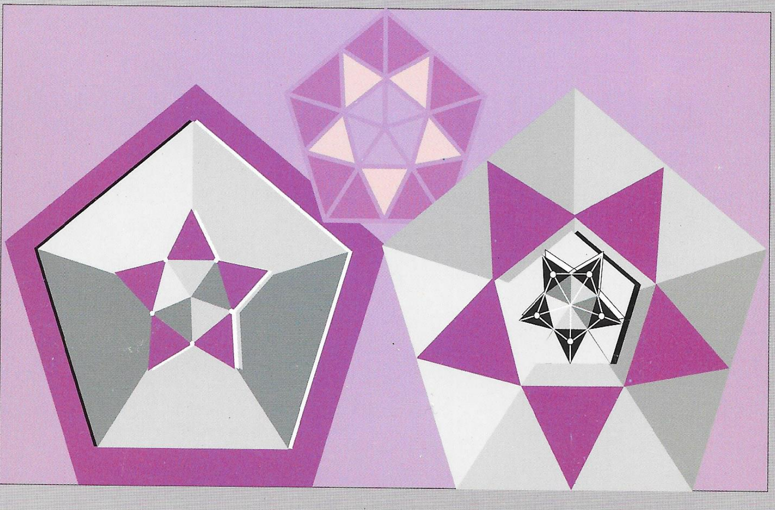
دانشگاه پیام نور

نظریه گروهها و هندسه

راجر لیندن

ترجمهٔ: دکتر ابوالقاسم لاله



دانشگاه پیام نور

نظریه گروهها و هندسه

تألیف: راجر لیندن

ترجمهٔ دکتر ابوالقاسم لاله

فهرست

پیشگفتار

هدف کلی این کتاب معرفی چند ایدهٔ اصلی در نظریهٔ گروهها و هندسه با کمترین پیشنیاز می‌باشد این کتاب حاصل یک درس، برای دانشجویان پیشرفتهٔ کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد است که چند بار در دانشگاه میشگان و در سال تحصیلی ۸۱ - ۱۹۸۰، در دانشگاه پی کاردی ارایه شده است. فرض براین است که خواننده تا اندازه‌ای با جبر صفحهٔ مختلط، هندسهٔ تحلیلی، و با مفاهیم بنیادی جبر خطی آشنایی دارد، هیچ معلومات فنی از هندسه و از نظریهٔ گروهها فرض نمی‌شود، هرچند دانستن مفاهیم اصلی نظریهٔ گروهها احتمالاً مفید خواهد بود.

ما از ارتباطهای نزدیک نظریهٔ گروهها و هندسه برای توسعه دادن این دو موضوع به موازات یکدیگر استفاده خواهیم کرد. نظریهٔ گروهها برای تبیین و انسجام بخشیدن به هندسه به کار می‌رود، و در عین حال هندسه مثالهایی ملموس و شهودی ازگروهها را به‌دست می‌دهد. این امر بر روش ما که اصولاً ترکیبی است تأثیر می‌گذارد. در اکثر موارد گروههایی نامتناهی موردنظراند که اغلب به‌وسیلهٔ مولدها و رابطه‌ها ارایه می‌شوند. عمدتاً هندسهٔ مورد مراجعه هندسه وقوع است؛ غیر از جبر خطی، تنها برخی از روشهای تحلیلی و متریکی را مورد استفاده قرار می‌دهیم. به علت جنبه شهودی مطلب به استثنای یک مورد توجه‌مان را به هندسهٔ دو بعدی محدود کرده‌ایم.

جز در ارتباط با هندسهٔ تصویری توجه کمی به روش اصول موضوع کرده‌ایم. احساس می‌کنیم که این به معنای از دست رفتن دقت واقعی نیست، زیرا در جایی که شهود کفایت نمی‌کند، همیشه خواننده می‌تواند برای بررسی ادعاهای مقدماتی از هندسهٔ تحلیلی کمک بگیرد.

در اینجا بر فضاهای هندسی و گروههای آنها بیش از قضیه‌های مربوط به شکل بندیهای خاص تأکید شده است. سه فصل خارج از سیر منظم ما برای مطالعه فضاهای هندسی کلاسیک قرار دارند، و می‌توان آنها را اختیاری تلقی کرد. هر یک از آنها معرف ایده‌های کلی تجریدی هستند که در مورد مسائل خاص به کار می‌روند. فصل چهار گروه بلور نگارانهٔ مسطح را رده‌بندی می‌کند. فصل پنج شبکه بندیهای منتظم کره‌های ابعاد بالاتر (و لذا اجسام منتظم) و فضاهای اقلیدسی را، که استفادهٔ مختصری از مطالب ابعاد بالاتر از دو می‌کند رده‌بندی می‌نماید. فصل ده بعد از تعمیم دادن مفاهیم اصلی به نظریهٔ گروههای فوخسین و عمدتاً به مثالها اختصاص می‌یابد.

در سراسر کتاب، ضمن این که بر مفاهیم تجریدی تأکید می‌کنیم، این مفاهیم را با مثالهای ملموس و شهودی، هم در متن کتاب و هم در مسائلی که در پایان هر فصل می‌آیند شرح داده‌ایم. در جای مقتضی سعی کرده‌ایم خواننده را هم با مرجعهایی که شرحهایی در سطح این کتاب یا شرحهایی متنوع‌تر را ارایه داده‌اند و هم با منابعی که مطالب پیشرفته‌تری را نسبت به این کتاب ارایه می‌کنند آشنا کنیم. یک فهرست قابل توجه از مراجع در انتهای کتاب آمده است.

مؤلف از دانشجویان قبلی خود برای علاقه و انتقادها، و پیشنهادهایشان تشکر می‌کند. همچنین مایل است امتنان خود را نسبت به همکارانش، ا. بویدن و ا. فراماجیوت برای مساعدتهای ارزشمندشان در هنگام برگزاری درس وی در آمینز و نیز در تهیهٔ یادداشتهای حاصل ابراز دارد. خصوصاً از آنتونیی فراماجیوت، که بدون اشتیاق وصف ناپذیر و سخت کوشی باور نکردنی وی، کتاب حاضر صورت وجود به خود نمی‌گرفت، نهایت تشکر را دارد. از دیوید تراناه از مؤسسه انتشارات دانشگاه کمبریج نیز که انتشار این کتاب را در حد امکان ساده و خوش‌آیند ساخت، و از انجمنهای واگنر، از اسکوکئی، ایلی نویز، بخاطر اشتیاق و کار کاملشان در تهیهٔ پیش نویس تشکر می‌کند.

راجر لیندن

اَن آربر، ۳۱ اوت ۱۹۸۴

فصل یک

تقارنها و گروهها

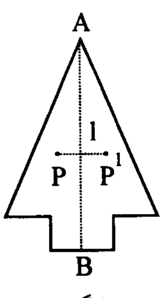
۱. تعریفها

هر زیر مجموعهٔ F از صفحهٔ اقلیدسی E را یک **شکل مسطح** گویند.

منظور از یک **تقارن** (طولپایی، حرکت صلب) شکل F یک نگاشت دو سویی (یک به یک) $\propto$ از F بروی F است که فاصله را حفظ می‌کند: فاصلهٔ بین نقاط Q, P از F $d(P, Q)$ برابر با فاصلهٔ بین نگاره‌شان یعنی $P\propto, Q\propto$ $d(P\propto, Q\propto)$ است.

نماد sym F را برای مجموعهٔ همهٔ تقارنهای F به کار می‌بریم.

۲. مثالها



I. یک درخت. فرض کنید F، چنان که نشان داده شده است، شکل قراردادی یک درخت باشد. آنگاه F «تقارن جانبی» نسبت به خط قائم l گذرنده از نقطهٔ رأسی A است. می‌بینیم F یک تقارن ρ دارد که هر نقطهٔ P از F واقع بر l را به خودش می‌نگارد و هر نقطهٔ دیگر P از F را به نقطهٔ $P\rho$ واقع بر یک خط افقی مارّ بر P، و به همان فاصله از l، اما در طرف دیگر l می‌نگارد. نگاشت ρ یک بازتاب نسبت به محور l است.

هر شکل F یک **تقارن بدیهی** ε دارد، که هرنقطه را به خودش می‌نگارد. به‌سادگی می‌توان دید که ε و ρ تنها تقارنهای F می‌باشند، از این رو $\text{sym } F = \{\varepsilon, \rho\}$. می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم، مثلاً با این استدلال که F شامل نقطهٔ دیگری نظیر نقطهٔ A نیست، که در آنجا مرز F همان زاویهٔ در A را بسازد، و دیگر این که F نقطهٔ دیگری نظیرنقطهٔ B ندارد. از این مطلب نتیجه می‌شود که، اگر $\propto$ یک تقارن F باشد، آنگاه $A\propto = A$ و $B\propto = B$ اما $\propto$ باید هر نقطه از F واقع بر l را ثابت نگاه دارد و برای نقطهٔ P غیرواقع بر l، $P\propto = P$ یا $P\propto = P\rho$، با انتخابی برای همهٔ Pها. لذا یا $\varepsilon = \propto$ یا $\rho = \propto$.

اگر $\propto$, β دو تقارن شکل F باشند، از تعریف روشن است که ترکیب $\propto$ و β نیز یک تقارن می‌باشد. نماد $\beta\propto$ را برای **حاصلضرب** β بعد از $\propto$ می‌نویسیم؛ باید اضافه کنیم که به ازای همهٔ نقاط P از F داریم $P(\propto\beta)=(P\propto)\beta$. لذا یک عمل ضرب (ترکیب) روی مجموعهٔ Smy F تعریف می‌شود، و مجموعهٔ sym F همراه با این عمل ضرب یک **گروه** تشکیل می‌دهد که **گروه تقارن** sym F شکل F است. دراینجا **جدول عمل ضرب** برای sym F، گروه تقارن یک درخت، نشان داده شده است.

	ε	ρ
ε	ε	ρ
ρ	ρ	ε

روشن است که اگر ε تقارن بدیهی یک شکل F و $\propto$ تقارن دلخواه دیگری از F باشد، آنگاه $\propto\ =\ \propto\varepsilon\ =\ \varepsilon\propto$. تقارن بدیهی ε تحت عمل ضرب دقیقاً مانند عدد ۱ عمل می‌کند. و لذا از این پس ۱ را به جای ε برای تقارن بدیهی هر شکل اختیار می‌کنیم.

II. حروف الفبا. ما حروف الفبا را به صورت بسیار متقارنش می‌نویسیم.

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

حروف A، M، T، V، W، Y، عیناً همان تقارنهای درخت را دارند: تقارن بدیهی (یا همانی) و بازتاب نسبت به یک محور قائم.

حروف B، C، D، E، K تنها یک تقارن غیربدیهی π، بازتاب نسبت به یک محور افقی را می‌پذیرند. جدول عمل ضرب ، چنان که نشان داده‌شده است، شبیه همان جدول عمل ضرب درخت می‌باشد، با این تفاوت که π جایگزین ρ شده است

	۱	π
۱	۱	π
π	π	۱

دو گروه **یکریخت**اند: یک نگاشت دو سویی از یکی به دیگری وجود دارد که **عمل ضرب** را حفظ می‌کند: برای هر دو تقارن $\propto$, β از گروه اول، حاصلضرب نگاره‌های آنها برابر با نگارهٔ حاصلضرب آنهاست . $(\propto\Omega)\ (\beta\Omega)\ =\ (\propto\beta)\ \Omega$.

حروف F، G، J، L، P، Q، R تنها تقارن بدیهی دارند. گروه تقارن آنها همان گروه بدیهی است، $\text{sym F}\ =\ \{۱\}$ و یا در نمادگذاری مرسوم $\text{sym F}\ =\ ۱$.

در اینجا جدول عمل ضرب آن نشان داده شده است.

	۱
۱	۱

حروف N، S، Z تنها یک تقارن غیربدیهی σ، یک **نیمدور**، یا دوران به زاویهٔ π حول مرکز شکل مزبور دارند. دوباره گروه تقارن اینها با گروه تقارن درخت یکریخت است. تأکید می‌کنیم که هرچند این گروهها به مثابه گروههای «تجریدی» یکریخت‌اند، اما از نظر مفهوم هندسی متفاوت می‌باشند.

بقیه حروف H، I، O، X، به گونه‌ای که ترسیم شده‌اند، همهٔ تقارنهای ۱، ρ، π، σ را که تاکنون در نظر گرفته شده‌اند می‌پذیرند، در واقع تقارنهای دیگری ندارند.

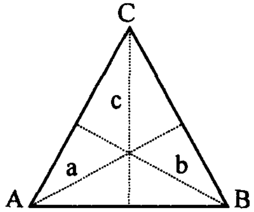
	۱	ρ	π	σ
۱	۱	ρ	π	σ
ρ	ρ	۱	σ	π
π	π	σ	۱	ρ
σ	σ	π	ρ	۱

لذا، برای این شکلهای F، با جدول عمل ضرب آنها چنان که نشان داده شده است داریم $\text{sym } F = \{۱, \rho, \pi, \sigma\}$، مثلاً برای این که نشان دهیم همهٔ اینها تقارنهای حرف H می‌باشند، کافی است بررسی کنیم که یک تقارن α در چهار سر دو خط قائم حرف H چگونه عمل می‌کند.

توجه کنید که اگر حرف I را به صورت یک پاره خط قائم «بینهایت باریک» بدون دو انتهای افقی آن در نظر بگیریم، آنگاه نگاشتهای ۱ ,ρ به عنوان نگاشتهای تحدید شده به نقاط شکل مزبور، یکی خواهند شد. همچنین π و σ نیز یکی خواهند شد، و گروه تقارن به $\{۱, \pi\}$ مبدل می‌شود. معمولاً مهم نیست که تقارنهای یک شکل F را به عنوان نگاشتهایی از F به F در نظر بگیریم یا به عنوان نگاشتهایی از کل صفحهٔ E به خودش، که زیرمجموعهٔ F را به خودش می‌نگارد. استثناءها تنها در حالتی پیدا می‌شوند که شکل F جزئی از خطی واقع در E باشد.

توجه کنید که اگر حرف O را به عنوان دایره‌ای در نظر بگیریم، هر دورانی به زاویهٔ دلخواه، حول مرکزش، و نیز بازتابهای نسبت به هر قطرش را، به عنوان تقارن خواهد پذیرفت. لذا گروه تقارن آن، نامتناهی خواهد بود. اگر حرف X را به صورت یک صلیب متشکل از دو پاره‌خط عمودمنصف در نظر بگیریم، گروه تقارن آن هشت عضو خواهد داشت.

III. یک مثلث متساوی الاضلاع. فرض کنید F مثلثی متساوی الاضلاع با رأسهای C,B,A باشد و $\propto$, β, γ بازتابهایی نسبت به ارتفاعهای c,b,a به‌ترتیب رسم شده از رأسهای C ,B ,A باشند؛ روشن است که $\propto$, β, γ تقارنهای F می‌باشند. فرض کنید σ دوران شکل F به زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ حول نقطهٔ O مرکز شکل F باشد، روشن است که σ، $\sigma^۲$, ۱ = $\sigma^۳$ نیز تقارنهای F می‌باشند. در واقع اینها همهٔ تقارنهای F هستند.



برای اثبات این مطلب توجه کنید که هر تقارن F باید رأسهای مثلث، یعنی V = {A, B,C} را به صورت جایگشتی به هم بدل کند، و اگر دو تقارن F روی اعضای مجموعهٔ V به یک طریق جایگشتی عمل کنند باید یکی باشند. از آنجاکه دقیقاً شش جایگشت برای یک مجموعهٔ V متشکل از سه عضو وجود دارند، sym F نمی‌تواند بیش از شش عضو که قبلاً آنها را یافته‌ایم داشته باشد.

جدول عمل ضرب ۶ در ۶ را برای sym F محاسبه نخواهیم کرد؛ این محاسبه بسیار ساده اما قدری خسته کننده است، و بعداً راهی ساده‌تر برای توصیف این گروه به‌طور مجرد خواهیم یافت. به هرحال، روش مزبور را با ارائهٔ مثالی به‌وسیلهٔ دو حاصلضرب $\propto\beta$, $\beta\propto$ توضیح می‌دهیم. از آنجاکه $\propto$ رأس A را ضمن تعویض (تبادل) C, B ثابت نگاه‌می‌دارد، و β رأس B را ضمن تبادل A,C و γ رأس C را ضمن تبادل A, B ثابت نگاه‌می‌دارد، آنگاه داریم $A(\propto\beta) = (A\propto)\beta = A\beta = C$ ، و $B\propto\beta = C\beta = A$ و همچنین $C\propto\beta = B\beta = B$. بنابراین $\propto\beta$ یا همان جایگشت $\sigma^۲$، مجموعهٔ V را تبدیل می‌کند، و لذا $\propto\beta = \sigma^۲$. محاسبه مشابهی نتیجه می‌دهد $A\beta\propto = C\propto = B$ ، $B\beta\propto = B\propto = C$ ، و $C\beta\propto = A\propto = A$ ، از این رو $\beta\propto = \sigma$. تأکید می‌کنیم که $\propto\beta \neq \beta\propto$. گروه sym F تعویض ناپذیر (غیر آبلی)، و در واقع کوچکترین گروه غیر آبلی است.

۳. گروهها

حال تعریفهای دقیق برخی از مفاهیمی راکه در بالا ذکر کردیم ارایه می‌کنیم.

تعریف. یک **گروه**، زوجی از اشیاء است، یک مجموعهٔ ناتهی G از اشیاء موسوم به **اعضا** و یک **عمل ضرب** که به هر دو عضو x, y از G عضو سومی از G را مربوط می‌کند، که به‌صورت xy

نوشته می‌شود و **حاصلضرب** آنها نام دارد. لازم است که این عمل ضرب در سه شرط زیر صدق کند:

(۱) به‌ازای همهٔ مقادیر x , y ,z در G، $(xy)z = x(yz)$

(۲) یک عضو ۱ وجود دارد که به ازای هر x در G،

$$1.x = x1 = x$$

(۳) به ازای هر x در G عضوی مانند x^{-1} در G وجود دارد که

$$x^{-1}x = x\ x^{-1} = 1$$

ملاحظات (۱) هر چند گروه را یک مجموعه همراه با یک عمل ضرب تعریف شده روی آن تعریف کرده‌ایم اما رسم بر این است که به طور ساده از گروه G صحبت کنیم، و ترجیح می‌دهیم عمل ضرب از مضمون فهمیده شود.

(۲) اگر G مجموعه‌ای از نگاشتها باشد و عمل ضرب ابتدا به وسیلهٔ اثر یک نگاشت و سپس اثر دیگری تعریف شود، آنگاه قانون شرکتپذیری $(xy)z = x(yz)$ خود به خود برقرار می‌شود.

(۳) اگر G مجموعه‌ای از نگاشتها و نیز شامل نگاشت همانی ۱ باشد، آنگاه شرط $x = 1x=x1$ خودبه‌خود برقرار است.

(۴) وجود یک وارون x^{-1} برای یک نگاشت x مستلزم دو سویی بودن x است.

(۵) به آسانی می‌بینیم که یک گروه نمی‌توانند بیشتر از یک عضو e داشته باشد که به ازای هر مقدار x، $ex = xe = x$، و همچنین، برای یک عضو مفروض x در یک گروه بیشتر از یک عضو y نمی‌تواند وجود داشته باشد که $xy = yx = 1$.

(۶) اصولی که برای تعریف گروه در نظر گرفتیم عمداً قدری زاید است.

مثالهایی از گروهها. مجموعهٔ $\mathrm{sym}\ F$ متشکل از همهٔ نگاشتهای فاصله نگهدار از یک مجموعهٔ F به خودش، که F زیر مجموعهٔ فضای اقلیدسی دلخواهی است، یک گروه خواهد بود. مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی وارون‌پذیر از هر فضای برداری یک گروه است. مجموعهٔ جایگشتهای هر مجموعهٔ Ω یعنی $\mathrm{sym}\ \Omega$ یک گروه است، که گروه تقارن روی مجموعهٔ Ω است (در اینجا مفهوم فاصله اصلاً دخالت نکرده است، اما می‌توان یک مجموعهٔ مجرد را به عنوان یک «فضا» در نظر گرفت که در آن همهٔ فاصله‌های بین نقاط متمایز برابرند).

تعریف. گروه H **زیرگروهی** است از یک گروه G اگر H زیرمجموعه‌ای از G باشد و عمل ضرب در H همان عمل ضرب در G باشد وقتی که به اعضای H محدود شود. به زبان ساده‌تر، زیرمجموعهٔ H از G یک زیر گروه است اگر $1 \in H$ و اگر $x \in H$ آنگاه $x^{-1} \in H$ و اگر $x,y \in H$ آنگاه

$xy \in H$.

تعریف. همریختی ϕ از گروه G_1 به گروه G_2 نگاشتی است از G_1 به G_2 که عمل ضرب را حفظ کند، یعنی به ازای هر x و $y \in G_1$، $(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$. نگاشت ϕ یک **یکریختی** است اگر دوسویی باشد. دو گروه **یکریخت** اند اگر یک یکریختی از یکی به دیگری وجود داشته باشد.

مثال. دیده‌ایم که اگر F مثلثی متساوی الاضلاع و V مجموعهٔ رأسهای آن باشد آنگاه sym F و sym V یکریخت‌اند.

قضیه نسبتاً ساده اما مهم زیر بیانگر رابطهٔ بین رده‌گروههای «مجرد» به گونه‌ای که تعریف کرده‌ایم و گروههای هندسی «ملموس» است که در این کتاب مورد توجه ما می‌باشند.

قضیهٔ کیلی. هر گروه با یک گروه جایگشتها یکریخت است

برهان. فرض کنید یک گروه G مفروض باشد. باید مجموعهٔ V از اشیایی انتخابی کنیم که جایگشتی باشند، و برای این کار خود G یا به‌طور دقیقتر، مجموعهٔ اعضای G را انتخاب می‌کنیم. حال مجموعهٔ $V = G$ در استدلال ما دو نقش خواهد داشت و لذا دو نام برای آن در نظر می‌گیریم، G به مثابه گروه مفروض و V به عنوان مجموعهٔ اشیایی که باید جایگشت تشکیل دهند.

اگر g عضو دلخواهی از G باشد و $v \in V$ آنگاه (چون $V = G$) $vg \in V$ و به سادگی می‌توان بررسی کرد نگاشت (ضرب از راست در g) که هر v را به vg می‌برد جایگشتی از V است؛ این جایگشت را $g\phi$ می‌نامیم. لذا یک نگاشت ϕ از G به sym V تعریف کرده‌ایم که هر $g \in G$ را به $g\phi$ می‌برد که عضوی از sym V است.

اگر $g\phi = h\phi$، آنگاه به ازای $1 \in V$، باید $1(g\phi) = 1g = g$ برابر با $1(h\phi) = 1h = h$ باشد، از این رو $g = h$. بنابراین ϕ نگاشتی دو سویی از G بروی زیر مجموعهٔ $G\phi$ از sym V است. هر دو عضو $G\phi$ به ازای h, g در G به صورت $g\phi$ و $h\phi$ می‌باشند؛ اما به ازای هر v در V، کاربرد مکرر تعریفهای گوناگون نشان می‌دهد که

$$v((g\phi)(h\phi)) = v((g\phi)(h\phi)) = (vg)\ (h\phi) = (vg)h = v(gh) = v((gh)\phi)$$

از این رو $(g\phi)(h\phi) = (gh)\phi$. اولاً از اینجا نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب هر دو عضو $G\phi$ دوباره عضوی از $G\phi$ است. و به سادگی نتیجه می‌گیریم که $G\phi$ زیرگروهی از sym V است، یعنی، یک گروه از جایگشتها.

ثانیاً نتیجه‌گیری می‌کنیم که نگاشت ϕ، عمل ضرب را حفظ می‌کند؛ بنابراین به عنوان

نگاشتی دو سویی از G به $G\phi$ ، ϕ یک یکریختی از G به گروه جایگشت $G\phi$ است.

ملاحظات. ماقضیهٔ کیلی را در ساده‌ترین صورتش بیان کرده‌ایم. به روشنی برهان مزبور جزئیات قابل ملاحظهٔ بیشتری در بر دارد.

قضیهٔ کیلی معرّف یکی از فرآیندهای اصلی در ریاضیات است. ما با اشیاء متنوع کم و بیش ملموس که در ریاضیات روزمره مطرح‌اند، مثلاً در اینجا گروههای جایگشتها یا تبدیلها آغاز می‌کنیم. با توجه به برخی از مشابهتها، می‌توانیم به عنوان «اصول» ویژگیهایی را فهرست کنیم که وجه مشترک اشیاء مورد بحث می‌باشند و سپس به مطالعهٔ همهٔ اشیاء «تجریدی» که این اصول را برمی‌آورند بپردازیم. با داوری بجا و قدری توجه، می‌توانیم ثابت کنیم همهٔ اشیایی که این اصول در آنها صدق می‌کنند با اشیایی از ردهٔ اشیاء ملموس (که احتمالاً براثر نیروی ادراک وسعت یافته‌اند) و ما در اصل به آنها علاقمند بوده‌ایم یکریخت‌اند.

سودمندی این تأثیر متقابل بین اشیاء ملموس و تجریدی تا حدّی روشن است. هنگام مطالعهٔ اشیاء ملموس متنوع که در اینجا گروههای گوناگون مطرح در هندسه هستند می‌توانیم بحث خود را در ارائهٔ نظریه تجریدی همهٔ گروهها وحدت بخشیم. از سوی، دیگر، این مطلب نیز مهم است که در بسط نظریه تجریدی گروهها می‌توانیم کراراً از نمایش یک گروه تجریدی به صورت ملموس بهره‌مند شویم.

۴. تقارنهای n - ضلعهای منتظم

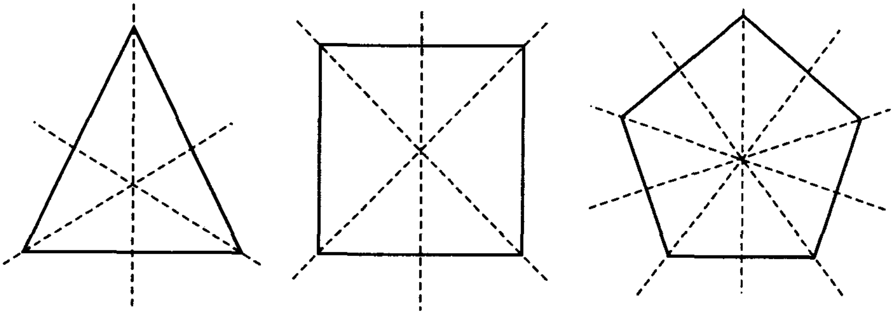
یک **n ـ ضلعی منتظم** شکلی است با $n \geq ۳$ ضلع برابر که در آن زوایای داخلی یعنی زوایای بین اضلاع مجاور همگی با هم برابرند. به ازای $n = ۳$ ، n ـ ضلعی منتظم مثلثی متساوی الاضلاع است؛ به ازای $n = ۴$ یک مربع است.

قبلاً گروه تقارن مثلث متساوی الاضلاع را شرح دادیم. گروه تقارن، $\mathrm{sym}\ F$ ، n ـ ضلعی منتظم F با $n > ۳$ ضلع به همان نحو قابل طرح است.

فرض کنید F ، n ـ ضلعی با $n \geq ۳$ ضلع باشد، و $G = \mathrm{sym}\ F$. روشن است که G شامل یک دوران σ حول مرکز F به زاویهٔ $\frac{۲\pi}{n}$ است؛ به علاوه، $\sigma = \sigma^{۱}$ ، $\sigma^{۲}$ ،...، $\sigma^{n-۱}$ همگی متمایزند، و $۱ = \sigma^{\circ} = \sigma^{n}$. لذا G دارای n تقارن دورانی ۱ ، σ ، $\sigma^{۲}$ ،...، $\sigma^{n-۱}$ است.

با توجه به وضعی که برای n رأس F پیش می‌آید، روشن است که این تقارنها همگی تقارنهای **جهت‌نگهدار F می‌باشند**، یعنی ترتیب دوری رأسها را روی n ـ ضلعی حفظ می‌کنند و به عبارت دیگر چند ضلعی را وارونه نمی‌کنند. بنظر می‌رسد که سایر تقارنهای F بازتابها می‌باشند. در هر رأس P یک «ارتفاع» یا «قطر» p از F وجود دارد، که از O مرکز n ـ ضلعی F می‌گذرد؛ هرگاه n فرد باشد p ضلع مقابل به رأس P از F را نصف می‌کند، اما هرگاه n زوج باشد

p به یک رأس Q ، مقابل P منتهی می‌شود. خواه n فرد باشد یا زوج، روی هم رفته دقیقاً n «قطر» از این نوع وجود دارند، که آشکارا محورهایی برای تقارنهای بازتابی F می‌باشند.



ثابت می‌کنیم که G دقیقاً همین ۲n عضو را دارد. ابتدا اگر $\propto$ یک تقارن جهت نگهدار از F باشد، آنگاه به ازای عدد صحیحی مانند k ، $\propto = \sigma^k$. فرض کنید ρ یکی از n تقارن بازتابی مذکور در بالا باشد.

اگر $\propto$ جهت نگهدار نباشد چون ρ نیز جهت نگهدار نیست پس $\rho\propto$ جهت نگهدار است. در نتیجه به ازای عدد صحیحی مانند k، $\rho\propto=\sigma^k$ و $\propto=\rho^{-1}\sigma^k$ یا چون $\rho^2 = 1$ پس $\propto=\rho\sigma^k$.
ما احکام زیر را ثابت کرده‌ایم:

(۱) G دقیقاً ۲n عضودارد: n **دوران** ۱، σ^1 ، σ^2 ،...،σ^{n-1} و n **بازتاب** $\rho, \rho\sigma, \rho\sigma^2, \ldots, \rho\sigma^{n-1}$.

(۲) G به وسیلهٔ σ و ρ **تولید می‌شود** : هر **عضو** G **را می‌توان به صورت حاصلضربی از توانهای** σ و توانهای ρ نوشت.

بنابراین به جای نوشتن جدول ضربی برای G قواعدی را برای ضرب اعضای G ذکر می‌کنیم. ابتدا روشن است که بااستفاده از معادله‌های $\sigma^n=1$ و $\rho^2 = 1$ مجازیم نمای k در یک عضو σ^k به پیمانهٔ n و نمای h در یک عضو ρ^h به پیمانهٔ ۲ را ساده کنیم. علاوه بر **دو رابطهٔ** $\sigma^n = 1$ و $\rho^2 = 1$ که در هر یک تنها یکی از مولدهای σ , ρ دخالت دارد. وجود یک رابطهٔ دیگر $\rho\sigma\rho = \sigma^{-1}$ راکه متضمن هر دو آنهاست از راه محاسبهٔ مستقیم، شهود یا با الهام از تجربه، مثلاً فرو بردن پیچی به طرف دیگر یک میز بررسی می‌کنیم. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\rho\sigma = \rho\sigma^{-1}$ و به‌طور کلی $\sigma^k\rho = \rho\sigma^{-k}$.

حال نشان می‌دهیم سه رابطهٔ مذکور در بالا مجموعه‌ای از **رابطه‌های معرف** را تشکیل می‌دهند بدین معنی که که اگر w_1 و w_2 هر دو یک عضو از گروه G را نشان دهند آنگاه معادلهٔ $w_1=w_2$ از سه رابطهٔ مذکور نتیجه می‌شود. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که w_1 و w_2 را می‌توان با استفادهٔ مکرر از قواعد ساده کردن k در σ^k به پیمانهٔ n، و ساده کردن h در ρ^h به پیمانهٔ ۲ و قرار

دادن $\rho\sigma^{-k}$ به جای هر جزء $\sigma^k\rho$، به یک صورت درآورد. این مطلب تا حدّی بدیهی است اما برای دقیق بودن در هر مرحله با استفاده از استقرا از تعداد اجزای به صورت $\sigma^k\rho^h$ می‌کاهیم. اگر هیچ چنین جزیی نداشته باشیم w_1 (یا w_2) یکی از ۲n صورت متعارف σ^k از $\rho\sigma^k$ به‌ازای $k = ۱, ۲, ..., n-۱$ است. اگر چنین جزیی پیدا شود قبل از همه می‌توانیم فرض کنیم که همهٔ اجزای ρ^h به صورت ρ می‌باشند. حالا یا باید داشته باشیم $w_i = \sigma^k\rho$ یا باید w_i شامل $\rho\sigma^k\rho$ باشد؛ استفاده از قاعدهٔ $\sigma^k\rho = \rho\sigma^{-k}$ یا نتیجه می‌دهد $w_i = \rho\sigma^{-k}$ یا $\rho^۲\sigma^{-k} = \sigma^{-k}$ را به جای جزء $\rho\sigma^k\rho$ قرار می‌دهد.

این مطلب استقرا را تکمیل می‌کند، و نشان می‌دهد که هم w_1 و هم w_2 به صورت متعارف بدل شده‌اند. اما، اگر w_1 و w_2 معرف یک عضو G باشند، این دو صورت متعارف باید یکی باشند و لذا معادلهٔ $w_1 = w_2$ را برقرار کرده‌ایم.

این نتیجه را چنین خلاصه می‌کنیم که G دارای نمایشی است که بااستفاده از مولدها و رابطه‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$G = <\sigma , \rho : \sigma^n = ۱ , \rho^۲ = ۱ , \rho\sigma\rho = \sigma^{-۱}>$$

روشن است که این نمایش خلاصه‌تر از ارایهٔ جدول ضرب است و در اکثر حالتها اطلاعاتی به ما می‌دهد که آسان‌تر می‌توان از آن استفاده کرد. به علاوه، اگر گروه نامتناهی باشد ارایهٔ جدول عمل ضرب امکان ندارد. عملاً، گروهها را به دو طریق توصیف می‌کنیم: یا با یک توصیف هندسی یا با نمایشی به کمک مولدها و رابطه‌ها.

هر گروه، بینهایت نمایش متفاوت دارد و شخص معمولاً سعی دارد تا یکی را انتخاب کند که به راستی ساده باشد و ویژگیهای گوناگون گروه مورد بحث را به روشنی ارایه دهد. مثلاً در نمایش بالا رابطهٔ سوم را می‌توان به صورت $(\rho\sigma)^۲=۱$ نیز نوشت. **مرتبهٔ** یک عضو x در یک گروه G بنابر تعریف کوچکترین عدد صحیح مثبتی مانند n است که $x^n = ۱$ و اگر چنین عددی وجود نداشته باشد گفته می‌شود x مرتبهٔ **نامتناهی** دارد.

اکنون نمایش

$$G = <\sigma , \rho : \sigma^n = ۱ , \rho^۲ = ۱, (\rho\sigma)^۲ = ۱>$$

را می‌توان برحسب عبارت به این صورت توصیف کرد که G («کلی‌ترین» گروه) تولید شده به وسیلهٔ اعضای از مرتبه‌های n و ۲ است و مرتبهٔ حاصلضرب آنها برابر ۲ است.

اگر بنویسیم $\rho_1 = \rho$ و $\rho_2 = \rho\sigma$ آنگاه $\sigma = \rho_1\rho_2$ و نمایش بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$G = <\rho_1 , \rho_2 : \rho_1^۲ = ۱ , \rho_2^۲ = ۱, (\rho_1\rho_2)^n = ۱>$$

این نحوهٔ نمایش G را به عنوان گروه تولید شده به‌وسیلهٔ دو بازتاب عرضه می‌کند که مرتبهٔ حاصلضرب آنها برابر با n است.

روشن است که مجموعهٔ G^+ متشکل از اعضای جهت نگهدار G زیرگروهی از G است و بدیهی است که G^+ دارای نمایش زیر است.

$$G^+ = \langle \sigma : \sigma^n = ۱ \rangle$$

به روشنی این گروه یک گروه دوری C_n از مرتبهٔ (تعداد اعضا) n نام دارد، به همین نحو گروه تولید شده به وسیلهٔ یک عضو منحصر بفرد از مرتبهٔ نامتناهی $\langle \sigma : \varnothing \rangle = C_\infty$ ، (بدون هیچ رابطه‌ای) **گروه دوری نامتناهی** است.

گروه $G = \mathrm{sym}F$ که F یک n ضلعی منتظم است با $n \geq ۳$ ضلع، **گروه دو وجهی** از مرتبهٔ $۲n$ است؛ آن را با $D_{۲n}$ نمایش می‌دهیم، متأسفانه نمادگذاری D_n نیز برای آن معمول است. نمادگذاری را برای حالتهای $n = ۱, ۲, \infty$ به صورت زیر ارایه می‌کنیم:

$$D_۲ = \langle \rho : \rho^۲ = ۱ \rangle ;$$

$$D_۴ = \langle \sigma , \rho : \sigma^۲ = ۱ , \rho^۲ = ۱ ,(\rho\sigma)^۲ = ۱ \rangle ;$$

$$D_\infty = \langle \sigma , \rho : \rho^۲ = ۱ ,(\rho\sigma)^۲ = ۱ \rangle ,$$

یا به صورت

$$D_\infty = \langle \rho_۱ , \rho_۲ : \rho_۱^۲ = ۱ , \rho_۲^۲ = ۱ \rangle .$$

همچنین به‌ازای همهٔ مقادیر $n \geq ۱$ تعریف می‌کنیم $C_n = \langle \sigma : \sigma^n = ۱ \rangle$ و $C_\infty = \langle \sigma : \varnothing \rangle$.
روشن است که $D_۲$ با $C_۲$ یکریخت می‌باشد. به علاوه گروه $D_۴$ دارای نمایش زیر است

$$D_۴ = \langle \sigma , \rho : \sigma^۲ = ۱, \rho^۲ = ۱ , \sigma\rho = \rho\sigma \rangle$$

که گروهی آبلی می‌باشد. این گروه آبلی از مرتبهٔ ۴ غالباً چهار ـ گروه (کلاین) نامیده می‌شود. قبلاً آن را به عنوان گروه تقارن حرف H دیده‌ایم.

۵. نمایشها

مفهوم نمایش یک گروه مطلبی نسبتاً ساده است. یک گروه G که به وسیلهٔ یک مجموعهٔ X از اعضا تولید می‌شود و همهٔ رابطه‌های $w_۱ = w_۲$ بین حاصلضربهای $w_۱$، $w_۲$ از توانهای اعضای X نتایجی از مجموعهٔ مفروض رابطه‌های معرف‌اند. اگر این تعریف خواننده را قانع کرده است می‌تواند بحث زیر را نادیده بگیرد. با این وجود شرح مختصری از چگونگی صورتبندی این

مفهوم در نظریهٔ گروهها و بدون توسل به ایدهٔ نسبتاً فرعی «استنتاج» منطقی می‌تواند آموزنده باشد.

موضوع را با ساختمان یک **گروه آزاد** F به وسیلهٔ یک مجموعهٔ مفروض X به عنوان **پایه** آغاز می‌کنیم. این گروه باید $F = \langle x;\varnothing\rangle$ باشد، که X مجموعهٔ مولدهاست، و **رابطهٔ معرف نداریم.** هر عضو F به صورت یک کلمهٔ $w = x_1 \ldots x_n$ ، $n\geq 0$ نوشته می‌شود که هر x_i به ازای برخی مقادیر x در X برابر با $x^{\pm 1}$ است. به همین نحو اگر $u = y_1 \ldots y_m$ ، $m\geq 0$ که در آن هر $y_i\in X^{\pm 1}$ آنگاه حاصلضرب آنها به صورت $wu = x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m$ تعریف می‌شود. روشن است که دو کلمهٔ w و w' یک عضو از F را نمایش می‌دهند اگر بتوان یکی را با درج یا حذف مکرر جملاتی به صورت xx^{-1} که x متعلق به $X^{\pm 1}$ است از دیگری به‌دست آورد؛ در این حالت w و w' را **هم ارز** می‌نامیم و می‌نویسیم $w \equiv w'$. فرض کنید F مجموعهٔ رده‌های هم ارزی $[w]$ از کلمه‌ها باشد. اگر $w_1 \equiv w'_1$ و $w_2 \equiv w'_2$ آنگاه $w_1 w_2 \equiv w'_1 w'_2$ لذا می‌توانیم با قرار دادن $[w_1][w_2]=[w_1w_2]$ یک عمل ضرب، را در F بدون ابهام تعریف کنیم. به آسانی می‌توان دید که با این عمل ضرب، F یک گروه می‌شود که آن را **گروه آزاد** F با **پایه** X می‌نامیم.

اعضای F چنان‌که تعریف شده رده‌های هم ارزی $[w]$ از کلمه‌ها می‌باشند و کلمه‌های w را می‌توان به عنوان **نامهای اعضای** F در نظر گرفت. معمولاً وقتی می‌گوییم. «عضو w از F» این وجه تمایز از بین می‌رود.

ویژگی متمایز گروه آزاد F با پایه X در قضیه زیر آورده شده است.

قضیه. فرض کنید X مجموعه و G گروهی دلخواه باشند و χ نگاشتی از مجموعهٔ X در گروه G باشد. آنگاه یک همریختی یکتای ϕ از گروه آزاد F با پایهٔ X در G با این ویژگی وجود دارد که به ازای هر x از X، $x\phi = x\chi$.

برهان. اگر هر چنین نگاشت ϕ وجود داشته باشد باید به ازای هر x از X داشته باشیم $(x^{\pm 1})\phi=(x\chi)^{\pm 1}$، و برای $w = x_1 \ldots x_n$ باید داشته باشیم $w\phi = (x_1\phi)\ldots(x_n\phi)$. در نتیجه $w\equiv w'$ که از آنجا داریم $w\phi \equiv w'\phi$. لذا نگاشتی از F در G را به‌طور یکتا تعیین می‌کند و به آسانی دیده می‌شود $(ww')\phi = (w\phi)(w'\phi)$؛ بنابراین ϕ یک همریختی است. □

نتیجه. فرض کنید G گروهی باشد که به وسیلهٔ زیرمجموعه‌ای از اعضای خود مانند Y تولید شود و فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه باشد که به وسیلهٔ $\chi : X \longrightarrow Y$ در تناظر دوسویی با Y قرار می‌گیرد. آنگاه یک همریختی ϕ از گروه آزاد F با پایهٔ X بروی G وجود دارد که به ازای هر x از X داریم $x\phi = x\chi$.

برهان. تنها لازم است توجه کنیم چون $F\phi$ شامل مجموعهٔ $X\phi=Y$ است که G را تولید می‌کند

لذا $F\phi$ باید برابر همهٔ G باشد.

به‌طور کلی هرگاه ϕ یک همریختی از یک گروه F بروی گروه دیگری مانند G باشد هستهٔ آن یعنی N متشکل از همهٔ اعضای u در F است که $u\phi = ۱$، N زیرگروهی از F است و در واقع یک **زیرگروه نرمال** است زیرا $u \in F$ ، $r \in N$ نتیجه می‌دهد $u^{-1}ru \in N$. اگر N زیرگروه نرمال یک گروه F باشد آنگاه مجموعهٔ F/N متشکل از همهٔ هم مجموعه‌های $Nu = \{ru : r \in N\}$ یک گروه است:

$$(Nu)\ (Nv) = \{u'v' : u' \in Nu,\ v' \in Nv\} = N(uv)$$

اگر N هستهٔ نگاشت ϕ از F بروی G باشد آنگاه قراردادن $(Nu)\bar{\phi} = u\phi$ یک یکریختی $\bar{\phi}$ از F/N بروی G را تعریف می‌کند.

حال دوباره همریختی ϕ از یک گروه آزاد F با پایهٔ X بروی گروه G را در نظر می‌گیریم. دو عضو w_1 , w_2 از F یک عضو از G را نمایش می‌دهند اگر و تنها اگر $w_1\phi = w_2\phi$ ؛ در این حالت می‌گوییم که رابطهٔ $w_1 = w_2$ در G برقرار است. چون $w_1 = w_2$ هم ارز است با $w_2^{-1}w_1 = ۱$ کافی است رابطه‌هایی به صورت $w = ۱$ را در نظر بگیریم. حال یک رابطهٔ $w = ۱$ در G برقرار است اگر و تنها اگر $w\phi = ۱$، یعنی اگر و تنها اگر $w \in N$ که N هستهٔ ϕ است؛ اعضای $w \in N$ رابط نام دارند.

یک مجموعه از رابطه‌های $r = ۱$ **مجموعه‌ای از رابطه‌های معرف** (یا به عبارت دیگر مجموعه‌ای معرف از رابطه‌ها) نامیده می‌شود اگر بقیهٔ رابطه‌ها را بتوان از آنها نتیجه‌گیری کرد. یک زیرمجموعهٔ R از F یک مجموعه از **رابطهای معرف** نامیده می‌شود اگر رابطه‌های $r = ۱$ ، برای $r \in R$ مجموعه‌ای از رابطه‌های معرف تشکیل دهند. این مطلب هم‌ارز با این است که N **بستار نرمال** R در F باشد، یعنی کوچکترین زیرگروه نرمال F که شامل R است. یا به‌طور روشن‌تر N مجموعهٔ همهٔ حاصلضربهای توانهای مزدوجهای $u^{-1}ru$ از اعضای $r \in R$ به‌وسیلهٔ اعضای $u \in F$ است.

حال می‌توانیم یک تعریف صوری از نمایش یک گروه G را ارایه دهیم

تعریف. یک نمایش برای یک گروه G ، سه تایی (ϕ, X, R) است که ϕ یک همریختی از گروه آزاد F با پایهٔ X بروی G است و N یعنی هستهٔ ϕ برابر با بستار نرمال زیرمجموعهٔ R از F می‌باشد.

با وضع کردن این تعریف دوباره آن را بازگو نخواهیم کرد. حال به زبانی کمتر صوری باز می‌گردیم؛ اما وقتی می‌گوییم که یک ویژگی از نمایشها «واضح» است یا آن را «به سادگی

می‌توان نشان داد»، به‌طور ضمنی منظورمان این است که آن را به سادگی می‌توان از این تعریف صوری نتیجه گرفت.

ما نماد $G = \langle X:R \rangle$ را به جای نماد قبلی $G = \langle X:\{r = 1 : \forall r \in R\} \rangle$ به کار خواهیم برد.

۶. تغییر نمایش

برای سادگی، بحث را به نمایشهای متناهی $G = \langle X:R \rangle$ محدود می‌کنیم، یعنی این که R و X متناهی می‌باشند.

چهار راه نسبتاً واضح برای تغییر نمایش یک گروه به نمایش دیگر وجود دارد، خواهیم دید که دو نمایش متناهی از یک گروه به وسیلهٔ رشته‌ای متناهی از این گونه تغییرها به هم مربوط می‌شوند. این تغییرات **تبدیلات تیتسه**[1] نامیده می‌شوند و چهار نوع‌اند که به شرح آن‌ها می‌پردازیم.

نوع ۱. فرآیند جایگزینی یک نمایش $\langle X:R \rangle$ به وسیلهٔ یک نمایش $\langle X:R \cup \{r\} \rangle$ است که r نتیجه‌ای از R می‌باشد؛ یعنی، r در بستار نرمال R است. (این شبیه افزودن یک رابطهٔ معرف اضافی است).

نوع *۱ تبدیل متقابل، فرآیند رفتن از $\langle X:R \cup \{r\} \rangle$ به $\langle X:R \rangle$ است که r نتیجه‌ای از R است (حذف کردن رابطهٔ معرف اضافی)

نوع ۲. فرآیند جایگزینی $\langle X:R \rangle$ به وسیلهٔ $\langle X \cup \{x\}:R \cup \{r\} \rangle$ است و x عضو جدیدی می‌باشد که در X قرار ندارد و r به صورت $x^{-1}w$ است که w عضوی از گروه آزاد F با پایه X می‌باشد (این شبیه افزودن یک مولد جدید x همراه با یک رابطهٔ معرف $x = w(x_1, \ldots, x_n)$ است که x را برحسب مولدهای $x_1، \ldots x_n$ که از قبل در X می‌باشند تعریف می‌کند).

نوع *۲ فرایند تبدیل متقابل از $\langle X \cup \{x\}:R \cup \{r\} \rangle$ به $\langle X:R \rangle$ نیز تحت همین شرایط و شبیه حذف کردن یک مولد اضافی همراه با معادلهٔ بیان کنندهٔ آن برحسب بقیهٔ مولدهاست.

به‌طور شهودی واضح است و به سادگی ثابت می‌شود که این تبدیلات، گروه مفروض G را تغییر نمی‌دهند.

قضیه. برای هر دو نمایش متناهی مفروض از یک گروه، به وسیلهٔ دنباله‌ای متناهی از تبدیلات تیتسه می‌توان از یکی به دیگری رسید.

برهان. فرض کنید $\langle X:R \rangle$ و $\langle Y:S \rangle$ دو نمایش متناهی از یک گروه G باشند.

---

1. Tietze transformations

چون (نگارهٔ) X گروه G را تولید می‌کند، به ازای هر $y \in Y$ باید رابطه‌ای مانند $y = w_y(x_1, ..., x_n)$ که کلمه‌ای در گروه آزاد با پایه X است برقرار باشد. به ازای هر $y \in Y$ یک چنین w_y را انتخاب می‌کنیم و U را مجموعهٔ همهٔ $u_y = y^{-1}w_y$ ها تعریف می‌کنیم. با دنباله‌ای از تبدیلهای نوع ۲ می‌توانیم از $<X:R>$ به نمایش $<XUY:RUU>$ برسیم.

به‌همین نحو، به ازای هر $x \in X$ رابطه‌ای مانند $x = w_x$ در G برای $w_x = w_x(y_1, ..., y_m)$ که کلمه‌ای در گروه آزاد با پایه Y می‌باشد برقرار است، و فرض می‌گیریم V مجموعهٔ همهٔ $v_x = x^{-1}w_x$ باشد.

حال همهٔ رابطه‌های $v_x = ۱$ در G برقرارند، از این رو باید نتایجی از مجموعهٔ RUU یعنی رابطه‌های معرف باشند. با دنباله‌ای از تبدیلات نوع ۱ می‌توانیم از $<XUY:RUU>$ به $<XUY:RUUUV>$ برسیم. به همین نحو، به ازای همهٔ $s \in S$ رابطهٔ $s = ۱$ در G برقرار است، لذا نتیجه‌ای از مجموعهٔ $RUUUV$ است و با تبدیلات بیشتری از نوع ۱ می‌توانیم به $<XUY : RUSUUUV>$ برسیم.

نشان داده‌ایم که، با دنباله‌ای از تبدیلات تیتسه می‌توانیم از $<X:R>$ به $<XUY : RUSUUUV>$ برسیم. همین استدلال نشان می‌دهد که می‌توانیم از $<X:S>$ به $<XUY : RUSUUUV>$ برسیم. بنا به تعریف چون تبدیلات تیتسه معکوس پذیرند. می‌توانیم از $<XUY : RUSUUUV>$ به $<Y:S>$ برسیم. لذا نشان داده‌ایم که می‌توانیم با کمک $<XUY : RUSUUUV>$ از $<Y:R>$ به $<Y:S>$ برسیم. □

مثال. نشان می‌دهیم که گروه دوری C_6 حاصلضرب مستقیم $C_2 \times C_3$ از گروههای دوری C_2 از مرتبهٔ ۲ و C_3 از مرتبهٔ ۳ است، یعنی دو نمایش $<a : a^6 = 1>$ و $<b , c: b^2 = 1 , c^3=1,bc = cb>$ گروههای یکریخت تعریف می‌کنند. البته مستقیماً این مطلب را می‌توانیم بررسی کنیم اما اینجا برهانی برحسب تبدیلات تیتسه را ارایه می‌دهیم.

برای استفاده ازکاربرد بالا نمایشها را به‌صورتهای $<a:a^6>$ و $<b,c:b^2, c^3, bcb^{-1}c^{-1}>$ می‌نویسیم. با نمایش $<a : a^6>$ آغاز می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $c = a^2$، $b = a^3$ یعنی با اجرای دو مرحله از نوع ۲ به نمایش $<a, b, c, a^6, b^{-1}a^3, c^{-1}a^2>$ می‌رسیم . روشن است که این رابطه‌ها نتیجه می‌دهند $b^2 = 1$، $c^3 = 1$، $bc = cb$ و نیز $a = bc^{-1}$ که از آنجا می‌توانیم رابطهای اضافی b^2، a^3، $bcb^{-1}c^{-1}$، $a^{-1}bc^{-1}$ را به نمایش خود بیفزاییم. مثلاً می‌توانیم بررسی کنیم، (البته لازم نیست) در بستار نرمال $b^{-1}a^3$ و $c^{-1}a^2$ داریم:

$$ab^{-1}c^{-1} = (a^2(b^{-1}a^3)a^{-2})^{-1} (a^2(c^{-1}a^2)a^{-2})$$

لذا یک نمایش $\langle a, b, c: a^6, b^{-1}a^3, c^{-1}a^2, b^2, c^3, bcb^{-1}c^{-1}, a^{-1}bc^{-1}\rangle$ را داریم. دوباره روشن است که رابطه‌های $b^2 = 1$ ، $c^3 = 1$ ، $bc = cb$ ، $a = bc^{-1}$ رابطه‌های $a^6 = 1$ ، $b = a^3$ ، و $c = a^2$ را نتیجه می‌دهند. (باز این مطلب را می‌توانیم به طور صوری بررسی کنیم) لذا می‌توانیم سه رابط اول را حذف کنیم و نمایش $\langle a, b, c: b^2, c^3, bcb^{-1}c^{-1}, a^{-1}bc^{-1}\rangle$ را به دست آوریم. بالاخره با اجرای یک مرحله از نوع *۲ می‌توانیم مولد a همراه با رابط $a^{-1}bc$ را حذف کنیم و $\langle b, c: b^2, c^3, bcb^{-1}c^{-1}\rangle$ را چنان‌که موردنظر است به دست آوریم.

ملاحظات. باید تذکر دهیم که این قضیه الگوریتمی برای تصمیم‌گیری درمورد این که آیا دونمایش متناهی مفروض گروههای یکریختی تعریف می‌کنند را فراهم نمی‌آورد و این بدان علت است که **مسألهٔ کلمه برای گروهها** حل شدنی نیست: هیچ الگوریتمی وجود ندارد که برای هر گروه آزاد مفروض F با یک پایه متناهی X یک زیرمجموعهٔ متناهی R از F و یک عضو r از F تصمیم بگیرد آیا r به بستار نرمال R در F متعلق است. در واقع، **مسألهٔ بداهت** حل شدنی نیست: الگوریتمی وجود ندارد که برای هر نمایش متناهی مفروض تصمیم بگیرد آیا گروه تعریف شده یک گروه بدیهی یعنی تک عضوی است. به هر حال این نتایج حل ناپذیر بودن از سودمندی تبدیلات تیتسه که هم ارزی نمایش دوگروه را وقتی دلیل خوبی برای یکریخت بودن آنها داریم نمی‌کاهد. (همچنین امیدواریم آنها توجیهی برای ارائهٔ یک تعریف صوری دقیق از یک نمایش را عرضه کنند).

نکات و مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. گروه تقارن یک مستطیل با ابعاد نابرابر (مربع نیست) را بیابید. گروه تقارن یک جسم مربع مستطیلی (مثلاً آجر) با سه بعد a، b، c را بیابید. گروه تقارن آن را اگر $a = b \neq c$ بیابید.

مسألهٔ ۲. یک چهار وجهی منتظم یک هرم با قاعدهٔ مثلث است که همه وجوه آن (قاعده و سه وجه مایل) مثلثهای متساوی الاضلاع قابل انطباق می‌باشند. G گروه تقارن آن را بیابید. اعضای G را برطبق مجموعه‌های نقاط ثابت آنها رده‌بندی کنید. (راهنمایی: اگر α نقطهٔ p را ثابت نگاه دارد و یک رأس V_1 را به یک رأس V_2 بفرستد، آنگاه p به یک فاصله از V_1 ، V_2 است). چه اعضایی دوران‌اند. چه اعضایی بازتاب نسبت به صفحه‌ها هستند؟

مسألهٔ ۳. همهٔ زیرگروههای D_{2n} و D_∞ را بیابید.

مسألهٔ ۴. فرض کنید F مجموعهٔ نامتناهی همهٔ نقاط $(n, 0)$ در صفحهٔ مختصات باشد که n عددی صحیح است sym F را بیابید.

مسألهٔ ۵. نشان دهید که گروه تقارن یک دایره به وسیلهٔ تعدادی متناهی از اعضا تولید نمی‌شود. توصیفی از آن را به‌وسیلهٔ مولدها و رابطه‌ها، شبیه آنچه برای D_{2n} انجام شده به دست آورید.

مسألهٔ ۶. برای یک عدد اول p نشان دهید که همهٔ گروههای از مرتبهٔ p (با p عضو) یکریخت‌اند.

نشان دهید که تنها دو ردهٔ ریختی برای گروههای مرتبهٔ ۴ و دو ردهٔ ریختی برای گروههای مرتبهٔ ۶ وجود دارند.

نکتهٔ ۱. حاصلضرب آزاد $G = G_1 * G_2$ از دو گروه را می‌توان به شرح زیر تعریف کرد. فرض کنید $G_1 = <X_1 : R_1>$ و $G_2 = <X_2 : R_2>$ (که فرض می‌شود X_1, X_2 مجزا می‌باشند)؛ آنگاه $G = <X_1 \cup X_2 : R_1 \cup R_2>$. مثلاً گروه نامتناهی دو وجهی $D_\infty = <\rho_1, \rho_2 : \rho_1^2, \rho_2^2> = G_1 * G_2$ برای $G_1 = <\rho_1 : \rho_1^2>$ و $G_2 = <\rho_2 : \rho_2^2>$ حاصلضرب آزاد دو گروه مرتبهٔ ۲ است. **گروه پیمانه‌ای**، گروه بسیاری مهمی که بعداً آن را بررسی می‌کنیم حاصلضرب آزاد یک گروه مرتبهٔ ۲ با یک گروه مرتبهٔ ۳ است.

مسألهٔ ۷. نشان دهید که اعضای D_∞ به‌ازای $n \geq 0$ دقیقاً حاصلضربهایی به‌صورت $w = w_1 \ldots w_n$ می‌باشند که هر w_i برابر با ρ_1 یا ρ_2 است و به ازای هر i، $w_i \neq w_{i+1}$. نشان دهید اگر n عدد زوج و مثبتی باشد آنگاه مرتبهٔ w نامتناهی است اما اگر n عددی فرد باشد مرتبهٔ w برابر با ۲ است. برای گروه پیمانه‌ای $G = <a, b : a^2, b^3>$ نشان دهید که اعضای آن به ازای $n \geq 0$ دقیقاً حاصلضربهایی به صورت $w = w_1 \ldots w_n$ هستند که هر w_i برابر با a، b یا b^{-1} است و هیچ‌گاه نداریم $w_i = w_{i+1}^{\pm 1}$. نتیجه‌گیری کنید که مرتبهٔ هر عضو ۱، ۲، ۳ یا نامتناهی است.

نکتهٔ ۲. حاصلضرب مستقیم $G = G_1 \times G_2$ را می‌توانیم از حاصلضرب آزاد دو گروه G_1, G_2 با افزودن رابطه‌های $g_1 g_2 = g_2 g_1$ به ازای هر g_1 در G_1 و هر g_2 در G_2 به دست آوریم. به زبان ساده‌تر می‌توانیم آن را به صورت مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب (g_1, g_2) برای g_1 در G_1 و g_2 در G_2 با عمل ضرب $(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$ تعریف کنیم. دیده‌ایم که $C_6 = C_2 \times C_3$.

مسألهٔ ۸. نشان دهید اگر $n = ab$ که a, b اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول باشند. آنگاه $C_n = C_a \times C_b$. نشان دهید C_4 با $C_2 \times C_2$ یکریخت نیست. نشان دهید اگر G_1 و G_2 دو زیرگروه نرمال از یک گروه G باشند که عضو خنثی را در اشتراک دارند $G_1 \cap G_2 = 1$ و با هم G را تولید می‌کنند آنگاه $G = G_1 \times G_2$.

مسألهٔ ۹. نمایش $G = <\sigma, \rho : \sigma^n = \rho^2 = (\rho\sigma)^2 = 1>$ نتیجه می‌دهد که مرتبه σ, ρ و $\rho\sigma$ به‌ترتیب باید n، ۲، ۲ را **تقسیم کنند**، اما این امر ایجاب نمی‌کند که آنها حتماً این **مرتبه‌ها** را دارند. این مطلب را می‌توان به‌طور هندسی با توجه به عمل σ، ρ، $\rho\sigma$ روی مجموعهٔ متشکل از رأسهای n ـ ضلعی ثابت کرد زیرا ثابت کرده‌ایم G گروه دو وجهی است. از طرفی می‌توانیم روش به کار رفته در اثبات قضیهٔ کیلی را برای نشان دادن این که G یک گروه جایگشت است به‌کار ببریم. برای این منظور فرض کنید V مجموعه‌ای با $2n$ عضو u_k و v_k باشد برای $k = 0, \ldots, n-1$ (اعضای σ^k و $\rho\sigma^k$ را در ذهن داریم). جایگشتهای $\sigma, \rho \in \mathrm{sym} V$ را با مشخص کردن $u_k\sigma$ و $v_k\sigma$، $u_k\rho$ و $v_k\rho$ به طریقی واضح تعریف می‌کنیم (مثلاً، $u_k\sigma = u_{k'}$ به ازای $k' \equiv k+1$ به پیمانه n) حال بررسی کنید که σ و ρ در رابطه‌های داده شده صدق می‌کنند و این که

$\rho\sigma$, ρ , σ مرتبه‌هایی برابر با n ، ۲،۲ دارند.

مسألهٔ ۱۰. گروههای G را در نظر بگیرید که بوسیله σ و ρ تولید می‌شوند و در رابطه‌های $\sigma^n = \rho^2 = (\rho\sigma)^2 = 1$ صدق می‌کنند نشان دهید این گروهها دقیقاً گروه بدیهی $G=1$ به اضافهٔ (گروههای یکریخت با) گروههای دووجهی D_{2m} به‌ازای همهٔ $m \geq 1$ می‌باشند که n را تقسیم می‌کنند. انواع یکریختیهای همهٔ گروههای G تولید شده بوسیلهٔ اعضای x, y را به‌طوری که $x^2 = y^2 = 1$ توصیف کنید.

نکتهٔ ۳. روش به‌کار رفته برای نشان دادن این که رابطه‌های مفروض مجموعه‌ای از رابطه‌های معرف برای گروه دو وجهی $G = D_{2n}$ را تشکیل می‌دهند جوابی از مسألهٔ کلمه را برای این گروه به دست می‌دهد و آن الگوریتمی برای تحویل کردن هر کلمهٔ w به صورت متعارف σ^k یا $\rho\sigma^k$ را به دست می‌دهد. برای دو کلمه مفروض تنها باید بررسی کنیم آیا آنها صورت متعارف یکسانی دارند؟ همچنین می‌توانستیم به‌کمک هندسه بررسی کنیم آیا دو کلمه مفروض رأسهای n ـ ضلعی را به یک طریق جابه جا می‌کنند؟

به هر حال باید متذکر شویم نمایشهایی متناهی وجود دارند که مسألهٔ کلمه برای آنها **تصمیم ناپذیر** است: هیچ الگوریتمی برای تصمیم این که آیا یک جفت دلخواه از کلمه‌ها عضو مشابهی از G را نشان می‌دهند وجود ندارد.

مرجعها

برای یک بحث کلی غیر فنی از **تقارن** کتاب **تقارن** نوشته هـ. ویل را توصیه می‌کنیم (کتابشناسی انتهای کتاب را ببینید) بحثهای اختصاصی‌تر در مورد تقارن در هندسه بعداً مطرح خواهند شد.

برای خواننده‌ای که با مطلب بخش ۳ **در موردگروهها** آشنا نیست خواندن یکی دو فصل اول هر کتاب مقدماتی در نظریهٔ گروهها را توصیه می‌کنیم. احتمالاً با انتخاب پراکندهٔ مطالب مورد نیاز نیز منظورمان برآورده می‌شود. برای یک مقدمه خواندنی در مورد ایده‌های متعارف نظریهٔ گروهها، به خصوص قسمت اول کتاب جی. روتمن را توصیه می‌کنیم. کتاب د. ل. جانسون تخصصی‌تر است، و خصوصاً به نمایشها می‌پردازد. و با روح این نوشته‌ها سازگارتر است، این کتاب دقیق، خواندنی و شامل مثالهای زیادی است.

کسی که مایل به دانستن مطالبی دربارهٔ گروههای تجریدی نامتناهی فراتر از نیاز این کتاب است باید به بحث دقیق و کامل در کتاب و. مگ نوس، اِ. کاراس، و دِ. سولی تار مراجعه کند. یک بحث قابل درک، اما نه لزوماً همیشه ساده، از **مسألهٔ کلمه** و مطالب وابسته به آن در فصلهای پایانی کتاب روتمن ارائه شده است.

فصل دو

طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی

۱. انواع طولپاییهای هندسی

فرض کنید E گروه همهٔ طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی E باشد و E^+ زیرگروه طولپاییهای جهت نگهدار باشد. حال با رده‌بندی طولپاییهای صفحه آغاز می‌کنیم.

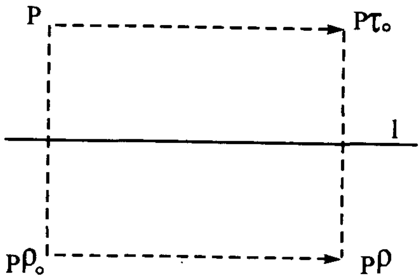
یک **انتقال** τ تبدیلی است که هر نقطه را به یک اندازه و در یک سو حرکت می‌دهد. بهتر است که نگاشت بدیهی ۱ را به عنوان یک انتقال در نظر بگیریم. اگر τ یک انتقال نابدیهی و P، Q دو نقطهٔ دلخواه باشند آنگاه پاره خطهای سودار (یا بردارهای) $\overrightarrow{P,P\tau}$ و $\overrightarrow{Q,Q\tau}$ موازی و طولی برابر با $|\tau|$ دارند. به روشنی یک انتقال نابدیهی هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد و تنها خطهایی را که شامل نقطه‌ای مانند P و نگاره‌اش یعنی $P\tau$ است پایا نگاه می‌دارد.

یک **دوران** σ یک نگاشت جهت نگهدار است که نقطه‌ای مانند O را ثابت نگاه می‌دارد. اگر σ بدیهی نباشد آنگاه O **مرکز** σ یکتا است. اگر $\sigma \neq ۱$ آنگاه θ زاویهٔ از $\overrightarrow{O,P}$ تا $\overrightarrow{O,P\sigma}$ یعنی زاویهٔ چرخش σ برای هر $P \neq O$ یکسان است. یک دوران نابدیهی هیچ نقطه‌ای غیر از O را ثابت نگاه نمی‌دارد و هیچ خطی را جز در حالت $\sigma^۲ = ۱$، وقتی σ هر خط گذرنده از O را بروی خودش اما با سوی معکوس می‌نگارد پایا نگاه نمی‌دارد.

یک **بازتاب** ρ یک طولپایی نابدیهی است که همهٔ نقاط خطی مانند l موسوم به **محور** ρ را ثابت نگاه می‌دارد. هر نقطهٔ P غیر واقع بر l به نقطهٔ $P\rho$ نگاشته می‌شود که l عمود منصف پاره خط $[P,P\rho]$ است. به روشنی ρ جهت را معکوس می‌کند و $\rho^۲ = ۱$. نقاط ثابت ρ همان نقاط l می‌باشند و خطهای پایا تحت ρ عبارتند از l به اضافهٔ همهٔ خطهای l' عمود بر l که سوی آنها به وسیلهٔ ρ معکوس می‌شوند.

نوع دیگر تبدیل که کمتر آشناست یک **لغزه** نام دارد که تبدیلی به صورت $\rho = \rho_\circ \tau_\circ$ می‌باشد و ترکیبی از یک بازتاب $\rho_\circ$ نسبت به محور l و یک انتقال نابدیهی موازی با l (یعنی l را پایا نگاه می‌دارد) می‌باشد. به روشنی ρ جهت را معکوس می‌کند. چون $\rho_\circ$ و $\tau_\circ$ به طور روشن

تعویضپذیراند داریم $\rho=\rho_\circ\tau_\circ=\tau_\circ\rho_\circ$ و $\rho^2=(\tau_\circ\rho_\circ)(\rho_\circ\tau_\circ)=\tau_\circ\rho_\circ^2\tau_\circ=\tau_\circ^2$، یعنی یک انتقال نابدیهی. به روشنی ρ هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد و هیچ خطی جز محور l را پایا نگاه نمی‌دارد.

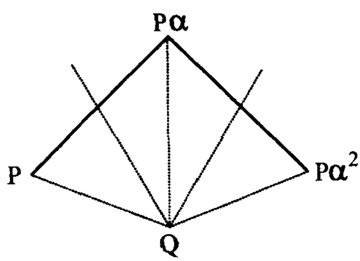


قضیه. یک طولپایی از صفحه که یک نقطه را ثابت نگاه می‌دارد، یک دوران است هر گاه جهت را حفظ کند و یک بازتاب است هر گاه جهت را معکوس کند. هر طولپایی از صفحه که هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد یک انتقال است به شرطی که جهت را حفظ کند و لغزه است هر گاه جهت را معکوس کند.

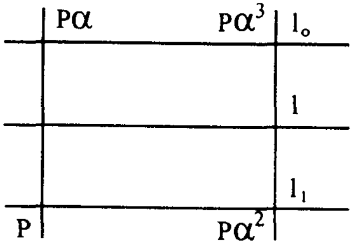
برهان: فرض کنید که α یک نقطهٔ O را ثابت نگاه دارد. آنگاه α هر دایره به مرکز O را بـروی خودش می‌نگارد، و لذا یک دوران یا یک بازتاب است.

فرض کنید α هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد. متذکر می‌شویم که α^2 نیز هیچ نقطه‌ای را حفظ نمی‌کند. زیرا اگر $P=P\alpha^2$ آنگاه α نقطه میانی پاره خط $[P,P\alpha]$ را ثابت نگاه خواهد داشت.

فرض کنید α جهت را حفظ کند. هرگاه بردارهای $\overrightarrow{P,P\alpha}$ و $\overrightarrow{P\alpha,P\alpha^2}$ موازی نباشند عمود منصفهای آنها در یک نقطهٔ Q تلاقی می‌کنند و مثلثهای $[P,P\alpha,Q]$ و $[P\alpha,P\alpha^2,Q]$ متشابه‌اند. آنگاه α ضلع $[P,P\alpha]$ را به ضلع $[P\alpha,P\alpha^2]$ می‌نگارد و جهت را حـفظ مـی‌کند لذا Q را بـه خودش می‌نگارد. در نتیجه $\overrightarrow{P,P\alpha}$ و $\overrightarrow{P\alpha,P\alpha^2}$ موازی‌اند، که از آنجا نقاط متمایز P، $P\alpha$، $P\alpha^2$ هم خط‌اند.در نتیجه همهٔ $P\alpha^k$ ها روی l قرار می‌گیرند و α روی l مانند یک انتقال به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{P,P\alpha}$ عمل می‌کند و چون α جهت را حفظ می‌کند مانند این انتقال روی همهٔ صفحه عـمل می‌کند.

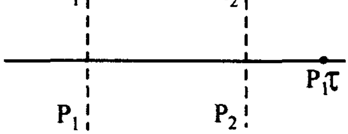


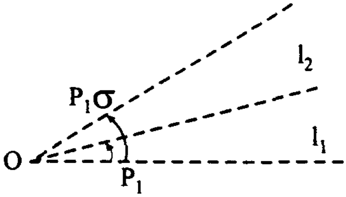
اگر α جهت را حفظ نکند آنگاه α^2 جهت را حفظ خواهد کرد و تکرار استدلال بالا برای α^2 نشان می‌دهد که α^2 یک انتقال نابدیهی است. حال α^2 دو خط $l_0=\overrightarrow{P,P\alpha^2}$ و $l_1=\overrightarrow{P\alpha,P\alpha^3}$ را پایا نگاه می‌دارد که بنابراین موازی‌اند (اما نه لزوماً متفاوت). به‌علاوه α دو خط l_0 و l_1 را تعویض می‌کند که از آنجا α خط l را که موازی با l_0 و l_1 و وسط آنها است پایا نگاه می‌دارد. چون α^2 خط l را انتقال می‌دهد α نیز مانند یک انتقال τ_0 روی l باید عمل می‌کند. بالاخره چون α جهت را حفظ نمی‌کند، باید لغزهٔ $\alpha=\rho_0\tau_0$ باشد که ρ_0 بازتاب نسبت به خط l است. □



قضیه. حاصلضرب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال عمود بر این محورها با فاصله‌ای دو برابر فاصلهٔ محورهای آنهاست. حاصلضرب دو بازتاب با محورهای متقاطع در یک نقطه دورانی حول آن نقطه به اندازهٔ زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین محورهای آنهاست.

برهان. اگر l_1 و l_2 محورهای موازی بازتابهای ρ_1 و ρ_2 باشند آنگاه نگاشت جهت نگهدار $\tau=\rho_1\rho_2$ همهٔ خطهای l عمود بر l_1 و l_2 را پایا نگاه می‌دارد، از این رو باید یک انتقال باشد. در شکل مربوط $d(P_1,P_1\tau)=2d(P_1,P_2)$. اگر l_1 و l_2 در O تلاقی کنند آنگاه تبدیل جهت نگهدار $\sigma=\rho_1\rho_2$ نقطهٔ O را ثابت نگاه می‌دارد و از این رو باید یک دوران حول O باشد. در شکل مربوط زاویهٔ $P_1O(P_1\sigma)$ دو برابر زاویهٔ P_1OP_2 است. □





نتیجه. هر تبدیل جهت نگهدار حاصلضرب دو بازتاب است و هر تبدیل معکوس کنندهٔ جهت حاصلضرب سه بازتاب است. لذا E به وسیلهٔ بازتابها تولید می‌شود.

برهان. دیده‌ایم که هر دوران حاصلضرب دو بازتاب با محورهای گذرنده از مرکز دوران است و هر انتقال حاصلضرب دو بازتاب با محورهای عمود بر جهت انتقال است. هر بازتاب ρ در $\rho^2=1$ صدق می‌کند که از آنجا $\rho=\rho\rho\rho$. یک لغزه $\rho=\rho_0\tau_0$ حاصلضربی به صورت $\rho=\rho_0\rho_1\rho_2$ است که ρ_0 یک بازتاب می‌باشد و $\tau_0=\rho_1\rho_2$، انتقالی است که حاصلضرب دو بازتاب ρ_1 و ρ_2 است. □

قضیه. حاصلضرب سه بازتاب یک بازتاب است اگر محورهای آنها موازی یا متقارب باشند، و در غیر این صورت یک لغزه است.

برهان. اگر سه محور موازی باشند آنگاه حاصلضرب مزبور همهٔ خطهای عمود را پایا نگاه می‌دارد و چون جهت را معکوس می‌کند باید یک بازتاب باشد. اگر محورها در یک نقطه تلاقی کنند حاصلضرب مزبور باید این نقطه را ثابت نگاه دارد و از این رو یک بازتاب است. به عکس فرض کنید حاصلضرب $\rho=\rho_1\rho_2\rho_3$ که معکوس کنندهٔ جهت است یک بازتاب باشد. آنگاه $\rho_1\rho_2=\rho\rho_3$. اگر $\rho_1\rho_2=\rho\rho_3$ یک انتقال τ باشد، آنگاه همهٔ محورهای ρ_1، ρ_2، ρ_3 و ρ باید بر محور τ عمود باشند و لذا باید موازی باشند. اگر $\rho_1\rho_2=\rho\rho_3$ یک دوران به مرکز O باشد آنگاه همهٔ محورها باید از O بگذرند. □

قضیه. (۱) حاصلضرب دو انتقال یک انتقال است.
(۲) حاصلضرب دو دوران یک دوران است مگر این‌که مجموع زوایای آنها به پیمانهٔ 2π برابر با صفر باشد که در این حالت یک انتقال است.
(۳) حاصلضرب یک انتقال و یک دوران غیربدیهی یک دوران است.
(۴) حاصلضرب یک انتقال غیربدیهی و یک بازتاب یک لغزه است مگر اینکه محور بازتاب عمود بر محور انتقال باشد که در این حالت آن یک بازتاب است.
(۵) حاصلضرب یک دوران غیربدیهی و یک بازتاب یک لغزه است مگر اینکه محور بازتاب از مرکز دوران بگذرد که در این حالت آن یک بازتاب است.

برهان. (۱) $\tau_1\tau_2$ حاصلضرب دو انتقال τ_1 و τ_2 جهت را حفظ می‌کند و از این رو یک انتقال است مگر اینکه نقطه‌ای مانند P را ثابت نگاه دارد. اما $P\tau_1\tau_2=P$ نتیجه می‌دهد که $P\tau_1=P\tau_2^{-1}$ که از

آنجا $\tau_1=\tau_2^{-1}$ و $\tau_1\tau_2=1$ یعنی انتقال بدیهی است.
(۲) حاصلضرب $\sigma_1\sigma_2$ دو دوران σ_1 و σ_2 با زوایای (در جهت مثبت) θ_1 و θ_2 هر خط سودار $\vec{l}$ را به یک خط سودار $\vec{l'}$ می‌نگارد که زاویهٔ آن با l برابر با $\theta_1+\theta_2$ است. از آنجا که $\sigma_1\sigma_2$ جهت نگهدار است، اگر $\theta_1+\theta_2=0$ به پیمانهٔ 2π، آن یک انتقال است، و در غیر این صورت یک دوران است.
(۳) حاصلضرب $\tau_1\sigma_2$ جهت را حفظ می‌کند و هر $\vec{l}$ را به $\vec{l'}$ می‌نگارد که زاویهٔ آن با l برابر $\theta_2\neq 0$ است.
(۴) فرض کنید $\gamma=\tau\rho_2$، حاصلضرب انتقال غیر بدیهی τ و انعکاس ρ_2 نسبت به محور l_2 است. قرار دهید $\tau=\rho_1\rho_2$، که حاصلضرب انعکاسهای ρ_1 و ρ_2 است نسبت به محورهای l_1 و l_2 که بر محور τ عموداند، و قضیهٔ قبل را به کار ببرید.
(۵) شبیه حالت (۴) $\sigma=\rho_1\rho_2$ را نسبت به محورهای l_1 و l_2 گذرنده از O مرکز σ بنویسید. □

قضیه: فرض کنید α عنصر دلخواهی از E باشد.
(۱) اگر τ انتقالی باشد با یک خط پایای l، آنگاه $\tau^\alpha=\alpha^{-1}\tau\alpha$ انتقالی به اندازهٔ $|\tau|=|\tau^\alpha|$ است با خط پایای $l\alpha$.
(۲) اگر α دورانی به مرکز O باشد، آنگاه σ^α دورانی به مرکز $O\alpha$ به اندازهٔ همان زاویهٔ σ است.
(۳) اگر ρ انعکاسی نسبت به محور l باشد، ρ^α نیز انعکاسی نسبت به محور $l\alpha$ است.

برهان. همهٔ احکام بالا از این مطلب نتیجه می‌شوند که اگر γ نقطهٔ P را به $P\gamma=Q$ بنگارد، آنگاه γ^α نقطهٔ $P\alpha$ را به $Q\alpha$ می‌نگارد. □

نتیجه: مجموعهٔ همهٔ انتقالها یک زیرگروه T از E است، که در E نرمال است، یعنی، $\tau\in T$ و $\alpha\in E$ نتیجه می‌دهد که $\tau^\alpha\in T$. به همین نحو، E^+ یک زیرگروه نرمال از E است.

برهان: فرض کنید α عضو دلخواهی از E باشد. هر عضو T انتقالی مانند τ است و τ^α نیز یک انتقال در T می‌باشد؛ لذا $T^\alpha=T$. یک عضو γ از E^+ یک انتقال یا یک دوران است که از آنجا γ^α نیز یک انتقال یا دوران می‌باشد؛ لذا $E^{+\alpha}=E^+$. □

تذکر. مزدوج گیری یعنی فرستادن γ به γ^α را می‌توان به عنوان، تغییر مختصات، تلقی کرد. مثلاً دو تبدیل خطی A و B مشابه‌اند اگر تبدیل خطی وارون‌پذیری (تغییر مختصات) مانند P وجود داشته باشد که $B=A^P=P^{-1}AP$.

۲. ساختار E

اکنون می‌خواهیم ببینیم که چگونه گروه E به معنای خاص از گروههایی با ساختار ساده‌تر به وجود می‌آید. ابتدا دیده‌ایم که E^+ یک زیرگروه نرمال E است. فرض کنید ρ عضوی از E باشد که در E^+ نیست یعنی بازتاب یا لغزه باشد: اگر ρ' عضو دیگری باشد که در E^+ نیست آنگاه $\rho\rho' \in E^+$ که از آنجا $\rho' \in E^+\rho$. نشان داده‌ایم که E دقیقاً اجتماع مجزایی از دو هم مجموعهٔ E^+ است، یعنی $E=E^+ \cup E^+\rho$؛ می‌توان گفت که E^+ در E **شاخصی** برابر با ۲ دارد. لذا گروه خارج قسمتهای E/E^+ مرتبه‌ای برابر با ۲ دارد و $E/E^+=\mathrm{C}_۲$.

حال از این واقعیت که T در E نرمال است نتیجه می‌شود T در زیرگروه E^+ از E نرمال است. فرض کنید O نقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ E و $E_\circ$ **پایدار ساز** O در E باشد یعنی مجموعهٔ همهٔ $\propto$ ها در E که نقطهٔ O را ثابت نگاه می‌دارند؛ به وضوح برای دایرهٔ Γ داریم $E_\circ=\mathrm{sym}\Gamma$. فرض کنید γ عضوی از E باشد. یک τ یکتا در T وجود دارد که $\mathrm{O}\tau=\mathrm{O}\gamma$. حال $\propto=\gamma\tau^{-۱}$ نقطهٔ O را ثابت نگاه می‌دارد، که از آنجا $\gamma=\propto\tau$. می‌گوییم که یک گروه G **حاصلضرب نیم مستقیم** از $\mathrm{G}_۱$ در $\mathrm{G}_۲$ است و آن را با $\mathrm{G}=\mathrm{G}_۲\mathrm{G}_۱$ نمایش می‌دهیم، اگر $\mathrm{G}_۱$، $\mathrm{G}_۲$ زیرگروههای G باشند که $\mathrm{G}_۱$ نرمال است و $\mathrm{G}=\mathrm{G}_۲\mathrm{G}_۱$ و $\mathrm{G}_۱\cap\mathrm{G}_۲=۱$.

قضیه. $E=E_\circ\mathrm{T}$ حاصلضرب نیم مستقیم T در $E_\circ$ است. به همین نحو $E^+=E_\circ^+\mathrm{T}$ حاصلضرب نیم مستقیم T در $E_\circ^+$ می‌باشد.

تذکر. حاصلضرب نیم مستقیم $\mathrm{G}_۱$ در $\mathrm{G}_۲$ را می‌توان به صورت $\mathrm{G}=\mathrm{G}_۱\mathrm{G}_۲$ نیز نوشت که هر γ در G به طور یکتا به صورت $\gamma=\gamma_۱\gamma_۲$ است که $\gamma_۱\in\mathrm{G}_۱$ و $\gamma_۲\in\mathrm{G}_۲$. (مطلب اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که $\mathrm{G}_۱$ در G نرمال است). این نمادگذاری در یک چارچوب کلی، طبیعی‌تر و معمول‌تر است اما با تعبیر هندسی ما کمتر جور در می‌آید.

اگر $\mathrm{G}=\mathrm{G}_۲\mathrm{G}_۱=\mathrm{G}_۱\mathrm{G}_۲$ حاصلضرب نیم مستقیم $\mathrm{G}_۱$ در $\mathrm{G}_۲$ باشد آنگاه نگاشتی که $\gamma_۲$ در $\mathrm{G}_۲$ را به هم مجموعهٔ $\mathrm{G}_۱\gamma_۲$ در $\mathrm{G}/\mathrm{G}_۱$ می‌نگارد به وضوح یک یکریختی از $\mathrm{G}_۲$ به $\mathrm{G}/\mathrm{G}_۱$ است. لذا $E/\mathrm{T}=\mathrm{sym}\ \Gamma$ و $E^+/\mathrm{T}=\mathrm{sym}^+\Gamma$.

متذکر می‌شویم که $\mathrm{sym}^+\Gamma$ گروه دورانهای یک دایرهٔ Γ آبلی است؛ در واقع با گروه (ضربی) همهٔ اعداد مختلط $\mathbf{z}=\mathrm{e}^{i\theta}$ با $|\mathbf{z}|=۱$ یکریخت است. همچنین متذکر می‌شویم که T با گروه جمعی فضای برداری دوبعدی $\mathrm{V}=\mathrm{V}(۲,\mathbf{R})$ روی اعداد حقیقی یکریخت است: که در نتیجه T نیز آبلی است. در واقع با انتخاب پایه‌ای برای V می‌بینیم $\mathrm{T}\simeq\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$، یعنی حاصلضرب مستقیم دو نسخه از $\mathbf{R}^+$ یعنی گروه اعداد حقیقی مثبت تحت عمل جمع است.

می‌توانیم همهٔ این اطلاعات را به شرح زیر گردآوری کنیم.

قضیه: E شامل زنجیری از زیر گروههای نرمال $E>E^+>T>1$ با خارج قسمتهای آبلی متوالی است یعنی $E/E^+\simeq C_2$، $E^+/T\simeq sym^+\Gamma$ و $T\simeq \mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ ، $T/1\simeq T$.

تذکر. این قضیه نشان می‌دهد که در معنایی خاص E از گروههای آبلی تشکیل یافته است. اما این قضیه به ما نمی‌گوید **چگونه** این گروهها ترکیب یافته‌اند. به طور کلی شناختن یک زیر گروه نرمال N از G و شناختن خارج قسمتهای G/N اطلاعات کاملی دربارهٔ G را به دست نمی‌دهد. در اینجا به سادگی می‌توان جزئیات مطلب را فراهم ساخت اما این کار مستلزم انتخاب یک دستگاه مختصات است که آن را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

۳. نمایش E

یک دستگاه مختصات مستطیلی در صفحهٔ E با مرکز O انتخاب می‌کنیم. آنگاه اعضای α از E_0 تبدیلهای خطی از $V=V(2,\mathbf{R})$ می‌باشند و می‌توان آنها را به وسیلهٔ ماتریسهای $M(\alpha)$ نمایش داد. اعضای σ از E_0^+ دورانهای نمایش داده شده به وسیلهٔ ماتریسهای

$$M(\sigma)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

می‌باشند که θ زاویهٔ دوران σ است. بازتاب ρ نسبت به محور x به وسیلهٔ ماتریس

$$M(\rho)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

نمایش داده می‌شود که از آنجا عضو $\rho\sigma$ به وسیلهٔ ماتریس زیر نمایش داده می‌شود

$$M(\rho\sigma)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

نگارهٔ E_0 تحت این نمایش **گروه متعامد** $O(2,\mathbf{R})$ است که متشکل از همهٔ ماتریسهای 2×2 حقیقی M می‌باشد. که $MM^*=I$ در اینجا M^* ماتریس ترانهادهٔ M است و $I=1$ ماتریس همانی می‌باشد. نگارهٔ E_0^+ **گروه متعامد خاص** $SO(2,\mathbf{R})=O^+(2,\mathbf{R})$ متشکل از همهٔ ماتریسهای M در $O(2,\mathbf{R})$ است که $\det M=1$.

برای توسیع این نمایش به E یعنی واردکردن انتقالها، برای پارامترها به جای بیشتری نیاز داریم. این مشکل را با کمک ماتریسهای 3×3 حل می‌کنیم؛ این تدبیر جالب وقتی به مبحث هندسه تصویری می‌رسیم به طور طبیعی توصیف خواهد شد. یک مؤلفه به مؤلفه‌های دستگاه

مختصاتمان اضافه می‌کنیم و $(x,y,1)$ را برای نقطه‌ای از E به جای (x,y) در نظر می‌گیریم. برای یک عضو $\propto$ از E_0 ماتریس قبلی یعنی $M(\propto)$ با ماتریس زیر جایگزین می‌شود.

$$\tilde{M}(\propto)=\begin{pmatrix} M(\propto) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

یک انتقال $\tau\in T$، $(0,0)$ را به (a,b) یعنی $(0,0,1)$ را به $(a,b,1)$ انتقال می‌دهد و در اینجا به وسیلهٔ ماتریس زیر نشان داده می‌شود.

$$\tilde{M}(\tau)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

لذا یک یکریختی از E به مجموعهٔ ماتریسهای $\tilde{M}$ به صورت

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \mp\sin\theta & \pm\cos\theta & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

را به دست می‌آوریم.

یک نمایش تحلیلی ساده‌تر از E به وسیلهٔ انطباق E بر صفحه مختلط $\mathbf{C}$ به دست می‌آید. یک دستگاه مختصات مانند قبل انتخاب می‌کنیم و نقطه (x,y) را با عدد مختلط $x+iy$ یکی می‌گیریم. حال هر انتقال τ به وسیلهٔ یک نگاشت $\tau:\mathbf{z}\longrightarrow \mathbf{z}+w$ به ازای $w\in\mathbf{C}$ نمایش داده می‌شود. هر دوران $\sigma\in E_0^+$ به وسیلهٔ یک نگاشت $\sigma:\mathbf{z}\longrightarrow e^{i\theta}\mathbf{z}$ که θ زاویهٔ دوران σ است نمایش داده می‌شود. لذا اعضای $\propto$ از E^+ به وسیلهٔ نگاشتهای $\propto:\mathbf{z}\longrightarrow u\mathbf{z}+w$ به ازای $u,w\in\mathbf{C}$ و $|u|=1$ نمایش داده می‌شوند.

بازتاب ρ نسبت به محور x به وسیلهٔ مزدوج‌گیری مختلط نمایش داده می‌شود $\rho:\mathbf{z}\longrightarrow \bar{\mathbf{z}}$ که در اینجا اگر $\mathbf{z}=x+iy$، $x,y\in\mathbf{R}$ آنگاه $\bar{\mathbf{z}}=x-iy$. سرانجام E به وسیلهٔ مجموعهٔ همهٔ تبدیلهایی که به یکی از دو صورت $\mathbf{z}\longrightarrow u\,\mathbf{z}+w$، یا $\mathbf{z}\longrightarrow u\,\bar{\mathbf{z}}+w$ به زای $u,w\in C$ و $|u|=1$ می‌باشند نشان داده می‌شود.

۴. پایدارسازها و ترایایی

اگر F زیر مجموعه‌ای از E باشد پایدارساز F در E گروه E_F متشکل از همهٔ $\propto$ ها در E است که $F\propto=F$. وقتی F تنها یک نقطهٔ P باشد قبلاً متذکر شده‌ایم $E_p=\mathrm{sym}\,\Gamma$ که Γ دایره‌ای به مرکز P است. گروه $E_{P,Q}=E_P\cap E_Q$ متشکل از همهٔ تبدیلاتی که هر دو نقطهٔ متفاوت P و Q را ثابت

نگاه می‌دارند باید همهٔ نقاط خط l گذرندهٔ از P و Q را ثابت نگاه دارند؛ لذا $E_{P,Q}=\{۱,\rho\}$ که ρ بازتاب نسبت به l است. $E_{\{P,Q\}}$ پایدارساز مجموعهٔ $\{P,Q\}$ ممکن است شامل اعضای تعویض کنندهٔ Q,P نیز باشد اما نقطهٔ M وسط $[P,Q]$ را ثابت نگاه می‌دارد. از این رو $E_{\{P,Q\}}=\{۱,\rho,\rho',\sigma\}$ یک چهار ـ گروه است، که ρ' بازتاب نسبت به l' عمود منصف $[P,Q]$ است و $\sigma=\rho\rho'$ دوران حول M به اندازهٔ زاویهٔ π است.

اگر P ، Q و R سه نقطهٔ ناهمخط باشند آنگاه گروه ثابت نگاه دارندهٔ هر سه نقطه، گروه بدیهی $E_{P,Q,R}=۱$ است، زیرا هر $\propto$ که Q,P را ثابت نگاه دارد باید ۱ یا بازتاب ρ نسبت به خط l=PQ باشد و این ρ نقطهٔ R را ثابت نگاه نمی‌دارد. این مطلب را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه. یک طولپایی صفحه که سه نقطه ناهمخط را ثابت نگاه می‌دارد یک طولپایی بدیهی است.

نتیجه. اگر سه نقطهٔ ناهمخط تحت دو طولپایی صفحه نگاره‌های یکسانی داشته باشند آنگاه دو طولپایی یکسان‌اند.

دو شکل $F_۱$ و $F_۲$ در صفحهٔ E را قابل انطباق گوییم اگر برای یک طولپایی مانند $\propto$ در E داشته باشیم $F_۲=F_۱\propto$.

گروه T روی E **ترایا** است: به ازای دو نقطهٔ مفروض Q,P ، $\tau\in T$ وجود دارد. که $P\tau=Q$. در واقع T روی E **کاملاً ترایا** است: τ در بالا یکتا است. در نتیجه E روی E ترایا است. اما $\propto\in E$ یک جفت از نقاط Q,P را به جفت دیگری مانند P' و Q' می‌نگارد اگر و تنها اگر $d(P,Q)=d(P',Q')$؛ در واقع ما یک کمی بیشتر را اثبات می‌کنیم.

قضیه. اگر دو مثلث $[P,Q,R]$ و $[P',Q',R']$ دارای اضلاع متناظر مساوی باشند آنگاه آنها قابل انطباق‌اند و یک طولپایی یکتا وجود دارد که P را به P' ، Q را به Q' و R را به R' می‌نگارد.

برهان. یک انتقال τ وجود دارد که P را به $P\tau=P'$ می‌نگارد. حال $d(P',Q')=d(P,Q)=d(P\tau,Q\tau)=d(P,Q\tau)$ زیرا Q' و $Q\tau$ روی یک دایره به مرکز P' واقع‌اند و یک دوران σ به مرکز P' وجود دارد که $Q\tau$ را به $Q\tau\sigma=Q'$ می‌نگارد. لذا $\tau\sigma$ نقطهٔ P را به P' و Q را به Q' می‌نگارد. چون $d(P',R')=d(P,R)=d(P\tau\sigma,R\tau\sigma)=d(P',R\tau\sigma)$ و $d(Q',R')=d(Q',R\tau\sigma)$ یا $R'=R\tau\sigma$ یا $R'=R\tau\sigma\rho$ که ρ بازتاب نسبت به $l=P'Q'$ است. از این رو یا $\propto=\tau\sigma$ یا $\propto=\tau\sigma\rho$ نقطهٔ P را به P' ، Q را به Q' و R را به R' می‌نگارد. یکتایی از

نتیجه به دست می‌آید. □

۵. تشابه

گروه E نقشی اساسی هر چند به طور ضمنی در تعمیم معمول هندسه اقلیدسی دارد که از آنجا می‌توان از «حرکت دادن»، یا «بر هم نهادن» یک شکل F_1 بر روی شکلی دیگر که قابل انطباق با آن است صحبت کرد. اما مفهوم فاصله یک نقش محدودی را در هندسه اقلیدسی به عهده دارد و اساساً در رابطه با مفاهیم **برابری** دو فاصله، یا **نسبت** دو فاصله مطرح می‌شود. اندازهٔ واقعی یک شکل هندسی اهمیتی ندارد و اگر آن به نسبتی بزرگ (یا کوچک) شود، چنان که نسبت همهٔ فواصل بی‌تغییر باقی بماند، همهٔ ویژگیهای هندسی آن حفظ می‌شوند. چنین تغییر اندازه‌ای از همهٔ فواصل در E یک تشابه نامیده می‌شود و حال E را با الحاق همهٔ این تبدیلها به **گروه تشابه** S توسعه می‌دهیم.

ابتدا گروه $S_\circ$ متشکل از همهٔ تشابهاتی که مرکز o را ثابت نگاه می‌دارند در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی $k>\circ$ فرض کنید μ_k تبدیلی باشد که o را ثابت نگاه دارد و هر نقطهٔ دیگر P را به $P\mu_k=P'$ چنان بنگارد که $\overrightarrow{o,P'}=k.\overrightarrow{o,P}$ یعنی μ_k تغییر نسبتی به اندازهٔ k به مرکز O است و به آسانی می‌توان بررسی کرد $\mu_{k_1}\mu_{k_2}=\mu_{k_1k_2}$ که از آنجا گروه $M_\circ$ متشکل از همهٔ این گونه μ_kها با گروه $R_+^\times$ متشکل از همهٔ اعداد حقیقی مثبت تحت عمل ضرب یکریخت است. به علاوه به آسانی بررسی می‌شود $S_\circ=M_\circ\times E_\circ$ که حاصلضرب مستقیم است و $S=S_\circ T=M_\circ E$ که در هر دو حالت یک حاصلضرب نیم مستقیم است. نمایش ماتریسی برای E را می‌توان به نمایشی برای S به وسیلهٔ نمایش μ_k توسط ماتریس زیر توسعه داد.

$$M(\mu_k)=\begin{pmatrix} k & \circ & \circ \\ \circ & k & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}$$

نمایش مختلط E را می‌توان به وسیلهٔ نمایشهای $\mu_k: z \longrightarrow kz$، $k>\circ$ به S توسعه داد. چون هر عدد مختلط $u\neq\circ$ را می‌توان به صورت $u=ke^{i\theta}$ به ازای $k>\circ$ نوشت نگارهٔ S متشکل از همهٔ تبدیلهای به صورت $z \longrightarrow uz+w$ یا $z \longrightarrow u\bar{z}$ به ازای $u,w\in C$ با شرط $u\neq\circ$ است.

۶. گروه مستوی

گروه E و در واقع گروه بزرگتر S این ویژگی را دارند که خطها را به خطها می‌نگارند اما S بزرگترین گروه با این ویژگی نیست. **گروه مستوی** A گروه همهٔ نگاشتهای دو سویی از E به E است که خطها را به خطها می‌نگارد. این گروه را «گروه خطی عام» نیز می‌توان نامید به شرطی که

این اصطلاح را قبلاً برای مفهوم دیگری به کار نبرده باشیم، در واقع اصطلاح **گروه خطی عام** صفحهٔ حقیقی $GL(۲,\mathbf{R})$ برای پایدار ساز $A_۰$ در A برای یک نقطهٔ o به کار می‌رود.

مطلب اخیر که $A_۰=GL(۲,\mathbf{R})$ واضح نیست. باید نشان دهیم که اگر α یک نگاشت دوسویی از E باشد که خطها را به خطها بنگارد و نقطهٔ o را ثابت نگاه دارد و هر خط l گذرنده از o را به خودش بنگارد. آنگاه α را می‌توان به وسیله یک تبدیل مختصات «خطی» در معنای متعارف نمایش داد. این امر منجر می‌شود به نشان دادن این که اگر α نقاط $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ از محور حقیقی l را ثابت نگاه دارد، آنگاه α همهٔ نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد؛ واضح نیست که α بتواند نقاط $(x,۰)$ را برای x عدد اصم به طریقی نابدیهی جابه‌جا کند. این مطلب در فصل ۶ نشان داده خواهد شد اما عجالتاً آن را فرض می‌گیریم.

مانند موارد E و S، نتیجه می‌شود $A=A_۰T$ که حاصلضرب نیم مستقیم است. به علاوه موقتاً فرض می‌کنیم اعضای α از $A_۰$ به وسیلهٔ همهٔ ماتریسهای ۲×۲ حقیقی ناتکین

$$M(\alpha)=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{pmatrix}$$

نمایش داده می‌شوند و از این رو A به وسیلهٔ همهٔ ماتریسهای ۳×۳ ناتکین به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & ۰ \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & ۰ \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & ۱ \end{pmatrix}$$

تنها یک قضیهٔ هندسی در هندسهٔ مستوی ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید $[P,Q,R]$ و $[P',Q',R']$ دو مثلث دلخواه باشد یعنی هر یک سه تایی مرتب دلخواهی متشکل از سه نقطهٔ نا همخط می‌باشند. آنگاه یک عضو یکتا از گروه مسوی A وجود دارد که P را به P'، Q را به Q'، و R را به R' می‌نگارد.

برهان: کافی است این مطلب را در حالت خاص $P'=o=(۰,۰)$، $Q'=X=(۱,۰)$ و $R'=Y=(۰,۱)$ ثابت کنیم. یک انتقال τ وجود دارد که P را به $P\tau=o$ می‌نگارد از این رو $[P,Q,R]$ را به $[O,Q\tau,R\tau]$ می‌نگارد که o، $Q\tau$ و $R\tau$ همخط نیستند. از جبر خطی می‌دانیم که یک تبدیل خطی وجود دارد، در معنای معمول، لذا یک عضو α از $A_۰$، X را به $Q\tau$ و Y را به $R\tau$ می‌نگارد. بنابراین $\alpha^{-۱}$، O را به o، $Q\tau$ را به X و $R\tau$ را به Y می‌نگارد. لذا $\tau\alpha^{-۱}$ مثلث

$[P,Q,R]$ را به $[o,X,Y]$ می‌نگارد.

برای یکتایی فرض کنید دو عضو α و β از A مثلث $[P,Q,R]$ را به $[o,X,Y]$ می‌نگارند. آنگاه $\alpha^{-1}\beta$ عضوی از A_o خواهد بود که o را به o، X را به X و Y را به Y می‌نگارد و بنابراین $\alpha^{-1}\beta=1$ یعنی $\alpha=\beta$. □

برای ارایهٔ مثالی کاملاً مناسب از سودمندی هندسهٔ مستوی این قضیهٔ را که دو قطر یک متوازی الاضلاع π یکدیگر را نصف می‌کنند در نظر می‌گیریم. از تعریف روشن است که هر عضو α از گروه مستوی خطهای موازی را به خطهای موازی می‌نگارد و از نمایش خطی روشن است که α نسبت فواصل را در امتداد خطهای موازی حفظ می‌کند. لذا حکم برای یک متوازی‌الاضلاع π درست است اگر و تنها اگر برای متوازی‌الاضلاع $\alpha\pi$ درست باشد. حال بنابه قضیهٔ بالا همیشه می‌توانیم α را چنان انتخاب کنیم که $\alpha\pi$ یک مربع باشد. اما حکم برای یک مربع به طور بدیهی درست است. از این رو برای همهٔ متوازی‌الاضلاعها درست می‌باشد.

استدلال ارایه شده را می‌توان تعمیمی از روش معمول در هندسهٔ تحلیلی دانست که برای اثبات یک قضیهٔ هندسی، ابتدا یک دستگاه مختصات مناسبی انتخاب می‌شود.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. چه وقت حاصلضرب دو لغزه، یک دوران است؟ چه وقت یک انتقال است؟ چه وقت حاصلضرب چهار بازتاب یک دوران است؟ چه وقت یک انتقال است؟

مسألهٔ ۲. اگر α عضوی از یک گروه G باشد **نگاشت مزدوج گیری** ϕ_α از G به G را به صورت $\gamma\phi_\alpha=\gamma^\alpha$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید ϕ_α یک **خود ریختی** (تقارن) از G است یعنی یک یکریختی از G بروی G. نشان دهید نگاشت $\phi:\alpha\longrightarrow\phi_\alpha$ یک همریختی از G به گروه $\mathrm{Aut}G$ متشکل از همهٔ خودریختیهای G است. **مرکز** G هستهٔ ϕ است که متشکل از همهٔ اعضای α در G می‌باشد که با هر عضو از G تعویضپذیراند. مرکز E، E^+، T را بیابید.

مسألهٔ ۳. زیر گروه تعویضگر G' برای یک گروه G زیر گروه تولید شده به وسیلهٔ همهٔ **تعویضگرهای** $\gamma^{-1}\gamma^\alpha=\gamma^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha$ از اعضای $\alpha\in G$, γ است. نشان دهید که G' یک زیر گروه نرمال G است و برای هر زیرگروه نرمال N از G خارج قسمت G/N آبلی است اگر و تنها اگر N شامل G' باشد. گروههای تعویضگر E، E^+، T را بیابید.

مسألهٔ ۴. برای N یک زیرگروه نرمال از G نشان دهید که G با یک حاصلضرب نیم مستقیم از N در G/N یکریخت است اگر و تنها اگر نگاشت متعارف از G بروی G/N زیر گروهی از G را به‌طور یکریخت بروی G/N بنگارد. نشان دهید که D_{2n} با حاصلضرب نیم مستقیم $D^+_{2n}=C_n$ در $D_{2n}/D^+_{2n}\simeq C_2$ یکریخت است.

مسألهٔ ۵. اگر $G=QN$ حاصلضرب نیم مستقیم N در Q باشد آنگاه مزدوج‌گیری اعضای N به

وسیلهٔ Q نگاشتی مانند $\phi: Q \longrightarrow \mathrm{Aut}\ N$ را تعریف می‌کند. اگر $q_1, q_2 \in Q$ و $n_1, n_2 \in N$ آنگاه $(q_1n_1)(q_2n_2)=(q_3n_3)$ که $q_3=q_1q_2 \in Q$ و $n_3=(n_1(q_2\phi))n_2 \in N$. به عکس اگر گروههای Q و N و نگاشتی مانند $\phi: Q \longrightarrow \mathrm{Aut}\ N$ مفروض باشند آنگاه مجموعهٔ G از همهٔ جفتهای مرتب (q,n) به ازای $q \in Q$ و $n \in N$ تحت عمل ضرب $(q_1,n_1)(q_2,n_2)=(q_3,n_3)$ به ازای q_3 و n_3 مطابق بالا، به یک گروه تبدیل می‌شود و G با حاصلضرب نیم مستقیم N در Q یکریخت است. G یک حاصلضرب مستقیم است اگر و تنها اگر به ازای هر $q \in Q$، $q\phi=1$. فرض کنید $N=C_p$، $Q=C_q$ که p و q اعداد اول‌اند؛ نشان دهید که همهٔ حاصلضربهای نیم مستقیم G از N در Q یکریخت‌اند هر گاه q عدد $p-1$ را تقسیم نکند اما هر گاه q عدد $p-1$ را تقسیم کند یکریخت نیستند.

مسألهٔ ۶. گروه خطی عام $GL(2,\mathbf{R})$ را می‌توان به صورت گروه خودریختی فضای برداری $V=V(2,\mathbf{R})$ تعریف کرد. نگاشتن $\tau \in T$ به بردار $\overrightarrow{O,O\tau}$ یک یکریختی از T به گروه جمعی V تعریف می‌کند. به این نحو یک نگاشت ϕ از $E_\circ$ به $\mathrm{Aut}\ T \supseteq M(E_\circ)$ به دست می‌آید. نشان دهید حاصلضرب نیم مستقیم حاصل با E یکریخت است.

مسألهٔ ۷. فرض کنید یک ماتریس 2×2 حقیقی A یک تبدیل α را نمایش می‌دهد. نشان دهید که $A \in M(E_\circ)=o(2,\mathbf{R})$ اگر و تنها اگر α طول را حفظ کند و در آن حالت α اندازهٔ زوایا را نیز حفظ می‌کند. نشان دهید که اگر T مثلث دلخواهی باشد مساحت نگارهٔ آن $T\alpha$ برابر با $|\det A|$ یعنی مساحت T است و اگر $A \in M(E_\circ)$ آنگاه $\det\ A=\pm 1$ بر طبق این که α جهت نگهدار باشد یا جهت را معکوس کند.

مسألهٔ ۸. با استفاده از هندسهٔ مستوی ثابت کنید که سه میانهٔ مثلث در یک نقطه تلاقی می‌کنند.

مرجعها

این فصل نیازمند زمینه‌ای فراتر از مطالب فصل اول نیست. ایده این فصل در فصل بعدی توسعهٔ بیشتری خواهد یافت. برای کسانی که مایل به دانستن مطالب بیشتری در این زمینه هستند کتابهای زیادی دربارهٔ هندسه اقلیدسی مسطحه وجود دارند، خصوصاً کتاب ه.س.م کاستر **مقدمه‌ای بر هندسه** و کتاب ه.وگولین هایمر، **هندسهٔ مسطحه و گروههای آن**، را توصیه می‌کنیم.

فصل سه

زیرگروههای گروه طولپاییهای صفحه

۱. زیرگروههایی با زیرگروههای انتقال گسسته

قضیه. اگر زیرگروه G از گروه E متشکل از طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی E باشد و هیچ انتقال نابدیهی نداشته باشد آنگاه G یک نقطه را ثابت نگاه می‌دارد.

برهان. چون G شامل هیچ انتقال نابدیهی نیست، دارای لغزه ~~نیز نمی‌~~باشد. ابتدا فرض کنید G دارای یک دوران نابدیهی σ به مرکز o است. اگر α عضو دلخواهی از G باشد آنگاه σ^α دورانی به مرکز o^α با همان زاویهٔ σ یا قرینه آن است. اگر $o^\sigma \neq o$ آنگاه $\sigma^{-1}\sigma^\alpha$ یا $\sigma\sigma^\alpha$ یک انتقال نابدیهی است. در نتیجه هرعضو α از G نقطهٔ o را ثابت نگاه می‌دارد. اگر G دارای دوران نابدیهی نباشد آنگاه تنها اعضای نابدیهی آن بازتابها می‌باشند. چون حاصلضرب دو بازتاب متمایز یک انتقال نابدیهی یا یک دوران نابدیهی است G حداکثر می‌تواند دارای یک بازتاب باشد. لذا $G=\{1\}$ یا $G=\{1,\rho\}$ که ρ یک بازتاب است و G تعداد زیادی نقطه را ثابت نگاه می‌دارد. □

قضیه. اگر G یک زیرگروه متناهی از E باشد آنگاه G یا دوری یا دووجهی است.

برهان. G نمی‌تواند دارای انتقال نابدیهی باشد لذا G نقطهٔ o را ثابت نگاه می‌دارد. اگر G دورانی نابدیهی نداشته باشد آنگاه مانند قبل یا $G\{1\}$ یا $G=\{1,\rho\}$ یعنی از نوع C_1 یا D_1 است. در غیراین صورت فرض کنید G شامل یک دوران σ با کمترین زاویهٔ دوران مثبت θ باشد. به روشنی G نمی‌تواند شامل یک دوران σ_1 با زاویهٔ θ_1 باشد که به ازای هر $n\in Z$، $n\theta<\theta_1<(n+1)\theta$. لذا G^+ دوری با مولد σ است و G برابر با G^+ یا دووجهی است. □

۲. گروههای کتیبه

اکنون زیرگروههای G از E را در نظر می‌گیریم که در آنها زیرگروه انتقال $T=G\cap T$ دوری نامتناهی است. چنین گروههایی گروههای تقارن برخی شکلهای نامتناهی صفحه می‌باشند که به عنوان تقارن‌های انتقالی، تنها تکرر (توانهای) یک انتقال را در امتداد یک محور l می‌پذیرند. این گونه شکلها **کتیبه** و گروههای تقارن آنها **گروههای کتیبه** نام دارند. ما انواع گروههای کتیبه را مطرح خواهیم کرد و آنها را با ارائه کتیبه‌ای که، برای هر نوع گروه تقارنش از آن نوع است توضیح می‌دهیم.

فرض کنید F یک گروه کتیبه و τ مولدی برای T باشد. ابتدا فرض کنیم F دارای هیچ دوران نابدیهی نیست. آنگاه $F^+=F\cap E^+=T$. ممکن است $F=T$. در غیراین‌صورت $F=<\tau,\rho>$ یعنی گروه تولید شده به وسیلهٔ ρ,τ که ρکه یک بازتاب یا یک لغزه است. چون $T^\rho=T$ و τ گروه T را تولید می‌کند τ^ρ نیز باید T را تولید کند از این‌رو $\tau^\rho=\tau$ یا $\tau^\rho=\tau^{-1}$ و ρ محوری موازی یا عمود بر l محور τ دارد. نمی‌توانیم هر دو نمونهٔ اعضای ρرا داشته باشیم زیرا آنگاه حاصلضرب آنها یک دوران نابدیهی خواهد بود. اگر ρ یک بازتاب است آن می‌تواند هر یک از دو نمونه باشد. اگر ρ یک لغزه است آنگاه ρ^2 انتقالی نابدیهی می‌باشد از این‌رو به ازای برخی $h\neq 0$، $\rho^2=\tau^h$ و l محور ρاست. اکنون ρ با τ تعویضپذیر است و $(\rho\tau^k)^2=\tau^{h+2k}$. اگر ρرا به ازای k مناسب با $\rho\tau^k$ جایگزین کنیم می‌توانیم فرض کنیم که $\rho^2=1$ و ρ یک بازتاب است یا $\rho^2=\tau$که ρ یک لغزنده است؛ در حالت اخیر F دارای هیچ بازتابی نیست.

ما چهار نوع گروه کتیبه راکه از نظر هندسی متفاوت‌اند به شرح زیر به دست آورده‌ایم.

از نوع یکریختی C_∞	$F_1=<\tau,\phi>,$
یکریخت با $C_\infty\times C_2$	$F_1^1=<\tau,\rho:\rho^2=1,\tau^\rho=\tau>$
یکریخت با D_∞	$F_1^2=<\tau,\rho:\rho^2=1,\tau=\tau^{-1}>$
یکریخت با C_∞	$F_1^3=<\tau,\rho:\rho^2=\tau,\tau^\rho=\tau>$

تأکید می‌کنیم F_1 و F_1^3 به عنوان گروههای مجرد یکریخت‌اند اما از نظر هندسی هم‌ارز نیستند (یعنی به عنوان زیرگروههایی از E) زیرا F_1 جهت نگهدار است اما F_1^3 جهت را حفظ نمی‌کند.

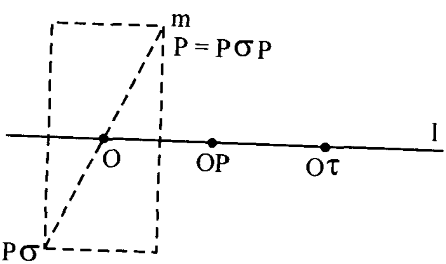
تنها، حالتی باقی می‌ماند که F دارای یک دوران نابدیهی σباشد دوباره $T^\sigma=T$ باید τ^α را تولید کند، و لذا $\tau^\sigma=\tau$ یا $\tau^\sigma=\tau^{-1}$. چون $\sigma\neq 1$ نمی‌توانیم داشته باشیم $\tau^\sigma=\tau$. لذا $\tau^\sigma=\tau^{-1}$ و σ دورانی از مرتبهٔ ۲ است. حالا می‌توانیم محور τ یعنی l را که از o مرکز σ می‌گذرد انتخاب کنیم. اگر ρ' هر دوران دیگری در F باشد آنگاه مرتبهٔ آن برابر با ۲ است. لذا $\sigma\sigma'$ یک انتقال است و

به‌ازای برخی مقادیر h، $\sigma\sigma'=\tau^h$ و $\sigma'=\sigma\tau^h$. لذا $F^+=<\tau, \sigma: \sigma^2=1, \tau^\sigma=\sigma^{-1}>$.

ممکن است که $F=F^+$. در غیر این صورت $F=<\tau, \sigma, \rho>$ یعنی F به وسیلهٔ τ، σ، ρ تولید می‌شود که ρ یک بازتاب یا لغزه است. مانند قبل محور ρ باید موازی یا عمود بر l باشد. اگر ρ محوری عمود بر l داشته باشد آنگاه $\rho'=\rho\sigma$ محوری موازی با l دارد. لذا با جایگزین کردن ρ به وسیلهٔ ρ' در صورت لزوم می‌توانیم فرض کنیم که ρ دارای محور l' می‌باشد که موازی با l است. اگر $l \neq l'$ آنگاه $o\rho \neq o$ و خط $m=\overline{o, o\rho}$ عمود بر l خواهد بود. حال حاصلضرب σ و σ^ρ، دورانهای مرتبهٔ ۲ به مرکزهای o و $o\rho$، یک انتقال در سوی m عمود بر l خواهد بود و با این فرض که T گروه دوری نامتناهی با مولد τ است تناقض دارد. لذا l محور ρ است.

اگر ρ یک بازتاب باشد آنگاه $\rho_1=\rho\sigma$ نیز یک بازتاب با محور m که عمود بر l در o است.

اگر ρ یک لغزه باشد مانند قبل می‌توانیم فرض کنیم که $\rho^2=\tau$.



فرض کنیم m عمودمنصف $[o, o\rho]$ باشد، بررسی شکل نشان می‌دهد که $\rho_2=\sigma\rho$ همهٔ نقاط m را ثابت نگاه می‌دارد از این رو ρ_2 بازتاب نسبت به m است. در این حالت F شامل هیچ بازتاب ρ_1 با محور عمود بر l در o نیست، چون $\rho_1\rho_2$ یک انتقال τ_0 است که o را به $o\rho$ می‌نگارد لذا داریم $\tau=\tau_0^2$ و با این فرض که τ گروه T را تولید می‌کنند متناقض است.

ما سه نوع گروه از نظر هندسی متفاوت F را که دارای یک دوران نابدیهی‌اند به شرح زیر به دست آورده‌ایم:

$F_2 \;=<\tau, \sigma: \sigma^2=1, \tau^\sigma=\tau^{-1}>;$ یکریخت با D_∞

$F_2^1 \;=<\tau, \sigma, \rho: \sigma^2=1, \tau^\sigma=\tau^{-1}, \rho^2=1, \tau^\rho=\tau, \sigma^\rho=\sigma>;$ یکریخت با $D_\infty \times C_2$

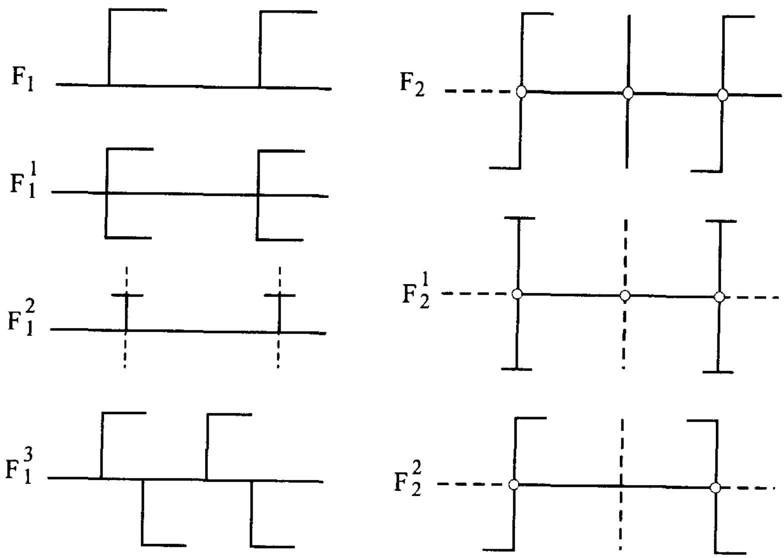
$F_2^2 \;=<\tau, \sigma, \rho: \sigma^2=1, \tau^\sigma=\tau^{-1}, \rho^2=\tau, \tau^\rho=\tau, \rho^\sigma=\rho^{-1}>$

$\;=<\sigma, \rho: \sigma^2=1, \rho^\sigma=\rho^{-1}>.$ یکریخت با D_∞

دوباره متذکر می‌شویم که هرچند انواع F_2 و F_2^2 به طور مجرد یکریخت‌اند ولی از نظر هندسی متفاوت می‌باشند زیرا F_2 جهت نگهدار است اما F_2^2 جهت را حفظ نمی‌کند.

قضیه. دقیقاً هفت نوع گروه کتیبهٔ از نظر هندسی متفاوت با نمایشهای ارائه شده در بالا وجود دارند که آنها با یکی از چهار گروه C_∞، D_∞، $C_\infty \times C_2$، $D_\infty \times C_2$ یکریخت‌اند.

در شکلهای زیر کتیبه‌هایی با هفت نوع گروه تقارن را نمایش می‌دهیم. در این شکلها، τ انتقال افقی است. در شکلهایی برای F_2، F_2^1، F_2^2 دایره‌های کوچک مرکزهای دورانی را علامت می‌گذارند.



۳. گروههای ناپیوسته

همهٔ گروههای کتیبه، یک خط l، یعنی محور کتیبه را پایا نگاه می‌دارند که در نتیجه همهٔ آنها در E_1 پایدارساز خطی مانند l قرار می‌گیرند. استدلالی که مکرراً به کار برده‌ایم ساختار E_1 را به دست می‌دهد.

قضیه. E_1 پایدار ساز یک خط l در E حاصلضرب نیم مستقیم $T_1 \cdot E_{1,0}$ که $E_1 = E_{1,0} \cdot T_1$ که $E_{1,0} \simeq D_4$ پایدارساز نقطهٔ o واقع بر l در E_1 است و $T_1 = E_1 \cap T$ پایدارساز l در T با R^+ یعنی گروه اعداد حقیقی تحت عمل‌جمع یکریخت است.

گروه E_1 دارای زیرگروههای بسیار متنوع است بسیاری از آنها از جنبهٔ هندسی چندان مورد توجه‌نیستند مثلاً گروه‌انتقالهایی به‌اندازهٔ $a+b\sqrt[3]{7}$ به‌ازای $a, b \in, Q$. زیرگروههایی از E که از جنبهٔ هندسی مورد علاقه‌اند به تعبیری معمولاً بسیار بزرگ و پیوسته‌اند، مانند E_1 و یا نسبتاً پراکنده می‌باشند مانند زیرگروههای متناهی یا گروههای کتیبه که به تعبیر زیر، «ناپیوسته»اند.

تعریف. یک زیرگروه G از E **ناپیوسته** است هرگاه به ازای هر نقطهٔ p از صفحهٔ E قرصی مانند D به مرکز p وجود داشته باشد که به غیر از p برای $\alpha \in G$ شامل نگارهٔ هیچ نقطهٔ دیگری از قرض تحت α نیست.

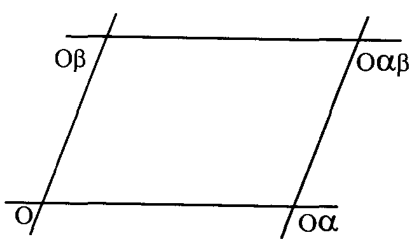
متذکر می‌شویم که این شرط هم‌ارز با مطلب زیر است: اگر p نقطهٔ دلخواهی از E و pG **مدار** $pG=\{p\alpha : \alpha \in G\}$ باشد و اگر D قرض دلخواهی در E باشد آنگاه اشتراک pG با D تنها شامل تعدادی متناهی نقطه است.

همچنین توجه می‌دهیم که اگر G یک زیرگروه ناپیوسته از E باشد آنگاه هر زیرگروه H از G نیز ناپیوسته است به خصوص $T=G\cap T$ ناپیوسته می‌باشد.

قضیه. اگر T زیرگروهی ناپیوسته از T باشد آنگاه T گروه بدیهی، دوری نامتناهی یا آبلی آزاد از رتبهٔ ۲ است، یعنی $T \simeq ۱$، $T \simeq C_\infty$ یا $T \simeq C_\infty \times C_\infty$.

برهان. فرض کنید T زیرگروه ناپیوسته‌ای از T باشد. که $T\neq ۱$ فرض کنید $\tau \in T$، $\tau \neq ۱$ و l خطی گذرنده از یک نقطهٔ o باشد که تحت τ پایا است. فرض کنید T_1 پایدارساز خط l در T باشد. D را قرصی به مرکز o و شامل $o\tau$ بگیرید آنگاه D تنها شامل تعدادی متناهی $o\alpha$ برای $\alpha \in T_1$ است و چون $o\tau \neq ۰$، D شامل برخی از این گونه $o\alpha \neq ۰$ها با کوتاهترین فاصله از o است. ثابت می‌کنیم که T_1 یک گروه دوری نامتناهی با مولد α است. اگر τ عضو دلخواهی از T_1 باشد آنگاه $o\tau$ روی l قرار دارد از این‌رو به ازای بعضی مقادیر k در $\mathbf{Z}$ در فاصلهٔ بستهٔ $[o\alpha^k, o\alpha^{k+۱}]$ واقع است. $o\tau=o\alpha^k$ یا $o\tau=o\alpha^{k+۱}$ آنگاه $\tau=\alpha^k$ یا $\tau=\alpha^{k+۱}$. در غیراین‌صورت $o<d=d(o\alpha^k, o\tau)<d(o, o\alpha)$ و $\tau'=\alpha^{-k}\tau$ را به $o\tau$ به اندازهٔ d و o را به $o\tau'$ در یک فاصلهٔ $d<d(o, o\alpha)$ از o انتقال می‌دهد که این برخلاف انتخاب α است.

اگر $T=T_1$ آنگاه T دوری نامتناهی است. حال فرض می‌گیریم که T دوری نامتناهی نباشد. اکنون در انتخابمان از $T_1=<\alpha>$ تجدیدنظر می‌کنیم، $\alpha\neq ۱$ را چنان می‌گیریم که $a=d(o, o\alpha)>۰$ مینیمم باشد. چون $T\neq T_1$ می‌توانیم $\beta \in T$ را با شرط $\beta \notin T_1$ چنان انتخاب کنیم که $b=d(o, o\beta)\geq a$ مینیمم باشد. فرض کنید π متوازی‌الاضلاع بسته‌ای با رأسهای o، $o\alpha$، $o\beta$ و $o\alpha\beta$ است.



روشن است که نگاره‌های $\pi\gamma$ برای همهٔ $\gamma=\alpha^m\beta^n\in T_2$ صفحه E را پر می‌کنند. فرض کنید τ عضو دلخواهی از T باشد آنگاه $o\tau$ برای $\gamma\in T_2$ در یک $\pi\gamma$ قرار دارد که از آنجا $o\tau\gamma^{-1}$ در π واقع است. برای نشان دادن این که $\tau\in T_2$ کافی است نشان دهیم $\tau'=\tau\gamma^{-1}\in T_2$. اگر $o\tau'$ در π یکی از رأسهای π باشد آنگاه τ' یکی از ۱، α، β یا $\alpha\beta$ است و $\tau'\in T_2$. اگر $o\tau'$ روی یکی از اضلاع π مثلاً $[o, o\alpha]$ یا $[o\beta, o\alpha\beta]$ قرار گیرد آنگاه $o\tau'$ یا $o\beta^{-1}\tau'$ به o نزدیکتر از $o\alpha$ خواهد بود و این برخلاف انتخاب α است. لذا می‌توانیم فرض کنیم که $o\tau'$ روی هیچ‌یک از این اضلاع قرار ندارد. اگر $o\tau'$ در قرص باز D به مرکز o و شعاع b باشد، آنگاه به o نزدیکتر خواهد بود تا $o\beta$ و این برخلاف انتخاب β است. اگر $o\tau'$ در قرص باز $D\alpha\beta$ به مرکز $o\alpha\beta$ و شعاع b واقع باشد آنگاه $o\alpha^{-1}\beta^{-1}\tau'$ به o نزدیکتر از $o\beta$ است که باز برخلاف انتخاب β است. اما چون $a\leq b$ اجتماع قرصهای D و $D\alpha\beta$ شامل همهٔ π احتمالاً به جز رأسهای $o\alpha$، $o\beta$ است. این یک تناقض است و اثبات این که $T=T_2=<\alpha, \beta>$ گروه آبلی آزاد از رتبهٔ ۲ است تکمیل می‌گردد. □

قضیه. اگر G یک زیرگروه ناپیوسته از E باشد آنگاه G_o پایدارساز نقطهٔ o در G دوری یا دووجهی متناهی است.

برهان. قبلاً برای هر دایرهٔ Γ به مرکز o دیده‌ایم که $E_o = \text{sym}\Gamma$ لذا G_o زیرگروهی از $\text{sym}\Gamma$ است. فرض کنید p نقطهٔ دلخواهی روی Γ باشد و D قرص دلخواهی شامل Γ باشد. چون $D\supseteq\Gamma\supseteq pG_o$ و G_o ناپیوسته است pG_o مجموعه‌ای متناهی از نقاط روی Γ است. چون pG_o تحت G_o پایا است، نقاط آن به فاصلهٔ مساوی قرار می‌گیرند. مانند رأسهای یک چندضلعی منتظم F. حال G_o جابه جاکنندهٔ این نقاط در گروه دووجهی $\text{sym}F$ واقع می‌شود. □

قضیه. اگر G یک زیرگروه ناپیوسته از E و $T=G\cap T$ گروه بدیهی باشد آنگاه G یک گروه دوری یا دووجهی متناهی است.

برهان. دیده‌ایم که اگر G شامل هیچ انتقال نابدیهی نباشد آنگاه نقطه‌ای مانند o را ثابت نگاه می‌دارد یعنی $G=G_o$ حال قضیهٔ قبل را می‌توانیم به کار بریم.

قضیه. اگر G یک زیرگروه گروه ناپیوسته از E و $T= G\cap T$ دوری نامتناهی باشد آنگاه G یک گروه کتیبه است.

برهان. این تعریف یک گروه کتیبه بود.

حالتی که باقی می‌ماند G زیرگروهی ناپیوسته از E است و $T= G\cap T$ گروه آبلی آزاد رتبهٔ ۲ است. این گروهها به **گروههای بلور نگارانهٔ** (مسطح) موسوم‌اند و در ریاضیات و هم در کاربردهایش بسیار مورد توجه می‌باشند. اما شمارش تعدادکامل آنها نسبتاً مشکل است که آن را به فصل بعد موکول می‌کنیم. عجالتاً تنها ساده‌ترین و شاید مهم‌ترین آن‌ها را بررسی می‌کنیم. روشهایی را ارائه می‌کنیم که دائماً به کار خواهند رفت.

۴. قالب‌بندیهای منتظم صفحهٔ اقلیدسی

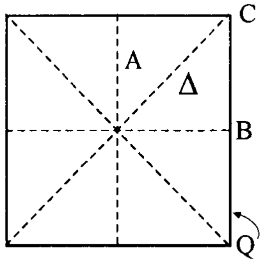
یک **قالب‌بندی** (شبکه‌بندی) صفحهٔ E یک تقسیم‌بندی صفحهٔ E به نواحی بستهٔ غیرمتداخل است که همیشه فرض می‌کنیم آنها به وسیلهٔ n ضلعیهای متناهی محصور شده‌اند. یک n ضلعی با $n\geq ۳$ منتظم نام دارد هرگاه اضلاع آن همطول و n زاویهٔ داخلی آن باهم برابر باشند. یک قالب‌بندی را منتظم گویند اگر همهٔ **وجه‌های** (شبکه‌های) آن‌که صفحه به آنها تقسیم می‌شود به وسیلهٔ چندضلعیهای منتظم قابل انطباق محصور شوند.

در نتیجه، با در نظر گرفتن تشابه تنها سه نوع قالب‌بندی منتظم F وجود دارد. برای هر یک از آنها گروه تقارنش یعنی symF را تعیین می‌کنیم.

فرض کنید F یک قالب‌بندی منتظم به وسیلهٔ n ضلعیهای π با $n\geq ۳$ باشد. چون زوایای داخلی آن باهم برابرند باید در هر رأس $m\geq ۳$ از این n ضلعیها وجود داشته باشند. وقتی دور n ضلعی π می‌گردیم در هر رأس به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{۲\pi}{n}$ می‌چرخیم که در نتیجه زوایای داخلی باید برابر با $\pi-\frac{۲\pi}{n}$ باشند. چون m، n-ضلعی π در هر رأس وجود دارند که زاویهٔ داخلی در هر یک باید برابر با $\frac{۲\pi}{m}$ باشد. در نتیجه $\frac{۲\pi}{m}=\pi-\frac{۲\pi}{n}$، یا $\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}$. نمی‌توانیم داشته باشیم $m, n\geq ۵$ که در نتیجه یکی از n, m باید برابر با ۳ یا ۴ باشد. می‌توان بررسی کرد که تنها سه جواب (۳، ۶) (۴،۴) یا (۳،۶) برای (m, n) وجود دارند. این جفتها قالب‌بندی منتظم به وسیلهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع، شش مثلث در هر رأس، و به وسیلهٔ مربع، چهار مربع در هر رأس، و به وسیلهٔ شش‌ضلعی منتظم، سه شش‌ضلعی در هر رأس را توصیف می‌کنند.

برای تعیین ساختار گروههای تقارن این قالب‌بندیها، یعنی گروه $G= \text{symF}$ می‌توانیم مانند مورد E عمل کنیم یعنی G را برحسب زیرگروه انتقال آن و پایدارساز نقاط به دست آوریم. به هرحال ترجیح می‌دهیم روش مهمی از پوآنکاره را ارائه کنیم که به وسیلهٔ آن می‌توانیم نمایشی از G را با کمک ملاحظات هندسی بیابیم. این روش مفصلاً در فصل ۱۰ ارائه خواهد شد و در اینجا آن را اساساً با استفاده از شهود هندسی و با بیانی غیرصوری‌تر عرضه می‌کنیم. برای این منظور توجه خود را به قالب‌بندی به وسیلهٔ مربعها که به ساده‌ترین نحو مجسم می‌شود محدود می‌کنیم؛ مطلب در دو حالت دیگر نیز دقیقاً به همین نحو است.

روش ما بستگی به یافتن یک **ناحیهٔ اصلی** برای G دارد یعنی یک ناحیهٔ n ضلعی Δ که نگاره‌های Δg تحت اعضای متفاوت $g\in G$ متمایزاند و صفحه را بدون تداخل پر می‌کنند. فرض کنید Q یکی از مربعهای شبکهٔ قالب‌بندی F باشد به روشی $G= G_Q T$، برای $T=G\cap T$ که $G_Q \cap T=1$. در نتیجه می‌توانیم Δ را به عنوان یک ناحیهٔ اصلی برای عمل G_Q روی Q انتخاب کنیم. اکنون $G_Q= symQ \approx D_8$، و روشن است که می‌توانیم Δ را چنان که در شکل نشان داده شده بگیریم، بخش مثلثی Q به وسیلهٔ محورهای بازتابهای متوالی تشکیل می‌شود.



فرض کنید A، B، C مطابق شکل رأسهای Δ باشند و فرض کنید α ، β، γ بازتابهایی نسبت به اضلاع a، b، c مقابل رأسهای A،B،C از Δ باشند. روشن است که $\alpha, \beta, \gamma\in G$.

قضیه. G **به وسیلهٔ** α ، β، γ **تولید می‌شود.**

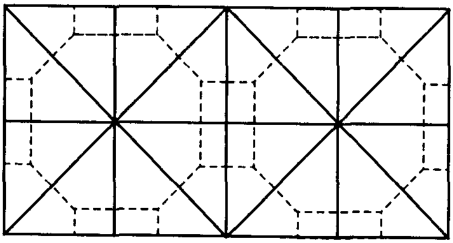
برهان. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد که به وسیلهٔ α ، β، γ تولید می‌شود. باید ثابت کنیم $H=G$. فرض کنید $H\neq G$. چون E اجتماع غیرمتداخلی از همهٔ Δgها است $g\in G$، با Δg متفاوت برای gهای مختلف، U اجتماع همهٔ Δhها برای $h\in H$ نمی‌تواند برابر با همهٔ E باشد. لذا ضلعی مانند s از مثلثی مانند Δh، برای $h\in H$ که باید روی مرز u قرار گیرد Δh را از برخی Δgها، $g\notin H$ جدا می‌کند. حال s برابر با ah، bh، یا ch نگارهٔ یک ضلع، a، b یا c از Δ است و دیده‌ایم که بازتاب ρ نسبت به s متناظر با عضو α^h ، β^h یا γ^h می‌باشد. چون $h, \alpha, \beta, \gamma\in H$ لذا ρ متعلق به H است و $g=h\rho\in H$ که تناقض است. □

حال ما در جستجوی رابطه‌های معرف بین α ، β، γ می‌باشیم. چون α ، β، γ بازتاب‌اند رابطه‌های $\alpha^2=1$ ، $\beta^2=1$، $\gamma^2=1$ را داریم به علاوه $\beta\gamma$ دورانی حول A به اندازهٔ $\frac{2\pi}{4}$ یعنی دوبرابر زاویهٔ داخلی مثلث Δ در A است، بنابراین $(\beta\gamma)^4=1$. به همین نحو $(\gamma\alpha)^2=1$ و $(\alpha\beta)^4=1$. ثابت می‌کنیم که اینها مجموعهٔ کاملی از رابطه‌های معرف می‌باشند.

قضیه. G دارای نمایش زیر است

$$G= <\alpha, \beta, \gamma: \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, (\beta\gamma)^4, (\gamma\alpha)^2, (\alpha\beta)^4>$$

برهان. فرض کنید D قالب‌بندیی (نه یک قالب‌بندی منتظم) از E به وسیلهٔ ناحیه‌های Δg، $g\in G$ باشد. فرض کنید o مرکز (محل تقاطع خطهای واصل رأسها و وسط اضلاع مقابل) Δ باشد. یک نمودار C را می‌سازیم که همهٔ رأسهای آن og مراکز مثلثهای Δg می‌باشند. og و oh را با یک ضلع (سودار) l به هم وصل می‌کنیم اگروتنها اگر Δg و Δh یک ضلع مشترک s داشته باشند.

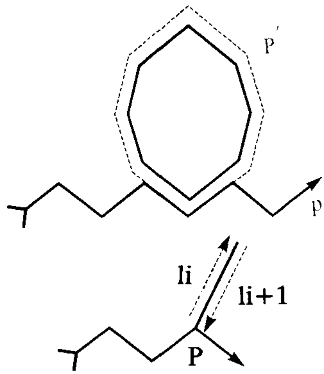


به ضلع e **نشان** $\lambda(e)=\alpha, \beta, \gamma$ را نسبت می‌دهیم برطبق این که s نگارهٔ ag، bg، cg ضلع a، b، c مثلث Δ باشد. (نمودار C با این تابع نشان، مثالی در یک **نمودار کیلی** است)

فرض کنید $p=e_1e_2...e_n$، $n\geq 0$، یک مسیر در C باشد. یعنی دنباله‌ای از یالها که به ازای $0\leq i<n$، e_{i+1} در جایی آغاز شود که e_i پایان می‌یابد. فرض کنید p که در og_0 آغاز می‌شود دارای رأسهای متوالی og_0،...، og_n باشد. تعریف‌کنیم $\lambda(p)=x_1...x_n$ که $x_i=\lambda(e_i)=\alpha, \beta$ یا γ. در برهان قبلی دیده بودیم که بازتاب ρ نسبت به یال s_i بین Δg_i و Δg_{i+1} برابر $\rho=x_i^{g_i}$ است که از آنجا $g_{i+1}= g_i\rho=g_ix_i^{g_i}=x_ig_i$. در نتیجه $g_n=x_n...x_1g_0$. تعریف می‌کنیم $\lambda^*(\rho)=x_n...x_1$ آنگاه $g_n=\lambda^*(p)g_0$.

توجه کنید که اگر p یک مسیر بسته باشد (در یک نقطه $og_0=og_n$ آغاز و پایان می‌یابد) آنگاه $g_0=g_n$، و رابطهٔ $\lambda^*(p)=1$ در G بر قرار است. به عکس اگر $w=x_n...x_1$ و $w=1$ رابطه‌ای در G باشد و برای g_0 دلخواه یک مسیر بستهٔ یکتای p در og_0 وجود دارد که $\lambda^*(p)=w$.

نمودار C صفحه را به ناحیه‌های Δ^* تقسیم می‌کند که برخی مربع و برخی هشت ضلعی هستند، لذا یک قالب‌بندی D^* (دوگان D) را تعریف می‌کند. فرض کنید که یک مسیر p بین نقاط P و Q در امتداد کمانی واقع بر یک طرف مرز یک ناحیه Δ^* قرار می‌گیرد و p' از p به وسیلهٔ جایگزین کردن این کمان با کمان واصل P و Q که دور طرف دیگر مرز Δ^* می‌گردد به دست می‌آید. به آسانی دیده می‌شود نشان برای مسیری که یکبار مرز Δ^* را دور می‌زند یکی از $(\beta\gamma)^{\pm4}$، $(\gamma\alpha)^{\pm2}$ یا $(\alpha\beta)^{\pm4}$ است، و از آنجا به آسانی دیده می‌شود رابطهٔ $\lambda^*(p)=\lambda^*(p')$ از رابطهٔ متناظر $(\beta\gamma)^4=1$، $(\gamma\alpha)^2=1$، یا $(\alpha\beta)^4=1$ نتیجه می‌شود.

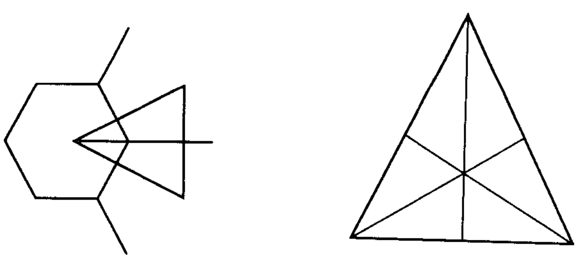


رابطه‌های ۱ =$\propto^{۲}$ ، ۱ =$\beta^{۲}$و ۱ =$\gamma^{۲}$نیز به همین نحو با تعدیل کردن p به وسیلهٔ حذف (یا درج) یک «یال خنثی» یعنی یک یال e_i دنبال شده به وسیلهٔ یک یال e_{i+1} که همان یال است با این تفاوت که سوی مخالف را طی می‌کند تناظر می‌یابند.

بنابراین اثبات این که رابطه‌های داده شده G را تعریف می‌کنند هم‌ارز با نشان دادن این است که هر مسیر بسته در C را می‌توان به وسیلهٔ تعدیلهای متوالی از این دو نوع به مسیر بدیهی در نقطه‌ای (با n = ۰ یال) ساده کرد. این مطلب که به طور شهودی کاملاً واضح است (می‌توان در مورد منقبض کردن p در حین ترفیع آن به طور متوالی بر روی دندانه‌ها در مراکز ناحیه‌های Δ^* فکر کرد)، و به آسانی ثابت می‌شود. برهان به حالتی ساده می‌شود که p یک طوقه ساده (خودش را قطع نمی‌کند) است. که به طور استقرایی به وسیلهٔ گردیدن دور طرف دیگر ناحیه‌ای مانند Δ^* می‌توان تعداد ناحیه‌های Δ^* احاطه شده به وسیلهٔ ρراکاهش داد.

برای قالب‌بندی **F** ازنوع (۳, ۶) به وسیلهٔ ناحیه‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع، شش مثلث در هر رأس، که فرق این حالت با حالت بالا در این است که زاویه‌های داخلی Δ متفاوت‌اند. نمایش زیر را خواهیم داشت

$$G = < \alpha, \beta, \gamma \propto^{۲} = \beta^{۲} = \gamma^{۲} = (\beta\gamma)^{p} = (\gamma\propto)^{q} = (\propto\beta)^{r} = 1 >$$



قالب‌بندی باقیمانده، از نوع (۳ , ۶) دوگان نوع (۶ ,۳) است و لذا همان گروه تقارن G را دارد؛ زیرا یک ناحیهٔ اصلی منحصر به فرد Δ برای هر دو آنها به کار می‌آید.

ما از اثبات مطلب مقدماتی زیر که قدری هوشیاری نیاز دارد صرفنظر می‌کنیم، اگر G یک گروه با نمایش زیر باشد

$$G= <\alpha, \beta, \gamma, \ \alpha^{۲}= \beta^{۲}= \gamma^{۲}= (\beta\gamma)^{p}= (\gamma\alpha)^{q}=(\alpha\beta)^{r}=۱>$$

آنگاه زیرگروه G^+ تولید شده به وسیلهٔ $x=\beta\gamma$، $y=\gamma\alpha$ و $z= \alpha\beta$ نمایش به صورت

$$G^+= <x, y, z; x^p= y^q= z^r= xyz=۱>$$

یا به طور هم‌ارز

$$G^+= <x, y: x^p=y^q= (xy)^r=۱>$$

دارد.

۵. گروههای مثلث

گروههایی که در بالا مورد مطالعه قرار گرفتند **گروههای کاکستر** (Coxeter) خاص می‌باشند یعنی گروههای ناپیوسته در فضای اقلیدسی (یا فضای دیگر) از بعد $n\geq ۲$ که به وسیلهٔ بازتابهای ρ_i تولید می‌شوند. $\rho_۱\rho_۲$ حاصلضرب دو بازتاب $\rho_۱$ و $\rho_۲$ اگر از مرتبهٔ متناهی باشد به ازای عدد صحیح مثبتی مانند m_{ij} دورانی به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{m_{ij}}$ است. گروه G نمایشی با مولدهای ρ_i و رابطه‌های معرف $\left(\rho_i\rho_j\right)^{m_{ij}}=۱$ دارد که $m_{ij}=m_{ji}$ و همهٔ $m_{ii}=۱$.

یک گروه **مثلث** G یک گروه ناپیوستهٔ تولید شده به وسیلهٔ بازتابهای α، β، γ، نسبت به سه ضلع یک مثلث است که یک ناحیهٔ اصلی Δ برای G را تعیین می‌کند. زوایای داخلی باید برابر با $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{r}$، $\frac{\pi}{q}$ باشند برای اعداد صحیح $p, q, r \geq ۲$. در هندسه مسطحه مجموع زوایای داخلی باید برابر با π باشد که آنجا باید داشته باشیم $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} + \frac{۱}{r}=۱$. ما قبلاً حالتهایی را دیده‌ایم که (p, q, r) به ترتیب عبارت‌اند از (۲ ,۴ ,۴) و (۳ ,۶ ,۳). تنها یک حالت دیگر باقی می‌ماند (۳ ,۳ ,۳). که Δ به وسیلهٔ یک مثلث متساوی‌الاضلاع تعیین می‌شود و گروه آن عبارت است از

$$G= <\alpha, \beta, \gamma: \alpha^{۲}= \beta^{۲}= \gamma^{۲}= (\beta\gamma)^{۳}= (\gamma\alpha)^{۳}= (\alpha\beta)^{۳}=۱>$$

به روشنی این گروه یک زیرگروه از گروه تقارن کامل قالب‌بندی منتظم E به وسیلهٔ مثلثهای

متساوی‌الاضلاع است.

گروههای مثلث با $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ در صفحهٔ اقلیدسی امکان‌پذیر نیستند. اما آنها روی کرهٔ S با اختیارکردن Δ تعیین شده به وسیلهٔ یک مثلث کروی [A, B, C] قابل تصوراند و اضلاع آن c, b, a کمانهای دایره‌های عظیمه می‌باشند که با زاویه‌های داخلی $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$، $\frac{\pi}{r}$ تلاقی می‌کنند، و مجموع آنها بزرگتر از π است. این حالت کاملاً مشابه به حالت صفحه است جز این که به لحاظ متناهی بودن مساحت کرهٔ S قالب‌بندی حاصل تنها تعدادی متناهی وجه Δg دارد و لذا گروه G متناهی است.

به جای کار روی کرهٔ S می‌توانیم اضلاع a، b و c مثلث کروی را به وسیلهٔ صفحه‌های $\bar{a}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ در فضای اقلیدسی سه بعدی E^3 جایگزین کنیم که از o مرکز S می‌گذرند و دربرگیرندهٔ کمانهای a، b، c می‌باشند. بنابراین می‌توانیم انعکاسهای α، β، γ را با انعکاسهای $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\beta}$ ، $\bar{\gamma}$ در E^3 نسبت به صفحه‌های $\bar{a}$ ، $\bar{b}$ ، $\bar{c}$ جایگزین کنیم. اینها یک گروه $\bar{G}$ را تولید می‌کنند که با G یکریخت است. در واقع، به روشنی G کرهٔ S را پایا نگاه می‌دارد و G از $\bar{G}$ به وسیلهٔ تحدید هر عضو $\bar{g}$ از $\bar{G}$ به تبدیل g که روی S اثر می‌گذارد به دست می‌آید.

۶. اجسام منتظم در فضای اقلیدسی سه‌بعدی

یک قالب‌بندی منتظم F نوع (n, m) برای S، در هر رأس از m، n- ضلعی منتظم کروی قابل انطباق تشکیل یافته است. لذا این قالب‌بندی تنها تعدادی متناهی وجه دارد. اگر Π وجه دلخواهی از F باشد آنگاه همهٔ رأسهای Π در صفحه‌ای مانند p قرار دارند و یک n- ضلعی منتظم Π' را در صفحهٔ p تعیین می‌کنند. ناحیه‌ای از E^3 که به وسیلهٔ همهٔ n- ضلعیهای Π' مشخص می‌شود جسمی منتظم است که در هر رأس آن m، n- ضلعی منتظم قابل انطباق تلاقی کرده‌اند. به عکس برای هر جسم منتظم مفروض تصویر وجه‌های آن بروی یک کرهٔ محیطی S یک قالب‌بندی منتظم F از S را به دست می‌دهد.

برای یافتن گروه تقارن G= sym F این قالب‌بندی، دقیقاً مانند حالت اقلیدسی عمل می‌کنیم، به عنوان ناحیهٔ اصلی یکی از ۲n ناحیهٔ مثلثی Δ را انتخاب می‌کنیم که یک وجه Π به وسیلهٔ محورهای تقارنهای بازتابی مثلث مزبور به آنها تقسیم می‌شود. یکی از زوایای Δ مثلاً در رأس C برابر با $\frac{\pi}{2}$ است و زوایای دیگر $\frac{\pi}{n}$ و $\frac{\pi}{m}$ می‌باشند که $1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ یا $\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ (توجه کنید که شرط $1 < \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ در واقع نتیجه می‌دهد که دست‌کم یکی از p، q، r برابر با ۲ می‌باشد).

حالت ۰ : از نظر فنی یکی از دو مورد m, n=۲، روی کره امکان دارد و دیگری را

می‌توانیم یک عدد صحیح دلخواه بزرگتر یا مساوی با ۲ بگیریم. اگر $n=۲$، آنگاه Π یک ۲-ضلعی (دوضلعی) است که دو ضلع آن نیم‌دایره‌های عظیمهٔ متلاقی در رأسهای متقاطراند مثلاً قطب شمال N و قطب جنوب S. اگر زاویهٔ داخلی برابر با $\frac{۲\pi}{m}$ باشد m دوضلعی از این نمونه وجود دارند که هر یک در دو رأس N و S تلاقی می‌کنند. گروه G به عنوان زیر گروه شاخص ۲، شامل گروه دووجهی از مرتبه ۲m

$$G^{+}= <x, y, z: x^{۲}= y^{m}= z^{۲}= xyz=۱> \;=\; <x, z: x^{۲}= z^{۲}= (zx)^{m}= ۱>$$

است. گروه G^+ به نوبهٔ خود شامل یک گروه دوری $H \simeq C_m$ با شاخص ۲ در G^+ است از این‌رو شاخصی برابر ~~با ۴ در~~ G دارد و ناحیهٔ اصلی آن Π می‌باشد.

اگر $m=۲$ آنگاه Π ناحیه‌ای n- ضلعی است که همهٔ زوایای داخلی آن برابر با π می‌باشند یعنی Π یک نیمکره است که به وسیلهٔ یک خط استوا به n کمان مساوی تقسیم می‌شود. تنها دووجه وجود دارند، Π و یک نیمکرهٔ متمم با همان اضلاع و رئوس. گروه تقارن G نیز همان است.

توجه کنید که اینها قالب‌بندیهای تباهیدهٔ کره جسم منتظمی در مفهوم متداول ایجاد نمی‌کنند.

از این پس فرض می‌کنیم که $n, m \geq ۳$. شرط $\frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} > \frac{۱}{۲}$ ایجاب می‌کند که یکی از m، n برابر با ۳ باشند. فرض می‌کنیم که $m=۳$، بعداً به حالتهای دوگان با $n=۳$ بازمی‌گردیم. حال باید داشته باشیم $\frac{۱}{n} > \frac{۱}{۶}$ که از آنجا n برابر با ۳، ۴ یا ۵ است.

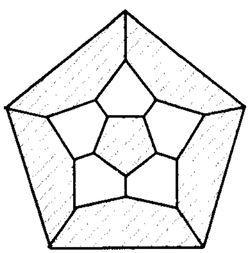
حالت ۱: $(n, m) = (۳, ۳)$. وجه‌های Π از F ناحیه‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع با سه مثلث در هر رأس می‌باشند. می‌توان دید که F به وسیلهٔ تصویر کردن یک **چهاروجهی** منتظم بر روی یک کرهٔ محیطی به دست می‌آید.

چون F چهاروجه Π دارد و هر وجه از $۶=۲.۳$ ناحیهٔ اصلی Δg ساخته می‌شود جمعاً $۲۴=۴.۶$ نسخهٔ Δg از Δ وجود دارند که در نتیجه G مرتبه‌ای برابر با ۲۴ دارد. همچنین می‌توان دید که G همهٔ جایگشتهای مجموعهٔ چهار رأس را تولید می‌کند که در نتیجه G با $S_۴$ یعنی گروه تقارن همهٔ جایگشتهای چهار شیء یکریخت است. لذا زیرگروه G^+ با $A_۴$ یعنی گروه متناوب با شاخص ۲ در $S_۴$ تناظر می‌یابد و از این رو دارای مرتبهٔ ۱۲ است.

حالت ۲: $(n, m) = (۴, ۳)$. اینجا F تصویر مکعب بر روی کرهٔ محیطی S است. مکعب ۶ وجه Π دارد و هر وجه، از ۸ نسخهٔ Δ ساخته می‌شود که در نتیجه مرتبهٔ G برابر با ۴۸ است.

حالت ۳: $(n, m) = (5, 3)$. در اینجا F تصویر دوازده وجهی منتظم با ۱۲ وجه پنج ضلعی و سه، پنج ضلعی در هر رأس است. از آنجا که این جسم کمتر از چهار وجهی و مکعب آشنا می‌باشد و همچنین برای نشان دادن روشی که بعداً در موارد پیچیده‌تری به کار خواهد رفت به طریقهٔ ساختن F اشاره می‌کنیم، یا به طور هم‌ارز، چگونگی ساختن دوازده وجهی منتظم یعنی چگونگی اثبات این که آن وجود دارد را توضیح می‌دهیم.

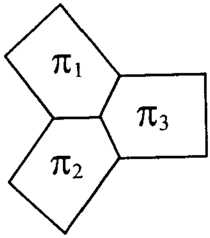
برای ساختن F به یک پنج ضلعی منتظم کروی Π با زوایای داخلی $\frac{2\pi}{3}$ نیاز داریم. فرض کنید Π یک پنج ضلعی منتظم کروی با شعاع (فاصله مرکز آن با رأسهایش) r به طوری که $0 < r < r_1$ و r_1 یک پنجم طول محیط یک دایرهٔ عظیمه است. وقتی r به سمت ۰ میل می‌کند، Π به اقلیدسی بودن نزدیک‌تر می‌شود و θ زاویهٔ داخلی آن به سمت $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$ میل می‌کند. وقتی r به سمت r_1 میل می‌کند Π به سمت یک دایرهٔ عظیمهٔ تقسیم شده به پنج کمان به عنوان اضلاع میل می‌کند و θ به π میل می‌کند. چون θ به طور پیوسته با r افزایش می‌یابد $\pi > \frac{2\pi}{3} > \frac{3\pi}{5}$ به ازای مقداری از r پنج ضلعی Π زاویهٔ داخلی برابر با $\theta = \frac{2\pi}{3}$ دارد.



حال سه نسخهٔ Π در یک رأس باهم جور می‌شوند، هر دو نسخه یک ضلع مشترک دارند. ما با یک وجه مرکزی Π_1 شروع می‌کنیم (در طرح نیمه‌تمام بالا سایه خورده است) و وجه‌های باقیمانده را در رأسهای آن ملحق می‌کنیم، جسم حلقوی (سایه نخورده) R از پنج وجه احاطه کنندهٔ Π_1 تشکیل می‌شود. پنج وجه دیگر که اضلاعشان با اضلاع R مشترک‌اند جسم حلقوی (سایه خوردهٔ) دوم R' را تشکیل می‌دهند. که شکل قبلی را احاطه کرده است. حال مرز شکل حاصل یک دور با پنج ضلع است و ناحیهٔ متمم (خارج از دید در طرح) را می‌توان با پنج ضلعی دوازدهم پُر کرد.

همچنین می‌توان یک دوازده وجهی در E^3 را با استفاده از ۱۲ پنج ضلعی منتظم قابل انطباق، مثلاً با بریدن کاغذ مقوایی ساخت. دو تا از آنها را در امتداد یک ضلع لولا کنید و زاویه بین این دو را طوری تنظیم کنید که با پنج ضلعی سوم در امتداد دوضلعش لولا شود. به این نحو شکل یک جسم صلب تشکیل می‌گردد و زاویهٔ بین هر دو وجه برابرند و به گونه‌ای است که اتصال وجه‌های بیشتری را امکان‌پذیر می‌سازد تا مانند مورد قبل با اتصال دوازدهمین وجه

شکل تکمیل شود.



همچنین توجه می‌کنیم که با کنار گذاشتن بحثهای متریکی که به پیوستگی توسل می‌جویند وجود یک قالب‌بندی ترکیبی F برای کرهٔ S را که احتمالاً نامنتظم است به وسیله وجه‌هایی که هر یک دقیقاً به پنج وجه دیگر اتصال می‌یابد و دقیقاً با سه تلاقی در هر رأس ثابت کرده‌ایم. به علاوه F به طور ترکیبی یکتا است یعنی یکتا در حد همسانریختی.

مرتبهٔ گروه G برابر با ۱۲۰=۱۰.۱۲ است.

حالتهای دوگان که در بالا مطرح نشدند را می‌توان با تعویض نقش n و m به دست آورد. مانند مورد صفحه، گروه تقارن F^* دوگان قالب‌بندی F است. در حالت (۳ ,۳) چهاروجهی، F^* نیز از همان نوع F است و دوگان جسم منتظم به دست آمده از F^* دوباره یک چهاروجهی است. برای مکعب (۳ ,۴) به عنوان جسم دوگان، هشت‌وجهی منتظم (۴ ,۳) را به دست می‌آوریم؛ این شکل ۸ وجه مثلثی دارد (متناظر با ۸ رأس مکعب) با ۴ تلاقی در هر یک از ۶ رأس آن (متناظر با ۶ وجه مکعب). برای دوازده وجهی (۳ ,۵) به عنوان دوگان آن **بیست‌وجهی** منتظم (۵ ,۳) را با ۲۰ وجه مثلثی و ۵ تلاقی در هر یک از ۱۲ رأس آن به دست می‌آوریم. به طور دقیق جمعاً پنج نوع جسم منتظم (ناتباهیده) وجود دارند.

در فصل ۵ «ابر اجسام» منتظم در فضای اقلیدسی بیشتر از سه بعدی را بررسی خواهیم کرد.

۷. گروههای مثلث هذلولوی

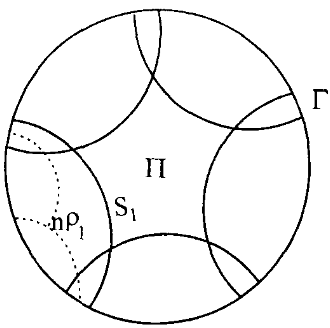
دیده‌ایم که اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ به ازای اعداد صحیح $p, q, r \geq 2$ یک ناحیه مثلثی Δ در صفحهٔ اقلیدسی E با زوایای داخلی $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$ و $\frac{\pi}{r}$ وجود دارد که بازتابهایی نسبت به سه ضلع Δ یک گروه ناپیوستهٔ G را با ناحیهٔ اصلی Δ تولید می‌کند.

همچنین دیده‌ایم که اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ یک ناحیه مثلثی Δ روی کره S با زوایای $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$ و $\frac{\pi}{r}$ وجود دارد که بازتابهایی نسبت به سه ضلع Δ یک گروه ناپیوسته و در واقع یک گروه متناهی G با ناحیهٔ اصلی Δ را تولید می‌کند.

اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ وضع شبیه **صفحهٔ هذلولوی** H است. این مطلب با تفصیل بیشتر

در فصلهای ۹ و ۱۰ بحث خواهد شد ما در اینجا کاری بیشتر از توصیف یک مثال نمی‌کنیم (البته با حذف همهٔ جزئیات صوری آن).

ما یک قالب‌بندی F از صفحهٔ هذلولوی H از نوع (۴ ,۵) را به وسیلهٔ پنج ضلعیهای منتظم، چهار تا در هر رأس توصیف می‌کنیم. هر پنج ضلعی را می‌توان به عنوان اجتماع ده مثلث در مرکز آن با زوایای داخلی $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۵}$ در نظر گرفت. صفحهٔ هذلولوی H را می‌توان به صورت قرص واحد باز همراه با یک فاصلهٔ هذلولوی متفاوت با فاصله اقلیدسی توصیف کرد، نیازی نیست که آن را در اینجا تعریف کنیم. **خطهای هذلولوی** در H عبارت‌اند از اشتراک H با دایره‌های (و خطهای) اقلیدسی عمودبر دایرهٔ داحد. مشکل نیست ببینیم که می‌توانیم پنج دایرهٔ $c_۱$، $c_۲$، ...، $c_۵$ با شعاعهای مساوی و مراکز هم فاصله از o مرکز H را که به تساوی به طور شعاعی قرارگرفته‌اند چنان بیابیم که همهٔ آنها عمود بر Γ باشند و کمانهای $s_۱$، ...، $s_۵$ از $c_۱$، ...، $c_۵$ پنج ضلع از پنج ضلعی (هذلولوی) راست گوشهٔ Π را تشکیل دهند.



بازتاب هذلولوی ρ_i نسبت به ضلع s_i از Π به عنوان انعکاس نسبت به دایرهٔ C_i (فصل ۹ را ببینید) که H را پایا نگاه می‌دارد در نظر می‌گیریم. حال Π یک ناحیهٔ اصلی برای گروه G تولید شده به وسیله $\rho_۱$، ...، $\rho_۵$ است و مجموعهٔ نگاره‌های Πg به ازای همهٔ $g\in G$ مجموعهٔ وجوه قالب‌بندی منتظم F از H به وسیلهٔ پنج ضلعیها راست‌گوشه است. گروه G دارای نمایش زیر است

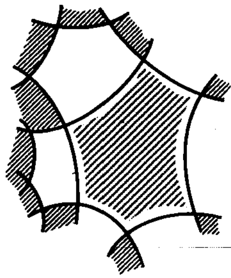
$$G = <\rho_۱, \cdots, \rho : \rho_۱^۲ = \rho_۲^۲ = \cdots = \rho_۵^۲ = (\rho_۱\rho_۲)^۲ = \cdots = (\rho_۵\rho_۱)^۲ = ۱>$$

و زیرگروه G^+ تولید شده به وسیلهٔ $\sigma_۱ = \rho_۱\rho_۲$، ...، $\sigma_۵ = \rho_۵\rho_۱$ نمایش زیر را دارد.

$$G^+ = <\sigma_۱, \ldots, \sigma_۵ : \sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲ = \sigma_۳^۲ = \sigma_۴^۲ = \sigma_۵^۲ = \sigma_۱\sigma_۲\sigma_۳\sigma_۴\sigma_۵ = ۱>$$

اگر وجوه Πg را برای $g\in G^+$ **سفید** برای $g\notin G^+$ **سیاه** کنیم آن چه به دست می‌آید یک **صفحهٔ**

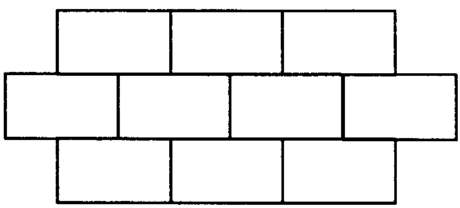
شطرنج پنج‌وجهی است:
دو وجه با یک ضلع مشترک رنگهای مخالف دارند و دو وجه همرنگ حداکثر به طور قطری در یک رأس تلاقی می‌کنند. اجتماع یک وجه سفید و یک وجه سیاه Δg یک ناحیهٔ اصلی برای G^+ است.



مسأله‌ها

مسأله ۱. گروه E_1 را به وسیلهٔ تبدیلهای صفحهٔ مختلط نشان دهید. چگونه E_1 به sym l گروه تقارن خط l مربوط می‌شود.

مسألهٔ ۲. گروه تقارن قالب‌بندی صفحهٔ نمایش داده شده به وسیلهٔ الگوی معمول برای آجرکاری را چنان که نشان داده شده است بیابید.



مسألهٔ ۳. نشان دهید که یک گروه G از طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی ناپیوسته است اگر و تنها اگر یکی از شرایط هم‌ارز برقرار شوند.

(۱) هیچ نقطه‌ای مانند P حد دنباله‌ای از نقاط متمایز Pg_n، $g_n \in G$ نیست.

(۲) در نمایش ماتریسی G هیچ دنباله‌ای از ماتریسهای $M(g_n) \neq I$، $g_n \in G$ عضو به ماتریس همانی I همگرا نباشد.

(۳) به ازای همهٔ $N > 0$ تنها تعدادی متناهی $M(g)$، $g \in G$ وجود دارند که همهٔ مؤلفه‌های آن، قدر مطلق کمتر از N دارند.

مسألهٔ ۴. فرض کنید T گروه آبلی آزاد رتبهٔ ۲ انتقالهای صفحه باشد، نشان دهید برای همهٔ جفتهای α و β از مولدهای T متوازی‌الاضلاعهای Π با رأسهای o، $o\alpha$، $o\beta$ و $o\alpha\beta$ مساحت

یکسانی دارند.

مسألهٔ ۵. برهانی از این مطلب ارایه کنید که اگر G یک گروه مثلثی باشد آنگاه G^+ دارای نمایش زیر است

$$G^+ = \langle x, y, z: x^p=y^q=z^r= xyz=۱ \rangle$$

مسألهٔ ۶. گروه G تولیده شده به وسیلهٔ بازتابهای نسبت به اضلاع یک مربع چیست؟ G^+ چیست؟ همین پرسش را برای شش ضلعی منتظم پاسخ دهید.

مسألهٔ ۷. G گروه تقارن یک دوازده وجهی منتظم (یا یک بیست وجهی منتظم) مرتبهٔ ۱۲۰ دارد، در نتیجه مرتبهٔ G^+ برابر با ۶۰ است. گروه متناوب $A_۵$ متشکل از همهٔ جایگشتهای زوج یک مجموعه از پنج شیء نیز مرتبهٔ ۶۰ دارد. نشان دهید که $G^+= A_۵$ (مراجعه کنید به کتاب کاکستر ـ موزر، بخش ۲.۴)

مسألهٔ ۸. فرض کنید G گروه تقارن یک چهاروجهی منتظم باشد. نشان دهید که G دارای زیرگروهی مانند H با وجه منحصر به فرد Π به عنوان ناحیهٔ اصلی است و $G= G_{\Pi}.H$ اما H را نمی‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که در G نرمال باشد، در نتیجه G حاصلضرب نیم مستقیم H در G_{Π} نیست. نشان دهید G^+ دارای هیچ زیرگروه H نیست که Π را به عنوان ناحیه اصلی داشته باشد.

مسألهٔ ۹. برهان مفصلی ارایه دهید از این که هر مسیر بسته در نمودار C را می‌توان به وسیلهٔ حذف متوالی «یالهای خنثی» و جایگزینی یک کمان روی مرز برخی از Δ^*ها به وسیلهٔ کمان متمم به مسیر بدیهی تحویل کرد.

نکته‌ها

نکته ۱. گروه بیست‌وجهی $G^+ \simeq A_۵$، برای G گروه تقارن یک بیست‌وجهی، گروهی ساده است، یعنی دارای هیچ زیرگروه نرمالی به جز ۱ و خود G^+ نیست، به عبارت دیگر یا هر همریختی از G^+ بروی گروه دیگر H یک یکریختی از G^+ بروی H است یا همریختی بدیهی می‌باشد که همهٔ عناصر G^+ را به ۱ می‌فرستد. گروه بیست‌وجهی به عنوان کوچکترین گروه سادهٔ غیرآبلی مورد توجه است.

نکته ۲. بیشترین کاربرد روش پوآنکاره در مورد گروههای فوخسین (فصل ۱۰ را ببینید) است این گروهها شامل بازتابها نیستند. در این حالت نیز G به وسیلهٔ همهٔ اعضای $\propto$ تولید می‌شود که Δ را به ناحیهٔ $\Delta\propto$ می‌فرستند و دارای ضلع مشترکی با Δ می‌باشند.

نکته ۳. **یک قالب‌بندی ترکیبی** F از E (یا S یا H) از نوع (n, m) که $n, m \geq ۳$ را می‌توان به شرح زیر تعریف کرد:

(۱) فضای E (یا S یا H) اجتماع غیرمتداخلی از وجوه Δ است، که هر یک با یک قرص بسته همسانریخت است.

(۲) اگر Δ_1 و Δ_2 دووجه متفاوت باشند یا آنها مجزا می‌باشند که اشتراک آنها یک نقطهٔ منحصر به‌فرد v روی مرز هر دو، موسوم به یک رأس است، اشتراک آنها یک ضلع s است که با یک فاصلهٔ بسته همسانریخت است و شامل در مرز هر دو، با رأسهایی به عنوان نقاط انتهایی می‌باشد.

(۳) مرز هر وجه اجتماع غیرمتداخلی از n ضلع است.

(۴) هر رأس دقیقاً در m وجه واقع می‌شود.

به آسانی می‌توانیم ببینیم که چنین قالب‌بندیی باید متناهی باشد اگر (n, m) یکی از (۳, ۳)، (۳, ۴)، (۴, ۳)، (۳, ۵)، (۵, ۳) باشد و در این حالتها یک چنین قالب‌بندی F از کره S وجود دارد و در حد همسانریختی یکتا است.

چون E و H همسانریخت‌اند (هرچند با متریکهای متفاوت) این تعریف فرقی بین آنها نمی‌گذارد. به آسانی می‌توانیم ببینیم که برای E یا H قالب‌بندیهایی از انواع دیگر وجود دارند و در حد همسانریختی یکتا می‌باشند. قبلاً دیده‌ایم که تنها انواع (۶, ۳)، (۴, ۴)، (۳, ۶) به عنوان قالب‌بندیهای منتظم با متریک اقلیدسی قابل تصوراند، و بعداً خواهیم دید که بقیهٔ آنها به عنوان قالب‌بندیهای منتظم صفحهٔ هذلولوی H با متریک مربوط به آن قابل تصور می‌باشند.

مرجعها

برای قالب‌بندیهای منتظم (و غیر آن) اجسام منتظم (و غیر آن) و گروههای آنها کتاب کاکستر ـ موزر و کتاب کاکستر[1] را ببینید. چنانکه قبلاً متذکر شدیم روش پوآنکاره و نیز هندسهٔ هذلولوی به طور مفصل‌تر در فصلهای ۹ و ۱۰ مورد بحث قرار خواهند گرفت. و همانجا مرجعهای مربوط معرفی خواهند شد.

1. Regular polytopes

فصل چهار

گروههای ناپیوستهٔ طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی: گروههای بلورنگارانهٔ صفحه

۱. مقدمه

یادآوری می‌کنیم که G زیرگروهی از E گروه طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی E ناپیوسته است اگروتنها اگر به ازای هر نقطهٔ P و هر دایرهٔ Γ تنها تعدادی متناهی نگاره $P\gamma$ در نقطهٔ P تحت $\gamma \in G$ درون دایرهٔ Γ وجود داشته باشند. از حالا به بعد فرض می‌کنیم که G، یک زیرگروه ناپیوسته از E است. مانند قبل $G^+ = G \cap E^+$ زیرگروه با شاخص ۱ یا ۲ در G زیرگروه نرمال همهٔ اعضای G است که جهت نگهدار هستند. همچنین $T = G \cap T$ زیرگروه نرمال همهٔ انتقالهای G است.

قبلاً دیده‌ایم که T گروه بدیهی یا دوری نامتناهی یا آبلی آزاد از رتبهٔ ۲ است و اگر T گروه بدیهی باشد G گروهی متناهی، دوری یا دووجهی است و اگر T نامتناهی دوری باشد G یکی از هفت نوع گروه کتیبه است. اگر T آبلی آزاد از رتبه ۲ باشد آنگاه G یک گروه بلورنگارانه (صفحه) نامیده می‌شود. از حالا به بعد فرض می‌کنیم که G یک گروه بلورنگارانهٔ صفحه باشد.

هدف ما رده‌بندی گروههای بلورنگارانهٔ صفحه در حد یکریختی است. منطقاً می‌توان در مورد یک رده‌بندی بهتر با در نظر گرفتن عمل هندسی G روی E پرسش کرد. مثلاً اگر G_1 و G_2 در E مزدوج باشند یعنی به ازای برخی $\gamma \in E$، $G_2 = G_1^{\gamma}$، می‌توان G_2 حاصل از G_1 را به عنوان یک تغییر مختصات (مستطیلی) در نظر گرفت و مسلماً G_1 و G_2 با این عنوان که به طور هندسی هم‌ارزند رده‌بندی می‌شوند، اما حالتی را در نظر بگیرید که G=T و G گروه انتقالهای تولید شده به وسیلهٔ انتقالهای α و β به اندازهٔ فاصله‌های a و b باشند در سوهایی که زاویه θ می‌سازند. به آسانی می‌توانیم ببینیم که تعدادی نامتناهی از این گروهها وجود دارند که درون E مزدوج نیستند و در نتیجه رده‌بندی مورد نظر چندان مفید نمی‌باشد. همین مشکل نیز با رده‌بندی بر طبق مزدوج بودن درون S یعنی گروه تشابه‌ها بروز می‌کند. به هر حال همهٔ این گروههای انتقال G=T درون گروه مستوی A مزدوج‌اند: یافتن γ در A که بردارهای $\overrightarrow{o,o\alpha}$ و $\overrightarrow{o,o\beta}$ را برای نقطه‌ای مانند o به دوبردار متعامد یکه $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$ بنگارد چندان دشوار نیست. واقعیت جالب این

است که چنین رده‌بندیی از همه گروههای بلورنگارانهٔ صفحه به وسیلهٔ مزدوج بودن مستوی با رده‌بندی به وسیلهٔ یکریختی یکی است: اگر G_1 و G_2 دوگروه بلورنگارانهٔ یکریخت باشند بعداً خواهیم دید γ در A وجود دارد که $G_2 = G_1^{\gamma}$.

چون T یک زیرگروه نرمال از G می‌باشد به‌ازای هر γ در G نگاشت مزدوج $\tau \longrightarrow \tau^{\gamma}$ یک خودریختی از T است و شناختن این نگاشت ϕ از G در $\mathrm{Aut}T$ اطلاعات نسبتاً کاملی دربارهٔ G به ما می‌دهد. به عبارت دقیقتر دیده‌ایم که $E = E_\circ T$ حاصلضرب نیم‌مستقیم T در $E_\circ$ پایدارساز نقطهٔ o است. غالباً داریم، **اما نه همیشه**، که متناظراً $G = G_\circ T$ حاصلضرب نیم‌مستقیم که در این حالت G کاملاً بوسیلهٔ نگاشت القا شده از $G_\circ$ در $\mathrm{Aut}T$ مشخص می‌شود. (استثناهایی در مورد لغزه‌های ρ در G پیش می‌آیند که درون G به حاصلضرب یک بازتاب $\rho_\circ \in G_\circ$ برای o مرکز یک دوران از مرتبهٔ ماکزیمال و یک انتقال $\tau_\circ \in T$ تجزیه نمی‌شوند). این مسأله برای G^+ که همیشه می‌توان آن را به صورت $G^+ = G_\circ^+ T$ یک حاصلضرب نیم‌مستقیم نوشت پیش نمی‌آید.

روش کار را به شرح زیر است. ابتدا گروههای ممکن جهت نگهدار G^+ را رده‌بندی می‌کنیم. بعداً از این واقعیت استفاده می‌کنیم که اگر $G \neq G^+$ آنگاه G به وسیلهٔ G^+ همراه با هر عضو دیگر ρ از G که در G^+ نیست تولید می‌شود. سپس خودریختی T حاصل از مزدوج‌گیری به وسیلهٔ ρ را بررسی می‌کنیم. با این اطلاعات اقدام به شمردن تفضیلی حالتها می‌کنیم.

۲. گروه G^+

یادآوری می‌کنیم که یک جفت از مولدهای α و β برای T را می‌توانیم چنان انتخاب کنیم که ($|\alpha| = d(o, o\alpha)$ در بین همهٔ مقادیر $|\tau|$ برای τ غیربدیهی در T مینیمال باشد و $|\beta|$ در بین همهٔ مقادیر $|\tau|$ برای τ در T که توانی از α نیست مینیمال باشد. این فرض را وقتی که باعث سهولت شود روی α و β می‌گذاریم.

هرگاه یک نقطهٔ پایهٔ o انتخاب شود گروه T یک مشبکهٔ L را مشخص می‌کند و مدار نقطهٔ o تحت T برابر با $L = \{o\tau : \tau \in T\}$ است، در واقع مجموعهٔ V از بردارهای $\overrightarrow{o, o\tau}$، $\tau \in T$، به عنوان زیرمجموعه‌ای از $V(2, R)$، مستقل از انتخاب o است. اگر γ عضو دلخواهی از E باشد آنگاه بردار $\overrightarrow{o, o\tau^{\gamma}}$ نگارهٔ بردار $\overrightarrow{o, o\tau}$ تحت عمل γ روی صفحهٔ E است.

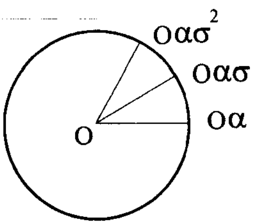
اولین نتیجهٔ این است که یک دوران واقع در یک گروه بلورنگارانه تنها یکی از مرتبه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶ را می‌تواند داشته باشد. (این محدودیت، خصوصاً مستثنی کردن ۵، گاهی تحدید بلورنگارانه، نامیده می‌شود.)

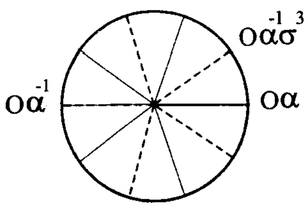
قضیه. G^+ **به وسیلهٔ** T **همراه بایک دوران منحصر به‌فرد ازمرتبهٔ** n **به ازای ۶ یا ۴** $n = 1, 2, 3, 4$

تولید می‌شود و یکی از انواع زیر است.

$$G_1= <\alpha, \beta: \alpha\beta=\beta\alpha>;$$
$$G_2= <\alpha, \beta, \sigma: \alpha\beta=\beta\alpha, \sigma^2=1, \alpha^\sigma=\alpha^{-1}, \beta^\sigma=\beta^{-1}>;$$
$$G_3= <\alpha, \beta, \sigma: \alpha\beta=\beta\alpha, \sigma^3=1, \alpha^\sigma=\alpha^{-1}\beta, \beta^\sigma=\alpha^{-1}>;$$
$$G_4= <\alpha, \beta, \sigma: \alpha\beta=\beta\alpha, \sigma^4=1, \alpha^\sigma=\beta, \beta^\sigma=\alpha^{-1}>;$$
$$G_6= <\alpha, \beta, \sigma: \alpha\beta=\beta\alpha, \sigma^6=1, \alpha^\sigma=\beta, \beta^\sigma=\alpha^{-1}\beta>;$$

برهان. فرض کنید که G^+ دارای یک دوران σ از مرتبهٔ $n\geq 2$ مثلاً به مرکز o باشد. آنگاه n نقطهٔ $o\alpha$، $o\alpha\sigma$، ...، $o\alpha\sigma^{n-1}$ به تساوی روی دایره‌ای به مرکز o و به شعاع $|\alpha|$ قرار می‌گیرند. اگر $n>6$ آنگاه $d(o\alpha, o\alpha\sigma)<|\alpha|$. چون α در T است، α^σ و $\alpha^{-1}\alpha^\sigma$ به T تعلق دارند. اما $\alpha^{-1}\alpha^\sigma$ نقطهٔ $o\alpha$ را به $o\alpha^\sigma= o\sigma^{-1}\alpha\sigma= o\alpha\sigma$ می‌نگارد از این رو طول آن در $|\alpha^{-1}\alpha^\sigma|<|\alpha|$ صدق می‌کند که با انتخاب α مغایر است.





اگر $n=5$ آنگاه $o\alpha^{-1}\sigma^3$ برابر با یکدهم محیط دایره نسبت به نقطهٔ شروع $o\alpha$ است که در نتیجه $d(o\alpha, o\alpha^{-1}\sigma^3)<|\alpha|$ و انتقال $\alpha^{-1}(\alpha^{-1})^{\sigma^3}$ طولی کمتر از $|\alpha|$ دارد که مجدداً یک تناقض است. لذا همه دورانهای G^+ مرتبه‌ای برابر ۱، ۲، ۳، ۴، یا ۶ دارند.

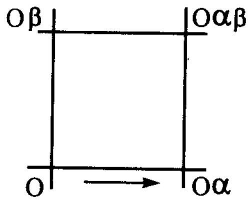
اگر G^+ شامل یک دوران σ_1 به اندازهٔ $\frac{2\pi}{2}$ و یک دوران σ_2 به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ باشد آنگاه $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ دورانی به اندازهٔ $\frac{2\pi}{6}$ است. لذا اگر G^+ دورانهایی از مرتبه‌های ۲ و ۳ داشته باشد دورانهایی از مرتبهٔ ۶ نیز دارد. لذا اگر G^+ شامل دوران به اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ و دوران σ_2 به اندازهٔ $\frac{2\pi}{4}$ باشد آنگاه $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ دورانی به اندازهٔ $\frac{2\pi}{12}$ و از مرتبهٔ ۱۲ است. لذا G^+ نمی‌تواند شامل دورانهایی از مرتبه‌های ۳ و ۴ باهم باشد. در نتیجه اگر n بزرگترین مرتبهٔ یک دوران σ در G^+ باشد آنگاه همهٔ دورانهای دیگر σ_1 در G^+ مرتبه‌های n_1 دارند که n را تقسیم می‌کنند. می‌توانیم فرض کنیم که σ زاویهٔ $\frac{2\pi}{n}$ و σ_1 زاویهٔ $\frac{2\pi}{n_1}$ را دارد که $n=n_1m$. آنگاه σ^m همان زاویه σ_1 را دارد که برابر با $\frac{2\pi}{n1}$ است و $\tau=\sigma_1\sigma^{-m}$ یک انتقال است. لذا σ_1 در گروه تولید شده به وسیلهٔ T و σ قرار دارد. این مطلب نشان می‌دهد که G^+ به وسیلهٔ T و σ تولید می‌شود.

این فرض که $n=۱, ۲, ۳, ۴$ یا ۶ بزرگترین مرتبهٔ یک دوران در G^+ باشد را دنبال می‌کنیم و G_n را برای G^+ بنابه مورد می‌نویسیم.

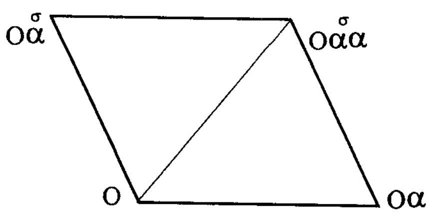
اگر $n=۱$ آنگاه $G^+=G_۱$ شامل هیچ رابطهٔ غیربدیهی نیست و $G_۱=T$ نمایش ارائه شده را دارد.

اگر $n=۲$ آنگاه σ از مرتبهٔ ۲ دارای زاویهٔ π است که از آنجا به ازای هر τ در $\mathbf{T}$، $\tau^{\sigma}=\tau^{-۱}$ و $G_۲$ نمایش ارائه شده را دارد. وجود σ از مرتبهٔ ۲ هیچ شرطی را روی مشبکهٔ L نمی‌گذارد.

فرض کنید $n=۴$ و σ یک دوران از مرتبهٔ ۴ به مرکز o است. چون σ دارای زاویه $\frac{\pi}{۲}$ است α^{σ} یک انتقال در سوی عمود بر سوی α با طول $|\alpha^{\sigma}|=|\alpha|$ است. می‌توانیم بگوییم $\alpha^{\sigma}=\beta$. آنگاه $\beta^{\sigma}=\alpha^{-۱}$ و $G_۴$ نمایش ارائه شده را دارد. در این حالت مشبکهٔ L یک **مشبکهٔ مربعی** است.



حال فرض کنید G^+ یک دوران σ از مرتبهٔ ۳ به‌مرکز o دارد. چون زاویهٔ $\overrightarrow{o, o\alpha}$ و $\overrightarrow{o, o\alpha^{\sigma}}$ برابر با $\frac{۲\pi}{۳}$ است و $|\alpha^{\sigma}|=|\alpha|$ سه نقطهٔ o، $o\alpha^{\sigma}$ و $o\alpha^{\sigma}\alpha$ رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. لذا $|\alpha^{\sigma}\alpha|=|\alpha|$ و می‌توانیم انتخاب کنیم $\beta=\alpha^{\sigma}\alpha$، که در نتیجه $\alpha^{\sigma}=\beta\alpha^{-۱}$ و $\beta^{\sigma}=\alpha^{-۱}$. در این حالت مشبکهٔ L یک **مشبکهٔ مثلثی** است.



اگر $n=۳$ آنگاه $G_۳$ به وسیلهٔ $\mathbf{T}$ و σ از مرتبه ۳ تولید می‌شود و نمایش ارائه شده را دارد.

اگر $n=۶$ آنگاه $\sigma^۲$ مرتبه‌ای برابر با ۳ دارد که بنابراین مشبکهٔ L مثلثی است. اما در این حالت σ زاویه $\frac{۲\pi}{۶}$ را دارد و درنتیجه $\alpha^{\sigma}=\beta$ و $\beta^{\sigma}=\beta\alpha^{-۱}$، که مطابق‌نمایش‌ارائه شده است.□

۳. مزدوج‌گیری T به وسیلهٔ ρ

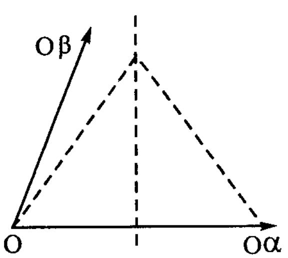
حال به حالت $G\neq G^+$ بازمی‌گردیم که از آنجا G به وسیلهٔ G^+ و هر عضو ρ از G که در G^+ نیست تولید می‌شود. در اینجا ρ یک بازتاب یا یک لغزنده است و به هرحال $\rho^۲$ در $\mathbf{T}$ می‌باشد.

لذا خودریختی $\tau \longrightarrow \tau^\rho$ از T که نمی‌تواند هر دو α و β را ثابت نگاه دارد از مرتبه ۲ است.

لم. اگر $\rho\in G$ و $\rho\notin G^+$ آنگاه یکی از دو شرط زیر و نه هر دو آنها برقرار است:
(A_1) T به وسیلهٔ اعضای α و β بطوری که $\alpha^\rho=\alpha$ و $\beta^\rho=\beta^{-1}$ تولید می‌شود؛
(A_2) T به وسیلهٔ اعضای α و β بطوری که $\alpha^\rho=\beta$ و $\beta^\rho=\alpha$ تولید می‌شود.

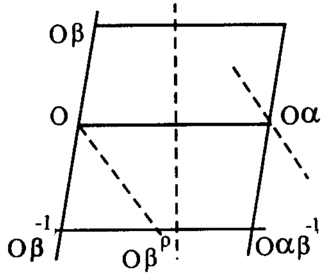
برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که A_1 و A_2 ناسازگارند. فرض کنید که A_2 برقرار است و T به وسیلهٔ α و β تولید می‌شود به طوری که $\alpha^\rho=\beta$ و $\beta^\rho=\alpha$ و α_1 و β_1 اعضایی از T می‌باشند که $\alpha_1^\rho=\alpha_1$ و $\beta_1^\rho=\beta_1^{-1}$. اگر $\alpha_1=\alpha^h\beta^k$ آنگاه $\alpha_1^\rho=\alpha^k\beta^h$ و $\alpha_1^\rho=\alpha_1$ نتیجه می‌دهند که $h=k$ و $\alpha_1=(\alpha\beta)^h$. اگر $\beta_1=\alpha^m\beta^n$ آنگاه $\beta_1^\rho=\alpha^n\beta^m$ و $\beta_1^\rho=\beta_1^{-1}$ نتیجه می‌دهند که $m=-n$ و $\beta_1=(\alpha\beta^{-1})^m$. حال α_1, β_1 هر دو در زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ $\alpha\beta$ و $\alpha\beta^{-1}$ می‌باشند که یک زیرگروه سره از T است. لذا α_1 و β_1 گروه T را تولید نمی‌کنند.

حال فرض کنید α و β مانند قبل انتخاب شده‌اند که $|\alpha|$ مینیمال است برای $\alpha\neq 1$ و $|\beta|$ مینیمال است برای $\beta\notin\langle\alpha\rangle$. اکنون چندشرط اضافی می‌گذاریم. بعدازجایگزین کردن α به وسیلهٔ α^{-1} در صورت نیاز می‌توانیم فرض کنیم که زاویهٔ $\overrightarrow{o, o\alpha}$ و $\overrightarrow{o, o\beta}$ برابر با θ است که $\theta\le\pi/2$. حال مینیمال بودن $|\beta|$ ایجاب می‌کند که $d(o, o\beta)\le d(o\alpha, o\beta)$ که در نتیجه مؤلفه‌ای از $\overrightarrow{o, o\beta}$ که موازی با $\overrightarrow{o, o\alpha}$ است طولی برابر با $h(\beta)$ دارد که کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{2}|\alpha|$ است یعنی $o\beta$ روی عمودمنصف $[o, o\alpha]$ است یا در همان طرفی قرار دارد که o واقع است. این مطلب با شرط $|\alpha|\le|\beta|$ نتیجه می‌دهد که $\theta\ge\frac{\pi}{3}$. لذا $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

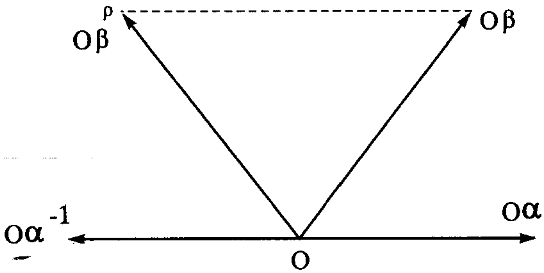


ابتدا فرض کنید که $\alpha^\rho=\alpha$ که در نتیجه محور ρ موازی با α است. اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\beta^\rho=\beta^{-1}$ و A_1 برقرار است. اگر $\theta<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\overrightarrow{o, o\beta^\rho}$ و $\overrightarrow{o, o\alpha\beta^{-1}}$ در سوی عمود بر $\overrightarrow{o, o\alpha}$ مؤلفه‌های یکسانی دارند و در عین حال چون $h(\beta^\rho)=h(\beta)$ مانند $\overrightarrow{o, o\beta}$ در سوی موازی با $\overrightarrow{o, o\alpha}$ مؤلفه‌های یکسانی دارند. چون $o<h(\beta)\le\frac{1}{2}|\alpha|$ داریم $\frac{1}{2}|\alpha|\le h(\alpha\beta^{-1})<|\alpha|$ و در نتیجه β^ρ تنها می‌تواند برابر با $\beta^\rho=\alpha\beta^{-1}$ باشد. فرض کنید $\alpha_1=\beta$ و $\beta_1=\alpha\beta^{-1}$؛ آنگاه

α_1 و β_1 گروه T را تولید می‌کنند در صورتی که ρ آنها را تعویض می‌کند و A۲ برقرار است.



حال فرض کنید $\alpha^{\rho}=\alpha^{-1}$ که در نتیجه محور ρ عمود بر α است. اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\beta^{\rho}=\beta$ و A۱ برقرار است که α و β تعویض شده‌اند. اگر $\theta<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\overrightarrow{O\beta^{\rho}, O\beta}$ موازی با $\overrightarrow{O, O\alpha}$ است و طول آن در $|\alpha| \le 2h(\beta)$ صدق می‌کند و لذا بنابه مینیمال بودن $|\alpha|$ باید طولی برابر با $|\alpha|$ داشته باشد و $\beta^{\rho}=\beta\alpha^{-1}$. حال ρ جفت مولدهای β و $\beta\alpha^{-1}$ از T را تعویض می‌کند و A۲ برقرار است.



سرانجام فرض کنید $\alpha^{\rho}\ne\alpha_1, \alpha^{-1}$ که بنابراین α^{ρ} با طول $|\alpha^{\rho}|=|\alpha|$ توانی از α نیست. می‌گیریم $\beta=\alpha^{\rho}$، حتی اگر نیازی به برقراری شرط اضافی نباشد شرایط مینیمال بودن برقرار می‌شوند که از آنجا α و β گروه T را تولید می‌کنند و A۲ برقرار است. □

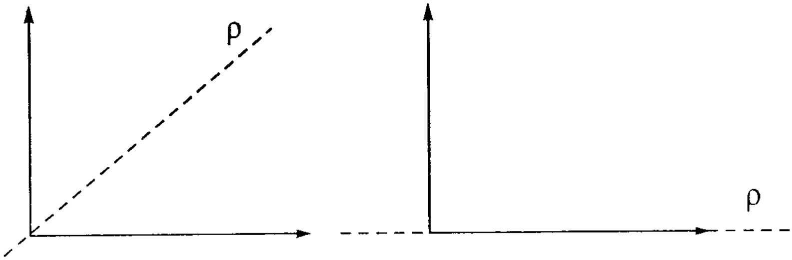
۴. شمارش حالتها

حال انواع ممکن $G\ne G^{+}=G_n$ را برای $n=1, 2, 3, 4, 6$ می‌شماریم.

حالت ۱ $n=1$. در اینجا $G_1=T$. اگر ρ_1، ρ_2 اعضایی از G باشند که در G^{+} نیستند، آنگاه $\rho_2=\rho_1\tau$ به ازای برخی مقادیر τ در T که در نتیجه به ازای همهٔ مقادیر τ در T، $\tau^{\rho_1}=\tau^{\rho_2}$. به عبارت دیگر همهٔ انتخابهای ρ خودریختی یکسانی از T را به وجود می‌آورند.

هرگاه G شامل هر بازتابی باشد بازتاب دلخواه ρ را انتخاب می‌کنیم و داریم $\rho^2=1$. روشن است که هر دو حالت A۱ و A۲ قابل تصوراند مثلاً (بعد از یک تبدیل مستوی) با یک مشبکهٔ مربعی L. دو گروه G_1^1 و G_1^2 را با افزودن مولد جدید ρ، یک رابطهٔ $\rho^2=1$، و دو رابطه

که مقادیر α^{ρ} و β^{ρ} را می‌دهند از نمایشهایی که برای G_1 داشتم به دست می‌آوریم.



حال فرض کنید G شامل هیچ بازتابی نیست که در نتیجه باید ρ را به عنوان یک لغزه با $\rho^2=\tau\neq 1$ در T بگیریم. اگر A_1 برقرار باشد آنگاه $\tau^{\rho}=\tau$ نتیجه می‌دهد که به ازای برخی مقادیر صحیح h، $\tau=\alpha^h$، اگر $\rho_1=\rho\alpha^m$ آنگاه $\rho^2=\alpha^{h+2m}$ و با جایگزین کردن ρ به وسیلهٔ ρ_1 برای m مناسب می‌توانیم فرض کنیم که $\rho^2=1$ یا $\rho^2=\alpha$. چون $\rho^2=1$ نتیجه می‌دهد ρ یک بازتاب است، باید داشته باشیم $\rho^2=\alpha$. لذا ρ بازتاب نسبت به محور l موازی با α دنبال شده به وسیلهٔ یک انتقال در امتداد l به اندازهٔ فاصلهٔ $\frac{1}{2}|\alpha|$ است. باید بررسی کنیم که این گروه G_1^3 جدید است یعنی آن شامل هیچ بازتابی نیست. حال هر عضوی از $G=G_1^3$ که در G^+ قرار ندارد به ازای برخی مقادیر صحیح m و n به صورت $\rho_2=\rho\alpha^m\beta^n$ است و داریم

$$\rho_2^2=\rho\alpha^m\beta^n\rho\alpha^m\beta^n=\rho^2\alpha^m\beta^{-n}\alpha^m\beta^n=\alpha^{2m+1}\neq 1$$

که در نتیجه ρ_2 یک بازتاب نیست.

در اینجا این امکان که G شامل هیچ بازتابی نیست باقی می‌ماند و A2 برقرار است. حال $\rho^2=\tau, \tau^{\rho}=\tau$ نتیجه می‌دهند که به ازای برخی مقادیر h، $\tau=(\alpha\beta)^h$ و مانند بالا می‌توانیم فرض کنیم که $\rho^2=\alpha\beta$. حال فرض کنید $\rho_2=\rho\alpha^{-1}$. آنگاه

$$\rho_2^2=\rho\alpha^{-1}\rho\alpha^{-1}=\rho^2(\alpha^{\rho})^{-1}\alpha^{-1}=(\alpha\beta)\beta^{-1}\alpha^{-1}=1$$

و G شامل بازتاب ρ_2 است و این برخلاف فرض می‌باشد.

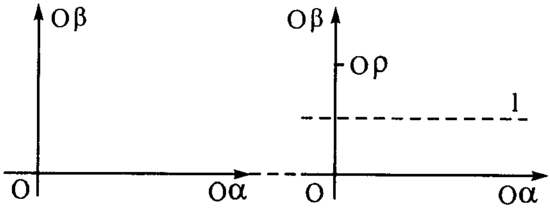
قضیه. اگر $G\neq G^+=G_1$ دقیقاً سه نوع یکریختی محتمل برای G به شرح زیر وجود دارند:

$$G_1^1=\langle \alpha,\beta,\rho:\ \alpha\beta=\beta\alpha,\ \alpha^{\rho}=\alpha,\ \beta^{\rho}=\beta^{-1},\ \rho^2=1\rangle$$
$$G_1^2=\langle \alpha,\beta,\rho:\ \alpha\beta=\beta\alpha,\ \alpha^{\rho}=\beta,\ \beta^{\rho}=\alpha,\ \rho^2=1\rangle$$
$$G_1^3=\langle \alpha,\beta,\rho:\ \alpha\beta=\beta\alpha,\ \alpha^{\rho}=\alpha,\ \beta^{\rho}=\beta^{-1},\ \rho^2=\alpha\rangle$$

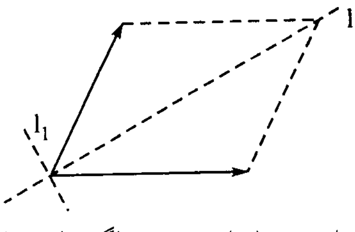
حالت $n=2$. در اینجا G_2 به وسیلهٔ α، β و σ تولید می‌شود که $\sigma^2=1$، $\alpha^{\sigma}=\alpha^{-1}$ و $\beta^{\sigma}=\beta^{-1}$.

ابتدا فرض کنید که G شامل یک بازتاب ρ می‌باشد و A1 برقرار است با $\alpha^{\rho}=\alpha$ و

$\beta^{\rho}=\beta^{-1}$. در نتیجه α و β متعامداند. بنابراین محور ρ موازی با α است. فرض کنید $\rho_1=\sigma\rho$. چون $\beta^{\rho_1}=\beta$ محور ρ_1 موازی با β است و به ازای برخی مقادیر h، $\rho_1^2=\beta^h$، با تعویض کردن ρ به وسیلهٔ $\rho\beta^m$ به ازای برخی مقادیر صحیح m و با توجه به زوج بودن h می‌توانیم فرض کنیم $\rho_1^2=\beta$ یا $\rho_1^2=1$. اگر ρ ,ρ' دوبازتاب موازی با α باشند آنگاه به‌ازای برخی مقادیر m، $\rho'\rho=\beta^m$ و $\rho'=\rho\beta^m$ که در نتیجه انتخابهای متفاوت ρ همان حالت $\rho_1^2=1$ یا $\rho_1^2=\beta$ را به دست می‌دهد و این دو حالت متمایزاند. این دو حالت G_2^1 و G_2^2 به سادگی با مشبکهٔ مربعی L قابل تصوراند. برای اولی ρ را با محور $l=\overrightarrow{o,o\alpha}$ در نظر می‌گیریم. برای دومی l را موازی با $\overrightarrow{o,o\alpha}$ به فاصلهٔ $\frac{1}{4}|\beta|$ در سوی $o\beta$ می‌گیریم. آنگاه $o\rho_1=o\sigma\rho=o\rho$ وسط $[o,o\beta]$ است و ρ_1 با محور $\overrightarrow{o,o\beta}$ نقطهٔ o را به $o\rho$ می‌نگارد که در نتیجه $\rho_1^2=\beta$.

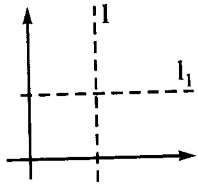


حال فرض کنید G شامل یک بازتاب ρ است و A۲ برقرار می‌باشد با $\alpha^{\rho}=\beta$ و $\beta^{\rho}=\alpha$ بنابراین ρ محوری موازی با $\beta\alpha$ دارد. اگر $\rho_1=\sigma\rho$ آنگاه $\alpha^{\rho_1}=\beta^{-1}$ ، $\beta^{\rho_1}=\alpha^{-1}$ و $(\alpha^{-1}\beta)^{\rho_1}=\alpha^{-1}\beta$ که در نتیجه ρ_1 محوری موازی با $\beta^{-1}\alpha$ دارد و به ازای برخی مقادیر صحیح h، $\rho_1^2=(\alpha^{-1}\beta)^h$. با جایگزین کردن ρ به وسیلهٔ $\rho(\alpha^{-1}\beta)^m$ به ازای برخی مقادیر m و بنا بر زوج بودن h می‌توانیم فرض کنیم که $\rho_1^2=1$ یا $\rho_1^2=\alpha^{-1}\beta$. اگر $\rho_1^2=\alpha^{-1}\beta$ آنگاه $\rho_2=\rho_1\alpha$. در نتیجه $\rho_2^2=\rho_1\alpha\rho_1\alpha=\rho_1^2\beta^{-1}\alpha=(\alpha^{-1}\beta)\beta^{-1}\alpha=1$ و ρ یک بازتاب است. در هر حالت G شامل دو بازتاب با محورهای متعامد می‌باشد که با $\beta\alpha$ و $\beta^{-1}\alpha$ موازی‌اند (خطهای شامل قطرهای لوزی Π) و حاصلضرب آنها دورانی از مرتبهٔ ۲ و گروه مزبور $G_2^3=G_0.T$ حاصلضرب نیم‌مستقیم است که $G_0\simeq D_4$.



سرانجام فرض کنید G شامل هیچ بازتابی نیست. اگر A_1 برقرار باشد می‌توانیم فرض کنیم $\rho^2=\alpha$. اگر $\rho_1=\sigma\rho$ با $\sigma^{\rho_1}=\alpha^{-1}$ و $\beta^{\rho_1}=\beta$ همچنین می‌توانیم فرض کنیم $\rho_1^2=\beta$. برای بررسی این که گروه G_2^4 تعریف شده به این صورت شامل هیچ بازتابی نیست. ثابت می‌کنیم

$(\rho\alpha^m\beta^n)^2=\alpha^{2m+1}\neq 1$ و $(\rho_1\alpha^m\beta^n)^2=\beta^{2n+1}\neq 1$. این گروه به سادگی در مشبکهٔ مربعی L به وسیلهٔ اختیارکردن ρ و ρ_1 که محورهایی موازی با $\overrightarrow{o,o\alpha}$ و $\overrightarrow{o,o\beta}$ در یک فاصلهٔ $\frac{1}{2}|\beta|=\frac{1}{2}|\alpha|$ و با تغییر مکان انتقالی $\frac{1}{2}|\alpha|=\frac{1}{2}|\beta|$ محقق می‌شود.



هرگاه A2 برقرار باشد با $\alpha^\rho=\beta$ و $\beta^\rho=\alpha$ می‌توانیم مانند قبل فرض کنیم $\rho^2=\alpha\beta$ و برای $\rho_1=\sigma\rho$ قرار دهیم $\rho_1^2=\alpha^{-1}\beta$. آنگاه مانند قبل $\rho_2=\rho_1\alpha$ یک بازتاب است که برخلاف فرض می‌باشد.

قضیه. اگر $G\neq G^+=G_2$ دقیقاً چهار نوع یکریختی محتمل برای G به شرح زیر وجود دارند:

$$G_2^1=\langle\alpha,\beta,\rho,\sigma:\sigma^2=1,\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha^\sigma=\beta,\beta^\sigma=\alpha^{-1},\alpha^\rho=\alpha,\beta^\rho=\beta^{-1},\rho^2=1,(\sigma\rho)^2=1\rangle,$$
$$G_2^2=\langle\alpha,\beta,\rho,\sigma:\sigma^2=1,\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha^\sigma=\beta,\beta^\sigma=\alpha^{-1},\alpha^\rho=\alpha,\beta^\rho=\beta^{-1},\rho^2=1,(\sigma\rho)^2=\beta\rangle,$$
$$G_2^3=\langle\alpha,\beta,\rho,\sigma:\sigma^2=1,\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha^\sigma=\beta,\beta^\sigma=\alpha^{-1},\alpha^\rho=\beta,\beta^\rho=\alpha,\rho^2=1,(\sigma\rho)^2=1\rangle,$$
$$G_2^4=\langle\alpha,\beta,\rho,\sigma:\sigma^2=1,\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha^\sigma=\beta,\beta^\sigma=\alpha^{-1},\alpha^\rho=\alpha,\beta^\rho=\beta^{-1},\rho^2=\alpha,(\sigma\rho)^2=\beta\rangle.$$

حالت $n=4$. داریم $\sigma^4=1$ با $\alpha^\sigma=\beta$ و $\beta^\sigma=\alpha^{-1}$ و مشبکهٔ L مربعی است. اگر ρ شرط A1 را برقرار کند با $\alpha^\rho=\alpha$، $\beta^\rho=\beta^{-1}$ و $\rho_1=\sigma\rho$، آنگاه $\alpha^{\rho_1}=\beta^{-1}$ و $\beta^{\rho_1}=\alpha^{-1}$ و لذا ρ_1 که دو مولد α و β^{-1} را تعویض می‌کند در A2 صدق می‌کند. بنابراین حالتهای A1 و A2 یکی می‌شوند و می‌توانیم فرض کنیم ρ در A1 صدق می‌کند که در اینجا ρ یک بازتاب یا یک لغزه است.

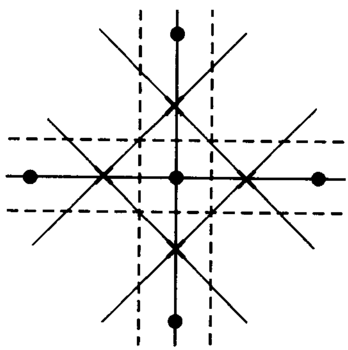
مجموعهٔ چهار عضوی $\{\alpha,\alpha^{-1},\beta,\beta^{-1}\}$ به طور یکتا به وسیلهٔ این اطلاعات تعیین می‌شود که σ آنها را به طور دوری جابه‌جا می‌کند و این‌که آنها **T** را تولید می‌کنند. نشان می‌دهیم اگر G شامل یک بازتاب موازی با یکی از α، β باشد آنگاه آن شامل یک بازتاب موازی با دیگری نیز خواهد بود. بنابه تقارن کافی است این حالت را در نظر بگیریم که G شامل یک بازتاب ρ موازی با α است از این‌رو در A1 صدق می‌کند. چون $(\alpha^{-1}\beta)^{\rho_1}=\alpha^{-1}\beta$ محور ρ_1 موازی با $\alpha^{-1}\beta$ است و به ازای برخی مقادیر صحیح h، $\rho_1^2=(\alpha^{-1}\beta)^h$.

حال $\rho_1\beta^{-h}$ موازی با ρ_1 است لذا با $\alpha^{-1}\beta$ نیز موازی خواهد بود و $(\rho_1\beta^{-h})^2=\rho_1^2\alpha^h\beta^{-h}=(\alpha^{-1}\beta)^{h-h}=1$. لذا دو بازتاب با محورهای متقاطع در نقطه‌ای مانند

o_1 با زاویه‌ای برابر با $\frac{2\pi}{8}$ داریم که در نتیجه حاصلضرب آن‌ها، یعنی σ_1 یک دوران مرتبهٔ ۴ حول o_1 است. آنگاه گروه G به صورت $G_4^1=G_{o_1}.T$ خواهد بود که $G_{o_1}=D_8$. این گروه به سادگی روی شبکه مربعی محقق می‌شود به خصوص آن شامل یک بازتاب موازی با βاست.

حال فرض کنید G شامل یک لغزهٔ ρموازی با α باشد اما هیچ بازتابی موازی با α ندارد. آنگاه $G=G_4^2$ یکریخت با G_4^1 نمی‌باشد. به منظور یافتن نمایشی برای G_4^1 بعد از جایگزین کردن ρبه وسیلهٔ برخی $\rho\alpha^m$ها مانند قبل می‌توانیم فرض کنیم $\rho^2=\alpha$. حال اگر ρرا به وسیلهٔ برخی $\rho\beta^n$ها جایگزین کنیم بازتاب $\rho^2=\alpha$ معتبر باقی می‌ماند به شرطی که مانند قبل برای انتخابی معمولی از n بتوانیم $\rho_1^2=1$را داشته باشیم. لذا رابطهٔ $(\sigma\rho)^2=1$ یا $\sigma^\rho=\sigma^{-1}$ را داریم.

این گروه را می‌توان روی مشبکه‌های مربعی به شرح زیر محقق کرد. فرض کنید σ دارای مرکز $o=(0,0)$ باشد و فرض کنید $o\alpha=(1,0)$ و $o\beta=(0,1)$. اگر ρ با محور 1گذرا از نقطهٔ $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ انتخاب شود آنگاه محور 1_1 از ρ_1 نیز از این نقطه می‌گذرد. در این شکل نقاط مشخص شده به وسیلهٔ ● مراکز دورانهای مرتبهٔ ۴ هستند و نقاط مشخص شده به وسیلهٔ × مراکز دورانهای مرتبه ۲ می‌باشند و خطهای پر و مایل محورهای بازتابها هستند و خط‌چین‌های افقی و عمودی محورهای لغزه‌ها می‌باشند.



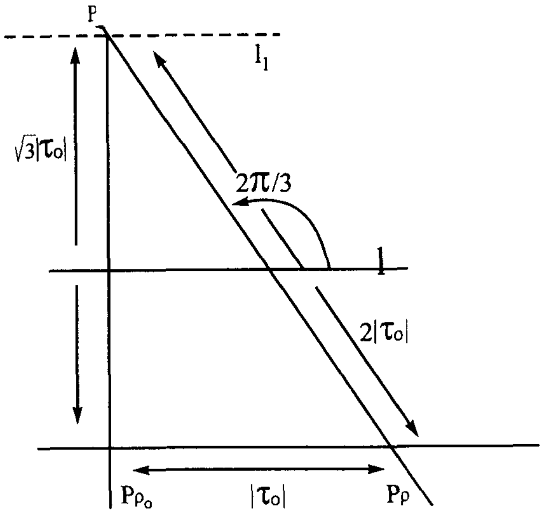
قضیه. اگر $G\neq G^+=G_4$ دقیقاً دونوع یکریختی محتمل برای G به شرح زیر وجود دارند:

$$G_4^1=\langle \alpha,\beta,\sigma,\rho : \alpha\beta=\beta\alpha,\ \sigma^4=1, \alpha^\sigma=\beta, \beta^\sigma=\alpha^{-1}, \alpha^\rho=\alpha, \beta^\rho=\beta^{-1}, \rho^2=1, (\sigma\rho)^2=1\rangle,$$

$$G_4^2=\langle \alpha,\beta,\sigma,\rho : \alpha\beta=\beta\alpha, \sigma^4=1, \alpha^\sigma=1, \alpha^\sigma=\beta, \beta^\sigma=\alpha^{-1}, \beta^\rho=\beta^{-1}, \rho^2=\alpha, (\sigma\rho)^2=1\rangle.$$

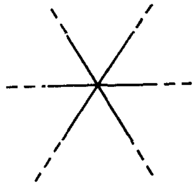
حالت n=3. در اینجا G یک دوران σاز مرتبهٔ ۳ دارد و مشبکهٔ L مثلثی است با $\alpha^\sigma=\alpha^{-1}\beta$ و $\beta^\sigma=\alpha^{-1}$.

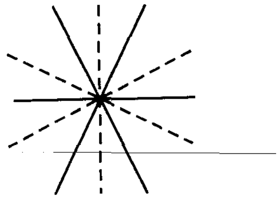
نشان می‌دهیم که اگر G شامل یک لغزهٔ ρ با محور l باشد آنگاه G شامل یک بازتاب $\rho_۱$ با محور $l_۱$ موازی با l نیز است. فرض کنید $\rho=\rho_۰\tau_۰$ که $\rho_۰$ بازتاب نسبت به l و $\tau_۰$ انتقالی در امتداد l است، در اینجا $\rho_۰$ و $\tau_۰$ در E لزوماً در G نیستند. لذا $\tau=\tau_۰^۲=\rho^۲$ در T است. فرض کنید $l_۱$ یک خط موازی با l و در فاصله $|\tau_۰|\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ از l و در طرف چپ باشد وقتی که در سوی τ قرار می‌گیریم. فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی روی $l_۱$ باشد. آنگاه $d(P,P\rho_۰)=\sqrt{۳}.|\tau_۰|$ ، $d(P\rho_۰,P\rho)=|\tau_۰|$ که در نتیجه $[P, P\rho_۰, P\rho]$ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $[P, P\rho]$ و به طول $|\tau|=|\tau_۰|۲$ می‌باشد که زاویه‌ای که به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ با سوی τ در امتداد l می‌سازد. بنابراین τ^σ نقطهٔ $P\tau$ را به P می‌فرستد و $P\rho\tau^\sigma=P$. نشان داده‌ایم که $\rho_۱=\rho\tau^\sigma$ هر نقطهٔ P روی l را ثابت نگاه می‌دارد که از آنجا $\rho_۱$ بازتابی نسبت به محور $l_۱$ موازی با l است.



اگر G به وسیلهٔ $G^+=G_۳$ با برخی از ρها که در $\propto^\rho=\propto$ صدق می‌کنند تولید شود آنگاه محور ρ موازی با $\propto$ است و محور $\sigma\rho$ موازی با $\propto\beta^{-۱}$ می‌باشد. سپس نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که G شامل بازتابهای ρ و ρ' با محورهای موازی با $\propto$ و β خواهد بود. اگر محورهای ρ و ρ' در $o_۱$ تلاقی کنند آنگاه $\sigma_۱=\rho\rho'$ دورانی مرتبه ۳ حول $o_۱$ است. لذا $G=G_{o_۱}.T$ حاصلضرب نیم‌مستقیم است که $G_{o_۱}\simeq D_۶$.

اگر ρ در A۲ صدق کند آنگاه محوری موازی با $\propto\beta$ دارد. و استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $G=G_{o_۱}.T$ حاصلضرب نیم‌مستقیم است اما حالا با سه محور بازتاب گذرنده از $o_۱$ که در موضع متفاوتی نسبت به $\overrightarrow{o,o\propto}$ و $\overrightarrow{o,o\beta}$ قرار دارند. لذا دونوع $G_۳^۱$ و $G_۳^۲$ داریم.





قضیه. اگر $G \neq G^{+} = G_{۳}$ دقیقاً دونوع یکریختی محتمل برای G به شرح زیر داریم:

$$G_{۳}^{۱} = <\alpha, \beta, \sigma, \rho: \alpha\beta=\beta\alpha,\ \sigma^{۳}=۱,\ \alpha^{\sigma}=\alpha^{-۱}\beta,\ \beta^{\sigma}=\alpha^{-۱},\ \alpha^{\rho}=\alpha, \beta^{\rho}=\alpha\beta^{-۱}, \rho^{۲}=۱, (\sigma\rho)^{۲}=۱>;$$

$$G_{۳}^{۲} = <\alpha, \beta, \sigma, \rho: \alpha\beta=\beta\alpha,\ \alpha^{۳}=۱, \alpha^{\sigma}=\alpha^{-۱}\beta, \beta^{\sigma}=\alpha^{-۱}, \alpha^{\rho}=\beta, \beta^{\rho}=\alpha, \rho^{۲}=۱, (\sigma\rho)^{۲}=۱>.$$

حالت n=۶. اگر ρ یک بازتاب یا یک لغزه با محور l باشد آنگاه $\rho_{۱}=\sigma\rho$ محوری مانند $l_{۱}$ دارد که زاویه‌ای برابر با $\frac{۲\pi}{۱۲}$ با l می‌سازد. چون G شامل دوران $\sigma^{۲}$ از مرتبهٔ ۳ است از بحث حالت n=۳ نتیجه می‌گیریم G شامل بازتابهای ρ و ρ' است که محورهای آنها باهم زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۱۲}$ می‌سازند، در نتیجه $\sigma_{۱}=\rho\rho'$ دورانی از مرتبهٔ ۶ حول نقطهٔ اشتراکشان یعنی $o_{۱}$ است. لذا G به صورت $G_{o_{۱}}.T$ حاصلضرب نیم مستقیم است که $G_{o_{۱}} \simeq D_{۱۲}$. $G_{۶}^{۱}=G_{o_{۱}}.T$. در میان شش بازتاب با محورهای گذرنده از $o_{۱}$ یکی در $A_{۱}$ و دیگری در $A_{۲}$ صدق می‌کنند لذا $G_{۱}$ همیشه به صورت $G_{۶}^{۱}$ خواهد بود.

قضیه. اگر $G \neq G^{+} = G_{۶}$ آنگاه تنها یک نوع یکریختی برای G به شرح زیر وجود دارد:

$$G_{۶}^{۱} = <\alpha, \beta, \sigma, \rho:\ \alpha\beta=\beta\alpha,\ \sigma^{۶}=۱,\ \alpha^{\sigma}=\beta, \beta^{\sigma}, =\alpha^{-۱}\beta,\ \alpha^{\rho}=\ \alpha,\ \beta^{\rho}=\alpha\beta^{-۱}, \rho^{۲}=۱,(\sigma\rho)^{۲}=۱>$$

۵. خلاصهٔ مطالب

دیده‌ایم که جمعاً هفده نوع یکریختی از گروههای بلور نگارانهٔ صفحه به شرح زیر وجود دارند:

$$G_{۱}, G_{۱}^{۱}, G_{۱}^{۲}, G_{۱}^{۳}, G_{۲}, G_{۲}^{۱}, G_{۲}^{۲}, G_{۲}^{۳}, G_{۲}^{۴};$$

$$G_{۴}, G_{۴}^{۱}, G_{۴}^{۲}, G_{۳}, G_{۳}^{۱}, G_{۳}^{۲}, G_{۶}, G_{۶}^{۱}$$

در شکل ضمیمه هفده «الگو» در صفحه نشان داده شده است که گروههای تقارن آنها این هفده نوع را می‌نمایانند. مقصودمان از الگو یک شکل F در صفحه E است. در درجه اول F شامل خطهایی است که صفحه را به مربعها یا مثلثهای متساوی‌الاضلاع Q تقسیم می‌کنند که رأسها نقاطی از مشبکهٔ مربعی یا مثلثی L هستند. به علاوه F شامل برخی مجموعه‌های «حک شده» در سلولهای Q است، نظیر یک حرف قراردادی از حروف الفبا یا یک دایره، تا این که گروه تقارن F به زیرگروه مناسبی از تمام گروه تقارن قالب‌بندی E به وسیلهٔ سلولهای Q ساده گردد. در شکل مزبور بنابه ضرورت تنها بخش کوچکی از الگوی F را نشان داده‌ایم که باید به طور تناوبی از هر طرف ادامه یابد.

۶. نکته‌ها و مرجعها

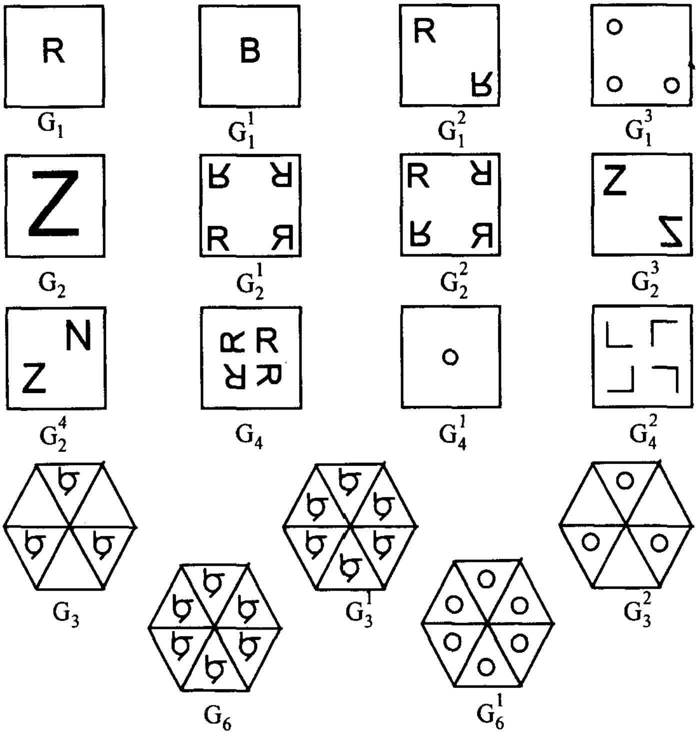
گروههای بلورنگارانهٔ ابعاد ۲ و ۳ ابتدا از طریق ارتباطهای واضحشان با شیمی و فیزیک مطرح شدند. آنها در سال ۱۹۰۰ با فهرست معروف هیلبرت در مورد مسائل برجسته و مهم ریاضی به صحنهٔ ریاضی وارد شدند. بخش عمدهٔ مسألهٔ هیجدهم هیلبرت در ۱۹۱۰ به وسیله بایبرباخ حل شد وی نشان داد که تعداد انواع (به طور مشابه تعریف شده) گروههای بلورنگارانه در فضای اقلیدسی از هر بُعد $n \geq 1$ متناهی است. در واقع برای ابعاد ۱، ۲، ۳، و ۴ این عدد به ترتیب ۲، ۱۷، ۲۱۹، ۴۷۸۳ است. برای شرحی ساده فهم از نظریه گروههای بلورنگارانهٔ n- بعدی کتاب ر. ل. یی ـ شوارتزنبرگر (۱) را ببینید. برای شرحی اجمالی در مورد مسألهٔ هیجدهم هیلبرت، میلنر را ببینید. اختلاف نظرهای بسیار زیادی در این موضوع وجود دارند مثلاً در شوارتزنبرگر (۲) و وی‌تینگ و مرجعهای زیادی که آنها ذکر می‌کنند را ببینید.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. هر یک از گروههای بلورنگارانهٔ G را به وسیلهٔ نمایشی که به طور طبیعی از روش‌مان حاصل می‌شود توصیف کرده‌ایم. بسیاری از این نمایشها را می‌توان ساده کرد؛ در صورت امکان نمایشهای اقتصادی‌تری بیابید.

مسألهٔ ۲. برای هر یک از این گروههای G یک مشبکهٔ L در صفحه را برای گروه انتقال T همراه با همهٔ مراکز دورانهای نابدیهی (از مرتبه‌های متفاوت) و همهٔ محورهای بازتابها و محورهای لغزه‌ها نمایش دهید.

مسألهٔ ۳. ظاهراً هر مؤلفی مجموعهٔ «الگوهای» مورد نظر خود را با گروههای خودریختی کامل این گروههای G اختیار می‌کند. الگوهای ما برای وضوح بیشتر انتخاب شدند اما قدری مصنوعی هستند. الگوهای ساده‌تری را که از نظر هندسی طبیعی‌ترند بیابید. قالب‌بندیهای صفحه به وسیلهٔ شکلهای به طور معقول سادهٔ قابل انطباق مطلوب‌تر می‌باشند.



مسألهٔ ۴. بسیاری از این گروهها با زیرگروههای سرهٔ دیگر گروهها، یا خودشان، یکریخت هستند. همهٔ این رابطه‌های شمول را به طور نموداری نشان دهید.

مسألهٔ ۵. برای هر یک از این گروههای G گروه خارج قسمتهای $\bar{G}=G/T$ دوری به صورت $\langle \bar{\sigma}: \bar{\sigma}^n=1 \rangle$ یا دووجهی به صورت $\langle \bar{\sigma}, \bar{\rho}: \bar{\sigma}^n=(\bar{\rho}\,\bar{\sigma})^2=\bar{\rho}^2=1 \rangle$ است که $\bar{\sigma}$ نگارهٔ یک دوران σ در G و $\bar{\rho}$ نگارهٔ یک بازتاب یا لغزهٔ ρ در G است. لذا $(\rho\sigma)^2$ و ρ^2 در T هستند. گروه G به **عنوان گروه مجرد** به وسیله اطلاعاتی از $\bar{G}$ به عنوان گروه مجرد یعنی نگاشت مزدوج‌گیری ϕ از $\bar{G}$ به **AutT** همراه با اطلاعاتی از اعضای $(\rho\sigma)^2$ و ρ^2 در **T** مشخص می‌شود که **T** به عنوان یک گروه مجرد در نظر گرفته می‌شود. این روش را برای یافتن رده‌بندی (انواع یکریختی) گروههای G به عنوان گروههای مجرد به کار ببرید.

مسألهٔ ۶. هر یک از این گروهها را به یک گروه G^* به وسیله جایگزین کردن **T** با گروه بزرگتر **T** شامل همهٔ انتقالهای صفحه گسترش دهید. این گروههای (غیرناپیوسته) G^* را رده‌بندی کنید.

مسألهٔ ۷. کدام یک از ان گروههای G شامل لغزه‌ها هستند و شامل هیچ بازتابی نمی‌باشند؟ کدام یک شامل لغزه‌هایی هستند که درون G به صورت حاصلضربی از یک بازتاب و یک انتقال نوشته نمی‌شوند.

فصل پنج

قالب‌بندیهای منتظم در ابعاد بالاتر

۱. مقدمه

دیده‌ایم که دقیقاً پنج نوع قالب‌بندی منتظم از کرهٔ دو بعدی S^2 وجود دارند که دقیقاً با پنج نوع جسم منتظم در فضای سه بعدی متناظرند. همچنین دیده‌ایم که دقیقاً سه نوع قالب‌بندی منتظم برای صفحهٔ E^2 وجود دارند.

طبیعی است بپرسیم که چند نوع قالب بندی منتظم برای S^n و E^n وقتی $n \geq 3$ وجود دارند. این پرسش جوابی ساده دارد. شش نوع قالب‌بندی منتظم برای S^3 و تنها سه نوع قالب‌بندی منتظم از S^n برای $n \geq 4$ متناظر با سه جسم منتظم $(n+1)$ بعدی وجود دارند که مشابه‌های طبیعی چهاروجهی سه بعدی، مکعب و دوگان مکعب یعنی هشت وجهی هستند. تنها یک نوع قالب‌بندی از E^n به ازای همهٔ $n \geq 3$ و $n \neq 4$ وجود دارد، مشابه طبیعی قالب بندی برای E^3 بوسیله مکعبهای سه بعدی، برای حالت $n=4$ دو قالب‌بندی دیگر نیز وجود دارند.

به علت مزایای تجسم شهودی، بخش عمدهٔ این نوشته‌ها را به هندسه ۲ - بعدی محدود کرده‌ایم اما بزودی روشن می‌شود که برای بحث کردن در مورد قالب‌بندیهای منتظم در ابعاد بالاتر نیازی نیست که خیلی از این محدودیت دور شویم. تنها مطلبی که از هندسه بعد بالاتر به کار می‌بریم به نحو بسیار روشنی از نمایش E^n به صورت «فضای مختصات» همهٔ نقاط $P=(x_1,...,x_n)$ که x_1، ... ، x_n اعداد حقیقی هستند نتیجه می‌شود.

دومین محدودیت اعمال شده در اینجا این است که تا حد امکان از به کار بردن روشهای هندسه تحلیلی پرهیز نموده‌ایم. مثلاً از مثلثات مسطحه یا کروی استفاده نکرده‌ایم. این محدودیت چند مشکل جدی‌تر را در بحث از ابعاد ۳ و ۴ به وجود می‌آورد. چند نتیجه در این ابعاد وجود دارند که نمی‌دانیم چگونه با روشهایی که خودمان را به آنها محدود کرده‌ایم اثبات کنیم. این نتایج را بدون اثبات آورده‌ایم اما چند بحث غیر صوری بسیار مناسب برای قبول آنها ارائه می‌دهیم؛ البته برهانهای دقیقی که به قدرکافی مقدماتی اما نسبتاً پیچیده هستند در نوشته‌ها

وجود دارند. با پذیرفتن این نتایج برای ابعاد ۳ و ۴ بقیهٔ بحث ما دقیق و کامل است.

۲. اجسام منتظم معیار

در همهٔ ابعاد $n \geq ۳$ اجسام مشابهی با چهار وجهی، مکعب و هشت وجهی وجود دارند و چنانکه متذکر شده‌ایم اینها تنها اجسام $n-$ بعدی منتظم در E^n، برای $n \geq ۵$ هستند. حال به توصیف این اجسام می‌پردازیم.

$n-$ سادک Δ_n. نمونهٔ اولیهٔ ما چهار وجهی $\Delta_۳$ است که چهار رأس دارد و فاصلهٔ بین هر دو رأس آن مساوی‌اند؛ $\Delta_۳$ به وسیلهٔ چهار وجه محصور می‌شود که هر وجه یک ناحیه مثلثی متساوی‌الاضلاع (یا $\Delta_۲$ بر حسب نمادهای فعلی) دارد که رأسهای آن سه رأس از چهار رأس چهار وجهی هستند. این توصیف ارایهٔ یک تعریف استقرایی برای Δ_n را تعمیم می‌دهد، فرض کنید $\Delta_{n-۱}$ تعریف شده است. فرض کنید $P_۱$ ، ... ، $P_{n+۱}$ نقاطی در E^n باشند که همهٔ فاصله‌های $d(P_i,P_j)$ به ازای $i \neq j$ مساوی هستند. به سادگی می‌بینیم که هر مجموعه‌ای با n نقطه از نقاط P_i در یک زیر فضای $(n-۱)$ بعدی قرار دارد و از این رو می‌توان آن را به عنوان مجموعهٔ رأسهای یک $\Delta_{n-۱}$ اختیار کرد. Δ_n را ناحیه‌ای در E^n می‌گیریم که به وسیلهٔ $(n+۱)$ عدد از این $\Delta_{n-۱}$ ها محصور می‌شود.

[اگر بخواهیم کمی ملموس‌تر کار کنیم می‌توانیم P_i ها را $(n+۱)$ نقطهٔ $(۰,...,۰,۱,۰,...۰)$ در $E^{n+۱}$ انتخاب کنیم که به وضوح در اَبَر صفحه‌ای با معادله $x_۱+...+x_{n+۱}=۱$ قرار می‌گیرند؛ آنگاه این اَبَر صفحه را می‌توان E^n گرفت. می‌توان Δ_n را بستار محدب نقاط P_i تعریف کرد. یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاط اَبَر صفحه که همهٔ مختصات x_i آنها غیر منفی هستند].

Δ_n یک جسم منتظم است زیرا گروه خودریختیهای آن به وسیلهٔ گروه تقارن همهٔ جایگشتهای مجموعهٔ $(n+۱)$ رأس P_i آن داده می‌شود.

برای یک $n-$ سادک مفروض می‌توان یک جسم دوگان Δ_n^* را ساخت و نتیجه‌گیری کرد که چون Δ منتظم است Δ_n^* نیز منتظم می‌باشد. حال Δ_n^* بستار محدب مجموعهٔ رأسهای آن، که مراکز وجوه Δ_n هستند تعریف می‌شود. روشن است که Δ_n^* به طور ساده $n-$ سادک، کوچکتر دیگری است که محاط در Δ_n می‌باشد. لذا جسم منتظم نوع جدیدی به دست نمی‌آوریم: نوع Δ_n **دوگان خود** است.

$n-$ مکعب $\square_n$. برای نمونهٔ اولیه می‌توان مکعب سه بعدی $\square_۳$ را با هشت رأس $(\pm۱,\pm۱,\pm۱)$ در $E^۳$ در نظر گرفت. هر یک از شش صفحهٔ $x_i=\pm۱$ به ازای $i=۱,۲,۳$ شامل چهار تا از این رأسها یعنی رأسهای یک مربع (یا $\square_۲$) هستند. به طور بدیهی $\square_۳$ به وسیلهٔ این شش مربع محصور می‌شود. برای تعریفی استقرایی از $\square_n$ ، اکنون ۲^n رأس $(\pm۱,...,\pm۱)$ در E^n را در نظر می‌گیریم که هر یک از $۲n$ صفحهٔ $x_i=\pm۱$ شامل $۲^{n-۱}$ نقطه از این رأسها و رأسهای

یک $\square_{n-1}$ است. حال $\square_n$ ناحیه‌ای در E^n است که به وسیلهٔ این ۲n صفحهٔ $\square_{n-1}$ محصور می‌شود. [به زبان دیگر، $\square_n$ مجموعه همهٔ نقاط $(x_1,\ldots,x_n)$ است که به ازای هر i ، $|x_i|\leq 1$].

$\square_n^*$ **دوگان مکعب n− بعدی.** تجسم کردن این جسم مشکل‌تراست اما توصیف آن به قدر کافی ساده است. می‌توانیم $\square_n^*$ را با ۲n رأس که مراکز ۲n وجه $\square_n$ هستند در نظر بگیریم. فرض کنید V هر رأسی از $\square_n$ باشد و برای سادگی $V=(1,1,\ldots,1)$ می‌گیریم؛ وجه‌هایی از $\square_n$ که شامل V هستند در n صفحهٔ $x_i=+1$ قرار می‌گیرند و مراکز آنها n نقطهٔ $(0,\ldots,0,1,0\ldots0)$ می‌باشند. این n مرکز تعدادی از رأسهای $\square_n^*$ هستند و n رأس از یک Δ_{n-1} می‌باشند. حال $\square_n^*$ به وسیلهٔ 2^n از این گونه وجوه Δ_{n-1}(n−۱) بعدی متناظر با 2^n رأس $\square_n$ محصور می‌شود. به استثنای حالت n=۲ که $2n=2^n$ ، $\square_n^*$ جسم منتظمی از نوع متفاوت با $\square_n$ و Δ_n است.

نکته: ما واقعاً ادعای تجسم کردن این اجسام را نمی‌کنیم و نه انتظار داریم خواننده چنین کند. کافی است حالتهای ساده را به ازای n=۲ و n=۳ تجسم کنیم و قانع شویم که استدلالهای ارایه شده در این حالتها در واقع به مقدار $n\geq 2$ بستگی ندارد.

نکته: در اینجا مطلب را برحسب اجسام منتظم مطرح کرده‌ایم اما به قالب‌بندی کره‌های ابعاد بالاتر نیز خواهیم پرداخت. اگر π یک جسم منتظم در E^n باشد و مرکز آن را در مبدأ o انتخاب کنیم آنگاه همهٔ رأسهای آن از o هم فاصله خواهند بود. مثلاً در فاصله ۱، و از این رو روی کره (n−۱) بعدی S^{n-1} با معادلهٔ $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$ قرار خواهند گرفت. اگر F وجهی از π باشد آنگاه تصویر از o وجه F را بر روی قطعه (n−۱) بعدی F' از S^{n-1} می‌فرستد. چون π جسم منتظمی می‌باشد روشن است که مجموعهٔ همهٔ این قطعه‌های F' یک قالب‌بندی منتظم T برای S^{n-1} را تشکیل می‌دهد. به عکس اگر یک قالب‌بندی منتظم T از S^{n-1} مفروض باشد رأسهای آن رأسهای یک جسم منتظم π در E^n خواهد بود.

در نتیجه اساساً مفهوم جسم منتظم و قالب‌بندی منتظم یک کره یکسان هستند و معمولاً بین آنها تمایز دقیقی قائل نمی‌شویم. به هر حال مهم است که تغییر در بعد را متذکر شویم: یک جسم منتظم n− بعدی در E^n با یک قالب‌بندی منتظم از کرهٔ (n−۱) بعدی S^{n-1} تناظر می‌یابد. در واقع این تغییر در بعد است که بررسی قالب‌بندیها منتظم به وسیلهٔ استقرا روی بُعد را ممکن می‌سازد.

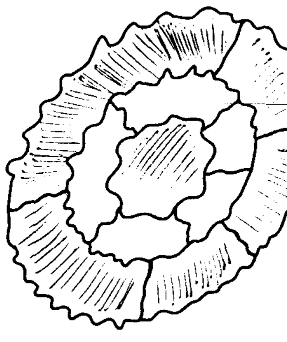
قالب‌بندی معیار K^n از E^n به ازای $n\geq 1$ به وسیلهٔ مکعبهای n− بعدی $\square_n$ به یک قالب‌بندی اطلاق می‌شود که رأسهای آن نقاطی با مختصات صحیح می‌باشد.

۳. قالب‌بندیهای منتظم: مثالها

قبلاً قالب‌بندیهای منتظم کره S^2 و صفحهٔ اقلیدسی E^2 را در نظر گرفته‌ایم. در اینجا ملزم نبودیم

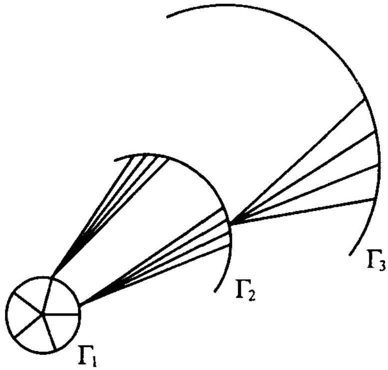
که مشبکه‌ها p ضلعیهای (کروی یا مسطح) منتظم قابل انطباق برای برخی مقادیر $p \geq ۳$ باشند و همان تعداد $q \geq ۳$ تلاقی در هر رأس داشته باشند. حالا نیازمند تعریفی از یک قالب‌بندی منتظم برای کره‌های n- بعدی S^n یا فضای n- بعدی E^n به ازای $n > ۲$ هستیم. اما قبل از پرداختن به این موضوع مایلیم که تعریفمان از قالب‌بندی را با حذف همهٔ شرایط متریکی توسعه دهیم که منطبق با هدف کلی ما در مورد اجتناب هر چه بیشتر از ملاحظات متریکی است.

سعی خواهیم کرد که این ایده را با سه مثال ساده توضیح دهیم. مثال اول قالب‌بندی T کره $S^۲$ از نوع (۵,۳) یعنی دوازده وجهی است. اثبات وجود دوازده وجهی به **طور متریکی منتظم** مستلزم بحثی از پیوستگی یا قدری مثلثات است. اما اثبات وجود یک دوازده وجهی به طور ترکیبی منتظم ساده است. که در این حالت فقط نیاز است هر ناحیه دقیقاً در یک ضلع با ۵ ناحیهٔ دیگر اشتراک داشته باشد و دقیقاً سه ناحیه در هر رأس (انتهای یک ضلع) موجود باشند. اگر این شکل چنان که نشان داده شده روی یک کره در نظر گرفته شود آنگاه با شروع کردن از ناحیهٔ مرکزی ساختمان حلقه‌های متوالی چنان که نشان داده شده در هر مرحله گشوده می‌شود و با شکل نشان داده شده مرحلهٔ بعدی نیز گشوده می‌شود: تکمیل قالب‌بندی مزبور با یک وجه دیگر، باقیماندهٔ کره را پُر می‌کند.



مثال دوم، قالب بندی T از نوع (۳,۷) برای صفحهٔ $E^۲$ است. تنها نیاز داریم که هر ناحیه یک ضلع با هر سه ناحیهٔ دیگر به اشتراک داشته باشند و هفت ضلع در هر رأس تلاقی کنند. شروع ساختمان این قالب بندی T در شکل نشان داده شده و به سادگی دیده می‌شود که شکل مزبور را می‌توان به طور نامتناهی ادامه داد و (به شرطی که شعاع دوایر هم مرکز چنان انتخاب شوند که به قدر کافی سریع افزایش یابند) صفحهٔ $E^۲$ را با قالب‌بندی T از نوع (۳,۷) پُر می‌کنند. حال روشن است که هیچ قالب بندی T از نوع (۳,۷) برای صفحه که در آن وجه‌ها مثلثهای متساوی‌الاضلاع قابل انطباق در متریک اقلیدسی هستند وجود ندارد هر چند یک قالب‌بندی با وجه‌هایی که در متریک هذلولوی مثلثهای متساوی الاضلاع قابل انطباق هستند امکان‌پذیر

است. روش ترکیبی بین این دو متریک متفاوت روی فضای توپولوژیکی یکسان E^2 فرقی قائل نمی‌شود.



مثال سوم قالب‌بندی E^2 از نوع (۳,۶) است که می‌توان آن را مانند قبل ساخت (اگر خواننده راه بهتری را سراغ نداشته باشد). اما در اینجا قالب‌بندی را می‌توان در متریک اقلیدسی، منتظم انتخاب کرد اما در متریک هذلولوی این کار را نمی‌توان کرد درست به عکس حالت (۳,۷).

نکته: ممکن است ایراد گرفته شود که در واقع روش ترکیبی بین متریک اقلیدسی و هذلولوی تمایز قائل است بر طبق اینکه $\frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ مساوی یا کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد و احتمالاً محک مشابهی برای قالب‌بندیهای ابعاد بالاتر وجود دارند. اما نکته کار ما این است که نمی‌خواهیم وارد محاسباتی شویم که لازمهٔ دستیابی به چنین محکی است.

۴. قالب بندیهای منتظم: تعریفها

یک **همسانریختی** بین دو فضا نگاشتی دوسویی است که در هر دو جهت پیوسته باشد.

حال مفهوم یک **قالب بندی به طور ترکیبی منتظم** T از یک فضای U را تعریف می‌کنیم که U همسانریخت با S^n یا E^n برای برخی مقادیر $n \geq 1$ است و همچنین **نوع** چنین قالب‌بندی را تعریف می‌کنیم. برای اختصار به طور معمول کلمهٔ «ترکیبی» را حذف می‌کنیم.

تعریف ما استقرایی است و بنابراین باید با حالت $n = 1$ آغاز کنیم. اگر U^1 همسانریخت با S^1 باشد. آنگاه U^1 یک خم بستهٔ ساده است و یک قالب‌بندی منتظم T از U^1 تقسیمی از U^1 به p کمان به وسیلهٔ p رأس است. به ازای $p \geq 3$ ؛ T از نوع p نامیده می‌شود. اگر U^1 همسانریخت با E^1 باشد. یعنی یک خم مضاعفاً نامتناهی ساده پارامتری شده به وسیلهٔ E^1 یک قالب‌بندی منتظم T از U^1 یک تقسیم‌بندی از U^1 به تعداد نامتناهی شمارش پذیری از کمانهای بسته به وسیلهٔ یک تعداد نامتناهی شمارش‌پذیر رأس است؛ همهٔ این گونه T ها از نوع K_1 هستند.

برای استقرایی که آغاز کرده‌ایم فرض کنید T یک قالب‌بندی از U^n باشد که $n \geq 2$ یعنی

تقسیمی از U^n به سلولهای $n-$ بُعدی نامتداخل Π که هر یک همسانریخت با گوی $n-$ بُعدی $B^n=\{(x_1,...,x_n):x_1^2+...+x_n^2\leq 1\}$ است. حال $\partial\Pi \simeq S^{n-1}$ ($\partial\Pi$ همسانریخت با S^{n-1} است) و نیاز داریم که یک قالب‌بندی منتظم از $\partial\Pi$ با سلولهایی به شکل $\Pi\cap\Pi'$ موجود باشد که Π' یک سلول $n-$ بعدی دیگری از قالب‌بندی T است. به علاوه احتیاج داریم همهٔ این قالب‌بندیهای منتظم $\partial\Pi$ از نوع X باشند و آن را **نوع وجه** T می‌نامیم.

سپس فرض کنید V هر رأسی از T باشد یعنی نقطه‌ای که در اشتراک مجموعه‌ای از سلولهای Π است؛ فرض می‌کنیم که V تنها در یک تعداد متناهی از سلولهای Π قرار دارد و فرض می‌کنیم W اجتماع این سلولها باشد. فرض می‌کنیم $W=B^n$ که در نتیجه $\partial W \simeq S^{n-1}$. حال ∂W اجتماع غیر متداخلی از اشتراکهای آن با Π است که شامل V می‌باشد و فرض می‌کنیم که این یک قالب‌بندی منتظم برای ∂W را تعریف کند. به علاوه لازم داریم که همهٔ این قالب‌بندیهای منتظم ∂W برای همهٔ رأسهای V از T از نوع Y باشند که آن را **نوع رأس** T می‌نامیم. سرانجام نوع T را تعریف می‌کنیم که جفت مرتب (X,Y) باشد.

حال قالب‌بندی دوازده وجهی T از $U^2=S^2$ را که به طور غیرصوری در بالا توصیف شد با مثالی مطرح می‌کنیم. هر سلول ۲ - بُعدی Π همسانریخت با B^2 است (که به عنوان قرص واحد بسته آشناتر است)، و در نتیجه $\partial\Pi=S^1$ یعنی $\partial\Pi$ یک خم بستهٔ ساده است. حال $\partial\Pi$ اجتماع غیر متداخلی از ۵ ضلع به صورت $\Pi\cap\Pi'$ می‌باشد که در نتیجه نوع وجه برابر با ۵ است. فرض کنید V هر رأسی از T باشد. آن‌گاه دقیقاً ۳ وجه Π در V وجود دارند، و W اجتماع این ۳ وجه است. لذا $\partial W=S^1$ اجتماع غیر متداخلی از سه جزء ∂W واقع در سه وجه در رأس V هستند. در نتیجه نوع رأس Π برابر با ۳ است و لذا T از نوع (۳و۵) است.

به عنوان مثال دوم قالب‌بندی T از E^3 به مکعبها را به وسیلهٔ صفحات $x_i=k$ به ازای $i=1,2,3$، $k\in Z$ در نظر بگیرید. نوع وجه به وضوح (۳و۴) یعنی نوع مکعب است. شکل W در یک رأس V اجتماع ۸ مکعب Π در V است، اما در مورد قالب‌بندی ∂W باید کمی دقت کرد. آن به وسیلهٔ اشتراک ∂W با هر یک از ۸ مکعب Π داده می‌شود لذا تقسیمی از $\partial W=S^2$ به ۸ ناحیهٔ مثلثی با ۴ مثلث در هر رأس را می‌دهد. بنابراین نوع رأس آن با هشت وجهی یعنی (۴و۳) یکی است، از این رو نوع وجه آن (۳و۴) است و در نتیجه T از نوع ((۴و۳) و (۳و۴)) است.

متذکر می‌شویم هر قالب‌بندی T از U^n همسانریخت با S^n یا E^n به ازای $n\geq 2$، از نوع (X,Y) است که X و Y نوعهای اجسام n وجهی منتظم می‌باشند یعنی قالب‌بندیهای منتظم S^{n-1}. متذکر می‌شویم که برای یک جفت از نوعهای دلخواه مفروض X و Y از قالب‌بندیهای S^{n-1} لازم نیست هیچ قالب‌بندی از نوع (X,Y) موجود باشد؛ به زودی یک شرط لازم و کافی برای این مطلب ارائه خواهد شد.

اکنون اشاره‌ای اجمالی به **قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم** می‌کنیم. یک قالب‌بندی

منتظم T از S^1 یا E^1 به طور متریکی منتظم است اگر کمانهای تشکیل دهندهٔ قالب‌بندی همگی همطول باشند. به طور استقرایی با استفاده از نمادگذاریی مانند بالا، یک قالب‌بندی منتظم T به طور متریکی منتظم است اگر همهٔ قالب‌بندیهای $\partial\Pi$ به طور متریکی منتظم و قابل انطباق باشند.

۵. وجود

قضیه: فرض کنید $X=(X_1,X_2)$ و $Y=(Y_1,Y_2)$ دو نوع قالب‌بندی منتظم از S^{n-1} باشند (به ازای $n\geq 3$). آنگاه قالب‌بندیهای منتظم S^n یا E^n از نوع (X,Y) وجود دارند اگر و تنها اگر $X_2=Y_1$.

مثال. در بالا دیدیم که قالب‌بندی E^3 به مکعبها از نوع ((۴و۳)و(۳و۴)) است. در مقابل، این قضیه به ما می‌گوید که هیچ قالب‌بندی منتظم از نوع ((۳و۴)و(۳و۴)) وجود ندارد.

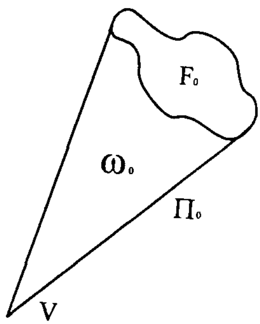
برهان. اثبات شرط لازم $X_2=Y_1$ برای هدف ما که شمردن همهٔ قالب‌بندیهای منتظم است اساسی می‌باشد و به طور کامل ارایه می‌شود. اثبات شرط کافی اساساً در ساختن یک قالب‌بندی منتظم از نوع مفروض (با $X_2=Y_1$) پیش می‌آید. عجالتاً تا اینجا همهٔ قالب‌بندیهای بُعد $n=2$ ، و چهار نوع معیار Δ_n ، $\Box_n$ ، $\Box_n^*$ و K_n را برای همهٔ ابعاد که از قرار معلوم همگی در ابعاد $n\geq 5$ هستند ساخته‌ایم. لذا فقط بررسی برای حالت $n=3$ باقی می‌ماند که علاوه بر نوعهای معیار تنها یک نوع خود دوگان همراه با یک جفت دوگان وجود دارند (اینها را به طور واضح در بخشهای ۹ ، ۱۰ خواهیم ساخت) و در حالت $n=4$ نیز یک جفت دوگان از قالب‌بندیهای دیگر E^4 وجود دارد. لذا اثبات کفایت در اصل برای مقاصد ما غیر ضروری است هر چند که شاید هنوز از نظر روش شناختی یا فلسفی مورد توجه باشد. (دانستن این مطلب که اطلاق کلمهٔ «نظریهٔ کلی» به موضوعی که تنها برای یک تعداد متناهی شیء به‌کار می‌رود تا چه حدّ اهمیت دارد مشکل می‌باشد). به این دلایل تنها اجمالاً به طور غیرصوری مطالبی را دربارهٔ کفایت می‌آوریم.

برای اثبات لزوم فرض کنید T یک قالب‌بندی منتظم از نوع (X,Y) است که $X=(X_1,X_2)$ و $Y=(Y_1,Y_2)$ ؛ باید نشان دهیم که $X_2=Y_1$. اثبات دارای هیچ ایدهٔ جدیدی نیست بلکه اصولاً موضوعی است که با استفاده از تعریفها به دست می‌آید.

فرض کنید V یک رأس T است و Π_0 یک سلول $n-$ بُعدی از T باشد که V را شامل شود. مانند قبل، فرض کنید $W=B^n$ اجتماعی از همهٔ سلولهای $n-$ بُعدی Π از T باشد که شامل V می‌باشند و فرض کنید T_W قالب‌بندی $\partial W=S^{n-1}$ باشد با همهٔ سلولهای $(n-1)-$ بُعدی

$F=\partial W \cap \Pi$ برای سلولهای n- بُعدی Π از T که شامل V هستند. بنابه تعریف T_W از نوع Y است و $F_\circ=\partial W \cap \Pi_\circ$ یک جسم $(n-۱)$- بُعدی از نوع $Y_۱$ است یعنی $\partial F_\circ = S^{n-۲}$ (آن چنان که به وسیلهٔ T قالب بندی شده) از نوع $Y_۱$ می‌باشد.

از طرف دیگر $\Pi_\circ$ به عنوان یک سلول n- بُعدی از T یک جسم n- بُعدی از نوع X است. یعنی $\partial \Pi_\circ \simeq S^{n-۱}$ از نوع X می‌باشد. برای محاسبهٔ $X_۲$ فرض کنید $W_\circ = B^{n-۱}$ اجتماع سلولهای $(n-۱)$ بُعدی $\partial \Pi_\circ$ باشند که شامل V هستند و فرض کنید $T_{W_\circ}$ قالب‌بندیی از $\partial W_\circ = S^{n-۱}$ به وسیلهٔ سلولهای $(n-۲)$ بُعدی $\partial W_\circ \cap P$ برای همهٔ سلولهای $(n-۱)$ بُعدی P از $\Pi_\circ$ باشد که شامل V هستند. آنگاه بنابه تعریف $T_{W_\circ}$ از نوع $X_۲$ است. لذا $\partial \Pi_\circ \simeq S^{n-۱}$ اجتماع دو مجموعهٔ «نیمکروی» $W_\circ$، یعنی اجتماع همهٔ سلولهایی که شامل V می‌باشند و $F_\circ$، یعنی اجتماع بقیه سلولها است. در نتیجه $\partial W_\circ = \partial F_\circ$ که در نتیجه $X_۲=Y_۱$. این مطلب اثبات لزوم را کامل می‌کند.



حال اجمالاً به طور غیر صوری کفایت شرط $X_۲=Y_۱$ را مطرح می‌کنیم. برای انواع $X=(X_۱,X_۲)$ و $Y=(Y_۱,Y_۲)$ مفروض از اجسام n- بُعدی که $X_۲=Y_۱$، هدف ما ساختن یک قالب‌بندی منتظم از نوع (X,Y) است. حال موضوع را ضمن یک مثال شُسته و رُفته که از قبل نتیجه را دربارهٔ آن می‌دانیم به اجرا در می‌آوریم: $X=(۴,۳)$ و $Y=(۳,۴)$ می‌گیریم آنگاه T باید $K_۲$ باشد یعنی قالب‌بندی منتظم $E^۳$ به وسیله مکعبها (یا نسخهٔ عین همسانریخت با آن).

با یک قالب‌بندی T_Y از $S^{n-۱}$ از نوع Y شروع می‌کنیم که در اینجا تصویر یک هشت وجهی روی $S^۲$ است. B^n را در مرکزش O به «قطاعهای» $\hat{F}$ تقسیم می‌کنیم که قاعده‌های آن وجوه F از T_Y هستند، در مثال ما این قطاعها هرمهایی در O هستند که قاعده‌های آن وجوه مثلثی هشت وجهی می‌باشند. حال درون هر $\hat{F}$ را «خالی» می‌کنیم تنها «سطح جانبی» را باقی می‌گذاریم $\tilde{F}=\partial\hat{F}-F$؛ اینها به عنوان «جای نگینها» به کار می‌آیند که ما گوشه‌های «جواهرهای» X شکل را در آنها جای می‌دهیم. گوشهٔ $\tilde{\Pi}$ یک سلول n- بُعدی Π از نوع X را تعریف می‌کند که شامل همهٔ سلولهای $\partial\Pi$ در یک رأس ثابت V است. حال شرط $X_۲=Y_۱$ تضمین می‌کند که $\tilde{F}$ و

$\tilde{\Pi}$ یکریخت هستند (اما نه لزوماً به طور متریکی) به نحوی که می‌توانیم هر $\tilde{F}$ را با گوشهٔ $\tilde{\Pi}$ از یک سلول $n-$ بُعدی Π (با سلول «وجه بیرون آمده» Π) یکی کنیم، یک **خوشه** C از سلولهای $n-$ بُعدی Π در رأس مشترک O با نوع رأس Y (در O) را به دست می‌آوریم. در این مثال گوشه‌ها شامل رأسی از یک مکعب همراه با سه وجه مجاور هستند که به وضوح یکریخت با سطح جانبی هرم $\hat{F}$ با قاعدهٔ مثلثی است. در این مثال خوشه‌ای از ۸ مکعب با آرایش هشت وجهی حول یک رأس مشترک O را به دست می‌آوریم.

مرحلهٔ مهم را تکمیل کرده‌ایم. حال با یک خوشهٔ T_1 حول یک رأس V شروع می‌کنیم رأس دیگری مانند V_2 از T_1 را انتخاب می‌کنیم (روی مرز T_1). باید نشان دهیم مجموعهٔ سلولهای Π از T_1 در V_2 را با افزودن سلولهای جدیدی برای تشکیل یک شکل T_2 می‌توان به یک خوشهٔ کامل یکریخت با C تکمیل کرد. بدین ترتیب آزاد هستیم که ساختمان را تکرار کنیم و T_3 ، T_4 ، ... به دست می‌آیند. در هر مرحله T_k همسانریخت با B^n خواهد بود مگر اینکه در مرحله‌ای با یک T_k بدون مرز برخورد کنیم یعنی $T_k \simeq S^n$ که در اینجا کارمان با $T=T_k$ به انجام رسیده است. اگر این اتفاق بیفتد (و اگر با قضاوت درستی جلو رویم) یک زنجیر فزایندهٔ نامتناهی از شکلهای T_k داریم که اجتماع آنها یک قالب‌بندی منتظم T از نوع مورد بحث از یک فضای U همسانریخت با E^n است.

اگر این مطلب کمی مبهم است خواننده را به مثالهای ملموس در بخشهای ۹ و ۱۰ ارجاع می‌دهیم.

۶. دوگانی

مفهوم دوگانی مانند اثبات وجود قبلی برای مقصود ما اساسی نیست اما مفید و آموزنده می‌باشد. وضعیت مشابه حالتی است که قبلاً در مورد دوگانی در بعد $n=2$ و نیز برای قالب‌بندیهای معیار بحث کرده‌ایم. لذا برای کامل کردن بحث دوگانی برای قالب‌بندیهای منتظم کره‌ها تنها سه حالت در بُعد ۳ باقی می‌ماند. بنابراین یک بار دیگر خود را با طرح کلی مسأله قانع می‌کنیم؛ به طور دقیق‌تر ما تعریفها و نتایج را برای حالت یک قالب‌بندی به طور متریک منتظم ارائه می‌دهیم و توجیه مطلب را برای حالتی که منتظم بودن متریک فرض نمی‌شود به عهده خوانندهٔ علاقمند واگذار می‌کنیم.

فرض کنید T یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم از E^n یا $U^n=S^n$ با $n \geq 2$ باشد. برای تعریف کردن قالب‌بندی دوگان T^* از همان فضای U^n با تخصیص دادن رأسهای آن به عنوان مرکزهای Π^* از سلولهای n بُعدی Π از T شروع می‌کنیم. سپس T^* متناظر با هر رأس V از T یک سلول $n-$ بُعدی V^* خواهد داشت؛ رأسهای V^* دقیقاً Π^* متناظر با سلولهای $n-$ بُعدی Π از T هستند که شامل V می‌باشند. این کار V^* را کاملاً مشخص می‌کند (مثلاً به عنوان

بستار محدب مجموعهٔ رأسهای آن به وسیلهٔ الحاق مکرر همهٔ نقاط واقع بر پاره خطهای (خطها یا دوایر عظیمهٔ) بین نقاط از قبل ارائه شده به دست می‌آید). از این تعریف به سادگی می‌بینیم $T^{**}=T$ از این رو اصطلاح، «دوگان» کاملاً توجیه می‌شود.

مطالب زیاد دیگری دربارهٔ دوگانی می‌توانیم بگوئیم اما خود را به یک نتیجه که در ارتباط با مقاصد ماست محدود می‌کنیم.

قضیه: اگر T یک قالب‌بندی منتظم از نوع (X,Y) باشد و T^* قالب‌بندی منتظم دوگان با T باشد آنگاه T^* از نوع (Y^*,X^*) است.

برهان. استدلالهایی را به کار می‌بریم که به وضوح در حالت به طور متریکی منتظم نیز معتبر هستند و همچنین تحت یک توسیع سره از مفهوم دوگانی به حالت کلی معتبر باقی می‌مانند. فرض کنید T یک قالب بندی منتظم از U^n با $n\geq 2$ از نوع (X,Y) باشد. فرض کنید V رأسی از W,T اجتماع همهٔ سلولهای n- بُعدی Π از T باشد که شامل V هستند. آنگاه بنابه تعریف، قالب‌بندی T_Y از ∂W به وجه‌های $F=\partial W\cap\Pi$ برای همهٔ Π ها در T که شامل V هستند از نوع Y است.

فرض کنید V^* یک سلول n- بُعدی از T^* متناظر با رأس V از T باشد. آنگاه V^* یک جسم منتظم n- بُعدی از نوع Z است یعنی T^* روی $\partial V^*=S^{n-1}$ یک قالب‌بندی $T_V{}^*$ از نوع Z ایجاد می‌کند و باید نشان دهیم که $Z=Y^*$.

حال V^* رأسهای Π^* را دربردارد، یکی در هر سلول n- بُعدی Π از T که شامل V است قرار می‌گیرد، و V^* درون W واقع می‌شود. حال اقدام به «تصویر کردن» بیرونی ∂V^* بر روی ∂W می‌کنیم. ابتدا هر رأس Π از V^* را بر روی یک رأس F^* واقع در $F=\partial W\cap\Pi$ تصویر می‌کنیم و سپس هر سلول از ∂V^* با رأسهای Π_1^*، ...، Π_k^* را بر روی یک سلول متناظر روی ∂W با رأسهای F_1^*، ...، F_k^* تصویر می‌کنیم. بدون وارد شدن در جزئیات می‌توانیم بگوییم همان شرایطی که V^* را یک سلول در دوگان T^* از T می‌کند به کار می‌آیند تا تصویر حاصل از ∂V^* بر روی ∂W را دوگان T_Y کنند. در نتیجه ∂V^* چنان که به وسیلهٔ T^* قالب‌بندی شده از نوع Y^* دوگان Y است یعنی $Z=Y^*$ که مورد نظر بود.

نشان داده‌ایم که T^* به ازای برخی Qها از نوع (Y^*,Q) است. اما چون $T^{**}=T$ از نوع (X,Y) است با استفاده استدلال مشابهی نتیجه‌گیری می‌کنیم که $X=Q^*$ بنابراین، $Q=X^*$. این مطلب ثابت می‌کند T^* از نوع (Y^*,X^*) است. □

۷. قالب‌بندیهای منتظم در ابعاد ۲ و ۳

در اینجا آماده‌ایم که شمارش قالب‌بندیهای منتظم S^n و E^n برای $n\geq ۲$ را شروع کنیم. کار را با مرور اطلاعاتی که قبلاً برای حالت $n=۲$ داشتیم آغاز می‌کنیم. این اطلاعات را در یک جدول به شرح زیر گرد می‌آوریم. مؤلفهٔ سطر p و ستون q قالب‌بندی منتظم از نوع (p,q) است.

p \ q	۳	۴	۵	۶	۷
۳	Δ	$\square^*$	P^*	T	
۴	$\square$	K			
۵	P				
۶	T^*				
۷					

مؤلفه‌های Δ، $\square$، $\square^*$، K به ترتیب $\partial\Delta_۳$، $\partial\square_۳$، $\partial\square_۳^*$ و $K_۲$ یعنی قالب‌بندیهای چهاروجهی، مکعبی، هشت وجهی از $S^۲$، و قالب‌بندی منتظم $K_۲$ از $E^۲$ به وسیله مربعها را نمایش می‌دهند. (از این پس بطور منتظم نماد ∂ و زیرنویس نشان دهندهٔ بُعد را که از مضمون بحث روشن هستند حذف می‌کنیم) مؤلفه P قالب‌بندی منتظم دوازده وجهی از $S^۲$ و P^* دوگان آن یعنی قالب‌بندی بیست وجهی را نمایش می‌دهند. T قالب‌بندی منتظم $E^۲$ به وسیلهٔ مثلثها، ۶ مثلث در هر رأس، و T^* قالب‌بندی دوگان به وسیلهٔ شش ضلعی را نمایش می‌دهند. بقیهٔ مؤلفه‌ها (که برخی از آنها مشخص نشده‌اند) انواع (p,q) قالب‌بندیهای منتظم $E^۲$ را نمایش می‌دهند که به طور متریکی در متریک اقلیدسی قابل تحقق نیستند بلکه تنها در متریک هذلولوی تحقیق‌پذیراند.

اکنون به تشکیل جدول مشابهی از انواع ممکن قالب‌بندیهای منتظم $S^۳$ یا $E^۳$ می‌پردازیم. چنین نوعی باید به صورت (X,Y) باشد که X و Y انواع قالب‌بندیهای منتظم $S^۲$ (یا اجسام سه بعدی منتظم) هستند؛ چون تنها ۵ نوع از آنها وجود دارند جدول ما متناهی خواهد بود.

در این جدول علامت $\times$ به جفتهای مرتب (X,Y) منسوب می‌شود که نوع هیچ قالب‌بندی منتظمی نیستند زیرا شرط $X_۲=Y_۱$ را نقض می‌کند. از سایر مؤلفه‌ها، Δ، $\square$ و $\square^*$ قالب‌بندیهای معیار $S^۳$، K قالب‌بندی معیار $E^۳$ را نمایش می‌دهند. مؤلفهٔ A قالب‌بندی متناهی خود دوگان را با ۲۴ سلول ۳- بُعدی از $S^۳$ نمایش می‌دهد. وجود آن به عنوان یک قالب‌بندی منتظم (ترکیبی) در بخش ۹ بررسی خواهد شد. این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم که A را می‌توان به عنوان یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم از $S^۳$ تلقی کرد و از این رو منجر به یک جسم منتظم ۲۴- وجهی چهار بُعدی در $E^۴$ می‌شود. به همین نحو؛ مؤلفهٔ B یک قالب‌بندی

	Δ	$\square$	$\square^*$	P	P^*
Δ	Δ	×	$\square^*$	×	B
$\square$	$\square$	×	K	×	C
$\square^*$	×	A	×	×	×
P	B^*	×	C^*	×	D
P^*	×	×	×	E	×

متناهی با ۶۰۰ سلول ۳ بُعدی از S^3 را نمایش می‌دهد که وجود آن را به عنوان یک قالب‌بندی منتظم (ترکیبی) در بخش ۱۰ بررسی خواهیم کرد. اما این واقعیت مشهور که آن را می‌توان به صورت یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم تلقی کرد بررسی نخواهیم کرد. مؤلفه B^* دوگان B یک قالب‌بندی منتظم با ۱۲۰ سلول ۳ بُعدی از S^3 را نمایش می‌دهد.

بقیهٔ مؤلفه‌های C ، C^* ، D و E قالب‌بندی منتظم ترکیبی E^3 را نمایش می‌دهند اما مشهور است که آنها به صورت یک قالب بندی به طور متریکی منتظم از E^3 در متریک اقلیدسی قابل تحقق نیستند بلکه در متریک هذلولوی به طور متریکی تحقق‌پذیر می‌باشند (برای مطلب اخیر فصل ۱۰ کتاب «دوازده مقاله هندسی» نوشته کاکستر را ببینید).

۸. قالب‌بندیهای منتظم در ابعاد $n\geq 4$

وجود قالب‌بندیهای S^3 از نوع Δ ، $\square$ ، $\square^*$ ، A ، B ، B^* را بررسی کرده‌ایم. برای ادامهٔ مطلب باید چیزی را که هنوز کاملاً ثابت نشده فرض بگیریم یعنی اینها همهٔ حالتهای محتمل هستند. حال با استفاده از این شش مؤلفه به عنوان نشانهای سطرها و ستونها جدولی از قالب‌بندیهای منتظم در بعد $n=4$ می‌سازیم. در این جدول علامت × جفتهای مرتبی را نمایش می‌دهد که از نوع

	Δ	$\square$	$\square^*$	A	B	B^*
Δ	Δ	×	$\square^*$	×	F	×
$\square$	$\square$	×	K	×	G	×
$\square^*$	×	×	×	H	×	×
A	×	H^*	×	×	×	×
B	×	×	×	×	×	×
B^*	F^*	×	G^*	×	×	J

هیچ قالب‌بندی منتظمی نیستند. مؤلفه‌های Δ ، $\square$ ، $\square^*$ و K قالب‌بندیهای معیار را نمایش می‌دهند. بقیهٔ مؤلفه‌ها قالب‌بندیهای منتظم E^4 را نمایش می‌دهند. انواع H و H^* به وسیلهٔ قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم E^4 در متریک اقلیدسی قابل تحقق می‌باشند هر چند که آن

را اثبات نخواهیم کرد و بقیه انواع F ، F^* ، G ، G^* ، و J به طور متریکی در متریک اقلیدسی قابل تحقق نیستند اما در متریک هذلولوی تحقق‌پذیر می‌باشند.

دوباره برای ادامهٔ مطلب باید فرض کنید که سه نوع معیار Δ ، $\square$ و $\square^*$ تنها انواع قالب‌بندی منتظم S^4 هستند. لذا جدول برای قالب‌بندیهای منتظم بُعد $n=5$ نیز همان قبلی است و می‌توانیم مستقیماً نتیجه‌گیری کنیم که این سه نوع معیار تنها انواع قالب‌بندیهای منتظم S^n به ازای همهٔ $n \geq 4$ هستند و همچنین قالب‌بندی معیار K تنها نوع قالب‌بندی منتظم E^n به ازای $n \geq 5$ است.

	Δ	$\square$	$\square^*$
Δ	Δ	$\times$	$\square^*$
$\square$	$\square$	$\times$	K
$\square^*$	$\times$	$\times$	$\times$

همهٔ این نتایج را که برخی از آنها نیز ثابت نشده‌اند در جدولی که انواع قالب‌بندیهای منتظم فضای کروی، اقلیدسی، و هذلولوی را برای همهٔ ابعاد $n \geq 2$ فهرست می‌کند خلاصه می‌کنیم.

	کروی	اقلیدسی	هذلولوی	
$n=2$	$\sum, \square, \square^*, \Pi, \Pi^*$	K, L, L^*	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$:	همهٔ (p,q)
$n=3$	$\sum, \square, \square^*, A, B, B^*$	K	C, C^*, D, E	
$n=4$	$\sum, \square, \square^*$	K, H, H^*	F, F^*, G, G^*, J	
$n=5$	$\sum, \square, \square^*$	K	هیچکدام	

(متذکر می‌شویم که کاکستر تعریف وسیع‌تری از قالب‌بندی هذلولوی را نسبت به آنچه ما ارایه دادیم به کار می‌برد و در نتیجه انواع هذلولوی بیشتری را نسبت به آنچه در جدول ما آمده است فهرست می‌کند؛ بند دوم مقالهٔ ذکر شده از وی در بالا را ببینید).

همه ادعاهای موجود در جدول برای $n=2$ ثابت شده‌اند. وجود قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم از انواع $\sum$ ، $\square$ ، $\square^*$ و K در همهٔ ابعاد ثابت شده‌اند، وجود قالب‌بندیهای منتظم ترکیبی S^3 از انواع A ، B ، B^* در بخشهای ۹ و ۱۰ ثابت می‌شوند، اما وجود قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم این انواع را اثبات نمی‌کنیم. وجود قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم

اقلیدسی E^4 از انواع H ، H^* اثبات نمی‌شود؛ حتی ثابت نمی‌کنیم که این قالب‌بندی نامتناهی است. ما ثابت نکرده‌ایم که انواع C ، C^* ، D ، E در بُعد $n=3$ و انواع F ، F^* ، G ، G^* ، J در بُعد $n=4$ نامتناهی هستند و این که آنها به صورت قالب بندیهای منتظم اقلیدسی E^n قابل تحقق نیستند و یا این که در واقع آنها به صورت قالب‌بندیهای منتظم فضای هذلولوی تحقق‌پذیر می‌باشند.

پیشنهادهایی غیر صوری برای اثبات ادعاهای ثابت نشدهٔ بالا در بخش ۱۱ و در مسائل ارایه خواهند شد.

۹. جسم منتظم ۴ـ بعدی با ۲۴ سلول

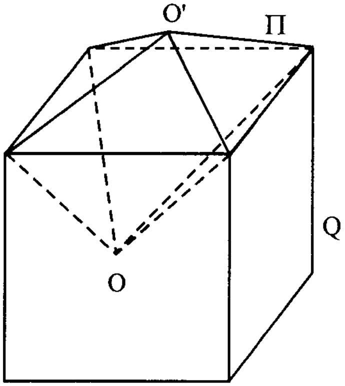
حال نشان می‌دهیم که قالب‌بندیهای منتظم T از نوع $A=(\square_3,\square_3^*\square)$ متناهی است از این رو یک قالب‌بندی منتظم از S^3 به یک جسم منتظم در E^4 منجر می‌شود. ما نشان نخواهیم داد که A را می‌توان به وسیلهٔ یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم محقق کرد. متذکر می‌شویم که A خود دوگان است یعنی $A=A^*$.

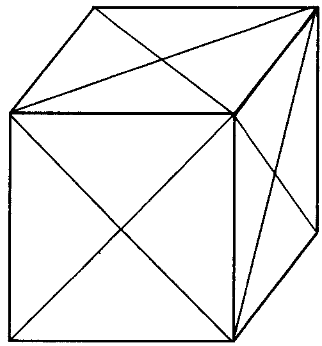
سلولهای T باید اجسام هشت وجهی Π باشند که در هر رأس ۶ تا از آنها در شکل یک مکعب تلاقی می‌کنند. ما روش کلی راکه قبلاً مطرح کردیم دنبال می‌کنیم و با یک خوشهٔ T_1 از ۶ سلول در یک رأس تنها شروع می‌کنیم و T_1 را بتدریج به شکلهای بزرگتر T_k توسعه می‌دهیم که همگی همسانریخت با B^3 هستند تا مرحلهٔ آخر که ساختمان برای ایجاد یک T_k همسانریخت با S^3 تکمیل می‌شود. هر چند این یک ساختمان ۳− بُعدی است می‌توانیم آن را به ملاحظات ۲− بُعدی ساده کنیم، با توجه به این که می‌دانیم چگونه سلولهای جدید را می‌توانیم بیفزاییم لذا کافی است ∂T_k را همراه با تعداد سلولهای T_k متلاقی با هر رأس و یال ∂T_k بشناسیم. (البته یک وجه (مثلثی) از ∂T_k دقیقاً با یک سلول از T_k متلاقی خواهد بود).

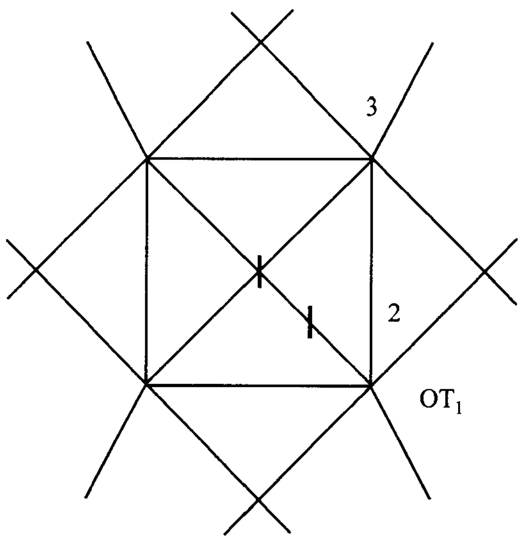
به جای هر بار افزودن یک سلول یا تکمیل کردن یک خوشهٔ منحصر بفرد از تقارن طبیعی T_1 با افزودن سلولهای جدید به نحو متقارن در هر مرحله به طریقی که T_k تقارن را از دست ندهد استفاده می‌کنیم. ما مجبور نیستیم این فرآیند را خیلی طولانی ادامه دهیم: این کاری است که قبلاً با $S^3 \simeq T_3$ انجام داده‌ایم. می‌توان $T=T_3$ را به شرح زیر توصیف کرد: T_1 یک عرقچین قطبی، مثلاً در قطب شمال، است؛ T_2 را به وسیلهٔ احاطه کردن T_1 با یک کمربند استوایی تشکیل می‌دهیم و سپس درمی‌یابیم که یک عرقچین دوم، یکریخت با T_1 ، در قطب جنوب برای کامل کردن قالب‌بندی $T=T_3$ از S^3 کفایت می‌کند.

برای ساختن T_1 با یک مکعب Q به مرکز O شروع می‌کنیم. اگر F یک وجه از Q باشد فرض کنید O' نگارهٔ بازتاب یافتهٔ O نسبت به F باشد. آنگاه O ، O' و ۴ رأس از وجه F شش رأس از یک هشت وجهی (ترکیبی) Π هستند. شش تا از این هشت وجهیهای Π که بدین نحو از

۶ وجه F مکعب Q به دست آمده‌اند به وضوح خوشهٔ اولیه T_1، را فراهم می‌آورند.





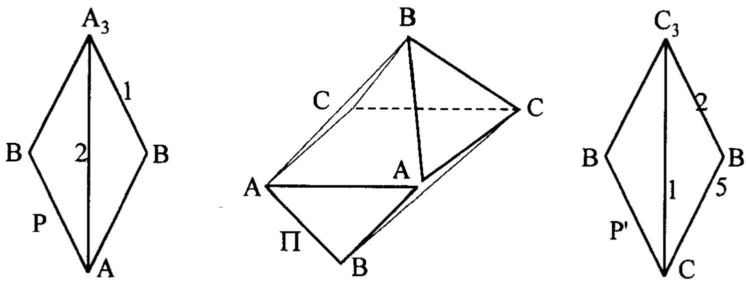


به وضوح ∂T_1 یکریخت با قالب‌بندی به دست آمده از ∂Q به وسیلهٔ تقسیم هر وجه F از Q به ۴ قسمت توسط دو قطرش است. به روشنی T_1 تقارن Q را حفظ می‌کند که در نتیجه برای توصیف آن، نشان دادن قسمت متناظر با یک وجه تنهای Q همراه با سلولهای الحاقی فراتر از کفایت است. در طرح (موضعی) ∂T_1 برخی از رأسها و یالها را با نشانه‌هایی مشخص کرده‌ایم و نشاندهندهٔ تعداد سلولهای Π از T می‌باشند که با آنها متلاقی هستند. ما از تفاوتهای واضح شکل مزبور که با نشانهای اضافی درهم و برهم نشده است بهره جسته‌ایم.

قبل از این که بتوانیم ادامه دهیم باید تعداد سلولهای مورد انتظار Π در یک رأس یا یال را در قالب‌بندی کامل شدهٔ T بدانیم؛ در هر مرحله یک رأس یا یال درونی می‌شود هر گاه رأس یا

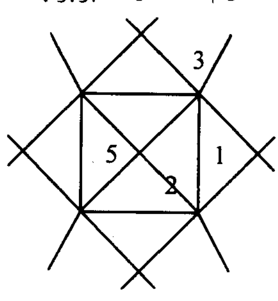
یال مزبور این سهمیهٔ کامل را به دست آورده باشد. این بسادگی برقرار می‌شود زیرا رأس درونی O از T_1 دقیقاً روی ۶ سلول قرار می‌گیرد در صورتی که یک یال درونی از O به یک رأس از Q دقیقاً روی ۳ سلول واقع می‌شود.

برای ساختن T_2 متذکر می‌شویم که ∂T_1 شامل یالهایی با نشان ۲ است؛ قصد داریم یک سلول دیگر به هر چنین یالی بیفزاییم به نحوی که یال مزبور در T_2 درونی شود. به طور صریح، جزیی از نوع P را در شکل زیر مجزا می‌کنیم. بعداز افزودن سلول جدید Π (و سلولهای جدید مشابه) جزء P درگذر به ∂T_2 با یک جزء جدید P' جایگزین می‌شود. در شکل زیر ابتدا P سپس طرح کلی نمای سلول جدید Π که چگونگی استقرار P و P' روی Π و سرانجام شکل به دست آمدهٔ P' را نشان می‌دهیم.



محاسبهٔ نشانهای روی رأسها و یالهای P' کاری عادی است؛ اما باید دقت کرد که نه تنها سلول جدید Π بلکه همهٔ سلولهای جدید مشابه را که ممکن است با رأس یا یال مزبور تلاقی کنند به حساب آورد. مثلاً در یک رأس A با نشان ۳، سه سلول جدید در امتداد سه یال در A با نشان ۲ افزوده می‌شوند و تعداد کل سلولها در A را به ۶ می‌رساند یعنی ظرفیت کامل، که در نتیجه A یک نقطهٔ درونی T_2 می‌شود.

متذکر می‌شویم که ∂T_2 شکلی شبیه ∂T_1 دارد به جز این که در عبور از ∂T_1 به ∂T_2 نشانهای روی رأسها و یالهای متناظر تغییر کرده‌اند. همچنین متذکر می‌شویم که مجموع نشانهای روی رأسهای متناظر ∂T_1 و ∂T_2 همیشه برابر با ۶ است، که ظرفیتی کامل است و



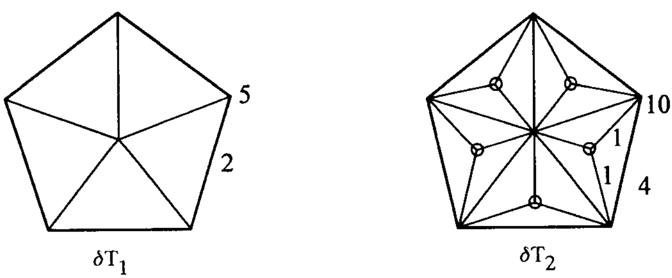
مجموع نشانهای روی یالهای متناظر همیشه برابر با ۳ می‌باشد که دوباره ظرفیتی تکمیل است. از این مطلب چنان که قبلاً متذکر شدیم نتیجه می‌شود هر گاه $T_۲$ و یک نسخهٔ عین $T'_۱$ از $T_۱$ را در امتداد مرزشان بر طبق این تناظر بهم وصل کنیم که همهٔ رأسها و یالها (و بنابراین همهٔ وجوه نیز) درونی خواهند شد و $T=T_۳=T_۲UT'_۱$ همسانریختی با $S^۳$ را می‌دهد.

برای شمردن تعداد سلولهای Π در T تنها باید متذکر شویم $T_۱$ تعداد ۶ سلول داشت و در عبور به $T_۲$ تعداد ۱۲ سلول نیز افزوده شدند که در نتیجه T جمعاً ۲۴=۶+۱۲+۶ سلول دارد. چون A خود دوگان است مستقیماً نتیجه‌گیری می‌کنیم که T نیز ۲۴ رأس دارد و به تعداد وجوه نیز یال دارد. در واقع چون ۲ رأس روی هر یال و ۸ یال در هر رأس وجود دارند، شمردن تعداد جفتهای شامل یک رأس و یک یال متلاقی به دو روش نتیجه می‌دهد که تعداد یالها ۴ برابر تعداد رأسهاست و لذا ۹۶ یال و نیز ۹۶ وجه وجود دارند.

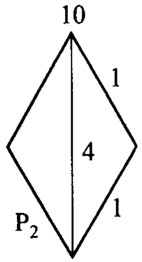
۱۰. جسم ۴ـ بُعدی منتظم با ۶۰۰ سلول

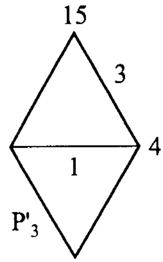
حال یک قالب‌بندی متناهی T از نوع $B=(\Delta_۳,P^*)$ با ۶۰۰ سلول چهار وجهی و نوع رأس بیست وجهی می‌سازیم. چون روش در اینجا کاملاً شبیه طریقه‌ای است که برای نوع A در بالا ارایه شده است. مراحل گوناگون ساختمان را با توضیح کمتری به انجام می‌رسانیم.

خوشهٔ اولیهٔ $T_۱$ با تقسیم بیست وجهی منتظم به ۲۰ سلول چهار وجهی Π با اختیار کردن ۲۰ وجه بیست وجهی به عنوان قاعده‌ها و یک رأس مشترک در مرکز O به دست می‌آید. توجه می‌کنیم که یک ظرفیت کامل مرکب از ۲۰ سلول در رأس مرکزی O و ظرفیتی کامل از ۵ سلول حول همهٔ یالها در O و درونی نسبت به $T_۱$ وجود دارد. جزء نمایشگر $\partial T_۱$ و نیز $\partial T_۲$ در زیر نشان داده می‌شوند که آنجا $T_۲$ به وسیلهٔ اتصال یک سلول جدید به هر یک از وجوه مثلثی $\partial T_۱$ به دست می‌آید.

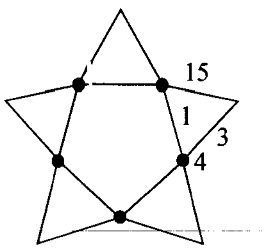


برای رسیدن از T_2 به T_3 یک سلول جدید را در هر یال ∂T_2 با نشان ۴ متصل می‌کنیم که در نتیجه این یال نسبت به T_3 درونی می‌شود. لذا در ضمن رسیدن از ∂T_2 به ∂T_3 هر جزء شکل P_2 به وسیلهٔ یک شکل P'_2 جایگزین می‌شود، که P_2 و P'_2 در زیر نشان داده شده‌اند.

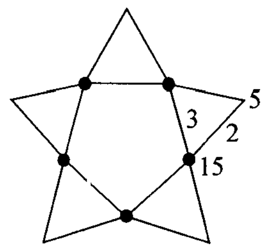




شکلهای ∂T_3 و ∂T_4 در زیر نشان داده می‌شوند.

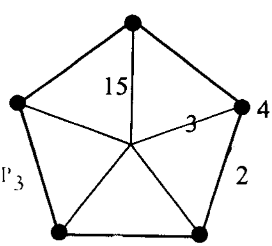


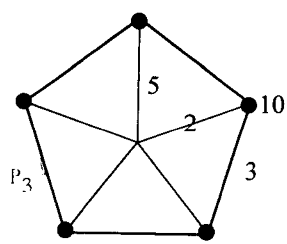
∂T_3



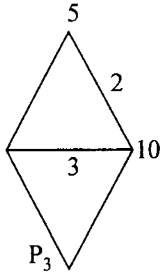
∂T_4

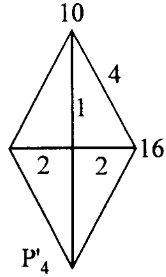
عبور از T_3 به T_4 با افزودن ۵ سلول جدید به ۵ وجه از هر جزء ∂T_3 به شکل P_3 تکمیل می‌شود که سرانجام در T_4 به وسیلهٔ جزئی از P'_3 جایگزین می‌شود، P_3 و P'_3 در زیر نشان داده می‌شوند.



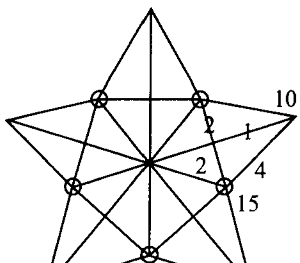


برای گذشتن از T_4 به T_5 ، ۲ سلول جدید به هر جزء P_4 اضافه می‌کنیم تا جزیی از P'_4 را به‌صورت زیر به دست آوریم.

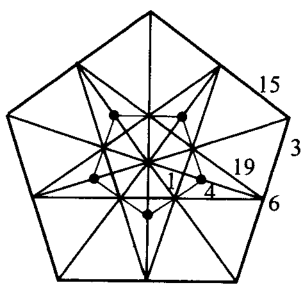




برای گذشتن از T_5 به T_6 یک سلول تنها به هر جزء P_5 می‌افزاییم تا جزیی از P'_5 را به‌صورت زیر به دست آوریم.

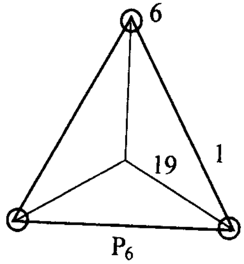


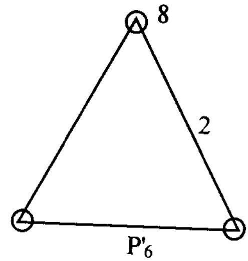
γT_5



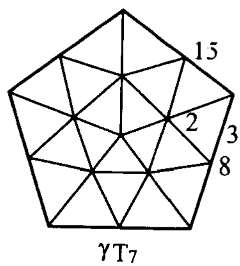
γT_6

سپس برای رسیدن به T_7 از T_6 یک سلول جدید به هر جزء P_6 وصل می‌کنیم تا P'_6 را چنان که در زیر نشان داده شده است به دست آوریم.

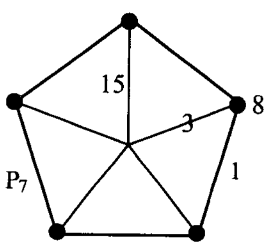


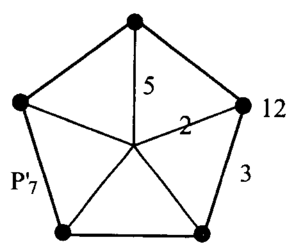


این مطلب $\partial T_{۷}$ را که به صورت زیر نشان داده شده است حاصل می‌کند.



در مرحلهٔ بعد با انضمام ۵ سلول جدید به هر جزء $P_{۷}$ جزیی از $P'_{۷}$ چنان که در زیر نشان داده شده از $P_{۷}$ به $P_{۸}$ می‌رسیم.





دست آخر توجه می‌کنیم $\partial T_{۸}$ به دست آمده همان شکل $\partial T_{۷}$ را به استثنای نشانها دارد و این که تحت تناظر روشن بین $\partial T_{۷}$ و $\partial T_{۸}$ مجموع نشانهای روی رأسهای متناظر برابر با ۲۰ است و مجموع نشانهای روی یالهای متناظر برابر با ۵ است. شبیه حالت A که در بخش گذشته مورد بررسی قرار گرفت حال می‌توانیم $T_{۸}$ را با یک نسخهٔ عین $T'_{۷}$ از $T_{۷}$ با یکی کردن $\partial T_{۸}$ و $\partial T'_{۷}$

مطابق با این تناظر ملحق کنیم تا قالب‌بندی مطلوب T از $S^۳$ از نوع B را به دست آوریم.

یک شمارش نشان می‌دهد که T دارای $a_۳=۶۰۰$ سلول چهار وجهی، $a_۲=۱۲۰۰$ وجه مثلثی، $a_۱=۷۲۰$ یال و $a_۰=۱۲۰$ رأس است. به خصوص نتیجه‌گیری می‌کنیم که نوع دوگان B^* همان نوع قالب‌بندی به طور ترکیبی منتظم از $S^۳$ بوسیله ۱۲۰ دوازده وجهی، ۴ جسم در هر رأس است.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. فرض کنید C مجموعهٔ همهٔ سلولهای سادک nـ بُعدی Δ_n باشد فرض کنید D مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ناتهی از مجموعهٔ همهٔ رأسهای Δ_n باشد. آنگاه نگاشت $f:C \longrightarrow D$ که هر سلول را به مجموعهٔ رأسهای آن می‌فرستد دوسویی است و احتوا را حفظ می‌کند.

مسألهٔ ۲. دیده‌ایم که گروه $\mathrm{sym}\ \Delta_n$ متشکل از همهٔ تقارنهای Δ_n با گروه تقارن $S_{n+۱}$ متشکل از همهٔ جایگشتهای مجموعهٔ رأسهای آن یکریخت است. ساختار گروه $\mathrm{sym}\ \square_n$ چیست؟

مسألهٔ ۳. برای $\square_n$ با رأسهای $V=(\pm۱,...,\pm۱)$، رأسهای $\square_n^*$ محاطی چه هستند؟ رأسهای یک وجه $(n-۱)$ بُعدی از $\square_n^*$ چه هستند؟

مسألهٔ ۴. برای K_n آن چنان که توصیف شد، رأسهای K_n^* و سلولهای nـ بُعدی آن چه هستند؟ اگر $S^{n-۱}$ کره‌ای در مبدأ با شعاع $r<۱$ باشد قالب‌بندی $T_۰$ از $S^{n-۱}$ که به وسیلهٔ تقاطع $S^{n-۱}$ با قالب‌بندی K_n تعریف می‌شود چیست؟

مسألهٔ ۵. یک نوع قالب بندی ۳ـ بُعدی منتظم به صورت $C=((p,q),(q,r))$ است که آن را اختصاراً با $C=(p,q,r)$ نمایش می‌دهیم. یک نوع قالب‌بندی ۴ـ بُعدی منتظم به صورت $C=((p,q,r),(q,r,s))$ است که آن را با $C=(p,q,r,s)$ خلاصه می‌کنیم. این نمادگذاری را به طریقی واضح توسعه دهید، به ازای چه اعداد صحیح $p_۱$، ...، p_n یک قالب‌بندی به طور ترکیبی منتظم از نوع $C=(p_۱,...,p_n)$ وجود دارد؟ نوع دوگان آن چیست؟

مسألهٔ ۶. یک دوران نابدیهی در $E^۳$ باید همهٔ نقاط یک خط l را ثابت و هر صفحهٔ P عمود بر l را پایا نگاه دارد. اگر یک انتقال τ موازی با l نباشد، آنگاه آن خط l را پایا نگاه نمی‌دارد که در نتیجه $\sigma^\tau\neq\sigma$. چون $l\tau$ محور σ^τ موازی با l است هم σ و هم σ^τ و بنابراین انتقال $\tau_۱=\sigma^{-۱}\sigma^\tau$ نیز l را پایا نگاه می‌دارد.

اگر σ و τ در یک گروه ناپیوسته G از طولیابیهای $E^۳$ واقع باشند آنگاه زیر گروه تولید شده به وسیلهٔ σ و $\tau_۱$ به صورت یک گروه ناپیوسته از طولیابیهای صفحهٔ P عمل می‌کند. این استدلال را به کار برده نتیجه‌گیری کنید که G نمی‌تواند شامل دورانهای غیر از مرتبه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ باشد و این که هیچ قالب‌بندی به طور متریکی منتظم از $E^۳$ با قالبهای دوازده وجهی و بیست وجهی

نمی‌تواند وجود داشته باشد.

مسألهٔ ۷. در یک هندسه متناهی خاص که هر خط دقیقاً از p نقطه می‌گذرد و هر نقطه دقیقاً روی $q \geq 1$ خط قرار دارد. نشان دهید که تعداد خطها p/q مرتبه بیشتر از تعداد نقطه‌هاست.

مسألهٔ ۸. یک نمودار Γ در صفحه، مجموعه‌ای از کمانهای ساده یا یالهاست که دو یال متفاوت حداکثر در ۱ یا ۲ نقطهٔ مشترک انتهایی یکدیگر را قطع کنند. فرض کنید Γ ناتهی، متناهی و همبند است. فرض کنید a_0 تعداد نقاط انتهایی (رأسها) و a_1 تعداد یالها و a_2 تعداد مؤلفه‌های کراندار متمم Γ در صفحه (وجوه) باشد. ثابت کنید که $\chi(\Gamma)=a_0-a_1+a_2=1$.

(راهنمایی: برای $a_2=0$ استقراء روی a_1 را به کار ببرید و سپس استقراء روی a_2 را به کار ببرید).

مسألهٔ ۹. این مسأله نسبتاً طولانی است: برای بحثی جامع‌تر فصل ۹ کتاب پلی‌توپهای منتظم اثر کاکستر را ببینید.

اگر هر «مجتمع» متناهی متشکل از سلولهای $k-$ بُعدی از ابعاد $k=0,1,2,...,n$ در فضای اقلیدسی باشد آنگاه مشخصهٔ **اویلر ـ پوآنکاره** $\chi(T)$ از T به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi(T)=a_0-a_1+a_2-...+(-1)^n a_n$$

که به ازای هر k، a_k تعداد سلولهای kـ بُعدی است. اثبات شده که اگر T یک قالب‌بندی منتظم (متناهی) از S^n، $n \geq 1$ باشد و در واقع تحت فرضهای کاملاً کلیتری، $\chi(T)=1+(-1)^n$ یعنی، $\chi(T)=2$ اگر n زوج است و $\chi(T)=0$ اگر n فرد باشد. حالت $n=2$ که T یک قالب‌بندی از کرهٔ دوبعدی S^2 است (لزومی ندارد منتظم باشد) قضیهٔ مشهور دکارت و اویلر می‌باشد.

اگر $c_k = \dfrac{a_k}{a_0}$ را به ازای $k=0,1,...,n$ تعریف کنیم آنگاه $\chi(T)=\theta(T).a_0$ که

$$\theta(T)=c_0-c_1+c_2-...+(-1)^n c_n$$

لذا اگر n زوج باشد $\theta(T)=\frac{2}{a_0}$ و اگر n فرد است $\theta(T)=0$. حال جفتهای مرکب از یک سلول kـ بعدی و رأس متلاقی را به دو روش می‌شماریم. دیده می‌شود که $c_k=\dfrac{q_k}{p_k}$ که p_k تعداد رأسهای روی یک سلول kـ بعدی و q_k تعداد سلولهای kـ بُعدی در یک رأس است. اگر نوع (X,Y) از یک قالب‌بندی منتظم T از S^n مفروض باشد محاسبهٔ p_k، q_k و در نتیجه c_k و بنابراین $\theta(T)$ کاری سر راست اما قدری کسالت‌آور است.

اولین قسمت و مقدماتی تمرین ما انجام این محاسبات برای همهٔ قالب‌بندیهای منتظم S^n به ازای $n \geq 1$ و لذا بررسی فرمول اویلر ـ پوآنکاره است.

حال توجه می‌کنیم که برای هر نوع مفروض (X,Y) از یک قالب‌بندی منتظم T بدون

دانستن این که آیا T متناهی است یا نه می‌توانیم محاسبات مشابهی برای تعیین $\theta(T)$ انجام دهیم. اگر n فرد است و $\theta(T)\neq ۰$ نتیجه‌گیری می‌کنیم که T یک قالب‌بندی از S^n نیست. اگر n زوج باشد و $\theta(T)$ به صورت $\frac{۲}{\nu}$ نباشد که ν یک عدد صحیح مثبت به طور معقول بزرگ است، مجدداً نتیجه‌گیری می‌کنیم که T یک قالب‌بندی از S^n نیست.

قسمت دوم تمرین، به کار بردن این آزمون در مورد همهٔ قالب‌بندیهای منتظم در ابعاد $n=۳$ و $n=۴$ است. اگر محاسبات ما درست باشند این آزمون نتیجه‌ای برای $n=۳$ به بار نمی‌آورد که $\theta(T)=۰$ در همهٔ حالتها اما به ازای $n=۴$ ، آن همهٔ امکانها به جز قالب‌بندیهای منتظم شناخته شدهٔ $S^۴$ را استثناء می‌کند.

قسمت سوم تمرین، مبهم‌تر است استدلال ناتمام زیر را رد یا اصلاح کنید. فرض کنید T یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم از E^n است (در اینجا تنها $n=۴$ را در نظر داریم) و T_r برای $r>۰$ جزیی از T است که متشکل از همهٔ سلولهای موجود در یک گوی B_r با شعاع r و مرکز مبدأ باشد. چون T_k همراه با یک سلول n- بُعدی متمم یک قالب‌بندی نامنتظم از S^n را تشکیل می‌دهند تمایل داریم قبول کنیم $\chi(T_r)=[۱+(-۱)^n]-(۱)^n=۰$. فرض کنید $\theta(T)$ مثل قبل محاسبه شود و فرض کنید $a_۰(r)$ تعداد رأسهای T_r باشد. آنگاه $\theta(T)a_۰(r)$ تنها تخمینی برای $\chi(T_r)$ است بخاطر بی‌نظمیهای رأسهای واقع بر مرز ∂T_r. اگر $b(r)$ تعداد رأسهای روی ∂T_r باشد آنگاه $\lim \frac{b(r)}{a_۰(r)}=۰$ وقتی که r به سمت بینهایت میل می‌کند، در صورتی که به ازای عدد ثابتی مانند $N>۰$ خطا به صورت زیر است

$$|\chi(T_r)-\theta(T)a_۰(r)|\leq N.b(r).$$

با تقسیم کردن بر $a_۰(r)$ و حدگیری نتیجه‌گیری می‌کنیم $\theta(T)=۰$. با فرض گرفتن این استدلال نسبتاً خسته کننده نتیجه می‌گیریم که T می‌تواند یک قالب‌بندی به طور متریکی منتظم از E^n باشد تنها اگر $\theta(T)=۰$. اگر این محاسبات نسبتاً مشکوک، اشتباه نباشند در واقع این نشان می‌دهد $K_۴$ ، H و H^* تنها قالب‌بندیهای به طور متریکی منتظم از فضای اقلیدسی $E^۴$ هستند.

مرجعها

یک بحث بسیار دقیق از هندسه بُعد چهار و تاریخ آن تا آغاز این قرن بوسیله مننینگ ارائه شده است. یک بحث بسیار جامع با ملاحظات تاریخی فراوان و مرجعهای بیشتر، در مورد مطالب این فصل (و مطالب دیگر) در کتاب کاکستر به نام Regular Polytopes موجود می‌باشد. هر دو کتاب یک بررسی اجمالی را هم ارایه می‌دهند.

فصل شش

هندسهٔ وقوع صفحهٔ مستوی

۱. توصیف ترکیبی گروه مستوی

گروه مستوی A با اشاره به متریک صفحهٔ اقلیدسی E تعریف شد و برحسب ماتریسهای حقیقی توصیف شد. اما گروه مستوی متریک اقلیدسی را حفظ نمی‌کند و می‌توانیم توصیفی از A ارایه کنیم که ارجاعی به این متریک نکند. نماد موقت L را برای گروه همهٔ نگاشتهای دو سویی از E به E معرفی می‌کنیم که خطها را به‌خطها می‌فرستند. در واقع نشان خواهیم داد که $A=L$.

قبل از پرداختن به جزئیات مختصری از اثبات را ذکر می‌کنیم. روشن است که $A \subseteq L$ و در نتیجه تنها باید ثابت کنیم $L \subseteq A$. حال این شمول به سادگی به این ادعا ساده می‌شود که اگر α در L دو نقطه متفاوت از یک خط l را ثابت نگاه دارد آنگاه α همهٔ نقاط خط مزبور را ثابت نگاه می‌دارد، با ارایهٔ مختصات می‌توانیم فرض کنیم خط l محور x است و α نقاط $(0,0)$ و $(1,0)$ را ثابت نگاه می‌دارد. روشن است که α خط l را به‌طور دوسویی به خود می‌نگارد که در نتیجه معادلهٔ $(x,0)\alpha = (x\gamma,0)$ نگاشت دو سویی γ از $\mathbf{R}$ را تعریف می‌کند. قدم بعد نشان دادن این است که γ یک خود ریختی از $\mathbf{R}$ است یعنی $\gamma \in \mathbf{AutR}$، به این معنی که به ازای همهٔ $x,y \in \mathbf{R}$، $(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$, $(xy)\gamma = (x\gamma)(y\gamma)$. قدم نهایی این است که نشان دهیم نگاشت همانی تنها خودریختی از $\mathbf{R}$ است یعنی اگر $\gamma \in \mathbf{AutR}$ آنگاه به ازای همهٔ x ها، $x\gamma = x$.

اثبات صوری در خلاف جهت خلاصهٔ اثبات غیر صوری است و این امری نامأنوس نیست. با مطلب زیر شروع می‌کنیم.

قضیه: ۱ $\mathbf{Aut\ R}=$

برهان. فرض می‌کنیم که γ یک نگاشت دو سویی از $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ است که به ازای همهٔ $x,y \in \mathbf{R}$، $(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$ و $(xy)\gamma = (x\gamma)(y\gamma)$. باید نشان دهیم که به ازای همهٔ $x \in \mathbf{R}$، $x\gamma = x$.

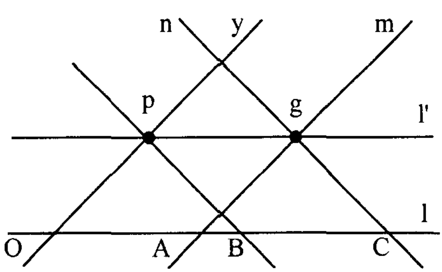
چون $0=0+0$ باید داشته باشیم $0\gamma=0\gamma+0\gamma$ که در نتیجه $0=0\gamma$. چون $1=1.1$ باید داشته باشیم $1\gamma = (1\gamma)(1\gamma)$ به علاوه $1\neq 0$ نتیجه می‌دهد $1\gamma\neq 0\gamma=0$ که از آنجا می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم $1\gamma=1$. چون $1+...+1=1\gamma+...+1\gamma = (1+...+1)\gamma$ برای مجموعی از n جملهٔ ۱، در نتیجه به ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، $n\gamma = n$. از $n+(-n)=0$ داریم $n\gamma+(-n)\gamma = 0\gamma=0$ و لذا $(-n)\gamma=-n\gamma$ و نتیجه می‌گیریم که به ازای همهٔ $n\in \mathbf{Z}$، $n\gamma=n$.
به همین نحو اگر $x = \frac{m}{n} \in Q$، با $m,n\in \mathbf{Z}$ و $n\neq 0$، آنگاه $nx = m$، $(n\gamma)(x\gamma)=m\gamma$ یعنی $n(x\gamma) = m$ و نتیجه می‌گیریم که $x\gamma = x$ لذا به‌ازای همه $x\in Q$ داریم $x\gamma=x$.

سپس توجه کنیم که $x\geq 0$ اگر و تنها اگر به ازای برخی مقادیر y، $x=y^2$ و لذا اگر و تنها اگر به ازای برخی مقادیر $y\gamma$، $x\gamma=(y\gamma)^2$ یعنی اگر و تنها اگر $x\gamma\geq 0$. حال $x\leq y$ اگر و تنها اگر $y-x\geq 0$ که هم ارز با $y\gamma-x\gamma\geq 0$ و هم ارز با $x\gamma\leq y\gamma$ است. لذا γ ترتیب در $\mathbf{R}$ را حفظ می‌کند.

حال از این واقعیت که Q در $\mathbf{R}$ چگال است به این معنا که اگر $x,y\in \mathbf{R}$ و $x<y$ آنگاه عضوی مانند $z\in Q$ ~~بین آنها وجود دارد~~ که $x<z<y$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید به ازای مقداری مانند x در $\mathbf{R}$ داریم $x\gamma\neq x$ آنگاه مقداری مانند y در Q بین x و $x\gamma$ وجود دارد. اما چون $y\gamma=y$ و γ ترتیب را حفظ می‌کند لذا $x<y$ اگر و تنها اگر $x\gamma<y$ که یک تناقض است. نشان داده‌ایم به ازای همهٔ $x\in \mathbf{R}$ داریم $x\gamma=x$ یعنی $\gamma=1$ خودریختی همانی $\mathbf{R}$ است. □

سپس ساختمانهای ساده هندسی برای جمع کردن و ضرب کردن را توصیف می‌کنیم یعنی، برای نقاط مفروض $(x,0)$ و $(y,0)$ در یک دستگاه مختصات خاص ساختمانهایی برای نقاط $(x+y,0)$ و $(xy,0)$ ارایه می‌کنیم:

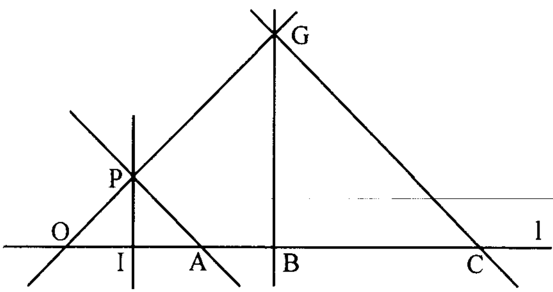
با عمل جمع آغاز می‌کنیم. فرض کنید l یک خط و O نقطه‌ای از l باشد. ساختمانی را بدست می‌دهیم که نقاط مفروض A و B از l نقطه‌ای از خط l را حاصل می‌کند که $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ ساختمان مزبور در شکل نشان داده شده است. کار را با انتخاب یک نقطهٔ اختیاری P که بر l واقع نیست شروع می‌کنیم خطهای OP، PB و l' را که موازی با l است از P رسم می‌کنیم سپس خط m را از A موازی OP رسم می‌کنیم.



چون P روی l قرار ندارد OP موازی با l نیست و در نتیجه m موازی با l نمی‌باشد و l', m در نقطهٔ Q تلاقی می‌کنند. سپس خط n را از Q موازی با PB رسم می‌کنیم. n نیز موازی با l نیست، در نتیجه l, n در نقطهٔ C تلاقی می‌کنند. حال با استفاده از این واقعیت که اضلاع مقابل متوازی‌الاضلاع مساوی هستند، داریم $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. توجه کنید هر چند ساختمان مزبور نیازمند یک نقطهٔ P غیر واقع بر l است، نتیجه به نقطهٔ به خصوص P انتخاب شده بستگی ندارد.

نماد $C = A \oplus B$ را معرفی می‌کنیم. و باید متذکر شویم عمل $\oplus$ تعریف شده روی l به انتخاب نقطهٔ O بستگی دارد.

اولین نتیجهٔ ساده‌مان را یادداشت می‌کنیم.



لم. فرض کنید $\alpha \in L$ خط l را پایا و نقطهٔ O از l را ثابت نگاه دارد آنگاه همهٔ نقاط A و B روی l در $(A \oplus B)\alpha = A\alpha \oplus B\alpha$ صدق می‌کنند.

برهان. تبدیل α شکلی که برای ساختن $C = A \oplus B$ به‌کار رفت را به شکلی که برای $C\alpha = A\alpha \oplus B\alpha$ می‌سازد منتقل می‌کند. □

حال به عمل ضرب می‌پردازیم. در اینجا فرض می‌کنیم یک خط l و دو نقطهٔ O و I از l مفروض‌اند. هدف ما ارایهٔ ساختمانی است که برای دو نقطهٔ مفروض B,A روی l، نقطه سوم C را حاصل می‌کند که $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OI}}$. دوباره یک نقطهٔ اختیاری P غیر واقع بر l را انتخاب می‌کنیم و خطهای AP, IP, OP را رسم می‌کنیم آنگاه BQ موازی با IP گذرنده از Q خط l را در C قطع می‌کند. این مطلب را به عهده خواننده می‌گذاریم تا با استفاده از مثلثهای متشابه بررسی کند معادلهٔ موردنظر برقرار است.

نماد $C = A \odot B$ را معرفی می‌کنیم و توجه کنید که این عمل به انتخاب P بستگی ندارد اما به O و I بستگی دارد مانند مورد قبل یک لم را می‌آوریم.

لم. فرض کنید $\alpha \in L$ خط l را پایا و نقاط O و I از l را ثابت نگاه دارد. آنگاه برای همهٔ نقاط A و B روی l داریم $(A \odot B)\alpha = A\alpha \odot B\alpha$.

حال یک دستگاه مختصات را معرفی می‌کنیم.

لم. فرض کنید $\alpha \in L$ خط l (به مثابه محور x) را پایا و نقاط $O = (۰,۰)$ و $I = (۱,۰)$ را ثابت نگاه می‌دارد. آنگاه یک خودریختی γ از R وجود دارد که به ازای همهٔ $x \in R$، $(x,۰)\alpha = (x\gamma,۰)$.

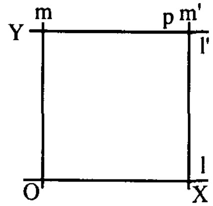
برهان: با توجه به فرضها بر روشنی $(x,۰) \oplus (y,۰) = (x+y,۰)$ و چون $|OI| = ۱$ ، $(x,۰) \odot (y,۰) = (xy,۰)$. چون نگاشت دوسویی α از E خط l را پایا نگاه می‌دارد نگاشتی دوسویی روی l تعریف می‌کند و معادلهٔ $(x,۰)\alpha = (x\gamma,۰)$ یک نگاشت دوسویی γ روی **R** تعریف می‌کند. حال با استفاده از دو لم پیش $(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$ ، $(xy)\gamma = (x\gamma)(y\gamma)$ یعنی $\gamma \in \mathbf{AutR}$. □

چون $\mathbf{AutR} = ۱$ نتیجه می‌گیریم γ نگاشت همانی روی **R** است یعنی γ همهٔ نقاط l را حفظ می‌کند. با کنار گذاشتن دستگاه مختصات که فعلاً نیازمان برطرف کرده است نتیجه را به شرح زیر بیان می‌کنیم.

قضیه: اگر $\alpha \in L$ دو نقطهٔ متمایز یک خط l را ثابت نگاه دارد آنگاه همهٔ نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد.

حال می‌توانیم اثبات $L \subseteq A$ و از آنجا $A = L$ را تکمیل کنیم. یک دستگاه مختصات در E را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید α عضو دلخواهی از L باشد. آنگاه انتقال $\tau \in A$ نقطهٔ $O = (۰,۰)$ را به $O\tau = O\alpha$ می‌نگارد که در نتیجه $\alpha_۱ = \alpha\tau^{-۱}$ نقطه O را ثابت نگاه می‌دارد. سپس دورانی مانند $\sigma \in A$ به مرکز O خط l (به مثابه محور x) را به $l\sigma = l\alpha_۱$ می‌نگارد و لذا $\alpha_۲ = \alpha_۱\sigma^{-۱}$ نقطه O را ثابت نگاه می‌دارد و l را به خود می‌نگارد. حال $I\alpha_۲$ روی l قرار دارد لذا انبساطی مانند $\delta \in A$ نقطه $I = (۱,۰)$ را به $I\delta = I\alpha_۲$ می‌نگارد بنابراین $\alpha_۳ = \alpha_۲\delta^{-۱}$ که l را به خودش می‌فرستد هر دو نقطه I, O را ثابت نگاه می‌دارد. بنابه لم قبل $\alpha_۳$ همهٔ نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد.

سرانجام چون $J = (۰,۱)$ روی l قرار ندارد $J\alpha_۳$ روی l نیست. حال عضوی مانند $\beta \in A$ که همهٔ نقاط l را ثابت نگاه می‌دارد و نقطهٔ J را به $J\beta = J\alpha_۳$ می‌نگارد که در نتیجه $\alpha_۴ = \alpha_۳\beta^{-۱}$ همهٔ نقاط l و نیز نقطهٔ J را ثابت نگاه می‌دارد. بنابه لم پیش چون $\alpha_۴$ نقاط O و J را ثابت نگاه می‌دارد لذا همهٔ نقاط خط m (به مثابه محور y) را ثابت نگاه می‌دارد. فرض کنید $P = (x,y)$ نقطه‌ای از E باشد.



چون α_4 نقاط $(x, \circ) = X$ روی l و $(\circ,y) = Y$ روی m را ثابت نگاه می‌دارد خط $m' = XP$ گذرندهٔ از X و موازی با m را به خود می‌نگارد، و خط $l' = YP$ گذرندهٔ از Y موازی با l را به خود می‌نگارد، بنابراین α_4 باید نقطه تقاطع آنها یعنی P را به‌خود بنگارد. پس نشان داده‌ایم که $\alpha_4 = 1$ یعنی $\alpha=\beta\delta\sigma\tau$، و $\alpha\in A$. □

۲. صفحهٔ مختصات بر روی یک هیأت

تاکنون در تکیهٔ بر آشنایی با صفحهٔ اقلیدسی E و مختص‌گذاری آن به وسیلهٔ **R**، یعنی هیأت اعداد حقیقی تردید نکرده‌ایم. حال می‌خواهیم به این ایده‌ها برای صفحهٔ مشابه $E(F)$ روی هیأت اختیاری F شکلی صوری بدهیم. عجالتاً $E(F)$ را به عنوان مجموعه‌ای از نقاط همراه با تخصیصی از مجموعه‌هایی خاص از نقاط موسوم به خطها را در نظر می‌گیریم. (همچنین می‌توانیم مجموعهٔ $E(F)$ از نقاط را همراه با رابطهٔ سه‌تایی هم خطی در نظر بگیریم که سه نقطه روی یک خط مشترک قرار دارند).

مطابق انتظار مجموعهٔ نقاط $E(F)$ را مجموعه‌ای از همهٔ زوج‌های مرتب (x,y) برای x و $y\in F$ تعریف می‌کنیم. آنگاه **خطها** مکانهای هندسی $\{(x,y):ax + by+c= \circ\}$ به ازای همهٔ $a,b,c\in F$ هستند که هر دو b,a صفر نباشند.

گروه انتقال $T(F)$ از $E(F)$ متشکل از همهٔ تبدیلهای $E(F)$ به صورت $(x,y) \to (x+h,y+k)$ برای k,h دلخواه در F است. به روشنی $T(F)=F^+\oplus F^+$ که F^+ گروه جمعی هیأت F می‌باشد. فرض کنید $A_\circ(F) = GL(2, F)$، یعنی گروه همهٔ نگاشتهای دوسویی خطی از $E(F)$ به عنوان فضای برداری با مبدأ O. آنگاه می‌توانیم **گروه مستوی** $A(F)$ از $E(F)$ را تعریف کنیم که گروه تولید شده به وسیلهٔ $T(F)$ همراه با $A_\circ(F)$ باشد. دقیقاً شبیه حالت حقیقی یعنی $F=\mathbf{R}$ می‌بینیم که $A(F) = A_\circ(F).T(F)$ یک حاصلضرب نیم مستقیم از $T(F)$ در $A_\circ(F)$ است که $A(F)$ یکریخت با گروه همهٔ ماتریسهای ناتکین به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \circ \\ a_{21} & a_{22} & \circ \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

با مؤلفه‌هایی از هیأت F می‌باشد.

شبیه حالت $F=\mathbf{R}$ ، $L(F)$ را گروه همهٔ نگاشتهای دوسویی از $E(F)$ تعریف می‌کنیم که خطها را به خطها می‌نگارند. بعداً خواهیم دید که $A(F)=L(F)$ در حالت کلی برقرار نیست.

۳. صفحات وقوع

حال ساختار ترکیبی یک صفحه را براساس رابطه وقوع J که یک نقطه روی یک خط قرار دارد تجریدی می‌کنیم. یک صفحهٔ وقوع را تعریف می‌کنیم یک سه‌تایی $G = (\Pi, \Lambda, J)$ باشد که Π مجموعه‌ای از اشیاء موسوم به **نقاط** است و Λ مجموعه‌ای از اشیاء موسوم به **خطها** و J یک رابطهٔ $J \subseteq \Pi\times\Lambda$ است؛ اگر به ازای نقطه‌ای مانند $P\in \Pi$ و خطی مانند $l\in\Lambda$ داشته باشیم $(P,l)\in J$ می‌گوییم یک نقطهٔ P روی خط l **واقع** است.

به روشنی صفحهٔ $E(F)$ روی هر هیأت F را می‌توان به عنوان یک صفحهٔ وقوع در نظر گرفت و حقیقت قابل توجه این که به‌عکس، هر صفحهٔ وقوع که در چند اصل معقول صدق کند با $E(F)$ برای هیأتی مانند F یکریخت است. به این مطلب در زیر باز خواهیم گشت.

با بیان چند اصل ساده برای یک صفحهٔ وقوع G شروع می‌کنیم که به روشنی به وسیلهٔ هر صفحهٔ $E(F)$ برقرار می‌شوند.

اصل A۱. برای دو نقطهٔ متمایز مفروض دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هر دو آنهاست.

نتیجه: دو خط متمایز حداکثر یک نقطهٔ اشتراک دارند.

برهان. فرض کنید که خطهای $l_۱$ و $l_۲$ دو نقطه متمایز $P_۱$ و $P_۲$ را به اشتراک داشته باشند. آنگاه بنا به اصل A۱، $l_۱ = l_۲$. □

تعریف. دو خط موازی نامیده می‌شوند هرگاه آنها یکی باشند یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

نکات: (۱) یک عدم توازنی بین نقطه‌ها و خطها وجود دارد بدین معنی که دو نقطهٔ متمایز همیشه خط یکتایی را مشخص می‌کنند اما دو خط متمایز همیشه یک نقطهٔ مشترک را مشخص نمی‌کنند درواقع تنها اگر موازی نباشند نقطهٔ اشتراک دارند. این عدم توازن وقتی به هندسه تصویری می‌رسیم برطرف خواهد شد.

(۲) این تعریف خطهای موازی در رابطه با صفحه است اما این تعریف در فضای سه بعدی که «خطهای متنافر» وجود دارند که نه تلاقی می‌کنند و نه موازیند (به این معنا که جهت

یکسانی دارند) مناسب نمی‌باشد. این امکان اخیر توسط اصل بعد کنار گذاشته می‌شود.

اصل A۲ . از هر نقطه یک خط یکتای موازی با خطی مفروض می‌گذرد.

نتیجه. توازی رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعهٔ Λ از خطهاست.

برهان. انعکاسی و تقارنی بودن رابطهٔ توازی در تعریف نهفته است. برای اثبات ترایایی، فرض کنید که سه خط متمایز مفروض‌اند که l_1 موازی با l_2 و l_2 موازی با l_3 است. اگر l_1 با l_3 موازی نباشد آنگاه بنابه تعریف آنها نقطهٔ مشترکی مانند P دارند و لذا دو خط متمایز l_1 و l_3 گذرنده از P و موازی با l خواهیم داشت که خلاف اصل A۲ است. □

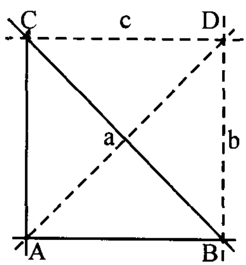
نکات: (۱) چنان که متذکر شدیم اصل A۲ این امکان را که «صفحه» G بُعد $n>2$ دارد دست کم در حالت اقلیدسی کنار می‌گذارد.

(۲) اصول A۱ و A۲ اقسام معمول «صفحات نااقلیدسی» را کنار می‌گذارد. لذا A۱، هندسهٔ کروی، را که در آن Π مجموعهٔ نقاط یک کره و Λ مجموعهٔ دوایر عظیمه است کنار می‌گذارد در صورتی که A_2 صفحهٔ هذلولوی را که به طور کامل‌تر در فصل ۹ مورد بحث قرا ر می‌گیرد کنار می‌گذارد.

(۳) اصول A۱ و A۲ تضمین نمی‌کنند که G در معنای معقول بُعدی به بزرگی ۲ دارد در واقع هرگاه هر دو Π, Λ نیز تهی باشند آنها صادق‌اند. اصل بعد این حالت و چند حالت تباهیده را از جمله تنها یک نقطه یا تنها یک خط را کنار می‌گذارد.

اصل A۳ . سه نقطه وجود دارند که همهٔ آنها بر یک خط واقع نیستند.

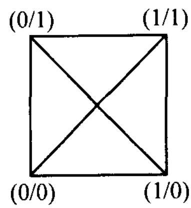
مثال. اصول A۱، A۲، A۳ را فرض می‌گیریم. آنگاه سه نقطهٔ C, B, A غیرواقع بر یک خط مشترک وجود دارند. آنگاه سه خط CA, BC, AB مفروض بنا به اصل A۱ باید متمایز باشند.



بنابه اصل A۲ یک خط a گذرنده از A و موازی با BC وجود دارد و با استفاده از اصل A۲ می‌بینیم که a نمی‌تواند هیچ یک از AB، BC، CA باشد. بهمین ترتیب باید یک خط b گذرنده از B و موازی با CA موجود باشد و می‌بینیم که این نمی‌تواند هیچ یک از AB، BC، CA و a باشد. به علاوه a , b نمی‌توانند موازی باشند. لذا آنها در نقطهٔ D تلاقی می‌کنند که باید متمایز از A، B و C باشند. دوباره باید یک خط c گذرنده از C و موازی با AB موجود باشد و یک بار دیگر می‌بینیم که این نمی‌تواند هیچ یک از AB، BC، CA، b,a باشد. اما امکان دارد که AB، BC، CA، a، b، c همهٔ خطها باشند؛ در این حالت c باید شامل D نیز باشد، که در نتیجه a = AD، b = BD و c= CD و تنها چهار نقطهٔ A، B، C و D وجود دارند.

ساده‌ترین راه برای نشان دادن اینکه این صفحه وقوع متناهی G اصول را برمی‌آورد توجه به این نکته است که اینجا Π مجموعه‌ای از چهار عضو A، B، C و D است و Λ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ۲ عضوی Π می‌باشد.

تعبیری مناسبتر برای منظور، در نظر گرفتن این است که G با صفحهٔ E(F) برای $F=\mathbf{Z}_۲$ یعنی هیأت دو عضوی {۱ ,۰} یکریخت است بنابراین چهار نقطه عبارتند از (۰,۰),(۱,۰),(۰,۱),(۱,۱) و شش خط مزبور به سه جفت خطهای موازی دسته‌بندی می‌شوند: x=۰، x=۱؛ y=۰، y=۱؛ x+y=۰ و x+y =۱.



۴. معرفی مختصات

اصول A۱، A۲ و A۳ کم و بیش واضح هستند و معمولاً به عنوان تعریف یک صفحهٔ وقوع مستوی در نظر گرفته می‌شوند اما آنها برای اثبات این که صفحهٔ وقوع G با صفحهٔ E(F) به ازای هیأتی مانند F یکریخت است واقعاً کافی نمی‌باشند.

اثبات این مطلب با فرض اضافی اصل ۴ که بزودی آن را ارایه می‌کنیم و اصولاً در ساختن هیأت F منظور می‌گردد به صورت یک دستگاه مختصات روی خطی مانند l در G می‌باشد. خصوصاً یک خط l در G و دو نقطهٔ متمایز O و I را روی l انتخاب می‌کنیم، و به دنبال تعریف عملهای A⊕B و A⊙B روی l به وسیله ساختمانهایی که قبلاً در حالت اقلیدسی به کار رفته‌اند هستیم. روش ساختن این ساختمانها را می‌توان قدم به قدم برای تعریف این‌گونه عملها تکرار کرد. اولین مانع اثبات این مطلب است که این دو ساختمان اعمالی مستقل از انتخاب نقطه P به کار رفته در ساختمانها را حاصل می‌کنند: چون این موضوع در حالت اقلیدسی درست است

انتظار داریم در حالت مجرد نیز درست باشد به شرطی که اصول ما به قدر کافی قوی باشند و بنظر می‌رسد که این شرط برقرار است.

هدف بعدی ما نشان دادن این است که مجموعهٔ F متشکل از همهٔ نقاط l با اعمال ⊕، ⊙ یک هیأت است. وقتی که این کار انجام شد، می‌توانیم استدلال خود را در این مورد را که G با E(F) یکریخت است مانند حالت اقلیدسی تکمیل کنیم. دوباره بررسی اکثر اصول یک هیأت کاری عادی است و تا حدی نتایج خسته کنندهٔ اصول A۱ , A۲ و A۳ است. به هر حال باید توجه کرد که برخی اصول هیأت از A۱ , A۲ و A۳ نتیجه نمی‌شوند مثلاً ویژگی تعویضپذیری $xy = yx$ برای عمل ضرب و ویژگی توزیعپذیری $x(y+z)=xy+xz$. این مطلب را می‌توان با ساختن صفحات وقوع G صادق در A۱ , A۲ و A۳ که در آنها اصول هیأت F برقرار نیستند بررسی کرد.

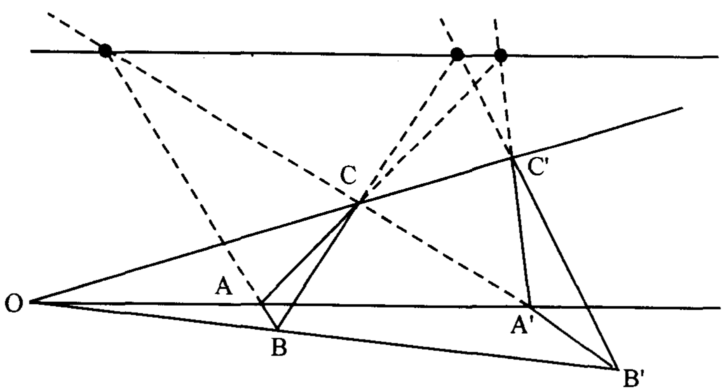
واقعیت مهم که اثبات نخواهیم کرد آن است که یک صفحهٔ وقوع G صادق در A۱, A۲, A۳ با صفحهٔ E(F) برای هیأتی مانند F یکریخت است اگر و تنها اگر G در یک اصل چهارم A۴ نیز صدق کند که در واقع موضوع حکم قضیهٔ زیبا و کلاسیک **دزارگ** است. این قضیه را به صورتی ارایه می‌کنیم که شامل شش نقطهٔ متمایز A، B، C، ′A، ′B و ′C هستند. این نقاط را رئوس دو مثلث ABC و ′A′B′C در نظر می‌گیریم.

دو شرط روی این شش نقطه را بیان می‌کنیم:

(C۱) سه خط ′AA، ′BB و ′CC واصل رأسهای متناظر دو مثلث یا موازی هستند یا متقارب.

(C۲) سه جفت (′AB و ′A′B) (′BC, B′C) و (′CA, C′A) از اضلاع متناظر دو مثلث یا سه جفت از خطهای موازی هستند و یا در سه نقطهٔ همخط متلاقی هستند.

حال قضیهٔ دزارگ که آن را به عنوان اصل، A۴ می‌گیریم ارایه می‌کنیم: (C۱) برقرار است اگر و تنها اگر (C۲) برقرار باشد.



حال نتیجهٔ مذکور بالا که اثبات آن را در نهایت اختصار توضیح داده‌ایم می‌آوریم.

قضیه. یک صفحهٔ وقوع $G = (\Pi , \Lambda, J)$ به ازای هیأتی (یکتا) مانند F با $E(F)$ یکریخت است اگر و تنها اگر G در اصول A۱ , A۲ , A۳ و A۴ صدق کند.

در واقع ثابت می‌کنیم که A۴ در صفحه اقلیدسی E برقرار است. به هر حال هر دو حکم و اثبات قضیهٔ دزارگ در قلمرو هندسهٔ تصویری ساده‌تر می‌شود و ما تا وقتی که این موضوع را در فصل بعد مورد بحث قرار دهیم از ارایهٔ اثبات خودداری می‌کنیم.

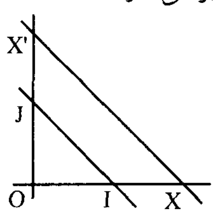
۵. گروه خودریختی یک صفحهٔ وقوع

ما به پرسش رابطه بین گروه مستوی $A(F)$ برای یک هیأت F و گروه L متشکل از همهٔ نگاشتهای دوسویی $E(F)$ که خطها را به خطها می‌نگارند باز می‌گردیم. اگر $E(F)$ را به عنوان یک صفحهٔ وقوع $G = (\Pi, \Lambda, J)$ در نظر بگیریم. که در نتیجه باید در هر چهار اصل صدق کند آنگاه به‌طور ساده L گروه خودریختی آن یعنی AutG است.

شبیه حالت اقلیدسی دیدن این که $A(F) \subseteq AutG$ بدیهی است. استدلال در جهت دیگر نیز به جز یک نکته مانند حالت کلی انجام می‌شود. آن نشان می‌دهد که اگر $\alpha \in L$ خط l (به مثابه محور x) را پایا و نقاط $O = (\circ,\circ)$ و $I = (۱,\circ)$ را ثابت نگاه دارد آنگاه به ازای همهٔ $x \in F$ ، $(x, \circ)\alpha = (x\gamma , \circ)$ که γ یک خودریختی از F است.

به هر حال برای هیأت کلی F نمی‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که γ همانی است؛ مثلاً اعداد مختلط C خودریختی نابدیهی مزدوج‌گیری مختلط را می‌پذیرند.

با وجود این، بحث را شبیه حالت اقلیدسی ادامه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که به ازای برخی $\theta \in A(F)$ داریم $\alpha_۴ = \alpha\theta$ ، نقطهٔ $J = (\circ,۱)$ و نیز نقاط I , O را ثابت نگاه می‌دارد و از این رو هر دو محور x و y را به خود می‌نگارد. حال نشان می‌دهیم $(\circ,x)\alpha_۴ = (\circ,x\gamma)$؛ مطلب اخیر از این واقعیت نتیجه می‌شود که چون خط d از $X = (x,\circ)$ و $X' = (\circ,x)$ می‌گذرد و موازی با IJ است بنابراین $d_۴$ از $X\alpha_۴$ و $X'\alpha_۴$ نیز می‌گذرد.



سرانجام برای یک نقطهٔ مفروض $P = (x,y)$ با رسم کردن دو خط موازی با دو محور و گذرندهٔ از P نتیجه می‌گیریم که $P\alpha_۴ = (x\gamma, y\gamma)$.

برای ارایهٔ نتیجهٔ مورد نظر یک زیرگروه Aut^*F از L را تعریف می‌کنیم که متشکل از همهٔ

تبدیلهای $(x,y) \to (x\gamma, y\gamma)$ برای $\gamma \in \mathrm{Aut}F$ باشد، به روشنی Aut^*F با $\mathrm{Aut}F$ یکریخت است.

قضیه. $L = \mathrm{Aut}G$ **یک حاصلضرب نیم مستقیم** $A(F)$ $G = \mathrm{Aut}^*G.$ **از گروه** $\mathrm{Aut}(F) \simeq \mathrm{Aut}^*F$ **در** $A(F)$ **است.**

نتیجه. اگر $\mathrm{Aut}(F)=1$ آنگاه $L = \mathrm{Aut}G = A(F)$.

دیده‌ایم که $\mathrm{Aut}\mathbf{R} = 1$ و بسیاری هیأتهای دیگری وجود دارند که هیچ خودریختی نابدیهی ندارند مثلاً Q و همهٔ هیأتهای $\mathbf{Z}_p$ به ازای p یک عدد اول. از طرف دیگر متذکر شده‌ایم که $\mathbf{C}$ یک خودریختی نابدیهی دارد. با دلیل مشابهی $Q\sqrt{2}$ هیأت همه اعداد به‌صورت $a+b\sqrt{2}$ برای $a, b \in Q$ نیز چنین است و نیز هیأت $\mathbf{Z}_2(\omega)$ که دارای چهارعضو به صورت $a+b\omega$ برای $a,b \in \mathbf{Z}_2$ است که ω در معادله $\omega^2+\omega+1=0$ صدق می‌کند.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. قضیه‌ای در هندسه اقلیدسی را توصیف کنید که در آن نقطهٔ $C = A \oplus B$ به انتخاب نقطه P (غیرواقع بر l) به‌کار رفته در ساختمان بستگی ندارد یک «اثبات» از این مطلب ارائه کنید، حقایق آشنا دربارهٔ خطهای موازی، مثلثهای متشابه، و غیره را فرض بگیرید، اما هندسه تحلیلی را مورد استفاده قرار ندهید.

مسألهٔ ۲. نشان دهید که همهٔ اصول A۱ ، A۲ و A۳ هرگاه $E(F)$ مانند قبل ساخته شود اما F یک هیأت **نباشد** لزومی ندارد برقرار باشند، مثلاً هرگاه $F=\mathbf{Z}$ یا $F=\mathbf{Z}_4$ اعداد صحیح به پیمانهٔ ۴ باشد.

مسألهٔ ۳. به چه معنایی اصل A_2 در هندسهٔ کروی، و در هندسهٔ هذلولوی (چنان‌که در بخش ۷ فصل ۳ توصیف شد) برقرار نیست.

مسألهٔ ۴. صفحات وقوعی که در آنها A۱ و A۲ صادق باشند اما A۳ صادق نباشد را توصیف کنید.

مسألهٔ ۵. (الف) فرض کنید $F=\mathbf{Z}_3$. چند نقطه، چند خط، چند نقطه روی یک خط، چند خط گذرندهٔ از یک نقطه و چند خط در یک خانواده از خطهای موازی وجود دارند؟ شکلی از نقاط روی خطهای $E(F)$ رسم کنید.

(ب) فرض کنید هیأت F دارای m عضو باشد (لزوماً m توانی از یک عدد اول است). چند نقطه و چند خط در $E(F)$ وجود دارند؟

مسألهٔ ۶. اگر یک هیأت F_1 در هیأت دیگر F_2 قرارگیرد آنگاه به مفهوم عادی $E(F_1)$ در $E(F_2)$ واقع می‌شود. کوچکترین زیرهیأت F از $\mathbf{R}$ که شامل زیر هیأت Q با ویژگی زیر باشد چیست؟

فرض کنید هر یک از l_1 , l_2 یک خط در $E(\mathbf{R})$ گذرندهٔ از نقطهٔ $E(F)$ یا یک دایره در $E(\mathbf{R})$ و به مرکز نقطه‌ای در $E(F)$ و گذرندهٔ از نقطه‌ای در $E(F)$ باشد؛ آنگاه اگر l_1 , l_2 در یک یا دو نقطه تلاقی کنند این نقاط در $E(F)$ هستند

مسألهٔ ۷. فرض کنید $F = \mathbf{Z}_2(\omega)$ هیأتی متشکل از ۴ عضو توصیف شده در بالا باشد. مرتبه‌های گروههای $T(F)$ ، $A(F)$ ، $A_0(F)$ و $L(F)$ را بیابید.

مرجعها

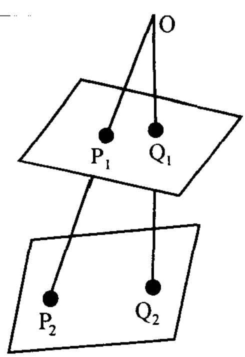
چنان که بعداً خواهیم دید مطالب این فصل کم و بیش در هندسهٔ تصویری در فصل بعد مطرح خواهند شد. در اینجا فقط دو کتاب کلاسیک را معرفی می‌کنیم، کتاب بسیار خواندنی آرتین برای معرفی مختصات در یک صفحه وقوع، و فصل ۲۰ کتاب م. هال، نظریه گروهها، برای بحثی جامعتر در مورد صفحات وقوعی که لزوماً دزارگی نیستند.

فصل هفت

هندسهٔ تصویری

۱. مقدمه

با بحثی غیرصوری دربارهٔ مفهوم **تصویر** از یک صفحه به صفحهٔ دیگر آغاز می‌کنیم. فرض کنید E_1 و E_2 دو صفحه در فضای سه بُعدی اقلیدسی E^3 و O نقطه‌ای غیر واقع بر آنها باشد. اگر P_1 نقطه‌ای از E_1 باشد و خط OP_1 گذرندهٔ از O و P_1 صفحهٔ E_2 را در یک نقطهٔ P_2 قطع کند آنگاه P_2 را تصویر P_1 تحت تصویرگر (مرکزی) π از O می‌نامیم. متذکر می‌شویم که خط OP_1 ممکن است E_2 را قطع نکند که در این حالت E_1 تحت π نگاره‌ای ندارد یا این که خط OP_2 برای P_2 در E_2 ممکن است E_1 را قطع نکند که در این حالت P_2 نگارهٔ هیچ نقطهٔ P_1 تحت π نیست. (این دو حالت اتفاق خواهند افتاد مگر اینکه E_1 و E_2 موازی باشند.) عمدتاً برای بر طرف کردن این نقایص نگاشت π است که هندسهٔ تصویری را با توسیع صفحات E_1 و E_2 به صفحات تصویری E_1^* و E_2^* با افزودن نقاط جدید «ایدآل» معرفی می‌کنیم به طریقی که π به طور طبیعی به یک نگاشت دوسویی π^* از E_1^* به E_2^* توسعه یابد.



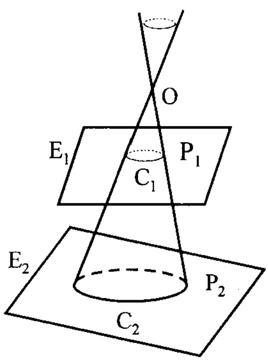
اکنون فرض کنید که E_1 و E_2 موازی نیستند و لذا یکدیگر را در یک خط l قطع می‌کنند. صفحه E_2' گذرندهٔ از O و موازی با E_2 صفحهٔ E_1 را در خطی مانند l_1 موازی با l قطع می‌کند و

آن دقیقاً نقاطی از l_1 است که π برای آنها تعریف نمی‌شود. به همین نحو صفحهٔ E'_1 گذرندهٔ از O و موازی با E_1 صفحهٔ E_2 را در خطی مانند l_2 موازی با l قطع می‌کند. و آن دقیقاً نقاطی از l_2 است که نگارهٔ هیچ نقطه‌ای از E_1 تحت π نیست. به اختصار π نگاشتی دوسویی از E_1-l_1 بر روی E_2-l_2 است.

فرض کنید m_1 و n_1 خطهایی در E_1 باشند که یکدیگر را در نقطهٔ P_1 روی l_1 قطع می‌کنند. آنگاه چون P_1 نگاره‌ای در E_2 ندارد نگاره‌های m_2 و n_2 حاصل از m_1 و n_1 نقطهٔ مشترکی نخواهند داشت و لذا موازی خواهند بود. وقتی P_2 را نگارهٔ P_1 می‌گیریم لذا آن نقطهٔ اشتراک خطهای موازی خواهد بود. همچنین آن یک «نقطه در بینهایت» به این معنی است که وقتی یک نقطهٔ Q از E_1 به سمت P_1 در امتداد m_1 یا n_1 میل می‌کند نگارهٔ آن $Q\pi$ به طور نامتناهی در امتداد m_2 یا n_2 دور خواهد شد.

ایدهٔ اصلی «فرض گرفتن» یک «خط در بینهایت» l_2^∞ الحاق شده به E_2 است که به عنوان نگارهٔ l_1 تحت π به کار می‌آید و «فرض گرفتن» یک «خط در بینهایت» l_1^∞ الحاق شده به E_1 است، تا به عنوان پیشنگارهٔ l_2 به کار رود. آنگاه π را می‌توان به یک نگاشت دوسویی از $E_1^*=E_1 \cup l_1^\infty$ به $E_2^*=E_2 \cup l_2^\infty$ توسعه داد. حال این روش تا حدی غیر ماهرانه را که امیدواریم هدف از آن به عنوان انگیزهٔ مطلب برآورده شده باشد کنار می‌گذاریم و تعریف سر راست‌تری از یک صفحهٔ تصویری را در بخش بعد ارایهٔ خواهیم کرد.

قبل از آن می‌خواهیم زمینه‌ای که این ایده‌ها به طور کلاسیک بروز کردند، یعنی مطالعهٔ مقاطع مخروطی، را معرفی کنیم. فرض کنید O، E_1 و E_2 مانند قبل باشند و فرض کنید C_1 دایره‌ای در E_1 باشد. اگر E_2 موازی با E_1 است C_2 نگارهٔ C_1 در E_2 دایرهٔ دیگری خواهد بود. اگر E_2 زاویهٔ کوچکی با E_1 بسازد آنگاه C_2 کمی کشیده می‌شود و یک بیضی خواهد بود. اگر این زاویه تا نقطه‌ای افزایش یابد که خط OP_1 برای برخی نقاط P_1 روی C_1 موازی با E_2 باشد آنگاه P_1 نگاره‌ای در C_2 نخواهد داشت و C_2 یک سهمی خواهد شد یعنی دایره‌ای که در آن نگارهٔ P_2 از



P_1 «به بینهایت رفته» است. چنان که E_2 بیشتر بچرخد، مخروط دوگانهٔ نامتناهی را در O با «قاعدهٔ» C_1 روی دو طرف O در دو تکهٔ ناهمبند قطع خواهد کرد، و C_2 یک هذلولی خواهد شد. این مطلب تشریح می‌کند که چرا انواع متفاوت مقاطع مخروطی ویژگیهای مشابه زیادی دارند.

۲. تعریف صفحهٔ تصویری حقیقی

در بالا دیدیم که یک خط l گذرندهٔ از O صفحهٔ $E=E_1$ را در یک نقطهٔ P_1 قطع می‌کند مگر این که l موازی با E_1 باشد ما مایلیم که خطهای l گذرندهٔ از O موازی با E_1 صفحهٔ توسعه یافتهٔ E_1^* را در یک «نقطه در بینهایت» تلاقی کنند. لذا مایلیم که نقاط E_1^* در تناظر دوسویی با خطهای گذرندهٔ از O باشند. بی‌درنگ (چنان که در ریاضیات معمول است) با تعریف کردن E^* به صورت مجموعهٔ همهٔ خطهای گذرندهٔ از O در E^3 به بررسی مسأله می‌پردازیم. به طور دقیقتر E^* را تعریف می‌کنیم که یک صفحهٔ وقوع $E^*=(\Pi, \Lambda, J)$ باشد که Π مجموعهٔ «نقاط» E^* یا به‌طور ساده مجموعهٔ خطهای گذرندهٔ از O در E^3 است. (با توجه به «نقاط در بینهایت» خواننده به سادگی می‌تواند قبول کند که هیچ امیدی به تعریف کردن یک متریک معقول روی E^* وجود ندارد). خطهای E عبارتند از تقاطعهای E با یک صفحهٔ گذرندهٔ از O که با E موازی نباشد و حال آنکه که تقاطع E با صفحهٔ گذرندهٔ از O و موازی با E متناظر با «خط در بینهایت» l^∞ در نظر گرفته می‌شود. لذا به تعریف Λ می‌رسیم که مجموعهٔ صفحات گذرندهٔ از O می‌باشد. تعریف J در مطالب بالا نهفته است: یک عضو از Π، یعنی یک خط l گذرندهٔ از O (واقع) بر عضوی از Λ یعنی یک صفحهٔ p گذرندهٔ از O است تنها اگر l واقع در p باشد.

رئوس مطالب را متذکر می‌شویم، صفحهٔ تصویری حقیقی E^* صفحهٔ وقوع $E^*=(\Pi, \Lambda, J)$ است که Π مجموعهٔ خطهای l در E^3 گذرندهٔ از O می‌باشد و Λ مجموعهٔ صفحات p در E^3 گذرندهٔ از O است $(l,p)\in J$ یعنی l روی p قرار دارد تنها اگر l واقع در p باشد.

نکته (۱) نمی‌توان انتظار داشت که E^* در همهٔ اصول A_1، A_2، A_3 و A_4 برای صفحهٔ مستوی E صدق کند در واقع قطعاً که A_2 صادق نیست.

دوباره این تعریف را به صورت تحلیلی مطرح می‌کنیم. یک دستگاه مختصات مفروض برای E^3 به مبدأ O را در نظر می‌گیریم. یک خط l گذرندهٔ از O کاملاً به وسیلهٔ نقطهٔ دیگری مانند $P=(x,y,z)\neq(0,0,0)$ روی l مشخص می‌شود و دو تا از این نقاط $P=(x,y,z)$ و $P'=(x',y',z')$ همان خط l را مشخص می‌کنند اگر و تنها اگر متناسب باشند یعنی اگر به ازای عددی مانند $k\neq 0$، $x'=kx$، $y'=ky$، $z'=kz$. بنابراین یک رابطهٔ هم ارزی روی مجموعهٔ همه سه تایی‌های $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ تعریف می‌کنیم: $P\equiv P'$ اگر آنها در این معنا متناسب باشند و برای Π مجموعهٔ رده‌های هم ارزی $[x,y,z]$ از سه تاییهایی $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ را اختیار می‌کنیم.

اگر p یک صفحهٔ گذرندهٔ از O به معادلهٔ $ax+by+xz=0$ باشد (که همهٔ a ، b و c با هم صفر نیستند) و اگر نقطهٔ P روی p باشد آنگاه هر $P'\equiv P$ نیز روی p قرار می‌گیرد؛ لذا می‌توانیم Λ را به ازای $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ همهٔ مکانهای هندسی $\{[x,y,z]:ax+by+cz=0\}$ تعریف کنیم. این مطلب توصیف تحلیلی صفحهٔ تصویری E^* را به عنوان یک صفحهٔ وقوع تکمیل می‌کند.

نگاشت η از E بر E^* که نقطهٔ (x,y) را به $[x,y,1]$ می‌نگارد به روشنی یک به یک است؛ می‌توانیم E را با نگارهٔ آن در E^* یکی کنیم. اگر l خطی در E به معادلهٔ $ax+by+c=0$ باشد نگارهٔ آن متشکل از همهٔ نقاط خط l^* در E^* به معادلهٔ $ax+by+cz=0$ ، به جز نقطهٔ $[b,-a,0]$ است که آن را می‌توان به عنوان «نقطهٔ در بینهایت» روی l در نظر گرفت. حال $E^*=E\cup l^\infty$ که l^∞ «خط در بینهایت» به معادلهٔ $z=0$ است. این خط l^∞ متشکل از نقاط $[1,m,0]$ به عنوان نقطهٔ در بینهایت واقع بر همهٔ خطهای موازی $y=mx+k$ با شیب m همراه با نقطهٔ $[0,1,0]$ واقع بر همهٔ خطهای قائم $x=h$ است.

برای نمایش این ایده‌ها اگر C مکان هندسی معادلهٔ یک چند جمله‌ای $p(x,y)=0$ در E باشد و $p^*(x,y,z)=0$ به وسیلهٔ جایگزین کردن $x\longrightarrow \frac{x}{z}$ ، $y\longrightarrow \frac{y}{z}$ و ساده‌کردن کسرها به دست آید، مکان هندسی C^* از $P^*(x,y,z)=0$ در E^* متشکل از C همراه با نقاط آن در بینهایت است. لذا هذلولی C_1 به معادلهٔ $x^2-y^2=1$ به C_1^* به معادلهٔ $x^2-y^2-z^2=0$ نگاشته می‌شود که متشکل از C_1 همراه با همهٔ نقاط آن در بینهایت است که با اختیار کردن $z=0$ ، یعنی دو نقطهٔ $(1,-1,0)$ و $(1,1,0)$ در بینهایت روی دو خط مجانب، به دست می‌آیند. دایرهٔ C_2 به معادلهٔ $x^2+y^2=1$ به C_2^* به معادلهٔ $x^2+y^2-z^2=0$ می‌رود و این شامل C_2 است و چون $x^2+y^2+0=0$ تنها سه‌تایی مستثنی شدهٔ $(0,0,0)$ را به عنوان جواب دارد و شامل چیز دیگری نیست، در نتیجه دایرهٔ مزبور نقطه‌ای در بینهایت ندارد. توجه کنید که C_1^* تحت یک خودریختی از E^* به C_2^* می‌رود، در واقع تحت تعویض x و z ؛ در این معنا هذلولی و دایره به‌طور تصویری هم ارز هستند.

۳. صفحه تصویری بر روی یک هیأت دلخواه

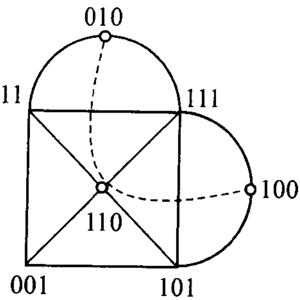
تعریف. اگر F یک هیأت باشد صفحهٔ تصویری $E^*(F)$ بر روی F صفحهٔ وقوع $E^*(F)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۱) Π مجموعهٔ رده‌های هم ارزی $[x,y,z]$ تحت رابطهٔ $(x,y,z)\equiv(x',y'z')$ اگر و تنها اگر به ازای برخی مقادیر $k\neq0$ در F ، $x'=kx$ ، $y'=ky$ ، $z'=kz$ روی مجموعهٔ سه تاییهای $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ است.

(۲) Λ مجموعه‌ای در تناظر دوسویی با Π است که اعضای آن را به صورت $<x,y,z>$ می‌نویسیم.

(۳) $[x,y,z]$ مربوط به $<a,b,c>$ است اگر و تنها اگر $ax+by+cz=0$.

مثال: فرض کنید $F=Z_2$. به روشنی $E^*(F)$ دقیقاً ۷ نقطه و ۷ خط دارد، در صورتی که $E(F)$ با ۴ نقطه ۶ خط از $E^*(F)$ با حذف خط l^∞ و سه نقطهٔ آن یعنی (۱,۱,۰)، (۱,۰,۰) و (۰,۱,۰) به دست می‌آید. در شکل (طرح گونه) خط l^∞ به صورت خط چین و سه نقطهٔ مذکور به صورت نقاط توخالی نشان داده شده‌اند.



حال شبیه صفحه‌های مستوی برای مشخص کردن صفحات تصویری $E^*(F)$ بر پایهٔ اصول موضوع اقدام می‌کنیم. سه اصل زیر شبیه اصول در حالت مستوی هستند، در واقع P۱ نظیر A۱ است.

اصل P۱. برای دو نقطهٔ متمایز مفروض دقیقاً یک خط وجود دارد که هر دو نقطه به آن تعلق دارند.

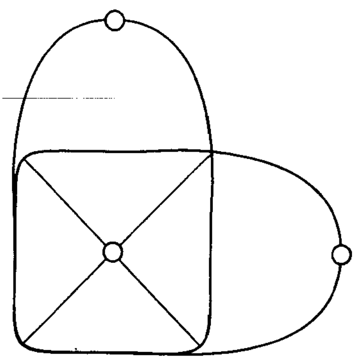
اصل P۲. برای دو خط متمایز مفروض دقیقاً یک نقطه وجود دارد که متعلق به هر دو آنهاست.

این مطالب به سادگی بررسی می‌شوند. برای P۱ اگر دو نقطه در زیر فضای مستوی $E(F)$ واقع شوند آنگاه یک خط یکتا از $E(F)$ و بنابراین یک خط یکتا غیر از l^∞ شامل هر دو آنهاست. اگر p_1 در $E(F)$ و p_2 روی l^∞ باشد، آنگاه خط یکتای مورد نظر خطی است که از p_1 می‌گذرد و شیب آن (یا سوی آن) به وسیلهٔ p_2 داده می‌شود. اگر هر دو روی l^∞ باشند، آنگاه خط یکتای مورد نظر l^∞ است. نتیجه گرفتن P۱ و P۲ به طور مستقیم از این واقعیت که روی هر هیأت دو معادلهٔ خطی همگن مستقل با سه مجهول یک زیر فضای یک بعدی را به عنوان جواب مشخص می‌کند راهی کوتاهتر اما کمتر شهودی است. اصل بعد حالتهای تباهیده از استثناء می‌کند.

اصل P۳ . چهار نقطهٔ متمایز وجود دارند که هیچ سه تا از آنها روی یک خط مشترک قرار ندارند.

نکتهٔ ۱: به سادگی می‌بینیم که به کار بردن P۱ و P۲ و اصل P۳ وجود پیکربندی نشان داده شده را که شامل ۷ نقطه است تضمین می‌کند. اگر این ۷ نقطه همهٔ نقاط باشند $E^*(Z_2)$ را داریم.

نکتهٔ ۲: تعریف تحلیلی $E^*(F)$ **خوددوگان** است در این معنا که اگر نقش Π و Λ را با هم تعویض کنیم و رابطهٔ وقوع J را به وسیله وارون آن جایگزین کنیم $E^*(F)$ بدون تغییر باقی می‌ماند.به همین معنا مجموعهٔ اصول P۱ ، P۲ و P۳ (اساساً) خود دوگان است. اگر کلمه‌های «نقطه» و «خط» را مبادله کنیم P۱ و P۲ مبادله خواهند شد و به سادگی می‌توانیم ببینیم که P۳ هم ارز دوگان آن یعنی P′۳ است: چهار خط متمایز وجود دارند که هیچ سه‌تایی از آنها در یک نقطهٔ مشترک تلاقی نمی‌کنند. در نتیجه اگر یک قضیهٔ خاص T نتیجه‌ای از این اصول باشد آنگاه T′ دوگان آن نیز نتیجه‌ای از آنهاست، و به وسیلهٔ مبادلهٔ کلمه‌های «نقطه» و «خط» در T به دست می‌آید.



در حالت $F=\mathbf{R}$ دیده‌ایم که چگونه E^* را از E به وسیلهٔ الحاق یک خط در بینهایت l^∞ بسازیم که تنها شامل یک نقطه روی (توسیع E^* از) هر خط یک خانواده از خطهای موازی E هست. به عکس E را از E^* با حذف یک خط (و همه نقاط روی آن) یعنی خط l^∞ بـه دست می‌آوریم. قضیهٔ بعد که به سادگی بـا هـمان روش بـررسی مـی‌شود نـتیجهٔ مشـابهی را بـرای صفحه‌های وقوع بر حسب اصول موضوع تعریف شده به بار می‌آورد.

قضیه: فرض کنید E_1 یک صفحهٔ وقوع مستوی باشد که در اصـول A۱ ، A۲ ، A۳ صـدق می‌کند. فرض کنید E_1^* از E_1 به وسیلهٔ الحاق یک نقطهٔ جدید روی همهٔ اعضای هر خانوادهٔ

خطهای موازی در E_1 و یک خط جدید شامل همهٔ این نقاط جدید ساخته شود. آنگاه E_1^* در اصول P۱ ، P۲ و P۳ صدق می‌کند. به عکس اگر E_1^* مفروض چنان باشد که در P۱ ، P۲ ، P۳ صدق کند و E_1 به وسیلهٔ حذف یک خط از E^* به دست آید همراه با همهٔ نقاط آن خط، آنگاه E_1 در اصول A۱ ، A۲ ، A۳ صدق می‌کند.

در این معنا نظریه‌های صفحات مستوی و صفحات تصویری قابل مبادله هستند، اما صفحات تصویری هر چند شاید نامأنوس‌تر هستند، به طور کلی برای مطالعه کردن به دلیل اصول ساده‌تر آنها و میزان تقارن بالاتر آنها ساده‌تر می‌باشند.

۴. مختصات گذاری صفحات تصویری

از مطالب بالا نتیجه می‌شود که یک صفحهٔ تصویری E_1^* برای هیأتی مانند F با $E^*(F)$ یکریخت است اگر و تنها اگر صفحهٔ مستوی متناظر E_1 با $E(F)$ یکریخت باشد و از این رو اگر و تنها اگر قضیهٔ دزارگ در صفحهٔ مستوی E_1 صادق باشد. حال بی‌درنگ نتیجه می‌شود قضیهٔ دزارگ برای E_1 هم‌ارز با صورت تصویری قضیه دزارگ است که ساده‌تر از صورت مستوی آن می‌باشد و برای یک صفحهٔ تصویری $E^*(F)$ اثبات آن ساده‌تر است. این قضیه را به عنوان یک اصل بیان می‌کنیم.

اصل P۴ . (قضیهٔ دزارگ) فرض کنید A ، B ، C ، A' ، B' و C' شش نقطهٔ متمایز باشند و فرض کنید a ، b و c (خطهای شامل) اضلاع مقابل به A ، B و C در مثلث ABC . و a' ، b' و c' اضلاع مقابل به A' ، B' و C' در مثلث $A'B'C'$ باشند آنگاه دو شرط زیر هم ارز هستند:

(P۴.۱) سه خط AA' ، BB' ، CC' در یک نقطه تلاقی می‌کنند؛

(P۴.۲) سه نقطهٔ تلاقی حاصل از a با a' و b با b' و c با c' همخط هستند.

از بحث بالا قضیهٔ زیر را داریم

قضیه: یک صفحهٔ وقوع E_1^* برای هیأتی مانند F با $E^*(F)$ یکریخت است اگر و تنها اگر آن در اصول P۱ ، P۲ ، P۳ و P۴ صدق کند.

در واقع مطلب بالا را با فرض کردن این واقعیت که $E(F)$ صورت مستوی قضیهٔ دزارگ را برقرار می‌کند یا به طور هم ارز $E^*(F)$ در اصل P۴ صدق می‌کند ثابت کرده‌ایم. حال اثباتی از این مطلب را برای $E^*=E(\mathbf{R})$ ارایه می‌دهیم.

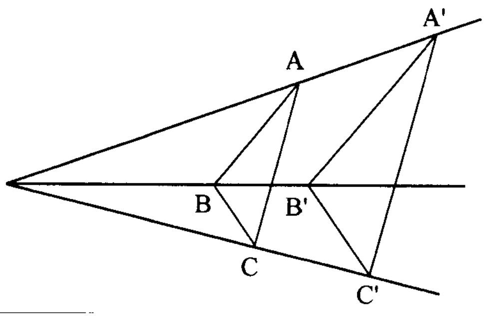
این اثبات مزایای کارکردن در صفحهٔ تصویری را نشان می‌دهد. ابتدا توجه می‌کنیم این مطلب که P۴.۱ شرط P۴.۲ را نتیجه می‌دهد دوگان استلزام عکس این مطلب است که P۴.۲ شرط P۴.۱ را نتیجه می‌دهد. چون $E^*(F)$ اصل دوگانی را برقرار می‌کند، هرگاه یکی از این

استلزامها برقرار باشد دیگری نیز برقرار خواهد بود. لذا کافی است که تنها یکی از استلزامها را ثابت کنیم و انتخاب می‌کنیم که P۴.۱ نتیجه می‌دهد P۴.۱ را اثبات کنیم.

چون یک صفحهٔ مستوی یکریخت با $E(F)$ را می‌توان با حذف هر خط انتخاب شده از $E^*(F)$ به دست آورد می‌توانیم فرض کنیم که خط حذف شده l^∞ خط معرفی شده در P۴.۲ باشد یعنی تحدیدهای a، a' و b، b' و c، c' سه جفت از خطهای موازی در $E(F)$ هستند. آنگاه در $E(F)$ باید نشان دهیم:

اگر دو مثلث در صفحهٔ مستوی $E(F)$ شش رأس متمایز خود را داشته باشند و اضلاع متناظر دوتا دوتا موازی باشند آنگاه سه خطی که رأسهای متناظر را وصل می‌کنند یا موازی هستند و یا متقارب.

حال فرض می‌کنیم $F=\mathbf{R}$ که می‌توانیم متریک اقلیدسی و ویژگیهایی آشنای مثلثهای متشابه را به کار ببریم؛ اثبات ما می‌تواند در هندسهٔ مستوی $E(F)$ برای هیأت کلی F ارایه شود هر چند ممکن است این کار قدری پرزحمت باشد و ساده‌ترین اثبات ممکن نباشد. برای شروع فرض می‌کنیم که AA' و BB' موازی هستند که در نتیجه $|AB|=|A'B'|$ و دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ در واقع قابل انطباق هستند. حال اضلاع BC و $B'C'$ موازی و مساوی می‌باشند که از آنجا نتیجه می‌شود $C'C$ نیز موازی با $B'B$ است.



این حالت باقی‌مانده که هیچ دوتایی از AA' ، BB' و CC' موازی نیستند. فرض کنید O_{AB} نقطهٔ تلاقی AA' و BB' باشد؛ آنگاه یک انبساط مناسب δ_{AB} به مرکز O_{AB} ضلع AB را به $A'B'$ می‌نگارد و لذا مثلث ABC را به مثلث متشابه $A'B'C'$ می‌نگارد. به همین نحو یک انبساط مناسب δ_{BC} به مرکز O_{BC} نقطهٔ تلاقی BB' و CC' ، مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ می‌نگارد. اما حداکثر یک انبساط از صفحهٔ مستوی وجود دارد که مثلث مفروض ABC را به مثلث دیگر $A'B'C'$ می‌نگارد که بنابراین $\delta_{AB}=\delta_{BC}$ و $O_{AB}=O_{BC}$. این مطلب اثبات قضیهٔ دزارگ را برای $E^*(\mathbf{R})$ تکمیل می‌کند.

قبل از رها کردن مطلب دو نکته را متذکر می‌شویم. اول این که تعداد زیادی صفحهٔ

تصویری E_1^* وجود دارند که P۱ و P۲ و P۳ در آنها صدق می‌کنند اما P۴ در آنها صادق نیست و این **صفحات غیردزارگی** به تفصیل مطالعه شده‌اند. دوم این که، فرض کنید صفحهٔ تصویری E_1^* در یک فضای تصویری ۳ـ بُعدی P واقع می‌شود. این یک هندسهٔ وقوع سه نوع شئ، نقاط، خطها و صفحه دارد و برقرارکنندهٔ مجموعه‌ای نسبتاً واضحی از اصول مشابه با مجموعهٔ P۱، P۲ ، P۳ ، اما نه شبیه P۴ می‌باشد. لذا از این اصول نتیجه می‌شود که قضیهٔ دزارگ برای هر صفحه در P برقرار است؛ به عبارت دیگر هندسه‌های تصویری غیر دزارگی از بُعد بزرگتر از ۲ وجود ندارند.

۵. گروه تصویری

اکنون گروه خودریختی $\mathrm{Aut}\ E^*(F)$ از صفحه تصویری $E^*(F)$ روی یک گروه F را بررسی می‌کنیم. برای این منظور تعریف اول‌مان از $E^*(F)$ برای حالت مفروض $F=\mathbf{R}$ را به عنوان مجموعهٔ همهٔ خطهای گذرندهٔ از مبدأ O در فضای مختصات ۳ـ بُعدی F^3 و خطهای $E^*(F)$ که صفحه‌های گذرندهٔ از O در F^3 هستند یادآوری می‌کنیم.

نتیجه‌گیری می‌کنیم که هر خودریختی از $E^*(F)$ به وسیلهٔ خودریختی از F^3 که O را ثابت نگاه می‌دارد القا می‌شود. که در نتیجه $\mathrm{Aut}\ E^*(F)$ گروه خارج قسمتهای پایدار ساز نقطهٔ O یعنی $\mathrm{Aut}_O F^3$ در تمام گروه $\mathrm{Aut}F^3$ متشکل از همهٔ خودریختیهای F^3 است. حال تشخیص این گروههای اخیر کلاً شبیه حالت ۲ـ بُعدی است. **صفحه‌های** F^3 مکانهای هندسی معادله‌های $ax+by+cz+d=0$ برای $a,b,c,d\in F$ هستند که a ، b و c با هم صفر نباشند؛ تقاطعهای هر جفتی از صفحه‌های متمایز ناموازی، خطها را تشکیل می‌دهند. یک خودریختی از F^3 نگاشتی دوسویی از F^3 است که صفحه‌ها را به صفحه‌ها و بنابراین خطها را به خطها می‌نگارد. شبیه حالت ۲ـ بُعدی $\mathrm{Aut}\ F^3$ یک توسیع مُقطع از یک گروه انتقال $T(F^3)$ به وسیله $\mathrm{Aut}_O\ F^3$ است. این گروه $\mathrm{Aut}_O\ F^3$ است که مورد علاقه ما می‌باشد و دوباره شبیه حالت ۲ـ بُعدی، این یک توسیع مُقطع از گروه خطی عام $GL(3,F)$ از بُعد ۳ روی هیأت F به وسیلهٔ Aut^*F می‌باشد که متشکل از همهٔ خودریختیهای F به صورت $(x,y,z)\longrightarrow(x\gamma,y\gamma,z\gamma)$ برای $\gamma\in\mathrm{Aut}F$ است.

لذا یک همریختی از $\mathrm{Aut}_O F^3=\mathrm{Aut}^*F.GL(3,F)$ بر روی $\mathrm{Aut}E^*(F)$ داریم و هستهٔ آن K مجموعهٔ اعضای α از $\mathrm{Aut}_O F^3$ است که همهٔ نقاط $E^*(F)$ را ثابت نگاه می‌دارند. لذا $\alpha\in K$ هر گاه به ازای هر (x,y,z) ، $k\neq 0$ وجود داشته باشد که $(x,y,z)\alpha=(kx,ky,kz)$. می‌نویسیم $\alpha=\gamma\lambda$ که $\gamma\in\mathrm{Aut}F$ و $\lambda\in GL(3,F)$. چون γ نقاط ۱,۰ را ثابت نگاه می‌دارد به ازای بعضی مقادیر $k_3\neq 0$ و k_2 و k_1 ، داریم $(1,0,0)\alpha=(k_1,0,0)$ ، $(1,0,0)\lambda=(0,k_2,0)$ ، $(0,1,0)\gamma=(0,k_2,0)$ ، $(0,0,1)\lambda=(0,0,k_3)$. لذا λ قطری است یعنی به ازای همهٔ (x,y,z) ها داریم: $(x,y,z)\lambda=(k_1x,k_2y,k_3z)$. چون $(1,1,1)\alpha=(1,1,1)\lambda=(k_1,k_2,k_3)$ به ازای بعضی مقادیر k

باید به صورت (k,k,k) باشد، در نتیجه $k_1=k_2=k_3=k$ ، و λ یک انبساط (ماتریس عددی) است و به ازای همهٔ (x,y,z) ها، $\mu_k:(x,y,z)\lambda=(kx,ky,kz)$. حال این انبساطها گروه $Z=ZGL(3,F)$ متشکل از همهٔ اعضای $G=GL(3,F)$ هستند که با همهٔ اعضای G تعویضپذیراند و لذا مرکز G است.

به ازای همهٔ x ها داریم $(x,1,0)\alpha=(x,1,0)\gamma\lambda=(x\gamma,1,0)\lambda=(kx\gamma,k,0)$. اما $(x,1,0)\alpha$ به ازای بعضی مقادیر k' باید به صورت $(k'x,k',0)$ باشد که در نتیجه $k=k'$ ، از این رو $kx\gamma=kx$ و $x\gamma=x$. نشان دادهایم $\gamma=1$ که در نتیجه $\alpha=\gamma\in Z$. لذا $K\subseteq Z$ از طرفی فوراً داریم $Z\subseteq K$. در اینجا نشان دادهایم $K=ZGL(3,F)$.

علامتگذاری معیار $PGL(3,F)=\dfrac{GL(3,F)}{ZGL(3,F)}$ است. ما قضیهٔ زیر را نشان دادهایم.

قضیه: گروه خودریختی صفحهٔ تصویری $E^*(F)$ روی هیأت F عبارت است از $AutE^*(F) \simeq AutF.PGL(3,F)$ یعنی یک توسیع مُقطع ازگروه خطی تصویری $PGL(3,F)$ از بُعد ۳ روی F به وسیلهٔ گروه $AutF$ متشکل از همهٔ خودریختیهای هیأت F .

نتیجه: گروه خودریختی صفحهٔ تصویری حقیقی E^* با $PGL(3,R)$ یکریخت است، لذا با گروه همهٔ ماتریسهای حقیقی 3×3 ناتکین به پیمانهٔ گروه ماتریسهای عددی aI ، $a\neq0$ یکریخت است.

نکتهٔ ۱: یک صفحه می‌تواند یک مخروط دوگانه به رأس O را در نقطهٔ منحصربه‌فرد O یا در یک خط گذرندهٔ از O یا در جفتی از خطهای متقاطع در O قطع کند و هر گاه اجازه دهیم O «به بینهایت برود» مخروط به یک استوانه تبدیل می‌شود و در این صورت یک صفحه ممکن است آن را قطع نکند یا ممکن است آن را در دو خط موازی قطع کند. این مقاطع مخروطی تباهیده مکانهای هندسی معادله‌های $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ به ازای مقادیر خاص ضرایب هستند.

نکتهٔ ۲: برخی قضایای کلاسیک نتایج ضعیفتری از قضیهٔ دزارگ هستند و هم ارز با اعتبار برخی از اصول یک هیأت، اما نه همهٔ آنها هستند.

نکتهٔ ۳: یک صفحهٔ مستوی غیردزارگی با صفحهٔ تصویری غیردزارگی مربوط به آن در مسألهٔ ۹ توصیف می‌شود.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. نشان دهید که همهٔ مقاطع مخروطی ناتباهیده در E، در E^* طور تصویری هم ارز هستند.

مسألهٔ ۲. فرض کنید هیأت F یک تعداد متناهی n عضو دارد (بنابراین n باید توانی از یک عدد اول باشد). چند نقطه و چند خط در $E^*(F)$ وجود دارند؟ چند نقطه روی یک خط و چند خط گذرندهٔ از یک نقطه وجود دارند؟ هرگاه E_1 تنها یک صفحهٔ وقوع باشد که P۱، P۲ و P۳ در آن صدق می‌کنند و تنها یک تعداد متناهی m از نقاط روی خطی موجود باشند چه می‌توان گفت؟

مسألهٔ ۳. حالتهای تباهیدهٔ مستثنی شده به وسیلهٔ اصل P۳ را مورد بحث قرار دهید.

مسألهٔ ۴. اثبات مفصلی از قضیه بخش ۳ ارایه دهید.

مسألهٔ ۵. نشان دهید که گروه خودریختی صفحهٔ تصویری حقیقی E^* روی نقاط ترایا است و در واقع هر سه نقطهٔ ناهمخط را به هر سه نقطهٔ ناهمخط دیگر می‌نگارد. زیرگروهی که هر سه نقطهٔ ناهمخط را ثابت نگاه می‌دارد چیست؟ و چگونه روی بقیهٔ نقاط عمل می‌کند.

مسألهٔ ۶. نشان دهید که ماتریسهای عددی تنها ماتریسهای حقیقی ۳×۳ هستند که با همهٔ ماتریسهای حقیقی ۳×۳ دیگر تعویضپذیراند.

مسألهٔ ۷. **خط تصویری** $E^1(F)$ روی یک هیأت F را تعریف می‌کنیم که متشکل از همهٔ رده‌های هم‌ارزی $[x,y]$ از جفتهای $(x,y)\neq(0,0)$ از اعضای $x,y\in F$ تحت رابطهٔ تناسب داشتن باشد. فرض کنید $F^*=F\cup\{\infty\}$ حال $E^1(F)$ را به F^* می‌نگاریم که $[x,y]$ به $\dfrac{x}{y}$ برای $y\neq 0$ و $[1,0]$ به ∞ نگاشته می‌شوند. نشان دهید که $PGL(2,F)$ روی F^* به طریق زیر عمل می‌کند: هم مجموعهٔ $M.ZGL(2,F)$ به ازای $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عضو $x\in F^*$ را به $\dfrac{ax+c}{bx+d}$ با قراردادهای معمول در مورد ∞ می‌نگارد. حال $E^1(F)$ یا F^* ساختار وقوع بدیهی دارد و هیچ متریک پایای غیربدیهی $d(x,y)$ ندارد. نشان دهید که با این حال نسبت توافقی $CR(x_1,x_2,x_3,x_4)$ از چهار عضو متمایز که به صورت $\dfrac{x_1-x_3}{x_1-x_4}.\dfrac{x_2-x_4}{x_2-x_3}$ تعریف می‌شود تحت $PSL(2,F)$ پایاست.

مسألهٔ ۸. هرگاه $F=Z_p$ یا $F=Z_2(\omega)$ که $\omega^2+\omega+1=0$ و هیأتی ۴ عضوی است مرتبهٔ $AutE^*(F)$ را بیابید.

مسألهٔ ۹. (بخش ۳ از فصل ۷ کتاب آلبرت و سندلر را ببینید) مشهور است که هر صفحهٔ مستوی با کمتر از ۹ نقطه روی هر خط، قضیهٔ دزارگ را برقرار می‌کند. یک صفحهٔ مستوی غیردزارگی E با ۹ نقطه روی هر خط را می‌توان به طریق زیر ساخت. فرض کنید F صفحه‌ای با ۹ عضو باشد و $F=Z_3(\omega)$ که $\omega^2=\omega+1$. فرض کنید $P=Z_3$، زیر هیأت اول، است که $P\subset F$. نقاط E' را همان نقاط $E(F)$ می‌گیریم، $\Pi'=\Pi=\{(x,y):x,y\in F\}$، اما با یک مجموعه متفاوت Λ' از خطها.

در اینجا $\Lambda'=\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ متشکل از دو نمونه خط است. خطهای l در Λ_1 همهٔ خطهای E(F) با شیب $m\in P$ هستند یعنی همهٔ $l=\{(x,mx+b):x\in F\}$ به ازای $m,b\in F$ و $m\notin P$. خطهای l از Λ_2 همهٔ مجموعه‌های $l=\{(h+ms,k+mt):s,t\in P\}$ به ازای $m\in F$ و k و h و $m\neq 0$ هستند.

بخش عمدهٔ بررسی این مطلب که E_1 اصول A۱ ، A۲ و A۳ را برقرار می‌کند به این بستگی دارد که چه وقت دو خط l و l' موازی (یعنی متمایز) هستند و در غیر این صورت بستگی دارد به بررسی اینکه آنها فقط یک نقطهٔ اشتراک دارند. این بررسی را خلاصه می‌کنیم. اگر l و l' هر دو در Λ_1 باشند یعنی خطهایی از E(F) باشند آنگاه، چنان که در E(F) داریم، آنها موازی‌اند اگر و تنها اگر $m=m'$. بعداً فرض کنید که هر دو l و l' در Λ_2 هستند. آنگاه یک نقطهٔ اشتراک با جفتی از جوابهای (s,s') و (t,t') با $s',s,t,t'\in P$ برای معادله‌های $h+ms=h'+m's'$ (۱) و $k+mt=k'+m't'$ (۲) تناظر می‌یابند. هر یک از معادله‌ها را به صورت $w=0$ ، $w\in F$ بازنویسی می‌کنیم و آنگاه، اجزاء حقیقی و موهومی، را اختیار می‌کنیم؛ هرگاه $w=u+v\omega$ معادلهٔ $w=0$ ، هم‌ارز با دو معادلهٔ $u=0$ و $v=0$ است. می‌بینیم که هر یک از این دستگاههای دو معادله و دو مجهولی یک جواب یکتا دارد اگر $m\neq m'$ و دست کم یک جفت ناسازگار است اگر $mF=m'F$ مگر اینکه $l=l'$. لذا l و l' موازی‌اند اگر و تنها اگر $mF=m'F$ و در غیر این صورت نقطهٔ منحصربه‌فردی را به اشتراک دارند. (از آنجا که l تنها به mF بستگی دارد که $m\neq 0$ می‌توانیم انتخاب m را به مجموعهٔ مقادیر ۱، ω، $\omega+1$ ، $\omega-1$ محدود کنیم که ۴ خانواده از خطهای موازی با ۹ خط در هر خانواده را به دست می‌دهد). اگر $l\in\Lambda_1$ و $l'\in\Lambda_2$ یک نقطهٔ مشترک به وسیلهٔ یک جفت $t\in P$ و s صادق در $k'+m't=m(h'+m's)+b$ داده می‌شود و یک تجزیه و تحلیل مشابه با استفاده از این فرض که $m\notin P$ نشان می‌دهد همیشه یک جواب یکتا وجود دارد. در این حالت l و l' همیشه در یک نقطه تلاقی می‌کنند.

بخش اول مسأله تفصیل کامل بحث بالا و تکمیل کردن بررسی اینکه E_1 در اصول A۱ ، A۲ ، A۳ صدق می‌کند را به دست می‌دهد. بخش دوم مسأله نشان دادن این مطلب است که E_1 در A۴ صدق نمی‌کند، قضیهٔ دزارگ و یا همچنین نشان دادن این واقعیت است که E_1 با E(F) یکریخت نیست.

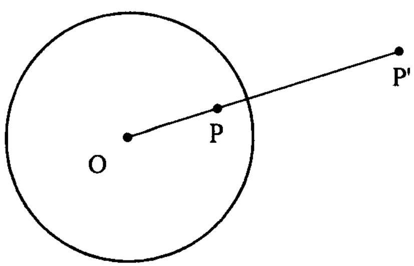
فصل هشت

هندسهٔ انعکاسی

۱. انعکاس در یک دایره

یک خط اقلیدسی را می‌توان به عنوان «حالت حدی» دایره‌های با شعاع افزایش یابنده تلقی کرد. در این مفهوم، تعجب آور نیست که بازتاب نسبت به یک خط شبیه تبدیل انعکاس نسبت به یک دایره باشد. در این بخش یک تعریف متریکی از انعکاس نسبت به یک دایره را ارائه می‌دهیم و چند ویژگی اصلی انعکاسها را ثابت می‌کنیم؛ به نظر می‌رسد این ساده‌ترین روش باشد اما در بخش بعد روشی را ارایه می‌دهیم که بیشتر حال و هوای هندسهٔ اقلیدسی را دارد.

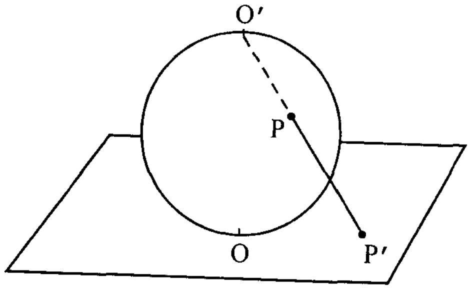
فرض کنید C یک دایره در صفحهٔ اقلیدسی E به مرکز O و شعاع r و P نقطه‌ای از E باشد که متفاوت با O است، نقطهٔ یکتای P' را روی OP در همان طرفی از O که P قرار دارد چنان تعریف می‌کنیم که $|OP||OP'|=r^2$.



به روشنی نگاشت $\gamma_c:P \longrightarrow P'$ نگاشتی دوسویی از $E-\{O\}$ به $E-\{O\}$ است. هرگاه P در امتداد هر مسیر به O میل کند یعنی چنان‌که $|OP|$ به صفر میل کند نگارهٔ آن P' به‌طور نامتناهی از O دور می‌شود. یعنی $|OP'|$ به‌طور بیکران افزایش می‌یابد. این مطلب ما را به تعریف صفحهٔ انعکاسی به صورت $E^* = E\cup\{\infty\}$ که نتیجه الحاق یک نقطهٔ جدید ∞ به E و توسیع

γ_c به نگاشتی دوسویی از E^* به E^* با تعریف کردن $O\gamma_c=\infty$ و $\infty\gamma_c=\circ$ می‌رساند.

E^* را می‌توانیم تا حدی مشابه با حالت صفحهٔ تصویری به‌وسیلهٔ تصویر، البته این بار به وسیلهٔ تصویر گنجنگاشتی بسازیم. فرض کنید S یک کرهٔ مماس بر E در یک نقطهٔ O باشد و O' نقطه‌ای از S و مقابل O باشد. هرگاه P هر نقطه‌ای از S غیر از O' باشد خط $O'P$ صفحه E را در یک نقطهٔ یکتای P'، تصویر P تحت π یعنی $P' = \pi P$ قطع می‌کند. به روشنی π به‌طور دوسویی $S - \{O'\}$ را به روی E می‌نگارد.



اگر O به سمت O' میل کند نگارهٔ آن $P' = P\pi$ به «بینهایت» می‌رود که در آنجا ناچار به توسیع π به یک دو سویی از S به E^* با قرار دادن $O'\pi = \infty$ می‌شویم. (اگر ملزم به ارایهٔ تعریف از E^* باشیم، می‌توانیم π را برای انطباق دادن E^* بر S به کار ببریم) طبیعی است که هر خط E را توسعه دهیم تا نقطهٔ اضافی ∞ را نیز در برگیرد.

فوراً از تعریف روشن می‌شود که γ_c یک **گستران** است یعنی $\gamma_c^2=1$. به علاوه γ_c درون و بیرون C را مبادله می‌کند و هر نقطهٔ C را ثابت نگاه می‌دارد.

قضیه: اگر l یک خط یا دایره اقلیدسی باشد آنگاه $l\gamma_c$ نیز یک خط یا دایره اقلیدسی است.

برهان. O را به عنوان مبدأ دستگاه مختصات دکارتی در E می‌گیریم. آنگاه مکانهای هندسی معادله‌های $e:\ A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=\circ$ که $AD=B=C=\circ$ برقرار نیست دقیقاً خطها یا دایره‌های اقلیدسی هستند. حال γ_c نقاط $O = (\circ, \circ)$, ∞ را مبادله می‌کند و در غیر این صورت به‌طور تحلیلی به وسیلهٔ تبدیلهای زیر داده می‌شود.

$$x \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} \qquad , \quad y \longmapsto \frac{y}{x^2+y^2}$$

این مقادیر را در e جایگزین می‌کنیم و آن را در عامل x^2+y^2 ضرب می‌کنیم تا معادلهٔ

$e': A+Bx+Cy+D(x^2+y^2)=0$ حاصل شود که مکان هندسی آن دوباره یک خط یا دایرهٔ اقلیدسی است. □

نتیجه. انعکاس γ_c نسبت به دایره C به مرکز O هر خط گذرندهٔ از O را به خود می‌نگارد؛ و هر خطی را که از O نمی‌گذرد به یک دایره گذرندهٔ از O و هر دایره‌ای که از O نمی‌گذرد به دایرهٔ دیگری که از O نمی‌گذرد می‌نگ رد.

برهان. این مطلب فوراً از قضیه نتیجه می‌شود. به علاوه γ_c نیز O , ∞ را مبادله می‌کند.

تعریف. چون انعکاس، خطهای اقلیدسی را از دایره‌های اقلیدسی تمیز نمی‌دهد، کلمهٔ خط (انعکاسی) را به معنای خط یا دایرهٔ اقلیدسی می‌گیریم مگر غیر از این تصریح شود.

قضیه. اگر l_1 . l_2 **دو خط متقاطع در یک نقطهٔ** $P\neq O, \infty$ **باشند آنگاه زاویهٔ جهتدار از** $l_1\gamma_c$ **به** $l_2\gamma_c$ **برابر اما خلاف جهت زاویهٔ از** l_1 **به** l_2 **است.**

برهان. بدون از دست رفتن کلیت می‌توانیم C را دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط C=E بگیریم. آنگاه به ازای $z\neq 0$، $z\gamma_c = \frac{1}{\bar{z}}$. چون نگاشت $z\longmapsto \frac{1}{z}$ زاویه‌ها را حفظ می‌کند (همدیس است) و نگاشت $z\longmapsto \bar{z}$ آنها را وارونه می‌کند، در نتیجه γ_c زاویه‌ها را وارونه می‌کند. □

برای اجتناب از استثناء $P\neq 0, \infty$ چنان که در آنالیز معمول است، در این قضیه حکم می‌کنیم که زاویهٔ بین دو خط (لزوماً اقلیدسی) متقاطع در ∞ برابر اما خلاف جهت زاویهٔ بین نگاره‌های آنها تحت γ_c آنها در $O=\infty\gamma_c$ است.

۲. رفتار هندسی انعکاس

حال تعریف دیگری از انعکاس نسبت به یک دایره و اثباتهای دیگری از دو قضیهٔ بالا را به وسیلهٔ روشهایی که بیشتر در حال و هوای هندسی اقلیدسی هستند به دست خواهیم داد. با یادآوری دو لم مقدماتی اما نه کاملاً واضح از هندسه اقلیدسی شروع می‌کنیم؛ برای بیان کردن آنها زاویه‌ها غیر جهتدار اختیار می‌شوند و زاویهٔ بین دو خط زاویهٔ کوچکتر آنها در نظر گرفته می‌شود.

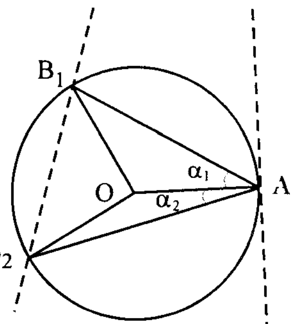
لم ۱. فرض کنید A ،B_1 ، B_2 **سه نقطهٔ متمایز روی یک دایرهٔ** C **به مرکز** O **باشند آنگاه** $<B_1OB_2=2<B_1AB_2$.

برهان: چون دو مثلث $[A,B_i, O]$ به ازای $i = ۱, ۲$ متساوی‌الساقین هستند مثلاً داریم $<AB_iO = <B_iAO=\alpha_i$ که در نتیجه $AOB_i = \pi-۲\alpha_i$ بنابراین.

$$<B_۱OB_۲ = ۲\pi - (<AOB_۱+<AOB_۲) = ۲\alpha_۱ + ۲\alpha_۲ = ۲<B_۱AB_۲$$

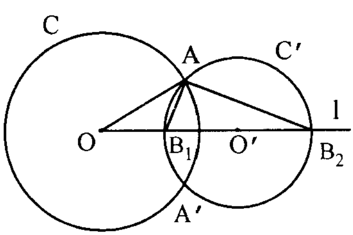
لم ۲. در نمادگذاری بالا فرض کنید t در نقطهٔ A بر C مماس باشد. آنگاه زاویهٔ بین $B_۱A$ و t برابر با $<AB_۲B_۱$ است.

برهان. مانند قبل $<AOB_۱=\pi-۲\alpha_۱$ بنا به لم داریم $<AB_۲B_۱ = \frac{۱}{۲}<AOB_۱ = \frac{\pi}{۲} - \alpha_۱$. چون OA در نقطه A عمود بر t است زاویهٔ از $B_۱A$ به t برابر با $\frac{\pi}{۲} - <B_۱AO = \frac{\pi}{۲} - \alpha_۱$ است. □



قضیه. فرض کنید یک خط اقلیدسی l گذرندهٔ از O مرکز یک دایرهٔ دوم C' را در دو نقطهٔ $B_۱$, $B_۲$ قطع می‌کند آنگاه C' عمود بر C است اگر و تنها اگر $B_۱\gamma_c=B_۲$.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنید که C' به مرکز O' عمود بر C است و C را در A',A قطع می‌کند. فرض کنید l دایرهٔ C' را در $B_۱$, $B_۲$ قطع می‌کند. چون C',C عمود هستند OA در نقطهٔ A بر C' مماس است. بنابر لم ۲، $<OAB_۱=<OB_۲A$. چون مثلثهای $[O, A, B]$ و $[O,B_۲, A]$



در O یک زاویهٔ مشترک نیز دارند آنها متشابه‌اند که در نتیجه یا $\frac{|OA|}{|OB_۲|} = \frac{|OB_۱|}{|OA|}$ یا $r^۲$ $|OB_۱| \,.\, |OB_۲| = |OA|^۲ = r^۲$.

(۲) فرض کنید $|OB_۱| \,.\, |OB_۲| = r^۲$ و اکنون فرض کنید OA یک خط گذرندهٔ از O و در نقطه‌ای مانند A بر C' مماس باشد. مانند قبل $|OB_۱| \,.\, |OB_۲| = |OA|^۲$ که در نتیجه $|OA| = r$، یعنی A روی C است و [O,A] شعاع C' مماس می‌باشد لذا C', C متعامداند. □

نکته. این قضیه تعریف دیگری از γ_c را به دست می‌دهد که با آن یک ساختمان ساده، با $B_۱$ مفروض، برای یافتن $B_۲ = B_۱\gamma_c$ به شرح زیر داریم:

(۱) نقطهٔ دلخواه A روی C را انتخاب کنید که روی $OB_۱$ نباشد؛

(۲) خط t را در A عمود بر OA بسازید؛

(۳) عمود منصف m از [B,A] را بسازید؛

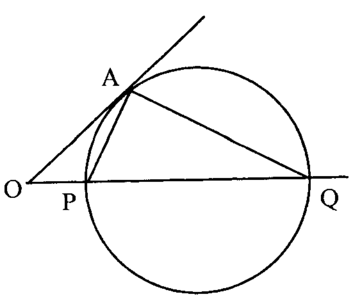
(۴) به مرکز O' محل تلاقی t و m دایرهٔ C' را بسازید که از A، و لذا از $B_۱$ نیز بگذرد؛

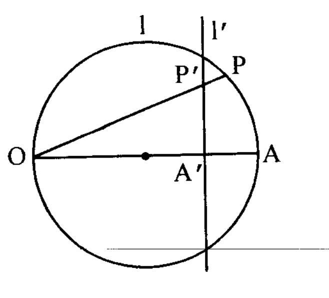
(۵) تقاطع دیگر C' با $OB_۱$ اکنون $B_۲ = B_۱\gamma_c$ است.

حال اثباتی هندسی از قضیه‌ای را که در بالا به‌طور تحلیلی ثابت شد، که γ_c هر خط (انعکاسی) را به یک خط (انعکاسی) می‌برد ادامه می‌دهیم.

برهان. (۱) اگر خط اقلیدسی l از O بگذرد آنگاه $l\gamma_c = l$.

(۲) فرض کنید l یک دایرهٔ گذرندهٔ از O و OA قطر در O باشد. فرض کنید l' خط اقلیدسی عمود بر OA در $A' = A\gamma_c$ باشد.





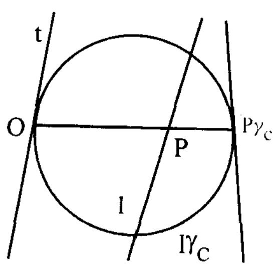
نشان می‌دهیم که اگر P روی l باشد آنگاه $P' = P\gamma_c$ محل تلاقی OA با l' است. بنابر لم ۱، $\angle OPA = \frac{\pi}{۲} = \angle OA'P'$. چون مثلثهای [O, P, A] و [O, P′, A′] یک زاویهٔ مشترک نیز در O دارند آنها متشابه‌اند که در نتیجه $|OP||OP'| = |OA|.|OA'| = r^۲$.

(۳) فرض کنید l یک دایره باشد که از O نمی‌گذرد و فرض کنید OA یک مماس بر l در نقطه‌ای مانند A و گذرندهٔ از O باشد. فرض کنید OA خط دیگر گذرندهٔ از O دایرهٔ l را در نقاط متمایز Q, P قطع کند. بنا بر لم ۲، $<OQA = <OAP$ ؛ چون مثلثهای $[O, A, P]$ و $[O, Q, A]$ یک زاویهٔ مشترک نیز در O دارند آنها متشابه‌اند که در نتیجه $|OP|.|OQ| = OA^2$. فرض کنید δ یک انبساط به مرکز O و ضریب μ باشد و فرض کنید $P' = Q\delta$ لذا $|OP'| = \mu|OQ|$. آنگاه $|OP|.|OP'| = \mu|OA|^2$. حال $\mu = \frac{r^2}{|OA|^2}$ انتخاب می‌کنیم که در نتیجه $|OP|.|OP'| = r^2$ و $P' = P\gamma_c$. این مطلب ثابت می‌کند که $l\gamma_c$ دایرهٔ $l\delta$ است. □

همچنین اثباتی هندسی از قضیهٔ دیگری که در بالا به‌طور تحلیلی ثابت شده ارایه می‌دهیم قضیه این بود که γ_c زاویه‌ها را وارونه می‌کند. ابتدا باید تعبیری هندسی درباره حکم قضیه به دست دهیم.

یک دایرهٔ اقلیدسی l مماس در نقطهٔ P بر یک خط l'، یک خط یا دایرهٔ اقلیدسی است اگر و تنها اگر l و l' در E^* نقطهٔ منحصر به‌فرد P را در اشتراک داشته باشند. این مطلب تعریفی هندسی از مماس بر یک دایره در یک نقطه را می‌دهد. ~~حال زاویهٔ بین دو خط~~ (انعکاسی) l_1 و l_2 در یک نقطهٔ $P \neq O, \infty$ را با جایگزین کردن l_1 , l_2، اگر آن یک دایره است، با مماس اقلیدسی آن در P تعریف می‌کنیم. با این مطلب قضیه‌ای که باید ثابت شود به حالت دو خط اقلیدسی l_1 و l_2 متقاطع دریک نقطهٔ $P \neq O, \infty$ ساده می‌شود. اگر $l_0 = OP$ آنگاه $<l_1l_2$ برابر با مجموع یا تفاضل $<l_0l_1$ و $<l_0l_2$ است که در نتیجه کافی است حالت $l_2 = l_0$ را بررسی کنیم.

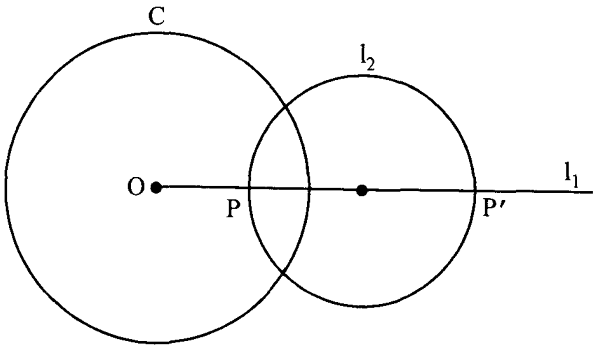
برهان. فرض کنید l یک خط اقلیدسی باشد که از O نمی‌گذرد و $P \neq \infty$ نقطه‌ای روی l است.



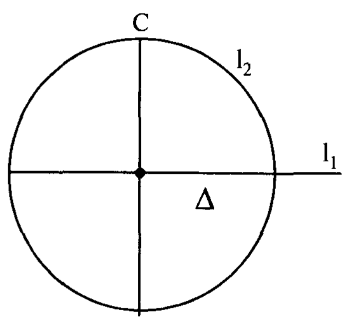
آنگاه $l\gamma_c$ دایره‌ای است که $l_0 = OP$ را در O و $P\gamma_c$ قطع می‌کند. فرض کنید t مماس بر $l\gamma_c$ در O و t' مماس بر $l\gamma_c$ باشند. به روشنی OP زوایای متقابلی با $l\gamma_c$ در O و $P\gamma_c$ می‌سازد که در نتیجه تنها باید نشان دهیم OP زوایای متساوی با l و t می‌سازد، یعنی l و t موازی هستند. اما $t = t\gamma_c$ و $l\gamma_c$، مماس در O تنها نقطهٔ O را در اشتراک دارند و در نتیجه t و l تنها نقطهٔ $O\gamma_c = \infty$ را در

اشتراک دارند، یعنی در واقع t و l موازی هستند. □

این بخش را با ذکر نتیجه‌ای از نتایج بالا به پایان می‌رسانیم اما قبل از بیان این نتیجه توجه می‌کنیم که یک تعریف یکنواخت را می‌توان برای انعکاس γ_c نسبت به C در حالتی که C یک دایره است و بازتاب γ_c نسبت به C در حالتی که C یک خط اقلیدسی است ارایه داد. در واقع اگر C خط انعکاسی دلخواهی باشد آنگاه $P\gamma_c=P'$ اگر و تنها اگر P و P' دو نقطهٔ اشتراک دو خط انعکاسی l_1 و l_2 عمود بر C باشند.



قضیه. فرض کنید γ_c انعکاس نسبت به یک خط انعکاسی C باشد و فرض کنید $\alpha\in M$ که M گروه تولید شده به‌وسیلهٔ همهٔ انعکاسهاست، آنگاه $\gamma_c^\alpha=\gamma_{(c\alpha)}$ انعکاس نسبت به $C\alpha$ یعنی نگارهٔ C تحت α است.



برهان. چون M به وسیلهٔ انعکاسها تولید می‌شود کافی است حالتی را بررسی کنیم که α یک انعکاس است. فرض کنید $P' = P\gamma_c$، آنگاه P و P' نقاط اشتراک دو خط انعکاسی l_1 و l_2 عمود بر C هستند. چون α زوایا را حفظ می‌کند $P\alpha$ و $P'\alpha$ نقاط اشتراک $l_1\alpha$ و $l_2\alpha$ می‌باشند، و بر $C\alpha$ عمود هستند. لذا برای همهٔ نقاط P، $P\gamma_c^\alpha = P'\alpha=P\alpha\,\gamma_{(c\alpha)}$ که در نتیجه $\gamma_c^\alpha = \gamma_{(c\alpha)}$ و $\gamma_c\alpha = \alpha\gamma_{(c\alpha)}$. □

۳. گروه انعکاسی

گروه انعکاسی M به صورت گروه همهٔ تبدیلات انعکاسی صفحهٔ انعکاسی E^* تولید شده به وسیلهٔ انعکاسهای نسبت به خطهای انعکاسی تعریف می‌شود. زیرگروه M^+ متشکل از همهٔ اعضای جهت نگهدار M هستند که به وسیلهٔ حاصلضربهای ممکن دو انعکاس تولید می‌شود.

اولین هدف ما به دست آوردن توصیفی تحلیلی از M و M^+ است. برای این منظور از حالا به بعد E را با صفحهٔ مختلط C و لذا E^* را با $C^*=C\cup\{\infty\}$ یکی می‌گیریم. نشان می‌دهیم که M^+ دقیقاً برابر با گروه LF (۲, C) متشکل از همهٔ تبدیلات کسری خطی به صورت زیر است

$$\alpha: z \longmapsto \frac{az+c}{bz+d},\ a,b,c,d\in C,\ ad-bc\neq ۰$$

(اگر $bz+d=۰$ آنگاه $z\alpha=\infty$ و $\infty\alpha=\frac{a}{b}$ اگر $b\neq ۰$ و این که $\infty\alpha=\infty$ اگر $b=۰$).

نگاشت ϕ یک ماتریس $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ را به α می‌نگارد که یک همریختی از GL (۲, C) بر روی LF(۲,C) است؛ و آن برای تضمین این مطلب است که ما مکانهای c, b را در تعریف α تعویض کرده‌ایم تا مطابق قرارداد ما برای $\alpha\beta$ باشد که به معنای α دنبال شده بوسیله β است. به روشنی α عضو بدیهی است اگر و تنها اگر $c=b=۰$ و $a=d$، یعنی اگر M یک ماتریس عددی $M=aI$ در مرکز ZGL(۲,C) از گروه GL(۲,C) باشد در نتیجه

$$LF\ (۲,C) = PGL(۲,C) = GL(۲,C)/ZGL(۲,C)\ .$$

متذکر می‌شویم که اگر ضرایب a، b، c، d بر k ریشهٔ دوم دترمینان $ab-bc\neq ۰$ که به‌طور مناسب انتخاب شده تقسیم شوند آنگاه α تغییر نمی‌کند و حال در شرط $ad-bc=۱$ صدق می‌کند. لذا M در SL(۲,C) است و هستهٔ نگاشت ϕ تحدید شده به SL(۲,C) مرکز SL(۲,C) است که متشکل از دو ماتریس I و $-I$ می‌باشد. لذا نمایش α به وسیلهٔ M در SL(۲,C) تقریباً یکتا است یعنی در حد تغییر علامت. حال داریم

$$LF(۲,C) \simeq PSL(۲,C)=SL(۲,C)/\ \{I,-I\}$$

قضیه. فرض کنید k نگاشت مزدوج‌گیری مختلط $k: z \longmapsto \bar{z}$ باشد آنگاه $M\sim\langle k\rangle.LF\ (۲,C)$ یک حاصلضرب نیم مستقیم است و $M^+ \simeq LF(۲,C)$.

برهان. اگر α به‌وسیلهٔ $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ داده می‌شود آنگاه α^k به وسیلهٔ $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b}\\ \bar{c} & \bar{d}\end{pmatrix}$ داده می‌شود که در

نتیجه $LF(2,C)$. $<LF(2,C), k> = <k>$ یک حاصلضرب نیم مستقیم است.

ابتدا نشان می‌دهیم که $L=LF(2,C)$ شامل در M^+ است. چون M شامل همهٔ بازتابهای γ_c نسبت به خط اقلیدسی l می‌باشد M^+ شامل همهٔ حاصلضربهای ممکن از دو چنین بازتابی است لذا شامل همهٔ انتقالهای $z \longmapsto z+B$، $B\in C$ و همهٔ دورانهای $z \longmapsto Az$، $A\in C$ با $|A|=1$ می‌باشد. اگر γ_1 و γ_2 انعکاسهایی در دو دایره به مرکز O و شعاعهای r_1 و r_2 باشند آنگاه $\gamma_1\gamma_2 : z \to \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 z$ یک انبساط است و در نتیجه M^+ شامل همهٔ انبساطهای $z \longmapsto Az$، $A>0$ می‌باشد. لذا M^+ شامل همهٔ تبدیلات مستوی جهت نگهدار از C است یعنی همهٔ تبدیلات $z \longmapsto Az+B$ با $A,B\in C$, $A\neq 0$.

چون M شامل انعکاس در دایره واحد $\gamma_{c_1}: z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$ و انعکاس نسبت به محور حقیقی $k: z \longmapsto \bar{z}$ است، شامل حاصلضرب آنها، $\eta: z \longmapsto \frac{1}{z}$ می‌باشد. اگر در α، $b=0$ آنگاه α را می‌توان دوباره به صورت $z \longmapsto Az+B$ نوشت و اگر $b\neq 0$ نتیجه می‌شود که تبدیل

$$z \longmapsto -\frac{1}{b}\left(\frac{1}{bz+d}\right) + \frac{a}{b} = \frac{az+c}{bz+d}$$

در M^+ است. لذا ثابت کرده‌ایم $L\subseteq M^+$ که از آنجا $<L, k>\subseteq M$.

بعداً نشان می‌دهیم $M\subseteq <L, k>$، برای این منظور ثابت می‌کنیم هر انعکاس γ در $<L,k>$ است. ابتدا متذکر می‌شویم، چون $\eta: z \longmapsto \frac{1}{z}$ در L است آنگاه $\gamma_{c_1}=\eta k$ انعکاس در دایرهٔ واحد به $<L,k>$ تعلق دارد. حال فرض کنید γ_c انعکاس در هر دایرهٔ C باشد. به وسیلهٔ تبدیلی مستوی مانند $\alpha: z \longmapsto Az+B$ در L، C_1 را که $\gamma_c=\gamma_{c_1}^{\alpha}$ می‌توان به C در $<L,k>$ نگاشت. سپس فرض کنید γ_l انعکاس نسبت به خطی اقلیدسی مانند l باشد. حال تبدیلی مستوی مانند α در L محور حقیقی l_1 را به l در $<L,k>$ که $\gamma_l=k^{\alpha}$ می‌نگارد. لذا $M\subseteq <L, k>$.

چون $L\subseteq M^+\subseteq M$ و $k\in M$ نتیجه می‌گیریم $<L,k>\subseteq M$ لذا $M=<L,k>$. بنابه $M=M^+\cup M^+k$ و $L\subseteq M^+$ داریم $L\cap M^+k=\varnothing$ در نتیجه $L = M^+$.

قضیه. M^+ همدیس است: هر $\alpha\in M^+$ اندازه و جهت زوایا را حفظ می‌کند: هر α در M که در M^+ نباشد، یعنی هر $\alpha\in kM^+$ اندازهٔ زوایا را حفظ کرده اما جهت زوایا را عکس می‌کند.

برهان. این مطلب فوراً از نمایش تحلیلی $\alpha\in M^+$ و این که توابع تحلیلی همدیس هستند نتیجه می‌شود اما آن نیز به‌طور هندسی از قضیهٔ قبل که هر انعکاس اندازه زوایا را حفظ اما جهت زاویه

بین دو خط انعکاسی را عکس می‌کند به دست می‌آید.

قضیه. M_∞ یعنی پایدار ساز نقطهٔ ∞ در M از نظر عمل روی $C=E$ با گروه S متشکل از تشابهای صفحهٔ اقلیدسی E، منطبق است که از آنجا M_∞^+ با S^+ یکی است.

برهان. یک تبدیل α در M، ∞ را ثابت نگاه می‌دارد اگر و تنها اگر به صورت $\alpha: z \longrightarrow Az+B$ یا $\alpha: z \longrightarrow A\bar{z}+B$ باشد. تبدیلهایی به صورت اول گروه S^+ را تشکیل می‌دهند که در نتیجه گروه M_∞ شامل همه تبدیلات α نوع دوم گروه $S=S^+ \cup S^+k$ را تشکیل می‌دهد.

قضیه. M گروه تبدیلات صفحهٔ انعکاسی است که همهٔ خطهای انعکاسی را به خطهای انعکاسی می‌نگارد.

برهان. نشان داده‌ایم M شامل در گروه اخیر G است و این‌که $G_\infty = S = M_\infty$. به‌ازای همهٔ Pها در C^* یک انعکاس γ_p در $G \cap M$ وجود دارد که $P\gamma_P=\infty$. اگر γ در G (یا در M) باشد و $P=\infty\gamma$ آنگاه $\gamma\gamma_p$ در $M_\infty=G_\infty$ است که در نتیجه γ در M (یا در G) است.

قضیه. M^+ روی نقاط C^* دقیقاً ترایای سه‌گانه است، یعنی برای هر دو، سه تایی از نقاط متمایز یک $\alpha \in M^+$ یکتا وجود دارد که اولی را به دومی می‌نگارد.

برهان. کافی است نشان دهیم M^+ روی C^* ترایا است. می‌دانیم پایدارساز M_∞^+ نقطهٔ ∞، روی $C = C^*-\{\infty\}$ ترایا است و $M_{\infty,\circ}^+ = M_\infty^+ \cap M_\circ^+$ پایدار ساز نقاط $\infty, \circ$ روی $C-\{\circ\}$ دقیقاً ساده ـ ترایاست.

چون M^+ شامل $\eta: z \longmapsto \frac{1}{z}$ است که ∞ را به $\circ$ می‌نگارد و نیز شامل $\gamma: z \longmapsto z+B$ است که $\circ$ را به $B \in C$ می‌نگارد لذا M^+ روی C^* ترایاست. چون M_∞^+ شامل همهٔ $\gamma: z \longmapsto z+B$ است M_∞^+ روی C ترایامی‌باشد. حال $M_{\infty,\circ}^+$ متشکل از همهٔ $\gamma: z \longmapsto Az$ ها با $A \neq \circ$ است و از این رو به ازای هر $A \in C-\{\circ\}$ عضو یکتای γ عضو ۱ را به A می‌نگارد یعنی دقیقاً ترایا روی $C-\{\circ\}$ است. □

نتیجه. اگر α در M^+ سه نقطهٔ متمایز را ثابت نگاه دارد آنگاه $\alpha=1$.

نتیجه: M^+ روی مجموعه خطهای انعکاسی ترایا است.

برهان. سه نقطهٔ متمایز R, Q, P از C^* یک خط اقلیدسی را مشخص می‌کنند اگر یکی از آنها ∞ باشد یا اگر هر سه آنها همخط باشند؛ در غیر این صورت آنها دایرهٔ یکتایی را مشخص می‌کنند. فرض کنید l', l خطهای انعکاسی باشند با نقاط متمایز R, Q, P روی l و نقاط متمایز P', Q', R' روی l'، آنگاه α که نقاط P، Q، R را به P'، Q'، R' می‌نگارد باید l را به l' بنگارد. □

تذکر. M^+ از دقیقاً ترایا بودن روی خطهای انعکاسی فاصله دارد؛ این مطلب هم ارز با این واقعیت است که پایدار ساز M_l^+ یک خط انعکاسی l در M^+ از بدیهی بودن فاصله دارد. (در واقع مطالعهٔ این گروههای M_l^+ موضوع دو فصل بعدی است). این مطلب تعجب آور نیست، زیرا دیده‌ایم که M_p^+ پایدارساز یک نقطه در M^+ با S گروه تشابهای اقلیدسی یکریخت است و مطالعه این گروه در برگیرندهٔ هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی است.

۴. رده‌بندی اعضای M^+

مابه دنبال رده‌بندیی از اعضای M^+ هستیم که «هندسی» است، در این معنا که آن تحت «تغییر مختصات» پایاست یعنی، تحت مزدوج‌گیری درون M^+. مانند حالت اقلیدسی این رده‌بندی براساس مجموعهٔ نقاط ثابت تبدیل است.

تبدیل بدیهی ~~۱ در ردهٔ خود است زیرا~~ همهٔ نقاط C^* را ثابت نگاه می‌دارد.

نقاط ثابت نگاه داشته شدهٔ α ریشه‌های معادلهٔ $z=\dfrac{az+c}{bz+a}$ هستند که $ad-bc=۱$. چون $bz+d=۰$ نتیجه می‌دهد $z=\infty\neq z$ می‌توانیم معادله را در $bz+d$ ضرب کنیم و آن را با معادله $bz^۲-(a-d)z-c=۰$ جایگزین کنیم. هرگاه $b\neq۰$ این معادله دو ریشهٔ متمایز دارد و هرگاه $(a-d)^۲+۴bc=(a+d)^۲-۴ad+۴bc = (a+d)^۲-۴\neq۰$ تنها یک ریشه دارد هرگاه $(a+d)^۲=۴$. اگر $b=۰$ آنگاه ∞ و $\dfrac{c}{d-a}$ نقاط ثابت می‌باشند. این نقاط متمایز هستند مگر این که $d=a$ و در این صورت از $ad=۱$، $a=d=\pm۱$ و $(a+d)^۲=۴$.

قضیه. اگر $\alpha\neq۱$ آنگاه α سهموی است با یک نقطهٔ ثابت، اگر $(a+d)^۲=۴$ و در غیر اینصورت مارپیچی است، با دو نقطه ثابت.

ما در جستجوی صورت متعارفی برای α سهموی تحت مزدوج‌گیری هستیم. فرض کنید α سهموی با نقطهٔ ثابت P است، و فرض کنید $\gamma_۱$ در M^+ نقطهٔ P را به ∞ می‌نگارد. آنگاه $\alpha_۱=\alpha^{\gamma_۱}$ دارای نقطهٔ ثابت ∞ است و از این رو به صورت $z\longmapsto Az+B$ است. حال این تبدیل دارای یک نقطهٔ ثابت دوم است اگر $A\neq۱$ که از آنجا نتیجه می‌گیریم $\alpha_۱$ به صورت $z\longmapsto z+B$ است. حال با مزدوج‌گیری به وسیلهٔ $\gamma_۲: z\longmapsto B^{-۱}z$ عضو $\alpha_۱$ به

$\alpha_2 = \alpha_1^{\gamma_2}: z \longmapsto z+1$ می‌رود.

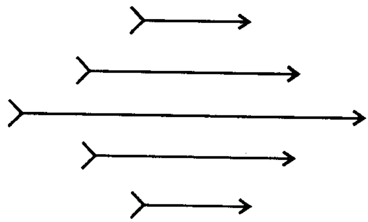
قضیه: همهٔ اعضای سهموی با تبدیل $z \longmapsto z+1$ مزدوج هستند.

حال فرض کنید α یک تبدیل مارپیچی باشد. بعد از مزدوج‌گیری می‌توانیم فرض کنیم که α دارای نقاط ثابت $0, \infty$ است، از این رو α به صورت $\alpha: z \longmapsto Az$ است. به روشنی $b=c=0$ که در نتیجه $ad=1$ و $A = a/d = a^2$. می‌توانیم بنویسیم $a=re^{i\theta}$ که $r>0$ لذا $A = r^2e^{2i\theta}$. در حالت خاص $\theta=0$، α یک انبساط به مرکز ۰ و مضرب $A=r^2$ است. در حالت خاص که $r=1$، α یک دوران $z \longmapsto e^{2i\theta}z$ حول نقطهٔ o به اندازهٔ زاویهٔ 2θ است؛ متذکر می‌شویم α مرتبهٔ متناهی دارد اگر و تنها اگر θ مضرب گویایی از π باشد. در حالت کلی نه $\theta=0$ و نه $r=1$ مدارهای $\{P\alpha^n : n\in Z\}$ روی حلزونهای $z=r^te^{\theta i(t-t_0)}$ قرار دارند که از ۰ به ∞ می‌چرخند؛ به این علت اصطلاح «مارپیچ» به‌کار برده می‌شود.

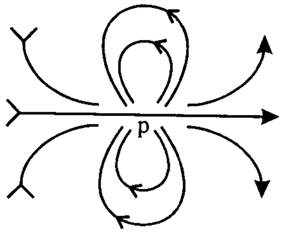
چون $re^{\pm i\theta}$، دو مقدار ویژهٔ ماتریس مارپیچ α با مزدوج‌گیری تغییر نمی‌کنند و A خارج قسمت یکی به وسیلهٔ دیگری است، A تحت مزدوج‌گیری مستقل از امکان تعویض A بوسیلهٔ A^{-1} یعنی جایگزینی α به وسیلهٔ α^{-1} پایاست. به علاوه، چون t^2 مجذور رد $t = a+d$ تحت مزدوج‌گیری پایاست (چند جمله‌ای مشخصه برابر با x^2-tx+1 است) و در صورت متعارف بالا $ad=1$ و $t^2 = A+2+A^{-1}$ مقدار t^2 جفت A، A^{-1} را به‌طور یکتا تعیین می‌کند.

قضیه: دو عضو مارپیچی مزدوج هستند اگر و تنها اگر مقدار $(a+d)^2$ برای آنها یکسان باشد. هر عضو مارپیچی مزدوج با یک جفت یکتا از اعضای به صورتهای $z \longmapsto Az$ و $z \longmapsto A^{-1}z$ است که، $A\neq 0, 1$.

در شکلهای زیر اعضای نوعی α از M^+ را به وسیلهٔ **خطهای جریان** α توصیف می‌کنیم؛ این خطها تحت α پایا هستند. دو انتهای یک خط جریان نقاط ثابت هستند و α همهٔ نقاط خط مزبور را (به استثنای نقاط انتها) در امتداد خط مزبور در همان سو، حرکت می‌دهد. اگر خط جریان یک دایره بدون نقاط ثابت باشد همهٔ نقاط حول دایرهٔ مزبور در همان سو حرکت می‌کنند. ابتدا یک عضو سهموی α با نقطهٔ ثابت P را نشان می‌دهیم، ابتدا برای $P\in C$ و سپس برای $P=\infty$.

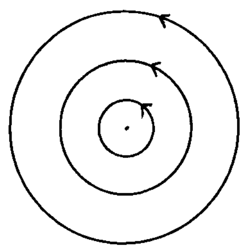


سهموی ، $P=\infty$

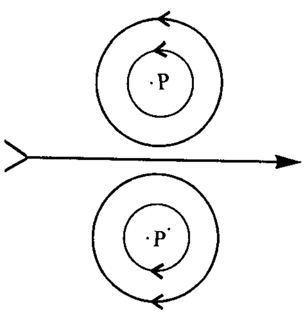


سهموی، $P\in C$

سپس دو نوع خاص از تبدیل مارپیچی را نشان می‌دهیم که وقتی ضرایب a، b، c، d همگی حقیقی هستند مطرح می‌شوند. آنگاه α بیضوی است اگر $t^2<4$ و هذلولوی است اگر $t^2>4$. دو شکل بعد α بیضوی را با نقاط ثابت $P,Q\in C$ و $P,Q=0,\infty$ نشان می‌دهند

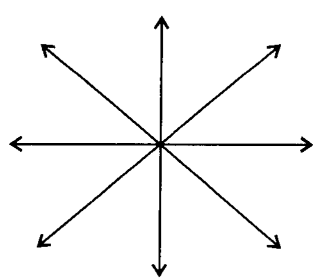


بیضوی ، $P,Q=0,\infty$

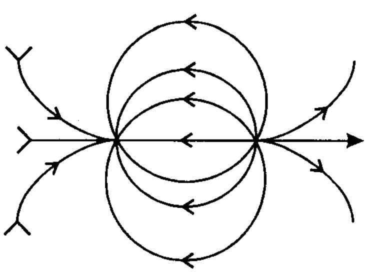


بیضوی، $P,Q\in C$

دو شکل بعد α هذلولوی را با نقاط ثابت P و Q نشان می‌دهند.

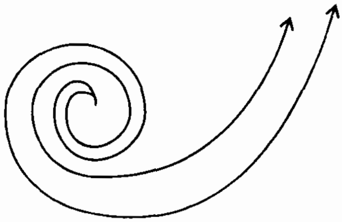


هذلولوی، $P,\ Q=0,\infty$

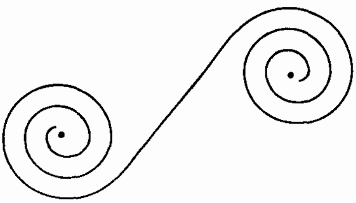


هذلولوی، $P,\ Q\in C$

سرانجام تبدیل مارپیچی کلی α به معنای ترکیبی از انواع بیضوی و هذلولوی است با خطوط جریانی که حلزونی هستند. ما چنین α را با نقاط ثابت P و Q نشان می‌دهیم.



مارپیچی، $P, Q = 0, \infty$



مارپیچی، $P, Q \in C$

۵. زیرگروههای حلپذیر M^+

ما از لم زیر استفادهٔ مکرر خواهیم کرد.

لم. اگر یک جایگشت α از مجموعه‌ای دارای مجموعهٔ نقاط ثابت F باشد و β جایگشت دیگری از همان مجموعه باشد آنگاه α^β دارای مجموعه نقاط ثابت $F\beta$ است.

برهان. اگر P نقطهٔ ثابت α باشد یعنی، $P\alpha=P$ آنگاه $P\alpha\beta=P\beta$ $=$ $(P\beta)(\alpha)^\beta$ و $P\beta$ نقطهٔ ثابت α^β است.

نتیجه: اگر $\alpha\beta=\beta\alpha$ آنگاه β مجموعهٔ نقاط ثابت α را جایگرد می‌کند.

حال فرض کنید P نقطهٔ منحصر به‌فرد α است و $\alpha\beta=\beta\alpha$. آنگاه β باید P را ثابت نگاه دارد. اگر β دقیقاً دو نقطهٔ ثابت متمایز Q,P داشته باشد آنگاه α نقطهٔ P را ثابت نگاه می‌دارد و مجموعهٔ {P,Q} را جایگرد می‌کند لذا Q را ثابت نگاه خواهد داشت و این متناقض با فرض است. این موضوع لم زیر را ثابت می‌کند.

لم. اگر $\alpha\beta=\beta\alpha$ و α سهموی باشد آنگاه $\beta=1$ یا β سهموی است با همان نقطهٔ ثابت P .

نتیجه: اگر یک زیرگروه آبلی G از M^+ شامل یک عضو سهموی باشد آنگاه G به‌ازای نقطه‌ای مانند P شامل در T_p گروه همهٔ اعضای سهموی با نقطهٔ ثابت P همراه با ۱ می‌باشد.

حال فرض کنید α دقیقاً دو نقطهٔ ثابت P و Q دارد. اگر $\alpha\beta=\beta\alpha$ آنگاه β باید مجموعهٔ

$\{P,Q\}$ را ثابت نگاه دارد. اگر β هر دو P و Q را ثابت نگاه ندارد آنگاه باید آنها را مبادله کند. بعد از مزدوج‌گیری می‌توانیم فرض کنیم $P=0$، $Q=\infty$، که در نتیجه α به‌ازای مقادیری مانند $A\in C$ که $A\neq 0,1$ به صورت $\alpha: z\longmapsto Az$ می‌باشد و β تبدیل $\beta: z\longmapsto \frac{1}{z}$ است. حال $\alpha^{\beta}=\alpha^{-1}$ و $\alpha\beta=\beta\alpha$ مستلزم این است که $\alpha^2=1$ و از این رو $A=-1$. حال α,β یک چهار گروه $V=\{1,\alpha,\beta,\gamma\}$ را تولید می‌کنند که $\alpha: z\longmapsto -z$ دارای نقاط ثابت 0 و ∞ می‌باشد؛ و $\beta: z\longmapsto \frac{1}{z}$ دارای نقاط ثابت $+1$ و -1 و $\gamma: \alpha\beta: z\longmapsto -\frac{1}{z}$ دارای نقاط ثابت $+i$، $-i$ است. اگر هر δ غیربدیهی با α , β تعویضپذیر باشد باید هر یک از این سه مجموعه از نقاط ثابت را حفظ کند. چون آن نمی‌تواند هر شش نقطه را ثابت نگاه دارد، می‌توانیم فرض کنیم 0 و ∞ را مبادله می‌کند؛ آنگاه δ به ازای برخی مقادیر $B\neq 0$ به صورت $\delta: z\longmapsto \frac{B}{z}$ است و $\beta\delta=\delta\beta$ نتیجه می‌دهد که $B=\pm 1$؛ که از آنجا $\delta=\beta$ یا $\delta=\gamma$ در اینجا ثابت کرده‌ایم:

لم. اگر یک زیرگروه آبلی G از M^+ شامل عضوی مارپیچی با نقاط ثابت P و Q باشد آنگاه G شامل در $M^+_{P,Q}$ یا در مزدوجی از چهار گروه V توصیف شده در بالاست.

$N(G)$ نرمالگر از یک زیرگروه G از M^+ گروه همهٔ اعضای δ در M^+ است که $G^{\delta}=G$.

فرض کنید $1\neq G\subseteq T_p$. اگر $1\neq\alpha\in T_p$ و $\alpha^{\beta}\in G$ آنگاه هردو α و α^{β} اعضای سهموی با نقطهٔ ثابت P هستند که در نتیجه β نقطه P را ثابت نگاه می‌دارد یعنی $N(G)\subseteq M^+_p$. به‌خصوص $N(T_p) = M^+_p$. اگر $G\subseteq M^+_p$ و $G\cap T_p\neq 1$ استدلالی مشابه نشان می‌دهد $N(G)\subseteq M^+_p$ که به خصوص داریم $N(M^+_p)=M^+_p$.

فرض کنید $1\neq G\subseteq M^+_{\{P,Q\}}$. آنگاه $N(G)\subseteq M^+_{\{P,Q\}}$. به خصوص $N(M^+_{P,Q}) = N(M^+_{\{P,Q\}})= M^+_{\{P,Q\}}$.

سرانجام فرض کنید $\delta\in N(v)$ یعنی $V^{\delta}=V$ آنگاه δ باید سه مجموعه $F_{\alpha} = \{0, \infty\}$، $F_{\beta}= \{-1, +1\}$, $F_{\gamma} = \{+i,-i\}$ را جایگرد کند. حال تبدیل $z \longmapsto \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{z-1}{z+1}$ به‌طور دوری F_{α}، F_{β}، F_{γ} را جایگرد می‌کند، در صورتی که تبدیل $z \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z-1}{z+1}$، F_{α} و F_{β} را مبادله می‌کند، و $+i$ و $-i$ را ثابت نگاه می‌دارد. این دو تبدیل یک گروه S با اثرگذاری به وسیلهٔ مزدوج‌گیری تمام گروه خودریختی V را تولید می‌کند که $\mathrm{Aut}V \simeq \mathrm{sym}\{F_{\alpha}، F_{\beta}، F_{\gamma}\}$ گروه تقارن سه شیء است. در نتیجه $N(V)= S.V$ حاصلضرب نیم مستقیم V به وسیلهٔ S است و $N(V)$ نرمالگر خود است. (متذکر می‌شویم مرتبهٔ $N(V)$ برابر با $24=6.4$ است؛ در واقع آن با گروه متناوب A_4 یا با گروه $\mathrm{sym}^+\square_3$ که گروه جایگشتهای ۴ قطر مکعب $\square_3$ است یکریخت می‌باشد).

قضیه. فرض کنید $1 \neq G_1 \Delta G_2 \Delta \dots \Delta G_t$ **زنجیری از زیرگروههای** M^+ **باشد که** G_1 **آبلی است و به ازای** $1 \leq i < n$ **هر** G_i **یک زیرگروه از** G_{i+1} **می‌باشد. آنگاه** G_t **در گروهی مانند** M_P^+**، یا مانند** $M_{\{P,Q\}}^+$ **، یا در مزدوجی از** $N(V)$ **قرار دارد.**

برهان. اگر $G_1 \subseteq T_p$ آنگاه به‌طور استقرایی به ازای هر i، $G_{i+1} \subseteq N(G_i) \subseteq M_P^+$. اگر $G_1 = V$ آنگاه به‌طور استقرایی به‌ازای همهٔ i ها $G_{i+1} \subseteq N(V)$. امکان باقی مانده آن است که $G_1 \subseteq M_{P,Q}^+$ اما هیچگاه $G_i = V$ برقرار نیست که در نتیجه به‌طور استقرایی به ازای همهٔ iها $G_{i+1} \subseteq M_{P,Q}^+$.

یک گروه G_t حلپذیر است هرگاه دارای زنجیری از زیر گروهها به صورت بالا باشد با این شرط اضافی که همهٔ خارج قسمتهای G_{i+1}/G_i آبلی هستند.

نتیجه: گروههای حلپذیر M^+ **دقیقاً زیرگروههایی از گروههای** M_P^+ **، گروههای** $M_{P,Q}^+$**، و مزدوجهای** $N(V)$ **هستند.**

برهان. باقی می‌ماند نشان دهیم که این گروهها حلپذیر هستند. با گرفتن $P = \infty$ می‌بینیم $M^+{}_P/T_P \simeq C^\times$ یعنی گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر است. گروه خارج قسمتهای $M_{\{P,Q\}}^+ / M_{P,Q}^+$ با گروه تقارن مجموعهٔ $\{P,Q\}$ یکریخت است و لذا مرتبهٔ آن برابر با ۲ است. داریم $N(V)/V \simeq S$ که S آبلی نیست؛ اما S یک زیرگروه نرمال A از مرتبهٔ ۳ را با S/A از مرتبهٔ ۲ شامل است. ما یک سری $G_1 = V$ ، $G_2 = A.V$ ، $G_3 = N(V)$ را داریم که $G_2/G_1 \simeq A \simeq C_3$ و $G_3/G_2 \simeq S/A \simeq C_2$.

۶. زیرگروههای متناهی M^+

اگر G یک زیر گروه متناهی از M^+ باشد آنگاه هر عضو نابدیهی از G دارای مرتبهٔ متناهی است از این رو بیضوی است، با دو نقطهٔ ثابت Q,P . به علاوه پایدارساز $G_{P,Q} = G_P \cap G_Q$ یک گروه دوری متناهی از مرتبهٔ $p \geq 2$ است. به همین نحو اگر G یک گروه متناهی از دورانهای کرهٔ S باشد آنگاه هر عضو نابدیهی G دو نقطهٔ ثابت P و Q دارد و $G_{P,Q}$ دوری از مرتبهٔ متناهی است.

همهٔ گروههای متناهی G از جایگشتهای یک مجموعه Ω را شمارش خواهیم کرد که هر عضو نابدیهی G دارای دو نقطهٔ ثابت P و Q است و $G_{P,Q}$ دوری می‌باشد. متذکر می‌شویم که این توصیف تجریدی به همین ترتیب برای گروههای متناهی دورانهای کره به‌کار می‌رود.

فرض کنید $\Phi \subseteq \Omega \times \Omega$ مجموعهٔ همهٔ «محورهای» $\{P,Q\} = F(\alpha) = \phi$ باشد. برای $1 \neq \alpha \in G$. چون $F(\alpha)\beta = F(\alpha^\beta)$ ، G مجموعه Φ را جایگرد می‌کند. برای $\phi \in \Phi$ فرض کنید

G_ϕ پایدار ساز ϕ تحت این عمل باشد و فرض کنید $\{\phi\alpha : \alpha\in G\}=\phi G = [\phi]$، مدار ϕ تحت G است. تحت نگاشت از G به $[\phi]$ که α را به $\phi\alpha$ می‌نگارد نگارهٔ وارون $\phi\alpha$ هم مجموعه $G_\phi\alpha$ با $|G_\phi|$ عضو است. بنابراین $|[\phi]| = \frac{|G|}{|G_\phi|}$.

اگر $\phi = \{P,Q\}$ فرض کنید گروه دوری $G_{P,Q}$ دارای مرتبهٔ $P_\phi \geq ۲$ است. آنگاه $G_\phi = G_{P,Q}$ یا $G_\phi = G_{P,Q} \cup G_{P,Q}\alpha$ که α نقاط P و Q را مبادله می‌کند. لذا $|G_\phi| = d_\phi P_\phi$ که $d_\phi = ۱$ یا $d_\phi = ۲$.

حال اجتماع متمایز $G - ۱ = \bigcup_{\{P,Q\}\in\Phi} (G_{P,G} - ۱)$ را در نظر می‌گیریم که

$$|G| - ۱ = \sum_{\phi\in\Phi} (P_\phi - ۱) = \sum_\phi |[\phi]|.(P_\phi - ۱) = \sum_\phi \frac{|G|}{|G_\phi|}(P_\phi - ۱)$$

$$\sum_\phi t_\phi = \frac{۱}{|G|} - ۱ \text{ که در آنجا } t_\phi = \frac{P_\phi - ۱}{d_\phi P_\phi}$$

به روشنی $\frac{۱}{۴} = \frac{۲-۱}{۲.۲} \leq t_\phi$ و در نتیجه از $\sum t_\phi = ۱ - \frac{۱}{|G|} < ۱$. نتیجه‌گیری می‌کنیم که n تعداد رده‌های $[\phi]$ حداکثر برابر با ۳ است.

در اینجا G_i ، P_i، d_i و t_i را بجای G_{ϕ_i} ، P_{ϕ_i} ، d_{ϕ_i} ، t_{ϕ_i} می‌نویسیم که $۱ \leq i \leq n$.

حالت ۱. اگر $n=۰$ آنگاه $G = ۱$. اگر $n = ۱$ آنگاه $G = G_۱$ یک گروه **دوری** است . سپس فرض کنید $n = ۲$. اگر $d_۱ = d_۲ = ۱$ آنگاه $t_۱, t_۲ \geq \frac{۱}{۲}$ که متناقض با $t_۱ + t_۲ < ۱$ است. اگر $d_۱ = d_۲ = ۲$، آنگاه $t_۱ + t_۲ = ۱ - \frac{۱}{۲p} - \frac{۱}{۲q}$ که از آنجا $\frac{۱}{|G_۱|} = \frac{۱}{۲p_۱} + \frac{۱}{۲p_۲}$ اما $|G| > |G_۱| = ۲p_۱$ و در نتیجه $\frac{۱}{۲p_۱} < \frac{۱}{|G|}$ که یک تناقض است. لذا می‌توانیم فرض کنیم $d_۱ = ۱$ و $d_۲ = ۲$. چون $t_۲ \geq \frac{۱}{۴}$ ، $t_۱ < ۳/۴$ در نتیجه $p_۱ < ۴$ ، یعنی $p_۱ = ۲$ یا $p_۱ = ۳$.

حالت ۲. $p_۱ = ۲$ ، $p_۲ = ۲$ ، $t_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $t_۲ = \frac{p_۲ - ۱}{۲p_۲}$. حال $t_۱ + t_۲ = ۱ - \frac{۱}{G}$ نتیجه می‌دهد $|G_۲| = ۲p_۲ = |G|$ که در نتیجه $G = G_۲$ یک گروه دو وجهی از مرتبهٔ $۲p_۲$ است.

حالت ۳. $p_۱ = ۳$ ، $t_۱ = \frac{۲}{۳}$ و $t_۲ = \frac{p_۲ - ۱}{۲p_۲}$. حال $t_۱ + t_۲ < ۱$ نتیجه می‌دهد $p_۲ < ۳$ و لذا $p_۲ = ۲$ ، $t_۲ = \frac{۱}{۴}$ و $|G| = ۱۲$. حال تعداد $۴ = \frac{۱۲}{۳} = \frac{|G|}{|G_۱|}$ محور ϕ برای دورانهای مرتبهٔ ۳ و

$۳=\frac{۱۲}{۴}=\frac{|G|}{|G_۲|}$ محور برای دورانهای مرتبهٔ ۲ وجود دارند. اعضای نابدیهی G به وسیلهٔ این $۱۱=(۱-۲)۳+(۱-۳)۴$ دوران تکمیل می‌شوند. چون محورهای دورانهای مرتبهٔ ۲ یعنی α، β,γ در رده‌های یکسان قرار دارند این سه عضو مزدوج هستند و مزدوج‌گیری به وسیلهٔ عضوی مانند δ از مرتبهٔ ۳ باید آنها را به‌طور دوری جایگرد کند. چون $d=۲$، عضوی از G باید نقاط ثابت α را مبادله کند و این عضو تنها می‌تواند β یا γ باشد، مثلاً اگر β را بگیریم آنگاه $\gamma=\alpha\beta,\ \alpha\beta=\beta\alpha$ که در نتیجه $V=\{۱,\alpha,\beta,\gamma\}$ یک چهارگروه است. $G=\langle\delta\rangle.V$ حاصلضرب غیرمستقیم است. (اعضای باقی مانده یا اعضای مرتبهٔ ۳ در G عبارت‌اند از $\delta\alpha$،$\delta\beta$،$\delta\gamma$).

حال می‌توانیم G را به عنوان یک گروه دوران کرهٔ S به شرح زیر مشخص کنیم. سه دوران از مرتبهٔ ۲ سه خط گذرندهٔ از نقاط میانی وجوه مقابل مکعب محاطی را به عنوان محور دارند و چهار دوران از مرتبهٔ ۳ چهار قطر مکعب مزبور را به عنوان محور دارند.

می‌توانیم G در M^+ را به وسیلهٔ تبدیلهای زیر مشخص کنیم:

$\alpha: z\longmapsto -z,$ نقاط ثابت ۰ و ∞

$\beta: z\longmapsto ۱/z,$ نقاط ثابت ۱+، ۱−

$\gamma: z\longmapsto -\frac{۱}{z},$ نقاط ثابت $+i$، $-i$

$$\delta: z\longmapsto \frac{-z+i}{z+i}$$

δ نقاط ۰، ۱، i و ∞ ، ۱− ، $-i$ را به‌طور دوری می‌نگارد از اینرو α، β، γ را به‌طور دوری مزدوج‌گیری می‌کند.

حالت ۴. فرض کنید $n=۳$. چون $d_i=۱$ نتیجه می‌دهد $t_i\geq\frac{۱}{۲}$، در صورتی که همهٔ $t_i\geq\frac{۱}{۴}$، باید داشته باشیم همهٔ $d_i=۲$. معادله $\sum t_i=۱-\frac{۱}{|G|}$ به $\sum\frac{۱}{p_i}=\frac{۲}{|G|}$ ساده می‌شود. با انتخاب نمادگذاری $p_۱\leq p_۲\leq p_۳$ این معادله تنها جوابهایی به صورت $(p_۱,p_۲,p_۳)=(۲،۳،۳)$ و $(۲،۳،۴)$ و $(۲،۳،۵)$ با $|G|=۱۲,\ ۲۴,۶۰$ دارد.

~~برای G یک گروه از دورانهای~~ S اینها به صورت گروههای تقارنهای دورانی چهار وجهی، هشت وجهی و بیست وجهی قابل تشخیص هستند.

حالت هشت وجهی $(۲،۳،۴)$ در M^+ را می‌توان از گروه $\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle$ به‌دست آمده از بالا با افزون یک مولد دیگر $\varepsilon: z\longrightarrow iz$ برای به‌دست آوردن نرمالگر $N(V)$ از V تشخیص داد. ما سعی در نمایش دادن گروههای چهار وجهی و بیست وجهی در M^+ نمی‌کنیم اما تنها متذکر

می‌شویم که آنها را (مانند بقیه) می‌توان از گروههای دوران S به‌وسیله تصویرهای گنجنگاشتی به‌دست آورد.

قضیه. زیرگروههای متناهی M^+ با گروههای متناهی دورانهای کرهٔ S یکریخت هستند.

۷. سادگی M^+

M^+ به‌وسیلهٔ حاصلضرب دو انعکاس تولید می‌شود. ابتدا ساختار حاصلضرب چنین حاصلضربی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه. فرض کنید $\alpha=\gamma_{c_1}\gamma_{c_2}\neq 1$ حاصلضرب انعکاس نسبت به دو خط انعکاسی متمایز باشد. اگر c_1 , c_2 مماس باشند. آنگاه α سهموی است. اگر c_1 , c_2 مماس نباشند. آنگاه α مارپیچی بارد حقیقی $t=a+d$ است. اگر c_1 , c_2 متقاطع باشند و $t^2<4$ آنگاه α بیضوی است (مزدوج با دوران)؛ اگر متقاطع نباشند و $t^2>4$ آنگاه α هذلولوی است (مزدوج با یک انبساط).

برهان. ما این مشاهده را به کار می‌بریم که همهٔ نقاط مشترک c_1 , c_2 نقاط ثابت α هستند و نقاط ثابت دیگر باید روی خط اقلیدسی عمود بر هر دو (خط واصل مراکز آنها اگر هر دو دایره هستند) قرار گیرند. مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر c_1 , c_2 مماس باشند تنها نقطهٔ ثابت نقطهٔ تماس آنهاست.

حال فرض کنید c_1 , c_2 مماس نیستند. بعد از مزدوج‌گیری می‌توانیم فرض کنیم c_1 دایرهٔ واحد و c_2 خطی مانند $x=k$ به ازای عدد حقیقی $k\neq\pm 1$ است. از این واقعیت که α نقطهٔ ۰ را به ∞ ، ∞ را به $2k$ و ۱ را به $2k-1$ به وسیلهٔ جاگذاری می‌نگارد در می‌یابیم که ماتریس α به صورت $M=\begin{pmatrix} 2k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ است که رد آن برابر با $t=2k$ می‌باشد. اگر M دارای مقادیر ویژهٔ λ و λ^{-1} باشد آنگاه $t=\lambda+\lambda^{-1}$ که در نتیجه $\lambda=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$. حال λ و $A=\lambda^2$ حقیقی هستند زیرا $t^2>4$. اگر $t^2<4$ آنگاه λ حقیقی نیست. اما این شرایط که $t=\lambda+\lambda^{-1}$ حقیقی باشد نتیجه می‌دهد به ازای برخی مقادیر θ ، $\lambda=e^{i\theta}$ و $A=e^{2i\theta}$. سرانجام متذکر می‌شویم که c_1 و c_2 در حالت $|k|<1$ متقاطع‌اند یعنی $t^2=4k^2<4$.

نتیجه: حاصلضربهای نابدیهی از انعکاسها نسبت به خطهای انعکاسی مماس دقیقاً اعضای سهموی M^+ هستند. حاصلضرب انعکاسهای نسبت به خطهای انعکاسی که مماس

نیستند دقیقاً اعضای مارپیچی بارد حقیقی هستند یعنی اعضای بیضوی و هذلولوی M^+.

برهان. این مطلب از این قضیه که اعضای نابدیهی بارد یکسان مزدوج‌اند، نتیجه می‌شود. □

نکته. این مطلب را با حالت اقلیدسی مقایسه کنید که هر عضو M^+ حاصلضرب دو بازتاب است.

قضیه. M^+ به وسیله اعضای سهموی تولید می‌شود.

برهان M^+ به‌وسیلهٔ حاصلضربهای $\alpha=\gamma_{c_1}\gamma_{c_2}$ از دو انعکاس تولید می‌شود. همیشه یک خط انعکاسی c مماس بر هر دو c_1 ، c_2 وجود دارد. حال $\beta_1=\gamma_{c_1}\gamma_c$ ، $\beta_2=\gamma_c\gamma_{c_2}$ اعضای سهموی هستند و چون $\gamma_c^2=1$ داریم $\alpha=\beta_1\beta_2$. □

قضیه. M^+ ساده است یعنی زیرگروههای نرمال N آن، زیرگروه بدیهی ۱ و کل گروه M^+ هستند.

برهان. ~~فرض کنید $N\neq 1$~~ . چون همهٔ اعضای سهموی مزدوج هستند و N نرمال است اگر N شامل هر عضو سهموی باشد شامل همهٔ آنهاست و چون M^+ به وسیلهٔ اعضای سهموی تولید می‌شود و $N=M^+$. لذا کافی است نشان دهیم N شامل یک عضو سهموی است. چون $N\neq 1$ آن شامل عضوی مانند $\alpha\neq 1$ است. اگر α سهموی باشد آنگاه استدلال بالا نشان می‌دهد $N=M^+$. آنگاه فرض کنید α مارپیچی با نقاط ثابت Q,P است. فرض کنید β عضوی سهموی از M^+ با نقطهٔ ثابت P باشد. آنگاه β^α یک عضو سهموی با نقطه ثابت P است و چون دیده‌ایم $\alpha\beta\neq\beta\alpha$ داریم $\beta^\alpha\neq\beta$. لذا $\beta^{-1}\beta^\alpha$ عضوی سهموی می‌باشد (با نقطه ثابت P). اما $(\alpha^\beta)^{-1}\alpha=\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^\alpha=\beta^{-1}\beta^\alpha$ که α و α^β در N هستند و در نتیجه عضو سهموی $\beta^{-1}\beta^\alpha$ در N است.

نکتهٔ ۱. این قضیه نشان می‌دهد تجزیه‌ای نابدیهی برای M^+ به صورت یک حاصلضرب نیم مستقیم شبیه با تجربهٔ $E^+ = E_\circ^+.T$ وجود ندارد.

نکتهٔ ۲. اثبات این قضیه ریشهٔ اثبات قضیهٔ کلیتری را در خود دارد که PSL (n,F) به‌ازای هر $n\geq 2$ و هر هیأت F ساده است به جز حالت $n=2$ ، $F=\mathbf{Z}_2$ و $F=\mathbf{Z}_3$. استدلال خیلی شبیه این

مطلب است که گروه متناوب A_n برای $n\geq 5$ ساده می‌باشد.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. نشان دهید که هر نگاشت $F(z_1, z_2, z_3)$ از سه نقطه در C^* که تحت M پایاست به‌ازای همهٔ سه‌تایی‌ها از نقاط متمایز همان مقدار را می‌گیرد. نشان دهید که نسبت **غیرتوافقی** $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} \cdot \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$ از چهار نقطهٔ متمایز (با تعریفهای متعارف ∞) تحت M پایاست. نشان دهید که برای سه نقطهٔ ثابت متمایز a، b، c، و $z,z'\neq a,b,c$ داریم $[a,b,c,z] = [a,b,c,z']$ اگر و تنها اگر $z=z'$. نشان دهید که $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ حقیقی است اگر و تنها اگر هر چهار نقطه روی یک خط انعکاسی قرار گیرند. نشان دهید $|\ln(|[z_1,z_2, z_3, z_4]|)|$ به وسیلهٔ هر جایگشتی از چهار نقطه بدون تغییر باقی می‌ماند.

مسألهٔ ۲. فرض کنید H زیرگروهی از یک گروه G شامل جایگشتهای یک مجموعه Ω باشد و فرض کنید β عضوی از G باشد. نشان دهید که اگر H دارای مدارهای Ω_1 ،...، Ω_t باشد آنگاه H^β دارای مدارهای $\Omega_1\beta$ ،...، $\Omega_t\beta$ است.

مسألهٔ ۳. نشان دهید که $T_p \simeq C^+$ گروه جمعی اعداد مختلط، و $M_p^+ / T_p \simeq C^\times$ گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر. نشان دهید در واقع $M_P^+ = M_{P,Q}^+ \cdot T_P$ که حاصلضرب نیم مستقیم T_P به وسیلهٔ $M_{P,Q}^+$ است به ازای هر $Q\neq P$ و نگاشت مزدوج‌گیری از $M_{P,Q}^+$ به $\mathrm{Aut}T_P$ را توصیف کنید.

مسألهٔ ۴. فرض کنید $F = [o,o']\cup [A,A'] \cup[B,B']$ اجتماع سه قطر متعامد یک کرهٔ S باشد. فرض کنید S مماس بر صفحهٔ مختلط C در نقطهٔ o است. نشان دهید با انتخاب مناسبی از شعاع S نقاط o، o'، A'، A، B، B' به‌طور متعامد (از o') بر روی o، ∞، $+1$، -1، $+i$، $-i$ تصویر می‌شوند و نتیجه‌گیری کنید که $N(V)$ با گروه تقارن شکل F یکریخت است و از این رو با گروه هشت وجهی با رأسهای o، o'، A'، A، B، B' یکریخت است.

مسألهٔ ۵. در $G=PSL\ (2, F)$ برای هر هیأت F یک transvection یک تبدیل مزدوج با یک تبدیل $x\longmapsto x+c$ با $c\in F$ است. نشان دهید G به وسیلهٔ transvection ها تولید می‌شود و اگر $|F|>3$ ، آنگاه G ساده است. نشان دهید $F = \mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_3$ مثالهای نقض هستند.

مسألهٔ ۶. جزئیات استدلال زیر را ادامه دهید. این مطالب را مورد استفاده قرار می‌دهیم که M^+ روی خطهای انعکاسی ترایا است و $\gamma_c^\alpha=\gamma_{(c\alpha)}$. فرض کنید $\alpha = \gamma_{c_1}\gamma_{c_2}$ حاصلضربی از دو انعکاس متمایز است.

(۱) اگر c_1 و c_2 مماس باشند می‌توانیم آنها را به دو خط متمایز موازی اقلیدسی در C تبدیل کنیم که در نتیجه α سهموی یا انتقالی اقلیدسی با $t^2=4$ حقیقی است.

(۲) اگر c_1 و c_2 متقاطع باشند، می‌توانیم آنها را به جفتی از خطهای اقلیدسی متقاطع تبدیل کنیم

که در نتیجه α بیضوی و دورانی اقلیدسی با $t^2 < 4$ حقیقی است.

(۳) فرض کنید c_1 و c_2 متمایز باشند. آنگاه می‌توانیم آنها را به دو دایرهٔ اقلیدسی که یکی داخل دیگری است تبدیل کنیم. اگر آنها هم‌مرکز باشند آنگاه α هذلولوی است، یک انبساط اقلیدسی با $t^2 > 4$ حقیقی. اگر هم‌مرکز نباشند می‌توانیم فرض کنیم که مراکز آنها روی **R** قرار دارند که در نتیجه ضرایب γ_{c_1}، γ_{c_2} و α حقیقی هستند در t نیز حقیقی است. نشان می‌دهیم که همهٔ نقاط ثابت α باید حقیقی باشند و لذا $t^2 \geq 4$. اگر $t^2 > 4$ آنگاه α هذلولوی است اما می‌تواند $t^2 = 2$ نیز اتفاق بیفتد و α سهموی باشد.

(۴) چون تبدیل مارپیچی کلی، مزدوج باحاصلضرب یک دوران اقلیدسی و یک انبساط اقلیدسی با همان مرکز است، هر عضو M^+ حاصلضربی از چهار انعکاس است و اعضایی وجود دارند که حاصلضرب کمتر از چهار انعکاس نیستند.

مرجعها

هندسه انعکاسی در بسیاری از کتابهای هندسه اقلیدسی مورد بحث قرار گرفته است، مثلاً در کتاب گوگن هایمیر. برای بحثی قابل فهم از انعکاس در رابطه با **گروههای فوخسین**، زیرگروههای ناپیوستهٔ گروه M^+ متشکل از همهٔ **تبدیلات موبیوس**، کتاب فورد را ببینید. برای بحثی کامل از این مطالب، کتاب بی‌یردون را ببینید.

فصل نُه

هندسهٔ هذلولوی

۱. گروه هذلولوی و صفحهٔ هذلولوی

حال M_l^+ پایدار ساز یک خط انعکاسی l را در M^+ را بررسی می‌کنیم. چون M^+ روی مجموعهٔ همهٔ خطهای انعکاسی ترایا است همهٔ پایدار سازهای M_l^+ خطهای انعکاسی درون M^+ مزدوج هستند و در این معنا همهٔ آنها تحت «تغییر مختصات» به طور هندسی هم ارز هستند. دو انتخاب از خط l مزایای خاصی را دارند یکی خط حقیقی منبسط $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ ودیگری دایرهٔ واحد Γ.
ما هر دو انتخاب را به کار می‌بریم اما در ابتدا با $l=\mathbf{R}^*$ شروع می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم که گروه هذلولوی H برابر با $H=M_{R^*}^+$ باشد.

قضیه. $H \simeq LF(۲, \mathbf{R})=PSL(۲, \mathbf{R})$

برهان. $LF(۲, \mathbf{R})$ را به عنوان زیر گروهی از $LF(۲, \mathbf{C})=M^+$ در نظر می‌گیریم که متشکل از همهٔ تبدیلات $\alpha : z \longrightarrow \dfrac{az + c}{bz + d}$ با $ad-bc=۱$ است و ضرایب a ، b ، c و d در $\mathbf{R}$ قرار دارند.
به روشنی یک چنین تبدیل α خط منبسط $\mathbf{R}^*$ را به خود می‌نگارد. برای عکس مطلب فرض کنید که برخی αها در M^+ خط منبسط $\mathbf{R}^*$ را به خود می‌نگارد. چون $LF(۲, \mathbf{C})$ دقیقاً ترایای سه گانه روی $\mathbf{C}^*$ است می‌بینیم $LF(۲, \mathbf{R})$ دقیقاً ترایای سه گانه روی $\mathbf{R}^*$ است. لذا $LF(۲, \mathbf{R})$ شامل عضوی مانند β است که $\circ\alpha = \circ\beta$ ، $1\alpha = 1\beta$ و $\infty\alpha = \infty\beta$. از ویژگی ترایای سه گانه بودن $LF(۲, \mathbf{C})$ نتیجه گیری می‌کنیم که در $LF(۲, \mathbf{R})$ داریم $\alpha = \beta$.

قضیه. H **نیم صفحهٔ بالا** $H = \{x+iy : y>\circ\}$ **را به خود می‌نگارد.**

برهان. خط $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ $\mathbf{C}^*$ را به دو مؤلفهٔ مجزای همبند H و $\overline{H} = \{x + iy, y< 0\}$ از $\mathbf{C}^* - \mathbf{R}^*$ تقسیم می‌کند. بنابراین هر $\alpha \in H$ که $\mathbf{R}^*$ را به خود می‌نگارد باید H و $\overline{H}$ را جایگرد کند. در نتیجه

$$i\alpha = \frac{c + ai}{d + bi} \cdot \frac{d - bi}{d - bi} = \frac{(cd + ab) + (ad - bc)i}{d^2 + b^2} = \frac{(cd + ab) + i}{d^2 + b^2} = x + iy$$

با $y > 0$. لذا نقطهٔ $i \in H$ را به $i\alpha \in H$ می‌نگارد و بنابراین باید H را به خود بنگارد. □

صفحهٔ هذلولوی را به عنوان یک صفحهٔ وقوع تعریف می‌کنیم که دارای مجموعهٔ نقاط H است با **خطهای هذلولوی** که اجزایی از $l \cap H$ در H شامل همهٔ خطهای انعکاسی l عمود بر $\mathbf{R}^*$ است یعنی شامل همهٔ دایره‌های اقلیدسی با مرکز واقع در $\mathbf{R}$ و همهٔ خطهای اقلیدسی عمود بر $\mathbf{R}$. بعداً یک متریک هذلولوی روی H را معرفی خواهیم کرد.

معمولاً در عمل تمایزی قاطع بین l و جزء $l \cap H$ از l در H قائل نمی‌شویم. به خصوص غالباً در مورد دو انتهای (نقاط در بینهایت) خط هذلولوی $l \cap H$ به عنوان دو نقطه‌ای که l خط منبسط $\mathbf{R}^*$ را قطع می‌کند فکر می‌کنیم. از این پس کلمه «خط» را به معنی خط هذلولوی به کار می‌بریم مگر غیر آن اظهار شود و حروف l، ... را برای چنین خطهایی به کار می‌بریم.

قضیه. H **خطها را به خطها می‌نگارد و روی مجموعهٔ همه خطها ترایا است.**

برهان. $H \subseteq M^+$ و M^+ زوایا را حفظ می‌کند، یک عضو α از H که $\mathbf{R}^*$ را به خود می‌نگارد باید هر خط انعکاسی عمود بر $\mathbf{R}^*$ را به خط انعکاسی عمود بر $\mathbf{R}^*$ بنگارد یعنی α خطهای هذلولوی را به خطهای هذلولوی می‌نگارد. برای نشان دادن ترایایی، توجه کنید یک خط هذلولوی به طور یکتا به وسیلهٔ دو انتهایش در $\mathbf{R}^*$ مشخص می‌شود. چون H (بیش از) ترایای دوگانه روی $\mathbf{R}^*$ است آن شامل نگاشتی مانند α است که دو انتهای یک خط l را به دو انتهای l' می‌نگارد و لذا l را به l' می‌نگارد. □

قضیه. هر عضو نابدیهی H **بیضوی با دقیقاً یک نقطهٔ ثابت در H، سهموی با دقیقاً یک نقطهٔ ثابت در** $\mathbf{R}^*$ **یا هذلولوی با دو نقطهٔ ثابت در** $\mathbf{R}^*$ **است.**

برهان. این مطلب از رده بندی قبلی اعضای α از M^+ بر طبق رد $t = a + d$ نتیجه می‌شود حال توجه کنید برای $\alpha \in H$، t باید حقیقی باشد. ما نقاط ثابت α را که به وسیلهٔ فرمول

$z=\dfrac{t\pm\sqrt{t^{2}-4}}{2}$ داده شده بودند یافتیم. اگر α سهموی باشد، با $t^{2}=4$ آنگاه α تنها یک نقطهٔ ثابت $z=\dfrac{t}{2}$ در $\mathbf{R}^{+}$ دارد. اگر α مارپیچی باشد و $t^{2}<4$ آنگاه نقاط ثابت دو عدد مختلط ناصفر مزدوج هستند که از آن‌ها تنها یکی در H قرار دارد. اگر α مارپیچی با $t^{2}>4$ باشد آنگاه α دو نقطه ثابت حقیقی متمایز دارد. □

استدلال بالا استفاده نابجای دیگری از زبان را نشان می‌دهد، در عمل لازم نیست بین $\alpha\in H$ که از نظر فنی یک نگاشت دوسویی از نقاط C^{*} است و تحدید آن α_{H} به H، یک خودریختی از صفحهٔ وقوع H فرق قائل شویم به خصوص از α به عنوان عمل کنندهٔ روی مرز H یعنی $\partial \mathrm{H}=\mathbf{R}^{*}$ صحبت خواهیم کرد.

چون H چیزی بیش از ترایای دوگانه روی نقاط $\mathbf{R}^{*}$ است انتظار داریم روی خطهای هذلولوی چیزی بیش از به طور ساده ترایا باشد یعنی H_{l} پایدارساز یک خط هذلولوی l در H باید از بدیهی بودن دور باشد.

قضیه. **H_{l} پایدارساز یک خط l در H دقیقاً به طور ساده ترایا روی l است و H_{l} با $\mathbf{R}_{+}^{\times}$ گروه اعداد حقیقی مثبت تحت عمل ضرب یکریخت است.**

برهان. چون H روی خطها ترایا است کافی است این ادعا را برای هر خطی که به طور مناسبی انتخاب شده ثابت کنیم و ترجیح می‌دهیم $l=I=\{iy:y>0\}$ یعنی نیمهٔ بالایی محور موهومی را بگیریم. حال $\alpha\in H_{I}$ باید دو انتهای $0,\ \infty$ از $\mathbf{I}$ را ثابت نگاه دارد و لذا باید به صورت $\alpha: z\longmapsto a^{2}z$ باشد که عدد حقیقی $a\neq 0$. روشن است که گروه همهٔ این‌گونه α ها با $\mathbf{R}_{+}^{\times}$ گروه ضربی همهٔ اعداد حقیقی مثبت یکریخت است و دقیقاًبه طور ساده ترایایی روی l عمل می‌کند. □

نتیجه. **H روی نقاط H ترایا است.**

برهان. فرض کنید $P\neq P'$. از هندسه اقلیدسی روشن است که یک خط هذلولوی (یکتا) l شامل نقاط P و P' وجود دارد. بنابه قضیه بعضی $\alpha\in H_{l}$ نقطهٔ P را به P' می‌فرستد.

۲. زیرگروههای حلپذیر H

بحث از زیر گروههای حلپذیر H دقیقاً همان الگوی بحث قبل در مورد زیر گروههای حلپذیر M^{+} را پیروی می‌کند. از نتایج حاصله بر می‌آید که این گروهها دقیقاً زیر گروههایی از گروههای

H_P برای $P\in H$، متشکل از اعضای بیضوی همراه با ۱، زیر گروههایی از گروههای H_P برای $P\in \mathbf{R}$ و زیرگروههایی از گروههای $H_{\{P,\ Q\}}$ برای $P,\ Q\in \mathbf{R}^*$ متمایز، می‌باشند.

بحث از زیر گروههای متناهی H نیز از همان الگویی که برای M^+ داشتیم پیروی می‌کند و در می‌یابیم که همهٔ زیر گروههای متناهی H زیر گروههایی از بعضی H_P برای $P\in H$ هستند از این رو دوری می‌باشند.

ابتدا فرض کنید G یک زیرگروه آبلی نابدیهی از H باشد. فرض کنید G شامل یک عضو بیضوی با نقطهٔ ثابت $P\in H$ است یعنی α در گروه آبلی H_P است. اگر $\beta\in H$ و $\alpha^\beta\in H_P$ آنگاه β باید P را ثابت نگاه دارد یعنی $\beta\in H_P$. به خصوص اگر α و β تعویضپذیر باشند آنگاه $\beta\in H_P$ که در نتیجه $G\subseteq H_P$. به طور کلیتر اگر $G^\beta=G$ آنگاه $\beta\in H_P$، یعنی $N(G)\subseteq H_P$. بنابراین $N(H_P)=H_P$.

سپس فرض کنید G شامل یک عضو بیضوی α با نقطهٔ ثابت $P\in \mathbf{R}^*$ است. اگر $\alpha^\beta\in T_P$ آنگاه $\beta\in H_P$. به خصوص اگر α و β تعویضپذیر باشند آنگاه $\beta\in T_P$ که در نتیجه $G\subseteq T_P$. به‌طور کلیتر $N(G)\subseteq H_P$ و لذا $N(T_P)=H_P$. همچنین متذکر می‌شویم اگر K زیرگروهی از H_P باشد که $K\cap T_P$ زیرگروه اعضای سهموی H_P گروه بدیهی نباشد آنگاه هر β نرمالگر K باید $K\cap T_P$ را نیز نرمال کند و از این رو در H_P قرار دارند. بنابراین $N(H_P)=H_P$.

بالاخره فرض کنید که G شامل یک عضو هذلولوی α با نقاط ثابت P و Q در $\mathbf{R}^*$ است. اگر $\alpha^\beta\in H_{P,\ Q}$ آنگاه $\beta\in H_{\{P,\ Q\}}$ یعنی β یا هر دو P و Q را ثابت نگاه می‌دارد و یا آن‌ها را مبادله می‌کند. فرض کنید β نقاط P و Q را مبادله می‌کند. بدون از دست رفتن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $P=\infty$ و $Q=0$. آنگاه داریم $\alpha: z\longmapsto Az$ به ازای برخی مقادیر حقیقی $A\neq 0,\ \pm 1$ و $\beta: z\longmapsto \frac{B}{z}$ به ازای عدد حقیقی $B\neq 0$ و $\alpha\beta\neq\beta\alpha$. در نتیجه $G\subseteq H_{P,\ Q}$ که $N(G)\subseteq H_{\{P,\ Q\}}$ و لذا $N(H_{P,\ Q})=H_{\{P,\ Q\}}$. بلافاصله داریم که $N(H_{\{P,\ Q\}})=H_{\{P,\ Q\}}$.

همهٔ این مطالب را در یک قضیه خلاصه می‌کنیم.

قضیه. **(۱) زیرگروههای آبلی ماکسیمال H سه نوع هستند: گروه H_P از اعضای (بیضوی) ثابت نگاه دارندهٔ یک نقطهٔ $P\in H$؛ گروه T_P از همهٔ اعضای سهموی ثابت نگاه دارندهٔ یک نقطهٔ $P\in \mathbf{R}^*$؛ گروه $H_{P,\ Q}$ از اعضای (هذلولوی) ثابت نگاه دارندهٔ یک جفت P و Q از نقاط متمایز $\mathbf{R}^*$. (توجه کنید: البته این گروهها نیز شامل ۱ می‌باشند).**

(۲) اگر $1\neq G\subseteq H_P$، $P\in H$ آنگاه $N(G)\subseteq H_P$؛

اگر $1\neq G\subseteq T_P$ آنگاه $N(G)\subseteq H_P$ و اگر $K\subseteq H_P$ با $K\cap T_P\neq 1$. آنگاه $N(K)\subseteq H_P$؛

اگر $1\neq G\subseteq H_{P,\ Q}$ آنگاه $N(G)\subseteq H_{\{P,\ Q\}}$.

(۳) برای $P\in H$ ، $N(H_P)=H_P$ ؛
برای $P\in R^*$ ، $N(T_P)=H_P$ و $N(H_P)=H_P$ ؛
برای $P, Q\in R^*$ ، $N(H_{P, Q})=H_{\{P, Q\}}$ و $N(H_{\{P, Q\}})=H_{\{P, Q\}}$.

با معکوس کردن اندیس گذاری بالا، حال فرض می‌کنیم زنجیری از گروههای $G_1 \Delta G_2 \Delta \ \dots \ \Delta G_n = G$ داریم که در H قرار دارند و G_1 یک گروه آبلی نابدیهی است و به ازای $1\leq i<n$ نیز G_i در G_{i+1} نرمال است. اگر $G_1\subseteq H_P$ ، $P\in H$ آنگاه بنابر قضیه، $N(G_1)\subseteq H_P$ و در نتیجه $G_2\subseteq H_P$ و با تکرار این استدلال $G\subseteq H_P$. اگر $G_1\subseteq T_P$ آنگاه $G_2\subseteq N(G_1)\subseteq H_P$ و چون $1\neq G_1\subseteq G_2\cap T_P$ ، $G_3\subseteq N(G_2)\subseteq H_P$ ؛ تکرار این استدلال نتیجه می‌دهد $G\subseteq H_P$. سرانجام اگر $G_1\subseteq H_{P, Q}$ آنگاه $G_2\subseteq H_{\{P, Q\}}$ و با تکرار استدلال $G\subseteq H_{\{P, Q\}}$.

قضیه. تنها زیرگروههای حلپذیر H زیرگروههای گروه از نوع H_P ، $P\in H$ ؛ H_P ، $P\in R^*$ و $H_{\{P, Q\}}$ ، $P, Q\in R^*$ هستند. برای $P\in H$ ، $H_P\simeq Aut^+\Gamma$ آبلی است. برای $P\in R^*$ ، H_P یک زیرگروه نرمال آبلی $T_P\simeq R^+$ دارد با گروه خارج قسمتهای $H_P/T_P\, R^\times_+$ که آبلی است. برای نقاط متمایز ~~P, Q~~$\in R^*$ ، $H_{\{P, Q\}}$ یک زیرگروه نرمال آبلی $H_{P, Q}\, R^\times_+$ دارد با گروه خارج قسمتهای $H_{\{P, Q\}}/H_{P, Q}\simeq C_2$ که آبلی است.

قضیه. همهٔ زیرگروههای متناهی H زیرگروههای H_P هستند به ازای بعضی مقادیر $P\in H$ و لذا گروههای دوری متناهی هستند.

برهان. روشی مشابه با آنچه که در مطالعه زیرگروههای متناهی M^+ به کار رفت را مورد استفاده قرار می‌دهیم. فرض کنید G یک زیرگروه متناهی از H باشد. آنگاه هر عضو نابدیهی α از G یک گروه دوری متناهی $<\alpha>$ را تولید می‌کند و چون $<\alpha>$ آبلی است باید در گروهی مانند H_P برای $P\in H$ قرار گیرد. به اختصار هر عضو نابدیهی α از G بیضوی است با یک نقطهٔ ثابت منحصربه فرد P در H . همچنین اگر $\beta\in G$ آنگاه $\alpha^\beta\in G$ دارای نقطه ثابت $P\beta$ است. لذا G مجموعهٔ Ω متشکل از نقاط ثابت از اعضای نابدیهی G را جایگرد می‌کند. چون اجتماع مجزای $\bigcup_{P\in\Omega}\left(G_P - 1\right)$ = $G - 1$ را داریم لذا $|G| - 1 = \sum_{P\in\Omega}\left(|G_P| - 1\right)$. چون همهٔ G_P ها برای P' در PG مدار نقطهٔ P تحت G مزدوج هستند مرتبهٔ یکسانی دارند لذا می‌توانیم جملات مساوی موجود در این مجموع را دسته‌بندی کنیم و به دست آوریم $|G|-1=\sum|PG|.(|G_P|-1)$ که روی همهٔ مدارهای PG در Ω تحت G جمع زده شده است. حال می‌توانیم رابطهٔ $|G|=|PG|.|G_P|$ را به کار ببریم و این مجموعه را به صورت

$(|G_P|-۱)|\frac{|G|}{|G_P|}\sum = ۱-|G|$ بازنویسی کنیم و سپس طرفین را بر $|G|$ تقسیم کنیم تا $\sum t_P = \frac{۱}{|G|} - ۱$ رابدست آوریم که اینجا $t_P = \frac{|G_P|-۱}{|G_P|}$ تنها بستگی به مدار PG دارد. اما حال هر $t_P \geq \frac{۱}{۲}$ ولی $\sum t_P < ۱$ که بر روی همه مدارهای PG جمع زده شده است. این نتیجه می‌دهد که تنها یک مدار PG وجود دارد و $۱-\frac{۱}{|G_P|} = t_P = ۱-\frac{۱}{|G|}$ که از آنجا $|G_P| = |G|$ و $G = G_P \subseteq H_P$. □

۳. وقوع و زاویه

در بررسی عمل گروه H روی H گاهی مفید است که H را به عنوان زیرگروهی از گروه بزرگتر $\tilde{H}$ در نظر بگیریم که شامل بازتابها نسبت به همهٔ خطهای هذلولوی H است.

تعریف می‌کنیم $\tilde{H} = M_{R^*}$، پایدارساز $\mathbf{R}^*$ در M باشد.

قضیه. گروه $\tilde{H}$ به وسیلهٔ همهٔ انعکاسها نسبت به خطهای هذلولوی H تولید می‌شود و $H = \tilde{H}^+$، زیرگروهی از $\tilde{H}$ است که به وسیلهٔ همهٔ حاصلضربهای ممکن دوتا از این انعکاسها تولید می‌شود. به خصوص اگر $\alpha : z \longmapsto -\bar{z}$ انعکاس نسبت به (نیمهٔ بالایی) محور موهومی باشد آنگاه $\tilde{H} = <\alpha>.H$ حاصلضرب نیم مستقیم H در گروه $<\alpha>$ با مرتبهٔ ۲ است.

برهان. اثبات سرراست است و به عنوان یک تمرین واگذار می‌شود. □

حال به ارائه سه قضیه دربارهٔ H به عنوان یک صفحهٔ وقوع می‌پردازیم.

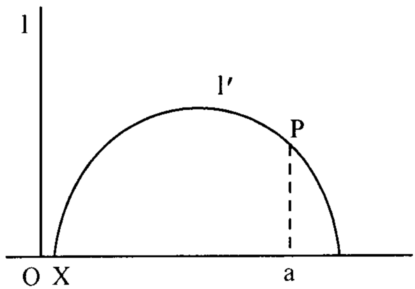
قضیه. اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز از H باشند آنگاه یک خط هذلولوی یکتای l شامل P و Q وجود دارد.

برهان. فرض کنید e خط اقلیدسی گذرنده از P و Q باشد. اگر e عمود بر $\mathbf{R}$ باشد آنگاه $l = e \cap H$ یک خط هذلولوی گذرنده از P و Q است به روشنی تنها خط از این گونه می‌باشد. اگر e عمود بر $\mathbf{R}$ نباشد آنگاه عمود منصف اقلیدسی پاره خط [P, Q] محور $\mathbf{R}$ را در یک نقطهٔ C قطع می‌کند. اگر c دایره‌ای به مرکز C گذرندهٔ از P و Q باشد آنگاه c عمود بر $\mathbf{R}$ است و در نتیجه $l = c \cap H$ یک خط هذلولوی گذرندهٔ از P و Q می‌باشد و به روشنی تنها خط از این گونه است. □

قضیه. اگر l و l' دو خط هذلولوی باشند آنگاه آن‌ها حداکثر یک نقطهٔ مشترک دارند.

برهان. فرض کنید $l=c\cap H$ و $l'=c'\cap H$ که c و c' خطهای انعکاسی عمود بر $\mathbf{R}^*$ باشند. آنگاه c و c' حداکثر دو نقطهٔ مشترک دارند و اگر آن‌ها دو نقطه از $\mathbf{C}^*$ را به اشتراک داشته باشند حداکثر یکی از آنها در H قرار دارد. □

قضیه. اگر l یک خط و P نقطه‌ای غیرواقع بر l باشد آنگاه بینهایت خط l' گذرندهٔ از P وجود دارند که l را قطع نمی‌کنند.



برهان. می‌توانیم فرض کنیم که $l=I=\{yi : y>0\}$ و $P=a+bi$ با $a, b>0$. برای هر x که $0\le x\le a$ یک خط l' گذرندهٔ از P وجود دارد که x را به عنوان یک انتها دارد و l را قطع نمی‌کند. □

نکته. این قضیه بیان می‌کند H نااقلیدسی است، به این معنا که **اصل توازی** اقلیدسی که از هر نقطهٔ P غیرواقع بر یک خط l تنها یک خط l' موازی با l وجود دارد صادق نیست. به خاطر فراوانی خطهای l' غیرمتقاطع با یک خط مفروض l، در موازی نامیدن آن‌ها تردید داریم. گاهی کلمهٔ موازی برای هر دو خط با انتهای مشترک در $\mathbf{R}^*$ به کار برده می‌شود یعنی با یک نقطهٔ مشترک در بینهایت؛ در مثالی که در اثبات به کار رفت دوتا از این گونه خطهای گذرندهٔ از P وجود دارند؛ حالتهای حدی برای $x=0$ و l' مماس بر l در 0، و برای $x=a$ که l' موازی اقلیدسی با l است با یک انتهای مشترک در نقطهٔ ∞ از $\mathbf{R}^*$ می‌باشند.

قضیه. اگر P یک نقطه و l خطی دلخواه باشد و θ زاویه‌ای دلخواه باشد که $0<\theta<\pi$، آنگاه یک خط یکتای l' گذرندهٔ از P متقاطع با l وجود دارد که زاویهٔ از l' تا l برابر با θ است.

برهان. همان شکل قبل را به کار می‌بریم اما در اینجا $x>0$ و $a=0$ می‌گیریم. هرگاه x از 0 در امتداد $\mathbf{R}$ به عقب برود زاویهٔ θ به طور پیوسته در قلمرو $0<\theta<\pi$ تغییر می‌کند. □

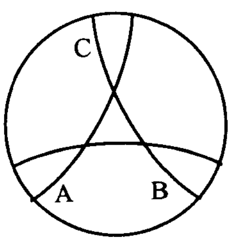
نتیجه. اگر l هر خطی و P نقطه‌ای دلخواه باشد آنگاه یک خط یکتای l' گذرندهٔ از P وجود دارد که عمود بر l است.

قضیه. اگر ABC مثلث دلخواهی در H باشد آنگاه مجموع زوایای داخلی آن کمتر از π است.

برهان. تأکید می‌کنیم که ما دربارهٔ یک مثلث هذلولوی صحبت می‌کنیم که اضلاع آن پاره‌خطهای هذلولوی AB، BC و CA گذرندهٔ از هر جفت رئوس هستند.

برای اثبات این قضیه برای اولین بار «مدل» دیگری از صفحهٔ هذلولوی را به کار می‌بریم. فرض کنید $\Gamma=\{z:|z|=۱\}$ دایرهٔ واحد باشد. چون M^+ روی خطهای انعکاسی ترایا است M^+ شامل یک تبدیل δ می‌باشد که $\mathbf{R}^*$ را به Γ می‌نگارد. در واقع می‌توانیم $\delta: z \longrightarrow \frac{z-i}{z+i}$ را اختیار کنیم که ۰ را به ۱−، ۱ را به i، و ∞ را به ۱ می‌نگارد. چون δ نیز i را به ۰ می‌نگارد لذا نیم‌صفحهٔ بالایی H را به درون Γ یعنی D می‌نگارد. به علاوه آن همهٔ خطهای هذلولوی در H را به اشتراک D با خطهای اقلیدسی و دایره‌های عمود بر Γ می‌نگارد. لذا می‌توانیم H را با D و گروه H را با گروه H^δ، که در واقع متشکل از همهٔ $\alpha: z \longrightarrow \frac{az+\bar{b}}{bz+\bar{a}}$ به ازای $a, b \in C$ است که $a\bar{a}-b\bar{b}=۱$ جایگزین کنیم. در عمل بین این دو مدل فرق گذاشته نمی‌شود دربارهٔ H با گروه مربوط H و D با گروه آن یعنی H^δ باید به عنوان دو مختص گذاری از یک شیء هندسی فکر کرد.

برای بازگشتن به اثباتمان، در مدل D سه خط AB، BC، CA دوایر عمود بر Γ (یا یکی از آنها می‌تواند یک قطر باشد) هستند و مقایسه با مثلث اقلیدسی با همان رئوس A و B و C نامساوی مطلوب را به دست می‌دهد. □

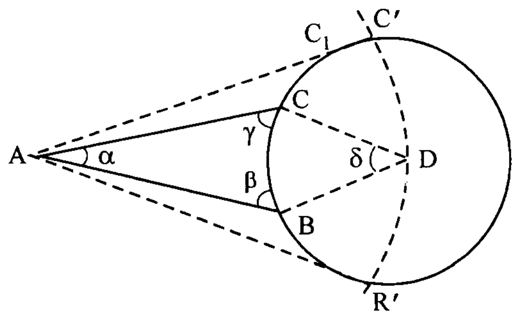


قضیه. فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma > ۰$ زوایای مثلثی باشند که $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. آنگاه مثلثی با زوایای داخلی α، β و γ وجود دارد (به ترتیب دوری در جهت مثبت) و هردو چنین مثلثی قابل‌انطباق هستند یعنی یکی نگارهٔ دیگری تحت عضوی از H است.

برهان. دوباره از مدل D استفاده می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که هرگاه $A=۰$، یک مثلث

ABC با زوایای α، β و γ وجود دارد و این مثلث تا حد دوران حول $A=0$ یکتاست.

با یک دایره اقلیدسی c به مرکز D شروع می‌کنیم. فرض کنید $\delta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ که درنتیجه $0<\delta<\pi$. فرض کنید DB و DC دو شعاع از π باشند که با زاویهٔ δ در D تلاقی می‌کنند. فرض کنید l_B و l_C دو خط از B و C باشند که زوایای β و γ با کمان کوتاهتر c بین B و C می‌سازند، چون $\delta+\beta+\delta<\pi-\alpha<\pi$، l_B و l_C باید در یک نقطه A تلاقی کنند تا یک چهار ضلعی DCAB را با زوایای داخلی δ، γ، α، β تشکیل دهند. لذا مثلث خمیده خطی ABC زوایای داخلی α، β، γ را دارد. بعد از یک انتقال که به طور یکتا انتخاب شده می‌توانیم فرض کنیم $A=0$.



فرض کنید c_1 دایرهٔ یکتایی به مرکز $A=0$ باشد که عمود بر c است و آن را در نقاط B'، C' تلاقی می‌کند. چون AB' و AC' مماس بر c هستند، مادامی که AB و AC دایره c را در زوایای β و γ که $0<\beta,\gamma<\pi$ قطع می‌کند نقاط B، C به A نزدیکترند تا نقاط متناظر B'، C' ازاین رو درون دایره c_1 هستند. بعد از اعمال یک انبساط به طور یکتا تعیین شده به مرکز 0 می‌توانیم فرض کنیم که $c_1=\Gamma$. حال ABC یک مثلث هذلولوی در D با زوایای α، β و γ است. از ساختمان روشن است که ABC تا حد دوران حول $A=0$ یکتا است. □

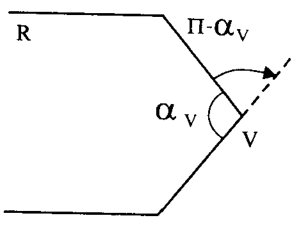
نکته. طبیعی است دو مثلث هذلولوی را مستقیماً متشابه نامیم اگر زوایای داخلی یکسان داشته باشند که به ترتیب دوری در جهت مثبت اختیار شده‌اند و دو مثلث را قابل انطباق نامیم اگر یکی تحت عضوی از H نگارهٔ دیگری باشد. نشان داده‌ایم که دو مثلث مستقیماً متشابه همیشه قابل انطباق هستند. این مطلب کاملاً متفاوت با هندسهٔ اقلیدسی است. ما هنوز طول هذلولوی را مورد بحث قرار نداده‌ایم اما روشن است که هر تعریف معقولی از طول هذلولوی مستلزم پاره‌خطهای قابل انطباقی خواهند بود که طول یکسانی دارند. با چنین تعریفی می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که اگر زوایای متناظر دو مثلث متساوی باشند آنگاه اضلاع متناظر طول یکسانی دارند.

نکته. ما تأکید نکردیم که رئوس A ، B و C مثلث ABC همگی در صفحهٔ هذلولوی H قرار دارند. در واقع، اگر یکی یا بیشتر از یکی از آنها در $\partial H=\mathbf{R}^*$ قرار گیرند، با زاویهٔ داخلی ۰ ، قضیه معتبر می‌ماند. در اثبات ارائه شده اگر یکی یا دوتا از رئوس روی $\mathbf{R}^*$ باشند هنوز اثبات معتبر است و اگر هر سه رأس روی $\mathbf{R}^*$ باشند حالتی بدیهی است.

۴. تعریف ترکیبی مساحت

بحث در مورد مفاهیم فاصله و متریک مربوط در صفحهٔ هذلولوی را در حد امکان عقب انداخته‌ایم و تا حد امکان با استفاده از استدلالهای کاملاً ترکیبی به اثبات مطالب پرداخته‌ایم. کاملاً روشن است که برای بحث در مورد طول یک خم کم وبیش دلخواه یا مساحت یک ناحیهٔ کلی، مفاهیم دیفرانسیل مورد نیازاند؛ اینها بعداً ارائه خواهند شد. اما عجالتاً یک تعریف بسیار ساده از مساحت یک ناحیه محصور شده بوسیلهٔ یک چند ضلعی بسته ساده را ارائه می‌دهیم، حال به چنین تعریفی می‌پردازیم.

فرض کنید R ناحیهٔ محصور شده در H به وسیلهٔ یک چند ضلعی بستهٔ سادهٔ ∂R باشد که اضلاعش پاره خطهایی از خطهای هذلولوی هستند. نیازی نیست حالتی راکه بعضی از رئوس روی $\partial H=\mathbf{R}^*$ مرز H قرار می‌گیرند استثناء کنیم. فرض کنید α_V زاویهٔ داخلی در یک رأس V باشد؛ آنگاه $\circ<\alpha_V<2\pi$ در صورتی که اگر $V\in\mathbf{R}^*$ آنگاه $\alpha_V=\circ$. ∂R را در جهت مثبت طی می‌کنیم، برای گذشتن از رأس V جهت ما که در جهت مثبت اندازه گیری شده است به اندازهٔ $\pi-\alpha_V$ تغییر می‌کند. این مطلب ما را به ارائه تعریف زیر می‌رساند.



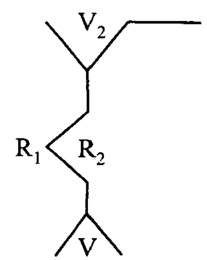
$\kappa(\partial R)$ خمیدگی مرز ∂R از R برابر با $\sum(\pi-\alpha_V)$ است که روی همهٔ رأسهای R جمع زده شده است. اگر R یک ناحیهٔ محصور شده به وسیلهٔ یک چند ضلعی اقلیدسی باشد تعریف متناظر همیشه $\kappa(\partial R)=2\pi$ را حاصل می‌کند. اما دیده‌ایم که اگر R به وسیلهٔ یک مثلث هذلولوی محصور شود آنگاه $\kappa(\partial R)=3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>2\pi$. اگر مثلث خیلی کوچک باشد مثلاً در همسایگی کوچکی از o در مدل D قرار داشته باشد اضلاعش تقریباً خط مستقیم هستند و در نتیجه $\alpha+\beta+\gamma$ تقریباً برابر با π است و $\kappa(\partial R)$ تنها کمی بزرگتر از 2π است. اگر مثلث خیلی بزرگ باشد، در حالت حدی اگر هر سه رأس روی $\mathbf{R}^*$ قرار گیرند آنگاه α، β، γ تقریباً برابر

با ۰ هستند و $\kappa(\partial R)$ تقریباً برابر با 3π است. این یک مطلب نوعی است: خواهیم دید برای یک ناحیهٔ چند ضلعی هذلولوی، همیشه $\kappa(\partial R) > 2\pi$ که $\kappa(\partial R)$ نزدیک به 2π برای ناحیه‌های کوچک و به طور بیکران بزرگ برای ناحیه‌های بزرگتر است.

تعریف می‌کنیم **مساحت** $A(R)$ برای ناحیهٔ چند ضلعی R برابر با $A(R)=\kappa(\partial R)-2\pi$ است.

دو ویژگی اصلی وجود دارند که انتظار داریم مساحت، آنها را بنابه تعریف داشته باشد. اول باید تحت گروه H پایا باشد: اگر $\alpha\in H$ آنگاه $A(R\alpha)=A(R)$ ؛ این مطلب بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود. دوم انتظار داریم آن «جمعپذیر» باشد، به این معنی که:

قضیه. اگر یک ناحیهٔ چند ضلعی R اجتماع غیرمتداخل دو ناحیهٔ چند ضلعی R_1 و R_2 باشد آنگاه $A(R)=A(R_1)+A(R_2)$.



برهان. می‌توانیم فرض کنیم که اشتراک R_1 و R_2 یک مسیر چند ضلعی سادهٔ p روی مرزهای هردو است. با درج رأسهای جدید V با $\alpha_V=\pi$ که تعریفهای $A(R_1)$، $A(R_2)$ و $A(R)$ را تغییر نمی‌دهند می‌توانیم فرض کنیم p از یک رأس مشترک V_1 به یک رأس مشترک V_2 برود. مجموع $\sum\left(\pi-\alpha_V^{(1)}\right)+\sum\left(\pi-\alpha_V^{(2)}\right)$ را در نظر می‌گیریم که مجموع اول روی همهٔ رأسهای R_1 است و مجموع دوم روی همهٔ رأسهای R_2 می‌باشد. به روشنی جملات حاصل از رأسهای داخلی نسبت به p حذف خواهند شد. زاویهٔ داخلی رأس V_1 در R برابر با $\alpha_{V_1}=\alpha_{V_1}^{(1)}+\alpha_{V_1}^{(2)}$ یعنی مجموع زوایای داخلی در R_1 و R_2 که در نتیجه $\pi-\alpha_{V_1}=\left(\pi-\alpha_{V_1}^{(1)}\right)+\left(\pi-\alpha_{V_1}^{(2)}\right)-\pi$. به همین نحو در رأس V_2 که از آنجا $\sum\left(\pi-\alpha_{V_1}^{(1)}\right)+\sum\left(\pi-\alpha_{V_1}^{(2)}\right)=\sum\left(\pi-\alpha_V\right)+2\pi$ در نتیجه $A(R_1+)A(R_2)=A(R)$.

۵. متریک هذلولوی

حال سئوال دربارهٔ یک تابع پایای فاصله روی H و به کمک آن تعریفهای حاصل از طول یک

خم و مساحت یک ناحیه را بررسی می‌کنیم. این ایده‌ها مهم هستند اما در مسیر توسعهٔ فعلی قرار ندارند لذا تنها به طرح کلی آنها به طور غیر صوری می‌پردازیم.

یک **متریک** روی مجموعهٔ U یک تابع $d: U \times U \longrightarrow \mathbf{R}$ با ویژگیهای زیر است:

(۱) به ازای هر P و Q در U، $d(P, Q) \geq 0$ با $d(P, Q)=0$ تنها در حالت $P=Q$؛

(۲) $d(Q, P)=d(P, Q)$؛

(۳) $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ (نابرابری مثلث).

یک متریک روی U یک توپولوژی روی U تعریف می‌کند با پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز همهٔ گوی‌های $B_r(P)=\{Q: d(P, Q)<r\}$ به ازای همهٔ $P \in U$ و $r>0$. هرگاه U از قبل به عنوان یک فضای توپولوژیک داده شود میل داریم این توپولوژی جدید با توپولوژی داده شده روی U سازگار باشد که موکول به گذاشتن شرط زیر است

(۴) $d(P, Q)$ تابع پیوسته‌ای از P و Q است.

به علاوه اگر مانند حالت مورد بررسی یعنی $U=H$، مفهوم خط در U تعریف شود انتظار داریم که این خطها **ژئودزیک** باشند به این معنی که

(۵) اگر Q روی یک خط l بین P و R قرار گیرد آنگاه

$$d(P, R)=d(P, Q) + d(Q, P)$$

سرانجام در حالت مورد بحث که $U=H$ باید متریک تحت H پایا باشد یعنی

(۶) $d(P\alpha, Q\alpha)=d(P, Q)$ به ازای همهٔ $P, Q \in H$ و $\alpha \in H$.

به روشنی هرگاه یک متریک d همهٔ این شرایط را برقرار کند ~~و یک متریک دوم~~ d' با $d'(P, Q)=kd(P, Q)$ تعریف شود به ازای عددی مانند $k>0$، آنگاه d' نیز این شرایط را برقرار می‌کند. مطلب زیر را ثابت خواهیم کرد.

قضیه. یک متریک پایای d روی H وجود دارد (شرایط (۱) تا (۶) را برقرار می‌کند) و d تا ضرب به وسیلهٔ عددی مانند $k>0$ یکتاست.

برهان. اگر P و Q روی خطی مانند l قرار گیرند آنگاه عضوی ماند α در H خط l را به $I=\{iy: y>0\}$ می‌نگارد. حال (۶) ایجاب می‌کند $d(P, Q)=d(P\alpha, Q\alpha)$ که در نتیجه d کاملاً به‌وسیلهٔ مقادیرش برای $P, Q \in I$ مشخص می‌شود.

فرض کنید $P=ip$، $Q=iq$ متعلق به I باشند لذا $p, q>0$. حال H_p متشکل از همهٔ تبدیلات $z \longmapsto Az$ با $A>0$ است و بنابه (۶) نتیجه می‌گیریم $d(ip, iq)=d(iAp, iAq)$. لذا

$d(P, Q)$ تنها به نسبت q/p بستگی دارد. حال (۲) نتیجه می‌دهد که $d(P, Q)$ تنها به نسبت $|\ln(q/p)|$ بستگی دارد مثلاً $d(ip, iq)=\phi(|\ln(p/q)|)$. اگر $R=ir$ آنگاه (۵) نتیجه می‌دهد که $\phi(|\ln(p/r)|)=\phi(|\ln(p/q|) + \phi(\ln(q/r)|)$ یعنی به ازای همهٔ $x, y>0$، $\phi(x + y)=\phi(x) + \phi(y)$. سرانجام شرط (۴) یعنی پیوستگی d نتیجه می‌دهد ϕ پیوسته است و از آنجا نتیجه می‌شود که به ازای مقادیری از $k>0$، $\phi(x)=kx$ برای همهٔ $x>0$. لذا اگر d در شرایط داده شده صدق کند آنگاه به ازای برخی مقادیر $k>0$، $d(ip, iq)=k|\ln(q/p)|$ برای همهٔ $p, q>0$.

با گرفتن $k=1$ شرایط را عادی می‌کنیم و $d(ip, iq)=|\ln(p/q)|$. بررسی این مطلب که d در همهٔ شرایط داده شده صدق می‌کند با یک استثناء، بدیهی است. حالت استثناء شرایط (۳) می‌باشد که متضمن وجود سه نقطهٔ نه لزوماً همخط است؛ اثبات اینکه d این شرط را برقرار می‌کند را به تعویق می‌اندازیم.

حال در جستجوی یک **دیفرانسیل هذلولوی طول کمان** هستیم یعنی دیفرانسیل d_Hz که تنها وابسته به z و dz است به شرطی که اگر K خم دلخواهی باشد (که برای آن انتگرال وجود دارد) آنگاه طول K به وسیلهٔ فرمول زیر داده می‌شود

$$l(K)=\int_K d_Hz$$

لازم است که $l(K)$ تحت H پایا باشد یعنی به ازای هر α در H، $l(K\alpha)=l(K)$ و آن با تعریف قبلی ما دربارهٔ فاصله روی یک خط سازگار باشد یعنی $l([P, Q])=d(P, Q)$.

برای یافتن یک دیفرانسیل پایای d_Hz ابتدامحاسبه می‌کنیم‌که برای $\alpha: z\longmapsto \dfrac{az+c}{bz+a}$، $a, b, c, d\in R$ با $ad-bc=1$ دیفرانسیل «اقلیدسی» (معمولی) dz بر طبق فرمول به $d(z\alpha)=\dfrac{dz}{(bz+d)^2}$ تبدیل می‌شود. یک محاسبه دیگر نشان می‌دهد که جزء موهومی $Imz=y$ برای $z=x+iy$ بر طبق فرمول به $Im(z\alpha)=\dfrac{Imz}{|bz+d|^2}$ تبدیل می‌شود. نتیجه می‌گیریم $d_Hz=\dfrac{|dz|}{Imz}$ پایاست یعنی $d_H(z\alpha)=d_Hz$ و از آنجا $l(K\alpha)=l(K)$.

برای بررسی این مطلب به وسیله فرمول فاصله، فرض می‌کنیم $P=ip$، $Q=iq$، $0<p<q$ و از آنجا $[P, Q]$ متشکل از همهٔ $z=iy$ ها برای $p\leq y\leq q$ است. حال فرمول برای l به دست می‌دهد.

$$l(P, Q)=\int_p^q \frac{dy}{y} = |\ln(p/q)| = d(P, Q)$$

در اینجا نابرابری مثلث را به صورت زیر ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید P ، Q ، R نقاطی در H باشند آنگاه

$$d(P, R)\leq d(P, Q) + d(Q, R)$$

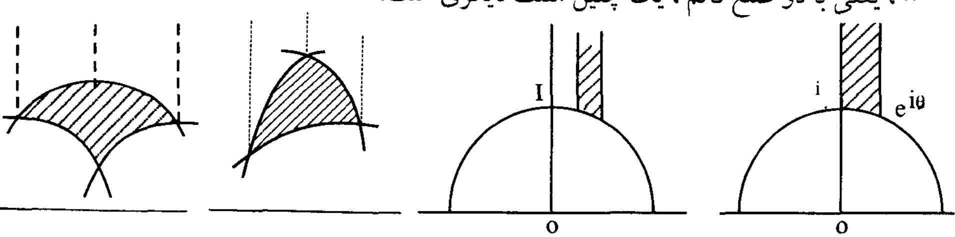
و تساوی تنها به شرط تعلق Q به [P, R] برقرار است.

برهان. در واقع نتیجهٔ قوی‌تری را اثبات خواهیم کرد. فرض کنید C یک خم قطعه به قطعه مشتقپذیر از P به R در H باشد با طول هذلولوی $l(C)$؛ آنگاه $d(P, R)\leq l(C)$، نابرابری اکید هنگامی اتفاق می‌افتد که شیب C به وسیلهٔ شیب PR روی کمانی از C محدود نشود.

فرض کنید $P=ip$ و $R=ir$ با $0<p<r$. می‌توانیم فاصله $J=[P, R]$ را به زیر فاصله‌های J_k تجزیه کنیم که وقتی iy فاصله J_k را طی می‌کند نقاط $z=\phi(y)+iy$ کمانی مانند C_k از C را طی کند و ϕ برای $iy\in J_k$ مشتقپذیر است. آنگاه روی هر C_k، $|dz| =\sqrt{(\phi'(y))^2+1}\,dy\geq dy$ که از آنجا $l(C_k)\geq l(J_k)$. جمع زدن روی همهٔ k ها نتیجه می‌دهد $l(C)\geq l(J)=d(P, R)$. هرگاه C متشکل از نقاط $z=x+iy$ برای $y\notin J$ باشد به روشنی نابرابری اکید داریم. اگر شیب C روی کمانی کراندار باشد که مثلاً می‌توانیم آن را C_k بگیریم آنگاه $|\phi'(y)|$ روی C_k کراندار مخالف صفر است مثلاً $|\phi'(y)|>b>0$ که در نتیجه روی C_k، $|dz|\geq\sqrt{b^2+1}\,dy$ و $l(C_k)\geq\sqrt{b^2+1}\;l(J_k)>l(J_k)$ بنابراین $l(C)>l(J)$. □

از دیفرانسیل هذلولوی کمان $\frac{dz}{y}$، $\frac{dxdy}{y^2}$ را به عنوان دیفرانسیل هذلولوی مساحت به دست می‌آوریم و از این رو برای مساحت یک ناحیهٔ R، فرمول $A(R)=\int_R\int\frac{dxdy}{y^2}$ را داریم.

برای نشان دادن سازگاری این فرمول با تعریف ترکیبی ارائه شده کافی است آن را برای مثلثها به دست آوریم که دوباره لزومی ندارد که مثلثهایی با یک یا چند رأس واقع بر مرز ∂H را استثناء کنیم. شکل نشان می‌دهد که هر مثلث تفاصل یک اجتماع مجزا از دو مثلث هر یک با رأسی در ∞، یعنی با دو ضلع قائم، یک چنین مثلث دیگری است.



لذا کافی است مثلثهایی با دو ضلع قائم و ضلع سوم روی یک دایره مانند Γ را در نظر بگیریم.

چون هر چنین مثلثی تفاضل دو تا از این مثلثها با یک ضلع روی I است تنها به بررسی حالت زیر اکتفا می‌کنیم:

مثلثی دارای رأسهای ∞ ، i و $e^{i\theta}$ برای برخی مقادیر θ ، $0<\theta<\pi/2$ است. حال فرمول برای $A(R)$ به دست می‌دهد

$$A(R)=\int_R\int \frac{dx\,dy}{y^2}=\int_0^{x=\cos\theta}\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\infty}\frac{dx\,dy}{y^2}=\int_{x=0}^{x=\cos\theta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\arc\cos\theta\,\Big|_{x=0}^{x=\cos\theta}=\frac{\pi}{2}-\theta=\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}+0\right)$$

که سازگار با فرمول ترکیبی است.

۶. دو قضیهٔ دیگر

دایره‌های هذلولوی در بحث ما نقشی ندارند با این حال ذکر یک نکته لازم است. طبیعی است که **دایرهٔ هذلولوی** به مرکز P و شعاع $r>0$ را مجموعهٔ همهٔ نقاط Q تعریف کنیم که فاصلهٔ هذلولوی $d(P, Q)=r$ است.

قضیه. دایرهٔ هذلولوی c به مرکز P و شعاع هذلولوی $r>0$ یک دایره اقلیدی است اما در حالت کلی با مرکز اقلیدسی متفاوت P' و شعاع متفاوت $r'>0$.

برهان. ابتدا دایرهٔ هذلولوی واقع در مدل قرص D با مرکز o و شعاع r را در نظر می‌گیریم. به ازای هر $Q\neq o$ فاصلهٔ هذلولوی $d(o, Q)$ یک تابع صعودی یکنوا، در امتداد نیم خط $\overrightarrow{OQ}$ ، از فاصله اقلیدسی $|PQ|$ است، لذا در این حالت c دایرهٔ اقلیدسی در o با یک شعاع اقلیدسی r' است. فرض کنید $\alpha\in H^{\delta}$ ، o را به P بنگارد. آنگاه $\alpha\in M^{+}$ دایرهٔ c را به خط اقلیدسی یا دایره اقلیدسی $c\alpha$ می‌نگارد؛ چون دایرهٔ c ، Γ را قطع نمی‌کند $c\alpha$ را نیز قطع نمی‌نماید و $c\alpha$ یک دایره اقلیدسی است. توجه کنید که $o\alpha$ به طور عادی مرکز اقلیدسی $c\alpha$ نیست. □

قضیهٔ بعد نقش مهمی در فصل ۱۰ خواهد داشت.

قضیه. فرض کنید P و Q نقاط متمایزی از H باشند. آنگاه مکان هندسی نقاط X که $d(P, X)=d(Q, X)$ یک خط هذلولوی است، عمود منصف پاره خط $[P, Q]$.

برهان. ساده است ببینیم $[P, Q]$ شامل یک نقطه میانی یکتای M است که $d(P, M)=d(Q, M)$. بنابه یکی از قضایا یک خط یکتای l گذرندهٔ از M عمود بر PQ وجود دارد. فرض کنید $\rho\in\tilde{H}$ انعکاسی نسبت به l باشد. اگر $X\in l$ آنگاه چون $X\rho=X$ ، $P\rho=Q$ داریم

$d(P, X)=d(Q, X)$.

برای عکس مطلب فرض کنید یک نقطهٔ X از P و Q همفاصله باشد فرض می‌کنیم $X\notin PQ$. فرض کنید l' خط یکتای گذرندهٔ از X نیمساز زاویه بین PX و QX باشد و فرض کنید ρ' انعکاس نسبت به l' باشد. چون ρ' نقطهٔ X را ثابت نگاه می‌دارد و PX را به QX می‌نگارد و $d(P, X)=d(Q, X)$ لذا ρ' نقطهٔ P را به Q می‌نگارد. اگر l' پاره خط PQ را در یک نقطهٔ M' قطع کند آنگاه ρ' نقطهٔ M' را ثابت نگاه می‌دارد و مثلث XPM' را به XQM' می‌نگارد. در نتیجه M' نقطهٔ میانی $[P, Q]$ است و l' عمود بر PQ است. لذا $l=l'$ و $X\in l$. □

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. این قضیه را که $\widetilde{H}$ توسیع مُقطع H است به وسیله $<\alpha>$ برای α بازتاب نسبت به محور موهومی ثابت کنید.

مسألهٔ ۲. زیرگروههای حلپذیر H به عنوان استثناءهایی برای قضایای گوناگون دربارهٔ گروههای فوخسین بیشتر مورد توجه هستند تا به خاطر خودشان. این گروههای **مقدماتی** G گاهی به عنوان گروههایی که مجموعهٔ ناتهی متناهی X از نقاط واقع در $\overline{H}=H\cup R^*$ را پایا نگاه می‌دارند مشخص می‌شوند. این فرض را برای مقادیر کوچک $|X|=۱, ۲, ۳, ...$ بررسی کنید.

مسألهٔ ۳. دیده‌ایم که قلمرو مساحتهای مثلثهای هذلولوی همهٔ A های واقع در فاصله $۰<A\leq\pi$ است. دربارهٔ مساحتهای n− ضلعیها چه می‌توان گفت؟

مسألهٔ ۴. فرمولی برای مساحت یک p ضلعی منتظم با زوایای داخلی $\frac{۲\pi}{q}$ برای اعداد صحیح مثبت p و q که $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}<\frac{۱}{۲}$ بیابید. به ازای p ثابت، چه اتفاقی می‌افتد هرگاه q را افزایش دهیم.

مسألهٔ ۵. فرض کنید c دایرهٔ هذلولوی به مرکز P و شعاع $r>۰$ باشد که متشکل از همهٔ z ها با $d(P, z)=r$ است. مرکز P' و شعاع r' به عنوان دایره اقلیدسی چه هستند؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید دو نقطهٔ متمایز A و B در H و دو عدد حقیقی مثبت a و b مفروض هستند. چند نقطه C وجود دارند که $d(A, C)=b$ و $d(B, C)=a$؟ ثابت کنید اگر دو مثلث اضلاع متناظر مساوی داشته باشند آنگاه آنها تحت H قابل انطباق هستند. اگر مثلثها دو جفت از اضلاع متناظر و زاویه بین مساوی داشته باشند چه می‌توان گفت؟

مسألهٔ ۷. برای z یک نقطه روی نیمهٔ بالایی دایرهٔ واحد، $d(i, z)$ را برحسب شیب خط گذرنده از z در نقطهٔ ۱− توصیف کنید.

مرجع

از میان مراجع گوناگون ذکر شده در جاهای دیگر، احتمالاً کتاب بی‌یردون به این فصل مربوط ترین است.

فصل ده

گروههای فوخسین

۱. ناحیه‌های اصلی

یک **گروه فوخسین** زیرگروهی ناپیوسته از گروه هذلولوی H است. یادآوری می‌کنیم که یک زیر گروه G از H ناپیوسته است اگر و تنها اگر برای یک نقطهٔ داده شده P در H و یک قرص D در H تنها تعدادی متناهی نگارهٔ $P\alpha$ از P برای α متعلق به G در قرص D وجود داشته باشند. نظریه گروههای فوخسین بسیار توسعه یافته است و اخیراً بسیار مطرح می‌باشد. به هر حال در این فصل پایانی، ما روی چند مثال مهم کار می‌کنیم. پروراندن نظریهٔ بنیادی برای درک این مثالها کافی است.

بررسی ما در مورد گروههای فوخسین مبتنی بر مفهوم **مجموعهٔ اصلی** است. این یک زیر مجموعهٔ بسته Δ از H است که H اجتماع غیر متداخل از نگاره‌های $\Delta\alpha$ برای $\alpha \in G$ است. یعنی، H اجتماع $\Delta\alpha$ هاست و برای $\alpha_1 \neq \alpha_2$، هر نقطهٔ مشترک در $\Delta\alpha_1$ و $\Delta\alpha_2$ در مرز هر دو قرار دارد. برای اثبات وجود یک مجموعهٔ اصلی مناسب قضیهٔ زیر را احتیاج داریم.

قضیه: اگر G یک گروه فوخسین باشد و F مجموعهٔ نقاط ثابت اعضای بیضوی G باشد آنگاه F یک زیر مجموعهٔ گسستهٔ H است.

برهان. فرض کنید F گسسته نیست یعنی برای نقطه‌ای مانند P دنباله‌ای از اعضای بیضوی α_n از G با نقاط ثابت $P_n \neq P$ وجود دارد که $\lim d(P_n,P)=0$. آنگاه چون $d(P\alpha_n,P) \leq d(P\alpha_n,P_n)+d(P_n,P)=d(P\alpha_n,P_n\alpha_n)+d(P_n,P)=2d(P_n,P)$، در نتیجه $\lim d(P\alpha_n,P)=0$. اما این مطلب نتیجه می‌دهد که هر قرص D شامل P نیز شامل تعداد نامتناهی $P\alpha_n \neq P$ است و این متناقض با ناپیوسته بودن G است. □

متذکر می‌شویم که این قضیه، نیمهٔ ساده‌تر قضیه‌ای از فنشل و نلسون است، نیمهٔ دیگر آن قضیه می‌گوید که اگر F گسسته باشد و بیشتر از دو عضو داشته باشد آنگاه G ناپیوسته است.

ما تنها این ~~قضیه را برای این نتیجه~~ که H شامل نقاط P است که به وسیلهٔ هیچ عضو نابدیهی G ثابت نگاه نمی‌شود به کار می‌بریم. برای یک چنین نقطهٔ داده شدهٔ P **ناحیهٔ دیریکله** $\Delta=\Delta(P)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Delta=\{Q:d(Q,P)\leq d(Q,P\alpha),\text{ برای هر } \alpha \text{ در } G\}$$

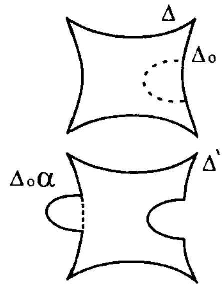
قضیه: اگر G یک گروه فوخسین باشد و P نقطه‌ای از H باشد که به وسیله هیچ عضو نابدیهی G ثابت نگاه داشته نمی‌شود آنگاه ناحیهٔ دیریکله $\Delta=\Delta(P)$ یک مجموعهٔ اصلی برای G است.

برهان. (۱) چون $\Delta\alpha$ مجموعهٔ همهٔ Q هاست که دست کم همانقدر به $P\alpha$ نزدیک‌اند که به هر $P\beta$ دیگر و بنابه ناپیوستگی تنها تعداد متناهی $P\beta$ درون هر فاصله معینی از Q وجود دارند، روشن است که هر $Q\in H$ در برخی $\Delta\alpha$ ها قرار دارد.

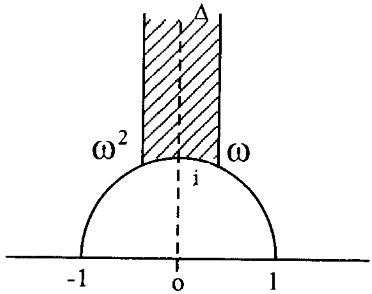
(۲) اگر $Q\in\Delta\alpha_1\cap\Delta\alpha_2$ آنگاه $d(Q,P\alpha_1)=d(Q,P\alpha_2)$ و Q روی مکان هندسی همهٔ R ها قرار می‌گیرد که $d(R,P\alpha_1)=d(R,P\alpha_2)$ و بنابه قضیه‌ای از فصل قبل یک خط (هذلولوی) l است. حال پاره خط $[P\alpha_1,Q]$ در $\Delta\alpha_1$ واقع می‌شود در صورتی که هر نقطهٔ خط واصل از $P\alpha_1$ به Q که در طرف دیگر Q است به $P\alpha_2$ نزدیکتر می‌باشد تا $P\alpha_1$ و لذا در $\Delta\alpha_1$ قرار ندارد. در نتیجه Q روی مرز $\Delta\alpha_1$ است. □

متذکر می‌شویم که Δ یک **شبکه‌بندی دیریکله** T از H را با وجوه $\Delta\alpha$ ، $\alpha\in G$ که قابل انطباق هستند اما به طور معمول چند ضلعیهای منتظم نیستند مشخص می‌کند.

به طور کلی، یک گروه فوخسین G ناحیه‌های اصلی بسیاری خواهند داشت که همهٔ آنها ناحیه‌های دیریکله نیستند. مثلاً فرض کنید Δ یک ناحیهٔ اصلی چند ضلعی باشد و Δ_0 یک ناحیه واقع در Δ باشد که $\partial\Delta$ را در پاره خطی از اضلاع Δ قطع می‌کند؛ آنگاه برای یک $\alpha\in G$ خاص، بستار $(\Delta-\Delta_0)\cup\Delta_0\alpha$ که از Δ به وسیلهٔ برداشتن Δ_0 و جایگزین کردن آن به وسیلهٔ $\Delta_0\alpha$ به‌دست آمده، ناحیهٔ اصلی دیگر Δ' خواهد بود. بدون ارایهٔ برهان (که بعداً ارایه می‌شود) برخی ناحیه‌های اصلی برای گروههای فوخسین را که در واقع ناحیه‌های دیریکله هستند برای انتخاب مناسب نقطهٔ P توصیف می‌کنیم.

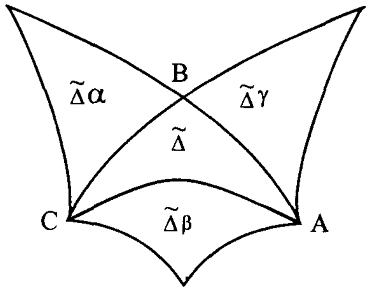


مثال ۱. گروه پیمانه‌ای G که در جبر، آنالیز، و نظریه اعداد مطرح می‌شود را می‌توان به عنوان گروه G تولید شده به وسیلهٔ یک عضو بیضوی α از مرتبهٔ ۲ با نقطهٔ ثابت i و یک عضو بیضوی β از مرتبهٔ ۳ با نقطهٔ ثابت $\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ توصیف کرد. (حاصلضرب آنها $\gamma=\alpha\beta$ نگاشت $\gamma: z \longrightarrow z+1$ است) اگر $P=iy$ با $y>1$، ناحیهٔ دیریکلهٔ حاصل شبیه شکل نشان داده شده است یعنی، یک مثلث به طور نامتناهی ممتد با رأسهای ω، ω^2 و ∞.

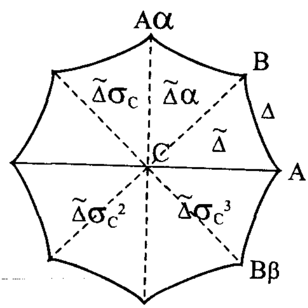


مثال ۲. یک گروه مثلث. فرض کنید $\tilde{\Delta}$ ناحیهٔ محصور شده به وسیلهٔ یک مثلث ABC با زوایای داخلی $\frac{2\pi}{a}$، $\frac{2\pi}{b}$، $\frac{2\pi}{c}$ در رأسهای A، B، C باشد. می‌دانیم که چنین مثلثی وجود دارد هرگاه a، b و c اعداد صحیح مثبتی باشند که $1 > \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$. فرض کنید α، β و γ انعکاسهایی نسبت به سه ضلع مقابل به A، B، C باشند و $\tilde{G}$ زیر گروه $\tilde{H}$ تولید شده به وسیلهٔ α، β، γ باشد. شبیه حالت اقلیدسی می‌دانیم که $\tilde{G}$ ناحیهٔ اصلی $\tilde{\Delta}$ را دارد از این رو یک زیر گروه ناپیوسته از $\tilde{H}$ است و $\tilde{G}$ دارای نمایش زیر است

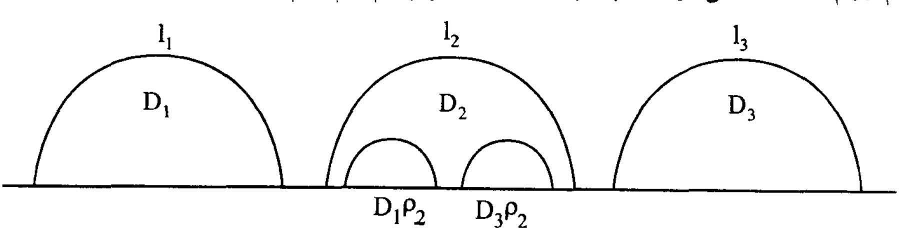
$$\tilde{G} = <\alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = (\beta\gamma)^a = (\gamma\alpha)^b = (\alpha\beta)^c = 1>$$



فرض کنید $\sigma_A=\beta\gamma$ ، $\sigma_B=\gamma\alpha$ و $\sigma_C=\alpha\beta$ اعضای بیضوی از مرتبه‌های a ، b و c با نقاط ثابت A ، B و C باشند. آنگاه $G=\tilde{G}^+$ به وسیلهٔ σ_A ، σ_B و σ_C تولید می‌شود و نمایشی به صورت $G=<\sigma_A,\sigma_B,\sigma_C:\sigma_A{}^a=\sigma_B{}^b=\sigma_C{}^c=\sigma_A\sigma_B\sigma_C=۱>$ دارد. حال G یک زیر گروه ناپیوسته از H است از این رو یک گروه فوخسین است و بنابه اصل کلی می‌دانیم که اجتماع $\tilde{\Delta}$ و نسخهٔ مجاور $\tilde{\Delta}$ مثلاً $\Delta=\tilde{\Delta}\cup\tilde{\Delta}\alpha$ ، یک ناحیهٔ اصلی برای G است. این موضوع در شکل نشان داده شده است که c=۴ را اختیار کرده‌ایم. آنگاه چنان که نشان داده شده خوشه‌ای از چهار نسخهٔ Δ حول رأس C وجود دارد و خوشه‌هایی از وجوه a (که نشان داده نشده) حول هر نگاره از A و وجوه b حول هر نگاره از B وجود دارند.



مثال ۳: یک گروه شوتکی. فرض کنید l_1 ، l_2 و l_3 دایره عمود بر **R** باشند که نیم قرصهای باز D_1 ، D_2 و D_3 که به وسیلهٔ آنها (و پاره خطهایی از **R**) محصور می‌شوند مجزا هستند. فرض کنید ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 سه انعکاس در $\tilde{H}$ نسبت به خطهای هذلولوی l_1 ، l_2 و l_3 باشند.



فرض کنید $\tilde{G}$ زیر گروه $\tilde{H}$ تولید شده به وسیلهٔ ρ_1، ρ_2 و ρ_3 باشد می‌توان نشان داد که $\tilde{G}$ دارای ناحیهٔ اصلی $\tilde{\Delta}=H-(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ و یک نمایش $G=<\rho_1,\rho_2,\rho_3:\rho_1^2=\rho_2^2=\rho_3^2=1>$ است.

فرض کنید $G=\tilde{G}^+$ به وسیلهٔ $\alpha_1=\rho_1\rho_2$ ، $\alpha_2=\rho_2\rho_3$ و $\alpha_3=\rho_3\rho_1$ تولید شود: چون $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$، G در واقع به وسیلهٔ α_1، α_2 و α_3 تولید می‌شود. می‌توان نتیجه‌گیری کرد که گروه فوخسین G دارای ناحیهٔ اصلی $\Delta=\tilde{\Delta}\cup\tilde{\Delta}\rho_2=H-(D_1 \cup D_3 \cup D_1\rho_2 \cup D_3\rho_2)$، و یک نمایش $G=<\alpha_1,\alpha_2:\phi>$ بدون رابطه‌های معرف است، یعنی G یک گروه آزاد با پایه $\{\alpha_1,\alpha_3\}$ است.

۲. هندسه ناحیهٔ اصلی

فرض می‌کنیم که Δ یک ناحیه دیریکله برای یک گروه فوخسین G باشد و نشان می‌دهیم که Δ در معنای مناسب یک ناحیه چند ضلعی است یعنی مرز آن یک چند ضلعی بسته یا اجتماعی از کمانهای چند ضلعی (احتمالاً با تعداد نامتناهی ضلع) واصل نقاط $\mathbf{R}$ است.

یک زیر مجموعه U از H محدب است اگر وقتی دو نقطهٔ P و Q در H باشند آنگاه پاره خط $[P,Q]$ واصل آنها در H قرار گیرد.

قضیه: Δ بسته و محدب است.

برهان: بنا به تعریف، Δ اشتراک نیم فضاهای بسته $H\alpha=\{Q:d(Q,P)\leq d(Q,P\alpha)\}$ است. برای همهٔ اعضای نابدیهی α در G . دیده‌ایم که $\partial H\alpha$ مرز $H\alpha$ مکان هندسی Q که $d(Q,P)=d(Q,P\alpha)$ یک خط هذلولوی l_α است. در نتیجه هر $H\alpha$ بسته و محدب می‌باشد که از آنجا اشتراک آنها Δ نیز بسته و محدب است. □

برای قضیهٔ بعد به لم زیر احتیاج داریم.

لم. اگر D قرصی در H باشد آنگاه تنها تعداد متناهی $\Delta\alpha$ اشتراک ناتهی با Δ دارند.

برهان: چون هر قرص D در قرصی بزرگتر با مرکز هذلولوی P قرار دارد کافی است این مطلب را برای D یک قرص به مرکز P ثابت کنیم. فرض کنید D دارای شعاع $r>0$ است. اگر $Q\in D\cap\Delta\alpha$ آنگاه $d(Q,P\alpha)\leq d(Q,P)<r$ که در نتیجه $d(P,P\alpha)\leq d(P,Q)+d(Q,P\alpha)<2r$. بنا به ناپیوستگی این تنها برای تعداد متناهی $\Delta\alpha$ امکان‌پذیر است. □

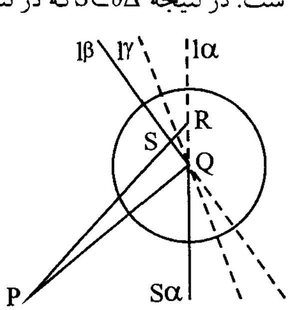
تعریف: یک فاصله متناهی از یک خط l پاره خط $[P,Q]$ است برای P و Q روی l؛ آن تباهیده

است اگر $P=Q$ که در نتیجه $[P,Q]=\{P\}$. یک **فاصله نامتناهی** از l یا یک **فاصلهٔ نامتناهی دوگانه** است مثلاً خود l یا یک فاصلهٔ نامتناهی ساده است مثلاً یکی از دو مؤلفه $l-\{P\}$ برای نقطه‌ای مانند P روی l . **نقاط انتهای** یک فاصلهٔ s نقاط انتهای بستار آن $\overline{s}$ در $\overline{H}=H\cup R^{*}$ هستند؛ یک نقطهٔ انتهایی **متناهی** است اگر آن در H باشد و نامتناهی است اگر در $\mathbf{R}^{*}$ واقع باشد.

قضیه: $\partial\Delta$ مرز Δ اجتماعی (احتمالاً تعداد نامتناهی) فاصله‌های ناتباهیدهٔ s است. این فاصله‌ها حداکثر در نقاط انتهایی مشترک تلاقی می‌کنند و چنین نقطهٔ انتهایی حداکثر به دو فاصله تعلق دارد، و هر نقطهٔ انتهایی متناهی دقیقاً متعلق به دو فاصله است.

برهان: فرض کنید $Q\in\partial\Delta$. آنگاه هر قرص D به مرکز Q شامل نقاط R غیر واقع در Δ است از این رو در برخی $\Delta\alpha$ ها به‌ازای $\alpha\neq 1$ واقع است. چون $Q\in\Delta$ ، $R\in\Delta\alpha$ مکان هندسی l_α از نقاط همفاصله از P و $P\alpha$ که می‌دانیم باید یک خط باشد $[Q,R]$ را قطع می‌کند، لذا باید D را قطع کند. چون تنها تعدادی متناهی از چنین l_α ها می‌توانند D را قطع کنند، با کوچکتر گرفتن D می‌توانیم فرض کنیم که مجموعهٔ متناهی شامل l_α ها که D را قطع می‌کند همگی از Q می‌گذرند. لذا Q در $s_\alpha=l_\alpha\cap\Delta$ است زیرا که یک زیر مجموعهٔ محدب از l_α باید یک فاصله احتمالاً تباهیده باشد. نشان داده‌ایم که $\partial\Delta$ اجتماع فاصله‌های $s_\alpha=l_\alpha\cap\Delta$ احتمالاً تباهیده است.

حال فرض می‌کنیم که Q یک نقطهٔ انتهایی از s_α است. آنگاه D شامل نقاط R روی l_α است «آن طرف Q» یعنی غیر واقع بر s_α . فرض کنید l_β از میان l_β ها آن یکی باشد که از Q می‌گذرد و غیر از l_α است که نزدیکترین به P می‌باشد. برای R به اندازهٔ کافی نزدیک به Q ، $[P,R]$ خط l_β را در نقطهٔ S داخل D قطع می‌کند. حال $[P,S]$ هیچ $l_\delta\neq l_\beta$ دیگری را قطع نمی‌کند زیرا در این صورت l_δ قطعاً $[P,Q]$ یا $[Q,S]$ را در نقطه‌ای غیر از Q قطع خواهد کرد که در هر صورت متناقض با فرض ماست. در نتیجه $S\in\partial\Delta$ که در نتیجه $[S,Q]\subseteq\Delta\cap l_\beta=s_\beta$.



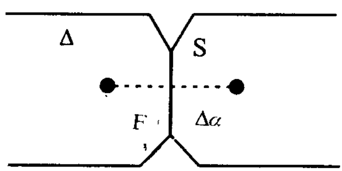
بدون این فرض که s_α ناتباهیده بوده است نشان داده‌ایم نقطهٔ انتهایی Q از s_β نیز یک نقطهٔ انتهایی از فاصله ناتباهیدهٔ s_β است. حال تکرار همین استدلال با s_β بجای s_α نشان می‌دهد که

نقطهٔ انتهایی s_β نیز نقطهٔ انتهایی فاصلهٔ ناتباهیدهٔ دیگر s_α است. حال از محدب بودن Δ نتیجه می‌شود هر l_γ سوم گذرندهٔ از Q می‌تواند Δ را تنها در فاصلهٔ تباهیدهٔ $s_\gamma=\{Q\}$ قطع کند. □

اضلاع Δ فاصله‌های ناتباهیدهٔ سازندهٔ $\partial\Delta$ هستند. یک ضلع به صورت $s=\Delta\cap\Delta\alpha$، $\alpha\neq 1$ است. **رأسهای متناهی** P در H نقاط انتهایی اضلاع هستند. اگر یک ضلع s یک فاصله نامتناهی باشد بستار آن در $\overline{H}=H\cup\mathbf{R}^*$ یک یا دو رأس نامتناهی خواهد داشت یعنی نقاط روی $\mathbf{R}^*$. هر چند Δ یک زیر مجموعهٔ بسته از H است آن نمی‌تواند در $\overline{H}$ باشد و $\overline{\Delta}$ را برای بستار آن در $\overline{H}$ می‌نویسیم؛ حال $\overline{\Delta}$ ممکن است **اضلاع در بینهایت** داشته باشد. یعنی فاصله‌هایی از $\mathbf{R}^*$ که اضلاع Δ نیستند.

با حفظ نظرگاه هندسی حال به طور ضمنی توجهمان را به حالتی محدود می‌کنیم که $\overline{\Delta}$ تنها تعدادی متناهی ضلع دارد. با این فرض همچنین فرض کنید که $\partial\overline{\Delta}$ یک چند ضلعی بستهٔ ساده است. این مطلب هرگاه Δ فشرده باشد همواره درست است، یعنی هرگاه Δ در یک قرص قرار گیرد. حال اجازه می‌دهیم Δ رأسهایی در $\mathbf{R}^*$ داشته باشد و اضلاعی در $\mathbf{R}^*$ نداشته باشد؛ یعنی احتیاج داریم که همهٔ اضلاع پاره خطهایی از خطهای هذلولوی باشند. اگر V هر رأس نامتناهی باشد وقتی $\partial\overline{\Delta}$ را در جهت مثبت طی کنیم یک ضلع در V خاتمه می‌یابد و دیگری یعنی s' در V شروع می‌شود؛ چون s و s' پاره‌خطهایی از خطهای هذلولوی هستند، هر دو آنها در V بر $\mathbf{R}^*$ عمودند و لذا در یک زاویهٔ داخلی از O تلاقی می‌کنند. در نتیجه Δ مساحتی متناهی دارد. سرانجام هرگاه $\overline{\Delta}$ اضلاعی در بینهایت داشته باشد ساده است ببینیم که Δ مساحت نامتناهی دارد.

قبل از خاتمه دادن به بحثمان دربارهٔ هندسهٔ Δ مایلیم که تعدیلی جزیی اما مناسب در تعریفهایمان انجام دهیم. فرض کنید که α یک عضو بیضوی G از مرتبهٔ $n\geq 3$ است. فرض کنید F نقطهٔ ثابت α و D هر قرصی به مرکز F باشد؛ آنگاه برای هر نقطه Q از D که $Q\neq V$، n نگارهٔ $Q\alpha^k$ باید نقاط متمایزی از D باشند. در نتیجه F باید رأسی از بعضی $\Delta\beta$ ها باشد. هرگاه یک عضو بیضوی α از G با مرتبهٔ $n=2$ نقطهٔ F را ثابت نگاه دارد همین استدلال نشان می‌دهد که F باید روی ضلعی از بعضی $\Delta\beta$ ها واقع باشد، اما لزومی ندارد F یک رأس باشد. ما تعریفهایمان را چنان تعدیل می‌کنیم که این نقاط F را نیز به عنوان رأس به حساب می‌آوریم.



به زبان دقیقتر فرض کنید s ضلعی از Δ باشد چنان که در بالا ساخته شده است، بین Δ و $\Delta\alpha$ که $\alpha^2=1$. آنگاه α با جابه جا کردن Δ و $\Delta\alpha$ باید s را به خود بنگارد، که در ضمن F نقطهٔ میانی s را ثابت نگاه می‌دارد. حال Δ را با به حساب آوردن هر چنین نقطهٔ F به عنوان یک رأس تعدیل می‌کنیم؛ لذا ضلع s به وسیلهٔ دو ضلع جایگزین می‌شود یعنی دو پاره خطی که F ضلع s را تقسیم می‌کند.

با این تعریف هر ضلع s به صورت $s=\Delta\cap\Delta\alpha$ است مگر این که $\alpha^2=1$، و هر گاه $\alpha^2=1$، $\Delta\cap\Delta\alpha$ برابر با اجتماع $s\cup s\alpha$ است که متشکل از دو ضلع s و $s\alpha$ می‌باشد.

از این پس فرض می‌کنیم که Δ به این طریق تعدیل شده است.

۳. گریز: اعضای مرتبهٔ متناهی

هر عضو نابدیهی مرتبهٔ متناهی در M^+ باید بیضوی باشد. به عکس یک عضو بیضوی یک گروه فوخسین G باید دارای مرتبهٔ متناهی باشد: هرگاه عضو بیضوی $\alpha\in G$ نقطهٔ V را ثابت نگاه دارد و $Q\neq V$ در یک قرص D در V واقع شود، $Q\alpha^k$ ها برای α^k های متمایز، متمایز هستند که در نتیجه α باید مرتبه متناهی داشته باشد.

فرض کنید Δ تعداد متناهی رأس متناهی V دارد. در نتیجه گروه G_V متشکل از اعضای ثابت نگاه دارندهٔ V متناهی است که بنابراین جمعاً تنها تعدادی متناهی عضو وجود دارند که رأسی از Δ را ثابت نگاه می‌دارند. حال فرض کنید α هر عضو نابدیهی از G با مرتبهٔ متناهی باشد. آنگاه α عضوی بیضوی با نقطهٔ ثابت رأسی از $\Delta\beta$ است و مزدوج آن $\alpha^{\beta^{-1}}$ رأسی از Δ را ثابت نگاه می‌دارد. این مطلب قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند.

قضیه. اگر G یک گروه فوخسین دارای یک ناحیهٔ اصلی Δ با تعدادی متناهی رأس متناهی باشد به خصوص هر گاه D فشرده باشد آنگاه تنها تعداد متناهی ردهٔ زوجیت اعضای مرتبهٔ متناهی در G وجود دارند.

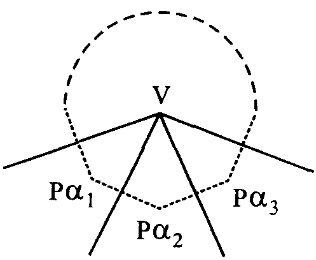
به همین ترتیب می‌توان نشان داد البته با کمی زحمت بیشتر که اگر V یک رأس نامتناهی از Δ باشد که دو ضلع s و $s\alpha$ در آن تلاقی می‌کنند، آنگاه α عضوی سهموی با نقطه ثابت V است، و اینکه همه اعضای سهموی G مزدوج با اعضای ثابت نگاه دارندهٔ یک چنین رأس نامتناهی از Δ است. اگر Δ فقط تعدادی متناهی ضلع داشته باشد، نتیجه‌گیری می‌کنیم که G فقط شامل تعدادی متناهی از رده‌های زوجیت زیرگروههای سهموی بیشینه است.

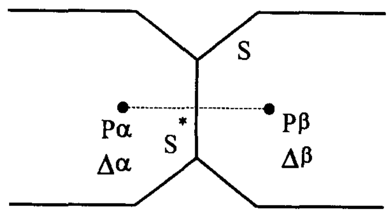
۴. قالب‌بندی کیلی

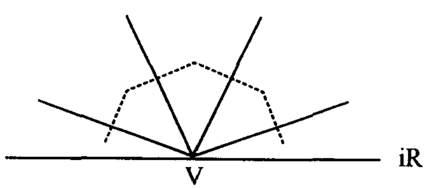
اگر Δ یک ناحیه دیریکله برای یک گروه فوخسین G باشد، آنگاه $\Delta\alpha$ ها به ازای $\alpha\in G$ که وجوه

یک قالب‌بندی T از H هستند و **شبکه‌بندی دیریکلهٔ** H نام دارد. وجه‌های $\Delta\alpha$ همگی قابل انطباق می‌باشند اما به طور معمول ناحیه‌های چندضلعی منتظم نیستند. در واقع اگر همهٔ رأسهای Δ در H قرار گیرند آنگاه وجه‌ها به وسیلهٔ چند ضلعیهای بستهٔ ساده محصور می‌شوند؛ در غیر این صورت بستار یک وجه در $\overline{H}=H\cup\mathbf{R}^*$ یک ناحیهٔ چند ضلعی در $\overline{H}$ احتمالاً با تعداد نامتناهی ضلع است.

یک قالب‌بندی کیلی T^* دوگان T را تعریف می‌کنیم که استخوانبندی یک بعدی آن (مجموعهٔ یالها و رأسها) یک نمودار کیلی در معنای متعارف باشد. برای رأسهای T^* همهٔ نگاره‌های $P\alpha$ با $\alpha\in G$ و P نقطهٔ مبنای ناحیهٔ دیریکلهٔ Δ را اختیار می‌کنیم. اگر s یک ضلع باشد یعنی یک یال در T و $s\subseteq\Delta\alpha\cap\Delta\beta$، $\alpha\neq\beta$، یک یال s^* در T^* و اصل $P\alpha$ و $P\beta$ و قاطع s را اختیار می‌کنیم؛ این یالهای s^* را می‌توان مجزا، به جز در نقاط انتهایی آنها انتخاب کرد. این نمودار کیلی در H را تعریف می‌کند و وجوه T^* مؤلفه‌های متمم هستند. اگر V یک رأس T باشد آنگاه یالهای s^* از T^* برای همهٔ اضلاع s از T مؤلفه‌های متمم هستند. اگر V یک رأس T باشد آنگاه یالهای s^* از T^* برای همهٔ اضلاع s از T در V، مرز ∂V^* از یک ناحیهٔ V^* شامل V را تشکیل می‌دهند؛ آنگاه V^* یک وجه از T^* است و همهٔ وجوه T^* به این شکل هستند. (اگر $V\in H$ آنگاه ∂V^* یک چند ضلعی بستهٔ ساده است. اگر $V\in\mathbf{R}^*$ آنگاه ∂V^* یک مسیر چند ضلعی نامتناهی است که همراه با پاره خطی از $\mathbf{R}^*$ بستار V^* در $\overline{H}$ را محصور می‌کند).







فرض کنید S مجموعهٔ اضلاع Δ باشد. اگر $t\in S$ آنگاه $t\subseteq\Delta\cap\Delta\alpha$ برای $\alpha\neq 1$ یکتا در G و یک نگاشت $\phi:S\longrightarrow G$ را با قرار دادن $t\phi=\alpha$ تعریف می‌کنیم. حال $t\alpha^{-1}\subseteq\Delta\alpha^{-1}\cap\Delta$ که در نتیجه $\overline{t}=t\alpha^{-1}\in S$ و $\overline{t}\phi=\alpha^{-1}$. یک نگاشت $\eta:S\longrightarrow S$ را با قرار دادن $t\eta=\overline{t}=t(t\phi)^{-1}$ تعریف می‌کنیم. به روشنی η یک برگشت بدون نقاط ثابت است: $\overline{\overline{t}}=t$ و $t\neq\overline{t}$ حتی اگر $\alpha=\alpha^{-1}$.

اگر F یک گروه آزاد با پایه S باشد آنگاه ϕ به طور یکتا به یک همریختی $\phi:F\longrightarrow G$ توسیع می‌یابد. حال نشان می‌دهیم که ϕ گروه آزاد F را بر روی G می‌نگارد و از این مطلب، نمایشی به صورت $G=\langle S:R\rangle$ به دست می‌آید.

ما نگاشت $\phi:S\longrightarrow G$ را برای تعریف یک نگاشت از مسیرهایی در T^* به G به کار می‌بریم که آن را نیز با ϕ نمایش می‌دهیم. اگر s^* یالی از T^* باشد آنگاه $s=t\alpha$ برای $\alpha\in G$ و $t\in S$ یکتا و تعریف می‌کنیم $s^*\phi=t\phi$. هرگاه $p=s_1^*...s_n^*$ مسیری در T^* باشد تعریف می‌کنیم $p\phi=(s_n^*\phi)...(s_1^*\phi)$؛ به معکوس شدن ترتیب عوامل توجه کنید: به ازای $0\leq k\leq n$ می‌نویسیم $p_k=s_1^*...s_k^*$ و $\alpha_k=p_k\phi$ که p از α_0 شروع می‌شود. به طور استقرایی فرض کنید برای $k<n$ که $\alpha_k=\alpha_0(p_k\phi)$ و p_k از α_0 به α_k می‌رود. حال، $s_{k+1}\subseteq\Delta\alpha_k\cap\Delta\alpha_{k+1}$ نگارهٔ $t_{k+1}\alpha_k$ از ضلعی مانند $t_{k+1}\subseteq\Delta\cap\Delta\beta_k$ است که $\beta_k\alpha_k=\alpha_{k+1}$. چون $s_{k+1}^*\phi=t_{k+1}\phi=\beta_k$، $\alpha_{k+1}=(s_{k+1}^*\phi)\alpha_k=(s_{k+1}^*\phi)(p_k\phi)=p_{k+1}\phi$ ما اثبات استقرایی لم زیر را تکمیل کرده‌ایم.

لم. اگر p مسیری در T^* از $p\alpha_0$ به $p\alpha_n$ باشد آنگاه $\alpha_n=\alpha_0(p\phi)$ به خصوص p یک مسیر بسته است اگر و تنها اگر $p\phi=1$.

فرض کنید $t_1,...,t_n\in S$. تعبیر کردن **کلمهٔ** $w=t_1...t_n$ به معنای دنباله‌ای از t_i ها یا حاصلضربی از آنها در F کاری معمول است. (این ابهام شبیه استفاده از نمادگذاری $a_1+a_2+...$ به معنای سری نامتناهی با جملات a_i یا مجموع سری مزبور در صورت وجود است) برای دنبالهٔ w داده شده از t_1، ...، t_n و هر رأس $P\alpha_0$ از T^* روشن است که یک مسیر یکتای $p=s_n^*...s_1^*$ در α_0 متعلق به T^* وجود دارد که همهٔ $s_i^*\phi=t_i$ و لذا $p\phi=(t_1...t_n)\phi=w\phi$. این مسیر p را به وسیلهٔ $p(w)$ نمایش می‌دهیم. در اینجا لم زیر را نشان داده‌ایم.

لم. برای هر w در F، w در هستهٔ N از نگاشت $\phi:F\longrightarrow G$ قرار دارد یعنی $w\phi=1$ اگر و تنها اگر $w(p)$ یک مسیر بسته باشد (برای همهٔ $P\alpha_0$ ها).

۵. نمایش پوآنکاره

حال یک نمایش $G=\langle S:R\rangle$ را در نظر می‌گیریم که می‌توان مستقیماً از خواص ترکیبی قالب‌بندی T به دست آورد.

گزاره. ϕ گروه آزاد F را بر روی G می‌نگارد.

برهان: باید نشان دهیم $S\phi$ گروه G را تولید می‌کند. فرض کنید $\alpha \in G$. اگر p مسیری در T^* از P به $P\alpha$ باشد آنگاه بنابه مطالب بالا $p\phi=\alpha$ و α حاصلضربی از عوامل $S\phi$ است. کافی است بدانیم که یک چنین مسیر p وجود دارد. این مطلب هم‌ارز با دانستن این است که T^* همبند است، در این معنا که هر جفت از رئوس واقع در T^* به وسیلهٔ مسیری همبند در T^* وصل می‌شوند. این مطلب را بدیهی تلقی می‌کنیم. (اثباتی در مورد T به عوض T^* قبلاً ارائه شده بود). □

باقی می‌ماند یک زیر مجموعهٔ R از F را بیابیم که بستار نرمال آن برابر با N یعنی هستهٔ ϕ باشد. آنگاه نمایش $G=\langle S:R\rangle$ را خواهیم داشت.

اعضای R دو نوع خواهند بود برای نوع اول فرض کنید $t\in S$. آنگاه $p=t^*(\overline{t}^*(t\phi))$ یک مسیر بسته است و در واقع ماهیتی نسبتاً بدیهی دارد: آن یک U− برگشت است، متشکل از یال t^* که ابتدا در یک جهت ادامه یافته و سپس دوباره در جهت مخالف برگشته است. در واقع $w(p)=t\overline{t}$، $(w(p))\phi=p\phi=۱$. تعریف می‌کنیم $R_۱$ مجموعهٔ همهٔ کلمات $t\overline{t}$ باشد برای $t\in S$. (مجموعهٔ $S\phi$ قطعاً غیر ضروری است زیرا آن همراه با هر مولد $x=t\phi$ شامل $x^{-۱}=\overline{t}\phi$ نیز هست؛ رابطه‌های موجود در $R_۱$ به وسیلهٔ ارایهٔ رابطه‌های $(t\phi)^{-۱}=\overline{t}\phi$ جبران می‌شوند).

دومین نوع رابطه‌ها به رأسهایی از Δ منسوب می‌شوند که در H قرار می‌گیرند. فرض کنید V یک چنین رأسی باشد و V^* وجه متناظر از T^* شامل رأس V باشد. اگر P_V مسیر بسته در P باشد که یکبار حول ∂V^* در جهت مثبت گردش می‌کند. آنگاه $(w(P_V))\phi=P_V\phi=۱$. تعریف می‌کنیم که $R_۲$ مجموعه همهٔ کلمات $w(P_V)$ برای رأسهای V از Δ است.

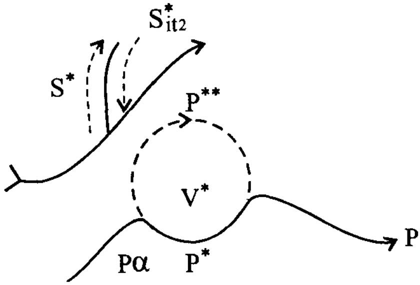
قضیه: G دارای نمایش $G=\langle S:R_۱ \cup R_۲\rangle$ است.

برهان: $R=R_۱\cup R_۲\subseteq N$ را انتخاب کرده‌ایم و باقی می‌ماند که نشان دهیم N بستار نرمال R است که به وسیلهٔ همهٔ (توانهای) مزدوجهای اعضای R تولید می‌شود. برای این منظور فرض کنید w یک کلمه (نمایش دهندهٔ یک عضو) در N باشد و فرض کنید p یک مسیر بسته در T^* است $w=w(p)$. نشان خواهیم داد چگونه p را تغییر دهیم تا w متناظر به وسیلهٔ ضرب با مزدوج یک عضو R تغییر یابد و چگونه با یک توالی از چنین تغییراتی، p را می‌توان به یک مسیر بدیهی در یک نقطه تحویل کرد و لذا w را به عضو بدیهی ۱ از F رساند.

ابتدا فرض کنید β شامل یک U− برگشت است یعنی برای مسیرهایی مانند p'، p'' و $p=p'up''$ که $u=s_i^*s_{i+۱}^*$ و $s_i=t\alpha_i$، $s_{i+۱}=\overline{t}\alpha_{i+۱}$ برای $t\in S$ آنگاه $w=w(p'')(t\overline{t})w(p')=w(p'p'')(t\overline{t})^{w(p')}$. چون $(t\overline{t})^{w(p')}$ یک مزدوج از یک عضو $R_۱$

است می‌توانیم p را به وسیلهٔ $p'p''$ جایگزین کنیم. لذا، در تغییر دادن p آزادیم که $U-$ برگشتها را به دلخواه حذف (یا اضافه) کنیم.

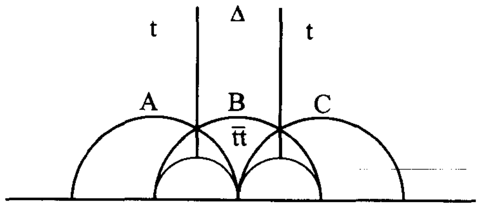
حال فرض می‌کنیم یک پاره خط p_* از $p=p'p_*p''$ کمانی است که در یک نقطهٔ $P\alpha$ از ∂V^* از طول $n\geq 0$ شروع می‌شود. (اگر $n=0$، p_* به نقطهٔ $P\alpha$ تحویل می‌یابد). حال مسیر حول



∂V^* در $P\alpha$ در یکی از دو جهت به صورت $p_V=p_*p_{**}^{-1}$ است. حال $V=V_1\gamma$ برای V_1 از Δ و $\gamma\in G$ و از آنجا $w(p_V)=(w(p_{V_1})^u)^{\pm 1}$ مزدوج یک عضو R_2 است که $u\in F$ با $u\phi=\gamma$. در می‌یابیم که $w(p)w(p_V)^{w(p')}=w(p'p_{**}p'')$. لذا مجازیم که p را به وسیلهٔ جایگزین کردن کمان p_* که در یک طرف V^* پیرامون مرز V^* را طی می‌کند و با جایگزین کردن کمان متمم p_{**} که در طرف دیگر V^* پیرامون مرز V^* را طی می‌کند تغییر دهیم.

قبلاً متذکر شدیم که به طور شهودی نسبتاً واضح است که با ایجاد تغییراتی از نوع بالا مسیر بستهٔ p را می‌توان به یک نقطهٔ تحویل کرد. به کمک استقرایی نسبتاً واضح یعنی برداشتن طوقه‌های بستهٔ ساده اثبات به این حالت که p یک مسیر بسته ساده است تقلیل می‌یابد. به کمک یک استقرا دیگر روی تعداد وجه‌های V^* احاطه شده به وسیلهٔ p می‌توانیم به طور متوالی p را به وسیلهٔ طی کردن طرف دیگر V^* احاطه شده به وسیلهٔ p تغییر داد و لذا p را به یک نقطه تحویل کرد. □

مثال: فرض کنید G گروه پیمانه‌ای با ناحیهٔ اصلی Δ مطابق قبل باشد. آنگاه Δ چنان که نشان داده شده دارای رأسهای A، B، C و ∞ است. (توجه کنید نقطه ثابت یک عضو بیضوی از مرتبهٔ ۲ است) چهار ضلع t_1، $\overline{t_1}$، t_2 و $\overline{t_2}$ چنان که نشان داده شده وجود دارند و $S=\{t_1,\overline{t_1},t_2,\overline{t_2}\}$. چنان که قبلاً متذکر شدیم می‌توانیم روابط رأس را از R_1 که $\overline{t_1}=t_1^{-1}$ و $\overline{t_2}=t_2^{-1}$ بکار ببریم تا مولدهای $\overline{t_1}$ و $\overline{t_2}$ را حذف کنیم و S را به وسیلهٔ $S'=\{t_1,t_2\}$ جایگزین کنیم. رابطهٔ رأس در R_2 در B به دست می‌دهد $t_2^2=1$. رابطه رأس در A عبارت است از $(t_1t_2)^3=1$ و رابطهٔ رأس در C به صورت $(t_1t_2)^3=1$ است. به روشنی رابطه سوم زاید است، و نمایش



$G=<t_1,t_2:t_2^2=1,(t_1t_2)^3=1>$ را به دست می‌آوریم. انتقال به مولدهای $a=t_2$ و $b=t_1t_2$ به دست می‌دهد $G=<a,b,a^2=1,b^3=1>$ که از آنجا $G \simeq C_2*C_3$ حاصلضرب مستقیم یک گروه از مرتبه ۲ با یک گروه از مرتبهٔ ۳ است.

۶. توصیف ترکیبی نمایش

در بحثهای بالا مضمون است که نمایش پوآنکاره از اطلاعات بسیار محدودی دربارهٔ Δ قابل حصول است. حال این مطلب را به طور صریح مطرح می‌کنیم.

قبلاً برگشت $\eta:S \longrightarrow S$ را به کار بردیم که اگر $t\subseteq \Delta \cap \Delta\alpha$ آنگاه $t\eta=t\alpha^{-1}$. یک تابع دیگر θ را با قرار دادن $t'=t\theta$ تعریف می‌کنیم در صورتی که t' در رأس V در جایی شروع شود که t خاتمه می‌یابد، وقتی $\partial\Delta$ در جهت مثبت پیموده می‌شود. اگر $\partial\Delta$ یک چند ضلعی باشد آنگاه θ شبیه η یک جایگشت از S است؛ به طور کلیتر آن تنها ممکن است تابع تعریف شده‌ای روی یک زیر مجموعه از S باشد.

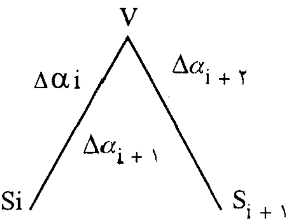
یک تابع سوم ω را با قرار دادن $t\omega$ برابر زاویهٔ داخلی Δ در V در حالتی که t در V خاتمه می‌یابد تعریف می‌کنیم.

نشان داده خواهد شد که این سه تابع برای مشخص کردن نمایش $G=<X:R>$ کافی است.

به روشنی S تعیین کنندهٔ $X=S$ است و برگشت η مجموعهٔ اعضای $x(x\eta)$ از R_1 را مشخص می‌کند.

حال رأس متناهی V را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta\alpha_1$، ...، $\Delta\alpha_n$ به ترتیب روی وجوه T در V باشند. فرض کنید $s_i=t_i\alpha_i$ یال بین $\Delta\alpha_i$ و $\Delta\alpha_{i+1}$ باشد. حال $t_i\eta=t_i\alpha^{-1}_{t_i}$ و دیده‌ایم $\alpha_{i+1}=\alpha_{t_i}\alpha_i$ که از آنجا $(t_i\eta)\alpha_{i+1}=t_i\alpha_i=s_i$. چون s_i روی $\partial\Delta\alpha_{i+1}$ به دنبال s_{i+1} می‌آید و $s_i=(t_i\eta)\alpha_{i+1}$، $s_{i+1}=t_{i+1}\alpha_{i+1}$ در نتیجه باید $t_i\eta$ روی $\partial\Delta$ به دنبال t_{i+1} بیاید. یعنی $t_i=t_{i+1}\theta\eta$. (متذکر می‌شویم چون V یک رأس متناهی است θ روی t_{i+1} تعریف می‌شود).

تعریف می‌کنیم $\sigma=\theta\eta$.



حال $w(p_{V,\alpha_n})=x_n\ldots x_1=t_n\ldots t_1$ که هر $t_i=t_{i+1}\sigma$ و $t_n=t_1\sigma$. می‌نویسیم $x_n=x$ و $w=w(p_{V,\alpha_n})=x(x\sigma)(x\sigma^2)\ldots(x\sigma^{n-1})$ در صورتی که $x\sigma^n=x$. اگر p کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $x\sigma^p=x$، ممکن است $p<n$ باشد؛ در این حالت p باید $n=pq$ را تقسیم کند، $q\geq 1$. اکنون x، $x\sigma$، $x\sigma^2$، ...، $x\sigma^{p-1}$ همگی متفاوت هستند و $x\sigma^p=x$؛ به زبان معمول جایگشتها (گرچه ممکن است σ جایگشتی از همهٔ S نباشد) مجموعهٔ به طور دوری مرتب $(x, x\sigma, \ldots, x\sigma^{p-1})$ یک دور از σ است.

به هر دور $C=(y_1,\ldots y_p)$ از σ کلمهٔ $w(c)=y_1\ldots y_p$ را نسبت می‌دهیم. در این نمادگذاری داریم $w=w(c)^q$. نشان دادن معکوس پذیری جهت این استدلال کاری سر راست است: اگر اعضای $x_i=t_i$ یک دور c از σ با طول p را تشکیل دهند آنگاه برای بعضی V، γ و q داریم $w(P_{V,\gamma})=w(c)^q$.

مجموع زوایا در رأس V برابر با 2π است و در نتیجه $\sum_{1}^{n}t_i\omega=2\pi$. اگر p و q شبیه بالا باشند، نتیجه می‌گیریم $q(t_1\omega+\ldots+t_p\omega)=2\pi$. برای دور $c=(t_1,\ldots,t_p)$ تعریف می‌کنیم $c\omega=t_1\omega+\ldots+t_p\omega$. آنگاه داریم $c\omega=\frac{2\pi}{q}$ برای بعضی اعداد صحیح $q\geq 1$. این مطلب $q=q(c)$ و لذا رابط $w(P_{V,\gamma})=w(c)^{q(c)}$ را مشخص می‌کند. این نتیجه را خلاصه می‌کنیم.

قضیه: برای $X=S$ با θ, η، ω و $\sigma=\theta\eta$ فرض کنید C مجموعه دورهای σ باشد. برای هر دور c در C فرض کنید $w(c)$ و $c\omega$ مطابق بالا تعریف شوند. آنگاه هر $c\omega=\frac{2\pi}{q}$ برای بعضی اعداد صحیح $q=q(c)\geq 1$. حال G دارای یک نمایش $G=\langle X:R_1\cup R_2\rangle$ است که R_1 شامل همهٔ کلمات $x(x\eta)$ و R_2 شامل همهٔ کلمات $w(c)^{q(c)}$ است.

۷. گروههای شامل انعکاسها

بحث قبل با تغییر جزیی G به یک زیر گروه ناپیوسته $\tilde{H}$ پرداخت. ناحیهٔ دیریکلهٔ Δ مطابق قبل ساخته می‌شود و مانند قبل تغییر می‌یابد تا در میان رأسهایش همهٔ نقاط ثابت واقع بر $\partial\Delta$ از اعضای بیضوی مرتبهٔ ۲ را شامل شود. اما این امکان باقی می‌ماند که $t=\Delta\cap\Delta\alpha$ وقتی α از مرتبهٔ ۲ است و عضو معکوس کنندهٔ جهت از G باشد؛ آنگاه چون α، t را به خود می‌نگارد و

یک عضو بیضوی معکوس کنندهٔ t نیست باید همهٔ نقاط t را ثابت نگاه دارد، از این رو باید انعکاس نسبت به خط l_α شامل t باشد. و این اثر را دارد که $t\eta=t$ و به عکس اگر t به وسیلهٔ η ثابت نگاه داشته شود آنگاه $t\phi$ انعکاس نسبت به خط شامل t است. حال عضو متناظر $t(t\eta)$ از R_1 رابطه $t^2=1$ را به دست می‌دهد. یافتن نمایش G مثل قبل انجام می‌گیرد.

زیر گروههای ناپیوسته $\tilde{H}$ به خودی خود نیز مورد توجه هستند و در بررسی گروههای فوخسین مفید می‌باشند چون بسیاری از گروههای فوخسین G به طور طبیعی به عنوان زیر گروههای حفظ کننده جهت $G=\tilde{G}^+$ یک زیر گروه ناپیوستهٔ $\tilde{G}$ از $\tilde{H}$ به دست می‌آیند و یک ناحیهٔ اصلی و نمایش برای G بسادگی از ناحیهٔ اصلی و نمایش برای $\tilde{G}$ به دست می‌آیند. این مطلب را در بخش ۹ با مثال روشن می‌کنیم.

۸. قضیهٔ چند ضلعی پوآنکاره

نمایشی برای یک گروه فوخسین G (یا یک زیر گروه ناپیوسته از $\tilde{H}$) را از اطلاعاتی خیلی محدود دربارهٔ یک ناحیه اصلی Δ به دست آوردیم. تابع θ به ما می‌گوید چگونه اضلاع Δ با هم در $\partial\Delta$ جور می‌شوند و تابع ω زوایای داخلی مثلثهای Δ را مشخص می‌کند، اینها حاوی اطلاعاتی هستند که می‌توان با شناختن Δ یافت. اما تعریف تابع η وابسته به عمل G بود؛ به طور صریح $t\eta=t\alpha^{-1}$ برای α یکتا در G که $t\subseteq\Delta\cap\Delta\alpha$. قضیهٔ چند ضلعی پوآنکاره می‌گوید که اگر هر ناحیهٔ چندضلعی Δ داشته باشیم همراه با یک تبدیل α_t در H (یا در $\tilde{H}$) برای هر ضلع t که $t\subseteq\Delta\cap\Delta\alpha_t$ و $c\omega$ ها مضراب 2π باشند آنگاه گروه G تولید شده به وسیلهٔ α_t یک گروه فوخسین (یا زیر گروه ناپیوسته از $\tilde{H}$) با ناحیهٔ اصلی Δ است.

قضیه: فرض کنید Δ یک ناحیهٔ چندضلعی باشد و فرض کنید
(۱) برای هر ضلع t از Δ، $\alpha_t\in\tilde{H}$ معینی وجود دارد که $t\subseteq\Delta\cap\Delta\alpha$. X، θ، ω، η و σ را مطابق قبل تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم که
(۲) برای هر دور c از σ، $c\omega=\frac{2\pi}{q}$ برای عدد صحیح $q\geq 1$.
آنگاه α_t یک گروه ناپیوسته G با ناحیهٔ اصلی Δ را تولید می‌کند.

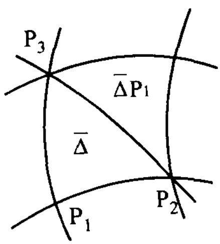
ما اثبات این قضیه را ارایه نمی‌دهیم هر چند ایده‌ها به قدر کافی ساده هستند، اثبات در بسیاری از حالات خاص ساده است، بحث کلی برای فرمولبندی بدون مدد گرفتن از ایده‌های توپولوژی ترکیبی قدری تدبیر لازم دارد. ایده اصلی آن است که (۱) به ما می‌گوید چگونه نسخه‌های قابل انطباق $\Delta\alpha$ از Δ را در امتداد اضلاع Δ جور کنیم و (۲) تضمین می‌کند که آنها در گوشه‌ها با هم جور می‌شوند. باید نشان دهیم که تکرار این فرآیند خانواده‌ای از $\Delta\alpha$ را به ما می‌دهد که متداخل نمی‌شوند و صفحهٔ هذلولوی را پر می‌کنند، اجمالاً یعنی یک قالب‌بندی از

H. یک روش متداول، ساختن یک قالب‌بندی کاملاً ترکیبی $\tilde{T}$ با نسخه‌هایی از Δ به عنوان وجوه است که به شیوهٔ معین شده‌ای در رأسها با هم جور می‌شوند و سپس توپولوژی را به کمک می‌گیرد تا نشان دهد که در واقع نگاشت واضح از $\tilde{T}$ به H یک به یک است.

۹. مثالها

این ایده‌ها را با چند مثال مهم به انضمام آنهایی که قبلاً مورد بحث قرار گرفتند نشان می‌دهیم.

گروههای مثلث. فرض کنید p_1، p_2 و p_3 سه عدد صحیح مثبت باشند که $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}<1$. آنگاه یک مثلث هذلولوی P_1، P_2، P_3 با زوایای $\frac{\pi}{p_1}$، $\frac{\pi}{p_2}$ و $\frac{\pi}{p_3}$ وجود دارد. فرض کنید $\tilde{\Delta}$ ناحیهٔ محصور شده به وسیلهٔ این مثلث با اضلاع t_1، t_2، t_3 مقابل به P_1، P_2، P_3 باشد. فرض کنید ρ_1، ρ_2، ρ_3 انعکاسهای نسبت به خطهای شامل این سه ضلع باشند. آنگاه $t_i=\tilde{\Delta}\cap\tilde{\Delta}\rho_i$. دورهای $\tilde{\Delta}$ عبارتند از (t_1,t_2) و (t_3,t_1) و $c=(t_2,t_3)$؛ برای $\omega=\frac{2\pi}{q}$ $q=p_1,p_2,p_3$. لذا بنا به قضیهٔ پوآنکاره Δ یک ناحیهٔ اصلی، برای زیر گروهی ناپیوسته مانند $\tilde{G}$ از $\tilde{H}$ با نمایشی به صورت $\tilde{G}=\langle\rho_1,\rho_2,\rho_3:\rho_1^2=\rho_2^2=\rho_3^2=(\rho_2\rho_3)^{p_1}=(\rho_3\rho_1)^{p_2}=(\rho_1\rho_2)^{p_3}=1\rangle$ است.



فرض کنید G گروه فوخسین $G=\tilde{G}^+$ تولید شده به وسیلهٔ $\alpha_1=\rho_2\rho_3$، $\alpha_2=\rho_3\rho_1$ و $\alpha_3=\rho_1\rho_2$ باشد. آنگاه G دارای یک ناحیهٔ اصلی $\Delta=\tilde{\Delta}\cup\tilde{\Delta}\rho_1$ است. فرض کنید Δ چنان که نشان داده شده دارای اضلاع $t_1=\Delta\cap\Delta\alpha_3$، $\overline{t}_1=\Delta\cap\Delta\alpha^{-1}_3$، $t_2=\Delta\cap\Delta\alpha_2$، $\overline{t}_2=\Delta\cap\Delta\alpha^{-1}_2$ باشد.

آنگاه رابطه‌های رأسها عبارتند از:

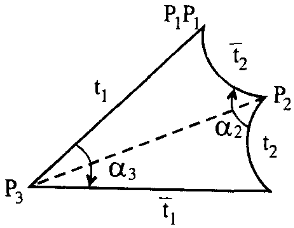
در P_1، $(\alpha_3\overline{\alpha}_2)^{p_1}=1$ ؛

در P_2، $\alpha_2^{p_2}=1$ ؛

در $P_1\rho_1$، $(\alpha_2\overline{\alpha}_3)^{p_1}=1$ ؛

در P_3، $\alpha_3^{p_3}=1$.

چنان که انتظار می‌رود رابطه‌ها در P_1 و $P_1\rho_1$ هم ارز هستند. با حذف یکی از آنها مستقیماً به وسیلهٔ روش پوآنکاره نمایش $G=\langle\alpha_2,\alpha_3:(\alpha_3\overline{\alpha}_2)^{p_1}=1$ و $\alpha_2^{p_2}=1$ و $\alpha_3^{p_3}=1\rangle$ را به دست می‌آوریم که تنها از نظر نمادگذاری با آنچه قبلاً به دست آوریم فرق دارد.



گروههای مثلث با رأسهایی در بینهایت. حال فرض کنید رأس $P_۳$ در بینهایت است که اکنون اضلاع $t_۲$ و $t_۳$ یکدیگر را به زاویهٔ ۰ قطع می‌کنند. آنگاه $\alpha_۳=\rho_۱\rho_۲$ یک عضو سهموی از مرتبهٔ بینهایت است و مطابق با قضیه‌های ما هیچ رابطهٔ $\alpha_۳^{p_۳}=۱$ با $p_۳\neq ۰$ وجود ندارد. نمایشی برای $\tilde{G}$ مثل قبل با رابطهٔ حذف شدهٔ $(\rho_۱\rho_۲)^{p_۳}=۱$ به دست می‌آوریم. برای گروه فوخسین G نمایش $G=<\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳:\alpha_۱^{p_۱}=\alpha_۲^{p_۲}=\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳=۱>$ را بـه دسـت مـی‌آوریم. حـذف $\alpha_۳$ بـه وسـیله یک تـبدیل تـیتسه یک نـمایش $G=<\alpha_۱,\alpha_۲:\alpha_۱^{p_۱}=\alpha_۲^{p_۲}=۱>$ را ارایـه مـی‌دهد کـه از آنـجا $G \simeq G_{p_۱}*G_{p_۲}$ حاصلضرب آزاد دو گروه دوری از مراتب $p_۱$ و $p_۲$ است.

اگر دو رأس مثلاً $P_۲$ و $P_۳$ در بینهایت باشند، آنگاه $G=<\alpha_۱,\alpha_۲:\alpha_۱^{p_۱}=۱>=G_{p_۱}*G_\infty$ حاصلضرب آزاد یک گروه دوری از مرتبهٔ $p_۱$ با یک گروه دوری نامتناهی را به دست می‌آوریم.

اگر هر سه رأس در بینهایت باشند

$$\tilde{G}=<\rho_۱,\rho_۲,\rho_۳:\rho_۱^۲=\rho_۲^۲=\rho_۳^۲=۱>=C_۲*C_۲*C_۲\ ,$$

و

$$G=<\alpha_۱,\alpha_۲:\phi>=C_\infty*C_\infty$$

یک گروه آزاد از رتبهٔ ۲ را به دست می‌آوریم.

گروههای شوتکی Schottky: فرض کنید $\tilde{\Delta}$ یک ناحیه در H باشد که به وسیلهٔ سه خط $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ نامتقاطع در H محصور می‌شود. اگر هر جفت از خطها در یک نقطه روی ∂H متقاطع باشند حالتی را داریم که در بالا در مورد یک مثلث با سه رأس در بینهایت بحث کردیم، اما در هر حال هیچ رابطهٔ رأسی نداریم که در نتیجه گروههای $\tilde{G}$ و G نمایشهای یکسانی شبیه حالت مـثلث دارند به خصوص G یک گروه آزاد از رتبهٔ ۲ است.

به طور کلیتر فرض کنید $\tilde{\Delta}$ به وسیلهٔ n خط $l_۱$،...، l_n که در H متقاطع نیستند محصور می‌شود می‌توانیم فرض کنیم آنها اجزایی در H متشکل از n دایرهٔ عمود بر R با درونهای مجزا هستند. آنگاه دقیقاً استدلال مشابه نشان می‌دهد که $\tilde{G}$ حاصلضرب آزاد n گروه از مرتبهٔ ۲ است و این که G گروه آزاد از رتبهٔ $n-۱$ است.

گروه پیمانه‌ای: ناحیهٔ اصلی معیار Δ برای این گروه G چنان که قبلاً توصیف شد به وسیلهٔ یک مثلث با یک رأس در بینهایت محصور می‌شود. استدلال بالا و چنان که دیده‌ایم کاربرد مستقیمی از قضیهٔ پوآنکاره نشان می‌دهد Δ ناحیه‌ای برای $G=<\alpha,\beta:\alpha^۲=\beta^۳=۱>$ است که α یک عضو

بیضوی از مرتبهٔ ۲ با نقطهٔ ثابت i و β یک عضو بیضوی از مرتبهٔ ۳ با نقطهٔ ثابت $\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ است.

این گروه در مباحث گوناگونی نظیر جبر، آنالیز و نظریهٔ اعداد ظاهر می‌شود. در اینجا طریقهٔ پایه‌ای را که این گروه در جبر مطرح می‌شود ارایه می‌دهیم.

فرض کنید A یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ ۲ باشد $A=<a_1,a_2:a_1a_2=a_2a_1>$ چنان که در گروههای آبلی متداول است عمل گروه را به جای ضرب، جمع در نظر می‌گیریم لذا $A=<a_1,a_2:a_1+a_2=a_2+a_1>$. می‌توان A را به عنوان گروه جمعی تولید شده به وسیلهٔ دو بردار به طور خطی مستقل a_1 و a_2 در صفحه در نظر گرفت. حال با استفادهٔ از جبر خطی یک نگاشت α از A به A به وسیلهٔ عمل آن روی مولدهای a_1، a_2 تعریف می‌شود و از این رو به وسیلهٔ یک ماتریس $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با مؤلفه‌های $a,b,c,d\in Z$ تعریف می‌شود. حال α وارونی دارد به همین صورت اگر دترمینان آن عضوی از Z باشد با معکوسی در Z یعنی $\det M=ad-bc=\pm 1$. لذا گروه همهٔ خودریختهای A را می‌توانیم با گروه همهٔ ماتریسهای $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $ad-bc=\pm 1$ که آن را با $GL(2,Z)$ نمایش می‌دهیم یکی بگیریم. شبیه ماتریسهای روی یک هیأت $SL(2,Z)$ را تعریف می‌کنیم که زیر گروه جهت نگهدار همهٔ این گونه ماتریسهای M با $\det M=+1$ باشد.

چون Z یک زیر گروه **R** است می‌توانیم $SL(2,Z)$ را با یک زیر گروه از $SL(2,Z)$ یکی بگیریم و از این رو $PSL(2,Z)$ را با زیر گروهی از $H=PSL(2,\mathbf{R})$ یکی بگیریم. لذا $PSL(2,Z)$ خارج قسمت $SL(2,Z)$ به وسیلهٔ مرکز آن است که متشکل از دو ماتریس I و $-I$ می‌باشد.

قضیه: $PSL(2,Z)$ به عنوان یک زیر گروه از H یک گروه پیمانه‌ای است.

برهان. مولدهای $\alpha:z\longmapsto -\frac{1}{z}$ و $\gamma=\alpha\beta:z\longmapsto z+1$ به وسیلهٔ ماتریسهای $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ داده می‌شوند. کافی است نشان دهیم $SL(2,Z)$ به وسیلهٔ A و C تولید می‌شود و $A^2=-I=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. به این دلیل فرض کنید $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، $a,b,c,d\in Z$ و $\det M=+1$.

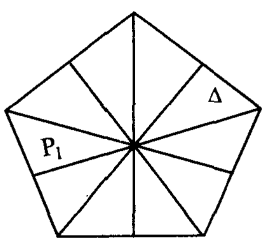
به وسیلهٔ استقرا روی $m(M)$، یعنی حداقل $|a|$، $|c|$ استدلال می‌کنیم. توجه

می‌کنیم که با جایگزین کردن M به وسیلهٔ $M'=AM=\begin{pmatrix} -c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ همیشه می‌توانیم فرض کنیم $|c|\leq|a|$. اگر $|c|=0$ آنگاه $c=0$ و $\det M=ad=1$ که از آنجا $a=d=\pm 1$ و $M=\pm\begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\pm C^{\pm b}$ و لذا اثبات کامل است.

فرض‌کنید $0<|c|\leq|a|$. آنگاه‌به‌ازای عددی‌مانند $q\in Z$، $a=qc+c'$ که $|c'|<|c|$. حال $M'=C^{-q}M=\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-qc & b-qd \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c' & b-qd \\ c & d \end{pmatrix}$ با $m(M')=|c'|<|c|$ و بنابه استقرا کار تمام است.

قالب‌بندیهای منتظم: یک ناحیهٔ چند ضلعی منتظم Π ناحیه‌ای در H است که به وسیلهٔ یک چند ضلعی متناهی ساده با اضلاع قابل انطباق و زوایای مساوی محصور می‌شود. یک **قالب‌بندی منتظم** T از نوع (p,q) قالب‌بندی است که در آن (قالبها) ناحیه‌های p− ضلعی منتظم قابل انطباق هستند با q تلاقی در هر رأس. قبلاً دیدیم که قالب‌بندیهای کره از نوع (p,q) تنها در حالت $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ وجود دارند. حال نشان می‌دهیم که یک قالب‌بندی T از صفحهٔ هذلولوی H از نوع (p,q) وجود دارد اگر (و تنها اگر) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$.

اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$ یک ناحیهٔ مثلثی Δ در H وجود دارد و با زوایای $\frac{\pi}{p}$، $\frac{\pi}{q}$، $\frac{\pi}{2}$. فرض کنید $\tilde{G}$ زیر گروهی از $\tilde{H}$ باشد که به وسیلهٔ انعکاسهای ρ_1، ρ_2، ρ_3 نسبت به خطهای l_1، l_2 و l_3 که شامل اضلاع Δ مقابل به رأسهای این زوایا هستند تولید می‌شود، و فرض کنید T قالب‌بندی حاصل از H باشد. در رأس P_1 از Δ با زاویه $\frac{\pi}{p}$، $2p$ قالب $\Delta\alpha$ حول P_1 وجود خواهند داشت که (چون در واقع $(\alpha=1,\rho_1,\rho_1\rho_2,\rho_1\rho_2\rho_1,\dots,(\rho_1\rho_2)^{p-1}\rho_1)$ یک ناحیهٔ p− ضلعی منتظم Π با زوایای $\frac{2\pi}{q}$ را تشکیل می‌دهند. مجموعهٔ همهٔ $\Pi\alpha$ ها برای α در G به روشنی یک قالب‌بندی Z از نوع (p,q) را تشکیل می‌دهد.



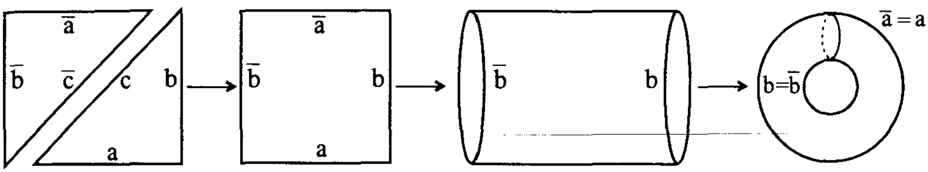
گروه $\tilde{G}$ با ناحیهٔ اصلی Δ به روشنی تمام گروه تقارنهای Θ است. گروه فوخسین $G=\tilde{G}^+$ از تقارنهای جهت نگهدار Θ، گروه مثلث $G=<\alpha_1,\alpha_2:\alpha_1{}^p=\alpha_2{}^q=(\alpha_1\alpha_2)^2=1>$ است.

لزومی ندارد که هیچ گروه فوخسین با ناحیهٔ اصلی Π موجود باشد (مثلاً، اگر p فرد باشد) اما با این گونه گروهها برای حالتی که $p=q=4g$ و $g\geq 2$ در زیر مواجه می‌شویم.

۱۰. گروههای رویه

برای پرهیز از وارد شدن به اصطلاحات فنی توپولوژی، یک رویه (فشرده جهت‌پذیر) $\sum$ را تعریف می‌کنیم که اجتماعی غیرمتداخل از تعدادی متناهی سلول جهتدار K و همسانریخت با مثلثها باشد، به نحوی که هر ضلع ظاهر شده روی یک سلول K دقیقاً روی یک سلول دیگر K' به عنوان یک ضلع و با جهت مخالف ظاهر شود.

ساده‌ترین مثال **کره** $S=\sum_0$ است که به چهار مثلث (کروی) به وسیلهٔ تصویر یک چهار وجهی محاطی تجزیه می‌شود. ساده‌ترین مثال بعدی **چنبرهٔ** $\sum_1$ است که از دو مثلث به وسیلهٔ انطباق اضلاع a، $\overline{a}$ و b، $\overline{b}$ و c، $\overline{c}$ چنان که در شکل نشان داده شده است به دست می‌آید.



این دو حالت ساده «کروی» و «اقلیدسی» هستند و لذا حالتهای استثنایی بحث ما در حالت هذلولوی می‌باشند. این واقعیتی مقدماتی است که ما در کوچکترین حالت نشان خواهیم داد، که هر رویهٔ (فشرده جهت‌پذیر) دیگر $\sum$ را می‌توان از ناحیه اصلی Δ یک گروه فوخسین G به وسیلهٔ انطباق جفتهایی از اضلاع t و $\overline{t}=t\eta$ به دست آورد.

فضای خارج قسمتهای H/G از یک گروه فوخسین G را تعریف می‌کنیم که مجموعهٔ مدارهای $QG=\{Q\alpha:\alpha\in G\}$ از نقاط $Q\in H$ باشد. تصویر π از H بر روی H/G هر نقطهٔ Q را به QG می‌نگارد، به روشنی یک نگاشت دوسویی از Δ بر روی H/G است به جز روی $\partial\Delta$ که $t\pi=\overline{t}\pi$. لذا $H/G=\Delta/G$ و فضای خارج قسمتهای H/G ~~را می‌توان به عنوان~~ رویهٔ $\sum=\Delta/G$ حاصل از Δ به وسیلهٔ انطباق دوبه‌دوی اضلاع t، $\overline{t}$ بر طبق α_t به دست آورد.

ما **گروه بنیادی** $\pi_1(\sum)$ از یک رویهٔ $\sum$ را تعریف نخواهیم کرد بلکه تنها این واقعیت ساده اما مهم را متذکر می‌شویم که برای $\sum$ به دست آمده به صورت بالا $\pi_1(\sum)=G$. (برای کرهٔ $\sum_0$، $\pi_1(\sum_0)=1$ و برای چنبرهٔ $\sum_1$، $\pi_1(\sum_1)$ گروه آبلی آزاد رتبهٔ ۲ است). ساده است ببینیم که

$\pi: H \longrightarrow \sum$ پیوسته می‌باشد و در واقع یک همسانریختی موضعی است. هر نقطهٔ Q از H واقع در یک قرص D می‌باشد که تحدید π به Δ یک همسانریختی است. در حالت مورد بررسی که G شامل هیچ عضو بیضوی نیست ساختارهای تحلیلی روی $D\pi$ که از ساختارهای روی $D \subseteq H$ گرفته است در این مفهوم که روی اشتراک آنها جور می‌شوند و مسیر گذر از یکی به دیگری تحلیلی است و $\sum$ یک رویه (خمینهٔ دو بعدی) تحلیلی (در واقع هذلولوی) می‌شود. (در حالت کلیتر که G شامل یک عضو بیضوی از مرتبهٔ q ثابت نگاه دارندهٔ یک رأس V از Δ است نگاشت مزبور روی یک قرص کوچک D در V شبیه نگاشت $z \longrightarrow z^q$ روی قرص واحد رفتار می‌کند، و $\sum$ یک **رویهٔ ریمان** است که ساختار تحلیلی آن دارای نقاط شاخه در V است).

برای به دست آوردن رویه‌های $\sum$ به صورت Δ/G روشن است که می‌توانیم این کار را تحت برخی فرضهای ساده کنندهٔ روی Δ و G انجام داد. اول این که G شامل هیچ عضو بیضوی نیست و دوم این که همهٔ رأسهای V از Δ به یک مدار منحصربه‌فرد تعلق دارند، از این رو در $\sum$ نگارهٔ یکسانی دارند. این مطلب نتیجه می‌دهد که R_2 تنها شامل یک عضو منحصربه‌فرد r است (مستقل از جایگشتهای دوری r و r^{-1}) که هر x در X را تنها یکبار شامل می‌شود. به طور دقیقتر σ یک مدار منحصربفرد c دارد و r حاصلضرب، بر حسب ترتیب، x_iها درا ین مدار است که با یک عضو شروع می‌شود. برای به دست آوردن نمایشی اقتصادی‌تر از G یک زیر مجموعهٔ X_0 که دقیقاً شامل یکی از هر جفت t و $\bar{t}$ است را انتخاب می‌کنیم و به وسیله تبدیلات تیتسه رابطه‌های $t\bar{t}=1$ را برای ~~حذف کردن~~ $\bar{t}$ غیر واقع در X_0 به کار می‌بریم، در عین حال γ را بر حسب X_0 به وسیلهٔ جایگزین کردن هر $\bar{t}$ به وسیلهٔ t^{-1} برای $t \in X_0$ می‌نویسیم. لذا یک نمایش $G=\langle X_0 : r=1\rangle$ را با یک **رابطه معرف منحصربه‌فرد** به دست می‌آوریم.

هنوز باید Δ را بسازیم و به کمک آن G را بسازیم. چون η یک برگشت روی مجموعهٔ اضلاع است، بدون نقطهٔ ثابت، تعداد اضلاع باید زوج باشد، مثلاً $n=2k$ به ازای عددی مانند k. آنگاه θ شامل یک دور منحصربفرد با طول 2k است، که در نتیجه θ جایگشت فرد است. همچنین تأکید کرده‌ایم که σ باید شامل یک جایگشت دوری منحصربه‌فرد با طول 2k باشد. لذا σ یک جایگشت **فرد** است. از $\sigma=\theta\eta$ نتیجه می‌شود که η باید یک جایگشت **زوج** باشد؛ که در نتیجه η شامل k ترانهش $(t,\bar{t})$ است و از این رو k باید زوج باشد $k=2g$ و $n=4g$.

چون σ یک دور منحصربه‌فرد c دارد و G شامل هیچ عضو بیضوی نیست باید داشته باشیم $c\omega=2\pi/q(c)$ با $q(c)=1$ یعنی مجموع زوایای داخلی برابر با $\sum\theta_t=2\pi$ است. حال مساحت Δ برابر با $A(\Delta)=\sum(\pi-\theta_t)-2\pi=4g\pi-\sum\theta_t-2\pi=4g\pi-2\pi-2\pi=4(g-1)\pi$ است. چون D فشرده است $A(\Delta)>0$ و لذا $g\geq 2$.

فرض کنید $g\geq 2$ و فرض کنید Δ یک ناحیهٔ $4g-$ ضلعی باشد. باقی ماند که زوایای داخلی $t\omega$ با شرط $\sum t\omega=2\pi$ را انتخاب کنیم و برگشت η را برگزینیم. در نتیجه چگونگی انتخاب

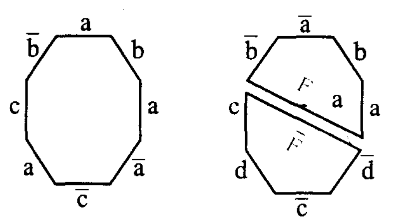
$t\omega$ اهمیتی ندارد و لذا می‌توانیم همهٔ آنها را برابر بگیریم، $t\omega=\frac{2\pi}{4g}$ ؛ از این رو Δ را یک ناحیهٔ $4g$ - ضلعی منتظم اختیار می‌کنیم. چون c دارای طول $4g$ است $4g$ قالب $\Delta\alpha$ در هر رأس وجود دارند و قالب‌بندی T منتظم از نوع $(4g,4g)$ می‌باشد.

از اینجا به بعد برای اجتناب از پیچیدگی نمادگذاری، تنها کوچکترین حالت، اما کاملاً نوعی، را که گونه $g=2$ است بررسی می‌کنیم. حال Δ یک ناحیهٔ هشت ضلعی منتظم است و باقی می‌ماند η را انتخاب کنیم یعنی در مورد ترتیب دوری θ از هشت یال a، $\bar a$، b، $\bar b$، c، $\bar c$، d، $\bar d$ تصمیم بگیریم. در اینجا η تنها مشروط بر این قید است که σ تعریف شده بوسیلهٔ معادله $\sigma=\theta\eta$ باید یک دور منحصر بفرد از طول ۸ باشد. رویهٔ حاصل $\sum$ برای همهٔ η های برآورندهٔ این قید یکسان است. شاید طبیعی‌ترین انتخاب از η جفت کردن اضلاع مقابل باشد یعنی $\theta=(a,b,c,d,\bar a,\bar b,\bar c,\bar d)$ بگیریم؛ لذا داریم $\sigma=(a,\bar b,c,\bar d,\bar a,b,\bar c,d)$ و $G=<a,b,c,d:a\bar b c\bar d\bar a b\bar c d=1>$ یا با تغییر نمادگذاری داریم $G=<a,b,c,d:abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}=1>$. انتخاب دیگر برای θ عبارت است از $\theta=(a,b,\bar a,\bar b,c,d,\bar c,\bar d)$ در نتیجه $\sigma=(a,\bar b,\bar c,d,c,\bar d,\bar a,b)$. بعداز یک جایگشت دوری و حرف‌گذاری مجدد، نمایش زیر را به دست می‌آوریم

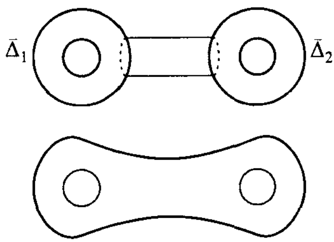
$$G=<a,b,c,d:aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}=1>$$

تمرینی مقدماتی اما نه کاملاً بدیهی است که به کمک تبدیلات تیتسه نشان دهیم این دو نمایش گروههای یکریختی را تعریف می‌کنند؛ تبدیلات تیتسهٔ به کار رفته را در واقع به وسیلهٔ تبدیلاتی از Δ به وسیلهٔ، بریدن و چسباندن، می‌توان ردیف کرد: بریدن Δ به دو جزء، Δ_1 شامل یک ضلع t و Δ_2 شامل ضلع $\bar t$ و تشکیل دادن $\Delta'=\Delta_1\cup\Delta_2\alpha^{-1}$ به وسیلهٔ انطباق t به $\bar t=t\alpha^{-1}$.

این سیر را در مرزهای توپولوژی با اثبات اجمالی این که رویهٔ $\sum_2$ به دست آمده به روش بالا برای گونه $g=2$ یک، کره با دو دسته، (یا همسانریخت با) رویه یک جسم توپر به شکل ∞، ساخته شده از دو حلقهٔ جوش خورده است خاتمه می‌دهیم.



برای این منظور $\theta=(a,b,\bar{a},\bar{b},c,d,\bar{c},\bar{d})$ و اضلاع ناحیهٔ هشت وجهی Δ را به همان ترتیب نمادگذاری می‌کنیم. قبل از انطباق هر ضلع یک قدم به عقب برمی‌گردیم و آن را به دو تکه می‌بریم Δ_1 و Δ_2، هر کدام با یک ضلع f یا $\bar{f}$، که بعداً یکی می‌شوند. حال اضلاع a، $\bar{a}$ و b، $\bar{b}$ از Δ_1 را منطبق می‌کنیم؛ این شبیه منطبق کردن اضلاع یک مربع برای بدست آوردن یک چنبره است به جز اینکه اکنون یک چنبرهٔ $\bar{\Delta}_1$ با یک سوراخ به دست می‌آوریم که مرزش به وسیلهٔ f مشخص می‌شود. به همین ترتیب انطباق اضلاع c، $\bar{c}$ و d، $\bar{d}$ از Δ_2 یک چنبرهٔ دیگر $\bar{\Delta}_2$ با یک سوراخ را به دست می‌آوریم که این بار با مرز مشخص شده بوسیله $\bar{f}$ ایجاد می‌شود. قدم آخر یکی کردن $\bar{\Delta}_1$ و $\bar{\Delta}_2$ به وسیلهٔ انطباق f و $\bar{f}$ است. نتیجه‌کار رویهٔ یک چنبرهٔ دو سوراخهٔ نسبتاً ساده نشان داده شده در شکل است.



به ازای همهٔ $g \geq ۲$ یک ساختمان متشابه یک ۴g− ضلعی منتظم با زوایای داخلی $\frac{2\pi}{4g}$ را به کار می‌برد که یک گروه G با یک نمایش هم ارز با

$$G=<a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}=1>$$

را به دست می‌دهد با فضای خارج قسمتهای $\sum_g=H/G$ که همسانریخت با رویهٔ یک چنبره با g سوراخ است.

حالت $g=۱$ یک استثناء است که در آن تنها اگر $G=<a_1,b_1:a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1=1>$، گروه آزاد آبلی رتبهٔ ۲، به جای این که یک گروه فوخسین باشد یک گروه اقلیدسی عمل کننده روی E است: رویهٔ خارج قسمت $\sum_1$ یک چنبره است یعنی رویهٔ یک چنبره با یک سوراخ. حالت $g=۰$ را می‌توان به عنوان حالت تباهیدهٔ گروه ناپیوسته $G=۱$ عمل کنندهٔ روی کره S در نظر گرفت، با فضای خارج قسمتهای $S/G \simeq S$، چنبرهٔ بدون سوراخ است.

۱۱. رده‌بندی گروههای فوخسین

اثباتی اجمالی برای قضیه زیر ارایه می‌دهیم.

قضیه: هر گروه فوخسین G با ناحیهٔ اصلی فشرده نمایشی به صورت

$$(*)\,G=\langle x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_g,z_1,\dots,z_g : x_1^{q_1}=\dots=x_k^{q_k}=x_1\dots x_k y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1}\dots y_g z_g y_g^{-1} z_g^{-1}=1\rangle$$

دارد به ازای $k,g\geq 0$ و همهٔ $q_i\geq 2$ و اگر $g=0$، $k\geq 3$. به علاوه جدا از جایگشت q_i دوگروه با نمایشهای متفاوت به این صورت یکریخت نیستند.

خلاصه برهان. فرض کنید Δ فشرده باشد. آنگاه هر ضلع $t\in S$ در رأسی مانند V از Δ در H خاتمه می‌یابد که از آنجا t تنها یکبار در S_c برای رابطی مانند $r_c=S_c{}^{q(c)}=(t_1\dots t_n)^{q(c)}$ برای $c=(t_1,\dots,t_n)$ یک جایگشت دوری از σ ظاهر می‌شود. به علاوه چون θ روی مجموعهٔ S از اضلاع ترایا است هیچ زیر مجموعهٔ R' از R_2 به جز مجموعهٔ تهی و خود R_2 این ویژگی را ندارد که اگر t در رابطی مانند r_c در R' واقع شود آنگاه $\overline{t}$ در برخی r_c ها در R' واقع می‌شود. از حالا به بعد رابطهای R_1 را به طور آزاد به کار می‌بریم تا t را با $\overline{t}$ منطبق کنیم.

فرض کنید $|R_2|>1$. اگر c_1 جایگشتی دوری از σ باشد نتیجه می‌شود که s_{c_1} شامل t_1 است اما $\overline{t}_1$ را شامل نمی‌شود و t_1 را تنها یکبار شامل می‌شود. بعداز یک توالی از تبدیلات تیتسه می‌توانیم مولد t_1 را با s_{c_1} جایگزین کنیم و لذا رابط r_{c_1} را با $t_1{}^{q_1}$ که $q_1=q(c_1)$ جایگزین کنیم. فرض کنید R'_2 مجموعه رابطهای باقیمانده باشد. می‌بینیم که اگر $|R'_2|>1$ آنگاه هر S_{c_2} در R'_2 شامل $t_2\neq t_1^{\pm 1}$ است اما شامل $\overline{t}_2$ نیست و به وسیلهٔ تبدیلات تیتسه می‌توان r_{c_2} را با $t_2{}^{q_2}$ جایگزین کرد.

می‌توانیم این کار را ادامه دهیم تا به نمایشی به صورت $G=\langle t_1,\dots,t_{k-1},u_1,\dots,u_m : t_1^{q_1}=\dots=t_{k-1}^{q_{k-1}}=w^{q_k}=1\rangle$ برسیم و حال می‌توانیم فرض کنیم که w شامل همهٔ t_i ها هست اما هیچ t_i^{-1} را شامل نمی‌باشد و از همهٔ u_j و u_j^{-1} ها هر بار تنها یکی را در بر می‌گیرد. حال یک مولد جدید t_k را با یک رابط معرف $t_k w$ معرفی می‌کنیم و سپس رابط $w^{q_k}=1$ را به وسیلهٔ رابط هم ارز $t_k^{q_k}=1$ جایگزین می‌کنیم. این امر $G=\langle t_1,\dots t_k,u_1,\dots,u_m : t_1^{q_1}=\dots=t_k^{q_k}=w'=1\rangle$ را که $w'=t_k w$ به دست می‌دهد.

تمرینی در تبدیلات تیتسه نشان می‌دهد که به وسیله تغییر مولدهای u_i می‌توانیم w' را به صورت $w'=t_1\dots t_k q$ بنویسیم که q تنها شامل u_i و u_i^{-1}، هر بار تنها یکی از آنها است. یک تمرین مشکل‌تر دیگر نشان می‌دهد که تبدیلات تیتسهٔ دیگری روی u_i، q را به صورت $y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1}\dots y_g z_g y_g^{-1} z_g^{-1}$ که $2g\leq m$ مبدل می‌کند. با توسل به ویژگی ترایایی θ حال قادریم

ثابت کنیم $2g=m$.

یکتایی این نمایش سر راست است. q_i ها مرتبه‌های مشترک اعضای رده‌های زوجیت زیر گروههای دوری متناهی ماکسیمال G هستند. و رتبهٔ گروه آبلی آزاد به دست آمده از آبلی کردن G و سپس تقسیم شده به وسیلهٔ زیر گروه همهٔ اعضای با مرتبهٔ متناهی برابر با $2g$ است.

توجه می‌کنیم اگر $g = 0$ و $k = 0$ آنگاه $G = 1$. اگر $g = 0$ و $k = 1$ آنگاه G دوری از مرتبهٔ q_1 است و یک گروه فوخسین با ناحیهٔ اصلی فشردهٔ Δ نیست (چون q_1 نگاره از Δ فشرده نمی‌توانند H را پر کنند). اگر $g = 0$ و $k = 2$ آنگاه G دوری از مرتبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک q_1 و q_2 است. اگر $g \geq 1$ یا اگر $g=0$ و $k=3$ آنگاه G یک گروه مثلث است.

همین روشها شبیه آنهایی که در بالا به کار رفت نشان می‌دهند اگر G متناهیاً تولید شود یعنی اگر Δ تعداد متناهی ضلع داشته باشد، اما اگر Δ رأسهایی روی R^* داشته باشد (که به هیچ رابطه‌ای در R_2 تناظر نمی‌یابند)، آنگاه G حاصلضرب آزاد گروههای دوری است.

۱۲. فرمول ریمان ـ هورویتز

دوباره فرض می‌کنیم Δ تعداد متناهی ضلع دارد احتمالاً با رأسهایی روی R^* اما ضلعی روی R^* ندارد که از آنجا Δ دارای مساحت متناهی $A(\Delta)$ است. اگر Δ دارای $S = 2n$ ضلع باشد آنگاه Δ دارای $2n$ رأس V است. اگر $V \in R^*$ آنگاه زاویهٔ داخلی در V برابر با 0 است. اگر $c=(t_1,...,t_n)$ جایگشتی دوری از σ باشد و $V_1,...,V_n$ انتهاهای $t_1,...,t_n$ باشند (در جهت مثبت روی $\partial\Delta$). آنگاه همهٔ $V_i \in H$ و هر رأس در H تنها یکبار در یک چنین دوری واقع می‌شود. حال دیده‌ایم که مجموع زوایای داخلی در $V_1,...,V_n$ برابر $\frac{2\pi}{q(c)}$ است که در نتیجه مجموع همهٔ زوایای داخلی در راسهای Δ برابر با $2\pi\sum\frac{1}{q_i}$ است. که روی $q_i = q(c_i)$ برای همهٔ k دورهای c_i از σ جمع زده شده است. در نتیجه $\kappa(\partial\Delta) = \pi.2n-2\pi\sum\frac{1}{q_i} = 2\pi\left(n - \sum\frac{1}{q_i}\right)$.

حال به نمایش (*) (یا نمایش متناظر G به عنوان یک حاصلضرب آزاد از گروههای دوری) می‌پردازیم. ابتدا با n مولد شروع کردیم که شامل یکی از هر جفت $t, \bar{t}$ از $2n$ ضلع است و یک مولد دیگر t_k را به وسیلهٔ یک تبدیل تیتسه به آن ملحق نمودیم. لذا در نمایش (*) تعداد $n + 1 = k + 2g$ مولد وجود دارند. از این رو می‌توانیم معادلهٔ بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\kappa(\partial\Delta) = 2\pi\left(2g - 1 - \sum\left(1-\frac{1}{q_i}\right)\right)$$

در نتیجه
$$A(\Delta) = 2\pi\left(2g - 2 - \sum\left(1 - \frac{1}{q_i}\right)\right)$$

مشکل نیست ببینیم که اگر G_1 و G_2 دو گروه فوخسین با ناحیه‌های اصلی Δ_1 و Δ_2 و مساحتهای متناهی باشند، و اگر G_2 یک زیر گروه از G_1 با شاخص متناهی j باشد آنگاه $A(\Delta_2) = jA(\Delta_1)$. به خصوص اگر $G_1 = G_2$ که از آنجا $j = 1$ و داریم $A(\Delta_1) = A(\Delta_2)$؛ لذا $A(\Delta)$ تنها بستگی به G دارد و به انتخاب ناحیهٔ اصلی بستگی ندارد. لذا می‌توانیم تعریف کنیم

$$\mu(G) = 2g - 2 - \sum\left(1 - \frac{1}{q_i}\right)$$

ادعای بالا را اکنون می‌توان به طور موجزتری بیان کرد.

قضیه (فرمول ریمان ـ هورویتز). فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه فوخسین با ناحیه‌های اصلی و مساحت متناهی باشند و فرض کنید G_2 یک زیر گروه با شاخص متناهی j در G_1 باشد آنگاه

$$j = \frac{\mu(G_2)}{\mu(G_1)}$$

نکته‌ها و مرجعها

۱. تعدادی از قالب‌بندیهای H به وسیلهٔ ناحیه‌های اصلی گروههای فوخسین (با اقتباس از کتاب کلاین و فرایک)، به همراه توضیح، در کتاب ماگنوس نشان داده شده‌اند. یک بحث مقدماتی و هندسی از چند گروه فوخسین مبتنی بر کارهای دیک، در فصل ۱۸ کتاب بورن ساید ارائه شده است.

۲. قضیه بخش ۳ نیمی از برهان قضیه‌ای از فنشل است: هر گروه فوخسین متناهیاً تولید شدهٔ G شامل یک زیر گروه نرمال N با شاخص متناهی بدون تاب (بدون اعضای غیر بدیهی از مرتبهٔ متناهی) است. برهان به سادگی به حالتی تقلیل می‌یابد که G یک گروه مثلث به صورت $G = \langle\sigma_1$ و $\sigma_2 : \sigma_1^a = \sigma_2^b = (\sigma_1\sigma_2)^c = 1\rangle$ است و $1 > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. حال بنا به قضیه بخش ۳ اگر بتوانیم یک نگاشت ϕ از G بر روی یک گروه متناهی F بیابیم که تحت آن نگاره‌های $\sigma_1\phi$ و $\sigma_2\phi$ و $(\sigma_1\sigma_2)\phi$ دقیقاً مرتبه‌های c, b, a را حفظ کنند آنگاه N هسته نگاشت ϕ یک زیر گروه بدون تاب با شاخص متناهی $|F|$ خواهد بود.

وجود چنین ϕ موکول به وجود یک زیر گروه متناهی شامل اعضای x و y است که y, x و xy دارای مرتبه‌های b، a و c باشند. این مطلب در سال ۱۹۰۰ به وسیله ج. ا. میلر به ازای همهٔ $a, b, c \geq 2$ ثابت شد. کارمیلر برای فنشل که وی آن را به صورت یک حدس بیان کرده بود یا

برای فاکس، که اثباتی از آن را ارایه داده بود ناشناخته بود. برای مرجعها برنر، لیندون و لیندون ـ شاپ را ببینید.

۳. کیلی «نمودار رنگی» یک گروه G را نسبت به یک مجموعه X از مولدها معرفی کرد این نمودار همهٔ اعضای G را به عنوان رأس دارد، با یک یال (جهت‌دار) با رنگ $x\in X$ از g_1 به g_2 به شرطی که $g_1x = g_2$. همین نمودار به وسیلهٔ دن به نام **Gruppenbild** مطرح گردید. بخش ۳.۳ کاکستر ـ موزر و مطلب زیر را ببینید.

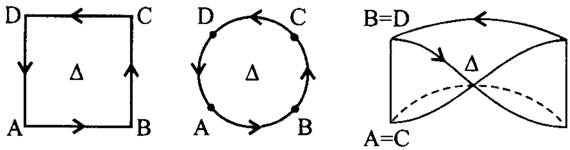
۴. مقالهٔ پوآنکاره که در آن گروههای فوخسین را معرفی می‌کند و نمایشها را از آنها به دست می‌آورد و هنوز بسیار خواندنی است.

۵. تابع $\sigma = \theta\eta$ به طور صوری به وسیله هوایر ـ کاراس ـ سولی‌تار در مضمونی وسیعتر به کار رفته است که صورت یک تابع متقارن را می‌گیرد و به وسیلهٔ یک نمودار با یالهای جهت‌دار نشده نمایش داده شده که **نمودار هم آغاز** یا نمودار **ستاره** نمایش <X:R> نامیده می‌شود. رأسها همهٔ x و x^{-1}ها برای $x\in X$ هستند. یک یال بین دو رأس x و y برای هر جایگشت دوری r یا r^{-1} برای $r\in x$ که با xy^{-1} شروع می‌شود وجود دارد. اتفاقاً همین تابع در برهانهای قضیهٔ وایتهد در مورد خودریختهای گروههای آزاد وارد شده بود. برای مرجع لیندون ـ شاپ را ببینید.

۶. برهانی از قضیه چند ضلعی پوآنکاره ابتدا توسط پوآنکاره و بعداً توسط دیگران در مراتب متفاوتی از کلیت پیشنهاد شد. علاوه بر پوآنکاره، ماسکیت، دوهام، و بی‌یردون را ببینید.

۷. برای گروههای رویه و مفاهیم توپولوژیکی مربوط کتاب مَسی را ببینید. حال اجمالاً به مطالبی دربارهٔ رویه‌های **جهت‌ناپذیر** فشرده می‌پردازیم. چنین رویه‌ای اجتماع غیر متداخل تعدادی متناهی از «مثلثها» می‌باشد که هر یال دقیقاً روی دو مثلث ظاهر می‌شوند، اما حال به طریقی که مثلثها نمی‌توانند جهت‌دار شوند تا هر یال واقع با جهت مخالف روی دو مثلث را تشکیل دهند.

ساده‌ترین مثالها از این دست صفحه تصویری حقیقی E^* است. بنا به ساختمان ما از E^* به صورت نگارهٔ یک کره S تحت تصویر گنجنگاشتی نتیجه می‌گیریم که E^* همسانریخت با فضای حاصل از انطباق نقاط متقاطر S یا به زبان ساده‌تر از انطباق نقاط متقاطر روی مرز یک نیم‌کره Δ از S است. مرز دایره Δ را به چهار جزء مساوی تقسیم می‌کنیم و سپس Δ را به مربعی تغییر شکل می‌دهیم که این اجزاء را به عنوان اضلاع دارد. در شکل مزبور جفتهای اضلاع مقابل را باید به طریقی منطبق کرد که جهتهای نشان داده شده توسط پیکانها جور شوند. اگر این انطباق را ساخته شده تلقی کنیم و Δ را به وسیلهٔ یک قطر به دو مثلث تقسیم کنیم به سادگی می‌بینیم که دو مثلث را نمی‌توان به طریقی جهتدار کرد که هر یال روی یک مثلث با جهت مثبت واقع شود و روی مثلث دیگر با جهت منفی.



در واقع در فضای ۳ بعدی امکان دارد یک جفت از اضلاع مثلاً BC و DA را منطبق کنیم (لذا با انطباق B=D و C=A) یک نوار موبیوس پیچ خورده به دست می‌آوریم با مرز یک خم بستهٔ ساده در فضای ۳ بعدی. اما در فضای ۳ بعدی منطبق کردن جفت دیگر اضلاع امکان‌پذیر نیست.

۸. هوایر ـ کاراس ـ سولی‌تار ثابت کردند (تنها با کمک نظریهٔ گروهها و بدون استفاده از هندسه یا آنالیز) که اگر G_1 یک گروه فوخسین با ناحیهٔ اصلی مساحت متناهی باشد و G_2 هر زیرگروهی از G_1 باشد آنگاه یا G_2 در G_1 شاخص متناهی دارد و یک چنین گروه دیگری است، و یا G_2 دارای شاخص نامتناهی است و حاصلضرب آزاد گروههای دوری می‌باشد.

۹. زیر گروههای ناپیوسته $\tilde{H}$ غالباً گروههای بلورنگارانهٔ نااقلیدسی (NEC) نام دارند: مک‌بث را ببینید.

۱۰. برای مرجعی کلی دربارهٔ گروههای فوخسین دوباره بی‌یردون را توصیه می‌کنیم. برای بررسی در مورد تاریخ آنها و ارتباطشان با معادلات دیفرانسیل، آنالیز و نظریه اعداد خواندن برخی بخشهای له‌نر را توصیه می‌کنیم.

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. یک ناحیه دیریکله برای گروه دوری G تولید شده به وسیلهٔ α، که α عضوی بیضوی از مرتبهٔ متناهی، سهموی، یا هذلولوی است بیابید.

مسألهٔ ۲. (الف) فرض کنید G در $\tilde{H}$ به وسیلهٔ بازتابهایی در سه ضلع یک مثلث تولید شوند. برای P دلخواه درون مثلث ناحیهٔ دیریکله برای G چیست؟

(ب) فرض کنید G در $\tilde{H}$ به وسیله بازتاب در سه (نیم) دایره شعاع ۱ و مراکز (۵،۰−)، (۰،۰) و (۵،۰) تولید شود. برای P به طور مناسب انتخاب شده ناحیهٔ دیریکله برای G را بیابید.

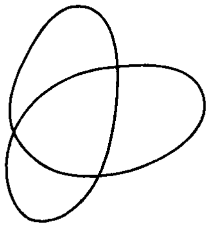
مسألهٔ ۳. (الف) برای G مسألهٔ ۱، (الف) و (ب) قالب‌بندی کیلی متناظر را بیابید.

(ب) برای ناحیهٔ اصلی معمول گروه پیمانه‌ای چنان که در مثال بخش ۵ نشان داده شده یک قطعهٔ نماینده از قالب‌بندی کیلی را نشان دهید.

مسألهٔ ۴. (الف) گروههای فوخسین ممکن که ناحیهٔ دیریکلهٔ آنها چهار ضلعی است کدامند؟

(ب) گروههای فوخسین ممکن با ناحیهٔ اصلی شش ضلعی و $\theta=(a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ کدامند؟

مسألهٔ ۵. (الف) گروه اصلی فضای متمم گره سه پره در E^3 (با نقاط انتهایی بهم متصل) دارای نمایش طبیعی $G=<a,b:aba=bab>$ است. نشان دهید آن نمایشی به صورت $G=<c,d:c^2=d^3>$ نیز دارد و خارج قسمت G بر مرکزش با گروه پیمانه‌ای یکریخت است.
(ب) نشان دهید که $G=SL(2,Z)$ نمایشی به صورت $G=<c,d:c^2=d^3,c^4=1>$ دارد.



مسألهٔ ۶. (الف) چند ضلعی اصلی برای یک گروه G با نمایش $G=<x,y,z:x^3=xyzy^{-1}z^{-1}>$ را بیابید. (ب) همین کار را برای $G=<x_1,x_2,y,z:x_1^3=x_2^5=x_1x_2yzy^{-1}z^{-1}>$ انجام دهید.
مسألهٔ ۷. اثباتی مفصل از قضیهٔ بخش ۱۱ در حالتی که $k=2$ و $g=1$ یا $g=2$ ارایه دهید.
مسألهٔ ۸. (الف) اگر Δ یک ناحیهٔ اصلی برای گروه فوخسین G باشد که $H/G=\sum_g$ یک رویه فشرده جهتپذیر از گونه g است، مساحت Δ را بیابید.
(ب) کوچکترین مساحت ممکن برای یک ناحیهٔ اصلی فشرده برای یک گروه فوخسین چیست؟
مسألهٔ ۹. (الف) یک زیر گروه نرمال بدون تاب از شاخص متناهی در گروه پیمانه‌ای $G=<a,b:a^2=b^3=1>$ را بیابید.
(ب) همین کار را برای $G=(a,b,:a^2=b^3=(ab)^7=1>$ انجام دهید.
مسألهٔ ۱۰. (الف) نمودار کیلی برای نمایش $G=<x,y:x^2=y^n=(xy)^2=1>$ گروه دو وجهی D_{2n} را بسازید.
(ب) همین مطلب را برای گروههای $G=<x,y:x^2=y^3=(xy)^r=1>$ به ازای $r=3,4,5,6,7$ انجام دهید.

کتابنامه

Albert, A. A. & Sandler, R. (1968). An Introduction to Finit Projective plane, Holt, Rinehart & Winston.

Artin, E. (1957) Geometric Algebra, Interscience.

Beardon, A. F. (1983) The Geometry of Discrete Groups, Springer.

Brenner, J. L. & Lyndon, R. C. (1984). A Theorem of G. Miller on The Order of the Product of Two Permutations I. Jnanabha 14, 1- 16.

Bunside, W. (1955) Theory of groups of finite order. Dover.

Coxeter, H. S. M (1961) Introduction to Geometry, wiley.

Coxeter, H. S. M (1961) Non - Euclidean Geometry, 4 th edition, Univ. of Toronto.

Coxeter, H. S. M (1968). Twelve Geometric Essays, Southern Illinois Univ. Press.

Coxeter, H. S. M (1973) Regular Polytopes, reprint of 2 nd edition, Dover.

Coxeter, H. S. M & Moser, W. O (1965) Generators and Relations for Discrete Groups, 2nd edition, Springer.

De Rham, G. (1971). Sur les Polygones générateurs de groupes fuchsiens L´Enseignment. Math. 17, 49 - 61

Ford, L. R. (1951) Automorphic Functions, 2nd edition, Chelsea.

Guggenheimer, H.W (1967). Plane Geometry and its Groups, Holden - Doy.

Hall, M. (1959) The Theory of Groups, Macmillan.

Hoare, A. H. M., Karrass, A., & Solitar, D. (1971). Subgroups of finite index of Fuchsian groups, math, zeit. 120, 289 - 298.

Hoare, A. H. M., Karrass, A. & Solitar, D. (1972). Subgroups of infinite index in Fuchsian groups, Math. Zeit 125, 59 - 69

Hoare, A. H. M., Karrass, A. & Solitor, D. (1973) Subgroups of NEC groups, Comm. Pure Apple. Math. 26, 731 - 744.

Johnson. D. L. (1980) Topics in the Theory of Group Presentations, Cambridge, Univ. Press.

Lehner, J. (1964) Discontinuous Groups and Automorphic Functions. Amer. Math. Soc.

Lyndon, R. C. & Schupp, P. E. (1977) Combinatorial Group Theory, Springer.

Macbeath, A. M. (1967). The Classification of non - Euclidean plane Crystallographic groups. Canad. J. Math. 6. 1192 - 1205.

Macbeath, A. M. (1976) Groups of Hyperbolic Crystallography. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79, 235 - 249.

Magnus, W. (1974). Non - Euclideau Tesselation and Their Groups. Academic Press.

Magnus W. Karrass, A. Solitar, D. (1966). Combinatorial Group Theory. Wiley.

Manning, H. P. (1914) Geometry of Four Dimensions. Macmillan.

Maskit, B. (1971). on Poincare´s Theorem for Fundamental Polygons. Adv. in Math. 7, 219 - 230.

Miller, C. F. (1971). on Group - Theoretic Decision Problems and their Classification. Princeton Univ. Press.

Miller, G. A. (1900) on The Product of Two Substitutions. Amer. J. Math. 22, 185 - 190.

Milnor. (1976). Hilbert´s Problem 18: on Crystallographic Groups, Fundamental Domains, and on Sphere Packing. In: Mathematical Developments Arising from Hilbert problem part 2, Amer. Math. Soc.

Poincaré, H. (1882). Theórie des Groupes fuchsiens. Acta Math. 1, 1 - 62

Rotmon J. J (1984). The Theory of Groups: An Introduction. 3rd edition, Allyn and Bacon.

Schwartzenberger, R. L. E.(1980). N - Dimensional Crystallography. Pitman.

Schwartzenberger, R. L. E. (1984). Colour symmetry, Bull. London Math. Soc. 16, 209 - 240.

Speiser, A. (1945). Die Theorie der Gruppen Von Endlicher Ordnung. Dover. (Chapter 6: Symmetrien der Ornamente; Chapter 7: Die Kristallklassen).

Weyl, H. (1952). Symmetry. Princeton Univ. Press.

Wieting, T. W. (1982). The Mathematical Theory of Chromatic plane, Orraments. Dekker.

واژه نامه

abelian group — گروه آبلی
affine geometry — هندسه مستوی
affine group — گروه مستوی
analytic surface — رویه تحلیلی
angles, sum of — زوایا، مجموع
area, hyperbolic — مساحت، هذلولوی
automorphism, conjugation — خودریختی، مزدوج‌گیری
automorphism group of a plane — گروه خودریختی یک صفحه

ball, n - ball — گوی، n بعدی
basis — پایه
bijection, bijective — دوسویی، دوسو
branch point — نقطهٔ شاخه

Cayley´s theorem — قضیهٔ کیلی
Cayley graph — نمودار کیلی
Cayley tessellation — قالب‌بندی کیلی

center of a group — مرکز یک گروه
characteristic Euler - Poincaré — مشخصهٔ اویلر ـ پوآنکاره
coinitial graph — نمودار هم آغاز
combinatorially rigular tessellation — قالب‌بندی منتظم ترکیبی
commututor — تعویضگر
commututor subgroup — زیرگروه تعویضگر
conformal map — نگاشت همدیس
conic section — مقاطع مخروطی
conjugate — زوجیت
conjugation automorphism — خودریختی مزدوج‌گیری
consequence — نتیجه
convex set, convex closure — مجموعه محدب، بستار محدب
coordinate — مختصات
coordinate plane — صفحهٔ مختصات
coset — هم مجموعه
coxeter group — گروه کاکستر
cross ratio — نسبت غیر توافقی
crystallographic group — گروه بلور نگارانه
cube, n - cube — مکعب، مکعب n - بعدی
curvature — خمیدگی
cycle of a Permutation — دور یک جایگشت
cyclic group — گروه دوری

defining relation — رابطه معرف
Desargues´ theorem — قضیه دزارگ
differential, hyperholic — دیفرانسیل، هذلولوی
dihedral group — گروه دو وجهی
direct product — حاصلضرب مستقیم
Dirichlet region — ناحیهٔ دیریکله
Dirichlet tessellation — قالب‌بندی دیریکله
discontinuous group — گروه ناپیوسته
dual, duality — دوگان، دوگانی

elementary group — گروه مقدماتی
Euler - Poincaré characteristic — مشخصه‌اویلر ـ پوآنکاره

face type — نوع وجه
finit order — مرتبه متناهی
flow line — خط جریان
four group — چهار ـ گروه
free group — گروه آزاد
free product — حاصلضرب آزاد
frieze, frieze group — کتیبه، گروه کتیبه

Fuchsian group گروه فوخسین
fundamental region ناحیهٔ اصلی
side of, vertex of ضلع، رأس، ناحیه اصلی

general linear group گروه خطی عام
generator مولد
geodesic ژئودزیک
genus گونه
glide reflection لغزه
graph نمودار
group گروه

homeomorphism همسانریختی
hyperbolic: area هذلولوی: مساحت
circle; distance دایره ـ، فاصله ـ
geometry; group هندسه ـ، گروه ـ
line, metric خط ـ، متریک ـ
plane, transformation صفحه ـ، تبدیل ـ
triangle مثلث ـ

icosahedral group گروه بیست وجهی
incidence relation رابطه وقوع
incidence plane صفحه وقوع
infinity, point at, line at
بینهایت، نقطه در ـ خط در ـ
inversion in a circle انعکاس در یک دایره
inversive geometry هندسه انعکاسی
inversive group گروه انعکاسی
inversive line: plane
خط انعکاس، صفحه انعکاس
involution برگشت
isometry طولپایی
isomorphism یکریختی

kernel هسته

lattice مشبکه

linear fractional transformation
تبدیل کسری خطی
local homeomorphism همسانریختی موضعی
loxodromic transformation تبدیل مارپیچی

manifold خمینه
matrix rep esentation نمایش ماتریسی
metric, hyperbolic متریک، هذلولوی
metrically شبکه‌بندی به طور متریکی منتظم
regular tessellation
Mobius transformation تبدیل موبیوس
modular group گروه پیمانه‌ای

nonablian group گروه غیرآبلی
nondesarguesian plane صفحه غیردزارگی
noneuclideen crystallographic group
گروه‌بلور نگارانهٔ نااقلیدسی
noneuclidean geometry هندسه نااقلیدسی
nonorientable manifold خمینهٔ جهت‌ناپذیر
normal closure, normal subgroup
بستارنرمال، زیر گروه نرمال
normalizer نرمالگر

orbit مدار
order مرتبه
orientation جهت
orientable manifold خمینهٔ جهت‌پذیر
orthogonal group گروه متعامد

parabolic transformation تبدیل سهموی
parallel postulate اصل توازی
perpendicular bisector عمودمنصف
hyperbolic – هذلولوی
Poincaré polygon theorem
قضیهٔ چندضلعی پوآنکاره
Poincaré presentation نمایش پوآنکاره

polygon: Poincaré polygon theorem
n ـ ضلعی: قضیهٔ چند ضلعی پوآنکاره
polygon, regular n ـ ضلعی، منتظم
presentation نمایش
projection تصویر
projection, stereographic
تصویر، گنجنگاشتی
projective: equivalence تصویری: هم ارزی
geometry; group هندسه ـ، گروه ـ
line, plane خط ـ، صفحه ـ

quotient space فضا خارج قسمتها

real projective plane صفحه تصویری حقیقی
reflection بازتاب
regular polygon چندضلعی منتظم
regular tossellation قالب‌بندی منتظم
relation, relator رابطه، رابط
representation by matrices
نمایش بوسیله ماتریسها
representation, complex نمایش، مختلط
Riemann - Hurwitz formula
فرمول ریمان ـ هورویتز
Riemann surface رویهٔ ریمان
rigid motion حرکت صلب
rotation دوران

Schottky group گروه شوتکی
semidirect product حاصلضرب نیم مستقیم
similarity, similarity group تشابه، گروه تشابه
simple group گروه ساده
simplex, n - simplex سادک، سادک n بعدی

solvable group گروه حلپذیر
special orthegonal - group
گروه متعامد خاص
stabilizer پایدار ساز
standard regular solid جسم منتظم معیار
stereographic projection تصویر گنجنگاشتی
subgroup زیر گروه
surface; surface group رویه، گروه رویه
surface Riemann رویهٔ ریمان
symmetry تقارن
symmetry group گروه تقارن
symmetric group گروه متقارن

tessellation, regular قالب‌بندی، منتظم
Tietze transformation تبدیل تیتسه
trosion free subgroup زیر گروه آزاد بدون تاب
trace رد
transitivity ترایایی
triangle مثلث
triangle group گروه مثلث
triangle inequality نابرابری مثلث
triviality problem مسئله بداهت
translation انتقال
translation group گروه انتقال

undecidable تصمیم‌ناپذیر

vertex type نوع رأس

word, word problem کلمه، مسئله کلمه