٔ شرودر-برنشتاین که با اثبات فوق کاملاً متفاوت به نظر می‌رسد، استفاده کرد.

اکنون می‌دانیم که تسلط، دارای خواص اساسی یک ترتیب جـزئی است؛ این بحث مقدماتی را بـا توجه دادن به این نکته که این ترتیب، در واقـع، تام است خاتمه می‌بخشیم. این حکم که به قضیهٔ مقایسه‌پذیری مجموعه‌ها معروف است، مدعی است که اگر X و Y دو مجموعه بـاشند، آنگـاه یـا $X \precsim Y$ و یا $Y \precsim X$. اثبات این حکم، نتیجـهٔ مستقیم قضیهٔ خوش ترتیبی و قضیهٔ مقایسه‌پذیری مجموعـه‌های خوش ترتیب است. هـر دوی X و Y را خوش ترتیب کنید و از این امر که این مجموعه‌های خوش ترتیب یا با هم متشابه‌انـد و یا یکی بـا یک پارهٔ آغازی از دیگـری متشابـه است، استفاده کنید. در حالت اول X و Y همتوان‌اند، و در حالت دوم یکی از آن دو با زیرمجموعه‌ای از دیگری همتوان است.

بخش ۲۳
مجموعه‌های شمارش‌پذیر

هرگاه X و Y دو مجموعه باشند به طوری که هر یک بر دیگری مسلط باشد، آنگاه می‌توان از قضیهٔ شرودر-برنشتاین استفاده کرد و نتیجه گرفت که X با Y همتوان است. اگر Y بر X مسلط باشد ولی X بر Y مسلط نبوده ونتیجتاً با Y همتوان نباشد، خواهیم نوشت:

$$X < Y$$

و می‌گوییم Y اکیداً بر X مسلط است.

با استفاده از تسلط و تسلط اکید، می‌توان برخی از احکام را در مورد مجموعه‌های متناهی و نامتناهی به صورت شسته و رفته بیان کرد. به خاطر بیاورید که مجموعهٔ X را متناهی می‌گوییم هرگاه با یک عدد طبیعی همتوان باشد و در غیر این صورت آن را نامتناهی می‌خوانیم. می‌دانیم هرگاه $X \lesssim Y$ و Y متناهی باشد، X نیز متناهی است، و می‌دانیم ω نامتناهی است (بخش ۱۳)؛ همچنین می‌دانیم هرگاه X نامتناهی باشد، آنگاه $\omega \lesssim X$ (بخش ۱۵). عکس حکم اخیر نیز صادق است و آن را می‌توان یا مستقیماً (با استفاده از این موضوع که یک مجموعهٔ متناهی نمی‌تواند با یک زیرمجموعهٔ حقیقی خود همتوان باشد) و یا به عنوان کاربردی از قضیهٔ شرودر-برنشتاین ثابت کرد. (اگر $\omega \lesssim X$، در این صورت وجود یک عدد طبیعی n به طوری که $n \sim X$، غیرممکن است، زیرا در این صورت باید داشته باشیم $\omega \lesssim n$ و این امر با نامتناهی بودن ω تناقض دارد.)

هم اکنون دیدیم که مجموعهٔ X نامتناهی است اگر و فقط اگر $\omega \lesssim X$؛ حال ثابت می‌کنیم که X متناهی است اگر و فقط اگر $X < \omega$. اثبات متکی به متعدی بودن تسلط اکید است: هرگاه $X \lesssim Y$ و $Y \lesssim Z$ و حداقل یکی از تسلطها اکید باشد، آنگاه $X < Z$. در واقع واضح است که $X \lesssim Z$. اگر $Z \lesssim X$ برقرار می‌بود، آنگاه باید $Y \lesssim X$ و $Z \lesssim Y$، و نتیجتاً (طبق قضیهٔ شرودر-برنشتاین) $X \sim Y$ و $Y \sim Z$ نیز برقرار می‌بودند که با فرض سلطهٔ اکید تناقض دارد. حال اگر X متناهی باشد، آنگاه برای یک عدد طبیعی n، $n \sim X$ و چون ω نامتناهی است، $n < \omega$ و بنابراین $X < \omega$. بعکس، اگر

$\omega < X$، در این صورت X باید متناهی باشد چون در غیر این صورت باید داشته باشیم $X \lesssim \omega$، و در نتیجه $\omega < \omega$، که ناشدنی است.

مجموعهٔ X، شمارش‌پذیر (یا شمردنی) خوانده می‌شود، در صورتی که $X \lesssim \omega$ و شمارش‌پذیر نامتناهی خوانده می‌شود در صورتی که $X \sim \omega$. واضح است که مجموعهٔ شمارش‌پذیر، یا متناهی است و یا شمارش‌پذیر نامتناهی. هدف اصلی ما در دنبالهٔ بحث، این است که نشان دهیم بسیاری از ساختارهای مجموعه‌ای، هنگام اعمال به مجموعه‌های شمارش‌پذیر، مجدداً به مجموعه‌های شمارش‌پذیر منتهی می‌شوند.

بحث را با توجه به این نکته که هر زیرمجموعهٔ ω شمارش‌پذیر است، شروع می‌کنیم و با استنتاج این مطلب که هر زیرمجموعه از هر مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است، ادامه می‌دهیم. این واقعیتها در عین سادگی مفیدند.

اگر f تابعی از ω بروی مجموعهٔ X باشد، آنگاه X شمارش‌پذیر است. برای اثبات، توجه کنید که برای هر x در X مجموعهٔ $f^{-1}(\{x\})$ غیرتهی بوده (این جایی است که خصیصهٔ پوششی (برو) بودن f مهم است) و نتیجتاً برای هر x در X می‌توان عدد طبیعی $g(x)$ را یافت به طوری که $f(g(x)) = x$. چون تابع g یک نگاشت یک بیک از X به ω است، ثابت می‌شود که $X \lesssim \omega$. خواننده‌ای که در بند چنین مسائلی است ممکن است متوجه شده باشد که در این اثبات از اصل موضوع انتخاب بهره جسته‌ایم و شاید مایل باشد بداند که آیا اثبات دیگری که متکی به این اصل موضوع نباشد، وجود دارد. (بلی، وجود دارد.) در چند مورد معدود دیگر، در این فصل و فصلهای بعد همین توضیح را می‌توان داد ولی ما از این کار خودداری خواهیم کرد.

از پاراگراف قبل چنین نتیجه می‌شود که مجموعهٔ X شمارش‌پذیر است اگر و فقط اگر تابعی از یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر بروی X، وجود داشته باشد. یک نتیجهٔ تقریباً مشابه دیگر این است: اگر Y مجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی خاصی باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه مجموعهٔ غیرتهی X شمارش‌پذیر باشد این است که یک تابع از Y بروی X وجود داشته باشد.

نگاشت $n \to 2n$ یک تناظر یک بیک بین ω و مجموعهٔ A، متشکل از تمام اعداد زوج، می‌باشد، بنابراین A شمارش‌پذیر نامتناهی است. از اینجا نتیجه می‌شود که هرگاه X یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه یک تابع f وجود دارد که A را بروی X می‌نگارد. به طور مشابه چون نگاشت $n \to 2n + 1$ یک تناظر یک بیک بین ω و مجموعهٔ B، متشکل از تمام اعداد فرد است، نتیجه می‌شود که هرگاه Y یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر باشد، آنگاه تابع g وجود دارد که B را بروی Y می‌نگارد. تابع h که در A با f و در B با g مطابقت دارد (یعنی $h(x) = f(x)$، وقتی که $x \in A$؛ و $h(x) = g(x)$، وقتی که $x \in B$)، ω را بروی $X \cup Y$ می‌نگارد. نتیجه: اجتماع دو مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است. از اینجا به بعد با یک استدلال ساده، به کمک استقرای ریاضی، ثابت می‌شود که اجتماع یک مجموعهٔ متناهی از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است. همین نتیجه را می‌توان با پیروی از شگردی که در مورد دو مجموعه مؤثر بود به دست آورد،

اساس روش متکی براین است که برای هر عـدد طبیعی غیرصفر n، یک خانـوادهٔ دو بدو مجزای $\{A_i\}$ $(i < n)$ از زیرمجموعه‌های نامتناهی ω وجود دارد کـه اجتماع آنها مساوی ω است.

همین روش برای اثبات بیش از این نیز قابل استفاده است. حکم: یک خانوادهٔ دو ـ بدو مجزای $\{A_n\}$ $(n \in \omega)$ از زیرمجموعـه‌های نـامتناهی ω وجود دارد کـه اجتماع آنها مساوی ω است. یک راه اثبات این مطلب، این است کـه اعضای ω را روی قطرهای یک جدول نامتناهی از بالا به پایین بنویسیم، بدین صورت:

۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	...
۲	۴	۷	۱۱	۱۶	...	
۵	۸	۱۲	۱۷	...		
۹	۱۳	۱۸	...			
۱۴	۱۹	...				
۲۰	...					
...						

و سپس دنبالهٔ متشکل از سطرهای این جـدول را در نظر بگیریم. راه دیگـر این است کـه فرض کنیم A_0 متشکل از ۰ و اعداد فرد است، A_1 مجموعه‌ای است کـه از دو برابر کردن اعضای ناصفر A_0 تشکیل می‌شود و به طریق استقرا A_{n+1} مجموعه‌ای است که از دو برابر کردن اعضای A_n، $n \geqq 1$، به دست می‌آید. در هر دو راه (و طرق متعدد دیگری که عـلاوه بر آنها وجود دارد) جزئیات اثبات بسیار ساده‌اند. نتیجه: اجتماع یک خانوادهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پـذیر، شمارش‌پـذیر است، اثبات: بـرای خانـوادهٔ مفروض $\{X_n\}$ $(n \in \omega)$ از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، خانوادهٔ $\{f_n\}$ از توابع را پیدا کنید به طوری کـه برای هر n، تابع f_n، A_n را بروی X_n بنگارد و تابع f از ω بروی $\bigcup_n X_n$ را بـا قرار دادن $f(k) = f_n(k)$، هرگاه $k \in A_n$، تعریف کنید. از تلفیق این نتیجه با نتیجهٔ پاراگراف قبل نتیجه می‌گیریم کـه اجتماع یک مجموعـهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌هـای شمارش‌پذیر، همواره شمارش‌پذیر است.

یک نتیجـهٔ جالب و مفید (دیگـر) این است کـه حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعـهٔ شمارش‌پذیر هم شمارش‌پذیر است. چون

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} (X \times \{y\})$$

و نیز چون اگر X شمارش‌پذیر باشد، آنگـاه برای هر y معین در Y، مجموعـهٔ $X \times \{y\}$ بوضوح شمارش‌پذیر است (از تناظر یک بیک $(x, y) \rightarrow x$ استفاده کنید)، نتیجهٔ مـورد نظر، از پاراگراف قبل حاصل می‌شود.

تمرین. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است. ثابت کنید که اگـر هر زیرمجموعهٔ شمارش‌پـذیر از مجموعـهٔ تماماً مرتب X خوش ترتیب باشد، آنگاه خود X خوش ترتیب است.

بر مبنای بحث قبل، این حدس که همهٔ مجموعه‌ها شمارش‌پذیرند، نامعقول نیست. نشان خواهیم داد که چنین نیست، این نتیجهٔ سالبه، چیزی است که نظریهٔ اعداد کاردینال را جالب توجه می‌کند.

قضیهٔ کانتور[1]. هر مجموعه، اکیداً زیر تسلط مجموعهٔ توانی خود است، یا به عبارت دیگر برای هر X،

$$X < \mathcal{P}(X).$$

اثبات. یک نگاشت یک بیک طبیعی از X به $\mathcal{P}(X)$ وجود دارد، یعنی نگاشتی که به هر عضو x از X، مجموعهٔ تک عضوی $\{x\}$ را نسبت می‌دهد، وجود این نگاشت ثابت می‌کند که $X \precsim \mathcal{P}(X)$؛ باقی می‌ماند اثبات اینکه X با $\mathcal{P}(X)$ همتوان نیست.

فرض کنید f یک نگاشت یک بیک از X بروی $\mathcal{P}(X)$ باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که این فرض منتهی به تناقض می‌شود. قرار دهید $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$؛ در قالب الفاظ، A متشکل از همهٔ آن اعضایی از X است که عضو مجموعهٔ متناظر خود نیستند. چون $A \in \mathcal{P}(X)$ و f، X را بروی $\mathcal{P}(X)$ می‌نگارد، عضوی چون a در X وجود دارد به طوری که $A = f(a)$. عضو a یا متعلق به مجموعهٔ A است و یا نیست. اگر $a \in A$، آنگاه طبق تعریف A باید داشته باشیم $a \notin f(a)$ و چون $f(a) = A$، این امر محال است، اگر $a \notin A$ مجدداً طبق تعریف A باید داشته باشیم $a \in f(a)$، و این نیز محال است. بنابراین تناقض مطلوب پیدا شده و اثبات قضیهٔ کانتور کامل است.

چون $\mathcal{P}(X)$ همواره با ۲^X همتوان است (۲^X مجموعهٔ تمام توابع از X بتوی ۲ است)، قضیهٔ کانتور نتیجه می‌دهد که برای هر X، $X < ۲^X$. اگر بخصوص ω را در نقش X قرار دهیم، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعهٔ تمام مجموعه‌های اعداد طبیعی، شمارش‌ناپذیر است (شمارش‌پذیر نیست، شمردنی نیست) و یا به عبارت معادل ۲^ω شمارش‌ناپذیر است. در اینجا ۲^ω، مجموعهٔ تمام دنباله‌های نامتناهی متشکل از ۰ و ۱ (یعنی توابعی از ω به ۲) است. توجه کنید که اگر ۲^ω را به مفهوم به توان رساندن اوردینالی تعبیر کنیم، آنگاه ۲^ω شمارش‌پذیر خواهد بود (در واقع $\omega = ۲^\omega$).

---

1. Cantor

بخش ۲۴

حساب کاردینالها

یکی از نتایج مطالعهٔ ما دربارهٔ اندازهٔ مجموعه‌ها در مقایسه با یکدیگر، این است که مفهوم جدیدی به نام عدد کاردینال را تعریف کنیم و به هر مجموعهٔ X، یک عدد کاردینال، که با $\operatorname{card} X$ نمایش داده می‌شود، نسبت دهیم. تعاریف چنان است که برای هر عدد کاردینال a، مجموعه‌هایی چون A وجود دارند به طوری که $\operatorname{card} A = a$. همچنین یک ترتیب در اعداد کاردینال تعریف می‌کنیم که طبق معمول با $\leqq$ نمایش داده می‌شود. ارتباط این مفاهیم جدید را با مفاهیمی که از قبل در دست داشتیم بآسانی می‌توان بیان کرد: معلوم خواهد شد $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ اگر و فقط اگر $X \sim Y$، و $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ اگر و فقط اگر $X < Y$. (اگر a و b اعداد کاردینال باشند، $a < b$ قطعاً به معنی $a \leqq b$ ولی $a \neq b$ است.)

به تعریف عدد کاردینال، از چند طریق می‌توان راه یافت که هر طریق دارای طرفداران سرسختی است. برای اینکه آرامش را هرچه بیشتر حفظ کنیم و نیز نشان دهیم که خواص اساسی مفهوم، مستقل از نحوهٔ رهیافت (به تعریف) می‌باشد، ساختمان اصلی را به تعویق می‌اندازیم و در عوض، به مطالعهٔ حساب کاردینالها می‌پردازیم. در طول مطالعه، از رابطهٔ بین نامساوی کاردینالی و تسلط مجموعه‌ها که در بالا توصیف شد، سود خواهیم جست. همین مقدار وام از آینده، برای نیل به هدف کافی خواهد بود.

هرگاه a و b دو عدد کاردینال و A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند به قسمی که $\operatorname{card} A = a$ و $\operatorname{card} B = b$ طبق تعریف قرار می‌دهیم $a + b = \operatorname{card}(A \cup B)$. هرگاه C و D دو مجموعهٔ مجزا باشند به قسمی که $\operatorname{card} C = a$ و $\operatorname{card} D = b$، آنگاه $A \sim C$ و $B \sim D$؛ نتیجه می‌گیریم که $A \cup B \sim C \cup D$، و بنابراین $a + b$ بدون ابهام و مستقل از انتخاب دلخواه A و B تعریف می‌شود. جمع کاردینالی، که چنین تعریف شد، جابجایی ($a + b = b + a$) و شرکت‌پذیر ($a + (b + c) = (a + b) + c$) است، این اتحادها نتایج مستقیم روابط متناظر خود دربارهٔ تشکیل اجتماع هستند.

تمرین. ثابت کنید هرگاه a، b، c، و d اعداد کاردینال باشند به طوری که $a \leqq b$ و $c \leqq d$، آنگاه $a + c \leqq b + d$.

عمل جمع را می‌توان برای تعدادی نامتناهی از عوامل بدون هیچ اشکالی تعریف کرد. هرگاه $\{a_i\}$ خانواده‌ای از اعداد کاردینال و $\{A_i\}$ یک خانوادهٔ دو بدو مجزا از مجموعه‌ها باشد که متناظراً اندیس‌گذاری شده‌اند، به طوری که برای هر i، $\text{card } A_i = a_i$، آنگاه، طبق تعریف، قرار می‌دهیم

$$\sum_i a_i = \text{card } (\bigcup_i A_i).$$

تعریف، همچون قبل، ابهام ندارد.

برای تعریف ab، حاصل‌ضرب دو عدد کاردینال a و b، مجموعه‌های A و B را پیدا می‌کنیم به قسمی که $\text{card } A = a$ و $\text{card } B = b$ و قرار می‌دهیم $ab = \text{card } (A \times B)$. جایگزین کردن A و B با مجموعه‌هایی همتوان، به همان حاصل‌ضرب منجر خواهد شد. همچنین می‌توانستیم ab را به عنوان «اضافه نمودن a به خودش، b مرتبه» تعریف کنیم که این با تشکیل حاصل‌جمع نامتناهی $\sum_{i \in I} a_i$، که در آن مجموعهٔ اندیس I دارای عدد کاردینال b است و برای هر i در I، $a_i = a$، مرتبط می‌شود. خواننده باید بتواند معادل بودن این تعریف را با تعریفی که با استفاده از حاصل‌ضرب دکارتی به دست آمد، بدون هیچ مشکلی تحقیق کند. ضرب کاردینالی جابجایی $(ab = ba)$ و شرکت‌پذیر $(a(bc) = (ab)c)$ است، و ضرب بروی جمع پخشی است $(a(b + c) = ab + ac)$؛ اثبات این روابط بسیار ساده است.

تمرین. ثابت کنید که هرگاه a، b، c، و d اعداد کاردینال باشند به طوری که $a \leqq b$ و $c \leqq d$، آنگاه $ac \leqq bd$.

عمل ضرب را می‌توان برای تعدادی نامتناهی عامل، بدون هیچ اشکالی تعریف کرد. هرگاه $\{a_i\}$ خانواده‌ای از اعداد کاردینال و $\{A_i\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد که متناظراً اندیس‌گذاری شده‌اند، به طوری که برای هر i، $\text{card } A_i = a_i$ آنگاه طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$\prod_i a_i = \text{card } (\mathsf{X}_i A_i).$$

تعریف، ابهام ندارد.

تمرین. هرگاه $\{a_i\}$ $(i \in I)$ و $\{b_i\}$ $(i \in I)$ خانواده‌هایی از اعداد کاردینال باشند به طوری که برای هر i در I، $a_i < b_i$ آنگاه $\sum_i a_i < \prod_i b_i$.

به همان طریقی که از جمع به ضرب رسیدیم می‌توان از ضرب به توان رسید. سودمندترین روش برای تعریف a^b برای اعداد کاردینال a و b، تعریف مستقیم این مفهوم

است، ولی در یک رهیافت دیگر از تکرار ضرب استفاده می‌شود. برای تعریف مستقیم، مجموعه‌های A و B را پیدا می‌کنیم به قسمی که $\operatorname{card} A = a$ و $\operatorname{card} B = b$ و قرار می‌دهیم $a^b = \operatorname{card} A^B$. در روش دیگر، برای تعریف a^b، «a را b مرتبه در خودش ضرب می‌کنیم». به عبارت دقیقتر $\prod_{i\in I} a_i$ را که در آن مجموعهٔ اندیس I دارای عدد کاردینال b است و برای هر i در I، $a_i = a$، تشکیل می‌دهیم. قوانین آشنای توان برقرارند. یعنی اگر a، b، و c اعداد کاردینال باشند، آنگاه

$$a^{b+c} = a^b a^c,$$
$$(ab)^c = a^c b^c,$$
$$a^{bc} = (a^b)^c.$$

تمرین. ثابت کنید که هرگاه a، b، و c اعداد کاردینال باشند به طوری که $a \leqq b$، آنگاه $a^c \leqq b^c$. ثابت کنید که هرگاه a و b متناهی و بزرگتر از ۱ و c نامتناهی باشد، آنگاه $a^c = b^c$.

تعاریف قبلی و نتایج آنها، نسبتاً آسان‌اند و به هیچ‌وجه اعجاب‌انگیز نیستند. اگر آنها را فقط به مجموعه‌های متناهی محدود کنیم، نتیجه همان حساب متناهی متعارف خواهد بود. تازگی موضوع در تشکیل حاصل‌جمعها، حاصل‌ضربها، و توانهایی است که حداقل یکی از اجزای آنها نامتناهی است. در اینجا کلمات «متناهی» و «نامتناهی» به مفهومی کاملاً طبیعی به کار می‌روند: هر عدد کاردینال، متناهی است هرگاه عدد کاردینال یک مجموعهٔ متناهی باشد و در غیر این صورت، نامتناهی است.

اگر a و b اعداد کاردینال باشند، به طوری که a متناهی و b نامتناهی باشد، آنگاه

$$a + b = b.$$

برای اثبات، فرض کنید A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند به طوری که A با عدد طبیعی k همتوان و B نامتناهی باشد؛ باید ثابت کنیم که $A \cup B \sim B$. چون $\omega \lesssim B$، می‌توان فرض کرد (و فرض می‌کنیم) که $\omega \subset B$. نگاشت f از $A \cup B$ به B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: تحدید f به A یک تناظر یک بیک بین A و k است، تحدید f به ω توسط $f(n) = n + k$، برای هر n، داده می‌شود، و تحدید f به $B - \omega$ نگاشت همانی روی $B - \omega$ است. چون نتیجه یک تناظر یک بیک بین $A \cup B$ و B است، اثبات کامل است.

نکتهٔ بعدی: اگر a یک عدد کاردینال نامتناهی باشد، آنگاه

$$a + a = a.$$

برای اثبات، فرض کنید A مجموعه‌ای باشد به طوری که $\operatorname{card} A = a$. چون $A \times ۲$، اجتماع دو مجموعهٔ مجزای همتوان با A (یعنی $A \times \{۰\}$ و $A \times \{۱\}$) است، کافی است ثابت کنیم که $A \times ۲$ با A همتوان است. با رهیافتی که خواهیم داشت، همهٔ این مطلب کاملاً ثابت نخواهد شد ولی به اندازهٔ کافی به مطلب نزدیک خواهیم شد. خط مشی ما

این است که با استفاده از زیرمجموعه‌های بزرگ و بزرگتر از A، تدریجاً به ساختن تناظر یک بیک مورد نظر، نزدیک شویم.

به بیان دقیق، فرض کنید $\mathcal{F}$ دستهٔ تمام توابعی چون f باشد به طوری که قلمرو f به ازای زیرمجموعهٔ X از A به شکل $X \times ۲$ بوده و نیز f یک تناظر یک بیک بین $X \times ۲$ و X باشد. اگر X یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی از A باشد، آنگاه $X \times ۲ \sim X$. یعنی دستهٔ $\mathcal{F}$ غیرتهی است و دست‌کم تناظرهای یک بیک بین $X \times ۲$ و X را برای زیرمجموعه‌های شمارش‌پذیر نامتناهی X از A، شامل است. دستهٔ $\mathcal{F}$، توسط رابطهٔ گسترش، جزئاً مرتب می‌گردد. چون با یک تحقیق ساده معلوم می‌شود که فرض لم-تسورن برقرار است، نتیجه می‌گیریم که f شامل یک عضو بیشین چون f است به قسمی که $\operatorname{ran} f = X$.

حکم: $A - X$ متناهی است. اگر $A - X$ نامتناهی باشد، آنگاه باید شامل یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی چون Y باشد. با تلفیق f با یک تناظر یک بیک بین $Y \times ۲$ و Y می‌توان یک گسترش مناسب از f به دست آورد که با فرض بیشین بودن f در تناقض است.

چون

$$\operatorname{card} X + \operatorname{card} X = \operatorname{card} X$$

و چون

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} X + \operatorname{card} (A - X),$$

متناهی بودن $A - X$ اثبات $\operatorname{card} A + \operatorname{card} A = \operatorname{card} A$ را کامل می‌کند.

اکنون به یک نتیجهٔ دیگر در حساب جمعی کاردینالها می‌پردازیم: هرگاه a و b دو عدد کاردینال باشند که حداقل یکی از آنها نامتناهی و c مساوی بزرگترین a و b باشد، آنگاه

$$a + b = c.$$

فرض کنید b نامتناهی باشد و A و B دو مجموعهٔ مجزا باشند به قسمی که $\operatorname{card} A = a$ و $\operatorname{card} B = b$. چون $a \leqq c$ و $b \leqq c$، نتیجه می‌شود که $a + b \leqq c + c$ و چون $c \leqq \operatorname{card} (A \cup B)$ نتیجه می‌شود که $c \leqq a + b$. نتیجه از پادمتقارن بودن ترتیب اعداد کاردینال، حاصل می‌شود.

نتیجهٔ اصلی حساب ضربی اعداد کاردینال این است که هرگاه a یک عدد کاردینال نامتناهی باشد، آنگاه

$$a \cdot a = a.$$

اثبات، شبیه اثبات همین رابطه در مورد جمع است. فرض کنید $\mathcal{F}$ دستهٔ تمام توابعی چون f باشد به طوری که قلمرو f به شکل $X \times X$، برای زیرمجموعهٔ X از A بوده و همین f یک تناظر یک بیک بین $X \times X$ و X باشد. هرگاه X یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی از A باشد، آنگاه $X \times X \sim X$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که دستهٔ $\mathcal{F}$ غیرتهی است و حداقل تناظرهای یک بیک بین $X \times X$ و X را، برای زیرمجموعه‌های شمارش-

پذیر نــامتناهی X از A، شامل است. دستهٔ $\mathcal{F}$ توسط رابطهٔ گسترش، جزئاً مرتب می‌گــردد. فرضهای لم تسورن را می‌توان بسهولت تحقیق کرد و نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{F}$ شامل یک عضو بیشین f است به قسمی که $\operatorname{ran} f = X$. چون $(\operatorname{card} X)(\operatorname{card} X) = \operatorname{card} X$، برای تکمیل اثبات، باید ثابت کرد که $\operatorname{card} X = \operatorname{card} A$.

فرض کنید $\operatorname{card} X < \operatorname{card} A$. چــون $\operatorname{card} A$ برابــر بــا بزرگترین $\operatorname{card} X$ و $\operatorname{card}(A - X)$ است نتیجــه مــی‌شود کــــــه $\operatorname{card} A = \operatorname{card}(A - X)$، و نتیجتاً $\operatorname{card} X < \operatorname{card}(A - X)$. از این، نتیجه می‌شود کــه $A - X$ یک زیرمجموعــهٔ Y دارد که با X همتوان است. چون هــر یک از مجموعــه‌های مجزای $X \times Y$، $Y \times X$، و $Y \times Y$ نامتناهی است و با $X \times X$ و نتیجتاً با X و در نتیجه بــا Y همتوان است، نتیجه می‌شود که اجتماع آنها با Y همتوان است. بــا تلفیق f بــا یک تناظر یک بیک بین این اجتماع و Y، یک گسترش حقیقی از f به دست می‌آید کــه با فرض بیشین بودن f تناقض دارد. این مطلب نتیجه می‌دهد که فرض فعلی ما ($\operatorname{card} X < \operatorname{card} A$) درست نیست، و در نتیجه اثبات کامل است.

تمرین. ثابت کنید کــه هرگاه a و b دو عــدد کاردینال بــاشند و حداقل یکــی از آنها نامتناهی باشد، آنگاه $a + b = ab$. ثابت کنید کــه هرگــاه a و b دو عــدد کاردینال باشند به طوری که a نامتناهی و b متناهی باشد، آنگاه $a^b = a$.

بخش ۲۵

اعداد کاردینال

تا اینجا مطالب نسبتاً زیادی دربارهٔ اعداد کاردینال می‌دانیم، ولی هنوز چیزی دربارهٔ ماهیت این اعداد نمی‌دانیم. به صورت غیردقیق، می‌توان گفت که کاردینال هر مجموعه، خاصیتی است که میان آن مجموعه و تمام مجموعه‌های همتوان با آن مشترک است. اگر بخواهیم این عبارت را وضوح بیشتر بدهیم، می‌توانیم بگوییم که کاردینال X مساوی مجموعهٔ تمام مجموعه‌های همتوان با X است، ولی چنین کوششی به شکست می‌انجامد، چون مجموعه‌ای به این بزرگی وجود ندارد. راه حل بعدی که شایستهٔ امتحان است، و از رهیافت مشابهی که برای تعریف اعداد طبیعی داشتیم به ذهن راه می‌یابد، این است که کاردینال X را یکی از مجموعه‌های همتوان با X، که با دقت و احتیاط انتخاب شده، تعریف کنیم. این همان کاری است که انجام خواهیم داد.

برای هر مجموعهٔ X، تعداد بسیار زیادی مجموعه وجود دارد که با X همتوان می‌باشند، اولین مشکل ما تحدید این حوزه است. از آنجا که می‌دانیم هر مجموعه با حداقل یک عدد اوردینال همتوان است، غیرطبیعی نخواهد بود اگر سراغ مجموعهٔ همتوان مطلوب را در بین اعداد اوردینال بگیریم.

مسلماً، هر مجموعه می‌تواند با تعداد زیادی از اعداد اوردینال همتوان باشد. ولی یک نشانهٔ امیدوار کننده این است که برای هر مجموعهٔ X، اعداد اوردینال همتوان با X تشکیل یک مجموعه می‌دهند. برای اثبات این موضوع، ابتدا، توجه کنید که بسهولت می‌توان عدد اوردینالی ساخت که مطمئناً از همهٔ اعداد اوردینال همتوان با X بزرگتر، و در واقع اکیداً بزرگتر، باشد. فرض کنید γ عدد اوردینالی همتوان با مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ باشد. هرگاه α یک عدد اوردینال همتوان با X باشد مجموعهٔ α، اکیداً زیر تسلط γ است (یعنی $\operatorname{card} \alpha < \operatorname{card} \gamma$). از اینجا معلوم می‌شود که ممکن نیست رابطهٔ $\gamma \leqq \alpha$ برقرار باشد، و نتیجتاً باید داشته باشیم $\alpha < \gamma$. حال، چون در اعداد اوردینال، $\alpha < \gamma$ به همان مفهوم $\alpha \in \gamma$ است، پس ما توانسته‌ایم مجموعه‌ای پیدا کنیم (γ) که شامل همهٔ اوردینالهای

همتوان با X است. و این بدان معنی است که اعداد اوردینال همتوان با X تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

کدامیک از اعداد اوردینال همتوان با X شایستگی آن را دارد که از بقیهٔ این اعداد متمایز شود و عدد کاردینال X خوانده شود؟

این سؤال تنها یک پاسخ طبیعی دارد. هر مجموعه از اعداد اوردینال، مجموعه‌ای خوش ترتیب است. به نظر می‌رسد که کوچکترین عضو این مجموعهٔ خوش ترتیب، تنها عضوی است که شایستهٔ توجه خاص است.

اکنون برای ارائهٔ تعریف آماده‌ایم: عدد کاردینال، عدد اوردینالی است مانند α، به طوری که هرگاه β اوردینالی همتوان با α باشد $(\operatorname{card} \alpha = \operatorname{card} \beta)$ آنگاه $\alpha \leqq \beta$. اعداد اوردینالی را که دارای این خاصیت باشند، اعداد آغازی نیز می‌نامند. اگر X یک مجموعه باشد، در این صورت کاردینال X (که توان X نیز نامیده می‌شود)، کوچکترین عدد اوردینال همتوان با X است.

تمرین. ثابت کنید، هر عدد کاردینال نامتناهی یک عدد حدی است.

چون هر مجموعه با کاردینال خود همتوان است، نتیجه می‌شود که هرگاه $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ آنگاه $X \sim Y$. بعکس، هرگاه $X \sim Y$، آنگاه $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$. زیرا، از آنجا که $\operatorname{card} X$ کوچکترین عدد اوردینال همتوان با X است، نتیجه می‌شود $\operatorname{card} X \leqq \operatorname{card} Y$. و از تقارن موقعیت نسبت به X و Y نتیجه می‌شود که رابطهٔ $\operatorname{card} Y \leqq \operatorname{card} X$ نیز برقرار است. به عبارت دیگر $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ اگر و فقط اگر $X \sim Y$. و این یکی از شرایطی است که ما در مورد اعداد کاردینال لازم داشتیم تا بتوانیم حساب کاردینالها را بسازیم.

یک عدد اوردینال متناهی (یک عدد طبیعی)، با هیچ عدد اوردینال متناهی، غیر از خودش همتوان نیست. از این، نتیجه می‌شود که هرگاه X یک مجموعهٔ متناهی باشد، آنگاه اعداد اوردینال همتوان با X یک مجموعهٔ تک عضوی تشکیل می‌دهند و نتیجتاً عدد کاردینال X همان عدد اوردینال X است. مفهوم اعداد کاردینال و اوردینال، هر دو تعمیمی از اعداد طبیعی هستند و در حالت آشنای متناهی، هر دو تعمیم بر هم و بر حالت خاصی که ابتدائاً منشأ وجود آنها بوده است، منطبق می‌شوند. اکنون به عنوان یک کاربرد سادهٔ این توضیحات، می‌توانیم کاردینال مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(X)$ را محاسبه کنیم: هرگاه $\operatorname{card} A = a$ باشد، آنگاه $\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = ۲^a$. اثبات مستقیماً از همتوان بودن ۲^A و $\mathcal{P}(A)$ نتیجه می‌شود. (توجه کنید که این نتیجه را، در عین سادگی، تاکنون نمی‌توانستیم ثابت کنیم، چون نمی‌دانستیم که ۲ یک عدد کاردینال است.)

اگر α و β دو عدد اوردینال باشند، معنای $\alpha < \beta$ و $\alpha \leqq \beta$ برای ما روشن است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که اعداد کاردینال را، به طور خودکار، همراه با یک رابطهٔ ترتیب به دست می‌آوریم. این رابطهٔ ترتیب، شرایطی را که هنگام بحث دربارهٔ حساب کاردینالها

به وام گرفتیم ارضا می‌کند. در واقع هرگاه $\text{card } X < \text{card } Y$، آنگاه $\text{card } X$ زیرمجموعه‌ای از $\text{card } Y$ است و نتیجتاً $X \precsim Y$. هرگاه $X \sim Y$ آنگاه، چنانکه قبلاً دیدیم، خواهیم داشت $\text{card } X = \text{card } Y$، پس ناگزیر باید رابطهٔ $X < Y$ برقرار باشد. بعکس، هرگاه $X < Y$، آنگاه رابطهٔ $\text{card } Y \leqq \text{card } X$ قطعاً برقرار نیست (چون تشابه مستلزم همتوانی است)، پس ناگزیر $\text{card } X < \text{card } Y$.

نامساوی

$$a < ۲^a$$

را که برای همهٔ اعداد کاردینال معتبر است، به عنوان کاربردی از ملاحظات فوق، ثابت می‌کنیم. اثبات: هرگاه A مجموعه‌ای با کاردینال a باشد، داریم $A < \mathcal{P}(A)$، بنابراین $\text{card } A < \text{card } \mathcal{P}(A)$، و نتیجتاً $a < ۲^a$.

تمرین. هرگاه $\text{card } A = a$، کاردینال مجموعهٔ تمام نگاشتهای یک بیک از A به خود A و نیز کاردینال مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های شمارش‌پذیر نامتناهی A چیست؟

همهٔ حقایقی که دربارهٔ ترتیب اعداد اوردینال برقرار بودند، درعین حال، دربارهٔ ترتیب اعداد کاردینال نیز معتبرند. مثلاً می‌دانیم که هر دو عدد کاردینال a و b مقایسه‌پذیرند (همیشه یکی از سه رابطهٔ $a = b$ یا $a < b$ و یا $b < a$ برقرار است). همچنین، و در واقع، هرمجموعه‌ای از اعداد کاردینال، مجموعه‌ای خوش ترتیب است. همچنین می‌دانیم که هر مجموعه از اعداد کاردینال، دارای کران بالا (در واقع سوپرموم) است، و علاوه بر این برای هر مجموعه از اعداد کاردینال، عدد کاردینالی وجود دارد که از همهٔ اعضای آن مجموعه اکیداً بزرگتر است. از مطلب اخیر قطعاً نتیجه می‌گیریم که بزرگترین عدد کاردینال یا به عبارت دیگر، مجموعه‌ای که دقیقاً از تمام اعداد کاردینال تشکیل شده باشد، وجود ندارد. تناقضی که بر پایهٔ فرض وجود چنین مجموعه‌ای حاصل می‌شود، به پارادوکس کانتور معروف است.

هر چند این امر که اعداد کاردینال، اوردینالهای خاصی هستند، باعث تسهیل برخی از جنبه‌های نظریهٔ کاردینالها می‌شود، ولی در عین حال احتمال بعضی از آشفتگیها را نیز که اجتناب از آنها حیاتی است، قوت می‌بخشد. اگر a و b دو عدد کاردینال باشند، این دو اعداد اوردینال نیز هستند و در نتیجه حاصلجمع آنها، $a + b$، دارای دو معنی محتمل است. حاصلجمع کاردینالی دو عدد کاردینال، در حالت کلی، با حاصلجمع اوردینالی آنها یکی نیست. در واقع مسئله از آنچه واقعاً هست، مشکلتر به نظر می‌رسد، و عملاً اجتناب از این آشفتگی بسیار ساده است. زمینهٔ کلی بحث، استفاده از حروف خاص برای نمایش اعداد کاردینال، و همچنین تذکرات ضمنی در مواقع لزوم، موجب تسهیل و یکنواختی جریان بحث خواهد شد.

تمرین. ثابت کنید که هرگاه α و β دو عدد اوردینال باشند، آنگاه

$$\text{card}\,(\alpha+\beta) = \text{card}\,\alpha + \text{card}\,\beta,$$
$$\text{card}\,(\alpha\beta) = (\text{card}\,\alpha)(\text{card}\,\beta).$$

عملیات را در طرف چپ تساوی، جمع اعداد اوردینال و در طرف راست تساوی، جمع اعداد کاردینال تعبیر کنید.

یکی از علائم خاصی که غالباً برای نمایش اعداد کاردینال به کار می‌رود، اولین حرف الفبای عبری ($\aleph$، الف) است. کوچکترین عدد اوردینال ترابا پایان (ω) بخصوص یک عدد کاردینال نیز هست و در این نقش همیشه به صورت $\aleph_0$ نمایش داده می‌شود. همهٔ اعداد اوردینالی که تا به حال، به طور صریح، ذکر کرده‌ایم شمارش‌پذیرند. در بسیاری از کاربردهای نظریهٔ مجموعه‌ها، کوچکترین اوردینال شمارش‌ناپذیر، که غالباً با Ω مشخص می‌شود، نقش مهمی بر عهده دارد. مهمترین خاصیت ω این است که ω یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب نامتناهی است که همهٔ پاره‌های آغازی آن متناهی‌اند. مهمترین خاصیت Ω هم این است که Ω یک مجموعهٔ خوش ترتیب شمارش ناپذیر است، که همهٔ پاره‌های آغازی آن شمارش‌پذیرند.

روشن است که کوچکترین عدد اوردینال شمارش‌ناپذیر (Ω) در شرایط مندرج در تعریف اعداد کاردینال صدق می‌کند، این عدد، به عنوان یک عدد کاردینال، همواره به $\aleph_1$ نمایش داده می‌شود. به عبارت معادل، $\aleph_1$ را می‌توان به عنوان کوچکترین عدد کاردینالی که اکیداً از $\aleph_0$ بزرگتر است و یا به عبارت دیگر، به عنوان تالی بلافصل $\aleph_0$، در ترتیب اعداد کاردینال، در نظر گرفت.

رابطهٔ حسابی بین $\aleph_0$ و $\aleph_1$، موضوع یک مسئلهٔ قدیمی و مشهور دربارهٔ اعداد کاردینال است. چگونه می‌توان به کمک عملیات حسابی، از $\aleph_0$ به $\aleph_1$ رسید؟ تا اینجا ما می‌دانیم که مقدماتی‌ترین قدمها، که شامل اعمال جمع و ضرب باشند، ما را از $\aleph_0$ دوباره به خود $\aleph_0$ رجعت خواهند داد. تشکیل $2^{\aleph_0}$، ساده‌ترین کاری است که می‌توان کرد تا از $\aleph_0$ به چیزی بزرگتر از آن رسید. پس دانستیم که $\aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0}$. حال، آیا این نامساوی به طور اکید برقرار است؟ آیا عدد کاردینال شمارش‌ناپذیری وجود دارد که اکیداً از $2^{\aleph_0}$ کوچکتر باشد؟ آنچه که به فرضیهٔ پیوستار مشهور است (صرفاً به عنوان یک حدس) اعلام می‌دارد که جواب منفی است، و یا به عبارت دیگر $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ است. تنها چیزی که ما به طور قطع می‌دانیم، این است که این فرضیه با اصول دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است.

برای هر عدد کاردینال نامتناهی a، فرض کنید، $c(a)$ مجموعهٔ تمام اعداد کاردینال نامتناهی است که از a اکیداً کوچکترند. هرگاه $a = \aleph_0$، آنگاه $c(a) = \varnothing$؛ و هرگاه $a = \aleph_1$، آنگاه $c(a) = \{\aleph_0\}$. حال چون $c(a)$ یک مجموعهٔ خوش ترتیب است، پس دارای یک عدد اوردینال، مانند α، است. رابطهٔ بین a و α، معمولاً با نوشتن $a = \aleph_\alpha$ بیان می‌شود. در تعریف معادل دیگری از اعداد کاردینال $\aleph_\alpha$، که توسط استقرای ترابا پایان به دست می‌آید، $\aleph_\alpha$ (به ازای $\alpha > 0$) کوچکترین عدد کاردینالی است که از همهٔ $\aleph_\beta$ ها، به قسمی که $\beta < \alpha$، اکیداً بزرگتر است. فرضیهٔ عمومی پیوستار، عبارت از این پیش‌گویی است که برای هر عدد اوردینال α، $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

واژه‌نامهٔ فارسی ـ انگلیسی

اجتماع	union
آزاد	free
استقرا	induction
ـ ی تراباپایان	transfinite —
ـ ی ریاضی	mathematical —
اشتراک	intersection
اصل موضوع	axiom
ـ ـ اجتماع	— of union
ـ ـ انتخاب	— of choice
ـ ـ بینهایت	— of infinity
ـ ـ تصریح	— of specificatio
ـ ـ توانها	— of powers
ـ ـ جایگزینی	— of substitution
ـ ـ زوج‌سازی	— of pairng
ـ ـ گسترش	— of extension
اصل موضوعی	axiomatic
اصل همزادی	principle of duality
افراز	partition
اکید	strict
القاشده	induced
امتداد	continuation
اندیس	index
انعکاسی	reflexive
اینفیموم	infimum
بازگشت	recursion
ـ تراباپایان	transfinite —
بازگشتی	recursive
بتو	into
برج	tower
برد	range
برو	onto
بزرگترین کران پایین	greatest lower bound
بسته	closed
بسلا	manifold
بسیط	atomic
به انتفای مقدم	vacuously
بیشین	maximal
بیشینگی	maximality
پادمتقارن	antisymmetric

پارادوکس	paradox
پارهٔ آغازی	initial segment
— — ضعیف	weak — —
پخشی	distributive
پیمانه	modulo
پیوستار	continuum
تابع	function
— انتخاب	choice —
— دنباله‌ای	sequence —
— مشخصه	characteristic —
تالی	successor
— بلافصل	immediate —
تحدید	restriction
ترا با پایان	transfinite
ترتیب	order
— تمام	total —
— جزئی	partial —
— خطی	linear —
— ساده	simple —
— قاموسی	lexicographical —
ترتیب نگهدار	order-preserving
ترکیب	composite
تساوی	equality
تسلط	domination
تشابه	similarity
تصویر	projection
تعلق	belonging
تفاضل	difference
— متقارن	symmetric —
تناظر	correspondence
— یک بیک	one-to-one —
توان	power
توسیع	extension
تهی	empty

جابجایی	commutative
جزء	term
جمع اوردینالی	ordinal sum
جمع بولی	Boolean sum
جمله	sentence
چند متغیره	several variables
چهارتایی	quadruple
حاصلضرب اوردینالی	ordinal product
حاصلضرب دکارتی	Cartesian product
— — جزئی	partial — —
خانواده	family
خلف	descendant
خودتوانی	idempotence
خوش ترتیب	well ordered
خوش ترتیبی	well ordering
دسته	collection
دنباله	sequence
دو بدومجزا	pairwise disjoint
دوتایی	binary
رابطه	relation
— ی ترتیبی	order —
— ی هم‌ارزی	equivalence —
رده	class
رده‌های هم‌ارزی	equivalent classes
رهیافت	approach
زنجیر	chain
— امتدادی	continuation —

زوج	pair
– مرتب	ordered –
– نامرتب	unordered –
زیردسته	subcollection
زیرمجموعه	subset
– ی حقیقی	proper –
– ی نقش	image –
سلف	ancestor
سوپرموم	supremum
سه‌تایی	triple
شرکت‌پذیر	associative
شمارش	counting
شمارش‌پذیر	countable
– نامتناهی	countably infinite
شمارش‌ناپذیر	uncountable
شمردنی	denumerable
شمول	inclusion
شناسه	argument
شهود	intuition
صوری کردنی	formalizable
ضرب رابطه‌ای	relative product
عالم سخن	universe of discourse
عدد	number
– آغازی	initial –
– اوردینال	ordinal –
– حدی	limit –
– طبیعی	natural –
– کاردینال	cardinal –
عضو	member
عملگر	operator

– های منطقی	logical –s
عنصر	element
غیرصوری	informal
فرضیهٔ پیوستار	continuum hypothesis
قلمرو	domain
کران بالا	upper bound
کران پایین	lower bound
کمترین	least
کمین	minimal
کمینگی	minimality
کوچکترین کران بالا	least upper bound
گروه	group
گسترش	extension
متشابه	similar
متعدی	transitive
متقارن	symmetric
متناهی	finite
مثال ناقض	counterexample
مجزا	disjoint
مجموعه	set
– ی اندیس‌شده	indexed –
– ی اندیس	index –
– ی تالی	successor –
– ی تک عضوی	singelton
– ی توانی	power –
– ی جامع	universe –
– ی جزئاً مرتب	partially ordered –

معادل	equivalent
معکوس	inverse
مقایسه‌پذیر	comparable
مقدم	predecessor
ـ اکید	strict –
ـ بلافصل	immediate –
مکمل	complement
ـ نسبی	relative –
مؤلفه	coordinate
نامتناهی	infinite
نشاندن	embedding
نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها	naive set theory
نقش	image

نگاشت	mapping; map
ـ شمولی	inclusion map
ـ متعارف	canonical map
ـ همانی	identity map
نمودار	graph
نوع	type
واحد ضربی	multiplicative unit
وارون	converse
هم‌ارز	equivalent
هم‌پایان	cofinal
همزادی	duality
یک‌به‌یک	one-to-one

واژه‌نامهٔ انگلیسی ـ فارسی

ancestor	سلف
antisymmetric	پادمتقارن
approach	رهیافت
argument	شناسه
associative	شرکت‌پذیر
atomic	بسیط
axiom	اصل موضوع
– of choice	ـ ـ انتخاب
– of extension	ـ ـ گسترش
– of infinity	ـ ـ بینهایت
– of pairing	ـ ـ زوج‌سازی
– of powers	ـ ـ توانها
– of specification	ـ ـ تصریح
– of substitution	ـ ـ جایگزینی
– of unions	ـ ـ اجتماع
axiomatic	اصل موضوعی
belonging	تعلق
binary	دوتایی
Boolean sum	جمع بولی
canonical map	نگاشت متعارف
cardinal number	عدد کاردینال
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
chain	زنجیر
characteristic function	تابع مشخصه
choice function	تابع انتخاب
class	رده
cofinal	هم‌پایان
collection	دسته
commutative	جابجایی
comparable	مقایسه‌پذیر
complement	مکمل
composition	ترکیب
continuation	امتداد
continuation chain	زنجیر امتدادی
continuum	پیوستار
– hypothesis	فرضیهٔ ـ
converse	وارون
coordinate	مؤلفه
correspondence	تناظر

countable	شمارش‌پذیر
countably infinite	شمارش‌پذیر نامتناهی
counterexample	مثال ناقض
counting	شمارش
denumerable	شمردنی
descendant	خلف
difference	تفاضل
disjoint	مجزا
distributive	پخشی
domain	قلمرو
domination	تسلط
duality	همزادی
element	عنصر
embedding	نشاندن
empty	تهی
equality	تساوی
equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
equivalent	معادل؛ هم‌ارز
extension	توسیع؛ گسترش
family	خانواده
finite	متناهی
formalizable	صوری کردنی
free	آزاد
function	تابع
graph	نمودار
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
group	گروه
idempotence	خودتوانی
identity map	نگاشت همانی
image	نقش
image subset	زیرمجموعهٔ نقش
immediate predecessor	مقدم بلافصل
immediate successor	تالی بلافصل
inclusion	شمول
– map	نگاشت شمولی
index	اندیس
– set	مجموعهٔ –
indexed set	مجموعهٔ اندیس‌شده
induced	القاشده
induction	استقرا
infimum	اینفیموم
infinite	نامتناهی
informal	غیرصوری
initial number	عدد آغازی
initial segment	پارهٔ آغازی
intersection	اشتراک
into	بتو
intuition	شهود
inverse	معکوس
least	کمترین
– upper bound	کوچکترین کران بالا
lexicographical order	ترتیب‌قاموسی
limit number	عدد حدی
linear order	ترتیب خطی
logical operators	عملگرهای منطقی
lower bound	کران پایین
manifold	بسلا
mapping	نگاشت
mathematical induction	استقرای ریاضی
maximal	بیشین

maximality	بیشینگی
member	عضو
minimal	کمین
minimality	کمینگی
modulo	پیمانه
multiplicative unit	واحد ضربی
naive set theory	نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها
natural number	عدد طبیعی
one-to-one	یک بیک
onto	برو
operator	عملگر
order	ترتیب
order-preserving	ترتیب نگهدار
order relation	رابطهٔ ترتیبی
ordinal number	عدد اوردینال
ordinal product	حاصلضرب اوردینالی
ordinal sum	جمع اوردینالی
pair	زوج
pairwise disjoint	دو بدو مجزا
partial Cartesian product	حاصلضرب دکارتی جزئی
partial order	ترتیب جزئی
partially ordered set	مجموعهٔ جزئاً مرتب
partition	افراز
power	توان
– set	مجموعهٔ توانی
predecessor	مقدم
principle of duality	اصل همزادی
projection	تصویر
proper subset	زیرمجموعهٔ حقیقی

quadruple	چهارتایی
range	برد
recursion	بازگشت
recursive	بازگشتی
reflexive	انعکاسی
relation	رابطه
relative complement	مکمل نسبی
relative product	ضرب رابطه‌ای
restriction	تحدید
sentence	جمله
sequence	دنباله
– function	تابع دنباله‌ای
set	مجموعه
several variables	چند متغیره
similar	متشابه
similarity	تشابه
simple order	ترتیب ساده
singleton	مجموعهٔ تک عضوی
strict	اکید
– predecessor	مقدم –
subcollection	زیردسته
subset	زیرمجموعه
successor	تالی
– set	مجموعهٔ –
supremum	سوپرموم
symmetric	متقارن
– difference	تفاضل –
term	جزء
total order	ترتیب تمام
tower	برج
transfinite	تراباپایان
– induction	استقرای –

- recursion — بازگشت -
transitive — متعدی
triple — سه‌تایی
type — نوع

uncountable — شمارش‌ناپذیر
union — اجتماع
universe — مجموعهٔ جامع
- of discourse — عالم سخن
unordered pair — زوج نامرتب
unordered triple — سه‌تایی نامرتب
upper bound — کران بالا

vacuously — به انتفای مقدم

weak initial segment — پارهٔ آغازی ضعیف
well ordered — خوش ترتیب
well ordering — خوش ترتیبی

فهرست الفبایی