دانش پژوهان جوان
ناشر کتابهای المپیاد

نگاهی نو به نامساوی‌ها

$$a,b,c \in \mathbb{R}$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

محمد احمدی
مدرس باشگاه دانش‌پژوهان جوان

New insight into inequalities

M. Ahmadi

نگاهی نو به نامساوی‌ها

کتاب **نگاهی نو به نامساوی‌ها** از کتاب‌های آمادگی برای شرکت در المپیادهای ریاضی است.
در این کتاب سعی بر این است تا مباحثی از نامساوی‌های ریاضی با بیانی ساده همراه با حل مسائل متنوع و برگزیده از المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، مورد بحث قرار گیرد. این کتاب برای دانش‌آموزان، دانشجویان و کلیه علاقه‌مندان به علم ریاضی مفید است.

نگاهی نو به نامساوی‌ها

محمد احمدی

مدرس باشگاه دانش‌پژوهان جوان

سرشناسنامه : احمدی، محمد، ۱۳۷۰ -
عنوان و نام پدیدآور : نگاهی نو به نامساوی‌ها = new insight into inequalities / محمد احمدی ،
مشخصات نشر: تهران : دانش‌پژوهان جوان، ۱۳۹۰ ،
مشخصات ظاهری : ۹۴ص. : جدول.
شابک : ۲۲۰۰۰ ریال: 987-600-5230-54-3
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
موضوع : نامساوی‌ها
رده‌بندی کنگره : ۱۳۹۰ ۸ن۳الف/۲۹۵ QA
رده‌بندی دیویی : ۵۱۵/۲۶
شماره کتابشناسی ملی : ۲۲۹۳۴۸۳

نگاهی نو به نامساوی‌ها

مؤلف محمد احمدی
ویراستار مهدی یزدی
ناشر دانش‌پژوهان جوان
قطع وزیری
تیراژ ۲۲۰۰ نسخه
چاپ اول بهار ۱۳۹۰
قیمت ۲۲۰۰تومان
شابک ۹۷۸-۶۰۰-۵۲۳۰-۵۴-۳

دانش‌پژوهان جوان
ناشر کتابهای المپیاد

خیابان انقلاب - خیابان وحید نظری - بین فروردین و اردیبهشت - پلاک ۱۰۵ - واحد ۱۱
صندوق پستی : ۱۷۱۳-۱۳۱۴۵ فروشگاه اینترنتی : www.irOlympiad.com
تلفن : ۶۶۴۹۸۹۹۸ - ۶۶۴۹۶۳۶۳ دورنگار : ۶۶۹۵۳۲۵۰

مقدمه

همان‌طور که از عنوان کتاب پیداست در این کتاب سعی شده مباحث مختلف نابرابری‌ها به‌صورت کاربردی و با حل مثال‌های متنوع در طول هر فصل مورد بحث قرار گیرد. البته برای جلوگیری از اطالهٔ کلام، خواننده بهتر است با مباحث نابرابری‌ها به‌صورت مقدماتی آشنا باشد. کتاب نگاهی نو به نامساوی‌ها شامل ۱۰ فصل می‌باشد. در انتهای هر یک از هشت فصل اول کتاب مسائلی قرار داده شده که خواننده می‌تواند با حل این مسائل به محک درک خود از مطالب ارائه شده در آن فصل بپردازد و همچنین جهت ارتقاء جنبهٔ کاربردی کتاب، فصل جداگانه‌ای در این کتاب در نظر گرفته شده که شامل تعدادی سؤال برگزیده همراه با حل می‌باشد تا خواننده از طریق آن میزان توانایی حل مسئلهٔ خود را ارزیابی کرده و ارتقاء بخشد.

در پایان از اساتید و دوستانی چون جناب آقای میجوزی، جناب آقای یزدی که اینجانب در این راه یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

محمد احمدی

بهار ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

فصل ۱

نامساوی حسابی هندسی و نگرشی جدید به آن

ابتدا صورت اصلی نامساوی حسابی هندسی را مطرح می‌کنیم.
فرض کنید a_1 و a_2 و .... و a_n اعداد حقیقی نامنفی هستند آنگاه داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

حالت تساوی تنها وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

حال به بیان مثال‌هایی از این نامساوی پرکاربرد می‌پردازیم
(راهنمایی: $e^x \geq ex$ برای $x \in \mathbb{R}$)

مثال ۱.۱ فرض کنید $a \geq 2$ عددی حقیقی می‌باشد. مینیمم عبارت $A = a + \frac{1}{a}$ را بیابید.

اثبات: در ابتدا شاید بلافاصله به این فکر بیفتید که $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{a}} = 2$ پس جواب ۲ می‌باشد. ولی آیاحالت تساوی را بررسی کرده‌اید؟!!!
حالت تساوی تنها وقتی رخ می‌دهد که داشته باشیم $a = \frac{1}{a} \Leftarrow a = 1$ و با فرض $a \geq 2$ تناقض دارد حال میانگین هندسی $\frac{1}{a}$ و ضریبی از a را در نظر می‌گیریم به طوری که حالت

تساوی $a = ۲$ باشد.

$$\frac{a}{\beta} + \frac{۱}{a} \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{\beta}}$$

حالت تساوی $\frac{۱}{a} = \frac{a}{\beta} \Leftarrow \beta = a^۲ \overset{a=۲}{\Longleftarrow} \beta = ۴$ پس داریم $\frac{a}{۴} + \frac{۱}{a} \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۴}} = ۱$ پس

$$a + \frac{۱}{a} = \frac{۳a}{۴} + \frac{a}{۴} + \frac{۱}{a} \geq \frac{۳a}{۴} + ۱ \geq \frac{۵}{۲}$$

و حالت تساوی برای $a = ۲$ برقرار است.

مثال ۲.۱ برای اعداد $a, b, c > ۰$ داریم $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$ ثابت کنید.

$$a + b + c + \frac{۱}{abc} \geq ۴\sqrt{۳}$$

(Macedonia 1999)

اثبات: طبق نامساوی حسابی هندسی داریم.

$$a + b + c + \frac{۱}{abc} \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{abc}{abc}} = ۴$$

ولی می‌دانیم که حالت تساوی با شرط $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$ در تناقض است، حالت تساوی وقتی است که داشته باشیم $a = b = c = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ پس طوری از نامساوی حسابی هندسی استفاده می‌کنیم که در آن حالت تساوی رعایت شود.

$$\begin{aligned}
a + b + c + \frac{۱}{abc} &= a + b + c + \frac{۱}{۹abc} + \frac{۸}{۹abc} \\
&\geq ۴\sqrt[۴]{\frac{abc}{۹abc}} + \frac{۸}{۹(\frac{a+b+c}{۳})^۳} \\
&\geq \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۸}{۹(\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳})^{\frac{۳}{۲}}} \\
&= \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۸}{۹\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۸}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۳}
\end{aligned}$$

مثال ۳.۱ فرض کنید $x, y, z > ۰$ ثابت کنید.

$$\frac{xyz}{(۱ + ۳x)(x + ۸y)(y + ۹z)(z + ۶)} \leq \frac{۱}{۷^۴}$$

(Gazeta Matematica)

اثبات: حالت تساوی وقتی برقرار می‌شود که داشته باشیم $x=2, y=\frac{3}{2}, z=1$ حال با استفاده از حالت تساوی از نامساوی حسابی هندسی استفاده می‌کنیم.

$$(1+\overbrace{\frac{x}{2}+\dots+\frac{x}{2}}^{\text{۶ بار}})(1+\overbrace{\frac{4}{3}\frac{y}{x}+\dots+\frac{4}{3}\frac{y}{x}}^{\text{۶ بار}})(1+\overbrace{\frac{3}{2}\frac{z}{y}+\dots+\frac{3}{2}\frac{z}{y}}^{\text{۶ بار}})(1+\overbrace{\frac{1}{z}+\dots+\frac{1}{z}}^{\text{۶ بار}})$$
$$\geq 7\sqrt[7]{\frac{x^6}{2^6}}\times 7\sqrt[7]{(\frac{4}{3})^6(\frac{y}{x})^6}\times 7\sqrt[7]{(\frac{3}{2})^6(\frac{z}{y})^6}\times 7\sqrt[7]{(\frac{1}{z})^6}=7^4$$

مثال ۱.۴ فرض کنید c, b, a اعدادی حقیقی و مثبت‌اند و داریم $abc=1$ ثابت کنید.

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$$

(IMO shortlist 1998)

اثبات: با توجه به حالت تساوی از نامساوی‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{8^2}}=\frac{3}{4}a$$
$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+c}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{8^2}}=\frac{3}{4}b$$
$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{8^2}}=\frac{3}{4}c$$
$$\Longrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\geq\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال ۱.۵ ماکزیمم عبارت زیر را برای اعداد حقیقی $a, b, c>0$ بدست آورید.

$$S=\frac{ab+2ac+cb}{a^2+b^2+c^2}$$

اثبات: گاهی پیدا کردن حالت تساوی مثل این نامساوی کار ساده‌ای نیست! پس می‌توان از ضرایب مجهول در نامساوی استفاده کرد.

$$ab=(\frac{a}{\alpha})(\alpha b)\leq\frac{1}{2}(\frac{a^2}{\alpha^2}+\alpha^2b^2)$$
$$2ac\leq a^2+c^2$$

$$bc = (\frac{b}{\beta})(\beta c) \leq \frac{۱}{۲}(\frac{b^۲}{\beta^۲} + \beta^۲ c^۲)$$
$$\Longrightarrow ab + ۲ac + bc \leq a^۲(\frac{۱}{۲\alpha^۲} + ۱) + b^۲(\frac{\alpha^۲}{۲} + \frac{۱}{۲\beta^۲}) + c^۲(۱ + \frac{\beta^۲}{۲})$$

پس باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲\alpha^۲} + ۱ = \frac{\alpha^۲}{۲} + \frac{۱}{۲\beta^۲} = ۱ + \frac{\beta^۲}{۲}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha^۲ = (\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}) \\ \beta^۲ = (\sqrt{۳} - ۱) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow ab + ۲ac + bc \leq \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$
$$\Longrightarrow S \leq \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$$

یافتن حالت تساوی به عهده خواننده!

مثال ۶.۱ برای اعداد حقیقی مثبت a, b, c, d ثابت کنید.

$$a^۴ b + b^۴ c + c^۴ d + d^۴ a \geq abcd(a + b + c + d)$$

اثبات:

$$\frac{۲۳a^۴ b + ۷b^۴ c + ۱۱c^۴ d + ۱۰ad^۴}{۵۱} \geq \sqrt[۵۱]{a^{۱۰۲} b^{۵۱} c^{۵۱} d^{۵۱}} = a^۲ bcd$$

که به صورت متقارن می‌توان برای b و c و d نیز این نامساوی را نوشت که از جمع این نامساوی‌ها، نامساوی اصلی نتیجه می‌شود.
ضرایب از طریق لم زیر محاسبه می‌شود که تعمیم یافته نامساوی حسابی هندسی می‌باشد.

لم ۱.۱ فرض کنید $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_n$ و $x_۱, x_۲, ..., x_n$ اعداد حقیقی و مثبتی‌اند که داریم $\sum\limits_{i=۱}^{n} \alpha_i = ۱$ آن گاه نامساوی زیر برقرار است.

$$\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + ... + \alpha_n x_n \geq x_۱^{\alpha_۱} x_۲^{\alpha_۲} ... x_n^{\alpha_n}$$

(اثبات لم به عهده‌ی خواننده می‌باشد.)

پس طبق لم بالا داریم

$$\alpha_۱ a^۴ b + \alpha_۲ b^۴ c + \alpha_۳ c^۴ d + \alpha_۴ d^۴ a \geq a^{۴\alpha_۱ + \alpha_۴} b^{\alpha_۱ + ۴\alpha_۲} c^{\alpha_۲ + ۴\alpha_۳} d^{\alpha_۳ + ۴\alpha_۴}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ = ۱ \\ ۴\alpha_۱ + \alpha_۴ = ۲ \\ ۴\alpha_۲ + \alpha_۱ = ۱ \\ ۴\alpha_۳ + \alpha_۲ = ۱ \\ ۴\alpha_۴ + \alpha_۳ = ۱ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha_۱ = \frac{۲۳}{۵۱}, \alpha_۲ = \frac{۷}{۵۱}, \alpha_۳ = \frac{۱۱}{۵۱}, \alpha_۴ = \frac{۱۰}{۵۱}$$

تمرین‌ها

۱) a, b, c اعداد حقیقی مثبتی هستند که داریم $a + b + c \leq \frac{۳}{۲}$ ثابت کنید.

$$a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geq \frac{۱۵}{۲}$$

۲) برای اعداد حقیقی مثبت a, b, c داریم $a + b + c = ۱$ ثابت کنید.

$$\sqrt[۳]{a+b} + \sqrt[۳]{a+c} + \sqrt[۳]{b+c} \leq \sqrt[۳]{۱۸}$$

۳) فرض کنید $x \in [۰, ۱]$ ماکزیمم عبارت زیر را بیابید.

$$۱۳\sqrt{x^۲ - x^۴} + ۹\sqrt{x^۲ + x^۴}$$

۴) برای اعداد مثبت و حقیقی a, b, c داریم $abc = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{a^۲(b+c)}{b\sqrt{b} + ۲c\sqrt{c}} + \frac{b^۲(a+c)}{c\sqrt{c} + ۲a\sqrt{a}} + \frac{c^۲(a+b)}{a\sqrt{a} + ۲b\sqrt{b}} \geq ۲$$

۵) می‌دانیم $a, b, c > ۰$ اعدادی حقیقی هستند به طوری که $abc = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{ab}{a^۵ + b^۵ + ab} + \frac{bc}{b^۵ + c^۵ + bc} + \frac{ca}{c^۵ + a^۵ + ac} \leq ۱$$

(IMO shortlist 1996)

۶) d, c, b, a عددهایی حقیقی و مثبت‌اند، ثابت کنید.

$$\frac{a^۹}{bc} + \frac{b^۹}{ac} + \frac{c^۹}{ab} + \frac{۲}{abc} \geq a^۵ + b^۵ + c^۵ + ۲$$

فصل ۲

روش مخلوط کردن متغیرها

در برخی نامساوی‌ها $f(x,y,z) \geq ۰$ گاهی برابر فرض کردن دو متغیر ایده‌ی خوبی برای حل نامساوی می‌باشد. (البته این کار باید با توجه به شرط صورت گیرد.) پس برای حل این نوع نامساوی‌ها دو مرحله را طی می‌کنیم:

۱) ابتدا ثابت می‌کنیم $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ که t با توجه به شرط انتخاب می‌شود.

(مثلاً $t = \sqrt{xy}, t = \frac{x+y}{۲}, t = \sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}}$)

۲) سپس ثابت می‌کنیم $f(t,t,z) \geq ۰$.

مثال ۱.۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a,b,c داریم $a+b+c=۳$ ثابت کنید.

$$a^۲+b^۲+c^۲ \geq ۳$$

اثبات: فرض کنید: $f(a,b,c) = a^۲+b^۲+c^۲-۳$

ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$f(a,b,c) \geq f(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲},c) \Leftrightarrow a^۲+b^۲+c^۲ \geq (\frac{a+b}{۲})^۲+(\frac{a+b}{۲})^۲+c^۲$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^۲}{۲} \geq ۰$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$f(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲},c) \geq ۰ \Leftrightarrow f(\frac{۳-c}{۲},\frac{۳-c}{۲},c) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow \frac{(۳-c)^۲}{۲}+c^۲ \geq ۳$$
$$\Leftrightarrow ۳(c-۱)^۲ \geq ۰$$

مثال ۲.۲ برای $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ با شرط $a+b+c=۱$ ثابت کنید.

$$۵(a^۲+b^۲+c^۲) \leq ۶(a^۳+b^۳+c^۳)+۱$$

اثبات: فرض کنید $c=\min\{a,b,c\}, f(a,b,c)=۶(a^۳+b^۳+c^۳)-۵(a^۲+b^۲+c^۲)$
ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$f(a,b,c) \geq f(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲},c)$$
$$\Leftrightarrow ۶(a^۳+b^۳-۲(\frac{a+b}{۲})^۳) \geq ۵(a^۲+b^۲-۲(\frac{a+b}{۲})^۲)$$
$$\Leftrightarrow ۹(a+b)(a-b)^۲ \geq ۵(a-b)^۲ \Leftrightarrow a+b \geq \frac{۵}{۹}$$

که با توجه به شرط $c=\min\{a,b,c\}, a+b+c=۱$ درست می‌باشد. پس کافیست ثابت کنیم:

$$f(\frac{a+b}{۲},\frac{a+b}{۲},c) \geq -۱ \Leftrightarrow f(\frac{۱-c}{۲},\frac{۱-c}{۲},c) \geq -۱$$
$$\Leftrightarrow ۱+۶(۲(\frac{۱-c}{۲})^۳+c^۳) \geq ۵(۲(\frac{۱-c}{۲})^۲+c^۲)$$
$$\Leftrightarrow \frac{۳}{۴}c(c-\frac{۱}{۳})^۲ \geq ۰$$

مثال ۳.۲ برای اعداد حقیقی a,b,c ثابت کنید.

$$(a^۲+۲)(b^۲+۲)(c^۲+۲) \geq ۹(ab+ac+bc)$$

(APMO 2004)

اثبات: فرض کنید.

$$f(a,b,c)=(a^۲+۲)(b^۲+۲)(c^۲+۲)-۹(ab+ac+bc)$$

ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$f(a,b,c) \geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$$

داریم:

$$f(a,b,c)-f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}[۲(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲}c^{۲}+۴(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲}-۹c]$$

که با توجه به فرض $c=\min\{a,b,c\}$ بدیهی می‌باشد.
حال ثابت می‌کنیم:

$$f(t,t,c)\geq ۰$$
$$f(t,t,c)=(t^{۲}+۲)^{۲}c^{۲}-۱۸tc+(۲t^{۴}-t^{۲}+۸)$$

و چون داریم:

$$\Delta'=(۹t)^{۲}-(t^{۲}+۲)^{۲}(۲t^{۴}-t^{۲}+۸)=-(t^{۲}-۱)^{۲}(۲t^{۴}+۱۱t^{۲}+۳۲)\leq ۰$$
$$\Longrightarrow f(t,t,c)\geq ۰$$

مثال ۴.۲ برای اعداد حقیقی $c,b,a>۰$ ثابت کنید:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲abc+۳\geq(۱+a)(۱+b)(۱+c)$$

اثبات: با فرض $c=\min\{a,b,c\}$ ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$f(a,b,c)\geq f(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c)$$
$$\Leftrightarrow a^{۲}+b^{۲}-(a+b+ac+bc)\geq ۲ab-(۲\sqrt{ab}+۲\sqrt{ab}c)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^{۲}\geq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}+c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲}\geq ۱+c\Leftrightarrow a+b+۲\sqrt{ab}\geq ۱+c\Leftarrow a+b\geq ۱$$

که بدیهی می‌باشد زیرا در حالت $a+b<۱$ داریم $a+b+c<۲$ که نتیجه می‌دهد.

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+abc+۲>a+b+c+ab+ac+bc$$

(با توجه به اینکه $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\geq ab+ac+bc$)
پس کافیست ثابت کنیم $f(t,t,c)\geq ۰ \Leftrightarrow$

$$۲t^{۲}+c^{۲}+t^{۲}c+۲\geq ۲t+c+۲tc+t^{۲}$$
$$\Leftrightarrow c^{۲}+c(t^{۲}-۲t-۱)+t^{۲}+۲-۲t\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (c-۱)^{۲}+(c+۱)(t-۱)^{۲}\geq ۰$$

مثال ۵.۲ c,b,a اعداد حقیقی مثبت‌اند و $abc = 1$ ثابت کنید.

$$(a+b)(a+c)(b+c) + 7 \geq 5(a+b+c)$$

اثبات: فرض می‌کنیم $a \geq b \geq c \Leftarrow a \geq 1$. حال تعریف می‌کنیم.

$$f(a,b,c) = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 5(a+b+c)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}
& f(a,b,c) \geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) \\
& \Leftrightarrow a^2(b+c) + a(b^2+c^2) + bc(b+c) - 5(b+c) \\
& \geq 2a^2\sqrt{bc} + 2abc + 2bc\sqrt{bc} - 10\sqrt{bc} \\
& \Leftrightarrow a^2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + a(b-c)^2 + bc(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 5(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \\
& \Leftrightarrow a^2 + a(b+c+2\sqrt{bc}) + bc \geq 5 \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{a} + ab + ac + bc \geq 5
\end{aligned}$$

طبق نامساوی حسابی هندسی می‌دانیم $ab+ac+bc \geq 3$ پس کافیست ثابت کنیم $a^2 + 2\sqrt{a} \geq 2$ که با توجه به اینکه $a \geq 1$ بدیهی است. پس کافیست ثابت کنیم:

$$f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) \geq -7 \Leftrightarrow f(a,\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}) \geq -7$$

اگر قرار دهیم $a = t^2$ آنگاه باید ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}
f(t^2,\frac{1}{t},\frac{1}{t}) \geq -7 \Leftrightarrow 2t^3 - 5t^2 - \frac{10}{t} + \frac{2}{t^3} + 11 \geq 0 \\
\Leftrightarrow (t-1)^2(2t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t + 2) \geq 0
\end{aligned}$$

مثال ۶.۲ بزرگترین k حقیقی را بیابید که برای تمام اعداد حقیقی و مثبت c، b و a داشته باشیم

$$(a+b+c)^3 \geq k(a-b)(a-c)(b-c)$$

اثبات: ابتدا تابع $f(a,b,c)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a,b,c) = (a+b+c)^2 - k(a-b)(a-c)(b-c)$$

می‌توان فرض کرد $a \geq b \geq c$. اکنون ثابت می‌کنیم

$$f(a,b,c) \geq f(a-c,b-c,0) \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq (a+b-2c)^3 \Leftrightarrow c \geq 0$$

پس کافیست برای متغیرهای $x = a-c$ و $y = b-c$ و با فرض $x \geq y$ بزرگترین k حقیقی را بیابیم که داشته باشیم

$$(x+y)^3 \geq k(x-y)xy$$

اگر قرار دهیم $y = tx$ و $0 \leq t \leq 1$، آن گاه بیشترین مقدار k همان مینیمم تابع $f(t) = \frac{(1+t)^3}{t(1-t)}$ می‌باشد.

$$f'(t) = \frac{(1+t)^2(1-t-2t^2)}{t^2(1-t)^2}$$

نتیجه می‌دهد نقاط بحرانی تابع $f(t)$ در بازه‌ی $[0,1]$، $t = 0, 2-\sqrt{3}, 1$ است که با مقایسه‌ی مقادیر تابع به ازای این نقاط، مقدار مینیمم تابع برابر $f(2-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ می‌شود. پس $k = 6\sqrt{3}$ است.

تمرین‌ها

۱) برای اعداد حقیقی c, b, a ثابت کنید.

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (b+c)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

(Vietnam TST 1996)

۲) برای اعداد حقیقی z, y, x داریم $x^2+y^2+z^2 = 9$ ثابت کنید.

$$2(x+y+z) - xyz \leq 10$$

(Vietnam 2002)

۳) فرض کنید $0 \leq x, y, z \leq 1$ و $x+y+z = 1$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}$$

۴) c, b, a اعداد حقیقی مثبت‌اند و $abc = ۱$ ثابت کنید.

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۶ \geq \frac{۳}{۲}(a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c})$$

۵) d, c, b, a اعداد حقیقی و مثبت‌اند و $abcd = ۱$ ثابت کنید.

$$a + b + c + d \geq \frac{۲}{۱ + a} + \frac{۲}{۱ + b} + \frac{۲}{۱ + c} + \frac{۲}{۱ + d}$$

فصل ۳

همگن سازی

تابع $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ را همگن می‌گوییم اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به ازای هر $k > 0$ داشته باشیم.

$$f(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) = k^\alpha f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

برای مثال چند جمله‌ای $a^3b + abc^2 + c^4$ همگن است و در آن $\alpha = 4$ است. فرض کنید می‌خواهیم نامساوی $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq 0$ را ثابت کنیم که $a_i \geq 0$ و f یک تابع همگن است.

$$f(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) = k^\alpha f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad (*)$$

می‌خواهیم نشان دهیم برای اثبات این نامساوی کافی است حالت خاصی را بررسی کنیم که شرطی روی a_i ها وجود دارد. مثلاً $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$ یا $a_1 a_2 \cdots a_n = p$ که در آن s و p اعدادی ثابت‌اند. به این کار ایجاد شرط می‌گوییم.

از رابطه‌ی $(*)$ نتیجه می‌شود که برای هر $k > 0$

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geq 0 \Leftrightarrow f(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \geq 0$$

یعنی به جای آن که نامساوی را برای $a_1, \cdots . a_n$ ثابت کنیم کافی است برای $ka_1, \cdots, ka_n$ ثابت کنیم. پس k را طوری انتخاب می‌کنیم که شرط مورد نظر برای $ka_1, \cdots, ka_n$ برقرار شود. مثلاً برای شرط $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$ می توان قرار داد $k = \dfrac{s}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

توجه کنید به جای شروط $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$ و یا $a_1 a_2 \cdots a_n = p$ می‌توان شرط‌های دیگری هم قرار داد اگر چنین k مناسبی را بتوان یافت

مثال ۱.۳ اگر a، b و c اعداد مثبت حقیقی به طوری که $a + b + c = 1$ ثابت کنید.

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc$$

(United Kingdom 1999)

اثبات: نامساوی از درجه‌های ۳ (abc)، ۲ $(ab + bc + ca)$ و $o(2)$ تشکیل شده که باید با شرط $a + b + c = 1$ (که دارای درجه‌ی یک است) جمله‌های آن را هم درجه یا نامساوی را همگن کرد.

$$\begin{aligned}
&7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc \\
&\Leftrightarrow 7(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 2(a + b + c)^3 + 9abc \\
&\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b
\end{aligned}$$

که با توجه به نامساوی مورهد $[3, 0, 0] \succ [2, 1, 0]$ بدیهی می‌باشد (یا با حسابی هندسی).

مثال ۲.۳ فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a + b = 1$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2}{a + 1} + \frac{b^2}{b + 1} \geq \frac{1}{3}$$

اثبات: با استفاده از شرط $a + b = 1$ می‌توان نامساوی را همگن ساخت.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a + 1} + \frac{b^2}{b + 1} \geq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{a^2}{(a + (a + b))(a + b)} + \frac{b^2}{(b + (a + b))(a + b)} \geq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2 \\
&\Leftrightarrow (a - b)^2 (a + b) \geq 0
\end{aligned}$$

و یا

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2 b, a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2$$

مثال ۳.۳ برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z داریم $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ثابت کنید.

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

(Iran 1998)

اثبات: ابتدا تعریف می‌کنیم (برای راحتی کار) $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ پس باید ثابت کنیم.

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

که در آن $a, b, c \in (0, 1)$ و $a+b+c=2$ حال به وسیله‌ی شرط، نامساوی را همگن می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$$
$$\geq \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})} \geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

که به راحتی از نامساوی کوشی شوارتز نتیجه گرفته می‌شود.

$$((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c))\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}\right)^2$$

مثال ۴.۳ برای اعداد حقیقی و مثبت $x_1, x_2, \cdots x_n$ ثابت کنید.

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)^n$$

اثبات: چون نامساوی همگن است می‌توان فرض کرد $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ پس با فرض $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ باید ثابت کنیم.

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n \geq n$$

از طرفی طبق نامساوی حسابی هندسی می‌دانیم

$$x_i^n+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{بار}\ n-1} \geq nx_i$$

نتیجه می دهد

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n \geq n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)-n(n-1)=n^2-n(n-1)=n$$

مثال ۵.۳ فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی مثبت باشد ثابت کنید.

$$\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+۸bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^{۲}+۸ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^{۲}+۸ab}}\geq ۱$$

(IMO 2001)

اثبات: چون نامساوی همگن می‌باشد می‌توان فرض کرد $a+b+c=۱$ حال تابع $f(t)$ را این گونه در نظر می‌گیریم، $f(t)=\frac{۱}{\sqrt{t}}$ پس سوال هم‌ارز است با:

$$af(a^{۲}+۸bc)+bf(b^{۲}+۸ac)+cf(c^{۲}+۸ab)\geq ۱$$

می‌دانیم تابع $f(t)=\frac{۱}{\sqrt{t}}$ در R^{+} محدب می‌باشد (تقعرش رو به بالاست) و می‌دانیم $a+b+c=۱$ پس طبق نامساوی ینسن داریم:

$$\begin{aligned}&af(a^{۲}+۸bc)+bf(b^{۲}+۸ac)+cf(c^{۲}+۸ab)\\&\geq f(a(a^{۲}+۸bc)+b(b^{۲}+۸ac)+c(c^{۲}+۸ab))\\&=f(a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc)\end{aligned}$$

پس کافی است که ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{\sqrt{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc}}\geq ۱\\&\Leftrightarrow ۱\geq a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc\end{aligned}$$

حال دوباره نامساوی بدست آمده را همگن می‌کنیم.

$$۱\geq a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc\Leftrightarrow \sum a^{۲}b+a^{۲}c\geq ۶abc$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی (یا مورهد $[۲,۱,۰]\succ[۱,۱,۱]$) بدیهی است.

تمرین‌ها

۱) برای اعداد حقیقی مثبت c,b,a داریم $a^{\frac{۲}{۳}}+b^{\frac{۲}{۳}}+c^{\frac{۲}{۳}}=۳$ ثابت کنید.

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\geq a^{\frac{۴}{۳}}+b^{\frac{۴}{۳}}+c^{\frac{۴}{۳}}$$

۲) اگر $c, b, a > 0$ به طوری که $abc = 1$ ثابت کنید و $(n \in \mathbb{N})$

$$a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$$

۳) اگر $a, b, c > 0$ ثابت کنید.

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

(KMO Winter program test 2001)

۴) اگر $a, b, c > 0$ و داشته باشیم $a + b + c = 1$ ثابت کنید.

$$0 \leq ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$$

(IMO 1984)

۵) اگر $a, b, c, d > 0$ و داشته باشیم

$$\frac{1}{1 + a^4} + \frac{1}{1 + b^4} + \frac{1}{1 + c^4} + \frac{1}{1 + d^4} = 1$$

ثابت کنید

$$abcd \geq 3$$

(Latvia 2002)

٦) برای اعداد حقیقی $a, b, c, d > 0$ داریم $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^3$. ثابت کنید.

$$\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq 1$$

۷) فرض کنید $n \geq 2$ و $x_1, \dots, x_n$ اعداد حقیقی مثبتند به طوری که

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \frac{1}{x_2 + 1998} + \dots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}$$

ثابت کنید.

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n - 1} \geq 1998$$

(Vietnam 1998)

فصل ۴

بازبینی کوشی– شوارتز

در این فصل به بررسی نامساوی کوشی شوارتز از زاویه‌ای دیگر می‌پردازیم:
طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم $(a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2) \geq (a_1b_1+...+a_nb_n)^2$
حال تعریف می‌کنیم $b_i = \dfrac{c_i}{a_i} \Leftarrow a_ib_i = c_i$
پس نامساوی کوشی شوارتز معادل است با

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\left(\frac{c_1^2}{a_1^2}+\frac{c_2^2}{a_2^2}+...+\frac{c_n^2}{a_n^2}\right) \geq (c_1+...+c_n)^2$$

پس به لم زیر می‌رسیم.

لم ۱.۴ اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ اعداد حقیقی و $y_1, y_2, ..., y_n$ اعدادی حقیقی و مثبت باشند آن‌گاه داریم.

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+...+\frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1+...+x_n)^2}{y_1+...+y_n}$$

اثبات: با استقرا اثبات می‌کنیم. برای حالت ۲ تایی (پایه استقرا) داریم:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2} \geq \frac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2} \Leftrightarrow (x_1y_2-x_2y_1)^2 \geq 0$$

حال فرض می‌کنیم (فرض استقرا) $\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y_2}+..+\dfrac{x_n^2}{y_n} \geq \dfrac{(x_1+...+x_n)^2}{y_1+...+y_n}$

برای حالت $(n+۱)$ تایی (حکم استقرا) نیز طبق فرض استقرا داریم:

$$\frac{x_۱^۲}{y_۱}+...+\frac{x_n^۲}{y_n}+\frac{x_{n+۱}^۲}{y_{n+۱}}\geq\frac{(x_۱+...+x_n)^۲}{y_۱+...+y_n}+\frac{(x_{n+۱})^۲}{y_{n+۱}}$$

که طبق پایه استقرا داریم:

$$\frac{(x_۱+...+x_n)^۲}{y_۱+...+y_n}+\frac{(x_{n+۱})^۲}{y_{n+۱}}\geq\frac{(x_۱+...+x_{n+۱})^۲}{y_۱+...+y_{n+۱}}$$

پس نامساوی اثبات شده و حالت تساوی $\frac{x_۱}{y_۱}=\frac{x_۲}{y_۲}=...=\frac{x_n}{y_n}$ می‌باشد.
حال به کاربرد این نامساوی در مسائل دقت کنید.

مثال ۱.۴ اگر c,b,a سه عدد مثبت حقیقی باشند ثابت کنید.

$$\frac{a}{(b+c)^۲}+\frac{b}{(c+a)^۲}+\frac{c}{(a+b)^۲}\geq\frac{۹}{۴(a+b+c)}$$

اثبات: طبق نامساوی کوشی شوارتز (جدید) داریم.

$$\frac{a}{(b+c)^۲}+\frac{b}{(c+a)^۲}+\frac{c}{(a+b)^۲}=\sum_{cyc}\frac{a^۲}{a(b+c)^۲}\geq\frac{(a+b+c)^۲}{\sum_{cyc}a(b+c)^۲}$$

پس کافیست که ثابت کنیم.

$$۴(a+b+c)^۳\geq۹\sum_{cyc}a(b+c)^۲$$
$$\Leftrightarrow ۴(\sum_{cyc}a^۳)+۱۲(\sum_{cyc}a^۲b+a^۲c)+۲۴abc\geq۹(\sum_{cyc}a^۲b+a^۲c)+۵۴abc$$
$$\Leftrightarrow ۴(\sum_{cyc}a^۳)+۳(\sum_{cyc}a^۲b+a^۲c)\geq۳۰abc$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی بدیهی است.
(یا مورهد $۲[۳,۰,۰]+۳[۲,۱,۰]\succ۵[۱,۱,۱]$)

مثال ۲.۴ برای اعداد حقیقی $x,y,z>-۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱+x^۲}{۱+y+z^۲}+\frac{۱+y^۲}{۱+z+x^۲}+\frac{۱+z^۲}{۱+x+y^۲}\geq۲$$

(JBMO 2003)

اثبات: طبق نامساوی کوشی شوارتز (جدید) داریم.

$$\sum_{cyc}\frac{1+x^2}{1+y+z^2}=\sum_{cyc}\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)(1+y+z^2)}$$
$$\geq\frac{(3+x^2+y^2+z^2)^2}{3+(\sum_{cyc}x)+2(\sum_{cyc}x^2)+(\sum_{cyc}x^2y)+(\sum_{cyc}x^2y^2)}$$

پس کافیست که ثابت کنیم:

$$3+\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}x^2\geq 2\sum_{cyc}x+2\sum_{cyc}x^2y$$

طبق نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sum_{cyc}(x^2+1)\geq\sum_{cyc}2x$$

و باز هم طبق نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sum_{cyc}x^4+y^2\geq\sum_{cyc}2x^2y$$

پس نامساوی اثبات شد.

مثال ۳.۴ برای اعداد حقیقی مثبت c,b,a ثابت کنید.

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1$$

اثبات: نامساوی را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم و تعریف می‌کنیم: $\frac{b}{a}=x,\frac{c}{b}=y,\frac{a}{c}=z$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{b}{a}+(\frac{b}{a})^2}=\sum_{cyc}\frac{1}{1+x+x^2}$$

حال نامساوی از حالت دوری به متقارن تبدیل شد (که این یکی از ایده‌های خوب در حل برخی نامساوی‌هاست).

چون $xyz=1$، r، s و t مثبتی وجود دارند که داشته باشیم $x=\frac{st}{r^2},y=\frac{rt}{s^2},z=\frac{rs}{t^2}$ پس باید ثابت کنیم:

$$\sum_{cyc}\frac{r^4}{r^4+r^2st+s^2t^2}\geq 1$$

داریم:

$$\sum_{cyc}\frac{r^{۴}}{r^{۴}+r^{۲}st+s^{۲}t^{۲}}\geq\frac{(\sum_{cyc}r^{۲})^{۲}}{\sum_{cyc}r^{۴}+\sum_{cyc}r^{۲}st+\sum_{cyc}s^{۲}t^{۲}}$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$\sum_{cyc}s^{۲}t^{۲}\geq\sum_{cyc}r^{۲}st$$

اما با توجه به نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sum_{cyc}(s^{۲}t^{۲}+s^{۲}r^{۲})\geq\sum_{cyc}۲s^{۲}rt$$

پس نامساوی اثبات شد (البته می‌توانیم از مورهد نیز استفاده کنیم $[۲,۱,۱]\succ[۲,۲,۰]$)

مثال ۴.۴ فرض کنید $n\geq ۲$ کمترین مقدار عبارت

$$\frac{x_{۱}^{۵}}{x_{۲}+x_{۳}+...+x_n}+\frac{x_{۲}^{۵}}{x_{۳}+...+x_n+x_{۱}}+...+\frac{x_n^{۵}}{x_{۱}+...+x_{n-۱}}$$

را پیدا کنید که در آن $x_{۱},...,x_n$ اعداد مثبتی‌اند که در شرط $x_{۱}^{۲}+...+x_n^{۲}=۱$ صدق می‌کنند.

اثبات: طبق نامساوی کوشی‌شوارتز می‌دانیم:

$$\sum_{cyc}\frac{x_{۱}^{۵}}{x_{۲}+x_{۳}+...x_n}=\sum_{cyc}\frac{x_{۱}^{۶}}{x_{۱}(x_{۲}+...+x_n)}\geq\frac{(\sum_{cyc}x_{۱}^{۳})^{۲}}{\sum_{cyc}x_{۱}(x_{۲}+...+x_n)}$$

$$=\frac{(\sum_{cyc}x_{۱}^{۳})^{۲}}{(\sum_{cyc}x_{۱})^{۲}-\sum_{cyc}x_{۱}^{۲}}=\frac{(\sum_{cyc}x_{۱}^{۳})^{۲}}{(\sum_{cyc}x_{۱})^{۲}-۱}$$

از طرفی با استفاده از نامساوی میانگین توانی داریم:

$$\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۳}}{n}\right)^{\frac{۱}{۳}}\geq\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}}{n}\right)^{\frac{۱}{۲}}\Longrightarrow(\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۳})^{۲}\geq\frac{۱}{n}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n}\right)\leq\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i^{۲}}{n}\right)^{\frac{۱}{۲}}\Longrightarrow(\sum_{i=۱}^{n}x_i)^{۲}\leq n$$

پس داریم:

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)^2}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 1} \geq \frac{\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$$

و حالت تساوی فقط وقتی رخ می‌دهد که $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

مثال ۵.۴ برای $a,b,c \geq 0$ که هیچ دوتایی از آن‌ها صفر نیستند ثابت کنید.

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2} \geq \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

اثبات: طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b^2} = \sum_{cyc} \frac{(a+b+3c)^2}{(a^2+b^2)(a+b+3c)^2} \geq \frac{25(\sum_{cyc} a)^2}{\sum_{cyc}(a^2+b^2)(a+b+3c)^2}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$5(\sum_{cyc} a)^4 \geq 2\sum_{cyc}(a^2+b^2)(a+b+3c)^2$$

$$\Leftrightarrow 5(\sum_{cyc} a)^4 \geq 2\sum_{cyc}(a^2+b^2)((a+b+c)^2 + 4c(a+b+c) + 4c^2)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{cyc} a)^4 + 4(\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab)(\sum_{cyc} a)^2$$

$$\geq 4(\sum_{cyc} a^2)(\sum_{cyc} a)^2 + 8(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} a^2b + a^2c) + 16(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{cyc} a)^4 + 8(\sum_{cyc} ab)(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} a) \geq 8(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} a^2b + a^2c) + 16(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{cyc} a)^4 + 8(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} a^2b + a^2c) + 24abc(\sum_{cyc} a)$$

$$\geq 8(\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} a^2b + a^2c) + 16(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab)^2 + 24abc(\sum_{cyc} a) \geq 16(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{cyc} a^2)^2 + 4(\sum_{cyc} a^2)(\sum_{cyc} ab) + 4(\sum_{cyc} ab)^2 + 24abc(\sum_{cyc} a) \geq 16(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 4(\sum_{cyc} a^3b + a^3c) + 36abc(\sum_{cyc} a) \geq 10(\sum_{cyc} a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow ۵\left[\sum_{cyc}(a^۳b+a^۳c)-۲\sum_{cyc}(a^۲b^۲)\right]+\sum_{cyc}a^۲(a-b)(a-c)+۳۵abc(\sum_{cyc}a)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow ۵\left[\sum_{cyc}(a-b)(a^۲b-b^۲a)\right]+\sum_{cyc}a^۲(a-b)(a-c)+۳۵abc(\sum_{cyc}a)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow ۵\sum_{cyc}ab(a-b)^۲+\sum_{cyc}a^۲(a-b)(a-c)+۳۵abc(\sum_{cyc}a)\geq ۰$$

که با توجه به مثبت بودن b,a و c بدیهی می‌باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که فاکتورهای $(b+c+۳a)^۲,(a+c+۳b)^۲,(a+b+۳c)^۲$ از کجا آمده‌اند!

همانطور که در ابتدای فصل گفته شد حالت تساوی نامساوی کوشی– شوارتز جدید به صورت زیر است.

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i^۲}{b_i}\geq\frac{(\sum\limits_{i=۱}^{n}a_i)^۲}{\sum\limits_{i=۱}^{n}b_i}$$

حالت تساوی:

$$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=...=\frac{a_n}{b_n}$$

حال می‌توان در صورت و مخرج هر یک از کسرها عبارت $c_i^۲$ را به طور متناظر ضرب کرد که در این صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{(a_ic_i)^۲}{b_ic_i^۲}\geq\frac{(\sum\limits_{i=۱}^{n}a_ic_i)^۲}{\sum\limits_{i=۱}^{n}b_ic_i^۲}$$

حالت تساوی:

$$\frac{a_۱}{b_۱c_۱}=\frac{a_۲}{b_۲c_۲}=...=\frac{a_n}{b_nc_n}$$

که یک حالت تساوی جدید بدست می‌آید. در این سوال نیز حالت تساوی $a=b,c=۰$ و جایگشت‌های آن بین a و b و c می‌باشد که اگر فاکتورهای $(b+c+na)^۲,(a+c+nb)^۲,(a+b+nc)^۲$ را در صورت و مخرج کسرها ضرب کنیم و حالت تساوی را بررسی کنیم $n=۳$ بدست می آید.

در ادامه این فصل به بررسی کاربردهای نامساوی دیگری می‌پردازیم.

لم ۲.۴ فرض کنید c,b,a و z,y,x اعداد حقیقی نامنفی باشند ثابت کنید.

$$x(b+c)+y(a+c)+z(a+b)\geq ۲\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}$$

اثبات:

$$x(b+c)+y(a+c)+z(a+b)\geq ۲\sqrt{(\sum_{cyc}ab)(\sum_{cyc}xy)}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(x+y+z)\geq ۲\sqrt{(\sum_{cyc}ab)(\sum_{cyc}xy)}+\sum_{cyc}ax$$

با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز کافیست ثابت کنیم.

$$(a+b+c)(x+y+z)\geq\sqrt{(۲\sum_{cyc}ab)(۲\sum_{cyc}xy)}+\sqrt{(\sum_{cyc}a^۲)(\sum_{cyc}x^۲)}$$

و دوباره با استفاده از کوشی شوارتز داریم.

$$\sqrt{(m+r)(n+s)}\geq\sqrt{rs}+\sqrt{mn}$$

که در آن

$$m=۲\sum ab\quad r=\sum a^۲\quad n=۲\sum xy\quad s=\sum x^۲$$

پس اثبات کامل شد.

مثال ۶.۴ فرض کنید c,b,a و z,y,x اعداد حقیقی مثبتی هستند ثابت کنید.

$$\frac{x}{y+z}(b+c)+\frac{y}{x+z}(a+c)+\frac{z}{x+y}(a+b)\geq\sqrt{۳(ab+bc+ca)}$$

اثبات: با استفاده از لم (۲) داریم:

$$(\frac{x}{y+z})(b+c)+(\frac{y}{x+z})(a+c)+(\frac{z}{x+y})(a+b)\geq ۲\sqrt{\left(\sum ab\right)\left(\sum\frac{xy}{(y+z)(x+z)}\right)}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$\sum\frac{xy}{(y+z)(x+z)}\geq\frac{۳}{۴}\Leftrightarrow\sum xy(x+y)\geq\frac{۳}{۴}(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow\sum x^۲y+x^۲z\geq ۶xyz$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی بدیهی می‌باشد (یا مورهد $[۱,۱,۱]\succ[۰,۱,۲]$)

مثال ۷.۴ فرض کنید $r \geq ۱$ و c, b, a اعداد حقیقی نامنفی باشند بطوری که $ab+bc+ca=۳$ ثابت کنید.

$$a^r(b+c)+b^r(c+a)+c^r(a+b) \geq ٦$$

اثبات: با استفاده از لم (۲) داریم:

$$\sum a^r(b+c) \geq ۲\sqrt{(a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r)(ab+bc+ca)}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$a^rb^r+b^rc^r+c^ra^r \geq ۳$$

که با استفاده از نامساوی میانگین توانی داریم:

$$\left(\frac{(ab)^r+(bc)^r+(ca)^r}{۳}\right)^{\frac{۱}{r}} \geq \left(\frac{(ab)+(bc)+(ca)}{۳}\right)=۱$$

پس نامساوی اثبات شد.

تمرین‌ها

۱) فرض کنید λ, c, b, a اعداد حقیقی مثبت باشد ثابت کنید:

$$\frac{a}{b+\lambda c}+\frac{b}{c+\lambda a}+\frac{c}{a+\lambda b} \geq \frac{۳}{۱+\lambda}$$

۲) فرض کنید c, b, a اعداد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید.

$$\frac{a^۳}{b^۲-bc+c^۲}+\frac{b^۳}{c^۲-ac+a^۲}+\frac{c^۳}{a^۲-ab+b^۲} \geq \frac{۳(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

(Proposed for the Balkan Mathematical Olympiad)

۳) برای اعداد حقیقی $a, b, c \in (۱, ۴)$ ثابت کنید.

$$\frac{b\sqrt{a}}{۴b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{۴c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{۴a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \geq ۱$$

۴) فرض کنید c, b, a اعداد مثبت حقیقی هستند به طوری که $a+b+c=3$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1}\geq 1$$

۵) فرض کنید c, b, a اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $a^2+b^2+c^2=3$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq 3$$

۶) $x, y, z>0$ ثابت کنید.

$$xy(x+y-z)+yz(y+z-x)+zx(z+x-y)\geq\sqrt{3(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)}$$

۷) فرض کنید $n\geq 2$ و c, b, a اعداد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید.

$$\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\geq\sqrt{\frac{3(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})(a^n+b^n+c^n)}{a+b+c}}$$

۸) c, b, a اعداد حقیقی مثبت‌اند به طوری که $a^2+b^2+c^2=1$ ثابت کنید.

$$\sum_{cyc}\frac{1}{5-5a^2-bc}\geq 1$$

۹) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند ثابت کنید.

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{a+c}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

۱۰) $a, b, c, d>0$ ثابت کنید.

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

۱۱) فرض کنید $\lambda, a, b, c>0$ اعداد حقیقی مثبتند و داریم $\lambda\geq\sqrt{3}-1$ ثابت کنید.

$$\left(\frac{a}{a+\lambda b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+\lambda c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+\lambda a}\right)^2\geq\frac{3}{(1+\lambda)^2}$$

۱۲) $a_n, \dots, a_2, a_1$ اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=1$ و $S=a_1+a_2+\dots+a_n$ ثابت کنید.

$$\frac{a_1^2}{S-a_1}+\frac{a_2^2}{S-a_2}+\dots+\frac{a_n^2}{S-a_n}\geq\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

فصل ۵

مماس برنمودار

هدف از مماس بر نمودار، یافتن خطی به عنوان کران پایینی برای یک تابع در بازه‌ی (a,b) است. پس باید خط مورد نظر همواره زیر نمودار تابع قرار گیرد. فرض کنید تابع مورد نظر مشتق پذیر است. آن‌گاه اگر مقدار تابع و مقدار خط در نقطه‌ای در بازه‌ی (a,b) برابر باشند، آن‌گاه در آن نقطه، خط بر نمودار تابع مماس است.
در حل برخی نامساوی‌ها می‌توان از معادله خط مماس برنمودار در نقطه‌ای که حالت تساوی رخ می‌دهد استفاده کرد به مثال زیر توجه فرمایید.

مثال ۱.۵ فرض کنید c,b,a اعداد حقیقی مثبت‌اند ثابت کنید.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{۳}{۲}$$

(Nesbitt)

اثبات: چون نامساوی همگن می‌باشد می‌توان فرض کرد $a+b+c=۳$ و می‌دانیم $۰<a,b,c<۳$ (باتوجه به فرض) پس نامساوی معادل است با:

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq \frac{۳}{۲}, f(x)=\frac{x}{۳-x}$$

حال معادله‌ی مماس برنمودار $\frac{x}{۳-x}$ در نقطه ۱ را در نظر می‌گیریم که برابر است با

$y = \frac{۳}{۴}(x - ۱) + \frac{۱}{۲}$ حال می‌خواهیم اثبات کنیم:

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow \frac{x}{۳ - x} \geq \frac{۳x}{۴} - \frac{۱}{۴} \Leftrightarrow \frac{۳(x-۱)^۲}{۴(۳-x)} \geq ۰$$

(تذکر: دقت کنید چون y معادله‌ی مماس برنمودار در نقطه‌ی یک است پس $\frac{۳x - ۱}{۴} - \frac{x}{۳ - x}$ دارای فاکتور $(x - ۱)^۲$ است)

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{۳(a+b+c) - ۳}{۴} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

(معمولاً از این ایده هنگامی استفاده می‌شود که شرط مسئله برحسب متغیرها خطی باشد تا بتوان از این طریق از شرط در حل، کمک بگیریم.) اثبات کامل شد.

(دقت کنید که این ایده در حل برخی مسائل از نامساوی ینسن نیز قوی‌تر می‌باشد! چرا؟)

در مثال بعد به نحوه‌ی انتخاب نقطه‌ای که مماس برآن در نظر گرفته می‌شود توجه کنید.

مثال ۲.۵ فرض کنید $۰ \leq x, y, z \leq ۱$ بطوری که $x + y + z = ۱$ ثابت کنید:

$$\frac{۵}{۲} \leq \frac{۱}{۱ + x^۲} + \frac{۱}{۱ + y^۲} + \frac{۱}{۱ + z^۲} \leq \frac{۲۷}{۱۰}$$

اثبات: با استفاده از ایده‌ی مماس برنمودار می‌خواهیم ثابت کنیم: $(a \in [۰, ۱])$

$$۱ - \frac{a}{۲} \leq \frac{۱}{۱ + a^۲} \leq \frac{۲۷}{۲۵} - \frac{۲۷}{۵۰}a$$

$$\frac{۱}{۱ + a^۲} - (۱ - \frac{a}{۲}) = \frac{a(a - ۱)^۲}{۲(۱ + a^۲)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{cyc} \frac{۱}{۱ + x^۲} \geq \sum_{cyc}(۱ - \frac{x}{۲}) = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

$$\frac{۱}{۱ + a^۲} - (\frac{۲۷}{۲۵} - \frac{۲۷}{۵۰}a) = \frac{-(a - \frac{۱}{۳})^۲(\frac{۴}{۳} - a)}{۵۰(۱ + a^۲)} \leq ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{۱ + a^۲} \leq \frac{۲۷}{۲۵} - \frac{۲۷}{۵۰}a$$

$$\Longrightarrow \sum_{cyc} \frac{۱}{۱ + x^۲} \leq \sum_{cyc}(\frac{۲۷}{۲۵} - \frac{۲۷}{۵۰}x) = \frac{۲۷}{۱۰}$$

پس اثبات کامل شد.

گاهی اوقات به طور مستقیم از مماس برنمودار استفاده نمی‌شود به مثال بعد توجه کنید.

مثال ۳.۵ برای اعداد مثبت و حقیقی c, b, a ثابت کنید.

$$\frac{a^۴}{b^۳}+\frac{b^۴}{c^۳}+\frac{c^۴}{a^۳}\geq\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲}$$

اثبات: نامساوی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$b\left((\frac{a}{b})^۴-(\frac{a}{b})^۳\right)+c\left((\frac{b}{c})^۴-(\frac{b}{c})^۳\right)+a\left((\frac{c}{a})^۴-(\frac{c}{a})^۳\right)\geq ۰$$

حال به کمک مماس برنمودار در نقطه‌ی ۱ (در نقطه حالت تساوی) داریم:
$(x-۱)^۲(x^۲+x+۱)\geq ۰\Leftrightarrow x^۴-x^۳\geq x-۱ (x\geq ۰)$ پس:

$$\sum_{cyc}b((\frac{a}{b})^۴-(\frac{a}{b})^۳)\geq\sum_{cyc}b(\frac{a}{b}-۱)=\sum_{cyc}(a-b)=۰$$

اثبات کامل شد.

مثال ۴.۵ اگر c, b, a اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید.

$$\frac{(b+c-a)^۲}{(b+c)^۲+a^۲}+\frac{(a+c-b)^۲}{(a+c)^۲+b^۲}+\frac{(a+b-c)^۲}{(a+b)^۲+c^۲}\geq\frac{۳}{۵}$$

(Japan 1997)

اثبات: چون نامساوی همگن است می‌توان فرض کرد $a+b+c=۳$ و همچنین می‌دانیم $a, b, c\in(۰, ۳)$ پس نامساوی هم‌ارز است با

$$\sum_{cyc}\frac{(۳-۲a)^۲}{(۳-a)^۲+a^۲}\geq\frac{۳}{۵}\Leftrightarrow\sum_{cyc}۲-\frac{۹+۴a^۲-۱۲a}{(۳-a)^۲+a^۲}\leq\frac{۲۷}{۵}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{۹}{۹+۲a^۲-۶a}\leq\frac{۲۷}{۵}$$

معادله‌ی خط مماس برنمودار تابع $f(x)=\frac{۹}{۹+۲x^۲-۶x}$ در نقطه‌ی $x=۱$ برابر است با:
$$y=\frac{۱۸}{۲۵}x+\frac{۲۷}{۲۵}$$
می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$f(x)\leq y\Leftrightarrow\frac{-۹(x-۱)^۲(۲x+۱)}{(۹+۲x^۲-۶x)(۲۵)}\leq ۰$$

پس داریم:

$$\sum_{cyc}f(a)\leq\sum_{cyc}\left(\frac{۱۸}{۲۵}a+\frac{۲۷}{۲۵}\right)=\frac{۱۸}{۲۵}(a+b+c)+\frac{۸۱}{۲۵}=\frac{۲۷}{۲۵}$$

مثال ۵.۵ c, b, a اعداد حقیقی مثبتی هستند به طوری که $a^۴ + b^۴ + c^۴ = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{a^۳}{۱ - a^۸} + \frac{b^۳}{۱ - b^۸} + \frac{c^۳}{۱ - c^۸} \geq \frac{۹\sqrt[۴]{۳}}{۸}$$

اثبات: تعریف می‌کنیم $c^۴ = z, b^۴ = y, a^۴ = x$ نامساوی را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم:
$x + y + z = ۱$

$$\frac{x^{\frac{۳}{۴}}}{۱ - x^۲} + \frac{y^{\frac{۳}{۴}}}{۱ - y^۲} + \frac{z^{\frac{۳}{۴}}}{۱ - z^۲} \geq \frac{۹\sqrt[۴]{۳}}{۸}$$

(ادامه اثبات به عهده‌ی شما!)

مثال ۶.۵ d, c, b, a اعداد حقیقی مثبت هستند به طوری که $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۱ - ab} + \frac{۱}{۱ - bc} + \frac{۱}{۱ - cd} + \frac{۱}{۱ - da} \leq \frac{۱۶}{۳}$$

اثبات: (به نحوه‌ی حل این مثال توجه کنید.)
تابع $f(x) = \frac{۱}{۱ - \sqrt{x}}$ را در نظر می‌گیریم معادله‌ی مماس بر نمودارش در نقطه‌ی $x = \frac{۱}{۱۶}$ برابر $y = \frac{۴}{۳} + \frac{۳۲}{۹}(x - \frac{۱}{۱۶})$ می‌باشد.

$$\frac{۱۰}{۹} + \frac{۳۲}{۹}x \geq \frac{۱}{۱ - \sqrt{x}} \overset{x=t^۲}{\Leftrightarrow} \frac{۱۰}{۹} + \frac{۳۲}{۹}t^۲ \geq \frac{۱}{۱ - t}$$

می‌دانیم: $۱ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ \geq a^۲ + b^۲ \geq ۲ab = ۲t \Longrightarrow t \leq \frac{۱}{۲}$

$$\begin{aligned}
۱۰ + ۳۲t^۲ \geq \frac{۹}{۱ - t} &\Leftrightarrow -۳۲(t - \frac{۱}{۴})^۲(t - \frac{۱}{۲}) \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{۱}{۲} \geq t \\
&\Rightarrow f(a^۲b^۲) + f(b^۲c^۲) + f(c^۲d^۲) + f(d^۲a^۲) \\
&\leq \frac{۱۶}{۳} + \frac{۳۲}{۹}(a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲d^۲ + d^۲a^۲ - \frac{۱}{۴}) \leq \frac{۱۶}{۳} \\
&\Leftrightarrow a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲d^۲ + d^۲a^۲ \leq \frac{۱}{۴} \\
&\Leftrightarrow (a^۲ + c^۲)(b^۲ + d^۲) \leq \frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$۴(a^۲ + c^۲)(b^۲ + d^۲) \leq (a^۲ + c^۲ + b^۲ + d^۲)^۲ = ۱$$

اثبات کامل شد.

تمرین‌ها

۱) c, b, a اعداد حقیقی مثبت می‌باشند ثابت کنید.

$$\sum_{cyc} \frac{a}{(2a+b+c)(b+c)} \geq \frac{9}{8(a+b+c)}$$

۲) $a, b, c, d > 0$ ثابت کنید.

$$\sqrt{1+\frac{7a}{b+c+d}}+\sqrt{1+\frac{7b}{a+c+d}}+\sqrt{1+\frac{7c}{a+b+d}}+\sqrt{1+\frac{7d}{a+b+c}} \geq 4\sqrt{\frac{10}{3}}$$

۳) $a, b, c > 0$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2}{b^3+c^3}+\frac{b^2}{a^3+c^3}+\frac{c^2}{a^3+b^3} \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}}$$

۴) $a, b, c > 0$ به طوری که $a+b+c=3$ ثابت کنید.

$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2} \geq 1$$

۵) فرض کنید z, y, x سه عدد حقیقی و مثبت باشند نشان دهید.

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(x+z)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \leq 8$$

(USAMO 2003)

۶) $a, b, c, d > 0$ به طوری که داریم $a+b+c+d=1$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{1-\sqrt{a}}+\frac{1}{1-\sqrt{b}}+\frac{1}{1-\sqrt{c}}+\frac{1}{1-\sqrt{d}} \geq 8$$

۷) $x, y, z > 0$ و داریم $x^2+y^2+z^2=1$ ثابت کنید.

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

فصل ٦

نامساوی شور

نامساوی شور (Schur یا Vornicu-Schur) یکی از ایده‌های مهم در حل نامساوی‌هاست که در این فصل ما به بررسی نامساوی شور تعمیم‌یافته و کاربردهایش می‌پردازیم.

قضیه ۱.٦ (نامساوی شور تعمیم‌یافته) فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی و z, y, x سه عدد نامنفی حقیقی باشند در این صورت نامساوی

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geq \circ$$

برقرار است اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد.

۱) داشته باشیم $a \leq b \leq c$ و $x \geq y$

۲) داشته باشیم $a \leq b \leq c$ و $z \geq y$

۳) داشته باشیم $a \leq b \leq c$ و $x+z \geq y$

۴) داشته باشیم c, b, a سه عدد حقیقی نامنفی به طوری که $a \leq b \leq c$ و $ax \geq by$

۵) داشته باشیم c, b, a سه عدد حقیقی نامنفی به طوری که $a \leq b \leq c$ و $cz \geq by$

٦) داشته باشیم c, b, a سه عدد حقیقی نامنفی به طوری که $a \leq b \leq c$ و $ax+cz \geq by$

اثبات:

بدیهی است که قسمت (۳) قسمت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌دهد و همچنین قسمت (٦) قسمت‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌دهد. پس تنها به اثبات قسمت‌های (۳) و (٦) می‌پردازیم.

اثبات قسمت (۳):

بدون کاسته شدن از کلیت حکم می‌توان فرض کرد $a \geq b \geq c$
لذا داریم $a-b \geq 0$ و $a-c \geq b-c$ پس

$$x(a-b)(a-c) \geq x(a-b)(b-c) = -x(b-c)(b-a)$$

همچنین داریم، $c-a \geq b-a$ و $c-b \leq 0$ پس

$$z(c-a)(c-b) \geq z(b-a)(c-b) = -z(b-c)(b-a)$$

نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\\
&\geq -x(b-c)(b-a)+y(b-c)(b-a)-z((b-c)(b-a)\\
&=(y-(x+z))(b-c)(b-a)=(x+z-y)(a-b)(b-c)
\end{aligned}$$

پس کافیست که داشته باشیم: $a \geq b \geq c$ و $x+z \geq y$
اثبات قسمت (٦):
چون ax, by, cz اعداد حقیقی نامنفی‌اند و داریم $ab \geq ac \geq bc$ (زیرا $a \geq b \geq c$) و همچنین طبق فرض داریم $ax+cz \geq by$ می‌توان قسمت (۳) را برای اعداد حقیقی bc, ac, ab و ax, by, cz به جای اعداد حقیقی z, y, x, c, b, a استفاده کرد (به ترتیب). پس طبق قضیه (۳) داریم:

$$cz(ab-ac)(ab-bc)+by(ac-bc)(ac-ab)+ax(bc-ab)(bc-ac) \geq 0$$

که نتیجه می‌دهد: $z(c-a)(c-b)+y(b-c)(b-a)+x(a-b)(a-c) \geq 0$ اثبات کامل شد.
حال به بیان چند نتیجه از نامساوی شور می‌پردازیم:
فرض کنید $abc=r, ab+bc+ca=q, a+b+c=p$ حال با استفاده از نامساوی شور داریم:

$$\sum_{cyc}(a-b)(a-c) \geq 0 \quad \Longrightarrow \sum a^2 \geq \sum ab \Longrightarrow p^2 \geq 3q$$

$$\sum a(a-b)(a-c) \geq 0 \Longrightarrow (\sum_{cyc} a^3)+3abc \geq \sum a^2b+a^2c$$

$$\Longrightarrow p^3+9r \geq 4pq$$

$$\sum a^۲(a-b)(a-c) \geq ۰ \quad \Longrightarrow \sum_{cyc} a^۴ + \sum_{cyc} a^۲bc \geq \sum_{cyc} a^۳b + a^۳c$$
$$\Longrightarrow (p^۲ - ۲q)^۲ - ۲(q^۲ - ۲pr) + pr \geq (p^۲ - ۲q)q - pr$$
$$\Longrightarrow p^۴ + ۴q^۲ + ۶pr \geq ۵p^۲q \Longrightarrow r \geq \frac{۵p^۲q - ۴q^۲ - p^۴}{۶p}$$
$$\sum_{cyc}(ab-ac)(ab-bc) \geq ۰ \Longrightarrow \sum a^۲b^۲ \geq ۳\sum a^۲bc \Longrightarrow q^۲ \geq ۳pr$$

و با نامساوی حسابی هندسی داریم: $pq \geq ۹r$

مثال ۱.۶ اعداد c, b, a اعداد حقیقی نامنفی‌اند ثابت کنید.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲abc + ۱ \geq ۲(ab + bc + ca)$$

اثبات: با استفاده از نامساوی حسابی هندسی می‌دانیم:

$$۲abc + ۱ \geq ۳\sqrt[۳]{(abc)^۲}$$

دوباره با استفاده از نامساوی حسابی هندسی می‌دانیم:

$$۳\sqrt[۳]{(abc)^۲} \geq \frac{۹abc}{a+b+c}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + \frac{۹abc}{a+b+c} \geq ۲(ab + bc + ca)$$
$$\Leftrightarrow \sum a^۳ + ۳abc \geq \sum a^۲b + a^۲c \Leftrightarrow \sum a(a-b)(a-c) \geq ۰$$

که همان نامساوی شور است.

مثال ۲.۶ فرض کنید $a, b, c > ۰$ به طوری که $abc = ۱$ ثابت کنید.

$$(a - ۱ + \frac{۱}{b})(b - ۱ + \frac{۱}{c})(c - ۱ + \frac{۱}{a}) \leq ۱$$

(IMO 2000)

اثبات: چون $abc = ۱$ پس z, y, x مثبتی وجود دارند که داشته باشیم $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$
پس باید ثابت کنیم:

$$(\frac{x+z-y}{y})(\frac{x+y-z}{z})(\frac{y+z-x}{x}) \leq ۱$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) \le xyz$$
$$\Leftrightarrow \sum x^۳ + ۳xyz \ge \sum x^۲y + x^۲z$$
$$\Leftrightarrow \sum x(x-y)(x-z) \ge ۰$$

مثال ۳.۶ $a,b,c > ۰$ ثابت کنید.

$$\frac{a^۳+abc}{b+c} + \frac{b^۳+abc}{a+c} + \frac{c^۳+abc}{a+b} \ge a^۲+b^۲+c^۲$$

اثبات: فرض می‌کنیم $a \ge b \ge c$ داریم:

$$\sum_{cyc} \frac{a^۳+abc}{b+c} - \sum_{cyc} a^۲ = \sum_{cyc}(\frac{a^۳+abc}{b+c} - a^۲) = \sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}$$

حال با استفاده از نامساوی شور تعمیم یافته (قسمت (۱)) کافیست ثابت کنیم:

$$\frac{a}{b+c} \ge \frac{b}{a+c} \Leftrightarrow a^۲+ac \ge b^۲+bc \Leftrightarrow (a-b)(a+b+c) \ge ۰$$

که چون $a \ge b$ است درست می‌باشد.

مثال ۴.۶ برای $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{(a+b)^۲} + \frac{۱}{(a+c)^۲} + \frac{۱}{(b+c)^۲} \ge \frac{۹}{۴(ab+ac+bc)}$$

(Iran 1996)

اثبات: تعریف می‌کنیم $abc = r, ab+ac+bc = q, a+b+c = p$

حال سعی می‌کنیم نامساوی را با متغیرهای جدید p، q و r بازنویسی کنیم. چون نامساوی همگن است برای راحتی کار فرض می‌کنیم $a+b+c = p = ۱$

$$\begin{aligned}\frac{۱}{(a+b)^۲} + \frac{۱}{(a+c)^۲} + \frac{۱}{(b+c)^۲} &= \frac{\sum(۱-a)^۲(۱-b)^۲}{(۱-a)^۲(۱-b)^۲(۱-c)^۲}\\ &= \frac{\sum(۱-a-b+ab)^۲}{(q-r)^۲} = \frac{\sum c^۲ + \sum(ab)^۲ + ۶abc}{(q-r)^۲}\\ &= \frac{p^۲-۲q+q^۲-۲pr+۶r}{(q-r)^۲} = \frac{۱-۲q+q^۲+۴r}{(q-r)^۲}\end{aligned}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$\begin{aligned}
&۴q(۱-۲q+q^{۲}+۴r) \geq ۹(q-r)^{۲} \\
&\Leftrightarrow ۴q-۸q^{۲}+۴q^{۳}+۱۶qr \geq ۹q^{۲}+۹r^{۲}-۱۸qr \\
&\Leftrightarrow -۹r^{۲}+r(۳۴q)+۴q-۱۷q^{۲}+۴q^{۳} \geq ۰
\end{aligned}$$

پس باید ثابت کنیم $f(r) = -۹r^{۲}+(۳۴q)r+۴q-۱۷q^{۲}+۴q^{۳} \geq ۰$ می‌دانیم تابع $f(r)$ نسبت به متغیر r یک سهمی با تقعر رو به سمت پایین است پس کافیست ابتدا و انتهای بازه‌ای که r در آن قرار می‌گیرد بررسی شوند. از طرفی طبق نامساوی شور می‌دانیم $r \geq \frac{۴pq-p^{۳}}{۹}$ که یک کران پایین خوب برای r است و همچنین می‌دانیم $r \geq ۰$ می‌باشد پس داریم $r \geq \max\{\frac{۴pq-p^{۳}}{۹}, ۰\}$ و همچنین برای کران بالای r می‌دانیم $r \leq \frac{pq}{۹}$ پس فقط کافیست ثابت کنیم $f(\max\{\frac{۴pq-p^{۳}}{۹}, ۰\}) \geq ۰$ و $f(\frac{pq}{۹}) \geq ۰$.

$$\begin{aligned}
&f(\frac{pq}{۹}) \geq ۰ \Leftrightarrow f(\frac{q}{۹}) \geq ۰ \Leftrightarrow ۴q^{۳}-\frac{۴۰}{۳}q^{۲}+۴q \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow ۴q(۳-q)(\frac{۱}{۳}-q) \geq ۰
\end{aligned}$$

برای اثبات $f(\max\{\frac{۴q-۱}{۹}, ۰\}) \geq ۰$ دو حالت درنظر می‌گیریم.

حالت اول: $q \geq \frac{۱}{۴} \Longrightarrow \max\{\frac{۴q-۱}{۹}, ۰\} = \frac{۴q-۱}{۹}$

$$\begin{aligned}
&f(\frac{۴q-۱}{۹}) \geq ۰ \Leftrightarrow ۳۶q^{۳}-۳۳q^{۲}+۱۰q-۱ \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow ۳۶(q-\frac{۱}{۳})^{۲}(q-\frac{۱}{۴}) \geq ۰
\end{aligned}$$

(توجه کنید که می‌دانستیم $q = \frac{۱}{۳}$ ریشه است)

حالت دوم: $q < \frac{۱}{۴} \Longrightarrow \max\{\frac{۴q-۱}{۹}, ۰\} = ۰$

$$\begin{aligned}
&f(۰) \geq ۰ \Leftrightarrow ۴q^{۳}-۱۷q^{۲}+۴q \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow ۴q(\frac{۱}{۴}-q)(۴-q) \geq ۰
\end{aligned}$$

اثبات کامل شد.

تمرین‌ها

۱) $a,b,c>0$ ثابت کنید.

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

(APMO 2004)

۲) $a,b,c>0$ ثابت کنید.

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq(1+a)(1+b)(1+c)$$

۳) $a,b,c>0$ به طوری که $(a+b)(a+c)(b+c)=1$ ثابت کنید.

$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{4}$$

۴) برای اعداد حقیقی $a,b,c>0$ باشرط $a+b+c=1$ ثابت کنید.

$$1+6(a^3+b^3+c^3)\geq 5(a^2+b^2+c^2)$$

۵) برای اعداد حقیقی نامنفی $c,b,a\geq 0$ داریم $ab+bc+ca=1$ ثابت کنید.

$$a^4+b^4+c^4+5abc(a+b+c)\geq 2$$

٦) فرض کنید $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ به طوری که $a+b+c=3$ مینیمم عبارت زیر را بیابید.

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$$

(China Northern Mathematical Olympiad 2007)

۷) $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ و $a+b+c=3$ ثابت کنید.

$$abc+\frac{12}{ab+ac+bc}\geq 5$$

۸) $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ و $a^2+b^2+c^2=3$ ثابت کنید.

$$12+9abc\geq 7(ab+ac+bc)$$

۹) $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)}\leq\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(a+c)}{b^2+ac}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\leq 3$$

فصل ۷

روش مخلوط کامل متغیرها

در این فصل به بررسی یکی از قوی‌ترین ایده‌های حل مسائل نامساوی می‌پردازیم و فصل را با لم زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۷ (لم مخلوط کامل متغیرها) فرض کنید $(a_1, a_2, ..., a_n)$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی دلخواه است. تبدیل Δ را روی اعضای دنباله $(a_1, ..., a_n)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

در هر بار تبدیل، $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$a_i = \min(a_1, a_2, ..., a_n), a_j = Max(a_1, a_2, ..., a_n)$$

سپس a_i و a_j را از دنباله حذف کرد و به جای هر کدام از آن‌ها $\frac{a_i + a_j}{2}$ را جایگزین می‌کنیم. بعد از بی‌نهایت بار انجام تبدیل Δ روی دنباله، حد اعضای دنباله برابر شده و مقدار آن مساوی $a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ می‌شود.

اثبات) قبل از اثبات لم فوق این لم را روی دنباله‌ی $(1, 1, 2, 3)$ امتحان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(1, 1, 2, 3) &\xrightarrow{\Delta} \left(1, \frac{1+3}{2}, 2, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2, 2, 2) \\ &\xrightarrow{\Delta} \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+2}{2}, 2, 2\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2, 2\right) \\ &\xrightarrow{\Delta} \left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{3}{2}+2}{2}, \frac{\frac{3}{2}+2}{2}, 2\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{4}, 2\right)\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\Delta}\left(\frac{\frac{۳}{۲}+۲}{۲},\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۴},\frac{\frac{۳}{۲}+۲}{۲}\right)=\left(\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۴},\frac{۷}{۴}\right)$$

(گاهی ممکن است هیچ وقت اعضای دنباله برابر نشوند، اما همگی به سمت میانگینشان میل کنند.) از این مرحله به بعد تبدیل Δ تغییری روی دنباله ایجاد نمی‌کند (زیرا در این مرحله (اعضای دنباله)max =(اعضای دنباله)min) همانطور که ملاحظه شد اعضای دنباله در نهایت برابر میانگین اعضای اولیه شدند. $\frac{۱+۱+۲+۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$ حال به لم اصلی باز می‌گردیم، همانطور که ملاحظه می‌کنید با هر بار انجام تبدیل Δ جمع اعضای دنباله تغییری نمی‌کند. پس برای اثبات اینکه حد اعضای دنباله به $\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n}$ میل می‌کند کافیست ثابت کنیم که حد اعضای دنباله برابر است، به همین منظور سیگمای تفاضلی دنباله‌ی دلخواه $A=(a_۱,a_۲,...,a_n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^۲ \qquad i,j\in\{۱,۲,...,n\}$$

ثابت می‌کنیم اگر بی‌نهایت بار تبدیل Δ را روی یک دنباله انجام دهیم، سیگمای تفاضلی آن به صفر میل می‌کند.

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم برای دنباله‌ی دلخواه $(a_۱,a_۲,...,a_n)$

$$a_۱=\min(a_۱,a_۲,...,a_n), a_n=Max(a_۱,a_۲,...,a_n)$$

و همچنین

$$(a_۱,a_۲,...,a_n)\xrightarrow{\Delta}(a'_۱,a'_۲,...,a'_n)=(\frac{a_۱+a_n}{۲},a_۲,...,a_{n-۱},\frac{a_۱+a_n}{۲})$$

در این صورت اختلاف سیگمای تفاضلی دنباله‌ی قبل و بعد از تبدیل Δ برابر مقدار زیر است.

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^۲)-(\sum_{i\neq j}(a'_i-a'_j)^۲)\\
&=(a_۱-a_n)^۲+(\sum_{i\neq ۱,n}(a_۱-a_i)^۲+(a_n-a_i)^۲)-(\sum_{i\neq ۱,n}۲(\frac{a_۱+a_n}{۲}-a_i)^۲)\\
&=(a_n-a_۱)^۲+\frac{۱}{۲}(\sum_{i\neq ۱,n}۲(a_۱-a_i)^۲+۲(a_n-a_i)^۲-(a_۱+a_n-۲a_i)^۲)\\
&=(a_n-a_۱)^۲+\frac{۱}{۲}(\sum_{i\neq ۱,n}a_۱^۲+a_n^۲-۲a_۱a_n)=(a_n-a_۱)^۲+\frac{۱}{۲}\sum_{i\neq ۱,n}(a_۱-a_n)^۲\\
&=(۱+\frac{n-۲}{۲})(a_n-a_۱)^۲=\frac{n}{۲}(a_n-a_۱)^۲
\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲}\leq\binom{n}{۲}(a_n-a_{۱})^{۲}$$

پس نتیجه می‌دهد:

$$(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲})-(\sum_{i\neq j}(a'_i-a'_j)^{۲})=\frac{n}{۲}(a_n-a_{۱})^{۲}\geq\frac{(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲})}{\binom{n}{۲}}\times(\frac{n}{۲})$$

$$\Longrightarrow(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲})-(\sum_{i\neq j}(a'_i-a'_j)^{۲})\geq\frac{۱}{n-۱}(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲})$$

$$\Longrightarrow(\frac{n-۲}{n-۱})(\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^{۲})\geq(\sum_{i\neq j}(a'_i-a'_j)^{۲})$$

چون $۱>\frac{n-۲}{n-۱}>۰$ و عددی ثابت است نتیجه می‌دهد که بعد از بی‌نهایت بار انجام تبدیل Δ مقدار سیگمای تفاضلی به صفر میل کرده و حد اعضای دنباله برابر می‌شود.

قضیه مخلوط کامل متغیرها (SMV)[۱]

فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت اگر داشته باشیم:

$$f(a_{۱},a_{۲},...,a_n)\geq f(a'_{۱},a'_{۲},...,a'_n)$$

به طوری که $(a_{۱},a_{۲},...,a_n)\xrightarrow{\Delta}(a'_{۱},a'_{۲},...,a'_n)$ آنگاه با توجه به لم اثبات شده خواهیم داشت.

$$f(a_{۱},a_{۲},a_{۳},...,a_n)\geq f(a,a,...,a)$$

که در آن $a=\frac{a_{۱}+a_{۲}+...+a_n}{n}$

توجه: می‌توان در لم ذکر شده در ابتدای فصل، به جای ماکزیمم a_j و مینیمم a_i، $\sqrt{a_ia_j}$ و یا $\sqrt[k]{\frac{a_i^k+a_j^k}{۲}}$ را نیز جایگزین کرد و همچنان حکم برابر شدن حد اعضا، برقرار است که اثبات به عهده‌ی خواننده می‌باشد.

(راهنمایی: برای میانگین هندسی می‌توان از تابع $\log(x)$ استفاده کرد.)

مثال ۱.۷ اگر $a_{۱},a_{۲},...,a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید.

$$(۱+a_{۱})(۱+a_{۲})...(۱+a_n)\geq(۱+\sqrt[n]{a_{۱}a_{۲}...a_n})^n$$

---

[۱] Strongly Mixing Variables

اثبات: تعریف می‌کنیم (فرض می‌کنیم $a_۱ \geq a_۲ \geq ... \geq a_n$)

$$f(a_۱, a_۲, ..., a_n) = (۱ + a_۱)(۱ + a_۲)...(۱ + a_n) - (۱ + \sqrt[n]{a_۱ a_۲ ... a_n})^n$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$f(a_۱, ..., a_n) \geq f(\sqrt{a_۱ a_n}, a_۲, ..., a_{n-۱}, \sqrt{a_۱ a_n})$$

داریم:

$$f(a_۱, ..., a_n) - f(\sqrt{a_۱ a_n}, a_۲, ..., \sqrt{a_۱ a_n}) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (۱ + a_۱)(۱ + a_n) - (۱ + \sqrt{a_۱ a_n})^۲ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a_۱} - \sqrt{a_n})^۲ \geq ۰$$

پس با استفاده از قضیه SMV روی دنباله‌ی $(a_۱, ..., a_n)$ داریم:

$$f(a_۱, ..., a_n) \geq f(a, a, .., a), a = \sqrt[n]{a_۱, ..., a_n}$$
$$f(a, a, .., a) = ۰$$

پس اثبات کامل شد.

در برخی مسائل نحوه‌ی انتخاب عضو max و عضو min مهم می‌باشد در مثال قبل چون حالت تساوی تنها وقتی بود که اعضا برابر بودند $a_۱$ را max و a_n را min انتخاب کردیم به حل مثال بعد توجه کنید.

مثال ۲.۷ اگر $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + abcd + ۱ \geq ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

اثبات: فرض کنید $a \geq b \geq c \geq d$ حال تعریف می‌کنیم:

$$f(a, b, c, d) = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + abcd - (ab + ac + ad + cb + bd + cd)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$f(a, b, c, d) \geq f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d)$$
$$\Leftrightarrow a^۲ + c^۲ - (ab + ad + bc + dc) \geq ۲ac - (۲\sqrt{ac}b + ۲\sqrt{ac}d)$$
$$\Leftrightarrow (a - c)^۲ \geq (b + d)(a + c - ۲\sqrt{ac}) \Leftrightarrow (a - c)^۲ \geq (b + d)(\sqrt{a} - \sqrt{c})^۲$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{c})^۲ \geq b + d \Leftrightarrow a + c + ۲\sqrt{ac} \geq b + d$$

که باتوجه به فرض $a \geq b \geq c \geq d$ درست می‌باشد.
(توجه کنید $d \leq \frac{a+b+c}{۳}$ می‌باشد)
حالا طبق قضیه SMV روی دنباله‌ی (a,b,c) کافیست ثابت کنیم.

$$f(t,t,t,d) \geq -۱ \Leftrightarrow ۱ + t^۳ d + d^۲ \geq ۳td$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی بدیهی می‌باشد.

مثال ۳.۷ فرض کنید a,b,c,d اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوری که $a+b+c+d = ۱$ ثابت کنید.

$$abc + acd + abd + bcd \leq \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱۷۶}{۲۷} abcd$$

(IMO Shortlist 1997)

اثبات: فرض کنید $a \geq b \geq c \geq d$ تعریف می‌کنیم.

$$f(a,b,c,d) = abc + acd + abd + bcd - \frac{۱۷۶}{۲۷} abcd$$
$$f(a,b,c,d) = bd(a+c) + ac(b + d - \frac{۱۷۶}{۲۷} bd)$$

باتوجه به فرض $a+b+c+d = ۱$ می‌خواهیم ثابت کنیم.

$$f(a,b,c,d) \leq f(\frac{a+c}{۲}, b, \frac{a+c}{۲}, d)$$
$$\Leftrightarrow ac(b+d-\frac{۱۷۶}{۲۷}bd) \leq (\frac{a+c}{۲})^۲ (b+d-\frac{۱۷۶}{۲۷}bd)$$

از طرفی طبق نامساوی حسابی هندسی می‌دانیم $(\frac{a+c}{۲})^۲ \geq ac \geq ۰$ پس کافیست ثابت کنیم $b+d-\frac{۱۷۶}{۲۷}bd \geq ۰$ با فرض $a \geq b \geq c \geq d$ می‌دانیم

$$\frac{۱}{b+d} \geq ۲ \Leftarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(a+b+c+d) \geq b+d$$

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{d} \geq \frac{۴}{b+d} \geq ۸ \geq \frac{۱۷۶}{۲۷}$$

پس $f(a,b,c,d) \leq f(\frac{a+c}{۲}, b, \frac{a+c}{۲}, d)$ حالا طبق قضیه SMV روی دنباله‌ی (a,b,c) کافی است ثابت کنیم:

$$f(t,t,t,d) \leq \frac{۱}{۲۷}, t = \frac{a+b+c}{۳}$$
$$\Leftrightarrow ۳dt^۲ + t^۳ \leq \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱۷۶}{۲۷} dt^۳$$

داریم $۱ = ۳t + d \Leftarrow d = ۱ - ۳t$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$۳(۱ - ۳t)t^۲ + t^۳ \leq \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱۷۶}{۲۷}(۱ - ۳t)t^۳ \Leftrightarrow (۱ - ۳t)(۴t - ۱)^۲(۱۱t + ۱) \geq ۰$$

که درست است و حالت تساوی وقتی رخ می‌دهد که داشته باشیم $a = b = c = d = \frac{۱}{۴}$ و $a = b = c = \frac{۱}{۳}, d = ۰$ با جایگشت‌هایش.

مثال ۴.۷ فرض کنید $a + b + c + d + e = ۵$ اعداد حقیقی مثبت‌اند ثابت کنید.

$$۴(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲) + ۵abcde \geq ۲۵$$

اثبات: فرض کنید $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ و تعریف می‌کنیم.

$$f(a, b, c, d, e) = ۴(a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲) + ۵abcde$$

می‌خواهیم ثابت کنیم.

$$f(a, b, c, d, e) \geq f(\frac{a + d}{۲}, b, c, \frac{a + d}{۲}, e) \Leftrightarrow ۸(a - d)^۲ \geq ۵bce(a - d)^۲$$
$$\Leftrightarrow ۸ \geq ۵bce$$

از طرفی طبق فرض می‌دانیم $(a \geq b \geq c \geq d \geq e)$ در نتیجه

$$c + b + e \leq ۲(a + d) \Rightarrow ۳(c + b + e) \leq ۱۰$$

و همچنین طبق نامساوی حسابی هندسی :

$$c + b + e \geq ۳\sqrt[۳]{cbe} \Rightarrow bce \leq (\frac{۱۰}{۹})^۳$$

و بدیهی است که $\frac{۸}{۵} > (\frac{۱۰}{۹})^۳$، پس ثابت کردیم

$$f(a, b, c, d, e) \geq f(\frac{a + d}{۲}, b, c, \frac{a + d}{۲}, e)$$

حال طبق قضیه محلوط کامل متغیرها روی دنباله‌ی (a, b, c, d) کافیست ثابت کنیم $(t = \frac{a + b + c + d}{۴}, e = ۵ - ۴t)$

$$f(t, t, t, t, e) \geq ۲۵ \Leftrightarrow ۴(۴t^۲ + e^۲) + ۵t^۴e \geq ۲۵$$
$$\Leftrightarrow ۱۶t^۲ + ۴(۵ - ۴t)^۲ + ۵t^۴(۵ - ۴t) \geq ۲۵$$
$$\Leftrightarrow (t - ۱)^۲(۱۵ - ۴t^۳ - ۳t^۲ - ۲t) \geq ۰$$

و چون $\frac{۵}{۴} \geq t \geq ۰$ است، درست می‌باشد.

تمرین‌ها

۱) فرض کنید t, z, y, x اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوری که $x + y + z + t = ۴$ ثابت کنید.

$$(۱ + ۳x)(۱ + ۳y)(۱ + ۳z)(۱ + ۳t) \leq ۱۲۵ + ۱۳۱xyzt$$

۲) d, c, b, a اعداد حقیقی مثبتی هستند به طوری که $a + b + c + d = ۴$ ثابت کنید.

$$۱۶ + ۲abcd \geq ۳(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

۳) d, c, b, a اعداد حقیقی مثبت‌اند به طوری که $a + b + c + d = ۴$ ثابت کنید.

$$(a^۲ + ۱)(b^۲ + ۱)(c^۲ + ۱)(d^۲ + ۱) \geq (a + ۱)(b + ۱)(c + ۱)(d + ۱)$$

۴) برای اعداد مثبت حقیقی d, c, b, a داریم $abcd = ۱$ ثابت کنید.

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ + d^۴ + ۲۰ \geq ۶(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d})$$

۵) برای اعداد حقیقی e, d, c, b, a داریم $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲ = ۵$ ثابت کنید.

$$abcde(a^۴ + b^۴ + c^۴ + d^۴ + e^۴) \leq ۵$$

۶) فرض کنید $a_۱, a_۲, ..., a_n$ اعداد حقیقی نامنفی‌اند به طوری که $a_۱a_۲...a_n = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + ... + \frac{۱}{a_n} + \frac{۳n}{a_۱ + a_۲ + ... + a_n} \geq n + ۳$$

برای اعداد طبیعی $n \geq ۴$

فصل ۸

روش مجموع مربعات

در این فصل به بررسی یکی از مهم‌ترین ایده‌ها برای حل مسائل نامساوی می‌پردازیم که دارای پایه و اساس بسیار ساده‌ای می‌باشد و آن هم این خاصیت اعداد حقیقی است که «مربع هر عدد حقیقی نامنفی است» $(\forall x \in R \quad x^۲ \geq ۰)$ مسائل بسیاری در نامساوی‌ها را می‌توان با مربع کامل کردن حل کرد. مثلاً برای همه‌ی اعداد نامنفی حقیقی c, b, a داریم:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq ۳abc$$

زیرا

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = \frac{۱}{۲}(a+b+c)((a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲)$$

همانطور که ملاحظه کردید به وسیله‌ی ساختن مربع‌ها، بدون استفاده از هیچ قضیه‌ای، حل شد. ایده‌ی اصلی روش مجموع مربعات، بازنویسی کردن نامساوی به صورت زیر است.

$$S_c(a-b)^۲ + S_b(a-c)^۲ + S_a(b-c)^۲ \geq ۰$$

(که این بازنویسی به وسیله فاکتورگیری از $c-a, b-c, a-b$ و ادامه دادن تا به فرم بالا رسیدن است) حال به بیان روش مجموع مربعات می‌پردازیم:

قضیه ۱.۸ (قضیه روش مجموع مربعات (SOS)[۱]) تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(a,b,c) = S_a(b-c)^۲ + S_b(a-c)^۲ + S_c(a-b)^۲$$

[۱] Some Of Squares

به طوری که S_a, S_b, S_c توابعی از a, b, c هستند.
در این صورت نامساوی $f(a,b,c) \geq 0$ برقرار است اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد.

۱) اگر $S_a, S_b, S_c \geq 0$ باشند.

۲) اگر $a \geq b \geq c, S_b \geq 0, S_b + S_c, S_b + S_a$.

۳) اگر $a \geq b \geq c, S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$.

۴) اگر $a \geq b \geq c, S_b, S_c \geq 0, a^2 S_b + b^2 S_a$.

۵) اگر $S_a + S_b + S_c \geq 0, S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$.

اثبات:

قسمت (۱) بدیهی می‌باشد.

قسمت (۲): اگر $a \geq b \geq c, S_b \geq 0$، چون $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ پس داریم:

$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + S_b)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2$$

پس کافیست $S_a + S_b$ و $S_c + S_b$ مثبت باشند.

قسمت (۳): اگر $S_b \geq 0$ آن‌گاه حکم از قسمت اول نتیجه می‌شود. اگر $a \geq b \geq c, S_b \leq 0$، چون $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ پس داریم:

$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + 2S_b)(a-b)^2 + (S_a + 2S_b)(b-c)^2$$

پس کافیست $S_a + 2S_b, S_c + 2S_b$ اعداد حقیقی مثبت باشند.

قسمت (۴): با فرض $a \geq b \geq c$ داریم: $\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b}$ و چون S_c و S_b مثبتند، پس داریم:

$$S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 = (b-c)^2(S_b(\frac{a-c}{b-c})^2 + S_a) \geq (b-c)^2(\frac{a^2}{b^2}S_b + S_a)$$

پس کافیست $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ و $S_b \geq 0$ باشد.

قسمت (۵): در این قسمت هم اگر قرار دهید، $x = a - b, y = b - c$ داریم:

$$f(a,b,c) = (S_a + S_b)y^2 + 2S_bxy + (S_b + S_c)x^2$$

چون $S_a + S_b + S_c \geq 0$ پس می‌توان فرض کرد $S_a + S_b \geq 0$ است. (چون یکی از $S_a + S_b$ و $S_b + S_c$ مثبتند).

چون $\Delta'_f = S_b^2 - (S_b + S_a)(S_b + S_c) = -(S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a) \leq 0$ اثبات کامل شد.

به شیوه‌ی ساختن فرم SOS در مثال بعد توجه کنید.

مثال ۱.۸ $a,b,c\geq 0$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}\geq 2$$

اثبات: فرض می‌کنیم $a\geq b\geq c$، داریم:

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$
$$(a+b)(a+c)(b+c)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

پس نامساوی هم‌ارز است با

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{2a(b-c)^2+2b(a-c)^2+2c(a-b)^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

و یا

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{ab+bc+ca}-2c\right)\geq 0$$

طبق تعریف SOS داریم:

$$S_a=b+c-a-\frac{abc}{ab+ac+bc}$$
$$S_b=a+c-b-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$
$$S_c=a+b-c-\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

و چون $a\geq b$, $c\geq\frac{abc}{ab+ac+bc}$ است داریم $S_b\geq 0$ و همچنین $S_c\geq 0$ پس طبق قسمت (۲) قضیه SOS کافیست ثابت کنیم:

$$S_b+S_a\geq 0\Leftrightarrow 2c-\frac{2abc}{ab+ac+bc}\geq 0\Leftrightarrow c(ab+ac+bc)\geq abc$$

که واضح است پس اثبات کامل شد.

مثال ۲.۸ فرض کنید z,y,x اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $xyz\geq 1$ ثابت کنید.

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0$$

(IMO 2005)

اثبات: برخی از مسائل (مانند این نامساوی) دارای شروطی هستند که خود آن‌ها به صورت نامساوی‌اند که ایده‌ی زیر می‌تواند مفید باشد، چون $xyz \geq ۱$ پس k مثبتی وجود دارد به طوری که $k^۳xyz = ۱$ همچنین $xyz \geq ۱$ نتیجه می‌دهد $k \leq ۱$ تعریف می‌کنیم $kx = a, ky = b, kz = c$ و نامساوی هم‌ارز می‌شود با

$$\sum_{cyc} \frac{x^۵ - x^۲}{x^۵ + y^۲ + z^۲} \geq ۰ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(\frac{a}{k})^۵ - (\frac{a}{k})^۲}{(\frac{a}{k})^۵ + (\frac{b}{k})^۲ + (\frac{c}{k})^۲} \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۲k^۳}{a^۵ + b^۲k^۳ + c^۲k^۳} \geq ۰$$

و چون $k \leq ۱$ می‌باشد داریم:

$$\sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۲k^۳}{a^۵ + b^۲k^۳ + c^۲k^۳} \geq \sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۲}{a^۵ + b^۲ + c^۲}$$

پس داریم $abc = ۱$ و می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۲}{a^۵ + b^۲ + c^۲} \geq ۰$$

$$\sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۲}{a^۵ + b^۲ + c^۲} = \sum_{cyc} \frac{a^۵ - a^۳bc}{a^۵ + abc(b^۲ + c^۲)}$$

$$= \sum_{cyc} \frac{a^۴ - a^۲bc}{a^۴ + bc(b^۲ + c^۲)} \geq \sum_{cyc} \frac{۲a^۴ - a^۲(b^۲ + c^۲)}{۲a^۴ + (b^۲ + c^۲)^۲}$$

فرض کنید $c^۲ = c', b^۲ = b', a^۲ = a'$ باشد پس باید ثابت کنیم

$$\sum_{cyc} \frac{۲a'^۲ - a'(b' + c')}{۲a'^۲ + (b' + c')^۲} \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a' - b') \left(\frac{a'}{۲a'^۲ + (b' + c')^۲} - \frac{b'}{۲b'^۲ + (a' + c')^۲} \right) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a' - b')^۲ \left(\frac{c'^۲ + c'(a' + b') + a'^۲ - a'b' + b'^۲}{(۲a'^۲ + (b' + c')^۲)(۲b'^۲ + (a' + c')^۲)} \right) \geq ۰$$

و چون طبق قضیه SOS داریم $S_c, S_b, S_a \geq ۰$ پس (طبق قسمت (۱) SOS) اثبات کامل شد.

مثال ۳.۸ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{۲a^۲ - bc}{b^۲ - bc + c^۲} + \frac{۲b^۲ - ac}{a^۲ - ac + c^۲} + \frac{۲c^۲ - ab}{a^۲ - ab + b^۲} \geq ۳$$

اثبات: فرض کنید $a \geq b \geq c$ نامساوی هم‌ارز است با

$$\sum_{cyc}\left(\frac{۲a^۲-bc}{b^۲-bc+c^۲}-۱\right)\geq ۰ \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{۲a^۲-b^۲-c^۲}{b^۲-bc+c^۲}\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a+b)\left(\frac{۱}{b^۲-bc+c^۲}-\frac{۱}{a^۲-ac+c^۲}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^۲\left(\frac{(a+b)(a+b-c)}{(b^۲-bc+c^۲)(a^۲-ac+c^۲)}\right)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^۲(a^۳+b^۳)(a+b-c)\geq ۰$$

پس طبق تعریف ضابطه‌ی SOS داریم:

$$S_a=(b^۳+c^۳)(b+c-a), S_b=(a^۳+c^۳)(a+c-b), S_c=(a^۳+b^۳)(a+b-c)$$

با توجه به فرض $a \geq b \geq c$ می‌دانیم $S_c, S_b \geq ۰$ پس کافیست طبق قسمت (۲) قضیه SOS ثابت کنیم.

$$S_b+S_c\geq ۰ \Leftarrow S_c, S_b\geq ۰$$
$$S_a+S_b\geq ۰ \Leftrightarrow (a^۳+c^۳)(a+c-b)+(b^۳+c^۳)(b+c-a)\geq ۰$$
$$\Leftarrow (a^۳+c^۳)(a-b)+(b^۳+c^۳)(b-a)=(a-b)^۲(a^۲+ab+b^۲)\geq ۰$$

مثال بعد یکی از مسائل دشوار نامساوی است که با استفاده از SOS می‌توان آن را به راحتی حل کرد.

مثال ۴.۸ ثابت کنید برای اعداد حقیقی و نامنفی $a,b,c\geq ۰$ داریم:

$$\frac{۱}{(a+b)^۲}+\frac{۱}{(a+c)^۲}+\frac{۱}{(a+c)^۲}\geq\frac{۹}{۴(ab+ac+bc)}$$

(Iran 1996)

اثبات: نامساوی هم‌ارز است با

$$\sum_{cyc}\left(\frac{۴(ab+ac+bc)}{(a+b)^۲}-۳\right)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{۳a(c-a)+۳b(c-b)+a(c-b)+b(c-a)}{(a+b)^۲}\right)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{(c-a)(۳a+b)+(c-b)(۳b+a)}{(a+b)^۲}\right)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{۳b+c}{(b+c)^۲}-\frac{۳a+c}{(a+c)^۲}\right)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^۲\left(\frac{۳ab+ac+bc-c^۲}{(a+c)^۲(b+c)^۲}\right)\geq ۰$$

با فرض $a\geq b\geq c$ و با استفاده از تعریف ضابطه‌ی SOS واضح است که $S_c,S_b\geq ۰$ پس کافیست طبق قسمت قضیه (۲) SOS ثابت کنیم:

$$S_b+S_c\geq ۰, S_a+S_b\geq ۰$$

می‌دانیم $S_b+S_c\geq ۰$ پس کافیست ثابت کنیم، $S_a+S_b\geq ۰ \Leftrightarrow$

$$\frac{۳bc+ab+ac-a^۲}{(a+c)^۲}+\frac{۳ac+ab+bc-b^۲}{(b+c)^۲}\geq ۰$$
$$\Leftarrow \frac{a(b-a)}{(a+c)^۲}+\frac{b(a-b)}{(b+c)^۲}\geq ۰ \Leftrightarrow (a-b)\left(\frac{b}{(b+c)^۲}-\frac{a}{(a+c)^۲}\right)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^۲(ab-c^۲)}{(a+c)^۲(b+c)^۲}\geq ۰$$

که طبق فرض $a\geq b\geq c$ درست می‌باشد.

تمرین‌ها

۱) فرض کنید a,b,c اعداد حقیقی مثبتی هستند ثابت کنید.

$$\frac{a^۲}{b^۲+c^۲}+\frac{b^۲}{a^۲+c^۲}+\frac{c^۲}{a^۲+b^۲}\geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

۲) فرض کنید c,b,a اعداد حقیقی مثبتند ثابت کنید.

$$\frac{a^۲(b+c)}{b^۲+c^۲}+\frac{b^۲(a+c)}{a^۲+c^۲}+\frac{c^۲(a+b)}{a^۲+b^۲}\geq a+b+c$$

۳) c,b,a اعداد حقیقی مثبتی هستند ثابت کنید.

$$(a^۲-bc)\sqrt{b+c}+(b^۲-ac)\sqrt{a+c}+(c^۲-ab)\sqrt{a+b}\geq ۰$$

۴) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

۵) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$a^2+b^2+c^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a^2+c^2}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2}{b+c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^2$$

فصل ۹

مسائل

۱) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^{۲} \geq ۴\sqrt{۳abc(a+b+c)}$$

۲) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری $(a+b)(a+c)(b+c) = ۸$ ثابت کنید.

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۲۷]{\frac{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}}{۳}}$$

۳) اعداد c, b, a مثبت و حقیقی‌اند ثابت کنید.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{۹(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})}{ab+ac+bc}}$$

۴) c, b, a اعداد حقیقی و مثبتند به طوری که داریم $a+b+c = ۳$ ثابت کنید.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$$

(Russia 2002)

۵) c, b, a طول اضلاع یک مثلثند، ثابت کنید.

$$\sum_{cyc}(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a} \geq ۴(a+b+c)\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

۶) c, b, a اعداد حقیقی و مثبتند به طوری که $abc = 1$ ثابت کنید.

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geq 3$$

۷) c, b, a اعداد حقیقی و مثبتند به طوری که $a+b+c \geq 3$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2} \leq 1$$

۸) $z, y, x \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+xz+yz}$$

۹) c, b, a طول اضلاع یک مثلثند، ثابت کنید.

$$\frac{(c+b-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(a+c-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} \geq ab+ac+bc$$

(Greece National Olympiad 2007)

۱۰) c, b, a سه عدد حقیقی مثبت متفاوتند، ثابت کنید.

$$\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right| > 1$$

(Iran 2007)

۱۱) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $a^2+b^2+c^2 = 1$ ثابت کنید.

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ac}+\frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$$

۱۲) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند، ثابت کنید.

$$\sqrt[3]{\frac{b^3}{a^3+c^3+6abc}}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3+c^3+6abc}}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^3+b^3+6abc}} \geq \frac{3}{2}$$

۱۳) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $ab+bc+ca = 1$ ثابت کنید.

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{5}{2}$$

۱۴) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $a+b+c = 1$ ثابت کنید.

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(a-c)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{3}$$

۱۵) x, y, z اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $x + y + z = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leq \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۱۶) برای اعداد حقیقی $a, b, c, d > ۰$ داریم $a + b + c + d = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲$ ثابت کنید.

$$\sum_{cyc} a^۳ + \sum_{cyc} a \leq ۸$$

۱۷) $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ + d^۴ + ۲abcd \geq a^۲b^۲ + a^۲c^۲ + a^۲d^۲ + b^۲c^۲ + b^۲d^۲ + c^۲d^۲$$

۱۸) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{a^۲ + ۲bc}{(b+c)^۲} + \frac{b^۲ + ۲ac}{(a+c)^۲} + \frac{c^۲ + ۲ab}{(a+b)^۲} \geq \frac{۹}{۴}$$

۱۹) a, b, c اعداد حقیقی مثبتند ثابت کنید.

$$\frac{(b+c)^۲}{a^۲ + bc} + \frac{(a+c)^۲}{b^۲ + ac} + \frac{(a+b)^۲}{c^۲ + ab} \geq ۶$$

۲۰) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{۱۳}{۶} - \frac{۲(ab+ac+bc)}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$

۲۱) a, b, c اعداد حقیقی نامنفی‌اند، ثابت کنید.

$$۲(a^۲ + ۱)(b^۲ + ۱)(c^۲ + ۱) \geq (a + ۱)(b + ۱)(c + ۱)(abc + ۱)$$

۲۲) x, y, z, t اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $xyzt = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{(۱+x)^۲} + \frac{۱}{(۱+y)^۲} + \frac{۱}{(۱+z)^۲} + \frac{۱}{(۱+t)^۲} \geq ۱$$

۲۳) a, b, c اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $a + b + c = ۳$ ثابت کنید.

$$ab^۲ + bc^۲ + ca^۲ + abc \leq ۴$$

۲۴) $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{x+z}{y}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \geq \sqrt{\frac{۶(x+y+z)}{\sqrt[۳]{xyz}}}$$

۲۵) c,b,a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $a+b+c=1$ ثابت کنید.
(Turkey TST 2007)

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+ac+bc}$$

۲۶) c,b,a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $abc=1$ و $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ ثابت کنید

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

(China Northern Mathematical Olympiad 2007)

۲۷) y,z,x, اعداد حقیقی و مثبتند به طوری که $x+y+z=1$ ثابت کنید.

$$\sum\frac{x^2y^2}{z+xy}\geq\frac{xy+yz+zx}{4}$$

۲۸) d,c,b,a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ ثابت کنید.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c+d)-4$$

(Poland Second Round 2007)

۲۹) z,y,x اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $x^2+y^2+z^2=2$ ثابت کنید.

$$x+y+z\leq xyz+2$$

(IMO Shortlist 1987)

۳۰) z,y,x اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $x+y+z+2=xyz$ ثابت کنید.

$$2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz})\leq x+y+z+6$$

۳۱) $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2(a^4+b^4+c^4)}{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}\geq 2$$

۳۲) $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$\sum_{cyc}\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

۳۳) برای اعداد حقیقی d, c, b, a داریم

$$a^{۲} \leq ۱, a^{۲} + b^{۲} \leq ۵, a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \leq ۱۴, a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + d^{۲} \leq ۳۰$$

ثابت کنید

$$a + b + c + d \leq ۱۰$$

۳۴) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $ab + ac + bc = ۳$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۱ + a^{۲}(b + c)} + \frac{۱}{۱ + b^{۲}(a + c)} + \frac{۱}{۱ + c^{۲}(a + b)} \leq \frac{۳}{۱ + ۲abc}$$

(Romania 2008)

۳۵) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $a + b + c = ۱$ ثابت کنید.

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{۳c} + \sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{۳a} + bc)} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{۳b} + \sqrt{ac})} \geq \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

۳٦) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند ثابت کنید.

$$\frac{۱}{a(b + ۱)} + \frac{۱}{b(c + ۱)} + \frac{۱}{c(a + ۱)} \geq \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}(۱ + \sqrt[۳]{abc})}$$

۳۷) c, b, a اضلاع مثلثند ثابت کنید.

$$\frac{\sqrt{b + c - a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c + a - b}}{\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a + b - c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} \leq ۳$$

(Peru TST 2007)

۳۸) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند ثابت کنید.

$$\sqrt{\frac{a^{۳}}{a^{۳} + (b + c)^{۳}}} + \sqrt{\frac{b^{۳}}{b^{۳} + (a + c)^{۳}}} + \sqrt{\frac{c^{۳}}{c^{۳} + (a + b)^{۳}}} \geq ۱$$

۳۹) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند، ثابت کنید.

$$\frac{a^{۳} + ۳abc}{(b + c)^{۲}} + \frac{b^{۳} + ۳abc}{(a + c)^{۲}} + \frac{c^{۳} + ۳abc}{(a + b)^{۲}} \geq a + b + c$$

۴۰) $c, b, a \in \mathbb{R}^{+}$ کوچکترین k را بیابید که داشته باشیم.

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq k\sqrt{(a + b)(a + c)(b + c)}$$

(Iran 2008)

۴۱) z, y, x اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ ثابت کنید.

$$x+y+z+\frac{۱}{xyz} \geq \frac{۴\sqrt{۳}}{۹}(z+y+z)(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z})$$

۴۲) برای اعداد حقیقی c, b, a داریم $a^۲+b^۲+c^۲=۱$، ماکسیمم عبارت زیر را بیابید.

$$(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

(IMO 2006)

۴۳) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ به طوری که $a^۲+b^۲+c^۲=۱$ ثابت کنید.

$$\frac{a}{\sqrt{۱+bc}}+\frac{b}{\sqrt{۱+ac}}+\frac{c}{\sqrt{۱+ab}} \leq \frac{۳}{۲}$$

۴۴) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $abc=۱$ ثابت کنید.

$$\frac{a}{b^۲(c+۱)}+\frac{b}{c^۲(a+۱)}+\frac{c}{a^۲(b+۱)} \geq \frac{۳}{۲}$$

۴۵) a, b, c اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $abc=۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{(a+۱)(a+۲)}+\frac{۱}{(b+۱)(b+۲)}+\frac{۱}{(c+۱)(c+۲)} \geq \frac{۱}{۲}$$

۴۶) $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ثابت کنید.

$$a\sqrt{a^۲+۳bc}+b\sqrt{b^۲+۳ac}+c\sqrt{c^۲+۳ab} \geq ۲(ab+ac+bc)$$

۴۷) $a, b, c \in \mathbb{R}$ به طوری که داریم $a<b<c$، $a+b+c=۶$، $ab+ac+bc=۹$ ثابت کنید

$$۰<a<۱<b<۳<c<۴$$

۴۸) برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c، ثابت کنید.

$$\frac{۱}{۵(a^۲+b^۲)-ab}+\frac{۱}{۵(a^۲+c^۲)-ac}+\frac{۱}{۵(b^۲+c^۲)-bc} \geq \frac{۱}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

۴۹) مثلث ABC داده شده است. مینیمم عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\cos^۲(\frac{A}{۲})\cos^۲(\frac{B}{۲})}{\cos^۲(\frac{C}{۲})}+\frac{\cos^۲(\frac{A}{۲})\cos^۲(\frac{C}{۲})}{\cos^۲(\frac{B}{۲})}+\frac{\cos^۲(\frac{B}{۲})\cos^۲(\frac{C}{۲})}{\cos^۲(\frac{A}{۲})}$$

(Vietnam TST 2007)

۵۰) c, b, a اعداد حقیقی مثبتند به طوری که $ab+ac+bc=۱$ ثابت کنید.
(IMO shortlist 2004)

$$\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}+۶b}+\sqrt[۳]{\frac{۱}{b}+۶c}+\sqrt[۳]{\frac{۱}{c}+۶a}\leq\frac{۱}{abc}$$

۵۱) برای اعداد مثبت و حقیقی c, b, a ثابت کنید.

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^۲+ab+b^۲}\leq\sqrt{\sum_{cyc}۵a^۲+۴ab}$$

۵۲) c, b, a اعداد حقیقی مثبت‌اند به طوری که $abc=۱$ ثابت کنید.

$$\frac{۱}{a\sqrt{a+b}}+\frac{۱}{b\sqrt{b+c}}+\frac{۱}{c\sqrt{c+a}}\geq\frac{۳}{\sqrt{۲abc}}$$

۵۳) c, b, a اعداد حقیقی و مثبت‌اند به طوری که $a+b+c=۲$ ثابت کنید.

$$\sqrt{\frac{a+b}{۲}-ab}+\sqrt{\frac{a+c}{۲}-ac}+\sqrt{\frac{b+c}{۲}-bc}\geq\sqrt{۲}$$

۵۴) $x, y, z\in\mathbb{R}^+$ به طوری که $x+y+z=۱$ ثابت کنید.

$$x\sqrt{۱-yz}+y\sqrt{۱-xz}+z\sqrt{۱-xy}\geq\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۵۵) $x, y, z\in\mathbb{R}^+$ به طوری که $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=۱$ ثابت کنید.

$$\frac{x^۲+yz}{\sqrt{۲x^۲(y+z)}}+\frac{y^۲+xz}{\sqrt{۲y^۲(x+z)}}+\frac{z^۲+xy}{\sqrt{۲z^۲(x+y)}}\geq ۱$$

(Asian Pacific Mathematical Olympiad 2007)

۵۶) $a, b, c\in\mathbb{R}$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۳$ ثابت کنید.

$$ab^۳+bc^۳+ca^۳\leq ۳$$

فصل ۱۰

پاسخ‌ها

۱) راه حل اول: از نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}+\underbrace{\frac{(a+b+c)^۲}{۹}+\ldots+\frac{(a+b+c)^۲}{۹}}_{\text{۹ بار}}$$

$$\geq ۱۲\sqrt[۱۲]{\frac{(a+b+c)^{۱۸}a^۲b^۲c^۲}{۹^۹}}$$

پس کافیست ثابت کنیم:

$$\sqrt[۱۲]{\frac{(a+b+c)^{۱۸}}{۳۶}(abc)^۲}\geq\sqrt{۳abc(a+b+c)}\Leftrightarrow a+b+c\geq ۳\sqrt[۳]{abc}$$

راه حل دوم: با توجه به نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq ۳\sqrt[۳]{(abc)^۲}$$

و همچنین می‌دانیم

$$(ab+ac+bc)\geq\sqrt{۳abc(a+b+c)}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}\geq ۲(ab+ac+bc)$$

که نتیجه‌ای از نامساوی شور است.

۲) می‌دانیم

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c) = a^3+b^3+c^3+24$$

اگر قرار دهیم $a+b+c=p$ آنگاه نامساوی معادل است با:

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{p^3-24}{3}} \Leftrightarrow p^{27}+8\times 3^{27} \geq 3^{26}p^3$$
$$p^{27}+3^{27}+\ldots+3^{27} \geq 3^{26}p^3$$

که همان حسابی هندسی می‌باشد.

۳) اگر دو طرف نامساوی را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\sum_{cyc}\frac{a}{c} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+ac+bc}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^3}{b}+\sum_{cyc}\frac{a^3c}{b^2}+\sum_{cyc}\frac{a^2c}{b}+2\left(\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}+\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)$$
$$\geq 9(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b}+\frac{a^3c}{b^2}+\frac{a^2c}{b}+\frac{2a^2b}{c}+2ab\right) \geq 7\sum_{cyc}a^2$$
$$\Leftarrow \frac{a^3}{b}+\frac{a^3c}{b^2}+\frac{a^2c}{b}+\frac{a^2b}{c}+\frac{a^2b}{c}+ab+ab \geq 7\sqrt[7]{a^{14}} = 7a^2$$

۴) دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب کرده و با عبارت $a^2+b^2+c^2$ جمع می‌کنیم پس باید ثابت کنیم

$$a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq 9$$

از طرفی می‌دانیم

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a$$

۵) به صورت معادل باید ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+c)}{\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}} \geq 4(a+b+c)$$

از طریق نامساوی حسابی هندسی داریم

$$\frac{(a+b)(a+c)}{\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}} \geq \frac{(a+b)(a+c)}{\frac{(a+b-c)+(a+c-b)}{۲}} = \frac{(a+b)(a+c)}{a}$$

پس باید ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+c)}{a} \geq ۴\sum_{cyc} a \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{bc}{a} \geq \sum_{cyc} a \Leftrightarrow \sum_{cyc}(ab)^{۲} \geq \sum_{cyc} a^{۲}bc$$

که با توجه به نامساوی مشهور $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \geq xy+yz+zx$ بدیهی می‌باشد.

۶) طبق نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a+b}{b+۱}} \geq ۳\sqrt[۶]{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+۱)(b+۱)(c+۱)}}$$

پس کافیست ثابت کنیم $(a+b)(a+c)(b+c) \geq (a+۱)(b+۱)(c+۱)$

اگر قرار دهیم $ab+ac+bc=q, a+b+c=p$ نامساوی بالا معادل است با

$$pq-۱ \geq ۲+p+q \Leftrightarrow (p-۱)(q-۱) \geq ۴ \Leftarrow p,q \geq ۳$$

۷) چون $a+b+c \geq ۳$ پس k مثبتی وجود دارد به طوری که $k \leq ۱$ و داشته باشیم $ka+kb+kc=۳$ قرار دهید $ck=z, bk=y, ak=x$ پس سوال معادل است با اینکه ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\frac{۱}{(\frac{x}{k})^{۲}+(\frac{y}{k})+(\frac{z}{k})} \leq ۱$$

چون $k \leq ۱$ می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\frac{۱}{(\frac{x}{k})^{۲}+(\frac{y}{k})+(\frac{z}{k})} \leq \frac{۱}{x^{۲}+y+z}$$

پس کافیست با شرط $x+y+z=۳$ ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}\frac{۱}{x^{۲}+y+z} \leq ۱$$

از طرفی طبق نامساوی کوشی شوارتز می‌دانیم $(x^{۲}+y+z)(۱+y+z) \geq (x+y+z)^{۲}$ پس داریم

$$\sum_{cyc}\frac{۱}{x^{۲}+y+z} \leq \sum_{cyc}\frac{۱+y+z}{(x+y+z)^{۲}} = \frac{۳+۲(x+y+z)}{(x+y+z)^{۲}} = \frac{۹}{۹} = ۱$$

۸) فرض کنید $z=\min\{x,y,z\}$
تعریف می‌کنیم

$$f(x,y,z)=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{(x-y)^2}\right)-\frac{4}{xy+yz+zx}$$

ابتدا ثابت می‌کنیم

$$f(x,y,z)\geq f(x-z,y-z,0)\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq(x-z)(y-z)$$
$$\Leftrightarrow 2(x+y)\geq z$$

که بدیهی است. پس اگر قرار دهیم $x-z=a$، $y-z=b$ $(a,b\geq 0)$ کافیست ثابت کنیم

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{ab}\Leftrightarrow\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{(ab)^2}\geq\frac{2}{ab}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a-b}-\frac{a-b}{ab}\right)^2\geq 0$$

۹) قرار دهید $b+c-a=2x, a+c-b=2y, a+b-c=2z$ و می‌دانیم با توجه به فرض $x,y,z>0$ می‌باشند.
با توجه به نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$\sum_{cyc}\frac{(2x)^4}{(x+y)(2y)}=\sum_{cyc}\frac{8x^4}{xy+y^2}\geq\frac{8(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$8(x^2+y^2+z^2)^2\geq\left(\sum_{cyc}(x+y)(x+z)\right)\left(\sum_{cyc}(x^2+xy)\right)$$
$$\Leftrightarrow 8\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2\geq\left(\sum_{cyc}x^2+3\sum_{cyc}xy\right)\left(\sum_{cyc}(x^2+xy)\right)$$

(قرار می‌دهیم $\sum_{cyc}x^2=p, \sum_{cyc}xy=q$ و می‌دانیم $p\geq q$)

$$\Leftrightarrow 8p^2\geq(p+3q)(p+q)\Leftrightarrow 7p^2\geq 4pq+3q^2$$
$$\Leftrightarrow 4p(p-q)+3(p+q)(p-q)\geq 0$$

۱۰) اثبات مشابه اثبات سوال ۸.

۱۱)

$$\sum_{cyc}\frac{a^۲}{۱+۲bc}=\sum_{cyc}\frac{a^۲}{a^۲+b^۲+c^۲+۲bc}=\sum_{cyc}\frac{a^۲}{a^۲+(b+c)^۲}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که q ی وجود دارد به طوری که داشته باشیم

$$\frac{a^۲}{a^۲+(b+c)^۲}\geq\frac{۳a^q}{۵(a^q+b^q+c^q)}$$

ابتدا سعی می‌کنیم q را حدس بزنیم! قرار دهید $b=c=۱$ (حالت تساوی)

$$\frac{a^۲}{a^۲+۴}\geq\frac{۳a^q}{۵(a^q+۲)}\Leftrightarrow ۲a^{q+۲}+۱۰a^۲\geq ۱۲a^q$$

پس حدس می‌زنیم $q=\frac{۱۲}{۵}\Leftarrow ۲(q+۲)+۲۰=۱۲q$

حال ثابت می‌کنیم

$$\frac{a^۲}{a^۲+(b+c)^۲}\geq\frac{۳a^{\frac{۱۲}{۵}}}{۵(a^{\frac{۱۲}{۵}}+b^{\frac{۱۲}{۵}}+c^{\frac{۱۲}{۵}})}$$
$$\Leftrightarrow ۵(a^{\frac{۱۲}{۵}}+b^{\frac{۱۲}{۵}}+c^{\frac{۱۲}{۵}})\geq ۳a^{\frac{۱۲}{۵}}+۳a^{\frac{۲}{۵}}(b^۲+c^۲+۲bc)$$
$$\Leftrightarrow ۲a^{\frac{۱۲}{۵}}+۵b^{\frac{۱۲}{۵}}+۵c^{\frac{۱۲}{۵}}\geq ۳a^{\frac{۲}{۵}}b^۲+۳a^{\frac{۲}{۵}}c^۲+۶a^{\frac{۲}{۵}}bc$$

که نامساوی آخر از سه نامساوی حسابی هندسی زیر نتیجه گرفته می‌شود.

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}a^{\frac{۱۲}{۵}}+\frac{۵}{۲}b^{\frac{۱۲}{۵}}\geq ۳a^{\frac{۲}{۵}}b^۲\\ \frac{۱}{۲}a^{\frac{۱۲}{۵}}+\frac{۵}{۲}c^{\frac{۱۲}{۵}}\geq ۳a^{\frac{۲}{۵}}c^۲\\ a^{\frac{۱۲}{۵}}+\frac{۵}{۲}b^{\frac{۱۲}{۵}}+\frac{۵}{۲}c^{\frac{۱۲}{۵}}\geq ۶a^{\frac{۲}{۵}}bc\end{cases}$$

۱۲) با توجه به نامساوی هولدر داریم

$$\left(\sum_{cyc}a(b^۳+c^۳+۶abc)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt[۳]{b^۳+c^۳+۶abc}}\right)^۳\geq\left(\sum_{cyc}a\right)^۴$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$\frac{۸}{۲۷}(\sum_{cyc}a)^۴\geq\sum_{cyc}a(b^۳+c^۳+۶abc)$$

چون نامساوی همگن است می‌توان فرض کرد $a+b+c=۱$ و همچنین قرار می‌دهیم $ab+ac+bc=q$ و $abc=r$ پس باید ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc} ab^۳+ac^۳+۶abc\sum_{cyc} a \leq \frac{۸}{۲۷} \Leftrightarrow (\sum_{cyc} a^۲)(\sum ab)+۵abc\sum_{cyc} a \leq \frac{۸}{۲۷}$$

$$\Leftrightarrow (۱-۲q)(q)+۵r \leq \frac{۸}{۲۷}$$

می‌دانیم $r \leq \frac{q}{۹}$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$(۱-۲q)(q)+\frac{۵q}{۹} \leq \frac{۸}{۲۷} \Leftrightarrow (\frac{۱}{۳}-q)(\frac{۴}{۹}-q) \geq ۰$$

که بدیهی است. $(q \leq \frac{۱}{۳})$

۱۳) کافیست ثابت کنیم

$$\sum_{cyc} \frac{۱}{(a+b)^۲}+۲\sum_{cyc} \frac{۱}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{۲۵}{۴}$$

طبق نامساوی Iran 1996 داریم

$$\sum_{cyc} \frac{۱}{(a+b)^۲} \geq \frac{۹}{۴(\sum_{cyc} ab)}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$\sum_{cyc} \frac{۱}{(a+b)(a+c)} \geq ۲ \Leftrightarrow (\sum_{cyc} a) \geq ((\sum_{cyc} a)(\sum_{cyc} ab)-abc) \Leftrightarrow abc \geq ۰$$

۱۴) یکی از ایده‌های حل نامساوی‌های به فرم $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D} \geq k$ به توان رساندن آن و استفاده از نامساوی کوشی شوارتز می‌باشد.

$$\sum_{cyc} \sqrt{a+(b-c)^۲} \geq \sqrt{۳}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a+\sum_{cyc}(b-c)^۲+۲\sum_{cyc} \sqrt{(a+(b-c)^۲)(b+(a-c)^۲)} \geq ۳$$

از طرفی طبق نامساوی کوشی شوارتز می‌دانیم:

$$(a+(b-c)^۲)(b+(a-c)^۲)$$
$$=(a^۲+ab+ac+(b-c)^۲)(b^۲+ab+bc+(a-c)^۲)$$
$$\geq (۲ab+c\sqrt{ab}+|(a-c)(b-c)|)^۲$$

پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}(b-c)^{۲}+۲\sum_{cyc}(۲ab+c\sqrt{ab}+|(a-c)(a-b)|)\geq ۲$$

از طرفی $\sum|(a-c)(a-b)|\geq\sum(a-b)(a-c)$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}(b-c)^{۲}+۴\sum_{cyc}ab+۲\sum_{cyc}a\sqrt{bc}+۲\sum_{cyc}(a-b)(a-c)\geq ۲$$
$$\Leftrightarrow ۲\sum_{cyc}a^{۲}+\sum_{cyc}a\sqrt{bc}\geq ۱\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^{۲}+\sum_{cyc}a\sqrt{bc}\geq ۲\sum_{cyc}ab$$

طبق نامساوی حسابی هندسی داریم $\sum\limits_{cyc}a\sqrt{bc}\geq ۳(abc)^{\frac{۲}{۳}}$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}a^{۲}+۳(abc)^{\frac{۲}{۳}}\geq ۲\sum_{cyc}ab$$

که با توجه به نامساوی شور بدیهی می‌باشد.

۱۵) سعی کنید از طریق نامساوی کوشی شوارتز آن را نسب به x، y و z متقارن کنید.

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{\sqrt{(xy+yz)}}\leq\sqrt{\left(\sum_{cyc}\frac{xy}{(xy+yz)(xy+xz)}\right)\left(\sum_{cyc}xy(xy+xz)\right)}$$

پس کافیست ثابت کنیم.

$$\left(\sum_{cyc}\frac{۱}{(x+z)(y+z)}\right)\left(\sum_{cyc}(xy)^{۲}+\sum_{cyc}x^{۲}yz\right)\leq\frac{۱}{۲}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{۲\sum\limits_{cyc}x}{(x+y)(x+z)(y+z)}\right)\left(\sum_{cyc}(xy)^{۲}+xyz(\sum_{cyc}x)\right)\leq\frac{۱}{۲}$$

قرار می‌دهیم $xyz=r, xy+yz+zx=q, x+y+z=p=۱$ پس باید ثابت کنیم.

$$۴(q^{۲}-r)\leq q-r\Leftrightarrow ۳r+q-۴q^{۲}\geq ۰$$

حالت ۱) فرض کنید $q\geq\frac{۱}{۴}$ می‌باشد طبق نامساوی شور داریم $r\geq\frac{۴q-۱}{۹}$ پس کافیست ثابت کنیم

$$\frac{۴}{۳}q-\frac{۱}{۳}+q-۴q^{۲}\geq ۰\Leftrightarrow ۴(\frac{۱}{۳}-q)(q-\frac{۱}{۴})\geq ۰$$

حالت ۲) فرض کنید $q < \frac{۱}{۴}$ می‌باشد در این صورت می‌دانیم $r \geq ۰$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$q - ۴q^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow q(۱ - ۴q) \geq ۰$$

که بدیهی‌است.

۱۶) می‌دانیم $a^۲ - a + b^۲ - b + c^۲ - c + d^۲ - d = ۰$
قرار می‌دهیم $d^۲ - d = t, c^۲ - c = z, b^۲ - b = y, a^۲ - a = x$
پس باید ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\left(\frac{۱+\sqrt{۱+۴x}}{۲}\right)\left(\frac{۳+۲x+\sqrt{۱+۴x}}{۲}\right) \leq ۸$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(۲+x)\sqrt{۱+۴x} \leq ۸$$

از طرفی می‌دانیم $(۲+x)\sqrt{۱+۴x} \leq ۵x+۲$ (چرا؟) پس

$$\sum_{cyc}(۲+x)\sqrt{۱+۴x} \leq \sum_{cyc}۵x+۲ = ۵\sum_{cyc}x+۸ = ۸$$

۱۷) از روش مخلوط کامل متغیرها استفاده کنید.

۱۸) طبق نامساوی ایران ۱۹۹۶ می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\frac{ab+ac+bc}{(a+b)^۲} \geq \frac{۹}{۴}$$

پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^۲+۲bc}{(c+b)^۲} - \frac{ab+ac+bc}{(c+b)^۲}\right) \geq ۰ \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^۲} \geq ۰$$

طبق نامساوی شور بدیهی می‌باشد [زیرا اگر $a \geq b \geq c$ باشد آنگاه $\left(\frac{۱}{b+c}\right)^۲ \geq \left(\frac{۱}{a+c}\right)^۲ \geq \left(\frac{۱}{a+b}\right)^۲$]

۱۹)

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^۲}{a^۲+bc} \geq ٦ \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)^۲}{a^۲+bc} - ۲ \geq ۰ \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b^۲+c^۲-۲a^۲}{a^۲+bc} \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^۲((a+b)(a+b-c)(c^۲+ab)) \geq ۰$$

فرض کنید $a \geq b \geq c$ آنگاه می‌دانیم $S_b, S_c \geq ۰$ پس کافیست ثابت کنیم

$$a^۲ S_b + b^۲ S_a \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۲(a+c)(a+c-b)(b^۲+ac) + b^۲(b+c)(b+c-a)(a^۲+bc) \geq ۰$$
$$\Leftarrow (a^۳+a^۲c)(a-b)(b^۲+ac) + (b^۳+b^۲c)(b-a)(a^۲+bc) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)[a^۳b^۲ + a^۴c + a^۳c^۲ - a^۲b^۳ - b^۴c - b^۳c^۲] \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲(a^۲b^۲ + c(a^۳+a^۲b+ab^۲+b^۳) + c^۲(a^۲+ab+b^۲)) \geq ۰$$

(۲۰

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\right) - \frac{۳}{۲} \geq \frac{۲}{۳} - \frac{۲(ab+ac+bc)}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^۲}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{۲\sum\limits_{cyc}(a-b)^۲}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^۲ \left[\frac{۱}{(a+c)(b+c)} - \frac{۲}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}\right] \geq ۰$$

طبق روش مجموع مربعات داریم

$$S_a = \frac{۱}{(a+c)(b+a)} - \frac{۲}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$
$$S_b = \frac{۱}{(a+b)(b+c)} - \frac{۲}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$
$$S_c = \frac{۱}{(a+c)(b+c)} - \frac{۲}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)}$$

با فرض $a \geq b \geq c$ بدیهی است $S_c, S_b \geq ۰$ پس کافیست ثابت کنیم $S_a + S_b \geq ۰$

$$S_a + S_b = \frac{۱}{(a+c)(b+a)} + \frac{۱}{(a+b)(b+c)} - \frac{۴}{۳(a^۲+b^۲+c^۲)} \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow \frac{۳(a^۲+b^۲+c^۲) - ۲(a^۲+ab+ac+bc)}{(a+c)(b+a)}$$
$$+ \frac{۳(a^۲+b^۲+c^۲) - ۲(b^۲+ab+ac+bc)}{(a+b)(b+c)} \geq ۰$$
$$\Leftarrow \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{(a+c)} + \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{(b+c)} \geq ۰$$
$$\Leftarrow (a^۲-b^۲)\left(\frac{۱}{b+c} - \frac{۱}{a+c}\right) \geq ۰ \Leftrightarrow \frac{(a-b)^۲(a+b)}{(a+c)(b+c)} \geq ۰$$

پس اثبات کامل شد.

۲۱)

$$(a-1)^4(a^2+a+1)\geq 0 \Longrightarrow 2(a^2+1)^3\geq(1+a^3)(1+a)^3$$
$$\Longrightarrow 8\left(\frac{a^2+1}{a+1}\right)^3\left(\frac{b^2+1}{b+1}\right)^3\left(\frac{c^2+1}{c+1}\right)^3 \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)$$

پس کافیست ثابت کنیم $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\geq(1+abc)^3$ که با توجه به مثال (۱) فصل ۷ بدیهی می‌باشد.

۲۲) چون $xyzt=1$ پس می‌توان d,c,b,a مثبتی یافت بطوری که $x=\frac{bcd}{a^3}$، $y=\frac{acd}{b^3}$، $z=\frac{abd}{c^3}$ و $t=\frac{abc}{d^3}$ (چرا؟) در این صورت کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{a,b,c,d}\frac{1}{\left(1+\frac{bcd}{a^3}\right)^2}\geq 1 \Leftrightarrow \sum_{a,b,c,d}\frac{a^6}{(a^3+bcd)^2}\geq 1$$

طبق نامساوی کوشی می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\frac{a^6}{(a^3+bcd)^2}\geq\frac{(\sum_{cyc}a^3)^2}{\sum_{cyc}(a^3+bcd)^2}$$

کافیست ثابت کنیم $\sum_{cyc}a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3\geq 2\sum_{cyc}a^3bcd+\sum_{cyc}(bcd)^2$ که بدیهی می‌باشد.

۲۳) در این سوال می‌توان فرض کرد $c\geq b\geq a$ (چرا؟) نتیجه می‌دهد.

$$a(b-a)(b-c)\leq 0 \Longrightarrow ab^2+a^2c\leq abc+a^2b$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$2abc+a^2b+bc^2\leq 4 \Leftrightarrow b(a+c)^2\leq 4 \Leftrightarrow b(3-b)^2\leq 4$$
$$\Leftrightarrow -b^3+6b^2-9b+4\geq 0 \Leftrightarrow (b-1)^2(4-b)\geq 0$$

۲۴) دو طرف نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x+y}{z}}\right)^{2} \geq \frac{6(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}} \geq 6\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{x^{2}}{yz}}$$

طبق کوشی شوارتز داریم $\sqrt{(x+y)(x+z)} \geq x+\sqrt{yz}$ پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+2\sum_{cyc}\left(\frac{x}{\sqrt{yz}}\right)+6 \geq 6\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{x^{2}}{yz}}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{\sqrt{yz}}+\frac{x}{\sqrt{yz}}+1+1\right) \geq 6\sum_{cyc}\sqrt[6]{\frac{x^{4}}{y^{2}z^{2}}}$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی بدیهی می‌باشد.

۲۵) راه حل اول) طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$\sum_{cyc}\frac{1}{ab+2c^{2}+2c} = \sum_{cyc}\frac{(ab)^{2}}{(ab)^{3}+2a^{2}b^{2}c^{2}+2(ab)^{2}c}$$
$$\geq \frac{(\sum_{cyc} ab)^{2}}{\sum_{cyc} a^{3}b^{3}+2\sum_{cyc}(ab)^{2}c+6a^{2}b^{2}c^{2}}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$(\sum_{cyc} ab)^{3} \geq \sum_{cyc}(ab)^{3}+6a^{2}b^{2}c^{2}+2\sum_{cyc}(ab)^{2}c$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(ab)^{3}+3\sum_{cyc}(a^{3}b^{2}c+a^{3}c^{2}b)+6(abc)^{2}$$
$$\geq \sum_{cyc}(ab)^{3}+2\sum_{cyc}(ab)^{2}c+6(abc)^{2}$$
$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}(a^{3}b^{2}c+a^{3}c^{2}b) \geq 2\sum_{cyc}(ab)^{2}(ac+bc+c^{2})$$
$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}(a^{3}b^{2}c+a^{3}c^{2}b) \geq 2\left(\sum_{cyc}(a^{3}b^{2}c+a^{3}c^{2}b)\right)+6(abc)^{2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^{3}b^{2}c+a^{3}c^{2}b) \geq 6(abc)^{2}$$

که طبق حسابی هندسی درست می‌باشد.

راه حل دوم)

$$\frac{ab+ac+bc}{ab+۲c^۲+۲c} \geq \frac{ab}{ab+ac+bc}$$

۲۶)

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a} \geq \frac{۳}{۲}$$
$$\Leftrightarrow a^{k-۱}+b^{k-۱}+c^{k-۱} \geq \frac{۳}{۲}+\frac{a^{k-۱}b}{a+b}+\frac{b^{k-۱}c}{b+c}+\frac{c^{k-۱}a}{a+c}$$

طبق حسابی هندسی می‌دانیم $b+c \geq ۲\sqrt{bc}, a+c \geq ۲\sqrt{ac}, a+b \geq ۲\sqrt{ab}$

پس کافی است ثابت کنیم

$$a^{k-\frac{۳}{۲}}b^{\frac{۱}{۲}}+b^{k-\frac{۳}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}}+c^{k-\frac{۳}{۲}}a^{\frac{۱}{۲}}+۳ \leq ۲(a^{k-۱}+b^{k-۱}+c^{k-۱})$$

که از جمع حسابی هندسی‌های زیر می‌توان نتیجه گرفت.

$$a^{k-۱}+b^{k-۱}+c^{k-۱} \geq ۳\sqrt[۳]{a^{k-۱}b^{k-۱}c^{k-۱}}=۳$$
$$(۲k-۳)a^{k-۱}+b^{k-۱} \geq (۲k-۲)a^{k-\frac{۳}{۲}}b^{\frac{۱}{۲}}$$
$$(۲k-۳)b^{k-۱}+c^{k-۱} \geq (۲k-۲)b^{k-\frac{۳}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}}$$
$$(۲k-۳)c^{k-۱}+a^{k-۱} \geq (۲k-۲)c^{k-\frac{۳}{۲}}a^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۷) با حسابی هندسی داریم

$$\frac{۴x^۲y^۲}{z+xy}+\frac{x(y+z)}{۲}+\frac{y(x+z)}{۲} \geq ۳\left(\frac{۴x^۲y^۲}{z+xy}\times\frac{x(y+z)}{۲}\times\frac{y(x+z)}{۲}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$
$$=۳xy\left(\frac{(x+z)(y+z)}{z+xy}\right)^{\frac{۱}{۳}}=۳xy$$
$$\Longrightarrow \frac{۴x^۲y^۲}{z+xy} \geq \frac{۴xy-xz-yz}{۸}$$
$$\Longrightarrow \sum_{cyc}\frac{x^۲y^۲}{z+xy} \geq \sum_{cyc}\frac{۴xy-xz-yz}{۸}=\frac{xy+yz+zx}{۴}$$

۲۸) ابتدا ثابت می‌کنیم برای $x,y>۰$ داریم

$$\sqrt[۳]{\frac{x^۳+y^۳}{۲}} \leq \frac{(x^۲+y^۲)}{x+y} \Leftrightarrow (x-y)^۴(x^۲+xy+y^۲) \geq ۰$$

پس داریم

$$\sum_{a,b,c,d}\sqrt[۳]{\frac{a^۳+b^۳}{۲}}\leq\sum_{a,b,c,d}\frac{a^۲+b^۲}{a+b}$$

از طرفی می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\left((a+b)-\left(\frac{a^۲+b^۲}{a+b}\right)\right)=\sum_{cyc}\frac{۲ab}{a+b}=\sum_{cyc}\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

که طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$۲\sum_{cyc}\frac{۱}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\geq ۲\frac{۴^۲}{۲(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d})}=\frac{۳۲}{۸}=۴$$

۲۹) طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$x+y+z-xyz=x(۱-yz)+y+z\leq\sqrt{(x^۲+(y+z)^۲)(۱+(۱-yz)^۲)}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$(۲+۲yz)(۲-۲yz+(yz)^۲)\leq ۴\Leftrightarrow ۲(yz)^۳\leq ۲(yz)^۲$$

که با توجه به نامساوی $۲\geq y^۲+z^۲\geq ۲yz$ بدیهی می‌باشد.

۳۰) می‌توان نامساوی را به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{۲(x+y+z+۳)}$$

با توجه به شرط، اعداد حقیقی مثبت a,b,c وجود دارند به طوری که داشته باشیم $x=\frac{a+b}{c},y=\frac{a+c}{b},z=\frac{b+c}{a}$ (چرا؟) پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\leq\sqrt{۲\left(\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+۳\right)}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\leq\sqrt{۲(a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\leq\sqrt{(a+b+a+c+b+c)(\frac{۱}{c}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a})}$$

که طبق نامساوی کوشی شوارتز بدیهی می‌باشد.

۳۱) از نامساوی حسابی هندسی استفاده کنید.

۳۲) طبق نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sum_{cyc}\frac{۶a}{۳a^۲+۲b^۲+c^۲}=\sum_{cyc}\frac{a}{\frac{a^۲+a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+c^۲}{۶}}\leq\sum_{cyc}\frac{a}{a\sqrt[۳]{b^۲c}}$$
$$=\sum_{cyc}\frac{۱}{\sqrt[۳]{b^۲c}}\leq\frac{۱}{۳}\sum_{cyc}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)=\sum_{cyc}\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}$$

۳۳) با توجه به فرض داریم $۱۲a^۲+۶b^۲+۴c^۲+۳d^۲\leq ۱۲۰$ طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$۱۰۰\geq(۱۲a^۲+۶b^۲+۴c^۲+۳d^۲)(\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳})\geq(a+b+c+d)^۲$$

که نتیجه می‌دهد

$$a+b+c+d\leq|a+b+c+d|\leq ۱۰$$

۳۴)

$$\sum_{cyc}\frac{۱}{۱+x^۲(y+z)}\leq\frac{۳}{۱+۲xyz}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(۱-\frac{۱}{۱+x^۲(y+z)}\right)\geq ۳-\frac{۳}{۱+۲xyz}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^۲(y+c)}{۱+x^۲(y+z)}\geq\frac{۶xyz}{۱+۲xyz}$$

طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$\sum_{cyc}\frac{x^۲(y+z)}{۱+x^۲(y+z)}=\sum_{cyc}\frac{(xy+xz)^۲}{y+z+(xy+xz)^۲}\geq\frac{(۲(xy+yz+xz))^۲}{۲\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}(xy+xz)^۲}$$

پس باید ثابت کنیم.

$$\frac{۳۶}{۲(\sum_{cyc}x)+\sum_{cyc}(۳-yz)^۲}\geq\frac{۶xyz}{۱+۲xyz}$$
$$\Leftrightarrow\frac{۶}{۲(\sum_{cyc}x)+\sum_{cyc}(xy)^۲+۹}\geq\frac{xyz}{۱+۲xyz}$$

اگر قرار دهیم $x+y+z=p, xy+xz+yz=q=۳, xyz=r$ نامساوی معادل است با

$$\frac{۶}{۲p+(q^{۲}-۲pr)+۹} \geq \frac{r}{۱+۲r} \Leftrightarrow pr^{۲}-r(p+۳)+۳ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (r-۱)(pr-۳) \geq ۰$$

از طرفی می‌دانیم

$$(xy+yz+zx)^{۲} \geq ۳xyz(x+y+z) \Longrightarrow pr \leq ۳$$
$$xy+yz+zx \geq ۳(xyz)^{\frac{۲}{۳}} \Longrightarrow r \leq ۱$$

۳۵) طبق کوشی شوارتز داریم:

$$\sum_{cyc} \frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{۳c}+\sqrt{ab})} = \sum_{cyc} \frac{(bc)^{۲}}{abc(\sqrt{۳c}+\sqrt{abc})} \geq \frac{(\sum_{cyc} ab)^{۲}}{abc(\sqrt{۳}+۳\sqrt{abc})}$$

۳۶)

$$(۱+abc)\left(\frac{۱}{a(۱+b)}+\frac{۱}{b(۱+c)}+\frac{۱}{c(۱+a)}\right)+۳$$
$$=\sum_{cyc} \frac{۱+abc+a+ab}{a(۱+b)} = \sum_{cyc} \frac{۱+a}{a(۱+b)} + \sum_{cyc} \frac{b(۱+c)}{۱+b}$$

طبق نامساوی حسابی هندسی برای دو نامساوی داریم

$$\sum_{cyc} \frac{۱+a}{a(۱+b)} + \sum_{cyc} \frac{b(۱+c)}{۱+b} \geq \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}} + ۳\sqrt[۳]{abc}$$

همچنین می‌دانیم

$$\frac{\frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}}+۳\sqrt[۳]{abc}-۳}{۱+abc} = \frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}(۱+\sqrt[۳]{abc})}$$

که نتیجه خواسته شده را می‌دهد.

۳۷) قرار دهید $x=\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}, y=\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}, z=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ که نتیجه می‌دهد.

$$b+c-a = x^{۲} - \frac{(x-y)(x-z)}{۲}$$

پس داریم

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}=\sqrt{۱-\frac{(x-y)(x-z)}{۲x^۲}}$$

همچنین می‌دانیم $\sqrt{۱-t}\leq ۱-\frac{t}{۲}$ (مماس) پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}\left(۱-\frac{(x-y)(x-z)}{۴x^۲}\right)\leq ۳\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^{-۲}(x-y)(x-z)\geq ۰$$

که اگر فرض کنیم $x\geq y\geq z$ می‌دانیم $z^{-۲}\geq y^{-۲}\geq x^{-۲}$ که طبق حالت کلی شور بدیهی می‌باشد.

۳۸) می‌دانیم (چرا؟)

$$\sqrt[۳]{\frac{a^۳}{a^۳+(b+c)^۳}}\geq\frac{a^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

نتیجه می‌دهد

$$\sum_{cyc}\sqrt[۳]{\frac{a^۳}{a^۳+(b+c)^۳}}\geq\sum_{cyc}\frac{a^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}=۱$$

۳۹) فرض کنید $a\geq b\geq c$

$$\sum_{cyc}\frac{a^۳+۳abc}{(b+c)^۲}\geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a\left(\frac{a^۲+۳bc}{(b+c)^۲}-۱\right)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)+ab(a-b)+ac(a-c)}{(b+c)^۲}\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a}{(b+c)^۲}(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(a-b)^۲\left(\frac{ab(a+۲c+b)}{(b+c)^۲(a+c)^۲}\right)\geq ۰$$

طبق تعمیم نامساوی شور بدیهی می‌باشد.

۴۰) می‌دانیم $(a+b)(a+c)(b+c)\geq\frac{۸}{۹}(a+b+c)(ab+ac+bc)$ و طبق کوشی داریم:

$$\Longrightarrow\sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)}\geq\sqrt{\frac{۸}{۹}}\sqrt{(a+b+c)(ab+ac+bc)}$$

$$\geq\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}(a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a})$$

۴۱) می‌دانیم $\sqrt{3} \geq x+y+z \Leftarrow \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z$
پس کافیست ثابت کنیم

$$x+y+z+\frac{1}{xyz} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

حال از طریق شرط نامساوی را همگن می‌کنیم.

$$x+y+z+\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{xyz} \geq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x^2+y^2+z^2)$$
$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}x^4+6\sum_{cyc}x^2y^2+3\sum_{cyc}x^2yz \geq 4\sum_{cyc}(x^3y+x^3z)+4\sum x^2yz$$
$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}x^2y^2+3\sum_{cyc}x^2yz \geq 4\sum_{cyc}(x^3y+x^3z)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2+(x^4+y^4+z^4-x^2yz-y^2xz-z^2xy) \geq 0$$

که طبق نامساوی حسابی هندسی بدیهی می‌باشد.

۴۲) می‌دانیم:

$$[3(a^2+b^2+c^2)]^2 = [2(a-b)^2+2(a-c)(b-c)+(a+b+c)^2]^2$$
$$\geq 8|(a-c)(b-c)|(2(a-b)^2+(a+b+c)^2)$$
$$\geq 16\sqrt{2}|(a+b+c)(a-c)(b-c)(a-b)|$$

و حالت تساوی وقتی رخ می‌دهد که داشته باشیم

$$a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}, b=\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}, c=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

پس

$$(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c) \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}$$

۴۴) $c=\frac{x}{z}, b=\frac{z}{y}, a=\frac{y}{x}$ داریم

$$\frac{a}{b^2(c+1)}=\frac{y^3}{zx(x+z)}, \frac{b}{c^2(a+1)}=\frac{z^3}{xy(x+y)}, \frac{c}{a^2(b+1)}=\frac{x^3}{yz(y+z)}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{y+z} \geq \frac{3}{2}xyz$$

طبق کوشی شوارتز می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\frac{x^۴}{y+z}\geq\frac{(\sum_{cyc}x^۲)^۲}{۲\sum_{cyc}x}\geq\frac{\left(\frac{(x+y+z)}{۳}\right)^۲}{۲\sum_{cyc}x}$$

پس باید ثابت کنیم

$$\left(\frac{x+y+z}{۳}\right)^۳\geq xyz$$

که طبق نامساوی حسابی هندسی بدیهی می‌باشد.

۴۵) $c=\frac{xy}{z^۲},b=\frac{xz}{y^۲},a=\frac{yz}{x^۲}$

۴۶)

$$\sum_{cyc}a\sqrt{a^۲+۳bc}=\sum_{cyc}\frac{a^۳+۳abc}{\sqrt{a^۲+۳bc}}=\sum_{cyc}\frac{(a^۳+۳abc)(b+c)}{(b+c)\sqrt{a^۲+۳bc}}$$

طبق نامساوی حسابی هندسی داریم

$$\sum_{cyc}\frac{(a^۳+۳abc)(b+c)}{(b+c)\sqrt{a^۲+۳bc}}\geq ۲\sum_{cyc}\frac{(a^۳+۳abc)(b+c)}{(b+c)^۲+a^۲+۳bc}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$\sum_{cyc}\frac{۲(a^۳b+a^۳c+۳ab^۲c+۳abc^۲)}{a^۲+b^۲+c^۲+۵bc}\geq\sum_{cyc}(ab+ac)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab(a^۲-b^۲)+ac(a^۲-c^۲)}{a^۲+b^۲+c^۲+۵bc}\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab(a+b)(a-b)^۲}{(a^۲+b^۲+c^۲+۵bc)(a^۲+b^۲+c^۲+۵ac)}\geq ۰$$

۴۷) ابتدا یک چند جمله‌ای درجه ۳ تشکیل می‌دهیم که a و b و c ریشه‌های این چندجمله‌ای باشند. (از طریق اتحاد ویت) $(r=abc)$

$$p(x)=x^۳-۶x^۲+۹x-r$$

چون این چند جمله‌ای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد پس باید مقدار ماکسیمم نسبی تابع، مثبت و مقدار مینیمم نسبی آن، منفی باشد.

$$p'(x)=۰\Longrightarrow ۳x^۲-۱۲x+۹=۰\Longrightarrow x=۱,۳$$

پس نقاط $x = ۱,۳$ نقاط اکسترمم تابع می‌باشند، پس باید داشته باشیم $f(۱) > ۰$ و $f(۳) < ۰$ (چرا؟)

$$f(۱) > ۰ \Longrightarrow ۴ - r > ۰, f(۰) < ۰ \Longrightarrow -r < ۰$$

از آنجایی که می‌دانیم برای یک چندجمله‌ای اگر داشته باشیم $f(a)f(b) < ۰$ آنگاه چند جمله‌ای f در بازه (a,b) حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد، پس کافیست ثابت کنیم $f(۳)f(۴) < ۰, f(۱)f(۳) < ۰, f(۰)f(۱) < ۰$

از طرفی می‌دانیم

$$f(۰)f(۱) = f(۱)f(۳) = f(۳)f(۴) = (-r)(۴ - r) < ۰$$

۴۸)

$$\sum_{cyc} \frac{۱}{۵(a^۲ + b^۲) - ab} = \sum_{cyc} \frac{(a + b + ۲c)^۲}{(۵(a^۲ + b^۲) - ab)(a + b + ۲c)^۲}$$
$$\geq \frac{۱۶(\sum_{cyc} a)^۲}{\sum_{cyc}(۵(a^۲ + b^۲) - ab)(a + b + ۲c)^۲}$$

۴۹)

$$\sum_{cyc} \frac{(\cos^۲(\frac{A}{۲}))(\cos^۲(\frac{B}{۲}))}{(\cos^۲(\frac{C}{۲}))} = \sum_{cyc} \frac{(۱ + \cos(A))(۱ + \cos(B))}{۲(۱ + \cos(C))}$$

فرض کنید $c = \tan(\frac{C}{۲}), b = \tan(\frac{B}{۲}), a = \tan(\frac{A}{۲})$ داریم $ab + ac + bc = ۱$

$$\sum_{cyc} \frac{(۱ + a^۲)}{(۱ + b^۲)(۱ + c^۲)} = \sum_{cyc} \frac{۱}{\frac{(۱ + b^۲)(۱ + c^۲)}{۱ + a^۲}}$$
$$= \sum_{cyc} \frac{۱}{\frac{(ab + ac + bc + a^۲)(ab + ac + bc + c^۲)}{ab + ac + bc + b^۲}}$$
$$= \sum_{cyc} \frac{۱}{\frac{(a + b)(a + c)(b + c)(a + c)}{(a + b)(b + c)}}$$
$$= \sum_{cyc} \frac{۱}{(b + c)^۲} \geq \frac{۹}{۴}$$

که با توجه به نامساوی Iran 1996 بدیهی است.

۵۰) طبق نامساوی میانگین توانی می‌دانیم

$$\left(\frac{۱}{۳}\sum_{cyc}\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}+۶b}\right)^{۳} \geq \frac{۱}{۳}\left(\sum_{cyc}\left(\frac{۱}{a}+۶b\right)\right)$$

از طرفی می‌دانیم

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ac}{c}-(a+b+c)=\frac{\sum a^{۲}(b-c)^{۲}}{۲abc}\geq ۰$$

داریم

$$\sum_{cyc}\left(\frac{۱}{a}+۶b\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{ab+ac+bc}{a}+۶b\right)$$
$$=۸\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{ab}{c}\leq ۶\sum_{cyc}a+۳\sum_{cyc}\frac{ab}{c}$$
$$=\frac{۳(ab+ac+bc)^{۲}}{abc}=\frac{۳}{abc}$$

۵۱) طبق نامساوی کوشی شوارتز داریم.

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{a^{۲}+ab+b^{۲}}\right)^{۲}\leq\left(\sum_{cyc}\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{a+b}\right)\left(\sum_{cyc}(a+b)\right)$$
$$=۲\sum_{cyc}(a^{۲}+ab+b^{۲})+۲\sum_{cyc}\frac{c(a^{۲}+ab+b^{۲})}{a+b}$$
$$=۴\sum_{cyc}a^{۲}+۶\sum_{cyc}ab-۲abc\sum_{cyc}\frac{۱}{a+b}$$

پس کافیست ثابت کنید.

$$\sum_{cyc}a^{۲}+۲abc\sum_{cyc}\frac{۱}{a+b}\geq ۲\sum_{cyc}ab \Leftarrow \sum_{cyc}a^{۲}+\frac{۹abc}{\sum_{cyc}a}\geq ۲\sum_{cyc}ab$$

با توجه به نامساوی شور بدیهی می‌باشد.

۵۲) نامساوی معادل است با اینکه ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}\frac{bc}{\sqrt{a+b}}\geq\frac{۳\sqrt{abc}}{\sqrt{۲}}$$

از طرفی طبق نامساوی هولدر می‌دانیم

$$\left(\sum_{cyc} bc(a+b)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{bc}{\sqrt{a+b}}\right)^{۲} \geq \left(\sum_{cyc} ab\right)^{۳}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$۲(\sum_{cyc} ab)^{۳} \geq ۹abc(\sum_{cyc}(a^{۲}b) + ۳abc)$$
$$\Leftrightarrow ۲\sum_{cyc}(ab)^{۳} + ٦(\sum_{cyc} a^{۳}c^{۲}b) \geq ۳(\sum_{cyc} a^{۳}b^{۲}c) + ۱۵a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

از طرفی طبق نامساوی حسابی هندسی داریم

$$(ab)^{۳} + a^{۳}c^{۲}b \geq ۲a^{۳}b^{۲}c$$
$$(ac)^{۳} + c^{۳}b^{۲}a \geq ۲c^{۳}a^{۲}b$$
$$(bc)^{۳} + b^{۳}a^{۲}c \geq ۲b^{۳}c^{۲}a$$

نتیجه می‌دهد

$$۲\sum_{cyc}(ab)^{۳} + ۲\sum_{cyc} a^{۳}c^{۲}b \geq ۴\sum_{cyc} a^{۳}b^{۲}c$$

در آخر باید ثابت کنیم

$$۴\sum_{cyc} a^{۳}c^{۲}b + \sum_{cyc} a^{۳}b^{۲}c \geq ۱۵a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

که با توجه به نامساوی حسابی هندسی درست است.

(۵۵

$$\sum_{cyc}\frac{x^{۲}+yz}{\sqrt{۲x^{۲}(y+z)}} = \sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{۲x^{۲}(y+z)}} + \sum_{cyc}\sqrt{\frac{y+z}{۲}}$$

از طرفی طبق کوشی می‌دانیم

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{y+z}{۲}} \geq \sum_{cyc}\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{۲} = ۱$$

پس کافیست ثابت کنیم.

$$\sum_{cyc}(x-y)(x-z)\left(\frac{۱}{\sqrt{۲x^{۲}(y+z)}}\right) \geq ۰$$

که طبق تعمیم شور درست است.

(۵۶

$$(a^۲+b^۲+c^۲)^۲-۳(a^۳b+b^۳c+c^۳a)$$
$$=\frac{۱}{۲}\sum_{cyc}(a^۲-c^۲+ac+bc-۲ab)^۲\geq ۰$$