نظریهٔ گروهها و فضاهای برداری در فیزیک

تألیف

کریس. جی. ایشام

ترجمه

دکتر محمدعلی جعفریزاده

دکتر حسین فخری

$$(M_1 M_2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{1ik} M_{2kj}$$

$$\langle \mathbf{w}_m^i, \mathbf{w}_n^j \rangle = \delta^{ij} \delta_{mn}$$

$$\langle \chi_\mu, \chi_{\mu'} \rangle_{\mathcal{F}} = \delta_{\mu\mu'}$$

نظریهٔ گروهها و فضاهای برداری

در فیزیک

تألیف:

کریس . جی . ایشام

ترجمه:

محمدعلی جعفریزاده

حسین فخری

فهرست مطالب

فصل سوم: نمایش های یک گروه

بنام آفریدگار خرد

پیشگفتار مترجمان

کمبود کتاب مناسب در زمینهٔ نظریهٔ گروهها و فضاهای برداری جهت استفادهٔ دانشجویان دورهٔ لیسانس رشتهٔ فیزیک، ما را بر آن داشت که کتاب حاضر را به زبان فارسی برگردانیم. اساساً فیزیک و بخصوص فیزیک نظری به زبان ریاضی تولد و توسعه می‌یابد. شاخه های جدید فیزیک نظری مانند نظریهٔ کوانتم و فیزیک ذرات بنیادی و ... مبتنی بر نوع جدیدی از ریاضیات هستی می‌یابند، و درواقع این نوع ازریاضیات ساختار ریاضی زیربنائی و استخوانبندی شاخه های جدید فیزیک نظری می باشد.

شاید برای ریاضیات محاسباتی مورد لزوم در سطح دروس دورهٔ لیسانس منابع فارسی متنوعی در اختیار دانشجویان باشد، لیکن خلاء ناشی از فقدان کتاب مناسب در زمینهٔ ریاضیات جدید، از نقطه نظر جهت گیری آن برای استفادهٔ دانشجویان فیزیک، طی دههٔ اخیر بصورت آشکاری چشم‌زد همهٔ اهل فن بوده است. از اینرو کتاب حاضر جهت رفع این نقیصه در چارچوب آموزش فیزیک در سطح کارشناسی، بسیار مناسب تشخیص داده شد.

باید توجه نمود که برای مطالعهٔ این کتاب هیچ مطالعهٔ زمینه ای دیگری لازم نیست، درحقیقت آن بصورت یک خودآموز نوشته شده است و دانشجویان فیزیک باید بتوانند آنرا

بصورت عمیق مطالعه نمایند. متن و همچنین تمرینات مکمل آن توانمندی قابل ملاحظهٔ تکنیکی در نظریهٔ کوانتم و نیز فهم درست ساختار بنیادی آن ایجاد می کند. کاربرد عمده و احاطه آمیز این زمینهٔ ریاضی در فیزیک حالت جامد، شیمی فیزیک، طیف سنجی و ...، نیز ضرورت آشنائی مفهومی و تکنیکی دانشجویان فیزیک را با آن آشکار می کند. از اینرو ما مطالعهٔ کامل این کتاب را به تمامی دانشجویان فیزیک در پایان سال دوم لیسانس توصیه می کنیم.

در پایان از معاونت محترم پژوهشی و نیز ادارهٔ انتشارات دانشگاه تبریز که وسیلهٔ چاپ این کتاب را فراهم نموده اند صمیمانه سپاسگزاری می کنیم.

محمدعلی جعفریزاده

حسین فخری

مقدمه

نظریهٔ گروهها و نظریهٔ فضاهای برداری در برخی از شاخه های فیزیک نظری جدید کاربردهای مهم فراوانی دارند. این شاخه های فیزیک عبارتند از مکانیک کلاسیک، نسبیت خاص و عام، فیزیک حالت جامد، نظریه عمومی کوانتم، و فیزیک ذرات بنیادی جدید. لذا از سالها پیش در برنامهٔ درسی سال آخر دورهٔ کارشناسی فیزیک نظری درسی به عنوان «جبرها و گروهها» در نظر گرفته شده است و این کتاب حاصل چند دوره تدریس مؤلف در سالهای اخیر می باشد.

طبیعتاً، یکی از اهداف این درس معرفی نظریه عمومی گروهها و فضاهای برداری است، و در آن تأکید خاصی روی کاربردهای بالقوه ایده های ریاضی در ساختار بنیادی نظریه کوانتم گردیده است.

البته یکی از اهداف دیگر این کتاب، با همان درجه از اهمیت، معرفی هنر تفکر ریاضی محض به دانشجویان می باشد. دانشجویان فیزیک امپریال کالج چندین واحد درسی ریاضی کمکی را بعنوان بخشی از برنامه درسی خود می گذرانند، که غالباً این دروس با نام «روشهای ریاضی» عنوان می شوند (از قبیل توابع خاص، آنالیز مختلط، ماتریسها، آنالیز برداری سه بعدی و غیره) و، این دروس ارائه شده برای تمام دانشجویان فیزیک، شامل حداقل ساختارهای ریاضی می باشد. درس «جبرها و گروهها» بمنظور جبران نسبی این کمبود برای دانشجویان گرایش فیزیک نظری و به سبک کاملاً دقیق ریاضی که معمولاً کمتر در دروس دیگر دانشجویان فیزیک، دیده می شود، نوشته شده است. جدا از اهمیت آموزشی این مطالب از نقطه نظر تفکر مجرد، باید توجه نمود که

ایده های فیزیک نظری جدید از ریاضیات محض نشأت گرفته اند. بنابراین بنظر می رسد که دانشجویان دوره های تکمیلی می توانند، با این موضوعات غریبانهٔ ریاضیات محض، بدون تجربه و بدون مقدمه طولانی آشنا گردند.

این کتاب در قالب سه فصل تألیف گردیده است. فصل اول شامل مقدماتی کوتاه از نظریهٔ عمومی گروهها با تأکید خاص روی گروههای لی ماتریسی می باشد که نقش اساسی در فیزیک نظری جدید بازی می کنند. فصل دوم در ارتباط با نظریهٔ فضاهای برداری، و بویژه نظریهٔ فضاهای هیلبرت و تکنیک های تحلیلی جهت سروکار داشتن با فضاهای نامتناهی نوشته شده است. فصل آخر این کتاب مقدمه ای کوتاه بر نظریهٔ نمایشهای گروه و نظریهٔ مشخصه[1] های مربوطه به آن می باشد.

در خاتمه، باید توجه نمود که مطالب موجود در این کتاب براساس یادداشتهای ارائه شده به دانشجویان، تنظیم گردیده است. طبیعتاً، دانشجویان در حین ارائه درس با استفاده از توضیحات شفاهی آنرا کاملتر نموده اند. در صورتی که خواننده فقدان تذکرات لازم و مطالب تفصیلی روشن کننده را احساس نماید، قبلاً پوزش می طلبم.

Chris J Isham

1- Character

فصل اول

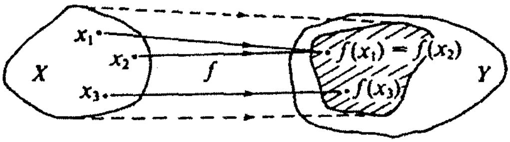
گروهها

۱.۱– تکواره ها[1]

گروه عبارت است از یک مجموعهٔ ریاضی مجهز به یک قانون که برطبق آن از ترکیب دو عضو اختیاری مجموعه، عضو سوم همان مجموعه حاصل شود. این قانون ترکیب ضرورتاً در چارچوب یک سری اصول اساسی که در طول سالها، منجر به ساختار ریاضی مهم و بی نظیر گروهها گردیده تعریف می شود. یکی از مثالهای بسیار مهم برای ساختار گروهی خانواده نگاشتهای هر مجموعه به خود آن مجموعه می باشد. این مثال ویژه از بسیاری جهات می تواند الگویی برای نظریهٔ گروهها باشد و به این دلیل درس را با بیان این مثال آغاز می کنیم.

1- Monoids

دو مجموعه X و Y را در نظر بگیرید. یک نگاشت (یا تابع) از مجموعه X به مجموعه Y عبارت از نسبت دادن فقط یک عضو از Y به هر عضو از X می باشد. اگر f تابع داده شده باشد، غالباً می نویسیم $f{:}X \to Y$ که دو مجموعه X و Y و نیز خودنگاشت را نشان می دهد. عضو منحصر بفرد متعلق به Y نسبت داده شده به عضو خاص x متعلق به X را با $f(x)$ (برخی مواقع با f_x) نشان می دهیم. ما مرتباً با خانواده تمام نگاشتهای ممکنه از X به Y سروکار خواهیم داشت، این خانواده را با $\mathrm{Map}(X, Y)$ نشان خواهیم داد.



توجه کنید که یک نگاشت از X به Y می تواند در دو حالت زیر باشد:

(الف) چند به یک: در این نوع نگاشت بیشتر از یک عضو در X به عضو یکسان در Y نگاشت می یابند. در دیاگرام بالا x_1 و x_2 از این دسته هستند یعنی هر دو به یک عضو در Y نگاشت داده شده اند، بعبارتی داریم $f(x_1) = f(x_2)$.

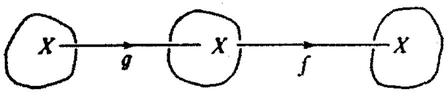
(ب) اکیداً «بتوی[1]» Y: در حالت کلی عضو y در Y وجود دارد بطوریکه هیچ عضو x ی در X با $y = f(x)$ وجود ندارد.

یک نگاشت از X به Y را که هم یک بیک و هم «پوشا[2]» باشد نگاشت **دوسویه از X به Y** نامند. این نوع نگاشت یک تناظر یک بیک مابین اعضای X و Y برقرار می کند، بطوریکه از دیدگاه نظریهٔ مجموعه ها، دو مجموعه یکسان می باشند. نگاشت دوسویه مابین X و Y وجود خواهد داشت اگر و فقط اگر تعداد اعضای آنها یکسان باشد.

مجموعه نگاشت های ممکنهٔ $\mathrm{Map}(X, Y)$ از مجموعهٔ X به خودش از اهمیت خاصی

1- Into 2- Onto

برخوردار است، زیرا برای دو نگاشت داده شدهٔ $f: X \to X$ و $g: X \to X$ ، نگاشت سوم $f\circ g: X \to X$ را روی هر عضو x از X می توان اینطور تعریف نمود که ابتدا آن، عضو x از X را به $g(x)$ و سپس، $g(x)$ متعلق به X را به $f(g(x))$ در X نگاشت می دهد. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است.



بنابراین $f\circ g: X \to X$ بصورت زیر تعریف می شود

$$f\circ g(x) := f(g(x)) \qquad \forall x \in X. \tag{۱.۱}$$

تذکر. در اینجا علامت بسیار مفید $:=$ بکار برده شده است و به این معنی است که عبارت موجود در طرف چپ علامت $:=$ بوسیلهٔ عبارت طرف راست تعریف می گردد.

دو خاصیت بسیار مهم از مجموع $\mathrm{Map}(X, X)$ و قانون ترکیب $\circ$ عبارتند از:

(الف) اگر f و g و h سه نگاشت از X به X باشند آنگاه

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h\,; \tag{۱.۲}$$

(ب) نگاشت **همانی** از X به خودش با id_X نمایش داده می شود و صراحتاً بصورت زیر تعریف می شود

$$id_X(x) := x \qquad \forall\, x \in X. \tag{۱.۳}$$

بنابراین برای هر تابع $f: X \to X$ می توان نتیجه گرفت

$$f \circ id_X = id_X \circ f = f. \qquad (1.4)$$

اکنون خصوصیات کلیدی مجموعه نگاشتهای ممکنه $\mathrm{Map}(X, X)$ را در تعاریف زیر خلاصه می کنیم.

تعاریف.

(الف) **قانون ترکیب** روی مجموعه‌ای مانند A عبارتست از قاعده‌ای که به هر دو عضو اختیاری (a_1, a_2) (که a_1 و a_2 متعلق به مجموعهٔ A می باشند) عضو سومی از A را وابسته نموده و به شکل $a_1 a_2$ نوشته می شود.

(ب) این قانون **شرکت پذیر** است اگر

$$a_1(a_2\, a_3) = (a_1\, a_2)\, a_3 \qquad \forall\ a_1, a_2 \text{ و } a_3 \in A. \qquad (1.5)$$

(ج) عضو e در A را **عضو واحد** گوئیم اگر

$$ae = ea = a \qquad \forall\, a \in A. \qquad (1.6)$$

(د) مجموعه A را که دارای عمل ترکیبی شرکت پذیر و نیز دارای عضو واحد باشد **تکواره** گوئیم. (بزودی خواهیم دید که ایده تکواره پیش درآمد طبیعی نظریه گروههاست.)

تذکر. اگر چنین عضو واحدی مانند e وجود داشته باشد آنگاه آن منحصر بفرد خواهد بود. زیرا اگر e' عضو واحد دیگری غیر از e باشد، داریم

$$e = ee' = e'.$$

مثالها.

(۱) برای هر مجموعه X ، مجموعه نگاشتهای $\mathrm{Map}(X, X)$ یک تکواره می باشد. قانون ترکیب برای $f: X \to X$ و $g: X \to X$ مطابق معادلهٔ (۱.۱) تعریف می گردد یعنی

$fg := f\circ g$. عضو واحد عبارتست از $e := id_X$، و معـادلات (۱.۲) و (۱.۴) وجـود ساختار تکواره روی مجموعه نگاشتهای $\mathrm{Map}(X, X)$ را تأیید می کنند. این یکی از مثالهای بارز برای یک تکواره می باشد.

(۲) مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ با قانون ترکیب جمع معمولی و با عدد صفر بعنوان عضو واحد یک تکواره می باشد.

(۳) همچنین مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ دارای ساختار تکواره با قانون ترکیب ضرب معمولی است که در این حالت عضو واحد عدد ۱ می باشد.

در حالت کلی برای اعضای a_1 و a_2 از یک تکواره حاصل ضرب a_1a_2 با حاصل ضرب a_2a_1 یکسان نخواهد بود. باوجود این تکواره ای که در آن تمام چنین حاصل ضربهائی یکسان باشند، از اهمیت ویژه ای برخوردار بوده و تعریف خاص خود را خواهد داشت.

تعریف.

تکواره A را جابجائی (یا آبلی) گوئیم اگر

$$a_1a_2 = a_2a_1 \qquad \forall\, a_2\, , a_1 \in A.$$

در این حالت بطور قراردادی، حاصلضرب a_1a_2 بصورت $a_1 + a_2$ و عضو واحد بصورت 0 نوشته می شود.

مثالها.

(۱) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ با هر دو ساختار تکواره ای تعریف شده در مثالهای بالا یک تکواره آبلی می باشد.

(۲) در حالت کلی، تکواره $\mathrm{Map}(X, X)$ جابجائی نیست. بعنوان مثال، $\mathbb{R}$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر بگیرید و توابع ویژهٔ زیر را متعلق به $\mathbf{Map(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ مورد توجه قرار دهید

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x):=x^2$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g(x):=x+1\,,$$

از آنجا داریم $f\circ g(x)=(x+1)^2$ در صورتیکه $g\circ f(x)=x^2+1$، بنابراین دو تابع $f\circ g$ و $g\circ f$ باهم برابر نیستند.

(۳) یکی از مثالهای بسیار مهم برای تکواره مجموعهٔ $M(n,\ \mathbb{R})$ از تمام ماتریسهای حقیقی $n\times n$ می باشد. عمل ترکیب دو ماتریس M_1 و M_2 توسط ضرب معمولی ماتریس ها تعریف می شود:

$$(M_1M_2)_{ij}:=\sum_{k=1}^{n}M_{1ik}\,M_{2kj}$$

و عضو واحد، ماتریس واحد $\mathbf{1}:=\mathrm{diag}\ (1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$ است، واضح است که این ساختار تکواره ای، آبلی نیست. ساختار تکواره‌ای مشابهی روی مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n\times n$ مختلط $M(n,\ \mathbb{C})$ نیز وجود دارد.

(۴) باوجود این، همانند مجموعه اعداد صحیح ساختار تکواره ای دیگری روی $M(n,\ \mathbb{R})$ (و متشابهاً روی $M(n,\ \mathbb{C})$) که آبلی است تعریف می شود. این ساختار تکواره ای جدید با عمل ترکیب جمع معمولی ماتریسها تعریف می شود. عضو واحد برای این عمل ماتریس صفر یعنی ماتریسی که تمام درایه های آن صفر است، می باشد.

۱.۲ مفهوم اساسی گروه

فرق اساسی مابین یک تکواره و یک گروه در این است که در دوّمی هر عضو از مجموعه دارای عضو وارون می باشد. این خاصیت ویژه در کاربرد نظریه گروه ها در فیزیک نقش مهمی

بازی می کند و در تعریف زیر فرموله می شود.

تعاریف.

(الف) عضو b متعلق به تکواره A وارون عضو a در A گفته می شود اگر

$$ba = ab = e. \qquad (۲.۱)$$

(ب) یک گروه عبارتست از تکواره ای که هر عضو آن دارای یک عضو وارون باشد.

تذکر. اگر b و b' هر دو، وارون عضو a باشند آنگاه آنها باهم برابرند زیرا

$$b' = b'e = b'(ab) = (b'a)b = eb = b.$$

بنابراین وارون یک عضو از گروه منحصر بفرد است و صبحت نمودن از وارون عضوی مانند a در A کاملاً بجاست. معمولاً وارون عضو a در A بشکل a^{-1} نوشته می شود.

مثالها.

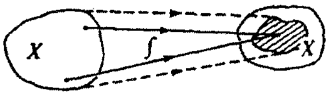
(۱) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ با ساختار تکواره ای که در آن قانون ترکیب جمع معمولی اعداد است، یک گروه آبلی است. واضح است که وارون عدد صحیح n عدد صحیح $-n$ می باشد.
با وجود این، مجموعه $\mathbb{Z}$ با ساختار تکواره ای که در آن قانون ترکیب ضرب معمولی اعداد است خاصیت گروهی ندارد زیرا وارون عدد صحیح n یعنی $1/n$ یک عدد صحیح نمی باشد.

(۲) مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q}$ تحت قانون ترکیب جمع یک گروه آبلی است.

(۳) مجموعه اعداد گویا غیرصفر $\mathbb{Q}_*$ تحت قانون ترکیب ضرب یک گروه آبلی است اگر وارون عدد گویای m/n بصورت عدی گویای n/m تعریف شود.

(۴) در تکواره $\mathrm{Map}\,(X, X)$، وارون تابع $f: X \to X$ تابع $g: X \to X$ می باشد بطوریکه $f\circ g = g\circ f = id_X$، یعنی،

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \qquad \forall\, x \in X. \tag{۲.۲}$$



تابع f در صورتیکه چند به یک و یا اکیداً بتوی X باشد دارای تابع وارون نخواهد بود. وقتی مجموعه X شامل بیش از یک عضو باشد چنین توابعی حتماً وجود خواهند داشت. بنابراین بجز در موارد نسبتاً بدیهی $\mathrm{Map}(X, X)$ ساختار گروهی تشکیل نمی دهد.

این خاصیت $\mathrm{Map}(X, X)$ منجر به تعریف خیلی مهم زیر می شود.

تعاریف.

(الف) نگاشت $f: X \to X$ را **دوسویه** (یا **جایگشت**) از X گوئیم اگر

(i) f یک نگاشت یک بیک باشد (یعنی **یک سویی** باشد).

(ii) f، X را بروی خودش نگاشت دهد (یعنی **پوشا** باشد).

(ب) هر نگاشت دوسویه از $\mathrm{Map}(X, X)$ دارای یک عضو وارون بوده و درنتیجه مجموعه جایگشتهای دوسویه از X به خودش یعنی $\mathrm{Perm}\ (X)$ یک گروه می باشد. اگر X دارای $N < \infty$ عضو باشد در این صورت غالباً گروه $\mathrm{Perm}\ (X)$ **گروه متقارن S_N** نامیده می شود.

تذکر. تعداد اعضای گروه G را **مرتبهٔ گروه** نامند و آنرا با $|G|$ نمایش می دهند. به سهولت نشان داده می شود (تمرین) که مرتبهٔ گروه S_N، $N!$ است.

به هنگام کار با گروهها بجاست که توانهای عضو g از گروه G را با $g^2 := gg$، $g^3 := g(g^2)$ و غیره نشان دهیم. در این صورت گوئیم عضوی مانند g دارای مرتبهٔ $n < \infty$ است اگر $g^n = e$، که n کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت می باشد.

حال ما باید راجع به مثالهای ساده ای از نظریه گروهها بحث کنیم. دسته بندی گروهها

موضوع مهمی است و نقطهٔ آغاز طبیعی، مطالعه گروهها با مرتبهٔ معین و نیز تلاش برای طبقه بندی گروهها با هر مرتبه ای می باشد. (توجه کنید که گروههای ذکر شدهٔ قبلی $\mathbf{Z}$ ، $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}_\bullet$ ، گروههائی با مرتبهٔ بی نهایت می باشند زیرا هر کدام از گروههای مذکور دارای بی نهایت عضو هستند).

گروههای با مرتبهٔ ۱

واضح است که فقط یک گروه با مرتبهٔ یک داریم که تنها عضو آن نیز عضو واحد می باشد (که هر گروه باید آنرا داشته باشد). بنابراین تنها ضرب موجود در گروه e^2 یعنی ضرب واحد در خودش می باشد و البته $e^2 = e$ است.

گروههای با مرتبهٔ ۲

عضو گروه را که برابر واحد نیست با a نشان می دهیم بنابراین $G = \{e, a\}$، که در اینجا از قرارداد مناسب یعنی قرار دادن اعضای مجموعه میان علائم } و { استفاده نموده ایم. نشان دادن ساختار گروهی روی G به معنی تهیهٔ لیستی از تمام حاصل ضرب های دوتائی اعضای موجود در G می باشد، در مثال موجود، این منجر به پیدا نمودن مقادیر ممکنه برای چهار حاصلضرب ee، ea، ae و aa می شود. از خاصیت تعریفی برای عضو واحد e بلافاصله مقادیر e، a و a بترتیب برای سه حاصل ضرب اول نتیجه می شوند. لذا تنها مقدار حاصل ضرب a^2 مورد سؤال است.

واضح است که فقط دو امکان وجود دارد: $a^2 = a$ و $a^2 = e$. بنابراین حداکثر دو ساختار گروهی متفاوت برای یک گروه مرتبهٔ ۲ می توان در نظر گرفت.

باوجود این فرض کنید که $a^2 = a$ باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} a = ae = a(a\cdot a^{-1}) &= (a^2)\cdot a^{-1} \quad \text{(بنابر شرکت پذیری)} \\ &= a\cdot a^{-1} = e\,. \end{aligned}$$

تذکر. هدف از بکار بردن نقطه در عبارت بالا تأکید نمودن بر عمل ترکیب گروهی بین اعضای

موجود در دو طرف نقطه است.

بنابراین $a = e$، که خود یک تناقض است زیرا فرض کرده‌ایم که گروه مرتبهٔ ۲ است. بنابراین تنها مقدار مجاز برای حاصلضرب a^2، $a^2 = e$ می‌باشد. حال بعنوان یک تمرین ساده تمام خواص گروهی این قانون ضرب را می‌توان تحقیق نمود.

خواص گروهی این گروه منحصر بفرد مرتبهٔ ۲ در «جدول گروهی» زیر خلاصه گردیده است که در آن درایهٔ نظیر یک سطر و ستون بخصوص بعنوان حاصلضرب g_1g_2 از عضو سطری g_1 و عضو ستونی g_2 خوانده می‌شود.

$$\begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array}$$

این گروه منحصر بفرد مرتبهٔ ۲ بعنوان گروه $\mathbb{Z}_2$ معروف است. انگیزه و اهمیت این نمادگذاری بعداً معلوم خواهد گردید.

توجه کنید همانطور که پیداست تعریف گروه $\mathbb{Z}_2$ صرفاً انتزاعی بوده و فقط براساس قانون ترکیب اعضای گروه ساخته شده است. علی رغم اینها، وجود مجموعه اشیاء ریاضی خاص با قانون ترکیب گروهی خاص خود که در آن ساختار مجرد گروه $\mathbb{Z}_2$ بازسازی شده باشد مورد سئوال خواهد بود. درواقع مثالهای فراوانی از این گروه وجود دارند، که چند مورد را بشرح زیر بیان می‌کنیم:

(۱) مجموعه $X := \{1, 2\}$ را در نظر می‌گیریم، یعنی مجموعه‌ای با دو عضو، که برای سهولت با 1 و 2 نشان داده شده‌اند. مجموعه نگاشتهای دوسویه $\mathrm{Perm}\,(X)$ گروه مرتبه ۲ می‌باشد. دو عضو گروه نگاشت همانی (که عضو واحد گروه نیز می‌باشد) و نگاشتی که 1 را به 2 و 2 را به 1 می‌نگارد هستند. اگراین نگاشتها را به ترتیب با نمادهای زیر نشان دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه واضح است که

$$\begin{bmatrix}1 \to 2\\ 2 \to 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \to 2\\ 2 \to 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \to 1\\ 2 \to 2\end{bmatrix}$$

که درواقع قانون گروهی $\mathbb{Z}_2$ را تولید می کند. در این مورد $\text{Perm}\,\{1, 2\} = S_2$ مثال مشخصی از گروه مجرد $\mathbb{Z}_2$ می باشد.

(۲) مجموعه $G := \{1, -1\}$ و ضرب اعداد 1 و -1 بعنوان قانون ترکیب را در نظر می گیریم. واضح است که این عمل G را به یک ساختار گروهی مجهز می نماید که عضو واحد آن 1 می باشد. و از آنجا که $(-1)^2 = 1$، دوباره با یک گروه $\mathbb{Z}_2$ مواجهه هستیم.

(۳) در صفحهٔ x–y تبدیل همانی را با e و تبدیل $(x, y) \to (x, -y)$ یعنی انعکاس نسبت به محور xها را با r نشان می دهیم. مجموعه $\{e, r\}$ زیرمجموعه ای از گروه نگاشتهای دوسویی صفحه بوده که خود به تنهائی تشکیل گروه می دهد. از آنجا که $r^2 = e$، این گروه نیز مثال دیگری از گروه مجرد $\mathbb{Z}_2$ می باشد.

بنابراین، ملاحظه می شود که گروههای $\text{Perm}\,\{1, 2\}$، $\{1, -1\}$ و $\{e, r\}$ همگی همان ساختار گروهی $\mathbb{Z}_2$ را دارند و این موضوع از این جهت که ثابت نمودیم تنها یک گروه با مرتبهٔ ۲ وجود دارد زیاد تعجب‌آور نیست، لذا باید تأکید نمود که گروههای فوق از نظر ساختار گروهی مشابه $\mathbb{Z}_2$ می باشند. علی‌رغم اینها، اشیاء ریاضی مجموعه های فوق همگی از هم متفاوت می باشند و از این‌رو نمی توانند گروههای یکسانی باشند. آنچه بیشتر برای رفع این وضع بغرنج موردنیاز می باشد عبارتست از ارائه تعریف دقیقی که دو مجموعه ریاضی متفاوت مجهز به ساختار گروهی یکسان را بعنوان یک گروه مجرد یکسان تلقی نماید. این با مفهوم گروههای «یکریخت» امکان پذیر می گردد.

تعریف.

دو گروه G_1 و G_2 **یکریخت** گفته می‌شوند (بصورت $G_1 \cong G_2$ نشان داده می‌شود) اگر بتوان اعضای دو گروه را در تناظر یک بیک قرار داد بطوریکه این تناظر قانون ترکیب گروهی را حفظ کند. بطور دقیقتر، باید نگاشت دوسوئی $i : G_1 \to G_2$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$i(ab) = i(a) \,.\, i(b) \qquad \forall\, a, b \in G_1. \qquad (۲.۳)$$

نگاشت i را یک **یکریختی** از G_1 به G_2 گوئیم.

تذکر. (۱) نماد 'ab' در سمت چپ رابطهٔ (۲.۳) به قانون ترکیب a و b در گروه G_1 اشاره می‌کند، در صورتیکه حاصلضرب سمت راست براساس قانون ترکیبی گروه G_2 انجام یافته است.

(۲) بطور سرراست رابطهٔ $i\,(e_1) = e_2$ را از معادلهٔ (۲.۳) می‌توان نتیجه گرفت که در آن e_1 و e_2 بترتیب عضوهای واحد در G_1 و G_2 می‌باشند.

(۳) یک یکریختی از یک گروه به خودش **خودریختی** نامیده می‌شود. مجموعه تمام خودریختی های گروه G که خود یک گروه است (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید) با $\mathrm{Aut}\,(G)$ نشان داده می‌شود.

مثال.

مجموعه $G_1 = \{1, -1\}$ را با قانون گروهی تعریف شده قبلی، و G_2 گروه جایگشت $\mathrm{Perm}\,\{1, 2\}$ روی مجموعه $\{1, 2\}$ را در نظر بگیرید. آنگاه یک یکریختی از G_1 به G_2 بوسیلهٔ نگاشت زیر داده می‌شود:

$$i(1) := \begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{bmatrix}; \quad i(-1) := \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ارتباط مابین دو گروه $\{1, -1\}$ و $\mathrm{Perm}\ \{1, 2\}$ در یکریخت بودن آنها با گروه مجرد $\mathbf{Z}_2$ است.

گروههای با مرتبهٔ ۳

سه عضو گروه را با e، a و b نشان می‌دهیم و مطابق معمول e عضو واحد گروه می‌باشد. تنها قسمتی از جدول گروهی را که از قبل می‌توان تعیین نمود بصورت زیر است:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

اکنون باید بجای «علائم سؤال» اعضای گروه را با حفظ ساختار گروهی جایگزین و نهایتاً تمام ساختارهای گروهی ممکنه مرتبهٔ ۳ را مشخص نمائیم. این کار را در مراحل مختلف که در آن تمام امکانات ممکنه در نظر گرفته می‌شوند انجام می‌دهیم:

(الف) حاصلضرب ab می‌تواند فقط برابر a، b یا e باشد. فرض کنید که $ab = b$. آنگاه با ضرب نمودن طرفین این معادله از راست در وارون b داریم $(ab)b^{-1} = b.b^{-1}$، یعنی،

$$a(b.b^{-1}) = e$$

و از آن $a = e$ نتیجه می‌شود. اما این در یک گروه مرتبهٔ ۳ امکان پذیر نیست لذا $ab \neq b$. بطریق مشابه $ab = a$ منجر به $b = e$ می‌شود که بازهم امکان پذیر نیست.

بنابراین ما باید تنها امکان موجود، یعنی، $ab = e$ را بپذیریم.

(ب) با بکار بردن استدلالهای مشابه برای حاصلضرب ba، $ba = e$ نتیجه می‌شود.

(ج) حاصلضرب a^2 می تواند فقط برابر a، b یا e باشد. فرض کنید که $a^2 = a$. آنگاه با ضرب طرفین معادله در وارون a، $a = e$ نتیجه می‌شود که غیرممکن است. بنابراین $a^2 \neq a$ است. اکنون فرض می کنیم که $a^2 = e$ است. بنابراین $a^2b = b$ لذا $a(ab) = b$ و از آنجا که نشان داده ایم $ab = e$، $a = b$ نتیجه می شود. اما چون گروه از مرتبهٔ ۳ می باشد، $a = b$ امکان پذیر نیست بنابراین باید امکان سوم یعنی $a^2 = b$ برقرار باشد.

(د) از قسمت (ج) برای حاصلضرب b^2، $b^2 = a^4$ نتیجه می شود. اما $a^4 = a(a^3)$ و از قسمت (ج) داریم $a^3 = a(a^2) = ab$، همچنین با استفاده از قسمت (الف) $a^3 = ab = e$ است، لذا $b^2 = a$ نتیجه می‌شود.

بنابراین مشاهده می شود که حداکثر یک ساختار گروهی مرتبهٔ ۳ با جدول گروهی زیر وجود دارد.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

تمرین.

نشان دهید که این یک جدول گروهی است، یعنی، قانون ترکیب دارای خاصیت شرکت‌پذیری است و هر عضو دارای وارون می باشد.

این گروه منحصر بفرد مرتبهٔ ۳ آبلی است (یعنی، جدول گروهی بعنوان یک ماتریس، متقارن است) و به گروه $\mathbb{Z}_3$ معروف است. گروه $\mathbb{Z}_3$ بطور مناسب بصورت $\mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^2\}$ نوشته می‌شودوعضو«مولد» a از رابطهٔ $a^3 = e$ تبعیت می کند. این موضوع بلافاصله تعمیم زیر را مطرح می کند.

تعریف.

گروه دوری $\mathbb{Z}_n$ عبارتست از گروه مرتبهٔ n که اعضای آن با شرط $a^n = e$ بصورت زیر

معرفی می شوند.

$$\mathbb{Z}_n = \{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}\}.$$

باید توجه نمود که این گروه آبلی است و حاصلضرب هر جفت اعضای $a^p a^q$ بطور منحصر بفرد توسط رابطهٔ $a^n = e$ مشخص می شود.

درواقع با تعریف مناسب $a^0 := e$ قانون گروهی با شرایط $0 \le p \le n$ و $0 \le q \le n$ را بصورت زیر خواهیم داشت

$$a^p a^q = a^{(p+q) \bmod n}.$$

بویژه واروِن عضو a^p برابر است با $(a^p)^{-1} = a^{n-p}$.

چند مثال مشخص از $\mathbb{Z}_n$ را بصورت زیر بیان می کنیم:

(۱) مجموعه اعداد مختلط $\{1, e^{2i\pi/n}, e^{4i\pi/n}, \ldots, e^{2i(n-1)\pi/n}\}$ تحت حاصل ضرب معمولی تشکیل گروه می دهد وواضح است که ساختار گروهی آن با $\mathbb{Z}_n$ یکسان است.

(۲) فرض می کنیم e و a بترتیب، تبدیل همانی صفحهٔ x–y و تبدیلی که تمام بردارهای صفحهٔ x–y را باندازهٔ $2\pi/n$ رادیان دوران می دهد، باشند. آنگاه $\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ یک زیر مجموعه از گروه جایگشت های صفحه بوده و با $\mathbb{Z}_n$ یکریخت است.

گروههای با مرتبهٔ ۴

برای بحث در مورد این گروهها لازم است ابتدا ایدهٔ ضرب دو گروه معرفی گردد.

تعریف.

ضرب کارتزی (یا حاصلضرب خارجی، یا بطور ساده تر حاصلضرب) جفت گروههای G_1، G_2 (که آنرا با مجموعه $G_1 \times G_2$ نشان می دهیم) عبارت است از مجموعهٔ همهٔ جفت های (g_1, g_2) با g_1 در G_1 و g_2 در G_2، با قانون ترکیب

$$(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) := (g_1 g'_1, g_2 g'_2) \qquad (۲.۴)$$

و عضو واحد

$$e_{G_1 \times G_2} := (e_1, e_2),$$

که e_1 و e_2 بترتیب اعضای واحد گروههای G_1 و G_2 می باشند.

تمرین.

نشان دهید که حاصل ضرب دو گروه، یک ساختار گروهی را تعریف می کند و نیز مرتبهٔ $G_1 \times G_2$ برابر است با $|G_1 \times G_2| = |G_1|\,|G_2|$

بطور کلی نشان دادن اینکه قانون ترکیب بخصوصی روی یک مجموعهٔ داده شده، اصول گروهها را حفظ می کند کار بسیار طولانی و پیچیده ای است، بعنوان مثال، تعداد بررسی های خاصیت شرکت پذیری با تعداد اعضای مجموعه سریعاً افزایش می یابد. روشهائی مانند روش فوق که بتوان گروههای جدیدی از روی گروههای موجود ساخت، می تواند بسیار ارزشمند باشد.

نتیجهٔ آخر ارتباط تنگاتنگی با هدف ما یعنی ساختن گروههای با مرتبهٔ ۴ دارد. $\mathbb{Z}_2$ دارای مرتبهٔ ۲ است و از آنجا می توان نتیجه گرفت گروه حاصلضرب $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ دارای مرتبهٔ ۴ = ۲^۲ می باشد. اگر گروه $\mathbb{Z}_2$ را بصورت $\mathbb{Z}_2 = \{e, \mu\}$ معرفی کنیم که $\mu^2 = e$، آنگاه جدول گروهی برای $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را می توان با استفاده از تعریف معادلهٔ (۲.۴) بصورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & (e, e) & (e, \mu) & (\mu, e) & (\mu, \mu) \\
\hline
(e, e) & (e, e) & (e, \mu) & (\mu, e) & (\mu, \mu) \\
(e, \mu) & (e, \mu) & (e, e) & (\mu, \mu) & (\mu, e) \\
(\mu, e) & (\mu, e) & (\mu, \mu) & (e, e) & (\epsilon, \mu) \\
(\mu, \mu) & (\mu, \mu) & (\mu, e) & (e, \mu) & (e, e)
\end{array} \qquad (۲.۵)$$

جدول حاصلضرب گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ بصورت فوق جالب بنظر نمی رسد لذا بهتر است برای اختصار از تعاریف $a := (e, \mu)$ ،$b := (\mu, e)$ ،$c := (\mu, \mu)$ ،$e := (e, e)$ استفاده کنیم. (امیدواریم که بکار بردن "e" بعنوان عضو واحد $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_2$ موجب هیچگونه اشتباهی نگردد!) با استفاده از این نمادها، جدول گروهی (۲.۵) بصورت خلاصه تر زیر نوشته می شود.

$$\begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \end{array} \quad \text{:یعنی} \quad \begin{aligned} &a^2 = b^2 = c^2 = e\,, \\ &ab = ba = c\,, \\ &bc = cb = a\,, \\ &ca = ac = b\,. \end{aligned} \qquad (۲.۶)$$

این جدول در اکثر کتابهای نظریهٔ گروهها آورده شده است و معمولاً بعنوان گروه چهارتائی بصورت V_4 نشان داده می شود. باید توجه نمود که این گروه آبلی است.

حال به موضوع جستجوی تمام گروههای با مرتبهٔ چهار برمی گردیم، یکی دیگر از این گروهها، گروه دوری مرتبهٔ چهار یعنی، $\mathbb{Z}_4 := \{e, a, a^2, a^3\}$ با رابطهٔ $a^4 = e$ می باشد. بسهولت ملاحظه می شود که $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_4$ دو گروه متفاوت می باشند. (یعنی، این دو گروه یکریخت نیستند) اما آنچه که زیاد هم مشهود نیست،این واقعت است که گروه های $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_4$ تنها گروههای ممکنهٔ با مرتبهٔ ۴ می باشند. اثبات لذتبخش این موضوع بعنوان مسأله بعداً مطرح خواهد شد.

به همین نحو می توان ادامه داد و گروههای مرتبهٔ ۵ و ۶ و ... را معرفی نمود ولی این کار بی انتها بوده و بسرعت تبدیل به یک کار بسیار خسته کننده می گردد. لذا ما به مفاهیم جدیدی که از جنبه های نظری و کاربردی در ساختار گروهها اهمیت ویژه ای دارند می پردازیم.

اگر H زیرمجموعه ای از گروه G باشد آنگاه دو عضو اختیاری h_1 و h_2 در H را می توان با استفاده از عمل ترکب گروه G ضرب نمود. باوجود این، هیچ دلیلی وجود ندارد که حاصلضرب

h_1h_2 خود نیز متعلق به زیرمجموعه H در G باشد، بلکه می تواند در مکمل H در G قرار بگیرد. ولی در بعضی موارد خاص برای هر جفت h_1 و h_2 در H، حاصلضرب h_1h_2 به زیرمجموعه H متعلق می گردد. همچنین اگر عضو واحد e متعلق به H باشد و اگر بازای هر h متعلق به H، وارون آن نیز در H قرار گرفته باشد آنگاه زیرمجموعه H خود یک گروه با ساختار گروهی «موروثی» از G خواهد بود. این مفهوم بسیار اساسی در تعریف زیر فرموله می گردد.

تعریف.

زیرمجموعه H از گروه G یک **زیرگروه** G نامیده می شود اگر

(الف) عضو همانی e از G متعلق به H باشد.

(ب) هرگاه h_1 و h_2 در H باشند آنگاه حاصلضرب h_1h_2 نیز متعلق به H باشد. (در این صورت گوئیم H تحت قانون ترکیب G بسته است.)

(ج) هرگاه h در H قرار گرفته باشد آنگاه وارون آن یعنی، h^{-1} نیز متعلق به H باشد. (در این صورت گوئیم H تحت وارونی بسته است.)

مثالها.

(۱) زیرمجموعه $\{e\}$ زیرگروه هر گروه داده شدهٔ G است و G زیرگروه خودش می باشد. این دو، مثالهای نسبتاً بدیهی از زیرگروهها می باشند و غالباً آنها را زیرگروههای **ناسره**[1] نامند. همه زیرگروههای دیگر **سره** نامیده می شوند.

(۲) هر زیرگروه سره از گروه با مرتبهٔ معین G باید مرتبه ای بزرگتر از یک و کوچکتر از مرتبهٔ G داشته باشد. بویژه، هر زیرگروه سره از گروه مرتبهٔ سه $\mathbb{Z}_3$ باید دارای مرتبهٔ ۲ باشد و چون تنها یک گروه مرتبهٔ ۲ یعنی $\mathbb{Z}_2$ داریم لذا احتمالاً آن زیرگروه سره، $\mathbb{Z}_2$ خواهد بود.

بنابراین اگر گروه $\mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^2\}$ با رابطهٔ $a^3 = e$ در نظر گرفته شود آنگاه هر زیرگروه سره H باید از نوع $H = \{e, a\}$ یا $H = \{e, a^2\}$ باشد. باوجود این، در $\mathbb{Z}_3$، $a^2 \neq e$ و

1- Improper

از این رو $\{e, a\}$ نمی تواند یک گروه $\mathbb{Z}_2$ باشد. بطریق مشابه،

$$(a^2)^2 = a^4 = a^3 . a = a$$

زیرا در $\mathbb{Z}_3$، $a^3 = e$ می باشد. بنابراین $(a^2)^2 \neq e$ و درنتیجه $\{e, a^2\}$ نیز یک گروه $\mathbb{Z}_2$ نیست. ولی ایندو تنها زیرگروههای سره ممکن برای $\mathbb{Z}_2$ می توانستند باشند. بنابراین نتیجه می گیریم که $\mathbb{Z}_3$ هیچ زیرگروه سره ندارد.

(۳) اگر گروه $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ با رابطهٔ $a^4 = e$ باشد آنگاه $(a^2)^2 = e$ و از این رو زیرمجموعه $\{e, a^2\}$ زیرگروه سره $\mathbb{Z}_2$ از $\mathbb{Z}_4$ است.

تمرین: آیا زیرگروههای سره دیگری برای $\mathbb{Z}_4$ وجود دارد؟

(۴) گروه با مرتبهٔ بی نهایت اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ (تحت قانون جمع) یک زیرگروه سره از گروه با مرتبهٔ بی نهایت اعداد گویای $\mathbb{Q}$ است.

(۵) اگر Y یک زیرمجموعه از مجموعه X باشد آنگاه $\mathrm{Perm}\,(Y)$ با یک زیرگروه از $\mathrm{Perm}\,(X)$ یکریخت است. بویژه، نگاشت $j := \mathrm{Perm}\,(Y) \to \mathrm{Perm}\,(X)$ را برای هر f متعلق به $\mathrm{Perm}\,(Y)$ با $\mathrm{j}(f) : X \to X$، بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$[j(f)](x) := f(x) \qquad \text{اگر } x \in Y \subset X \qquad (۲.۷)$$
$$:= x \qquad \text{اگر } x \notin Y.$$

تمرین.

ثابت کنید j درواقع یک یکریختی از $\mathrm{Perm}\,(Y)$ بر روی یک زیرگروه از $\mathrm{Perm}\,(X)$ است. برای این منظور باید نشان داد که

(الف) $j(f)$ یک نگاشت دوسویه از X می باشد اگر f نگاشت دوسویه ای از Y باشد.

(ب) بازای هر دو تابع f_1 و f_2 متعلق $\mathrm{Perm}\,(Y)$ داریم: $j(f_1 \circ f_2) = [j(f_1)]\circ[j(f_2)]$.

(ج) بعنوان تابعی از f در $\mathrm{Perm}\,(Y)$، تابع $f \rightsquigarrow j(f)$ یک بیک می باشد.

این مثال خیلی پیچیده تر از محتوی واقعی خود بنظر می رسد. در حالی که آنچه این تابع بیان می کند عبارتست ازجایگشتی از X که توسط جایگشت f از Y القا می شود و منظور همان جایگشت f بر اعضای X متعلق به زیرمجموعه Y بوده و بر سایر اعضای X خارج از Y اثری ندارد.

بعنوان مثال، در حالت خاص وقتی که $X := \{1, 2, 3\}$ و $Y := \{1, 2\}$ داریم $\mathrm{Perm}\,(X) = S_3$ و $\mathrm{Perm}\,(Y) = S_2$، و یکریختی $j: S_2 \to S_3$ عبارت است از

$$j\begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad j\begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{bmatrix} \cdot \qquad (۲.۸)$$

تذکر. اگر دقیقتر صحبت کنیم از مثال (۵) نمی توان نتیجه گرفت که $\mathrm{Perm}\,(Y)$ زیرگروهی از $\mathrm{Perm}\,(X)$ می باشد بلکه با زیرگروهی از آن یکریخت می باشد. باوجود این، گروههای یکریخت را یکی دانسته و معادل گروه مجرد در نظر می گیریم، از این رو فرقی مابین این دو مفهوم قائل نمی شویم مگر آنکه برای توضیح عباراتی لازم باشد.

از همان آغاز، اهمیت ویژه $\mathrm{Perm}\,(X)$، یعنی، گروه جایگشتهای مجموعه X مورد تأکید قرار گرفت. بطور قطع، گروههائی از این نوع نقش اساسی در فیزیک نظری جدید بازی می کنند. البته این گروهها از جایگاه ویژه خود در نظریهٔ ریاضی گروهها برخوردار می باشند، و این تاحدودی به دلیل قضیهٔ معروف زیر است که بیان می کند هر گروه را می توان بعنوان زیرگروهی از یک گروه $\mathrm{Perm}\,(X)$ برای مجموعه ای مانند X نمایش داد.

قضیهٔ (کیلی[1]).

هر گروه G با زیرگروهی از گروه جایگشت های مجموعه ای مانند X، یعنی $\mathrm{Perm}\,(X)$ یکریخت است.

1- Cayley

اثبات.

(الف) جهت اثبات این قضیه لازم است نشان دهیم که برای مجموعهٔ X، نگاشتی مانند $j : G \to \mathrm{Perm}\,(X)$ وجود دارد که در آن:

(i) j نگاشت یک بیک از G بتوی $\mathrm{Perm}\,(X)$ باشد،

(ii) برای هر دو عضو g_1 و g_2 متعلق به G داشته باشیم:

$$j(g_1 g_2) = j(g_1) \circ j(g_2). \qquad (۲.۹)$$

بدین منظور مجموعه X را خود G انتخاب نموده و نگاشت $j : G \to \mathrm{Perm}\,(G)$ را بشرح زیر تعریف می کنیم

$$j(g) := l_g\,, \qquad l_g\,(g') := gg'\,. \qquad (۲.۱۰)$$

قبل از اینکه نشان دهیم نگاشت تعریف شده در رابطهٔ (۲.۱۰) در دو شرط فوق صدق می کند باید ثابت کنیم که این نگاشت یک عضو از $\mathrm{Perm}\,(G)$ است یعنی برای تمام gها l_g یک نگاشت دوسوئی بر G می باشد. بنابراین،

(i) اگر $l_g(g_1) = l_g(g_2)$ ، آنگاه $gg_1 = gg_2$ و بنابراین $g_1 = g_2$ لذا نگاشت l_g بر G یک بیک می باشد.

(ii) بازای هر عضو g' متعلق به G داریم $l_g(g^{-1}g') = g'$ بنابراین نگاشت l_g بر G پوشا (یعنی بر روی) می باشد.

و بنابراین $l_g : G \to G$ یک نگاشت دوسوئی از G بر روی خودش می باشد.

(ب) اکنون می توان دو خاصیت مطرح شده در بالا را برای نگاشت $j : G \to \mathrm{Perm}\,(G)$ اثبات نمود:

(i) اگر g_1 و g_2 متعلق به G وجود داشته باشند بطوریکه $j(g_1) = j(g_2)$ آنگاه بازای هر g' متعلق به G داریم $j(g_1)\,(g') = j(g_2)\,(g')$ و بنابراین $l_{g_1}(g') = l_{g_2}(g')$ ، یعنی $g_1 g' = g_2 g'$. بویژه، با انتخاب $g' = e$ معلوم

می شود که $g_1 = g_2$. بنابراین j از G بتوی $\mathrm{Perm}\,(G)$ یک نگاشت یک بیک است.

(ii) اکنون نشان می‌دهیم که j قانون ترکیب گروهی را حفظ می کند. بازای هر g_1 و g_2 در G، و برای هر g متعلق به G،

$$\begin{aligned} j(g_1g_2)(g) &= l_{g_1g_2}(g) = (g_1g_2)g = g_1(g_2g) \\ &= l_{g_1}(l_{g_2}(g)) = l_{g_1}\circ l_{g_2}(g) = j(g_1)\circ j(g_2)(g) \end{aligned}$$

بنابراین $j(g_1g_2) = j(g_1)\circ j(g_2)$.

لذا $j : G \to \mathrm{Perm}\,(G)$ یک یکریختی از G بر روی یک زیرگروه از $\mathrm{Perm}\,(\mathrm{G})$ می باشد.

تذکر. اگر G یک گروه متناهی از مرتبهٔ N باشد آنگاه این قضیه بیان می کند که G با یک زیرگروه از گروه متقارن S_N یکریخت است.

۱.۳. گروههای پیوسته

تمام گروههائی که تاکنون بررسی کرده ایم، گروههائی با تعداد اعضای معین (مانند $\mathbb{Z}_N$ و S_N) و یا گروههائی با تعداد اعضای بی نهایت ولی شمارا (مانند $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$) هستند. باوجود این، واضح است که حالات دیگری وجود دارد، دستهٔ مهمی از گروهها با تعداد اعضای بی نهایت ولی از نوع پیوسته و نه شمارا وجود دارند. گروههائی از این نوع در فیزیک نظری جدید نقش بسیار اساسی بازی می کنند.

مثالها.

(۱) مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با قانون ترکیب گروهی جمع معمولی اعداد، یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد. توجه کنید که گروههای بی‌پایان و شمارای $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ زیرگروههائی از $\mathbb{R}$ هستند.

به طریق مشابه مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تحت قانون جمع، یک گروه آبلی بی‌پایان پیوسته تشکیل می‌دهد.

(۲) مجموعه اعداد حقیقی مثبت $\mathbb{R}_+$ تحت قانون ضرب، یک گروه آبلی بی‌پایان پیوسته تشکیل می‌دهد.

(۳) گروه آبلی $\mathbb{R}$ را n بار در خودش ضرب نموده و این حاصلضرب را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. بنابراین اعضای گروه $\mathbb{R}^n$ مجموعه اعداد حقیقی $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ با قانون ترکیب

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (r'_1, r'_2, \ldots, r'_n) \quad := \quad (r_1 + r'_1, \ldots, r_n + r'_n)$$

و با عضو واحد $(0, 0, \ldots, 0)$ می‌باشند. باید توجه نمود به این دلیل که $\mathbb{R}^n$ یک گروه آبلی است قانون ترکیب بین اعضای آنرا با "+" نشان داده‌ایم. واضح است که این گروه پیوسته بوده و دارای مرتبهٔ بی‌نهایت است. توضیحات مشابهی در مورد گروه $\mathbb{C}^n$ نیز وجود دارد.

(۴) مجموعه ماتریسهای $n \times n$ حقیقی $M(n, \mathbb{R})$ تحت عمل جمع ماتریسها، یک گروه آبلی پیوسته با مرتبهٔ بی‌پایان تشکیل می‌دهد. با این وجود توجه کنید، از آنجا که همهٔ اعضای $M(n, \mathbb{R})$ تحت قانون ضرب ماتریسها دارای عضو وارون نبوده لذا تحت این عمل تشکیل گروه نمی‌دهد. ملاحظات مشابه در مورد مجموعه ماتریسهای $n \times n$ مختلط $M(n, \mathbb{C})$ نیز صحت دارد. باید توجه نمود که $M(n, \mathbb{R})$ زیرگروهی از $M(n, \mathbb{C})$ می‌باشد.

(۵) مجموعه اعداد مختلط با قدرمطلق واحد $\mathrm{U}(1)$ تحت عمل ضرب معمولی اعداد مختلط، یک گروه آبلی بی‌پایان پیوسته تشکیل می‌دهد.

اصطلاح مهم «بی پایان پیوسته» مفهوم **بُعد حقیقی** این گروهها را مورد اشاره قرار می‌دهد. اگر بخواهیم بطور غیردقیق صحبت کنیم، بُعد یک گروه بی پایان پیوسته تعداد اعداد حقیقی لازم برای مشخص نمودن اعضای گروه می باشد. بنابراین گروههای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ به ترتیب دارای ابعاد ۱ و n هستند، و از آنجا که هر عدد مختلط توسط دو عدد حقیقی مشخص می شود گروه $\mathbb{C}$ دارای بُعد حقیقی ۲ می باشد. به طریق مشابه گروههای ماتریسی $M(n, \mathbb{R})$ و $M(n, \mathbb{C})$ به ترتیب دارای ابعاد n^2 و $2n^2$ هستند. درحقیقت، به آسانی می توان ثابت نمود که گروه $M(n, \mathbb{R})$ با گروه $\mathbb{R}^{n^2}$ یکریخت می باشد.

گروه $\mathbb{R}_+$ مثال دیگری برای یک گروه یک بُعدی است. درواقع هر عدد حقیقی مثبت x را می توان بطور منحصر بفردی به شکل $x = e^r$ نوشت که در آن r یک عدد حقیقی منحصر بفرد است لذا این عدد حقیقی برای پارامتریزه کردن گروه $\mathbb{R}_+$ مورد استفاده قرار می گیرد.

گروه اعداد مختلط با قدرمطلق واحد $\mathrm{U}(1)$ یکی از مثالهای بسیار جالب دیگر برای یک گروه یک بُعدی است. هر عدد مختلط با قدرمطلق واحد را می توان به شکل e^{ir} نوشت که در آن r یک عدد حقیقی صرف نظر از هر مضرب صحیح اختیاری از 2π می باشد.

آشکار است که از دیدگاه هندسی گروه $\mathrm{U}(1)$ دارای ساختار توپولوژیک دایره می باشد. یقیناً آن یک فضای یک بعدی است، اما از دیدگاه توپولوژیکی با فضای یک بُعدی ساده $\mathbb{R}$ متفاوت است.

این خود سؤال جالبی را مطرح می نماید. دیدیم که بازای هر n، گروه $\mathbb{R}^n$ یک فضای n بُعدی است، ولی فضاهای n بُعدی بسیار دیگری که از نظر توپولوژیکی با $\mathbb{R}^n$ متفاوت هستند وجود دارند. آیا به این فضاها نیز می توان ساختار گروهی داد؟ البته اینچنین گروههائی اگرچه n بُعدی خواهند بود ولی از نظر توپولوژیکی از گروه سادهٔ $\mathbb{R}^n$ متفاوت خواهند بود (مانند تفاوت گروه $\mathrm{U}(1)$ از گروه $\mathbb{R}$). باید توجه نمود که در پاسخ به این سؤال گفتنی بسیار زیاد است زیرا اگرچه برای تشکیل فضای n بُعدی به تمامی اعضای گروه نیازی نداریم، اما مختصات نقطهٔ gg' (یعنی مجموعهٔ n عدد حقیقی لازم که اعضای گروه را پیرامون نقطهٔ gg' توصیف می کنند) باید توابع پیوسته (یا حتی مشتق پذیر) مناسبی از مختصات اعضای g و g' گروه باشند.

بعنوان مثال، در مورد گروه $\mathbb{R}^n$ ، مختصات عضو $g = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ از گروه را

می توان بطور ساده همان مجموعهٔ n عدد حقیقی $r_1, r_2, \ldots, r_n$ انتخاب نمود در این صورت واضح است که مختصات عضو $gg' = (r_1 + r'_1, \ldots, r_n + r'_n)$ توابع دیفرانسیل‌پذیری از مختصات اعضای g و g' هستند. تحمیل شرایط پیوستگی و مشتق‌پذیری برای معنی‌دار نمودن نظریهٔ گروههای بی‌پایان پیوسته ضروری می باشد.

مثالها.

(۱) چنبرهٔ ـ ۲ یعنی سطح یک «دُونات[1] امریکائی» ، مثال بسیار ساده‌ای برای فضای گروهی دوبُعدی است. درحقیقت فضای گروهی آن همان ضرب گروهی $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ می باشد، زیرا چنبرهٔ ـ۲ از نظر توپولوژیکی حاصلضرب کارتزی دو دایره است، یعنی هر نقطه از چنبره توسط مختصات دو دایرهٔ استوائی که از آن عبور می کنند توصیف می شود.

(۲) مثال ساده دیگر برای فضای دوبُعدی کرهٔ دوبُعدی است که بصورت مجموعه همهٔ نقاط (x, y, z) در فضای کارتزی معمولی سه بعدی با قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ تعریف می شود. اما بدلیل نامعلوم هیچ گروه بی پایان پیوسته‌ای با فضای گروهی کرهٔ دوبُعدی وجود ندارد.

(۳) در فضاهای با بُعد بالاتر چنبرهٔ n بُعدی ساختار گروهی نظیر گروه بدست آمده از حاصل ضرب کارتزی n گروه $\mathrm{U}(1) \times \ldots \times \mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ را دارد.

همچنین کراتی با ابعاد بیشتر از ۲ وجود دارند. درحقیقت کرهٔ n بُعدی بصورت مجموعهٔ همه نقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ در فضای کارتزی $n + 1$ بُعدی با قید زیر تعریف می شود

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = \text{ثابت}.$$

کرهٔ سه بُعدی بعنوان تنها کره‌ای که ساختار یک گروه بی‌پایان پیوسته را دارد و نیز بعنوان یک مثال، در این کتاب حائز اهمیت خواهد بود.

در این مرحله، وقت آن رسیده است که تعریف دقیقی از آنچه راجع به آن صحبت شده

1- Doughnut

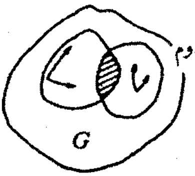
(گروههای لی) ارائه دهیم و همچنین مثالهای نسبتاً غیربدیهی تری برای این گروهها بسازیم.

تعریف.

مجموعه ای مانند G یک **گروه لی** با بُعد حقیقی n نامیده می شود اگر

(الف) G یک گروه با خواص گروهی توصیف شده در بخش ۱.۲ باشد.

(ب) G یک چندگونای دیفرانسیل پذیر n بُعدی باشد، یعنی اگر G را به نواحی که به قدر کافی کوچک انتخاب می شوند تقسیم کنیم نقاط آنرا بتوان با n عدد حقیقی پارامتریزه نمود، در این صورت اگر مجموعه دومی از n مختصهٔ ناحیهٔ دیگر برای پارامتریزه کردن نقاط مشترک هم پوشانی شده بوسیلهٔ ناحیهٔ اول مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه در این منطقهٔ هم پوشانی شده باید مجموعه پارامترهای (یا مختصات) اولیه توابعی دیفرانسیل پذیر از مجموعه پارامترهای دوم باشند و برعکس.



در ضمن لازم است که قانون ترکیب گروهی و تعریف عضو وارون شرایط زیر را تأمین نمایند.

(۱) هرگاه نواحی مختصات g، g' و gg' باهم، هم پوشانی داشته باشند یعنی ناحیه ای وجود داشته باشد که در آن هر سه عضو گروهی g، g' و gg' با یک مجموعه مختصات بیان شوند در این صورت باید در آن ناحیه مختصات gg' توابع دیفرانسیل پذیر از مختصات g و g' باشند.

(۲) هرگاه نواحی مختصات g و g^{-1} باهم، هم پوشانی داشته باشند در این صورت در ناحیه ای

که دو عضو گروهی g و g^{-1} با یک مختصات بیان می‌شوند باید مختصات g^{-1} توابعی دیفرانسیل پذیر از مختصات g باشند.

در تعریف بالا به امکان وجود نواحی مختصاتِ به اندازهٔ کافی کوچک و نیز نواحی هم‌پوشانی توجه نمائید. علت این امر آنست که در حالت کلی نمی توان تمام نقاط چندگونای n بُعدی را با n مختصهٔ هموار پارامتریزه نمود. درواقع، هر چندگونای n بُعدی که برای آن چنین چیزی ممکن باشد از نظر توپولوژیکی با فضای n بُعدی $\mathbb{R}^n$ یکسان می باشد. [**تذکر.** در اینجا با بکار بردن نماد $\mathbb{R}^n$، آنرا بعنوان یک گروه در نظر نمی گیریم بلکه ساختار توپولوژیکی گروه آبلی $\mathbb{R}^n$ موردنظر است یعنی فضای توپولوژیکی اعداد حقیقی n - تائی $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ را بعنوان نقاط پیوسته $\mathbb{R}^n$ مورد توجه قرار می‌دهیم.]

بطور کلی در یک چندگونای دیفرانسیل پذیر بهتر است ناحیه ها را توسط مجموعه ای از n مختصه پارامتریزه نمود، ولی باید مطمئن بود در نواحی هم‌پوشانی شده که در آنها عملاً از دو سیستم مختصات متفاوت استفاده می شود، مختصات مختلف توابع دیفرانسیل پذیری از یکدیگر باشند.

اکنون چند مثال مهم از گروههای لی را بعنوان نمونه در زیر شرح می‌دهیم.

مثالها.

(۱) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریسی در مجموعه $M(n, \mathbb{R})$ وارون پذیر باشد اینست که دترمینان آن مخالف صفر باشد. این شرط منجر به تعریف گروه تبدیلات **خطی عمومی** n بُعدی بشرح زیر می شود

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

این مجموعه ماتریسهای وارون پذیر تحت قانون ضرب ماتریسها تشکیل گروه می دهند، وارون هر عضو گروه همان وارون معمولی در مجموعه ماتریسها، و عضو واحد همان ماتریس واحد $\mathbf{1}$ است.

مجموعه مختصات مناسب روی $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ توسط n^2 عضو ماتریسی تأمین می شود [یعنی مختصاتی که بعنوان یک زیرفضا از $M(n, \mathbb{R})$ بدست می آید.] بسهولت و بطور دقیق می توان ثابت نمود که $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ یک گروه لی n^2 بُعدی است. باید توجه نمود برعکس حالت $M(n, \mathbb{R})$، مختصات نظیر اعضای ماتریسی آن، تمام $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ را نمی تواند بطور هموار پوشش دهد. این از آن جهت است که $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ از دیدگاه توپولوژیک با $M(n, \mathbb{R})$ متفاوت می باشد (و یا $M(n, \mathbb{R})$ از نقطه نظر توپولوژیکی با $\mathbb{R}^{n^2}$ یکسان است)؛ بعنوان مثال، در $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ حلقه[1]هایی وجود دارند که نمی توان آنها را بطور هموار به یک نقطه منقبض نمود (مانند حلقه هایی که یک چنبره را احاطه می کنند).

(۲) بطور مشابه، مجموعه

$$\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C}) := \{A \in M(n,\ \mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}$$

یک گروه لی $2n^2$ بُعدی می باشد. باید توجه نمود که بازای $n > 1$، $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ و $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ هر دو غیرآبلی می باشند، و این بدان دلیل است که جفت ماتریسهای A و B زیادی وجود دارند که برای آنها حاصلضرب AB متفاوت از BA می باشد.

(۳) مجموعه ماتریسهای

$$\mathrm{GL}^+(n,\ \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$$

زیرگروهی از $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ می باشد زیرا،

(الف) $\det(\mathbf{1}) = 1$، یعنی عضو واحد $\mathbf{1}$ متعلق به $\mathrm{GL}^+(n,\ \mathbb{R})$ می باشد،

(ب) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. لذا اگر $\det(A) > 0$ و $\det(B) > 0$ باشد آنگاه $\det(AB) > 0$ خواهد بود (یعنی اگر A و B به $\mathrm{GL}^+(n,\ \mathbb{R})$ متعلق باشند آنگاه AB نیز متعلق به آن می باشد)،

1- Loop

(ج) $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$، بنابراین، اگر ماتریس A متعلق به زیرمجموعه $GL^+(n, \mathbb{R})$ باشد وارون آن نیز به $GL^+(n, \mathbb{R})$ متعلق خواهد بود.

بنابراین سه شرط لازم برای زیرگروه بودن $GL^+(n, \mathbb{R})$ برقرار می باشد.

باید توجه نمود که $GL(n, \mathbb{R})$ از دو تکه مجزا تشکیل یافته است که توسط علامت $\det(A)$ مشخص می شوند بعبارتی دیگر انتخاب علامت مثبت یا منفی برای $\det(A)$ گروه $GL(n, \mathbb{R})$ را به دو ناحیهٔ غیرمتصل تجزیه می‌کند. بنابراین، زیرگروه $GL^+(n, \mathbb{R})$، مانند $GL(n, \mathbb{R})$ یک گروه لی n^2 بُعدی می باشد.

(۴) گروه تبدیلات موبیوس صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ بعنوان زیرمجموعه‌ای از تبدیلات $\mathrm{Perm}(\mathbb{C})$ بصورت زیر تعریف می شود

$$z \rightsquigarrow \frac{az+b}{cz+d} \text{ ، } a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{و} \quad ad - bc = 1. \qquad (۳.۱)$$

این یک گروه لی شش بُعدی است و نقش مهمی در ساختار هندسی آنالیز مختلط بازی می کند.

بیشتر گروههای مهم که در فیزیک نظری مطرح می شوند زیرگروههائی از گروه عمومی تبدیلات خطی می باشند. بعنوان مثال:

مثالها.

(۱) گروه خطی خاص بصورت زیر تعریف می شود

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

مشابه $GL^+(n, \mathbb{R})$ بسهولت می توان ثابت نمود که گروه $SL(n, \mathbb{R})$ سه شرط زیرگروهی را دارا می باشد. باید توجه نمود که در این حالت، شرط $\det(A) = 1$ یک معادلهٔ چندجمله ای برحسب درایه های ماتریسی A_{ij} ، $i, j = 1, \ldots, n$ از ماتریس A می باشد.

بخاطر وجود این قید بُعد گروه لی $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ یکی کمتر از بُعد $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می باشد، یعنی بُعد آن مساوی $n^2 - 1$ است. (این بحث تاحدی غیردقیق است ولی می توان آنرا دقیقتر نمود).

(۲) بطور مشابه

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$$

یک گروه لی با بُعد حقیقی $2(n^2 - 1)$ می باشد. درست به دلایلی که $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ زیرگروهی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ است، گروه لی $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ نیز، زیرگروهی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ می باشد.

(۳) مثال بعدی از اهمیت قابل ملاحظه ای برخوردار است. گروه **متعامد** حقیقی یعنی مجموعه همه ماتریسهای حقیقی $n \times n$ متعامد که زیرگروهی از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می باشد، عبارت است از:

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : AA^t = \mathbf{1}\}$$

که A^t ترانهاد ماتریس A می باشد.

سه شرط زیرگروه بودن برای زیرمجموعه $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ برقرار می باشد، زیرا

(الف) $\mathbf{1}\mathbf{1}^t = \mathbf{1}$ بنابراین ماتریس واحد متعلق به $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ می باشد،

(ب) اگر $AA^t = \mathbf{1}$ و $BB^t = \mathbf{1}$ آنگاه

$$(AB)\,(AB)^t = (AB)\,B^t A^t = AA^t = \mathbf{1}.$$

بنابراین حاصلضرب دو ماتریس متعامد خود یک ماتریس متعامد می باشد،

(ج) باید توجه نمود که اگر $AA^t = \mathbf{1}$ آنگاه $A^{-1} = A^t$، و بنابراین

$$A^{-1}(A^{-1})^t = A^tA = A^{-1}A = \mathbf{1}.$$

بنابراین وارون یک ماتریس متعامد یک ماتریس متعامد است.

زیرگروه $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ نیز یک گروه لی می باشد بطوریکه از قید $AA^t = \mathbf{1}$ که منجر به یک سری معادلات چندجمله ای روی درایه های ماتریسی A در مجموعه $M(n, \mathbb{R})$ می شود، می توان بُعد $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ را به شرح زیر تعیین نمود.

(الف) درایه های قطری معادلهٔ ماتریسی $AA^t = \mathbf{1}$ منجر به n معادلهٔ کثیرالجمله ای می شود؛

(ب) $(n^2 - n)/2$ معادلهٔ کثیرالجمله ای دیگر از درایه های بالائی قطر اصلی معادلهٔ ماتریسی $AA^t = \mathbf{1}$ بدست می آید؛

(ج) درایه های ماتریسی زیر قطر اصلی معادلهٔ ماتریسی $AA^t = \mathbf{1}$ منجر به معادلات اضافی نمی شوند زیرا این معادلات با معادلات بدست آمده از درایه های بالائی قطر اصلی یکی هستند.

بنابراین معادلهٔ ماتریسی $AA^t = \mathbf{1}$ با $n + (n^2 - n)/2 = (n^2 + n)/2$ معادلهٔ کثیرالجمله ای برحسب n^2 درایه از ماتریس A معادل می باشد. این بدین معنی است (حتی می توان دقیقتر از این نیز استدلال نمود) که $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ دارای بُعد $n^2 - (n^2 + n)/2 = n(n-1)/2$ می باشد.

(۴) از معادلهٔ $AA^t = \mathbf{1}$ معادلهٔ $\det(A) = \pm 1$ بدست می‌آید. بنابراین‌گروه پیوسته $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ نیز برحسب علامت $\det(A)$ به دو قسمت مجزا تجزیه می گردد، و این امر تعریف **گروه متعامد خاص** را به دنبال می آورد.

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

اثبات اینکه $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ زیرگروهی از $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ است درست مشابه اثبات زیرگروه بودن $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می باشد. بُعد $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ دقیقاً با بُعد

$O(n, \mathbb{R})$ یعنی $n(n-1)/2$ برابر است.

باید توجه نمود که اگر بعنوان مثال، زیرگروه بودن H از G را با نماد معمول در نظریهٔ مجموعه ها یعنی $H \subset G$ نشان دهیم، آنگاه زنجیرهٔ زیرگروههای زیر را خواهیم داشت:

$$SO(n, \mathbb{R}) \subset O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R}) \\ \subset GL^+(n, \mathbb{R}) \subset \tag{۳.۲}$$

البته $O(n, \mathbb{R})$ یک زیرگروه از $GL^+(n, \mathbb{R})$ نمی باشد.

ساده ترین مثال حائز اهمیت از گروه ماتریسهای متعامد خاص $SO(2, \mathbb{R})$ می باشد، یعنی مجموعه همهٔ ماتریس های 2×2 حقیقی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که در شرایط زیر صدق می کنند

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۳.۳}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1\,. \tag{۳.۴}$$

معادلهٔ (۳.۳) با سه معادلهٔ زیر معادل می باشد

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{۳.۵}$$

$$c^2 + d^2 = 1 \tag{۳.۶}$$

$$ac + bd = 0\,, \tag{۳.۷}$$

در عین حال معادلهٔ (۳.۴) منجر به معادلهٔ

$$ad - bc = 1 \tag{۳.۸}$$

می شود.

از معادلات (۸-۳.۷) معادلهٔ

$$c = -\frac{bd}{a} = -\frac{b}{a}\frac{(1 + bc)}{a} \tag{۳.۹}$$

بدست می‌آید بنابراین $c\,(1 + b^2/a^2) = -b/a^2$، یعنی،

$$c = -b/(a^2 + b^2) \tag{۳.۱۰}$$

که، از معادله (۳.۵) رابطهٔ زیر بدست می‌آید

$$c = -b. \tag{۳.۱۱}$$

بطریق مشابه ثابت می شود که

$$d = a. \tag{۳.۱۲}$$

بالاخره، از معادلهٔ (۳.۵) معلوم می شود که، بدون آنکه از کلیّت مسئله کاسته شود، بازای زاویه‌ای مانند θ می توان نوشت $a = \cos\theta$ و $b = \sin\theta$. بنابراین شکل عمومی ماتریسهای متعلق به $SO(2, \mathbb{R})$ را می توان بصورت زیر معرفی نمود

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi\,. \tag{۳.۱۳}$$

معادلهٔ (۳.۱۳) بوضوح نشان می دهد که گروه لی $SO(2, \mathbb{R})$ درست مشابه گروه $U(1)$ دارای ساختار توپولوژیکی دایره است. درواقع این دو گروه لی یک بعدی آبلی باهم

یکریخت می باشند، یکریختی که عضو $e^{i\theta}$ متعلق به $\mathrm{U}(1)$ را به ماتریس معادلهٔ (۳.۱۳) متعلق به $\mathrm{SO}(2,\ \mathbb{R})$ نگاشت می دهد.

تمام زیرگروههای فوق زیرگروههائی از گروه تبدیلات عمومی خطی حقیقی $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ هستند. مجموعه گروههای مهم دیگری بعنوان زیرگروههایی از گروه تبدیلات عمومی خطی مختلط $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ وجود دارند.

مثالها.

(۱) مشابه گروه ماتریسهای متعامد حقیقی، گروه یکانی $\mathrm{U}(n)$ برای هر n بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})\ :\ AA^{\dagger} = \mathbf{1}\},$$

که $A^{\dagger}$ الحاقی ماتریس A بوده و بصورت $(A^{\dagger})_{ij} := A^{*}_{ji}$ ، که A^{*}_{ij} مزدوج مختلط درایه ماتریسی A_{ij} با شرط $0 \leq i, j \leq n$ است، تعریف می شود. رابطهٔ $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$ نشان می دهد که گروه لی $\mathrm{U}(n)$ درواقع یک زیرگروه از $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ است و همچنین با استدلال مشابه بکار رفته در مورد $\mathrm{O}(n,\ \mathbb{R})$ می توان نشان داد که بُعد حقیقی این گروه لی برابر n^2 است، (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

توجه کنید که گروه لی $\mathrm{GL}(1,\ \mathbb{C})$ درواقع همان مجموعهٔ اعداد مختلط غیرصفر $\mathbb{C}_*$ است زیرا یک ماتریس 1×1 یک عدد مختلط تنها می باشد که دترمینانش برابر خودش است. درنتیجه $\mathrm{U}(1)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C}_*\ :\ zz^* = 1\} \tag{۳.۱۴}$$

زیرا الحاقی یک ماتریس 1×1 درست برابر مزدوج مختلط عدد مختلط نظیرش می باشد. اما شرط (۳.۱۴) درعین حال بیان می کند که $\mathrm{U}(1)$ همان مجموعهٔ اعداد مختلط با قدرمطلق واحد است.

این موضوع نشان می دهد که تعریف قبلی برای گروه لی $\mathrm{U}(1)$ با تعریف کلی $\mathrm{U}(n)$ در حالت خاص $n = 1$ معادل می باشد. باوجود این، باید توجه نمود که $\mathrm{U}(n)$ بازای $n > 1$، یک گروه کاملاً پیچیده با بُعد n^2 و همچنین غیرآبلی است.

(۲) گروهی که در طبقه بندی ذرات بنیادی و نیز ساختن تئوریهای اتحاد بزرگ نقش بسیار مهمی بازی می کند **گروه یکانی خاص** است که بازای هر n بصورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) : \det(A) = 1\}.$$

با استفاده از فرآیندی که حالا دیگر برای ما آشنا است، می توان نشان داد این قید اضافی که زیرگروه $\mathrm{SU}(n)$ را تعریف می کند درعین حال موجب می شود بُعد آن یکی کمتر از بُعد $\mathrm{U}(n)$ یعنی برابر $n^2 - 1$ گردد.

توجه کنید که $\mathrm{SU}(1)$ چون فقط شامل یک عضو همانی، یعنی عدد ۱ می باشد یک گروه بدیهی است! ازطرف دیگر، گروه بعدی در این سری از گروهها یعنی $\mathrm{SU}(2)$ هم از دیدگاه ساختار ریاضی و هم از نقطه نظر کاربرد آن در فیزیک یک گروه حائز اهمیت می باشد. شناخت بهتر گروه سه بعدی $\mathrm{SU}(2)$ را با بررسی گروه چهار بعدی $\mathrm{U}(2)$ آغاز می کنیم. گروه $\mathrm{U}(2)$ مجموعه تمام ماتریسهای مختلط 2×2 که در رابطهٔ $AA^\dagger = \mathbf{1}$ صدق می کنند، می باشد. (توجه کنید که رابطهٔ اخیر خودبخود بیان می کند $\det(A) \neq 0$.) بنابراین $\mathrm{U}(2)$ مجموعه ماتریسهایی بصورت

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad (۳.۱۵)$$

می باشد که آن چنین ایجاب می کند:

$$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1 \qquad (۳.۱۶)$$

$$ac^* + bd^* = 0 . \qquad (۳.۱۷)$$

شرط $\det(A) = 1$ برای گروه SU(2) قید اضافی زیر را نیز روی پارامترهای a، b، c و d تحمیل می کند

$$ad - bc = 1. \qquad (۳.۱۸)$$

بطریقی که در مورد گروه $SO(n, \mathbb{R})$ معادلات (۸-۳.۵) را مورد بررسی قرار دادیم می توانیم معادلات (۱۸-۳.۱۶) را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. مشابه معادلات (۱۲-۳.۱۱) می توان نتیجه گرفت

$$c = -b^* \qquad \text{و} \qquad d = a^* \qquad (۳.۱۹)$$

بنابراین شکل عمومی ماتریسهای متعلق به گروه SU(2) بصورت زیر می باشد

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 . \qquad (۳.۲۰)$$

بنابراین از دیدگاه توپولوژیکی، فضای گروه SU(2) همان مجموعه تمام جفت اعداد مختلط (a, b) می باشد که در قید (۳.۲۰) صدق می کنند. ولی عدد مختلط a متشکل از جفت اعداد حقیقی $\mathrm{Im}(a)$ و $\mathrm{Re}(a)$ است، که $\mathrm{Re}(a)$ و $\mathrm{Im}(a)$ به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی عدد a هستند. بنابراین فضای گروه SU(2) را می توان بعنوان مجموعه تمام چهارتائی های مرتب اعداد حقیقی $(\mathrm{Re}(a), \mathrm{Im}(a), \mathrm{Re}(b), \mathrm{Im}(b))$ که در قید

$$[\mathrm{Re}(a)]^2 + [\mathrm{Im}(a)]^2 + [\mathrm{Re}(b)]^2 + [\mathrm{Im}(b)]^2 = 1 \qquad (۳.۲۱)$$

صدق می کنند تصور نمود و این درست معادله یک کرهٔ سه بعدی گنجانده شده در فضای کارتزی چهار بُعدی حقیقی $\mathbb{R}^4$ با مختصات $\mathrm{Re}(a)$، $\mathrm{Im}(a)$، $\mathrm{Re}(b)$، $\mathrm{Im}(b)$ می باشد، یعنی،

از دیدگاه توپولوژیکی، گروه $\mathrm{SU}(2)$ یک کره سه بعدی است.

نتیجهٔ فوق بسیار جالب توجه می باشد، زیرا ترکیب ایده های نظریه گروهها و هندسه را در یک گروه لی، بوضوح نشان می دهد.

بعنوان آخرین مثال از گروههای لی (که از دیدگاه فیزیکی نیز خیلی مهم می باشد)، گروه هایزنبرگ - وایل را مورد بررسی قرار می دهیم. اعضای این گروه مجموعهٔ تمامی سه تائی های مرتب $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r)$ که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای معمولی سه بعدی و r یک عدد حقیقی است، می باشند. بنابراین از دیدگاه توپولوژیکی فضای این گروه با فضای کارتزی $\mathbb{R}^7$ یکسان می باشد. باوجود این، قانون ترکیب گروهی آن متفاوت از گروه آبلی $\mathbb{R}^7$ بوده و بصورت زیر تعریف می شود

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r)(\mathbf{a}', \mathbf{b}', r') := \left(\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}', r + r' + \frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a})\right). \qquad (۳.۲۲)$$

واضح است که بخاطر وجود عامل $\frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}' - \mathbf{b}'\cdot\mathbf{a})$ در جملهٔ آخر، این قانون ترکیب دیگر قانون گروهی $\mathbb{R}^7$ نیست. باوجود اختلاف زیاد بخاطر وجود جملهٔ اضافی، گروه هایزنبرگ - وایل ارتباط عمیقی با روابط جابجائی کانونیکی نظیر حرکت ذرهٔ مکانیک کوانتومی در فضای سه بعدی دارد

$$\begin{aligned} [\hat{q}_a, \hat{q}_b] = [\hat{p}_a, \hat{p}_b] &= 0 \\ [\hat{q}_a, \hat{p}_b] &= i\,\delta_{ab} \end{aligned} \qquad a, b = 1, 2, 3\,. \qquad (۳.۲۳)$$

۱.۴ عملیات گروهی روی یک مجموعه

در بخش ۲.۱، با استفاده از قضیهٔ کیلی ملاحظه نمودیم که هر گروه G را می توان بعنوان زیرگروهی از گروه نگاشتهای دوسویی مجموعه داده شده X، یعنی $X = G$ در نظر گرفت. این موضوع را می توان بصورت وسیعی در ارتباط با کاربرد نظریه گروهها در فیزیک (و سایر شاخه های ریاضیات محض) توسعه داد در این رابطه معمولاً دو سؤال مهم قابل ملاحظه و جالب مرتباً مطرح می شود.

(۱) بازای گروه G داده شده، برای چه مجموعه های Xیی G بعنوان یک زیرگروه از Perm (X) ظاهر می شود؟

(۲) بالعکس، بازای مجموعه X داده شده، کدام گروههای G بعنوان زیرگروههایی از Perm (X) ظاهر می شوند؟

این سؤالات برحسب موارد مختلف می توانند تغییر کنند، ولی در تمام این حالات ایده اصلی پیدا نمودن نمایشهای گروهی مانند G در گروه Perm (X) مربوط به مجموعهٔ X می باشد. بطورکلی، وقتی می گوئیم یک نمایش از گروه G_1 در گروه دیگری مانند G_2 داریم یعنی یک همریختی مابین این دو گروه برقرار است. همریختی مفهومی ضعیفتر از یکریختی (که در بخش ۲.۱ معرفی گردید) است، و آن به این معنی است که مابین دو گروه نگاشتی با حفظ قانون گروهی آن دو وجود دارد بدون آنکه دوسویه بودن این نگاشت ضرورت داشته باشد. تعریف صوری همریختی بشرح زیر است:

تعریف.

یک همریختی مابین دو گروه G_1 و G_2 عبارت است از یک نگاشت $\mu : G_1 \to G_2$
که قانون ترکیب گروهی را به معنی زیر حفظ می کند

$$\mu(gg') = \mu(g)\mu(g') \quad \forall\, g, g' \in G \qquad (۴.۱)$$

ملاحظات.

(الف) از معادلهٔ (۴.۱) داریم (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

(۱) $\mu(e_1) = e_2$ ، که در آن e_1 و e_2 به ترتیب عضوهای واحد G_1 و G_2 هستند.

(۲) $\mu(g^{-1}) = [\mu(g)]^{-1}$ ، که بازای هر g متعلق به G_1 برقرار است.

(ب) یکریختی حالت خاصی از همریختی می باشد که در آن دوسویی بودن نگاشت مابین مجموعه های G_1 و G_2 الزامی است. توجه کنید، در این حالت، نگاشت $\mu^{-1}: G_2 \to G_1$ یعنی وارون نگاشت $\mu : G_1 \to G_2$ نیز یک همریختی است (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

(ج) اگر نگاشت $\mu: G_1 \to G_2$ یک بیک نباشد، آنگاه برخی از اعضای G_1 در G_2 نمایش داده نمی شوند، و بطور مشابه، اگر $\mu : G_1 \to G_2$ نگاشت پوشا نباشد آنگاه برخی از اعضای G_2 برای نمایش G_1 اضافی هستند. در بخش ۱.۵ این مفاهیم بطور دقیق فرموله خواهند شد.

اکنون می توان با استفاده از ایده همریختی مابین دو گروه نمایش گروه G در گروه جایگشتهای مجموعه ای مانند X را تعریف نمود.

تعریف.

گفته می شود که گروه G بوسیلهٔ نگاشتهای دوسوئی مجموعه X نمایش داده می شود، یا از سمت چپ روی اعضای X اثر می کند، اگر یک نگاشت همریختی $\mu : G \to \text{Perm}\ (X)$ وجود داشته باشد.

ملاحظات.

(الف) بطور مرسوم نگاشت $\mu(g) : X \to X$ را توسط L_g نشان می دهند و در این حالت شرط اساسی در معادلهٔ (۴.۱) به شکل زیر نوشته می شود

$$L_{g_2} \circ L_{g_1} = L_{g_2 g_1} \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G. \tag{۴.۲}$$

برای سهولت، معمولاً نقطه $\mu(g)(x) = L_g(x)$ متعلق به مجموعه X که از اثر g متعلق به G روی نقطهٔ x در X بدست می‌آید به شکل gx نوشته می‌شود، و در این نمادگذاری معادلات (۲-۴.۱) بصورت زیر بیان می‌شوند

$$g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x \qquad \forall\, x \in X \qquad \text{و} \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G.$$

(ب) اگر تابعی از G بتوی Perm (X) که توسط $g \rightsquigarrow L_g$ تعریف می‌شود یک نگاشت یک بیک باشد آنگاه شرط (۴.۲) درست معادل این است که G با یکی از زیرگروههای Perm (X) یکریخت می‌باشد.

مورد استثنائی دیگر در مورد عمل G از سمت چپ روی X حالتی است که بازای هر g متعلق به G، $L_g := id_X$ باشد. در این حالت خاص (که می‌تواند بعنوان اثر G روی هر مجموعه داده شده X بکار رود)، هیچیک از اعضای G توسط اعضای Perm (X) نمایش داده نمی‌شود، درنتیجه این حالت به منظور نمایش مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

نوعاً موارد زیادی برای این دو مثال استثنائی وجود دارند که در آنها نه تنها گروه G بطور یکریخت به یکی از زیرگروههای Perm (X) نگاشت نمی‌یابد بلکه کلاً اثر آنها غیرمهم می‌باشد. زیرمجموعه ای از G که بطور بدیهی توسط عضو همانی Perm (X) نمایش داده می‌شود خود زیرگروهی از G را تشکیل می‌دهد که به **هسته**[1] همریختی $\mu : G \to$ Perm (X) معروف است. طبق تعریف هستهٔ این همریختی مجموعه اعضائی از G است که بوسیلهٔ μ به تبدیل همانی id_X نگاشت می‌یابند، در مورد یکریختی این فقط شامل عضو واحد گروه G است، در صورتی که در مورد نمایش بدیهی شامل تمام اعضای گروه G و در حالت کلی زیرگروه سره ای از G می‌باشد.

هستهٔ یک همریختی یکی ازایده های بسیار مهم در نظریهٔ گروههاست و در بخش ۱.۵ که بحث زیرگروههای نرمال را تحت پوشش قرار می‌دهیم دوباره راجع به آن صحبت خواهیم نمود.

1- Kernel

(ج) بدلایل مشابهی که ایده یکریختی مابین دو گروه را معرفی کردیم، خیلی مهم و شایسته است که فرمول بندی صریح و روشنی از شرایطی که تحت آن دو فضای X و X' (یعنی مجموعه هایی که گروه G از سمت چپ در آنها اثر می کند) را بتوان بعنوان دو نسخهٔ متفاوت از گروه مجرد G در نظر گرفت، ارائه گردد. بدین منظور وجود نگاشت دوسویی **هموردای**[1] $i : X \to X'$ (طوری که مجموعه های X و X' از دیدگاه ساختار مجموعه ای باید یکسان باشند) ضرورت دارد، و آن باید عمل گروهی را به معنی زیر حفظ کند

$$i(gx) = g(i(x)) \qquad \forall\, g \in G \quad \text{و} \quad \forall\, \mathrm{x} \in X \tag{۴.۳}$$

یا، بطور دقیقتر، دیاگرام زیر باید **جابجائی** باشد، یعنی بازای هر g متعلق به G،

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "L_g"] & X' \arrow[d, "L'_g"] \\ X \arrow[r, "i"'] & X' \end{tikzcd} \qquad i \circ L_g \equiv L'_g \circ i\,, \tag{۴.۴}$$

که L_g و L'_g به ترتیب عملهای گروه G از چپ روی X و X' هستند.

بازای هر دو عضو اختیاری x_1 و x_2 متعلق به X، یک عضو f در گروه کامل Perm (X) وجود دارد بطوریکه $x_2 = f(x_1)$. باوجود این، یک زیرگروه از Perm (X)، یا بطور کلی یک گروه G که روی X عمل می کند، ممکن است دارای این ویژگی نباشد، و این موضوع انگیزهٔ تعاریف زیر است.

تعاریف.

(الف) اگر گروه G روی یک مجموعه X عمل کند، این عمل **متعدّی**[2] نامیده می شود اگر هر دو

1- Equivariant 2- Transitive

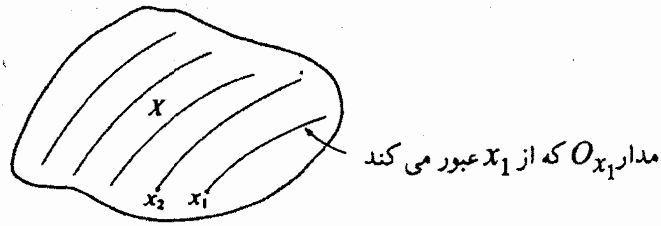
نقطهٔ اختیاری از مجموعه X را بتوان بوسیلهٔ عمل یک عضو دلخواه از G بهم مربوط نمود. یا بطور دقیقتر، عمل گروه G روی مجموعه X را متعدی می نامیم هرگاه بازای هر دو نقطهٔ x و y داده شده در X، عضوی مانند g متعلق به G وجود داشته باشد بطوریکه $gx = y$. (این رابطه متقارن است، چون $gx = y$ رابطهٔ $g^{-1}y = x$ را ایجاب می کند، یعنی، اگر بتوان با استفاده از x، y را بدست آورد آنگاه می توان با استفاده از y، x را بدست آورد.)

(ب) بطور کلی، مدار[1] حاصل از اثر گروه G در X که از نقطهٔ x متعلق به X عبور می کند مجموعه تمام نقاطی از X است که بتوان از طریق اثر یک عضو داده شده G روی x بدست آورد، یعنی

$$O_x := \{gx, \forall g \in G\}.$$

بویژه، اگر عمل گروه G روی X متعدی باشد آنگاه مدار عبوری از هر نقطهٔ x متعلق به X شامل تمام اعضای مجموعه X خواهد بود.

باید توجه نمود که مدارهایی که از دو نقطهٔ متفاوت x_1 و x_2 متعلق به X عبور می کنند یا باید برهم منطبق باشند و یا اینکه کاملاً مجزا از هم باشند. بنابراین، در حالت کلی، اثر گروه G بر روی مجموعهٔ X منجر به افراز X به اجتماع مدارهای مجزا از هم می شود.



1- Orbit

تذکر. تاکنون تمام بحث ما راجع به عمل گروه G از سمت چپ روی مجموعه X بود، اما مفهوم کاملاً معادل آن یعنی عمل گروه G از سمت راست روی مجموعه X نیز وجود دارد. بازای هر g متعلق به G نگاشت دوسویی R_g روی X یعنی $R_g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ یک عمل G از راست روی X خواهد بود بطوریکه

$$R_{g_2} \circ R_{g_1} = R_{g_1 g_2} \qquad \forall\, g_1 \text{ و } g_2 \in G, \qquad \text{(الف ۴.۵)}$$

یک عمل G از راست روی X معمولاً بصورت $R_g(x) = xg$ نوشته می شود بنابراین شرط (الف ۴.۵) به شکل زیر بازنویسی می شود

$$(xg_1)g_2 = x(g_1 g_2) \qquad \forall\, g_1 \text{ و } g_2 \in G \quad \text{و} \quad \forall\, x \in X. \qquad \text{(ب ۴.۵)}$$

مثالها.

(۱) گروه $\mathbb{Z}_2 := \{e, a\}$ با شرط $a^2 = e$ را در نظر بگیرید. عمل از سمت چپ گروه $\mathbb{Z}_2$ روی مجموعه محور حقیقی $\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} L_e(r) &:= r \\ L_a(r) &:= -r \end{aligned} \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}\ .$$

مدارهای عمل گروه $\mathbb{Z}_2$ روی $\mathbb{R}$ عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_r &= \{r, -r\} \qquad \text{اگر } r \neq 0 \\ \mathrm{O}_0 &= \{0\}\ . \end{aligned}$$

(۲) فرض کنید که G گروه $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$، یعنی، مجموعه تمام ماتریسهای

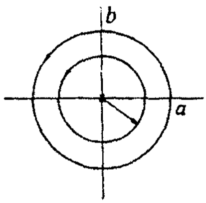
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

با شرط $0 \le \theta < 2\pi$ باشد. این گروه روی مجموعه همه ماتریسهای ستونی حقیقی 2×1 بصورت زیر از سمت چپ عمل می کند

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}$$

واضح است که در مدارهای بدست آمده از اثر گروه $SO(2, \mathbb{R})$، عبارت $a^2 + b^2$ ناوردا می باشد و درواقع مدار نظیر ماتریس ستونی $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ با شرط $a \neq 0$ و $b \neq 0$، دایره‌ای با شعاع $(a^2 + b^2)^{1/2}$ است. اگر $a = b = 0$، مدار فقط شامل ماتریس ستونی $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ است.



این یک مثال بسیار ساده از مفهوم کلی، و توانای اثر یک گروه روی یک فضای برداری بعنوان گروه تبدیلات خطی می باشد. این ایده در سومین قسمت از سه بخش اصلی این کتاب بطور مفصل توسعه خواهد یافت.

(۳) عمل هر گروه G از سمت چپ روی خودش توسط ضرب گروهی (که در اینجا بعنوان انتقال معروف می باشد) بصورت زیر تعریف می شود

$$L_g(g') := gg' . \tag{۴.۶}$$

توجه کنید که این عمل متعدی است (بنابراین مدار عبوری از هر عضو g' متعلق به G کل گروه G می باشد) و این درواقع همان موضوعی است که در اثبات قضیهٔ کیلی در بخش ۱.۲ مورد استفاده قرار گرفت. عمل متعدی دیگر گروه G از سمت چپ روی خودش بصورت زیر است

$$L_g(g') := g' g^{-1} . \tag{۴.۷}$$

(۴) مثال بسیار مهم دیگری از عمل یک گروه G روی خودش که به عمل **همیوغگی**[1] معروف است بشرح زیر تعریف می شود

$$L_g(g') := g\, g' g^{-1} . \tag{۴.۸}$$

باید توجه نمود که، این عمل گروهی G روی خودش برخلاف دو مثال سابق متعدی نیست. بعنوان مثال، بازای هر g متعلق به G رابطهٔ $L_g(e) = e$ برقرار است، لذا مدار عبوری از e مجموعهٔ $\{e\}$ است. مدارهای عمل همیوغگی کلاسهای **همیوغی**[2] نامیده می شوند و آنها نقش کلیدی در جنبه های متفاوت ساختاری گروهها و نمایشهایشان بازی می کنند.

(۵) مشابه مثال (۲) بالا، یک عمل از سمت چپ گروه $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ روی فضای تمام ماتریسهای ستونی حقیقی $n \times 1$ (که بطور نظری با فضای کارتزی $\mathbb{R}^n$ معادل است) وجود دارد که طبق تعریف همان ضرب ماتریسی می باشد. بنابراین اگر A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ متعلق به $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ باشد و اگر $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ ، آنگاه عمل $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ یعنی، $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = L_A(\mathbf{r})$ عبارتست از

1- Conjugation 2- Conjugacy

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

یعنی،

$$r'_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} r_j \qquad i = 1, \dots, n\,. \tag{۴.۹}$$

باوجود این، همانطور که می‌دانیم، $\mathbb{R}^n$ را با ساختار گروه آبلی می‌توان مجهز نمود و همینطور، $\mathbb{R}^n$ روی خودش توسط انتقال از چپ (به مثال (۳) در بالا توجه کنید) اثر می‌کند بطوریکه n- تائی اعداد حقیقی $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ متعلق به گروه $\mathbb{R}^n$ روی n- تائی $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ به شکل زیر عمل می‌کند

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

یعنی،

$$r'_i := r_i + a_i. \tag{۴.۱۰}$$

عمل جفت $(\mathbf{a}, A)$ روی فضای کارتزی $\mathbb{R}^n$ را با استفاده از ادغام دو عمل فوق بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L_{(\mathbf{a},A)}\,\mathbf{r} := \mathbf{a} + A\mathbf{r}$$
$$(L(\mathbf{a},A)\,\mathbf{r})_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} r_j \quad , \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{۴.۱۱}$$

در نگاه اول چنین بنظر می‌آید که، این عمل معادل عمل ضرب مستقیم $\mathbb{R}^n \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد، اما درواقع چنین نیست. بدین منظور کافی است که دو تبدیل متوالی از نوع (۴.۱۱) را با پارامترهای گروهی $(\mathbf{a}_1, A_1)$ و $(\mathbf{a}_2, A_2)$ انجام دهیم. این منجر به معادله ماتریسی زیر می‌شود

$$\begin{aligned}(L_{(\mathbf{a}_2,A_2)} \circ L_{(\mathbf{a}_1,A_1)})\mathbf{r} &= L_{(\mathbf{a}_2,A_2)}(\mathbf{a}_1 + A_1\mathbf{r}) = \mathbf{a}_2 + A_2(\mathbf{a}_1 + A_1\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{a}_2 + A_2\mathbf{a}_1) + A_2A_1\mathbf{r} \\ &= L_{(\mathbf{a}_2 + A_2\mathbf{a}_1,\, A_2A_1)}(\mathbf{r})\,.\end{aligned} \tag{۴.۱۲}$$

بنابراین،

$$L_{(\mathbf{a}_2,A_2)} \circ L_{(\mathbf{a}_1,A_1)} = L_{(\mathbf{a}_2 + A_2\mathbf{a}_1,\, A_2A_1)} \tag{۴.۱۳}$$

که نمی‌تواند معادل عمل ضرب مستقیم گروههای $\mathbb{R}^n$ و $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$، یعنی، $\mathbb{R}^n \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ باشد زیرا این گروه اخیر دارای قانون ترکیبی $(\mathbf{a}_2, A_2)(\mathbf{a}_1, A_1) = (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1, A_2A_1)$ می‌باشد، درواقع معادلهٔ (۴.۱۳) عملی را که ضرب نیمه مستقیم گروه آبلی $\mathbb{R}^n$ و گروه تبدیلات خطی عمومی $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ نامیده می‌شود، نشان می‌دهد. قانون ترکیب برای گروه جدید بشرح زیر تعریف می‌شود

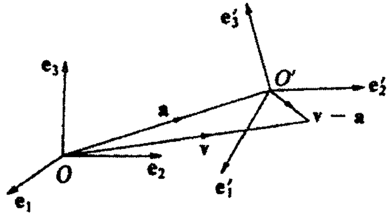
$$(\mathbf{a}_2, A_2)(\mathbf{a}_1, A_1) := (\mathbf{a}_2 + A_2\mathbf{a}_1,\, A_2A_1) \tag{۴.۱۴}$$

بنابراین معادلهٔ (۴.۱۳) یک عمل روی فضای کارتزی $\mathbb{R}^n$ را تعریف می کند. نمادگذاریهای متفاوتی برای نمایش ضرب نیمه مستقیم ساختارهای گروهی بکار می رود، ما آنرا بصورت $\mathbb{R}^n \circledS \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ می نویسیم.

از نقطه نظر کاربردی در فیزیک، گروه اقلیدسی $\mathbb{R}^n \circledS \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ یکی از زیرگروههای $\mathbb{R}^n \circledS \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ که از تحدید ماتریسهای A به ماتریسهای متعامد $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ زیرگروه $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ تعریف می شود، حائز اهمیت بسیاری است. یکی از ویژگیهای بارز عمل گروه متعامد $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ روی فضای $\mathbb{R}^n$ بصورتی که در معادلهٔ $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است آنست که 'ضرب داخلی' میان دو 'بُردار'، در فضای کارتزی $\mathbb{R}^n$ را حفظ می کند. یعنی، اگر $\mathbf{r}$ بردار تعریف شده در معادلهٔ (۴.۹) بوده و نیز ماتریس تبدیل A متعلق به $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} r'_{1i}\, r'_{2i} = \sum_{i=1}^{n} r_{1i}\, r_{2i} \,. \qquad (۴.۱۵)$$

بعداً در زمینه عمومی تری از این خاصیت گروههای متعامد صحبت خواهیم نمود. ولی برای ارائه یک برداشت آشکار از نقش گروه اقلیدسی در فیزیک، رابطهٔ میان مختصات نظیر بردار $\mathbf{v}$ در فضای سه بعدی نسبت به دو ناظر O و O' که به چارچوبهای مرجع متعامد (نشان داده شده در دیاگرام زیر) متصل هستند را بررسی می کنیم.



ناظر O بردارهای پایه متعامد سه گانه $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ را با شرط $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ بکار می برد، در حالی که ناظر O' بردارهای سه گانه $\mathbf{e}'_1$، $\mathbf{e}'_2$ و $\mathbf{e}'_3$ را همچنین با شرط $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ بعنوان بردارهای پایه مورد استفاده قرار می دهد و این مجموعه به اندازهٔ بردار $\mathbf{a}$ نسبت به مبداء

بردارهای سه گانهٔ قبلی یعنی، O جابجا شده است. بنابراین مختصات نظیر بردار $\mathbf{v}$ از دیدگاه ناظرهای O و O' بترتیب عبارتند از

$$(v_1, v_2, v_3) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}) \,, \qquad \text{برای } O: \qquad (۴.۱۶)$$

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = (\mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{a}), \mathbf{e}'_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{a}), \mathbf{e}'_3 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{a})) \,. \qquad \text{برای } O': \qquad (۴.۱۷)$$

از آنجائی که مجموعه $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ پایه هائی برای فضای سه بعدی می باشند در صورتی که بردارهای سه گانه $\mathbf{e}'_1$ ، $\mathbf{e}'_2$ و $\mathbf{e}'_3$ را بطور ذهنی به مبداء O انتقال دهیم، در آن صورت باید بتوان آنها را برحسب بردارهای سه گانه $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ بسط داد. بنابراین یک ماتریس 3×3 حقیقی مانند R_{ij} وجود دارد بطوریکه

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j R_{ji} \,, \qquad i = 1, \ldots, 3 \qquad (۴.۱۸)$$

و شرط $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ بیان می کند که R باید یک ماتریس متعامد یعنی عضوی از گروه $O(3, \mathbb{R})$ باشد. از جایگذاری معادلهٔ (۴.۱۸) در معادلهٔ (۴.۱۷) رابطهٔ $v'_j = \Sigma_{i=1}^{3}(v_i - a_i)R_{ij}$ بدست می‌آید بنابراین مختصات اختصاص یافته برای بردار $\mathbf{v}$ بوسیلهٔ دو ناظر O و O' توسط رابطهٔ زیر به هم مرتبط می شوند

$$v_i = a_i + \sum_{j=1}^{3} R_{ij} v'_j \,; \qquad i = 1, \ldots, 3 \,. \qquad (۴.۱۹)$$

بنابراین، از معادلهٔ (۴.۱۱) با Aی متعلق به مجموعه ماتریس های متعامد درمی یابیم که چگونه عمل گروه اقلیدسی روی فضای کارتزی $\mathbb{R}^3$ ، توصیف مختصات یک بردار مجرد توسط ناظرین متفاوت را بیان می کند. بنابراین نقش بسیار ارزنده گروه $\mathbb{R}^n \circledS O(3, \mathbb{R})$ در جنبه های ریاضی ساختار مکانیک نیوتونی و کوانتیزاسیون آن زیاد هم دور از انتظار نیست.

دیدیم که طبیعی ترین فضائی که یک گروه می تواند از چپ یا راست روی آن عمل کند فضای خود آن گروه است. یکی از مثالهای با نتایج مهم دیگر از این نوع، عمل زیرگروههای یک گروه روی خود گروه می باشد.

تعریف.

فرض کنید که H یک زیرگروه از گروه G باشد. عمل طبیعی زیرگروه H از راست روی G بصورت زیر تعریف می شود.

$$R_h(g) := gh . \qquad (۴.۲۰)$$

اگر H یک زیرگروه سره از G باشد، آنگاه عمل آن روی G متعدی نخواهد بود و مدارهای H در G **همرده[1] های چپ** H در G نامیده می شوند. مدار عبوری از عضو اختیاری g متعلق به G را معمولاً بصورت gH می نویسند و مجموعه همه همرده های چپ را با G/H نشان می دهند.
تعریف مشابهی از یک **همردهٔ راست** وجود دارد، مدار عبوری از g بعنوان همردهٔ راست آن بصورت Hg و مجموعه همه همرده های راست با H/G نشان داده می شوند.

تذکر. (۱) مدار عبوری از عضو g متعلق به G همان مدار عبوری از نقطهٔ gh بازای هر h متعلق به H می باشد. بنابراین، بازای هر h متعلق به H، تساوی $ghH = gH$ برقرار است.

(۲) اگر هر دو عضو g_1 و g_2 متعلق به گروه G روی یک مدار از زیرگروه H قرار گیرند (یعنی اگر $g_1H = g_2H$) آنگاه عضوی مانند h متعلق به H وجود دارد بطوریکه $g_2 = g_1h$، یعنی $g_1^{-1}g_2$ متعلق به زیرگروه H است.

(۳) چون از رابطهٔ $gh_1 = gh_2$ تساوی $h_1 = h_2$ نتیجه می شود، لذا تمام مدارهای H در G دارای تعداد اعضای مساوی می باشند، و در مورد حالتی که H یک زیرگروه

1- Coset

پایاندار است، این تعداد درست همان مرتبهٔ $|H|$، یعنی تعداد اعضای گروه H است.

این ملاحظه اخیر منجر به نتیجه معروفی می گردد که اولین بار توسط لاگرانژ بدست آمد.

قضیه (لاگرانژ).

$|G|$ مرتبهٔ گروه پایاندار G مضرب صحیحی از $|H|$ مرتبهٔ هر زیرگروه H می باشد.

اثبات.

همرده های چپ H در G را در نظر می گیریم. هر همردهٔ (مدار) H در G دارای $|H|$ عضو می باشد (که در تذکر (۳) بالا مورد توجه قرار گرفت) و هر دو مدار اختیاری داده شده بدون آنکه هیچ عضو مشترکی داشته باشند کاملاً مجزا از یکدیگر هستند.

بعلاوه، هر عضو g متعلق به G باید در یکی از مدارهای H قرار داشته باشد و بنابراین G به اتحادی از مجموعه های منفصل تجزیه می گردد، بطوریکه هر یک از این مجموعه ها دارای $|H|$ عضو می باشد. از اینرو، تعداد اعضای G باید با حاصلضرب تعداد اعضای H و تعداد n همرده H در G، یعنی $|G| = n|H|$ معادل باشد.

نتیجه.

گروهی که مرتبهٔ آن یک عدد اول باشد الزاماً یکی از گروههای دوری $\mathbb{Z}_m$ می باشد.

اثبات.

فرض کنید که g یکی از اعضای گروه G باشد، زیرمجموعهٔ $\{e, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$ را بررسی می کنیم. در اینجا m مرتبهٔ عضو g است، یعنی، کوچکترین عدد صحیحی که در رابطهٔ $g^m = e$ صدق می کند. لذا این زیرمجموعه خود زیرگروهی از G بوده و با گروه $\mathbb{Z}_m$ یکریخت می باشد. اگر همرده های $\mathbb{Z}_m$ در G را در نظر بگیریم و n تعداد این همرده ها باشد بنابر قضیهٔ لاگرانژ تساوی $|G| = |\mathbb{Z}_m|\, n$ و درنتیجه $|G| = mn$ بدست می آید. ولی از آنجا که $|G|$

یک عدد اول می باشد هیچ مقسوم علیهی غیر از عدد 1 ندارد. بنابراین یکی از اعداد m یا n باید برابر عدد 1 باشد. با انتخاب $e \neq g$، بطور یقین $m \neq 1$ می گردد، و از اینرو n تعداد همرده ها برابر 1 و $m = |G|$ می شود که همچنین $m = p$ یک عدد اول خواهد بود. بنابراین $G \cong \mathbb{Z}_p$.

تذکر. این اثبات همچنین نشان می دهد که، برای هر گروه پایاندار G، مرتبهٔ هر عضو متعلق به G الزاماً یک مقسوم علیه مرتبهٔ $|G|$ گروه G است.

فضای همردهٔ G/H مجموعه همهٔ مدارهای نظیر عمل طبیعی H از راست روی G می باشد. این موضوع که فضای G/H خود دربردارنده تعریف عمل چپ طبیعی گروه G بوسیلهٔ

$$l_g(g'H) := gg'H \tag{۴.۲۱}$$

است، حائز اهمیت فراوان می باشد بطوریکه عمل عضو g متعلق به G مشابه جابجا نمودن همرده های (مدارهای) راست H است. این عمل آشکارا متعدی است زیرا اگر g_1H و g_2H دو مدار منفصل از هم H باشند (که به معنی دو نقطهٔ مجزا در فضای G/H است) آنگاه

$$l_{(g_1 g_2^{-1})}(g_2H) = g_1H.$$

آنچه که نسبتاً قابل ملاحظه و بطور استثنائی در عمل بسیار مفید است صحت عکس این حالت می باشد، یعنی، اگر X فضائی باشد که یک گروه بطور متعدی روی آن اثر کند آنگاه اساساً زیرگروهی مانند H از G وجود دارد بطوریکه X بصورت G/H خواهد بود. بیان دقیق و اثبات این نتیجهٔ مهم بشرح زیر می باشد.

قضیه.

فرض کنید X مجموعه ای است که گروه G بطور متعدی بر آن اثر می کند. آنگاه زیرگروهی مانند H از G وجود دارد بطوریکه نگاشت دوسویی $i : G/H \to X$ را می توان پیدا نمود که عمل گروهی را به معنی معادلهٔ (۴.۴) حفظ کند. بنابراین، برای هر g متعلق به G، داریم

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow l_g & & \downarrow L_g \\ G/H & \xrightarrow{i} & X \end{array} \qquad i \circ l_g = L_g \circ i\,, \qquad (۴.۲۲)$$

که L_g عمل G را روی X نشان می هد دو l_g عمل خاص G روی G/H تعریف شده در معادلهٔ (۴.۲۱) است.

اثبات.

نقطهٔ x_0 را بطور اختیاری در X انتخاب نموده و $G_{x_0} := \{g : g \in G$ و $gx_0 = x_0\}$ را نیز در نظر بگیرید. بنابراین G_{x_0} مجموعهٔ تمام اعضائی از G می باشد که نقطهٔ x_0 متعلق به X را تغییر نمی‌دهند. درواقع این زیرمجموعهٔ مهم زیرگروهی از G بوده (این موضوع را بعنوان تمرین ثابت کنید) و به **گروه پایداری**[1] \ **گروه پایدارکننده**[2] \ **گروه همروندی**[3] \ **گروه کوچک G در نقطهٔ x_0** معروف است.

H را گروه G_{x_0} انتخاب نموده و نگاشت $i : G/H \to X$ را توسط $i(gH) := gx_0$ تعریف می کنیم. آنگاه،

(الف) نگاشت تعریف شده در بالا خوش تعریف است زیرا اگر $gH = g'H$ باشد آنگاه عضوی مانند h متعلق به H وجود دارد بطوریکه $g = g'h$ و بنابراین از آنجا که h متعلق به گروه پایداری نقطهٔ x_0 است داریم $gx_0 = g'hx_0 = g'x_0$.

(ب) با استفاده از تعریف i برای دو عضو g و g' متعلق به G چنانکه تساوی $i(gH)=i(g'H)$ برقرار باشد نتیجه می شود $gx_0 = g'x_0$، لذا $x_0 = g^{-1}g'x_0$ و درنتیجه $g^{-1}g'$ به $G_{x_0} = H$ متعلق است بنابراین یک عضو h متعلق به H وجود دارد بطوریکه $g' = gh$ و از آنجا $g'H = gH$ نتیجه می شود، بنابراین i یک نگاشت یک بیک است.

1- Stability 2- Stabilizer
3- Isotropy

(ج) از آنجا که عمل گروه G روی X متعدی است بازای هر x متعلق به X عضوی مانند g متعلق به G وجود دارد بطوریکه $x = gx_0$، لذا نگاشت i پوشا (یعنی، برو) می باشد.

تاکنون، نشان داده ایم که مجموعه X و فضای همرده G/G_{x_0} بوسیله یک نگاشت دوسویی در تناظر یک بیک و برو هستند. حال باید نشان دهیم که نگاشت i عمل گروهی را به معنی معادلهٔ (۴.۲۲) حفظ می کند. اما، برای هر g' متعلق به G، داریم

$$\begin{aligned} L_g \circ i(g'H) &= L_g(i(g'H)) = L_g(g'x_0) \\ &= gg'x_0 = i(gg'H) = i \circ l_g(g'H) \end{aligned}$$

صحت رابطهٔ فوق برای هر g' متعلق به G تساوی $L_g \circ i = i \circ l_g$ را ایجاب می کند.

تذکر. هر عمل گروه G روی هر مجموعهٔ داده شدهٔ X آنرا به مجموعه مدارهای مجزای G تجزیه می کند، بطوریکه عمل گروه روی هر یک از مدارها متعدی است. بنابراین هر مدار با انتخاب نقطه ای اختیاری مانند x از آن عملاً به شکل G/G_x معرفی می شود. از این رو، کلی ترین عمل G برحسب زیرگروههای آن طبقه بندی می شود، که این خود یک نتیجه بسیار مفید و قدرتمند می باشد.

مثال.

برخی از کاربردهای بسیار جالب این قضیه، وقتی G یک گروه لی بوده و فضای X که G بطور متعدی روی آن عمل می کند خود یک چندگونای دیفرانسیل پذیر باشد، مطرح می شوند. بعنوان مثال، عمل (متعدی) گروه $SO(3, \mathbb{R})$ روی $\mathbb{R}^3$ توسط معادلهٔ (۴.۹) بصورت زیر تعریف می شود

$$L_A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \qquad (۴.۲۳)$$

این حقیقت که A به گروه $\mathrm{SO}(3,\ \mathbb{R})$ متعلق است (درنتیجه داریم $AA^{\mathrm{t}} = \mathbf{1}$)، معادل این بیان است که عمل تعریف شده در معادلهٔ (۴.۲۳) ضرب داخلی میان دو بردار در $\mathbb{R}^3$ را تغییر نمی‌دهد. بویژه، عمل این گروه روی هر بردار طول آنرا بدون تغییر باقی می گذارد و بنابراین اگر کرهٔ دوبعدی به شعاع واحد را به صورت

$$S^2 := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{r}.\mathbf{r} = 1\} \qquad (۴.۲۴)$$

تعریف کنیم. آنگاه این فضا تحت عمل گروه $\mathrm{SO}(3,\ \mathbb{R})$ به خودش نگاشت می یابد.

از نقطه نظر هندسی آشکار است که هر بردار با طول واحد را می توان تحت عمل گروه $\mathrm{SO}(3,\ \mathbb{R})$ به بردار واحد دلخواه دیگری نگاشت داد (بعنوان تمرین این موضوع را بطور تحلیلی اثبات کنید). بنابراین عمل القاء شده بوسیلهٔ $\mathrm{SO}(3,\ \mathbb{R})$ روی S^2 یک عمل متعدی است، درنتیجه قضیهٔ قبلی در این مورد نیز صدق می کند.

بنابراین می توان یک تناظر دوسوئی مابین S^2 و فضای همرده $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})/H$ که H گروه پایداری یک بردار فیدوسیال[1] انتخابی اختیاری مانند $\mathbf{r}_0$ در $\mathbb{R}^3$ است، برقرار نمود. بردار واحد $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ که امتداد محور z را توصیف می کند یک انتخاب نسبتاً ساده می باشد. ولی توجه کنید که بازای هر ماتریس 2×2 اختیاری X داریم

$$\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{X}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (۴.۲۵)$$

همچنین،ماتریس 3×3 در سمت چپ معادلهٔ (۴.۲۵)، متعلق به $\mathrm{SO}(3,\ \mathbb{R})$ خواهد بود اگر و فقط اگر X یک ماتریس متعامد 2×2 با دترمینان واحد باشد. بعلاوه، فقط ماتریسهایی از

1- Fiducial

$SO(3,\ \mathbb{R})$ که در معادلهٔ (۴.۲۵) صدق می کنند از این نوع می باشند.

از تمام این ملاحظات معلوم می شود که گروه همروندی بردار فیدوسیال $\mathbf{r}_0$ زیرگروه $SO(2,\ \mathbb{R})$ (یعنی، دوران حول محور z) می باشد و بنابراین، براساس قضیه فوق یک تناظر دوسوئی مابین S^2 و فضای همرده $SO(3,\ \mathbb{R})/SO(2,\ \mathbb{R})$ وجود دارد.

تذکر. وقتی گروههای لی $SO(3,\ \mathbb{R})$ و $SO(2,\ \mathbb{R})$ را بعنوان چندگوناها مورد بررسی قرار می‌دهیم، بُعد آنها به ترتیب ۳ و ۱ بوده، در صورتی که بُعد S^2 برابر ۲ می باشد. این مورد خاصی از نتیجهٔ بسیار کلی زیر می باشد: اگر H یک زیرگروه لی از گروه لی G باشد، آنگاه از فضای همرده ای G/H می توان یک چندگونای دیفرانسیل پذیر درست نمود، بطوریکه $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$.

۱.۵. زیرگروههای نرمال

ملاحظه گردید که فضای همرده های چپ G/H، یعنی، مدارهای H که از راست روی G عمل می کنند دارای $|G|/|H|$ عضو بوده و G از سمت چپ بعنوان گروه تبدیلات در آن اثر می کند. یک سؤال طبیعی که مطرح می شود، این است که آیا G/H (که گوئی از تقسیم G بر H بدست آمده است) خود نیز یک گروه است. یکی از طرق آشکار برای بیان یک ساختار گروهی روی G/H ارائه تعریف ترکیب همرده های g_1H و g_2H بصورت

$$(g_1H)(g_2H) := g_1g_2H \qquad ? \tag{۵.۱}$$

می باشد، با این وجود، برای اینکه این عملِ ترکیبی معنی داشته باشد، باید سمت راست (۵.۱)

مستقل از نحوه بخصوص انتخاب اعضای ظاهر شده در سمت چپ آن باشد. بعنوان مثال، می‌دانیم که g_1H و g_1hH بازای هر h متعلق به H همرده های یکسانی هستند (ازاینرو نقطه یکسانی را در G/H نشان می‌دهند). ولی اگر در سمت چپ معادلهٔ (۵.۱) همرده g_1hH را بکار ببریم، آنگاه سمت راست آن به g_1hg_2H تبدیل می‌شود و بطورکلی این همرده با همردهٔ g_1g_2H یکسان نیست. با این وجود، با انتخاب بخصوص زیرگروه H، این مشکل برطرف می‌شود، و این زیرگروهها را زیرگروههای نرمال گویند.

تعریف.

زیرگروه H از گروه G یک زیرگروه **نرمال** (**یا ناوردا**[1]) نامیده می‌شود اگر بازای هر جفت اختیاری h متعلق به H و g متعلق به G، عضوی مانند h' در H وجود داشته باشد بطوریکه

$$ghg^{-1} = h' . \qquad (۵.۲)$$

در این صورت، معادلهٔ (۵.۱) خوش تعریف می باشد زیرا، بعنوان مثال، عضو h' متعلق به H وجود دارد بطوریکه $g_1hg_2 = g_1g_2h'$ و بنابراین داریم $g_1hg_2H = g_1g_2H$ که جهت سازگاری موردنیاز بوده است. (بعنوان تمرین نشان دهید که (۵.۱) یک قانون ترکیب گروهی را تعریف می‌کند.)

تذکر. (۱) شرط (۵.۲) با رابطهٔ $gH = Hg$ وقتی برای هر g متعلق به G برقرار باشد معادل است، یعنی، همرده های چپ و همرده های راست g یکسان هستند.

(۲) هر زیرگروه از یک گروه آبلی G الزاماً یک زیرگروه نرمال است زیرا $hg = gh$، لذا در معادلهٔ (۵.۲)، $h' = h$ انتخاب می شود. بنابراین، اگر G یک گروه آبلی باشد، بازای هر زیرگروه H از G فضای همردهٔ آن یک گروده (آبلی) است.

(۳) اگر H یک زیرگروه نرمال باشد بنابر قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ $|G/H|$ نظیر

1- Invariant

گروه G/H برابر $|G|/|H|$ خواهد بود.

مثالها.

(۱) زیرگروه $\mathbb{Z}_2$، $\{e, c\}$ از گروه مرتبهٔ چهار $V_4\ (\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ که جدول گروهی آن در معادلهٔ (۲.۶) داده شده است را در نظر بگیرید. برطبق قضیهٔ لاگرانژ، دقیقاً دو همرده $e\mathbb{Z}_2$ و $a\mathbb{Z}_2$ نظیر مدارهای $O_e = \{e, c\}$ و $O_a = \{a, b\}$ وجود دارند. از آنجا که V_4 یک گروه آبلی است، زیرگروه $\mathbb{Z}_2$ نرمال بوده و $V_4/\mathbb{Z}_2$ یک گروه با قانون ترکیب $(a\mathbb{Z}_2)(a\mathbb{Z}_2) = e\mathbb{Z}_2$ می باشد، یعنی، با گروه $\mathbb{Z}_2$ یکریخت است و این زیاد دور از انتظار نیست زیرا به هر حال $V_4/\mathbb{Z}_2$ یک گروه مرتبهٔ دو می باشد.

(۲) زیرگروه $\mathbb{Z}_2 := \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$ از گروه لی $\mathrm{SU}(2)$، مجموعه همه ماتریسهای یکانی 2×2 با دترمینان واحد را در نظر بگیرید. این زیرگروه خاص $\mathbb{Z}_2$ یک زیرگروه نرمال است زیرا، بازای هر ماتریس A متعلق به $\mathrm{SU}(2)$ داریم

$$A\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A$$

و البته بدیهی است که ماتریس واحد با تمام ماتریسهای A متعلق به $\mathrm{SU}(2)$ جابجا می شود.

این مثال خاص به دلایل زیادی جذاب است. از دیدگاه توپولوژیکی، فاکتورگیری گروه $\mathbb{Z}_2$ با یکسان گرفتن نقاط متقاطر کرهٔ سه بعدی یعنی $\mathrm{SU}(2)$ معادل است. تصور چندگونای جدید بدست آمده نسبتاً مشکل است: این چندگونا به فضای تصویری حقیقی سه بُعدی $\mathbb{R}P^3$ معروف است.

از آنجا که $\mathbb{Z}_2$ یک زیرگروه نرمال $\mathrm{SU}(2)$ می باشد، لذا فضای همرده $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ خود یک گروه است، و درواقع می توان نشان داد که با گروه سه بُعدی متعامد خاص یکریخت

می باشد، یعنی،

$$\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \qquad (۵.۳)$$

که به ویژه نشان می دهد ساختار توپولوژیکی گروه دوران $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ مانند فضای تصویری $\mathbb{R}P^3$ است. از هر دو دیدگاه توپولوژیکی و ساختار گروهی ارتباط میان گروههای $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ در درک پدیده 'اسپین ذاتی'، نظریه کوانتم از اهمیت قابل ملاحظه ای برخوردار است (بعنوان مثال در مورد اسپین $\frac{۱}{۲}$ الکترون).

(۳) زیرگروه $n\mathbb{Z} := \{nm : m \in \mathbb{Z}\}$ را از گروه آبلی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. بنابراین، بعنوان مثال داریم

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$
$$3\mathbb{Z} = \{\ldots, -12, -9, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

و همینطور الی آخر. از آنجا که $n\mathbb{Z}$ یک زیرگروه از گروه آبلی $\mathbb{Z}$ است پس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ خود یک گروه است. اگر مجموعه $\mathbb{Z}_n := \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ را با شرط $a^n = e$ در نظر بگیرید، آنگاه بوسیلهٔ نگاشتی که a^m را بازای هر m با قید $0 \leq m \leq n-1$ به همرده $m(n\mathbb{Z})$ می نگارد، به آسانی معلوم می گردد که $\mathbb{Z}_n$ با $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ یکریخت است. باید توجه نمود که دو عدد صحیح داده شده متعلق به یک همرده هستند اگر و فقط اگر تفاضل آنها مضربی از عدد صحیح n باشد. به بیان دیگر گفته می شود که آن دو عدد با سنج[1] n معادل هستند. دلیل اصلی برای بکارگیری نماد "$\mathbb{Z}_n$" وجود یکریختی $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ می باشد.

اکنون به یکی از مهمترین کاربردهای ایدهٔ زیرگروههای نرمال می پردازیم. این کاربرد به وضعیتی مربوط می شود که در آن یک همریختی (معادلهٔ (۴.۱)) مابین جفت گروههای G_1 و G_2

1- Modulo

وجود داشته باشد و اینکه تا چه حدّ بتوان آنرا بعنوان یک نمایش «وفادار» G_1 در G_2 در نظر گرفت. مفاهیم کلیدی بشرح زیر هستند.

تعاریف.

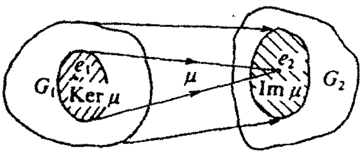
فرض کنید که $\mu : G_1 \to G_2$ یک همریختی مابین دو گروه G_1 و G_2 باشد. آنگاه،

(الف) تصویر μ (که بصورت $\mathrm{Im}\,\mu$ نوشته می‌شود) مجموعه تمام اعضای متعلق به G_2 می‌باشد که توسط μ از G_1 به آن نگاشت می‌یابند، یعنی،

$$\mathrm{Im}\,\mu := \{\ g_2 \in G_2 \ : \ \exists\ g_1 \in G_1\,,\ \ \mu(g_1) = g_2\}.$$

(ب) هستهٔ μ (که بصورت $\mathrm{Ker}\,\mu$ نوشته می شود) مجموعه تمام اعضای متعلق به G_1 می باشد که توسط μ به عضو واحد e_2 در G_2 نگاشت می‌یابند. یعنی،

$$\mathrm{Ker}\,\mu := \{g \in G_1 :\ \mu(g) = e_2\}$$



تذکر. (۱) تصویر μ زیرگروهی از G_2 است. (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید.)

(۲) هستهٔ μ که دیگر بوسیلهٔ خود μ «قابل نمایش دادن نیست» یک زیرگروه از G_1 است. (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید.) درواقع اگر، جفت اعضای دلخواه g و g' متعلق به G_1 را که در رابطهٔ $\mu(g) = \mu(g')$ صدق می کنند در نظر بگیرید، در این صورت همریختی موجود مابین G_1 و G_2 این دو عضو را از هم تمیز نمی دهد و آنها توسط عضو یکسانی در G_2 نمایش داده می شوند. بنابراین

$$e_2 = [\mu(g)]^{-1}\,\mu(g') = \mu(g^{-1})\mu(g') = \mu(g^{-1}g')$$

و درنتیجه $g^{-1}g'$ متعلق به زیرگروه $\mathrm{Ker}\,\mu$ می باشد. لذا عضوی مانند k متعلق به $\mathrm{Ker}\,\mu$ چنان وجود دارد که $g' = gk$، یعنی g و g' با عمل گروهی یک عضو از $\mathrm{Ker}\,\mu$ به هم مربوط می شوند. برعکس، اگر k متعلق به $\mathrm{Ker}\,\mu$ باشد آنگاه $\mu(gk) = \mu(g)\,\mu(k) = \mu(g)$، ازاینرو اگر همریختی μ یک بیک نباشد هیچ عضوی در G_1 به تنهائی توسط μ نمایش داده نمی شود.

این موضوع که μ تمام اعضای همرده $g(\mathrm{Ker}\,\mu)$ را به عضو یکسانی در G_2 نگاشت می دهد قضیه مهم و جالب زیر را به دنبال دارد.

قضیه.

$\mathrm{Ker}\,\mu$ یعنی هستهٔ همریختی μ، یک زیرگروه نرمال G_1 است.

اثبات.

فرض کنید که اعضای k و g به ترتیب متعلق به $\mathrm{Ker}\,\mu$ و G_1 هستند. لذا،

$$\begin{aligned}\mu(gkg^{-1}) &= \mu(g)\,\mu(k)\,\mu(g^{-1}) = \mu(g)\,e_2\mu(g^{-1})\\ &= \mu(g)\,\mu(g^{-1}) = \mu(gg^{-1}) = \mu(e_1) = e_2\,.\end{aligned}$$

بنابراین gkg^{-1} متعلق به $\mathrm{Ker}\,\mu$ می باشد و ازاینرو عضوی مانند k' در $\mathrm{Ker}\,\mu$ وجود دارد بطوریکه $gkg^{-1} = k'$.

باتوجه به قضیهٔ اخیر $G_1/\mathrm{Ker}\,\mu$ خود یک گروه است و بطور شهودی به نظر می رسد که این گروه بطور وفادار در گروه G_2 نمایش داده می شود. بیان دقیق این نتیجه بشرح زیر است:

قضیه.

همریختی μ از G_1 به G_2 یک یکریختی میان گروه $G_1/\mathrm{Ker}\,\mu$ و زیرگروه $\mathrm{Im}\,\mu$ در G_2 القا می کند.

اثبات.

نگاشت $i : G_1/\mathrm{Ker}\,\mu \to \mathrm{Im}\,\mu$ را با ضابطهٔ $i(gK) := \mu(g)$ تعریف می کنیم. (برای سهولت در نوشتن، $\mathrm{Ker}\,\mu$ را با K نشان می‌دهیم.) باتوجه به اینکه μ تمام اعضای همرده $g\,(\ker\mu)$ را به عضو یکسانی در G_2 نگاشت می دهد، i یک نگاشت خوشتعریف می باشد.

فرض کنید چنان g و g' یی متعلق به G_1 وجود دارند که $i(gK)=i(g'K)$. درنتیجه $\mu(g)=\mu(g')$ و، بطوریکه در (۲) نشان داده شده، تساوی اخیر بیان می کند یک kی متعلق به K چنان وجود دارد که برای آن $g' = gk$. لاجرم داریم $gK = g'K$، و درنتیجه μ یک نگاشت یک بیک است. بدیهی است که i یک نگاشت پوشا بتوی $\mathrm{Im}\,\mu$ است، پس نتیجه می شود که $i : G_1/\mathrm{Ker}\,\mu \to \mathrm{Im}\,\mu$ یک نگاشت دوسویی است.

برای اثبات یکریختی بودن نگاشت i، اکنون کافی است نشان دهیم که این نگاشت، قانون ترکیب گروهی تعریف شده روی گروه خارج قسمت $G_1/\mathrm{Ker}\,\mu$ را حفظ می کند. اما،

$$\begin{aligned} i(gK\,g'K) &= i(gg'K) = \mu(gg') = \mu(g)\,\mu(g') \\ &= i(gK)\,i(g'K)\,. \end{aligned}$$

این نتیجه از نقطه نظر کاربردهای متنوع آن بسیار سودمند است. در اکثر موارد μ یک همریختی **پوشا** بتوی گروه G_2 می باشد. در این صورت بنابر قضیهٔ اخیر، گروه خارج قسمت $G_1/\mathrm{Ker}\,\mu$ با خود گروه G_2 یکریخت است، این یکی از از طرق بسیار متداول برای نشان دادن یکریختی مابین گروههاست. بعنوان مثال:

نتیجه.

زیرگروه $\mathbb{Z}_2$ از گروه لی $SL(2, \mathbb{C})$ را در نظر بگیرید، گروه تبدیلات موبیوس (رک جه معادلهٔ (۳.۱)) با گروه $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ یکریخت است.

اثبات.

نگاشت μ از گروه $SL(2, \mathbb{C})$ به گروه تبدیلات موبیوس را با اختصاص تبدیل موبیوس

$$z \rightsquigarrow \frac{az+b}{cz+d}.$$

به ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، تعریف می کنیم. این نگاشت یک همریختی است (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید) و همچنین پوشا بودن آن آشکار است. هستهٔ μ مجموعه تمام ماتریسهای $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ می باشد بطوریکه بازای هر z متعلق به $\mathbb{C}$ داریم

$$z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

بنابراین $cz^2 + dz = az + b$ بازای جمیع مقادیر z در $\mathbb{C}$ ، برقرار است. و این فقط با شرط $c = b = 0$ و $d = a$ برقرار است. اما از آنجا که ماتریس مذکور متعلق به گروه تبدیلات خطی خاص با دترمینان واحد است درنتیجه داریم $ad = 1$. لذا فقط دو حالت $a = d = +1$ و $a = d = -1$ می توانند برقرار باشند. بنابراین گروه $\operatorname{Ker} \mu$ شامل تنها و ماتریس زیر می باشد

$$\operatorname{Ker} \mu = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

که درواقع همان گروه $\mathbb{Z}_2$ می باشد. از آنجا که μ یک همریختی پوشاست، بنابر قضیهٔ اخیر $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ با گروه تبدیلات موبیوس یکریخت می باشد.

فصل دوم

فضاهای برداری

۲.۱ تعاریف اساسی

دو خاصیت جبری اساسی بردارهای سه بعدی معمولی عبارتند از:

(۱) هر دو بردار دلخواه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را می توان با هم جمع نموده تا بردار سوم $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ بدست آید؛

(۲) یک عدد حقیقی r را می توان در هر برداری مانند $\mathbf{v}$ ضرب نمود و بردار جدید $r\mathbf{v}$ را بدست آورد و این یک عمل خطی است زیرا بازای هر جفت بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ داریم $r(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{w}$.

آشکار است که مجموعه تمام بردارهای سه بعدی تحت عمل "+" یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند (بردار صفر $\mathbf{0}$ بعنوان عضو واحد این گروه است) و به این ساختار گروهی خاصیت

اضافی ضرب اعداد حقیقی در بردارها اضافه گردیده است.

این خواص جبری بردارهای معمولی یکی از انگیزه های اصلی تعریف فضاهای برداری به معنای عام می باشد و این موضوعی است که بخش دوم این کتاب به آن اختصاص یافته است. معرفی بی درنگ ایده فضای برداری مختلط بسیار مهم است، در چنین فضای برداری بجای اعداد حقیقی از اعداد مختلط در ضرب به بردارها استفاده می شود. این نوع فضاهای برداری نقش بسیار اساسی در نظریه کوانتمی (حالت یک سیستم کوانتمی بوسیلهٔ یک برداردر فضای مختلط نمایش داده می شود) و نظریه نمایش گروهها بازی می کنند.

تعریف.

یک **فضای برداری مختلط** V یک گروه آبلی بعلاوهٔ یک عمل اضافی معروف به **ضرب اسکالر**[1] که به هر عدد مختلط μ و بردار $\mathbf{v}$، بردار جدید $\mu\mathbf{v}$ را اختصاص می دهد، است و آن در شرایط زیر صدق می کند:

(۱.۱) $$\mu(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mu\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2\,,$$ (الف)

(۱.۲) $$(\mu_1 + \mu_2)\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v} + \mu_2\mathbf{v}\,,$$ (ب)

(۱.۳) $$\mu_1(\mu_2\mathbf{v}) = (\mu_1\mu_2)\mathbf{v}\,,$$ (ج)

(۱.۴) $$1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}\,,$$ (د)

(۱.۵) $$0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}\,,$$ (هـ)

بازای تمام اعداد مختلط μ، μ_1 و μ_2 و تمام بردارهای $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$.

تذکر. (۱) در سمت چپ معادله (۱.۵) عبارت "0" عدد صفر است، در حالی که عبارت "$\mathbf{0}$" ظاهر شده در سمت راست آن، بردار صفر متعلق به V است، یعنی، همان عضو واحد V وقتی آنرا بعنوان یک گروه آبلی در نظر می گیریم.

1- Scaler Multiplication

(۲) بنابر قرارداد $\mathbf{v}(-1)$ را بصورت $-\mathbf{v}$ و $\mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ را بصورت $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ نشان می‌دهیم.

(۳) تعریف کاملاً مشابهی برای یک **فضای برداری حقیقی** وجود دارد بطوریکه شرایط (۵-۱.۱) تغییر نمی‌کنند، بجز اینکه بجای اعداد مختلط از اعداد حقیقی استفاده می‌شود.

در بخش (۱.۵)، ایده همریختی مابین دو گروه، بعنوان نگاشتی که قانون گروهی را به معنی معادلهٔ (۴.۱) حفظ می‌کند معرفی گردید. درواقع آن مثال خاصی از مفهوم کلی‌تر «ریختار[1]» می‌باشد و با صرفنظر از جزئیات، بعنوان یک نگاشت مابین دو فضای مجهز به یک ساختار ریاضی که آن ساختار را حفظ می‌کند تعریف می‌شود.

در مورد فضاهای برداری، یک ریختار باید نه تنها قانون جمع را حفظ کند (یعنی، باید یک همریختی مابین گروههای آبلی نظیر فضاهای برداری باشد) بلکه باید ضرب اسکالر را نیز مراعات نماید، یعنی، یک نگاشت خطی باشد. بطور صوری بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعاریف.

(الف) یک **نگاشت خطی** مابین دو فضای برداری V_1 و V_2 نگاشتی مانند $L: V_1 \to V_2$ می‌باشد بطوریکه ساختار فضای برداری را به این معنی حفظ کند که بازای تمام اعداد مختلط μ_1، μ_2 و بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ داشته باشیم

$$L(\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2) = \mu_1 L(\mathbf{v}_1) + \mu_2 L(\mathbf{v}_2) \qquad (۱.۶)$$

(ب) یک نگاشت خطی را که یک بیک و پوشا باشد **یکریختی** گوئیم. (این امر ایجاب می‌کند که نگاشت وارون $L^{-1} : V_2 \to V_1$ نیز خطی باشد.) اگر یک یکریختی مابین دو فضای برداری V_1 و V_2 وجود داشته باشد آنگاه فضاهای برداری V_1 و V_2 **یکریخت** نامیده می‌شوند.

1- Morphism

(ج) یکریختی فضای برداری V با خودش را **خودریختی** V نامند. باید توجه نمود که مجموعه تمام خودریختی های یک فضای برداری مانند V، خود یک گروه است که با $\mathrm{Aut}\,(V)$ نشان داده می شود.

مثالها.

(۱) با تعریف ضرب اسکالر بصورت

$$\mu(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\mu a_1, \mu a_2, \ldots, \mu a_n)\,. \tag{۱.۷}$$

می توان به گروه آبلی $\mathbb{C}^n$ ساختار یک فضای برداری مختلط را نسبت داد. متشابهاً، می‌توان گروه آبلی $\mathbb{R}^n$ را به یک فضای برداری حقیقی تبدیل نمود. (بعنوان تمرین، نشان دهید که (۱.۷) یک ساختار فضای برداری روی $\mathbb{C}^n$ تعریف می کند.)

(۲) با تعریف ضرب اسکالر بصورت زیر بازای هر عدد مختلط μ و ماتریس A متعلق به $M(n, \mathbb{C})$،

$$(\mu A)_{ij} := \mu A_{ij} \qquad ، \qquad i, j = l, \ldots, n\,, \tag{۱.۸}$$

می توان به گروه آبلی $M(n, \mathbb{C})$ مجموعه تمام ماتریسهای $n \times n$ مختلط، ساختار یک فضای برداری مختلط را نسبت داد.

تمرین. نشان دهید که فضاهای برداری $\mathbb{C}^{n^2}$ و $M(n, \mathbb{C})$ یکریخت هستند.

(۳) مجموعه تمام دنباله های بی پایان اعداد مختلط بصورت $(a_1, a_2, \ldots)$، یعنی $\mathbb{C}^\infty$ را در نظر بگیرید. این مجموعه نیز به طریقی درست مشابه حالت $\mathbb{C}^n$ به یک فضای برداری مختلط تبدیل می شود.

(۴) فرض کنید که X یک مجموعهٔ دلخواه و V یک فضای برداری مختلط باشند، آنگاه می توان

به مجموعه $\mathrm{Map}(X, V)$ تمام نگاشتهای ممکنه از X به V، با تعاریف

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \tag{۱.۹}$$

$$(\mu f)(x) := \mu(f(x)) \tag{۱.۱۰}$$

بازای هر f_1 و f_2 متعلق به $\mathrm{Map}(X, V)$، ساختار یک فضای برداری مختلط را نسبت داد. باید توجه نمود که ساختار فضای برداری V بطور صریح در سمت راست معادلات (۱۰-۱.۹) ظاهر می شود. ساده ترین مثال حالتی است که $V=\mathbb{C}$ باشد و درواقع، فضای $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ مکرراً در اکثر زمینه های ریاضیات ظاهر می شود.

نگاشت خطی نظیر فضای برداری، مشابه مفهوم همریختی در نظریه گروههاست. بیشتر ساختارهای دیگر در نظریه گروهها، در نظریهٔ فضاهای برداری معادلهایی دارند که با استفاده از ساختار اصلی با احتساب خاصیت گروه آبلی فضاهای برداری تعریف می شوند و سپس سازگاری این ساختارها با عمل ضرب اسکالر، به آنها اضافه می گردد.

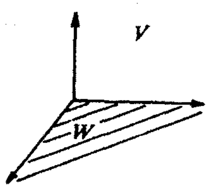
بالاخص، مشابه ایدهٔ یک زیرگروه، برای فضای برداری نیز مفهوم زیر فضای برداری وجود دارد.

تعریف.

زیرمجموعه W از یک فضای برداری V، یک زیرفضای خطی از V نامیده می شود اگر:

(الف) W یک زیرگروه V نسبت به ساختار گروه آبلی آن با قانون ترکیب "+" باشد.

(ب) W همچنین تحت ضرب اسکالر بسته باشد، یعنی، اگر μ در $\mathbb{C}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به W باشد، آنگاه $\mu\mathbf{w}$ نیز در W قرار گیرد.



تذکر. اگر W یک زیرفضای خطی از V باشد آنگاه W یک زیرگروه نرمال از گروه آبلی نظیر V می باشد درنتیجه V/W نیز یک گروه آبلی است. با تعریف ضرب اسکالر بصورت

$$\mu(\mathbf{v} + W) := \mu\mathbf{v} + W, \tag{۱.۱۱}$$

می توان به این فضای خارج قسمت، ساختار فضای برداری نسبت داد، که $\mathbf{v} + W$ همرده $\mathbf{v}$ نسبت به زیرگروه آبلی W را نشان می دهد. (بعنوان تمرین نشان دهید که این درواقع یک فضای برداری را تعریف می کند).

مثالها.

(۱) در $\mathbb{C}^n$ ، مجموعه تمام n-تائی ها از اعداد مختلط بصورت $(a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0)$ با شرط $m < n$، یک زیرفضای خطی است که بوضوح با فضای برداری $\mathbb{C}^m$ یکریخت می باشد.

بطور مشابه، بازای هر n، می توان فضای برداری $\mathbb{C}^n$ را بعنوان یک زیرفضای خطی از فضای برداری دنباله های بی پایان اعداد مختلط $\mathbb{C}^\infty$ در نظر گرفت.

(۲) یک زیرفضای خطی نسبتاً جالب (و مهم) از $\mathbb{C}^\infty$ مجموعه l_2 است که مجموعه تمام دنباله های بی پایان $(a_1, a_2, \ldots)$ را با شرط زیر تعریف می کند

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty\,. \tag{۱.۱۲}$$

(۳) $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ را بعنوان زیرمجموعه ای از تمام توابع تعریف شده از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{C}$ که بطور پیوسته k بار مشتق پذیر هستند تعریف می کنیم. از این موضوع زنجیرهٔ زیرفضائی زیر بدست می آید

$$C^\infty \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \ldots \subset C^0 \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})\,.$$

زیرفضای (خیلی مهم!) دیگر $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ، فضای $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ است که بعنوان مجموعه توابع بی نهایت بار دیفرانسیل پذیر و درعین حال انتگرال پذیر مجذوری به معنی،

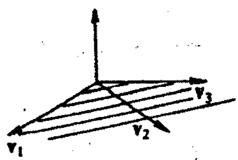
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n < \infty\,, \qquad (۱.۱۳)$$

تعریف می شود. این فضا اساساً فضای حالات کوانتمی مربوط به ذره غیرنسبیتی است که در فضای n بُعدی حرکت می کند.

در آنالیز برداری سه بعدی مقدماتی، بکارگیری بردارهای پایه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}$ و $\mathbf{k}\}$ که هر برداری مانند $\mathbf{v}$ را می توان برحسب آنها، به شکل $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ با ضرایب (v_x, v_y, v_z) بسط داد، بسیار مرسوم است. تعمیم این ایده به فضای برداری (و مختلط) عمومی تر، از اهمیت قابل ملاحظه ای برخوردار می باشد.

تعاریف.

(الف) فرض کنید که S یک زیرمجموعه (احتمالاً با مرتبهٔ بی نهایت) از فضای برداری مختلط V باشد. آنگاه مجموعه تمام ترکیبات خطی پایاندار $\mu_1\mathbf{v}^1 + \mu_2\mathbf{v}^2 + \ldots + \mu_j\mathbf{v}^j$ از هر مجموعه بردارهای دلخواهی مانند $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^j\}$ در S (برای هر مقدا معین j) پدیدآورنده[1] $[S]$ از S نامیده می شود.



بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ همسطح هستند و بنابراین صفحه ای را که در آن قرار دارند پدید می آورند.

1- Span

(ب) مجموعه پایاندار بردارهای $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ در V **بطور خطی وابسته** هستند اگر، مجموعه اعداد مختلط $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ (بطوریکه تمام آنها مساوی صفر نیستند) چنان وجود داشته باشند که:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{v}^i = 0 . \qquad (1.14)$$

اگر چنین مجموعه اعداد مختلطی وجود نداشته باشد (یعنی، معادله (۱.۱۴) تنها به شرط صفر شدن تمام μ_iها امکان پذیر باشد) آنگاه این مجموعه بردارها **مستقل خطی** نامیده می‌شوند. بعنوان مثال، در شکل بالا، مجموعه های $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$ ، $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3\}$ و $\{\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ مجموعه بردارهای مستقل خطی می باشند در حالیکه بردارهای مجموعه $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ بطور خطی وابسته هستند.

(ج) مجموعه ای با بی نهایت بردار را مستقل خطی گوئیم اگر هر زیرمجموعه پایاندار از آن بردارها، به معنی ذکر شده در بالا مستقل خطی باشند.

(د) یک فضای برداری **n بُعدی** است (که $n < \infty$) هرگاه شامل زیرمجموعه ای از n بردار مستقل خطی بوده ولی شامل هیچ زیرمجموعه $n + 1$ عضوی از بردارهای مستقل خطی نباشد. هرگاه یک فضای برداری شامل n بردار مستقل خطی بازای هر عدد صحیح مثبت n باشد آنگاه آن فضای برداری دارای **بُعد بی نهایت** است.

مثالها.

(۱) بازای هر $n < \infty$، فضای برداری $\mathbf{C}^n$ دارای بُعد متناهی n می باشد.

(۲) فضاهای برداری $\mathbf{C}^\infty$ ، l_2 ، $C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ و $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}^n)$ همه مثالهائی از فضاهای برداری با بُعد بی نهایت هستند.

اکنون به ایدهٔ مهم «پایه» برای یک فضای برداری می‌پردازیم. مشابه بردارهای پایه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ در آنالیز برداری سه بُعدی معمولی، در یک فضای برداری V، مجموعه ای به تعداد $\dim(V)$

بردار، که هر بردار متعلق به V را بتوان برحسب آنها بسط داد، به شرح زیر معرفی می کنیم. (در سراسر این بخش، V دارای بُعد معین خواهد بود).

تعاریف.

زیرمجموعه بردارهای مستقل خطی $S = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ از فضای برداری V یک پایه برای آن می باشد اگر $V = [S]$، یعنی، هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V را بتوان بصورت زیر بسط داد

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} v_i \mathbf{e}^i \qquad (1.15)$$

، بازای برخی اعداد مختلط $v_1, \ldots, v_m$.

اعداد مختلط $v_1, v_2, \ldots, v_m$ **ضرایب بسط** بردار $\mathbf{v}$ نسبت به این پایه نامیدهٔ می شوند.

تذکر. ضرایب بسط منحصر بفرد هستند. فرض کنید که

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{m} v_i' \mathbf{e}^i = \mathbf{v}\,.$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{m} (v_i - v_i')\mathbf{e}^i = 0$$

و، از آنجا که زیرمجموعه بردارهای $S = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ مستقل خطی هستند، تساوی $v_i = v_i'$ بازای تمام مقادیر $i = 1, \ldots, m$ برقرار است.

قضیه.

فضای برداری V، یک فضای n- بعدی است (که $n < \infty$) اگر و فقط اگر دارای پایه ای شامل n بردار باشد.

اثبات.

(الف) فرض کنید که مجموعه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک پایه برای فضای برداری $\mathbf{V}$ است، مجموعه دلخواه $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{n+1}\}$ شامل $n + 1$ بردار را در نظر بگیرید. آنگاه اعداد مختلطی مانند v_i^j بازای تمام مقادیر $j = 1, \ldots, n + 1$ وجود دارند بطوریکه

$$\mathbf{v}^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i v_i^j \,.$$

جوابهای غیربدیهی $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$ (که الزاماً همهٔ آنها صفر نیستند) از مجموعه n معادلهٔ خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{j=1}^{n+1} v_i^j \mu_j = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

بنابراین،

$$\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \mathbf{v}^j = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i v_i^j \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i \left(\sum_{j=1}^{n+1} v_i^j \mu_j \right) = 0\,.$$

لذا مجموعه بردارهای $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{n+1}\}$ بطور خطی وابسته هستند و درنتیجه V یک فضای nـ بُعدی است.

(ب) بالعکس، اگر فضای برداری V دارای بُعد n باشد، زیرمجموعه‌ای مانند $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ شامل n بردار مستقل خطی وجود دارد. بنابراین بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به V، زیرمجموعهٔ بردارهای $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ ، مستقل خطی نیستند و درنتیجه اعداد مختلط $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}$ (که الزاماً همهٔ آنها صفر نیستند) وجود دارند، بطوریکه

$$\mu_1 \mathbf{e}^1 + \mu_2 \mathbf{e}^2 + \ldots + \mu_n \mathbf{e}^n + \mu_{n+1} \mathbf{v} = 0\,. \qquad (۱.۱۶)$$

اما مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ مستقل خطی هستند و از اینرو داریم $\mu_{n+1} \neq 0$. درنتیجه با استفاده از حل معادلهٔ (۱.۱۶) می‌توان $\mathbf{v}$ را بصورت $\mathbf{v} = -\mu_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{e}^i$ معرفی نمود، بنابراین مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک پایه برای فضای برداری V است.

نتیجه.

هر فضای برداری مختلط n ـ بُعدی $(n < \infty)$ با فضای برداری $\mathbb{C}^n$ یکریخت است.

اثبات.

برای فضای برداری n ـ بُعدی V مجموعه بردارهای پایه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ و بسط منحصر بفرد بردار $\mathbf{v}$ در V نسبت به این پایه را بصورت $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}^i$ ، در نظر بگیرید. آنگاه نگاشت $i : V \to \mathbb{C}^n$ را بصورت $i(\mathbf{v}) := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ تعریف می‌کنیم و به سادگی معلوم می‌شود که این درواقع یک یکریختی است. (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

مثالها.

(۱) مجموعه $\{(1, \sqrt{3}), (i, 6)\}$ یک مجموعه پایه برای فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^2$ است.

(۲) برای هر $n < \infty$، n بردار زیر یک مجموعه پایه برای فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$ است.

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

زیرا، هر بردار $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ متعلق به این فضا را می‌توان به شکل زیر برحسب این بردارها بسط داد

$$\mathbf{a} = a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1).$$

۲.۲ فضاهای برداری نُرم دار[1]

اکنون نتایج بخش قبلی را به حالتی که در آن V یک فضای برداری با بُعد بی نهایت است، تعمیم می‌دهیم. بعنوان مثال، ممکن است مواردی که در آنها هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V را بتوان بصورت زیر بسط داد در نظر بگیریم

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \mathbf{e}^i , \qquad (۲.۱)$$

که در آن $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ یک مجموعهٔ پایه با مرتبهٔ بی نهایت، برای فضای برداری V است. اما قبل از هرگونه سعی و کوششی برای اثبات وجود قضایای بسط در مورد فضاهای بی نهایت بُعدی، نظیر آنچه که در فضاهای برداری با بُعد متناهی دیدیم، ابتدا لازم است تعبیر آشکاری از معادلهٔ بسط (۲.۱) ارائه دهیم. عبارتی مانند جمع بی نهایت بردار چه مفهومی دارد؟

یادآوری می کنیم در مورد اعداد مختلط، عبارت $S = \Sigma_{i=1}^{\infty} a_i$ چنین معنی می‌دهد که S حد جمعهای جزئی بصورت زیر می باشد

$$S := \lim_{N\to\infty} S^N , \qquad S^N := \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad (۲.۲)$$

و اینکه می گوئیم S حد دنبالهٔ اعداد مختلط $S^1, S^2, \ldots$ است بدین معنی است که:

«برای هر $\varepsilon > 0$، یک $N_0(\varepsilon)$ چنان وجود دارد که برای هر $N > N_0$ داریم $|S - S^N| < \varepsilon$.»

(۲.۳)

1- Normed

باتوجه به این ملاحظات، بسطی مانند معادلهٔ (۲.۱) را به معنی $\mathbf{v} := \lim_{N\to\infty} \Sigma_{i=1}^{N} v_i \mathbf{e}^i$ تعبیر می کنیم، اکنون موضوع منجر به تعبیر همگرائی دنباله بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots$ به بردار حدی $\mathbf{v}$ گردیده است.

اگر فضای برداری V دارای بُعد متناهی باشد، می توانیم مجموعه پایهٔ $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ (که $n = \dim(V)$) را انتخاب کنیم و بگوئیم که دنباله بردارهای $\{\mathbf{v}^N\}_{N=1}^{\infty}$ به بردار $\mathbf{v}$ همگرا می شود اگر، وقتی که بردارهای $\mathbf{v}^N$ و $\mathbf{v}$ بصورت

$$\mathbf{v}^N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i v_i^N \qquad \text{و} \qquad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^i v_i\,,$$

بسط داده شوند، بازای هر $i = 1, \ldots, n$، درست مشابه اعداد مختلط، دنباله ضرایب بسط $v_i^1, v_i^2, \ldots$ به ضرایب بسط v_i همگرا گردند.

باوجود این، برای یک فضای برداری بی نهایت بُعدی، چنین روشی را در اختیار نداریم (زیرا قبل از هر چیزی تعریف جمع بی نهایت بردار مطرح می باشد) درنتیجه باید روش متفاوتی را در نظر بگیریم. ایدهٔ کلیدی ارائه عبارتی مشابه (۲.۳) در یک فضای برداری، قدر مطلق یک عدد مختلط است، بطوریکه کوچک بودن آن بتواند کوچک بودن یک بردار داده شده را محک زند. این از طریق تعریف مفهوم «نُرم» یک بردار امکان پذیر می گردد.

تعاریف.

(الف) نگاشت $\|\ \|$ از فضای برداری مختلط V بتوی اعداد حقیقی معین یک نُرم روی V است اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به V داشته باشیم

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|. \qquad (۲.۴)$$

(این درست مشابه با نامساوی مثلث است که مدول اعداد مختلط در آن صدق می کنند).

(۲) بازای تمام اعداد مختلط μ و بردارهای $\mathbf{v}$ متعلق به V داشته باشیم

$$\| \mu \mathbf{v} \| = | \mu | \| \mathbf{v} \|. \tag{۲.۵}$$

(۳)

$\| \mathbf{v} \| \geq 0$ با $\| \mathbf{v} \| = 0$ فقط اگر $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (۲.۶)

[توجه کنید که، درست مانند شرط (۱)، شرایط (۲) و (۳) نیز مشابه خواص قدرمطلق اعداد مختلط هستند.]

(ب) در فضای برداری نُرم‌دار V دنباله بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots$ را به بردار (یا در نُرم) $\mathbf{v}$ در آن فضا قویاً همگرا گوئیم اگر دنباله اعداد مختلط $\| \mathbf{v}^N - \mathbf{v} \|$ به طریق معمول به عدد 0 همگرا باشد، یعنی،

«بازای هر $\varepsilon > 0$ یک $N_0(\varepsilon)$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $N > N_0$ داشته باشیم $\| \mathbf{v}^N - \mathbf{v} \| < \varepsilon$.»

(۲.۷)

که بصورتهای "$\mathbf{v} = \lim_{N \to \infty} \mathbf{v}^N$" یا "$\mathbf{v}^N \to \mathbf{v}$" نیز قابل بیان می‌باشد.

مثالها.

(۱) در فضای برداری $\mathbb{C}^n$ ، نُرم نظیر بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| \mathbf{a} \|^2 := \sum_{i=1}^{n} | a_i |^2 . \tag{۲.۸}$$

بطورکلی، روی هر فضای برداری V با بُعد متناهی، مجموعه پایه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ را انتخاب نموده و نرم را بصورت

$$\| \mathbf{v} \|^2 := \sum_{i=1}^{n} | v_i |^2 , \qquad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}^i . \tag{۲.۹}$$

تعریف می کنیم. به آسانی می توان نشان داد که، با این تعریف از نُرم، همگرائی قوی یک دنباله از بردارها با همگرائی ضرایب بسط ذکر شده در بالا یکسان است.

(۲) در فضای l_2، نُرم نظیر دنباله های بی پایان را می توان با مربع قدرمطلق ضرایب جمع پذیر، بصورت

$$\| \mathbf{a} \|^2 := \sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2 , \qquad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots). \tag{۲.۱۰}$$

تعریف کرد. باید توجه نمود که شرط لازم برای آنکه یک دنبالهٔ اختیاری از $\mathbb{C}^\infty$ متعلق به زیرفضای l_2 باشد این است که نُرم آن بصورت تعریف شده در معادله (۲.۱۰) معین باشد.

تمرین. نشان دهید که در l_2 دنباله بردارهای $(1, 0, 0, \ldots)$، $(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$ و $(0, 0, \frac{1}{3}, \ldots)$ و ... قویاً به بردار صفر همگرا هستند.

(۳) فرض می کنیم V فضای برداری $C^0([a, b], \mathbb{C})$ ، یعنی، فضای تمام توابع پیوسته از فاصلهٔ بسته $[a, b]$ روی محور حقیقی بتوی اعداد مختلط باشد.
آنگاه نُرم روی V را می توان بصورت زیر تعریف نمود

$$\| f \| := \max_{x \in [a, b]} | f(x) | . \tag{۲.۱۱}$$

نرم دیگری که روی این فضای برداری توابع می توان تعریف کرد عبارتست از

$$\| f \|^2 := \int_a^b | f(x) |^2 \, dx . \tag{۲.۱۲}$$

در یک نگاه دقیق (که اینجا راجع به آن بحث نخواهیم کرد)، این دو نُرم روی V با یکدیگر معادل نیستند و شرایط متفاوتی برای همگرائی قوی یک دنباله برداری اعمال می کنند.

بطور کلی، اگر یک دنباله برداری ... ,$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ قویاً به بردار $\mathbf{v}$ در فضای برداری نُرم‌دار V همگرا باشد آنگاه بطور شهودی انتظار می رود که دنباله اعداد حقیقی ... ,$\| \mathbf{v}^1 \|, \| \mathbf{v}^2 \|$ بطریق معمول به عدد حقیقی $\| \mathbf{v} \|$ همگرا باشد. باید توجه نمود که این تعریف همگرائی نیست، بنابراین لازم است که صرفاً بعنوان یک نتیجه اثبات گردد.

قضیه.

اگر دنباله بردارهای ... ,$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ قویاً به بردار $\mathbf{v}$ همگرا شود، آنگاه دنباله اعداد حقیقی ... ,$\| \mathbf{v}^1 \|, \| \mathbf{v}^2 \|$ به عدد حقیقی $\| \mathbf{v} \|$ همگرا می گردد.

اثبات.

$\| \mathbf{v} \| = \| (\mathbf{v} - \mathbf{v}^N) + \mathbf{v}^N \| \leq \| \mathbf{v} - \mathbf{v}^N \| + \| \mathbf{v}^N \|$ (طبق نامساوی مثلث). بنابراین، داریم $\| \mathbf{v} \| - \| \mathbf{v}^N \| \leq \| \mathbf{v} - \mathbf{v}^N \|$ ، بطور مشابه، $\| \mathbf{v}^N \| = \| (\mathbf{v}^N - \mathbf{v}) + \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{v}^N - \mathbf{v} \| + \| \mathbf{v} \|$ و از اینرو داریم $\| \mathbf{v}^N \| - \| \mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{v} - \mathbf{v}^N \|$. بنابراین، $0 \leq | \, \| \mathbf{v}^N \| - \| \mathbf{v} \| \, | \leq \| \mathbf{v} - \mathbf{v}^N \|$ ، و در حد $N \to \infty$، نتیجه فوق بدست می آید.

اما دنباله بردارهای ... ,$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ را در فضای نرم‌داری در نظر بگیرید، چگونه می توان پی برد که آیا این دنباله اساساً به برداری همگرا است یا نه؟ خیلی بعید بنظر می رسد که هر بردار اختیاری مانند $\mathbf{v}$ متعلق به V را انتخاب نموده و شرط همگرائی قوی دنباله را به $\mathbf{v}$ با فرض همگرا بودن به آن، آزمود. به این ترتیب برای نشان دادن عدم همگرائی دنباله موردنظر باید تمام بردارهای متعلق به V را یک بیک امتحان نمود که خود امری بسیار خسته کننده خواهد بود. آنچه موردنیاز است وجود شرطی است که بتوان آنرا مستقیماً روی دنباله ... ,$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ اعمال نمود تا اگر دنباله در شرط مذکور صدق کرد همگرائی آنرا تضمین کند. وقتی از همگرائی دنباله مطمئن

شویم، سپس می توانیم نگران پیدا نمودن برداری که دنباله به آن همگرا است باشیم.

مورد مشابه این شرط در دنباله های اعداد مختلط شرط معروف کوشی است:

«اگر دنبالهٔ اعداد مختلط $\mu_1, \mu_2, \ldots$ در شرط زیر صدق کند:

بازای هر $\varepsilon > 0$، یک $n_0(\varepsilon)$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $n > n_0$ و $m > n_0$ داشته باشیم $|\mu_n - \mu_m| < \varepsilon$.

آنگاه سری به عدد مختلطی مانند μ همگرا می گردد.»

این انگیزه‌ای برای تعریف «همگرائی کوشی دنباله بردارها» می باشد.

تعریف.

دنباله بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots$ در یک فضای برداری V، دنباله بردارهای کوشی است اگر:

بازای هر $\varepsilon > 0$، یک $n_0(\varepsilon)$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $n > n_0$ و $m > n_0$ داشته باشیم $\| \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^m \| < \varepsilon$.

همگرائی کوشی یک دنباله در صورتی می تواند برای تست همگرائی قوی آن بکار رود که قبل از هر چیزی یک دنباله قویاً همگرا خود یک دنباله کوشی باشد. خوشبختانه چنین نیز است.

قضیه.

اگر دنباله $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots$ به بردار $\mathbf{v}$ در V قویاً همگرا باشد، آنگاه آن یک دنباله کوشی است.

اثبات.

از نامساوی مثلث داریم:

$$\| \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^m \| = \| (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}^m) \| \leq \| \mathbf{v}^n - \mathbf{v} \| + \| \mathbf{v} - \mathbf{v}^m \|.$$

اما $\mathbf{v}^n \to \mathbf{v}$ و بنابراین، بازای هر $\varepsilon > 0$، $n_0(\varepsilon)$ چنان وجود دارد که برای هر $n > n_0$ داریم $\| \mathbf{v} - \mathbf{v}^n \| < \varepsilon/2$.

اما درنتیجه، اگر $n > n_0$ و $m > n_0$، داریم $\| \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^m \| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. که قضیه را اثبات می کند.

آگاهی از صحت این قضیه رضایت بخش است، ولی درواقع ما به حالت عکس آن علاقمندیم. یعنی، آیا یک دنباله از بردارها در یک فضای برداری نُرم دار V با همگرائی کوشی الزاماً بطور قوی نیز همگرا است؟ برای یک دنباله از اعداد مختلط، پاسخ مثبت است ولی، متأسفانه، در حالت کلی چنین نیست. فضاهائی که برای آنها عکس قضیهٔ مذکور صحت دارد از اهمیت زیادی برخوردار هستند و شایسته است که نام مخصوص خود را داشته باشند.

تعریف.

یک فضای برداری نُرم‌دار را **کامل** گوئیم (یا **فضای باناخ** گوئیم) اگر هر دنباله‌ای با همگرائی کوشی در آن بطور قوی نیز همگرا باشد.

فضاهائی از این نوع، تنها نوع فضاهائی می باشند که آنالیزی مشابه اعداد حقیقی یا مختلط را در مورد آنها نیز می توان بکار برد، و بنابراین آگاهی از اینکه یک فضای نُرم‌دار، کامل است یا نه، بسیار مهم می باشد.

مثالها.

(۱) همانطور که اشاره شد، اعداد مختلط $\mathbb{C}$ ، بعنوان یک فضای برداری نُرم دار یک بُعدی، یک فضای کامل است و با استفاده از آن می توان ثابت نمود که هر فضای برداری با بُعد متناهی

نیز کامل می باشد.

(۲) فضای برداری l_2 با نُرم داده شده در معادلهٔ (۲.۱۰) یک فضای کامل است، همینطور فضای $C^0([a, b], \mathbb{C})$ با نُرم تعریف شده در معادله (۲.۱۱) نیز کامل است. البته هر دوی این فضاها بی نهایت بُعدی هستند.

(۳) باوجود این، فضای $C^0([a, b], \mathbb{C})$ نسبت به نُرم تعریف شده بوسیلهٔ معادلهٔ (۲.۱۲) کامل نیست. این بدان دلیل است که تعداد متناهی دنباله های توابع $f_1, f_2, \ldots$ وجود دارند که برای آنها

$$\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 \, dx$$

یک دنباله کوشی اعداد حقیقی است، ولی به تابع پیوسته ای روی فاصله $[a, b]$ همگرا نمی شود.

(۴) فضای $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ تعریف شده در معادلهٔ (۱.۱۳) با نُرم داده شده بصورت زیر، مثالی دیگر برای فضای غیرکامل است

$$\|f\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx^1 \, dx^2 \ldots dx^n . \qquad (۲.۱۳)$$

بررسی اینکه آیا فضای برداری بی نهایت بُعدی داده شده ای کامل است یا نه، به هیچ وجه کار آسانی نیست و ما آنرا بیشتر از این دنبال نمی کنیم، فقط به این موضوع توجه می کنیم که، از خیلی جهات فضاهای غیرکامل شبیه اعداد گویا هستند و بطور یقین یک فضای غیرکامل بوده که می توان با کامل نمودن آن اعداد حقیقی را تشکیل داد. بطور مشابه، یک فضای غیرکامل را می توان مانند روشی که اعداد حقیقی مابین اعداد گویا درونیابی می شوند، با «پر کردن شکافها» به یک فضای کامل تبدیل نمود. با وجوداین، به هیچ وجه معلوم نیست که، اعضای اضافه شده به یک فضای برداری غیرکامل الزاماً شباهتی به نوع اشیاء ریاضی آن داشته باشند. (بعنوان مثال: فضای توابع).

۲.۳ ضربهای اسکالر [1]

استفاده از مفهوم بسیار عمومی «ضرب داخلی» بمنظور ایجاد نُرم روی یک فضای برداری، یکی از مؤثرترین روشها است. و انگیزه آن، تعریف طول (یعنی، نُرم) یک برداری مانند $\mathbf{v}$ در آنالیز برداری سه بعدی معمولی بصورت $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$ برحسب ضرب عددی بردار با خودش می باشد. در هر فضای برداری داده شده، ضرب اسکالر مشابه ضرب عددی در این فضای سه بُعدی با اصلاحات مناسبی که ترجیحاً با ضرب اسکالر اعداد مختلط و نه اعداد حقیقی سروکار داشته باشیم، تعریف می گردد. با این توضیحات، تعریف زیر از ضرب داخلی، تقلیدی بجا از خواص اساسی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ است.

تعریف.

در یک فضای برداری مختلط مانند V، ضرب اسکالر (یا ضرب داخلی) بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ از آن بصورت عدد مختلط $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ که در شرایط زیر صدق کند تعریف می شود

(الف)

$$\langle\mathbf{v},(\mu_1\mathbf{w}_1+\mu_2\mathbf{w}_2)\rangle=\mu_1\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_1\rangle+\mu_2\langle\mathbf{v},\mathbf{w}_2\rangle, \tag{۳.۱}$$

(ب)

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^*=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle, \tag{۳.۲}$$

(ج)

(۳.۳) $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\geq 0$ با $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=0$ فقط اگر $\mathbf{v}=0$.

تذکر. (۱) شرایط (۳.۱) و (۳.۲) تساوی زیر را نتیجه می دهند

1- Scaler Products

$$\langle(\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2), \mathbf{w}\rangle = \mu_1{}^*\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \mu_2{}^*\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle\,. \qquad (۳.۴)$$

باید به این تکته مهم توجه نمود که در عبارت ضرب داخلی "< , >" اعداد مختلط واقع در سمت راست بدون تغییر بیرون می‌آیند در حالی که اعداد مختلط واقع در سمت چپ بصورت مزدوج مختلط خود بیرون می‌آیند. کوتاهی در بخاطرسپاری این نکته معمولاً موجب بروز مشکلاتی در حل مسائل شامل ضرب اسکالر، می گردد.

(۲) ضرب اسکالر در یک فضای برداری حقیقی درست مشابه ضرب اسکالر در یک فضای برداری مختلط تعریف می گردد، با این تفاوت که μ_1 و μ_2 اعداد حقیقی بوده و همچنین از آنجا که بازای هر جفت بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ ضرب اسکالر $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ یک عدد حقیقی است در معادلهٔ (۳.۲) مزدوج مختلط ضرورتی ندارد.

مثالها.

(۱) ضرب اسکالر روی فضای برداری مختلط $\mathbf{C}^n$ بصورت زیر

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i\,, \qquad (۳.۵)$$

با $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$، تعریف می‌شود.

باید توجه نمود که این تعریف دقیقاً مشابه ضرب داخلی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} := v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ در آنالیز برداری سه بُعدی رایج می باشد.

(۲) در فضای برداری دنباله های جمع پذیر مجذوری l_2، در مشابهت با (۳.۵) یک انتخاب طبیعی برای تعریف ضرب اسکالر عبارت است از

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i\,, \qquad (۳.۶)$$

که اکنون در این مورد $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به ترتیب دنباله های بی پایان $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ و

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$ هستند. باوجود این، برای آنکه معادلهٔ (۳.۶) معین باشد برقراری شرایط

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \qquad \text{و} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty \tag{۳.۷}$$

که برای همگرائی مطلق جمع در آن کافی است، ضرورت دارد. درواقع، صحت این امر از نامساوی شوارتز که در ذیل ثابت خواهد گردید نتیجه می شود.

(۳) در فضای توابع پیوسته $C^0([a, b], \mathbb{C})$ تعریف شده از بازهٔ $[a, b]$ بتوی اعداد مختلط (با نُرم داده شده در معادلهٔ (۲.۱۲))، می توان ضرب اسکالر را بصورت زیر تعریف نمود

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \int_a^b f(x)^* g(x)\, dx\,. \tag{۳.۸}$$

بطریق مشابه، در فضای $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (با نُرم داده شده در معادلهٔ (۲.۱۳))، می توان ضرب اسکالر را بصورت زیر تعریف نمود

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x)\, dx^1\, dx^2 \ldots dx^n\,. \tag{۳.۹}$$

همگرائی انتگرالهای تعریف کنندهٔ ضرب اسکالر در هر دو مورد اخیر، با استفاده از نامساوی شوارتز، از خاصیت انتگرال پذیر مجذوری توابع نظیر آنها نتیجه می شود.

تذکر. معادلهٔ (۳.۹) دقیقاً «تابع همپوشانی» بکار رفته در مکانیک موجی مقدماتی است. آن یک مثال خاص از این موضوع کلی است که حالات یک سیستم کوانتمی بوسیله بردارهائی در یک فضای برداری مختلط مجهز به ضرب اسکالر توصیف می گردند. تعبیر بسیار اساسی احتمال در نظریه کوانتم، مستقیماً با بکارگیری ضرب اسکالر قابل بیان است. این ایدهٔ بسیار مهمی است که مجدداً از آن صحبت خواهیم نمود.

باید توجه نمود که، در تمام مثالهای فوق، قبلاً در بخش ۲.۲ روی فضاهای مربوطه نُرم تعریف گردیده است و این نُرم‌ها درست مانند تعریف طول بردار سه بُعدی $\mathbf{v}$ بصورت $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$، توسط معادلهٔ $\|\mathbf{v}\|^2 = \langle v, v\rangle$ با ضرب اسکالر در ارتباط می باشند. این موضوع اکیداً توصیه می کند که اگر برای یک فضای برداری مختلط ضرب اسکالر تعریف شده باشد آنگاه همواره نرم به طریق ذکر شده از ضرب اسکالر بدست‌آید. برای تعریف نُرم بصورت فوق لازم است که ابتدا نامساوی معروف شوارتز اثبات گردد.

قضیه (نامساوی شوارتز).

هر ضرب اسکالر تعریف شده روی یک فضای برداری مختلط مانند V، بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به آن در نامساوی زیر صدق می کند

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \le \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (۳.۱۰)$$

حالت تساوی برقرار است اگر و فقط اگر بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بطور خطی وابسته باشند.

[**تذکر.** در آنالیز برداری معمولی، این نامساوی بصورت $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})^{\frac{1}{2}}$ است و اگر θ زاویهٔ مابین بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ باشد آنگاه ثابت می شود که نامساوی بصورت $|\cos\theta| \le 1$ می باشد.]

اثبات.

(الف) بدیهی است که اگر $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ باشد آنگاه قضیه برقراراست. اگر داشته باشیم $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ آنگاه، بازای هر عدد مختلط μ، شرایط اساسی (۳.۱-۳) روی ضرب اسکالر نامساوی زیر را بدست می دهند:

$$0 \le \langle (\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}), (\mathbf{v} + \mu\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \mu^*\mu\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + \mu^*\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \mu\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle . \qquad (۳.۱۱)$$

بویژه برای انتخاب (زیرکانه!) $\mu := -\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$، با جایگذاری آن در نامساوی اخیر داریم:

$$0 \le \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \frac{|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle} - \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle^*\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle} - \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle}$$

طرف راست این رابطه بصورت زیر نوشته می شود

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \frac{|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle} - \frac{2\,|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle}$$

و بنابراین، $0 \le \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \dfrac{|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle}$ ، یعنی، $|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle|^2 \le \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\,\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$

(ب) اگر بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بطور خطی وابسته باشند، آنگاه با جایگذاری $\mathbf{v} = \mu\mathbf{w}$ در (۳.۱۰) صحت آن بسهولت آشکار می شود.

بالعکس، اگر در مرحلهٔ نهائی اثبات قضیه برای $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ حالت تساوی برقرار باشد آنگاه در تمام مراحل فوق بویژه در معادلهٔ (۳.۱۱) نیز حالت تساوی برقرار بوده و درنتیجه با استفاده از شرط (۳.۳) باید داشته باشیم $\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = \mathbf{0}$، یعنی، بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بطور خطی وابسته هستند.

نتیجه.

اگر $\langle\ ,\ \rangle$ یک ضرب اسکالر روی فضای برداری V باشد، آنگاه نُرم هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V را می توان بصورت زیر تعریف نمود

$$\|\mathbf{v}\| := \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}. \qquad (۳.۱۲)$$

اثبات.

شرایط (۲.۵) و (۲.۶) برای نُرم، بلافاصله از شرایط تعریف شده برای ضرب اسکالر بدست می‌آید. برای اثبات نامساوی مثلث (۲.۴) بشرح زیر عمل می کنیم

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{v}+\mathbf{w}), (\mathbf{v}+\mathbf{w})\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \\ &\leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + 2\,|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \\ &\leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

از نامساوی شوارتز داریم

$$= (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}})^2 .$$

و این دقیقاً ثابت می کند که $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

تذکر. (۱) درست مشابه حالت نُرم، تشخیص اینکه کدام فضاهای برداری کامل هستند دارای اهمیت بسیار است. بویژه اینکه یک فضای برداری کامل نرم‌دار که نُرم آن از ضرب اسکالر بدست می‌آید به **فضای هیلبرت** معروف می باشد. یکی از اصول اساسی قراردادی متداول در نظریه کوانتم، نمایش حالات سیستم های کوانتمی بوسیله بردارهایی در یک فضای هیلبرت است.

(۲) فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با بعد متناهی و فضای برداری l_2 با بعد بی نهایت، نمونه هایی از فضای هیلبرت هستند. اگرچه فضای $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ کامل نیست باوجود این، با اضافه

نمودن یک سری توابع حدی مشخص به آن و نیز جایگزینی انتگرال گیری لبگ[1] بجای انتگرال گیری ریمانی ظاهر شده در تعریف ضرب اسکالر، بطور موفقیت‌آمیزی به فضای کامل تبدیل می‌شود. در مورد توابع موجی نظریه کوانتم مقدماتی، تلویحاً فرض می‌شود که این روند کامل سازی طی گردیده است. بمنظور تشخیص فضای غیرکامل $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ از فضای کامل شدهٔ آن، معمولاً فضای کامل شده را با $L^2(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهند.

(۳) البته نباید تصور نمود که تمام نرم ها در هر فضای برداری را می‌توان بطریقی مشابه از یک ضرب اسکالر تعریف شده در آن فضا، بدست آورد. بعنوان مثال، هیچ ضرب اسکالری در فضای $C^0([a, b], \mathbb{C})$ که بتوان نُرم تعریف شده در معادله (۲.۱۱) را از آن بدست آورد وجود ندارد.

بیشتر مفاهیم هندسی مربوط به ضرب نقطه‌ای در آنالیز برداری سه بُعدی مقدماتی را در حالت کلی به ضرب اسکالر تعریف شده روی فضاهای برداری مختلط، می‌توان تعمیم داد.

تعاریف.

(الف) فضای برداری V را با ضرب اسکالر $\langle\ ,\ \rangle$ در نظر بگیرید. آنگاه دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را **متعامد** گوئیم اگر

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \,.$$

(ب) بردار $\mathbf{v}$ را **یکه** گوئیم اگر $1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} =: \|\mathbf{v}\|$.

(ج) دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را **متعامد یکه** گوئیم اگر $0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ و $1 = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$.

(د) **زیرمجموعه بردارهای متعامد یکه** از فضای برداری V، مجموعه بردارهائی است که هر بردار متعلق به آن یکه بوده و نیز هر دو بردار متعلق به آن متعامد باشند.

(هـ) در یک فضای برداری با بُعد متناهی، یک **پایه متعامد یکه** عبارت است از مجموعهٔ پایه های

1- Lebesgue

$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$، [اینجا $n = \dim(V)$]، که یک زیرمجموعهٔ متعامد یکه از V می باشد، یعنی،

$$\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \rangle = \delta^{ij} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n . \qquad (۳.۱۳)$$

تذکر. (۱) هر فضای برداری با بُعد متناهی یک پایه متعامد یکه دارد. (تمرین: برای اثبات یک مجموعه پایه اختیاری را در نظر گرفته و مجموعه بردارهای متعامد یکه را از ترکیب خاص آنها درست کنید. این رویه به روش گرام - اشمیت معروف است.)

(۲) پایه متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ برای فضای برداری $\mathbf{V}$ و نیز بسط هر بردار اختیاری $\mathbf{v}$ برحسب آنرا [به معادلهٔ (۱.۱۵) رجوع کنید] بصورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}^i \qquad (۳.۱۴)$$

در نظر بگیرید. یکی از مزایای مهم بکارگیری پایه متعامد یکه، محاسبه صریح و آسان ضرایب بسط برحسب بردار $\mathbf{v}$ و مجموعهٔ پایهٔ بکار رفته می باشد. بدین منظور، ضرب اسکالر طرفین معادله (۳.۱۴) را در یک عضو اختیاری پایه مانند $\mathbf{e}^j$ بدست می‌آوریم

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{e}^j, \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}^i \rangle \qquad (۳.۱۵)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}^j, v_i \, \mathbf{e}^i \rangle \qquad (۳.۱۶)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \, \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \delta^{ij} = v_j .$$

بنابراین ملاحظه می شود که ضریب v_j برحسب بردار $\mathbf{v}$ و مجموعه پایه، بصورت زیر

نوشته می‌شود

$$\boxed{v_j = \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{v} \rangle.} \tag{۳.۱۷}$$

این نتیجه از نقطه نظر عملی و نظری حائز اهمیت بسیار است.

باید توجه نمود که، معادلهٔ (۳.۱۷) منجر به اتحاد زیر می‌شود

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{e}^i \tag{۳.۱۸}$$

و همچنین با استفاده از آن داریم

$$\| \mathbf{v} \|^2 = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}^i \right), \mathbf{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2 . \tag{۳.۱۹}$$

حالت خاص نتیجهٔ اخیر در آنالیز برداری سه بعدی متداول وقتی که بردار $\mathbf{v}$ را برحسب مجموعه پایه متعامد یکه $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ بصورت $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ بسط می‌دهیم مشاهده می‌شود. بروشی مشابه معادله (۳.۱۷) ضرایب بسط بصورت $v_x = \mathbf{i}\cdot\mathbf{v}$ و غیره، محاسبه می‌گردند و مشابه معادله (۳.۱۹) بیان معروف زیر است

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 .$$

حال موضوع بسیار مهم توسعه ایدهٔ پایه های متعامد یکه و قضایای بسط مربوطه در مورد فضاهای برداری با بُعد بی نهایت را موردتوجه قرار می‌دهیم. بعنوان مثال مشابه معادلهٔ (۳.۱۸) صرفاً با جایگزینی بی نهایت بجای عدد صحیح n نوشته می‌شود، یعنی، به نظر می رسد که این تعمیم به سادگی انجام می‌شود. باوجود این، ابتدا باید نکات زیر را در نظر گرفت:

(۱) همانطور که قبلاً نیز در بخش ۲.۲ مطرح گردید، جمع با تعداد جملات بی نهایت در معادلهٔ

(۳.۱۸) باید بعنوان حد قوی از جمع های جزئی تعبیر گردد و از اینرو به دلایلی مشابه آنچه که در بخش ۲.۲ ذکر شد لازم است فضای برداری کامل، یعنی، از نوع فضای هیلبرت باشد.

(۲) برای استخراج رابطهٔ بسیار اساسی (۳.۱۷) ناگزیر از جابجائی جمع (Σ) با ضرب اسکالر در معادلهٔ (۳.۱۵) شدیم، چنانکه در رابطهٔ (۳.۱۶) جمع ازداخل ضرب اسکالر خارج گردید. برای جمع با تعداد اعضای متناهی این عمل برمبنای شرط خطی (۳.۱) که در تعریف ضرب اسکالر آمده است، توجیه می شود. باوجود این، در مورد فضاهای برداری با بُعد نامتناهی شرط خطی مذکور دیگر خودبخود جابجائی جمع و ضرب اسکالر را توجیه نمی کند و اثبات قضیه ای در این خصوص ضروری بنظر می رسد.

(۳) با این فرض تلویحی که فضای هیلبرت «بی نهایت بُعدی شمارش پذیر» است، مشابه معادلهٔ (۳.۱۸) با حد بالائی بی نهایت نوشته می شود. اما آیا لازم است که همیشه چنین فرض شود؟ ممکن است فضا دارای بُعد بی نهایت از مرتبهٔ بالاتر (مانند تعداد اعداد حقیقی، در مقابل تعداد اعداد صحیح) باشد در این صورت باید مجموعه پایه هایی را که با اعداد حقیقی اندیس گذاری می شوند، بکار برده و همچنین جمع در معادلهٔ (۳.۱۸) با انتگرال جایگزین گردد.

البته در نظریهٔ کوانتم فضاهائی از این نوع وجود دارند. اما در این کتاب از بررسی چنین مثالهائی اجتناب می کنیم. بیان تکنیکی ایدهٔ شهودی فضائی با بُعد بی نهایت شمارش پذیر، در تعریف زیر گنجانده می شود.

تعاریف.

(الف) یک فضای هیلبرت جداپذیر نامیده می شود اگر زیرمجموعه ای مانند S از فضای برداری V وجود داشته باشد بطوریکه

(۱) هر بردار متعلق به فضای برداری V را بتوان برحسب ترکیب خطی تعداد معینی از اعضای S و یا حد قوی چنین جمع هائی معرفی نمود.

(۲) مجموعهٔ S دارای بی نهایت عضو شمارش پذیر یا تعداد متناهی عضو باشد.

(ب) علاوه بر این، اگر اعضای S دارای استقلال خطی از یکدیگر باشند آنگاه مجموعه S یک

پایه برای فضای برداری V نامیده می شود.

تذکر. (۱) درست مشابه فضاهای برداری با بُعد متناهی، همیشه می توان اعضای S را مجموعه بردارهای متعامد یکه انتخاب نمود.

(۲) باتوجه به تعریف فوق هر فضای هیلبرت با بُعد متناهی جداپذیر می باشد.

(۳) بعنوان یک مثال بارز، l_2 یک فضای هیلبرت بی نهایت بُعدی جداپذیر است، که دارای پایه متعامد یکه شمارش پذیر، یعنی، مجموعه بردارهایی بصورت زیر است:

$$\{(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), (0, 0, 1, \ldots), \ldots\}.$$

یک مثال نه چندان آشکار (ولی خیلی مهم)، فضای برداری $L^2([0, 1])$ است که از کامل نمودن فضای $C^\infty([0, 1], \mathbb{C})$ نسبت به ضرب اسکالر تعریف شده در معادلهٔ (۳.۸) بدست می‌آید. مجموعه توابع زیر یک مجموعه پایه متعامد یکه برای این فضا است:

$$\{1, 2^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi x, 2^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi x, 2^{\frac{1}{2}} \sin 4\pi x, 2^{\frac{1}{2}} \cos 4\pi x, \ldots\}. \qquad (۳.۲۰)$$

بعبارت دیگر، وقتی تابعی برحسب سری فوریه بسط داده می شود، آن تابع بعنوان برداری متعلق به فضای $L^2([0, 1])$ در نظر گرفته می شود که برحسب مجموعه پایه ویژه معرفی شده در معادلهٔ (۳.۲۰) بسط داده شده است. این به معنی همگرائی جمع فوریه است، یعنی، جمع های جزئی بسط نسبت به نُرم بدست آمده از معادلهٔ (۳.۸) قویاً همگرا هستند. باید توجه نمود که این همگرائی قوی، همگرائی جمع بی نهایت تابع را بصورت نقطه به نقطه یعنی بازای جمیع مقادیر x متعلق به فاصله $[0, 1]$، ایجاب نمی کند، درواقع اکثر جمع های فوریه به این صورت همگرا نیستند. از این نقطه نظر همگرائی قوی را همگرائی متوسط نیز می نامند.

در توجیه قضایای بسط در مورد فضاهای هیلبرت جداپذیر، لم زیر نقش کلیدی بازی می‌کند. این لم درواقع نشان می‌دهد که چطور از دیدگاه خوشتعریف بودن، ضرب اسکالر $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ تابع پیوسته ای از بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ می باشد.

لم.

فرض کنید که $\mathbf{v}^n \to \mathbf{v}$ یک دنباله برداری قویاً همگرا متعلق به فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. آنگاه، بازای تمام بردارهای $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}^n \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle . \qquad (۳.۲۱)$$

اثبات.

باتوجه به نامساوی شوارتز داریم

$$\begin{aligned} 0 &\le \left|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}^n \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle\right| = \left|\langle \mathbf{w}, (\mathbf{v}^n - \mathbf{v}) \rangle\right| \\ &\le \| \mathbf{w} \| \, \| \mathbf{v}^n - \mathbf{v} \| . \end{aligned}$$

بنابراین، با حدگیری $n \to \infty$ از دو طرف نامساوی دوم از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{v}^n - \mathbf{v} \| = 0$ (زیرا $\mathbf{v}^n$ قویاً به $\mathbf{v}$ همگرا است) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}^n \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle\right| = 0$$

که نتیجهٔ بالا را ثابت می‌کند.

تذکر. بدیهی است که نتیجه زیر نیز به سهولت بدست می‌آید

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{v}^n, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \,. \qquad (۳.۲۲)$$

لم زیر نیز یکی از نتایج کلیدی است.

لم (نامساوی بسل).

فرض کنید که $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت جداپذیر با مجموعه پایهٔ متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ باشد. آنگاه، بازای هر عدد صحیح مثبت N، برای تمام بردارهای $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

$$\sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2 \le \| \mathbf{v} \|^2 \qquad (۳.۲۳)$$

اثبات.

برای یک مقدار ثابت N، بردار داده شده‌ای مانند $\mathbf{v}$ را با یک ترکیب خطی از بردارهای پایه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^N\}$ تقریب می‌زنیم. به بیانی دقیقتر، برای آنکه نزدیکترین تقریب را بدست آوریم، ضرایب μ_i را چنان انتخاب می کنیم که عبارت $\| \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \, \mathbf{e}^i \|^2$ به حداقل مقدار ممکن خود برسد. حال،

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \, \mathbf{e}^i \right\|^2 &= \left\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \, \mathbf{e}^i \,, \mathbf{v} - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \, \mathbf{e}^j \right\rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \sum_{i=1}^{N} \mu_i^* \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}^j \rangle + \sum_{i=1}^{N} \mu_i^* \mu_i \\
&= \| \mathbf{v} \|^2 + \sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle - \mu_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2
\end{aligned}$$

و بدیهی است که حداقل مقدار آن، بازای $\mu_i = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle$ حاصل می شود. بازای این مقدار برای μ_i، داریم

$$\left\| \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \, \mathbf{e}^i \right\|^2 = \| \mathbf{v} \|^2 - \sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2$$

و بنابراین،

$$\| \mathbf{v} \|^2 \geq \sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2 .$$

اکنون قضیهٔ بسیار مهم بسط را برای یک فضای هیلبرت جداپذیر بی نهایت بُعدی مطرح می کنیم.

قضیه.

فرض کنید که $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت جداپذیر بی نهایت بُعدی با مجموعه پایه متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots\}$ باشد. آنگاه، هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ را می توان بصورت زیر بسط داد

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}^i , \tag{۳.۲۴}$$

که در آن جمع بی نهایت به معنی حد قوی جمعهای جزئی زیر است

$$S^N := \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}^i .$$

اثبات.

(الف) بازای جمیع مقادیر N، باتوجه به نامساوی بسل داریم $\sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \| \mathbf{v} \|^2$ و

بنابراین، در حد $N \to \infty$ معلوم می شود که

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle|^2 \leq \| \mathbf{v} \|^2 .$$

بنابراین سمت چپ نامساوی فوق یک جمع همگرا از اعداد حقیقی است و لذا جمع های جزئی آن باید یک دنباله کوشی باشد. ازاینرو، برای m و n در حد بی نهایت داریم

$$\left\| \sum_{i=m}^{n} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i \right\|^2 = \sum_{i=m}^{n} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle|^2 \to 0$$

و این، چنین معنی می‌دهد که، جمع های جزئی $S^N := \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i$ یک دنباله کوشی از بردارهای متعلق به $\mathscr{H}$ را تشکیل می دهند. اما $\mathscr{H}$ یک فضای کامل است و درنتیجه S^N باید به برداری مانند $\mathbf{w} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i$ همگرا باشد.

(ب) آیا چنانکه S^N بطور قوی به بردار $\mathbf{w} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i$ همگرا باشد، آنگاه $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ می گردد؟ در پاسخ به این سئوال، بردار پایه دلخواه $\mathbf{e}^j$ را در نظر گرفته و عبارت $\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{w}\rangle$ را مورد محاسبه قرار می دهیم

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{w}\rangle &= \left\langle \mathbf{e}^j, \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i \right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\langle \mathbf{e}^j, \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e}^i \right\rangle \qquad \text{(باتوجه به لم)} \\
&= \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{v}\rangle .
\end{aligned}$$

بنابراین، بازای تمام بردارهای پایه ... $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2,$، داریم

$$\langle \mathbf{e}^j, (\mathbf{v} - \mathbf{w})\rangle = 0\,. \qquad (۳.۲۵)$$

اما $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ یک مجموعه پایه می باشد و لذا اعداد مختلطی مانند $\mu_1, \mu_2, \ldots$ وجود دارند بطوریکه $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i \mathbf{e}^i$. و بنابراین،

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{v} - \mathbf{w}), (\mathbf{v} - \mathbf{w})\rangle &= \left\langle \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mu_i\, \mathbf{e}^i\,, (\mathbf{v} - \mathbf{w})\right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\langle\mu_i \mathbf{e}^i, (\mathbf{v} - \mathbf{w})\rangle\end{aligned}$$

و این باتوجه به معادلهٔ (۳.۲۵) صفر می شود. بنابراین $\| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|^2 = 0$ و ازاینرو $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ می باشد، یعنی معادلهٔ (۳.۲۴) اثبات می گردد.

نتیجه.

(الف)

$$\| \mathbf{v} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v}\rangle|^2 \qquad \text{(فرمول پارسوال}^1\text{)} \qquad (۳.۲۶)$$

(ب)

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}^i\rangle \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{w}\rangle\,. \qquad (۳.۲۷)$$

تمرین. نتیجهٔ فوق را اثبات کنید.

در یک فضای برداری V با بُعد متناهی، مفهوم اینکه زیرمجموعه بردارهای S یک مجموعه پایه برای V تشکیل می دهد، معادل عبارت $V = [S]$ است، که در آن $[S]$ یعنی پدیدآورندهٔ S

1- Parseval

بعنوان تمام ترکیبهای خطی ممکن به تعداد معین از بردارهای متعلق به مجموعه S تعریف می شود. بدیهی است در مورد فضاهای برداری با بُعد بی نهایت تعمیم مفهوم فوق ضرورت دارد. درواقع، اگر $S := \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots\}$ یک مجموعه پایه نظیر فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ به مفهوم آنچه قبلاً بحث گردید، باشد، در آن صورت یقیناً $[S]$ یک زیرفضای خطی از $\mathscr{H}$ بوده که درعین حال اکیداً از $\mathscr{H}$ کوچکتر است زیرا شامل حد قوی جمعهای متناهی از بردارهای پایه نمی باشد.

بطورکلی، این موضوع می تواند در مورد یک زیرفضای خطی داده شده ای مانند W از یک فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ با بُعد بینهایت، صادق باشد. یعنی، ممکن است دنباله بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots$ چنان وجود داشته باشند که هر بردار $\mathbf{v}^N$ متعلق به $\mathbf{W}$ بوده، ولی $\mathbf{v}^N$ قویاً به برداری مانند $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ همگرا گردد بطوریکه $\mathbf{v}$ متعلق به زیرفضای خطی W نباشد. این بدین معنی است که، با اینکه W بعنوان یک زیرفضا از فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ دارای ساختار فضای برداری به ارث رسیده از $\mathscr{H}$ می باشد ولی یک فضای هیلبرت نیست زیرا کامل نمی باشد. این خود انگیزه ای برای تعریف زیر است.

تعاریف.

(الف) برای مجموعه بردارهای T متعلق به $\mathscr{H}$ ، بستار[1] $\overline{T}$/ بصورت اتحاد T و همهٔ بردارهایی از $\mathscr{H}$ که حد قویاً همگرای یک دنباله از T هستند، تعریف می شود.

(ب) زیرفضای خطی W از $\mathscr{H}$ را بسته[2] گوئیم اگر $W = \overline{W}$، یعنی، شامل تمام بردارهای حدی دنباله های قویاً همگرای خود باشد.

بنابراین بیان اینکه زیرمجموعه بردارهای S از $\mathscr{H}$ یک پایه برای $\mathscr{H}$ تشکیل می دهد دقیقاً به معنی $\mathscr{H} = \overline{[S]}$ است. همچنین از بحث های فوق نتیجه می شود که اگر W یک زیرفضای بسته از $\mathscr{H}$ باشد آنگاه آن خود یک فضای هیلبرت بوده، و این در مورد فضای برداری خارج قسمت $\mathscr{H}/W$ نیز صحت دارد. این یکی از خواص بسیار مطلوب یک زیرفضای بسته، است و ازاینرو، هرگاه صراحتاً یا بطور ضمنی یک زیرفضای هیلبرت مطرح باشد، زیرفضای خطی موردنظر بسته فرض خواهد شد.

1- Closure 2- closed

مثال.

برای یک زیرفضای خطی W از $\mathscr{H}$، **مکمل متعامد** $W_\perp$ بعنوان مجموعه تمام بردارهای $\mathscr{H}$ که بر W عمود هستند تعریف می‌شود:

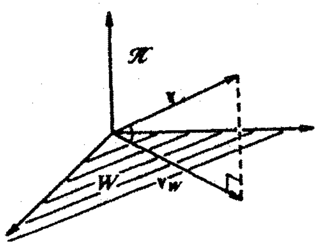
{بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$، بطوریکه برای تمام بردارهای $\mathbf{w}$ متعلق به W داشته باشیم
$W_\perp := \{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

آنگاه، اگر دنباله بردارهای قویاً همگرای $\mathbf{v}^n \to \mathbf{v}$ را متعلق به $W_\perp$ در نظر بگیریم، بازای هر $\mathbf{w}$ متعلق به W داریم

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}^n, \mathbf{w} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathbf{v}^n, \mathbf{w} \rangle \quad [\text{معادلهٔ } (۳.۲۲)] = 0.$$

بنابراین $\mathbf{v}$ متعلق به $W_\perp$ است، یعنی، صرفنظر از بسته بودن یا نبودن W، زیرفضای $W_\perp$ یک زیرفضای بسته از $\mathscr{H}$ می‌باشد.

مفهوم هندسی مهم دیگر در این زمینه تصویر یک بردار متعلق به $\mathscr{H}$ بر روی یک زیرفضای بسته W است.



اگر $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت با بُعد متناهی، با پایه های متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, ..., \mathbf{e}^n\}$

بوده و W یک زیرفضای خطی m بُعدی از آن باشد، آنگاه می توان نوشت $W = [S]$ که در آن S زیرمجموعه بردارهای پایه $\{e^{i_1}, e^{i_2}, \ldots, e^{i_m}\}$ واقع در W می باشد. درنتیجه بردار v_W متعلق به W بعنوان تصویر بردار داده شده v در $\mathscr{H}$ بر روی زیرفضای W بصورت زیر تعریف می شود

$$v_W := \sum_{a=1}^{m} \langle e^{i_a}, v\rangle\, e^{i_a}, \tag{۳.۲۸}$$

که در آن، عبارات$\langle e^{i_a}, v\rangle$ البته ضرایب بسط بردار v نسبت به مجموعه پایهٔ $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ در $\mathscr{H}$ می باشند.

در مورد فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ با بُعد بی نهایت، کم و بیش می توان بطریق مشابه عمل نمود مشروط بر اینکه W یک زیرفضای بسته از $\mathscr{H}$ باشد. اگر $\{w^1, w^2, \ldots\}$ یک مجموعه پایه متعامد یکه برای W [یعنی، یک زیرمجموعه از مجموعه بردارهای پایه $\{e^1, e^2, \ldots\}$ نظیر$\mathscr{H}$] باشد آنگاه **تصویر** v در $\mathscr{H}$ بر روی W بصورت زیر تعریف می شود

$$v_W := \sum_{a=1}^{\infty} \langle w^a, v\rangle\, w^a \tag{۳.۲۹}$$

این تصویر وجود دارد و متعلق به W می باشد زیرا W یک فضای کامل است.
اگر تعریف زیر را در نظر بگیریم

$$v_{W_\perp} := v - v_W \tag{۳.۳۰}$$

آنگاه بازای تمام بردارهای پایه متعامد یکه w^a متعلق به W داریم $\langle v_{W_\perp}, w^a\rangle = 0$ و لذا $v_{W_\perp}$ متعلق به $W_\perp$ می باشد؛ در حقیقت، $v_{W_\perp}$ تصویر v بر روی زیرفضای بسته $W_\perp$ است.

بنابراین تجزیه هر بردار v متعلق به $\mathscr{H}$ ، نسبت به هر زیرفضای بسته W از $\mathscr{H}$ را بصورت زیر بدست آورده ایم

$$v = v_W + v_{W_\perp}. \tag{۳.۳۱}$$

یک چنین تجزیه ای ضرورتاً منحصر بفرد است (آنرا بعنوان تمرین ثابت کنید) و بعبارتی دیگر $\mathscr{H}$ جمع مستقیم $W \oplus W_\perp$ از زیرفضاهای بسته W و $W_\perp$ می باشد. این خود مفهوم مهمی است که بعداً نیز آنرا موردتوجه قرار خواهیم داد.

۲.۴ عملگرهای خطی

عملگرهای خطی در ساختمان ریاضی نظریه کوانتم نقش بسیار مهمی بازی می کنند بطوریکه کمیات مشاهده پذیر فیزیکی توسط این عملگرها نمایش داده می شوند. آنها در نظریهٔ عمومی نمایش گروهها نیز بسیار اساسی هستند و ازاینرو لازم است قبل از اینکه به کاربرد آنها در زمینه های مختلف بپردازیم، ایدهٔ بنیادی عملگرهای خطی را موردِ بررسی قرار دهیم.

قبلاً در معادلهٔ (۱.۶) یک نگاشت خطی بین دو فضای برداری، بعنوان نگاشتی که ساختار فضای برداری تعریف شده در آنها را حفظ می کند تعریف گردید. عملگر خطی، چیزی به جز یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به خود آن فضا نیست.

تعاریف.

(الف) عملگر خطی در فضای V یک نگاشت خطی $A : V \to V$ از V بتوی خودش است.

تصویر $A(\mathbf{v})$ نظیر $\mathbf{v}$ معمولاً بصورت $A\mathbf{v}$ نوشته می شود و درنتیجه شرط خطی بودن بازای هر دو عدد مختلط μ_1، μ_2 و تمام بردارهای $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ متعلق به V بصورت زیر نوشته می شود

$$A(\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2) = \mu_1 A\mathbf{v}_1 + \mu_2 A\mathbf{v}_2 . \qquad (۴.۱)$$

(ب) دو عملگر خطی A و B معادل نامیده می شوند اگر بازای هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V داشته باشیم $A\mathbf{v} = B\mathbf{v}$.

تذکر. (۱) مجموعه تمام عملگرهای خطی در یک فضای برداری مانند V با تعاریف داده شدهٔ زیر یک فضای برداری تشکیل می دهند

(i)

$$(A+B)\mathbf{v} := A\mathbf{v} + B\mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V. \tag{۴.۲}$$

(ii)

$$(\mu A)\mathbf{v} := \mu(A\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \text{ و } \forall\, \mu \in \mathbb{C}.$$

(۲) ضرب دو عملگر A و B را می توان بصورت زیر تعریف نمود

$$(AB)\mathbf{v} := A(B\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V. \tag{۴.۳}$$

به این ترتیب مجموعه تمام عملگرهای تعریف شده روی فضای V دارای ساختار تکواره هستند عضو واحد آن عملگر همانی $\mathbf{1}$ با تعریف زیر می باشد

$$\mathbf{1}\mathbf{v} := \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

(۳) عملگر A راوارون **پذیر** گوئیم اگرعملگردیگری مانند A^{-1} چنان وجود داشته باشد که

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}.$$

چنین عملگری یک یکریختی از فضای V بتوی خود آن است (به بخش ۲.۱ مراجعه کنید) و مجموعه تمام عملگرهائی از این نوع، گروه Aut (V) خودریختی های V بتوی خودش می باشد که در بخش ۲.۱ مورد بحث قرار گرفت. بنابراین گروه Aut (V) زیرمجموعه تکواره تمام عملگرهای تعریف شده روی فضای V می باشد.

مثال.

فرض کنید که V یک فضای برداری با بُعد متناهی و $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعهٔ

پایه برای آن باشد. هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V را می توان بصورت زیر بسط داد

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}^i \qquad (۴.۴)$$

و بنابراین، اگر A عملگر خطی دلخواهی ، روی فضای V باشد، آنگاه A می تواند روی طرفین معادلهٔ (۴.۴) عمل نماید که از خطی بودن آن نتیجهٔ زیر حاصل می شود

$$A\mathbf{v} = A\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}^i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \, A\mathbf{e}^i \, . \qquad (۴.۵)$$

از آنجا که $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعه پایه است، باید اعداد مختلط A_{ji}، $i, j = 1, \ldots, n$ وجود داشته باشند بطوریکه

$$A\mathbf{e}^i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j A_{ji} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \, . \qquad (۴.۶)$$

بنابراین،

$$A\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \, A_{ji} \, \mathbf{e}^j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ji} \, v_i \right) \mathbf{e}^j \, .$$

بنابراین اثر عملگر خطی A بر بردار $\mathbf{v}$ با مؤلفه های $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ را می توان به شکل معادلهٔ ماتریسی زیر نمایش داد

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} , \qquad (۴.۷)$$

که در آن ماتریس A_{ij}، $i, j = 1, \ldots, n$ را **توصیف ماتریسی** (یا نمایش ماتریسی) عملگر A نسبت به پایه های داده شده گویند.

برای یکریختی $i : V \to \mathbf{C}^n$ که در بخش ۲.۱ بصورت $i(v) := (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ تعریف گردید، دیاگرام جابجائی زیر وجود دارد

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "A"] & \mathbf{C}^n \arrow[d, "A_{ij}"] \\ V \arrow[r, "i"'] & \mathbf{C}^n \end{tikzcd}$$

که A عملگر اولیه تعریف شده روی فضای برداری V و A_{ij} عضو نمایش ماتریسی آن می باشد.

(۴.۸)

باید توجه نمود که این رابطهٔ بین عملگرها و ماتریس ها یک بیک است و هر ماتریس مربعی $n \times n$ یک عملگر خطی روی V از طریق معادلهٔ (۴.۶) که **بعنوان یک تعریف** برای A مورد ملاحظه قرار گرفت، القا می کند.

به این نکته نیز باید توجه کرد که نمایش ماتریسی ضرب AB از دو عملگر، درست برابر با حاصلضرب ماتریسی نمایش های ماتریسی نظیر A و B است. (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید) بویژه می توان نتیجه گرفت که، تکواره تمام عملگرها روی V و تکواره $M(n, \mathbf{C})$ با ساختار ضربی تعریف شده در بخش ۱.۱ یکریخت هستند.

همچنین، A یک عملگر وارون پذیر است اگر و فقط اگر نمایش ماتریسی آن وارون پذیر باشد، یعنی، اگر نمایش ماتریسی آن به زیرگروه $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ از تکواره $M(n, \mathbf{C})$ تعلق داشته باشد. (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

تذکر. (۱) اگر برای $\mathbf{V}$ یک ضرب داخلی تعریف شده باشد و اگر $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ پایه متعامد یکهٔ نظیر آن باشد آنگاه از ضرب داخلی طرفین معادلهٔ (۴.۶) در $\mathbf{e}^k$ عضو داده شده ای از پایه، چنین بدست می آوریم

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}^i\rangle &= \left\langle \mathbf{e}^k, \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j A_{ji} \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}^j A_{ji}\rangle = A_{ki} .
\end{aligned}
$$

بنابراین،

$$\boxed{A_{ij} = \langle \mathbf{e}^i, A\mathbf{e}^j\rangle} \qquad (۴.۹)$$

که معادلهٔ بسیار مهمی برای «اعضای ماتریسی» نمایش ماتریسی A می باشد و غالباً در فرمالیسم توسعه یافتهٔ نظریه کوانتمی بوسیلهٔ دیراک، مورد استفاده قرار می گیرد.

(۲) بطورکلی، نمایشهای ماتریسی A در دو پایهٔ متفاوت برای V (متعامد یکه یا سایر حالات)، متفاوت می باشند، علی رغم اینکه آندو، عملگر یکسانی را روی V نمایش می دهند. این امر ایجاب می کند که یک ماتریس $n \times n$ داده شده فاقد هرگونه ارزش ذاتی بعنوان یک عملگر خطی روی فضای برداری V باشد مگر اینکه مجموعه پایه های متعلق به آن مشخص گردند.

اکنون علاقمند هستیم تمام این نتایج را به حالتی که $\mathbf{V}$ یک فضای هیلبرت جداپذیر با بُعد بی نهایت است، تعمیم دهیم و، بعنوان مثال بجای معادلهٔ (۴.۵)، به مشابه آن با حد بالائی بی نهایت جایگزین خواهد شد. باوجود این، یادآوری می کنیم که جمع بی نهایت، بصورت حد قوی جمعهای جزئی آن تعریف می شود، و این اقدامات وقتی ممکن خواهد شد که رابطهٔ $A(\lim_{N\to\infty} S^N) = \lim_{N\to\infty} (AS^N)$ برقرار باشد. اما در حالت کلی، دلیلی وجود ندارد که جابجائی حدگیری و اثر عملگر امکان پذیر باشد. عملگرهائی که چنین جابجائی در مورد آنها امکان پذیر است از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند و نام خاصی دارند.

تعاریف.

(الف) یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت جداپذیر $\mathscr{H}$ **پیوسته** نامیده می شود اگر برای تمام دنباله های قویاً همگرای برداری $\mathbf{v}^n$

$$\mathbf{v}^n \to \mathbf{v} \text{ ایجاب کند که } A\mathbf{v}^n \to A\mathbf{v}\,. \qquad (۴.۱۰)$$

(ب) یک عملگر خطی روی $\mathscr{H}$ **کراندار** است اگر عدد حقیقی مثبتی مانند b وجود داشته باشد بطوریکه

$$\| A\mathbf{v} \| \leq b \| \mathbf{v} \| \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathscr{H}. \qquad (۴.۱۱)$$

کوچکترین مقدار b نُرم عملگر A نامیده می شود و آنرا با $\| A \|$ نشان می دهند.
معادل بودن دو مفهوم اخیر را بعنوان یک نتیجه تکنیکی مهم در قضیهٔ زیر نشان می دهیم.

قضیه.

عملگر A پیوسته است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

اثبات.

(الف) اگر A یک عملگر کراندار و اگر $\mathbf{v}^n \to \mathbf{v}$ یک دنباله برداری قویاً همگرا در $\mathscr{H}$ باشند، آنگاه

$$\| A\mathbf{v} - A\mathbf{v}^n \| = \| A(\mathbf{v} - \mathbf{v}^n) \| \leq \| A \| \| \mathbf{v}^n - \mathbf{v} \|, \qquad (۴.۱۲)$$

که نامساوی اخیر از تعریف نُرم $\| A \|$ نظیر عملگر A، نتیجه گردیده است. با حدگیری

$n \to \infty$ از طرفین معادله (۴.۱۲) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \| A\mathbf{v} - A\mathbf{v}^n \| = 0$$

که دقیقاً به معنی همگرائی قوی دنباله بردارهای $A\mathbf{v}^1, A\mathbf{v}^2, \ldots$ به $A\mathbf{v}$ است، یعنی، A پیوسته می باشد.

(ب) بالعکس، اگر A کراندار نباشد، آنگاه بازای هر n باید برداری مانند $\mathbf{v}^n$ چنان وجود داشته باشد که $\| A\mathbf{v}^n \| > n \| \mathbf{v}^n \|$. اکنون دنباله بردارهای $\mathbf{w}^n := (n \| \mathbf{v}^n \|)^{-1} \mathbf{v}^n$ را تعریف می کنیم. لذا $\| \mathbf{w}^n \| = n^{-1}$ و درنتیجه دنباله بردارهای $\mathbf{w}^n$ در حد $n \to \infty$ بطور قوی به بردار صفر همگرا می باشد. ولی $1 < \| A\mathbf{w}^n \|$ و ازاینرو $A\mathbf{w}^n$ به بردار صفر همگرا نیست. بنابراین A پیوسته نمی باشد.

تذکر. (۱) هر عملگر خطی روی یک فضای برداری با بُعد متناهی کراندار است. (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید.)

(۲) یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت جداپذیر $\mathscr{H}$ با مجموعه پایه متعامد یکهٔ $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ را می توان توسط ماتریس بی پایان A_{ij} بصورت زیر نمایش داد

$$A\mathbf{e}^i = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{e}^j A_{ji} \qquad ، \; i = 1, 2, 3, \ldots$$

ولی بیان فوق به این معنی نیست که هر ماتریس مربعی بی پایان می تواند نمایش دهنده یک عملگر کراندار باشد.

چند مثال آموزنده از این پدیدهٔ اخیر را در زیر بیان می کنیم.

مثالها.

(۱) در فضای هیلبرت l_2، ماتریس

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

نمی‌تواند یک عملگر کراندار را نسبت به پایه‌های $\mathbf{e}^1 := (1, 0, 0, \dots)$، $\mathbf{e}^2 := (0, 1, 0, \dots)$ و غیره، نمایش دهد. زیرا $A\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^1$ ، $A\mathbf{e}^2 = 2\mathbf{e}^2$ ، $A\mathbf{e}^3 = 3\mathbf{e}^3$ و غیره.

درواقع، باید به این نکتهٔ مهم توجه نمود که، عمل این ماتریس ویژه روی هر بردار متعلق به l_2 حتی قابل تعریف نیست، زیرا این ماتریس برخی از بردارهای متعلق به l_2 را به خارج از l_2 زیرمجموعه $\mathbb{C}^\infty$ نگاشت می‌دهد. برای مثال، اگر A روی بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \end{pmatrix}$ عمل کند آنگاه بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ بدست می‌آید که به فضای برداری دنباله اعداد مختلط اختیاری $\mathbb{C}^\infty$ متعلق می‌باشد ولی به l_2 متعلق نیست زیرا اعضای آن جمع‌پذیر مجذوری نیستند.

این درواقع یکی از مشخصه‌های بارز عملگرهای غیرکراندار است بطوریکه چنین عمگرهایی روی برخی زیرمجموعه بردارهای فضای V (معروف به قلمرو عملگر) تعریف می‌شوند.

(۲) مثال دیگری از یک عملگر غیرکراندار که روی فضای $L^2(\mathbb{R})$ تعریف می‌شود بصورت زیر

است

$$(Qf)(x) := xf(x) \qquad (۴.۱۳)$$

که یک عملگر معروف در مکانیک موجی مقدماتی است. واضح است که این عملگر کراندار نمی باشد (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید) و نمی تواند روی تمام فضای $L^2(\mathbb{R})$ تعریف شود زیرا واضح است که بعضی توابع انتگرال پذیر مجذوری وجود دارند که پس از ضرب آنها در "x" دیگر نمی توانند انتگرال پذیر مجذوری باشند.

(۳) یک عملگر معروف بر l_2، **عملگر انتقال** T است که روی دنباله $(a_1, a_2, \ldots)$ بصورت $\mathrm{T}(a_1, a_2, \ldots) := (0, a_1, a_2, \ldots)$ تعریف می شود. بمنظور بررسی کراندار بودن این عملگر، باید توجه نمود که

$$\begin{aligned}\| T(a_1, a_2, \ldots) \|^2 &= \| (0, a_1, a_2, \ldots) \|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^2 = \| (a_1, a_2, \ldots) \|^2 .\end{aligned}$$

بنابراین اگر $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \ldots)$ یک بردار اختیاری در l_2 را نمایش دهد آنگاه داریم $\| T\mathbf{a} \| = \| \mathbf{a} \|$ و ازاینرو $\| T \| = 1$ می باشد.

بعنوان یک واقعیت تلخ، بیشتر عملگرها در نظریه کوانتم غیرکراندار هستند. برای مثال، اگر A و B دو عملگر اختیاری باشند که در روابط جابجائی هایزنبرگ بصورت زیر صدق کنند

$$[A, B] = \mathrm{i}\mathbf{1}$$

آنگاه می توان نشان داد که حداقل یکی از آنها کراندار نیست. این مسائل موجب می شوند که فرموله نمودن بسیار دقیق نظریهٔ کوانتم امری بس دشوار گردد.

۲.۵ عمگرهای یکانی

قبلاً چندین بار بر اهمیت ایدهٔ عمومی «ریختار» بعنوان یک نگاشت بین دو مجموعه با ساختارهای ریاضی یکسان، که آن ساختار را حفظ نماید، تأکید گردید. در مورد فضاهای برداری، چنین نگاشتی «نگاشت خطی» یا، اگر نگاشت از فضای برداری بتوی خودش باشد، یک عملگر خطی نامیده می شود. بنظر می رسد که اگر یک فضای برداری به نُرم یا ضرب اسکالر مجهز باشد، در آن صورت می توان مفهوم ریختار را چنان تعمیم داد که نگاشت یا عملگر خطی نظیر آن الزاماً نُرم یا ضرب داخلی را نیز حفظ کند. درواقع چنین نیز می باشد و، به این منظور، به عملگرهای خطی حافظ ضرب داخلی، تعریف شده از یک فضای هیلبرت بتوی خود آن، اهمیت ویژه ای داده می شود. چنین عملگرهایی را که نقش بسیار اساسی در ساختار ریاضی کلی نظریه کوانتمی بازی می کنند، عملگرهای یکانی نامند، و در این مورد برای ارائهٔ یک تعریف دقیق، ایدهٔ «الحاقی» یک عملگر را معرفی می کنیم.

تعاریف.

(الف) فرض کنید که A یک عملگر کراندار روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. **آنگاه الحاقی $A^\dagger$** مربوط به A، یک عملگر روی $\mathscr{H}$ می باشد اگر بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ در رابطهٔ زیر صدق نماید

$$\langle \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle. \qquad (۵.۱)$$

(ب) عملگر A **هرمیتی** نامیده می شود اگر $A = A^\dagger$ یا، بطور معادل، بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ در رابطهٔ زیر صدق نماید

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle. \tag{۵.۲}$$

(ج) عملگر وارون پذیر U **یکانی** نامیده می شود اگر، ضرب اسکالر را به معنی زیر حفظ کند

$$\langle U\mathbf{v}, U\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \qquad \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{H}. \tag{۵.۳}$$

تذکر. (۱) بازای تمام عملگرهای A و B داریم

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger . \tag{۵.۴}$$

(۲) عناصر ماتریسی نظیر یک عملگر هرمیتی، نسبت به یک پایه متعامد یکه، تعریف شده در معادلهٔ (۴.۹)، در رابطهٔ زیر صدق می کنند

$$A_{ij} := \langle \mathbf{e}^i, A\mathbf{e}^j\rangle = \langle A\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j\rangle = \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}^i\rangle^* = A^*_{ji},$$

یعنی، یک ماتریس هرمیتی تشکیل می دهند.

(۳) اگر U یک عملگر یکانی باشد آنگاه، بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathcal{H}$ داریم

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, U^\dagger U\mathbf{w}\rangle$$

بنابراین،

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \tag{۵.۵}$$

و از آنجا که U وارون پذیر است، وارون آن بصورت $U^{-1} = U^\dagger$ بوده و همچنین داریم $UU^\dagger = \mathbf{1}$.

(۴) عناصر ماتریسی یک عملگر یکانی در رابطهٔ زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k\rangle &= \langle U\mathbf{e}^j, U\mathbf{e}^k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle U\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^i\rangle\langle \mathbf{e}^i, U\mathbf{e}^k\rangle \quad \text{((بنابر معادلهٔ (۳.۲۷))} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}^i, U\mathbf{e}^j\rangle^*\langle \mathbf{e}^i, U\mathbf{e}^k\rangle\end{aligned} \tag{۵.۶}$$

و بنابراین،

$$\delta^{jk} = \sum_{i=1}^{\infty} U_{ij}^* U_{ik}\,. \tag{۵.۷}$$

توجه کنید که اگر $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت با بُعد متناهی n باشد، آنگاه جمع روی اندیس i در معادلات (۷-۵.۶) از 1 تا n بوده و معادله (۵.۷) بیان می کند که نمایش ماتریسی عملگر یکانی، یک ماتریس یکانی $n \times n$ می باشد. در نتیجه، بنابر مفاهیم معرفی شده در معادلات (۸-۴.۷)، ماتریس نظیر نمایش یک عملگر یکانی، به زیرگروه $U(n)$ از تکواره $M(n,\ \mathbb{C})$ تعلق دارد.

(۵) بطور کلی، مجموعه تمام عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ یک گروه تشکیل می دهند که آن گروه زیرمجموعه ای از تکواره تمام عملگرهای **کراندار** روی $\mathscr{H}$ است. اگر $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^n$ آنگاه، همانطور که قبلاً نیز ملاحظه گردید این گروه با $U(n)$ یکریخت می باشد. در صورتی که $\mathscr{H}$ یک فضای برداری حقیقی، یکریخت با $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه گروه عملگرهای یکانی با گروه $O(n, \mathbb{R})$ یکریخت خواهد بود. توجه کنید که، معمولاً وقتی $\mathscr{H}$ حقیقی باشد، عملگر یکانی را عملگر «متعامد» گویند.

یکی از متداولترین راههای مطالعه عملگرهای هرمیتی و یکانی بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیرشان است.

تعریف.

یک **بردار ویژه** عملگر خطی A، بردار (غیرصفر) $\mathbf{w}$ متعلق به فضای برداری V است بطوریکه رابطهٔ

$$A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w} \tag{۵.۸}$$

بازای عدد مختلطی مانند μ، که آنرا **مقدار ویژه** عملگر نظیر بردار ویژه $\mathbf{w}$ گویند، برقرار باشد.

تذکر. اگر مقادیر ویژه متعلق به بازهٔ پیوسته ای باشند آنگاه، ملاحظات بیشتری ضرورت دارد. به این منظور مفهوم بردار ویژه مورد بازنگری قرار می گیرد زیرا ممکن است که به فضای برداری اولیه V متعلق نبوده ولی در یک توسیع آن، واقع شود. بعنوان مثال، عملگر دیفرانسیلی $-id/dx$ یک عملگر خطی روی فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ با مجموعهٔ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آشنای زیر می باشد.

$$-i\frac{d}{dx}e^{ikx} = ke^{ikx} \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}\ .$$

اما «بردارهای ویژه» $\mathbf{w}(x) := e^{ikx}$ از آنجا که انتگرال پذیر مجذوری نمی باشند متعلق به فضای $L^2(\mathbb{R})$ نیستند.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه نظیر عملگرهای یکانی و هرمیتی خواص ویژه بخصوصی دارند که از نقطه نظر کاربردشان در نظریه کوانتم و نظریه عمومی این عملگرها حائز اهمیت بسیاری هستند. معمولاً بیشتر این خواص در مورد عملگرهای هرمیتی اثبات می شوند، در اینجا با کمی تغییر، قضیهٔ زیر را برای عملگرهای یکانی اثبات می کنیم.

قضیه.

(الف) مقادیر ویژه یک عملگر یکانی مانند U بصورت $e^{i\theta}$، یعنی، اعداد مختلطی با قدر مطلق واحد، می باشند.

(ب) دو بردار ویژه U، متناظر با دو مقدار ویژه متفاوت، متعامد هستند.

اثبات.

(الف) فرض کنید که $U\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$. آنگاه،

$$\langle U\mathbf{w},\ U\mathbf{w}\rangle = \langle \mu\mathbf{w}, \mu\mathbf{w}\rangle = \mu^*\mu\,\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w},\ \mathbf{w}\rangle.$$

لذا، از آنجا که بنابر تعریف بردار $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ نمی‌تواند یک بردار ویژه باشد، معلوم می شود که $\mu^*\mu = 1$.

(ب) اکنون فرض کنید که μ_1 و μ_2 به ترتیب مقادیر ویژهٔ متفاوت نظیر بردارهای ویژه $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ برای عملگر یکانی U هستند. آنگاه

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = \langle U\mathbf{w}_1, U\mathbf{w}_2\rangle = \langle \mu_1\mathbf{w}_1, \mu_2\mathbf{w}_2\rangle = \mu_1^*\mu_2\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$$

که ایجاب می کند $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = 0$ زیرا $\mu_1^*\mu_2 = \mu_2/\mu_1$ ، و این مساوی 1 نیست زیرا $\mu_1 \neq \mu_2$.

تمرین. نشان دهید قضیهٔ مشابهی نیز برای عملگرهای هرمیتی که این بار مقادیر ویژهٔ نظیرشان اعداد حقیقی هستند، برقرار می باشد.

برای مطالعهٔ نظریهٔ کوانتم می توان طرق بسیار متفاوتی از روشهای نظریه گروهها را بکار

برد. یکی از قدیمی‌ترین آنها مفهوم «تبهگنی[1]» برای یک بردار ویژه است (در این بخش تمام مقادیر ویژه منفصل فرض می‌شوند).

تعریف.
مقدار ویژه μ نظیر عملگر A را d بار تبهگن $(d \leq \infty)$ گویند هرگاه مجموعه d بردار ویژه مستقل خطی $\{\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^d\}$ از A، با مقادیر ویژهٔ یکسان μ وجود داشته باشند. (d بزرگترین مقدار ممکنه فرض می‌شود.)

تذکر. (۱) واضح است که برای هر مجموعه از اعداد مختلط $a_1, a_2, \ldots, a_n$ با شرط $n < \infty$ داریم

$$A(a_1\mathbf{w}^1 + a_2\mathbf{w}^2 + \ . \ . \ . + a_n\mathbf{w}^n) = \mu(a_1\mathbf{w}^1 + a_2\mathbf{w}^2 + \ . \ . \ . + a_n\mathbf{w}^n).$$

بنابراین، مجموعه تمام بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه μ یک زیرفضای خطی d بُعدی از V را تشکیل می‌دهند (که هرگاه عملگر A پیوسته باشد آن زیرفضا بسته خواهد بود).

(۲) مقادیر ویژه عملگر A را با اعداد $\mu_1, \mu_2, \ldots$ و مرتبهٔ تبهگنی نظیر آنها را بترتیب با $d_1, d_2, \ldots$ نشان می‌دهیم. بردارهای پایه برای بردارهای ویژه نظیر مقدار ویژه μ_m که همواره می‌توان آنها را متعامد یکه انتخاب نمود، بصورت $\{\mathbf{w}_m^1, \mathbf{w}_m^2, \ldots, \mathbf{w}_m^{d_m}\}$ نشان داده می‌شوند بطوریکه

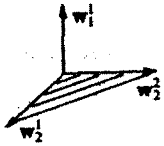
$$\langle \mathbf{w}_m^i, \mathbf{w}_m^j \rangle = \delta^{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, d_m .$$

بنابراین، باتوجه به قضیهٔ اخیر، اگر A یک عملگر یکانی (یا هرمیتی) باشد آنگاه

1- Degeneracy

$$\langle \mathbf{w}_m^i, \mathbf{w}_n^j \rangle = \delta^{ij}\,\delta_{mn} \quad i, j = 1, \ldots, d_n \;\;،\;\; m, n = 1, \ldots, N \tag{۵.۹}$$

که در آن N تعداد (احتمالاً بی نهایت) مقادیر ویژهٔ متفاوت A می باشد.



(۳) بنابر یکی از نتایج بسیار مهم و اساسی، معروف به قضیهٔ طیفی[۱]، اگر A یک عملگر یکانی یا هرمیتی باشد، آنگاه مجموعه کامل بردارهای $\{\mathbf{w}_m^i, i = 1, \ldots, d_m,\ m = 1, \ldots, N\}$ یک مجموعه پایه متعامد یکه برای فضای برداری $\mathscr{H}$ می باشد. بنابراین هر بردار متعلق به این فضا را می توان بصورت زیر بسط داد:

$$\mathbf{v} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_m} \langle \mathbf{w}_m^i, \mathbf{v} \rangle\, \mathbf{w}_m^i\,. \tag{۵.۱۰}$$

حال، بدیهی است که $\mathrm{Dim}\,(\mathscr{H}) = \Sigma_{m=1}^{N} d_m$.

۲.۶ کاربرد عملگرهای یکانی در نظریه کوانتم

اکنون مقدمهٔ کوتاهی را در مورد نحوه مطرح شدن عملگرهای یکانی در نظریه کوانتم و نیز اهمیت نمایش گروهها بیان می کنیم. برای فرموله نمودن یک چارچوب ریاضی که در آن بتوان نظریه کوانتم را موردبحث قرار داد، با تشریح دیدگاه اساسی فضای برداری شروع می کنیم. تمام

1- Spectral

این مطالب در دو قاعده زیر خلاصه می شوند.

قاعدهٔ ۱.

در نظریه کوانتم، حالات یک سیستم (یا، بعبارتی بهتر از آن، مجموعه ای از سیستم ها)، به زبان ریاضی، بوسیلهٔ بردارهائی به طول واحد در یک فضای هیلبرت جداپذیر $\mathscr{H}$ نمایش داده می شوند.

قاعدهٔ ۲.

یک کمیت مشاهده پذیر مانند O، به زبان ریاضی، بوسیلهٔ یک عملگر هرمیتی $\hat{O}$ که در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ مربوط به حالات سیستم عمل می کند، نمایش داده می شود.

اگر یک اندازه گیری روی این کمیت مشاهده پذیر انجام شود، الزاماً نتیجهٔ بدست آمده، باید یکی از مقادیر ویژه نظیر عملگر $\hat{O}$ باشد. باوجود این، نظریه کوانتم ذاتاً توان پیش بینی مقدار ویژه حاصله از یک اندازه گیری داده شده را ندارد، آن فقط توانائی پیشگوئی **احتمال** بدست آمدن یک مقدار بخصوص را دارد. این احتمال توسط عبارت زیر داده می شود

$$\mathrm{Prob}(O = \mu_m \, ; \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{d_m} |\langle \mathbf{e}_m^i, \mathbf{v}\rangle|^2 \qquad (۶.۱)$$

که نمایشگر احتمال بدست آمدن مقدار ویژه بخصوص μ_m، در یک اندازه گیری داده شده با بردار حالت $\mathbf{v}$ است. در معادلهٔ (۶.۱)، بردارهای $\{\mathbf{e}_m^i, i = 1, \ldots, d_m, m = 1, \ldots, N\}$ بردارهای ویژه عملگر $\hat{O}$ بوده، بطوریکه d_m مرتبهٔ تبهگنی مربوط به مقدار ویژه μ_m می باشد. [به معادله (۵.۱۰) و بحث مربوط به آن مراجعه کنید.]

البته در مورد این دو قاعده موضوعات قابل بیان بسیاری در ارتباط با مفاهیمی همچون «احتمال»، «اندازه گیری»، «مشاهده پذیر» و غیره وجود دارند. باوجود این، از آنجا که کتاب حاضر عمدتاً مطالعه نظریه گروهها و نظریهٔ فضاهای برداری را مورد توجه قرار می دهد تا نظریهٔ کوانتم، لذا نکاتی را چند در مورد این فرمالیسم ریاضی، باختصار بیان می کنیم.

ملاحظات.

(الف) اگر ساختار ریاضی دارای مفهوم درستی از دیدگاه فیزیکی باشد آنگاه باید احتمال بدست آوردن هر نتیجه ای از یک اندازه گیری معادل یک باشد. احتمال مذکور برابر جمع تمام احتمالات موجود در معادله (۶.۱) بازای تمام مقادیر $m = 1, \ldots, N$ است، اگر این جمع را انجام دهیم، رابطهٔ زیر بدست می آید

$$\sum_{m=1}^{N} \mathrm{Prob}(O = \mu_m\,; \mathbf{v}) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_m} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}^i_m \rangle \langle \mathbf{e}^i_m, \mathbf{v} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle,$$

که در مرحلهٔ نهائی از رابطهٔ پارسوال در معادله (۳.۲۶) استفاده گردیده است.

از آنجا که تمام بردارهای حالت با طول (نُرم) واحد انتخاب می شوند جمع روی تمام احتمالات فوق برابر یک می شود. مسلماً، این موضوع اهمیت بسیار زیاد قضایای بسط بخش (۲.۳) را، در ارتباط با فرموله کردن یک چارچوب سازگار ریاضی برای نظریهٔ کوانتم، نشان می دهد.

(ب) مقدار میانگین نتایج بدست آمده از اندازه گیری مشاهده پذیر O که بوسیلهٔ معادلهٔ (۶.۱) پیشگوئی می شود برابر است با:

$$\langle O \rangle_{\mathbf{v}} = \sum_{m=1}^{N} \mu_m \,\mathrm{Prob}(O = \mu_m\,; \mathbf{v})$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_m} \mu_m \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}^i_m \rangle \langle \mathbf{e}^i_m, \mathbf{v} \rangle = \sum_{m=1}^{N} \sum_{i=1}^{d_m} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}^i_m \rangle \langle \hat{O}\mathbf{e}^i_m, \mathbf{v} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{v}, \hat{O}\mathbf{v} \rangle$$ بنابر معادلهٔ (۳.۲۷).

درنتیجه داریم

$$\langle O \rangle_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \hat{O}\mathbf{v} \rangle \qquad (۶.۲)$$

که یکی از نتایج بسیار اساسی در نظریهٔ کوانتم است.

(ج) درحقیقت می توان این روند را بصورت عکس طرح نمود. بنابراین بطور مرسوم می توان از معادلهٔ (۶.۲) بعنوان یک قاعدهٔ توجیهی بنیادی فیزیک کوانتمی آغاز کرد. سپس بعنوان یک نتیجهٔ ریاضی، خواص عملگرهای هرمیتی زیر اثبات می شود.

(۱) نتیجهٔ هر اندازه گیری از مشاهده پذیر O باید برابر یکی از مقادیر ویژهٔ $\hat{O}$ باشد.

(۲) احتمال بدست آمدن مقدار ویژه μ_m برای یک اندازه گیری، دقیقاً بوسیلهٔ معادلهٔ (۶.۱) داده می شود.

مزیت فرموله نمودن قاعدهٔ ۲ به این طریق، آنست که می توان آنرا به کلاس حالاتی که تاکنون بیان نشده اند توسعه داد. یعنی حالات مرکبی که توصیف کننده حالت واقعی یک سیستم، بصورت مشخصی نمی باشند و بوسیلهٔ مجموعه بردارهای ویژه با یک احتمال معین، توصیف می شوند.

اکنون مواردی را بررسی می کنیم که اختیاری بودن اختصاص بردارها به حالات و نیز عملگرهای هرمیتی به مشاهده پذیرها که خود انعکاسی از نقش عملگرهای یکانی در فضای هیلبرت است، را نشان دهند. بنابراین، عملگر یکانی اختیاری U روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ را در نظر می گیریم. اگر μ یک مقدار ویژه عملگر $\hat{O}$ با بردار ویژه $\mathbf{w}$ باشد آنگاه،

$$U\hat{O}U^{-1}(U\mathbf{w}) = U(\hat{O}\mathbf{w}) = U(\mu\mathbf{w}) = \mu(U\mathbf{w}) \qquad (۶.۳)$$

این رابطه بیان می کند که مقادیر ویژه عملگر هرمیتی $U\hat{O}U^{-1}$ [$= U\hat{O}U^{\dagger}$] درست برابر مقادیر ویژه عملگر اصلی $\hat{O}$ می باشند. بعلاوه، از آنجا که U یک عملگر یکانی است داریم

$$|\langle U\mathbf{v},\, U\mathbf{w}\rangle|^2 = |\langle \mathbf{v},\, \mathbf{w}\rangle|^2 \qquad \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{H} \ ,$$

و،

$$\langle U\mathbf{v},\, (U\hat{O}U^{-1})\; U\mathbf{w}\rangle = \langle U\mathbf{v},\, U\hat{O}\mathbf{w}\rangle$$
$$= \langle \mathbf{v},\, \hat{O}\mathbf{w}\rangle \,.$$

بنابراین، می توان نتیجه گرفت که، اگر ارتباط ویژه زیر برقرار باشد

حالت فیزیکی ← بردار حالت $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$
مشاهده پذیر فیزیکی O ← عملگر هرمیتی $\hat{O}$ که روی فضای $\mathscr{H}$ عمل می کند

آنگاه پیش بینیهای فیزیکی مشابهی بدست خواهد آمد اگر ارتباط زیر را مورد توجه قرار دهیم

حالت فیزیکی ← بردار حالت $U\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$
مشاهده پذیر فیزیکی O ← عملگر هرمیتی $U\hat{O}U^{-1}$ که روی فضای $\mathscr{H}$ عمل می کند.
(۶.۴)

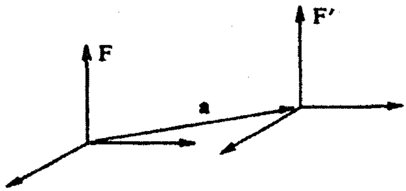
بنابراین نتیجه مهم حاصله از بحث فوق اینست که، تخصیص «کمیات فیزیکی» با «نمایندگان ریاضی» نظیرشان در نظریهٔ کوانتم، صرفنظر از اختیاری بودن تبدیلات بوسیلهٔ معادلهٔ (۶.۴) تعریف می شود.

در نظریهٔ کوانتم مواردی پیش می آید که به دلایل کاملاً روشن فیزیکی، نمایشهای ریاضی متفاوتی [اما معادل به معنای معادله (۶.۴)]، به حالات فیزیکی اساسی و مشاهده پذیرهای یکسان نسبت داده می شوند.

مثال.

دو ناظر F و F' را در نظر بگیرید که در دو چارچوب مرجع متفاوت در فضای سه بُعدی

فیزیکی هستند و یک سیستم کوانتمی را با استفاده از قواعد یکسان در تخصیص ابزار ریاضی به کمیات فیزیکی مورد مطالعه قرار می دهند. بدیهی است که یک حالت فیزیکی داده شده سیستم، از آنجا که از دیدگاه آن دو ناظر دارای منظر[1] های متفاوتی هستند بوسیلهٔ بردارهای حالت متفاوتی (اما در فضای هیلبرت یکسان) توصیف می شوند.



بعنوان مثال، در توصیف مکانیک موجی تک ذره، اگر ذره نسبت به ناظر $\mathbf{F}$ توسط تابع موج $\psi(\mathbf{x})$ توصیف گردد، آنگاه ناظر $\mathbf{F}'$ تابع موج $\psi'(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ را به آن نسبت خواهد داد. (**تذکر.** هر دو ناظر نماد "$\mathbf{x}$" را برای نشان دادن بردار مکان اندازه گیری شده نسبت به مبدأ چارچوب مرجع خود بکار می برند، توجه کنید که بردارهای مکان ذره نسبت به این دو ناظر، مشاهده پذیرهای فیزیکی متفاوتی می باشند).

اصولاً نتایج فیزیکی نباید به انتخاب ناظر بستگی داشته باشند (حداقل، از دیدگاه تصویر ساده نیوتونی فضا، که در اینجا موردنظر می باشد) و بنابراین اگر،

(الف) بردارهای حالت نسبت به دو ناظر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ را به ترتیب با $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ نشان دهیم؛

(ب) هر دو ناظر، مشاهده پذیر فیزیکی یکسان O را اندازه بگیرند، مشاهده پذیری که حالات ویژه مربوط به مقدار ویژه بخصوص μ برای آن نسبت به دو ناظر متفاوت $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$، بردارهای ویژه $\mathbf{e}$ و $\mathbf{e}'$ بترتیب نظیر عملگرهای $\hat{O}$ و $\hat{O}'$ می باشند،

بنابراین

$$|\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle| = |\langle \mathbf{e}', \mathbf{v}' \rangle| \qquad (۶.۵)$$

1- Perspective

زیرا احتمال بدست آوردن نتایج مشابه برای مشاهده پذیر O توسط هر دو ناظر یکسان است.

البته، یکی از راههای حصول اطمینان برای برقراری رابطهٔ (۶.۵)، برقراری ارتباط بین بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ [و $\mathbf{e}$ و $\mathbf{e}'$] مطابق رابطهٔ (۶.۴) است. باوجود این، دلیلی وجود ندارد نگاشت $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ که توسط معادلهٔ (۶.۵) تعریف می شود از نوع **خطی** باشد، آن تنها توسط یک عملگر یکانی توصیف می گردد. لذا قضیهٔ زیر از اهمیت قابل ملاحظه ای برخوردار می باشد.

قضیه (ویگنر[1]).

فرض کنید که $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ یک نگاشت از فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ بتوی خودش باشد، بطوریکه

(الف) وارون پذیر است؛ و

(ب) بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| = |\langle \mathbf{v}', \mathbf{w}'\rangle|. \qquad (۶.۶)$$

آنگاه یک عملگر یکانی یا پاد-یکانی $U : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$ وجود دارد بطوریکه بازای هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $\mathbf{v}' = U\mathbf{v}$.

تذکر. اثبات این قضیهٔ بسیار مهم نسبتاً طولانی است و ازاینرو اثبات آنرا در اینجا ارائه نمی کنیم. اما توجه به نکات زیر سودمند است.

(الف) عملگر **پاد-یکانی** A، یک نگاشت از $\mathscr{H}$ بتوی خود آن است، بطوریکه:

(۱) به معنی زیر، پاد-خطی است؛ بازای هر دو عدد مختلط μ_1 و μ_2 و نیز هر دو بردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ داریم

$$A(\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2) = \mu_1^* A\mathbf{v}_1 + \mu_2^* A\mathbf{v}_2\,. \qquad (۶.۷)$$

(۲) بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

1- Winger

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^* . \qquad (۶.۸)$$

(ب) اپراتور U صرفنظر از یک عامل فاز تعریف می شود، یعنی، $e^{i\theta}U$ درست مانند U عمل می کند.

مثال.

G را بعنوان گروه تبدیلات مجموعه چارچوبهای مرجع در فضای سه بُعدی فیزیکی، بحث شده در بخش ۱.۴ در نظر بگیرید. لذا این گروه می تواند گروه انتقالهای $\mathbb{R}^3$ ، یا گروه دورانهای $O(3, \mathbb{R})$، یا گروه اقلیـــدســـی $\mathbb{R}^3 \circledS O(3, \mathbb{R})$ با قانون گروهی ارائه شده در معادلهٔ (۱.۴.۱۴)، باشد.

آنگاه برای هر عضو g متعلق به G عملگر یکانی (یا پاد یکانی) U_g را چنان بدست می آوریم که بردار حالت $\mathbf{v}'$ نسبت به ناظر تبدیل یافتهٔ F' با بردار حالت $\mathbf{v}$ نسبت به ناظر تبدیل نیافته F، بوسیلهٔ رابطهٔ $\mathbf{v}' = U_g\mathbf{v}$ بهم مربوط گردند. اگر دوتبدیل متوالی چارچوبهای مرجع، بترتیب متناظر با اعضای گروهی g_1 و g_2 را انجام دهیم، آنگاه داریم

$$\mathbf{v}' = U_{g_1}\mathbf{v} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}'' = U_{g_2}\mathbf{v}' = U_{g_2} U_{g_1} \mathbf{v} .$$

از طرف دیگر، با انجام تبدیل نظیر عضو g_2g_1 باید نتایج مشابهی در چارچوب مرجع F'' بدست آید. بنابراین

$$\mathbf{v}'' = \text{عامل فاز} \, . \, U_{g_2g_1}\mathbf{v}$$

و ازاینرو نتیجه می شود که

$$\boxed{U_{g_2} U_{g_1} = \exp i\,\omega(g_2, g_1)\, U_{g_2g_1}} \qquad (۶.۹)$$

که در حالت کلی عامل فاز $\exp\, i\,\omega(g_2, g_1)$ به هر دو عضو g_1 و g_2 بستگی دارد. مجموعه عملگرهای یکانی $\{U_g, g \in G\}$ را که در معادلهٔ (۶.۹) صدق کنند، یک **نمایش تصویری**[1] گروه G گویند.

تذکر. (۱) به ازای عضو واحد e، باید عملگر یکانی واحد بدست آید، یعنی، $U_e = \mathbf{1}$. و آن به این معنی است که تمام اعضای g متعلق به گروه، که در نزدیکی عضو واحد e هستند (بطور دقیقتر، تمام اعضایی که بوسیله یک مسیر پیوسته در گروه لی G با عضو واحد e همبند[2] هستند) باید یکانی باشند. بویژه، اعضایی از گروه که با عضو واحد e «غیر همبند» هستند توسط عملگرهای پاد یکانی نمایش داده می شوند و ازاینرو تبدیل انعکاس محور زمانی بصورت $t \to -t$ نیز با عملگر پاد یکانی نمایش داده می شود. باوجود این، در کتاب حاضر نمایشهای پاد یکانی مورد بررسی قرار نمی گیرند و فرض می کنیم که عملگر U_g یکانی است.

(۲) عملگر U_g صرفنظر از عامل فاز $e^{i\theta(g)}$ تعریف گردید. چنانکه در رابطهٔ (۶.۹) عملگرهای U_g را با $e^{i\theta(g)}\,U_g$ جایگزین کنیم داریم

$$U_{g_2}\, U_{g_1} = \exp i\,[\omega(g_2, g_1) - \theta(g_2 g_1) + \theta(g_2) + \theta(g_1)]\, U_{g_2 g_1}\,. \qquad (۶.۱۰)$$

برای اکثر گروههای G، می توان فازهای اختیاری $\theta(g)$ را چنان انتخاب نمود که عامل فاز در معادلهٔ (۶.۱۰) صفر گردد

$$\omega(g_2, g_1) - \theta(g_2\, g_1) + \theta(g_2) + \theta(g_1) = 0$$

درنتیجه معادلهٔ (۶.۱۰) بصورت زیر خواهد بود

1- Projective representation 2- Connected

$$\boxed{U_{g_2} U_{g_1} = U_{g_2 g_1} .} \qquad (۶.۱۱)$$

بنابراین نگاشت $U_g \longleftarrow g$ یک همریختی از گروه G به گروه تمام عملگرهای یکانی در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ می باشد. چنین نگاشتی، **نمایش یکانی** نظیر گروه G در فضای **هیلبرت** $\mathscr{H}$ نامیده می شود. نمایش گروهها خود یک ایدهٔ بسیار مهمی در نظریهٔ گروهها است که فصل سوم و درواقع آخرین بخش این کتاب را تشکیل می دهد.

فصل سوم

۳. نمایشهای گروه

۳.۱. تعاریف اساسی

در بخش ۱.۴، ایدهٔ کلی عمل گروه G روی مجموعه داده شده X بوسیلهٔ یک همریختی از گروه G بتوی گروه $\mathrm{Perm}\ (X)$ از مجموعه نگاشتهای دوسوئی X معرفی گردید.

یکی از مثالهای بسیار خاص، اما خیلی مهم، حالتی است که در آن X یک فضای برداری بوده و همریختی، اعضای گروه G را به گروه $\mathrm{Aut}\ (V)$ مجموعه تبدیلات خطی وارون پذیر این فضا نگاشت می‌دهد. در بخش قبل دیده‌ایم که چنین موردی بطور خیلی طبیعی در نظریه کوانتمی [بعنوان مثال، معادله (۲.۶.۱۱)] مطرح می‌گردد و اکنون ما باید این ایدهٔ مهم را توسعه دهیم.

تعاریف.

(الف) یک نمایش خطی از گروه G در فضای برداری V، یک همریختی بصورت $T : G \to \mathrm{Aut}\,(V)$ می باشد. بنابراین بازای هر g متعلق به G، $T(g)$ یک عملگر وارون پذیر بوده و، بازای هر دو عضو g_1 و g_2 متعلق به G داریم

$$T(g_2 g_1) = T(g_2)\,T(g_1)\,. \tag{۱.۱}$$

(ب) یک **نمایش یکانی** از گروه G در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ ، همریختی U از گروه G بتوی گروه عملگرهای یکانی روی فضای $\mathscr{H}$ می باشد. بنابراین بازای هر g متعلق به G، $U(g)$ یک عملگر یکانی بوده و بازای هر دو عضو g_1 و g_2 متعلق به G داریم

$$U(g_2 g_1) = U(g_2)\,U(g_1)\,. \tag{۱.۲}$$

[در معادله (۲.۶.۱۱)، $U(g)$ با U_g نشان داده شده است که این دو معادل هم می باشند.]

(ج) همانطور که قبلاً نیز در بخش ۱.۵ مطرح گردید، معرفی ایدهٔ هستهٔ T (یا U) بعنوان زیرگروه نرمال G که به عضو واحد $\mathrm{Aut}\,(V)$ نگاشت می یابد و درنتیجه بوسیلهٔ این همریختی نمایش داده نمی شود، بسیار سودمند می باشد. به ویژه نمایشی که هستهٔ آن بدیهی باشد، یعنی، $\ker T = \{e\}$، نمایش **وفادار** نامیده می شود.

اکنون باید این سؤال مهم که چه هنگام دو نمایش خطی متفاوت از G معادل خواهند بود، بررسی شود. اگر دو نمایش T_1 و T_2 به ترتیب روی فضاهای برداری V_1 و V_2 تعریف شوند، آنگاه یکریخت بودن فضاهای V_1 و V_2 شرط لازم برای معادل بودن آنها خواهد بود. باوجود این، آن شرط کافی نیست، زیرا باید، بصورت مشابهی، گروه G توسط T_1 و T_2 نمایش داده شود.

درواقع، آنچه که بدنبالش هستیم ارائه تعریفی صحیح از یک ریختار مابین دو نمایش خطی است، البته منظور از یکریختی، ریختار دوسوئی خواهد بود. واضح است که ریختار موردنظر باید یک ریختار میان فضاهای برداری V_1 و V_2 (یعنی، یک نگاشت خطی) باشد بطوریکه عملهای گروهی را حفظ کند. چنین نگاشتی «عملگر ارتباطی[1]» نامیده می‌شود که بصورت زیر تعریف می‌گردد.

تعاریف.

(الف) اگر T_1 و T_2 دو نمایش خطی از گروه G بترتیب روی فضاهای برداری V_1 و V_2 باشند، آنگاه یک عملگر ارتباطی مابین این دو نمایش نگاشتی خطی مانند $A : V_1 \to V_2$ است بطوریکه دیاگرام زیر جابجائی باشد

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "T_1(g)"] & V_2 \arrow[d, "T_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "A"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

یعنی،

$$T_2(g)A = AT_1(g) \qquad \forall \ g \in G. \qquad (۱.۳)$$

(ب) اگر نگاشت خطی A یک یکریختی میان فضاهای برداری V_1 و V_2 باشد آنگاه آن دو نمایش را نمایشهای **معادل** گویند.

اگر U_1 و U_2 دو نمایش یکانی به ترتیب روی فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ باشند، و اگر یکریختی ارتباطی A ضرب داخلی را بصورت زیر حفظ کند

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle_{\mathscr{H}_2} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathscr{H}_1} \quad \forall\ \mathbf{v}\ \&\ \mathbf{w} \in \mathscr{H}_1 . \qquad (۱.۴)$$

1- Intertwining

آنگاه این دو نمایش را نمایشهای **معادل یکانی** گویند. یکی از مسائل بسیار مهم در نظریه گروهها، طبقه بندی نمایشهای یکانی یک گروه صرفنظر از معادل یکانی آن می باشد.

تذکر. (۱) اگر T یک نمایش خطی گروه داده شدهٔ G روی یک فضای برداری مانند V باشد و اگر A یک عملگر وارون پذیر اختیاری [یعنی، A متعلق به $\mathrm{Aut}\,(V)$] باشد آنگاه $T'(g) := A^{-1}\ T(g)\ A$ نیز یک نمایش از گروه G بوده و آشکارا با نمایش T معادل می باشد

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[A]{} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T'(g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T(g)} \\ V & \xrightarrow[A]{} & V \end{array} \qquad (۱.۵)$$

برخی اوقات عملگر A **تبدیل تشابـه** نامیده می شود.

(۲) اگر T یک نمایش خطی از گروه G روی فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با بُعد متناهی باشد آنگاه T یک همریختی از گروه G بتوی گروه لی ماتریسهای $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ است. این بعنوان نمایش ماتریسی گروه G معروف است. بطورکلی، اگر T یک نمایش خطی از گروه G روی هر فضای برداری V با بُعد متناهی باشد آنگاه، همانطور که در بخش ۲.۱ نیز توضیح داده شد، هر انتخاب مجموعه بردارهای پایه بصورت $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ برای V منجر به یکریختی $i: V \to \mathbb{C}^n$ با ضابطهٔ $i(\Sigma v_i \mathbf{e}^i) := (v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$ می گردد. و همانطور که در بخش ۲.۴ نیز موردبحث قرار گرفت، یک عملگر خطی مانند $T(g)$ روی فضای V، منجر به ماتریسی که روی $\mathbb{C}^n$ عمل کند گردیده که آنرا با $M(g)$ نشان می دهیم و بصورت $M(g) := iT(g)i^{-1}$ تعریف می گردد. واضح است که، $g \rightsquigarrow M(g)$ نمایش ماتریسی G در $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ بوده و بنابر دیاگرام زیر با نمایش اصلی T معادل است [رک به معادلهٔ (۲.۴.۸)].

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "T(g)"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "M(g)"] \\
V \arrow[r, "i"'] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}
\tag{۱.۶}
$$

تمرین. (۱) نشان دهید که ماتریسهای $M(g)$ و $M'(g)$ وابسته به عملگر $T(g)$ مربوط به دو انتخاب متفاوت پایه برای فضای V توسط یک تبدیل تشابه به هم مربوط می شوند.

(۲) اگر U یک نمایش یکانی با بُعد متناهی از G باشد نشان دهید که با یک نمایش ماتریسی G در گروه لی $U(n)$ که در آن $n = \dim(V)$ است، معادل می باشد.

(۳) اگر $T : G \to \mathrm{Aut}\,(V)$ نمایشی از G باشد آنگاه، از آنجا که $\mathrm{Ker}\, T$ یک زیرگروه نرمال از G است، $G/\mathrm{Ker}\, T$ نیز خود یک گروه بوده و، بنابر مباحث بخش ۱.۵، T نمایشی از $G/\mathrm{Ker}\, T$ را در $\mathrm{Aut}\,(V)$ القا می کند، درنتیجه T یک نمایش وفادار می باشد.

(۴) بیشتر گروهها نمایشهای یکانی با بُعد معین ندارند. بعنوان مثال، گروههای خطی $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ و $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$، گروه اقلیدسی $\mathbb{R}^n ⓢ \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ و گروه وایل - هایزنبرگ با قانون گروهی ارائه شده در معادلهٔ (۱.۳.۲۲) از این نوع هستند. از دو مثال آخر می توان فهمید که چرا فضاهای هیلبرت بی نهایت بُعدی جزو یکی از مشخصه های ذاتی مکانیک موجی است: گروه اقلیدسی $\mathbb{R}^3 ⓢ \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ ، گروه تبدیلات چارچوبهای مرجع متفاوت بوده که برطبق مباحث بخش ۲.۶ روی فضای حالات کوانتمی نمایش داده می شود و هر نمایش یکانی گروه وایل - هایزنبرگ با یک نمایش از روابط جابجائی کانونیکی عملگرهای هرمیتی، ارائه شده در معادلهٔ (۱.۳.۲۳)، معادل می باشد.

مثالها.

(۱) یک نمایش یک بُعدی از گروه $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ روی فضای برداری $\mathbb{C}$ ، بصورت زیر داده می شود

$$U(e) := 1\,, \quad U(a) := -1\,. \tag{۱.۷}$$

و یک نمایش دوبُعدی آن روی فضای برداری $\mathbb{C}^2$ ، بصورت زیر داده می شود

$$U(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱.۸}$$

توجه کنید که هر دو نمایش فوق یکانی بوده، و در عین حال وفادار نیز هستند.

(۲) یک نمایش از گروه دوری $\mathbb{Z}_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ با شرط $a^n = e$ را می توان توسط یک ماتریس مربعی M با هر بُعد دلخواه، که در معادلهٔ $M^n = \mathbf{1}$ صدق نماید درست نمود بدین منظور نمایش بصورت $T(a^q) = M^q$ و $T(e) := \mathbf{1}$ تعریف می گردد. بعنوان مثال، $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ ، و ماتریس ۳ × ۳

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

را که در معادلهٔ زیر صدق می کند در نظر بگیرید

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۱.۹}$$

بنابراین یک نمایش ماتریسی سه بعدی برای گروه $\mathbb{Z}_4$ بصورت زیر بدست می آید

$$T(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱.۱۰}$$

$$T(a^2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T(a^3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

واضح است که $\operatorname{Ket} T = \{e\}$ و بنابراین نمایش فوق وفادار می باشد.

(۳) نمایش دیگری برای گروه $\mathbf{Z}_4$ به کمک ماتریس $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ که در معادلهٔ $M^4 = \mathbf{1}$ صدق می کند بدست می‌آید. این نمایش ماتریسی ۲ × ۲ روی فضای برداری $\mathbf{C}^2$ بصورت زیر است

$$T(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(a^2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(a^3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱.۱۱}$$

باید توجه نمود که $\operatorname{Ket} T = \{e, a^2\}$ و لذا این نمایش وفادار نیست. باوجود این، آن یک نمایش وفادار از گروه خارج قسمت $\mathbf{Z}_4/\mathbf{Z}_2 \cong \mathbf{Z}_2$ را القا می کند.

۳.۲. تبدیلات تقارن در نظریه کوانتم

با گذشت زمان، بردار نمایش دهندهٔ حالت یک سیستم کوانتمی تغییر نموده، و منحنی بردارهای $t \mapsto \psi_t$ در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ را ارائه می‌دهد. این تکامل زمانی بنابر قانون دینامیکی اساسی نظریه کوانتم بوسیلهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول زیر توصیف می شود.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_t = H \psi_t , \tag{۲.۱}$$

که عملگر هرمیتی خطی H هامیلتونی سیستم، معرف کمیت مشاهده پذیر انرژی است. هر تبدیل سیستم که عملگر هامیلتونی تحت تأثیر آن ناوردا باشد (و بنابراین تکامل دینامیکی) دارای

اهمیت بسیاری بوده و انگیزه‌ای برای تعریف زیر می باشد.

تعریف.

فرض کنید که $g \longmapsto U_g$ یک نمایش یکانی وفادار گروه G روی فضای هیلبرت سیستمی با عملگر هامیلتونی H باشد. آنگاه G را یک گروه **تقارن** سیستم گوئیم اگر، بازای هر g متعلق به G داشته باشیم،

$$U_g H U_g^{-1} = H . \tag{۲.۲}$$

ملاحظات.

(الف) از مباحث بخش ۲.۶، می دانیم که یکی از موارد مواجهه با چنین عملگرهای یکانی، بررسی حالات کوانتمی سیستم مشاهده‌پذیرها از دیدگاه دو ناظر با چارچوبهای مرجع متفاوت است که توسط اعضای گروه تبدیلات G بهم مربوط می گردند. اگر معادله (۲.۲) برقرار باشد، به این معنی است که سیستم کوانتمی (یا حداقل، تکامل زمانی آن) از دیدگاه تمام چارچوبهای مرجع که بوسیلهٔ چنین تبدیلی بهم مربوط می شوند مشابه است.

(ب) از مباحث پیرامون معادله (۲.۶.۳) می دانیم که اگر $\mathbf{w}$ یک بردار ویژه عملگر H با مقدار ویژهٔ E باشد آنگاه، بازای هر g متعلق به G، $U_g\mathbf{w}$ یک بردار ویژهٔ $U_g H U_g^{-1}$ با همان مقدار ویژهٔ E خواهد بود. باوجود این، اگر G یک گروه تقارن سیستم باشد، آنگاه $U_g H U_g^{-1} = H$ و ازاینرو $U_g\mathbf{w}$ عملاً یک بردار ویژه H با مقدار ویژه نظیر بردار ویژه $\mathbf{w}$ است. نتیجهٔ بسیار مهم به این شرح است:

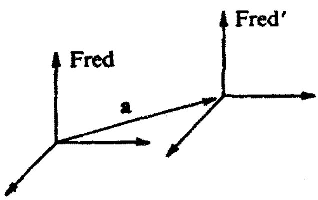
> بازای هر E، عملگرهای U_g زیرفضای بردارهای ویژه تبهگن H را بتوی خود نگاشت می‌دهد. لذا این زیرفضا، یک فضای نمایش یکانی از گروه G خواهد بود. این نتیجه، بیان تبهگنی مقادیر ویژهٔ هر هامیلتونی را برحسب نمایشهای گروه گروههای تقارن خود امکان پذیر می سازد.

(ج) در نظریهٔ کوانتم نسبیتی، خیلی بجاست تقارن از نقطه نظر ناوردائی نسبیتی ذاتی $P_0^2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ (در یکای $c = 1$) موردبحث قرار گیرد، که در آن $(P_0, \mathbf{P})$ بردار چهار مؤلفه‌ای انرژی - اندازهٔ حرکت می باشد. در این مورد، G گروه تقارن با نمایش یکانی $g \rightsquigarrow U_g$ است بطوریکه، بازای هر g متعلق به G داریم

$$U_g (P_0^2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{P})\, U_g^{-1} = P_0^2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}. \qquad (۲.۳)$$

مقادیر ویژه منفصل عملگر $P_0^2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ توان دوم جرمهای سکون ممکن ذرات موردبحث در نظریه هستند و، بنابر بحث قسمت (ب) در بالا، زیرفضاهای تبهگنی این عملگر تحت اثر گروه G بتوی همدیگر نگاشت می یابند. این موضوع ما را به ایده طبقه بندی و «چندگانگی ذرات» (یعنی، مجموعه ذراتی که دارای جرم یکسان می باشند) برحسب نمایش برخی گروههای تقارن نزدیک می سازد. این گروه یک گروه تبدیل از چارچوبهای مرجع فضا - زمان نیست اما نوعی «گروه تقارن داخلی» منبعث از ساختار تفصیلی سیستم موردبحث می باشد. گروههای $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SU}(3)$ مثالهایی از این نوع گروهها هستند که در فیزیک اندرکنش های قوی بکار می روند.

مثالها.



(۱) بعنوان یک مثال از ایده تقارن در نظریه کوانتم غیرنسبیتی، مثال بخش ۲.۶ یعنی، دو ناظر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F}'$ را که چارچوبهای مرجع آنها بوسیلهٔ بردار انتقال $\mathbf{a}$ بهم مربوط می شوند مجدداً در نظر می گیریم.

این بطور سرراست نمایش یکانی $\mathbf{a} \rightsquigarrow U_{\mathbf{a}}$ را برای گروه انتقال چارچوبهای مرجع ارائه می دهد و، همانطور که در بخش ۲.۶ مورد بحث قرار گرفت، اگر $\psi(\mathbf{x})$ تابع موج ناظر $\mathbf{F}$ باشد آنگاه $\psi'(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ تابع موج ناظر $\mathbf{F}'$ خواهد بود. بنابراین داریم

$$[U_{\mathbf{a}}\psi](\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \tag{۲.۴}$$

که درواقع یک نمایش یکانی گروه انتقال $\mathbf{R}^3$ روی فضای هیلبرت $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ می باشد.
اکنون، X مشاهده پذیر فیزیکی بردار مکان ذره نسبت به مبدأ چارچوب مرجع ناظر $\mathbf{F}$ را در نظر می گیریم. آنگاه، بنابه قواعد معمول در کوانتم، ناظر $\mathbf{F}$ این مشاهده پذیر فیزیکی را با عملگر $\hat{\mathbf{x}}$ نمایش می دهد بطوریکه

$$[\hat{x}_i\psi](\mathbf{x}) := x_i\psi(\mathbf{x}) \qquad i = 1, \ldots, 3. \tag{۲.۵}$$

از طرف دیگر، مشاهده پذیر فیزیکی مشابه توسط ناظر $\mathbf{F}'$ (با استفاده از همان قواعدی که ناظر $\mathbf{F}$ مورد استفاده قرار می دهد) بوسیلهٔ عملگر زیر نمایش داده می شود

$$[\hat{\mathbf{x}}_i'\psi](\mathbf{x}) := (x_i + a_i)\,\psi(\mathbf{x}) \quad \text{، یعنی،} \quad \hat{\mathbf{x}}' := \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a} \tag{۲.۶}$$

زیرا ناظر $\mathbf{F}'$ بردار مکان ذره را نسبت به مبدأ چارچوب خود با "$\mathbf{x}$" نشان می دهد. بنابراین داریم

$$U_{\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{x}}\,U_{\mathbf{a}}^{-1} = \hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}\,. \tag{۲.۷}$$

باید توجه نمود که، باوجود این، از آنجا که اندازه حرکت تحت انتقال چارچوب مرجع تغییر نمی کند هر دو ناظر عملگر یکسانی را برای اندازه حرکت کل یک ذره اختصاص می دهند. بنابراین،

$$U_{\mathbf{a}}\,\hat{\mathbf{p}}\,U_{\mathbf{a}}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}\,. \tag{۲.۸}$$

اکنون، می توانیم هامیلتونی های مختلف را از دیدگاه تقارن انتقالی مورد بررسی قرار دهیم. ساده ترین حالت مربوطه به ذرهٔ آزاد می باشد بطوریکه

$$H = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m}. \qquad (۲.۹)$$

درنتیجه، با استفاده از معادلهٔ (۲.۸) داریم

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}})\,U_{\mathbf{a}}^{-1} &= \sum_{i=1}^{3} U_{\mathbf{a}}\,\hat{p}_i\,U_{\mathbf{a}}^{-1}\,U_{\mathbf{a}}\,\hat{p}_i\,U_{\mathbf{a}}^{-1} \\ &= \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}} \end{aligned} \qquad (۲.۱۰)$$

بنابراین، گروه انتقال $\mathbf{R}^3$ یک گروه تقارن ذرهٔ آزاد است.
از طرف دیگر، با استفاده از معادلهٔ (۲.۷) داریم

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}})\,U_{\mathbf{a}}^{-1} &= \sum_{i=1}^{3} U_{\mathbf{a}}\,\hat{p}_i\,U_{\mathbf{a}}^{-1}\,U_{\mathbf{a}}\,\hat{p}_i\,U_{\mathbf{a}}^{-1} \\ &= (\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{a})\cdot(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{a}) \end{aligned} \qquad (۲.۱۱)$$

بنابراین، بعنوان مثال، برای یک اتم هیدروژن با هستهٔ واقع در مبدأ چارچوب ناظر $\mathbf{F}$ و هامیلتونی

$$H = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m} - \frac{e^2}{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}}. \qquad (۲.۱۲)$$

گروه انتقال، یک گروه تقارن نیست.

(۲) باوجود این، اگر آثار دوران چارچوب مرجع ناظر $\mathbf{F}$ را با یک ماتریس دوران متعلق به

$O(3, \mathbb{R})$ موردتوجه قرار دهیم، آنگاه نمایش یکانی مربوطه روی فضای تابع موج [با مراجعه به معادلهٔ (۱.۱)] بصورت زیر خواهد بود:

$$[U_R\psi](\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$$

و

$$U_R\,\hat{x}_i\,U_R^{-1} = \sum_{j=1}^{3} \hat{x}_j\,R_{ji}\,; \quad U_R\,\hat{p}_i\,U_R^{-1} = \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_j\,R_{ji}$$

که از آن ناوردائی $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ تحت نمایش یکانی دوران نیز نتیجه می‌شود، بنابراین هامیلتونی اتم هیدروژن در معادله (۲.۱۲) تحت دوران ناوردا می‌ماند. این موضوع با اندازهٔ حرکت‌های زاویه‌ای متفاوت زیرفضاهای تبهگن (در انرژی) ارتباط عمیقی دارد [اعداد کوانتمی "l" و "m" بطور مؤثری نمایشهای یکانی متفاوت گروه $O(3, \mathbb{R})$ را نشان می‌دهند].

۳.۳. تقلیل پذیری نمایشها

در بخش قبل در بحث تقارن و تبهگنی مقادیر ویژه، دیدیم که برای یک نمایش گروه G روی فضای برداری V ممکن است زیرفضائی از فضای V وجود داشته باشد که تحت نمایش G، بتوی خود نگاشت یابد، و درنتیجه خود این زیرفضا نمایشی از G را تشکیل دهد. این ایدهٔ بسیار مهمی است و آنرا در این بخش توسعه خواهیم داد. ابتدا، چند تعریف صوری ارائه می‌دهیم.

تعاریف.

(الف) فرض کنید که T یک نمایش خطی از گروه G روی فضای برداری V باشد. یک

زیرفضای خطی W از V (بسته، در صورتی که V یک فضای هیلبرت باشد) **G ـ ناوردا** است اگر، بازای هر g متعلق به G و بازای هر $\mathbf{w}$ متعلق به W، $T(g)\mathbf{w}$ متعلق به زیرفضای W باشد، یعنی، بازای هر g متعلق به G، $T(g) : W \to W$.
نمایش بدست آمده از G روی W به **تحدید** نمایش T بر W معروف بوده و یک **زیرنمایش** از T نامیده می شود، که آنرا با T_W نشان خواهیم داد.
فضای خارج قسمت V/W نیز خود یک فضای نمایشی از G بنام **نمایش خارج قسمت** $T_{V/W}$ تشکیل می دهد که بصورت زیر تعریف می شود

$$T_{V/W}(g)(\mathbf{v} + W) := T(g)\mathbf{v} + W . \qquad (۳.۱)$$

(ب) نمایش T از G روی فضای برداری V را **تقلیل ناپذیر** گوئیم اگر تنها زیرفضاهای G ـ ناوردای V مجموعه $\{0\}$ و خود V باشند. در غیر اینصورت T یک نمایش **تقلیل پذیر** نامیده می شود.

مثال.

فرض کنید که دو نمایش ماتریسی $M_1 : G \to \mathrm{GL}(n_1, \mathbb{C})$ و $M_2 : G \to \mathrm{GL}(n_2, \mathbb{C})$ از G تقلیل ناپذیر هستند. بنابراین هیچ زیرفضای ناوردای سره‌ای از فضاهای برداری $\mathbb{C}^{n_1}$ و $\mathbb{C}^{n_2}$ وجود ندارند که G روی آنها نمایش داده شود. حال مجموعه تمام ماتریسهای جدولی شده قطری $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ بصورت زیر را در نظر بگیرید.

$$M(g) := \left(\begin{array}{c|c} M_1(g) & 0 \\ \hline 0 & M_2(g) \end{array}\right) \qquad (۳.۲)$$

که بوضوح در رابطهٔ $M(g)\,M(g') = M(gg')$ صدق می کنند، بنابراین یک نمایش ماتریسی روی فضای برداری اعداد مختلط $(n_1 + n_2)$ ـ گانه، یعنی، روی $\mathbb{C}^{(n_1+n_2)}$ تشکیل

می‌دهند. همچنین بوضوح دیده می‌شود از آنجا که مجموعه تمام بردارهای به شکل $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, 0, 0, \ldots, 0)$ (و همینطور مجموعه تمام بردارهای به شکل $(0, 0, \ldots, 0, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_1+n_2})$) تحت اثر گروه بتوی خود نگاشت می‌یابند، این نمایش جدید تقلیل ناپذیر نیست.

این موضوع اخیر سؤال بسیار جالب زیر را مطرح می‌کند. فرض کنید که یکی از نمایشها، مثلاً M_1، تقلیل ناپذیر نباشد ولی دارای زیرفضای ناوردای سره باشد. آنگاه آیا ممکن است که با کمک یک تبدیل تشابه، M_1 را به شکل قطری جدولی تقلیل یافته، با زیرفضاهای ناوردا مانند معادلهٔ (۳.۲) نوشت؟ این عمل را می‌توان آنقدر ادامه داد تا نمایش بصورت قطری جدولی، که هر جدول آن یک نمایش **تقلیل ناپذیر** باشد، نوشته شود.

گروههایی که نمایشهای آنها می‌توانند به این طریق تجزیه شوند از نظریهٔ نمایش کنترل شدهٔ خاصی تبعیت خواهند کرد زیرا طبقه بندی نمایشها تبدیل به مسئله طبقه بندی نمایشهای تقلیل ناپذیر می‌گردد، و ازاینرو تصریح می‌کنیم که چگونه یکی از این نمایشها دفعات مکرر در تجزیه 'قطری جدولی' یک نمایش کلی ظاهر می‌شود. این موضوع را دنبال می‌کنیم. اما ابتدا، باید بحث راجع به فضاهای برداری و همچنین موارد خاص $\mathbb{C}^n$ که در تجزیه و تحلیل معادلهٔ (۳.۲) مورد استفاده قرار گرفت، وسعت داده شود. گام اساسی تعریف پرمفهوم 'تجزیه'[1] یک فضای برداری دلخواه بصورت 'مجموع'[2] زیرفضاها می‌باشد، درست مشابه به تجزیهٔ فضای $\mathbb{C}^{(n_1+n_2)}$ به 'مجموع' $\mathbb{C}^{n_1}$ و $\mathbb{C}^{n_2}$، به این معنی که هر بردار متعلق به $\mathbb{C}^{(n_1+n_2)}$ می‌تواند بصورت یک جمع منحصر بفرد از بردارهای متعلق به $\mathbb{C}^{n_1}$ و $\mathbb{C}^{n_2}$ نوشته شود

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_1+n_2}) \\ = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, 0, 0, \ldots, 0) \\ + (0, 0, \ldots, 0, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_1+n_2}).\end{aligned} \tag{۳.۳}$$

این ایدهٔ اساسی 'جمع مستقیم'[3] دو فضای برداری است.

1- Split
2- Sum
3- Direct sum

تعاریف.

(الف) جمع مستقیم دو فضای برداری مختلط V_1 و V_2 بصورت مجموعه تمام جفتهای $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ با بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$، به ترتیب متعلق به V_1 و V_2 با عملهای فضای برداری بصورت زیر تعریف می شود

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) := (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2) \qquad (۳.۴)$$

$$\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := (\mu\mathbf{v}_1, \mu\mathbf{v}_2)\,. \qquad (۳.۵)$$

جمع مستقیم این دوفضای برداری بصورت $V_1 \oplus V_2$ نوشته می شود.

(ب) جمع مستقیم فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ مانند (الف) و با یک ضرب اسکالر بصورت زیر تعریف می شود

$$\langle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)\rangle := \langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1\rangle_{\mathscr{H}_1} + \langle\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2\rangle_{\mathscr{H}_2}\,. \qquad (۳.۶)$$

(ج) اگر T_1 و T_2 به ترتیب نمایشهای خطی G روی دو فضای برداری V_1 و V_2 باشند، آنگاه نمایش جمع مستقیم آنها روی فضای برداری $V_1 \oplus V_2$ بصورت زیر تعریف می شود

$$[T_1 \oplus T_2](g)\,(v_1, v_2) := (T_1(g)v_1, T_2(g)v_2)\,. \qquad (۳.۷)$$

تذکر. (۱) بازای هر دو عدد صحیح مثبت n_1 و n_2 با شرط $n = n_1 + n_2$ ، فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با جمع مستقیم $\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2}$ یکریخت است. از بررسی معادلهٔ (۳.۳)، خیلی سرراست یکریختی بدست می آید

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots, a_{n_1+n_2})$$
$$\rightsquigarrow ((a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}), (a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_1+n_2})) .$$

بنابراین نمایش قطری جدولی در معادلهٔ (۳.۲) با جمع مستقیم $M_1 \oplus M_2$ از دو نمایش ماتریسی M_1 و M_2 یکریخت می باشد.

(۲) بطور کلی، داریم $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

(۳) هر بردار $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ متعلق به $V_1 \oplus V_2$ بصورت زیر بطور منحصر بفردی تجزیه می شود

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, 0) + (0, \mathbf{v}_2) \tag{۳.۸}$$

که اگر با استفاده از نگاشتهای یک بیک طبیعی

$$\begin{aligned} &i_1 : V_1 \to V_1 \oplus V_2 \qquad i_2 : V_2 \to V_1 \oplus V_2 \\ &i_1(\mathbf{v}_1) := (\mathbf{v}_1, 0) \qquad i_2(\mathbf{v}_2) := (0, \mathbf{v}_2) . \end{aligned} \tag{۳.۹}$$

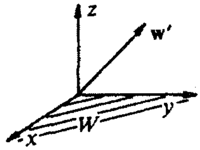
فضاهای V_1 و V_2 بعنوان زیرفضاهایی از $V_1 \oplus V_2$ در نظر گرفته شوند می توان آنرا بعنوان یک جمع از بردارهای متعلق به V_1 و V_2 تلقی نمود. برعکس، فضای برداری V تجزیه پذیر به جمع مستقیم زیرفضاهای V_1 و V_2 نامیده می شود اگر بتوان هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به V را بطریق منحصربفردی به شکل $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ با $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بترتیب متعلق به V_1 و V_2، نوشت.

این، چنین معنی می دهد که،

(الف) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

(ب) $V \cong V_1 \oplus V_2 .$

(۴) بازای هر زیرفضای W از فضای برداری V، تعداد زیادی زیرفضاهای 'مکمل' W' وجود دارند بطوریکه $V \cong W \oplus W'$. بعنوان مثال،



در فضای $\mathbb{R}^3$ ، اگر W همان صفحهٔ $x-y$ باشد، W' می تواند زیرفضای یک بُعدی تولید شده بوسیلهٔ هر بردار $\mathbf{w}'$ که لزوماً در صفحهٔ $x-y$ قرار ندارد، باشد.

باوجود این، اگر $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت و W یک زیرفضای بسته از آن باشد، آنگاه یک انتخاب طبیعی برای W' مکمل متعامد W در $\mathscr{H}$ خواهد بود:

$$W_\perp := \{\mathbf{v} \in \mathscr{H} : \quad \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad \forall\, \mathbf{w} \in W\}.$$

در مثال مربوط به دیاگرام بالا این انتخاب طبیعی برای $\mathbf{w}'$ همان بردارهای همراستا با محور z می باشند. بطور کلی در این مورد، بحث پیشین پیرامون معادلهٔ (۳.۹) نشان می‌دهد که $\mathscr{H} \cong W \oplus W_\perp$.

برای مطالعهٔ نمایشهای گروه روی فضاهای برداری که بصورت جمع مستقیم چند فضای برداری دیگر نوشته می شوند نکات زیر را مورد توجه قرار می دهیم.

ملاحظات.

(الف) اگر T_1 و T_2 به ترتیب نمایشهای G روی V_1 و V_2 باشند، آنگاه از آنجا که V_1 و V_2 زیرفضاهای Gـ ناوردای $V_1 \oplus V_2$ (با استفاده از نگاشتهای یک بیک در معادلهٔ (۳.۹)) می باشند، یقیناً نمایش جمع مستقیم $T_1 \oplus T_2$ تقلیل پذیر است.

(ب) اگر W یک زیرفضای G ـ ناوردا از فضای برداری V و T یک نمایش G روی W باشد، آنگاه زیرفضای W' از V (ممکن است G ـ ناوردا باشد یا نباشد) وجود دارد بطوریکه

یک نمایش، **کاملاً تقلیل پذیر** نامیده می شود اگر، برای هر زیرفضای G ـ ناوردا از V، یک زیرفضای ناوردای مکمل وجود داشته باشد. در این حالت، به آسانی می توان نشان داد $T_{V/W} \cong T_{W'}$، و البته T بطور منحصر بفردی بصورت جمع مستقیم دو زیرنمایش T_W و $T_{W'} \cong T_{V/W}$ نوشته می شود.

باوجود این، وقتی که T یک نمایش کاملاً تقلیل پذیر نباشد، ضرورتاً با حالتی مواجهه نخواهیم بود که در آن برای یک زیرفضای G ـ ناوردای داده شدهٔ W از V، نمایش T مجدداً از نمایشهای T_W و $T_{V/W}$ بدست آید. در این موارد نمایش ماتریسی بصورت

$$T(g) = \left(\begin{array}{c|c} T_W(g) & B(g) \\ \hline 0 & T_{V/W}(g) \end{array}\right) \qquad (۳.۱۰)$$

می باشد و هیچ تبدیل تشابهی مانند A وجود ندارد که برای آن $AT(g)A^{-1}$ بازای هر متعلق به G، به شکل قطری جدولی باشد. بنابراین برای اینکه نمایش اولیهٔ $T(g)$ را دوباره بدست آوریم، لازم است پیرامون ماتریسهای $B(g)$ بعلاوهٔ زیرنمایش $T_W(g)$ و نمایش خارج قسمت $T_{V/W}(g)$ اطلاعاتی بدست آید.

اهمیت آگاهی از تقلیل پذیری کامل نمایش T، در امکان بیان T بصورت یک جمع مستقیم از نمایشهای تقلیل ناپذیر می باشد. بنابراین زیرفضای ناوردای W از V که نمایش را بصورت $T \cong T_W \oplus T_{W'}$ تجزیه می کند و در آن W' زیرفضای ناوردای مکمل در V است، در نظر گرفته می شود. اگر خود نمایش T_W تقلیل ناپذیر نباشد، آنگاه، زیرفضای ناوردای Y از W (متشابهاً برای W') را، و همینطور تا آخر، انتخاب می کنیم. با اندکی اقبال، این رویه بالاخره در یک مرحله ای بپایان می رسد و نمایش T بصورت جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر تجزیه می شود.

تذکر. (۱) این رویه برای برخی گروهها ولو اینکه نمایش کاملاً تقلیل پذیر باشد خاتمه نمی یابد. البته، این حالت فقط وقتی که نمایش اصلی دارای بُعد بی نهایت است، اتفاق می افتد. بزودی یک مثال خاص در این مورد خواهیم دید.

(۲) حتی اگر این عمل خاتمه پیدا کند، ضرورتاً باید عدم وابستگی تجزیه به جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر، به انتخاب زیرفضاهای ناوردایی که درحین اجرای رویه مذکور ساخته می شوند، نشان داده شود.

به وضوح دانستن اینکه چه گروهها و چه نمایشهایی کاملاً تقلیل پذیر هستند حائز اهمیت فراوان است. قضیهٔ سادهٔ زیر از این نقطه نظر بسیار مفید است.

قضیه.

برای یک گروه اختیاری G، هر نمایش یکانی $g \rightarrow U(g)$ روی فضای هیلبرتی مانند $\mathscr{H}$، کاملاً تقلیل پذیر است.

اثبات.

فرض کنید W یک زیرفضای G ـ ناوردای اختیاری از $\mathscr{H}$ باشد. برای $\mathscr{H}$ بعنوان یک فضای برداری داریم $\mathscr{H} \cong W \oplus W_{\perp}$. اگر بتوانیم نشان دهیم که $W_{\perp}$ نیز G ـ ناوردا است آنگاه قضیه اثبات می گردد.

فرض کنید $\mathbf{v}$ متعلق به $W_{\perp}$ می باشد. آنگاه، بازای هر $\mathbf{w}$ متعلق به W داریم

$$\langle U(g)\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle U(g)\mathbf{v}, U(g)\, U^{-1}(g)\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, U^{-1}(g)\mathbf{w}\rangle \quad \forall\ g \in \mathrm{G}, \tag{۳.۱۱}$$

زیرا $U(g)$ یک عملگر یکانی است. اما از آنجا که W یک زیرفضای G ـ ناوردا است $U(g^{-1})\mathbf{w}$ متعلق به W می باشد و نیز داریم $U^{-1}(g)\mathbf{w} = U(g^{-1})\mathbf{w}$. بنابراین $\langle \mathbf{v}, U^{-1}(g)\mathbf{w}\rangle = 0$ و لذا، از معادلهٔ (۳.۱۱)، معلوم می شود که بازای هر $\mathbf{w}$ متعلق به W داریم $\langle U(g)\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ ، درنتیجه $U(g)\mathbf{v}$ متعلق به $W_{\perp}$ می باشد. بنابراین از اینکه $\mathbf{v}$ متعلق به $W_{\perp}$ است، نتیجه می شود که بازای هر g متعلق به G بردار $U(g)\mathbf{v}$ نیز متعلق به $W_{\perp}$ می باشد، یعنی $W_{\perp}$ یک زیرفضای G ـ ناوردا است.

مثالها.

(۱) برطبق قضیهٔ فوق نمایش یکانی $O(3, \mathbb{R})$ در فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R}^3)$ که بصورت $[U(R)f](\mathbf{x}) := f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$ تعریف می شود کاملاً تقلیل پذیر است. لذا این نمایش به صورت جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر $O(3, \mathbb{R})$ تجزیه می شود. تمام چنین نمایشهایی از این گروه لی دارای بُعد معین با مقادیر $2j + 1$ بازای $j = 0, 1, 2, \ldots$ می باشند. درحقیقت، j چیزی بجز عدد کوانتمی اندازهٔ حرکت زاویه ای نیست، و تجزیه نمایش گروه $O(3, \mathbb{R})$ در فضای $L^2(\mathbb{R}^3)$ بصورت جمع مستقیم، تجزیهٔ آشنای این فضا را برحسب مقادیر اندازه حرکت زاویه ای کل ایجاد می کند.

(۲) نمایش غیریکانی گروه جمعی مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ بصورت زیر

$$T(n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۳.۱۲}$$

تقلیل پذیر است زیرا مجموعه تمام بردارهای متعلق به $\mathbb{C}^2$ به شکل $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ برای هر عدد مختلط a، تحت عمل گروه یک زیرفضای ناوردا است. اما این نمایش کاملاً تقلیل پذیر نیست زیراهیچ ماتریسی بصورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که بتواند در یک تبدیل تشابه نمایش را به شکل قطری ظاهر کند وجود ندارد، یعنی، معادلات

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{۳.۱۳}$$

بازای هر انتخاب برای اعداد مختلط α و β هیچ حلی ندارند. (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید.)

(۳) یک نمایش گروه جمعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ روی $L^2(\mathbb{R})$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$[U(t)f](x) := e^{itx}f(x) . \tag{۳.۱۴}$$

از آنجا که U یک نمایش یکانی است، باید کاملاً تقلیل پذیر باشد باوجود این، **هیچ** زیرفضای تقلیل ناپذیری وجود ندارد، و این یک مثال برای تذکر (۱) قبلی است که برطبق آن تجزیهٔ دنباله‌ای به زیرفضاهای ناوردا هرگز خاتمه نمی‌یابد. در این حالت خاص، تجزیه جمع مستقیم الزاماً بوسیلهٔ یک 'انتگرال مستقیم' نمایشهای تقلیل ناپذیر جایگزین می‌شود. این یک مفهوم مهم و خوشتعریفی است که در اینجا توسعه می‌یابد.

در قضیهٔ بعدی، و برای بدست آوردن نتایج بیشتری در این درس، شمول جمع روی تمام اعضای یک گروه متناهی، یک قدم اساسی برای اثبات آن است. این تکنیک برای گروههای با مرتبهٔ بی‌پایان شمارا بکار نخواهد رفت زیرا هیچ تضمینی برای همگرائی جمع وجود ندارد (آنچه که بعنوان معنی همگرائی تلقی می‌شود همیشه آشکار نیست). باوجود این بسیار حائز اهمیت است که بدانیم، برای گروههای لی فشرده [فضاهای گروهی که کراندار هستند، مانند $SU(2)$ که یک کرهٔ ۳ـ بعدی است] این تکنیک با جایگزینی جمع بوسیلهٔ انتگرال معین روی فضای گروهی کراندار بکار می‌رود.

قضیه.

فرض کنید که T یک نمایش برای گروه متناهی G در فضای برداری V با بُعد متناهی باشد. آنگاه یک ضرب نرده‌ای روی V چنان وجود دارد که T نسبت به آن یک نمایش یکانی است.

اثبات.

فرض کنید $\langle\ ,\ \rangle$ یک ضرب اسکالر دلخواه روی V باشد [که حتماً وجود دارد، بعنوان

مثال کافی است که یکریختی V را با $\mathbb{C}^n$ $(n = \dim(V))$ با استفاده از ضرب اسکالر استاندارد روی $\mathbb{C}^n$ در نظر بگیرید]. تعریف زیر را ارائه می‌دهیم

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^{\sim} := \frac{1}{|G|} \sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\mathbf{v}, T(g')\mathbf{w} \rangle . \qquad (۳.۱۵)$$

آنگاه $\langle\ ,\ \rangle^{\sim}$ نیز یک ضرب اسکالر روی V است (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید).

بعلاوه:

$$\begin{aligned} \langle T(g)\mathbf{v}, T(g)\mathbf{w} \rangle^{\sim} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\, T(g)\mathbf{v}, T(g')\, T(g)\mathbf{w} \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g'g)\mathbf{v}, T(g'g)\mathbf{w} \rangle . \qquad (۳.۱۶) \end{aligned}$$

اما، چنانکه g' معرف تمام اعضای G باشد، آنگاه برای هر عضو در نظر گرفته شدهٔ g متعلق به G، $g'g$ نیز معرف تمام اعضای G خواهد بود، و هر عضو G درست یکی از آنها را شامل می‌شود. بنابراین در معادلهٔ (۳.۱۶) جمع روی g' مستقل از g بوده، و لذا معادلهٔ (۳.۱۶) همچنین می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} \langle T(g)\mathbf{v}, T(g)\mathbf{w} \rangle^{\sim} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\mathbf{v}, T(g')\mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^{\sim} . \qquad (۳.۱۷) \end{aligned}$$

بنابراین $g \rightharpoonup T(g)$ یک نمایش یکانی نسبت به ضرب اسکالر تعریف شده در معادلهٔ (۳.۱۵) می‌باشد.

(۳) یک نمایش گروه جمعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ روی $L^2(\mathbb{R})$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$[U(t)f](x) := e^{itx} f(x)\,. \tag{۳.۱۴}$$

از آنجا که U یک نمایش یکانی است، باید کاملاً تقلیل پذیر باشد باوجود این، **هیچ** زیرفضای تقلیل ناپذیری وجود ندارد، و این یک مثال برای تذکر (۱) قبلی است که برطبق آن تجزیهٔ دنباله‌ای به زیرفضاهای ناوردا هرگز خاتمه نمی‌یابد. در این حالت خاص، تجزیه جمع مستقیم الزاماً بوسیلهٔ یک 'انتگرال مستقیم' نمایشهای تقلیل ناپذیر جایگزین می‌شود. این یک مفهوم مهم و خوشتعریفی است که در اینجا توسعه می‌یابد.

در قضیهٔ بعدی، و برای بدست آوردن نتایج بیشتری در این درس، شمول جمع روی تمام اعضای یک گروه متناهی، یک قدم اساسی برای اثبات آن است. این تکنیک برای گروههای با مرتبهٔ بی‌پایان شمارا بکار نخواهد رفت زیرا هیچ تضمینی برای همگرائی جمع وجود ندارد (آنچه که بعنوان معنی همگرائی تلقی می‌شود همیشه آشکار نیست). باوجود این بسیار حائز اهمیت است که بدانیم، برای گروههای لی فشرده [فضاهای گروهی که کراندار هستند، مانند $SU(2)$ که یک کرهٔ ۳ـ بعدی است] این تکنیک با جایگزینی جمع بوسیلهٔ انتگرال معین روی فضای گروهی کراندار بکار می‌رود.

قضیه.

فرض کنید که T یک نمایش برای گروه متناهی G در فضای برداری V با بُعد متناهی باشد. آنگاه یک ضرب نرده‌ای روی V چنان وجود دارد که T نسبت به آن یک نمایش یکانی است.

اثبات.

فرض کنید $\langle\,,\rangle$ یک ضرب اسکالر دلخواه روی V باشد [که حتماً وجود دارد، بعنوان

مثال کافی است که یکریختی V را با $\mathbb{C}^n$ $(n = \dim(V))$ با استفاده از ضرب اسکالر استاندارد روی $\mathbb{C}^n$ در نظر بگیرید]. تعریف زیر را ارائه می‌دهیم

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^{\sim} := \frac{1}{|G|}\sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\mathbf{v}, T(g')\mathbf{w}\rangle . \qquad (۳.۱۵)$$

آنگاه $\langle\ ,\ \rangle^{\sim}$ نیز یک ضرب اسکالر روی V است (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید).

بعلاوه:

$$\begin{aligned}\langle T(g)\mathbf{v}, T(g)\mathbf{w}\rangle^{\sim} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\, T(g)\mathbf{v}, T(g')\, T(g)\mathbf{w}\rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g'g)\mathbf{v}, T(g'g)\mathbf{w}\rangle . \qquad (۳.۱۶)\end{aligned}$$

اما، چنانکه g' معرف تمام اعضای G باشد، آنگاه برای هر عضو در نظر گرفته شدهٔ g متعلق به G، $g'g$ نیز معرف تمام اعضای G خواهد بود، و هر عضو G درست یکی از آنها را شامل می‌شود. بنابراین در معادلهٔ (۳.۱۶) جمع روی g' مستقل از g بوده، و لذا معادلهٔ (۳.۱۶) همچنین می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned}\langle T(g)\mathbf{v}, T(g)\mathbf{w}\rangle^{\sim} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g' \text{ in } G} \langle T(g')\mathbf{v}, T(g')\mathbf{w}\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^{\sim} . \qquad (۳.۱۷)\end{aligned}$$

بنابراین $g \rightsquigarrow T(g)$ یک نماش یکانی نسبت به ضرب اسکالر تعریف شده در معادلهٔ (۳.۱۵) می‌باشد.

نتیجه.
هر نمایش با بُعد معین از یک گروه متناهی کاملاً تقلیل پذیر به جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر می باشد.

تذکر. قضیه و نتیجهٔ فوق هر دو برای گروههای لی فشرده نیز صحت دارند.

۳.۴. نمایشهای تقلیل ناپذیر

قضایای ارائه شده نشان می دهند که، حداقل برای انواع معینی از گروهها، کلاسهای مشخصی از نمایش عمومی به جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر قابل تجزیه هستند، واضح است که تحصیل تکنیکهائی برای نشان دادن اینکه آیا یک نمایش خاص تقلیل ناپذیر است یا نه و همچنین طبقه بندی نمایشهای تقلیل ناپذیر یک وظیفهٔ مهم قابل ملاحظه می باشد. این بحث بنوبهٔ خود موضوع گسترده ای است که در اینجا فقط می توانیم تا اندازه ای آنرا مورد بررسی قرار دهیم.

ابتدا، معیار خیلی معروفی را برای تعیین تقلیل ناپذیری یک نمایش معرفی می کنیم.

قضیه (لم شور[1]).
اگر T_1 و T_2 دو نمایش تقلیل ناپذیر از گروه G باشند، آنگاه هر عملگر ارتباطی آندو صفر و یا یک یکریختی از V_1 بتوی V_2 است (در این حالت، دو نمایش معادل هستند).

1- Schur

اثبات.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "T_1(g)"] & V_2 \arrow[d, "T_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "A"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

فرض کنید A یک عملگر ارتباطی میان دو فضای برداری V_1 و V_2 باشد که دو نمایش T_1 و T_2 به ترتیب روی آنها تعریف گردیده‌اند. بنابراین

$$T_2(g)A = A\,T_1(g) \qquad \forall\, g \in G. \qquad (۴.۱)$$

(الف) فرض کنید $\mathbf{v}$ متعلق به هستهٔ A باشد. بنابراین با استفاده از معادلهٔ (۴.۱) داریم

$$A\,[T_1(g)\mathbf{v}] = T_2(g)\,[A\mathbf{v}] = 0 \qquad \forall\, g \in G,$$

و لذا $T_1(g)$ زیرفضای $\operatorname{Ker} A$ را بتوی خود نگاشت می‌دهد. اما $\operatorname{Ker} A$ یک زیرفضای V_1 بوده و نمایش T_1 تقلیل ناپذیر است و درنتیجه هیچ زیرفضای سره Gـ ناوردائی وجود ندارد. بنابراین

$\operatorname{Ker} A = \{0\}$، یعنی، A یک بیک می باشد

یا

$\operatorname{Ker} A = V_1$، یعنی، A نگاشت بدیهی صفر است.

(ب) اکنون، هر عضو $\mathbf{v}_2$ متعلق به $\operatorname{Im} A$ (تصویر A) را موردنظر قرار می‌دهیم. ازاینرو عضوی مانند $\mathbf{v}_1$ متعلق به V_1 وجود دارد بطوریکه $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1$. درنتیجه با استفاده از معادلهٔ

(۴.۱) داریم

$$T_2(g)\,\mathbf{v}_2 = T_2(g)\,A\mathbf{v}_1 = A\,[T_1(g)\,\mathbf{v}_1] \quad \forall\ g \in G,$$

بطوریکه $T_2(g)\mathbf{v}_2$ نیز متعلق به $\operatorname{Im} A$ می باشد. لذا $T_2(g)$ زیرفضای $\operatorname{Im} A$ را بتوی خود نگاشت می دهد. اما T_2 یک نمایش تقلیل ناپذیر است و درنتیجه هیچ زیرفضای سره G ـ ناوردائی وجود ندارد. بنابراین

$\operatorname{Im} A = \{0\}$، یعنی، A نگاشت بدیهی صفر است

یا

$\operatorname{Im} A = V_2$، یعنی، A نگاشت پوشا است.

لهذا، A یک نگاشت صفر و یا یک یکریختی می باشد.

نتیجه.

اگر T یک نمایش تقلیل ناپذیر گروه G روی فضای برداری مختلط V باشد، آنگاه مضرب مختلطی از عملگر واحد I وجود دارد بطوریکه با تمام عملگرهای $T(g)$ بازای هر g متعلق به G، جابجا می شود.

اثبات.

اگر، بازای هر g متعلق به G، داشته باشیم $AT(g) = T(g)A$ آنگاه، برای هر عدد مختلط μ داریم

$$(A - \mu\mathbf{1})\,T(g) = T(g)\,(A - \mu\mathbf{1}) \qquad (۴.۲)$$

بطوریکه $A - \mu\mathbf{1}$ یک عملگر ارتباطی نمایش T با خودش می باشد. اما T یک نمایش تقلیل ناپذیر است و بنابراین، طبق قضیهٔ اخیر $A - \mu\mathbf{1} = 0$ بوده و یا اینکه عملگر $A - \mu\mathbf{1}$ معکوس پذیر است.

باوجود این، همیشه عدد مختلطی مانند μ وجود دارد بطوریکه بازای آن $A - \mu\mathbf{1}$ معکوس پذیر نیست. در حالتی با بُعد متناهی، این موضوع می تواند بوسیلهٔ نگاشت یکریختی از V بتوی $\mathbb{C}^{\dim(V)}$ مشاهده شود به این ترتیب که، معادلهٔ $\mathrm{Det}\,(A - \mu\mathbf{1}) = 0$ همیشه حداقل یک جواب برای μ خواهد داشت [A بعنوان یک ماتریس $\dim(V) \times \dim(V)$ تلقی شود]؛ با احتیاط از بررسی حالتی که V یک فضای نامتناهی است صرفنظر می شود.

اما آنگاه، بازای چنین عدد مختلطی مانند μ، ناچاراً شق دیگر برقرار است. یعنی، $A - \mu\mathbf{1} = 0$.

تذکر. این یکی از موارد نسبتاً کمیاب است و عملاً وقتی که V یک فضای برداری مختلط (و نه حقیقی) است مطرح می شود. وقتی که V یک فضای برداری حقیقی است، معادلهٔ $\mathrm{Det}\,(A - \mu\mathbf{1}) = 0$ ممکن است جوابی (یعنی، یک مقدار حقیقی برای μ) نداشته باشد. درست مشابه معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$ می باشد، که فقط اگر x یک عدد **مختلط** باشد دارای جواب است.

اکنون مجموعه قضایای مهمی در ارتباط با نمایشهای تقلیل ناپذیر یکانی نظیر یک گروه متناهی، مورد بررسی قرار می گیرد. این قضایا ثابت می کنند که هر نمایش چنین گروهی دارای بُعد معین بوده، و صرفنظر از نمایشهای یکانی معادل، تعداد این نمایشها متناهی است. بیشتر این نتایج برای گروههای لی فشرده نیز بدست می‌آیند اما آنها در جزئیات مهمی دارای تفاوت می باشند و باید کتابهای مناسبی برای اخذ اطلاعات بیشتر مورد مطالعه قرار گیرند.

قضیه.

اگر برای گروه متناهی G، U یک نمایش تقلیل ناپذیر یکانی روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد، آنگاه

(الف) $\mathrm{Dim}\,\mathscr{K} < \infty\,,$

(ب) $$\sum_{g\in G}\langle \mathbf{w}_1,\, U(g)\mathbf{v}_1\rangle^*\langle \mathbf{w}_2,\, U(g)\mathbf{v}_2\rangle = \frac{|G|}{\dim \mathscr{K}}\langle \mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_2\rangle^*\langle \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2\rangle\,.$$

(۴.۳)

اثبات.

(الف) طرف چپ معادلهٔ (۴.۳) یک تابع خطی پیوسته ازبردار $\mathbf{v}_2$ متعلق به $\mathscr{K}$ است و بنابراین بازای برداری مانند $\mathbf{k}$ خود تابعی از بردارهای $\mathbf{w}_1$، $\mathbf{w}_2$ و $\mathbf{v}_1$ است با $\langle \mathbf{k}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2\rangle$ معادل می باشد. [از قضیهٔ زیر استفاده می شود:
اگر $\mathbf{v} \rightharpoonup F(\mathbf{v})$ یک تابع مختلط ـ مقدار خطی و پیوسته روی فضای هیلبرت $\mathscr{K}$ باشد، آنگاه برداری مانند $\mathbf{k}$ وجود دارد بطوریکه بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{K}$ داریم $F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{k}, \mathbf{v}\rangle$. اثبات این قضیه بعنوان یکی از مسائل انتخاب گردیده است.]
طرف چپ معادلهٔ (۴.۳) همچنین یک تابع پاد ـ خطی از بردار $\mathbf{v}_1$ متعلق به $\mathscr{K}$ است و لذا (با استفاده از بحث مشابهی) عملگری خطی مانند $A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ وجود دارد بطوریکه $\mathbf{k}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1) = A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\mathbf{v}_1$. بنابراین،

$$\sum_{g\in G}\langle \mathbf{w}_1,\, U(g)\mathbf{v}_1\rangle^*\langle \mathbf{w}_2,\, U(g)\mathbf{v}_2\rangle = \langle A(\mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_2)\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2\rangle$$

و درنتیجه،

$$\begin{aligned}&\langle A(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\,U(g')\mathbf{v}_1,\, U(g')\mathbf{v}_2\rangle\\ &= \sum_{g\in G}\langle \mathbf{w}_1,\, U(gg')\mathbf{v}_1\rangle^*\langle \mathbf{w}_2,\, U(gg')\mathbf{v}_2\rangle\,. \quad \forall\, g'\in G.\end{aligned}$$

اما، برای هر g' داده شده، چون g معرف تمام اعضای G است. لذا gg' نیز معرف

تمام اعضای G خواهد بود و بنابراین جمع اخیر بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\sum_{g \in G} \langle \mathbf{w}_1, U(g)\mathbf{v}_1\rangle^* \langle \mathbf{w}_2, U(g)\mathbf{v}_2\rangle = \langle A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle .$$

این رابطه برای تمام بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ متعلق به $\mathscr{H}$ برقرار است و بنابراین، بازای هر g متعلق به G، داریم $A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\ U(g) = U(g)\ A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$. اما از نتیجهٔ لم‌شور (با اثبات صحیح آن برای فضاهای بی نهایت بُعدی)، بازای عدد مختلطی مانند μ که البته تابع بردارهای $\mathbf{w}_1$ و $\mathbf{w}_2$ می‌باشد داریم $A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mu(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\mathbf{1}$. بنابراین،

$$\sum_{g \in G} \langle \mathbf{w}_1, U(g)\mathbf{v}_1\rangle^* \langle \mathbf{w}_2, U(g)\mathbf{v}_2\rangle = \mu(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^* \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle . \qquad (۴.۴)$$

از ادامهٔ این بحث نتیجهٔ $\mu(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = r\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$ بدست می‌آید که در آن r یک عدد می‌باشد، و با انتخاب $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ ، معلوم می‌شود که r یک عدد حقیقی است. بنابراین نشان داده‌ایم که برای یک عدد حقیقی مانند r داریم

$$\sum_{g \in G} \langle \mathbf{w}_1, U(g)\mathbf{v}_1\rangle^* \langle \mathbf{w}_2, U(g)\mathbf{v}_2\rangle = r\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle^* \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \qquad (۴.۵)$$

(ب) اکنون فرض کنید $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعه از بردارهای متعامد یکه اختیاری متعلق به $\mathscr{H}$ با تعداد معین باشد. از معادلهٔ (۴.۵) نتیجه می‌شود

$$\sum_{g \in G} |\langle \mathbf{e}^i, U(g)\mathbf{v}\rangle|^2 = r\|\mathbf{v}\|^2 \qquad i = 1, \ldots, N .$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{g \in G} |\langle \mathbf{e}^i, U(g)\mathbf{v}\rangle|^2 = Nr\|\mathbf{v}\|^2 . \qquad (۴.۶)$$

اما نامساوی بسل [معادلهٔ (۲.۳.۲۴)] نشان می دهد که

$$\sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, U(g)\mathbf{v}\rangle|^2 \leq \| U(g)\mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2$$

و درنتیجه،

$$\sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{N} |\langle \mathbf{e}^i, U(g)\mathbf{v}\rangle|^2 \leq | G | \, \| \mathbf{v} \|^2 . \tag{۴.۷}$$

در معادلهٔ (۴.۶) هر دو جمع معین می باشند، لذا می توان ترتیب آنها را جابجا نمود و از آن، طرف چپ معادلهٔ (۴.۷) را بدست آورد. بنابراین نتیجه می شود که

$$Nr \leq | G |. \tag{۴.۸}$$

اما $r > 0$ و $| G |$ معین است، لذا بنابر معادلهٔ (۴.۸) باید بزرگترین مقدار ممکن برای N (که $N = \dim \mathscr{H}$) یک عدد معین باشد. بنابراین $\dim \mathscr{H} < \infty$. پس قسمت اول قضیه اثبات می گردد.

(ج) اکنون فرض کنید $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathscr{H}$ باشد، که $n = \dim \mathscr{H} < \infty$. بنابراین نامساوی بسل تبدیل به تساوی می گردد و معادلهٔ (۴.۸) بیان می کند که $nr = | G |$. بنابراین

$$r = \frac{|G|}{\dim \mathscr{H}}$$

که، با جایگزین نمودن آن در معادلهٔ (۴.۵)، قسمت دوم قضیه، یعنی، معادلهٔ (۴.۳) اثبات می گردد.

قضیه.

فرض کنید که U_1 و U_2 دو نمایش تقلیل ناپذیر یکانی غیرمعادل از گروه متناهی G به ترتیب روی فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ باشند. آنگاه، بازای هر $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{w}_1$ متعلق به $\mathscr{H}_1$ و $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{w}_2$ متعلق به $\mathscr{H}_2$ ، داریم

$$\sum_{g \in G} \langle \mathbf{w}_1, U_1(g)\mathbf{v}_1\rangle^* \langle \mathbf{w}_2, U_2(g)\mathbf{v}_2\rangle = 0 . \qquad (۴.۹)$$

اثبات.

اگرچه لم شور برای نمایشهای غیرمعادل بکار نمی‌رود، ولی در این قضیه می توان نتیجهٔ آنرا برای یک تک نمایش بکار برد. (بعنوان تمرین این قضیه را اثبات کنید.)

اکنون در اینجا وقت آن رسیده است که فضای برداری $\mathscr{F} := \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ با ضرب اسکالر زیر معرفی شود

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\mathscr{F}} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \text{ in } G} f_1^*(g)\, f_2(g) . \qquad (۴.۱۰)$$

(تمرین. نشان دهید که این رابطه براستی یک ضرب اسکالر روی $\mathscr{F}$ تعریف می کند.) پس اگر کلاس خاصی از توابع را بصورت زیر تعریف کنیم

$$f^{(\mu)}_{\mathbf{wv}}(g) := \langle \mathbf{w}, U_\mu(g)\mathbf{v}\rangle_\mu , \qquad (۴.۱۱)$$

که در آن μ نمایش تقلیل ناپذیر خاص U_μ از گروه G تعریف شده روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}_\mu$ با ضرب اسکالر $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ را نشان می دهد، آنگاه معادلات (۴.۳) و (۴.۹) را می توان یکجا بصورت اختصاری زیر نوشت

$$\langle f^{(\mu)}_{\mathbf{w}_1\mathbf{v}_1}, f^{(\mu')}_{\mathbf{w}_2\mathbf{v}_2}\rangle_{\mathscr{F}} = \frac{\delta^{\mu\mu'}}{\dim \mathscr{H}_\mu} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle^*_\mu \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_\mu . \qquad (۴.۱۲)$$

قضیه.

برای یک گروه متناهی، تعداد نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل متناهی است. اگر فضاهای هیلبرت نظیر این نمایشهای غیرمعادل $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \ldots, \mathscr{H}_N$ باشند، آنگاه

$$\sum_{\mu=1}^{N} [\dim \mathscr{H}_\mu]^2 \leq |G| . \qquad (۴.۱۳)$$

اثبات.

در هر فضای هیلبرت $\mathscr{H}_\mu$ ، می‌توان مجموعه پایه متعامد یکه‌ای بصورت $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ که در آن $n = \dim \mathscr{H}_\mu$ است انتخاب نمود.. لذا از معادلهٔ (۴.۱۲) نتیجه می‌شود

$$\langle f^{(\mu)}_{\mathbf{e}^i\mathbf{e}^k}, f^{(\mu')}_{\mathbf{e}^j\mathbf{e}^l}\rangle_{\mathscr{F}} = \frac{\delta^{\mu\mu'}}{\dim \mathscr{H}_\mu} \delta_{ij}\,\delta_{kl} . \qquad (۴.۱۴)$$

معادلهٔ (۴.۱۴) بیان می‌کند که مجموعه $\{f^{(\mu)}_{\mathbf{e}^i\mathbf{e}^k}, \quad i, k = 1, \ldots, \dim \mathscr{H}_\mu\}$ شامل تعداد $[\dim \mathscr{H}_\mu]^2$ بردار متعامد یکه متعلق به فضای برداری مختلط $\mathscr{F} = \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ است. با در نظر گرفتن مجموعهٔ تمام نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل، برای هر یک تعداد معین $[\dim \mathscr{H}_\mu]^2$ بردار اینچنینی وجود دارد که تمام آنها بر همدیگر متعامد هستند. البته، تعداد کل بردارهای اینچنینی، باید کمتر از بُعد $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ (یا مساوی آن) باشد. اما $\dim [\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})] = |G| [\dim(G, \mathbb{C})] = |G|$، معین است زیرا G یک گروه متناهی می‌باشد. پس نتیجه گرفته می‌شود که فقط تعداد معینی نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل از گروه G می‌تواند وجود داشته باشد. و تعداد کل بردارهای بالا کمتر از $|G|$ (یا مساوی آن) می‌گردد، یعنی، رابطهٔ (۴.۱۳) برقرار است.

تذکر. در بخش بعد، با تجزیه و تحلیل دقیقتر نمایشهای تقلیل ناپذیر یک گروه متناهی، نشان می‌دهیم که در رابطهٔ (۴.۱۳) حالت تساوی صحیح بوده و بجای نامساوی جایگزین می‌شود. در این حال، محدودیت‌های مفیدی در تعداد نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل G و ابعاد ممکنهٔ آنها بوجود می‌آید.

۳.۵. مشخصه[1] یک گروه

اکنون مفهوم یک 'مشخصه' از یک نمایش گروه را بیان خواهیم نمود: ایده‌ای که توان قابل ملاحظه‌ای به توسعه نظریهٔ نمایش عمومی کلاسهای وسیع گروهها می بخشد.

تعریف.

رد[2] عملگر خطی $\mathbf{A}$ روی فضای هیلبرتی مانند $\mathscr{H}$ با بُعد معین بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{Tr}\, A := \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{e}^i, A\mathbf{e}^i \rangle \,, \qquad (۵.۱)$$

که در آن $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathscr{H}$ با $n = \dim \mathscr{H}$ می‌باشد.

تذکر. (۱) برای اینکه تعریف فوق معنی‌دار باشد، ضرورتاً باید جمع در معادلهٔ (۵.۱) مستقل ازپایهٔ خاصی که انتخاب گردیده است باشد. برای نشان دادن یک چنین ویژگی، فرض کنید $\{\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \ldots, \mathbf{e}^{n'}\}$ مجموعه پایه متعامد یکه دلخواه دیگری باشد. در

1- Character 2- Trace

این صورت، با استفاده از معادلهٔ (۲.۳.۲۷)، می‌توان $\mathrm{Tr}\,A$ را بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,A &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle \mathbf{e}^{i}, \mathbf{e}^{j'}\rangle\langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}^{i}\rangle \\
&= \sum_{i=1}\sum_{j=1}\langle \mathbf{e}^{i}, \mathbf{e}^{j'}\rangle\langle A^{\dagger}\mathbf{e}^{j'}, \mathbf{e}^{i}\rangle \\
&= \sum_{j=1}\sum_{i=1}\langle A^{\dagger}\mathbf{e}^{j'}, \mathbf{e}^{i}\rangle\langle \mathbf{e}^{i}, \mathbf{e}^{j'}\rangle \\
&= \sum_{j=1}\langle A^{\dagger}\mathbf{e}^{j'}, \mathbf{e}^{j'}\rangle \qquad \text{[با استفادهٔ مجدد از معادلهٔ (۲.۳.۲۷)]} \\
&= \sum_{j=1}\langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}^{j'}\rangle
\end{aligned}$$

که ثابت می‌کند تعریف مستقل از انتخاب پایه است.

(۲) در فضای هیلبرت $\mathscr{H} = \mathbf{C}^n$ ، $\mathrm{Tr}\,A$ رد معمولی ماتریس است.

$$\mathrm{Tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\,.$$

(۳) برای هر دو عملگر A و B، داریم (بعنوان تمرین آنرا اثبات کنید).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA) \\
&\mathrm{Tr}\,(aA + bB) = a\mathrm{Tr}\,A + b\,\mathrm{Tr}\,B\,,
\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

که a و b دو عدد مختلط دلخواه هستند.

تعریف.

فرض کنید که U یک نمایش یکانی گروه G روی فضای هیلبرتی مانند $\mathscr{H}$ با بُعد معین، باشد. آنگاه **مشخصه** U نگاشت $\chi : G \to \mathbb{C}$ است که بصورت زیر تعریف می شود

$$\chi(g) := \mathrm{Tr}\ U(g)\,. \qquad (۵.۳)$$

تذکر. (۱) مشخصه یک نمایش تحت تبدیلات تشابه ناوردا است زیرا با اتکاء به معادلهٔ (۵.۲) داریم

$$\mathrm{Tr}\,[AU(g)\,A^{-1}] = \mathrm{Tr}\ U(g) \qquad (۵.۴)$$

بنابراین نمایشهای معادل مشخصهٔ یکسانی دارند.

(۲) بازای هر g_0 متعلق به G، داریم

$$\begin{aligned}\chi(g_0 g g_0^{-1}) &= \mathrm{Tr}\ U(g_0 g g_0^{-1}) = \mathrm{Tr}\,[U(g_0)\,U(g)\,U(g_0)^{-1}]\\ &= \mathrm{Tr}\ U(g)\end{aligned}$$

و بنابراین مشخصه کلاسهای مزدوجی G که در بخش ۱.۴ بعنوان مدارهای عمل چپ G روی خودش تعریف و بوسیلهٔ معادلهٔ (۱.۴.۸) داده شده ثابت می باشد.

(۳) برای عضو همانی e متعلق به G، داریم

$$\chi(e) = \mathrm{Tr}\,1 = \dim \mathscr{H}. \qquad (۵.۵)$$

قضیه.

با استفاده از نمادگذاری بخش قبل، مشخصه های χ_μ مجموعه نمایشهای تقلیل ناپذیر

غیرمعادل $U_1, U_2, \ldots, U_N$ که روی فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \ldots, \mathscr{H}_N$ تعریف می‌شوند، توابع متعامد یکه در فضای برداری $\mathscr{F} = \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ مجهز به ضرب اسکالر معادلهٔ (۴.۱۰) می باشند، یعنی،

$$\langle \chi_\mu, \chi_{\mu'} \rangle_{\mathscr{F}} = \delta_{\mu\mu'} . \qquad (۵.۶)$$

اثبات.

$$\chi_\mu(g) = \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}_\mu} \langle \mathbf{e}^i, U_\mu(g)\mathbf{e}^i \rangle = \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}_\mu} f^{(\mu)}_{e^i e^i}(g)$$

.[با مراجعه به معادلهٔ (۴.۱۱)]

با قرار دادن $i = k$ و $j = l$ در معادله (۴.۱۴) و انجام عمل جمع روی i و k با مقادیر $1, \ldots, \dim \mathscr{H}_\mu$، قضیه اثبات می گردد.

از این نتیجه چنین معلوم می شود که نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل دارای مشخصه های متفاوت می باشند و بنابراین نتیجهٔ اساسی زیر بدست می‌آید:

> کلاس هم‌ارزی یک نمایش تقلیل ناپذیر از گروه متناهی G بطور منحصر بفرد بوسیلهٔ مشخصهٔ آن مشخص می شود.

همچنین مشخصه ها می توانند برای مطالعه خواص نمایشهای تقلیل پذیر یک گروه که بنابه بحث انجام شده در بخش ۳.۳ به جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر تجزیه می شوند، مورد استفاده قرار گیرند. بالاخص، مشخصهٔ جمع مستقیم $U_1 \oplus U_2$ مربوط به نمایشهای U_1 و U_2، از جمع مشخصه های آن دو نمایش بدست می‌آید

$$\chi_{U_1 \oplus U_2} = \chi_{U_1} + \chi_{U_2} . \qquad (۵.۷)$$

از این پس فرض کنید U نمایش با بُعد معین یک گروه متناهی مانند G است. بنابر قضیه ای، در بخش ۳.۳ یک چنین نمایشی کاملاً تقلیل پذیر است و بنابراین آن می تواند به جمع مستقیم نمایشهای تقلیل ناپذیر بصورت زیر تجزیه شود

$$U = n_1 U_1 \oplus n_2 U_2 \oplus \dots \oplus n_N U_N \,, \tag{۵.۸}$$

که در آن $U_1, U_2, \dots, U_N$ ، N نمایش تقلیل ناپذیر غیرمعادل گروه متناهی G را نشان می دهند و $n_i U_{n_i}$ به این معنی است که در تجزیه جمع مستقیم نمایش U، نمایش U_{n_i} به تعداد n_i بار تکرار می شود. لذا باتوجه به معادلهٔ (۵.۷) مشخصهٔ χ_U می تواند بصورت منحصر بفرد زیر نوشته شود

$$\chi_U(g) = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu \chi_\mu(g) \,. \tag{۵.۹}$$

با استفاده از معادلهٔ (۵.۶)، n_μ، تعداد دفعاتی که نمایش خاص U_μ در تجزیه جمع مستقیم U تکرار می شود، مستقیماً برحسب مشخصه های U و U_μ بصورت زیر محاسبه می گردد.

$$n_\mu = \langle \chi_\mu, \chi_U \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \text{ in } G} \chi_\mu^*(g)\, \chi_U(g) \,. \tag{۵.۱۰}$$

اکنون، می توان ثابت نمود که حالت تساوی رابطهٔ (۴.۱۳) برقرار می باشد.

قضیه.

ابعاد نمایش تقلیل ناپذیر غیرمعادل گروه متناهی G در معادلهٔ زیر صدق می کنند

$$\sum_{\mu=1}^{N} [\dim \mathscr{H}_\mu]^2 = |G| \,. \tag{۵.۱۱}$$

اثبات.

برای اثبات این قضیه مفهومی را که بصورت قابل ملاحظه ای سودمند است معرفی می کنیم. این مفهوم، **نمایش باقاعده**[1] گروه G است که روی فضای برداری $\mathscr{F} = \mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ بصورت زیر تعریف می شود

$$[R(g)f]\,(g') := f(g^{-1}g')\,. \tag{۵.۱۲}$$

توجه کنید که نمایش $g \rightsquigarrow R(g)$ نسبت به ضرب داخلی تعریف شده در معادلهٔ (۴.۱۰) روی $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ یکانی است.

یک پایهٔ متعامد یکه سودمند برای فضای برداری $|G|$ ـ بُعدی $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ مجموعه توابع $\{f^{g'},\ g' \in G\}$ می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} f^{g'}(g) &:= |G|^{\frac{1}{2}} \quad \text{اگر} \quad g = g' \,،\\ &:= 0 \quad \text{اگر} \quad g \neq g' \,. \end{aligned} \tag{۵.۱۳}$$

مشخصهٔ نمایش باقاعده، برحسب این مجموعهٔ پایه بصورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} \chi_R(g) &= \sum_{g'} \langle f^{g'}, R(g) f^{g'} \rangle = \sum_{g'} \sum_{g''} f^{g'}(g'') f^{g'}(g^{-1} g'') \frac{1}{|G|} \\ &= \sum_{g'} f^{g'}(g^{-1}g') \frac{1}{|G|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

که جمعها روی مجموعهٔ اعضای گروه G انجام می شوند. بنابراین

1- Regular representation

$$\chi_R(g) = |G| \quad \text{اگر } g = e\text{،}$$
$$= 0 \quad \text{اگر } g \neq e. \qquad (۵.۱۴)$$

فرض کنید m_μ تعداد دفعاتی باشد که نمایش تقلیل ناپذیر U_μ در تجزیه جمع مستقیم نمایش باقاعده تکرار می‌شود. با استفاده از معادلهٔ (۵.۱۰)، داریم

$$m_\mu = \langle \chi_\mu, \chi_R \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_\mu^*(g)\, \chi_R(g)$$
$$= \chi_\mu^*(e) = \dim \mathscr{H}_\mu \quad (\text{(با استفاده از معادلهٔ (۵.۵)}). \qquad (۵.۱۵)$$

لهذا، این نتیجهٔ مهم بدست می‌آید که:

> تعداد دفعاتی که نمایش خاص U_μ در تجزیه جمع مستقیم نمایش باقاعده تکرار می‌شود معادل با بُعد نمایش است.

بطور کلی، بُعد نمایش جمع مستقیم بصورت زیر است

$$\dim[n_1 U_1 \oplus n_2 U_2 \oplus \ldots \oplus n_N U_N] = \sum_{\mu=1}^{N} n_\mu [\dim \mathscr{H}_\mu] \qquad (۵.۱۶)$$

درنتیجه، برای نمایش باقاعده داریم

$$\dim(R) = \sum_{\mu=1}^{N} [\dim \mathscr{H}_\mu]^2 . \qquad (۵.۱۷)$$

اما، $|G| = \dim[\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})]$، که قضیه را اثبات می‌کند.

۳.۶. جبر گروه

آخرین مفهومی که در این دورهٔ درسی معرفی می‌شود (که آن هم مفهوم خیلی مقتدری است) 'جبر گروه' مربوط به گروه متناهی G است. به این منظور برای ارائه تعریف دقیق، ابتدا یک نمایش اختیاری T از این گروه متناهی را روی یک فضای برداری مانند V بررسی می کنیم.

اگر f متعلق به $\mathrm{Map}(G,\ \mathbb{C})$ باشد آنگاه عملگر خطی $T(f)$ روی V را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$T(f) := \sum_{g} f(g)\, T(g)\,. \tag{۶.۱}$$

لذا،

$$\begin{aligned} T(f_1)\, T(f_2) &= \sum_{g} \sum_{g'} f_1(g)\, f_2(g')\, T(gg') \\ &= \sum_{g} \sum_{g^{-1}g''} f_1(g)\, f_2(g^{-1}g'')\, T(g'') \end{aligned}$$

اما جمع روی $g^{-1}g''$ (بازای هر g داده شده) با جمع روی g'' معادل است. بنابراین،

$$T(f_1)\, T(f_2) = \sum_{g'} \left[\sum_{g} f_1(g)\, f_2(g^{-1}g') \right] T(g') \tag{۶.۲}$$

که به ارائه تعریف زیر منجر می شود.

تعریف.

جبر گروه $K(G)$ مربوط به گروه متناهی G فضای برداری $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ مجهز به 'قانون ضرب' اضافی زیر می باشد:

$$[f_1 * f_2](g') := \sum_{g} f_1(g) f_2(g^{-1}g') . \qquad (۶.۳)$$

'ضرب' $f_1 * f_2$ از دو عضو f_1 و f_2 متعلق به $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ بعنوان **تلفیق**[1] f_1 و f_2 شناخته می شود.

تذکر. (۱) ضرب تلفیقی شرکت‌پذیر است زیرا (بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید).

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3 \quad \forall\, f_1, f_2 \,\&\, f_3 \in \mathrm{Map}(G, \mathbb{C}). \quad (۶.۴)$$

(۲) بردارهای پایه f^g با g متعلق به G، که در معادلهٔ (۵.۱۳) تعریف شده‌اند خاصیت زیر را دارند

$$[f^g * f^{g'}](g_0) = \sum_{g''} f^g(g'') f^{g'}(g''^{-1} g_0) = f^{g'}(g^{-1} g_0)$$

$$= 1 \qquad \text{اگر} \quad g^{-1} g_0 = g'$$

$$= 0 \qquad \text{اگر} \quad g^{-1} g_0 \neq g'.$$

بنابراین،

$$f^g * f^{g'} = f^{gg'} \qquad \forall\ g \,\&\, g' \in G. \qquad (۶.۵)$$

1- Convolution

(۳) معادلهٔ (۶.۲) نشان می دهد که هر نمایش از G منجر به یک نمایش از جبر $K(G)$ می گردد، یعنی،

$$T(f_1)\,T(f_2) = T(f_1 * f_2)\,. \tag{۶.۶}$$

برعکس، فرض کنید $f \rightsquigarrow T(f)$ یک نمایش از جبر $K(G)$ باشد، یعنی، مجموعه ای از عملگرها در فضای برداری مانند V در معادلهٔ (۶.۶) صدق می کنند و برحسب f خطی هستند. تعریف زیر را در نظر می گیریم:

$$T(g) := T(f^g)\,, \tag{۶.۷}$$

که، مانند قبل، بردار پایه f^g متعلق به $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ بصورت معادلهٔ (۵.۱۳) تعریف می شود. لذا، بازای هر g_1 و g_2 متعلق به G داریم

$$\begin{aligned} T(g_1)\,T(g_2) &= T(f^{g_1})\,T(f^{g_2}) = T(f^{g_1} * f^{g_2}) \\ &= T(f^{g_1 g_2}) \quad (\text{با استفاده از معادلهٔ (۶.۵)}) \\ &= T(g_1 g_2) \end{aligned}$$

که درنتیجه یک نمایش از G می باشد.

بنابراین نتیجه می گیریم که:

نمایشهای جبر گروه $K(G)$ و گروه G در تناظر یک بیک هستند.

مفهوم عمیق نتیجهٔ اخیر اینست که بطورکلی جبرهایی مثل $K(G)$ یک نظریه نمایشی تعمیم یافتهٔ مناسبی برای خود دارند و از این می توان برای مطالعه نمایشهای گروه استفاده کرد. در

اینجا ما $K(G)$ را بصورت ضعیفی مورد استفاده قرار می دهیم اما به همین مقدار آن ما را قادر می سازد که با محاسبهٔ مقدار N، یعنی، تعداد نمایشهای تقلیل ناپذیر یکانی غیرمعادل گروه متناهی G اطلاعات شامل معادلهٔ (۵.۱۱) را توسعه دهیم. ولی ابتدا، به چند نتیجهٔ ظاهراً فنی اشاره می کنیم.

لم.

فرض کنید U یک نمایش تقلیل ناپذیر G روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ با بُعد معین باشد. آنگاه هر عملگر خطی A روی $\mathscr{H}$ می تواند بازای عضوی مانند f_A متعلق به $\mathrm{Map}(G,\ \mathbb{C})$ بصورت $A = U(f_A)$ نوشته شود.

اثبات.

بازای A داده شده، تابع زیر را تعریف می کنیم

$$f_A(g) := \frac{(\dim \mathscr{H})}{|G|} \operatorname{Tr}[U^\dagger(g)\, A]. \qquad (۶.۸)$$

لذا، بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

$$\langle \mathbf{v},\, U(f_A)\mathbf{w}\rangle = \sum_g f_A(g)\, \langle \mathbf{v},\, U(g)\mathbf{w}\rangle .$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v},\, U(f_A)\mathbf{w}\rangle &= \sum_g \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}} \langle \mathbf{e}^i,\, U^\dagger(g)\, A\mathbf{e}^i\rangle \langle \mathbf{w},\, U^\dagger(g)\mathbf{v}\rangle^* \frac{\dim \mathscr{H}}{|G|} \\ &= \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}} \sum_g \langle A\mathbf{e}^i,\, U(g)\, \mathbf{e}^i\rangle^* \langle \mathbf{v},\, U(g)\mathbf{w}\rangle \frac{\dim \mathscr{H}}{|G|}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}} \langle \mathbf{v}, A\mathbf{e}^i\rangle\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{w}\rangle \quad \text{((با استفاده از معادلهٔ (۴.۳))}$$

$$= \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}} \langle A^\dagger\mathbf{v}, \mathbf{e}^i\rangle\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{w}\rangle = \langle A^\dagger\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle$$

که، چون بازای هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ برقرار است، نتیجه می شود که $U(f_A) = A$.

قضیه.

فرض کنید که $U_1, U_2, \ldots, U_N$ مجموعه تمام نمایشهای تقلیل ناپذیر یکانی غیرمعادل گروه متناهی G بترتیب روی فضاهای هیلبرت $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \ldots, \mathscr{H}_N$ باشند. در این صورت نگاشت

$$j : K(G) \to B(\mathscr{H}_1) \oplus B(\mathscr{H}_2) \oplus \ldots \oplus B(\mathscr{H}_N)$$

که بصورت

$$j(f) := U_1(f) \oplus U_2(f) \oplus \ldots \oplus U_N(f) \qquad (۶.۹)$$

تعریف می شود یک یکریختی مابین فضاهای با ساختار فضای برداری و ساختار تکواره ای می باشد.

[$B(\mathscr{H})$ مجموعه تمام عملگرها روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ با بُعد معین را نشان می دهد. جهت ملاحظهٔ ساختار 'تکواره ضربی' به تعریف ضرب عملگر در معادله (۲.۴.۳) مراجعه شود.]

اثبات.

(الف) تعریف $T(f)$ در معادلهٔ (۶.۱) نشان می دهد که j یک نگاشت خطی است و

معادلهٔ (۶.۶) نشان می‌دهد که این نگاشت ساختارهای ضرب دو فضا را حفظ می‌کند، یعنی، آن یک ریختار است.

(ب) لم بالا نشان می‌دهد که نگاشت $j_\mu : K(G) \to B(\mathscr{H}_\mu)$ که بصورت $j_\mu(f) := U_\mu(f)$ تعریف می‌شود یک نگاشت پوشا است. بنابراین j نیز یک نگاشت پوشا است.

(ج) حال کافی است نشان دهیم که j یک بیک است. پس، فرض کنید f متعلق به $\operatorname{Ker} j$ می‌باشد. این ایجاب می‌کند که $\Sigma_g f(g)\, U_\mu(g)$ باید بازای هر نمایش U_μ از G صفر باشد. اما هر نمایش با بُعد معین U به جمع مستقیم مجموعه اصلی $U_1, U_2, \ldots, U_N$ تجزیه می‌شود. بنابراین، برای هر نمایش اینچنینی U داریم

$$\sum_g f(g)\, U(g) = 0\,. \qquad (۶.۱۰)$$

اما، یک تناظر یک بیک میان نمایشهای G و $K(G)$ وجود دارد. لذا بنابر معادلهٔ (۶.۱۰) باید برای هر نمایشی از $K(G)$ داشته باشیم $U(f) = 0$. بویژه، این امر باید برای نمایش $K(G)$ روی خودش که بصورت زیر تعریف می‌شود برقرار باشد

$$[R(f)](f') := f * f'. \qquad (۶.۱۱)$$

اما تساوی $R(f)\,f' = f*f' = 0$ برای هر f' متعلق به $K(G)$، ایجاب می‌کند که این بویژه باید برای توابع پایهٔ $f^{g'}$ تعریف شده در معادلهٔ (۵.۱۳) برقرار باشد. باوجود این، $f*f^{g'}(g) = f(gg'^{-1})$ و لذا $f*f^{g'}(e) = f(g'^{-1})$، و متعلق بودن f به $\operatorname{Ker} j$ بیان می‌کند که f روی هر g'^{-1} با g' متعلق به G صفر می‌شود. اما از آنجا که این مجموعه شامل تمام اعضای G می‌گردد، درنتیجه f صفر می‌شود. بنابراین، $\operatorname{Ker} j$ زیرمجموعه بدیهی از $K(G)$ می‌باشد لذا j یک بیک است. پس اثبات قضیه کامل می‌گردد.

اکنون می توانیم نتیجه ای را که در مورد تعداد نمایشهای تقلیل ناپذیر غیرمعادل G وعده داده بودیم بدست آوریم.

قضیه.

N، تعداد کلاسهای هم ارزی نمایشهای تقلیل ناپذیر یکانی غیرمعادل G با تعداد کلاسهای مزدوجی G برابر است.

اثبات.

(الف) فرض کنید که f_0 متعلق به مرکز $K(G)$ باشد، یعنی با تمام اعضای $K(G)$ جابجا شود

$$f_0 * f = f * f_0 \qquad \forall\, f \in K(G). \tag{۶.۱۲}$$

بنابر قضیهٔ قبل، $K(G)$ و جمع مستقیم $B(\mathscr{H}_1) \oplus B(\mathscr{H}_2) \oplus \ldots \oplus B(\mathscr{H}_N)$ یکریخت هستند و بنابراین، بویژه، این دو جبر باید مرکز یکسانی داشته باشند. اما اگر عملگری متعلق به مرکز $B(\mathscr{H})$ باشد آنگاه آن با هر عملگر روی $\mathscr{H}$ جابجا می شود و، اگر نتیجهٔ لم شور را برای نمایش گروه $B(\mathscr{H})$ روی $\mathscr{H}$ بوسیلهٔ خودش، بکار ببریم آنگاه معلوم می شود که مرکز $B(\mathscr{H})$ بازای هر فضای هیلبرتی با بُعد معین مانند $\mathscr{H}$ ، مضرب عملگر واحد است.

بالاخص، این موضوع برای هر $B(\mathscr{H}_\mu)$ بکار می رود درنتیجه مرکز جمع مستقیم، مجموعه تمام عملگرهای بصورت $(a_1 \mathbf{1}_1,\ a_2 \mathbf{1}_2,\ \ldots,\ a_N \mathbf{1}_N)$ خواهد بود که در آن $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_N$ اعداد مختلط اختیاری بوده و $\mathbf{1}_\mu$ عملگر واحد روی $\mathscr{H}_\mu$ است. واضح است که مجموعه تمام عملگرها بشکل فوق یک زیرفضا از مجموعهٔ تمام عملگرها در جمع مستقیم مذکور با بُعد N می باشد. بنابراین

$$\dim\,[\text{مرکز } K(G)] = N. \tag{۶.۱۳}$$

(ب) از طرف دیگر، ما همچنین می‌توانیم مرکز $K(G)$ را مستقیماً مورد مطالعه قرار دهیم. فرض کنید f_0 متعلق به این مرکز باشد بطوریکه بازای هر f متعلق به $K(G)$ در معادلهٔ (۶.۱۲) صدق نماید. بنابراین، از آنجا که هر f متعلق به $K(G)$ می تواند بطور اتحادی بصورت زیر نوشته شود

$$f = \sum_g f(g) f^g , \qquad (۶.۱۴)$$

که $\{f^g, g \in G\}$ مجموعه پایه تعریف شده در معادلهٔ (۵.۱۳) است، درنتیجه f_0 متعلق به مرکز $K(G)$ است اگر، و فقط اگر

$$f^g * f_0 = f_0 * f^g \qquad \forall\, g \in G. \qquad (۶.۱۵)$$

اما،

$$f^g * f_0(g') = \sum_{g''} f^g(g'') f_0(g''^{-1} g') = f_0(g^{-1} g') \qquad (۶.۱۶)$$

و،

$$f_0 * f^g(g') = \sum_{g''} f_0(g'') f^g(g''^{-1} g') = f_0(g' g^{-1}) . \qquad (۶.۱۷)$$

این رابطه چنین معنی می دهد که f_0 متعلق به مرکز $K(G)$ است اگر و فقط اگر، بازای هر g ،

$$f_0(g^{-1} g') = f_0(g' g^{-1}) \qquad \forall\, g' \in G$$

که معادل است با

$$f_0(gg'g^{-1}) = f_0(g') \quad \forall\, g\,, g' \in G \tag{۶.۱۸}$$

و این رابطه برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر f_0 روی کلاسهای مزدوجی G ثابت باشد، درنتیجه این یک شرط لازم و کافی است برای اینکه f_0 متعلق به مرکز $K(G)$ باشد. لذا بُعد $K(G)$ با تعداد کلاسهای مزدوجی برابر است و این، همراه با معادلهٔ (۶.۱۳)، قضیه را ثابت می کند.

تذکر. این قضیه و قضیه ای که در اثبات معادلهٔ (۵.۱۱) مطرح بود باهم قضیه ای را که بعنوان **قضیهٔ بورنساید**[1] معروف است، تشکیل می دهند.

(۱) تعداد کلاسهای هم‌ارزی نمایشهای یکانی تقلیل ناپذیر گروه متناهی G برابر تعداد کلاسهای مزدوجی G می باشد.

(۲) ابعاد این نمایشها در رابطهٔ زیر صدق می نمایند

$$\sum_{\mu=1}^{N} [\dim \mathscr{H}_\mu]^2 = |G|. \tag{۶.۱۹}$$

این یک نتیجهٔ قوی می باشد که از آن می توان اطلاعات مفید بسیاری استخراج نمود.

مثالها.

(۱) فرض کنید که G یک گروه آبلی متناهی است. آنگاه هر کلاس مزدوجی فقط از یک عضو گروه تشکیل می گردد و درنتیجه تعداد کلاسهای مزدوجی برابر با $|G|$ است. اما هر نمایش تقلیل ناپذیر در نامساوی $\dim \mathscr{H}_\mu \geq 1$ صدق می نماید و لذا باتوجه به معادلهٔ (۶.۱۹) داریم $\dim \mathscr{H}_\mu = 1$. لذا این نتیجهٔ مهم را بدست آورده ایم که:

1- Burnside

هر نمایش تقلیل ناپذیر از یک گروه آبلی متناهی یک بُعدی است.

(۲) گروه متقارن S_3 با شش عضو دارای سه کلاس مزدوجی می باشد:

$$\{e\} \text{ و } \{231,\ 312\} \text{ و } \{132,\ 213,\ 321\},$$

که نمادگذاری (البته غیراستاندارد) abc بوسیلهٔ تبدیل زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} 1 \to a \\ 2 \to b \\ 3 \to c \end{bmatrix}$$

بنابراین سه کلاس غیرمعادل نمایش تقلیل ناپذیر وجود دارد، و ابعاد فضاهای هیلبرت مربوط به آنها با استفاده از رابطهٔ (۶.۱۹) در معادلهٔ زیر صدق می کنند

$$[\dim \mathscr{H}_1]^2 + [\dim \mathscr{H}_2]^2 + [\dim \mathscr{H}_3]^2 = 6\,. \qquad (۶.۲۰)$$

تنها انتخابهای ممکن برای ابعادی که در این معادله صدق کنند عبارتند از اعداد صحیح ۱، ۱، ۲ (یعنی، $1^2 + 1^2 + 2^2$) و بنابراین می توان نتیجه گرفت که گروه S_3 دو نمایش تقلیل ناپذیر غیرمعادل یک بُعدی و یک نمایش تقلیل ناپذیر دو بُعدی دارد.

مسائل

۱. نشان دهید که مرتبهٔ گروه متقارن S_N برابر است با $|S_N| = N!$.

۲. ضرب کارتزی دو گروه G_1 و G_2 بصورت مجموعه تمام دوتائی‌های (g_1, g_2) با $g_1 \in G_1$ و $g_2 \in G_2$ تعریف می‌شود. نشان دهید که این ضرب با قانون ترکیب زیر یک ساختار گروهی دارد

$$(g_1, g_2)\,(g'_1, g'_2) := (g_1 g'_1, g_2\, g'_2).$$

ثابت کنید که $|G_1 \times G_2| = |G_1| \times |G_2|$.

۳. زیرگروههای سره $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ بغیر از $\mathbb{Z}_2 := \{e, a^2\}$ کدام هستند؟

۴. اگر برای $Y \subset X$ نگاشت $j : \mathrm{Perm}\,(Y) \to \mathrm{Perm}\,(X)$ بصورت زیر تعریف شود

$$\begin{aligned}(j(f))\,(x) &:= f(x) \quad \text{اگر} \quad x \in Y \subset X\\ &:= x \qquad\ \ \text{اگر} \quad x \notin y\end{aligned}$$

آنگاه نشان دهید که j یک یکریختی از $\mathrm{Perm}(Y)$ بتوی یک زیرگروه از $\mathrm{Perm}(X)$ می باشد.

۵. نشان دهید که بُعد حقیقی گروه لی $\mathrm{U}(n)$، n^2 می باشد و $\mathrm{SU}(n)$ دارای بُعد $n^2 - 1$ است.

۶. فرض کنید که $\mu : G_1 \to G_2$ یک همریختی باشد بنابراین بازای هر g_1 و g_2 متعلق به G داریم $\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\,\mu(g_2)$. نشان دهید که $\mu(e_1) = e_2$ و همچنین بازای هر g متعلق به G_1، $\mu(g^{-1}) = (\mu(g))^{-1}$.

۷. اگر G روی مجموعهٔ X از سمت چپ اثر کند، نشان دهید که بازای هر x_0 متعلق به X، $G_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ یک زیرگروه از G است.

۸. اگر $\mu : G_1 \to G_2$ یک همریختی باشد، نشان دهید که $\mathrm{Ker}\,\mu$ و $\mathrm{Im}\,\mu$ بترتیب زیرگروههایی از G_1 و G_2 هستند.

۹. فرض کنید که μ یک نگاشت از گروه لی $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ به گروه تبدیلات موبیوس صفحهٔ مختلط باشد بطوریکه آن ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متعلق به $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ را به تبدیل $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ مربوط نماید. نشان دهید که μ یک همریختی است.

۱۰. (الف) نشان دهید که هر گروهی مانند G از 'قوانین حذفی' زیر تبعیت می کند:

(۱) اگر a، b، c، d متعلق به G باشند بطوریکه $ab = cb$، آنگاه $a = c$.

(۲) اگر a، b، c، d متعلق به G باشند بطوریکه $ba = bc$، آنگاه $a = c$.

(ب) نشان دهید که در هر گروهی مانند G بازای هر a و b متعلق به آن داریم

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

۱۱. اگر G یک گروه اختیاری و X یک مجموعه اختیاری باشد، نشان دهید که مجموعه $\mathrm{Map}(X, G)$ از تمام نگاشتهای X بتوی G یک ساختار گروهی دارد بطوریکه

$$(f_1 f_2)(x) := f_1(x) f_2(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

قانون ترکیب برای نگاشتهای f_1 و f_2 می باشد.

۱۲. نشان دهید که مجموعهٔ تمام تبدیلات موبیوس [معادلهٔ (۱.۳.۱)] صفحهٔ مختلط یک زیرگروه از مجموعهٔ تمام تبدیلات می باشد.

۱۳. صراحتاً جدولهای گروهی تمام گروههای ممکن مرتبهٔ ۴ را بسازید و به این ترتیب نشان دهید که تنها حالات ممکن $\mathbb{Z}_4$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ می باشند.

۱۴. جدول گروهی گروه S_3 با مرتبهٔ شش را تشکیل داده و نشان دهید که این گروه را می توان بوسیلهٔ مجموعه شش عضوی $\{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$ که در روابط

$$x^2 = y^3 = e,\ yx = xy^2,\ y^2x = xy$$

صدق می نمایند نشان داد. با پیدا نمودن دو عضو a و b بطوریکه $ab \neq ba$، نشان دهید که این گروه غیرآبلی است.

۱۵. نشان دهید مجموعه تمام ماتریسهای 'مثلثی' بصورت $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ با اعداد مختلط اختیاری a، b، c که از قید $ab \neq 0$ تبعیت می کنند، یک زیرگروه از گروه لی $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ است.

۱۶. نشان دهید که مجموعه تمام خودریختی های گروه G خود یک گروه است.

برای دو حالت $G = \mathbb{Z}_2$ و $G = \mathbb{Z}_4$ مجموعهٔ کامل خودریختی‌ها را محاسبه نموده و در هر دو مورد بوسیلهٔ محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که درواقع خودریختی ها یک گروه تشکیل می دهند. در هر دو مورد گروه خودریختی ها رامشخص نمائید.

۱۷. (الف) اگر H و K دو زیرگروه از گروه G باشند نشان دهید که $H \cap K$ نیز یک زیرگروه از G است.

(ب) بعنوان یک مثال واضح، برای گروه S_3 (مسئله ۱۴) دو زیرگروه H و K را چنان پیدا کنید که مجموعهٔ $H \cup K$ یک زیرگروه S_3 نباشد.

(ج) اگر H و K دو زیرگروه از گروه G باشند و نیز HK بصورت

$$HK := \{ hk \in \mathrm{G} : h \in H \;\&\; k \in K \}$$

تعریف شود آنگاه نشان دهید که HK یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر $HK = KH$.

(د) اگر H یک زیرمجموعهٔ غیرتهی از G باشد آنگاه ثابت کنید که آن یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر، هرگاه a و b متعلق به H باشند آنگاه ab^{-1} به H تعلق داشته باشد.

۱۸. (الف) دو زیرگروه H_1 و H_2 از گروه G مزدوج[1] نامیده می‌شوند اگر عضوی مانند g متعلق به G وجود داشته باشد بطوریکه

$$H_2 = gH_1g^{-1} := \{ghg^{-1} : \; h \in H\}.$$

نشان دهید که زیرگروههای H_1 و H_2 یکریخت هستند.

(ب) مزدوج زیر گروه $\mathbb{Z}_2$ از گروه متقارن S_3 را پیدا کنید.

۱۹. اگر $l_g : X \to X$ یک عمل گروه G از سمت چپ روی مجموعه‌ای مانند X باشد، آنگاه نشان دهید که یک عمل گروه G از سمت راست روی X بوسیلهٔ $r_g(x) := l_g^{-1}(x)$ داده می‌شود.

۲۰. (الف) اگر یک گروه روی مجموعهٔ X اثر کند، نشان دهید که دو مدار O_{x_1} و O_{x_2} (که x_1 و x_2 نقاطی در X هستند) یا منطبق و یا جدا از هم می‌باشند.

(ب) نشان دهید که گروههای پایداری \ همروندی G_{x_1} و G_{x_2} در هر دو نقطهٔ واقع در یک مدار یکسان، مزدوج هستند.

۲۱. مرکز هر گروهی مانند G، بعنوان مجموعه عضوهای G که با تمام اعضای آن جابجا می‌شوند تعریف می‌شود، یعنی،

1- Conjugate

$$C(G) := \{g \in G \ : \ gg' = g'g \quad \forall\, g' \in G\}.$$

نشان دهید که مرکز $C(G)$ یک زیرگروه نرمال G است.

۲۲. مرکز گروه لی $\mathrm{SU}(2)$ را بدست آورید.

۲۳. با مراجعه به مسئله ۱۵، نشان دهید که مجموعهٔ تمام ماتریسهای مثلثی به شکل $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ با عدد مختلط اختیاری d یک زیرگروه نرمال از گروه بررسی شده در آن مسئله است.

۲۴. نشان دهید نگاشت $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ که با ضابطهٔ $\mu(x) := e^x$ تعریف می شود یک همریختی از گروه جمعی اعداد حقیقی بر روی گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت است. هستهٔ این همریختی را مشخص نمائید.

۲۵. یک همریختی از گروه جمعی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ بر روی گروه $\mathrm{U}(1)$ بسازید. با استفاده از آن نشان دهید که $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

۲۶. فرض کنید که X یک مجموعه با تعداد اعضای متناهی N باشد.

(الف) یک یکریختی مابین فضاهای برداری مختلط $\mathbb{C}^N$ و $\mathrm{Map}(X,\ \mathbb{C})$ بسازید.

(ب) مجموعهٔ $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$، یک مجموعهٔ پایه برای $\mathbb{C}^N$ است. مجموعهٔ پایهٔ نظیر آن در $\mathrm{Map}(X,\ \mathbb{C})$ که بوسیلهٔ این یکریختی القا می شود کدام است؟

(ج) نشان دهید که روی $\mathrm{Map}(X,\ \mathbb{C})$ یک ضرب اسکالر را می توان بصورت زیر تعریف نمود:

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x).$$

(د) این ضرب اسکالر چگونه از طریق یکریختی قسمت (الف) به ضرب اسکالر معمولی روی $\mathbb{C}^N$ مربوط می شود؟

۲۷. یک یکریختی مابین فضاهای برداری $\mathbb{C}^{n^2}$ و $M(n,\ \mathbb{C})$ بسازید.

ضرب اسکالری که بوسیلهٔ این یکریختی از ضرب اسکالر معمول روی $\mathbb{C}^{n^2}$ القا می شود کدام است؟ (به این منظور، کافی و آموزنده خواهد بود اگر جزئیات را برای حالت $n = 2$ بررسی کنید.)

۲۸. هر فضای برداری مختلط مانند V می تواند بعنوان یک فضای برداری حقیقی $V_{\mathbb{R}}$ با تعریف آن بصورت مجموعهٔ مشابهی مانند V بعلاوهٔ مجموعه بردارهای مشابه دیگری از V، اما با ضرب اسکالر اعداد حقیقی در نظر گرفته شود.

(الف) اگر $\dim(V) = n < \infty$ آنگاه نشان دهید که بُعد حقیقی $V_{\mathbb{R}}$ برابر 2π است.

(ب) یک یکریختی مابین فضاهای برداری حقیقی $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ و $\mathbb{R}^{2n}$ بسازید.

(ج) نشان دهید که مجموعه ماتریسهای هرمیتی $n \times n$ (یعنی، $A^\dagger = A$، یا بطور معادل، $A^*_{ij} = A_{ji}$ بازای تمام مقادیر $(i, j = 1, \ldots, n)$ یک زیرفضای خطی از فضای برداری حقیقی $M(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ است اما یک زیرفضای خطی از فضای برداری مختلط $M(n, \mathbb{C})$ نیست.

۲۹. اگر V یک فضای برداری مختلط باشد، تابع $F: V \to \mathbb{C}$ خطی نامیده می شود اگر، بازای هر دو عدد μ_1، μ_2 متعلق به $\mathbb{C}$ و هر بردار $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ متعلق به V، داشته باشیم

$$F(\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_1 \mathbf{v}_2) = \mu_1 F(\mathbf{v}_1) + \mu_2 F(\mathbf{v}_2),$$

و مجموعه تمام توابع خطی اینچنینی **دوگان**[1] (جبری) V نامیده می شود و با V^* نشان داده می شود.

(الف) نشان دهید که می توان ساختار یک فضای برداری مختلط روی V^* تعریف نمود.

(ب) اگر $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت با بُعد متناهی باشد، با استفاده از مجموعه پایه متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$، که در آن $n = \dim \mathscr{H}$ است، نشان دهید که هر F متعلق به $\mathscr{H}^*$ می تواند بصورت زیر نوشته شود

1- Dual

$$F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}_F, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall\ \mathbf{v} \in \mathscr{H},$$

که در آن بردار $\mathbf{w}_F$ متعلق به $\mathscr{H}$ منحصر بفرد است.

بنابراین، معلوم می‌شود که $\mathscr{H}^*$ و $\mathscr{H}$ یکریخت هستند.

۳۰. در عبارت $\mathbf{v}^N \to \mathbf{v}$ برای همگرائی قوی دنباله $\mathbf{v}^N$ از بردارهای متعلق به یک فضای برداری نرم‌دار، بطور ضمنی فرض می‌شود که فقط یک بردار حدی، بنام $\mathbf{v}$ وجود دارد. نشان دهید که درواقع این امر برقرار است، یعنی اگر بطور همزمان $\mathbf{v}^N \to \mathbf{v}$ و $\mathbf{v}^N \to \mathbf{v}'$ آنگاه $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. (راهنمائی: نُرم $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|$ را بررسی نمائید.)

۳۱. فرض کنید که $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت جداپذیر با بُعد نامتناهی و مجموعه پایه متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ باشد.

(الف) نشان دهید که جمع نامتناهی $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \mathbf{e}^i$ وجود دارد اگر و فقط اگر دنبالهٔ اعداد

مختلط $\mu_1, \mu_2, \ldots$ در رابطهٔ $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|^2 < \infty$ صدق نمایند.

(ب) از اینجا یک یکریختی مابین فضای هیلبرت ℓ_2 و هر فضای هیلبرت جداپذیر دیگر $\mathscr{H}$ با بُعد نامتناهی بسازید. (**تذکر.** بویژه این موضوع بیان می‌کند که هر دو فضای هیلبرت اینچنینی $\mathscr{H}_1$ و $\mathscr{H}_2$ یکریخت هستند.)

۳۲. فرض کنید که $\mathscr{H}$ یک فضای هیلبرت جداپذیر با بُعد نامتناهی است. تابع خطی $F : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ پیوسته نامیده می‌شود اگر بازای هر دنبالهٔ قویاً همگرا از بردارهای $\mathbf{v}^N \to \mathbf{v}$ رابطهٔ

$$\lim_{N \to \infty} F(\mathbf{v}^N) = F(\mathbf{v})$$

برقرار باشد.

با نشان دادن اینکه هر تابع خطی پیوسته $F : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ می‌تواند بازای بردار منحصر بفردی

مانند $\mathbf{w}_F$ متعلق به $\mathscr{H}$ بصورت زیر نوشته شود

$$F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}_F, \mathbf{v} \rangle \qquad \forall\ \mathbf{v} \in \mathscr{H} \quad ,$$

موضوع طرح شده در مسئلهٔ ۲۹ را کامل کنید.

۳۳. (الف) اگر A یک عملگر کراندار روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد آنگاه ثابت کنید که الحاقی $A^\dagger$ نیز کراندار است بطوریکه $\| A^\dagger \| = \| A \|$.

(ب) اگر A و B دو عملگر کراندار روی $\mathscr{H}$ باشند نشان دهید که ضرب AB نیز کراندار است بطوریکه $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

۳۴. یک عملگر کراندار روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ یک **عملگر تصویر**[1] است اگر

$$P^\dagger = P \qquad \text{و} \qquad P = P^2.$$

(الف) نشان دهید که $(\mathbb{1} - P)$ نیز یک عملگر تصویر است.

(ب) نشان دهید که $\| P \| \leq 1$.

(ج) مقادیر ویژه P را بدست آورده و نشان دهید که $\| P \| = 1$. (راهنمائی: استلزام های معادلهٔ $P^2 = P$ را بررسی نمائید.)

(د) در تجزیه جمع مستقیم $\mathscr{H}$ نسبت به یک زیرفضای بسته مانند W، بصورت $\mathscr{H} \cong W \oplus W_\perp$ ، هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ می‌تواند بشکل منحصر بفرد $\mathbf{v} = \mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W_\perp}$ با $\mathbf{v}_W$ متعلق به W و $\mathbf{v}_{W_\perp}$ متعلق به $W_\perp$ تجزیه شود. نشان دهید که عملگر خطی تعریف شده روی $\mathscr{H}$ بوسیلهٔ $P(\mathbf{v}) := \mathbf{v}_W$ یک عملگر تصویر است.

۳۵. فرض کنید که $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ و $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ دو مجموعهٔ بردارهای پایه برای فضای برداری مختلط V با بُعد متناهی باشند. فرض کنید A یک عملگر خطی روی V بوده و

1- Projection Operator

M و N دو نمایش ماتریسی A نسبت به دو پایهٔ مذکور باشند.
نشان دهید که M و N بوسیلهٔ یک تبدیل متشابه بهم مربوط می‌شوند. یعنی، یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ مانند B وجود دارد بطوریکه $M = BNB^{-1}$.

۳۶. با مراجعه به مسئله ۱۴، تحقق گروه S_3 را بشکل مجموعه $\{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$ برای محاسبهٔ صریح نمایشهای مختلط یک بعدی ممکن این گروه بکار ببرید. (راهنمائی: استلزام های روابط $x^2 = y^3 = e$، $yx = xy^2$ و $y^2x = xy$ را بررسی نمائید.)
هسته های این نمایشها کدام هستند؟

۳۷. با استفاده از تجزیه و تحلیل مشابهی نشان دهید که، صرفنظر از تبدیلات متشابه، فقط یک نمایش تقلیل ناپذیر دوبُعدی از گروه S_3 وجود دارد.

۳۸. فرض کنید که گروه G از چپ روی مجموعهٔ X عمل می کند. نشان دهید که
(الف) یک نمایش از G روی فضای برداری $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ می تواند بوسیلهٔ تبدیلات زیر بدست آید

$$(T(g)f)(x) := f(g^{-1}x).$$

(ب) اگر X یک مجموعهٔ متناهی باشد آنگاه نشان دهید که این نمایش نسبت به ضرب اسکالر زیر روی $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ یکانی است

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x).$$

۳۹. یک انتخاب خیلی خاص برای X در بالا $X = G$ می باشد که بازای آن 'نمایش با قاعده چپ' گروه G روی $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ بدست می‌آید

$$(R(g)f)(g') := f(g^{-1} g').$$

(الف) با استفاده از مجموعه پایه متعامد یکه $\{f^g \ : \ g \in G\}$ از $\mathrm{Map}(G, \ \mathbb{C})$، که بصورت

$$f^g(a) := \begin{cases} 1 & \text{اگر}\ \ g = a \ ، \\ 0 & \text{اگر}\ \ g \neq a \end{cases}$$

تعریف می‌شود یک بیان ماتریسی برای این نمایش باقاعده بسازید.

(ب) این ماتریسها در حالت خاص $G = \mathbb{Z}_3$ کدامها هستند؟

(ج) همچنین 'نمایش با قاعده راست' گروه G روی $\mathrm{Map}(G, \ \mathbb{C})$ بوسیلهٔ تبدیلات

$$\big(S(g)\,f\big)\,(g') := f(g'\,g)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که این براستی یک نمایش از G است و اگر G یک گروه متناهی باشد آنگاه با 'نمایش با قاعده چپ'، معادل یکانی است.

۴۰. مشخصه های نمایشهای بدست آمده برای گروه S_3 در مسائل ۳۶ و ۳۷ را بسازید و نشان دهید که این مشخصه ها در روابط تعامد مربوطه صدق می‌کنند.

جوابهای مسائل

۱. گروه متقارن S_N، گروه نگاشتهای دوسوئی جایگشتها از مجموعهٔ N عضوی $\{1, 2, \ldots, N\}$ می باشد. یک چنین نگاشتی مانند $\varphi : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{1, 2, \ldots, N\}$، ابتدا می تواند عضو 1 را به هر یک از N عضو نگاشت دهد. اما عضو دوم (یعنی، 2) می تواند فقط به $N - 1$ عضو باقی ماندهٔ دیگر نگاشت یابد زیرا φ یک بیک بوده و درنتیجه $\varphi(1) \neq \varphi(2)$ است. متشابهاً، عضو 3 فقط می تواند بوسیلهٔ φ به $N - 2$ عضو باقی ماندهٔ دیگر نگاشت یابد، و همینطور تا آخر. بنابراین تعداد کل انتخابهای متفاوت ممکن برای جایگشت φ برابر $N(N-1)(N-2) \ldots 3 \times 2 \times 1 = N!$ می باشد.

۲. برای اثبات گروه بودن $G_1 \times G_2$، باید نشان دهیم که قانون ضرب داده شده شرکت پذیر است، یک عضو واحد وجود دارد، و نیز هر عضو دارای وارون می باشد.

(الف) برای نشان دادن شرکت پذیری توجه می کنیم که

$$((g_1, g_2)(g'_1, g'_2))(g''_1, g''_2) = (g_1g'_1, g_2g'_2)(g''_1, g''_2)$$
$$= ((g_1g'_1)g''_1, (g_2g'_2)g''_2)$$
$$= (g_1(g'_1g''_1), g_2(g'_2g''_2))$$

با استفاده از شرکت‌پذیری در گروههای G_1 و G_2

$$= (g_1, g_2)((g'_1, g'_2)(g''_1, g''_2)).$$

(ب) واضح است که عضو واحد (e_1, e_2) می‌باشد بطوریکه e_1 و e_2 بترتیب اعضای واحد گروههای G_1 و G_2 هستند. درواقع، $(g_1, g_2)(e_1, e_2) = (g_1e_1, g_2e_2) = (g_1, g_2)$.

(ج) وارون عضو (g_1, g_2) عبارت است از (g_1^{-1}, g_2^{-1})، زیرا

$$(g_1, g_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1g_1^{-1}, g_2g_2^{-1}) = (e_1, e_2).$$

بنابراین، $G_1 \times G_2$ یک گروه است.

واضح است که تعداد اعضای گروه $G_1 \times G_2$ با تعداد زوج های مرتب بشکل (g_1, g_2) که $g_1 \in G_1$ و $g_2 \in G_2$، برابر است. اما تعداد این زوج های مرتب برابر است با حاصلضرب تعداد اعضای G_1 و تعداد اعضای G_2، یعنی، $|G_1 \times G_2| = |G_1| \times |G_2|$.

۳. فرض کنید که زیر گروه H از $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ شامل عضو a باشد. لذا، از آنجا که H تحت عمل ضرب گروه بسته است، باید شامل $a.a = a^2$ و بنابراین $a^3 = (a^2)a$ هم باشد. درنتیجه اگر H یک زیرگروه سره باشد، آن نمی تواند شامل a باشد.

به همان ترتیب، اگر H شامل a^3 باشد آنگاه شامل $(a^3)^2 = a^6 = a^4 \cdot a^2 = e \cdot a^2 = a^2$ نیز خواهد بود. درنتیجه همچنین باید شامل $a^3 \cdot a^2 = a^5 = a^4 \cdot a = e \cdot a = a$ باشد؛ بنابراین اگر H یک زیرگروه سره است، آن نمی تواند شامل a^3 باشد. لهذا، تنها زیرگروه سره $\mathbb{Z}_4$، $\mathbb{Z}_2 := \{e, a^2\}$ است.

۴. برای آنکه نشان دهیم $j(f)$ یک یکریختی از $\mathrm{Perm}\ (Y)$ بر روی یک زیرگروه از $\mathrm{Perm}\ (X)$

است الزاماً باید نشان دهیم که

(الف) وقتی f یک جایگشت روی Y است، $j(f)$ درواقع متعلق به زیرمجموعه $\mathrm{Perm}\,(X)$ از مجموعه $\mathrm{Map}(X, X)$ می باشد.

(ب) بازای هر دو جایگشت f_1 و f_2 متعلق به $\mathrm{Perm}\,(Y)$ داریم $j(f_1 \circ f_2) = j(f_1) \circ j(f_2)$ ، یعنی، نگاشت j قانون گروهی را حفظ می کند.

(ج) نگاشت $f \to j(f)$ یک نگاشت یک بیک از $\mathrm{Perm}\,(X)$ بتوی $\mathrm{Perm}\,(Y)$ است.

این موارد را بترتیب زیر اثبات می کنیم.

(الف) نگاشت $j(f) : X \to X$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned}(j(f))\,(x) &:= f(x) \quad \text{اگر} \quad x \in Y \subset X \\ &:= x \quad \text{اگر} \quad x \notin y.\end{aligned}$$

بنابراین $j(f)$ نقاط داخل زیرمجموعه Y از X را بتوی نقاط مشابهی از Y که نگاشت اصلی f می برد، نگاشت می دهد، در حالیکه اگر نقطه x متعلق به X خارج از زیرمجموعهٔ Y باشد، بخودش نگاشت می یابد. واضح است که $j(f)$ یک نگاشت یک بیک از X بتوی خودش بوده و همچنین دوسوئی است زیرا عضو وارونی بصورت زیر دارد

$$\begin{aligned}(j(f))^{-1}\,(x) &:= f^{-1}(x) \quad \text{اگر} \quad x \in Y \subset X \\ &:= x \quad \text{اگر} \quad x \notin y.\end{aligned}$$

بنابراین بازای هر f متعلق به $\mathrm{Perm}\,(Y)$ نگاشت $j(f)$ متعلق به $\mathrm{Perm}\,(X)$ می باشد.

(ب) داریم

$$\begin{aligned}(j(f_1\circ f_2))(x) &= (f_1\circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) && \text{اگر}\quad x\in Y\subset X\\ &= x && \text{اگر}\quad x\notin Y.\end{aligned}$$

از طرف دیگر، داریم

$$(j(f_1)\circ j(f_2))(x) = j(f_1)(j(f_2)(x))$$

$$\begin{aligned}&= f_1(j(f_2)(x)) && \text{اگر}\quad j(f_2)(x)\in Y\subset X\\ &= j(f_2)(x) && \text{اگر}\quad j(f_2)(x)\notin Y.\end{aligned}$$

اما $j(f_2)(x)$ متعلق به زیرمجموعهٔ Y است اگر و فقط اگر x متعلق به Y باشد. و درعین حال داریم $j(f_2)(x)=f_2(x)$ یا $j(f_2)(x) = x$. بنابراین

$$\begin{aligned}(j(f_1)\circ j(f_2))(x) &= f_1(f_2(x)) && \text{اگر}\quad x\in Y\subset X\\ &= x && \text{اگر}\quad x\notin Y.\end{aligned}$$

لذا، بازای هر x متعلق به X داریم $(j(f_1)\circ j(f_2))(x) = f_1\circ f_2(x)$.

(ج) برای آنکه نشان دهیم نگاشت $f \to j(f)$ یک بیک است، فرض کنید که بازای دو نگاشت f_1 و f_2 متعلق به $\mathrm{Perm}(Y)$ داریم $j(f_1) = j(f_2)$. آنگاه بازای هر x متعلق به Y زیرمجموعهٔ X داریم $f_1(x) = f_2(x)$. و اما این ایجاب می کند که $f_1 = f_2$. و این جواب مسأله است.

۵. گروه $\mathrm{U}(n)$ بعنوان زیرمجموعهٔ تمام ماتریسهای مختلط مربعی $n\times n$ وارون پذیر متعلق به $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$، که در شرط $\mathrm{UU}^\dagger = \mathbb{1}$ صدق نمایند، تعریف می شود. آنگاه،

(الف) درایه های قطری معادله ماتریسی مختلط $\mathrm{UU}^\dagger = \mathbb{1}$ ، n قید چندجمله ای حقیقی روی $2n^2$ درایهٔ حقیقی ماتریس U بعنوان یک عضو از $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ایجاد می کند.

(ب) تعداد $2 \times (n^2 - n)/2 = n^2 - n$ معادلهٔ حقیقی از درایه های بالای قطر اصلی معادلهٔ ماتریسی مختلط $UU^\dagger = \mathbb{1}$ بدست می‌آید.

(ج) از درایه های پائین قطر اصلی معادلهٔ ماتریسی مختلط $UU^\dagger = \mathbb{1}$ هیچ قید اضافی حاصل نمی شود زیرا آنها صرفاً مزدوج مختلط درایه های بالای قطر اصلی هستند.

بنابراین تعداد کل متغیرهای حقیقی لازم برای نمایش پارامتری ماتریسهای متعلق به $U(n)$، $2n^2 - [n + (n^2 - n)] = n^2$ می باشد.

تا آنجا که به گروه $SU(n)$ مربوط می شود، ابتدا به نظر می‌رسد که شرط اضافی $\det U = 1$ باید دو قید اضافی حقیقی تحمیل کند. باوجود این، شرط $UU^\dagger = \mathbb{1}$ در عین حال ایجاب می کند که $|\det U| = 1$ و بنابراین بزرگی $\det U$ قبلاً تعیین گردیده است. لذا شرط اضافی برای ماتریس U متعلق به $SU(n)$ فقط در تعیین فاز $\det U$ منحصر می شود، و درنتیجه تعداد متغیرهای حقیقی لازم جهت نمایش پارامتری ماتریسهای $SU(n)$، $n^2 - 1$ خواهد بود.

۶. اگر $\mu : G_1 \to G_2$ یک همریختی و e_1 عضو واحد متعلق به G_1 باشد آنگاه داریم $\mu(e_1)\,\mu(e_1) = \mu(e_1 \cdot e_1) = \mu(e_1)$ و درنتیجه $\mu(e_1)$ همان عضو واحد e_2 متعلق به G_2 است.

همچنین، بازای هر g متعلق به G_1، $\mu(g)\,\mu(g^{-1}) = \mu(gg^{-1}) = \mu(e_1) = e_2$ و بنابراین، باتوجه به منحصربفرد بودن عضو وارون یک گروه، داریم $(\mu(g))^{-1} = \mu(g^{-1})$.

۷. فرض کنید $G_{x_0} := \{g \in G \,|\, gx_0 = x_0\}$. اگر $g_1, g_2 \in G_{x_0}$ آنگاه داریم $(g_1 g_2)\, x_0 = g_1 (g_2 x_0) = g_1 x_0 = x_0$ و بنابراین $g_1 g_2 \in G_{x_0}$.

به همان ترتیب، اگر $gx_0 = x_0$ آنگاه داریم $g^{-1}x_0 = g^{-1}(gx_0) = (g^{-1}g)\,x_0 = ex_0 = x_0$

و بنابراین زیرمجموعهٔ G_{x_0} از G تحت وارون بسته است. لذا G_{x_0} یک زیرگروه G است.

۸. هستهٔ همریختی $\mu : G_1 \to G_2$ بصورت $\operatorname{Ker}\ \mu := \{g \in G_1 \,|\, \mu(g) = e_2\}$ تعریف می‌شود. لذا اگر $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker} \mu$ ، آنگاه داریم $\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\,\mu(g_2) = e_2 e_2 = e_2$، بنابراین حاصلضرب $g_1 g_2$ نیز متعلق به هستهٔ μ است.

به همان ترتیب، اگر $g \in \operatorname{Ker} \mu$ آنگاه داریم $e_2 = e_2^{-1} =$ [با استفاده از مسئلهٔ (۶)]

$\mu(g^{-1}) = (\mu(g))^{-1}$ ، و درنتیجه هستهٔ μ تحت وارون بسته است. لذا $\mathrm{Ker}\,\mu$ یک زیرگروه از G_1 است.

حال فرض کنید که $g_1, g_2 \in \mathrm{Im}\,\mu \subset G_2$. بنابراین اعضایی مانند g'_1 و g'_2 متعلق به G_1 وجود دارند که برای آنها $g_1 = \mu(g'_1)$ و $g_2 = \mu(g'_2)$. لذا $g_1 g_2 = \mu(g'_1)\,\mu(g'_2) = \mu(g'_1\, g'_2)$ و درنتیجه حاصلضرب $g_1 g_2$ متعلق به $\mathrm{Im}\,\mu$ است.

همچنین، اگر $g \in \mathrm{Im}\ \mu$ آنگاه عضوی مانند g' متعلق به G_1 وجود دارد که برای آن $g = \mu(g')$ و $g^{-1} = (\mu(g'))^{-1} = \mu(g'^{-1})$ درنتیجه تصویر μ تحت وارون بسته است. لذا $\mathrm{Im}\,\mu$ یک زیرگروه از G_2 است.

۹. فرض کنید که دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ متعلق به $SL(2,\ \mathbb{C})$ بترتیب مربوط به تبدیلات موبیوس $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ و $z \to \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ باشند. آنگاه ترکیب این دو تبدیل بصورت زیر است

$$z \to \frac{a'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)+d'} = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}$$

و آن دقیقاً تبدیل موبیوسی است که توسط ضرب ماتریسی

$$A'A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}.$$

القا می شود. لذا نگاشت μ قانون گروهی را حفظ می کند.

به همان ترتیب، به آسانی می توان نشان داد که وارون ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نظیر وارون تبدیل

موبیوس $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ می باشد. بنابراین نگاشت μ یک همریختی است.

۱۰. (الف) (۱) اگر $ab = cb$، آنگاه از ضرب b^{-1} به طرفین آن داریم $(ab)b^{-1} = (cb)b^{-1}$.

اما باتوجه به شرکت پذیری، $a(bb^{-1}) = c(bb^{-1})$ و بنابراین $ae = ce$، و

درنتیجه داریم $a = c$.

(۲) به همان ترتیب این نتیجه برای $ba = bc$ نیز به دست می‌آید.

(ب) $ab(b^{-1}a^{-1}) = a((bb^{-1})a^{-1})$ (باتوجه به شرکت پذیری)

$$= a(ea^{-1}) = aa^{-1} = e.$$

اما از منحصر بفرد بودن عضو وارون در یک گروه نتیجه می شود که $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

۱۱. در فضای Map(X, G)، تعریف کردیم $(f_1 f_2)(x) := f_1(x) f_2(x)$. برای اینکه نشان دهیم این یک ساختار گروهی روی Map(X, G) بنا می کند، باید

(الف) نشان دهیم که این قانون ترکیب شرکت پذیر است،

(ب) یک عضو واحد مناسب پیدا کنیم،

(ج) برای هر f متعلق به $\mathrm{Map}(X, G)$ یک عضو وارون پیدا کنیم.

این موارد را بترتیب زیر بررسی می کنیم.

(الف) داریم،

$$[(f_1 f_2) f_3](x) = (f_1 f_2)(x) f_3(x) = (f_1(x) f_2(x)) f_3(x)$$

$$= f_1(x)(f_2(x) f_3(x)) \quad (\text{باتوجه به شرکت پذیری در } G)$$

$$= f_1(x)(f_2 f_3)(x) = [f_1(f_2 f_3)](x)$$

و، از آنجا که این رابطه برای هر x متعلق به X برقرار است، لذا داریم $(f_1 f_2) f_3 = f_1(f_2 f_3)$، یعنی، قانون ترکیب فوق در $\mathrm{Map}(X, G)$

شرکت پذیراست.

(ب) عضو واحد مناسب متعلق به $\mathrm{Map}(X, G)$ نگاشت ثابت e است که بصورت

$$e(x) = e_G \qquad \forall\, x \in X.$$

تعریف می‌شود. (e_G عضو واحد گروه G می باشد.) این درواقع عضو واحد است زیرا، بازای هر f متعلق به $\mathrm{Map}(X, G)$،

$$(ef)(x) = e(x)f(x) = e_G f(x) = f(x)$$

و بطور مشابه برای fe نیز برقرار است.

(ج) برای f متعلق به $\mathrm{Map}(X, G)$ عضو وارون تابع، f^{-1} است که بصورت $f^{-1}(x) := (f(x))^{-1}$ (وارون در G) تعریف می‌شود. لذا

$$\begin{aligned}(ff^{-1})(x) &= f(x)f^{-1}(x)\\ &= f(x)\,(f(x))^{-1}\\ &= e_G\\ &= e(x)\end{aligned}$$

و درنتیجه، از آنجا که این تساوی بازای هر x متعلق به X برقرار است، در فضای $\mathrm{Map}(X, G)$ داریم $ff^{-1} = e$. به همان ترتیب، در فضای $\mathrm{Map}(X, G)$ داریم $f^{-1}f = e$.

۱۲. تبدیلات موبیوس در صفحهٔ مختلط بشکل زیر هستند

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \tag{۱}$$

که در آن شرط زیر برقرار است

$$ad - bc = 1. \qquad (۲)$$

برای اینکه نشان دهیم این تبدیلات یک زیرگروه از گروه تمام نگاشتهای دوسوئی صفحهٔ مختلط بر روی خودشان تشکیل می‌دهند باید ثابت کنیم که:

(الف) تبدیل همانی یک تبدیل موبیوس است،

(ب) حاصلضرب دوتبدیل موبیوس خود یک تبدیل موبیوس است،

(ج) وارون یک تبدیل موبیوس خود یک تبدیل موبیوس است.

(الف) تبدیل همانی $z \to z$ خود یک تبدیل موبیوس است که در آن $a = d = 1$ و $c = b = 0$ می‌باشد (و بنابراین داریم $ad - bc = 1$).

(ب) دو تبدیل موبیوس زیر را بررسی می‌کنیم

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{و} \quad z \to \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

و از ترکیب آنها تبدیل زیر بدست می‌آید

$$z \to \frac{a'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b'}{c'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+d'} = \frac{a'(az+b)+b'(cz+d)}{c'(az+b)+d'(cz+d)}$$

$$= \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)} \qquad (۳)$$

که درست مانند طرف راست (۱) است. اکنون باید رابطهٔ (۲) برای آن مورد بررسی قرار گیرد

$$
\begin{aligned}
(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \\
&= a'c'(ab - ba) + a'd'(ad - bc) \\
&\quad + b'c'(cb - da) + b'd'(cd - dc) \\
&= a'd' - b'c' = 1 \,.
\end{aligned}
$$

بنابراین حاصلضرب دو تبدیل موبیوس یک تبدیل موبیوس است.

(ج) برای آنکه نشاند هیم وارون یک تبدیل موبیوس خود یک تبدیل موبیوس است می توانیم در معادلهٔ (۳) a'، b'، c'، d' را چنان پیدا کنیم که

$$
\begin{aligned}
(a'a + b'c) = 1 = (c'b + d'd)\,; \\
(a'b + b'd) = 0 = (c'a + d'c)
\end{aligned}
$$

زیرا در این صورت تبدیل موبیوس پارامتری شده بوسیلهٔ a'، b'، c'، d' وارون تبدیل پارامتری شده برحسب a، b، c، d خواهد بود. با در نظر گرفتن $ad - bc = 1$ بوسیلهٔ عملیات جبری مقدماتی حل معادلات فوق بصورت زیر است

$$
a' = d, \quad b' = -b, \quad c' = -c, \quad d' = a
$$

و بنابراین وارون یک تبدیل موبیوس خود یک تبدیل موبیوس است.

۱۳. فرض کنید که $\{e, a, b, c\}$ اعضای یک گروه مرتبهٔ چهار هستند. از آنجا که این اعضا متمایز هستند باید داشته باشیم $ab \neq a$ و $ab \neq b$ و بنابراین درست دو امکان برای حاصلضرب ab وجود دارد، یعنی، $ab = e$ یا $ab = c$. بترتیب این دو حالت را بررسی می کنیم.

حالت (الف) $ab = e$

$b(ab) = be = b$، و لذا $(ba)b = b(ab) = b$. بنابراین

$$ba = e. \tag{۱}$$

b یا $ac = e$. اما $ac = e$ ایجاب می کند که $bac = b$ و لذا [از (۱)] داریم $c = b$. اما $c \neq b$ و بنابراین نتیجه می گیریم که

$$ac = b. \tag{۲}$$

متشابهاً، b یا $ca = e$. اما $ca = e$ ایجاب می کند که $cab = b$ درنتیجه $c = b$ (زیرا فرض کرده‌ایم که $ab = e$). بنابراین

$$ca = b. \tag{۳}$$

a یا $bc = e$. اما

$$bc = e \Rightarrow abc = a \Rightarrow c = a$$

بنابراین

$$bc = a. \tag{۴}$$

a یا $cb = e$. اما

$$cb = e \Rightarrow cba = a \Rightarrow c = a$$

بنابراین

$$cb = a. \tag{۵}$$

$a^2 = e$ ایجاب می کند که $a^2 = ab$ و درنتیجه $a = b$. بنابراین $a^2 \neq e$.
$a^2 = b$ ایجاب می کند که $a^2 = ac$ [از (۲)] و درنتیجه $a = c$. لذا $a^2 \neq b$ و بنابراین

$$a^2 = c. \tag{۶}$$

از معادلهٔ (۲) داریم $b^2 = acb$ که با استفاده از (۵) نتیجه می‌شود $b^2 = a^2$. بنابراین [از (۶)]

$$b^2 = c. \tag{۷}$$

متشابهاً،

$$c^2 = a^2b^2 \quad [\text{از } (۶\text{-}۷)] = a(ab)b = aeb = ab = e.$$

بنابراین

$$c^2 = e.$$

لذا جدول گروه بصورت مقابل است باید توجه نمود که $c = b^2$ و $a = bc = b^3$ و بنابراین می‌توانیم این گروه را با گروه دوری

$$\mathbb{Z}_4 = \{e, b, b^2, b^3\}$$

همانند[1] کنیم.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

حالت (ب) $ab = c$

اگر هر یک از ba، bc، cb، ac یا ca معادل با e باشند، آنگاه با تغییرات مناسب در ترتیب اعضای گروه همان جدول گروهی حالت (الف) بدست می‌آید. بنابراین

$$ab = ba = c \tag{۸}$$

$$bc = cb = a \tag{۹}$$

1- Identify

$$ac = ca = b. \tag{۱۰}$$

از معادلهٔ (۸) داریم $a^2b = ac$ که با استفاده از معادلهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود $a^2b = b$ و بنابراین $a^2 = e$.
از معادلهٔ (۹) داریم $b^2c = ba$ که با استفاده از معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود $b^2c = c$ و بنابراین $b^2 = e$.
از معادلهٔ (۱۰) داریم $c^2a = cb$ که با استفاده از معادلهٔ (۹) نتیجه می‌شود $c^2a = a$ و بنابراین $c^2 = e$.

لذا جدول گروه بصورت مقابل است باید توجه نمود که این دقیقاً جدول گروه $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ می‌باشد.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

۱۴. با معرفی نماد $\begin{pmatrix} 1 \to a \\ 2 \to b \\ 3 \to c \end{pmatrix}$ بجای abc گروه جایگشتهای مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را بعنوان S_3 بررسی می کنیم. باید یادآوری کنیم که برای ساختن جدول گروه، طبق قرارداد ارتباط سطرها و ستون ها مطابق شکل کلی زیر تنظیم می گرد.

اهمیت مسأله در اینست که در یک گروه غیرآبلی، g_i و g_j چنان وجود دارند که $g_ig_j \neq g_jg_i$ و بنابراین بایداعضای سطرها و ستونهای مربوطه بطور صحیح بدست آیند.

	e	g_1	g_2	g_3	$\cdots$
e	e	g_1	g_2	g_3	$\cdots$
g_1	g_1	g_1g_1	g_1g_2	g_1g_3	$\cdots$
g_2	g_2	g_2g_1	g_2g_2	g_2g_3	$\cdots$
g_3	g_3	g_3g_1	g_3g_2	g_3g_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

یادآوری می کنیم که، برای گروه نگاشتهای جایگشتی، ضرب گروهی g_1g_2 بمعنی اینست که ابتدا نگاشت g_2 و سپس نگاشت g_1 عمل می کند، لذا می توانیم بی‌درنگ جدول گروهی S_3 را بصورت زیر بدست آوریم:

	123	213	132	321	312	231
123	123	213	132	321	312	231
213	213	123	231	312	321	132
132	132	312	123	231	213	321
321	321	231	312	123	132	213
312	312	132	321	213	231	123
231	231	321	213	132	123	312

این گروه می‌تواند بطریق خواسته شده با اختصاص علائم

$$e := 123,\ x := 213,\ y := 312,\ y^2 = 231,\ xy = 321,\ xy^2 = 132$$

در جدول فوق نمایش داده شود که این علائم کاملاً سازگار هستند [بعنوان مثال، داریم $231 = (312)^2$] و در روابط زیر صدق می کنند

$$x^2 = y^3 = e,\ yx = xy^2 \quad \text{و} \quad y^2x = xy.$$

واضح است که این گروه غیرآبلی است زیرا، بعنوان مثال، $312 = (213)(132)$ در حالیکه $(213)(132) = 231 \neq 312$.

۱۵. فرض کنید که $\left\{ M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) : ab \neq 0 \right\}$ =: T. ابتدا نشان

می‌دهیم که T یک زیرمجموعه از $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ است. اگر M متعلق به T باشد آنگاه

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab \neq 0$$

و بنابراین M متعلق به $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ نیز می‌باشد.

اکنون: (الف) واضح است که ماتریس واحد متعلق به $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ در زیرمجموعه T نیز قرار دارد.

(ب) فرض کنید که دو ماتریس $M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ و $M' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ متعلق

به T هستند.

از آنجا داریم $MM' = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$ ، که بشکل ماتریس

مثلثی است، و همچنین داریم $(aa')(bb') \neq 0$. بنابراین MM' متعلق به T می‌باشد.

(ج) برای M متعلق به T عضو وارون وجود خواهد داشت اگر برای a'، b'، c' در

معادلهٔ ماتریسی $\begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ جواب وجود

داشته باشد. جوابهای این معادله عبارتند از

$$a' = 1/a$$
$$b' = 1/b$$
$$c' = -c/ab.$$

لذا $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-c}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ وارون $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ می‌باشد که خود نیز متعلق به T است.

بنابراین سه شرط زیرگروهی برای T برقرار است.

۱۶. نگاشت $\mu : G \to G$ که یک یکریختی از G بتوی خودش است یک خودریختی گروه G نامیده می‌شود. قانون ضرب گروهی مجموعهٔ تمام خودریختی‌های $\mathrm{Aut}(G)$ همان ترکیب معمولی نگاشتها است. بنابراین، اگر μ_1 و μ_2 متعلق به $\mathrm{Aut}\ (G)$ باشند، تعریف می‌کنیم

$$(\mu_1\mu_2)\,(g) := \mu_1 \circ \mu_2(g) = \mu_1(\mu_2(g)) \tag{۱}$$

و ابتدا نشان می‌دهیم که $\mu_1\mu_2$ بصورتی که تعریف شد یک خودریختی از G است. البته ترکیب دو یکریختی خود یک یکریختی است وبنابراین کافی است نشان دهیم که $\mu_1\mu_2$ قانون گروهی را حفظ می‌کند

$$\mu(gg') = \mu(g)\,\mu(g') \qquad \forall\ \ g, g' \in G. \tag{۲}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}(\mu_1\mu_2)\,(gg') &= \mu_1\,[\mu_2(gg')] = \mu_1\,[\mu_2(g)\,\mu_2(g')] \\ &\qquad [\text{زیرا}\ \ \mu_2 \in \mathrm{Aut}(G)] \\ &= \mu_1\,(\mu_2(g))\,\mu_1\,(\mu_2(g')) \ \ [\text{زیرا}\ \ \mu_1 \in \mathrm{Aut}(G)] \\ &= (\mu_1\mu_2)\,(g)\,(\mu_1\mu_2)\,(g') \qquad [\text{با استفاده از (۱)}]\end{aligned}$$

و درنتیجه $\mu_1\mu_2$ متعلق به $\mathrm{Aut}\ (G)$ می باشد.

اکنون باید نشان دهیم که $\mathrm{Aut}\ (G)$ یک گروه است. این مسأله شامل اثبات موارد زیر است (الف) شرکت پذیری؛ (ب) وجود عضو واحد؛ (ج) وجود وارون برای هر عضو μ متعلق $\mathrm{Aut}\ (G)$.

(الف) اگر μ_1، μ_2، μ_3 متعلق به $\mathrm{Aut}\ (G)$ باشند آنگاه

$$\begin{aligned}[\mu_1(\mu_2\mu_3)](g) &= \mu_1[(\mu_2\mu_3)(g)]\\ &= \mu_1[\mu_2(\mu_3(g))]\\ &= (\mu_1\mu_2)(\mu_3(g))\\ &= [(\mu_1\mu_2)\mu_3](g)\end{aligned}$$

که بازای هر g متعلق به G برقرار است، درنتیجه $\mathrm{Aut}\ (G)$ شرکت پذیر است.

[**تذکر.** این دقیقاً تکرار اثبات کلی شرکت پذیری ترکیب نگاشتها در $\mathrm{Map}(X, X)$ می باشد.]

(ب) در ترکیب نگاشتها نگاشت همانی، بصورت $id_G : G \to G$ با $id_G(g) := g$ بازای هر g متعلق به G تعریف می شود. واضح است که این نگاشت یک خودریختی است و لذا مانند یک عضو همانی در گروه $\mathrm{Aut}\ (G)$ بکار می رود.

(ج) از آنجا که هر μ متعلق $\mathrm{Aut}(G)$ یک نگاشت دوسوئی است، در گروه کلی $\mathrm{Perm}(G)$ دارای وارون $\mu^{-1} : G \to G$ می باشد که بوسیلهٔ $\mu(\mu^{-1}(g)) := g$ تعریف می شود و درنتیجه کافی است نشان دهیم که μ^{-1} خودش یک خودریختی است. بنابراین معادلهٔ زیر را مورد بررسی قرار می دهیم

(۳) $$\mu(\mu^{-1}(gg')) = gg' \qquad \text{(با استفاده از تعریف).}$$

از طرف دیگر،

$$\mu[\mu^{-1}(g)\,\mu^{-1}(g')] = \mu[\mu^{-1}(g)]\,\mu[\mu^{-1}(g')] \tag{۴}$$

زیرا μ یکریختی است. اما طرف راست $gg' = (۴)$ و بنابراین، از مقایسهٔ (۴) با (۳) داریم

$$\mu(\mu^{-1}(gg')) = \mu[\mu^{-1}(g)\mu^{-1}(g')]$$

و درنتیجه، از آنجا که μ یک بیک است داریم $\mu^{-1}(gg') = \mu^{-1}(g)\,\mu^{-1}(g')$. بنابراین μ^{-1} یک خودریختی از G است، به این ترتیب اثبات گروه بودن $\mathrm{Aut}\,(G)$ کامل می شود.

$G = \mathbb{Z}_2$

گروه دوری $\mathbb{Z}_2$ را بصورت $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ و $a^2 = e$ معرفی می کنیم و یک خودریختی مانند μ از آنرا بررسی می کنیم. این خودریختی می تواند a را به e یا خود a نگاشت دهد. اما، از آنجا که همیشه برای هر همریختی داریم $\mu(e) = e$، لذا $\mu(a) = e$ ایجاب می کند که μ یک بیک نباشد درنتیجه نمی تواند به $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)$ متعلق باشد. بنابراین باید $\mu(a) = a$ باشد. اما این درست خودریختی همانی را معرفی می کند (که البته همیشه وجود دارد) و لذا نتیجه می گیریم که $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2) \cong \{id_{\mathbb{Z}_2}\}$ ، یعنی، گروه خودریختی های $\mathbb{Z}_2$ گروه بدیهی با یک عضو است.

$G = \mathbb{Z}_4$

گروه دوری $\mathbb{Z}_4$ را بصورت $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ و $a^4 = e$ معرفی می کنیم. برای هر گروه دوری $\mathbb{Z}_n = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$ با $a^n = e$، اثر یک خودریختی بصورت منحصر بفردی بوسیلهٔ مقدار آن روی a تعیین می شود زیرا با m بار تکرار (۱) داریم $\mu(a^m) = (\mu(a))^m$. بنابراین کافی است که چهار مقدار ممکن

برای $\mu(a)$ را بررسی نمائیم و مواردی را که نمی توانند نگاشت دوسوئی باشند کنار بگذاریم [اما، از ملاحظهٔ دقیق این کار معلوم می شود که، هر انتخاب برای $\mu(a)$ یک همریختی از G بتوی خودش تولید می کند. این نوع کلی از نگاشتها به درون ریختی G معروف هستند، بنابراین یک خودریختی، درون ریختی دوسوئی است].

(۱) $\mu(a) = e$ نمی تواند یک نگاشت دوسوئی تولید کند زیرا داریم $\mu(e) = e$،

(۲) $\mu(a) = a$ ایجاب می کند که $\mu(a^q) = a^q$ و لذا این $id_{\mathbb{Z}_4}$ را تولید می کند،

(۳) $\mu(a) = a^2$ ایجاب می کند که $\mu(a^2) = a^4 = e$ ، و لذا این نیز یک نگاشت یک بیک نیست،

(۴) نهایتاً، $\mu(a) = a^3$ ایجاب می کند که $\mu(a^2) = a^6 = a^2$ و $\mu(a^3) = a^9 = a$، و این یک نگاشت دوسوئی است. نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4)$ دو عضو دارد و بنابراین باید همان گروه $\mathbb{Z}_2$ باشد. این موضوع بوسیلهٔ محاسبهٔ $\mu^2(a) = \mu(\mu(a)) = \mu(a^3) = a$ تأئید می‌شود بطوریکه $\mu^2 = id_{\mathbb{Z}_2}$ متعلق به $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2)$ می باشد.

۱۷. (الف) از آنجا که هم H و هم K زیرگروههایی از G هستند، درنتیجه $e \in H$ و $e \in K$. بنابراین e متعلق به مقطع آنها $H \cap K$ نیز است.

فرض کنید که h و h' متعلق به $H \cap K$ باشند. آنگاه $h, h' \in H$ و $h, h' \in K$. اما H و K زیرگروههایی از G هستند و بنابراین $hh' \in H$ و $hh' \in K$. لهذا $hh' \in H \cap K$.

فرض‌کنید که $h \in H \cap K$. آنگاه $h \in H$ و $h \in K$ و بنابراین، از آنجا که H و K زیرگروههای G هستند، $h^{-1} \in H$ و $h^{-1} \in K$. لهذا $h^{-1} \in H \cap K$.

لذا سه شرط لازم برای آنکه یک زیرمجموعهٔ گروه G زیرگروه آن باشد، در مجموعهٔ $H \cap K$ برقرار می باشند.

(ب) واضح است که دو زیرگروه مناسب $\mathbb{Z}_2$ از S_3، ساده ترین زیرگروههای غیربدیهی آن هستند.

باتوجه به جدول گروهی مسئله ۱۴، می توان دانست که دو زیرگروه از این نوع عبارتند از

$$H := \{123, 213\} \qquad \text{و} \qquad K := \{123, 132\}$$

یقیناً اینها زیرگروه هستند و اتحادشان بصورت زیر است

$$H \cup K = \{123, 213, 132\}$$

اما این یک زیرگروه از S_3 نیست زیرا، $(231) = (132)\,(213)$ متعلق به $H \cup K$ نمی باشد.

(ج) اگر $HK = KH$ آنگاه بازای هر عضو kh متعلق به KH، h' متعلق به H و k' متعلق به K وجود دارد بطوریکه می توان آنرا به شکل $h'k'$ نوشت. بویژه، اگر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, \ k_2 \in K$ آنگاه $h' \in H$ و $k' \in K$ وجود دارد بطوریکه $k_1 h_2 = h' k'$. لذا،

$$h_1 k_1 h_2 k_2 = h_1 h' k' k_2 ,$$

یعنی،

$$(h_1 k_1)\,(h_2 k_2) \in HK.$$

متشابهاً، اگر $hk \in HK$ آنگاه $h' \in H$ و $k' \in K$ وجود دارند بطوریکه $(hk)^{-1} = k^{-1} h^{-1} = h'k'$. بنابراین $hk \in HK$ ایجاب می کنند که $(hk)^{-1} \in HK$.

واضح است از آنجا که $e \in H$ و $e \in K$ درنتیجه داریم $e \in HK$. بنابراین سه شرط لازم برای زیرگروه بودن HK برقرار می باشند.

برعکس، اگر HK یک زیرگروه از G باشد آنگاه هر عضو HK وارون عضو منحصر بفردی از HK است. بنابراین

$$\begin{aligned} HK &= \{(hk)^{-1} \ : \ h \in H \ \text{و} \ k \in K\} \\ &= \{k^{-1}h^{-1} \ : \ h \in H \ \text{و} \ k \in K\} = KH \,. \end{aligned}$$

(د) اگر H یک زیرگروه G باشد آنگاه $b \in H$ ایجاب می کند که $b^{-1} \in H$ و بنابراین $a \in H$ و $b \in H$ ایجاب می کند که $ab^{-1} \in H$.

برعکس، اگر $a, b \in H$ ایجاب کند که $ab^{-1} \in H$ آنگاه، از آنجا که H غیر تهی است، حداقل عضوی مانند g متعلق به H وجود دارد و بنابراین $e = gg^{-1} \in H$.
اما آنگاه، اگر h یک عضو دلخواه از H باشد، $e, h \in H$ و درنتیجه $eh^{-1} \in H$ و بنابراین داریم $h^{-1} \in H$.
نهایتاً، اگر $h_1, \ h_2 \in H$ آنگاه $h_1, h_2^{-1} \in H$ و بنابراین داریم $h_1 h_2 \in H$.
لهذا H یک زیرگروه از G است.

۱۸. (الف) اگر $H_2 = gH_1g^{-1}$ ، آنگاه نگاشت $i : H_1 \to H_2$ را بصورت $i(h) := ghg^{-1}$ تعریف می کنیم. بنابراین،
(۱) نگاشت i یک بیک است زیرا

$$i(h_1) = i(h_2) \Rightarrow gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1} \Rightarrow h_1 = h_2.$$

(۲) نگاشت i پوشا است زیرا $H_2 = gH_1g^{-1}$.

(۳)

$$i(h_1 h_2) = gh_1 h_2 g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = i(h_1)\, i(h_2).$$

بنابراین نگاشت $i : H_1 \to H_2$ یک یکریختی است.

(ب) یک زیرگروه $\mathbb{Z}_2$ از S_3 عبارتست از $H := \{123, 213\}$. می‌توانیم یک زیرگروه مزدوجی را بوسیلهٔ انتخاب هر عضو g متعلق به S_3 بطوریکه $g(213)g^{-1} \neq 213$ ، بدست آوریم. با استفاده از جدول گروهی در مسئلهٔ ۱۴، ملاحظه می‌کنیم که، بعنوان مثال، $(312)^{-1} = 231$ و $(312)(213)(231) = (312)(132) = 321 \neq 213$.
بنابراین $H_1 := \{123, 213\}$ و $H_2 := \{123, 321\}$ دو زیرگروه مزدوجی در S_3 می‌باشند. هر دو با $\mathbb{Z}_2$ یکریخت هستند.

۱۹. از آنجا که $l_g : X \to X$ یک عمل چپ G روی X می‌باشد رابطهٔ زیر برقرار است

$$l_{g_2} \circ l_{g_1} = l_{g_2 g_1} \qquad \forall\ g_1, g_2 \in G.$$

لذا، اگر $r_g := l_{g^{-1}}$ ، داریم

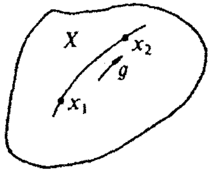
$$r_{g_2} \circ r_{g_1} = l_{g_2^{-1}} \circ l_{g_1^{-1}} = l_{g_2^{-1} g_1^{-1}} = l_{(g_1 g_2)^{-1}} = r_{g_1 g_2}.$$

بنابراین $r_g : X \to X$ یک عمل راست G روی X است.

۲۰. (الف) مدارهای گذرنده از نقاط x_1 و x_2 متعلق به X عبارتند از

$$O_{x_1} = \{g x_1 \ : \ g \in G\},\ O_{x_2} = \{g x_2 \ : \ g \in G\}.$$

فرض کنید $y \in O_{x_1} \cap O_{x_2}$. بنابراین g_1 و g_2 متعلق به G وجود دارند بطوریکه $y = g_1 x_1 = g_2 x_2$. درنتیجه اگر $g x_1$ هر نقطهٔ دیگری روی مدار O_{x_1} باشد، آنگاه داریم $g x_1 = g g_1^{-1} g_2 x_2$ و بنابراین $g x_1$ روی مدار O_{x_2} نیز قرار دارد. لذا $O_{x_1} \subset O_{x_2}$. به همان ترتیب، $O_{x_2} \subset O_{x_1}$ و بنابراین، اگر $O_{x_1} \cap O_{x_2}$ غیرتهی باشد، آنگاه داریم $O_{x_1} = O_{x_2}$.



(ب) از آنجا که x_1 و x_2 روی مدار یکسانی از عمل G قرار دارند، عضوی مانند g متعلق به G وجود دارد بطوریکه $gx_1 = x_2 \ (\Rightarrow x_1 = g^{-1}x_2)$.
فرض کنید $h \in G_{x_1}$، یعنی، $hx_1 = x_1$. بنابراین

$$\begin{aligned}(ghg^{-1})x_2 &= gh(g^{-1}x_2)\\ &= (gh)x_1 = g(hx_1) = gx_1 = x_2\,.\end{aligned}$$

بنابراین ملاحظه می کنیم که $ghg^{-1} \in G_{x_2}$ و درنتیجه $gG_{x_1}g^{-1} \subset G_{x_2}$.
به همان ترتیب، $g^{-1}G_{x_2}g \subset G_{x_1}$ و بنابراین $gG_{x_1}g^{-1} = G_{x_2}$.

۲۱. ابتدا، باید نشان دهیم که مرکز $C(G)$ از G یک زیرگروه G می باشد. پس، فرض کنید $a, b \in C(G)$. درنتیجه بازای هر عضو g متعلق به G،

$$(ab)g(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1} = aga^{-1} = g$$

و بنابراین $a, b \in C(G)$ ایجاب می کند که $ab \in C(G)$. عضوواحد e بوضوح متعلق به $C(G)$ می باشد، و اگر $a \in C(G)$ آنگاه

$$aga^{-1} = g \Rightarrow a^{-1}ga = g,$$

یعنی، $a^{-1} \in C(G)$. بنابراین $C(G)$ یک زیرگروه از G است.
برای اینکه نشان دهیم $C(G)$ یک زیرگروه نرمال است توجه می کنیم که اگر $a \in C(G)$ آنگاه، بازای هر g متعلق به G داریم $gag^{-1} = gg^{-1}a = a$. لذا $C(G)$ یک زیرگروه نرمال است.

۲۲. از معادلهٔ (۱.۳.۲۰)، می دانیم که یک عضو دلخواه از $\mathrm{SU}(2)$ بشکل زیر است

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{۱}$$

فرض کنید $\begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix}$ یک عضو از $C(\mathrm{SU}(2))$ باشد. آنگاه بازای هر ماتریس بشکل (۱) باید داشته باشیم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} ac - bd^* & ad + bc^* \\ -b^*c - a^*d^* & -b^*d + a^*c^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ca - db^* & cb + da^* \\ -d^*a - c^*b^* & -d^*b + c^*a^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۲}$$

معادلهٔ نظیر عضو ماتریسی ۱,۱ نتیجه می‌دهد که $bd^* = b^*d$، که الزاماً بازای هر مقدار b باید برقرار باشد بطوریکه $|a|^2 + |b|^2 = 1$. این نتیجه بویژه باید برای $b = 1$ برقرار باشد، و این منجر به $d = d^*$ می‌شود و برای $b = \sqrt{-1}$ که $-d = d^*$ را نتیجه می‌دهد باید داشته باشیم $d = 0$. معادلات نظیر اعضای ماتریسی باقی‌مانده ایجاب می‌کنند که $c = c^*$، یعنی، c حقیقی است. اما همچنین داریم $|c|^2 + |d|^2 = 1$ و بنابراین $c = \pm 1$. درنتیجه، مرکز $\mathrm{SU}(2)$ شامل جفت ماتریسهای $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ می‌باشد که زیرگروه $\mathbb{Z}_2$ از $\mathrm{SU}(2)$ را تشکیل می‌دهند.

۲۳. ابتدا، باید نشان دهیم که مجموعهٔ ماتریسهای D بشکل $\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ یک زیرگروه از گروه $T := \left\{\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix} \;:\; ab \neq 0\right\}$ می باشد. واضح است که $I \in D$ و

$$\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d'\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & d'+d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

بطوریکه D تحت عمل ضرب ماتریسی بسته است. وارون $\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ماتریس $\begin{pmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ می باشد که خود متعلق به D است. بنابراین D یک زیرگروه از T است. اما

$$\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/a & -c/ab\\ 0 & 1/b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & ad/b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

که متعلق به D می باشد. بنابراین D یک زیرگروه نرمال از T است.

۲۴. نگاشت $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ که بصورت $\mu(x) := e^x$ تعریف می شود در رابطهٔ

$$\mu(x+y) = e^{x+y} = e^x\, e^y = \mu(x)\,\mu(y)$$

صدق می کند و بنابراین μ یک همریختی است. این یک نگاشت 'پوشا' روی $\mathbb{R}_+$ است زیرا هر عدد حقیقی مثبت x می تواند بصورت نمائی از یک عدد حقیقی نوشته شود، یعنی، $x = e^{(\ln x)}$.

هستهٔ این همریختی مجموعهٔ $\operatorname{Ker}\mu = \{x \in \mathbb{R} \;:\; e^x = 1\}$ است، زیرا عدد '1' عضو واحد در $\mathbb{R}_+$ می باشد. اما x تنها مقدار 0 را خواهد داشت. بنابراین $\operatorname{Ker}(\mu) = \{0\}$.

تذکر. از آنجا که μ یک همریختی یک بیک و پوشا روی $\mathbb{R}_+$ است، آن یک یکریختی از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}_+$ می باشد.

۲۵. داریم $U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\lambda^* = 1\}$.
سؤال قبلی ما را راهنمائی می کند که نگاشت $\mu : \mathbb{R} \to U(1)$ را بصورت زیر تعریف کنیم

$$\mu(x) := e^{ix}.$$

مانند قبل، داریم $\mu(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}\,e^{iy}$ بطوریکه μ یک همریختی پوشا از $\mathbb{R}$ بر روی $U(1)$ است. با این وجود، اینبار، $\mathrm{Ker}\,(\mu) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; e^{ix} = 1\}$، و از آنجا که بازای هر n متعلق به $\mathbb{Z}$ داریم $e^{i2\pi n} = 1$، لذا هستهٔ μ با گروه جمعی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یکریخت است.
بنابراین، از آنجا که $\mathbb{R}$ یک گروه آبلی است، مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک زیرگروه نرمال از آن می باشد و بنابراین فضای همرده های $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ یک ساختار گروهی دارد.
اما در اینصورت براساس آخرین قضیهٔ بخش ۱.۵، همریختی پوشای $\mu : \mathbb{R} \to U(1)$ یکریختی $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U(1)$ را القا می کند.

۲۶. (الف) ایدهٔ اصلی سؤال آنست که یک تابع مانند $f: X \to \mathbb{C}$ می تواند در هر کدام از N نقطهٔ متعلق به X مقادیر مستقلی داشته باشد، وبنابراین فضای $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ دارای بُعد N است. این خودبخود تعریف نگاشت زیر را القا می کند

$$\begin{aligned} &i : \mathrm{Map}\,(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^N \\ &i(f) := \big(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_N)\big). \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ نقاط متعلق به X می باشند.
اگر $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ و $f_1, f_2 \in \mathrm{Map}\,(X, \mathbb{C})$، آنگاه

$$\begin{aligned} &i(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) \\ &= \big((\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2)(\mathbf{x}_1), \ldots, (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2)(\mathbf{x}_N)\big) \\ &= \big(\mu_1 f_1(\mathbf{x}_1) + \mu_2 f_2(\mathbf{x}_1), \ldots, \mu_1 f_1(\mathbf{x}_N) + \mu_2 f_2(\mathbf{x}_N)\big) \\ &= \mu_1 i(f_1) + \mu_2 i(f_2) \end{aligned}$$

و بنابراین $i : \text{Map}\,(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^N$ یک نگاشت خطی است.

بازای هر عضو داده شدهٔ $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ متعلق به $\mathbb{C}^N$ می‌توانیم تابعی مانند f متعلق به $\text{Map}(X, \mathbb{C})$ را بصورت زیر تعریف کنیم

$$f(\mathbf{x}_i) := a_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

لذا،

$$i(f) = (a_1, \ldots, a_N).$$

بنابراین $i : \text{Map}\,(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^N$ یک نگاشت پوشا است.

نهایتاً، اگر f_1 و f_2 دوتابع متعلق به $\text{Map}(X, \mathbb{C})$ باشند بطوریکه $i(f_1) = i(f_2)$، آنگاه داریم $i(f_1 - f_2) = 0$ که ایجاب می‌کند

$$f_1(\mathbf{x}_i) = f_2(\mathbf{x}_i) \qquad i = 1, \ldots, N.$$

و این ایجاب می کند که $f_1 = f_2$، زیرا یک تابع بوسیلهٔ مقادیر آن روی تمام نقاط X بطور منحصر بفرد مشخص می‌شود. بنابراین $i : \text{Map}\,(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^N$ یک نگاشت یک بیک است.

لهذا نگاشت i یک نگاشت خطی دوسوئی از فضای برداری $\text{Map}(X, \mathbb{C})$ بتوی فضای برداری $\mathbb{C}^N$ است، که دقیقاً همان شرط یکریخت بودن این دو فضا است.

(ب) باتوجه به رابطهٔ (۱) واضح است که هر بردار متعلق به $\mathbb{C}^N$ بوسیلهٔ i از یک تابع متعلق به $\text{Map}(X, \mathbb{C})$ بتوی $\mathbb{C}^N$ نگاشت می‌یابد، بعنوان مثال بردار پایه $(1, 0, \ldots, 0)$ بوسیلهٔ $f(\mathbf{x}_1) := 1$ و $f(\mathbf{x}_i) := 0$ بازای مقادیر $i = 2, \ldots, N$، تعریف می‌شود. بطور کلی، هر بردار پایهٔ $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (با '1' در محل iام) نگاشت یافتهٔ تابع $e_i : X \to \mathbb{C}$ است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$e_i(\mathbf{x}_j) := 1 \quad \text{اگر} \quad i=j \qquad\qquad i=1, \ldots, N.$$
$$\qquad 0 \quad \text{اگر} \quad i \neq j. \qquad (۲)$$

بدیهی است که، مجموعهٔ توابع $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ یک مجموعهٔ پایه برای فضای $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ می باشد.

(ج) اگر تعریف زیر را در نظر بگیریم

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \sum_{\mathbf{x} \in X} f_1^*(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{N} f_1^*(\mathbf{x}_i) f_2(\mathbf{x}_i) \qquad (۳)$$

آنگاه واضح است که

$$\langle f, (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) \rangle = \mu_1 \langle f, f_1 \rangle + \mu_2 \langle f, f_2 \rangle \;\; \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \text{ و } \forall f, f_1, f_2 \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$$

بعلاوه، الزاماً داریم

$$\langle f_1, f_2 \rangle^* = \sum_{i=1}^{N} f_1(\mathbf{x}_i) f_2^*(\mathbf{x}_i) = \langle f_2, f_1 \rangle.$$

نهایتاً، $\langle f, f \rangle = \sum_{i=1}^{N} |f(\mathbf{x}_i)|^2 \geq 0$ که فقط وقتی $f=0$ باشد مساوی صفر است. بنابراین، معادلهٔ (۳) یک ضرب اسکالر روی $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ تعریف می کند.

(د) ضرب داخلی معمول روی $\mathbb{C}^N$ بصورت $\langle a, b \rangle^{\mathbb{C}^N} = \sum_{i=1}^{N} a_i^* b_i$ تعریف می شود. که $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ و $b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$. درنتیجه باتوجه به معادلات (۱) و (۳)، داریم

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle i(f_1), i(f_2) \rangle^{\mathbb{C}^N} \qquad (۴)$$

که چنین بیان می شود: ضرب اسکالر تعریف شده بوسیلهٔ معادلهٔ (۳) روی $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ با ضرب اسکالر القا شده بوسیلهٔ یکریختی $i : \mathrm{Map}\,(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^N$ از ضرب اسکالر معمول روی $\mathbb{C}^N$ ، معادل می باشد.

۲۷. نکتهٔ اساسی در اینجا اینست که یک ماتریس $n \times n$ دقیقاً n^2 درایهٔ مستقل دارد و لذا این درایه ها می توانند بعنوان n^2 مؤلفهٔ یک بردار متعلق به $\mathbb{C}^{n^2}$ مورد ملاحظه قرار گیرند. برای ایجاد تناظر میان دو فضای $\mathbb{C}^{n^2}$ و $M(n, \mathbb{C})$ طرق متعددی وجود دارد که همهٔ آنها مبتنی بر این ایدهٔ اساسی هستند. بعنوان یک مثال معمول، نظیر ماتریسی برای بردار $(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2})$ بشکل زیر تعریف می شود.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} & a_{2n+1} & \cdots & a_{n^2-n+1} \\ a_2 & a_{n+2} & a_{2n+2} & \cdots & a_{n^2-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{2n} & a_{3n} & & a_{n^2} \end{pmatrix}$$

یعنی، نگاشت $i : \mathbb{C}^{n^2} \to M(n, \mathbb{C})$ بصورت زیر تعریف می شود

$$(i(a))_{jk} := a_{j+(k-1)n} \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{۱}$$

در حالت $n = 2$، داریم $i(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$ ، و بنابراین ضرب داخلی $\langle A, B\rangle^{M(2,\mathbb{C})}$ بین دو ماتریس A و B متعلق به $M(2, \mathbb{C})$ که درایه های ماتریسی آنها بوسیلهٔ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix},$$

نشان داده می‌شود ازضرب اسکالر روی $\mathbb{C}^4$ بصورت زیر القا می‌شود

$$\langle A, B\rangle^{M(2,\mathbb{C})} = \langle i(a), i(b)\rangle^{M(2,\mathbb{C})} := \langle a, b\rangle^{\mathbb{C}^4} \qquad (۲)$$

که در آن $\langle a,b\rangle^{\mathbb{C}^4}$ ضرب داخلی معمولی $\sum_{i=1}^{4} a_i^* b_i$ روی $\mathbb{C}^4$ می‌باشد و ماتریسهای A و B بترتیب تصویر بردارهای (a_1, a_2, a_3, a_4) و (b_1, b_2, b_3, b_4) تحت یکریختی $i : \mathbb{C}^4 \to M(2, \mathbb{C})$ در نظر گرفته می‌شوند. اگر این نتیجهٔ اخیر را دوباره برحسب درایه های ماتریسی A و B بنویسیم، خواهیم داشت

$$\langle A, B\rangle^{M(2,\mathbb{C})} := A_{11}^* B_{11} + A_{21}^* B_{21} + A_{12}^* B_{12} + A_{22}^* B_{22}. \qquad (۳)$$

طبیعی به نظر می رسد که بتوان طرف راست معادلهٔ اخیر را برحسب ضرب دو ماتریس نوشت، و این می تواند انجام شود اگر الحاقی یک ماتریس بصورت $(A^\dagger)_{jk} := A_{kj}^*$ تعریف گردد. با استفاده از این، معادلهٔ (۳) بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle^{M(2,\mathbb{C})} &:= A_{11}^\dagger B_{11} + A_{12}^\dagger B_{21} + A_{21}^\dagger B_{12} + A_{22}^\dagger B_{22} \\ &= (A^\dagger B)_{11} + (A^\dagger B)_{22}. \end{aligned}$$

این نتیجهٔ نهائی را می توان بصورت زیر نوشت

$$\langle A, B\rangle^{M(2,\mathbb{C})} := \mathrm{Tr}\,(A^{\dagger}B). \tag{۴}$$

اکنون واضح است که چگونه می توان این روش را به $M(n, \mathbb{C})$ تعمیم داد. برای $M(n, \mathbb{C})$ نیز معادلهٔ (۴) نتیجه می گردد.

۲۸. (الف) بیشینه تعداد بردارهای مستقل خطی که یک فضای برداری دربر دارد بعنوان بُعد آن فضای برداری تعریف می شود. نکتهٔ اساسی پرسش حاضر اینست که، اگرچه V و $V_{\mathbf{R}}$ دارای عناصر یکسانی هستند، مفهوم 'استقلال خطی' معانی متفاوتی در این دو حالت دارد. در فضای V، این مفهوم چنین معنی می دهد که هیچ جمع غیربدیهی از بردارها که در آن ضرایب جمع اعداد **مختلط** هستند، صفر نمی شود. باوجود این، در فضای $V_{\mathbf{R}}$ ، ضرایب بسط حقیقی می باشند و بنابراین دو بردار مانند $\mathbf{v}$ و $i\mathbf{v}$ $(i = \sqrt{-1})$ که در V وابستهٔ خطی هستند، در $V_{\mathbf{R}}$ **مستقل خطی** می باشند.

بویژه، اگر $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعه پایه برای V باشد، آنگاه مجموعه بردارهای $\{\mathbf{e}^1, i\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, i\mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n, i\mathbf{e}^n\}$ در $V_{\mathbf{R}}$ مستقل خطی هستند و بنابراین $\dim(V_{\mathbf{R}}) \geq 2n$. باوجود این، اگر $\mathbf{v}$ یک بردار متعلق به $V_{\mathbf{R}}$ باشد بطوریکه نتوان آنرا برحسب این بردارها [با ضرایب حقیقی] بسط داد آنگاه بسط $\mathbf{v}$ متعلق به V بصورت یک ترکیب خطی از $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ با ضرایب مختلط نیز باید غیرممکن باشد. اما نتیجه با این واقعیت که $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعهٔ پایه برای V است در تناقض می باشد، و بنابراین هیچ برداری مانند $\mathbf{v}$ متعلق به $V_{\mathbf{R}}$ وجود ندارد. لذا بیشینه تعداد بردارهای مستقل خطی در $V_{\mathbf{R}}$ ، $2n$ می باشد و لهذا $\dim(V_{\mathbf{R}}) = 2n$.

(ب) هر بردار $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ متعلق به $\mathbb{C}^n$ می تواند بشکل

$$(\mathrm{Re}(a_1) + i\,\mathrm{Im}(a_1), \mathrm{Re}(a_2) + i\,\mathrm{Im}(a_2), \ldots, \mathrm{Re}(a_n) + i\,\mathrm{Im}(a_n))$$

نوشته شود که بدین ترتیب تعریف نگاشت $j : \mathbb{C}^n_{\mathbf{R}} \to \mathbb{R}^{2n}$ بصورت زیر

$$j(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\mathrm{Re}(a_1), \mathrm{Im}(a_1), \ldots, \mathrm{Re}(a_n), \mathrm{Im}(a_n)).$$

القا می شود. واضح است که j یک نگاشت دوسوئی است، و بآسانی می توان دریافت که آن یک نگاشت خطی حقیقی مابین این دو فضای برداری حقیقی است. بنابراین آن یک یکریختی است

(ج) برای اینکه زیرمجموعهٔ W از فضای برداری V یک زیرفضای خطی از V باشد، باید جمع هر دو بردار از W متعلق به W باشد و همچنین بازای هر بردار $\mathbf{w}$ متعلق به W و هر عدد مختلط μ (یا حقیقی) اگر V یک فضای برداری مختلط (یا حقیقی) بوده، $\mu\mathbf{w}$ نیز متعلق به W باشد. بدیهی است که، این شرایط کمتر به حالت حقیقی تحدید می یابند و بنابراین ممکن است یک زیرمجموعه مانند W از فضای برداری مختلط V یک زیرفضای خطی از V نباشد ولی با این وجود، یک زیرفضای خطی از فضای برداری حقیقی $V_{\mathbb{R}}$ باشد.

و این دقیقاً چیزی است که برای مجموعه ماتریسهای $n \times n$ هرمیتی $H := \{A \in M(n, \mathbb{C}) : A = A^\dagger\}$ اتفاق می افتد.

اگر $A, B \in H$ آنگاه

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger = A + B$$

و بنابراین $A + B \in H$. باوجود این، الحاقی μA، که μ یک عدد مختلط است، $(\mu A)^\dagger = \mu^* A$ می باشد و بنابراین μA هرمیتی است (یعنی، متعلق به زیرمجموعهٔ H است) فقط اگر μ یک عدد حقیقی باشد. و این دقیقاً بیان می کند که H یک زیرفضای خطی از فضای برداری حقیقی $M(n, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ بوده اما یک زیرفضای خطی از فضای برداری مختلط $M(n, \mathbb{C})$ نیست.

۲۹. (الف) ساختار فضای برداری روی دوگان V^* نظیر V می تواند مشابه مجموعه تمام

عملگرهای خطی روی V بتوی یک فضای برداری تعریف شود [به معادلهٔ (۲.۴.۲) مراجعه کنید].

اگر $F_1, F_2 \in V^*$ آنگاه

$$(F_1 + F_2)(\mathbf{v}) := F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v}) \qquad \forall\ \mathbf{v} \in V.$$

اگر $F \in V^*$ و $\mu \in \mathbb{C}$ آنگاه

$$(\mu F)(\mathbf{v}) := \mu F(\mathbf{v}) \qquad \forall\ \mathbf{v} \in V.$$

نشان دادن اینکه بدینوسیله یک ساختار فضای برداری مختلط روی V^* تعریف می شود، کار خسته کننده و غیرمهمی است.

(ب) اگر $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ یک مجموعه پایه متعامد یکه برای $\mathscr{H}$ باشد آنگاه هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ را می توان بصورت زیر بسط داد

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}^i, \qquad v_i := \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle \tag{۱}$$

و بنابراین، از آنجا که $F : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت خطی است، داریم

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i F(\mathbf{e}^i). \tag{۲}$$

از طرف دیگر، اگر $\mathbf{w}$ متعلق به $\mathscr{H}$ باشد آنگاه $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i^* v_i$ ، و بنابراین، اگر تعریف زیر را در نظر بگیریم

$$\mathbf{w}_F := \sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}^i)^* \, \mathbf{e}^i \tag{۳}$$

آنگاه، الزاماً بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ رابطهٔ $F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{w}_F, \mathbf{v} \rangle$ بدست می‌آید.
توجه کنید که بردار $\mathbf{w}_F$ که به این طریق بدست می‌آید منحصر بفرد است زیرا، بطور کلی، اگر بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داشته باشیم $\langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}',\mathbf{v} \rangle$ ، آنگاه بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $\langle \mathbf{w}-\mathbf{w}',\mathbf{v} \rangle = 0$ ، بویژه آن برای تمام بردارهای پایهٔ e^i، $i = 1, 2, \ldots, n$ برقرار است. اما این بدین معنی است که $\mathbf{w}-\mathbf{w}'$ نسبت به مجموعهٔ پایهٔ فوق دارای ضرایب بسط صفر است، و بنابراین $\mathbf{w}-\mathbf{w}' = 0$.

توجه کنید که اگر برای تمام مقادیر $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $F_1(\mathbf{e}^i) = F_2(\mathbf{e}^i)$ آنگاه بازای هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $F_1(\mathbf{v}) = F_2(\mathbf{v})$ ، یعنی، $F_1 = F_2$.
نتیجه می‌گردد که نگاشت $F \leadsto \mathbf{w}_F$ یک نگاشت یک‌بیک از $\mathscr{H}^*$ بتوی $\mathscr{H}$ است. باوجود این، اگر $\mathbf{w}$ یک بردار دلخواه متعلق به $\mathscr{H}$ باشد آنگاه نگاشت $\mathbf{v} \leadsto \langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle$ یک تابع خطی روی $\mathscr{H}$ بوده و لذا یک عضو از $\mathscr{H}^*$ است. بنابراین، نگاشت $F \leadsto \mathbf{w}_F$ واقعاً یک نگاشت دوسوئی مابین $\mathscr{H}^*$ و $\mathscr{H}$ است.
با این حال، داریم

$$\mathbf{w}_{(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2)} = \mu_1^* \mathbf{w}_{F_1} + \mu_2^* \mathbf{w}_{F_2} \qquad (۴)$$

و درنتیجه این نگاشت دوسوئی، خطی نبوده اما یک نگاشت پاد - خطی است (به تعریف عملگر پاد - خطی در بخش ۲.۶ مراجعه کنید). با این وجود، این امر پیشنهاد می‌کند که نگاشت دوسوئی خطی (و درنتیجه یکریخت) $j : \mathscr{H}^* \to \mathscr{H}$ را بصورت

$$j(F) := \sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}^i)\, \mathbf{e}^i \qquad (۵)$$

تعریف کنیم، و با این اصلاح جزئی بدیهی، معلوم می‌شود که نگاشت مزبور درواقع دوسوئی خطی است. بنابراین، $\mathscr{H}^* \cong \mathscr{H}$.

تذکر. این قضیه برای فضاهای نامتناهی **صحت ندارد** زیرا در معادلهٔ (۲) قدم عمده متضمن اختیار F از طریق جمع است، و این تنها بوسیلهٔ خطی بودن در حالت با بُعد متناهی می تواند توجیه شود. برای توجیه آن در حالت $\dim \mathscr{H} = \infty$ ، F باید ضرورتاً به توابع پیوسته متعلق باشد. در اینحال، دوگان خیلی بزرگتر از خود $\mathscr{H}$ است.

۳۰. فرض کنید که دنبالهٔ بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots$ قویاً به دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ متعلق به V همگرا باشند. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{v}^n-\mathbf{v}\| = 0 \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{v}^n-\mathbf{v}'\| = 0. \tag{۱}$$

لذا، بازای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$0 \leq \|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\| = \|(\mathbf{v}-\mathbf{v}^n) + (\mathbf{v}^n-\mathbf{v}')\| \leq \|\mathbf{v}-\mathbf{v}^n\| + \|\mathbf{v}'-\mathbf{v}^n\|, \tag{۲}$$

که در آن از نامساوی اساسی مثلث در تعریف نُرم استفاده گردیده است. با اختیار حد $n \to \infty$ در طرف راست، داریم $0 + 0$، زیرا دنبالهٔ $\mathbf{v}^n$ قویاً به هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ همگرا است. بنابراین $\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\| = 0$ که ایجاب می کند $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ زیرا $\|\mathbf{w}\| = 0$ ایجاب می کند که $\mathbf{w} = 0$.

۳۱. (الف) فرض کنید که $\mathbf{S}^N := \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathbf{e}^i$. بنابراین، از آنجا که $\mathscr{H}$ یک فضای کامل است، دنبالهٔ بردارهای $\mathbf{S}^N$ قویاً همگرا هستند اگر و فقط اگر $\mathbf{S}^N$ یک دنبالهٔ کوشی باشد. اما، اگر $N \geq M$،

$$\|\mathbf{S}^N-\mathbf{S}^M\|^2 = \left\| \sum_{i=M}^{N} \mu_i \mathbf{e}^i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=M}^{N} \mu_i \mathbf{e}^i, \sum_{j=M}^{N} \mu_j \mathbf{e}^j \right\rangle = \left| \sum_{i=M}^{N} \mu_i \right|^2$$

و بنابراین $\mathbf{S}^N$ یک دنبالهٔ کوشی از بردارهای متعلق به $\mathscr{H}$ خواهد بود اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{N} \mu_i$ یک دنبالهٔ کوشی از اعداد مختلط باشد. اما این معتبر است اگر و فقط اگر این دنباله همگرا باشد، یعنی، $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i|^2 < \infty$.

(ب) نگاشت $j : \ell_2 \to \mathscr{H}$ را بصورت زیر

$$j(a_1, a_2, \ldots) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{e}^i \tag{۱}$$

تعریف می کنیم که آن خوشتعریف می باشد زیرا دنبالهٔ $(a_1, a_2, \ldots)$ از اعداد مختلط متعلق به ℓ_2 است اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ و، برطبق مباحث بالا، این همچنین شرط لازم برای آنست که جمع بردارها در طرف راست معادلهٔ (۱) متعلق به $\mathscr{H}$ باشد. ملاحظهٔ مشابهی همچنین نشان می‌دهد که $j : \ell_2 \to \mathscr{H}$ یک نگاشت پوشا است و، از آنجا که بوضوح یک بیک و خطی نیز می باشد، درنتیجه j یک نگاشت یکریختی مابین ℓ_2 و $\mathscr{H}$ است.

۳۲. از آنجا که F یک تابع خطی پیوسته روی $\mathscr{H}$ می باشد، می‌توانیم به روشی مشابه با اثبات مسئلهٔ ۲۹ برای وقتی که $\mathscr{H}$ متناهی است، اثبات قضیه را دنبال کنیم.

(**تذکر.** هر تابع خطی روی یک فضای هیلبرت متناهی پیوسته است. بعنوان تمرین آنرا ثابت کنید.) بنابراین مجموعهٔ پایهٔ متعامد یکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots\}$ را برای $\mathscr{H}$ اختیار می کنیم و هر بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ را بصورت زیر بسط می‌دهیم

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \mathbf{e}^i, \qquad v_i := \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{v} \rangle. \tag{۱}$$

لذا، از آنجا که F پیوسته است،

$$F(\mathbf{v}) = F\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} v_i \mathbf{e}^i\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} v_i F(\mathbf{e}^i)\right). \tag{۲}$$

حال. با تعریف زیر

$$\mathbf{w}^N := \sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{e}^i)^* \, \mathbf{e}^i, \tag{۳}$$

داریم

$$\langle \mathbf{w}^N, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{N} v_i F(\mathbf{e}^i) \tag{۴}$$

و بنابراین، اگر برای دنباله $\mathbf{w}^N$ حد $\infty \to N$ وجود داشته باشد، آنگاه می توانیم آنرا بعنوان بردار $\mathbf{w}_F$ اختیار کنیم زیرا، در اینصورت الزاماً بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

$$\langle \mathbf{w}_F, \mathbf{v} \rangle = \langle \lim_{N\to\infty} \mathbf{w}^N, \mathbf{v} \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \mathbf{w}^N, \mathbf{v} \rangle$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} v_i F(\mathbf{e}^i) = F(\mathbf{v})$$

بنابراین وظیفهٔ اصلی مااینست که نشان دهیم $\mathbf{w}^N$ یک دنباله از بردارهای قویاً همگرا در $\mathscr{H}$ است. برطبق نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۱. (الف)، این صحت دارد اگر و فقط اگر

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(\mathbf{e}^i)|^2 < \infty. \tag{۵}$$

اما،

$$\left|\mathbf{w}^N\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|F(\mathbf{e}^i)\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} F(\mathbf{e}^i)_* F(\mathbf{e}^i) = F(\mathbf{w}^N) \qquad (۶)$$

و بنابراین وظیفهٔ ما اینست که نشان دهیم $\lim_{N\to\infty} \left|\mathbf{w}^N\right| < \infty$.
به این منظور، فرض کنید که $\lim_{N\to\infty} \left|\mathbf{w}^N\right| = \infty$. سپس تعریف می کنیم $\mathbf{u}^N := \mathbf{w}^N/\left|\mathbf{w}^N\right|^2$ که برای آن، از معادلهٔ (۶) داریم

$$F(\mathbf{u}^N) = F(\mathbf{w}^N)/\left|\mathbf{w}^N\right|^2 = 1, \Rightarrow \lim_{N\to\infty} F(\mathbf{u}^N) = 1. \qquad (۷)$$

از طرف دیگر، $\left|\mathbf{u}^N\right| = 1/\left|\mathbf{w}^N\right|$ و لذا $\lim_{N\to\infty} \left|\mathbf{u}^N\right| = 0$ که ایجاب می کند $\mathbf{u}^N$ قویاً به 0 همگرا باشد. اما آنگاه از آنجا که F پیوسته است،

$$\lim_{N\to\infty} F(\mathbf{u}^N) = F\left(\lim_{N\to\infty} \mathbf{u}^N\right) = F(\mathbf{0}) = 0 \qquad (۸)$$

که با معادلهٔ (۷) در تناقض می باشد. ازاینرو، باید فرض اولیهٔ $\lim_{N\to\infty} \left|\mathbf{w}^N\right| = \infty$ نادرست باشد. لذااین حد معین بوده و بنابراین رابطهٔ (۵) برقرار می باشد و این بیان می کند که $\mathbf{w}^N$ یک دنبالهٔ برداری قویاً همگرا است، و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می گردد.

۳۳. (الف) برای اینکه نشان دهیم $A^\dagger$ یک عملگر کراندار است، باید $\| A^\dagger \mathbf{v} \|$ را مورد توجه قرار داده و نشان دهیم که دارای کران بالائی مضرب ثابتی از $\| \mathbf{v} \|$ است. بنابراین،

$$\begin{aligned}
&\left|A^\dagger \mathbf{v}\right|^2 \\
&= \langle A^\dagger \mathbf{v}, A^\dagger \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, A A^\dagger \mathbf{v}\rangle \\
&\le \|\mathbf{v}\| \quad \left|A A^\dagger \mathbf{v}\right| && \text{(با استفاده از نامساوی شوارتز)} \\
&\le \|\mathbf{v}\| \quad \|A\| \left|A^\dagger \mathbf{v}\right| && \text{(زیرا } A \text{ یک عملگر کراندار است).}
\end{aligned}$$

درنتیجه،

$$\left|A^{\dagger}\mathbf{v}\right| \leq \|\mathbf{v}\| \quad \|A\| \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathscr{H} \tag{۱}$$

که نشان می‌دهد $A^{\dagger}$ یک عملگر کراندار است.
از آنجا که $\| A^{\dagger} \|$ کوچکترین مقدار عدد b است بطوریکه بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $\| A^{\dagger}\mathbf{v} \| \leq b \| \mathbf{v} \|$، لذا از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$\| A^{\dagger} \| \leq \| A \|. \tag{۲}$$

با این وجود، همچنین می‌دانیم که $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$ و بنابراین، از تکرار بحث بالا با معاوضهٔ جای $A^{\dagger}$ و A، نتیجه می‌شود که

$$\| A \| \leq \| A^{\dagger} \| \tag{۳}$$

و بنابراین از معادلات (۳-۲)، نتیجه می‌گیریم که $\| A \| = \| A^{\dagger} \|$.
(ب) باید نُرم $\| AB\mathbf{v} \|$ را بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ مورد توجه قرار دهیم. لذا،

$$\|AB\mathbf{v}\|^2 = \langle AB\mathbf{v}, AB\mathbf{v}\rangle = \langle B\mathbf{v}, A^{\dagger}AB\mathbf{v}\rangle$$

$$\leq \|B\mathbf{v}\| \left|A^{\dagger}AB\mathbf{v}\right| \qquad \text{(با استفاده از نامساوی شوارتز)}$$

$$\leq \|B\|\|\mathbf{v}\| \left|A^{\dagger}\right| \|AB\mathbf{v}\| \text{(زیرا } A^{\dagger} \text{ و } B \text{ کراندار هستند)}.$$

بنابراین،

$$\|AB\mathbf{v}\| \leq \|A\|\|B\|\|\mathbf{v}\| \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathscr{H}$$

و این نشان می‌دهد که عملگر AB کراندار است بطوریکه $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

۳۴. (الف) داریم $(\mathbb{1} - P)^\dagger = \mathbb{1}^\dagger - P^\dagger = \mathbb{1} - P$ و بنابراین $(\mathbb{1} - P)$ یک عملگر هرمیتی است. و،

$$(\mathbb{1}-P)^2 = (\mathbb{1}-P)(\mathbb{1}-P) = \mathbb{1} - 2P + P^2 = \mathbb{1} - P.$$

بعلاوه، بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم

$$\begin{aligned}\|(\mathbb{1}-P)\mathbf{v}\|^2 &= \langle(\mathbb{1}-P)\mathbf{v}, (\mathbb{1}-P)\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, (\mathbb{1}-P)(\mathbb{1}-P)\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle\mathbf{v}, (\mathbb{1}-P)\mathbf{v}\rangle \leq \|\mathbf{v}\| \|(\mathbb{1}-P)\|.\end{aligned}$$

بنابراین $(\mathbb{1} - P)$ یک عملگر کراندار هرمیتی با ویژگی $(\mathbb{1} - P)^2 = (\mathbb{1} - P)$ می باشد و لذا یک عملگر تصویری است.

(ب) با استفاده از بحثی مشابه با آنچه که قبلاً بدفعات متعدد بکار رفت، داریم

$$\begin{aligned}\| P\mathbf{v}\|^2 &= \langle P\mathbf{v}, P\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, P^2\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, P\mathbf{v}\rangle \\ &\leq \|\mathbf{v}\| \| P\mathbf{v}\| \qquad \forall\ \mathbf{v} \in \mathscr{H},\end{aligned}$$

بنابراین $\| P\mathbf{v} \| \leq \| \mathbf{v} \|$، که نشان می‌دهد $\| P \| \leq 1$.

(ج) فرض کنید که $P\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$، یعنی، μ یک مقدار ویژه P با بردار ویژه $\mathbf{v}$ است. سپس

$$\mu\mathbf{v} = P\mathbf{v} = P^2\mathbf{v} = P(P\mathbf{v}) = P(\mu\mathbf{v}) = \mu^2\mathbf{v}$$

و لذا، از آنجا که $\mathbf{v} \neq 0$، داریم $\mu - \mu^2 = 0$، یعنی، $\mu(1 - \mu) = 0$. بنابراین مقادیر ویژه ممکن برای P عبارتند از $\mu = 1$ و $\mu = 0$.

واقعاً هر دومقدار ویژه برای P وجود دارند زیرا اگر $\mathbf{v}$ هر بردار متعلق به $\mathscr{H}$ باشد بطوریکه $P\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (در غیر این صورت $\mathbf{v}$ یک بردار ویژهٔ نظیر مقدار ویژهٔ 0 است) آنگاه $P(P\mathbf{v}) = P^2\mathbf{v} = P\mathbf{v}$ ، یعنی، $P\mathbf{v}$ یک بردارویژهٔ P با مقدار ویژهٔ $\mu = 1$ است.

به همان ترتیب، بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $P(\mathbb{1}-P)\mathbf{v} = (P - P^2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ و بنابراین بازای هر بردار $\mathbf{v}$ که برای آن $(\mathbb{1} - P)\mathbf{v} \neq 0$ برقرار باشد، $(\mathbb{1}-P)\mathbf{v}$ یک بردار ویژهٔ غیربدیهی P با مقدار ویژهٔ 0 می باشد. همیشه برداری مانند $\mathbf{v}$ که برای آن $P \neq \mathbb{1}$ است وجود دارد.

قبلاً نشان دادیم که $\| P \| \geq 1$. اما اگر $\mathbf{v}$ یک بردار ویژه P با مقدار ویژهٔ 1 باشد آنگاه $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$، و این ایجاب می کند که $\| P \| \leq 1$. بنابراین $\| P \| = 1$.

(د) برای اثبات هرمیتی بودن، بازای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ باید نشان دهیم که $\langle \mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle = \langle P\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. اما $P\mathbf{v} = \mathbf{v}_W$ و لذا

$$\langle \mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle = \langle (\mathbf{u}_W + \mathbf{u}_{W_\perp}), \mathbf{v}_W \rangle = \langle \mathbf{u}_W, \mathbf{v}_W \rangle, \qquad (۱)$$

که در آن تجزیه منحصر بفرد $\mathbf{u} = \mathbf{u}_W + \mathbf{u}_{W_\perp}$ با $\mathbf{u}_W \in W$ و $\mathbf{u}_{W_\perp} \in W_\perp$ مورد استفاده قرار گرفته است. به همان ترتیب،

$$\langle P\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_W, (\mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W_\perp}) \rangle = \langle \mathbf{u}_W, \mathbf{v}_W \rangle \qquad (۲)$$

و از مقایسه معادلات (۱) و (۲)، نتیجه می شود که بازای هر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $\langle P\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P\mathbf{v} \rangle$. بنابراین P یک عملگر هرمیتی است.

اگر $\mathbf{w}$ یک بردار متعلق به W باشد آنگاه $P\mathbf{w} = \mathbf{w}$ و لذا، بویژه، بازای هر $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathscr{H}$ داریم $P(P\mathbf{v}) = P\mathbf{v}$. اما این دقیقاً بمعنی $P^2 = P$ است. قبلاً در قسمت (الف) نشان دادیم که هر عملگر هرمیتی Q که در معادلهٔ $Q^2 = Q$ صدق می کند

کراندار است [آنرا برای $Q = (\mathbb{1} - P)$ ثابت کردیم اما روش مذکور اثبات آنرا در حالت کلی نیز ایجاب می‌کند] و بنابراین P یک عملگر کراندار است.

تذکر. واضح است که

$$W = \{\mathbf{v} \in \mathscr{H} : \quad P\mathbf{v} = \mathbf{v}\} \tag{۳}$$

$$W_\perp = \{\mathbf{v} \in \mathscr{H} : \quad \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \tag{۴}$$

لهذا، W و $W_\perp$ بترتیب فضاهای ویژه نظیر مقادیر ویژه 1 و 0 برای عملگر P هستند. قابل توجه است که وضعیت معکوس نیز بکار می‌رود، یعنی، هر عملگر تصویری روی $\mathscr{H}$ می‌تواند به یک زیرفضای بستهٔ خاص W وابسته گردد بطوریکه $\mathscr{H} \cong W \oplus W_\perp$. یک تعریف ساده برای W بوسیلهٔ معادلهٔ (۳) ارائه می‌شود، یعنی، بعنوان مجموعه تمام بردارهای ویژه با مقدار ویژه 1، و لذا می‌توان نشان داد که W یک زیرفضای خطی بسته از $\mathscr{H}$ بوده و $W_\perp$ دقیقاً مجموعه تمام بردارهای ویژه با مقادیر ویژهٔ صفر است.

نتیجه می‌گیریم که یک تناظر یک بیک میان زیرفضاهای خطی بستهٔ $\mathscr{H}$ و عملگرهای تصویری وجود دارد. این نتیجه بهمراه دیدگاه هندسی با مفهوم جبری عملگر هرمیتی بصورت $P^2 = P$ حائز اهمیت زیادی بوده و ما را قادر می‌سازد که جنبه های ضروری دیگر را موردتوجه قرار دهیم.

۳۵. ماتریسهای $n \times n$ مربعی M و N نمایشهای ماتریسی عملگر A بترتیب نسبت به دو مجموعهٔ پایه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ و $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \ldots, \mathbf{f}^n\}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$A\mathbf{e}^i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j M_{ji}, \quad A\mathbf{f}^i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}^j N_{ji}\,. \tag{۱}$$

از آنجا که هر عضو $\mathbf{e}^i$ از مجموعهٔ پایهٔ اول می‌تواند برحسب اعضای مجموعه پایهٔ دوم بسط داده شود، و برعکس، باید یک ماتریس وارون پذیر $n \times n$ مربعی مانند B متعلق به

وجود داشته باشد بطوریکه $GL(n, \mathbb{C})$

$$\mathbf{f}^i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^k B_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{۲}$$

عملگر A را روی هر دو طرف این معادله اثر می‌دهیم، و با استفاده از معادلهٔ (۱) داریم

$$A\mathbf{f}^i = \sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{e}^k) B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j M_{jk} B_{ki}. \tag{۳}$$

اما طرف چپ این معادله را همچنین می توان بصورت زیر بیان نمود

$$A\mathbf{f}^i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}^k N_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}^j B_{jk} N_{ki} \tag{۴}$$

و از مقایسه معادلات (۳) و (۴) [با در نظر گرفتن اینکه $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی است] داریم

$$\sum_{k=1}^{n} B_{jk} N_{ki} = \sum_{k=1}^{n} M_{jk} B_{ki} \tag{۵}$$

یا، بشکل ماتریسی، $BN = MB$ و بنابراین، از آنجا که B واروں پذیر است، نمایشهای ماتریسی نسبت به دو مجموعه پایه بصورت زیر به هم مربوط می گردند

$$M = BNB^{-1}$$

۳۶. با استفاده از نتایج مسئله ۱۴، گروه S_3 را بصورت مجموعهٔ شش عضوی $\{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$ با روابط

$$x^2 = y^3 = e, \quad yx = xy^2, \quad y^2x = xy, \tag{۱}$$

و

$$e := 123,\ x := 213,\ y := 321,\ y^2 = 231,\ xy = 321,\ xy^2 = 132.$$

نمایش می‌دهیم. فضای نمایش مختلط یک بُعدی T همان فضای $\mathbb{C}$ است و هر $T(g)$ ، $g \in S_3$ ، یک عدد مختلط وارون پذیر است که بوسیلهٔ ضرب معمولی اعداد مختلط روی یک بردار $\mathbf{v}$ متعلق به $\mathbb{C}$ (یعنی، هر عدد مختلط) عمل می‌کند.
پس $T(e) = 1$ و $x^2 = e$ ایجاب می‌کند که $[T(x)]^2 = 1$ ، لذا

$$T(x) = +1 \quad \text{یا} \quad -1. \tag{۲}$$

بهمان ترتیب، رابطهٔ $y^3 = e$ ایجاب می‌کند که $[T(y)]^3 = 1$ و بنابراین

$$\mathrm{T(y)} = 1, \quad \text{یا} \quad e^{2i\pi/3}, \quad \text{یا} \quad e^{-2i\pi/3}. \tag{۳}$$

باوجود این، رابطهٔ $y^2x = xy$ ایجاب می‌کند $[T(y)]^2\, T(x) = T(x)\ T(y)$ که باتوجه به $T(x) = \pm 1$، نتیجه می‌گیریم $[T(y)]^2 = T(y)$، یعنی، $T(y) = 1$ تنها انتخاب ممکن از مقادیر موجود در معالهٔ (۳) می‌باشد که با این معادله سازگار است.
لذا $T(x) = \pm 1$ و $T(y) = 1$، که بوضوح با رابطهٔ $yx = xy^2$ نیز سازگار هستند. اکنون می‌توان با تعریف سادهٔ سایر عملگرها برحسب $T(x)$ و $T(y)$ در عبارات جبری مربوطه، بعنوان مثال، $T(xy) := T(x)\ T(y)$، یک نمایش سازگار بدست آورد.
بنابراین ملاحظه می‌شود که دو نمایش مختلط یک بُعدی برای گروه S_3 وجود دارد:
(الف) یکی از آنها نمایش بدیهی $T(g) = 1$ بازای هر g متعلق به S_3 می‌باشد.
(ب) نمایش دیگر عبارتست از:

$$T(e) = T(y) = T(y^2) = 1$$
$$T(x) = T(xy) = T(xy^2) = -1. \qquad (۴)$$

واضح است که هستهٔ نمایش بدیهی، تمام گروه S_3 است.
هستهٔ نمایش غیربدیهی در معادلهٔ (۴) زیرگروه تشکیل یافته از اعضای مجموعهٔ $\{e, y, y^2\}$ می باشد که باتوجه به $y^3 = e$، آن همان گروه $\mathbb{Z}_3$ است.

۳۷. هر نمایشی از یک گروه متناهی یک نمایش یکانی است بنابراین بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود نمایش دو بُعدی آنرا روی فضای برداری $\mathbb{C}^2$ برحسب ماتریسهای یکانی ۲ × ۲ دنبال می کنیم.

علاوه بر این، از آنجا که نمایشها را صرفنظر از تبدیلات مشابه آنها مورد توجه قرار می دهیم، ممکن است هر عضو گروه خاص بوسیلهٔ یک ماتریس قطری نمایش داده شود. (از اینرو باید بردارهای ویژه نظیر یک عملگر خاص بعنوان مجموعهٔ پایه برای $\mathbb{C}^2$ مورد استفاده قرار گیرد).

لذا، نمایش ماتریسی یکانی عضو y متعلق به S_3 را بصورت $U(y) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ در نظر می گیریم. شرط یکانی بودن نتیجه می‌دهد $|p|^2 = |q|^2 = 1$، وشرط $y^3 = e$ ایجاب می کند که $[U(y)]^3 = 1$ درنتیجه p و q هر دو ریشهٔ سوم واحد هستند، یعنی،

$$p^3 = q^3 = 1. \qquad (۱)$$

نمی توان فرض کرد که $U(x)$ یک ماتریس قطری است زیرا $xy \neq yx$ ایجاب می کند که $U(x)\,U(y)$ و $U(y)\,U(x)$ معادل نباشند، درحالیکه دو ماتریس قطری الزاماً جابجا می شوند. ازاینرو نمایش ماتریسی x را بصورت $U(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ می نویسیم و ما باید، قیودی را که روی اعداد مختلط a، b، c، d، p، q توسط قیدهای $x^2 = e$ ، $yx = xy^2$ و

$y^2x = xy$ تحمیل می گردد، بدست آوریم.
برای بدست آوردن نتایج این قیود راههای متفاوتی وجود دارند، یک آغاز کارآمد ملاحظهٔ معادلهٔ زیر است

$$U(y)\,U(x) = U(x)\,[U(y)]^2 \tag{۲}$$

که ایجاب می کند $\det\,[U(y)] = 1$، درنتیجه $pq = 1$، و باتوجه به $p^3 = 1$ داریم $q = p^2$. لذا

$$U(y) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad p^3 = 1. \tag{۳}$$

روابط $yx = xy^2$ و $y^2x = xy$ بترتیب ایجاب می کنند که $U(y)\ U(x) = U(x)\ [U(y)]^2$ و $[U(y)]^2\ U(x) = U(x)\ U(y)$، درنتیجه با استفاده از معادلهٔ (۳) داریم

$$\begin{pmatrix} pa & pb \\ p^2c & p^2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^2 & bp \\ cp^2 & dp \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} p^2a & p^2b \\ pc & pd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^2 & bp^2 \\ cp & dp \end{pmatrix} \tag{۴}$$

که ایجاب می کند $ap(1-p) = dp(1-p) = 0$ یا، ازآنجا که $p \neq 0$ (زیرا $p^3 = 1$)،

$$a(1-p) = d(1-p) = 0. \tag{۵}$$

یکی از جوابهای معادلهٔ (۵)، $p = 1$ است. با این وجود، جواب مذکور ایجاب می کند که $U(y) = \mathbb{1}$ و بنابراین $U(y)$ با $U(x)$ جابجا می شود. این بدان معنی است که $U(x)$ می تواند بطور همزمان با $U(y)$، قطری شود، و درنتیجه بازای هر g متعلق به S_3، ماتریسهای $U(g)$ همزمان قطری می شوند و آنها را می توان بصورت حاصلضرب ساده ای از $U(x)$ و $U(y)$ معرفی نمود. اما در اینصورت نمایشها تقلیل ناپذیر نخواهند بود همچنانکه بردارهای ستونی متعلق به $\mathbb{C}^2$ بشکل $\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}$، یک زیرفضای S_3- ناوردا از $\mathbb{C}^2$ نخواهند بود [و همینطور برای $\begin{pmatrix}0\\\mu\end{pmatrix}$].

بنابراین باید جواب دیگر معادلهٔ (۵)، یعنی صرفاً، $a = d = 0$ را انتخاب نمائیم. اما آنگاه قید $x^2 = e$ ایجاب می کند که $[U(x)]^2 = \mathbb{1}$ و لذا داریم $bc = 1$. علاوه بر این، از یکانی بودن $U(x)$ داریم $|b|^2 = |c|^2 = 1$. در یک جمعبندی از نتایج ملاحظه می شود که

$$U(x) = \begin{pmatrix}0 & b\\ b^{-1} & 0\end{pmatrix} |b| = 1; \quad U(y) = \begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p^2\end{pmatrix} p^3 = 1 \tag{۶}$$

و وظیفهٔ کنونی ما، توجه به حوزهٔ مقادیر مختلف ممکن برای p و b متناظر با تبدیلات مشابه متفاوت است. تا حد زیادی آنچه را که بدنبالش هستیم یک مسئلهٔ آشنا از عملیات دستی روی ماتریسهای ۲ × ۲ است. به این منظور، نتیجهٔ زیر مفید است. تبدیل زیر

$$\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & 1/z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & bz^2\\ c/z^2 & d\end{pmatrix} \tag{۷}$$

با شرط $|z| = 1$ یک تبدیل مشابه با یک ماتریس یکانی است. درنتیجه اگر z را چنان انتخاب کنیم که $z^2 = 1/b$، آنگاه نمایش یکانی زیر را با این تبدیل مشابه بدست می‌آوریم

$$U(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U(y) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

که $p^3 = 1$ (اما $p \neq 1$). متناظر با دو مقدار ممکن $p = e^{+2i\pi/3}$ و $p = e^{-2i\pi/3}$ نمایشهای ماتریسی زیر را داریم

$$U(y) = \begin{pmatrix} e^{+2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} e^{-2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{+2i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

با این وجود، با یک تبدیل مشابه بوسیلهٔ ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ که $U(x)$ را حفظ می‌کند می‌توان آنها را معاوضه نمود.

بنابراین، صرفنظر از تبدیلات مشابه، تنها یک نمایش تقلیل ناپذیر دوبُعدی منحصربفرد برای گروه S_3 وجود دارد

$$p := e^{2i\pi/3},$$

$$\begin{aligned} &U(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U(y) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, \\ &U(y^2) = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, U(xy) = \begin{pmatrix} 0 & p^2 \\ p & 0 \end{pmatrix}, U(xy^2) = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p^2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (۹)$$

واضح است که این نمایش وفادار بوده و نیز دارای هستهٔ بدیهی است.

۳۸. (الف) باید نشان دهیم که بازای هر g_1 و g_2 متعلق به G داریم $T(g_1)\,T(g_2) = T(g_1\,g_2)$. اما،

$$
\begin{aligned}
\big(T(g_1)\,T(g_2)\,f\big)\,(x) &= \big(T(g_1)\,(T(g_2)\,f)\big)\,(x) \\
&= \big(T(g_2)\,f\big)\,(g_1^{-1}x) \\
&= f(g_2^{-1}\,g_1^{-1}x) \\
&= f\big((g_1\,g_2)^{-1}\,x\big) \\
&= \big(T(g_1\,g_2)\,f\big)\,(x)
\end{aligned}
$$

و از آنجا نتیجه بدست می آید.

(ب) برای آنکه نشان دهیم این نمایش یکانی است باید ثابت کنیم که ضرب اسکالر را حفظ می کند، ازاینرو مستقیماً عبارت زیر را مورد توجه قرار می دهیم

$$
\langle T(g)\,f_2,\, T(g)\,f_1\rangle = \sum_{x\in X} f_2^*(g^{-1}\,x)\,f_1\,(g^{-1}\,x). \tag{۱}
$$

اما وقتی گفته می شود که گروه G روی X عمل می کند، به این معنی است که هر عضو g متعلق به G بعنوان یک نگاشت دوسوئی روی X عمل می کند، و درنتیجه از آنجا که در معادلهٔ (۱) نقطهٔ x متعلق به X در جمع سمت راست روی هر عضو X تغییر می کند، نقطه gx (برای یک g داده شده) نیز روی هر عضو X تغییر می کند. لذا طرف راست (۱) معادل است با

$$
\sum_{x\in X} f_2^*(x)\,f_1(x) = \langle f_2, f_1\rangle
$$

و بنابراین نمایش یکانی می باشد.

۳۹. (الف) بطور کلی، بیان ماتریسی یک عملگر خطی مانند A نسبت به هر مجموعهٔ پایه در فضای هیلبرت بصورت زیر تعریف می شود

$$Ae^i = \sum_{j=1}^{n} e^j A_{ji} \quad i = 1, \ldots, n = \dim \mathscr{H} < \infty. \tag{۱}$$

اگر $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ یک مجموعه پایه متعامد یکه باشد آنگاه از ضرب اسکالر طرفین معادلهٔ (۱) در عضو خاص e^k داریم

$$\langle e^k, Ae^i \rangle = A_{ki} \quad k, i = 1, \ldots, n \tag{۲}$$

که بیان صریح فوق برای ماتریس A_{ij} یک نمایش عملگر A می باشد.
بنابراین، در مورد نمایش باقاعده، ماتریس نمایشی $M(g)$ نظیر عملگر $R(g)$ نسبت به بردارهای پایهٔ متعامد یکه $\{f^g, g \in G\}$ یک ماتریس مربعی $|G| \times |G|$ است و اعضای ماتریسی آن، $M_{g_1 g_2}$ که بوسیلهٔ دو عضو g_1 (اندیس سطر) و g_2 (اندیس ستون) علامت گذاری شده اند، بصورت زیر تعریف می شوند

$$M_{g_1 g_2}(g) := \langle f^{g_1}, R(g) f^{g_1} \rangle = \sum_{a \in G} f^{g_1 *}(a) f^{g_2}(g^{-1} a)$$
$$= f^{g_2}(g^{-1} g_1).$$

بنابراین نمایش ماتریسی نمایش باقاعده چپ نسبت به مجموعهٔ پایه متعامد یکه خاص بصورت زیر است

$$M_{g_1 g_2}(g) = 1 \quad \text{اگر} \quad g_2 = g^{-1} g_1, \quad (\text{یعنی، اگر } g = g_1 g_2^{-1})$$
$$= 0 \quad \text{اگر} \quad g_2 = g^{-1} g_1 \tag{۳}$$

(ب) اگر $G = \mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^2\}$ بطوریکه $a^3 = e$، آنگاه نمایش باقاعدهٔ آن سه بُعدی است زیرا $|\mathbb{Z}_3| = 3$. محاسبهٔ مستقیم نشان می دهد که

$$M(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, M(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$M(a^2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(ج) باید نشان دهیم که $S(g_1)\,S(g_2) = S(g_1\,g_2)$. اما، اگر $f \in \operatorname{Map}(G, \mathbb{C})$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned}(S(g_1)\,S(g_2)f)\,(g') &= (S(g_1)\,(S(g_2)f))\,(g')\\ &= (S(g_2)f)\,(g'\,g_1)\\ &= f(g'\,g_1\,g_2) = (S(g_1\,g_2)f)\,(g')\end{aligned}$$

و از آنجا نتیجه بدست می آید.

وجود یا فقدان عامل g^{-1} در نمایشهای باقاعدهٔ چپ و راست پیشنهاد می کند که نگاشت $A : \operatorname{Map}(G, \mathbb{C}) \to \operatorname{Map}(G, \mathbb{C})$ بعنوان یک عملگر ارتباطی بصورت زیر تعریف شود

$$(Af)\,(g) := f(g^{-1}). \qquad (۴)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که A یک عملگر یکانی است. به این منظور توجه کنید که

$$\langle Af_1, Af_2\rangle = \sum_{g\in G}(Af_1)^*(g)\,(Af_2)\,(g) = \sum_{g\in G} f_1^*(g^{-1})\,f_2(g^{-1})$$

$$= \sum_{g\in G} f_1^*(g)\,f_2(g) \qquad (۵)$$

زیرا جمع روی g با جمع روی g^{-1} معادل است. لذا بازای هر f_1 ، f_2 متعلق به $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ داریم $\langle Af_1, Af_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle$. علاوه بر این $A^2 = \mathbb{1}$ و لذا A^{-1} وجود دارد، که درحقیقت با خود A معادل است. بنابراین A یک عملگر یکانی می‌باشد.

اکنون عملگر $AR(g)\,A^{-1}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم، بازای هر عضو g' متعلق به G داریم

$$\begin{aligned}
&\big(AR(g)\,A^{-1}f\big)(g')\\
&= \big(R(g)\,A^{-1}f\big)\,(g'^{-1}) = (A^{-1}f)\,(g^{-1}\,g'^{-1})\\
&= (A^{-1}f)\,\big((g'\,g)^{-1}\big) = f(g'\,g)\\
&= \big(S(g)\,f\big)\,(g')
\end{aligned}$$

و آن ایجاب می کند که

$$AR(g)\,A^{-1} = S(g) \qquad \forall \;\; g\in G$$

بنابراین نمایشهای باقاعده چپ و راست گروه متناهی G معادل یکانی هستند.

۴۰. روابط تعامد مربوطه با استفاده از معادلهٔ (۶.۵.۳) بصورت زیر می باشند

$$\langle \chi_\mu, \chi_{\mu'} \rangle = \delta_{\mu\mu'}, \tag{۱}$$

که در آن χ_μ و $\chi_{\mu'}$ بترتیب مشخصه های نمایشهای تقلیل ناپذیر مربوط به اندیسهای μ و μ' هستند، و ضرب اسکالر بهنجار شده روی $\mathrm{Map}(G, \mathbb{C})$ دقیقاً بصورت زیر تعریف می شود

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1^*(g)\, f_2(g). \tag{۲}$$

مشخصه های نظیر نمایش یک بُعدی بدیهی و غیربدیهی گروه S_3 در معادلهٔ (۴) مسئله ۳۶ را بترتیب با $\chi_{\mathbf{1}}(g)$ و $\chi_1(g)$ ، و همچنین مشخصهٔ نمایش دوبُعدی S_3 در معادلهٔ (۹) مسئله ۳۷ را با $\chi_2(g)$ نشان می‌دهیم. از آنجا که $\chi(g) := \mathrm{Tr}\ U(g)$ ، می توان بی‌درنگ مقادیر مشخصه های نمایشهای ماتریسی تصریح شده در معادلات (۴) و (۹) را تعیین نمود. [البته، مشخصه یک نمایش یک بُعدی درست خود عدد مختلط $U(g)$ می باشد.]

نتایج مربوطه را می توان در جدول زیر خلاصه نمود (در این جدول $p = e^{2i\pi/3}$ اختیار شده است، و آن ایجاب می کند که $p + p^2 = -1$).

	$\chi_{\mathbf{1}}$	χ_1	χ_2
e	1	1	2
x	1	-1	0
y	1	1	$p+p^2 = -1$
y^2	1	1	$p^2+p = -1$
xy	1	-1	0
xy^2	1	-1	0

بنابراین،

$$\langle \chi_1, \chi_1\rangle = \frac{1}{6}(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 1 \qquad (۳)$$

$$\langle \chi_1, \chi_1\rangle = \frac{1}{6}(1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1 \qquad (۴)$$

$$\langle \chi_2, \chi_2\rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2) = 1 \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned}\langle \chi_1, \chi_2\rangle &= \frac{1}{6}(1\times 2+(-1)\times 0+1\times(-1) \\ &\quad + 1\times(-1)+(-1)\times 0+(-1)\times 0) \\ &= \frac{1}{6}(2-1-1) = 0 \end{aligned} \qquad (۶)$$

که همهٔ آنها با نتایج پیش بینی شده توسط معادلهٔ (۱) در توافق هستند.
توجه کنید که بطور کلی، مشخصهٔ نمایش بدیهی $U(g) = \mathbb{1}$ بازای هر g متعلق به G، همواره (مستقل از $g \in G$) مضرب 1 می باشد وبنابراین ضرب داخلی این مشخصه با هر مشخصهٔ دیگر χ عبارت است از $\sum_{g\in G} \chi(g)$. همچنین می توان با استفاده از جدول ملاحظه نمود که $\langle \chi_1, \chi_1\rangle = \langle \chi_1, \chi_2\rangle = 0$ ، و باین ترتیب اثبات معادلهٔ (۱) در مورد مثال خاص S_3 کامل می گردد.

واژه نامهٔ انگلیسی - فارسی

A

abelian group — گروه آبلی
adjoint — الحاقی
angular momentum — اندازهٔ حرکت زاویه ای
anti-linear operator — عملگر پاد - خطی
anti-unitary operator — عملگر پاد - یکانی
associative — شرکت پذیر
automorphism — خودریختی

B

Banach space — فضای باناخ
basis vectors — بردارهای پایه
Bessel's inequality — نامساوی بسل
bijection — دوسویه (دوسویی)

bounded operator	عملگر کراندار
Burnside's theorem	قضیهٔ بورنساید

C

canonical commutation relations	روابط جابجائی کانونیکی
Cartesian product	ضرب کارتزی
Cauchy convergence	همگرائی کوشی
Cauchy sequence	دنباله کوشی
Cayley's theorem	قضیهٔ کیلی
centre	مرکز
character	مشخصه
closed subspace	زیرفضای بسته
closure	بستار
combination law	قانون ترکیب
comutative diagram	دیاگرام جابجائی
complementary subspaces	زیرفضاهای مکمل
complete space	فضای کامل
complex numbers	اعداد مختلط
conjugacy classes	کلاسهای مزدوجی (همیوغی)
conjugation	مزدوجی (همیوغگی)
continuous groups	گروههای پیوسته
convolution	تلفیق
coplanar	همسطح
coset	همرده
cyclic group	گروه دوری

D

degeneracy	تبهگنی
differentiable manifold	چندگونای دیفرانسیل پذیر
dimension	بُعد
direct sum	جمع مستقیم
direct sum representation	نمایش جمع مستقیم

E

eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
equivalent representations	نمایش های معادل
equivariant	هموردا
expansion coefficients	ضرایب بسط

F

faithful representation	نمایش وفادار
finite group	گروه متناهی

G

G - invariant	G - ناوردا
general linear group	گروه خطی عمومی

group algebra	جبر گروه
groups representations	نمایش های گروه

H

hermitian	هرمیتی
homomorphism	همریختی

I

identity map	نگاشت همانی
image	تصویر
incomplete space	فضای غیرکامل
infinite sequences	دنباله های بی پایان
injective	یک سویی (یک سویه)
inner product	ضرب نرده ای
internal symmetry group	گروه تقارن داخلی
intertwining operator	عملگر ارتباطی
intrinsic spin	اسپین ذاتی
invariant subspace	زیرفضای ناوردا
irreducible representation	نمایش تقلیل ناپذیر
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
isotropy group	گروه همروندی

K

kernel هسته

L

left coset همرده چپ
Lie group گروه لی
limit vector بردار حدی
linear map نگاشت خطی
linear operator عملگر خطی
linear representation نمایش خطی
linear subspace زیرفضای خطی
linear transformations تبدیلات خطی
linearyl dependent وابستگی خطی
linearly independent استقلال خطی
little group گروه کوچک

M

map نگاشت
matrix addition جمع ماتریسی
matix groups گروههای ماتریسی
matrix multiplication ضرب ماتریسی
matrix representation نمایش ماتریسی

mixed states	حالات مرکب
Möbius transformations	تبدیلات موبیوس
monoid	تکواره
morphism	ریختار

N

norm	نُرم (طول)
normal subgroup	زیرگروه نرمال
normed vector spaces	فضاهای برداری نُرم‌دار

O

observable	مشاهده‌پذیر
orbit	مدار
order	مرتبه
orthogonal complement	مکمل متعامد
orthogonal group	گروه متعامد
orthonormal basis	پایهٔ متعامد یکه
orthonormal pair	جفت متعامد یکه
orthonormal subset	زیرمجموعه متعامد یکه
outer product	ضرب خارجی
overlap function	تابع همپوشانی

P

permutation	جایگشت
permutation group	گروه جایگشت
physical observable	مشاهده پذیر فیزیکی
prime number	عدد اول
probability	احتمال
projection	تصویر
projective representation	نمایش تصویری
projective space	فضای تصویری
proper subgroup	زیرگروه سره

Q

quantum states	حالات کوانتمی
quantum system	سیستم کوانتمی
quotient representation	نمایش خارج قسمت
quotient space	فضای خارج قسمت
quotient vector space	فضای برداری خارج قسمت

R

rational numbers	اعداد گویا
real dimension	بُعد حقیقی
real numbers	اعداد حقیقی

reducible representation — نمایش تقلیل پذیر
reference frames — چارچوب های مرجع
regular representation — نمایش باقاعده
relativistic quantum theory — نظریهٔ کوانتم نسبیتی
restriction — تحدید
Riemann integration — انتگرال گیری ریمانی
right coset — همرده راست
rotation group — گروه دوران

S

Schwarz inequality — نامساوی شوارتز
semi-direct product — ضرب نیمه مستقیم
separable space — فضای جداپذیر
set — مجموعه
shift operator — عملگر انتقال
similarity transformation — تبدیل تشابه
span — پدید آوردن
special linear group — گروه خطی خاص
special orthogonal group — گروه متعامد خاص
special unitary group — گروه یکانی خاص
spectral theorem — قضیهٔ طیفی
square-integrable function — تابع انتگرال پذیر مجذوری
stability group — گروه پایداری
state vector — بردار حالت

strong convergence	همگرائی قوی
subrepresentation	زیرنمایش
subspace	زیرفضا
surjective	پوشا
symmetric group	گروه متقارن
symmetry	تقارن

T

time evolution	تکامل زمانی
topological structure	ساختار توپولوژیکی
torus	چنبره
trace	رد
transitive action	عمل متعدی
translation group	گروه انتقال
triangle inequality	نامساوی مثلث

U

unbounded operator	عملگر غیرکراندار
unit element	عضو واحد
unitary equivalent	معادل یکانی
unitary group	گروه یکانی
unitary operator	عملگر یکانی
unitary representation	نمایش یکانی

V

vector space	فضای برداری

W

wave mechanics	مکانیک موجی
wavefunction	تابع موج
Weyl - Heisenberg group	گروه وایل - هایزنبرگ
Wigner's theorem	قضیهٔ ویگنر

فهرست نمادها

فهرست کلمات

الف

ب

پ

ت

ح

خ

د

ر

ز

س

ش

ص

ض

ع

ق

ک

گ

ل

م

ن

و

هـ

ی