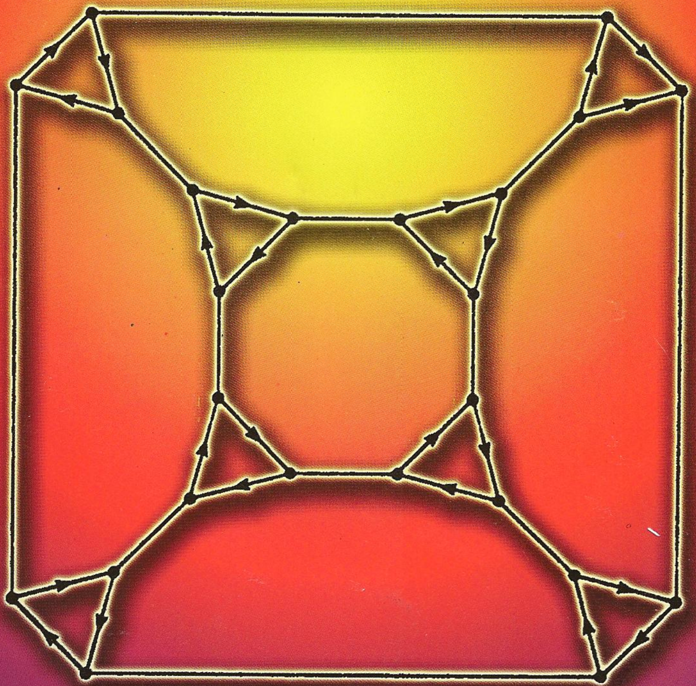
نمایش و سرشت گروه

گوردن جیمز، مارتین لیبک



ترجمهٔ محمدرضا درفشه

نمایش و سرشت گروه

گوردن جیمز، مارتین لیبک

ترجمهٔ محمدرضا درفشه

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان		صفحه

پیشگفتار

این کتاب را به ۳۰ فصل کوتاه تقسیم کرده‌ایم. بنابراین می‌توانید با یک ماه مطالعهٔ شبانگاهیِ قبل از خواب آن را به پایان رسانید، به شرط اینکه آن ماهْ اسفندِ ۲۹ روزه نباشد. اما چرا باید نظریهٔ نمایشهای گروهها برایمان مهم باشد؟

در نظریهٔ نمایشها راههای نشان‌دادن یک گروه به‌صورت گروهی از ماتریسها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این نظریه نه تنها فی‌نفسه زیباست، بلکه یکی از ابزارهای اساسی شناخت کامل گروههای متناهی است. به‌عنوان مثال، بسیاری اوقات فوق‌العاده مهم است که گروهی را به‌طور ملموس در دست داشته باشیم؛ این امر با یافتن نمایشی از گروه به‌صورت گروهی از ماتریسها ممکن می‌شود. به‌علاوه با مطالعهٔ نمایشهای متفاوت گروه می‌توان احکامی را ثابت کرد که خارج از چارچوب نظریهٔ نمایشهاست. مثالی ساده می‌زنیم: کلیهٔ گروههای مرتبهٔ p^2 (که p عددی اول است) آبلی‌اند؛ این حکم را می‌توان فقط با استفاده از نظریهٔ گروهها به راحتی ثابت کرد، اما این حکم از احکام اساسی نظریهٔ نمایشها نیز نتیجه می‌شود. به‌طور کلی، کلیهٔ گروههای مرتبهٔ p^aq^b (که p و q اول‌اند) حل‌پذیرند: این حکم نیز فقط دربارهٔ گروههاست، اما بهترین اثبات آن، که از برنساید است، شاهد بسیار خوبی بر فایدهٔ نظریهٔ نمایشهاست. درواقع دامنهٔ کاربرد این نظریه خیلی گسترده‌تر از حیطهٔ ریاضیات خالص است، و شامل فیزیک نظری و شیمی نیز می‌شود؛ یکی از این کاربردها را در فصل آخر کتاب توضیح می‌دهیم.

این کتاب برای دانشجویانی که با نظریهٔ گروهها و جبرخطی در حد اولین درسهای دورهٔ کارشناسی ریاضیات آشنا هستند مناسب است. در این کتاب دو فصل مقدماتی شامل مطالب پیشنیاز لازم آورده‌ایم. اساس نظریهٔ نمایشها را در فصول ۳ تا ۲۳ عرضه کرده‌ایم. روش ما معطوف به استفاده از مدولهاست و با اینکه این روش با جدیدترین روش رایج در جبر مطابقت دارد، در مواردی چند، برهانهای ما با برهانهای کتابهای دیگر تفاوت دارد. احکام اصلی زیبا و حیرت‌انگیزند،

اما برخی از آنها در نگاه اول در هاله‌ای از ابهام قرار دارند، رهیافتی که انتخاب کرده‌ایم به اعتقاد ما روشنترین رهیافتهاست.

به جنبه‌های عملی موضوع نیز توجه کرده‌ایم، و تعداد زیادی مثال آورده‌ایم. یکی از ویژگیهای این کتاب این است که در آن بسیاری از انواع گروهها را به تفصیل مورد مطالعه قرار داده‌ایم. تا آخر فصل ۲۷، جدول سرشت کلیهٔ گروههایی که مرتبه‌شان کمتر از ۳۲ است، کلیهٔ pـگروههایی که مرتبه‌شان حداکثر p^4 است، و کلیهٔ گروههای ساده‌ای که مرتبه‌شان کمتر از ۱۰۰۰ است بجز یکی را ارائه کرده‌ایم.

هر فصل دارای مجموعه‌ای از تمرینات است، و حل کلیهٔ این تمرینات در آخر کتاب آورده شده است.

در اینجا از دکتر هانس لیبک به جهت خواندن دقیق نسخهٔ دستنویس کتاب و پیشنهادات مفید فراوانشان تشکر می‌کنیم.

۱

گروه و همریختی

این کتاب به مطالعهٔ یکی از وجوه نظریهٔ گروهها اختصاص یافته است، لذا نخست خلاصه‌ای از احکام مربوط به گروهها را عرضه می‌کنیم که اغلبِ آنها را باید قبلاً آموخته باشید. به علاوه، چندین مثال، مانند گروههای دووجهی و گروههای متقارن ارائه می‌کنیم که بعداً برای روشن کردن مطالب در نظریهٔ نمایشها از آنها بسیار استفاده خواهیم کرد. هر درس مقدماتی در جبر مجرد معمولاً شامل تمام مواد این فصل است، و در هر کتاب مقدماتی دربارهٔ نظریهٔ گروهها مطالب این فصل را با تفصیل بیشتری می‌توانید بیابید. یکی دو حکم را که به ندرت مورد استفاده قرار خواهیم داد به‌صورت تمرین در آخر فصل می‌آوریم؛ در صورت لزوم می‌توانید به قسمت حل تمرینها مراجعه کنید.

گروه

گروه عبارت است از مجموعه‌ای چون G، همراه با قاعده‌ای برای ترکیب کردن هر دو عضو g و h از G و ساختن عضو دیگری از G که به‌صورت gh نشان داده می‌شود، این قاعده باید در اصول موضوعهٔ زیر صدق کند

(۱) به‌ازای هر g و h و k از G،

$$(gh)k = g(hk)$$

(۲) عضوی مانند e در G وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر g از G،

$$eg = ge = g$$

(۳) به‌ازای هر g از G، عنصر $g^{-۱}$ از G وجود داشته باشد به‌طوری که

$$gg^{-۱} = g^{-۱}g = e$$

قاعدهٔ ترکیب عناصر G را عمل ضرب می‌نامیم.

اصل موضوعهٔ (۱) بیان می‌دارد که عمل ضرب شرکت‌پذیر است؛ در اصل موضوعهٔ (۲) عنصر e عضو همانی G است، و در اصل موضوعهٔ (۳) $g^{-۱}$ وارون g است.

به سهولت ثابت می‌شود که G فقط یک عضو همانی دارد، و هر g از G فقط یک وارون دارد. معمولاً عضو همانی G را با ۱ نشان می‌دهیم.

حاصلضرب عنصر g در خودش، یعنی gg را به‌صورت $g^۲$ نشان می‌دهند، همچنین $g^۳ = g^۲g$، $g^{-۲} = (g^{-۱})^۲$، و غیره؛ به‌علاوه $g^۰ = ۱$.

اگر تعداد عناصر G متناهی باشد، G را گروه متناهی می‌نامیم، در این صورت تعداد عناصر G را مرتبهٔ G می‌نامند و به‌صورت $|G|$ نشان می‌دهند.

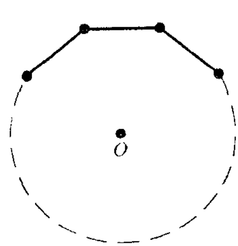
۱.۱ مثال (۱)گیریم n یک عدد صحیح مثبت باشد، و $\mathbb{C}$ مجموعهٔ تمام اعداد مختلط. مجموعهٔ ریشه‌های nام واحد (عدد یک) در $\mathbb{C}$، با ضرب معمولی اعداد مختلط، گروهی با مرتبهٔ n است. این گروه را به‌صورت C_n نشان می‌دهیم و گروه دوری مرتبهٔ n می‌نامیم. اگر $a = e^{۲\pi i/n}$ آنگاه

$$C_n = \{۱, a, a^۲, \cdots, a^{n-۱}\}$$

و $a^n = ۱$.

(۲) مجموعهٔ تمام اعداد صحیح، که آن را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم، تحت جمع گروه است.

(۳) گیریم n عددی صحیح باشد و $n \geq ۳$. تقارنهای دورانی و محوری nضلعی منتظم را در نظر بگیرید.



n تقارن دورانی وجود دارد: این تقارنها عبارت‌اند از $\rho_۰$، $\rho_۱$، . . . ، $\rho_{n-۱}$ که ρ_k دوران (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) حول مرکز O به اندازهٔ زاویهٔ $۲\pi k/n$ است. همچنین n تقارن محوری وجود دارد: این تقارنها عبارت‌اند از تقارن نسبت به هریک از n محوری که از O و یک رأس یا نقطهٔ وسط یک ضلع چندضلعی می‌گذرند.

این $۲n$ تقارن دورانی و محوری تحت عمل ترکیب، به‌عنوان عمل ضرب، (یعنی به‌ازای دو تقارن f و g، حاصلضرب fg به معنای این است که "ابتدا f عمل می‌کند و سپس g") تشکیل گروه می‌دهند. این گروه را گروه دووجهی مرتبهٔ $۲n$ می‌نامند، و با $D_{۲n}$ نشان می‌دهند.

گیریم A یکی از رئوس چندضلعی باشد. تقارن نسبت به محوری را که از O و A می‌گذرد با b نشان دهید، و دوران $\rho_۱$ را با a. در این صورت n دوران [تقارن دورانی] عبارت‌اند از

$$۱, a, a^۲, \cdots, a^{n-۱}$$

(در اینجا ۱ عضو همانی است، که چندضلعی تحت آن تغییر نمی‌کند)؛ و n تقارن محوری عبارت‌انداز

$$b, ab, a^۲b, \cdots, a^{n-۱}b$$

بنابراین همهٔ عناصر $D_{۲n}$ حاصلضرب توانهای a و b هستند، یعنی $D_{۲n}$ توسط a و b تولید می‌شود.

می‌توان نشان داد که

$$a^n = ۱, \quad b^۲ = ۱, \quad b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

با استفاده از این روابط حاصلضرب هر دو عضو گروه معین می‌شود. به‌عنوان مثال داریم $ba^j = a^{-j}b$ (که از رابطهٔ $ba = a^{-۱}b$ نتیجه می‌شود)، و از این‌رو

$$(a^ib)(a^jb) = a^iba^jb = a^ia^{-j}bb = a^{i-j}$$

تمامی این مطالب را در نمایهٔ زیر نشان می‌دهیم

$$D_{۲n} = \langle a, b : a^n = ۱, b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$$

(۴) اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه مجموعهٔ تمام جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$، تحت عمل ترکیب، به‌عنوان عمل ضرب، گروه است. این گروه را گروه متقارن درجهٔ n می‌نامند و با S_n نشان می‌دهند. مرتبهٔ S_n مساوی $n!$ است.

(۵) گیریم F مجموعهٔ $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) یا مجموعهٔ $\mathbb{C}$ (مجموعهٔ اعداد مختلط) است. مجموعهٔ تمام ماتریسهای وارون‌پذیر $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F، تحت ضرب ماتریسی تشکیل گروه می‌دهد. این گروه را گروه خطی عام درجهٔ n روی F می‌نامند و با $\mathrm{GL}(n, F)$ نشان می‌دهند. این گروه نامتناهی است. عضو همانی $\mathrm{GL}(n, F)$ ماتریس همانی است، که آن را با I_n یا فقط I نمایش می‌دهند.

گروه G را آبلی نامند اگر به‌ازای هر g و h از G، تساوی $gh = hg$ برقرار باشد. C_n و $\mathbb{Z}$ آبلی هستند، اما اغلبِ مثالهای دیگری که در بالا ذکر شده‌اند گروههای غیرآبلی هستند.

زیرگروه

گیریم G گروه است. زیرمجموعهٔ H از G را زیرگروه نامند اگر خود H تحت عمل ضربِ G گروه باشد. برای اینکه نشان دهیم H زیرگروه G است از نماد $H \leq G$ استفاده می‌کنیم.

به سادگی نتیجه می‌شود که زیرمجموعهٔ H از گروه G زیرگروه است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشند

(۱) $\text{۱} \in H$، و

(۲) اگر $h, k \in H$ آنگاه $hk^{-\text{۱}} \in H$.

۲.۱ مثال (۱) اگر G گروه باشد، مجموعه‌های $\{\text{۱}\}$ و G زیرگروه G هستند.

(۲) گیریم G گروه است و $g \in G$. زیرمجموعهٔ

$$\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

زیرگروه G است، این زیرگروه را زیرگروه دوری تولیدشونده توسط g می‌نامیم. اگر به‌ازای عددی چون $n \geq \text{۱}$ داشته باشیم $g^n = \text{۱}$ آنگاه $\langle g \rangle$ متناهی است. در این حالت، اگر r کوچکترین عدد صحیح و مثبتی باشد که $g^r = \text{۱}$ آنگاه r مساوی تعداد عناصر $\langle g \rangle$ است؛ درواقع

$$\langle g \rangle = \{\text{۱}, g, g^{\text{۲}}, \cdots, g^{r-\text{۱}}\}$$

r را مرتبهٔ عنصر g می‌نامیم.

اگر به‌ازای عضوی چون $g \in G$ داشته باشیم $G = \langle g \rangle$ آنگاه G را گروه دوری می‌نامیم. گروههای $\mathbb{Z}$ و C_n در مثالهای ۱.۱ دوری هستند.

(۳) گیریم G گروه است و $a, b \in G$. فرض می‌کنیم H زیرمجموعهٔ G متشکل از تمام عناصری باشد که حاصلضرب توانهایی از a و b هستند، یعنی تمام عناصری که به‌ازای عددی

چون n به شکل زیرند

$$a^{i_1}b^{j_1}a^{i_2}b^{j_2}\cdots a^{i_n}b^{j_n}$$

که در آن $i_k, j_k \in \mathbb{Z}$ و $1 \leq k \leq n$. در این صورت H زیرگروه G است؛ H را زیرگروه تولیدشونده توسط a و b می‌نامیم و می‌نویسیم

$$H = \langle a, b\rangle$$

به‌ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی S از G، می‌توانیم زیرگروه تولیدشونده توسط S را که با $\langle S\rangle$ نشان می‌دهیم به همین نحو تعریف کنیم.

این نحوهٔ ساختن زیرگروه روشی کارا برای پیداکردن گروههای جدیدی است که زیرگروه گروه مفروضی، مانند گروه خطی عام یا گروه متقارن، هستند. این روش را در مثال بعدی و همچنین در مثال ۵.۱ ذیل شرح می‌دهیم.

(۴) گیریم $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$، یعنی G گروه ماتریسهای وارون‌پذیر 2×2 با درایه‌های متعلق به $\mathbb{C}$ باشد، و

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنید $H = \langle A, B\rangle$، یعنی H زیرگروهی از G باشد که توسط A و B تولید می‌شود. می‌توان نشان داد که

$$A^4 = I, \quad A^2 = B^2, \quad B^{-1}AB = A^{-1}$$

با استفاده از رابطهٔ سوم نتیجه می‌شود که هر عنصر H به شکل A^iB^j است که در آن i و j اعداد صحیح هستند، و با استفاده از رابطه‌های اول و دوم می‌توان فرض کرد $0 \leq i \leq 3$ و $0 \leq j \leq 1$. از این‌رو H حداکثر ۸ عضو دارد. چون ماتریسهای A^iB^j ($0 \leq i \leq 3$، $0 \leq j \leq 1$) همگی متمایزند پس $|H| = 8$.

گوییم گروه H گروه چهارگانی با مرتبهٔ ۸ است و آن را با Q_8 نشان می‌دهیم. با استفاده از سه رابطهٔ فوق حاصلضرب هر دو عضو H را می‌توان معین کرد و لذا Q_8 را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$Q_8 = \langle A, B : A^4 = I, A^2 = B^2, B^{-1}AB = A^{-1}\rangle$$

(۵) مقصود از ترانهش در گروه متقارن S_n جایگشتی است که جای دو عدد از اعداد ۱، ۲، ... ، n را تغییر می‌دهد و $n-۲$ عدد دیگر را تغییر نمی‌دهد. هر جایگشت g از S_n را می‌توان به‌صورت حاصلضربی از ترانهشها نوشت. می‌توان نشان داد که چنین عباراتی برای g، یا همگی تعداد زوجی ترانهش دارند یا همگی دارای تعداد فردی ترانهش‌اند، که در این صورت g را به ترتیب زوج یا فرد می‌نامیم. زیرمجموعهٔ

$$A_n = \{g \in S_n : \text{جایگشت زوج است } g\}$$

زیرگروه S_n است و گروه متناوب درجهٔ n نامیده می‌شود.

حاصلضرب مستقیم

اکنون شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان از دو گروه مفروض گروه جدیدی ساخت.

فرض می‌کنیم G و H گروه هستند و زیرمجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم

$$G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$$

عمل ضرب زیر را در $G \times H$ تعریف می‌کنیم

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh')$$

که $g,g' \in G$ و $h,h' \in H$. با این عمل ضرب، $G \times H$ گروه است. این گروه را حاصلضرب مستقیم G و H می‌نامند.

در حالت کلی، اگر $G_۱$، ... ، G_r گروه باشند، حاصلضرب مستقیم $G_۱ \times \cdots \times G_r$ عبارت است از

$$\{(g_۱,\cdots,g_r) : g_i \in G_i, ۱ \leq i \leq r\}$$

با عمل ضربی که در زیر تعریف می‌شود

$$(g_۱,\cdots,g_r)(g'_۱,\cdots,g'_r) = (g_۱g'_۱,\cdots,g_rg'_r)$$

اگر همهٔ G_iها متناهی باشند، $G_۱ \times \cdots \times G_r$ نیز متناهی است و مرتبهٔ آن برابر با $|G_۱| \times \cdots \times |G_r|$ است.

۳.۱ مثال مرتبهٔ گروه $C_۲ \times \cdots \times C_۲$ (تعداد $C_۲$ها r تاست) برابر ۲^r است و مرتبهٔ هر عضو آن بجز عضو همانی برابر ۲ است.

تابع

تابع ϑ از مجموعهٔ G به مجموعهٔ H عبارت است از قاعده‌ای که به هر عضو G فقط یک عضو H را نسبت می‌دهد. در این کتاب برای نشان دادن عمل تابع بر عضو، تابع را سمت راست عضو می‌نویسیم، یعنی تصویر g تحت تابع ϑ را به‌صورت $g\vartheta$ نشان می‌دهیم و نه ϑg. تابع ϑ از G به H را بسیاری اوقات با استفاده از نماد $\vartheta : G \to H$ نمایش می‌دهیم. عبارت $\vartheta : g \to h$ که در آن $g \in G$ و $h \in H$، بدین معناست که $h = g\vartheta$.

تابع $\vartheta : G \to H$ را وارون‌پذیر نامند اگر تابع $\phi : H \to G$ وجود داشته باشد به قسمی که به‌ازای هر $g \in G$ و $h \in H$ داشته باشیم

$$(h\phi)\vartheta = h \quad \text{و} \quad (g\vartheta)\phi = g$$

در اینجا ϕ را وارون ϑ می‌نامند و به‌صورت ϑ^{-1} نشان می‌دهند. تابع ϑ از G به H وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر یک‌به‌یک (یعنی به‌ازای $g_1, g_2 \in G$، از $g_1\vartheta = g_2\vartheta$ نتیجه شود $g_1 = g_2$) و پوشا (یعنی به‌ازای هر $h \in H$ عضو $g \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $g\vartheta = h$) باشد. تابع وارون‌پذیر را تابع دوسویی نیز می‌نامند.

همریختی

گیریم G و H گروه باشند، توابعی از G به H که "حافظ ساختمان گروه" هستند ــ و اصطلاحاً همریختی نامیده می‌شوند ــ دارای اهمیت ویژه‌ای هستند.

اگر G و H گروه باشند، همریختی ϑ از G به H عبارت است از تابع $\vartheta : G \to H$ که در شرط زیر صدق کند

$$(g_1g_2)\vartheta = (g_1\vartheta)(g_2\vartheta) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

همریختی وارون‌پذیر را یکریختی می‌نامند. اگر یکریختی ϑ از G به H وجود داشته باشد، می‌گوییم G و H یکریخت‌اند و می‌نویسیم $G \cong H$؛ همچنین ϑ^{-1} یکریختی از H به G است و لذا $H \cong G$.

مثال زیر حاوی روشی است که بسیاری اوقات می‌توان از آن برای اثبات اینکه برخی توابع همریختی هستند استفاده کرد.

۴.۱ مثال گیریم $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$؛ هریک از $2n$ عضو G را به‌صورت a^ib^j نشان می‌دهیم که در آن $0 \leq i \leq n-1$ و $0 \leq j \leq 1$. گیریم H

گروه دلخواهی است و دارای عناصری مانند x و y است که در روابط زیر صدق می‌کنند

$$x^n = y^۲ = ۱, \quad y^{-۱}xy = x^{-۱}$$

ثابت می‌کنیم که تابع $\vartheta : G \to H$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vartheta : a^i b^j \to x^i y^j \quad (۰ \le i \le n-۱, ۰ \le j \le ۱)$$

همریختی است.

فرض کنیم که $۰ \le r \le n-۱$، $۰ \le s \le ۱$، $۰ \le t \le n-۱$، $۰ \le u \le ۱$. در این صورت به‌ازای i و jای که $۰ \le i \le n-۱$ و $۰ \le j \le ۱$، داریم

$$a^r b^s a^t b^u = a^i b^j$$

به‌علاوه، i و j با کاربرد مکرر روابط زیر معین می‌شود

$$a^n = b^۲ = ۱, \quad b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

چون $x^n = y^۲ = ۱$ و $y^{-۱}xy = x^{-۱}$، مانند بالا می‌توان نتیجه گرفت که

$$x^r y^s x^t y^u = x^i y^j$$

بنابراین

$$(a^r b^s a^t b^u)\vartheta = (a^i b^j)\vartheta = x^i y^j = x^r y^s x^t y^u = (a^r b^s)\vartheta \cdot (a^t b^u)\vartheta$$

و لذا ϑ همریختی است.

اکنون روش مثال ۴.۱ را در عمل نشان می‌دهیم.

۵.۱ مثال گیریم $G = S_۵$ و فرض می‌کنیم x و y جایگشتهای زیر از G باشند

$$x = (۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵), \quad y = (۲\ ۵)(۳\ ۴)$$

(در اینجا نمادگذاری متداول جایگشتهای دوری را به‌کار می‌بریم. از این‌رو مثلاً $(۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵)$ عبارت است از جایگشت $۱ \to ۲ \to ۳ \to ۴ \to ۵ \to ۱$) می‌توان نشان داد که

$$x^۵ = y^۲ = ۱, \quad y^{-۱}xy = x^{-۱}$$

گیریم H زیرگروه $\langle x, y\rangle$ از G است. با استفاده از روابط فوق نتیجه می‌گیریم

$$H = \{x^i y^j : ۰ \leq i \leq ۴, ۰ \leq j \leq ۱\}$$

که گروهی با مرتبهٔ ۱۰ است.

اکنون یادآوری می‌کنیم که

$$D_{۱۰} = \langle a, b : a^{۵} = b^{۲} = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$$

بنابه مثال ۴.۱، تابع $\vartheta : D_{۱۰} \to H$ با ضابطهٔ

$$\vartheta : a^i b^j \to x^i y^j \qquad (۰ \leq i \leq ۴, ۰ \leq j \leq ۱)$$

همریختی است. چون ϑ وارون‌پذیر است پس یکریختی است. از این‌رو $H = \langle x, y\rangle \cong D_{۱۰}$.

هم‌مجموعه

گیریم G گروه و H زیرگروه G باشد. به‌ازای عضو x از G، زیرمجموعهٔ

$$Hx = \{hx : h \in H\}$$

از G هم‌مجموعهٔ راست H در G نامیده می‌شود. هم‌مجموعه‌های راست متمایز H در G، G را افراز می‌کنند (یعنی هر عضو G دقیقاً در یکی از این هم‌مجموعه‌هاست).

اکنون فرض کنیم که G متناهی باشد و $Hx_۱$، ... ، Hx_r تمام هم‌مجموعه‌های راست متمایز H در G باشند. به‌ازای تمام iها، تابع

$$h \to hx_i \qquad (h \in H)$$

تابعی دوسویی از H به Hx_i است و لذا $|H| = |Hx_i|$. چون

$$G = Hx_۱ \cup \cdots \cup Hx_r \quad \text{و}$$

$Hx_i \cap Hx_j$ به‌ازای $i \neq j$ تهی است

نتیجه می‌گیریم که

$$|G| = r|H|$$

لذا داریم

۶.۱ قضیهٔ لاگرانژ اگر G گروه متناهی و H زیرگروه آن باشد، مرتبهٔ H مرتبهٔ G را عاد می‌کند.

تعداد هم‌مجموعه‌های راست متمایز H در G را شاخص H در G می‌نامیم و به‌صورت $|G:H|$ نشان می‌دهیم. از این‌رو در حالتی که G متناهی است، $|G:H|=|G|/|H|$.

زیرگروه نرمال

زیرگروه N از گروه G را زیرگروه نرمالِ G می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $g\in G$، $g^{-1}Ng=N$ (که در اینجا $g^{-1}Ng=\{g^{-1}ng : n\in N\}$)؛ برای نشان دادن اینکه N زیرگروه نرمال G است می‌نویسیم $N\lhd G$.

فرض می‌کنیم $N\lhd G$ و G/N مجموعهٔ تمام هم‌مجموعه‌های راست N در G باشد. اهمیت شرط $g^{-1}Ng=N$ (به‌ازای هر $g\in G$) این است که با استفاده از آن می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر $g,h\in G$ داریم

$$\{xy : x\in Ng,\ y\in Nh\}=Ngh$$

از این‌رو می‌توانیم یک عمل ضرب روی G/N به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$(Ng)(Nh)=Ngh \qquad \text{به‌ازای هر } g,h\in G$$

با این عمل، مجموعهٔ G/N به گروه تبدیل می‌شود. این گروه را گروه خارج‌قسمت G بر N یا گروه خارج‌قسمتی G/N می‌نامند.

۷.۱ مثال (۱) گیریم G گروهی دلخواه است. زیرگروههای $\{1\}$ و G زیرگروه نرمال G هستند.

(۲) به‌ازای $n\geq 1$ داریم $A_n\lhd S_n$. اگر $n\geq 2$ آنگاه فقط دو هم‌مجموعهٔ راست A_n در S_n وجود دارد، یعنی

$$A_n=\{g\in S_n : \text{زوج است } g\} \quad \text{و}$$
$$A_n(1\ 2)=\{g\in S_n : \text{فرد است } g\}$$

از این‌رو $|S_n : A_n|=2$ و لذا $S_n/A_n\cong C_2$.

(۳) گیریم $G=D_8=\langle a,b : a^4=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ و $N=\langle a^2\rangle=\{1,a^2\}$. در این صورت $N\lhd G$ و

$$G/N=\{N, Na, Nb, Nab\}$$

چون $(Na)^2 = (Nb)^2 = (Nab)^2 = N$ پس $G/N \cong C_2 \times C_2$.

زیرگروه $\langle a \rangle$ نیز زیرگروه نرمال G است، اما زیرگروه $H = \langle b \rangle$ زیرگروه نرمال G نیست زیرا $b \in H$ در صورتی‌که $a^{-1}ba = a^2b \notin H$.

گروه ساده

گروه G را ساده نامند هرگاه $G \neq \{1\}$ و تنها زیرگروههای نرمال G عبارت باشند از $\{1\}$ و G. به‌عنوان مثال، زیرگروه دوری C_p، به‌ازای عدد اول p، گروهی ساده است. مثالهایی از گروههای سادهٔ غیرآبلی را در فصلهای بعدی می‌آوریم؛ کوچکترین این گروهها A_5 است.

اگر G گروه متناهی غیرساده باشد آنگاه G دارای زیرگروه نرمالی مانند N است به‌طوری که مرتبه‌های N و G/N هر دو کوچکتر از مرتبهٔ G هستند، و به معنایی G از این دو گروهِ کوچکتر "ساخته" شده است. با ادامهٔ این کار برای گروههای کوچکتر، سرانجام می‌بینیم که G از خانواده‌ای از گروههای ساده ساخته شده است. (این موضوع مشابه این واقعیت است که هر عدد صحیح مثبت از عوامل اولش ساخته می‌شود.) از این‌رو گروههای ساده نقش اساسی در مطالعهٔ گروههای متناهی بازی می‌کنند.

هسته و تصویر

در این بخش که بخش پایانی فصل حاضر است، زیرگروههای نرمال و گروههای خارج‌قسمتی را به همریختیها مرتبط می‌سازیم. گیریم G و H گروه باشند و $\vartheta : G \to H$ همریختی باشد. هستهٔ ϑ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \{g \in G : g\vartheta = 1\} \tag{۸.۱}$$

در این صورت $\mathrm{Ker}\vartheta$ زیرگروه نرمال G است. همچنین تصویر ϑ عبارت است از

$$\mathrm{Im}\vartheta = \{g\vartheta : g \in G\} \tag{۹.۱}$$

که زیرگروه H است.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هسته و تصویر ϑ چه ارتباطی با هم دارند.

۱۰.۱ **قضیه** فرض کنیم که G و H گروه هستند و $\vartheta : G \to H$ همریختی است. در این صورت

$$G/\mathrm{Ker}\vartheta \cong \mathrm{Im}\vartheta$$

تابع زیر یک یکریختی از $G/\mathrm{Ker}\vartheta$ به $\mathrm{Im}\vartheta$ است

$$Kg \to g\vartheta \qquad (g \in G)$$

که $K = \mathrm{Ker}\vartheta$.

۱۱.۱ مثال تابع $\vartheta : S_n \to C_۲$ با ضابطهٔ

$$\vartheta : g \to \begin{cases} ۱ & \text{اگر } g \text{ جایگشت زوج باشد} \\ -۱ & \text{اگر } g \text{ جایگشت فرد باشد} \end{cases}$$

همریختی است. داریم $\mathrm{Ker}\vartheta = A_n$ و به‌ازای $n \geq ۲$، $\mathrm{Im}\vartheta = C_۲$. در مثال ۷.۱(۲) دیدیم $S_n/A_n \cong C_۲$؛ بنابراین مثال حاضر مثالی از قضیهٔ ۱۰.۱ است.

خلاصهٔ فصل ۱

۱. مثالهایی از گروه عبارت‌اند از

$$C_n = \langle a : a^n = ۱ \rangle$$
$$D_{۲n} = \langle a, b : a^n = b^۲ = ۱, \quad b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$$
$$Q_۸ = \langle a, b : a^۴ = ۱, \quad a^۲ = b^۲, \quad b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$$

$S_n =$ گروه متقارن درجهٔ n

$A_n =$ گروه متناوب درجهٔ n

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) =$ گروه ماتریسهای وارون‌پذیر $n \times n$ روی $\mathbb{C}$

$G_۱ \times \cdots \times G_r =$ حاصلضرب مستقیم گروههای $G_۱$، ...، G_r

۲. زیرگروه نرمال G عبارت است از زیرگروهی چون N با این خاصیت که به‌ازای تمام عناصر g از G داشته باشیم $g^{-۱}Ng = N$. گروه خارج‌قسمتی G/N متشکل از هم‌مجموعه‌های راست Ng $(g \in G)$ با عمل ضرب زیر است

$$(Ng)(Nh) = Ngh$$

۳. همریختی $\vartheta : G \to H$ تابعی است با این خاصیت که به‌ازای هر $g_۱$ و $g_۲$ از G

$$(g_۱g_۲)\vartheta = (g_۱\vartheta)(g_۲\vartheta)$$

$\mathrm{Ker}\vartheta$، یعنی هستهٔ ϑ، زیرگروه نرمال G است و $\mathrm{Im}\vartheta$، یعنی تصویر ϑ، زیرگروه H است. گروه خارج‌قسمتی $G/\mathrm{Ker}\vartheta$ با $\mathrm{Im}\vartheta$ یکریخت است.

تمرینات فصل ۱

۱. نشان دهید که اگر G گروه آبلی ساده باشد آنگاه G گروهی دوری است و مرتبه‌اش عددی اول است.

۲. فرض کنید که G و H گروه هستند و G ساده است و $\vartheta : G \to H$ همریختی پوشاست. نشان دهید که یا ϑ یکریختی است یا $H = \{۱\}$.

۳. فرض کنیم که G زیرگروه S_n است و زیرمجموعهٔ A_n نیست. ثابت کنید $G \cap A_n$ زیرگروه نرمال G است و $G/(G \cap A_n) \cong C_۲$.

۴. گیریم

$$G = D_۸ = \langle a, b : a^۴ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$$
$$H = Q_۸ = \langle c, d : c^۴ = ۱, c^۲ = d^۲, d^{-۱}cd = c^{-۱} \rangle$$

الف) فرض کنیم x و y جایگشتهایی از $S_۴$ به‌صورت زیر باشند

$$x = (۱\ ۲), \qquad y = (۳\ ۴)$$

و گیریم K زیرگروه $\langle x, y \rangle$ از $S_۴$ است. نشان دهید که تابعهای $\phi : G \to K$ و $\psi : H \to K$ با ضابطه‌های

$$\phi : a^r b^s \to x^r y^s$$
$$\psi : c^r d^s \to x^r y^s \qquad (۰ \leq r \leq ۳, ۰ \leq s \leq ۱)$$

همریختی هستند. $\mathrm{Ker}\phi$ و $\mathrm{Ker}\psi$ را پیدا کنید.

ب) گیریم X و Y ماتریسهای ۲ × ۲ی زیر باشند

$$X = \begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad Y = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

و فرض کنیم L زیرگروه $\langle X, Y \rangle$ از $\mathrm{GL}(۲, \mathbb{C})$ باشد. نشان دهید که فقط یکی از توابع

$\mu : H \to L$ و $\lambda : G \to L$ با تعاریف

$$\lambda : a^r b^s \to X^r Y^s$$
$$\mu : c^r d^s \to X^r Y^s \quad (۰ \le r \le ۳, ۰ \le s \le ۱)$$

همریختی است. ثابت کنید این همریختی یکریختی است.

۵. ثابت کنید که اگر m فرد باشد، $D_{۴m} \cong D_{۲m} \times C_۲$.

۶. الف) نشان دهید که هر زیرگروه گروه دوری گروهی دوری است.

ب) گیریم G گروه دوری متناهی است و n عددی صحیح و مثبت است که $|G|$ را عاد می‌کند. ثابت کنید که

$$\{g \in G : g^n = ۱\}$$

زیرگروهی دوری از G با مرتبهٔ n است.

ج) اگر G گروه دوری متناهی باشد و x و y عناصری از G با مرتبه‌های مساوی باشند، نشان دهید که x توانی از y است.

۷. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد مختلط مخالف صفر، تحت عمل ضرب معمولی گروه است. ثابت کنید هر زیرگروه متناهیِ این گروه دوری است.

۸. نشان دهید که هر گروهی با مرتبهٔ زوج شامل عضوی با مرتبهٔ ۲ است.

۹. عناصری چون A و B از $\mathrm{GL}(۲, \mathbb{C})$ را پیدا کنید به‌طوری که مرتبهٔ A برابر ۸ و مرتبهٔ B برابر ۴ باشد و داشته باشیم

$$B^{-۱}AB = A^{-۱} \quad \text{و} \quad B^۲ = A^۴$$

نشان دهید که گروه $\langle A, B \rangle$ دارای مرتبهٔ ۱۶ است.
(راهنمایی: با گروه $Q_۸$ در مثال ۲.۱(۴) مقایسه کنید.)

۱۰. فرض کنید که H زیرگروه G است و $|G : H| = ۲$. ثابت کنید $H \lhd G$.

۲

فضای برداری و تبدیل خطی

یکی از خصوصیات جالب نظریهٔ نمایشها این است که دو شاخه از شاخه‌های اصلی ریاضیات، یعنی نظریهٔ گروهها و جبرخطی، در این نظریه درهم می‌آمیزند. احکامی از جبر خطی را که مربوط به فضاهای برداری، تبدیلات خطی و ماتریسها هستند و بعداً از آنها استفاده خواهیم کرد در اینجا ذکر می‌کنیم تا بعداً بتوانیم به آنها ارجاع دهیم. اگر یک درس مقدماتی در جبر خطی گرفته باشید، با بیشتر مطالب این فصل آشنا هستید، لذا برهانها را بجز در بخش آخر که با تصویرگرها سروکار داریم حذف می‌کنیم، اما در آن بخش اثبات احکام را به تفصیل شرح می‌دهیم، به این دلیل که شاید قبلاً تصویرگرها را ندیده باشید.

فضای برداری

گیریم F مجموعهٔ $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) یا مجموعهٔ $\mathbb{C}$ (مجموعهٔ اعداد مختلط) است. مقصود از فضای برداری روی F مجموعه‌ای چون V است با دو قاعده: قاعده‌ای که طبق آن هر دو عضو u و v از V جمع می‌شود و عضو $u+v$ از V حاصل می‌شود و قاعده‌ای که طبق آن هر عضو v از V در هر عضو λ از F ضرب می‌شود و عضو λv از V حاصل می‌شود. (قاعدهٔ اخیر را ضرب اسکالری می‌نامند.) به‌علاوه، این قواعد باید واجد شرایط زیر باشند

۱.۲ (الف) V تحت جمع، گروه آبلی است
(ب) به‌ازای هر u و v از V و هر λ و μ از F،
(۱) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$؛
(۲) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$؛
(۳) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$؛
(۴) $1v = v$.

عناصر V را بردار می‌نامیم و عناصر F را اسکالر. عضو همانی گروه آبلیِ V تحت جمع را با 0 نمایش می‌دهیم.

۲.۲ مثال (۱) گیریم $\mathbb{R}^2$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (x,y) است که x و y اعداد حقیقی هستند. جمع و ضرب اسکالر را در $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف می‌کنیم

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

در این صورت $\mathbb{R}^2$ فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

(۲) برای تعمیم حالت (۱) به حالتِ کلی، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، بردارهای سطری

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

را در نظر می‌گیریم، که x_1، x_2، ...، x_n متعلق به F هستند. مجموعهٔ تمام چنین بردارهای سطری را با F^n نشان می‌دهیم و ضرب اسکالر را در F^n چنین تعریف می‌کنیم

$$(x_1, \cdots, x_n) + (x'_1, \cdots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \cdots, x_n + x'_n)$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

در این صورت F^n فضای برداری روی F است.

پایهٔ فضای برداری

گیریم v_1، ...، v_n بردارهایی از فضای V روی هیأت F هستند. بردار v از V ترکیب خطی v_1، ...، v_n است اگر به‌ازای اسکالرهایی چون λ_1، ...، λ_n از F

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

گوییم بردارهای v_1، … ، v_n فضای V را پدید می‌آورند اگر هر بردار V ترکیب خطی v_1، … ، v_n باشد.

گوییم v_1، … ، v_n وابستگی خطی دارند یا خطی‌وابسته‌اند اگر به‌ازای اسکالرهایی چون λ_1، … ، λ_n از F که همگی صفر نباشند داشته باشیم

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

در غیر این صورت گوییم v_1، … ، v_n استقلال خطی دارند یا خطی‌مستقل‌اند.

بردارهای v_1، … ، v_n پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند اگر V را پدید آورند و استقلال خطی داشته باشند.

در این کتاب، فقط فضاهای برداری متناهی‌بعد را در نظر می‌گیریم؛ این بدان معناست که V دارای پایه‌ای با تعداد متناهی عضو، مانند فوق، است. ثابت می‌شود که تعداد عناصر هر پایهٔ V با تعداد عناصر هر پایهٔ دیگر V مساوی است. تعداد بردارهای یک پایهٔ V را بعد V می‌نامند و با $\dim V$ نشان می‌دهند. اگر $V = \{0\}$ آنگاه $\dim V = 0$. فضای برداری V را nبعدی می‌گویند هرگاه $\dim V = n$.

۳.۲ مثال گیریم $V = F^n$. در این صورت

$$(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

پایه‌ای برای V است و لذا $\dim V = n$. پایهٔ زیر پایهٔ دیگری برای V است

$$(1, 0, 0, \cdots, 0), (1, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (1, 1, 1, \cdots, 1)$$

اگر v_1، … ، v_n پایهٔ مفروضی برای فضای برداری V باشد آنگاه هر بردار v از V به‌طور منحصر به فردی به‌صورت زیر قابل نمایش است

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

که λ_1، … ، λ_n اسکالرهایی از F هستند. بنابراین اسکالرهای λ_1، … ، λ_n توسط بردار V معین می‌شوند. بجز در حالت $V = \{0\}$ پایه‌های متعددی برای V وجود دارد. درواقع حکم بعدی می‌گوید که هر مجموعه از بردارهای خطی‌مستقل را می‌توان توسعه داد تا پایه‌ای برای V حاصل شود.

۴.۲ اگر $v_۱$، ... ، v_k در V استقلال خطی داشته باشند آنگاه بردارهای $v_{k+۱}$، ... ، v_n در V وجود دارند به‌قسمی که $v_۱$، ... ، v_n پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند.

زیرفضا

زیرفضای فضای برداری V روی F عبارت است از زیرمجموعه‌ای از V که خود نیز تحت جمع و ضرب اسکالری V فضای برداری باشد. برای اینکه زیرمجموعهٔ U از V زیرفضا باشد، لازم و کافی است که تمام شرایط زیر برقرار باشند

۵.۲ (۱) $۰ \in U$؛
(۲) اگر $u, v \in U$ آنگاه $u + v \in U$؛
(۳) اگر $\lambda \in F$ و $u \in U$ آنگاه $\lambda u \in U$.

۶.۲ مثال (۱) $\{۰\}$ و V زیرفضای V هستند.
(۲) گیریم $u_۱$، ... ، u_r بردارهایی از V هستند. $\mathrm{sp}(u_۱, \cdots, u_r)$ را مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی $u_۱$، ... ، u_r تعریف می‌کنیم، یعنی

$$\mathrm{sp}(u_۱, \cdots, u_r) = \{\lambda_۱ u_۱ + \cdots + \lambda_r u_r : \lambda_۱, \cdots, \lambda_r \in F\}$$

بنابه ۵.۲، $\mathrm{sp}(u_۱, \cdots, u_r)$ زیرفضای V است، و زیرفضای پدیدآینده توسط $u_۱$، ... ، u_r نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید که حکم زیر از نتایج ۴.۲ است.

۷.۲ فرض کنیم که U زیرفضای فضای برداری V است. در این صورت $\dim U \leq \dim V$. همچنین $\dim U = \dim V$ اگر و فقط اگر $U = V$.

مجموع مستقیم زیرفضاها

اگر $U_۱$، ... ، U_r زیرفضای فضای برداری V باشند، مجموع $U_۱ + \cdots + U_r$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$U_۱ + \cdots + U_r = \{u_۱ + \cdots + u_r : u_i \in U_i, ۱ \leq i \leq r\}$$

بنابه ۵.۲، $U_۱ + \cdots + U_r$ زیرفضای V است.

می‌گوییم که مجموع $U_1 + \cdots + U_r$ مجموع مستقیم است اگر هر عضو این مجموع را بتوان به‌صورت منحصر به فردی به شکل $u_1 + \cdots + u_r$ نوشت که به‌ازای $1 \leq i \leq r$، $u_i \in U_i$. اگر این مجموع مستقیم باشد آن را به‌صورت $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ نشان می‌دهیم.

۸.۲ مثال (۱) فرض کنیم که v_1، . . . ، v_n پایهٔ V است و به‌ازای $1 \leq i \leq n$، گیریم U_i زیرفضایی باشد که توسط v_i پدید می‌آید. در این صورت

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

(۲) گیریم U زیرفضای V و v_1، . . . ، v_k پایهٔ U باشد. v_1، . . . ، v_k را توسعه می‌دهیم تا پایهٔ v_1، . . . ، v_n برای V به‌دست آید (۴.۲ را ببینید) و قرار می‌دهیم $W = \mathrm{sp}(v_{k+1}, \cdots, v_n)$. در این صورت

$$V = U \oplus W$$

از این نحوهٔ ساختن W نتیجه می‌شود که تعداد نامتناهی زیرفضای W با ویژگی $V = U \oplus W$ وجود دارد بجز در حالتی که U مساوی $\{0\}$ یا V باشد.

وقتی که با مجموع مستقیم دو زیرفضا سروکار داریم حکم زیر مفید واقع می‌شود. اگر در اثبات این حکم دچار مشکل بودید به حل تمرینهای ۳.۲ و ۴.۲ مراجعه کنید.

۹.۲ فرض کنید که $V = U + W$، و u_1، . . . ، u_r پایهٔ U و w_1، . . . ، w_s پایهٔ W است. در این صورت سه شرط زیر هم‌ارزند

(۱) $V = U \oplus W$؛

(۲) u_1، . . . ، u_r، w_1، . . . ، w_s پایهٔ V است؛

(۳) $U \cap W = \{0\}$.

حکم بعدی را که دربارهٔ مجموع مستقیم چند زیرفضاست بلاواسطه می‌توان از تعریف مجموع مستقیم نتیجه گرفت.

۱۰.۲ فرض کنیم که U، W، U_1، . . . ، U_a، W_1، . . . ، W_b زیرفضاهای فضای برداری V هستند. اگر $V = U \oplus W$ و همچنین $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_b$ و $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_a$ آنگاه

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_a \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_b$$

حال ساختمانی را برای فضاهای برداری معرفی می‌کنیم که مشابه ساختمان حاصلضرب مستقیم گروههاست.

فرض می‌کنیم U_1، ... ، U_r فضاهایی برداری روی F هستند و قرار می‌دهیم

$$V = \{(u_1, \cdots, u_r) : u_i \in U_i, 1 \leq i \leq r\}$$

جمع و ضرب اسکالری را در V چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر u_i و u'_i از U_i $(1 \leq i \leq r)$ و هر λ از F،

$$(u_1, \cdots, u_r) + (u'_1, \cdots, u'_r) = (u_1 + u'_1, \cdots, u_r + u'_r)$$
$$\lambda(u_1, \cdots, u_r) = (\lambda u_1, \cdots, \lambda u_r)$$

با این تعاریف، V فضای برداری روی F است. اگر به‌ازای $1 \leq i \leq r$، قرار دهیم

$$U'_i = \{(0, \cdots, u_i, \cdots, 0) : u_i \in U_i\}$$

(که u_i در مکان iام قرار دارد)، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$V = U'_1 \oplus \cdots \oplus U'_r$$

V را مجموع مستقیم خارجی U_1، ... ، U_r می‌نامیم و با کمی سوء استفاده در نمادگذاری می‌نویسیم

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

تبدیل خطی

گیریم V و W فضای برداری روی F هستند. تبدیل خطی از V به W عبارت است از تابعی چون $\vartheta : V \to W$ که در شرایط زیر صدق کند

$$(u+v)\vartheta = u\vartheta + v\vartheta \qquad \forall u, v \in V$$
$$(\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta) \qquad \forall \lambda \in F, \forall v \in V$$

همان‌طور که همریختی گروهها عمل ضرب گروه را حفظ می‌کند، تبدیل خطی عمل جمع و ضرب اسکالری را حفظ می‌کند.

توجه داشته باشید که اگر $\vartheta : V \to W$ تبدیل خطی باشد و v_1، ... ، v_n پایهٔ V باشد آنگاه به‌ازای λ_1، ... ، λ_n از F داریم

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)\vartheta = \lambda_1(v_1\vartheta) + \cdots + \lambda_n(v_n\vartheta)$$

اگر حاصل‌عمل ϑ بر عناصر پایه معین باشد، ϑ معین است. به‌علاوه به‌ازای هر پایهٔ v_1، ... ، v_n از V و هر n بردار w_1، ... ، w_n از W، تبدیل خطی منحصر به فردی چون $\phi : V \to W$ وجود دارد به قسمی که به‌ازای تمام iها، $v_i\phi = w_i$؛ این تبدیل خطی ϕ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)\phi = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$$

گاهی تبدیل خطی $\phi : V \to W$ را به طریق فوق می‌سازیم، در این صورت مقادیر ϕ را روی پایه‌ای چون V مشخص می‌کنیم و سپس می‌گوییم "عمل ϕ را طوری توسیع می‌دهیم که خطی باشد".

هسته و تصویر

فرض می‌کنیم که $\vartheta : V \to W$ تبدیل خطی است. هستهٔ ϑ را (که با $\mathrm{Ker}\vartheta$ نشان می‌دهند) و تصویر ϑ را (که با $\mathrm{Im}\vartheta$ نشان می‌دهند) به‌صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\vartheta &= \{v \in V : v\vartheta = 0\} \\ \mathrm{Im}\vartheta &= \{v\vartheta : v \in V\} \end{aligned} \qquad (۱۱.۲)$$

با استفاده از ۵.۲ به سادگی ثابت می‌شود که $\mathrm{Ker}\vartheta$ زیرفضای V است و $\mathrm{Im}\vartheta$ زیرفضای W است. رابطهٔ بین ابعاد این زیرفضاها رابطهٔ زیر است که به قضیهٔ رتبه-پوچی معروف است

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\vartheta) + \dim(\mathrm{Im}\vartheta) \qquad (۱۲.۲)$$

۱۳.۲ مثال (۱) اگر $\vartheta : V \to W$ به‌ازای هر $v \in V$ چنین تعریف شود که $v\vartheta = 0$ آنگاه ϑ تبدیل خطی است و

$$\mathrm{Ker}\vartheta = V, \qquad \mathrm{Im}\vartheta = \{0\}$$

(۲) اگر $\vartheta : V \to V$ به‌ازای هر $v \in V$ چنین تعریف شود که $v\vartheta = 3v$ آنگاه ϑ تبدیل خطی است و

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}, \qquad \mathrm{Im}\vartheta = V$$

(۳) اگر $\vartheta : \mathbb{R}^{۳} \to \mathbb{R}^{۲}$ به‌ازای هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ چنین تعریف شود

$$(x, y, z)\vartheta = (x + ۲y + z, -y + ۳z)$$

آنگاه ϑ تبدیل خطی است و

$$\mathrm{Ker}\vartheta = \mathrm{sp}((۷, -۳, -۱)), \qquad \mathrm{Im}\vartheta = \mathbb{R}^{۲}$$

و لذا $\dim(\mathrm{Ker}\vartheta) = ۱$ و $\dim(\mathrm{Im}\vartheta) = ۲$.

تبدیل خطی وارون‌پذیر

فرض کنید V و W فضای برداری روی F هستند. تبدیل خطی ϑ از V به W یک‌به‌یک است اگر و فقط اگر $\mathrm{Ker}\vartheta = \{۰\}$ و از این‌رو ϑ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر ϑ پوشا باشد و $\mathrm{Ker}\vartheta = \{۰\}$. ثابت می‌شود که وارون هر تبدیل خطی وارون‌پذیر خودْ تبدیل خطی است (تمرین ۱.۲ را ببینید).

اگر تبدیل خطی وارون‌پذیری از V به W وجود داشته باشد آنگاه V و W را فضاهای برداری یکریخت می‌نامند. با استفاده از (۱۲.۲) نتیجه می‌گیریم که فضاهای برداری یکریخت دارای ابعاد مساوی هستند. اگر ۷.۲ را نیز در نظر گیریم، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم (تمرین ۲.۲ را ببینید).

۱۴.۲ گیریم ϑ تبدیل خطی از V به خودش است. در این صورت سه شرط زیر هم‌ارزند

(۱) ϑ وارون‌پذیر است؛

(۲) $\mathrm{Ker}\vartheta = \{۰\}$؛

(۳) $\mathrm{Im}\vartheta = V$.

درونریختی

تبدیل خطی از فضای برداری V به خودش را درونریختی V می‌نامند.

فرض کنیم که ϑ و ϕ درونریختیهای V هستند و $\lambda \in F$. توابع $\vartheta + \phi$، $\vartheta\phi$ و $\lambda\vartheta$ از V به V را به‌ازای هر $v \in V$ چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} v(\vartheta + \phi) &= v\vartheta + v\phi \\ v(\vartheta\phi) &= (v\vartheta)\phi \\ v(\lambda\vartheta) &= \lambda(v\vartheta) \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

در این صورت $\vartheta + \phi$، $\vartheta\phi$ و $\lambda\vartheta$ درونریختی V هستند. به جای $\vartheta\vartheta$ می‌نویسیم $\vartheta^{۲}$.

۱۶.۲ مثال (۱) تابع همانی 1_V که به‌ازای هر $v \in V$ چنین تعریف می‌شود

$$1_V : v \to v$$

درونریختی V است. اگر ϑ درونریختی V باشد، $\vartheta - \lambda 1_V$ نیز به‌ازای هر $\lambda \in F$ درونریختی V است. توجه داشته باشید که

$$\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = \{v \in V : v\vartheta = \lambda v\}$$

(۲) فرض کنیم $V = \mathbb{R}^2$، و ϑ و ϕ توابعی از V به V هستند که چنین تعریف می‌شوند

$$(x, y)\vartheta = (x + y, x - 2y)$$

$$(x, y)\phi = (x - 2y, -2x + 4y)$$

در این صورت ϑ و ϕ درونریختی V هستند و $\vartheta + \phi$، $\vartheta\phi$، 3ϑ و ϑ^2 با ضابطه‌های زیر مشخص می‌شوند

$$(x, y)(\vartheta + \phi) = (2x - y, -x + 2y)$$

$$(x, y)(\vartheta\phi) = (-x + 5y, 2x - 10y)$$

$$(x, y)(3\vartheta) = (3x + 3y, 3x - 6y)$$

$$(x, y)\vartheta^2 = (2x - y, -x + 5y)$$

ماتریس

گیریم V فضای برداری روی F است و ϑ درونریختی V است. فرض می‌کنیم که v_1، … ، v_n پایهٔ V است و آن را $\mathscr{B}$ می‌نامیم. در این صورت اسکالرهای a_{ij} در F ($1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$) وجود دارند به قسمی که به‌ازای هر i،

$$v_i\vartheta = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n$$

۱۷.۲ تعریف ماتریس $n \times n$ (a_{ij}) را ماتریس ϑ نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ می‌نامند و با $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ نمایش می‌دهند.

۱۸.۲ مثال (۱) اگر $\vartheta = 1_V$ (یعنی به‌ازای هر $v \in V$، $v\vartheta = v$) آنگاه به‌ازای هر پایهٔ V چون $\mathscr{B}$ داریم $[\vartheta]_{\mathscr{B}} = I_n$ که I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

(۲) گیریم $V = \mathbb{R}^2$ و ϑ درونریختی $(x, y) \to (x + y, x - 2y)$ از V باشد. اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ $(1, 0)$، $(0, 1)$ از V و $\mathscr{B}'$ پایهٔ $(1, 0)$، $(1, 1)$ از V باشد آنگاه

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad [\vartheta]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

اگر بخواهیم تأکید کنیم که درایه‌های ماتریس A متعلق به F هستند، می‌گوییم A ماتریسی روی F است.

اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسهایی $m \times n$ روی F باشند آنگاه مجموع آنها $A + B$ ماتریسی $m \times n$ روی F است که درایهٔ ijی آن به‌ازای هر i و j مساوی $a_{ij} + b_{ij}$ است؛ و اگر $\lambda \in F$ آنگاه λA ماتریسی $m \times n$ روی F است که از ضرب‌کردن کلیهٔ درایه‌های A در λ حاصل می‌شود.

همان‌طور که می‌دانید حاصلضرب دو ماتریس را به روشی تعریف می‌کنند که به اندازهٔ دو تعریف فوق سرراست نیست. اگر ماتریس $A = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times n$ و ماتریس $B = (b_{ij})$ ماتریسی $n \times p$ باشد، حاصلضرب آنها، AB، ماتریسی $m \times p$ است که درایهٔ ijی آن عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

۱۹.۲ مثال گیریم $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. در این صورت

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -12 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

رابطهٔ ماتریس مجموع یا حاصلضرب دو درونریختی (نسبت به یک پایه) با ماتریس تک‌تک درونریختیها همان است که انتظار داریم:

۲۰.۲ فرض کنیم که $\mathscr{B}$ پایهٔ فضای برداری V است و ϑ و ϕ درونریختی V هستند. در این صورت

$$[\vartheta + \phi]_{\mathscr{B}} = [\vartheta]_{\mathscr{B}} + [\phi]_{\mathscr{B}}$$
$$[\vartheta\phi]_{\mathscr{B}} = [\vartheta]_{\mathscr{B}}[\phi]_{\mathscr{B}}$$

همچنین به‌ازای هر اسکالر λ،

$$[\lambda\vartheta]_{\mathscr{B}} = \lambda[\vartheta]_{\mathscr{B}}$$

در ۱۷.۲ نشان دادیم که چگونه می‌توان از یک درونریختی فضای برداری V، نسبت به پایه‌ای مفروض ماتریس ساخت. به سهولت می‌توان این فرآیند را برعکس کرد و با استفاده از ماتریس، درونریختی ساخت. در اینجا راه خاصی را برای انجام‌دادن این کار بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم که A ماتریسی $n \times n$ روی F است و فضای $V = F^n$ فضای برداری بردارهای سطری $(x_1, \cdots, x_n)$ است، که $x_i \in F$. در این صورت به‌ازای هر v از V، حاصلضرب ماتریسی vA در V قرار دارد. حکم زیر به سادگی ثابت می‌شود.

۲۱.۲ اگر A ماتریسی $n \times n$ روی F باشد، تابع

$$v \to vA \qquad (v \in F^n)$$

درونریختی F^n است.

۲۲.۲ مثال فرض می‌کنیم $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. در این صورت با استفاده از A درونریختی ϑ از F^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$(x, y)\vartheta = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (x + 3y, -x + 2y)$$

ماتریس وارون‌پذیر

ماتریس $n \times n$ای چون A را وارون‌پذیر نامند هرگاه ماتریس $n \times n$ای چون B وجود داشته باشد به‌طوری که $AB = BA = I_n$. چنین ماتریس Bای را که در صورت وجود منحصر به فرد است، وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم. دترمینان A را با $\det A$ نشان می‌دهیم. در این صورت یک شرط لازم و کافی برای اینکه A وارون‌پذیر باشد این است که $\det A \neq 0$.

ارتباط بین درونریختیهای وارون‌پذیر و ماتریسهای وارون‌پذیر واضح است، و از ۲۰.۲ نتیجه می‌شود: اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ V باشد آنگاه درونریختی ϑ از V وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ وارون‌پذیر باشد.

وقتی‌که دو پایهٔ فضای برداری را به هم ربط می‌دهیم ماتریسهای وارون‌پذیر ظاهر می‌شوند. هر ماتریس وارون‌پذیر یک پایه را به پایهٔ دیگری تبدیل می‌کند و از همین ماتریس در مشخص کردن اینکه چگونه ماتریس یک درونریختی بستگی به پایه دارد استفاده می‌شود. معنی دقیق این توضیحات در زیر در تعریف ۲۳.۲ و نتیجهٔ ۲۴.۲ آمده است.

۲۳.۲ تعریف گیریم $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1، ... ، v_n و $\mathscr{B}'$ پایهٔ v'_1، ... ، v'_n برای فضای برداری V هستند. در این صورت به‌ازای $1 \leq i \leq n$،

$$v'_i = t_{i1}v_1 + \cdots + t_{in}v_n$$

که t_{ij}ها اسکالرهای معینی هستند. ماتریس $n \times n$ $\quad T = (t_{ij})$ وارون‌پذیر است و ماتریس تبدیل پایه از $\mathscr{B}$ به $\mathscr{B}'$ نامیده می‌شود.

وارون T ماتریس تبدیل پایه از $\mathscr{B}'$ به $\mathscr{B}$ است.

۲۴.۲ اگر $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$ پایهٔ V و ϑ درونریختی V باشد آنگاه

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T$$

که T ماتریس تبدیل پایه از $\mathscr{B}$ به $\mathscr{B}'$ است.

۲۵.۲ مثال فرض کنیم که $V = \mathbb{R}^2$. و $\mathscr{B}$ پایهٔ $(1, 0)$، $(0, 1)$ و $\mathscr{B}'$ پایهٔ $(1, 0)$، $(1, 1)$ برای V باشند. در این صورت

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر ϑ درونریختی $\vartheta : (x, y) \to (x + y, x - 2y)$ از V باشد که در مثال ۱۸.۲(۲) آمده است آنگاه

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T$$

مقدار ویژه

گیریم V فضای برداری n بعدی روی F است و ϑ درونریختی V است. اسکالر λ را مقدار ویژهٔ ϑ گویند هرگاه به‌ازای بردار مخالف صفری چون v از V داشته باشیم $v\vartheta = \lambda v$. چنین بردار v را بردار ویژهٔ ϑ نامند.

λ مقدار ویژهٔ ϑ است اگر و فقط اگر $\operatorname{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$، و این رابطه وقتی و فقط وقتی برقرار است که $\vartheta - \lambda 1_V$ وارون‌پذیر نباشد. بنابراین، اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ V باشد آنگاه مقادیر ویژهٔ ϑ عبارت‌اند از اسکالرهایی چون λ از F که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\det([\vartheta]_{\mathscr{B}} - \lambda I_n) = 0$$

حل این معادله عبارت است از پیداکردن ریشه‌های یک چندجمله‌ای درجهٔ nام. چون هر چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب متعلق به $\mathbb{C}$ دارای ریشه‌ای در $\mathbb{C}$ است نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

۲۶.۲ فرض کنیم V فضای برداری مخالف صفر روی $\mathbb{C}$ است و ϑ درونریختی V. در این صورت ϑ دارای مقدار ویژه است.

۲۷.۲ مثال (۱) گیریم $V = \mathbb{C}^2$ و ϑ درونریختی V با ضابطهٔ زیر باشد

$$(x, y)\vartheta = (-y, x)$$

اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ $(1, 0), (0, 1)$ برای V باشد آنگاه

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

چون $\det([\vartheta]_{\mathscr{B}} - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$ پس i و $-i$ مقادیر ویژهٔ ϑ هستند. بردارهای ویژهٔ متناظر با این مقادیر عبارت‌اند از $(1, -i)$ و $(1, i)$. توجه کنید که اگر $\mathscr{B}'$ پایهٔ $(1, -i)$، $(1, i)$ برای V باشد آنگاه

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(۲) گیریم $V = \mathbb{R}^2$ و ϑ درونریختی V با همان ضابطهٔ فوق باشد، یعنی

$$(x, y)\vartheta = (-y, x)$$

این بار V فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و ϑ مقدار ویژه‌ای در $\mathbb{R}$ ندارد. از این‌رو نتیجهٔ ۲۶.۲ منوط به این است که F مساوی $\mathbb{C}$ باشد.

اگر A ماتریسی $n \times n$ روی F باشد، عنصر λ از F را مقدار ویژهٔ A می‌نامیم هرگاه به‌ازای بردار سطری مخالف صفری چون v از F^n داشته باشیم $vA = \lambda v$. مقادیر ویژهٔ A عبارت‌انداز عناصری چون λ از F که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\det(A - \lambda I_n) = \circ$$

۲۸.۲ مثال گوییم که ماتریس $n \times n$ $A = (a_{ij})$ قطری است اگر به‌ازای هر i و j، که $i \neq j$، داشته باشیم $a_{ij} = \circ$. بسیاری اوقات چنین ماتریسی را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

که به‌علاوه مبین آن است که به‌ازای $1 \leq i \leq n$، $a_{ii} = \lambda_i$. مقادیر ویژهٔ این ماتریس قطری عبارت‌اند از λ_1، . . . ، λ_n.

تصویرگر

هرگاه فضای برداری V مجموع مستقیم دو زیرفضای U و W باشد آنگاه می‌توانیم درونریختی بخصوصی از V بسازیم که بستگی به عبارت $V = U \oplus W$ داشته باشد:

۲۹.۲ گزاره فرض کنیم که $V = U \oplus W$. $\pi : V \to V$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(u + w)\pi = u \qquad \forall u \in U,\ \forall w \in W$$

در این صورت π درونریختی V است. به‌علاوه

$$\mathrm{Im}\pi = U, \qquad \mathrm{Ker}\pi = W, \qquad \pi^2 = \pi$$

برهان چون هر بردار V را می‌توان به‌طور منحصر به فردی به‌صورت $u + w$ که در آن $u \in U$ و $w \in W$ نوشت، نتیجه می‌شود که π تابعی از V به V است.

گیریم v و v' متعلق به V هستند. در این صورت $v = u + w$ و $v' = u' + w'$ که u و u' در U هستند و w و w' در W. داریم

$$\begin{aligned}(v + v')\pi &= (u + u' + w + w')\pi = u + u' \\ &= (u + w)\pi + (u' + w')\pi \\ &= v\pi + v'\pi\end{aligned}$$

همچنین به‌ازای $\lambda \in F$،

$$(\lambda v)\pi = (\lambda u + \lambda w)\pi = \lambda u = \lambda(v\pi)$$

بنابراین π درونریختی V است.

واضح است که $\mathrm{Im}\pi \subseteq U$، و چون به‌ازای هر $u \in U$ داریم $u\pi = u$ پس $\mathrm{Im}\pi = U$. همچنین

$$(u + w)\pi = \circ \Leftrightarrow u = \circ \Leftrightarrow u + w \in W$$

و لذا $\mathrm{Ker}\pi = W$.

بالاخره

$$(u + w)\pi^{۲} = u\pi = u = (u + w)\pi$$

و لذا $\pi^{۲} = \pi$. ■

۳۰.۲ تعریف درونریختی π از فضای برداری V را که در رابطهٔ $\pi^{۲} = \pi$ صدق می‌کند تصویرگر V می‌نامند.

۳۱.۲ مثال درونریختی $(x, y) \to (۲x + ۲y, -x - y)$ از $\mathbb{R}^{۲}$ تصویرگر $\mathbb{R}^{۲}$ است.

حال نشان می‌دهیم که هر تصویرگر را با استفاده از یک مجموع مستقیم، همانند گزارهٔ ۲۹.۲، می‌توان ساخت.

۳۲.۲ گزاره فرض کنیم که π تصویرگر فضای برداری V است. در این صورت

$$V = \mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\pi$$

برهان اگر $v \in V$ آنگاه $v = v\pi + (v - v\pi)$. واضح است که جملهٔ اول یعنی $v\pi$ به $\mathrm{Im}\pi$ تعلق دارد. همچنین جملهٔ دوم یعنی $v - v\pi$ به $\mathrm{Ker}\pi$ تعلق دارد، زیرا

$$(v - v\pi)\pi = v\pi - v\pi^{۲} = v\pi - v\pi = ۰$$

بنابراین برقراری تساوی $V = \mathrm{Im}\pi + \mathrm{Ker}\pi$ ثابت شده است.

حال فرض می‌کنیم که v در $\mathrm{Im}\pi \cap \mathrm{Ker}\pi$ قرار دارد. از آنجا که $v \in \mathrm{Im}\pi$، به‌ازای uای از V داریم $v = u\pi$. بنابراین

$$v\pi = u\pi^{۲} = u\pi = v$$

چون $v \in \mathrm{Ker}\pi$ نتیجه می‌شود که $v = v\pi = ۰$. از این‌رو

$$\mathrm{Im}\pi \cap \mathrm{Ker}\pi = \{۰\}$$

و بنابه ۹.۲ داریم $V = \mathrm{Im}\pi \oplus \mathrm{Ker}\pi$. ■

۳۳.۲ مثال اگر $\pi : (x, y) \to (۲x + ۲y, -x - y)$ تصویرگر $\mathbb{R}^{۲}$ باشد که در مثال ۳۱.۲ دیدیم آنگاه

$$\mathrm{Im}\pi = \{(۲x, -x) : x \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathrm{Ker}\pi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

خلاصهٔ فصل ۲

۱. تمام فضاهای برداری ما فضای متناهی‌بعد روی F هستند که F برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. به‌عنوان مثال، F^n مجموعهٔ بردارهای سطری $(x_۱, \cdots, x_n)$ است که هر کدام از x_iها در Fاند، و $\dim F^n = n$

۲. تساوی $V = U_۱ \oplus \cdots \oplus U_r$ برقرار است اگر هر کدام از U_iها زیرفضای V باشد وهر عضو v از V به‌صورت منحصر به فردی به شکل $v = u_۱ + \cdots + u_r$ قابل نمایش باشد $(u_i \in U_i)$.

$$V = U \oplus W \text{ اگر و فقط اگر } V = U + W \text{ و } U \cap W = \{۰\}$$

۳. تبدیل خطی $\vartheta : V \to W$ به‌ازای هر u و v از V و هر λ از F در شرایط زیر صدق می‌کند

$$(u+v)\vartheta = u\vartheta + v\vartheta \quad \text{و} \quad (\lambda v)\vartheta = \lambda(v\vartheta)$$

$\mathrm{Ker}\vartheta$ زیرفضای V و $\mathrm{Im}\vartheta$ زیرفضای W است و

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\vartheta) + \dim(\mathrm{Im}\vartheta)$$

۴. تبدیل خطی $\vartheta : V \to W$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$ و $\mathrm{Im}\vartheta = W$.

۵. به‌ازای پایهٔ مفروض $\mathscr{B}$ از فضای برداری nبعدی V، تناظری یک‌به‌یک بین درونریختیهای ϑ از V و ماتریس‌های $n \times n$ $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ روی F وجود دارد.

به‌ازای هر دو پایهٔ $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$ از V و هر درونریختی ϑ از V ماتریس وارون‌پذیر Tوجود دارد به قسمی که

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[\vartheta]_{\mathscr{B}'}T$$

۶. مقدار ویژهٔ λ از درونریختی ϑ در شرط $v\vartheta = \lambda v$ که v بردار مخالف صفری از V است صدق می‌کند.

۷. تصویرگر عبارت است از درونریختیی چون π از V که در شرط $\pi = \pi^2$ صدق می‌کند.

تمرینات فصل ۲

۱. نشان دهید که اگر V و W فضای برداری باشند و $\vartheta : V \to W$ تبدیل خطی وارون‌پذیر باشد آنگاه ϑ^{-1} تبدیل خطی است.

۲. فرض کنیم که ϑ درونریختی فضای برداری V است. نشان دهید احکام زیر هم‌ارزند

(۱) ϑ وارون‌پذیر است؛

(۲) $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$؛

(۳) $\mathrm{Im}\vartheta = V$.

۳. گیریم U و W زیرفضای فضای برداری V هستند. ثابت کنید $V = U \oplus W$ اگر و فقط اگر $V = U + W$ و $U \cap W = \{0\}$.

۴. گیریم U و W زیرفضای فضای برداری V هستند. فرض کنیم که u_1، ... ، u_r پایهٔ U و w_1، ... ، w_s پایهٔ W است. نشان دهید $V = U \oplus W$ اگر و فقط اگر u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s پایهٔ V باشد.

۵. الف) گیریم U_1، U_2 و U_3 زیرفضای فضای برداری V باشند و $V = U_1 + U_2 + U_3$. نشان دهید

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \Leftrightarrow$$
$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$$

ب) مثالی از فضایی برداری چون V با سه زیرفضای U_1، U_2 و U_3 بیاورید به‌طوری که $V = U_1 + U_2 + U_3$ و $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ ولی $V \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

۶. فرض کنیم که U_1، ... ، U_r زیرفضای فضای برداری V هستند و $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$. ثابت کنید که

$$\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$$

۷. فضایی برداری چون V با درونریختیهای ϑ و ϕ مثال بزنید به‌طوری که $V = \mathrm{Im}\vartheta \oplus \mathrm{Ker}\vartheta$ ولی $V \neq \mathrm{Im}\phi \oplus \mathrm{Ker}\phi$.

۸. گیریم V فضای برداری است و ϑ درونریختی V است. نشان دهید که ϑ تصویرگر V است اگر و فقط اگر پایهٔ $\mathscr{B}$ برای V وجود داشته باشد به قسمی که $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ قطری باشد و همهٔ درایه‌های روی قطر اصلیش برابر ۱ یا ۰ باشد.

۹. فرض کنیم که ϑ درونریختی فضای برداری V است و $\vartheta^2 = 1_V$. نشان دهید که $V = U \oplus W$ که

$$U = \{v \in V : v\vartheta = v\}, \qquad W = \{v \in V : v\vartheta = -v\}$$

نتیجه بگیرید که V دارای پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ است به قسمی که $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ قطری است و همهٔ درایه‌های روی قطر اصلیش مساوی ۱+ یا ۱− است.

۳

نمایش گروه

از طریق نمایش گروه G می‌توان G را به‌عنوان گروهی از ماتریسها تصورکرد. به بیان دقیق، نمایش گروه G عبارت است از همریختیی از G به گروهی از ماتریسهای وارون‌پذیر. در این فصل این ایده را شرح می‌دهیم و مثالهایی از نمایش گروهها می‌آوریم. همچنین مفهوم هم‌ارزی نمایشها را تعریف می‌کنیم، و هستهٔ نمایش را بررسی می‌کنیم.

نمایش

گیریم G گروه باشد و F مساوی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$. همان‌طور که در فصل اول دیدیم $\mathrm{GL}(n,F)$ گروه ماتریسهای وارون‌پذیر $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F است.

۱.۳ تعریف نمایش G روی F عبارت است از همریختیی چون ρ از G به $\mathrm{GL}(n,F)$ به‌ازای عدد صحیحی چون n. n را درجهٔ ρ گویند.

از این‌رو اگر ρ تابعی از G به $\mathrm{GL}(n,F)$ باشد آنگاه ρ نمایش G است اگر و فقط اگر به‌ازای هر $g,h \in G$،

$$(gh)\rho = (g\rho)(h\rho)$$

چون هر نمایش همریختی است پس به‌ازای هر نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ داریم

$$1\rho = I_n$$
$$g^{-1}\rho = (g\rho)^{-1} \qquad \forall g \in G$$

که I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

۲.۳ مثال (۱) گیریم G گروه دووجهی $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ باشد. ماتریسهای A و B را چنین تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که $B^{-1}AB = A^{-1}$ و $A^4 = B^2 = I$.

نتیجه می‌شود که (مثال ۴.۱ را ببینید) تابع $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, F)$ با ضابطهٔ زیر

$$\rho : a^i b^j \to A^i B^j \qquad (0 \le i \le 3, 0 \le j \le 1)$$

نمایش D_8 روی F است. درجهٔ ρ مساوی ۲ است.

ماتریسهای $g\rho$ به‌ازای عناصر g از D_8 در جدول زیر داده شده‌اند

g	1	a	a^2	a^3
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
g	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(۲) گیریم G گروهی دلخواه است. تابع $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g\rho = I_n \qquad \forall g \in G$$

که I_n طبق معمول ماتریس همانی $n \times n$ است. در این صورت به‌ازای هر $g, h \in G$،

$$(gh)\rho = I_n = I_n I_n = (g\rho)(h\rho)$$

لذا ρ نمایش G است. بنابراین هر گروه نمایشهایی دارد که درجاتشان به قدر دلخواه بزرگ است.

نمایشهای هم‌ارز

حال به بحث از روشی می‌پردازیم که با استفاده از آن می‌توان نمایش مفروضی را به نمایشی دیگر تبدیل کرد.

گیریم $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ نمایش باشد و T ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ روی F. توجه کنید که به‌ازای همهٔ ماتریسهای $n \times n$ای چون A و B،

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T$$

می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم و نمایش جدید σ را با استفاده از ρ تعریف کنیم. σ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T \qquad \forall g \in G$$

در این صورت به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم

$$\begin{aligned}(gh)\sigma &= T^{-1}((gh)\rho)T \\ &= T^{-1}((g\rho)(h\rho))T \\ &= T^{-1}(g\rho)T \cdot T^{-1}(h\rho)T \\ &= (g\sigma)(h\sigma)\end{aligned}$$

و لذا σ نمایش است.

۳.۳ تعریف گیریم $\rho : G \to \mathrm{GL}(m, F)$ و $\sigma : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ نمایشهایی از G روی F باشند. گوییم ρ هم‌ارز است با σ اگر $n = m$ و ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ای مانند T وجود داشته باشد به قسمی که به‌ازای هر $g \in G$،

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$$

توجه کنید که اگر ρ و σ و τ نمایشهای دلخواهی از G روی F باشند، احکام زیر برقرارند (تمرین ۴.۳ را ببینید)

(۱) ρ هم‌ارز است با ρ؛
(۲) اگر ρ هم‌ارز با σ باشد آنگاه σ هم‌ارز با ρ است؛
(۳) اگر ρ هم‌ارز با σ و σ هم‌ارز با τ باشد آنگاه ρ هم‌ارز با τ است.

به‌بیان دیگر، هم‌ارزی نمایشها رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۴.۳ مثال (۱) گیریم $G = D_۸ = \langle a, b : a^۴ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$ و نمایش ρ از G را که در مثال ۲.۳(۱) آمده است در نظر می‌گیریم. بنابراین $a\rho = A$ و $b\rho = B$ که

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم $F = \mathbb{C}$ و تعریف می‌کنیم

$$T = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ i & -i \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$T^{-۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & -i \\ ۱ & i \end{pmatrix}$$

درواقع T چنان تعریف شده است که $T^{-۱}AT$ قطری باشد؛ داریم

$$T^{-۱}AT = \begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-۱}BT = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

و لذا نمایش σ برای $D_۸$ حاصل می‌شود که به‌ازای آن

$$a\sigma = \begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

نمایشهای ρ و σ هم‌ارز هستند.

(۲) گیریم $G = C_۲ = \langle a : a^۲ = ۱\rangle$. قرار می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} -۵ & ۱۲ \\ -۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

داریم $A^{۲} = I$. از این‌رو تابع A $\rho : ۱ \to I, a \to$ نمایش G است. اگر

$$T = \begin{pmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$T^{-۱}AT = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

و لذا نمایش σ برای G به‌دست می‌آید که به‌ازای آن

$$۱\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad a\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

و σ هم‌ارز با ρ است.

در دو حالت، که به سهولت قابل تشخیص‌اند، تنها نمایش هم‌ارز ρ خود ρ است؛ یکی هنگامی که درجهٔ ρ یک است، و دیگر هنگامی‌که به‌ازای هر $g \in G$، $g\rho = I_n$. با وجود این، معمولاً تعداد زیادی نمایش هم‌ارز با ρ وجود دارد.

هستهٔ نمایش

این فصل را با بحث از هستهٔ نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ به پایان می‌بریم. مطابق تعریف ۸.۱ هستهٔ نمایش فوق شامل عناصری چون g از گروه G است که به‌ازای آنها $g\rho$ ماتریس همانی باشد. از این‌رو

$$\mathrm{Ker}\rho = \{g \in G : g\rho = I_n\}$$

توجه کنید که $\mathrm{Ker}\rho$ زیرگروه نرمال G است.

ممکن است که هستهٔ نمایش تمام G باشد، همان‌طور که در تعریف زیر چنین است.

۵.۳ تعریف نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(۱, F)$ با تعریف زیر

$$g\rho = (۱) \quad \forall g \in G$$

نمایش بدیهی G نامیده می‌شود.

بیان دیگر تعریف فوق این است که نمایش بدیهی G عبارت است از نمایشی که به هر عضو گروه، ماتریس همانی ۱ × ۱ را نسبت می‌دهد.

نمایشهایی که هسته‌شان زیرگروه همانی است دارای اهمیت ویژه‌ای هستند.

۶.۳ تعریف نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ را نمایش صادق می‌نامند اگر $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$؛ یعنی اگر عضو همانی G تنها عضو gای باشد که به‌ازای آن، $g\rho = I_n$.

۷.۳ گزاره نمایش ρ از گروه متناهی G صادق است اگر و فقط اگر $\mathrm{Im}\rho$ با G یکریخت باشد.

برهان می‌دانیم که $\mathrm{Ker}\rho \lhd G$ و بنا به قضیهٔ ۱۰.۱، گروه خارج‌قسمتی $G/\mathrm{Ker}\rho$ با $\mathrm{Im}\rho$ یکریخت است. بنابراین، اگر $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$ آنگاه $G \cong \mathrm{Im}\rho$. برعکس، اگر $G \cong \mathrm{Im}\rho$ آنگاه این دو گروه دارای مرتبهٔ (متناهی) مساوی هستند، و لذا $|\mathrm{Ker}\rho| = 1$، یعنی ρ صادق است. ■

۸.۳ مثال (۱) نمایش ρی زیر که در مثال ۲.۳(۱) دیدیم

$$(a^i b^j)\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^j$$

صادق است، زیرا عضو همانی تنها عنصر gای است که در $g\rho = I$ صدق می‌کند. بنابراین گروهی که توسط ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تولید می‌شود با D_8 یکریخت است.

(۲) چون $T^{-1}AT = I_n$ اگر و فقط اگر $A = I_n$، پس تمام نمایشهایی که با یک نمایش صادق هم‌ارزند صادق‌اند.

(۳) نمایش بدیهی گروه G صادق است اگر و فقط اگر $G = \{1\}$.

در فصل ۶ نشان خواهیم داد که هر گروه G دارای نمایشی صادق است.

مسألهٔ اساسی نظریهٔ نمایشها کشف نمایشهای گروههای متناهی است.

خلاصهٔ فصل ۳

۱. نمایش گروه G عبارت است از همریختیی از G به $\mathrm{GL}(n, F)$ به‌ازای عددی صحیح چون n.

۲. نمایشهای ρ و σ از گروه G هم‌ارزند اگر و فقط اگر ماتریس وارون‌پذیر T وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$،

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$$

۳. اگر نمایشی یک‌به‌یک باشد، صادق است.

تمرینات فصل ۳

۱. گیریم G گروه دوری مرتبهٔ m است، یعنی $G = \langle a : a^m = 1 \rangle$. فرض می‌کنیم که $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$، و $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\rho : a^r \to A^r \qquad (0 \leq r \leq m-1)$$

نشان دهید که ρ نمایش G روی $\mathbb{C}$ است اگر و فقط اگر $A^m = I$.

۲. گیریم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

و $G = \langle a : a^3 = 1 \rangle \cong C_3$. نشان دهید که هریک از توابع $\rho_j : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$، $(1 \leq j \leq 3)$، با ضابطه‌های

$$\begin{aligned} \rho_1 &: a^r \to A^r \\ \rho_2 &: a^r \to B^r \qquad (0 \leq r \leq 2) \\ \rho_3 &: a^r \to C^r \end{aligned}$$

نمایش G روی $\mathbb{C}$ است. از این نمایشها نمایشهای صادق کدام‌اند؟

۳. فرض کنیم که $G = D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$، و F برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید که نمایشی چون $\rho : G \to \mathrm{GL}(1, F)$ وجود دارد به‌قسمی که $a\rho = (1)$ و $b\rho = (-1)$.

۴. فرض کنیم که ρ، σ و τ نمایشهایی از G روی F هستند. ثابت کنید

(۱) ρ هم‌ارز ρ است؛

(۲) اگر ρ هم‌ارز σ باشد آنگاه σ نیز هم‌ارز ρ است؛

(۳) اگر ρ هم‌ارز σ و σ هم‌ارز τ باشد آنگاه ρ هم‌ارز τ است.

۵. گیریم $G = D_{12} = \langle a, b : a^6 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. ماتریسهای A، B، C، D را روی $\mathbb{C}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید هریک از توابع $\rho_k : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ با ضابطه‌های زیر

$$\begin{aligned} \rho_1 &: a^r b^s \to A^r B^s \\ \rho_2 &: a^r b^s \to A^{3r} (-B)^s \\ \rho_3 &: a^r b^s \to (-A)^r B^s \\ \rho_4 &: a^r b^s \to C^r D^s \end{aligned} \qquad 0 \le r \le 5, 0 \le s \le 1$$

نمایش G است. از این نمایشها نمایشهای صادق کدام‌اند؟ نمایشهایی که باهم هم‌ارزند کدام‌اند؟

۶. مثالی از یک نمایش صادق D_8 با درجهٔ ۳ بیاورید.

۷. گیریم که ρ نمایشی از G با درجهٔ ۱ است. ثابت کنید که $G/\mathrm{Ker}\rho$ آبلی است.

۸. گیریم ρ نمایش گروه G باشد. فرض کنیم که g و h عناصری از G هستند که $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$. آیا $gh = hg$؟

۴

FGـمدول

در این فصل مفهوم FGـمدول را معرفی می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که ارتباط نزدیکی بین FGـمدولها و نمایشهای G روی F وجود دارد. بسیاری از مطالب باقیماندهٔ کتاب برحسب FGـمدولها ارائه خواهد شد، زیرا این رویکرد به نظریهٔ نمایشها مزایایی دارد.

FGـمدول

فرض کنیم G گروه و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد.

فرض کنیم که $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ نمایش G است. فضای برداری تمام بردارهای سطری $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ را، که $\lambda_i \in F$، با $V = F^n$ نشان می‌دهیم. به‌ازای هر $v \in V$ و $g \in G$، حاصلضرب ماتریسی بردار سطری v و ماتریس $n \times n$ $g\rho$، یعنی

$$v(g\rho)$$

برداری سطری از V است (چون حاصلضرب ماتریس $1 \times n$ در ماتریس $n \times n$ ماتریس $1 \times n$ است).

حال بعضی از خواص اساسی حاصلضرب $v(g\rho)$ را ذکر می‌کنیم. نخست اینکه چون ρ همریختی است پس به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g, h \in G$،

$$v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho)$$

دیگر اینکه چون 1ρ ماتریس همانی است پس به‌ازای هر $v \in V$،

$$v(1\rho) = v$$

سرانجام اینکه، بنابه خواص ضرب ماتریسی، به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g \in G$،

$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho))$$
$$(u + v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)$$

۱.۴ مثال گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$، و $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, F)$ نمایشی از G روی F باشد که در مثال ۲.۳(۱) ذکر شد. از این‌رو

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

اگر $v = (\lambda_1, \lambda_2) \in F^2$ آنگاه، به‌عنوان مثال

$$v(a\rho) = (-\lambda_2, \lambda_1)$$
$$v(b\rho) = (\lambda_1, -\lambda_2)$$
$$v(a^3\rho) = (\lambda_2, -\lambda_1)$$

با توجه به خواص حاصلضرب $v(g\rho)$ در بالا، تعریف زیر را ارائه می‌کنیم.

۲.۴ تعریف گیریم V فضای برداری روی F، و G گروه باشد. دراین صورت V یک FGـمدول است اگر به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، حاصلضرب vg تعریف شده باشد و به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ در شرایط زیر صدق کند

(۱) $vg \in V$؛
(۲) $v(gh) = (vg)h$؛
(۳) $v1 = v$؛
(۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$؛
(۵) $(u + v)g = ug + vg$.

از حروف F و G در نام "FGـمدول" استفاده می‌کنیم تا دال بر آن باشد که V فضای

برداری روی F است و G گروهی است که عناصر g را برای تشکیل حاصلضرب vg $(v \in V)$ از آن اتخاذ می‌کنیم.

توجه کنید که از شرایط (۱) و (۴) و (۵) این تعریف نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $g \in G$، تابع

$$v \to vg \qquad (v \in V)$$

درونریختی V است.

۳.۴ تعریف گیریم V FGـمدول و $\mathscr{B}$ پایهٔ V باشد. به‌ازای هر $g \in G$، نماد

$$[g]_{\mathscr{B}}$$

نشان‌دهندهٔ ماتریس درونریختی $v \to vg$ از V نسبت به پایهٔ $\mathscr{B}$ است.

ارتباط بین FGـمدولها و نمایشهای G روی F در قضیهٔ اساسی زیر آمده است.

۴.۴ قضیه (۱) اگر $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$ آنگاه با تعریف حاصلضرب vg به‌صورت زیر، V تبدیل به FGـمدول می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in V, g \in G)$$

به علاوه V پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ دارد به قسمی که

$$g\rho = [g]_{\mathscr{B}} \qquad \forall g \in G$$

(۲) فرض کنیم که V FGـمدول است و $\mathscr{B}$ پایهٔ V. در این صورت تابع

$$g \to [g]_{\mathscr{B}} \qquad (g \in G)$$

نمایش G روی F است.

برهان (۱) قبلاً دیده‌ایم که به‌ازای هر $u, v \in F^n$ و $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ داریم

$$v(g\rho) \in F^n$$
$$v((gh)\rho) = (v(g\rho))(h\rho)$$
$$v(1\rho) = v$$
$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho))$$
$$(u + v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)$$

بنابراین، با تعریف زیر F^n تبدیل به FGـمدول می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad \forall v \in F^n, g \in G$$

به‌علاوه اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ زیر برای F^n باشد

$$(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، $g\rho = [g]_{\mathscr{B}}$.

(۲) گیریم V FGـمدولی با پایهٔ $\mathscr{B}$ باشد. چون رابطهٔ $v(gh) = (vg)h$ به‌ازای هر $g, h \in G$ و هر v متعلق به پایهٔ $\mathscr{B}$ از V برقرار است، نتیجه می‌شود که

$$[gh]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[h]_{\mathscr{B}}$$

لذا

$$[1]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[g^{-1}]_{\mathscr{B}} \qquad \forall g \in G$$

حال از آنجا که به‌ازای هر $v \in V$، $v1 = v$، لذا $[1]_{\mathscr{B}}$ ماتریس همانی است. بنابراین هر ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ وارون‌پذیر است (و وارونش $[g^{-1}]_{\mathscr{B}}$ است).

ثابت کرده‌ایم که تابع $[g]_{\mathscr{B}} \to g$ همریختی از G به $\mathrm{GL}(n, F)$ است (که $n = \dim V$)، و لذا نمایش G روی F است. ■

مثال بعدی مثالی از قسمت (۱) قضیهٔ ۴.۴ است.

۵.۴ مثال (۱) گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و ρ نمایشی از G روی F باشد که در مثال ۲.۳(۱) ذکر شد، در این صورت

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می‌نویسیم $V = F^2$. بنابه قضیهٔ ۴.۴(۱)، با تعریف زیر V تبدیل به FGـمدول می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in V, g \in G)$$

مثلاً

$$(1, 0)a = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1)$$

اگر v_1، v_2 پایهٔ $(1,0)$، $(0,1)$ برای V باشد آنگاه

$$v_1 a = v_2, \qquad v_1 b = v_1$$
$$v_2 a = -v_1, \qquad v_2 b = -v_2$$

اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1، v_2 باشد آنگاه نمایش

$$g \to [g]_{\mathscr{B}} \qquad (g \in G)$$

دقیقاً نمایش ρ است (قضیهٔ ۴.۴(۱) را ببینید).

(۲) گیریم $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در مثال ۲.۱(۴)، Q_8 را زیرگروهی از $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ تعریف کردیم که توسط

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تولید می‌شود، لذا نمایشی از G روی $\mathbb{C}$ در اختیار داریم. برای اینکه مثالی از قضیهٔ ۴.۴(۱) داشته باشیم، این بار باید قرار دهیم $F = \mathbb{C}$. در این صورت $\mathbb{C}G$ـ‌مدولی با پایهٔ v_1، v_2 به‌دست می‌آوریم به‌طوری که

$$v_1 a = i v_1, \qquad v_1 b = v_2$$
$$v_2 a = -i v_2, \qquad v_2 b = -v_1$$

توجه کنید که در مثالهای فوق، بردارهای $v_1 a$، $v_2 a$، $v_1 b$ و $v_2 b$ بردار vg را به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g \in G$ معین می‌کنند. مثلاً، در مثال ۵.۴(۱)،

$$\begin{aligned}(v_1 + 2v_2)ab &= v_1 ab + 2v_2 ab \\ &= v_2 b - 2v_1 b \\ &= -v_2 - 2v_1\end{aligned}$$

حکم متناظر با این حکم برای تمام FGـ‌مدولهای V برقرار است، یعنی اگر v_1، ...، v_n پایهٔ V باشد و g_1، ...، g_r گروه G را تولید کنند آنگاه بردارهای $v_i g_j$ $(1 \le i \le n ، 1 \le j \le r)$ بردار vg را به‌ازای هر $v \in V$ و $g \in G$ معین می‌کنند.

در زیر راهی برای ساختن مستقیم FGـمدول، بدون استفاده از نمایش، عرضه خواهیم کرد. برای این کار، با مشخص کردن عمل اعضای گروه روی پایه‌ای چون v_1، . . . ، v_n از V و سپس با توسیع این اعمال به‌طوری که روی V خطی باشند، فضای برداری V روی F را به FGـمدول تبدیل می‌کنیم، یعنی ابتدا $v_i g$ را به‌ازای هر i و هر g از G تعریف می‌کنیم، و سپس حاصلضرب

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)g \quad (\lambda_i \in F)$$

را برابر با

$$\lambda_1(v_1 g) + \cdots + \lambda_n(v_n g)$$

تعریف می‌کنیم.

همان‌طور که انتظار دارید، محدودیتهایی برای تعریف بردارهای $v_i g$ وجود دارد. در بسیاری موارد برای نشان دادن اینکه حاصلضرب انتخاب شده V را به FGـمدول تبدیل می‌کند گزارهٔ زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۶.۴ گزاره فرض کنیم که v_1، . . . ، v_n پایهٔ فضای برداری V روی F است. فرض کنیم که به‌ازای هر v از V و هر g از G حاصلضرب vg چنان تعریف شده باشد که در شرایط زیر به‌ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، و هر $g, h \in G$، و هر λ_1، . . . ، λ_n از F، صادق باشد

(۱) $v_i g \in V$؛

(۲) $v_i(gh) = (v_i g)h$؛

(۳) $v_i 1 = v_i$؛

(۴) $(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \cdots + \lambda_n(v_n g)$.

در این صورت V FGـمدول است.

برهان بنابه (۳) و (۴) واضح است که به‌ازای هر $v \in V$، $v1 = v$.

بنابه (۱) و (۴) به‌ازای هر g از G، تابع $v \to vg$ $(v \in V)$ درونریختی V است. یعنی به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g \in G$،

$$vg \in V$$
$$(\lambda v)g = \lambda(vg)$$
$$(u+v)g = ug + vg$$

از این‌رو به‌ازای هر λ_1، . . . ، λ_n از F و هر u_1، . . . ، u_n از V و هر $h \in G$،

$$(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n)h = \lambda_1(u_1 h) + \cdots + \lambda_n(u_n h) \qquad (۷.۴)$$

حال گیریم $v \in V$ و $g, h \in G$. در این صورت به‌ازای اسکالرهایی چون λ_1، . . . ، λ_n از F، $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ و

$$\begin{aligned} v(gh) &= \lambda_1(v_1(gh)) + \cdots + \lambda_n(v_n(gh)) && \text{بنابه شرط (۴)} \\ &= \lambda_1((v_1 g)h) + \cdots + \lambda_n((v_n g)h) && \text{بنابه شرط (۲)} \\ &= (\lambda_1(v_1 g) + \cdots + \lambda_n(v_n g))h && \text{بنابه (۷.۴)} \\ &= (vg)h && \text{بنا به شرط (۴)} \end{aligned}$$

به این ترتیب نشان داده‌ایم که تمام اصول موضوعه‌ای که لازم است برقرار باشد تا V FGـ‌مدول باشد برقرار است. ■

تعریف بعدی تعریف مفاهیم متناظر با مفاهیم نمایش بدیهی و نمایش صادق برای مدولهاست.

۸.۴ تعریف (۱) FGـ‌مدول بدیهی عبارت است از فضای برداری یک بعدی V روی F با خاصیت

$$vg = v \qquad \forall v \in V, g \in G$$

(۲) FGـ‌مدول V صادق است اگر عضو همانی G تنها عنصر gای باشد که به‌ازای آن

$$vg = v \qquad \forall v \in V$$

من‌باب مثال FD_8ـ‌مدولی که در مثال ۵.۴(۱) آمده صادق است.

هدف بعدی ما این است که با استفاده از گزارهٔ ۶.۴ برای تمام زیرگروههای گروه متقارن، FGـ‌مدول صادق بسازیم.

مدول جایگشتی

گیریم G زیرگروه S_n باشد، در این صورت G گروهی از جایگشتهای $\{1, \cdots, n\}$ است. گیریم V فضای برداری nبعدی روی F با پایهٔ v_1، . . . ، v_n است. به‌ازای هر i، که $1 \leq i \leq n$، و هر جایگشت g از G، تعریف می‌کنیم.

$$v_i g = v_{ig}$$

در این صورت $v_ig \in V$ و $v_i 1 = v_i$. همچنین به‌ازای g و h از G،

$$v_i(gh) = v_{i(gh)} = v_{(ig)h} = (v_ig)h$$

حال عمل هر g را به‌طور خطی به تمام V توسیع می‌دهیم، یعنی به‌ازای هر λ_1، ... ، λ_n از F و هر g از G، تعریف می‌کنیم

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \cdots + \lambda_n(v_n g)$$

در این صورت بنابه گزارهٔ ۶.۴، V FGـمدول است.

۹.۴ مثال گیریم $G = S_4$ و $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1، v_2، v_3، v_4 برای V است. اگر $g = (1\,2)$ آنگاه

$$v_1 g = v_2, \quad v_2 g = v_1, \quad v_3 g = v_3, \quad v_4 g = v_4$$

و اگر $h = (1\,3\,4)$ آنگاه

$$v_1 h = v_3, \quad v_2 h = v_2, \quad v_3 h = v_4, \quad v_4 h = v_1$$

لذا

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [h]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۱۰.۴ تعریف گیریم G زیرگروه S_n باشد. FGـمدولی چون V با پایهٔ v_1، ... ، v_n به‌طوری که

به‌ازای هر i، و هر $g \in G$ $\quad v_i g = v_{ig}$

مدول جایگشتی G روی F نامیده می‌شود. v_1، ... ، v_n را پایهٔ طبیعی V می‌نامیم.

توجه کنید که اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1، ... ، v_n برای مدول جایگشتی باشد آنگاه به‌ازای هر g از G، ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ دقیقاً دارای یک درایهٔ مخالف صفر در هر سطر و هر ستون است، و این درایه ۱ است. چنین ماتریسی را ماتریس جایگشتی می‌نامند.

چون تنها عضو G که هر v_i را ثابت نگه می‌دارد عضو همانی است، پس مدول جایگشتی FGـمدولی صادق است. اگر از این موضوع آگاه باشید که هر گروه مرتبهٔ n با زیرگروهی از S_n یکریخت است آنگاه می‌توانید دریابید که G دارای FGـمدول صادقی با بعد n است. این مطلب را به تفصیل در فصل ۶ شرح خواهیم داد.

۱۱.۴ مثال گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$. در این صورت G با زیرگروهی دوری از S_3 که توسط $(1\ 2\ 3)$ تولید می‌شود یکریخت است. از اینجا درمی‌یابیم که اگر V فضای برداری ۳بعدی روی F باشد و v_1، v_2، v_3 پایهٔ آن، آنگاه می‌توانیم V را با تعریف زیر تبدیل به FGـمدول کنیم

$$v_1 1 = v_1, \quad v_2 1 = v_2, \quad v_3 1 = v_3$$
$$v_1 a = v_2, \quad v_2 a = v_3, \quad v_3 a = v_1$$
$$v_1 a^2 = v_3, \quad v_2 a^2 = v_1, \quad v_3 a^2 = v_2$$

البته vg را به‌ازای بردار vی دلخواه متعلق به V و $g = 1, a, a^2$ چنین تعریف می‌کنیم

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)g = \lambda_1(v_1 g) + \lambda_2(v_2 g) + \lambda_3(v_3 g)$$

که $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. حال برای اثبات اینکه V FGـمدول است می‌توانیم از گزارهٔ ۶.۴ استفاده کنیم، ولی راهنمای ما در ساختن این مدول نحوهٔ تعریف مدول جایگشتی بود.

FGـمدولها و نمایشهای هم‌ارز

این فصل را با بحث دربارهٔ رابطهٔ بین FGـمدولها و نمایشهای هم‌ارز G روی F به پایان می‌بریم. از FGـمدول نمایشهای زیادی به‌دست می‌آید که همگی به شکل زیرند

$$g \to [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G)$$

که $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای V است. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که همهٔ این نمایشها با یکدیگر هم‌ارزند (تعریف ۳.۳ را ببینید)؛ و به‌علاوه، هر دو نمایش هم‌ارز G از FGـمدولی به طریق فوق حاصل می‌شوند.

۱۲.۴ قضیه فرض کنیم که V FGـمدولی با پایهٔ $\mathscr{B}$ است، و گیریم ρ نمایش G روی F با تعریف زیر باشد

$$\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}} \quad (g \in G)$$

(۱) اگر $\mathscr{B}'$ پایه‌ای برای V باشد آنگاه نمایش

$$\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}'} \qquad (g \in G)$$

هم‌ارز با ρ است.

(۲) اگر σ نمایشی از G هم‌ارز با ρ باشد آنگاه پایهٔ $\mathscr{B}''$ برای V وجود دارد به قسمی که

$$\sigma : g \to [g]_{\mathscr{B}''} \qquad (g \in G)$$

برهان (۱) گیریم T ماتریس تبدیل پایه از $\mathscr{B}$ به $\mathscr{B}'$ باشد (تعریف ۲۳.۲ را ببینید). در این صورت بنابه ۲۴.۲، به‌ازای هر $g \in G$،

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T$$

بنابراین ϕ هم‌ارز ρ است.

(۲) فرض کنیم که ρ و σ نمایشهای هم‌ارزی از G باشند. در این صورت ماتریس وارون‌پذیر T وجود دارد به قسمی که

$$g\rho = T^{-1}(g\sigma)T \qquad \forall g \in G$$

گیریم $\mathscr{B}''$ پایه‌ای برای V باشد به قسمی که ماتریس تبدیل پایه از $\mathscr{B}$ به $\mathscr{B}''$ مساوی T باشد. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$،

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}''}T$$

و لذا $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$. ■

۱۳.۴ مثال فرض کنیم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$. تابع ρ که در زیر تعریف شده نمایش G است

$$1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^2\rho = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(برای مشاهدهٔ این مطلب، کافی است توجه کنید که $(a\rho)^2 = a^2\rho$ و $(a\rho)^3 = I$؛ تمرین ۲.۳ را ببینید.)

اگر V یک فضای برداری ۲ بعدی روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ v_1، v_2 باشد (که آن را $\mathscr{B}$ می‌نامیم) آنگاه می‌توانیم همانند قضیهٔ ۴.۴(۱)، V را با تعریف زیر به $\mathbb{C}G$ـمدول تبدیل کنیم

$$v_1 1 = v_1, \quad v_1 a = v_2, \quad v_1 a^2 = -v_1 - v_2$$
$$v_2 1 = v_2, \quad v_2 a = -v_1 - v_2, \quad v_2 a^2 = v_1$$

در این صورت

$$[1]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [a]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [a^2]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حال قرار دهیم $u_1 = v_1$ و $u_2 = v_1 + v_2$. در این صورت u_1، u_2 پایهٔ دیگری برای V است، که آن را $\mathscr{B}'$ می‌نامیم. چون

$$u_1 1 = u_1, \quad u_1 a = -u_1 + u_2, \quad u_1 a^2 = -u_2$$
$$u_2 1 = u_2, \quad u_2 a = -u_1, \quad u_2 a^2 = u_1 - u_2$$

نمایش $\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}'}$ را به‌دست می‌آوریم که

$$[1]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [a]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [a^2]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که اگر

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

آنگاه به‌ازای هر g از G،

$$[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'} T$$

و لذا ρ و ϕ هم‌ارزند، که این نتیجه با قضیهٔ ۱۲.۴(۱) سازگار است.

خلاصهٔ فصل ۴

۱. FGـمدول عبارت است از فضای برداری روی F، همراه با ضرب عناصر G از سمت راست در بردارهای V. این حاصلضرب در خواص (۱)ــ(۵) تعریف ۲.۴ صدق می‌کند.

۲. تناظری یک‌به‌یک بین نمایشهای G روی F و FGـمدولها به‌صورت زیر وجود دارد.

(الف) فرض کنیم که $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ نمایش G است. در این صورت با تعریف زیر F^n تبدیل به FGـمدول می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in F^n, g \in G)$$

(ب) اگر V یک FGـمدول با پایهٔ $\mathscr{B}$ باشد آنگاه $\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}}$ نمایش G روی F است.

۳. اگر G زیرگروه S_n باشد آنگاه FGـمدول جایگشتی دارای پایهٔ $v_۱$، . . . ، v_n است و به‌ازای هر i، که $۱ \leq i \leq n$، و هر g از G، $v_i g = v_{ig}$.

تمرینات فصل ۴

۱. فرض کنیم که $G = S_۳$، و فضای $V = \mathrm{sp}(v_۱, v_۲, v_۳)$ مدول جایگشتی G روی $\mathbb{C}$، مطابق تعریف ۱۰.۴، باشد. گیریم $\mathscr{B}_۱$ پایهٔ $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ برای V و $\mathscr{B}_۲$ پایهٔ $v_۱ + v_۲ + v_۳$، $v_۱ - v_۲$، $v_۱ - v_۳$ باشد. ماتریسهای ۳ × ۳ی $[g]_{\mathscr{B}_۱}$ و $[g]_{\mathscr{B}_۲}$ را به‌ازای تمام gهای $S_۳$ محاسبه کنید. ویژگی ماتریسهای $[g]_{\mathscr{B}_۲}$ چیست؟

۲. گیریم $G = S_n$، و V فضایی برداری روی F باشد. نشان دهید که اگر به‌ازای هر v از V، vg را به‌صورت زیر تعریف کنیم، V به FGـمدول تبدیل می‌شود

$$vg = \begin{cases} v & \text{اگر } g \text{ جایگشت زوج باشد} \\ -v & \text{اگر } g \text{ جایگشت فرد باشد} \end{cases}$$

۳. گیریم $Q_۸ = \langle a, b : a^۴ = ۱, b^۲ = a^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$، که گروه چهارگانی مرتبهٔ ۸ است. نشان دهید $\mathbb{R}Q_۸$ـمدولی چون V با بعد ۴ و پایهٔ $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$، $v_۴$ وجود دارد به قسمی که

$$v_۱ a = v_۲, \quad v_۲ a = -v_۱, \quad v_۳ a = -v_۴, \quad v_۴ a = v_۳$$
$$v_۱ b = v_۳, \quad v_۲ b = v_۴, \quad v_۳ b = -v_۱, \quad v_۴ b = -v_۲$$

۴. گیریم A ماتریسی $n \times n$ باشد و B ماتریسی باشد که از A با جابه‌جا کردن سطرهای آن به‌دست می‌آید. نشان دهید که ماتریس جایگشتی $n \times n$ای چون P وجود دارد به قسمی که $B = PA$. نتیجهٔ مشابهی برای ماتریسی که از A با جابه‌جا کردن ستونهای آن حاصل می‌شود به‌دست آورید.

۵

FGـزیرمدول و تحویل‌پذیری

مطالعهٔ FGـمدولها را با معرفی جزء اصلی تشکیل‌دهندهٔ این نظریه یعنی FGـمدول تحویل‌ناپذیر شروع می‌کنیم. ابتدا به مفهوم FGـزیرمدول FGـمدول نیاز داریم.

در تمام این فصل G گروه و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

FGـزیر مدول

۱.۵ تعریف فرض کنیم V FGـمدول است. زیرمجموعهٔ W از V را FGـزیرمدولِ V می‌نامند هرگاه W زیرفضا باشد و به‌ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$.

بنابراین FGـزیرمدول V زیرفضایی است که FGـمدول نیز باشد.

۲.۵ مثال (۱) اگر V FGـمدول باشد، زیرفضای صفر V، یعنی $\{0\}$، و خود V FGـزیرمدولهای V هستند.

(۲) گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ و V FGـمدول ۳بعدی تعریف شده در مثال ۱۱.۴ باشد. در این صورت V دارای پایهٔ v_1، v_2، v_3 است و

$$v_1 1 = v_1, \qquad v_2 1 = v_2, \qquad v_3 1 = v_3$$

$$v_۱a = v_۲, \quad v_۲a = v_۳, \quad v_۳a = v_۱$$
$$v_۱a^۲ = v_۳, \quad v_۲a^۲ = v_۱, \quad v_۳a^۲ = v_۲$$

قرار می‌دهیم $w = v_۱ + v_۲ + v_۳$ و فرض می‌کنیم W زیرفضای ۱ بعدی پدید آینده توسط w، یعنی $\mathrm{sp}(w)$، باشد. چون

$$w۱ = wa = wa^۲ = w$$

پس W FGـزیرمدول V است. اما $\mathrm{sp}(v_۱ + v_۲)$ FGـزیرمدول نیست، زیرا

$$(v_۱ + v_۲)a = v_۲ + v_۳ \notin \mathrm{sp}(v_۱ + v_۲)$$

FGـمدول تحویل‌ناپذیر

۳.۵ تعریف FGـمدول V را تحویل‌ناپذیر می‌نامند هرگاه مخالف صفر باشد و FGـزیرمدولی بجز $\{۰\}$ و V نداشته باشد.

اگر V دارای FGـزیرمدول W باشد و W مساوی $\{۰\}$ یا V نباشد آنگاه V را تحویل‌پذیر می‌نامند.

به‌همین ترتیب، نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامند هرگاه F^n، یعنی FGـمدولِ متناظر با آن که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in F^n, g \in G)$$

(قضیهٔ ۴.۴(۱) را ببینید) تحویل‌ناپذیر باشد؛ و ρ را تحویل‌پذیر می‌نامند هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

فرض کنید که V FGـمدول تحویل‌پذیر باشد، در این صورت V FGـزیرمدولی چون W با خاصیت $۰ < \mathrm{dim}W < \mathrm{dim}V$ دارد. پایهٔ $\mathscr{B}_۱$ برای W را اختیار می‌کنیم و آن را توسعه می‌دهیم تا پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ برای V به‌دست آوریم. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ به شکل زیر است

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & ۰ \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \qquad (۴.۵)$$

که X_g، Y_g و Z_g ماتریس هستند و x_g ماتریسی $k \times k$ است $(k = \mathrm{dim}W)$.

نمایش درجهٔ n تحویل‌پذیر است اگر و فقط اگر هم‌ارز نمایشی به شکل (۴.۵) باشد، که در آن X_g ماتریسی $k \times k$ است و $۰ < k < n$.

توجه کنید که در (۴.۵)، تابعهای $g \to X_g$ و $g \to Z_g$ نمایش G هستند: برای اثبات این موضوع، فرض می‌کنیم $g, h \in G$، و ماتریسهای $[g]_{\mathscr{B}}$ و $[h]_{\mathscr{B}}$ را که در (۴.۵) داده شده‌اند درهم ضرب می‌کنیم. همچنین توجه کنید که اگر V تحویل‌پذیر باشد آنگاه $\dim V \geq 2$.

۵.۵ مثال (۱) فرض می‌کنیم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$، و V FGـمدول مذکور در مثال ۱۱.۴ باشد، یعنی FGـمدولی ۳بعدی با پایهٔ v_1، v_2، v_3 باشد به‌طوری که

$$v_1 a = v_2, \qquad v_2 a = v_3, \qquad v_3 a = v_1$$

در مثال ۲.۵(۲) دیدیم که V FGـمدول تحویل‌پذیر است و دارای FGـزیرمدول $W = \mathrm{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ است. فرض می‌کنیم $\mathscr{B}$ پایهٔ $v_1 + v_2 + v_3$، v_1، v_2 برای V باشد. در این صورت

$$[1]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad [a]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$[a^2]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

از این نمایش تحویل‌پذیر دو نمایش دیگر به‌دست می‌آید: از گوشه‌های چپ بالای ماتریسهای فوق نمایش بدیهی به‌دست می‌آید و از گوشه‌های راست پایین آنها نمایش زیر به‌دست می‌آید

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a^2 \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(۲) گیریم $G = D_8$، و فضای $V = F^2$ FGـمدول دو بعدی مثال ۵.۴(۱) باشد. در این صورت $G = \langle a, b \rangle$، و به‌ازای هر $(\lambda, \mu) \in V$،

$$(\lambda, \mu)a = (-\mu, \lambda), \qquad (\lambda, \mu)b = (\lambda, -\mu)$$

ادعا می‌کنیم که V FGـمدول تحویل‌ناپذیر است. برای اثبات، فرض می‌کنیم که V دارای FGـزیرمدولی چون U است که برابر V نیست. در این صورت $\dim U \leq 1$ و لذا به‌ازای α

و βای متعلق به F، $U = \mathrm{sp}((\alpha,\beta))$. از آنجا که U FGـمدول است، $(\alpha,\beta)b$ مساوی حاصلضرب (α,β) در یک اسکالر است، و از این‌رو $\alpha = ۰$ یا $\beta = ۰$. چون $(\alpha,\beta)a$ نیز مساوی حاصلضرب (α,β) در یک اسکالر است پس $\alpha = \beta = ۰$ و لذا $U = \{۰\}$. نتیجتاً، همان‌طور که ادعا کردیم V تحویل‌ناپذیر است.

خلاصهٔ فصل ۵

۱. اگر V FGـمدول باشد و W زیرفضایی از V که خود FGـمدول است آنگاه W FGـزیرمدول V است.

۲. FGـمدول V تحویل‌ناپذیر است اگر مخالف صفر باشد و تنها FGـزیرمدولهایش $\{۰\}$ و V باشند.

تمرینات فصل ۵

۱. گیریم $G = C_۲ = \langle a : a^۲ = ۱\rangle$ و $V = F^۲$. به‌ازای $(\alpha,\beta) \in V$ قرار می‌دهیم $(\alpha,\beta)۱ = (\alpha,\beta)$ و $(\alpha,\beta)a = (\beta,\alpha)$. ثابت کنید که V FGـمدول است و تمام FGـزیرمدولهای آن را پیدا کنید.

۲. گیریم ρ و σ نمایشهای هم‌ارز G روی F باشند. ثابت کنید که اگر ρ تحویل‌پذیر باشد آنگاه σ نیز تحویل‌پذیر است.

۳. از چهار نمایش $D_{۱۲}$ که در تمرین ۵.۳ تعریف شده‌اند نمایشهای تحویل‌ناپذیر کدام‌اند؟

۴. جایگشتهای $a, b, c \in S_۶$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$a = (۱\ ۲\ ۳), \qquad b = (۴\ ۵\ ۶), \qquad c = (۲\ ۳)(۴\ ۵)$$

و قرار می‌دهیم $G = \langle a, b, c\rangle$.

الف) نشان دهید که

$$a^۳ = b^۳ = c^۲ = ۱, \qquad ab = ba$$
$$c^{-۱}ac = a^{-۱}, \qquad c^{-۱}bc = b^{-۱}$$

و نتیجه بگیرید که مرتبهٔ G مساوی ۱۸ است.

ب) فرض کنید که ε و η اعداد مختلطی باشند که ریشه‌های سوم واحد هستند. ثابت کنید که نمایش ρ برای G روی $\mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که

$$a\rho = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad c\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ج) به‌ازای چه مقادیر ε و η نمایش ρ صادق است؟

د) به‌ازای چه مقادیر ε و η نمایش ρ تحویل‌ناپذیر است؟

۵. گیریم $G = C_{12}$ $\mathbb{C}G$-مدولی پیدا کنید که نه تحویل‌پذیر و نه تحویل‌ناپذیر باشد.

۶

گروه‌جبر

گروهٔ‌جبر گروه متناهی G فضایی برداری با بعد $|G|$ است که مجهز به عمل ضربی مبتنی بر ضرب عناصر G است. از لحاظی، گروه‌جبرها منبع تمام آن چیزهایی هستند که دربارهٔ نظریهٔ نمایشها باید بدانیم. به‌ویژه، اگر بتوان گروه‌جبرها را به‌طور کامل تجزیه و تحلیل کرد، به هدف غایی نظریهٔ نمایشها، یعنی شناخت تمام نمایشهای گروههای متناهی، دست می‌یابیم.

پس از تعریف گروه‌جبر G، با استفاده از آن نمایش صادق مهمی خواهیم ساخت که به نمایش منظم G معروف است. بعداً دربارهٔ این نمایش به تفصیل بحث خواهیم کرد.

گروه‌جبر G

گیریم G گروهی متناهی با عناصر g_1، ... ، g_n است و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

فضایی برداری روی F با پایهٔ g_1، ... ، g_n تعریف می‌کنیم و این فضای برداری را FG می‌نامیم. عناصر FG را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n \qquad (\forall \lambda_i \in F)$$

قاعدهٔ جمع و قاعدهٔ ضرب در اسکالر برای عناصر FG مطابق انتظار چنین تعریف می‌شوند: اگر

عناصر u و v از FG به‌شکل

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i \quad \text{و} \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$$

باشند و $\lambda \in F$ آنگاه

$$\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) g_i \quad \text{و} \quad u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i$$

با تعاریف فوق، FG فضایی برداری روی F به بعد n با پایهٔ g_1، ... ، g_n است. پایهٔ g_1، ... ، g_n را پایهٔ طبیعی FG می‌نامند.

۱.۶ مثال گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$. (برای اینکه عضو همانی G با عضو ۱ هیأت F اشتباه نشود، در این مثال عضو همانی G را با e نمایش می‌دهیم.) عناصر زیر در فضای برداری $\mathbb{C}G$ قرار دارند

$$u = e - a + 2a^2, \qquad v = \frac{1}{2}e + 5a$$

داریم

$$u + v = \frac{3}{2}e + 4a + 2a^2, \qquad \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a^2$$

گاهی عناصر FG را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g \qquad (\lambda_g \in F)$$

اکنون می‌توانیم FG را مجهز به عملی کنیم که فضای برداری فاقد آن است، به این ترتیب که از عمل ضرب G استفاده کنیم و ضرب عناصر FG را به‌صورت زیر تعریف کنیم: به‌ازای همهٔ λ_gها و μ_hهای متعلق به F،

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} (\lambda_h \mu_{h^{-1}g}) g$$

۲.۶ مثال اگر $G = C_3$ و u و v عناصر $\mathbb{C}G$ی مذکور در مثال ۱.۶ باشند آنگاه

$$\begin{aligned} uv &= (e - a + 2a^2)(\frac{1}{2}e + 5a) \\ &= \frac{1}{2}e + 5a - \frac{1}{2}a - 5a^2 + a^2 + 10a^3 \\ &= \frac{21}{2}e + \frac{9}{2}a - 4a^2 \end{aligned}$$

۳.۶ تعریف فضای برداری FG را با عمل ضربی که در زیر تعریف شده

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh)$$

(که $\lambda_g, \mu_h \in F$) گروه‌جبر G روی F می‌نامند.

گروه‌جبر FG دارای عضو همانی نسبت به ضرب است، یعنی $1e$ (که ۱ عضو همانی F و e عضو همانی G است). این عضو را فقط با ۱ نمایش می‌دهیم.

۴.۶ گزاره به‌ازای هر $r, s, t \in FG$ و $\lambda \in F$، ضرب عناصر FG دارای خواص زیر است

(۱) $rs \in FG$؛

(۲) $r(st) = (rs)t$؛

(۳) $r1 = 1r = r$؛

(۴) $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$؛

(۵) $(r + s)t = rt + st$؛

(۶) $r(s + t) = rs + rt$؛

(۷) $r0 = 0r = 0$.

برهان (۱) از تعریف rs نتیجه می‌شود که $rs \in FG$.

(۲) فرض کنید

$$t = \sum_{g\in G} \nu_g g, \qquad s = \sum_{g\in G} \mu_g g, \qquad r = \sum_{g\in G} \lambda_g g$$

که $\lambda_g, \mu_g, \nu_g \in F$. در این صورت

$$(rs)t = \sum_{g,h,k\in G} \lambda_g \mu_h \nu_k (gh)k$$
$$= \sum_{g,h,k\in G} \lambda_g \mu_h \nu_k g(hk)$$
$$= r(st)$$

اثبات تساویهای دیگر ساده است و آن را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ■

درواقع، هر فضای برداریِ مجهز به عمل ضربی که در خواص (۱)ـ(۷) گزارهٔ ۴.۶ صدق کند جبر نامیده می‌شود. ما فقط گروه‌جبر را مطالعه خواهیم کرد، ولی اشاره به این موضوع مفید است که از اصول موضوعهٔ تعریف جبر نتیجه می‌شود که جبر هم فضای برداری است و هم حلقه.

FGـمدول منظم

اکنون از گروه‌جبر برای تعریف FGـمدولی مهم استفاده می‌کنیم.

گیریم $V = FG$، در این صورت V فضای برداری nبعدی روی F است، که $n = |G|$. به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g, h \in G$، به ترتیب بنابه قسمتهای (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) گزارهٔ ۴.۶ داریم

$$vg \in V$$
$$v(gh) = (vg)h$$
$$v1 = v$$
$$(\lambda v)g = \lambda(vg)$$
$$(u+v)g = ug + vg$$

بنابراین V FGـمدول است.

۵.۶ تعریف گیریم G گروهی متناهی است و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. فضای برداری FG با ضرب طبیعی vg ($v \in FG$ و $g \in G$) FGـمدول منظم نامیده می‌شود.

نمایش $g \to [g]_{\mathscr{B}}$ که به‌ازای پایهٔ طبیعی $\mathscr{B}$ از FG حاصل می‌شود نمایش منظم G روی F نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید که بعد FGـمدول منظم مساوی $|G|$ است.

۶.۶ گزاره FGـمدول منظم صادق است.

برهان فرض کنید که $g \in G$ و به‌ازای هر $v \in FG$، $vg = v$. در این صورت $1g = 1$ و لذا $g = 1$، پس حکم برقرار است. ■

۷.۶ مثال گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = e \rangle$. عناصر FG به شکل زیرند

$$\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \qquad (\lambda_i \in F)$$

داریم

$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)e = \lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2$$
$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a = \lambda_3 e + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2$$
$$(\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2)a^2 = \lambda_2 e + \lambda_3 a + \lambda_1 a^2$$

با محاسبهٔ ماتریسها نسبت به پایهٔ e، a، a^2، که پایهٔ FG است، نمایش منظم G را به‌دست می‌آوریم

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

عمل FG روی FGـمدول

گفتیم که FGـمدول فضایی برداری روی F است، که مجهز به عمل ضرب vg به‌ازای $v \in V$ و $g \in G$ است (و این ضرب در چند اصل موضوعه صدق می‌کند). اکنون این ضرب را طوری تعمیم می‌دهیم که به‌ازای هر عضو r از گروه‌جبر FG عضو vr از V حاصل شود. این تعمیم را، که گاهی مفید واقع می‌شود، به‌طور طبیعی در زیر تعریف می‌کنیم.

۸.۶ تعریف فرض کنید که V FGـمدول است و $v \in V$ و $r \in FG$، یعنی $r = \sum_{g \in G} \mu_g g$ که $\mu_g \in F$. حاصلضرب vr را چنین تعریف می‌کنیم

$$vr = \sum_{g \in G} \mu_g (vg)$$

۹.۶ مثال (۱) فرض کنید V مدول جایگشتی S_4 باشد که در مثال ۹.۴ تعریف شد. اگر

$$r = \lambda(1\ 2) + \mu(1\ 3\ 4) \quad (\lambda, \mu \in F)$$

آنگاه

$$v_1 r = \lambda v_1(1\ 2) + \mu v_1(1\ 3\ 4) = \lambda v_2 + \mu v_3$$

$$v_2 r = \lambda v_1 + \mu v_2$$

$$(2v_1 + v_2)r = \lambda v_1 + (2\lambda + \mu)v_2 + 2\mu v_3$$

(۲) اگر V ـFGمدول منظم باشد آنگاه به‌ازای هر $v \in V$ و هر $r \in FG$، عنصر vr همان حاصلضرب اعضای v و r از گروه‌جبر FG است که با استفاده از تعریف ۳.۶ معین می‌شود.

گزارهٔ بعدی را با گزارهٔ ۴.۶ مقایسه کنید.

۱۰.۶ گزاره فرض کنید که V ـFGمدول است. در این صورت به‌ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $r, s \in FG$، خواص زیر برقرار است

(۱) $vr \in V$؛

(۲) $v(rs) = (vr)s$؛

(۳) $v1 = v$؛

(۴) $(\lambda v)r = \lambda(vr) = v(\lambda r)$؛

(۵) $(u+v)r = ur + vr$؛

(۶) $v(r+s) = vr + vs$؛

(۷) $v0 = 0r = 0$.

برهان اثبات تمام قسمتهای گزارهٔ فوق بجز قسمت (۲) ساده است، لذا اثبات آنها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. قسمت (۲) را با فرض اینکه قسمتهای دیگر درست‌اند ثابت می‌کنیم.

گیریم $v \in V$ و $r, s \in FG$ که

$$r = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \qquad s = \sum_{h \in G} \mu_h h$$

در این صورت

$$v(rs) = v\left(\sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (gh)\right)$$

$$= \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (v(gh)) \qquad \text{(۶) و (۴) بنابه}$$

$$= \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h ((vg)h)$$

$$= \left(\sum_g \lambda_g (vg)\right)\left(\sum_h \mu_h h\right) \qquad \text{(۶) و (۵) ،(۴) بنابه}$$

$$= (vr)s \qquad \blacksquare$$

خلاصهٔ فصل ۶

۱. گروه جبر گروه G روی F، که آن را با FG نشان می‌دهیم، متشکل از تمام ترکیبات خطی عناصر G است و عمل ضربی به‌طور طبیعی روی آن تعریف شده است.
۲. فضای برداری FG با ضرب طبیعی vg ($v \in FG$ و $g \in G$) FGـمدول منظم است.
۳. FGـمدول منظم صادق است.

تمرینات فصل ۶

۱. فرض کنیم که $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$.

الف) اگر x و y عناصر $\mathbb{C}G$ به‌صورت زیر باشند

$$x = a + 2a^2 \qquad \text{و} \qquad y = b + ab - a^2$$

xy، yx و x^2 را محاسبه کنید.

ب) گیریم $z = b + a^2b$. نشان دهید که به‌ازای هر $g \in G$، $zg = gz$. نتیجه بگیرید که به‌ازای هر $r \in \mathbb{C}G$، $zr = rz$.

۲. ماتریسهای نمایش منظم $C_2 \times C_2$ روی F را پیدا کنید.

۳. فرض کنید $G = C_2$. اگر $r, s \in \mathbb{C}G$ و $rs = 0$، آیا می‌توان نتیجه گرفت $r = 0$ یا $s = 0$؟

۴. فرض کنید که G گروهی متناهی است، مثلاً $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$، و عنصر $\sum_{i=1}^{n} g_i$ از $\mathbb{C}G$ را با c نشان دهید.

الف) ثابت کنید که به‌ازای هر $h \in G$، $ch = hc = c$.

ب) نتیجه بگیرید $c^2 = |G|c$.

ج) گیریم $\vartheta : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ تبدیلی خطی باشد که هر v از $\mathbb{C}G$ را به vc می‌برد. اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ g_1، . . . ، g_n برای $\mathbb{C}G$ باشد، ماتریس $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ را محاسبه کنید.

۵. اگر V ـFGـمدول باشد، با استفاده از تعریف ثابت کنید

$$0r = 0 \quad \text{به‌ازای هر } r \in FG،$$

$$v0 = 0 \quad \text{به‌ازای هر } v \in V،$$

که 0 هم نشان‌دهندهٔ عنصر صفر V و هم نشان‌دهندهٔ عنصر صفر FG است.

نشان دهید که به‌ازای هر گروه متناهی G با شرط $|G| > 1$، FGـمدول V و عناصر $v \in V$ و $r \in FG$ وجود دارند به قسمی که vr صفر باشد ولی v و r هیچ‌کدام صفر نباشند.

۶. فرض کنیم که $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و $\omega = e^{2\pi i/3}$. ثابت کنید که زیرفضای دو بعدی W از $\mathbb{C}G$ که در زیر تعریف شده

$$W = \mathrm{sp}(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b)$$

$\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}G$ـمدول منظم است.

۷

FGـهمریختی

توابع حافظ ساختار گروه و فضای برداری را به ترتیب همریختی و تبدیل خطی می‌نامند. در مورد FGـمدول، تابع حافظ ساختار را FGـهمریختی می‌نامند که آن را در این فصل معرفی می‌کنیم.

FGـهمریختی

۱.۷ تعریف فرض‌کنید V و W FGـمدول هستند. تابع $\vartheta : V \to W$ را FGـهمریختی می‌نامند هرگاه ϑ تبدیلی خطی باشد و

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g \qquad \forall v \in V, \forall g \in G$$

به بیان دیگر هرگاه ϑ عنصر v را به w ببرد، عنصر vg را به wg ببرد.

توجه داشته باشید که اگر G گروهی متناهی باشد و $\vartheta : V \to W$ FGـهمریختی آنگاه به‌ازای هر $v \in V$ و $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$ داریم

$$(vr)\vartheta = (v\vartheta)r$$

زیرا

$$(vr)\vartheta = \sum_{g\in G} \lambda_g (vg)\vartheta = \sum_{g\in G} \lambda_g (v\vartheta)g = (v\vartheta)r$$

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که از FGـهمریختی به‌طور طبیعی می‌توان FGـزیرمدول ساخت.

۲.۷ گزاره گیریم V و W FGـمدول هستند و $\vartheta : V \to W$ FGـهمریختی است. در این صورت $\mathrm{Ker}\vartheta$ FGـزیرمدول V است و $\mathrm{Im}\vartheta$ FGـزیرمدول W است.

برهان ابتدا توجه کنید که $\mathrm{Ker}\vartheta$ زیرفضای V و $\mathrm{Im}\vartheta$ زیرفضای W است، زیرا ϑ تبدیل خطی است.

گیریم $v \in \mathrm{Ker}\vartheta$ و $g \in G$. در این صورت

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g = \circ g = \circ$$

لذا $vg \in \mathrm{Ker}\vartheta$. بنابراین $\mathrm{Ker}\vartheta$ FGـزیرمدول V است.

اکنون گیریم $w \in \mathrm{Im}\vartheta$، در این صورت به‌ازایِ عنصری چون v متعلق به V داریم $v\vartheta = w$. حال به‌ازای هر $g \in G$ می‌توان نوشت

$$wg = (v\vartheta)g = (vg)\vartheta \in \mathrm{Im}\vartheta$$

و لذا نتیجه می‌شود که $\mathrm{Im}\vartheta$ FGـزیرمدول W است. ■

۳.۷ مثال (۱) اگر $\vartheta : V \to W$ با ضابطهٔ $v\vartheta = \circ$، به‌ازای هر $v \in V$، تعریف شده باشد آنگاه ϑ FGـهمریختی است و $\mathrm{Ker}\vartheta = V$ و $\mathrm{Im}\vartheta = \{\circ\}$.

(۲) گیریم $\lambda \in F$، و تابع $\vartheta : V \to V$ را چنین تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر $v \in V$، $v\vartheta = \lambda v$. در این صورت ϑ FGـهمریختی است. اگر $\lambda \neq \circ$ آنگاه $\mathrm{Ker}\vartheta = \{\circ\}$ و $\mathrm{Im}\vartheta = V$.

(۳) فرض کنیم که G زیرگروه S_n است. گیریم $V = \mathrm{sp}(v_1, \cdots, v_n)$ مدول جایگشتی G روی F باشد (تعریف ۱۰.۴ را ببینید). و گیریم $W = \mathrm{sp}(w)$ FGـمدول بدیهی باشد (تعریف ۸.۴ را ببینید). اکنون یک FGـهمریختی چون ϑ از V به W می‌سازیم. ϑ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vartheta : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \to \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) w \qquad (\lambda_i \in F)$$

بنابراین به‌ازای تمام iها، $v_i\vartheta = w$. در این صورت ϑ تبدیل خطی است و به‌ازای هر $v = \sum \lambda_i v_i \in V$ و هر $g \in G$ داریم

$$(vg)\vartheta = \left(\sum \lambda_i v_{ig}\right)\vartheta = \left(\sum \lambda_i\right) w$$

و

$$(v\vartheta)g = \left(\sum \lambda_i\right) wg = \left(\sum \lambda_i\right) w$$

بنابراین ϑ FGـهمریختی است. به‌علاوه

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\vartheta &= \left\{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i v_i : \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۰\right\} \\ \mathrm{Im}\vartheta &= W \end{aligned}$$

بنابه گزارهٔ ۲.۷، $\mathrm{Ker}\vartheta$ FGـزیرمدولِ مدول جایگشتی V است.

FGـمدولهای یکریخت

۴.۷ تعریف گیریم V و W FGـمدول هستند. تابع $\vartheta : V \to W$ را FGـیکریختی می‌نامند هرگاه ϑ FGـهمریختی وارون‌پذیر باشد. اگر چنین FGـیکریختی وجود داشته باشد، می‌گوییم V و W FGـمدولهای یکریخت‌اند و می‌نویسیم $V \cong W$.

در گزارهٔ بعدی نشان می‌دهیم که اگر $V \cong W$ آنگاه $W \cong V$.

۵.۷ گزاره اگر تابع $\vartheta : V \to W$ FGـیکریختی باشد آنگاه تابع وارون آن، یعنی $\vartheta^{-۱} : W \to V$ نیز FGـیکریختی است.

برهان چون $\vartheta^{-۱}$ تبدیل خطی وارون‌پذیر است پس فقط باید نشان داد که $\vartheta^{-۱}$ FGـهمریختی است. به‌ازای $w \in W$ و $g \in G$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} ((w\vartheta^{-۱})g)\vartheta &= ((w\vartheta^{-۱})\vartheta)g \qquad \text{چون } \vartheta \ FG\text{ـهمریختی است} \\ &= wg \\ &= ((wg)\vartheta^{-۱})\vartheta \end{aligned}$$

از این‌رو $(w\vartheta^{-۱})g = (wg)\vartheta^{-۱}$ و حکم ثابت می‌شود. ■

فرض کنیم که $\vartheta : V \to W$ FGـیکریختی است. در این صورت می‌توان با استفاده از ϑ و ϑ^{-1} از W به V و از V به W رفت و به این ترتیب ثابت کرد که FGـمدولهای یکریخت V و W خواص ساختاری مشابهی دارند. در زیر چند مثال می‌آوریم.

(۱) $\dim V = \dim W$ (زیرا v_1، ... ، v_n پایهٔ V است اگر و فقط اگر $v_1\vartheta$، ... ، $v_n\vartheta$ پایهٔ W باشد).

(۲) V تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر W تحویل‌ناپذیر باشد (چون X FGـزیرمدول V است اگر و فقط اگر $X\vartheta$ FGـزیرمدول W باشد).

(۳) V شامل FGـزیرمدول بدیهی است اگر و فقط اگر W شامل FGـزیرمدول بدیهی باشد (چون X FGـزیرمدول بدیهی V است اگر و فقط اگر $X\vartheta$ FGـزیرمدول بدیهی W باشد).

همان‌طور که گروههای یکریخت را مساوی فرض می‌کنیم، خیلی وقتها از فرق گذاشتن بین FGـمدولهای یکریخت ابا می‌کنیم. اما فعلاً فقط بر مشابه بودن FGـمدولهای یکریخت تأکید می‌کنیم. در قضیهٔ بعدی نشان می‌دهیم که FGـمدولهای یکریخت متناظر با نمایشهای هم‌ارز هستند.

۶.۷ قضیه فرض کنیم که V FGـمدولی با پایهٔ $\mathscr{B}$ و W FGـمدولی با پایهٔ $\mathscr{B}'$ است. در این صورت V و W یکریخت هستند اگر و فقط اگر نمایشهای

$$\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}} \quad \text{و} \quad \sigma : g \to [g]_{\mathscr{B}'}$$

هم‌ارز باشند.

برهان ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم

۷.۷ FGـمدولهای V و W یکریخت هستند اگر و فقط اگر پایهٔ $\mathscr{B}_1$ برای V و پایهٔ $\mathscr{B}_2$ برای W وجود داشته باشد به قسمی‌که

$$[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2} \qquad \forall g \in G$$

برای اثبات این حکم، ابتدا فرض می‌کنیم که ϑ FGـیکریختی از V به W باشد و v_1، ... ، v_n پایهٔ $\mathscr{B}_1$ برای V. در این صورت $v_1\vartheta$، ... ، $v_n\vartheta$ پایهٔ $\mathscr{B}_2$ برای W است. فرض کنید $g \in G$. از آنجا که به‌ازای هر i داریم $(v_i g)\vartheta = (v_i\vartheta)g$ نتیجه می‌شود $[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2}$.

برعکس فرض کنیم که $v_{۱}$، ... ، v_n پایهٔ $\mathscr{B}_{۱}$ برای V است و $w_{۱}$، ... ، w_n پایهٔ $\mathscr{B}_{۲}$ برای W به‌طوری که به‌ازای هر $g \in G$، $[g]_{\mathscr{B}_{۱}} = [g]_{\mathscr{B}_{۲}}$. فرض کنید ϑ تبدیل خطی وارون‌پذیر از V به W با این خاصیت باشد که به‌ازای هر i، $v_i\vartheta = w_i$. چون $[g]_{\mathscr{B}_{۱}} = [g]_{\mathscr{B}_{۲}}$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، $(v_i g)\vartheta = (v_i\vartheta)g$ و لذا ϑ یک FGـیکریختی است. به این ترتیب اثبات ۷.۷ تکمیل می‌شود.

حال فرض کنید که V و W FGـمدولهای یکریخت هستند. بنابه ۷.۷، پایهٔ $\mathscr{B}_{۱}$ برای V و پایهٔ $\mathscr{B}_{۲}$ برای W وجود دارد به قسمی‌که به‌ازای هر $g \in G$، $[g]_{\mathscr{B}_{۱}} = [g]_{\mathscr{B}_{۲}}$. نمایشی چون ϕ برای G به‌صورت $\phi : g \to [g]_{\mathscr{B}_{۱}}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت بنابه قضیهٔ ۱۲.۴(۱)، ϕ هم با ρ و هم با σ هم‌ارز است. لذا ρ و σ هم‌ارزند.

به‌عکس فرض کنید ρ و σ هم‌ارزند. در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۲.۴(۲) پایهٔ $\mathscr{B}''$ برای V وجود دارد به قسمی‌که به‌ازای هر $g \in G$، $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$، و این بدان معناست که به‌ازای هر $g \in G$، $[g]_{\mathscr{B}''} = [g]_{\mathscr{B}'}$. بنابراین طبق ۷.۷، V و W FGـمدولهای یکریخت‌اند. ■

۸.۷ مثال گیریم $G = \langle a : a^{۳} = ۱ \rangle$، که گروه دوری مرتبهٔ ۳ است، و W FGـمدول منظم باشد. در این صورت ۱، a، $a^{۲}$ پایه‌ای برای W است که آن را $\mathscr{B}'$ می‌نامیم. داریم

$$[۱]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad [a]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$[a^{۲}]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

FGـمدول V را که در مثال ۱۱.۴ تعریف شد با پایهٔ $v_{۱}$، $v_{۲}$، $v_{۳}$ در نظر می‌گیریم به‌طوری که

$$v_{۱}a = v_{۲}, v_{۲}a = v_{۳}, v_{۳}a = v_{۱}$$

اگر پایهٔ $v_{۱}$، $v_{۲}$، $v_{۳}$ برای V را با $\mathscr{B}$ نمایش دهیم، داریم

$$[g]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}'} \qquad \forall g \in G$$

بنابه ۷.۷، FGـمدولهای V و W یکریخت‌اند. درواقع تابع

$$\vartheta : \lambda_{۱}v_{۱} + \lambda_{۲}v_{۲} + \lambda_{۳}v_{۳} \to \lambda_{۱}۱ + \lambda_{۲}a + \lambda_{۳}a^{۲} \qquad (\lambda_i \in F)$$

FGـیکریختی از V به W است.

۹.۷ مثال گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در مثال ۴.۳(۱) با دو نمایش هم‌ارز ρ و σ برای G مواجه شدیم، که

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

و

$$a\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1 و v_2 باشد به‌طوری که

$$v_1 a = v_2, \quad v_1 b = v_1$$
$$v_2 a = -v_1, \quad v_2 b = -v_2$$

(مثال ۴.۵(۱) را ببینید)، و همچنین فرض کنید W $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ w_1 و w_2 باشد به‌طوری که

$$w_1 a = iw_1, \quad w_1 b = w_2$$
$$w_2 a = -iw_2, \quad w_2 b = w_1$$

بنابراین اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1 و v_2 برای V و $\mathscr{B}'$ پایهٔ w_1 و w_2 برای W باشد آنگاه به‌ازای هر $g \in G$ داریم

$$\rho : g \to [g]_{\mathscr{B}}, \quad \sigma : g \to [g]_{\mathscr{B}'}$$

بنابه قضیهٔ ۶.۷، $\mathbb{C}G$ـمدولهای V و W یکریخت هستند، زیرا ρ و σ هم‌ارزند. برای اینکه این مطلب را مستقیماً ثابت کنیم، فرض کنیم $\vartheta : V \to W$ تبدیل خطی وارون‌پذیری با ضابطهٔ زیر باشد

$$\vartheta : v_1 \to w_1 + w_2$$
$$v_2 \to iw_1 - iw_2$$

در این صورت به‌ازای $j = 1, 2$، $(v_j a)\vartheta = (v_j \vartheta)a$ و $(v_j b)\vartheta = (v_j \vartheta)b$ و لذا ϑ $\mathbb{C}G$ـیکریختی از V به W است. (مثال ۴.۳(۱) را ببینید.)

مجموع مستقیم

این فصل را با بحث از مجموع مستقیم FGـمدولها به پایان می‌بریم و نشان می‌دهیم که از مجموع مستقیم FGـمدولها FGـهمریختی حاصل می‌شود.

گیریم V FGـمدول است و

$$V = U \oplus W$$

که U و W FGـزیرمدول V هستند. گیریم u_1، . . . ، u_m پایهٔ $\mathscr{B}_1$ برای U و w_1، . . . ، w_n پایهٔ $\mathscr{B}_2$ برای W است. بنابه ۹.۲، u_1، . . . ، u_m، w_1، . . . ، w_n پایهٔ V است؛ این پایه را $\mathscr{B}$ می‌نامیم. به‌ازای $g \in G$ داریم

$$[g]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathscr{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathscr{B}_2} \end{array}\right)$$

در حالت کلی اگر $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$، یعنی V مجموع مستقیم FGـزیرمدولهای U_i باشد، و $\mathscr{B}_i$ پایهٔ U_i، آنگاه از مجموعهٔ همهٔ عناصر پایه‌های $\mathscr{B}_1$، . . . ، $\mathscr{B}_r$ پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ برای V حاصل می‌شود، و به این ترتیب به‌ازای $g \in G$ داریم

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathscr{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathscr{B}_r} \end{pmatrix} \qquad (۱۰.۷)$$

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که چگونه از مجموع مستقیم به‌طور طبیعی FGـهمریختی حاصل می‌شود.

۱۱.۷ گزاره گیریم V FGـمدول است و

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که هر کدام از U_iها FGـزیرمدول V است. به‌ازای $v \in V$ بردارهای منحصر به فرد $u_i \in U_i$ وجود دارند به‌طوری که $v = u_1 + \cdots + u_r$ و لذا $\pi_i : V \to V$ $(1 \leq i \leq r)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$v\pi_i = u_i$$

در این صورت هر کدام از π_iها FGـهمریختی است و به‌علاوه تصویرگر V است.

برهان واضح است که π_i تبدیل خطی است. فرض کنید $g \in G$، و $v \in V$، می‌دانیم $v = u_1 + \cdots + u_r$ (که به‌ازای تمام jها $u_j \in U_j$)؛ در این صورت

$$(vg)\pi_i = (u_1 g + \cdots + u_r g)\pi_i = u_i g = (v\pi_i)g$$

لذا π_i یک FGــهمریختی است، همچنین

$$v\pi_i^2 = u_i\pi_i = u_i = v\pi_i$$

و لذا $\pi_i^2 = \pi_i$. بنابراین π_i تصویرگر V است (تعریف ۳۰.۲ را ببینید). ■

حال حکمی را دربارهٔ مجموع FGــمدولهای تحویل‌ناپذیر ارائه می‌دهیم که در آینده از آن استفاده خواهیم کرد.

۱۲.۷ گزاره گیریم V یک FGــمدول است و

$$V = U_1 + \cdots + U_r$$

که هرکدام از U_iها FGــزیرمدول تحویل‌ناپذیر V است. در این صورت V مجموع مستقیم تعدادی از این FGــزیرمدولهای U_i است.

برهان ایدهٔ اثبات چنین است که تا جایی که ممکن است بیشترین تعداد از FGــزیرمدولهای U_1، . . . ، U_r را انتخاب کنیم به‌طوری که مجموع این FGــزیرمدولهای انتخاب شده مجموع مستقیم باشد. برای این کار زیرمجموعهٔ $Y = \{W_1, \cdots, W_s\}$ از $\{U_1, \cdots, U_r\}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که دارای خواص زیر باشد

$W_1 + \cdots + W_s$ مجموع مستقیم باشد (یعنی مساوی $W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ باشد)
ولی اگر $U_i \notin Y$ آنگاه $W_1 + \cdots + W_s + U_i$ مجموع مستقیم نباشد.

قرار می‌دهیم

$$W = W_1 + \cdots + W_s$$

و ادعا می‌کنیم که به‌ازای تمامی iها داریم $U_i \subseteq W$. اگر $U_i \in Y$ آنگاه واضح است که ادعای فوق درست است و لذا فرض می‌کنیم $U_i \notin Y$. در این صورت $W + U_i$ مجموع مستقیم نیست و در نتیجه $W \cap U_i \neq \{0\}$. اما $W \cap U_i$ یک FGــزیرمدول U_i است و چون U_i تحویل‌ناپذیر است بنابراین $W \cap U_i = U_i$ و لذا همان‌گونه که ادعا کردیم $U_i \subseteq W$.

چون به‌ازای تمامی iها، که $r \leq i \leq ۱$، ثابت کردیم $U_i \subseteq W$ پس $V = W = W_۱ \oplus \cdots \oplus W_s$ که همان حکم قضیه است. ■

در پایان تذکر می‌دهیم که اگر $V_۱$، ... ، V_r ‏ FGـمدول باشند آنگاه می‌توان مجموع مستقیم خارجی $V_۱ \oplus \cdots \oplus V_r$ را تشکیل داد (فصل ۲ را ببینید) و با تعریف ذیل آن را تبدیل به FGـمدول کرد: به‌ازای هر $v_i \in V_i$ (که $۱ \leq i \leq r$) و به‌ازای هر $g \in G$،

$$(v_۱, \cdots, v_r)g = (v_۱ g, \cdots, v_r g)$$

خلاصهٔ فصل ۷

۱. اگر V و W ‏ FGـمدول باشند و $\vartheta : V \to W$ تبدیل خطی با خاصیت زیر باشد

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g \quad \forall v \in V, \forall g \in G$$

آنگاه ϑ را FGـهمریختی می‌نامند.

۲. هسته و تصویر FGـهمریختی FGـمدول‌اند.

۳. FGـمدولهای یکریخت متناظر با نمایشهای هم‌ارزند.

تمرینات فصل ۷

۱. گیریم U و V و W ‏ FGـمدول و $\vartheta : U \to V$ و $\phi : V \to W$ ‏ FGـهمریختی هستند. ثابت کنید که $\vartheta\phi : U \to W$ ‏ FGـهمریختی است.

۲. فرض کنید G زیرگروهی از $S_۵$ باشد که توسط (۱ ۲ ۳ ۴ ۵) تولید می‌شود. ثابت کنید که مدول جایگشتی G روی F با FGـمدول منظم یکریخت است.

۳. فرض کنید که V ‏ FGـمدول است. ثابت کنید که زیرمجموعهٔ

$$V_۰ = \{v \in V : vg = v, \forall g \in G\}$$

FGـزیرمدول V است. نشان دهید که تابع

$$\vartheta : v \to \sum_{g \in G} vg \quad (v \in V)$$

FGـهمریختی از V به $V_۰$ است. آیا ϑ الزاماً پوشاست؟

۴. فرض کنیم که V و W FGـمدولهای یکریخت‌اند. FGـزیرمدولهای V_0 و W_0 از V و W را همانند تمرین ۳ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که V_0 و W_0 FGـمدولهای یکریخت‌اند.

۵. فرض کنید G زیرگروهی از S_4 باشد که توسط $(1\ 2)$ و $(3\ 4)$ تولید می‌شود. آیا مدول جایگشتی G روی F با FGـمدول منظم یکریخت است؟

۶. گیریم $G = C_2 = \langle x : x^2 = 1\rangle$.

الف) نشان دهید که تابع

$$\vartheta : \alpha 1 + \beta x \to (\alpha - \beta)(1 - x) \qquad (\alpha, \beta \in F)$$

FGـهمریختی از FGـمدول منظم به خودش است.

ب) ثابت کنید که $\vartheta^2 = 2\vartheta$.

ج) پایهٔ $\mathscr{B}$ را برای FG چنان پیدا کنید که

$$[\vartheta]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۸

قضیهٔ مشکه

اکنون به اولین حکم مهم نظریهٔ نمایشها یعنی قضیهٔ مشکه* می‌رسیم. پیامد این قضیه این است که هر FGـمدول مجموع مستقیم FGـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر است؛ در اینجا مطابق معمول F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. (این فرض دربارهٔ F مهم است؛ مثال ۲.۸(۲) را در زیر ببینید). با استفاده از این قضیه مطالعهٔ نمایشها اساساً به مطالعهٔ FGـمدولهای تحویل‌ناپذیر تبدیل می‌شود.

قضیهٔ مشکه

۱.۸ قضیهٔ مشکه فرض کنید G گروه متناهی و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و V FGـمدول است. اگر U FGـزیرمدول V باشد آنگاه FGـزیرمدولی از V چون W وجود دارد به‌قسمی که

$$V = U \oplus W$$

قبل از اینکه قضیهٔ مشکه را ثابت کنیم آن را با چند مثال روشن می‌سازیم.

* Maschke

۲.۸ مثال (۱) گیریم $G = S_3$ و فضای $V = \mathrm{sp}(v_1, v_2, v_3)$ مدول جایگشتی G روی F باشد (تعریف ۱۰.۴ را ببینید). قرار می‌دهیم

$$U = \mathrm{sp}(u) \quad \text{و} \quad u = v_1 + v_2 + v_3$$

در این صورت U یک FGـزیرمدول V است، زیرا به‌ازای هر $g \in G$، $ug = u$.

تعداد زیرفضاهای W از V که به‌ازای آنها رابطهٔ $V = U \oplus W$ برقرار است، زیاد است، به‌عنوان مثال $\mathrm{sp}(v_2, v_3)$ و $\mathrm{sp}(v_1, v_2 - 2v_3)$. ولی درواقع فقط یک FGـزیرمدول W از V وجود دارد به‌قسمی که $V = U \oplus W$. در مثالی که بعد از اثبات قضیهٔ مشکه می‌آوریم، این زیرمدول W را پیدا خواهیم کرد (اما اگر خواننده مایل باشد می‌تواند هم‌اکنون آن را پیدا کند).

(۲) در حالتی‌که F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ نباشد ممکن است حکم قضیهٔ مشکه درست نباشد. مثلاً، فرض کنید p عددی اول است و قرار دهید $G = C_p = \langle a : a^p = 1 \rangle$ و F را هیأت اعداد صحیح به پیمانهٔ p بگیرید. می‌توان ثابت کرد که تابع

$$a^j \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \qquad (j = 0, 1, \cdots, p-1)$$

نمایشی از G به $\mathrm{GL}(2, F)$ است. FGـمدول متناظر با این نمایش عبارت‌است از $V = \mathrm{sp}(v_1, v_2)$ که در آن به‌ازای $0 \leq j \leq p-1$،

$$v_1 a^j = v_1$$
$$v_2 a^j = j v_1 + v_2$$

واضح است که فضای $U = \mathrm{sp}(v_1)$ یک FGـزیرمدول V است. اما FGـزیرمدولی چون W که به‌ازای آن داشته باشیم $V = U \oplus W$ وجود ندارد، زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که U تنها FGـزیرمدول یک بعدی V است.

برهان قضیهٔ مشکه U از FGـزیرمدول FGـمدول V مفروض است. زیرفضای W_0 از V را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$V = U \oplus W_0.$$

(برای این منظور زیرفضاهای W_0 زیادی را می‌توان انتخاب کرد؛ کافی است پایهٔ v_1، ... ، v_m را برای U اختیار کنیم و آن را توسعه دهیم تا پایهٔ v_1، ... ، v_n برای V به‌دست آید و سپس قرار دهیم $W_0 = \mathrm{sp}(v_{m+1}, \cdots, v_n)$.)

به‌ازای $v \in V$ بردارهای منحصر به فرد $u \in U$ و $w \in W_\circ$ وجود دارند به‌قسمی که $v = u + w$ و لذا می‌توان تابع $\phi : V \to V$ را با ضابطهٔ $v\phi = u$ تعریف کرد. بنا به گزارهٔ ۲۹.۲، ϕ تصویرگر V با هستهٔ $W_\circ$ و تصویر U است.

اکنون می‌خواهیم از تصویرگر ϕ یک FGـهمریختی از V به V با تصویر U بسازیم. برای این کار تابع $\vartheta : V \to V$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$v\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} vg\phi g^{-1} \qquad (v \in V) \tag{۳.۸}$$

واضح است که ϑ درونریختی V است و $\mathrm{Im}\vartheta \subseteq U$.

ابتدا نشان می‌دهیم که ϑ FGـهمریختی است، سپس ثابت می‌کنیم که تصویرگر V است. به‌ازای $v \in V$ و $x \in G$ می‌توان نوشت

$$(vx)\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (vx)g\phi g^{-1}$$

وقتی‌که g تمام عناصر G را اختیار کند $h = xg$ نیز تمام عناصر G را اختیار می‌کند و از این‌رو می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}(vx)\vartheta &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1}x \\ &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} vh\phi h^{-1}\right) x \\ &= (v\vartheta)x\end{aligned}$$

بنابراین ϑ FGـهمریختی است.

حال ثابت می‌کنیم $\vartheta^2 = \vartheta$. ابتدا توجه کنید که به‌ازای $u \in U$ و $g \in G$ داریم $ug \in U$ و لذا $(ug)\phi = ug$. با استفاده از این مطلب می‌توان نوشت

$$u\vartheta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} ug\phi g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ug)g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u \tag{۴.۸}$$

حال اگر $v \in V$ آنگاه $v\vartheta \in U$ و لذا بنابه (۴.۸)، $(v\vartheta)\vartheta = v\vartheta$. در نتیجه، همان‌طور که ادعا کردیم $\vartheta^2 = \vartheta$.

تاکنون ثابت کرده‌ایم که $\vartheta : V \to V$ تصویرگر و FGـهمریختی است. به‌علاوه با استفاده از (۴.۸) نتیجه می‌گیریم $\mathrm{Im}\vartheta = U$. فرض می‌کنیم $W = \mathrm{Ker}\vartheta$. در این صورت بنابه گزارهٔ

۲.۷. W FGـزیرمدول V است و بنابه گزارهٔ ۳۲.۲، $V = U \oplus W$.

به این ترتیب قضیهٔ مشکه ثابت می‌شود. ■

۵.۸ مثال گیریم $G = S_3$ و فضای $V = \mathrm{sp}(v_1, v_2, v_3)$ مدول جایگشتی G روی F باشد. همان‌طورکه در مثال ۲.۸(۱) دیدیم، فضای $U = \mathrm{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ زیرمدول V است. از برهان قضیهٔ مشکه استفاده کرده FGـزیرمدول W از V را چنان می‌یابیم که $V = U \oplus W$.

ابتدا قرار می‌دهیم $W_0 = \mathrm{sp}(v_1, v_2)$. در این صورت $V = U \oplus W_0$ (البته W_0 FGـزیرمدول نیست). تصویرگر پوشای ϕ از V به U ویژگی زیر را دارد

$$\phi : v_1 \to 0, \qquad v_2 \to 0, \qquad v_3 \to v_1 + v_2 + v_3$$

می‌توان نشان داد که FGـهمریختی ϑ که با ضابطهٔ (۳.۸) تعریف می‌شود چنین است

$$\vartheta : v_i \to \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

FGـزیرمدولِ مطلوب W همان $\mathrm{Ker}\vartheta$ است و لذا

$$W = \mathrm{sp}(v_1 - v_2, v_2 - v_3)$$

(درواقع $W = \{\sum \lambda_i v_i : \sum \lambda_i = 0\}$، که طرف دوم این تساوی زیرمدولی است که در مثال ۳.۷(۳) ساختیم.)

توجه کنید که اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ $v_1 + v_2 + v_3$، v_1، v_2 برای V باشد آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ به شکل زیر است

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

صفرها دال بر آن‌اند که U FGـزیرمدول V است ((۴.۵) را ببینید). اگر در عوض $\mathscr{B}$ پایهٔ $v_1 + v_2 + v_3$، $v_1 - v_2$، $v_2 - v_3$ را، که آن را $\mathscr{B}'$ می‌نامیم، به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$[g]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

زیرا $\mathrm{sp}(v_1 - v_2, v_2 - v_3)$ نیز FGـزیرمدول V است.

با توجه به مثال فوق قضیهٔ مشکه را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر بیان کرد: گیریم G گروهی متناهی است، اگر بتوان پایهٔ $\mathscr{B}$ را برای FGـمدول V چنان انتخاب کرد که $[g]_{\mathscr{B}}$ به‌ازای هر $g \in G$ به شکل زیر باشد ((۴.۵) را ببینید)

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

آنگاه می‌توان پایهٔ $\mathscr{B}'$ را چنان یافت که $[g]_{\mathscr{B}'}$ به‌ازای هر $g \in G$ به شکل زیر باشد

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

به بیان دیگر فرض کنید که ρ نمایشی تحویل‌پذیر با درجهٔ n برای گروه متناهی G روی F است. در این صورت می‌دانیم که ρ هم‌ارز نمایشی به شکل زیر است

$$g \to \left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \qquad (g \in G)$$

که X_g و Y_g و Z_g ماتریس‌اند و X_g ماتریسی $k \times k$ است، که $0 < k < n$. قضیهٔ مشکه می‌گوید که ρ هم‌ارز نمایشی به شکل زیر است

$$g \to \left(\begin{array}{c|c} A_g & 0 \\ \hline 0 & B_g \end{array}\right)$$

که A_g نیز ماتریسی $k \times k$ است.

نتایج قضیهٔ مشکه

اکنون از قضیهٔ مشکه استفاده کرده نشان می‌دهیم که هر FGـمدول مخالف صفر مجموع مستقیم FGـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر است. (FGـزیرمدول تحویل‌ناپذیر عبارت‌است از FGـزیرمدولی که FGـمدول تحویل‌ناپذیر باشد.)

۶.۸ تعریف گویند FGـمدول V کاملاً تحویل‌پذیر است اگر $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$، که هرکدام از U_iها FGـزیرمدول تحویل‌ناپذیر V است.

۷.۸ قضیه اگر G گروهی متناهی و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد آنگاه هر FGـمدول مخالف صفر کاملاً تحویل‌پذیر است.

برهان گیریم V یک FGـمدولی مخالف صفر است. قضیه را با استفاده از استقرا روی $\dim V$ اثبات می‌کنیم. اگر $\dim V = 1$ حکم درست است، زیرا در این حالت V تحویل‌ناپذیر است.

اگر V تحویل‌ناپذیر باشد حکم برقرار است، لذا فرض می‌کنیم که V تحویل‌پذیر است. در این صورت V دارای FGـزیرمدولی چون U است که مخالف $\{0\}$ و V است. بنا به قضیهٔ مشکه FGـزیرمدول W وجود دارد به‌قسمی که $V = U \oplus W$. چون $\dim U < \dim V$ و $\dim W < \dim V$، بنا به فرض استقرا داریم

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r, \qquad W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

که هرکدام از U_iها و W_jها FGـمدول تحویل‌ناپذیر است. در این صورت بنابه ۱۰.۲،

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$$

یعنی V مجموع مستقیم FGـمدولهای تحویل‌ناپذیر است. ■

گزارهٔ بعدی نتیجهٔ مفید دیگری از قضیهٔ مشکه است.

۸.۸ گزاره فرض کنید V یک FGـمدول است، و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است، و G گروهی متناهی است. فرض کنید که U یک FGـزیرمدول V است. در این صورت FGـهمریختی پوشایی از V به U وجود دارد.

برهان بنابه قضیهٔ مشکه FGـزیرمدول W از V وجود دارد به‌قسمی که $V = U \oplus W$. در این صورت تابع $\pi : V \to U$ با ضابطهٔ

$$\pi : u + w \to u \qquad (u \in U, w \in W)$$

بنابه گزارهٔ ۱۱.۷، FGـهمریختی پوشایی از V به U است. ■

قضیهٔ ۷.۸ می‌گوید که هر FGـمدول مخالف صفر مجموع مستقیم FGـمدولهای تحویل‌ناپذیر است. از این رو برای شناخت FGـمدولها، کافی است FGـمدولهای تحویل‌ناپذیر را بشناسیم. مطالعهٔ این نوع مدولها را در فصل بعدی آغاز می‌کنیم.

خلاصهٔ فصل ۸

فرض کنید G گروهی متناهی است و F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است.

۱. قضیهٔ مشکه می‌گوید که به‌ازای هر FGـزیرمدول U از FGـمدول V، FGـزیرمدول W وجود دارد به‌قسمی که

$$V = U \oplus W$$

۲. هر FGـمدول مخالف صفر V مجموع مستقیم FGـمدولهای تحویل‌ناپذیر است

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

تمرینات فصل ۸

۱. گیریم $G = \langle x : x^3 = 1 \rangle \cong C_3$ و V ‏ $\mathbb{C}G$ـمدول ۲ بعدی با پایهٔ v_1، v_2 باشد به‌طوری که

$$v_1 x = v_2, \qquad v_2 x = -v_1 - v_2$$

(بنابه تمرین ۲.۳، V ‏ $\mathbb{C}G$ـمدول است.) V را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر نشان دهید.

۲. اگر $G = C_2 \times C_2$، گروه‌جبر $\mathbb{R}G$ را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای یک‌بعدی نشان دهید.

۳. گروه G، $\mathbb{C}G$ـمدول V و $\mathbb{C}G$ـهمریختی $\vartheta : V \to V$ را چنان پیدا کنید که $V \neq \operatorname{Ker}\vartheta \oplus \operatorname{Im}\vartheta$.

۴. گیریم G گروهی متناهی و $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ نمایشی برای G است. فرض کنید عناصر g و h از G وجود دارند به‌قسمی که ضرب ماتریسهای $g\rho$ و $h\rho$ تعویض‌پذیر نیست. ثابت کنید که ρ تحویل‌ناپذیر است.

(با توجه به نتیجهٔ فوق خوب است مثال ۵.۵(۲) و تمرینهای ۱.۵، ۳.۵، ۴.۵ و ۶.۶ را دوباره ببینید.)

۵. فرض کنید که G گروه نامتناهی زیر است

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

و V ‏ $\mathbb{C}G$ـمدول $\mathbb{C}^2$ با ضرب طبیعی در عناصر G است. (بنابراین به‌ازای $v \in V$ و $g \in G$، بردار vg عبارت‌است از حاصلضرب بردار سطریِ v در ماتریس g).

نشان دهید V ‏ $\mathbb{C}G$ـمدولی است که کاملاً تحویل‌پذیر نیست.

(بنابراین قضیهٔ مشکه برای گروههای نامتناهی درست نیست؛ مثال ۲.۸(۲) را نیز ببینید.)

۶. اثبات دیگری از قضیهٔ مشکه برای $\mathbb{C}G$ـمدولها.

گیریم V یک $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1، . . . ، v_n است و U یک $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است. حاصلضرب داخلی مختلط $(\, , \,)$ را روی V چنین تعریف می‌کنیم (برای دیدن تعریف حاصلضرب داخلی مختلط، (۲.۱۴) را ببینید): به‌ازای $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \overline{\mu}_i$$

حاصلضرب داخلی مختلط دیگری که آن را با $[\, , \,]$ نمایش می‌دهیم روی V چنین تعریف می‌کنیم

$$[u, v] = \sum_{x \in G} (ux, vx) \qquad (u, v \in V)$$

(۱) ثابت کنید که $[\, , \,]$ حاصلضرب داخلی مختلط است و در تساوی زیر صدق می‌کند

$$[ug, vg] = [u, v], \qquad \forall u, v \in V \; \forall g \in G$$

(۲) فرض کنید که U یک $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است و قرار دهید

$$U^{\perp} = \{v \in V : [u, v] = 0, \forall u \in U\}$$

نشان دهید که $U^{\perp}$ یک $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است.

(۳) قضیهٔ مشکه را نتیجه بگیرید. (راهنمایی: یکی از خواص متعارف حاصلضرب داخلی مختلط این است که به‌ازای هر زیرفضای U از V، $V = U \oplus U^{\perp}$.)

۷. ثابت کنید که به‌ازای هر گروه سادهٔ متناهی G، $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود دارد.

۹

لم شور

یکی از احکام بنیادی مربوط به مدولهای تحویل‌ناپذیر لم شور است. با وجود اینکه صورت این لم و اثبات آن ساده است، در نظریهٔ نمایشها دارای نقش اساسی است؛ در این فصل کاربرد مستقیم آن را در تعیین همهٔ نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروههای آبلی متناهی عرضه می‌کنیم.

لم شور دربارهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولهاست و نه $\mathbb{R}G$ـمدولها و چون بیشتر مباحث آتیِ نظریهٔ نمایشها به این لم بستگی دارد، در باقیماندهٔ این کتاب سروکارمان با $\mathbb{C}G$ـمدولها خواهد بود (بجز در فصل ۲۳).

در فصل حاضر G گروه متناهی است.

لم شور

۱.۹ لم شور فرض کنید V و W $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیرند.

(۱) اگر $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی باشد آنگاه یا ϑ $\mathbb{C}G$ـیکریختی است و یا به‌ازای هر $v \in V$، $v\vartheta = 0$.

(۲) اگر $\vartheta : V \to V$ $\mathbb{C}G$ـیکریختی باشد آنگاه ϑ مضرب اسکالریِ درونریختی همانی 1_V است.

برهان (۱) فرض کنید به‌ازای vای از V، $v\vartheta \neq \circ$. در این صورت $\mathrm{Im}\vartheta \neq \{\circ\}$. از آنجا که بنابه گزارهٔ ۲.۷، $\mathrm{Im}\vartheta$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول W است و W تحویل‌ناپذیر است پس $\mathrm{Im}\vartheta = W$. همچنین بنابه گزارهٔ ۲.۷، $\mathrm{Ker}\vartheta$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است که چون $\mathrm{Ker}\vartheta \neq V$ و V تحویل‌ناپذیر است پس $\mathrm{Ker}\vartheta = \{\circ\}$. بنابراین ϑ وارون‌پذیر است و از این‌رو $\mathbb{C}G$ـیکریختی است.

(۲) بنابه ۲۶.۲، درونریختی ϑ دارای مقدار ویژه‌ای چون $\lambda \in \mathbb{C}$ است و لذا $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{\circ\}$. بنابراین $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول مخالف صفری از V است. چون V تحویل‌ناپذیر است پس $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda 1_V) = V$. بنابراین

$$v(\vartheta - \lambda 1_V) = \circ \qquad \forall v \in V$$

یعنی $\vartheta = \lambda 1_V$، که همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. ■

گزارهٔ زیر معکوس قسمت دوم لم شور است.

۲.۹ گزاره فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدولی مخالف صفر است و هر $\mathbb{C}G$ـهمریختی از V به V مضرب اسکالری 1_V است. در این صورت V تحویل‌ناپذیر است.

برهان فرض کنید V تحویل‌پذیر است، در این صورت V دارای $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی چون U است که مخالف $\{\circ\}$ و V است. بنا به قضیهٔ مشکه $\mathbb{C}G$ـزیرمدول W از V وجود دارد به‌قسمی که

$$V = U \oplus W$$

در این صورت تصویرگر $\pi : V \to V$ که به‌ازای هر $u \in U$ و $w \in W$ به‌صورت $(u+w)\pi = u$ تعریف می‌شود $\mathbb{C}G$ـهمریختی است (گزارهٔ ۱۱.۷ را ببینید) اما مضرب اسکالری 1_V نیست و این با فرض ما تناقض دارد. بنابراین V تحویل‌ناپذیر است. ■

حال لم شور و عکس آن را برحسب نمایش گروه بیان می‌کنیم.

۳.۹ نتیجه فرض کنید $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ نمایش G است. در این صورت ρ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر هر ماتریس $n \times n$ مانند A که در تساوی

$$(g\rho)A = A(g\rho) \qquad \forall g \in G$$

صدق کند به شکل $A = \lambda I_n$، $\lambda \in \mathbb{C}$، باشد.

برهان مانند قضیهٔ ۴.۴(۱)، با تعریف

$$vg = v(g\rho) \qquad \forall v \in \mathbb{C}^n, \forall g \in G$$

$\mathbb{C}^n$ را می‌توان $\mathbb{C}G$ـمدول تلقی کرد.

گیریم A ماتریسی $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ است. درونریختی $v \to vA$ از $\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است اگر و فقط اگر

$$(vg)A = (vA)g \qquad \forall v \in \mathbb{C}^n, \forall g \in G$$

یعنی اگر و فقط اگر

$$(g\rho)A = A(g\rho) \qquad \forall g \in G$$

اکنون نتیجهٔ مطلوب با استفاده از لم شور، یعنی ۱.۹، وگزارهٔ ۲.۹ حاصل می‌شود. ■

۴.۹ مثال (۱) فرض کنید $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ و $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ نمایشی باشد که

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(تمرین ۲.۳ را ببینید). چون ضرب ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

در همهٔ $g\rho$ها $(g \in G)$ تعویض‌پذیر است، بنا به نتیجهٔ ۳.۹، ρ تحویل‌پذیر است.

(۲) فرض می‌کنیم $G = D_{10} = \langle a, b : a^5 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و قرار می‌دهیم $\omega = e^{2\pi i/5}$. می‌توان نشان داد نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ وجود دارد به‌قسمی که

$$a\rho = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad b\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنید ضرب ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

در هر یک از ماتریسهای $a\rho$ و $b\rho$ تعویض‌پذیر است. از تساوی $(a\rho)A = A(a\rho)$ نتیجه می‌شود $\beta = \gamma = ۰$، و سپس از تساوی $(b\rho)A = A(b\rho)$ نتیجه می‌شود $\alpha = \delta$. از این‌رو

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I$$

بنابراین بنابه نتیجهٔ ۳.۹، ρ تحویل‌ناپذیر است.

نظریهٔ نمایشهای گروههای آبلی متناهی

فرض کنید G گروهی آبلی و متناهی است، و V ـ$\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است. عضوی از G مثلاً x را انتخاب می‌کنیم. چون G آبلی است

$$vgx = vxg \qquad \forall g \in G$$

و لذا درونریختی $v \to vx$ از V ـ$\mathbb{C}G$ـهمریختی است. بنابه لم شور، یعنی ۱.۹(۲) این درونریختی مضرب اسکالری درونریختی همانی ۱_V است؛ گیریم مساوی $\lambda_x ۱_V$ است. بنابراین

$$vx = \lambda_x v \qquad \forall v \in V$$

و لذا هر زیرفضای V ـ$\mathbb{C}G$ـمدول است. چون V تحویل‌ناپذیر است پس $\dim V = ۱$. به این ترتیب گزارهٔ زیر را اثبات کرده‌ایم.

۵.۹ گزاره اگر G گروه آبلی متناهی باشد، بعد هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیری ۱ است.

نتیجهٔ بعدی قضیهٔ مهمی از لحاظ ساختار گروههای آبلی متناهی است. این قضیه را در اینجا ثابت نمی‌کنیم در عوض خواننده را به فصل ۹ کتاب فرالی که مشخصاتش در کتابنامه آمده ارجاع می‌دهیم.

۶.۹ قضیه هر گروه آبلی متناهی با حاصلضرب مستقیم گروههایی دوری یکریخت است.

نمایشهای تحویل‌ناپذیر همهٔ حاصلضربهای مستقیم

$$C_{n_۱} \times C_{n_۲} \times \cdots \times C_{n_r}$$

را که $n_۱$، $n_۲$، ... ، n_r اعداد صحیح مثبت هستند تعیین می‌کنیم. به‌این ترتیب، بنابه قضیهٔ ۶.۹، نمایشهای تحویل‌ناپذیر همهٔ گروههای آبلی متناهی به‌دست می‌آیند.

گیریم $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ و به‌ازای $1 \le i \le r$، c_i مولد C_{n_i} باشد. می‌نویسیم

$$g_i = (1, \cdots, c_i, \cdots, 1) \quad (c_i \text{ در مکان } i\text{ام})$$

در این صورت

$$G = \langle g_1, \cdots, g_r \rangle \text{ که } g_i^{n_i} = 1 \text{ و } g_i g_j = g_j g_i \text{ به‌ازای تمام } i\text{ها و } j\text{ها}$$

اکنون فرض کنید $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایش تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ است. در این صورت بنابه گزارهٔ ۵.۹ داریم $n = 1$، و لذا به‌ازای $1 \le i \le r$، عددی چون $\lambda_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$g_i \rho = (\lambda_i)$$

(که البته (λ_i) ماتریس 1×1 است). چون مرتبهٔ g_i مساوی n_i است پس $\lambda_i^{n_i} = 1$، یعنی λ_i ریشهٔ n_iام واحد است. همچنین مقادیر λ_1، ... ، λ_r نمایش ρ را معین می‌کنند، زیرا به‌ازای $g \in G$ داریم $g = g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r}$، که i_1، ... ، i_r اعداد صحیح هستند، و در نتیجه

$$g\rho = (g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r})\rho = (\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r}) \tag{۷.۹}$$

نمایشی چون ρ از G را که به‌ازای همهٔ i_1، ... ، i_rها در تساوی (۷.۹) صدق کند به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\rho = \rho_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r}$$

برعکس به‌ازای n_i دلخواه و λ_iهایی که ریشه‌های n_iام واحد هستند ($1 \le i \le r$)، تابع

$$g_1^{i_1} \cdots g_r^{i_r} \to (\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_r^{i_r})$$

نمایش G است. تعداد چنین نمایشهایی $n_1 n_2 \cdots n_r$ است و هیچ‌یک از آنها با دیگری هم‌ارز نیست.

به این ترتیب قضیهٔ زیر ثابت شده است.

۸.۹ قضیه فرض کنید G گروه آبلی $C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ باشد. در این صورت نمایشهای $\rho_{\lambda_1, \cdots, \lambda_r}$ از G که در بالا ساخته شدند تحویل‌ناپذیر و دارای درجهٔ ۱ هستند. تعداد این نمایشها $|G|$ است و هر نمایش تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ دقیقاً هم‌ارز یکی از آنهاست.

۹.۹ مثال (۱) گیریم $G = C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$ و $\omega = e^{2\pi i/n}$. n نمایش تحویل‌ناپذیر G روی $\mathbb{C}$ عبارت‌اند از ρ_{ω^j} $(0 \leq j \leq n-1)$، که

$$a^k \rho_{\omega^j} = (\omega^{jk}) \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$

(۲) چهار $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر $G = C_2 \times C_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ عبارت‌اند از V_1، V_2، V_3، V_4، که V_i فضایی یک‌بعدی با پایهٔ v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ است و

$$\begin{aligned} v_1 g_1 &= v_1, & v_1 g_2 &= v_2 \\ v_2 g_1 &= v_2, & v_2 g_2 &= -v_2 \\ v_3 g_1 &= -v_3, & v_3 g_2 &= v_3 \\ v_4 g_1 &= -v_4, & v_4 g_2 &= -v_4 \end{aligned}$$

قطری کردن

فرض کنید گروه $H = \langle g \rangle$ گروه دوری مرتبهٔ n است و V $\mathbb{C}H$ـمدولی مخالف صفر. بنا به قضیهٔ ۷.۸،

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

یعنی V مجموع مستقیم $\mathbb{C}H$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر U_i از V است. بنابه گزارهٔ ۵.۹، هر یک از U_iها دارای بعد ۱ است. فرض کنید u_i بردار پدیدآورندهٔ U_i باشد و قرار دهید $\omega = e^{2\pi i/n}$. در این صورت به‌ازای هر i عدد صحیح m_i وجود دارد به‌قسمی که

$$u_i g = \omega^{m_i} u_i$$

بنابراین اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ u_1، ...، u_r برای V باشد آنگاه

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega^{m_r} \end{pmatrix} \tag{۱۰.۹}$$

به‌این ترتیب نتیجهٔ مفید زیر حاصل می‌شود.

۱۱.۹ گزاره گیریم G گروهی متناهی و V $\mathbb{C}G$ـمدول است. اگر $g \in G$، پایهٔ $\mathscr{B}$ برای V وجود دارد به‌قسمی که ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ قطری باشد. اگر مرتبهٔ g مساوی n باشد، درایه‌های قطر اصلی $[g]_{\mathscr{B}}$ ریشه‌های nام واحد هستند.

برهان قرار می‌دهیم $H = \langle g \rangle$. چون V $\mathbb{C}H$ـمدول نیز هست نتیجهٔ مطلوب با استفاده از (۱۰.۹) حاصل می‌شود. ■

کاربردهای دیگری از لم شور

کاربرد بعدی دربارهٔ زیرفضای مهمی از گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ است.

۱۲.۹ تعریف فرض کنید G گروهی متناهی است. مرکز گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ را که با $\mathbb{Z}(\mathbb{C}G)$ نشان می‌دهند چنین تعریف می‌کنند

$$\mathbb{Z}(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz,\ \forall r \in \mathbb{C}G\}$$

با استفاده از (۵.۲) به‌سادگی می‌توان نشان داد که $Z(\mathbb{C}G)$ زیرفضای $\mathbb{C}G$ است.

اگر G گروهی آبلی باشد، $Z(\mathbb{C}G)$ مساوی $\mathbb{C}G$ است. خواهیم دید که G هر گروه دلخواهی که باشد، $Z(\mathbb{C}G)$ نقش بسیار مهمی در مطالعهٔ نمایشهای آن دارد (به‌عنوان مثال، بُعد آن مساوی تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر G است؛ فصل ۱۵ را ببینید).

۱۳.۹ مثال عناصر ۱ و $\sum_{g\in G} g$ در $Z(\mathbb{C}G)$ هستند. درواقع اگر H زیرگروه نرمالی از G باشد آنگاه

$$\sum_{h\in H} h \in Z(\mathbb{C}G)$$

برای اثبات، اگر بنویسیم $z = \sum_{h\in H} h$ آنگاه به‌ازای هر $g \in G$،

$$g^{-1}zg = \sum_{h\in H} g^{-1}hg = \sum_{h\in H} h = z$$

و لذا $zg = gz$. در نتیجه به‌ازای هر $r \in \mathbb{C}G$، $zr = rz$.

به‌عنوان مثال اگر $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ آنگاه $\{1\}$ و $\langle a\rangle$ و G زیرگروههای نرمال G هستند و لذا عناصر

$$1،\quad 1 + a + a^2،\quad 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$$

در $Z(\mathbb{C}G)$ قرار دارند. بعداً خواهیم دید که این عناصر درواقع پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}G)$ تشکیل می‌دهند.

اکنون با استفاده از لم شور خاصیت مهمی از خاصیتهای عناصر $Z(\mathbb{C}G)$ را ثابت می‌کنیم.

۱۴.۹ گزاره فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است و $z \in Z(\mathbb{C}G)$. در این صورت عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$vz = \lambda v \quad \forall v \in V$$

برهان به‌ازای هر $r \in \mathbb{C}G$ و $v \in V$،

$$vrz = vzr$$

و لذا تابع $v \to vz$ $\mathbb{C}G$ـ همریختی از V به V است. بنا به لم شور، یعنی ۱.۹(۲)، این $\mathbb{C}G$ـهمریختی به‌ازای λای متعلق به $\mathbb{C}$ مساوی $\lambda 1_V$ است و لذا نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ∎

برخی عناصر مرکز $\mathbb{C}G$ با استفاده از مرکز G که اکنون تعریف می‌کنیم به‌دست می‌آیند.

۱۵.۹ تعریف مرکز G را که با $Z(G)$ نشان می‌دهند چنین تعریف می‌کنند

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz,\ \forall g \in G\}$$

واضح است که $Z(G)$ زیرگروه نرمال G، و زیرمجموعهٔ $Z(\mathbb{C}G)$ است.

با وجود اینکه بنابه گزارهٔ ۶.۶، به‌ازای هر گروه متناهی G، $\mathbb{C}G$ـمدول صادقی وجود دارد ولی ممکن است که $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود نداشته باشد. درواقع گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که اگر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود داشته باشد، ساختار G محدودیت زیادی دارد.

۱۶.۹ گزاره اگر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود داشته باشد، $Z(G)$ دوری است.

برهان فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادق است. اگر $z \in Z(G)$ آنگاه z در $Z(\mathbb{C}G)$ قرار دارد و از این‌رو بنابه گزارهٔ ۱۴.۹، عددی چون $\lambda_z \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$vz = \lambda_z v \quad \forall v \in V$$

چون V صادق است، تابع

$$z \to \lambda_z \quad (z \in Z(G))$$

همریختی یک‌به‌یکی از $Z(G)$ به گروه ضربی $\mathbb{C}^*$ است، که $\mathbb{C}^*$ متشکل از اعداد مختلط مخالف صفر است. بنابراین $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ که چون طرف راست این رابطه زیرگروهی متناهی از $\mathbb{C}^*$ است و لذا دوری است پس طرف چپ نیز دوری است (تمرین ۷.۱ را ببینید). ■

تذکر می‌دهیم که عکس گزارهٔ ۱۶.۹ درست نیست، زیرا در تمرین ۶.۲۵ مثالی از گروه G ارائه داده‌ایم که به‌ازای آن، $Z(G)$ دوری است ولی هیچ $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود ندارد.

۱۷.۹ مثال اگر G گروهی آبلی باشد آنگاه $Z(G) = G$ و لذا بنابه گزارهٔ ۱۶.۹، هیچ $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادقی وجود ندارد مگر اینکه G دوری باشد. به‌عنوان مثال $C_2 \times C_2$ هیچ نمایش تحویل‌ناپذیر صادقی ندارد (مثال ۹.۹(۲) را ببینید).

ساختن نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروههای غیرآبلی مشکلتر از گروههای آبلی است. به‌خصوص که همگی آنها دارای درجهٔ ۱ نیستند، همان‌گونه که در گزارهٔ زیر که عکس گزارهٔ ۵.۹ است ثابت می‌شود.

۱۸.۹ گزاره فرض کنید G گروهی متناهی است که به‌ازای آن هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر دارای بعد ۱ است. در این صورت G آبلی است.

برهان بنابه قضیهٔ ۷.۸ می‌توان نوشت

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

که هر کدام از V_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}G$ـمدول منظم $\mathbb{C}G$ است. در این صورت چون فرض کرده‌ایم که تمام $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر دارای بعد ۱ هستند پس به‌ازای تمام iها داریم $\dim V_i = 1$. به‌ازای $1 \le i \le n$، فرض کنید v_i بردار پدید آورندهٔ V_i باشد. در این صورت $v_1, \ldots, v_n$ پایه‌ای برای $\mathbb{C}G$ است که آن را $\mathscr{B}$ می‌نامیم. به‌ازای هر $x, y \in G$ ماتریسهای $[x]_{\mathscr{B}}$ و $[y]_{\mathscr{B}}$ قطری‌اند و از این‌رو ضربشان در یکدیگر تعویض‌پذیر است. چون نمایش

$$g \to [g]_{\mathscr{B}} \qquad (g \in G)$$

صادق است (گزارهٔ ۶.۶ را ببینید) نتیجه می‌گیریم که ضرب x و y در یکدیگر تعویض‌پذیر است. بنابراین G آبلی است و حکم ثابت شده است. ■

خلاصهٔ فصل ۹

۱. لم شور می‌گوید که هر $\mathbb{C}G$ـهمریختیِ $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر یا صفر است و یا $\mathbb{C}G$ـیکریختی است. همچنین تنها $\mathbb{C}G$ـهمریختیهایی که از $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر به خودش قابل تعریف‌اند مضارب اسکالری نگاشت همانی هستند.

۲. مرکز گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ یعنی $Z(\mathbb{C}G)$ متشکل از عناصری است که ضربشان در تمامی عناصر $\mathbb{C}G$ تعویض‌پذیر است. عناصر $Z(\mathbb{C}G)$ روی تمام $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر به‌صورت مضارب اسکالری همانی عمل می‌کنند. [۱۴.۹ را ببینید.]

۳. تمام $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر به‌ازای گروه متناهی و آبلی G دارای بعد ۱ هستند و تعداد آنها مساوی $|G|$ است.

تمرینات فصل ۹

۱. نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروههای $C_۲$، $C_۳$ و $C_۲ \times C_۲$ را روی $\mathbb{C}$ بنویسید.

۲. گیریم $G = C_۴ \times C_۴$.

الف) نمایشی تحویل‌ناپذیر و غیربدیهی چون ρ برای G چنان بیابید که به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $g^۲\rho = (۱)$.

ب) ثابت کنید نمایش تحویل‌ناپذیر σ برای G وجود ندارد به‌قسمی که به‌ازای همهٔ عناصر مرتبهٔ ۲ی g از G داشته باشیم $g\sigma = (-۱)$.

۳. فرض کنید G گروه متناهی و آبلی $C_{n_۱} \times \cdots \times C_{n_r}$ است. ثابت کنید که G دارای نمایش صادقی با درجهٔ r است. آیا ممکن است G دارای نمایش صادقی با درجهٔ کمتر از r باشد؟

۴. فرض کنید $G = D_۸ = \langle a, b : a^۴ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$. نشان دهید که نمایشی چون ρ برای G روی $\mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$a\rho = \begin{pmatrix} -۷ & ۱۰ \\ -۵ & ۷ \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} -۵ & ۶ \\ -۴ & ۵ \end{pmatrix}$$

تمام ماتریسهای ۲ × ۲ مانند M را پیدا کنید به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $M(g\rho) = (g\rho)M$. به این ترتیب معلوم کنید که آیا ρ تحویل‌ناپذیر است یا خیر.

همین کار را برای نمایش σ از G انجام دهید، در صورتی‌که

$$a\sigma = \begin{pmatrix} ۵ & -۶ \\ ۴ & -۵ \end{pmatrix}, \quad b\sigma = \begin{pmatrix} -۵ & ۶ \\ -۴ & ۵ \end{pmatrix}$$

۵. نشان دهید که اگر V یک $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$v\left(\sum_{g\in G} g\right) = \lambda v \qquad \forall v \in V$$

۶. گیریم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. می‌نویسیم $\omega = e^{2\pi i/3}$ و فرض می‌کنیم W یک $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر زیر از $\mathbb{C}G$ـمدول منظم باشد

$$W = \mathrm{sp}(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b)$$

(تمرین ۶.۶ را ببینید).

الف) نشان دهید $a + a^{-1} \in Z(\mathbb{C}G)$.

ب) عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ را چنان بیابید که به‌ازای هر $w \in W$ داشته باشیم

$$w(a + a^{-1}) = \lambda w$$

(با گزارهٔ ۱۴.۹ مقایسه کنید.)

۷. از گروههای زیر، گروههایی که دارای نمایش تحویل‌ناپذیر صادق‌اند کدام‌اند؟

الف) C_n (n عدد صحیح و مثبت است)؛

ب) D_8؛

ج) $C_2 \times D_8$؛

د) $C_3 \times D_8$.

۱۰

مدول تحویل‌ناپذیر و گروه‌جبر

گیریم G گروهی متناهی و $\mathbb{C}G$ گروه‌جبر G روی $\mathbb{C}$ است. $\mathbb{C}G$ را به‌عنوان $\mathbb{C}G$ـمدول منظم در نظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ ۷.۸، می‌توان نوشت

$$\mathbb{C}G = U_۱ \oplus \cdots \oplus U_r$$

که هر کدام از U_iها $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است. در این فصل نشان خواهیم داد که هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با یکی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای $U_۱$، . . . ، U_r یکریخت است. در نتیجه فقط تعدادی متناهی $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر غیریکریخت وجود دارد (این حکم قبلاً برای گروههای آبلی در قضیهٔ ۸.۹ ثابت شد). همچنین نتیجه می‌گیریم که از لحاظ نظری، برای پیداکردن تمام $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر کافی است $\mathbb{C}G$ را به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنیم. با وجود این توجه کنید که این راه واقعاً راه عملی پیداکردن $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نیست مگر اینکه G گروهی کوچک باشد.

زیرمدولهای تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}G$

ابتدا نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ مشکه را عرضه می‌کنیم.

۱.۱۰ گزاره گیریم V و W $\mathbb{C}G$ـمدول هستند و $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است. در این صورت $\mathbb{C}G$ـزیرمدول U از V وجود دارد به‌قسمی که $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$ و $U \cong \mathrm{Im}\vartheta$.

برهان چون بنابه گزارهٔ ۲.۷، $\mathrm{Ker}\vartheta$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است پس بنابه قضیهٔ مشکه $\mathbb{C}G$ـزیرمدول U از V وجود دارد به‌قسمی که $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$. تابع $\overline{\vartheta} : U \to \mathrm{Im}\vartheta$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$u\overline{\vartheta} = u\vartheta \qquad (u \in U)$$

نشان می‌دهیم که $\overline{\vartheta}$ $\mathbb{C}G$ـیکریختی از U به $\mathrm{Im}\vartheta$ است. واضح است که $\overline{\vartheta}$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است، زیرا ϑ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است. اگر $u \in \mathrm{Ker}\overline{\vartheta}$ آنگاه $u \in \mathrm{Ker}\vartheta \cap U = \{0\}$ و از این‌رو $\mathrm{Ker}\overline{\vartheta} = \{0\}$. اکنون فرض کنید $w \in \mathrm{Im}\vartheta$، در نتیجه به‌ازای عضوی چون $v \in V$، $w = v\vartheta$. می‌نویسیم $v = k + u$ که $k \in \mathrm{Ker}\vartheta$ و $u \in U$. در این صورت

$$w = v\vartheta = k\vartheta + u\vartheta = u\vartheta = u\overline{\vartheta}$$

بنابراین $\mathrm{Im}\overline{\vartheta} = \mathrm{Im}\vartheta$. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که $\overline{\vartheta} : U \to \mathrm{Im}\vartheta$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی وارون‌پذیر است. بنابراین $U \cong \mathrm{Im}\vartheta$ و قضیه ثابت شده است. ■

۲.۱۰ گزاره فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدول است و

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیرند. اگر U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیری از V باشد آنگاه به‌ازای iای، $U \cong U_i$.

برهان به‌ازای $u \in U$ بردارهای منحصر به فرد $u_i \in U_i$ $(1 \le i \le s)$ وجود دارند به‌قسمی که $u = u_1 + \cdots + u_s$. تابع $\pi_i : U \to U_i$ را با ضابطهٔ $u\pi_i = u_i$ تعریف می‌کنیم. اگر i را چنان انتخاب کنیم که به‌ازای عضوی چون $u \in U$ داشته باشیم $u_i \neq 0$ آنگاه $\pi_i \neq 0$.

اکنون توجه کنید که π_i $\mathbb{C}G$ـهمریختی است (گزارهٔ ۱۱.۷ را ببینید). چون U و U_i تحویل‌ناپذیرند و $\pi_i \neq 0$، از لم شور، یعنی ۱.۹(۱)، نتیجه می‌شود که π_i $\mathbb{C}G$ـیکریختی است. بنابراین $U \cong U_i$. ■

البته ممکن است که U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر مدول $U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ باشد (هرکدام از U_iها تحویل‌ناپذیرند) ولی U مساوی هیچ‌کدام از U_iها نباشد. به مثال زیر توجه کنید.

۳.۱۰ مثال فرض کنید G گروهی دلخواه و V $\mathbb{C}G$ـمدولی دوبعدی با پایهٔ v_1، v_2 است به‌طوری که به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، $vg = v$. در این صورت $V = U_1 \oplus U_2$ که U_1 و U_2 به ترتیب عبارت‌اند از $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر $\mathrm{sp}(v_1)$ و $\mathrm{sp}(v_2)$. اما $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر $U = \mathrm{sp}(v_1 + v_2)$ نه مساوی U_1 است نه مساوی U_2.

۴.۱۰ تعریف (۱) اگر V $\mathbb{C}G$ـمدول و U $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر باشد، گوییم U عامل ترکیب V است هرگاه V دارای $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی یکریخت با U باشد.

(۲) گوییم دو $\mathbb{C}G$ـمدول V و W دارای عامل ترکیب مشترک‌اند اگر $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر که هم عامل ترکیب V و هم عامل ترکیب W است وجود داشته باشد.

اکنون به نتیجهٔ اصلی این فصل می‌رسیم. طبق این نتیجه هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر عامل ترکیب $\mathbb{C}G$ـمدول منظم است.

۵.۱۰ قضیه $\mathbb{C}G$ را به‌عنوان $\mathbb{C}G$ـمدول منظم در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیرند. در این صورت هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با یکی از این U_iها یکریخت است.

برهان فرض می‌کنیم W $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است و بردار مخالف صفر $w \in W$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $\{wr : r \in \mathbb{C}G\}$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول W است و چون W تحویل‌ناپذیر فرض شده پس

$$W = \{wr : r \in \mathbb{C}G\} \qquad (۶.۱۰)$$

حال $\vartheta : \mathbb{C}G \to W$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$r\vartheta = wr \qquad (r \in \mathbb{C}G)$$

واضح است که ϑ تبدیل خطی است و بنابه (۶.۱۰)، $\mathrm{Im}\vartheta = W$ به‌علاوه ϑ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است زیرا به‌ازای $r, s \in \mathbb{C}G$

$$(rs)\vartheta = w(rs) = (wr)s = (r\vartheta)s$$

بنابه گزارهٔ ۱.۱۰، $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی چون U از $\mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که

$$U \cong \mathrm{Im}\vartheta = W \quad \text{و} \quad \mathbb{C}G = U \oplus \mathrm{Ker}\vartheta$$

چون W تحویل‌ناپذیر است پس U نیز چنین است. بنابه گزارهٔ ۲.۱۰، به‌ازای iای، $U \cong U_i$ و در نتیجه $W \cong U_i$ و لذا حکم ثابت شده است. ■

قضیهٔ ۵.۱۰ نشان می‌دهد که مجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر وجود دارد به‌طوری که هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با عضوی از این مجموعه یکریخت است. این موضوع را به‌صورت نتیجهٔ زیر بیان می‌کنیم.

۷.۱۰ نتیجه اگر G گروهی متناهی باشد آنگاه فقط تعدادی متناهی $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر غیر یکریخت با یکدیگر وجود دارد.

مطابق با قضیهٔ ۵.۱۰ برای پیداکردن تمام $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر فقط کافی است $\mathbb{C}G$ـمدول منظم را به‌مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنیم. در اینجا این کار را در دو مثال انجام می‌دهیم، اما در حالت کلی راه عملی بررسی $\mathbb{C}G$ـمدولها چنین نیست.

۸.۱۰ مثال (۱) فرض کنیم $G = C_۳ = \langle a : a^۳ = ۱ \rangle$ و $\omega = e^{۲\pi i/۳}$. $v_۰$، $v_۱$ و $v_۲$ از $\mathbb{C}G$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$v_۰ = ۱ + a + a^۲$$
$$v_۱ = ۱ + \omega^۲ a + \omega a^۲$$
$$v_۲ = ۱ + \omega a + \omega^۲ a^۲$$

به‌ازای $i = ۰, ۱, ۲$ قرار می‌دهیم $U_i = \mathrm{sp}(v_i)$. دراین صورت $v_۱ a = a + \omega^۲ a^۲ + \omega ۱ = \omega v_۱$ و به همین ترتیب

$$v_i a = \omega^i v_i \qquad i = ۰, ۱, ۲$$

از این‌رو به‌ازای $i = ۰, ۱, ۲$، U_i $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ است.

به سادگی می‌توان نشان داد که $v_۰$، $v_۱$، $v_۲$ پایه‌ای برای $\mathbb{C}G$ است و لذا $\mathbb{C}G$ مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر U_i است، یعنی

$$\mathbb{C}G = U_۰ \oplus U_۱ \oplus U_۲$$

بنابه قضیهٔ ۵.۱۰، هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با یکی از زیرمدولهای U_0، U_1، U_2 یکریخت است. نمایش تحویل‌ناپذیر G متناظر با U_i عبارت‌است از نمایش ρ_{ω^i} که در مثال ۹.۹(۱) آورده شد.

(۲) فرض کنیم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$. $\mathbb{C}G$ را به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\omega = e^{2\pi i/3}$ و تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + a + a^2, & w_0 &= bv_0 \quad (= b + ba + ba^2) \\ v_1 &= 1 + \omega^2 a + \omega a^2, & w_1 &= bv_1 \\ v_2 &= 1 + \omega a + \omega^2 a^2, & w_2 &= bv_2 \end{aligned}$$

مانند مثال (۱) بالا به‌ازای $i = 0, 1, 2$، $v_i a = \omega^i v_i$ و لذا $\mathrm{sp}(v_i)$ و $\mathrm{sp}(w_i)$ $\mathbb{C}\langle a\rangle$ـمدول هستند. حال با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} v_0 b &= w_0, & w_0 b &= v_0 \\ v_1 b &= w_2, & w_1 b &= v_2 \\ v_2 b &= w_1, & w_2 b &= v_1 \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{sp}(v_0, w_0)$، $\mathrm{sp}(v_1, w_2)$، $\mathrm{sp}(v_2, w_1)$ $\mathbb{C}\langle b\rangle$ـمدول هستند و از این‌رو $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ هستند. مطابق استدلالی که در مثال ۵.۵(۲) دیدیم، $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای $U_3 = \mathrm{sp}(v_1, w_2)$ و $U_4 = \mathrm{sp}(v_2, w_1)$ تحویل‌ناپذیرند. اما $\mathrm{sp}(v_0, w_0)$ تحویل‌پذیر است زیرا $U_1 = \mathrm{sp}(v_0 + w_0)$ و $U_2 = \mathrm{sp}(v_0 - w_0)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول آن هستند.

اکنون v_0، v_1، v_2، w_0، w_1، w_2 پایه‌ای برای $\mathbb{C}G$ است و از این‌رو

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیرند. توجه کنید که U_1 $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی است و با $\mathbb{C}G$ـزیرمدول یک بعدی دیگر، یعنی U_2 یکریخت نیست. اما $U_3 \cong U_4$ ($\mathbb{C}G$ـیکریختیی وجود دارد که تحت آن $v_1 \to w_1$ و $w_2 \to v_2$).

با استفاده از قضیهٔ ۵.۱۰ نتیجه می‌گیریم که دقیقاً سه $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر غیر یکریخت وجود دارد که عبارت‌اند از U_1، U_2 و U_3. بر این قیاس هر نمایش تحویل‌ناپذیر D_6 روی $\mathbb{C}$ دقیقاً

هم‌ارز یکی از نمایشهای زیر است

$$\rho_1 : a \to (1), \quad b \to (1)$$
$$\rho_2 : a \to (1), \quad b \to (-1)$$
$$\rho_3 : a \to \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

خلاصهٔ فصل ۱۰

۱. هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر یکی از عوامل ترکیب $\mathbb{C}G$ـمدول منظم است.
۲. تعداد $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر غیریکریخت متناهی است.

تمرینات فصل ۱۰

۱. فرض کنید G گروهی متناهی است. $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی از $\mathbb{C}G$ پیدا کنید که با $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی یکریخت باشد. آیا چنین $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی منحصر به فرد است؟
۲. فرض کنید $G = C_4$. $\mathbb{C}G$ را به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنید. (راهنمایی: از روش مثال ۸.۱۰(۱) پیروی کنید.)
۳. گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی یک‌بعدی از $\mathbb{C}G$ چون $\mathrm{sp}(u_1)$ را چنان پیدا کنید که

$$u_1 a = u_1, \quad u_1 b = -u_1$$

همچنین $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای یک‌بعدی $\mathrm{sp}(u_2)$ و $\mathrm{sp}(u_3)$ را با شرایط زیر پیدا کنید

$$u_2 a = -u_2, \quad u_2 b = u_2$$
$$u_3 a = -u_3, \quad u_3 b = -u_3$$

۴. با استفاده از روش مثال ۸.۱۰(۲) تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر D_8 روی $\mathbb{C}$ را پیدا کنید.
۵. فرض کنید V $\mathbb{C}G$ـمدولی مخالف صفر است و $V = U_1 \oplus U_2$ که U_1 و U_2 $\mathbb{C}G$ـمدولهای یکریخت هستند. نشان دهید که $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی چون U از V وجود دارد که مساوی U_1 یا U_2 نیست ولی با هر دوی آنها یکریخت است.

۶. گیریم $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و V $\mathbb{C}G$ـمدول مذکور در مثال ۵.۴(۲) باشد. در این صورت V دارای پایهٔ v_1، v_2 است و

$$v_1 a = iv_1, \qquad v_1 b = v_2$$
$$v_2 a = -iv_2, \qquad v_2 b = -v_1$$

نشان دهید V تحویل‌ناپذیر است و $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی از $\mathbb{C}G$ پیدا کنید که با V یکریخت باشد.

۱۱

مطالبی دیگر دربارهٔ گروه‌جبر

اکنون در ساختار گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ از گروه متناهی G بیشتر تعمق می‌کنیم. مانند فصل ۱۰، می‌نویسیم

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیرند. در قضیهٔ ۵.۱۰ ثابت کردیم که هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر U با یکی از U_iها یکریخت است. این سؤال پیش می‌آید که چه تعدادی از U_iها با U یکریخت‌اند. این سؤال جواب زیبا و مهمی دارد: تعداد آنها دقیقاً مساوی $\dim U$ است (قضیهٔ ۹.۱۱ را ببینید).

برهانی که برای قضیهٔ ۹.۱۱ عرضه می‌کنیم برمبنای مطالعهٔ فضای برداری همهٔ $\mathbb{C}G$ـهمریختیهایی است که از $\mathbb{C}G$ـمدولی به $\mathbb{C}G$ـمدولی دیگر تعریف شده‌اند.

فضای $\mathbb{C}G$ـهمریختیها

۱.۱۱ تعریف فرض کنیم V و W $\mathbb{C}G$ـمدول هستند. مجموعهٔ تمام $\mathbb{C}G$ـهمریختیهای از V به W را با $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ نمایش می‌دهیم.

حال جمع عناصر $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ و ضرب آنها در اسکالر را تعریف می‌کنیم. به‌ازای

$\vartheta, \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، $\vartheta + \phi$ و $\lambda\vartheta$ را چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $v \in V$،

$$v(\vartheta + \phi) = v\vartheta + v\phi$$
$$v(\lambda\vartheta) = \lambda(v\vartheta)$$

در این صورت $\vartheta + \phi\ ,\ \lambda\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$. با این تعاریف، به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است.

مطالعهٔ فضای برداری $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ را با نتیجه‌گیری ساده‌ای از لم شور آغاز می‌کنیم.

۲.۱۱ گزاره فرض کنیم که V و W $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیرند. در این صورت

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } V \cong W \\ ۰ & \text{اگر } V \ncong W \end{cases}$$

برهان اگر $V \ncong W$، حکم بلاواسطه از لم شور، یعنی ۱.۹(۱)، نتیجه می‌شود.
اکنون فرض کنیم که $V \cong W$ و $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G$ـیکریختی باشد. اگر $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ آنگاه $\phi\vartheta^{-۱}$ $\mathbb{C}G$ـیکریختی از V به V است و لذا بنا به لم شور، یعنی ۱.۹(۲)، اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\phi\vartheta^{-۱} = \lambda ۱_V$$

بنابراین $\phi = \lambda\vartheta$ و لذا $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) = \{\lambda\vartheta : \lambda \in \mathbb{C}\}$، که فضایی یک‌بعدی است. ■

قبل از بیان گزارهٔ بعدی، یادآوری می‌کنیم که مفهوم عامل ترکیب $\mathbb{C}G$ـمدول را در ۴.۱۰ تعریف کردیم.

۳.۱۱ گزاره گیریم V و W $\mathbb{C}G$ـمدول‌اند و $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \{۰\}$. در این صورت V و W عامل ترکیب مشترکی دارند.

برهان گیریم ϑ عنصر مخالف صفری از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ است. در این صورت بنا به قضیهٔ مشکه، $V = \mathrm{Ker}\vartheta \oplus U$ که U $\mathbb{C}G$ـمدولی مخالف صفر است. فرض کنیم X $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیری از U است. چون $X\vartheta \neq \{۰\}$، از لم شور، یعنی ۱.۹(۱)، نتیجه می‌شود که $X \cong X\vartheta$. بنابراین X عامل مشترک V و W است. ■

طی چند نتیجهٔ بعدی می‌بینیم که چگونه در حالت کلی می‌توان بعد $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ را محاسبه کرد. کلید این کار گزارهٔ زیر است.

۴.۱۱ گزاره گیریم V، V_1، V_2 و W، W_1، W_2 $\mathbb{C}G$ـمدول هستند. در این صورت

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)) \qquad (1)$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W)) \qquad (2)$$

برهان (۱) توابع $\pi_1 : W_1 \oplus W_2 \to W_1$ و $\pi_2 : W_1 \oplus W_2 \to W_2$ را چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$،

$$(w_1 + w_2)\pi_1 = w_1, \qquad (w_1 + w_2)\pi_2 = w_2$$

بنابه گزارهٔ ۱۱.۷، π_1 و π_2 $\mathbb{C}G$ـهمریختی هستند. اگر $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ آنگاه $\vartheta\pi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ و $\vartheta\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ (تمرین ۱.۷ را ببینید).

اکنون تابع f را از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ به مجموع مستقیم (خارجی) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ و $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ چنین تعریف می‌کنیم

$$f : \vartheta \to (\vartheta\pi_1, \vartheta\pi_2) \qquad (\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2))$$

واضح است که f تبدیل خطی است. نشان می‌دهیم که f وارون‌پذیر است.

به‌ازای عناصر مفروض $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_i)$ $(i = 1, 2)$ تابع

$$\phi : v \to v\phi_1 + v\phi_2 \qquad (v \in V)$$

متعلق به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ است و تصویر ϕ تحت f عبارت‌است از (ϕ_1, ϕ_2). بنابراین f پوشاست.

اگر $\vartheta \in \mathrm{Ker} f$ آنگاه به‌ازای هر $v \in V$، $v\vartheta\pi_1 = 0$ و $v\vartheta\pi_2 = 0$، و لذا $v\vartheta = v\vartheta(\pi_1 + \pi_2) = 0$. بنابراین $\vartheta = 0$ و لذا $\mathrm{Ker} f = \{0\}$؛ از این‌رو f یک‌به‌یک است.

تاکنون ثابت کرده‌ایم که f تبدیل خطی وارون‌پذیر از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ است. در نتیجه این دو فضای برداری دارای ابعاد مساوی‌اند و لذا (۱) ثابت شده است.

(۲) به‌ازای $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$، فرض می‌کنیم تابع $\vartheta_{V_i} : V_i \to W$ $(i = 1, 2)$ حاصل تحدید ϑ به V_i باشد، یعنی ϑ_{V_i} عبارت باشد از تابع

$$v_i\vartheta_{V_i} = v_i\vartheta \qquad (v_i \in V_i)$$

در این صورت، به‌ازای $i = 1, 2$، $\vartheta_{V_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$.

اکنون فرض می‌کنیم h تابعی از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W)$ با ضابطهٔ زیر باشد

$$h : \vartheta \to (\vartheta_{V_1}, \vartheta_{V_2}) \qquad (\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W))$$

به وضوح دیده می‌شود که h تبدیل خطی یک‌به‌یک است. اگر $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$ $(i = 1, 2)$ آنگاه تابع

$$\phi : v_1 + v_2 \to v_1\phi_1 + v_2\phi_2 \qquad (v_i \in V_i, i = 1, 2)$$

متعلق به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ است و تصویرش تحت h مساوی (ϕ_1, ϕ_2) است. از این‌رو h پوشاست. بنابراین نشان داده‌ایم که h تبدیل خطی وارون‌پذیر است و به این ترتیب (۲) ثابت شده است. ■

اکنون فرض کنیم $\mathbb{C}G$ـمدولهای V، W، V_i، W_j $(1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s)$ داده شده‌اند. با استفاده از گزارهٔ ۴.۱۱ و با استفاده از استقرا داریم

۵.۱۱

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_j)) \qquad (1)$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)) \qquad (2)$$

با استفاده از دو رابطهٔ فوق داریم

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W_1 \oplus \cdots W_s)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)) \qquad (3)$$

وقتی‌که همهٔ V_iها و W_jها تحویل‌ناپذیرند، با استفاده از رابطهٔ (۳) و گزارهٔ ۲.۱۱ در حالت کلی می‌توانیم $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$ را محاسبه کنیم. این کار را برای حالتی که یکی از دو $\mathbb{C}G$ـمدول V و W تحویل‌ناپذیر است در نتیجهٔ زیر انجام می‌دهیم.

۶.۱۱ نتیجه گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدول باشد و

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

که هر کدام از U_iها $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر است. فرض کنیم W $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است. در این صورت بعد $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ و نیز بعد $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V)$ هر دو مساوی تعداد $\mathbb{C}G$ـمدولهای U_iای است که $U_i \cong W$.

برهان بنابه ۵.۱۱،

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_i, W))$$
$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_i))$$

و بنابه گزارهٔ ۲.۱۱،

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_i, W)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_i)) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } U_i \cong W \\ 0 & \text{اگر } U_i \not\cong W \end{cases}$$

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ∎

۷.۱۱ مثال گیریم $G = D_6$. در مثال ۸.۱۰(۲) دیدیم که

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیرند و U_3 با U_4 یکریخت است ولی با U_1 یا U_2 یکریخت نیست. لذا بنا به نتیجهٔ ۶.۱۱،

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U_3)) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)) = 2$$

در تمرین ۵.۱۱ از شما خواسته‌ایم که برای هریک از این دو فضای برداریِ $\mathbb{C}G$ـهمریختیها پایه‌ای پیدا کنید.

گزارهٔ بعدی دربارهٔ فضای $\mathbb{C}G$ـهمریختیهایی است که از $\mathbb{C}G$ـمدول منظم به $\mathbb{C}G$ـمدول دلخواهی تعریف شده‌اند. از ترکیب این گزاره با نتیجهٔ ۶.۱۱ حکم اصلی این فصل به‌دست می‌آید.

۸.۱۱ گزاره اگر U یک $\mathbb{C}G$ـمدول باشد آنگاه

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = \dim U$$

برهان گیریم $d = \dim U$. پایهٔ u_1، $\ldots$ ، u_d را برای U انتخاب می‌کنیم. به‌ازای $1 \leq i \leq d$، توابع $\phi_i : \mathbb{C}G \to U$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$r\phi_i = u_i r \qquad (r \in \mathbb{C}G)$$

در این صورت $\phi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ زیرا به‌ازای هر $r, s \in \mathbb{C}G$،

$$(rs)\phi_i = u_i(rs) = (u_i r)s = (r\phi_i)s$$

ثابت خواهیم کرد که ϕ_1، $\ldots$ ، ϕ_d پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ است.

فرض کنیم که $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$. در این صورت

$$1\phi = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d$$

که $\lambda_i \in \mathbb{C}$. چون ϕ یک $\mathbb{C}G$ـهمریختی است، به‌ازای هر $r \in \mathbb{C}G$ داریم

$$\begin{aligned} r\phi &= (1r)\phi = (1\phi)r \\ &= \lambda_1 u_1 r + \cdots + \lambda_d u_d r = r(\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d) \end{aligned}$$

از این‌رو $\phi = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d$. بنابراین ϕ_1، $\ldots$ ، ϕ_d فضای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ را پدید می‌آورد.

اکنون فرض کنیم که

$$\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

با محاسبهٔ مقدار دو طرف تساوی فوق به‌ازای عضو همانی ۱، داریم

$$0 = 1(\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d$$

که از آن نتیجه می‌شود به‌ازای هر i، $\lambda_i = 0$. از این‌رو ϕ_1، ...، ϕ_d پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ است و در نتیجه بعد این فضا مساوی d است. ■

اکنون به قضیهٔ اصلی این فصل می‌رسیم که به ما می‌گوید هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر چند بار در $\mathbb{C}G$ـمدول منظم ظاهر می‌شود.

۹.۱۱ قضیه فرض کنیم که

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیرند. اگر U $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر دلخواهی باشد آنگاه تعداد $\mathbb{C}G$ـمدولهای U_iای که $U \cong U_i$ مساوی $\dim U$ است.

برهان بنابه گزارهٔ ۸.۱۱،

$$\dim U = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U))$$

و بنابه نتیجهٔ ۶.۱۱ این مقدار مساوی تعداد U_iهایی است که $U \cong U_i$. ■

۱۰.۱۱ مثال در مثال ۸.۱۰(۲) دیدیم که اگر $G = D_6$ آنگاه

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

که U_1 و U_2 $\mathbb{C}G$ـمدولهای ۱بعدی غیرهمریخت و U_3 و U_4 $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر ۲بعدی همریخت هستند، و این مثالی از قضیهٔ ۹.۱۱ است زیرا

U_1 یک بار ظاهر می‌شود و $\dim U_1 = 1$

U_2 یک بار ظاهر می‌شود و $\dim U_2 = 1$

U_3 دو بار ظاهر می‌شود و $\dim U_3 = 2$

این فصل را با نتیجهٔ مهمی از قضیهٔ ۹.۱۱ که دربارهٔ بعد همهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر است به پایان می‌بریم.

۱۱.۱۱ تعریف گوییم که $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر V_1، ...، V_k تشکیل‌دهندهٔ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند اگر هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با یکی از این V_iها یکریخت باشد و هیچ‌یک از V_iها با دیگری یکریخت نباشد. (بنا به نتیجهٔ ۷.۱۰، به‌ازای هر گروه متناهی G مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت وجود دارد.)

۱۲.۱۱ قضیه گیریم V_1، . . . ، V_k تشکیل‌دهندهٔ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند. در این صورت

$$\sum_{i=1}^{k}(\dim V_i)^2 = |G|$$

برهان گیریم $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ که U_iها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیرند. به‌ازای هر $1 \leq i \leq k$ می‌نویسیم $d_i = \dim V_i$. بنا به قضیهٔ ۹.۱۱، به‌ازای هر i، تعداد $\mathbb{C}G$ـمدولهای U_j با شرط $U_j \cong V_i$ مساوی d_i است. بنابراین

$$\dim \mathbb{C}G = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r = \sum_{i=1}^{k} d_i(\dim V_i) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$$

که چون $\dim \mathbb{C}G = |G|$ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ■

۱۳.۱۱ مثال گیریم G گروهی با مرتبهٔ ۸ است و d_1، . . . ، d_k ابعاد همهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولهای متعلق به مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشند. بنابه قضیهٔ ۱۲.۱۱، $\sum_{i=1}^{k} d_i^2 = 8$. چون $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهیْ تحویل‌ناپذیر و دارای بعد ۱ است پس به‌ازای iای، $d_i = 1$. از این‌رو d_1، . . . ، d_k یکی از دو حالت زیر را دارد

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$$
$$1, 1, 1, 1, 2$$

درواقع هر دو حالت فوق امکانپذیر است: وقتی‌که G گروهی آبلی است، حالت اول رخ می‌دهد (گزارهٔ ۵.۹ را ببینید)، و وقتی‌که $G = D_8$، حالت دوم رخ می‌دهد (تمرین ۴.۱۰ را ببینید).

بعداً خواهیم دید که $\dim V_i$ به‌ازای همهٔ iها $|G|$ را عاد می‌کند و این موضوع همراه با قضیهٔ ۱۲.۱۱ وسیله‌ای کارآمد برای یافتن بعد $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر است.

خلاصهٔ فصل ۱۱

.۱

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j))$$

۲.

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)) = \dim U$$

۳. فرض کنیم $\mathbb{C}G = U_۱\oplus\cdots\oplus U_r$ که U_iها $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیرند. گیریم U $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر دلخواهی است. در این صورت تعداد U_iهای با ویژگی $U_i \cong U$ مساوی $\dim U$ است.

۴. اگر $\{V_۱,\cdots,V_k\}$ مجموعهٔ کامل $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشد آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{k}(\dim V_i)^۲ = |G|$$

تمرینات فصل ۱۱

۱. اگر G گروهی ناآبلی با مرتبهٔ ۶ باشد، بعد همهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر را پیدا کنید.

۲. اگر G گروهی با مرتبهٔ ۱۲ باشد، درجات همهٔ نمایشهای تحویل‌ناپذیر G چه اعدادی ممکن است باشند؟

درجات نمایشهای تحویل‌ناپذیر گروه $D_{۱۲}$ را پیدا کنید. (راهنمایی: از تمرین ۳.۵ استفاده کنید.)

۳. فرض کنیم G گروهی متناهی است. پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,\mathbb{C}G)$ بیابید.

۴. فرض کنیم که $G = S_n$ و همان‌طور که در ۱۰.۴ تعریف کردیم V مدول جایگشتی nبعدی G روی $\mathbb{C}$ باشد. اگر U $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی باشد، نشان دهید که $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,U)$ دارای بعد ۱ است.

۵. گیریم $G = D_۶$ و $\mathbb{C}G = U_۱\oplus U_۲\oplus U_۳\oplus U_۴$ که U_iها $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیری هستند که در مثال ۸.۱۰(۲) دیدیم. پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U_۳)$ و پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_۳,\mathbb{C}G)$ پیدا کنید.

۶. گیریم $\{V_۱,\cdots,V_k\}$ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشد و V و W $\mathbb{C}G$ـمدولهای دلخواه باشند. فرض کنیم که به‌ازای $۱\le i\le k$،

$$d_i = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,V_i)) \quad \text{و} \quad e_i = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W,V_i))$$

نشان دهید که $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)) = \sum_{i=۱}^{k} d_ie_i$.

۱۲

ردهٔ مزدوجی

اکنون موقتاً نظریهٔ نمایشها را رها می‌کنیم و به مباحثی از نظریهٔ گروهها می‌پردازیم که بعداً در مطالعهٔ نظریهٔ نمایشها به‌کار می‌آیند. پس از تعریف ردهٔ مزدوجی، در این مباحث تا آنجا پیش می‌رویم که بتوانیم رده‌های مزدوجی گروههای دووجهی و متقارن و متناوب را پیدا کنیم. در پایان این فصل حکمی را دربارهٔ رابطهٔ بین رده‌های مزدوجی گروه و ساختار گروه‌جبر آن ثابت می‌کنیم.

در تمامی این فصل فرض می‌کنیم که G گروهی متناهی است.

ردهٔ مزدوجی

۱.۱۲ تعریف فرض کنیم $x, y \in G$. گوییم x مزدوج y در G است اگر به‌ازای عضوی چون $g \in G$ داشته باشیم

$$y = g^{-1}xg$$

مجموعهٔ تمام عناصری که با x در G مزدوج‌اند عبارت‌است از

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$$

این مجموعه را ردهٔ مزدوجی x در G می‌نامند.

اولین نتیجه‌گیری ما این است که دو ردهٔ مزدوجیِ متمایز دارای عضو مشترک نیستند.

۲.۱۲ گزاره اگر $x, y \in G$ آنگاه $x^G = y^G$ یا $x^G \cap y^G$ تهی است.

برهان فرض می‌کنیم که $x^G \cap y^G$ تهی نیست و عضو $z \in x^G \cap y^G$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت عضوهای $g, h \in G$ وجود دارند به‌قسمی که

$$z = g^{-۱}xg = h^{-۱}yh$$

از این‌رو $x = gh^{-۱}yhg^{-۱} = k^{-۱}yk$ که $k = hg^{-۱}$ لذا

$$\begin{aligned} a \in x^G &\Rightarrow a = b^{-۱}xb, \quad b \in G \\ &\Rightarrow a = b^{-۱}k^{-۱}ykb \\ &\Rightarrow a = c^{-۱}yc, \quad c = kb \\ &\Rightarrow a \in y^G \end{aligned}$$

بنابراین $x^G \subseteq y^G$. به همین نحو نتیجه می‌گیریم که $y^G \subseteq x^G$(با استفاده از $y = kxk^{-۱}$)، و لذا $x^G = y^G$. ■

چون هر عضو x از G متعلق به ردهٔ مزدوجی x^G است (زیرا $x = ۱^{-۱}x۱$ که $۱ \in G$)، لذا G اجتماع رده‌های مزدوجی است و بلاواسطه نتیجه می‌گیریم که

۳.۱۲ نتیجه هر گروه اجتماع رده‌های مزدوجی است و رده‌های مزدوجی متمایز مجزا هستند.

راه دیگری برای اثبات نتیجهٔ ۳.۱۲ این است که ثابت کنیم مزدوج بودن رابطه‌ای هم‌ارزی است و توجه کنیم که رده‌های مزدوجی رده‌های هم‌ارزی هستند.

۴.۱۲ تعریف اگر $G = x_۱^G \cup \cdots \cup x_l^G$ و رده‌های مزدوجی $x_۱^G$، . . . ، x_l^G متمایز باشند آنگاه $x_۱$، . . . ، x_l را نماینده‌های رده‌های مزدوجی G می‌نامیم.

۵.۱۲ مثال (۱) برای هر گروه G، مجموعهٔ $۱^G = \{۱\}$ یکی از رده‌های مزدوجی G است.
(۲) فرض کنیم $G = D_۶ = \langle a, b : a^۳ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$. عناصر G

عبارت‌اند از ۱، a، $a^{۲}$، b، ab، $a^{۲}b$. چون به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-۱}ag$ مساوی a یا $a^{۲}$ است و $b^{-۱}ab = a^{۲}$ لذا

$$a^G = \{a, a^{۲}\}$$

همچنین به‌ازای هر عدد صحیح i، $a^{-i}ba^i = a^{-۲i}b$ و در نتیجه

$$b^G = \{b, ab, a^{۲}b\}$$

از این‌رو رده‌های مزدوجی G عبارت‌اند از

$$\{۱\}, \{a, a^{۲}\}, \{b, ab, a^{۲}b\}$$

(۳) اگر G آبلی باشد، به‌ازای هر $x, g \in G$، $g^{-۱}xg = x$ و لذا $x^G = \{x\}$. بنابراین هر ردهٔ مزدوجی G فقط شامل یک عنصر است.

گزارهٔ بعدی برای یافتن رده‌های مزدوجی مفید است.

۶.۱۲ گزاره گیریم $x, y \in G$. اگر x مزدوج y در G باشد آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح n، x^n مزدوج y^n در G است و x و y دارای مرتبه‌های مساوی هستند.

برهان مشاهده می‌کنیم که به‌ازای $a, b \in G$،

$$g^{-۱}abg = (g^{-۱}ag)(g^{-۱}bg)$$

از این‌رو $g^{-۱}x^n g = (g^{-۱}xg)^n$. حال فرض کنیم که x مزدوج y در G است؛ در این صورت به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $y = g^{-۱}xg$. بنابراین $y^n = g^{-۱}x^n g$ و لذا x^n مزدوج y^n در G است. حال فرض کنید مرتبهٔ x مساوی m باشد. در این صورت $y^m = g^{-۱}x^m g = ۱$ و به‌ازای $۰ < r < m$، $y^r = g^{-۱}x^r g \neq ۱$، لذا مرتبهٔ y نیز مساوی m است. ■

اندازهٔ ردهٔ مزدوجی

در قضیهٔ بعدی اندازهٔ هر ردهٔ مزدوجی G برحسب مرتبهٔ زیرگروهی که تعریف خواهیم کرد معین می‌شود.

۷.۱۲ تعریف گیریم $x \in G$. مرکزساز x در G، که آن را با $C_G(x)$ نشان می‌دهند، عبارت‌است از مجموعهٔ عناصری از G که ضربشان در x تعویض‌پذیر است، یعنی

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}$$

(لذا $C_G(x) = \{g \in G : g^{-1}xg = x\}$.)

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $C_G(x)$ زیرگروه G است (تمرین ۱.۱۲). مشاهد می‌شود که $x \in C_G(x)$ و درواقع به‌ازای هر $x \in G$، $\langle x\rangle \subseteq C_G(x)$.

۸.۱۲ قضیه فرض کنیم $x \in G$. در این صورت اندازهٔ ردهٔ مزدوجیِ x^G عبارت‌است از

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|$$

لذا $|x^G|$ مرتبهٔ گروه G را عاد می‌کند.

برهان ابتدا توجه کنید که به‌ازای $g, h \in G$،

$$\begin{aligned} g^{-1}xg = h^{-1}xh &\Leftrightarrow hg^{-1}x = xhg^{-1} \\ &\Leftrightarrow hg^{-1} \in C_G(x) \\ &\Leftrightarrow C_G(x)g = C_G(x)h \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه می‌توانیم تابعی یک‌به‌یک چون f از x^G به مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست $C_G(x)$ در G به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$f : g^{-1}xg \to C_G(x)g \qquad (g \in G)$$

به وضوح دیده می‌شود که f پوشاست. بنابراین f دوسویی است و لذا $|x^G| = |G : C_G(x)|$. ■

قبل از جمعبندی نتایجمان دربارهٔ رده‌های مزدوجی، این نکته را متذکر می‌شویم که

$$\begin{aligned} |x^G| = 1 &\Leftrightarrow g^{-1}xg = x \quad \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow x \in Z(G) \end{aligned} \tag{۹.۱۲}$$

که $Z(G)$ مرکز گروه G است (تعریف ۱۵.۹ را ببینید).

به این ترتیب تمام قسمتهای حکم زیر را ثابت کرده‌ایم.

۱۰.۱۲ رابطهٔ رده‌ای فرض کنیم x_1، ... ، x_l نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

که در آن $|x_i^G| = |G : C_G(x_i)|$، و $|Z(G)|$ و $|x_i^G|$ مرتبهٔ G را عاد می‌کنند.

رده‌های مزدوجی گروه دووجهی

کاربرد قضیهٔ ۸.۱۲ را با پیداکردن رده‌های مزدوجی گروه دووجهی نشان می‌دهیم.

گیریم G گروه D_{2n}، یعنی گروه دووجهی مرتبهٔ $2n$ است. در این صورت

$$G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

برای یافتن رده‌های مزدوجی گروه G، بهتر است حالتهای n فرد و n زوج را جداگانه بررسی کنیم.

(۱) n فرد

ابتدا a^i ($1 \leq i \leq n-1$) را در نظر می‌گیریم. چون $C_G(a_i)$ شامل $\langle a \rangle$ است پس

$$|G : C_G(a^i)| \leq |G : \langle a \rangle| = 2$$

همچنین $b^{-1}a^ib = a^{-i}$ و لذا $(a^i)^G \subseteq \{a^i, a^{-i}\}$. چون n فرد است پس $a^i \neq a^{-i}$ و در نتیجه $|(a^i)^G| \geq 2$. با استفاده از قضیهٔ ۸.۱۲ داریم

$$2 \geq |G : C_G(a^i)| = |(a^i)^G| \geq 2$$

از این‌رو تساوی برقرار است و

$$C_G(a^i) = \langle a \rangle, \qquad (a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$$

حال b را در نظر می‌گیریم، $C_G(b)$ شامل $\{1, b\}$ است و چون $b^{-1}a^ib = a^{-i}$ پس ضرب عناصر a^i و a^ib (که $1 \leq i \leq n-1$) در b تعویض‌پذیر نیست. لذا

$$C_G(b) = \{1, b\}$$

بنابراین بنا به قضیهٔ ۸.۱۲ داریم $|b^G| = n$. چون تمام عناصر a^i قبلاً در نظر گرفته شده‌اند پس b^G باید متشکل از n عنصر دیگر G باشد، یعنی

$$b^G = \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}$$

به این ترتیب نشان داده‌ایم که

۱۱.۱۲ گروه دووجهی D_{2n} (n فرد) دقیقاً دارای $\frac{1}{2}(n+3)$ ردهٔ مزدوجی است که عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{(n-1)/2}, a^{-(n-1)/2}\}, \{b, ab, \cdots, a^{n-1}b\}$$

(۲) n زوج

می‌نویسیم $n = 2m$. چون $b^{-1}a^m b = a^{-m} = a^m$ پس مرکزساز a^m در G هر دو عنصر a و b را دربردارد و لذا $C_G(a^m) = G$. بنابراین ردهٔ مزدوجی a^m در G دقیقاً $\{a^m\}$ است. مانند حالت (۱)، به‌ازای $1 \leq i \leq m-1$، $(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$.

به‌ازای هر عدد صحیح j،

$$a^j b a^{-j} = a^{2j}b, \qquad a^j(ab)a^{-j} = a^{2j+1}b$$

بنابراین

$$b^G = \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\}, \qquad (ab)^G = \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}$$

از این‌رو داریم

۱۲.۱۲ گروه دووجهی D_{2n} (n زوج و $n = 2m$) دقیقاً دارای $m+3$ ردهٔ مزدوجی است که عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a, a^{-1}\}, \cdots, \{a^{m-1}, a^{-m+1}\}$$
$$\{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}$$

رده‌های مزدوجی S_n

در آینده به دانستن رده‌های مزدوجی گروه متقارن S_n نیاز خواهیم داشت. اولین حکمی که عرضه می‌کنیم ساده ولی بسیار مهم است.

۱۳.۱۲ گزاره فرض کنیم x جایگشت دوری $(i_1\ i_2 \cdots i_k)$ به طول k در S_n است و $g \in S_n$. در این صورت $g^{-1}xg$ جایگشت دوری $(i_1 g\ i_2 g \cdots i_k g)$ به طول k است.

برهان قرار می‌دهیم $A = \{i_1, \cdots, i_k\}$. به‌ازای $i_r \in A$ داریم

$$i_r g(g^{-1}xg) = i_r xg = \begin{cases} i_{r+1}g & r \neq k \text{ اگر} \\ i_1 g & r = k \text{ اگر} \end{cases}$$

همچنین به‌ازای $1 \leq i \leq n$ و $i \notin A$ داریم

$$ig(g^{-1}xg) = ixg = ig$$

از این‌رو $g^{-1}(i_1\ i_2 \cdots i_k)g = (i_1 g\ i_2 g \cdots i_k g)$ که نتیجهٔ مطلوب است. ■

اکنون جایگشت دلخواه $x \in S_n$ را در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم

$$x = (a_1 \cdots a_{k_1})(b_1 \cdots b_{k_2}) \cdots (c_1 \cdots c_{k_s})$$

که حاصلضرب دورهای مجزا (یعنی جایگشتهای دوری مجزا) است و $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$. بنابه گزارهٔ ۱۳.۱۲ به‌ازای $g \in S_n$ داریم

$$\begin{aligned} g^{-1}xg &= g^{-1}(a_1 \cdots a_{k_1})gg^{-1}(b_1 \cdots b_{k_2})g \cdots g^{-1}(c_1 \cdots c_{k_s})g \\ &= (a_1 g \cdots a_{k_1} g)(b_1 g \cdots b_{k_2} g) \cdots (c_1 g \cdots c_{k_s} g) \end{aligned} \qquad (۱۴.۱۲)$$

$(k_1, \cdots, k_s)$ را شاکلهٔ دورهای x یا شاکلهٔ دوری x می‌نامیم و توجه داریم که x و $g^{-1}xg$ دارای شاکلهٔ دوری یکسانی هستند. از طرف دیگر، اگر x و y دو جایگشت دلخواه با شاکلهٔ دوری یکسان باشند، یعنی

$$\begin{aligned} x &= (a_1 \cdots a_{k_1}) \cdots (c_1 \cdots c_{k_s}) \\ y &= (a'_1 \cdots a'_{k_1}) \cdots (c'_1 \cdots c'_{k_s}) \end{aligned}$$

(که حاصلضربهای فوق حاصلضرب دورهای مجزا هستند) آنگاه جایگشتی چون $g \in S_n$ وجود دارد به‌طوری که تحت آن $a_1 \to a'_1$، ... ، $c_{k_s} \to c'_{k_s}$، و لذا بنابه (۱۴.۱۲)،

$$g^{-1}xg = y$$

به این ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

۱۵.۱۲ قضیه اگر $x \in S_n$ آنگاه x^{S_n}، یعنی ردهٔ مزدوجی x در S_n متشکل از همهٔ جایگشتهایی از S_n است که شاکلهٔ دوری آنها با شاکلهٔ دوری x یکی است.

۱۶.۱۲ مثال (۱) رده‌های مزدوجی $S_۳$ عبارت‌اند از

شاکلهٔ دوری	رده
(۱)	$\{۱\}$
(۲)	$\{(۱\ ۲), (۱\ ۳), (۲\ ۳)\}$
(۳)	$\{(۱\ ۲\ ۳), (۱\ ۳\ ۲)\}$

(۲) ردهٔ مزدوجی $(۱\ ۲)(۳\ ۴)$ در $S_۴$ متشکل از تمام عناصری از $S_۴$ است که شاکلهٔ دوریشان $(۲, ۲)$ است و لذا عبارت‌است از

$$\{(۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

(۳) دقیقاً پنج ردهٔ مزدوجی در $S_۴$ وجود دارد، که نماینده‌های آنها (تعریف ۴.۱۲ را ببینید) عبارت‌اند از

$$۱, (۱\ ۲), (۱\ ۲\ ۳), (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۲\ ۳\ ۴)$$

برای یافتن اندازهٔ رده‌های مزدوجی کافی است تعداد دورهای به طول ۲ و ۳ و غیره را بیابیم. تعداد دورهای به طول ۲ عبارت‌است از تعداد زوجهایی که می‌توان از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ انتخاب کرد که مساوی است با $۶ = \binom{۴}{۲}$. (نماد $\binom{n}{r}$ نشان‌دهندهٔ ضریب دو جمله‌ای یعنی $n!/r!(n-r)!$ است.) تعداد دورهای به طول ۳ مساوی ۲×۴ است (تعداد نقطه‌های ثابت جایگشتهای دوری به طول ۳ برابر ۴ است، و ۲ جایگشت دوری به طول ۳ وجود دارد که نقطهٔ مفروضی را ثابت نگاه می‌دارند). به همین نحو نتیجه می‌گیریم که ۳ عنصر با شاکلهٔ دوری $(۲, ۲)$ وجود دارد و همچنین شش دور به طول ۴ وجود دارد. بنابراین برای گروه $G = S_۴$، نمایندهٔ رده‌های مزدوجی که آنها را با g نشان می‌دهیم، اندازهٔ رده‌های مزدوجی، یعنی $|g^G|$ها، و مرتبهٔ مرکزسازها، یعنی $|C_G(g)|$ها (که با استفاده از قضیهٔ ۸.۱۲ حاصل می‌شوند) به قرار زیرند

نماینده	g	۱	$(۱\ ۲)$	$(۱\ ۲\ ۳)$	$(۱\ ۲)(۳\ ۴)$	$(۱\ ۲\ ۳\ ۴)$
اندازهٔ رده	$\lvert g^G\rvert$	۱	۶	۸	۳	۶
	$\lvert C_G(g)\rvert$	۲۴	۴	۳	۸	۴

اکنون نتیجه را به طریق زیر امتحان می‌کنیم

$$|S_۴| = ۱ + ۶ + ۸ + ۳ + ۶$$

(۴) به همین نحو می‌توانیم جدولی نظیر جدول فوق، برای $G = S_5$ به‌دست آوریم، جدول حاصل عبارت‌است از

نماینده g	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
$\lvert g^G \rvert$	۱	۱۰	۲۰	۱۵	۳۰	۲۰	۲۴
$\lvert C_G(g) \rvert$	۱۲۰	۱۲	۶	۸	۴	۶	۵

رده‌های مزدوجی A_n

فرض کنید $x \in A_n$، یعنی x جایگشتی زوج باشد. در قضیهٔ ۱۵.۱۲ دیدیم که ردهٔ مزدوجی x^{S_n} متشکل از آن دسته جایگشتهای S_n است که دارای شاکلهٔ دوری یکسان با x هستند. ردهٔ مزدوجی x در A_n یعنی x^{A_n} عبارت‌است از

$$x^{A_n} = \{g^{-1}xg : g \in A_n\}$$

که البته زیرمجموعهٔ x^{S_n} است، اما ممکن است مساوی x^{S_n} نباشد. برای اینکه مثال ساده‌ای بزنیم که تساوی در آن برقرار نباشد، عنصر $x = (1\ 2\ 3) \in A_3$ را در نظر بگیرید؛ در این صورت $x^{A_3} = \{x\}$ در صورتی‌که $x^{S_3} = \{x, x^{-1}\}$.

در گزارهٔ بعدی می‌بینیم که چه‌وقت x^{A_n} و x^{S_n} مساوی می‌شوند، و در حالتی‌که تساوی برقرار نمی‌شود چه پیش می‌آید.

۱۷.۱۲ گزاره فرض کنیم $x \in A_n$ و $n > 1$.

(۱) اگر ضرب x در جایگشتی فرد از S_n تعویض‌پذیر باشد آنگاه $x^{S_n} = x^{A_n}$.

(۲) اگر هیچ جایگشت فردی در S_n وجود نداشته باشد که ضرب آن در x تعویض‌پذیر باشد آنگاه x^{S_n} به دو ردهٔ مزدوجی A_n با اندازه‌های مساوی و نماینده‌های x و $(1\ 2)^{-1}x(1\ 2)$ تجزیه می‌شود.

برهان (۱) فرض کنیم که ضرب x در جایگشت فرد g تعویض‌پذیر باشد. اگر $y \in x^{S_n}$، در این صورت عضوی چون $h \in S_n$ وجود دارد به‌قسمی که $y = h^{-1}xh$. اگر h زوج باشد آنگاه $y \in x^{A_n}$ و اگر h فرد باشد آنگاه $gh \in A_n$ و

$$y = h^{-1}xh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh)$$

یعنی بازهم $y \in x^{A_n}$. بنابراین $x^{S_n} \subseteq x^{A_n}$ و در نتیجه $x^{S_n} = x^{A_n}$.

(۲) فرض کنیم که هیچ جایگشت فردی وجود نداشته باشد که ضرب آن در x تعویض‌پذیر باشد. در این صورت

$$C_{S_n}(x) = C_{A_n}(x)$$

از این‌رو بنابه قضیهٔ ۸.۱۲،

$$|x^{A_n}| = |A_n : C_{A_n}(x)| = \frac{۱}{۲}|S_n : C_{A_n}(x)| \quad (|A_n| = \frac{۱}{۲}|S_n| \text{ زیرا})$$
$$= \frac{۱}{۲}|S_n : C_{S_n}(x)| = \frac{۱}{۲}|x^{S_n}|$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که

$$\{h^{-۱}xh : \text{فرد } h\} = ((۱\ ۲)^{-۱}x(۱\ ۲))^{A_n}$$

زیرا هر جایگشت فرد به‌ازای عضوی چون $a \in A_n$ به شکل $(۱\ ۲)a$ است. لذا

$$x^{S_n} = \{h^{-۱}xh : \text{زوج } h\} \cup \{h^{-۱}xh : \text{فرد } h\}$$
$$= x^{A_n} \cup ((۱\ ۲)^{-۱}x(۱\ ۲))^{A_n}$$

چون $|x^{A_n}| = \frac{۱}{۲}|x^{S_n}|$، دو ردهٔ مزدوجی x^{A_n} و $((۱\ ۲)^{-۱}x(۱\ ۲))^{A_n}$ باید مجزا و دارای اندازه‌های مساوی باشند. لذا قضیه ثابت شده است. ■

۱۸.۱۲ مثال (۱) می‌خواهیم رده‌های مزدوجی $A_۴$ را پیدا کنیم. عناصر $A_۴$ عبارت‌اند از عضو همانی، و همهٔ جایگشتهایی که شاکلهٔ دوریشان $(۲,۲)$ یا (۳) است. چون ضرب $(۱\ ۲)(۳\ ۴)$ در جایگشت فرد $(۱\ ۲)$ تعویض‌پذیر است، از گزارهٔ ۱۷.۱۲ نتیجه می‌شود

$$(۱\ ۲)(۳\ ۴)^{A_۴} = (۱\ ۲)(۳\ ۴)^{S_۴} = \{(۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

اما هیچ جایگشت فردی وجود ندارد که ضربش در جایگشت دوری $(۱\ ۲\ ۳)$ تعویض‌پذیر باشد: زیرا اگر $g^{-۱}(۱\ ۲\ ۳)g = (۱\ ۲\ ۳)$ آنگاه بنابه گزارهٔ ۱۳.۱۲، $(۱g\ ۲g\ ۳g) = (۱\ ۲\ ۳)$ و لذا g یکی از جایگشتهای ۱ و $(۱\ ۲\ ۳)$ و $(۱\ ۳\ ۲)$ است که همگی جایگشتهایی زوج هستند. از این‌رو بنابه گزارهٔ ۱۷.۱۲، $(۱\ ۲\ ۳)^{S_۴}$ به دو ردهٔ مزدوجی $A_۴$ تجزیه می‌شود که اندازهٔ هرکدام از آنها ۴ است و نماینده‌های آنها عبارت‌اند از $(۱\ ۲\ ۳)$ و $(۱\ ۳\ ۲) = (۱\ ۲)(۱\ ۲\ ۳)(۱\ ۲)^{-۱}$.

بنابراین رده‌های مزدوجی $A_۴$ عبارت‌اند از

نماینده	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
اندازهٔ رده	۱	۳	۴	۴
مرتبهٔ مرکزساز	۱۲	۴	۳	۳

(۲) می‌خواهیم رده‌های مزدوجی A_5 را پیدا کنیم. جایگشتهای زوج غیرهمانی S_5 دارای شاکله‌های دوری (۳) و (۲, ۲) و (۵) هستند. ضرب عناصر (۱ ۲ ۳) و (۲ ۳)(۴ ۵) در جایگشت فرد (۴ ۵) تعویض‌پذیر است، ولی هیچ جایگشت فردی وجود ندارد که ضربش در (۱ ۲ ۳ ۴ ۵) تعویض‌پذیر باشد. (با استفاده از روشی که در قسمت (۱) به‌کار رفت، این مطلب را ثابت کنید.)

از این‌رو بنابه گزارهٔ ۱۷.۱۲، نماینده‌های رده‌های مزدوجی A_5 عبارت‌اند از ۱، (۱ ۲ ۳)، (۱ ۲)(۳ ۴)، (۱ ۲ ۳ ۴ ۵) و (۱ ۳ ۴ ۵ ۲) = (۱ ۲)(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)(۱ ۲)^{-۱}. با استفاده از گزارهٔ ۱۷.۱۲(۲) نتیجه می‌گیریم که اندازهٔ رده‌ها و مرتبهٔ مرکزسازها عبارت‌اند از

نماینده	۱	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)	(۱ ۳ ۴ ۵ ۲)
اندازهٔ رده	۱	۲۰	۱۵	۱۲	۱۲
مرتبهٔ مرکزساز	۶۰	۳	۴	۵	۵

زیرگروه نرمال

گزارهٔ مقدماتی زیر رابطهٔ زیرگروههای نرمال و رده‌های مزدوجی را نشان می‌دهد.

۱۹.۱۲ گزاره گیریم H زیرگروه G است. در این صورت $H \lhd G$ اگر و فقط اگر H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی G باشد.

برهان اگر H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی باشد آنگاه

$$h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \in H$$

لذا $g^{-1}Hg \subseteq H$. بنابراین $H \lhd G$.

برعکس، اگر $H \lhd G$ آنگاه به‌ازای هر $h \in H$ و $g \in G$، $g^{-1}hg \in H$ و لذا $h^G \subseteq H$. بنابراین

$$H = \bigcup_{h \in H} h^G$$

و لذا H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی G است. ■

۲۰.۱۲ مثال در این مثال تمام زیرگروههای نرمال $S_۴$ را پیدا می‌کنیم. گیریم $H \lhd S_۴$. در این صورت بنابه گزارهٔ ۱۹.۱۲، H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی $S_۴$ است. همان‌طور که در مثال ۱۶.۱۲(۳) دیدیم این رده‌های مزدوجی دارای اندازه‌های ۱، ۶، ۸، ۳، ۶ هستند. چون بنا به قضیهٔ لاگرانژ $|H|$ عدد ۲۴ را عاد می‌کند و $۱ \in H$، فقط چهار حالت ممکن است رخ دهد

$$|H| = ۱, ۱+۳, ۱+۸+۳, ۱+۶+۸+۳+۶$$

در حالت اول $H = \{۱\}$ و در حالت آخر $H = S_۴$ و در حالت سوم $H = A_۴$. در حالت $|H| = ۱+۳$ داریم

$$H = ۱^{S_۴} \cup (۱\ ۲)(۳\ ۴)^{S_۴} = \{۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که این H زیرگروه $S_۴$ است؛ این گروه را با $V_۴$ نمایش می‌دهیم (V حرف اول کلمهٔ آلمانی Viergruppe به‌معنای چهارـگروه است).

به این ترتیب نشان داده‌ایم که $S_۴$ دقیقاً دارای چهار زیرگروه نرمال است:

$$\{۱\}, S_۴, A_۴, V_۴ = \{۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

مرکز گروه‌جبر

در این بخش پایانیِ فصل حاضر ارتباط بین رده‌های مزدوجیِ گروه G و مرکز گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ را بیان می‌کنیم. چنانکه در تعریف ۱۲.۹ دیدیم مرکز $\mathbb{C}G$ عبارت‌است از

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz, \forall r \in \mathbb{C}G\}$$

می‌دانیم که $Z(\mathbb{C}G)$ زیرفضای فضای برداری $\mathbb{C}G$ است. پایه‌ای برای این زیرفضا وجود دارد که برحسب رده‌های مزدوجی G قابل بیان است.

۲۱.۱۲ تعریف گیریم $C_۱$، ... ، C_l رده‌های مزدوجی متمایز G هستند. به‌ازای $۱ \leq i \leq l$ تعریف می‌کنیم

$$\overline{C}_i = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}G$$

هریک از عناصر $\overline{C}_۱$، ... ، $\overline{C}_l$ از $\mathbb{C}G$ را مجموع رده‌ای می‌نامند.

۲۲.۱۲ گزاره مجموعهای رده‌ای $\overline{C}_1$، . . . ، $\overline{C}_l$ پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}G)$ تشکیل می‌دهند.

برهان ابتدا نشان می‌دهیم که هرکدام از $\overline{C}_i$ها به $Z(\mathbb{C}G)$ تعلق دارد. فرض کنیم C_i متشکل از r مزدوج متمایز g، مثلاً $y_1^{-1}gy_1$، . . . ، $y_r^{-1}gy_r$ است، لذا

$$\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{r} y_j^{-1}gy_j$$

به‌ازای هر $h \in G$،

$$h^{-1}\overline{C}_ih = \sum_{j=1}^{r} h^{-1}y_j^{-1}gy_jh$$

مجموعهٔ عناصر $h^{-1}y_j^{-1}gy_jh$ به‌ازای $1 \leq j \leq r$، برابر C_i است، زیرا

$$h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = h^{-1}y_k^{-1}gy_kh \Leftrightarrow y_j^{-1}gy_j = y_k^{-1}gy_k$$

از این‌رو

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = \overline{C}_i$$

و لذا $h^{-1}\overline{C}_ih = \overline{C}_i$. یعنی

$$\overline{C}_ih = h\overline{C}_i$$

بنابراین ضرب هر یک از $\overline{C}_i$ها در هر $h \in G$ تعویض‌پذیر است، و از این‌رو ضرب $\overline{C}_i$ها در هر $\sum_{h\in G}\lambda_hh \in \mathbb{C}G$ تعویض‌پذیر است و لذا $\overline{C}_i \in Z(\mathbb{C}G)$.

حال مشاهده می‌شود که $\overline{C}_1$، . . . ، $\overline{C}_l$ استقلال خطی دارند: زیرا اگر $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\overline{C}_i = 0$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$ آنگاه همهٔ λ_iها برابر صفرند زیرا بنا به نتیجهٔ ۳.۱۲ رده‌های C_1، . . . ، C_l دوبه‌دو مجزا هستند.

حال فقط باید نشان دهیم که عناصر $\overline{C}_1$، . . . ، $\overline{C}_l$ زیرفضای $Z(\mathbb{C}G)$ را پدید می‌آورند. فرض کنیم $r = \sum_{g\in G}\lambda_gg \in Z(\mathbb{C}G)$. به‌ازای $h \in G$، $rh = hr$ و لذا $h^{-1}rh = r$. پس

$$\sum_{g\in G}\lambda_gh^{-1}gh = \sum_{g\in G}\lambda_gg$$

بنابراین به‌ازای هر $h \in G$، ضریب g یعنی λ_g مساوی ضریب $h^{-1}gh$ یعنی $\lambda_{h^{-1}gh}$ است. این بدان معناست که تابع $\lambda_g \to g$ روی هر ردهٔ مزدوجی ثابت است. در نتیجه $r = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\overline{C}_i$ که λ_i ضریب عضوی چون $g_i \in C_i$ یعنی λ_{g_i} است. لذا گزاره ثابت شده است. ■

۲۳.۱۲ مثال (۱) با استفاده از مثال ۱۶.۱۲(۱) نتیجه می‌گیریم که عناصر زیر پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}S_۳)$ تشکیل می‌دهند

$$۱, (۱\ ۲) + (۱\ ۳) + (۲\ ۳), (۱\ ۲\ ۳) + (۱\ ۳\ ۲)$$

(۲) با استفاده از (۱۲.۱۲) نتیجه می‌گیریم که عناصر زیر پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}D_۸)$ تشکیل می‌دهند

$$۱, a^۲, a + a^۳, b + a^۲b, ab + a^۳b$$

خلاصهٔ فصل ۱۲

۱. هر گروه برابر با اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی است و رده‌های مزدوجی متمایز مجزا هستند.

۲. اگر x عنصری از گروه G باشد، مرکزساز $C_G(x)$ عبارت‌است از مجموعهٔ عناصری از G که ضربشان در x تعویض‌پذیر است. مرکزساز x زیرگروه G است و تعداد عناصر ردهٔ مزدوجی x^G مساوی $|G : C_G(x)|$ است.

۳. رده‌های مزدوجی S_n در تناظر یک‌به‌یک با شاکله‌های دوری جایگشتهای S_n هستند.

۴. اگر $x \in A_n$ آنگاه $x^{S_n} = x^{A_n}$ اگر و فقط اگر ضرب x در جایگشتی فرد تعویض‌پذیر باشد.

۵. مجموعهای رده‌ای متعلق به $\mathbb{C}G$ پایه‌ای برای مرکز $\mathbb{C}G$ تشکیل می‌دهند.

تمرینات فصل ۱۲

۱. اگر G گروه باشد و $x \in G$، نشان دهید که $C_G(x)$ زیرگروه G است و $Z(G)$ را دربردارد.

۲. فرض کنیم G گروه متناهی باشد و $g \in G$ و $z \in Z(G)$. ثابت کنید که رده‌های مزدوجی g^G و $(gz)^G$ دارای اندازه‌های مساوی هستند.

۳. گیریم $G = S_n$.

الف) ثابت کنید که $|(۱\ ۲)^G| = \binom{n}{۲}$، و $C_G((۱\ ۲))$ را پیدا کنید. نشان دهید که جواب شما با قضیهٔ ۸.۱۲ سازگار است.

ب) نشان دهید که $|(۱\ ۲\ ۳)^G| = ۲\binom{n}{۳}$ و $|(۱\ ۲)(۳\ ۴)^G| = ۳\binom{n}{۴}$.

ج) حال فرض کنید $n = ۶$. نشان دهید

$$|(۱\ ۲\ ۳)(۴\ ۵\ ۶)^G| = ۴۰ \quad \text{و} \quad |(۱\ ۲)(۳\ ۴)(۵\ ۶)^G| = ۱۵$$

و اندازهٔ سایر رده‌های مزدوجی $S_۶$ را پیدا کنید (در مجموع ۱۱ ردهٔ مزدوجی وجود دارد.)

۴. شاکلهٔ دوری جایگشتهایی چون $x \in A_{۶}$ که به‌ازای آنها $x^{A_{۶}} \neq x^{S_{۶}}$ چیست؟

۵. نشان دهید که $A_{۵}$ گروه ساده است. (راهنمایی: از روش مثال ۱۲.۲۰ استفاده کنید.)

۶. رده‌های مزدوجی گروه چهارگانی $Q_{۸}$ را پیدا کنید. پایه‌ای برای مرکز گروه‌جبر $\mathbb{C}Q_{۸}$ بیابید.

۷. گیریم p عدد اول است و n عدد صحیح مثبت. فرض کنیم که G گروهی با مرتبهٔ p^n است.

الف) با استفاده از رابطهٔ رده‌ای ۱۲.۱۰ نشان دهید $Z(G) \neq \{۱\}$.

ب) فرض کنیم که $n \geq ۳$ و $|Z(G)| = p$. ثابت کنید که G دارای رده‌ای مزدوجی با اندازهٔ p است.

۱۳

سرشت

فرض کنید که $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایش گروه متناهی G است. به هر ماتریس $n \times n$ای چون $g\rho$ $(g \in G)$ عدد مختلطی که با جمع‌کردن تمام عناصر قطر اصلی این ماتریس حاصل می‌شود نسبت می‌دهیم و آن را $\chi(g)$ می‌نامیم. تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ را سرشت نمایش ρ می‌نامیم. سرشت نمایش خواص قابل‌توجهی دارد، و ابزار اساسی محاسبه در نظریهٔ نمایشهاست. به‌عنوان مثال، بعداً نشان خواهیم داد که دو نمایش دارای سرشت یکسان هستند اگر و فقط اگر هم‌ارز باشند. به‌علاوه، مسائل اساسی، مانند تعیین اینکه نمایش مفروضی تحویل‌ناپذیر است یا نه، با انجامِ‌دادن محاسبهٔ ساده‌ای با سرشت نمایش قابل‌حل هستند. این موضوع مایهٔ حیرت است، زیرا از تعریف نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ چنین به‌نظر می‌رسد که باید تمام n^2 درایهٔ هر ماتریس $g\rho$ را مدنظر داشت، در صورتی‌که سرشت هر ماتریس فقط یک عدد است.

نظریهٔ سرشتها بخش بزرگی از بقیهٔ این کتاب را در برمی‌گیرد. در این فصل چند خاصیت اساسی و چند مثال ارائه می‌دهیم.

اثر ماتریس

۱.۱۳ تعریف اگر $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ باشد، اثر A، که آن را با $\mathrm{tr}A$ نشان می‌دهند، عبارت است از

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

یعنی اثر A مجموع عناصر قطر اصلی A است.

۲.۱۳ گزاره گیریم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسهای $n \times n$ هستند. در این صورت

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

به‌علاوه اگر T ماتریس وارون‌پذیر $n \times n$ باشد آنگاه

$$\mathrm{tr}(T^{-۱}AT) = \mathrm{tr}A$$

برهان درایهٔ iiی $A+B$ عبارت‌است از $a_{ii}+b_{ii}$ و درایهٔ iiی AB عبارت است از $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}b_{ji}$. بنابراین

$$\mathrm{tr}(A + B) = \sum_{i=۱}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii} + \sum_{i=۱}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$$

برای اثبات قسمت آخر توجه کنید که

$$\mathrm{tr}(T^{-۱}AT) = \mathrm{tr}((T^{-۱}A)T) = \mathrm{tr}(T(T^{-۱}A)) \quad \text{(بنابه قسمت دوم)}$$

$$= \mathrm{tr}A \qquad \blacksquare$$

توجه کنید که برخلاف تابع «دترمینان» تابع «اثر» ضربی نیست، یعنی $\mathrm{tr}(AB)$ ممکن است مساوی $(\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$ نباشد.

سرشت

۳.۱۳ تعریف فرض کنیم که V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ $\mathscr{B}$ است. در این صورت سرشت V عبارت‌است از تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\chi(g) = \mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}} \qquad (g \in G)$$

سرشت V به پایهٔ $\mathscr{B}$ بستگی ندارد، زیرا اگر $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$ پایه‌های V باشند، به‌ازای ماتریس وارون‌پذیری چون T،

$$[g]_{\mathscr{B}'} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}}T$$

((۲۴.۲) را ببینید)، و لذا بنابه گزارهٔ ۲.۱۳،

$$\mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}'} = \mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}} \qquad \forall g \in G$$

طبیعی است که سرشت نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ را سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $\mathbb{C}^n$ متناظر با آن نمایش تعریف کنیم، یعنی χ، سرشت نمایش ρ، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(g) = \mathrm{tr}(g\rho) \qquad (g \in G)$$

۴.۱۳ تعریف گوییم χ سرشت G است اگر χ سرشت یک $\mathbb{C}G$ـمدول باشد. به‌علاوه، گوییم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر باشد، همچنین گوییم χ سرشت تحویل‌پذیر G است هرگاه χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌پذیر باشد.

لابد توجه کرده‌اید که سرشت را به‌صورت تابعی که از سمت چپ اثر می‌کند نشان داده‌ایم. یعنی در عوض $g\chi$ می‌نویسیم $\chi(g)$.

۵.۱۳ گزاره (۱) $\mathbb{C}G$ـمدولهای یکریخت دارای سرشتهای مساوی هستند.

(۲) اگر x و y دو عنصر مزدوج گروه G باشند آنگاه به‌ازای تمام سرشتهای χ از G،

$$\chi(x) = \chi(y)$$

برهان (۱) فرض کنیم که V و W $\mathbb{C}G$ـمدولهای یکریخت هستند. در این صورت بنابه ۷.۷، پایهٔ $\mathscr{B}_1$ برای V و پایهٔ $\mathscr{B}_2$ برای W وجود دارد به‌قسمی که

$$[g]_{\mathscr{B}_1} = [g]_{\mathscr{B}_2} \quad \forall g \in G$$

در نتیجه به‌ازای هر $g \in G$، $\mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}_1} = \mathrm{tr}[g]_{\mathscr{B}_2}$ و لذا V و W دارای سرشتهای یکسان هستند.

(۲) فرض کنیم که x و y دو عنصر مزدوج G باشند، در این صورت به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $x = g^{-1}yg$. گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدول است و $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای V. در این صورت

$$[x]_{\mathscr{B}} = [g^{-1}yg]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}^{-1}[y]_{\mathscr{B}}[g]_{\mathscr{B}}$$

از این‌رو بنابه گزارهٔ ۲.۱۳، $\mathrm{tr}[x]_{\mathscr{B}} = \mathrm{tr}[y]_{\mathscr{B}}$. بنابراین $\chi(x) = \chi(y)$، که χ سرشت V است. ■

حکم متناظر با گزارهٔ ۵.۱۳(۱) برای نمایشها چنین است که نمایشهای هم‌ارز دارای سرشتهای یکسان هستند.

بعداً عکس گزارهٔ ۵.۱۳(۱) را که شگفتی‌آور است ثابت خواهیم کرد یعنی: اگر دو $\mathbb{C}G$ـمدول دارای سرشتهای یکسان باشند، یکریخت هستند.

۶.۱۳ مثال (۱) گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ و $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ نمایشی باشد که به‌ازای آن

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(مثال ۲.۳(۱) را ببینید). فرض کنیم χ سرشت این نمایش باشد. در جدول زیر مقادیر g و $g\rho$ و $\chi(g)$ را به‌ازای تمام gهای متعلق به G می‌آوریم. $\chi(g)$ را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که دو درایهٔ قطر اصلی $g\rho$ را جمع می‌کنیم.)

g	1	a	a^2	a^3
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	2	0	-2	0

g	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	0	0	0	0

(۲) گیریم $G = S_3$ و V مدول جایگشتی ۳بعدی G روی $\mathbb{C}$ باشد (تعریف ۱۰.۴ را ببینید). فرض کنیم $\mathscr{B}$ پایهٔ طبیعی V باشد، یعنی $\mathscr{B}$ پایهٔ v_1، v_2، v_3 باشد که به‌ازای هر $g \in G$ و $1 \le i \le 3$، $v_i g = v_{ig}$. ماتریسهای $[g]_{\mathscr{B}}$ $(g \in G)$ را در تمرین ۱.۴ به‌دست آوردید. این ماتریسها و همچنین سرشت χ از V را در جدول زیر می‌آوریم.

g	1	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$
$[g]_{\mathscr{B}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	3	1	1

g	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$[g]_{\mathscr{B}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	1	0	0

(۳) گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$. بنابه قضیهٔ ۸.۹، G دارای سه سرشت تحویل‌ناپذیر χ_1، χ_2 و χ_3 است که عبارت‌اند از

g	1	a	a^2
$\chi_1(g)$	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	ω	ω^2
$\chi_3(g)$	1	ω^2	ω

که $\omega = e^{2\pi i/3}$.

(۴) گیریم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ (بنابراین $G \cong S_3$). در مثال ۸.۱۰(۲)، مجموعهٔ کامل $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر ناهمریخت $\{U_1, U_2, U_3\}$ را پیدا

کردیم. لذا اگر به‌ازای $۱ \leq i \leq ۳$، χ_i سرشت U_i باشد، آنگاه سرشتهای تحویل‌ناپذیر G عبارت‌اند از $\chi_۱$، $\chi_۲$ و $\chi_۳$. مقادیر این سرشتها را به‌ازای عناصر G با استفاده از نمایشهای متناظر با U_iها یعنی $\rho_۱$ و $\rho_۲$ و $\rho_۳$ که در مثال ۸.۱۰(۲) داده شده‌اند می‌توان یافت. این مقادیر عبارت‌اند از

g	۱	a	$a^۲$	b	ab	$a^۲b$
$\chi_۱(g)$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲(g)$	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۳(g)$	۲	-۱	-۱	۰	۰	۰

توجه کنید که در تمامی مثالهای فوق، سرشتها دارای تعداد کمی مقادیر متمایزند. این موضوع نتیجهٔ این واقعیت است که طبق گزارهٔ ۵.۱۳(۲) هر سرشت روی هر ردهٔ مزدوجی G دارای مقداری ثابت است. به‌علاوه توجه کنید که نوشتن $\chi(g)$ به‌ازای عضو g، که یک عدد بیش نیست، خیلی سریعتر از نوشتن ماتریس متناظر با g انجام می‌گیرد. مع‌هذا سرشت حاوی اطلاعات زیادی دربارهٔ نمایش است. هنگامی‌که در نظریهٔ سرشتها پیش برویم این مطلب روشن خواهد شد.

۷.۱۳ تعریف اگر χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول V باشد، بعد V را درجهٔ χ می‌نامند.

۸.۱۳ مثال (۱) درجهٔ سرشتی که از $D_۸$ در مثال ۶.۱۳(۱) ارائه کردیم ۲ است و درجهٔ سرشتی که از $S_۳$ در ۶.۱۳(۲) ارائه کردیم ۳ است. بنا به آنچه در ۶.۱۳(۴) دیدیم درجهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر $D_۶$ عبارت است از ۱ و ۱ و ۲.

(۲) اگر V $\mathbb{C}G$ـمدول یک‌بعدی دلخواهی باشد، به‌ازای هر $g \in G$ عدد مختلط λ_g وجود دارد به‌قسمی که

$$vg = \lambda_g v \qquad \forall v \in V$$

سرشت χ از V چنین است

$$\chi(g) = \lambda_g \qquad (g \in G)$$

و درجهٔ χ یک است. سرشت درجهٔ ۱ را سرشت خطی می‌نامند، و البته چنین سرشتی تحویل‌ناپذیر است.

توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ ۸.۹ تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروهی که آبلی و متناهی باشد به‌دست می‌آید، درواقع همگی این سرشتها خطی هستند.

هر سرشت خطی G همریختیی از G به گروه ضربی اعداد مختلطِ مخالف صفر است. درواقع سرشتهای خطی تنها سرشتهای مخالف صفر G هستند که همریختی‌اند (تمرین ۴.۱۳ را ببینید).

(۳) سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی (تعریف ۸.۴(۱) را ببینید) سرشتی خطی است، که آن را سرشت بدیهی G می‌نامیم. این سرشت را با 1_G نمایش می‌دهیم. از این‌رو

$$1_G : g \to 1 \quad \forall g \in G$$

بنابراین به‌ازای هر گروه G حداقل یک سرشت تحویل‌ناپذیر آن را می‌شناسیم که عبارت‌است از سرشت بدیهی. یافتن تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر معمولاً مشکل است.

مقادیر سرشت

گزارهٔ بعدی اطلاعاتی دربارهٔ اعداد مختلط $\chi(g)$، که χ سرشت G است و $g \in G$، به‌ما می‌دهد.

۹.۱۳ گزاره گیریم χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول V است. فرض کنیم $g \in G$ و مرتبهٔ g برابر m است. در این صورت

(۱) $\chi(1) = \dim V$.

(۲) $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های mام واحد است.

(۳) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

(۴) اگر g و g^{-1} مزدوج باشند، $\chi(g)$ عددی حقیقی است.

برهان (۱) گیریم $n = \dim V$ و $\mathscr{B}$ پایهٔ V باشد. در این صورت ماتریس عضو همانی ۱ نسبت به $\mathscr{B}$ یعنی $[1]_{\mathscr{B}}$ مساوی I_n، یعنی ماتریس همانی $n \times n$، است. در نتیجه

$$\chi(1) = \mathrm{tr}[1]_{\mathscr{B}} = \mathrm{tr} I_n = n$$

و لذا $\chi(1) = \dim V$.

(۲) بنابه گزارهٔ ۱۱.۹ پایهٔ $\mathscr{B}$ برای V وجود دارد به‌قسمی که

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

که در آن هریک از ω_iها ریشهٔ mام واحد است. بنابراین

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

که مجموع تعدادی از ریشه‌های mام واحد است.

(۳) داریم

$$[g^{-1}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix}$$

و لذا $\chi(g^{-1}) = \omega_1^{-1} + \cdots + \omega_n^{-1}$. اما هر یک از ریشه‌های mام واحد مانند ω در رابطهٔ $\omega^{-1} = \overline{\omega}$ صدق می‌کند، زیرا به‌ازای هر ϑی حقیقی

$$(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta}$$

که $e^{-i\vartheta}$ مزدوج مختلط $e^{i\vartheta}$ است. بنابراین

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\omega}_1 + \cdots + \overline{\omega}_n = \overline{\chi(g)}$$

(۴) اگر g مزدوج g^{-1} باشد، بنابه گزارهٔ ۵.۱۳(۲)، $\chi(g) = \chi(g^{-1})$. همچنین بنابه قسمت (۳)، $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ و لذا $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$ که نتیجه می‌دهد $\chi(g)$ حقیقی است. ■

وقتی‌که مرتبهٔ عنصر g از G برابر ۲ است، اطلاعات بیشتری دربارهٔ $\chi(g)$ داریم:

۱۰.۱۳ نتیجه فرض کنیم χ سرشتی از G و g عضوی با مرتبهٔ ۲ از G است. در این صورت $\chi(g)$ عددی صحیح است و

$$\chi(g) \equiv \chi(1) (\text{به پیمانهٔ } 2)$$

برهان بنابه گزارهٔ ۹.۱۳،

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

که $n = \chi(1)$ و هریک از ω_iها ریشهٔ دوم واحدند. پس هر ω_i یا ۱ و یا ۱− است. فرض کنیم rتای آنها ۱+ و sتای آنها ۱− است، پس

$$\chi(g) = r - s, \qquad \chi(1) = r + s$$

در این صورت قطعاً $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ و چون $r - s = r + s - 2s \equiv (r+s) (\text{به پیمانهٔ } 2)$ پس $\chi(g) \equiv \chi(1) (\text{به پیمانهٔ } 2)$. ■

نتیجهٔ بعدی اولین نشانهٔ اهمیت سرشت است. این نتیجه نشان می‌دهد که می‌توان هستهٔ نمایش را فقط با داشتن اطلاعاتی از سرشت آن معین کرد.

۱۱.۱۳ قضیه گیریم $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایش G است و χ سرشت آن.

(۱) به‌ازای $g \in G$ داریم

$$|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow g\rho = \lambda I_n \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ به‌ازای عددی چون}$$

(۲) $$\mathrm{Ker}\rho = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$$

برهان (۱) گیریم $g \in G$ و مرتبهٔ g مساوی m است. اگر $g\rho = \lambda I_n$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ آنگاه λ ریشهٔ mام واحد است و $\chi(g) = n\lambda$، لذا $|\chi(g)| = n = \chi(1)$.

برعکس، فرض کنیم که $|\chi(g)| = \chi(1)$، بنا به گزارهٔ ۱۱.۹، پایهٔ $\mathscr{B}$ برای $\mathbb{C}^n$ وجود دارد به‌قسمی که

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

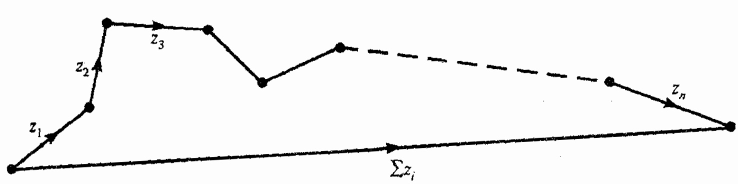
که هرکدام از ω_iها ریشهٔ mام واحد است. بنابراین

$$|\chi(g)| = |\omega_1 + \cdots + \omega_n| = \chi(1) = n \qquad (۱۲.۱۳)$$

اکنون توجه کنید که به‌ازای اعداد مختلط z_1، ... ، z_n داریم

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$$

این نابرابری به برابری تبدیل می‌شود اگر و فقط اگر شناسه‌های z_1، ... ، z_n با هم برابر باشند. (صحت این نابرابری را می‌توان با استفاده از نمودار آرگان زیر دریافت)



چون به‌ازای هر i، $|\omega_i| = ۱$، از (۱۲.۱۳) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i و j، $\omega_j = \omega_i$. بنابراین

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_۱ & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \omega_۱ \end{pmatrix} = \omega_۱ I_n$$

از این‌رو به‌ازای هر پایهٔ $\mathbb{C}^n$ چون $\mathscr{B}'$ داریم $[g]_{\mathscr{B}'} = \omega_۱ I_n$ و لذا $g\rho = \omega_۱ I_n$. به این ترتیب اثبات (۱) به انجام می‌رسد.

(۲) اگر $g \in \mathrm{Ker}\rho$ آنگاه $g\rho = I_n$ و لذا $\chi(g) = n = \chi(۱)$.

برعکس، فرض کنید که $\chi(g) = \chi(۱)$. در این صورت بنا به قسمت (۱)، به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$، $g\rho = \lambda I_n$. تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $\chi(g) = \lambda\chi(۱)$، در نتیجه $\lambda = ۱$. از این‌رو $g\rho = I_n$ و لذا $g \in \mathrm{Ker}\rho$؛ بنابراین قسمت (۲) نیز ثابت شده است. ■

براساس قضیهٔ ۱۱.۱۳(۲) هستهٔ سرشت را چنین تعریف می‌کنیم:

۱۳.۱۳ تعریف اگر χ سرشت G باشد آنگاه هستهٔ χ را که با $\mathrm{Ker}\chi$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ker}\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(۱)\}$$

بنابه قضیهٔ ۱۱.۱۳(۲)، اگر ρ نمایش G با سرشت χ باشد آنگاه $\mathrm{Ker}\rho = \mathrm{Ker}\chi$. لذا $\mathrm{Ker}\chi \lhd G$. χ را سرشت صادق می‌نامیم هرگاه $\mathrm{Ker}\chi = \{۱\}$.

۱۴.۱۳ مثال (۱) بنابه مثال ۶.۱۳(۴)، سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه $G = D_۶ = \langle a, b : a^۳ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$ عبارت‌اند از $\chi_۱$، $\chi_۲$ و $\chi_۳$، با مقادیر زیر

g	۱	a	$a^۲$	b	ab	$a^۲b$
$\chi_۱(g)$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲(g)$	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۳(g)$	۲	-۱	-۱	۰	۰	۰

در این صورت $\mathrm{Ker}\chi_۱ = G$، $\mathrm{Ker}\chi_۲ = \langle a\rangle$ و $\mathrm{Ker}\chi_۳ = \{۱\}$. لذا $\chi_۳$ یک سرشت تحویل‌ناپذیر صادق $D_۶$ است.

(۲) گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و فرض کنیم χ سرشت G در مثال ۶.۱۳(۱) باشد:

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0	0	0	0

در این صورت $\mathrm{Ker}\chi = \{1\}$ و لذا χ سرشتی صادق است. چون $|\chi(a^2)| = |-2| = \chi(1)$، با استفاده از قضیهٔ ۱۱.۱۳(۱) نتیجه می‌گیریم که اگر $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ نمایشی با سرشت χ باشد آنگاه $a^2\rho = -I$.

اکنون گزاره‌ای را ثابت می‌کنیم که گاهی برای ساختن سرشتی جدید از سرشتی مفروض مفید واقع می‌شود. برای سرشت χ از G تابع $\overline{\chi} : G \to \mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)} \qquad (g \in G)$$

از این‌رو مقادیر $\overline{\chi}$ مزدوج مقادیر χ هستند.

۱۵.۱۳ گزاره گیریم χ سرشت G است. در این صورت $\overline{\chi}$ نیز سرشت G است. اگر χ تحویل‌ناپذیر باشد، $\overline{\chi}$ نیز تحویل‌ناپذیر است.

برهان فرض کنیم که χ سرشت نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ است. از این رو

$$\chi(g) = \mathrm{tr}(g\rho) \qquad (g \in G)$$

اگر $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ باشد آنگاه $\overline{A}$ را ماتریس $n \times n$ $(\overline{a}_{ij})$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ باشند آنگاه

$$(\overline{AB}) = \overline{A}\,\overline{B} \qquad (16.13)$$

زیراکه درایهٔ ijی $\overline{A}\,\overline{B}$ عبارت‌است از

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{ik}\overline{b}_{kj}$$

که مساوی مزدوج مختلط $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ است که خود درایهٔ ijی AB است.

اکنون از تساوی (۱۶.۱۳) نتیجه می‌شود که تابع $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ با ضابطهٔ

$$g\overline{\rho} = \overline{(g\rho)} \qquad (g \in G)$$

نمایش G است. چون

$$\mathrm{tr}(g\overline{\rho}) = \mathrm{tr}\overline{(g\rho)} = \overline{\mathrm{tr}(g\rho)} = \overline{\chi(g)} \qquad (g \in G)$$

لذا سرشت نمایش $\overline{\rho}$ مساوی $\overline{\chi}$ است.

واضح است که اگر ρ تحویل‌پذیر باشد، $\overline{\rho}$ نیز تحویل‌پذیر است. از این‌رو χ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\overline{\chi}$ تحویل‌ناپذیر باشد. ■

سرشت منظم

۱۷.۱۳ تعریف سرشت منظم G عبارت‌است از سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول منظم. سرشت منظم را با χ_{reg} نمایش می‌دهیم.

در قضیهٔ ۱۹.۱۳، سرشت منظم را برحسب سرشتهای تحویل‌ناپذیر G بیان می‌کنیم. ابتدا به یک حکم مقدماتی نیاز داریم.

۱۸.۱۳ گزاره گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدول است و

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـمدولهایی تحویل‌ناپذیرند. در این صورت سرشت V مساوی مجموع سرشتهای $\mathbb{C}G$ـمدولهای U_1، . . . ، U_r است.

برهان حکم از (۱۰.۷) نیتجه می‌شود. ■

۱۹.۱۳ قضیه گیریم V_1، . . . ، V_k تشکیل‌دهندهٔ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند (تعریف ۱۱.۱۱ را ببینید)، و به ازای $i = 1, 2, \ldots, k$، χ_i سرشت V_i است و $d_i = \chi_i(1)$. در این صورت

$$\chi_{\mathrm{reg}} = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k$$

برهان بنابه قضیهٔ ۹.۱۱،

$$\mathbb{C}G \cong (V_۱ \oplus \cdots \oplus V_۱) \oplus (V_۲ \oplus \cdots \oplus V_۲) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

که به‌ازای هر i تعداد عوامل V_i مساوی d_i است. اکنون حکم از گزارهٔ ۱۸.۱۳ نتیجه می‌شود. ■

مقادیر χ_{reg} به‌ازای عناصر G به‌سادگی حاصل می‌شوند. این مقادیر را درگزارهٔ زیر آورده‌ایم.

۲۰.۱۳ گزاره اگر χ_{reg} سرشت منظم G باشد آنگاه

$$\chi_{\text{reg}}(۱) = |G|$$
$$\chi_{\text{reg}}(g) = ۰ \qquad \text{اگر } g \neq ۱$$

برهان گیریم $g_۱$، . . . ، g_n عناصر G باشند و $\mathscr{B}$ پایهٔ $g_۱$، . . . ، g_n برای $\mathbb{C}G$. بنابه گزارهٔ ۹.۱۳(۱)، $\chi_{\text{reg}}(۱) = \dim\mathbb{C}G = |G|$.

اکنون گیریم $g \in G$ و $g \neq ۱$. در این صورت به‌ازای $۱ \leq i \leq n$ داریم $g_i g = g_j$ که در آن $j \neq i$. بنابراین تمام درایه‌های سطر iام ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ صفرند بجز درایه‌ای که در ستون jام قرار دارد، لذا درایهٔ ii به‌ازای تمام iها صفر است. در نتیجه $\chi_{\text{reg}}(g) = \text{tr}[g]_{\mathscr{B}} = ۰$. ■

۲۱.۱۳ مثال قضیهٔ ۱۹.۱۳ و گزارهٔ ۲۰.۱۳ را در مورد گروه $G = D_۶$ به‌کار می‌بریم. بنا به مثال ۶.۱۳(۴)، سرشتهای تحویل‌ناپذیر G عبارت‌اند از $\chi_۱$، $\chi_۲$ و $\chi_۳$:

g	۱	a	$a^۲$	b	ab	$a^۲b$
$\chi_۱(g)$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲(g)$	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۳(g)$	۲	-۱	-۱	۰	۰	۰

اکنون $\chi_۱ + \chi_۲ + ۲\chi_۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$(\chi_۱ + \chi_۲ + ۲\chi_۳)(g)$	۶	۰	۰	۰	۰	۰

بنابه قضیهٔ ۱۹.۱۳ این مجموع، سرشت منظم G است و مقدار آن به‌ازای ۱ برابر $|G|$ و به‌ازای بقیهٔ عناصر مخالف ۱ از G برابر صفر است، و این همان چیزی است که گزارهٔ ۲۰.۱۳ بیان می‌دارد.

سرشت جایگشتی

در حالتی‌که G زیرگروه گروه متقارن S_n است، روش ساده‌ای وجود دارد که از طریق آن با استفاده از مدول جایگشتی، سرشتی با درجهٔ n حاصل می‌شود. اکنون این روش را شرح می‌دهیم.

فرض کنیم که G زیرگروه S_n است، در این صورت G متشکل از جایگشتهایی از $\{۱, \cdots, n\}$ است. V مدول جایگشتی G روی $\mathbb{C}$ دارای پایه‌ای چون $v_۱$، $\ldots$ ، v_n است به‌طوری که به‌ازای هر $g \in G$ داریم

$$v_i g = v_{ig} \qquad (۱ \le i \le n)$$

(تعریف ۱۰.۴ را ببینید). گیریم $\mathscr{B}$ پایهٔ $v_۱$، $\ldots$ ، v_n باشد. در این صورت درایهٔ iiی ماتریس $[g]_{\mathscr{B}}$ صفر است اگر $ig \neq i$ و ۱ است اگر $ig = i$. بنابراین π سرشت مدول جایگشتی V دارای ضابطهٔ زیر است

$$\pi(g) = (\text{تعداد } i\text{هایی که به‌ازای آنها } ig = i)$$

به‌ازای $g \in G$، گیریم

$$\mathrm{fix}(g) = \{i : ig = i \;\text{ و }\; ۱ \le i \le n\}$$

در این صورت

$$\pi(g) = |\mathrm{fix}(g)| \qquad \forall g \in G \tag{۲۲.۱۳}$$

π را سرشت جایگشتی G می‌نامیم.

۲۳.۱۳ مثال گیریم $G = S_۴$ در این صورت بنا به مثال ۱۶.۱۲(۳)، G دارای پنج ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های زیر است

$$(۱), (۱\ ۲), (۱\ ۲\ ۳), (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۲\ ۳\ ۴)$$

سرشت جایگشتی π دارای مقادیر زیر است

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\pi(g_i)$	۴	۲	۱	۰	۰

۲۴.۱۳ گزاره گیریم G زیرگروه S_n است. در این صورت تابع $\nu : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\nu(g) = |\mathrm{fix}(g)| - ۱ \qquad (g \in G)$$

سرشت G است.

برهان مانند بالا، فرض می‌کنیم $v_۱$، ... ، v_n پایه‌ای برای مدول جایگشتی V باشد و قرار می‌دهیم

$$U = \mathrm{sp}(u) \quad \text{و} \quad u = v_۱ + \cdots + v_n$$

مشاهده می‌کنیم که به‌ازای هر $g \in G$، $ug = u$. لذا U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است. درواقع U با $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی یکریخت است، لذا سرشت U سرشت بدیهی ۱_G است (مثال ۸.۱۳(۳) را ببینید). بنا به قضیهٔ مشکه، یعنی ۱.۸، $\mathbb{C}G$ـزیرمدول W از V وجود دارد به‌قسمی که

$$V = U \oplus W$$

فرض کنیم ν سرشت W باشد. در این صورت

$$\pi = ۱_G + \nu$$

پس به‌ازای هر $g \in G$، $|\mathrm{fix}(g)| = ۱ + \nu(g)$ و بنابراین

$$\nu(g) = |\mathrm{fix}(g)| - ۱ \qquad (g \in G) \qquad \blacksquare$$

۲۵.۱۳ مثال گیریم G زیرگروه $A_۴$ از $S_۴$ باشد. بنابه مثال ۱۸.۱۲(۱)، رده‌های مزدوجی G عبارت‌اند از

$$۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۲\ ۳), (۱\ ۳\ ۲)$$

مقادیر سرشت ν از G عبارت‌اند از

g_i	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
$\nu(g_i)$	۳	-۱	۰	۰

خلاصهٔ فصل ۱۳

۱. سرشت از نمایش با محاسبهٔ اثر هر ماتریس حاصل می‌شود.

۲. سرشت روی هر ردهٔ مزدوجی دارای مقداری ثابت است.

۳. $\mathbb{C}G$ـمدولهای یکریخت دارای سرشتهای یکسان هستند.

۴. برای سرشت χ از G و هر $g \in G$، عدد مختلط $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های واحد است و $\chi(g^{-۱}) = \overline{\chi(g)}$.

۵. سرشت نمایش هستهٔ نمایش را معین می‌کند.

۶. سرشت منظم χ_{reg} از G به‌ازای عضو همانی G دارای مقدار $|G|$ است و به‌ازای بقیهٔ عناصر G دارای مقدار ۰ است.

۷. اگر G زیرگروه S_n باشد، تابع ν با ضابطهٔ

$$\nu(g) = |\text{fix}(g)| - ۱ \qquad (g \in G)$$

سرشت G است.

تمرینات فصل ۱۳

۱. فرض کنیم $G = D_{۱۲} = \langle a, b : a^۶ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$ و $\rho_۱$ و $\rho_۲$ دو نمایش G باشند و

$$a\rho_۱ = \begin{pmatrix} \omega & ۰ \\ ۰ & \omega^{-۱} \end{pmatrix}، \quad b\rho_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (\omega = e^{۲\pi i/۳} \text{ که})$$

$$a\rho_۲ = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}، \quad b\rho_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

سرشتهای $\rho_۱$ و $\rho_۲$ را پیدا کنید. همچنین $\text{Ker}\rho_۱$ و $\text{Ker}\rho_۲$ را بیابید و نشان دهید که جواب شما با قضیهٔ ۱۱.۱۳ سازگار است.

۲. تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر $C_۴$ را پیدا کنید. سرشت منظم $C_۴$ را به‌صورت ترکیب خطی این سرشتها بنویسید.

۳. فرض کنیم χ سرشت مدول جایگشتی هفت بعدی $S_۷$ باشد. مقادیر $\chi(x)$ را به‌ازای $x = (۱\ ۲)$ و $x = (۱\ ۶)(۲\ ۳\ ۵)$ بیابید.

۴. ثابت کنید که از سرشتهای مخالف صفر G، فقط سرشتهای خطی همریختی‌اند.

۵. فرض کنیم که χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. گیریم $z \in Z(G)$ و مرتبهٔ z مساوی m است. ثابت کنید که عددی مانند $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد که ریشهٔ mام واحد است و به‌ازای هر $g \in G$،

$$\chi(zg) = \lambda\chi(g)$$

۶. ثابت کنید که اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر صادق گروه G باشد آنگاه

$$Z(G) = \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(۱)\}$$

۷. فرض کنیم ρ نمایش گروه G روی $\mathbb{C}$ باشد.

الف) نشان دهید که $\delta : g \to \det(g\rho)$ (که در آن $g \in G$) سرشت خطی G است.

ب) ثابت کنید که $G/\mathrm{Ker}\delta$ آبلی است.

ج) فرض کنیم به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $\delta(g) = -۱$. نشان دهید که G دارای زیرگروه نرمالی با شاخص ۲ است.

۸. گیریم G گروهی با مرتبهٔ $۲k$ باشد، که k عددی صحیح و فرد است. با در نظرگرفتن سرشت منظم G، نشان دهید که G دارای زیرگروه نرمالی با شاخص ۲ است.

۹. گیریم χ سرشت گروه G باشد و g عضوی با مرتبهٔ ۲ از G. نشان دهید یکی از حالات زیر برقرار است

(۱) $\chi(g) \equiv \chi(۱)$ (به پیمانهٔ ۴)

(۲) G زیرگروه نرمالی با شاخص ۲ دارد.

(با نتیجهٔ ۱۰.۱۳ مقایسه کنید. راهنمایی: از تمرین ۷ استفاده کنید.)

۱۰. ثابت کنید که اگر x عضوی غیر از عضو همانی گروه G باشد، سرشت تحویل‌ناپذیری از G مانند χ وجود دارد به‌طوری که $\chi(x) \neq \chi(۱)$.

۱۴

ضرب داخلی سرشتها

دراین فصل بعضی از خواص مهم سرشت را ثابت می‌کنیم، به‌خصوص این قضیهٔ شگفت‌انگیز را ثابت می‌کنیم که هرگاه دو $\mathbb{C}G$ـمدول دارای سرشتهای یکسان باشند، یکریخت هستند (قضیهٔ ۲۱.۱۴). همچنین روشی را ارائه می‌کنیم که از طریق آن می‌توان هر $\mathbb{C}G$ـمدول مفروض را با استفاده از سرشت به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولها تجزیه کرد.

اثبات خواص مورد نظر مبتنی بر ضرب داخلی سرشتهای گروه است که ابتدا آن را شرح می‌دهیم.

ضرب داخلی

سرشتهای گروه G توابعی از G به $\mathbb{C}$ هستند. مجموعهٔ تمام توابع از G به $\mathbb{C}$ با جمع طبیعی دو تابع و ضرب طبیعی تابع در عدد مختلط، که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند، فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است: اگر ϑ و φ توابعی از G به $\mathbb{C}$ باشند و $\lambda \in \mathbb{C}$ آنگاه تابع $\vartheta + \phi : G \to \mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(\vartheta + \phi)(g) = \vartheta(g) + \phi(g) \qquad (g \in G)$$

و تابع $\lambda\vartheta : G \to \mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(\lambda\vartheta)(g) = \lambda(\vartheta(g)) \qquad (g \in G)$$

(این توابع را در سمت چپ متغیر می‌نویسیم تا با نمادگذاری مشابه برای سرشتها هماهنگ باشد.)

۱.۱۴ مثال گیریم $G = C_۳ = \langle a : a^۳ = ۱\rangle$ و فرض می‌کنیم که توابع $\vartheta : G \to \mathbb{C}$ و $\phi : G \to \mathbb{C}$ چنین تعریف شده باشند

	۱	a	$a^۲$
ϑ	۲	i	-۱
ϕ	۱	۱	۱

یعنی $\vartheta(۱) = ۲$، $\vartheta(a) = i$، $\vartheta(a^۲) = -۱$، $\phi(۱) = \phi(a) = \phi(a^۲) = ۱$. در این صورت $\vartheta + \phi$ و ۳ϑ چنین‌اند

	۱	a	$a^۲$
$\vartheta + \phi$	۳	$۱ + i$	۰
۳ϑ	۶	$۳i$	-۳

بسیاری اوقات توابع از G به $\mathbb{C}$ را، همانند مثال فوق، به‌صورت بردارهای سطری در نظر می‌گیریم.

فضای برداری توابع از G به $\mathbb{C}$ را می‌توان به ضرب داخلی که هم‌اکنون تعریف خواهیم کرد مجهز کرد. تعریف ضرب داخلی برای فضای برداری روی $\mathbb{C}$ چنین است: به هر زوج مرتب ϑ و ϕ از بردارهای فضای برداری عدد مختلط $\langle \vartheta, \phi\rangle$ را نسبت می‌دهیم به‌قسمی که در شرایط زیر صدق کند

۲.۱۴ (الف) به‌ازای هر ϑ و ϕ، $\langle \vartheta, \phi\rangle = \overline{\langle \phi, \vartheta\rangle}$

(ب) به‌ازای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in \mathbb{C}$ و هر بردار $\vartheta_۱$، $\vartheta_۲$ و ϕ،

$$\langle \lambda_۱\vartheta_۱ + \lambda_۲\vartheta_۲, \phi\rangle = \lambda_۱\langle \vartheta_۱, \phi\rangle + \lambda_۲\langle \vartheta_۲, \phi\rangle$$

(ج) اگر $\vartheta \neq ۰$، $\langle \vartheta, \vartheta\rangle > ۰$

توجه کنید که از شرط (الف) نتیجه می‌شود که $\langle \vartheta, \vartheta\rangle$ همواره حقیقی است و از شرایط (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \in \mathbb{C}$ و هر بردار $\vartheta_۱$، $\vartheta_۲$ و ϕ

$$\langle \phi, \lambda_۱\vartheta_۱ + \lambda_۲\vartheta_۲\rangle = \overline{\lambda_۱}\langle \phi, \vartheta_۱\rangle + \overline{\lambda}_۲\langle \phi, \vartheta_۲\rangle$$

اکنون یک ضرب داخلی روی فضای برداری تمام توابع از G به $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم. این ضرب داخلی در مطالعهٔ سرشتها از اهمیت اساسی برخوردار است.

۳.۱۴ تعریف فرض کنیم که ϑ و ϕ توابعی از G به $\mathbb{C}$ هستند. حاصلضرب داخلی ϑ و ϕ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g) \overline{\phi(g)}$$

روشن است که شرایط ۲.۱۴ برقرار است، لذا $\langle \ , \ \rangle$ ضربی داخلی روی فضای برداری توابعِ از G به $\mathbb{C}$ است.

۴.۱۴ مثال مانند مثال ۱.۱۴، فرض کنیم که $G = C_۳ = \langle a : a^۳ = ۱ \rangle$ و ϑ و ϕ به‌صورت زیر تعریف شده باشند

	۱	a	$a^۲$
ϑ	۲	i	-۱
ϕ	۱	۱	۱

در این صورت

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{۱}{۳}(۲ \times ۱ + i \times ۱ - ۱ \times ۱) = \frac{۱}{۳}(۱ + i)$$

$$\langle \vartheta, \vartheta \rangle = \frac{۱}{۳}(۲ \times ۲ + i \times \bar{i} + (-۱) \times (-۱)) = ۲$$

$$\langle \phi, \phi \rangle = \frac{۱}{۳}(۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ + ۱ \times ۱) = ۱$$

ضرب داخلی سرشتها

با توجه به اینکه مقدار سرشت روی هر ردهٔ مزدوجی ثابت است می‌توان محاسبهٔ حاصلضرب داخلی دو سرشت را تا حدی ساده کرد.

۵.۱۴ گزاره فرض کنیم که G دقیقاً دارای l ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های $g_۱$، ...، g_l است. گیریم χ و ψ سرشت G هستند.

(۱) $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = (۱/|G|) \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-۱})$ و این عدد عددی حقیقی است.

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=۱}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|} \qquad (۲)$$

برهان (۱) بنابه گزارهٔ ۹.۱۳(۳) به‌ازای هر $g \in G$، $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$. بنابراین

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$$

چون $\{g^{-1} : g \in G\} = G$ پس

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle$$

که چون $\langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$ پس $\langle \chi, \psi \rangle$ حقیقی است. (بعداً ثابت خواهیم کرد که $\langle \chi, \psi \rangle$ درواقع عددی صحیح است.)

(۲) یادآوری می‌کنیم که g_i^G نشان‌دهندهٔ ردهٔ مزدوجی G شامل g_i است. چون سرشتها روی هر ردهٔ مزدوجی دارای مقدار ثابت‌اند پس

$$\sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = |g_i^G|\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}$$

اکنون بنابه نتیجهٔ ۳.۱۲ و قضیهٔ ۸.۱۲،

$$|g_i^G| = |G|/|C_G(g_i)| \quad \text{و} \quad G = \bigcup_{i=1}^{l} g_i^G$$

از این‌رو

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} \sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{|g_i^G|}{|G|}\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{|C_G(g_i)|}\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)} \qquad \blacksquare$$

۶.۱۴ مثال گروه متناوب A_4 دارای چهار ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های زیر است

$$g_1 = 1,\ \ g_2 = (1\ 2)(3\ 4),\ \ g_3 = (1\ 2\ 3),\ \ g_4 = (1\ 3\ 2)$$

(مثال ۱۸.۱۲(۱) را ببینید). در فصل ۱۸ خواهیم دید که سرشتهایی چون χ و ψ از A_4 وجود دارند که مقادیرشان به‌ازای g_i به‌صورت زیر است

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۴	۳	۳
χ	۱	۱	ω	$\omega^۲$
ψ	۴	۰	$\omega^۲$	ω

(که $\omega = e^{۲\pi i/۳}$). با استفاده از قسمت (۲)ی گزارهٔ ۵.۱۴ داریم

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{۱ \times ۴}{۱۲} + \frac{۱ \times ۰}{۴} + \frac{\omega \times \overline{\omega}^۲}{۳} + \frac{\omega^۲ \times \overline{\omega}}{۳} = ۰$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{۴ \times ۴}{۱۲} + \frac{۰ \times ۰}{۴} + \frac{\omega^۲ \times \overline{\omega}^۲}{۳} + \frac{\omega \times \overline{\omega}}{۳} = ۲$$

به خواننده توصیه می‌کنیم که صحت تساوی $\langle \chi, \chi \rangle = ۱$ را نشان دهد و حاصلضرب داخلی توابع χ و ψ را در سرشت بدیهی پیدا کند (سرشت بدیهی به‌ازای همهٔ عناصر $A_۴$ دارای مقدار ۱ است).

اکنون راه را برای اثبات این قضیهٔ اساسی (قضیهٔ ۱۲.۱۴) هموار می‌کنیم که مجموعهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G مجموعه‌ای یکامتعامد در فضای برداری توابع از G به $\mathbb{C}$ است، یعنی به‌ازای سرشتهای تحویل‌ناپذیر متمایز χ و ψ از G داریم $\langle \chi, \chi \rangle = ۱$ و $\langle \chi, \psi \rangle = ۰$.

در فصل ۱۰ دیدیم که $\mathbb{C}G$ـمدول منظم مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهایی تحویل‌ناپذیر است، مثلاً

$$\mathbb{C}G = U_۱ \oplus \cdots \oplus U_r$$

و هر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر با یکی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای $U_۱$، . . . ، U_r یکریخت است. چندین راه برای انتخاب $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهایی چون $W_۱$ و $W_۲$ از $\mathbb{C}G$ وجود دارد به‌طوری که $\mathbb{C}G = W_۱ \oplus W_۲$ و $W_۱$ و $W_۲$ دارای عامل ترکیب مشترکی نباشند (تعریف ۴.۱۰ را ببینید). به‌عنوان مثال، می‌توان $W_۱$ را مجموع آن دسته از $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر U_i که با $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر مفروضی یکریخت‌اند در نظر گرفت و سپس $W_۲$ را مجموع باقیماندهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولهای U_i تعریف کرد. بعداً نتایج مربوط به تجزیهٔ $\mathbb{C}G$ به‌صورت فوق را مورد بحث قرار خواهیم داد، بنابراین موقتاً فرض زیر را قبول می‌کنیم.

۷.۱۴ فرض گیریم $\mathbb{C}G = W_۱ \oplus W_۲$، که $W_۱$ و $W_۲$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول‌اند و عامل ترکیب مشترکی ندارند. می‌نویسیم $۱ = e_۱ + e_۲$ که $e_۱ \in W_۱$ و $e_۲ \in W_۲$.

از جمله نتایجی که از فرض فوق به‌دست می‌آوریم، فرمولی است که برای $e_۱$ برحسب سرشت $W_۱$ پیدا خواهیم کرد.

ابتدا عمل عناصر e_1 و e_2 از $\mathbb{C}G$ را بر W_1 و W_2 بررسی می‌کنیم.

۸.۱۴ گزاره به‌ازای هر $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$ داریم

$$w_1 e_1 = w_1, \qquad w_2 e_1 = 0$$
$$w_1 e_2 = 0, \qquad w_2 e_2 = w_2$$

برهان اگر $w_1 \in W_1$، واضح است که تابع $w_2 \to w_1 w_2$ (که در آن $w_2 \in W_2$) $\mathbb{C}G$ـهمریختی از W_2 به W_1 است. چون W_1 و W_2 عامل ترکیب مشترک ندارند، پس بنا به گزارهٔ ۳.۱۱ هر $\mathbb{C}G$ـهمریختی از W_2 به W_1 مساوی صفر است. بنابراین به‌ازای هر $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$، $w_1 w_2 = 0$. به همین نحو $w_2 w_1 = 0$. لذا $w_1 e_2 = w_2 e_1 = 0$. از این‌رو

$$w_1 = w_1 1 = w_1(e_1 + e_2) = w_1 e_1$$
$$w_2 = w_2 1 = w_2(e_1 + e_2) = w_2 e_2$$

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

۹.۱۴ نتیجه به‌ازای عناصر e_1 و e_2 از $\mathbb{C}G$ که در فرض ۷.۱۴ آمده‌اند، داریم

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2 \quad \text{و} \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$$

برهان در گزارهٔ ۸.۱۴ قرار دهید $w_1 = e_1$ و $w_2 = e_2$. ■

اکنون e_1 را محاسبه می‌کنیم.

۱۰.۱۴ گزاره فرض کنیم χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول W_1 در فرض ۷.۱۴ است. در این صورت

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g$$

برهان گیریم $x \in G$. در این صورت تابع

$$\vartheta : w \to w e_1 x^{-1} \qquad (w \in \mathbb{C}G)$$

درونریختی $\mathbb{C}G$ است. اثر ϑ را از دو راه مختلف محاسبه می‌کنیم.

راه اول: به‌ازای $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$، بنابه گزارهٔ ۸.۱۴ داریم

$$w_1\vartheta = w_1 e_1 x^{-1} = w_1 x^{-1}$$
$$w_2\vartheta = w_2 e_1 x^{-1} = 0$$

بنابراین عمل ϑ بر W_1 به‌صورت $w_1 \to w_1 x^{-1}$ و بر W_2 به‌صورت $w_2 \to 0$ است. بنابه تعریفِ سرشت χ از W_1، اثر درونریختی $w_1 \to w_1 x^{-1}$ از W_1 مساوی $\chi(x^{-1})$ است، و البته اثر درونریختی $w_2 \to 0$ از W_2 مساوی 0 است. بنابراین

$$\operatorname{tr}\vartheta = \chi(x^{-1})$$

راه دوم: $e_1 \in \mathbb{C}G$ و لذا

$$e_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

که $\lambda_g \in \mathbb{C}$. بنابه‌گزارهٔ ۲۰.۱۳، اثر درونریختی $w \to wgx^{-1}$ $(w \in \mathbb{C}G)$ از $\mathbb{C}G$ وقتی‌که $g \neq x$ مساوی 0 و وقتی‌که $g = x$ مساوی $|G|$ است. از این‌رو چون $\vartheta : w \to w \sum_{g \in G} \lambda_g g x^{-1}$ پس

$$\operatorname{tr}\vartheta = \lambda_x |G|$$

با مقایسهٔ دو عبارتی که برای $\operatorname{tr}\vartheta$ به‌دست آوردیم می‌بینیم که به‌ازای هر $x \in G$،

$$\lambda_x = \chi(x^{-1})/|G|$$

بنابراین

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g \qquad \blacksquare$$

۱۱.۱۴ نتیجه فرض کنیم χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول W_1 در فرض ۷.۱۴ باشد. در این صورت

$$\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1)$$

برهان با استفاده از تعریف ۳.۶ در مورد ضرب عناصر $\mathbb{C}G$، از گزارهٔ ۱۰.۱۴ نتیجه می‌گیریم که ضریب ۱ در e_1^2 عبارت‌است از

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\chi(g)=\frac{1}{|G|}\langle\chi,\chi\rangle$$

از طرف دیگر، با استفاده از نتیجهٔ ۹.۱۴ می‌دانیم که $e_1^2=e_1$ و ضریب ۱ در e_1 مساوی $\chi(1)/|G|$ است. از این‌رو $\langle\chi,\chi\rangle=\chi(1)$ و حکم ثابت می‌شود. ■

اکنون قضیهٔ اصلی مربوط به ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ را می‌توانیم ثابت کنیم.

۱۲.۱۴ قضیه فرض کنیم U و V $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند و χ و ψ به ترتیب سرشتهای آنها هستند. در این صورت

$$\langle\chi,\chi\rangle=1$$

$$\langle\chi,\psi\rangle=0$$

برهان یادآوری می‌کنیم که بنابه قضیهٔ ۹.۱۱، $\mathbb{C}G$ مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر است، یعنی

$$\mathbb{C}G=U_1\oplus\cdots\oplus U_r$$

که تعداد $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i یکریخت با U مساوی $\dim U$ است. قرار می‌دهیم $m=\dim U$ و W را مجموع m $\mathbb{C}G$ـزیرمدول U_iای که با U یکریخت هستند تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم X مجموع بقیهٔ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i باشد. در این صورت

$$\mathbb{C}G=W\oplus X$$

به‌علاوه، هر عامل ترکیب W با U یکریخت است و هیچ عامل ترکیب X با U یکریخت نیست. لذا W و X عامل ترکیب مشترک ندارند. سرشت W عبارت‌است از $m\chi$، زیرا W مجموع مستقیم m $\mathbb{C}G$ـزیرمدول است که هرکدام دارای سرشت χ است.

اکنون با استفاده از نتیجهٔ ۱۱.۱۴ در مورد سرشت W، نتیجه می‌گیریم

$$\langle m\chi,m\chi\rangle=m\chi(1)$$

که چون $\chi(1)=\dim U=m$ پس $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

حال فرض می‌کنیم Y مجموع آن دسته $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i از $\mathbb{C}G$ باشد که یا با U یا با V یکریخت هستند و Z را مجموع باقیماندهٔ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\mathbb{C}G = Y \oplus Z$$

و Y و Z عامل ترکیب مشترک ندارند. سرشت Y عبارت‌است از $m\chi + n\psi$ که $n = \dim V$. بنابه نتیجهٔ ۱۱.۱۴،

$$\begin{aligned} m\chi(1) + n\psi(1) &= \langle m\chi + n\psi, m\chi + n\psi \rangle \\ &= m^2\langle \chi, \chi \rangle + n^2\langle \psi, \psi \rangle + mn(\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle) \end{aligned}$$

بنابه قسمت اول قضیه که ابتدا ثابت شد، $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$؛ و $\chi(1) = m$ و $\psi(1) = n$. بنابراین

$$\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle = 0$$

بنابه گزارهٔ ۵.۱۴(۱)، $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$ و لذا $\langle \chi, \psi \rangle = 0$. ■

نتایج قضیهٔ ۱۲.۱۴

گیریم G گروه متناهی است و V_1، . . . ، V_k تشکیل‌دهندهٔ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند (تعریف ۱۱.۱۱ را ببینید). اگر χ_i سرشت V_i باشد $(1 \le i \le k)$ آنگاه بنابه قضیهٔ ۱۲.۱۴،

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \tag{۱۳.۱۴}$$

که δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است (یعنی δ_{ij} مساوی ۱ است هرگاه $i = j$ و مساوی ۰ است هرگاه $i \neq j$). از اینجا نتیجه می‌شود که سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، . . . ، χ_k متمایزند.

اکنون فرض کنیم V $\mathbb{C}G$ـمدول باشد. بنا به قضیهٔ ۷.۸، V مساوی مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر است، که چون هرکدام از این زیرمدولها با یکی از V_iها یکریخت است، لذا اعداد صحیح نامنفی d_1، . . . ، d_k وجود دارند به‌قسمی که

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k) \tag{۱۴.۱۴}$$

که به‌ازای هر i تعداد عوامل V_i مساوی d_i است. بنابراین سرشت V یعنی ψ مساوی است با

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k \tag{۱۵.۱۴}$$

با استفاده از (۱۳.۱۴) و رابطهٔ فوق روابط زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} &\langle \psi, \chi_i \rangle = \langle \chi_i, \psi \rangle = d_i \qquad \text{به‌ازای } ۱ \leq i \leq k \\ &\langle \psi, \psi \rangle = d_۱^۲ + \cdots + d_k^۲ \end{aligned} \qquad (۱۶.۱۴)$$

قضیهٔ زیر حاصل مطالب فوق است.

۱۷.۱۴ قضیه فرض کنیم $\chi_۱$، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند. اگر ψ سرشت دلخواهی از G باشد آنگاه

$$\psi = d_۱\chi_۱ + \cdots + d_k\chi_k$$

که $d_۱$، . . . ، d_k اعداد صحیح نامنفی هستند. به‌علاوه

$$\begin{aligned} &d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \qquad \text{به‌ازای } ۱ \leq i \leq k \text{ ،} \\ &\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=۱}^{k} d_i^۲ \end{aligned}$$

۱۸.۱۴ مثال در مثال ۶.۱۳(۴) دیدیم که سرشتهای تحویل‌ناپذیر $D_۶ \cong S_۳$ عبارت‌اند از $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$ که به‌ازای ۱ و (۲ ۱) و (۳ ۲ ۱)، که نماینده‌های رده‌های مزدوجی هستند، دارای مقادیر زیرند

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)
$\lvert C_{S_۳}(g_i)\rvert$	۶	۲	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	۱
$\chi_۳$	۲	۰	-۱

اکنون فرض کنیم ψ سرشت مدول جایگشتی ۳بعدی $S_۳$ باشد. بنابه مثال ۶.۱۳(۲)، می‌دانیم که

$$\psi(۱) = ۳, \qquad \psi(۱\ ۲) = ۱, \qquad \psi(۱\ ۲\ ۳) = ۰$$

بنابراین طبق گزارهٔ ۵.۱۴(۲)،

$$\langle \psi, \chi_۱ \rangle = \frac{۳ \times ۱}{۶} + \frac{۱ \times ۱}{۲} + ۰ = ۱$$

به همین نحو، $\circ = \langle \psi, \chi_{۲} \rangle$ و $۱ = \langle \psi, \chi_{۳} \rangle$. از این‌رو طبق قضیهٔ ۱۷.۱۴،

$$\psi = \chi_{۱} + \chi_{۳}$$

(البته تساوی اخیر را با مقایسهٔ مقادیر ψ و $\chi_{۱} + \chi_{۳}$ به‌ازای نماینده‌های رده‌های مزدوجی نیز می‌توان ثابت کرد.)

محاسبهٔ اساسیتری در این زمینه در مثال ۷.۱۵ داده شده است.

بعداً کاربردهای زیادی از قضیهٔ مهم ۱۷.۱۴ را خواهیم دید.

۱۹.۱۴ تعریف فرض کنیم که ψ سرشت G است و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. گوییم که χ سازای ψ است هرگاه $\langle \psi, \chi \rangle \neq \circ$. از این‌رو سازاهای ψ عبارت‌اند از سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i از G که به‌ازای آنها عدد صحیح d_i در عبارت $\psi = d_{۱}\chi_{۱} + \cdots + d_k\chi_k$ مخالف صفر است.

قضیهٔ بعدی نتیجهٔ مهم دیگری از قضیهٔ ۱۲.۱۴ است. در این قضیه راهی کوتاه و کارا ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن می‌توان معین کرد که $\mathbb{C}G$ـمدولی مفروض تحویل‌ناپذیر است یا نه.

۲۰.۱۴ قضیه فرض کنیم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت ψ است. در این صورت V تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\langle \psi, \psi \rangle = ۱$.

برهان اگر V تحویل‌ناپذیر باشد، بنابه قضیهٔ ۱۲.۱۴، $\langle \psi, \psi \rangle = ۱$.

به‌عکس، فرض کنیم $\langle \psi, \psi \rangle = ۱$. داریم

$$\psi = d_{۱}\chi_{۱} + \cdots + d_k\chi_k$$

که d_iها اعداد صحیح نامنفی‌اند. بنابه (۱۶.۱۴)،

$$۱ = \langle \psi, \psi \rangle = d_{۱}^{۲} + \cdots + d_k^{۲}$$

از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که یکی از d_iها ۱ و بقیه $\circ$ است. در این صورت بنابه (۱۴.۱۴) به‌ازای iای داریم $V \cong V_i$ و لذا V تحویل‌ناپذیر است. ■

اکنون می‌توانیم این قضیهٔ مهم را ثابت کنیم که «$\mathbb{C}G$ـمدول به‌وسیلهٔ سرشتش معین می‌شود»؛ و دلیل اینکه در قسمت عمده‌ای از مطالب باقیماندهٔ کتاب به موضوع سرشت پرداخته‌ایم وجود همین قضیه بوده است، زیرا این قضیه حاکی از آن است که با استفاده از نظریهٔ سرشتها به سؤالات

بسیاری دربارهٔ $\mathbb{C}G$ـمدولها می‌توان پاسخ داد.

۲۱.۱۴ قضیه فرض کنیم که V و W ‏ $\mathbb{C}G$ـمدول‌اند و به ترتیب دارای سرشتهای χ و ψ هستند. در این صورت V و W یکریخت هستند اگر و فقط اگر $\chi = \psi$.

برهان درگزارهٔ ۵.۱۳ ثابت کردیم که اگر $V \cong W$ آنگاه $\chi = \psi$. عکس این مطلب قسمت اساسی این قضیه است.

از این‌رو فرض کنیم که $\chi = \psi$. همچون گذشته فرض کنیم V_1، . . . ، V_k تشکیل‌دهندهٔ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت‌اند که دارای سرشتهای χ_1، . . . ، χ_k هستند. طبق (۱۴.۱۴) می‌دانیم که اعداد صحیح نامنفی c_i و d_i $(1 \leq i \leq k)$ وجود دارند به‌قسمی که

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

که به‌ازای هر i تعداد V_iها مساوی c_i است، و

$$W \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

که به‌ازای هر i تعداد V_iها مساوی d_i است. اکنون بنابه (۱۶.۱۴) داریم

$$c_i = \langle \chi, \chi_i \rangle, d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \qquad (1 \leq i \leq k)$$

چون $\chi = \psi$ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i، $c_i = d_i$ و لذا $V \cong W$. ■

۲۲.۱۴ مثال فرض کنیم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ و ρ_1، ρ_2، ρ_3، ρ_4 نمایشهای G روی $\mathbb{C}$ باشند و

$$a\rho_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, a\rho_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$$

$$a\rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, a\rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1} \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$(\omega = e^{2\pi i/3})$. ψ_iها، سرشت نمایشهای ρ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$، عبارت‌اند از:

	1	a	a^2
ψ_1	2	2ω	$2\omega^2$
ψ_2	2	-1	-1
ψ_3	2	-1	-1
ψ_4	2	$1+\omega$	$1+\omega^2$

از این‌رو بنا به قضیهٔ ۲۱.۱۴ نمایشهای ρ_2 و ρ_3 هم‌ارزند ولی هم‌ارزی دیگری بین ρ_1، ρ_2، ρ_3، ρ_4 وجود ندارد.

قضیهٔ بعدی نتیجهٔ دیگری از قضیهٔ ۱۲.۱۴ است.

۲۳.۱۴ قضیه گیریم χ_1، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند. در این صورت χ_1، . . . ، χ_k در فضای برداری توابعِ از G به $\mathbb{C}$ استقلال خطی دارند.

برهان فرض کنیم که

$$\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_k\chi_k = 0 \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

در این صورت، با استفاده از (۱۳.۱۴) به‌ازای هر i داریم

$$0 = \langle \lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_k\chi_k, \chi_i \rangle = \lambda_i$$

بنابراین χ_1، . . . ، χ_k استقلال خطی دارند. ■

حال ببینیم ضرب داخلی سرشتها با فضای $\mathbb{C}G$ـهمریختیها که در فصل ۱۱ ساخته شد چه ارتباطی دارد.

۲۴.۱۴ قضیه فرض کنیم V و W ـ$\mathbb{C}G$مدول‌اند و به ترتیب دارای سرشت χ و ψ هستند. در این صورت

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \langle \chi, \psi \rangle$$

برهان در (۱۴.۱۴) دیدیم که اعداد صحیح نامنفی c_i و d_i وجود دارند $(1 \leq i \leq k)$ به‌قسمی که

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

که به‌ازای هر i تعداد c_i عامل V_i وجود دارد، و

$$W \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

که به‌ازای هر i تعداد d_i عامل V_i وجود دارد. بنابه گزارهٔ ۲.۱۱ به‌ازای هر i و j داریم

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, V_j)) = \delta_{ij}$$

از این‌رو با استفاده از ۵.۱۱(۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i$$

از طرف دیگر

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \quad \text{و} \quad \chi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i$$

و لذا از (۱۳.۱۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i$$

بنابراین حکم ثابت شده است. ■

تجزیهٔ $\mathbb{C}G$ـمدول

گاهی وقتها مهم است که بتوانیم $\mathbb{C}G$ـمدول مفروضی را عملاً به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولها تجزیه کنیم. اکنون روشی را برای انجام دادن این کار شرح می‌دهیم.

بار دیگر فرض می‌کنیم ۷.۱۴ برقرار باشد، یعنی

$\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$، که $\mathbb{C}G$ـمدولهای W_1 و W_2 عامل ترکیب مشترک ندارند،
و $1 = e_1 + e_2$ که $e_1 \in W_1$ و $e_2 \in W_2$.

گیریم V ‌ $\mathbb{C}G$ـمدول دلخواهی است. می‌توانیم بنویسیم $V = V_1 \oplus V_2$، که هر عامل ترکیب V_1 عامل ترکیب W_1 است و هر عامل ترکیب V_2 عامل ترکیب W_2 است.

۲۵.۱۴ گزاره با نمادگذاری فوق، به‌ازای هر $v_1 \in V_1$ و هر $v_2 \in V_2$ داریم

$$v_1 e_1 = v_1, \qquad v_2 e_1 = 0$$
$$v_1 e_2 = 0, \qquad v_2 e_2 = v_2$$

برهان اگر $v_1 \in V_1$، واضح است که تابع $w_2 \to v_1 w_2$ $(w_2 \in W_2)$ $\mathbb{C}G$ـهمریختی از W_2 به V_1 است. چون W_2 و V_1 عامل ترکیب مشترک ندارند، حکم را با استدلالی دقیقاً مانند آنچه در اثبات گزارهٔ ۸.۱۴ دیدیم ثابت می‌کنیم. ■

۲۶.۱۴ گزاره اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد و V $\mathbb{C}G$ـمدولی دلخواه آنگاه

$$V\left(\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g\right)$$

مساوی مجموع آن دسته از $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای V است که دارای سرشت χ هستند (Vr را به‌ازای $r \in \mathbb{C}G$ چنین تعریف می‌کنیم: $Vr = \{vr : v \in V\}$)

برهان می‌نویسیم

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

که U_iها زیرمدولهای تحویل‌ناپذیرند. فرض می‌کنیم W_1 مجموع آن $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i باشد که دارای سرشت χ هستند و W_2 مجموع بقیهٔ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای U_i باشد. در این صورت بنا به قضیهٔ ۹.۱۱ سرشت W_1 مساوی $m\chi$ است که $m = \chi(1)$. همچنین W_1 و W_2 در فرض ۷.۱۴ صدق می‌کنند و طبق گزارهٔ ۱۰.۱۴ عنصر e_1 از W_1 چنین است

$$e_1 = \frac{m}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$$

گیریم V_1 مجموع آن $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای V باشد که دارای سرشت χ هستند. در این صورت بنابه گزارهٔ ۲۵.۱۴، $Ve_1 = V_1$. واضح است که می‌توانیم ضریب ثابت $m/|G|$ را حذف کنیم و بنویسیم

$$V_1 = V\left(\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g\right)$$ ■

هنگامی‌که سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G معلوم باشند، گزارهٔ ۲۶.۱۴ روش عملی مفیدی برای پیداکردن $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای $\mathbb{C}G$ـمدول مفروض V در اختیار ما می‌گذارد. این روش چنین است:

۲۷.۱۴ (۱) پایهٔ v_1، ... ، v_n را برای V انتخاب کنید.

(۲) برای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G، بردارهای $v_i(\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g)$ را به‌ازای $1 \leq i \leq n$ محاسبه کنید و فرض کنید V_χ زیرفضایی از V باشد که توسط این بردارها پدید می‌آید.

(۳) در این صورت V عبارت است از مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـمدولهای V_χ به‌ازای همه سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G. سرشت V_χ مضربی از χ است.

این روش را با چند مثال ساده توضیح می‌دهیم. کاربردهای پیچیده‌تر این روش را در فصل ۳۰ می‌توان یافت.

۲۸.۱۴ مثال (۱) فرض کنیم G گروه متناهی دلخواه و V ‏ $\mathbb{C}G$ـمدول مخالف صفر باشد. اگر χ سرشت بدیهی G باشد، از گزارهٔ ۲۶.۱۴ نتیجه می‌گیریم که

$$V\left(\sum_{g\in G} g\right)$$

مجموع تمام $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای بدیهی V است. به‌عنوان مثال، فرض کنیم $G = S_n$ و V مدول جایگشتی آن با پایهٔ v_1، ... ، v_n باشد به‌طوری که به‌ازای هر i و هر $g \in G$، $v_i g = v_{ig}$. در این صورت

$$V\left(\sum_{g\in G} g\right) = \mathrm{sp}(v_1 + \cdots + v_n)$$

از این‌رو V دارای $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی منحصر به فرد است.

(۲) فرض کنیم G زیرگروهی از S_4 باشد که توسط

$$a = (1\ 2\ 3\ 4) \quad \text{و} \quad b = (1\ 2)(3\ 4)$$

تولید می‌شود. در این صورت $G \cong D_8$ (با مثال ۵.۱ مقایسه کنید). در اینجا فهرست سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، ... ، χ_5 از D_8 را می‌نویسیم (مثال **۳.۱۶**(۳) را ببینید):

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0

گیریم V مدول جایگشتی G با پایهٔ v_1، v_2، v_3، v_4 باشد به‌قسمی که به‌ازای هر i و هر $g \in G$، $v_i g = v_{ig}$.

به‌ازای $1 \leq i \leq 5$، قرار می‌دهیم

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{8} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g$$

مثلاً $e_5 = \frac{1}{2}(1 - a^2)$. در این صورت

$$\begin{aligned}
Ve_1 &= \mathrm{sp}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)\\
Ve_2 &= 0\\
Ve_3 &= 0\\
Ve_4 &= \mathrm{sp}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)\\
Ve_5 &= \mathrm{sp}(v_1 - v_3, v_2 - v_4)
\end{aligned}$$

داریم

$$V = Ve_1 \oplus Ve_4 \oplus Ve_5$$

و به این ترتیب V را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیری که سرشتهای آنها به ترتیب χ_1، χ_4 و χ_5 است نوشته‌ایم.

توصیه می‌کنیم که نشان دهید

$$\begin{aligned}
&e_1 + \cdots + e_5 = 1\\
&e_i^2 = e_i \qquad \text{به‌ازای } 1 \leq i \leq 5\\
&e_i e_j = 0 \qquad \text{به‌ازای } i \neq j
\end{aligned}$$

این نتایج را با نتیجهٔ ۹.۱۴ مقایسه کنید.

توجه کنید که در حالت کلی نمی‌توان با استفاده از روشی که در ۲۷.۱۴ شرح داده شد $\mathbb{C}G$ـمدول مفروضی را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر نوشت (زیرا در حالت کلی V_χ تحویل‌ناپذیر نیست).

خلاصهٔ فصل ۱۴

۱. حاصلضرب داخلی دو تابع ϑ و ϕ از G به $\mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g)\overline{\phi(g)}$$

۲. مجموعهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_۱$، . . . ، χ_k از G مجموعه‌ای یکامتعامد است، یعنی به‌ازای هر i و j، $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$.

۳. هر $\mathbb{C}G$ـمدول با سرشتش معین می‌شود.

۴. اگر $\chi_۱$، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند و ψ سرشت دلخواهی از G باشد آنگاه

$$\psi = d_۱\chi_۱ + \cdots + d_k\chi_k \qquad \text{که} \qquad d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$$

هرکدام از d_iها عددی صحیح و نامنفی است. همچنین ψ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\langle \psi, \psi \rangle = ۱$.

تمرینات فصل ۱۴

۱. فرض کنیم $G = S_۴$. در فصل ۱۸ خواهیم دید که G دارای سرشتهای χ و ψ است که دارای مقادیر زیر روی رده‌های مزدوجی هستند

نمایندهٔ رده	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۴	۴	۳	۸	۴
χ	۳	۱−	۰	۳	۱−
ψ	۳	۱	۰	۱−	۱−

$\langle \chi, \chi \rangle$، $\langle \chi, \psi \rangle$ و $\langle \psi, \psi \rangle$ را محاسبه کنید. کدام‌یک از سرشتهای χ و ψ تحویل‌ناپذیر است؟

۲. فرض کنیم $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$، و ρ_1 و ρ_2 و ρ_3 نمایشهای G روی $\mathbb{C}$ باشند و

$$a\rho_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad b\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\rho_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که ρ_1 و ρ_2 هم‌ارزند، ولی ρ_3 با ρ_1 یا ρ_2 هم‌ارز نیست.

۳. فرض کنیم که ρ و σ نمایش G باشند و به‌ازای هر g از G ماتریس وارون‌پذیر T_g وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$g\sigma = T_g^{-1}(g\rho)T_g$$

ثابت کنید که ماتریس وارون‌پذیری چون T وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$،

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$$

۴. فرض کنیم که χ سرشتی مخالف صفر و غیربدیهی از G است به‌طوری که به‌ازای هر gی متعلق به G مقدار $\chi(g)$ عددی حقیقی و مخالف صفر است. ثابت کنید که χ تحویل‌پذیر است.

۵. اگر χ سرشت G باشد، نشان دهید که

$$\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \chi(1)$$

۶. اگر π سرشت جایگشتی S_n باشد، ثابت کنید

$$\langle \pi, 1_{S_n} \rangle = 1$$

(راهنمایی: از تمرین ۴.۱۱ استفاده کنید.)

۷. فرض کنیم که χ_1، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند و

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k$$

سرشتی از G است. در هریک از حالاتی که $\langle\psi,\psi\rangle$ برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ است دربارهٔ اعداد صحیح d_i چه می‌توان گفت؟

۸. فرض کنیم که χ سرشت G باشد و به‌ازای هر $g \in G$، $\chi(g)$ عددی صحیح و زوج باشد. آیا نتیجه می‌شود که به‌ازای سرشتی مانند ϕ، $\chi = 2\phi$؟

۱۵

تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر

این فصل را به یک قضیه و چند نتیجهٔ آن اختصاص می‌دهیم. برطبق این قضیه تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه متناهی مساوی تعداد رده‌های مزدوجی گروه است. این قضیه همراه با مطالب فصل ۱۴، حاوی ابزار لازم برای مطالعهٔ سرشتهاست؛ در فصول باقیماندهٔ این کتاب از این ابزار استفاده می‌کنیم.

در سراسر این فصل، مطابق معمول G گروه متناهی است.

تابع رده‌ای

۱.۱۵ تعریف تابع رده‌ای روی G عبارت‌است از تابعی چون $\psi : G \to \mathbb{C}$ به‌قسمی که به‌ازای عناصر مزدوج x و y از G، $\psi(x) = \psi(y)$ (یعنی ψ روی رده‌های مزدوجی ثابت است).

بنابه گزارهٔ ۵.۱۳(۲) سرشتهای G تابع رده‌ای روی G هستند. C مجموعهٔ تمام توابع رده‌ای روی G زیرفضای فضای تمام توابع از G به $\mathbb{C}$ است. یک پایهٔ C عبارت‌است از مجموعهٔ توابعی که مقدارشان روی یکی از رده‌های مزدوجی ۱ و روی بقیهٔ رده‌های مزدوجی صفر است. از این‌رو

اگر l تعداد رده‌های مزدوجی باشد آنگاه

$$\dim C = l \qquad (۲.۱۵)$$

۳.۱۵ قضیه تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی G است.

برهان فرض کنیم χ_1، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند، و l تعداد رده‌های مزدوجی G باشد. طبق قضیهٔ ۲۳.۱۴، χ_1، ... ، χ_k عناصر خطی‌مستقل C هستند و لذا از (۲.۱۵) نتیجه می‌شود $k \leq l$.

برای اثبات نابرابری عکس یعنی $l \leq k$، $\mathbb{C}G$ـمدول منظم را در نظر می‌گیریم. اگر مجموعهٔ $\{V_1, \cdots, V_k\}$ مجموعهٔ کاملی از $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشد، بنابه قضیهٔ ۷.۸ می‌دانیم که

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

که به‌ازای هر i، W_i با مجموع مستقیم چند V_i یکریخت است. چون $\mathbb{C}G$ دارای عضو همانی ۱ است پس می‌توانیم بنویسیم

$$1 = f_1 + \cdots + f_k$$

که $f_i \in W_i$ و $1 \leq i \leq k$.

اکنون فرض کنیم $z \in Z(\mathbb{C}G)$، یعنی z متعلق به مرکز $\mathbb{C}G$ باشد. بنابه گزارهٔ ۱۴.۹، به‌ازای هر i، عددی چون $\lambda_i \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $v \in V_i$،

$$vz = \lambda_i v$$

از این‌رو به‌ازای هر $w \in W_i$، $wz = \lambda_i w$ و لذا

$$f_i z = \lambda_i f_i \qquad (1 \leq i \leq k)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} z = 1z = (f_1 + \cdots + f_k)z &= f_1 z + \cdots + f_k z \\ &= \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k \end{aligned}$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که $Z(\mathbb{C}G)$ زیرمجموعهٔ زیرفضایی از $\mathbb{C}G$ است که توسط f_1، ... ، f_k پدید می‌آید. چون بعد $Z(\mathbb{C}G)$ بنابه گزارهٔ ۲۲.۱۲ برابر با l است پس $l \leq k$. به این ترتیب اثبات تساوی $k = l$ به پایان می‌رسد. ■

۴.۱۵ نتیجه سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_۱$، . . . ، χ_k از G پایه‌ای برای فضای برداری تمام توابع رده‌ای روی G تشکیل می‌دهند. درواقع، اگر ψ تابع رده‌ای باشد آنگاه

$$\psi = \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i \chi_i$$

که به‌ازای $۱ \leq i \leq k$، $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$.

برهان چون $\chi_۱$، . . . ، χ_k استقلال خطی دارند، پس زیرفضایی از C با بعد k پدید می‌آورند. بنابه (۲.۱۵) داریم $\dim C = l$، که بنابه قضیهٔ ۳.۱۵، مساوی k است. از این‌رو $\chi_۱$، . . . ، χ_k فضای C را پدید می‌آورند و لذا تشکیل پایه‌ای برای C می‌دهند. قسمت آخر قضیه با استفاده از (۱۳.۱۴) نتیجه می‌شود. ■

از ۴.۱۵ گزارهٔ مفید زیر نتیجه می‌شود.

۵.۱۵ گزاره فرض کنیم که $g, h \in G$. در این صورت g مزدوج h است اگر و فقط اگر به‌ازای هر سرشت χ از G داشته باشیم $\chi(g) = \chi(h)$.

برهان اگر g مزدوج h باشد، بنا به گزارهٔ ۵.۱۳(۲) به‌ازای هر سرشت χ از G داریم $\chi(g) = \chi(h)$.

برعکس، فرض کنیم که به‌ازای هر سرشت χ داریم $\chi(g) = \chi(h)$. در این صورت بنا به نتیجهٔ ۴.۱۵، به‌ازای هر تابع رده‌ای ψ از G داریم $\psi(g) = \psi(h)$. لذا این مطلب به‌ازای تابع رده‌ای ψای که مقدارش روی ردهٔ مزدوجی g برابر ۱ و روی بقیهٔ رده‌ها برابر صفر است نیز درست است. بنابراین $\psi(g) = \psi(h) = ۱$ و لذا g مزدوج h است. ■

۶.۱۵ نتیجه فرض کنیم که $g \in G$. در این صورت g مزدوج $g^{-۱}$ است اگر و فقط اگر به‌ازای هر سرشت χ از G مقدار $\chi(g)$ حقیقی باشد.

برهان چون $\chi(g)$ حقیقی است اگر و فقط اگر $\chi(g) = \chi(g^{-۱})$ (گزارهٔ ۹.۱۳(۳) را ببینید)، حکم بلافاصله از گزارهٔ ۵.۱۵ نتیجه می‌شود. ■

این فصل را با مثالی به‌پایان می‌بریم که حاوی روشهایی عملی برای نوشتن سرشت و تابع رده‌ای گروه به‌صورت ترکیب سرشتهای تحویل‌ناپذیر است. مانند مثالهای قبل، سرشت χ از G را به‌صورت بردار سطری در نظر می‌گیریم که k درایهٔ آن مقادیر χ روی k ردهٔ مزدوجی G هستند.

۷.۱۵ مثال در قسمت ۴.۱۸ خواهیم دید که گروهی چون G با مرتبهٔ ۱۲ وجود دارد که دقیقاً ۶ ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_1، . . . ، g_6 (که $g_1 = 1$)، و ۶ سرشت تحویل‌ناپذیر χ_1، . . . ، χ_6 به‌صورت زیر دارد

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۱۲	۱۲	۶	۶	۴	۴
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	-1	-1	۱	i	$-i$
χ_3	۱	۱	۱	۱	-1	-1
χ_4	۱	-1	-1	۱	$-i$	i
χ_5	۲	۲	-1	-1	۰	۰
χ_6	۲	-2	۱	-1	۰	۰

فرض کنیم سرشتهای χ و ψ از G به‌صورت زیر داده شده باشند

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	۳	-3	۰	۰	i	$-i$
ψ	۴	۰	۰	۴	۰	۰

در این صورت به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\chi = \chi_2 + \chi_6 \quad \text{و} \quad \psi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$$

به‌عنوان مثال، درایهٔ دوم بردار سطری χ قرینهٔ درایهٔ اول است. با بررسی مقادیر سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i، می‌بینیم که χ باید ترکیبی از χ_2 و χ_4 و χ_6 باشد. اکنون جواب صحیح را به سرعت می‌توان حدس زد.

درواقع کار مشکلی نیست که برای هر سرشت مفروض ϕ از G که درجه‌اش نسبت به درجهٔ χ_iها بزرگ نباشد، با استفاده از چند حدس ϕ را به‌صورت ترکیبی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر بنویسیم. زیرا می‌دانیم ضرایب مربوطه اعداد صحیح نامنفی‌اند و درایه‌های ستون متناظر با $g_1 = 1$ اعداد صحیح مثبت‌اند (درواقع، این درایه‌ها درجهٔ χ_iها هستند).

توصیه می‌کنیم که با استفاده از «روش حدس» سرشتهای λ و μ از G را که در زیر داده شده‌اند به‌صورت ترکیبی از χ_1، . . . ، χ_6 بنویسید.

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$
λ	۲	-۲	-۲	۲	۰	۰
μ	۴	۴	۱	۱	۰	۰

اما با تابعی رده‌ای یا سرشتی پیچیده‌تر، مانند آنچه در زیر داده شده است چه می‌توان کرد؟

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$
ϕ	۱۱	۳	-۳	۵	$-۱+۲i$	$-۱-۲i$

جواب این است که از ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ می‌توان استفاده کرد. بنابه نتیجهٔ ۴.۱۵ می‌دانیم که ضرایب λ_i در عبارت

$$\phi = \lambda_۱\chi_۱ + \cdots + \lambda_۶\chi_۶$$

با فرمول زیر معین می‌شوند

$$\lambda_i = \langle \phi, \chi_i \rangle \qquad (۱ \leq i \leq ۶)$$

با استفاده ازگزارهٔ ۵.۱۴(۲) این حاصلضربهای داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle \phi, \chi_۱ \rangle = \frac{۱۱ \times ۱}{۱۲} + \frac{۳ \times ۱}{۱۲} + \frac{-۳ \times ۱}{۶} + \frac{۵ \times ۱}{۶} + \frac{(-۱ + ۲i) \times ۱}{۴} + \frac{(-۱ - ۲i) \times ۱}{۴} = ۱$$

$$\langle \phi, \chi_۲ \rangle = \frac{۱۱ \times ۱}{۱۲} + \frac{۳ \times (-۱)}{۱۲} + \frac{(-۳) \times (-۱)}{۶} + \frac{۵ \times ۱}{۶} + \frac{(-۱ + ۲i) \times (-i)}{۴} + \frac{(-۱ - ۲i) \times i}{۴} = ۳$$

$$\langle \phi, \chi_۳ \rangle = \frac{۱۱ \times ۱}{۱۲} + \frac{۳ \times ۱}{۱۲} + \frac{-۳ \times ۱}{۶} + \frac{۵ \times ۱}{۶} + \frac{(-۱ + ۲i) \times (-۱)}{۴} + \frac{(-۱ - ۲i) \times (-۱)}{۴} = ۲$$

و به‌همین نحو $\langle \phi, \chi_۴ \rangle = ۱$، $\langle \phi, \chi_۵ \rangle = ۲$ و $\langle \phi, \chi_۶ \rangle = ۰$. بنابراین

$$\phi = \chi_۱ + ۳\chi_۲ + ۲\chi_۳ + \chi_۴ + ۲\chi_۵$$

خلاصهٔ فصل ۱۵

۱. تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه مساوی تعداد رده‌های مزدوجی آن است.

۲. سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، … ، χ_k از گروه G پایه‌ای برای فضای برداری تمام توابع رده‌ای روی G تشکیل می‌دهند. اگر ψ تابع رده‌ای باشد آنگاه

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i \quad \text{که} \quad \lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$$

تمرینات فصل ۱۵

۱. سرشتهای تحویل‌ناپذیر S_3 عبارت‌اند از χ_1، χ_2، χ_3:

	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

گیریم χ تابع رده‌ای روی S_3 با مقادیر زیر باشد

	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ	19	-1	-2

χ را به‌صورت ترکیب خطی χ_1، χ_2 و χ_3 بنویسید. آیا χ سرشت S_3 است؟

۲. فرض کنیم ψ_1، ψ_2، ψ_3 توابع رده‌ای روی S_3 با مقادیر زیر باشند

	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
ψ_1	1	0	0
ψ_2	0	1	0
ψ_3	0	0	1

ψ_1، ψ_2، ψ_3 را به‌صورت ترکیب خطی سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، χ_2 و χ_3 از S_3 بنویسید.

۳. فرض کنیم G گروه مرتبهٔ ۱۲ مذکور در مثال ۷.۱۵ باشد. مانند آن مثال نماینده‌های رده‌های مزدوجی را g_1، … ، g_6 و سرشتهای تحویل‌ناپذیر را χ_1، … ، χ_6 می‌نامیم. گیریم ψ تابع رده‌ای روی G با مقادیر زیر باشد

	$g_{۱}$	$g_{۲}$	$a_{۳}$	$g_{۴}$	$g_{۵}$	$g_{۶}$
ψ	۶	۰	۳	-۳	$-۱-i$	$-۱+i$

ψ را به‌صورت ترکیب خطی $\chi_{۱}$، . . . ، $\chi_{۶}$ بنویسید. آیا ψ سرشت G است؟

۴. فرض کنیم G گروهی با مرتبهٔ ۱۲ است.

الف) نشان دهید که ممکن نیست G دقیقاً ۹ ردهٔ مزدوجی داشته باشد. (راهنمایی: نشان دهید که ممکن نیست مرتبهٔ $Z(G)$ برابر ۶ باشد.)

ب) با استفاده از جواب تمرین ۲.۱۱، ثابت کنید که تعداد رده‌های مزدوجی G برابر ۴، ۶ یا ۱۲ است. در هریک از این حالات گروه Gای با این تعداد ردهٔ مزدوجی بیابید.

۱۶

جدول سرشت و روابط تعامد

سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه متناهی G توابع رده‌ای هستند و تعداد آنها مساوی تعداد رده‌های مزدوجی G است. بنابراین بی‌مناسبت نیست که مقادیر تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G را در ماتریسی مربعی ثبت کنیم. چنین ماتریسی را جدول سرشت G می‌نامند. درایه‌های جدول سرشت روابط پیچیده‌ای با هم دارند که روابط تعامد (قضیهٔ ۴.۱۶) حاوی بسیاری از آنهاست. مقدار زیادی از مطالب بعدی این کتاب را به شناخت جدول سرشت اختصاص داده‌ایم. انگیزهٔ این کار قضیهٔ ۲۱.۱۴ است که می‌گوید هر $\mathbb{C}G$ـمدول با سرشتش معین می‌شود. بنابراین خیلی از مسائل نظریهٔ نمایشها با استفاده از سرشتها قابل حل‌اند.

جدول سرشت

۱.۱۶ تعریف فرض‌کنیم χ_1، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G و g_1، ... ، g_k نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. ماتریس $k \times k$ای را که درایهٔ ijی آن $\chi_i(g_j)$ (به‌ازای هر i و j که $1 \le i \le k$ و $1 \le j \le k$) است جدول سرشت G می‌نامند.

معمولاً سرشتهای تحویل‌ناپذیر و رده‌های مزدوجی G را چنان شماره‌گذاری می‌کنند که χ_1 برابر با 1_G یعنی سرشت بدیهی و g_1 برابر با ۱ یعنی عضو همانی G باشد. بجز این موارد، شماره‌گذاری

دلخواه است. توجه کنید که در جدول سرشت، شمارهٔ سطرها شمارهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G است و شمارهٔ ستونها شمارهٔ رده‌های مزدوجی (یا درواقع شمارهٔ نماینده‌های رده‌های مزدوجی) است.

۲.۱۶ گزاره جدول سرشت G ماتریسی وارون‌پذیر است.

برهان با استفاده از این واقعیت که سرشتهای تحویل‌ناپذیر G، و در نتیجه سطرهای جدول سرشت، استقلال خطی دارند (قضیهٔ ۲۳.۱۴) حکم ثابت می‌شود. ■

۳.۱۶ مثال (۱) فرض کنیم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. سرشتهای تحویل‌ناپذیر G در مثال ۶.۱۳(۴) داده شده‌اند. عناصر ۱ و a و b را به‌عنوان نماینده‌های رده‌های مزدوجی G در نظر می‌گیریم؛ در این صورت جدول سرشت G عبارت است از

	1	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

(۲) با استفاده از قضیهٔ ۸.۹ می‌توانیم جدول سرشت هر گروه آبلی متناهی را تشکیل دهیم. به‌عنوان مثال جدول سرشت $C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$ عبارت است از

	1	a
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

و جدول سرشت $C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$ عبارت است از

	1	a	a^2	
χ_1	1	1	1	
χ_2	1	ω	ω^2	$(\omega = e^{2\pi i/3})$
χ_3	1	ω^2	ω	

(۳) فرض کنیم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. در تمرین ۴.۱۰ کلیهٔ نمایشهای تحویل‌ناپذیر G را یافتید. رده‌های مزدوجی G در ۱۲.۱۲ داده شده‌اند و نماینده‌های آنها عبارت‌اند از ۱، a^2، a، b، ab. از این‌رو جدول سرشت G عبارت است از

	1	a^2	a	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

جدول سرشت تمام گروههای دووجهی را در فصل ۱۸ به‌دست می‌آوریم.

روابط تعامد

تاکنون موارد استفادهٔ زیادی از روابط (۱۳.۱۴) یعنی روابط زیر را

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \delta_{rs}$$

که بین سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، . . . ، χ_k از G برقرارند دیده‌ایم. این روابط را می‌توان برحسب درایه‌های سطرهای جدول سرشت به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

(گزارهٔ ۵.۱۴(۲) را ببینید). روابط مشابهی بین ستونهای جدول سرشت برقرار است که آنها را در قسمت دوم قضیهٔ بعدی آورده‌ایم.

۴.۱۶ قضیه فرض کنیم χ_1، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G و g_1، . . . ، g_k نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت روابط زیر به‌ازای هر $r, s \in \{1, \cdots, k\}$ برقرار است.

(۱) روابط تعامد سطری:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

(۲) روابط تعامد ستونی:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|$$

برهان روابط تعامد سطری را قبلاً ثابت کرده‌ایم. این روابط را فقط جهت مقایسه با روابط تعامد ستونی در اینجا آورده‌ایم.

به‌ازای هر $۱ \leq s \leq k$، فرض کنیم ψ_s تابع رده‌ای با ضابطهٔ زیر باشد

$$\psi_s(g_r) = \delta_{rs} \qquad (۱ \leq r \leq k)$$

بنابه نتیجهٔ ۴.۱۵، ψ_s ترکیب خطی $\chi_۱$، ... ، χ_k است، مثلاً

$$\psi_s = \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i \chi_i \qquad (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

می‌دانیم که $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ و لذا

$$\lambda_i = \langle \psi_s, \chi_i \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g) \overline{\chi_i(g)}$$

اکنون توجه کنید که هرگاه g مزدوج g_s باشد، $\psi_s(g) = ۱$ و در غیر این صورت، $\psi_s(g) = ۰$، همچنین بنابه قضیهٔ ۸.۱۲، تعداد عضوهایی از G که با g_s مزدوج‌اند برابر $|G|/|C_G(g_s)|$ است؛ از این‌رو

$$\lambda_i = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in g_s^G} \psi_s(g) \overline{\chi_i(g)} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|}$$

بنابراین

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=۱}^{k} \lambda_i \chi_i(g_r) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|}$$

و به این ترتیب روابط تعامد ستونی ثابت می‌شود. ■

۵.۱۶ مثال برقراری روابط تعامد ستونی را در مثالی نشان می‌دهیم.

(۱) گیریم $G = D_۶$. جدول سرشت G را از روی مثال ۳.۱۶(۱) می‌نویسیم و این‌بار مرتبهٔ مرکزساز $C_G(g_i)$ را زیر هر g_i ــکه g_iها نماینده‌های رده‌های مزدوجی هستندــ می‌آوریم

g_i	۱	a	b
$\|C_G(g_i)\|$	۶	۳	۲
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	-۱
$\chi_۳$	۲	-۱	۰

مجموع $\sum_{i=1}^{3} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}$ را در حالات مختلفی در نظر می‌گیریم:

$$r = 1, \quad s = 2: \quad 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$$

$$r = 2, \quad s = 2: \quad 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times (-1) = 3$$

$$r = 1, \quad s = 3: \quad 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 0 = 0$$

در هر حالت درایه‌های ستونهای r و s از جدول سرشت را از بالا به پایین نظیر به نظیر در هم ضرب می‌کنیم و حاصلضربها را با هم جمع می‌کنیم. حاصلجمع در صورتی‌که $r \neq s$، مساوی ۰ است و در صورتی‌که $r = s$، مساوی عدد نوشته شده در بالای ستون (یعنی مرتبهٔ مرکزساز g_r) است.

(۲) فرض کنیم که جدول زیر قسمتی از جدول سرشت گروه مرتبهٔ دوازده G باشد که دقیقاً چهار ردهٔ مزدوجی دارد

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۱۲	۴	۳	۳
χ_1	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	۱	ω	ω^2
χ_3	۱	۱	ω^2	ω
χ_4				

(که $\omega = e^{2\pi i/3}$). با استفاده از روابط تعامد ستونی، آخرین سطر جدول سرشت را می‌یابیم.

درایه‌های ستون اول جدول سرشت درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیرند و لذا اعداد صحیح مثبت‌اند. بنا به روابط تعامد ستونی در حالت $r = s = 1$ مجموع مربعات این اعداد مساوی ۱۲ است (این موضوع از قضیهٔ ۱۲.۱۱ نیز نتیجه می‌شود). از این‌رو آخرین درایهٔ ستون اول مساوی ۳ است.

فرض کنیم آخرین درایهٔ ستون دوم x است. از رابطهٔ تعامد ستونی

$$\sum_{i=1}^{4} \chi_i(g_1)\overline{\chi_i(g_2)} = 0$$

نتیجه می‌شود

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 3\overline{x} = 0$$

بنابراین $x = -1$.

با در نظرگرفتن روابط تعامد ستونی بین ستون اول و ستونهای سوم و چهارم، جدول سرشت به‌صورت زیر تکمیل می‌شود

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۴	۳	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	ω	$\omega^۲$
$\chi_۳$	۱	۱	$\omega^۲$	ω
$\chi_۴$	۳	-۱	۰	۰

با وجود اینکه در محاسبات خود از روابط تعامد ستونی بین ستون اول و هریک از ستونهای جدول استفاده کرده‌ایم ولی توجه داشته باشید که روابط تعامد ستونی بین هر جفت از ستونها برقرار است. به‌عنوان مثال،

$$\sum_{i=۱}^{۴} \chi_i(g_۲)\overline{\chi_i(g_۲)} = ۱\times۱+۱\times۱+۱\times۱+(-۱)\times(-۱)=۴$$

$$\sum_{i=۱}^{۴} \chi_i(g_۳)\overline{\chi_i(g_۳)} = ۱\times۱+\omega\times\overline{\omega}+\omega^۲\times\overline{\omega}^۲+۰\times۰=۳$$

$$\sum_{i=۱}^{۴} \chi_i(g_۳)\overline{\chi_i(g_۴)} = ۱\times۱+\omega\times\overline{\omega}^۲+\omega^۲\times\overline{\omega}+۰\times۰=۰$$

بعداً خواهیم دید که جدول سرشت فوق جدول $A_۴$ است.

از میان روابط تعامد ستونی، روابطی که یکی از دو ستون مربوط به آنها ستون اول جدول سرشت است در فصل ۱۳ ثابت شدند، زیرا با استفاده از قضیهٔ ۱۹.۱۳ و گزارهٔ ۲۰.۱۳ داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i\chi_i(g) = \begin{cases} |G| & \text{اگر } g=۱ \\ ۰ & \text{اگر } g\neq ۱ \end{cases}$$

که $d_i=\chi_i(۱)$. با مزدوج‌گیری از طرفین تساوی فوق به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۱}^{k} \chi_i(۱)\overline{\chi_i(g)} = \begin{cases} |G| & \text{اگر } g=۱ \\ ۰ & \text{اگر } g\neq ۱ \end{cases}$$

و روابط فوق دقیقاً روابط تعامد ستونیِ مربوط به ستون اول هستند.

سطر در مقابل ستون

توجه کنید که در مثال ۵.۱۶(۲)، که سه سرشت از چهار سرشت تحویل‌ناپذیر گروه G داده شده بود، مقادیر آخرین سرشت را یکی پس از دیگری با استفاده از روابط تعامد ستونی یافتیم. از راه دیگری نیز می‌توانستیم این کار را انجام دهیم، به این ترتیب که با استفاده از روابط تعامد سطری $\langle\chi_i, \chi_۴\rangle = \delta_{i۴}$ چهار معادله با چهار مجهول $\chi_۴(g_j)$ $(۱ \leq j \leq ۴)$ به‌دست آوریم. البته انجام دادن محاسبه با روابط تعامد ستونی آسانتر بود، اما درواقع روابط تعامد ستونی دقیقاً شامل همان اطلاعات حاصل از روابط تعامد سطری است. این موضوع را اکنون نشان می‌دهیم.

جدول سرشت G ماتریسی $k \times k$ است و با استفاده از درایه‌های این ماتریس، یعنی $\chi_i(g_j)$، ماتریس $k \times k$ی دیگری مانند M می‌سازیم که درایهٔ ijی آن مساوی

$$\frac{\chi_i(g_j)}{|C_G(g_j)|^{۱/۲}}$$

باشد. فرض کنیم $\overline{M}^t$ ترانهادهٔ مزدوج M باشد.

درایهٔ rs ماتریس $M\,\overline{M}^t$ با توجه به روابط تعامد سطری عبارت است از

$$\sum_{i=۱}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

و لذا $M\,\overline{M}^t = I$. درواقع رابطهٔ $M\,\overline{M}^t = I$ صورت دیگری از روابط تعامد سطری است. از طرف دیگر درایهٔ rs ماتریس $\overline{M}^t M$ با توجه به روابط تعامد ستونی عبارت است از

$$\frac{۱}{|C_G(g_r)|^{۱/۲}|C_G(g_s)|^{۱/۲}} \sum_{i=۱}^{k} \overline{\chi_i(g_r)}\chi_i(g_s) = \delta_{rs}$$

و لذا $\overline{M}^t M = I$.

می‌دانیم که اگر M ماتریس مربعی باشد، روابط $\overline{M}^t M = I$ و $M\overline{M}^t = I$ هم‌ارزند، در نتیجه روابط تعامد سطری و ستونی نیز هم‌ارزند.

می‌توانستیم روابط تعامد ستونی را با استفاده از استدلال فوق از روابط تعامد سطری نتیجه بگیریم. مهمتر اینکه روابط تعامد سطری و ستونی حاوی اطلاعات یکسان هستند و لذا هنگامی‌که با جدول سرشت کار می‌کنیم اطلاعات حاصل از هریک از این دو دسته رابطه یکسان است.

خلاصهٔ فصل ۱۶

فرض کنیم G گروهی متناهی است که سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن χ_1، . . . ، χ_k و نماینده‌های رده‌های مزدوجی آن g_1، . . . ، g_k است.

۱. جدول سرشت G ماتریسی $k \times k$ است که درایهٔ ijی آن $\chi_i(g_j)$ است.

۲. روابط تعامد سطری بیان می‌دارد که به‌ازای هر r و s،

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

۳. روابط تعامد ستونی بیان می‌دارد که به‌ازای هر r و s،

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|$$

تمرینات فصل ۱۶

۱. جدول سرشت $C_2 \times C_2$ را تشکیل دهید.

۲. می‌دانیم که گروه مرتبهٔ هشت G دارای پنج ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_1، . . . ، g_5 است و چهار سرشت از سرشتهای آن دارای مقادیر زیرند

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
$\|C_G(g_i)\|$	۸	۸	۴	۴	۴
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	۱	۱	۱-	۱-
χ_3	۱	۱	۱-	۱	۱-
χ_4	۱	۱	۱-	۱-	۱

جدول سرشت کامل G را پیدا کنید.

۳. گروهی چون G وجود دارد که مرتبه‌اش ۱۰ است و چهار ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_1، . . . ، g_4 دارد و سرشتهای تحویل‌ناپذیری چون χ_1 و χ_2 به‌صورت زیر دارد

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\|C_G(g_i)\|$	۱۰	۵	۵	۲
χ_1	۱	۱	۱	۱
χ_2	۲	α	β	۰

که $\alpha = (-1+\sqrt{5})/2$ و $\beta = (-1-\sqrt{5})/2$.

جدول سرشت کامل G را پیدا کنید.

(راهنمایی: ابتدا مقادیر بقیهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر را به‌ازای g_1 و سپس به‌ازای g_4 پیدا کنید ـــ از نتیجهٔ ۱۳.۱۰ استفاده کنید.)

۴. دو ستون از جدول سرشت گروهی چون G به‌صورت زیر است

g_i	g_1	g_2
$\|C_G(g_i)\|$	۲۱	۷
χ_1	۱	۱
χ_2	۱	۱
χ_3	۱	۱
χ_4	۳	ζ
χ_5	۳	$\bar{\zeta}$

که $g_1 = 1$ و $\zeta \in \mathbb{C}$.

الف) ζ را پیدا کنید.

ب) ستون دیگری از جدول سرشت را پیدا کنید.

۵. فرض کنیم χ_1، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند. نشان دهید که

$$Z(G) = \left\{ g \in G : \sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\overline{\chi_i(g)} = |G| \right\}$$

۶. فرض کنیم G گروهی متناهی است و نماینده‌های رده‌های مزدوجی آن g_1، ... ، g_k و جدول سرشت آن C است. نشان دهید که $\det C$ یا حقیقی است و یا موهومی محض است، و

$$|\det C|^2 = \prod_{i=1}^{k} |C_G(g_i)|$$

در حالتی که $G = C_3$، مقدار $\pm\det C$ را پیدا کنید.

۱۷

زیرگروه نرمال و سرشت ارتقاءیافته

اگر N زیرگروه نرمال گروه متناهی G باشد و $N \neq \{1\}$ آنگاه گروه خارج‌قسمتی G/N کوچکتر از G است. بنابراین پیداکردن سرشتهای G/N قاعدتاً ساده‌تر از پیداکردن سرشتهای G است. درواقع، با استفاده از روشی به‌نام ارتقاءدادن، می‌توانیم با استفاده از سرشتهای G/N تعدادی از سرشتهای G را بیابیم. از این رو زیرگروه نرمال در یافتن سرشتهای G به ما کمک می‌کند. عکس این موضوع نیز درست است، یعنی جدول سرشت G ما را قادر می‌سازد که زیرگروههای نرمال G را پیدا کنیم؛ لذا از جدول سرشت به‌سادگی می‌توان دانست که G ساده است یا نه.

سرشتهای خطی G (یعنی سرشتهای درجهٔ ۱) به‌وسیلهٔ ارتقاءدادن سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G/N در حالتی‌که N زیرگروه مشتق G است حاصل می‌شود. (زیرگروه مشتق در زیر در ۷.۱۷ تعریف شده است.) چنانکه بعداً شرح می‌دهیم از سرشتهای خطی نیز می‌توان استفاده کرد و از یک سرشت تحویل‌ناپذیر مفروض سرشت تحویل‌ناپذیر جدیدی به‌دست آورد.

سرشت ارتقاءیافته

در آغاز، چگونگی ساختن سرشت G با استفاده از سرشت G/N را شرح می‌دهیم.

۱.۱۷ گزاره فرض کنیم که $N \lhd G$ و $\widetilde{\chi}$ سرشت G/N است. تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \qquad (g \in G)$$

در این صورت χ سرشت G است و χ و $\widetilde{\chi}$ دارای درجات مساوی هستند.

برهان گیریم تابع $\widetilde{\rho} : G/N \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایش G/N با سرشت $\widetilde{\chi}$ باشد. تابع $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ که به‌وسیلهٔ ترکیب توابع در زیر تعریف شده است

$$g \to Ng \to (Ng)\widetilde{\rho} \qquad (g \in G)$$

همریختی از G به $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ است. از این‌رو ρ نمایش G است. سرشت χ از ρ به‌ازای هر $g \in G$ در روابط زیر صدق می‌کند

$$\chi(g) = \mathrm{tr}(g\rho) = \mathrm{tr}((Ng)\widetilde{\rho}) = \widetilde{\chi}(Ng)$$

به‌علاوه داریم $\chi(۱) = \widetilde{\chi}(N)$ و لذا χ و $\widetilde{\chi}$ دارای درجات مساوی‌اند. ■

۲.۱۷ تعریف اگر $N \lhd G$ و $\widetilde{\chi}$ سرشت G/N باشد، گوییم سرشت χ از G با تعریف

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \qquad (g \in G)$$

(حاصل) ارتقاء $\widetilde{\chi}$ به G است.

۳.۱۷ قضیه فرض کنیم که $N \lhd G$. با نسبت دادن هر سرشت G/N به حاصل ارتقائش به G، تناظری دوسویی بین مجموعهٔ سرشتهای G/N و مجموعهٔ سرشتهای χ از G که در شرط $N \leq \mathrm{Ker}\chi$ صدق می‌کنند حاصل می‌شود. سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/N با سرشتهای تحویل‌ناپذیری از G که N در هستهٔ آنهاست متناظرند.

برهان اگر $\widetilde{\chi}$ سرشت G/N و χ ارتقاء $\widetilde{\chi}$ به G باشد آنگاه $\chi(۱) = \widetilde{\chi}(N)$. همچنین اگر $k \in N$ آنگاه

$$\chi(k) = \widetilde{\chi}(Nk) = \widetilde{\chi}(N) = \chi(۱)$$

و لذا $N \leq \mathrm{Ker}\chi$.

اکنون فرض کنیم χ سرشت G با خاصیت $N \leq \text{Ker}\chi$ باشد. فرض کنیم $\rho : G \to \text{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایش G با سرشت χ باشد. اگر $g_۱, g_۲ \in G$ و $Ng_۱ = Ng_۲$ آنگاه $g_۱g_۲^{-۱} \in N$ و لذا $I = (g_۱g_۲^{-۱})\rho$، از این‌رو $g_۱\rho = g_۲\rho$. بنابراین می‌توانیم تابعی چون $\widetilde{\rho} : G/N \to \text{GL}(n, \mathbb{C})$ با ضابطهٔ

$$(Ng)\widetilde{\rho} = g\rho \qquad (g \in G)$$

تعریف کنیم. در این صورت به‌ازای هر $g, h \in G$،

$$\begin{aligned}((Ng)(Nh))\widetilde{\rho} &= (Ngh)\widetilde{\rho} = (gh)\rho = (g\rho)(h\rho)\\ &= ((Ng)\widetilde{\rho})((Nh)\widetilde{\rho})\end{aligned}$$

و لذا $\widetilde{\rho}$ نمایش G/N است. اگر $\widetilde{\chi}$ سرشت $\widetilde{\rho}$ باشد آنگاه

$$\widetilde{\chi}(Ng) = \chi(g) \qquad (g \in G)$$

بنابراین χ ارتقاء $\widetilde{\chi}$ به G است.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که تابعی که هر سرشت G/N را به ارتقائش به G نسبت می‌دهد تابعی دوسویی است بین مجموعهٔ سرشتهای G/N و مجموعهٔ سرشتهای G که N در هستهٔ آنهاست. لذا تنها کار باقیمانده این است که نشان دهیم سرشتهای تحویل‌ناپذیر متناظرند. برای این منظور، فرض کنیم که U زیرفضای $\mathbb{C}^n$ است. می‌دانیم که

$$u(g\rho) \in U, \forall u \in U \Leftrightarrow u(Ng)\widetilde{\rho} \in U, \forall u \in U$$

بنابراین U $\quad$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}^n$ است اگر و فقط اگر U $\quad$ $\mathbb{C}(G/N)$ـزیرمدول $\mathbb{C}^n$ باشد. بنابراین نمایش ρ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر نمایش $\widetilde{\rho}$ تحویل‌ناپذیر باشد. از این‌رو χ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\widetilde{\chi}$ تحویل‌ناپذیر باشد. ■

اگر N زیرگروه نرمال G باشد و جدول سرشت G/N را بدانیم، با استفاده از قضیهٔ ۳.۱۷ می‌توانیم به تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/N، برای G سرشت تحویل‌ناپذیر پیدا کنیم.

۴.۱۷ مثال گیریم $G = S_۴$ و

$$N = V_۴ = \{۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

لذا $N \lhd G$ (مثال ۲۰.۱۲ را ببینید). اگر قرار دهیم $a = N(۱\ ۲\ ۳)$ و $b = N(۱\ ۲)$ آنگاه

$$G/N = \langle a, b\rangle \text{ که } a^۳ = b^۲ = N \text{ و } b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

در نتیجه $G/N \cong D_۶$. با استفاده از مثال ۳.۱۶(۱) درمی‌یابیم که جدول سرشت G/N عبارت‌است از

	N	$N(۱\ ۲)$	$N(۱\ ۲\ ۳)$
$\tilde{\chi}_۱$	۱	۱	۱
$\tilde{\chi}_۲$	۱	-۱	۱
$\tilde{\chi}_۳$	۲	۰	-۱

ارتقاء $\tilde{\chi}$ را، که سرشت G/N است، با χ نشان می‌دهیم. برای محاسبهٔ مقادیر χ توجه کنید که

$$\chi((۱\ ۲)(۳\ ۴)) = \tilde{\chi}(N) \quad \text{زیرا} \quad (۱\ ۲)(۳\ ۴) \in N \quad \text{و}$$
$$\chi((۱\ ۲\ ۳\ ۴)) = \tilde{\chi}(N(۱\ ۳)) \quad \text{زیرا} \quad N(۱\ ۲\ ۳\ ۴) = N(۱\ ۳)$$

از این‌رو ارتقاء $\tilde{\chi}_۱$، $\tilde{\chi}_۲$، $\tilde{\chi}_۳$ به ترتیب عبارت‌است از $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$ که به‌صورت زیرند

	۱	$(۱\ ۲)$	$(۱\ ۲\ ۳)$	$(۱\ ۲)(۳\ ۴)$	$(۱\ ۲\ ۳\ ۴)$
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	۱	۱	-۱
$\chi_۳$	۲	۰	-۱	۲	۰

بنابراین $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند زیرا $\tilde{\chi}_۱$، $\tilde{\chi}_۲$، $\tilde{\chi}_۳$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/N هستند.

یافتن زیرگروههای نرمال

همچنانکه دوگزارهٔ بعدی نشان می‌دهند، از جدول سرشت می‌توان اطلاعاتی دربارهٔ ساختار گروه به‌دست آورد. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر جدول سرشت G معلوم باشد چگونه می‌توان تمام زیرگروههای نرمال G را پیدا کرد. ابتدا یادآوری می‌کنیم که به سادگی می‌توان هستهٔ سرشت تحویل‌ناپذیر χ را از جدول سرشت به‌دست آورد زیرا

$$\mathrm{Ker}\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(۱)\}$$

(تعریف ۱۳.۱۳ را ببینید). همچنین $\mathrm{Ker}\chi \lhd G$. روشن است که هر زیرگروه که اشتراک هسته‌های سرشتهای تحویل‌ناپذیر باشد نیز زیرگروه نرمال است. گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که هر زیرگروه نرمال اشتراک هسته‌های سرشتهایی تحویل‌ناپذیر است.

۵.۱۷ گزاره اگر $N \lhd G$، سرشتهای تحویل‌ناپذیری از G چون χ_1، ... ، χ_s وجود دارند به‌قسمی که

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i$$

برهان اگر g به هستهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G تعلق داشته باشد آنگاه به‌ازای هر سرشت χ داریم $\chi(g) = \chi(1)$ و لذا، بنابه گزارهٔ ۵.۱۵، $g = 1$. بنابراین اشتراک هسته‌های تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G مساوی $\{1\}$ است.

اکنون فرض کنیم $\widetilde{\chi}_1$، ... ، $\widetilde{\chi}_s$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/N باشند. بنابه آنچه در بالا گفتیم،

$$\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i = \{N\}$$

به‌ازای هر $1 \leq i \leq s$، فرض کنیم ارتقاء $\widetilde{\chi}_i$ به G مساوی χ_i باشد. اگر $g \in \mathrm{Ker}\chi_i$ آنگاه

$$\widetilde{\chi}_i(N) = \chi_i(1) = \chi_i(g) = \widetilde{\chi}_i(Ng)$$

و لذا $Ng \in \mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i$. بنابراین اگر $g \in \bigcap \mathrm{Ker}\chi_i$ آنگاه $Ng \in \bigcap \mathrm{Ker}\widetilde{\chi}_i = \{N\}$ و از این‌رو $g \in N$. در نتیجه

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\chi_i$$ ■

ساده‌بودن G را ساده‌تر می‌توان از جدول سرشت G استنتاج کرد:

۶.۱۷ گزاره گروه G ساده نیست اگر و فقط اگر به‌ازای سرشتی تحویل‌ناپذیر و غیربدیهی از G چون χ و عنصری غیرهمانی از G چون g داشته باشیم

$$\chi(g) = \chi(1)$$

برهان فرض کنیم که سرشت تحویل‌ناپذیر غیربدیهی χ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای عنصری غیرهمانی چون g، $\chi(g) = \chi(1)$. در این صورت $g \in \mathrm{Ker}\chi$ و لذا $\mathrm{Ker}\chi \neq \{1\}$. اگر ρ نمایش G با سرشت χ باشد آنگاه بنا به قضیهٔ ۱۱.۱۳(۲) داریم $\mathrm{Ker}\chi = \mathrm{Ker}\rho$. چون χ تحویل‌ناپذیر و غیربدیهی است پس $\mathrm{Ker}\rho \neq G$ و لذا $\mathrm{Ker}\chi \neq G$. بنابراین $\mathrm{Ker}\chi$ زیرگروه نرمال G است و مساوی $\{1\}$ یا G نیست، در نتیجه G ساده نیست.

به‌عکس، فرض کنیم که G ساده نیست، در این صورت زیرگروه نرمال N از G وجود دارد به‌قسمی که $N \neq \{1\}$ و $N \neq G$. از این‌رو بنابه گزارهٔ ۵.۱۷، سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G وجود دارد به‌قسمی که $\mathrm{Ker}\chi$ مساوی $\{1\}$ یا G نیست. از آنجا که $\mathrm{Ker}\chi \neq G$ پس χ غیربدیهی است؛ به‌علاوه اگر عنصری چون $g \neq 1$ از $\mathrm{Ker}\chi$ انتخاب شود آنگاه $\chi(1) = \chi(g)$. ■

سرشت خطی

یادآوری می‌کنیم که سرشت خطی گروه سرشتی با درجهٔ ۱ است. نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان تمام سرشتهای خطی گروه G را پیدا کرد، زیرا اولین قدم در جهت ساختن جدول سرشت گروه G معمولاً یافتن سرشتهای خطی است. برای یافتن این سرشتها ابتدا لازم است زیرگروه مشتق G را که تعریفش در زیر آمده تعیین کنیم.

۷.۱۷ تعریف فرض کنیم G گروه باشد و G' زیرگروهی از G باشد که توسط تمام عناصرِ به شکل

$$g^{-1}h^{-1}gh \quad (g, h \in G)$$

تولید می‌شود. در این صورت G' را زیرگروه مشتق G گویند.

عبارت $g^{-1}h^{-1}gh$ را به اختصار با $[g,h]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$G' = \langle [g,h] : g, h \in G \rangle$$

۸.۱۷ مثال (۱) اگر G آبلی باشد آنگاه به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم $[g,h] = 1$ و لذا $G' = \{1\}$.

(۲) فرض کنیم $G = S_3$. واضح است که $[g,h]$ همواره جایگشتی زوج است و لذا $G' \leq A_3$. اگر $g = (1\ 2)$ و $h = (2\ 3)$ آنگاه $[g,h] = (1\ 2\ 3)$. بنابراین $G' = \langle (1\ 2\ 3) \rangle = A_3$.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که $G' \lhd G$ و سرشتهای خطی G عبارت‌اند از ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/G' به G. گزارهٔ زیر گامی در اثبات این حکم است.

۹.۱۷ گزاره اگر χ سرشت خطی G باشد، $G' \leq \mathrm{Ker}\chi$.

برهان فرض کنیم χ سرشت خطی G است. در این صورت χ همریختی از G به گروه ضربی اعداد مختلط مخالف صفر است. بنابراین به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم

$$\chi(g^{-۱}h^{-۱}gh) = \chi(g)^{-۱}\chi(h)^{-۱}\chi(g)\chi(h) = ۱$$

از این‌رو $G' \leq \mathrm{Ker}\chi$. ∎

اکنون بعضی از خواص زیرگروه مشتق را بیان و اثبات می‌کنیم.

۱۰.۱۷ گزاره (۱) $G' \lhd G$.
(۲) اگر $N \lhd G$ آنگاه $G' \leq N$ اگر و فقط اگر G/N آبلی باشد. لذا G/G' آبلی است.

برهان (۱) توجه کنید که به‌ازای هر $a, b, x \in G$،

$$x^{-۱}(ab)x = (x^{-۱}ax)(x^{-۱}bx) \qquad \text{و} \qquad x^{-۱}a^{-۱}x = (x^{-۱}ax)^{-۱}$$

می‌دانیم که G' متشکل از حاصلضربهای عناصری به شکل $[g, h]$ و وارون آنهاست. بنابراین برای اثبات اینکه $G' \lhd G$، بنابه تساویهای بالا، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $g, h, x \in G$، $x^{-۱}[g, h]x \in G'$. اما

$$\begin{aligned} x^{-۱}[g, h]x &= x^{-۱}g^{-۱}h^{-۱}ghx \\ &= (x^{-۱}gx)^{-۱}(x^{-۱}hx)^{-۱}(x^{-۱}gx)(x^{-۱}hx) \\ &= [x^{-۱}gx, x^{-۱}hx] \end{aligned}$$

بنابراین $G' \lhd G$.
(۲) فرض کنیم $g, h \in G$. داریم

$$ghg^{-۱}h^{-۱} \in N \Leftrightarrow Ngh = Nhg \Leftrightarrow (Ng)(Nh) = (Nh)(Ng)$$

از این‌رو $G' \leq N$ اگر و فقط اگر G/N آبلی باشد. چون ثابت کرده‌ایم $G' \lhd G$ پس G/G' آبلی است. ∎

ازگزارهٔ ۱۰.۱۷ نتیجه می‌شود که G' کوچکترین زیرگروه نرمال از مجموعهٔ زیرگروههای نرمال G است که خارج‌قسمت G بر آنها آبلی است.

هرگاه زیرگروه مشتق G' معلوم باشد، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ بعدی سرشتهای خطی G را به‌دست آوریم.

۱۱.۱۷ قضیه سرشتهای خطی G دقیقاً ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/G' به G هستند. به‌ویژه، تعداد سرشتهای خطی متمایز G مساوی $|G/G'|$ است و لذا $|G|$ را عاد می‌کند.

برهان قرار می‌دهیم $m = |G/G'|$. چون G/G' آبلی است، بنابه قضیهٔ ۸.۹ گروه G/G' دقیقاً دارای m سرشت تحویل‌ناپذیر $\tilde{\chi}_۱$، ... ، $\tilde{\chi}_m$ است که درجهٔ همهٔ آنها ۱ است. اگر $\chi_۱$، ... ، χ_m ارتقاء این سرشتها به G باشند، درجهٔ آنها نیز ۱ است و بنابه قضیهٔ ۳.۱۷ این سرشتها دقیقاً سرشتهای تحویل‌ناپذیری از G هستند که G' در هسته‌شان است. لذا بنابه گزارهٔ ۹.۱۷، سرشتهای $\chi_۱$، ... ، χ_m عبارت‌اند از تمام سرشتهای خطی G. ■

۱۲.۱۷ مثال فرض کنیم $G = S_n$. می‌خواهیم نشان دهیم $G' = A_n$. اگر n مساوی ۱ یا ۲ باشد، S_n آبلی است و لذا $A_n = \{۱\} = G'$. در مثال ۸.۱۷(۲) ثابت کردیم که $S'_۴ = A_۴$، لذا فرض کنیم $n \geq ۴$.

چون $S_n/A_n \cong C_۲$، بنابه گزارهٔ ۱۰.۱۷(۲) داریم $G' \leq A_n$. اگر $g = (۱\ ۲)$ و $h = (۲\ ۳)$ و $k = (۱\ ۲)(۳\ ۴)$ آنگاه

$$[g, h] = (۱\ ۲\ ۳), \qquad [h, k] = (۱\ ۴)(۲\ ۳)$$

چون $G' \lhd G$، تمام عناصر $(۱\ ۲\ ۳)^G$ و $(۱\ ۴)(۲\ ۳)^G$ به G' تعلق دارند. بنابراین، طبق قضیهٔ ۱۵.۱۲، G' شامل تمام دورهای به طول ۳ و تمام عناصر با شاکلهٔ دوری $(۲, ۲)$ است. اما حاصلضرب هر دو ترانهشی مساوی عضو همانی، یا دوری به طول ۳، و یا عنصری با شاکلهٔ دوری $(۲, ۲)$ است، و A_n متشکل از جایگشتهایی است که هرکدام حاصلضرب ترانهشهایی به تعداد زوج است. بنابراین $A_n \leq G'$. لذا ثابت کرده‌ایم که $G' = A_n$.

۱۳.۱۷ مثال می‌خواهیم سرشتهای خطی S_n $(n > ۲)$ را پیدا کنیم. در مثال قبل دیدیم که $S'_n = A_n$. چون $S_n/S'_n = \{A_n, A_n(۱\ ۲)\} \cong C_۲$، گروه S_n/S'_n دارای دو سرشت خطی $\tilde{\chi}_۱$ و $\tilde{\chi}_۲$ است که

$$\tilde{\chi}_۱(A_n(۱\ ۲)) = ۱ \quad \text{و} \quad \tilde{\chi}_۲(A_n(۱\ ۲)) = -۱$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، S_n دقیقاً دارای دو سرشت خطی $\chi_۱$ و $\chi_۲$ است، که عبارت‌اند از

$$\chi_{۱} = ۱_{S_n}$$
$$\chi_{۲}(g) = \begin{cases} ۱ & g \in A_n \text{ اگر} \\ -۱ & g \notin A_n \text{ اگر} \end{cases}$$

اهمیت سرشت خطی G تنها در تحویل‌ناپذیری آن نیست، بلکه همچنانکه گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد می‌توان با استفاده از آن از یک سرشت تحویل‌ناپذیر مفروض سرشت تحویل‌ناپذیر دیگری به‌دست آورد.

۱۴.۱۷ گزاره فرض کنیم که χ سرشت G و λ سرشت خطی G است. در این صورت حاصلضرب $\chi\lambda$ با تعریف

$$\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g) \qquad (g \in G)$$

سرشت G است. به‌علاوه اگر χ تحویل‌ناپذیر باشد، $\chi\lambda$ نیز تحویل‌ناپذیر است.

برهان فرض کنیم $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ نمایشی با سرشت χ است. تابع $\rho\lambda : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g(\rho\lambda) = \lambda(g)(g\rho) \qquad (g \in G)$$

یعنی $g(\rho\lambda)$ عبارت است از حاصلضرب عدد مختلط $\lambda(g)$ در ماتریس $g\rho$. چون ρ و λ همریختی هستند به‌سادگی نتیجه می‌شود که $\rho\lambda$ نیز همریختی است. اثر ماتریس $g(\rho\lambda)$ مساوی $\lambda(g)\mathrm{tr}(g\rho)$ یعنی $\lambda(g)\chi(g)$ است. از این‌رو $\rho\lambda$ نمایش G با سرشت $\chi\lambda$ است.

حال توجه کنید که به‌ازای هر $g \in G$، عدد مختلط $\lambda(g)$ ریشهٔ واحد است، پس $\lambda(g)\overline{\lambda(g)} = ۱$. بنابراین

$$\begin{aligned} \langle \chi\lambda, \chi\lambda \rangle &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\lambda(g)\overline{\chi(g)\lambda(g)} \\ &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \langle \chi, \chi \rangle \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ ۲۰.۱۴ نتیجه می‌گیریم که $\chi\lambda$ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر χ تحویل‌ناپذیر باشد. ■

حالت کلی ضرب دو سرشت در فصل ۱۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

خلاصهٔ فصل ۱۷

۱. سرشتهای G/N با سرشتهایی از G که هسته‌شان شامل N است متناظرند. سرشتی چون χ از G که متناظر با سرشت $\widetilde{\chi}$ از G/N است ارتقاء $\widetilde{\chi}$ نامیده می‌شود و ضابطهٔ آن چنین است

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(Ng) \quad (\text{به‌ازای } g \in G)$$

۲. زیرگروههای نرمال G را با استفاده از جدول سرشت G می‌توان پیدا کرد.

۳. سرشتهای خطی G دقیقاً ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/G' به G هستند.

تمرینات فصل ۱۷

۱. فرض کنیم $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$

الف) پنج ردهٔ مزدوجی G را پیدا کنید.

ب) G' و تمام سرشتهای خطی G را بیابید.

ج) جدول سرشت G را به‌طور کامل بیابید.

جدول حاصل را با جدول سرشت D_8 (مثال ۳.۱۶(۳)) مقایسه کنید.

۲. فرض کنیم a و b جایگشتهای زیر از S_7 باشند

$$b = (2\ 3\ 5)(4\ 7\ 6) \quad \text{و} \quad a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

قرار می‌دهیم $G = \langle a, b\rangle$. نشان دهید که

$$a^7 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^2$$

الف) نشان دهید که مرتبهٔ G مساوی ۲۱ است.

ب) رده‌های مزدوجی G را پیدا کنید.

ج) جدول سرشت G را پیدا کنید.

۳. نشان دهید که هرگروه مرتبهٔ ۱۲ دارای ۳ یا ۴ یا ۱۲ سرشت خطی است و لذا ساده نیست.

۴. گروهی چون G که مرتبه‌اش ۱۲ است دقیقاً شش ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_1، ... ، g_6 دارد (که $g_1 = 1$)، و سرشتهای تحویل‌ناپذیری چون χ و ϕ با مقادیر زیر دارد

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ	1	$-i$	i	1	-1	-1
ϕ	2	0	0	-1	-1	2

با استفاده از گزارهٔ ۱۴.۱۷ جدول سرشت G را کامل کنید. اندازهٔ رده‌های مزدوجی G چقدر است؟

۵. جدول سرشت D_8 عبارت است از (مثال ۳.۱۶(۳) را ببینید)

	1	a^2	a, a^3	b, a^2b	ab, a^3b
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

هر زیرگروه نرمال D_8 را، مطابق گزارهٔ ۵.۱۷، به‌صورت اشتراک هسته‌های سرشتهای تحویل‌ناپذیر بنویسید.

۶. گروه $T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ با مرتبهٔ $4n$ مفروض است. (این گروه به گروه دودوری معروف است.)

الف) نشان دهید که اگر ε هر ریشه‌ای از ریشه‌های $2n$ام واحد در $\mathbb{C}$ باشد، نمایشی از T_{4n} روی $\mathbb{C}$ وجود دارد که تحت آن

$$a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^n & 0 \end{pmatrix}$$

ب) تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر T_{4n} را پیدا کنید.

۷. به‌ازای $n \geq 1$، گروه

$$U_{6n} = \langle a, b : a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

دارای مرتبهٔ $6n$ است.

الف) قرار دهید $\omega = e^{2\pi i/3}$. نشان دهید که اگر ε هر ریشه‌ای از ریشه‌های $2n$ام واحد در $\mathbb{C}$ باشد، نمایشی از U_{6n} روی $\mathbb{C}$ وجود دارد که تحت آن

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

ب) تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر U_{6n} را پیدا کنید.

۸. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت فرد باشد. گروه

$$V_{8n} = \langle a, b : a^{2n} = b^{4} = 1, ba = a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a = a^{-1}b \rangle$$

دارای مرتبهٔ $8n$ است.

الف) نشان دهید که اگر ε هر ریشه‌ای از ریشه‌های nام واحد در $\mathbb{C}$ باشد آنگاه نمایشی از V_{8n} روی $\mathbb{C}$ وجود دارد که تحت آن

$$a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب) تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر V_{8n} را پیدا کنید.

۱۸

چند جدول سرشت مقدماتی

اکنون با استفاده از روشهایی که تا به‌حال ارائه کرده‌ایم جدول سرشت چند گروه از جمله گروههای $S_۴$ و $A_۴$ و تمام گروههای دووجهی را پیدا می‌کنیم.

۱.۱۸ گروه $S_۴$

در مثال ۴.۱۷ سه سرشت تحویل‌ناپذیر $S_۴$، یعنی $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$ را با ارتقاء‌دادن سرشتهای تحویل‌ناپذیر $S_۴/V_۴$ به‌دست آوردیم. اکنون می‌خواهیم با استفاده از گزارهٔ ۱۴.۱۷ که دربارهٔ حاصلضرب یک سرشت در سرشتی خطی است جدول سرشت $S_۴$ را کامل کنیم.

فرض کنیم $\chi_۴$ تابع

$$\chi_۴(g) = |\mathrm{fix}(g)| - ۱ \qquad (g \in S_۴)$$

باشد که بنابه گزارهٔ ۲۴.۱۳ سرشت $S_۴$ است. بنابه گزارهٔ ۱۴.۱۷ حاصلضرب $\chi_۴\chi_۲$ نیز سرشت $S_۴$ است. مقادیر $\chi_۲$، $\chi_۴$ و $\chi_۴\chi_۲$ به قرار زیر است

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
$\chi_۲$	۱	-۱	۱	۱	-۱
$\chi_۴$	۳	۱	۰	-۱	-۱
$\chi_۴\chi_۲$	۳	-۱	۰	-۱	۱

توجه کنید که

$$\langle\chi_۴, \chi_۴\rangle = \frac{۹}{۲۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴} = ۱$$

و لذا $\chi_۴$ تحویل‌ناپذیر است. سرشت $\chi_۴\chi_۲$ نیز برطبق محاسبه‌ای مانند فوق و یا بنابه گزارهٔ ۱۴.۱۷ تحویل‌ناپذیر است. قرار می‌دهیم $\chi_۵ = \chi_۴\chi_۲$. چون $S_۴$ دارای پنج ردهٔ مزدوجی است و ما پنج سرشت تحویل‌ناپذیر آن را پیداکرده‌ایم، لذا جدول سرشت‌کامل $S_۴$ را پیداکرده‌ایم،که به‌صورت زیراست

جدول سرشت $S_۴$

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	۱	۱	-۱
$\chi_۳$	۲	۰	-۱	۲	۰
$\chi_۴$	۳	۱	۰	-۱	-۱
$\chi_۵$	۳	-۱	۰	-۱	۱

۲.۱۸ گروه $A_۴$

فرض کنیم G گروه $A_۴$ باشد، که گروه متناوب مرتبهٔ ۴ است. در این صورت $|G| = ۱۲$ و G دارای چهار ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های

$$۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۲\ ۳), (۱\ ۳\ ۲)$$

است (مثال ۱۸.۱۲(۱) را ببینید).

فرض کنید ν سرشت $A_۴$ حاصل از گزارهٔ ۲۴.۱۳ باشد، لذا به‌ازای هر $g \in A_۴$ داریم $\nu(g) = |\mathrm{fix}(g)| - ۱$. مقادیر ν به قرار زیر است

g_i	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۴	۳	۳
ν	۳	$-$۱	۰	۰

توجه کنید که چون

$$\langle \nu, \nu \rangle = \frac{۹}{۱۲} + \frac{۱}{۴} = ۱$$

پس ν سرشت تحویل‌ناپذیر G با درجهٔ ۳ است.

چون G دارای چهار سرشت تحویل‌ناپذیر است و مجموع مربعات درجات آنها مساوی ۱۲ است پس تعداد سرشتهای خطی G باید ۳ باشد. از این‌رو بنابه قضیهٔ ۱۱.۱۷ داریم $|G/G'| = ۳$. این مطلب را از طریق دیگری نیز به سادگی می‌توان استنتاج کرد، به این ترتیب که نشان دهیم

$$G' = V_۴ = \{۱, (۱\ ۲)(۳\ ۴), (۱\ ۳)(۲\ ۴), (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

بنابراین $G/G' = \{G', G'(۱\ ۲\ ۳), G'(۱\ ۳\ ۲)\} \cong C_۳$ و جدول سرشت G/G' چنین است

	G'	$G'(۱\ ۲\ ۳)$	$G'(۱\ ۳\ ۲)$
$\tilde{\chi}_۱$	۱	۱	۱
$\tilde{\chi}_۲$	۱	ω	$\omega^۲$
$\tilde{\chi}_۳$	۱	$\omega^۲$	ω

(که $\omega = e^{۲\pi i/۳}$). سرشت $\chi_۴ = \nu$ و سرشتهای حاصل از ارتقاء $\tilde{\chi}_۱$ و $\tilde{\chi}_۲$ و $\tilde{\chi}_۳$ به G تشکیل‌دهندهٔ جدول سرشت کامل $A_۴$ هستند:

جدول سرشت $A_۴$

g_i	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۴	۳	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	ω	$\omega^۲$
$\chi_۳$	۱	۱	$\omega^۲$	ω
$\chi_۴$	۳	$-$۱	۰	۰

۳.۱۸ گروه دووجهی

فرض کنید G گروه دووجهی D_{2n} با مرتبهٔ $2n$ است و $n \geq 3$. در این صورت

$$G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

می‌خواهیم جدول سرشت G را به‌دست آوریم.

می‌نویسیم $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. به‌ازای هر عدد صحیح j که $1 \leq j < n/2$، قرار می‌دهیم

$$A_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌توان نشان داد که

$$A_j^n = B_j^2 = I, \quad B_j^{-1} A_j B_j = A_j^{-1}$$

اگر تابع $\rho_j : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ را با ضابطهٔ

$$(a^r b^s)\rho_j = (A_j)^r (B_j)^s \quad (r, s \in \mathbb{Z})$$

تعریف کنیم آنگاه به‌ازای هر j که $1 \leq j < n/2$، ρ_j نمایش G خواهد بود.

با اثباتی نظیر اثبات مثال ۵.۵(۲) و یا با استفاده از تمرین ۴.۸، نتیجه می‌گیریم که هرکدام از ρ_jها تحویل‌ناپذیر است.

اگر i و j اعداد صحیح متمایز باشند و $1 \leq i < n/2$ و $1 \leq j < n/2$ آنگاه $\varepsilon^i \neq \varepsilon^j$ و $\varepsilon^i \neq \varepsilon^{-j}$ و لذا $a\rho_i$ و $a\rho_j$ دارای مقادیر ویژهٔ متفاوت‌اند. بنابراین هیچ ماتریسی مانند T با ویژگی $a\rho_i = T^{-1}(a\rho_j)T$ وجود ندارد و لذا ρ_i و ρ_j هم‌ارز نیستند.

فرض کنیم ψ_j سرشت ρ_j باشد. در این صورت به‌ازای jهایی که در شرط $1 \leq j < n/2$ صدق کنند، درواقع سرشتهای تحویل‌ناپذیر و مجزای G، یعنی ψ_jها، را به‌دست آورده‌ایم.

حال بهتر است حالتهای n فرد و n زوج را جداگانه بررسی کنیم.

حالت ۱: n فرد

بنابه ۱۱.۱۲ رده‌های مزدوجی D_{2n} (به‌ازای n فرد) عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{a^r, a^{-r}\} (1 \leq r \leq (n-1)/2), \{a^s b : 0 \leq s \leq n-1\}$$

بنابراین $(n+3)/2$ ردهٔ مزدوجی وجود دارد.

$(n-۱)/۲$ سرشت تحویل‌ناپذیر

$$\psi_۱, \psi_۲, \cdots, \psi_{(n-۱)/۲}$$

هرکدام دارای درجهٔ ۲ هستند. چون G دارای $(n+۳)/۲$ سرشت تحویل‌ناپذیر است پس دو سرشت دیگر آن را باید پیدا کنیم.

چون $G \lhd \langle a \rangle$ و $G/\langle a \rangle \cong C_۲$، با ارتقاءدادن سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G/\langle a \rangle$ به G دو سرشت خطی برای G به‌دست می‌آوریم. این سرشتها که آنها را $\chi_۱$ و $\chi_۲$ می‌نامیم عبارت‌اند از $\chi_۱ = ۱_G$ و

$$\chi_۲(g) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر به‌ازای } r \text{ای، } g = a^r \\ -۱ & \text{اگر به‌ازای } r \text{ای، } g = a^r b \end{cases}$$

اکنون تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر $D_{۲n}$ (به‌ازای n فرد) را یافته‌ایم. (ضمناً به این ترتیب، با توجه به قضیهٔ ۱۱.۱۷، ثابت کرده‌ایم که به‌ازای n فرد، $D'_{۲n} = \langle a \rangle$.)

بنابراین جدول سرشت $D_{۲n}$ (به‌ازای n فرد) به‌صورت زیر است (که در آن $\varepsilon = e^{۲\pi i/n}$)

g_i	۱	$a^r (۱ \le r \le (n-۱)/۲)$	b
$\lvert C_G(g_i) \rvert$	$۲n$	n	۲
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	-۱
ψ_j $(۱ \le j \le (n-۱)/۲)$	۲	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	۰

حالت ۲: n زوج

اگر n زوج باشد، یعنی $n = ۲m$، آنگاه طبق ۱۲.۱۲ رده‌های مزدوجی $D_{۲n}$ عبارت‌اند از

$$\{۱\}, \{a^m\}, \{a^r, a^{-r}\} \ (۱ \le r \le m-۱), \{a^s b : \text{زوج } s\}, \{a^s b : \text{فرد } s\}$$

از این‌رو G دارای $m+۳$ سرشت تحویل‌ناپذیر است که $(m-۱)$تای آنها عبارت‌اند از

$$\psi_۱, \psi_۲, \cdots, \psi_{m-۱}$$

برای یافتن چهار سرشت تحویل‌ناپذیر باقیمانده، ابتدا توجه کنید که گروه $\{a^j : \text{زوج } j\} = \langle a^{۲}\rangle$ زیرگروه نرمال G است و

$$G/\langle a^{۲}\rangle = \{\langle a^{۲}\rangle, \langle a^{۲}\rangle a, \langle a^{۲}\rangle b, \langle a^{۲}\rangle ab\}$$
$$\cong C_{۲} \times C_{۲}$$

بنابراین G دارای چهار سرشت خطی است که آنها را $\chi_{۱}$، $\chi_{۲}$، $\chi_{۳}$، $\chi_{۴}$ می‌نامیم (و $G' = \langle a^{۲}\rangle$). از آنجا که این سرشتهای خطی ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G/\langle a^{۲}\rangle$ هستند، به سادگی می‌توان مقادیرشان را محاسبه کرد. این مقادیر در جدول سرشت زیر که جدول سرشت کامل $D_{۲n}$ است (و در آن n زوج است و $n = ۲m$ و $\varepsilon = e^{۲\pi i/n}$) آمده‌اند.

g_i	۱	a^m	$a^r (۱ \leq r \leq m-۱)$	b	ab
$\vert C_G(g_i)\vert$	$۲n$	$۲n$	n	۴	۴
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\chi_{۳}$	۱	$(-۱)^m$	$(-۱)^r$	۱	-۱
$\chi_{۴}$	۱	$(-۱)^m$	$(-۱)^r$	-۱	۱
ψ_j $(۱ \leq j \leq m-۱)$	۲	$۲(-۱)^j$	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	۰	۰

۴.۱۸ گروه دیگری با مرتبهٔ ۱۲

اکنون گروهی ناآبلی چون G که دارای مرتبهٔ ۱۲ است و با $A_{۴}$ و یا $D_{۱۲}$ یکریخت نیست عرضه می‌کنیم و جدول سرشت آن را به‌دست می‌آوریم. درواقع معلوم شده که هر گروه ناآبلی مرتبهٔ ۱۲ با $A_{۴}$ یا $D_{۱۲}$ یا G یکریخت است، ولی این موضوع را در اینجا ثابت نخواهیم کرد.

فرض می‌کنیم a و b جایگشتهای زیر از $S_{۱۲}$ باشند

$$a = (۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶)(۷\ ۸\ ۹\ ۱۰\ ۱۱\ ۱۲)$$

$$b = (۱\ ۷\ ۴\ ۱۰)(۲\ ۱۲\ ۵\ ۹)(۳\ ۱۱\ ۶\ ۸)$$

و زیرگروه $G = \langle a, b\rangle$ از $S_{۱۲}$ را در نظر می‌گیریم. چون مرتبهٔ a مساوی ۶ است و $b \notin \langle a\rangle$ پس گروه G حداقل دارای ۱۲ عضو زیر است

$$a^r, a^r b \quad (۰ \leq r \leq ۵)$$

می‌توان نشان داد که a و b در روابط زیر صدق می‌کنند

$$a^۶ = ۱, a^۳ = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که هر عضو G به شکل $a^r b^s$ است که $۰ \leq r \leq ۵$ و $۰ \leq s \leq ۱$، یعنی اعضای G همان دوازده عضو مذکور در فوق هستند، و لذا $|G| = ۱۲$.

به‌علاوه از روابط فوق نتیجه می‌شود که

$$C_G(a) = \langle a\rangle, C_G(a^۳) = G, C_G(b) = \{۱, a^۳, b, a^۳b\}$$

روابط فوق و مطالب مشابه به ما کمک می‌کند که رده‌های مزدوجی G را به‌دست آوریم. این رده‌ها را در جدول زیر می‌آوریم

ردهٔ مزدوجی	نمایندهٔ هر رده g_i	$\|C_G(g_i)\|$
$\{۱\}$	۱	۱۲
$\{a^۳\}$	$a^۳$	۱۲
$\{a, a^{-۱}\}$	a	۶
$\{a^۲, a^{-۲}\}$	$a^۲$	۶
$\{b, a^۲b, a^۴b\}$	b	۴
$\{ab, a^۳b, a^۵b\}$	ab	۴

بنابراین G دارای شش سرشت تحویل‌ناپذیر است.

مشاهده می‌شود که $G \rhd \langle a^۲\rangle = \{۱, a^۲, a^۴\}$ و

$$G/\langle a^۲\rangle = \{\langle a^۲\rangle, \langle a^۲\rangle a, \langle a^۲\rangle b, \langle a^۲\rangle ab\}$$

که چون $\langle a^۲\rangle a = \langle a^۲\rangle b^۲$ پس $G/\langle a^۲\rangle \cong C_۴$. با ارتقاءدادن سرشتهای تحویل‌ناپذیر $C_۴$ به G سرشتهای خطی $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$، $\chi_۴$ از G به‌صورت زیر حاصل می‌شوند

g_i	۱	$a^۳$	a	$a^۲$	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۱۲	۶	۶	۴	۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	-۱	۱	i	$-i$
$\chi_۳$	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\chi_۴$	۱	-۱	-۱	۱	$-i$	i
$\chi_۵$	$\alpha_۱$	$\alpha_۲$	$\alpha_۳$	$\alpha_۴$	$\alpha_۵$	$\alpha_۶$
$\chi_۶$	$\beta_۱$	$\beta_۲$	$\beta_۳$	$\beta_۴$	$\beta_۵$	$\beta_۶$

تنها کاری که باقی مانده این است که مقادیر α_r و β_r مربوط به دو سرشت تحویل‌ناپذیر آخر یعنی $\chi_۵$ و $\chi_۶$ را پیدا کنیم. برای این کار از روابط تعامد ستونی، یعنی قضیهٔ ۴.۱۶(۲) استفاده می‌کنیم.

توجه کنید که $\alpha_۱$ و $\beta_۱$ درجات $\chi_۵$ و $\chi_۶$ هستند و لذا اعداد صحیح مثبت‌اند؛ همچنین $a^۳$ عضوی با مرتبهٔ ۲ است و لذا طبق نتیجهٔ ۱۳.۱۰، $\alpha_۲$ و $\beta_۲$ اعداد صحیح‌اند. با استفاده از روابط تعامد ستونی در مورد ستونهای ۱ و ۲ داریم

$$۴ + \alpha_۱^۲ + \beta_۱^۲ = ۱۲$$
$$۴ + \alpha_۲^۲ + \beta_۲^۲ = ۱۲$$
$$\alpha_۱\alpha_۲ + \beta_۱\beta_۲ = ۰$$

چون $\alpha_۱$ و $\beta_۱$ اعداد صحیح مثبت‌اند، از معادلهٔ اول حاصل می‌شود $\alpha_۱ = \beta_۱ = ۲$. بنابراین از دو معادلهٔ دیگر حاصل می‌شود $\alpha_۲ = -\beta_۲ = \pm ۲$. چون هنوز فرقی بین $\chi_۵$ و $\chi_۶$ قائل نشده‌ایم، می‌توانیم فرض کنیم $\alpha_۲ = ۲$ و $\beta_۲ = -۲$.

به‌ازای $r > ۲$، از روابط تعامد ستونی

$$\sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_۱)} = ۰$$
$$\sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_۲)} = ۰$$

دو معادله یکی شامل $۲\alpha_r + ۲\beta_r$ و یکی شامل $۲\alpha_r - ۲\beta_r$ حاصل می‌شود و لذا می‌توان α_r

و β_r را پیدا کرد. این معادلات چنین‌اند

$$
\begin{array}{lll}
r=3: & 2\alpha_3+2\beta_3=0, & 4+2\alpha_3-2\beta_3=0 \\
r=4: & 4+2\alpha_4+2\beta_4=0, & 2\alpha_4-2\beta_4=0 \\
r=5: & 2\alpha_5+2\beta_5=0, & 2\alpha_5-2\beta_5=0 \\
r=6: & 2\alpha_6+2\beta_6=0, & 2\alpha_6-2\beta_6=0
\end{array}
$$

از این‌رو

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_3=-1, & \beta_3=1 \\
\alpha_4=-1, & \beta_4=-1 \\
\alpha_5=0, & \beta_5=0 \\
\alpha_6=0, & \beta_6=0
\end{array}
$$

بنابراین جدول سرشت کامل G به‌صورت زیر است

g_i	1	a^3	a	a^2	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	12	6	6	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	1	i	$-i$
χ_3	1	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	$-i$	i
χ_5	2	2	-1	-1	0	0
χ_6	2	-2	1	-1	0	0

از آنجا که جدول سرشت G با جدولهای سرشت A_4 و D_{12} تفاوت دارد نتیجه می‌گیریم که G با A_4 یا D_{12} یکریخت نیست.

تذکر این مطلب آموزنده است که دو سرشت تحویل‌ناپذیر آخر G به سادگی با استفاده از روابط تعامد و بدون ساختن $\mathbb{C}G$ـمدولهای متناظر حاصل شدند. این محاسبات نمونه‌ای از محاسبات پیشرفته‌تر است، و نشان‌دهندهٔ این واقعیت است که معمولاً به‌دست آوردن سرشت تحویل‌ناپذیر گروه G از به‌دست آوردن نمایش تحویل‌ناپذیر آن خیلی آسانتر است. (البته به‌دست آوردن نمایشهایی از گروه فوق با سرشتهای χ_5 و χ_6 مشکل نیست؛ تمرین ۶.۱۷ را ببینید.)

خلاصهٔ فصل ۱۸

در این فصل جدول سرشت چند گروه را به‌دست آوردیم:

۱. بخش ۱.۱۸: گروه $S_۴$،

۲. بخش ۲.۱۸: گروه $A_۴$،

۳. بخش ۳.۱۸: گروه دووجهی.

تمرینات فصل ۱۸

۱. $D_۸$ را زیرگروه $S_۴$ متشکل از جایگشتهایی از چهار رأس یک مربع، مانند مثال ۱.۱(۳)، تلقی کنید. فرض کنید π سرشت جایگشتی $D_۸$ باشد. مقادیر π را به‌ازای عناصر $D_۸$ پیدا کنید و π را به‌صورت مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیر بنویسید.

۲. جدول سرشت $D_{۱۲}$ را به‌طور کامل به‌دست آورید و نشان دهید که تمام درایه‌های آن اعداد صحیح هستند.

با استفاده از جدول سرشت، هفت زیرگروه نرمال متمایز $D_{۱۲}$ را پیدا کنید. (راهنمایی: از گزارهٔ ۵.۱۷ استفاده کنید.)

۳. مانند تمرین ۶.۱۷، فرض کنیم $G = T_{۴n} = \langle a, b \,:\, a^{۲n} = ۱, a^n = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$. جدول سرشت G را پیدا کنید. (راهنمایی: از تمرین ۶.۱۷ استفاده کنید. بهتر است حالتهای n فرد و n زوج را جداگانه در نظر بگیرید.)

۴. مانند تمرین ۷.۱۷، فرض کنیم $G = U_{۶n} = \langle a, b \,:\, a^{۲n} = b^۳ = ۱, a^{-۱}ba = b^{-۱}\rangle$. جدول سرشت G را پیدا کنید.

۵. مانند تمرین ۸.۱۷، فرض کنیم

$$G = V_{۸n} = \langle a, b : a^{۲n} = b^۴ = ۱, ba = a^{-۱}b^{-۱}, b^{-۱}a = a^{-۱}b\rangle$$

که n فرد است. جدول سرشت G را پیدا کنید.

۱۹

ضرب تانسوری

ایدهٔ ضرب سرشتهای گروه G در سرشتهای خطیِ آن در آخر فصل ۱۷ مطرح شد؛ می‌توان این کار را در مورد هر جفت سرشت χ و ψ انجام داد. مقدار حاصلضرب $\chi\psi$ به‌ازای عنصر g از G عبارت است از $\chi(g)\psi(g)$. بنابراین محاسبهٔ این حاصلضرب آسان است، اما رسیدن به این نتیجه که $\chi\psi$ سرشت G است مستلزم قدری ابتکار است. نقشهٔ کار این است که $\mathbb{C}G$ـمدولهای V و W را به ترتیب با سرشتهای χ و ψ در نظر بگیریم و سپس آنها را روی هم بگذاریم و $\mathbb{C}G$ـمدول جدیدی، که آن را ضرب تانسوری V و W می‌نامیم، بسازیم که دارای سرشت $\chi\psi$ است.

یکی از حالات خاص و مهم $\chi\psi$ حالت تساوی χ و ψ است، لذا سرشت χ^{2} و به‌طور کلی χ^{3} و χ^{4} و غیره را نیز در نظر می‌گیریم. اگر χ خطی نباشد، درجات χ، χ^{2}، ... زیاد می‌شوند و لذا با در نظر گرفتن توانهای متوالی χ، هرقدر که بخواهیم سرشتهای جدید به‌دست می‌آوریم. در این صورت، بالقوه این امکان را داریم که قسمت بزرگی از جدول سرشت G را با استفاده از فقط یک سرشت غیرخطی G بسازیم، و درواقع، ضرب سرشتها وسیلهٔ خیلی خوبی است برای یافتن سرشتهای جدید با استفاده از سرشتهای معلوم. این مطلب را با یافتن جداول سرشت S_5 و S_6 نشان می‌دهیم.

در آخر فصل، ضرب تانسوری را به‌طریق متفاوتی به‌کار می‌بریم و تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر

حاصلضرب مستقیم $G \times H$ را با استفاده از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G و H به‌دست می‌آوریم.

فضای ضرب تانسوری

فرض کنیم V فضای برداری روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ v_1، ... ، v_m و W فضای برداری روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ w_1، ... ، w_n باشد. به‌ازای هر i و j که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، عبارتی به شکل $v_i \otimes w_j$ را در نظر می‌گیریم. فضای ضرب تانسوری $V \otimes W$ عبارت است از فضای برداری mn بعدی روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

بنابراین $V \otimes W$ متشکل از تمام عبارات به شکل

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j) \qquad (\lambda_{ij} \in \mathbb{C})$$

است. به‌ازای عنصری چون $v \in V$ و عنصری چون $w \in W$ که به‌صورت $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ و $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$ باشند (که $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$) عنصر $v \otimes w \in V \otimes W$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$$

به‌عنوان مثال

$$(2v_1 - v_2) \otimes (w_1 + w_2) = 2v_1 \otimes w_1 + 2v_1 \otimes w_2 - v_2 \otimes w_1 - v_2 \otimes w_2$$

از نمادگذاری فوق نباید دچار این اشتباه شد که هر عنصر $V \otimes W$ به شکل $v \otimes w$ است، زیرا چنین نیست. مثلاً، نوشتن عبارت

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2$$

به شکل $v \otimes w$ غیرممکن است.

۱.۱۹ گزاره (۱) اگر $v \in V$، $w \in W$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ آنگاه

$$v \otimes (\lambda w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda (v \otimes w)$$

(۲) اگر $x_1, \cdots, x_a \in V$ و $y_1, \cdots, y_b \in W$ آنگاه

$$\left(\sum_{i=1}^{a} x_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{b} y_i\right) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j$$

برهان (۱) قرار دهید $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ و $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$. در این صورت

$$v \otimes (\lambda w) = \left(\sum_i \lambda_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j \lambda \mu_j w_j\right) = \sum_{i,j} \lambda\lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$$

$$(\lambda v) \otimes w = \left(\sum_i \lambda\lambda_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j \mu_j w_j\right) = \sum_{i,j} \lambda\lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$$

$$\lambda(v \otimes w) = \lambda \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j) = \sum_{i,j} \lambda\lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$$

بنابراین $v \otimes (\lambda w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$.

اثبات قسمت دوم به همین سادگی است و آن را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ■

کار ساختن $V \otimes W$ در بالا به پایه‌هایی که برای V و W انتخاب کردیم بستگی داشت، گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که همهٔ پایه‌ها از این لحاظ یکسان‌اند.

۲.۱۹ گزاره اگر $e_1, \ldots, e_m$ پایهٔ V و $f_1, \ldots, f_n$ پایهٔ W باشد آنگاه عناصر مجموعهٔ $\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ پایه‌ای برای $V \otimes W$ تشکیل می‌دهد.

برهان می‌نویسیم

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} e_k, \qquad w_j = \sum_{l=1}^{n} \mu_{jl} f_l, \ (\lambda_{ik}, \mu_{jl} \in \mathbb{C})$$

در این صورت بنابه گزارهٔ ۱.۱۹،

$$v_i \otimes w_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \mu_{jl} (e_k \otimes f_l)$$

چون عناصر $v_i \otimes w_j$ ($1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$) تشکیل‌دهندهٔ پایهٔ $V \otimes W$ هستند پس mn عنصر $e_k \otimes f_l$ ($1 \leq k \leq m$، $1 \leq l \leq n$) فضای $V \otimes W$ را پدید می‌آورند و چون بعد $V \otimes W$ مساوی mn است پس عناصر $e_k \otimes f_l$ تشکیل‌دهندهٔ پایه‌ای برای $V \otimes W$ هستند. ■

مدول ضرب تانسوری

ضرب تانسوری دوفضای برداری را تعریف کردیم، اکنون می‌توانیم ضرب تانسوری دو $\mathbb{C}G$ـمدول را تعریف کنیم.

فرض کنیم G گروه متناهی و V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1، . . . ، v_m و W $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ w_1، . . . ، w_n باشد. می‌دانیم که عناصر

$$v_i \otimes w_j \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

پایه‌ای برای $V \otimes W$ تشکیل می‌دهند. حاصلضرب عنصری از G را در $v_i \otimes w_j$ به‌صورت سادهٔ زیر تعریف می‌کنیم و سپس این تعریف را به‌طور خطی به تمام عناصر $V \otimes W$ توسیع می‌دهیم.

۳.۱۹ تعریف فرض کنیم $g \in G$. به‌ازای هر i و j تعریف می‌کنیم

$$(v_i \otimes w_j)g = v_i g \otimes w_j g$$

و به‌طور کلی تعریف می‌کنیم

$$\Big(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)\Big)g = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes w_j g)$$

که λ_{ij}ها اعداد مختلط دلخواه هستند.

۴.۱۹ گزاره به‌ازای هر $v \in V$ و $w \in W$ و $g \in G$،

$$(v \otimes w)g = vg \otimes wg$$

برهان قرار می‌دهیم $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ و $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$. در این صورت

$$(v \otimes w)g = \Big(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)\Big)g \quad \text{(بنابه گزارهٔ ۱.۱۹)}$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i g \otimes w_j g)$$

$$= \Big(\sum_i \lambda_i v_i g\Big) \otimes \Big(\sum_j \mu_j w_j g\Big) \quad \text{(بنابه گزارهٔ ۱.۱۹)}$$

$$= vg \otimes wg$$

■

تذکر می‌دهیم که برای اغلب عناصر r از $\mathbb{C}G$ داریم $(v \otimes w)r \neq vr \otimes wr$. به‌عنوان مثال ببینید درحالتی که r حاصلضرب یک اسکالر در g است چه پیش می‌آید.

۵.۱۹ گزاره با قاعدهٔ ضرب عناصر $V \otimes W$ در عناصر G که در تعریف ۳.۱۹ آمده است، فضای برداری $V \otimes W$ به $\mathbb{C}G$ـمدول تبدیل می‌شود.

برهان فرض کنید $1 \leq i \leq m$، $1 \leq j \leq n$، و $g, h \in G$. در این صورت

$$(v_i \otimes w_j)g = v_i g \otimes w_j g \in V \otimes W$$

$$\begin{aligned}(v_i \otimes w_j)(gh) &= v_i(gh) \otimes w_j(gh) \\ &= (v_i g)h \otimes (w_j g)h \\ &= (v_i g \otimes w_j g)h \qquad (\text{بنابه گزارهٔ ۴.۱۹}) \\ &= ((v_i \otimes w_j)g)h\end{aligned}$$

$$(v_i \otimes w_j)1 = v_i \otimes w_j$$

و

$$\Big(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)\Big)g = \sum_{i,j} \lambda_{ij}((v_i \otimes w_j)g)$$

بنابراین تمام شرایط گزارهٔ ۶.۴ برقرارند و لذا $V \otimes W$ $\mathbb{C}G$ـمدول است. ■

اکنون سرشت $V \otimes W$ را به‌دست می‌آوریم.

۶.۱۹ گزاره فرض کنیم V و W $\mathbb{C}G$ـمدول و به ترتیب دارای سرشتهای χ و ψ باشند. در این صورت سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $V \otimes W$ عبارت است از حاصلضرب $\chi\psi$، که

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g) \qquad \text{به‌ازای هر } g \in G$$

برهان فرض کنیم $g \in G$. طبق گزارهٔ ۱۱.۹ می‌توانیم پایهٔ e_1، ... ، e_m را برای V و پایهٔ f_1، ... ، f_n را برای W به‌قسمی انتخاب کنیم که

$$e_i g = \lambda_i e_i \quad (1 \leq i \leq m) \qquad \text{و} \qquad f_j g = \mu_j f_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

که λ_i و μ_j اعداد مختلط هستند. در این صورت

$$\chi(g) = \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i, \qquad \psi(g) = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j.$$

اما به‌ازای $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq n$ داریم

$$(e_i \otimes f_j)g = e_i g \otimes f_j g = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)$$

و بنابه گزارهٔ ۲.۱۹ بردارهای $e_i \otimes f_j$ تشکیل پایه‌ای برای $V \otimes W$ می‌دهند. از این‌رو اگر ϕ سرشت $V \otimes W$ باشد آنگاه

$$\phi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_j \mu_j\right) = \chi(g)\psi(g)$$

و لذا حکم ثابت شده است. ■

۷.۱۹ نتیجه حاصلضرب دو سرشت G خود سرشتی از G است.

۸.۱۹ مثال جدول سرشت $S_۴$ در بخش ۱.۱۸ داده شده است. این جدول را دوباره در اینجا می‌آوریم و $\chi_۳\chi_۴$ و $\chi_۴\chi_۴$ را به‌دست می‌آوریم.

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱−	۱	۱	۱−
$\chi_۳$	۲	۰	۱−	۲	۰
$\chi_۴$	۳	۱	۰	۱−	۱−
$\chi_۵$	۳	۱−	۰	۱−	۱
$\chi_۳\chi_۴$	۶	۰	۰	۲−	۰
$\chi_۴\chi_۴$	۹	۱	۰	۱	۱

می‌بینیم که $\chi_۳\chi_۴ = \chi_۴ + \chi_۵$ و $\chi_۴\chi_۴ = \chi_۱ + \chi_۳ + \chi_۴ + \chi_۵$.

توانهای سرشت

نتیجهٔ ۷.۱۹ نشان می‌دهد که اگر χ سرشت G باشد، $\chi^۲$ نیز سرشت G است، که $\chi^۲$ ضرب χ در خودش است، یعنی $\chi^۲ = \chi\chi$. در حالت کلی به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی n، χ^n را چنین تعریف می‌کنیم

$$\chi^n(g) = (\chi(g))^n \qquad \text{به‌ازای هر } g \in G$$

از این‌رو $\chi^۰ = ۱_G$. با استفاده از استقرا و نتیجهٔ ۷.۱۹ می‌توان نشان داد که χ^n سرشت G است. اگر χ سرشتی صادق باشد (یعنی $\mathrm{Ker}\chi = \{۱\}$)، توانهای χ حاوی اطلاعات زیادی دربارهٔ تمام جدول سرشت G هستند، که این مطلب را در قضیهٔ ۱۰.۱۹ در زیر خواهیم دید.

برای اثبات قضیهٔ ۱۰.۱۹، به حکم زیر دربارهٔ ماتریس موسوم به «ماتریس واندرموند» نیاز خواهیم داشت.

۹.۱۹ اگر $\alpha_۱$، . . . ، α_r اعداد مختلط متمایز باشند آنگاه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & \alpha_۱ & \alpha_۱^۲ & \cdots & \alpha_۱^{r-۱} \\ ۱ & \alpha_۲ & \alpha_۲^۲ & \cdots & \alpha_۲^{r-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & \alpha_r & \alpha_r^۲ & \cdots & \alpha_r^{r-۱} \end{pmatrix}$$

وارون‌پذیر است.

خلاصهٔ اثبات این حکم را ارائه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که $x_۱$، . . . ، x_r متغیرهای دلخواه هستند و دترمینان زیر را درنظر می‌گیریم

$$\triangle = \det \begin{pmatrix} ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \cdots & x_۱^{r-۱} \\ ۱ & x_۲ & x_۲^۲ & \cdots & x_۲^{r-۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & x_r & x_r^۲ & \cdots & x_r^{r-۱} \end{pmatrix}$$

اگر $j \neq i$ و $x_i = x_j$ آنگاه دو سطر ماتریس فوق مساوی هستند و لذا $\triangle = ۰$. نتیجه می‌گیریم

که △ مضرب

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_r)$$
$$\times\ (x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_r)$$
$$\vdots$$
$$\times\ (x_{r-1} - x_r)$$

است. اکنون توجه کنید که ضریب $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\cdots x_{r-1}$ در حاصلضرب فوق مساوی ۱ است: زیرا چنانکه از نمایش حاصلضرب فوق پیداست، جملهٔ x_1^{r-1} باید از تمام عوامل سطر اول حاصل شود، جملهٔ x_2^{r-2} باید از تمام عوامل سطر دوم حاصل شود و غیره. از طرف دیگر، برای به‌دست آوردن $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\cdots x_{r-1}$ در بسط دترمینان △، باید x_1^{r-1} را از سطر اول ماتریس بگیریم، x_2^{r-2} را از سطر دوم بگیریم و غیره. از این‌رو ضریب $x_1^{r-1}x_2^{r-2}\cdots x_{r-1}$ در △ مساوی ± 1 است. پس نتیجه می‌گیریم که $\Delta = \pm\Pi_{i<j}(x_i - x_j)$.

برای استنتاج ۹.۱۹ به‌جای x_i قرار می‌دهیم α_i (به ازای $1 \leq i \leq r$) و نتیجه می‌گیریم که ماتریس A وارون‌پذیر است زیرا دترمینان آن مخالف صفر است.

۱۰.۱۹ قضیه فرض کنیم χ سرشت صادق G است و به‌ازای gهای متعلق به G مجموعهٔ $\chi(g)$ها دارای r مقدار متفاوت است. در این صورت هر سرشت تحویل‌ناپذیر G سازای یکی از توانهای χ^0، χ^1، . . . ، χ^{r-1} است.

برهان فرض می‌کنیم r مقدار χ عبارت‌اند از α_1، . . . ، α_r و به‌ازای $1 \leq i \leq r$ قرار می‌دهیم

$$G_i = \{g \in G : \chi(g) = \alpha_i\}$$

فرض می‌کنیم $\alpha_1 = \chi(1)$. دراین صورت $G_1 = \mathrm{Ker}\chi$. چون χ صادق است پس $G_1 = \{1\}$.

اکنون فرض می‌کنیم ψ سرشت تحویل‌ناپذیری از G است. باید نشان دهیم که به‌ازای jای، که $0 \leq j \leq r-1$، داریم $\langle\chi^j, \psi\rangle \neq 0$:

به‌ازای $1 \leq i \leq r$ قرار می‌دهیم

$$\beta_i = \sum_{g\in G_i} \overline{\psi(g)}$$

و متذکر می‌شویم که $\beta_1 = \psi(1) \neq 0$. در این صورت به‌ازای هر $j \geq 0$ داریم

$$\langle \chi^j, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi(g))^j \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i)^j \beta_i$$

فرض کنیم A ماتریسی $r \times r$ باشد که درایهٔ ijاش $(\alpha_i)^{j-1}$ است. گیریم b بردار سطری $b = (\beta_1, \cdots, \beta_r)$ باشد. بنابه ۹.۱۹ ماتریس A وارون‌پذیر است و چون $\beta_1 \neq 0$ پس $b \neq 0$، بنابراین $bA \neq 0$. اما درایهٔ $(j+1)$ام بردار سطری bA مساوی $|G|\langle \chi^j, \psi \rangle$ است و لذا به‌ازای jای، که $0 \leq j \leq r-1$، $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ پس حکم ثابت شده است. ■

۱۱.۱۹ مثال (۱) اگر $G \neq \{1\}$ و χ سرشت منظم G باشد آنگاه مجموعهٔ $\chi(g)$ها فقط دارای دو مقدار متفاوت است (گزارهٔ ۲۰.۱۳ را ببینید)، لذا بنابه قضیهٔ ۱۰.۱۹، هر سرشت تحویل‌ناپذیر G سازای 1_G یا χ است، البته این مطلب بنابه قضیهٔ ۵.۱۰ نیز، که قبلاً دیده‌ایم، معلوم است.

(۲) فرض کنید $G = S_4$ و به مثال ۸.۱۹ نگاه کنید. فرض کنید $\chi = \chi_4$. در این صورت مجموعهٔ $\chi(g)$ها دارای چهار مقدار مختلف است. بنابه مثال ۸.۱۹،

$$\chi^2 = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$$

به‌علاوه می‌توان نشان داد که

$$\langle \chi^3, \chi_2 \rangle = 1$$

بنابراین سرشتهای تحویل‌ناپذیر G از سازاهای χ^0، χ^1، χ^2، χ^3 هستند (درواقع در این حالت فقط از سازاهای χ^2 و χ^3 هستند) و لذا این مثال مثالی از قضیهٔ ۱۰.۱۹ است.

تجزیهٔ χ^2

با توجه به قضیهٔ ۱۰.۱۹، این امر که بتوانیم توانهای سرشتی چون χ را به مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیر تجزیه کنیم دارای اهمیت ویژه‌ای است. قصد داریم روشی برای تجزیهٔ χ^2 ارائه کنیم. چنانکه خواهیم دید این حالت خاص به‌ویژه در پیداکردن سرشتهای تحویل‌ناپذیر مفید است.

فرض کنیم V $\mathbb{C}G$- مدولی با سرشت χ است. بنابه گزارهٔ ۶.۱۹ مدول $V \otimes V$ دارای سرشت χ^2 است. فرض می‌کنیم v_1، ...، v_n پایهٔ V است و تبدیل خطی $T : V \otimes V \to V \otimes V$ را به‌ازای عناصری به شکل $v_i \otimes v_j$ چنین تعریف می‌کنیم

$$(v_i \otimes v_j)T = v_j \otimes v_i \qquad \text{به‌ازای هر } i \text{ و } j$$

و سپس آن را به‌طور خطی به تمام $V \otimes V$ توسیع می‌دهیم، یعنی

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)T = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j \otimes v_i)$$

می‌توان نشان داد که به‌ازای هر $v, w \in V$ داریم

$$(v \otimes w)T = w \otimes v$$

از این‌رو T از پایهٔ انتخاب شده مستقل است.

اکنون زیرمجموعه‌های زیر از $V \otimes V$ را تعریف می‌کنیم

$$S(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = x\}$$

$$A(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = -x\}$$

چون T خطی است، به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که $S(V \otimes V)$ و $A(V \otimes V)$ زیرفضای $V \otimes V$ هستند (درواقع فضای ویژهٔ T هستند). زیرفضای $S(V \otimes V)$ را قسمت متقارن $V \otimes V$ و زیرفضای $A(V \otimes V)$ را قسمت پادمتقارن $V \otimes V$ می‌نامیم.

۱۲.۱۹ گزاره زیرفضاهای $S(V \otimes V)$ و $A(V \otimes V)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $V \otimes V$ هستند. همچنین

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V)$$

برهان به‌ازای هر $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ و هر $g \in G$،

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)Tg &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j g \otimes v_i g)\\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes v_j g)T\\ &= \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right)gT\end{aligned}$$

بنابراین T $\mathbb{C}G$ـهمریختی از $V \otimes V$ به خودش است. بنابراین اگر $x \in S(V \otimes V)$ و $y \in A(V \otimes V)$ و $g \in G$ آنگاه

$$(xg)T = (xT)g = xg \quad \text{و} \quad (yg)T = (yT)g = -yg$$

لذا $xg \in S(V\otimes V)$ و $yg \in A(V\otimes V)$. از این‌رو $S(V\otimes V)$ و $A(V\otimes V)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $V\otimes V$ هستند.

اگر $x \in S(V\otimes V)\cap A(V\otimes V)$ آنگاه $x = xT = -x$ و لذا $x = ۰$. به‌علاوه به‌ازای هر $x \in V$ داریم

$$x = \frac{۱}{۲}(x + xT) + \frac{۱}{۲}(x - xT)$$

چون $T^۲$ عضو همانی است لذا $\frac{۱}{۲}(x+xT) \in S(V\otimes V)$ و $\frac{۱}{۲}(x-xT) \in A(V\otimes V)$. بنابراین

$$V\otimes V = S(V\otimes V) \oplus A(V\otimes V) \qquad \blacksquare$$

توجه کنید که قسمت متقارن $V\otimes V$ شامل تمام بردارهای به شکل $v\otimes w + w\otimes v$ است، که $v, w \in V$، در صورتی‌که قسمت پادمتقارن $V\otimes V$ شامل همهٔ بردارهای به شکل $v\otimes w - w\otimes v$ است. اکنون پایه‌هایی برای قسمت متقارن و قسمت پادمتقارن $V\otimes V$ که متشکل از عناصری به شکل بالا هستند ارائه می‌دهیم.

۱۳.۱۹ گزاره فرض کنیم $v_۱$، ...، v_n پایه‌ای برای V است.

(۱) بردارهای $v_i\otimes v_j + v_j \otimes v_i$ (به‌ازای $۱ \le i \le j \le n$) پایه‌ای برای $S(V\otimes V)$ تشکیل می‌دهند. بعد $S(V\otimes V)$ مساوی $n(n+۱)/۲$ است.

(۲) بردارهای $v_i\otimes v_j - v_j \otimes v_i$ (به‌ازای $۱ \le i < j \le n$) پایه‌ای برای $A(V\otimes V)$ تشکیل می‌دهند. بعد $A(V\otimes V)$ مساوی $n(n-۱)/۲$ است.

برهان واضح است که بردارهای $v_i\otimes v_j + v_j\otimes v_i$ $(۱ \le i \le j \le n)$ عناصری خطی‌مستقل از $S(V\otimes V)$ هستند و بردارهای $v_i\otimes v_j - v_j\otimes v_i$ $(۱ \le i < j \le n)$ عناصری خطی‌مستقل از $A(V\otimes V)$ هستند. از این‌رو

$$\dim S(V\otimes V) \ge n(n+۱)/۲ \quad \text{و} \quad \dim A(V\otimes V) \ge n(n-۱)/۲$$

بنابه گزارهٔ ۱۲.۱۹ داریم $\dim S(V\otimes V) + \dim A(V\otimes V) = \dim(V\otimes V) = n^۲$ بنابراین نابرابریهای فوق به تساوی تبدیل می‌شوند و حکم ثابت می‌شود. $\blacksquare$

سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $S(V\otimes V)$ را با χ_S و سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $A(V\otimes V)$ را با χ_A

نمایش می‌دهیم. بنابه گزارهٔ ۱۲.۱۹ داریم

$$\chi^{۲} = \chi_S + \chi_A$$

درگزارهٔ بعدی مقادیر χ_S و χ_A مشخص شده است.

۱۴.۱۹ گزاره به‌ازای $g \in G$ داریم

$$\chi_S(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) + \chi(g^{۲})) \quad \text{و} \quad \chi_A(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) - \chi(g^{۲}))$$

برهان طبق گزارهٔ ۱۱.۹ می‌توان پایهٔ $e_۱$، ... ، e_n را برای V انتخاب کرد به‌قسمی که به‌ازای اعداد مختلطی چون λ_i، $e_i g = \lambda_i e_i$ ($۱ \leq i \leq n$). در این صورت

$$(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)g = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$$

و لذا بنابه گزارهٔ ۱۳.۱۹(۲)،

$$\chi_A(g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

اما $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$، و چون $e_i g^{۲} = \lambda_i^{۲} e_i$ پس $\chi(g^{۲}) = \sum_i \lambda_i^{۲}$. بنابراین

$$\chi^{۲}(g) = (\chi(g))^{۲} = \sum_i \lambda_i^{۲} + ۲\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \chi(g^{۲}) + ۲\chi_A(g)$$

از این‌رو

$$\chi_A(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) - \chi(g^{۲}))$$

همچنین $\chi^{۲} = \chi_S + \chi_A$، بنابراین

$$\chi_S(g) = \chi^{۲}(g) - \chi_A(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) + \chi(g^{۲})) \qquad \blacksquare$$

۱۵.۱۹ مثال فرض‌کنیم $G = S_۴$. جدول سرشت G در مثال ۸.۱۹ آمده است. قرار می‌دهیم $\chi = \chi_۴$. مقادیر χ، و مقادیر χ_S و χ_A را که درگزارهٔ ۱۴.۱۹ مشخص شده‌اند در زیر می‌آوریم

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
χ	۳	۱	۰	−۱	−۱
χ_S	۶	۲	۰	۲	۰
χ_A	۳	−۱	۰	−۱	۱

می‌توان ثابت کرد که $\chi_S = \chi_1 + \chi_3 + \chi_4$ و $\chi_A = \chi_5$.

از روشهایی که تا به‌حال ارائه داده‌ایم روش مفیدی برای یافتن سرشتهای تحویل‌ناپذیر جدید گروه به‌دست می‌آید مشروط بر اینکه یک یا دو سرشت تحویل‌ناپذیر را در دست داشته باشیم. روش این کار ساده است:

(۱) اگر سرشت χ را داشته باشیم، سرشتهای χ_S و χ_A را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از ضرب داخلی، χ_S و χ_A را برای یافتن سرشتهای تحویل‌ناپذیر جدید تجزیه می‌کنیم.

(۲) اگر ψ سرشت جدید حاصل از مرحلهٔ (۱) باشد آنگاه ψ_S و ψ_A را تشکیل می‌دهیم و مرحلهٔ فوق را تکرار می‌کنیم.

این روش را با دو مثال روشن می‌سازیم.

۱۶.۱۹ مثال جدول سرشت S_5. فرض کنیم G گروه متقارن درجهٔ ۵، یعنی S_5، باشد. بنابه مثال ۱۶.۱۲(۴)، g_iها، یعنی نماینده‌های رده‌های مزدوجی G، و اندازهٔ رده‌های مزدوجی G، و مرتبهٔ مرکزسازهای G، یعنی $|C_G(g_i)|$ها، عبارت‌اند از

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)(۴ ۵)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)
اندازهٔ رده	۱	۱۰	۲۰	۱۵	۳۰	۲۰	۲۴
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲۰	۱۲	۶	۸	۴	۶	۵

بنابراین G دقیقاً دارای هفت سرشت تحویل‌ناپذیر است.

(الف) سرشتهای خطی. بنا به مثال ۱۳.۱۷، $G' = A_5$ و لذا G دقیقاً دارای دو سرشت خطی χ_1 و χ_2 است که عبارت‌اند از ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/G'. بنابراین

$$\chi_1 = 1_G \quad \text{و} \quad \chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g \text{ جایگشت زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } g \text{ جایگشت فرد باشد} \end{cases}$$

(ب) سرشت جایگشتی. با استفاده ازگزارهٔ ۲۴.۱۳ سرشت χ_3 با مقادیر زیر حاصل می‌شود

$$\chi_3(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1 \qquad (g \in G)$$

مشاهده می‌شود که

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{4^2}{120} + \frac{2^2}{12} + \frac{1^2}{6} + \frac{(-1)^2}{6} + \frac{(-1)^2}{5} = 1$$

از این‌رو بنابه قضیهٔ ۲۰.۱۴ سرشت χ_3 تحویل‌ناپذیر است. حال ازگزارهٔ ۱۴.۱۷ نتیجه می‌گیریم که $\chi_4 = \chi_3\chi_2$ نیز سرشت تحویل‌ناپذیر است.

تا اینجا قسمت زیر از جدول سرشت G را به‌دست آورده‌ایم

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)(۴ ۵)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲۰	۱۲	۶	۸	۴	۶	۵
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	−۱	۱	۱	−۱	−۱	۱
χ_3	۴	۲	۱	۰	۰	−۱	−۱
χ_4	۴	−۲	۱	۰	۰	۱	−۱

(ج) ضرب تانسوری. اکنون با استفاده از ضرب تانسوری، سه سرشت تحویل‌ناپذیر دیگر G را پیدا می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $\chi = \chi_3$. بنابه گزارهٔ ۱۴.۱۹ مقادیر سرشتهای χ_S و χ_A عبارت‌اند از

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)(۴ ۵)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲۰	۱۲	۶	۸	۴	۶	۵
χ_S	۱۰	۴	۱	۲	۰	۱	۰
χ_A	۶	۰	۰	−۲	۰	۰	۱

بنابراین

$$\langle \chi_A, \chi_A \rangle = \frac{36}{120} + \frac{4}{8} + \frac{1}{5} = 1$$

و لذا χ_A سرشت تحویل‌ناپذیر جدیدی است؛ این سرشت را χ_5 می‌نامیم.

اکنون توجه کنید که

$$\langle \chi_S, \chi_1 \rangle = \frac{10}{120} + \frac{4}{12} + \frac{1}{6} + \frac{2}{8} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\langle \chi_S, \chi_3 \rangle = \frac{40}{120} + \frac{8}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

$$\langle \chi_S, \chi_S \rangle = \frac{100}{120} + \frac{16}{12} + \frac{1}{6} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = 3$$

بنابراین

$$\chi_S = \chi_1 + \chi_3 + \psi$$

که ψ سرشت تحویل‌ناپذیری با درجهٔ ۵ است. قرار می‌دهیم $\psi = \chi_6$ و لذا $\chi_6 = \chi_S - \chi_1 - \chi_3$.
سرانجام اینکه تابع $\chi_7 = \chi_6\chi_2$ سرشت تحویل‌ناپذیر دیگری با درجهٔ ۵ است.
اکنون تمام هفت سرشت تحویل‌ناپذیر S_5 را یافته‌ایم. جدول سرشت S_5 عبارت است از

جدول سرشت S_5

g_i	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)(4\ 5)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	120	12	6	8	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	2	1	0	0	-1	-1
χ_4	4	-2	1	0	0	1	-1
χ_5	6	0	0	-2	0	0	1
χ_6	5	1	-1	1	-1	1	0
χ_7	5	-1	-1	1	1	-1	0

۱۷.۱۹ مثال جدول سرشت S_6. در این مثال، از روشهای مثال قبل استفاده می‌کنیم و ۸ سرشت از ۱۱ سرشت تحویل‌ناپذیر گروه متقارن S_6 را به‌دست می‌آوریم، سپس با استفاده از روابط تعامد سه سرشت تحویل‌ناپذیر دیگر را به‌دست می‌آوریم.

S_6 را، که گروهی با مرتبهٔ ۷۲۰ است، G می‌نامیم. برای آسان کردن چاپ مطالب، بهتر است که هر ردهٔ مزدوجی را با شاکلهٔ دوری عناصرش نشان دهیم. با استفاده از این نمادگذاری، اندازهٔ رده‌های مزدوجی و مرتبهٔ مرکزسازها به‌صورت زیر است (تمرین ۳.۱۲ را ببینید)

شاکلهٔ دوری	(۱)	(۲)	(۳)	(۲, ۲)	(۴)	(۳, ۲)	(۵)	(۲, ۲, ۲)	(۳, ۳)	(۴, ۲)	(۶)
اندازهٔ رده	۱	۱۵	۴۰	۴۵	۹۰	۱۲۰	۱۴۴	۱۵	۴۰	۹۰	۱۲۰
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۷۲۰	۴۸	۱۸	۱۶	۸	۶	۵	۴۸	۱۸	۸	۶

چون G دارای ۱۱ ردهٔ مزدوجی است، لذا دارای ۱۱ سرشت تحویل‌ناپذیر است.

(الف) سرشتهای خطی. در مورد تمام گروههای متقارن S_n ($n \geq 2$)، زیرگروه مشتق عبارت است از A_n و دقیقاً دو سرشت خطی χ_1 و χ_2 وجود دارد که

$$\chi_1 = 1_G$$

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } g \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

(مثال ۱۳.۱۷ را ببینید).

(ب) سرشت جایگشتی و ضرب تانسوری. تابع χ_3 با ضابطهٔ

$$\chi_3(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1 \qquad (g \in G)$$

بنابه گزارهٔ ۲۴.۱۳، سرشت G است. قرار می‌دهیم $\chi = \chi_3$. مقادیر χ و χ_S و χ_A به قرار زیر است

رده	(۱)	(۲)	(۳)	(۲, ۲)	(۴)	(۳, ۲)	(۵)	(۲, ۲, ۲)	(۳, ۳)	(۴, ۲)	(۶)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۷۲۰	۴۸	۱۸	۱۶	۸	۶	۵	۴۸	۱۸	۸	۶
$\chi = \chi_3$	۵	۳	۲	۱	۱	۰	۰	−۱	−۱	−۱	−۱
χ_S	۱۵	۷	۳	۳	۱	۱	۰	۳	۰	۱	۰
χ_A	۱۰	۲	۱	−۲	۰	−۱	۰	−۲	۱	۰	۱

محاسبه نشان می‌دهد که

$$\langle \chi_۳, \chi_۳ \rangle = ۱, \qquad \langle \chi_A, \chi_A \rangle = ۱$$
$$\langle \chi_S, \chi_۱ \rangle = ۱, \qquad \langle \chi_S, \chi_۳ \rangle = ۱$$
$$\langle \chi_S, \chi_S \rangle = ۳$$

بنابراین $\chi_۳$ تحویل‌ناپذیر است، همچنین سرشت $\chi_۴ = \chi_۳\chi_۲$ تحویل‌ناپذیر است. سرشتهای $\chi_۵ = \chi_A$ و $\chi_۶ = \chi_۵\chi_۲$ نیز تحویل‌ناپذیرند. به‌علاوه

$$\chi_S = \chi_۱ + \chi_۳ + \chi_۷$$

که $\chi_۷$ سرشت تحویل‌ناپذیر دیگری با درجهٔ ۹ است. بالاخره اینکه سرشت $\chi_۸ = \chi_۷\chi_۲$ نیز تحویل‌ناپذیر است.

سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_۱$، ... ، $\chi_۸$ را در جدول زیر که قسمتی از جدول سرشت G است می‌آوریم

رده	(۱)	(۲)	(۳)	(۲, ۲)	(۴)	(۳, ۲)	(۵)	(۲, ۲, ۲)	(۳, ۳)	(۴, ۲)	(۶)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۷۲۰	۴۸	۱۸	۱۶	۸	۶	۵	۴۸	۱۸	۸	۶
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	−۱	۱	۱	−۱	−۱	۱	−۱	۱	۱	−۱
$\chi_۳$	۵	۳	۲	۱	۱	۰	۰	−۱	−۱	−۱	−۱
$\chi_۴$	۵	−۳	۲	۱	−۱	۰	۰	۱	−۱	−۱	۱
$\chi_۵$	۱۰	۲	۱	−۲	۰	−۱	۰	−۲	۱	۰	۱
$\chi_۶$	۱۰	−۲	۱	−۲	۰	۱	۰	۲	۱	۰	−۱
$\chi_۷$	۹	۳	۰	۱	−۱	۰	−۱	۳	۰	۱	۰
$\chi_۸$	۹	−۳	۰	۱	۱	۰	−۱	−۳	۰	۱	۰

(ج) روابط تعامد. اکنون از روابط تعامد ستونی استفاده می‌کنیم و جدول سرشت G را کامل می‌کنیم. بعداً نشان خواهیم داد (نتیجهٔ ۱۶.۲۲) که تمام درایه‌های جدول سرشت کلیهٔ گروههای متقارن اعداد صحیح‌اند، اما اکنون فقط می‌دانیم که اگر $g^۲ = ۱$، $\chi(g)$ عدد صحیح است (نتیجهٔ ۱۰.۱۳ را ببینید). بنابراین بهتر است که ابتدا توجه خود را به عناصر مرتبهٔ ۲ معطوف کنیم، به این ترتیب می‌توانیم مطمئن باشیم که جواب معادلاتی که با آنها سروکار داریم اعداد صحیح‌اند.

فرض کنیم s جایگشت (۱۲) و t جایگشت (۴ ۳)(۲ ۱) باشد. بنابراین رده‌های مزدوجی s و t به ترتیب متناظر با دومین و چهارمین ستون جدول سرشت بالا هستند. بر طبق نتیجهٔ ۱۰.۱۳ می‌دانیم که $\chi(s)$ و $\chi(t)$ به‌ازای هر سرشت χ از G اعداد صحیح‌اند.

سه سرشت دیگر G را که هنوز پیدا نکرده‌ایم $\chi_{۹}$، $\chi_{۱۰}$، $\chi_{۱۱}$ می‌نامیم.

با استفاده از روابط تعامد ستونی داریم

$$\sum_{i=۱}^{۱۱} \chi_i(s)^{۲} = ۴۸$$

از این‌رو

$$\chi_{۹}(s)^{۲} + \chi_{۱۰}(s)^{۲} + \chi_{۱۱}(s)^{۲} = ۲$$

بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم

$$\chi_{۱۱}(s)^{۲} = ۰ \quad \text{و} \quad \chi_{۹}(s)^{۲} = \chi_{۱۰}(s)^{۲} = ۱$$

اکنون توجه کنید که $\chi_{۹}\chi_{۲}$ سرشت تحویل‌ناپذیر است و مساوی هیچ‌یک از سرشتهای $\chi_{۱}$، . . . ، $\chi_{۸}$ نیست. به‌علاوه، چون $\chi_{۹}\chi_{۲}(s) = -\chi_{۹}(s)$، نتیجه می‌گیریم که $\chi_{۹}\chi_{۲}$ مساوی $\chi_{۹}$ یا $\chi_{۱۱}$ نیست. بنابراین

$$\chi_{۹}\chi_{۲} = \chi_{۱۰}$$

باز هم بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توان فرض کرد که

$$\chi_{۱۰}(s) = -۱ \quad \text{و} \quad \chi_{۹}(s) = ۱$$

اکنون می‌خواهیم $\chi_i(۱)$ و $\chi_i(t)$ را به‌ازای $i = ۹, ۱۰, ۱۱$ پیدا کنیم. یعنی هدف ما تعیین اعداد صحیح a، b، c، d، e، f در قسمت زیر از جدول سرشت است

عضو	۱	s	t
رده	(۱)	(۲)	(۲, ۲)
$\chi_{۹}$	a	۱	d
$\chi_{۱۰}$	b	-۱	e
$\chi_{۱۱}$	c	۰	f

با استفاده از روابط تعامد ستونی داریم

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)\chi_i(s)=0,\qquad \sum_{i=1}^{11}\chi_i(s)\chi_i(t)=0$$

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(t)\chi_i(t)=16,\qquad \sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)\chi_i(t)=0$$

از اینجا معادلات زیر حاصل می‌شوند

$$a-b=0,\qquad d-e=0$$

$$d^2+e^2+f^2=2,\qquad ab+be+cf=10$$

تنها جواب صحیح معادلات فوق با شرط $a>0$ و $b>0$ عبارت است از

$$d=e=1,\qquad f=0,\qquad a=b=5$$

بالاخره با استفاده از رابطهٔ

$$\sum_{i=1}^{11}\chi_i(1)^2=720$$

نتیجه می‌گیریم که $c=16$. بنابراین قسمت فوق از جدول سرشت عبارت است از

عضو	۱	s	t
رده	(۱)	(۲)	(۲, ۲)
χ_9	۵	۱	۱
χ_{10}	۵	-1	۱
χ_{11}	۱۶	۰	۰

اکنون می‌توانیم هر سه درایهٔ مجهولِ هر ستون دیگر جدول سرشت را تعیین کنیم، زیرا از روابط تعامد ستونی سه معادلهٔ مستقل با این سه مجهول حاصل می‌شود (زیرا ماتریس 3×3ی بالا وارون‌پذیر است). پس از انجام دادن این محاسبات، درمی‌یابیم که جدول سرشت کامل S_6 به‌صورت زیر است

جدول سرشت S_6

رده	(۱)	(۲)	(۳)	(۲, ۲)	(۴)	(۳, ۲)	(۵)	(۲, ۲, ۲)	(۳, ۳)	(۴, ۲)	(۶)
$\|C_G(g_i)\|$	۷۲۰	۴۸	۱۸	۱۶	۸	۶	۵	۴۸	۱۸	۸	۶
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	−۱	۱	۱	−۱	−۱	۱	−۱	۱	۱	−۱
χ_3	۵	۳	۲	۱	۱	۰	۰	−۱	−۱	−۱	−۱
χ_4	۵	−۳	۲	۱	−۱	۰	۰	۱	−۱	−۱	۱
χ_5	۱۰	۲	۱	−۲	۰	−۱	۰	−۲	۱	۰	۱
χ_6	۱۰	−۲	۱	−۲	۰	۱	۰	۲	۱	۰	−۱
χ_7	۹	۳	۰	۱	−۱	۰	−۱	۳	۰	۱	۰
χ_8	۹	−۳	۰	۱	۱	۰	−۱	−۳	۰	۱	۰
χ_9	۵	۱	−۱	۱	−۱	۱	۰	۳	۲	−۱	۰
χ_{10}	۵	−۱	−۱	۱	۱	−۱	۰	−۳	۲	−۱	۰
χ_{11}	۱۶	۰	−۲	۰	۰	۰	۱	۰	−۲	۰	۰

ضرب مستقیم

در این بخش پایانیِ فصل حاضر نشان می‌دهیم که اگر جدولهای سرشت G و H معلوم باشند، می‌توان با استفاده از ضرب تانسوری جدول سرشت حاصلضرب مستقیم $G \times H$ را تعیین کرد.

فرض کنیم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1، . . . ، v_m و W $\mathbb{C}H$ـمدولی با پایهٔ w_1، . . . ، w_n است. به‌ازای هر i و j با شرایط $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ و هر $g \in G$ و $h \in H$، ضرب زیر را تعریف می‌کنیم

$$(v_i \otimes w_j)(g, h) = v_i g \otimes w_j h$$

و این تعریف را به‌طور خطی به تمام $V \otimes W$ توسیع می‌دهیم، یعنی به‌ازای هر $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ ضرب زیر را تعریف می‌کنیم

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j) \right)(g, h) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes w_j h)$$

همانند گزارهٔ ۴.۱۹ می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ

$$(v \otimes w)(g, h) = vg \otimes wh$$

به‌ازای هر $v \in V$ و $w \in W$ برقرار است. حال با استفاده از اثباتی مشابه اثبات گزارهٔ ۵.۱۹ می‌توان نشان داد که $V \otimes W$ ـ$\mathbb{C}(G \times H)$ـمدول است.

فرض کنیم χ سرشت V و ψ سرشت W باشد. طبق اثبات گزارهٔ ۶.۱۹ سرشت $V \otimes W$ عبارت است از $\chi \times \psi$، که

$$(\chi \times \psi)(g,h) = \chi(g)\psi(h) \qquad (g \in G, h \in H)$$

۱۸.۱۹ قضیه فرض کنیم $\chi_۱$، ... ، χ_a سرشتهای تحویل‌ناپذیر متمایز G و $\psi_۱$، ... ، ψ_b سرشتهای تحویل‌ناپذیر متمایز H هستند. در این صورت $G \times H$ دقیقاً دارای ab سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز است که عبارت‌اند از

$$\chi_i \times \psi_j \qquad (۱ \leq i \leq a, ۱ \leq j \leq b)$$

برهان به‌ازای هر i و j و k و l داریم

$$\begin{aligned}\langle \chi_i \times \psi_j, \chi_k \times \chi_l \rangle_{G \times H} &= \frac{۱}{|G \times H|} \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} \chi_i(g)\psi_j(h)\overline{\chi_k(g)\psi_l(h)} \\ &= \left(\frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_k(g)} \right) \left(\frac{۱}{|H|} \sum_{h \in H} \psi_j(h)\overline{\psi_l(h)} \right) \\ &= \langle \chi_i, \chi_k \rangle_G \langle \psi_j, \psi_l \rangle_H = \delta_{ik}\delta_{jl}\end{aligned}$$

(در اینجا اندیسهای $G \times H$ و G و H به ترتیب نشانهٔ ضرب داخلی سرشتهای $G \times H$، G و H است) بنابراین ab سرشت $\chi_i \times \psi_j$ متمایز و تحویل‌ناپذیرند.

اکنون توجه کنید که به‌ازای هر $g, x \in G$ و $h, y \in H$ داریم

$$(x,y)^{-۱}(g,h)(x,y) = (x^{-۱}gx, y^{-۱}hy)$$

بنابراین عناصر (g,h) و (g', h') از $G \times H$ مزدوج‌اند اگر و فقط اگر عناصر g و g' در G و عناصر h و h' در H مزدوج باشند. در نتیجه، اگر $g_۱$، ... ، g_a نماینده‌های رده‌های مزدوجی G و $h_۱$، ... ، h_b نماینده‌های رده‌های مزدوجی H باشند آنگاه عناصر

$$(g_i, h_j) \qquad (۱ \leq i \leq a, ۱ \leq j \leq b)$$

نماینده‌های رده‌های مزدوجی $G \times H$ هستند. بنابراین $G \times H$ دقیقاً دارای ab ردهٔ مزدوجی است.

بنابه قضیهٔ ۳.۱۵، $G \times H$ دقیقاً دارای ab سرشت تحویل‌ناپذیر است و $\chi_i \times \psi_j$ها، یعنی سرشتهای تحویل‌ناپذیری که پیدا کرده‌ایم باید تمامی سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G \times H$ باشند. ■

۱۹.۱۹ مثال جدول سرشت $S_۳ \times C_۲$. جدول سرشت $S_۳ (\cong D_۶)$ در مثال ۳.۱۶(۱) آمده است. در اینجا این جدول و همچنین جدول سرشت $C_۲$ را دوباره می‌آوریم

جدول سرشت $S_۳$

g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)
$\|C_G(g_i)\|$	۶	۲	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	۱
$\chi_۳$	۲	۰	-۱

جدول سرشت $C_۲$

h_i	۱	-۱
$\|C_H(h_i)\|$	۲	۲
$\psi_۱$	۱	۱
$\psi_۲$	۱	-۱

نماینده‌های رده‌های مزدوجی $S_۳ \times C_۲$ عبارت‌اند از

$$(۱, ۱), ((۱\ ۲), ۱), ((۱\ ۲\ ۳), ۱), (۱, -۱), ((۱\ ۲), -۱), ((۱\ ۲\ ۳), -۱)$$

و لذا طبق قضیهٔ ۱۸.۱۹ جدول سرشت $S_۳ \times C_۲$ عبارت است از

جدول سرشت $S_۳ \times C_۲$

(g_i, h_j)	(۱, ۱)	((۱ ۲), ۱)	((۱ ۲ ۳), ۱)	(۱, −۱)	((۱ ۲), −۱)	((۱ ۲ ۳), −۱)
$\|C_{G\times H}(g_i, h_j)\|$	۱۲	۴	۶	۱۲	۴	۶
$\chi_۱ \times \psi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲ \times \psi_۱$	۱	-۱	۱	۱	-۱	۱
$\chi_۳ \times \psi_۱$	۲	۰	-۱	۲	۰	-۱
$\chi_۱ \times \psi_۲$	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۲ \times \psi_۲$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱
$\chi_۳ \times \psi_۲$	۲	۰	-۱	-۲	۰	۱

جدول فوق را با جواب تمرین ۲.۱۸ در قسمت حل تمرینات، که در آنجا جدول سرشت $D_{۱۲}$ را آورده‌ایم، مقایسه کنید (تمرین ۵.۱ نشان می‌دهد که $D_{۱۲} \cong S_۳ \times C_۲$).

خلاصهٔ فصل ۱۹

۱. حاصلضرب هر دو سرشتی از G سرشتی از G است.

۲. اگر χ سرشت G باشد آنگاه χ_S و χ_A نیز که مقدارشان به‌ازای هر $g \in G$ به شکل زیر است سرشت G هستند

$$\chi_S(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) + \chi(g^{۲}))$$

$$\chi_A(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^{۲}(g) - \chi(g^{۲}))$$

۳. سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G \times H$ به‌صورت $\chi \times \psi$ هستند که χ سرشت تحویل‌ناپذیر G و ψ سرشت تحویل‌ناپذیر H است. مقادیر $\chi \times \psi$ به‌ازای هر $g \in G$ و $h \in H$ به‌صورت زیر است

$$(\chi \times \psi)(g, h) = \chi(g)\psi(h)$$

تمرینات فصل ۱۹

۱. فرض کنیم χ و ψ و ϕ سرشتهایی از گروه G باشند. نشان دهید که

$$\langle \chi\psi, \phi \rangle = \langle \chi, \overline{\psi}\phi \rangle = \langle \psi, \overline{\chi}\phi \rangle$$

۲. فرض کنیم که χ و ψ سرشتهایی تحویل‌ناپذیر از G هستند. ثابت کنید که

$$\langle \chi\psi, ۱_G \rangle = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } \chi = \overline{\psi} \\ ۰ & \text{اگر } \chi \neq \overline{\psi} \end{cases}$$

۳. فرض کنیم χ سرشتی از G باشد که صادق نیست. نشان دهید که G سرشت تحویل‌ناپذیری چون ψ دارد به‌قسمی که به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$، $\langle \chi^n, \psi \rangle = ۰$.
(این تمرین نشان می‌دهد که نمی‌توان فرض صادق بودن χ را از قضیهٔ ۱۰.۱۹ حذف کرد.)

۴. در مثال ۱۳.۲۰ فصل بعدی نشان خواهیم داد که $A_۵$ سرشتهای تحویل‌ناپذیری چون χ و ϕ با مقادیر زیر دارد

	۱	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)	(۱ ۳ ۴ ۵ ۲)
χ	۵	-۱	۱	۰	۰
ϕ	۳	۰	-۱	$(۱ + \sqrt{۵})/۲$	$(۱ - \sqrt{۵})/۲$

مقادیر χ_S، χ_A، ϕ_S و ϕ_A را محاسبه کنید. این سرشتها را به‌صورت ترکیب خطی سرشتهای تحویل‌ناپذیر A_5، یعنی ψ_1، . . . ، ψ_5 که در مثال ۱۳.۲۰ داده شده‌اند، بنویسید.

۵. گروه مفروض G با مرتبهٔ ۲۴ دقیقاً هفت ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_1، . . . ، g_7 دارد، به‌علاوه G دارای سرشت χ با مقادیر زیر است

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۲۴	۴	۶	۶	۶	۶
χ	۲	-۲	۰	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2

که $\omega = e^{2\pi i/3}$. به‌علاوه g_1^2، g_2^2، g_3^2، g_4^2، g_5^2، g_6^2، g_7^2 به ترتیب با g_1، g_1، g_2، g_5، g_4، g_4، g_5 مزدوج‌اند.

χ_S و χ_A را پیدا کنید و نشان دهید که هر دو تحویل‌ناپذیرند.

با استفاده از ضرب سرشتهای تحویل‌ناپذیری که تاکنون یافته‌اید جدول سرشت G را پیدا کنید.

۶. جدول سرشت $D_6 \times D_6$ را پیدا کنید.

۲۰

تحدید به زیرگروه

در این فصل و فصل بعدی قصد داریم نحوهٔ ارتباط نمایش گروه را با نمایش زیرگروههایش مطالعه کنیم. در اینجا مفهوم تحدید $\mathbb{C}G$ـمدول به زیرگروهی چون H از G را تعریف می‌کنیم و سپس کاربرد این مفهوم مقدماتی را نشان می‌دهیم. حالتی را که H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ است به تفصیل مطالعه می‌کنیم؛ این حالت، به‌عنوان مثال، به‌ازای $G = S_n$ و $H = A_n$ پیش می‌آید.

تحدید

فرض کنیم H زیرگروه گروه متناهی G است. در این صورت $\mathbb{C}H$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}G$ است. اگر V $\mathbb{C}G$ـمدول باشد، $\mathbb{C}H$ـمدول نیز هست، زیرا اگر خواص (۱)ــ(۵) تعریف ۲.۴، به‌ازای هر $g, h \in G$ برقرار باشند قطعاً به‌ازای هر $g, h \in H$ نیز برقرارند. این کار سادهٔ تبدیل $\mathbb{C}G$ـمدول به $\mathbb{C}H$ـمدول را تحدید به H می‌نامیم. اگر V $\mathbb{C}G$ـمدول باشد آنگاه $\mathbb{C}H$ـمدول متناظر را با $V \downarrow H$ نمایش می‌دهیم و آن را (حاصل) تحدید V به H یا مدول تحدیدشده یا مدول تحدیدی می‌نامیم.

با احتساب مقادیر سرشت χ از V به‌ازای عناصر H سرشتی برای $V \downarrow H$ حاصل می‌شود. این سرشت H را با $\chi \downarrow H$ نشان می‌دهیم و آن را (حاصل) تحدید χ به H یا سرشت تحدیدشده

یا سرشت تحدیدی می‌نامیم. در حالت کلی اگر $f : G \to \mathbb{C}$ تابعی دلخواه باشد آنگاه $f \downarrow H$ نشان‌دهندهٔ تحدید f به H است (یعنی به‌ازای هر $h \in H$، $(f \downarrow H)(h) = f(h)$).

۱.۲۰ مثال فرض کنیم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. مانند مثال ۵.۴(۱)، گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1، v_2 باشد به‌طوری که

$$v_1 a = v_2, \qquad v_1 b = v_1$$
$$v_2 a = -v_1, \qquad v_2 b = -v_2$$

اگر H زیرگروه $\{1, a^2, b, a^2 b\}$ از G باشد آنگاه $V \downarrow H$ $\mathbb{C}H$ـمدولی با پایهٔ v_1، v_2 است به‌طوری که

$$v_1 a^2 = -v_1 \qquad v_1 b = v_1$$
$$v_2 a^2 = -v_2 \qquad v_2 b = -v_2$$

سرشت χ از V عبارت است از

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0	0	0	0

و سرشت $\chi \downarrow H$ از $V \downarrow H$ عبارت‌است از

h	1	a^2	b	a^2b
$\chi(h)$	2	-2	0	0

اگر V $\mathbb{C}G$ـمدول باشد و H زیرگروه G آنگاه $\dim V = \dim(V \downarrow H)$. معهذا ممکن است که V $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر باشد اما $V \downarrow H$ $\mathbb{C}H$ـمدول تحویل‌ناپذیر نباشد؛ مثال ۱.۲۰ این موضوع را نشان می‌دهد. اما اگر $V \downarrow H$ $\mathbb{C}H$ـمدول تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه V $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر است، زیرا اگر U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V باشد، $U \downarrow H$ $\mathbb{C}H$ـزیر مدول $V \downarrow H$ است.

۲.۲۰ مثال فرض کنیم $G = S_5$ و H زیرگروه A_4 از G متشکل از تمام جایگشتهای زوج مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ باشد که ۵ را ثابت نگاه می‌دارند. طبق ۲.۱۸، جدول سرشت H عبارت است از

g_i	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
$\lvert C_H(g_i)\rvert$	۱۲	۴	۳	۳
ψ_1	۱	۱	۱	۱
ψ_2	۱	۱	ω	ω^2
ψ_3	۱	۱	ω^2	ω
ψ_4	۳	-1	۰	۰

(که $\omega = e^{2\pi i/3}$). جدول سرشت G با سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، ... ، χ_7 در مثال ۱۶.۱۹ آمده است.

به‌ازای هر i، که $1 \le i \le 7$، سرشت $\chi_i \downarrow H$ را به‌صورت مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیر ψ_j می‌نویسیم. با استفاده از مثال ۱۶.۱۹ نتیجه می‌گیریم که

$$\chi_1 \downarrow H = \chi_2 \downarrow H, \quad \chi_3 \downarrow H = \chi_4 \downarrow H, \quad \chi_6 \downarrow H = \chi_7 \downarrow H$$

بنابراین فقط نیاز داریم که $\chi_1 \downarrow H$، $\chi_3 \downarrow H$، $\chi_5 \downarrow H$ و $\chi_6 \downarrow H$ را بررسی کنیم. مقادیر این سرشتها عبارت است از

	۱	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۳ ۲)
$\chi_1 \downarrow H$	۱	۱	۱	۱
$\chi_3 \downarrow H$	۴	۰	۱	۱
$\chi_5 \downarrow H$	۶	-2	۰	۰
$\chi_6 \downarrow H$	۵	۱	-1	-1

به سادگی می‌توان دریافت که

$$\chi_1 \downarrow H = \psi_1$$

$$\chi_3 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4$$

$$\chi_5 \downarrow H = 2\psi_4$$

$$\chi_6 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

سازاهای سرشت تحدیدی

برای سهولت بحث دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان سرشت تحدیدی $\chi \downarrow H$ را به‌صورت جمع سرشتهای تحویل‌ناپذیر H نوشت، نماد زیر را تعریف می‌کنیم.

۳.۲۰ تعریف ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle_G$ عبارت است از ضرب داخلی روی فضای برداری توابع از G به $\mathbb{C}$، که قبلاً آن را تعریف کردیم، و $\langle\ ,\ \rangle_H$ عبارت است از ضرب داخلی روی فضای برداری توابع از H به $\mathbb{C}$ که به همان نحو تعریف می‌شود. بنابراین هرگاه ϑ_1 و ϑ_2 توابعی از G به $\mathbb{C}$ باشند آنگاه

$$\langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta_1(g)\overline{\vartheta_2(g)}$$

و هرگاه ϕ_1 و ϕ_2 توابعی از H به $\mathbb{C}$ باشند آنگاه

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi_1(h)\overline{\phi_2(h)}$$

اگر χ سرشت G و ψ_1، . . . ، ψ_r سرشتهای تحویل‌ناپذیر زیرگروه H از G باشند آنگاه بنا به قضیهٔ ۱۷.۱۴،

$$\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \cdots + d_r\psi_r$$

که d_1، . . . ، d_r اعداد صحیح نامنفی زیرند

$$d_i = \langle \chi \downarrow H, \psi_i \rangle_H$$

گوییم که ψ_i سازای $\chi \downarrow H$ است هرگاه ضریب d_i در عبارت فوق مخالف صفر باشد.

گزارهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر سرشت تحویل‌ناپذیر H سازایی از تحدید یکی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G است.

۴.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه G و ψ سرشت مخالف صفری از H است. در این صورت سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G وجود دارد به‌قسمی که $\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H \neq 0$.

برهان فرض کنیم χ_1، . . . ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند. بنابه قضیهٔ ۱۹.۱۳ و گزارهٔ ۲۰.۱۳ می‌دانیم که سرشت منظم χ_{reg} از G در روابط زیر صدق می‌کند

$$\chi_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)\chi_i \quad \text{و} \quad \chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{اگر } g = 1 \\ 0 & \text{اگر } g \neq 1 \end{cases}$$

لذا

$$0 \neq \frac{|G|}{|H|}\psi(1) = \langle \chi_{\text{reg}} \downarrow H, \psi \rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \chi_i(1) \langle \chi_i \downarrow H, \psi \rangle_H$$

بنابراین به‌ازای iای، $\langle \chi_i \downarrow H, \psi \rangle_H \neq 0$. ■

فرض کنیم که جدول سرشت G معلوم است. با توجه به گزارهٔ ۴.۲۰ به‌نظر می‌رسد که می‌توان جدول سرشت H را با تحدید سرشتهای تحویل‌ناپذیر G به H پیدا کرد. متأسفانه، در عمل ممکن است نوشتن $\chi \downarrow H$ برحسب سرشتهای تحویل‌ناپذیر H خیلی مشکل باشد. در حالتی‌که $|G : H|$ (یعنی $|G|/|H|$) کوچک باشد، احتمال موفقیت در این کار بیشتر است چون در این حالت، چنانکه گزارهٔ زیر نشان می‌دهد، $\chi \downarrow H$ دارای سازاهای زیادی نیست.

۵.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه G، χ سرشت تحویل‌ناپذیر G و ψ_1، . . . ، ψ_r سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند. در این صورت $\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \cdots + d_r\psi_r$، که اعداد صحیح نامنفی d_1، . . . ، d_r در نابرابری زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq |G : H| \tag{۶.۲۰}$$

به‌علاوه، نابرابری (۶.۲۰) تبدیل به برابری می‌شود اگر و فقط اگر به‌ازای هر عضو g از G که در H نباشد، $\chi(g) = 0$.

برهان بنابه قضیهٔ ۱۷.۱۴،

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 = \langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\chi(h)}$$

همچنین، چون χ تحویل‌ناپذیر است پس

$$\begin{aligned} 1 = \langle \chi, \chi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\chi(h)} + k \\ &= \frac{|H|}{|G|} \sum_{i=1}^{r} d_i^2 + k \end{aligned}$$

که $K = (1/|G|) \sum_{g \notin H} \chi(g)\overline{\chi(g)}$. اما $K \geq 0$، و $K = 0$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر g که $g \notin H$، $\chi(g) = 0$. به این ترتیب هر دو حکم گزاره ثابت می‌شود. ∎

در حالتی‌که H زیرگروه نرمال G است احکام دیگری نیز دربارهٔ سازاهای $\chi \downarrow H$ برقرار است.

۷.۲۰ گزاره اگر $H \lhd G$ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد آنگاه تمام سازاهای $\chi \downarrow H$ دارای درجات مساوی هستند.

برهان فرض کنیم V ‌ $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است و U ‌ $\mathbb{C}H$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر $V \downarrow H$ است. به‌ازای هر $g \in G$، مجموعهٔ Ug را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Ug = \{ug : u \in U\}$$

ادعا می‌کنیم که Ug ‌ $\mathbb{C}H$ـزیرمدول تحویل‌ناپذیر $V \downarrow H$ است. واضح است که Ug زیرفضای V است و چون $H \lhd G$، به‌ازای هر $h \in H$ داریم $ghg^{-1} \in H$ و لذا به‌ازای هر $u \in U$،

$$(ug)h = u(ghg^{-1})g \in Ug$$

بنابراین Ug ‌ $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $V \downarrow H$ است. به‌علاوه اگر W ‌ $\mathbb{C}H$ـزیرمدول Ug باشد آنگاه Wg^{-1} ‌ $\mathbb{C}H$ـزیرمدول U است، و چون U تحویل‌ناپذیر است پس

$$Wg^{-1} = \{0\} \text{ یا } U$$

و لذا

$$W = \{0\} \text{ یا } Ug$$

بنابراین، همان‌طور که ادعا کردیم Ug $\mathbb{C}H$ـمدول تحویل‌ناپذیر است. به‌علاوه تابع $u \to ug$، $u \in U$، تبدیل خطی وارون‌پذیر از U به Ug است و در نتیجه $\dim U = \dim Ug$.

مجموع کلیهٔ زیرفضاهای Ug به‌ازای gهای متعلق به G، $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است. بنابراین، چون V تحویل‌ناپذیر است داریم

$$V = \sum_{g \in G} Ug$$

از این‌رو بنابه گزارهٔ ۱۲.۷، V مساوی مجموع مستقیم $\mathbb{C}H$ـمدولهایی به‌صورت Ug است. از این‌رو $V \downarrow H$ مساوی مجموع مستقیم $\mathbb{C}H$ـمدولهای تحویل‌ناپذیری است که دارای ابعاد مساوی‌اند. در نتیجه $\chi \downarrow H$ مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیری از H است که همگی دارای درجات مساوی‌اند. ■

زیرگروه نرمال با شاخص ۲

به‌زودی مطالب مشروحتری دربارهٔ سازاهای $\chi \downarrow H$ در حالتی که H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ است (یعنی $|G : H| = ۲$) ارائه می‌دهیم. در دو مثال ذیل این حالت برقرار است: $G = S_n$، $H = A_n$؛ و $G = D_{۲n} = \langle a, b : a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$، $H = \langle a \rangle$. درواقع اگر H زیرگروه G با شاخص ۲ باشد آنگاه H زیرگروه نرمال G است (تمرین ۱۰.۱ را ببینید).

هنگامی‌که H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ است، بین جدولهای سرشت G و H روابطی برقرار است. این روابط را بعداً در ۱۲.۲۰ شرح می‌دهیم، و سپس آنها را با یافتن جدول سرشت $A_۵$ از روی جدول سرشت $S_۵$ توضیح می‌دهیم (جدول $S_۵$ را قبلاً در مثال ۱۶.۱۹ به‌دست آورده‌ایم).

۸.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است

(۱) $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است.

(۲) $\chi \downarrow H$ مجموع دو سرشت تحویل‌ناپذیر H با درجات مساوی است.

برهان اگر $\psi_۱$، . . . ، ψ_r سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند آنگاه بنابه گزارهٔ ۵.۲۰،

$$\chi \downarrow H = d_۱\psi_۱ + \cdots + d_r\psi_r$$

و $\sum_{i=۱}^{r} d_i^۲ \leq ۲$. چون $d_۱$، . . . ، d_r اعداد صحیح نامنفی‌اند پس به‌ازای iای، $\chi \downarrow H = \psi_i$ یا به‌ازای i و jای که $i \neq j$، $\chi \downarrow H = \psi_i + \psi_j$. در حالت اخیر، بنابه گزارهٔ ۷.۲۰، درجهٔ ψ_i و ψ_j مساوی است. ■

در عمل، بسیاری اوقات لازم است که مطالب بیشتری دربارهٔ دو حالت گزارهٔ ۸.۲۰ بدانیم. این مطالب را هم‌اکنون ارائه می‌کنیم.

چون $G/H \cong C_2$، می‌توانیم سرشت خطی غیربدیهی G/H را ارتقاء دهیم و سرشتی خطی چون λ از G با ضابطهٔ زیر به‌دست آوریم

$$\lambda(g) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } g \in H \\ -1 & \text{اگر } g \notin H \end{cases}$$

توجه کنید که به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G، χ و $\chi\lambda$ سرشتهایی تحویل‌ناپذیر با درجات یکسان هستند (گزارهٔ ۱۴.۱۷ را ببینید). همچنین $\chi \downarrow H = \chi\lambda \downarrow H$. زیرا به‌ازای هر $h \in H$ داریم $\lambda(h) = 1$.

۹.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. در این صورت سه شرط زیر هم‌ارزند

(۱) $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است.

(۲) به‌ازای gای که $g \in G$ و $g \notin H$، $\chi(g) \neq 0$.

(۳) سرشتهای χ و $\chi\lambda$ از G مساوی نیستند.

برهان بنابه گزارهٔ ۵.۲۰، چون $|G : H| = 2$ پس $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر نابرابری (۶.۲۰) اکید باشد، و این نابرابری اکید است اگر و فقط اگر به‌ازای gای که $g \in G$ و $g \notin H$ داشته باشیم $\chi(g) \neq 0$. بنابراین شرایط (۱) و (۲) هم‌ارزند.

برای اثبات اینکه (۲) هم‌ارز (۳) است، توجه کنید که

$$\chi\lambda g = \begin{cases} \chi(g) & \text{اگر } g \in H \\ -\chi(g) & \text{اگر } g \notin H \end{cases}$$

و لذا به‌ازای gای که $g \notin H$، $\chi(g) \neq 0$ اگر و فقط اگر $\chi \neq \chi\lambda$. ■

بنابه گزارهٔ ۸.۲۰، اگر H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد آنگاه $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است یا مجموع دو سرشت تحویل‌ناپذیر H است. در گزارهٔ زیر حالت اول را بررسی می‌کنیم.

۱۰.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و χ سرشت تحویل‌ناپذیری از G است به‌قسمی که $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است. اگر ϕ سرشت تحویل‌ناپذیری از G باشد و

$$\phi \downarrow H = \chi \downarrow H$$

آنگاه $\phi = \chi$ یا $\phi = \chi\lambda$.

برهان داریم

$$(\chi + \chi\lambda)(g) = \begin{cases} ۲\chi(g) & g \in H \text{ اگر} \\ ۰ & g \notin H \text{ اگر} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \langle \chi + \chi\lambda, \phi \rangle_G &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in H} ۲\chi(g)\overline{\phi(g)} \\ &= \frac{۱}{|H|} \sum_{g \in H} \chi(g)\overline{\phi(g)} \\ &= \langle \chi \downarrow H, \phi \downarrow H \rangle_H \end{aligned}$$

اما $\langle \chi \downarrow H, \phi \downarrow H \rangle_H = ۱$، زیرا $\chi \downarrow H$ تحویل‌ناپذیر است و $\chi \downarrow H = \phi \downarrow H$. بنابراین $\langle \chi + \chi\lambda, \phi \rangle_G = ۱$ و لذا $\phi = \chi$ یا $\phi = \chi\lambda$. ■

سرانجام حالتی را که $\chi \downarrow H$ تحویل‌پذیر است بررسی می‌کنیم.

۱۱.۲۰ گزاره فرض کنیم H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و χ سرشت تحویل‌ناپذیری از G است به‌قسمی که $\chi \downarrow H$ مجموع دو سرشت تحویل‌ناپذیر H است، یعنی $\chi \downarrow H = \psi_۱ + \psi_۲$. در این صورت اگر ϕ سرشت تحویل‌ناپذیر G و $\psi_۱$ یا $\psi_۲$ سازای $\phi \downarrow H$ باشد آنگاه $\phi = \chi$.

برهان بنابه گزارهٔ ۹.۲۰، به‌ازای هر g که $g \notin H$ داریم $\chi(g) = ۰$. بنابراین

$$\begin{aligned} \langle \phi, \chi \rangle_G &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in H} \phi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{۱}{۲} \langle \phi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H \end{aligned}$$

اگر ψ_1 یا ψ_2 سازای $\phi \downarrow H$ باشد آنگاه $\langle \phi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H \neq 0$. لذا $\langle \phi, \chi \rangle_G \neq 0$، در نتیجه $\phi = \chi$. ■

حال نتایجی را که دربارهٔ زیرگروههای با شاخص ۲ به‌دست آورده‌ایم یکجا ذکر می‌کنیم و به این ترتیب شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان سرشتهای تحویل‌ناپذیر H را با استفاده از جدول سرشت G به‌دست آورد.

۱۲.۲۰ فرض کنیم H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ است.

(۱) هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G که به‌ازای عضوی خارج از H مخالف صفر باشد پس از تحدید، سرشت تحویل‌ناپذیر H است. چنین سرشتهایی از G به‌صورت زوج χ و $\chi\lambda$ هستند که حاصل تحدیدشان به H یکی است (گزاره‌های ۹.۲۰ و ۱۰.۲۰).

(۲) اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد و خارج از H صفر باشد آنگاه χ پس از تحدید، مجموع دو سرشت متمایز تحویل‌ناپذیر H است که درجاتشان مساوی است. دو سرشت H که به این طریق از χ به‌دست می‌آیند از هیچ سرشت تحویل‌ناپذیر دیگر G حاصل نمی‌شوند (گزاره‌های ۸.۲۰، ۹.۲۰، ۱۱.۲۰).

(۳) هر سرشت تحویل‌ناپذیر H با تحدید سرشتهای تحویل‌ناپذیر G چنانکه در قسمتهای (۱) و (۲) در بالا ذکر شد حاصل می‌شود (گزارهٔ ۴.۲۰).

در حالت (۲) از ۱۲.۲۰، برای محاسبهٔ مقادیر دو سازای $\chi \downarrow H$ کار بیشتری باید انجام داد. خوشبختانه در عمل حالت (۱) بیشتر از حالت (۲) پیش می‌آید.

۱۳.۲۰ مثال جدول سرشت A_5. می‌نویسیم $H = A_5$ و متذکر می‌شویم که H زیرگروه نرمال S_5 با شاخص ۲ است. رده‌های مزدوجی H و اندازه‌های آنها در مثال ۱۸.۲۲(۲) آمده است و سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، ... ، χ_7 از S_5 را می‌توان در مثال ۱۶.۱۹ یافت.

مشاهده می‌کنیم که χ_1، χ_3 و χ_6 به‌ازای عناصری خارج از H مخالف صفر هستند و لذا بنابه ۱۲.۲۰(۱)، $\chi_1 \downarrow H$، $\chi_3 \downarrow H$ و $\chi_6 \downarrow H$ سرشتهایی تحویل‌ناپذیر از H هستند. اینها را به ترتیب ψ_1، ψ_2 و ψ_3 می‌نامیم. همچنین به‌ازای هر $g \notin H$ داریم $\chi_5(g) = 0$ و لذا طبق ۱۲.۲۰(۲)، $\chi_5 \downarrow H = \psi_4 + \psi_5$ که ψ_4 و ψ_5 سرشتهای متمایز و تحویل‌ناپذیر H با درجهٔ ۳ هستند. توجه کنید که $\chi_2 \downarrow H = \chi_1 \downarrow H$، $\chi_4 \downarrow H = \chi_3 \downarrow H$، $\chi_7 \downarrow H = \chi_6 \downarrow H$ و بنابراین ψ_1، ... ، ψ_5 طبق ۱۲.۲۰(۳) همهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر و متمایز H هستند.

نتایجی که تاکنون به‌دست آورده‌ایم از ۱۲.۲۰ که دربارهٔ زیرگروههای با شاخص ۲ است استنتاج شده است. مطالب فوق را با استفاده از ضرب داخلی نیز می‌توان ثابت کرد. بنابراین ثابت

کرده‌ایم که جدول سرشت H عبارت است از

g_i	۱	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)	(۱ ۳ ۴ ۵ ۲)
$\|C_G(g_i)\|$	۶۰	۳	۴	۵	۵
ψ_1	۱	۱	۱	۱	۱
ψ_2	۴	۱	۰	۱−	۱−
ψ_3	۵	۱−	۱	۰	۰
ψ_4	۳	α_2	α_3	α_4	α_5
ψ_5	۳	β_2	β_3	β_4	β_5

اکنون با استفاده از روابط تعامد ستونی، مجهولهای α_i و β_i را تعیین می‌کنیم. با توجه به اینکه $H \downarrow \chi_5 = \psi_4 + \psi_5$، می‌توان مقادیر $\alpha_i + \beta_i$ را، به‌ازای $2 \leq i \leq 5$، به‌دست آورد (این مقادیر را با استفاده از روابط تعامد ستونی بین ستون ۱ و ستون i نیز می‌توان به‌دست آورد). حاصل کار چنین است

$$\alpha_2 + \beta_2 = 0, \qquad \alpha_3 + \beta_3 = -2, \qquad \alpha_4 + \beta_4 = \alpha_5 + \beta_5 = 1$$

با استفاده از گزارهٔ ۱۳.۱۲ درمی‌یابیم که هر عضو A_5 با وارونش مزدوج است. بنابراین طبق گزارهٔ ۹.۱۳(۴)، تمام اعداد موجود در جدول سرشت حقیقی‌اند. با استفاده از روابط تعامد ستونیِ ستون iام و خودش ($2 \leq i \leq 5$) حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} 3 &= 3 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 \\ 4 &= 2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 \\ 5 &= 2 + \alpha_4^2 + \beta_4^2 = 2 + \alpha_5^2 + \beta_5^2 \end{aligned}$$

بنابراین $\alpha_2 = \beta_2 = 0$، $\alpha_3 = \beta_3 = -1$، و α_4 و β_4 جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوی $x^2 - x - 1 = 0$ هستند. چون هنوز تفاوتی بین ψ_4 و ψ_5 قائل نشده‌ایم، می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \qquad \beta_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

به‌همین ترتیب α_5 و β_5 عبارت‌اند از $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. چون $\psi_4 \neq \psi_5$ داریم

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \qquad \beta_5 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

از این‌رو جدول سرشت A_5 عبارت است از

جدول سرشت A_5

g_i	۱	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)	(۱ ۳ ۴ ۵ ۲)
$\|C_G(g_i)\|$	۶۰	۳	۴	۵	۵
ψ_1	۱	۱	۱	۱	۱
ψ_2	۴	۱	۰	-1	-1
ψ_3	۵	-1	۱	۰	۰
ψ_4	۳	۰	-1	α	β
ψ_5	۳	۰	-1	β	α

که $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ و $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

با استفاده ازگزارهٔ ۶.۱۷، از جدول سرشت A_5 می‌توان نتیجه گرفت که A_5 گروه ساده است.

خلاصهٔ فصل ۲۰

در زیر فرض می‌کنیم که H زیرگروه G است.

۱. اگر χ سرشت G باشد آنگاه $\chi \downarrow H$ سرشت H است. مقادیر $\chi \downarrow H$ به‌ازای هر $h \in H$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$(\chi \downarrow H)(h) = \chi(h)$$

بنابراین χ و $\chi \downarrow H$ دارای درجات مساوی‌اند.

۲. تعداد سازاهای تحویل‌ناپذیر $\chi \downarrow H$ بیشتر از $|G : H|$ نیست. درواقع اگر ψ_1، ...، ψ_r سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند و $\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \cdots + d_r\psi_r$ آنگاه

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq |G : H|$$

۳. اگر $H \lhd G$ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد آنگاه تمام سازاهای $\chi \downarrow H$ دارای درجات مساوی‌اند.

تمرینات فصل ۲۰

۱. فرض کنیم $G = S_4$ و H زیرگروه $\langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle$ از G باشد.

الف) نشان دهید $H \cong D_8$.

ب) به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G (که در قسمت ۱.۱۸ آمده)، سرشت $\chi \downarrow H$ را به‌صورت مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیری از H بنویسید.

۲. از تحدید سرشتهای تحویل‌ناپذیر $S_۶$، که در مثال ۱۷.۱۹ داده شده‌اند، استفاده کرده جدول سرشت $A_۶$ را پیدا کنید. (مراجعه به حل تمرینات ۳.۱۲ و ۴.۱۲، که در قسمت حل تمرینات آمده، برای یافتن هفت ردهٔ مزدوجی $A_۶$ مفید است.)

۳. فرض کنیم گروه G دارای زیرگروه آبلی H با شاخص n است. ثابت کنید که به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G داریم $\chi(۱) \leq n$.

۴. فرض کنیم گروه G دارای زیرگروه H با شاخص ۳ است و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. ثابت کنید که

$$\langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H = ۱, ۲ \text{ یا } ۳$$

با ارائهٔ مثال نشان دهید که هر سه حالت فوق ممکن است اتفاق بیفتد.

۵. می‌دانیم که فهرست کامل درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر $S_۷$ عبارت است از

$$۱, ۱, ۶, ۶, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۲۰, ۲۱, ۲۱, ۳۵, ۳۵$$

همچنین می‌دانیم که $A_۷$ دارای نه ردهٔ مزدوجی است. فهرست کامل درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر $A_۷$ را پیدا کنید.

۲۱

مدول و سرشت فرابری

در سراسر این فصل فرض می‌کنیم که H زیرگروه گروه متناهی G است. در فصل قبل دیدیم که روش تحدید روش ساده‌ای برای تبدیل $\mathbb{C}G$ـمدول به $\mathbb{C}H$ـمدول است. اما روش موسوم به فرابری که طی آن از $\mathbb{C}H$ـمدول مفروضی $\mathbb{C}G$ـمدول ساخته می‌شود روش مشکلی است و مطالب این فصل اساساً در این‌باره است. از آنجا که H کوچکتر از G است، معمولاً شناختن و ساختن $\mathbb{C}H$ـمدول ساده‌تر از $\mathbb{C}G$ـمدول است، لذا در بسیاری موارد با استفاده از روش فرابری می‌توان کار مهمی در مورد نمایشهای گروه انجام داد مشروط بر اینکه نمایشهایی از زیرگروههای آن را در دست داشته باشیم. کاربردهای بسیاری از این روش را در فصلهای بعدی خواهیم دید.

قبل از شرح روش فرابری به چند حکم دربارهٔ رابطهٔ $\mathbb{C}H$ـهمریختی و $\mathbb{C}G$ـهمریختی نیاز داریم.

$\mathbb{C}H$ـهمریختی و $\mathbb{C}G$ـهمریختی

فرض کنیم U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ـمدول منظم $\mathbb{C}H$ باشد. اگر $r \in \mathbb{C}G$ آنگاه

$$\vartheta : u \to ru \qquad (u \in U)$$

$\mathbb{C}H$ـهمریختی از U به $\mathbb{C}G$ است، زیرا به‌ازای هر $s \in \mathbb{C}H$، $(us)\vartheta = rus = (u\vartheta)s$.

اکنون این حکم جالب توجه را ثابت می‌کنیم که هر $\mathbb{C}H$ـهمریختی از U به $\mathbb{C}G$ به شکل سادهٔ فوق است.

۱.۲۱ گزاره فرض کنیم که $H \leq G$، و U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ باشد. اگر ϑ $\mathbb{C}H$ـهمریختی از U به $\mathbb{C}G$ باشد آنگاه عضوی از $\mathbb{C}G$ چون r وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $u \in U$، $u\vartheta = ru$.

برهان بنابه قضیهٔ مشکه، یعنی قضیهٔ ۱.۸، $\mathbb{C}H$ـزیرمدول W از $\mathbb{C}H$ وجود دارد به‌قسمی که $\mathbb{C}H = U \oplus W$. اکنون تابع $\phi : \mathbb{C}H \to \mathbb{C}G$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\phi : u + w \to u\vartheta \quad (u \in U, w \in W)$$

به سادگی دیده می‌شود که ϕ $\mathbb{C}H$ـهمریختی است. قرار می‌دهیم $r = ۱\phi$. به‌ازای $u \in U$ داریم

$$u\vartheta = u\phi = (۱u)\phi = (۱)\phi u = ru$$

و لذا ϑ به شکل موردنظر است. ■

دو نتیجه از گزارهٔ ۱.۲۱ را ذکر می‌کنیم که نتیجهٔ اول همان گزارهٔ فوق در حالت $H = G$ است.

۲.۲۱ نتیجه فرض کنیم U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ است. در این صورت هر $\mathbb{C}G$ـهمریختی از U به $\mathbb{C}G$ به شکل

$$u \to ru \quad (u \in U)$$

است، که $r \in \mathbb{C}G$.

۳.۲۱ نتیجه فرض کنیم U و V $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ باشند. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند

(۱) $U \cap V = \{۰\}$

(۲) عضوی چون $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$،

$$ru = u \quad \text{و} \quad rv = ۰$$

برهان فرض کنیم که $U \cap V = \{0\}$. در این صورت مجموع $U + V$ مجموع مستقیم است و لذا

$$u + v \to u \quad (u \in U, v \in V)$$

تابع است و به‌علاوه $\mathbb{C}G$ـهمریختی از $U \oplus V$ به $\mathbb{C}G$ است (گزارهٔ ۱۱.۷ را ببینید). بنابراین طبق نتیجهٔ ۲.۲۱، عضوی چون $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$،

$$r(u + v) = u$$

از این‌رو به‌ازای $u \in U$، $ru = u$ و به‌ازای $v \in V$، $rv = 0$.

به‌عکس، فرض کنید به‌ازای عضوی چون $r \in \mathbb{C}G$ روابط $ru = u$ و $rv = 0$ به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$ برقرار است. اگر $x \in U \cap V$ آنگاه $rx = x$ و $rx = 0$ و لذا $x = 0$. در نتیجه $U \cap V = \{0\}$. ■

فرابری از H به G

اگر X زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}G$ باشد، زیرفضایی از $\mathbb{C}G$ را که توسط تمام عناصر به شکل xg که $x \in X$ و $g \in G$ پدید می‌آید با $X(\mathbb{C}G)$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$X(\mathbb{C}G) = \mathrm{sp}\{xg : x \in X, g \in G\}$$

در این صورت واضح است که $X(\mathbb{C}G)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ است.

به خاطر داشته باشید که H زیرگروه G است و لذا $\mathbb{C}H$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{C}G$ است.

۴.۲۱ تعریف فرض کنیم که H زیرگروه G است و U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است. $\mathbb{C}G$ـمدول $U(\mathbb{C}G)$ را با $U \uparrow G$ نمایش می‌دهیم و آن را $\mathbb{C}G$ـمدول فرا آمده از U و یا (حاصل) فرابری U به G می‌نامیم.

۵.۲۱ مثال فرض کنیم $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و $H = \langle a \rangle$، یعنی H زیرگروه دوری G با مرتبهٔ ۳ است. فرض می‌کنیم $\omega = e^{2\pi i/3}$ و قرار می‌دهیم

$$W_0 = \mathrm{sp}(1 + a + a^2)$$

$$W_1 = \mathrm{sp}(1 + \omega^2 a + \omega a^2)$$

$$W_2 = \mathrm{sp}(1 + \omega a + \omega^2 a^2)$$

مجموعه‌های فوق $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ هستند (مثال ۸.۱۰(۱) را ببینید). واضح است که

$$W_0 \uparrow G = \mathrm{sp}(1 + a + a^2, b + ab + a^2 b)$$

$$W_1 \uparrow G = \mathrm{sp}(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b)$$

$$W_2 \uparrow G = \mathrm{sp}(1 + \omega a + \omega^2 a^2, b + \omega ab + \omega^2 a^2 b)$$

در مثال ۸.۱۰(۲) دیدیم

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

که U_iها $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر زیرند

$$U_1 = \mathrm{sp}(1 + a + a^2 + b + ab + a^2 b)$$

$$U_2 = \mathrm{sp}(1 + a + a^2 - b - ab - a^2 b)$$

$$U_3 = \mathrm{sp}(1 + \omega^2 a + \omega a^2, b + \omega^2 ab + \omega a^2 b)$$

$$U_4 = \mathrm{sp}(1 + \omega a + \omega^2 a^2, b + \omega ab + \omega^2 a^2 b)$$

بنابراین

$$W_0 \uparrow G = U_1 \oplus U_2, \quad W_1 \uparrow G = U_3, \quad W_2 \uparrow G = U_4$$

لذا $W_0 \uparrow G$ تحویل‌پذیر است اما $W_1 \uparrow G$ و $W_2 \uparrow G$ تحویل‌ناپذیرند.

اکنون نشان می‌دهیم که $\mathbb{C}G$ـمدولهای فرآمده از $\mathbb{C}H$ـمدولهای یکریخت یکریخت‌اند.

۶.۲۱ گزاره گیریم $H \leq G$. فرض کنیم که U و V $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ هستند و U با V $\mathbb{C}H$ـیکریخت است (یعنی بین U و V $\mathbb{C}H$ـیکریختی برقرار است). در این صورت $U \uparrow G$ با $V \uparrow G$ $\mathbb{C}G$ـیکریخت است.

برهان فرض کنیم $\vartheta : U \to V$ $\mathbb{C}H$ـیکریختی باشد. بنابه گزارهٔ ۱.۲۱ عنصر $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $u \in U$، $u\vartheta = ru$ و همچنین عنصر $s \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $v \in V$، $v\vartheta^{-1} = sv$. در نتیجه

به‌ازای هر $v \in V$ و $u \in U$، $\quad sru = u \quad$ و $\quad rsv = v$

اگر $a \in U \uparrow G$ آنگاه a ترکیب خطی عناصری به شکل ug است (که $u \in U$ و $g \in G$)، لذا ra ترکیب خطی عناصری به شکل rug است و در نتیجه $ra \in V \uparrow G$. بنابراین

$$\phi : a \to ra \quad (a \in U \uparrow G)$$

تابعی از $U \uparrow G$ به $V \uparrow G$ است. به‌علاوه، ϕ ‌ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است زیرا $(a\phi)g = rag = (ag)\phi$ (که $a \in U \uparrow G$ و $g \in G$). چون روابط $sru = u$ و $rsv = v$ به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$ برقرار است پس

$$sra = a, rsb = b, \quad \forall a \in U \uparrow G, b \in V \uparrow G$$

از این‌رو تابع

$$b \to sb \quad (b \in V \uparrow G)$$

وارون ϕ است. بنابراین ϕ ‌ $\mathbb{C}G$ـیکریختی است و لذا $U \uparrow G$ با $V \uparrow G$ ‌ $\mathbb{C}G$ـیکریخت است. ■

گزارهٔ بعدی و نتیجهٔ آن ما را قادر می‌سازد که مدول فرابری $U \uparrow G$ را به‌ازای هر $\mathbb{C}H$ـمدول دلخواه U تعریف کنیم.

۷.۲۱ گزاره فرض کنیم که U و V ‌ $\mathbb{C}H$ـز یرمدول $\mathbb{C}H$ با شرط $U \cap V = \{0\}$ هستند. در این صورت $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$.

برهان طبق نتیجهٔ ۳.۲۱، عضوی چون $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$ داریم $ru = u$ و $rv = 0$. بنابراین به‌ازای هر $u \in U$ و $v \in V$ و $g \in G$ داریم

$$rug = ug \quad \text{و} \quad rvg = 0$$

چون $U \uparrow G$ توسط عناصری به شکل ug پدید می‌آید (که $u \in U$ و $g \in G$)، نتیجه می‌گیریم که

$$ru' = u' \quad u' \in U \uparrow G \ \text{به‌ازای هر}$$

و به همین ترتیب

$$rv' = 0 \quad v' \in V \uparrow G \ \text{به‌ازای هر}$$

بنابراین طبق نتیجهٔ ۳.۲۱ داریم $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$. ■

۸.۲۱ نتیجه فرض کنیم U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است و

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

که U_iها $\mathbb{C}H$ـزیرمدول U هستند در این صورت

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G)$$

برهان این نتیجه را با استفاده از استقرا روی m ثابت می‌کنیم. حکم برای $m = 1$ بدیهی است. حال فرض می‌کنیم $U = U_1 \oplus V$ که $V = U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$. از تعریف $U \uparrow G$ نتیجه می‌گیریم که

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) + (V \uparrow G)$$

بنابراین طبق گزارهٔ ۷.۲۱ داریم

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus (V \uparrow G)$$

بنا به فرض استقرا

$$V \uparrow G = (U_2 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G)$$

و لذا با استفاده از (۱۰.۲) به‌دست می‌آوریم

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G)$$

لذا حکم ثابت شده است. ■

اکنون می‌توانیم مدول فرابری $U \uparrow G$ را به‌ازای $\mathbb{C}H$ـمدول دلخواه U تعریف کنیم (حتی اگر U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ نباشد).

۹.۲۱ تعریف فرض‌کنیم U $\mathbb{C}H$ـمدول است. در این صورت (بنابه قضایای ۷.۸ و ۵.۱۰)،

$$U \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

که U_iها $\mathbb{C}H$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیری از $\mathbb{C}H$ هستند. $U \uparrow G$ را مجموع مستقیم (خارجی) زیر تعریف می‌کنیم

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G)$$

ازگزارهٔ ۶.۲۱ و نتیجهٔ ۸.۲۱ نتیجه می‌شود که تعریف فوق با تعریف ۴.۲۱ سازگار است.
تأکید می‌کنیم که تعریف مدول فرابری $U \uparrow G$ در حالتی که U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است تعریفی طبیعی است:

$$U \uparrow G = U(\mathbb{C}G)$$

همواره احکام مربوط به مدول فرابری کلی $U \uparrow G$ را ابتدا با در نظرگرفتن حالت خاصی که U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است اثبات خواهیم کرد و سپس از رابطهٔ زیر (که مستقیماً از تعریف ۹.۲۱ حاصل می‌شود) استفاده خواهیم کرد

$$(U_1 \oplus \cdots \oplus U_m) \uparrow G \cong (U_1 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G) \qquad (۱۰.۲۱)$$

حکم مهم زیر دربارهٔ خاصیتی از مدولهای فرابری کلی است که خاصیت «تعدی فرابری» نامیده می‌شود.

۱۱.۲۱ قضیه فرض کنیم که H و K زیرگروه G هستند به‌قسمی که $H \leq K \leq G$. اگر U $\mathbb{C}H$ـمدول باشد آنگاه

$$(U \uparrow K) \uparrow G \cong U \uparrow G$$

برهان ابتدا فرض می‌کنیم که U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است. در این صورت $U(\mathbb{C}K)$ توسط عناصری به شکل

$$uk \qquad (u \in U, \;\; k \in K)$$

پدید می‌آید. بنابراین $(U(\mathbb{C}K))(\mathbb{C}G)$ توسط عناصری به شکل

$$ukg \qquad (u \in U, k \in K, g \in G)$$

پدید می‌آید. چون $K \leq G$ نتیجه می‌شود که $(U(\mathbb{C}K))(\mathbb{C}G) = U(\mathbb{C}G)$. یعنی

$$(U \uparrow K) \uparrow G = U \uparrow G \qquad (۱۲.۲۱)$$

اکنون فرض کنیم U $\mathbb{C}H$ـمدولی دلخواه است. در این صورت

$$U \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

که U_iها $\mathbb{C}H$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیری از $\mathbb{C}H$ هستند. طبق (۱۰.۲۱)،

$$U \uparrow K \cong (U_1 \uparrow K) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow K)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(U \uparrow K) \uparrow G &\cong (U_1 \uparrow K) \uparrow G \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow K) \uparrow G && \text{طبق (۱۰.۲۱)}\\ &= (U_1 \uparrow G) \oplus \cdots \oplus (U_m \uparrow G) && \text{بنابه (۱۲.۲۱)}\\ &\cong U \uparrow G && \text{بنابه تعریف ۹.۲۱}\end{aligned}$$

■

سرشت فرابری

۱۳.۲۱ تعریف اگر ψ سرشت $\mathbb{C}H$ـمدول U باشد آنگاه سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول فرابری $U \uparrow G$ را با $\psi \uparrow G$ نمایش می‌دهیم و آن را سرشت فراآمده از ψ یا (حاصل) فرابری ψ به G می‌نامیم.

مثال بعدی رابطهٔ مهمی را بین فرابری سرشت و تحدید سرشت نشان می‌دهد.

۱۴.۲۱ مثال قرار می‌دهیم $G = S_5$ و همانند مثال ۲.۲۰ فرض می‌کنیم H زیرگروه A_4 از G باشد. درآن مثال نشان دادیم که اگر χ_1، ...، χ_7 سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند (که در مثال ۱۶.۱۹ داده شده‌اند) و ψ_1، ...، ψ_4 سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند (که در مثال ۲.۱۸ داده شده‌اند) آنگاه

$$\chi_1 \downarrow H = \psi_1$$

$$\chi_2 \downarrow H = \psi_1$$

$$\chi_3 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4$$

$$\chi_4 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4$$

$$\chi_5 \downarrow H = 2\psi_4$$

$$\chi_6 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

$$\chi_7 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

طبق قضیهٔ ۱۷.۱۴، ضرایبی که در بالا ظاهر می‌شوند برابر با مقادیر $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$ به‌ازای i و jی مناسبی هستند. این ضرایب را در ماتریسی که درایهٔ ijی آن عبارت است از $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$ می‌آوریم

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

از سطرهای این ماتریس معلوم می‌شود که چگونه می‌توان سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را به H تحدید کرد. به‌عنوان مثال، از سطر ۳ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\chi_3 \downarrow H = 1 \times \psi_1 + 0 \times \psi_2 + 0 \times \psi_3 + 1 \times \psi_4$$

قابل توجه است که از ستونهای ماتریس فوق معلوم می‌شود که چگونه می‌توان سرشتهای تحویل‌ناپذیر H را به G فرا برد. مثلاً از هفت عدد صحیح ستون ۱ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\psi_1 \uparrow G = 1 \times \chi_1 + 1 \times \chi_2 + 1 \times \chi_3 + 1 \times \chi_4 + 0 \times \chi_5 + 0 \times \chi_6 + 0 \times \chi_7$$

به همین نحو

$$\psi_2 \uparrow G = \psi_3 \uparrow G = \chi_6 + \chi_7$$
$$\psi_4 \uparrow G = \chi_3 + \chi_4 + 2\chi_5 + \chi_6 + \chi_7$$

بنابراین درایهٔ ijی ماتریس فوق، که بنا به دانسته‌های قبلی مساوی $\langle \chi_i \downarrow H, \psi_j \rangle_H$ است، مساوی $\langle \chi_i, \psi_j \uparrow G \rangle_G$ نیز هست.

درواقع تساوی

$$\langle \chi, \psi \uparrow G \rangle_G = \langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H$$

به‌ازای هر سرشت χ از G و هر سرشت ψ از H درست است، و ما بخش بعدی را به اثبات این تساوی که قضیهٔ تقابل فروبنیوس نام دارد اختصاص می‌دهیم.

قضیهٔ تقابل فروبنیوس

قبل از اثبات این قضیه، به حکم مقدماتی زیر نیاز داریم.

۱۵.۲۱ گزاره فرض کنیم که $H \leq G$. گیریم U $\mathbb{C}H$-زیرمدول $\mathbb{C}H$ و V $\mathbb{C}G$-زیرمدول $\mathbb{C}G$ است. در این صورت فضاهای برداری

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H) \quad \text{و} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$$

دارای ابعاد مساوی‌اند.

برهان فرض کنیم که $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$. در این صورت بنابه نتیجهٔ ۲.۲۱ عنصر $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که

$$s\vartheta = rs \qquad s \in U \uparrow G \text{ به‌ازای هر}$$

فرض می‌کنیم تابع $\overline{\vartheta} : U \to \mathbb{C}G$ تحدید ϑ به U باشد، یعنی

$$u\overline{\vartheta} = ru \qquad u \in U \text{ به ازای هر}$$

در این صورت $\overline{\vartheta} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$. از این‌رو تابع

$$\vartheta \to \overline{\vartheta}$$

تبدیلی خطی از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$ به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ است. نشان می‌دهیم که این تبدیل خطی وارون‌پذیر است.

گیریم $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$. در این صورت طبق گزارهٔ ۱.۲۱، عنصر $r \in \mathbb{C}G$ وجود دارد به‌قسمی که به ازای هر $u \in U$، $u\phi = ru$. تابع ϑ را از $U \uparrow G$ به $\mathbb{C}G$ چنین تعریف می‌کنیم

$$s\vartheta = rs \qquad (s \in U \uparrow G)$$

در این صورت $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$. به‌علاوه، $\phi = \overline{\vartheta}$. بنابراین تابع $\vartheta \to \overline{\vartheta}$ پوشاست.

بالاخره، متذکر می‌شویم که اگر $r_1, r_2 \in \mathbb{C}G$ و تساوی $r_1u = r_2u$ به‌ازای هر $u \in U$ برقرار باشد آنگاه تساوی $r_1s = r_2s$ نیز به‌ازای هر $s \in U \uparrow G$ برقرار است زیرا s ترکیب خطی عناصری به شکل ug است، که $u \in U$ و $g \in G$. از این‌رو تابع $\vartheta \to \overline{\vartheta}$ یک‌به‌یک است و لذا تبدیل خطی وارون‌پذیری از $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$ به $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ است. در نتیجه این دو فضای برداری دارای ابعاد مساوی‌اند. ■

۱۶.۲۱ قضیهٔ تقابل فروبنیوس فرض کنیم که $H \leq G$. گیریم χ سرشت G و ψ سرشت H است. در این صورت

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H$$

برهان ابتدا فرض می‌کنیم که سرشتهای χ و ψ تحویل‌ناپذیرند. در این صورت $\mathbb{C}H$ـزیرمدولی چون U از $\mathbb{C}H$ با سرشت ψ و $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی چون V از $\mathbb{C}G$ با سرشت χ وجود دارد. طبق قضیهٔ ۲۴.۱۴، داریم

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V))$$
$$\langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H))$$

با استفاده از گزارهٔ ۱۵.۲۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H \tag{۱۷.۲۱}$$

بنابراین در حالت خاصی که χ و ψ تحویل‌ناپذیرند قضیه درست است.

برای اثبات قضیه در حالت کلی، فرض کنیم χ_1، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G و ψ_1، ... ، ψ_m سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند. در این صورت

$$\psi = \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j \qquad \text{و} \qquad \chi = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i$$

که d_i و e_j اعداد صحیح هستند. بنابراین

$$\begin{aligned}
\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G &= \left\langle \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j \uparrow G, \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \right\rangle_G \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} e_j d_i \langle \psi_j \uparrow G, \chi_i \rangle_G \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} e_j d_i \langle \psi_j, \chi_i \downarrow H \rangle_H \qquad \text{بنابه (۱۷.۲۱)} \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{m} e_j \psi_j, \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i \downarrow H \right\rangle_H \\
&= \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H
\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات قضیهٔ تقابل فروبنیوس به انجام می‌رسد. ■

۱۸.۲۱ نتیجه اگر f تابعی رده‌ای روی G و ψ سرشت H باشد آنگاه

$$\langle \psi \uparrow G, f \rangle_G = \langle \psi, f \downarrow H \rangle_H$$

برهان نتیجهٔ فوق بلافاصله از قضیهٔ تقابل فروبنیوس حاصل می‌شود، زیرا طبق نتیجهٔ ۴.۱۵، سرشتهای G فضای برداری توابع رده‌ای روی G را پدید می‌آورند.

مقادیر سرشت فرابری

اکنون شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان سرشتهای فرابری را به‌دست آورد. فرض می‌کنیم ψ سرشت زیرگروه H از G باشد، و برای سادگی در نوشتن، نماد $\dot{\psi}$ را معرفی می‌کنیم: $\dot{\psi} : G \to \mathbb{C}$ تابعی با ضابطهٔ زیر است

$$\dot{\psi}(g) = \begin{cases} \psi(g) & \text{اگر } g \in H \\ \circ & \text{اگر } g \notin H \end{cases}$$

۱۹.۲۱ گزاره مقادیر سرشت فرابری $\psi \uparrow G$ عبارت است از

$$(\psi \uparrow G)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1}gy) \qquad (g \in G)$$

برهان فرض کنیم $f : G \to \mathbb{C}$ تابعی با ضابطهٔ زیر باشد

$$f(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1}gy) \qquad (g \in G)$$

هدف ما این است که ثابت کنیم $f = \psi \uparrow G$.

اگر $w \in G$ آنگاه

$$f(w^{-1}gw) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1}w^{-1}gwy) = f(g)$$

زیرا وقتی‌که y تمام عناصر G را اختیار کند wy نیز تمام عناصر G را اختیار می‌کند. بنابراین f تابعی رده‌ای است، و لذا بنا به نتیجهٔ ۴.۱۵، کافی است نشان دهیم که تساوی $\langle f, \chi \rangle_G = \langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G$ به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G برقرار است.

فرض کنیم χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از G باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\langle f,\chi\rangle_G &= \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi(g)}\\ &= \frac{۱}{|G|}\frac{۱}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(y^{-۱}gy)\overline{\chi(g)}\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $x = y^{-۱}gy$ آنگاه

$$\begin{aligned}\langle f,\chi\rangle_G &= \frac{۱}{|G|}\frac{۱}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\dot{\psi}(x)\overline{\chi(yxy^{-۱})}\\ &= \frac{۱}{|H|}\sum_{x\in H}\psi(x)\overline{\chi(x)}\end{aligned}$$

زیرا اگر $x \notin H$ آنگاه $\dot{\psi}(x) = ۰$ و به‌ازای هر $y \in G$ تساوی $\chi(yxy^{-۱}) = \chi(x)$ برقرار است. بنابراین

$$\langle f,\chi\rangle_G = \langle \psi, \chi\downarrow H\rangle_H$$

و لذا طبق قضیهٔ تقابل

$$\langle f,\chi\rangle_G = \langle \psi\uparrow G, \chi\rangle_G$$

رابطهٔ فوق همان رابطه‌ای است که برای اثبات تساوی $f = \psi\uparrow G$ لازم داشتیم. بنابراین اثبات کامل شده است. ■

۲۰.۲۱ نتیجه اگر ψ سرشت زیرگروه H از G باشد آنگاه درجهٔ $\psi\uparrow G$ عبارت است از

$$(\psi\uparrow G)(۱) = \frac{|G|}{|H|}\psi(۱)$$

برهان نتیجهٔ فوق با استفاده از گزارهٔ ۱۹.۲۱ و محاسبهٔ مقدار $(\psi\uparrow G)(۱)$ بلافاصله اثبات می‌شود. راه دیگر اثبات این است که درجهٔ $\psi\uparrow G$ را با استفاده از تعریف مدول فرابری به‌دست آوریم (تمرین ۳.۲۱ را ببینید). ■

برای محاسبهٔ مقادیر سرشت فرابری فرمولی بجز آنچه درگزارهٔ ۱۹.۲۱ آمده به‌دست می‌آوریم که در عمل مفیدتر است (این فرمول را در گزارهٔ ۲۳.۲۱ می‌آوریم).

به‌ازای $x \in G$، تابع رده‌ای f_x^G را روی G چنین تعریف می‌کنیم

$$f_x^G(y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } y \in x^G \\ ۰ & \text{اگر } y \notin x^G \end{cases} \qquad (y \in G)$$

بنابراین f تابع مشخصهٔ ردهٔ مزدوجی x^G است.

۲۱.۲۱ گزاره اگر χ سرشت G باشد و $x \in G$ آنگاه

$$\langle \chi, f_x^G \rangle_G = \frac{\chi(x)}{|C_G(x)|}$$

برهان داریم

$$\begin{aligned} \langle \chi, f_x^G \rangle_G &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) f_x^G(g) \\ &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in x^G} \chi(g) = \frac{|x^G|}{|G|} \chi(x) \\ &= \frac{\chi(x)}{|C_G(x)|} \qquad \text{بنابه قضیهٔ ۸.۱۲} \end{aligned}$$

■

توجه داشته باشید که از نتیجه‌ای نظیر گزارهٔ ۲۱.۲۱ در قضیهٔ ۴.۱۶ استفاده کردیم.

اگر $H \leq G$ و $h \in H$ آنگاه $h^H \subseteq h^G$؛ اما اگر $g \in G$ آنگاه g^G ممکن است شامل ۰، ۱، ۲ یا تعداد بیشتری از رده‌های مزدوجی H باشد. این مطلب را می‌توانیم به نحو دیگری به‌صورت زیر بیان کنیم

۲۲.۲۱ فرض کنیم که $x \in G$.

(۱) اگر هیچ عنصری از x^G در H نباشد آنگاه $f_x^G \downarrow H = ۰$.

(۲) اگر عنصری از x^G در H باشد آنگاه عناصر $x_۱$، ... ، x_m در H وجود دارند به‌قسمی که

$$f_x^G \downarrow H = f_{x_۱}^H + \cdots + f_{x_m}^H$$

عبارت (۲) بیان می‌دارد که $H \cap x^G$ به اجتماع m ردهٔ مزدوجی H با نماینده‌های $x_۱$، ... ، x_m تجزیه می‌شود.

۲۳.۲۱ گزاره فرض کنیم ψ سرشت زیرگروه H از G باشد و $x \in G$.

(۱) اگر هیچ عنصری از x^G در H نباشد آنگاه $(\psi \uparrow G)(x) = ۰$.

(۲) اگر عنصری از x^G در H باشد آنگاه

$$(\psi \uparrow G)(x) = |C_G(x)| \left(\frac{\psi(x_۱)}{|C_H(x_۱)|} + \cdots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|} \right)$$

که $x_۱$، ... ، x_m در H هستند و همانند ۲۲.۲۱، $f_x^G \downarrow H = f_{x_۱}^H + \cdots + f_{x_m}^H$.

برهان طبق گزارهٔ ۲۱.۲۱ و نتیجهٔ ۱۸.۲۱، داریم

$$\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{|C_G(x)|} = \langle \psi \uparrow G, f_x^G \rangle_G = \langle \psi, f_x^G \downarrow H \rangle_H$$

اگر هیچ عنصری از x^G در H نباشد آنگاه $f_x^G \downarrow H = ۰$ و در نتیجه $(\psi \uparrow G)(x) = ۰$. اگر عنصری از x^G در H باشد، که در این صورت طبق ۲۲.۲۱(۲)، $f_x^G \downarrow H = f_{x_۱}^H + \cdots + f_{x_m}^H$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{|C_G(x)|} &= \langle \psi, f_{x_۱}^H + \cdots + f_{x_m}^H \rangle_H \\
&= \langle \psi, f_{x_۱}^H \rangle_H + \cdots + \langle \psi, f_{x_m}^H \rangle_H \\
&= \frac{\psi(x_۱)}{|C_H(x_۱)|} + \cdots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|} \qquad \text{بنابه گزارهٔ ۲۱.۲۱}
\end{aligned}$$

از اینجا نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید. ■

۲۴.۲۱ مثال فرض کنیم $G = S_۴$ و $H = \langle a, b \rangle$ که

$$a = (۱\ ۲\ ۳\ ۴), \qquad b = (۱\ ۳)$$

در این صورت $H \cong D_۸$، زیرا $a^۴ = b^۲ = ۱$ و $b^{-۱}ab = a^{-۱}$. طبق ۱۲.۱۲، رده‌های مزدوجی H عبارت‌اند از

$$\{۱\}$$
$$\{a^۲ = (۱\ ۳)(۲\ ۴)\}$$
$$\{a = (۱\ ۲\ ۳\ ۴), a^۳ = (۱\ ۴\ ۳\ ۲)\}$$
$$\{b = (۱\ ۳), a^۲b = (۲\ ۴)\}$$
$$\{ab = (۱\ ۲)(۳\ ۴), a^۳b = (۱\ ۴)(۲\ ۳)\}$$

داریم

$$f_1^G \downarrow H = f_1^H, \qquad f_{(1\,3)}^G \downarrow H = f_{(1\,3)}^H, \qquad f_{(1\,2\,3)}^G \downarrow H = 0$$
$$f_{(1\,2)(3\,4)}^G \downarrow H = f_{(1\,3)(2\,4)}^H + f_{(1\,2)(3\,4)}^H\,, \quad f_{(1\,2\,3\,4)}^G \downarrow H = f_{(1\,2\,3\,4)}^H$$

به‌عنوان مثال، تساوی

$$f_{(1\,2)(3\,4)}^G \downarrow H = f_{(1\,3)(2\,4)}^H + f_{(1\,2)(3\,4)}^H$$

حاکی از آن است که $(1\,2)(3\,4)^G$، که از رده‌های مزدوجی G است، دقیقاً شامل دو ردهٔ مزدوجی H با نماینده‌های $(1\,3)(2\,4)$ و $(1\,2)(3\,4)$ است.

مرتبهٔ مرکزساز عناصر H عبارت‌اند از

h	1	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$
$\lvert C_G(h)\rvert$	24	8	4	4	8
$\lvert C_H(h)\rvert$	8	8	4	4	4

فرض کنیم که ψ سرشت H است. در این صورت طبق گزارهٔ ۲۳.۲۱ داریم

$$(\psi \uparrow G)(1) = 24\frac{\psi(1)}{8}$$
$$(\psi \uparrow G)((1\,3)) = 4\frac{\psi((1\,3))}{4}$$
$$(\psi \uparrow G)((1\,2\,3)) = 0$$
$$(\psi \uparrow G)((1\,2)(3\,4)) = 8\left(\frac{\psi((1\,3)(2\,4))}{8} + \frac{\psi((1\,2)(3\,4))}{4}\right)$$
$$(\psi \uparrow G)((1\,2\,3\,4)) = 4\frac{\psi((1\,2\,3\,4))}{4}$$

با مراجعه به سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_1، ... ، χ_5 از $H \cong D_8$ که در مثال ۳.۱۶(۳) داده شده‌اند، داریم

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\chi_1 \uparrow G$	۳	۱	۰	۳	۱
$\chi_2 \uparrow G$	۳	−۱	۰	−۱	۱
$\chi_3 \uparrow G$	۳	۱	۰	−۱	−۱
$\chi_4 \uparrow G$	۳	−۱	۰	۳	−۱
$\chi_5 \uparrow G$	۶	۰	۰	−۲	۰

در مثال بعدی، با استفاده از سرشتهای فرابری، جدول سرشت گروهی با مرتبهٔ ۲۱ را پیدا می‌کنیم.

۲۵.۲۱ مثال (به تمرین ۲.۱۷ مراجعه کنید) جایگشتهای a و b از S_7 را چنین تعریف می‌کنیم

$$a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7), \qquad b = (2\ 3\ 5)(4\ 7\ 6)$$

و G را زیرگروه $\langle a, b\rangle$ از S_7 فرض می‌کنیم. می‌توان نشان داد

$$a^7 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^2$$

از این روابط نتیجه می‌شود که تمام عناصر G به شکل a^ib^j هستند که $0 \leq i \leq 6$ و $0 \leq j \leq 2$. بنابراین G دارای مرتبهٔ ۲۱ است.

هدف ما یافتن جدول سرشت G است. ابتدا رده‌های مزدوجی را پیدا می‌کنیم. چون $\langle a\rangle \leq C_G(a)$ پس $|C_G(a)|$ مضرب ۷ است و چون $b \notin C_G(a)$ پس $|C_G(a)| < 21$. از این رو $|C_G(a)| = 7$ و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $|C_G(b)| = 3$. با استفاده از این مطالب نتیجه می‌گیریم که رده‌های مزدوجی G عبارت‌اند از

$$\{1\}$$
$$\{a, a^2, a^4\}$$
$$\{a^3, a^5, a^6\}$$
$$\{a^ib : 0 \leq i \leq 6\}$$
$$\{a^ib^2 : 0 \leq i \leq 6\}$$

عناصر ۱، a، a^3، b و b^2 را به‌عنوان نماینده‌های رده‌های مزدوجی در نظر می‌گیریم. توجه کنید که G دقیقاً دارای ۵ سرشت تحویل‌ناپذیر است.

چون $\langle a\rangle \lhd G$ و $G/\langle a\rangle \cong C_3$، سه سرشت خطی χ_1، χ_2، χ_3 از G را با ارتقاء سرشتهای خطی $G/\langle a\rangle$ به‌دست می‌آوریم. مقادیر این سرشتها عبارت‌اند از

g	1	a	a^3	b	b^2
$\lvert C_G(g)\rvert$	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω

که $\omega = e^{2\pi i/3}$.

قرار می‌دهیم $H = \langle a\rangle$. دو سرشت باقیماندهٔ G را به‌وسیلهٔ فرابری سرشتهای خطی H به‌دست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $\eta = e^{2\pi i/7}$. به‌ازای $1 \leq k \leq 6$، تابع ψ_k با ضابطهٔ

$$\psi_k(a^j) = \eta^{jk} \qquad (0 \leq j \leq 6)$$

سرشت H است. برای استفاده از فرمول گزارهٔ ۲۳.۲۱ جهت محاسبهٔ $\psi_k \uparrow G$ متذکر می‌شویم که

$$f_a^G \downarrow H = f_a^H + f_{a^2}^H + f_{a^4}^H$$

زیرا هیچ یک از عناصر a، a^2، a^4 با دیگری در H مزدوج نیست. بنابراین طبق گزارهٔ ۲۳.۲۱ داریم

$$(\psi_1 \uparrow G)(a) = \eta + \eta^2 + \eta^4$$

به همین ترتیب

$$(\psi_1 \uparrow G)(a^3) = \eta^3 + \eta^5 + \eta^6$$
$$(\psi_1 \uparrow G)(1) = 3$$

چون هیچ یک از دو ردهٔ مزدوجی b و b^2 از رده‌های مزدوجی G در H قرار نمی‌گیرد پس

$$(\psi_1 \uparrow G)(b) = (\psi_1 \uparrow G)(b^2) = 0$$

به همین ترتیب

$$(\psi_3 \uparrow G)(1) = 3, \qquad (\psi_3 \uparrow G)(a) = \eta^3 + \eta^5 + \eta^6$$
$$(\psi_3 \uparrow G)(a^3) = \eta + \eta^2 + \eta^4, \qquad (\psi_3 \uparrow G)(b) = (\psi_3 \uparrow G)(b^2) = 0$$

بنابراین اگر قرار دهیم $\chi_4 = \psi_1 \uparrow G$ و $\chi_5 = \psi_3 \uparrow G$ آنگاه مقادیر χ_4 و χ_5 به قرار زیر است

	1	a	a^3	b	b^2
χ_4	3	$\eta+\eta^2+\eta^4$	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	0	0
χ_5	3	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	$\eta+\eta^2+\eta^4$	0	0

اکنون داریم $\chi_4 \downarrow H = \psi_1+\psi_2+\psi_4$ و $\chi_5 \downarrow H = \psi_3+\psi_5+\psi_6$. بنابراین $\chi_4 \neq \chi_5$، زیرا ψ_1، . . . ، ψ_6 استقلال خطی دارند.

اکنون محاسبه نشان می‌دهد که

$$\langle \chi_4, \chi_4 \rangle_G = \frac{9}{21}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{0}{3}+\frac{0}{3} = 1$$

و به همین ترتیب داریم $\langle \chi_5, \chi_5 \rangle_G = 1$. به این ترتیب χ_4 و χ_5 دو سرشت تحویل‌ناپذیرند و جدول سرشت G به‌صورت زیر است

جدول سرشت $\langle a, b : a^7 = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^2 \rangle$

g_i	1	a	a^3	b	b^2
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	$\eta+\eta^2+\eta^4$	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	0	0
χ_5	3	$\eta^3+\eta^5+\eta^6$	$\eta+\eta^2+\eta^4$	0	0

خلاصهٔ فصل ۲۱

فرض کنیم که H زیرگروه G است.

۱. به‌ازای هر $\mathbb{C}H$ـمدول U، $\mathbb{C}G$ـمدول فرابری $U \uparrow G$ را می‌توان تعریف کرد. اگر U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ باشد آنگاه $U \uparrow G$ عبارت از $U(\mathbb{C}G)$ است.

۲. اگر ψ سرشت H باشد آنگاه سرشت فرابری $\psi \uparrow G$ عبارت است از

$$(\psi \uparrow G)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\psi}(y^{-1}gy)$$

لذا درجهٔ $\psi \uparrow G$ مساوی $|G : H|\psi(1)$ است.

۳. اگر هیچ‌یک از عناصر g^G در H نباشد آنگاه

$$(\psi \uparrow G)(g) = 0$$

و اگر عنصری از g^G در H باشد آنگاه

$$(\psi \uparrow G)(g) = |C_G(g)| \left(\frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \cdots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|} \right)$$

که $f_g^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \cdots + f_{x_m}^H$.

۴. قضیهٔ تقابل فروبنیوس بیان می‌دارد که

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H$$

که ψ سرشت H و χ سرشت G است.

تمرینات فصل ۲۱

۱. فرض کنیم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و H زیرگروه $\langle a^2, b \rangle$ باشد. U را زیرفضای ۱ بعدی $\mathbb{C}H$ که توسط $1 - a^2 + b - a^2b$ پدید می‌آید تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید که U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول $\mathbb{C}H$ است.

ب) پایه‌ای برای $\mathbb{C}G$ـمدول فرابری $U \uparrow G$ پیدا کنید.

ج) سرشت $\mathbb{C}H$ـمدول U و سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $U \uparrow G$ را پیدا کنید. آیا $U \uparrow G$ تحویل‌ناپذیر است؟

۲. فرض کنیم $G = S_4$ و H زیرگروه $C_3 \cong \langle (123) \rangle$ باشد.

الف) اگر χ_1، ...، χ_5 سرشتهای تحویل‌ناپذیر G باشند که در بخش ۱.۱۸ داده شده‌اند، سرشتهای تحدیدی $\chi_i \downarrow H$ $(1 \leq i \leq 5)$ را به‌صورت مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیر ψ_1، ψ_2، ψ_3 از C_3 بنویسید.

ب) سرشتهای فرابری $\psi_j \uparrow G$ $(1 \leq j \leq 3)$ را به‌صورت مجموع سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i از G بنویسید.

۳. مستقیماً با استفاده از تعریف نشان دهید که اگر $H \leq G$ و ψ سرشت H باشد آنگاه

$$(\psi \uparrow G)(1) = \frac{|G|}{|H|}\psi(1)$$

۴. فرض کنیم H زیرگروه G، ψ سرشت H و χ سرشت G باشد. ثابت کنید که

$$(\psi(\chi \downarrow H)) \uparrow G = (\psi \uparrow G)\chi$$

(راهنمایی: ضرب داخلی دو طرف تساوی فوق را در سرشت تحویل‌ناپذیر دلخواهی از G در نظر بگیرید و از قضیهٔ تقابل فروبنیوس استفاده کنید.)

۵. مانند مثال ۲۵.۲۱ فرض کنیم $G = S_۷$ و $H = \langle a, b \rangle$ که

$$a = (۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۷), \qquad b = (۲\ ۳\ ۵)(۴\ ۷\ ۶)$$

فرض کنیم ϕ و ψ سرشتهای تحویل‌ناپذیر H به‌صورت زیر باشند

g_i	۱	a	$a^۳$	b	$b^۲$
$\vert C_H(g_i)\vert$	۲۱	۷	۷	۳	۳
ϕ	۱	۱	۱	۱	۱
ψ	۳	$\eta + \eta^۲ + \eta^۴$	$\eta^۳ + \eta^۵ + \eta^۶$	۰	۰

که $\eta = e^{۲\pi i/۷}$ (مثال ۲۵.۲۱ را ببینید).

می‌دانیم که $|C_G(a)| = ۷$ و $|C_G(b)| = ۱۸$. مقادیر سرشتهای فرابری $\phi \uparrow G$ و $\psi \uparrow G$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنیم که H زیرگروه G و $\chi_۱$، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند. گیریم ψ سرشت تحویل‌ناپذیر H است. نشان دهید که اعداد صحیح $d_۱$، ... ، d_k که با رابطهٔ $\psi \uparrow G = d_۱\chi_۱ + \cdots + d_k\chi_k$ معین می‌شوند در نابرابری زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i^۲ \leq |G : H|$$

(با گزارهٔ ۵.۲۰ مقایسه کنید.)

۷. فرض کنیم که H زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ و ψ سرشت تحویل‌ناپذیر H است. احکامی دربارهٔ $\psi \uparrow G$ نظیر احکامی که در فصل ۲۰ برای تحدید سرشتهای تحویل‌ناپذیر G به H ارائه شدند بیان و اثبات کنید.

۲۲

عدد صحیح جبری

در بین خواص اساسی سرشت، شاید خاصیتی که اثباتش از همه مشکلتر است این باشد که درجهٔ سرشت تحویل‌ناپذیر گروه متناهی مرتبهٔ گروه را عاد می‌کند. این حکم یکی از چند حکمی است که در این فصل با استفاده از اعداد صحیح جبری ثابت خواهیم کرد. اغلب احکام این فصل دربارهٔ خواص عددی مقادیر سرشت است. خاصیتی از عنصر g متعلق به گروه G را مورد بحث قرار می‌دهیم که اگر g واجد آن باشد آنگاه $\chi(g)$ به‌ازای هر سرشت χ از G عدد صحیح است. در این فصل روابط همنهشتی مفیدی را نیز ثابت می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال، اگر p عدد اول و عضو $g \in G$ عضوی با مرتبهٔ p^r باشد آنگاه به‌ازای هر سرشت χ از G که $\chi(g)$ عدد صحیح باشد، (به پیمانهٔ p)$\chi(g) \equiv \chi(۱)$.

عدد صحیح جبری

۱.۲۲ تعریف عدد مختلط λ را عدد صحیح جبری گویند هرگاه λ مقدار ویژهٔ ماتریسی باشد که تمام درایه‌های آن اعداد صحیح‌اند.

بنابراین، برای اینکه λ عدد صیح جبری باشد، باید شرط زیر برقرار باشد

$$\det(A - \lambda I) = ۰$$

که A ماتریسی مربعی با درایه‌های صحیح است. شرط زیر معادل شرط فوق است: به‌ازای ماتریس A در بالا،

$$uA = \lambda u$$

که u برداری سطری و مخالف صفر است.

تذکر می‌دهیم که λ عدد صحیح جبری است اگر و فقط اگر λ ریشهٔ چندجمله‌ایی به شکل

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

باشد، که a_0، $\ldots$ ، a_{n-1} اعداد صحیح‌اند (تمرین ۷.۲۲ را ببینید). درواقع، عدد صحیح جبری را معمولاً به‌صورت اخیر تعریف می‌کنند.

۲.۲۲ مثال (۱) هر عدد صحیح n عدد صحیح جبری است، زیرا n مقدار ویژهٔ ماتریس یک در یکِ (n) است.

(۲) $\sqrt{2}$ عدد صحیح جبری است، زیرا مقدار ویژهٔ ماتریس $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ است.

(۳) اگر λ عدد صحیح جبری باشد، $-\lambda$ و مزدوج مختلط λ یعنی $\overline{\lambda}$ نیز چنین‌اند. برای دریافت این موضوع توجه کنید که اگر A ماتریسی صحیح و u برداری سطری با خاصیت $uA = \lambda u$ باشد آنگاه

$$\overline{u}A = \overline{\lambda}\,\overline{u} \quad \text{و} \quad u(-A) = (-\lambda)u$$

که $\overline{u}$ ماتریسی سطری است که از u با قراردادن مزدوج مختلط هر درایهٔ u به‌جای آن درایه حاصل می‌شود.

(۴) فرض کنیم A ماتریس $n \times n$ زیر باشد

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنیم که ω ریشهٔ nام واحد است و u بردار سطری $(\text{۱}, \omega, \omega^{\text{۲}}, \cdots, \omega^{n-\text{۱}})$. در این صورت

$$uA = (\omega, \omega^{\text{۲}}, \cdots, \omega^{n-\text{۱}}, \text{۱}) = \omega u$$

بنابراین هر عددی که ریشهٔ nام واحد باشد عدد صحیح جبری است.

۳.۲۲ قضیه اگر λ و μ اعداد صحیح جبری باشند، $\lambda\mu$ و $\lambda + \mu$ نیز اعداد صحیح جبری‌اند.

برهان بنا به فرض ماتریسهای مربعی A و B با درایه‌های صحیح و بردارهای سطری مخالف صفر u و v وجود دارند به‌قسمی که

$$uA = \lambda u \quad \text{و} \quad vB = \mu v$$

فرض کنیم که A ماتریسی $m \times m$ و B ماتریسی $n \times n$ باشد.

گیریم $e_{\text{۱}}$، . . . ، e_m پایهٔ $\mathbb{C}^m$ و $f_{\text{۱}}$، . . . ، f_n پایهٔ $\mathbb{C}^n$ باشد. در این صورت بردارهای $e_i \otimes f_j$ ($\text{۱} \leq i \leq m$ و $\text{۱} \leq j \leq n$) پایه‌ای برای فضای ضرب تانسوری $V = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ تشکیل می‌دهند. درونریختی $A \otimes B$ از V را به‌ازای عناصر پایهٔ V چنین تعریف می‌کنیم

$$(e_i \otimes f_j)(A \otimes B) = e_i A \otimes f_j B \qquad (\text{۱} \leq i \leq m, \text{۱} \leq j \leq n)$$

وسپس آن را به‌طور خطی توسیع می‌دهیم (یعنی $(\sum \lambda_{ij}(e_i \otimes f_j))(A \otimes B) = \sum \lambda_{ij}(e_i A \otimes f_j B)$).
مانند اثبات گزارهٔ ۴.۱۹ به‌سادگی می‌توان نشان داد که به‌ازای تمام بردارهای $x \in \mathbb{C}^m$ و $y \in \mathbb{C}^n$،

$$(x \otimes y)(A \otimes B) = xA \otimes yB$$

از این رو

$$(u \otimes v)(A \otimes B) = uA \otimes vB = \lambda u \otimes \mu v = \lambda\mu(u \otimes v)$$

بنابراین $\lambda\mu$ مقدار ویژهٔ $A \otimes B$ است. چون ماتریس $A \otimes B$ نسبت به پایهٔ $e_i \otimes f_j$ ($\text{۱} \leq i \leq m$ و $\text{۱} \leq j \leq n$) دارای درایه‌های صحیح است، نتیجه می‌گیریم که $\lambda\mu$ عدد صحیح جبری است.

گیریم I_m و I_n به ترتیب ماتریسهای همانی $m \times m$ و $n \times n$ باشند. در این صورت

$$(u \otimes v)(A \otimes I_n + I_m \otimes B) = uA \otimes vI_n + uI_m \otimes vB$$
$$= \lambda u \otimes v + u \otimes \mu v$$
$$= (\lambda + \mu)(u \otimes v)$$

به همان نحو که نتیجه گرفتیم $\lambda\mu$ عدد صحیح جبری است، در اینجا نیز نتیجه می‌گیریم که $\lambda + \mu$ عدد صحیح جبری است. ■

قضیهٔ ۳.۲۲ نشان می‌دهد که مجموعهٔ تمام اعداد صحیح جبری زیرحلقهٔ $\mathbb{C}$ است، در نتیجهٔ بعدی ارتباط بین عدد صحیح جبری و سرشت را ذکر می‌کنیم.

۴.۲۲ نتیجه اگر χ سرشت G باشد و $g \in G$ آنگاه $\chi(g)$ عدد صحیح جبری است.

برهان طبق گزارهٔ ۹.۱۳، $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های واحد است. بنا به مثال ۲.۲۲(۴) هر ریشهٔ واحد عدد صحیح جبری است، لذا بنا به قضیهٔ ۳.۲۲ مجموع هر تعداد از ریشه‌های واحد نیز عدد صحیح جبری است. بنابراین $\chi(g)$ عدد صحیح جبری است. ■

۵.۲۲ گزاره اگر λ هم عدد گویا و هم عدد صحیح جبری باشد آنگاه λ عدد صحیح است.

برهان فرض کنیم که λ عدد گویاست و عدد صحیح نیست. در این صورت برای اثبات گزاره کافی است نشان دهیم که λ عدد صحیح جبری نیست.

می‌نویسیم $\lambda = r/s$ که r و s اعدادی صحیح و نسبت به هم اول‌اند و $s \neq \pm ۱$. گیریم p عددی اول است و s را عاد می‌کند. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های صحیح باشد، درایه‌های $sA - rI$ که روی قطر اصلی نیستند مضرب s و در نتیجه مضرب p هستند. بنابراین

$$\det(sA - rI) = (-r)^n + mp$$

که m عددی صحیح است. از آنجا که p عدد r را عاد نمی‌کند (زیرا r و s نسبت به هم اول‌اند)، نتیجه می‌گیریم که $\det(sA - rI) \neq ۰$. بنابراین

$$\det(A - \lambda I) = \left(\frac{۱}{s}\right)^n \det(sA - rI) \neq ۰$$

و از این‌رو λ عدد صحیح جبری نیست. ■

نتیجهٔ بعدی بلافاصله از نتیجهٔ ۴.۲۲ و گزارهٔ ۵.۲۲ حاصل می‌شود.

۶.۲۲ نتیجه فرض کنیم χ سرشت G باشد و $g \in G$. اگر $\chi(g)$ عدد گویا باشد، عدد صحیح هم هست.

ضمناً توجه کنید که یکی از نتایج گزارهٔ ۵.۲۲ این حکم معروف است که $\sqrt{۲}$ اصم است. (مثال ۲.۲۲(۲) نشان می‌دهد که $\sqrt{۲}$ عدد صحیح جبری است.)

درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر مرتبهٔ G را می‌شمارد

برای اینکه زمینهٔ اثبات این حکم را مهیا کنیم که $|G|$ مضرب درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G است، ابتدا دو لم مقدماتی را ثابت می‌کنیم. با توجه به تعریف ۲۱.۱۲ اگر C ردهٔ مزدوجی G باشد آنگاه

$$\overline{C} = \sum_{x \in C} x \in \mathbb{C}G$$

۷.۲۲ لم فرض کنیم که $g \in G$ و C ردهٔ مزدوجی G شامل x باشد. گیریم U $\mathbb{C}G$ـ مدولی تحویل‌ناپذیر با سرشت χ باشد. در این صورت

$$u\overline{C} = \lambda u \qquad \forall u \in U$$

که

$$\lambda = \frac{|G|}{|C_G(g)|}\frac{\chi(g)}{\chi(۱)}$$

برهان چون $\overline{C}$ متعلق به مرکز $\mathbb{C}G$ است (گزارهٔ ۲۲.۱۲ را ببینید)، از گزارهٔ ۱۴.۹ نتیجه می‌گیریم که عضوی چون $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای هر $u \in U$، $u\overline{C} = \lambda u$ یعنی

$$u \sum_{x \in C} x = \lambda u \qquad \forall u \in U$$

در نتیجه اگر $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای U باشد آنگاه

$$\sum_{x \in C} [x]_{\mathscr{B}} = \lambda I$$

با در نظر گرفتن اثر طرفین تساوی فوق حاصل می‌شود $\sum_{x\in C} \chi(x) = \lambda\chi(۱)$ و چون χ روی ردهٔ مزدوجی C مقداری ثابت دارد پس $|C|\chi(g) = \lambda\chi(۱)$ و بنابراین $\lambda = |C|\chi(g)/\chi(۱)$. از آنجا که طبق قضیهٔ ۸.۱۲ داریم $|C| = |G : C_G(g)|$ حکم ثابت می‌شود. ■

۸.۲۲ لم فرض کنیم $r = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{C}G$ که α_gها اعدادی صحیح‌اند. فرض کنیم که u عضوی مخالف صفر از $\mathbb{C}G$ با خاصیت

$$ur = \lambda u$$

باشد، که $\lambda \in \mathbb{C}$. در این صورت λ عدد صحیح جبری است.

برهان فرض کنیم $g_۱$، . . . ، g_n عناصر G باشند. در این صورت به‌ازای $۱ \leq i \leq n$ داریم

$$g_i r = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} g_j$$

که a_{ij}ها اعدادی صحیح‌اند. (درواقع $a_{ij} = \alpha_g$ که $g = g_i^{-۱} g_j$.) اکنون توجه کنید که عبارت $ur = \lambda u$ (که در آن $u \neq ۰$) بیان می‌دارد که λ مقدار ویژهٔ ماتریس صحیح $A = (a_{ij})$ است. بنابراین λ عدد صحیح جبری است. ■

۹.۲۲ مثال قرار می‌دهیم $G = C_n = \langle x : x^n = ۱ \rangle$ و

$$u = ۱ + \omega x^{-۱} + \omega^۲ x^{-۲} + \cdots + \omega^{n-۱} x \in \mathbb{C}G$$

که ω ریشهٔ nام واحد است. در این صورت

$$ux = \omega u$$

و لذا از لم ۸.۲۲ نتیجه می‌گیریم که ω عدد صحیح جبری است.

توجه کنید که در مثال فوق نتیجهٔ مثال ۲.۲۲(۴) دوباره به‌دست آمده است.

۱۰.۲۲ نتیجه اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد و $g \in G$ آنگاه عدد

$$\lambda = \frac{|G|}{|C_G(g)|} \frac{\chi(g)}{\chi(۱)}$$

عدد صحیح جبری است.

برهان فرض کنیم U $\mathbb{C}G$ـ زیرمدول تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}G$ با سرشت χ است و $\overline{C}$ مجموع عناصر ردهٔ مزدوجیِ شامل g است. در این صورت طبق لم ۷.۲۲، به‌ازای هر $u \in U$ داریم $u\overline{C} = \lambda u$. بنابراین طبق لم ۸.۲۲، λ عدد صحیح جبری است. ■

۱۱.۲۲ قضیه اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد. $\chi(۱)$ مرتبهٔ G را عاد می‌کند.

برهان فرض کنیم $g_۱$، ... ، g_k نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت طبق نتایج ۱۰.۲۲ و ۴.۲۲ دو مقدار زیر

$$\frac{|G|}{|C_G(g_i)|}\frac{\chi(g_i)}{\chi(۱)} \quad و \quad \overline{\chi(g_i)}$$

به‌ازای هر i اعداد صحیح جبری‌اند. بنابراین طبق قضیهٔ ۳.۲۲،

$$\sum_{i=۱}^{k}\frac{|G|}{|C_G(g_i)|}\frac{\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)}}{\chi(۱)}$$

عدد صحیح جبری است. عبارت اخیر، بنا به روابط تعامد سطری، یعنی قضیهٔ ۴.۱۶(۱)، مساوی $|G|/\chi(۱)$ است. از آنجا که $|G|/\chi(۱)$ عدد گویاست، از گزارهٔ ۵.۲۲ نتیجه می‌گیریم که $|G|/\chi(۱)$ عدد صحیح است. یعنی $\chi(۱)$ مرتبهٔ G را می‌شمارد. ■

۱۲.۲۲ مثال (۱) اگر p عددی اول و G گروهی با مرتبهٔ p^n باشد آنگاه به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G، $\chi(۱)$ توانی از p است.

لذا اگر $|G| = p^۲$ آنگاه به‌ازای تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ داریم $\chi(۱) = ۱$ (توجه کنید که $\chi(۱) < p$، زیرا مجموع مربعات درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر مساوی $|G|$ است). از این‌رو، با استفاده ازگزارهٔ ۱۸.۹ این نتیجهٔ معروف که هر گروه مرتبهٔ $p^۲$ آبلی است دوباره به‌دست می‌آید.

(۲) فرض کنیم G گروهی با مرتبهٔ $۲p$ و p عددی اول است. بنا به قضیهٔ ۱۱.۲۲، درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G مساوی ۱ یا ۲ است (این درجه به دلیلی که در مثال (۱) بالا ذکر شد ممکن نیست p باشد). طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷ تعداد سرشتهای خطی G مرتبهٔ G را عاد می‌کند. بنابراین یا کلیهٔ درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر G مساوی ۱ هستند و یا اینکه عبارت‌اند از ۱، ۱، ۲، ... ، ۲ (که تعداد درجات ۲ مساوی $(p-۱)/۲$ است).

(۳) اگر $G = S_n$ آنگاه هر عدد اول p که درجهٔ سرشت تحویل‌ناپذیری از G راعاد کند $n!$ را نیز عاد می‌کند و لذا از n بزرگتر نیست.

قضیهٔ ۱۱.۲۲ دارای نتیجهٔ جالب زیر دربارهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه ساده است. (یادآوری می‌کنیم که گروه G را ساده می‌نامند هرگاه بجز $\{۱\}$ و G زیرگروه نرمال دیگری نداشته باشد).

۱۳.۲۲ نتیجه گروه ساده سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۲ ندارد.

برهان فرض کنیم که G گروهی ساده، و χ سرشت تحویل‌ناپذیری از آن با درجهٔ ۲ باشد. گیریم $\rho : G \to \mathrm{GL}(۲,\mathbb{C})$ نمایش G با سرشت χ باشد. چون $\mathrm{Ker}\rho \lhd G$ و G ساده است پس $\mathrm{Ker}\rho = \{۱\}$ و لذا ρ یک‌به‌یک است.

حال توجه کنید که بنا به گزارهٔ ۵.۹، G غیرآبلی است. از این‌رو $G' \neq ۱$ و چون G ساده است پس $G' = G$. بنابراین طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، G سرشت خطی غیربدیهی ندارد. اما تابع $g \to \det(g\rho)$ سرشت خطی G است (تمرین ۷.۱۳(الف) را ببینید)، و لذا

$$\det(g\rho) = ۱ \quad \forall g \in G$$

اکنون توجه کنید که بنا به قضیهٔ ۱۱.۲۲ مرتبهٔ G عددی زوج است. پس G دارای عضوی با مرتبهٔ ۲ مانند x است (تمرین ۸.۱ را ببینید).

ماتریس ۲×۲ی $x\rho$ را در نظر می‌گیریم. چون ρ یک‌به‌یک است پس مرتبهٔ $x\rho$ مساوی ۲ است، و لذا طبق گزارهٔ ۱۱.۹ ماتریسی ۲×۲ مانند T وجود دارد به‌قسمی که $T^{-۱}(x\rho)T$ ماتریس قطری با درایه‌های قطری ± ۱ است. چون $\det(x\rho) = ۱$ پس

$$T^{-۱}(x\rho)T = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$x\rho = T(-I)T^{-۱} = -I$$

در نتیجه به‌ازای هر $g \in G$، $(x\rho)(g\rho) = (g\rho)(x\rho)$. چون ρ یک‌به‌یک است، تساوی اخیر به‌معنای این است که به‌ازای هر $g \in G$، $xg = gx$ و لذا

$$\langle x \rangle \lhd G$$

و این با فرض ساده بودن G تناقض دارد. ■

شرط کافی برای صحیح بودن $\chi(g)$

در قضیهٔ ۱۵.۲۲، که بعداً می‌آید، شرطی از نظریهٔ گروهها برای عنصر g از G عرضه می‌کنیم که صحیح بودن $\chi(g)$ به‌ازای هر سرشت χ از G را ایجاب می‌کند. از جملهٔ نتایج این قضیه این است که به‌ازای هر n، تمام درایه‌های جدول سرشت S_n اعداد صحیح هستند (نتیجهٔ ۱۶.۲۲ را

ببینید). با توجه به مشکلاتی که در ساختن جدول سرشت S_n به‌ازای nهای کوچک با آن روبه‌رو بودیم (در مثال ۱۷.۱۹ به $n = ۶$ رسیدیم)، به نظر می‌رسد که قضیهٔ ۱۵.۲۲ قضیهٔ مفیدی باشد.

قبل از اثبات قضیهٔ ۱۵.۲۲، به یک لم مقدماتی دربارهٔ ریشهٔ واحد نیاز داریم. اگر a و b اعداد صحیح مثبت باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها را با (a, b) نمایش می‌دهیم. همچنین اگر d و n اعداد صحیح باشند، نماد $d|n$ نشان‌دهندهٔ آن است که عدد d عدد n را عاد می‌کند.

۱۴.۲۲ لم اگر ω ریشهٔ nام واحد باشد، عدد

$$\sum_{\substack{۱\leq i\leq n\\(i,n)=۱}} \omega^i$$

عدد صحیح است.

برهان نتیجه را با استفاده از استقرا روی n ثابت می‌کنیم. درستی حکم به‌ازای $n = ۱$ بدیهی است. همچنین اگر $\omega = ۱$، درستی حکم واضح است. لذا فرض کنیم ω ریشهٔ nام واحد است و $\omega \neq ۱$. در این صورت ω ریشهٔ چندجمله‌ای $x^{n-۱} + \cdots + x + ۱ = (x^n - ۱)/(x - ۱)$ است. بنابراین $\sum_{i=۱}^{n} \omega^i = ۰$.

اکنون جمع $\sum_{i=۱}^{n} \omega^i$ را با توجه به بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک i و n افراز می‌کنیم، داریم

$$۰ = \sum_{i=۱}^{n} \omega^i = \sum_{d|n} \sum_{\substack{۱\leq i\leq n\\(i,n)=d}} \omega^i = \sum_{d|n} \sum_{\substack{۱\leq j\leq n/d\\(j,n/d)=۱}} \omega^{dj}$$

از $d|n$ نتیجه می‌شود که ω^d ریشهٔ (n/d)ام واحد است و اگر $d > ۱$ آنگاه بنا به فرض استقرا

$$\sum_{\substack{۱\leq j\leq n/d\\(j,n/d)=۱}} \omega^{dj} \in \mathbb{Z}$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{\substack{۱\leq i\leq n\\(i,n)=۱}} \omega^i = \sum_{i=۱}^{n} \omega^i - \sum_{\substack{d|n\\d>۱}} \sum_{\substack{۱\leq j\leq n/d\\(j,n/d)=۱}} \omega^{dj} \in \mathbb{Z}$$

و لذا حکم ثابت شده است. ■

۱۵.۲۲ قضیه گیریم g عنصری از G با مرتبهٔ n است. فرض کنیم که به‌ازای هر i، که $n \geq i \geq ۱$ و $(i,n) = ۱$، عناصر g و g^i مزدوج باشند. در این صورت اگر χ سرشت دلخواهی از G باشد، $\chi(g)$ عدد صحیح است.

برهان فرض کنیم V $\mathbb{C}G$ـمدول و χ سرشت V با درجهٔ m باشد. طبق گزارهٔ ۱۱.۹، پایهٔ $\mathscr{B}$ برای V وجود دارد به‌قسمی که

$$[g]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \omega_۱ & & \circ \\ & \ddots & \\ \circ & & \omega_m \end{pmatrix}$$

که $\omega_۱$، . . . ، ω_m ریشهٔ nام واحدند. به‌ازای $n \geq i \geq ۱$، درایه‌های قطر اصلی ماتریس $[g^i]_{\mathscr{B}}$ عبارت‌اند از $\omega_۱^i$، . . . ، ω_m^i و لذا

$$\chi(g^i) = \omega_۱^i + \cdots + \omega_m^i$$

بنابراین طبق لم ۱۴.۲۲،

$$\sum_{\substack{۱ \leq i \leq n \\ (i,n)=۱}} \chi(g^i) \in \mathbb{Z}$$

از آنجا که g و g^i به‌ازای iهایی که $n \geq i \geq ۱$ و $(i,n) = ۱$ مزدوج‌اند، به‌ازای چنین iهایی داریم $\chi(g^i) = \chi(g)$ و از این‌رو

$$s\chi(g) \in \mathbb{Z}$$

که s تعداد iهایی است که $n \geq i \geq ۱$ و $(i,n) = ۱$. در نتیجه $\chi(g)$ عدد گویاست و لذا طبق نتیجهٔ ۶.۲۲ عدد صحیح است. ■

تذکر می‌دهیم که با استفاده از نظریهٔ گالوا می‌توان عکس قضیهٔ ۱۵.۲۲ را ثابت کرد، یعنی اگر به‌ازای هر سرشت χ از G داشته باشیم $\chi(g^i) \in \mathbb{Z}$ آنگاه به‌ازای iهایی که $(i,n) = ۱$، g و g^i مزدوج‌اند.

۱۶.۲۲ نتیجه مقادیر تمام سرشتهای گروه متقارن اعداد صحیح‌اند.

برهان اگر $g \in S_n$ و i نسبت به مرتبهٔ g اول باشد آنگاه جایگشتهای g و g^i دارای شاکلهٔ دوری یکسان هستند و لذا طبق قضیهٔ ۱۵.۱۲ مزدوج‌اند. اکنون نتیجهٔ مطلوب با استفاده از قضیهٔ ۱۵.۲۲ به‌دست می‌آید. ■

p'ـقسمت عضو گروه

باقیماندهٔ این فصل به بعضی از خواص مهم همنهشتیِ مقادیر سرشت اختصاص دارد. به‌عنوان مثال، یکی از پیامدهای خیلی مفید نتایجمان این است که اگر p عدد اول باشد و g عضوی از G با مرتبهٔ p^r و χ سرشت G با خاصیت $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ باشد آنگاه (به پیمانهٔ $\chi(g) \equiv \chi(1)(m$.

قبل از اینکه به بحث اصلی دربارهٔ سرشت بپردازیم، به تعریف p'ـقسمت عضو گروه نیاز داریم. این تعریف از لم زیر حاصل می‌شود.

۱۷.۲۲ لم فرض کنیم p عدد اول و $g \in G$. در این صورت عضوهایی چون $x, y \in G$ وجود دارند به‌قسمی که سه شرط زیر برقرار باشند

(۱) $g = xy = yx$

(۲) مرتبهٔ x توانی از p است

(۳) مرتبهٔ y نسبت به p اول است

به‌علاوه عناصر x و y از G که در شرایط فوق صدق می‌کنند منحصر به‌فردند.

برهان فرض کنیم مرتبهٔ g مساوی up^v است، که $u, v \in \mathbb{Z}$ و $(u,p) = 1$. در این صورت اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌قسمی که

$$au + bp^v = 1$$

قرار می‌دهیم $x = g^{au}$ و $y = g^{bp^v}$. در این صورت

$$xy = yx = g^{au+bp^v} = g$$
$$x^{p^v} = g^{aup^v} = 1$$
$$y^u = g^{bup^v} = 1$$

از این‌رو مرتبهٔ x توانی از p است و مرتبهٔ y عدد u را می‌شمارد و لذا نسبت به p اول است. بنابراین x و y در شرایط (۱)ـــ(۳) صدق می‌کنند.

اکنون فرض کنیم که عناصر $x', y' \in G$ نیز در شرایط (۱)ـ(۳) صدق کنند، یعنی رابطهٔ $g = x'y' = y'x'$ برقرار باشد، مرتبهٔ x' توانی از p باشد و مرتبهٔ y' نسبت به p اول باشد. باید نشان دهیم که $x = x'$ و $y = y'$.

داریم

$$x'g = x'y'x' = gx'$$

لذا ضرب x' در g تعویض‌پذیر است، در نتیجه ضرب x' در $x = g^{au}$ نیز تعویض‌پذیر است. چون مرتبهٔ هر دو عنصر x و x' توانی از p است نتیجه می‌گیریم که مرتبهٔ $x^{-1}x'$ نیز توانی از p است. به همین نحو نتیجه می‌گیریم که ضرب y' در y تعویض‌پذیر است و مرتبهٔ $y(y')^{-1}$ نسبت به p اول است. سرانجام نتیجه می‌گیریم $xy = g = x'y'$ و لذا

$$x^{-1}x' = y(y')^{-1}$$

حال قرار می‌دهیم $z = x^{-1}x' = y(y')^{-1}$. نشان داده‌ایم که مرتبهٔ z هم توانی از p است و هم اینکه نسبت به p اول است. بنابراین $z = 1$ و در نتیجه $x = x'$ و $y = y'$، لذا حکم ثابت شده است. ■

۱۸.۲۲ تعریف عضو y را که در لم ۱۷.۲۲ آمده است p'ـقسمت g می‌نامند.

عبارت زیر را از برهان لم ۱۷.۲۲ استخراج می‌کنیم

۱۹.۲۲ گیریم مرتبهٔ g مساوی up^v است، که $u, v \in \mathbb{Z}$ و $(u, p) = 1$. اعداد صحیح a و b را طوری انتخاب می‌کنیم که $au + bp^v = 1$. در این صورت p'ـقسمت g عبارت است از g^{bp^v}.

به‌عنوان مثال، اگر $p = 2$ و مرتبهٔ g مساوی ۶ باشد آنگاه p'ـقسمت g مساوی g^{-2} است؛ در عبارت $g = xy$ از لم ۱۷.۲۲، x مساوی g^3 و y مساوی g^{-2} است.

بحث مختصری در نظریهٔ حلقه‌ها

برای مهیا کردن زمینهٔ اثبات حکم اصلی این فصل دربارهٔ خواص همنهشتی مقادیر سرشت، به چند حکم اساسی دربارهٔ زیرحلقه‌ای از $\mathbb{C}$ نیاز داریم که تمام مقادیر سرشت متعلق به آن است.

فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت است و قرار می‌دهیم $\zeta = e^{2\pi i/n}$. زیرحلقه‌ای از $\mathbb{C}$ را که توسط $\mathbb{Z}$ و ζ تولید می‌شود با $\mathbb{Z}[\zeta]$ نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{f(\zeta) : f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

واضح است که هر عضو $\mathbb{Z}[\zeta]$ ترکیبی از توانهای ۱، ζ، $\zeta^۲$، ...، $\zeta^{n-۱}$ با ضرایب صحیح است، پس درواقع داریم

$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{f(\zeta) : f(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg f(x) \leq n - ۱\}$$

اکنون فرض می‌کنیم p عدد اول است و قرار می‌دهیم

$$p\mathbb{Z}[\zeta] = \{pr : r \in \mathbb{Z}[\zeta]\}$$

$p\mathbb{Z}[\zeta]$ ایدآل اصلی $\mathbb{Z}[\zeta]$ است.

۲۰.۲۲ گزاره تعداد ایدآلهای I از $\mathbb{Z}[\zeta]$ که $p\mathbb{Z}[\zeta]$ را در بردارند متناهی است.

برهان حلقهٔ خارج‌قسمتی $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف، عناصر این حلقه عبارت‌اند از هم‌مجموعه‌های $p\mathbb{Z}[\zeta] + r$، که $r \in \mathbb{Z}[\zeta]$. چنین هم‌مجموعه‌هایی دارای عناصری به شکل زیرند

$$a_۰ + a_۱\zeta + \cdots + a_{n-۱}\zeta^{n-۱}،\quad \text{که به‌ازای هر } i، a_i \in \mathbb{Z} \text{ و } ۰ \leq a_i \leq p - ۱$$

چون تعداد چنین عناصری متناهی است نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$ متناهی است. ایدآلهای $\mathbb{Z}[\zeta]$ که $p\mathbb{Z}[\zeta]$ را دربردارند در تناظر یک‌به‌یک با ایدآلهای $\mathbb{Z}[\zeta]/p\mathbb{Z}[\zeta]$ هستند (این تناظر عبارت است از $I \to I/p\mathbb{Z}[\zeta]$). بنابراین تعداد این ایدآلها متناهی است، و لذا حکم ثابت شده است. ■

ازگزارهٔ ۲۰.۲۲ نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{Z}[\zeta]$ ایدآلی ماکسیمال چون P شامل $p\mathbb{Z}[\zeta]$ دارد، یعنی P ایدآل سره‌ای است که هیچ‌یک از ایدآلهای سرهٔ $\mathbb{Z}[\zeta]$ شامل آن نیستند. (ایدآل سرهٔ $\mathbb{Z}[\zeta]$ ایدآلی است که مساوی $\mathbb{Z}[\zeta]$ نیست.)

اکنون دو حکم ساده دربارهٔ ایدآل ماکسیمال P ثابت می‌کنیم.

۲۱.۲۲ گزاره اگر $r, s \in \mathbb{Z}[\zeta]$ و $rs \in P$ آنگاه $r \in P$ یا $s \in P$. لذا اگر به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون n، $r^n \in P$ آنگاه $r \in P$.

برهان فرض کنیم که $rs \in P$ و $r \notin P$. باید نشان دهیم که $s \in P$.

چون $r \notin P$، ایدآل P زیرمجموعهٔ سرهٔ ایدآل $r\mathbb{Z}[\zeta] + P$ از $\mathbb{Z}[\zeta]$ است. چون P ماکسیمال است پس

$$r\mathbb{Z}[\zeta] + P = \mathbb{Z}[\zeta]$$

در نتیجه عناصری چون $a \in \mathbb{Z}[\zeta]$ و $b \in P$ وجود دارند به‌قسمی که

$$۱ = ra + b$$

پس

$$s = rsa + sb$$

چون $rs \in P$ و $b \in P$ نتیجه می‌گیریم که $s \in P$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

برای اثبات حکم دوم گزاره، فرض کنیم $r^n \in P$. چون $r^n = rr^{n-۱}$ پس $r \in P$ یا $r^{n-۱} \in P$. با تکرار این استدلال نتیجه می‌گیریم که $r \in P$. ■

۲۲.۲۲ گزاره داریم $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

برهان گیریم $m \in P \cap \mathbb{Z}$. اگر $p \nmid m$ آنگاه اعداد صحیحی چون a و b وجود دارند به‌طوری که $am + bp = ۱$، و از اینجا نتیجه می‌شود $۱ \in P$، که نادرست است زیرا $P \neq \mathbb{Z}[\zeta]$. بنابراین $p|m$ و لذا $P \cap \mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z}$. چون $p \in P$، رابطهٔ $p\mathbb{Z} \subseteq P \cap \mathbb{Z}$ نیز برقرار است. ■

همنهشتی

اکنون می‌توانیم احکام مورد نظر خود را دربارهٔ همنهشتی مقادیر سرشت ثابت کنیم. فرض می‌کنیم G گروهی با مرتبهٔ n است و قرار می‌دهیم $\zeta = e^{۲\pi i/n}$. حلقهٔ $\mathbb{Z}[\zeta]$ حلقهٔ جالبی است زیرا مقادیر تمام سرشتهای G در $\mathbb{Z}[\zeta]$ قرار دارند (گزارهٔ ۱۱.۹ را ببینید). مانند بخش قبل، فرض کنیم p عدد اول و P ایدآل ماکسیمال $\mathbb{Z}[\zeta]$ شامل $p\mathbb{Z}[\zeta]$ باشد.

۲۳.۲۲ قضیه فرض کنیم $g \in G$ و y p'-قسمت g باشد. اگر χ سرشت G باشد آنگاه

$$\chi(g) - \chi(y) \in P$$

برهان فرض کنیم که مرتبهٔ g مساوی $m = up^v$ باشد، که $u, v \in \mathbb{Z}$ و $(u,p) = ۱$. اعداد صحیح a و b با شرط $au + bp^v = ۱$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $y = g^{bp^v}$ (۱۹.۲۲ را ببینید).

مرتبه‌های g و y عدد $n = |G|$ را عاد می‌کنند، لذا هر یک از دو مقدار $\chi(g)$ و $\chi(y)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های nام واحد است و از این‌رو متعلق به $\mathbb{Z}[\zeta]$ است.

اکنون فرض کنیم ω ریشهٔ mام واحد باشد (لذا $\omega \in \mathbb{Z}[\zeta]$ زیرا $m|n$). در این صورت $\omega = \omega^{au+bp^v}$، و لذا

$$\omega^{p^v} = \omega^{aup^v} \cdot \omega^{bp^{۲v}} = \omega^{bp^{۲v}}$$

عدد $(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیهٔ دوجمله‌ای،

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} = \omega^{p^v} - p^v\omega^{p^v-۱}\omega^{bp^v} + \cdots \pm \binom{p^v}{r}\omega^{p^v-r}\omega^{rbp^v} + \cdots + (-۱)^{p^v}\omega^{bp^{۲v}}$$

اگر $۰ < r < p^v$ آنگاه ضرایب $\binom{p^v}{r}$ از دو جمله‌ای فوق مضرب p هستند. بنابراین

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} = \omega^{p^v} + (-۱)^{p^v}\omega^{bp^{۲v}} + p\alpha$$

که $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta]$. به‌علاوه، چون $\omega^{p^v} = \omega^{bp^{۲v}}$ پس

$$\omega^{p^v} + (-۱)^{p^v}\omega^{bp^{۲v}} = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } p \neq ۲ \\ ۲\omega^{p^v} & \text{اگر } p = ۲ \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v} \in p\mathbb{Z}[\zeta]$$

به این ترتیب ثابت می‌شود که $(\omega - \omega^{bp^v})^{p^v}$ در ایدآل ماکسیمال P قرار دارد. حال با استفاده از گزارهٔ ۲۱.۲۲ نتیجه می‌شود

$$(\omega - \omega^{bp^v}) \in P \tag{۲۴.۲۲}$$

بنابه گزارهٔ ۱۱.۹، اعدادی چون $\omega_۱$، . . . ، ω_d وجود دارند که ریشه‌های mام واحدند و

$$\chi(y) = \omega_1^{bp^n} + \cdots + \omega_d^{bp^n} \quad \text{و} \quad \chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_d$$

لذا

$$\chi(g) - \chi(y) = (\omega_1 - \omega_1^{bp^n}) + \cdots + (\omega_d - \omega_d^{bp^n})$$

که بنابه (۲۴.۲۲) باید عضوی از P باشد. ■

۲۵.۲۲ نتیجه گیریم p عدد اول است. فرض کنیم که $g \in G$ و y p'ـقسمت g است. اگر χ سرشت G و هر دو مقدار $\chi(g)$ و $\chi(y)$ اعداد صحیح باشند آنگاه

$$\chi(g) \equiv \chi(y) (\text{به پیمانهٔ } p)$$

برهان چون هر دو مقدار $\chi(g)$ و $\chi(y)$ اعداد صحیح‌اند، از قضیهٔ ۲۳.۲۲ وگزارهٔ ۲۲.۲۲ نتیجه می‌گیریم

$$\chi(g) - \chi(y) \in P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$$

بنابراین $\chi(g) \equiv \chi(y)$ (به پیمانهٔ p). ■

۲۶.۲۲ نتیجه گیریم p عدد اول است. فرض کنیم که $g \in G$ و مرتبهٔ g توانی از عدد اول p است. اگر χ سرشت G باشد و $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ آنگاه

$$\chi(g) \equiv \chi(1) (\text{به پیمانهٔ } p)$$

برهان چون مرتبهٔ g توانی از p است پس p'ـقسمت آن مساوی ۱ است، لذا حکم بلافاصله از نتیجهٔ ۲۵.۲۲ به‌دست می‌آید. ■

توجه کنید که نتیجهٔ ۱۰.۱۳ حالت خاص نتیجهٔ ۲۶.۲۲ به‌ازای عضو مرتبهٔ ۲ی g است.

از احکام همنهشتی ۲۳.۲۲ــ۲۶.۲۲ در فصلهای ۲۵ تا ۲۷ برای به‌دست آوردن سرشتها بسیار استفاده خواهیم کرد. اما اکنون به این اکتفا می‌کنیم که صحت این احکام را در مورد جدول سرشتی که قبلاً به‌دست آورده‌ایم نشان دهیم.

۲۷.۲۲ مثال در مثال ۱۳.۲۰ دیدیم که جدول سرشت A_5 به‌صورت زیر است

جدول سرشت A_5

	1	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	$(1\ 3\ 4\ 5\ 2)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5	-1	1	0	0
χ_4	3	0	-1	α	β
χ_5	3	0	-1	β	α

که $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ و $\beta = (1-\sqrt{5})/2$.

اگر $g = (1\ 2\ 3)$، از نتیجهٔ ۲۵.۲۲ حاصل می‌شود که هرگاه $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ آنگاه $\chi(g) \equiv \chi(1)$ (به پیمانهٔ ۳) . بنابراین درایه‌های متناظر ستونهای ۱ و ۲ی جدول سرشت به پیمانهٔ ۳ همنهشت هستند، چنانکه این مطلب را در جدول می‌توان مشاهده کرد. به همین نحو درایه‌های ستونهای ۱ و ۳ به پیمانهٔ ۲ همنهشت هستند. همچنین

$$\chi_i((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) \equiv \chi_i(1) \text{ (به پیمانهٔ ۵)} \qquad \text{به‌ازای } i = 1, 2, 3$$

اما $\chi_4((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) = \alpha \notin \mathbb{Z}$. صحت قضیهٔ ۲۳.۲۲ را برای این مقدار نشان می‌دهیم. اگر قرار دهیم $p = 5$ و $g = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ آنگاه p'-قسمت g مساوی ۱ است و

$$\begin{aligned} \chi_4(g) - \chi_4(1) &= \alpha - 3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - 6) \\ &= \sqrt{5} \times \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = \beta\sqrt{5} \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\zeta = e^{2\pi i/60}$ و فرض می‌کنیم P ایدآل ماکسیمال $\mathbb{Z}[\zeta]$ شامل $5\mathbb{Z}[\zeta]$ باشد. در این صورت $(\sqrt{5})^2 \in P$ و لذا طبق گزارهٔ ۲۱.۲۲، $\sqrt{5} \in P$. چون $\beta \in \mathbb{Z}[\zeta]$ (گزارهٔ ۱۱.۹ را ببینید) پس $\beta\sqrt{5} \in P$. یعنی

$$\chi_4(g) - \chi_4(1) \in P$$

و این مؤید قضیهٔ ۲۳.۲۲ است.

خلاصهٔ فصل ۲۲

۱. مقادیر سرشت اعداد جبری هستند.

۲. درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G مرتبهٔ G را عاد می‌کند.

۳. اگر g و g^i به‌ازای هر عدد صحیح i که نسبت به مرتبهٔ g اول است مزدوج باشند آنگاه به‌ازای هر سرشت χ، $\chi(g)$ عدد صحیح است.

۴. فرض کنیم p عدد اول است. اگر $g \in G$ و y p'ـقسمت g باشد آنگاه به‌ازای هر سرشت χ از G که $\chi(g)$ و $\chi(y)$ عدد صحیح باشند داریم (به پیمانهٔ $\chi(g) \equiv \chi(y)(p$.

تمرینات فصل ۲۲

۱. فرض کنیم G گروه مرتبهٔ ۱۵ است. از قضایای ۱۲.۱۱ و ۱۱.۱۷ و ۱۱.۲۲ استفاده کرده نشان دهید که درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G مساوی ۱ است. نتیجه بگیرید که G آبلی است.

۲. ثابت کنید که تعداد رده‌های مزدوجی هر گروه مرتبهٔ ۱۶ برابر ۷، ۱۰ یا ۱۶ است.

۳. فرض کنیم p و q اعداد اول‌اند، $p > q$، و G گروه غیرآبلی مرتبهٔ pq است.

الف) درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را پیدا کنید.

ب) نشان دهید که $|G'| = p$.

ج) نشان دهید که q عدد $p - ۱$ را عاد می‌کند و G دارای $q + ((p-۱)/q)$ ردهٔ مزدوجی است.

۴. فرض کنیم G گروه و ϕ سرشتی از G با این خاصیت است که به‌ازای هر g و h که عضو همانیِ G نباشند، $\phi(g) = \phi(h)$.

الف) نشان دهید که $\phi = a۱_G + b\chi_{\mathrm{reg}}$، که $a, b \in \mathbb{C}$.

ب) نشان دهید که $a + b$ و $a + b|G|$ اعداد صحیح‌اند.

ج) نشان دهید که اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر غیربدیهی G باشد آنگاه $b\chi(۱)$ عدد صحیح است.

د) نتیجه بگیرید که هر دو عدد a و b عدد صحیح‌اند.

۵. فرض کنیم که G گروهی با مرتبهٔ فرد است. این تمرین نشان می‌دهد که تنها سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G با خاصیت $\chi = \overline{\chi}$ عبارت است از سرشت بدیهی.

الف) ثابت کنید که اگر $g \in G$ و $g = g^{-۱}$ آنگاه $g = ۱$.

ب) اکنون فرض کنید که χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است و $\chi = \overline{\chi}$. ثابت کنید که

$$\langle \chi, ۱_G \rangle = \frac{۱}{|G|}(\chi(۱) + ۲\alpha)$$

که α عدد صحیح جبری است.

ج) نتیجه بگیرید که $\chi = 1_G$.

۶. بسیاری اوقات ممکن است که بتوان جدول سرشت را با استفاده از اطلاعات عددی محدود دربارهٔ گروه G به‌دست آورد. تمرین حاضر این موضوع را در مورد گروه $G = S_5$ نشان می‌دهد.

گروه مفروض G با مرتبهٔ ۱۲۰ دقیقاً دارای هفت ردهٔ مزدوجی است، و دارای عضوی چون g با مرتبهٔ ۵ است به‌قسمی که $|C_G(g)| = 5$. به‌علاوه g، g^2، g^3 و g^4 در G مزدوج‌اند.

الف) نشان دهید که اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر دلخواهی از G باشد، مقدار $\chi(g)$ یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۱− است.

ب) با استفاده از نتیجهٔ ۲۶.۲۲ نشان دهید که G دارای دو سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۵ است.

ج) مقادیر $\chi(1)$ و $\chi(g)$ را به‌ازای تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G بیابید.

د) می‌دانیم که تمام درایه‌های جدول سرشت G اعداد صحیح‌اند و همچنین رده‌های مزدوجی G دارای نماینده‌های g_1، . . . ، g_7 هستند که مرتبهٔ آنها و مرتبهٔ مرکزساز آنها به قرار زیر است

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۲	۳	۴	۶	۵
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۱۲۰	۱۲	۸	۶	۴	۶	۵

با استفاده از نتیجهٔ ۲۵.۲۲ و روابط تعامد ستونی، جدول سرشت G را به‌دست آورید.

۷. ثابت کنید که عدد مختلط λ عدد صحیح جبری است اگر و فقط اگر λ ریشهٔ چندجمله‌ایی به شکل

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

باشد، که در آن هر a_r $(0 \le r \le n-1)$ عدد صحیح است.

۲۳

نمایش حقیقی

از فصل ۹ به بعد، همواره نمایشها را روی هیأت اعداد مختلط $\mathbb{C}$ در نظر گرفته‌ایم. مع‌هذا، احکامی چند از نظریهٔ نمایشها در مورد هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ نیز برقرارند. رابطه‌ای بین نمایش روی $\mathbb{C}$ و نمایش روی $\mathbb{R}$ وجود دارد که به‌هیچ وجه آشکار نیست و ما در این فصل به آن خواهیم پرداخت.

در بسیاری موارد، سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول دارای مقادیر حقیقی است، و اولین حکم اصلی این فصل دربارهٔ تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیری از G است که مقادیرشان حقیقی است.

فرض کنیم ρ نمایش G است. اگر تمام ماتریسهای $g\rho$ $(g \in G)$ دارای درایه‌های حقیقی باشند آنگاه واضح است که سرشت ρ دارای مقادیر حقیقی است. اما عکس این مطلب درست نیست: ممکن است که سرشت ρ دارای مقادیر حقیقی باشد ولی هیچ نمایشی چون σ هم‌ارز ρ وجود نداشته باشد که به‌ازای آن درایه‌های تمام ماتریسهای $g\sigma$ حقیقی باشند. خواهیم دید که برای تعیین اینکه آیا سرشتی مفروض با نمایشی روی $\mathbb{R}$ متناظر است یا نه محکهای گوناگونی وجود داد، و از آنجا به قضیهٔ جالب فروبنیوس‌ـشور دربارهٔ تعداد عناصر مرتبهٔ دو می‌رسیم.

مطالب این فصل شاید کمی پیشرفته‌تر از مطالب بقیهٔ این کتاب باشد؛ به‌علاوه در فصول

آینده که عمدتاً شامل محاسبات مربوط به جدول سرشت و کاربرد نظریهٔ سرشتهاست از آنها استفاده نمی‌شود. مع‌هذا، موضوع نمایشهای حقیقی نه تنها زیبا و جالب است، بلکه اطلاعات دیریابی دربارهٔ سرشتهایی که بسیاری اوقات در محاسبات مشکلتر پدید می‌آیند به‌دست می‌دهد.

سرشت حقیقی

عنصر g از گروه متناهی G را حقیقی می‌نامند هرگاه g مزدوج g^{-1} باشد؛ و اگر g حقیقی باشد، ردهٔ مزدوجی g^G را نیز حقیقی می‌نامند. توجه کنید که اگر رده‌ای مزدوجی حقیقی باشد، شامل وارون تمام عناصرش است، زیرا $\{x^{-1} : x \in g^G\} = (g^{-1})^G$.

از طرف دیگر، سرشت χ از G را حقیقی می‌نامند هرگاه $\chi(g)$ به‌ازای هر $g \in G$ حقیقی باشد. لذا به‌عنوان مثال، ردهٔ مزدوجی $\{1\}$ از G رده‌ای حقیقی، و سرشت بدیهی G سرشتی حقیقی است.

۱.۲۳ قضیه تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی G است.

برهان فرض کنیم X جدول سرشت G و $\overline{X}$ مزدوج مختلط ماتریس X باشد.

اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد، مزدوج مختلط $\overline{\chi}$ نیز سرشت تحویل‌ناپذیر است (گزارهٔ ۱۵.۱۳ را ببینید)، لذا می‌توان $\overline{X}$ را با استفاده از جابه‌جا کردن سطرهای X به‌دست آورد. بنابراین ماتریس جایگشتی P وجود دارد به‌قسمی که

$$PX = \overline{X}$$

(تمرین ۴.۴ را ببینید).

به‌ازای هر ردهٔ مزدوجی G چون g^G، درایه‌های ستون متناظر با g^G در X مساوی مزدوج مختلط درایه‌های ستون متناظر با $(g^{-1})^G$ در X است. بنابراین $\overline{X}$ را با استفاده از جابه‌جا کردن ستونهای X می‌توان به‌دست آورد، لذا ماتریس جایگشتی Q وجود دارد به‌قسمی که

$$XQ = \overline{X}$$

بنابه گزارهٔ ۲.۱۶، X وارون‌پذیر است. بنابراین

$$Q = X^{-1}\overline{X} = X^{-1}PX$$

در نتیجه بنابه گزارهٔ ۲.۱۳ اثرهای P و Q مساوی‌اند. چون اثر ماتریس جایگشتی مساوی تعداد نقاطی است که تحت جایگشت متناظر با آن ثابت می‌مانند پس

تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی $\mathrm{tr}(P)$ است

و

تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی G مساوی $\mathrm{tr}(Q)$ است

چون دو عدد فوق مساوی‌اند پس حکم ثابت شده است. ■

قسمتی از نتیجهٔ زیر را در تمرین ۵.۲۲ با استفاده از روشی دیگر به‌دست آوردیم.

۲.۲۳ نتیجه گروه G دارای سرشت تحویل‌ناپذیر حقیقی نابدیهی است اگر و فقط اگر مرتبهٔ G زوج باشد.

برهان اگر مرتبهٔ G فرد باشد، هیچ عنصر غیرهمانی G حقیقی نیست (حل تمرین ۱.۲۳ را ببینید). بنابراین طبق قضیهٔ ۱.۲۳، تنها سرشت حقیقی G سرشت بدیهی است.

اگر مرتبهٔ G زوج باشد، بنا به تمرین ۸.۱، G دارای عضوی چون g با مرتبهٔ ۲ است. از این‌رو G حداقل دارای دو ردهٔ مزدوجی حقیقی $\{1\}$ و g^G است و لذا بنابه قضیهٔ ۱.۲۳، G دارای حداقل دو سرشت تحویل‌ناپذیر حقیقی است. ■

در نظر گرفتن سرشت روی $\mathbb{R}$

فرض کنیم χ سرشت G است. گوییم χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت هرگاه نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ با سرشت χ وجود داشته باشد به‌قسمی که تمام درایه‌های ماتریسهای $g\rho$ $(g \in G)$ حقیقی باشند، یا به عبارت دیگر $\mathbb{C}G$ـمدول V با سرشت χ و پایهٔ v_1، ... ، v_n برای V وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$ و $1 \leq i \leq n$، $v_i g$ ترکیب خطی v_1، ... ، v_n با ضرایب حقیقی باشد.

۳.۲۳ مثال (۱) گیریم $G = D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G با درجهٔ ۲ است (مثال ۳.۱۶(۳) را ببینید). در این صورت χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت، زیرا تابع ρ با تعریف زیر

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نمایشی از G است که سرشتش χ است و درایه‌های تمام ماتریسهای $g\rho$ $(g \in G)$ حقیقی‌اند.

(۲) گیریم $G = Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G با درجهٔ ۲ است (تمرین ۱.۱۷ را ببینید). مقادیر χ به قرار زیر است

	1	a^2	a	b	ab
χ	2	-2	0	0	0

بنابراین χ حقیقی است. درواقع، χ را نمی‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت، اما در اینجا چگونگی اثبات آن روشن نیست. (این مطلب را نهایتاً در مثال ۱۸.۲۳(۳) ثابت خواهیم کرد.)

با وجود اینکه هر سرشت که بتوان آن را روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت لزوماً سرشتی حقیقی است، طبق مثال ۳.۲۳(۲) عکس این مطلب درست نیست.

$\mathbb{R}G$ـمدول

یادآوری می‌کنیم که در فصل ۴ FGـمدول را در موردی که F مساوی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است تعریف کردیم. بنابراین $\mathbb{R}G$ـمدول فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ است که مجهز به عمل ضرب عناصرش در عناصر G است و این ضرب در شرایط تعریف ۲.۴ صدق می‌کند. در این قسمت رابطهٔ بین $\mathbb{R}G$ـمدول و $\mathbb{C}G$ـمدول را مطالعه خواهیم کرد.

۴.۲۳ مثال گیریم V فضای برداری ۲بعدی روی $\mathbb{R}$ با پایهٔ v_1، v_2 است.

(۱) با تعریف زیر Vبه $\mathbb{R}D_8$ـمدول تبدیل می‌شود

$$v_1 a = v_2, \qquad v_1 b = -v_1$$
$$v_2 a = -v_1, \qquad v_2 b = v_2$$

(مثال ۳.۲۳(۱) را ببینید).

(۲) با تعریف زیر V به $\mathbb{R}C_3$ـمدول تبدیل می‌شود، که $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle$

$$v_1 x = v_2$$
$$v_2 x = -v_1 - v_2$$

(از اینجا نمایش $x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ که در تمرین ۲.۳ دیدیم به‌دست می‌آید.)

هر $\mathbb{R}G$ـمدول را به‌سادگی می‌توان به $\mathbb{C}G$ـمدول تبدیل کرد. برای این منظور کافی است پایه‌ای چون v_1، … ، v_n را برای $\mathbb{R}G$ـمدول انتخاب کنیم و فضای برداری با پایهٔ v_1، … ، v_n روی $\mathbb{C}$ را در نظر بگیریم. واضح است که این فضای برداری جدید $\mathbb{C}G$ـمدول است (که ضرب $v_i g$ در آن مانند عمل ضرب $\mathbb{R}G$ـمدول تعریف می‌شود). ارائهٔ این ساختمان برحسب نمایش بهتر قابل فهم است: اگر $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ نمایش G باشد آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، درایه‌های ماتریس $g\rho$ متعلق به $\mathbb{R}$ هستند و لذا متعلق به $\mathbb{C}$ نیز هستند. بنابراین نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که سرشت χ از G را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت اگر و فقط اگر $\mathbb{R}G$ـمدولی با سرشت χ وجود داشته باشد.

عکس این کار، یعنی ساختن $\mathbb{R}G$ـمدول از $\mathbb{C}G$ـمدول مفروض خیلی دشوارتر است. گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با پایهٔ v_1، … ، v_n است و $g \in G$. اعداد مختلط z_{jk} وجود دارند به‌قسمی که

$$v_j g = \sum_{k=1}^{n} z_{jk} v_k \qquad (1 \leq j \leq n)$$

اکنون فرض کنیم $V_{\mathbb{R}}$ فضای برداری روی $\mathbb{R}$ با پایهٔ

$$v_1, \cdots, v_n, iv_1, \cdots, iv_n$$

است. می‌نویسیم $z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$ که $x_{jk}, y_{jk} \in \mathbb{R}$. ضرب عناصر $V_{\mathbb{R}}$ در g را چنین تعریف می‌کنیم

$$v_j g = \sum_{k=1}^{n} (x_{jk} v_k + y_{jk}(iv_k))$$

$$(1 \leq j \leq n) \qquad (5.23)$$

$$(iv_j) g = \sum_{k=1}^{n} (-y_{jk} v_k + x_{jk}(iv_k))$$

برای اینکه vg را به‌ازای هر $v \in V_{\mathbb{R}}$ تعریف کنیم، تعریف فوق را به‌طور خطی توسیع می‌دهیم. به این ترتیب vg را به‌ازای هر $v \in V_{\mathbb{R}}$ و هر $g \in G$ تعریف می‌کنیم. با در نظر گرفتن v_j به‌عنوان عنصری از $\mathbb{C}G$ـمدول V، داریم

به ازای هر $g, h \in G$ و $1 \leq j \leq n$ $\qquad (v_j g)h = v_j(gh)$

با در نظر گرفتن v_j و iv_j، به‌عنوان عناصر $V_{\mathbb{R}}$ به سادگی نتیجه می‌شود که

$$(v_j g)h = v_j(gh) \quad \text{و} \quad ((iv_j)g)h = (iv_j)(gh)$$

از این‌رو با استفاده از گزارهٔ ۶.۴، نتیجه می‌گیریم که $V_{\mathbb{R}}$ با ضربی که در بالا تعریف کردیم $\mathbb{R}C$ـمدول است .

اگر χ سرشت V باشد آنگاه

$$\chi(g) = \sum_{k=۱}^{n} z_{kk}$$

مقدار سرشت $V_{\mathbb{R}}$ به‌ازای g عبارت است از

$$۲\sum_{k=۱}^{n} x_{kk} = \chi(g) + \overline{\chi(g)}$$

بنابراین سرشت $V_{\mathbb{R}}$ عبارت است از $\chi + \overline{\chi}$.

خواص اساسی $V_{\mathbb{R}}$ را در گزارهٔ بعدی می‌آوریم.

۶.۲۳ گزاره گیریم V یک $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است.

(۱) $V_{\mathbb{R}}$ یک $\mathbb{R}G$ـمدول دارای سرشت $\chi + \overline{\chi}$ است؛ لذا $\dim V_{\mathbb{R}} = ۲\dim V$.

(۲) اگر V یک $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر باشد و $V_{\mathbb{R}}$ یک $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌پذیر آنگاه χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت.

برهان قبلاً قسمت (۱) را ثابت کرده‌ایم.

برای اثبات قسمت (۲)، فرض کنیم که V یک $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر است و $V_{\mathbb{R}}$ یک $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌پذیر. در این صورت طبق قسمت (۱)، $V_{\mathbb{R}} = U \oplus W$ که U یک $\mathbb{R}G$ـمدولی با سرشت χ و W یک $\mathbb{R}G$ـمدولی با سرشت $\overline{\chi}$ است. بنابراین $\mathbb{R}G$ـمدولی، که U باشد، با سرشت χ وجود دارد و لذا χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. ■

۷.۲۳ مثال (۱) فرض کنیم $G = C_۳ = \langle x : x^۳ = ۱ \rangle$ و گیریم V یک $\mathbb{C}G$ـمدولی ۱ بعدی با پایهٔ $v_۱$ باشد به‌طوری که

$$v_۱ x = \frac{۱}{۲}(-۱ + i\sqrt{۳})v_۱$$

(توجه کنید که $\frac{۱}{۲}(-۱ + i\sqrt{۳}) = e^{۲\pi i/۳}$). در این صورت $V_{\mathbb{R}}$ دارای پایهٔ $v_۱$، $iv_۱$ است و x نسبت به این پایه دارای نمایش ماتریسی زیر است

$$\begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

(۲) فرض کنیم $G = D_8 = \langle a,b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ و V $\mathbb{C}G$ـمدولی ۲بعدی با پایهٔ v_1، v_2 باشد به‌طوری که

$$v_1 a = iv_1, \qquad v_1 b = v_2$$
$$v_2 a = -iv_2, \qquad v_2 b = v_1$$

در این صورت $V_{\mathbb{R}}$ دارای پایهٔ v_1، v_2، v_3، v_4 است که $v_3 = iv_1$، $v_4 = iv_2$. نمایش ρ را نسبت به این پایه به‌دست می‌آوریم:

$$a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

زیرفضایی از $V_{\mathbb{R}}$ که توسط $v_1 + v_4$ و $v_2 + v_3$ پدید می‌آید $\mathbb{R}G$ـزیرمدول است. بنابراین طبق گزارهٔ ۶.۲۳(۲) سرشت V را می‌توان روی $\mathbb{R}$ درنظرگرفت. البته این مطلب را بنا به مثال ۳.۲۳(۱) نیز، که قبلاً دیدیم، می‌دانیم.

فرم دوخطی

خواهیم دید پاسخ این سؤال که آیا سرشت مفروضی را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت یا نه منوط به وجود فرم دوخطی خاصی روی $\mathbb{C}G$ـمدول متناظر است.

گیریم V فضای برداری روی F است، که F هیأت $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. فرم دوخطی β روی V عبارت است از تابعی که به هر زوج مرتب (u,v) از بردارهای V عنصر $\beta(u,v)$ از F را نسبت می‌دهد و دارای خواص زیر است: به‌ازای هر $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ و $\lambda_1, \lambda_2 \in F$،

$$\beta(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \beta(u_1, v) + \lambda_2 \beta(u_2, v)$$
$$\beta(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \beta(u, v_1) + \lambda_2 \beta(u, v_2)$$

(بنابراین به‌ازای u و vی ثابت توابع $x \to \beta(x,v)$ و $y \to \beta(u,y)$ هر دو خطی هستند؛ اصطلاح دوخطی از اینجا آمده است.)

فرم دوخطی β را متقارن نامند اگر

$$\beta(u,v) = \beta(v,u) \qquad \text{به‌ازای هر } u,v \in V$$

و آن را پادمتقارن نامند هرگاه

$$\beta(u,v) = -\beta(v,u) \qquad \text{به‌ازای هر } u,v \in V$$

اگر V FGـمدول باشد، فرم دو خطی β روی V را Gـناوردا نامیم هرگاه

$$\beta(ug,vg) = \beta(u,v) \qquad \text{به‌ازای هر } u,v \in V \text{ و } g \in G$$

نتیجهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر $\mathbb{R}G$ـمدول دارای فرم دوخطی متقارن Gـناوردای قویاً مثبت است. حکم مشابه در مورد $\mathbb{C}G$ـمدولها را در تمرین ۶.۸ آورده‌ایم.

۸.۲۳ قضیه اگر V $\mathbb{R}G$ـمدول باشد، فرم دوخطی متقارن Gـناوردای β روی V وجود دارد به‌قسمی که

$$\beta(u,v) > 0 \qquad \text{به‌ازای هر عنصر مخالف صفر } v \in V$$

برهان گیریم v_1، ... ، v_n پایه‌ای برای V باشد. به‌ازای $u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \in V$ و $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \in V$ و $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم

$$\gamma(u,v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j$$

دراین صورت γ فرم دوخطی متقارن روی V است. به‌علاوه، به‌ازای بردار مخالف صفر $v \in V$ داریم

$$\gamma(v,v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2 > 0$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\beta(u,v) = \sum_{x \in G} \gamma(ux, vx) \qquad (u, v \in V)$$

β نیز فرم دوخطی متقارن روی V است و به‌ازای هر بردار مخالف صفر $v \in V$ داریم $\beta(v,v) > 0$.

اگر $g \in G$، وقتی‌که x تمام عناصر G را اختیار کند gx نیز تمام عناصر G را اختیار می‌کند و از این‌رو

$$\beta(ug,vg) = \sum_{x \in G} \gamma(ugx, vgx) = \beta(u,v)$$

بنابراین β Gـناورداست و قضیه ثابت شده است. ■

۹.۲۳ گزاره گیریم V ‏ $\mathbb{R}G$ـمدول و β فرم دوخطی Gـناوردا روی V است. اگر U ‏ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V باشد آنگاه مجموعهٔ $W = \{w \in V : \beta(u, w) = 0, \forall u \in U\}$ نیز $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V است.

برهان به سادگی می‌توان دریافت که W زیرفضای V است. اکنون فرض کنیم که $w \in W$ و $g \in G$. به‌ازای هر $u \in U$ داریم $ug^{-1} \in U$ و لذا

$$\beta(u, wg) = \beta(ug^{-1}, wgg^{-1}) = \beta(ug^{-1}, w) = 0$$

بنابراین $wg \in W$ و لذا W ‏ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V است. ■

۱۰.۲۳ گزاره فرض کنیم که β فرم دوخطی متقارن Gـناوردایی روی $\mathbb{R}G$ـمدول V است، و بردارهای $u, v \in V$ وجود دارند به‌قسمی که $\beta(u, u) > 0$ و $\beta(v, v) < 0$. در این صورت V ‏ $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌پذیر است.

برهان بنابه قضیهٔ ۸.۲۳ فرم دوخطی متقارن Gـناوردای β_1 روی V وجود دارد به‌قسمی که

$$\beta_1(w, w) > 0 \qquad \text{به‌ازای هر بردار مخالف صفر } w \in V$$

بنا به حکمی کلی دربارهٔ فرم دوخطی (تمرین ۷.۲۳ را ببینید)، پایهٔ v_1، ... ، v_n برای V وجود دارد به‌قسمی که

$$\beta_1(v_i, v_j) = \beta(v_i, v_j) = 0 \qquad \text{اگر } i \neq j$$

و

$$\begin{aligned} &\beta_1(v_i, v_i) = 1 \qquad \text{به‌ازای هر } i \\ &\beta(v_1, v_1) > 0 \\ &\beta(v_2, v_2) < 0 \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $x = \beta(v_1, v_1)$ و γ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\gamma(u, v) = \beta_1(u, v) - \frac{1}{x}\beta(u, v) \qquad (u, v \in V)$$

چون β و β_1 فرمهای دوخطی متقارن Gـناوردا روی V هستند، لذا γ نیز چنین است. اما به‌ازای هر $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$ (که $\lambda_i \in \mathbb{R}$) داریم

$$\gamma(v, v_1) = \lambda_1 \gamma(v_1, v_1) = 0$$

بنابراین، اگر مجموعهٔ W را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$W = \{w \in W : \gamma(v, w) = 0, \forall v \in V\}$$

W مخالف صفر است و بنابه گزارهٔ ۹.۲۳، $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V است. به‌علاوه

$$\gamma(v_2, v_2) = 1 - \frac{1}{x}\beta(v_2, v_2) > 0$$

و لذا $V \neq W$. بنابراین V $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌پذیر است. ■

اکنون می‌توانیم بگوییم که فرم دوخطی چه رابطه‌ای با امکان در نظر گرفتن سرشت مفروضی از G روی $\mathbb{R}$ دارد.

۱۱.۲۳ قضیه گیریم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. شرایط زیر هم‌ارزند
(۱) χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت.
(۲) $\mathbb{C}G$ـمدولی چون V با سرشت χ، و فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی روی V وجود دارد.

برهان ابتدا نشان می‌دهیم که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است و β فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی روی V است. عناصر $u, v \in V$ وجود دارند به‌قسمی که $\beta(u, v) = \beta(v, u) \neq 0$. چون

$$\beta(u + v, u + v) = \beta(u, u) + \beta(v, v) + 2\beta(u, v)$$

لذا عنصر $\omega \in V$ وجود دارد به‌قسمی که $\beta(\omega, \omega) \neq 0$. قرار می‌دهیم $z = \beta(\omega, \omega)$ و $v_1 = z^{-1/2} w$. در این صورت

$$\beta(v_1, v_1) = 1$$

اکنون $\{v_1\}$ را توسعه می‌دهیم و پایه‌ای چون v_1، . . . ، v_n برای V به‌دست می‌آوریم. در این صورت v_1، . . . ، v_n، iv_1، . . . ، iv_n پایه‌ای برای $\mathbb{R}G$ـمدول $V_{\mathbb{R}}$ است.

تابع ϑ را از $V_{\mathbb{R}}$ به V چنین تعریف می‌کنیم

$$\vartheta : \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (iv_j) \to \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + i\mu_j) v_j \qquad (\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R})$$

در این صورت ϑ دوسویی است و به‌ازای هر $w_1, w_2, v \in V_{\mathbb{R}}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $g \in G$ داریم

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2)\vartheta &= w_1\vartheta + w_2\vartheta \\ (\lambda v)\vartheta &= \lambda(v\vartheta) \\ (vg)\vartheta &= (v\vartheta)g \end{aligned} \qquad (12.23)$$

اکنون تابع $\widetilde{\beta}$ را به‌ازای زوجهای مرتب عناصر $V_{\mathbb{R}}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$\widetilde{\beta}(u, v) = \beta(u\vartheta, v\vartheta) \text{قسمت حقیقی} \qquad (u, v \in V_{\mathbb{R}})$$

با استفاده از خواص (۱۲.۲۳) به سادگی می‌توان نشان داد که $\widetilde{\beta}$ فرم دوخطی متقارن Gـناوردایی روی $V_{\mathbb{R}}$ است. توجه کنید که

$$\widetilde{\beta}(iv_1, iv_1) = -1 \quad \text{و} \quad \widetilde{\beta}(v_1, v_1) = 1$$

بنابراین، طبق گزارهٔ ۱۰.۲۳، $V_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌پذیر است. اکنون از ۶.۲۳(۲) نتیجه می‌شود که χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که حکم (۱) از حکم (۲) نتیجه می‌شود.

برعکس، فرض کنیم که χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظرگرفت و U $\mathbb{R}G$ـمدولی با سرشت χ است. بنا به قضیهٔ ۸.۲۳، فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی مانند γ روی U وجود دارد. گیریم u_1، ... ، u_n پایه‌ای برای U است و V فضایی برداری روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ u_1، ... ، u_n است. همان‌طور که قبلاً دیدیم، V $\mathbb{C}G$ـمدول است (و حاصلضرب $u_i g$ در V همان حاصلضرب $u_i g$ در U است). $\widehat{\gamma}$ را روی V چنین تعریف می‌کنیم

$$\widehat{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j, \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \mu_k \gamma(u_j, u_k)$$

(که $\lambda_j, \mu_k \in \mathbb{C}$). در این صورت $\widehat{\gamma}$ فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی روی $\mathbb{C}G$ـمدول V است و V دارای سرشت χ است. بنابراین (۲) را می‌توان از (۱) نتیجه گرفت و لذا اثبات قضیه به انجام رسیده است. ■

تابع نشانگر

اکنون به هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G عددی نسبت می‌دهیم که نشانگر χ نامیده می‌شود و همواره یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۱− است. بعداً خواهیم دید که این عدد مبین امکان یا عدم امکان در نظر گرفتن χ روی $\mathbb{R}$ است.

توجه کنید که

$$\langle \chi^{۲}, ۱_G \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g)\chi(g) = \langle \chi, \overline{\chi} \rangle$$

بنابراین اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر باشد داریم

$$\langle \chi^{۲}, ۱_G \rangle = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی نباشد} \\ ۱ & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی باشد} \end{cases}$$

گیریم V ـ$\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است. در فصل ۱۹ دیدیم که $\chi^{۲}$ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $V \otimes V$ است و

$$\chi^{۲} = \chi_S + \chi_A$$

که χ_S سرشت قسمت متقارن $V \otimes V$ است و χ_A سرشت قسمت پادمتقارن $V \otimes V$ است. بنابراین اگر $\langle \chi^{۲}, ۱_G \rangle = ۱$ آنگاه ۱_G سازای χ_S یا χ_A است.

۱۳.۲۳ تعریف اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد آنگاه نشانگر χ را که با $\iota\chi$ نمایش می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم

$$\iota\chi = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } \chi \text{ سازای } \chi_S \text{ یا } \chi_A \text{ نباشد} \\ ۱ & \text{اگر } ۱_G \text{ سازای } \chi_S \text{ باشد} \\ -۱ & \text{اگر } ۱_G \text{ سازای } \chi_A \text{ باشد} \end{cases}$$

ι را تابع نشانگر روی مجموعهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G می‌نامیم. توجه کنید که $\iota\chi \neq ۰$ اگر و فقط اگر χ حقیقی باشد.

قضیهٔ بعدی حاوی خاصیت مهمی از تابع نشانگر است که مبین رابطهٔ بین این تابع و ساختار داخلی G است.

۱۴.۲۳ قضیه به‌ازای هر $x \in G$، داریم

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(x) = |\{y \in G : y^{۲} = x\}|$$

که جمع فوق روی تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G صورت می‌گیرد.

برهان تابع $\vartheta : G \to \mathbb{C}$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\vartheta(x) = |\{y \in G : y^{۲} = x\}| \qquad (x \in G)$$

ϑ تابع رده‌ای روی G است زیرا به‌ازای $g \in G$ داریم

$$y^{۲} = x \Leftrightarrow (g^{-۱}yg)^{۲} = g^{-۱}xg$$

بنابراین طبق نتیجهٔ ۴.۱۵، ϑ ترکیب خطی سرشتهای تحویل‌ناپذیر G است.

با استفاده از تعریف $\iota\chi$ داریم

$$\begin{aligned} \iota\chi &= \langle \chi_S - \chi_A, ۱_G \rangle \\ &= \frac{۱}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{۲}) \qquad \text{بنابه گزارهٔ ۱۴.۱۹} \\ &= \frac{۱}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{g \in G : g^{۲} = x} \chi(g^{۲}) \\ &= \frac{۱}{|G|} \sum_{x \in G} \vartheta(x)\chi(x) = \langle \vartheta, \chi \rangle \end{aligned}$$

بنابراین $\vartheta = \sum(\iota\chi)\chi$ و لذا حکم ثابت شده است. ■

۱۵.۲۳ مثال گیریم $G = S_{۳}$. جدول سرشت G عبارت است از

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	-۱	۱
$\chi_{۳}$	۲	۰	-۱

با استفاده از گزارهٔ ۱۴.۱۹ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G، $\iota\chi = ۱$؛ و لذا $\sum(\iota\chi)\chi = \chi_{۱} + \chi_{۲} + \chi_{۳}$ که دارای مقادیر زیر است

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)
$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3$	۴	۰	۱

جدول فوق با قضیهٔ ۱۴.۲۳ مطابقت دارد، زیرا توان دوم چهار عنصر G، یعنی ۱، (۱ ۲)، (۱ ۳) و (۲ ۳)، مساوی ۱ است؛ توان دوم هیچ عنصری از G مساوی (۱ ۲) نیست؛ و توان دوم یک عنصر، یعنی (۱ ۳ ۲)، مساوی (۱ ۲ ۳) است.

بازگشت به موضوع اصلی

اکنون شرح می‌دهیم که تابع نشانگر چه روابطی با فرمهای دوخطی سابق‌الذکر دارد. با استفاده از این روابط، نشان می‌دهیم که نشانگرِ سرشت تحویل‌ناپذیر معین می‌کند که آیا سرشت را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت یا نه، و قضیهٔ فروبنیوس‌ـشور را از آنجا نتیجه می‌گیریم.

۱۶.۲۳ قضیه فرض کنیم V $\mathbb{C}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر با سرشت χ است.

(۱) فرم دوخطی مخالف صفر Gـناوردا روی V وجود دارد اگر و فقط اگر $\iota\chi \neq 0$.

(۲) فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردا روی V وجود دارد اگر و فقط اگر $\iota\chi = 1$.

(۳) فرم دوخطی پادمتقارن مخالف صفر Gـناوردا روی V وجود دارد اگر و فقط اگر $\iota\chi = -1$.

برهان در اینجا $\mathbb{C}$ را به‌عنوان فضای برداری ۱بعدی روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم و ضرب عناصر $\mathbb{C}$ در عناصر G را چنین تعریف می‌کنیم

$$\lambda g = \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, g \in G)$$

به این ترتیب، $\mathbb{C}$ تبدیل به $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی می‌شود.

(۱) فرض کنیم که $\iota\chi \neq 0$. در این صورت 1_G سازای χ^2 است و لذا $\mathbb{C}G$ـمدول $V \otimes V$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی بدیهی دارد. بنابه گزارهٔ ۸.۸، $\mathbb{C}G$ـهمریختی مخالف صفر پوشایی از $V \otimes V$ به این $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی وجود دارد و لذا $\mathbb{C}G$ـهمریختی مخالف صفر پوشایی چون ϑ از $V \otimes V$ به $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی $\mathbb{C}$ وجود دارد. اکنون β را چنین تعریف می‌کنیم

$$\beta(u, v) = (u \otimes v)\vartheta \qquad (u, v \in V)$$

در این صورت β فرم دوخطی مخالف صفری روی V است و به‌ازای $u, v \in V$ و $g \in G$ داریم

$$\begin{aligned}\beta(ug, vg) &= (ug \otimes vg)\vartheta = ((u \otimes v)g)\vartheta \\ &= ((u \otimes v)\vartheta)g = (u \otimes v)\vartheta = \beta(u, v)\end{aligned}$$

بنابراین β Gـناورداست.

برعکس، فرض کنیم که فرم دوخطی مخالف صفر Gـناوردایی مانند β روی V وجود دارد. گیریم $v_۱$، . . . ، v_n پایه‌ای برای V است، بنابراین عناصر $v_i \otimes v_j$ (که $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq n$) پایه‌ای برای $V \otimes V$ تشکیل می‌دهند. تابع $\vartheta : V \otimes V \to \mathbb{C}$ را به‌ازای این عناصر چنین تعریف می‌کنیم

$$(v_i \otimes v_j)\vartheta = \beta(v_i, v_j) \qquad (۱ \leq i \leq n, ۱ \leq j \leq n)$$

و این تعریف را به‌طور خطی به تمام $V \otimes V$ توسیع می‌دهیم. به‌ازای $g \in G$ داریم

$$\begin{aligned}((v_i \otimes v_j)g)\vartheta &= (v_i g \otimes v_j g)\vartheta = \beta(v_i g, v_j g) \\ &= \beta(v_i, v_j) \qquad \text{چون } \beta \ G\text{ـناورداست} \\ &= (v_i \otimes v_j)\vartheta\end{aligned}$$

از این‌رو ϑ $\mathbb{C}G$ـهمریختی مخالف صفر پوشایی از $V \otimes V$ به $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی $\mathbb{C}$ است. بنابراین، طبق گزارهٔ ۱۰.۱، $V \otimes V$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی بدیهی دارد. در نتیجه سرشت بدیهی ۱_G سازای $\chi^۲$ است و لذا $\iota\chi \neq ۰$.

(۲) فرض کنیم که $\iota\chi = ۱$. در این صورت ۱_G سازای χ_S است که χ_S سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول $S(V \otimes V)$، یعنی قسمت متقارن $V \otimes V$، است. مانند قسمت (۱)، با استفاده از گزارهٔ ۸.۸ نتیجه می‌گیریم که $\mathbb{C}G$ـهمریختی مخالف صفر پوشایی چون ϑ از $S(V \otimes V)$ به $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی $\mathbb{C}$ وجود دارد. قرار می‌دهیم

$$\beta(u, v) = (u \otimes v + v \otimes u)\vartheta \qquad (u, v \in V)$$

در این صورت β فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی روی V است.

برعکس، فرض کنیم که فرم دوخطی متقارن مخالف صفر Gـناوردایی چون β روی V وجود دارد. گیریم $v_۱$، . . . ، v_n پایه‌ای برای V است، که در این صورت عناصر $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i$ (به‌ازای $۱ < i, j \leq n$) پایه‌ای برای $S(V \times V)$ تشکیل می‌دهند. $\vartheta : S(V \otimes V) \to \mathbb{C}$ را به‌ازای این عناصر چنین تعریف می‌کنیم

$$(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i)\vartheta = \beta(v_i, v_j) \qquad (۱ \leq i, j \leq n)$$

و سپس آن را به‌طور خطی توسیع می‌دهیم. چون β متقارن است، ϑ تابع است؛ به‌علاوه ϑ $\mathbb{C}G$ـهمریختی مخالف صفر پوشایی از $S(V \otimes V)$ به $\mathbb{C}G$ـمدول بدیهی $\mathbb{C}$ است. از این‌رو سرشت بدیهی 1_G از سازاهای χ_S است و لذا $\iota\chi = 1$.

(۳) اثبات (۳) مشابه اثبات (۲) است و لذا از ذکر آن صرف‌نظر می‌کنیم. ■

اکنون می‌توانیم رابطه‌ای بین نمایشهای حقیقی G با برگردانهای G به‌دست آوریم؛ منظورمان از برگردان عضوی با مرتبهٔ ۲ است.

۱۷.۲۳ نتیجه (قضیهٔ فروبنیوس-شور دربارهٔ تعداد برگردانها) به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G داریم

$$\iota\chi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی نباشد} \\ 1 & \text{اگر } \chi \text{ را بتوان روی } \mathbb{R} \text{ در نظر گرفت} \\ -1 & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی باشد، ولی نتوان آن را روی } \mathbb{R} \text{ در نظر گرفت} \end{cases}$$

به‌علاوه، به‌ازای هر $x \in G$،

$$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(x) = |\{y \in G : y^2 = x\}|$$

که جمع فوق روی تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G انجام می‌شود. لذا

$$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(1) = 1 + t$$

که t مساوی تعداد برگردانهای G است.

برهان وقتی‌که تابع نشانگر را تعریف کردیم، نشان دادیم که $\iota\chi \neq 0$ اگر و فقط اگر χ حقیقی باشد. قضایای ۱۱.۲۳ و ۱۶.۲۳(۲) نشان می‌دهند که χ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت اگر و فقط اگر $\iota\chi = 1$. بنابراین $\iota\chi$ به‌همان شکلی است که در صورت قضیه آمده است.

تساوی مربوط به $\sum_\chi(\iota\chi)\chi(x)$ را در قضیهٔ ۱۴.۲۳ به‌دست آوردیم. با قرار دادن ۱ به‌جای x در این تساوی، می‌بینیم که $\sum_\chi(\iota\chi)\chi(1)$ مساوی تعداد عناصری چون y از G است که دارای خاصیت $y^2 = 1$ هستند. این عناصر دقیقاً عبارت‌اند از برگردانهای G و عضو همانی، لذا تعداد آنها مساوی $1 + t$ است. ■

این فصل را با مثالهایی که موارد استفادهٔ نتیجهٔ ۱۷.۲۳ را نشان می‌دهند به پایان می‌بریم.

۱۸.۲۳ مثال (۱) گیریم χ سرشت خطی است. در این صورت $\iota\chi = 1$ هرگاه χ حقیقی باشد و $\iota\chi = 0$ هرگاه χ غیرحقیقی باشد.

اگر G گروه آبلی باشد، قضیهٔ فروبنیوس-شور دربارهٔ تعداد برگردانها نشان می‌دهد که تعداد سرشتهای (خطی) تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی G است، زیرا در این حالت g مزدوج g^{-1} است اگر و فقط اگر $g^2 = 1$. این حالت خاص قضیهٔ ۱.۲۳ را می‌توان مستقیماً و بدون اشکال زیاد ثابت کرد (تمرین ۲.۲۳ را ببینید).

(۲) می‌دانیم که تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت (مثال ۳.۲۳(۱) را ببینید و توجه داشته باشید که هر چهار سرشت خطی حقیقی‌اند). بنابراین به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از D_8 داریم $\iota\chi = 1$ و لذا

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$$

برگردانهای D_8 که بنابه قضیهٔ فروبنیوس-شور تعدادشان پنج‌تاست عبارت‌اند از a^2، b، ab، a^2b و a^3b.

(۳) در گروه $Q_8 = \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$، فقط یک برگردان وجود دارد، که a^2 است. اکنون توجه کنید که به‌ازای هر یک از چهار سرشت خطی داریم $\iota\chi = 1$ و طبق قضیهٔ فروبنیوس-شور دربارهٔ تعداد برگردانها داریم $\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(1) = 2$. بنابراین اگر ψ سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۲ باشد آنگاه $\iota\psi = -1$. لذا ψ را نمی‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت.

(۴) گروه متقارن S_4 دارای ده عنصر است که مربعشان مساوی ۱ است و عبارت‌اند از عضو همانی، شش عنصر مزدوج با (۱ ۲) و سه عنصر مزدوج با (۱ ۲)(۳ ۴). چون مجموع درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر S_4، یعنی مجموع درجات ۱، ۱، ۲، ۳، ۳ مساوی ۱۰ است (بخش ۱.۱۸ را ببینید)، می‌بینیم که همهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر S_4 را می‌توان روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت.

خلاصهٔ فصل ۲۳

۱. تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی G است.

۲. گیریم ι تابع نشانگر و χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است.

$$\iota\chi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی نباشد} \\ 1 & \text{اگر } \mathbb{R}G\text{-مدولی چون } U \text{ با سرشت } \chi \text{ وجود داشته باشد} \\ -1 & \text{اگر } \chi \text{ حقیقی باشد ولی } \mathbb{R}G\text{-مدولی با سرشت } \chi \text{ وجود نداشته باشد} \end{cases}$$

.۳

$$\iota\chi = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 1_G \text{ سازای } \chi_S \text{ یا } \chi_A \text{ نباشد} \\ 1 & \text{اگر } 1_G \text{ سازای } \chi_S \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر } 1_G \text{ سازای } \chi_A \text{ باشد} \end{cases}$$

.۴

$$\sum_{\chi}(\iota\chi)\chi(1) = |\{g \in G : g^2 = 1\}|$$

تمرینات فصل ۲۳

۱. ثابت کنید که اگر G گروهی با مرتبهٔ فرد باشد، هیچ عنصر غیرهمانی آن حقیقی نیست.

۲. گیریم G گروه آبلی متناهی است. با استفاده از شرح سرشتهای تحویل‌ناپذیر G که در قضیهٔ ۸.۹ داده شده است، مستقیماً ثابت کنید که تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی تعداد عناصری چون g از G است که دارای خاصیت $g^2 = 1$ هستند.

۳. قرار دهید $G = D_{2n}$ و به جدول سرشت G در بخش ۳.۱۸ رجوع کنید. چند عضو g از G در رابطهٔ $g^2 = 1$ صدق می‌کند؟ نتیجه بگیرید که به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G داریم $\iota\chi = 1$.

۴. گیریم ρ نمایش تحویل‌ناپذیر درجهٔ دوی گروه G و χ سرشت ρ است. ثابت کنید که به‌ازای هر $g \in G$ داریم $\chi_A(g) = \det(g\rho)$. نتیجه بگیرید که $\iota\chi = -1$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $\det(g\rho) = 1$.

۵. مانند تمرین ۶.۱۷ گروه $G = T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ را در نظر بگیرید. گیریم V فضای برداری دوبعدی روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ v_1، v_2 است و ε ریشهٔ $2n$ام واحد در $\mathbb{C}$ است و $\varepsilon \neq \pm 1$. تمرین ۶.۱۷ نشان می‌دهد که V با تعریف زیر $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر است

$$v_1 a = \varepsilon v_1, \qquad v_1 b = v_2$$
$$v_2 a = \varepsilon^{-1} v_2, \qquad v_2 b = \varepsilon^n v_1$$

گیریم χ سرشت $\mathbb{C}G$ـمدول V است.

الف) توجه کنید که $\varepsilon^n = \pm 1$. با استفاده از تمرین ۴ نشان دهید که اگر $\varepsilon^n = 1$ آنگاه $\iota\chi = 1$ و اگر $\varepsilon^n = -1$ آنگاه $\iota\chi = -1$.

ب) گیریم β فرم دوخطی روی V با خاصیت زیر است

$$\beta(v_1, v_1) = \beta(v_2, v_2) = 0$$
$$\beta(v_1, v_2) = 1, \beta(v_2, v_1) = \varepsilon^n$$

ثابت کنید که فرم دوخطی β _Gـناورداست، و با استفاده از قضیهٔ ۱۶.۲۳ اثبات دیگری برای این حکم ارائه کنید که $\iota\chi = 1$ هرگاه $\varepsilon^n = 1$ و $\iota\chi = -1$ هرگاه $\varepsilon^n = -1$.

ج) ثابت کنید که a^n تنها عضو مرتبهٔ ۲ در T_{4n} است.

د) با استفاده از جدول سرشت G، که در حل تمرین ۳.۱۸ آمده است، $\iota\chi$ را به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ از G پیدا کنید. نشان دهید که

$$\sum_{\chi} (\iota\chi)\chi(1) = 2$$

که با قضیهٔ فروبنیوس‌ـشور دربارهٔ تعداد برگردانها سازگار است.

۶. ثابت کنید که اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر گروه G باشد و $\iota\chi = -1$ آنگاه $\chi(1)$ زوج است. (راهنمایی: در حل این مسأله حکم معروفی دربارهٔ فرمهای دوخطی پادمتقارن به‌کار می‌آید.)

۷. فرض کنیم که V فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است و β_1 و β فرمهای دوخطی متقارن روی V هستند. فرض کنیم که به‌ازای هر w مخالف صفر از V داریم $\beta_1(w, w) > 0$. ثابت کنید که پایهٔ e_1، . . . ، e_n برای V وجود دارد به‌قسمی که

$$\beta_1(e_i, e_i) = 1 \quad \text{به‌ازای هر } i$$
$$\beta_1(e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{به‌ازای هر } i \neq j$$

۸. لم شور در ساختن نظریهٔ _$\mathbb{C}G$ـمدولها دارای اهمیت حیاتی است. این تمرین نشان می‌دهد که احکامی نظیر احکام لم شور تا چه حد برای _$\mathbb{R}G$ـمدولها برقرارند.

گیریم V و W _$\mathbb{R}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیرند.

الف) ثابت کنید که اگر $\vartheta : V \to W$ _$\mathbb{R}G$ـهمریختی باشد آنگاه یا ϑ _$\mathbb{R}G$ـیکریختی است یا اینکه به‌ازای هر $v \in V$ داریم $v\vartheta = 0$.

ب) ثابت کنید که اگر $\vartheta : V \to V$ _$\mathbb{R}G$ـیکریختی و V به‌عنوان _$\mathbb{C}G$ـمدول نیز تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه $\vartheta = \lambda 1_V$ که λ عددی حقیقی است.

ج) مثالی بیاورید از گروه G، _$\mathbb{R}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر V و _$\mathbb{R}G$ـهمریختی $\vartheta : V \to V$ به‌طوری که ϑ مضرب 1_V نباشد.

۲۴

خلاصهٔ خواص جدول سرشت

در این فصل کوتاه نتیجهٔ تازه‌ای ارائه نمی‌دهیم، بلکه مطالبی را از فصول گذشته گردآوری می‌کنیم که هنگامی که در پی یافتن جدول سرشت گروه خاصی هستیم مفیدند. در سه فصل بعدی چندین جدول سرشت را با ذکر جزئیات کار به‌دست می‌آوریم.

کار را معمولاً با پیداکردن رده‌های مزدوجی و مرتبهٔ مرکزسازهای گروه متناهی موردنظر، مثلاً G، شروع می‌کنیم. اندازهٔ جدول سرشت به‌وسیلهٔ تعداد رده‌های مزدوجی گروه متناهی G معین می‌شود؛ اگر این تعداد k باشد، جدول سرشت G ماتریسی $k \times k$ است، که اندیس ستونی هر درایه‌اش به‌وسیلهٔ رده‌های مزدوجی G (اولین ستونْ متناظر با ردهٔ مزدوجی $\{1\}$ است)، و اندیس سطری هر درایه‌اش به‌وسیلهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G معین می‌شود.

هنگام کار، معمولاً به سرشت جدیدی مانند χ برخورد می‌کنیم که ممکن است تحویل‌ناپذیر باشد یا نباشد. در این صورت می‌توانیم $\langle \chi, \chi \rangle$ را مطابق رابطهٔ زیر محاسبه کنیم

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)}$$

سرشت χ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ (قضیهٔ ۲۰.۱۴ را ببینید). اگر χ

تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه $\langle \chi, \chi_i \rangle$ را به‌ازای هر کدام از سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ_i که قبلاً به‌دست آورده‌ایم محاسبه می‌کنیم و تابع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\chi - \sum_i \langle \chi, \chi_i \rangle \chi_i$$

این تابع نیز سرشت است. بنابراین می‌توانیم معین کنیم که آیا χ ترکیب خطی سرشتهای تحویل‌ناپذیری که قبلاً پیدا شده‌اند هست یا نه؛ اگر نباشد، با استفاده از χ می‌توانیم ترکیبی خطی از سرشتهای تحویل‌ناپذیری که همگی جدید هستند پیدا کنیم.

چند روش برای یافتن سرشت χ که با استفاده از آن بتوان کارهای فوق را انجام داد به‌دست آورده‌ایم. به‌عنوان مثال، هر زیرگروه S_n دارای سرشتی جایگشتی است (۲۲.۱۳ را ببینید)؛ حاصلضرب دو سرشت سرشت است (گزارهٔ ۶.۱۹)؛ اگر سرشتی چون ψ در دست باشد، می‌توانیم قسمت متقارن و پادمتقارن مربع آن را یعنی ψ_S و ψ_A را تشکیل دهیم (گزارهٔ ۱۴.۱۹ را ببینید)؛ و اگر H زیرگروه G باشد، می‌توانیم سرشتهای G را به H تحدید کنیم، و سرشتهای H را به G فرا بریم. این خواص و خواص دیگری از سرشت را در زیر فهرست‌وار ذکر می‌کنیم.

خواص سرشت

فرض کنیم که χ_1، ... ، χ_k سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G هستند.

(۱) (مثال ۸.۱۳(۳)) تابع χ با تعریف زیرسرشتی (بدیهی) از G است

$$\chi(g) = 1 \quad \forall g \in G$$

(۲) (قضیهٔ ۱۱.۱۷)گروه G دقیقاً دارای $|G/G'|$ سرشت خطی است. این سرشتها عبارت‌اند از سرشتهای χ زیر

$$\chi(g) = \psi(gG') \quad (g \in G)$$

به‌ازای همهٔ ψهایی که سرشت تحویل‌ناپذیر (خطی) G/G' هستند.

(۳) (قضیهٔ ۳.۱۷) قسمت (۲) را به این صورت می‌توان تعمیم داد که اگر $N \lhd G$ و ψ سرشت تحویل‌ناپذیر G/N باشد آنگاه χ با تعریف زیر سرشت تحویل‌ناپذیر G است

$$\chi(g) = \psi(gN) \quad (g \in G)$$

(χ ارتقاء ψ است). با این روش دقیقاً آن دسته از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G که N را در هستهٔ خود دارند حاصل می‌شود.

(۴) (قضیهٔ ۱۸.۱۹) اگر $G = G_1 \times G_2$ آنگاه سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از گروه G به‌صورت زیرند

$$\chi(g_1, g_2) = \phi_1(g_1)\phi_2(g_2) \qquad (g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$$

به‌ازای همهٔ ϕ_iهایی که سرشت تحویل‌ناپذیر G_i هستند ($i = 1, 2$).

(۵) (گزارهٔ ۲۴.۱۳) اگر G زیرگروه S_n باشد آنگاه تابع $\nu : G \to \mathbb{C}$ با تعریف

$$\nu(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1 \qquad (g \in G)$$

سرشت G است.

(۶) (قضیهٔ ۱۲.۱۱ و ۱۱.۲۲) درایه‌های $\chi_i(1) \quad (1 \le i \le k)$ از ستون اول جدول سرشت G اعداد صحیح مثبت‌اند و در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(1)^2 = |G|$$

به‌علاوه، اعداد $\chi_i(1)$ مرتبهٔ G را عاد می‌کنند.

(۷) (روابط تعامد سطری، قضیهٔ ۴.۱۶(۱)) به‌ازای هر i و j داریم

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$$

(۸) (روابط تعامد ستونی، قضیهٔ ۴.۱۶(۲)) به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} |C_G(g)| & \text{اگر } g \text{ و } h \text{ مزدوج باشند} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

(۹) (تمرین ۵.۱۳) اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد و $z \in Z(G)$ آنگاه عددی چون ε وجود دارد که ریشهٔ واحد است و به‌ازای هر $g \in G$،

$$\chi(zg) = \varepsilon\chi(g)$$

(۱۰) (گزارهٔ ۹.۱۳(۲)) اگر g عنصری با مرتبهٔ n از G باشد، و χ سرشت G باشد آنگاه $\chi(g)$ مجموع تعدادی از ریشه‌های nام واحد است. به‌علاوه $|\chi(g)| \le \chi(1)$.

(۱۱) (گزارهٔ ۹.۱۳(۳)، ۴)) اگر $g \in G$ و χ سرشت G باشد آنگاه

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$$

لذا اگر g مزدوج g^{-1} باشد، به‌ازای هر سرشت χ از G، $\chi(g)$ حقیقی است.

(۱۲) (نتیجهٔ ۶.۱۵) اگر g عضوی از g باشد و مزدوج $g^{-۱}$ نباشد آنگاه به‌ازای سرشتی مانند χ، $\chi(g)$ غیرحقیقی است.

(۱۳) (قضیهٔ ۱۵.۲۲) گیریم $g \in G$. اگر به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت i که نسبت به مرتبهٔ g اول‌اند g و g^i مزدوج باشند آنگاه به‌ازای هر سرشت χ از G، $\chi(g)$ عددی صحیح است.

(۱۴) (نتیجهٔ ۲۵.۲۲) فرض کنیم که p عدد اول و y ‌ p'ـقسمت عنصر g از G باشد. اگر χ سرشت G باشد و هر دو عدد $\chi(g)$ و $\chi(y)$ صحیح باشند آنگاه

$$\chi(g) \equiv \chi(y)(\text{به پیمانهٔ } p)$$

لذا اگر مرتبهٔ g توانی از p باشد آنگاه

$$\chi(g) \equiv \chi(۱)(\text{به پیمانهٔ } p)$$

(۱۵) (گزارهٔ ۱۵.۱۳) اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد آنگاه $\overline{\chi}$ با تعریف زیر نیز چنین است

$$\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)} \quad (g \in G)$$

(۱۶) (قضیهٔ ۱.۲۳) تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی G مساوی تعداد رده‌های مزدوجی حقیقی G است.

(۱۷) (گزارهٔ ۱۴.۱۷) اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر G و λ سرشت خطی G باشد آنگاه $\chi\lambda$ سرشت تحویل‌ناپذیر G است، که

$$\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g) \quad (g \in G)$$

(۱۸) (گزارهٔ ۶.۱۹) اگر χ و ψ سرشتهای G باشند آنگاه $\chi\psi$ نیز سرشت G است، که

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g) \quad (g \in G)$$

(۱۹) (گزارهٔ ۱۴.۱۹) اگر χ سرشت G باشد آنگاه χ_S و χ_A نیز سرشت G هستند، که به‌ازای هر $g \in G$،

$$\chi_S(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^۲(g) + \chi(g^۲))$$

$$\chi_A(g) = \frac{۱}{۲}(\chi^۲(g) - \chi(g^۲))$$

(۲۰) (تعریف ۱۳.۲۱، گزارهٔ ۲۳.۲۱) اگر H زیرگروه G و ψ سرشت H باشد آنگاه $\psi \uparrow G$، که مقادیر آن در گزارهٔ ۲۳.۲۱ داده شده است، سرشت G است.

(۲۱) (فصل ۲۰) اگر H زیرگروه G و ψ سرشت G باشد آنگاه $\psi \downarrow H$ سرشت H است، که

$$(\psi \downarrow H)(h) = \psi(h) \qquad (h \in H)$$

دیده‌ایم که جدول سرشت G اطلاعاتی از لحاظ نظریهٔ گروهها دربارهٔ G به‌دست می‌دهد. به‌عنوان مثال، از ستون اول جدول $|G|$ و $|G/G'|$ معین می‌شود (طبق (۶) و (۲)). از جدول سرشت می‌توان فهمید که G ساده است یا نه (گزارهٔ ۶.۱۷)، درواقع، می‌توان تمام زیرگروههای نرمال G را معین کرد (گزارهٔ ۵.۱۷). دو زیرگروه نرمال مهم عبارت‌اند از G' و $Z(G)$؛ این دو را می‌توان به طریق زیر معین کرد. زیرگروه مشتق G' متشکل از آن دسته از عناصر g از G است که در رابطهٔ $\chi(g) = 1$ به‌ازای هر سرشت خطی χ از G صدق کنند. مرکز G یعنی $Z(G)$ را می‌توان با تعیین عناصر g از G که در تساوی ذیل صدق می‌کنند پیدا کرد $\sum \chi(g)\overline{\chi(g)} = |G|$، که در آن، جمع روی همهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G انجام می‌شود. در فصل ۲۸ خواهیم دید که احکام مهمتری دربارهٔ زیرگروههای G با استفاده از جدول سرشت حاصل می‌شوند.

سرانجام متذکر می‌شویم که جدول سرشت گروههای یکریخت یکی است، اما عکس این مطلب درست نیست: در تمرین ۱.۱۷ مثالی از دو گروه نایکریخت آوردیم که جدول سرشتشان یکی است؛ این دو گروه D_8 و Q_8 بودند.

۲۵

سرشتهای گروه مرتبهٔ pq

تا آخر فصل بعد، جدول سرشت همهٔ گروههایی را که مرتبه‌شان کمتر از ۳۲ است معین خواهیم کرد. تعدادی از این گروهها گروههایی هستند که به گروه فروبنیوس معروف‌اند. در این فصل مشخصات رده‌ای از گروههای فروبنیوس را شرح می‌دهیم و جدولهای سرشت گروههای این رده را پیدا می‌کنیم، و از آنجا جدول سرشت همهٔ گروههایی که مرتبه‌شان مضرب دو عدد اول است معلوم می‌شود.

در سراسر این فصل p نشان‌دهندهٔ عدد اول است.

ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ p

یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ

$$\mathbb{Z}_p = \{۰, ۱, \cdots, p - ۱\}$$

با جمع و ضرب به پیمانهٔ p، هیأت است، یعنی $\mathbb{Z}_p$ با عمل جمع گروه آبلی است، و $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{۰\}$ با عمل ضرب گروه آبلی است. واضح است که $\mathbb{Z}_p$ تحت جمع گروهی دوری با مولد ۱ است. این مطلب که $\mathbb{Z}_p^*$ نیز دوری است درست است ولی به هیچ‌وجه واضح نیست:

۱.۲۵ قضیه گروه ضربی $\mathbb{Z}_p^*$ دوری است، یعنی عدد صحیح n وجود دارد به‌قسمی که

$$n^{p-1} \equiv 1 (\text{به پیمانهٔ } p)$$

$$n^r \not\equiv 1 (\text{به پیمانهٔ } p) \quad \text{به‌ازای } 0 < r < p-1$$

عدد صحیح n با مرتبهٔ $p-1$ از $\mathbb{Z}_p^*$ را ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ p می‌نامند. قضیهٔ ۱.۲۵ را اثبات نمی‌کنیم، در عوض خواننده را به قضیهٔ ۳.۴۵ از کتاب فرالی[1] که مشخصاتش در کتابنامه آمده است ارجاع می‌دهیم؛ در آنجا اثبات قضیه به خوبی شرح داده شده است.

۲.۲۵ مثال عدد ۲ ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ ۳، ۵، ۱۱ و ۱۳ است ولی ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ ۷ نیست؛ عدد ۳ ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ ۷ است.

گزارهٔ زیر نتیجهٔ بلافصل قضیهٔ ۱.۲۵ است.

۳.۲۵ گزاره اگر $q|p-1$، عدد صحیح u وجود دارد به‌قسمی که مرتبهٔ u به پیمانهٔ p مساوی q باشد، یعنی

$$u^q \equiv 1 (\text{به پیمانهٔ } p)$$

$$u^r \not\equiv 1 (\text{به پیمانهٔ } p) \quad \text{به‌ازای } 0 < r < q$$

گروه فروبنیوس مرتبهٔ pq، که $q|p-1$

۴.۲۵ مثال قرار می‌دهیم

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p^*, y \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

با قاعدهٔ ضرب ماتریسی، G گروه مرتبهٔ $p(p-1)$ است (تمرین ۱.۲۵ را ببینید).

اکنون فرض کنیم $q|p-1$، و u عضوی با مرتبهٔ q در گروه ضربی $\mathbb{Z}_p^*$ باشد. قرار می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

و فرض می‌کنیم $F = \langle A, B \rangle$، یعنی F زیرگروهی از G است که توسط A و B تولید می‌شود. در این صورت

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^u$$

1. J. B. Fraleigh

و لذا روابط زیر را داریم

$$B^{-۱}AB = A^u \quad \text{و} \quad A^p = B^q = I \qquad (۵.۲۵)$$

با استفاده از این روابط، نتیجه می‌گیریم که هر عنصر F به شکل A^iB^j است که $۰ \leq i \leq p-۱$ و $۰ \leq j \leq q-۱$. این pq عضو متمایزند و لذا $|F| = pq$. به‌علاوه هر حاصلضربی از عناصر F با استفاده از روابط (۵.۲۵) معین می‌شود، لذا F را با نمایهٔ زیر می‌توان نشان داد

$$F = \langle A, B : A^p = B^q = I, B^{-۱}AB = A^u \rangle$$

۶.۲۵ تعریف اگر p عدد اول باشد و $q|p-۱$ آنگاه گروه مرتبهٔ pq با نمایهٔ زیر را با $F_{p,q}$ نمایش می‌دهیم

$$F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = ۱, b^{-۱}ab = a^u \rangle$$

که u عضوی با مرتبهٔ q در $\mathbb{Z}_p^*$ است.

اثبات این مطلب مشکل نیست که به فرضِ یکی دانستن گروههای یکریخت، $F_{p,q}$ به اینکه چه عدد صحیح مرتبهٔ qای را u اختیار کنیم بستگی ندارد (تمرین ۳.۲۵ را ببینید).

گروه $F_{p,q}$ به ردهٔ وسیعتری از گروهها که به گروههای فروبنیوس معروف‌اند تعلق دارد. در اینجا تعریف کلی این گروهها را نمی‌آوریم، بلکه فقط $F_{p,q}$ را بررسی می‌کنیم؛ خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند اطلاعات بیشتری را در کتاب پسمن[1] که مشخصاتش در کتابنامه آمده است پیدا کند.

درگزارهٔ بعدی همهٔ گروههایی که مرتبه‌شان مضرب دو عدد اول متمایز است رده‌بندی شده‌اند.

۷.۲۵ گزاره فرض کنیم که G گروه مرتبهٔ pq است، که p و q اعداد اول‌اند و $q < p$. در این صورت یا G آبلی است یا اینکه q عدد $p-۱$ را عاد می‌کند و $G \cong F_{p,q}$.

برهان فرض کنیم که G آبلی نیست. از تمرین ۳.۲۲ نتیجه می‌شود که q عدد $p-۱$ را عاد می‌کند و G دارای زیرگروه نرمالی چون H با مرتبهٔ p است. (راه دیگر اثبات این مطالب، که راه ساده‌ای هم هست، استفاده از قضایای سیلو است (فصل ۱۸ از کتاب فرالی را که مشخصاتش درکتابنامه آمده است ببینید).)

هر دو گروه H و G/H دوری‌اند زیرا مرتبه‌شان عدد اول است. فرض کنیم که $H = \langle a \rangle$ و $G/H = \langle Hb \rangle$؛ در این صورت G توسط a و b تولید می‌شود. چون $b^q \in H$ و مرتبهٔ b مساوی pq نیست (زیرا G ناآبلی است) نتیجه می‌شود که مرتبهٔ b مساوی q است.

1. D. S. Passman

چون $G \lhd H$ پس به‌ازای عدد صحیحی چون u، $b^{-1}ab = a^u$. به‌علاوه

$$a = b^{-q}ab^q = a^{u^q}$$

و لذا (به پیمانهٔ p)$u^q \equiv 1$. بنابراین مرتبهٔ عنصر u از گروه $\mathbb{Z}_p^*$ عدد q را عاد می‌کند. اگر مرتبهٔ u مساوی ۱ باشد آنگاه $b^{-1}ab = a$ و گروه G آبلی خواهد بود. بنابراین مرتبهٔ u مساوی q است. لذا ثابت کرده‌ایم که

$a^p = b^q = 1$ و $b^{-1}ab = a^u$ که مرتبهٔ u در $\mathbb{Z}_p^*$ مساوی q است.

بنابراین $G \cong F_{p,q}$. ■

۸.۲۵ مثال بنا به گزارهٔ ۷.۲۵، هر گروه مرتبهٔ ۱۵ آبلی است (درواقع با $C_3 \times C_5$ یکریخت است)؛ و گروههای مرتبهٔ ۲۱ عبارت‌اند از $C_3 \times C_7$ و $F_{7,3}$.

جدول سرشت $F_{p,q}$

درواقع جدول سرشت بعضی از گروههای $F_{p,q}$ را قبلاً پیدا کرده‌ایم، این گروهها عبارت‌اند از: گروه دووجهی مرتبهٔ $2p$ مربوط به حالت $q = 2$، و گروه $F_{7,3}$ در مثال ۲۵.۲۱. اکنون می‌خواهیم جدول سرشت $F_{p,q}$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. بنابراین قرار می‌دهیم

$$G = F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$

که p عدد اول است و $q|p-1$ (لزومی ندارد که q عدد اول باشد)، و مرتبهٔ u به پیمانهٔ p مساوی q است.

فرض کنیم S زیرگروه $\mathbb{Z}_p^*$ متشکل از توانهای u باشد. در این صورت $|S| = q$. قرار می‌دهیم $r = (p-1)/q$، و v_1، … ، v_r را به‌عنوان نماینده‌های هم‌مجموعه‌های S در $\mathbb{Z}_p^*$ انتخاب می‌کنیم.

۹.۲۵ گزاره رده‌های مزدوجی $G = F_{p,q}$ عبارت‌اند از

$$\{1\}$$
$$(a^{v_i})^G = \{a^{v_i s} : s \in S\} \quad (1 \le i \le r)$$
$$(b^n)^G = \{a^m b^n : 0 \le m \le p-1\} \quad (1 \le n \le q-1)$$

برهان تساوی $b^{-j}a^vb^j = a^{vu^j}$ نشان می‌دهد که a^v و a^{vs} به‌ازای هر $s \in S$ مزدوج‌اند. بنابراین اندازهٔ ردهٔ مزدوجی a^{v_i} حداقل مساوی q است؛ اندازهٔ این ردهٔ مزدوجی همچنین مساوی $|G : C_G(a^{v_i})|$ است، و چون $\langle a \rangle \leq C_G(a^{v_i})$ پس این اندازه حداکثر q است. بنابراین اندازهٔ $(a^{v_i})^G$ مساوی q است، و $(a^{v_i})^G$ به همان شکلی است که در صورت گزاره آمده است.

چون $C_G(b^n)$ شامل $\langle b \rangle$ است و شاخص $\langle b \rangle$ در G مساوی p است، نتیجه می‌شود که به‌ازای (به پیمانهٔ q)$n \not\equiv ۰$ داریم $|C_G(b^n)| = q$ و لذا اندازهٔ ردهٔ مزدوجی b^n مساوی p است. از طرف دیگر، چون $G/\langle a \rangle$ آبلی است، هر عضو مزدوج b^n به‌ازای mای به شکل $a^m b^n$ است. از این‌رو

$$(b^n)^G = \{a^m b^n : ۰ \leq m \leq p - ۱\}$$

و لذا حکم ثابت شده است. ■

طبق گزارهٔ ۹.۲۵، G دارای $q + r$ ردهٔ مزدوجی است و لذا باید به دنبال پیداکردن $q + r$ سرشت تحویل‌ناپذیر باشیم.

ابتدا توجه کنید که گروه مشتق G' برابر $\langle a \rangle$ است و لذا مرتبهٔ G/G' مساوی q است، پس طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، G دقیقاً دارای q سرشت خطی است. این سرشتها عبارت‌اند از χ_n $(۰ \leq n \leq q - ۱)$، که

$$\chi_n(a^x b^y) = e^{۲\pi i n y/q} \qquad (۰ \leq x \leq p - ۱, ۰ \leq y \leq q - ۱)$$

نشان می‌دهیم که G دارای r سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ q است.

قرار می‌دهیم $\varepsilon = e^{۲\pi i/p}$. به‌ازای $v \in \mathbb{Z}_p^*$، ψ_v را سرشت $\langle a \rangle$ با تعریف زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi_v(a^x) = \varepsilon^{vx} \qquad (۰ \leq x \leq p - ۱)$$

با استفاده از گزارهٔ ۲۳.۲۱، مقادیر سرشت فرابری $\psi_v \uparrow G$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$(\psi_v \uparrow G)(a^x b^y) = ۰ \qquad \text{هرگاه } ۱ \leq y \leq q - ۱$$
$$(\psi_v \uparrow G)(a^x) = \sum_{s \in S} \varepsilon^{vsx} \qquad (۰ \leq x \leq p - ۱)$$

توجه کنید که درجهٔ $\psi_v \uparrow G$ مساوی q است و

$$\psi_v \uparrow G = \psi_{vs} \uparrow G \qquad \text{هرگاه } s \in S$$

به‌ازای هر نمایندهٔ v_j $(1 \leq j \leq r)$ از هم‌مجموعه‌های S در $\mathbb{Z}_p^*$، قرار می‌دهیم

$$\phi_j = \psi_{v_j} \uparrow G$$

اکنون ثابت می‌کنیم که هرکدام از ϕ_jها تحویل‌ناپذیر است. بنابه قضیهٔ تقابل فروبنیوس، یعنی قضیهٔ ۱۶.۲۱، به‌ازای هر $s \in S$ داریم

$$\langle \phi_j \downarrow \langle a \rangle, \psi_{v_j s} \rangle_{\langle a \rangle} = \langle \phi_j, \psi_{v_j s} \uparrow G \rangle_G = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G$$

از این‌رو

$$\phi_j \downarrow \langle a \rangle = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G \sum_{s \in S} \psi_{v_j s} + \chi$$

که χ یا صفر است و یا سرشتی از $\langle a \rangle$ است. با در نظرگرفتن درجهٔ طرفین تساوی فوق نتیجه می‌شود

$$\phi_j(1) \geq |S| \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G$$

چون $|S| = q = \phi_j(1)$ نتیجه می‌گیریم که $\langle \phi_j, \phi_j \rangle_G = 1$. بنابراین ϕ_j تحویل‌ناپذیر است و

$$\phi_j \downarrow \langle a \rangle = \langle \phi_j, \phi_j \rangle_G \sum_{s \in S} \psi_{v_j s}$$

طبق قضیهٔ ۲۳.۱۴، سرشتهای ψ_v $(v \in \mathbb{Z}_p^*)$ استقلال خطی دارند و لذا $\phi_1 \downarrow \langle a \rangle$، . . . ، $\phi_r \downarrow \langle a \rangle$ متمایزند. در نتیجه سرشتهای تحویل‌ناپذیر ϕ_1، . . . ، ϕ_r متمایزند.

اکنون $q + r$ سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز گروه G، یعنی χ_nها و ϕ_jها (که $0 \leq n \leq q-1$ و $1 \leq j \leq r$) را پیدا کرده‌ایم و لذا جدول سرشت کامل G را به‌دست آورده‌ایم. قضیهٔ زیر خلاصهٔ مطالب فوق است.

۱۰.۲۵ قضیه فرض کنیم p عدد اول است و $q|p-1$ و $r = (p-1)/q$. در این صورت گروه

$$\begin{aligned} F_{p,q} &= \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle \\ &= \{a^x b^y : 0 \leq x \leq p-1, 0 \leq y \leq q-1\} \end{aligned}$$

دارای $q+r$ سرشت تحویل‌ناپذیر است. تعداد q سرشت از این سرشتها دارای درجهٔ ۱ هستند و عبارت‌اند از

$$\chi_n(a^x b^y) = e^{2\pi i n y/q} \qquad (0 \leq n \leq q-1)$$

و r سرشت دیگر دارای درجهٔ q هستند و عبارت‌اند از

$$\phi_j(a^x b^y) = 0 \qquad \text{هرگاه}\ 1 \leq y \leq q-1$$
$$\phi_j(a^x) = \sum_{s \in S} e^{2\pi i v_j s x/p}$$

که $1 \leq j \leq r$ و $v_1 S$، ...، $v_r S$ هم‌مجموعه‌های زیرگروه S در $\mathbb{Z}_p^*$ هستند که S زیرگروهی است که توسط u تولید می‌شود.

این فصل را با چند مثال از قضیهٔ ۱۰.۲۵ به پایان می‌بریم.

۱۱.۲۵ مثال گیریم

$$G = F_{p,p-1} = \langle a, b : a^p = b^{p-1} = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$

که u ریشهٔ اولیه‌ای به پیمانهٔ p است. در این صورت G دارای $p-1$ سرشت خطی و یک سرشت تحویل‌ناپذیر ϕ با درجهٔ $p-1$ است که مقادیر آن عبارت‌اند از

$$\phi(a^x b^y) = 0 \qquad \text{هرگاه}\ 1 \leq y \leq p-2$$
$$\phi(a^x) = -1 \qquad \text{هرگاه}\ 1 \leq x \leq p-1$$

۱۲.۲۵ مثال گیریم عناصر $a, b \in S_5$ جایگشتهای زیر باشند

$$b = (2\ 3\ 5\ 4) \quad \text{و} \quad a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

می‌توان نشان داد که

$$b^{-1}ab = a^2 \quad \text{و} \quad a^5 = b^4 = 1$$

از این‌رو اگر $G = \langle a, b \rangle$ آنگاه $G \cong F_{5,4}$ و لذا بنا به مثال قبل، جدول سرشت G عبارت است از

جدول سرشت $F_{5,4}$

g_i	1	a	b	b^2	b^3
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	20	5	4	4	4
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	i	-1	$-i$
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	$-i$	-1	i
ϕ	4	-1	0	0	0

۱۳.۲۵ مثال حالت $p = 13$ و $q = 4$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت

$$F_{13,4} = \langle a, b : a^{13} = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^5\rangle$$

می‌نویسیم $\varepsilon = e^{2\pi i/13}$ و قرار می‌دهیم

$$\alpha = \varepsilon + \varepsilon^5 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{12}$$
$$\beta = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11}$$
$$\gamma = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9$$

طبق قضیهٔ ۱۰.۲۵ جدول سرشت $F_{13,4}$ به‌صورتی است که در زیر آمده است.

جدول سرشت $F_{13,4}$

g_i	1	a	a^2	a^4	b	b^2	b^3
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	52	13	13	13	4	4	4
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	1	i	-1	$-i$
χ_2	1	1	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	1	1	$-i$	-1	i
ϕ_1	4	α	β	γ	0	0	0
ϕ_2	4	β	γ	α	0	0	0
ϕ_3	4	γ	α	β	0	0	0

در مثال ۲۵.۲۱ جدول سرشت $F_{7,3}$ را پیدا کردیم. می‌توانید نشان دهید که این جدول با آنچه در قضیهٔ ۱۰.۲۵ دربارهٔ جدول سرشت آمده مطابقت دارد.

خلاصهٔ فصل ۲۵

۱. فرض کنیم که p عدد اول است و q عدد $p-1$ را عاد می‌کند. گیریم u عضوی با مرتبهٔ q در $\mathbb{Z}_p^*$ است. در این صورت

$$F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$

سرشتهای تحویل‌ناپذیر $F_{p,q}$ در قضیهٔ ۱۰.۲۵ مشخص شده‌اند.

۲. فرض کنیم p و q اعداد اول‌اند و $p > q$. اگر مرتبهٔ G مساوی pq باشد آنگاه یا G آبلی است یا $G \cong F_{p,q}$.

تمرینات فصل ۲۵

۱. گیریم p عدد اول است. ثابت کنید که

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_p^*, y \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

تحت ضرب ماتریسی گروهی با مرتبهٔ $p(p-1)$ است.

۲. جدول سرشت گروه ناآبلی $F_{11,5}$ با مرتبهٔ ۵۵ را پیدا کنید.

۳. گیریم p و q اعداد صحیح مثبت‌اند و p اول است و $q|p-1$. فرض کنیم u و v اعدادی صحیح‌اند و دارای مرتبهٔ q به پیمانهٔ p هستند؛ قرار می‌دهیم

$$G_1 = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$
$$G_2 = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^v \rangle$$

ثابت کنید که $G_1 \cong G_2$. (این تمرین مؤید حکمی است که بعد از تعریف $F_{p,q}$ در ۶.۲۵ بیان کردیم.)

۴. فرض کنیم که p عدد اول است و $p \neq 2$. قرار می‌دهیم $q = (p-1)/2$ و

$$G = F_{p,q} = \langle a, b : a^p = b^q = 1, b^{-1}ab = a^u \rangle$$

که u عضوی با مرتبهٔ q به پیمانهٔ p است.

الف) نشان دهید که عدد صحیح m وجود دارد به‌قسمی که (به پیمانهٔ p)$u^m \equiv -۱$ اگر و فقط اگر (به پیمانهٔ ۴)$p \equiv ۱$.

ب) نتیجه بگیرید که a مزدوج $a^{-۱}$ است اگر و فقط اگر (به پیمانهٔ ۴)$p \equiv ۱$.

ج) با استفاده از روابط تعامد، نشان دهید که دو سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ qی G دارای مقادیر

$$\frac{۱}{۲}(-۱ \pm \sqrt{\delta p}\ )$$

به‌ازای a هستند، که در آن $\delta = ۱$ هرگاه (به پیمانهٔ ۴)$p \equiv ۱$ و $\delta = -۱$ هرگاه (به پیمانهٔ ۴)$p \equiv -۱$.

د) نتیجه بگیرید که اگر $\varepsilon = e^{۲\pi i/p}$ آنگاه

$$\sum_{s \in Q} \varepsilon^s = -۱ \pm \sqrt{\delta p}$$

که Q مجموعهٔ مانده‌های درجهٔ ۲ به پیمانهٔ p است (مقصود این است که Q مجموعهٔ $\{۱^۲, ۲^۲, \cdots, ((p-۱)/۲)^۲\}$ است).

۵. گیریم E گروه مرتبهٔ ۱۸ با نمایهٔ زیر، مانند تمرین ۴.۵، باشد

$$E = \langle a, b, c : a^۳ = b^۳ = c^۲ = ۱, ab = ba, c^{-۱}ac = a^{-۱}, c^{-۱}bc = b^{-۱}\rangle$$

توجه کنید که $\langle a, b\rangle$ زیرگروه نرمال E است و با $C_۳ \times C_۳$ یکریخت است. با استفاده از فرابری سرشتهای خطی این زیرگروه جدول سرشت E را به‌دست آورید.

۶. نشان دهید که گروه E تمرین ۵ دارای این خاصیت است که $Z(E)$ دوری است ولی E دارای نمایش تحویل‌ناپذیر صادق نیست. (به این ترتیب E مثال نقیض عکس گزارهٔ ۱۶.۹ است.)

۷. الف) گروهی پیدا کنید که درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن عبارت باشند از

$$۱, ۱, ۱, ۳, ۳, ۳, ۳$$

ب) گروهی پیدا کنید که درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن عبارت باشند از

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳$$

ج) گروهی پیدا کنید که درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر آن عبارت باشند از

$$۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۶, ۶, ۶, ۶$$

۸. گیریم G گروه مرتبهٔ ۵۴ زیر باشد

$$G = \langle a, b : a^{9} = b^{6} = 1, b^{-1}ab = a^{2} \rangle$$

جدول سرشت G را پیدا کنید.

۲۶

سرشت بعضی از pـگروهها

در سرتاسر این فصل، p عدد اول است. روشی برای یافتن جدول سرشت گروههای مرتبهٔ p^n، به‌ازای $n \leq ۴$، ارائه می‌کنیم. این روش عبارت است از بررسی سرشتهای آن دسته از pـگروهها که زیرگروهی آبلی با شاخص p دارند، و قبل از اینکه این روش را توضیح دهیم، نشان می‌دهیم که همهٔ گروههای مرتبهٔ p^n، به‌ازای $۱ \leq n \leq ۴$، دارای زیرگروهی آبلی با شاخص p هستند. سپس سرشتهای تحویل‌ناپذیر همهٔ گروههای مرتبهٔ $p^۳$ و مرتبهٔ ۱۶ را به‌دست می‌آوریم. در پایان این فصل خواهیم دید که جدول سرشت همهٔ گروههای با مرتبهٔ کمتر از ۳۲ را یافته‌ایم؛ نشانی محلی از کتاب را که جدول سرشت آنها را مشخص کرده‌ایم در جدولی ذکر می‌کنیم.

خواص مقدماتی pـگروه

pـگروه عبارت است از گروهی که مرتبه‌اش توانی از عدد اول p باشد. در اولین لم چند خاصیت معروف pـگروه را ذکر می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $Z(G)$ نشان‌دهندهٔ مرکز G است (تعریف ۱۵.۹ را ببینید).

۱.۲۶ لم گیریم G گروهی با مرتبهٔ p^n است و $n \geq ۱$.

(۱) اگر $G \rhd H \neq \{1\}$ آنگاه $H \cap Z(G) \neq \{1\}$. لذا $Z(G) \neq \{1\}$.
(۲) اگر $K \leq Z(G)$ و G/K دوری باشد، G آبلی است.
(۳) اگر $n \leq 2$، G آبلی است.

برهان (۱) چون $H \lhd G$ پس H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی G است که اندازهٔ همگی آنها توانی از p است؛ و $H \cap Z(G)$ متشکل از آن دسته از رده‌های مزدوجی H است که دارای اندازهٔ ۱ هستند. بنابراین

$$|H| = |H \cap Z(G)| + \text{مضربی از } p$$

چون $|H|$ مضرب p است و $|H \cap Z(G)| \neq 0$، نتیجه می‌گیریم که $H \cap Z(G) \neq \{1\}$.

(۲) فرض کنیم که G/K گروهی دوری با مولد gK است و $x_1, x_2 \in G$. در این صورت

$$x_1 = g^i k_1, \qquad x_2 = g^j k_2$$

که i و j اعداد صحیح‌اند و $k_1, k_2 \in K$. چون $k_1, k_2 \in Z(G)$ نتیجه می‌شود که $x_1 x_2 = x_2 x_1$. بنابراین G آبلی است.

(۳) طبق قسمت (۱)، $|G/Z(G)| \leq p^{n-1}$. از این‌رو اگر $n \leq 2$ آنگاه $G/Z(G)$ دوری است و لذا بنا به (۲)، G آبلی است. ∎

۲.۲۶ لم گیریم G گروهی با مرتبهٔ p^n است و $1 \leq n \leq 4$. در این صورت G دارای زیرگروهی آبلی با شاخص p است.

برهان اگر $n = 1$، حکم واضح است، لذا فرض می‌کنیم که $2 \leq n \leq 4$.

فرض کنیم که $Z(G)$ شامل زیرگروه K با مرتبهٔ p^{n-2} است. در این صورت می‌توانیم زیرگروه H از G را چنان پیدا کنیم که $K \leq H$ و $|H| = p^{n-1}$. از آنجا که $K \leq Z(H)$ و، بنابه لم ۱.۲۶(۲)، مرتبهٔ $H/Z(H)$ مساوی p نیست، نتیجه می‌گیریم که $Z(H) = H$. بنابراین H زیرگروهی آبلی از G با شاخص p است.

اکنون فرض کنیم که $Z(G)$ دارای زیرگروهی با مرتبهٔ p^{n-2} نیست. چون، بنابه لم ۱.۲۶(۱)، $Z(G) \neq \{1\}$ پس تنها حالت ممکن این است که $|G| = p^4$ و $|Z(G)| = p$. بنابراین طبق تمرین ۷.۱۲، G دارای عضوی مانند x است که اندازهٔ ردهٔ مزدوجی آن، یعنی اندازهٔ x^G مساوی p است. قرار می‌دهیم $H = C_G(x)$. در این صورت طبق قضیهٔ ۸.۱۲ داریم $|H| = |G|/|x^G| = p^3$. به‌علاوه، $Z(G)$ و $\langle x \rangle$ زیرگروههای متمایز غیرهمانی $Z(H)$ هستند

و لذا $|Z(H)| \geq p^{۲}$. بنابراین در این حالت نیز، طبق لم ۱.۲۶(۲)، $Z(H) = H$، و لذا H زیرگروه آبلی با شاخص p است. ■

قبل از بیان آخرین حکم دربارهٔ ساختار pـگروه، یادآوری می‌کنیم که زیرگروه مشتق G را با G' نشان می‌دهیم (تعریف ۷.۱۷ را ببینید).

۳.۲۶ لم گیریم G pـگروهی ناآبلی است که دارای زیرگروه آبلی H با شاخص p است. در این صورت زیرگروه نرمال K از G وجود دارد به‌قسمی‌که

$$|K| = p \quad \text{و} \quad K \leq H \cap G' \cap Z(G)$$

برهان چون G ناآبلی است پس $\{۱\} \neq G' \lhd G$، و لذا بنابه لم ۱.۲۶(۱)، $G' \cap Z(G) \neq \{۱\}$. گیریم K زیرگروهی با مرتبهٔ p از $G' \cap Z(G)$ است. از اینکه $K \leq Z(G)$ نتیجه می‌شود $K \lhd G$ و KH زیرگروه آبلی G است (که $KH = \{kh : k \in K, h \in H\}$). چون G ناآبلی است و $|G : H| = p$ پس $KH = H$ و بنابراین $K \leq H$. ■

سرشتهای pـگروههایی که زیرگروهی آبلی با شاخص p دارند

با توجه به لم ۲.۲۶، از قضیهٔ بعدی تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروههای ناآبلی مرتبهٔ $p^{۳}$ یا $p^{۴}$ به‌دست می‌آید.

۴.۲۶ قضیه فرض کنیم که G pـگروهی ناآبلی است که دارای زیرگروه آبلی H با شاخص p است. گیریم K زیرگروه نرمال G با خواص مذکور در لم ۳.۲۶ است. در این صورت هر سرشت تحویل‌ناپذیر G به یکی از دو صورت زیر است

(۱) ارتقاء سرشت تحویل‌ناپذیری از G/K یا

(۲) فرابری ψ به G، یعنی $\psi \uparrow G$، که ψ سرشتی خطی از H با خاصیت $K \not\leq \mathrm{Ker}\psi$ است.

برهان قرار می‌دهیم $|G| = p^n$. بنا به قضیهٔ ۳.۱۷، ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/K دقیقاً آن دسته از سرشتهای تحویل‌ناپذیر G است که K در هستهٔ آنهاست. طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱، مجموع مربعات درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیری که به این ترتیب حاصل می‌شوند مساوی $|G/K| = p^{n-۱}$ است.

اکنون تعداد $p^{n-۲} - p^{n-۳}$ سرشت تحویل‌ناپذیر دیگر G را که درجهٔ هرکدام p است به‌دست می‌آوریم. در این صورت، چون

$$p^{n-۱} + (p^{n-۲} - p^{n-۳})p^{۲} = p^n = |G| \qquad (*)$$

طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱، تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را به‌دست آورده‌ایم.

ابتدا تذکر می‌دهیم که اگر χ سرشت G با درجهٔ p باشد، یا تحویل‌ناپذیر است یا مجموع تعدادی از سرشتهای خطی است (زیرا طبق قضیهٔ ۱۱.۲۲، درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر G توانی از p است). در حالت اخیر داریم $G' \leq \mathrm{Ker}\chi$، زیرا G' زیرمجموعهٔ هستهٔ هر سرشت خطی است، و لذا $K \leq G' \leq \mathrm{Ker}\chi$. بنابراین

۵.۲۶ اگر $\chi(1) = p$ و $K \not\leq \mathrm{Ker}\chi$ آنگاه χ تحویل‌ناپذیر است.

طبق قضیهٔ ۸.۹ می‌دانیم که همهٔ p^{n-1} سرشت تحویل‌ناپذیر گروه آبلی H خطی‌اند. گیریم Φ مجموعهٔ سرشتهایی خطی از H است که K در هستهٔ آنها نیست. از آنجا که سرشتهای خطی H که K در هستهٔ آنهاست دقیقاً ارتقاء سرشتهای خطی H/K هستند، داریم

$$|\Phi| = p^{n-1} - p^{n-2}$$

گیریم $\psi \in \Phi$. از آنجا که $K \leq Z(G)$ طبق گزارهٔ ۲۳.۲۱ داریم

$$(\psi \uparrow G)(k) = p\psi(k) \qquad \text{به‌ازای هر } k \in K$$

از این‌رو $\psi \uparrow G$ دارای درجهٔ p است و K زیرمجموعهٔ هستهٔ آن نیست. بنابراین طبق ۵.۲۶، تابع $\psi \uparrow G$ سرشت تحویل‌ناپذیر G است.

اکنون فرض کنیم که ψ_1 سرشت خطی H است به‌طوری که $\psi \uparrow G = \psi_1 \uparrow G$. در این صورت طبق قضیهٔ تقابل فروبنیوس، یعنی قضیهٔ ۱۶.۲۱،

$$1 = \langle \psi \uparrow G, \psi_1 \uparrow G \rangle_G = \langle (\psi \uparrow G) \downarrow H, \psi_1 \rangle_H$$

چون درجهٔ $(\psi \uparrow G) \downarrow H$ مساوی p است، از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که حداکثر p عنصر چون ψ_1 در Φ وجود دارد به‌قسمی که $\psi_1 \uparrow G = \psi \uparrow G$. در نتیجه مجموعهٔ

$$\{\psi \uparrow G : \psi \in \Phi\}$$

حداقل دارای $|\Phi|/p = (p^{n-1} - p^{n-2})/p$ سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز درجهٔ p است که K در هستهٔ آنها نیست. همان‌طورکه در $(*)$ دیدیم، G حداکثر دارای $p^{n-2} - p^{n-3}$ سرشت از نوع فوق است. بنابراین مجموعهٔ $\{\psi \uparrow G : \psi \in \Phi\}$ دقیقاً از $p^{n-2} - p^{n-3}$ سرشت تحویل‌ناپذیری که در جستجویشان هستیم تشکیل شده است، و لذا اثبات به انجام رسیده است. ■

اکنون از قضیهٔ ۴.۲۶ استفاده می‌کنیم و سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروههای ناآبلی مرتبهٔ p^3 را صریحاً به‌دست می‌آوریم. سپس با به‌کارگیری مجدد قضیهٔ ۴.۲۶ جدول سرشت همهٔ گروههای ناآبلی مرتبهٔ ۱۶ را به‌دست می‌آوریم.

گروههای مرتبهٔ p^3

بنابه قضیهٔ ۶.۹، گروههای آبلی مرتبهٔ p^3 عبارت‌اند از

$$C_{p^3}, \qquad C_{p^2} \times C_p, \qquad C_p \times C_p \times C_p$$

جدول سرشت گروههای فوق با استفاده از قضیهٔ ۸.۹ به‌دست می‌آیند.

اکنون فرض می‌کنیم که G گروه ناآبلی مرتبهٔ p^3 است. می‌نویسیم $Z = Z(G)$. بنا به لم ۱.۲۶، $Z \neq \{1\}$ و G/Z غیردوری است. از این‌رو $G/Z \cong C_p \times C_p$ و $Z = \langle z \rangle \cong C_p$. aZ و bZ را چنان انتخاب می‌کنیم که $G/Z = \langle aZ, bZ \rangle$. در این صورت

$$G/Z = \{a^r b^s Z : 0 \leq r \leq p-1, 0 \leq s \leq p-1\}$$

و لذا هر عضو G به شکل

$$a^r b^s z^t$$

است که $0 \leq r, s, t \leq p-1$.

۶.۲۶ قضیه فرض می‌کنیم G گروه $\{a^r b^s z^t : 0 \leq r, s, t \leq p-1\}$ یعنی گروه ناآبلی مرتبهٔ p^3 باشد که در بالا دیدیم. قرار می‌دهیم $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. در این صورت سرشتهای تحویل‌ناپذیر G عبارت‌اند از

$$\chi_{u,v} \qquad (0 \leq u \leq p-1, \ 0 \leq v \leq p-1)$$

و

$$\phi_u \qquad (1 \leq u \leq p-1)$$

که به‌ازای هر r و s و t داریم

$$\chi_{u,v}(a^r b^s z^t) = \varepsilon^{ru+sv}$$

$$\phi_u(a^r b^s z^t) = \begin{cases} p\varepsilon^{ut} & r = s = 0 \text{ اگر } \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برهان بنابه قضیهٔ ۸.۹، سرشتهای تحویل‌ناپذیر G/Z عبارت‌اند از $\psi_{u,v}$ ($۰ \leq u, v \leq p-۱$)، که

$$\psi_{u,v}(a^r b^s Z) = \varepsilon^{ru+sv}$$

ارتقاء $\psi_{u,v}$ به G عبارت است از سرشت خطی $\chi_{u,v}$ که در صورت قضیه آمده است.
گیریم $H = \langle a, z \rangle$. دراین صورت H زیرگروه آبلی مرتبهٔ $p^۲$ است. به‌ازای $۱ \leq u \leq p-۱$، سرشت ψ_u از H را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$\psi_u(z^t) = \varepsilon^{ut} \qquad (۰ \leq t \leq p-۱)$$

حال می‌خواهیم $\psi_u \uparrow G$ را به‌دست آوریم.
گیریم r عددی صحیح است و $۱ \leq r \leq p-۱$. اگر a^r با عنصر g از Gمزدوج باشد آنگاه $a^r Z$ با gZ در گروه آبلی G/Z مزدوج است، لذا $a^r Z = gZ$، و بنابراین به‌ازای tای، $g = a^r z^t$. چون $a^r \notin Z$، اندازهٔ ردهٔ مزدوجی $(a^r)^G$ مساوی ۱ نیست، از این‌رو

$$(a^r)^G = \{a^r z^t : ۰ \leq t \leq p-۱\}$$

لذا طبق گزارهٔ ۲۳.۲۱ داریم

$$\begin{aligned}(\psi_u \uparrow G)(a^r z^t) &= \psi_u(a^r) + \psi_u(a^r z) + \cdots + \psi_u(a^r z^{p-۱}) \\ &= \psi_u(a^r) \sum_{s=۰}^{p-۱} \psi_u(z^s) \\ &= \psi_u(a^r) \sum_{s=۰}^{p-۱} \varepsilon^{us} \\ &= ۰\end{aligned}$$

همچنین

$$(\psi_u \uparrow G)(z^t) = p\psi_u(z^t) = p\varepsilon^{ut}$$

و

$$(\psi_u \uparrow G)(g) = ۰ \qquad \text{هرگاه } g \notin H$$

لذا ثابت کرده‌ایم که اگر $\phi_u = \psi_u \uparrow G$ آنگاه ϕ_u دارای مقادیری است که در صورت قضیه آمده است.

داریم

$$\begin{aligned}\langle \phi_u, \phi_u \rangle_G &= \frac{1}{p^3} \sum_{g\in G} \phi_u(g)\overline{\phi_u(g)} \\ &= \frac{1}{p^3} \sum_{g\in Z} \phi_u(g)\overline{\phi_u(g)} \\ &= \frac{1}{p^3} \sum_{g\in Z} p^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

بنابراین ϕ_u تحویل‌ناپذیر است.

واضح است که سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_{u,v}$ $(0 \leq u, v \leq p-1)$ و ϕ_u $(1 \leq u \leq p-1)$ همگی متمایزند، و مجموع مربعات درجاتشان عبارت است از

$$p^2 \cdot 1^2 + (p-1) \cdot p^2 = |G|$$

به‌این ترتیب تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را پیدا کرده‌ایم. ■

توجه کنید که اثبات قضیهٔ ۶.۲۶ حالت خاصی از اثبات قضیهٔ ۴.۲۶ است (به‌ازای $K = Z(G)$).

درواقع، اگر گروههای یکریخت را یکی بگیریم، دقیقاً دو گروه ناآبلی مرتبهٔ p^3 وجود دارد. اگر $p = 2$، این گروهها عبارت‌اند از D_8 و Q_8. و اگر p فرد باشد، این گروهها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} &H_1 = \langle a, b : a^{p^2} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{p+1} \rangle \\ &H_2 = \langle a, b, z : a^p = b^p = z^p = 1, az = za, bz = zb, b^{-1}ab = az \rangle \end{aligned} \tag{۷.۲۶}$$

داریم $Z(H_1) = \langle a^p \rangle$ و $Z(H_2) = \langle z \rangle$. عناصر a و b از H_1 و H_2 کار همان عناصر a و b را که در صورت قضیهٔ ۶.۲۶ انتخاب کرده‌ایم انجام می‌دهند.

۸.۲۶ گروههای مرتبهٔ ۱۶

معلوم شده است که، اگر گروههای یکریخت را یکی بگیریم، دقیقاً چهارده گروه مرتبهٔ ۱۶ وجود دارد (رجوع کنید به صفحهٔ ۱۳۴ ازکتاب کاکستر[1] و موزر[2] که مشخصاتش درکتابنامه آمده است). همهٔ این گروهها و جدول سرشت آنها را مشخص می‌کنیم.

1. Coxeter 2. Moser

طبق قضیهٔ ۶.۹، گروههای آبلی مرتبهٔ ۱۶ عبارت‌اند از

$$C_{16}, C_8 \times C_2, C_4 \times C_4, C_4 \times C_2 \times C_2, C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$$

که جدول سرشت آنها با استفاده از قضیهٔ ۸.۹ به‌دست می‌آید.

اگر G یکی از نه گروه ناآبلی مرتبهٔ ۱۶ باشد آنگاه $|G' \cap Z(G)| = 2$ (تمرین ۷.۲۶ را ببینید)، لذا زیرگروه K که در لم ۳.۲۶ ذکر شد عبارت است از

$$K = G' \cap Z(G)$$

به این ترتیب G/K گروهی با مرتبهٔ ۸ است. طبق لم ۱.۲۶(۲) این گروه C_8 نیست و طبق تمرین ۸.۲۶ ممکن نیست Q_8 باشد. از این‌رو

$$G/K \cong (D_8 \text{ یا } C_4 \times C_2 \text{ یا } C_2 \times C_2 \times C_2)$$

توضیحات خود را متناظر با سه حالت فوق برای G/K به سه قسمت تقسیم می‌کنیم. این توضیحات براساس نمایهٔ گروهها خواهد بود. با استفاده از تمرین ۵.۲۶ می‌توان نشان داد که همگیِ نه گروه G_1، . . . ، G_9 که در زیر آورده‌ایم دارای مرتبهٔ ۱۶ هستند.

(الف) سه گروه ناآبلی چون G با مرتبهٔ ۱۶ وجود دارد به‌قسمی که $G/K \cong D_8$. این گروهها عبارت‌اند از

$$G_1 = \langle a, b : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = D_{16}$$
$$G_2 = \langle a, b : a^8 = 1, b^2 = a^4, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$
$$G_3 = \langle a, b : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3 \rangle$$

در هر یک از این حالات داریم $K = \langle a^4 \rangle$. هرکدام از این گروهها دارای هفت ردهٔ مزدوجی C_1، . . .، C_7 است که در جدول زیر آمده‌اند

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
G_1, G_2	1	a^4	a^2, a^6	a, a^7	a^3, a^5	a^ib (i زوج)	a^ib (i فرد)
G_3	1	a^4	a^2, a^6	a, a^3	a^5, a^7	a^ib (i زوج)	a^ib (i فرد)

با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۶ جدولهای سرشت G_1، G_2 و G_3 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

رده	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$	$C_۷$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶	۱۶	۸	۸	۸	۴	۴
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱
	۱	۱	۱	-۱	-۱	۱	-۱
	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱
	۲	۲	-۲	۰	۰	۰	۰
	۲	-۲	۰	α	β	۰	۰
	۲	-۲	۰	β	α	۰	۰

که

$$\alpha = \sqrt{۲} = -\beta \quad \text{برای } G_۱، G_۲$$

$$\alpha = i\sqrt{۲} = -\beta \quad \text{برای } G_۳$$

پنج سرشت اول ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر $G/K \cong D_۸$ هستند. دو سرشت آخر را می‌توان مانند قضیهٔ ۴.۲۶(۲) به‌صورت سرشت فرابری $\psi \uparrow G$ به‌دست آورد که ψ سرشت خطی زیرگروه آبلی $\langle a \rangle$ با شاخص ۲ است. این دو سرشت را با استفاده از روابط تعامد ستونی نیز می‌توان پیدا کرد. توجه کنید که a و $a^{-۱}$ در $G_۱$ و $G_۲$ مزدوج‌اند ولی در $G_۳$ مزدوج نیستند، بنابراین مقادیر ستونهای $C_۴$ و $C_۵$ در جدولهای $G_۱$ و $G_۲$ همگی حقیقی‌اند، ولی در جدول $G_۳$ چنین نیست (نتیجهٔ ۶.۱۵ را ببینید).

(**ب**) سه گروه ناآبلی چون G با مرتبهٔ ۱۶ وجود دارد به‌قسمی که $G/K \cong C_۴ \times C_۲$ (که مانند گذشته $K = G' \cap Z(G)$، و مرتبهٔ K برابر ۲ است). این گروهها عبارت‌اند از

$$G_۴ = \langle a, b, z : a^۴ = z, b^۲ = z^۲ = ۱, b^{-۱}ab = az \rangle$$

$$G_۵ = \langle a, b, z : a^۴ = ۱, b^۲ = z, z^۲ = ۱, b^{-۱}ab = az \rangle$$

$$G_۶ = \langle a, b, z : a^۴ = ۱, b^۲ = z^۲ = ۱, b^{-۱}ab = az, az = za, bz = zb \rangle$$

نمایه‌های فوق تا حدودی پیچیده‌اند (به‌عنوان مثال، چون در $G_۴$ داریم $a^۴ = z$ لذا z را می‌توان حذف کرد)، اما به شکلی هستند که با استفاده از آنها می‌توانیم رده‌های مزدوجی هر سه گروه $G_۴$ و $G_۵$ و $G_۶$ (یعنی $C_۱$، . . . ، $C_{۱۰}$) را همزمان توضیح دهیم:

$C_{۱}$	$C_{۲}$	$C_{۳}$	$C_{۴}$	$C_{۵}$	$C_{۶}$	$C_{۷}$	$C_{۸}$	$C_{۹}$	$C_{۱۰}$
۱	z	$a^{۲}$	$a^{۲}z$	a, az	$a^{۳}, a^{۳}z$	b, bz	$a^{۲}b, a^{۲}bz$	ab, abz	$a^{۳}b, a^{۳}bz$

در هر سه حالت داریم $K = \langle z \rangle$. جدولهای سرشت $G_{۴}$، $G_{۵}$ و $G_{۶}$ با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۶ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

رده	$C_{۱}$	$C_{۲}$	$C_{۳}$	$C_{۴}$	$C_{۵}$	$C_{۶}$	$C_{۷}$	$C_{۸}$	$C_{۹}$	$C_{۱۰}$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۸	۸	۸	۸	۸	۸
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	۱	۱	-۱	-۱	i	$-i$	۱	-۱	i	$-i$
	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱	-۱
	۱	۱	-۱	-۱	$-i$	i	۱	-۱	$-i$	i
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱
	۱	۱	-۱	-۱	i	$-i$	-۱	۱	$-i$	i
	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱
	۱	۱	-۱	-۱	$-i$	i	-۱	۱	i	$-i$
	۲	-۲	α	β	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	۲	-۲	β	α	۰	۰	۰	۰	۰	۰

که

$$\alpha = ۲i = -\beta \quad \text{برای } G_{۴}$$

$$\alpha = ۲ = -\beta \quad \text{برای } G_{۵} \text{ و } G_{۶}$$

(ج) بالاخره، سه گروه ناآبلی چون G با مرتبهٔ ۱۶ وجود دارد به‌قسمی که $G/K \cong C_{۲} \times C_{۲} \times C_{۲}$ (که $K = G' \cap Z(G)$، و مرتبهٔ K برابر ۲ است). این گروهها عبارت‌اند از

$$G_{۷} = \langle a, b, z : a^{۴} = b^{۲} = z^{۲} = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}, az = za, bz = zb \rangle$$
$$\cong D_{۸} \times C_{۲}$$

$$G_{۸} = \langle a, b, z : a^{۴} = z^{۲} = ۱, a^{۲} = b^{۲}, b^{-۱}ab = a^{-۱}, az = za, bz = zb \rangle$$
$$\cong Q_{۸} \times C_{۲}$$

$$G_{۹} = \langle a, b, z : a^{۲} = b^{۲} = z^{۴} = ۱, b^{-۱}ab = az^{۲}, az = za, bz = zb \rangle$$

هرکدام از گروههای فوق دارای ده ردهٔ مزدوجی است که عبارت‌اند از

	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$	$C_۷$	$C_۸$	$C_۹$	$C_{۱۰}$
$G_۷, G_۸$	۱	$a^۲$	z	$a^۲z$	$a, a^۳$	$az, a^۳z$	$b, a^۲b$	$bz, a^۲bz$	$ab, a^۳b$	$abz, a^۳bz$
$G_۹$	۱	$z^۲$	z	$z^۳$	$a, az^۲$	$az, az^۳$	$b, bz^۲$	$bz, bz^۳$	$ab, abz^۲$	$abz, abz^۳$

داریم

$$K = \begin{cases} \langle a^۲ \rangle & \text{برای } G_۷ \text{ و } G_۸ \\ \langle z^۲ \rangle & \text{برای } G_۹ \end{cases}$$

و جدولهای سرشت $G_۷$ و $G_۸$ و $G_۹$ با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۶ به‌دست می‌آیند؛ این جدولها به‌صورت زیرند

رده	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$	$C_۷$	$C_۸$	$C_۹$	$C_{۱۰}$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۸	۸	۸	۸	۸	۸
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱
	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱	-۱
	۱	۱	-۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱
	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱
	۱	۱	-۱	-۱	۱	-۱	-۱	۱	-۱	۱
	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱	-۱	۱
	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱	-۱	۱	۱	-۱
	۲	-۲	α	β	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	۲	-۲	β	α	۰	۰	۰	۰	۰	۰

که

$$\alpha = ۲ = -\beta \qquad \text{برای } G_۷ \text{ و } G_۸$$

$$\alpha = ۲i = -\beta \qquad \text{برای } G_۹$$

۹.۲۶ تمام گروههای با مرتبهٔ کمتر از ۳۲

تا اینجا، درواقع جدول سرشت همهٔ گروههایی را که مرتبه‌شان ۳۱ یا کمتر از آن است پیدا کرده‌ایم. بجز گروههای آبلی و گروههای دووجهی که جدول سرشت آنها در قضیهٔ ۸.۹ مشخص شده یا در بخش ۳.۱۸ آمده است، فهرست سایر گروههای مذکور را با نشانی محل جدول سرشتشان در اینجا می‌آوریم

$\|G\|$	G	نشانی محل جدول سرشت
۸	Q_8	تمرین ۱.۱۷
۱۲	A_4	بخش ۲.۱۸
	T_{12}	تمرین ۳.۱۸
۱۶	$G_1, \cdots, G_9$	بخش ۸.۲۶
۱۸	$D_6 \times C_3$	قضیهٔ ۱۸.۱۹
	E	تمرین ۵.۲۵
۲۰	T_{20}	تمرین ۳.۱۸
	$F_{5,4}$	قضیهٔ ۱۰.۲۵
۲۱	$F_{7,3}$	قضیهٔ ۱۰.۲۵
۲۴	$D_{12} \times C_2, A_4 \times C_2, T_{12} \times C_2$	قضیهٔ ۱۸.۱۹
	$D_8 \times C_3, Q_8 \times C_3, D_6 \times C_4$	قضیهٔ ۱۸.۱۹
	S_4	بخش ۱.۱۸
	$\mathrm{SL}(2, 3)$	تمرین ۲.۲۷
	T_{24}	تمرین ۳.۱۸
	U_{24}	تمرین ۴.۱۸
	V_{24}	تمرین ۵.۱۸
۲۷	H_1, H_2	قضیهٔ ۶.۲۶
۲۸	T_{28}	تمرین ۳.۱۸
۳۰	$D_6 \times C_5, D_{10} \times C_3$	قضیهٔ ۱۸.۱۹

خلاصهٔ فصل ۲۶

در این فصل سرشتهای تحویل‌ناپذیر چند نوع pـگروه ناآبلی را به قرار زیر پیدا کردیم

۱. قضیهٔ ۴.۲۶: pـگروههایی که دارای زیرگروهی آبلی با شاخص p هستند.

۲. قضیهٔ ۶.۲۶: گروههایی که دارای مرتبهٔ p^3 هستند.
۳. بخش ۸.۲۶: گروههایی که دارای مرتبهٔ ۱۶ هستند.

تمرینات فصل ۲۶

۱. فرض کنیم که G گروهی با مرتبهٔ p^n (p اول و $n \geq 2$) است و زیرگروهی آبلی چون H با شاخص p دارد. نشان دهید که به‌ازای عدد صحیحی مانند $m \geq 2$، G دارای p^m سرشت خطی و $p^{n-2} - p^{m-2}$ سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ p است.

۲. گیریم H گروه مرتبهٔ ۲۷ زیر باشد

$$H = \langle a, b, z : a^3 = b^3 = z^3 = 1, az = za, bz = zb, b^{-1}ab = az\rangle$$

((۷.۲۶) را ببینید).

ردههای مزدوجی H را پیدا کنید، و با استفاده از قضیهٔ ۶.۲۶ جدول سرشت H را به‌دست آورید.

۳. فرض کنیم G گروه مرتبهٔ ۳۲ی زیر باشد

$$G = \langle a, b : a^{16} = 1, b^2 = a^8, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$$

با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۶، یا به طریقی دیگر، جدول سرشت G را پیدا کنید.

۴. فرض می‌کنیم A، B، C و D ماتریسهای 4×4 زیر باشند

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

قرار می‌دهیم $G = \langle A, B, C, D\rangle$ و $Z = -I$.

الف) ثابت کنید که ضرب هر مولد در مولدی دیگر به پیمانهٔ $\langle Z\rangle$ تعویض‌پذیر است و نتیجه بگیرید که $G' = \langle Z\rangle$.

ب) نشان دهید که به‌ازای هر g از G، $g^۲ \in \langle Z\rangle$ و نتیجه بگیرید که G ۲ـگروهی است که مرتبه‌اش حداکثر ۳۲ است.

ج) ثابت کنید که نمایش درجهٔ ۴ داده شدهٔ G تحویل‌ناپذیر است (راهنمایی: از نتیجهٔ ۳.۹ استفاده کنید).

د) نشان دهید که $|G| = ۳۲$، و تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر G را پیدا کنید.

۵. گیریم $G_۱$، ... ، $G_۹$ گروههای ناآبلی مرتبهٔ ۱۶ با نمایه‌های داده شده در این فصل باشند.

الف) نمایش تحویل‌ناپذیر صادق درجهٔ ۲ی $G_۱$، $G_۲$، $G_۳$ و $G_۹$ را پیدا کنید.

ب) چرا گروههای باقیمانده، یعنی $G_۵$، $G_۶$، $G_۷$ و $G_۸$ دارای نمایش تحویل‌ناپذیر صادق نیستند.

ج) نشان دهید که نمایشهای صادقی از $G_۵$ و $G_۶$ به‌صورت زیر مشخص می‌شوند

$$G_۵ : a \to \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} i & ۰ & ۰ \\ ۰ & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},$$

$$z \to \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$G_۶ : a \to \begin{pmatrix} i & ۰ & ۰ \\ ۰ & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & i \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},$$

$$z \to \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

د) نمایش صادق درجهٔ ۳ی $G_۷ \cong D_۸ \times C_۲$ و $G_۸ \cong Q_۸ \times C_۲$ را پیدا کنید. (توجه: این تمرین مؤید آن است که نمایه‌هایی که برای $G_۱$، ... ، $G_۹$ در این فصل ارائه شد واقعاً نشان‌دهندهٔ گروه مرتبهٔ ۱۶ هستند.)

۶. ثابت کنید که هیچ‌کدام از گروههای G_1، . . . ، G_9 با دیگری یکریخت نیست.

۷. فرض کنیم G گروه ناآبلی مرتبهٔ p^4 است.

الف) ثابت کنید که $|Z(G)| = (p$ یا $p^2)$، و اگر $|Z(G)| = p^2$ آنگاه G دارای $p^3 + p^2 - p$ ردهٔ مزدوجی است.

ب) ثابت کنید که $|G'| = (p$ یا $p^2)$، و اگر $|G'| = p^2$ آنگاه G دارای $2p^2 - 1$ ردهٔ مزدوجی است.

ج) نتیجه بگیرید که $|G' \cap Z(G)| = p$.

۸. الف) فرض کنید G گروه است. ثابت کنید $G/Z(G) \ncong Q_8$.

(راهنمایی: فرض کنید که

$$G/Z = \langle aZ, bZ : a^4 \in Z, a^2 \equiv b^2 (Z \text{ به پیمانهٔ }), b^{-1}ab \equiv a^{-1} (Z \text{ به پیمانهٔ }) \rangle$$

ثابت کنید ضرب a^2 در b تعویض‌پذیر است و لذا $a^2 \in Z$.)

ب) با استفاده از تمرین ۷ نتیجه بگیرید که اگر G گروه مرتبهٔ ۱۶ باشد آنگاه $G/(G' \cap Z(G)) \ncong Q_8$.

۲۷

جدول سرشت گروه سادهٔ مرتبهٔ ۱۶۸

یادآوری می‌کنیم که گروه ساده عبارت است از گروهی نابدیهی که تنها زیرگروههای نرمال آن $\{1\}$ و خود آن هستند. در فصل ۱ به‌طور خلاصه از اهمیت گروه ساده در نظریهٔ گروههای متناهی بحث کردیم. مثالهایی که از گروه ساده تا به‌حال دیده‌ایم عبارت‌اند از هر گروه دوری که مرتبه‌اش عددی اول باشد، و گروههای A_5 و A_6. درواقع گروه A_5، با مرتبهٔ ۶۰، کوچکترین گروه سادهٔ ناآبلی است. بعد از A_5 کوچکترین گروه ساده گروهی است که مرتبه‌اش ۱۶۸ است. در این فصل این گروه را مشخص می‌کنیم و جدول سرشت آن را پیدا می‌کنیم. این گروه به‌خانوادهٔ بزرگی از گروههای ساده تعلق دارد که ابتدا این خانواده را معرفی می‌کنیم.

گروه خطی خاص

گیریم p عدد اول است. یادآوری می‌کنیم که $\mathbb{Z}_p$ هیأتی متشکل از عناصر $0, \ldots, p-1$ با جمع و ضرب به پیمانهٔ p است. مجموعهٔ تمام ماتریسهای 2×2ای را که درایه‌هایشان در $\mathbb{Z}_p$ است و دترمینانشان برابر ۱ است با $\mathrm{SL}(2,p)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $\mathrm{SL}(2,p)$ با قاعدهٔ ضرب ماتریسی گروه است، و گروه خطی خاص دوبعدی روی $\mathbb{Z}_p$ نامیده می‌شود.

برای محاسبهٔ مرتبهٔ گروه $\mathrm{SL}(2,p)$، تعداد ماتریسهای زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{که } a,b,c,d \in \mathbb{Z}_p \text{ و } ad-bc=1)$$

اگر $c=0$ آنگاه تعداد سه‌تاییهای a و b و dای که در شرط $ad-bc=1$ صدق می‌کنند مساوی $p(p-1)$ است (زیرا a و b دلخواه هستند بجز اینکه $a\neq 0$، و d توسط a معین می‌شود)؛ و تعداد چهارتاییهای a و b و c و dای که در شرایط $c\neq 0$ و $ad-bc=1$ صدق می‌کنند برابر است با $p^2(p-1)$ (زیرا می‌توان a و d را به دلخواه انتخاب کرد، c هر عضو مخالف صفر $\mathbb{Z}_p$ است و b برحسب a و d و c معین می‌شود). بنابراین

$$\begin{aligned} |\mathrm{SL}(2,p)| &= p(p-1)+p^2(p-1) \\ &= p(p^2-1) \end{aligned}$$

اگر $p=2$ آنگاه مرتبهٔ $\mathrm{SL}(2,p)$ مساوی ۶ است، و به سادگی می‌توان نشان داد که این گروه با S_3 یکریخت است؛ لذا فرض می‌کنیم که p عدد اول فرد است. بنا به تمرین ۱.۲۷، مرکز $\mathrm{SL}(2,p)$ عبارت است از

$$Z=\{I,-I\}$$

(که I ماتریس همانی 2×2 است). گروه خارج‌قسمتی $\mathrm{SL}(2,p)/Z$ را گروه خطی خاص تصویری دوبعدی می‌نامیم و با $\mathrm{PSL}(2,p)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\mathrm{PSL}(2,p)=\mathrm{SL}(2,p)/\{\pm I\}$$

چون $|\mathrm{SL}(2,p)|=p(p^2-1)$ پس

$$|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p^2-1)/2$$

ثابت شده است که $\mathrm{PSL}(2,3)\cong A_4$، $\mathrm{PSL}(2,5)\cong A_5$، و به‌ازای $p\geq 5$، گروه $\mathrm{PSL}(2,p)$ ساده است (قضیهٔ ۱۹.۸ ازکتاب راتمن[1] را که مشخصاتش درکتابنامه آمده ببینید).

گروه سادهٔ $G=\mathrm{PSL}(2,7)$ دارای مرتبهٔ ۱۶۸ است، و ما جدول سرشت این گروه را به‌دست خواهیم آورد. بعد از یافتن رده‌های مزدوجی G، جدول سرشت را فقط با استفاده از محاسبات عددی، که عمدتاً روابط تعامد (قضیهٔ ۴.۱۶) و خواص همنهشتی (نتیجهٔ ۲۵.۲۲) هستند، پیدا خواهیم کرد. به این ترتیب کارایی این محاسبات به خوبی نشان داده می‌شود. در تمرینات راههای دیگری، با استفاده از اطلاعات مربوط به زیرگروهها، برای یافتن جدول سرشت G ذکر می‌کنیم.

1. J. J. Rotman

ردههای مزدوجی $\mathrm{PSL}(۲,۷)$

۱.۲۷ لم گروه $\mathrm{PSL}(۲,۷)$ دقیقاً دارای شش ردهٔ مزدوجی است. در جدول زیر g_i $(۱ \leq i \leq ۶)$، یعنی نمایندهٔ هر ردهٔ مزدوجی، مرتبهٔ g_i، مرتبهٔ $C_G(g_i)$ و اندازهٔ ردهٔ مزدوجیِ شامل g_i آمده است.

	مرتبهٔ g_i	$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$\lvert g_i^G\rvert$
$g_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} Z$	۱	۱۶۸	۱
$g_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} Z$	۲	۸	۲۱
$g_۳ = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix} Z$	۴	۴	۴۲
$g_۴ = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix} Z$	۳	۳	۵۶
$g_۵ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} Z$	۷	۷	۲۴
$g_۶ = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} Z$	۷	۷	۲۴

برهان ثابت میکنیم که هر یک از g_iها دارای مرتبهٔ مذکور در جدول فوق است، و سپس با استفاده از محاسبهٔ مستقیم، تمام عناصری از G را که ضربشان در هریک از g_iها تعویضپذیر است پیدا میکنیم. بهعنوان مثال $g_۴$ را در نظر میگیریم. فرض کنیم که ضرب

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Z$$

در $g_۴$ تعویض‌پذیر است. در این صورت

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

که از آن نتیجه می‌شود $b = c = ۰$. در نتیجه

$$C_G(g_۴) = \left\{\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}Z, \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix}Z, \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}Z\right\}$$

به همین نحو نتیجه می‌گیریم

$$C_G(g_۲) = \left\{MZ : M = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ -۲ & ۴ \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & -۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}\right\}$$

همچنین به‌ازای $i = ۳, ۵, ۶$، $C_G(g_i) = \langle g_i \rangle$.

بین عناصر $g_۱$، . . . ، $g_۶$، تنها عناصری که دارای مرتبه‌های مساوی‌اند عبارت‌اند از $g_۵$ و $g_۶$؛ لذا هیچ‌یک از این شش عنصر با دیگری مزدوج نیست، مگر احتمالاً $g_۵$ و $g_۶$. فرض کنیم که $g^{-۱}g_۶g = g_۵$ که

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}Z \in G$$

در این صورت $gg_۵ = g_۶g$ و لذا

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix} \text{ که } ad - bc = ۱$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $c = ۰$، $a \neq ۰$، $d = a^{-۱}$ و

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ ۰ & a^{-۱} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - a^{-۱} \\ ۰ & a^{-۱} \end{pmatrix}$$

بنابراین $a^۲ = -۱$، که به‌ازای $a \in \mathbb{Z}_۷$ غیرممکن است. لذا $g_۵$ با $g_۶$ مزدوج نیست و به این ترتیب ثابت می‌شود که هیچ‌یک از عناصر $g_۱$، . . . ، $g_۶$ با دیگری مزدوج نیست.

اندازهٔ ردهٔ مزدوجی g_i^G با تقسیم ۱۶۸ بر $|C_G(g_i)|$ حاصل می‌شود (قضیهٔ ۸.۱۲). چون

مجموع اندازهٔ شش ردهٔ مزدوجی، یعنی g_i^Gها ($۶ \leq i \leq ۱$)، مساوی ۱۶۸ است، لذا این رده‌ها تمامی رده‌های مزدوجی G هستند. ■

توجه کنید که با استفاده از لم ۱.۲۷، به سادگی می‌توان نشان داد که G درواقع ساده است، زیرا هر گروه نرمال اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی است (گزارهٔ ۱۹.۱۲ را ببینید).

۲.۲۷ نتیجه (۱) اگر $۴ \leq i \leq ۱$ و χ سرشت G باشد آنگاه $\chi(g_i)$ عدد صحیح است.
(۲) به‌ازای سرشتی مانند χ از G، $\chi(g_۵)$ غیرحقیقی است.

برهان (۱) طبق لم ۱.۲۷، به‌ازای $۴ \leq i \leq ۱$، در صورتی‌که مرتبه‌های g_i و $(g_i)^k$ مساوی باشند، g_i مزدوج $(g_i)^k$ است. از این‌رو با استفاده از قضیهٔ ۱۵.۲۲ حکم ثابت می‌شود.
(۲) با توجه به اینکه $g_۶ = g_۵^{-۱}$ نتیجه می‌گیریم که $g_۵$ مزدوج وارونش نیست. بنابراین با استفاده از نتیجهٔ ۶.۱۵، حکم (۲) ثابت می‌شود. ■

جدول سرشت $\mathbf{G = PSL(۲, ۷)}$

چون G دارای شش ردهٔ مزدوجی است پس دارای شش سرشت تحویل‌ناپذیر است. فرض کنیم $\chi_۱$، ... ، $\chi_۶$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند، که $\chi_۱$ سرشت بدیهی است (یعنی به‌ازای هر $g \in G$، $\chi_۱(g) = ۱$). یادآوری می‌کنیم که جدول سرشت عبارت‌است از ماتریسی ۶×۶ که درایهٔ ijاش $\chi_i(g_j)$ است.

در اینجا مرتباً از روابط تعامد ستونی، قضیهٔ ۴.۱۶(۲)، و خواص همنهشتی مذکور در نتیجه‌های ۲۵.۲۲ و ۲۶.۲۲ برای عناصر $g_۲$، $g_۳$، $g_۴$ استفاده می‌کنیم، توجه کنید که نتیجه‌های ۲۵.۲۲ و ۲۶.۲۲ را از آن‌رو می‌توانیم در مورد این عناصر به‌کار بریم که مقدار سرشتها به‌ازای آنها اعداد صحیح‌اند (بنابه ۲.۲۷).

درایه‌های ستون $g_۴$ اعداد صحیح‌اند، و مجموع مربعات این اعداد صحیح مساوی $|C_G(g_۴)| = ۳$ است. بنابراین این درایه‌ها صرف‌نظر از ترتیبشان باید ۱، ۱±، ۱±، ۰، ۰، ۰ باشند. (می‌دانیم که درایهٔ اولین سطر مساوی $\chi_۱(g_۴) = ۱$ است.)

به‌همین نحو نتیجه می‌گیریم که درایه‌های ستون $g_۳$ صرف‌نظر از ترتیبشان عبارت‌اند از ۱، ۱±، ۱±، ۱±، ۰، ۰، و درایه‌های ستون $g_۲$ صرف‌نظر از ترتیبشان عبارت‌اند از ۱، ۱±، ۱±، ۱±، ۲±، ۰. اکنون بنا به نتیجهٔ ۲۶.۲۲، در مورد هر سرشت χ از G داریم

$$\chi(g_۲) \equiv \chi(۱) \text{(به پیمانهٔ ۲)}$$

$$\chi(g_۳) \equiv \chi(۱) \text{(به پیمانهٔ ۲)}$$

و لذا

$$\chi(g_۲) \equiv \chi(g_۳)(\text{به پیمانهٔ ۲})$$

همچنین داریم

$$\sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۳)\chi_i(g_۴) = ۰$$

لذا با انتخاب ترتیب مناسبی برای $\chi_۲$، . . . ، $\chi_۶$، قسمتی از جدول سرشت G را به‌دست می‌آوریم؛ این قسمت به‌صورت زیر است

نمایندهٔ رده	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
مرتبهٔ مرکزساز	۸	۴	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	±۱	±۱	±۱
$\chi_۳$	۰	۰	±۱
$\chi_۴$	±۱	±۱	۰
$\chi_۵$	±۱	±۱	۰
$\chi_۶$	±۲	۰	۰

علامتها را بعداً تعیین خواهیم کرد. فعلاً به درایه‌های ستون اول جدول سرشت توجه می‌کنیم (یعنی درجات $(\chi_i(۱))$. قرار می‌دهیم $d_i = \chi_i(۱)$، لذا d_i درایهٔ سطر iام از ستون اول است. بنا به نتیجهٔ ۲۶.۲۲، قضیهٔ ۱۱.۲۲ و همچنین این رابطه که $\sum_{i=۱}^{۶} d_i^۲ = ۱۶۸$، داریم

$$d_۴ \equiv ۰(\text{به پیمانهٔ ۳})$$

$$d_۴ \equiv ۱(\text{به پیمانهٔ ۲})$$

$d_۴$ عدد $|G| = ۱۶۸$ را عاد می‌کند

$$d_۴^۲ \leq ۱۶۸$$

تنها عدد صحیح $d_۴$ای که در شرایط فوق صدق می‌کند عبارت است از $d_۴ = ۳$. به همین طریق نتیجه می‌گیریم $d_۵ = ۳$.

اکنون داریم

$$d_۶ \equiv ۰ (\text{به پیمانهٔ } ۳)$$

$$d_۶ \equiv ۰ (\text{به پیمانهٔ } ۲)$$

$d_۶$ عدد ۱۶۸ را عاد می‌کند

$$d_۶^۲ \leq ۱۶۸$$

بنابراین $d_۶$ مساوی ۶ یا ۱۲ است. اما

$$۰ = \sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۲) d_i = ۱ \pm d_۲ \pm ۳ \pm ۳ \pm ۲d_۶$$

که چون $d_۲^۲ \leq ۱۶۸$، باید داشته باشیم $d_۶ \neq ۱۲$ و لذا $d_۶ = ۶$.

اکنون چون

$$۱ + d_۲^۲ + d_۳^۲ + ۳^۲ + ۳^۲ + ۶^۲ = ۱۶۸$$

پس $d_۲^۲ + d_۳^۲ = ۱۱۳$. تنها جواب معادلهٔ اخیر برای اعداد صحیح مثبت $d_۲$ و $d_۳$ این است که یکی از این اعداد ۷ و یکی ۸ باشد. چون $d_۲ \equiv ۱ (\text{به پیمانهٔ } ۲)$ پس $d_۲ = ۷$ و $d_۳ = ۸$.

تا اینجا ستون اول جدول سرشت را پیدا کرده‌ایم و قسمت زیر از جدول سرشت را در دست داریم

نمایندهٔ رده	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶۸	۸	۴	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۷	± ۱	± ۱	± ۱
$\chi_۳$	۸	۰	۰	± ۱
$\chi_۴$	۳	± ۱	± ۱	۰
$\chi_۵$	۳	± ۱	± ۱	۰
$\chi_۶$	۶	± ۲	۰	۰

با استفاده از روابط

$$\sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۱)\chi_i(g_j) = ۰ \qquad j = ۲,۳,۴ \text{ به‌ازای}$$

می‌توانیم علامتها را در ستونهای مربوط به $g_۲$ و $g_۳$ و $g_۴$ پیدا کنیم. داریم

نمایندهٔ رده	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶۸	۸	۴	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۷	-۱	-۱	۱
$\chi_۳$	۸	۰	۰	-۱
$\chi_۴$	۳	-۱	۱	۰
$\chi_۵$	۳	-۱	۱	۰
$\chi_۶$	۶	۲	۰	۰

حال از رابطهٔ

$$\begin{aligned} ۱ = \langle \chi_۲, \chi_۲ \rangle &= \sum_{i=۱}^{۶} \frac{\chi_۲(g_i)\overline{\chi_۲(g_i)}}{|C_G(g_i)|} \\ &= \frac{۷ \times ۷}{۱۶۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} + \frac{\chi_۲(g_۵)\overline{\chi_۲(g_۵)}}{۷} + \frac{\chi_۲(g_۶)\overline{\chi_۲(g_۶)}}{۷} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم $\chi_۲(g_۵) = \chi_۲(g_۶) = ۰$. (توجه کنید که (به پیمانهٔ ۷) $\chi_۲(g_۵) \equiv \chi_۲(۱)$، اما نمی‌توانستیم از این رابطه استفاده کنیم زیرا مطمئن نبودیم که $\chi_۲(g_۵)$ عدد صحیح است.) همچنین به‌ازای $j = ۵, ۶$ داریم

$$۰ = \sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۴)\chi_i(g_j) = ۱ - \chi_۳(g_j)$$

لذا $\chi_۳(g_۵) = \chi_۳(g_۶) = ۱$.

بنابه نتیجهٔ ۲.۲۷، سرشت تحویل‌ناپذیری چون χ از G وجود دارد به‌قسمی که $\chi(g_۵)$ غیرحقیقی است. مزدوج مختلط این سرشت یعنی $\overline{\chi}$ سرشت دیگری است که درجه‌اش مساوی درجهٔ χ است. از این‌رو $\chi_۴$ و $\chi_۵$ (که تنها سرشتهای تحویل‌ناپذیر با درجات مساوی‌اند) باید مزدوج مختلط هم باشند. گیریم $z = \overline{\chi_۵(g_۵)} = \chi_۴(g_۵)$ و $t = \chi_۶(g_۵)$. بنابراین ستون مربوط به $g_۵$ چنین است

نمایندهٔ رده	$g_۵$
مرتبهٔ مرکزساز	۷
$\chi_۱$	۱
$\chi_۲$	۰
$\chi_۳$	۱
$\chi_۴$	z
$\chi_۵$	$\overline{z}$
$\chi_۶$	t

اکنون داریم

$$۰ = \sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۲)\chi_i(g_۵) = ۱ - z - \overline{z} + ۲t$$

$$۰ = \sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۳)\chi_i(g_۵) = ۱ + z + \overline{z}$$

$$۷ = \sum_{i=۱}^{۶} \chi_i(g_۵)\overline{\chi_i(g_۵)} = ۲ + ۲z\overline{z} + t\overline{t}$$

با حل معادلات فوق حاصل می‌شود

$$t = -۱, \qquad z = (-۱ \pm i\sqrt{۷})/۲$$

چون $g_۶ = g_۵^{-۱}$، در مورد هر سرشت χ از G داریم $\chi(g_۶) = \overline{\chi(g_۵)}$.
اکنون جدول سرشت $G = \mathrm{PSL}(۲, ۷)$ را کاملاً معین کرده‌ایم، که عبارت‌است از

جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲, ۷)$

نمایندهٔ رده	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$
مرتبهٔ مرکزساز	۱۶۸	۸	۴	۳	۷	۷
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۷	-۱	-۱	۱	۰	۰
$\chi_۳$	۸	۰	۰	-۱	۱	۱
$\chi_۴$	۳	-۱	۱	۰	α	$\overline{\alpha}$
$\chi_۵$	۳	-۱	۱	۰	$\overline{\alpha}$	α
$\chi_۶$	۶	۲	۰	۰	-۱	-۱

که $\alpha = (-۱ + i\sqrt{۷})/۲$.

ثابت شده که پنج گروه سادهٔ ناآبلی با مرتبهٔ کمتر از ۱۰۰۰ وجود دارد. جدول سرشت چهارتا از این گروهها را به‌دست آورده‌ایم:

نشانی محل جدول سرشت	مرتبهٔ گروه	G
مثال ۱۳.۲۰	۶۰	$A_۵$
این فصل	۱۶۸	$\mathrm{PSL}(۲, ۷)$
تمرین ۲.۲۰	۳۶۰	$A_۶$
تمرین ۶.۲۷	۶۶۰	$\mathrm{PSL}(۲, ۱۱)$

خلاصهٔ فصل ۲۷

.۱

$$\mathrm{SL}(۲,p)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{Z}_p,\ ad-bc=۱\right\}$$
$$|\mathrm{SL}(۲,p)|=p(p^۲-۱)$$

.۲

$$\mathrm{PSL}(۲,p)=\mathrm{SL}(۲,p)/\{\pm I\}$$
$$|\mathrm{PSL}(۲,p)|=p(p^۲-۱)/۲ \qquad (\text{فرد } p)$$

۳. جدول سرشت گروه $\mathrm{PSL}(۲,۷)$ را، که گروه ساده‌ای با مرتبهٔ ۱۶۸ است، به‌دست آوردیم.

تمرینات فصل ۲۷

۱. ثابت کنید که $Z(\mathrm{SL}(۲,p))=\{\pm I\}$.

۲. جدول سرشت $\mathrm{SL}(۲,۳)$ را پیدا کنید.

۳. از جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲,۷)$ مستقیماً نتیجه بگیرید که این گروه ساده است.

۴. در این تمرین روش دیگری برای یافتن جدول سرشت $G=\mathrm{PSL}(۲,۷)$ ارائه می‌دهیم، مشروط بر اینکه رده‌های مزدوجی G همان رده‌های مذکور در لم ۱.۲۷ باشند.

الف) زیرگروه T از G با مرتبهٔ ۲۱ را چنین تعریف می‌کنیم

$$T=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ ۰ & a^{-۱}\end{pmatrix}Z : a\in\mathbb{Z}_۷^*, b\in\mathbb{Z}_۷\right\}$$

(که $Z=\{\pm I\}$). مقادیر سرشت فرابری $(۱_T)\uparrow G$ را محاسبه کرده نشان دهید که

$$(۱_T)\uparrow G=۱_G+\chi$$

که در آن χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است.

ب) گیریم λ سرشت خطی غیربدیهی T است. مقادیر $\lambda\uparrow G$ را محاسبه کرده نشان دهید که $\lambda\uparrow G$ سرشت تحویل‌ناپذیر G است.

ج) با در نظر گرفتن χ_S (گزارهٔ ۱۴.۱۹ را ببینید) سرشت تحویل‌ناپذیری از G با درجهٔ ۶ به‌دست آورید.

د) بنابه (الف) و (ب) و (ج) سرشتهای تحویل‌ناپذیر G با درجات ۱، ۷، ۸ و ۶ را می‌دانیم. با استفاده از روابط تعامد، جدول سرشت G را کامل کنید.

۵. جدول سرشت $\mathrm{SL}(۲,۷)$. گیریم G گروه $\mathrm{SL}(۲,۷)$، یعنی گروه تمام ماتریسهای ۲×۲ با دترمینان ۱ و با درایه‌های متعلق به هیأت $\mathbb{Z}_۷$ باشد.

الف) نشان دهید که G دارای ۱۱ ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های g_i به‌صورت زیر است

g_i	مرتبهٔ g_i	$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$\lvert g_i^G\rvert$
$g_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$	۱	۳۳۶	۱
$g_۲ = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$	۲	۳۳۶	۱
$g_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$	۴	۸	۴۲
$g_۴ = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$	۸	۸	۴۲
$g_۵ = \begin{pmatrix} -۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{pmatrix}$	۸	۸	۴۲
$g_۶ = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix}$	۳	۶	۵۶
$g_۷ = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{pmatrix}$	۶	۶	۵۶
$g_۸ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$	۷	۱۴	۲۴
$g_۹ = \begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$	۱۴	۱۴	۲۴
$g_{۱۰} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$	۷	۱۴	۲۴
$g_{۱۱} = \begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$	۱۴	۱۴	۲۴

ب) با استفاده از جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲,۷)$ شش سرشت تحویل‌ناپذیر G را که هستهٔ آنها شامل $Z=\{\pm I\}$ است به‌دست آورید.

ج) گیریم $\chi_۷$، $\chi_۸$، $\chi_۹$، $\chi_{۱۰}$، $\chi_{۱۱}$ سایر سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند. نشان دهید که به‌ازای هر j، که $۷ \le j \le ۱۱$، و هر $g\in G$، داریم $\chi_j(-g) = -\chi_j(g)$.

د) ثابت کنید که به‌ازای $۷ \le j \le ۱۱$، $\chi_j(g_۳)=۰$ و نتیجه بگیرید که $\chi_j(۱)$ زوج است.

ه) با در نظرگرفتن ستون مربوط به $g_۶$ در جدول سرشت، و همنهشتیهای به پیمانهٔ ۳، نشان دهید که درجات $\chi_۷$، ...، $\chi_{۱۱}$ عبارت‌اند از ۴، ۴، ۶، ۶، ۸ و مقدار $\chi_j(g_۶)$ را به‌ازای هر $۷ \le j \le ۱۱$ پیدا کنید.

و) گیریم ψ یکی از سرشتهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۴ است. با در نظرگرفتن مقادیر ψ_A به‌ازای $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$ و $g_۶$ (گزارهٔ ۱۴.۱۹ را ببینید)، ثابت کنید که ψ_A مساوی سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۶ گروه G است که هسته‌اش Z را دربردارد. مقادیر سرشتهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۴ را به‌ازای هر g_i به‌دست آورید.

ز) جدول سرشت G را کامل کنید.

۶. جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲,۱۱)$. قرار می‌دهیم $G=\mathrm{PSL}(۲,۱۱)$. این گروه دارای هشت ردهٔ مزدوجی با نماینده‌های $g_۱$، ...، $g_۸$ است. مرتبهٔ g_iها و مرتبهٔ مرکزسازها عبارت است از

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$	$g_۸$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۳	۶	۵	۵	۱۱	۱۱
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۶۶۰	۱۲	۶	۶	۵	۵	۱۱	۱۱

همچنین عناصر $g_۵^{-۱}$، $g_۶^{-۱}$، $g_۷^{-۱}$، $g_۸^{-۱}$ به ترتیب با عناصر $g_۵$، $g_۶$، $g_۸$، $g_۷$ مزدوج‌اند. جدول سرشت G را پیدا کنید.

۲۸

کاربردی در نظریهٔ گروهها

به طرق متعدد می‌توان از جدول سرشت گروه برای به‌دست آوردن اطلاعاتی دربارهٔ ساختار گروه استفاده کرد. مثالهایی که تا به‌حال به آنها برخورده‌ایم ـــ مانند پیدا کردن مرکز گروه، دانستن اینکه گروه ساده است یا نه، و غیره‌ـــ مستلزم کمی محاسبه است. اکنون می‌خواهیم کاربرد عمیقتری را ارائه دهیم که ابتدا متضمن محاسباتی با درایه‌های جدول سرشت برای یافتن اعدادی به‌نام ثابتهای رده‌ای جبر است. این ثابتها حاوی اطلاعاتی دربارهٔ ضرب عناصر G هستند، و از آنها می‌توان برای بررسی ساختار زیرگروههای G، همان‌طور که نشان خواهیم داد، استفاده کرد.

ثابتهای رده‌ای جبر

گیریم G گروه متناهی و C_1، ... ، C_l رده‌های مزدوجی متمایز G است. یادآوری می‌کنیم که طبق گزارهٔ ۲۲.۱۲ مجموعهای رده‌ای $\overline{C_1}$، ... ، $\overline{C_l}$ پایه‌ای برای مرکز گروه‌جبر $\mathbb{C}G$ تشکیل می‌دهند (که $\overline{C_i} = \sum_{g\in C_i} g$).

۱.۲۸ گزاره اعداد صحیح نامنفی a_{ijk} وجود دارند به‌قسمی که به‌ازای $1 \le i \le l$ و $1 \le j \le l$ داریم

$$\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum_{k=1}^{l} a_{ijk}\overline{C}_k$$

برهان به‌ازای $g \in C_k$ ضریب g در حاصلضرب $\overline{C}_i\overline{C}_j$ مساوی است با تعداد زوجهای (a, b)ای که در آنها $a \in C_i$، $b \in C_j$ و $ab = g$. این عدد عددی صحیح و نامنفی است و مستقل از عنصر انتخاب‌شدهٔ g از C_k است. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

راه دیگر اثبات گزارهٔ ۱.۲۸ این است که توجه کنیم که $\overline{C}_i\overline{C}_j$ متعلق به $Z(\mathbb{C}G)$ است، و لذا باید ترکیب خطی $\overline{C}_1$، ... ، $\overline{C}_l$ باشد.

۲.۲۸ تعریف اعداد صحیح a_{ijk} در فرمول

$$\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum_{k=1}^{l} a_{ijk}\overline{C}_k$$

ثابتهای رده‌ای جبر G نامیده می‌شوند.

بنا به این تعریف، اعداد a_{ijk} حاوی اطلاعاتی دربارهٔ ضرب عناصر G است:

۳.۲۸ به‌ازای هر $g \in C_k$ و هر i و j داریم

a_{ijk} برابر است با تعداد زوجهای (a, b)ای که در آنها $a \in C_i$، $b \in C_j$ و $ab = g$

همچنین ثابتهای a_{ijk} حاصلضرب هر دو عنصری از مرکز گروه‌جبر، $Z(\mathbb{C}G)$، را معین می‌کنند، زیرا $\overline{C}_1$، ... ، $\overline{C}_l$ پایهٔ $Z(\mathbb{C}G)$ است. چون مرکز گروه‌جبر نقش مهمی در نظریهٔ نمایشها بازی می‌کند، ممکن است حدس زده باشید که ثابتهای رده‌ای جبر به‌وسیلهٔ جدول سرشت G معین می‌شوند. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که این حدس واقعاً درست است.

۴.۲۸ قضیه گیریم به‌ازای $1 \leq i \leq l$، $g_i \in C_i$. در این صورت به‌ازای هر i و j و k داریم

$$a_{ijk} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$

که جمع فوق روی تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G انجام می‌شود.

برهان گیریم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G، و U $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است. در این صورت طبق لم ۷.۲۲، به‌ازای هر $u \in U$ داریم

$$u\overline{C}_i = \frac{|G|\chi(g_i)}{|C_G(g_i)|\chi(1)}u$$

بنابراین

$$u\overline{C}_i\overline{C}_j = \frac{|G|^2}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)}{(\chi(1))^2}u$$

و

$$\sum_{m=1}^{l} a_{ijm}u\overline{C}_m = \sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\frac{|G|\chi(g_m)}{|C_G(g_m)|\chi(1)}u$$

چون $\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum_m a_{ijm}\overline{C}_m$، نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\frac{\chi(g_m)}{|C_G(g_m)|} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)}{\chi(1)} \tag{۵.۲۸}$$

k را با شرط $1 \leq k \leq l$ انتخاب می‌کنیم. طرفین تساوی (۵.۲۸) را در $\overline{\chi(g_k)}$ ضرب می‌کنیم و سپس در طرفین روی تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر χ از G عمل جمع انجام می‌دهیم، در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{m=1}^{l} a_{ijm}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_m)\overline{\chi(g_k)}}{|C_G(g_m)|} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$

بنا به روابط تعامد ستونی، یعنی قضیهٔ ۴.۱۶(۲)، نتیجه می‌گیریم

$$a_{ijk} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_{\chi}\frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)} \qquad \blacksquare$$

دو مثال

۶.۲۸ مثال در این مثال برای اثبات چند حکم دربارهٔ عناصر و زیرگروههای گروه متقارن S_4، از ثابتهای ردهٔ جبر استفاده خواهیم کرد؛ این احکام را مستقیماً هم می‌توان ثابت کرد، ولی اثبات آنها به روش فوق مثال مفیدی برای نمایش این روش است.

جدول سرشت $S_۴$

ردهٔ C_i	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$
g_i	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\|C_G(g_i)\|$	۲۴	۴	۳	۸	۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	−۱	۱	۱	−۱
$\chi_۳$	۲	۰	−۱	۲	۰
$\chi_۴$	۳	۱	۰	−۱	−۱
$\chi_۵$	۳	−۱	۰	−۱	۱

(۱) با استفاده از قضیهٔ ۴.۲۸ ثابت رده‌ای $a_{۵۵۵}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{۵۵۵} = \frac{۲۴}{۴ \times ۴}\left(\frac{۱}{۱} + \frac{-۱}{۱} + \frac{۰}{۲} + \frac{-۱}{۳} + \frac{۱}{۳}\right) = ۰$$

از این‌رو، طبق ۳.۲۸، $S_۴$ دارای عناصری با مرتبهٔ چهار چون a و b که حاصلضربشان ab نیز دارای مرتبهٔ ۴ باشد نیست. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $S_۴$ دارای زیرگروهی یکریخت با گروه چهارگانی $Q_۸$ نیست، زیرا $Q_۸$ دارای دو عنصر مرتبهٔ ۴ است که حاصلضربشان نیز دارای مرتبهٔ ۴ است.

(۲) طبق قضیهٔ ۴.۲۸ داریم

$$a_{۲۴۵} = \frac{۲۴}{۴ \times ۸}\left(۱ + ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}\right) = ۲$$

از این‌رو $S_۴$ دارای عناصری با مرتبهٔ دو چون a و b است که حاصلضربشان ab دارای مرتبهٔ چهار است. قرار می‌دهیم $x = ab$، داریم

$$a^{-۱}xa = ba = (ab)^{-۱} = x^{-۱} \quad \text{و} \quad x^۴ = ۱$$

لذا $\langle a, b\rangle \cong D_۸$. نتیجه می‌گیریم که $S_۴$ دارای زیرگروهی یکریخت با $D_۸$ است (این موضوع را قبلاً در تمرین ۱.۱۸ دیده‌ایم).

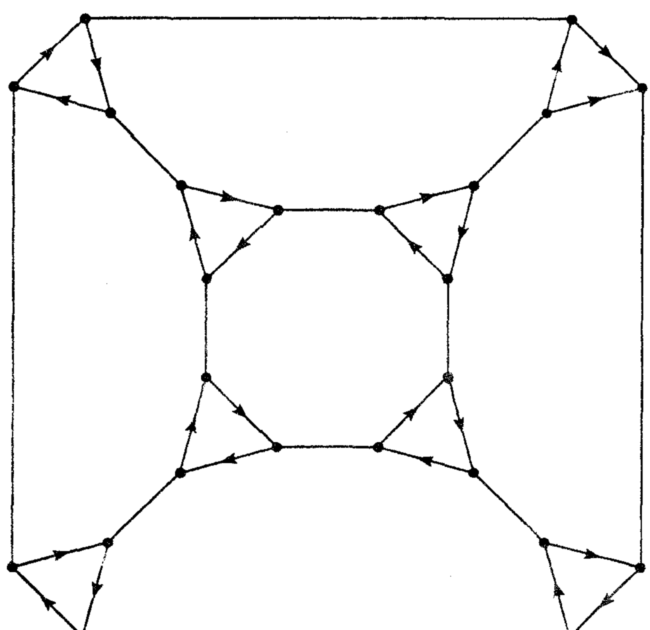
(۳) بالاخره توجه کنید که

$$a_{۲۳۵} = \frac{۲۴}{۴ \times ۳}(۱ + ۱) = ۴$$

بنابراین $S_۴$ دارای عنصری چون a با مرتبهٔ ۲ و عنصری چون b با مرتبهٔ ۳ است به‌طوری که ab دارای ـ ۀ ۴ است. درواقع، می‌توان نشان داد که $S_۴$ دارای نمایهٔ زیر است

$$S_۴ = \langle a, b : a^۲ = b^۳ = (ab)^۴ = ۱\rangle$$

به بیان دیگر، $S_۴$ توسط a و b تولید می‌شود، و حاصلضرب هر دو عنصری از $S_۴$ با روابط نمایهٔ فوق معین می‌شود. اثبات این حکم را در حل تمرین ۶.۲۸ می‌آوریم. در ضمن خوب است ارتباط شکل زیر را با موضوع فوق پیدا کنید.



۷.۲۸ مثال از قضیهٔ ۴.۲۸ استفاده کرده زیرگروهی چون H از گروه سادهٔ $\mathrm{PSL}(۲, ۷)$ را که با $S_۴$ یکریخت باشد پیدا می‌کنیم. واضح نیست که چنین زیرگروهی وجود داشته باشد، و ساختن مستقیم آن هم ابتکار زیادی لازم دارد.

در فصل ۲۷ ثابت کردیم که جدول سرشت $G = \mathrm{PSL}(۲, ۷)$ چنین است:

جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲,۷)$

نمایندهٔ ردهٔ g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۴	۳	۷	۷
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۱۶۸	۸	۴	۳	۷	۷
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۷	-۱	-۱	۱	۰	۰
$\chi_۳$	۸	۰	۰	-۱	۱	۱
$\chi_۴$	۳	-۱	۱	۰	α	$\overline{\alpha}$
$\chi_۵$	۳	-۱	۱	۰	$\overline{\alpha}$	α
$\chi_۶$	۶	۲	۰	۰	-۱	-۱

که $\alpha = (-۱ + i\sqrt{۷})/۲$

$a_{۲۴۳}$ را که از ثابتهای ردهای جبر است محاسبه می‌کنیم. طبق قضیهٔ ۴.۲۸ داریم

$$a_{۲۴۳} = \frac{۱۶۸}{۸ \times ۳}\left(۱ + \frac{۱}{۷} + ۰ + ۰ + ۰ + ۰\right) = ۸$$

از این‌رو، بنابه ۳.۲۸، G دارای عناصر x و y است به‌طوری که مرتبهٔ x مساوی ۲، مرتبهٔ y مساوی ۳ و مرتبهٔ xy مساوی ۴ است. گیریم H زیرگروه $\langle x, y\rangle$ از G باشد. در مثال ۶.۲۸ دیدیم که

$$S_۴ = \langle a, b : a^۲ = b^۳ = (ab)^۴ = ۱\rangle$$

بنابراین همریختیی چون ϕ از $S_۴$ به H وجود دارد که پوشاست (ϕ عنصر a را به x و عنصر b را به y می‌برد). طبق قضیهٔ ۱۰.۱، $S_۴/\mathrm{Ker}\phi \cong H$. اما چون $\mathrm{Ker}\phi$ زیرگروه نرمال $S_۴$ است پس مساوی یکی از زیرگروههای $\{۱\}$، $V_۴$، $A_۴$ یا $S_۴$ است (تمرین ۲۰.۱۲ را ببینید)، لذا H با یکی از گروههای $S_۴$، $S_۳$، $C_۲$ یا $\{۱\}$ یکریخت است. چون H دارای عنصری با مرتبهٔ ۴، یعنی xy، است نتیجه می‌گیریم که

$$H \cong S_۴$$

بنابراین نشان داده‌ایم که $\mathrm{PSL}(۲,۷)$ دارای زیرگروهی یکریخت با $S_۴$ است.

خلاصهٔ فصل ۲۸

۱. a_{ijk}ها، یعنی ثابتهای ردهای جبر با فرمول زیر مشخص می‌شوند

$$\overline{C}_i\overline{C}_j = \sum_k a_{ijk}\overline{C}_k$$

می‌توان آنها را از روی جدول سرشت و با استفاده از فرمول زیر محاسبه کرد

$$a_{ijk} = \frac{|G|}{|C_G(g_i)||C_G(g_j)|}\sum_\chi \frac{\chi(g_i)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$

۲. اگر گروههای G و H داده شده باشند، گاهی می‌توان از ثابتهای ردهای جبر G در تعیین اینکه G دارای زیرگروهی یکریخت با H است یا نه استفاده کرد.

تمرینات فصل ۲۸

۱. از جدول سرشت $\mathrm{PSL}(2,7)$ که در آخر فصل ۲۷ داده شده است استفاده کرده ثابت کنید که $\mathrm{PSL}(2,7)$ دارای عناصری چون a و b است به‌طوری که a دارای مرتبهٔ ۲، b دارای مرتبهٔ ۳ و ab دارای مرتبهٔ ۷ است.

۲. آیا $\mathrm{PSL}(2,7)$ زیرگروهی که با D_{14} یکریخت باشد دارد؟

(راهنمایی: $D_{14} = \langle a,b : a^2 = b^2 = 1, (ab)^7 = 1\rangle$)

در سه تمرین زیر می‌توانید فرض کنید که A_5 گروهی ساده با نمایهٔ زیر است

$$A_5 = \langle a,b : a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1\rangle$$

۳. جدول سرشت $\mathrm{PSL}(2,11)$ در حل تمرین ۶.۲۷ داده شده است. آیا $\mathrm{PSL}(2,11)$ زیرگروهی که با A_5 یکریخت باشد دارد؟

۴. ثابت کنید که A_5 با جدول سرشت خود مشخص می‌شود، یعنی اگر G گروهی با همان جدول سرشت A_5 باشد (مثال ۱۳.۲۰ را ببینید) آنگاه $G \cong A_5$.

۵. فرض کنید که G گروهی است با جدول سرشتی که در صفحهٔ بعد آمده است.

الف) ثابت کنید که G گروهی سادهٔ با مرتبهٔ ۳۶۰ است.

ب) با استفاده از قضیهٔ فروبنیوس-شور کران بالایی برای تعداد برگردانهای G پیدا کنید، و نتیجه بگیرید که g_2 دارای مرتبهٔ ۲ و g_3 دارای مرتبهٔ ۴ است.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۵	۱	۱−	۲	۱−	۰	۰
χ_3	۵	۱	۱−	۱−	۲	۰	۰
χ_4	۸	۰	۰	۱−	۱−	α	β
χ_5	۸	۰	۰	۱−	۱−	β	α
χ_6	۹	۱	۱	۰	۰	۱−	۱−
χ_7	۱۰	۲−	۰	۱	۱	۰	۰

که $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ و $\beta = (1-\sqrt{5})/2$.

ج) ثابت کنید که G زیرگروهی چون H دارد که با A_5 یکریخت است.

د) مشاهده می‌شود که $|G:H| = 6$، فرض کنیم S گروه تمام جایگشتهای شش هم‌مجموعهٔ راست H در G باشد، یعنی $S \cong S_6$. نشان دهید که $\rho : G \to S$ با ضابطهٔ زیر همریختی است

$$g\rho : Hx \to Hxg$$

که $g \in G$ و Hx هم‌مجموعهٔ راست H در G است و $x \in G$.

ه) نتیجه بگیرید که $G \cong A_6$.

۶. با استفاده از شکلی که در مثال ۶.۲۸(۳) آمده است نشان دهید که مرتبهٔ هر گروه G که با دو عنصر a و b با ویژگی

$$a^2 = b^3 = (ab)^4 = 1$$

تولید شود حداکثر ۲۴ است.

۲۹

قضیهٔ برنساید

یکی از معروفترین کاربردهای نظریهٔ نمایشها قضیهٔ برنساید است، که طبق آن اگر p و q اعداد اول و a و b اعداد صحیح مثبت باشند آنگاه هیچ گروهی با مرتبهٔ p^aq^b ساده نیست. برنساید در چاپ اول کتاب خود تحت عنوان نظریهٔ گروههای متناهی‌مرتبه (۱۸۹۷)، با استفاده از نظریهٔ گروهها قضیه را برای خیلی از حالات خاص a و b ثابت کرد، ولی پس از مطالعهٔ نظریهٔ فروبنیوس، یعنی نظریهٔ جدید نمایش گروهها توانست قضیه را در حالت کلی ثابت کند. درواقع، کوششهای بعدی برای یافتن اثباتی بدون استفاده از نظریهٔ نمایشها ناموفق ماند تا اینکه در سال ۱۹۷۲ بندر[1] چنین اثباتی را یافت.

لم مقدماتی

با لم ۲.۲۹ که مربوط به مقادیر سرشت است، زمینهٔ اثبات قضیهٔ برنساید را آماده می‌سازیم. برای اثبات این لم نیاز به چند حکم اساسی دربارهٔ اعداد صحیح جبری و اعداد جبری داریم که اکنون آنها را بیان می‌کنیم ولی اثبات نمی‌کنیم؛ برای دیدن اثبات آنها، به‌عنوان مثال، کتاب پولرد[2] و دایمند[3] را که مشخصاتشان در کتابنامه آمده ببینید.

1. H. Bender 2. Pollard 3. Diamond

عدد جبری عبارت‌است از عدد مختلطی که ریشهٔ چندجمله‌ای مخالف صفری روی $\mathbb{Q}$ باشد. چندجمله‌ای با متغیر x را تکین نامیم هرگاه ضریب بزرگترین توان x مساوی ۱ باشد.
فرض کنیم α عدد جبری است و چندجمله‌ای $p(x)$ در میان چندجمله‌ایهای تکین روی $\mathbb{Q}$ با ریشهٔ α کمترین درجه را دارد. در این صورت $p(x)$ منحصر به فرد و تحویل‌ناپذیر است؛ این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مینیمال α و ریشه‌هایش را مزدوجهای α می‌نامیم.
به‌عنوان مثال، اگر ω ریشهٔ nام واحد باشد آنگاه چندجمله‌ای مینیمال ω دوجمله‌ای $x^n - ۱$ را می‌شمارد، و لذا هر مزدوج ω نیز ریشهٔ nام واحد است.
اگر α عدد صحیح جبری باشد، ریشهٔ چندجمله‌ای تکینی با ضرایب صحیح است (فصل ۲۲ را ببینید)؛ ثابت شده که چندجمله‌ای مینیمال α نیز دارای ضرایب صحیح است.
به حکم زیر دربارهٔ مزدوجها نیاز خواهیم داشت

۱.۲۹ گیریم α و β اعداد صحیح جبری‌اند. در این صورت هر مزدوج $\alpha + \beta$ به‌صورت $\alpha' + \beta'$ است که α' مزدوج α و β' مزدوج β است. به‌علاوه، اگر $r \in \mathbb{Q}$، هر مزدوج $r\alpha$ به‌صورت $r\alpha'$ است که α' مزدوج α است.

برای دیدن اثبات مقدماتی این حکم قسمت سوم از فصل پنجم کتاب پولرد و دایمند را ببینید. حکم ۱.۲۹ را می‌توان به طریقی دیگر با کمی استفاده از نظریهٔ گالوا به سادگی اثبات کرد.

۲.۲۹ لم گیریم χ سرشت گروه متناهی G است و $g \in G$. در این صورت $|\chi(g)/\chi(۱)| \leq ۱$، و اگر

$$\circ < |\chi(g)/\chi(۱)| < ۱$$

آنگاه $\chi(g)/\chi(۱)$ عدد صحیح جبری نیست.

برهان قرار می‌دهیم $d = \chi(۱)$. طبق گزارهٔ **۹.۱۳** داریم $\chi(g) = \omega_۱ + \cdots + \omega_d$، که هر ω_i ریشهٔ واحد است، لذا

$$\chi(g)/\chi(۱) = (\omega_۱ + \cdots + \omega_d)/d$$

چون $|\chi(g)| = |\omega_۱ + \cdots + \omega_d| \leq |\omega_۱| + \cdots + |\omega_d| = d$ نتیجه می‌گیریم که $|\chi(g)/\chi(۱)| \leq ۱$.
اکنون فرض کنیم که $\chi(g)/\chi(۱)$ عدد صحیح جبری است و $|\chi(g)/\chi(۱)| < ۱$. ثابت می‌کنیم که $\chi(g) = \circ$.

می‌نویسیم $\gamma = \chi(g)/\chi(1)$، و فرض می‌کنیم چندجمله‌ای مینیمال γ به‌صورت زیر باشد

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

که به‌ازای هر i، $a_i \in \mathbb{Z}$. طبق ۱.۲۹، هر مزدوج γ به شکل زیر است

$$(\omega'_1 + \cdots + \omega'_d)/d$$

که ω'_1، . . . ، ω'_d ریشه‌های واحدند. از این‌رو قدرمطلق هر مزدوج γ حداکثر مساوی ۱ است. نتیجه می‌گیریم که اگر λ حاصلضرب تمام مزدوجهای γ (از جمله خود γ) باشد آنگاه

$$|\lambda| < 1$$

اما طبق تعریف، مزدوجهای γ ریشه‌های چندجمله‌ای $p(x)$ هستند و حاصلضرب همهٔ ریشه‌های این چندجمله‌ای مساوی $\pm a_0$ است. بنابراین

$$\lambda = \pm a_0$$

چون $a_0 \in \mathbb{Z}$ و $|\lambda| < 1$ نتیجه می‌شود که $a_0 = 0$. چون $p(x)$ تحویل‌ناپذیر است باید داشته باشیم

$$p(x) = x$$

که از اینجا نتیجه می‌شود $\gamma = 0$. بنابراین $\chi(g) = 0$ و حکم اثبات شده است. ■

قضیهٔ p^aq^bی برنساید

حکم اصلی موردنظر، یعنی قضیهٔ ۴.۲۹، را از یکی دیگر از قضایای جالب برنساید نتیجه می‌گیریم.

۳.۲۹ قضیه گیریم p عدد اول و r عدد صحیح است و $r \geq 1$. فرض کنیم که G گروهی متناهی است با رده‌ای مزدوجی به اندازهٔ p^r. در این صورت G ساده نیست.

برهان فرض کنیم $g \in G$ و $|g^G| = p^r$. چون $p^r > 1$، G آبلی نیست و لذا $g \neq 1$. مطابق معمول، سرشتهای تحویل‌ناپذیر G را با χ_1، . . . ، χ_k نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که χ_1 سرشت بدیهی باشد.

با استفاده از روابط تعامد ستونی، یعنی قضیهٔ ۴.۱۶(۲)، در مورد ستونهای مربوط به ۱ و g از جدول سرشت G، حاصل می‌شود

$$1 + \sum_{i=2}^{k} \chi_i(g)\chi_i(1) = 0$$

بنابراین

$$\sum_{i=2}^{k} \chi_i(g)\frac{\chi_i(1)}{p} = -\frac{1}{p}$$

بنابه گزارهٔ ۵.۲۲، $-1/p$ عدد صحیح جبری نیست. بنابراین به‌ازای iای، که $i \geq 2$، $\chi_i(g)\chi_i(1)/p$ عدد صحیح جبری نیست (قضیهٔ ۳.۲۲ را ببینید). چون $\chi_i(g)$ عدد صحیح جبری است (نتیجهٔ ۴.۲۲)، نتیجه می‌گیریم که $\chi_i(1)/p$ عدد صحیح جبری نیست، به بیان دیگر، p عدد $\chi_i(1)$ را عاد نمی‌کند. از این‌رو

$$\chi_i(g) \neq 0 \quad \text{و} \quad p \nmid \chi_i(1)$$

چون $|g^G| = p^r$ پس اعداد صحیح $\chi_i(1)$ و $|g^G|$ نسبت به هم اول‌اند و لذا اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌قسمی که

$$a|G : C_G(g)| + b\chi_i(1) = 1$$

بنابراین

$$a\frac{|G|\chi_i(g)}{|C_G(g)|\chi_i(1)} + b\chi_i(g) = \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)}$$

طبق نتایج ۱۰.۲۲ و ۴.۲۲، طرف چپ تساوی فوق عدد صحیح جبری است و چون $\chi_i(g) \neq 0$ پس طرف چپ مخالف صفر است. اکنون از لم ۲.۲۹ نتیجه می‌گیریم که

$$|\chi_i(g)/\chi_i(1)| = 1$$

فرض کنیم ρ نمایش G با سرشت χ_i باشد. طبق قضیهٔ ۱۱.۱۳(۱)، عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که

$$g\rho = \lambda I$$

حال قرار می‌دهیم $K = \mathrm{Ker}\rho$، در این صورت K زیرگروه نرمال G است. چون χ_i سرشت بدیهی نیست، $K \neq G$. اگر $K \neq \{1\}$، G ساده نیست، که نتیجهٔ مطلوب است، لذا فرض می‌کنیم که $K = \{1\}$، یعنی ρ نمایش صادق است.

چون $g\rho$ مضرب عددی ماتریس همانی است، پس به‌ازای هر $h \in G$ ضرب $g\rho$ در $h\rho$ تعویض‌پذیر است. چون ρ صادق است نتیجه می‌گیریم که ضرب g در هر $h \in G$ تعویض‌پذیر است، به بیان دیگر

$$g \in Z(G)$$

بنابراین $Z(G) \neq \{1\}$. چون $Z(G)$ زیرگروه نرمال G است و $Z(G) \neq G$ نتیجه می‌گیریم که G ساده نیست. ■

اکنون به حکم اصلی این فصل، یعنی قضیهٔ برنساید، می‌رسیم. در اثبات این حکم از قضیهٔ سیلو استفاده خواهیم کرد، این قضیه بیان می‌دارد که اگر G گروهی با مرتبهٔ $r^n s$ باشد و r اول باشد و $r \nmid s$ آنگاه G دارای زیرگروهی با مرتبهٔ r^n است. برای مشاهدهٔ اثبات قضیهٔ سیلو، به‌عنوان مثال، فصل ۱۸ از کتاب فرالی را که مشخصاتش در کتابنامه آمده است ببینید.

۴.۲۹ قضیهٔ p^aq^bی برنساید گیریم p و q اعداد اول و a و b اعداد صحیح نامنفی هستند و $a + b \geq 2$. اگر G گروهی با مرتبهٔ p^aq^b باشد، ساده نیست.

برهان ابتدا فرض می‌کنیم که $a = 0$ یا $b = 0$. در این صورت مرتبهٔ G توان عددی اول است و لذا طبق لم ۱.۲۶(۱)، $Z(G) \neq \{1\}$. عنصری چون $g \in Z(G)$ با مرتبهٔ اول انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\langle g \rangle \lhd G$ و $\langle g \rangle$ مساوی $\{1\}$ یا G نیست. بنابراین G ساده نیست.

اکنون فرض کنیم که $a > 0$ و $b > 0$. طبق قضیهٔ سیلو، G دارای زیرگروهی چون Q با مرتبهٔ q^b است. بنابه لم ۱.۲۶(۱)، $Z(Q) \neq \{1\}$. گیریم $g \in Z(Q)$ و $g \neq 1$. در این صورت $Q \leq C_G(g)$. و لذا به‌ازای rای،

$$|g^G| = |G : C_G(g)| = p^r$$

اگر $p^r = 1$ آنگاه $g \in Z(G)$ و لذا $Z(G) \neq \{1\}$ و همچون گذشته G ساده نیست. و اگر $p^r > 1$ آنگاه طبق قضیهٔ ۳.۲۹، G ساده نیست. ■

درواقع از قضیهٔ p^aq^bی برنساید اطلاعات بیشتری دربارهٔ گروههای مرتبهٔ p^aq^b به‌دست می‌آید:

۵.۲۹ هر گروه مرتبهٔ p^aq^b حل‌پذیر است.

در اینجا، منظورمان از گروه حل‌پذیر گروهی مانند G است که دارای زیرگروههای G_0، G_1، ...، G_r باشد به‌طوری که

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_r = G$$

و به‌ازای $1 \leq i \leq r$، داشته باشیم $G_i \lhd G_{i-1}$ و گروه خارج قسمتی G_i/G_{i-1} گروه دوری با مرتبهٔ اول باشد (یعنی مرتبهٔ آن عددی اول باشد).

خلاصهٔ اثبات ۵.۲۹ را با استفاده از استقرا روی $a+b$ می‌آوریم. اگر $a+b \leq ۱$، حکم واضح است، و لذا فرض می‌کنیم $a+b \geq ۲$ و G گروهی با مرتبهٔ $p^a q^b$ است. طبق قضیهٔ برنساید، یعنی ۴.۲۹، G دارای زیرگروه نرمال H است به‌طوری که H مساوی $\{۱\}$ یا G نیست. مرتبهٔ هردو گروه H و G/H مساوی حاصلضرب توانهایی از p و q است و این مرتبه‌ها کوچکتر از $p^a q^b$ هستند. از این‌رو بنابه فرض استقرا، H و G/H حل‌پذیرند. بنابراین زیرگروههای زیر وجود دارند

$$۱ = G_۰ \lhd G_۱ \lhd \cdots \lhd G_s = H$$
$$۱ = G_s/H \lhd G_{s+۱}/H \lhd \cdots \lhd G_r/H = G/H$$

به‌طوری که تمام گروههای خارج قسمتی $G_i/G_{i-۱}$ دارای مرتبهٔ اول‌اند. لذا سری

$$۱ = G_۰ \lhd G_۱ \lhd \cdots \lhd G_r = G$$

نشان‌دهندهٔ آن است که G حل‌پذیر است.

۱.۲۹ خلاصهٔ فصل ۲۹

۱. اگر G دارای رده‌ای مزدوجی با اندازهٔ p^r باشد (p اول و $r \geq ۱$) آنگاه G ساده نیست.

۲. اگر $|G| = p^a q^b$ (p و q اول و $a+b \geq ۲$) آنگاه G ساده نیست.

تمرینات فصل ۲۹

۱. نشان دهید که گروه سادهٔ ناآبلی دارای زیرگروهی آبلی که شاخص آن توان عددی اول باشد نیست.

۲. ثابت کنید که اگر G گروه سادهٔ ناآبلی با مرتبهٔ کمتر از ۸۰ باشد آنگاه $|G| = ۶۰$. (راهنمایی: از تمرین ۸.۱۳ استفاده کنید.)

۳۰

کاربردی از نظریهٔ نمایشها در ارتعاش مولکولی

نظریهٔ نمایشها کاربردهای زیادی در بسیاری از علوم فیزیکی دارد. این کاربردها از آنجا ناشی می‌شوند که هر دستگاه فیزیکی دارای گروه تقارنهایی چون G است، و بعضی از فضاهای برداریِ متناظر با این دستگاه $\mathbb{R}G$ـمدول‌اند. به‌عنوان مثال، نحوهٔ ارتعاش مولکول با چند معادلهٔ دیفرانسیل معین می‌شود، و گروه تقارنهای مولکول روی فضای جواب این معادلات عمل می‌کند. این فصلِ پایانی به همین کاربرد ــ یعنی نظریهٔ ارتعاش مولکولی ــ اختصاص دارد. برای اینکه بحث مقدماتی باشد از چهارچوب مکانیک کلاسیک خارج نمی‌شویم. (بحث را می‌توان از لحاظ مکانیک کوانتومی ادامه داد، ولی ما وارد این موضوع نمی‌شویم؛ برای دیدن این موضوع، کتاب شونلند[1] را که مشخصاتش در کتابنامه آمده ببینید.)

---

1. D. S. Schonland

گروه تقارنها

گیریم V یکی از دو فضای $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$ است و $v, w \in V$. فرض می‌کنیم که $d(v,w)$ فاصلهٔ بین v و w باشد، به عبارت دیگر اگر $v = (x_۱, x_۲, \cdots)$ و $w = (y_۱, y_۲, \cdots)$ آنگاه

$$d(v,w) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^۲}$$

گوییم ϑ طولپایی V است اگر ϑ درونریختی وارون‌پذیری از V باشد و

$$d(v\vartheta, w\vartheta) = d(v,w) \qquad \text{به‌ازای هر } v, w \in V$$

مجموعهٔ تمامی طولپاییهای V با قاعدهٔ ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهد. این گروه را گروه متعامد V می‌نامند و با $O(V)$ نشان می‌دهند.

من‌باب مثال، هر دوران $\mathbb{R}^۳$ حول محوری که از مبدأ مختصات می‌گذرد طولپایی است، همچنین هر تقارن نسبت به صفحهٔ مارّ بر مبدأ مختصات طولپایی است. درونریختی $-۱_{\mathbb{R}^۳}$ که هر بردار v را به $-v$ می‌فرستد مثال دیگری از عضو گروه متعامد $O(\mathbb{R}^۳)$ است. ثابت می‌شود که ترکیب دو دوران باز هم دوران است، و همین‌طور به‌ازای هر طولپایی g از $O(\mathbb{R}^۳)$ یکی از عناصر g یا $-g$ دوران است (تمرین ۱.۳۰ را ببینید). بنابراین گروه متعامد $O(\mathbb{R}^۳)$ دارای زیرگروهی با شاخص ۲ متشکل از دورانهاست. این مطلب در مورد گروه $O(\mathbb{R}^۲)$ نیز درست است.

اگر Δ زیرمجموعهٔ V باشد، که $V = (\mathbb{R}^۲ \text{ یا } \mathbb{R}^۳)$ آنگاه $G(\Delta)$ را مجموعهٔ طولپاییهایی تعریف می‌کنیم که Δ تحت آنها ناورداست، یعنی

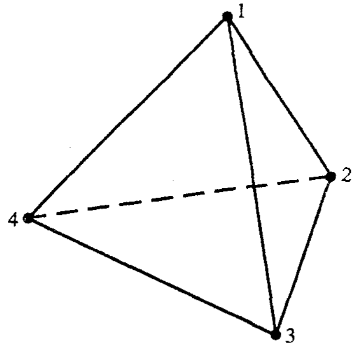
$$G(\Delta) = \{g \in O(V) : \Delta g = \Delta\}$$

(که $\Delta g = \{vg : v \in \Delta\}$). در این صورت $G(\Delta)$ زیرگروه $O(V)$ است و گروه تقارنهای Δ نامیده می‌شود. زیرگروهی از $G(\Delta)$ را که متشکل از دورانهای $G(\Delta)$ است گروه دورانهای Δ می‌نامند. شاخص گروه دورانهای Δ در گروه تقارنهای Δ مساوی ۱ یا ۲ است.

۱.۳۰ مثال گیریم $V = \mathbb{R}^۲$ و Δ nضلعی منتظمی به مرکز مبدأ مختصات باشد و $n \geq ۳$. به سادگی دیده می‌شود که گروه تقارنهای Δ گروه دووجهی $D_{۲n}$ است، که بنا به تعریف گروهی است متشکل از n دوران و n تقارن محوری حافظ Δ (مثال ۱.۱(۳) را ببینید).

اکنون قرار می‌دهیم $V = \mathbb{R}^۳$ و باز هم فرض می‌کنیم که Δ nضلعی منتظمی ($n \geq ۳$) به مرکز مبدأ مختصات باشد. این بار، $G(\Delta) \cong D_{۲n} \times C_۲$؛ عناصر اضافی به این علت پیدا شده‌اند که یک طولپایی وجود دارد که تمام نقاط Δ را ثابت نگاه می‌دارد، این طولپایی عبارت است از تقارن نسبت به صفحهٔ Δ.

۲.۳۰ مثال فرض کنیم Δ چهاروجهی منتظمی به مرکز مبدأ مختصات در $\mathbb{R}^3$ باشد:



رئوس این چهار وجهی را ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌نامیم. ادعا می‌کنیم که هر جایگشتی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ متناظر با یک طولپایی Δ است. به‌عنوان مثال جایگشت دوری (۲ ۱) به طول ۲ متناظر است با تقارن نسبت به صفحهٔ شامل مبدأ و یال ۳۴؛ به همین نحو هر جایگشت دوری به طول ۲ متناظر با یک تقارن است. چون S_4 توسط جایگشتهای دوری به طول ۲ تولید می‌شود، لذا همان‌طور که ادعا کردیم هر کدام از ۲۴ جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ متناظر با یک طولپایی است.

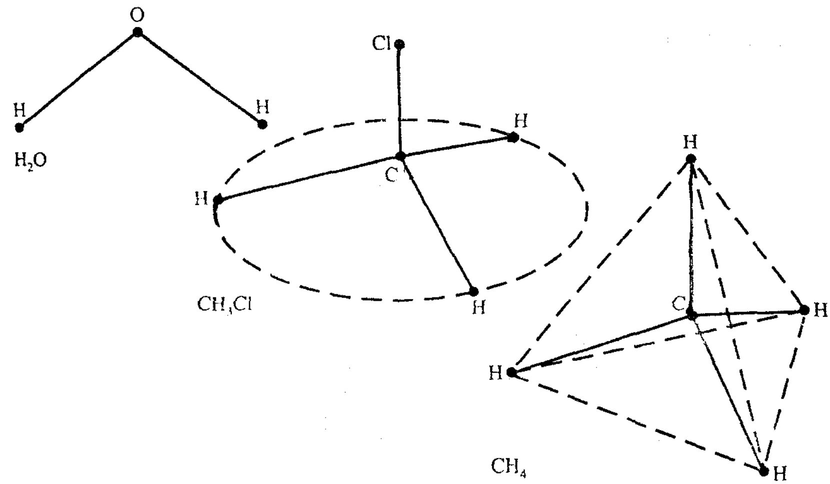
هیچ درونریختی غیرهمانی $\mathbb{R}^3$ تمام رئوس Δ را ثابت نگاه نمی‌دارد، زیرا Δ شامل سه بردار خطی‌مستقل است. بنابراین تمام طولپاییها را پیدا کرده‌ایم و $G(\Delta) \cong S_4$.

توجه کنید که گروه دورانهای Δ با A_4 یکریخت است، به‌عنوان مثال، (۴ ۳)(۲ ۱) متناظر است با دوران 180° حول محوری که از وسط یالهای ۱۲ و ۳۴ می‌گذرد، و (۳ ۲ ۱) متناظر است با دوران 120° حول محوری که از مبدأ و رأس ۴ می‌گذرد.

بالاخره، مشاهده می‌شود که اگر Δ را مجموعه‌ای فقط شامل رئوس چهاروجهی منتظم بگیریم گروه $G(\Delta)$ هیچ تغییری نمی‌کند.

۳.۳۰ مثال در این مثال گروه تقارنهای مولکولهای H_2O (آب)، CH_3Cl (متیل‌کلرید) و CH_4 (متان) را مشخص می‌کنیم. گروه تقارنهای مولکول بنابه تعریف عبارت است از گروه طولپاییهایی که نه تنها مکان مولکول را در فضا ثابت نگاه می‌دارند، بلکه هر اتم را به اتم مشابه‌اش می‌فرستند.

شکل سه مولکول مذکور مطابق زیر است



همواره فرض می‌کنیم که مرکز ثقل مولکول مبدأ دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۳$ است.

مولکول $CH_۴$ دارای چهار اتم هیدروژن در رئوس چهاروجهی منتظم، و یک اتم کربن در مرکز آن است. لذا گروه تقارنهای مولکول $CH_۴$ همان گروه تقارنهای چهاروجهی منتظم است که در مثال ۲.۳۰ داده شده است. این گروه با $S_۴$ یکریخت است، و اعضایش چهار اتم هیدروژن را به یکدیگر می‌فرستند و اتم کربن را ثابت نگاه می‌دارند.

اما گروه تقارنهای مولکول $CH_۳Cl$ دارای تقارنی دورانی چون a با مرتبهٔ ۳ حول محور قائم، و سه تقارن نسبت به صفحات شامل C، Cl و هریک از اتمهای H است. اگر b یکی از این تقارنهای صفحه‌ای باشد آنگاه گروه تقارنها عبارت است از

$$\{۱, a, a^۲, b, ab, a^۲b\}$$

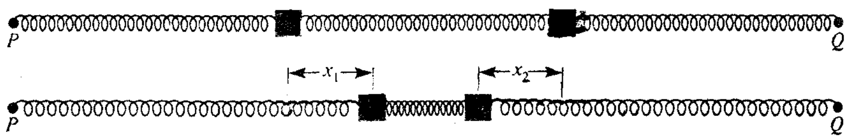
این گروه با $S_۳$ یکریخت است و اعضایش سه اتم H را به یکدیگر می‌فرستند و اتمهای C و Cl را ثابت نگاه می‌دارند.

بالاخره، مولکول $H_۲O$ یک تقارن نسبت به صفحهٔ مولکول و یک تقارن نسبت به صفحه‌ای که از اتم O می‌گذرد و بر صفحهٔ مولکول عمود است دارد، و یک تقارن دورانی با مرتبهٔ ۲ دارد. بنابراین گروه تقارنهای این مولکول با $C_۲ \times C_۲$ یکریخت است.

ارتعاش دستگاه فیزیکی

برای اینکه زمینهٔ شرح مسأله را آماده کنیم مثالی می‌زنیم.

۴.۳۰ مثال فرض کنیم فنری داریم که بین دو نقطهٔ P و Q روی یک میز افقیِ بدون اصطکاک در حالت کشیده شده قرار دارد و دو وزنه هرکدام به جرم m و به فاصلهٔ یک سوم از دو سر فنر به فنر متصل شده است:



وزنه‌ها را کمی تغییر مکان می‌دهیم و سپس رها می‌سازیم. دربارهٔ حرکتی که این دستگاه پیدا می‌کند چه می‌توان گفت؟

برای بحث دربارهٔ این مسأله، فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ مقدار تغییر مکان دو وزنه در زمان t باشد. همان‌طور که شکل فوق نشان می‌دهد $x_۱$ را از چپ به راست و $x_۲$ را از راست به چپ اندازه می‌گیریم. گیریم k ثابت کشسانی فنر باشد، به بیان دیگر، هرگاه فنر به اندازهٔ x کشیده شود، نیروی بازگرداننده kx باشد.

فنر وزنهٔ سمت چپ را با نیروی $kx_۱$ به سمت P و با نیروی $-k(x_۱ + x_۲)$ به سمت Q می‌کشد. نیروهای وارد بر وزنهٔ سمت راست به طریق مشابه به‌دست می‌آید، و لذا معادلات حرکت دستگاه چنین است

$$m\ddot{x}_۱ = -kx_۱ - k(x_۱ + x_۲) = -۲kx_۱ - kx_۲$$

$$m\ddot{x}_۲ = -kx_۲ - k(x_۱ + x_۲) = -kx_۱ - ۲kx_۲$$

که $\ddot{x}_i$ مشتق دوم x_i نسبت به t است.

این معادلات معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ ۲ با مجهولهای $x_۱$ و $x_۲$ هستند، و لذا جواب عمومی دارای چهار ثابت دلخواه است. جواب عمومی دستگاه معادلات فوق را با روشی که در حالت کلیتری هم قابل اعمال است به‌دست خواهیم آورد.

می‌نویسیم $x = (x_۱, x_۲)$، $\ddot{x} = (\ddot{x}_۱, \ddot{x}_۲)$ و $q = k/m$. در این صورت معادلات حرکت هم‌ارز معادلهٔ ماتریسی زیر است

$$\ddot{x} = xA, \quad \text{که} \quad A = \begin{pmatrix} -۲q & -q \\ -q & -۲q \end{pmatrix} \qquad (۵.۳۰)$$

توجه کنید که A متقارن است. بنابراین مقادیر ویژهٔ A حقیقی‌اند، و A دارای دو بردار ویژهٔ

خطی‌مستقل است. این خاصیت است که می‌خواهیم د، این مثال توجه شما را بدان معطوف کنیم و از آن استفاده کنیم.

قبل از اینکه بردارهای ویژهٔ A را به‌طور صریح پیدا کنیم، می‌خواهیم شرح دهیم که چرا با استفاده از آنها می‌توانیم معادلهٔ حرکت (۵.۳۰) را حل کنیم.

فرض کنیم که u بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ $-\omega^2$ باشد و β مقدار ثابت دلخواهی باشد، قرار می‌دهیم

$$x = \sin(\omega t + \beta)u$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2 \sin(\omega t + \beta)u \\ &= \sin(\omega t + \beta)uA \qquad (\text{زیرا } uA = -\omega^2 u) \\ &= xA\end{aligned}$$

بنابراین x یکی از جوابهای معادلهٔ حرکت است. اگر u_1 و u_2 بردارهای ویژهٔ خطی‌مستقل A، به ترتیب با مقادیر ویژهٔ $-\omega_1^2$ و $-\omega_2^2$ باشند آنگاه

$$\alpha_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)u_1 + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)u_2$$

جواب معادلهٔ حرکت است که چون شامل چهار ثابت دلخواه، یعنی α_1، α_2، β_1، β_2، است پس جواب عمومی معادلهٔ حرکت است.

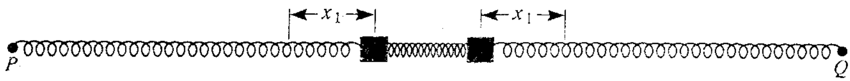
با استفاده از روش فوق جواب، عمومی مسألهٔ خود را به‌دست می‌آوریم. مقادیر ویژهٔ ماتریس مذکور در (۵.۳۰) عبارت‌اند از $-3q$ و $-q$، و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها عبارت‌اند از $(1, 1)$ و $(1, -1)$. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ حرکت (۵.۳۰) عبارت است از

$$\alpha_1 \sin(\sqrt{3q}\,t + \beta_1)(1, 1) + \alpha_2 \sin(\sqrt{q}\,t + \beta_2)(1, -1)$$

جوابهایی را که فقط شامل یکی از بردارهای ویژهٔ A هستند مدُهای طبیعی ارتعاش می‌نامند. این جوابها عبارت‌اند از

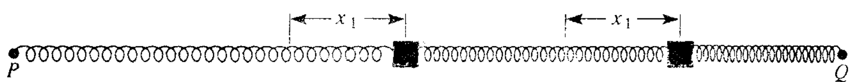
مدُ ۱: $$\sin(\sqrt{3q}\,t + \beta_1)(1, 1)$$

در این حالت $x_۱ = x_۲ = \sin(\sqrt{۳q}t + \beta_۱)$ و شکل فنر مرتعش به‌صورت زیر است



مُد ۲: $\qquad \sin(\sqrt{q}t + \beta_۲)(۱, -۱)$

در این حالت $x_۲ = -x_۲ = \sin(\sqrt{q}t + \beta_۲)$ و شکل فنر مرتعش به‌صورت زیر است



مسألهٔ کلی ارتعاش مولکولی

فرض کنیم مولکولی مرکب از n اتم داریم که تحت نیروهای داخلی در ارتعاش است. در مکان تعادلِ هر اتم، سه محور مختصات که با استفاده از آنها مقدار تغییر مکان آن اتم در امتداد هر محور اندازه‌گیری می‌شود در نظر می‌گیریم [مبدأ محورهای مختصات را در مکان تعادل اتم قرار می‌دهیم]. بنابراین مکان مولکول در هر زمان مفروض با برداری $۳n$ بعدی در فضای برداری $\mathbb{R}^{۳n}$ مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم که نیروهای داخلی توابعی خطی از مقادیر تغییر مکان هستند. در نتیجه با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن، دستگاه معادلاتی حاصل می‌شود که می‌توان آن را به‌صورت زیر نشان داد

$$\ddot{x} = xA \qquad (۶.۳۰)$$

(۵.۳۰ را ببینید.) در اینجا x برداری سطری از $\mathbb{R}^{۳n}$ است که نشان‌دهندهٔ مقادیر تغییر مکان تمام اتمها در امتداد محورهاست، و A ماتریسی $۳n \times ۳n$ با درایه‌های حقیقی است که به‌وسیلهٔ نیروهای داخلی معین می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که سه محور مختصاتی که برای هر اتم انتخاب کرده‌ایم دو به‌دو بر هم عمود باشند. با استفاده از مباحث فیزیکی می‌توان نشان داد که در این حالت خاص ماتریس A متقارن است. لذا مقادیر ویژهٔ A حقیقی‌اند، و A دارای $۳n$ بردار ویژهٔ خطی‌مستقل است. توجه کنید که تأثیر تغییر محورهای مختصات صرفاً این است که A را با مزدوجش عوض کنیم. بنابراین در حالت کلی، که محورهای مختصاتِ انتخاب‌شده لزومی ندارد متعامد باشند، گزارهٔ زیر برقرار است.

۷.۳۰ گزاره تمام مقادیر ویژهٔ A حقیقی‌اند و A دارای $3n$ بردار ویژهٔ خطی‌مستقل است.

برای حل معادلهٔ حرکت (۶.۳۰)، مُدهای طبیعی دستگاه را، که در زیر تعریف می‌شود، پیدا می‌کنیم.

۸.۳۰ تعریف مُد طبیعی ارتعاش مولکول عبارت است از برداری در $\mathbb{R}^{3n}$ با یکی از اشکال زیر

$$\sin(\omega t+\beta)u \qquad (\text{ثابت } \beta) \tag{۱}$$

که $-\omega^2$ مقدار ویژهٔ مخالف صفر A با بردار ویژهٔ u است.

$$(t+\beta)u \qquad (\text{ثابت } \beta) \tag{۲}$$

که u بردار ویژهٔ A متناظر با مقدار ویژهٔ ۰ است.

۹.۳۰ گزاره هر مد طبیعی ارتعاش جواب معادلهٔ حرکت (۶.۳۰) است، و چنین جوابی حاکی از آن است که تمام اتمها با فرکانس مساوی مرتعش می‌شوند. جواب عمومی معادلهٔ حرکت ترکیب خطی مدهای طبیعی ارتعاش است.

برهان اگر $uA=-\omega^2 A$ و $x=\sin(\omega t+\beta)u$ آنگاه

$$\ddot{x}=-\omega^2\sin(\omega t+\beta)u=\sin(\omega t+\beta)uA=xA$$

اگر $uA=0$ و $x=(t+\beta)u$ آنگاه

$$\ddot{x}=0=(t+\beta)uA=xA$$

بنابراین مدهای طبیعی ارتعاش جواب معادلهٔ حرکت (۶.۳۰) هستند. از این‌رو در مد طبیعی تمام اتمها با فرکانس مساوی (یعنی ω یا ۰) مرتعش می‌شوند.

توجه کنید که ممکن نیست A مقدار ویژهٔ اکیداً مثبت داشته باشد، زیرا اگر λ چنین مقدار ویژه با بردار ویژهٔ u باشد آنگاه $x=e^{\sqrt{\lambda}t}u$ جواب معادلهٔ حرکت خواهد بود، که غیرممکن است. بنابراین طبق گزارهٔ ۷.۳۰، $3n$ مد طبیعی خطی‌مستقل وجود دارد. چون هر مد طبیعی شامل یک ثابت دلخواه است، ترکیب خطی مدهای طبیعی، در حالت کلی، شامل $6n$ ثابت دلخواه است، و لذا این ترکیب خطی جواب عمومی معادلهٔ حرکت (۶.۳۰) است (زیرا (۶.۳۰) متشکل از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با $3n$ مجهول است). ■

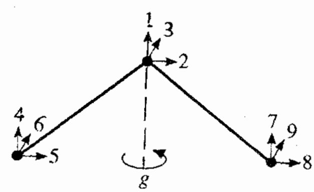
با استفاده از گزارهٔ ۹.۳۰ مسألهٔ حل معادلهٔ حرکت به مسألهٔ یافتن تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس $3n \times 3n$ A تبدیل می‌شود. اما اگر بخواهیم این کار را مستقیماً انجام دهیم ممکن است کاری بسیار پرزحمت و سنگین باشد؛ حتی نوشتن ماتریس A به‌ازای مولکولی مفروض ممکن است کار پرزحمتی باشد!

با استفاده از گروه تقارنهای مولکول و نظریهٔ نمایشها، بسیاری اوقات می‌توان محاسبات مربوط به بردارهای ویژهٔ A را بسیار ساده کرد. در اینجا روشی را برای انجام دادن این کار شرح می‌دهیم.

استفاده از گروه تقارنها

بحث بخش قبل را ادامه می‌دهیم. فرض کنیم G گروه تقارنهای مولکول مورد بحث باشد. چون اتمها تحت هر عضو G بین خودشان جابه‌جا می‌شوند، لذا هر عضو g همچون درونریختی فضای بردارهای تغییر مکان، یعنی فضای $\mathbb{R}^{3n}$، عمل می‌کند. بنابراین $\mathbb{R}^{3n}$ $\mathbb{R}G$ـمدول است.

۱۰.۳۰ مثال فرض کنیم g دوران مرتبهٔ ۲ی مولکول H_2O باشد:



به هر اتم در وضعیت اولیه‌اش دستگاه مختصاتی مطابق شکل فوق نسبت می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که به‌ازای $1 \leq i \leq 9$، v_i بردار یکهٔ محور مختصات i باشد. در این صورت g بردار v_1 را ثابت نگاه می‌دارد، v_2 و v_3 را به قرینه‌شان تبدیل می‌کند، v_4 و v_7 را به یکدیگر تبدیل می‌کند، و v_5 و v_6 را به قرینه‌های v_8 و v_9 تبدیل می‌کند. بنابراین g روی $\mathbb{R}^9$ چنین عمل می‌کند

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)g$$
$$= (x_1, -x_2, -x_3, x_7, -x_8, -x_9, x_4, -x_5, -x_6)$$

به حالت کلی برمی‌گردیم. معادلات حرکت عبارت‌اند از $\ddot{x} = xA$، و می‌خواهیم بردارهای ویژهٔ A را پیدا کنیم. بنا به تعریف، فضای ویژهٔ مقدار ویژهٔ λ از A عبارت است از

$$\{x \in \mathbb{R}^{3n} : xA = \lambda x\}$$

اکنون می‌توانیم گزارهٔ مهمی را ارائه دهیم که امکان استفاده از گروه تقارنهای مولکول G را به ما می‌دهد. درواقع، این گزاره به ما می‌گوید که تابع $x \to xA$ (به ازای $x \in \mathbb{R}^{3n}$) $\mathbb{R}G$ـهمریختی از $\mathbb{R}^{3n}$ به خودش است.

۱۱.۳۰ گزاره به‌ازای هر $g \in G$ و $x \in \mathbb{R}^{3n}$ داریم

$$(xg)A = (xA)g$$

و فضاهای ویژهٔ A $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای $\mathbb{R}^{3n}$ هستند.

برهان فرض کنیم $-\omega^2$ مقدار ویژهٔ مخالف صفر A با بردار ویژهٔ v باشد. در این صورت هنگامی‌که مولکول در مد طبیعی با فرکانس ω مرتعش است، v جهت و مقدار تغییر مکان اتمها را نسبت به حالت تعادل مشخص می‌کند. به‌ازای هر $g \in G$، vg نیز باید جهت و مقدار تغییر مکان را در مد طبیعیِ دارای فرکانس ω نسبت به حالت تعادل مشخص کند، زیرا موضع اتمها نسبت به یکدیگر بر اثر عمل g تغییر نمی‌کند. از این‌رو vg بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ $-\omega^2$ است. بنابراین فضای ویژهٔ $-\omega^2$ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول $\mathbb{R}^{3n}$ است. نظیر همین استدلال را می‌توان در مورد فضای ویژهٔ مقدار ویژهٔ ۰ به‌کار برد.

پایه‌ای برای $\mathbb{R}^{3n}$ متشکل از بردارهای ویژهٔ A انتخاب می‌کنیم (گزارهٔ ۷.۳۰ را ببینید)، و فرض می‌کنیم $g \in G$. اگر v برداری متعلق به این پایه باشد، به‌ازای عضوی چون $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $vA = \lambda v$ و

$$(vg)A = \lambda(vg) = (\lambda v)g = (vA)g$$

بنابراین به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^{3n}$ داریم $(xg)A = (xA)g$. ■

اکنون می‌خواهیم از نظریهٔ نمایشها استفاده کنیم و $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^{3n}$ را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر بنویسیم، و به این ترتیب فضاهای ویژهٔ A و مدهای طبیعی مولکول را معین کنیم.

برای دانستن اینکه کدام یک از $\mathbb{R}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{R}^{3n}$ قرار دارند می‌توانیم از نظریهٔ سرشتها استفاده کنیم؛ و اگر χ سرشت $\mathbb{R}G$ـمدول تحویل‌ناپذیری باشد که در $\mathbb{R}^{3n}$ قرار دارد آنگاه عنصر

$$\sum_{g\in G} \chi(g^{-1})g$$

نگاشتی پوشا از $\mathbb{R}^{3n}$ به مجموع آن دسته از $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر $\mathbb{R}^{3n}$ است که دارای سرشت χ هستند (۲۷.۱۴ را ببینید). (این روش گاهی نیاز به اصلاح دارد، زیرا ممکن است که سرشت $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^{3n}$ شامل سرشت تحویل‌ناپذیری باشد که نتوان آن را روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت؛ ولی در عمل، چنین مسائلی به ندرت پیش می‌آید.)

۱۲.۳۰ تعریف فرض کنیم که χ سرشت $\mathbb{R}G$ـمدولی تحویل‌ناپذیر باشد. گیریم V_χ مجموع آن دسته از $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر $\mathbb{R}^{3n}$ باشد که سرشتشان χ است. V_χ را مؤلفهٔ همگن $\mathbb{R}^{3n}$ می‌نامیم.

مسألهٔ یافتن فضاهای ویژهٔ A با استفاده از گزارهٔ بعدی تا حد زیادی ساده می‌شود.

۱۳.۳۰ گزاره هر مؤلفهٔ همگن V_χ از $\mathbb{R}^{3n}$ Aـناورداست، یعنی

$$xA \in V_\chi \quad \forall x \in V_\chi$$

برهان بنابه قضیهٔ مشکه می‌توان نوشت $\mathbb{R}^{3n} = V_\chi \oplus W$ که W $\mathbb{R}G$ـمدول است، و هیچ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول W دارای سرشت χ نیست. تابع

$$\varepsilon : v + w \to w \quad (v \in V_\chi, w \in W)$$

$\mathbb{R}G$ـهمریختی است. بنابراین طبق گزارهٔ ۱۱.۳۰، تابع

$$x \to (xA)\varepsilon \quad (x \in V_\chi)$$

$\mathbb{R}G$ـهمریختی از V_χ به W است. طبق گزارهٔ ۳.۱۱، این تابع صفر است، لذا به‌ازای هر $x \in V_\chi$ داریم $xA \in V_\chi$. (با وجود اینکه گزارهٔ ۳.۱۱ را در مورد $\mathbb{C}G$ـمدولها بیان کردیم اما اثبات آن را در مورد $\mathbb{R}G$ـمدولها نیز می‌توان به‌کار برد؛ تمرین ۸.۲۳ را نیز ببینید.) ■

۱۴.۳۰ نتیجه اگر V_χ $\mathbb{R}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه هر بردار مخالف صفر V_χ بردار ویژهٔ A است.

برهان (اثبات لم شور را نیز ببینید.) چون V_χ Aـناورداست، می‌توانیم بردار $v \in V_\chi$ را طوری انتخاب کنیم که v بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ مثلاً λ باشد. در این صورت اشتراک V_χ با فضای ویژهٔ λ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول مخالف صفر V_χ است و لذا باید مساوی V_χ باشد. ■

اکنون مراحل روش یافتن مدهای طبیعی ارتعاش یک مولکول مفروض را به‌طور خلاصه ذکر می‌کنیم.

۱۵.۳۰ خلاصه (۱) سه محور مختصات به هر کدام از n اتم مولکول نسبت می‌دهیم تا اینکه $\mathbb{R}^{3n}$ حاصل شود.

(۲) G گروه تقارنهای مولکول را به‌دست می‌آوریم. در این صورت $\mathbb{R}^{3n}$ $\mathbb{R}G$ـمدول می‌شود.

(۳) سرشت χ از $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^{3n}$ را به‌دست می‌آوریم و χ را به‌صورت ترکیب خطی سرشتهای تحویل‌ناپذیر G می‌نویسیم.

(۴) $\mathbb{R}^{3n}$ را به‌صورت مجموع مستقیم مؤلفه‌های همگن می‌نویسیم. این کار را با اِعمال عنصر $\sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1})g$ بر $\mathbb{R}^{3n}$ به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر χ_i از G که سازای χ است، یا به طریقی دیگر، انجام می‌دهیم.

(۵) هر مؤلفهٔ همگن V_{χ_i} از $\mathbb{R}^{3n}$ را به ترتیب در نظر گرفته، و بردارهای ویژهٔ A از V_{χ_i} را تعیین می‌کنیم (گزارهٔ ۱۳.۳۰ را ببینید). اگر V_{χ_i} تحویل‌ناپذیر باشد کار اضافه‌ای بر ما تحمیل نمی‌شود (نتیجهٔ ۱۴.۳۰ را ببینید). اگر V_{χ_i} تحویل‌پذیر باشد، برای ادامهٔ کار، تذکر ۱۹.۳۰ را که بعداً می‌آید، یا تمرین ۷.۳۰ را ببینید.

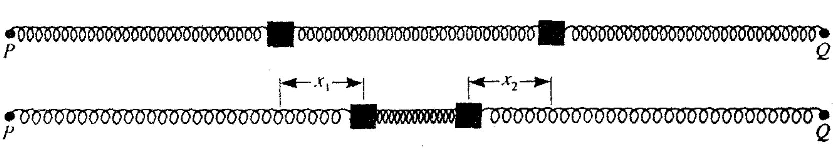
(۶) اگر v بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ $-\omega^2$ باشد آنگاه

$$\sin(\omega t+\beta)v \qquad (\text{یا } (t+\beta)v \text{ در حالت } \omega = 0)$$

که در آن β مقدار ثابت دلخواهی است، مد طبیعی است. معمولاً برای تعیین فرکانس ω لازم است که معادلات حرکت را بدانیم.

این روش را در بسیاری از موارد می‌توان به‌کار برد و به نتیجه رسید، و ما در مثالهایی که بقیهٔ این فصل را تشکیل می‌دهند این مطلب را نشان خواهیم داد.

۱۶.۳۰ مثال ابتدا به مثال ۴.۳۰ که دربارهٔ فنر و دو جرم مرتعش است می‌پردازیم:



گروه تقارن دستگاه فوق عبارت است از $G = \langle g : g^2 = 1 \rangle$، که g تقارن نسبت به نقطهٔ

وسط PQ است. بردارهای نشان‌دهندهٔ تغییر مکان، یعنی (x_1, x_2)ها $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^2$ را تشکیل می‌دهند.

چون $(x_1, x_2)g = (x_2, x_1)$، $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای $\mathbb{R}^2$ عبارت‌اند از $\mathrm{sp}(u_1)$ و $\mathrm{sp}(u_2)$، که

$$u_1 = (1, 1) \quad \text{و} \quad u_2 = (1, -1)$$

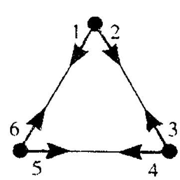
در نتیجه مدهای طبیعی دستگاه فوق عبارت‌اند از

$$\sin(\omega_1 t + \beta_1)(1, 1) \quad \text{و} \quad \sin(\omega_2 t + \beta_2)(1, -1)$$

که β_1 و β_2 مقادیر ثابت و ω_1 و ω_2 فرکانس هستند. این نتیجه با نتیجهٔ مثال ۴.۳۰ سازگار است.

توجه کنید که مدهای طبیعی ارتعاش (ولی نه فرکانسهای آنها) را فقط با استفاده از گروه تقارنها تعیین کردیم.

۱۷.۳۰ مثال فرض کنید مولکولی سه اتم یکسان دارد که در رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. برای سادگی، فقط ارتعاشهای مولکول را در صفحه در نظر می‌گیریم، و لذا به هر اتم دو محور مختصات برای تعیین تغییر مکان آن نسبت می‌دهیم. محورهای مختصات را در راستای اضلاع مثلث، مانند شکل زیر انتخاب می‌کنیم، زیرا این کار باعث سادگی محاسبات می‌شود:



بنابراین مکان مولکول با بردار $(x_1, \cdots, x_6)$ در $\mathbb{R}^6$ مشخص می‌شود، که x_i مقدار تغییر مکان روی محور i است ($1 \leq i \leq 6$).

گروه تقارنهای مولکول (در فضای دوبعدی) گروه دووجهی D_6 است، که توسط دورانی چون a با مرتبهٔ ۳ و تقارنی محوری چون b با مرتبهٔ ۲ (مثال ۱.۳۰ را ببینید) تولید می‌شود. به راحتی می‌توان حاصل عمل هر عنصر D_6 را بر $\mathbb{R}^6$ به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، اگر b تقارنی محوری باشد که اتم رأس بالا را ثابت نگاه می‌دارد آنگاه

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)b = (x_2, x_1, x_6, x_5, x_4, x_3)$$

می‌خواهیم $\mathbb{R}D_6$ـمدول $\mathbb{R}^6$ را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{R}D_6$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر بنویسیم. برای انجام دادن این کار، ابتدا سرشت χ مدول را به‌دست می‌آوریم. چون دوران a هیچ‌یک از

اتمها را ثابت نگاه نمی‌دارد پس $\chi(a) = ۰$. همچنین با استفاده از حاصل عمل b که در بالا داده شده است، نتیجه می‌گیریم که $\chi(b) = ۰$. بنابراین مقادیر χ عبارت‌اند از

	۱	a	b
χ	۶	۰	۰

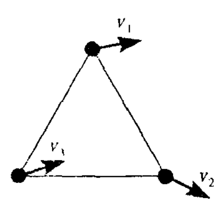
بنا به بخش ۳.۱۸، جدول سرشت $D_۶$ عبارت است از

	۱	a	b
$\chi_۱$	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	-۱
$\chi_۳$	۲	-۱	۰

بنابراین $\chi = \chi_۱ + \chi_۲ + ۲\chi_۳$.

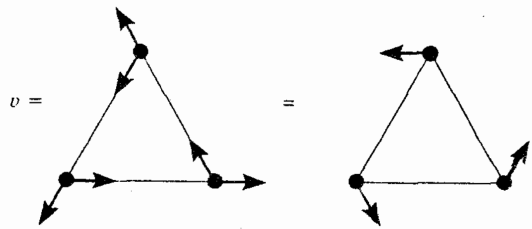
پس به دنبال این هستیم که $\mathbb{R}^۶$ را به‌صورت مجموع مستقیم $\mathbb{R}D_۶$ـزیرمدولهایی با سرشتهای $\chi_۱$، $\chi_۲$، $\chi_۳$ و $\chi_۳$ بنویسیم.

اگر $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ بردارهای تغییر مکان دوبعدی سه اتم فوق باشند آنگاه بردار تغییر مکان $(v_۱, v_۲, v_۳) \in \mathbb{R}^۶$ را به شکل زیر نمایش می‌دهیم



ابتدا مدهای طبیعی به‌صورت $(t + \beta)v$ را که متناظر با فضای ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ ۰ هستند محاسبه می‌کنیم. این مدها عبارت‌اند از مدهای دورانی و انتقالی، که هر مولکولی دارای این مدهاست.

مد دورانی. در این مد، مولکول با سرعت زاویه‌ای ثابت حول مرکز دوران می‌کند. این مد عبارت است از $(t + \beta)v$ که $v = (۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱)$؛ این بردار را به شکل زیر می‌توان نشان داد



$\mathrm{sp}(v)$ را زیرمدول دورانهای $\mathbb{R}^6$ می‌نامیم. اگر χ_R سرشت $\mathrm{sp}(v)$ باشد آنگاه

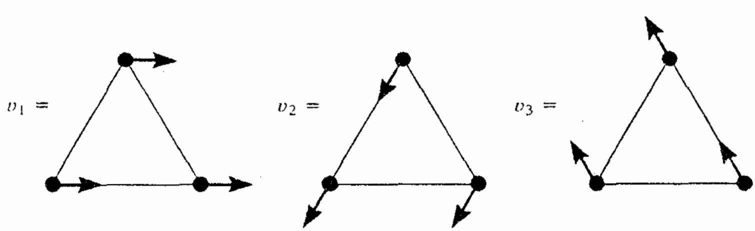
$$\chi_R(1) = 1, \quad \chi_R(a) = 1, \quad \chi_R(b) = -1$$

و لذا $\chi_R = \chi_2$. درواقع $\mathrm{sp}(v) = \mathbb{R}^6\varepsilon_2$، که

$$\varepsilon_2 = \sum_{g\in D_6} \chi_2(g^{-1})g = 1 + a + a^2 - b - ab - a^2b$$

(۲۷.۱۴ را نیز ببینید).

مدهای انتقالی. این مدها مدهایی هستند که در آنها اتمها در یک جهت ثابت و با یک سرعت ثابت حرکت می‌کنند. این مدها به شکل $(t+\beta)v$ هستند، که v متعلق به فضایی است که توسط بردارهای v_1، v_2، v_3 پدید می‌آید، این بردارها را به شکل زیر می‌توان نشان داد



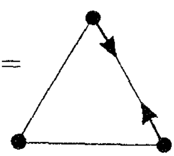
(بنابراین $v_1 = (-1, 1, 0, -1, 1, 0)$، $v_2 = (1, 0, -1, 1, 0, -1)$، $v_3 = (0, -1, 1, 0, -1, 1)$).

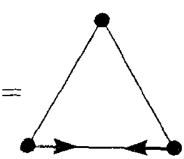
چون $v_1 + v_2 + v_3 = 0$، زیرفضای $\mathrm{sp}(v_1, v_2, v_3)$ دوبعدی است. واضح است که این زیرفضا $\mathbb{R}D_6$ـزیرمدول $\mathbb{R}^6$ است. این زیرمدول را زیرمدول انتقالها می‌نامیم؛ این زیرمدول شامل زیرمدول دورانها نیست. بنابراین سرشت زیرمدول انتقالها قسمتی از $\chi - \chi_2 = \chi_1 + 2\chi_3$ است و لذا باید χ_3 باشد.

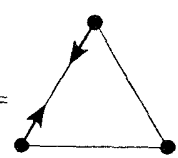
مدهای ارتعاشی. مدهای طبیعی باقیمانده متناظرند با فضاهای ویژهٔ ماتریس A با مقادیر ویژهٔ مخالف صفر، و آنها را مدهای ارتعاشی می‌نامند. مجموع این فضاهای ویژه $\mathbb{R}D_6$ـ زیرمدولی از $\mathbb{R}^6$ موسوم به $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$* تشکیل می‌دهد (طبق گزارهٔ ۱۱.۳۰)، و سرشت آن، χ_{vib}، عبارت است از

$$\chi_{\text{vib}} = \chi - (\chi_2 + \chi_3) = \chi_1 + \chi_3$$

لذا $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ دارای بعد ۳ است. چون هیچ مدی در $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ دارای مؤلفهٔ انتقالی نیست، اگر $w \in \mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ آنگاه مجموع کلیهٔ مؤلفه‌های w در هر یک از جهات صفر است؛ به‌علاوه $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ شامل زیرمدول دورانها نیست، بنابراین مجموع گشتاورهای بردارهای $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ حول مرکز صفر است. از این شرایط سه رابطهٔ خطیِ مستقل برحسب مؤلفه‌های بردارهای $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ حاصل می‌شود، که چون $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ دارای بعد ۳ است، هر بردار $\mathbb{R}^6$ که در این روابط صدق کند باید متعلق به $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ باشد. بنابراین بردارهای u_1 و u_2 و u_3ی زیر پایه‌ای برای $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ تشکیل می‌دهند

$u_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 0) =$ 

$u_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 0) =$ 

$u_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 1) =$ 

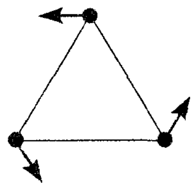
واضح است که $\text{sp}(u_1 + u_2 + u_3)$ $\mathbb{R}D_6$ـ زیرمدول $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ با سرشت χ_1 است. مد ارتعاشیِ مربوط به $u_1 + u_2 + u_3$ را گاهی مد انقباضی‌انبساطی می‌نامند (وجه تسمیهٔ آن را از شکل ۱۸.۳۰(۳) زیر در خواهید یافت).

بالاخره، چون هر عضو D_6 بردارهای u_1، u_2، u_3 را به یکدیگر می‌فرستد، به سادگی نتیجه می‌گیریم که $\text{sp}(u_1 - u_2, u_1 - u_3)$ $\mathbb{R}D_6$ـ زیرمدول $\mathbb{R}^6_{\text{vib}}$ است. سرشت این زیرمدول χ_3 است و آخرین فضای ویژهٔ ماتریس A را به ما می‌دهد.

* vib ابتدای کلمه‌ای انگلیسی به معنی «ارتعاشی» است.

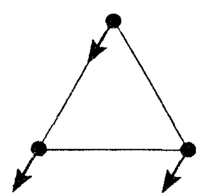
به این ترتیب محاسبات مربوط به مدهای طبیعی به پایان می‌رسد. در زیر خلاصهٔ نتایج فوق را می‌آوریم.

۱۸.۳۰ (۱) مد دورانی

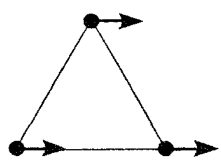


(۱, −۱, ۱, −۱, ۱, −۱)

(۲) مدهای انتقالی: ترکیبهای خطیِ

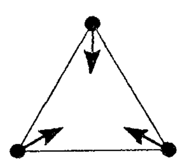


(۱, ۰, −۱, ۱, ۰, ۱)



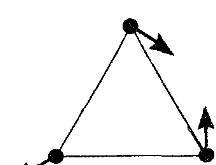
(−۱, ۱, ۰, −۱, ۱, ۰)

(۳) مد ارتعاشی: مد انقباضی‌انبساطی

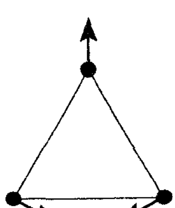


(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)

(۴) مدهای ارتعاشی: ترکیبهای خطیِ



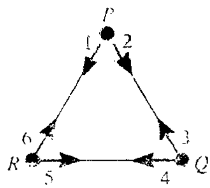
(−۱, ۲, ۲, −۱, −۱, −۱)
$= 2u_1 - u_2 - u_3$



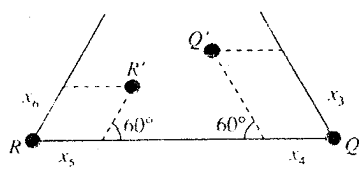
(−۱, −۱, −۱, ۲, ۲, −۱)
$= 2u_2 - u_1 - u_3$

(بردارهای $u_۳ - u_۱ - ۲u_۲$ و $u_۳ - u_۲ - ۲u_۱$ را صرفاً به این دلیل به‌عنوان پایه‌ای برای مدهای ارتعاشی در (۴) انتخاب کردیم که این مدها از نظر شکل ساده‌تر از $u_۲ - u_۱$ و $u_۳ - u_۱$ هستند.)

توجه کنید که مدهای طبیعی ارتعاش را بدون در دست داشتن معادلات حرکت پیدا کرده‌ایم. برای آزمایش نتایجمان، اکنون معادلات حرکت را به‌دست می‌آوریم.



گیریم m جرم هر اتم باشد، و اندازهٔ نیروی بین دو اتم k برابر مقدار کاهش فاصلهٔ بین آنها باشد.



به‌ازای بردار تغییر مکان $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶)$، مکان جدید اتمها را با P'، Q' و R' نشان می‌دهیم. با استفاده از شکل، تفاضل طولهای QR و $Q'R'$ عبارت است از

$$(x_۴ + x_۵) + \frac{۱}{۲}(x_۳ + x_۶)$$

(همواره فرض می‌کنیم که $x_۱$، . . . ، $x_۶$ در مقایسه با فاصلهٔ بین اتمها خیلی کوچک هستند و لذا از جملات درجهٔ ۲ صرف‌نظر می‌کنیم.)

به همین ترتیب داریم

$$PR - P'R' = (x_۱ + x_۶) + \frac{۱}{۲}(x_۲ + x_۵)$$

$$PQ - P'Q' = (x_۲ + x_۳) + \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۴)$$

بنابراین نیروی وارد بر مولکول در نقطهٔ P در جهت محور اول عبارت است از

$$-k(PR - P'R') = -k(x_۱ + x_۶) - \frac{۱}{۲}k(x_۲ + x_۵)$$

پس

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_۱ = -(x_۱ + x_۶) - \frac{۱}{۲}(x_۲ + x_۵)$$

به همین طریق داریم

$$\frac{m}{k}\ddot{x}_۲ = -(x_۲ + x_۳) - \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۴)$$

معادلات مشابهی نیز برای $\ddot{x}_۳$، ... ، $\ddot{x}_۶$ حاصل می‌شود. بنابراین ماتریس A که به‌ازای آن داریم $\ddot{x} = xA$ عبارت است از

$$A = \frac{-k}{m}\begin{pmatrix} ۱ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱/۲ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱/۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱/۲ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱/۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱/۲ & ۱/۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

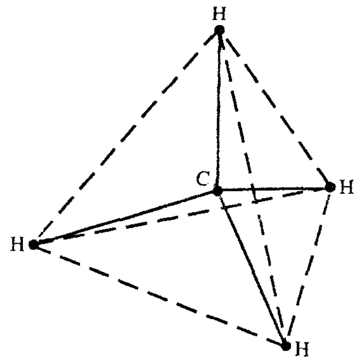
باید نشان دهید که بردارهایی که در ۱۸.۳۰ ارائه دادیم درواقع بردارهای ویژهٔ A هستند.

۱۹.۳۰ تذکر در مثال ۱۷.۳۰، χ سرشت $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^۶$ چنین بود

$$\chi = \chi_۱ + \chi_۲ + ۲\chi_۳$$

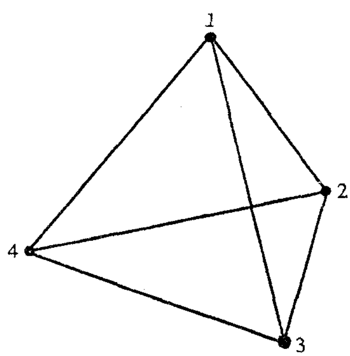
تمام بردارهای مخالف صفر در مؤلفه‌های همگن $\chi_۱$ و $\chi_۲$ مدهای طبیعی را به‌دست می‌دادند، زیرا این مؤلفه‌های همگن تحویل‌ناپذیر بودند (نتیجهٔ ۱۴.۳۰ را ببینید). $V_{\chi_۳}$، یعنی مؤلفهٔ همگن $\chi_۳$ تحویل‌پذیر بود، ولی توانستیم آن را به‌صورت مجموع دو زیرفضا متشکل از بردارهای ویژه بنویسیم (این زیرفضاها در ۱۸.۳۰(۲) و ۱۸.۳۰(۴) داده شده‌اند) زیرا $V_{\chi_۳} \cap \mathbb{R}^۶_{\text{vib}}$ $\mathbb{R}G$ـزیرمدول Aـناوردای $V_{\chi_۳}$ و متمایز از $\{۰\}$ و $V_{\chi_۳}$ بود. به این ترتیب روشی در دست داریم که گاهی در مورد مؤلفه‌های همگن تحویل‌پذیر به‌کار می‌آید. در مثال بعدی، وضعیت پیچیده‌تر است.

۲۰.۳۰ مثال مدهای طبیعی مولکول متان یعنی $CH_۴$ را بررسی می‌کنیم.



در مثال ۲.۳۰ گروه تقارنهای این مولکول، G، را تعیین کردیم، و ثابت کردیم که G با $S_۴$ یکریخت است. رئوس چهاروجهی منتظم را، همان‌طورکه در شکل زیر نشان داده شده است، ۱، ۲، ۳، ۴ می‌نامیم و G را با $S_۴$ یکی می‌گیریم؛ بنابراین، مثلاً، دورانهای حول محور قائمی که از ۱ می‌گذرد به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند

$$۱, (۲\ ۳\ ۴), (۲\ ۴\ ۳)$$



برای استفادهٔ هرچه بیشتر از تقارن مولکول متان، در هر اتم هیدروژن محورهای مختصات را در امتداد یالهای چهاروجهی انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم $v_{۱۲}$، $v_{۱۳}$، $v_{۱۴}$ بردارهای یکه‌ای باشند که ابتدایشان رأس ۱ و جهتشان به‌ترتیب جهت یالهای ۱۲، ۱۳، ۱۴ باشد؛ به همین نحو فرض می‌کنیم $v_{۲۱}$، $v_{۲۳}$، $v_{۲۴}$ بردارهای یکه‌ای باشند که ابتدایشان رأس ۲ و جهتشان به ترتیب

جهت یالهای ۲۱، ۲۳، ۲۴ باشد، و در مورد سایر رئوس نیز به همین نحو عمل می‌کنیم، بنابراین مجموعاً دوازده بردار v_{ij} داریم.

اکنون کار جدیدی انجام می‌دهیم، به این صورت که چهار بردار یکهٔ $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$ و $w_۴$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری که ابتدای هر w_i اتم کربن باشد، و جهت آن به طرف رأس i باشد. $(۱ \leq i \leq ۴)$ چون $w_۱ + w_۲ + w_۳ + w_۴ = ۰$، این چهار بردار فضایی ۳بعدی پدید می‌آورند.

گیریم V فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ با پایهٔ

$$v_{۱۲}, v_{۱۳}, v_{۱۴}, v_{۲۱}, v_{۲۳}, v_{۲۴}, v_{۳۱}, v_{۳۲}, v_{۳۴}, v_{۴۱}, v_{۴۲}, v_{۴۳}$$

باشد، و فرض می‌کنیم W فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ باشد که توسط بردارهای $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$، $w_۴$ پدید می‌آید. در این صورت $V \cong \mathbb{R}^{۱۲}$، $W \cong \mathbb{R}^۳$ و V و W $\mathbb{R}G$ـمدول هستند. وظیفهٔ اصلی ما این است که $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای $V \oplus W = \mathbb{R}^{۱۵}$ را پیدا کنیم.

شرح عمل G روی V ساده است؛ به‌ازای $g \in G$ داریم

$$v_{ij}g = v_{ig,jg} \qquad \text{به‌ازای هر } i \text{ و } j$$

بنابراین عناصر G دوازده بردار پایهٔ V را به یکدیگر می‌فرستند، و سریعاً می‌توان مقادیر سرشت χ از V را به‌دست آورد.

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
χ	۱۲	۲	۰	۰	۰

به‌عنوان مثال، عنصر (۱ ۲) فقط بردارهای $v_{۳۴}$ و $v_{۴۳}$ از پایه را ثابت نگاه می‌دارد، عنصر (۱ ۲ ۳) تمام بردارهای پایه را حرکت می‌دهد؛ و غیره.

گروه G روی W چنین عمل می‌کند؛ به‌ازای $g \in G$ داریم

$$w_ig = w_{ig} \qquad (۱ \leq i \leq ۴)$$

با توجه به اینکه $w_۱ + \cdots + w_۴ = ۰$، سرشت ϕ از W به سادگی به‌دست می‌آید، که عبارت است از

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
ϕ	۳	۱	۰	−۱	−۱

طبق بخش ۱۸.۱، جدول سرشت $S_۴$ به‌صورتی است که در صفحهٔ بعد آمده است.

جدول سرشت $S_۴$

	۱	(۱ ۲)	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴)
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	-۱	۱	۱	-۱
$\chi_۳$	۲	۰	-۱	۲	۰
$\chi_۴$	۳	۱	۰	-۱	-۱
$\chi_۵$	۳	-۱	۰	-۱	۱

نتیجه می‌گیریم

$$\chi = \chi_۱ + \chi_۳ + ۲\chi_۴ + \chi_۵$$

$$\phi = \chi_۴$$

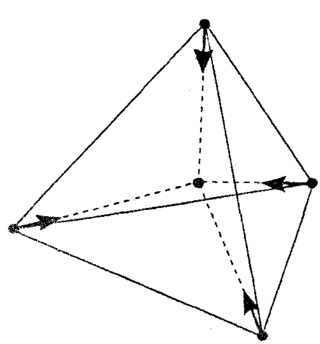
با اِعمال عناصر

$$\sum_{g\in G} \chi_i(g^{-۱})g \qquad (i = ۱, ۳, ۵, ۴)$$

بر $\mathbb{R}^{۱۵}$، $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهایی را با سرشتهای $\chi_۱$، $\chi_۳$، $\chi_۵$ و $۳\chi_۴$ به‌دست می‌آوریم (۲۷.۱۴ را ببینید).
$\mathbb{R}G$ـزیرمدولی چون $W_۱$ با سرشت $\chi_۱$ توسط

$$\sum_{i,j} v_{ij}$$

پدید می‌آید، و از آنجا مد طبیعی انقباضی‌انبساطی به‌دست می‌آید:



حال $\mathbb{R}G$ـزیرمدولی چون W_5 با سرشت χ_5 را مشخص می‌کنیم. قرار می‌دهیم

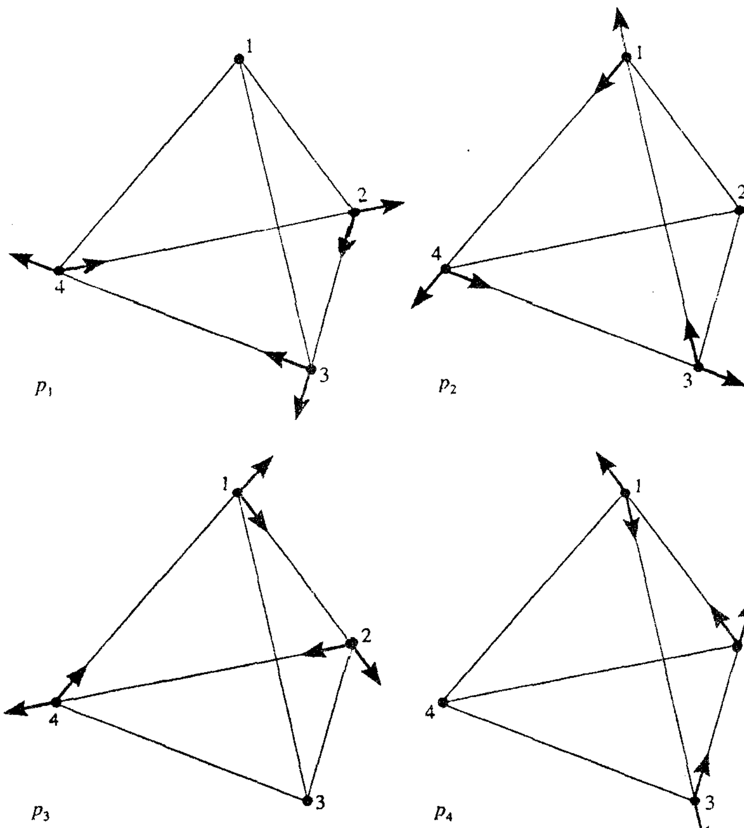
$$p_1 = (v_{23} - v_{32}) + (v_{34} - v_{43}) + (v_{42} - v_{24})$$

$$p_2 = (v_{31} - v_{13}) + (v_{14} - v_{41}) + (v_{43} - v_{34})$$

$$p_3 = (v_{12} - v_{21}) + (v_{41} - v_{14}) + (v_{24} - v_{42})$$

$$p_4 = (v_{21} - v_{12}) + (v_{13} - v_{31}) + (v_{32} - v_{23})$$

بردار p_i دوران حول محوری را که از رأس i و مرکز ثقل چهاروجهی می‌گذرد به‌دست می‌دهد.



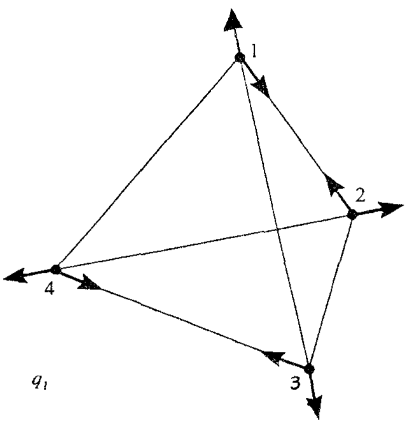
از روی شکل باید واضح باشد که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq 4$، و به‌ازای هر g از G، jای وجود دارد که به‌ازای آن $p_i g = \pm p_j$. بنابراین اگر قرار دهیم $W_5 = \mathrm{sp}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ آنگاه W_5 $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V است. چون $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ پس $\dim W_5 = 3$. نشان دهید که سرشت W مساوی χ_5 است. $\mathbb{R}G$ـمدول W_5 زیرمدوں دورانهاست. (به‌عنوان مثال

شکل مربوط به p_4 را با شکل مربوط به بردار دورانی v در مثال ۱۷.۳۰ مقایسه کنید.)

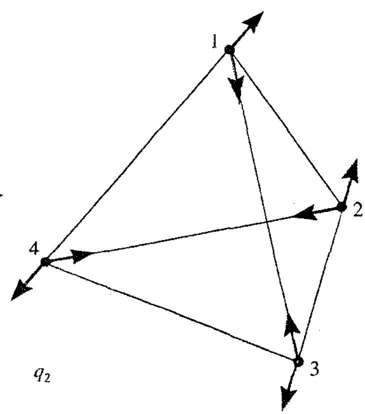
اکنون $\mathbb{R}G$ـزیرمدولی چون W_3 از V را با سرشت χ_3 می‌سازیم. قرار می‌دهیم

$$q_1 = (v_{12} + v_{21}) + (v_{34} + v_{43}) - (v_{13} + v_{31}) - (v_{24} + v_{42})$$
$$q_2 = (v_{13} + v_{31}) + (v_{24} + v_{42}) - (v_{14} + v_{41}) - (v_{23} + v_{32})$$
$$q_3 = (v_{14} + v_{41}) + (v_{23} + v_{32}) - (v_{12} + v_{21}) - (v_{34} + v_{43})$$

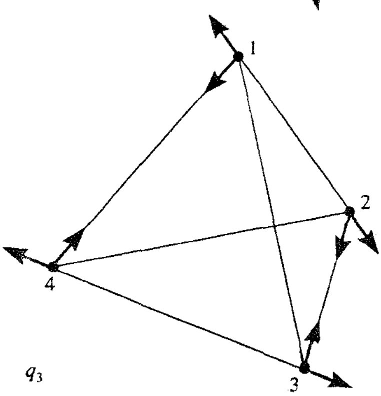
(هر q_i متناظر با یک جفت یال متنافر است.)



q_1



q_2



q_3

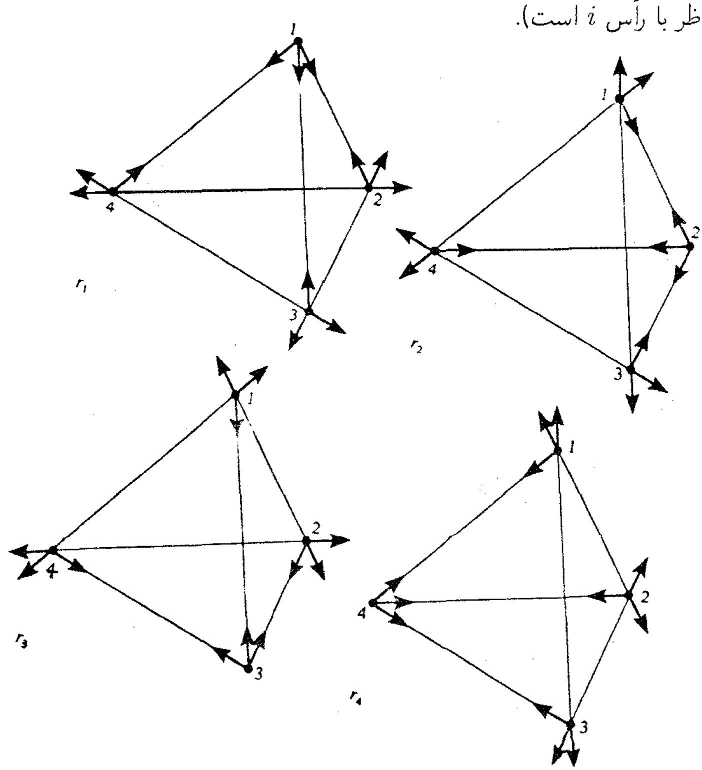
به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq 4$، و هر g از G، jای وجود دارد که به‌ازای آن $q_i g = \pm q_j$. قرار می‌دهیم $W_3 = \mathrm{sp}(q_1, q_2, q_3)$. دراین صورت W_3 $\mathbb{R}G$ـزیرمدول V است. چون $q_1 + q_2 + q_3 = 0$، پس بعد W_3 مساوی ۲ است، و می‌توان نتیجه گرفت که سرشت W_3 مساوی χ_3 است.

در $\mathbb{R}G$ـزیرمدولهای W_1، W_5 و W_3 که تاکنون پیدا کرده‌ایم، طبق نتیجهٔ ۱۴.۳۰، تمام بردارهای مخالف صفر بردار ویژهٔ A هستند.

اکنون به مؤلفهٔ همگن $(V \oplus W)_{\chi_4}$ از $\mathbb{R}^{15}$ می‌رسیم. بردارهای r_1، r_2، r_3، r_4 را چنین تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
r_1 &= (v_{12}+v_{21}) + (v_{13}+v_{31}) + (v_{14}+v_{41}) \\
&\quad - (v_{23}+v_{32}) - (v_{24}+v_{42}) - (v_{34}+v_{43}) \\
r_2 &= (v_{12}+v_{21}) + (v_{23}+v_{32}) + (v_{24}+v_{42}) \\
&\quad - (v_{13}+v_{31}) - (v_{14}+v_{41}) - (v_{34}+v_{43}) \\
r_3 &= (v_{13}+v_{31}) + (v_{23}+v_{32}) + (v_{34}+v_{43}) \\
&\quad - (v_{12}+v_{21}) - (v_{14}+v_{41}) - (v_{24}+v_{42}) \\
r_4 &= (v_{14}+v_{41}) + (v_{24}+v_{42}) + (v_{34}+v_{43}) \\
&\quad - (v_{13}+v_{31}) - (v_{12}+v_{21}) - (v_{23}+v_{32})
\end{aligned}
$$

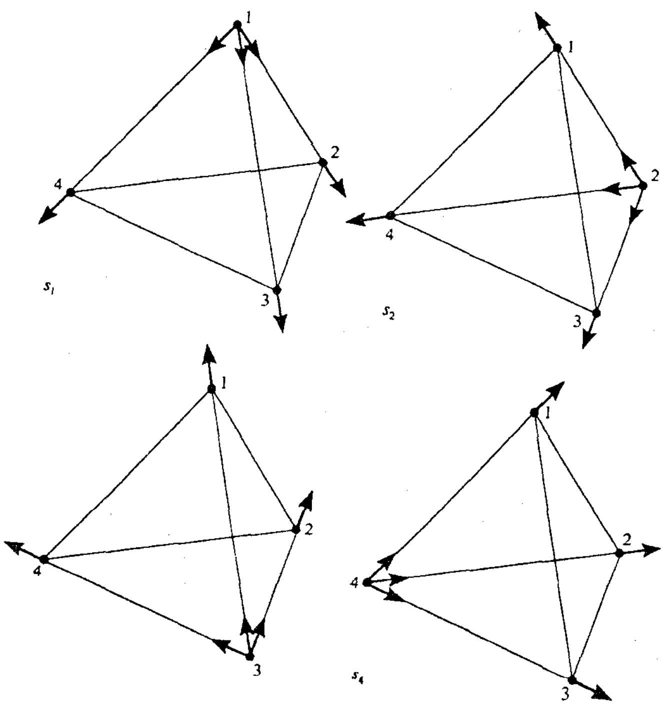
(بردار r_i متناظر با رأس i است).



به‌ازای هر g از G و هر i که $۱ \le i \le ۴$ داریم $r_ig = r_{ig}$. بنابراین هر عضو G بردارهای $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ را به یکدیگر می‌فرستد. توجه کنید که $r_۱ + r_۲ + r_۳ + r_۴ = ۰$ و لذا بردارهای $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ $\mathbb{R}G$ـزیرمدولی سه‌بعدی چون $W_۴$ از V پدید می‌آورند. سرشت $W_۴$ مساوی $\chi_۴$ است (گزارهٔ ۲۴.۱۳ را ببینید).

حال بردارهای $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$، $s_۴$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$s_۱ = (v_{۱۲} + v_{۱۳} + v_{۱۴}) - (v_{۲۱} + v_{۳۱} + v_{۴۱})$$
$$s_۲ = (v_{۲۱} + v_{۲۳} + v_{۲۴}) - (v_{۱۲} + v_{۳۲} + v_{۴۲})$$
$$s_۳ = (v_{۳۱} + v_{۳۲} + v_{۳۴}) - (v_{۱۳} + v_{۲۳} + v_{۴۳})$$
$$s_۴ = (v_{۴۱} + v_{۴۲} + v_{۴۳}) - (v_{۱۴} + v_{۲۴} + v_{۳۴})$$



داریم

$$s_ig = s_{ig} \qquad (g \in G, ۱ \le i \le ۴)$$
$$s_۱ + s_۲ + s_۳ + s_۴ = ۰$$

و لذا $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$، $s_۴$ $\mathbb{R}G$ـزیرمدولی سه بعدی چون $W'_۴$ از V با سرشت $\chi_۴$ پدید می‌آورند.

با توجه به اینکه بردارهای $w_۱$، $w_۲$، $w_۳$، $w_۴$ فضای W را پدید می‌آورند، داریم

$$w_i g = w_{ig} \qquad (g \in G, ۱ \leq i \leq ۴)$$
$$w_۱ + w_۲ + w_۳ + w_۴ = ۰$$

و سرشت W مساوی $\chi_۴$ است. مجموع $W_۴$، $W'_۴$ و W مستقیم است، و لذا

$$(V \oplus W)_{\chi_۴} = W_۴ \oplus W'_۴ \oplus W$$

اکنون بررسی مولکول متان را موقتاً کنار می‌گذاریم و به حالت ساده‌تری می‌پردازیم که مولکول دارای چهار اتم یکسان در هر رأس چهاروجهی است و در مرکز چهاروجهی اتمی وجود ندارد. در این حالت، فضای W وارد محاسبات نمی‌شود، و می‌توانیم $V_{\chi_۴}$ را به‌طریق زیر به $W_۴ \oplus W'_۴$ تجزیه کنیم

۲۱.۳۰ (۱) بردارهای $r_۱ - ۲s_۱$، $r_۲ - ۲s_۲$، $r_۳ - ۲s_۳$، $r_۴ - ۲s_۴$ فضای سه بعدی مدهای انتقالی را پدید می‌آورند.

(۲) بردارهای $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ زیرفضای $V_{\chi_۴} \cap \mathbb{R}^{۱۲}_{\text{vib}}$ از $V_{\chi_۴}$ را پدید می‌آورند، و لذا فضای ۳بعدی دیگر که متشکل از بردارهای ویژه است به‌دست می‌آید (تذکر ۱۹.۳۰ را ببینید). مد طبیعی $(\sin \omega t) r_۱$ را گاهی «مد چتری» می‌نامند. برای اینکه وجه تسمیهٔ آن را بدانید، به تصویر بردار $r_۱$ نگاه کنید!

اکنون به بررسی مولکول متان برمی‌گردیم.

وظیفه‌ای که در مقابل خود داریم این است که بردارهای ویژهٔ A را در

$$(V \oplus W)_{\chi_۴} = W_۴ \oplus W'_۴ \oplus W$$

پیدا کنیم. حل این مسأله، درواقع بستگی به ثابتهایی دارد که در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند، لذا این کار را تنها با استفاده از نظریهٔ نمایشها نمی‌توانیم انجام دهیم. چون $\dim(V \oplus W)_{\chi_۴} = ۹$، محاسبهٔ مستقیم بردارهای ویژهٔ A در $(V \oplus W)_{\chi_۴}$ خیلی دشوار است. بنابراین شرح می‌دهیم که چگونه این مسأله را به مسألهٔ ساده‌تر محاسبهٔ بردارهای ویژهٔ یک ماتریس ۳×۳ تبدیل کنیم.

فرض می‌کنیم H زیرگروهی از $S_۴$ باشد که متشکل از آن دسته جایگشتهایی است که عدد ۱ را ثابت نگاه می‌دارند. قرار می‌دهیم

$$U_۱ = \{v \in (V \oplus W)_{\chi_۴} : vh = v, \forall h \in H\}$$

چون به‌ازای هر $v \in V_{\chi_۴}$ و هر $h \in H$ داریم $(vh)A = (vA)h$ نتیجه می‌گیریم که $U_۱$ Aـناورداست.

محاسبه نشان می‌دهد که

$$\langle ۳\chi_۴ \downarrow H, ۱_H \rangle_H = ۳$$

و لذا $\dim U_۱ = ۳$. اما به‌ازای هر $h \in H$ داریم $r_۱ h = r_۱$، $s_۱ h = s_۱$ و $w_۱ h = w_۱$. بنابراین

$$U_۱ = \mathrm{sp}(r_۲, s_۱, w_۱)$$

به‌محض اینکه معادلات حرکت، و در نتیجه ماتریس A، به‌دست آمد، می‌توان ماتریس عمل A را روی $r_۱$، $s_۱$، $w_۱$، که ماتریسی ۳×۳ مانند B است، محاسبه کرد (تمرین ۵.۳۰ را ببینید). در این صورت بردارهای ویژهٔ B سه بردار از بردارهای ویژهٔ A را به‌دست می‌دهد.

به‌علاوه،

$$r_۱(۱\ ۲) = r_۲, \qquad s_۱(۱\ ۲) = s_۲, \qquad w_۱(۱\ ۲) = w_۲$$

و چون به‌ازای هر $v \in (V + W)_{\chi_۴}$ و هر $g \in G$ داریم $(vg)A = (vA)g$، فضای $U_۲$ با تعریف

$$U_۲ = \mathrm{sp}(r_۲, s_۲, w_۲)$$

Aـناورداست، و ماتریس عمل A روی $r_۲$، $s_۲$، $w_۲$ دوباره B می‌شود. نظیر همین مطلب در مورد $U_۳$ که

$$U_۳ = \mathrm{sp}(r_۳, s_۳, w_۳)$$

درست است. بنابراین با محاسبهٔ بردارهای ویژهٔ ماتریس ۳×۳ی B نه بردار ویژهٔ A به‌دست می‌آیند که پایه‌ای برای $(V \oplus W)_{\chi_۴}$ تشکیل می‌دهند.

یکی از بردارهای ویژهٔ عمل A روی $r_۱$، $s_۱$، $w_۱$، یعنی بردار انتقال زیر، به سادگی پیدا می‌شود

$$r_۱ - ۲s_۱ + ۳\cos\vartheta w_۱$$

که در آن ϑ زاویهٔ بین یکی از یالهای چهاروجهی و خطی است که یک رأس این یال را به مرکز ثقل چهاروجهی وصل می‌کند. به این ترتیب زیرمدول انتقالها یعنی $\mathrm{sp}(r_1 - 2s_1 + 3\cos\vartheta w_1, r_2 - 2s_2 + 3\cos\vartheta w_2, r_3 - 2s_3 + 3\cos\vartheta w_3)$ را به‌دست می‌آوریم.

بنابراین، با استفاده از نظریهٔ نمایشها، مسألهٔ اصلی که یافتن بردارهای ویژهٔ ماتریس 15×15 A بود به مسألهٔ یافتن دو بردار از بردارهای ویژهٔ یک ماتریس 3×3 تبدیل شده است. بعید است که بتوانیم کاربرد دیگری از نظریهٔ نمایشها بیابیم که جالبتر از این کاربرد باشد تا این کتاب را با آن به پایان رسانیم.

خلاصهٔ فصل ۳۰

۱. گروه تقارنهای یک مولکول n اتمی متشکل از آن دسته درونریختیهای حافظ فاصلهٔ $\mathbb{R}^3$ است که هر اتم را به اتم مشابه آن می‌فرستند.

۲. معادلات حرکت مولکول به شکل

$$\ddot{x} = xA$$

است، که $x \in \mathbb{R}^{3n}$ و ماتریس $3n \times 3n$ A دارای $3n$ بردار ویژهٔ خطی‌مستقل است.

۳. اگر u بردار ویژهٔ A با مقدار ویژهٔ $-\omega^2$ باشد آنگاه $x = \sin(\omega t + \beta)u$ (یا $x = (t+\beta)u$ در حالت $\omega = 0$) جوابی برای معادلات حرکت است، و مد طبیعی نامیده می‌شود. هر جوابی ترکیب خطی مدهای طبیعی است.

۴. فضای $\mathbb{R}^{3n}$ متشکل از بردارهای تغییر مکان، $\mathbb{R}G$ـمدول است. به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in \mathbb{R}^{3n}$ داریم $(xg)A = (xA)g$.

۵. برای تعیین بردارهای ویژهٔ A (و از آنجا تعیین تمام جوابهای معادلات حرکت)، کافی است بردارهای ویژهٔ A را وقتی که A به هر کدام از مؤلفه‌های همگن V_{χ_i} از $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^{3n}$ تحدید می‌شود پیدا کنیم. اگر V_{χ_i} تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه هر بردار مخالف صفر V_{χ_i} بردار ویژهٔ A است.

تمرینات فصل ۳۰

۱. فرض می‌کنیم که $b \in O(\mathbb{R}^3)$ و قرار می‌دهیم $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$، $e_3 = (0,0,1)$.

الف) نشان دهید که ماتریس b نسبت به پایهٔ e_1، e_2، e_3 از $\mathbb{R}^3$، که آن را B می‌نامیم، در رابطهٔ $BB^t = I$ صدق می‌کند (که B^t ترانهادهٔ B است). نتیجه بگیرید که $\det B = \pm 1$.

ب) قرار می‌دهیم $C = (\det B)B$. احکام زیر را به ترتیب ثابت کنید

(i) یکی از مقادیر ویژهٔ C حقیقی است،

(ii) یکی از مقادیر ویژهٔ C مثبت است،

(iii) ۱ مقدار ویژهٔ C است.

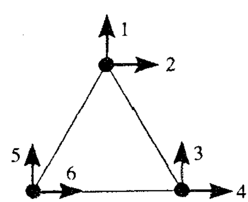
ج) از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید که هرگاه $\det B = ۱$، b دوران است و در غیر این صورت $-b$ دوران است.

د) نشان دهید که اگر b دورانی به اندازهٔ ϕ حول محوری باشد آنگاه $\mathrm{tr}B = ۱ + ۲\cos\phi$.

۲. فرض کنیم که G گروه تقارنهای یک مولکول در $\mathbb{R}^۳$ است. نشان دهید که مجموع سرشت زیرمدول انتقالها، χ_T، و سرشت زیرمدول دورانها، χ_R، به‌ازای $g \in G$ عبارت است از

$$(\chi_T + \chi_R)(g) = \begin{cases} ۲(۱ + ۲\cos\phi) & \text{هرگاه } g \text{ دوران به‌اندازهٔ } \phi \text{ حول یک محور باشد} \\ ۰ & \text{هرگاه } g \text{ دوران نباشد} \end{cases}$$

۳. مولکول سه اتمی مثال ۱۷.۳۰ را در نظر بگیرید. محورهای مختصات را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. معادلات حرکت $\ddot{x} = xA$ را نسبت به این محورها به‌دست آورید، و ثابت کنید که A متقارن است. (پارگراف قبل از گزارهٔ ۷.۳۰ را ببینید.)



۴. فضایی را که توسط بردارهای $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ مذکور در مثال ۲۰.۳۰ پدید می‌آید در نظر بگیرید. پایه‌ای ساده‌تر از آنچه ما به‌کار برده‌ایم برای این فضا پیدا کنید. کدام خاصیت بردارهای $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ باعث شد که ما از این بردارها استفاده کنیم.

۵. منظور از این تمرین آن است که معادلات حرکت مولکول متان را بیابید، و لذا ماتریس ۳ × ۳ی B را که در آخر مثال ۲۰.۳۰ آمد به‌طور صریح به‌دست آورید.

رئوس چهاروجهی را ۱، ۲، ۳، ۴ می‌نامیم و فرض می‌کنیم ۰ نشان‌دهندهٔ مرکز ثقل چهاروجهی باشد. ۱۵ بردار یکهٔ تغییر مکان، یعنی بردارهای

$$v_{۱۲}, v_{۱۳}, \cdots, v_{۴۳}, w_۱, w_۲, w_۳$$

را که در مثال ۲۰.۳۰ مشخص شدند به‌کار گیرید و فرض کنید بردار مکان مولکول به‌صورت زیر باشد

$$\sum_{i\neq j} x_{ij}v_{ij} + \sum_{i=1}^{3} y_i w_i$$

الف) ثابت کنید که $\cos(\angle 0 12) = \sqrt{2/3}$ و $\cos(\angle 1 0 2) = -1/3$.

ب) ثابت کنید که اندازهٔ کاهش طول یال ۱۲ نسبت به طول اولیه‌اش مساوی است با

$$x_{12} + x_{21} + \frac{1}{2}(x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24})$$

نظیر همین حکم را در مورد یالهای ۱۳، ۱۴، ۲۳، ۲۴، ۳۴ ثابت کنید.

همچنین، نشان دهید که طول یال ۰۱ به اندازهٔ

$$\sqrt{2/3}(x_{12} + x_{13} + x_{14}) + y_1 - \frac{1}{3}(y_2 + y_3)$$

کاهش یافته است، نظیر این حکم را در مورد یالهای ۰۲ و ۰۳ ثابت کنید.

بالاخره، نشان دهید که طول یال ۰۴ به‌اندازهٔ

$$\sqrt{2/3}(x_{41} + x_{42} + x_{43}) - \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

کاهش یافته است.

ج) گیریم m_1 جرم اتم هیدروژن و m_2 جرم اتم کربن باشد. فرض کنیم که اندازهٔ نیروی بین اتمهای هیدروژن k_1 برابر کاهش فاصلهٔ بین آنها باشد، و اندازهٔ نیروی بین یک اتم هیدروژن و اتم کربن k_2 برابر کاهش فاصلهٔ بین آنها باشد.

ثابت کنید که

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_{12} = &-k_1[x_{12} + x_{21} + \frac{1}{2}(x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24})] \\ &- \frac{1}{3}k_2[x_{12} + x_{13} + x_{14} + \sqrt{3/2}(y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3)] \end{aligned}$$

نظیر این حکم را در مورد $\ddot{x}_{13}$، $\ddot{x}_{14}$، $\ddot{x}_{21}$، $\ddot{x}_{23}$، $\ddot{x}_{24}$، $\ddot{x}_{31}$، $\ddot{x}_{32}$، $\ddot{x}_{34}$ ثابت کنید.

همچنین ثابت کنید که

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_{41} = &-k_1[x_{14} + x_{41} + \frac{1}{2}(x_{42} + x_{43} + x_{12} + x_{13})] \\ &- \frac{1}{3}k_2[x_{41} + x_{42} + x_{43} - \frac{1}{3}\sqrt{3/2}(y_1 + y_2 + y_3)] \end{aligned}$$

نظیر این حکم را در مورد $\ddot{x}_{۴۲}$ و $\ddot{x}_{۴۳}$ ثابت کنید.

بالاخره، ثابت کنید

$$m_{۲}\ddot{y}_{۱} = -k_{۲}[\sqrt{۲/۳}(x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} - x_{۴۱} - x_{۴۲} - x_{۴۳}) + \frac{۴}{۳}y_{۱}]$$

نظیر این حکم را در مورد $\ddot{y}_{۲}$ و $\ddot{y}_{۳}$ ثابت کنید.

د) معادلات قسمت (ج) ماتریس ۱۵×۱۵ A از معادلهٔ حرکت $\ddot{x} = xA$ را تعیین می‌کند. ثابت کنید که بردارهای $\sum_{i,j} v_{ij}$، $p_{۱}$، $p_{۲}$، $p_{۳}$، $q_{۱}$، $q_{۲}$ که در مثال ۲۰.۳۰ آمده‌اند بردارهای ویژهٔ A هستند.

هـ) درایه‌های b_{ij} از ماتریس ۳×۳ی B را که در روابط زیر صدق می‌کنند پیدا کنید

$$r_{۱}A = b_{۱۱}r_{۱} + b_{۱۲}s_{۱} + b_{۱۳}w_{۱}$$

$$s_{۱}A = b_{۲۱}r_{۱} + b_{۲۲}s_{۱} + b_{۲۳}w_{۱}$$

$$w_{۱}A = b_{۳۱}r_{۱} + b_{۳۲}s_{۱} + b_{۳۳}w_{۱}$$

بردارهای $r_{۱}$، $s_{۱}$، $w_{۱}$ همانها هستند که در مثال ۲۰.۳۰ آمده‌اند.

و) ثابت کنید که بردار

$$(۱, -۲, \sqrt{۶})$$

بردار ویژهٔ B است.

۶. فرض کنید مولکولی چهار اتم یکسان دارد و این اتمها در رئوس یک مربع قرار دارند. فرض کنید که راستای نیروهای داخلی تنها در امتداد اضلاع مربع است.

الف) مدهای طبیعی مولکول را پیدا کنید.

ب) معادلات حرکت $\ddot{x} = xA$ را به‌دست آورید و نشان دهید که بردارهایی که در قسمت (الف) پیدا کردید درواقع بردارهای ویژهٔ A هستند.

۷. در این تمرین، روشی برای ساده‌کردن کار یافتن بردارهای ویژهٔ A در حالتی که مؤلفه همگن V_{χ_i} تحویل‌پذیر است به‌دست می‌آوریم. (۱۵.۳۰(۵) را ببینید.) فرض می‌کنیم که χ_i سرشت $\mathbb{R}G$ـمدول تحویل‌ناپذیری است که به‌عنوان $\mathbb{C}G$ـمدول نیز تحویل‌ناپذیر است.

فرض کنیم که $V_{\chi_i} = U_{۱} \oplus \cdots \oplus U_m$، که U_iها $\mathbb{R}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیر یکریخت‌اند. مسأله را به مسألهٔ یافتن بردارهای ویژهٔ یک ماتریس $m \times m$ تبدیل می‌کنیم.

گیریم ϑ_i، به‌ازای $۱ \leq i \leq m$، $\mathbb{R}G$ـیکریختی از $U_{۱}$ به U_i باشد.

الف) ثابت کنید که به‌ازای هر عضو مخالف صفر u از U_1،

$$\mathrm{sp}(u\vartheta_1, \cdots, u\vartheta_m)$$

فضای برداری Aـناوردایی با بعد m است.

(راهنمایی: ترکیب تابع $w \to wA$ با یک تصویرگر را در نظر بگیرید و از تمرین ۸.۲۳ استفاده کنید.)

ب) گیریم A_u ماتریس درونریختی $w \to wA$ از $\mathrm{sp}(u\vartheta_1, \cdots, u\vartheta_m)$ نسبت به پایهٔ $u\vartheta_1$، ... ، $u\vartheta_m$ باشد. ثابت کنید که اگر u و v عناصر مخالف صفری از U_1 باشند آنگاه $A_u = A_v$.

ج) فرض کنید که بردارهای ویژهٔ ماتریس $m \times m$ A_u معلوم‌اند. چگونگی یافتن بردارهای ویژهٔ A را در V_{χ} نشان دهید.

حل تمرینات

فصل ۱

۱. توجه کنید که هر زیرگروه G نرمال است، زیرا G ابلی است: به‌علاوه $G \neq \{1\}$ زیرا G ساده است. گیریم g عضوی غیرهمانی از G است. در این صورت $\langle g \rangle$ زیرگروه نرمال G است، لذا $G = \langle g \rangle$. اگر G نامتناهی باشد آنگاه $\langle g^2 \rangle$ زیرگروه نرمالی متمایز از G و $\{1\}$ خواهد بود؛ از این‌رو G متناهی است. گیریم عدد اول p مرتبهٔ G را عاد کند. در این صورت $\langle g^p \rangle$ زیرگروه نرمالی از G است که با G مساوی نیست. بنابراین $g^p = 1$، و لذا G گروهی دوری با مرتبهٔ اول است.

۲. چون G ساده است و $\mathrm{Ker}\vartheta \lhd G$ پس $\mathrm{Ker}\vartheta = \{1\}$ یا $\mathrm{Ker}\vartheta = G$. اگر $\mathrm{Ker}\vartheta = \{1\}$ آنگاه ϑ یکریختی است، و اگر $\mathrm{Ker}\vartheta = G$ آنگاه $H = \{1\}$.

۳. ابتدا توجه کنید که $G \cap A_n = \{g \in G : \text{زوج است } g\}$ ، و لذا $G \cap A_n \lhd G$. چون $G \cap A_n \neq G$، عضوی چون $h \in G$ وجود دارد به‌طوری که $h \notin A_n$. به‌ازای هر g فرد از G داریم $g = (gh^{-1})h \in (G \cap A_n)h$. بنابراین $G \cap A_n$ و $(G \cap A_n)h$ تنها هم‌مجموعه‌های راست $G \cap A_n$ در G هستند و لذا $G/(G \cap A_n) \cong C_2$.

۴. الف) با استفاده از روش مثال ۴.۱، به سادگی می‌توان ثابت کرد که ϕ و ψ همریختی هستند. $\mathrm{Ker}\phi = \{1, a^2\}$ و $\mathrm{Ker}\psi = \{1, c^2\}$.

ب) از آنجا که $b^2\lambda = I$ اما $(b\lambda)^2 = Y^2 = -I$ نتیجه می‌شود که λ همریختی نیست. باز هم می‌توان از روش مثال ۴.۱ استفاده کرد و نشان داد که μ همریختی است. همچنین $\mathrm{Ker}\mu = \{1\}$ و $\mathrm{Im}\mu = L$، لذا μ یکریختی است.

۵. قرار دهید

$$D_{4m} = \langle a, b : a^{2m} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$
$$D_{2m} = \langle c, d : c^m = d^2 = 1, d^{-1}cd = c^{-1} \rangle$$

که m فرد است. عناصر $D_{2m} \times C_2$ عبارت‌اند از

$$(c^i d^j, (-1)^k)$$

که $0 \le i \le m-1$، $0 \le j \le 1$، $0 \le k \le 1$. قرار دهید $x = (c^{(m+1)/2}, -1)$ و $y = (d, 1)$. نشان دهید که

$$y^{-1}xy = x^{-1} \quad \text{و} \quad x^{2m} = y^2 = 1$$

طبق مثال ۴.۱، تابع $\vartheta : D_{4m} \to D_{2m} \times C_2$ با ضابطهٔ

$$\vartheta : a^i b^j \to x^i y^j \quad (0 \le i \le 2m-1, 0 \le j \le 1)$$

همریختی است. چون $\mathrm{Im}\vartheta = \langle x, y \rangle$ پس $\mathrm{Im}\vartheta$ شامل

$$x^m = (1, -1) \quad \text{و} \quad x^2 = (c, 1)$$

است و لذا $\mathrm{Im}\vartheta = D_{2m} \times C_2$. از آنجا که $|D_{2m} \times C_2| = |D_{4m}|$ نتیجه می‌گیریم که ϑ یکریختی است.

۶. الف) قرار می‌دهیم $G = \langle a \rangle$ و فرض می‌کنیم که $1 \neq H \le G$. ابتدا توجه کنید که عددی صحیح چون $i > 0$ وجود دارد به‌قسمی که $a^i \in H$. k را کوچکترین عدد صحیحی می‌گیریم که $k > 0$ و $a^k \in H$. اگر $1 \neq a^j \in H$ آنگاه $j = qk + r$ که q و r اعداد صحیح هستند و $0 \le r < k$. از این‌رو $a^r = a^j a^{-qk} = a^j (a^k)^{-q} \in H$. چون $r < k$ پس $r = 0$. بنابراین $a^j = a^{kq}$ و لذا $H = \langle a^k \rangle$؛ بنابراین H دوری است.

ب) فرض کنیم که $G = \langle a \rangle$ و $|G| = dn$. اگر $g \in G$ و $g^n = 1$ آنگاه $g = a^j$ که j عددی صحیح است و $dn | jn$؛ لذا $d | j$؛ و از این‌رو $g \in \langle a^d \rangle$. نتیجه می‌شود که

$$\{g \in G : g^n = 1\} = \langle a^d \rangle$$

که گروهی دوری با مرتبهٔ n است.

ج) اگر x و y عناصری با مرتبهٔ n در گروه دوری متناهی G باشند آنگاه $x, y \in H$، که $H = \{g \in G : g^n = 1\}$. توجه کنید که $\langle x \rangle$ و $\langle y \rangle$ دارای مرتبهٔ n هستند، و بنا به قسمت (ب)، مرتبهٔ H مساوی n است. نتیجه می‌گیریم که

$$\langle x \rangle = H = \langle y \rangle$$

بنابراین $x \in \langle y \rangle$، و لذا x توانی از y است.

۷. گیریم G مجموعهٔ اعداد مختلط مخالف صفر باشد. اگر $g, h \in G$ آنگاه $gh \neq ۰$ و لذا $gh \in G$. اگر $g, h, k \in G$ آنگاه $(gh)k = g(hk)$؛ همچنین $۱ \in G$، و به‌ازای هر $g \in G$، $g = g۱ = ۱g$. بالاخره، اگر $g \in G$ آنگاه $g^{-۱} = ۱/g \in G$ و $g^{-۱}g = gg^{-۱} = ۱$. بنابراین G تحت عمل ضرب گروه است.

اگر H زیرگروهی از G با مرتبهٔ n باشد آنگاه به‌ازای هر $h \in H$، $h^n = ۱$ (زیرا طبق قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ h عدد n را عاد می‌کند). بنابراین

$$H \leq \{g \in G : g^n = ۱\} = \langle e^{۲\pi i/n} \rangle$$

چون $|H| = n = |\langle e^{۲\pi i/n} \rangle|$ نتیجه می‌گیریم که $H = \langle e^{۲\pi i/n} \rangle$.

۸. G را به زیرمجموعه‌های $\{g, g^{-۱}\}$، که $g \in G$، افراز می‌کنیم. اندازهٔ هر چنین زیرمجموعه‌ای ۱ یا ۲ است، و عضو همانی متعلق به زیرمجموعه‌ای با اندازهٔ ۱ است. بنابراین، اگر $|G|$ زوج باشد آنگاه عضوی چون $g \in G$ وجود دارد به‌قسمی که $g \neq ۱$ و اندازهٔ زیرمجموعهٔ $\{g, g^{-۱}\}$ مساوی ۱ است؛ لذا $g = g^{-۱}$ و مرتبهٔ g مساوی ۲ است.

۹. ماتریسهای A و B را چنین تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\pi/۴} & ۰ \\ ۰ & e^{-i\pi/۴} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $A^۸ = I$، $B^۲ = A^۴$ و $B^{-۱}AB = A^{-۱}$. این روابط نشان می‌دهند که هر عنصر گروه $\langle A, B \rangle$ به شکل A^jB^k است که $۰ \leq j \leq ۷$ و $۰ \leq k \leq ۱$. به‌علاوه

$$A^j = \begin{pmatrix} e^{ij\pi/۴} & ۰ \\ ۰ & e^{-ij\pi/۴} \end{pmatrix}, \quad A^jB = \begin{pmatrix} ۰ & e^{ij\pi/۴} \\ -e^{-ij\pi/۴} & ۰ \end{pmatrix}$$

از آنجا که این ماتریسها به‌ازای $۰ \leq j \leq ۷$ همگی متمایزند، $\langle A, B \rangle$ دارای مرتبهٔ ۱۶ است.

۱۰. فرض کنیم $|G : H| = ۲$ و $g \in G$. اگر $g \in H$ آنگاه $g^{-۱}Hg = H$. اگر $g \notin H$ آنگاه H و Hg دو هم‌مجموعهٔ راست H در G هستند، و H و gH دو هم‌مجموعهٔ چپ H در G هستند. بنابراین $Hg = gH$، و لذا باز هم $g^{-۱}Hg = H$. از این‌رو $H \lhd G$.

فصل ۲

۱. گیریم $u, w \in W$ و $\lambda \in F$. از آنجا که ϑ تبدیل خطی است داریم

$$(u\vartheta^{-۱} + w\vartheta^{-۱})\vartheta = (u\vartheta^{-۱})\vartheta + (w\vartheta^{-۱})\vartheta = u + w$$

$$(\lambda(w\vartheta^{-۱}))\vartheta = \lambda(w\vartheta^{-۱})\vartheta = \lambda w$$

از این‌رو $(u+w)\vartheta^{-1} = u\vartheta^{-1} + w\vartheta^{-1}$ و $(\lambda w)\vartheta^{-1} = \lambda(w\vartheta^{-1})$، لذا ϑ^{-1} تبدیل خطی است.

۲. $(۲) \Rightarrow (۱)$: اگر ϑ وارون‌پذیر باشد آنگاه ϑ یک‌به‌یک است و لذا $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$.

$(۳) \Rightarrow (۲)$: اگر $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$ آنگاه طبق (۱۲.۲) داریم $\dim(\mathrm{Im}\vartheta) = \dim V$، لذا $\mathrm{Im}\vartheta = V$ (طبق ۷.۲).

$(۱) \Rightarrow (۳)$: فرض کنیم که $\mathrm{Im}\vartheta = V$، لذا ϑ پوشاست. طبق (۱۲.۲)، $\mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$. اگر $u, v \in V$ و $u\vartheta = v\vartheta$ آنگاه $(u-v)\vartheta = 0$، لذا $u - v \in \mathrm{Ker}\vartheta = \{0\}$، و از این‌رو $u = v$. بنابراین ϑ یک‌به‌یک است. چون ϑ پوشا و یک‌به‌یک است پس وارون‌پذیر است.

۳. ابتدا فرض کنیم که $V = U \oplus W$. در این صورت $V = U + W$. گیریم $v \in U \cap W$. در این صورت $v = v + 0 = 0 + v$، بنابراین دو عبارت برای v داریم که هریک مجموع عضوی از U و عضوی از W هستند. از آنجا که چنین عبارتی باید منحصر به فرد باشد نتیجه می‌شود $v = 0$. بنابراین $U \cap W = \{0\}$.

اکنون فرض کنیم که $V = U + W$ و $U \cap W = \{0\}$. اگر $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ که $u_1, u_2 \in U$ و $w_1, w_2 \in W$، آنگاه $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$؛ از این‌رو $u_1 = u_2$ و $w_1 = w_2$. بنابراین $V = U \oplus W$.

۴. ابتدا فرض کنید که $V = U \oplus W$. اگر $v \in V$ آنگاه $v = u + w$ که $u \in U$ و $w \in W$؛ از آنجا که u ترکیب خطی u_1، ... ، u_r و w ترکیب خطی w_1، ... ، w_s است، نتیجه می‌شود که v ترکیب خطی u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s است. بنابراین بردارهای u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s فضای V را پدید می‌آورند. فرض کنیم که

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s = 0$$

که همهٔ λ_iها و μ_jها در F هستند. چون $V = U \oplus W$، عبارت $0 = 0 + 0$ عبارت منحصر به‌فردی برای 0 به‌صورت مجموع دو بردار U و W است و لذا

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s = 0$$

از آنجا که u_1، ... ، u_r استقلال خطی دارند، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، $\lambda_i = 0$؛ به همین نحو نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، $\mu_i = 0$. بنابراین بردارهای u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s استقلال خطی دارند و لذا پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند.

برعکس، فرض کنیم که u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s پایه‌ای برای V است. اگر $v \in U \cap W$ آنگاه $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s$ که $\lambda_i, \mu_j \in F$؛ از این تساوی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i و j، $\lambda_i = \mu_j = 0$ زیرا بردارهای u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s استقلال خطی دارند. بنابراین $v = 0$ و لذا $U \cap W = \{0\}$. به سادگی دیده می‌شود که $V = U + W$، لذا طبق تمرین ۳، $V = U \oplus W$.

۵. الف) ابتدا فرض می‌کنیم که $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. گیریم $u \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$. در این صورت $u = u_1 = u_2 + u_3$ که $u_i \in U_i$ $(1 \le i \le 3)$. چون $u_1 + 0 + 0 = 0 + u_2 + u_3$ و مجموع $U_1+U_2+U_3$ مستقیم است پس $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. بنابراین $U_1 \cap (U_2+U_3) = \{0\}$.
به همین نحو نتیجه می‌گیریم $U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$.

اکنون فرض کنیم $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) = U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. فرض کنیم که $u_i, u'_i \in U_i$ $(1 \le i \le 3)$ و $u_1 + u_2 + u_3 = u'_1 + u'_2 + u'_3$. در این صورت $u_1 - u'_1 = (u'_2 - u_2) + (u'_3 - u_3) \in U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{0\}$، لذا $u_1 = u'_1$. به همین نحو نتیجه می‌گیریم $u_2 = u'_2$ و $u_3 = u'_3$. بنابراین $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

ب) قرار دهید $V = \mathbb{R}^2$، $U_1 = \mathrm{sp}((1, 0))$، $U_2 = \mathrm{sp}((0, 1))$، $U_3 = \mathrm{sp}((1, 1))$.

۶. طبق تمرین ۴، اگر $V = U \oplus W$ آنگاه $\dim V = \dim U + \dim W$. در حالت کلی اگر $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ آنگاه $V = U_1 \oplus (U_2 \oplus \cdots \oplus U_r)$ (۱۰.۲ را ببینید)؛ با استقرا روی r نتیجه می‌شود $\dim(U_2 \oplus \cdots \oplus U_r) = \dim U_2 + \cdots + \dim U_r$، در نتیجه $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r$.

۷. قرار دهید $V = \mathbb{R}^2$. توابع $\vartheta, \phi : V \to V$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\phi : (x, y) \to (y, 0) \quad \text{و} \quad \vartheta : (x, y) \to (x, 0)$$

در این صورت $\mathrm{Im}\vartheta = \mathrm{sp}((1, 0))$، $\mathrm{Ker}\vartheta = \mathrm{sp}((0, 1))$، لذا $V = \mathrm{Im}\vartheta \oplus \mathrm{Ker}\vartheta$، و $\mathrm{Im}\phi = \mathrm{Ker}\phi = \mathrm{sp}((1, 0))$، لذا $V \neq \mathrm{Im}\phi \oplus \mathrm{Ker}\phi$.

۸. ابتدا فرض می‌کنیم که ϑ تصویرگر است. در این صورت طبق گزارهٔ ۳۲.۲ داریم $V = \mathrm{Im}\vartheta \oplus \mathrm{Ker}\vartheta$. پایهٔ u_1، ... ، u_r را برای $\mathrm{Im}\vartheta$ و پایهٔ w_1، ... ، w_s را برای $\mathrm{Ker}\vartheta$ در نظر می‌گیریم. در این صورت طبق تمرین ۴، u_1، ... ، u_r، w_1، ... ، w_s پایهٔ V است، این پایه را $\mathscr{B}$ می‌نامیم. از آنجا که به‌ازای هر i، $u_i\vartheta = u_i$ و به‌ازای هر j، $w_j\vartheta = 0$ ماتریس $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ قطری است، و از درایه‌های روی قطر آن r درایهٔ نخست ۱ و s درایهٔ بعدی ۰ هستند.

برعکس، اگر $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ دارای شکل مذکور باشد آنگاه واضح است که $\vartheta^2 = \vartheta$، و لذا ϑ تصویرگر است.

۹. گیریم $v \in V$. در این صورت

$$v = \frac{1}{2}(v + v\vartheta) + \frac{1}{2}(v - v\vartheta)$$

با توجه به اینکه $\frac{1}{2}(v + v\vartheta)\vartheta = \frac{1}{2}(v\vartheta + v)$ نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{2}(v + v\vartheta) \in U$. به همین نحو نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{2}(v - v\vartheta) \in W$. بنابراین $V = U + W$. اگر $v \in U \cap W$ آنگاه $v = v\vartheta = -v$، لذا $v = 0$. بنابراین طبق تمرین ۳ داریم $V = U \oplus W$. پایهٔ $\mathscr{B}$ را به همان نحو که در حل تمرین ۸ آمده است می‌توان ساخت.

فصل ۳

۱. ابتدا فرض کنیم که ρ نمایش G است. در این صورت

$$I = 1\rho = (a^m)\rho = (a\rho)^m = A^m$$

برعکس، فرض کنیم که $A^m = I$. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح i (از جمله $i > m - 1$ و $i < 0$) داریم $(a^i)\rho = A^i$. بنابراین به‌ازای هر عدد صحیح i و j،

$$(a^i a^j)\rho = (a^{i+j})\rho = A^{i+j} = A^i A^j = (a^i\rho)(a^j\rho)$$

و لذا ρ نمایش G است.

۲. نشان دهید $A^3 = B^3 = C^3 = I$. از این‌رو طبق تمرین ۱، هر ρ_j نمایش G است. نمایشهای ρ_2 و ρ_3 صادق هستند، ولی ρ_1 نیست.

۳. ρ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(a^i b^j)\rho = (-1)^j \qquad (0 \le i \le n-1, 0 \le j \le 1)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که ρ نمایش G است.

۴. (۱) به‌ازای هر $g \in G$، $I^{-1}(g\rho)I = g\rho$؛ از این‌رو ρ هم‌ارز ρ است.
(۲) اگر ρ هم‌ارز σ باشد آنگاه ماتریس وارون‌پذیر T وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$، $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$؛ بنابراین $g\rho = (T^{-1})^{-1}(g\sigma)T^{-1}$، لذا σ هم‌ارز ρ است.
(۳) اگر ρ هم‌ارز σ و σ هم‌ارز τ باشد آنگاه ماتریسهای وارون‌پذیر S و T وجود دارند به‌قسمی که به‌ازای هر $g \in G$، $g\sigma = S^{-1}(g\rho)S$ و $g\tau = T^{-1}(g\sigma)T$؛ بنابراین $g\tau = (ST)^{-1}(g\rho)ST$، لذا ρ هم‌ارز τ است.

۵. نشان دهید که در هریک از حالات (۱) $S = A$، $T = B$ (۲) $S = A^3$، $T = -B$ (۳) $S = -A$، $T = B$ (۴) $S = C$، $T = D$ داریم

$$S^6 = T^2 = I, \qquad T^{-1}ST = S^{-1}$$

نتیجه می‌شود که هر ρ_k نمایش G است (مثال ۴.۱ را ببینید).

ماتریسهای $A^r B^s$ ($0 \le r \le 5$، $0 \le s \le 1$) همگی متمایزند، لذا ρ_1 صادق است. به همین نحو نتیجه می‌گیریم که ρ_4 صادق است. اما ρ_2 و ρ_3 صادق نیستند، زیرا $a^2\rho_2 = I$ و $a^3\rho_3 = I$.

نمایشهای ρ_1 و ρ_4 هم‌ارزند: برای اثبات این موضوع، قرار دهید

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، $T^{-1}(g\rho_4)T = g\rho_1$. (برای پیدا کردن T، ابتدا بردارهای ویژهٔ C را پیدا کنید.)

اگر $j \neq 2$ آنگاه $a^2\rho_j \neq I$؛ از این‌رو ρ_2 هم‌ارز هیچ‌کدام از نمایشهای دیگر نیست. و اگر $j \neq 3$ آنگاه $a^3\rho_j \neq I$؛ از این‌رو ρ_3 نیز هم‌ارز هیچ‌کدام از نمایشهای دیگر نیست.

۶. ماتریسهای A و B را چنین تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در این صورت تابع $\rho : a^r b^s \to A^r B^s$ ($0 \le r \le 3$، $0 \le s \le 1$) نمایش صادق $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ است. با مثال ۲.۳(۱) مقایسه کنید.

۷. طبق قضیهٔ ۱.۱۰، $G/\mathrm{Ker}\rho \cong \mathrm{Im}\rho$. اما $\mathrm{Im}\rho \le \mathrm{GL}(1, F)$ و $\mathrm{GL}(1, F)$ آبلی است. بنابراین $G/\mathrm{Ker}\rho$ آبلی است.

۸. خیر: فرض کنید G گروه غیرآبلی دلخواه و ρ نمایش بدیهی است.

فصل ۴

۱.

g	1	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$
$[g]_{\mathscr{B}_1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$[g]_{\mathscr{B}_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$[g]_{\mathscr{B}_1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$[g]_{\mathscr{B}_2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

تمام ماتریسهای $[g]_{\mathscr{B}_2}$ به شکل زیرند

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

۲. گیریم $g \in S_n$. به‌ازای هر u و v از V و هر λ از F داریم

$$vg \in V, v1 = v, (\lambda v)g = \lambda(vg), (u+v)g = ug + vg$$

از شرایط تعریف ۲.۴ تنها شرط (۲) باقی مانده که باید برقراری آن را ثابت کنیم. گیریم $v \in V$ و $g, h \in S_n$. ابتدا فرض می‌کنیم که $gh \in A_n$. در این صورت $v(gh) = v$؛ و $(vg)h = v$، زیرا $vg = v = vh$ (هرگاه $g, h \in A_n$) یا $vg = -v = vh$ (هرگاه $g, h \notin A_n$). حال فرض می‌کنیم که $gh \notin A_n$. در این صورت $v(gh) = -v$؛ و $(vg)h = -v$، زیرا یکی از دو عضو g و h در A_n است و دیگری نیست. اکنون توجه کنید که برقراری تمام شرایط تعریف ۲.۴ را ثابت کرده‌ایم، لذا V ـFGـمدول است.

۳. قرار می‌دهیم $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
نشان دهید که

$$A^4 = I, B^2 = A^2, B^{-1}AB = A^{-1}$$

از این‌رو تابع $\rho : a^i b^j \to A^i B^j$ ($0 \le i \le 3$، $0 \le j \le 1$) نمایش Q_8 روی $\mathbb{R}$ است. قرار دهید $V = \mathbb{R}^4$. طبق قضیهٔ ۴.۴(۱)، اگر vg را به‌ازای هر $v \in V$ و هر $g \in Q_8$ برابر $v(g\rho)$ تعریف کنیم آنگاه V ـ$\mathbb{R}Q_8$ـمدول می‌شود. اگر قرار دهیم

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$$

آنگاه به‌ازای هر i، $v_i a$ و $v_i b$ برابر همان بردارهایی هستند که در صورت مسأله آمده است.

۴. توجه به این موضوع که اگر

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \odot \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ \odot & & & & 1 \end{pmatrix}$$

آنگاه MA با تعویض دو سطر اول A، و AM با تعویض دو ستون اول A حاصل می‌شود به حل مسأله کمک می‌کند. برای حل این تمرین، فرض کنید g جایگشتی از S_n با این خاصیت است که به‌ازای هر i،

$$\text{سطر } ig\text{ام } A = \text{سطر } i\text{ام } B$$

گیریم P ماتریس $n \times n$ (p_{ij}) با تعریف زیر است

$$p_{ij}=\begin{cases} 1 & j=ig \text{ اگر } \\ 0 & j\neq ig \text{ اگر } \end{cases}$$

در این صورت P ماتریس جایگشتی است، و درایهٔ ijی PA عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{kj}=a_{ig,j}$$

بنابراین $PA=B$.

اگر C ماتریس حاصل از جابه‌جا کردن ستونهای A باشد آنگاه $C=AQ$، که Q ماتریسی جایگشتی است؛ اثبات این حکم با اثبات حکمِ مربوط به سطرها مشابه است.

فصل ۵

۱. به سادگی می‌توان ثابت کرد که V FGـمدول است. گیریم U FGـزیرمدول مخالف صفر V است، و $(\alpha,\beta)\in U$ و $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. در این صورت

$$(\alpha,\beta)+(\alpha,\beta)a=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\in U$$
$$(\alpha,\beta)-(\alpha,\beta)a=(\alpha-\beta,\beta-\alpha)\in U$$

چون حداقل یکی از دو عضو $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ مخالف صفر است، نتیجه می‌گیریم که $(1,1)$ یا $(1,-1)$ متعلق به U است. از این‌رو FGـزیرمدولهای V عبارت‌اند از $\{0\}$، $\mathrm{sp}((1,1))$، $\mathrm{sp}((1,-1))$ و V.

۲. فرض کنیم که ρ دارای درجهٔ n و تحویل‌پذیر است. در این صورت ρ هم‌ارز نمایش τ به شکل

$$\tau : g \to \left(\begin{array}{c|c} X_g & \circ \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \qquad (g \in G)$$

است که X_g ماتریسی $k \times k$ است و $\circ < k < n$. در این صورت σ هم‌ارز τ است، زیرا σ هم‌ارز ρ است. بنابراین σ تحویل‌پذیر است.

۳. قرار می‌دهیم $G = D_{۱۲}$ و فرض می‌کنیم $\rho_۱$، ... ، $\rho_۴$ نمایشهایی از G باشند که در تمرین ۵.۳ تعریف شده‌اند. ابتدا FGـمدول $V = F^۲$ را در نظر می‌گیریم که در آن vg به‌ازای $v \in V$ و $g \in G$ برابر $v(g\rho_۱)$ است. فرض کنیم که U FGـزیرمدول مخالف صفر V است. در این صورت U FHـمدول است، که H زیرگروهی برابر با $\{۱, b\}$ است. طبق آنچه در حل تمرین ۱ دیدیم، یکی از عناصر $(۱, ۱)$ یا $(۱, -۱)$ در U قرار دارد. چون $(۱, ۱)$ و $(۱, ۱)a$ استقلال خطی دارند، و $(۱, -۱)$ و $(۱, -۱)a$ نیز استقلال خطی دارند، نتیجه می‌شود که $\dim U \geq ۲$. در نتیجه $U = V$ و لذا V تحویل‌ناپذیر است. (برای دیدن راه دیگر اثبات این مطلب، مثال ۵.۵(۲) را ببینید.) بنابراین $\rho_۱$ تحویل‌ناپذیر است؛ لذا $\rho_۴$ نیز تحویل‌ناپذیر است، زیرا $\rho_۱$ و $\rho_۴$ هم‌ارزند.

اکنون فرض می‌کنیم $V = F^۲$ و vg به‌ازای $v \in V$ و $g \in G$ برابر با $v(g\rho_۲)$ باشد. در این صورت $(۱, ۱)b = (۱, ۱) = -(۱, ۱)a$. از این‌رو $\mathrm{sp}((۱, ۱))$ FGـزیرمدول V است و $\rho_۲$ تحویل‌پذیر است.

بالاخره، با استفاده از استدلالی مشابه استدلال تحویل‌ناپذیری $\rho_۱$ نتیجه می‌شود که $\rho_۳$ تحویل‌ناپذیر است.

۴. الف) روابط داده شده را به سادگی می‌توان ثابت کرد. با استفاده از این روابط، هر عضو G را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$a^i b^j c^k \cdot \quad (\circ \leq i \leq ۲, \circ \leq j \leq ۲, \circ \leq k \leq ۱)$$

بنابراین $|G| \leq ۱۸$. از طرفی واضح است که $|\langle a, b\rangle| = ۹$ و $G \neq \langle a, b\rangle$. از این‌رو، طبق قضیهٔ لاگرانژ، $|G|$ مضرب ۹ است و $|G| > ۹$. بنابراین $|G| = ۱۸$.

ب) گیریم

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \circ \\ \circ & \varepsilon^{-۱} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \eta & \circ \\ \circ & \eta^{-۱} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $A^۳ = B^۳ = C^۲ = I$، $AB = BA$، $C^{-۱}AC = A^{-۱}$ و $C^{۱-}BC = B^{-۱}$. از این‌رو ρ نمایش G است (مثال ۴.۱ را ببینید).

ج) به‌ازای هر عنصر g از $\langle a,b\rangle$، عددی چون ξ که ریشهٔ سوم ۱ است وجود دارد به‌قسمی که

$$g\rho = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

اما ۱ فقط سه ریشهٔ سوم متمایز دارد، لذا عناصر متمایز $g_1, g_2 \in \langle a,b\rangle$ وجود دارند به‌طوری که $g_1\rho = g_2\rho$. بنابراین ρ هیچ‌گاه صادق نیست.

د) فرض کنیم $V = \mathbb{C}^2$ $\mathbb{C}G$ـمدولی باشد که در آن vg به‌ازای هر $v \in \mathbb{C}^2$ و $g \in G$ به‌صورت $v(g\rho)$ تعریف شده باشد. اگر U $\mathbb{C}G$ـزیرمدول مخالف صفر V باشد آنگاه U $\mathbb{C}H$ـزیرمدول است، که H زیرگروهی برابر با $\{1, c\}$ است. از این‌رو، طبق آنچه در حل تمرین ۱ دیدیم، یکی از دو بردار $(1,1)$ و $(1,-1)$ در U قرار دارد؛ بنابراین فرض کنید u یکی از دو بردار $(1,1)$ و $(1,-1)$ است (لذا $u \in U$). در این صورت u و ua استقلال خطی دارند مگر اینکه $\varepsilon = 1$، و u و ub استقلال خطی دارند مگر اینکه $\eta = 1$. از این‌رو، اگر $\varepsilon \neq 1$ یا $\eta \neq 1$ باشد آنگاه $\dim U = 2$ و لذا ρ تحویل‌ناپذیر است. از طرف دیگر، اگر $\varepsilon = \eta = 1$ آنگاه $\mathrm{sp}((1,1))$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است و لذا ρ تحویل‌پذیر است.

۵. فرض کنیم $V = \{0\}$ و به‌ازای هر $g \in G$، $0g = 0$. در این صورت V نه تحویل‌پذیر است نه تحویل‌ناپذیر.

فصل ۶

۱.

الف)

$$xy = -2 \times 1 - a^3 + ab + 3a^2b + 2a^3b$$
$$yx = -2 \times 1 - a^3 + b + 2a^2b + 3a^3b$$
$$x^2 = 4 \times 1 + a^2 + 4a^3$$

ب)

$$bz = 1 + a^2 = zb \quad \text{و} \quad az = ab + a^3b = a^2ba + ba = za$$

از این‌رو به‌ازای هر i و j، $a^ib^jz = za^ib^j$ و لذا به‌ازای هر $g \in G$، $gz = zg$. اگر $r \in \mathbb{C}G$ آنگاه $r = \sum_g \lambda_g g$ که $\lambda_g \in \mathbb{C}$، لذا $rz = \sum \lambda_g gz = \sum \lambda_g zg = zr$.

۲. قرار می‌دهیم $C_2 \times C_2 = \langle a, b : a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle$. نمایش منظم ρ نسبت به پایهٔ ۱، a، b، ab از $F(C_2 \times C_2)$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود

$$1\rho=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad a\rho=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$b\rho=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad (ab)\rho=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

۳. خیر: فرض کنید $G=\langle a : a^2=1\rangle$ و قرار دهید $r=1+a$، $s=1-a$.

۴. الف) هنگامی که g همهٔ اعضای G را اختیار می‌کند، gh و hg نیز همهٔ اعضای G را اختیار می‌کنند. از این‌رو $ch=hc=c$.

ب) $c^2=c\sum_{h\in G}h=\sum_{h\in G}ch=|G|c$.

ج) تمام درایه‌های $[\vartheta]_{\mathscr{B}}$ مساوی ۱ هستند (جواب تمرین ۲ را ببینید)؛ به این دلیل که به‌ازای هر i و j، h منحصر به فردی در G وجود دارد به‌طوری که $g_ih=g_j$.

۵. ابتدا توجه کنید که اگر u عضوی از فضای برداری باشد و $u+u=u$ آنگاه $u=0$. اکنون با توجه به اینکه $0r=(0+0)r=0r+0r$ و $v0=v(0+0)=v0+v0$ نتیجه می‌گیریم $0r=v0=0$.

فرض کنید V FG-مدول بدیهی است و $0\neq v\in V$ و $1\neq g\in G$. اگر $r=1-g$ آنگاه $vr=0$ و v و r هیچ‌کدام صفر نیستند.

۶. قرار می‌دهیم $v_1=1+\omega^2a+\omega a^2$ و $v_2=b+\omega^2ab+\omega a^2b$. نشان دهید که $v_1a=\omega v_1$، $v_2a=\omega^2v_2$، $v_1b=v_2$ و $v_2b=v_1$. از این‌رو W $\mathbb{C}G$-زیرمدول $\mathbb{C}G$ است. از استدلال مثال ۵.۵(۲) یا حل تمرین ۳.۵ استفاده کرده ثابت کنید که W تحویل‌ناپذیر است.

فصل ۷

۱. به‌ازای هر $u_1,u_2\in U$ و $\lambda\in F$ و $g\in G$ داریم

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)\vartheta\phi&=(u_1\vartheta+u_2\vartheta)\phi=u_1(\vartheta\phi)+u_2(\vartheta\phi)\\(\lambda u_1)\vartheta\phi&=(\lambda(u_1\vartheta))\phi=\lambda(u_1(\vartheta\phi))\\(u_1g)\vartheta\phi&=((u_1\vartheta)g)\phi=((u_1\vartheta)\phi)g=(u_1(\vartheta\phi))g\end{aligned}$$

۲. قرار می‌دهیم $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ و فرض می‌کنیم v_1، ... ، v_5 پایهٔ طبیعی مدول جایگشتی G روی F باشد. در این صورت

$$\vartheta : \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_5 v_5 \to \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 + \lambda_4 a^3 + \lambda_5 a^4$$

FGـیکریختی مطلوب است. (توجه کنید که $v_i\vartheta = a^i$، لذا $(v_i a)\vartheta = v_{i+1}\vartheta = a^{i+1} = (v_i\vartheta)a$؛ از این‌رو ϑ FGـهمریختی است.)

۳. به سادگی می‌توان نشان داد که V_0 FGـزیرمدول V است. فرض کنیم $x \in G$. در این صورت

$$\sum_{g\in G} vxg = \sum_{g\in G} vg = \sum_{g\in G} vgx$$

از این‌رو $(vx)\vartheta = v\vartheta = (v\vartheta)x$؛ با توجه به اینکه $V\vartheta \subseteq V_0$ نتیجه می‌گیریم که ϑ FGـهمریختی از V به V_0 است.

اگر $v \in V_0$ آنگاه $(v/|G|)\vartheta = v$؛ از این‌رو ϑ پوشاست.

۴. فرض کنیم که $\phi : V \to W$ FGـیکریختی است. گیریم $g \in G$. به‌ازای هر $v \in V_0$، $(v\phi)g = (vg)\phi = v\phi$ و لذا $V_0\phi \subseteq W_0$. به‌ازای هر $w \in W_0$، $(w\phi^{-1})g = (wg)\phi^{-1} = w\phi^{-1}$، لذا $W_0\phi^{-1} \subseteq V_0$. از این‌رو تحدید تابع ϕ به V_0 FGـیکریختی از V_0 به W_0 است.

۵. خیر. گیریم v_1، ... ، v_4 پایهٔ طبیعی مدول جایگشتی G روی F باشد؛ این مدول را V می‌نامیم. با استفاده از نمادگذاری تمرین ۳ داریم

$$(FG)_0 = \mathrm{sp}\left(\sum_{g\in G} g\right) \quad \text{و} \quad V_0 = \mathrm{sp}(v_1 + v_2, v_3 + v_4)$$

چون V_0 و $(FG)_0$ دارای ابعاد مختلف‌اند، از تمرین ۴ نتیجه می‌شود که V و FG FGـمدولهای یکریخت نیستند.

۶. الف) به سادگی ثابت می‌شود که ϑ تبدیل خطی است. همچنین

$$\begin{aligned}(\alpha 1 + \beta x)x\vartheta &= (\beta 1 + \alpha x)\vartheta = (\beta - \alpha)(1 - x)\\ &= (\alpha - \beta)(1 - x)x\\ &= (\alpha 1 + \beta x)\vartheta x\end{aligned}$$

از این‌رو ϑ FGـهمریختی است.

ب) $(\alpha - \beta)(1 - x)\vartheta = ((\alpha - \beta) - (\beta - \alpha))(1 - x) = 2(\alpha - \beta)(1 - x)$

از این‌رو $\vartheta^2 = 2\vartheta$.

ج) $\mathscr{B}$ را پایهٔ $1 - x$، $1 + x$ اختیار کنید.

فصل ۸

۱. $V = \mathrm{sp}(-\omega v_1 + v_2) \oplus \mathrm{sp}(-\omega^2 v_1 + v_2)$، که $\omega = e^{2\pi i/3}$. (بردارهای ویژهٔ x را پیدا کنید.)

۲. قرار می‌دهیم $G = \{1, a, b, ab\} \cong C_2 \times C_2$ (لذا $a^2 = b^2 = 1$، $ab = ba$). در این صورت

$$\mathbb{R}G = \mathrm{sp}(1 + a + b + ab) \oplus \mathrm{sp}(1 + a - b - ab) \oplus \mathrm{sp}(1 - a + b - ab) \oplus \mathrm{sp}(1 - a - b + ab)$$

۳. فرض کنیم G گروهی دلخواه و V فضای برداری ۲بعدی روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ v_1، v_2 است. vg را به‌ازای هر $v \in V$ و $g \in G$ برابر v تعریف می‌کنیم، در این صورت V تبدیل به $\mathbb{C}G$ـمدول می‌شود. اگر قرار دهیم

$$\vartheta : \lambda v_1 + \mu v_2 \to \lambda v_2 \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

آنگاه ϑ $\mathbb{C}G$ـهمریختی از V به V است و $\mathrm{Ker}\vartheta = \mathrm{Im}\vartheta = \mathrm{sp}(v_2)$.

۴. فرض کنیم ρ تحویل‌پذیر است. در این صورت طبق قضیهٔ مشکه، ρ هم‌ارز نمایشی چون σ به شکل

$$g\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \mu_g \end{pmatrix} \qquad (\lambda_g, \mu_g \in \mathbb{C})$$

است. بنابراین (به‌ازای هر $g, h \in G$)، $(g\sigma)(h\sigma) = (h\sigma)(g\sigma)$، زیرا ضرب ماتریسهای قطری در هم تعویض‌پذیر است؛ از این‌رو همچنین، به‌ازای هر $g, h \in G$، $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$. این نتیجه با فرض مسأله تناقض دارد. بنابراین ρ تحویل‌ناپذیر است.

۵. فضای $U = \mathrm{sp}((1, 0))$ تنها $\mathbb{C}G$ـزیرمدول ۱بعدی V است، لذا $\mathbb{C}G$ـزیرمدول W از V با شرط $V = U \oplus W$ وجود ندارد.

۶. (۱) به راحتی می‌توان برقراری اصول ضرب داخلی مختلط را در مورد [,] ثابت کرد. به‌عنوان مثال، اگر $u \neq 0$ آنگاه به‌ازای هر $x \in G$، $(ux, ux) > 0$ لذا $[u, u] > 0$. همچنین

$$[ug, vg] = \sum_{x \in G} (ugx, vgx) = \sum_{x \in G} (ux, vx) = [u, v]$$

(۲) به سادگی ثابت می‌شود که $U^\perp$ زیرفضای V است. گیریم $v \in U^\perp$ و $g \in G$. در این صورت به‌ازای هر $u \in U$،

$$[u, vg] = [ug^{-1}, vgg^{-1}] \qquad \text{طبق قسمت (۱)}$$
$$= [ug^{-1}, v] = 0 \qquad \text{زیرا } ug^{-1} \in U$$

بنابراین $vg \in U^{\perp}$، و لذا $U^{\perp}$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است.

(۳) گیریم $W = U^{\perp}$. در این صورت $V = U \oplus W$، و طبق قسمت (۲)، W $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است.

۷. می‌دانیم که $\mathbb{C}G$ـمدول منظم $\mathbb{C}G$ صادق است (گزارهٔ ۶.۶)، فرض می‌کنیم $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$، که U_1، ... ، U_r $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر $\mathbb{C}G$ هستند. در این صورت عددی چون $i \in \{1, \cdots, r\}$ و عضوی چون $g \in G$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای uای از U_i، $ug \neq u$ (در غیر این صورت به‌ازای هر $v \in \mathbb{C}G$، $vg = v$). قرار می‌دهیم

$$K = \{x \in G : vx = v, \forall v \in U_i\}$$

نشان دهید که K زیرگروه نرمال G است؛ همچنین $K \neq G$ زیرا $g \notin K$. چون G ساده است، باید داشته باشیم $K = \{1\}$. این بدان معناست که U_i $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر صادق است.

فصل ۹

۱. گیریم $C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$. نمایشهای تحویل‌ناپذیر عبارت‌اند از ρ_1 و ρ_2ی زیر

$$1\rho_1 = a\rho_1 = (1); \quad 1\rho_2 = (1), \quad a\rho_2 = (-1)$$

فرض می‌کنیم $C_3 = \langle b : b^3 = 1 \rangle$ و قرار می‌دهیم $\omega = e^{2\pi i/3}$. نمایشهای تحویل‌ناپذیر عبارت‌اند از ρ_1 و ρ_2 و ρ_3ی زیر

$$1\rho_1 = b\rho_1 = b^2\rho_1 = (1)$$
$$b^i\rho_2 = (\omega^i)$$
$$b^i\rho_3 = (\omega^{2i})$$

گیریم $C_2 \times C_2 = \{(1,1), (x,1), (1,y), (x,y)\}$، که $x^2 = y^2 = 1$. نمایشهای تحویل‌ناپذیر عبارت‌اند از ρ_1 و ρ_2 و ρ_3 و ρ_4 زیر

$$g\rho_1 = (1) \quad \text{به‌ازای هر } g \in C_2 \times C_2$$
$$(x^i, y^j)\rho_2 = (-1)^j$$
$$(x^i, y^j)\rho_3 = (-1)^i$$
$$(x^i, y^j)\rho_4 = (-1)^{i+j}$$

۲. گیریم $C_4 \times C_4 = \langle (x,1), (1,y) : x^4 = y^4 = 1 \rangle$.
الف) $\rho : (x^i, y^j) \to (-1)^i$.
ب) اگر $g_1 = (x^2, 1)$ و $g_2 = (1, y^2)$ آنگاه g_1، g_2 و $g_1 g_2$ دارای مرتبهٔ ۲ هستند. چون به‌ازای هر نمایشی چون σ داریم $(g_1 g_2)\sigma = (g_1\sigma)(g_2\sigma)$، ممکن نیست رابطهٔ $(g_1 g_2)\sigma = g_1\sigma = g_2\sigma = (-1)$ برقرار باشد.

۳. فرض می‌کنیم به‌ازای $1 \le j \le r$، g_j گروه C_{n_j} را تولید کند و قرار می‌دهیم $\varepsilon_j = e^{2\pi i/n_j}$. در این صورت

$$\rho : (g_1^{i_1}, \cdots, g_r^{i_r}) \to \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{i_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_r^{i_r} \end{pmatrix}$$

نمایش صادق $C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ با درجهٔ r است.

بله: اگر $r = 2$، $n_1 = 2$، $n_2 = 3$ آنگاه $\sigma : (g_1^{i_1}, g_2^{i_2}) \to (\varepsilon_1^{i_1}\varepsilon_2^{i_2})$ نمایش صادقی با درجهٔ ۱ است که $r > 1$.

۴. نشان دهید که $A^4 = B^2 = I$ و $B^{-1}AB = A^{-1}$ که $A = a\rho$ و $B = b\rho$. از این‌رو ρ نمایش است؛ همین کار را برای σ انجام دهید

اگر رابطهٔ $M(g\rho) = (g\rho)M$ به‌ازای $g = a$ و $g = b$ برقرار باشد آنگاه به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$، $M = \lambda I$. از این‌رو ρ تحویل‌ناپذیر است (نتیجهٔ ۳.۹).

با توجه به اینکه ضرب ماتریس

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

در $g\sigma$، به‌ازای هر $g \in G$، تعویض‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که σ تحویل‌پذیر است (نتیجهٔ ۳.۹).

۵. گیریم $z = \sum_{g \in G} g$. در این صورت به‌ازای هر $x \in G$ داریم $xz = z = zx$. بنابراین $z \in Z(\mathbb{C}G)$، و نتیجهٔ مطلوب با استفاده از گزارهٔ ۱۴.۹ حاصل می‌شود.

۶. الف) واضح است که ضرب a در $a + a^{-1}$ تعویض‌پذیر است. همچنین $b^{-1}(a + a^{-1})b = a^{-1} + a$، لذا ضرب b در $a + a^{-1}$ تعویض‌پذیر است.
ب) نشان دهید که به‌ازای هر $w \in W$، $w(a + a^{-1}) = -w$.

۷. الف) گیریم $C_n = \langle x : x^n = 1 \rangle$. در این صورت $\rho : x^j \to (e^{2\pi ij/n})$ نمایش تحویل‌ناپذیر صادق C_n است.
ب) نمایشی که به‌صورت زیر مشخص می‌شود نمایش تحویل‌ناپذیر صادق D_8 است (مثال ۵.۵(۲))

را ببینید)

$$\rho : a \to \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

ج) مرکز $C_۲ \times D_۸$ با $C_۲ \times C_۲$ یکریخت است، لذا دوری نیست. بنابراین گزارهٔ ۱۶.۹ نشان می‌دهد که $C_۲ \times D_۸$ دارای نمایش تحویل‌ناپذیر صادق نیست.

د) گیریم $C_۳ = \langle x : x^۳ = ۱ \rangle$ و قرار می‌دهیم $\omega = e^{۲\pi i/۳}$. نشان دهید که نمایشی که تحت آن

$$(x, a) \to \begin{pmatrix} ۰ & \omega \\ -\omega & ۰ \end{pmatrix}, \quad (x, b) \to \begin{pmatrix} \omega & ۰ \\ ۰ & -\omega \end{pmatrix}$$

نمایش $C_۳ \times D_۸$ است. این نمایش تحویل‌ناپذیر است (به‌عنوان مثال تمرین ۴.۸ را ببینید)، به‌علاوه صادق نیز هست.

فصل ۱۰

۱. گیریم $V = \mathrm{sp}(\sum_{g \in G} g)$. در این صورت V ‏ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی $\mathbb{C}G$ است. اکنون فرض کنیم که U ‏ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی دلخواهی از $\mathbb{C}G$ باشد، لذا به‌ازای عضوی چون u، $U = \mathrm{sp}(u)$. از این رو به‌ازای هر $g \in G$، $ug = u$، لذا $|G|u = u(\sum_{g \in G} g) = (\sum_{g \in G} g)u \in V$. بنابراین $U = V$، و به این ترتیب ثابت می‌شود که $\mathbb{C}G$ فقط یک $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی دارد که همان V است.

۲. گیریم $G = \langle x : x^۴ = ۱ \rangle$. در این صورت

$$\begin{aligned} \mathbb{C}G =& \mathrm{sp}(۱ + x + x^۲ + x^۳) \oplus \mathrm{sp}(۱ + ix - x^۲ - ix^۳) \\ &\oplus \mathrm{sp}(۱ - x + x^۲ - x^۳) \oplus \mathrm{sp}(۱ - ix - x^۲ + ix^۳) \end{aligned}$$

۳. قرار دهید

$$\begin{aligned} u_۱ &= ۱ + a + a^۲ + a^۳ - b - ab - a^۲b - a^۳b \\ u_۲ &= ۱ - a + a^۲ - a^۳ + b - ab + a^۲b - a^۳b \\ u_۳ &= ۱ - a + a^۲ - a^۳ - b + ab - a^۲b + a^۳b \end{aligned}$$

۴. $\mathbb{C}G$ را به مجموع مستقیم $\mathbb{C}G$ـزیرمدولهای تحویل‌ناپذیر تجزیه می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} v_۰ &= ۱ + a + a^۲ + a^۳, \quad & v_۱ &= ۱ + ia - a^۲ - ia^۳ \\ v_۲ &= ۱ - a + a^۲ - a^۳, \quad & v_۳ &= ۱ - ia - a^۲ + ia^۳ \end{aligned}$$

(با حل تمرین ۲ مقایسه کنید). به‌ازای $0 \leq j \leq 3$، قرار می‌دهیم $w_j = bv_j$. در این صورت، مانند مثال ۸.۱۰(۲)، نتیجه می‌شود که زیرفضاهای $\mathrm{sp}(v_0, w_0)$، $\mathrm{sp}(v_1, w_3)$، $\mathrm{sp}(v_2, w_2)$ و $\mathrm{sp}(v_3, w_1)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول $\mathbb{C}G$ هستند. داریم

$$\mathrm{sp}(v_0, w_0) = U_0 \oplus U_1, \qquad \mathrm{sp}(v_2, w_2) = U_2 \oplus U_3$$

که $U_i = \mathrm{sp}(u_i)$ $(0 \leq i \leq 3)$ و u_1، u_2، u_3 همان بردارهایی هستند که در حل تمرین ۳ دیدیم و $u_0 = \sum_{g \in G} g$.

گیریم $U_4 = \mathrm{sp}(v_1, w_3)$ و $U_5 = \mathrm{sp}(v_3, w_1)$. مانند مثال ۵.۵(۲) (یا تمرین ۴.۸) نتیجه می‌شود که U_4 و U_5 $\mathbb{C}G$ـمدولهای تحویل‌ناپذیرند. به‌علاوه $U_4 \cong U_5$، زیرا تابعی از U_4 به U_5 که تحت آن $v_1 \to w_1$، $v_3 \to w_3$ وجود دارد که $\mathbb{C}G$ـیکریختی است.

اکنون بنا به قضیهٔ ۵.۱۰ نتیجه می‌شود که دقیقاً پنج $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیر غیریکریخت وجود دارد، که عبارت‌اند از U_0، U_1، U_2، U_3 و U_4. بنابراین هر نمایش تحویل‌ناپذیر D_8 روی $\mathbb{C}$ دقیقاً با یکی از نمایشهای زیر هم‌ارز است

$$\rho_0 : a \to (1), b \to (1)$$

$$\rho_1 : a \to (1), b \to (-1)$$

$$\rho_2 : a \to (-1), b \to (1)$$

$$\rho_3 : a \to (-1), b \to (-1)$$

$$\rho_4 : a \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

۵. گیریم $\vartheta : U_1 \to U_2$ $\mathbb{C}G$ـیکریختی است. تابع $\phi_\lambda : U_1 \to V$ را به‌ازای $\lambda \in \mathbb{C}$ چنین تعریف می‌کنیم

$$\phi_\lambda : u \to u + \lambda u\vartheta \qquad (u \in U_1)$$

در این صورت به سادگی نتیجه می‌شود که ϕ_λ $\mathbb{C}G$ـهمریختی است؛ به‌علاوه

$$u \in \mathrm{Ker}\phi_\lambda \Leftrightarrow u + \lambda u\vartheta = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

زیرا مجموع $U_1 + U_2$ مستقیم است. بنابراین $U_1 \cong \mathrm{Im}\phi_\lambda$. به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $\lambda \neq \mu$ آنگاه $\mathrm{Im}\phi_\mu \neq \mathrm{Im}\phi_\lambda$. بنابراین به تعداد نامتناهی $\mathbb{C}G$ـمدول $\mathrm{Im}\phi_\lambda$ به شکلی که خواسته شده است ساخته‌ایم.

۶. با استفاده از روش مثال ۵.۵(۲) یا تمرین ۴.۸ می‌توان نتیجه گرفت که V تحویل‌ناپذیر است.
گیریم $u_1 = 1-ia-a^2+ia^3$، $u_2 = b-iab-a^2b+ia^3b$. در این صورت $\mathrm{sp}(u_1, u_2)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدولی از $\mathbb{C}G$ است که با V یکریخت است: تابعی که تحت آن $u_1 \to v_1$، $u_2 \to v_2$ از V به $\mathrm{sp}(u_1, u_2)$ وجود دارد که $\mathbb{C}G$ـیکریختی است.

فصل ۱۱

۱. چون G ناآبلی است، همهٔ ابعاد مساوی ۱ نیستند (گزارهٔ ۱۸.۹ را ببینید). از این‌رو، طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱، این ابعاد عبارت‌اند از ۱، ۱، ۲.

۲. مانند مثال ۱۳.۱۱ می‌بینیم که جوابهای ممکن عبارت‌اند از 1^{12}، $1^8 2^2$، $1^4 2^2 3^2$... (که 1^{12} به معنای دوازده تا ۱ است، $1^8 2$ به معنای هشت تا ۱ و یک ۲ است، و قس علی‌هذا). بعداً نشان می‌دهیم که $1^8 2$ ممکن نیست. (تمرینهای ۴.۱۵ و ۳.۱۷).

طبق تمرین ۳.۵، D_{12} دارای حداقل دو نمایش تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز درجهٔ ۲ است. از این‌رو در مورد D_{12} جواب عبارت است از $1^4 2^2$.

۳. به‌ازای هر $g \in G$، تابع $\phi_g : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ را با ضابطهٔ $r\phi_g = gr$ $(r \in \mathbb{C}G)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{\phi_g : g \in G\}$ پایه‌ای برای $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)$ است (اثبات گزارهٔ ۸.۱۱ را ببینید).

۴. گیریم v_1، ...، v_n پایهٔ طبیعی V است. در این صورت $\mathrm{sp}(v_1+\cdots+v_n)$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول بدیهی منحصربه‌فرد V است (تمرین ۱.۱۰ را ببینید.) از این‌رو طبق نتیجهٔ ۶.۱۱، $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, U))=1$.

۵. گیریم v_1، w_2 پایهٔ U_3 مذکور در مثال ۸.۱۰(۲) باشد. ϑ_1 و ϑ_2 را چنین تعریف می‌کنیم $r\vartheta_1 = v_1 r$، $r\vartheta_2 = w_2 r$ $(r \in \mathbb{C}G)$. در این صورت ϑ_1 و ϑ_2، طبق اثبات گزارهٔ ۸.۱۱، پایهٔ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U_3)$ است. همچنین، ϕ_1 و ϕ_2 را چنین تعریف می‌کنیم $u\phi_1 = u$، $u\phi_2 = bu$ $(u \in U_3)$. در این صورت ϕ_1 و ϕ_2 پایهٔ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)$ است.

۶. قرار می‌دهیم $V = X_1 \oplus \cdots \oplus X_r$ و $W = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_s$، که هرکدام از X_aها و Y_bها $\mathbb{C}G$ـمدول تحویل‌ناپذیرند. در این صورت طبق ۵.۱۱(۳) و گزارهٔ ۲.۱۱، $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$ مساوی تعداد زوجهای مرتب (a, b) با شرط $X_a \cong Y_b$ است، که مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{k} |\{(a, b) : X_a \cong Y_b \cong V_i\}|$$

طبق نتیجهٔ ۶.۱۱، تعداد اعداد صحیح a با شرط $X_a \cong V_i$ مساوی است با $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, V_i)) = d_i$، به همین ترتیب تعداد اعداد صحیح b با شرط $Y_b \cong V_i$ مساوی e_i است. بنابراین $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{k} d_i e_i$.

فصل ۱۲

۱. فرض کنیم که $g,h \in C_G(x)$. در این صورت $gx = xg$ و $hx = xh$، لذا $h^{-۱}x = xh^{-۱}$ و $gh^{-۱}x = gxh^{-۱} = xgh^{-۱}$؛ از این‌رو $gh^{-۱} \in C_G(x)$. همچنین $۱x = x۱$، لذا $۱ \in C_G(x)$. بنابراین $C_G(x)$ زیرگروه G است.

اگر $z \in Z(G)$ آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، $zg = gz$، لذا $zx = xz$ و $z \in C_G(x)$.

۲. توجه کنید که $x \in C_G(g) \Leftrightarrow x \in C_G(gz)$. اکنون نتیجهٔ مطلوب با استفاده از قضیهٔ ۸.۱۲ حاصل می‌شود.

۳. الف) $(۱\ ۲)^G = \{(ij) : ۱ \le i < j \le n\}$ و اندازهٔ این مجموعه $\binom{n}{۲}$ است. مرکزساز $C_G((۱\ ۲))$ متشکل از همهٔ عناصر x و $(۱\ ۲)x$ است که x جایگشتی است که ۱ و ۲ را ثابت نگاه می‌دارد. بنابراین $|C_G((۱\ ۲))| = ۲ \times (n-۲)!$ که این نتیجه با قضیهٔ ۸.۱۲ سازگار است (زیرا $\binom{n}{۲} = n!/(۲ \times (n-۲)!)$).

ب) $(۱\ ۲\ ۳)^G$ متشکل از تمام جایگشتهای دوری به طول سه چون $(i\ j\ k)$ است. اگر بخواهیم ترکیبی از سه عدد چون i و j و k را از میان n عدد انتخاب کنیم، تعداد ترکیبات ممکن (صرف‌نظر از ترتیب) برابر $\binom{n}{۳}$ است. از هریک از این ترکیبات دقیقاً دو جایگشت دوری حاصل می‌شود، یعنی $(i\ j\ k)$ و $(i\ k\ j)$.

$(۱\ ۲)(۳\ ۴)^G$ متشکل از همهٔ جایگشتهایی به شکل $(i\ j)(k\ l)$ است که در آن i و j و k و l متمایزند. اگر بخواهیم چهار عدد چون i و j و k و l را از میان n عدد انتخاب کنیم، تعداد ترکیبات ممکن (صرف‌نظر از ترتیب) برابر $\binom{n}{۴}$ است، و از هریک از این ترکیبات سه جایگشت حاصل می‌شود، یعنی $(i\ j)(k\ l)$، $(i\ k)(j\ l)$ و $(i\ l)(j\ k)$.

ج) هر عنصر $(۱\ ۲\ ۳)(۴\ ۵\ ۶)^G$ به شکل $(۱\ i\ j)(k\ l\ m)$ است که در آن i و j و k و l و m متمایزند. پنج امکان برای انتخاب i وجود دارد؛ و پس از آن چهار امکان برای انتخاب j، آنگاه می‌توانیم دو جایگشت دوری متفاوت به طول ۳ چون $(k\ l\ m)$ و $(k\ m\ l)$ با استفاده از اعداد باقیمانده بسازیم. به این ترتیب در مجموع $۵ \times ۴ \times ۲ = ۴۰$ عنصر حاصل می‌شود.

عناصر $(۱\ ۲)(۳\ ۴)(۵\ ۶)^G$ به شکل $(۱\ i)(j\ k)(l\ m)$ هستند. پنج امکان برای انتخاب i وجود دارد، سپس با استفاده از اعداد باقیمانده می‌توانیم سه جایگشت چون $(j\ k)(l\ m)$، $(j\ l)(k\ m)$ و $(j\ m)(k\ l)$ با شاکلهٔ دوری $(۲,۲)$ بسازیم. از این‌رو $|(۱\ ۲)(۳\ ۴)(۵\ ۶)^G| = ۵ \times ۳ = ۱۵$.

اندازهٔ رده‌های مزدوجی $S_۶$ در جدول زیر داده شده است

شاکلهٔ دوری	(۱)	(۲)	(۳)	$(۲^۲)$	(۴)	(۳, ۲)	(۵)	$(۲^۳)$	$(۳^۲)$	(۴, ۲)	(۶)
اندازهٔ رده	۱	۱۵	۴۰	۴۵	۹۰	۱۲۰	۱۴۴	۱۵	۴۰	۹۰	۱۲۰

۴. عنصری چون x با شاکلهٔ دوری (۵) دارای مرکزساز $C_{S_۶}(x) = \langle x \rangle$ است (توجه کنید که $|x^{S_۶}| = ۱۴۴$ و از قضیهٔ ۸.۱۲ استفاده کنید). از این‌رو طبق گزارهٔ ۱۷.۱۲، $x^{A_۶} \neq x^{S_۶}$. اگر شاکلهٔ دوری عنصری چون g غیر از (۵) باشد آنگاه $g^{A_۶} = g^{S_۶}$.

۵. طبق مثال ۱۸.۱۲(۲)، رده‌های مزدوجی $A_۵$ دارای اندازه‌های ۱، ۱۲، ۱۲، ۱۵، ۲۰ است. اگر H زیرگروه نرمال $A_۵$ باشد آنگاه $|H|$ عدد ۶۰ را عاد می‌کند، و $۱ \in H$، و H اجتماع تعدادی از رده‌های مزدوجی $A_۵$ است. از این‌رو $|H| = (۶۰$ یا $۱)$، بنابراین $A_۵$ ساده است.

۶. داریم $Q_۸ = \langle a, b : a^۴ = ۱, b^۲ = a^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$. رده‌های مزدوجی $Q_۸$ عبارت‌اند از

$$\{۱\}, \{a^۲\}, \{a, a^۳\}, \{b, a^۲b\}, \{ab, a^۳b\}$$

و پایه‌ای برای $Z(\mathbb{C}Q_۸)$ عبارت است از

$$۱, a^۲, a + a^۳, b + a^۲b, ab + a^۳b$$

۷. بنا به رابطهٔ رده‌ای ۱۰.۱۲،

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

الف) طبق قضیهٔ ۸.۱۲، $|x_i^G|$ عدد p^n را عاد می‌کند و اگر $x_i \notin Z(G)$، طبق رابطهٔ (۹.۱۲)، $|x_i^G| \neq ۱$. بنابراین p عدد $|x_i^G|$ را عاد می‌کند. از این‌رو p عدد $|Z(G)|$ را عاد می‌کند و در نتیجه $Z(G) \neq ۱$.

ب) اگر اندازهٔ هیچ‌یک از رده‌های مزدوجی G مساوی p نباشد آنگاه به‌ازای هر $x_i \notin Z(G)$، عدد $p^۲$ عدد $|x_i^G|$ را عاد می‌کند. اگر، به‌علاوه، داشته باشیم $|G| \geq p^۳$ آنگاه طبق رابطهٔ رده‌ای، عدد $p^۲$ عدد $|Z(G)|$ را عاد می‌کند و این با فرض ما متناقض است.

فصل ۱۳

۱. سرشتهای χ_i از ρ_i $(i = ۱, ۲)$ عبارت‌اند از

	۱	$a^۳$	$a, a^۵$	$a^۲, a^۴$	$b, a^۲b, a^۴b$	$ab, a^۳b, a^۵b$
$\chi_۱$	۲	۲	-۱	-۱	۰	۰
$\chi_۲$	۲	۰	۰	۲	۰	-۲

همچنین $\mathrm{Ker}\rho_۱ = \{۱, a^۳\}$ و $\mathrm{Ker}\rho_۲ = \{۱, a^۲, a^۴\}$.

۲. گیریم $C_۴ = \langle x : x^۴ = ۱ \rangle$. سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_۱$، . . . ، $\chi_۴$ از $C_۴$ عبارت‌اند از

	1	x	x^2	x^3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

داریم $\chi_{\text{reg}} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$.

۳. از آنجا که $\chi(g) = |\text{fix}(g)|$ داریم $\chi((1\ 2)) = 5$ و $\chi((1\ 6)(2\ 3\ 5)) = 2$.

۴. اگر χ سرشت مخالف صفر و همریختی باشد آنگاه $(\chi(1))^2 = \chi(1^2) = \chi(1)$ و لذا $\chi(1) = 1$.

۵. گیریم ρ نمایشی با سرشت χ است. در این صورت طبق گزارهٔ ۱۴.۹ به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$، $z\rho = \lambda I$. بنابراین به‌ازای هر g از G، $(zg)\rho = (z\rho)(g\rho) = \lambda(g\rho)$، و از این‌رو $\chi(zg) = \lambda\chi(g)$. به‌علاوه $\lambda^m I = (z\rho)^m = z^m\rho = 1\rho = I$، لذا $\lambda^m = 1$.

۶. گیریم ρ نمایشی با سرشت χ است. اگر $g \in Z(G)$ آنگاه طبق گزارهٔ ۱۴.۹ به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$، $g\rho = \lambda I$. برعکس، اگر به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $g\rho = \lambda I$ آنگاه به‌ازای هر $h \in G$، $(g\rho)(h\rho) = (h\rho)(g\rho)$، و لذا $g \in Z(G)$ زیرا ρ صادق است. بنابراین ثابت کرده‌ایم که به‌ازای عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$، $g\rho = \lambda I$ اگر و فقط اگر $g \in Z(G)$. اکنون نتیجه مطلوب از قضیهٔ ۱۱.۱۳(۱) حاصل می‌شود.

۷. الف) به‌ازای هر $g, h \in G$ داریم $\det((gh)\rho) = \det((g\rho)(h\rho)) = \det(g\rho)\det(h\rho)$. از این‌رو تابع $g \to (\det(g\rho))$ نمایش G روی $\mathbb{C}$ با درجهٔ ۱ است، و لذا δ سرشت خطی G است.

ب) طبق قضیهٔ ۱۰.۱، $G/\text{Ker}\delta \cong \text{Im}\delta$. $\text{Im}\delta$ زیرگروه گروه ضربی اعداد مختلط مخالف صفر $\mathbb{C}^*$ است که گروهی آبلی است، بنابراین $G/\text{Ker}\delta$ آبلی است.

ج) $\text{Im}\delta$ زیرگروه متناهی $\mathbb{C}^*$ است و لذا طبق تمرین ۷.۱ دوری است. همچنین $-1 \in \text{Im}\delta$، پس $\text{Im}\delta$ دارای مرتبهٔ زوج است. از این‌رو $\text{Im}\delta$ شامل زیرگروهی چون H با شاخص ۲ است. به سادگی می‌توان نشان داد که $\{g \in G : \delta(g) \in H\}$ زیرگروه نرمال G با شاخص ۲ است.

۸. گیریم ρ نمایش منظم G باشد. سرشت δ را مانند تمرین ۷ تعریف می‌کنیم. طبق تمرین ۸.۱، G دارای عضوی چون x با مرتبهٔ ۲ است. پایهٔ طبیعی g_1، ... ، g_{2k} از $\mathbb{C}G$ را چنان مرتب می‌کنیم که پایه‌ای چون $\mathscr{B}$ حاصل شود که در آن g و gx به‌ازای هر $g \in G$ مجاور هم باشند. در این صورت

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \circ & ۱ & & & \bigcirc \\ ۱ & \circ & & & \\ & & \circ & ۱ & \\ & & ۱ & \circ & \\ \bigcirc & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

تعداد بلوکهای $\left(\begin{smallmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{smallmatrix}\right)$ برابر k است و چون k فرد است، $\det([x]_{\mathscr{B}}) = (-۱)^k = -۱$ بنابراین $\delta(x) = -۱$. اکنون نتیجهٔ مطلوب با استفاده از تمرین ۷ حاصل می‌شود.

۹. گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ باشد. می‌توان پایهٔ $\mathscr{B}$ را برای V چنان انتخاب کرد که $[g]_{\mathscr{B}}$ قطری و تمام درایه‌های قطر اصلی ± ۱ باشند ((۹.۱۰) را ببینید). فرض کنیم rتا از درایه‌ها ۱ و sتا ۱− باشند. δ را مانند تمرین ۷ تعریف می‌کنیم. اگر s فرد باشد آنگاه $\delta(g) = -۱$، و طبق تمرین ۷، G زیرگروه نرمالی با شاخص ۲ دارد. و اگر s زوج باشد آنگاه (به پیمانهٔ ۴)$s \equiv -s$، لذا $\chi(g) = r - s \equiv r + s = \chi(۱)$(به پیمانهٔ ۴).

۱۰. چون $x \neq ۱$، پس $\chi_{\text{reg}}(x) \neq \chi_{\text{reg}}(۱)$ (گزارهٔ ۲۰.۱۳ را ببینید)، لذا، طبق قضیهٔ ۱۹.۱۳، به‌ازای سرشت تحویل‌ناپذیری چون χ_i از G، $\chi_i(x) \neq \chi_i(۱)$.

فصل ۱۴

۱. با استفاده ازگزارهٔ ۵.۱۴(۲) به‌دست می‌آوریم

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{۳ \times ۳}{۲۴} + \frac{(-۱)(-۱)}{۴} + \circ + \frac{۳ \times ۳}{۸} + \frac{(-۱)(-۱)}{۴} = ۲$$

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{۳ \times ۳}{۲۴} + \frac{(-۱) \times ۱}{۴} + \circ + \frac{۳ \times (-۱)}{۸} + \frac{(-۱)(-۱)}{۴} = \circ$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{۳ \times ۳}{۲۴} + \frac{۱ \times ۱}{۴} + \circ + \frac{(-۱)(-۱)}{۸} + \frac{(-۱)(-۱)}{۴} = ۱$$

از این‌رو طبق قضیهٔ ۲۰.۱۴، ψ تحویل‌ناپذیر است (ولی χ نیست).

۲. گیریم χ_i سرشت ρ_i باشد ($i = ۱, ۲, ۳$). مقادیر این سرشتها عبارت‌اند از

ردهٔ مزدوجی	۱	$a^۲$	$a, a^۳$	$b, a^۲b$	$ab, a^۳b$
$\chi_۱$	۲	-۲	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\chi_۲$	۲	-۲	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\chi_۳$	۲	۲	$\circ$	$\circ$	-۲

طبق قضیهٔ ۲۱.۱۴، $\rho_۱$ و $\rho_۲$ هم‌ارزند، ولی $\rho_۳$ هم‌ارز $\rho_۱$ یا $\rho_۲$ نیست.

۳. طبق گزارهٔ ۲.۱۳، نمایشهای ρ و σ دارای سرشتهای یکسان‌اند و لذا بنابه قضیهٔ ۲۱.۱۴ هم‌ارزند؛ بنابراین ماتریس T با خاصیت مذکور وجود دارد.

۴. گیریم χ_1 سرشت بدیهی G باشد. در این صورت

$$\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$$

چون $\chi(1) > 0$ و طبق فرض به‌ازای هر $g \in G$، $\chi(g) \geq 0$ پس $\langle \chi, \chi_1 \rangle \neq 0$. از آنجا که $\chi \neq \chi_1$، بنا به قضیهٔ ۱۷.۱۴، χ تحویل‌پذیر است.

۵. داریم

$$\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{reg}}(g) \overline{\chi(g)}$$

اما $\chi_{\text{reg}}(g)$ مساوی $|G|$ است هرگاه $g = 1$ و مساوی 0 است هرگاه $g \neq 1$. از این‌رو $\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \chi(1)$.

۶. حکمْ نتیجهٔ بلافصل تمرین ۴.۱۱ و قضیهٔ ۲۴.۱۴ است.

۷. یادآوری می‌کنیم که $\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$. از این‌رو اگر $\langle \psi, \psi \rangle = a$ که $a = 1, 2, 3$ آنگاه دقیقاً aتا از اعداد صحیح d_i مساوی ۱ و بقیه صفرند. اگر $\langle \psi, \psi \rangle = 4$ آنگاه یا دقیقاً چهار تا از d_iها ۱ است، یا اینکه دقیقاً یکی از d_iها ۲ است؛ بقیهٔ d_iها در هر حالت صفرند.

۸. خیر: فرض کنید G گروه C_2 باشد و χ سرشت منظم C_2، یعنی χ_{reg} باشد.

فصل ۱۵

۱.

$$\langle \chi, \chi_1 \rangle = \frac{1}{6}(19 \times 1 + 3 \times (-1) \times 1 + 2 \times (-2) \times 1) = 2$$

$$\langle \chi, \chi_2 \rangle = \frac{1}{6}(19 \times 1 + 3 \times (-1)(-1) + 2 \times (-2) \times 1) = 3$$

$$\langle \chi, \chi_3 \rangle = \frac{1}{6}(19 \times 2 + 0 + 2 \times (-2)(-1)) = 7$$

از این‌رو $\chi = 2\chi_1 + 3\chi_2 + 7\chi_3$. چون در اینجا تمام ضرایب اعداد صحیح نامنفی‌اند، نتیجه می‌گیریم که χ سرشت S_3 است.

۲. با استفاده از روشی که در حل تمرین ۱ به‌کار بردیم به‌دست می‌آوریم

$$\psi_1 = \frac{1}{6}\chi_1 + \frac{1}{6}\chi_2 + \frac{1}{3}\chi_3$$
$$\psi_2 = \frac{1}{2}\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_2$$
$$\psi_3 = \frac{1}{3}\chi_1 + \frac{1}{3}\chi_2 - \frac{1}{3}\chi_3$$

۳. به‌دست می‌آوریم $\psi = -\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + 2\chi_6$. چون ضریب χ_2 عدد صحیح منفی است، ψ سرشت G نیست.

۴. الف) در مورد هر گروه دلخواهی چون G می‌توان گفت که اگر $x \in G$، زیرگروهی که توسط x و عناصر $Z(G)$ تولید می‌شود آبلی است (زیرا ضرب عناصر $Z(G)$ در توانهای x تعویض‌پذیر است). از این‌رو اگر $G = Z(G) \cup Z(G)x$ آنگاه $G = Z(G)$. بنابراین شاخص مرکز G در G هیچ‌گاه ۲ نیست.

هر گروه آبلی مرتبهٔ ۱۲ دارای ۱۲ ردهٔ مزدوجی است. اگر $|G| = 12$ و G غیرآبلی باشد آنگاه $|Z(G)|$ عدد ۱۲ را عاد می‌کند و $|Z(G)|$ برابر ۶ یا ۱۲ نیست، لذا $|Z(G)| \leq 4$. بنابراین حداکثر ۴ ردهٔ مزدوجی G دارای اندازهٔ ۱ هستند ((۹.۱۲) را ببینید)؛ اندازهٔ هریک از رده‌های مزدوجی دیگر حداقل ۲ است، لذا در مجموع تعداد رده‌های مزدوجی ممکن نیست ۹ باشد.

ب) چون تعداد نمایشهای تحویل‌ناپذیر مساوی تعداد رده‌های مزدوجی است، از حل تمرین ۲.۱۱ و قسمت (الف) نتیجه می‌شود که G دارای ۴، ۶ یا ۱۲ ردهٔ مزدوجی است.

اگر G آبلی باشد (مثلاً $G = C_4 \times C_3$) آنگاه G دارای ۱۲ ردهٔ مزدوجی است؛ اگر $G = D_{12}$ آنگاه G دارای ۶ ردهٔ مزدوجی است (۱۲.۱۲ را ببینید)؛ و اگر $G = A_4$ آنگاه G دارای ۴ ردهٔ مزدوجی است (مثال ۱۸.۱۲(۱) را ببینید).

فصل ۱۶

۱. گیریم $C_2 \times C_2 = \{(1,1), (x,1), (1,y), (x,y) : x^2 = y^2 = 1\}$. جدول سرشت $C_2 \times C_2$ عبارت است از (به تمرین ۱.۹ مراجعه کنید)

	$(1,1)$	$(x,1)$	$(1,y)$	(x,y)
χ_1	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	۱	-1	-1
χ_3	۱	-1	۱	-1
χ_4	۱	-1	-1	۱

۲. آخرین سطر جدول سرشت عبارت است از (به مثال ۵.۱۶(۲) مراجعه کنید)

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
χ_5	۲	-2	۰	۰	۰

۳. جدول سرشت کامل G عبارت است از

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۱۰	۵	۵	۲
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۲	$(-۱+\sqrt{۵})/۲$	$(-۱-\sqrt{۵})/۲$	۰
$\chi_۳$	۱	۱	۱	-۱
$\chi_۴$	۲	$(-۱-\sqrt{۵})/۲$	$(-۱+\sqrt{۵})/۲$	۰

دو درجه‌ای که مجهول‌اند، یعنی $\chi_۲(۱)$ و $\chi_۴(۱)$ عبارت‌اند از ۱ و ۲، زیرا $۱۰ = \sum_{i=۱}^{۴}(x_i(۱))^۲$. از آنجا که مرتبهٔ $g_۴$ دو است، با استفاده از نتیجهٔ ۱۳.۱۰، و رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{۴}\chi_i(۱)\overline{\chi_i(g_۴)} = ۰$ مقادیر $\chi_۳$ و $\chi_۴$ به‌ازای $g_۴$ به‌دست می‌آید. سپس از رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{۴}\chi_i(g_۲)\overline{\chi_i(g_۴)} = ۰$ حاصل می‌شود $\chi_۳(g_۲) = ۱$، و به همین نحو نتیجه می‌شود $\chi_۳(g_۳) = ۱$. بالاخره، از رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{۴}\chi_i(۱)\overline{\chi_i(g_۲)} = ۰$ حاصل می‌شود $\chi_۴(g_۲) = (-۱-\sqrt{۵})/۲$، و به همین نحو نتیجه می‌شود $\chi_۴(g_۳) = (-۱+\sqrt{۵})/۲$.

۴. الف) از $\sum_{i=۱}^{۵}\chi_i(g_۱)\overline{\chi_i(g_۲)} = ۰$ حاصل می‌شود $۰ = ۳\overline{\zeta} + ۳\zeta + ۳$، و از $\sum_{i=۱}^{۵}\chi_i(g_۲)\overline{\chi_i(g_۲)} = ۷$ حاصل می‌شود $۷ = ۲\zeta\overline{\zeta} + ۳$.
از این رو $\zeta = (-۱ \pm i\sqrt{۷})/۲$.

ب) مقادیر ستونی که متناظر با ردهٔ مزدوجی $g_۲^{-۱}$ است مزدوج مختلط مقادیر ستون متناظر با $g_۲$ است (گزارهٔ ۱۳.۹(۳) را ببینید)؛ چون ζ غیرحقیقی است، این ستون با ستونهای دیگر جدول سرشت تفاوت دارد.

۵. گیریم $g \in G$. طبق رابطهٔ تعامد ستونی بین ستون متناظر با g و خود آن ستون، داریم $\sum_{i=۱}^{k}\chi_i(g)\overline{\chi_i(g)} = \lvert C_G(g)\rvert$. این عدد مساوی $\lvert G\rvert$ است اگر و فقط اگر $C_G(g) = G$، و این تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $g \in Z(G)$.

۶. ماتریس $\overline{C}$ از ماتریس C با استفاده از جابه‌جاکردن ستونهای آن حاصل می‌شود (گزارهٔ ۱۳.۹(۳) را ببینید). بنابراین $\det\overline{C} = \pm\det C$؛ اگر $\det\overline{C} = \det C$، $\det C$ حقیقی است، و اگر $\det\overline{C} = -\det C$، $\det C$ موهومی محض است.

طبق روابط تعامد ستونی، $\overline{C}^{t}C$ ماتریس قطری $k \times k$ است که درایه‌های قطر اصلیش عبارت‌اند از $\lvert C_G(g_i)\rvert$ $(۱ \le i \le k)$. از این رو $\lvert\det C\rvert^۲ = \prod \lvert C_G(g_i)\rvert$.

اگر $G = C_۳$ آنگاه $\det C = \pm i۳\sqrt{۳}$. (علامت مثبت و منفی بستگی به ترتیب سطرها و ستونها دارد.)

فصل ۱۷

۱. الف) رده‌های مزدوجی $Q_۸$ عبارت‌اند از $\{۱\}$، $\{a^۲\}$، $\{a, a^۳\}$، $\{b, a^۲b\}$ و $\{ab, a^۳b\}$؛

ب) $G' = \{۱, a^۲\}$ و $G/G' = \{G', G'a, G'b, G'ab\} \cong C_۲ \times C_۲$. جدول سرشت

$C_۲ \times C_۲$ در حل تمرین ۱.۱۶ داده شده است. از این‌رو سرشتهای خطی G عبارت‌اند از

g_i	۱	$a^۲$	a	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۸	۸	۴	۴	۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\chi_۳$	۱	۱	-۱	۱	-۱
$\chi_۴$	۱	۱	-۱	-۱	۱

ج) با استفاده از روابط تعامد ستونی، آخرین سرشت تحویل‌ناپذیر G به‌دست می‌آید، که به‌صورت زیر است

	۱	$a^۲$	a	b	ab
$\chi_۵$	۲	-۲	۰	۰	۰

جدول سرشت $Q_۸$ همان جدول سرشت $D_۸$ است.

۲. به سادگی نتیجه می‌شود که $a^۷ = b^۳ = ۱$. با استفاده از گزارهٔ ۱۳.۱۲ به سادگی نتیجه می‌شود که $b^{-۱}ab = a^۲$.

الف) با استفاده از روابط فوق نتیجه می‌شود که هر عضو G به شکل $a^m b^n$ است، که $۰ \le m \le ۶$ و $۰ \le n \le ۲$؛ از این‌رو $|G| \le ۲۱$. اما a دارای مرتبهٔ ۷ و b دارای مرتبهٔ ۳ است، لذا طبق قضیهٔ لاگرانژ ۲۱ مرتبهٔ G را عاد می‌کند. بنابراین $|G| = ۲۱$.

ب) رده‌های مزدوجی G عبارت‌اند از $\{۱\}$، $\{a, a^۲, a^۴\}$، $\{a^۳, a^۵, a^۶\}$، $\{a^m b : ۰ \le m \le ۶\}$ و $\{a^m b^۲ : ۰ \le m \le ۶\}$.

ج) ابتدا توجه کنید که $G' = \langle a \rangle$، لذا سه سرشت خطی G به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

g_i	۱	a	$a^۳$	b	$b^۲$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۱	۷	۷	۳	۳
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	۱	ω	$\omega^۲$
$\chi_۳$	۱	۱	۱	$\omega^۲$	ω

که $\omega = e^{۲\pi i/۳}$. برای پیداکردن دو سرشت تحویل‌ناپذیر باقیمانده، یعنی $\chi_۴$ و $\chi_۵$، توجه کنید که a و $a^{-۱}$ مزدوج نیستند؛ لذا به‌ازای سرشت تحویل‌ناپذیری مانند χ داریم $\chi(a) \neq \overline{\chi}(a)$ (نتیجهٔ ۶.۱۵ را ببینید). از این‌رو $\chi_۴$ و $\chi_۵$ باید مزدوج مختلط یکدیگر باشند. با استفاده از روابط تعامد ستونی، به‌دست می‌آوریم

	۱	a	$a^۳$	b	$b^۲$
$\chi_۴$	۳	α	$\overline{\alpha}$	۰	۰
$\chi_۵$	۳	$\overline{\alpha}$	α	۰	۰

که $\alpha = (-۱ + i\sqrt{۷})/۲$.

۳. طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷ تعداد سرشتهای خطی G مرتبهٔ G را عاد می‌کند. اکنون با مراجعه به حل تمرین ۲.۱۱ دیده می‌شود که G دارای ۳، ۴ یا ۱۲ سرشت خطی است. اگر G دارای ۱۲ سرشت خطی باشد، آبلی است (گزارهٔ ۱۸.۹ را ببینید)، و لذا قطعاً ساده نیست. اگر G دارای ۳ یا ۴ سرشت خطی باشد آنگاه $|G/G'|$ برابر ۳ یا ۴ است و از آنجا که $G' \lhd G$ باز هم G ساده نیست.

۴. در جدول سرشت زیر داریم $\chi_۱ = ۱_G$، $\chi_۲ = \chi$، $\chi_۳ = \chi^۲$، $\chi_۴ = \chi_۲\chi_۳$، $\chi_۵ = \phi$، $\chi_۶ = \phi\chi$؛ و طبق گزارهٔ ۱۴.۱۷ همگی اینها سرشتهای تحویل‌ناپذیرند. مرتبهٔ مرکزسازها با استفاده از روابط تعامد به‌دست می‌آیند، و اندازهٔ هر رده، یعنی $|g_i^G|$ از رابطهٔ $|G| = |C_G(g_i)||g_i^G|$ حاصل می‌شود (قضیهٔ ۸.۱۲).

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۴	۴	۶	۶	۱۲
$\|g_i^G\|$	۱	۳	۳	۲	۲	۱
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	$-i$	i	۱	-۱	-۱
$\chi_۳$	۱	-۱	-۱	۱	۱	۱
$\chi_۴$	۱	i	$-i$	۱	-۱	-۱
$\chi_۵$	۲	۰	۰	-۱	-۱	۲
$\chi_۶$	۲	۰	۰	-۱	۱	-۲

۵. زیرگروههای نرمال $D_۸$ عبارت‌اند از

$$D_۸ = \mathrm{Ker}\chi_۱, \qquad \langle a\rangle = \mathrm{Ker}\chi_۲$$
$$\langle a^۲, b\rangle = \mathrm{Ker}\chi_۳, \qquad \langle a^۲, ab\rangle = \mathrm{Ker}\chi_۴$$
$$\langle a^۲\rangle = \mathrm{Ker}\chi_۲ \cap \mathrm{Ker}\chi_۳, \qquad \{۱\} = \mathrm{Ker}\chi_۵$$

۶. الف) نشان دهید که ماتریسهای داده شده در روابط مربوطه، یعنی روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^n & 0 \end{pmatrix}^{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^n & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

از این‌رو نمایشهایی از T_{4n} را در دست داریم (به مثال ۴.۱ مراجعه کنید).

ب) طبق تمرین ۴.۸ نمایشهای مذکور در قسمت (الف) تحویل‌ناپذیرند مگر اینکه $\varepsilon = \pm 1$. به‌ازای $\varepsilon = e^{2\pi ir/2n}$، با شرط $r = 1, 2, \cdots, n-1$، $n-1$ نمایش تحویل‌ناپذیر به‌دست می‌آوریم که هیچ‌یک از آنها با دیگری هم‌ارز نیست، زیرا سرشتهای آنها متمایز است. به‌علاوه $G' = \langle a^2 \rangle$، از این‌رو $|G/G'| = 4$ و لذا چهار نمایش درجهٔ ۱ وجود دارد (قضیهٔ ۱۱.۱۷ را ببینید). مجموع مربعات درجات نمایشهای تحویل‌ناپذیری که تاکنون یافته‌ایم برابر است با $4 \times 1^2 + 4 \times 2^2 \times (n-1) = 4n$. بنابراین، طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱، تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر را یافته‌ایم. (برای اینکه اطلاعات بیشتری دربارهٔ نمایشهای درجهٔ ۱ به‌دست آورید، حل تمرین ۳.۱۸ را ببینید؛ توجه داشته باشید که ساختار G/G' بستگی به این دارد که n زوج باشد یا فرد.)

۷. الف) نشان دهید که ماتریسهای داده شده در روابط مربوطه صدق می‌کنند.

ب) نمایشهای مذکور در قسمت (الف)، به‌ازای $\varepsilon = e^{2\pi ik/2n}$، که $0 \leq k \leq n-1$، تحویل‌ناپذیرند (طبق تمرین ۴.۸)، و هیچ‌یک از آنها با دیگری هم‌ارز نیست (مقادیر سرشتها را به‌ازای a^2 در نظر بگیرید). همچنین $G' = \langle b \rangle$، از این‌رو $|G/G'| = 2n$ و لذا $2n$ نمایش با درجهٔ ۱ وجود دارد. مجموع مربعات درجات نمایشهای تحویل‌ناپذیری که پیدا کرده‌ایم برابر است با $2n \times 1^2 + n \times 2^2 = 6n$، لذا تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر را به‌دست آورده‌ایم.

۸. الف) نشان دهید که ماتریسهای داده شده در روابط مربوطه صدق می‌کنند.

ب) نمایشهای مذکور در قسمت (الف)، به‌ازای $\varepsilon = e^{2\pi ij/n}$، که $0 \leq j \leq n-1$، تحویل‌ناپذیرند (طبق تمرین ۴.۸) و غیر هم‌ارزند (سرشتهایشان متمایزند). توجه کنید که b^2 به هستهٔ هیچ‌کدام از این نمایشها تعلق ندارد.

نمایشهای دیگری نیز وجود دارند که تحت آنها

$$a \to \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که η هریک از ریشه‌های $2n$ام واحد در $\mathbb{C}$ می‌تواند باشد. این نمایشها به‌ازای $\eta = e^{2\pi ij/2n}$، که $1 \leq j \leq n-1$، تحویل‌ناپذیر و غیرهم‌ارزند، به‌علاوه با هیچ‌کدام از نمایشهایی که قبلا به‌دست آوردیم هم‌ارز نیستند، زیرا b^2 به هستهٔ هریک از این نمایشها تعلق دارد.

بالاخره، $G' = \langle a^{۲}, b^{۲} \rangle$ و $G/G' \cong C_{۲} \times C_{۲}$، لذا چهار نمایش با درجهٔ ۱ به‌دست می‌آوریم.

اکنون تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر را پیدا کرده‌ایم، زیرا مجموع مربعات درجات نمایشهای تحویل‌ناپذیر فوق برابر است با

$$n \times ۲^{۲} + (n - ۱) \times ۲^{۲} + ۴ \times ۱^{۲} = ۸n$$

فصل ۱۸

۱. جدول سرشت $D_{۸}$ عبارت است از

جدول سرشت $D_{۸}$

g_i	۱	$a^{۲}$	a	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	۸	۸	۴	۴	۴
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	۱-	۱-
$\chi_{۳}$	۱	۱	۱-	۱	۱-
$\chi_{۴}$	۱	۱	۱-	۱-	۱
$\chi_{۵}$	۲	۲-	۰	۰	۰

(مثال ۳.۱۶(۳) یا بخش ۳.۱۸ را ببینید.) $D_{۸}$ را گروه تقارنهای مربع تلقی کنید و b را تقارن نسبت به یکی از قطرهای مربع بگیرید. در این صورت مقادیر π عبارت‌اند از

	۱	$a^{۲}$	a	b	ab
π	۴	۰	۰	۲	۰

از این‌رو $\pi = \chi_{۱} + \chi_{۳} + \chi_{۵}$. (با مثال ۲۸.۱۴(۲)، که در آنجا b را تقارن دیگری گرفتیم، مقایسه کنید.)

۲. قرار می‌دهیم $\omega = e^{۲\pi i/۶}$. در این صورت ۱ $= \omega + \omega^{-۱}$، ۱- $= \omega^{۴} + \omega^{-۴} = \omega^{۲} + \omega^{-۲}$.
از این‌رو، با استفاده از بخش ۳.۱۸، جدول سرشت $D_{۱۲}$ حاصل می‌شود:

جدول سرشت $D_{۱۲}$

g_i	۱	$a^{۳}$	a	$a^{۲}$	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲	۱۲	۶	۶	۴	۴
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	۱	۱-	۱-
$\chi_{۳}$	۱	۱-	۱-	۱	۱	۱-
$\chi_{۴}$	۱	۱-	۱-	۱	۱-	۱
$\chi_{۵}$	۲	۲-	۱	۱-	۰	۰
$\chi_{۶}$	۲	۲	۱-	۱-	۰	۰

هفت زیرگروه نرمال D_{12} عبارت‌اند از $G = \mathrm{Ker}\chi_1$، $\langle a\rangle = \mathrm{Ker}\chi_2$، $\langle a^2, b\rangle = \mathrm{Ker}\chi_3$، $\langle a^2, ab\rangle = \mathrm{Ker}\chi_4$، $\langle a^2\rangle = \mathrm{Ker}\chi_3 \cap \mathrm{Ker}\chi_4$، $\langle a^3\rangle = \mathrm{Ker}\chi_6$ و $\{1\} = \mathrm{Ker}\chi_5$.

۳. $n+3$ ردهٔ مزدوجی G عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{a^n\}, \{a^r, a^{-r}\} \quad (1 \leq r \leq n-1)$$
$$\{a^{2j}b : 0 \leq j \leq n-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq n-1\}$$

با استفاده از تمرین ۶.۱۷، $n-1$ سرشت تحویل‌ناپذیر ψ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ از G به قرار زیر حاصل می‌شود

g_i	1	a^n	$a^r (1 \leq r \leq n-1)$	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	$4n$	$4n$	$2n$	4	4
ψ_j	2	$2(-1)^j$	$\omega^{rj} + \omega^{-rj}$	0	0

که $\omega = e^{2\pi i/2n}$.

چهار سرشت تحویل‌ناپذیر باقیماندهٔ G خطی‌اند. اگر n فرد باشد آنگاه $G/G' = \langle G'b\rangle \cong C_4$ و سرشتهای خطی G عبارت‌اند از

g_i	1	a^n	$a^r (1 \leq r \leq n-1)$	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	$(-1)^r$	i	$-i$
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	$(-1)^r$	$-i$	i

اگر n زوج باشد آنگاه $G/G' \cong C_2 \times C_2$ و سرشتهای خطی G عبارت‌اند از

g_i	1	a^n	$a^r (1 \leq r \leq n-1)$	b	ab
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	$(-1)^r$	1	-1
χ_4	1	1	$(-1)^r$	-1	1

توجه کنید که $T_4 \cong C_4$، $T_8 \cong Q_8$ و T_{12} گروهی است که در بخش ۴.۱۸ دیدیم.

۴. $3n$ ردهٔ مزدوجی G عبارت‌اند از $\{a^{2r}\}$، $\{a^{2r}b, a^{2r}b^2\}$، $\{a^{2r+1}, a^{2r+1}b, a^{2r+1}b^2\}$، که $0 \leq r \leq n-1$. داریم $G' = \langle b\rangle$ و $G/G' = \langle G'a\rangle \cong C_{2n}$. از این‌رو $2n$ سرشت خطی که با χ_j $(0 \leq j \leq 2n-1)$ در جدول زیر نشان داده شده‌اند به‌دست می‌آیند. با استفاده از تمرین ۷.۱۷، n سرشت تحویل‌ناپذیر که با ψ_k $(0 \leq k \leq n-1)$ در جدول زیر نشان داده شده‌اند به‌دست می‌آیند

جدول سرشت U_{6n}

g_i	a^{2r}	$a^{2r}b$	a^{2r+1}
$\|C_G(g_i)\|$	$6n$	$3n$	$2n$
χ_j $(0 \leq j \leq 2n-1)$	ω^{2jr}	ω^{2jr}	$\omega^{j(2r+1)}$
ψ_k $(0 \leq k \leq n-1)$	$2\omega^{2kr}$	$-\omega^{2kr}$	0

توجه: $\omega = e^{2\pi i/2n}$

مشاهده می‌شود که $U_6 \cong D_6$، $U_{12} \cong T_{12}$ و $U_{18} \cong D_6 \times C_3$.

۵. $2n+3$ ردهٔ مزدوجی G عبارت‌اند از

$$\{1\}, \{b^2\}, \{a^{2r+1}, a^{-2r-1}b^2\} \quad (0 \leq r \leq n-1)$$
$$\{a^{2s}, a^{-2s}\}, \{a^{2s}b^2, a^{-2s}b^2\} \quad (1 \leq s \leq (n-1)/2)$$
$$\{a^jb^k : k=1,3 \text{ و } j \text{ زوج}\}$$
$$\{a^jb^k : k=1,3 \text{ و } j \text{ فرد}\}$$

با استفاده از تمرین ۸.۱۷، چهار سرشت خطی $\chi_1, \ldots, \chi_4$، n سرشت ψ_j $(0 \leq j \leq n-1)$ با درجهٔ ۲، و $n-1$ سرشت دیگر ϕ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ با درجهٔ ۲، به قرار زیر به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال، جدول سرشت V_{24} در صفحهٔ بعد داده شده است.

جدول سرشت V_{8n}

g_i	1	b^2	a^{2r+1} $(0 \leq r \leq n-1)$	a^{2s} $(1 \leq s \leq (n-1)/2)$	$a^{2s}b^2$	b	ab
$\|C_G(g_i)\|$	$8n$	$8n$	$4n$	$4n$	$4n$	4	4
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	1	1	-1
χ_4	1	1	-1	1	1	-1	1
ψ_j $(0 \leq j \leq n-1)$	2	-2	$\omega^{2j(2r+1)} - \omega^{-2j(2r+1)}$	$\omega^{4js} + \omega^{-4js}$	$-\omega^{4js} - \omega^{-4js}$	0	0
ϕ_j $(1 \leq j \leq n-1)$	2	2	$\omega^{j(2r+1)} + \omega^{-j(2r+1)}$	$\omega^{2js} + \omega^{-2js}$	$\omega^{2js} + \omega^{-2js}$	0	0

توجه: $\omega = e^{2\pi i/2n}$

جدول سرشت $V_{۲۴}$

g_i	۱	$b^{۲}$	a	$a^{۳}$	$a^{۵}$	$a^{۲}$	$a^{۲}b^{۲}$	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۴	۲۴	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۴	۴
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\chi_{۳}$	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱	۱	-۱
$\chi_{۴}$	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱	-۱	۱
$\psi_{۰}$	۲	-۲	۰	۰	۰	۲	-۲	۰	۰
$\psi_{۱}$	۲	-۲	$i\sqrt{۳}$	۰	$-i\sqrt{۳}$	-۱	۱	۰	۰
$\psi_{۲}$	۲	-۲	$-i\sqrt{۳}$	۰	$i\sqrt{۳}$	-۱	۱	۰	۰
$\phi_{۱}$	۲	۲	۱	-۲	۱	-۱	-۱	۰	۰
$\phi_{۲}$	۲	۲	-۱	۲	-۱	-۱	-۱	۰	۰

فصل ۱۹

.۱

$$\begin{aligned}\langle \chi\psi, \phi\rangle &= \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g)\overline{\phi(g)}\\ &= \frac{۱}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\overline{\psi}(g)\phi(g)} = \langle \chi, \overline{\psi}\phi\rangle\end{aligned}$$

به همین نحو نتیجه می‌گیریم $\langle \chi\psi, \phi\rangle = \langle \psi, \overline{\chi}\phi\rangle$.

.۲ طبق تمرین ۱، $\langle \chi\psi, ۱_G\rangle = \langle \chi, \overline{\psi}\rangle$. اکنون با استفاده از گزارهٔ ۱۵.۱۳ و رابطهٔ (۱۳.۱۴) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

.۳ گیریم V ـ$\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است. چون χ صادق نیست، عضوی چون $۱ \neq g \in G$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $v \in V$، $vg = v$. طبق گزارهٔ ۵.۱۵، G سرشت تحویل‌ناپذیری چون ψ دارد به‌قسمی که $\psi(g) \neq \psi(۱)$. گیریم n عدد صحیح است و $n \geq ۰$. در این صورت، به‌ازای هر $w \in V\otimes\cdots\otimes V$ (که تعداد Vها n است)، $wg = w$. از این‌رو به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر ϕ با شرط $\langle \chi^n, \phi\rangle \neq ۰$ داریم $\phi(g) = \phi(۱)$. بنابراین $\langle \chi^n, \psi\rangle = ۰$.

.۴ می‌دانیم که $(۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵)^{۲}$ با $(۱\ ۳\ ۴\ ۵\ ۲)$ در $A_{۵}$ مزدوج است. با استفاده از گزارهٔ ۱۴.۱۹ به‌دست می‌آوریم

	۱	(۱ ۲ ۳)	(۱ ۲)(۳ ۴)	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵)	(۱ ۳ ۴ ۵ ۲)
χ_S	۱۵	۰	۳	۰	۰
χ_A	۱۰	۱	-۲	۰	۰
ϕ_S	۶	۰	۲	۱	۱
ϕ_A	۳	۰	-۱	$(۱+\sqrt{۵})/۲$	$(۱-\sqrt{۵})/۲$

در این صورت

$$\chi_S = \psi_۱ + \psi_۲ + ۲\psi_۳$$

$$\chi_A = \psi_۲ + \psi_۴ + \psi_۵$$

$$\phi_S = \psi_۱ + \psi_۳$$

$$\phi_A = \psi_۴$$

۵. در جدول زیر χ را با $\chi_۵$، χ_S را با $\chi_۴$ و χ_A را با $\chi_۲$ نشان داده‌ایم. چون به‌ازای $i = ۲,۴,۵$، $۱ = \langle \chi_i, \chi_i \rangle$، این سرشتها تحویل‌ناپذیرند. همچنین در جدول زیر $\chi_۱$ سرشت بدیهی است، $\chi_۳ = \overline{\chi_۲}$، $\chi_۶ = \overline{\chi_۵}$ و $\chi_۷ = \chi_۲\chi_۵$؛ این سرشتها طبق گزاره‌های ۱۵.۱۳ و ۱۴.۱۷ تحویل‌ناپذیرند. از آنجا که G دارای هفت ردهٔ مزدوجی است جدول سرشت زیر کامل است.

جدول سرشت G (تمرین ۲.۲۷ را ببینید)

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۴	۲۴	۴	۶	۶	۶	۶
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱	۱	۱	ω	$\omega^۲$	$\omega^۲$	ω
$\chi_۳$	۱	۱	۱	$\omega^۲$	ω	ω	$\omega^۲$
$\chi_۴$	۳	۳	-۱	۰	۰	۰	۰
$\chi_۵$	۲	-۲	۰	$-\omega^۲$	$-\omega$	ω	$\omega^۲$
$\chi_۶$	۲	-۲	۰	$-\omega$	$-\omega^۲$	$\omega^۲$	ω
$\chi_۷$	۲	-۲	۰	-۱	-۱	۱	۱

توجه: $\omega = e^{۲\pi i/۳}$

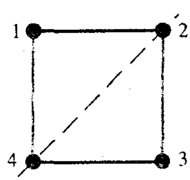
۶. اگر $D_۶$ را به‌صورت $\langle a, b : a^۳ = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$ نمایش دهیم، جدول سرشت $D_۶ \times D_۶$ به‌صورت زیر است

جدول سرشت $D_۶ \times D_۶$

(g_i, h_j)	$(۱,۱)$	$(a,۱)$	$(b,۱)$	$(۱,a)$	(a,a)	(b,a)	$(۱,b)$	(a,b)	(b,b)
$\|C_G(g_i,h_j)\|$	۳۶	۱۸	۱۲	۱۸	۹	۶	۱۲	۶	۴
$\chi_۱ \times \chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲ \times \chi_۱$	۱	۱	-۱	۱	۱	-۱	۱	۱	-۱
$\chi_۳ \times \chi_۱$	۲	-۱	۰	۲	-۱	۰	۲	-۱	۰
$\chi_۱ \times \chi_۲$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۲ \times \chi_۲$	۱	۱	-۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	۱
$\chi_۳ \times \chi_۲$	۲	-۱	۰	۲	-۱	۰	-۲	۱	۰
$\chi_۱ \times \chi_۳$	۲	۲	۲	-۱	-۱	-۱	۰	۰	۰
$\chi_۲ \times \chi_۳$	۲	۲	-۲	-۱	-۱	۱	۰	۰	۰
$\chi_۳ \times \chi_۳$	۴	-۲	۰	-۲	۱	۰	۰	۰	۰

فصل ۲۰

۱. الف) $D_۸$ را زیرگروهی از $S_۴$ تلقی کنید که چهار رأس مربع را مانند مثال ۱.۱(۳) جابه‌جا می‌کند. b را تقارن نسبت به محور نشان داده شده در شکل زیر بگیرید



در این صورت از $a \to (۱\ ۲\ ۳\ ۴)$ و $b \to (۱\ ۳)$ یکریختی مطلوب به‌دست می‌آید.

ب) سرشتهای تحویل‌ناپذیر $\chi_۱$، ...، $\chi_۵$ از $S_۴$ را مانند بخش ۱.۱۸ در نظر بگیرید و جدول سرشت H را به‌صورت زیر تشکیل دهید

g_i	۱	$(۱\ ۳)(۲\ ۴)$	$(۱\ ۲\ ۳\ ۴)$	$(۱\ ۳)$	$(۱\ ۲)(۳\ ۴)$
$\|C_H(g_i)\|$	۸	۸	۴	۴	۴
$\psi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\psi_۲$	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\psi_۳$	۱	۱	-۱	۱	-۱
$\psi_۴$	۱	۱	-۱	-۱	۱
$\psi_۵$	۲	-۲	۰	۰	۰

(مثال ۱۶.۳(۳) یا بخش ۱۸.۳ را ببینید). به‌دست می‌آوریم $\chi_1 \downarrow H = \psi_1$، $\chi_2 \downarrow H = \psi_4$، $\chi_3 \downarrow H = \psi_1 + \psi_4$، $\chi_4 \downarrow H = \psi_3 + \psi_5$، $\chi_5 \downarrow H = \psi_2 + \psi_5$.

۲. گیریم χ_1، ... ، χ_{11} سرشتهای تحویل‌ناپذیر S_6 باشند که در مثال ۱۹.۱۷ دیدیم. مستقیماً یا با استفاده از ۲۰.۱۲، درمی‌یابیم که سرشتهای $\chi_i \downarrow A_6$ $(i = 1, 3, 5, 7, 9)$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر متمایز A_6 هستند؛ این سرشتها سرشتهای ψ_1، ... ، ψ_5 در جدول سرشت زیر هستند. همچنین، $\langle \chi_{11} \downarrow A_6, \chi_{11} \downarrow A_6 \rangle = 2$. با استدلالی مشابه آنچه در مثال ۲۰.۱۳ دیدیم، از $\chi_{11} \downarrow A_6$ دو سرشت تحویل‌ناپذیر که آنها را با ψ_6 و ψ_7 نشان می‌دهیم حاصل می‌شوند.

جدول سرشت A_6

g_i	1	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4\,5)$	$(1\,3\,4\,5\,2)$	$(1\,2\,3)(4\,5\,6)$	$(1\,2\,3\,4)(5\,6)$
$\lvert C_{A_6}(g_i)\rvert$	360	9	8	5	5	9	4
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	5	2	1	0	0	-1	-1
ψ_3	10	1	-2	0	0	1	0
ψ_4	9	0	1	-1	-1	0	1
ψ_5	5	-1	1	0	0	2	-1
ψ_6	8	-1	0	α	β	-1	0
ψ_7	8	-1	0	β	α	-1	0

توجه: $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ و $\beta = (1-\sqrt{5})/2$

۳. گیریم ψ_1، ... ، ψ_r سرشتهای تحویل‌ناپذیر H باشند. در این صورت $\chi \downarrow H = d_1\psi_1 + \cdots + d_r\psi_r$ که d_iها اعداد صحیح نامنفی‌اند. چون درجهٔ هر ψ_i مساوی ۱ است، از نابرابری (۲۰.۶) نتیجه می‌شود

$$\chi(1) = d_1 + \cdots + d_r \leq d_1^2 + \cdots + d_r^2 \leq n$$

۴. نابرابری $\langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H \leq 3$ بلافاصله از گزارهٔ ۲۰.۵ نتیجه می‌شود.

می‌نویسیم $d = \langle \chi \downarrow H, \chi \downarrow H \rangle_H$. برای ارائهٔ مثالهایی در حالت $d = 1$ و $d = 2$، G را گروه S_3 و H را زیرگروه G با شاخص ۲، و χ را سرشت تحویل‌ناپذیر G با درجهٔ d بگیرید. برای ارائهٔ مثالی در حالت $d = 3$، G را گروه A_4، H را زیرگروه V_4، و χ را سرشت تحویل‌ناپذیر G با درجهٔ ۳ بگیرید (بخش ۱۸.۲ را ببینید).

۵. ۲۰.۱۲ را ببینید. چون در فهرست درجات S_7، ۲۰ فقط یک بار ظاهر می‌شود، تحدید سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۲۰ به A_7 باید مجموع دو سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز درجهٔ ۱۰ باشد. از تحدید چهارده سرشت تحویل‌ناپذیر باقیماندهٔ S_7 حداقل هفت سرشت تحویل‌ناپذیر A_7 به‌دست می‌آید؛ و

فقط در صورتی دقیقاً هفت سرشت به‌دست می‌آید که تحدید هریک از چهارده سرشت تحویل‌ناپذیر باشد. در صورت مسأله به ما گفته شده است که A_7 دقیقاً نه ردهٔ مزدوجی دارد. از این‌رو درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر A_7 عبارت‌اند از

$$1, 6, 14, 14, 15, 10, 10, 21, 35 \;.$$

فصل ۲۱

۱. الف) قرار می‌دهیم $u = 1 - a^2 + b - a^2 b$. در این صورت $ua^2 = -u$ و $ub = u$. از این‌رو $\mathrm{sp}(u)$ $\mathbb{C}H$-زیرمدول $\mathbb{C}H$ است.

ب) از آنجا که هر عنصر G به H یا Ha تعلق دارد، عناصر u و ua پایه‌ای برای $U \uparrow G$ تشکیل می‌دهند.

ج) سرشت ψ از U و سرشت $\psi \uparrow G$ از $U \uparrow G$ عبارت‌اند از

	1	a^2	b	$a^2 b$
ψ	1	-1	1	-1

	1	a^2	a	b	ab
$\psi \uparrow G$	2	-2	0	0	0

چون $\langle \psi \uparrow G, \psi \uparrow G \rangle = 1$، مدول فرابری $U \uparrow G$ تحویل‌ناپذیر است.

۲. جدول سرشت H را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

	1	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	ω	ω^2
ψ_3	1	ω^2	ω

که در آن $\omega = e^{2\pi i/3}$.

الف) $\chi_1 \downarrow H = \chi_2 \downarrow H = \psi_1$،

$\chi_3 \downarrow H = \psi_2 + \psi_3$،

$\chi_4 \downarrow H = \chi_5 \downarrow H = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$.

ب) با استفاده از قضیهٔ تقابل فروبنیوس به‌دست می‌آوریم

$$\psi_1 \uparrow G = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + \chi_5, \psi_2 \uparrow G = \psi_3 \uparrow G = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$$

۳. کافی است ثابت کنیم که اگر U $\mathbb{C}H$-زیرمدول CH باشد آنگاه $\dim(U\uparrow G) = |G:H|\dim U$. گیریم Hg_j $(1 \le j \le m)$ هم‌مجموعه‌های راست متمایز H در G هستند. در این صورت $U(\mathbb{C}G) = Ug_1 + \cdots + Ug_m$، که $Ug_j = \{ug_j : u \in U\}$. مجموع $Ug_1 + \cdots + Ug_m$ مستقیم است (زیرا عناصر Ug_j ترکیب خطی عناصر Hg_j هستند). همچنین $\dim(Ug_j) = \dim U$ (زیرا تابع $u \to ug_j$ (که $u \in U$) یکریختی فضاهای برداری است). از این‌رو $\dim(U\uparrow G) = \dim(U(\mathbb{C}G)) = m\dim U$.

۴. گیریم ϕ سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد. با دوبار استفاده از قضیهٔ تقابل فروبنیوس و دوبار استفاده از نتیجهٔ تمرین ۱.۱۹ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\langle(\psi(\chi\downarrow H))\uparrow G,\phi\rangle_G &= \langle\psi(\chi\downarrow H),\phi\downarrow H\rangle_H\\ &= \langle\psi,(\overline{\chi}\phi)\downarrow H\rangle_H = \langle\psi\uparrow G,\overline{\chi}\phi\rangle_G\\ &= \langle(\psi\uparrow G)\chi,\phi\rangle_G\end{aligned}$$

چون تساوی فوق به‌ازای هر سرشت تحویل‌ناپذیر ϕ از G برقرار است، از قضیهٔ ۱۷.۱۴ نتیجه می‌گیریم که $(\psi(\chi\downarrow H))\uparrow G = (\psi\uparrow G)\chi$.

۵. مقادیر $\phi\uparrow G$ و $\psi\uparrow G$ با استفاده از گزارهٔ ۲۳.۲۱ به‌دست می‌آیند. این مقادیر به‌ازای عناصری با شاکلهٔ دوری (۱)، (۷) و (۳,۳) به قرار زیرند، و به‌ازای سایر عناصر صفرند.

شاکلهٔ دوری	(۱)	(۷)	(۳,۳)
$\phi\uparrow G$	۲۴۰	۲	۱۲
$\psi\uparrow G$	۷۲۰	۱−	۰

۶. داریم $|G:H|\psi(1) = d_1\chi_1(1) + \cdots + d_k\chi_k(1)$، که طبق قضیهٔ تقابل فروبنیوس،

$$d_i = \langle\psi\uparrow G,\chi_i\rangle_G = \langle\psi,\chi_i\downarrow H\rangle_H$$

از این‌رو، چون ψ تحویل‌ناپذیر است، $\chi_i\downarrow H = d_i\psi + \beta$ که β یا سرشت H است یا برابر صفر است. بنابراین $\chi_i(1) \ge d_i\psi(1)$ و لذا

$$|G:H|\psi(1) \ge (d_1^2 + \cdots + d_k^2)\psi(1)$$

از اینجا حکم مطلوب حاصل می‌شود.

۷. با به‌کارگیری حکم تمرین ۶، به‌همان طریق که گزارهٔ ۸.۲۰ اثبات شد نتیجه می‌گیریم که
(۱) $\psi\uparrow G$ تحویل‌ناپذیر است یا اینکه
(۲) $\psi\uparrow G$ مجموع دو سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز هم‌درجه است.

ابتدا فرض می‌کنیم که $\psi \uparrow G$ تحویل‌ناپذیر است و آن را χ می‌نامیم. در این صورت $\chi(1) = 2\psi(1)$ و طبق قضیهٔ تقابل فروبنیوس $\langle \chi \downarrow H, \psi\rangle_H = 1$. از این‌رو $\chi \downarrow H$ تحویل‌پذیر است ولذا مثلاً $\chi \downarrow H = \psi + \phi$. اکنون فرض کنیم که ψ' سرشت تحویل‌ناپذیر H است. داریم

$$\langle \psi' \uparrow G, \chi\rangle_G \neq 0 \Leftrightarrow \langle \psi', \chi \downarrow H\rangle_H \neq 0 \Leftrightarrow \psi' = (\psi \text{ یا } \phi)$$

بنابراین

اگر $\psi \uparrow G$ تحویل‌ناپذیر باشد، دقیقاً به‌ازای یک سرشت تحویل‌ناپذیر دیگر ϕ از H داریم $\psi \uparrow G = \phi \uparrow G$. (با گزارهٔ ۱۰.۲۰ مقایسه کنید.)

حال فرض کنیم که $\psi \uparrow G$ تحویل‌پذیر است، مثلاً $\psi \uparrow G = \chi_1 + \chi_2$. در این صورت $\chi_1(1) = \psi(1)$ و $\langle \chi_1 \downarrow H, \psi\rangle_H = 1$؛ از این‌رو $\chi_1 \downarrow H = \psi$. اکنون فرض کنیم که ψ' سرشت تحویل‌ناپذیر H است. داریم

$$\langle \psi' \uparrow G, \chi_1\rangle_G \neq 0 \Leftrightarrow \langle \psi', \chi_1 \downarrow H\rangle_H \neq 0 \Leftrightarrow \psi' = \psi$$

بنابراین

اگر $\psi \uparrow G = \chi_1 + \chi_2$، که χ_1 و χ_2 سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند، و ψ' سرشت تحویل‌ناپذیر H باشد به‌طوری که χ_1 یا χ_2 از اجزاء $\psi' \uparrow G$ باشند آنگاه $\psi' = \psi$. (با گزارهٔ ۱۱.۲۰ مقایسه کنید.)

فصل ۲۲

۱. تعداد سرشتهای خطی G عدد ۱۵ را عاد می‌کند (قضیهٔ ۱۱.۱۷)، و مجموع مربعات درجات سرشتهای تحویل‌ناپذیر G برابر ۱۵ است (قضیهٔ ۱۲.۱۱)؛ به‌علاوه، هریک از این درجات ۱۵ را عاد می‌کند (قضیهٔ ۱۱.۲۲). از این‌رو هر سرشت تحویل‌ناپذیر دارای درجهٔ ۱ است، و لذا طبق گزارهٔ ۱۸.۹، G آبلی است.

۲. مانند تمرین ۱ از قضایای ۱۲.۱۱، ۱۱.۱۷ و ۱۱.۲۲ استفاده می‌کنیم. درجهٔ هر سرشت تحویل‌ناپذیر ۱ یا ۲ است، و اگر r تعداد سرشتهای درجهٔ ۱ و s تعداد سرشتهای درجهٔ ۲ باشد آنگاه

$$r \text{ عدد ۱۶ را عاد می‌کند و } \quad r \times 1^2 + s \times 2^2 = 16$$

از این‌رو r برابر با ۴ یا ۸ یا ۱۶ است و $r + s$ برابر با ۷ یا ۱۰ یا ۱۶ است.

۳. الف) چون G غیرآبلی است، ممکن نیست که تمام سرشتهای تحویل‌ناپذیر دارای درجهٔ ۱ باشند (گزارهٔ ۱۸.۹). این‌بار، قضایای ۱۲.۱۱، ۱۱.۱۷ و ۱۱.۲۲ نشان می‌دهند که r سرشت تحویل‌ناپذیر با درجهٔ ۱ و s سرشت تحویل‌ناپذیر با درجهٔ q وجود دارند به‌طوری که

$$r \text{ عدد } pq \text{ را عاد می‌کند، } \quad s \geq 1 \quad \text{و} \quad r + sq^2 = pq$$

از این‌رو $r = q$ و $s = (p-۱)/q$.

ب) طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، $|G'| = p$.

ج) تعداد رده‌های مزدوجی G مساوی $r + s$ است.

(برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ گروههای مرتبهٔ pq فصل ۲۵ را ببینید.)

۴. الف) طبق فرض، اعداد $a, b \in \mathbb{C}$ وجود دارند به‌قسمی که به‌ازای هر $g \neq ۱$، $\phi(g) = a$، و $\phi(۱) = a + b|G|$. بنابراین $\phi = a۱_G + b\chi_{\text{reg}}$، زیرا طرفین این تساوی به‌ازای هر عنصر g دارای مقادیر مساوی‌اند.

ب) داریم

$$\langle ۱_G, \phi\rangle = \frac{۱}{|G|}(a + b|G| + (|G| - ۱)a) = a + b$$

$$\langle \chi_{\text{reg}}, \phi\rangle = \frac{۱}{|G|}|G|(a + b|G|) = a + b|G|$$

از آنجا که ϕ سرشت است، $\langle ۱_G, \phi\rangle$ و $\langle \chi_{\text{reg}}, \phi\rangle$ هردو عدد صحیح‌اند.

ج) اگر χ سرشت تحویل‌ناپذیر غیربدیهی G باشد آنگاه $\langle \phi, \chi\rangle \in \mathbb{Z}$ و $\langle ۱_G, \chi\rangle = ۰$. از این‌رو $\langle \phi - a۱_G, \chi\rangle \in \mathbb{Z}$. از طرفی

$$\langle \phi - a۱_G, \chi\rangle = \langle b\chi_{\text{reg}}, \chi\rangle = b|G|\chi(۱)/|G| = b\chi(۱)$$

د) چون $\chi(۱)$ مرتبهٔ G را عاد می‌کند، از قسمت (ج) نتیجه می‌شود که $b|G|$ عدد صحیح است. بنابراین، طبق قسمت (ب)، a عدد صحیح است و لذا b نیز طبق همان قسمت عدد صحیح است.

۵. الف) اگر $g \in G$، طبق قضیهٔ لاگرانژ g دارای مرتبهٔ فرد است. بنابراین اگر $g^۲ = ۱$ آنگاه $g = ۱$.

ب) به‌ازای هر $g \in G$ داریم $\chi(g) + \chi(g^{-۱}) = \chi(g) + \overline{\chi}(g) = ۲\chi(g)$، و $\chi(g)$ عدد صحیح جبری است. $G - \{۱\}$ را به زیرمجموعه‌هایی متشکل از هر عضو و وارونش افراز می‌کنیم. بنا به قسمت (الف)، هرکدام از این زیرمجموعه‌ها دوعضوی هستند. از این‌رو

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(۱) + ۲\alpha$$

که α عددی صحیح و جبری است. از اینجا نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود، زیرا

$$\langle \chi, ۱_G\rangle = \frac{۱}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g)$$

ج) اگر در قسمت (ب) داشته باشیم $\chi \neq ۱_G$ آنگاه $\langle \chi, ۱_G\rangle = ۰$، و در نتیجه $\alpha = -\chi(۱)/۲$. اما $-\chi(۱)/۲$ عددی گویا و غیرصحیح است (چون $\chi(۱)$ مرتبهٔ G را عاد می‌کند پس عددی فرد است). این موضوع با گزارهٔ ۵.۲۲ تناقض دارد. بنابراین $\chi = ۱_G$.

(اطلاعات بیشتر دربارهٔ تعداد سرشتهای χ با شرط $\overline{\chi} = \chi$ در قضیهٔ ۱.۲۳ و نتیجهٔ ۲.۲۳ آمده است.)

۶. الف) طبق قضیهٔ ۱۵.۲۲، اگر χ سرشت G باشد، $\chi(g)$ عدد صحیح است. فرض کنید χ_1، ...، χ_7 سرشتهای تحویل‌ناپذیر G هستند، و $\chi_1 = 1_G$. طبق روابط تعامد ستونی داریم

$$1 + \sum_{i=2}^{7} (\chi_i(g))^2 = 5 \qquad \text{(I)}$$

و

$$1 + \sum_{i=2}^{7} \chi_i(1)\chi_i(g) = 0 \qquad \text{(II)}$$

از رابطهٔ (I) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i، یا $\chi_i(g) = 0, \pm 1$ یا اینکه دقیقاً به‌ازای یک i، $\chi_i(g) = \pm 2$ و به‌ازای بقیهٔ iهای بزرگتر از ۱، $\chi_i(g) = 0$؛ حالت دوم بنابه رابطهٔ (II) غیرممکن است.

ب) از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای دو مقدار i، مثلاً $i = 2, 3$، $\chi_i(g) = 0$ و به‌ازای $4 \leq i \leq 7$، $\chi_i(g) = \pm 1$. طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، $\chi_2(1) \equiv \chi_3(1) \equiv 0$ (به پیمانهٔ ۵). همچنین

$$\sum_{i=1}^{7} (\chi_i(1))^2 = 120 \qquad \text{(III)}$$

از آنجا که $5^2 + 10^2 > 120$ نتیجه می‌گیریم که $\chi_2(1) = \chi_3(1) = 5$.

ج) طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، به‌ازای هر i، $\chi_i(1) \equiv \chi_i(g)$ (به پیمانهٔ ۵) و با استفاده از رابطهٔ (III) داریم

$$\sum_{i=4}^{7} (\chi_i(1))^2 = 69 \qquad \text{(IV)}$$

بنابراین حالتهای ممکنِ $(\chi_i(1), \chi_i(g))$، که متشکل از اعداد صحیح است، به‌ازای $4 \leq i \leq 7$ عبارت‌اند از $(1, 1)$، $(4, -1)$، $(6, 1)$. تنها حالتی که با رابطهٔ (IV) سازگاری دارد این است که $\chi_i(1)$ به‌ازای $4 \leq i \leq 7$ با ترتیبی عبارت باشد از ۱، ۴، ۴، ۶.

د) اکنون قسمت زیر از جدول سرشت G را در دست داریم

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۲	۳	۴	۶	۵
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲۰	۱۲	۸	۶	۴	۶	۵
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۵						۰
$\chi_۳$	۵						۰
$\chi_۴$	۱						۱
$\chi_۵$	۴						-۱
$\chi_۶$	۴						-۱
$\chi_۷$	۶						۱

پنج ستون باقیماندهٔ جدول سرشت را یکی پس از دیگری به‌دست می‌آوریم. به ما گفته شده است که $\chi_i(g_j)$ به‌ازای هر i و j عدد صحیح است.

(۱) ابتدا توجه کنید که (به پیمانهٔ ۳)$\chi_i(g_۴) \equiv \chi_i(۱)$ و $\sum_{i=۱}^{۷}(\chi_i(g_۴))^۲ = ۶$. از این‌رو مقادیر $\chi_i(g_۴)$ به‌ازای $۱ \le i \le ۷$ به ترتیب عبارت‌اند از ۱، -۱، -۱، ۱، ۱، ۱، ۰.

(۲) حال توجه کنید که (به پیمانهٔ ۲)$\chi_i(g_۵) \equiv \chi_i(۱)$ و $\sum_{i=۱}^{۷}(\chi_i(g_۵))^۲ = ۴$. از این‌رو، به‌ازای $۱ \le i \le ۴$، $\chi_i(g_۵) = \pm ۱$ و به‌ازای $۵ \le i \le ۷$، $\chi_i(g_۵) = ۰$. چون $\sum_{i=۱}^{۷} \chi_i(۱)\chi_i(g_۵) = ۰$ نتیجه می‌گیریم $\chi_۴(g_۵) = -۱$ و (بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توانیم بنویسیم) $\chi_۲(g_۵) = -\chi_۳(g_۵) = ۱$.

(۳) چون (به پیمانهٔ ۲)$\chi_i(g_۳) \equiv \chi_i(۱)$ و $\sum_{i=۱}^{۷}(\chi_i(g_۳))^۲ = ۸$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $۱ \le i \le ۴$، $\chi_i(g_۳) = \pm ۱$ و به‌ازای $۵ \le i \le ۷$، مقادیر $\chi_i(g_۳)$ به ترتیبی عبارت‌اند از ۰، ۰، ± ۲. همچنین به‌ازای $r = ۴, ۷$ داریم $\sum_{i=۱}^{۷} \chi_i(g_۳)\chi_i(g_r) = ۰$ که از آن نتیجه می‌شود به‌ازای $۱ \le i \le ۴$، $\chi_i(g_۳) = ۱$. اکنون از رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{۷} \chi_i(۱)\chi_i(g_۳) = ۰$ درمی‌یابیم که درایه‌های ستون ۳ از بالا به پایین عبارت‌اند از ۱، ۱، ۱، ۱، ۰، ۰، -۲.

(۴) داریم (به پیمانهٔ ۲)$\chi_i(g_۶) \equiv \chi_i(g_۴)$ و $\sum_{i=۱}^{۷}(\chi_i(g_۶))^۲ = ۶$. بنابراین به‌ازای $۱ \le i \le ۶$، $\chi_i(g_۶) = \pm ۱$ و $\chi_۷(g_۶) = ۰$. با استفاده از روابط تعامد ستونی بین ستون ۶ و ستونهای ۳، ۴، ۵، ۷ به‌دست می‌آوریم $\chi_۲(g_۶) = -\chi_۳(g_۶) = \chi_۴(g_۶) = -۱$ و (بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توانیم بنویسیم) $\chi_۵(g_۶) = -\chi_۶(g_۶) = ۱$.

(۵) تنها کاری که باقی‌مانده محاسبهٔ درایه‌های ستون ۲ است. این درایه‌ها را می‌توان با استفاده از روابط تعامد ستونی به‌دست آورد.

جدول سرشت G در زیر نمایش داده شده است.

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۲	۳	۴	۶	۵
$\|C_G(g_i)\|$	۱۲۰	۱۲	۸	۶	۴	۶	۵
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۵	−۱	۱	−۱	۱	−۱	۰
χ_3	۵	۱	۱	−۱	−۱	۱	۰
χ_4	۱	−۱	۱	۱	−۱	−۱	۱
χ_5	۴	−۲	۰	۱	۰	۱	−۱
χ_6	۴	۲	۰	۱	۰	−۱	−۱
χ_7	۶	۰	−۲	۰	۰	۰	۱

۷. ابتدا فرض می‌کنیم که λ مقدار ویژهٔ ماتریسی $n \times n$ چون A است که تمام درایه‌هایش اعداد صحیح‌اند. در این صورت $\det(A - \lambda I_n) = 0$، و لذا λ ریشهٔ چندجمله‌ای $\det(xI_n - A)$ است که به شکل زیر است

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_r \in \mathbb{Z})$$

برعکس، فرض کنیم که λ ریشهٔ چندجمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ $(a_r \in \mathbb{Z})$ است. قرار می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

نشان دهید $\det(xI_n - A) = p(x)$. از آنجا که $p(\lambda) = 0$ نتیجه می‌شود که λ مقدار ویژهٔ A است. چون A دارای درایه‌های صحیح است، بنابراین λ عدد صحیح جبری است.

فصل ۲۳

۱. فرض کنیم که $x \in G$ و x حقیقی است. دراین صورت به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $g^{-1}xg = x^{-1}$. ازاین‌رو $x = g^{-2}xg^{2}$، و لذا $g^{2} \in C_G(x)$. گیریم m مرتبهٔ g باشد. چون $|G|$ فرد است، طبق قضیهٔ

لاگرانژ، به‌ازای عدد صحیحی مانند n، $m = ۲n + ۱$. در این صورت $g = g^{۲(n+۱)} \in C_G(x)$.
بنابراین $x = g^{-۱}xg = x^{-۱}$. چون $x^۲ = ۱$ و مرتبهٔ x فرد است نتیجه می‌شود که $x = ۱$.

۲. نمادگذاری قضیهٔ ۸.۹ را به‌کار می‌بریم. سرشت χ از $G = C_{n_۱} \times \cdots \times C_{n_r}$ با ضابطهٔ زیر

$$\chi(g_۱^{i_۱} \cdots g_r^{i_r}) = \lambda_۱^{i_۱} \cdots \lambda_r^{i_r}$$

حقیقی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$، $\lambda_i = \pm ۱$. توجه کنید که λ_i ریشهٔ n_iام واحد است و لذا تنها در صورتی ممکن است مساوی -۱ باشد که n_i زوج باشد. از این‌رو تعداد سرشتهای تحویل‌ناپذیر حقیقی مساوی ۲^m است، که m تعداد اعداد صحیح $n_۱$، . . . ، n_r است که زوج هستند. اما عناصر g از G که در رابطهٔ $g^۲ = ۱$ صدق می‌کنند دقیقاً عناصری به شکل $g_۱^{i_۱} \cdots g_r^{i_r}$ هستند که در آنها یا i_j به‌ازای هر j برابر صفر است یا اینکه به‌ازای هر j، n_j زوج است و $i_j = n_j/۲$. تعداد این عناصر نیز ۲^m است.

۳. عناصری از $D_{۲n}$ چون g با خاصیت $g^۲ = ۱$ عبارت‌اند از

۱، a^ib $(۰ \leq i \leq n-۱)$ (و همچنین $a^{n/۲}$ وقتی‌که n زوج است)

به این ترتیب در حالت n فرد، $n + ۱$ عنصر و در حالت n زوج، $n + ۲$ عنصر حاصل می‌شود. این اعداد مساوی $\sum \chi(۱)$ هستند که این جمع روی همهٔ سرشتهای تحویل‌ناپذیر انجام می‌شود. چون به‌ازای هر χ، $\iota\chi \leq ۱$، از قضیهٔ فروبنیوس–شور نتیجه می‌شود که به‌ازای هر χ باید داشته باشیم $\iota\chi = ۱$.

۴. گیریم $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ مقادیر ویژهٔ $g\rho$ هستند. در این صورت

$$\chi_A(g) = \frac{۱}{۲}((\lambda_۱ + \lambda_۲)^۲ - (\lambda_۱^۲ + \lambda_۲^۲)) = \lambda_۱\lambda_۲ = \det(g\rho)$$

(گزارهٔ ۱۴.۱۹ را ببینید). چون $\chi(۱) = ۲$ داریم $\chi_A(۱) = ۱$. اکنون از تعریف $\iota\chi$، یعنی تعریف ۱۳.۲۳ نتیجه می‌شود که $\iota\chi = -۱$ اگر و فقط اگر $\chi_A = ۱_G$. حکم مسأله از اینجا نتیجه می‌شود.

۵. الف) ابتدا توجه کنید که به‌سادگی می‌توان نشان داد $\chi(g)$ به‌ازای هر $g \in G$ حقیقی است، لذا $\iota\chi = \pm ۱$. گیریم ρ نمایشی باشد که با استفاده از پایهٔ $v_۱$، $v_۲$ برای V حاصل می‌شود. در این صورت $\det(a\rho) = ۱$ و $\det(b\rho) = -\varepsilon^n$؛ از این‌رو به‌ازای هر $g \in G$، $\det(g\rho) = ۱$ اگر و فقط اگر $\varepsilon^n = -۱$. اکنون حکم با استفاده از تمرین ۴ ثابت می‌شود.

ب) به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $g = (a$ یا $b)$ و $i, j \in \{۱, ۲\}$ آنگاه

$$\beta(v_ig, v_j) = \beta(v_i, v_jg^{-۱})$$

به‌عنوان مثال

$$\beta(v_۱b, v_۱) = \beta(v_۲, v_۱) = \varepsilon^n = \beta(v_۱, \varepsilon^n v_۲) = \beta(v_۱, v_۱b^{-۱})$$

از این‌رو β Gـناورداست. تعریف β نشان می‌دهد که β متقارن است هرگاه $\varepsilon^n = 1$ و پادمتقارن است هرگاه $\varepsilon^n = -1$. اکنون حکم با استفاده از قضیهٔ ۱۶.۲۳ ثابت می‌شود.

ج) عناصر T_{4n} عبارت‌اند از a^i و a^ib $(0 \leq i \leq 2n-1)$؛ a دارای مرتبهٔ $2n$ و a^ib دارای مرتبهٔ ۴ است. بنابراین a^n تنها عنصر مرتبهٔ ۲ است.

د) برای محاسبهٔ $\iota\chi$ به‌ازای سرشتهای ψ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ و χ_j $(1 \leq j \leq 4)$ از T_{4n} به تمرین ۳.۱۸ مراجعه کنید. واضح است که $\iota\chi_1 = \iota\chi_3 = 1$، و بسته به اینکه n فرد یا زوج باشد، به ترتیب، $\iota\chi_2 = \iota\chi_4 = (0 \text{ یا } 1)$. با استفاده از قسمت (الف) (یا قسمت (ب)) و سرشتهای ψ_j که در تمرین ۳.۱۸ به‌دست آوردیم، نتیجه می‌گیریم بسته به اینکه j فرد یا زوج باشد، به ترتیب، $\iota\psi_j = (-1 \text{ یا } 1)$. بنابراین بسته به اینکه n فرد یا زوج باشد، به ترتیب، $\sum_{j=1}^{n-1}(\iota\psi_j)\psi_j(1) = (-2 \text{ یا } 0)$. از این‌رو $\sum_\chi(\iota\chi)\chi(1) = 2$.

۶. گیریم V $\mathbb{C}G$ـمدولی با سرشت χ است. چون $\iota\chi = -1$، فرم دوخطی مخالف صفر پادمتقارن Gـناوردایی چون β روی V وجود دارد. از آنجا که β Gـناورداست، زیرفضای $\{u \in V : \beta(u,v) = 0, \forall v \in V\}$ $\mathbb{C}G$ـزیرمدول V است، و چون V تحویل‌ناپذیر است نتیجه می‌شود که

$$\{u \in V : \beta(u,v) = 0, \forall v \in V\} = \{0\} \qquad (*)$$

پایهٔ $v_1, \ldots, v_n$ را برای V انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که A ماتریسی $n \times n$ باشد که درایهٔ ijاش $\beta(v_i, v_j)$ است. چون β پادمتقارن است داریم $A^t = -A$. بنابراین $\det(A^t) = (-1)^n \det A$، لذا $\det A = (-1)^n \det A$. طبق $(*)$، A وارون‌پذیر است، پس $\det A \neq 0$. نتیجه می‌شود که n زوج است؛ چون $n = \chi(1)$ حکم ثابت می‌شود.

۷. پایهٔ $f_1, \ldots, f_n$ را برای V انتخاب می‌کنیم و ماتریسهای $n \times n$ متقارن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$a_{ij} = \beta_1(f_i, f_j) \qquad \text{و} \qquad b_{ij} = \beta(f_i, f_j)$$

با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام‌ـاشمیت، می‌توانیم پایهٔ $f'_1, \ldots, f'_n$ را برای V چنان بسازیم که به‌ازای هر i و j داشته باشیم $\beta_1(f'_i, f'_j) = \delta_{ij}$. فرض می‌کنیم ماتریس $P = (p_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد که با روابط زیر مشخص می‌شود

$$f'_i = \sum_j p_{ij} f_j$$

در این صورت $PAP^t = I_n$ و PBP^t متقارن است. طبق خاصیت معروفی از ماتریسهای متقارن، ماتریس متعامد Q (یعنی ماتریس Q با خاصیت $QQ^t = I$) وجود دارد به‌قسمی که

$Q(PBP^t)Q^{-1}$ قطری باشد. می‌نویسیم $Q = (q_{ij})$ و پایهٔ e_1، ... ، e_n را برای V چنین تعریف می‌کنیم

$$e_i = \sum_j q_{ij} f'_j$$

در این صورت

$$\beta_1(e_i, e_j) = \delta_{ij} \text{، زیرا } QPAP^tQ^t = I_n$$

$$\beta(e_i, e_j) = 0 \text{ هرگاه } i \neq j \text{، زیرا } QPBP^tQ^t \text{ قطری است}$$

۸. الف) اثبات مشابه برهان قسمت (۱) لم شور، یعنی لم ۱.۹ است.

ب) فرض می‌کنیم v_1، ... ، v_n پایهٔ $\mathbb{R}G$ـمدول V باشد و فضای برداری V' را روی $\mathbb{C}$ با پایهٔ v_1، ...، v_n در نظر می‌گیریم. در این صورت V' $\mathbb{C}G$ـمدول است و طبق فرض تحویل‌ناپذیر است. طبق لم شور عددی چون $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر $v \in V'$، $v\vartheta = \lambda v$. اما $v_1\vartheta = \lambda v_1 \in V$ و لذا $\lambda \in \mathbb{R}$.

ج) گیریم $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$، و فرض می‌کنیم V $\mathbb{R}G$ـزیرمدولی از مدول منظم $\mathbb{R}G$ باشد که توسط $a - 1$ و $a^2 - 1$ پدید می‌آید. در این صورت $\mathbb{R}G$ Vـمدول تحویل‌ناپذیر است. تابع $\vartheta : V \to V$ را چنین تعریف می‌کنیم $v\vartheta = av$ $(v \in V)$.

فصل ۲۵

۱. واضح است که مجموعهٔ مزبور دارای $p(p-1)$ عضو است. این مجموعه را G می‌نامیم. چون

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y' + yx \\ 0 & xx' \end{pmatrix}$$

پس G تحت عمل ترکیب بسته است؛ شرکت‌پذیری خاصیت ضرب ماتریسی است؛ عضو همانی عبارت‌است از $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$؛ وارون $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ مساوی است با $\begin{pmatrix} 1 & -yx^{-1} \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$. بنابراین G گروه است.

۲. قرار می‌دهیم $\eta = e^{2\pi i/5}$ و $\varepsilon = e^{2\pi i/11}$ و می‌نویسیم

$$\alpha = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^9, \quad \beta = \varepsilon^2 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{10}$$

جدول سرشت $F_{11,5}$

g_i	1	a	a^2	b	b^2	b^3	b^4
$\|C_G(g_i)\|$	55	11	11	5	5	5	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	η	η^2	η^3	η^4
χ_3	1	1	1	η^2	η^4	η	η^3
χ_4	1	1	1	η^3	η	η^4	η^2
χ_5	1	1	1	η^4	η^3	η^2	η
χ_6	5	α	β	0	0	0	0
χ_7	5	β	α	0	0	0	0

۳. با توجه به اینکه $\mathbb{Z}_p^*$ دوری است، طبق تمرین ۶.۱(ج)، عدد صحیح m وجود دارد به‌قسمی که $u^m \equiv v$(به پیمانهٔ p). همچنین m نسبت به q اول است، زیرا مرتبهٔ هردو عنصر u و v به پیمانهٔ p مساوی q است. از این‌رو b^m دارای مرتبهٔ q است. همچنین $b^{-m}ab^m = a^{u^m} = a^v$. قرار می‌دهیم $b' = b^m$. در این صورت $G_1 = \langle a, b' : a^p = b'^q = 1, b'^{-1}ab' = a^v \rangle$. از این‌رو $G_1 \cong G_2$.

۴. الف) توجه کنید که -1 تنها عضو مرتبهٔ ۲ در $\mathbb{Z}_p^*$ است. از این‌رو به‌ازای عددی چون m، $u^m \equiv -1$ (به پیمانهٔ p) $\Leftrightarrow$ عنصر u از $\mathbb{Z}_p^*$ دارای مرتبهٔ زوج باشد $\Leftrightarrow$ q زوج باشد $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1$ (به پیمانهٔ ۴).

ب) طبق گزارهٔ ۹.۲۵، $a^G = \{a^{u^m} : m \in \mathbb{Z}\}$. بنابراین

$$a^{-1} \in a^G \Leftrightarrow u^m \equiv -1 \text{(به پیمانهٔ } p\text{)}, m \text{ به‌ازای عددی چون} \Leftrightarrow p \equiv 1 \text{(به پیمانهٔ ۴)}$$

ج) به‌ازای تمام q سرشت خطی χ_i از G داریم $\chi_i(a) = 1$. از این‌رو

$$0 = \sum_{\chi \text{ تحویل‌ناپذیر}} \chi(1)\chi(a) = q + q\phi_1(a) + q\phi_2(a)$$

بنابراین $\phi_1(a) + \phi_2(a) = -1$. چون $|C_G(a)| = p$ لذا

$$p = \sum_{\chi} \chi(a)\overline{\chi(a)} = q + \phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} + \phi_2(a)\overline{\phi_2(a)}$$

از این‌رو $\phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} + \phi_2(a)\overline{\phi_2(a)} = (p+1)/2$.

اگر $p \equiv 1$(به پیمانهٔ ۴) آنگاه a با a^{-1} مزدوج است و لذا $\chi(a)$ به‌ازای هر سرشت χ حقیقی است، پس $(\phi_1(a))^2 + (\phi_2(a))^2 = (p+1)/2$. بنابراین $\phi_1(a)$ و $\phi_2(a)$ مساوی‌اند با $(-1 \pm \sqrt{p})/2$.

اگر $p \equiv -1$ (به پیمانهٔ ۴) آنگاه a با a^{-1} مزدوج نیست، و از نتیجهٔ ۶.۱۵ حاصل می‌شود که $\phi_1(a)$ و $\phi_2(a)$ هر دو با هم حقیقی نیستند. بنابراین $\phi_2(a) = \overline{\phi_1(a)}$. این‌بار $2\phi_1(a)\overline{\phi_1(a)} = (p+1)/2$، و لذا مقادیر $\phi_1(a)$ و $\phi_2(a)$ برابرند با $(-1 \pm i\sqrt{p})/2$.

د) طبق قضیهٔ ۲۵.۱۰، $\phi_1(a) = \sum_{m=1}^{(p-1)/2} \varepsilon^{u^m}$. چون $\mathbb{Z}_p^*$ گروه دوری با مرتبهٔ $p-1$ و u با مرتبهٔ $(p-1)/2$ است نتیجه می‌شود که $\{u, u^2, \cdots, u^{(p-1)/2}\}$ دقیقاً مجموعهٔ مانده‌های درجهٔ ۲ به پیمانهٔ p است. اکنون حکم از قسمت (ج) نتیجه می‌شود.

۵. قرار می‌دهیم $H = \langle a, b\rangle$. در این صورت به‌ازای هر $h \in H$، ردهٔ مزدوجی h^E متشکل از h و h^{-1} است. تمام عناصری که به H تعلق ندارند یک ردهٔ مزدوجی برای E تشکیل می‌دهند. چون $E' = H$، پس E دقیقاً دو سرشت خطی، مثلاً χ_1 و χ_2، دارد.

H یک سرشت خطی غیربدیهی به‌صورت زیر دارد

	1	a	a^2	b	b^2	ab	ab^2	a^2b	a^2b^2
χ	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2	ω	ω^2

که $\omega = e^{2\pi i/3}$. لذا $\chi \uparrow E$ سرشت تحویل‌ناپذیر χ_3 است که در جدول زیر آمده است. سرشتهای χ_4، χ_5 و χ_6 به همین ترتیب به‌دست می‌آیند.

جدول سرشت E

g_i	1	a	b	ab	a^2b	c
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	18	9	9	9	9	2
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1
χ_3	2	2	-1	-1	-1	0
χ_4	2	-1	2	-1	-1	0
χ_5	2	-1	-1	2	-1	0
χ_6	2	-1	-1	-1	2	0

۶. $Z(E) = \{1\}$ و به‌ازای هر i که $1 \le i \le 6$، عضوی چون $g_i \in E$ وجود دارد به‌قسمی که $g_i \neq 1$ ولی $\chi_i(g_i) = \chi_i(1)$ (لذا $g_i \in \mathrm{Ker}\chi_i$).

۷. الف) $F_{13,3}$ (قضیهٔ ۲۵.۱۰ را ببینید).

ب) $C_2 \times F_{13,3}$ (قضیهٔ ۱۹.۱۸ را ببینید).

ج) $D_6 \times F_{13,3}$ (قضیهٔ ۱۹.۱۸ را ببینید).

۸. رده‌های مزدوجی G عبارت‌اند از

$$\{۱\}, \{a^{۳}, a^{۶}\}, \{a^{r} : ۳ \nmid r\}, \{a^{r}b^{۲} : ۳ \nmid r\}, \{a^{r}b^{۴} : ۳ \nmid r\}$$
$$\{a^{r}b^{۲} : r = ۰, ۳, ۶\}, \{a^{r}b^{۴} : r = ۰, ۳, ۶\}$$
$$\{a^{r}b : ۰ \leq r \leq ۸\}, \{a^{r}b^{۳} : ۰ \leq r \leq ۸\}, \{a^{r}b^{۵} : ۰ \leq r \leq ۸\}$$

قرار می‌دهیم $H_{۱} = \langle a \rangle$. در این صورت $H_{۱} \lhd G$ و $G/H_{۱} \cong C_{۶}$. بنابراین شش سرشت خطی $\chi_{۱}$، . . . ، $\chi_{۶}$ برای G حاصل می‌شود، که در جدول زیر آمده است.
قرار می‌دهیم $H_{۲} = \langle a^{۳}, b^{۲} \rangle$. در این صورت $H_{۲} \lhd G$ و $G/H_{۲} = \langle H_{۲}a, H_{۲}b \rangle \cong D_{۶}$. با ارتقاء سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ دوی $D_{۶}$ سرشت $\chi_{۷}$ به‌دست می‌آید، که در جدول زیر آمده است. بنابراین سرشتهای $\chi_{۸} = \chi_{۷}\chi_{۲}$ و $\chi_{۹} = \chi_{۷}\chi_{۳}$ نیز تحویل‌ناپذیرند. آخرین سرشت تحویل‌ناپذیر، یعنی $\chi_{۱۰}$ را می‌توان با استفاده از روابط تعامد ستونی به‌دست آورد.

جدول سرشت $G = \langle a, b : a^{۹} = b^{۶} = ۱, b^{-۱}ab = a^{۲} \rangle$.

g_i	۱	$a^{۳}$	a	$ab^{۲}$	$ab^{۴}$	b	$b^{۲}$	$b^{۳}$	$b^{۴}$	$b^{۵}$
$\lvert C_G(g_i) \rvert$	۵۴	۲۷	۹	۹	۹	۶	۱۸	۶	۱۸	۶
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	$\omega^{۲}$	ω	$-\omega$	$\omega^{۲}$	-۱	ω	$-\omega^{۲}$
$\chi_{۳}$	۱	۱	۱	ω	$\omega^{۲}$	$\omega^{۲}$	ω	۱	$\omega^{۲}$	ω
$\chi_{۴}$	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱
$\chi_{۵}$	۱	۱	۱	$\omega^{۲}$	ω	ω	$\omega^{۲}$	۱	ω	$\omega^{۲}$
$\chi_{۶}$	۱	۱	۱	ω	$\omega^{۲}$	$-\omega^{۲}$	ω	-۱	$\omega^{۲}$	$-\omega$
$\chi_{۷}$	۲	۲	-۱	-۱	-۱	۰	۲	۰	۲	۰
$\chi_{۸}$	۲	۲	-۱	$-\omega^{۲}$	$-\omega$	۰	$۲\omega^{۲}$	۰	۲ω	۰
$\chi_{۹}$	۲	۲	-۱	$-\omega$	$-\omega^{۲}$	۰	۲ω	۰	$۲\omega^{۲}$	۰
$\chi_{۱۰}$	۶	-۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

توجه: $\omega = e^{۲\pi i/۳}$

فصل ۲۶

۱. گیریم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. در این صورت به‌ازای سرشت تحویل‌ناپذیری از H مانند ψ، $\langle \chi \downarrow H, \psi \rangle_H \neq ۰$. بنابراین طبق قضیهٔ تقابل فروبنیوس $\langle \chi, \psi \uparrow G \rangle_G \neq ۰$. اما $\psi(۱) = ۱$ زیرا H آبلی است؛ و طبق نتیجهٔ ۲۰.۲۱، $(\psi \uparrow G)(۱) = p$. بنابراین $\chi(۱) \leq p$، و لذا طبق

قضیهٔ ۱۱.۲۲، (p یا ۱) $= \chi(1)$. فرض کنیم که G دارای r سرشت خطی و s سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ p است. در این صورت

$$\text{طبق قضیهٔ ۱۱.۱۷، به‌ازای عددی چون } m\text{،}\ r = p^m$$
$$\text{طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱،}\ r + sp^2 = p^n$$

چون $s = p^{n-2} - p^{m-2}$ و s عدد صحیح است، m حداقل ۲ است.

۲. $\{1\}$ و $\{z\}$ و $\{z^2\}$ رده‌های مزدوجی H هستند. به‌ازای هر عنصر دیگر h از H داریم $h^H = \{h, hz, hz^2\}$.

جدول سرشت H (گروه ناآبلی مرتبهٔ ۲۷)

g_i	۱	z	z^2	a	a^2	b	ab	a^2b	b^2	ab^2	a^2b^2
$\lvert C_H(g_i)\rvert$	۲۷	۲۷	۲۷	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹
χ_{00}	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_{01}	۱	۱	۱	۱	۱	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
χ_{02}	۱	۱	۱	۱	۱	ω^2	ω^2	ω^2	ω	ω	ω
χ_{10}	۱	۱	۱	ω	ω^2	۱	ω	ω^2	۱	ω	ω^2
χ_{11}	۱	۱	۱	ω	ω^2	ω	ω^2	۱	ω^2	۱	ω
χ_{12}	۱	۱	۱	ω	ω^2	ω^2	۱	ω	ω	ω^2	۱
χ_{20}	۱	۱	۱	ω^2	ω	۱	ω^2	ω	۱	ω^2	ω
χ_{21}	۱	۱	۱	ω^2	ω	ω	۱	ω^2	ω^2	ω	۱
χ_{22}	۱	۱	۱	ω^2	ω	ω^2	ω	۱	ω	۱	ω^2
ϕ_1	۳	3ω	$3\omega^2$	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
ϕ_2	۳	$3\omega^2$	3ω	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

توجه: $\omega = e^{2\pi i/3}$

۳. G دارای ۱۱ ردهٔ مزدوجی است: $\{1\}$، $\{a^8\}$، $\{a^r, a^{-r}\}$ ($1 \le r \le 7$)، $\{a^r b : r \text{ زوج}\}$، $\{a^r b : r \text{ فرد}\}$. در اینجا گروه Kی قضیهٔ ۴.۲۶ عبارت است از $\{1, a^8\}$ و $G/K \cong D_{16}$. جدول سرشت D_{16} در بخش ۸.۲۶ ($D_{16} = G_1$) و در بخش ۳.۱۸ آمده است. با ارتقاء سرشتهای تحویل‌ناپذیر D_{16}، سرشتهای χ_1، ... ، χ_7 از G را به‌دست می‌آوریم که در صفحهٔ بعد نمایش داده شده‌اند. حال اگر سرشتهای خطیی از $\langle a\rangle$ چون χ را که دارای خاصیت $\chi(a^8) = -1$ هستند به G فرابریم، چهار سرشت ψ_j ($j = 1, 3, 5, 7$) حاصل می‌شوند.

جدول سرشت گروه $G = \langle a, b : a^{۱۶} = ۱, b^{۲} = a^{۸}, b^{-۱}ab = a^{-۱}\rangle$.

g_i	۱	$a^{۸}$	a	$a^{۲}$	$a^{۳}$	$a^{۴}$	$a^{۵}$	$a^{۶}$	$a^{۷}$	b	ab
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۳۲	۳۲	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶	۴	۴
$\chi_{۱}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_{۲}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	-۱	-۱
$\chi_{۳}$	۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱
$\chi_{۴}$	۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	-۱	۱
$\chi_{۵}$	۲	۲	۰	-۲	۰	۲	۰	-۲	۰	۰	۰
$\chi_{۶}$	۲	۲	$\sqrt{۲}$	۰	$-\sqrt{۲}$	-۲	$-\sqrt{۲}$	۰	$\sqrt{۲}$	۰	۰
$\chi_{۷}$	۲	۲	$-\sqrt{۲}$	۰	$\sqrt{۲}$	-۲	$\sqrt{۲}$	۰	$-\sqrt{۲}$	۰	۰
ψ_j	۲	-۲	c_j	$c_{۲j}$	$c_{۳j}$	$c_{۴j}$	$c_{۵j}$	$c_{۶j}$	$c_{۷j}$	۰	۰
$(j = ۱, ۳, ۵, ۷)$											

$c_m = e^{۲\pi i m/۱۶} + e^{-۲\pi i m/۱۶} = ۲\cos(m\pi/۸)$

۴. الف) نشان دهید $AB = -BA$، $AC = -CA$، $AD = DA$، $BC = CB$، $BD = -DB$، $CD = -DC$. بنابراین $Z \in G$، و $G/\langle Z\rangle$ آبلی است در صورتی‌که G آبلی نیست. بنابراین $G' = \langle Z\rangle$ (گزارهٔ ۱۷.۱۰ را ببینید).

ب) $A^{۲} = -B^{۲} = -C^{۲} = D^{۲} = I$. چون $G/\langle Z\rangle$ آبلی است نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $g \in G$، $g^{۲} \in \langle Z\rangle$. بنابراین هر عنصر G به شکل $A^iB^jC^kD^lZ^m$ است که $i, j, k, l, m \in \{۰, ۱\}$، لذا $|G| \leq ۳۲$؛ همچنین G ۲ـگروه است زیرا به‌ازای هر $g \in G$ داریم $g^{۴} = ۱$.

ج) محاسبهٔ معمولی نشان می‌دهد که هر ماتریسی که ضرب آن در A، B، C و D تعویض‌پذیر باشد به شکل λI است که $\lambda \in \mathbb{C}$. بنابراین طبق نتیجهٔ ۳.۹، نمایش داده شده تحویل‌ناپذیر است.

د) چون G دارای نمایشهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۱ و ۴ است پس $|G| \geq ۱^{۲} + ۴^{۲} = ۱۷$. از این رابطه با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم که $|G| = ۳۲$. چون $G' = \langle Z\rangle$، G دقیقاً دارای ۱۶ نمایش درجهٔ ۱ است. این نمایشها عبارت‌اند از: به‌ازای هر (r, s, t, u) که $r, s, t, u \in \{۰, ۱\}$،

$$A^iB^jC^kD^lZ^m \to (-۱)^{ir+js+kt+lu}$$

این نمایشها همراه با نمایش تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۴، طبق قضیهٔ ۱۲.۱۱، همهٔ نمایشهای تحویل‌ناپذیر G هستند.

۵. الف) گیریم $\varepsilon = e^{2\pi i/8}$. می‌نویسیم

$$G_1 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_2 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_3 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{3} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_4 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{5} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

از اینجا نمایشهای مطلوب به‌دست می‌آیند.

ب) اگر $j = 5, 6, 7, 8$ آنگاه $Z(G_j) = \{1, a^2, z, a^2 z\} \cong C_2 \times C_2$. چون $Z(G_j)$ دوری نیست، طبق گزارهٔ ۱۶.۹، G_j دارای نمایش تحویل‌ناپذیر صادق نیست.

ج) نشان دهید که ماتریسهای مزبور در روابط مطلوب صدق می‌کنند، یعنی مشخص‌کنندهٔ نمایش‌اند. به سادگی معلوم می‌شود که این ماتریسها گروههایی با بیش از هشت عضو تولید می‌کنند، بنابراین این نمایشها صادق‌اند.

د) می‌نویسیم

$$G_7 : a \to \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_8 : a \to \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

از اینجا نمایشهای مطلوب به‌دست می‌آیند.

۶. در جدول زیر تعداد عناصر مرتبهٔ ۱، ۲، ۴ و ۸ از گروههای G_1، ...، G_9 آمده است

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9
مرتبهٔ ۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
مرتبهٔ ۲	۹	۱	۵	۳	۳	۷	۱۱	۳	۵
مرتبهٔ ۴	۲	۱۰	۶	۴	۱۲	۸	۴	۱۲	۱۰
مرتبهٔ ۸	۴	۴	۴	۸	۰	۰	۰	۰	۰

بنابراین هیچ‌یک از گروههای G_1، ... ، G_9 با دیگری یکریخت نیست، مگر احتمالاً G_5 و G_8. اما $G_5/G_5' \cong C_2 \times C_4$، در صورتی‌که $G_8/G_8' \cong C_2 \times C_2 \times C_2$، لذا $G_5 \not\cong G_8$.

۷. الف) طبق لم ۱.۲۶(۱) داریم $G \neq Z(G) \neq \{1\}$، همچنین طبق لم ۱.۲۶(۲)، $|G/Z(G)| \neq p$. بنابراین $|Z(G)| = (p$ یا $p^2)$. فرض کنیم که $|Z(G)| = p^2$. اگر $g \notin Z(G)$ آنگاه $Z(G) \leq C_G(g) \neq G$، و $g \in C_G(g)$. از این‌رو $|C_G(g)| = p^3$ و $|g^G| = p$. بنابراین G دارای $p^2 + (p^4 - p^2)/p$ ردهٔ مزدوجی است.

ب) فرض کنیم که G دارای r سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ ۱ و s سرشت تحویل‌ناپذیر درجهٔ p است. چون $\sum \chi(1)^2 = p^4$ (قضیهٔ ۱۲.۱۱)، G هیچ سرشت تحویل‌ناپذیری که درجه‌اش بزرگتر از p باشد ندارد، لذا $r + sp^2 = p^4$. بنابراین $|G/G'| = r = (p^2$ یا $p^3)$، و اگر $r = p^2$ آنگاه $r + s = 2p^2 - 1$. از آنجا که $r + s$ مساوی تعداد رده‌های مزدوجی G است، قسمت (ب) ثابت می‌شود.

ج) طبق لم ۱.۲۶(۱) داریم $G' \cap Z(G) \neq \{1\}$. طبق قسمتهای (الف) و (ب)، اگر $|Z(G)| = p^2$ آنگاه $|G'| = p$؛ و اگر $|G'| = p^2$ آنگاه $|Z(G)| = p$. از این‌رو $|G' \cap Z(G)| = p$.

۸. الف) قرار دهید $Z = Z(G)$، و فرض کنید که $G/Z = \langle aZ, bZ \rangle$ که $a^4 \in Z$، $a^2Z = b^2Z$، $b^{-1}abZ = a^{-1}Z$. در این صورت به‌ازای عضوی چون $z \in Z$، $a^2 = b^2z$ و از این‌رو $ba^2 = b^3z = b^2zb = a^2b$. چون ضرب a^2 در a و b و تمام عناصر Z تعویض‌پذیر است پس $a^2 \in Z$. بنابراین $G/Z \not\cong Q_8$.

ب) اگر G گروه ناآبلی مرتبهٔ ۱۶ باشد آنگاه طبق تمرین ۷، یا $G' \cap Z(G) = G'$ که در این صورت $G/(G' \cap Z(G))$ آبلی است، یا اینکه $G' \cap Z(G) = Z(G)$ که در این صورت طبق قسمت (الف)، $G/(G' \cap Z(G)) \not\cong Q_8$.

فصل ۲۷

۱. فرض کنیم که $z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{SL}(2, p))$ در این صورت

$$z\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} z \Longrightarrow c = ۰$$

$$z\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} z \Longrightarrow c = -b, a = d$$

بنابراین $z = aI$، و چون $z \in \mathrm{SL}(۲,p)$، داریم $a^۲ = ۱$ و لذا $a = \pm ۱$.

۲. نشان دهید که

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

عناصر مرتبهٔ ۳ از $G = \mathrm{SL}(۲,۳)$ هستند و با هم مزدوج نیستند. عنصر

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

متعلق به $Z(G)$ است، و

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

دارای مرتبهٔ ۴ است. بنابراین عناصر زیر نمایندهٔ رده‌های مزدوجی هستند

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$
	$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۴	۳
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۴	۲۴	۴	۶

	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$
	$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$
مرتبهٔ g_i	۳	۶	۶
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۶	۶	۶

اکنون توضیح می‌دهیم که جدول سرشت G چگونه به‌دست می‌آید، این جدول را در زیر آورده‌ایم.

ابتدا توجه کنید که فضای برداری $(\mathbb{Z}_3)^2$ دقیقاً دارای چهار زیرفضای ۱بعدی است، یعنی فضاهایی که توسط بردارهای (۱ ,۰)، (۱ ,۱)، (۱ ,۲) و (۰ ,۱) پدید می‌آیند. تحت اعضای گروه G این زیرفضاها بین خودشان جابه‌جا می‌شوند، لذا همریختیی چون $\phi : G \to S_4$ حاصل می‌شود. نشان دهید که $\mathrm{Ker}\phi = \{\pm I\}$. از این‌رو $G/\{\pm I\} \cong \mathrm{Im}\phi$ که $\mathrm{Im}\phi$ زیرگروه S_4 با مرتبهٔ ۱۲ است، بنابراین $G/\{\pm I\} \cong A_4$. سرشتهای χ_1، χ_2، χ_3، χ_4 از G با ارتقاء دادن سرشتهای تحویل‌ناپذیر A_4 (که در بخش ۲.۱۸ داده شده‌اند) به G حاصل می‌شوند.

مقادیر سرشتهای χ_5، χ_6، χ_7 را به‌ازای عناصر g_1، g_2، g_3 می‌توان با استفاده از روابط تعامد ستونی به‌دست آورد. با توجه به اینکه G دارای سه رده مزدوجی حقیقی است، طبق قضیهٔ ۱.۲۳، یکی از سرشتهای χ_5، χ_6، χ_7 باید حقیقی باشد. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که χ_5 حقیقی است. در این صورت $\chi_5(g_4) = \alpha$، که α حقیقی است. همچنین طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، $\alpha \neq 0$. چون $\chi_5\chi_2$ و $\chi_5\chi_3$ سرشتهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ دوی G هستند و مقادیرشان به‌ازای g_4 مساوی $\alpha\omega$ و $\alpha\omega^2$ است، پس یکی از آنها باید χ_6 و دیگری χ_7 باشد، مثلاً $\chi_5\chi_2 = \chi_6$ و $\chi_5\chi_3 = \chi_7$. از رابطهٔ $\sum_j \chi_j(g_4)\overline{\chi_j(g_4)} = 6$ حاصل می‌شود $\alpha\overline{\alpha} = 1$. چون α حقیقی است پس $\alpha = \pm 1$. بنابراین $\alpha = -1$ زیرا (به پیمانهٔ ۳) $\chi_5(g_4) \equiv \chi_5(1)$. اکنون توجه کنید که به‌ازای $j = 5, 6, 7$، از تمرین ۵.۱۳ نتیجه می‌شود که $\chi_j(g_7) = -\chi_j(g_4)$. بالاخره، به‌ازای هر χ، $\chi(g_5) = \overline{\chi(g_4)}$ و $\chi(g_6) = \overline{\chi(g_7)}$.

جدول سرشت $\mathrm{SL}(2,3)$

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۲۴	۲۴	۴	۶	۶	۶	۶
χ_1	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
χ_2	۱	۱	۱	ω	ω^2	ω^2	ω
χ_3	۱	۱	۱	ω^2	ω	ω	ω^2
χ_4	۳	۳	۱−	۰	۰	۰	۰
χ_5	۲	۲−	۰	۱−	۱−	۱	۱
χ_6	۲	۲−	۰	$-\omega$	$-\omega^2$	ω^2	ω
χ_7	۲	۲−	۰	$-\omega^2$	$-\omega$	ω	ω^2

توجه: $\omega = e^{2\pi i/3}$

۳. از گزارهٔ ۶.۱۷ استفاده کنید.

۴. (الف) و (ب) برای یافتن جدول سرشت T، توجه کنید که T با گروهی که مرتبه‌اش ۲۱ است و جدول

سرشتش در تمرین ۲.۱۷ و مثال ۲۵.۲۱ پیدا شده است یکریخت است. نماینده‌های رده‌های مزدوجی T عبارت‌اند از h_1، ...، h_5 که

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, h_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Z, h_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z, h_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

دو سرشت از سرشتهای خطی T عبارت‌اند از

h_i	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
$\|C_G(h_i)\|$	۲۱	۳	۳	۷	۷
1_T	۱	۱	۱	۱	۱
λ	۱	ω	ω^2	۱	۱

که $\omega = e^{2\pi i/3}$. مقادیر $1_T \uparrow G$ و $\lambda \uparrow G$ به قرار زیرند (گزارهٔ ۲۳.۲۱ را ببینید)

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\|C_G(g_i)\|$	۱۶۸	۸	۴	۳	۷	۷
$1_T \uparrow G$	۸	۰	۰	۲	۱	۱
$\lambda \uparrow G$	۸	۰	۰	-1	۱	۱

محاسبه نشان می‌دهد که $\langle 1_T \uparrow G, 1_T \uparrow G\rangle = 2$ و $\langle 1_T \uparrow G, 1_G\rangle = 1$. از این‌رو $1_T \uparrow G = 1_G + \chi$، که χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است. چون $\langle \lambda \uparrow G, \lambda \uparrow G\rangle = 1$ لذا $\lambda \uparrow G$ تحویل‌ناپذیر است؛ قرار می‌دهیم $\phi = \lambda \uparrow G$.

ج) مقادیر χ و χ_S در زیر نمایش داده شده‌اند (گزارهٔ ۱۴.۱۹ را ببینید)

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\|C_G(g_i)\|$	۱۶۸	۸	۴	۳	۷	۷
χ	۷	-1	-1	۱	۰	۰
χ_S	۲۸	۴	۰	۱	۰	۰
ζ	۱۲	۴	۰	۰	-2	-2
ψ	۶	۲	۰	۰	-1	-1

درمی‌یابیم که $\langle \chi_S, 1_G\rangle = \langle \chi_S, \phi\rangle = \langle \chi_S, \chi\rangle = 1$. از این‌رو سرشت ζ از G وجود دارد به‌قسمی که $\chi_S = 1_G + \phi + \chi + \zeta$. مقادیر ζ در جدول بالا آمده است. مشاهده می‌کنیم که

$۴ = \langle\zeta,\zeta\rangle$، لذا یا $\zeta = ۲\psi$، که ψ سرشتی تحویل‌ناپذیر است یا اینکه ζ مجموع چهار سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز است (به تمرین ۷.۱۴ مراجعه کنید).

اکنون توجه کنید که 1_G، ϕ و χ سه سرشت از شش سرشت تحویل‌ناپذیر G هستند، و هیچ‌کدامشان سازای ζ نیستند. از آنجا که فقط شش سرشت تحویل‌ناپذیر داریم ممکن نیست ζ مجموع چهار سرشت تحویل‌ناپذیر باشد، و لذا $\zeta = ۲\psi$ که ψ تحویل‌ناپذیر است. مقادیر ψ در جدول بالا آمده است.

د) سرشتهای 1_G، ϕ، χ و ψ به ترتیب عبارت‌اند از سرشتهای $\chi_۱$، $\chi_۳$، $\chi_۲$ و $\chi_۶$ از جدول سرشت G که در آخر فصل ۲۷ داده شده است. سرشتهای باقیمانده یعنی $\chi_۴$ و $\chi_۵$ با استفاده از روابط تعامد ستونی به سهولت به‌دست می‌آید (با توجه به اینکه g_i حقیقی است اگر و فقط اگر $۱ \le i \le ۴$).

۵. الف) به برهان لم ۱.۲۷ رجوع کنید. توجه کنید که چون $g_۲$ در $Z(G)$ قرار دارد، g_i و $g_ig_۲$ به‌ازای هر i دارای مرکزسازهای یکسان‌اند.

ب) با استفاده از ارتقاء، سرشتهای $\chi_۱$، ... ، $\chi_۶$ را به‌دست می‌آوریم، این سرشتها را در جدول سرشت صفحهٔ بعد آورده‌ایم.

ج) از تمرین ۵.۱۳ استفاده کنید (توجه داشته باشید که به‌ازای $۷ \le j \le ۱۱$، $\chi_j(-I) \neq \chi_j(I)$، زیرا $-I$ در هستهٔ این سرشتها نیست).

د) چون $\sum_{j=۱}^{۱۱} \chi_j(g_۳)\overline{\chi_j(g_۳)} = ۸$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $۷ \le j \le ۱۱$، $\chi_j(g_۳) = ۰$. (این نتیجه را با استفاده از قسمت (ج) نیز می‌توان به‌دست آورد.) همچنین، طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، $\chi_j(۱)$ زوج است.

ه) طبق قضیهٔ ۱۵.۲۲، به‌ازای هر سرشت χ داریم $\chi(g_۶) \in \mathbb{Z}$. چون $\sum_{j=۱}^{۱۱}(\chi_j(g_۶))^۲ = ۶$، مقادیر $\chi_j(g_۶)$ به‌ازای $۷ \le j \le ۱۱$ به ترتیبی باید عبارت باشند از ±۱، ±۱، ±۱، ۰، ۰. طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، درجهٔ دو سرشت از سرشتهای $\chi_۷$، ... ، $\chi_{۱۱}$، مثلاً $\chi_۹$ و $\chi_{۱۰}$، مضرب ۶ است. چون $\sum_{j=۱}^{۱۱}(\chi_j(۱))^۲ = ۱۶۸$ و $۱۲^۲ + ۶^۲ > ۱۶۸$ لذا $\chi_۹(۱) = \chi_{۱۰}(۱) = ۶$.

اکنون داریم $\chi_۷(۱)^۲ + \chi_۸(۱)^۲ + \chi_{۱۱}(۱)^۲ = ۹۶$. تنها حالت ممکن این است که دو مقدار از مقادیر $\chi_۷(۱)$، $\chi_۸(۱)$، $\chi_{۱۱}(۱)$، مثلاً $\chi_۷(۱)$ و $\chi_۸(۱)$، مساوی ۴ باشند و $\chi_{۱۱}(۱) = ۸$. حال از همنهشتیهای $\chi(g_۶) \equiv \chi(۱)$ (به پیمانهٔ ۳) مقادیر $\chi_j(g_۶)$ به‌ازای $۷ \le j \le ۱۱$ به‌دست می‌آید. با استفاده از قسمت (ج) مقادیر این سرشتها را به‌ازای $g_۲$ و $g_۷$ به‌دست آورید.

و) طبق گزارهٔ ۱۴.۱۹، مقادیر ψ_A به‌ازای $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$ و $g_۶$ عبارت‌اند از

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۶$
ψ_A	۶	۶	۲	۰

با توجه به مقادیر ψ_A به‌ازای $g_۱$ و $g_۲$ نتیجه می‌شود که ψ_A ترکیب خطی $\chi_۱$، $\chi_۴$، $\chi_۵$ و $\chi_۶$

است. حال با توجه به مقدار ψ_A به‌ازای $g_۶$ نتیجه می‌شود که $\chi_۱$ از سازهای ψ_A نیست؛ بالاخره با توجه به مقدار ψ_A به‌ازای $g_۳$ نتیجه می‌شود $\psi_A = \chi_۶$.

اکنون توجه کنید که $g_۴^۲$ مزدوج $g_۳$ است. از این‌رو

$$(\psi(g_۴)^۲ - \psi(g_۳))/۲ = \psi_A(g_۴) = \chi_۶(g_۴) = ۰$$

و بنابراین $\psi(g_۴) = ۰$. به همین نحو نتیجه می‌گیریم $\psi(g_۵) = ۰$.

قرار می‌دهیم $x = \psi(g_۸)$. چون $g_۸^۲$ مزدوج $g_۸$ است، نتیجه می‌گیریم $(x^۲ - x)/۲ = \psi_A(g_۸) = -۱$. بنابراین $x = (۱ \pm i\sqrt{۷})/۲$. قرار می‌دهیم $\chi_۷(g_۸) = (۱ - i\sqrt{۷})/۲$. دراین صورت $\chi_۸ = \overline{\chi}_۷$. به‌ازای هر χ داریم $\chi(g_۸) = \overline{\chi(g_{۱۰})}$؛ با استفاده از این رابطه و قسمت (ج)، کلیهٔ مقادیر $\chi_۷$ و $\chi_۸$ حاصل می‌شود.

ز) به‌ازای $i \neq ۶$ داریم $\sum_{j=۱}^{۱۱} \chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_۶)} = ۰$. با استفاده از این رابطه مقادیر $\chi_{۱۱}$ پیدا می‌شود. چون $g_۴$ مزدوج $g_۴^{-۱}$ است پس $\chi(g_۴)$ به‌ازای هر χ حقیقی است. بنابراین از $\sum_{j=۱}^{۱۱} \chi_j(g_۱)\overline{\chi_j(g_۴)} = ۰$ و $\sum_{j=۱}^{۱۱} \chi_j(g_۴)^۲ = ۸$ نتیجه می‌شود که $\chi_۹(g_۴) = -\chi_{۱۰}(g_۴) = \pm\sqrt{۲}$. قرار می‌دهیم $\chi_۹(g_۴) = \sqrt{۲}$. اکنون با استفاده از روابط تعامد ستونی می‌توان سایر مقادیر $\chi_۹$ و $\chi_{۱۰}$ را یافت و به این ترتیب جدول سرشت G را کامل کرد.

جدول سرشت $\mathrm{SL}(۲, ۷)$

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$	$g_۸$	$g_۹$	$g_{۱۰}$	$g_{۱۱}$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۴	۸	۸	۳	۶	۷	۱۴	۷	۱۴
$\|C_G(g_i)\|$	۳۳۶	۳۳۶	۸	۸	۸	۶	۶	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۷	۷	-۱	-۱	-۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰
$\chi_۳$	۸	۸	۰	۰	۰	-۱	-۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۴$	۳	۳	-۱	۱	۱	۰	۰	α	α	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
$\chi_۵$	۳	۳	-۱	۱	۱	۰	۰	$\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	α	α
$\chi_۶$	۶	۶	۲	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	-۱	-۱
$\chi_۷$	۴	-۴	۰	۰	۰	۱	-۱	$-\alpha$	α	$-\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$
$\chi_۸$	۴	-۴	۰	۰	۰	۱	-۱	$-\overline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$-\alpha$	α
$\chi_۹$	۶	-۶	۰	$\sqrt{۲}$	$-\sqrt{۲}$	۰	۰	-۱	۱	-۱	۱
$\chi_{۱۰}$	۶	-۶	۰	$-\sqrt{۲}$	$\sqrt{۲}$	۰	۰	-۱	۱	-۱	۱
$\chi_{۱۱}$	۸	-۸	۰	۰	۰	-۱	۱	۱	-۱	۱	-۱

توجه: $\alpha = (-۱ + i\sqrt{۷})/۲$

۶. قرار می‌دهیم $Z=\{\pm I\}$ و زیرگروه T از G با مرتبهٔ ۵۵ را چنین تعریف می‌کنیم

$$T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}Z : a\in\mathbb{Z}_{11}^{*}, b\in\mathbb{Z}_{11}\right\}$$

در این صورت T توسط

$$y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\end{pmatrix}Z \quad \text{و} \quad x=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}Z$$

تولید می‌شود و دارای ۵ سرشت خطی ζ_j $(0\le j\le 4)$ است، که

$$\zeta_j : x^u y^v \to e^{2\pi i j v/5}$$

سرشتهای $\zeta_1\uparrow G$ و $\zeta_2\uparrow G$ تحویل‌ناپذیرند؛ این سرشتها را با χ_3 و χ_4 در جدول نشان داده‌ایم. (در محاسبهٔ $\chi_3(g_5)$، توجه کنید که $e^{2\pi i/5}+e^{-2\pi i/5}=(-1+\sqrt{5})/2$.) قرار می‌دهیم $\chi_1=1_G$. داریم $\langle\zeta_0\uparrow G,\chi_1\rangle=1$ و $\langle\zeta_0\uparrow G,\zeta_0\uparrow G\rangle=2$. از این‌رو $\zeta_0\uparrow G=\chi_1+\chi_2$ که χ_2 سرشت تحویل‌ناپذیری از G است.

اکنون چهار سرشت از هشت سرشت تحویل‌ناپذیر G را یافته‌ایم، یعنی χ_1، χ_2، χ_3، χ_4. چون $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(g_5)\overline{\chi_j(g_5)}=5$ نتیجه می‌گیریم که مقدار سرشتهای تحویل‌ناپذیر باقیمانده، یعنی مقدار χ_5، χ_6، χ_7، χ_8، به‌ازای g_5 مساوی ۰ است. طبق نتیجهٔ ۲۶.۲۲، به‌ازای $5\le j\le 8$، $\chi_j(1)\equiv 0$ (به پیمانهٔ ۵). اما $\sum_{j=5}^{8}(\chi_j(1))^2=250$، از این‌رو، بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود، می‌توان گفت $\chi_5(1)$، $\chi_6(1)$، $\chi_7(1)$، $\chi_8(1)$ به ترتیب برابرند با ۱۰، ۱۰، ۵، ۵.

توجه کنید که طبق قضیهٔ ۱۵.۲۲، $\chi(g_j)$ به‌ازای $1\le j\le 4$ و به‌ازای هر سرشت χ عدد صحیح است.

از آنجا که رابطهٔ $\chi(1)\equiv\chi(g_3)$ (به پیمانهٔ ۳) به‌ازای هر سرشت χ برقرار است و $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(g_3)^2=6$، مقادیر $\chi_j(g_3)$ (به‌ازای $5\le j\le 8$) به‌دست می‌آیند؛ این مقادیر در جدول نشان داده شده‌اند.

اکنون توجه کنید که به‌ازای هر χ، $\chi(g_4)\equiv\chi(g_3)$ (به پیمانهٔ ۲)، و $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(g_4)^2=6$، لذا به‌ازای $5\le j\le 8$، $\chi_j(g_4)=\pm 1$. حال از آنجا که به‌ازای هر χ، $\chi(g_4)\equiv\chi(g_2)$ (به پیمانهٔ ۳)، و $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(g_2)^2=12$ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر χ تحویل‌ناپذیر، $|\chi(g_2)|<3$. اکنون می‌توان از اینکه $\chi(g_2)\equiv\chi(g_1)$ (به پیمانهٔ ۲) و $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(g_2)^2=12$ نتیجه گرفت که به‌ازای $j=5,6$، $\chi_j(g_2)=\pm 2$ و به‌ازای $j=7,8$، $\chi_j(g_2)=\pm 1$. با در نظر گرفتن $\sum_{j=1}^{8}\chi_j(1)\chi_j(g_2)=0$ نتیجه می‌شود که $\chi_7(g_2)=\chi_8(g_2)=1$ و $\chi_5(g_2)$ و $\chi_6(g_2)$ دارای علامتهای مخالف‌اند، لذا بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود می‌توانیم بنویسیم $\chi_5(g_2)=2=-\chi_6(g_2)$.

تا اینجا ستونهای ۱، ۲، ۳ و ۵ جدول سرشت را کامل کرده‌ایم.

چون به‌ازای هر سرشت χ، (به پیمانهٔ ۳)$\chi(g_۴) \equiv \chi(g_۲)$، و $\sum_{j=۱}^{۸} \chi_j(g_۴)^۲ = ۶$ می‌توانیم ستون ۴ را کامل کنیم.

اکنون با استفاده از روابط تعامد ستونی می‌توان جدول سرشت را کامل کرد.

جدول سرشت $\mathrm{PSL}(۲, ۱۱)$

g_i	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$	$g_۸$
مرتبهٔ g_i	۱	۲	۳	۶	۵	۵	۱۱	۱۱
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۶۶۰	۱۲	۶	۶	۵	۵	۱۱	۱۱
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۱۱	-۱	-۱	-۱	۱	۱	۰	۰
$\chi_۳$	۱۲	۰	۰	۰	α	β	۱	۱
$\chi_۴$	۱۲	۰	۰	۰	β	α	۱	۱
$\chi_۵$	۱۰	۲	۱	-۱	۰	۰	-۱	-۱
$\chi_۶$	۱۰	-۲	۱	۱	۰	۰	-۱	-۱
$\chi_۷$	۵	۱	-۱	۱	۰	۰	γ	$\overline{\gamma}$
$\chi_۸$	۵	۱	-۱	۱	۰	۰	$\overline{\gamma}$	γ

توجه: $\alpha = (-۱ + \sqrt{۵})/۲$، $\beta = (-۱ - \sqrt{۵})/۲$، $\gamma = (-۱ + i\sqrt{۱۱})/۲$.

فصل ۲۸

۱. طبق قضیهٔ ۲۸.۴، $a_{۲۳۵} = ۱۶۸/(۸ \times ۳) = ۷$. از این‌رو، بنابه ۲۸.۳، $\mathrm{PSL}(۲, ۷)$ دارای عناصری چون a و b است به‌قسمی که a دارای مرتبهٔ ۲، b دارای مرتبهٔ ۳ و ab دارای مرتبهٔ ۷ است.

۲. خیر: $a_{۲۲۵} = (۱ + (-۱ + i\sqrt{۷})/۶ + (-۱ - i\sqrt{۷})/۶ - ۴/۶)۱۶۸/(۸ \times ۸) = ۰$، و به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم $a_{۲۲۶} = ۰$. بنابراین $\mathrm{PSL}(۲, ۷)$ دارای دو برگردان که مرتبهٔ حاصلضربشان ۷ باشد نیست.

۳. بله: رده‌های مزدوجی $\mathrm{PSL}(۲, ۱۱)$ را مانند حل مسألهٔ ۲۷.۶ شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت

$$a_{۲۳۵} = \frac{۶۶۰}{۱۲ \times ۶}\left(۱ + \frac{۱}{۱۱}\right) = ۱۰$$

بنابراین $\mathrm{PSL}(۲, ۱۱)$ دارای عناصری چون x و y است به‌قسمی که مرتبهٔ x و y و xy به ترتیب ۲ و ۳ و ۵ است. فرض کنیم H زیرگروه $\langle x, y\rangle$ از $\mathrm{PSL}(۲, ۱۱)$ باشد. همریختی پوشایی چون ϑ از $A_۵$ به H وجود دارد (تحت ϑ داریم $a \to x$ و $b \to y$). چون $\mathrm{Ker}\vartheta \lhd A_۵$ و $A_۵$ ساده است نتیجه می‌گیریم که $H \cong A_۵$.

۴. فرض کنیم که G گروهی با جدول سرشت زیر است

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$
$\chi_۱$	۱	۱	۱	۱	۱
$\chi_۲$	۴	۱	۰	-۱	-۱
$\chi_۳$	۵	-۱	۱	۰	۰
$\chi_۴$	۳	۰	-۱	α	β
$\chi_۵$	۳	۰	-۱	β	α

که $\alpha = (۱ + \sqrt{۵})/۲$ و $\beta = (۱ - \sqrt{۵})/۲$.

بهازای $۱ \le i \le ۵$ داریم $|C_G(g_i)| = \sum_{j=۱}^{۵} \chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_i)}$. بنابراین مرتبهٔ مرکزسازهای $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$، $g_۴$، $g_۵$ به ترتیب عبارت است از ۶۰، ۳، ۴، ۵، ۵. از این‌رو مرتبهٔ $g_۲$، $g_۴$ و $g_۵$ به ترتیب عبارت است از ۳، ۵ و ۵؛ همچنین مرتبهٔ $g_۳$ باید ۲ باشد زیرا بهازای هیچ i دیگری (بجز $i = ۱$) $|C_G(g_i)|$ زوج نیست.

اکنون چون $a_{۳۲۴} = ۶۰/(۳ \times ۴)$ نتیجه می‌گیریم که G دارای عناصری چون x و y است به‌طوری که x دارای مرتبهٔ ۲، y دارای مرتبهٔ ۳ و xy دارای مرتبهٔ ۵ است. همان‌طور که در حل تمرین ۳ دیدیم، نتیجه می‌گیریم که G زیرگروهی چون H دارد که $H \cong A_۵$. چون $|G| = ۶۰$ پس $G \cong A_۵$.

۵. الف) با استفاده از رابطهٔ $|C_G(g_i)| = \sum_{j=۱}^{۷} \chi_j(g_i)\overline{\chi_j(g_i)}$ نتیجه می‌گیریم که مرتبهٔ مرکزسازها و اندازهٔ رده‌ها عبارت‌اند از

	$g_۱$	$g_۲$	$g_۳$	$g_۴$	$g_۵$	$g_۶$	$g_۷$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	۳۶۰	۸	۴	۹	۹	۵	۵
$\lvert g_i^G\rvert$	۱	۴۵	۹۰	۴۰	۴۰	۷۲	۷۲

از این‌رو $|G| = ۳۶۰$. به‌علاوه طبق گزارهٔ ۶.۱۷، G ساده است.

ب) طبق قضیهٔ فروبنیوس–شور دربارهٔ تعداد برگردانها (نتیجهٔ ۲۳.۱۷)، t تعداد برگردانهای G در نابرابری $۱ + t \le \sum_{j=۱}^{۷} \chi_j(۱) = ۴۶$ صدق می‌کند. با در نظر گرفتن $|C_G(g_i)|$، نتیجه می‌گیریم که g_i فقط بهازای $i = ۲, ۳$ دارای مرتبهٔ زوج است. چون $t \le ۴۵$، فقط $g_۲$ برگردان است. بنابراین $g_۳$ دارای مرتبهٔ ۴ است. (این اطلاعات را دربارهٔ مرتبه‌های $g_۲$ و $g_۳$ می‌توان با استفاده از قضایای سیلو نیز بهدست آورد.)

ج) واضح است که $g_۶$ و $g_۷$ دارای مرتبهٔ ۵ هستند، و حداقل یکی از عناصر $g_۴$ و $g_۵$ دارای مرتبهٔ ۳

است. اگر (۵ یا ۴) $= j$ و (۷ یا ۶) $= k$ آنگاه

$$a_{2jk} = \frac{|G|}{|C_G(g_2)||C_G(g_j)|} \sum_{\chi} \frac{\chi(g_2)\chi(g_j)\overline{\chi(g_k)}}{\chi(1)}$$
$$= \frac{360}{8 \times 9} = 5$$

بنابراین G دارای عناصری چون x و y است به‌طوری که x دارای مرتبهٔ ۲، y دارای مرتبهٔ ۳ و xy دارای مرتبهٔ ۵ است. همان‌طور که در حل تمرین ۳ دیدیم، نتیجه می‌شود که زیرگروه $H = \langle x, y \rangle$ از G با A_5 یکریخت است.

د) اگر $g, h \in G$ آنگاه

$$(gh)\rho : Hx \to Hxgh$$
$$(g\rho)(h\rho) : Hx \to Hxg \to Hxgh$$

پس ρ همریختی است.

ه) چون G ساده است پس $\mathrm{Ker}\rho = \{1\}$. بنابراین G با زیرگروهی چون K از S_6 یکریخت است. چون $|S_6 : K| = 6!/360 = 2$، K باید A_6 باشد.

۶. شکلی را که در مثال ۶.۲۸(۳) ترسیم شده است در نظر می‌گیریم. رئوس آن را به‌وسیلهٔ عناصر G به‌نحوی که ذیلاً شرح می‌دهیم نشانه‌گذاری می‌کنیم.

رأسی را انتخاب می‌کنیم و ۱ را به‌عنوان نشانه کنارش می‌نویسیم. رئوس را مطابق قاعدهٔ استقرائی زیر نشانه‌گذاری می‌کنیم. فرض کنیم که v یکی از رئوس است و برای رأس مجاور آن u نشانهٔ g انتخاب شده است. در این صورت برای v نشانهٔ زیر را انتخاب می‌کنیم

ga هرگاه یال uv دارای پیکان نباشد،

gb هرگاه یال uv دارای پیکانی از u به v باشد،

gb^{-1} هرگاه یال uv دارای پیکانی از v به u باشد.

به‌عنوان مثال، اگر تصمیم بگیریم که برای رأسی که در سمت چپ و پایین شکل قرار دارد نشانهٔ ۱ را انتخاب کنیم آنگاه نشانه‌گذاری قسمتی از شکل چنین خواهد بود

از رابطهٔ $a^2 = 1$ نتیجه می‌شود که این روش نشانه‌گذاری در مورد دو انتهای یالهای بدون پیکان روشی بی‌تناقض است؛ از رابطهٔ $b^3 = 1$ نتیجه می‌شود که این روش در مورد رئوس مثلثها عاری از تناقض

است و از رابطهٔ $ababab ab = ۱$ نتیجه می‌شود که نشانه‌گذاری رئوس هشت‌ضلعی‌ها بدون تناقض انجام می‌شود.

هر عنصر G به شکل نشانه‌ای است که به یکی از ۲۴ رأس داده‌ایم، لذا $|G| \leq ۲۴$.

فصل ۲۹

۱. فرض کنیم که G دارای زیرگروه آبلی H با شاخص p^r است (p اول)، و $|G| > p$. اگر $H = \{۱\}$ آنگاه $|G| = p^r$ و لذا G ساده نیست (لم ۱.۲۶(۱) را ببینید). لذا فرض می‌کنیم که $H \neq \{۱\}$، و عضوی چون $H \ni h \neq ۱$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت چون H آبلی است، $H \leq C_G(h)$، لذا $|G : C_G(h)|$ توانی از p است. اگر $|G : C_G(h)| = ۱$ آنگاه $\langle h \rangle \lhd G$ و لذا G ساده نیست. اگر $|G : C_G(h)| > ۱$ آنگاه طبق قضیهٔ ۳.۲۹، G ساده نیست.

۲. بنابه قضیهٔ برنساید، $|G|$ مضرب حداقل سه عدد اول متمایز است. چون $۸۰ < ۷ \times ۵ \times ۳$ پس $|G|$ زوج است. حال از تمرین ۸.۱۳ نتیجه می‌گیریم که $|G|$ مضرب ۴ است. چون $۸۰ < ۷ \times ۳ \times ۴$، تنها حالت ممکن این است که $|G| = ۴ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$.

فصل ۳۰

۱. الف) تساوی $BB^t = I$ از آنجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i و j داریم $d(e_ib, e_jb) = d(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. چون $۱ = \det I = (\det B)(\det B^t) = (\det B)^۲$ پس $\det B = \pm ۱$.

ب) (i) مقادیر ویژهٔ C ریشه‌های $\det(C - xI)$ هستند، که معادله‌ای درجهٔ ۳ روی $\mathbb{R}$ است. بنابراین، C یک یا سه مقدار ویژهٔ حقیقی دارد. (ii) به‌علاوه، حاصلضرب مقادیر ویژهٔ C عبارت است از $\det C = ۱$. اگر C سه مقدار ویژهٔ حقیقی داشته باشد، ممکن نیست همگی آنها منفی باشند؛ و اگر C یک مقدار ویژهٔ حقیقی چون λ و دو مقدار ویژهٔ غیرحقیقی مزدوج چون μ و $\overline{\mu}$ داشته باشد آنگاه $\lambda\mu\overline{\mu} = ۱$ و لذا $\lambda > ۰$. بنابراین C مقدار ویژهٔ مثبتی مانند λ دارد. (iii) فرض کنیم v بردار ویژهٔ متناظر با λ باشد. در این صورت

$$d(v, v) = d(vC, vC) = d(\lambda v, \lambda v) = \lambda^۲ d(v, v)$$

و لذا $\lambda = ۱$.

ج) فرض کنیم c طولپایی $v \to vC$ باشد. طبق (ب)، c برداری مانند v را ثابت نگاه می‌دارد؛ اکنون به سادگی می‌توانید خود را قانع کنید که c باید دوران حول محوری در امتداد v باشد. حکم مسأله در مورد b از تعریف c نتیجه می‌شود.

د) سه محور متعامد که یکی از آنها محور دوران b است در نظر بگیرید. ماتریس b نسبت به این

محورها عبارت است از

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos\phi & \sin\phi \\ ۰ & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

از این‌رو $\mathrm{tr}B = ۱ + ۲\cos\phi$.

۲. G را به‌عنوان زیرگروه $O(\mathbb{R}^۳)$ در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که T، یعنی زیرمدول انتقالها (که متشکل از تمام مدهای انتقال است) با $\mathbb{R}G$ـمدول حاصل از عمل طبیعی G روی $\mathbb{R}^۳$ یکریخت است. از این‌رو، طبق قسمت (د) از تمرین ۱،

$$\chi_T(g) = \begin{cases} ۱ + ۲\cos\phi & \text{هرگاه } g \text{ دورانی با زاویهٔ } \phi \text{ حول محوری باشد} \\ -(۱ + ۲\cos\phi) & \text{هرگاه عنصر } -g \text{ از } O(\mathbb{R}^۳) \text{ دورانی با زاویهٔ } \phi \text{ باشد} \end{cases}$$

اکنون R، یعنی زیرمدول دورانها را که متشکل از تمام مدهای دوران است، در نظر می‌گیریم. هر مد دوران به‌وسیلهٔ برداری سه‌بعدی چون ϕv مشخص می‌شود؛ که v برداری یکه در امتداد محور دوران است و ϕ زاویهٔ دوران در جهت مثبت پیچ راستگرد است. فرض می‌کنیم $g \in G$، و عمل g را روی ϕv در نظر می‌گیریم. تحت این عمل v به vg می‌رود، و اگر g دوران باشد، این عمل جهت دوران را حفظ می‌کند؛ اما اگر g تقارن محوری باشد آنگاه پیچ راستگرد را به پیچ چپگرد تبدیل می‌کند، و لذا ϕv را به $(-\phi)(vg)$ می‌برد. بنابراین

$$\chi_R(g) = \begin{cases} \chi_T(g) & \text{هرگاه } g \text{ دوران باشد} \\ -\chi_T(g) & \text{هرگاه } g \text{ دوران نباشد} \end{cases}$$

و لذا $\chi_T + \chi_R$ به‌صورت مطلوب است.

۳. ماتریس A عبارت است از

$$\frac{k}{m}\begin{pmatrix} -۳/۲ & ۰ & ۳/۴ & -\sqrt{۳}/۴ & ۳/۴ & \sqrt{۳}/۴ \\ ۰ & -۱/۲ & -\sqrt{۳}/۴ & ۱/۴ & \sqrt{۳}/۴ & ۱/۴ \\ ۳/۴ & -\sqrt{۳}/۴ & -۳/۴ & \sqrt{۳}/۴ & ۰ & ۰ \\ -\sqrt{۳}/۴ & ۱/۴ & \sqrt{۳}/۴ & -۵/۴ & ۰ & ۱ \\ ۳/۴ & \sqrt{۳}/۴ & ۰ & ۰ & -۳/۴ & -\sqrt{۳}/۴ \\ \sqrt{۳}/۴ & ۱/۴ & ۰ & ۱ & -\sqrt{۳}/۴ & -۵/۴ \end{pmatrix}$$

۴. پایهٔ متشکل از سه بردار زیر پایه‌ای ساده‌تر است

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = (v_{12} + v_{21}) - (v_{34} + v_{43})$$
$$\frac{1}{2}(r_1 + r_3) = (v_{13} + v_{31}) - (v_{24} + v_{42})$$
$$\frac{1}{2}(r_1 + r_4) = (v_{14} + v_{41}) - (v_{23} + v_{32})$$

بردارهای r_1، r_2، r_3، r_4 را تصویر بردارهای w_1، w_2، w_3، w_4 تحت یک $\mathbb{R}G$-یکریختی انتخاب کرده بودیم. (ساختن ماتریس B در انتهای مثال ۲۰.۳۰ را ببینید.)

۵. الف) این مسأله یک مسألهٔ معمولی هندسی است.

ب) فرض کنیم مکان جدید اتمها $'0$، $'1$، $'2$، $'3$، $'4$ باشد. فاصلهٔ $'1$ از صفحه‌ای که از ۱ می‌گذرد و بر ۱۲ عمود است مساوی است با $x_{12} + \frac{1}{2}(x_{13} + x_{14})$. همچنین فاصلهٔ $'2$ از صفحه‌ای که از ۲ می‌گذرد و بر ۱۲ عمود است مساوی است با $x_{21} + \frac{1}{2}(x_{23} + x_{24})$. بنابراین مقدار کاهش ۱۲ مساوی است با $x_{12} + x_{21} + \frac{1}{2}(x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24})$. احکام دیگر را به همین طریق می‌توان ثابت کرد.

ج) نیروی وارد بر هر اتم را با یک بردار بیان می‌کنیم و سپس این بردار را به‌صورت ترکیب خطی سه بردار یکه‌ای که در مکان اولیهٔ هر اتم انتخاب کرده‌ایم [مبدأ سه بردار در مکان اولیهٔ اتم قرار دارد] می‌نویسیم. فرض کنیم d_{ij} کاهش طول ij باشد که در قسمت (ب) به‌دست آمده است. در این صورت، به‌عنوان مثال، در رأس ۱، اجزاء مؤلفهٔ بردار نیرو در جهت ۱۲ عبارت‌اند از: $-k_1 d_{12}$ از نیروی بین اتمهای ۱ و ۲؛ صفر از نیروی بین اتمهای ۱ و ۳ و از نیروی بین اتمهای ۱ و ۴؛ و $-k_2 d_{10} \sec(\angle 012)$ از نیروی بین اتمهای ۱ و ۰. بنابراین

$$m_1 \ddot{x}_{12} = -k_1 d_{12} - \frac{1}{3}\sqrt{3/2}\, k_2 d_{10}$$

با گذاشتن مقادیر d_{12} و d_{10} از قسمت (ب) در تساوی فوق، عبارت مطلوب برای $\ddot{x}_{12}$ حاصل می‌شود.

شتابهای دیگر را نیز به همین طریق می‌توان محاسبه کرد.

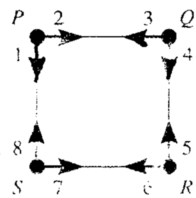
د) درایه‌های ماتریس 15×15 A عبارت‌اند از ضرایبی که در معادلات حرکت $\ddot{x} = xA$ ظاهر می‌شوند. اگر ماتریس A را بنویسید آنگاه به سادگی می‌توانید نتیجه بگیرید که بردارهای داده شده بردارهای ویژهٔ A هستند (که مقادیر ویژهٔ آنها به ترتیب عبارت‌اند از $-(4k_1 + k_2)/m_1$، 0، 0، 0، $-k_1/m_1$، $-k_1/m_1$).

ه) ماتریس B عبارت است از

$$\begin{pmatrix} -(۶k_۱+k_۲)/۳m_۱ & -۲k_۲/۳m_۱ & -۴k_۲\sqrt{۲}/(m_۲\sqrt{۳}) \\ -(۳k_۱+k_۲)/۳m_۱ & -۲k_۲/۳m_۱ & -۴k_۲\sqrt{۲}/(m_۲\sqrt{۳}) \\ -k_۲\sqrt{۳}/(۹m_۱\sqrt{۲}) & -۲k_۲\sqrt{۳}/(۹m_۱\sqrt{۲}) & -۴k_۲/۳m_۲ \end{pmatrix}$$

و) (۱, −۲, $\sqrt{۶}$) بردار ویژهٔ B با مقدار ویژهٔ ۰ است. این مطلب با حکم مثال ۲۰.۳۰ که بیان می‌دارد بردار انتقال $r_۱ - ۲s_۱ + ۳\cos\vartheta w_۱$ بردار ویژهٔ A است سازگار است.

۶. الف) محورهای مختصات را در امتداد یالهای مربع مانند شکل زیر انتخاب می‌کنیم



گروه تقارنها عبارت است از $G = D_۸$. فرض کنیم a دورانی باشد که تحت آن $P \to Q \to R \to S \to P$، و b تقارن نسبت به محور PR باشد. سرشت χ از $\mathbb{R}G$ـمدول $\mathbb{R}^۸$ عبارت است از

	۱	$a^۲$	a	b	ab
χ	۸	۰	۰	۰	۰

با استفاده از جدول سرشت $D_۸$ که در مثال ۳.۱۶(۳) آمده داریم

$$\chi = \chi_۱ + \chi_۲ + \chi_۳ + \chi_۴ + ۲\chi_۵$$

مد دوران عبارت است از $(t+\beta)v$، که

$$v = (۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱) \in V_{\chi_۲}$$

مدهای انتقال عبارت‌اند از $(t+\beta)v$، که v به زیرفضایی که توسط $v_۱$ و $v_۲$ پدید می‌آید تعلق دارد

$$v_۱ = (۱, ۰, ۰, ۱, -۱, ۰, ۰, -۱)$$

$$v_۲ = (۰, ۱, -۱, ۰, ۰, -۱, ۱, ۰)$$

مؤلفه‌های همگن $V_{\chi_۱}$، $V_{\chi_۳}$ و $V_{\chi_۴}$ به ترتیب توسط بردارهای (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)، (۱, ۱, −۱, −۱, ۱, ۱, −۱, −۱) و (۱, −۱, −۱, ۱, ۱, −۱, −۱, ۱) پدید می‌آیند. آخرین مجموعهٔ بردارهای ویژه از $V_{\chi_۵} \cap \mathbb{R}^۸_{\mathrm{vib}}$ که توسط بردارهای زیر پدید می‌آید حاصل می‌شود

$$(۱, ۰, ۰, -۱, -۱, ۰, ۰, ۱), (۰, ۱, ۱, ۰, ۰, -۱, -۱, ۰)$$

ب) ماتریس A عبارت است از

$$-\frac{k}{m}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷. (الف و ب) فرض کنیم ε_i $(۱ \le i \le m)$ تصویرگر زیر باشد

$$\varepsilon_i : u_۱ + \cdots + u_m \to u_i$$

که به‌ازای هر k، $u_k \in U_k$. در این صورت تابع

$$w \to wA\varepsilon_j \vartheta_j^{-۱}\vartheta_i \qquad (w \in U_i)$$

$\mathbb{R}G$ـهمریختی از U_i به U_i است. طبق تمرین ۸.۲۳، اعدادی چون $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $w \in U_i$،

$$wA\varepsilon_j = \lambda_{ij} w\vartheta_i^{-۱}\vartheta_j$$

چون $\sum_{j=۱}^{m} \varepsilon_j$ درونریختی همانی از $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$ است، پس به‌ازای هر $w \in U_i$، $wA = \sum_{j=۱}^{m} \lambda_{ij} w\vartheta_i^{-۱}\vartheta_j$. اکنون به ترتیب قرار می‌دهیم $w = u\vartheta_i$ و $w = v\vartheta_i$ تا اینکه قسمتهای (الف) و (ب) ثابت شود.

(ج) پایهٔ $u_۱$، ... ، u_n از $U_۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که بردارهای ویژهٔ A_u معلوم‌اند. به‌ازای هر k که $۱ \le k \le n$، بردارهای ویژهٔ A در $\mathrm{sp}(u_k\vartheta_۱, \cdots, u_k\vartheta_m)$ به‌وسیلهٔ بردارهای ویژهٔ A_u معین می‌شوند. (قسمت (ب) را ببینید). از این‌رو تمام بردارهای ویژهٔ A در $U_۱ \oplus \cdots \oplus U_m$ را در دست داریم.

کتابنامه

کتابهایی که در متن نام برده شده‌اند

H. S. M. Coxeter and W. J. O. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups* (Fourth Edition), Springer-Verlag, 1980.

J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra* (Third Edition), Addison-Wesley, 1982.

[ترجمهٔ فارسی این کتاب با عنوان نخستین درس در جبر مجرد به قلم دکتر مسعود فرزان در دو جلد (جلد اول توسط مرکز نشر دانشگاهی، و جلد دوم توسط محمد جواد فرزان) منتشر شده است.]

D. S. Passman, *Permutation Groups*, Benjamin, 1968.

H. Pollard and H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers* (Second Edition), Carus Mathematical Monographs No. 9, Mathematical Association of America, 1975.

J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups* (Third Edition), Allyn and Bacon, 1984.

D. S. Schonland, *Molecular Symmetry – an Introduction to Group Theory and its uses in Chemistry*, Van Nostrand, 1965.

کتابهایی برای مطالعهٔ بیشتر

M. J. Collins, *Representations and Characters of Finite Groups*, Cambridge University Press, 1990.

C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, Volume I, Wiley-Interscience, 1981.

W. Feit, *Characters of Finite Groups*, Benjamin, 1967.

I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, 1976.

W. Ledermann, *Introduction to Group Characters* (Second Edition), Cambridge University Press, 1987.

J. P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, 1977.

واژه‌نامهٔ فارسی-انگلیسی*

ارتقاء سرشت — lift of a character

برگردان — involution

پاد متقارن (فرم دوخطی) — skew-symmetric (bilinear form)

پوچی — nullity

تصویرگر — projection

تعدی — transitivity

تقابل — reciprocity

تولیدشونده (زیرگروه) — generated (subgroup)

ثابتهای رده‌ای جبر — class algebra constants

حل‌پذیر (گروه) — soluble (group)

خارج‌قسمتی (گروه) — factor (group)

خارجی (مجموع مستقیم) — external (direct sum)

دودوری (گروه) — dicyclic (group)

رابطهٔ رده‌ای — class equation

ردهٔ مزدوجی — conjugacy class

شاکلهٔ دوری — cycle-shape

صادق (سرشت، مدول، نمایش) — faithful (character, module, representation)

فرابری (سرشت، مدول) — induced (character, module)

گروه‌جبر — group algebra

مشتق (زیرگروه) — derived (subgroup)

منظم (سرشت، مدول، نمایش) — regular (character, module, representation)

نمایه — presentation

---

* فقط واژه‌هایی را در اینجا آورده‌ایم که در واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار، چاپ مرکز نشر دانشگاهی، نیامده یا به‌صورتی متفاوت آمده است.

واژه‌نامهٔ انگلیسی-فارسی*

induced (character, module) فرابری (سرشت، مدول)

involution برگردان

lift of a character ارتقاء سرشت

nullity پوچی

presentation نمایه

projection تصویرگر

reciprocity تقابل

regular (character, module, representation) منظم (سرشت،مدول، نمایش)

skew-symmetric (bilinear form) پاد متقارن (فرم دوخطی)

soluble (group) حل‌پذیر (گروه)

transitivity تعدی

class algebra constants ثابتهای رده‌ای جبر

class equation رابطهٔ رده‌ای

conjugacy class ردهٔ مزدوجی

cycle-shape شاکلهٔ دوری

derived (subgroup) مشتق (زیرگروه)

dicyclic (group) دودوری (گروه)

external (direct sum) خارجی (مجموع مستقیم)

factor (group) خارج‌قسمتی (گروه)

faithful (character, module, representation) صادق (سرشت، مدول، نمایش)

generated (subgroup) تولیدشونده (زیرگروه)

group algebra گروه‌جبر

* فقط واژه‌هایی را در اینجا آورده‌ایم که در واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار، چاپ مرکز نشر دانشگاهی، نیامده یا به‌صورتی متفاوت آمده است.

نمایه

نمایهٔ نمادها