

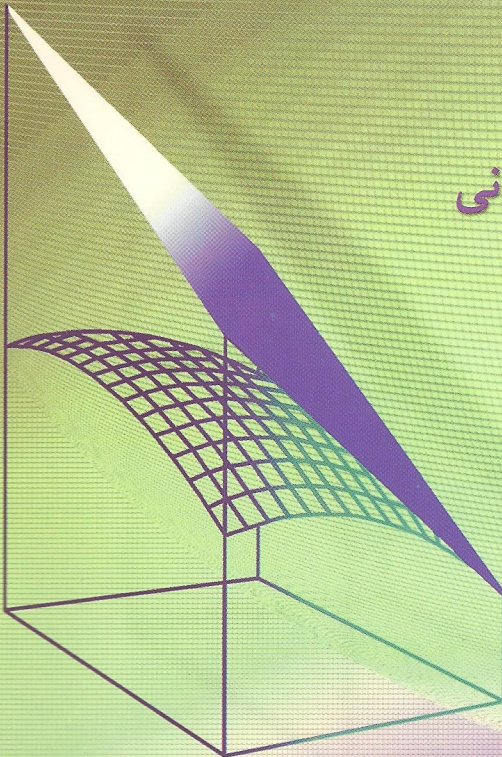


نیمصفحه پوانکاره

(مدخلی بر هندسه جدید)

سال استال

ترجمه محمد جلوداری مقانی



نیمصَفْحَةُ پوانکاره

(مدخلی بر هندسه جدید)

سال اِستال

ترجمه محمد جلوداری ممقانی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



The Poincaré Half-Plane (A Gateway to Modern Geometry)

Saul Stahl

James and Bartlett Publishers, 1993

نیمصفحه پوانکاره (مدخلی بر هندسه جدید)

تألیف سال استال

ترجمه دکتر محمد جلوداری ممقانی

ویراسته دکتر محمد هادی شفیعیها

نسخه پرداز: محمد سلمانی محمدآبادی

حروفچین: منیژه دیارمند

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۸۱

تعداد ۳۰۰۰

چاپ: هورخش

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Stahl, Saul

استال، سال

نیمصفحه پوانکاره (مدخلی بر هندسه جدید) / سال استال؛ ترجمه محمد جلوداری ممقانی. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.

۳۳۹ ص. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۰۸۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۳۴)

ISBN 964-01-1087-6

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی:

The poincaré half-plane: a gateway to modern geometry.

۱. هندسه غیر اقلیدسی. الف. جلوداری ممقانی، محمد، ۱۳۲۹ - مترجم. ب.

مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۶/۹

QA۶۸۵/الف

۱۳۸۱

م۸۱ - ۲۹۴۳۴

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۵	۱ هندسه اقلیدسی
۵	۱.۱ تاریخچه هندسه اقلیدسی
۸	۲.۱ گزیده‌هایی از اصول اقلیدس
۲۹	۳.۱ بنیادستی (اصل موضوعی) سازی هیلبرت از هندسه اقلیدسی (اختیاری)
۳۵	۴.۱ صورتهای مختلف اصل موضوع پنجم اقلیدس
۳۹	۵.۱ تمرین
۴۳	۲ حرکتهای صلب اقلیدسی
۴۳	۱.۲ مقدمه

۴۴	۲.۲	حرکتهای صلب
۴۶	۳.۲	انتقال، دوران، تقارن
۵۳	۴.۲	لغزه
۵۶	۵.۲	قضیه‌های اصلی
۵۸	۶.۲	حرکتهای صلب و هندسهٔ مطلق
۵۹	۷.۲	تمرین
۶۳	۳	انعکاس
۶۳	۱.۳	یک تبدیل ناصلب جالب
۷۳	۲.۳	یکی از کاربردهای انعکاس (اختیاری)
۷۵	۳.۳	تمرین
۷۷	۴	صفحهٔ هذلولوی
۷۷	۱.۴	فاصلهٔ هذلولوی
۸۱	۲.۴	خطهای راست هذلولوی
۸۶	۳.۴	زاویه‌های هذلولوی
۸۶	۴.۴	حرکتهای صلب هذلولوی
۸۹	۵.۴	هندسهٔ ریمانی (اختیاری)
۹۲	۶.۴	تمرین
۹۶	۵	هندسهٔ اقلیدسی در تقابل با هندسهٔ هذلولوی
۹۶	۱.۵	مروری دوباره بر اصلهای موضوع اقلیدس
۱۰۶	۲.۵	هندسهٔ مطلق
۱۰۶	۳.۵	هندسهٔ هذلولوی
۱۰۷	۴.۵	حرکتهای صلب هذلولوی
۱۰۹	۵.۵	تمرین
۱۱۱	۶	زاویه‌های مثلث هذلولوی
۱۱۱	۱.۶	مقدمه

۱۱۱	۲.۶	وضع استاندهٔ یک مثلث
۱۱۳	۳.۶	مجموع زاویه‌های مثلث هذلولوی
۱۲۲	۴.۶	یک قضیهٔ جدید قابلیت انطباق
۱۲۴	۵.۶	موزائیک‌بندیهای منتظم (اختیاری)
۱۲۸	۶.۶	تمرین
۱۳۰	۷	مساحت هذلولوی
۱۳۰	۱.۷	تعریف کلی مساحت
۱۳۵	۲.۷	مساحت مثلث هذلولوی
۱۳۸	۳.۷	تمرین
۱۴۰	۸	مثلثات مثلث هذلولوی
۱۴۰	۱.۸	مثلثات پاره‌خطهای هذلولوی
۱۴۳	۲.۸	مثلثهای قائم‌الزاویهٔ هذلولوی
۱۴۷	۳.۸	مثلث هذلولوی کلی
۱۵۱	۴.۸	تمرین
۱۵۴	۹	اعداد مختلط و حرکت‌های صلب
۱۵۴	۱.۹	اعداد مختلط و حرکت‌های صلب اقلیدسی
۱۶۱	۲.۹	حرکت‌های صلب هذلولوی
۱۶۸	۳.۹	نمودارهای جریان اقلیدسی
۱۷۱	۴.۹	نمودارهای جریان هذلولوی-دورانها
۱۷۱	۵.۹	نمودارهای جریان هذلولوی-انتقالها
۱۷۸	۶.۹	نمودارهای جریان هذلولوی-حالت کلی
۱۸۳	۷.۹	حرکت‌های صلب هذلولوی-نمایش هندسی
۱۸۶	۸.۹	تمرین
۱۹۰	۱۰	هندسهٔ مطلق و زاویه‌های مثلث
۱۹۰	۱.۱۰	مجموع زاویه‌های مثلث

۱۹۶	۲.۱۰ تمرین
۱۹۷	۱۱ مثلثات کروی و هندسه بیضوی
۱۹۷	۱.۱۱ مقدمه
۱۹۸	۲.۱۱ ژئودزیکهای کره
۲۰۳	۳.۱۱ مثلثات کروی
۲۰۶	۴.۱۱ مساحت‌های کروی
۲۰۸	۵.۱۱ نگاهی به مساحت زمین (اختیاری)
۲۱۱	۶.۱۱ هندسه بیضوی
۲۱۲	۷.۱۱ تمرین
۲۱۵	۱۲ هندسه دیفرانسیل و خمیدگی گاوسی
۲۱۵	۱.۱۲ هندسه دیفرانسیل
۲۲۳	۲.۱۲ مروری بر طولها و مساحتها در رویه‌ها
۲۲۹	۳.۱۲ فرمول خمیدگی گاوس در یک نقطه
۲۳۲	۴.۱۲ مروری بر هندسه ریمانی
۲۴۰	۵.۱۲ تمرین
۲۴۲	۱۳ نسبت ناهمساز و الگوی قرص واحد
۲۴۲	۱.۱۳ مقدمه
۲۴۳	۲.۱۳ تبدیلهای هم‌مدیس
۲۴۴	۳.۱۳ نسبت ناهمساز
۲۴۹	۴.۱۳ الگوی قرص واحد و روند نماهای آن
۲۵۷	۵.۱۳ حرکت‌های صلب روشن الگوی قرص واحد
۲۶۱	۶.۱۳ متریک ریمانی الگوی قرص واحد
۲۶۴	۷.۱۳ موزائیک‌بندیهای منتظم الگوی قرص واحد
۲۶۸	۸.۱۳ تمرین

۲۷۱	۱۴ الگوی بلترامی-کلاین
۲۷۱	۱.۱۴ مقدمه
۲۷۳	۲.۱۴ الگوی بلترامی-کلاین
۲۸۴	۳.۱۴ تمرین
۲۸۶	۱۵ تاریخچه مختصر هندسه ناقلیدسی
۲۸۶	۱.۱۵ تاریخچه
۲۹۵	۲.۱۵ تمرین
۲۹۶	۱۶ کره و کره ساعتی
۲۹۶	۱.۱۶ مقدمه
۲۹۸	۲.۱۶ فضای هذلولوی و حرکت‌های صلب آن
۳۰۲	۳.۱۶ ژئودزیکهای هذلولوی
۳۰۶	۴.۱۶ تصویرگنجنگاشتی کره
۳۱۲	۵.۱۶ هندسه کره و کره ساعتی
۳۱۶	۶.۱۶ تمرین
۳۱۸	پیوست: اثبات برخی از گزاره‌های اقلیدس
۳۳۵	واژه‌نامه
۳۳۸	نمایه

پیشگفتار

روزی معلم ریاضی من در دبیرستان، آقای یوسف ماشیخ، اظهار داشت که هندسه کتاب درسی شما تنها هندسه موجود نیست. در واقع می‌گفت هندسه دیگری به نام هندسه ناقلیدسی وجود دارد که بسیار پرمایه‌تر از هندسه اقلیدسی است. چون در آغاز هندسه دبیرستانی را بسیار چالش برانگیز و جالب یافتم، فراگیری این هندسه مرموز را جزء برنامه آینده خود قرار دادم. بعدها در دانشکده کتابهایی را مطالعه کردم که احتمالاً عنوان آنها «هندسه ناقلیدسی» بود و هیچ به دلتم ننشست. تحقیقات ساگری در مورد چهارضلعها ملال آور جلوه می‌کرد و خود قضیه‌ها علاقه‌ای را بر نمی‌انگیختند. مثلاً ابهام این حکم را که مجموع زاویه‌های مثلث هذلولولی کمتر از π است با ظرافت و استحکام حکم مجموع زاویه‌های مثلث اقلیدسی برابر π است، مقایسه کنید. در آن موقع من نمی‌توانستم انگیزه مقایسه معلم خود را بفهمم. به علاوه، ظرافتهای هندسه ناقلیدسی ترکیبی را فراتر از تواناییهای خود می‌یافتم، و چون این قضیه‌ها بسیار خشک به نظر می‌رسیدند، علاقه خود را به این مبحث از دست دادم. بعدها زمانی که هنوز در دانشکده بودم، یک درس هندسه تصویری که شامل بحثی در متریکه‌های تصویری بود اختیار کردم. این درس موجب عینیت یافتن هندسه ناقلیدسی در ذهن من شد، ولی روش آن به سلیقه من خیلی انتزاعی می‌آمد. از این گذشته، در عین اینکه قضیه‌های جدید با قضیه‌های اقلیدسی متفاوت بودند، به نظر من از لحاظ ظرافت نیز به پای آنها نمی‌رسیدند. روزی در دوره کارشناسی، کتاب درآمدی بر ریاضیات اثر و. سویرا را خواندم که در آن الگوی قرص واحد را معرفی و این واقعیت را مطرح می‌کرد که ژئودزیکها در این الگو کمانهایی از دایره‌های عمود بر دایره مرزی (دایره مطلق) هستند. این مطلب با مذاق من دقیقاً جور می‌آمد. این عینیت و سادگی الگو موجب می‌شد که یکتا نبودن اصل توازی قابل قبول جلوه کند. این واقعیت که ژئودزیکها کمانهایی مستدیرند، همان مسرتی را در من پدید آورد که یک اثر هنری پدید می‌آورد، مسرتی که از

خود هندسه اقلیدسی به دست آورده بودم و در هیچ جای برنامه درسی دوره کارشناسی ام نتوانسته بودم آن را به دست آورم.

در دوره کارشناسی ارشد، چندین بار به این الگو برخورد نمودم، ولی به علت مشغله زیاد نتوانستم علاقه خود به آن را دنبال کنم. این مشغله‌ها شامل نوشتن پایان‌نامه‌ای درباره رسم برخی نقشه‌ها بر رویه‌های بسته بود، موضوعی که گیریایی عینی آن تقریباً به همان اندازه گیریایی هندسه دیرستانی قوی بود. بعدها وقتی در جستجوی ریشه‌های تاریخی رشته تخصصی ریاضی خود برآمدم، با نیم‌صفحه بالایی پوانکاره و گروه‌های فوکسی مواجه شدم. تنها در این هنگام بود که به احساس معلم خود در مورد پرمایگی هندسه ناقلیدسی پی‌بردم و همان احساس او را پیدا کردم. زیرا در کارهای پوانکاره یک متریک ریمانی با ویژگیهای هندسی جالبی پیدا کردم که برداشت جدیدی از قضیه گاوس-بونه به من می‌داد. هندسه‌ای یافتیم که در آن اعداد مختلط، تبدیلیهای موبیوس، و نسبت ناهمساز نقشهای ملموسی ایفا می‌کردند. گروههایی مشاهده کردم که بر یک فضای توپولوژیک عمل می‌کردند و ساختارهای خارج قسمتی‌اشنای ما را به دست می‌دادند. در حقیقت یک درس هندسه کارشناسی دیدم که بسیاری از مفاهیم اساسی ریاضیات کارشناسی ارشد را به ذهن القا می‌کنند. کتاب حاضر حاصل تلاش من در به‌وجود آوردن این درس است.

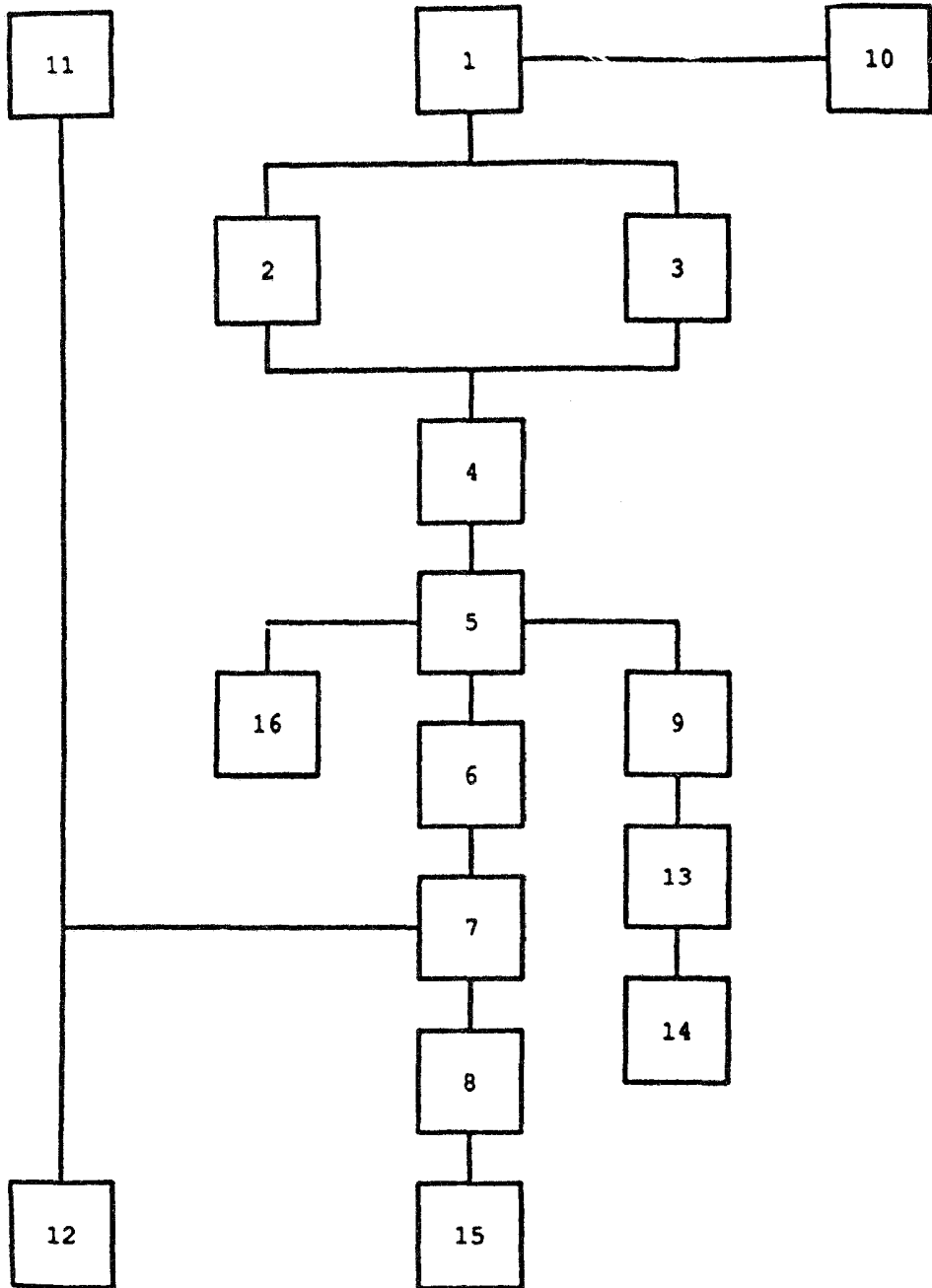
نیم‌صفحه بالایی پوانکاره مداری است که این کتاب برگرد آن می‌چرخد. هر یک از فصلها ارتباط مستقیم و تنگاتنگی با این الگو دارد. چنین نگرشی سنجیده برای نظام متنوعی همچون هندسه مسلماً باید نقایصی داشته باشد. پرداختن جدی به هندسه اقلیدسی و فروگذاری از ارائه هرگونه بحثی از منطق و برهان، احتمالاً موجب انصراف بسیاری از معلمان دروس هندسه جدید در استفاده از این کتاب به‌عنوان کتاب درسی است. تصمیم در فروگذاری از ارائه این مباحث براساس این باور است که دانشجویانی که هندسه دیرستانی خود را فراموش کرده‌اند یا از ابتدا اصلاً آن را خوب نفهمیده‌اند، از کتابی که این موضوع را پی‌ریزی می‌کند بیشتر از کتابی که آن را با صراحت نقد می‌کند بهره می‌گیرند. بسیاری از تمرینهای این کتاب این‌گونه دانشجویان را وادار می‌کنند که نگاهی به کتابهای دیرستانی خود بیندازند و آنها را از دیدگاه جدیدی مطالعه کنند. من یک حدّ وسطی را به صورت یک فصل اول برگزیده‌ام که شامل چارچوبی برای مرور بر هندسه اقلیدسی و پیوستی است که جزئیات از قلم افتاده را عرضه می‌کند. در مورد آموزش قطعی ماهیت برهان، فکر می‌کنم بهتر است که این زمان در جای دیگری صرف شود. تردید دارم که دانشجویانی که برنامه ریاضیات دیرستان را بدون فهمیدن برهان گذرانیده‌اند، باز هم از نادیده رد شدن از پهلوی

این مبحث فزّار بهره‌ای ببرند. مسلماً اینان می‌توانند ریاضیات بسیار جالبی از این کتاب فراگیرند. امیدوارم که این روش ملموس و محاسباتی برای هندسه، پایه‌ای باشد که براساس آن تجربه‌هایی را که بعدها به آنها برمی‌خورند پی‌ریزی کنند. منظور من این نیست که بگویم در اینجا براهین را نادیده گرفته‌ام، بلکه سعی کرده‌ام از اهمیت دادن به آنها تا حدّی بکاهم.

مطالب موجود در فصلهای ۱ تا ۱۰ برای یک ترم سال سوم دانشکده کافی است، به‌ویژه اگر کارکردن در چند رشته از تمرینها که در مقایسه با تمرینهای هندسهٔ اقلیدسی متفاوت‌اند، وقت زیادتری طلب کند، تدریس این فصلها تا حدّ زیادی با حوصله و بدون شتاب صورت می‌گیرد. جبر دبیرستانی، هندسه و مثلثات و نیز مباحثی از انتگرالگیری، مختصات قطبی و قاعدهٔ زنجیری چند متغیره را کراراً در متن به‌کار برده‌ام.

فصلهای ۱۱-۱۶ نیاز به آگاهی و سابقهٔ بیشتر خوانندگان دارد. در اینجا سرعت پیشرفت تا حدّی زیاد است و آشنایی خواننده با هندسهٔ برداری سه‌بعدی مسلّم فرض شده است. با این حال، مطالب پیشنهادی در تمام کتابهای ریاضی استاندهٔ پیش‌دانشگاهی رشته‌های مهندسی یافت می‌شود.

بستگیهای فصلی



هندسهٔ اقلیدسی

۱.۱ تاریخچهٔ هندسهٔ اقلیدسی

موضوع این کتاب هندسهٔ نااقلیدسی است. برای تعریف این صورت جدید هندسه باید هندسهٔ اقلیدسی را بشناسیم. متأسفانه تعریف این هندسهٔ معروف کاری به مراتب دشوارتر از آنی است که در اول حدس زده می‌شود. زیرا ریاضیدانان برای ساختن تعاریف مختلف مورد قبول کنونی، که همگی مبتنی بر کار نسبتاً جدید داوید هیلبرت (۱۸۶۲-۱۹۴۳) هستند، هزاران سال وقت صرف کرده‌اند. نیازی به گفتن نیست که نسلهای آینده ممکن است این صورت تعاریف سدهٔ فعلی را ناقص تلقی کنند و باز تعاریف دیگری را ترجیح دهند. در پرتو این ملاحظات شاید خواننده متعجب نشود، وقتی ببیند که مؤلف از پرداختن به این مسأله شانه خالی کرده است، و صرفاً به تهیهٔ تاریخچهٔ کوتاه و شرح ناقصی از محتوای آن اکتفا نموده است.

هندسه، به معنای اندازه‌گیری اشکال، خودبه‌خود در فرهنگهای مختلف بسط یافته و تاریخ آن

به چند هزار سال قبل از میلاد برمی‌گردد. دانش هندسه، چنانکه می‌دانیم، به معنی مجموعه‌ای از احکام مجرّد در مورد شکلهای آرمانی، که تحقق درستی آنها فقط نیازمند استدلال محض است، از ابداعات یونانیان بوده است. مورّخان بر این نکته توافق دارند که آغاز پیدایش هندسه را بیشتر می‌توان به شخصی به نام طالس ملطی محدود کرد که نه تاریخ تولّد و مرگ وی مشخص است و نه ماهیت دقیق دستاوردهای وی. ولی چون مشهور است که وی خورشیدگرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش‌بینی کرده بوده بجاست بپذیریم که او در سده ششم قبل از میلاد می‌زیسته است. چه بسا نابغه‌هایی همچون طالس احتمالاً در بسیاری از سده‌ها و در کشورهای دیگر به دنیا آمده و به فراموشی سپرده شده‌اند. بخت با او یار بوده که در فرهنگی پا به عرصه وجود گذاشته که کارهایش را مفید تشخیص داده و با وارد کردن در نظام آموزشی آنها را برای آینده حفظ کرده‌اند. چون جامعه یونان در آن زمان هم از نظر شکل دموکراتیک حکومت و هم از لحاظ نحوه قضاوت توسط هیأت‌منصفه‌ای از مجلس اعیان در حال شکل گرفتن بوده، ضرورت داشته که هر شهروند بتواند به‌طور قانع‌کننده و مؤثری استدلال نماید. طی سده‌های پنجم و ششم قبل از میلاد وظیفه آموزش مهارت‌های مورد نیاز این نظام سیاسی جدید به شهروندان یونانی از سوی سوفسطائیان مورد پذیرش قرار گرفته بود. اینان معلمان سیّار سختگیری بودند که عمدتاً با تدریس علم بیان و بلاغت به شاگردانشان امرار معاش می‌کردند. ولی چون هم تجرید و هم پویایی منطقی هندسه را ابزارهای مفیدی برای این آموزش تشخیص می‌دادند، ابداع طالس در برنامه درسی آنها منزلتی پیدا کرد و برای آیندگان محفوظ ماند.

به احتمال بسیار زیاد دیمقراطیس (حدود سال ۴۱۰ ق.م)، که به دلیل انتشار نظریه اتمی طبیعت برای اولین بار بسیار معروف است، پیش از آنچه که اکنون در مدارس متوسطه هندسه تدریس می‌شود، هندسه می‌دانسته است. ولی بسیار محتمل است که برهانهای وی از دقت کامل برخوردار نبوده‌اند.

اثودوکسوس (۴۰۸-۳۵۵ ق.م) یکی از نخستین افرادی بوده که قضیه‌های هندسه را به‌طور منظم در ساختاری سازمان داده است که با اصلهای موضوع آغاز و به روشی نظام‌مند به نتیجه منجر می‌شوند. کتاب وی در دست نیست و اطلاعات ما در این مورد دست دوم است. ولی بی‌تردید وی ریاضیدانی درجه یک با درکی عمیق از ریزه‌کاریهای موضوع مورد مطالعه‌اش بوده است. ریاضیدانان بعد از وی تا اواخر سده نوزدهم هیچ‌چک نتوانسته‌اند در برخی موضوعها گوی سبقت را از او برابند. اقلیدس کتاب معروف خود، اصول، را در حدود ۳۰۰ قبل از میلاد نوشته است. در این کتاب بعضی از فنون هندسی آن زمان تدوین یافته و برخی نیز از قلم افتاده است. این کتاب در واقع از

سیزده مقاله تشکیل یافته و محتوای آنها چنین است

مقاله‌های I-IV هندسه مثلثها و دایره‌ها

مقاله‌های V-VI نظریه تناسبهای هندسی

مقاله‌های VII-IX نظریه اعداد

مقاله X نظریه اعداد گنگ

مقاله‌های XI-XIII هندسه فضایی

طی سده‌های متمادی، شاهکار اقلیدس به زبانهای مختلفی ترجمه شده و محتوای هندسه را اساساً برای بسیاری از فرهنگها تعریف کرده است. در آنچه بعداً می‌آید ما همان قرارداد را خواهیم پذیرفت. یعنی، منظور ما از هندسه اقلیدسی، همان هندسه‌ای است که در مقاله‌های اقلیدس مورد بحث قرار گرفته است. مزیت این کار در این است که ما را با مجموعه‌ای از یک دانش خوشتعریف شناخته شده‌ای مجهز می‌نماید که هر موقع که لازم شود می‌توانیم به آن رجوع کنیم. به علاوه، اکنون اصطلاح نااقلیدسی را می‌توانیم تنها با نفی یکی از اصلهای موضوع اقلیدس تعریف کنیم. اشکال یکی گرفتن هندسه اقلیدسی با هندسه اقلیدس در ناقص بودن هندسه اقلیدس است. زیرا اصلهای موضوع اقلیدس ناکافی‌اند و براهین وی چندان کامل نیستند. در سده نوزدهم کار بسیاری انجام گرفت تا کمال مطلوب اقلیدس حاصل شود. این تلاشها در کتاب مبانی هندسه تألیف هیلبرت به نقطه اوج خود رسیده است، که در آن وی مجموعه کاملی از اصلهای موضوع را پیشنهاد کرده و نشان داده است که چگونه مجموعه دانشی که معمولاً به هندسه اقلیدسی معروف است از این اصلها استخراج می‌شود، این کتاب در نیمه اول سده حاضر توجه بسیاری را به خود جلب کرد و ریاضیدانان بسیاری اصل موضوعی‌سازیهایی دیگری برای هندسه اقلیدسی پیشنهاد کردند. همه این دستگاهها دارای کاستیهای آموزشی هستند و به علت تعدد اصلهای موضوع در آنها حتی اثبات قضیه‌های «واضح» با استفاده از آنها توانفرساست. در نتیجه علاقه به تهیه یک چارچوب منطقی مطمئن برای هندسه اقلیدسی تا حدی فروکش کرده است. (کتاب بسیار خوب! موئیز، هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته، به نحو چشمگیری از این قاعده کلی مستثناست.) به دلیل همین کاستیها مؤلف تصمیم گرفته است که برای شرح هندسه اقلیدسی، به خود هندسه اقلیدس، علی‌رغم نقاط ضعفش مراجعه نماید. بخش بعدی این فصل شامل فهرست کاملی از اصلهای موضوع اقلیدس است، که وی به آنها به‌عنوان تعاریف، اصلهای موضوع و مفاهیم بدیهی (اصول متعارفه) اشاره می‌کند. و شامل گزاره‌های ۱-۴ مقاله اول همراه با برهان آنها، و بیان اکثر احکام دیگر همان مقاله است. همچنین در این بخش گزاره‌های چندی از مقاله‌های

دیگر اقلیدس به دلیل اهمیت آنها در فصلهای بعدی کتاب گنجانده شده‌اند. خواننده را به ترجمه کامل کتاب اصول اقلیدس به وسیله هیث و شرح و تفسیر مفصل آن ارجاع می‌دهیم. بخش اختیاری ۳، توضیح مختصری از اصل موضوعی سازی هندسه اقلیدسی توسط هیلبرت است؛ از مطالعه این بخش می‌توان صرفنظر کرد بی آنکه مشکلی در بقیه کتاب برای خواننده پیش آید. این فصل با بحثی در مورد اصل موضوع توازی اقلیدس و چند صورت هم‌ارز با آن پایان می‌پذیرد.

۲.۱. گزیده‌هایی از اصول اقلیدس

از مقاله I

تعریفها

۱. نقطه آن است که جزء ندارد.
چون نمی‌توان چیزی را فقط با ذکر همه ویژگی‌هایی که ندارد تعریف کرد، این تعریف را نمی‌توان تعریف اصیلی تلقی کرد. اقلیدس بر این نکته آگاه بوده است که هر تعریفی بایستی بر اصطلاحات از قبل تعریف شده متکی باشد و نیز تعریف تمام اصطلاحات از نظر منطقی غیرممکن است. در عوض، این تعریف را باید تلاشی از سوی اقلیدس تلقی کرد که به خوانندگان خود می‌گوید که نقطه وی چیزی شبیه اثری است که با نوک مداد بر کاغذ می‌گذارند، ولی در عین حال این اثر یک تصور است نه یک شیء فیزیکی. تعریفهای ۲ و ۵ در ذیل به همین روش باید ارزیابی شوند.

۲. یک خط طولی است بدون عرض.

خط اقلیدس همان خم ماست.

۳. دوسر هر خط دو نقطه است.

چون نقطه و خط هر دو قبلاً تعریف شده‌اند، اصطلاح سر بعداً برای نشان دادن مرز هر شکل دلخواهی به کار رفته است، مشکل بتوان فهمید که در اینجا دقیقاً چه چیزی تعریف شده است. ممکن است که با داشتن تعریف خط و نقطه، اقلیدس ضرورت ارتباط روشن بین آن دو را احساس کرده است.

در این تعریف تلویحاً بیان شده است که هر خط دارای دوسر است. در نتیجه خط اقلیدس

یک کمان متناهی است، و خطهای راست وی که در ذیل تعریف می‌شوند، در واقع پاره‌خط‌اند. تأکیدهای فراوانی از سوی یونانیها بر متناهی بودن اشیاء مورد تحقیق‌شان صورت گرفته است. ولی اقلیدس در این مورد کاملاً واقع‌گرایانه عمل کرده است. وقتی ضرورت ایجاب می‌کرده، مثلاً در حکم گزاره ۱۲ در ذیل، اقلیدس بر قواعد خودش گردن نمی‌گذارد و از خطهای راست نامتناهی صحبت به میان می‌آورد.

۴. خط راست خطی است که به‌نحوی هموار بر نقاط خودش قرار دارد.

این نیز جمله‌ای است تقریباً نامفهوم. ممکن است نقطه‌های موردنظر این تعریف نقطه‌های دو سر مذکور در تعریف قبل باشند. از این‌رو استنباط ما از این تعریف باید به این صورت باشد که از میان تمام خطها (خمها) بی‌ی که دو نقطه را به هم وصل می‌کنند خط راست خطی است متشکل از تمام نقاطی که مستقیماً بین دو نقطه داده شده واقع‌اند.

۵. رویه آن است که فقط درازا و پهنا دارد.

۶. هر رویه به خطها محدود است.

مضمون این تعریف گویای آن است که هر رویه لزوماً وسعت متناهی دارد.

۷. رویه مستوی رویه‌ای است که به‌نحوی هموار بر خطهای راست خودش قرار دارد.

احتمالاً معنی این تعریف آن است که حدود یک رویه مستوی خطهای راست‌اند و رویه به‌نحوی هموار بر آنها قرار دارد.

۸. یک زاویه مستوی، میل دو خط واقع در یک صفحه و ناواقع بر یک خط راست است،

نسبت به هم.

۹. و هنگامی که خطهای شامل زاویه خطهای راست باشند، زاویه مستقیم‌الخط نامیده می‌شود.

از این دو تعریف روشن می‌شود که اقلیدس به زاویه‌های منحنی‌الخط، یعنی زاویه‌هایی که از خمها به‌جای خطهای راست ساخته می‌شوند، نیز توجه داشته است. ولی وی بعدها فقط یک‌بار به این زاویه در مقاله سوم، گزاره ۱۶، جایی که می‌گوید زاویه بین مماس بر یک دایره و محیطش کوچکتر از هر زاویه مستقیم‌الخط است، اشاره می‌کند. فرض بر این بوده است که هندسه‌دانان آن زمان با این نوع زاویه‌ها وقت تلف می‌کردند بی‌آنکه به نتیجه جدی برسند و اقلیدس لازم می‌دید که تلاشهای آنان را گوشزد نماید.

۱۰. اگر خط راستی بر خط راست دیگری فرود آید به‌طوری که زاویه‌های مجاور با هم برابر

بسازد، هر یک از این زاویه‌ها یک قائمه است، و خط راست فرود آمده بر دومی عمود بر آن نامیده می‌شود.

این تعریف به ظاهر بی‌گزند، دو اشکال عمده دارد. اصولاً روشن نیست که منظور اقلیدس از برابری زاویه‌ها چیست. آیا منظور وی در اینجا برابری در اندازه است یا مراد مفهوم قویتر قابلیت انطباق آنها باهم است؟ وانگهی مسأله وجود این‌گونه زاویه‌های قائمه، هر منظوری که اقلیدس از برابری زاویه‌ها داشته باشد، دقیقاً مسکوت گذاشته شده است. به قسمت اخیر این مسأله در گزاره ۱۱ پرداخته شده است. اما در مورد برابری، نگارنده براین عقیده است که منظور اقلیدس برابری اندازه‌هاست نه قابلیت انطباق آنها باهم. بحث مفصلی در مورد استفاده از برابری در اصول در بندهای مربوط به علوم بدیهی [یا اصلهای متعارف]، در ذیل داده شده است.

۱۱. زاویه منفرجه زاویه‌ای است بزرگتر از یک زاویه قائمه.

۱۲. زاویه حاده زاویه‌ای است کوچکتر از یک زاویه قائمه.

۱۳. مرز یک چیز حد آن چیز است.

۱۴. شکل آن است که به یک یا چند مرز محصور شده باشد.

۱۵. دایره شکلی است مستوی محصور به یک خط به طوری که همه خطهای راستی که از یکی از نقطه‌های درون شکل بر آن فرود می‌آیند باهم برابرند.

۱۶. و این نقطه مرکز دایره نامیده می‌شود.

۱۷. قطر دایره خطی است راست که از مرکز رسم می‌شود و از هر دو سمت به محیط آن دایره منتهی می‌شود، و این خط راست دایره را نیز نصف می‌کند.

۱۸. نیم‌دایره شکلی است حادث از یک قطر و قسمتی از محیط که توسط آن قطر از دایره جدا شده است. و مرکز نیم‌دایره و همان مرکز دایره است.

۱۹. شکل‌های مستقیم‌الخط شکل‌هایی هستند حادث از خطهای راست. شکل‌های سه‌ضلعی از سه خط راست و چهارضلعی از چهار خط راست و چندضلعی از بیشتر از چهار خط راست حادث شده‌اند.

۲۰. از شکل‌های سه‌ضلعی، مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع برابر دارد، و مثلث متساوی‌الساقین مثلثی است که فقط دو ضلع برابر دارد، و مثلث مختلف‌الاضلاع مثلثی است که هر سه ضلع آن باهم نابرابرند.

۲۱. به علاوه، از شکل‌های سه‌ضلعی، مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یک زاویه قائمه دارد، مثلث منفرج‌الزاویه مثلثی است که یک زاویه منفرجه دارد، و مثلث حاد‌الزوايا مثلثی است که هر سه زاویه آن حاده باشند.

۲۲. از شکل‌های چهارضلعی، مربع شکلی است که هم اضلاع آن باهم برابرند و هم زاویه‌های

آن قائمه‌اند؛ مستطیل شکلی است که زاویه‌های قائمه دارد ولی ضلعهایش با هم برابر نیستند؛ لوزی شکلی است که ضلعهای متساوی دارد ولی زاویه‌هایش قائمه نیستند، متوازی‌الاضلاع شکلی است که در آن زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند و اضلاع روبه‌رو با هم، ولی نه متساوی‌الاضلاع است و نه قائم‌الزاویه. چهارضلعیهایی غیر از این شکلها را چهارضلعیهایی نامشخص می‌نامیم.

۲۳. خطهای راست موازی خطهای راستی هستند که بر یک صفحه قرار دارند و اگر از هر دو سمت بی‌نهایت امتداد داده شوند در هیچ سمتی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

اصولهای موضوع

کتاب اقلیدس تلاشی است برای نظام‌مند کردن بسیاری از قضیه‌های هندسی که پیشینیان وی پدید آورده‌اند. در اینجا منظور از یک قضیه هندسی حکم معتبری است درباره تأثیر متقابل نقطه‌ها، خطهای راست، زاویه‌ها، و برابری. در پی هر قضیه برهانی می‌آید که به صحت آن از روی تعریفها و احتمالاً قضیه‌های دیگر پی برده می‌شود. برای اجتناب از استدلال دوری در این دستگاه لازم است قضیه‌ها را به شیوه‌ای مرتب کنیم که در اثبات صحت هر کدام، قط از قضیه‌ها (و البته از تعریفهای قبلی استفاده شود. ریاضیدانان اولیه یونانی بایستی از کشف این نکته سخت‌یکه خورده باشند که می‌دیدند برقراری چنین ترتیبی موجب می‌شده است که گنجاندن قضیه‌های جالبی نظیر قضیه فیثاغورس و قضیه مجموع زاویه‌های هر مثلث دو قائمه است، در [هر جای دلخواه] هندسه غیرممکن باشد. معلوم شده است که همواره باید بعضی قضیه‌ها را بدون اثبات و صرفاً از روی اطمینان به درستیشان بپذیرند. این‌گونه قضیه‌ها اصولهای موضوع نامیده شده‌اند. این نکته که کدام قضیه‌ها باید در فهرست اصولهای موضوع قرار گیرند مسأله‌ای است که باید در زمینه‌های ذهنی حل شود. به احتمال بسیار زیاد انتخاب اصولهای موضوع توسط اقلیدس نتیجه نهایی صدها سال بحثهای داغ بین ریاضیدانان یونان بوده است. نسلهای بعدی انتخابهای وی را تغییر داده‌اند، یکی از این دستگاههای اصل موضوعی معروف در بخش بعدی به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تذکر این نکته در خور توجه است که اصولهای موضوع تا آنجا که به ماهیت محتوایی خاص آنها مربوط است، با قضیه‌ها یکی هستند. تنها در اثبات است که با هم تفاوت دارند. اصولهای موضوع بدون اثبات پذیرفته می‌شوند. در حالی که هر یک از قضیه‌ها باید با برهانی همراه باشد که به قضیه‌های قبلی، اصولهای موضوع، تعاریف و مفاهیم اولیه متکی است.

این جنبه از اصول یعنی ترتیب محکم و منطقاً سازگار قضیه‌ها را باید به صورت یک نمونه

آرمانی تلقی کرد. این یک واقعیت پذیرفته شده‌ای است که در سازماندهی اقلیدس از هندسه نقایص بسیاری وجود دارد. او از مفاهیم اولیه و اصلهای موضوع بیان نشده به دفعات استفاده کرده است. در ذیل به برخی از این نقایص اشاره خواهد شد. با این همه کتاب اقلیدس به دلیل برداشت و استحکام منطقی‌اش یکی از دستاوردهای عالی تمدن یونانی بالاخص، و اندیشه بشری به‌طورکلی است. اکنون به ذکر اصلهای موضوع انتخابی اقلیدس می‌پردازیم.

می‌پذیریم که مفاهیم زیر به‌عنوان اصلهای موضوع اختیار شده‌اند

۱. هر دو نقطه را می‌توان با یک خط راست به هم وصل کرد

این اصل موضوع بدین‌گونه که هست، فقط می‌گوید که هر دو نقطه متمایز را می‌توان با یک خط راست به هم وصل کرد. ولی در پرتو استدلالهایی که در برهان گزاره ۴ آورده شده به‌نظر می‌رسد که اقلیدس دریافته است که به این حکم باید فرض دیگری را اضافه کند که هر دو نقطه را می‌توان حداکثر با یک خط راست به هم وصل کرد.

اگر A و B نقاط داده شده باشند، اقلیدس خط راست واصل بین آنها را با AB نشان می‌دهد، نمادی که مغایر با نماد جدید \overline{AB} برای خط راست مذکور است. در گزاره ۱۲ همین نماد AB را برای نشان دادن خط راست نامتناهی واصل بین A و B نیز به‌کار می‌برد. نمادگذاری (و ابهامهای) اقلیدس حتی در فصلهای بعدی نیز اختیار خواهد شد با این باور که سیاق عبارت بدون استثنا مقصود را روشن خواهد کرد. مزیت مهم این کار سادگی آموزشی آن است و عیب آن بی‌دقتی منطقی آن؛ مؤلف براین باور است که وزنه اولی بر دومی می‌چربد.

۲. هر خط راست متناهی را می‌توان پیوسته به‌صورت خط راست امتداد داد.

این اصل موضوع بیان استادانه این فرض است که صفحه در تمام جهات به‌طور نامتناهی ادامه می‌یابد. هر موقع امکان داشته ریاضیدانان یونانی از ذکر صریح بینهایت امتناع ورزیده‌اند، بدین علت که این‌گونه بیانه‌ها پیچیدگی منطقی زیادی به‌بار می‌آورده است.

۳. دایره‌ای به هر مرکز و با هر شعاع می‌توان رسم کرد.

صورت گزاره ۲ در ذیل روشن می‌سازد که این اصل موضوع را باید به معنی بسیار محدودی تعبیر نمود. به این معنی که به‌ازای یک نقطه A و یک پاره‌خط AB دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB وجود دارد. اغلب، ریاضیدانان جدید این اصل موضوع را به این صورت بیان می‌کنند که می‌گویند همتایان یونانی آنها در رسم دایره از پرگار فروریختنی که زاویه بین ساقهای آن با بلندکردن از صفحه کاغذ درهم می‌ریزد استفاده می‌کردند.

۴. همه زاویه‌های قائمه باهم برابرند.

زاویه قائمه واحد اندازه‌گیری همه زاویه‌های مستقیم‌الخط از سوی اقلیدس است و از این رو وی مسلماً به برابری آنها نیاز دارد. چون به اثبات قابلیت انطباق باهم همه زاویه‌های قائمه (و در نتیجه برابری آنها) در حرکت‌های صلب توفیق نیافته است، آوردن اصل موضوعی به این صورت را ضروری دیده است. برای بحث بیشتر در مورد برابری، خواننده را به بند مربوط به معرفی اصلهای بدیهی (بدیهیات)، ارجاع می‌دهیم.

۵. اگر خط راستی بر دو خط راست چنان فرود آید که مجموع زاویه‌های داخلی واقع در یک طرف آن کمتر از دو قائمه باشد، این خطهای راست اگر تا بینهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرفی که مجموع زاویه‌های داخلی کمتر از دو قائمه است، قطع می‌کنند.

بسیاری از خوانندگان اثر اقلیدس و جانشینان وی بر این باور بودند که این اصل موضوع غیرضروری است و درستی آن را می‌توان با استفاده از اصول دیگر ثابت کرد. ولی تلاشهای بی‌وقفه آنها طی بیش از دوهزار سال، برای اثبات این باور، بدون استثنا محکوم به شکست بوده است. تاریخچه‌ای از این تلاشها در فصل ۱۵ آورده شده است. بقیه این کتاب را می‌توان شرحی از عدم موفقیت آنها به‌شمار آورد. به همین علت در اینجا این اصل موضوع را بیشتر از این مورد بررسی قرار نمی‌دهیم جز بیان این تذکره که در آخرین بخش این فصل برخی از معروفترین صورتهای مختلف این اصل موضوع ارائه شده‌اند.

اصلهای بدیهی (بدیهیات)

اصلهای بدیهی که در زیر آمده‌اند نیز اصلهای موضوع‌اند و تنها تفاوت آنها با اصلهای موضوع فوق در این است که اینها عمده‌تاً ناظر بر مفاهیم برابری و نابرابری هستند. متأسفانه چندان مسلم نیست که منظور اقلیدس از این اصطلاحات چه بوده است. براساس گزاره ۳۵ مقاله اول وی (متوازی‌الاضلاعهایی که یک قاعده مشترک دارند و قاعده‌های دیگر آنها بر خطی موازی قاعده قرار دارند، باهم برابرند) روشن است که لاقلاً گاهی منظور اقلیدس برابری مساحتها بوده است. در این مورد نظر ما این است که اقلیدس در استفاده از این اصطلاح استوار بوده و همواره آن را برای نشان دادن برابری اندازه‌ها به‌کار برده است به عبارت دیگر وقتی اقلیدس می‌گوید دو متوازی‌اضلاع برابرند، منظور وی این است که آنها یک مساحت دارند، و وقتی می‌گوید دو پاره‌خط برابرند منظور وی این است که طول آنها یکی است، و وقتی می‌گوید دو زاویه مساوی هستند منظور وی چیزی از همین مقوله است. بنابراین ما عقیده داریم که اقلیدس در ذهن خود یک اصل بیان نشده‌ای داشته است مبنی بر اینکه تمام اشیاء هندسی یک جنبه اندازه عددی دارند که ویژگیهای آنها در

اصولهای بدیهی زیر بیان شده‌اند. دلیل این نامگذاری این است که این مفاهیم ویژگیهای مشترک بین طول، مساحت، حجم و اندازه زاویه را می‌رسانند. این توضیح علت عدم توفیق اقلیدس را در دادن تعریف دیگری از مفاهیم مساحت و حجم، با وجود گزاره‌های بسیاری در مورد خود این مفاهیم، می‌رساند. بدیهیات یا اصولهای بدیهی، به عقیده ما، تعریف همزمان اقلیدس از طول، مساحت، حجم و اندازه زاویه است. خواننده‌ای که با «نظریه اندازه» جدید آشنایی دارد متوجه خواهد شد که اگر این تعبیر از اصولهای بدیهی معتبر باشد تشابه شگفت‌انگیزی بین آنها و تعریف اندازه هارپدید می‌آید. یک بحث غیررسمی در مورد این اندازه در بخش اول فصل ۷ آمده است. از این به بعد در سراسر این کتاب این تعبیر از اصولهای بدیهی اقلیدس را به‌عنوان یک شیوه نمادگذاری می‌پذیریم. نماد «=» را برای نشان دادن برابری اندازه یا مقدار به‌کار می‌بریم. از این‌رو منظور از

$$\angle ABC = \angle DEF$$

این است که دو زاویه مذکور یک اندازه دارند. البته این زاویه‌ها قابل انطباق با هم نیز هستند، ولی این موضوع خارج از بحث ماست. به همین ترتیب

$$AB = CD$$

بدین معنی است که طولهای پاره‌خطهای واصل بین A و B ، و C و D باهم برابرند.

اکنون تعریفی را که اقلیدس از برابری داده بررسی می‌کنیم.

۱. چیزهای برابر با یک چیز نیز با یکدیگر برابرند.

۲. اگر [چیزهای] برابر را به [چیزهای] برابر اضافه کنیم، نتایج برابر می‌شوند.

۳. اگر چیزهای برابر را از چیزهای برابر کم کنیم، باقیمانده‌ها برابر می‌شوند.

خواننده امروزی ممکن است از اصل بدیهی سوم تعجب کند، زیرا به نظر می‌رسد که این اصل جزئی از اصل قبلی باشد. ولی یونانیان از وجود اعداد منفی بی‌خبر بودند، اقلیدس دریافت که لازم است در فهرست خود اصولهای بدیهی ۲ و ۳ را بگنجانند.

۴. چیزهای قابل انطباق برهم، باهم برابرند.

به‌موجب برهان گزاره ۴ این اصل را باید به این صورت پذیرفت که چیزهایی را که بتوان برهم منطبق کرد اندازه برابر دارند. به عبارت دیگر شکلهای قابل انطباق باهم^۱ برحسب مورد دارای

۱. خواننده باید به تفاوت بین قابل انطباق بر و قابل انطباق با توجه داشته باشد.

طول یا مساحت برابرند. این اصل را می‌توان اولین اشارهٔ اقلیدس به قابلیت انطباق باهم به معنی یک تبدیل صلب دانست. دودلی اقلیدس در استفاده از این تبدیلات از رفتارهای متناقضی که در برهانهای گزاره‌های ۲ و ۴ از خود نشان می‌دهد، آشکار می‌شود. در گزارهٔ ۲ اصلاً از حرکت دادن یک پاره‌خط از محلی به محل دیگر به بهای ارائهٔ برهانی پیچیده از حقیقتی محسوس و بدیهی خودداری می‌کند. از سوی دیگر برهان گزارهٔ ۴ از گذاردن یک مثلث بر مثلثی دیگر آغاز می‌شود. به عبارت دیگر مثلثی از جایش برداشته می‌شود و بر مثلث دیگر نهاده می‌شود - که یک نادیده‌گیری آشکار استانده‌ها از سوی اقلیدس است. به طور کلی پذیرفته شده است که برداشت اقلیدس از تبدیلات و قابلیت انطباق باهم، یا بلکه نبود آنها یکی از جدّیترین نقایص در اصول اقلیدس است.

۵. گل بزرگتر از جزء است.

ملاحظه می‌کنید که اگر اندازهٔ همهٔ شکلهای هندسی را صفر فرض می‌کردیم، چهار اصل بدیهی اول دربارهٔ این مفهوم نمایان محتوا باز برقرار بودند. این آخرین اصل بدیهی امکان چنین مفهوم تباهیدهٔ اندازه را مستثنا می‌کند، زیرا روشن است که این اصل ایجاب می‌کند که اشیایی با اندازهٔ ناصفر وجود داشته باشند. همچنین معلوم می‌شود که این مفهوم در بسیاری از براهین شامل برهان خلف کار را خیلی آسان می‌کند.

گزاره‌ها

گزارهٔ ۱. بر خط راست متناهی مفروضی مثلثی متساوی‌الاضلاع بنا کنید.

فرض کنید AB خط متناهی مفروض باشد بنابراین مطلوب رسم مثلث متساوی‌الاضلاعی است بر خط راست AB . (شکل ۱.۱)

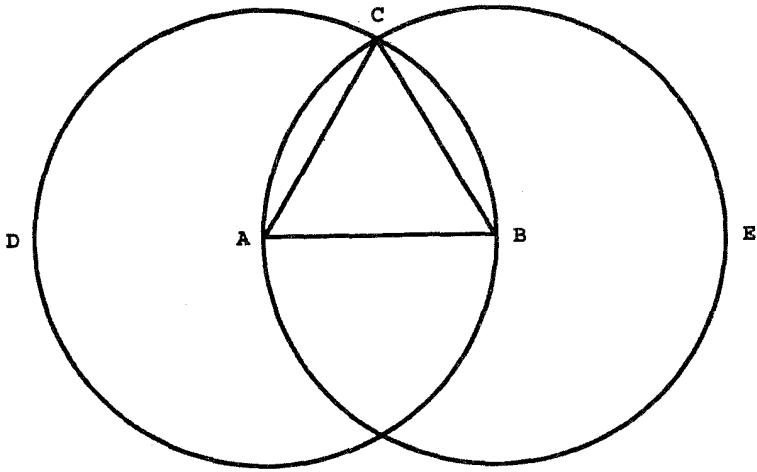
به مرکز A و به شعاع AB دایرهٔ BCD را رسم می‌کنیم؛ مجدداً به مرکز B و به شعاع BA دایرهٔ ACE را رسم می‌کنیم؛ و نقطهٔ C ، محل تلاقی این دو دایره، را با خطهای راست CA و CB به A و B وصل می‌کنیم.

چون A مرکز دایرهٔ CDB است AC برابر است با AB .

باز چون B مرکز دایرهٔ CAE است BC برابر است با BA .

ولی ثابت شده بود که CA برابر با AB نیز هست؛ بنابراین هر یک از خطهای راست CA ، و CB با AB مساوی است.

و چیزهای برابر با یک چیز نیز با هم برابرند، بنابراین CA برابر است با CB . از این رو سه خط



شکل ۱.۱

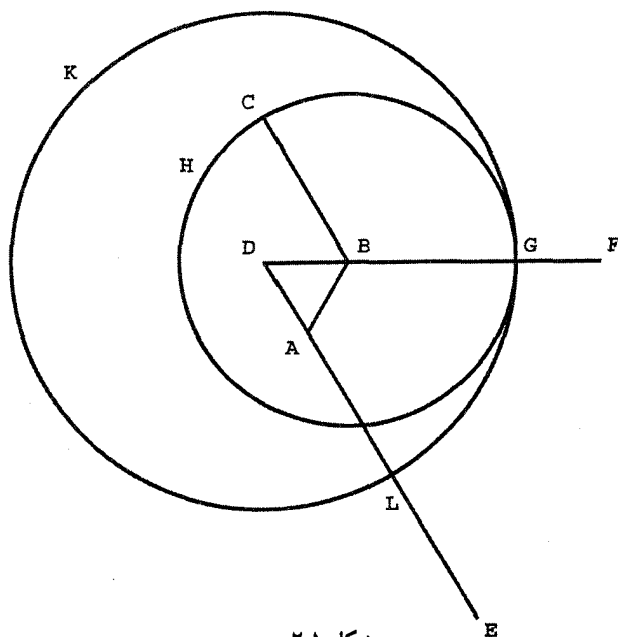
راست BC ، AB ، CA باهم برابرند. بنابراین مثلث متساوی‌الاضلاعی است که بر خط راست داده شده AB بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم

این برهان، هم برخی نقاط قوت و هم برخی نقاط ضعف اقلیدس را نشان می‌دهد. از جنبه مثبت، وی را متفکری دقیق و عرضه‌کننده‌ای می‌یابیم که به بدیهی گرفتن وجود یک مثلث، که بسیاری از مردم وجود آن را مسلم می‌گیرند، هیچ تمایلی ندارد. متأسفانه وی به اندازه کافی دقیق نیست. به‌ویژه این که وی تلویحاً می‌پذیرد که دو دایرهٔ کمکی ترسیم شده در این برهان متقاطع‌اند. اما به‌عنوان دو شیء فیزیکی، روشن است که این شکلها باید متقاطع باشند، ولی به‌عنوان اشیاء مجردی، که باید ویژگیهای آنها به تعاریف، اصلهای موضوع و اصلهای بدیهی اقلیدس تحویل‌پذیر باشند، این ادعا نیازمند اثبات است. این نکتهٔ کوچکی نیست. واقعیت این است که اقلیدس در تهیهٔ چارچوبی که در محدودهٔ آن داخل و خارج شکلها را بتوان بررسی کرد توفیقی نداشته است و این یکی از نقایص مهم بنای منطقی اوست.

گزارهٔ ۲. از نقطهٔ مفروض خط راستی برابر با خط راست داده شده رسم کنید که نقطهٔ مفروض یک سر آن باشد.

فرض کنید A نقطهٔ مفروض و BC خط راست داده شده باشد (شکل ۲.۱). پس مطلوب



شکل ۲.۱

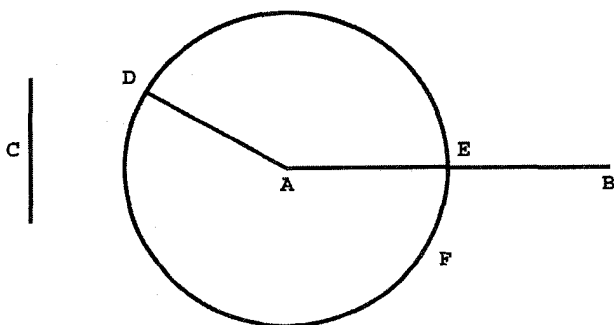
رسم خط راستی است به اندازه BC از نقطه A به طوری که A یک سر خط مطلوب باشد. نقطه A را با خط راست AB به نقطه B وصل می‌کنیم؛ و مثلث متساوی‌الاضلاع DAB را بر ضلع AB بنا می‌کنیم. گیریم خطهای راست AE و BF امتدادهای راست DA و DB باشند؛ به مرکز B و شعاع BC دایره CGH را رسم می‌کنیم و باز به مرکز D و شعاع DG دایره GKL را رسم می‌کنیم.

حال چون B مرکز دایره CGH است، BC برابر است با BG باز، چون D مرکز دایره GKL است، DL برابر است با DG . در این خطها DA با DB برابر است؛ بنابراین باقیمانده AL با باقیمانده BG برابر است. ولی ثابت شده بود که BC نیز با BG برابر است و چیزهای برابر با یک چیز، خود با هم برابرند. پس AL نیز برابر است با BC . بنابراین بر نقطه مفروض A ، خط راست AL مساوی با خط راست BC کشیده شده است.

در نگاه اول شاید چنین به نظر آید که گزاره ۲ توضیح واضح‌تر است. ولی به باور ناچیز این مؤلف، این گزاره و برهان آن چیزی از زیبایی کم ندارد. چنانچه قبلاً متذکر شدیم، اقلیدس هنگام نوشتن مقاله‌های خود پراگماتیسمی فروریختنی در ذهن داشته است. هنوز بسیاری از دانشجویان امروزی به زحمت می‌توانند ظرافت این نکته را دریابند. گذشته از آن علاقهٔ اقلیدس به مقید کردن بیش از حد خود به فرض کوچکترین چیزی که احتمالاً بتواند او را در کارش کامیاب سازد، نشانی از ایمان به قدرت خرد بشری است که با زوال تمدن یونانی از میان رفته بوده و تا دوران نوزایی رو نیامده بوده است. اقلیدس می‌توانسته وجود یک پراگماتیک را در اصل موضوع ۴ فرض کند، فرضی که برای بیان آن چند کلمه کفایت می‌کرده و نیاز به برهان نابديهی گزاره ۲ را روشن می‌کرده است. این واقعیت که وی این انتخاب را نکرده نشان می‌دهد که او از فعال نگه‌داشتن ذهنش لذت می‌برده، صرفاً به این دلیل که به‌کار انداختن آن به او نشاط می‌بخشیده است.

گزاره ۳. دو خط راست نابرابر داده شده‌اند از خط راست بزرگتر خط راستی مساوی با خط راست کوچکتر جدا کنید.

فرض کنید AB و C دو خط راست نابرابر باشند و AB بزرگتر از C باشد (شکل ۳.۱). پس مطلوب جدا کردن خط راستی از خط بزرگتر AB است که با خط کوچکتر C برابر باشد. خط راست AD مساوی C را بر نقطهٔ A قرار می‌دهیم. و دایرهٔ DEF به مرکز A و شعاع AD را رسم می‌کنیم. اکنون چون A مرکز دایرهٔ DEF است، AE با AD برابر است. ولی، C نیز با AD برابر است.



شکل ۳.۱

بنابراین هر یک از خطهای راست AE و C با AD برابر است؛ لذا AE نیز با C برابر است. بنابراین از دو خط راست داده شده AB و C ، از AB که بزرگتر است طول AE را مساوی با C که کوچکتر است، جدا کرده‌ایم.

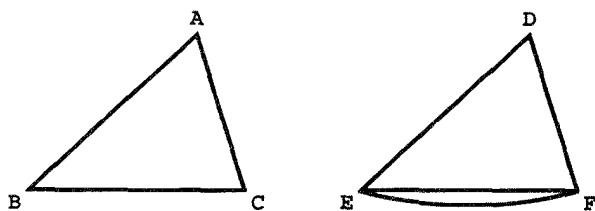
آنچه می‌خواستیم

گزاره ۴. اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر باهم برابر، و زاویه‌های بین آن دو ضلع نیز با هم برابر باشند، قاعده‌های آنها نیز با هم برابرند و دو مثلث برابر می‌شوند و بقیه زاویه‌ها، یعنی زاویه‌های مقابل به اضلاع برابر نیز با هم برابر می‌شوند.

فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلث باشند که دو ضلع AB و AC از اولی به ترتیب با دو ضلع DE و DF از دومی برابرند، یعنی AB برابر است با DE و AC برابر است با DF ، و زاویه BAC برابر است با زاویه EDF (شکل ۴.۱).

می‌گوییم که قاعده BC نیز با قاعده EF برابر است، مثلث ABC نیز با مثلث DEF برابر می‌شود، و زاویه‌های دیگر به ترتیب با زاویه‌های دیگر برابر خواهند شد. یعنی زاویه‌های مقابل به اضلاع برابر، یعنی زاویه ABC با زاویه DEF و زاویه ACB با زاویه DFE برابر می‌شوند. زیرا اگر مثلث ABC را بر مثلث DEF قرار دهیم به طوری که نقطه A بر D و خط راست AB بر DE قرار گیرند، نقطه B نیز بر E منطبق می‌شود زیرا AB برابر است با DE . باز، با منطبق کردن AB بر DE خط راست AC نیز بر DF منطبق خواهد شد، زیرا زاویه BAC با زاویه EDF برابر است.

اما B نیز بر E منطبق شده بود؛ بنابراین قاعده BC بر قاعده EF منطبق می‌شود. [زیرا اگر، وقتی که B بر E و C بر F منطبق می‌شود قاعده BC بر قاعده EF منطبق نشود، این



دو خط راست یک فضا را محصور خواهند کرد؛ که ناممکن است. بنابراین قاعده BC بر EF منطبق خواهد شد] و با آن برابر می‌شود.

بنابراین تمامی مثلث ABC بر تمامی مثلث DEF منطبق و با آن برابر خواهد شد. و بقیه زاویه‌ها نیز با بقیه زاویه‌ها برابر می‌شوند، زاویه ABC با زاویه DEF و زاویه ACB با زاویه DFE .

آنچه می‌خواستیم

مسلماً خوانندگان می‌دانند که گزاره ۴ همان گزاره‌ای است که بیشتر به قضیه قابلیت انطباق باهم دو ضلع و زاویه بین (ضرض) مشهور است. چنان که قبلاً اشاره کردیم، برهان این قضیه این نقص را دارد که در آن از مفهوم قابل انطباق باهم استفاده می‌شود که برای آن نه تعریفی مترتب شده است و نه اصل بدیهی برای آن وجود دارد. همچنین حکم گزاره خالی از ظرافت است، نقصی که در برخی گزاره‌های بعدی نیز تکرار شده است.

در اینجا به بحث مشروح چند صفحه اول اصول اقلیدس خاتمه می‌دهیم. مؤلف امیدوار است که خواننده با این عقیده موافق باشد که اقلیدس علی‌رغم نقایص آشکار منطقی، علی‌رغم ملال‌آور بودن برخی از استدلال‌ها، و طول و درازی احکام برخی از گزاره‌هایش، در خور تحسینی است که طی قرن‌ها، هم برای آنچه انجام داده و هم برای آنچه در اندیشه داشته به دست آورده است، ولو اینکه توفیق زیاد در تکمیل آن نداشته است. در ادامه به ذکر گزاره‌های ۵ تا ۲۸ از مقاله اول و چند گزاره دیگر می‌پردازیم. در برخی موارد برهان اقلیدس را گنجانده‌ایم و براهین گزاره‌های دیگر را در پیوست آورده‌ایم. با این کار دو هدف ما برآورده می‌شود؛ بهتر آشنا کردن خواننده با وسعت کار اقلیدس و فراهم کردن مرجعهای ضروری.

گرچه گزاره‌های ۵ تا ۷ در نوع خود جالب‌اند ولی اساساً لمهایی برای گزاره ۸ هستند که همان قضیه معروف قابلیت انطباق سه ضلع باهم (ضضض) است.

گزاره ۵. در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده باهم برابرند؛ و اگر اضلاع برابر را ادامه دهیم زاویه‌های زیر قاعده نیز با هم برابر خواهند شد.

گزاره ۶. اگر در مثلثی دو زاویه باهم برابر باشند اضلاع رو به‌رو به آنها نیز با هم برابر خواهند بود.

گزاره ۷. از دو سر خط راستی مفروض و در یک طرف آن، دو خط راست رسم شده‌اند که یکدیگر را بریده‌اند. از دو سر همان خط راست (و در همان طرف) نمی‌توان دو خط راست دیگر چنان

رسم کرد که یکدیگر را ببرند و به ترتیب با خط راست مرسوم قبلی از همان سر خط برابر باشند.

گزاره ۸. اگر در دو مثلث دو ضلع از یکی به ترتیب با دو ضلع از دیگری برابر باشند، و قاعده‌های این دو مثلث نیز برابر باشند، آنگاه زاویه‌های بین اضلاع برابر در دو مثلث نیز نظیر به نظیر باهم برابرند.

گزاره‌های ۹ تا ۱۲، در چارچوب محدود اقلیدس، برخی از ترسیمهای استاندارد از قبیل نصف کردن زاویه‌ها و پاره‌خطها، و رسم خطی عمود بر یک خط راست مفروض را امکانپذیر می‌سازند. تذکر این نکته بجاست که حکم گزاره ۱۲ برخلاف استلزام روشن تعریفها مبنی بر متناهی بودن الزامی هر خط راست، ارجاعی به یک خط راست نامتناهی دارد. اقلیدس پای‌بند قواعد خود نبوده است.

گزاره ۹. زاویه مستقیم الخط مفروضی را به دو قسمت برابر تقسیم کنید.

گزاره ۱۰. خط راست متناهی مفروضی را به دو قسمت برابر تقسیم کنید.

گزاره ۱۱. از نقطه داده شده بر خط راستی عمودی بر آن اخراج کنید.

گزاره ۱۲. از نقطه مفروض ناواقع بر خط راستی داده شده، عمودی بر آن وارد آورید.

در مطالعه گزاره ۱۳ خوانندگان باید در نظر داشته باشند که بنا به تعریف ۸ اضلاع یک زاویه نمی‌توانند بر یک خط راست تنها واقع باشند. به بیان فنی جدیدتر، دستگاه اقلیدس وجود زاویه‌هایی با اندازه 0° یا 180° را مجاز نمی‌داند. باید به خاطر داشت که صفر به عنوان یک عدد واقعی تا پیش از هزار سال بعد شناخته شده نبود. ولی در بالا ذکر کردیم که اقلیدس به طور ضمنی فرض می‌کرد که همه زاویه‌ها (و نیز پاره‌خطها، شکلها، و اجسام) دارای اندازه عددی هستند. از این رو کدام اندازه زاویه‌یی را ممکن بود به دویاره خط منطبق برهم تخصیص دهد؟ در واقع هیچ اندازه‌ای را. و از این رو اجباراً باید زاویه صفر را مستثنا کند. وقتی این زاویه مستثنا شد، گزاره ۱۳ حکم می‌کند که زاویه نیمصفحه (با اندازه 180°) نیز باید مستثنا شود. خواننده را از اهمیت دادن بیش از حد به این نکته‌های باریک برحذر می‌داریم. این نکته‌ها، ناشی از سبک هستند و اصولی نیستند.

منظور از این گزاره تسهیل مقایسه مجموع دو زاویه مثلث با دو زاویه قائمه در ذیل است، گزاره ۱۴ عکس گزاره پیش از آن است. گزاره ۱۵ هم مقدماتی و هم بنیادی است. چنانچه خواهیم دید این گزاره به عنوان لم مهمی برای گزاره ۱۶ عمل می‌کند.

گزاره ۱۳. اگر خط راستی بر خط راست دیگری فرود آید، یا دو زاویه قائمه با آن می‌سازد یا زاویه‌هایی می‌سازد که (مجموع آنها) برابر با دو زاویه قائمه است.

گزاره ۱۴. اگر در نقطه‌ای از خط راستی دو خط راست در دو طرف آن خط رسم شوند، و مجموع زاویه‌های مجاوری که می‌سازند برابر دو قائمه باشد، این دو خط راست بر یک خط راست واقع‌اند.

گزاره ۱۵. اگر دو خط راست در نقطه‌ای متقاطع باشند، زاویه‌های متقابل به‌رأس برابر باهم می‌سازند.

در بسیاری از جزوه‌های درسی دانشجویان گزاره زیر تحت‌الشعاع این گزاره قویتر قرار گرفته است که هر زاویه خارجی یک مثلث عملاً برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن. برهان گزاره اخیر بر اصل پنجم اقلیدس یا حکم منطقی هم‌ارز با آن نظیر اصل موضوع پلینیر یا این واقعیت که مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر با دو قائمه است (به بخش ۴ این فصل رجوع کنید) متکی است. ولی اقلیدس کوشش زیادی می‌کند تا آنجا که ممکن است از این اصل موضوع استفاده نکند و از این‌رو این گزاره جزئی را در اینجا بیان می‌کند. گرچه این گزاره جزئی است ولی مبانی مورد نیاز برای اثبات وجود خطهای موازی (گزاره ۲۷) را در خود دارد. به این دلیل و برای یادآوری دوباره به خواننده، خلاصه اثبات اقلیدس را می‌آوریم.

گزاره ۱۶. در هر مثلث اگر یکی از اضلاع را امتداد دهیم زاویه خارجی حاصل، از هر یک از زاویه‌های داخلی غیرمجاور به آن بزرگتر است.

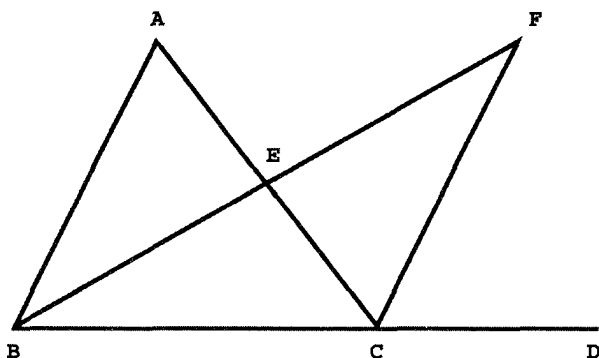
برهان: فرض می‌کنیم ABC مثلثی باشد که ضلع BC آن را تا D امتداد داده‌ایم. (شکل ۵.۱)؛ نشان خواهیم داد که زاویه خارجی $\angle DCA$ از هر یک از زاویه‌های داخلی $\angle ABC$ و $\angle BAC$ بزرگتر است.

فرض کنید E وسط AC باشد، BE را وصل می‌کنیم و آن را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه F به‌دست آید، F را به C وصل می‌کنیم.

در این صورت $\triangle AEB \cong \triangle CEF$ زیرا $AE = CE$ ، $BE = FE$ و $\angle AEB = \angle CEF$.

در نتیجه $\angle BAC = \angle FCA < \angle DCA$.

استدلالی مشابه با استدلال نصف‌کردن BC نتیجه می‌دهد که $\angle DCA > \angle ABC$.



شکل ۵.۱

آنچه می‌خواستیم

مجموع زاویه‌های یک مثلث موضوعی است که بیشترین فصلهای این کتاب را به هم پیوند می‌دهد، و به صورت کلیتر، یکی از موضوعهای اساسی هندسه جدید است. گزاره زیر اولین صورت جدید این موضوع است.

گزاره ۱۷. در هر مثلث مجموع هر دو زاویه کمتر از دو قائمه است.

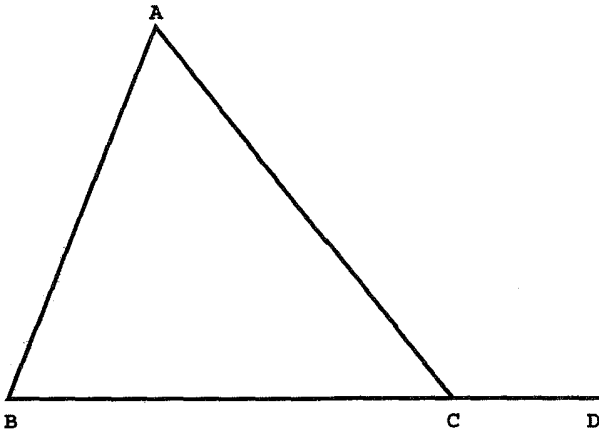
برهان: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۶.۱): نشان می‌دهیم $\angle CBA + \angle ACB$ از دو قائمه کمتر است.

BC را تا D امتداد می‌دهیم. چون $\angle DCA$ زاویه خارجی مثلث ABC است، از زاویه داخلی و غیرمجاور $\angle CBA$ بزرگتر است. در نتیجه

$$\angle CBA + \angle ACB < \angle DCA + \angle ACB = \text{دو قائمه}$$

آنچه می‌خواستیم

بسیاری از افراد، وقتی می‌خواهند یک خط راست را مشخص کنند می‌گویند خط راست کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است. این مطلبی است کاملاً معقول و ما بعداً با استفاده از همین اصل زیربنایی خطهای راست را در هندسه‌های دیگر تعریف خواهیم کرد. ولی اقلیدس تعریف متفاوت دیگری از خط راست دارد و از این رو ضروری می‌داند که ویژگی کوتاهترین فاصله بودن را که عقل سلیم حکم می‌کند ثابت نماید. و این مطلب اساساً هدف گروه بعدی گزاره‌هاست که در گزاره ۲۰ تبلور یافته است

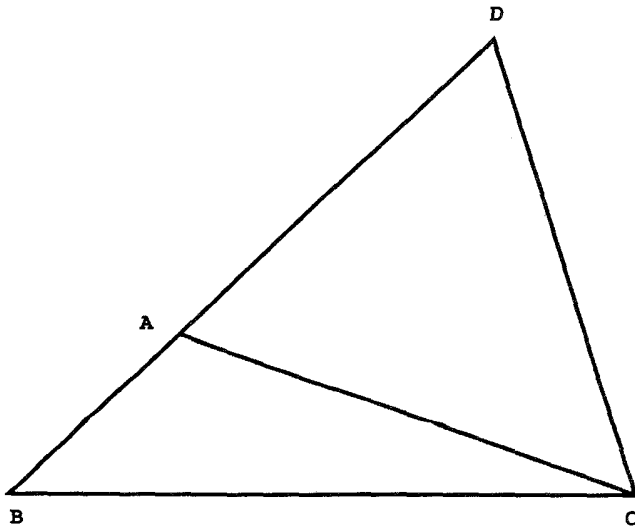


شکل ۶.۱

گزاره ۱۸. در هر مثلث زاویه بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است.

گزاره ۱۹. در هر مثلث ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویه بزرگتر است.

گزاره ۲۰. در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.



شکل ۷.۱

به خواننده یادآوری می‌کنیم که اثبات گزاره ۴ (ض رض) متضمن استفاده از قابلیت انطباق یک مثلث بر مثلث دیگر است، قابلیت انطباقی که اعتبارش در چارچوب کارهای اقلیدس سؤال برانگیز است. اکنون اقلیدس به اثبات دو قضیه قابل انطباقی باهم رض ز و ض ز ز در گزاره ۲۶ می‌پردازد. این بار موفق می‌شود از قابلیت انطباقی باهم استفاده نکند. ولی این موفقیت که لازمه آن استفاده از مطالب گزاره‌های ۲۱-۲۵ است، به بهای سنگین برهان پیچیده‌ای تمام می‌شود. گزاره دوم از این گزاره‌های مقدماتی نیاز به انطباق‌های بعدی را روشن می‌نماید. دلم می‌خواهد فکر کنم که اقلیدس زمانی به استفاده از انطباق در اثبات گزاره ۴ تسلیم شده است که تلاش‌های بی‌ثمر و پی‌گیرش برای ارائه یک برهان بی‌عیب به جایی نرسیده است.

گزاره ۲۱. اگر از دو انتهای یک ضلع مثلثی دو خط راست در داخل آن رسم کنیم، این خط‌های راست از دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌ترند ولی زاویه بین آنها از زاویه بین آن دو ضلع بزرگتر است.

گزاره ۲۲. با سه خط راست که با سه خط راست مفروض برابرند مثلثی بسازید؛ بنابراین لازم است که مجموع هر دو خط از این خط‌های راست از خط راست سوم بزرگتر باشد.

گزاره ۲۳. از نقطه مفروض بر خط راستی داده شده، زاویه مستقیم الخطی برابر با زاویه مستقیم الخط داده شده رسم کنید که یک ضلعش بر این خط واقع شود.

گزاره ۲۴. اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر نظیر به نظیر برابر باشند ولی زاویه بین آنها با هم برابر نباشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر در یکی از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر در دیگری بزرگتر است.

گزاره ۲۵. اگر در دو مثلث دو ضلع از یکی نظیر به نظیر با دو ضلع از دیگری برابر باشند ولی قاعده یکی از قاعده دیگری بزرگتر باشد، آنگاه زاویه مقابل به قاعده بزرگتر از زاویه مقابل به قاعده کوچکتر، بزرگتر است.

گزاره ۲۶. اگر در دو مثلث دو زاویه از یکی به ترتیب با دو زاویه از دیگری برابر باشند و ضلع مجاور - یا مقابل - به یکی از زاویه‌های مساوی از یکی با ضلع نظیرش از دیگری برابر باشد، بقیه اضلاع باهم و بقیه زاویه‌ها هم نظیر به نظیر با هم برابرند.

اقلیدس پس از اثبات همه قضیه‌های مربوط به قابلیت انطباق با هم استانده، به موضوع

توازی می‌پردازد. در دو گزاره زیر برای رسم خطهای موازی چندین روش نشان می‌دهد.

گزاره ۲۷. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و زاویه‌های متبادل درونی برابر ایجاد نماید، آن دو خط باهم موازی‌اند.

گزاره ۲۸. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و دو زاویه متقابل بیرونی و درونی برابر، یا دو زاویه متقابل درونی (بیرونی) برابر با دو قائمه ایجاد نماید، آن خطهای راست باهم موازی‌اند. تا اینجا اقلیدس در هیچ‌کدام از گزاره‌های خود از اصل موضوع پنجم استفاده نکرده است، و چنین استدلال شده است که این خود دلیلی است بر اکره آگاهانه اقلیدس در اتکای بر این اصل. با وجود این، نظر به پیشرفتهای اخیر صحیح این بوده است که به قسمتی از هندسه اقلیدسی که به این اصل موضوع بستگی ندارد نام دیگری داده شود. یانوش بویوی (۱۸۰۲-۱۸۶۰) یکی از بنیانگذاران هندسه نااقلیدسی، این زیر مجموعه از هندسه اقلیدسی را هندسه مطلق نامیده است امروزه این هندسه را معمولاً هندسه نتاری می‌نامند. گزاره‌های ۱-۲۸ اقلیدس قضیه‌های هندسه مطلق هستند. قضیه ۱۰.۱ در این فصل و نیز مطالب فصل ۱۰ نمونه‌های دیگری از گزاره‌های هندسه مطلق را تشکیل می‌دهند. در اینجا چند گزاره دیگر اقلیدس را که به اصل موضوع توازی وابسته‌اند برای ارجاعهای بعدی می‌آوریم.

گزاره ۲۹. اگر خط راستی بر دو خط راست موازی فرود آید، زاویه‌های متبادل درونی برابر، و زاویه‌های متقابل درونی و بیرونی برابر می‌سازد، و مجموع زاویه‌های متقابل درونی (بیرونی) برابر با دو قائمه می‌شود.

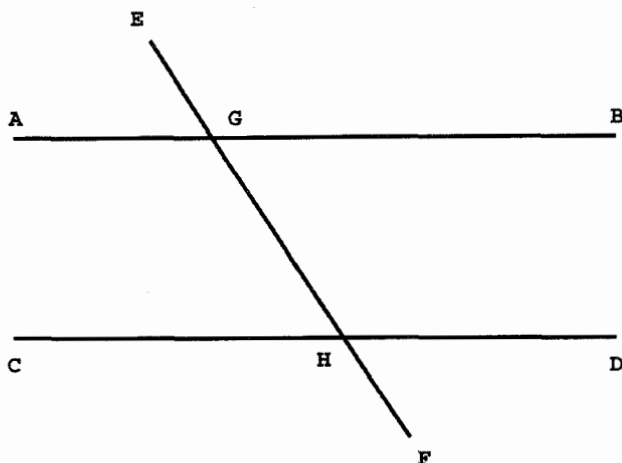
برهان: فرض می‌کنیم که خط راست EF بر خطهای راست متوازی AB و CD فرود آمده است (شکل ۸.۱)؛ نشان می‌دهیم که

$$\angle AGH = \angle GHD, \angle EGB = \angle GHD,$$

$$\angle BGH + \angle GHD = \text{دو قائمه}$$

اگر $\angle AGH$ با $\angle GHD$ برابر نباشد، پس یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض کنید $\angle AGH$ زاویه بزرگتر باشد. بنابراین

$$\angle GHD + \angle BGH < \angle AGH + \angle BGH = \text{دو قائمه}$$



شکل ۸.۱

بنابراین به موجب اصل موضوع پنجم اگر AB و CD را تا بینهایت امتداد دهیم متقاطع خواهند شد. ولی این دو خط متقاطع نیستند، زیرا بنا به فرض باهم موازی‌اند. بنابراین $\angle AGH = \angle GHD$ ، اکنون سایر احکام این گزاره به آسانی اثبات می‌شوند و ما از ذکر جزئیات صرف‌نظر می‌کنیم.

آنچه می‌خواستیم

در اینجا دو گزاره زیر را به علت اهمیت بسیار زیاد آنها می‌آوریم. این دو قضیه، اگر از مهمترین قضیه‌های همه ریاضیات نباشند، از قضیه‌های بسیار مهم هندسه اقلیدسی هستند. در فصلهای بعدی این کتاب سعی براین خواهد شد که این ادعا را ثابت کنیم.

گزاره ۳۲. در هر مثلث اگر یک ضلع را امتداد دهیم زاویه خارجی حاصل با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر می‌شود، و مجموع سه زاویه مثلث برابر با دو قائمه است.

گزاره ۴۷. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع ضلع روبه‌رو به زاویه قائمه برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر.

از مقاله III (دایره‌ها)

دایره‌های اقلیدسی نقش اساسی در بسط هندسه نااقلیدسی در این کتاب ایفا می‌کنند. به این دلیل بجاست که برخی از قضیه‌های استانده درباره دایره‌ها، مماسها و زاویه‌های آنها را در اینجا بازگو کنیم.

گزاره ۱۸. اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد، و خط راستی از مرکز به نقطه تماس وصل شود، این خط بر خط مماس عمود است.

گزاره ۲۲. در هر چهارضلعی محاط در یک دایره مجموع زاویه‌های روبه‌رو برابر با دو قائمه است.

گزاره ۲۷. در دایره‌های برابر، زاویه‌های روبه‌رو به کمانهای برابر، برابرند، خواه رأسهای زاویه‌ها در مراکز دایره‌ها واقع باشند، خواه بر محیطهای آنها.

گزاره ۳۱. زاویه محاط در یک نیمدایره، قائمه است.

گزاره ۳۲. اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد و از نقطه تماس خطی رسم شود که دایره را قطع کند، زاویه‌هایی که قاطع با مماس می‌سازد برابرند با زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یکی از دو کمانی که بین خط مماس و خط قاطع قرار دارند.

از مقاله VI (تناسبهای هندسی)

هر نظریه در باب تناسبها، وقتی موضوع اندازه‌ناپذیری بودن (نسبتهای گنگ) مطرح باشد، با دشواریهای فوق‌العاده‌ای مواجه خواهد شد. برای غلبه بر این دشواریها اقلیدس راه نسبتاً شگفت‌انگیزی انتخاب کرده است. وی ابتدا به اندازه‌ناپذیری در زمینه مساحتها پرداخته و گزاره ۱ در زیر را اثبات کرده است. با این کار توانسته است مسائل مربوط به نسبتهای برخی طولها را به نسبتهای مساحتهای متناظر آنها تبدیل نماید. این تکنیک ماهرانه در شرح و تفسیرهای جدید به دلیل جانبداری از راههای مستقیم‌تر نادیده گرفته شده و اصولاً به فراموشی سپرده شده است. چون بیان جزئیات ما را از هدف خود دور می‌کند، فقط برخی از معروفترین گزاره‌ها در مورد تشابه را بی‌آنکه به بیان براهین اقلیدس مبادرت کنیم، بازگو خواهیم کرد.

گزاره ۱. نسبت مساحتهای مثلثهای هم‌ارتفاع به هم و نسبت مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای هم‌ارتفاع به هم، مثل نسبت قاعده‌های آنهاست به همدیگر.

گزارهٔ ۲. اگر خط راستی موازی با یکی از اضلاع مثلث رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت قطع می‌کند؛ و اگر اضلاع مثلثی به یک نسبت تقسیم شده باشند، خط و اصل بین نقاط تقسیم با ضلع دیگر موازی است.

گزارهٔ ۴. در مثلثهایی که زاویه‌های آنها دو به دو با هم برابرند، اضلاع مجاور به زاویه‌های برابر متناسب‌اند، و اضلاع متناظر اضلاعی هستند که روبه‌رو به زاویه‌های متساوی‌اند

گزارهٔ ۵. اگر در دو مثلث اضلاع متناسب باشند، زاویه‌های آنها با هم مساوی می‌شوند و آن زاویه‌هایی با هم مساوی‌اند که روبه‌رو به اضلاع متناظر باشند.

۳.۱ بنداشتی (اصل موضوعی) سازی هیلبرت از هندسهٔ اقلیدسی (اختیاری)

با آنکه نسل‌های پس از اقلیدس همگی وی را به دلیل دستاورد عظیمش ستایش می‌کردند و به اثر وی به‌عنوان نمونهٔ استدلال محض می‌نگریستند، بسیاری از ریاضیدانان بر ناقص بودن این اثر وقوف کامل داشتند. اقلیدس در برهانهایش بارها تعاریف و اصل‌های موضوعی را به‌کار برده است که قبلاً اشارهٔ صریحی به آنها نکرده است. تلاش برای رفع این نقایص قرن‌ها ادامه یافت و در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، بیشتر به علت کشف هندسهٔ نااقلیدسی در نیمهٔ اول این سده، این تلاش سرعت بیشتری به‌خود گرفت. در اینجا بنداشتی‌سازی پیشنهادی داوید هیلبرت را در ۱۸۹۹، در کتابش به‌نام مبانی هندسه معرفی می‌کنیم. چنانچه قبلاً اشاره کردیم این دستگاه مسلم و قطعی شمرده شده است ولی در عین حال بسیاری از معلمان به‌علت پیچیدگی و ظرافت بسیارش آن را مورد توجه قرار نداده‌اند. در ذیل خلاصهٔ فصل اول کتاب هیلبرت آورده شده است. خواننده می‌تواند برای مطالعهٔ مشروح یک دستگاه بنداشتی برای هندسهٔ اقلیدسی که بسیار نزدیک به دستگاه بنداشتی هیلبرت است، (اگرچه به هیچ‌وجه با آن یکی نیست) به کتاب [۱]، مؤنیز مراجعه نماید.

بر خلاف دستاورد اقلیدس، هیلبرت کار خود را با ذکر دسته‌ای از اصطلاحات که هیچ تعریفی برای آنها ارائه نمی‌دهد، آغاز می‌کند. مزیت این نگرش این است که هم کلیت زیاد دارد و هم صحت منطقی. ریاضیدانان به‌تصادف دریافته‌اند که بهتر است مفهوم مجرد نقطه را به‌عنوان چیزی غیر از خال بینهایت کوچک تعبیر نکنند. متداولترین این تعبیرها بیان نقطهٔ به صورت یک مجموعه است: گاه به‌صورت مجموعه‌ای غیر از نقاط و گاه به‌صورت مجموعه‌ای از خطوط. نبود تعریفی

برای به‌کار بردن این مجموعهٔ مجرد از بندها در دستگاههای منطقی دیگری غیر از هندسه تلقی کرد. در هر حال، هفت تعریف اول اقلیدس روشن می‌نماید که تعریف هر چیزی امکان ندارد. باید از مصطلحات تعریف نشده‌ای آغاز کرد.

0. کمیتهای تعریف نشده (یا مفاهیم اولیه)

رده‌ای از عناصر تعریف نشده نقطه نام دارند که با حروف بزرگ لاتین A, B, \dots نشان داده می‌شوند.

رده‌ای از عناصر تعریف نشده خط نام دارند، که با حروف کوچک لاتین a, b, \dots نشان داده می‌شوند.

رده‌ای از عناصر تعریف نشده صفحه نام دارند، که با حروف کوچک یونانی $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ نشان داده می‌شوند.

رابطه‌های تعریف نشده: وقوع (واقع شدن بر، قرار داشتن بر)؛ میانبود، قابلیت انطباق با، توازی.

I. بندهای ارتباطی

پس از ذکر عناصر و رابطه‌های تعریف نشده، هیلبرت با بیان اصلهای موضوعی که این عناصر تاکنون نامرتب با به هم مرتبط می‌کنند کار خود را ادامه می‌دهد. گرچه وی آنها را بندها می‌نامد ولی بین آنها و اصلهای موضوع هیچ تفاوت منطقی وجود ندارد.

I.1. دو نقطه متمایز A و B همواره یک خط راست a را مشخص می‌کنند. می‌نویسیم $a = AB$ یا $a = BA$

I.2. هر دو نقطه متمایز از یک خط راست آن خط را کاملاً مشخص می‌کنند؛ یعنی اگر $AB = a$ و $AC = a$ و $B \neq C$ ، همچنین خواهیم داشت $BC = a$.

I.3. هر سه نقطه A, B, C ناواقع بر یک خط راست، همواره یک صفحه α را مشخص می‌کنند. می‌نویسیم $ABC = \alpha$.

I.4. هر سه نقطه متمایز A, B, C از صفحه α که بر یک خط راست نباشند، کاملاً این صفحه را مشخص می‌کنند.

۵.I. اگر دو نقطه A, B از خط راست a در صفحه α قرار داشته باشند، همه نقاط a در صفحه α قرار دارند.

۶.I. اگر دو صفحه α, β در نقطه A مشترک باشند در نقطه دیگری چون B نیز مشترک اند.

۷.I. بر هر خط راست دست کم دو نقطه وجود دارند؛ بر هر صفحه دست کم سه نقطه ناواقع بر یک خط راست، در فضا دست کم چهار نقطه ناواقع بر یک صفحه وجود دارند.

با استفاده از این بنداشتهای ارتباط می توان قضیه های ساده ای چون این واقعیت را که دو صفحه متقاطع باید در یک خط متقاطع باشند ثابت کرد.

II. بنداشتهای ترتیب

این گروه از بنداشتها برای برطرف کردن نقص کار اقلیدس وضع شده اند و مبنایی منطقی برای رابطه های میان بود و در نبود هستند. این بنداشتها مبتنی بر مقاله پاش، درسی در هندسه جدید^۱ هستند که در سال ۱۸۸۲ منتشر شده است.

II.۱. اگر A, B, C سه نقطه واقع بر یک خط راست باشند و B بین A و C باشد، B بین C و A نیز هست.

II.۲. اگر A و C نقطه هایی بر یک خط راست باشند، دست کم یک نقطه B بین A و C وجود دارد و نیز یک نقطه D چنان وجود دارد که C بین A و D واقع است.

II.۳. از هر سه نقطه واقع بر یک خط راست فقط و فقط یکی بین دو تای دیگر واقع است.

II.۴. هر چهار نقطه A, B, C, D واقع بر یک خط راست را همواره می توان طوری مرتب کرد که B بین A و C و نیز بین A و D باشد، و به علاوه C بین A و D و نیز بین B و D باشد. این بنداشتها این امکان را به ما می دهند که پاره خط AB را به صورت مجموعه همه نقاط واقع بین A و B تعریف کنیم. این پاره خطها همچنین، برای بیان بنداشت بسیار مهم زیر به کار می روند که در واقع بیان می کند هر مثلث یک داخل دارد و یک خارج.

II.۵. (بنداشت پاش). فرض کنید A, B, C سه نقطه ناواقع بر یک خط راست باشند و a خط

راستی بر صفحه ABC باشد که از هیچ یک از نقاط A, B, C نگذشته است. در این صورت اگر خط راست a از یکی از نقاط پاره خط AB بگذرد، از یکی از نقاط پاره خط BC یا پاره خط AC نیز می‌گذرد.

قضیه ۱.۱ در بخش بعدی یکی از کاربردهای بنداشت پاش است.

هیلبرت کار خود را بدین ترتیب دنبال می‌کند که نشان می‌دهد که دو گروه بنداشت فوق برای روشن نمودن مفهوم داخل و خارج هر چندضلعی ساده (چندضلعی که خود را قطع نکند) کافی اند. وی همچنین ثابت می‌کند که هر خط راست واقع بر یک صفحه نقاط دیگر صفحه را به دو نیمه (طرف)، و هر صفحه نقاط دیگر فضا را به دو نیمه (طرف) خوشتعریف تقسیم می‌کند. سپس نوبت به بنداشت توازیها می‌رسد. نکته قابل توجه این است که اگرچه هیلبرت این بنداشت را بنداشت اقلیدس می‌نامد ولی در واقع وی صورتی از اصل موضوع توازی به نام اصل موضوع پلی فیر را بیان می‌کند.

III. بنداشت توازیها

III.۱. در یک صفحه α از هر نقطه A واقع در خارج خط راست a ، فقط و فقط یک خط راست می‌توان رسم کرد که a را قطع نکند. این خط راست را خط موازی با a ماربر A می‌نامند.

IV. بنداشتهای قابلیت انطباق باهم

هر بنداشتی‌سازی از هندسه اقلیدسی باید یا با دخالت دادن حرکت‌های صلب (که در فصل بعد مفصلاً مورد بحث قرار خواهند گرفت) یا با عرضه بنداشتهایی که مفهوم قابلیت انطباق باهم را تعریف می‌کنند، صورت گیرد. هیلبرت از روش دوم پیروی می‌نماید. ولی قبل از بیان این بنداشتهای رابطه تعریف نشده قابلیت انطباق باهم، باید مفاهیم نیمخط و زاویه تعریف شوند. خوشبختانه بنداشتهای ترتیب ارائه همه تعریفهای ضروری را امکانپذیر می‌سازند. خلاصه اینکه، یک نیمخط خارج شده از نقطه مفروض A مجموعه نقاطی است از یک خط مرسوم از A که در یک طرف A قرار دارند، و یک زاویه در آن نقطه دو نیمخط مرسوم از آن نقطه است (به طوری که هر دو بر یک خط راست واقع نباشند). همچنین نیاز به تعریفهای داخل زاویه و زاویه‌های یک مثلث مطرح می‌شود، ولی این کار ما را از موضوع اصلی دور می‌کند. لذا از خواننده خواسته می‌شود که در

عوض از شهود عینی خود استفاده کند.

۱.IV. اگر A و B دو نقطه بر خط راست a باشند و اگر A' نقطه دیگری بر همین خط، یا خط دیگری چون a' باشد. آنگاه در یک طرف A' از خط راست a' تنها و تنها یک نقطه B' می توان یافت به طوری که پاره خط AB (یا BA) با پاره خط $A'B'$ قابل انطباق باشد. این رابطه را با نوشتن

$$AB \equiv A'B'.$$

نشان می دهیم. هر پاره خط با خودش قابل انطباق است؛ یعنی همواره داریم

$$AB \equiv AB.$$

۲.IV. اگر پاره خط AB با پاره خط $A'B'$ و نیز با پاره خط $A''B''$ قابل انطباق باشد، آنگاه $A'B'$ با $A''B''$ قابل انطباق است؛ یعنی اگر $AB \equiv A'B'$ و $AB \equiv A''B''$ آنگاه $A'B' \equiv A''B''$.

۳.IV. فرض می کنیم AB و BC دو پاره خط از یک خط راست a باشند که هیچ نقطه مشترکی جز B ندارند، به علاوه فرض می کنیم $A'B'$ و $B'C'$ دو پاره خط از همان خط یا از خط دیگری چون a' باشند که همان طور نقطه مشترکی جز B' ندارند. اگر $AB \equiv A'B'$ و $BC \equiv B'C'$ ، آنگاه $AC \equiv A'C'$.

۴.IV. فرض می کنیم زاویه (h, k) در صفحه α و خط راست a' در صفحه α' داده شده اند. همچنین فرض می کنیم در صفحه α' یکی از طرفهای a' مشخص شده است. نیمخطی از خط راست a' را که از نقطه O' از این خط جدا شده است h' می نامیم. در این صورت در صفحه α' یک و تنها یک نیمخط k' وجود دارد به طوری که زاویه (h', k') یا (k, h) با زاویه (h', k') قابل انطباق است و تمام نقاط داخل زاویه (h', k') در همان طرف مشخص شده a' قرار دارند. این رابطه را با نماد

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

بیان می کنیم. هر زاویه با خودش قابل انطباق است

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$$

باهم مساوی باشند. در این صورت در میان این رشته نقاط همواره نقطه‌ای چون A_n وجود دارد به طوری که B بین A و A_n واقع باشد.

هیلبرت، چند سال پس از انتشار نخستین کتاب خود، لازم دید که بنداشتهای پیوستگی را اضافه کند. ولی چنانچه بسیاری از هندسه‌دانان متوجه شده‌اند، این افزایش به مسائلی مربوط می‌شود که کاربردی در هندسه اقلیدسی ندارند، در اینجا از بحث در این مورد خودداری می‌کنیم.

۴.۱ صورت‌های مختلف اصل موضوع پنجم اقلیدس

بسیار محتمل است که خواننده از صورت اصل موضوع پنجم اقلیدس تعجب کرده باشد. گرچه بیان اقلیدس به توازی اشاره‌ای ندارد ولی این اصل موضوع به اصل موضوع توازی معروف است. این اصل موضوع در کتابهای درسی جدید به صورتهای متفاوتی ظاهر می‌شود که اولین بار در سده پنجم میلادی توسط پروکولوس بیان شده بوده است، چنانچه در ریاضیات مرسوم است. این اصل موضوع معمولاً به شخص متأخرتری نسبت داده می‌شود. صورت این اصل موضوع در حقیقت مانند صورت اصل موضوع ۱.III در بخش قبل است.

اصل موضوع پلی‌فیر: به‌ازای هر خط راست مفروض m و نقطه p ناواقع بر آن فقط یک خط یکتای n شامل p وجود دارد که موازی با m است.

بلافاصله آشکار نمی‌شود که اصل موضوع پلی‌فیر هم‌ارز منطقی اصل موضوع پنجم اقلیدس است. در قضیه زیر این هم‌ارزی ثابت خواهد شد. در واقع بهتر است که هم‌ارزی این دو اصل موضوع را با این حکم که مجموع زاویه‌های یک مثلث دو قائمه است هم‌زمان با هم ثابت کنیم. طی قرن‌ها صورتهای هم‌ارز دیگری از اصل موضوع پنجم اقلیدس بیان شده‌اند که برخی از آنها را در فصل ۱۰ ذکر کرده‌ایم. در براهین زیر نماد π برای نشان دادن دو قائمه به‌کار رفته است.

برهان هم‌ارزی این سه نحوه بیان متکی بر اصلهای موضوعی است که اقلیدس صراحتاً آنها را بیان نکرده است. ولی، وی این اصلهای موضوع یا صورتهای هم‌ارز با آنها را در برخی از براهین خود به‌کار برده است. بیانهای جدید این اصلهای موضوع را خوانندگان در بخش قبل خواهند یافت.

قضیه ۱.۴.۱. احکام زیر در هندسه مطلق هم‌ارزند.

(الف) اصل موضوع پلی‌فیر

(ب) اصل موضوع پنجم اقلیدس

(ج) مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر π است.

برهان: الف \Rightarrow ب) فرض می‌کنیم اصل موضوع پنجم اقلیدس درست است. خط CD و نقطه X ناواقع بر آن را در نظر می‌گیریم (شکل ۹.۱). نشان می‌دهیم که فقط یک خط یکتا از X می‌گذرد که با CD موازی است. فرض کنید Y نقطه دلخواهی بر CD و خط AB شامل نقطه X باشد به طوری که زاویه‌های متبادل داخلی $\angle AXY$ و $\angle DYX$ مساوی باشند. بنابراین گزاره ۲۷ اقلیدس خط AB لزوماً موازی با CD است. اگر خط دیگری باشد که از X می‌گذرد

آنگاه یا

$$\angle A'XY < \angle AXY = \angle DYX = \pi - \angle CYX$$

یا

$$\angle B'XY < \angle BXY = \angle CYX = \pi - \angle DYX$$

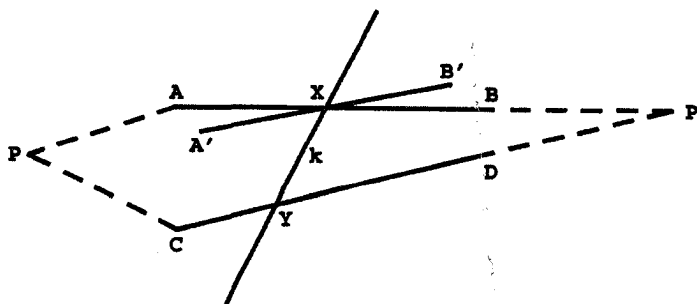
به عبارت دیگر یا داریم

$$\angle A'XY + \angle CYX < \pi$$

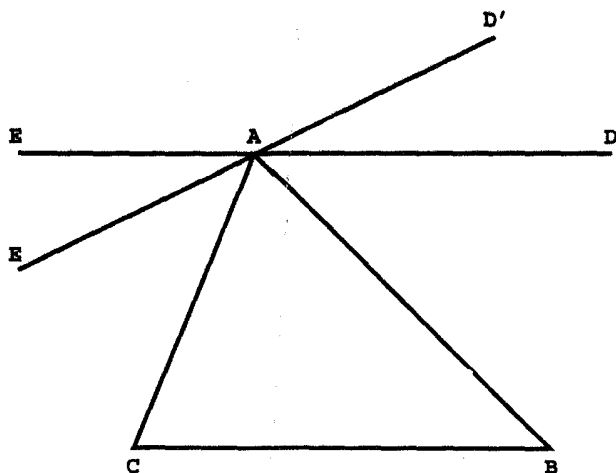
یا

$$\angle B'XY + \angle DYX < \pi.$$

در هر دو حالت از اصل موضوع پنجم اقلیدس نتیجه می‌شود که خط $A'B'$ ، خط CD را قطع می‌کند.



شکل ۹.۱



شکل ۱۰.۱

ج \Rightarrow الف) فرض می‌کنیم اصل موضوع پلانی فیر برقرار و مثلث ABC داده شده باشد (شکل ۱۰.۱). فرض می‌کنیم DE موازی یکتا با BC باشد که از A گذشته است فرض می‌کنیم $D'A$ خطی باشد به طوری که

$$\angle BAD' = \angle ABC.$$

بنابر گزاره ۲۷ اقلیدس، $D'A$ با BC موازی است و لذا باید با DE یکی باشد. از این رو داریم

$$\angle BAD = \angle ABC$$

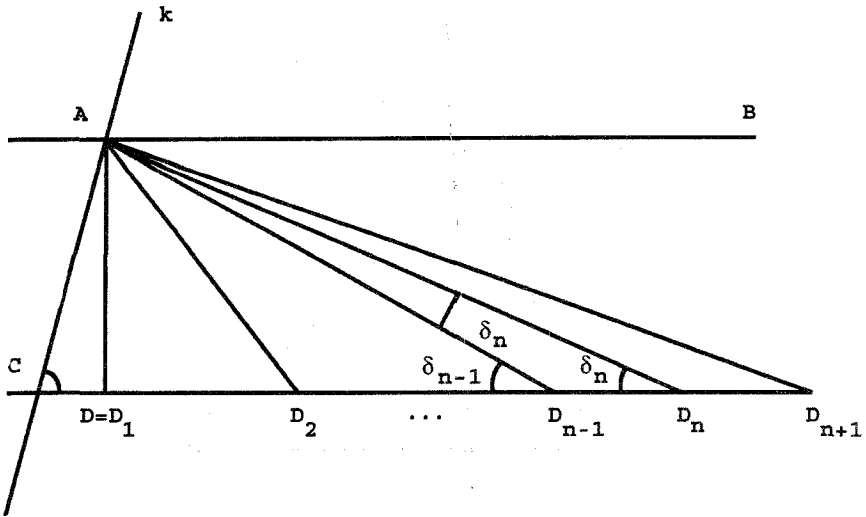
و همچنین

$$\angle EAC = \angle BCA.$$

در نتیجه

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BAD + \angle EAC + \angle CAB = \pi.$$

ب \Rightarrow ج) فرض می‌کنیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر π باشد. گیریم در شکل ۱۱.۱ قاطع



شکل ۱۱.۱

h دو خط AB و CD را به ترتیب در نقاط A و C طوری قطع کرده باشد که $\alpha = \angle ACD$ و $\beta = \angle CAB$. نشان می‌دهیم که اگر

$$\alpha + \beta < \pi$$

آنگاه AB و CD متقاطع‌اند.

دنبالهٔ نقاط D_1, D_2, D_3, \dots را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $D_1 = D$. فرض می‌کنیم D_n معین شده است و D_{n+1} را نقطه‌ای می‌گیریم که D_n بین C و D_{n+1} باشد و $AD_n = D_n D_{n+1}$. در نتیجه مثلث $AD_n D_{n+1}$ متساوی‌الساقین است، از این رو اگر

$$\delta_n = \angle AD_n C = \angle D_n A D_{n-1}$$

آنگاه

$$\delta_{n-1} = \pi - \angle AD_{n-1} D_n = \pi - (\pi - 2\delta_n) = 2\delta_n$$

بنابراین اصل استقرای ریاضی داریم

$$\delta_n = \frac{\delta_1}{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ولی، اگر قرار دهیم $\beta_n = \angle CAD_n$ ، آنگاه

$$\alpha + \beta_n + \delta_n = \pi$$

و از این رو (بنابر بنداشت ارشمیدس)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \pi - \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \pi - \alpha - 0 > \beta$$

یعنی به ازای مقدار معینی چون n خواهیم داشت $\beta_n > \beta$. در نتیجه خط AB از داخل مثلث ACD_n می‌گذرد و بنابراین طبق اصل موضوع پاش AB باید CD را قطع کند. این نکته که این تقاطع در طرفی از k رخ می‌دهد که توسط اصل موضوع پنجم پیش‌بینی شده است نتیجه‌ای از همان بحث زاویه خارجی است که در قسمت اول برهان این قضیه به‌کار رفته است.

۵.۱ تمرین

۱. کتاب هندسه دبیرستانی خود را در پنج صفحه خلاصه کنید.
- براهین گزاره‌هایی که در ذیل به آنها اشاره شده و در این فصل آورده نشده‌اند در پیوست الف آمده‌اند.
۲. احکام و/یا را در براهین گزاره‌های ۵ تا ۹ نقد کنید، و آنها را با اصطلاح و نماد جدیدتری بنویسید.
۳. احکام و/یا را در براهین گزاره‌های ۱۰ تا ۱۵ نقد کنید و آنها را با اصطلاح و نماد جدیدتری بنویسید.
۴. احکام و/یا را در براهین گزاره‌های ۱۶ تا ۱۹ نقد کنید و آنها را با اصطلاح و نماد جدیدتری بنویسید.
۵. احکام و/یا را در براهین گزاره‌های ۲۰، ۲۲، ۲۳ نقد کنید و آنها را با اصطلاح و نماد جدیدتری بنویسید.
۶. احکام و/یا را در براهین گزاره‌های ۲۶ تا ۲۸ نقد کنید و آنها را با اصطلاح و بیان جدیدتری بنویسید.

قویاً توصیه می‌شود که خوانندگان تمرینهای ۷ تا ۲۹ را خود حل کنند یا حل آنها را در یک کتاب درسی دبیرستانی پیدا نمایند. براهین باید برگزاره‌هایی از اقلیدس متکی باشند که در این

فصل ذکر شده‌اند. به علاوه خوانندگان باید تشخیص دهند که کدام تمرین در هندسه مطلق معتبر است و کدام یک فقط در هندسه اقلیدسی.

۷. ثابت کنید که مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو نقطه متمایز A و B خط راستی است عمود بر خط AB که آن را نصف می‌کند (عمود منصف AB).

۸. ثابت کنید که عمود منصفهای سه ضلع هر مثلث هم‌رس‌اند (در یک نقطه متقاربانند).

۹. ثابت کنید مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو ضلع یک زاویه، نیمساز آن زاویه است.

۱۰. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های یک مثلث هم‌رس‌اند.

۱۱. ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی مساوی است با $(n - 2)\pi$.

۱۲. ثابت کنید که زاویه‌های روبه‌رو در هر متوازی‌الاضلاع با هم برابرند.

۱۳. ثابت کنید اگر زاویه‌های روبه‌رو در یک چهارضلعی دوجه‌دو با هم برابر باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۴. ثابت کنید که اضلاع روبه‌رو در یک متوازی‌الاضلاع برابرند.

۱۵. ثابت کنید اگر اضلاع روبه‌رو در یک چهارضلعی دوجه‌دو با هم مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۶. ثابت کنید قطرهای یک متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند.

۱۷. ثابت کنید مکان هندسی نقاط هم‌فاصله از یک خط ثابت دو خط موازی با این خط است.

۱۸. ثابت کنید خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی است و طول آن نصف طول ضلع سوم است.

۱۹. نشان دهید که در یک مثلث هر دو میانه یکدیگر را به پاره‌خطهایی تقسیم می‌کنند که نسبت طولهای آنها برابر ۲:۱ است.

۲۰. فرض می‌کنیم P, Q, R سه نقطه واقع بر خطهای راست BC, CA, AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید P, Q, R هم‌خط‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$$

(در اینجا از این قرارداد پیروی می‌کنیم که اگر U, V, W سه نقطه واقع بر یک خط راست باشند، نسبت UV/vw مثبت یا منفی است برحسب اینکه V در داخل یا خارج پاره‌خط UW باشد. این تمرین به قضیهٔ منلائوس معروف است).

۲۱. فرض کنید P, Q, R سه نقطه واقع بر خطهای راست BC, CA, AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید خطهای AP, BQ, CR هم‌رس‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(این همان قضیه سواست)

۲۲. ثابت کنید که سه میانه هر مثلث هم‌رس‌اند.

۲۳. ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

۲۴. ثابت کنید که در دایره‌های قابل انطباق باهم زاویه‌های مرکزی برابر، کمانهای برابر و وترهای برابر جدا می‌کنند.

۲۵. ثابت کنید که در دایره‌های قابل انطباق با هم کمانهای برابر و وترهای برابر دارند و روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابرند.

۲۶. ثابت کنید که در دایره‌های قابل انطباق باهم و ترهای برابر کمانهای برابر جدا می‌کنند و روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی برابرند.

۲۷. ثابت کنید که زاویهٔ محاط در یک دایره با نصف زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به همان کمان برابر است.

۲۸. ثابت کنید که مکان هندسی همهٔ نقطه‌هایی که از آنها پاره‌خط مفروضی به یک زاویه دیده می‌شوند کمانی است از یک دایره.

۲۹. ثابت کنید که مجموع زاویه‌های روبه‌رو در یک چهارضلعی محاط در یک دایره برابر با π است.

۳۰. فرض کنید T نقطه‌ای بر محیط دایره‌ای به مرکز C باشد. ثابت کنید خط m که بر T می‌گذرد بر این دایره مماس است، اگر و تنها اگر بر شعاع CT عمود باشد.

۳۱. زندگی و دستاوردهای پیشینیان اقلیدس به شرح زیر را به اختصار بیان کنید:

(الف) تالس	(ب) فیثاغورس	(ج) دموکریت
(د) آناکساگوراس	(ه) آرخوتاس	(و) اتودوکسوس
(ز) بقراط خیوسی		

۳۲. زندگی و دستاوردهای جانشینان اقلیدس به شرح زیر را به اختصار بیان کنید

(الف) ارشمیدس	(ب) آپولونیوس	(ج) افلاطون
(د) هرون	(ه) پاپوس	

۳۳. کدام یک از گزاره‌های مقاله‌های III و VI اقلیدس که در این فصل آورده شده‌اند قضیه‌هایی از هندسه مطلق‌اند.

۳۴. مشابه هر یک از اصلهای موضوع و اصلهای بدیهی اقلیدس را، در صورت وجود، در میان بنداشتهای هیلبرت پیدا کنید.

۳۵. بنداشتهای هیلبرت را با رسم نمودار نشان دهید.

گزاره‌های زیر را که از کتاب هیلبرت برگرفته شده‌اند، فقط با استفاده از بنداشتهای هیلبرت ثابت کنید.

۳۶. دو خط راست واقع بر یک صفحه یا نقطه مشترکی دارند یا ندارند.

۳۷. دو صفحه یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک خط راست مشترک‌اند.

۳۸. یک صفحه و یک خط راست ناواقع بر آن یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه اشتراک دارند.

۳۹. یک خط راست و یک نقطه ناواقع بر آن فقط و فقط در یک صفحه قرار دارند.

۴۰. دو خط راست متقاطع متمایز فقط و فقط بر یک صفحه واقع‌اند.

۴۱. میان هر دو نقطه از یک خط راست بینهایت نقطه قرار دارد.

۴۲. هر خط راست a واقع بر صفحه α ، نقاط دیگر این صفحه را به دو ناحیه با ویژگیهای زیر تقسیم می‌کند.

الف) اگر A نقطه‌ای در یک ناحیه و B نقطه‌ای در ناحیه دیگر باشد، پاره خط AB خط a را می‌برد.

ب) اگر A و A' دو نقطه در یک ناحیه باشند، پاره خط AA' خط a را نمی‌برد.

۴۳. اگر دو خط راست a و b از یک صفحه خط سوم C از آن صفحه را قطع نکنند یکدیگر را هم قطع نمی‌کنند.

۴۴. اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle A \equiv \angle A'$$

این دو مثلث باهم قابل انطباق‌اند.

۴۵. اگر در دو مثلث دو زاویه و ضلع بین آنها از یکی با دو زاویه و ضلع بین آنها از دیگری نظیر به نظیر با هم قابل انطباق باشند این دو مثلث باهم قابل انطباق‌اند.

حرکتهای صلب اقلیدسی

۱.۲ مقدمه

چنانچه در فرصتی که قبلاً پیش آمده بود گفتیم، یکی از بزرگترین عیبهای اقلیدس در پرداختن به هندسه غفلت وی از اشاره صریح به حرکتهای صلب، یعنی، تبدیلهایی از صفحه است که شکلهای صفحه را کج و کوله نمیکنند. با در نظر گرفتن هدفهای اقلیدس این مطلب در واقع یک نقص جدی است، زیرا چنین تبدیلی از همان اول بند سوم در برهان گزاره ۴ وارد شده است. از این حرکتها در بنیادسازی هیلبرت هم ذکری به میان نیامده است و به جای آنها چندین بنیادست قابلیت انطباق با هم گذاشته شده است. در دستگاههای بنیادستی دیگر به ویژه دستگاه م. پیبری (۱۸۶۰-۱۹۱۳) مستقیماً از آنها نام برده می شود. در ۱۸۷۲ بسیاری از ریاضیدانان از وجود جانشینهای معتبری برای هندسه اقلیدسی، هر یک یا دسته یا گروه حرکتهای صلب مخصوص به خود، کاملاً آگاهی یافته بودند. یکی از مسائل برآمده از ازدیاد هندسه ها مسأله رده بندی آنها بود،

و در این سال فلیکس کلاین (۱۸۴۹-۱۹۲۵) برنامهٔ ارلانگر خود را مطرح کرد که در آن پیشنهاد شده بود هندسه‌ها با گروه‌های حرکت‌های صلبشان رده‌بندی شوند.

در این فصل دو هدف دنبال می‌شود. اول نشان می‌دهیم که هر حرکت صلب صفحه یا یک انتقال، یک دوران، یک تقارن محوری^۱، یا یک لغزه است. دوم، نشان می‌دهیم که تقارن‌ها تمام حرکت‌های صلب دیگر را تولید می‌کنند. به‌ویژه، هر حرکت صلب را می‌توان به صورت ترکیبی از سه تقارن بیان کرد.

این رده‌بندی حرکت‌های صلب صفحهٔ اقلیدسی را معمولاً از م. شال (۱۷۹۳-۱۸۸۰) می‌دانند. ولی با توجه به کارهای خیلی بیشترِ اوپلر در زمینهٔ حرکت‌های صلب فضای سه‌بعدی اقلیدسی مشکل بتوان باور کرد که وی از حالت ساده‌ترِ دوبعدی آگاهی نداشته است.

۲.۲ حرکت‌های صلب

در اینجا فرض بر این است که خواننده با مفهوم تابع و ترکیب توابع آشنایی دارد. ترکیب توابع f و g را با $g \circ f$ نشان می‌دهیم و آن را از راست به چپ می‌خوانیم. از این رو

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

هر تابعی از یک صفحه به خودش را، به علت ماهیت هندسی‌اش، یک تبدیل می‌نامیم. اگر f یک تبدیل و P و Q دو نقطه یا مجموعه‌ای از نقاط باشند به طوری که $f(P) = Q$ ، می‌گوییم f ، P را به Q تبدیل می‌کند یا P را به Q می‌نگارد. اگر P یک نقطه (یا یک مجموعه) باشد به طوری که $f(P) = P$ ، می‌گوییم f ، P را تثبیت می‌کند یا به عبارت دیگر P یک نقطه (یا مجموعه) ثابت f است.

گفتار خود را با تعریف و شرح برخی از ویژگی‌های حرکت‌های صلب آغاز می‌کنیم. توجه خود را به این پرسش که کمترین مقدار اطلاعات مورد نیاز برای تعیین یکی بودن دو حرکت صلب چیست، متمرکز می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $d(P, Q)$ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ P و Q باشد. یک حرکت صلب صفحهٔ اقلیدسی تبدیلی است چون $f(P)$ از این صفحه به خودش به طوری که تساوی:

$$d(P, Q) = d(P', Q')$$

۱. چون در این کتاب در همه جا فقط صحبت از تقارن محوری (reflection) است، از این به بعد کلمهٔ محوری را حذف و به جای آن فقط تقارن می‌نویسیم. (م.)

زمانی برقرار است که $P' = f(P)$ و $Q' = f(Q)$.

روشن است که تبدیل همانی Id که هر نقطه از صفحه را بر خودش می‌نگارد حرکتی است صلب و ترکیب حرکتهای صلب باز حرکتی است صلب.

گزاره ۱.۲. هر حرکت صلب خطهای راست را به خطهای راست تبدیل می‌کند.

برهان: فرض می‌کنیم f یک حرکت صلب باشد و m خطی راست، و A و B دو نقطه بر آن باشند. اگر نقطه دلخواهی بر m میان A و B باشد، و اگر $A' = f(A)$ ، $B' = f(B)$ و $P' = f(P)$ ، آنگاه

$$d(A', P') + d(P', B') = d(A, p) + d(P, B) = d(A, B) = d(A', B')$$

بنابراین P' بر خط $A'B'$ میان A' و B' قرار دارد.

بر عکس، فرض می‌کنیم P' نقطه دلخواهی از $A'B'$ ، میان A' و B' باشد و فرض می‌کنیم P نقطه یکتایی از m باشد به طوری که

$$d(A, P) = d(A', P'), d(B, P) = d(B', P')$$

در این صورت بنا بر استدلال فوق فاصله $f(P)$ از A' و B' برابر است با همان فاصله P' از این دو نقطه، از این رو $P' = f(P)$.

برهانی مشابه با همین برهان، وقتی P بر m و خارج پاره خط AB باشد، می‌توان ارائه داد. بنابراین f هر نقطه از خط AB را به نقطه‌ای از خط $A'B'$ بدل می‌کند، و با این فرایند تمام نقاط $A'B'$ پوشانده می‌شود. از این رو f خط AB را به خط $A'B'$ بدل می‌کند.

آنچه می‌خواستیم

هنگام تلاش برای رده‌بندی دسته‌ای از اشیاء ریاضی لازم است ملاکی ساده برای تعیین یکی بودن دو عضو از این دسته داشته باشیم. البته دو تابع زمانی یکی هستند که مقادیر آنها به‌ازای هر نقطه از حوزه‌شان یکی باشند. ولی در حالت خاص حرکتهای صلب بررسی تساوی در هر نقطه از حوزه ضروری نیست. به طوری که هم‌اکنون خواهیم دید این بررسی برای سه نقطه کافی است. می‌گوییم دو تابع f و g در نقطه P یکی هستند هر گاه $f(P) = g(P)$.

گزاره ۲.۲. اگر دو حرکت صلب در دو نقطه متمایز یکی باشند، در همه نقاط خط واصل بین این دو نقطه نیز یکی هستند.

قضیه ۳.۲. اگر دو حرکت صلب در سه نقطه ناهمخط یکی باشند، در همه جا یکی هستند. برهان: فرض کنید f و g دو حرکت صلب باشند که در سه نقطه ناهمخط A ، B و C یکی هستند. بنابراین گزاره ۲.۲ این دو حرکت در همه نقاط خطهای AB ، BC ، AC یکی هستند. حال اگر P نقطه دلخواهی از صفحه باشد، روشن است که خطی وجود دارد که از P می‌گذرد و اجتماع AB ، BC و AC را در دو نقطه متمایز X و Y قطع می‌کند. چون f و g در نقاط X و Y یکی هستند، پس بنابراین گزاره فوق در P نیز یکی خواهند بود. برهان فرعی زیر بلافاصله نتیجه می‌شود.

فرع ۴.۲. اگر حرکت صلبی سه نقطه ناهمخط را ثابت نگه دارد، باید حرکت صلب همانی باشد.

۳.۲ انتقال، دوران، تقارن

اکنون به شرح چند حرکت صلب و عکس آنها می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که هر دوران و هر انتقال ترکیبی از دو تقارن است و از این واقعیت برای بیان ترکیب دو دوران و یا دو انتقال صراحتاً استفاده می‌کنیم.

یک انتقال τ از صفحه اقلیدسی حرکتی است صلب به طوری که پاره‌خطهای PP' و QQ' یک طول و یک جهت دارند هرگاه P' و Q' و P و Q در این حالت می‌نویسیم

$$\tau = \tau_{PP'} = \tau_{QQ'}$$

می‌پذیریم که تبدیل همانی را به عنوان انتقال نمایان (بیمایه) منظور کنیم. گزاره زیر نشان می‌دهد که انتقالهای بسیاری وجود دارند که نمایان نیستند.

گزاره ۵.۲. به ازای هر دو نقطه A و B یک انتقال τ_{AB} وجود دارد که A را به B می‌برد. برهان: اگر $A = B$ ، تابع همانی انتقال مطلوب است. فرض کنید A و B متمایز باشند. به ازای هر نقطه P نقطه P' را چنان در نظر می‌گیریم که پاره خط PP' با پاره خط AB یک جهت و یک اندازه داشته باشد. به عبارت دیگر، اگر P بر خط AB واقع نباشد، $ABPP'$ یک متوازی‌الاضلاع باشد. از تریابی تساوی و توازی نتیجه می‌شود که تابع

$$P' = f(P)$$

انتقال مطلوب است.

آنچه می‌خواستیم

چون حرکت‌های صلب تابع‌اند، طبیعی است بررسی‌یم که چگونه برهم اثر می‌کنند. منظور این است که به‌ازای هر دو حرکت صلب باید بتوانیم ترکیب آنها را به روشنی مشخص کنیم. مضمون بسیاری از گزاره‌های زیر این‌گونه ترکیب‌هاست و اکنون کار را با یک گزاره آسان آغاز می‌کنیم.

گزاره ۶.۲. اگر A, B و C سه نقطه دلخواه باشند، آنگاه $T_{BC} \circ T_{AB} = T_{AC}$.
برهان: تمرین ۱۳.

عکس تابع f تابعی است چون g به‌طوری که $f \circ g = g \circ f = Id$ در حالت کلی یک تابع ممکن است عکس داشته باشد یا نداشته باشد. در نهایت روشن خواهد شد که هر حرکت صلبی مسلماً یک عکس دارد. اگر f عکسی چون g داشته باشد، می‌نویسیم $g = f^{-1}$. در اینجا متذکر می‌شویم که انتقالها حتماً عکس دارند.

گزاره ۷.۲. عکس انتقال T_{AB} انتقال T_{BA} است.

یک زاویه سودار زاویه‌ای است همراه با یک‌سو، ساعت‌سو یا پادساعت‌سو. زاویه‌های مثبت را زاویه‌های پادساعت‌سو می‌گیریم، و زاویه‌های منفی را زاویه‌های ساعت‌سو. فرض می‌کنیم C یک نقطه و α زاویه‌ای سودار باشد. دوران $R_{C,\alpha}$ تابعی است که به هر نقطه P نقطه یکتای P' را چنان مربوط می‌کند که

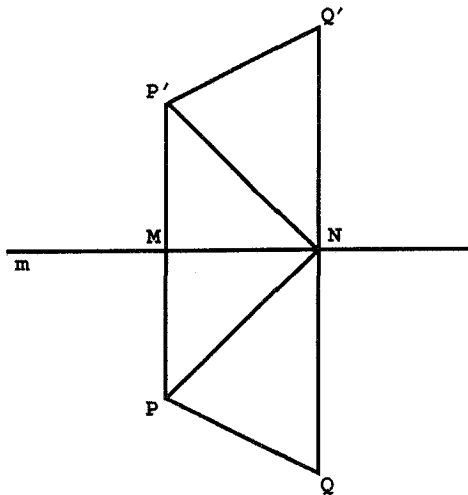
$$\angle PCP' = \alpha, CP' = CP$$

باید توجه کرد که به‌ازای هر نقطه C دوران $R_{C,\alpha}$ نگاشت همانی است و به‌ازای هر زاویه α ، دوران $R_{C,-\alpha}$ عکس دوران $R_{C,\alpha}$ است.

گزاره ۸.۲. هر دوران $R_{C,\alpha}$ حرکتی است صلب

برهان تمرین ۱۴

اگر خط m داده شده باشد، تقارن ρ_m تبدیلی است که همه نقطه‌های m را ثابت نگه می‌دارد و به هر نقطه P ناواقع بر m نقطه یکتای $P' = \rho_m(P)$ را مربوط می‌کند. به‌طوری‌که m عمود منصف پاره‌خط PP' است. باید توجه کرد که هر تقارن عکس خودش است. هر تابع (جز تابع همانی) با این ویژگی که عکس خودش باشد، یک برگشت نامیده می‌شود. خواهیم دید که این



شکل ۱.۲

ماهیت برگشتیِ تقارن نقش مهمی در کار رده‌بندی حرکت‌های صلب ایفا می‌نماید. در بخش بعد برگشتهای دیگری که تقارن نیستند معرفی خواهند شد. این برگشتهای نقش مهم مشابهی در زمینه هندسه نااقلیدسی دارند.

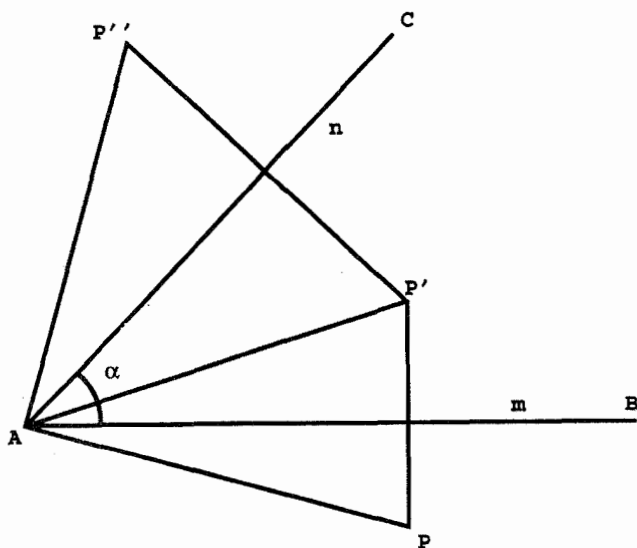
گزاره ۹.۲. هر تقارن (محوری) یک حرکت صلب است.

برهان: فرض کنید m خطی دلخواه و P و Q دو نقطه باشند (شکل ۱.۲). اگر $P' = \rho_m(P)$ و $Q' = \rho_m(Q)$ ، آنگاه بنا به تعریف، خط m پاره‌خطهای PP' و QQ' را به ترتیب در نقاطی چون M و N نصف می‌کند و بر هر دو عمود است. از قضیه قابلیت انطباق ض‌ض ابتدا نتیجه می‌شود $\triangle PMN \cong \triangle P'MN$ و سپس $\triangle PNQ \cong \triangle P'NQ'$. بنابراین $PQ = P'Q'$.

آنچه می‌خواستیم

باز می‌خواهیم ببینیم که ترکیب دو تقارن چیست. به خواننده یادآوری می‌کنیم که ترکیب دو انتقال یک انتقال است. این مطلب در مورد تقارن‌ها درست نیست. ماهیت پاسخ بستگی دارد به اینکه محورهای دو تقارن مورد نظر متقاطع باشند یا نباشند، و در دو گزاره زیر به این دو مورد جداگانه پرداخته می‌شود.

گزاره ۱۰.۲. فرض می‌کنیم خط‌های راست m و n در نقطه A متقاطع باشند و α زاویه پادساعتسوی بین m و n در A باشد. در این صورت



شکل ۲.۲

$$\rho_n \circ \rho_m = R_{A, \angle \alpha}$$

برهان: فرض می‌کنیم P نقطه‌ای نزدیک به خط m ولی بیرون زاویهٔ سودار از m به n باشد. مطابق شکل ۲.۲ قرار می‌دهیم $P' = \rho_m(P)$ و $P'' = \rho_n(P')$. در این صورت m نیمساز زاویهٔ PAP' و n نیمساز زاویهٔ $P'AP''$ است. در نتیجه

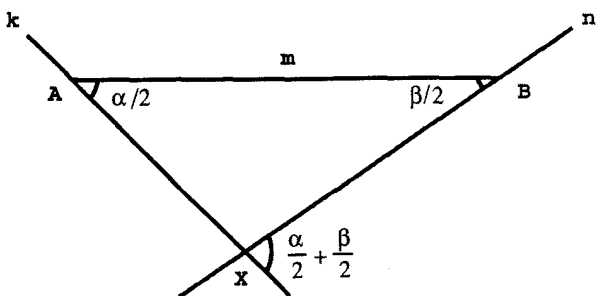
$$\angle PAP'' = 2\angle BAP' + 2\angle P'AC = 2\alpha$$

بنابراین $\rho_n \circ \rho_m$ در P یکی هستند. چون پیدا کردن سه نقطهٔ ناممخط نظیر P آسان است، از قضیهٔ ۳.۲ نتیجه می‌شود که $\rho_n \circ \rho_m$ و $R_{A, \angle \alpha}$ یکی هستند.

آنچه می‌خواستیم

گزارهٔ ۱.۱.۲. فرض می‌کنیم m و n دو خط راست متوازی باشند. فرض می‌کنیم AB پاره‌خطی باشد که ابتدا m و سپس n را قطع کند و بر هر دو عمود باشد و طولش دو برابر فاصله بین m و n باشد. در این صورت

$$\rho_n \circ \rho_m = \tau_{AB}$$



شکل ۳.۲

برهان: تمرین ۱۵.

روشن است که ترکیب دو دوران که مرکز دورانشان یکی باشد یک دوران است. چندان روشن نیست که این مطلب در مورد هر دو دورانی صادق باشد.

گزاره ۱۲.۲. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه و α و β دو زاویه سودار باشند. در این صورت

$$R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha}$$

الف) یک انتقال است اگر $\alpha + \beta$ مضربی از 2π باشد.

ب) یک دوران است اگر $\alpha + \beta$ مضربی از 2π نباشد.

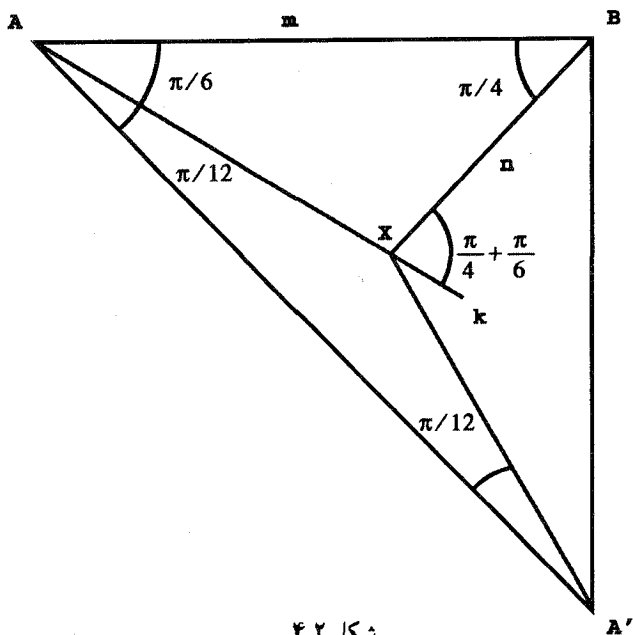
برهان: اگر A و B یک نقطه باشند، حکم روشن است. در غیر این صورت، فرض می‌کنیم m خط راستی گذرنده بر A و B باشد (شکل ۳.۲). بگیریم k خط راستی گذرنده از A باشد که زاویه سودار از k به m برابر $\frac{\alpha}{2}$ است، و نیز فرض می‌کنیم n خط گذرنده از B باشد که زاویه سودار از m به n برابر $\frac{\beta}{2}$ است. پس بنا بر دو گزاره فوق داریم

$$R_{B,\beta} \circ R_{A,\alpha} = (\rho_n \circ \rho_m) \circ (\rho_m \circ \rho_k) = \rho_n \circ (\rho_m \circ \rho_m) \circ \rho_k = \rho_n \circ \rho_k$$

که یک انتقال یا دوران است بسته به اینکه خطهای k و n متوازی باشند یا نباشند. ولی، خطهای k و n متوازیند اگر و تنها اگر $\alpha + \beta$ مضربی از 2π باشد. بدین ترتیب این گزاره اثبات می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

مثال ۱۳.۲. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه دلخواه باشند (شکل ۴.۲). برهان گزاره ۱۲.۲ متضمن دستورالعملی برای پیدا کردن هر ترکیب دلخواهی چون $R_{B,\pi/2} \circ R_{A,\pi/3}$ است. ابتدا



شکل ۴.۲

A و B را با یک خط m به هم وصل می‌کنیم. سپس خط k را از A چنان رسم می‌کنیم که زاویه پادساعتسوی سودار از k به m مساوی با $\frac{\pi}{6}$ باشد و نیز خط n را از B طوری رسم می‌کنیم که زاویه پادساعتسوی سودار از m به n برابر با $\frac{\pi}{4}$ باشد. اگر نقطه تلاقی k و n باشد، آنگاه

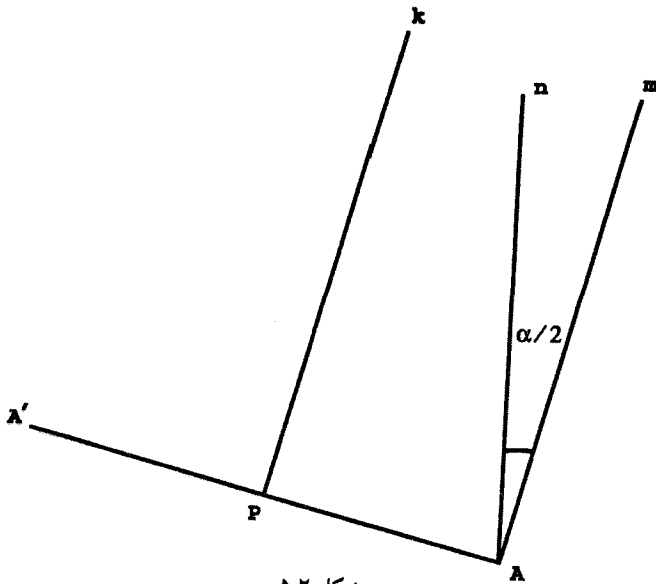
$$R_{B, \pi/2} \circ R_{A, \pi/3} = \rho_n \circ \rho_k = R_{X, 2(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = R_{X, \frac{5\pi}{6}}$$

راه‌حل دیگری برای این مسأله وجود دارد که در آن به‌جای استفاده از برهان از صورت گزاره فوق استفاده می‌شود. می‌دانیم که ترکیب داده شده یک دوران $R_{X, \pi/2 + \pi/3} = R_{X, 5\pi/6}$ است که مرکز آن X را باید تعیین کنیم. چون

$$R_{X, \frac{5\pi}{6}}(A) = R_{B, \frac{\pi}{2}} \circ R_{A, \frac{\pi}{3}}(A) = R_{B, \frac{\pi}{2}}(A) = A',$$

پس X رأس مثلث متساوی‌الساقین $AA'X$ است که هر زاویه مجاور به قاعده آن مساوی است با

$$\frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$$



شکل ۵.۲

تاکنون با نحوه ترکیب دو انتقال و تأثیر آنها بر هم و دو دوران و تأثیر آنها بر یکدیگر آشنا شدیم. بینیم وقتی یک انتقال و یک دوران باهم ترکیب می‌شوند چه پیش می‌آید؟

گزاره ۱۴.۲. فرض می‌کنیم R یک دوران ناهماني باشد و τ یک انتقال. در این صورت $R \circ \tau$ و $\tau \circ R$ هر دو دورانهایی هستند که زاویه دوران آنها همان زاویه دوران R است. برهان: فرض می‌کنیم $R = R_{A, \alpha}$ و $A' = \tau^{-1}(A)$ و P وسط پاره خط AA' باشد (شکل ۵.۲). فرض می‌کنیم k و m به ترتیب خطهای گذرنده بر A و P و عمود بر AA' باشند و n خطی باشد که بر A می‌گذرد و زاویه سودار از m به n برابر $\frac{\alpha}{2}$ است. در این صورت

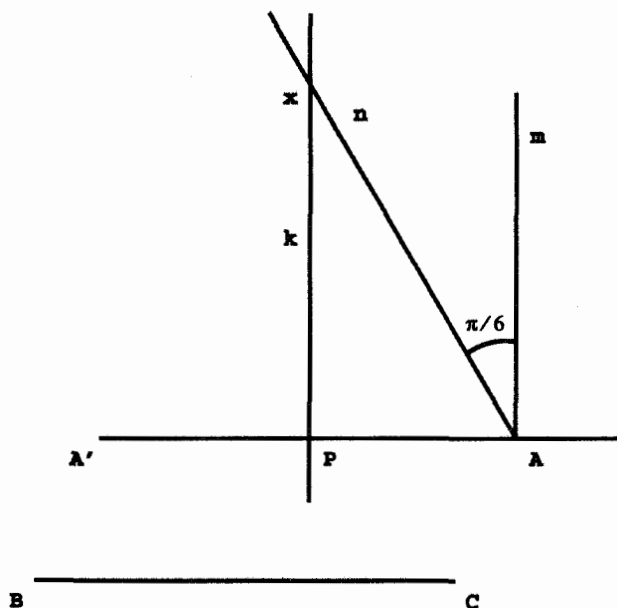
$$R \circ \tau = (\rho_n \circ \rho_m) \circ (\rho_m \circ \rho_k) = \rho_n \circ (\rho_m \circ \rho_m) \circ \rho_k = \rho_n \circ \rho_k$$

که یک دوران است زیرا α برابر صفر نیست. چون زاویه پادساعتسوی از k به n برابر $\alpha/2$ است زاویه دوران $R \circ \tau$ نیز برابر α است.

اثبات اینکه $\tau \circ R$ نیز یک دوران است، به عهده خواننده واگذار می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

مثال ۱۵.۲. برهان گزاره ۱۴.۲ نیز دستورالعملی برای ساختن یک ترکیب است. بنابراین اگر



شکل ۶.۲

و $R = R_{A, \pi/3}$ و $\tau = \tau_{BC}$ کار را با قراردادن $A' = \tau^{-1}(A)$ و انتخاب ρ به عنوان وسط AA' آغاز می‌کنیم. از A و P به ترتیب خطهای k و m را بر AA' عمود می‌کنیم از A خط n را طوری رسم می‌کنیم که زاویه پادساعتسوی آن از m به n برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد و نقطه تلاقی آن را با k ، X می‌نامیم. در این صورت $R \circ \tau = R_{X, \pi/3}$.

۴.۲ لغزه

اکنون که نحوه ترکیب انتقالها و دورانها را با یکدیگر نشان دادیم، به بررسی ترکیب آنها با تقارن می‌پردازیم. بهتر است مسأله را با حالت بسیار ساده‌ای آغاز کنیم.

لم ۱۶.۲. فرض می‌کنیم پاره خط AB بر خط m عمود باشد. در این صورت

$$\rho_m \circ \tau_{AB} = \rho_n$$

که در آن n خطی است موازی با m .

برهان: تمرین ۱۷.

ترکیب یک تقارن با دورانی که مرکز آن بر محور تقارن باشد یک تقارن است (تمرین ۲). ولی در حالت کلی، ترکیب یک دوران (یا یک انتقال) با یک تقارن نوع جدیدی است از حرکت صلب. فرض می‌کنیم A و B دو نقطه متمایز باشند. ترکیب $\rho_{AB} \circ \tau_{AB}$ را یک لغزه می‌نامیم و با γ_{AB} نشان می‌دهیم. به آسانی ثابت می‌شود که γ_{AB} نیز مساری است با $\tau_{AB} \circ \rho_{AB}$ و γ_{BA} عکس γ_{AB} است. برای ساده کردن صورت برخی از قضیه‌های بعدی می‌پذیریم که تقارن را نیز به‌عنوان لغزه در نظر بگیریم. خط AB محور γ_{AB} نامیده می‌شود و روشن است که به‌ازای هر نقطه P ناواقع بر خط AB پاره‌خطی که P را به نگاره آن $\gamma_{AB}(P)$ وصل می‌کند توسط محور نصف می‌شود. قبول می‌کنیم که تقارن‌ها را به‌صورت لغزه در نظر بگیریم و از این رو تقارن‌ها تنها لغزه‌هایی با نقطه‌های ثابت‌اند.

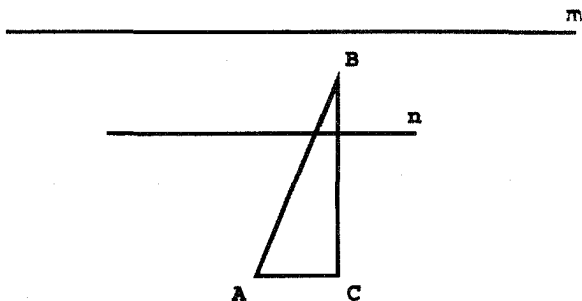
گزاره ۱۷.۲. فرض می‌کنیم τ یک انتقال ρ و یک تقارن باشد. در این صورت $\rho \circ \tau$ و $\tau \circ \rho$ هردو لغزه‌اند.

برهان: فرض می‌کنیم $\tau = \tau_{AB}$ و $\rho = \rho_m$.

اگر خط‌های m و AB یکی باشند، روشن است که $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho = \gamma_{AB}$. اگر خط‌های m و AB متمایز و متوازی باشند، آنگاه نقطه‌هایی چون A' و B' بر m وجود دارند به طوری که $\tau = \tau_{AB} = \tau_{A'B'}$ در نتیجه بنابر استدلال قبل

$$\rho \circ \tau = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau_{A'B'} = \tau_{A'B'} \circ \rho = \gamma_{A'B'}$$

اگر $AB \perp m$ ، بنابر لم ۱۶.۲ اثبات تمام است. در غیر این صورت فرض می‌کنیم C نقطه‌ای باشد که $AC \parallel m$ و $BC \perp m$ (شکل ۷.۲). بنابر گزاره ۶.۲ داریم



شکل ۷.۲

$$\rho \circ \tau = \rho_m \circ (\tau_{CB} \circ \tau_{AC}) = (\rho_m \circ \tau_{CB}) \circ \tau_{AC}$$

چون $BC \perp m$ مجدداً از گزاره ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که خطی مانند n موازی با m و خطی مانند AC وجود دارد به طوری که $\rho_m \circ \tau_{CB} = \rho_n$ و از این رو

$$\rho \circ \tau = \rho_n \circ \tau_{AC},$$

که به علت توازی AC و n یک لغزه است. اثبات این مطلب که $\rho \circ \tau$ نیز یک لغزه است به عهده خواننده واگذار می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

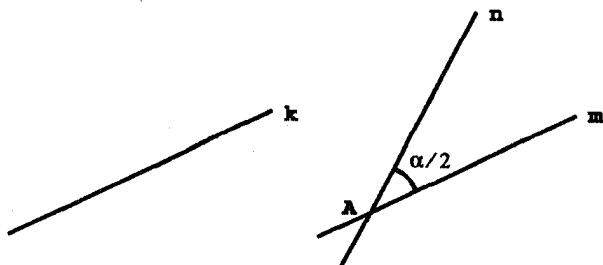
ترکیب انتقالها و تقارنها موجب معرفی لغزه‌ها شد. برای شرح ترکیب دورانها و لغزه‌ها دیگر نیازی به حرکت‌های صلب جدید نیست.

گزاره ۱۸.۲. فرض می‌کنیم R یک دوران و ρ یک تقارن باشد. در این صورت $R \circ \rho$ و $\rho \circ R$ هر دو لغزه هستند.

برهان: فرض می‌کنیم $R = R_{A,\alpha}$ و $\rho = \rho_k$. فرض می‌کنیم m خطی باشد که از A می‌گذرد و موازی با k است و n خطی باشد که از A می‌گذرد و زاویهٔ سودار آن از m به n برابر $\frac{\alpha}{2}$ است (شکل ۸.۲). در این صورت

$$R \circ \rho = (\rho_n \circ \rho_m) \circ \rho_k = \rho_n \circ (\rho_m \circ \rho_k).$$

چون $\rho_m \circ \rho_k$ یک انتقال است از گزاره ۱۷.۲ نتیجه می‌شود که $R \circ \rho$ یک لغزه است. اثبات قسمت دوم گزاره به عهده خواننده واگذار می‌شود.



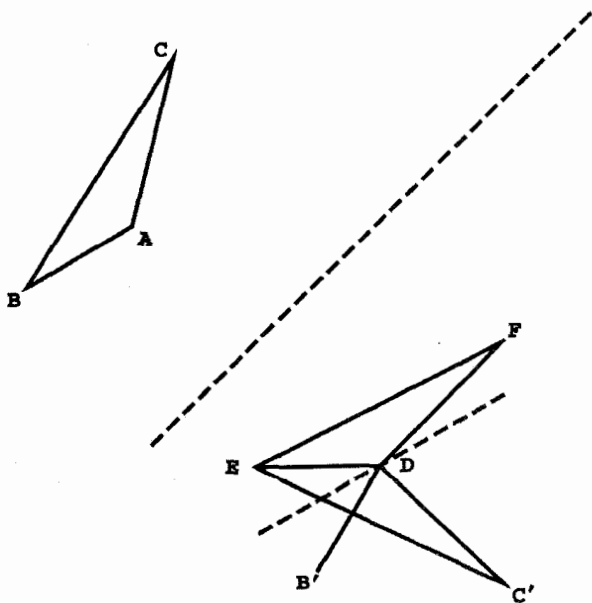
شکل ۸.۲

۵.۲ قضیه‌های اصلی

اکنون آمادهٔ اثبات دو قضیه‌ای هستیم که رده‌بندی کامل همهٔ حرکت‌های صلب صفحهٔ اقلیدسی را به وجود می‌آورند.

گزارهٔ ۱۹.۲. فرض می‌کنیم $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. در این صورت دنباله‌ای نایب‌تر از سه تقارن وجود دارد به طوری که ترکیب آنها نقاط A, B, C را به ترتیب بر نقاط D, E, F می‌نگارد.

برهان: روشن است که یک نگاشت f_1 وجود دارد، که یا همانی است یا یک تقارن، و A را بر D می‌نگارد (شکل ۹.۲). قرار می‌دهیم $B' = f_1(B)$ و فرض می‌کنیم f_2 نگاشتی باشد که یا تقارن است یا همانی و B' را بر E می‌نگارد. چون $DB' = AB = DE$ ، پس f_2 را ثابت نگه می‌دارد. در این مرحله خواننده باید توجه کند که ترکیب $f_2 \circ f_1$ را A را بر D و B را بر E می‌نگارد. فرض می‌کنیم $C' = f_2 \circ f_1(C)$. اگر $C' = F$ ، آنگاه $f_2 \circ f_1$ دنبالهٔ مطلوب تقارنهاست. در غیر این صورت داریم $\triangle DEC' \cong \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ، و از این رو $\rho_{DE}(C') = F$. اکنون به آسانی ثابت می‌شود که $\rho_{DE} \circ \rho_m \circ \rho_k$ مسلماً نقاط A, B, C را به ترتیب بر نقاط D, E, F



شکل ۹.۲

E, F می‌نگارد.

آنچه می‌خواستیم

اکنون برهان اولین قضیه اصلی این فصل بی‌درنگ از قضیه ۳.۲ و گزاره ۱۹.۲ حاصل می‌شود.

■ قضیه ۲۰.۲. هر حرکت صلب ترکیبی حداکثر از سه تقارن است. چون قبلاً چگونگی تأثیر متقابل حرکت‌های صلب خاص را به‌هنگام ترکیب بررسی کرده‌ایم، دیگر تعجب‌آور نیست که عملاً بتوانیم تمام حرکت‌های صلب را رده‌بندی کنیم.

قضیه ۲۱.۲. هر حرکت صلب یا یک انتقال، یک دوران، یا یک لغزه است. برهان: اگر حرکت صلبی یک تقارن باشد بنابه تعریف یک لغزه است. اگر ترکیبی از دو تقارن باشد بنا بر گزاره‌های ۱۰.۲ و ۱۱.۲ باید یا یک انتقال باشد یا یک دوران. اگر ترکیب سه تقارن باشد، آنگاه ترکیب دو تقارن اول یک انتقال یا یک دوران است، و از این رو بنا بر گزاره‌های ۱۷.۲ و ۱۸.۲ ترکیب هر سه این حرکتها یک لغزه است.

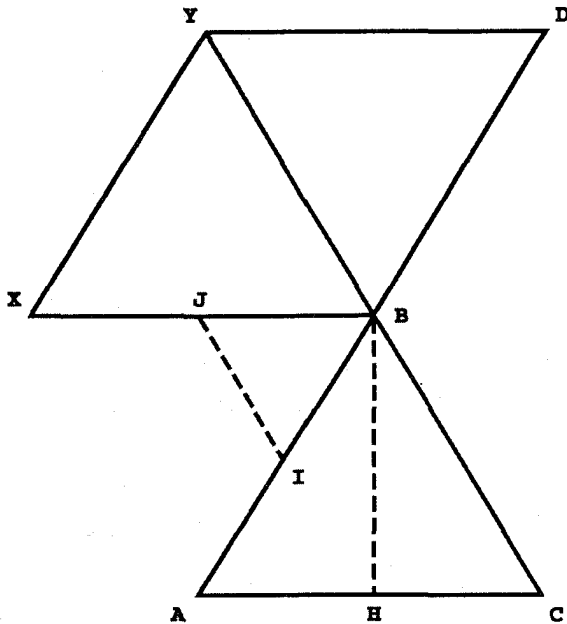
آنچه می‌خواستیم

شاید فرع زیر در این مرحله یک تغییر موضع به‌نظر برسد، مع‌هذا یک ویژگی مهمی از حرکت‌های صلب را بیان می‌کند.

■ فرع ۲۲.۲. هر حرکت صلب یک عکس دارد. ارجاع تمام مثال‌های زیر به شکل ۱۰.۲ است، که در آن ABC, XAB, XBY, YBD مثلث‌های متساوی‌الاضلاع قابل انطباق باهم‌اند و H, I, J به ترتیب وسط‌های پاره‌خط‌های AC, AB, XB هستند، و τ معرف انتقال τ_{AB} است.

مثال ۲۳.۲. $f = R_{B, \pi/2} \circ \tau$ را تعیین کنید. چون $\tau(A) = B$ پس $f(A) = R_{B, \pi/2}(B)$ از این رو f دورانی است به زاویه $\frac{\pi}{3}$ که A را به B می‌برد. بنابراین $f = R_{X, \pi/3}$.

مثال ۲۴.۲. تبدیل $f = R_{C, \pi/3} \circ \tau$ را معین کنید. چون $R_{C, \pi/3}(B) = A$ پس $f(A) = A$ از این رو به‌موجب گزاره ۱۳.۲ f دورانی به زاویه دوران $\frac{\pi}{3}$ است که A را ثابت نگه می‌دارد. پس $f = R_{A, \pi/3}$.



شکل ۱۰.۲

مثال ۲۵.۲. تبدیل $f = \tau \circ R_{B, \pi/3}$ را تعیین کنید. در اینجا $f(B) = D$. از این رو بنابر گزاره ۱۳.۲، f دورانی است به زاویه $\pi/3$ که B را بر D می‌نگارد. بنابراین $f = R_{Y, \pi/3}$.

مثال ۲۶.۲. تبدیل $f = R_{B, \pi/2} \circ \rho_{AB}$ را مشخص کنید. بنابر گزاره ۱۶.۲، f یک لغزه است و به آسانی می‌توان دید که $f(A) = C$ و $f(B) = B$. چون f یک نقطه ثابت دارد، باید یک تقارن محض باشد. چون محور این تقارن باید پاره خط AC را نصف کند پس $f = \rho_{BH}$.

مثال ۲۷.۲. تبدیل $f = \rho_{BC} \circ \tau_{AB}$ را معین کنید. بنابر گزاره ۱۷.۲، f یک لغزه است. چون $f(A) = B$ و $f(B) = X$ ، از آنجا نتیجه می‌شود که محور f هر دو پاره خط AB و BX را نصف می‌کند. اکنون خواننده به آسانی می‌تواند ثابت کند که $f = \gamma_{IJ}$.

۶.۲ حرکت‌های صلب و هندسه مطلق

همان‌طور که بسیاری از قضیه‌های هندسه اقلیدسی در زمینه کلیتر هندسه مطلق نیز معتبرند، بسیاری از اطلاعات به دست آمده در این فصل درباره حرکت‌های صلب اقلیدسی در این زمینه وسیعتر نیز

به قوت خود باقی‌اند. این واقعیت فقط در فصل ۹، وقتی که حرکت‌های صلب ناقلیدسی به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرند، حایز اهمیت زیادی می‌شود. مع‌هذا باید خوانندگان را در این مرحله در جریان ملاحظات زیر قرار دهیم.

در برهانهای ۱۰.۲-۴.۲ از مفهوم توازی چه به صورت صریح و چه به صورت ضمنی استفاده‌ای نشده است و از این رو در هندسهٔ مطلق نیز هر حرکت صلب توسط اثرش بر سه نقطهٔ ناهمخط دلخواه مشخص می‌شود.

اگر چه انتقالها و لغزه‌ها در خود تعریفشان به مفهوم توازی متکی هستند، ولی دورانها و تقارنها چنین وضعی ندارند. به‌ویژه مفهوم اخیر فقط به مفهوم عمودمنصف بستگی دارد و وجود چنین خطی توسط گزاره‌های ۱۰ و ۱۱ اقلیدس که هر دو گزاره‌های هندسهٔ مطلق هستند، تضمین شده است. بنابراین ۱۹.۲ و ۲۰.۲ در متنهای گسترده‌تر نیز برقرارند، و از این رو هر حرکت صلب در هر هندسهٔ مطلق ترکیب حداکثر سه تقارن است.

۷.۲ تمرین

۱. فرض می‌کنیم A, B, C رأسهای مثلث در شکل ۱۰.۲ باشند. با استفاده از روش مثال ۱۳.۲ مرکز هر یک از دورانهای زیر را پیدا کنید.

$$R_{B, \pi/2} \circ R_{A, \pi/2} \quad (\text{ب}) \qquad R_{A, \pi/2} \circ R_{B, \pi/2} \quad (\text{الف})$$

$$R_{A, \pi/2} \circ \tau_{BC} \quad (\text{د}) \qquad R_{C, \pi} \circ R_{A, \pi/2} \quad (\text{ج})$$

$$\tau_{CA} \circ R_{A, \pi/2} \quad (\text{و}) \qquad R_{A, \pi/2} \circ \tau_{CA} \quad (\text{ه})$$

۲. ثابت کنید که اگر P نقطه‌ای بر خط m و θ زاویهٔ دلخواهی باشد، آنگاه $R_{P, \theta} \circ \rho_m$ و $\rho_m \circ R_{P, \theta}$ هر دو تقارن هستند. محورهای این تقارنها را پیدا کنید.

۳. شکلی متشکل از دو نقطهٔ P و Q داده شده است، نقطهٔ ثابت $R_{P, \pi/4} \circ \tau_{PQ}$ را از راه ترسیم پیدا کنید.

۴. شکلی متشکل از سه نقطهٔ A, B, C داده شده است، نقطهٔ ثابت $\tau_{BC} \circ R_{A, 2\pi/3}$ را از راه ترسیم پیدا کنید.

۵. اگر نقطهٔ C بر خط m باشد، نشان دهید که $\rho_m \circ R_{C, -\theta} \circ \rho_m = R_{C, -\theta}$

۶. فرض می‌کنیم مثلث ABC و زاویه‌های داخلی آن α و β و γ به ترتیب در رأسهای A, B و C به‌طور ساعتسو سودار شده باشند. ثابت کنید $R_{C, 2\gamma} \circ R_{B, 2\beta} \circ R_{A, \alpha} = Id$

۷. اگر n, m, k به ترتیب عمود منصفهای اضلاع AB, BC, AC از مثلث ABC باشند، نشان دهید که ترکیب $\rho_k \circ \rho_m \circ \rho_n$ یک تقارن است. خط ثابت این تقارن کدام خط است؟
۸. نشان دهید که اگر خطهای n, m, k یا همرس باشند. یا دارای یک عمود مشترک باشند، آنگاه

$$\rho_k \circ \rho_m \circ \rho_n = \rho_n \circ \rho_m \circ \rho_k$$

۹. فرض می‌کنیم P و Q دو نقطه متمایز باشند. ثابت کنید که ترکیب $R_{Q,\pi} \circ \rho_{PQ} \circ R_{P,\pi}$ یک لغزه است و محور آن را پیدا کنید.
۱۰. نشان دهید که ترکیب سه تقارن نسبت به سه نیمساز هر مثلث یک تقارن نسبت به خطی است که بر یکی از اضلاع آن مثلث عمود است.
۱۱. فرض کنید BD و AC ، قطرهای مربع $ABCD$ ، در نقطه P تلاقی نمایند. تبدیلهای زیر را مشخص کنید.

$\rho_{AC} \circ \rho_{AB}$	(ب)	$\rho_{BA} \circ \rho_{BD}$	(الف)
$R_{B,\pi/2} \circ R_{D,\pi/2}$	(د)	$\rho_{AB} \circ \rho_{AC}$	(ج)
$R_{P,\pi/2} \circ \gamma_{DC}$	(و)	$R_{B,\pi} \circ R_{A,\pi}$	(ه)
$\gamma_{DA} \circ \gamma_{DC}$	(ح)	$R_{D,\pi/2} \circ \gamma_{DC}$	(ز)
$\tau_{AC} \circ \gamma_{CB}$	(ی)	$\gamma_{CB} \circ \gamma_{DC}$	(ط)

۱۲. گزاره ۲.۲ را ثابت کنید.
۱۳. گزاره ۶.۲ را ثابت کنید.
۱۴. گزاره ۸.۲ را ثابت کنید.
۱۵. گزاره ۱۱.۲ را ثابت کنید.
۱۶. برهان گزاره ۱۴.۲ را کامل کنید.
۱۷. لم ۱۶.۲ را ثابت کنید.
۱۸. برهان گزاره ۱۷.۲ را کامل کنید.
۱۹. برهان گزاره ۱۸.۲ را کامل کنید.
۲۰. فرض کنید $A(a_1, a_2)$ و $B(b_1, b_2)$ دو نقطه ثابت باشند. به چه دلیل تبدیل هامنی $Q = f(P)$ که نقطه $P(x, y)$ را بر نقطه $Q(x', y')$ می‌نگارد، عیناً همان انتقال τ_{AB} است؟

$$x' = x + b_1 - a_1$$

$$y' = y + b_2 - a_2$$

۲۱. فرض کنید θ یک زاویه باشد. نشان دهید که تبدیل هامنی $Q = f(P)$ که نقطه $P(x, y)$ را بر نقطه $Q(x', y')$ می‌نگارد، عیناً همان دوران $R_{O, \theta}$ است، در صورتی که

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

۲۲. فرض کنید θ یک زاویه و m خط راستی گذرنده بر مبدأ به زاویهٔ میل θ نسبت به جهت مثبت محور x ها باشد. نشان دهید تبدیل هامنی $Q = f(P)$ که نقطه $P(x, y)$ را بر نقطه $Q(x', y')$ می‌نگارد، عیناً همان تقارن ρ_m است، در صورتی که

$$x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta$$

$$y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta$$

۲۳. دوران $R_{A, \pi/2}$ را که در آن $A = (0, 1)$ ، به صورت تبدیل مختصاتی که در تمرینهای ۲۰-۲۲ تشریح شده، بیان کنید.

(راهنمایی: توجه کنید که $R_{A, \pi/2} = \tau \circ R_{O, \frac{\pi}{4}} \circ \tau^{-1}$ که در آن $\tau = \tau_{AB}$.)

۲۴. تقارن ρ_m را که در آن m خط $y = 2x + 1$ است، به صورت یک تبدیل مختصاتی بیان کنید.

۲۵. اگر f یک حرکت صلب و τ یک انتقال باشد، حرکت صلب $\tau \circ f \circ \tau^{-1}$ را مشخص کنید.

۲۶. اگر f حرکتی صلب و R یک دوران باشد، حرکت صلب $R \circ f \circ R^{-1}$ را مشخص کنید.

۲۷. اگر f حرکتی صلب و ρ یک تقارن باشد، حرکت صلب $\rho \circ f \circ \rho^{-1}$ را مشخص کنید.

منظور از تقارن^۱ در یک شکل هامنی حرکتی است صلب که شکل را ثابت نگه می‌دارد.

۲۸. تقارنهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تعیین کنید.

۲۹. تقارنهای یک مثلث متساوی‌الساقین را تعیین کنید.

۳۰. تقارنهای یک مربع را تعیین کنید.

۱. تقارن (symmetry) در اینجا پیدا کردن قرینهٔ یک شکل نسبت به اجزای خود شکل است. (م)

۳۱. تقارنهای یک مستطیل را تعیین کنید.

۳۲. تقارنهای یک n ضلعی منتظم را تعیین کنید.

برای حل تمرینهای زیر از نرم‌افزارهای گرافیکی نظیر نرم‌افزارهای موجود در Mathematica یا در Maple استفاده کنید.

۳۳. برنامه‌ای برای انتقال خطها، مثلثها و دایره‌ها بنویسید.

۳۴. برنامه‌ای برای دوران خطها، مثلثها و دایره‌ها بنویسید.

۳۵. برنامه‌ای برای تقارن خطها، مثلثها و دایره‌ها نسبت به خط داده شده بنویسید.

۳۶. برنامه‌ای برای حرکت لغزیهی خطها، مثلثها و دایره‌های داده شده بنویسید.

انعکاس

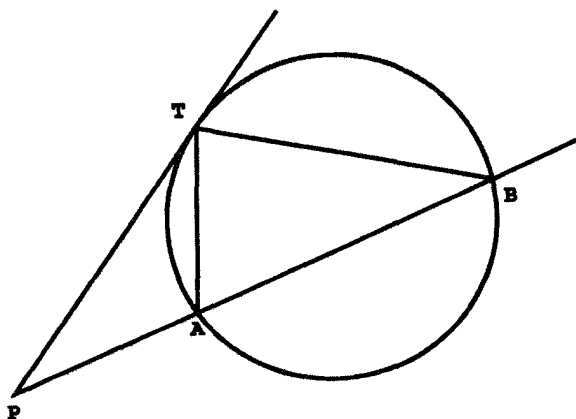
۱.۳ یک تبدیل ناصلب جالب

اکنون انعکاس را معرفی می‌کنیم - تبدیلی از صفحه که صلب نیست ولی ثابت می‌شود که برای آنچه که در ذیل می‌آید خیلی مفید است. انعکاسها از این لحاظ که خطها و دایره‌ها را بر خطها و/یا دایره‌ها می‌نگارند مشابه حرکت‌های صلب هستند. مطلب را با صورت بهتر شده‌ای از گزاره ۳۲ مقاله II از اصول اقلیدس آغاز می‌کنیم.

گزاره ۱.۳. فرض می‌کنیم AB وترى از یک دایره و AT نیمخط دلخواهی مرسوم از A باشد. در این صورت خط AT بر دایره مماس است اگر و تنها اگر $\angle BAT$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمانی که وتر AB از دایره جدا کرده باهم برابر باشند.

برهان این گزاره، در پیوست A آمده است. برهان عکس آن به تمرین ۱ محول شده است.

گزاره ۲.۳. فرض می‌کنیم P نقطه‌ای در خارج دایرهٔ مفروض q ، و PT در نقطهٔ T بر این دایره



شکل ۱.۳

ماس، و PAB قاطعی با وتر AB باشد. در این صورت

$$PA \cdot PB = PT^2$$

برهان: بنا بر گزاره قبل $\angle ATB = \angle PBT$ (شکل ۱.۳). چون $\angle TPA$ در دو مثلث TPA و BPT مشترک است، در نتیجه این دو مثلث متشابه‌اند، و از این رو

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

و حکم بی‌درنگ نتیجه می‌شود.

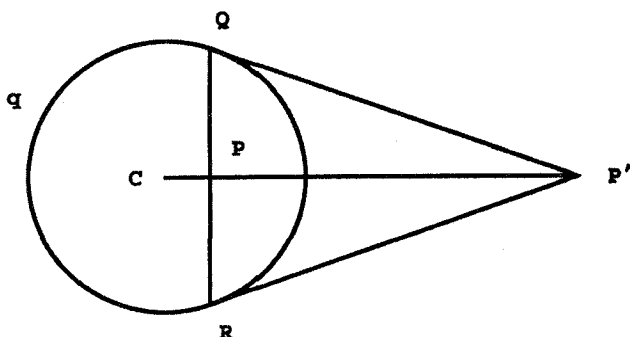
آنچه می‌خواستیم

دایره q به مرکز C و شعاع k داده شده است، نقاط P و P' را نسبت به q متقارن گویند اگر الف) P, P', C بر یک خط راست باشند و C بیرون پاره خط PP' باشد.

و

$$CP \cdot CP' = k^2 \quad \text{ب)}$$

روشن است که برای یک دایره ثابت q ، نقطه P با نقطه P' متقارن است اگر و تنها اگر P' با P متقارن باشد. به علاوه یک نقطه P با خودش متقارن است اگر و تنها اگر بر محیط دایره قرار داشته باشد. باید توجه کرد که هیچ نقطه‌ای با C متقارن نیست و C تنها نقطه از این نوع است.



شکل ۲.۳

به ازای نقطه‌ای چون P در داخل دایره، می‌توان قرینه آن P' را به آسانی به شرح زیر پیدا کرد. فرض کنید وتر QR بر شعاع CP عمود باشد (شکل ۲.۳). نقطه P' محل تلاقی خط مماس بر q در Q و (امتداد) شعاع CP است.

فرض می‌کنیم C نقطه‌ای ثابت و k عددی حقیقی و مثبت باشد. انعکاس $I_{C,k}$ تابعی است چون

$$I_{C,k}(P) = P'$$

که در آن P و P' نسبت به دایره به مرکز C و شعاع k متقارن‌اند. انعکاس $I_{C,k}$ در C تعریف نشده و از این رو، دقیقاً بگوییم، در واقع تبدیلی از این صفحه نیست. خواننده باید به این مورد صرفاً به عنوان یک مایه در دسر بنگرد نه یک مشکل واقعی. راه‌های مختلفی برای برخورد با این مسأله وجود دارد و ما ساده‌ترین راهها را انتخاب می‌کنیم که نادیده گرفتن عدم دقت و تغییر تعریف تبدیل است تا جایی که انعکاسها نیز تبدیل محسوب شوند باید توجه کرد که همه انعکاسها، مثل تقارنها، برگشتی هستند.

روشن است که نقاط ثابت $I_{C,k}$ دقیقاً همه نقاط دایره به مرکز C و شعاع k هستند. ملاحظه کنید که بجز خود نقطه C ، نقاط هر خط m ، ماربر C ، توسط $I_{C,k}$ بر خود m نگاشته می‌شوند. از این رو می‌گوییم که $I_{C,k}$ هر چنین خط m را بر خودش می‌نگارد، اگرچه این مطلب کاملاً صحیح نیست، زیرا $I_{C,k}$ در C تعریف نشده است. به علاوه به آسانی دیده می‌شود که هر دایره به مرکز C بر دایره دیگری به مرکز C نگاشته می‌شود.

قضیه ۳.۳. انعکاس $I_{C,k}$

الف) خطهای راست ماربر C را بر خود آنها،
 ب) خطهای راستی را که از C نمی‌گذرند بر دایره‌هایی که از C می‌گذرند،
 ج) دایره‌هایی را که از C می‌گذرند بر خطهایی که از C نمی‌گذرند،
 د) دایره‌هایی را که از C نمی‌گذرند بر دایره‌هایی که از C نمی‌گذرند می‌نگارد،
 وقتی انعکاس دایره‌ای را به خط راستی تبدیل می‌کند یا بر عکس، خط راستی که C را به مرکز دایره وصل می‌کند بر خط راست داده شده عمود است. وقتی انعکاس دایره‌ای را بر دایره می‌نگارد، مرکزهای آنها با نقطه C بر یک خط راست واقع می‌شوند.
 برهان:

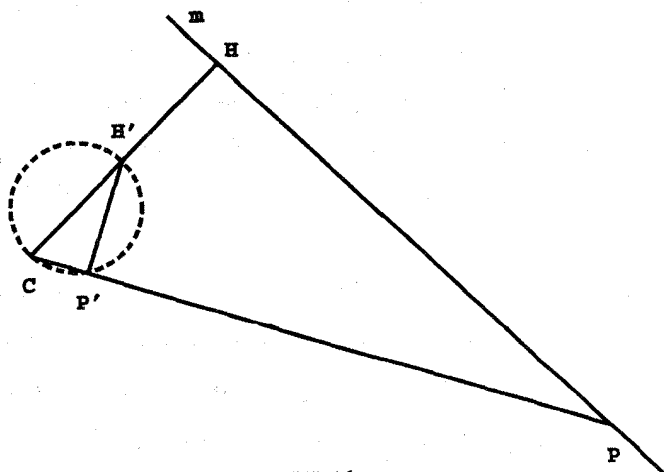
الف) روشن است.

ب) فرض می‌کنیم m خطی راست باشد که از C نمی‌گذرد، و H نقطه‌ای بر m باشد به طوری که CH بر m عمود باشد (شکل ۳.۳). فرض می‌کنیم P نقطه دلخواهی بر m باشد و

$$P' = I_{C,k}(P) \quad \text{و} \quad H' = I_{C,k}(H)$$

چون $CH \cdot CH' = k^2 = CP \cdot CP'$ لذا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{CH'}{CP} = \frac{CP'}{CH}$$



شکل ۳.۳

به علاوه زاویه HCP در دو مثلث HCP و $P'CH'$ مشترک است، بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند و از این رو

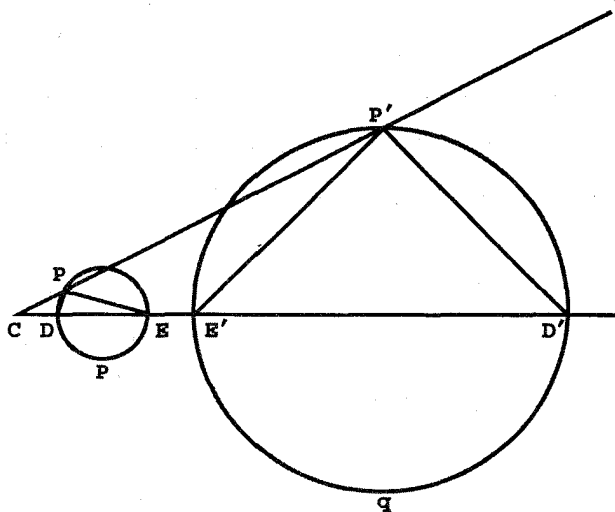
$$\angle H'P'C = \angle PHC = \frac{\pi}{2}$$

چون وضع H' مستقل از وضع P و P' است بنابراین مکان P' دایره‌ای است که قطر آن CH' است.

ج) واضح است که در برهان فوق خط m را می‌توان طوری انتخاب کرد که CH' بر هر پاره‌خطی که به C ختم می‌شود منطبق باشد. بنابراین هر دایره‌ای که از C می‌گذرد نگارهٔ خطی چون m است که از C نمی‌گذرد. چون انعکاس $I_{C,k}$ یک برگشت است، اثبات تمام می‌شود.

د) فرض می‌کنیم p دایره‌ای باشد که از C نگذشته است و P نقطه‌ای بر p باشد. فرض کنید DE قطری از p باشد که امتداد آن از C گذشته است و انعکاس $I_{C,k}$ ، نقاط D, E, P را به ترتیب بر نقاط D', E', P' بنگارد (شکل ۴.۳). چون

$$CP \cdot CP' = CD \cdot CD' = CE \cdot CE' = k^2$$



شکل ۴.۳

$$\frac{CD}{CP'} = \frac{CP}{CD'}$$

$$\frac{CE}{CP'} = \frac{CP}{CE'}$$

چون زاویه $\angle DCP$ در چهار مثلث $D'CP'$, ECP , $P'CE'$ مشترک است، نتیجه می‌گیریم که دو مثلث اول باهم متشابه‌اند و دو مثلث آخر با هم. در نتیجه

$$\angle CDP = \angle CP'D' \text{ و } \angle CEP = \angle CP'E'$$

با استفاده از این واقعیت که زاویه خارجی هر مثلث با مجموع زاویه‌های داخلی غیر مجاور به آن مساوی است، و زاویه محاطی مقابل به قطر در هر دایره قائمه است، چنین به دست می‌آوریم

$$\angle E'P'D' = \angle CP'D' - \angle CP'E' = \angle CDP - \angle CEP = \angle DPE = \frac{\pi}{4}.$$

چون وضعهای D' و E' مستقل از وضعهای P و P' است. نتیجه می‌گیریم که مکان P' دایره‌ای است که قطر آن $D'E'$ است.

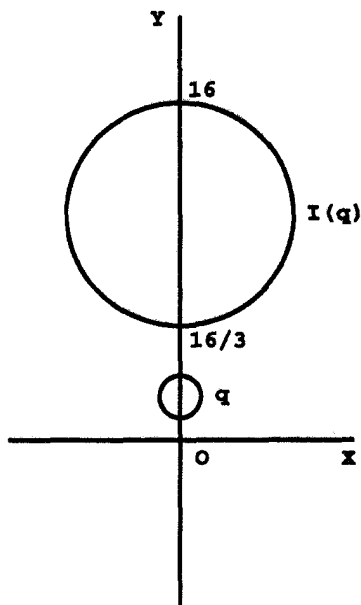
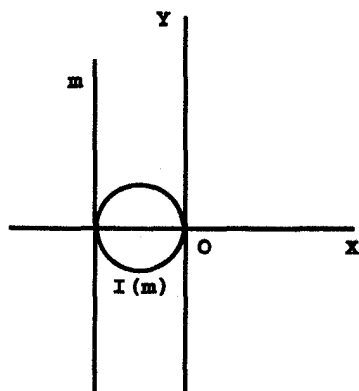
آنچه می‌خواستیم

مثال ۴.۳. فرض می‌کنیم $I = I_{O,4}$ ، که در آن O مبدأ مختصات است، خط $x = -4$ را با m و دایره به مرکز $(2, 0)$ و شعاع ۱ را با q نشان می‌دهیم (شکل ۵.۳).

در این صورت بنا بر قسمت (ب) از قضیه فوق، $I(m)$ دایره‌ای است که از مبدأ می‌گذرد. چون I نقطه $(-4, 0)$ را ثابت نگه می‌دارد، این دایره باید از نقطه $(-4, 0)$ بگذرد. بنا بر آخرین حکم همین قضیه، مرکز $I(m)$ بر محور x واقع است. بنابراین $I(m)$ دایره‌ای است به شعاع ۲ و مرکز $(-2, 0)$.

اکنون به دایره q بازمی‌گردیم، از همان قضیه نتیجه می‌شود که $I(q)$ دایره‌ای است که محور y ها آن را نصف می‌کند. نقاط تلاقی q با محور y ها عبارت‌اند از $(0, 1)$ و $(0, 3)$ که I آنها را به نقاط $(0, 16/3)$ و $(0, 16)$ بدل می‌کند. از این رو این دو نقطه، دو سر یک قطر $I(q)$ هستند.

مثال ۵.۳. آن انعکاس $I_{O,k}$ را پیدا کنید که دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ را به خط $y = 6$ تبدیل کند. از قضیه ۳.۳ نتیجه می‌شود که C باید یکی از نقاط $(0, \pm 2)$ باشد. چون



شکل ۵.۳

C نمی‌تواند بین یک نقطه و نگاره آن نقطه واقع شود، پس C باید $(0, -2)$ باشد. بالاخره چون $I_{C,k}$ نقطه $(0, 2)$ را بر نقطه $(0, 6)$ می‌نگارد، از آنجا نتیجه می‌شود

$$k = \sqrt{[2 - (-2)] \cdot [6 - (-2)]} = 4\sqrt{2}.$$

انعکاسها حرکت‌های صلب نیستند. یک جفت نقطه که بسیار نزدیک به مرکز انعکاس و لذا نزدیک به هم باشند، بر اثر انعکاس به دو نقطه بسیار دور از هم برده می‌شوند. ولی، انعکاسها با حرکت‌های صلب در یک ویژگی بسیار مهم شریک‌اند. و آن ویژگی این است که این تبدیلهای هر دو اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کنند. از لحاظ شهودی این حکم در مورد حرکت‌های صلب چنان روشن است که درباره آن چیز بیشتری را نخواهیم گفت جز اینکه بگوئیم این مطلب از قضیه قابلیت انطباق با هم سه ضلع مثلث که گزاره هشتم اقلیدس است نتیجه می‌شود. این مطلب که انعکاسها اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کنند در واقع یک اتفاق جالبی است. باید توجه کرد که انعکاسها خود زاویه‌ها را حفظ نمی‌کنند زیرا در حالت کلی خط‌های مستقیم در انعکاس به کمان نگاهشته می‌شوند. ولی، هر انعکاس یک زاویه داده شده را به زاویه دیگری تبدیل می‌کند که مسلماً اندازه‌اش با اندازه خود زاویه یکی است. در اینجا تذکر یک نکته ضروری است. روشن است که انعکاسها جهت

زاویه‌ها را عوض می‌کنند. بنابراین وقتی می‌گوییم انعکاسها زاویه‌ها را حفظ می‌کنند، منظور این است که اندازه زاویه‌ها را بدون علامتشان حفظ می‌کنند، ولی علامت را تغییر می‌دهند. تبدیلهایی که اندازه‌های زاویه‌ها را حفظ می‌کنند، همدیس نامیده می‌شوند، این تبدیلهای را در فصلهای آینده به‌طور مفصل مطالعه خواهیم کرد. در منتهای پیشرفته‌تر اصطلاح «همدیس» را در مورد تبدیلهایی به‌کار می‌برند که هم‌اندازه و هم‌جهت (علامت) زاویه را حفظ می‌کنند. برای ساده‌کردن بیان، این اصطلاح را در این کتاب در مفهوم وسیعتر آن به‌کار خواهیم برد.

چون انعکاسها زاویه‌های مستقیم‌الخط را به زاویه‌های مستقیم‌الخط بدل نمی‌کنند، از این رو در اینجا منظور ما از اصطلاح زاویه شکلی است که از دو خم متقاطع تشکیل یافته است، همان چیزی که اقلیدس هنگام ارائه تعریف ۸ خود در ذهن داشته است. اندازه چنین زاویه‌ای اندازه زاویه‌ای است که از خطهای مماس بر این خمها در نقطه تلاقی تشکیل می‌شود.

قضیه ۶.۳. انعکاسها تبدیلهای همدیس صفحه‌اند

برهان: فرض می‌کنیم $I_{C,k}$ یک انعکاس باشد. یک دستگاه مختصات قطبی به قطب C و شعاع حامل اولیه منطبق بر سوی مثبت محور x ها در صفحه اختیار، و فرض می‌کنیم h معرف خم

$$r = f(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

باشد. انعکاس $I_{C,k}$ این خم را بر خم h' که توسط

$$r = F(\theta) = \frac{k^2}{f(\theta)} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

داده می‌شود، می‌نگارد. اکنون فرض می‌کنیم زاویه α به رأس P دارای اضلاع h_1 به معادله‌های $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ باشد (شکل ۶.۳). به‌علاوه فرض می‌کنیم انعکاس $I_{C,k}$ ، P و h_1 و h_2 را به ترتیب بر J_1 ، J_2 بنگارد. در این صورت معادله‌های خمهای J_i عبارت‌اند از

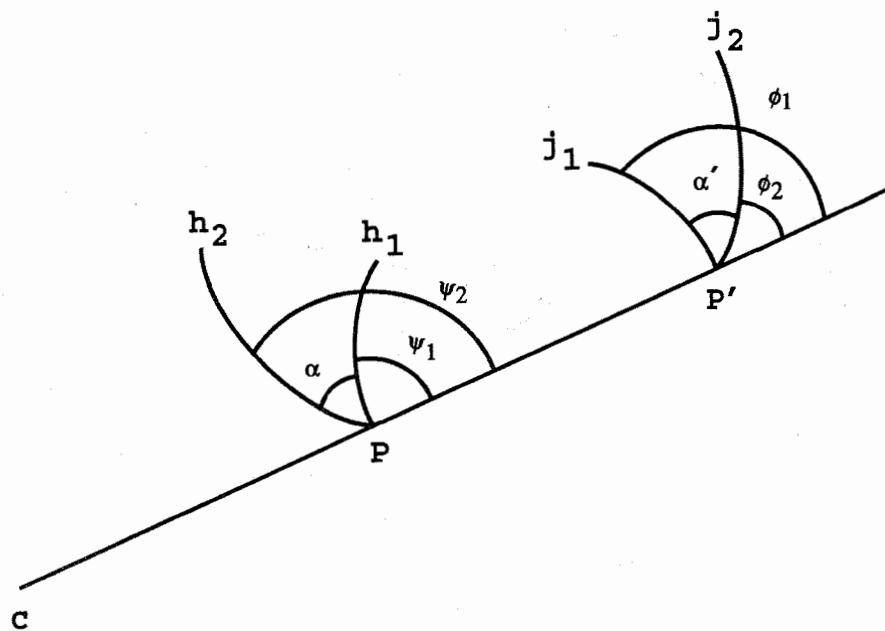
$$r = F_i(\theta) = \frac{k^2}{f_i(\theta)}, \quad i = 1, 2$$

به‌ازای هر نقطه P واقع بر خم $r = f(\theta)$ زاویه شعاع حامل CP با خط مماس در P با رابطه

$$\tan \psi = \frac{r}{r'}$$

داده می‌شود. در نتیجه

$$\tan \phi_1 = \frac{F_1}{F_1'} = \frac{k^2/f_1}{-k^2 f_1'/f_1^2} = -\frac{f_1}{f_1'} = -\tan \psi_1$$



شکل ۶.۳

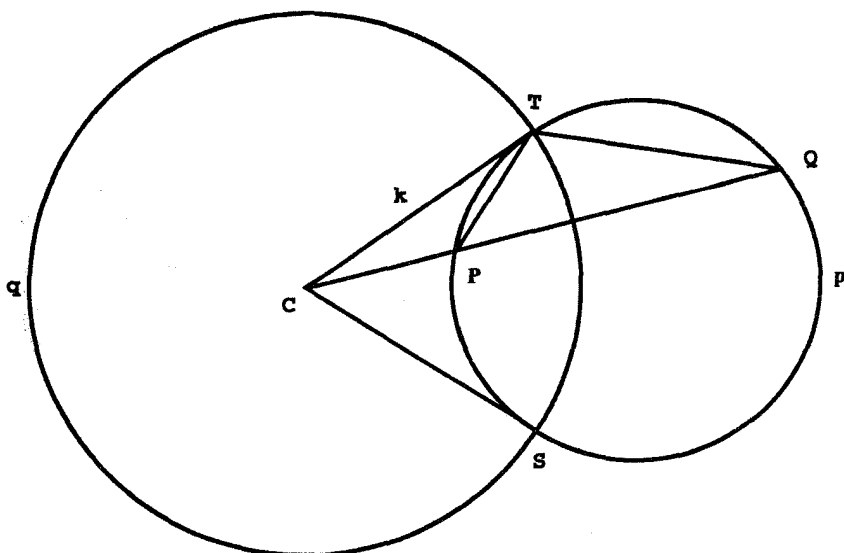
از این رو $\phi_1 = \pi - \psi_1$ و به همین ترتیب $\phi_2 = \pi - \psi_2$. از این روابط چنین به دست می آوریم

$$\alpha' = \phi_1 - \phi_2 = (\pi - \psi_1) - (\pi - \psi_2) = \psi_2 - \psi_1 = -\alpha$$

آنچه می خواستیم

دو دایره متعامد نامیده می شوند اگر متقاطعی باشند و مماسهای بر آنها در هر یک از نقاط تقاطع برهم عمود باشند. می دانیم که خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است، بنابراین دو دایره متعامدند اگر و تنها اگر متقاطعی باشند و خط مماس بر یکی در نقطه تقاطع از مرکز دایره دیگر بگذرد.
گزاره زیر بعداً، هنگام بحث در مورد دایره های ناقلیدسی، بسیار مفید واقع خواهد شد.

گزاره ۷.۳. فرض می کنیم q دایره ای به مرکز C و شعاع k و دایره دلخواه دیگری باشد. در این صورت $I_{C,k}$ دایره p را ثابت نگه می دارد اگر و تنها اگر دایره های p و q متعامد باشند. برهان: فرض می کنیم دایره p بر دایره q عمود و T نقطه تلاقی آنها باشد. نقطه دلخواه P را بر دایره p اختیار و فرض می کنیم Q نقطه تلاقی دیگر خط قاطع CP با دایره p باشد. بنابر گزاره



شکل ۷.۳

۲.۳ داریم

$$CP.CQ = CT^2 = k^2$$

بنابراین $I_{C,k}(P) = Q$. به عبارت دیگر انعکاس $I_{C,k}$ دایره p را بر خودش می‌نگارد.

به عکس، فرض می‌کنیم $I_{C,k}$ دایره p را ثابت نگه‌دارد. چون نقطه‌های $I_{C,k}$ داخل و خارج q را به ترتیب بر نقطه‌های خارج و داخل q می‌نگارد، نتیجه می‌گیریم که p باید q را در دو نقطه مثلاً S و T قطع کند. چون انعکاس $I_{C,k}$ هم p و هم خطهای CT و CS را ثابت نگه‌می‌دارد، از اینجا نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های S و T بر اثر $I_{C,k}$ ثابت نگه‌داشته می‌شوند. فرض می‌کنیم P نقطه دیگری بر p و Q نقطه تلاقی دیگر قاطع CP با دایره p باشد. چون

$$CP.CQ = CT^2 = k^2$$

از آنجا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{CP}{CT} = \frac{CT}{CQ}$$

لذا مثلثهای CPT و CTQ متشابه‌اند. در نتیجه

$$\angle CTP = \angle CQT$$

از این رو، بنا بر گزاره ۱.۳، خط CT بر دایره p مماس است. لذا، خطهای مماس بر p و q در نقطه T بر یکدیگر عمودند و بنابراین p و q متعامدند.

آنچه می‌خواستیم

۲.۳ یکی از کاربردهای انعکاس (اختیاری)

انعکاسها ویژگیهای بسیار جالبی دارند و به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از جمله این ویژگیها این است که خطهای راست را به دایره تبدیل می‌کنند و برعکس. این ویژگی در بررسیهای مربوط به ترسیمهای با خط‌کش و پرگار نقش مهمی ایفا می‌کند. خوانندگان را برای شرح بیشتر در این مورد به کتابهای ایوز و پدو ارجاع می‌دهیم. در این کتاب ما خود را محدود می‌کنیم به اینکه نشان دهیم چگونه از تبدیل یک دایره به یک خط راست از راه انعکاس، می‌توانیم برای تبدیل مسألهٔ مشکلی دربارهٔ دایره به مسألهٔ نمایانی دربارهٔ خط استفاده کنیم. البته ابتدا لمی مورد نیاز است. لم ۸.۳. فرض می‌کنیم نقاط P و Q بر اثر انعکاس $I_{C,k}$ به ترتیب به نقاط P' و Q' تبدیل شوند. در این صورت داریم:

$$P'Q' = \frac{k^2 PQ}{CP \cdot CQ}$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم C و P و Q بر یک خط راست نباشند. از تعریف انعکاس نتیجه می‌گیریم

$$CP \cdot CP' = k^2 = CQ \cdot CQ'$$

از این رو

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{CQ'}{CP'}$$

بنابراین مثلثهای CPQ و $CQ'P'$ متشابه‌اند. در نتیجه

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{CQ'}{CP} = \frac{CQ'.CQ}{CP.CQ} = \frac{k^2}{CP.CQ}$$

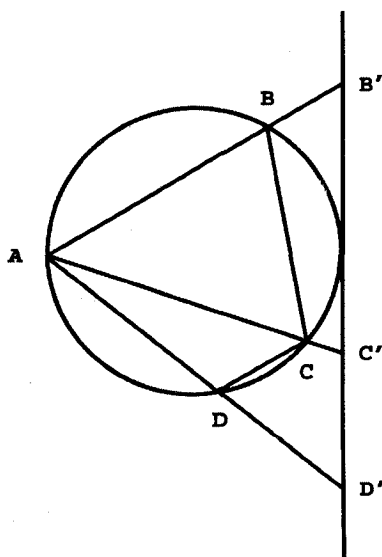
که حکم مورد نظر بی‌درنگ از آن نتیجه می‌شود.

چون این حالت تنها حالتی است که در اثبات گزارهٔ زیر به‌کار خواهد رفت حالت دیگر را که نقاط C و P و Q بر یک خط‌اند به تمرین ۱۲ ارجاع می‌کنیم.

آنچه می‌خواستیم

گزارهٔ ۹.۳. حاصلضرب قطرهای یک چهارضلعی محاط در یک دایره با مجموع حاصلضربهای اضلاع روبه‌رو برابر است.

برهان: فرض می‌کنیم $ABCD$ چهارضلعی محاط در دایرهٔ به قطر k باشد (شکل ۸.۳). بنا بر قضیهٔ ۳.۳، انعکاس $I_{A,k}$ این دایره را به خطی مماس بر دایره و نقاط B, C, D را به ترتیب به نقاط B', C', D' از این خط بدل می‌کند. روشن است که $B'D' = B'C' + C'D'$. از این رو



شکل ۸.۳

$$\frac{k^{\vee}BC}{AB \cdot AC} + \frac{k^{\vee}CD}{AC \cdot AD} = \frac{k^{\vee}BD}{AB \cdot AD}$$

یا

$$BC \cdot AD + CD \cdot AB = BD \cdot AC$$

آنچه می‌خواستیم

۳.۳ تمرین

۱. گزاره ۱.۳ را ثابت کنید.

۲. ثابت کنید که نقاط P و P' در شکل ۲.۳ در واقع نسبت به دایره q متقارن‌اند.

۳. اگر O مبدأ مختصات باشد، انعکاس $I_{O,5}$ مجموعه‌های زیر را به کدام نقطه یا خم بدل می‌کند؟

الف) نقطه $(-2, 3)$.

ب) نقطه $(6, 8)$.

ج) خط $y = 2x$

د) خط $x + y = 5$

ه) خط $y = 5$

و) خط $y = x + 10$

ز) دایره به مرکز O و شعاع ۳.

ط) دایره به مرکز $(3, 0)$ و شعاع ۱.

ح) دایره به مرکز O و شعاع 10° .

ی) دایره به مرکز $(3, 0)$ و شعاع ۵.

ک) دایره به مرکز $(3, 0)$ و شعاع 10° .

م) دایره به مرکز $(15, 0)$ و شعاع ۱۳.

ل) دایره به مرکز $(15, 0)$ و شعاع ۲.

۴. برای هر جفت از خمهای زیر، آیا انعکاسی وجود دارد که یکی را به دیگری بدل کند؟ در صورت وجود، آن انعکاس را مشخص نمایید.

الف) محور y ها و خط $x = 2$.

ب) دایره $x^2 + y^2 = 16$ و خط راست $x = 2$.

ج) دایره $x^2 + y^2 = 16$ و خط راست $x = 4$.

د) دایره $x^2 + y^2 = 16$ و خط راست $x = 8$.

ه) دایره‌های $x^2 + y^2 = 16$ و $x^2 + y^2 = 100$.

و) دایره‌های $x^2 + y^2 = 16$ و $(x - 4)^2 + y^2 = 16$.

ز) دایره‌های $x^2 + y^2 = 16$ و $(x - 34)^2 + y^2 = 900$.

۵. فرض می‌کنیم p دایره‌ای ثابت و P نقطه‌ای ثابت ناواقع بر آن باشد. نشان دهید که یک نقطه دیگر P' وجود دارد که هر دایره شامل P و عمود بر p شامل نقطه P' نیز هست.
۶. فرض می‌کنیم p یک دایره ثابت و P یک نقطه ثابت باشد. ثابت کنید مکان هندسی مراکز تمام دایره‌های شامل P و عمود بر p یک خط راست است.
۷. فرض می‌کنیم I یک انعکاس باشد و p یک دایره به طوری که $I(P)$ نیز یک دایره باشد. چه موقعی p و $I(P)$ شعاع‌های نابرابر دارند؟
۸. فرض می‌کنیم p و q دو دایره با شعاع‌های نابرابر باشند. نشان دهید انعکاسی وجود دارد که p را بر q می‌نگارد.
۹. دو دایره p و q در نقطه T برهم مماس‌اند و دایره متغیری ماربر T و عمود بر p و q آن دو را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کرده است. ثابت کنید PQ از نقطه ثابتی می‌گذرد.
۱۰. چهار نقطه A, B, C, D را بر یک دایره در نظر می‌گیریم. اگر T نقطه تماس دایره‌ای ماربر A و B با دایره دیگری ماربر C و D ، باشد نشان دهید مکان هندسی T یک دایره است.
۱۱. فرض می‌کنیم دایره‌های p و q در دو نقطه A و B متقاطع باشند و قطرهای p و q که از نقطه B می‌گذرند، p و q را به ترتیب در نقاط C و D قطع کنند. نشان دهید خط AB از مرکز دایره ماربر نقاط B, C, D می‌گذرد.
۱۲. برهان لم ۸.۳ را کامل کنید.
۱۳. دو نقطه غیرمشخص A و B ، و انتقال $\tau = \tau_{AB}$ و عدد مثبت k را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید

$$\tau \circ I_{A,k} \circ \tau^{-1} = I_{B,k}$$

۱۴. فرض می‌کنیم R یک دوران باشد و $I_{A,k}$ یک انعکاس. $R \circ I_{A,k} \circ R^{-1}$ را مشخص کنید.
۱۵. فرض می‌کنیم I یک انعکاس باشد و f یک حرکت صلب. آیا $I \circ f \circ I^{-1}$ لزوماً یک حرکت صلب است؟

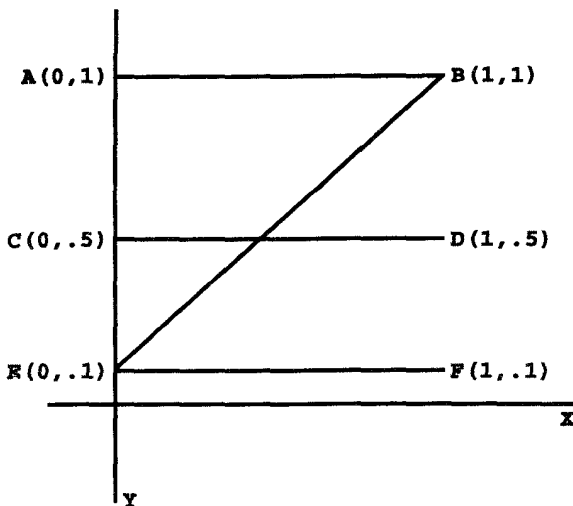
برای حل مسایل زیر از نرم‌افزارهای گرافیکی نظیر نرم‌افزارهای موجود در Mathematica یا Maple استفاده کنید.

۱۶. برنامه‌ای بنویسید که در آن منعکس خطی دلخواه، دایره‌ای دلخواه باشد.
۱۷. برنامه‌ای بنویسید که در آن منعکس دایره‌ای دلخواه، دایره‌ای دلخواه باشد.

صفحه هذلولوی

۱.۴ فاصله هذلولوی

یک جهان دوبعدی در نظر بگیرید که دستگاه مختصاتی بر آن نهاده شده که محور x های آن بینهایت سرد است. همچنین فرض کنید اشیاء این جهان به هنگام نزدیک شدن به محور x ها بر اثر افت دما اجباراً منقبض می شوند. بنابراین ساکنان این سرزمین عجیب خواهند دید که رفتن بر یک خط افقی از $A(0, 1)$ به $B(1, 1)$ (شکل ۱.۴) وقت کمتری از آنها را می گیرد تا رفتن بر یک خط افقی از $C(0, 5)$ به $D(1, 5)$. چون خط کشهای آنها به همان اندازه خود آنها منقبض می شوند، این مشاهده در نظر آنها اصلاً تناقضی ایجاد نمی کند. به علاوه اگر فرض کنیم که این انقباض طوری است که ناظر واقع در بیرون صفحه طول شیء داده شده را متناسب با عکس فاصله آن از محور x ها می بیند، در این صورت این ساکنان خواهند دید که رفتن از A به B نصف زمان رفتن از C به D و یک دهم زمان رفتن از $E(0, 0, 1)$ به $F(1, 0, 1)$ طول می کشد. بعداً خواهیم دید که ماهیت محور x ها طوری است که هرگونه ارتباط بین نیمصفحه های بالایی



شکل ۱.۴

و پایینی را غیرممکن می‌سازد. در نتیجه خود را به نیمصفحه بالایی محدود می‌کنیم و آن را صفحه هذلولوی می‌نامیم. این نیمصفحه را نیمصفحه بالایی پوانکاره نیز می‌نامیم. تفاوت‌های دقیق بین این دو نامگذاری را در بخش ۳.۴ و مجدداً در فصل ۱۵ مورد بحث قرار خواهیم داد. نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم این است که آنچه صفحه هذلولوی را از صفحه اقلیدسی متمایز می‌کند، فضای زیربنایی واقعی نیست، بلکه روش اندازه‌گیری فاصله در این فضای زیربنایی معمولی است. با تسامح بگوییم فاصله هذلولوی در فوق چنین تعریف شده است:

$$\text{طول هذلولوی} = \frac{\text{طول اقلیدسی}}{y}$$

با ضریب تناسب ثابتی که ۱ اختیار شده است. خواننده را بر حذر می‌داریم از اینکه این تعریف را تعریف رسمی طول یک پاره‌خط هذلولوی تلقی کند. در واقع این تعریف طول هذلولوی پاره‌خط واصل بین A و B را برابر با $1/1 = 1$ و طول هذلولوی پاره‌خط واصل بین E و F را برابر با $1/0.1 = 10$ به دست می‌دهد. ولی این تعریف راه مستقیمی برای محاسبه طول هذلولوی پاره‌خط‌های واصل بین A و E یا بین B و E به دست نمی‌دهد. برای پرداختن به این مسایل از حساب دیفرانسیل و انتگرال بینهایت کوچکها استفاده می‌کنیم. فرض کنید $P(x, y)$ و $Q(x + dx, y)$ و $R(x + dx, y + dy)$ مثلث بینهایت کوچک باشند. بدیهی است که طول اقلیدسی

پاره خط بینهایت کوچک PR عبارت است از

$$PR_{\text{طول اقلیدسی}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

از این رو، باز هم به تسامح، طول هذلولوی پاره خط بینهایت کوچک PR را به صورت

$$PR_{\text{طول هذلولوی}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (۱.۴)$$

تعریف می‌کنیم. این تعریف محاسبه طولهای هذلولوی را به تمرینهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال تبدیل می‌کند. مثلاً برپاره خط واصل بین E و A ، dx متحد با صفر است، از این رو داریم

$$EA_{\text{طول هذلولوی}} = \int_{0.1}^1 \frac{dy}{y} = \ln 1 - \ln 0.1 = \ln 10 \cong 2.303$$

وقتی به خط شیب‌دار EB برگردیم ملاحظه می‌کنیم که معادله این خط عبارت است از

$$y - 0.1 = \frac{1 - 0.1}{1 - 0}(x - 0)$$

یا

$$y = 0.9x + 0.1$$

اکنون با مشتق‌گیری از این معادله به دست می‌آوریم

$$dy = 0.9dx$$

اگر این مقادیر y و dy را در رابطه (۱.۴) قرار دهیم و برای جمع کردن طولهای هذلولوی پاره خطهای بینهایت کوچک واقع بر EB از انتگرال استفاده کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} EB_{\text{طول هذلولوی}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(dx)^2 + (0.9dx)^2}}{0.9x + 0.1} \\ &= \sqrt{1.81} \int_0^1 \frac{dx}{0.9x + 0.1} = \frac{\sqrt{1.81}}{0.9} [\ln(0.9x + 0.1)]_0^1 \\ &\cong 3.442 \end{aligned}$$

اکنون باید برای خواننده روشن شده باشد که رابطه (۱.۴) روشی را برای بیان طول هذلولوی هر خم به صورت یک انتگرال معین در اختیار ما می‌گذارد. طول هذلولوی یک خم دلخواه γ را با عبارت

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y} \quad (2.4)$$

تعریف می‌کنیم. مثلاً طول هذلولوی قطعه‌ای از سهمی $y = x^2$ که نقاط (۲, ۴) و (۳, ۹) را به هم وصل می‌کند مساوی است با

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{(dx)^2 + (2xdx)^2}}{x^2} = \int_2^3 \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{x^2} dx$$

اگرچه این انتگرال به آسانی، با روشهای استاندارد انتگرالگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال، که در درس حسابان فرار گرفته‌ایم محاسبه نمی‌شود ولی با استفاده از قاعده سیمپسن آن را با هر دقتی می‌توان محاسبه کرد. از این رو در واقع برای محاسبه طول هذلولوی یک خم دلخواه در صفحه هذلولوی روشی در دست داریم. دو گزاره زیر را به عنوان مثالهای دیگری که بعداً بسیار مفید واقع خواهند شد، می‌آوریم.

گزاره ۱.۴. فرض می‌کنیم q دایره‌ای به مرکز $C(c, 0)$ و شعاع r باشد. اگر P و Q دو نقطه بر q باشند به طوری که CP و CQ به ترتیب زاویه‌های α و β ($\alpha < \beta$) با جهت مثبت محور x ‌ها بسازند، آنگاه

$$\text{طول هذلولوی کمان } PQ = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha}.$$

برهان: اگر t زاویه بین محور x ‌های مثبت و شعاع واصل به نقطه اختیاری (x, y) از دایره q باشد، آنگاه

$$x = c + r \cos t, y = r \sin t$$

در نتیجه

$$dx = -r \sin t dt \text{ و } dy = r \cos t dt$$

و طول هذلولوی کمان PQ مساوی است با

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(-r \sin t dt)^2 + (r \cos t dt)^2}}{r \sin t} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r dt}{r \sin t}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \csc t dt = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha}$$

آنچه می‌خواستیم

گزارهٔ فوق بیان می‌کند که طول هذلولوی کمان دایره‌ای که مرکز آن بر محور x هاست فقط به شیبهای زوایایی که شعاعهای واصل به دو سر کمان با محور x های مثبت می‌سازند بستگی دارد. بنابراین فرع زیر ثابت می‌شود.

فرع ۲.۴. اگر PQ و $P'Q'$ کمانهای دایره‌های هم‌مرکزی باشند که مرکز آنها بر محور x ها قرار دارد و سه تاییهای P, C, P' و Q, C, Q' بر یک خط راست باشند، آنگاه طولهای هذلولوی کمانهای PQ و $P'Q'$ مساوی‌اند.

طول هذلولوی پاره‌خطهای قائم را نیز می‌توان به آسانی با روشی که برای محاسبهٔ طول پاره‌خط EA در شکل ۱.۴ به‌کار بردیم محاسبه کرد.

گزارهٔ ۳.۴. طول هذلولوی پاره‌خط اقلیدسی و اصل بین نقاط $P(a, y_1)$ و $Q(a, y_2)$ $0 < y_1 \leq y_2$ مساوی است با

$$\ln \frac{y_2}{y_1}$$

برهان: نگاه کنید به تمرین ۱۶.

۲.۴ خطهای راست هذلولوی

به مثالهایی که در ابتدای این فصل مورد بحث قرار گرفته بود برمی‌گردیم. در این مثالها طولهای هذلولوی پاره‌خطهای EA, AB و EB را به‌ترتیب مساوی با ۱، $۲ر۳۰۳$ و $۳ر۴۴۲$ محاسبه کردیم. از نامساوی

$$۳ر۴۴۱ > ۱ + ۲ر۳۰۳$$

نتیجه می‌شود که در صفحه هذلولوی، خط راست اقلیدسی و اصل بین دو نقطه کوتاهترین فاصله هذلولوی بین آن دو نقطه را به دست نمی‌دهد. بنابراین بدیهی است این سؤال کاملاً طبیعی مطرح شود که در صفحه هذلولوی از میان خمهای و اصل بین دو نقطه، طول کدامیک از همه کوتاهتر است؟ این خمها پاره ژئودزیک نامیده می‌شوند، و مشخص کردن آنها با کمال تعجب، و خوشبختانه، خیلی آسان است.

قضیه ۴.۴. پاره ژئودزیکهای صفحه هذلولوی عبارتند از

یا

الف) کمانهایی از نیمدایره‌های اقلیدسی که مرکز آنها بر محور x ها واقع است،

یا

ب) پاره‌خطهای خطهای راست اقلیدسی که قائم بر محور x ها هستند.

برهان: فرض می‌کنیم $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه از صفحه هذلولوی باشند و g خمی باشد که آنها را به هم وصل می‌کند. دو حالت را باید بررسی کنیم.

حالت اول: $x_1 \neq x_2$. در این حالت پاره‌خط اقلیدسی PQ بر محور x ها عمود نیست. فرض می‌کنیم $C(c, 0)$ محل تلاقی عمودمنصف PQ با محور x ها باشد. یک دستگاه مختصات قطبی به قطب C در نظر می‌گیریم که محور آن بر محور x ها منطبق و سوی آن با سوی محور x ها یکی باشد. فرض می‌کنیم پاره ژئودزیک g نسبت به این دستگاه جزئی از خمی به معادله $r = f(\theta)$ باشد و مختصات نقاط P و Q به ترتیب عبارت باشند از (r_P, α) و (r_Q, β) (شکل ۲.۴). بنابراین رابطه (۱.۴) طول هذلولوی g عبارت است از

$$\int_g \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

چون این مختصات قطبی توسط معادله‌های

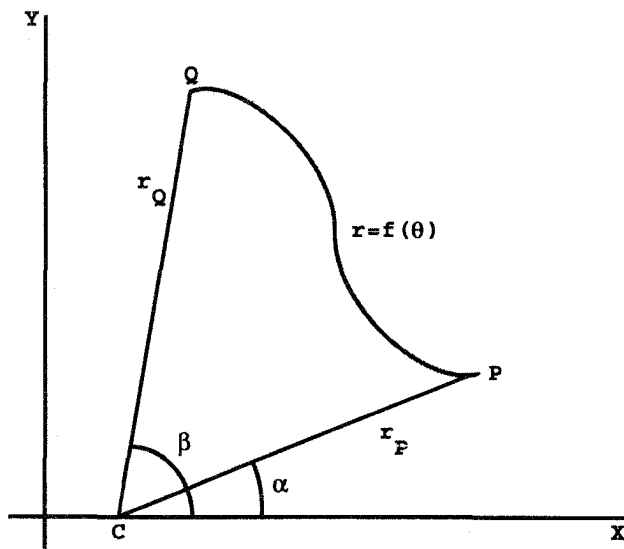
$$x = c + r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta,$$

به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta + r \frac{d \cos \theta}{d\theta} = r' \cos \theta - r \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \frac{d \sin \theta}{d\theta} = r' \sin \theta + r \cos \theta.$$



شکل ۲.۴

در نتیجه

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 d\theta^2 + (r \sin \theta + r \cos \theta)^2 d\theta^2 \\ &= [r'^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2rr'(\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta) + r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] d\theta^2 \\ &= (r'^2 + r^2) d\theta^2 \end{aligned}$$

با قراردادن این مقدار در عبارت (۱.۴) نتیجه می‌گیریم که طول هذلولوی g مساوی است با

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r \sin \theta} d\theta &\geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{r^2}}{r \sin \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \csc \theta d\theta \\ &= \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \end{aligned}$$

چون بنا بر گزاره ۱.۴ آخرین عبارت فوق طول هذلولوی کمان دایرهٔ اقلیدسی به شعاع $CP = CQ$ است، نتیجه می‌گیریم که این کمان پاره‌ژئودزیک واصل بین Q و P است.

حالت دوم: $x_1 = x_2$. فرض می‌کنیم معادلهٔ g به صورت $x = f(y)$ باشد. اگر dx/dy را

با f' نشان دهیم، آنگاه طول هذلولوی g مساوی است با

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{f'^2 dy^2 + dy^2}}{y} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{f'^2 + 1}}{y} dy \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln \frac{y_2}{y_1}$$

ولی قبلاً در گزاره ۳.۴ ثابت شده بود که عبارت اخیر طول هذلولوی پاره خط اقلیدسی PQ است. بنابراین پاره خط اقلیدسی واصل بین P و Q ، پاره ژئودزیک واصل بین آنها نیز هست.

آنچه می‌خواستیم

یک نیم‌دایره اقلیدسی که مرکز آن بر محور x ها و در نیم‌صفحه بالایی قرار داشته باشد یا ژئودزیک یا یک خط راست هذلولوی نامیده می‌شود. همین نام به نیم‌خطهای اقلیدسی به مبدأ محور x ها و عمود بر آن و واقع در نیم‌صفحه بالایی نیز داده می‌شود. وقتی ضرورت ایجاب کند که بین آنها تمایزی قابل شومیم اولی را ژئودزیک خمیده و دومی را ژئودزیک راست خواهیم نامید. مع‌هذا، این اصطلاح بدین علت به‌کار برده می‌شود که هر دو نوع ژئودزیک نسبت به روش هذلولوی اندازه‌گیری فاصله خطهای راست هستند، به این معنی که هر پاره خط از یکی از این خطها کوتاهترین خم واصل بین دو سر آن است. توجه به این نکته حائز اهمیت است که در این جهان هذلولوی، نور که بنابر یک اصل معروف فیزیکی به‌جای خطهای راست اقلیدسی باید بر ژئورویکها حرکت کند، الزاماً بر این خطهای هذلولوی حرکت می‌کند خواه این ژئودزیکها راست باشند خواه خمیده. بنابراین ساکنان این جهان هذلولوی تعریف ۴ اقلیدس را که می‌گویند هر خط راست به‌نحوی هموار بر نقاط خود قرار دارد، سازگار خواهند یافت.

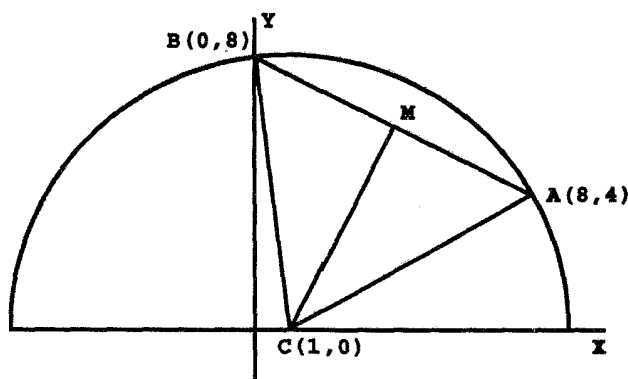
هر دو نقطه از نیم‌صفحه بالایی را می‌توان با یک ژئودزیک به هم وصل کرد. دو نقطه که دارای یک طول (خفت) باشند با یک ژئودزیک راست به هم وصل می‌شوند. نقطه‌هایی با طولهای متفاوت با یک ژئودزیک خمیده که مرکز آن (به‌عنوان یک نیم‌دایره اقلیدسی) محل تلاقی محور x ها و عمود منصف پاره خط اقلیدسی واصل بین آنهاست، به هم وصل می‌شوند.

فاصله هذلولوی بین دو نقطه P و Q با $h(P, Q)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از طول هذلولوی ژئودزیک واصل بین آنها.

مثال ۵.۴. طول هذلولوی پاره ژئودزیک واصل بین نقاط $A(۸, ۴)$ و $B(۰, ۸)$ در شکل ۳.۴ را پیدا کنید.

نقطه C مرکز ژئودزیک واصل بین A و B محل تلاقی عمود منصف پاره خط اقلیدسی AB و محور x ها است. چون شیب خط راست اقلیدسی گذرنده بر A و B برابر است با

$$\frac{4 - 8}{8 - 0} = -\frac{1}{2}$$



شکل ۳.۴

و مختصات نقطه وسط پاره خط اقلیدسی AB برابر است با

$$\left(\frac{0+8}{2}, \frac{8+4}{2} \right) = (4, 6)$$

نتیجه می‌گیریم که معادله عمودمنصف عبارت است از

$$y - 6 = 2(x - 4)$$

و طول از مبدأ آن $(1, 0)$ است. با توجه به $\sqrt{65}$

نتیجه می‌شود که طول هذلولوی پاره‌ژئودزیک واصل بین A و B مساوی است با

$$\ln \frac{\frac{\sqrt{65}}{8} - \left(\frac{-1}{8} \right)}{\frac{\sqrt{65}}{4} - \frac{7}{4}} = 1,450 \dots$$

مثال ۶.۴. نقطه M وسط هذلولوی پاره‌ژئودزیک واصل بین $A(a, p)$ و $B(a, q)$ را پیدا کنید.

چون ژئودزیک واصل بین A و B خط راست است، از گزاره ۳.۴ نتیجه می‌شود که مختصات

M به صورت (a, b) است که در آن b در معادله

$$\frac{b}{p} = \frac{q}{b}$$

صدق می‌کند. از این رو $M = (a, \sqrt{pq})$.

خواننده با مراجعه به تمرین ۶ روشی برای یافتن نقطه وسط هذلولوی یک پاره‌ژئودزیک

هذلولوی دلخواه پیدا خواهد کرد.

۳.۴ زاویه‌های هذلولوی

تا اینجا فاصله جدیدی را در صفحه تعریف و «خطهای راست» صفحه را مشخص کردیم. اکنون به اندازه‌گیری زاویه‌ها در این هندسه جدید می‌پردازیم. با توجه به کاربرد کلمه زاویه از سوی اقلیدس، ضلعهای زاویه می‌توانند خمهای دلخواه باشند. بنابه تعریف، اندازه اقلیدسی این زاویه اندازه معمولی زاویه مستقیم‌الخطی است که بین خطهای مماس بر اضلاع زاویه در رأس آن ساخته می‌شود. باید توجه داشت که در این بافت کلیتر به آسانی ممکن است زاویه‌های غیرقابل انطباق با هم اتفاقاً یک اندازه داشته باشند. زیرا تمام زاویه‌هایی که رأس آنها مبدأ مختصات، یک ضلع آنها محور x و ضلع دیگر آنها خم $y = x^n$ ، $n = 2, 3, \dots$ است یک اندازه $^\circ$ دارند. برخلاف فاصله هذلولوی و ژئودزیکها، کار تعریف اندازه هذلولوی یک زاویه خیلی ساده می‌شود. اندازه هذلولوی یک زاویه با اندازه اقلیدسی آن یکی است.

اگر احساس می‌کنید که این تعریف بیش از اندازه ساده‌انگارانه است، شاید کاملاً حق با شما باشد. حقیقت مطلب این است که اندازه‌های هندسی را نمی‌توان به دلخواه تعریف کرد. این اندازه‌ها باید ویژگیهای مشخص شده در اصول بدیهی اقلیدس را داشته باشند. به علاوه در مورد طولهای پاره ژئودزیکها و اندازه‌های زاویه‌های مستقیم‌الخط (زاویه‌هایی که ژئودزیکها باهم می‌سازند) انتظار می‌رود که برابری در اندازه مستلزم قابلیت انطباق باهم باشد. یعنی، پاره ژئودزیکهای با طولهای متساوی باید باهم قابل انطباق باشند و نیز زاویه‌های مستقیم‌الخط با اندازه‌های مساوی باید باهم قابل انطباق باشند. اکنون در این مورد روشن است که باید معنی قابلیت انطباق باهم را در صفحه هذلولوی مشخص کنیم.

۴.۴ حرکت‌های صلب هذلولوی

چنانچه در فصل ۲ ثابت کردیم، حرکت‌های صلب اقلیدسی از دو ویژگی برخوردارند،

(i) برآثر تقارنهای محوری تولید می‌شوند.

(ii) به چهار رده تقارنهای محوری، انتقالها، دورانها و لغزه‌ها تقسیم می‌شوند.

در این فصل به تعریف مشابه‌های هذلولوی تقارن‌ها اکتفا می‌کنیم. در فصل آتی، ثابت خواهیم کرد که ویژگی (i) برای همه حرکت‌های صلب هذلولوی نیز برقرار است. رده‌بندی تمام حرکت‌های هذلولوی معلوم شده ولی ذکر آنها در این کتاب دشوار است. در عوض، یک شرح جبری دقیقی در فصل ۹ از آن ارائه خواهیم کرد.

قضیه ۷.۴. تبدیلیهای زیر از صفحه هذلولوی طولها و اندازه‌های زاویه‌ها را حفظ می‌کنند:

الف) انعکاسهای $I_{C,k}$ وقتی که C بر محور x ‌ها واقع است.

ب) تقارنهای ρ_m وقتی که m بر محور x ‌ها عمود است.

ج) انتقالهای τ_{AB} ، وقتی که AB با محور x ‌ها موازی است.

برهان: قبلاً در قضیه ۴.۳ دیده بودیم که همه انعکاسها اندازه اقلیدسی زاویه‌ها را حفظ می‌کنند.

همچنین از قضیه (ض‌ض) نتیجه می‌شود که تمام حرکت‌های صلب اقلیدسی اندازه‌های اقلیدسی

زاویه‌ها را حفظ می‌کنند. چون اندازه هذلولوی زاویه‌ها با اندازه اقلیدسی آنها برابر است، نتیجه

می‌گیریم که تمام تبدیلیهای مورد بحث اندازه‌های هذلولوی زاویه‌ها را حفظ می‌کنند. اکنون ویژگی

صلبیت آنها را ثابت می‌کنیم.

الف) فرض کنید $I_{C,k}$ انعکاس دلخواهی باشد. دستگاه مختصات قطبی به قطب C و

محوری منطبق بر محور x ‌ها و هم‌جهت با آن را در نظر می‌گیریم. خم

$$r = f(\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

را با h نشان می‌دهیم. انعکاس $I_{C,k}$ ، h را بر خم h' که با معادله

$$r = f(\theta) = \frac{k^2}{f(\theta)} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

تعریف می‌شود، می‌نگارد. به طوری که در برهان قضیه ۴.۴ دیدیم طول هذلولوی h' عبارت است

از

$$\begin{aligned} &= \int_{h'} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r \sin \theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{F'^2 + F^2}}{F \sin \theta} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(-k^2 f' / f^2)^2 + (k^2 / f)^2}}{k^2 \sin \theta / f} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{f'^2 + f^2}}{f \sin \theta} d\theta \\ &= \int_h \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r \sin \theta} d\theta = \text{طول هذلولوی } h \end{aligned}$$

بنابراین انعکاس داده مسلماً طولهای هذلولوی را حفظ می‌کند.

ب) فرض می‌کنیم $x = c$ معادله خط m باشد. روشن است که نقطه‌های (x_1, y_1) و

(x_2, y_2) نسبت به این خط متقارن‌اند اگر و تنها اگر

$$c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_1 = y_2$$

اگر γ خمی باشد که توسط $[u(t), v(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، پارامتری شده است، آنگاه $\rho_m(\gamma)$ به صورت $[2c - u(t), v(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، پارامتری می‌شود. اما

$$dx = u'(t)dt, \quad dy = v'(t)dt \quad \text{روی } \gamma$$

$$dx = -u'(t)dt, \quad dy = v'(t)dt \quad \text{روی } \rho_m(\gamma)$$

در نتیجه طولهای هذلولوی γ و $\rho_m(\gamma)$ هر دو دارای مقدار مشترک

$$\int_a^b \frac{\sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)}}{v(t)} dt$$

هستند که طول هذلولوی آنهاست.

ج) فرض می‌کنیم τ انتقالی به صورت $\tau(x, y) = (x + h, y)$ به ازای عدد ثابت h باشد. اگر خم γ توسط $[u(t), v(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، پارامتری شده باشد، آنگاه $\tau(\gamma)$ توسط $[u(t) + h, v(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، پارامتری می‌شود. روی هر دو خم γ و $\tau(\gamma)$ داریم

$$dx = u'(t)dt, \quad dy = v'(t)dt$$

در نتیجه طولهای هذلولوی γ و $\tau(\gamma)$ دارای مقدار مشترک

$$\int_a^b \frac{\sqrt{u'^2(t) + v'^2(t)}}{v(t)} = dt$$

هستند که طول هذلولوی آنهاست.

فرع ۸.۴. همه تبدیلهای مذکور در حکم قضیه ۷.۴ ژئودزیکها را بر ژئودزیکها می‌نگارند.

آنچه می‌خواستیم

در این مقام ممکن است واضح نباشد که زاویه‌های مستقیم‌الخط هذلولوی هم‌اندازه، یا همچنین پاره ژئودزیکهای هم‌اندازه باید باهم قابل انطباق هذلولوی باشند. در تمرینهای ۱۴ و ۱۵ از خواننده خواسته شده است که این حقایق را اثبات نماید. در فصل آتی ثابت می‌کنیم که تمام زاویه‌های قائمه مستقیم‌الخط هذلولوی قابل انطباق هذلولوی باهم‌اند، و لذا خواننده می‌تواند حل این تمرینها را تا آن موقع به تعویق اندازد.

۵.۴ هندسهٔ ریمانی (اختیاری)

اکنون خواننده با دو هندسه آشنا شده است، هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ هذلولوی نیمصفحهٔ بالایی. حتی در نیمصفحهٔ بالایی که این دو هندسه باهم مشترک‌اند، این هندسه‌ها باهم متفاوت‌اند به این معنا که برای یک خم دو طول متفاوت به دست می‌دهند. بنابراین روشن است که مفهوم فاصله در واقع مفهومی نسبی است، به این معنا که یک فضای زیربنایی را می‌توان با مفاهیم متفاوت فاصله مجهز کرد. هر یک از این مفاهیم هندسهٔ جدیدی با ویژگیها و قضایای خاص خود به وجود می‌آورد. تشخیص این که اندازه‌گیری طول در یک رویه تا حد زیادی مستقل از روش تعریف رویه است، به‌طور ضمنی در کارهای گاوس آمده است و در این مورد در فصل ۱۲ مطالبی عرضه خواهد شد.

اما افتخار آزاد کردن مفهوم طول از قید رویه‌ها به‌طور کامل از آن‌گ.ف.ب. ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) بوده است که در سال ۱۸۵۴ اصلاح خیلی کلی فاصله‌های هامنی را پیشنهاد کرده است. وی پیشنهاد کرده است که ریاضیدانان هندسه‌هایی را مورد مطالعه قرار دهند که در آنها طول خم دلخواه γ واقع در صفحه با عبارت

$$\int_{\gamma} \sqrt{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2} \quad (3.4)$$

داده شود، که در آن E و F و G توابعی از x و y ‌اند که در شرایط

$$E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0 \quad (4.4)$$

صدق می‌کنند. تابع زیر علامت انتگرال در رابطهٔ (۳.۴) نیازمند چند توضیح است. فرض کنید γ خم مسطحی با معادله‌های پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad u \leq t \leq b$$

باشد، در این صورت تابع زیر علامت انتگرال در (۳.۴) را باید صورت مختصر شدهٔ غیر قابل ایراد، ولی به‌ظاهر پیچیده‌تر انتگرال

$$\int_a^b \sqrt{E \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right) + G \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

دانست. مثلاً وقتی

$$E = G = \frac{1}{y^2}, F = 0$$

عبارت (۳.۴) به طول هذلولوی تعریف شده در (۲.۴) تبدیل می شود. وقتی

$$E = G = 1, \quad F = 0$$

و γ خم پارامتری به صورت $x = x, y = f(x)$ باشد، آنگاه

$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

که خوانندگان می دانند که این عبارت طول اقلیدسی خم γ است.

شرایط (۴.۴) از این نیاز ناشی می شوند که هر تعریف منطقی از طول باید طول مثبتی را برای هر خم ناتباهیده به دست دهد. تمرین ۲۲ نشان می دهد که وقتی این شرایط نقض شوند چه عیبی پیدا می شود. نمی خواهیم بگوییم که انتگرالهایی به صورت (۳.۴) که در شرایط مذکور صدق نمی کنند مورد علاقه ما نیستند. به هیچ وجه، مثلاً انتگرال

$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 - dy^2}$$

نقش ویژه ای در نظریه نسبیت خاص ایفا می کند. ولی، این انتگرال را نمی توان به عنوان طولی در هیچ معنای متعارفی تعبیر کرد.

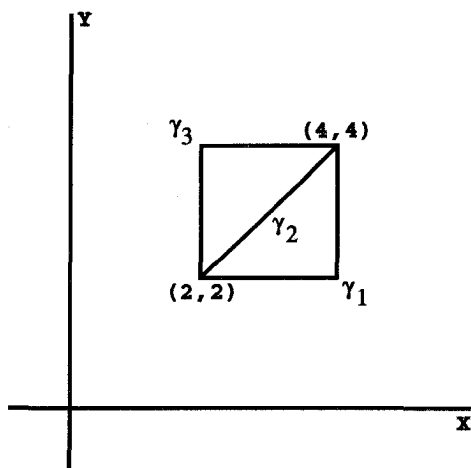
به هر صورت، در صفحات آتی ما خود را به انتگرالهایی محدود می کنیم که در شرایط (۴) صدق می کنند. هنگام بحث از این انتگرالها رسم بر این شده است که عبارت

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

را که متریک ریمان نامیده می شود، مورد توجه قرار می دهند. حالت های خاص

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{و} \quad dx^2 + dy^2$$

به ترتیب متریک اقلیدسی و متریک پوانکاره نامیده می شوند. قبل از ذکر چند مثال خاص توجه به این نکته حائز اهمیت است که بسیاری از متریکها فقط در قسمتی از صفحه تعریف شده اند. مثلاً، متریک پوانکاره بر محور x ها تعریف نشده است و چنانکه دیده ایم رسم بر این است که قلمرو آن را به نیم صفحه بالایی محدود می کنند.



شکل ۴.۴

مثال ۹.۴. متریک ریمان $x^2 dy^2 + 2x dx dy + y^2 dx^2$ را در نظر می‌گیریم. چون

$$EG - F^2 = x^2 y - x^2 = x^2 (y - 1)$$

می‌توانیم یقین کنیم که شرط لازم با مقید کردن خود به ربع صفحه، که با نامساویهای $y > 1, x > 0$ تعریف شده است، برقرار می‌شود. طولهای سه خم واصل بین نقاط $(2,2)$ و $(4,4)$ را نسبت به این متریک محاسبه می‌کنیم (شکل ۴.۴).

فرض می‌کنیم γ_1 معرف خط شکسته‌ای باشد که ابتدا از واصل کردن $(2,2)$ به $(4,2)$ و سپس از $(4,2)$ به $(4,4)$ به دست آمده است. بر اولین پاره‌خط، از این خط شکسته، $dx = 0$ و $y = 2$ ؛ و بر دومین پاره‌خط $dx = 0$ و $x = 4$. در نتیجه طول γ_1 نسبت به این متریک عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_2^4 \sqrt{2} dx^2 + \int_2^4 \sqrt{4^2} dy^2 &= \sqrt{2} \int_2^4 dx + 4 \int_2^4 dy \\ &= 2\sqrt{2} + 8 = 10,83\dots \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم γ_2 معرف پاره‌خط راست اقلیدسی واصل بین نقطه‌های $(2,2)$ و $(4,4)$ باشد. براین خم $dy = dx, y = x$ ، و از این رو طول آن نسبت به متریک داده شده مساوی است با

$$\int_2^4 \sqrt{3x + x^2} dx = 8,47\dots$$

بالاخره فرض می‌کنیم γ_2 معرف خط شکسته‌ای باشد که ابتدا $(2, 2)$ را به $(2, 4)$ و سپس $(2, 4)$ را به $(4, 4)$ وصل می‌کند. بر اولین پاره خط از این خط شکسته $dx = 0$ و $x = 2$ ، و بر دومین پاره خط $dy = 0$ و $y = 4$. از این رو طول این خم نسبت به متریک داده شده عبارت است از

$$\int_2^4 \sqrt{4 dy^2} + \int_2^4 \sqrt{4 dx^2} = 8$$

اصولاً هر کس باید بتواند بحثی را که ما از متریک یوانکاره کردیم، عیناً برای هر متریک ریمانی انجام دهد. هر متریکی از این نوع ژئودزیکی دارد. معادلات دیفرانسیلی که ژئودزیکیهای یک متریک را مشخص می‌کنند معلوم‌اند، ولی به‌طور کلی پذیرفتن یک راه‌حل صریح برای آنها بسیار مشکل است. از این رو حتی سؤال به‌ظاهر ساده‌ای چون

اگر P و Q دو نقطه در حوزه یک متریک ریمانی باشند، آیا فقط یک پاره ژئودزیک آنها را به هم وصل می‌کند؟

ممکن است خیلی دشوار از آب درآید. با این حال، این مبحث و تعمیمهای آن به فضاهایی با بعد دلخواه، نظام بالنده‌ای ریاضی، معروف به هندسه ریمانی پدید آورده است. علل موفقیت‌های این رشته، هم جاذبه‌های ذاتی آن، و هم قابلیت کاربردهایش چه در حوزه ریاضیات و چه در خارج این حوزه است. در فصل ۱۲ مجدداً به این مبحث برمی‌گردیم تا یکی از مهمترین قضیه‌های آن را بیان کنیم.

نسبی‌سازی طول و فاصله علاوه بر گسترش هندسه‌ها نتایج مهم دیگری برای ریاضیات در پی داشته است. مهمترین این نتایج ابداع رشته جدید توپولوژی است که هدفش بررسی آن ویژگی‌هایی از فضاهاست که از مفهوم فاصله کاملاً مستقل‌اند. با این همه اگر فاصله نسبی باشد، آنگاه به تعبیری فقط «ظاهری» است و از این رو جستجوی مفاهیمی که به ماهیت فضا «عمیقتر» می‌پردازند، اهمیت پیدا می‌کند. در این کتاب از انجام این کار صرف‌نظر می‌کنیم و خواننده را برای آشنایی مقدماتی با این مبحث به کتاب چین و استینراد^۱ و برای مطالعه مطالب پیشرفته‌تر به کتاب مسی^۲ ارجاع می‌دهیم.

۶.۴ تمرین

۱. طول هذلولوی خمهای زیر را که نقطه‌های $(0, 1)$ و $(1, 2)$ را به هم وصل می‌کنند پیدا کنید:

الف) $y = x + 1$ ب) $y = x^2 + 1$ ج) $y = x^3 + 1$

۲. نقاطی را پیدا کنید که پاره ژئودزیک واصل بین نقطه‌های $(0, 1)$ و $(0, 10)$ را طوری تقسیم کنند که نسبت طولهای هذلولوی آنها چنین باشند:

$$\text{الف) } 1:1 \quad \text{ب) } 2:1 \quad \text{ج) } 3:2$$

۳. فاصله هذلولوی هر دو نقطه از سه نقطه $(2, -1)$ ، $(2, 3)$ و $(1, 0)$ را پیدا کنید.

۴. انعکاسی پیدا کنید که ژئودزیک خمیده واصل بین $(0, 0)$ و $(4, 0)$ را به ژئودزیک راست $x = 10$ بدل کند.

۵. انعکاسی پیدا کنید که ژئودزیک خمیده واصل از $(0, -4)$ به $(0, 2)$ را به ژئودزیک خمیده واصل از $(0, 10)$ به $(0, 20)$ بدل کند.

۶. فرض می‌کنیم نقطه‌های A و B با پاره ژئودزیک خمیده g به هم وصل شده‌اند. فرض می‌کنیم $C(c, 0)$ نقطه‌ای بر محور x ‌ها و $M(c, y)$ نقطه‌ای از g بالای C باشد. ثابت کنید که M وسط هذلولوی g است اگر $\angle BCM = \angle ACM$. (راهنمایی: نتیجه ترکیب تقارن ρ_{CM} و انعکاس $I_{C,CM}$ را بر g بررسی کنید).

۷. نشان دهید که اگر نقطه‌های $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ بر ژئودزیک خمیده‌ای به مرکز اقلیدسی $(C, 0)$ و شعاع r قرار داشته باشند، آنگاه

$$h(P, Q) = \left| \ln \frac{(x_1 - c - r)y_2}{y_1(x_2 - c - r)} \right|$$

۸. یک روش اقلیدسی برای ترسیم مثلثهای متساوی‌الساقین هذلولوی ذکر کنید.

۹. یک روش اقلیدسی برای ترسیم مثلثهای قائم‌الزاویه هذلولوی بیان کنید.

۱۰. به‌ازای هر ژئودزیک هذلولوی g که از نقطه P می‌گذرد یک روش اقلیدسی برای ترسیم ژئودزیکی قائم بر g در نقطه P بیان کنید.

۱۱. یک ژئودزیک هذلولوی g و نقطه P ناواقع بر آن داده شده است، یک روش اقلیدسی برای ترسیم ژئودزیکی ماربر P و عمود بر g بیان کنید.

۱۲. یک روش اقلیدسی برای ترسیم عمودمنصف یک پاره ژئودزیک هذلولوی بیان کنید.

۱۳. به‌ازای هر دو نقطه متمایز در صفحه هذلولوی نشان دهید یک تقارن هذلولوی وجود دارد که یکی را بر دیگری می‌نگارد.

۱۴. فرض کنید AB و CD پاره ژئودزیکهایی با طولهای مساوی باشند. ثابت کنید که یک حرکت صلب هذلولوی وجود دارد که A را بر C و AB را بر CD می‌نگارد.

۱۵. فرض کنید g و h یک جفت ژئودزیک متقاطع و g' و h' یک جفت دیگر از ژئودزیکهای

مقاطع باشند به طوری که $\angle(g, h) = \angle(g', h')$. ثابت کنید که یک حرکت صلب هذلولوی وجود دارد که g را بر g' و h را بر h' می‌نگارد.

۱۶. گزاره ۳.۴ را اثبات کنید

۱۷. طولهای سه خم مثال ۹.۴ را نسبت به متریک $x dx^2 + 2 dx dy + y dy^2$ محاسبه کنید.

۱۸. حوزه متریک ریمانی

$$\frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2}$$

درون قرص واحد گرفته شده است. طول پاره‌خط اقلیدسی واصل بین نقطه (a, b) واقع در درون قرص واحد و مبدأ مختصات را نسبت به این متریک محاسبه کنید. وقتی این نقطه به محیط قرص واحد نزدیک می‌شود طول مذکور به چه حدی میل می‌کند؟

۱۹. نشان دهید که پاره‌خط اقلیدسی واصل بین نقطه (a, b) واقع در داخل قرص واحد و مبدأ مختصات نسبت به متریک مسأله ۱۸ یک ژئودزیک است.

۲۰. حوزه متریک ریمانی

$$\frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) dy^2}{1 - x^2 - y^2}$$

درون قرص واحد اختیار شده است. طول پاره‌خط اقلیدسی واصل بین نقطه دلخواه (a, b) واقع در داخل قرص واحد و مبدأ را نسبت به این متریک پیدا کنید. این طول وقتی (a, b) به محیط قرص واحد نزدیک می‌شود به چه حدی میل می‌کند؟

۲۱. اگر (a, b) نقطه دلخواهی در داخل قرص واحد باشد، نشان دهید که پاره‌خط اقلیدسی واصل بین نقطه (a, b) و مبدأ نسبت به متریک مسأله ۲۰ یک ژئودزیک است.

۲۲. انتگرال $\int_g \sqrt{dx^2 - dy^2}$ را که در آن g پاره‌خط راست اقلیدسی واصل بین نقطه‌های $(1, 1)$ و $(2, 2)$ است، محاسبه کنید.

۲۳. نشان دهید که اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، ژئودزیکهای متریک $adx^2 + bdy^2$ خطهای راست اقلیدسی هستند. این تمرین را تعمیم دهید.

تربیه‌های زیر نیازمند استفاده از یک بسته نرم‌افزاری نظیر Mathematica یا Maple هستند.

۲۴. برنامه‌ای برای رسم ژئودزیک هذلولوی واصل بین دو نقطه دلخواه بنویسید.

۲۵. برنامه‌ای برای محاسبه فاصله هذلولوی بین هر دو نقطه بنویسید.

۲۶. برنامه‌ای برای پیدا کردن وسط هذلولوی پاره ژئودزیک واصل بین دو نقطه دلخواه بنویسید (تمرین ۶ در فوق را ببینید).
۲۷. برنامه‌ای برای رسم عمود از نقطه‌ای داده شده بر یک ژئودزیک داده شده بنویسید.
۲۸. برنامه‌ای برای محاسبه طول هذلولوی هر خمی بنویسید.
۲۹. برنامه‌ای برای محاسبه طول هر خم نسبت به هر متریک ریمان بنویسید.



هندسه اقلیدسی در تقابل با هندسه هذلولوی

۱.۵ مروری دوباره بر اصلهای موضوع اقلیدس

اکنون اصلهای موضوع پنجگانه اقلیدس را یکی یکی مورد بررسی قرار داده نشان می‌دهیم که چهار اصل موضوع اول در هندسه هذلولوی معتبرند ولی اصل موضوع توازی چنین نیست.

اصل موضوع ۱. کشیدن خط راستی از یک نقطه به یک نقطه دیگر

این امر که این اصل موضوع در صفحه هذلولوی نیز برقرار است قبلاً در پی اثبات قضیه ۴.۴ یادآوری شده است.

اصل موضوع ۲. امتداد دادن پیوسته یک خط راست متناهی به صورت خطی راست.

فرض می‌کنیم g ژئودزیک‌ای شامل دو نقطه P و Q باشد. نشان می‌دهیم که اگر P به‌هنگام حرکت بر g به محور x ‌ها نزدیک شود، $h(P, Q)$ بینهایت بزرگ می‌شود. در اینجا g را ژئودزیک‌ای به مرکز $C(c, 0)$ می‌گیریم و حالت ژئودزیک‌های راست را به تمرین ۱۸ واگذار می‌کنیم. فرض می‌کنیم مختصات P و Q نسبت به یک دستگاه مختصات قطبی استاندارد به قطب C به ترتیب

(r_P, α) و (r_Q, β) باشند. در این صورت بنا بر گزاره ۱.۴ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} h(P, Q) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln[(\csc \beta - \cot \beta)(\csc \alpha + \cot \alpha)] \end{aligned}$$

که به علت تساوی $\csc 0 = \cot 0 = \infty$ مسلماً بینهایت است.

اصل موضوع ۳. رسم دایره‌ای به هر مرکز و هر شعاع

به تعبیری وجود دایره‌ها در نیمصفحه بالایی کاملاً روشن است. به‌ازای هر نقطه C ، و یک عدد حقیقی و مثبت r ، و هر شعاع دلخواه (نیم-ژئودزیک) g مرسوم از C ، از اصل موضوع ۲ نتیجه می‌شود که یک نقطه P_g بر g به فاصله هذلولوی r از C وجود دارد. مکان هندسی همه این نقطه‌های P_g دایره هذلولوی به مرکز C و شعاع هذلولوی r است. با وجود این، قضیه زیر ممکن است به نظر بسیار عجیب آید.

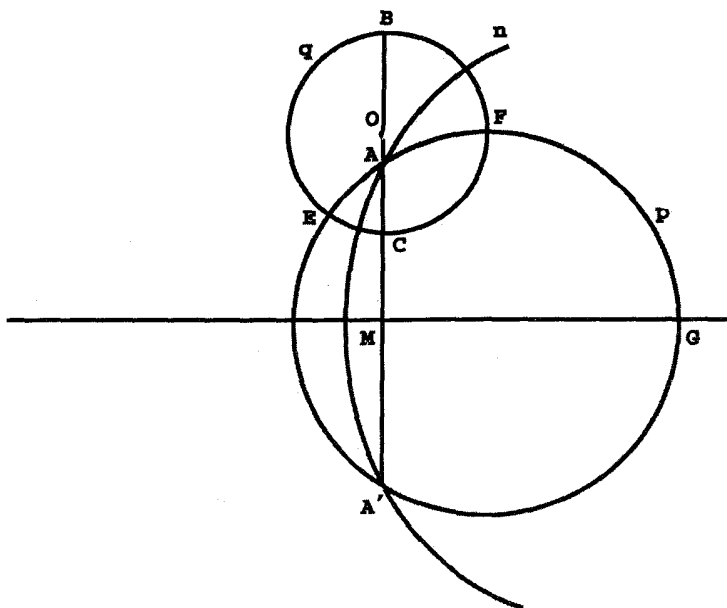
قضیه ۱.۵. هر دایره اقلیدسی در نیمصفحه بالایی یک دایره هذلولوی نیز هست.

برهان: فرض می‌کنیم q یک دایره اقلیدسی به مرکز O و قطر BC عمود بر محور x ‌ها باشد. (شکل ۱.۵) اگر قرار باشد که q یک دایره هذلولوی نیز باشد، عقل سلیم حکم می‌کند که مرکز هذلولوی آن، نقطه A ، باید وسط هذلولوی BC باشد. از مثال ۵.۴ نتیجه می‌شود که

$$AM = \sqrt{BM \cdot CM} \quad (1.5)$$

اکنون نشان می‌دهیم که هر ژئودزیک p ماربر A ، q را به دو قسمت قابل انطباق هذلولوی با هم تقسیم می‌کند. (با انجام این کار مسلماً به هدف خود بسیار نزدیک می‌شویم.) این قابلیت انطباق باهم همانا قرینه محوری هذلولوی I_p ، یعنی انعکاسی است که همه نقاط ژئودزیک p را ثابت نگه می‌دارد. گزاره ۵.۳ گویای آن است که این امر تنها زمانی میسر است که دایره‌های p و q متعامد باشند. ولی آنچه که به درد این اثبات می‌خورد این است که p و q متعامدند اگر و تنها اگر تقارن هذلولوی نسبت به دایره اصلی q دایره p را ثابت نگه دارد. از این رو لازم است ثابت کنیم که انعکاس $I_{o,k}$ که در آن k شعاع اقلیدسی دایره q است، p را ثابت نگه می‌دارد.

البته انعکاس $I_{o,k}$ نقاط تلاقی دایره‌های p و q یعنی E و F را ثابت نگه می‌دارد. چون $I_{o,k}(p)$ لزوماً دایره‌ای است شامل E و F ، کافی است نشان دهیم $A' = I_{o,k}(A)$ بر p واقع است. بودن مرکز دایره p بر محور x ‌ها، در حکم این است که نشان دهیم A و A' نسبت به محور



شکل ۱.۵

x ها قرینه‌اند حال اگر $O = (0, b)$ ، آنگاه $B = (0, b + k)$ ، $C = (0, b - k)$ ، و بنابر (۱.۵)،
 $A = (0, \sqrt{b^2 - k^2})$ از این رو عرض از مبدأ A' چنین می‌شود؛

$$\begin{aligned} OM - OA' &= b - \frac{k^2}{OA} = b - \frac{k^2}{b - \sqrt{b^2 - k^2}} \\ &= b - \frac{k^2}{b - \sqrt{b^2 - k^2}} \cdot \frac{b + \sqrt{b^2 - k^2}}{b + \sqrt{b^2 - k^2}} \\ &= b - \frac{k^2(b + \sqrt{b^2 - k^2})}{b^2 - (b^2 - k^2)} = b - \frac{k^2(b + \sqrt{b^2 - k^2})}{k^2} \\ &= b - (b + \sqrt{b^2 - k^2}) = -\sqrt{b^2 - k^2} \end{aligned}$$

که عرض نقطه A با علامت منفی است. از این رو A' هم بر p و هم بر $I_{0,k}(p)$ واقع است و در نتیجه $p = I_{0,k}(p)$ معنی این تساوی این است که p و q متعامدند و لذا $q = I_p(q)$. به عبارت دیگر، هر خط راست هذلولوی ماربر A دایره q را به دو قسمت قابل انطباق با هم هذلولوی تقسیم می‌کند.

اثبات قضیه زمانی نتیجه می‌شود که ثابت کنیم طول هذلولوی کمان AE ، به شرطی که p از A بگذرد، ثابت، یعنی مستقل از وضع p است. این کار را با پیدا کردن یک تقارن هذلولوی که AE را بر AC می‌نگارد انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم G یکی از نقاط تلاقی p با محور x ها و n ژئودزیک خمیده به مرکز G ماربر A باشد. چون $I_n(A) = A$ و $I_n(A') = A'$ و پس $I_n(p) = BM$ ولی، بنابر قسمت اول برهان، $I_n(q) = q$ ، و از این رو I_n نقطه E ، یعنی محل تلاقی p و q را به نقطه C که محل تلاقی q و BM است، تبدیل می‌کند. باید توجه کرد که اگر نقطه تلاقی دیگر را در نقش G می‌گرفتیم، E عملاً به B بدل می‌شد. در هر دو حال یک نتیجه حاصل می‌شود: طول هذلولوی کمان AE ثابت است، از این رو q نیز یک دایره هذلولوی به مرکز A است.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۲.۵. اگر دایره‌ای دارای مرکز اقلیدسی (h, k) و شعاع اقلیدسی r باشد، آنگاه دارای مرکز هذلولوی (H, k) و شعاع هذلولوی R است، که

$$H = h, \quad K = \sqrt{k^2 - r^2}, \quad R = \frac{1}{2} \ln \frac{k+r}{k-r}$$

و

$$h = H, \quad k = K \cosh(R), \quad r = k \sinh(R)$$

برهان: فرض می‌کنیم B و C به ترتیب نقاطی از دایره باشند که مستقیماً در بالا و پایین (h, k) قرار دارند. روشن است که مختصات آنها $(h, k+r)$ و $(h, k-r)$ خواهند شد. از گزاره ۳.۴ نتیجه می‌شود که قطر هذلولوی این دایره مساوی است با

$$\ln \frac{k+r}{k-r}$$

که عبارت مطلوب برای R است. ملاحظات مشابه مقدار K را به دست می‌دهند و رابطه $H = h$ واضح است.

به عکس وقتی عبارت مربوط به R را عکس کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{k}{r} = \frac{e^{2R} + 1}{e^{2R} - 1} = \cot h(R).$$

اگر این معادله را همراه با معادله $K^2 = k^2 - r^2$ نسبت به k و r حل کنیم به دست می آوریم

$$r^2 = \frac{K^2}{\cot h^2(R) - 1} = K^2 \sin h^2(R)$$

و

$$\kappa^2 = K^2 + r^2 = K^2 [1 + \sin h^2(R)] = K^2 \cos h^2(R).$$

آنچه می خواستیم

فرع ۳.۵. هر دایره هذلولوی یک دایره اقلیدسی نیز هست. به دلیل نقش بسیار مهم عدد π در هندسه اقلیدسی، طول هذلولوی یک دایره نیز مورد توجه است. از این رو فرض می کنیم q دایره ای به مرکز اقلیدسی $C(h, k)$ و شعاع اقلیدسی r باشد. بنابراین q نمودار معادله زیر است

$$(x - h)^2 + (y - \kappa)^2 = r^2$$

فرض می کنیم $P(x, y)$ نقطه دلخواهی بر دایره و t زاویه شعاع CP با محور x های مثبت باشد. در این صورت معادله های پارامتری دایره عبارت اند از

$$x = h + r \cos t$$

$$y = \kappa + r \sin t$$

از این رو $dy = r \cos t dt$, $dx = -r \sin t dt$ و

$$\begin{aligned} \text{طول هذلولوی } q &= \int_q \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \\ &= r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r dt}{\kappa + r \sin t} \\ &= \left[r \frac{2}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \arctan \frac{\kappa \tan(t/2) + r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \left[\arctan \frac{\kappa + r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} - \arctan \frac{-\kappa + r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \right] \\
 &= \frac{2r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \left[\arctan \sqrt{\frac{\kappa + r}{\kappa - r}} + \arctan \sqrt{\frac{\kappa - r}{\kappa + r}} \right] \\
 &= \frac{2\pi r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}}
 \end{aligned}$$

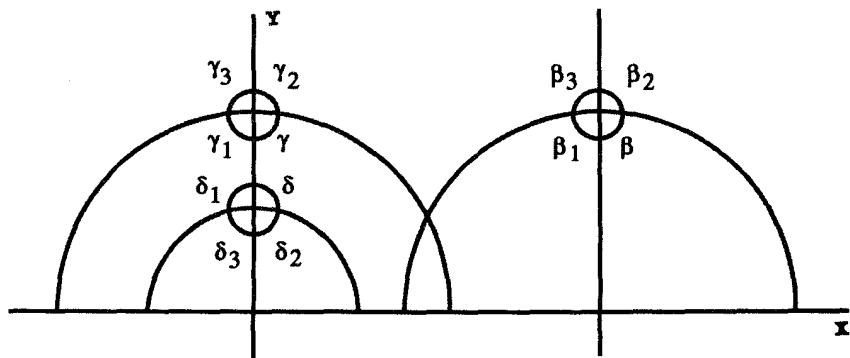
که با توجه به اتحاد مثلثاتی $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ به دست آمده است. در نتیجه نسبت طول محیط هذلولوی یک دایره بر طول هذلولوی قطر آن چنین است.

$$\frac{2\pi r}{\sqrt{\kappa^2 - r^2}} \ln \frac{\kappa + r}{\kappa - r}$$

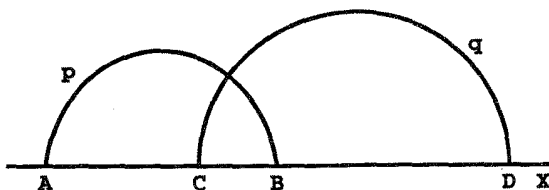
کمیتی که به وضوح هم به κ بستگی دارد هم به r . در تمرین ۸ از خوانندگان خواسته شده است که مقادیر حدی این نسبت را محاسبه کنند.

اصل موضوع ۴. همه زاویه‌های قائمه با هم برابرند

نشان خواهیم داد که هر دو زاویه قائمه هذلولوی با هم قابل انطباق‌اند. به طور دقیقتر، به ازای هر زاویه قائمه هذلولوی α ، نشان می‌دهیم که دنباله‌ای از حرکت‌های صلب هذلولوی وجود دارد که α را به زاویه قائمه ثابت δ در شکل ۲.۵، که رأس آن نقطه‌ای به عرض ۱ فرض شده، تبدیل می‌کند. روشن است که تقارن نسبت به محور y ها، زاویه δ_1 را بر زاویه δ می‌نگارد و انعکاس $I_{O,1}$ زاویه‌های δ_2 و δ_3 را به ترتیب بر زاویه‌های δ و δ_1 می‌نگارد. به علاوه، اگر κ عرض رأسهای مشترک



شکل ۲.۵



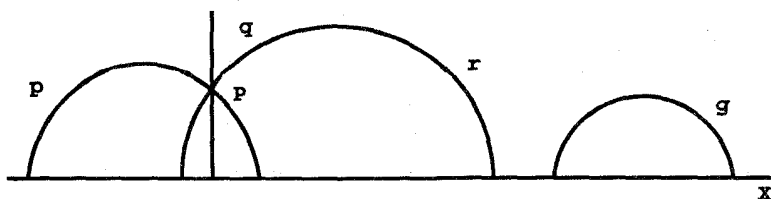
شکل ۳.۵

زاویه‌های γ , γ_2 , γ_3 باشد، آنگاه انعکاس $I_{O, \sqrt{r}}$ این زاویه‌ها را به ترتیب بر زاویه‌های δ , δ_2 , δ_3 می‌نگارد، و اما، همچنین روشن است که یک انتقال هذلولوی وجود دارد که زاویه‌های β , β_2 , β_3 را به ترتیب بر γ ها منتقل می‌نماید. این ملاحظات نشان می‌دهند که همه زاویه‌های قائمه‌ای که یکی از اضلاع آنها ژئودزیک راست باشد با هم قابل انطباق‌اند. اکنون فرض می‌کنیم که α زاویه‌ای قائمه باشد که هر دو ضلع p و q آن ژئودزیکهای کمانی هستند (شکل ۳.۵). اگر d طول اقلیدسی پاره خط AB باشد، آنگاه بنابر قضیه ۳.۳ انعکاس $I_{A, d}$ ژئودزیک p را بر یک ژئودزیک راست می‌نگارد، بنابراین α با یک زاویه قائمه که یکی از اضلاع آن ژئودزیک راست است، قابل انطباق است. چون قبلاً نشان داده شده بود که این نوع زاویه‌ها قابل انطباق هذلولوی با δ هستند اثبات تمام است.

آنچه می‌خواستیم

اصل موضوع پلی فیر (اصل موضوع پنجم اقلیدس). به‌ازای یک خط m و یک نقطه P ناواقع بر آن، یک خط راست یکتا موازی با m و ماربر P وجود دارد.

اگر دو ژئودزیک نامتقاطع را ژئودزیکهای موازی تعریف کنیم، به‌آسانی می‌توان دید که اصل موضوع پلی فیر دیگر در نیم‌صفحه فوقانی برقرار نیست. زیرا ژئودزیکهای p , q , r در شکل ۴.۵ همگی از نقطه P می‌گذرند و با ژئودزیک g موازی‌اند. بدون شک خواننده می‌تواند از این‌گونه موازیها زیاد رسم نماید. البته راه دیگری نیز برای نگرستن به خطهای متوازی وجود دارد. در هندسه اقلیدسی، به‌ازای هر خط راست m ، مکان هندسی همه نقاط P که فاصله آنها از خط

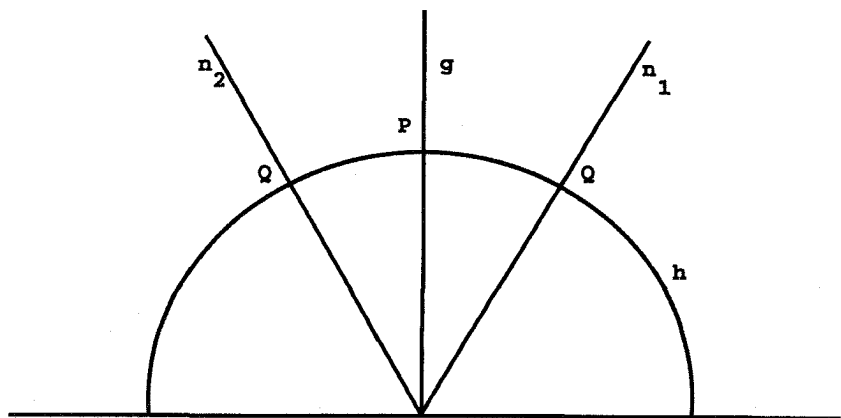


شکل ۴.۵

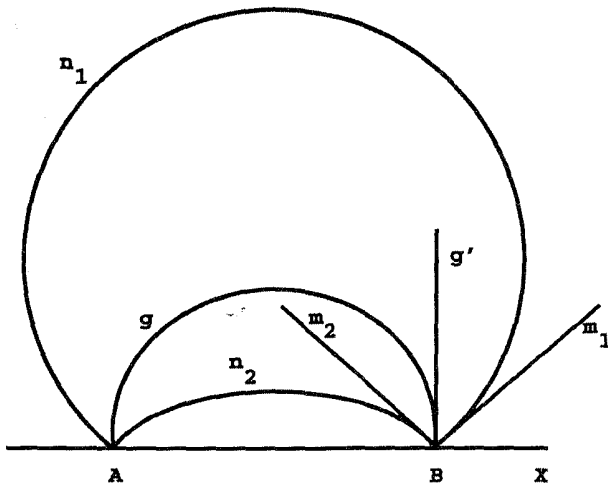
m عدد ثابتی چون d باشد دو خط راست p و p' هستند که با m موازی اند و هر یک به فاصله d از m و در دو طرف m قرار دارند. اگرچه نظیر هذلولوی این مطلب چندان ساده نیست، ولی آنقدر جالب است که ارزش بحث کردن دارد. شکل حاصل زیبایی خاص خود را دارد.

ابتدا لازم است از فاصله هذلولوی یک نقطه از یک ژئودزیک صحبت کنیم. به ازای یک ژئودزیک g و نقطه P ناواقع بر آن، از گزاره ۱۲ اقلیدس نتیجه می شود که یک ژئودزیک h وجود دارد که از P می گذرد و بر g عمود است. (خواننده ای که این بیان یک سطری استدلال او را راضی نمی کند، می تواند این مطلب را مستقیماً به عنوان گزاره ای در مورد دایره های متعامد اثبات کند.) همچنین از گزاره های ۱۷ و ۲۷ اقلیدس نتیجه می شود که ژئودزیک h یکتاست. درست مانند هندسه اقلیدسی، فاصله هذلولوی نقطه P از ژئودزیک g ، طول هذلولوی پاره ژئودزیک یکتایی است مرسوم از P که g را می برد و بر آن عمود است.

ابتدا فرض می کنیم g یک ژئودزیک راست باشد. با توجه به شکل ۵.۵ ژئودزیکهای خمیده h که نسبت به g قرینه یکدیگرند، همه بر g عمودند. به علاوه از فرع ۲.۴ نتیجه می شود که بدون توجه به جای نقطه P بر ژئودزیک g ، طول هذلولوی پاره ژئودزیک PQ از h مقدار ثابتی، مثلاً d است. از این رو مکان هندسی نقاطی چون Q که به فاصله هذلولوی ثابتی از ژئودزیک g قرار دارند دو خط راست اقلیدسی n_1 و n_2 است، که اگرچه خطهای راست هذلولوی نیستند ولی باز می توان گفت با آن موازی اند. توجه کنید که بد نیست در اینجا متذکر شویم که n_1 و n_2 خط g را در بینهایت قطع می کنند.



شکل ۵.۵



شکل ۶.۵

اگر g یک ژئودزیک خمیده باشد، فرض می‌کنیم A و B دو سر اقلیدسی آن و شعاع r اقلیدسی آن باشد (شکل ۶.۵). بنابر قضیه ۳.۳ انعکاس $I_{A,2r}$ را به یک نیمخط اقلیدسی که از B خارج می‌شود، بدل می‌کند. چون این نیمخط نیز باید یک ژئودزیک باشد، در نتیجه g به ژئودزیک راست g' که مستقیماً بالای B قرار دارد، تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم m_2 و m_1 مکان هندسی همه نقاط مذکور در بالا باشند که به فاصله هذلولوی d از g' قرار دارند. چون انعکاس $I_{A,2r}$ یک حرکت صلب هذلولوی است، از اینجا نتیجه می‌شود که خمهای

$$n_1 = I_{A,2r}(m_1), n_2 = I_{A,2r}(m_2)$$

مکان هندسی تمام نقاطی هستند که فاصله هذلولوی آنها از ژئودزیک g برابر مقدار ثابت d است. ولی بنابر قضیه ۳.۳ حالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که این مکان از دو کمان مستدیر مرسوم در شکل ۶.۵ تشکیل شده که نقاط A و B را به هم وصل می‌کنند. چون خطهای راست اقلیدسی m_2 و m_1 با ژئودزیک g' زاویه‌های مساوی می‌سازند، پس n_2 و n_1 نیز با g در B همان زاویه‌ها را تشکیل می‌دهند. در نتیجه، اگر n'_1 قرینه n_1 نسبت به محور x ها باشد، n_2 با n'_1 یک دایره اقلیدسی یکتا تشکیل خواهند داد.

مثال ۴.۵. می‌خواهیم خمهایی را پیدا کنیم که به فاصله هذلولوی ۱ از محور y ها قرار دارند. از ملاحظات فوق چنین برمی‌آید که این خمها دو نیمخط اقلیدسی هستند که از مبدأ خارج شده‌اند.

اگر یکی از نیمخطها دارای شیب $\alpha < \pi/2$ نسبت به محور x ها باشد، آنگاه بنابر گزاره ۱.۴

$$\ln \frac{\csc 90^\circ - \cot 90^\circ}{\csc \alpha - \cot \alpha} = 1$$

از این معادله، معادله‌های

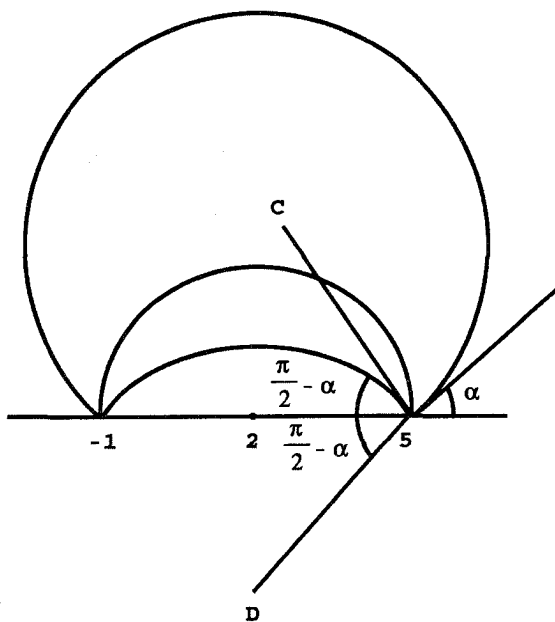
$$\csc \alpha + \cot \alpha = e \quad \text{و} \quad \csc \alpha - \cot \alpha = e^{-1}$$

نتیجه می‌شود و از آنجا

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{2}{e + e^{-1}} \right) \approx 40^\circ$$

به دست می‌آید. از این رو مکان هندسی مورد نظر از دو نیمخط تشکیل یافته است که از مبدأ خارج می‌شوند و شیبهای آنها نسبت به قسمتهای مثبت و منفی محور x ها، 40° است.

مثال ۵.۵. مکان هندسی نقاطی را پیدا کنید که فاصله هذلولوی آنها از ژئودزیک کمائی به مرکز اقلیدسی $(2, 0)$ و شعاع اقلیدسی ۳، مساوی ۱ باشد (شکل ۷.۵).



به موجب بحث قبلی مثال ۴.۵ این مکان از دو کمان از دایره‌های اقلیدسی تشکیل شده است که از نقاط $(-۱, ۰)$ و $(۵, ۰)$ می‌گذرند و خطهای مماس بر آنها در این نقاط زاویه

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{۲}{e + e^{-۱}} \right) \approx ۴۰^\circ$$

با محور x ها می‌سازند. چون شعاع ماربر نقطه تماس بر خط مماس عمود است، نتیجه می‌گیریم که مختصات مراکز C و D ی این کمانها عبارت‌اند از $(۲, \pm ۳.۵۲) \approx (۲, \pm ۳ \tan(\pi/۲ - \alpha))$.

۲.۵ هندسه مطلق

چون گزاره‌های ۱ تا ۲۸ اقلیدس فقط به چهار اصل موضوع اول بستگی دارند، و از آنجا که این گزاره‌ها برای صفحه هذلولوی نیز برقرارند، در نتیجه این گزاره‌ها در این متن ناقلاقلیدسی نیز برقرارند. لذا از این به بعد حس می‌کنیم که در استفاده از آنها برای بسط بعدی صفحه هذلولوی آزاد خواهیم بود. این امر تا اندازه زیادی موجب ساده شدن کار می‌شود. مثلاً این حکم را که زاویه‌های مجاور به قاعده در هر مثلث هذلولوی متساوی‌الساقین برابرند، در نظر بگیرید. اگر بخواهیم این حکم را مستقیماً با استفاده از فرمول طول هذلولوی ثابت کنیم، مسلماً مسیر جزئیات دشواری خواهیم شد. این وضع نامطلوب، با توجه به اینکه اثبات اقلیدسی مشابه آن (که در پیوست آمده است) در واقع مطلق و بنابراین در هندسه هذلولوی نیز برقرار است، از بین می‌رود.

۳.۵ هندسه هذلولوی

نیمصفحه بالایی همراه با متریک پوانکاره به‌طور کلی به نیمصفحه بالایی پوانکاره معروف است. این نیمصفحه یک الگوی عینی از هندسه هذلولوی است که، دقیق بگوییم، هندسه بنداشتی حاصل از جایگزین کردن قید یکتایی اصل موضوع پلی‌فیر است با صورت به ظاهر ساده‌تر شده دیگرش که از هر نقطه واقع در بیرون یک خط مفروض بیش از یک خط موازی با آن خط می‌توان رسم کرد. الگوهای عینی بسیاری از هندسه هذلولوی وجود دارند که دو تا از آنها را به تفصیل در فصلهای ۱۳ و ۱۴ مورد بررسی قرار داده‌ایم.

به‌رغم این تمایز بین دستگاه بنداشتی و الگوهای آن، به لحاظ ایجاز، ژنودریکهای نیمصفحه بالایی پوانکاره را همچنان خطهای راست هذلولوی خواهیم نامید. همین قرارداد، چنانکه در بخش آتی اعمال شده است، در مورد سایر مفاهیم نیز به‌کار خواهد رفت.

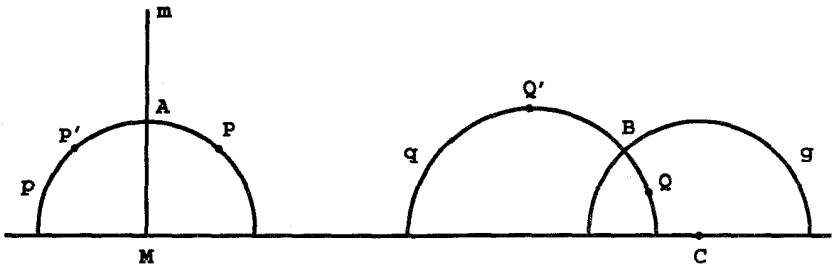
۴.۵ حرکت‌های صلب هذلولوی

بسیاری از ریاضیدانان مجموعه حرکت‌های صلب صفحه هذلولوی را یکی از جذابترین ساختارهای تمام ریاضیات می‌شمارند. فصل ۹ به بررسی مفصل این حرکت‌های صلب اختصاص یافته است، ولی برحسب اتفاق، ما تاکنون اطلاعات نسبتاً خوبی در مورد آنها گردآوری کرده‌ایم، شاید عاقلانه این باشد که در اینجا اندکی درنگ کنیم و خلاصه‌ای از آنها را ارائه دهیم، هر چند که به این اطلاعات قبل از فصل ۹ نیازی نخواهیم داشت.

به طوری که در آخرین بخش فصل دوم متذکر شدیم، گزاره‌های ۱.۲ تا ۴.۲ گزاره‌های مطلق‌اند و از این رو در هندسه هذلولوی نیز معتبرند. در نتیجه، اگر دو حرکت هذلولوی در سه نقطه ناواقع بر یک خط هذلولوی یکی باشند، در سراسر نیمصفحه یکی خواهند بود.

چون در تعریف انتقال، درستی اصل موضوع پلی فیر به طور ضمنی مسلم گرفته شده است، این حرکت‌های صلب اقلیدسی مشابه هذلولوی مشخصی ندارند. با این حال، بعداً در فصل ۹ انتقال‌های هذلولوی را تعریف می‌کنیم، اما، به طوری که خواهید دید این حرکات فقط شباهت بسیار کمی با همتهای اقلیدسی خود پیدا خواهند کرد. از طرف دیگر، دورانها موجودات ریاضی مطلق هستند. و لذا در هندسه هذلولوی نیز خوشتعریف می‌مانند. بیان تحلیلی و تجسم دورانهای هذلولوی را تا فصل ۹ به تعویق می‌اندازیم. در زیر پس از بحث از تقارن‌ها، توضیحات دیگری نیز داده خواهد شد.

هر تقارن هذلولوی یا یک تقارن اقلیدسی نسبت به یک ژئودزیک راست است یا انعکاسی است نسبت به دایره‌ای که مرکز آن نقطه‌ای بر محور x هاست. اکنون با اثبات اینکه این حرکت‌های صلب هذلولوی در واقع مشابه‌های هذلولوی تقارنهای اقلیدسی هستند؛ به توجیه این نامگذاری می‌پردازیم. تقارن اقلیدسی با این ویژگی تعریف می‌شود که محور آن عمودمنصف پاره‌خطی است که هر نقطه را به نگاره‌اش وصل می‌نماید، و نشان خواهیم داد که هر تقارن هذلولوی نیز همین ویژگی را دارد. نخست تقارن ρ_m را که محور آن ژئودزیک راست m در بالای نقطه M از محور x هاست در نظر می‌گیریم (شکل ۸.۵). اگر P نقطه‌ای از نیمصفحه بالایی باشد، فرض می‌کنیم P ژئودزیک خمیده به مرکز M و گذرنده از P باشد. چون m و P در نقطه تقاطع یعنی A ، متعامدند، نتیجه می‌گیریم که $\rho_m(p) = p$ و از این رو $P' = \rho_m(P)$ نیز بر p قرار دارد. به علاوه، ρ_m یک حرکت صلب هذلولوی است و بنابراین طولهای هذلولوی پاره‌ژئودزیکهای PA و $P'A$ باهم برابرند. لذا، m عمودمنصف هذلولوی پاره‌ژئودزیک واصل بین نقطه P و نگاره‌اش P' است.



شکل ۸.۵

اکنون تقارن هذلولوی را که همان انعکاس $I_{C,\kappa}$ است که در آن C نقطه‌ای بر محور x هاست بررسی می‌کنیم (شکل ۸.۵). چون این انعکاس همه نقاط ژئودزیک کمانی g به مرکز C و شعاع κ را ثابت نگه می‌دارد، این ژئودزیک را محور x های $I_{C,\kappa}$ می‌گیریم. به ازای هر نقطه دلخواه Q قرار می‌دهیم $Q' = I_{C,\kappa}(Q)$ و فرض می‌کنیم q ژئودزیکی شامل Q و عمود بر g در B ، نقطه تلاقی آنها باشد. وجود چنین ژئودزیکی الزاماً از گزاره ۱۲ مقاله I اصول نتیجه می‌شود. بنابر گزاره ۵.۳، $I_{C,\kappa}(q) = q$ و لذا Q' نیز بر q واقع است. به علاوه $I_{C,\kappa}$ یک حرکت صلب هذلولوی است و لذا پاره‌ژئودزیکهای $Q'B$ و QB طولهای هذلولوی برابر دارند. بنابراین g عمود منصف هذلولوی پاره‌ژئودزیک واصل بین Q و $Q' = I_{C,\kappa}(Q)$ است.

پس از اثبات این مطلب که تقارن هذلولوی در تعریف تقارن که در فصل ۲ آمده، صدق می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که برهان گزاره ۱۰.۲ مطلق است و در نتیجه ترکیب دو تقارن هذلولوی با محورهای متقاطع، یک دوران هذلولوی است. مرکز این دوران محل تلاقی محورهای آنها و زاویه دوران دو برابر زاویه بین محورهاست.

چون در تعریف لغزه‌ها وجود انتقال مسلم گرفته می‌شود در اینجا نمی‌توانیم در مورد همتهای هذلولوی آنها چیزی بگوییم.

گزاره ۱۹.۲ بیان می‌کند که هر یک از دو مثلث قابل انطباق باهم را می‌توان با حداکثر سه تقارن به یکدیگر تبدیل کرد. زیرا برهانی که برای این قضیه آوردیم، مطلق است و از این رو در نیمصفحه نیز برقرار است. مهمتر از همه اینکه اکنون دیده می‌شود که قضیه ۲۰.۲ در هندسه هذلولوی نیز برقرار است. این مطلب به قدری مفید است که ما آن را به صورت یک قضیه جدید بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۵. هر حرکت صلب هذلولوی ترکیب حداکثر سه تقارن هذلولوی است. ■

۵.۵ تمرین

۱. مرکز و شعاع هذلولوی یک دایره اقلیدسی به مرکز $(4, 5)$ و شعاع ۳ را پیدا کنید. طول محیطهای هذلولوی و اقلیدسی آن را پیدا کنید.
۲. مرکز و شعاع اقلیدسی دایره‌ای به مرکز هذلولوی $(4, 5)$ و شعاع ۳ را پیدا کنید.
۳. مکان هندسی تمام نقاطی را پیدا کنید که فاصله هذلولوی آنها از محور y ‌های مثبت مساوی مقدار ثابت ۲ باشد.
۴. مکان هندسی تمام نقاطی را پیدا کنید که فاصله هذلولوی آنها از ژئودزیکی متشکل از نیمدایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ مقدار ثابت ۲ باشد.
۵. فرض کنید L محیط هذلولوی دایره‌ای به مرکز اقلیدسی (a, b) و شعاع $b/3$ باشد. حد $\lim_b L$ را پیدا کنید.
۶. با استفاده از تمرین ۷ فصل ۴ برای این واقعیت که هر دایره هذلولوی یک دایره اقلیدسی نیز هست، برهانی جبری بیاورید.
۷. ثابت کنید که محیط هذلولوی یک دایره با شعاع هذلولوی R برابر است با $2\pi \sin(R)$.
۸. اگر $\pi(q)$ معرف نسبت طول هذلولوی دایره q به مرکز اقلیدسی (h, κ) و شعاع اقلیدسی r به طول هذلولوی قطر آن باشد، حد $\pi(q)$ را در موارد زیر پیدا کنید
الف) r به 0 میل می‌کند.
ب) $\kappa = 2r$ و κ و r هر دو به 0 میل می‌کنند.
۹. اگر یک مثلث هذلولوی سه زاویه مساوی داشته باشد، آیا لزوماً اضلاع آن باهم برابرند؟
۱۰. آیا هر مثلث هذلولوی یک دایره محیطی دارد؟
۱۱. آیا هر مثلث هذلولوی یک دایره محاطی دارد؟
۱۲. آیا نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هذلولوی هم‌مس‌اند؟
۱۳. ثابت کنید که هر حرکت صلب هذلولوی یک عکس دارد.
۱۴. درباره مشابه هذلولوی این قضیه اقلیدسی که خط مماس بر هر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، بحث کنید.
۱۵. مشابه هذلولوی این قضیه اقلیدسی در یک دایره را که زاویه مرکزی و زاویه محاطی روبه‌روی یک کمان آن را به هم مربوط می‌کند، مورد بحث قرار دهید.
۱۶. فرض کنید ژئودزیکهای g و h به صورت شکلهایی از صفحه اقلیدسی باهم مماس باشند. الف) ثابت کنید نقطه تماس بر محور x ‌ها واقع است.

(ب) ثابت کنید که این دو ژئودزیک در نزدیکی نقطهٔ تماس مجانب هذلولوی اند.

۱۷. اثبات یا رد کنید: اگر a ، b و c سه عدد مثبت باشند که مجموع هر دو تای آنها از سومی بزرگتر باشد، آنگاه مثلثی هذلولوی با طولهای اضلاع a ، b و c وجود دارد.

۱۸. نشان دهید که فاصلهٔ هذلولوی بین نقاط $(a, 1)$ و (a, y) به بینهایت واگراست وقتی الف) y به صفر میل کند. ب) y به بینهایت میل کند.

۱۹. فرض می‌کنیم عمودمنصفهای دو ضلع یک مثلث هذلولوی در نقطهٔ P از نیمصفحهٔ بالایی متقاطع باشند. نشان دهید که عمودمنصف ضلع سوم نیز از P می‌گذرد.

۲۰. فرض می‌کنیم عمودمنصفهای دو ضلع یک مثلث هذلولوی در نقطهٔ P از محور x ها متقاطع باشند. ثابت کنید عمودمنصف ضلع سوم نیز از P می‌گذرد.

۲۱. یک مثلث هذلولوی رسم کنید که هیچ یک از دو عمودمنصف اضلاع آن باهم متقاطع نباشند.

۶

زاویه‌های مثلث هذلولوی

۱.۶ مقدمه

در این فصل نشان می‌دهیم که مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث هذلولوی کمتر از π است، و اگر سه زاویه α ، β و γ که مجموع آنها کمتر از π است داده شده باشند، مثلثی هذلولوی وجود دارد که α ، β و γ زاویه‌های آن باشند: ثابت می‌شود که هر دو مثلث از این نوع باید با هم قابل انطباق هذلولوی باشند. این فصل را با معرفی انواع جدید موزائیک‌بندی که در صفحه هذلولوی امکانپذیرند به پایان می‌بریم.

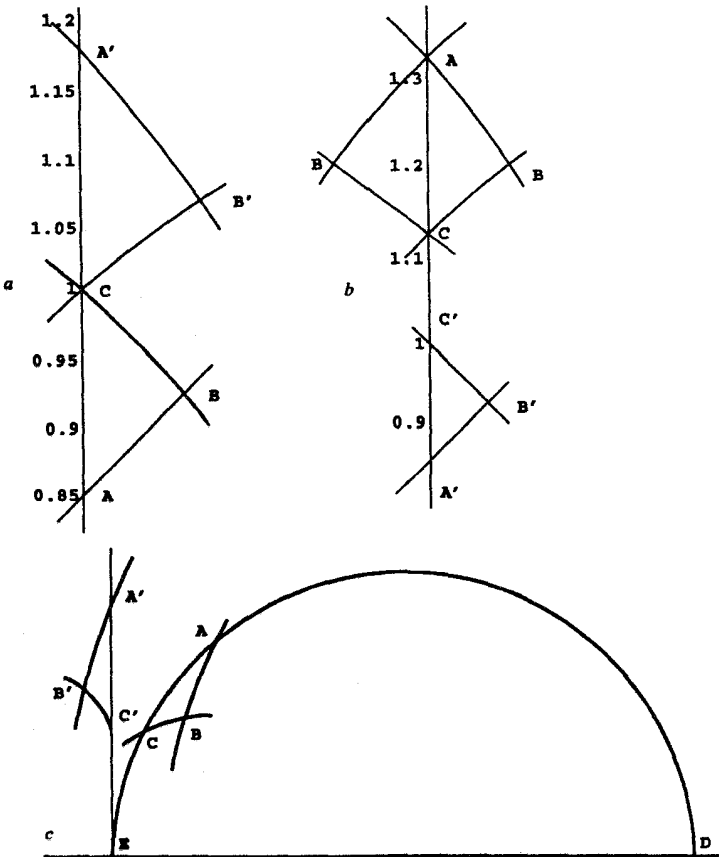
۲.۶ وضع استانده یک مثلث

یک مثلث هذلولوی ABC از سه نقطه A ، B ، C (رأسها) که همگی بر یک ژئودزیک قرار ندارند و سه پاره ژئودزیک (ضلعها) که هر جفت از رأسها را به هم وصل می‌کنند، تشکیل شده است.

مثلثی را در وضع استاندارد گوییم که مختصات رأسهای A ، B ، C آن به ترتیب (\circ, κ) ، (s, t) و $(\circ, 1)$ باشد که $\kappa > 1$ و $s > \circ$.

هنگام بحث از مثلثهای هذلولوی دلخواه، گزاره زیر بسیار مفید خواهد بود.

گزاره ۱.۶. هر مثلث هذلولوی را می‌توان با یک حرکت صلب هذلولوی به وضع استاندارد درآورد. برهان: اگر رأسهای C و B از مثلث هذلولوی ABC ابتدا به ترتیب در نقاط $(\circ, 1)$ و (s, t) با $s > \circ$ باشند و رأس A در نقطه (\circ, κ) با $\kappa < 1$ باشد (شکل ۱.۶ الف)، روشن است که تقارن



شکل ۱.۶

$I_{O,1}$ ، آن را به مثلث $A'B'C$ که در وضع استاندارد است، بدل می‌کند.

اگر هر دو رأس $A(0, a)$ ، $C(0, c)$ از مثلث هذلولوی ABC بر محور y ‌ها باشند، آنگاه در صورت لزوم با پیدا کردن قرینهٔ این مثلث نسبت به محور y ‌ها می‌توان مختصات رأس B را (s, t) با $s > 0$ فرض کرد (شکل ۱.۶). اما در این صورت تقارن $I_{0, \sqrt{t}}$ مثلث ABC را به مثلثی از نوع مذکور در فوق تبدیل می‌کند.

سرانجام، اگر مثلث هذلولوی ABC در وضع دلخواه باشد، می‌توانیم فرض کنیم که ضلع AC پاره‌ای از یک ژئودزیک خمیدهٔ g است که دو نقطهٔ D و E از محور x ‌ها را به هم وصل می‌کند. با استفاده از این واقعیت که انتقال‌های افقی حرکت‌های صلب هذلولوی هستند مجازیم فرض کنیم که E بر مبدأ O منطبق است (شکل ۱.۶ ج). اگر $D = (d, 0)$ ، آنگاه انعکاس $I_{D,d}$ را بر محور y ‌ها می‌نگارد، و بدین ترتیب مثلث داده شده به مثلث $A'B'C'$ بدل می‌شود که یکی از ضلع‌های آن بر محور y ‌ها قرار دارد. چون از قبل می‌دانستیم که این مثلث را می‌توان به وضع استاندارد درآورد اثبات کامل است.

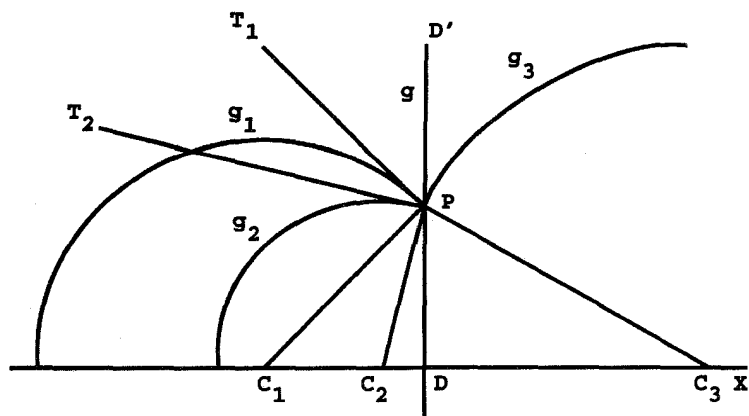
آنچه می‌خواستیم

خوانندگانی که بخواهند این گزاره را برای مثلث مشخصی، مانند مثلثی به رأس‌های $(0, 1)$ ، $(1, 1)$ و $(1, 3)$ به کار برند، به زودی متوجه می‌شوند که جزئیات محاسبات هم زیاد است و هم ملال‌آور. این گزاره ابزاری مفید در اثبات چند قضیهٔ بعدی است. ولی خود این گزاره، چیزی را دربارهٔ ماهیت مثلث هذلولوی روشن نمی‌کند، از این رو در کاربرد خاصی از آن استفاده نخواهیم کرد.

۳.۶ مجموع زاویه‌های مثلث هذلولوی

هر نیمخط ژئودزیک در یک نقطه مشابه با یک نیمخط اقلیدسی است، بدین معنی که، این نام یکی از دو بخش از ژئودزیکی است که یک نقطهٔ واقع بر آن، آن را مشخص می‌کند. به‌ازای هر دو نیمخط ژئودزیک g و h مرسوم از یک نقطهٔ غیرمشخص P ، زاویهٔ g با h در نقطهٔ P را با $\angle(g, h)$ نشان می‌دهیم.

گزارهٔ ۲.۶. فرض می‌کنیم g نیمخط ژئودزیک راستی باشد که از نقطهٔ دلخواه P رسم شده است و نیز g_1, g_2 و g_3 نیمخط‌های ژئودزیک خمیدهٔ ماربر P و به‌ترتیب به مرکزهای C_1, C_2, C_3 باشند (شکل ۲.۶). در این صورت



شکل ۲.۶

$$\angle(g, g_1) = \angle DC_1P, \quad \angle(g_1, g_2) = \angle C_1PC_2$$

و

$$\angle(g_2, g_1) = \pi - \angle C_1PC_2$$

برهان: فرض می‌کنیم D' نقطه‌ای بر g باشد به طوری که P بین D و D' باشد، همچنین فرض می‌کنیم PT_1 و PT_2 به ترتیب خطهای اقلیدسی مماس بر g_1 و g_2 در P باشند. چون مماس بر دایره بر شعاع در نقطه تماس عمود است، داریم

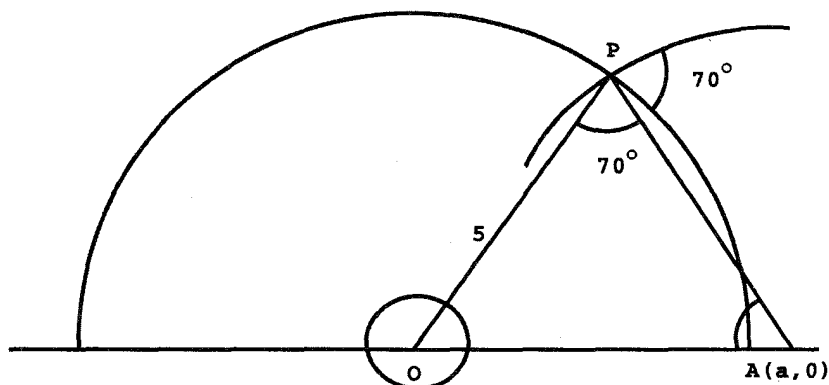
$$\begin{aligned} \angle(g_1, g_2) &= \angle T_1PT_2 = \angle T_1PC_1 - \angle T_2PC_1 = \frac{\pi}{2} - \angle T_2PC_1 \\ &= \angle T_2PC_2 - \angle T_2PC_1 = \angle C_1PC_2 \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\angle(g, g_1) = \angle D'PT_1 = \pi - \angle T_1PC_1 - \angle C_1PD = \frac{\pi}{2} - \angle C_1PD = \angle DC_1P$$

و

$$\angle(g_2, g_1) = \angle(g_2, g) + \angle(g, g_1) = \angle PC_2D + \angle DC_1P = \pi - \angle C_1PC_2$$



شکل ۳.۶

آنچه می‌خواستیم

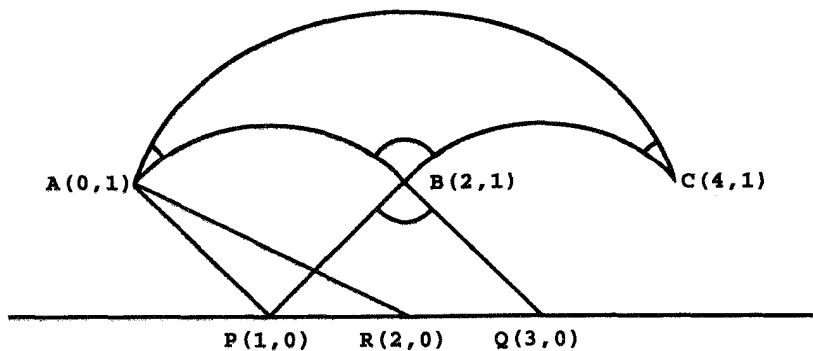
این گزاره روش مشخصی را برای ترسیم زاویه‌های مستقیم‌الخط هذلولوی دلخواه در اختیار ما قرار می‌دهد. اکنون دو مورد از موارد استعمال این روش را معرفی می‌کنیم.

مثال ۳.۶. نقطه $P(3, 4)$ واقع بر ژئودزیک خمیده‌ای به شعاع ۵ و مرکز مبدأ مختصات (شکل ۳.۶) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ژئودزیک کمانی دیگری رسم کنیم که با ژئودزیک داده شده زاویه 70° بسازد. از گزاره فوق نتیجه می‌شود که کافی است نقطه $A(a, 0)$ را بر محور x ‌ها چنان پیدا کنیم که اندازه اقلیدسی زاویه $\angle OPA$ برابر 70° باشد. از $\tan(\angle AOP) = 4/3$ نتیجه می‌شود که $\angle AOP \approx 53.1^\circ$. از این رو $\angle PAO \approx 56.9^\circ$ و بنابراین با استفاده از قانون سینوسها داریم

$$a = \frac{5 \sin 70^\circ}{\sin(\angle PAO)} \approx 5.6$$

$$AP = \frac{5 \sin(\angle AOP)}{\sin(\angle PAO)} \approx 4.8$$

مثال ۴.۶. اندازه زاویه‌های مثلث هذلولوی شکل ۴.۶ با رأسهای $A(0, 1)$, $B(2, 1)$, $C(4, 1)$



شکل ۴.۶

چقدر است؟ روشن است که مرکزهای اقلیدسی ژئودزیکهای کمانی AB ، BC ، و CA به ترتیب عبارتند از $P(1, 0)$ ، $Q(3, 0)$ ، و $R(2, 0)$. از این رو

$$\begin{aligned} \angle(AC, BC) &= \angle(AB, AC) = \angle PAR \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{AP^2 + AR^2 - PR^2}{2AP \cdot AR} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{2 + 5 - 1}{2\sqrt{2}\sqrt{5}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \approx 18,4^\circ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \angle(CB, AB) &= \pi - \angle PBQ = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{BP^2 + BQ^2 - PQ^2}{2BP \cdot BQ} \right) \\ &= \pi - \cos^{-1} \left(\frac{2 + 2 - 4}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} \right) = \pi - \cos^{-1}(0) = 90^\circ \end{aligned}$$

جا دارد متذکر شویم که مجموع زاویه‌های مثلث هذلولوی مثال ۴.۶ خیلی کمتر از 180° است. اکنون نشان می‌دهیم که این وضع دور از انتظار نیست. بهتر است اثبات را با مثلثهای قائم‌الزاویه آغاز کنیم.

گزاره ۵.۶. مجموع زاویه‌های هر مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی کمتر از π است.

برهان: فرض کنید C رأس زاویه قائمه مثلث باشد؛ بنا بر گزاره ۱.۶ می‌توانیم فرض کنیم که مثلث داده شده در وضع استاندارد $C(0, 1)$ ، $A(0, \kappa)$ و $B(s, t)$ است، چنانچه در شکل ۵.۶ ترسیم

چون تا وقتی A و C متمایزند رابطه آخر صحیح است، ثابت کرده‌ایم که $\alpha + \beta < \pi/2$ و از این رو مجموع زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی کمتر از π است.

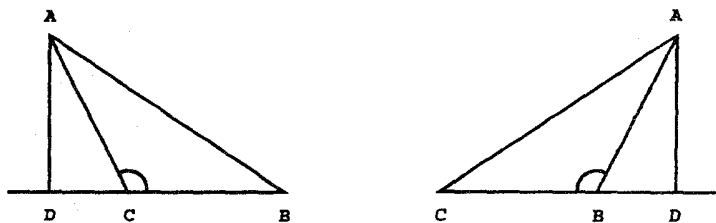
آنچه می‌خواستیم

قضیه ۶.۶. مجموع زاویه‌های هر مثلث هذلولوی کمتر از π است.

برهان: نخست نشان می‌دهیم که در هر مثلث باید یکی از ارتفاعها در داخل مثلث بیفتد. فرض می‌کنیم AD ارتفاعی است که در خارج $\triangle ABC$ واقع است (شکل ۶.۶ الف). در این صورت بنابر گزاره ۱۶ اقلیدس داریم یا

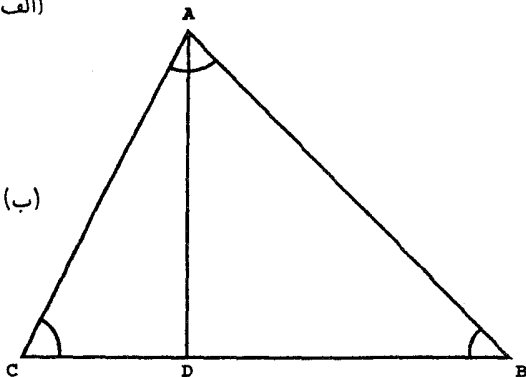
$$\angle ABC > \angle ADB = \frac{\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \angle BCA > \angle CDA = \frac{\pi}{4} \quad \text{یا}$$

بنابراین اگر ارتفاع وارد بر BC در خارج مثلث بیفتد، یکی از زاویه‌های B یا C باید منفرجه باشد. ولی بنابر گزاره ۱۷ اقلیدس زاویه‌های دو رأس دیگر این مثلث حاده‌اند، و از این رو ارتفاع خارج



(الف)

(ب)



شکل ۶.۶

شده از رأس سوم باید در داخل بیفتد. بنابراین در مثلث هذلولوی ABC می‌توانیم فرض کنیم که ارتفاع AD در داخل افتاده است (شکل ۶.۶ ب). در این صورت از گزاره قبل نتیجه می‌شود که

$$\angle ABC + \angle BAD < \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \angle BCA + \angle CAD < \frac{\pi}{2}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB &= \angle ABC + \angle BCA + \angle BAD + \angle CAD \\ &< \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم

در هندسه اقلیدسی مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر π است. به علاوه این تنها شرط برای زاویه‌های مثلث است. به عبارت دیگر هر سه زاویه که مجموع آنها π باشد، زاویه‌های یک مثلث اقلیدسی هستند. به همین ترتیب قضیه ۶.۶ در فوق، تنها شرط موجود برای زاویه‌های مثلث هذلولوی است.

قضیه ۷.۶. هر سه زاویه که مجموع آنها کمتر از π باشد زاویه‌های یک مثلث هذلولوی هستند. **برهان:** فرض می‌کنیم α, β, γ سه زاویه دلخواه مثبت باشند به طوری که $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. ببینیم که یک مثلث هذلولوی ABC در وضع استاندارد چه شرایطی باید داشته باشد تا $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ و $\angle BCA = \gamma$. چنانچه در شکل ۷.۶ نشان داده شده است فرض می‌کنیم $G(u, 0)$ و $H(-v, 0)$ به ترتیب مرکزهای اقلیدسی ژئودزیکهای کمانی BC و AB باشند و s و شعاعهای اقلیدسی آنها. به موجب گزاره ۲.۶

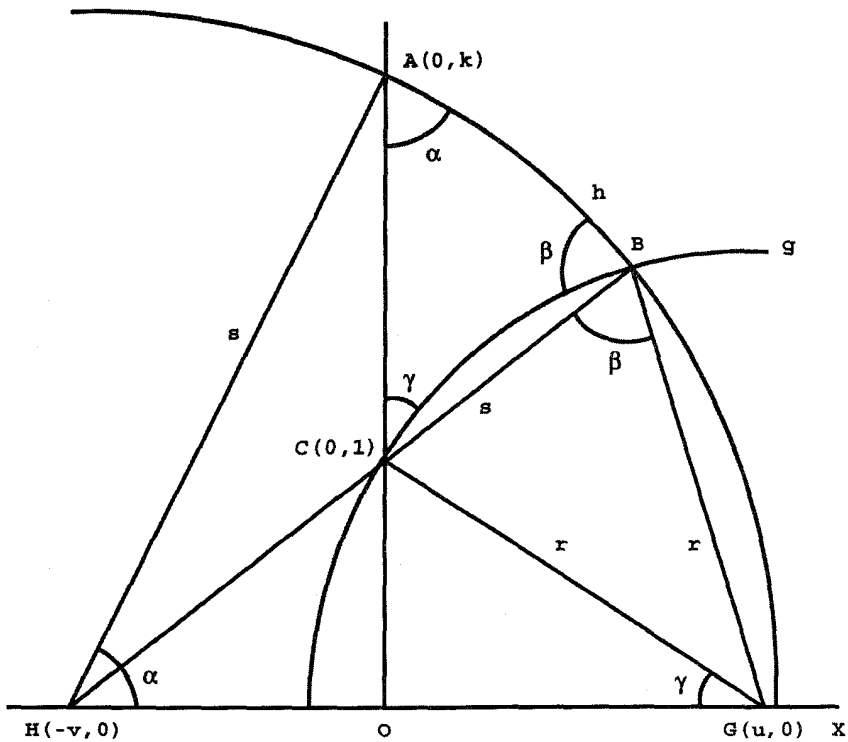
$$\angle CGO = \gamma, \quad \angle OHA = \alpha, \quad \angle HBG = \beta$$

از مثلثات مثلثهای اقلیدسی GCO , AHO و BGH شرایط

$$u = r \cos \gamma \quad (۱.۶)$$

$$v = s \cos \alpha \quad (۲.۶)$$

$$(u + v)^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \beta \quad (۳.۶)$$



شکل ۷.۶

به دست می‌آیند. از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود که $r^2 = u^2 + 1$ که همراه با (۱.۶) به روابط

$$r = \csc \gamma \quad \text{و} \quad u = \cot \gamma$$

منجر می‌شود: با قرار دادن این مقادیر u , r و v در (۳.۸) به دست می‌آوریم

$$(\cot \gamma + s \cos \alpha)^2 = \csc^2 \gamma + s^2 - 2s \cos \beta \csc \gamma$$

که پس از ساده نمودن، معادله درجه دوم

$$s^2 \sin^2 \alpha - 2s(\cos \alpha \cot \gamma + \cos \beta \csc \gamma) + 1 = 0 \quad (4.6)$$

حاصل می‌شود. همچنین روشن است که اگر ABC مثلثی هذلولوی در وضع استاندارد باشد که در این شرایط صدق کند، آنگاه زاویه‌های آن α , β و γ خواهند بود. مبین معادله درجه دوم (۴.۶)

چنین است

$$4(\cos \alpha \cot \gamma + \cos \beta \csc \gamma)^2 - 4 \sin^2 \alpha$$

اکنون نشان می‌دهیم که این مبین الزاماً مثبت است، و لذا تضمین می‌کند که معادله درجه دوم (۴.۶) بر حسب s حتماً جواب دارد. چون $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ داریم

$$\alpha + \gamma < \pi - \beta$$

از آنجا که تابع کسینوس در ربعهای اول و دوم یکنوا نزولی است از این رابطه سلسله رابطه‌های هم‌ارز زیر نتیجه می‌شود

$$\cos(\alpha + \gamma) > \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma > -\cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta > \sin \alpha \sin \gamma > 0$$

$$\cos \alpha \cot \gamma + \cos \beta \csc \gamma > \sin \alpha > 0$$

$$(\cos \alpha \cot \gamma + \cos \beta \csc \gamma)^2 > \sin^2 \alpha$$

روشن است که آخرین رابطه مثبت بودن مبین معادله (۴.۶) را ثابت می‌کند. لذا این معادله درجه دوم برای هر یک از زاویه‌های مثبت α, β, γ با شرط $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ دو جواب حقیقی دارد. اگر قرار دهیم $v = s \cos \alpha$ ، آنگاه v, s, α ، $u = \cot \gamma$ و $r = \csc \gamma$ در معادله‌های (۳-۱) صدق می‌کنند و بنابراین مثلث مطلوب واقعاً وجود دارد. ■

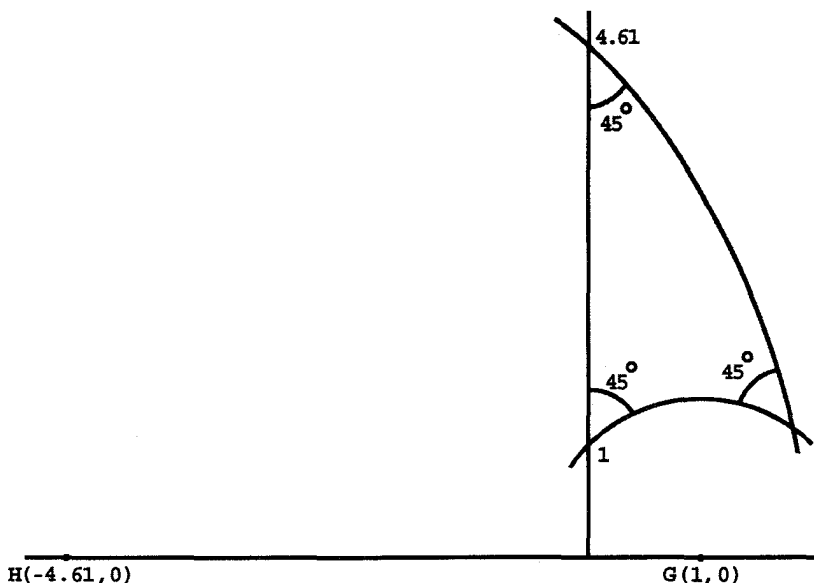
آنچه می‌خواستیم

برهان فوق شامل طرحی برای ترسیم مثلثهای هذلولوی با زاویه‌های مشخص است. برای نشان دادن این مطلب یک مثلث هذلولوی متساوی‌الاضلاع در وضع استاندارد رسم می‌کنیم که هر یک از زاویه‌هایش 45° باشد. اگر اندازه هر یک از زاویه‌های α, β, γ در شکل ۷.۶، 45° باشد، آنگاه

$$r = \csc 45^\circ = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad u = \cot 45^\circ = 1$$

به‌علاوه اکنون معادله درجه دوم (۴.۶) به معادله

$$s^2 - 2s(2 + \sqrt{2}) + 2 = 0$$



شکل ۸.۶

تبدیل می‌شود، که یکی از ریشه‌های آن

$$2 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 2} \approx 6.52$$

است، از اینجا همچنین به دست می‌آوریم

$$v = s \cos 45^\circ = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 2}}{\sqrt{2}} \approx 4.61$$

از اینجا اطلاعات کافی برای ترسیم مجدد شکل ۷.۶ به دست می‌آید تا اینکه اندازه هر یک از زاویه‌های α , β , γ برابر 45° باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی حاصل در شکل ۸.۶ دیده می‌شود.

۴.۶ یک قضیه جدید قابلیت انطباق

فرض می‌کنیم ABC مثلثی هذلولوی با زاویه‌های α , β , γ به صورت

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle BCA = \gamma$$

باشد. این مثلث را در وضع استاندارد قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم r و s همان اعداد در شکل ۷.۶ باشند. بنابراین مختصات A, C به ترتیب $(0, 1)$ و $(s \sin \alpha, 0)$ خواهند بود. بنابراین گزاره ۳.۴ طول هذلولوی ضلع AC برابر است با

$$|\ln(s \sin \alpha)| \quad (5.6)$$

چون s از حل معادله درجه دوم (۴.۶) که ضرایب آن فقط به α, β, γ بستگی دارند، به دست آمده است، شاید به نظر آید که ممکن است دو مثلث در وضع استاندارد وجود داشته باشد که با این زاویه‌ها تعیین می‌شوند. ولی، در واقع فقط یک مثلث وجود دارد. برای اثبات، فرض می‌کنیم s_1 و s_2 مقادیر ممکن s باشند. چون این اعداد ریشه‌های معادله درجه دوم (۴.۶) هستند، داریم

$$s_1 s_2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

و از این رو

$$s_2 \sin \alpha = \frac{1}{s_1 \sin \alpha}$$

اما $|\ln(1/x)| = |\ln x|$ ، در نتیجه طول ضلع AC ، به طوری که در (۵.۶) داده شده است با این زاویه‌های α, β, γ کاملاً معین می‌شود. چون این استدلال را در مورد هر یک از اضلاع مثلث ABC می‌توان به کار برد نتیجه می‌گیریم که هر مثلث هذلولوی با سه زاویه‌اش کاملاً مشخص می‌شود. البته این وضع با وضعیت موجود در هندسه اقلیدسی کاملاً مغایر است.

قضیه ۸.۶. اگر دو مثلث هذلولوی زاویه‌های متناظر مساوی داشته باشند، قابل انطباق هذلولوی باهم‌اند.

از عبارت (۵.۶) نتیجه می‌شود که طول هر یک از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی شکل ۸.۶ مساوی است با

$$\ln \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 - 2}}{\sqrt{2}} = 1.528\dots$$

روشن است که این ملاحظات را می‌توان به صورت فرمولی برای تعیین طول ضلع یک مثلث هذلولوی دلخواه در تابعی از زاویه‌های آن بیان کرد (تمرین ۷). از آنجا که در فصل ۸ مثلثات مثلث هذلولوی به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت در اینجا این دنباله فکری را دنبال نخواهیم کرد.

۵.۶ موزائیک‌بندیهای منتظم (اختیاری)

همه می‌دانند که کف حمام و آشپزخانه را فقط با موزائیکهای مربعی، شش‌ضلعی و مثلثی می‌توان فرش کرد. این مشاهده مبتنی بر این فرض است که ما خود را به موزائیک‌بندی با موزائیکهای قابل انطباق باهمی مقید کرده‌ایم که شکل عمومی آنها یک چندضلعی منتظم است. محدودیت به مربعها و شش‌ضلعیها به این جهت است که گوشه‌های چندضلعیهای منتظم دیگر را نمی‌توانیم آن‌گونه که می‌خواهیم باهم جور کنیم. اندازه زاویه هر پنج‌ضلعی منتظم 108° است. بنابراین چهارتای آنها در یک گوشه اندکی روی هم می‌افتند. در عین حال سه‌تای آنها هم برای پوشاندن کامل 360° کافی نیستند. از طرف دیگر اندازه زاویه یک n ضلعی منتظم به ازای $n > 6$ ، از 120° یعنی اندازه زاویه شش‌ضلعی منتظم، بزرگتر است. از این رو این چندضلعیها را نیز نمی‌توان بدون اینکه روی هم بیفتند برای پوشاندن کف به‌کار برد.

از طرف دیگر، هندسه نااقلیدسی انتخاب دسته بزرگتری از موزائیکها را امکانپذیر می‌سازد. در حقیقت، به ازای هر عدد صحیح $n > 6$ ، به بینهایت روش مختلف می‌توان صفحه هذلولوی را با n ضلعیهای منتظم پوشانید. علت این امر این است که به ازای هر یک از این n ها، بینهایت n ضلعی منتظم غیرقابل انطباق باهم وجود دارند، که هر کدام را می‌توان برای این موزائیک‌بندی انتخاب کرد.

قضیه ۹.۶. به ازای هر جفت از اعداد صحیح $n > 2 > \kappa$ یک n ضلعی منتظم هذلولوی با زاویه $(n-2)\pi/\kappa$ وجود دارد.

برهان: کافی است نشان دهیم که به ازای هر جفت κ و n از این اعداد صحیح یک مثلث متساوی‌الساقین هذلولوی با زاویه‌های

$$\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{(n-2)\pi}{2\kappa}, \quad \frac{(n-2)\pi}{2\kappa}$$

وجود دارد، زیرا همین که این مثلثها آماده باشند درست به همان طریق که یک n ضلعی اقلیدسی را با استفاده از n مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌های $2\pi/n$ ، $(n-2)\pi/2n$ ، $(n-2)\pi/2n$ رسم می‌کنیم، n ضلعی موردنظر را با کنار هم نهادن n تا از این مثلثها حول یک رأس مشترک رسم می‌کنیم.

وجود مثلث متساوی‌الساقین مطلوب نتیجه‌ای از مشاهدات حسابی زیر است. از $\kappa > n > 2$

نتیجه می‌شود

$$(n^2 - 2n) > \kappa(n - 2)$$

یا

$$2\kappa + n^2 - 2n < \kappa n$$

یا

$$\frac{2}{n} + \frac{n-2}{\kappa} < 1$$

بنابراین

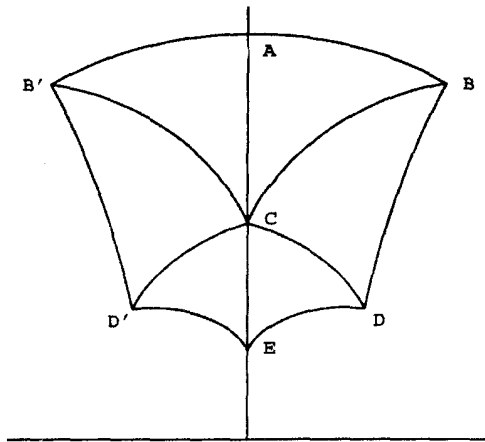
$$\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{\kappa} < \pi$$

از این رو، قضیه ۷.۶ وجود مثلث موردنظر را تضمین می‌نماید. متساوی‌الساقین بودن این مثلث از گزاره ۶ اقلیدس نتیجه می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

مثلاً، اگر $\kappa = 2n - 4$ ، هر یک از زاویه‌های n ضلعی حاصل قائمه خواهد بود. به‌ویژه، معنی این گفته این است که پیمانکار هذلولوی می‌تواند کف آشپزخانه را با انتخاب موزائیکهای پنج‌ضلعی که هر گوشه را درست چهار موزائیک پُر می‌کنند فرش نماید! متأسفانه این انتخاب در «عمل» ممکن است برای این پیمانکار مقدور نباشد. از قضیه ۸.۶ نتیجه می‌شود که به‌محض اینکه زاویه n ضلعی منتظم تثبیت شود، اندازه آن نیز تثبیت می‌شود، و این اندازه ممکن است مناسب نباشد. زیرا این اندازه احتمال دارد از اندازه موردنظر برای فرش کردن آشپزخانه بسیار بزرگتر از آب درآید.

مثال ۱۰.۶. بیاییم یک پنج‌ضلعی منتظم هذلولوی قائم‌الزاویه رسم کنیم. برای این منظور ابتدا مثلثی با زاویه‌های $\alpha = 90^\circ$ ، $\beta = 45^\circ$ و $\gamma = 30^\circ$ در وضع استاندارد رسم می‌کنیم. برای این مثلث (شکل ۷.۶)، $u = \cot 36^\circ$ ، $r = \csc 36^\circ$ ، $v = 0$ و s یک ریشه معادله درجه دوم $s^2 - s\sqrt{2}\csc 36^\circ + 1 = 0$ است و بنابراین $s = 1.8717000$. این اطلاعات برای رسم

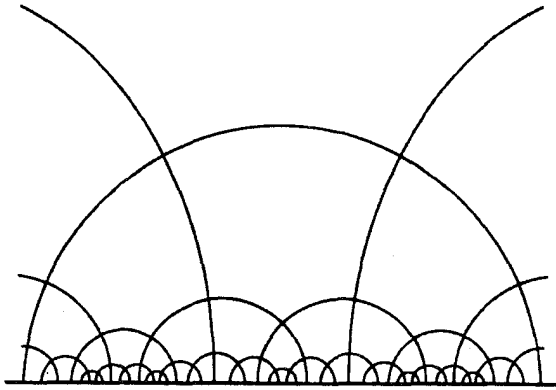


شکل ۹.۶

مثلث هذلولوی ABC در شکل ۹.۶ کافی‌اند فرض کنید $\triangle AB'C$ قرینه $\triangle ABC$ نسبت به محور l ها باشد. در این صورت ژئودزیک BD منعکس BB' نسبت به BC ، و $B'D'$ منعکس $B'C$ نسبت به $B'C$ است. ژئودزیک DC منعکس $B'C$ نسبت به BC و ژئودزیک $D'C$ منعکس BC نسبت به $B'C$ است. سرانجام، DE منعکس BD نسبت به DC است و $D'E$ منعکس $B'D'$ نسبت به $D'C$.

در بحث فوق تنها این مطلب را نشان دادیم که استدلالی را که برای محدودیت تعداد موزائیکهای منتظم هندسه اقلیدسی به کار می‌بریم، در صفحه هذلولوی نمی‌توانیم به کار ببریم. برای مبنا فرض کردیم که می‌توان در واقع تمام صفحه هذلولوی را، مثلاً، با موزائیکهای پنج ضلعی منتظم قائم‌الزاویه فرش کرد. روی هم رفته، به نظر می‌رسد که آنچه باید انجام داد، گذاشتن یک موزائیک در صفحه و سپس چیدن موزائیکهای لازم در اطراف آن و ادامه این کار است تا بینهایت. این نکته که زاویه‌ها همگی قائم‌اند، به نظر می‌رسد مانع امکان روی هم افتادن موزائیکها می‌شود. از این رو شکل ۱۰.۶، یک موزائیک‌بندی از نیم‌صفحه بالایی را با پنج ضلعیهای قائم‌الزاویه منتظم نشان می‌دهد. ولی، خواننده دقیق متوجه می‌شود که در این فرایند پذیرفته می‌شود که قطعات موزائیک صفحه هنگامی که زیاد می‌شوند، همواره محدب هذلولوی هستند، و هرگز شاخه‌هایی از آن پیدا نمی‌شوند که در نقطه‌ای دور به‌طور نامناسبی روی هم بیفتند. قضیه زیر که بدون اثبات بیان می‌شود، رخ ندادن چنین امری را تضمین می‌کند.

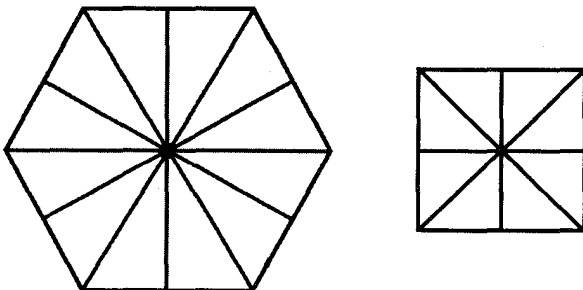
قضیه ۱۰.۶. فرض می‌کنیم D یک مثلث هذلولوی با زاویه‌های π/l ، π/m و π/n باشد. در



شکل ۱۰.۶

این صورت مثلثهای حاصل از انعکاس (یا تقارن) این مثلث نسبت به هر یک از اضلاعش و سپس از انعکاس هر یک از نگاره‌ها نسبت به هر ضلعش و ادامه این عمل تا بینهایت، صفحه هذلولوی را بدون هیچ شکاف و همپوشی نامناسب کاملاً می‌پوشاند. ■

شاید برای خواننده علت تضمین وجود موزائیک‌بندیهای منتظم هذلولوی توسط این قضیه بلافاصله روشن نباشد، ولی، این یک واقعیت است که خواه در صفحه اقلیدسی خواه در صفحه هذلولوی هر چندضلعی منتظم را می‌توان به مثلثهایی از این نوع تجزیه کرد. شکل ۱۱.۶ چگونگی انجام این کار را در مورد مربع و شش‌ضلعی منتظم صفحه اقلیدسی نشان می‌دهد. مربع از هشت مثلث با زاویه‌های $\pi/2$ ، $\pi/4$ ، $\pi/4$ ، و شش‌ضلعی منتظم از ۱۲ مثلث با زاویه‌ها $\pi/2$ و $\pi/3$ تشکیل شده است. قرینه‌های پیاپی هر یک از این مثلثها نسبت به اضلاعشان به یک موزائیک‌بندی مثلثی صفحه منجر می‌شود. سرانجام، وقتی این مثلثها را به صورت مناسب



شکل ۱۱.۶

گروه‌بندی کنیم که هر گروه شامل ۸ یا ۱۲ مثلث باشد، یک موزائیک‌بندی مربعی یا مسدسی به دست می‌آوریم.

مسلماً این یک روش غیرمستقیم برای پیدا کردن یک موزائیک‌بندی چندضلعی برای صفحه اقلیدسی است، به‌ویژه از این دیدگاه که فقط می‌تواند موزائیک‌بندیهای مربعی و مسدسی برای این صفحه تولید نماید. مزیت این راه این است که می‌تواند موزائیک‌بندیهای بسیاری از نوع مذکور را برای صفحه هذلولوی تهیه کند. به‌ویژه، n ضلعی منتظم هذلولوی با زاویه $2\pi/m$ در هر رأس را می‌توان به $2n$ مثلث قابل انطباق باهم با زاویه‌های $\pi/2$, π/m , π/n تجزیه نمود، و با استفاده از قضیه فوق موزائیک‌بندی از n ضلعیهای منتظم با زاویه $2\pi/m$ برای صفحه هذلولوی فراهم کرد. ساخت عملی این موزائیک‌بندیها با استفاده از نرم‌افزارهای گرافیکی نظیر Mathematica و Maple بسیار آسان است. موزائیک‌بندی شکل ۱۰.۶ از انعکاس پنج ضلعی منتظم قائم‌الزاویه هذلولوی شکل ۹.۶ نسبت به اضلاعش و با چند بار تکرار این کار به دست آمده است. برای اثبات قضیه ۱۰.۶ و قضیه‌های وابسته خوانندگان علاقه‌مند را به مقالاتی از یوانکاره، ماسکیت، و نیز به کتابهایی از کاراتئودوری و بیردون ارجاع می‌دهیم.

۶.۶ تمرین

۱. یک زاویه مستقیم‌الخط هذلولوی 45° رسم کنید که رأس آن نقطه $(1, 0)$ و یکی از اضلاع آن محور y ها باشد.
۲. یک زاویه مستقیم‌الخط هذلولوی 60° به رأس $(1, 1)$ رسم کنید که یکی از اضلاع آن ژئودزیک کمانی به مرکز مبدأ باشد و از نقطه $(1, 1)$ بگذرد.
۳. یک مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی با زاویه $\pi/6$ رسم کنید. طول ضلع این مثلث چقدر است؟
۴. زاویه‌های مثلث هذلولوی به رأسهای $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ و $C(7, 2)$ را پیدا کنید.
۵. زاویه‌های مثلث هذلولوی به رأسهای $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ و $C(7, 4)$ را پیدا کنید.
۶. یک روش اقلیدسی برای نصف‌کردن هر زاویه مستقیم‌الخط هذلولوی ذکر کنید.
۷. فرمولی برای a_α ، طول هذلولوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی به زاویه α ، پیدا کنید. حدود a_α را وقتی α به 0° و یا به $\pi/3$ میل می‌کند، پیدا کنید.
۸. ثابت کنید که به‌ازای $0 < \alpha < 2\pi$ یک چهارضلعی هذلولوی وجود دارد که مجموع زاویه‌هایش α است.

۹. اثبات یا رد کنید: هر چهار زاویه که مجموع آنها کمتر از 2π باشد، زاویه‌های یک چهارضلعی هذلولوی هستند (این مسأله مشکل است).
 ۱۰. شرط لازم و کافی برای یک n -زاویه‌ایی پیدا کنید که زاویه‌های یک n ضلعی هذلولوی باشند (این مسأله مشکل است).
 ۱۱. به چه دلیل شکلی نظیر مربع هذلولوی وجود ندارد؟ نظر خود را در مورد وجود متوازی‌الاضلاع، لوزی، و چندضلعیهای منتظم هذلولوی بیان کنید.
 ۱۲. فرض کنید b_α طول هذلولوی ضلع یک چهارضلعی هذلولوی متساوی‌الاضلاعی باشد که اندازه هر یک از زاویه‌های آن α است. حدود b_α را وقتی α به 0° و به $\pi/2$ میل می‌کند، محاسبه کنید.
 ۱۳. یک مثلث هذلولوی رسم کنید که هیچ دو ارتفاعی از آن متقاطع نباشند. (راهنمایی: یک مثلث هذلولوی رسم کنید که ارتفاعهای آن پاره‌هایی از ژئودزیکهای قائم باشند).
 ۱۴. نشان دهید که هر متوازی‌الاضلاع را می‌توان برای فرش کردن صفحه اقلیدسی به‌کار برد.
 ۱۵. نشان دهید که هر مثلث را می‌توان برای فرش کردن صفحه اقلیدسی به‌کار برد.
 ۱۶. نشان دهید که هر چهارضلعی را می‌توان برای فرش کردن صفحه اقلیدسی به‌کار برد.
 ۱۷. به چه دلیل نمی‌توان با استفاده از مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی که زاویه‌های آن 50° هستند، صفحه هذلولوی را فرش کرد؟
 ۱۸. حکم مسأله ۱۷ را تعمیم دهید.
 ۱۹. یک موزائیک‌بندی با شش ضلعی منتظم قائم‌الزاویه برای نیم‌صفحه بالایی رسم کنید.
- برای حل تمرینهای زیر استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری نظیر نرم‌افزارهای موجود در Mathematica یا Maple استفاده کنید.
۲۰. برنامه‌ای بنویسید که یک مثلث هذلولوی را به وضع استانده قرار دهد.
 ۲۱. برنامه‌ای برای محاسبه زاویه‌های یک مثلث هذلولوی بنویسید.
 ۲۲. برنامه‌ای برای محاسبه طولهای اضلاع یک مثلث هذلولوی به زاویه‌های α ، β و γ بنویسید.



مساحت هذلولوی

۱.۷ تعریف کلی مساحت

پیدا کردن تعریفی برای مساحت هذلولوی به مراتب مشکلتر از پیدا کردن تعریفی برای طول هذلولوی است. این کار با مرور مساحت اقلیدسی آسان می‌شود.

راه ساده برای تعیین مساحت گرفتن مربع به ضلع واحد است به عنوان واحد اندازه‌گیری مساحت. چون روشن است که مستطیلی با اضلاع صحیح a و b شامل تعداد ab واحد از این مربعهاست، معقول این است که مساحت مستطیل را برابر با ab مربع واحد تعریف کنیم، و سپس این تعریف را از برای مستطیلهای با اضلاع گویا و بعد برای مستطیلهای با ابعاد دلخواه تعمیم دهیم.

مرحله بعدی توجه به این نکته است که با بریدن گوشه مناسبی از یک متوازی‌الاضلاع و چسباندن آن به گوشه مقابل، متوازی‌الاضلاع به مستطیلی با همان مساحت تبدیل می‌شود. در

نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع با قاعده b و ارتفاع h را برابر با bh مربع واحد می‌گیریم. چون هر متوازی‌الاضلاع توسط هر یک از قطرهاش به دو مثلث قابل انطباق باهم تجزیه می‌شود، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت مثلثی با قاعده b و ارتفاع h باید برابر $bh/2$ مربع واحد باشد. هر ناحیه چندضلعی را می‌توان با رسم قطرهای آن به‌طور مناسب، به چند مثلث تجزیه نمود. از این رو اکنون روشی برای محاسبه مساحت یک چندضلعی به‌دست می‌آوریم. این روش را می‌توان با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال به نواحی با مرزهای خمیده نیز بسط داد.

چون در هندسه هذلولوی مربع وجود ندارد، این روش در اینجا کارایی ندارد. البته می‌توان به‌جای مربع واحد نوعی مثلث متساوی‌الاضلاع واحد را جایگزین نمود، ولی خواننده با اندکی تفکر قانع خواهد شد که اجرای این روش باز با مشکلات زیادی مواجه خواهد شد. مثلاً فکر کنید که اگر مثلث هذلولوی متساوی‌الاضلاعی را که همه زاویه‌های آن 45° درجه هستند به‌عنوان واحد اندازه‌گیری مساحت اختیار کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟ مساحت هذلولوی مثلث متساوی‌الاضلاعی به زاویه‌های 44° چگونه محاسبه خواهد شد؟

امروزه در بسیاری از کتابهای درسی دبیرستانی، در برخورد با مساحت خط مشی بنداشتی پیچیده‌تری را به‌کار می‌برند این خط مشی معمولاً صورتی از چهار بنداشتی زیر را در بردارد: وجودی: هر ناحیه کثیرالاضلاعی مساحتی دارد که عددی است حقیقی و مثبت. ناوردایی: چندضلعیهای قابل انطباق باهم مساحتی برابر دارند.

جمع‌پذیری: اگر ناحیه کثیرالاضلاعی R با اجتماع دو ناحیه کثیرالاضلاعی S و T که فقط مرز آنها بر هم قرار گرفته‌اند برابر باشد، آنگاه مساحت R مساوی است با مجموع مساحتیهای S و T . مستطیلی: مساحت یک مستطیل برابر با حاصلضرب طولهای قاعده و ارتفاع آن است.

این خط‌مشی وجود مستطیل را نیز که در صفحه هذلولوی وجود ندارد، تصریح می‌نماید. به‌علت شکست این دو روش بجاست که مجدداً تعریف اقلیدسی مساحت را بررسی کنیم. این تعریف، که در فصل اول بیان شده بود، در اصلهای بدیهی به‌صورت بنداشتی عنوان شده است. به‌عبارت دیگر، اقلیدس صرفاً می‌پذیرد که مفهوم معقولی از مساحت وجود دارد، و این معقول بودن با شرایط اصلهای بدیهی دقیق می‌شود. زمینه‌های این پذیرش را احتمالاً تجربیات روزمره‌وی فراهم کرده‌اند. شماری از یونانیان زمینهایی داشتند که می‌باید مساحتیهای آنها اندازه‌گیری می‌شد. پلثرون^۱ مربعی به مساحت تقریبی 10000 فوت مربع، واحد اندازه‌گیری مساحت این زمینها بود. متأسفانه در شرایط نیمصفحه از این‌گونه آزمایشها نداریم که ما را هدایت کند.

ولی برای مساحت اقلیدسی فرمولی وجود دارد که مشابه هذلولوی بسیار طبیعی دارد. اگر

R ناحیه‌ای در صفحهٔ اقلیدسی باشد، مساحت اقلیدسی آن برابر است با انتگرال دوگانه

$$\int \int_R dx dy$$

دلیل منطقی در پس این فرمول این است که ناحیهٔ R را می‌توان به مستطیلهایی بینهایت کوچک به ابعاد dx و dy تجزیه کرد. به موجب تعریف فاصلهٔ هذلولوی که در فصل ۴ داده شده، پذیرفتنی است که حدس بزیم مساحت هذلولوی این مستطیل بینهایت کوچک برابر است با

$$\frac{dx}{y} \cdot \frac{dy}{y}$$

و از این رو مساحت هذلولوی ناحیهٔ R ، که با $ha(R)$ نشان داده می‌شود، چنین است

$$\int \int_R \frac{dx dy}{y^2} \quad (۱.۷)$$

اکنون نشان می‌دهیم که این تعریف با دلیل ناکافی، در واقع به مفهوم قابل قبولی از مساحت می‌انجامد. به‌ویژه، نشان می‌دهیم که این مفهوم مساحت در همهٔ اصلهای بدیهی اقلیدسی صدق می‌کند.

اصل بدیهی I اساساً مقرر می‌کند که دو ناحیه که مساحت‌های هذلولوی هر یک از آنها با مساحت هذلولوی ناحیهٔ سومی برابر است، مساحت‌های هذلولوی برابر داشته باشند. این مطلب روشن است زیرا اگر R, S, T ناحیه‌هایی باشند که $ha(R) = ha(T)$ و $ha(S) = ha(T)$ آنگاه تنها با توجه به مبانی منطقی نتیجه می‌شود که $ha(R) = ha(S)$.

بررسی درستی اصل بدیهی دوم که تصریح می‌کند از افزودن مقدارهای مساوی به مقدارهای مساوی، مقدارهای مساوی حاصل می‌شود، نیازمند اندکی ریاضیات است. از براهین قضیه‌های بعدی‌اش روشن است که منظور اقلیدس هنگامی که از جمع صحبت می‌کند وضعیتی است که در آن دو چندضلعی کنار هم نهاده می‌شوند به طوری که قسمت مشترک آنها، در صورت وجود، به مرزهای آنها محدود شود. اگر R و S دو ناحیه از این نوع باشند و $R \cup S$ نشانهٔ اجتماع (مجموع) آنها باشد، از ویژگیهای کلی انتگرال نتیجه می‌شود که

$$ha(R \cup S) = \iint_{R \cup S} \frac{dx dy}{y^2} = \iint_R \frac{dx dy}{y^2} + \iint_S \frac{dx dy}{y^2} = ha(R) + ha(S)$$

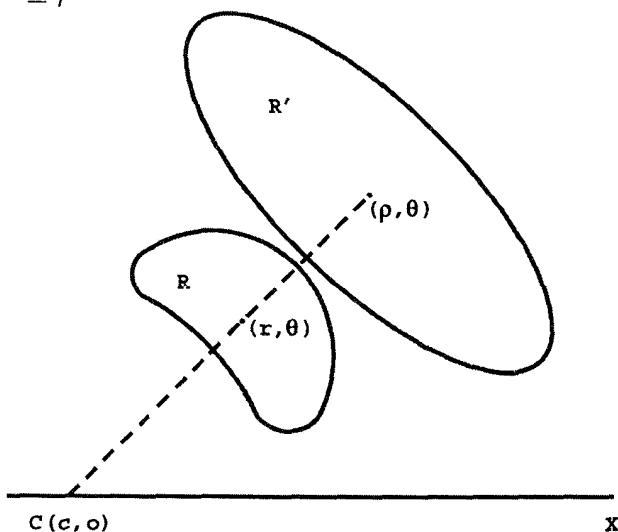
اصل بدیهی ۳ را که بیان می‌کند اگر از مقادیر مساوی، یک مقدار مساوی کم کنیم، باقیمانده‌ها مساوی می‌شوند، می‌توان با روشی مشابه اثبات کرد و از این رو از اثبات آن خودداری می‌کنیم.

اصل بدیهی ۴ ایجاب می‌کند که ناحیه‌های قابل انطباق باهم مساحت‌های مساوی داشته باشند. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که مساحت هذلولوی که در فوق تعریف شده تحت حرکت‌های صلب هذلولوی ناورداست. از قبل می‌دانیم که تمام این حرکتها ترکیب چند تقارن (محوری) نسبت به ژئودزیکهای راست و چند انعکاس به مرکز انعکاسی واقع بر محور x ‌ها هستند. از این رو کافی است نشان دهیم که این تبدیلهای مساحت‌های هذلولوی را حفظ می‌کنند. مورد تقارن نسبت به ژئودزیک راست را به تمرین ۱۱ واگذار می‌کنیم. چون هر انتقال افقی ترکیب دو تقارن (محوری) است، نتیجه می‌گیریم که انتقالها نیز مساحت هذلولوی را حفظ می‌کنند. بنابراین تنها کافی است که صحت اصل بدیهی ۴ را برای یک انعکاس $I_{C,k}$ به مرکز $C(c,0)$ ثابت کنیم. فرض کنید R یک ناحیه داده شده و R' نگاره آن بر اثر این انعکاس باشد (شکل ۱.۷). همچنین فرض می‌کنیم که در صفحه یک دستگاه مختصات قطبی به قطب $(c, 0)$ و محور قطبی منطبق بر محور x ‌ها، و در جهت مثبت آن، نهاده شده است. تبدیل مختصات قطبی به مختصات دکارتی با معادلات

$$x = c + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

داده می‌شود که ژاکوبین آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = (\cos \theta)(r \sin \theta) - (-r \sin \theta)(\sin \theta) \\ &= r \end{aligned}$$



شکل ۱.۷

انعکاس $I_{O,\kappa}$ ، نقطه به مختصات (r, θ) از ناحیه R را به نقطه‌ای با مختصات (ρ, θ) از ناحیه R' تبدیل می‌کند. از این رو، برحسب مختصات قطبی این انعکاس با فرمولهای

$$\rho = \frac{\kappa^2}{r}, \quad \theta = \theta$$

داده می‌شود: که ژاکوبین آن عبارت است از

$$\frac{\partial(\rho, \theta)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial\rho}{\partial r} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial\rho}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} = \left(-\frac{\kappa^2}{r^2}\right)(1) - (0)(0) = -\frac{\kappa^2}{r^2}$$

بنابراین انتگرالهای مربوطه چنین تبدیل می‌شوند

$$\begin{aligned} ha(R') &= \iint_{R'} \frac{dx dy}{y^2} = \iint_{R'} \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho^2 \sin^2 \theta} \\ &= \iint_R \frac{\frac{\kappa^2}{r} \cdot \frac{\kappa^2}{r^2} dr d\theta}{\frac{\kappa^2}{r^2} \sin^2 \theta} = \iint_R \frac{r dr d\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \iint_R \frac{dx dy}{r^2} = ha(R) \end{aligned}$$

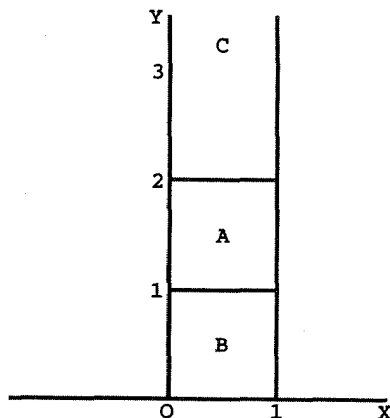
بنابراین، تعریف (۱.۷) از مساحت هذلولوی واقعاً براثر حرکت‌های صلب هذلولوی ناورد است. بالاخره، اصل ۵ از اصلهای بدیهی بیان می‌کند که مساحت کل بزرگتر از مساحت جزء است. چون تعریف (۱.۷) یک مساحت هذلولوی مثبتی را به هر ناحیهٔ دوعدی حقیقی می‌دهد، درستی این اصل بدیهی از درستی اصل بدیهی ۳ نتیجه می‌شود.

شاید جالب باشد که مساحت‌های هذلولوی برخی نواحی را حساب و آنها را با مساحت‌های اقلیدسی متناظرشان مقایسه کنیم. لذا مساحت هذلولوی مربع A در شکل ۲.۷ مساوی است با

$$\int_1^2 \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}$$

در حالی که مساحت متناهی اقلیدسی این ناحیه مساوی است با ۱. از سوی دیگر مساحت هذلولوی مربع B مساوی است با

$$\int_1^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2} = \infty,$$



شکل ۲.۷

در حالی که مساحت منتهای اقلیدسی آن مساوی است با ۱. بالاخره مساحت هذلولوی ناحیه نامتهای C عبارت است از

$$\int_2^{\infty} \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_2^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}$$

ولی مساحت اقلیدسی این ناحیه بینهایت است. این مطلب که ناحیه نامتهای C مساحت هذلولوی منتهای دارد آنچنان که در نگاه اول به نظر می‌رسد تناقض‌نا نیست. این پدیده مشابه این واقعیت است که مساحت اقلیدسی ناحیه نامتهای واقع بین خم $y = x^{-2}$ و محور x ها در طرف راست $x = 1$ مساوی است با مقدار منتهای

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

به بیان هذلولوی، ناحیه باریکه C با چنان سرعتی باریک می‌شود که موجب به‌دست آمدن مساحت هذلولوی منتهای می‌شود.

۲.۷ مساحت مثلث هذلولوی

اکنون نشان می‌دهیم که تعریف مساحت هذلولوی با استفاده از انتگرال دوگانه که در فوق آمد، فرمول بسیار ساده‌ای برای مساحت هذلولوی مثلث هذلولوی دلخواه به‌دست می‌دهد. شگفت‌آور اینکه این فرمول حتی از فرمول معروف مساحت اقلیدسی یک مثلث اقلیدسی ساده‌تر است. ابتدا به یک تعریف نیازمندیم.

کاستی یک مثلث هذلولوی با زاویه‌های α ، β و γ کمیت $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ است. از قضیه ۶.۶ نتیجه می‌شود که کاستی هر مثلث هذلولوی مقداری است مثبت.

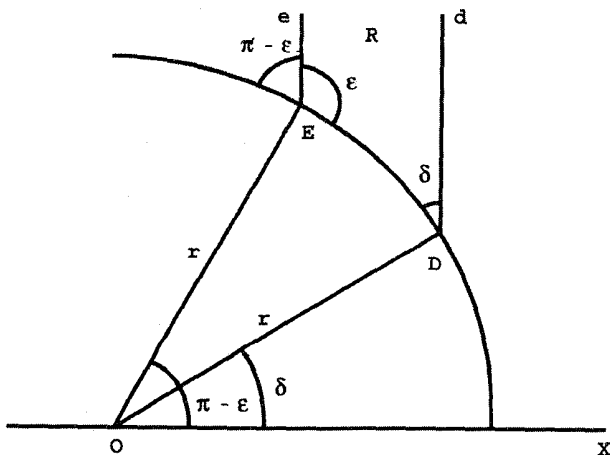
قضیه ۱.۷. مساحت هر مثلث هذلولوی برابر است با کاستی آن
اثبات این قضیه به کمک لمی که در نوع خود جالب است، صورت می‌گیرد.

لم ۲.۷. فرض می‌کنیم DE قطعه‌ای از یک ژئودزیک کمانی باشد. اگر d و e به ترتیب ژئودزیکهای راست بالای D و E باشند. و اگر R قطعه نوار نامتناهی بین d و e بالای DE باشد،
آنگاه

$$ha(R) = \pi - \delta - \epsilon$$

که در آن δ و ϵ به ترتیب زاویه‌های داخلی R در D و E هستند.
برهان: بی‌آنکه از کلیت کاسته شود فرض می‌کنیم O مرکز اقلیدسی ژئودزیک شامل DE به شعاع اقلیدسی r باشد (شکل ۳.۷).
بنابر گزاره ۲.۶، $\angle XOD = \delta$ و $\angle XO E = \pi - \epsilon$. معادله اقلیدسی ژئودزیک DE عبارت است از

$$x^2 + y^2 = r^2$$



شکل ۳.۷

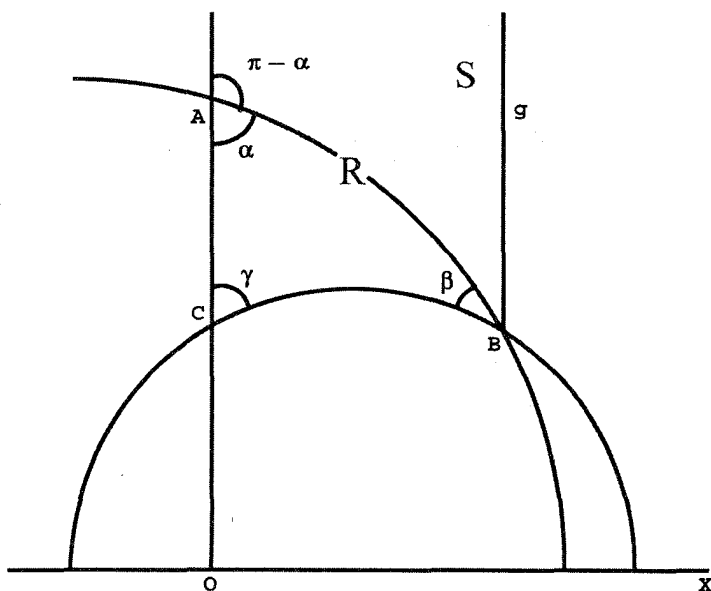
و از این رو مساحت مطلوب با عبارت زیر داده می‌شود

$$\int_{r \cos(\pi-\epsilon)}^{r \cos \delta} \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2}$$

وقتی این انتگرال دوگانه به صورت یک انتگرال با رستی محاسبه شود، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_{-r \cos \epsilon}^{r \cos \delta} -y^{-1} \int_{\sqrt{r^2-x^2}}^{\infty} dx &= \int_{-r \cos \epsilon}^{r \cos \delta} \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{r} \Big|_{-r \cos \epsilon}^{r \cos \delta} = \arcsin(\cos \delta) - \arcsin(-\cos \epsilon) \\ &= \frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\pi}{2} - \epsilon = \pi - \delta - \epsilon \end{aligned}$$

برهان قضیه ۱.۷: فرض می‌کنیم ABC یک مثلث هذلولوی در وضع استاندارد و g ژئودزیک راست‌گذرنده بر B باشد (شکل ۴.۷). فرض می‌کنیم R قطعه نوار نامتناهی واقع در بالای قطعه ژئودزیک BC ، بین ژئودزیک g و محور gh و S قطعه‌ای از همان نوار واقع در بالای ژئودزیک BC باشد. بالاخره فرض می‌کنیم α ، β و γ به ترتیب زاویه‌های مثلث در رأس‌های A ، B و C



شکل ۴.۷

باشند، در این صورت بنابر لم فوق داریم

$$\begin{aligned} ha(\triangle ABC) &= ha(R) - ha(S) \\ &= \pi - \gamma - \angle(g, BC) - [\pi - (\pi - \alpha) - \angle(g, AB)] \\ &= \pi - \gamma - \alpha - [\angle(g, BC) - \angle(g, AB)] \\ &= \pi - \gamma - \alpha - \beta \end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم

وقتی محاسبه مساحت مثلث خاصی در نظر باشد، باید زاویه‌های آن برحسب رادیان اندازه گرفته شود نه برحسب درجه. این ضرورت ناشی از کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال در اثبات لم ۲.۷ است. بنابراین مساحت هذلولوی مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی با زاویه‌های 45° مساوی است با $78.0^\circ = \pi/4 = 3\pi/4 - \pi$. به همین ترتیب مساحت هذلولوی مثلث هذلولوی مثال ۴.۶ با رأسهای $(0, 1)$ ، $(2, 1)$ ، $(4, 1)$ مساوی است با $92.000^\circ = \pi - \pi/2 - 2\cos^{-1}(3\sqrt{10}/10)$

فرع ۳.۷. مثلثهای قابل انطباق باهم هذلولوی، مساحت‌های هذلولوی مساوی دارند. نکته‌ای که می‌خواهیم در مورد این فرع بیان کنیم این است که اثبات آن بستگی به مفهوم پیچیده ژاکوبی که در بخش قبل به‌کار رفته ندارد. بنابراین، این فرع بدیهی یک روش مقدماتی دیگری برای این برهان که حرکت‌های صلب هذلولوی مساحت‌های هذلولوی چندضلعی‌های هذلولوی را تغییر نمی‌دهند، به‌دست می‌دهد. این روش مبتنی بر این مشاهده است که هر چندضلعی هذلولوی را (که خود را قطع نکند) می‌توان به‌صورت مجموع و تفاضل تعدادی متناهی از مثلث‌های هذلولوی نوشت. متأسفانه این نکته را در عین درست و پذیرفتنی بودنش، به‌آسانی نمی‌توان اثبات کرد.

۳.۷ تمرین

۱. فرمولی برای مساحت هذلولوی یک چهارضلعی هذلولوی پیدا کنید.
۲. فرمولی برای مساحت هذلولوی یک چندضلعی هذلولوی غیر مشخص پیدا کنید.
۳. مساحت هذلولوی مثلث هذلولوی به رأسهای $(1, 2)$ ، $(3, 2)$ ، $(7, 2)$ را پیدا کنید.
۴. مساحت هذلولوی مثلث هذلولوی به رأسهای $(0, 1)$ ، $(0, 2)$ ، $(2, 1)$ را پیدا کنید.

۵. مساحت هذلولوی مستطیل اقلیدسی به رأسهای $(0, 1)$ ، $(3, 0)$ ، $(3, 5)$ و $(5, 1)$ را پیدا کنید.
۶. مساحت هذلولوی مربع اقلیدسی S به رأسهای (a, b) ، $(a + h, b)$ ، $(a, b + h)$ و $(a + h, b + h)$ را پیدا کنید. حد نسبت مساحت هذلولوی S به مساحت اقلیدسی آن را وقتی $h \rightarrow 0$ پیدا کنید.
۷. حد مساحت هذلولوی مربع مذکور در تمرین ۶ را در حالت‌های زیر پیدا کنید.
الف) وقتی b به صفر میل می‌کند.
ب) وقتی b به بینهایت مثبت واگرا شود.
ج) وقتی h به بینهایت مثبت واگرا شود.
۸. ثابت کنید که مساحت هذلولوی دایره‌ای به شعاع هذلولوی R مساوی است با $2\pi[\cot h(R) - 1]$ (راهنمایی: یک دستگاه مختصات قطبی در مرکز اقلیدسی دایره بگیرید و از یک جدول انتگرال استفاده کنید).
۹. فرمولی برای مساحت هذلولوی مثلث اقلیدسی به رأسهای $(0, 1)$ ، $(a, 1)$ و (b, c) پیدا کنید.
۱۰. مساحت اقلیدسی یک مثلث هذلولوی را در وضع استانده پیدا کنید و آن را با مساحت هذلولوی آن مقایسه کنید.
۱۱. به طور رسمی، برحسب ژاکوبین، ثابت کنید که تقارن‌ها نسبت به ژئودزیک‌های راست مساحت‌های هذلولوی را ثابت نگه می‌دارند.
۱۲. به طور رسمی، برحسب ژاکوبین، ثابت کنید که انتقال‌های افقی مساحت‌های هذلولوی را حفظ می‌کنند.



مثلثات مثلث هذلولوی

۱.۸ مثلثات پاره‌خطهای هذلولوی

هدف این فصل متقاعد کردن خوانندگان به این موضوع است که هندسه صفحه هذلولوی مانند هندسه صفحه اقلیدسی واقعی است. می‌خواهیم این کار را از راه بسط مثلثات این هندسه نااقلیدسی انجام دهیم. کارهای بویوتی و لباچفسکی در به‌دست آوردن قانونهای هذلولوی سینوسها و کسینوسها نقطه عطف بسیار مهمی در تکامل صفحه هذلولوی است. پیش از آن، هندسه نااقلیدسی وضعیت یک تمرین منطقی صرف را داشت که جزئی از یک تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی از راه برهان خلف بود. نقل‌قولی که در انتهای بخش ۱۱-۳ آمده است روشن می‌کند که شباهت شگفت‌انگیز بین مثلثات کروی و مثلثات هذلولوی لباچفسکی را به‌درستی هندسه خود و استقلال اصل موضوع توازی متقاعد کرد. مؤلف نیز بر این باور است که هم پیچیدگی مثلثات پرمایه هذلولوی و هم سازگاری درونی آشکار آن در پذیرش هندسه هذلولوی به‌عنوان هندسه معتبر دیگر تأثیر زیادی

داشته است. خوانندگان را برای ملاحظهٔ بحث مفصلتری در باب این مطالب به بخش ۱۵ ارجاع می‌دهیم.

این بخش را با بررسی مجدد قضیه‌ای که مفید بودن خود را در مطالعهٔ مساحت‌های هذلولوی نشان داده آغاز می‌کنیم.

گزارهٔ ۱.۸. فرض می‌کنیم AB یک پاره ژئودزیک کمانی، و AE و BD به ترتیب ژئودزیکهای راست در بالای A و B باشند. اگر $\alpha = \angle EAB$ ، $\beta = \angle ABD$ و $c = h(A, B)$ ، آنگاه

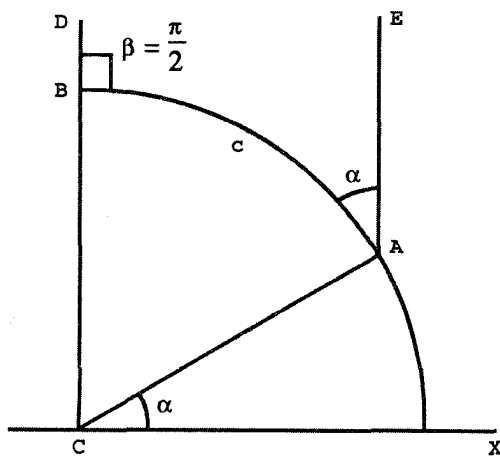
$$\sinh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (\text{الف})$$

$$\cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (\text{ب})$$

$$\tanh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{ج})$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $\beta = \pi/2$ (شکل ۱.۸)، در این حالت اگر C واقع بر محور x ها و مستقیماً در زیر نقاط B و D واقع باشد، بنابر گزارهٔ ۲.۶، $\angle XCA = \alpha$ و بنابر گزارهٔ ۱.۴

$$c = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} = \ln \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$



شکل ۱.۸

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2 \sinh c &= e^c - e^{-c} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - 1 + 2 \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)} \\ &= \frac{2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)} = 2 \cot \alpha \end{aligned}$$

از این رو وقتی $\beta = \pi/2$ ، داریم

$$\sinh c = \cot \alpha$$

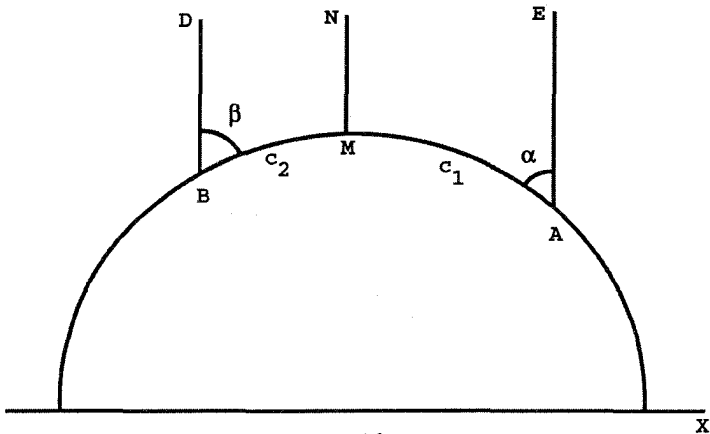
چون

$$\cosh^2 c - \sinh^2 c = 1, \quad \csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$$

از اینجا نتیجه می‌شود که وقتی $\beta = \pi/2$ ، داریم

$$\cosh c = \csc \alpha \quad \text{و} \quad \tanh c = \cos \alpha$$

اکنون به حالت کلی برمی‌گردیم (شکل ۲.۸)، فرض می‌کنیم M نقطه‌ای واقع بر ژئودزیک AB و دارای بزرگترین عرض باشد. بحث خود را به حالتی محدود می‌کنیم که M بین A و B



شکل ۲.۸

واقع است و حالت دیگر را که M خارج پاره‌خط هذلولوی AB است به‌عنوان تمرین ۲ به خواننده واگذار می‌کنیم.

اگر MN ژئودزیک راستی مستقیماً در بالای M باشد، آنگاه $\angle AMN = \angle NMB = \pi/2$ در نتیجه، اگر $c_1 = h(A, M)$ و $c_2 = h(B, M)$ ، وقتی M بین A و B قرار دارد، داریم

$$\begin{aligned} \sinh c &= \sinh(c_1 + c_2) = \sinh c_1 \cosh c_2 + \cosh c_1 \sinh c_2 \\ &= \cot \alpha \csc \beta + \csc \alpha \cot \beta = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات قسمت (الف) گزاره پایان می‌یابد. اثبات قسمت‌های (ب) و (ج) به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱).

آنچه می‌خواستیم

درست مانند گزاره ۱.۶، این گزاره تکنیکی فقط به مثابه ابزاری است که اثبات قضیه‌های جالبتر بعدی را آسان می‌کند.

قبل از همه حالت $\beta = \pi/2$ در برهان فوق است که به‌علت جالب بودنش ارزش این را دارد که صراحتاً به‌صورت حکمی جداگانه بیان شود.

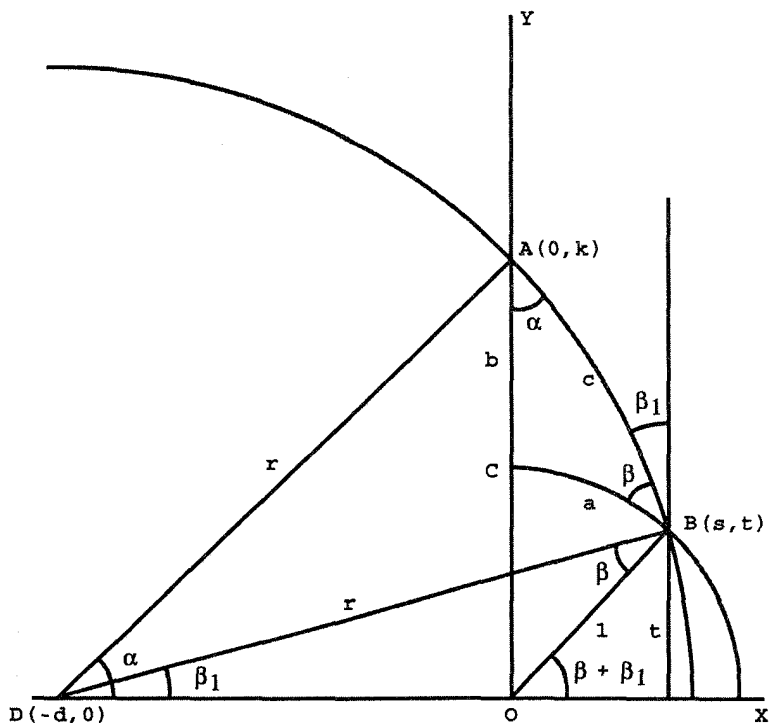
فرع ۲.۸. اگر در گزاره ۱.۸، $\beta = \pi/2$ ، آنگاه

$$\sinh c = \cot \alpha, \quad \cosh c = \csc \alpha, \quad \tanh c = \cos \alpha$$

۲.۸ مثلثهای قائم‌الزاویه هذلولوی

بسیاری از ریاضیدانان قضیه فیثاغورس را مهم‌ترین قضیه ریاضیات می‌دانند. بسیاری از قضیه‌ها و مفاهیم پیشرفته هندسه، جبر و نظریه اعداد یا مبتنی بر این قضیه ساده‌اند یا این قضیه محرک پیدایش آنها بوده است. قضیه زیر مشابه هذلولوی قضیه فیثاغورس است.

قضیه ۳.۸. فرض کنید ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای هذلولوی قائمه در رأس C باشد. اگر a, b, c به‌ترتیب طولهای هذلولوی اضلاع مقابل به A, B, C باشند، آنگاه



شکل ۳.۸

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

برهان: فرض می‌کنیم ABC در وضع استاندارد باشد (شکل ۳.۸). فرض می‌کنیم شعاع r و $D(-d, 0)$ مرکز اقلیدسی ژئودزیک شامل AB باشد. فرض می‌کنیم α و β زاویه‌های داخلی $\triangle ABC$ در A و B و β_1 زاویه بین پاره ژئودزیک AB و ژئودزیک راست در بالای B باشد. به موجب گزاره ۲.۶ داریم

$$\angle XDA = \alpha, \quad \angle XDB = \beta_1, \quad \angle XO B = \beta + \beta_1, \quad \angle DBO = \beta$$

بنابر فرع ۲.۸

$$\cosh a = \csc(\beta + \beta_1) = \frac{1}{t}$$

بنابر گزاره ۳.۴، $b = \ln \kappa$ ، از این رو

$$\cosh b = \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{\kappa + \frac{1}{\kappa}}{2} = \frac{\kappa^2 + 1}{2\kappa}$$

بنابر گزاره ۱.۸

$$\begin{aligned} \cosh c &= \frac{1 + \cos \beta_1 \cos(\pi - \alpha)}{\sin \beta_1 \sin(\pi - \alpha)} = \frac{1 - \frac{d+s}{r} \frac{d}{r}}{\frac{t\kappa}{rr}} = \frac{r^2 - d^2 - ds}{kt} \\ &= \frac{\kappa^2 - ds}{\kappa t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

ولی، بنابر قضیه اقلیدسی فیثاغورس داریم

$$s^2 + t^2 = 1, \quad (s+d)^2 + t^2 = r^2 = d^2 + \kappa^2$$

از این رو

$$2sd + d^2 = r^2 - 1$$

یا

$$sd = \frac{r^2 - d^2 - 1}{2} = \frac{\kappa^2 - 1}{2}$$

با قرار دادن این مقدار sd در (۱.۸) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \cosh c &= \frac{\kappa^2 - \frac{\kappa^2 - 1}{2}}{\kappa t} = \frac{\kappa^2 + 1}{2\kappa t} \\ &= \cosh a \cosh b \end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم

از قضیه هذلولوی فیثاغورس نتیجه می‌شود که اگر c طول هذلولوی وتر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هذلولوی با طول ساق ۱ باشد، آنگاه

$$\cosh c = (\cosh 1)^2$$

و بنابراین

$$c = \cosh^{-1}((\cosh 1)^2) = \ln \left[(\cosh 1)^2 + \sqrt{((\cosh 1)^2)^2 - 1} \right] = 1.51 \dots$$

یادآور می‌شویم که این مقدار کمی بیشتر از $\sqrt{2} = 1.41 \dots$ است که طول اقلیدسی وتر مثلث اقلیدسی نظیر این مثلث قائم‌الزاویه است. با این همه این دو طول تا حدی نزدیک به هم هستند. شاید ملاحظات زیر ارتباط بین قضیه‌های فیثاغورسی هذلولوی و اقلیدسی را روشن نمایند. یادآور می‌شویم که تابع‌نمایی دارای بسط سری نامتناهی زیر است

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

از این رو، اگر جمله‌های درجه چهار و بالاتر را نادیده بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\cosh x = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

اما در این صورت اگر باز جمله‌های درجه چهار و بالاتر نادیده گرفته شوند، تساوی

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

به دست می‌آید که هم‌ارز است با

$$1 + \frac{c^2}{2} = \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right)$$

که پس از ساده‌کردن تبدیل می‌شود به:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بنابراین می‌توان گفت که قضیه‌های فیثاغورسی اقلیدسی و هذلولوی در مثلث‌های بینهایت کوچک باهم یکی می‌شوند. قسمتهای مختلف گزاره زیر را می‌توان به آسانی با همان روش اثبات قضیه هذلولوی فیثاغورسی ثابت کرد، و جزئیات به عهده خواننده واگذار می‌شود.

گزارهٔ ۴.۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ هذلولوی ABC قائمه در رأس C ، فرض می‌کنیم α و β به ترتیب اندازهٔ زاویه‌های A و B ، و a ، b و c به ترتیب اندازه‌های هذلولوی اضلاع روبه‌رو به رأسهای A ، B و C باشند، در این صورت

$$\tan h a = \sin h b \tan \alpha, \tan h b = \sin h a \tan \beta \quad (\text{الف})$$

$$\sin h a = \sin h c \sin \alpha, \sin h b = \sin h c \sin \beta \quad (\text{ب})$$

$$\tan h b = \tan h c \cos \alpha, \tan h a = \tan h c \cos \beta \quad (\text{ج})$$

$$\cos h b \sin \alpha = \cos \beta, \cos h a \sin \beta = \cos \alpha \quad (\text{د})$$

$$\cos h c = \cot \alpha \cot \beta$$

۳.۸ مثلث هذلولوی کلی

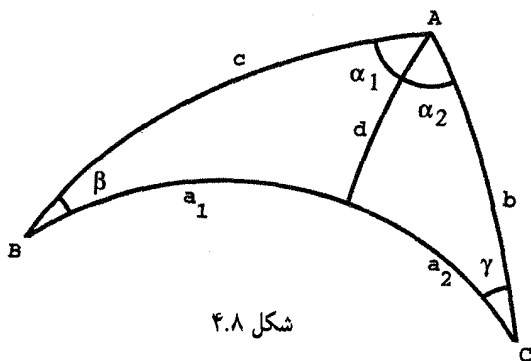
به‌طورکلی، یک مثلث اقلیدسی با هر یک از سه ضلع و سه زاویه‌اش کاملاً مشخص می‌شود. یک استثنا براین قاعده این واقعیت است که وقتی سه زاویه داده شده باشند، مثلث اقلیدسی فقط تا حد تشابه مشخص می‌شود. در صورتی که سه جزء (که دست کم یکی از آنها طول باشد) از مثلثی داده شده باشند، فرمولهایی که با استفاده از آنها سایر اجزای مثلث محاسبه می‌شوند، به قانون سینوسها و قانون کسینوسها موسوم‌اند. ما در اینجا آنها را بدون اثبات می‌آوریم.

قضیهٔ ۵.۸. در مثلث اقلیدسی ABC فرض می‌کنیم α, β, γ به ترتیب اندازهٔ زاویه‌های A, B, C و a, b, c به ترتیب اندازهٔ اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های A, B, C باشند. در این صورت،

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad (\text{ب})$$

در صفحهٔ هذلولوی این استثنا پیش نمی‌آید و هر مثلث با زاویه‌هایش کاملاً مشخص می‌شود. در قضیهٔ زیرقسمتهای (الف) و (ج) نظایر هذلولوی قوانین کسینوسها و سینوسها هستند. قسمت (ب) مشابه اقلیدسی ندارد ولی به تعبیری روشن و هر چند غیر صوری دوگان قسمت (الف) است.



شکل ۴.۸

قضیه ۴.۸. در مثلث هذلولوی ABC فرض می‌کنیم α, β, γ به ترتیب اندازه زاویه‌های A, B, C ، a, b, c و a_1, a_2 به ترتیب اندازه هذلولوی اضلاع روبه‌رو به A, B, C باشند. در این صورت

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} \quad (\text{الف})$$

$$\cosh a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c} \quad (\text{ج})$$

برهان: برهان را با اثبات قسمت (الف) آغاز می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که ارتفاع هذلولوی d مرسوم از رأس A بر ضلع BC در داخل مثلث قرار گیرد (شکل ۴.۸). اگر این ارتفاع زاویه α را به زاویه‌های α_1 و α_2 و ضلع a را به اجزای a_1 و a_2 تقسیم نماید، با استفاده از فرمولهای $\cos(x+y)$ و $\cosh(x+y)$ و قسمتهای (ب) و (ج) قضیه ۴.۸ و قضیه هذلولوی فیثاغورس چنین به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\sinh c}{\sinh b} \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 \\ &= \frac{\tanh d \tanh d}{\tanh c \tanh b} - \frac{\sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh b \sinh b} \\ &= \frac{\cosh b \cosh c \tanh^2 d - \sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh b \sinh c} \\ &= \frac{\cosh b \cosh c (1 - \sinh^2 d) - \sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh b \sinh c} \\ &= \frac{\cosh b \cosh c - \frac{\cosh b}{\cosh d} \cdot \frac{\cosh c}{\cosh d} - \sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh b \sinh c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cosh b \cosh c - (\cosh a_1 \cosh a_2 + \sinh a_1 \sinh a_2)}{\sinh b \sinh c} \\
 &= \frac{\cosh b \cosh c - \cosh (a_1 + a_2)}{\sinh b \sinh c} = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}
 \end{aligned}$$

اثبات حالتی که ارتفاع d در خارج مثلث قرار می‌گیرد در تمرین ۱۱ به عهده خواننده واگذار شده است.

اما قسمت (ب) به روشی مشابه (ولی با استفاده از فرمولهای دیگری از قضیه ۴.۸) ثابت می‌شود. با فرض اینکه ارتفاع d در داخل مثلث است داریم

$$\begin{aligned}
 \cosh a &= \cosh (a_1 + a_2) = \cosh a_1 \cosh a_2 + \sinh a_1 \sinh a_2 \\
 &= \frac{\cos \alpha_1}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\sin \gamma} + \frac{\tanh d}{\tan \beta} \cdot \frac{\tanh d}{\tan \gamma} \\
 &= \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (1 - \sec^2 h^2 d) \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \\
 &= \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\cos \beta}{\cosh d} \cdot \frac{\cos \gamma}{\cosh d}}{\sin \beta \sin \gamma} \\
 &= \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \beta \sin \gamma} \\
 &= \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}
 \end{aligned}$$

تمرین ۱۲ برای حالتی است که ارتفاع مثلث در خارج آن قرار می‌گیرد.

اکنون به قسمت (ج) می‌پردازیم. استفاده از قسمت (الف) در مثلث ABC نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 a} \\
 &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \\
 &= \frac{(1 - \cosh^2 b)(1 - \cosh^2 c) - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \\
 &= \frac{1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}
 \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که این عبارت آخری نسبت به a ، b و c متقارن است و از این رو خواهیم داشت

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2 \beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sinh^2 c}$$

چون زاویه‌های α ، β و γ همگی بین 0 و π هستند، سینوسهای آنها همگی مثبت‌اند، به همین ترتیب چون کمیت‌های a ، b ، c مثبت‌اند، سینوسهای هذلولوی آنها نیز مثبت‌اند. در نتیجه

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}$$

مثال ۶.۸. بنابر قضیه ۵.۶ یک مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی با زاویه‌های $\pi/4$ وجود دارد، اگر طول مشترک ضلع‌های این مثلث a باشد، بنابر قسمت (ب) از قضیه فوق داریم

$$\cosh a = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

از این رو

$$a = \cosh^{-1}(1 + \sqrt{2}) = \ln[(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 1}] \approx 1,528 \dots$$

البته مساحت این مثلث مساوی است با $\pi/4 = 3\pi/4 - \pi$.

مثال ۷.۸. فرض می‌کنیم α زاویه مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی به ضلع ۲ باشد. چون $\cos h 2 \approx 3,762$ و $\sin h 2 \approx 3,627$ داریم

$$\cos \alpha \approx \frac{(3,762)^2 - 3,762}{(3,627)^2} \approx 0,79$$

بنابراین $\alpha \approx \cos^{-1}(0,79) \approx 0,66$ برحسب رادیان، و مثلث دارای مساحت تقریبی $1,16 = 3 \times (0,66) - 3$ است.

در تمرین‌های ۱۷ و ۱۸ از خواننده خواسته شده است که نشان دهد قانونهای هذلولوی و اقلیدسی سینوسها و کسینوسها در مثلثهای بینهایت کوچک یکی هستند. از این یکی بودن نتیجه

می‌شود که ساکنان بینهایت کوچک هر دو صفحهٔ هذلولوی و اقلیدسی ویژگیهای فزاهایی را که در آن زندگی می‌کنند نمی‌توانند تمیز دهند.

این موضوع در مورد ما نیز می‌تواند کاملاً صدق کند. «می‌دانیم» که ما در یک فضای اقلیدسی زندگی می‌کنیم زیرا مجموع زاویه‌های مثلثهای ما 180° است. ولی تمام اندازه‌گیریهای فیزیکی دستخوش خطا هستند. به‌علاوه، روشن است که ما در مقایسه با جهان، بسیار کوچک هستیم. بنابراین قابل تصور هست که مجموع زاویه‌های مثلثهای ما در واقع کمتر از π باشد، ولی مثلثهایی که در اختیار ما هستند آنقدر کوچک‌اند که ابزارهای ما نمی‌توانند این تفاوت را کشف کنند. به بیان تا حدی دقیقتر، اگر این مثلثها چنان کوچک باشند که توانهای چهارم طولهای اضلاع آنها کوچکتر از آن باشند که توسط ابزارهای اندازه‌گیری قابل شناسایی باشند، ما به خوبی می‌توانیم موجودات هذلولوی نیز باشیم.

شگفت‌انگیز آنکه افراد مقیم در یک فضای اقلیدسی هرگز نمی‌توانند مطمئن باشند که ساکن چه فضایی هستند. زیرا مجموع زاویه‌های مثلثهای آنها همواره π است، ولی همیشه با این امکان مواجه‌اند که ابزارهای آنها آنقدر دقیق نباشند که کاستی را شناسایی کنند. از سوی دیگر، افراد مقیم در یک فضای هذلولوی، به محض شناسایی مثلثی با کاستی مثبت از ماهیت فضای خود مطمئن می‌شوند.

۴.۸ تمرین

۱. اثبات قسمتهای ب) و ج) گزارهٔ ۱.۸ را در حالتی که M در داخل پاره‌خط هذلولوی AB باشد کامل کنید.
۲. گزارهٔ ۱.۸ را در حالتی که M در خارج پاره‌خط هذلولوی AB قرار دارد ثابت کنید.
۳. طول هذلولوی وتر مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی را پیدا کنید که طولهای هذلولوی دو ضلع دیگر آن ۳ و ۴ هستند.
۴. طول هذلولوی وتر مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی را پیدا کنید که طولهای هذلولوی دو ضلع دیگر آن ۳ و ۴ هستند.
۵. طولهای هذلولوی ساقهای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هذلولوی را پیدا کنید که طول هذلولوی وتر آن 100 است.
۶. با استفاده از قانون هذلولوی سینوسها صورت هذلولوی قضیهٔ متلاوس (ر.ک. تمرین ۲۰.۱) را بیان کنید و قضیهٔ را اثبات نمایید.

۷. با استفاده از قضیه هذلولوی منلائوس قضیه هذلولوی سوارا^۱ (رک. تمرین ۲۱.۱) بیان و قضیه را و اثبات کنید.
۸. ثابت کنید که میانه‌های مثلث هذلولوی هم‌رس‌اند.
۹. ثابت کنید که هر دو میانه یک مثلث هذلولوی یکدیگر را به قطعاتی تقسیم می‌کنند که نسبت سینوسهای هذلولوی آنها مثل ۲:۱ است.
۱۰. قسمت‌های الف-ه گزاره ۴.۸ را ثابت کنید.
۱۱. قسمت (الف) در قضیه ۵.۸ را ثابت کنید وقتی ارتفاع d در خارج مثلث می‌افتد.
۱۲. قسمت (ب) قضیه ۵.۸ را ثابت کنید وقتی ارتفاع d در خارج مثلث افتاده باشد.
۱۳. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع هذلولوی به ضلع a و زاویه α ، ثابت کنید

$$2 \cos h \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 1$$

۱۴. مساحت و طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه هذلولویی را پیدا کنید که زاویه‌های حاده آن هر دو $\pi/6$ اند.
۱۵. مساحت و طول اضلاع یک مثلث هذلولوی را پیدا کنید که زاویه‌های آن $\pi/6$ ، $\pi/6$ و $\pi/3$ اند.
۱۶. فرض می‌کنیم مساحت مثلثی ۱ رادیان است. طولهای اضلاع آن تا چه اندازه می‌توانند بزرگ باشند؟ تا چه اندازه می‌توانند کوچک باشند؟
۱۷. نشان دهید که صورت بینهایت کوچک قوانین هذلولوی کسینوسها با قانون اقلیدسی کسینوسها یکی است.
۱۸. نشان دهید که صورت بینهایت کوچک قانون هذلولوی سینوسها با قانون اقلیدسی سینوسها یکی است.
۱۹. طولهای هذلولوی ضلعها و قطرهای یک پنج‌ضلعی منتظم هذلولوی با زاویه‌های قائمه را پیدا کنید. مساحت‌های هذلولوی مثلثهایی را که با دو ضلع و یک قطر این پنج‌ضلعی یا دو قطر و یک ضلع آن ساخته می‌شوند پیدا کنید.
۲۰. ثابت کنید که طول ارتفاع وارد بر قاعده در یک مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی نمی‌تواند بزرگتر از $\ln(1 + \sqrt{2})$ باشد.

۲۱. ثابت کنید که قطر هر دایره محاط در یک مثلث هذلولوی حداکثر برابر $\ln 3$ است.

۱. نام ایتالیایی این شخص چوا است. ولی چون در کتابهای فارسی سیوا آمده ما نیز آن را سوا نامیده‌ایم.

۲۲. اگر K مساحت مثلث قائم‌الزاویه هذلولوی ABC قائمه در رأس C باشد، ثابت کنید.

$$\sin K = \frac{\sinh a \sinh b}{1 + \cosh a \cosh b}$$

۲۳. نشان دهید که اگر R شعاع دایره محاطی داخلی مثلث هذلولوی با مساحت K باشد، آنگاه

$$\tanh R \geq \frac{1}{2} \sin \left(\frac{K}{2} \right)$$

۲۴. نشان دهید که طول هذلولوی پاره‌ژئودزیک واصل بین وسطهای دو ضلع یک مثلث هذلولوی کمتر از نصف طول هذلولوی ضلع سوم آن است.

اعداد مختلط و حرکت‌های صلب

۱.۹ اعداد مختلط و حرکت‌های صلب اقلیدسی

در این ساخت از صفحه هذلولوی ما به چیزهای شگفت‌انگیز زیادی برخورده‌ایم. از آن جمله، این واقعیتها که ژئودزیکهای نیمصفحه پوانکاره نیمدایره‌های اقلیدسی، و دایره‌های هذلولوی عیناً همان دایره‌های اقلیدسی‌اند، و انعکاسهای اقلیدسی حرکت‌های صلب هذلولوی هستند. باز شاید حیرت‌انگیزترین پیوندهای موجود بین این دو هندسه، که بر اثر متریک پوانکاره آشکار شده، نقشی است که اعداد مختلط در این هندسه و هندسه‌های دیگر ایفا می‌کنند. این پیوند به قدری عمیق است که ریاضیدانان به فکر افتاده‌اند که نقطه‌های صفحه هذلولوی را به صورت اعداد مختلطی که جزء انگاری آنها مثبت است نشان دهند، نه به صورت جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی که در آنها y مثبت است. این نگرش به آنها اجازه می‌دهد تا اطلاعات نظری در باب اعداد مختلط را در هندسه هذلولوی به‌کار برند، و به‌عکس از ابزارهای هندسی نااقلیدسی بتوانند برای حل مسائل

که هندسه نااقلیدسی از آنالیز مختلط به او خواهد داد آگاه خواهد شد. در این مورد کافی است بگوییم که حرکت‌های صلب، هم در صفحه اقلیدسی و هم در صفحه هذلولوی بیان زیبایی خاصی برحسب اعداد مختلط دارند. استخراج نحوه این بیان هدف این فصل است.

یادآور می‌شویم که به هر نقطه (x, y) از صفحه دکارتی یک عدد مختلط

$$z = x + yi$$

وابسته می‌شود که در آن $i^2 = -1$ ، و این اعداد مختلط از چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم پیروی می‌کنند. این اعمال در این بافت جدید همان ویژگی‌های جابه‌جایی، شرکتپذیری، توزیعپذیری را دارند که در بافت اعداد حقیقی داشتند. از این رو،

$$(2 + 3i) + (1 - 2i) = (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i$$

$$(2 + 3i) - (1 - 2i) = (2 - 1) + (3 + 2)i = 1 + 5i$$

$$(2 + 3i)(1 - 2i) = (2 - 4i + 3i - 6i^2) = 2 - i + 6 = 8 - i$$

و

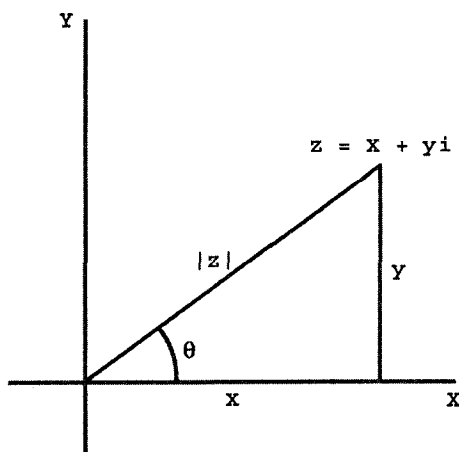
$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 + 4i + 3i - 6}{1 - 2i + 2i + 4} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

فرض می‌کنیم $c = a + bi$ یک عدد مختلط ثابت و $Z = x + yi$ عدد مختلط دلخواهی باشد. چون $z + c = (x + a) + (y + b)i$ ، روشن است که پاره‌خط واصل بین z و $z + c$ ، موازی با پاره‌خط واصل بین مبدأ مختصات، $0 = 0 + 0i$ و نقطه c است و طولش هم مساوی با طول این پاره‌خط است. در نتیجه لم زیر را داریم

لم ۱.۹. اگر c عدد مختلط ثابتی باشد، تابع

$$f(z) = z + c$$

انتقالی از صفحه اقلیدسی است. به عکس هر انتقال این صفحه را می‌توان به این طریق بیان کرد. اکنون به دورانهای اقلیدسی برمی‌گردیم. فرض می‌کنیم $z(x, y)$ معرف نقطه هندسی متناظر با عدد مختلط $z = x + yi$ باشد. طول پاره‌خط Oz را که با $|z|$ نشان داده می‌شود قدرمطلق



شکل ۱.۹

z ، و زاویهٔ بین جهت مثبت محور x ‌ها و شعاع Oz را که با $\arg(z)$ نشان داده می‌شود شناسهٔ z می‌نامیم. با توجه به شکل ۱.۹ روشن است که

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}.$$

به‌ازای عدد حقیقی دلخواه θ ، تعریف می‌کنیم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

به‌عبارت دیگر $e^{i\theta}$ عدد مختلطی است که قدرمطلق آن ۱ و شناسهٔ آن θ است. دلیل منطقی برای انتخاب این نماد تساوی زیر است

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

و لذا

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

که البته با قانون ضرب توانهای اعداد با یک پایه سازگار است.

فرض می‌کنیم $z = x + yi$ عدد مختلط باشد و $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$. در این صورت

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}. \end{aligned}$$

اگر $w = u + vi$ عدد مختلط دیگری با $|w| = R$ و $\arg(w) = \phi$ باشد، آنگاه $w = Re^{i\phi}$ و از این رو

$$zw = re^{i\theta} Re^{i\phi} = rRe^{i(\theta+\phi)}$$

به عبارت دیگر

$$|zw| = |z||w| \quad \text{و} \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

بنابراین، ضرب اعداد مختلط تعبیر هندسی خوبی برحسب قدرمطلق و شناسه دارد. این مطلب در گزاره زیر خلاصه شده است.

گزاره ۲.۹. قدر مطلق حاصلضرب (خارج قسمت) دو عدد مختلط مساوی است با حاصلضرب (خارج قسمت) قدرمطلقهای آنها، و شناسه حاصلضرب (خارج قسمت) مساوی است با مجموع (تفاضل) شناسه‌های آنها. ■

آن بخش از این گزاره که به اصل شناسه مربوط است، اغلب اصل شناسه نامیده می‌شود. از این اصل نتیجه می‌شود که اگر α زاویه‌ای ثابت و $z = re^{i\theta}$ عدد مختلط دلخواهی باشد، عدد مختلط $w = e^{i\alpha}z$ به‌آسانی از z با دوران پادساعتسوی صفحه مختلط به زاویه حول مبدأ مختصات به‌دست می‌آید. به‌عکس هر دوران حول مبدأ را می‌توان با این روش بیان نمود.

لم ۳.۹. به‌ازای هر زاویه α و هر عدد مختلط c تابع

$$f(z) = e^{i\alpha}(z - c) + c = e^{i\alpha}z + (1 - e^{i\alpha})c$$

دوران $R_{c,\alpha}$ است.

برهان: تابع $f(z)$ ترکیب انتقال $z - c$ ، دوران $e^{i\alpha}z$ ، و انتقال $z + c$ است. بنابراین دورانی است به زاویه α . چون

$$f(c) = e^{i\alpha}(c - c) + c = c$$

بنابراین $f(z) = R_{c,\alpha}$.

آنچه می‌خواستیم

مثال ۴.۹. دوران پادساعتسوی صفحه به زاویه 90° حول نقطه $(1, 0)$ بر حسب اعداد مختلط دارای صورت زیر است

$$R_{i,\pi/2} = e^{i\pi/2}(z - i) + i = i(z - i) + i = iz + 1 + i$$

همچنین دوران به زاویه 180° حول نقطه $(2, 0)$ چنین خواهد شد

$$\begin{aligned} R_{2+i,\pi} &= e^{i\pi}(z - 2 - i) + 2 + i = -(z - 2 - i) + 2 + i \\ &= -z + 4 + 2i \end{aligned}$$

اکنون ترکیب $R_{2+i,\pi} \circ R_{i,\pi/2}$ را می‌توان به آسانی به صورت

$$f(z) = -(iz + 1 + i) + 4 + 2i = -iz + 3 + i = e^{i\pi/2}z + 3 + i$$

محاسبه نمود. بنابر لم ۳.۹ می‌دانیم که این دورانی است به صورت $R_{c,2\pi/2}$. مقدار c را می‌توان از تساوی $f(c) = c$ به دست آورد و از این رو c در معادله

$$-ic + 3 + i = c$$

صدق می‌کند. بنابراین

$$c = \frac{3+i}{1+i} = \frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3+1+i(-3+1)}{1-(-1)} = 2-i$$

بنابراین

$$R_{2+i,\pi} \circ R_{i,\pi/2} = R_{2-i,2\pi/2}$$

بالاخره به تقارنهای (محوری) اقلیدسی برمی‌گردیم. اگر $z = x + yi$ عدد مختلطی باشد، $x - yi$ را مزدوج آن می‌نامیم و با \bar{z} نشان می‌دهیم. به آسانی می‌توان دید که مزدوج $\bar{\bar{z}}$ برابر است با z ، و هر عدد مختلط و مزدوج آن قرینهٔ یکدیگرند نسبت به محور x ها. به بیان دیگر تابع $f(z) = \bar{z}$ قرینهٔ ρ_x نسبت به محور x هاست. توجه کنید که

$$e^{i\theta} = e^{-i\theta} \quad , \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad \text{و} \quad |\bar{z}| = |z|$$

اگر m خط گذرنده از مبدأ با شیب θ نسبت به جهت مثبت محور x ها باشد، آنگاه $R_{O,\theta} \circ \rho_x \circ R_{O,-\theta}$ قرینهٔ ρ_m نسبت به خط m است. این ترکیب را می‌توان برحسب اعداد مختلط به صورت

$$e^{i\theta} \overline{e^{-i\theta} z} = e^{2i\theta} \bar{z}$$

نوشت. این فرمول قرینهٔ یک عدد مختلط را نسبت به هر خط گذرنده از مبدأ مختصات به دست می‌دهد. لم زیر همهٔ تقارن‌ها را برحسب اعمال در اعداد مختلط بیان می‌کند.

لم ۵.۹. اگر m خطی باشد با شیب α نسبت به جهت مثبت محور x ها و c نقطه‌ای بر m ، تابع

$$f(z) = e^{i\alpha} \overline{z - c} + c$$

معرف تقارن نسبت به خط m است.

برهان: فرض می‌کنیم m خط راستی موازی با m و گذرنده از مبدأ باشد و τ انتقال $z + c$ باشد که مبدأ O را بر c می‌نگارد. می‌دانیم که $\tau \circ \rho_n \circ \tau^{-1}$ یک لغزه است. به علاوه، این لغزه‌ای است که همهٔ نقاط خط m را ثابت نگاه می‌دارد، از این رو باید عیناً همان ρ_m باشد. چون

$$\tau \circ \rho_n \circ \tau^{-1}(z) = e^{i\alpha} \overline{z - c} + c$$

اثبات تمام است. ■

به ویژه، توجه کنید که تقارن نسبت به ژئودریک قائم در بالای نقطهٔ $(r, 0)$ عبارتی به صورت

$$2r - \bar{z} \quad \text{دارد.}$$

مثال ۶.۹. فرض کنید ρ تقارن نسبت به خط $y = x - 2$ باشد و σ تقارن نسبت به خط $x = 5$. این تقارن‌ها برحسب اعداد مختلط عبارتهایی به صورت زیر دارند

$$\rho(z) = e^{2i\pi/2}(\bar{z} - 2) + 2 = i\bar{z} + 2 - 2i$$

$$\sigma(z) = -\bar{z} + 10$$

ترکیب آنها $\rho \circ \sigma$ ، معرف تبدیل زیر است

$$i(\overline{-\bar{z} + 10}) + 2 - 2i = -iz + 2 + 10i = e^{3i\pi/2}z + 2 + 10i$$

که دورانی است ساعتسو به زاویه 90° و مرکزی که ریشهٔ معادلهٔ

$$-iz + 2 + 10i = z$$

یعنی نقطهٔ $3i + 5$ است.

سه لم فوق را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیهٔ ۷.۹. حرکتهای صلب صفحهٔ اقلیدسی همگی به صورت زیرند

$$f(z) = e^{i\alpha}z + c \quad \text{یا} \quad f(z) = e^{i\alpha}\bar{z} + 2$$

که در آنها α عدد حقیقی و دلخواه و c عدد مختلط دلخواه است. به عکس، هر تابعی به یکی از این صورتهای یک حرکت صلب صفحهٔ اقلیدسی است.

برهان: حالا می‌دانیم که انتقالها، دورانها و تقارنهای صفحهٔ اقلیدسی همگی به این صورت‌اند. چون ترکیب هر دو تابع از این شکل تابعی است از یکی از این دو شکل، پس لغزه‌ها نیز به همین صورت‌اند.

به عکس، می‌دانیم که هر تابعی به صورت $e^{i\alpha}z + c$ یک دوران یا یک انتقال است، هر تابعی به صورت $z + c$ یک انتقال است و هر تابع به صورت $e^{i\alpha}\bar{z}$ یک تقارن (محوری). بنابراین هر تابع به صورت $e^{i\alpha}\bar{z} + c$ ترکیب یک انتقال و یک تقارن، و از این رو یک لغزه است. ■

مثال ۸.۹. تبدیل $f(z) = i\bar{z} + 1 - i$ یا یک تقارن است یا یک لغزه. در واقع با پیدا کردن نقاط ثابت آن، یعنی، با اثبات اینکه معادله

$$i\bar{z} + 1 - i = z$$

ریشه دارد، نشان می‌دهیم که این تبدیل یک تقارن است. برای پیدا کردن این ریشه‌ها به جای z قرار می‌دهیم $x + iy$ و به دست می‌آوریم

$$i(x - iy) + 1 - i = x + iy$$

یا

$$ix + y + 1 - i = x + iy$$

از مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی، معادله $x = y + 1$ به دست می‌آید و از مساوی قرار دادن قسمت‌های انگاری معادله $y = x - 1$. چون این معادله‌ها یکی هستند، نتیجه می‌گیریم که $f(z)$ ، تقارن نسبت به خط $y = x - 1$ است.

مثال ۹.۹. تبدیل $f(z) = i\bar{z} - 2$ یا یک تقارن است یا یک لغزه. چون $f(0) = -2$ ، محور این حرکت صلب شامل نقطه

$$\frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

است. به علاوه $f(-1) = -2 - i$ و لذا $f(z) = \gamma_{-1, -2-i}$.

۲.۹ حرکتهای صلب هذلولوی

اکنون به شرح حرکتهای صلب صفحه هذلولوی برحسب اعداد مختلط می‌پردازیم. البته از این حرکتها، انتقالهای افقی و تقارن نسبت به ژنودزیکهای راست، حرکتهای صلب اقلیدسی نیز هستند، و از این رو آنها را می‌توان به ترتیب به صورت

$$f(z) = -\bar{z} + r \quad \text{یا} \quad f(z) = z + r$$

بیان نمود، که در آن r عددی است حقیقی و دلخواه.

پیشاپیش باید خواننده را از اندکی بی‌دقتی که در کمین است آگاه کنیم. تابع $f(z) = z + 1$ دقیقاً آن حرکت صلب هذلولوی نیست که هر نقطه را به اندازه یک واحد به طرف راست منتقل می‌کند. این دو تبدیل در حوزه با هم اختلاف دارند. حوزه یکی تمامی صفحه است و دیگری فقط در نیم‌صفحه فوقانی تعریف شده است. ولی به لحاظ ایجاز، این تفاوتها را نادیده خواهیم گرفت. با برگشتن به انعکاس $I_{O,k}$ توجه می‌کنیم که اگر $z' = I_{O,k} z$ ، آنگاه

$$\arg(z') = \arg(z) \quad \text{و} \quad |z| |z'| = k^2$$

در نتیجه

$$z' = I_{O,k}(z) = \frac{\kappa^2}{\bar{z}}$$

زیرا عدد κ^2/\bar{z} در شرایط

$$\arg\left(\frac{\kappa^2}{\bar{z}}\right) = \arg(z) \quad \text{و} \quad \left|\frac{\kappa^2}{\bar{z}}\right| |z| = \kappa^2$$

نیز صدق می‌کند. اگر $A(a, 0)$ نقطه دلخواهی بر محور x ها باشد، بنابر تمرین ۱۳.۳،

$$I_{A,\kappa}(z) = \tau_{OA} \circ I_{O,\kappa} \circ \tau_{AO}(z) = \frac{\kappa^2}{\bar{z} - a} + a$$

این فرمول یک بیان تحلیلی همهٔ انعکاسهایی است که حرکتهای صلب هذلولوی نیز هستند.

مثال ۱۰.۹. انعکاس $I_{O,2}$ عبارتی به صورت

$$\frac{2^2}{\bar{z}}$$

دارد و از این رو نقطهٔ $1+i$ را بر نقطهٔ

$$\frac{2^2}{1+i} = \frac{4}{1-i} = \frac{4}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{4+4i}{1+1} = 2+2i$$

می‌نگارد. از سوی دیگر اگر $A = (3, 0)$ ، آنگاه انعکاس $I_{A,2}$ دارای صورت تحلیلی

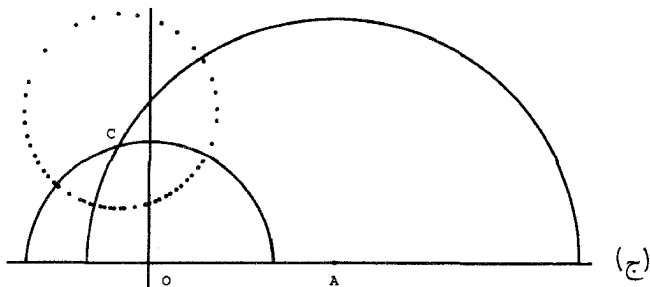
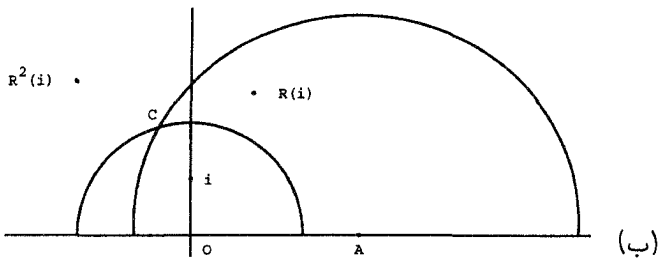
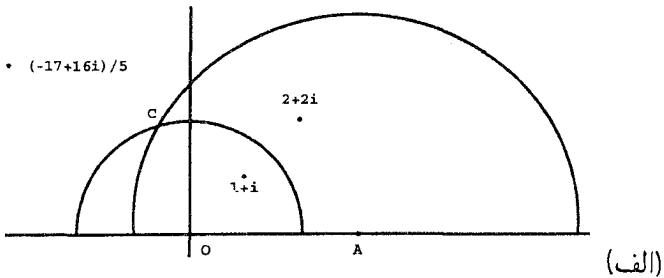
$$\frac{4^2}{\bar{z} - 3} + 3 = \frac{3\bar{z} + 7}{\bar{z} - 3}$$

است. و از این رو همان نقطه $۱ + i$ را بر نقطه

$$\frac{\overline{3(1+i)} + 7}{1+i-3} = \frac{10-3i}{-2-i} = \frac{-17+16i}{5}$$

می‌نگارد.

انعکاسهای $I_{O,2}$ و $I_{A,4}$ تقارنهای هذلولوی هستند. به علاوه محورهای آنها متقاطع‌اند (شکل ۲.۹ الف). در نتیجه چون گزاره ۱۰.۲ مطلق است، ترکیب $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$ یک دوران



هذلولوی است. بیاییم این ترکیب را مفصلتر بررسی کنیم. با توجه به اینکه مزدوج $4/\bar{z}$ مساوی است با $4/z$ ، داریم

$$R(z) = I_{A,4} \circ I_{O,2}(z) = I_{A,4} \left(\frac{4}{z} \right) = \frac{3\frac{4}{z} + 7}{\frac{4}{z} - 3} = \frac{7z + 12}{-3z + 4}$$

چون این نگاشت یک دوران هذلولوی است باید در نیمصفحه فوقانی یک نقطه ثابت یکتا داشته باشد. بیاییم این مرکز را مستقیماً، بدون توجه به ش ۲.۹، پیدا کنیم. این عمل را با حل معادله

$$R(z) = \frac{7z + 12}{-3z + 4} = z$$

که پس از ساده کردن به معادله درجه دوم

$$z^2 + z + 4 = 0$$

تبدیل می شود، انجام می دهیم. ریشه های این معادله چنین اند:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

که فقط ریشه

$$\frac{-1 + i\sqrt{15}}{2}$$

در نیمصفحه فوقانی قرار دارد. بنابراین ترکیب $R = I_{A,4} \circ I_{O,2}$ یک دوران هذلولوی است به مرکز نقطه فوق. زاویه دوران را می توان با استفاده از گزاره ۲.۶ تعیین نمود. بنابراین زاویه بین محورهای تقارنهای هذلولوی $I_{O,2}$ ، $I_{A,4}$ چنین پیدا می شود

$$\cos^{-1} \left(\frac{AC^2 + OC^2 - OA^2}{2 \cdot AC \cdot OC} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{11}{16} \right)$$

و از این رو زاویه دوران هذلولوی R مساوی است با:

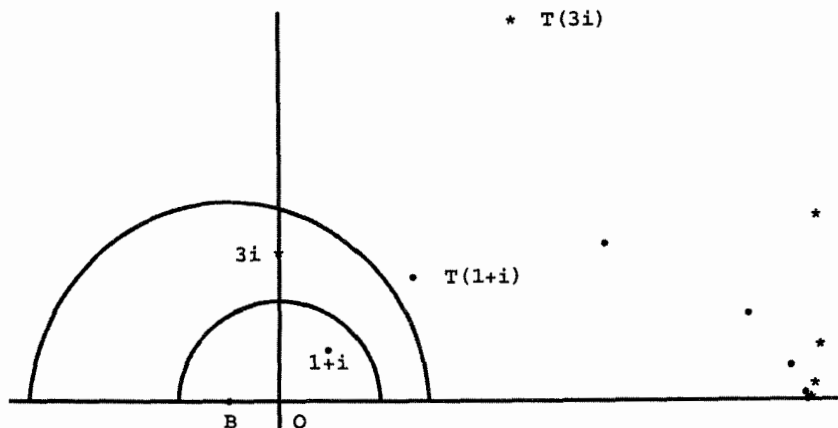
$$2 \cos^{-1} \left(\frac{11}{16} \right) = 93,13 \dots^\circ$$

نحوه عمل دورانی R در شکل‌های ۲.۹ ب و ۲.۹ ج نشان داده شده است. در شکل اول از این شکل‌ها، نقاط i ، $R(i)$ و $R^2(i) = R(R(i))$ نشان داده شده‌اند. شکل دوم، ۲.۹ ج، شامل نقاط مربوط به 5° مقدار اول $R^n(i)$ است. دلیل قانع‌کننده‌ای برای شکل مستدیر این مجموعه نقاط وجود دارد. چون R یک حرکت صلب هذلولوی است فاصله هذلولوی c از $R^k(i)$ مساوی است با فاصله هذلولوی c از $R(c) = c$ از $R^k(i) = R^{k+1}(i)$ از $R(c) = c$. لذا بنابر اصل استقرای ریاضی فاصله هذلولوی همه نقاط $R^k(i)$ از c ثابت است. در نتیجه این مجموعه نقاط یک دایره هذلولوی به مرکز c تشکیل می‌دهند. و بنابر فرع ۳.۵، این به علت مستدیر بودن شکل مجموعه نقاط است.

مثال ۱۱.۹. حال ترکیب $T = I_{B,2} \circ I_{O,2}$ را که در آن $B = (-1, 0)$ ، در نظر می‌گیریم (شکل ۳.۹). چون محورهای تقارنهای تشکیل‌دهنده این ترکیب که صورت تحلیلی آن به صورت

$$T(z) = I_{B,2} \circ I_{O,2}(z) = \frac{z^2}{\frac{z^2}{z} + 1} - 1 = \frac{15z - 4}{z + 4}$$

است، متقاطع نیستند، این ترکیب همتای هذلولوی یک انتقال اقلیدسی است. چند مقدار اول $T^n(1+i)$ و $T^n(3i)$ را (که نقاط آخری با ستاره نشان داده شده‌اند) در شکل ۳.۹ مشخص کرده‌ایم. روشن است که این نقاط، به تعبیر اقلیدسی، به یک نقطه از محور x ‌ها همگرا هستند. اهمیت این حد مشترک در بخش ۵ این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت. البته به بیان هذلولوی این دنباله نقاط هر دو به بینهایت هذلولوی واگرا هستند.



شکل ۳.۹

بحث و مثالهای فوق کارایی اعداد مختلط را در ارائهٔ شرحی عینی و کارآمد از تقارن‌ها و دورانهای هذلولوی نشان می‌دهند. یادآور می‌شویم که بنابر قضیهٔ ۶.۵ هر حرکت صلب هذلولوی ترکیبی است از چند تقارن هذلولوی. بنابراین بجاست که انتظار داشته باشیم تمام حرکت‌های صلب هذلولوی عبارتهای روشن مشابهی برحسب اعداد مختلط داشته باشند. ثابت می‌شود که این عبارتها به‌طور شگفت‌آوری ساده‌اند.

قضیهٔ ۱۲.۹. حرکت‌های صلب صفحهٔ هذلولوی با توابع مختلط به صورتهای

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\text{الف})$$

یا

$$f(z) = \frac{\alpha(-\bar{z}) + \beta}{\gamma(-\bar{z}) + \delta} \quad (\text{ب})$$

که در آنها، $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ اعداد حقیقی‌اند و $-\bar{z} > \alpha\delta - \beta\gamma$ یکی هستند. برهان: روشن است که انتقال‌های افقی دارای شکل

$$\frac{1z + r}{0z + 1}$$

و تقارن نسبت به ژئودزیکهای راست به شکل

$$\frac{1(-\bar{z}) + r}{0(-\bar{z}) + 1}$$

و تقارن نسبت به ژئودزیکهای کمانی دارای شکل

$$\frac{\kappa^2}{\bar{z} - a} + a = \frac{a\bar{z} + \kappa^2 - a^2}{\bar{z} - a} = \frac{-a(-\bar{z}) + (\kappa^2 - a^2)}{-(-\bar{z}) - a}$$

هستند و در همهٔ موارد $0 < \alpha\delta - \beta\gamma$.

وانگهی، اگر f و g دو تابع با این قالب باشند، ترکیب آنها نیز دارای همین قالب است. مثلاً اگر

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{و} \quad g(z) = \frac{\alpha'(-\bar{z}) + \beta'}{\gamma'(-\bar{z}) + \delta'}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} f \circ g(z) &= \frac{\alpha \frac{\alpha'(-\bar{z}) + \beta'}{\gamma'(-\bar{z}) + \delta'} + \beta}{\gamma \frac{\alpha'(-\bar{z}) + \beta'}{\gamma'(-\bar{z}) + \delta'} + \delta} \\ &= \frac{(\alpha\alpha' + \gamma'\beta)(-\bar{z}) + (\alpha\beta' + \beta\delta')}{(\gamma\alpha' + \delta\gamma')(-\bar{z}) + (\gamma\beta' + \delta\delta')} \end{aligned}$$

که در آن ضرایب داخل پرانتزها البته همگی حقیقی اند و

$$\begin{aligned} & (\alpha\alpha' + \gamma'\beta)(\gamma\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta\gamma') \\ &= \alpha\alpha'\delta\delta' + \beta\gamma'\beta'\gamma - \alpha\beta'\delta\gamma' - \beta\delta'\gamma\alpha' \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') > 0 \end{aligned}$$

تحقیق درستی سایر حالتها در تمرین ۱۶ به عهده خواننده واگذار شده است. چون بنابر قضیه ۶.۵ هر حرکت صلب هذلولوی ترکیبی از چند تقارن هذلولوی است، در نتیجه همگی یا دارای صورت (الف) یا دارای صورت (ب) هستند.

به عکس فرض کنید $f(z)$ از نوع (الف) باشد. با توجه به اینکه $\alpha, \gamma, \beta, \delta$ اعداد حقیقی اند، به آسانی ثابت می‌شود که

$$f(z) = - \left[\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma^2}{\bar{z} - (-\delta/\gamma)} + \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) \right] + \frac{\alpha - \delta}{\gamma}$$

از این رو $f(z)$ مساوی است با ترکیب انعکاس $I_{(-\delta/\gamma, 0)}$ با تقارن نسبت به ژئودزیک راست در بالای نقطه $(\frac{\alpha-\delta}{\gamma}, 0)$ که هر دو حرکت صلب هذلولوی هستند. از سوی دیگر، اگر $f(z)$ از نوع (ب) باشد، آنگاه

$$f(z) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)/\gamma^2}{\bar{z} - \delta/\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} + \frac{\alpha - \delta}{\gamma}$$

چون $\alpha\delta - \beta\gamma$ مثبت است، نتیجه می‌شود که $f(z)$ در واقع ترکیب یک انعکاس نسبت به یک ژئودزیک کمانی و یک انتقال افقی است، که هر دو حرکت‌های صلب هذلولوی هستند. بنابراین خود $f(z)$ یک حرکت صلب هذلولوی است. به علاوه چون هر انتقال افقی ترکیب دو تقارن نسبت به ژئودزیک‌های راست است، از اینجا نتیجه می‌شود که تبدیلهای نوع (ب) ترکیب سه تقارن هذلولوی هستند مگر اینکه $\alpha = \delta$ ، که در این حالت خود این تبدیل یک انعکاس است.

آنچه می‌خواستیم

مثال ۱۳.۹. برهان قضیه ۱۲.۹ شامل دستورالعملی برای بیان هر حرکت صلب هذلولوی به صورت ترکیبی از تقارنهای هذلولوی است. از این رو حرکت صلب هذلولوی که توسط

$$\frac{2z + 3}{z + 4}$$

داده شده، ترکیبی است متشکل از انعکاس

$$\frac{(1-3)/1}{\bar{z} - (-4)} + (-4) = I_{(-4,0)} \cdot \sqrt{5}$$

و به دنبال آن تقارن $z - 2 - \bar{z}$ ، که محور آن ژئودزیک قائم در بالای نقطه $(-1, 0)$ است. تبدیلهایی به صورت

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

که در آنها a, b, c, d اعداد مختلط دلخواه‌اند و $ad - bc \neq 0$ ، تبدیلهای موبیوس نامیده می‌شوند. چون بسیاری از تبدیلهای مورد بحث از این پس تبدیلهای موبیوس خواهند بود، راحتی خواننده در کارکردن با آنها برای ما خیلی مهم بوده است. به‌ویژه، کرارا از این نکته استفاده خواهیم کرد که ترکیب دو تبدیل از این نوع با قاعده

$$\frac{az + b}{cz + d} \circ \frac{a'z + b'}{c'z + d'} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \quad (1.9)$$

داده می‌شود، و در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} \circ \frac{dz - b}{-cz + a} &= \frac{dz - b}{-cz + a} \circ \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{(ad - bc)z + 0}{0z + (ad - bc)} = z \end{aligned} \quad (2.9)$$

بنابراین تمام تبدیلهای موبیوس عکسپذیرند و

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \quad \text{اگر} \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

بی‌شک خواننده با تجربه در ریاضیات به شباهت صوری قواعد (۱.۹) و (۲.۹) از یک سو و جبر ماتریسهای 2×2 از سوی دیگر توجه خواهد کرد. بررسی درستی این قواعد به عهده خواننده واگذار شده است (تمرین ۲۰).

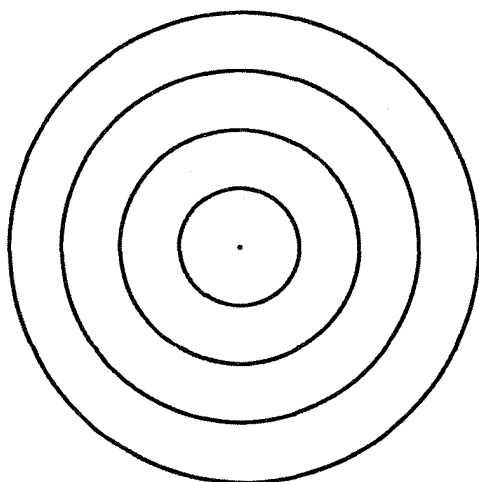
۳.۹ نمودارهای جریان اقلیدسی

شرح حرکت‌های صلب هذلولوی که با قضیه ۱۲.۹ داده شده از نظر جبری خیلی کامل و رضایت‌بخش است. ولی، به احتمال زیاد، خوانندگان هنوز درک شهودی چندان زیادی از آن ندارند. تجسم

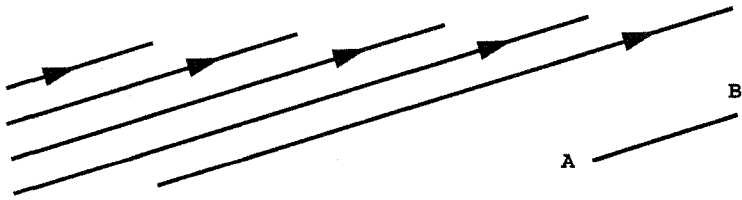
تقارنهای هذلولوی بسیار آسان است. این تقارنها اساساً تقارنهای آینه‌یی نسبت به ژئودزیکهای کمائی هستند. ولی در مورد دورانها چه می‌توانیم بگوییم؟ وانگهی، می‌دانیم که اگر بخواهیم دقیق باشیم، در صفحه هذلولوی اصلاً انتقال هذلولوی نداریم، زیرا مفهوم توازی در این صفحه بسیار مبهم است. بنابراین مشابه‌های هذلولوی انتقالها، در صورت وجود، چه هستند؟ به‌علاوه وقتی پاسخ این سؤالها داده شد، اگر تبدیلی از نوع داده شده در قضیه ۱۲.۹ داده شده باشد، چگونه تشخیص می‌دهیم که این تبدیل یک دوران هذلولوی، انتقال یا چیز دیگری است؟

پیش از مبادرت به پاسخ این پرسشها، بار دیگر حرکت‌های صلب اقلیدسی را بررسی می‌کنیم. اگر تعریف ریاضی یک دوران را به‌عنوان گونه‌ای از توابع مجرد موقتاً فرمواس کنیم و به آن به‌عنوان یک عمل فیزیکی که عملاً صفحه را حول یکی از نقاطش می‌گرداند فکر کنیم، آنگاه وابسته کردن نموداری معین به دوران بسیار جالب خواهد شد. این نمودار (شکل ۴.۹) متشکل است از دوایر متحدالمرکزی که مرکز آنها مرکز دوران است. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم صفحه را به‌اندازه 90° حول مبدأ دوران دهیم، و فرض کنید در هر نقطه با مختصات صحیح لامپی روی هر دو محور نصب شده است، اگر دهانه یک دوربین عکاسی در حین اجرای دوران کاملاً باز بماند، تصویر حاصل مجموعه‌ای از دایره‌های متحدالمرکز را نشان خواهد داد.

عین همین نمودار به تمام دورانها مربوط می‌شود، البته بجز اینکه مرکز دایره‌های متحدالمرکز باید بر مرکز دوران واقع باشد. حال زاویه دوران را در نظر می‌گیریم و به دوران به‌عنوان عملی که در طول دایره‌های متحدالمرکز صورت می‌گیرد، فکر می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، دوران $R_{C,\alpha}$ با تشکیل



شکل ۴.۹



شکل ۵.۹

دایره‌های متحدالمرکز حول نقطه C و سپس تصور اینکه هر نقطه P از صفحه بر دایره به مرکز C کمان مقابل به α درجه را طی می‌کند، مجسم می‌شود. این دایره‌ها را خط‌های جریان $R_{C,\alpha}$ می‌نامیم زیرا می‌توانیم تصور کنیم که دوران بر روی این خط‌ها صورت می‌گیرد.

نمودار مشابهی را می‌توان به انتقال‌ها وابسته کرد. یک بار دیگر، فکر کنید که انتقال T_{AB} با حرکت پیوسته صفحه اجرا می‌شود. در این حالت خط‌های جریان متشکل از تمام خطوط موازی با AB هستند (شکل ۵.۹). درست مانند آنچه که در مورد یک زاویه دوران می‌توان گفت، اندازه تغییر مکان مربوط به انتقال در نمودار مشخص نیست؛ ولی، وقتی به انتقال به‌عنوان حرکتی که در طول خط‌های جریان صورت می‌گیرد بنگریم می‌توانیم آن را هم به‌خاطر بیاوریم. برخط‌های جریان انتقال پیکانهایی کشیده شده‌اند تا جهت تبدیل را نشان دهند. این نوع پیکانها را نمی‌توان در مورد نمودار جریان یک دوران به‌کار برد، زیرا به‌عنوان مثال، هر دوران 180° پادساعتسو یک دوران 180° ساعتسو نیز هست. این پدیده وابسته کردن جهت را به دوران، بدون ابهام، غیرممکن می‌سازد.

باید توجه کرد که خط‌های جریان هم در انتقال و هم در دوران عملاً از مجموعه‌های ثابتی تشکیل شده‌اند. به‌عبارت دیگر، اگر L یک خط جریان دوران (یا انتقال) f باشد، L خمی است که $\delta(L) = L$. چون تعریف دقیق خط‌های جریان نیازمند مفاهیمی بیرون از ظرفیت این کتاب است، ما این ویژگی را به‌عنوان تعریف خط‌های جریان به‌کار می‌بریم. به‌عبارت دیگر یک خط جریان تبدیل f خمی است چون L به‌طوری که $f(L) = L$.

نموداری متشکل از چند خط جریان یک حرکت صلب نمودار جریان نامیده می‌شود. از این رو شکل‌های ۴.۹ و ۵.۹ به ترتیب نمودارهای جریان یک دوران و یک انتقال هستند. شاید خوانندگان همچنین ندانند که نمودارهای جریان تقارنها و لغزه‌ها به چه صورت هستند. ولی

با اندکی تفکر (نه تنها دربارهٔ تقارن) قانع خواهند شد که چنین نموداری الزاماً نمودار مناسبی نخواهد بود. دلیل آن این است که اجرای فیزیکی یک تقارن مستلزم گرداندن صفحه به اندازه ۱۸۰° در فضاست. بنابراین هر نمودار جریانی برای یک تقارن، سه‌بعدی و پیچیده‌تر از آن خواهد بود که بتوان در اینجا به آن پرداخت. البته همین سخن در مورد لغزه‌ها نیز صادق است.

۴.۹ نمودارهای جریان هذلولوی-دورانها

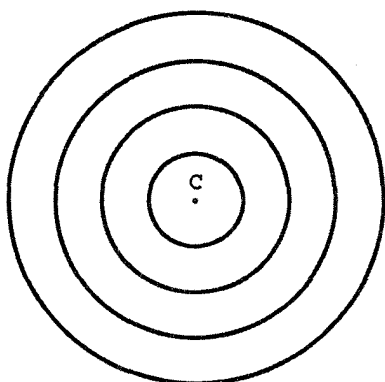
اکنون به نمودارهای جریان حرکت‌های صلب هذلولوی می‌پردازیم به این امید که شرح آنها به خواننده امکان دهد تا دریافت راحت‌تری از صفحهٔ هذلولوی داشته باشد. مثال ۱۰.۹، نمونهٔ کاملی از دورانهای هذلولوی است. در این مثال یک مرکز دوران C و یک زاویهٔ دوران α مشخص شده‌اند. به هر نقطهٔ P از صفحهٔ هذلولوی، نقطهٔ P' را چنان مربوط می‌کنیم که زاویهٔ PCP' مساوی با α باشد و $h(C, P) = h(C, P')$. تابع f که با تساوی $f(P) = P'$ تعریف می‌شود، یک دوران هذلولوی نامیده می‌شود. همان استدلالی را که در گزارهٔ ۸.۲ به کار بردیم تا ثابت کنیم که هر دوران اقلیدسی یک حرکت صلب اقلیدسی است، می‌توان موبه‌مو به‌کار برد و ثابت کرد که دورانهای هذلولوی حرکت‌های صلب هذلولوی هستند.

چون به‌ازای هر P ، $h(C, P) = h(C, P')$ و $P' = f(P)$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که f هر دایرهٔ هذلولوی را بر خودش می‌نگارد. از این‌رو، مسلماً خواننده از این کشف تعجب نخواهد کرد که خط‌های جریان f دایره‌های متحدالمرکزی به مرکز هذلولوی مشترک C هستند (شکل ۴.۹).

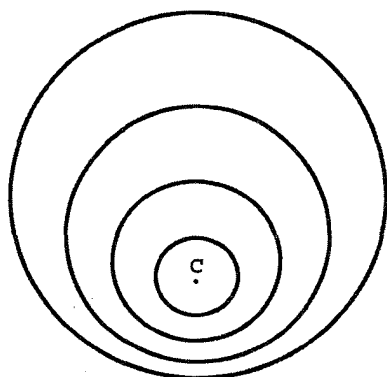
مثالهای بیشتری از دورانهای هذلولوی در بخش ۷ این فصل در نظر گرفته شده‌اند.

۵.۹ نمودارهای جریان هذلولوی-انتقالها

در این کتاب کزراً گفته شده است که تبدیلیایی به نام انتقالهای هذلولوی وجود ندارند. این ادعا را باید با قید احتیاط پذیرفت. برای پی‌بردن به علت آن، دورانها و انتقالهای صفحهٔ اقلیدسی را مجدداً بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که هر یک از حرکت‌های صلب صفحهٔ اقلیدسی ترکیبی از چند تقارن است. از میان همهٔ این تبدیلهای دورانها و انتقالها با این واقعیت مشخص می‌شوند که آنها را می‌توان با ترکیب دو تقارن بیان کرد. بنابراین عطف توجه به حرکت‌های صلب هذلولوی که ترکیب دو تقارن



شکل ۶.۹ الف) یک منظره هذلولوی از خطهای جریان یک دوران هذلولوی:

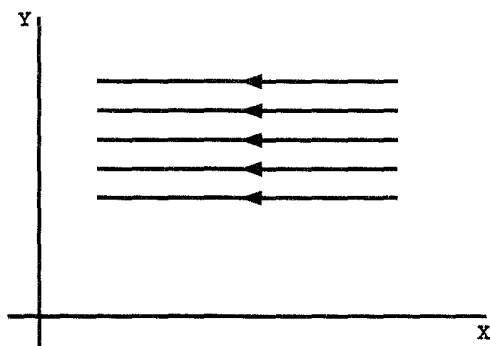


شکل ۶.۹ ب) یک منظره اقلیدسی از خطهای جریان یک دوران هذلولوی.

هذلولوی هستند، غیرمنطقی نخواهد بود. چنانچه می‌دانیم، طبق قضیه ۱۲.۹، این ترکیبها حرکت‌های صلب هذلولوی هستند که تبدیلیهای موبیوس نیز هستند. این تبدیلیها را حرکت‌های صلب موبیوسی می‌نامیم. به قیاس با صفحه اقلیدسی، هر انتقال هذلولوی را یک حرکت صلب موبیوسی تعریف می‌کنیم که نقطه ثابت نداشته باشد. اکنون به روشی اسلوبمند بررسی این انتقال‌های هذلولوی را دنبال می‌کنیم.

در بافت گسترده‌تر از صفحه مختلط، نقاط ثابت حرکت صلب موبیوسی

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (3.9)$$



شکل ۷.۹

ریشه‌های معادله

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{یا} \quad \gamma z^2 - (\alpha - \delta)z - \beta = 0$$

هستند، و از این رو تا زمانی که $\gamma \neq 0$ ، این نقاط عبارت‌اند از

$$\frac{(\alpha - \delta) \pm \sqrt{\Delta}}{2\gamma}, \quad \Delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \quad (۴.۹)$$

وقتی $\gamma = 0$ ، نقطه ثابت چنین خواهد شد

$$\delta \neq \alpha \quad \text{مشروط بر اینکه} \quad \frac{\beta}{\delta - \alpha}$$

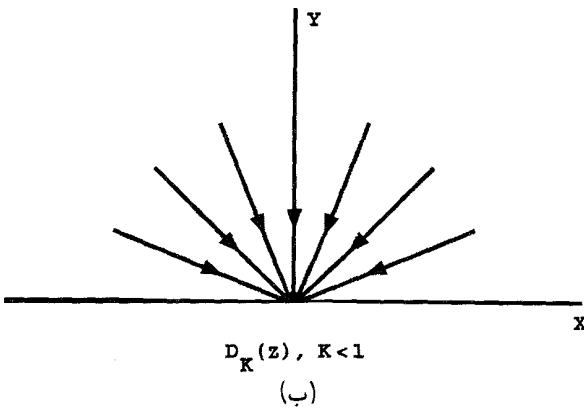
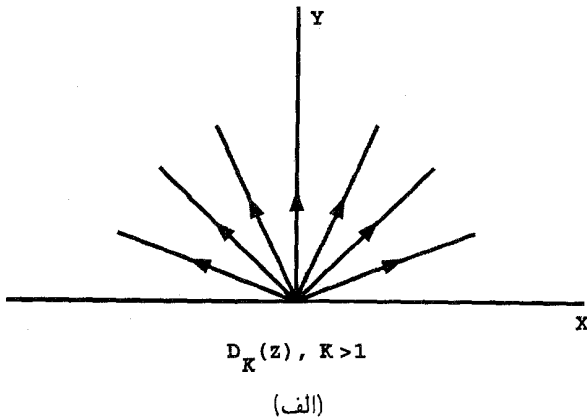
اگر $\delta = \alpha$ ، وقتی $\gamma = 0$ داریم $f(z) = z + \frac{\beta}{\delta}$ و لذا f نقطه ثابت ندارد.

آخرین حالتی که باید شرح دهیم، یعنی حالتی که در آن $f(z) = z + \frac{\beta}{\delta}$ ، چیز جدیدی نیست. چون β و δ اعداد حقیقی هستند، این حرکت صلب هذلولوی اتفاقاً یک انتقال اقلیدسی نیز هست، و لذا نمودار جریان آن متشکل از تمام خطهای اقلیدسی موازی با محور x هاست (شکل ۷.۹). جهت جریان به علامت $\frac{\beta}{\delta}$ بستگی دارد. اگر این کسر مثبت باشد، جریان متوجه به سمت راست است و اگر منفی باشد متوجه به سمت چپ.

در حالت قبل وقتی $\gamma = 0$ ولی $\delta \neq \alpha$ ، تابع $f(z)$ فقط یک نقطه ثابت دارد، که $(\frac{\beta}{\delta - \alpha}, 0)$ است. چون این نقطه ثابت بر محور x ها و در خارج صفحه هذلولوی است نمی‌تواند نقطه ثابتی برای حرکت صلب هذلولوی مربوطه باشد. این حالت را با استفاده از تابع

$$D(z) = 2z$$

که تنها نقطه ثابت آن مبدأ $(0, 0)$ است نشان می‌دهیم. اگر z را به صورت قطبی $re^{i\theta}$ بنویسیم، خطهای جریان $D(z)$ آشکار می‌شوند. زیرا در این صورت روشن است که شناسه $D(z) = 2re^{i\theta}$ همان شناسه z و قدرمطلق آن دو برابر قدرمطلق آن است. بنابراین هر خط جریان مجموعه‌ای است از نقاط که همگی دارای یک شناسه‌اند، به عبارت دیگر نیمخطی است که از مبدأ رسم شده است. نمودار جریان $D(z) = 2z$ در شکل ۸.۹ الف رسم شده است. روشن است که همین شکل نمودار جریان $D_{\kappa}(z) = \kappa z$ را به ازای هر مقدار مثبت κ نشان می‌دهد. از فرمول $|D_{\kappa}(i) = |\kappa i| = \kappa$ نتیجه می‌شود که وقتی $\kappa > 1$ ، خطهای جریان متوجه به خارج‌اند و وقتی $\kappa < 1$ ، متوجه به داخل.



شکل ۸.۹

اکنون به بررسی نقاط ثابت حرکت‌های صلب مویبوسی که در آنها $\gamma \neq 0$ می‌پردازیم. از این نقطه‌ها، تنها آن نقطه‌های ثابتی که در نیمصفحه بالایی قرار دارند، یعنی آن نقطه‌هایی که قسمت انگاری مثبت دارند، نقطه‌های ثابت مربوط به حرکت صلب هذلولوی را تشکیل می‌دهند. چون $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ همگی حقیقی‌اند، علامت Δ جای نقطه ثابت را نسبت به محور x ‌ها معین می‌کند. وقتی Δ منفی است، دو نقطه ثابت ممکن به صورت $a \pm ib$ هستند، که در آنها می‌توان b را مثبت فرض کرد. از این دو نقطه، نقطه $a - ib$ در خارج نیمصفحه بالایی قرار دارد و بنابراین نقطه ثابتی برای حرکت صلب هذلولوی نیست. به عکس، $a + ib$ در نیمصفحه فوقانی قرار دارد و بنابراین حرکت صلب f در (۳.۹) درست یک نقطه ثابت دارد. چون حرکت‌های صلب مویبوسی که نقطه ثابت ندارند مورد توجه ماست، روشن است که به آنهایی توجه می‌کنیم که برای آنها Δ یا مثبت است یا صفر.

به جای ادامه این بحث در صورت کلی، با بررسی حرکت صلب مویبوسی

$$T(z) = \frac{2z + 1}{z + 2}$$

بحث را به حالت خاص محدود می‌کنیم. برای این حرکت صلب هذلولوی $\Delta = (2-2)^2 + 4 = 4$ ، و بنابراین دو نقطه ثابت عمل $T(z)$ بر تمامی صفحه مختلط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ هستند، که هیچ‌کدام از این دو، در نیمصفحه بالایی قرار ندارند. تصادفاً اکنون اطلاعات کافی برای رسم یک نمودار جریان برای این حرکت صلب T در اختیار داریم. چون حرکتی است صلب، ژئودزیکها را بر ژئودزیکها می‌نگارد. بنابراین اگر g یک ژئودزیک کمانی واصل بین نقطه‌های $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ باشد، $T(g)$ ژئودزیک دیگری خواهد بود. ولی چون عمل T در تمام صفحه (بجز نقطه $z = -2$) پیوسته است، $T(g)$ ژئودزیکی است که نقطه‌های $(-1, 0)$ و $T(-1, 0) = (-1, 0)$ و $T(1, 0) = (1, 0)$ را به هم وصل می‌کند. به عبارت دیگر $T(g) = g$ و بنابراین g یکی از خط‌های جریان T است.

به محض در دست داشتن این خط جریان، پیدا کردن سایر خطوط جریان آسان است. ملاحظه می‌کنیم که اگر P نقطه دلخواهی از صفحه هذلولوی باشد، چون حرکتی است صلب، d ، فاصله نقطه P از g ، مساوی است با فاصله $T(P)$ از $T(g)$. از این رو P و $T(P)$ از g به یک فاصله‌اند. در نتیجه اگر m مکان هندسی نقاطی به فاصله عدد ثابت d از ژئودزیک g (و در یک طرف g) باشد، آنگاه $T(m) = m$ ، و بنابراین m یک خط جریان T است. اما با توجه به فصل ۵، اکنون می‌دانیم که m لزوماً کمانی از یک دایره اقلیدسی است که از نقطه‌های $(-1, 0)$

و $(1, 0)$ می‌گذرد، بنابراین تمام خطوط جریان لازم برای رسم نمودار جریان در شکل ۹.۹ را داریم. جهت خط‌های جریان با توجه به این واقعیت که

$$T(i) = \frac{2i + 1}{i + 2} = \frac{4 + 3i}{5}$$

تعیین می‌شود. شکل کاملاً مشابهی جریان تبدیل صلب مویوسی

$$T_{\alpha, \beta, \gamma}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > 0$$

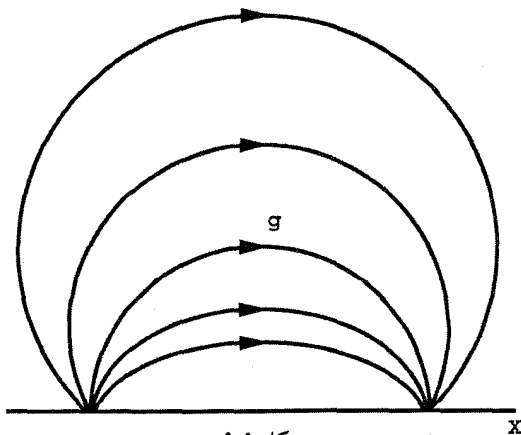
را مشخص می‌کند. زیرا بنا بر فرمول (۲.۹) در بالا، نقطه‌های ثابت $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ در صفحه اقلیدسی عبارت‌اند از

$$z = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

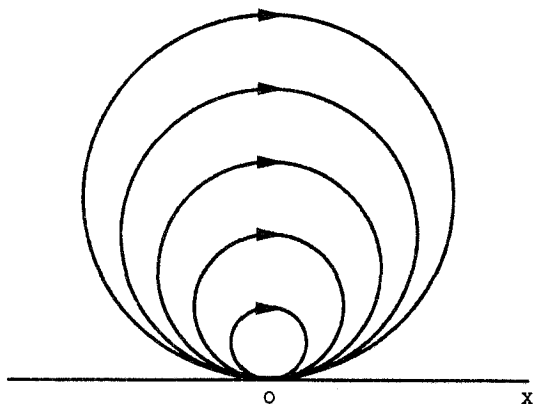
و این نقاط دقیقاً همان نقش را ایفا می‌کنند که نقاط $z = \pm 1$ برای T ایفا می‌کنند. جهت جریان را می‌توان به آسانی با پیدا کردن جای نقطه $T_{\alpha, \beta, \gamma}(i)$ مشخص نمود. تبدیل صلب مویوسی

$$M(z) = \frac{z}{z + 1}$$

رفتار اندک متفاوتی را نشان می‌دهد. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که برای این تبدیل $\Delta = 0$ ، و لذا این تبدیل فقط یک نقطه ثابت (گرچه مضاعف) در $z = 0$ دارد. می‌توان نمودار جریان



شکل ۹.۹



شکل ۱۰.۹

این $M(z)$ را با تجسس، با قرار دادن $(\pm \varepsilon, 0)$ به جای نقاط ثابت $(\pm 1, 0)$ در تبدیل $T(z)$ ، که در آن ε عدد حقیقی بسیار کوچکی است، به دست آورد. در این صورت بسیار جالب است که به این نتیجه برسیم که خطهای جریان $M(z)$ از دایره‌های اقلیدسی در نیمصفحه بالایی تشکیل شده‌اند، به طوری که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده‌اند، در مبدأ بر محور x مماس‌اند. اکنون یک استنتاج تا حدی دقیقتر از همین نتیجه را در ذیل می‌آوریم.

انعکاس $I_{0,1}$ ، یعنی انعکاسی را که دایره واحد را نقطه به نقطه ثابت نگاه می‌دارد، با I نشان می‌دهیم. در این صورت

$$I(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \bar{z}^{-1}$$

ولذا

$$\begin{aligned} (I \circ M \circ I)(z) &= (I \circ M)(\bar{z}^{-1}) = I\left(\frac{\bar{z}^{-1}}{\bar{z}^{-1} + 1}\right) \\ &= I\left(\frac{1}{1 + \bar{z}}\right) = z + 1 \end{aligned}$$

بنابراین به طوری که در شکل ۷.۹ ملاحظه کرده‌ایم، خطهای جریان $I \circ M \circ I$ خطهای راست اقلیدسی موازی با محور x ‌ها هستند. ولی باید توجه کرد که اگر m یک خط جریان $I \circ M \circ I$ باشد، $I(m)$ به علت محاسبات جبری زیر یک خط جریان M است:

$$(I \circ M \circ I)(m) = m$$

بنابراین

$$(I \circ (I \circ M \circ I))(m) = I(m)$$

یا

$$((I \circ I) \circ (M \circ I))(m) = I(m)$$

چون I^2 تبدیل همانی است نتیجه می‌گیریم که

$$M(I(m)) = I(m)$$

بنابراین $I(m)$ در واقع یک خط جریان M است. چون $I(m)$ دایره‌ای مماس بر محور x ‌ها در مبدأ است بنابراین مشاهده می‌کنیم که شکل ۱۰.۹ در واقع نمودار جریان $M(z)$ را نشان می‌دهد. روشن است که این تحلیل نمودار جریان $M(z)$ برای هر حرکت موبیوسی دلخواه با یک نقطه ثابت مضاعف یکتا در $z = 0$ دقیقاً صادق است. بنابراین برای کلیه حرکت‌های صلب موبیوسی به صورت

$$M_{\alpha, \gamma}(z) = \frac{\alpha z}{\gamma z + \alpha} \quad \alpha, \gamma \neq 0$$

نیز برقرار است.

۶.۹ نمودارهای جریان هذلولوی-حالت کلی

در بخش قبل، با انتخاب مثالهای متنوع خواننده را هدایت کردیم تا حالت‌های مختلفی را که در تحلیل ساختار جریان حرکت صلب موبیوسی، در حالت کلی، پیدا می‌شوند، مجسم سازد: قبل از به پایان رسانیدن این برنامه لازم است یک گزاره کلیدی را در مورد رفتار خط‌های جریان ذکر کنیم. اثبات این گزاره در ضمن بحث فوق در مورد خط‌های جریان $M(z)$ آمده است، ولی با این حال آن را تکرار می‌کنیم.

گزاره ۱۴.۹. فرض می‌کنیم F و f دو تابع دلخواه بر صفحه مختلط باشند، و f^{-1} وارون f باشد. در این صورت S مجموعه ثابتی از F است اگر و تنها اگر $f(S)$ مجموعه ثابتی از $f \circ F \circ f^{-1}$ باشد.

برهان: فرض می‌کنیم S ، مجموعه ثابتی از F باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم $F(S) = S$.
در این صورت

$$f \circ F \circ f^{-1}(f(S)) = f \circ F(S) = f(S)$$

بنابراین $f(S)$ مجموعه ثابتی است از $f \circ F \circ f^{-1}$.

به عکس، فرض می‌کنیم $f(S)$ مجموعه ثابتی از $f \circ F \circ f^{-1}$ باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$f \circ F \circ f^{-1}(f(S)) = f(S)$$

در این صورت

$$S = f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(f \circ F \circ f^{-1}(f(S))) = f^{-1} \circ f \circ F \circ f^{-1} \circ f(S) = F(S)$$

از این رو S در واقع مجموعه ثابتی از F است.

آنچه می‌خواستیم

چون توجه ما عمدتاً به مجموعه تبدیلهای موبیوسی است فرع زیر را استخراج می‌کنیم.

فرع ۱۵.۹. فرض می‌کنیم f و F دو تبدیل موبیوسی باشند. در این صورت

الف) z یک نقطه ثابت F است اگر و تنها اگر $f(z)$ یک نقطه ثابت $f \circ F \circ f^{-1}$ باشد.

ب) m یک خط جریان F است اگر و تنها اگر $f(m)$ یک خط جریان $f \circ F \circ f^{-1}$

باشد.

هدف ما این است که نشان دهیم نمودارهای جریان شکل‌های ۶.۹ تا ۱۰.۹ معرف همه

حرکتهای صلب هذلولوی هستند.

قضیه ۱۶.۹. خطهای جریان همه حرکتهای صلب موبیوسی یا خطهای راست اقلیدسی هستند،

یا کمانهای دایره.

برهان: فرض می‌کنیم $T = T(z)$ حرکت صلب موبیوسی

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

باشد، در بخش قبل دیدیم که وقتی $\gamma \neq 0$ ، نقاط ثابت T با عبارتهای زیر داده می‌شوند

$$\frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{\Delta}}{2\gamma}, \Delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \quad (5.9)$$

اگر $\gamma = 0$ و $\alpha = \delta$ ، آنگاه $T(z) = z + \frac{\beta}{\delta}$ یک انتقال اقلیدسی نیز هست، و لذا خطهای جریان آن خطهای راست اقلیدسی شکل ۷.۹ هستند. از سوی دیگر، اگر $\gamma = 0$ و $\alpha \neq \delta$ آنگاه

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\delta}$$

و از این رو نقطه ثابت یکتای آن

$$a = \frac{\beta}{\delta - \alpha}$$

است که بر محور x ها قرار دارد. فرض می‌کنیم $f(z) = z - a$. در این صورت $f^{-1}(z) = z + a$

$$\begin{aligned} f \circ T \circ f^{-1}(z) &= \frac{\alpha(z+a) + \beta}{\delta} - a \\ &= \frac{\alpha z + a(\alpha - \delta) + \beta}{\delta} = \frac{\alpha z - \beta + \beta}{\delta} = \frac{\alpha z}{\delta} \end{aligned}$$

بنابراین $f \circ T \circ f^{-1} = D_{\alpha/\delta}$ و لذا خطهای جریان آن نیمخطهای اقلیدسی هستند که از مبدأ خارج شده‌اند. بنابه فرع ۱۵.۹ خطهای جریان T نیمخطهای اقلیدسی هستند که از a خارج شده‌اند. این حالت ناظر بر حالت $\gamma = 0$ است و از این به بعد فرض بر این است که $\gamma \neq 0$.

اگر Δ منفی باشد درست یکی از دو مقدار (۵.۹)، مثلاً

$$w = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

در صفحه هذلولوی قرار دارد. اکنون نشان می‌دهیم که با این فرضها T لزوماً یک دوران هذلولوی است. فرض می‌کنیم w' نقطه‌ای در صفحه هذلولوی متمایز از w باشد و R دوران هذلولوی به مرکز w باشد که w' را بر $T(w')$ می‌نگارد. اما R^{-1} نیز یک دوران هذلولوی است و از این رو بنابر مشابه هذلولوی گزاره ۱۰.۲، ترکیب دو انعکاس است. از قضیه ۱۲.۹ نتیجه می‌گیریم

که R^{-1} خود یک حرکت صلب موبیوسی است. همان قضیه تضمین می‌نماید که $R^{-1} \circ T$ نیز یک تبدیل صلب موبیوسی است. اما

$$R^{-1} \circ T(w) = R^{-1}(w) = w$$

$$R^{-1} \circ T(w') = R^{-1}(T(w')) = w'$$

به عبارت دیگر $R^{-1} \circ T$ حرکت صلب موبیوسی در صفحه هذلولوی است با دو نقطه ثابت متمایز. بنابر تحلیل نقطه ثابت در ابتدای این برهان، $R^{-1} \circ T$ باید نگاشت همانی باشد، و از این رو $T = R$ و در واقع T یک دوران است. در نتیجه، در این حالت خطهای جریان T دایره‌های هذلولوی و لذا دایره‌های اقلیدسی نیز هستند.

حال فرض می‌کنیم Δ مثبت باشد. بنابراین دو مقدار (۵.۹) هر دو حقیقی‌اند. قرار می‌دهیم

$$f^{-1}(z) = z + \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \quad \text{و از این رو} \quad f(z) = z - \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$\begin{aligned} f \circ T \circ f^{-1}(z) &= \frac{\alpha(z + \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}) + \beta}{\gamma(z + \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}) + \delta} - \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} \\ &= \frac{2\gamma(\alpha + \delta)z + \Delta}{4\gamma^2 z + 2\gamma(\alpha + \delta)} = T_{2\gamma(\alpha + \delta), \Delta, 4\gamma^2} \end{aligned}$$

بدین ترتیب خطهای جریان $f \circ T \circ f^{-1}$ در شکل ۹.۹ داده شده‌اند، و بنابر فرع ۱۵.۹ خطهای جریان T کمانهای مستدیر اقلیدسی هستند که دو نقطه ثابت حقیقی آن را به هم وصل می‌کنند.

تنها می‌ماند که تکلیف حالت $\Delta = 0$ را تعیین کنیم. در اینجا T دارای نقطه ثابت مضاعف حقیقی $a = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma}$ است. با استفاده از همان تابع f در بالا، داریم

$$f \circ T \circ f^{-1}(z) = \frac{2\gamma(\alpha + \delta)z}{4\gamma^2 z + 2\gamma(\alpha + \delta)} = M_{2\gamma(\alpha + \delta), 4\gamma^2}$$

و در عین حال از کاربرد دیگر فرع ۱۵.۹ به این نتیجه می‌رسیم که خطهای جریان T دایره‌های اقلیدسی واقع در نیمصفحه بالایی و مماس بر محور x ها در نقطه حقیقی $a = \alpha - \delta / 2\gamma$ هستند.

آنچه می‌خواستیم

اگر چه قضیه ۱۶.۹ ما هیت خط‌های جریان یک حرکت صلب موبیوسی را مشخص می‌کند، ولی در مورد ترتیب آنها چیزی نمی‌گوید. این اطلاعات را به‌آسانی می‌توان با بررسی نقاط ثابت تبدیل موبیوسی مربوط به آن به‌دست آورد. اگر در این تبدیل دو نقطه ثابت حقیقی متمایز وجود داشته باشد، نمودار جریان آن همان شکل ۹.۹ است. اگر یک نقطه ثابت مضاعف (و لزوماً حقیقی) وجود داشته باشد، نمودار جریان همان نمودار شکل ۱۰.۹ است. اگر دو نقطه ثابت غیرحقیقی وجود داشته باشد، فقط یکی از آنها در نیمصفحه بالایی است و نمودار جریان مانند شکل ۶.۹ است. اگر فقط یک نقطه ثابت وجود داشته باشد، این نقطه لزوماً حقیقی است و خط‌های جریان نیمخط‌های اقلیدسی‌اند که یا مانند شکل ۸.۹ در این نقطه متقارند و یا از آن نقطه خارج می‌شوند. بالاخره اگر اصلاً نقطه ثابتی وجود نداشته باشد، نمودار جریان خط‌های افقی شکل ۷.۹ هستند.

خط‌های جریان همه حرکت‌های صلب موبیوسی یک ویژگی جالبی دارند که فوراً دیده نمی‌شود. هر دو خط جریان در یک نمودار جریان فاصله ثابتی از هم دارند. در حالت اقلیدسی، خط‌های جریان یا از یک خانواده از خط‌های اقلیدسی موازی (شکل ۵.۹)، یا از یک خانواده از دایره‌های متحد‌المركز (شکل ۴.۹) تشکیل یافته‌اند. روشن است که هر دو خانواده از ویژگی فاصله ثابت برخوردارند.

اکنون، مورد به مورد نشان می‌دهیم که نمودارهای جریان حرکت‌های صلب هذلولوی موبیوسی نیز این ویژگی را دارند. روشن است که این مطلب برای نمودار جریان $w = z + \alpha$ (حقیقی) که از یک خانواده از خط‌های اقلیدسی موازی با محور x ها تشکیل یافته است (شکل ۷.۹)، صادق است. حال نمودار جریانی را در نظر می‌گیریم که از خانواده‌ای از دایره‌ها تشکیل یافته است که همگی در یک نقطه مشترک P بر محور x ها مماس‌اند. بنابر قضیه ۳.۳ انعکاس IP_{β} این دایره‌ها را به خط‌های راست اقلیدسی تبدیل می‌نماید. به‌علاوه چون این دایره‌ها همگی در نقطه P بر محور x ها مماس‌اند، و چون انعکاس IP_{β} محور x ها را ثابت نگه می‌دارد، این انعکاس این دایره‌ها را به خط‌های راست اقلیدسی تبدیل می‌نماید که محور x ها را قطع نمی‌کنند. بنابراین انعکاس IP_{β} نمودار جریان دایره‌های مماس بر محور x ها در نقطه P را به نمودار خط‌های راست اقلیدسی موازی با محور x ها بدل می‌کند، که قبلاً معلوم شده‌اند که ویژگی فاصله ثابت را دارند. چون IP_{β} نیز یک حرکت صلب هذلولوی است، دایره‌های نمودار جریان داده شده نیز از ویژگی فاصله ثابت

برخوردارند.

اکنون نمودار جریانی را بررسی می‌کنیم که از نیمخطهای اقلیدسی خارج شده از نقطه P واقع بر محور x ها (شکل ۸.۹) تشکیل یافته است. از ویژگیهای اقلیدسی دایره‌ها نتیجه می‌شود که هر ژئودزیک کمانی به مرکز P بر هر یک از این نیمخطها عمود است. به علاوه به موجب فرع ۲.۴، کمانهایی از دو چنین ژئودزیک مستدیری که به وسیله دو تا از این نیمخطهای نمودار جریان جدا می‌شوند، طولهای هذلولوی مساوی دارند. بنابراین فاصله هر دو نیمخط از این خانواده از یکدیگر مقداری است ثابت.

هر نمودار جریان هذلولوی که از کمانهای مستدیر واصل بین دو نقطه متمایز از محور x ها تشکیل شده باشد (شکل ۹.۹)، با انعکاسی به مرکز یکی از این دو نقطه به یکی از خانواده‌های قبلی تبدیل می‌شود. بنابراین اعضای این خانواده نیز ویژگی فاصله ثابت را دارند. متقاعد کردن خوانندگان به این نکته که نمودارهای جریان متشکل از دایره‌های هذلولوی متحدالمرکز (شکل ۶.۹) نیز ویژگی فاصله ثابت را دارند، به عهده خود آنان گذاشته می‌شود.

۷.۹ حرکتهای صلب هذلولوی-نمایش هندسی

اکنون به نمایش هندسی حرکتهای صلب هذلولوی خاص می‌پردازیم. روشن است که اگر $z = a + bi$ نقطه‌ای از نیمصفحه بالایی باشد، تبدیل مویبوسی

$$f(z) = \frac{z - a}{b}$$

یک انتقال هذلولوی است که z را به i می‌برد، و معکوس آن

$$f^{-1}(z) = bz + a$$

نقطه i را به z منتقل می‌کند. از این رو به ازای هر نقطه $z_1 = c + di$ از نیمصفحه بالایی، ترکیب

$$d \left(\frac{z - a}{b} \right) + c = \frac{dz + (bc - ad)}{z + b}$$

یک حرکت صلب هذلولوی است که z را به z_1 می‌برد. باید توجه داشت که اگر $b = d$ ، این تبدیل یک انتقال افقی اقلیدسی است. اگر $b \neq d$ ، شکل ۸.۹ نمودار جریان این تبدیل است.

مثال ۱۷.۹. اگر $z = 2 - 3i$ و $z_1 = 3 + 4i$ ، آنگاه

$$\frac{4z + (-3.3 - 2.4)}{-3} = \frac{4z - 17}{-3}$$

یک حرکت صلب هذلولوی است که z را بر z_1 می‌نگارد.

دورانهای هذلولوی با این واقعیت که یک نقطه ثابت تنها در نیمصفحه بالایی دارند مشخص می‌شوند. از این رو برای اینکه درک صحیحی از دوران داشته باشیم، تنها لازم است این مرکز را پیدا و نگاره یک نقطه دیگر را هم معین کنیم.

مثال ۱۸.۹. تبدیل موبیوسی

$$f(z) = -\frac{1}{z} = \frac{0z - 1}{1z + 0}$$

یک دوران هذلولوی به زاویه 180° حول نقطه $z = i$ است. برای اثبات این مطلب مشاهده می‌کنیم که $f(i) = -1/i = i$ ، و لذا این تبدیل دورانی است به مرکز i . چون $f(2i) = -1/2i = i/2$ از اینجا نتیجه می‌شود که زاویه این دوران 180° است. همه دورانهای هذلولوی دیگر به مرکز i نیز شرح ساده‌ای دارند.

لم ۱۹.۹. اگر θ یک زاویه دلخواه باشد، تبدیل موبیوسی

$$f_\theta(z) = \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}$$

یک دوران هذلولوی به زاویه دوران 2θ حول نقطه i از نیمصفحه بالایی را القا می‌کند.
برهان: چون

$$\cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta) = 1 > 0$$

پس در واقع f_θ یک حرکت صلب هذلولوی از نیمصفحه بالایی را القا می‌کند.
به علاوه

$$f_\theta(i) = \frac{\cos \theta i + \sin \theta}{-\sin \theta i + \cos \theta} = \frac{i(\cos \theta - \sin \theta i)}{-\sin \theta i + \cos \theta} = i$$

از این رو F_θ عیناً یک دوران هذلولوی به مرکز i است.

به ازای $\theta = n\pi + \pi/2$ ، داریم $f_\theta(z) = -1/z$ ، که قبلاً در مثال بالا دیدیم که این یک دوران هذلولوی به زاویه 180° حول i است. به ازای بقیه مقادیر θ ، $\tan \theta$ عددی حقیقی و معین، و نقطه $(\tan \theta, 0)$ را با A نشان می‌دهیم (شکل ۱۱.۹). چون f_θ ، i را ثابت نگه می‌دارد و $f_\theta(0) = \tan \theta$ ، پس دوران هذلولوی f_θ نیم ژئودزیک راست از i تا o را به نیم ژئودزیک (کمانی) از i تا A بدل می‌کند. اگر $C = (-c, 0)$ مرکز اقلیدسی این ژئودزیک کمانی باشد، α را مساوی با زاویه $\angle ACi$ می‌گیریم. چون طول اقلیدسی Oi برابر است با ۱، پس طول اقلیدسی Ci (و لذا طول اقلیدسی CA) برابر است با $\csc \alpha$. به همین دلیل $c = \cot \alpha$ از این رو با تجزیه CA به اجزای CO و OA به دست می‌آوریم

$$\csc \alpha = \cot \alpha + \tan \theta$$

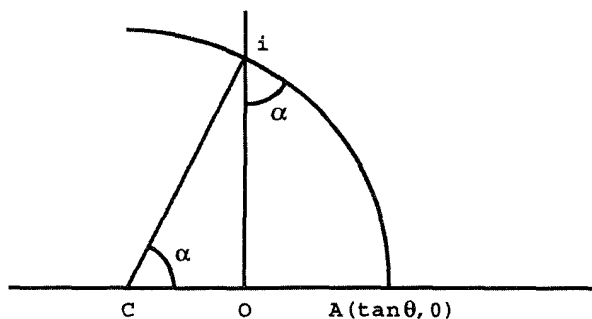
$$\csc \alpha - \cot \alpha = \tan \theta$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \theta$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \theta$$

یا

$$\alpha = 2\theta$$



شکل ۱۱.۹

از گزاره ۲.۶ نتیجه می‌شود که زاویه بین دو ژئودزیک io و ia مساوی است با θ و لذا این زاویه همان زاویه دوران هذلولوی f_θ است.

آنچه می‌خواستیم

■ اکنون ابزارهای کافی برای بیان هر دوران هذلولوی را در دست داریم.

گزاره ۲.۹.۲۰. دوران هذلولوی به زاویه θ و به مرکز $a + bi$ با ترکیب زیر داده می‌شود

$$(bz + a) \circ \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta} \circ \frac{z - a}{b}$$

■ برهان: تمرین ۲۵.

مثال ۲.۱.۹. دوران به زاویه 90° حول نقطه $z = i + 1$ با ترکیب زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} (z + 1) \circ \frac{z + 1}{-z + 1} \circ (z - 1) &= (z + 1) \circ \frac{z - 1 + 1}{-z + 1 + 1} \\ &= (z + 1) \circ \frac{z}{-z + 2} \\ &= \frac{z}{-z + 2} + 1 = \frac{z + 2}{-z + 2} \end{aligned}$$

۸.۹ تمرین

۱. فرض می‌کنیم $z = -1 + i$, $w = 1 + i$, $t = 2 - i$

(الف) هریک از اعداد t , w , z , t^2 , w^2 , z^2 را به صورت $re^{i\theta}$ بیان کنید.

(ب) هریک از اعداد $t + w$, $t - w$, tw , t/w , t/w را به صورت $re^{i\theta}$ بیان کنید.

(ج) هریک از اعداد $w + z$, $w - z$, awz , w/z , aw/z را به صورت $re^{i\theta}$ بیان کنید.

۲. ریشه‌های دوم اعداد مختلط زیر را پیدا کنید: (الف) i (ب) $1 + i$ (ج) $3i - 2$

۳. هریک از حرکت‌های صلب اقلیدسی زیر را به صورت تابع $f(z) = e^{i\alpha}z + c$ بیان کنید:

(الف) $(\tau_{1+i, 2-i})$ (ب) $(R_{i, \pi})$ (ج) $(R_{3, \pi/2})$ (د) $(R_{1-i, \pi/2})$ (ه) $(R_{-2, \pi/4})$

(و) $(R_{-2i, \pi/3})$

۴. فرض می‌کنیم m و n به ترتیب خطهای راست اقلیدسی واصل از نقطه i به نقطه‌های $1+i$ و $1+2i$ باشند. هر یک از حرکت‌های صلب اقلیدسی زیر را به صورت $f(z) = e^{i\alpha}\bar{z} + c$ بیان کنید:

الف) ρ_m ب) ρ_n ج) $\gamma_{i,2i}$ د) $\gamma_{i,1+2i}$ ه) $\gamma_{1+i,1+2i}$ و) $\gamma_{1+i,i}$

۵. حرکت‌های صلب اقلیدسی زیر را مشخص کنید

الف) $f(z) = z + 3$ ب) $f(z) = -z + 3$ ج) $f(z) = -\bar{z} + 3$

د) $f(z) = iz - 3$ ه) $f(z) = -iz - 3$ و) $f(z) = -i\bar{z} - 3$

ز) $f(z) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z - 2$ ح) $f(z) = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z - 2$

ط) $f(z) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\bar{z} - 2$ ی) $f(z) = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\bar{z} - 2$

۶. با استفاده از روش‌های این فصل نگاره نقطه $(1, 1)$ را تحت تأثیر هر یک از حرکت‌های صلب اقلیدسی زیر که در آنها $A(-1, 1)$ و $B(1, -2)$ پیدا کنید:

الف) ρ_{BA} ب) τ_{BA} ج) γ_{BA} د) $R_{A,\pi/2}$ ه) $R_{B,\pi/2}$ و) $R_{A,2\pi/3}$

۷. (به روش هندسی) ثابت کنید که به ازای هر دو عدد مختلط w, z ، داریم $|z+w| \leq |z| + |w|$.
 ۸. فرض می‌کنیم λ عددی حقیقی، $0 < \lambda < 1$ ، و w, z دو عدد مختلط دلخواه باشند. نشان دهید که عدد مختلط $(1-\lambda)z + \lambda w$ عددی است که پاره‌خط اقلیدسی واصل از z به w را به نسبت $1-\lambda : \lambda$ تقسیم می‌کند.

۹. فرض می‌کنیم t, w, z سه عدد مختلط باشند. نشان دهید که نقطه

$$\frac{t+w+z}{3}$$

گرانیکه مثلث حاصل از این سه نقطه است.

۱۰. نشان دهید که سه عدد مختلط t, w, z یک مثلث متساوی‌الاضلاع پدید می‌آورند اگر و تنها اگر $t + \omega w + \omega^2 z = 0$ یا $t + \omega w + \omega^2 t = 0$.
 که در آن $\omega = e^{2\pi i/3}$.

۱۱. گیریم ABC مثلث اقلیدسی دلخواهی باشد. فرض می‌کنیم A' نقطه‌ای باشد که مثلث $A'BC$ مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد و A' در دو طرف BC واقع باشند. به همین ترتیب B' و C' را تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که گرانیکه‌های سه مثلث $A'BC$ ، $AB'C$ ، ABC' رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۱۲. نشان دهید که حکم مسئله ۱۱ باز هم برقرار است اگر A' طوری انتخاب شود که با A در یک طرف BC واقع باشد و B' و C' نیز به همین ترتیب انتخاب شوند.

۱۳. دو مقدار از z را پیدا کنید که z همراه با نقاط $۱ + i$ و $۲ - ۳i$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل دهد.

۱۴. نگاره‌های نقاط i ، $۱ + i$ ، $۳ - ۴i$ را تحت عمل حرکت‌های صلب هذلولوی زیر که در آنها $O(0, 0)$ و $A(3, 0)$ ، پیدا کنید:

$$\text{الف) } I_{O,2} \quad \text{ب) } I_{A,2} \quad \text{ج) } I_{A,2} \circ I_{O,2}$$

$$\text{د) } f(z) = \frac{2z - 1}{z + 2} \quad \text{ه) } f(z) = \frac{2(-\bar{z}) - 1}{(-\bar{z}) + 2}$$

۱۵. ترکیب‌های زیر را که در آنها $O(0, 0)$ و $A(0, 3)$ ، به صورت تبدیلهای موبیوسی بیان کنید:

$$\text{الف) } I_{A,2} \circ I_{O,2} \quad \text{ب) } I_{A,2} \circ \frac{2z - 1}{z + 2}$$

$$\text{ج) } I_{O,2} \circ \frac{2(-\bar{z}) - 1}{(-\bar{z}) + 2} \quad \text{د) } \frac{2z - 1}{z + 2} \circ \frac{2(-\bar{z}) - 1}{(-\bar{z}) + 2}$$

۱۶. جزئیات ذکر شده برهان قضیه ۱۲.۹ را بیان کنید، وقتی که

الف) f و g هر دو قالب (الف) در فوق را داشته باشند.

ب) f و g هر دو قالب (ب) در فوق را داشته باشند.

۱۷. حرکت‌های صلب هذلولوی زیر را به صورت ترکیب دو تقارن (محوری) هذلولوی بنویسید:

$$\text{الف) } \frac{2z}{5} \quad \text{ب) } \frac{z}{2z + 3} \quad \text{ج) } \frac{-2z}{z - 1}$$

$$\text{د) } \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{ه) } \frac{2z + 1}{-z + 3} \quad \text{و) } \frac{3z - 4}{z + 2}$$

۱۸. نمودارهای جریان حرکت‌های صلب هذلولوی زیر را رسم کنید:

$$\text{الف) } z + 3 \quad \text{ب) } z - 2 \quad \text{ج) } 5z$$

$$\text{د) } \frac{2z}{5} \quad \text{ه) } \frac{z}{2z + 3} \quad \text{و) } \frac{-2z}{z - 1}$$

$$\text{ز) } \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{ح) } \frac{2z + 1}{-z + 3} \quad \text{ط) } \frac{3z - 4}{z + 2}$$

۱۹. معادله‌های دکارتی آن خط‌های جریان تبدیلهای د-ط ی تمرین ۱۸ را پیدا کنید که از نقطه

۲۱ می‌گذرند.

۲۰. درستی قواعد (۱.۹) و (۲.۹) بخش ۲ را تحقیق کنید.

۲۱. یک حرکت صلب موبیوسی پیدا کنید که یکی از نقاط ثابت آن $i + 1$ باشد.

۲۲. یک حرکت صلب موبیوسی پیدا کنید که نقاط ثابت آن ۵ و ۷ باشند.

۲۳. یک حرکت صلب موبیوسی پیدا کنید که نقطه ۳- نقطه ثابت مضاعف آن باشد.

۲۴. یک حرکت صلب موبیوسی پیدا کنید که یگانه نقطه ثابت آن ۳- باشد.

۲۵. گزاره ۲۰.۹ را ثابت کنید.

۲۶. دورانهای هذلولوی زیر را به صورت تبدیلهای موبیوسی بیان کنید:

الف) مرکز دوران i و زاویه دوران $\frac{2\pi}{3}$ ؛

ب) مرکز دوران $i + 1 -$ و زاویه دوران π ؛

ج) مرکز دوران $3i$ و زاویه دوران $\frac{\pi}{4}$ ؛

د) مرکز دوران $2 - 3i$ و زاویه دوران $\frac{\pi}{4}$ ؛

ه) مرکز دوران $i + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}$ و زاویه دوران $\frac{2\pi}{3}$.

۲۷. ثابت کنید که حرکت صلب هذلولوی

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

یک دوران نیمصفحه بالایی به زاویه دوران 180° است اگر و تنها اگر $\alpha + \delta = 0$

۲۸. ثابت کنید که حرکت صلب هذلولوی

$$\frac{\alpha(-\bar{z}) + \beta}{\gamma(-\bar{z}) + \delta}$$

یک تقارن هذلولوی از نیمصفحه بالایی است اگر و تنها اگر $\alpha = \delta$.

۲۹. ثابت کنید که حرکت صلب هذلولوی

$$\frac{\alpha(-\bar{z}) + \beta}{\gamma(-\bar{z}) + \delta}$$

یک تقارن هذلولوی از نیمصفحه بالایی است اگر و تنها اگر دست کم یک نقطه را ثابت نگاه دارد.

۱۰

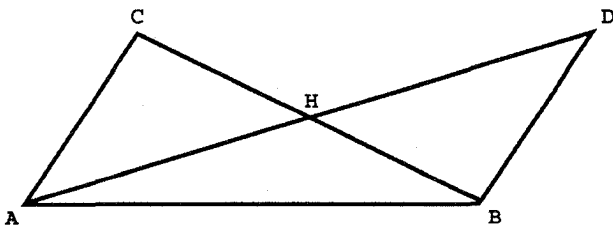
هندسهٔ مطلق و زاویه‌های مثلث

۱.۱۰ مجموع زاویه‌های مثلث

شاید چشمگیرترین اختلاف بین دو هندسه‌ای که تاکنون در اینجا شرح داده‌ایم، یعنی هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی، مجموع زاویه‌های مثلث در هر یک باشد. این مجموع برای هندسهٔ اقلیدسی همواره مساوی است با π و برای هندسهٔ هذلولوی در هر مثلث کمتر از π است. اکنون نشان می‌دهیم که این موضوع تصادفی نیست و باید در هر هندسهٔ مشتق از هندسهٔ مطلق-هندسهٔ مبتنی بر فقط چهار اصل موضوع اول اقلیدس که مستقل از اصل توازی است- منتظر چنین رفتاری باشیم.

قضیهٔ ۱.۱۰. مجموع زاویه‌های یک مثلث نمی‌تواند بیشتر از π باشد.

برهان: به‌عکس فرض کنید، که یک مثلث ABC وجود دارد که مجموع زاویه‌های آن $\pi + \delta$ است که در آن δ زاویه‌ای است مثبت. نشان می‌دهیم که از این فرض نتیجه می‌شود که مثلثی



شکل ۱.۱۰

وجود دارد که مجموع دو زاویه آن از π زیادتر است. چون این مطلب با گزاره ۱۷ از مقاله I، اقلیدس متناقض است، برهانی برای این قضیه به دست خواهیم آورد.

فرض می‌کنیم H وسط ضلع BC باشد (شکل ۱.۱۰). خط AH را رسم می‌کنیم و آن را تا نقطه D ، $AH = HD$ ، امتداد می‌دهیم. BD را رسم می‌کنیم و مثلث BHD را که، بنابر قضیه (ض‌رض)، با مثلث CHA قابل انطباق است، به دست می‌آوریم، داریم

$$\angle BAC = \angle BAH + \angle HAC = \angle BAH + \angle HDB \quad (۱.۱۰)$$

از این معادله دو نتیجه می‌گیریم. نخست،

$$\begin{aligned} \angle DBA + \angle ADB + \angle BAD &= (\angle CBA + \angle DBH) + \angle HDB + \angle BAH \\ &= \angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = \pi + \delta. \end{aligned}$$

بنابراین مجموع زاویه‌های مثلث ABD نیز مساوی است با $\pi + \delta$. در ثانی از (۱.۹) نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = \angle BAC$ ، اندازه یکی از زاویه‌های $\angle HDB$ یا $\angle BAH$ حداکثر $\alpha/2$ است. می‌توانیم، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم که اندازه $\angle BAH$ حداکثر $\alpha/2$ است. حال اگر استدلال فوق را با قرار دادن مثلث ABD به جای مثلث ABC تکرار کنیم، مثلث جدیدی به دست می‌آوریم که مجموع زاویه‌هایش مجدداً $\pi + \delta$ است و یکی از زاویه‌هایش حداکثر $\alpha/4$ است. با استقرای ریاضی نتیجه می‌گیریم که به ازای هر عدد صحیح مثبت m ، یک مثلث T_n وجود دارد که مجموع زاویه‌هایش $\pi + \delta$ است و یکی از زاویه‌هایش حداکثر $\alpha/2^m$ است. عدد صحیح مثبت m را طوری انتخاب می‌کنیم که $\alpha/2^m < \delta$. چون مجموع زاویه‌های مثلث T_m ، $\pi + \delta$ است و یکی از زاویه‌های آن، یعنی $\alpha/2^m$ از δ کوچکتر است، پس مجموع دو زاویه دیگر T_m از π بزرگتر است که تناقض مطلوب است

۱. یعنی اگر C را به وسط DB وصل کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم ... م.

آنچه می‌خواستیم

کاستی مثلث ABC با زاویه‌های α, β, γ بنا به تعریف عبارت است از تفاضل $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. از قضیه ۱.۱° نتیجه می‌شود که کاستی هر مثلث عددی نامنفی است. البته این مطلب در این دو هندسه‌ای که می‌شناسیم صادق است؛ در هندسه اقلیدسی کاستی هر مثلث صفر است، در حالی که در هندسه هذلولوی کاستی هر مثلث مثبت است. کاستی مثلث ABC با $\text{defect}(ABC)$ نشان داده می‌شود.

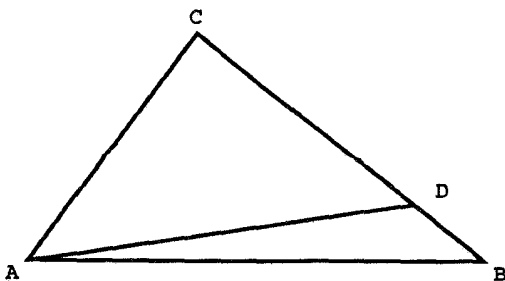
آنچه می‌خواستیم

لم ۲.۱° . فرض می‌کنیم ABC یک مثلث باشد و D نقطه‌ای بر ضلع BC ، بین B و C ، در این صورت

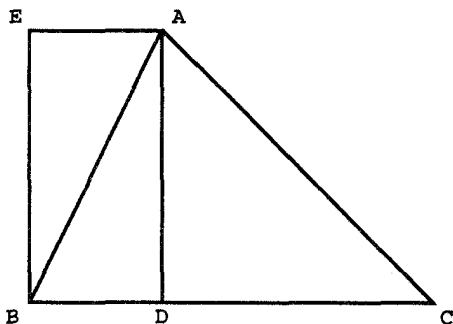
$$\text{defect}(ABC) = \text{defect}(ABD) + \text{defect}(ACD)$$

برهان: با توجه به شکل ۲.۱° استدلال ساده زیر را داریم

$$\begin{aligned} \text{defect}(ABC) &= \pi - (\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC) \\ &= \pi - (\angle CBA + \angle ACB + \angle DAC + \angle BAD) \\ &= 2\pi - (\angle DBA + \angle ACD + \angle DAC + \angle BAD + \angle ADB + \angle CDB) \\ &= 2\pi - [\pi - \text{defect}(ABD) + \pi - \text{defect}(ACD)] \\ &= \text{defect}(ABD) + \text{defect}(ACD). \end{aligned}$$



شکل ۲.۱°



شکل ۳.۱۰

آنچه می‌خواستیم

قضیه زیر توجهی است برای رفتار یکنواخت مجموع زاویه‌های یک مثلث در هر دو هندسه اقلیدسی و هذلولوی.

قضیه ۳.۱۰. اگر در هندسه مطلق مجموع زاویه‌های یک مثلث π باشد، مجموع زاویه‌های هر مثلث نیز در آن هندسه π است.

برهان: فرض می‌کنیم مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر π ، یا به عبارت دیگر کاستی آن، برابر صفر باشد. همان‌طوری که در قضیه ۶.۶ استدلال کردیم، می‌توان، بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، فرض کرد که نقطه D ، پای ارتفاع وارد از رأس A ، در داخل BC قرار دارد (شکل ۳.۱۰). چون

$$0 = \text{defect}(ABC) = \text{defect}(ABD) + \text{defect}(ACD)$$

و چون کاستی همه مثلثها نامنفی است، پس کاستی مثلث قائم‌الزاویه ABD صفر است. به‌ویژه داریم

$$\angle DBA + \angle BAD = \frac{\pi}{2}.$$

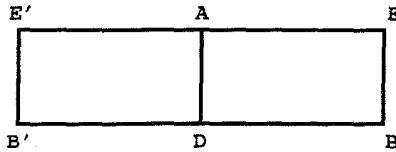
نقطه E را طرفی از خط AB که D در آن نیست طوری انتخاب می‌کنیم که $AE = BD$ و $BE = AD$. چون در دو مثلث ABE و ABD همه اضلاع متناظر باهم قابل انطباق‌اند، این دو مثلث باهم قابل انطباق می‌شوند و از این‌رو داریم

$$\angle EAB = \angle DBA, \quad \angle ABE = \angle BAD, \quad \angle BEA = \angle ADB = \frac{\pi}{2}$$

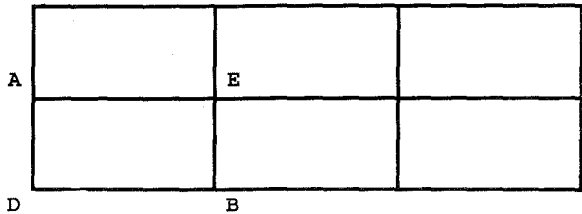
در نتیجه

$$\angle DBE = \angle DBA + \angle ABE = \angle DBA + \angle BAD = \frac{\pi}{2}$$

(الف)



(ب)



شکل ۴.۱۰

و

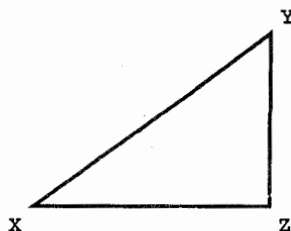
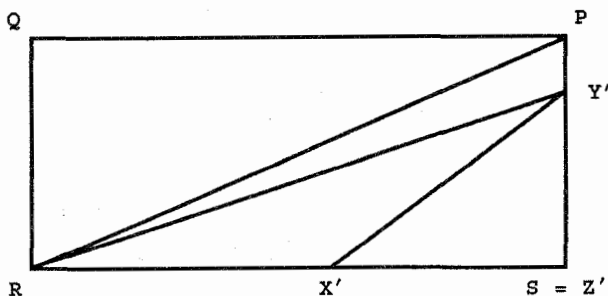
$$\angle EAD = \angle EAB + \angle BAD = \angle DBA + \angle BAD = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین چهارضلعی $ADBE$ مستطیل است به این معنی که اضلاع روبه‌روی آن باهم قابل انطباق‌اند و هر چهار زاویه آن قائمه‌اند.

ولی، وقتی دو مستطیل $ADBE$ و $ADB'E'$ از این نوع را بر طول یکی از اضلاع مساوی‌شان در کنار هم قرار دهیم (شکل ۴.۱۰ الف) نتیجه مستطیلی چون $EE'B'B$ می‌شود، زیرا زاویه‌های آنها در رأس‌های A و D مکمل یکدیگرند و لذا خط‌های EAE' و BDB' هر دو خط راست هستند. در نتیجه به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n مستطیلی با ضلع‌های mAD و nBD وجود دارد. (شکل ۴.۱۰ ب). حالت $m = 2$ و $n = 3$ را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر وجود مستطیلی با اضلاع هر قدر بزرگ را که بخواهیم نشان داده‌ایم.

در نتیجه اکنون می‌توانیم نشان دهیم که کاستی هر مثلث قائم‌الزاویه صفر است. فرض می‌کنیم زاویه Z در مثلث XYZ قائمه باشد و $PQRS$ مستطیلی باشد که $RS > XZ$ و $PS > YZ$ (شکل ۵.۱۰). نقاط X' و Y' را به ترتیب در داخل PS و داخل RS طوری انتخاب می‌کنیم که $X'S = XZ$ و $Y'S = YZ$. چون زاویه‌های S و Z هر دو قائمه‌اند مثلث‌های XYZ و $X'Y'S$ باهم قابل انطباق‌اند و از این روی یک کاستی دارند.

از طرف دیگر دو مثلث SRP و QPR به علت برابری اضلاع متناظر با هم قابل انطباق‌اند.



شکل ۵.۱۰

در نتیجه

$$\begin{aligned} & \angle RSP + \angle SPR + \angle PRS \\ &= \frac{1}{2}(\angle PQR + \angle RSP + \angle QRP + \angle SPR + \angle RPQ + \angle PRS) \\ &= \frac{1}{2}(\angle PQR + \angle QRS + \angle RSP + \angle SPQ) = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر کاستی مثلث PRS صفر است. حال خطهای RY' و $X'Y'$ را رسم می‌کنیم. چون کاستی تمام مثلثها نامنفی است، از لم ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$0 \leq \text{defect}(XYZ) = \text{defect}(X'Y'S) \leq \text{defect}(RY'S) \leq \text{defect}(PRS) = 0$$

بنابراین کاستی هر مثلث قائم‌الزاویه صفر است. چون هر مثلث را توسط یکی از ارتفاعهایش می‌توان به دو مثلث قائم‌الزاویه تجزیه کرد، از لم ۲.۱۰ در شرایط این قضیه نتیجه می‌شود که کاستی هر چنین مثلثی صفر و یا به عبارت دیگر مجموع زاویه‌های هر چنین مثلثی برابر با π است.

آنچه می‌خواستیم

فرع ۴.۱۰ . اگر مجموع زاویه‌های یک مثلث کمتر از π باشد، مجموع زاویه‌های هر مثلث هم کمتر از π است.

از فرع ۴.۱۰ و قضیهٔ ۱.۱ نتیجه می‌شود که اصل موضوع پنجم اقلیدس هم‌ارز این فرض است که دست کم یک مثلث با مجموع زاویه‌های π وجود دارد. تلاشهای دستجمعی و بیهودهٔ ریاضیدانان سده‌های هجدهم و نوزدهم برای اثبات وابستگی اصل موضوع پنجم به اصلهای موضوع دیگر، منجر به فرمولبندی احکام دیگری شد که هم‌ارز منطقی آن هستند. چند تا از این احکام را در زیر می‌آوریم:

دو مثلث غیرقابل انطباق باهم وجود دارند که زاویه‌های آنها یکی هستند.

مثلثهایی با مساحت‌های هر قدر بزرگ که بخواهیم وجود دارند.

هر مثلث را می‌توان در یک دایره محاط کرد.

دو خط راست متوازی p و q و یک نقطهٔ P بر p وجود دارد. به طوری که p تنها خطی

است که از P می‌گذرد و با q موازی است.

۲.۱۰ تمرین

۱. ثابت کنید که اگر بتوان مثلثی را در دایره‌ای محاط کرد، آنگاه اصل موضوع پنجم برقرار است.
۲. ثابت کنید که اصل موضوع پنجم برقرار است اگر و تنها اگر دو مثلث غیرقابل انطباق باهم وجود داشته باشند که زاویه‌های آنها یکی باشند.
۳. ثابت کنید که اگر اصل موضوع پنجم برقرار نباشد مثلثهایی وجود دارند که مجموع زاویه‌های آنها هر قدر بخواهیم کوچک‌اند.
۴. فرض می‌کنیم p و q دو خط راست متوازی‌اند و P نقطه‌ای است بر p چنانکه p تنها خطی است که از P می‌گذرد و موازی است با q . ثابت کنید اصل موضوع پنجم برقرار است.
۵. فرض می‌کنیم $PQRS$ یک چهارضلعی محاطی باشد که مرکز دایرهٔ محیطی آن در داخل چهارضلعی است. نشان دهید که اگر اصل موضوع پنجم برقرار نباشد، مجموع زاویه‌های مقابل $PQRS$ کمتر از π است.



مثلثات کروی و هندسه بیضوی

۱.۱۱ مقدمه

کشف هندسه هذلولوی را نخستین بار نیکلای لباچفسکی طی مقاله‌ای در ۱۸۲۹ اعلام کرد. پس از این مقاله «پیوست» معروف یانوش بویویی در سال ۱۸۳۲ منتشر شد. اگرچه این دو ریاضیدان مستقلاً کار می‌کردند ولی کارهایشان مشابهت فوق‌العاده‌ای باهم داشتند. برخلاف روش تحلیلی که در فصلهای ۴-۸ این کتاب به‌کار رفته، بویویی و لباچفسکی، هر دو، صفحه هذلولوی خود را به روش ترکیبی به‌دست آوردند. علاوه بر چهار اصل موضوع اول اقلیدس، آنها پذیرفتند که به‌ازای هر خط m و هر نقطه P ناواقع بر m دست‌کم دو خط وجود دارند که از P می‌گذرند و با m موازی‌اند. اینان بسیاری از قضیه‌های نااقلیدسی را با استفاده از این پذیره خود درست به همان سبکی که اقلیدس قضیه‌های معمولی هندسه مسطحه را با استفاده از اصول موضوعه خود استخراج کرده بود، نتیجه گرفتند نکته بسیار شگفت‌انگیز اینکه بویویی و لباچفسکی، هر دو، حتی تا آنجا پیش

رفتند که مثلثاتی برای این هندسه ناقلیدسی تهیه کردند. اگر هنگام گسترش کار خویش با تناقضی مواجه شده بودند، کوشش آنها وابستگی اصل ۵ اقلیدس را به سایر اصول نشان می‌داد. ولی چنین تناقضی به دست نیامده بود. این مسأله البته این امکان را منتفی نمی‌ساخت که اگر این کار به قدر کافی ادامه می‌یافت به تناقض نمی‌رسید. آنچه که بویوی و لباچفسکی را به روی ندادن حتمی چنین تناقضی مطمئن ساخته بود، شباهت بسیار زیاد بین فرمولهای مثلثات هندسه ناقلیدسی و فرمولهای مثلثات کروی بود. ما اکنون به شرح هندسه کره می‌پردازیم و مثلثات آن را تا جایی بسط می‌دهیم که خواننده این شباهت را به خوبی دریابد.

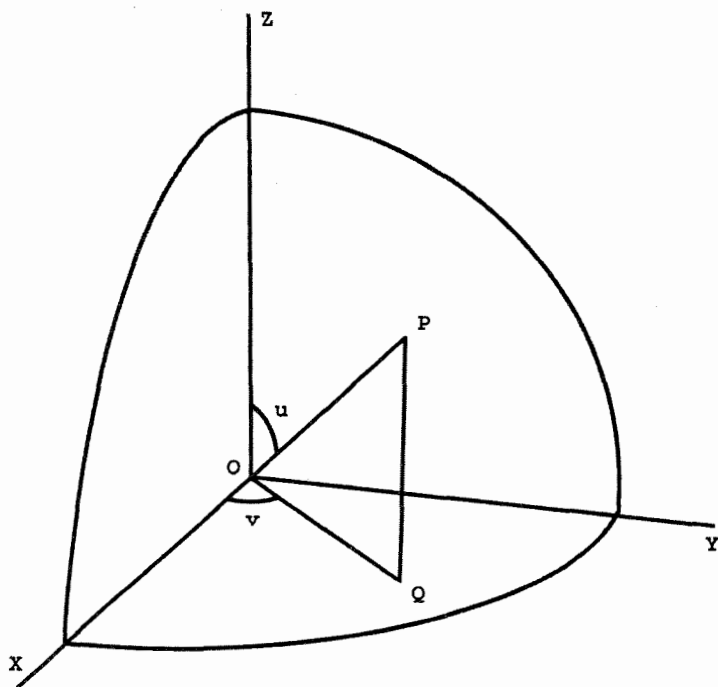
هندسه کروی نیز مانند هندسه اقلیدسی ابداع یونانیان بود. علت پیدایش آن ساده کردن محاسبات دقیق نجومی بود. بی‌شک مشهورترین و مؤثرترین کتابها در این زمینه کتاب المجسطی بطلمیوس است که در سده دوم پیش از میلاد نوشته شده است. این اثر را بعدها هندیان و اعراب حفظ کردند و مطالب آن را گسترش دادند. اروپائیان کار او را در این مورد و در بسیاری دیگر از زمینه‌های ریاضی در سده شانزدهم دنبال کردند. صورت جدید این نظام مرهون کارهای لئونهارت اویلر است که پیش از این در مبحث حرکت‌های صلب از وی نام برده‌ایم.

۲.۱۱ ژئودزیکهای کره

فرض می‌کنیم \mathbb{S} معرف رویه کره‌ای به شعاع ۱ باشد. از این پس فرض می‌کنیم که یک دستگاه مختصات سه بعدی که مبدأ آن، O ، بر مرکز کره \mathbb{S} قرار دارد اختیار شده است. اگر P نقطه‌ای از \mathbb{S} باشد (شکل ۱.۱۱) فرض می‌کنیم Q معرف نقطه‌ای در صفحه xy درست در زیر P و u و v به ترتیب اندازه‌های زاویه‌های $\angle ZOP$ و $\angle XOQ$ باشد. در این صورت بنابر معادله‌های استاندارد تبدیل مختصات کروی به مختصات دکارتی، نقطه P دارای مختصات دکارتی زیر است

$$P = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

که در آن $0 \leq u \leq \pi$ و $0 \leq v < 2\pi$. توجه داریم که مکان هندسی همه نقاطی که برای آنها v مقدار ثابت c است، یک مدار است و نقاطی که v برای آنها مقدار ثابت d است یک نصف‌النهار. فرض می‌کنیم P و Q دو نقطه دلخواه بر \mathbb{S} باشند. منظور ما از یک پاره ژئودزیک واصل بین P و Q کوتاهترین خمی است که P را به Q وصل می‌کند و تماماً بر \mathbb{S} واقع است. بعداً خواهیم دید که اگر چه در بسیاری موارد هر دو نقطه P و Q با یک پاره ژئودزیک یکتا به هم وصل می‌شوند، ولی نقاطی وجود دارند که با بیش از یک پاره ژئودزیک به هم وصل می‌شوند.



شکل ۱.۱۱

یک دایره عظیمه S دایره‌ای است که کاملاً بر S واقع و مرکز آن بر مرکز S منطبق است. به عبارت دیگر یک دایره عظیمه S فصل مشترک S است با صفحه‌ای که از مبدأ O می‌گذرد.

قضیه ۱.۱۱. هر پاره‌ژئودزیک از S کمانی است از یک دایره عظیمه S برهان: فرض می‌کنیم P و Q دو نقطه متمایز بر S باشند. با دوران دادن S ، در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که دستگاه مختصات دکارتی طوری قرار گرفته است که P بر قطب شمال $(0, 0, 1)$ واقع و Q دارای مختصات $(\sin A \cos B, \sin A \sin B, \cos A)$ ، به‌ازای زاویه‌های مناسب A و B ، است. اگر γ خمی دلخواه بر S باشد که P را به Q وصل می‌کند γ را می‌توانیم به صورت

$$P(t) = [\sin u(t) \cos v(t), \sin u(t) \sin v(t), \cos u(t)]$$

پارامتری کنیم، که در آن $P(0) = P$ و $P(T) = Q$.

چون طول یک خم دلخواه $[x(t), y(t), z(t)]$ از $t = a$ تا $t = b$ با عبارت

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (1.11)$$

داده می‌شود، در نتیجه طول γ را می‌توان برحسب مشتقات مؤلفه‌های آن بیان نمود. این مشتقات چنین‌اند.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} [\sin u(t) \cos v(t)] \\ &= \left[\cos u(t) \cos v(t) \frac{du}{dt} - \sin u(t) \cos v(t) \frac{dv}{dt} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} [\sin u(t) \sin v(t)] \\ &= \left[\cos u(t) \sin v(t) \frac{du}{dt} + \sin u(t) \cos v(t) \frac{dv}{dt} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} [\cos u(t)] = -\sin u(t) \frac{du}{dt}$$

با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای، حذف جمله‌های همانند، و کاربرد مکرریک اتحاد مثلثاتی معروف چنین به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \left[\cos^2 u(t) \cos^2 v(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \sin^2 v(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right. \\ &= \left. \cos^2 u(t) \sin^2 v(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \cos^2 v(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] \\ &= \left[\cos^2 u(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \left[\cos^2 u(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right] \\ &= \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

از این رو طول C چنین می‌شود

$$\int_0^T \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \sin^2 u(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \quad (2.11)$$

اگر خم γ نصف‌النهار واصل بین P و Q باشد، چنانچه در بالا دیدیم، پارامتر v در طول γ ثابت است و لذا تساوی $dv/dt = 0$ در هر نقطه γ برقرار است. به علاوه، چون γ یک پاره‌ژئودزیک است، نمی‌تواند روی خودش به عقب برگردد، و لذا همچنین داریم $du/dt \geq 0$. از این رو انتگرال فوق به انتگرال

$$\int_0^T \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} dt = \int_0^T \frac{du}{dt} dt = \int_0^A du = A \quad (3.11)$$

بدل می‌شود، نتیجه‌ای که البته با آنچه که هندسهٔ اقلیدسی بیان می‌کند سازگار است.

اگر γ خم دلخواهی واصل بین P و Q باشد، از ویژگیهای اساسی انتگرال ریمان نتیجه می‌شود که انتگرال (۲.۱۱) نا کوچکتر از (۳.۱۱) است. این مطلب ثابت می‌کند که کمانی از نصف‌النهار که P را به Q وصل می‌کند در واقع ژئودزیکی است بر S . چون نقطه‌های P و Q دلخواه‌اند نتیجه می‌گیریم که هر کمانی از یک نصف‌النهار یک پاره‌ژئودزیک است.

تنها مطلبی که می‌ماند اثبات این نکته است که در واقع همهٔ پاره‌ژئودزیکها از این نوع (یعنی، جزئی از دایرهٔ عظیمه) هستند. بنابراین فرض می‌کنیم γ پاره‌ژئودزیک واصل بین P و Q باشد. در نتیجه انتگرالهای (۲.۱۱) و (۳.۱۱) باهم برابرند. این امر تنها وقتی رخ می‌دهد که تساوی

$$\sin^2 u(t) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

در همهٔ نقاط γ برقرار باشد. ولی تساوی $\sin u(t) = 0$ تنها زمانی برقرار است که یا $u(t) = 0$ یا $u(t) = \pi$ ، یعنی فقط وقتی که $P(t)$ یا قطب شمال باشد یا قطب جنوب. در هر نقطهٔ دیگر γ باید داشته باشیم

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad (4.11)$$

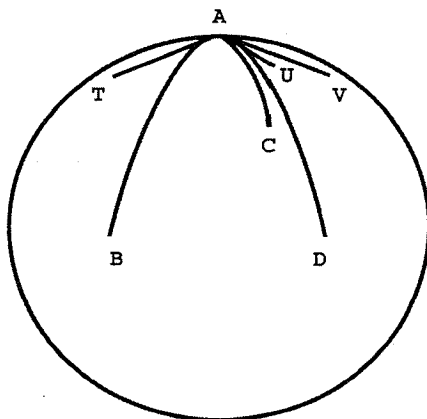
روشن است که چون γ یک پاره‌ژئودزیک است حداکثر می‌تواند شامل یکی از قطبها باشد. بنابراین تساوی (۴.۱۱) در همهٔ نقاط داخل γ برقرار است، لذا در طول γ ثابت است. بنابراین γ در واقع کمانی از یک نصف‌النهار است.

آنچه می‌خواستیم

در اثبات فوق تلویحاً این مطلب ذکر شده است که چون شعاع کره واحدی ندارد، واحد اندازه‌گیری طول خمهای رویه S ، رادیان است. به علاوه P و Q ، جز در مواردی که دو سر یک قطر S هستند، فقط با یک پاره‌ژئودزیک به هم وصل می‌شوند. وقتی P و Q دو سر یک قطر باشند، البته بینهایت پاره‌ژئودزیک آنها را به هم وصل می‌کنند.

بر اساس قضیه ۱.۱۱ می‌توان گفت که کمانهای دایره‌های عظیمه مشابه‌های کروی پاره‌خطهای اقلیدسی‌اند. اکنون به تعریف مشابه‌های کروی سایر مفاهیم اقلیدسی می‌پردازیم. یک زاویه کروی از دو کمان از دو دایره عظیمه تشکیل شده است که در یک نقطه به نام رأس زاویه مشترک‌اند. اندازه یک زاویه کروی اندازه زاویه اقلیدسی بین صفحه‌های شامل کمانهای تشکیل‌دهنده آن زاویه است. خود این زاویه [یا فرجه] نیز برابر است با زاویه بین فصل مشترکهای این دو صفحه با هر صفحه عمود بر فصل مشترک آنها. به عبارت دیگر، این زاویه، همان زاویه بین بردارهای قائم بر این دو صفحه است. روشن است که زاویه‌های کروی قابل انطباق باهم یک اندازه دارند. به علاوه اگر AB ، AC و AD سه پاره‌ژئودزیک، به ترتیب با مماسهای AT ، AU ، AV (شکل ۲.۱۱) باشند، این هر سه خط مماس در صفحه مماس بر S در A قرار دارند. در نتیجه،

$$\begin{aligned}\angle BAD &= \angle TAV = \angle TAU + \angle UAV \\ &= \angle BAC + \angle CAD\end{aligned}$$



شکل ۲.۱۱

لذا، این روش اندازه‌گیری زاویه‌های کروی در شرایط مشخص شده در اصول بدیهی (علوم متعارفه) اقلیدس صدق می‌کند.

یک مثلث کروی از سه پاره‌ژئودزیک تشکیل شده است که سه نقطهٔ ناواقع بر یک دایرهٔ عظیمه در \mathbb{S} را به هم وصل می‌کنند. در بحث از این مثلثها بهتر است قراردادهای زیر را رعایت کنیم. رأسهای مثلث را با حروف A, B, C و طول پاره‌ژئودزیکهای مقابل به این رأسها را به ترتیب با a, b, c نشان دهیم.

۳.۱۱ مثلثات کروی

قضیهٔ ۵.۱۱ در ذیل شامل مشابه‌های کروی قانون کسینوسها و قانون سینوسهاست. اثبات آنها با استفاده از چند اتحاد برداری معروف به آسانی صورت می‌گیرد. اگر a و b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، حاصلضرب داخلی آنها را با (a, b) و حاصلضرب خارجی آنها را با $a \times b$ نشان می‌دهیم. دو لم زیر بدون اثبات، دو ویژگی مهم این دو حاصلضرب را بیان می‌کنند.

لم ۲.۱۱. فرض می‌کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای a و b باشد. در این صورت

$$(a, b) = |a| |b| \cos \theta.$$

لم ۳.۱۱. (لاگرانژ). فرض می‌کنیم a, b, c, d بردارهایی در فضای سه‌بعدی باشند. در این صورت

$$(a \times b, c \times d) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$$

برای به‌دست آوردن فرمولهای مثلثات کروی بردارهایی را که مبدأ آنها مبدأ مختصات و انتهای آنها نقاط A, B, C ، رأسهای مثلث کروی، هستند به ترتیب با a, b, c و زاویه‌های حاصل در رأسهای A, B, C را به ترتیب با α, β, γ نشان می‌دهیم.

لم ۴.۱۱. اگر ABC یک مثلث کروی باشد، آنگاه

$$\cos \alpha = \left(\frac{a \times b}{|a \times b|}, \frac{a \times c}{|a \times c|} \right).$$

برهان: بردار $a \times b / |a \times b|$ بردار یکه قائم بر صفحه شامل پاره‌ژئودزیک AB ، و بردار $a \times c / |a \times c|$ بردار یکه قائم بر صفحه شامل پاره‌ژئودزیک AC است. اکنون اثبات لم با استفاده از لم ۲.۱۱ نتیجه می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

قضیه زیر صورتهای کروی قانون سینوسها و قانون کسینوسها را به دست می‌دهد. همانند آنچه که در صفحه هذلولوی دیده‌ایم، قانون‌های اخیر در کره دو صورت دارند.

قضیه ۵.۱۱. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث کروی با اضلاع a, b, c باشد. در این صورت

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (\text{الف})$$

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (\text{ج})$$

برهان: از لمهای ۲.۱۱ و ۳.۱۱ نتیجه می‌شود که

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos a - \cos b \cos c$$

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{|\mathbf{b}|^2 |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})^2} = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sin a$$

و به همین ترتیب $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sin c$ و $|\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = \sin b$

اکنون از لم ۴.۱۱ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}, \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|} \right) \\ &= \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قسمت (الف) تمام است.

اثبات قسمت (ب) در تمرینهای ۲۳ و ۲۴ به عهده خواننده گذاشته شده است.

اکنون به اثبات قسمت (ج) می‌پردازیم. با به‌کار بردن (الف) در مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 a} \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \end{aligned}$$

ولی، این عبارت اخیر نسبت به a, b, c متقارن است و از این رو داریم

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 c}$$

چون همهٔ مقادیر $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ زاویه‌هایی بین 0° و π هستند، سینوسهای آنها مثبت است و از این رو داریم

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

آنچه می‌خواستیم

البته شباهت بین فرمولهای قضیه‌های ۵.۸ و ۵.۱۱ بسیار شگفت‌آور است. ما از گفته‌های خود لباچفسکی استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که این تشابه عمیقتر از آن است که ممکن است در آغاز حدس بزنیم:

«پس از پیدا کردن معادله‌هایی [قضیهٔ ۵.۸] که وابستگی زاویه‌ها و اضلاع مثلث را نشان می‌دهند، و بالاخره وقتی عبارتهای کلی برای عناصر خطها، مساحتها و حجمهای اجسام صلب را داریم، بقیه، آنچه در هندسه می‌ماند موضوعی تحلیلی است، که در آنها محاسبات الزاماً باید باهم سازگار باشند، و نتوانیم چیز تازه‌ای پیدا کنیم که در این معادله‌های اولیه، که همهٔ روابط بین طولهای هندسی از آنها نتیجه می‌شوند، نباشد. بنابراین اگر اکنون لازم باشد بپذیریم که بعدها تناقضی ما را وادار خواهد کرد که اصولی را که در این هندسه قبول کرده‌ایم مردود بشماریم، باید قبول کنیم که این تناقض فقط می‌تواند در بطن معادله‌ها [قضیهٔ ۵.۸] نهفته باشد. ولی یادآور می‌شویم که این معادله‌ها، وقتی به‌جای a, b, c مقادیر $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ را بگذاریم، به معادله‌های

[قضیه ۵.۱۱] مثلثات کروی تبدیل می‌شوند؛ ولی در هندسه معمولی و مثلثات کروی فقط نسبتهای پاره‌خطها دخالت می‌کنند: بنابراین هندسه و مثلثات معمولی همواره با هندسه جدید سازگار خواهند بود.»

اگر چه استدلال لباچفسکی در مورد سازگاری هندسه جدیدش پذیرفتنی است ولی کافی نیست، و برای بحث بیشتر در این مورد خواننده را به فصل ۱۵ ارجاع می‌دهیم. در ضمن یادآور می‌شویم که قانون اول کسینوسهای کروی فرع زیر را که مشابه کروی قضیه فیثاغورس است به ما می‌دهد.

فرع ۶.۱۱. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث قائم‌الزاویه کروی بر کره واحد \mathbb{S} با اضلاع a ، b و c باشد. در این صورت

$$\cos c = \cos a \cos b$$

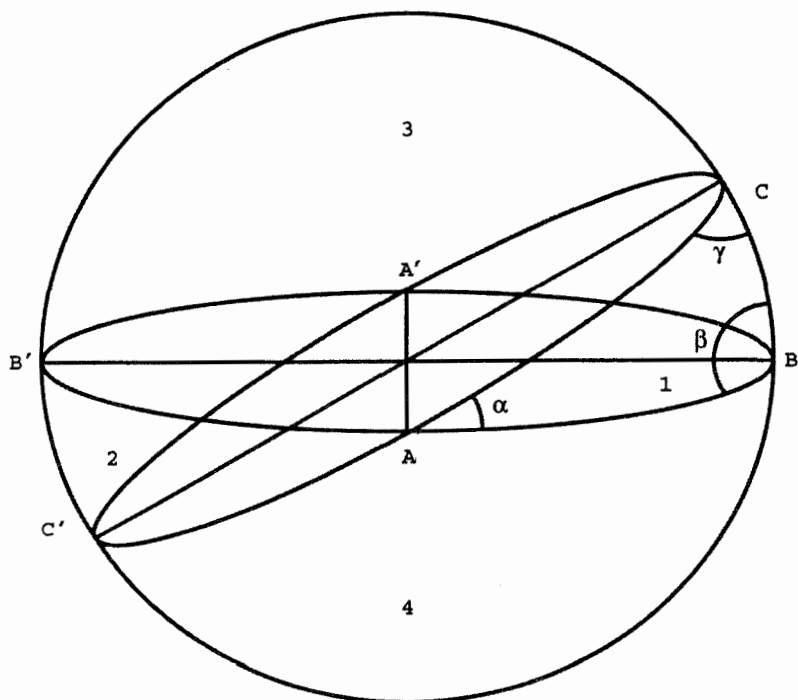
لذا اگر طول ساقهای مثلث قائم‌الزاویه کروی ۱ و ۲ باشند، طول وتر آن چنین می‌شود

$$\cos^{-1}(\cos 1 \cos 2) = ۱٫۷۹۰۰۰$$

خاطر نشان می‌کنیم که در اینجا واحد اندازه‌گیری طول، شعاع کره \mathbb{S} است.

۴.۱۱ مساحت‌های کروی

موضوع مورد بحث بعدی ما در این فصل مسأله اندازه‌گیری مساحت یک مثلث کروی است. این‌کار با استفاده از دو تعریف آسان می‌شود: به‌ازای هر نقطه A واقع بر کره \mathbb{S} نقطه A' واقع بر \mathbb{S} را متقاطع نقطه A می‌نامیم اگر A و A' دو انتهای یک قطر \mathbb{S} باشند. اگر A نقطه‌ای بر \mathbb{S} و g و h دو پاره‌ژئودزیک واصل بین A و A' باشند، روشن است که این دو پاره ژئودزیک رویه کره \mathbb{S} را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آنها یک قاچ نامیده می‌شود. اگر زاویه رأس قاچ را با α نشان دهیم، آن را قاچ به زاویه α می‌نامیم. روشن است که هر دو قاچ به زاویه α را می‌توان توسط دنباله‌ای از دورانهای کره برهم منطبق کرد. در نتیجه، هر دو قاچ از این نوع مساحت مساوی دارند. بنابراین مساحت یک قاچ با زاویه آن متناسب است. چون مساحت قاچی با زاویه 2π ، برابر است با 4π ، لم زیر را داریم



شکل ۳.۱۱

■ لم ۷.۱۱. مساحت قاجی به زاویه α رادیان مساوی است با 2α .
 قضیه زیر به تائید هریوت^۱ ۱۵۶۰-۱۶۲۱ و آلبر ژیرار^۲ ۱۵۹۵-۱۶۳۲ منسوب است. برهان
 ارایه شده در اینجا از آن اوایلر است.

قضیه ۸.۱۱. مساحت مثلث کروی ABC مساوی است با $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

برهان: فرض می‌کنیم مثلث کروی ABC (شکل ۳.۱۱) داده شده است. رأسهای آن را به نقاط
 متقاطعشان A' و B' و C' وصل و دایره‌های عظیمه شامل پاره ژئودزیکهای AB ، BC و CA
 را رسم می‌کنیم. بنابراین نیمکره مقابل به دایره عظیمه $BCB'C'$ به چهار مثلث کروی ABC ،
 $AB'C'$ ، $AB'C$ ، ABC' که مساحت‌های آنها را به ترتیب با T_1 ، T_2 ، T_3 ، T_4 نشان می‌دهیم
 تقسیم می‌شود.

با توجه به ترسیم نتیجه می‌گیریم که مثلث کروی $A'BC$ با مثلث $AB'C'$ به مساحت T_4

1. Thomas Harriot 2. Albert Girard

قابل انطباق است. بنابراین اگر مساحت قاج به زاویه α را با $ق\alpha$ نشان دهیم، داریم

$$T_1 + T_2 = ق\alpha$$

به همین ترتیب داریم

$$T_1 + T_2 = ق\beta$$

و

$$T_1 + T_2 = ق\gamma$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2T_1 &= ق\alpha + ق\beta + ق\gamma - (T_1 + T_2 + T_2 + T_2) \\ &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\pi \end{aligned}$$

و بنابراین حالا حکم قضیه بی‌درنگ نتیجه می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

این مشابهت بسیار شگفت‌انگیز بین فرمولهای مساحت مثلثهای کروی و هذلولوی، صرفنظر از جاذبه ذاتی آنها، نشان می‌دهد که هندسه‌های کروی و هذلولوی مستعد پذیرش رفتار واحدی هستند که رابطه بین آنها را روشن می‌سازد. این رفتار، رفتار کاملاً شناخته شده‌ای است که در فصل ۱۲ تشریح خواهد شد.

۵.۱۱ نگاهی به مساحت زمین (اختیاری)

منظور ما از آوردن برخی فرمولهای مثلثات کروی در این کتاب نشان دادن مشابهت این فرمولها با فرمولهای هندسه هذلولوی بوده است. به طوری که قبلاً گفتیم، این مشابهت پشتیبانی روانی لازم از پیشگامان هندسه ناقلیدسی را موجب شده است که نشان می‌دهد ابداع غیرطبیعی و باورنکردنی آنان عاقبت می‌توانسته است به همان اندازه هندسه بیشتر شناخته شده کروی معتبر باشد. ولی، اکنون که تا اینجا پیش رفته‌ایم، ممکن است بد نباشد

که برخی از کاربردهای مقدماتی این فرمولهای کروی را در مسائل مربوط به مساحی مطرح کنیم.

چون واحد اندازه‌گیری کره واحد را دقیقاً مشخص نکرده‌ایم، در نتیجه قضیه ۱.۱۱ عملاً در مورد هر کره دلخواهی برقرار است. بنابراین پاره ژئودزیکهای هر کره، کمانهایی از دایره‌های عظیمه آن هستند. استدلال مشابهی براساس واحدهای اندازه‌گیری، به دست آوردن قضیه‌های مشابه با قضیه‌های ۵.۱۱ و ۸.۱۱ را امکانپذیر می‌نماید. به عبارت دیگر، با در دست داشتن فرمولها در کره به شعاع ۱، تنها لازم است که شکلهای واقع بر کره به شعاع r را بر کره‌ای به شعاع ۱ و هم‌مرکز با آن تصویر نماییم. در این صورت اندازه زاویه‌ها تغییر نمی‌کند و طول کمانها بر r تقسیم می‌شود.

قضیه ۹.۱۱. فرض می‌کنیم ABC مثلثی کروی به اضلاع a, b, c بر کره‌ای به شعاع r باشد

در این صورت

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}} \quad (\text{الف})$$

$$\cos \frac{a}{r} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin \beta}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \frac{c}{r}} \quad (\text{ج})$$

قضیه ۱۰.۱۱. مساحت مثلث کروی ABC واقع بر کره‌ای به شعاع r مساوی است با

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

مثال ۱۱.۱۱. با فرض اینکه زمین کره‌ای به شعاع 5280 مایل است، طول اضلاع و اندازه‌های زاویه‌های مثلث کروی به رأسهای $A(70^\circ N, 10^\circ E)$ ، $B(10^\circ S, 100^\circ E)$ ، $C(50^\circ S, 80^\circ W)$ را پیدا کنید.

شعاع زمین را موقتاً به عنوان واحد طول انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب عدد 5280 را می‌توانیم تا مراحل آخر نادیده بگیریم. (r, v, u) مختصات کروی رأسهای مثلث، به ترتیب عبارت‌اند از $(1, 10^\circ, 20^\circ)$ ، $(1, 100^\circ, 100^\circ)$ و $(1, -80^\circ, 140^\circ)$. بنابراین مختصات دکارتی آنها چنین

است

$$(\sin 20^\circ \cos 10^\circ, \sin 20^\circ \sin 10^\circ, \cos 20^\circ) = (0.3368, 0.0594, 0.9397)$$

$$(\sin 100^\circ \cos 100^\circ, \sin^2 100^\circ, \cos 100^\circ) = (-0.1710, 0.9698, -0.1736)$$

$$(\sin 140^\circ \cos(-80^\circ), \sin 140^\circ \sin(-80^\circ), \cos 140^\circ)$$

$$= (0.1116, -0.6330, -0.7660).$$

بنا بر لم ۲.۱۱، کسینوسهای زاویه‌های بین شعاعهای OA ، OB و OC برابرند با حاصلضرب داخلی بردارهای مکانی متناظر آنها. از این رو

$$\angle AOB = \cos^{-1}(-0.1631) = 1.7347 \text{ رادیان}$$

$$\angle BOC = \cos^{-1}(-0.5000) = 2.0944 \text{ رادیان}$$

$$\angle COA = \cos^{-1}(-0.7198) = 2.3743 \text{ رادیان}$$

چون طول کمان هر دایره مساوی است با شعاع دایره ضربدر اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن برحسب رادیان، بنابراین طولهای اضلاع مثلث کروی ABC چنین‌اند

$$9.159 \text{ مایل، } 11.058 \text{ مایل و } 12.536 \text{ مایل.}$$

زاویه‌های این مثلث با استفاده از قانون کسینوسهای مربوطه به دست می‌آیند. از این رو

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos 2.0944 - \cos 1.7346 \cos 2.3743}{\sin 1.7346 \sin 2.3743} \\ &= -0.9013. \end{aligned}$$

لذا

$$A = 2.6941 \text{ رادیان} = 154^\circ$$

به‌همین ترتیب

$$B = 2.7874 \text{ رادیان} = 160^\circ$$

$$C = 2.6261 \text{ رادیان} = 150^\circ$$

سرانجام مساحت این مثلث کروی از قضیه ۹.۱۱ به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} & 5280^2(276941 + 27874 + 26261 - 31416) \\ & = 13844 \times 10^8 \quad \text{مایل مربع} \end{aligned}$$

نتیجه مثال زیر ممکن است به نظر خواننده تا حدی شگفت انگیز بیاید.

مثال ۱۲.۱۱. هواپیمایی از مسکو ($56^\circ\text{N}, 38^\circ\text{E}$) بدون توقف در بین راه به ملبورن ($38^\circ\text{S}, 145^\circ\text{E}$) پرواز می کند. در کدام جهت باید از مسکو راه بیفتد؟ البته صرفه در این است که هواپیما بر دایره عظیمه مازیر مسکو ملبورن پرواز نماید. برای مشخص کردن این دایره عظیمه آن را به جزئی از یک مثلث کروی تبدیل می کنیم. فرض می کنیم A موضع مسکو، B موضع ملبورن و C نقطه ای بر خط استوا، درست در جنوب مسکو باشد. با استفاده از تکنیکهای مثال ۱۱.۱۱ اندازه زاویه A از مثلث کروی ABC برابر 78.5° به دست می آید. از این رو هواپیما باید درست در جهت 11.5° جنوب شرقی از مسکو راه بیفتد.

۶.۱۱ هندسه بیضوی

مشابهتهای زیادی بین هندسه کروی و دو هندسه دیگر، یعنی هندسه های اقلیدسی و هذلولوی وجود دارد، ولی تفاوت های مهم چندی نیز آنها را از هم جدا می کند. روشن است که دایره های عظیمه مشابه های کروی خط های راست اقلیدسی هستند. ولی دو خط راست متمایز اقلیدسی حداکثر در یک نقطه متلاقی اند، در حالی که دو دایره عظیمه متمایز همواره متقاطع اند و نقاط تلاقی آنها دو نقطه متقاطعند.

غلبه بر این نابهنجاری دوم با استفاده از نوعی تخیل امکان پذیر است، تخیلی مشابه با تخیلی که از آن برای به وجود آوردن هندسه هذلولوی الهام گرفتیم. قطعه زمین همواری را بر کره \mathbb{S} تصور و فرض کنید که هر یک از ساکنان این قطعه زمین از دو جزء تشکیل شده است که همواره دو نقطه متقاطع از کره \mathbb{S} را اشغال می کنند، ولی این دو جزء همیشه خود را موجود واحدی می شمارند و از این دو جزء بودن خود بی اطلاع اند. بنابراین هر تغییر مکان یک فرد از حرکت همزمان هر دو نیمه او حاصل می شود که همواره در نقاط متقاطع کره هستند. هر چنین فردی لزوماً دو نقطه متقاطع هر کره را یک نقطه تنها تلقی خواهد کرد. از دیدگاه این موجود هر دو دایره عظیمه یکدیگر را در یک

نقطه تنها که در نظر ما دو نقطه است، قطع می‌کنند. البته این فرد هر دایره عظیمه را به صورت نیمی از آنچه که ما می‌بینیم، خواهد دید. به علاوه وقتی این فرد مثلی را رسم می‌کند، ما آن را دو مثلث خواهیم دید که یکی نگاره متقاطر دیگری است. هندسه این قطعه زمین هموار کروی، هندسه بیضوی نام دارد. این هندسه شبیه به هندسه اقلیدسی و هندسه هذلولوی است از این لحاظ که هر دو نقطه بیضوی با یک خط بیضوی یکتا به هم وصل می‌شوند. ولی خطهای بیضوی موازی وجود ندارند. بنابراین هندسه بیضوی نیز نااقلیدسی است به این معنا که اصل موضوع پلی فیر در آن برقرار نیست. فرمولهای مثلثاتی قضیه ۵.۱۱ در هندسه بیضوی برقرارند، و لذا این هندسه در واقع درست مثل همتهای هذلولوی خود هندسه‌ای است بسیار پرمایه. به جای اینکه ویژگیهای این هندسه را به تفصیل نشان دهیم، بسط قسمتی از محتوای آن را در تمرینهای زیر آورده‌ایم.

۷.۱۱ تمرین

۱. فرض می‌کنیم ABC یک مثلث کروی قائم‌الزاویه، قائمه در C ، باشد. فرمولهای زیر را ثابت کنید:

$$\sin a = \sin \alpha \sin c \quad (\text{الف})$$

$$\tan a = \tan \alpha \sin b \quad (\text{ب})$$

$$\tan a = \cos \beta \tan c \quad (\text{ج})$$

$$\cos c = \cos b \cos a \quad (\text{د})$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \quad (\text{ه})$$

$$\sin b = \sin \beta \sin c \quad (\text{و})$$

$$\tan b = \tan \beta \sin a \quad (\text{ز})$$

$$\tan b = \cos \alpha \tan c \quad (\text{ح})$$

$$\cos c = \cot \alpha \cot \beta \quad (\text{ط})$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (\text{ی})$$

۲. ادعای لباچفسکی را مبنی بر اینکه فرمولهای قضیه ۵.۸ را می‌توان با قرار دادن $a\sqrt{-1}$ ، $b\sqrt{-1}$ ، $c\sqrt{-1}$ به ترتیب به جای a ، b ، c در فرمولهای ۵.۱۱، از این فرمولها به دست آورد، ثابت کنید. (راهنمایی: از فرمول اویلر $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ استفاده کنید).

۳. اصلهای موضوع پنجگانه اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.

۴. گزاره‌های ۵-۱ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.

۵. گزاره‌های ۶-۱۰ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.
۶. گزاره‌های ۱۱-۱۵ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.
۷. گزاره‌های ۱۶-۲۰ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.
۸. گزاره‌های ۲۱-۲۵ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.
۹. گزاره‌های ۲۶-۲۸ اقلیدس را در شرایط هندسه بیضوی مورد بحث قرار دهید.
۱۰. ثابت کنید که هر دایره بیضوی همچنین یک دایره اقلیدسی است با همان مرکز.
۱۱. رابطه بین شعاع بیضوی و شعاع اقلیدسی یک دایره را پیدا کنید.
۱۲. محیط و مساحت یک دایره بیضوی را برحسب شعاع بیضوی آن بیان کنید.
 اظهار نظری دربارهٔ عدد گنگ π بیضوی بکنید.

۱۳. تقارن بیضوی چیست؟

۱۴. انتقال بیضوی چیست؟

۱۵. دوران بیضوی چیست؟

۱۶. آیا تفاوت بین فرمولهای مساحت یک مثلث در هندسه‌های هذلولوی و کروی با ادعای لباچفسکی، مبنی بر نحوهٔ به‌دست آوردن فرمولهای مثلثاتی هذلولوی از همتاهای کروی آنها، سازگار است؟

۱۷. فرمولی برای مساحت یک چندضلعی در هندسه بیضوی پیدا کنید.

۱۸. یک مثلث متساوی‌الاضلاع در هندسه بیضوی چه زاویه‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۱۹. یک n ضلعی منتظم در هندسه بیضوی چه زاویه‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۲۰. طولهای اضلاع، اندازه‌های زاویه‌ها و مساحت مثلث کروی به رأسهای شهرهای کاله‌مزو ($42^\circ\text{N}, 85^\circ\text{E}$)، کاتماندو ($28^\circ\text{N}, 85^\circ\text{E}$) و تیموکتو ($17^\circ\text{N}, 3^\circ\text{W}$)، را پیدا کنید.

۲۱. هواپیمایی قرار است بدون توقف از لندن ($51.5^\circ\text{N}, 0^\circ\text{W}$) به لیما ($12^\circ\text{S}, 77^\circ\text{W}$) پرواز نماید، جهت حرکت آغازی آن را پیدا کنید.

۲۲. فرض می‌کنیم a, b و c سه بردار در R^3 باشند. اتحادهای زیر را ثابت کنید

$$a \times (b \times c) = (a, c)b - (a, b)c \quad \text{(الف)}$$

$$(a \times b) \times c = (a, c)b - (b, c)a \quad \text{(ب)}$$

$$(a \times b, c) = (b \times c, a) = (c \times a, b) \quad \text{(ج)}$$

۲۳. فرض می‌کنیم $a, b, c, A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ قراردادهای موجود در قضیهٔ ۵.۱۱ باشند. فرض می‌کنیم a^* بردار یکه‌ای در امتداد $b \times c$ و A^* منتهای آن بر کره واحد S باشد. اگر b^*, B^*, c^*, C^* را به همین ترتیب تعریف کنیم [در واقع A^*, B^*, C^* قطبهای اضلاع مثلث کروی اند]، مثلث $A^*B^*C^*$ را مثلث قطبی ABC می‌نامیم. اگر $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ زاویه‌های $\Delta A^*B^*C^*$ و a^*, b^*, c^* اضلاع آن باشند ثابت کنید

$$\alpha^* = \pi - a, \quad \beta^* = \pi - b, \quad \gamma^* = \pi - c \quad (\text{الف})$$

$$\alpha = \pi - a^*, \quad \beta = \pi - b^*, \quad \gamma = \pi - c^* \quad (\text{ب})$$

۲۴. با استفاده از تمرین ۲۳، قسمت (ب)ی قضیهٔ ۵.۱۱ را ثابت کنید.

۲۵. با استفاده از قانون سینوسها در مثلثات کروی یک صورت کروی از قضیهٔ منلائوس (رجوع کنید به تمرینهای ۲۱.۱ و ۶.۸) را بیان و آن را ثابت کنید.

۲۶. با استفاده از قانون سینوسها در مثلثات کروی یک صورت کروی از قضیهٔ سوا (رجوع کنید به تمرینهای ۲۱.۱ و ۷.۸) را بیان و آن را ثابت کنید.

۲۷. ثابت کنید که میانه‌های یک مثلث کروی هم‌مس‌اند.

هندسه دیفرانسیل و خمیدگی گاوسی

۱.۱۲ هندسه دیفرانسیل

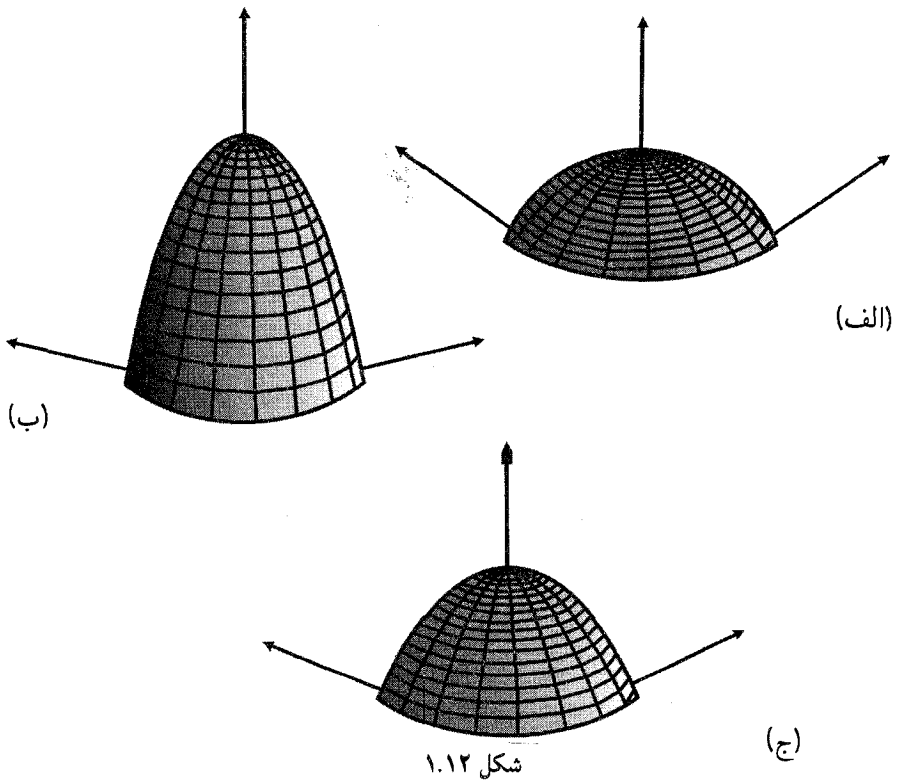
پس از بحث درباره هندسه کروی به تفصیل، طبیعی بود که ریاضیدانان سده هجدهم توجه خود را به هندسه رویه‌های دیگر معطوف نمایند. بر خلاف صفحه و کره، بسیاری از این رویه‌ها ناهمگن‌اند، به این معنا که در نقاط مختلف به نحو متفاوتی شکل گرفته‌اند یا خمیده شده‌اند. هندسه دیفرانسیل شاخه‌ای است از ریاضیات که سروکارش با چندی‌نمایی شکل، در خمها و رویه‌هاست. اگرچه چند تن از ریاضیدانان پیشین از جمله لاگرانژ و اویلر کمکهای مؤثری به این موضوع نموده‌اند، ولی این شخص گاوس بود که جهتی به این مبحث داد که تاکنون وجود دارد. وی این کار را با تعریف دقیق مفهوم ابهام‌آمیز خمیدگی یک‌رویه و اثبات قضیه‌های دقیق و جذاب درباره آن انجام داد. در اینجا تعریف و قضیه‌های گاوس را به علت نقش محوری آنها در هندسه جدید و وابستگی قوی آنها به قضیه‌های مختلف درباره مساحت مثلث در هندسه‌های هذلولوی، اقلیدسی و کروی بیان

خواهیم کرد.

در اینجا منظور ما از یک رویه نتیجه نهایی دگرشکلی هموار صفحه یا بخشی از آن است. منظور از دگرشکلی هموار آن است که صفحه را [با پیچاندن، کشیدن، فشردن] چنان تغییر شکل دهیم که رویهٔ حاصل گوشه‌ها یا یالهای تیز نداشته باشد؛ به عبارت دیگر، صفحهٔ مماس بر رویه را در هر یک از نقاط آن بتوان بدون ابهام تعریف کرد. در جستجو برای تعریف مفهوم خمیدگی، باید به این توصیهٔ کلی پای بند باشیم که خمیدگی عددی رویه به تعبیری باید با دگرشکلی آن متناسب باشد. گذشته از آن، ما پیش‌پندارهایی از برخی رویه‌های خاص داریم که هر تعریف معقول از خمیدگی باید با آنها تطبیق کند. مثلاً، خمیدگی صفحه باید \circ باشد، زیرا صفحه اصلاً نتیجهٔ نهایی هیچ دگرشکلی نیست. به علاوه، کره باید در تمام نقاط یک خمیدگی داشته باشد، زیرا دگرشکلی آن در تمام نقاط یکی است. این حکم البته در مورد استوانهٔ مستدیر نیز باید برقرار باشد.

اندازهٔ دگرشکلی را که باید بر صفحه اعمال کرد تا رویهٔ مورد نظر به دست آید گاوس با ترفندی مجسم کرده که به نگاشت گاوس معروف شده است. فرض می‌کنیم \mathbb{F} یک رویه، P نقطه‌ای معمولی بر آن، و Φ بخشی از رویه در حول P باشد که در آن، رویه کلاً به‌طور یکنواخت خمیده شده است. مؤلف از به‌کار بردن این اصطلاحات مبهم عذر می‌خواهد ولی براین باور است که در این شرایط این‌کار بهترین کاری است که می‌توان کرد. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PP'}$ بردار یکهٔ قائم بر رویهٔ \mathbb{F} باشد. اگر رویه در Φ بسیار خمیده باشد، یک تغییر مکان کوچک P موجب تغییر نامتناسب زیاد در امتداد بردار $\overrightarrow{PP'}$ می‌شود، در حالی که اگر Φ تقریباً مسطح باشد، همین تغییر مکان کوچک در وضع نقطهٔ P موجب تغییر بسیار کوچکی در امتداد $\overrightarrow{PP'}$ خواهد شد. این مطلب در شکل ۱.۱۲ با رویه‌های الف، ب و ج، حاصل از یک دایره با استفاده از مقادیر زیادی دگرشکلی پشت سرهم نشان داده شده است. از این شکل معلوم است که هر چه اندازهٔ دگرشکلی بیشتر باشد، انحراف امتدادهای بردارهای قائم مختلف نسبت به هم به همان اندازه بیشتر شده است. در واقع اگر اتفاقاً رویهٔ \mathbb{F} یک صفحه باشد، وضع نقطهٔ P هر چه باشد امتداد قائم $\overrightarrow{PP'}$ ثابت می‌ماند. از سوی دیگر اگر رویه یک کره باشد، نقاط متقاطع، صرفنظر از کوچک بودن اندازهٔ شعاع کره، بردارهای قائم متقابل خواهند داشت. بنابراین این تغییر امتداد قائم اندازهٔ معقولی از دگرشکلی است.

برای به‌دست آوردن نمایش عینی اندازهٔ تغییر امتداد بردار قائم $\overrightarrow{PP'}$ وقتی P همهٔ نقاط بخش Φ از رویهٔ \mathbb{F} را اختیار می‌کند، گاوس بردار $\overrightarrow{PP'}$ را در مبدأ اختیار می‌کند. بدین معنی که وی بردار واحد \overrightarrow{OP}^* را که مبدأ آن مبدأ مختصات است طوری انتخاب می‌کند که موازی و مساوی با $\overrightarrow{PP'}$ اولیه باشد (شکل ۲.۱۲). وقتی P بر Φ اولیه تغییر مکان می‌دهد، نقطهٔ P^*

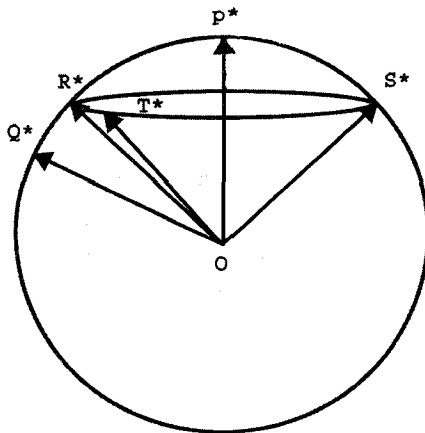
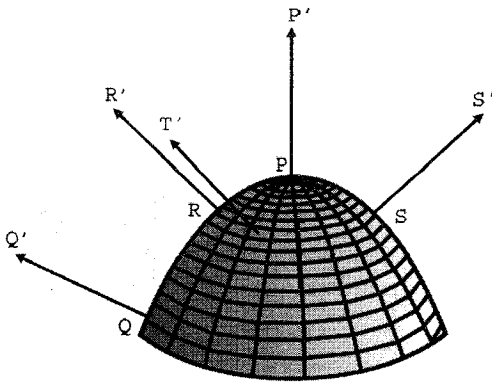


بخش Φ^* از کرهٔ واحد S را می‌بینید. مثلاً اگر \mathbb{F} اتفاقاً قسمتی از صفحهٔ xy باشد، آنگاه P^* همواره نقطهٔ $(0, 0, 1)$ خواهد بود. اگر صفحهٔ yz باشد، P^* همواره نقطهٔ $(1, 0, 0)$ می‌شود. اکنون باید برای خواننده مسلم شده باشد که اگر \mathbb{F} یک رویهٔ مستوی باشد، Φ^* از یک نقطهٔ تنها تشکیل یافته است. از سوی دیگر اگر \mathbb{F} یک کره باشد، آنگاه وقتی P بر تمامی کرهٔ \mathbb{F} تغییر مکان می‌دهد، P^* تمامی کرهٔ واحد را ترسیم می‌نماید. اگر \mathbb{F} سهمیوار دورانی با معادلهٔ $z = x^2 + y^2$ باشد، P^* نیمی از کرهٔ واحد را رسم می‌نماید.

گاوس خمیدگی کلی بخش Φ از \mathbb{F} را به صورت

مساحت (Φ^*)

تعریف کرده است. اگر رویهٔ \mathbb{F} کراندار باشد (یعنی وسعت محدود داشته باشد)، خمیدگی کلی آن را می‌توان از تقسیم آن به بخشهای بقدر کافی کوچک Φ و جمع کردن خمیدگیهای کلی این بخشها



شکل ۲.۱۲

به دست آورد.

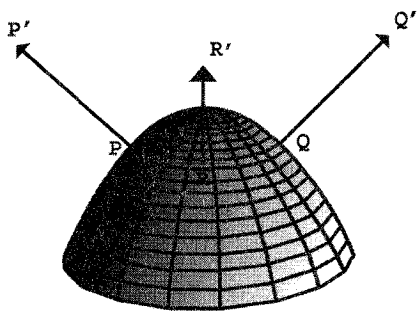
روشن است که این تعریف در این شرایط که خمیدگی یک رویهٔ مستوی صفر است، صدق می‌کند، زیرا در این حالت Φ^* از یک نقطهٔ تنها تشکیل شده است و لذا مساحت آن صفر است. رویه‌های دیگری نیز وجود دارند که خمیدگی کلی آنها همواره صفر است. مثلاً استوانهٔ مستدیر و هر بخشی از آن از این‌گونه است. برای اثبات این مطلب استوانه‌ای را که بر قاعده‌اش ایستاده و چنان است که مقاطع آن با صفحات افقی دایره‌اند در نظر می‌گیریم. در این صورت بردار قائم $\overrightarrow{PP'}$ در هر نقطه با صفحهٔ xy موازی است و از این رو مکان هندسی نقطهٔ P^* دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات در صفحهٔ xy . چون مساحت این دایره و هر کمانی از آن صفر است، در نتیجه

خمیدگی کلی استوانهٔ مستدیر \circ است. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که خمیدگی کلی همهٔ استوانه‌ها و همهٔ مخروطها صفر است. این رویه‌ها نمونه‌هایی از رویه‌های گسترده هستند، که بنا به تعریف رویه‌هایی هستند که از خم کردن قطعه‌هایی از یک صفحه بدون برهم زدن فواصل در روی آنها حاصل می‌شوند. به عبارت دیگر این رویه‌ها، رویه‌هایی هستند که با استفاده از یک ورق کاغذ می‌توان به دست آورد. یکی از نقاط قوت این مفهوم خمیدگی کلی این است که می‌توان از آن برای مشخص کردن رویه‌های گسترده استفاده کرد. با تسامح بگوییم، رویه‌ای گسترده است که اگر و تنها اگر خمیدگی کلی هر بخش آن صفر باشد.

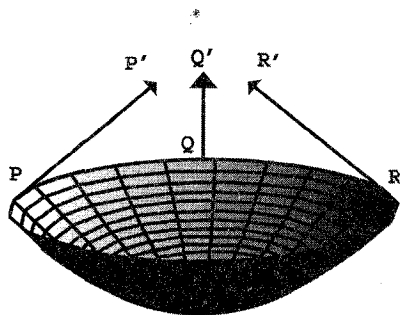
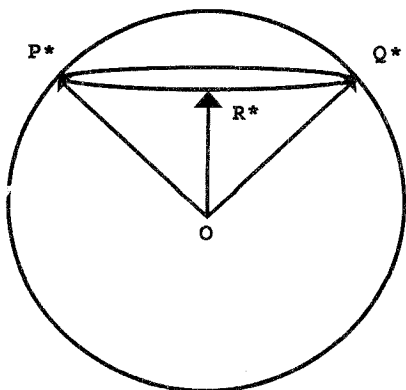
اکنون به کرهٔ واحد S برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم نقش رویهٔ \mathbb{F} را ایفا نماید. چون شعاع کره بر صفحهٔ مماس بر آن در هر نقطه عمود است در نتیجه $\overline{OP} = \overline{PP'} = \overline{OP}^*$. به عبارت دیگر $P = P^*$! بنابراین به ازای هر بخش ϕ از کرهٔ واحد، $\Phi = \Phi^*$ ، و از این رو مساحت (Φ) با مساحت (Φ^*) مساوی است، بنابراین خمیدگی کلی \mathbb{F} مساوی است با مساحت (\mathbb{F}) .

در این مرحله لازم است به اِشکالی توجه کنیم که در بحث قبل به اجمال از آن رد شده بودیم. مواردی هستند که لازم است خمیدگی کلی را منفی تعریف کنیم، یعنی آن را به جای مساحت (Φ^*) باید مساوی با منهای مساحت (Φ^*) بگیریم. این حالت وقتی پیش می‌آید که P نقطهٔ زینی \mathbb{F} باشد، یعنی نقطه‌ای که صفحهٔ مماس در آن به جای اینکه در یک طرف Φ قرار گیرد، از آن عبور می‌کند. با توجه به ش ۳.۱۲ روشن است که رفتار نگاشت گاوس در مجاورت یک نقطهٔ زینی با رفتار آن در یک قسمت کوژ یا کاو رویه کاملاً متفاوت است. به ویژه وقتی Φ زینی شکل باشد، هر گاه P دایره‌ای را پادساعتسو بر ϕ طی کند، P^* دایره‌ای ساعتسو بر S طی می‌نماید. برعکس وقتی Φ کوژ یا کاو است، اگر P بر دایره‌ای از Φ پادساعتسو حرکت کند، P^* نیز دایره‌ای پادساعتسو طی می‌کند. چنین نقطه‌های زینی به هیچ وجه استثنایی نیستند. مثلاً رویه‌ای که از دوران هذلولی $y = 1/x$ حول محور y پدید می‌آید، منحصرأً از این نوع نقاط تشکیل یافته است (شکل ۴.۱۲).

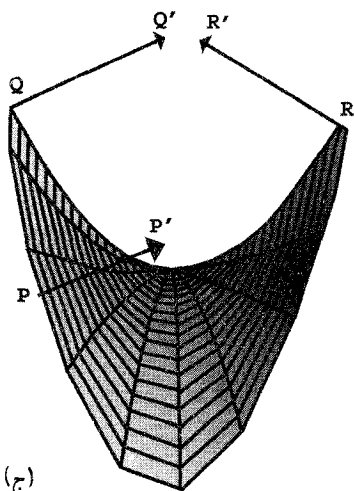
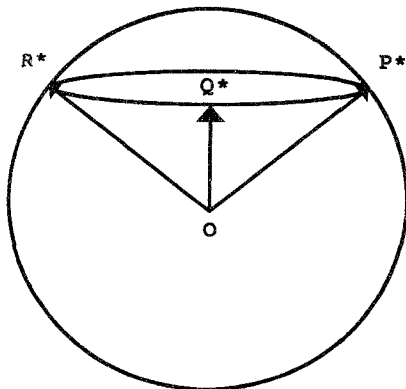
اکنون در وضعی هستیم که می‌توانیم تعمیم قضیهٔ ۸.۱۱ را برای رویه‌های دلخواه، به دست گاوس، بدون اثبات بیان کنیم. در این‌گونه رویه‌ها مثلثهای ژئودزیک و زاویه‌های آنها باید به عنوان تعمیمهای واضح متناظرهای آنها در روی کرهٔ واحد تلقی شوند. یعنی، پاره ژئودزیکی که دو نقطهٔ واقع بر رویهٔ \mathbb{F} را به هم وصل می‌کند، خمی است واقع در \mathbb{F} با کوتاهترین طول که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند. یک مثلث ژئودزیک



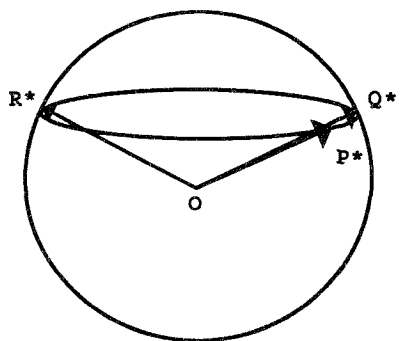
(الف)



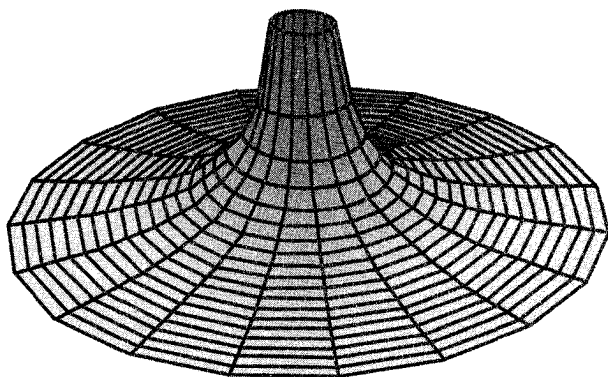
(ب)



(ج)



شکل ۳.۱۲: (الف) نگاشت گaus بر یک رویه کوزه. (ب) نگاشت گaus بر یک رویه کاو. (ج) نگاشت گaus در نزدیک یک نقطه زینی.



شکل ۴.۱۲

در \mathbb{F} از سه پاره ژئودزیک تشکیل یافته است که هر یک از آنها دو رأس این مثلث را به هم وصل می‌کند. به علت کلیتی که این تعریف دارد لازم است این قید را اضافه کنیم که ژئودزیکهای سازنده چنین مثلثی همدیگر را فقط در رأسهای مثلث قطع می‌کنند.

قضیهٔ ۱.۱۲. (گوس). فرض می‌کنیم Φ درون یک مثلث ژئودزیک با زاویه‌های رأس α ، β ، γ بر رویهٔ دلخواه \mathbb{F} باشد. در این صورت خمیدگی کلی Φ مساوی است با

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

چون خمیدگی کلی هر ناحیه در کرهٔ واحد با مساحت آن ناحیه مساوی است، قضیهٔ ۸.۱۱ حالت خاصی از قضیهٔ گوس در رویهٔ کرهٔ واحد است.

در ادامه، گوس خمیدگی یک رویهٔ \mathbb{F} در یک نقطهٔ P را به صورت نسبت

$$K(P) = \frac{\text{خمیدگی کلی } (\Phi)}{\text{مساحت } (\Phi)}$$

تعریف می‌کند که در آن Φ ناحیهٔ بینهایت کوچکی از \mathbb{F} شامل P است. به عبارت دیگر $K(P)$ را می‌توان با انتخاب ناحیهٔ کوچک Φ از \mathbb{F} که شامل P است و تقسیم خمیدگی کلی آن بر مساحت آن حساب کرد. این کمیت اکنون به خمیدگی گاوسی رویه در نقطهٔ P موسوم

است. وی سپس فرمول صریحی برای خمیدگی موضعی رویهٔ $z = f(x, y)$ پیدا می‌کند، یعنی

$$K = \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (۱.۱۲)$$

چون توجیه درستی این فرمول تا حدی پیچیده و مبتنی بر مطالب بعدی است، اثبات آن تا بخش بعدی به تعویق انداخته شده است.

در اینجا باید یادآور شویم که اگر خمیدگی گاوسی رویه‌ای در هر یک از نقاطش منفی باشد، بنابر قضیهٔ گاوس مجموع زاویه‌های هر مثلث ژئودزیک واقع بر آن از π کمتر است، درست حالتی که در صفحهٔ هذلولوی رخ می‌دهد. لذا این رویه‌ها را می‌توان، اصولاً، به‌عنوان الگوهای برای هندسهٔ هذلولوی به‌کار برد. رویهٔ مذکور در بالا که از دوران هذلولی $y = 1/x$ ($y > 0$) حول محور y ها پدید آمده یکی از این رویه‌هاست. اما خمیدگی گاوسی آن ثابت نیست. زیرا روشن است که خمیدگی نقاط دورتر از محور دوران تقریباً مساوی است با صفر، در حالی که خمیدگی نقاط نزدیک به محور y ها بسیار بزرگ ولی از لحاظ علامت منفی است (تمرین ۴). در نتیجه چنین رویه‌ای را نمی‌توان به‌عنوان الگویی برای هندسهٔ هذلولوی به‌کار برد، زیرا بنابر اصل موضوع ۴ اقلیدس چنین هندسه‌ای باید همگن باشد، به این معنی که به‌ازای هر دو نقطه از این هندسه حرکت صلبی وجود داشته باشد که یکی را بر دیگری بنگارد. رویه‌های با انحنای گاوسی ثابت و منفی در سال ۱۸۴۰ به‌دست مایندینگ^۱ ساخته شده بودند ولی وی از ارتباط آنها با صفحهٔ هذلولوی آگاه نبوده است. جالب است بدانید که مایندینگ در بسط مثلثات مثلثهای ژئودزیک این رویه‌ها تا جایی پیشرفت که فرمولهایی را که لباچفسکی برای صفحهٔ هذلولوی به‌دست آورده بود، به‌دست آورد. وی نیز متذکر شده است که فرمولها را می‌توان با استفاده از فرمولهای مثلثات کروی با قرار دادن عدد انگاری $i = \sqrt{-1}$ به‌جای ۱، یعنی شعاع کرهٔ واحد S به‌دست آورد. این بلترامی بود که در ۱۸۶۸ یادآور شد که هندسهٔ این رویه‌ها، که وی آنها را رویه‌نما [یا شبه‌رویه] نامیده، یک تحقق ملموس از هندسهٔ نااقلیدسی لباچفسکی است.

۲.۱۲ مروری بر طولها و مساحتها در رویه‌ها

برای اینکه توضیح بیشتری از سهم گاوس در هندسهٔ جدید، و نیز تعمیمهای کلیدی از قضیه‌های مربوط به مساحتهای مثلثهای ژئودزیک داده باشیم، لازم است چند نکتهٔ مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال رویه‌ها را مرور کنیم. این مطالب در فصلهای آخر بسیاری از کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال وجود دارند.

مطلب را با فرمول طول کمان خمها در دستگاه مختصات دکارتی در فضای سه‌بعدی آغاز می‌کنیم. اگر γ خمی پارامتری شده به صورت

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad a \leq t \leq b$$

باشد، طول آن مساوی است با

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (2.12)$$

همهٔ خمهای مورد بحث در این فصل بر رویه‌ای چون \mathbb{F} که نمودار تابع $z = f(x, y)$ است قرار دارند. بنابراین هر خم واقع بر این رویه را می‌توان با مشخص نمودن تصویر آن بر صفحهٔ xy مشخص کرد. در واقع معنی این گفته این است که هر خم γ بر رویهٔ $z = f(x, y)$ را می‌توان به صورت

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), f(x(t), y(t))] \quad a \leq t \leq b$$

پارامتری نمود که در آن

$$[x(t), y(t)]$$

یک صورت پارامتری از تصویر آن بر صفحهٔ xy است.

اکنون این صورت پارامتری γ بر \mathbb{F} را در فرمول طول کمان دخالت می‌دهیم. از قاعدهٔ زنجیری [یا قاعدهٔ مشتق تابع مضاف] نتیجه می‌شود که

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

و از این رو فرمول طول کمان (۲.۱۲) برای هر خم γ واقع بر نمودار $z = f(x, y)$ را می‌توان به صورت

$$\int_a^b \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

یا به صورت اختصاری

$$\int_{\gamma} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2} \quad (۳.۱۲)$$

نوشت.

مثال ۲.۱۲. طول خم γ واقع بر سهمیوار دورانی $z = x^2 + y^2$ را پیدا کنید که مستقیماً در بالای خط $x = y$ در صفحه xy واقع است و مبدأ را به نقطه $(1, 1, 2)$ وصل می‌کند. در اینجا در طول γ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \quad \text{و} \quad y = x$$

از این رو انتگرال (۳.۱۲) به

$$\int_0^1 \sqrt{2 + 16x^2} dx = ۲,۵۶\dots$$

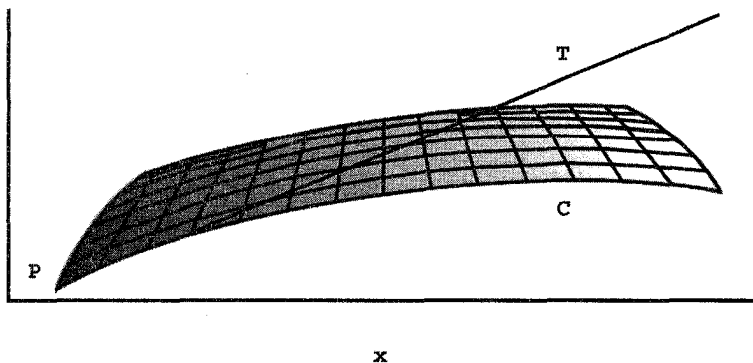
تبدیل می‌شود.

اکنون توجه خود را به خود رویه \mathbb{F} (شکل ۵.۱۲) معطوف می‌داریم. اگر این رویه دارای معادله $z = f(x, y)$ باشد، مقطع آن را با صفحه‌ای شامل نقطه $P = (a, b, c)$ و موازی با صفحه xz می‌توان به صورت

$$C(x) = [x, b, f(x, b)]$$

پارامتری کرد که دارای مشتق برداری به صورت

$$\frac{dC(x)}{dx} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$



شکل ۵.۱۲

است، لذا صورت پارامتری خط مماس S بر C در نقطه P چنین است

$$S(x) = (a, b, c) + (x - a)\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left[x, b, c + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

به همین ترتیب مقطع D این رویه با صفحه‌ای موازی با صفحه yz و شامل نقطه P دارای صورت پارامتری

$$D(y) = [a, y, f(a, y)]$$

است با مشتق برداری

$$\frac{dD(y)}{dy} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

و بنابراین خط مماس T بر D در نقطه P را می‌توان به صورت

$$T(y) = (a, b, c) + (y - b)\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left[a, y, c + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

پارامتری کرد. خواننده باید در نظر داشته باشد که همه مشتقات و مشتقات جزئی فوق باید در نقطه $a = x^1, b = y$ محاسبه شوند. تنها دلیل عدم ذکر صریح این مطلب در فرمولهای فوق، جلوگیری از دشواری خوانده شدن آنهاست.

مثال ۳.۱۲. نمودار رویه $z = x^2 + y^2$ را در نقطه $(1, 1, 2)$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 = 3$$

در نتیجه، خطهای مماس در این نقطه دارای معادلات پارامتری برداری زیرند

$$S(x) = [x, 1, 2 + (x - 1)^2] = (x, 1, 2x),$$

$$T(y) = [1, y, 2 + (y - 1)^3] = (1, y, 3y - 1).$$

بخش Φ از رویهٔ \mathbb{F} که مستقیماً در بالای مستطیل R با رأسهای $(a, b, 0)$ ، $(a + h, b, 0)$ ، $(a, b + \kappa, 0)$ و $(a + h, b + \kappa, 0)$ قرار دارد، که تقریباً با متوازی‌الاضلاع $PACB$ مشخص شده است و خود بخشی از صفحهٔ مماس بر \mathbb{F} در P است که مستقیماً در بالای همان مستطیل R قرار دارد (شکل ۴.۱۲). مختصات رئوس این متوازی‌الاضلاع را با قرار دادن مقادیر مناسب در معادلات پارامتری خطهای مماس S و T می‌توان به دست آورد. این جایگذاریها مختصات رأسهای مجاور به P را به صورت زیر به دست می‌دهند

$$A = \left(a + h, b, c + h \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{و} \quad B = \left(a, b + \kappa, c + \kappa \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

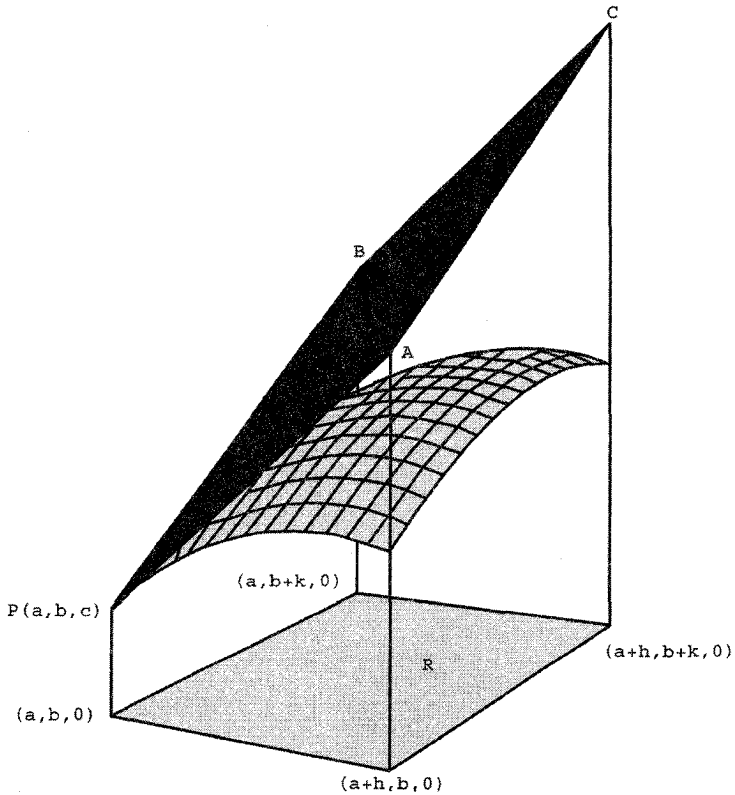
از این رو مساحت متوازی‌الاضلاع $PACB$ مساوی است با طول حاصلضرب خارجی

$$\begin{aligned} |\vec{PA} \times \vec{PB}| &= \left| \left(h, 0, h \frac{\partial f}{\partial x} \right) \times \left(0, \kappa, \kappa \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right| \\ &= \left| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right| h\kappa = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} h\kappa \end{aligned}$$

بنابراین مساحت آن قسمت از رویهٔ \mathbb{F} که مستقیماً در بالای ناحیهٔ R در صفحهٔ xy واقع است مساوی است با

$$\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad (4.12)$$

مثال ۴.۱۲. مساحت قسمتی از سهمیوار $z = x^2 + y^2$ را پیدا کنید که در بالای قرص واحد Δ در صفحهٔ xy واقع است.



شکل ۶.۱۲

چون مشتقات جزئی مربوطه z_x و z_y هستند، این مساحت برابر است با

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (\sqrt{1 + 4r^2}) r \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (5\sqrt{5} - 1) d\theta \\ &= \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6} \end{aligned}$$

انتگرالده

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

در فرمول (۴.۱۲) را عنصر مساحت می‌نامند و با dA نشان می‌دهند. این عدد مساحت بخش بینهایت کوچکی از رویهٔ \mathbb{F} است که در بالای مستطیل بینهایت کوچکی به اضلاع dx و dy در صفحهٔ xy واقع است.

گاه لازم می‌آید که مقادیر تابعی را که در همهٔ نقاط رویه تعریف شده جمع کنیم. مثلاً اگر $s(x, y)$ چگالی رویه در نقطهٔ $[x, y, f(x, y)]$ باشد، مجموع مقادیر s روی بخش Φ از رویه، جرم Φ را به دست می‌دهد. اکنون با این قیاس، ملاحظه می‌کنیم که جرم بخش بینهایت کوچکی از رویه که در بالای مستطیلی به اضلاع dx و dy در صفحهٔ xy واقع است مساوی است با حاصلضرب چگالی (تقریباً یکنواخت) در مساحت آن، یعنی

$$\delta(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

و از این رو جرم آن بخش از \mathbb{F} که در بالای مستطیل R در صفحهٔ xy واقع است توسط انتگرال

$$\iint_R \delta(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (۵.۱۲)$$

داده می‌شود.

مثال ۵.۱۲. تابع چگالی ورقِ بخشی از صفحهٔ $z = 3x + 2y + 1$ که در بالای مربع $0 \leq x, y \leq 1$ قرار دارد مساوی است با $\delta(x, y) = x + y$. جرم کل ورق را پیدا کنید.

با استفاده از فرمول (۵.۱۲) جرم ورق مساوی است با

$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y) \sqrt{1 + 9 + 4} dx dy = \sqrt{14}$$

مفاهیم چگالی و جرم را با این هدف که مفهوم جمع روی رویه را مشخصتر بیان کنیم، مورد استفاده قرار دادیم، ولی این بحث بسیار کلی بود. حتی اگر δ تابعی دلخواه باشد، مجموع δ روی بخش Φ از رویهٔ \mathbb{F} با فرمول (۵.۱۲) داده می‌شود، که در آن R تصویر Φ بر صفحهٔ xy است. معمولاً انتگرال (۵.۱۲) را به صورت

$$\iint_{\Phi} \delta dA \quad (۶.۱۲)$$

می‌نویسند. خوانندگان باید بدانند که فرمول (۶.۱۲) صرفاً یک علامت اختصاری است. وقتی محاسبات اصلی موردنظر باشد باید از انتگرال (۵.۱۲) استفاده کرد.

مثال ۶.۱۲. انتگرال

$$\iint_{\Phi} (x^2 - y) dA$$

را حساب کنید که در آن Φ بخشی از صفحه $z = 3x + 2y + 1$ واقع در بالای مربع واحد $0 \leq x, y \leq 1$ در صفحه xy است.

با برگشت به انتگرال (۵.۱۲) به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 - y) \sqrt{1 + 9 + 4} dx dy = -\frac{\sqrt{14}}{6}$$

باید توجه کرد که وقتی δ عیناً مساوی با ۱ باشد، انتگرال (۶.۱۲) صرفاً مساحت Φ را به دست می‌دهد.

بدین ترتیب مرور ما بر حساب دیفرانسیل و انتگرال در رویه‌ها پایان می‌یابد. هدف اصلی این بود که چگونگی جمع کردن مقادیری را که در هر نقطه از یک رویه تعریف شده‌اند یادآوری نماییم به‌ویژه دو حالت مورد علاقه ماست: وقتی این مقدار مساوی با ثابت ۱ باشد، فرایند مجموعیابی مساحت رویه را به دست می‌دهد. وقتی این مقدار مجموع، خمیدگی در هر نقطه باشد، نتیجه مساوی با خمیدگی کلی می‌شود.

۳.۱۲ فرمول خمیدگی گاوس در یک نقطه

این بخش فقط شامل اثبات فرمول مذکور در فوق است، که گاوس برای خمیدگی در یک نقطه به دست آورده است.

قضیه ۷.۱۲. اگر رویه \mathbb{F} نمودار تابع $z = f(x, y)$ باشد، آنگاه

$$K = \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

برهان: فرض می‌کنیم P نقطه‌ای بر رویهٔ \mathbb{F} باشد. اگر Φ بخش بینهایت کوچکی از \mathbb{F} حول P و Φ^* نگارهٔ Φ بر اثر نگاشت گاوس باشد، داریم

$$K = \frac{(\Phi^*) \text{ مساحت}}{(\Phi) \text{ مساحت}} = \frac{dA(\text{روی کره})}{dA(\mathbb{F} \text{ روی})}$$

اما معادلهٔ کرهٔ واحد چنین است: $Z = \sqrt{1 - X^2 - Y^2}$ و لذا

$$\begin{aligned} dA(\text{روی کره}) &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2} dXdY \\ &= \sqrt{1 + \frac{X^2 + Y^2}{1 - X^2 - Y^2}} dXdY = \frac{dXdY}{Z} \end{aligned}$$

اکنون نقطهٔ (X, Y, Z) بر این کره را انتهای بردار یکهٔ قائم بر رویهٔ \mathbb{F} در نقطهٔ (x, y, z) می‌گیریم. به عبارت دیگر

$$(X, Y, Z) = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

بنابراین

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

در نهایت شگفتی ژاکوبین

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial X \partial Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial X}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x}$$

به صورت ساده

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^2}$$

درمی آید. از این رو

$$\begin{aligned} K &= \frac{dA(\text{روی کره})}{dA(\text{روی F})} \\ &= \frac{dX dY}{Z} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{Z} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} dx dy}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} dx dy \\
 &= \frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}
 \end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم

۴.۱۲ مروری بر هندسهٔ ریمانی

برای تشریح مرحلهٔ مهم دیگری از تکامل هندسهٔ دیفرانسیل لازم است از خوانندگان خود بخواهیم باز در عالم خیال به یک چیز دیگری بیندیشند. فرض کنند ناظری به نام پولاریس در نقطه‌ای بسیار بسیار دور بر محور مثبت z ‌ها از یک دستگاه مختصات دکارتی زندگی می‌کند و با تلسکوپ رفتار برخی از ساکنان دوبعدی کرهٔ واحد را بررسی می‌کند. بعد فرض می‌کنیم ساکنان نیمکرهٔ بالایی ($z > 0$) هرگز به بخش نیمکرهٔ پایینی نمی‌روند و پولاریس از ماهیت خمیدگی نیمکره‌ای که مشاهده می‌کند بی‌اطلاع است. به عبارت دیگر پولاریس بر این باور است که به بررسی موجوداتی دوبعدی پرداخته است که در داخل قرص واحد محصور شده‌اند. در آغاز ممکن است به نظرش برسد که این موجودات ویلان و سرگردان هستند. مسلماً وی مشاهده خواهد کرد که وقتی می‌خواهند از نقطهٔ A به نقطهٔ B بروند و حتی وقتی عجله دارند، کوتاهترین مسیر را انتخاب نمی‌کنند. در واقع، این موجودات به جای انتخاب مسیر مستقیم از A به B ، کمان مستدیری را اختیار می‌کنند که به سمت محیط دایرهٔ جهان آنها خم شده است. البته علت این امر را ما بهتر می‌دانیم. می‌دانیم که این موجودات بر رویهٔ یک کره زندگی می‌کنند و بنابراین ژئودزیکهای آنها کمانهایی از دایره‌های عظیمه‌اند. پولاریس، به علت محدودیتهای خودش، این دایره‌های عظیمه را فقط به صورت تصاویر این کمانهای کروی بر صفحهٔ xy می‌بیند.

اگر پولاریس به عقل سلیم این موجودات عقیده داشته باشد، ممکن است بپذیرد که ماهیت

فیزیکی جهان آنها طوری است که هنگام حرکت هر چه به محیط جهان خود نزدیکتر می‌شوند مجبورند تندتر و تندتر حرکت کنند. در قیاس با برودت بینهایت زیاد محور x ها که مرز نیمصفحهٔ بالایی پوانکاره است، پولاریس ممکن است چنین فرض کند که گرمای محیط قرص واحدی که او مشاهده می‌کند آنچنان زیاد است که اگر این موجودات بخواهند از آن خارج شوند خیلی بزرگ می‌شوند. به عبارت دیگر او ممکن است فکر کند که در قرصی که اینان زندگی می‌کنند یک متریک ریمانی حاکم بر مفهوم فاصله وجود دارد. در واقع این متریک ریمانی به آسانی محاسبه می‌شود، و ما هم اکنون آن را محاسبه خواهیم کرد. در این مقام بدون ارایهٔ دلیل، می‌گوییم که این متریک چنین است:

$$\frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1 - x^2)dy^2}{1 - x^2 - y^2} \quad (۷.۱۲)$$

که در تمرینهای ۲۰ و ۲۱ فصل ۴ به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

اگر پولاریس تلسکوپ خود را متوجه رویهٔ دیگری کند، عدم آگاهی او از موقعیت طبیعی این رویه او را به این فکر می‌اندازد که او ناظر ساکنان دیگری از صفحه xy است که متریک ریمانی دیگری بر مفهوم فاصلهٔ آنها حاکم است. متریک ریمانی وابسته به هر رویه را به آسانی می‌توان به دست آورد. اگر این رویه نمودار تابع $z = f(x, y)$ باشد، بنابر فرمول (۳.۱۲) متریک ریمانی القایی آن بر صفحهٔ xy چنین خواهد شد:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dxdy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dy^2 \quad (۸.۱۲)$$

به آسانی دیده می‌شود که محدودیتهای مثبت بودن E ، F و $E^2 - F^2$ در مورد هر متریکی که به این ترتیب به دست می‌آید، برقرارند.

مثال ۸.۱۲. معادلهٔ نیمهٔ بالایی کرهٔ واحد چنین است:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

از این رو داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

که متریک فرمول (۷.۱۲) مذکور در فوق به آسانی از اینها به دست می آید.

بیاییم همهٔ متریکهای از نوع (۸.۱۲) را متریک پولاریس بنامیم. به عبارت دیگر متریک پولاریس متریک القایی از رویه‌ای واقع در بالای یک صفحه است بر ناحیه‌ای از آن. از این تعریف بی‌درنگ نتیجه می‌شود که به هر رویهٔ $z = f(x, y)$ یک متریک پولاریس، یعنی، متریکی که با فرمول (۸.۱۲) داده می‌شود، وابسته است. لذا طبیعتاً این سؤال مطرح می‌شود که آیا همهٔ متریکهای ریمان در واقع، متریکهای پولاریس‌اند؟ پاسخ این سؤال منفی است. مثلاً، هیلبرت قضیه‌ای را ثابت کرده است که از جملهٔ نتایج آن یکی این است که متریک پوانکاره متریک پولاریس نیست.

یکی از ژرفترین و شگفت‌انگیزترین مطالعات گاوس در تحقیقاتش دربارهٔ رویه‌های خمیده این است که خمیدگی یک رویه را می‌توان برحسب متریک پولاریس آن بیان کرد. دلیل شگفت‌انگیز بودن این مطالعه، آن است که در پرداختن به متریک پولاریس، ما ترجیح داده‌ایم که شکل رویه را نادیده بگیریم و در عوض به تجسم غیرمستقیم این شکل به عنوان دگرشکلی فاصله پرداخته‌ایم. روشن است که این فرایند مستلزم از دست دادن مقدار زیادی اطلاعات از رویه می‌شود. با این حال، از قضیهٔ گاوس در ذیل نتیجه می‌شود که متریک پولاریس آن اندازه اطلاعات دارد که ما بتوانیم خمیدگی رویه را از روی آن پیدا کنیم. اثبات این قضیه خارج از ظرفیت این کتاب است و در رسالهٔ گاوس یا در کتاب میلمان و پارکر آمده است.

قضیهٔ ۹.۱۲ (گاوس). اگر رویه‌ای با معادلهٔ $z = f(x, y)$ دارای متریک پولاریس

$$E dx^2 + 2 dx dy + G dy^2$$

باشد، آنگاه.

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K = E \left[\frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \right] \\ + F \left[\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + 4 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$+ G \left[\frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$- 2(EG - F^2) \left[\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right]$$

مثال ۱۰.۱۲. رویه‌ای با معادلهٔ $z = x^2 - y^2$ را در نظر می‌گیریم. برای این رویه داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

در نتیجه بنابر فرمول (۱.۱۲) خمیدگی گاوسی این رویه مساوی است با

$$K = \frac{-4}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^2}$$

از سوی دیگر بنابر فرمول (۸.۱۲) داریم

$$E = 1 + 4x^2, \quad F = -4xy, \quad G = 1 + 4y^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -4y, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -4x, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 8y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -4, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

از این رو بنابر قضیهٔ ۹.۱۲ داریم

$$4[(1 + 4x^2)(1 + 4y^2) - (-4xy)^2]^2 K = (1 + 4x^2)[0 - 2(-4y)(8y) + 0]$$

$$+ (-4xy)[(8x)(8y) - 0 - 0 + 4(-4y)(-4x) - 0]$$

$$+ (1 + 4y^2)[0 - 2(8x)(-4x) + 0]$$

$$- 2(1 + 4x^2 + 4y^2)[0 - 2(-4) - 0]$$

$$= (1 + 4x^2)(64y^2) - (4xy)(128xy) + (1 + 4y^2)(64x^2)$$

$$- 16(1 + 4x^2 + 4y^2) = -16,$$

که به همان مقدار K که در بالا حساب شده بود منجر می‌شود.

روشن است که این عبارت جدید برای خمیدگی گاوسی K بر حسب ضرایب E ، F و G ی متریک پولاریس پیچیده‌تر از معادلهٔ (۱۰.۱۲) است. ولی این مزیت را دارد که برای متریکهای غیر پولاریس، یعنی متریکهای ریمانی که بر اثر رویه‌های واقع در بالای صفحهٔ xy القا نشده‌اند، قابل اجراست. اکنون مفهوم خمیدگی گاوسی را برای یک متریک ریمانی دلخواه تعمیم می‌دهیم. یعنی، خمیدگی K ی متریک ریمانی دلخواه $E dx^۲ + ۲F dx dy + G dy^۲$ که با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} ۴(EG - F^۲)K &= E \left[\frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} - ۲ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^۲ \right] \\ &+ F \left[\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} - ۲ \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + ۲ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - ۲ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} \right] \\ &+ G \left[\frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} - ۲ \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \right)^۲ \right] \\ &- ۲(EG - F^۲) \left[\frac{\partial^۲ E}{\partial y^۲} - ۲ \frac{\partial^۲ F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} \right] \end{aligned}$$

مثال ۱۰.۱۲. متریک پوانکاره

$$\frac{dx^۲ + dy^۲}{y^۲}$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا

$$\begin{aligned} E &= \frac{۱}{y^۲}, & F &= ۰, & G &= \frac{۱}{y^۲} \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= ۰, & \frac{\partial F}{\partial x} &= ۰, & \frac{\partial G}{\partial x} &= ۰ \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= -\frac{۲}{y^۳}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= ۰, & \frac{\partial G}{\partial y} &= -\frac{۲}{y^۳} \\ \frac{\partial^۲ E}{\partial y^۲} &= \frac{۶}{y^۴}, & \frac{\partial^۲ F}{\partial x \partial y} &= ۰, & \frac{\partial^۲ G}{\partial x^۲} &= ۰ \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$۴ \left(\frac{۱}{y^۴} - ۰ \right) K = \frac{۱}{y^۲} \left(\frac{۴}{y^۶} \right) + \frac{۱}{y^۲} \left(\frac{۴}{y^۶} \right) - ۲ \frac{۱}{y^۴} \left(\frac{۶}{y^۴} \right)$$

$$\frac{4K}{y^4} = \frac{-4}{y^4}$$

در نتیجه برای متریک پوانکاره خمیدگی ثابت $K = -1$.

نکتهٔ شگفت‌انگیزی که به آن می‌رسیم این است که خمیدگی یک متریک ریمانی دلخواه خیلی پرمعنی نیز هست، ولو اینکه خمیدگی رویه‌ای را بیان نکند. این خمیدگی امکان بیان قضیه‌ای را فراهم می‌کند که تعمیم طبیعی قضیهٔ ۱.۷ است که به موجب آن مساحت یک مثلث هذلولوی مساوی است با کاستی آن مثلث. برای بیان این صورت تازهٔ قضیهٔ گاوس دربارهٔ مثلثهای ژئودزیک، لازم است مفهوم مساحت را نسبت به یک متریک ریمانی دلخواه مورد بحث قرار دهیم. برای یک متریک دلخواه پولاریس

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] dx^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dy^2 \quad (9.12)$$

که به یک رویهٔ \mathbb{F} مربوط می‌شود، مساحتی که این متریک بر یک ناحیهٔ \mathbb{R} واقع در حوزه‌اش القا می‌کند، باید مساوی با مساحت بخش Φ از رویهٔ \mathbb{F} باشد که مستقیماً بالای R قرار دارد. بنابراین این مساحت باید مساوی باشد با

$$\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad (10.12)$$

بنابراین باید راهی برای تعمیم این عبارت به متریک ریمانی دلخواه

$$E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

پیدا کنیم. باید توجه داشت که عبارت زیر علامت انتگرال در (۱۰.۱۲) را می‌توان برحسب ضرایب متریک پولاریس (۹.۱۲) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] - \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right]^2 \\ &= EG - F^2, \end{aligned}$$

که عبارتی است که چندین بار در بالا به آن برخوردیم. به ویژه می‌دانیم که خود همین عبارت برای هر متریک ریمانی باید مثبت باشد. بنابراین تعریف مساحت ناحیهٔ دلخواه R واقع در حوزهٔ یک متریک دلخواه ریمانی $Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2$ به صورت

$$\iint_R \sqrt{EG - F^2} dx dy \quad (11.12)$$

معنی روشنی پیدا می‌کند.

این تعریف به هیچ وجه الهام بخش چیز زیادی نیست ولی مزیت‌هایی دارد که با مفهوم مساحت‌های وابسته به متریک‌های پولاریس تطابق دارد، در هر ناحیهٔ دوبعدی از حوزهٔ متریک خوش تعریف و مثبت است، و با این خواست که مساحت کل مساوی است با مساحت اجزاء تشکیل دهندهٔ آن، سازگار است. اضافه می‌کنیم که این تعریف مساحت با مفهوم کاملاً موجه مساحت هذلولوی که در فصل ۷ معرفی شده بود، نیز تطابق دارد. برای درک این مطلب توجه داریم که برای

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

که متریک یوانکاره است، داریم

$$E = G = \frac{1}{y^2} \quad \text{و} \quad F = 0$$

و از این رو داریم

$$\iint_R \sqrt{EG - F^2} dx dy = \iint_R \frac{dx dy}{y^2}$$

که همان مساحت هذلولوی ناحیهٔ R است.

مثال ۱۱.۱۲. مساحت مربع $2 \leq x, y \leq 3$ را نسبت به متریک $yx^2 + 2x dx dy + x^2 dy^2$ از مثال ۹.۴ محاسبه کنید.

چون $EG - F^2 = x^2 y - x^2 = x^2(y - 1)$ ، این مساحت مساوی است با

$$\int_2^3 \int_2^3 x \sqrt{y - 1} dx dy = \frac{5}{3} [2\sqrt{2} - 1]$$

حال اگر مجدداً چنین تعریف کنیم که $dA = \sqrt{EG - F^2} dx dy$ ، آنگاه می‌توانیم سرانجام قضیهٔ ۱.۱۲ (گاوس) را به‌ازای هر متریک ریمانی دلخواه به صورت زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۱۳.۱۲. فرض می‌کنیم K خمیدگی متریک ریمانی $E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ باشد، و Δ مثلثی ژئودزیک نسبت به این متریک با زاویه‌های α, β, γ در این صورت

$$\iint_{\Delta} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

این قضیه در واقع تعمیمی از قضیهٔ ۱.۷ است، و برای درک این مطلب، یادآور می‌شویم که ثابت کرده بودیم خمیدگی K برای متریک پوانکاره مساوی است با عدد ثابت -1 و از این رو برای هر مثلث هذلولوی Δ داریم

$$\begin{aligned} \pi - (\alpha + \beta + \gamma) &= - \iint_{\Delta} K dA = - \iint_{\Delta} (-1) dA \\ &= \iint_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = ha(\Delta) \end{aligned}$$

قضیهٔ گاوس در جهات زیادی تعمیم داده شده است. ابتدا می‌توان آن را بدون اشکال برای چند ضلعیهای ژئودزیک با تعداد دلخواهی ضلع تکرار کرد. همچنین می‌توان این قضیه را برای ناحیه‌هایی که مرز آنها از خمهایی تشکیل شده که لزوماً پاره ژئودزیک نیستند تعمیم داد. این قضیه وقتی به این صورت بیان شده باشد قضیهٔ گاوس-بونه نامیده می‌شود و پایه و اساس هندسهٔ دیفرانسیل را تشکیل می‌دهد. برای نشان دادن اهمیت این قضیه چگونگی استفاده از آن را در پاسخ به این سؤال که آیا دو نقطهٔ داده شده می‌توانند بر چندین ژئودزیک از یک متریک ریمانی داده شده‌ای قرار داشته باشند یا نه، ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۴.۱۲. نشان می‌دهیم که متریک ریمانی

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y}$$

بر نیمصفحهٔ بالایی طوری است که هر دو ژئودزیک آن حداکثر در یک نقطه تلاقی می‌کنند. برای این متریک داریم $E = G = 1/y$ و $F = 0$. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$K = -\frac{1}{2y} < 0$$

از این رو اگر Δ مثلث ژئودزیک دلخواهی در هندسه‌ای باشد که با این متریک ریمانی تعریف شده است، آنگاه

$$\iint_{\Delta} K dA < 0$$

اگر α, β, γ زاویه‌های Δ باشند، بنابر قضیهٔ ۱۳.۱۲ داریم

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Delta} K dA < \pi$$

اکنون فرض می‌کنیم دو ژئودزیک در نقاط D و E تلاقی نمایند و F نقطه‌ای بر یکی از این دو ژئودزیک، بین D و E ، باشد. در این صورت نقاط D, E, F یک مثلث ژئودزیک با زاویه‌های $\delta \geq 0, \varepsilon \geq 0$ و π به ترتیب در D, E, F تشکیل می‌دهند و در اینجا یک تناقض پدید می‌آید زیرا مجموع این زاویه‌ها حداقل π است. از این رو هر دو ژئودزیک حداکثر می‌توانند در یک نقطه تلاقی نمایند.

۵.۱۲ تمرین

۱. با استفاده از یک استدلال هندسی با فرمول (۵.۱۲) گاوس برای خمیدگی K نشان دهید که خمیدگی کلی ناحیهٔ Φ در کره‌ای به شعاع r مساوی است با

$$\frac{\text{مساحت}(\Phi)}{r^2}$$

۲. با استفاده از فرمول گاوس در قضیهٔ ۷.۱۲ نشان دهید که خمیدگی گاوسی صفحه در هر نقطه ۰ است.

۳. خمیدگی گاوسی رویهٔ $z = x^2 + y^2$ را در هر یک از نقاط آن پیدا کنید.

۴. خمیدگی گاوسی رویهٔ $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ را در هر یک از نقاط آن پیدا کنید. با استفاده از این عبارت مقدار خمیدگی گاوسی را به‌ازای مقادیر بسیار بزرگ و بسیار کوچک z حساب کنید.

۵. طول خم γ واقع بر نمودار رویهٔ $z = x^2 - y^2$ را که مستقیماً در بالای پاره‌خط واصل بین مبدأ و نقطهٔ $(2, 1, 0)$ قرار دارد محاسبه کنید.

۶. مساحت بخشی از نمودار رویهٔ $z = 3 + x^2 - y^2$ را که مستقیماً در بالای قرص واحد در صفحهٔ xy قرار دارد پیدا کنید.

۷. فرض کنیم چگالی بخشی از رویه $z = 1 - x^2 - y^2$ که مستقیماً در بالای قرص واحد در صفحه xy قرار دارد چنین باشد: $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. جرم کل این بخش را پیدا کنید.
۸. فرض کنید Φ بخشی از رویه $z = x^2 + y^2$ باشد که در بالای قرص واحد در صفحه xy قرار دارد. انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\iint_{\Phi} xy dA \quad \text{ب)} \quad \iint_{\Phi} x dA \quad \text{الف)}$$

۹. متریک پولاریس رویه‌هایی را که با معادله‌های زیر داده شده‌اند پیدا کنید

$$z = \frac{1}{xy} \quad \text{ب)} \quad z = x + y \quad \text{الف)}$$

۱۰. نشان دهید که خمیدگی گاوسی متریک ریمانی

$$\frac{dx^2 + dy^2}{[1 + \frac{\alpha}{r}(x^2 + y^2)]^2}$$

برابر با خمیدگی ثابت گاوسی α است.

۱۱. خمیدگی متریک ریمانی

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^r}$$

را به‌ازای مقدار دلخواه ناصفر r پیدا کنید

۱۲. مساحت مربع به رأسهای $(1, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 2)$ و $(2, 1)$ را نسبت به متریک تمرین

۱۱ پیدا کنید. در باب این مساحت وقتی r به صفر یا بینهایت میل می‌کند بحث کنید.

۱۳. در باب این مسأله که آیا ژئودزیکهای متریک تمرین ۱۱ می‌توانند در بیش از یک نقطه

تلاقی کنند بحث کنید.

نسبت ناهمساز و الگوی قرص واحد

۱.۱۳ مقدمه

الگوی دیگری از هندسه هذلولوی وجود دارد که تقریباً همزمان با الگوی نیمصفحه بالایی به وجود آمده است. چون این الگو با اختیار کردن یک متریک ریمان در درون دایره واحد به دست می آید، آن را الگوی قرص واحد می نامند. از جهتی که در اینجا نمی توان توضیح داد، این الگو قدیمتر از ساختمان پوانکاره است. اگرچه، به طوری که خواهیم دید، هر دو الگو از لحاظ منطقی هم ارزند. به رغم این هم ارزی، هر دو الگو در آثار مکتوب ریاضی به حیات خود ادامه داده اند، زیرا هر یک مزایای مخصوص به خود را دارد. مثلاً به دست آوردن ژئودزیکها در الگوی نیمصفحه آسانتر صورت می پذیرد، در حالی که اثبات اقلیدسی بودن همه دایره های هذلولوی تقریباً در الگوی قرص واحد بلافاصله انجام می گیرد.

به بیانی عاری از دقت، هندسه هذلولوی قرص واحد از به زور جادادن نیمصفحه پوانکاره به

درون قرص واحد ساخته می‌شود. به بیان تا حدی رسمیتر تبدیلی چون U تعریف خواهد شد که نیمصفحه فوقانی را بر داخل قرص واحد می‌نگارد. در این صورت طول هر خم γ در داخل قرص واحد با طول هذلولوی خم $U^{-1}(\gamma)$ در نیمصفحه فوقانی تعریف می‌شود، و به همین ترتیب اندازه هر زاویه α را می‌توان با اندازه هذلولوی (نیز اندازه اقلیدسی) زاویه $U^{-1}(\alpha)$ تعریف کرد. خوشبختانه ثابت می‌شود که تبدیل U همدیس است، به این معنی که اندازه $U^{-1}(\alpha)$ با اندازه اقلیدسی α مساوی است. البته، این امر، کارها را بسیار ساده می‌کند، و علت لزوم گریز زدن ما به موضوع تبدیلات همدیس را نیز بیان می‌کند.

۲.۱۳ تبدیلهای همدیس

خاطر نشان می‌کنیم که تبدیلهایی که اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌نمایند همدیس نامیده می‌شوند. روشن است که هر حرکت صلبی باید زاویه‌ها را حفظ کند، و بنابراین همدیس است. ولی تبدیلهای همدیس وجود دارند که حرکت صلب نیستند. مثلاً، انعکاسها از این‌گونه‌اند. در این بخش نشان داده خواهد شد که تبدیلهای زیادی از صفحه مختلط وجود دارند که با چهار عمل اصلی حساب بیان می‌شوند و در واقع همدیس‌اند. در بخش بعد یکی از این تبدیلهای را برای برگرداندن هندسه هذلولوی نیمصفحه بر روی قرص واحد به‌کار خواهیم برد.

قبلاً در قضیه ۷.۹ دیدیم که هر تبدیل به‌صورت

$$T(z) = e^{i\alpha}z + c$$

یک حرکت صلب اقلیدسی است و لذا باید همدیس باشد. همچنین با توجه به بخش ۲.۹ می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی $\kappa \neq 0$ ، تبدیل

$$T(z) = \frac{\kappa z^2}{\bar{z}}$$

یک انعکاس، و لذا بنابر قضیه ۴.۳ همدیس نیز هست.

قضیه ۱.۱۳. هر تبدیل موبیوسی همدیس است.

برهان: فرض می‌کنیم $T(z)$ معرف تبدیل کلی موبیوسی

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

باشد که در آن a, b, c, d اعداد مختلط دلخواه‌اند. در این صورت $T(z)$ را می‌توان به صورت

$$-\left[\frac{(\bar{a}d - \bar{b}c)/\bar{c}^2}{\bar{z} - (-\bar{d}/\bar{c})} + \left(-\frac{\bar{d}}{\bar{c}} \right) \right] + \frac{a-d}{c}$$

نوشت که یادآور ترفندی است که در برهان قضیه ۱۲.۹ به کار رفت. بنابراین، $T(z)$ ترکیبی از چند تابع است که هر کدام به صورت یکی از دو صورت زیر است

$$f(z) = \kappa z + l \quad (\kappa \text{ و } l \text{ اعداد مختلط})$$

$$g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$h(z) = -\bar{z}$$

می‌دانیم که تبدیلهای $g(z)$ و $h(z)$ که به ترتیب انعکاس و تقارن اقلیدسی هستند، همدیس‌اند. اگر $\kappa = re^{i\theta}$ ، آنگاه تبدیل $f(z)$ را می‌توان به توابع

$$f_1(z) = e^{i\theta}z \quad \text{و} \quad f_2(z) = rz \quad \text{و} \quad f_3(z) = z + l$$

تجزیه کرد. روشن است که توابع اول و سوم که به ترتیب دوران و انتقال اقلیدسی هستند، همدیس‌اند. تابع دوم ترکیب دو انعکاس زیر است:

$$J(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad I(z) = \frac{(\sqrt{r})^2}{\bar{z}}$$

و از این رو باید همدیس باشد. در نتیجه هر تبدیل موبیوسی ترکیبی از نگاشتهای همدیس و لذا همدیس است.

آنچه می‌خواستیم

در ضمن متذکر می‌شویم که عکس این قضیه نیز درست است. به عبارت دیگر هر تبدیل همدیس (و سو نگهدار) صفحه لزوماً یک تبدیل موبیوسی است.

۳.۱۳ نسبت ناهمساز

چون در این بررسیها دایره‌ها (و نیمدایره‌ها) نقش ویژه‌ای ایفا می‌کنند، لازم است تغییر جهت داده و آنها را با استفاده از اعداد مختلط تعریف نماییم. مانند بسیاری از این‌گونه تغییر جهت‌های ریاضی،

این کار را هم با تعریف آن آغاز می‌کنیم. به‌ارای چهار نقطه متمایز z_1, z_2, z_3, z_4 نسبت ناهمساز آنها (z_1, z_2, z_3, z_4) را به‌صورت عدد

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

تعریف می‌کنیم.

لم زیر یک تعبیر هندسی از صورت و مخرج نسبت ناهمساز است به‌طور جداگانه.

لم ۲.۱۳. اگر z_1, z_2, z_3 سه عدد مختلط متمایز باشند آنگاه

$$\angle z_1 z_3 z_2 = \arg \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right)$$

برهان: قرار می‌دهیم $w_i = z_i - z_3$ ، $i = 1, 2, 3$. چون تبدیل $w = z - z_3$ یک حرکت صلب اقلیدسی است، نتیجه می‌گیریم که

$$\angle z_1 z_3 z_2 = \angle w_1 w_3 w_2$$

به‌علاوه چون $w_3 = 0$ ، از گزاره ۲.۹ نتیجه می‌شود که

$$\angle w_1 w_3 w_2 = \arg \left(\frac{w_2}{w_1} \right) = \arg \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right),$$

که حکم لم بلافاصله از آن نتیجه می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

مجموعه‌ای از نقاط را هم‌دایره گویند، اگر یک دایره یا یک خط راست اقلیدسی یافت شود که شامل تمام این نقاط باشد. البته به‌خوبی می‌دانیم که هر سه نقطه هم‌دایره‌اند. نسبت ناهمساز بیانگر یک تدبیر محاسباتی ساده برای تعیین هم‌دایره بودن چهار نقطه است.

گزاره ۳.۱۳. چهار نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 هم‌دایره هستند اگر و تنها اگر نسبت ناهمساز (z_1, z_2, z_3, z_4) یک عدد حقیقی باشد.

برهان: فرض می‌کنیم چهار نقطه به همان ترتیب دوری داده شده، بر یک دایره (یا بر یک خط راست) قرار داشته باشند. در این صورت از گزاره ۲۷ مقاله III اصول اقلیدس نتیجه می‌شود که

$$\angle z_2 z_1 z_3 = \angle z_2 z_4 z_3$$

به موجب لم ۲.۱۳ قبلاً می‌دانستیم که

$$\angle z_2 z_1 z_3 = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) \quad \text{و} \quad \angle z_2 z_4 z_3 = \arg\left(\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$$

از این رو داریم

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}\right)$$

اگر این نسبتها را به صورت قطبی

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = r e^{i\theta} \quad \text{و} \quad \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = R e^{i\theta}$$

بنویسیم، آنگاه نسبت ناهمساز

$$\frac{\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}}{\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}} = \frac{\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}}{\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}} = \frac{r}{R}$$

عددی حقیقی است. لذا این جهت برهان با ترتیبی که برای نقاط بر دایره (یا خط راست) در نظر گرفتیم کامل است. درستی برهان با در نظر گرفتن ترتیب دلخواه، از تمرین ۱ نتیجه می‌شود.

اثبات عکس مطلب در تمرین ۱۷ به عهده خواننده واگذار شده است.

آنچه می‌خواستیم

بین تبدیلهای موبیوسی و نسبت ناهمساز یک ارتباط ساده و بسیار قوی وجود دارد.

گزاره ۴.۱۳. اگر T یک تبدیل موبیوسی و z_1, z_2, z_3, z_4 چهار نقطه دلخواه باشند، آنگاه

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

به عبارت دیگر تبدیلهای مویوسی نسبت ناهمساز را حفظ می‌کنند.
برهان: فرض می‌کنیم

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

و قرار می‌دهیم

$$w_i = T(z_i) = \frac{az_i + b}{cz_i + d} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

در این صورت با تحقیق درستی تساوی

$$\frac{w_1 - w_3}{w_4 - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$$

برهان کامل می‌شود. جزئیات این تحقیق در تمرین ۱۸ به‌عهده خواننده واگذار شده است. ■

فرع ۵.۱۳. اگر m یک خط راست اقلیدسی یا یک دایره باشد و T یک تبدیل مویوسی دلخواه، آنگاه $T(m)$ یک خط راست اقلیدسی یا یک دایره است.

برهان: فرض کنید $T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)$ چهار نقطه دلخواه بر $T(m)$ باشند. بنابر گزاره قبل داریم

$$(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

و بنابر گزاره ۳.۱۳، طرف دوم این تساوی عددی حقیقی است. در نتیجه نسبت ناهمساز $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ نیز حقیقی است و لذا نقاط $T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)$ و $T(z_4)$ هم‌دایره‌اند. بنابراین $T(m)$ یا یک خط راست اقلیدسی یا یک دایره است.

آنچه می‌خواستیم

نسبت ناهمساز تعریف جدیدی از دایره به‌ما می‌دهد. به‌ازای هر سه نقطه z_1, z_2, z_3 دایره (یا خط راستی) که آنها را در بردارد، متشکل از مجموعه همه نقاطی است مانند z به‌طوری که نسبت ناهمساز (z_1, z_2, z_3, z_4) حقیقی باشد. به عبارت دیگر دایره مکان هندسی نقاطی است مانند z به‌طوری که به‌ازای یک عدد حقیقی چون λ ، داشته باشیم

$$\lambda \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3 - z}{z_2 - z}$$

مثال ۶.۱۳. به موجب معادله فوق، دایره شامل نقاط $0, 1, i$ با معادله

$$\lambda \frac{i-0}{1-0} = \frac{i-z}{1-z}$$

داده می‌شود. از حل این معادله نسبت به z به دست می‌آوریم

$$z = \frac{1}{\lambda} \left[i + 1 - \frac{(i-1)(i\lambda+1)}{i\lambda-1} \right]$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازای $\lambda = -1$ ، نقطه $1+i$ به دست می‌آید، که مسلماً بر این دایره قرار دارد.

با توجه به این مثال، روشن می‌شود که اهمیت نظری این نحوه تعریف دایره بیشتر از اهمیت عملی آن است. اگر بخواهیم دایره مشخصی را با استفاده از نسبت ناهمساز تعریف کنیم معمولاً تعریف ناجوری از آن به دست می‌آوریم.

نسبت ناهمساز ارتباط بسیار عمیقتر دیگری هم با نیمصفحه پوانکاره دارد. گزاره زیر نشان می‌دهد که هندسه نیمصفحه را می‌توان با استفاده از نسبت ناهمساز به عنوان نقطه آغاز، به جای استفاده از متریک پوانکاره، فصل ۴، مورد مطالعه قرار داد.

گزاره ۷.۱۳. فرض می‌کنیم z و w دو نقطه از نیمصفحه بالایی باشند که با یک ژئودزیک کمانی با دو سر z^* و w^* واقع بر محور x ها، به هم وصل شده‌اند. اگر ترتیب قرار گرفتن این نقاط بر این ژئودزیک ساعتسو به صورت z^*, z, w, w^* باشد، آنگاه

$$h(z, w) = \ln(z^*, z, w, w^*)$$

اثبات این گزاره در تمرین ۱۹ از خواننده خواسته شده است، و به جای این اثبات یک مثال می‌آوریم.

مثال ۸.۱۳. فرض می‌کنیم $z = -1+i$ و $w = 1+i$. به موجب گزاره ۱.۴ داریم

$$h(z, w) = \ln \frac{\csc \frac{3\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4}}{\csc \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4}} = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

از طرف دیگر، $w^* = \sqrt{2}$ و $z^* = -\sqrt{2}$ و لذا

$$\begin{aligned} \ln(-\sqrt{2}, -1+i, 1+i, \sqrt{2}) &= \ln \frac{(\sqrt{2}+1+i)(\sqrt{2}+1-i)}{(\sqrt{2}-1+i)(\sqrt{2}-1-i)} \\ &= \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

۴.۱۳ الگوی قرص واحد و روند نماهای آن

تبدیل موبیوسی

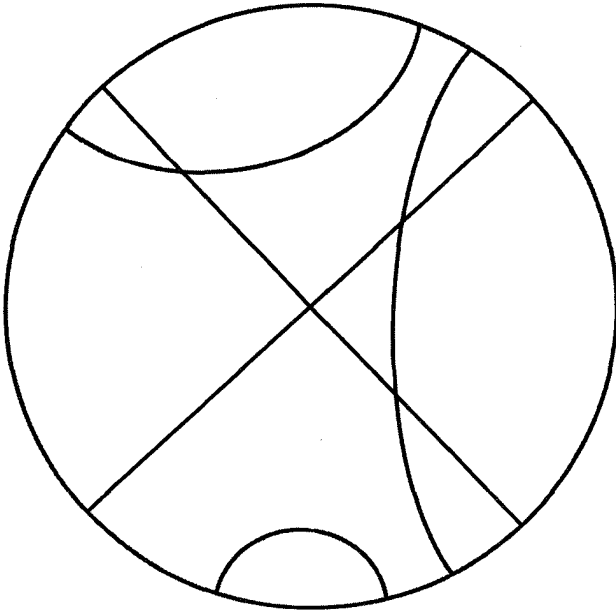
$$U(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

را در نظر می‌گیریم. روشن است که $U(0) = -i$ ، $U(1) = 1$ و $U(-1) = -1$. چون 0 ، 1 ، -1 همه بر محور x ها و $-i$ ، 1 و -1 همه بر دایره واحد قرار دارند، از فرع ۵.۱۳ نتیجه می‌شود که U محور x ها را به دایره واحد بدل می‌کند. سپس از پیوستگی U نتیجه می‌شود که U نیمصفحه بالایی را یا به داخل یا به خارج این دایره بدل می‌کند. این نکته که $U(i) = 0$ ، نشان می‌دهد که مورد اول درست است، یعنی U نیمصفحه بالایی را به درون قرص واحد بدل می‌کند. خواننده‌ای که به این استدلال قانع نشده است می‌تواند تمرین ۵ را به جای آن بگذارد، که در آن ادعا شده است که وقتی z در نیمصفحه بالایی باشد، قدرمطلق $U(z)$ کمتر از ۱ است و لذا در داخل قرص واحد قرار دارد.

تبدیل موبیوسی

$$V(z) = \frac{iz-1}{-z+i}$$

معکوس U' (تمرین ۶) است، یعنی $U \circ V = V \circ U = Id$. این بدین معناست که V و U یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط داخل قرص واحد و نیمصفحه بالایی برقرار می‌کنند. به علاوه چون U و V هر دو تبدیل موبیوسی هستند از فرع ۵.۱۳ نتیجه می‌شود که U پاره ژئودزیکهای نیمصفحه را به کمانهای مستدیر یا به پاره خطهای راست درون قرص واحد بدل می‌کند. در واقع، حتی می‌توان دقیقتر بود. ژئودزیکهای نیمصفحه بالایی بر محور x ها عمودند، چون U همدیس است، لذا U این ژئودزیکها را به قطرها و کمانهای مستدیری که بر دایره واحد عمودند، می‌نگارد (شکل ۱.۱۳).



شکل ۱.۱۳ چند ژئودزیک از قرص واحد.

اکنون می‌توان با استفاده از فاصله هذلولوی در نیمصفحه بالایی یک تابع جدید فاصله به شرح زیر بر قرص واحد تعریف نمود. اگر P و Q دو نقطه دلخواه در داخل قرص واحد باشند قرار می‌دهیم

$$j(P, Q) = h(V(P), V(Q))$$

مع‌هذا ما ترجیح می‌دهیم در اینجا وارد جزئیات نشویم، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع فاصله $j(P, Q)$ یک هندسه هذلولوی را در قرص واحد اعمال می‌کند. ژئودزیکهای این هندسه صرفاً نگاره‌های ژئودزیکهای این نیمصفحه بر اثر U هستند.

در واقع این هندسه هذلولوی قرص واحد با هندسه هذلولوی نیمصفحه بالایی یکی است، بدین معنی که اگر ساکنان یک هندسه بخواهند با ساکنان هندسه دیگر با تلفن ارتباط برقرار نمایند، صحبت‌های همدیگر را کاملاً می‌فهمند. فقط به‌نظر ما زیستگاههای آنها تفاوت دارند. حرکت‌های صلب قرص واحد به‌آسانی به‌دست می‌آیند. زیرا اگر f یک حرکت صلب هذلولوی نیمصفحه

بالایی باشد، آنگاه

$$f^* = U \circ f \circ V \quad (۱.۱۳)$$

یک حرکت صلب هذلولوی قرص واحد است.

زیرا اگر P و Q دو نقطه غیرمشخص از قرص واحد باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} j(f^*(P), f^*(Q)) &= j(U \circ f \circ V(P), U \circ f \circ V(Q)) \\ &= h(V(U \circ f \circ V(P)), V(U \circ f \circ V(Q))) \\ &= h(f \circ V(P), f \circ V(Q)) = h(V(P), V(Q)) \\ &= j(P, Q) \end{aligned}$$

گزاره زیر هم شرح روشنتری از حرکت‌های صلب قرص واحد به ما می‌دهد.

گزاره ۹.۱۳. حرکت‌های صلب قرص واحد تبدیلهایی به صورتهای زیرند:

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad (\text{الف})$$

$$g(z) = \frac{-a\bar{z} + \bar{c}}{-c\bar{z} + \bar{a}} \quad (\text{ب})$$

که در آنها a و c اعداد مختلطی هستند دلخواه و $|a| > |c|$.

برهان: ما به این اکتفا می‌کنیم که نشان دهیم تبدیلهای مویوسی از نوع (الف) حرکت‌های صلب الگوی قرص واحدند و به عکس هر حرکت صلب مویوسی الگوی قرص واحد، حرکتی از نوع (الف) است.

فرض می‌کنیم

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

حرکت صلب دلخواه مویوسی از نیمصفحه بالایی باشد (یعنی $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ اعداد حقیقی باشند و $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$). این تبدیل، تبدیل مویوسی

$$\begin{aligned} f^*(z) &= U(z) \circ f(z) \circ V(z) = \frac{iz + 1}{z + i} \circ \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \circ \frac{iz - 1}{-z + i} \\ &= \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \end{aligned}$$

را بر الگوی قرص واحد القا می‌نماید، که در آن با دوبار استفاده از تمرین ۲۰.۹ خواهیم داشت

$$a = -(\alpha + \delta) + i(\gamma - \beta) \quad \text{و} \quad c = -(\beta + \gamma) + i(\alpha - \delta).$$

به‌علاوه

$$\begin{aligned} |a|^2 - |c|^2 &= [(\alpha + \delta)^2 + (\gamma - \beta)^2] - [(\beta + \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2] \\ &= 4(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0. \end{aligned}$$

بنابراین $|a| > |c|$ و لذا f^* دارای قالب مطلوب است.

به‌عکس فرض می‌کنیم

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

قالب (الف) را دارد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} f(z) &= V(z) \circ g(z) \circ U(z) = \frac{iz - 1}{-z + i} \circ \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \circ \frac{iz + 1}{z + i} \\ &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \end{aligned}$$

که در آن

$$\alpha = -(a + \bar{a}) - i(c - \bar{c})$$

$$\beta = -(c + \bar{c}) + i(a - \bar{a})$$

$$\gamma = -(c + \bar{c}) - i(a - \bar{a})$$

$$\delta = -(a + \bar{a}) + i(c - \bar{c})$$

چون به‌ازای هر عدد مختلط w ، مجموع $w + \bar{w}$ عددی حقیقی و تفاضل $w - \bar{w}$ عدد انگاری محض است، بنابراین کمیت‌های $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ همگی حقیقی‌اند. به‌علاوه

$$\begin{aligned} \alpha\delta - \beta\gamma &= [(a + \bar{a})^2 + (c - \bar{c})^2] - [(c + \bar{c})^2 + (a - \bar{a})^2] \\ &= 4(a\bar{c} - c\bar{a}) = 4(|a|^2 - |c|^2) > 0. \end{aligned}$$

پس $f(z)$ در واقع یک حرکت صلب مویوسی نیمصفحه بالایی است. چون

$$f^* = U \circ f \circ V = U \circ (V \circ g \circ U) \circ V = (U \circ V) \circ g \circ (U \circ V) \\ = g$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که g در واقع به طریق معمولی از یک حرکت صلب مویوسی نیمصفحه بالایی نتیجه می‌شود.

آنچه می‌خواستیم

قبل از ذکر چند مثال، باید خواننده را از نکتهٔ باریکی که ممکن است موجب ابهام شود، آگاه کنیم. به موجب گزارهٔ قبل، تبدیل

$$f(z) = \frac{2z - i}{iz + 2}$$

یک حرکت صلب مویوسی الگوی قرص واحد است. ولی داریم

$$\frac{2z - i}{iz + 2} = \frac{i(2z - i)}{i(iz + 2)} = \frac{2iz + 1}{-z + 2i}$$

که این عبارت قالب مخصوص این گزاره را ندارد. مع هذا تبدیل

$$f(z) = \frac{2iz + 1}{-z + 2i}$$

درست یک حرکت صلب الگوی قرص است ولی در لباس دیگری ظاهر شده است.

مثال ۱۰.۱۳. حرکت صلب $f(z) = 2z$ مربوط به نیمصفحه را به تفصیل در فصل ۹ مورد بررسی قرار دادیم. به موجب فرمول (۱۰.۱۳)، مذکور در فوق، حرکت صلب الگوی قرص متناظر با آن چنین است:

$$f^* = \frac{iz + 1}{z + i} \circ \frac{2z + 0}{0z + 1} \circ \frac{iz - 1}{-z + i} = \frac{3z + i}{-iz + 3}$$

می‌توان به آسانی تحقیق کرد که قدر مطلقهای

$$f^*(1) = \frac{4 + 3i}{5} \quad \text{و} \quad f^*(-1) = \frac{-4 + 3i}{5}$$

هر دو مساوی با ۱ اند، و لذا بر دایره واحد واقع می‌شوند و $f^*(0) = 1/3$ ، که در داخل دایره واحد واقع است.

حرکتهای صلب قرص واحد نیز روند نماهایی دارند. از نتیجه ۱۵.۹ نتیجه می‌شود که اگر f یک دوران یا انتقال هذلولوی نیمصفحه بالایی و m یکی از خطهای روند نمای آن باشد، آنگاه $U(m)$ یک خط روند نمای حرکت صلب $f^* = U \circ f \circ V$ از الگوی قرص واحد است. به همین ترتیب اگر z نقطه ثابتی از f باشد، $U(z)$ هم نقطه ثابتی از f^* است. چون U همذیس است و خطهای راست اقلیدسی و دایره‌ها را بر خطهای راست اقلیدسی و دایره‌ها می‌نگارد، بنابراین روند نماهای شکل‌های ۶.۹، ۸.۹ و ۱۰.۹ به ترتیب به روند نماهای شکل‌های ۲.۱۳، ۳.۱۳ و ۵.۱۳ بدل می‌شوند. روش کلی پیدا کردن روند نمای یک حرکت صلب در الگوی قرص واحد مانند پیدا کردن آن در الگوی نیمصفحه بالایی است. بر طبق گزاره ۹.۱۳ هر حرکت صلب موبیوسی الگوی قرص واحد قالبی به صورت زیر دارد:

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad |a| > |c|$$

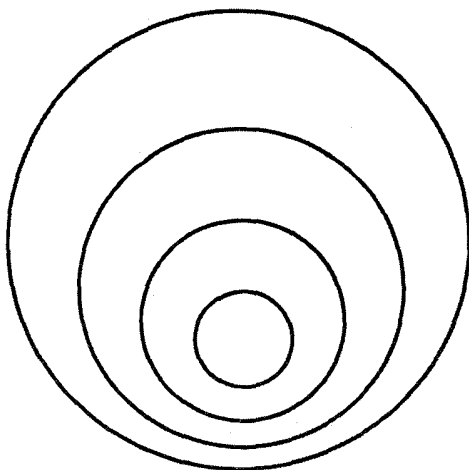
نقاط ثابت این تبدیل موبیوسی ریشه‌های معادله

$$z = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

یا

$$cz^2 + (\bar{a} - a)z - \bar{c} = 0$$

هستند. اما ملاحظه می‌کنیم که حاصلضرب ریشه‌های این معادله \bar{c}/c با قدرمطلق ۱ است. بنابراین به موجب گزاره ۲.۹ حاصلضرب قدرمطلقه‌های این ریشه‌ها برابر با ۱ است. این بدان معناست که هر دو ریشه یا بر دایره واحد قرار دارند یا یکی در داخل و دیگری در خارج آن است. در حالت اخیر روند نماها متشکل از دایره‌های متحدالمركزی هستند که مرکز هذلولوی مشترک آنها نقطه ثابتی در داخل دایره واحد است. در حالت اول اگر دو نقطه ثابت متمایز باشند، خطهای روند نما از کمانهای مستدیری تشکیل شده‌اند، که این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند، و اگر این دو نقطه متمایز نباشند روند نماها از دایره‌های مماس بر دایره واحد در نقطه ثابت تشکیل یافته‌اند.



شکل ۲.۱۳

$$f^* = \frac{3z + i}{-iz + 3}$$

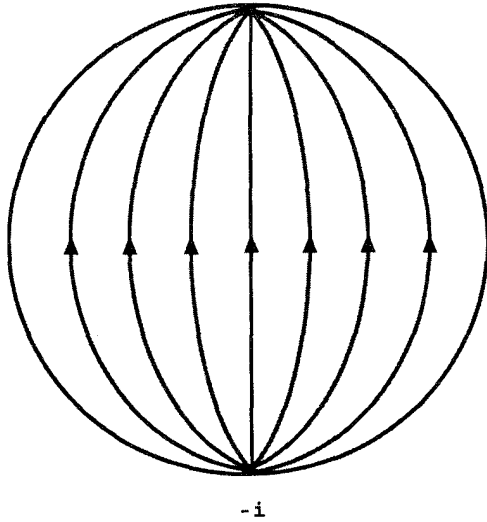
را در نظر می‌گیریم که بر طبق مثال ۱۰.۱۳ یک حرکت صلب الگوی واحد است و بر اثر حرکت صلب $f(z) = 2z$ از الگوی نیمصفحه القا شده است. روند نمای $f(z)$ دسته‌ای از شعاعهای اقلیدسی هستند که از مبدأ خارج می‌شوند (شکل ۶.۹ الف). از طرف دیگر نقاط ثابت f^* نقاط i و $-i$ هستند و لذا کمانهای شکل ۳.۱۳ روند نمای f^* هستند. جهت روند نما از این واقعیت که $f^*(0) = 1/3$ ، معین می‌شود.

مثال ۱۲.۱۳. تبدیل

$$f^*(z) = \frac{2z + 1}{z + 2}$$

را در نظر می‌گیریم. این تبدیل دارای قالبی است که در گزاره ۱۹.۱۳ مطرح شده و لذا یک حرکت صلب الگوی قرص واحد است. چون $z = 1$ و $z = -1$ نقاط ثابت آن هستند پس روند نمای آن با شکل ۴.۱۳ داده می‌شود.

مثال ۱۳.۱۳. برای پیدا کردن روند نمای حرکت صلب الگوی قرص واحد که با رابطه

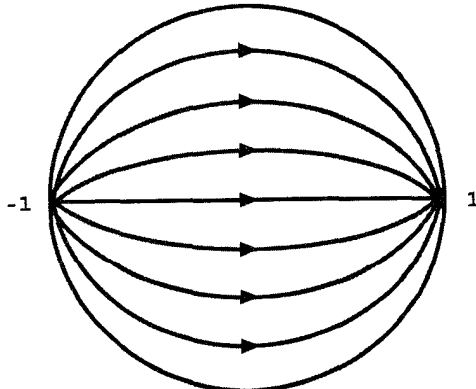


شکل ۳.۱۳

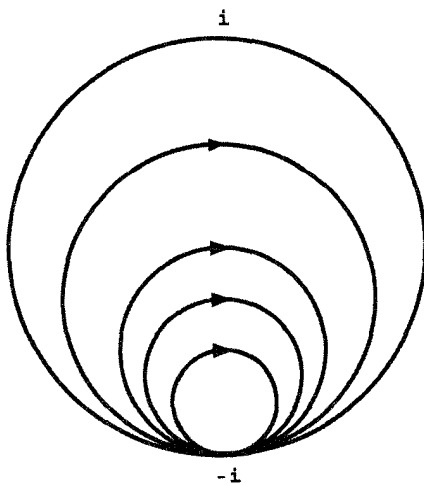
$$T(z) = \frac{(2+i)z + (1+i)}{(1-i)z + (2-i)}$$

داده شده است، ابتدا نقاط ثابت آن را پیدا می‌کنیم. این نقاط ریشه‌های معادله

$$z = \frac{(2+i)z + (1+i)}{(1-i)z + (2-i)}$$



شکل ۴.۱۳



شکل ۵.۱۳

هستند که به صورت ساده

$$(1-i)z^2 - 2iz - (1+i) = 0$$

نوشته می‌شود. ریشه‌های این معادله

$$\frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 + 4(1-i)(1+i)}}{2(1-i)} = \frac{2i \pm 2}{2(1-i)}$$

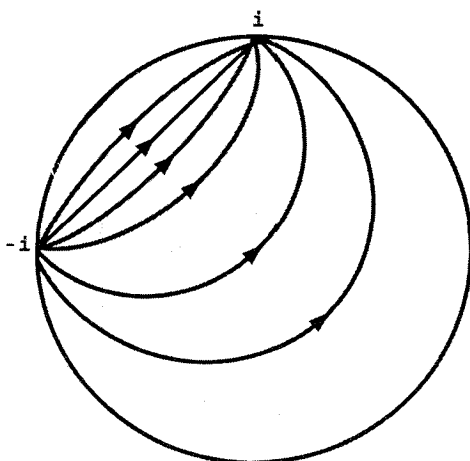
یعنی $1-i$ و i هستند. شکل ۶.۱۳ روند نمای این تبدیل را نشان می‌دهد که جهت آن را

$$T(0) = \frac{1+i}{2-i} = \frac{1+3i}{5}$$

تعیین می‌کند.

۵.۱۳ حرکتهای صلب روشن الگویی قرص واحد

این مطلب که صفحه اقلیدسی صفحه‌ای است همگن، به این معنی که به ازای هر دو نقطه P و Q حرکت صلیبی وجود دارد که P را به Q می‌برد، آنچنان حقیقت روشنی است که متقاعد کردن دانشجویان به اینکه این حکم نیاز به اثبات دارد امر دشواری است. حکم مشابهی در مورد



شکل ۶.۱۳

نیمصفحه تلویحاً هنگامی ثابت شده بود که، در فصل ۵، قابل انطباق بودن هر دو زاویه قائمه را با هم ثابت کرده بودیم. در گزاره زیر اثبات می‌شود که هندسه الگوی قرص واحد نیز همگن است به این معنی که به ازای هر نقطه داده شده در آن، یک حرکت صلب موبیوسی وجود دارد که آن نقطه را به O می‌برد. چون این تبدیل باید دایره واحد را به خودش بنگارد، این مطلب به هیچ وجه حقیقت آشکاری نیست.

گزاره ۱۴.۱۳. اگر b نقطه‌ای دلخواه در داخل قرص واحد باشد، تبدیل

$$T(z) = \frac{z - b}{\bar{b}z + 1}$$

انتقالی از الگوی قرص واحد است که b را به 0 می‌برد.

برهان: چون b در داخل قرص واحد قرار دارد، پس $|b| < 1$ ، و از این رو بنا بر گزاره ۹.۱۳، T مسلماً یک حرکت صلب الگوی قرص واحد است. تساوی $T(b) = 0$ نشان می‌دهد که b را به 0 می‌برد. بالاخره برای پیدا کردن نقاط ثابت T لازم است معادله

$$z = \frac{z - b}{-\bar{b}z + 1}$$

را حل کنیم. این معادله به معادله

$$z^2 = \frac{b}{\bar{b}}$$

تبدیل می شود که، با توجه به

$$\left| \frac{b}{\bar{b}} \right| = \frac{|b|}{|b|} = 1$$

ریشه های آن بر دایره واحد قرار دارند. بنابراین T نقطه ثابتی در داخل قرص واحد ندارد و لذا انتقالی از الگوی قرص واحد است.

آنچه می خواستیم

فعلاً می دانیم که تابع $R_{o,\theta}(z) = e^{i\theta} z$ یک دوران اقلیدسی حول مبدأ است. به علت تقارن شعاعی قرص واحد در حول مبدأ، خواننده احتمالاً تعجبی نخواهد کرد که بدانند این تبدیل یک حرکت صلب الگوی قرص واحد نیز هست. علت این امر این است که

$$R_{o,\theta}(z) = \frac{e^{i\theta/2} z + 0}{0 z + e^{-i\theta/2}}$$

و چون $e^{i\theta/2}$ و $e^{-i\theta/2}$ اعداد مختلط مزدوج اند، صلب بودن $R_{o,\theta}$ از گزاره ۹.۱۳ نتیجه می شود. با استفاده از این واقعیت می توان دورانه های الگوی قرص واحد به مرکز نقاط دلخواه را تعریف کرد. در واقع چون

$$S(z) = \frac{z + b}{\bar{b}z + 1}$$

عکس انتقال قرص واحد

$$T(z) = \frac{z - b}{-\bar{b}z + 1}$$

است، که b را به 0 می برد، از اینجا نتیجه می گیریم که

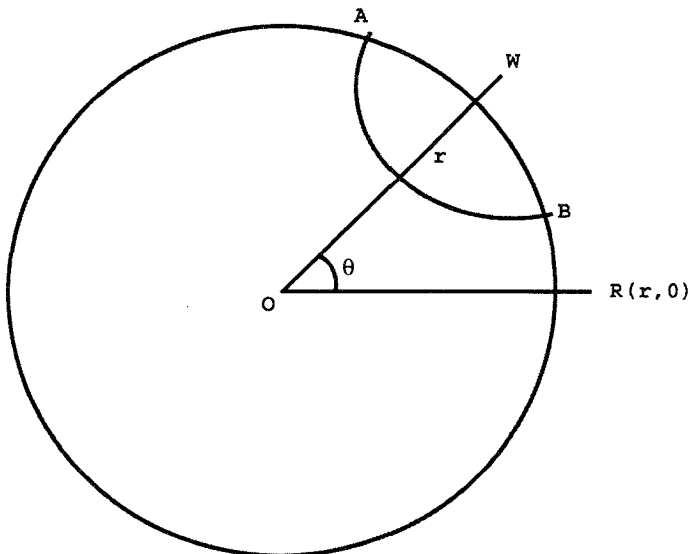
$$S \circ R_{o,\theta} \circ T(b) = S \circ R_{o,\theta}(0) = S(0) = b$$

به عبارت دیگر، ترکیب $S \circ R_{\theta} \circ T$ دارای یک نقطه ثابت b است و لذا یک دورانِ هذلولویِ الگوی قرص واحد به مرکز دوران b و زاویه دوران θ است.

مثال ۱۵.۱۳. دوران پادساعتسوی الگوی قرص واحد به زاویه 90° حول نقطه $z = 1/2$ چنین است

$$\begin{aligned} \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}z + 1} \circ \frac{e^{i\theta}z + 0}{0z + 1} \circ \frac{z - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}z + 1} &= \frac{2z + 1}{z + 2} \circ \frac{iz + 0}{0z + 1} \circ \frac{2z - 1}{-z + 2} \\ &= \frac{(4i - 1)z + 2(1 - i)}{2(i - 1)z + (4 - i)} \end{aligned}$$

بالاخره به مطالعه تقارنهای محوری الگوی قرص واحد باز می‌گردیم. البته این تقارنهای صورتیهای مشابه تقارنهای هذلولوی نیمصفحه بالایی قرص واحدند. از این رو این تقارنهای یا تقارنهای اقلیدسی نسبت به قطرهای قرص واحدند یا انعکاسهایی هستند که همه نقاط ژئودزیک را ثابت نگاه می‌دارند. قبلاً در فصل ۹ نشان دادیم که تقارنهای محوری اقلیدسی به صورت $f(z) = e^{2i\theta} \bar{z}$ هستند، و از این رو به انعکاسها می‌پردازیم. فرض می‌کنیم که مرکز اقلیدسی ژئودزیک AB در شکل ۷.۱۳ $w = re^{i\theta}$ باشد. گیریم I_w معرف انعکاسی باشد که همه نقاط ژئودزیک AB را



شکل ۷.۱۳

ثابت نگاه می‌دارد. چون ژئودزیک AB بر دایره واحد عمود است، نتیجه می‌گیریم که I_w قرص واحد را به خودش بدل می‌کند و از این رو در واقع یک تقارن (محوری) الگوی قرص واحد است. از دوران این شکل در حول مبدأ به اندازه‌ای که نقطه w بر نقطه $R(r, \theta)$ واقع بر قسمت مثبت محور wx منطبق شود، و انجام انعکاس در اینجا، و سپس بازگرداندن w به جای اولیه‌اش، برای I_w یک عبارت تحلیلی به دست می‌آوریم. چون این دوران، دوران $R_{\theta} = e^{i\theta} z$ است و چون شعاع AB مساوی است با $\sqrt{r^2 - 1}$ به طوری که

$$I_R(z) = \frac{r^2 - 1}{\bar{z} - r} + r = \frac{r\bar{z} - 1}{\bar{z} - r}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} I_w(z) &= R_{\theta} \circ I_R \circ R_{\theta}^{-1}(z) = e^{i\theta} \frac{r z e^{-i\theta} - 1}{z e^{-i\theta} - r} \\ &= \frac{1}{e^{-i\theta}} \cdot \frac{r e^{i\theta} \bar{z} - 1}{\bar{z} e^{i\theta} - r} = \frac{r e^{i\theta} \bar{z} - 1}{\bar{z} - r e^{-i\theta}} = \frac{w(-\bar{z}) + 1}{(-\bar{z}) + \bar{w}} \end{aligned}$$

باید توجه کرد که I_w قالب تبدیل (ب) در گزاره ۹.۱۳ را دارد. زیرا شرط مطلوب $|w| > 1$ با توجه به اینکه w در خارج دایره واحد قرار دارد برقرار است.

مثال ۱۶.۱۳. تقارن (محوری) هذلولوی قرص واحد که محور آن ژئودزیک به مرکز $i - 1$ است دارای صورت تحلیلی زیر است

$$\frac{(-1 + i)(-\bar{z}) + 1}{(-\bar{z}) + (-1 - i)}$$

و این تقارن نقطه $i/2$ را به نقطه

$$\frac{(-1 + i)(i/2) + 1}{(i/2) + (-1 - i)} = \frac{-1 + 3i}{5}$$

بدل می‌کند.

۶.۱۳ متریک ریمانی الگوی قرص واحد

این هندسه هذلولوی را البته بدون توسل به نیمصفحه بالایی می‌توان مستقیماً بر قرص واحد تعریف کرد. اکنون آن متریک ریمانی را که داخل قرص واحد را به سه ختار هندسه هذلولوی مجهز می‌نماید

به دست می‌آوریم. فرض کنید $z = x + iy$ نقطه کلی دلخواه در داخل قرص واحد باشد و $w = u + iv$ متناظر آن در نیمصفحه بالایی. در این صورت

$$w = V(z) = \frac{iz - 1}{-z + i}$$

یا

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{i(x + iy) - 1}{-(x + iy) + i} = \frac{(y + 1) - ix}{x + i(y - 1)} \\ &= \frac{2x + i(1 - x^2 - y^2)}{x^2 + (y - 1)^2} \end{aligned}$$

از این رو

$$u = \frac{2x}{x^2 + (y - 1)^2}, \quad v = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y - 1)^2} \quad (2.13)$$

بنابر قاعده زنجیری

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

(خاطر نشان می‌کنیم که در اینجا طبق قرارداد فصل ۴ دیفرانسیل‌های du , dv , dx و dy را به عنوان علامتهای اختصاری مشتقات du/dt , dv/dt , dx/dt و dy/dt نسبت به یک پارامتر نامشخص t در نظر می‌گیریم.)

یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2x^2 + 2(y - 1)^2}{[x^2 + (y - 1)^2]^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-4x(y - 1)}{[x^2 + (y - 1)^2]^2} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} du^2 + dv^2 &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &\quad + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) dy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4[x^2 - (y-1)^2]^2 + 16x^2(y-1)^2}{[x^2 + (y-1)^2]^4} [dx^2 + dy^2] \\
 &= \frac{4[x^2 + (y-1)^2]^2}{[x^2 + (y-1)^2]^4} [dx^2 + dy^2] = \frac{4[dx^2 + dy^2]}{[x^2 + (y-1)^2]^2}
 \end{aligned}$$

از این رو اگر $\gamma(t) = [x(t), y(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، خمی پارامتری شده در الگوی قرص واحد باشد، آنگاه بنابه تعریف، طول γ در این الگو مساوی است با طول $\gamma^* = V(\gamma)$. خم γ^* را می‌توان به صورت $[u(t), v(t)]$ ، $a \leq t \leq b$ ، پارامتری نمود که در آن u و v با فرمولهای (۲.۱۳) در فوق داده شده‌اند، و لذا طول هذلولوی آن (نسبت به متریک پوانکاره) چنین می‌شود

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2}}{v} = \int_{\gamma} \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + (y-1)^2} = \int_{\gamma} \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2} \frac{1}{x^2 + (y-1)^2}$$

بنابراین طول خم دلخواه γ در الگوی قرص واحد مساوی است با

$$\int_{\gamma} \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2}$$

بدین ترتیب، گزارهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

گزارهٔ ۱۷.۱۳. آن متریک ریمانی که هندسهٔ هذلولوی بر قرص واحد را به ما می‌دهد چنین است:

$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

با شروع از این متریک، درست با همان روشی که در فصلهای ۴ تا ۸ این کتاب انجام شده، می‌توان هندسهٔ هذلولویِ قرص واحد را بسط داد. در شرایط قرص واحد محاسبات تا حدی پیچیده‌اند. علت اصلی این پیچیدگی زیاد این است که مرکزهای ژئودزیکهای الگوی قرص واحد در جاهایی نامناسب، یعنی، در خارج دایرهٔ واحد قرار دارند.

تعریف دیگری از فاصلهٔ هذلولوی بر قرص واحد وجود دارد که ناظر بر گزارهٔ ۷.۱۳ است و درستی آن ناشی از این واقعیت است که تبدیلهای مویوسی نسبت ناهمساز را حفظ می‌کنند (گزارهٔ ۴.۱۳).

گزاره ۱۸.۱۳. فرض می‌کنیم z و w دو نقطه از قرص واحد باشند که با ژئودزیکی با دو سر z^* و w^* ، واقع بر دایره واحد، به هم وصل شده‌اند. اگر این نقاط را طوری رده‌بندی کنیم که ترتیب ساعتسوی آنها بر این ژئودزیک z^* ، z ، w و w^* باشد، آنگاه فاصله قرص واحد بین z و w برابر است با

$$\ln(z^*, z, w, w^*)$$

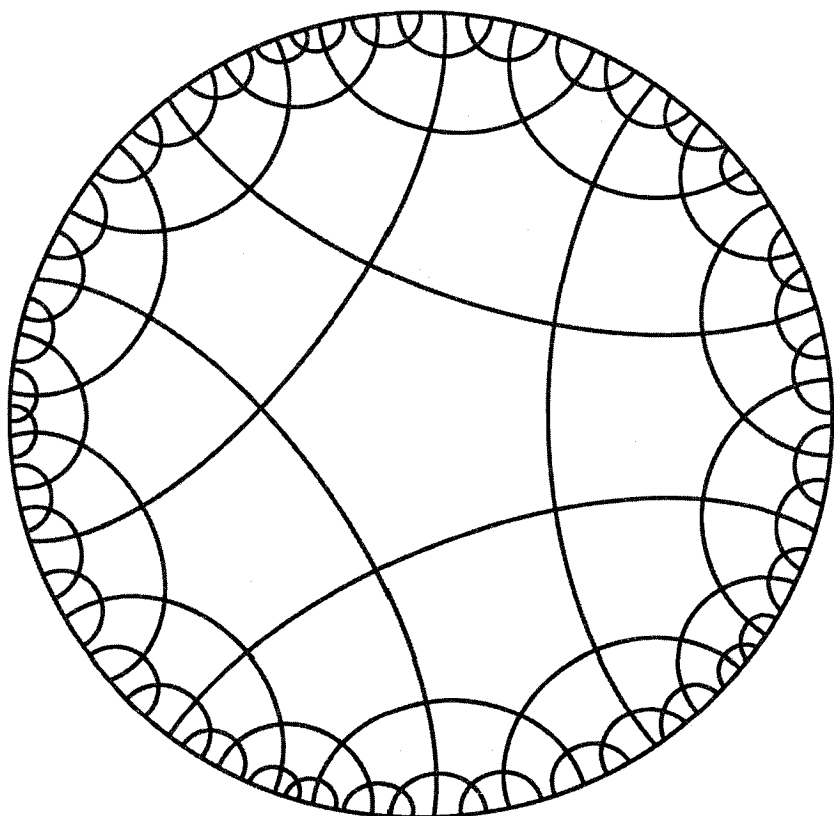
به‌عنوان یک نتیجه درخور توجه این بخش مؤلف برهان جدیدی برای یکی از شگفت‌انگیزترین قضیه‌های ریاضی در این شاخه، یعنی برای قضیه‌ای که بیان می‌کند هر دایره هذلولوی در نیمصفحه بالایی یک دایره اقلیدسی نیز هست، در اینجا می‌آورد. چون همه دایره‌های هذلولوی با یک شعاع هذلولوی مفروض، قابل انطباق هذلولوی باهم‌اند، کافی است قضیه را برای دایره‌هایی به مرکز هذلولوی $z = i$ ثابت کنیم. فرض می‌کنیم C_r یکی از این دایره‌ها باشد. به موجب نحوه تعریف فاصله در الگوی قرص واحد، تبدیل موبیوسی

$$U(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

را به دایره هذلولوی D_r با همان شعاع و به مرکز $z = U(i) = 0$ در الگوی قرص واحد بدل می‌کند. چون تبدیل $R_{0, \theta}$ هم یک تبدیل صلب اقلیدسی و هم یک تبدیل صلب هذلولوی است، D_r یک دایره اقلیدسی نیز هست. ولی تبدیل موبیوسی U دایره‌های اقلیدسی را به دایره‌های اقلیدسی می‌نگارد، از این رو C_r دایره‌ای اقلیدسی نیز هست.

۷.۱۳ موزائیک‌بندیهای منتظم الگوی قرص واحد

در فصل ۶ نیمصفحه بالایی پوانکاره را با پنج ضلعیهای منتظم قائم‌الزاویه فرش کردیم. چون تبدیل همدیس $U(z)$ ژئودزیکیهای نیمصفحه بالایی را بر ژئودزیکیهای الگوی قرص واحد می‌نگارد، نتیجه می‌گیریم که این تبدیل، این موزائیک‌بندی نیمصفحه بالایی را بر یک موزائیک‌بندی از قرص واحد با پنج ضلعیهای منتظم قائم‌الزاویه می‌نگارد. این موزائیک‌بندی از کمانهایی در داخل دایره در شکل ۸.۱۳ تشکیل یافته است. خیلی جالب است که



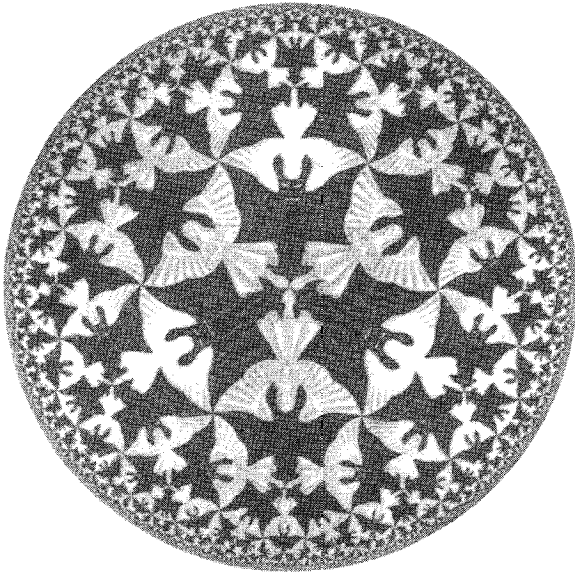
شکل ۸.۱۳

این شکل‌بندی حتی قبل از کشف ارتباط آن با هندسهٔ هذلولوی توسط پوانکاره، توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب کرده بوده است. این شکل‌بندی را برای نخستین بار در سال ۱۸۷۲ ه. ا. شوارتس برای تبیین رفتار بعضی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل معروف گوس

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta y}{x(1-x)} = 0.$$

درست کرده است.

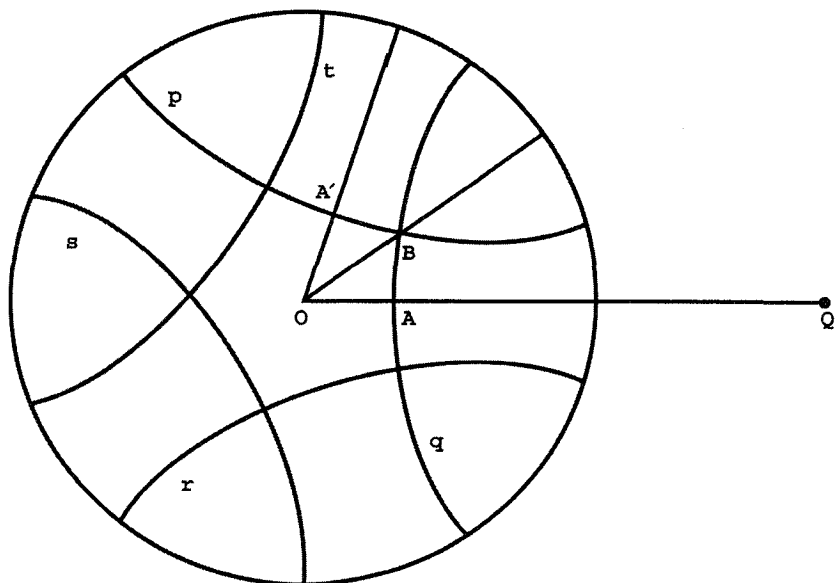
ما به چند دلیل انگشت تأمل بر این شکل می‌گذاریم. البته، این شکل فی‌نفسه جالب است، تقارنها و نیز تجمع کمانهای آن نزدیک دایرهٔ مرزی (نقاط بینهایت هذلولوی) خیلی گیراست. آنچنان گیرا که هنرمندی، به نام م. اشرف مشایه شش ضلعی آن را به صورت چارچوبی



شکل ۹.۱۳. *1960 M.C. Escher / Cordon Art - Baarn - Holland*

برای چندین طرح از طرحهای معروف خود انتخاب نموده است، یکی از این طرحها در شکل ۹.۱۳ نشان داده شده است. شاید خوانندگان بخواهند مطالبی در مورد جزئیات اساسی ترسیم این شکل بدانند. یک راه، راه کلاسیک آن را ه. س. م کاکستر در مقاله خود در مجله ادواری لئوناردو نشان داده است. این روش شامل استفاده هنرمندانه از یک شکلبندی کمکی مستقیم الخط اقلیدسی به نام داربست است. ولی ازدیاد کامپیوترها، این روش را بی جهت مشکل ساخته است. به جای این روش در شکل ۱۰.۱۳ روشی را که به آسانی پیاده شده است، شرح می دهیم.

برای پیدا کردن Q ، یعنی مرکز اقلیدسی دایره q ، که نخستین ضلع درونترین پنج ضلعی منتظم هذلولوی است، ابتدا نقطه A یعنی محل تلاقی این ژئودزیک را با شعاع OQ پیدا می کنیم. همین که A پیدا شد جای Q به آسانی به دست می آید، زیرا Q وسط A و $I(A)$ است که در آن I انعکاس $I_{O,1}$ است که دایره ثابت آن دایره الگوی قرص واحد است. فرض کنید OB شعاعی باشد که زاویه آن با OQ برابر $\pi/5$ است. چون درونترین پنج ضلعی منتظم قائم الزاویه هذلولوی شکل ۸.۱۳، از ده نسخه قابل انطباق با هم مثلث هذلولوی OAB تشکیل یافته است در نتیجه اندازه زاویه هذلولوی OBA برابر $\pi/4$ است. بنابراین اندازه زاویه های مثلث هذلولوی OAB عبارتند از



شکل ۱۰.۱۳

از این رو بنا بر یکی از قوانین کسینوسهای هذلولوی، پاره خط OA دارای طول هذلولوی زیر است

$$\cosh^{-1} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{2}} \right] \\ \approx \ln(1.203 + \sqrt{1.203^2 - 1}) \approx \ln 1.872$$

به موجب تمرین ۱۲، طول اقلیدسی پاره خط OA مساوی است با

$$\frac{1.872 - 1}{1.872 + 1} \approx 0.304$$

در نتیجه فاصله اقلیدسی Q از O مساوی است با

$$\frac{1}{2} (0.304 + \frac{1}{0.304}) \approx 1.797$$

بنابراین یک ضلع q از درونبندترین پنج ضلعی را به دست آوردیم. قرینه اقلیدسی دایره q نسبت به شعاع OB ، ضلع دیگر p ، و قرینه این p نسبت به شعاع OA ضلع سوم r را به دست می دهد.

اگر A' قرینه A نسبت به شعاع OB باشد، t قرینه q نسبت به شعاع OA' است و S قرینه t نسبت به خط OA . به این ترتیب تمام اضلاع درونیتترین پنج ضلعی به دست می‌آید. باقی پنج ضلعیها با منعکس کردن این پنج ضلعی ابتدا نسبت به اضلاعش و سپس تکرار این عمل برای هر یک از پنج ضلعیهای جدید و الی آخر به دست می‌آیند.

۸.۱۳ تمرین

۱. ثابت کنید اگر $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_p, z_q, z_r, z_s)$ و s, t, q, p معرف جایگشتهایی از ۱، ۲، ۳، ۴ باشند، آنگاه (z_p, z_q, z_r, z_s) با یکی از مقادیر زیر مساوی است

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

۲. نشان دهید که اگر T یک حرکت صلب موبیوسی و z عددی مختلط باشد، آنگاه نسبت ناهمساز $(z, T(z), T^2(z), T^3(z))$ عددی حقیقی است.

۳. روند نماهای جهتدار حرکت‌های صلب زیر از الگوی قرص واحد را رسم کنید:

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \frac{2z+1}{z+2} & \text{ب)} \frac{2z+(1+i)}{(1-i)z+2} \\ \text{ج)} \frac{3z+2i}{-2iz+3} & \text{د)} \frac{3z-i}{iz+3} \\ \text{ه)} \frac{(2-i)z+(1-i)}{(1+i)z+(1+i)z+(2+i)} & \text{و)} -z \\ \text{ز)} \frac{-5z+4}{4z+5} & \end{array}$$

۴. نسبت‌های ناهمساز زیر را محاسبه کنید:

الف) $(i, 1+2i, 2+3i, 3+4i)$ ب) $(1+i, 1-i, -1+i, -1-i)$

ج) $(0, 1, i, 1-i)$

۵. نشان دهید که اگر $z = x + iy$ و $y > 0$ ، آنگاه $|U(z)| < 1$ که در آن

$$U(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

۶. تحقیق کنید که تبدیلهای

$$V(z) = \frac{iz-1}{-z+i} \text{ و } U(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

عکس یکدیگرند.

۷. دوران پادساعتسوی الگوی قرص واحد به زاویه θ برگرد نقطه $z = 1/3$ را به صورت یک تبدیل موبیوسی در قالبی که در گزاره ۸.۱۳ مشخص شده بیان کنید، در اینجا θ مساوی با یکی از زاویه‌های زیر است.

الف) π ، ب) $\frac{\pi}{2}$ ، ج) $\frac{\pi}{3}$ ، د) $\frac{\pi}{4}$.

۸. توضیح دهید که به چه دلیل $T(z) = iz$ یک تبدیل صلب از الگوی قرص واحد است با اینکه قالب گزاره ۹.۱۳ را ندارد.

۹. بیان کنید که به چه دلیل $T(z) = 2z$ به طور قطع یک حرکت صلب الگوی قرص واحد نیست.

۱۰. نشان دهید که به ازای هر سه نقطه z_1, z_2, z_3 و سه نقطه دیگر w_1, w_2, w_3 یک تبدیل

موبیوسی $T(z)$ وجود دارد به طوری که $T(z_i) = w_i$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$.

۱۱. نشان دهید که به ازای هر سه نقطه z_1, z_2, z_3 و سه نقطه دیگر w_1, w_2, w_3 حداکثر یک

تبدیل موبیوسی $T(z)$ وجود دارد به طوری که $T(z_i) = w_i$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$.

۱۲. نشان دهید که در الگوی قرص واحد، h ، فاصله هذلولوی مبدأ تا نقطه z ، مساوی است با

$$\ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

و همچنین به عکس

$$|z| = \frac{e^h - 1}{e^h + 1}$$

۱۳. مستقیماً نشان دهید که تبدیل موبیوسی

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

که در آن a و c اعداد مختلط دلخواه‌اند به طوری که $|a| > |c|$ معرف یک حرکت صلب نسبت به متریک ریمانی

$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

از الگوی قرص واحد است.

۱۴. مستقیماً ثابت کنید که ژئودزیکهای متریک ریمانی

$$\frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

در داخل قرص واحد قطرهای دایره مرزی و کمانهای دوایر عمود بر دایره مرزی اند.

۱۵. یک تعریف نظری مختلط از دایره شامل نقاط $1, 0, i, -1$ بدهید.

۱۶. یک موزائیک بندی از الگوی قرص واحد توسط شش ضلعیهای قائم الزاویه هذلولوی رسم کنید.

۱۷. برهان گزاره ۳.۱۳ را کامل کنید.

۱۸. برهان گزاره ۴.۱۳ را کامل کنید.

۱۹. گزاره ۷.۱۳ را اثبات نمایید.

۲۰. ثابت کنید که حرکتهای صلب اقلیدسی نسبت ناهمساز را حفظ می کنند.

۲۱. ثابت کنید که انعکاسها نسبت ناهمساز را حفظ می کنند.

۱۴

الگوی بلترامی-کلاین

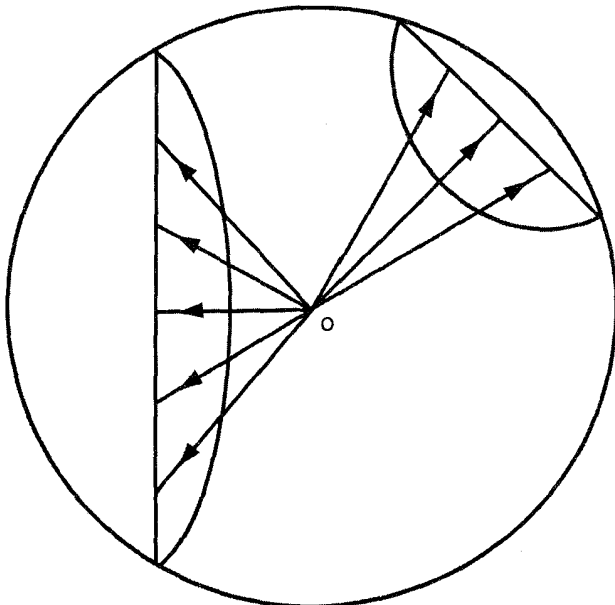
۱.۱۴ مقدمه

الگوی بلترامی-کلاین برای هندسه هذلولوی همزمان با دو الگویی که قبلاً مورد بحث قرار دادیم در سال (۱۸۶۸) ابداع شد. چون آن دو الگو نقش بسیار مهمتری در تحول ریاضیات جدید داشته‌اند، مؤلف برآن دو بیش از این یکی تکیه کرده است. در ۱۸۷۱ فلیکس کلاین این الگو را مجدداً در زمینه هندسه تصویری مطرح کرد و این امر موجب شد که این الگو به الگوی تصویری معروف شود. به دلیل دیدگاههای این کتاب برای بحث در ویژگیهای این الگو به جای استفاده از هندسه تصویری از هندسه انعکاسی استفاده خواهیم کرد.

ساکنان هذلولوی قرص واحد هذلولوی ژئودزیکهایشان را همان طوری می‌بینند که ما ژئودزیکهای خود را می‌بینیم، یعنی به صورت خطهای راست، در حالی که ما ژئودزیکهای آنها را به صورت خطهای خمیده می‌بینیم. از طرف دیگر الگوی بلترامی-کلاین

این مزیت را دارد که ژئودزیکهای آن وترهای اقلیدسی دایره واحد هستند. بنابراین ما و ساکنان جهان الگوی بلترامی-کلاین در مورد راست بودن این خطها اتفاق نظر داریم. ولی اندازه‌های زاویه‌های ما با اندازه‌های زاویه‌های آنها متفاوت از آب درمی‌آیند. الگویی که اندازه زاویه‌ها در آن با اندازه اقلیدسی آنها مساوی باشد الگوی همدیس نامیده می‌شود. بنابراین الگوهای نیمصفحه بالایی و قرص واحد همدیس‌اند، ولی الگوی بلترامی-کلاین ناهمدیس است. عقل حکم می‌کند که بگوییم هر الگوی هندسه هذلولوی باید به یک‌نحو ذاتی با هندسه اقلیدسی تفاوت داشته باشد (تمرین ۱۵).

الگوی بلترامی-کلاین از دگردیسی هندسه هذلولوی قرص واحد ساخته می‌شود. ساده بگوییم هر یک از ژئودزیکهای الگوی قرص واحد را با تصویر کردن بر وتر مربوطه‌اش، به‌گونه‌ای که در شکل ۱.۱۴ نشان داده شده، به «خط راست» بدل می‌کنیم. البته دشواری در این است که هر نقطه از قرص واحد بر ژئودزیکهای بسیاری قرار دارد و لذا به هیچ‌وجه معلوم نیست که تمام ژئودزیکها را بتوان به‌طور همزمان به‌خط راست بدل کرد. اینکه ممکن است این امر عملی باشد باز یکی دیگر از تصادفات شگفت‌آوری است که در این مبحث فراوان است. به محض تعریف این تبدیل،



شکل ۱.۱۴

با استفاده از آن، قرص واحد با روش جدیدی برای اندازه‌گیری فاصله‌ها مجهز می‌شود. هندسه حاصل بر قرص واحد، الگوی بلترامی-کلاین است. در این فصل فاصله‌ها، ژئودزیکها، زاویه‌ها و تقارنهای این هندسه را شرح می‌دهیم.

۲.۱۴ الگوی بلترامی-کلاین

در گزاره زیر کارهای مقدماتی تغییر شکل موردنیاز برای هندسه هذلولوی قرص واحد داده شده‌اند. در اینجا و در همه جای این فصل فرض بر این است که دو سر هر ژئودزیک بر دایره واحد قرار دارند. و اگر A و B این دو سر باشند، ژئودزیک با $h(AB)$ نشان داده می‌شود. دایره واحد با u نموده می‌شود و انعکاس $I_{O,1}$ که آن را به طور نقطه‌یی ثابت نگه می‌دارد، با I .

گزاره ۱.۱۴. وترهای واصل بین دو سر هر یک از ژئودزیکهای هذلولوی که شامل نقطه ثابتی چون P از قرص واحد هستند، همگی همسراند.

اثبات: اگر P اتفاقاً بر نقطه O ، مرکز دایره واحد u منطبق باشد، حکم واضح است زیرا همه این وترها قطرند و همگی شامل O هستند. اکنون فرض می‌کنیم P و O متمایزند. گیریم p دایره‌ای عمود بر u و C مرکز اقلیدسی آن باشد (شکل ۲.۱۴). چون p بر u عمود است گزاره ۵.۳ ایجاب می‌کند که $I(p) = p$ ، و لذا p شامل نقطه $P' = I(P)$ نیز باشد. بنابراین اگر M تصویر نقطه C بر خط راست واصل بین O و P' باشد، آنگاه M وسط اقلیدسی پاره خط PP' است، و لذا موضع آن تا زمانی که p شامل P و بر u عمود است مستقل از p و C است.

فرض می‌کنیم A و B دو سر ژئودزیک p باشند. نشان می‌دهیم که وتر AB لزوماً شامل نقطه $M' = I(M)$ است (که موضع آن فقط به موضع P بستگی دارد). خاطر نشان می‌کنیم که $I(AB)$ دایره‌ای است چون m که A, B و O بر آن قرار دارند. چون

$$\angle OAC + \angle OBC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

پس چهارضلعی $OACB$ محاطی است و m نقطه C را نیز در بردارد. چون $\angle OBC$ قائمه است OC قطری از m است، و چون $\angle OMC$ نیز قائمه است M نیز بر دایره m واقع است. در نتیجه $I(M)$ بر $I(m) = AB$ قرار دارد. چون موضع $I(M)$ فقط به موضع P بستگی دارد، اثبات تمام است.

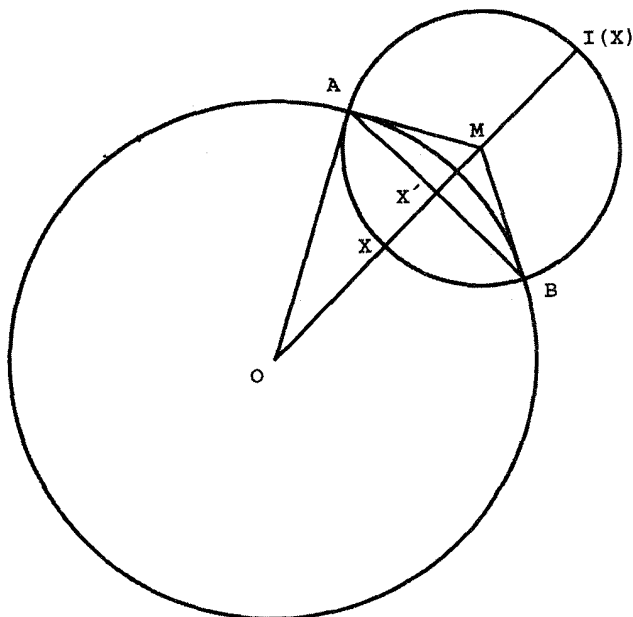
گزاره فوق نشان می‌دهد که تعریف تبدیل β از قرص واحد بر روی خودش، که در ذیل می‌آید خالی از ابهام است. اگر X نقطه‌ای از قرص واحد باشد، فرض می‌کنیم AB وترى باشد که ژئودزیک هذلولوی $h(AB)$ بر نقطه X بگذرد. در این صورت $\beta(X)$ محل تلاقی شعاع OX با وتر AB است. در حالت استثنایی وقتی که X بر مبدأ مختصات O منطبق است، بنا به تعریف می‌گیریم $\beta(O) = 0$. برای به دست آوردن یک تعریف تحلیلی از β وتر AB را بر شعاع OX عمود می‌گیریم (شکل ۳.۱۴)، لذا نقاط M و C (در شکل ۲.۱۴ برهم منطبق می‌شوند. چون نقطه M وسط پاره خط واصل بین X و X' است، داریم

$$M = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{\bar{X}}\right) = \frac{|X|^2 + 1}{2\bar{X}} \quad (۱.۱۴)$$

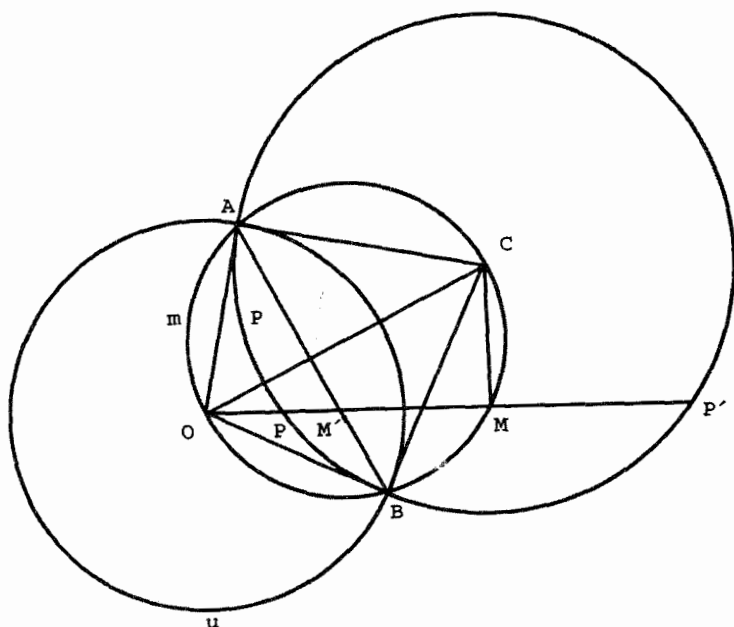
هنگام اثبات گزاره ۱.۱۴ نشان دادیم که $\beta(X) = I(M)$ و از این رو

$$\beta(X) = \frac{1}{M} = \frac{2X}{1 + |X|^2} \quad (۲.۱۴)$$

مثلاً اگر $X = (1 - i)/2$ ، آنگاه $\beta(X) = 2(1 - i)/3$. در تمرین ۱۱ از خواننده خواسته



شکل ۲.۱۴



شکل ۳.۱۴

شده است که ثابت نماید

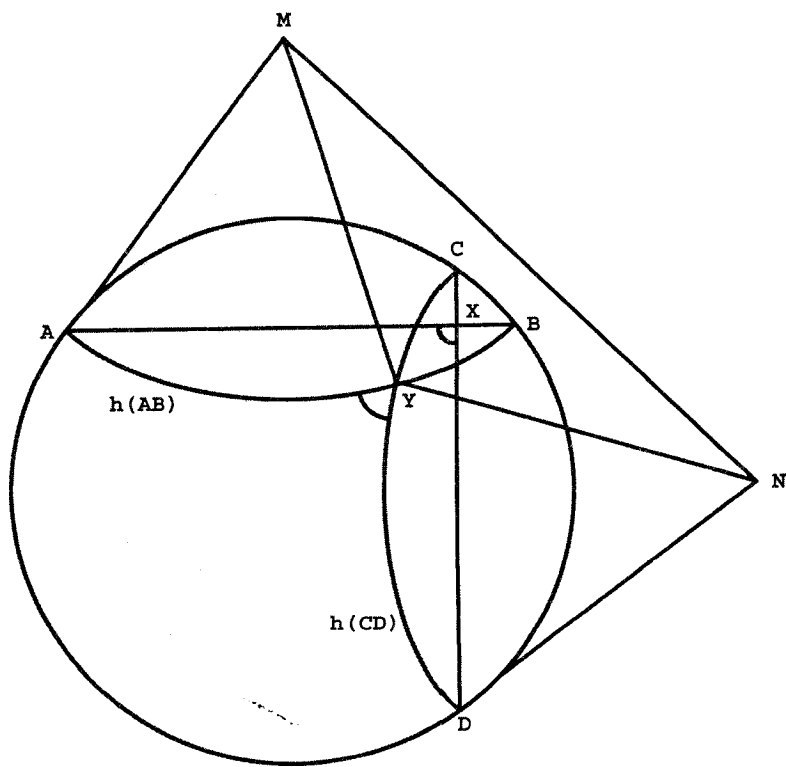
$$\beta^{-1}(X) = \frac{1 - \sqrt{1 - |X|^2}}{|X|^2} X \quad (3.14)$$

جای نقطه عکس $\beta^{-1}(X)$ را نیز می‌توان به آسانی به روش هندسی تعیین کرد. به‌ازای یک نقطه دلخواه X فرض می‌کنیم وترهای AB و CD شامل نقطه X باشند. در این صورت $\beta^{-1}(X)$ محل تلاقی دو ژئودزیک هذلولوی $h(AB)$ و $h(CD)$ است. به بیان دیگر $\beta^{-1}(X)$ محل تلاقی $h(AB)$ با شعاع OX است.

اکنون طول بلترامی-کلاین یک خم دلخواه C در قرص واحد را به صورت طول هذلولوی خم $\beta^{-1}(C)$ در الگوی قرص واحد تعریف می‌کنیم. اگر AB وترى دلخواه از دایره واحد باشد، بنابه تعریف $\beta^{-1}(AB) = h(AB)$ و چون $h(AB)$ ژئودزیکی از الگوی قرص واحد است، AB ژئودزیکی از الگوی بلترامی-کلاین خواهد بود. این مطلب ممکن است ساده انگاشته شود ولی به طوری که قبلاً گفتیم، دشواری استدلال واقعاً در گزاره ۱.۱۴ قرار دارد که نشان می‌دهد β همه ژئودزیکیهای الگوی قرص واحد را به طور همزمان به وترهای دایره واحد تبدیل می‌نماید. اما، اصولاً

ما می‌دانیم که چگونه باید فاصله بلترامی-کلاین بین دو نقطه X و Y را حساب کنیم. این فاصله مساوی است با فاصله هذلولوی نقاط $\beta^{-1}(X)$ و $\beta^{-1}(Y)$ در الگوی قرص واحد. منتها این روش، روش دشواری است و گزاره ۵.۱۴ روش محاسبه سراسرتری به ما می‌دهد. اکنون تأثیر تبدیل β را بر زاویه‌ها و حرکت‌های صلب قرص واحد بررسی می‌کنیم.

البته زاویه واقعی بین دو خط راست از الگوی بلترامی-کلاین مساوی است با زاویه اقلیدسی بین این دو خط، یعنی این زاویه قسمتی از قرص واحد است که بین دو شعاع آن قرار دارد. ولی برای به دست آوردن هندسه‌ای که تمام زاویه‌های قائمه در آن مساوی باشند (اصل چهارم اقلیدس) لازم است در الگوی بلترامی-کلاین زاویه‌ها را به همان روشی که فاصله‌ها را به دست آوردیم، یعنی با برگرداندن به الگوی قرص واحد، اندازه بگیریم. مثلاً فرض کنید AB و CD وترهای افقی و قائم شکل ۴.۱۴ باشند که در نقطه X (6° , 6°) متلاقی‌اند. اگر ژئودزیک‌های هذلولوی متناظر آنها یعنی $h(CD)$ و $h(AB)$ در Y متلاقی باشند، آنگاه بنا به تعریف اندازه بلترامی-کلاین زاویه $\angle AXD$ با اندازه هذلولوی زاویه، و لذا با اندازه اقلیدسی زاویه $\angle AYD$ مساوی است. برای به دست آوردن اندازه زاویه اخیر، توجه می‌کنیم که با استدلالی مشابه استدلالی که در برهان گزاره



۲.۶ به کار بردیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\angle AYD = \pi - \angle NYM$$

که در آن M و N به ترتیب مرکزهای اقلیدسی $h(AB)$ و $h(CD)$ هستند. چون در شکل ۳.۱۴، $M = I(X')$ ، مختصات M و N در شکل ۴.۱۴ به ترتیب $(0, 5/3)$ و $(5/3, 0)$ می‌شوند، لذا طبق رابطه (۳.۱۴) مختصات Y چنین خواهند شد:

$$\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{6}, \frac{5 - \sqrt{7}}{6} \right)$$

بنابراین طولهای اضلاع مثلث MNY ، چنین خواهند بود: $5\sqrt{2}/3$ ، $4/3$ و $4/3$. اکنون با استفاده از قانون اقلیدسی کسینوسها در مثلث MNY ، اندازه بلترامی-کلاین زاویه $\angle AXD$ به صورت

$$\angle AYD = \pi - \cos^{-1} \left(-\frac{9}{16} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{9}{16} \right) \approx 56^\circ$$

به دست می‌آید.

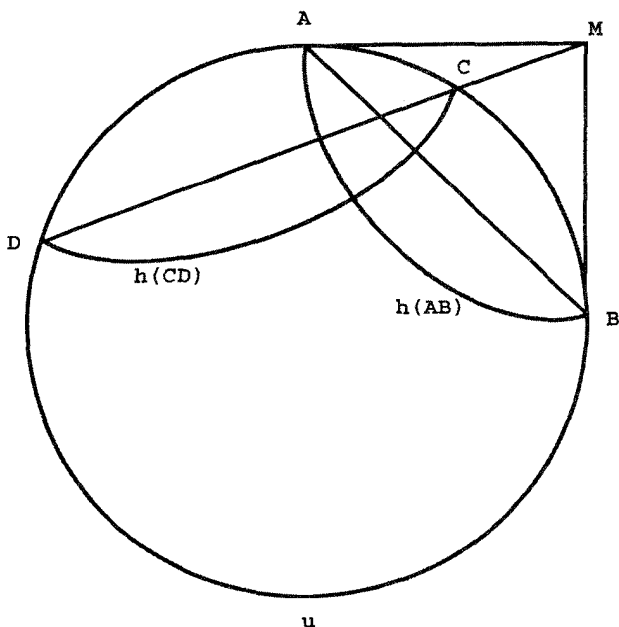
روشن است که مثال فوق نحوه محاسبه اندازه بلترامی-کلاین هر زاویه را نشان می‌دهد. ولی، هنوز روشی برای تشخیص و ترسیم زاویه‌های قائمه در اختیار نداریم. خوشبختانه روشی برای این کار در دسترس است. ابتدا خاطر نشان می‌نماییم که اگر w نقطه‌ای در خارج دایره واحد باشد آنگاه I_w قرینه هذلولوی

$$\frac{w(-\bar{z}) + 1}{(-\bar{z}) + \bar{w}}$$

در الگوی قرص واحد را نشان می‌دهد.

گزاره ۲.۱۴. فرض می‌کنیم AB وتری از قرص واحد باشد و M مرکز $h(AB)$. در این صورت هر وتری از قرص واحد که امتداد آن از M بگذرد به تعبیر الگوی بلترامی-کلاین بر AB عمود است.

برهان: فرض می‌کنیم I_M قرینه هذلولوی الگوی قرص واحد باشد که محور تقارن آن ژئودزیک $h(AB)$ است (شکل ۵.۱۴). پس، چون $h(AB)$ بر دایره واحد u عمود است از گزاره ۵.۳ نتیجه می‌شود که $I_M(u) = u$. اگر CD کمانی از u باشد که امتداد آن از M بگذرد، آنگاه،



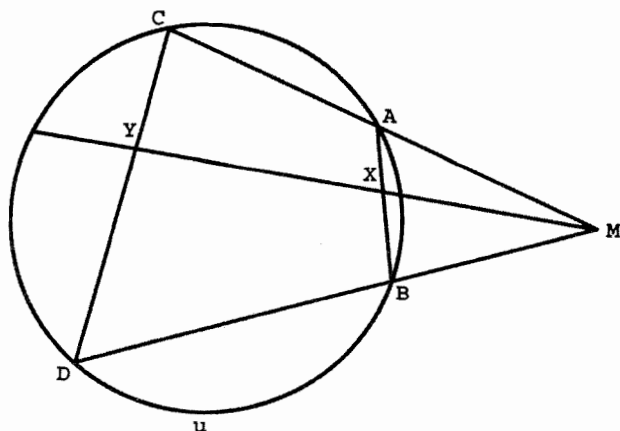
شکل ۵.۱۴

$I_M(CD) = CD$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که I_M ، C و D را به هم بدل می‌کند. اما در این صورت I_M ، $h(CD)$ را به یک ژئودزیک هذلولوی که از C و D می‌گذرد، بدل خواهد کرد. چون $h(CD)$ تنها ژئودزیک هذلولوی ماربر C و D است، پس I_M ، $h(CD)$ را ثابت نگه می‌دارد و لذا $h(AB)$ بر $h(CD)$ عمود است. در این صورت بنا به تعریف وترهای AB و CD به تعبیر بلترامی-کلاین متعامدند.

آنچه می‌خواستیم

اکنون به تقارن‌ها در الگوی بلترامی-کلاین می‌پردازیم. بنا به تعریف این تقارن‌ها تبدیلاتی به صورت $\beta \circ I_M \circ \beta^{-1}$ هستند که در آنها I_M یک تقارن هذلولوی دلخواه الگوی قرص واحد است. این تعریف غیرمستقیم از لحاظ محاسبه کارا است. مثلاً قرینه بلترامی-کلاین را نسبت به وتر i که از 1 و i می‌گذرد پیدا می‌کنیم. مرکز ژئودزیک هذلولوی متناظر با این وتر نقطه $1+i$ است. به طوری که قبلاً دیدیم قرینه هذلولوی متناظر با آن عبارتی تحلیلی به صورت زیر دارد

$$I_{i+1}(z) = \frac{-(1+i)\bar{z} + 1}{-\bar{z} + (1-i)}$$



شکل ۶.۱۴

با استفاده از عبارتهای (۲.۱۴) و (۳.۱۴) مذکور در فوق داریم

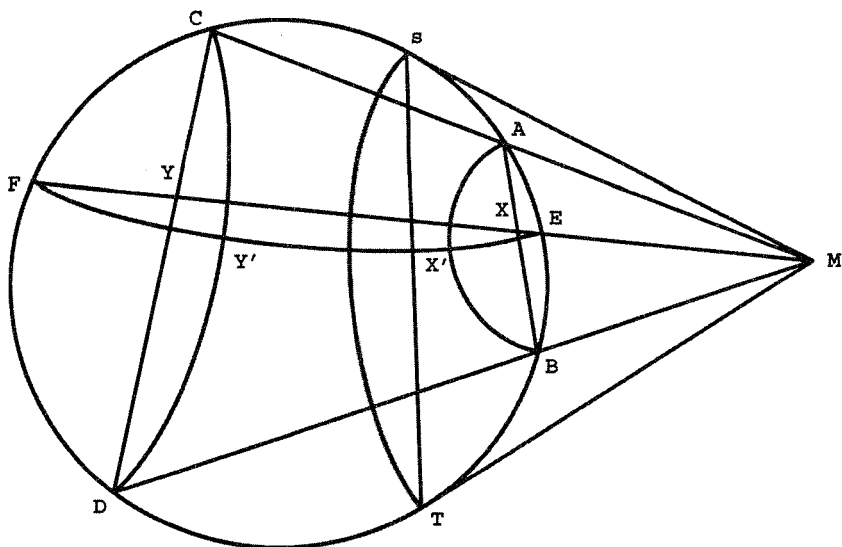
$$\beta \circ I_{i+1} \circ \beta^{-1} \left(\frac{2(1-i)}{3} \right) = \beta \circ I \left(\frac{1-i}{2} \right) = \beta \left(\frac{4+2i}{5} \right) = \frac{8+4i}{9}$$

بنابراین تقارن بلترامی-کلاین نسبت به وتر واصل بین ۱ و i نقطه $2(1-i)/3$ را به نقطه $4(2+i)/9$ می‌برد.

این روش اگرچه کارا است ولی تجسم روشنی ندارد. برای جبران این کاستی، تصویر منظری دیگری از تقارنهای محوری بلترامی-کلاین ارائه می‌دهیم. به‌ازای یک نقطه دلخواه M در خارج قرص واحد، نگاشت منظری P_M ، بنابه تعریف عبارت است از تبدیل زیرین از داخل قرص واحد. فرض می‌کنیم X نقطه دلخواهی از قرص واحد و AB وتر شامل آن باشد (شکل ۶.۱۴). فرض می‌کنیم C و D به ترتیب نقاط تلاقی دیگر MA و MB با دایره واحد u باشند. در این صورت $Y = P_M(X)$ محل تلاقی خط راست MX با وتر CD است. البته خوشتعریف بودن تبدیل P_M اصلاً روشن نیست، زیرا ترسیم فوق مبتنی بر انتخاب دلخواه وتر AB است. خواهیم دید که $Y = P_M(X)$ عملاً مستقل از انتخاب این وتر است.

گزاره ۳.۱۴. اگر M نقطه‌ای در خارج قرص واحد باشد، آنگاه

$$\beta \circ I_M \circ \beta^{-1} = P_M$$



شکل ۷.۱۴

برهان: فرض می‌کنیم X نقطه‌ای در داخل قرص واحد باشد و وترهای AB و CD در شکل ۷.۱۴ برای پیدا کردن $Y = P_M(X)$ به‌کار رفته باشند. فرض می‌کنیم EF وتر شامل X و Y باشد. در این صورت به طوری که در بالا مشاهده شد، $X' = \beta^{-1}(X)$ محل تلاقی $h(AB)$ و $h(EF)$ است و $Y' = \beta^{-1}(Y)$ محل تلاقی $h(CD)$ و $h(EF)$

فرض می‌کنیم S و T نقطه‌های تماس خطهای مماس مرسوم از M بر دایره واحد u باشند. از گزاره ۲.۱۴ نتیجه می‌شود که وترهای ST و EF به تعبیر بلترامی-کلاین متعامد و لذا بنابه تعریف $h(ST)$ و $h(EF)$ برهم عمودند. در نتیجه، تقارن هذلولوی I_M ژئودزیک $h(EF)$ را ثابت نگه می‌دارد. همین تقارن هذلولوی هم A را بر C ، و B را بر D می‌نگارد، از این رو ژئودزیک $h(AB)$ را به ژئودزیک $h(CD)$ بدل می‌کند. در نتیجه I_M نقطه تلاقی X' را به نقطه تلاقی Y' بدل می‌کند. بنابراین

$$Y = \beta(Y') = \beta(I_M(X')) = \beta(I_M(\beta^{-1}(X))) = \beta \circ I_M \circ \beta^{-1}(X)$$

آنچه می‌خواستیم

خوانندگان به‌آسانی می‌توانند مستقیماً تحقیق کنند که در مثال قبل از این گزاره، نقطه‌های $1+i$ ، $\frac{2}{3}(1-i)$ و $\frac{4}{9}(2+i)$ عملاً هر سه بر یک خط راست قرار دارند.

اکنون که ذخیره کافی از حرکت‌های صلب بلترامی-کلاین در اختیار داریم، می‌توانیم برای فاصله بلترامی-کلاین عبارتی به دست آوریم که به عبارتهای نسبت ناهمساز گزاره‌های ۷.۱۳ و ۱۸.۱۳ خیلی شبیه است. اما، ابتدا ضروری است یک ویژگی بسیار بنیادی نسبت ناهمساز را که قویاً به ریشه‌های این مفهوم در هندسه تصویری مرتبط است به دست آوریم. این لم به نسبت ناهمساز چهار نقطه واقع بر یک خط راست مربوط است. چنانچه در گزاره ۳.۱۳ دیدیم نسبت ناهمساز چنین چهارنقطه‌ای لزوماً حقیقی است. به علاوه اگر چهار نقطه z_1, z_2, z_3, z_4 به همین ترتیب بر یک خط راست قرار داشته باشند، هر دو نسبت

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \quad \text{و} \quad \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}$$

مثبت‌اند و لذا نسبت ناهمساز این چهارنقطه یعنی (z_1, z_2, z_3, z_4) نیز مثبت و بنابراین $\ln(z_1, z_2, z_3, z_4)$ خوشتعریف است.

لم ۴.۱۴. فرض می‌کنیم m و n دو خط راست اقلیدسی باشند و نقطه P بر هیچکدام واقع نباشد. اگر A, B, C, D نقاطی بر m و A', B', C', D' محل تلاقی خطهای مستقیم PA, PB, PC, PD با n باشند، آنگاه

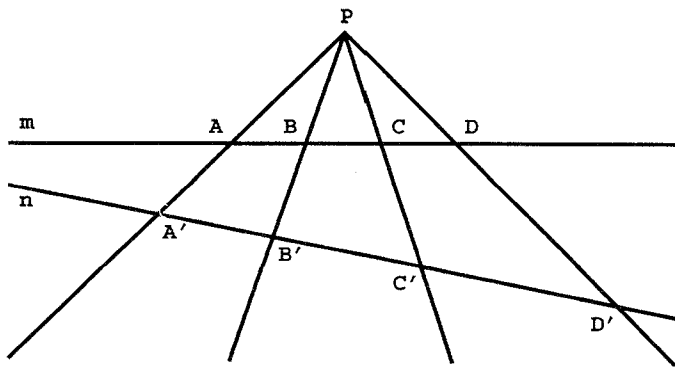
$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

برهان: چون نقطه‌های A, B, C, D بر یک خط راست قرار دارند، داریم

$$(A, B, C, D) = \frac{A - C}{D - C} = \frac{AC}{DC} \\ \frac{A - B}{D - B} = \frac{AB}{DB}$$

که در آن آخرین عبارت نسبت ساده طولهای اقلیدسی پاره‌خطهای اقلیدسی است. عبارت مشابهی برای نسبت ناهمساز (A', B', C', D') برقرار است. ولی با چند بار استفاده از قانون اقلیدسی

سینوسها برای شکل ۸.۱۴ داریم



شکل ۸.۱۴

$$AC = PC \frac{\sin \angle APC}{\sin(\angle CAP)}$$

$$AB = PB \frac{\sin(\angle APB)}{\sin(\angle BAP)}$$

$$DC = PC \frac{\sin(\angle CPD)}{\sin(\angle PDC)}$$

$$DB = PB \frac{\sin(\angle BPD)}{\sin(\angle PDB)}$$

چون $\angle PDC = \angle PDB$ و $\angle CAP = \angle BAP$ داریم

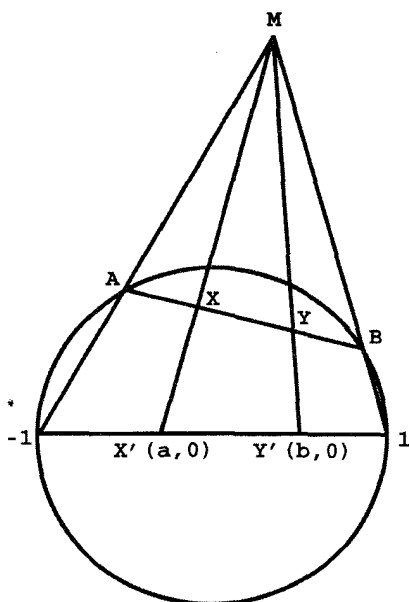
$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle APB)}}{\frac{\sin(\angle CPD)}{\sin(\angle BPD)}} \quad (۴.۱۴)$$

از آنجا که زاویه‌های موجود در فرمول (۴.۱۴) دارای رأس مشترک P هستند، روشن است که عین همان عبارت مثلثاتی برای (A', B', C', D') نیز برقرار است. بنابراین

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$$

آنچه می‌خواستیم

قضیه ۵.۱۴. فرض کنید Y, X دو نقطه دلخواه از قرص واحد و A و B دو سر وتر شامل آنها



شکل ۹.۱۴

باشند. اگر این نقطه‌ها به ترتیب A, X, Y, B بر وتر باشند آنگاه فاصله بین نقطه‌های X و Y در الگوی بلترامی-کلاین مساوی است با

$$\left| \frac{1}{4} \ln(A, X, Y, B) \right|$$

برهان: فرض کنید M محل تلاقی خطهای واصل از A و B به ترتیب به نقاط -1 و 1 باشد (شکل ۹.۱۴). فرض کنید $X'(a, 0)$ و $Y'(b, 0)$ به ترتیب محل تلاقی خطهای MX و MY با محور x ها باشند. چون $X' = P_M(X)$ و $Y' = P_M(Y)$ پس فاصله بلترامی-کلاین نقطه‌های X و Y مساوی است با فاصله بلترامی-کلاین نقطه‌های X' و Y' . به علاوه از لم ۴.۱۴ نتیجه می‌شود که

$$(A, X, Y, B) = (-1, X', Y', 1)$$

بنابراین کافی است قضیه را برای نقطه‌های X' و Y' ثابت کنیم. اما می‌دانیم که فاصله بلترامی-کلاین نقطه‌های X' و Y' مساوی است با فاصله هذلولوی بین نقطه‌های $(a', 0)$ و $\beta^{-1}(X')$

$\beta^{-1}(Y') = (b', 0)$ در الگوی قرص واحد، که در آن بنابر فرمول (۳.۱۴) داریم

$$a' = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{و} \quad b' = \frac{1 - \sqrt{1 - b^2}}{b}$$

بنابر گزاره ۱۷.۱۳ این فاصله مساوی است با قدرمطلق

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{b'} \frac{dx}{1 - x^2} &= \ln \frac{\frac{1+b'}{1-b'}}{\frac{1+a'}{1-a'}} = \ln \frac{\frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1-b}}}{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{\frac{-1-b}{1-b}}{\frac{-1-a}{1-a}} = \frac{1}{4} \ln(-1, b, a, 1) = \frac{1}{4} \ln(-1, X', Y', 1) \\ &= \frac{1}{4} \ln(A, X, Y, B) \end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم

باید توجه کرد که یک متریک ریمانی وجود دارد که طول هر خم دلخواه در الگوی بلترامی-کلاین را تعریف می‌کند. برای جزییات بیشتر به تمرینهای ۱۲-۱۴ مراجعه کنید.

۳.۱۴ تمرین

- چه وترهایی به تعبیر بلترامی-کلاین بر محور x عمودند؟
- فرض کنید AB و CD وترهایی از قرص واحد باشند. ثابت کنید که اگر امتداد AB از مرکز $h(CD)$ بگذرد، امتداد CD نیز از مرکز $h(AB)$ خواهد گذاشت.
- $P_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4})$ را پیدا کنید.
- فاصله بلترامی-کلاین بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ را پیدا کنید.
- معادله دکارتی عمود منصف بلترامی-کلاین پاره خط واصل بین نقاط $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ چیست؟
- مثلث متساوی‌الاضلاع بلترامی-کلاینی رسم کنید که هر یک از زاویه‌هایش 45° باشد.
- زاویه بلترامی-کلاین محور x ها و هر یک از خطهای ماربر نقطه‌های زیر را پیدا کنید:
الف) i و 1 ب) $i, \frac{1}{4}$ ج) i و 0
- یک پنج ضلعی قائم‌الزاویه بلترامی-کلاین رسم کنید.

۹. مساحت بلترامی-کلااین مثلث قائم‌الزاویه به رأسهای 0 ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ را پیدا کنید.

۱۰. مساحت بلترامی-کلااین مربع اقلیدسی به رئوس $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ، $(0, a)$ و (a, a) را پیدا کنید.

۱۱. ثابت کنید

$$\beta^{-1}(X) = \frac{1 - \sqrt{1 - |X|^2}}{|X|^2} X$$

۱۲. ثابت کنید که متریک ریمان

$$\frac{(\lambda - y^2)dx^2 + 2xydx dy + (\lambda - x^2)dy^2}{(\lambda - x^2 - y^2)^2}$$

با فاصله بلترامی-کلااین در وترهای دایره واحد یکی است.

۱۳. ثابت کنید که متریک ریمان

$$\frac{(\lambda - y^2)dx^2 + 2xydx dy + (\lambda - x^2)dy^2}{(\lambda - x^2 - y^2)^2}$$

با طول بلترامی-کلااین همه خمها در قرص واحد یکی است.

۱۴. با استفاده از تمرین قبل طول بلترامی-کلااین سهمی $y = x^2$ را در فاصله $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ پیدا کنید.

۱۵. ثابت کنید که در هندسه هذلولوی الگوی همدیسی وجود ندارد که ژئودزیکهای آن خطهای راست اقلیدسی باشند (راهنمایی: به این مسأله فکر کنید که مساحت مثلث در این الگو چه می‌تواند باشد).

۱۶. ثابت کنید که الگوی بلترامی-کلااین هیچ مشابه نیمصفحه‌یی ندارد. به عبارت دیگر نشان دهید که اگر ژئودزیکهای هندسه‌ای در نیمصفحه خطهای راست اقلیدسی باشند، این هندسه، هندسه هذلولوی نیست. (یک راه‌حل این مسأله اثبات این حکم است که مساحت کلی در این هندسه لزوماً متناهی است).

۱۷. ثابت کنید که در الگوی بلترامی-کلااین هر دایره لزوماً یک بیضی اقلیدسی است.

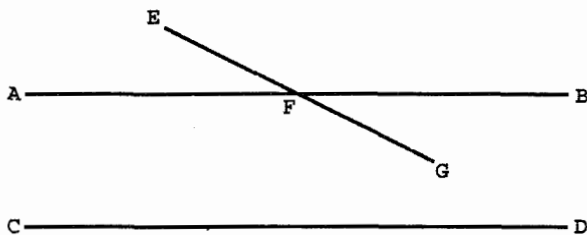
۱۵

تاریخچه مختصر هندسه ناقلیدسی

۱.۱۵ تاریخچه

اقلیدس کتاب خود را در حدود ۳۰۰ سال ق.م نوشته است. چون اقلیدس از به‌کار بستن اصل پنجم در اثبات بیست و هشت گزاره اول خود اجتناب می‌نماید، مورخان به این اندیشه رسیده‌اند که اقلیدس خود در مورد آن تزلزل خاطر داشته است. با اینکه این عقیده محتمل به نظر می‌رسد، سند قابل اعتمادی از این دیدگاه تا هفت قرن پس از اولین انتشار اصول در دست نیست. پروکلوس ۴۱۰-۴۸۵ شرحی بر مقاله I اقلیدس که شامل اولین برخورد مستند با این اصل موضوع است، نوشته است. وی به اثبات بطلمیوس (سده دوم میلادی) در وابستگی اصل موضوع توازی به اصول دیگر اشاره می‌کند و برآن ایراد می‌گیرد. پس از آن به ذکر برهان غلط خود می‌پردازد:

«می‌گویم، اگر خط راستی یکی از دو خط موازی را ببرد، دیگری را نیز می‌برد.



شکل ۱.۱۵

زیرا فرض می‌کنیم AB و CD باهم موازی باشند، و EFG ، AB (شکل ۱.۱۵) را ببرد؛ می‌گوییم CD را نیز خواهد برید.

زیرا، چون BF و FG دو خط راست مرسوم از یک نقطه F هستند، وقتی بینهایت امتداد داده شوند، فاصله آنها از هر عددی بزرگتر می‌شود، به طوری که این فاصله از فاصله بین دو خط موازی نیز بزرگتر خواهد شد. بنابراین وقتی که فاصله آنها از فاصله بین خطهای موازی بیشتر شود، DC ، FG را می‌برد.»

بی‌تردید خوانندگان متوجه شده‌اند که استدلال فوق چیزی را «ثابت می‌کند» که اکنون به اصل موضوع پلی‌فیر موسوم است. پروکلوس در دنباله گفته‌های خود ثابت می‌کند که اصل موضوع پلی‌فیر مستلزم اصل موضوع پنجم است. عیب استدلال پروکلوس در این فرض است که می‌گوید فاصله بین نقاط در خطوط متقاطع وقتی از محل تلاقی دور می‌شویم به طور نامتناهی زیاد می‌شود. خوانندگان با اندکی تفکر قانع خواهند شد که اثبات این فرض اگر دشوارتر نباشد کاملاً به همان اندازه حکمی که می‌خواهد ثابت کند دشوار است.

روش پروکلوس نمونه‌ای است از روشهای جانشینان او از این حیث که سعی می‌کند اصل موضوع پنجم را به عنوان قضیه‌ای ثابت نماید. به عبارت دیگر وی عقیده دارد که اصل موضوع پنجم به اصلهای موضوع دیگر بستگی دارد به این معنی که با یک سلسله از استدلالهای بقدر کافی طولانی، از آنها نتیجه می‌شود. تلاشهای مکرری از سوی ریاضیدانان عربی نویس در سده‌های میانه و چند تن از ریاضیدانان اروپایی در دوران نوزایی برای اثبات این وابستگی به عمل آمده است. هیچ‌کدام از این تلاشها درست از آب درنیامده است و خواننده می‌تواند برای مطالعه بحث نسبتاً مفصل از معایب آنها به کتاب ب.آ. روزنفلد مراجعه نماید. در تحلیل نهایی همواره می‌توان نشان داد که در هر یک از این دلایل فرض نهفته‌ای وجود دارد که اثبات آن به اندازه اصل موضوع توازی دشوار است.

عقیده عمومی براین است که تاریخ جدید هندسه ناقلیدسی با کتاب اقلیدس عاری از هر گونه

نقص^۱ تألیف جیرولامو ساگری (۱۶۶۷-۱۷۳۳) آغاز می‌شود. در این کتاب ساگری سعی کرده است وابستگی مذکور اصل موضوع پنجم اقلیدس را با استفاده از یک برهان خلف ثابت نماید. وی فرض کرده است که حکم این اصل نادرست است و کوشیده است تا تناقضی از آن به دست آورد، و با این فکر وابستگی اصل موضوع پنجم را به سایر اصلهای موضوع نتیجه بگیرد. ولی استنتاج تناقض وی اشتباه بوده، استدلال وی خطایی در بر داشته است؛ آنجا که او فکر می‌کرده تناقضی یافته است، حقیقتاً تناقضی در میان نبوده است. خوشبختانه وی به اندازه یک ریاضیدان دقیق بوده است تا بتواند مقدار زیادی از ریاضیات مستدلی را قبل از رسیدن به تناقض مفروض پدید آورد. با توجه به رویدادهای بعدی، احکامی که وی از چهار اصل موضوع اول و نقیض اصل موضوع پنجم (نقیضی که وی اعتقادی به درستی آن نداشت) به دست آورد پایه و اساس هندسه ناقلیدسی قرار گرفتند.

در ۱۷۶۳ گ. س. کلوگل پس از بررسی بسیاری از «اثباتهای» اصل موضوع پنجم، اثبات‌پذیری آن را مورد تردید قرار داد. این دیدگاه منفی مورد قبول واقع نشد و بیش از نیم قرن هم مورد تأیید قرار نگرفت. بیشتر ریاضیدانان سده هجدهم عقیده داشتند که اصل موضوع پنجم در واقع نتیجه‌ای از چهار اصل موضوع اول است. ی. ه. لامبرت (۱۷۲۸-۱۷۷۷) رساله‌ای با عنوان نظریه توازیها نوشت که پس از مرگش منتشر شد. در این رساله بخشهای معتبر کتاب ساگری را بیشتر پی‌گیری کرد و گزاره‌های زیاد دیگری را ثابت نمود. وی، درست مانند سلف خود، حکم اصل پنجم را نادرست فرض کرد و از این نقطه شروع به پیشروی کرد. وی فرمولهایی برای مساحت مثلث در هندسه‌های هذلولوی و بیضوی به دست آورد و مشابهت آنها را با فرمولهای متناظر بر سطح کره متذکر شد. این تشابه موجب شد که بنویسد «تقریباً میل دارم این نتیجه را بگیرم که فرض سوم [هندسه هذلولوی] بر یک رویه کروی انگاری ظاهر می‌شود.» در پرتو پیشرفتهای بعدی، این بینش به‌واقع بینش ژرفی بود. با این همه، لامبرت به انکار پیشرفت خلاق خود ادامه داد و با به دست آوردن تناقضی نادرست درستی اصل موضوع پنجم را «ثابت» کرد.

آ. م. لژاندر (۱۷۵۲-۱۸۳۲) تلاشهای ساگری و لامبرت را برای اثبات اصل موضوع پنجم با استفاده از برهان خلف ادامه داد. وی نیز در به دست آوردن تناقض دچار اشتباه شد و قبل از این اشتباه او هم ریاضیات با ارزشی پدید آورد. برخی از قضایای جالب وی در فصل ۱۰ آمده‌اند.

شاید بد نباشد در مورد علت دچار شدن ریاضیدانان بزرگی چون لامبرت و لژاندر به چنین

1. Euclides ab omni naevo vindicatus

اشتباهاتی توضیحی داده شود. در وضع ایدآل، هندسه دانشی است مجرد و محض که فقط با مفاهیم سروکار دارد، نه با اشیاء فیزیکی. این مطلب حتی از اولین تعریف اقلیدس «نقطه آن است که جزء ندارد» نیز روشن می‌شود که منظور وی یک نقطه فیزیکی نیست. این تلاش برای فاصله گرفتن از دنیای واقعی به حدی رسیده بود که ظاهراً اشتانیر، هندسه‌دان سده نوزدهم، برای ممانعت از به‌کار بردن مشاهدات دنیای پیرامون خود به‌عنوان ابزاری برای استدلال هندسی، به دانشجویان در کلاسهای تاریک درس می‌داد. به‌رغم این‌گونه تلاشها در جدا کردن شهود فیزیکی از استدلال هندسی، این هندسه‌دانان که خود موجوداتی با مشخصات آدمی بودند، همواره به موفقیت کامل دست نمی‌یافتند. در واقع جای تردید است که چنین تدابیر ذهنی محض در محدوده عمل فکر آدمی قرار گیرد. در هر حال، هر چه بوده باشد، پس از فرض نادرستی اصل موضوع توازی، هر یک از این ریاضیدانان به نتیجه‌ای رسیدند که قویاً با مشاهدات آنها از جهان خارج مغایرت داشت، چیزی که کاری نمی‌توانستند بکنند جز اینکه نتیجه بگیرند که به یک ناسازگاری منطقی دست یافته‌اند. مثلاً لامبرت انتظار داشت که مکان هندسی تمام نقاط همفاصله از یک خط راست یک خط راست باشد. از طرف دیگر لژاندار تلویحاً می‌پذیرفت که مجموع زاویه‌های تمام مثلثها یک اندازه است. اکنون می‌دانیم که هیچ‌یک از این احکام در بافت هندسه نااقلیدسی درست نیست.

ک. ف. گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) احتمالاً اولین ریاضیدانی بوده که تردیدهای جدی در مورد اثبات‌پذیری اصل پنجم را پذیرفته و وجود یک هندسه نااقلیدسی معتبر از ذهنش گذشته است، متأسفانه کار وی در این موضوع کاملاً مستند نیست. لباچفسکی (۱۷۹۳-۱۸۵۶) در ۱۸۲۹ مقاله در اصول هندسه را منتشر کرد که در آن فرض می‌کرد به‌ازای خطی چون m و نقطه P ناواقع بر آن بیش از یک خط وجود دارند که از P می‌گذرند و موازی با m هستند، و بسط هندسه هذلولوی را به روش ترکیبی دنبال کرد. به‌علاوه، وی استدلالی را، هر چند با اندکی نقص، مطرح و ثابت کرد که این هندسه هذلولوی به‌همان اندازه سلف خود، هندسه اقلیدسی، سازگار است. این استدلال در بخش ۳.۱۱ قبلاً آورده شده است. بنابراین برای نخستین بار مشاهده می‌کنیم که ریاضیدانی هندسه نااقلیدسی را صرفاً به‌خاطر خود این هندسه مطرح می‌کند نه به‌عنوان وسیله‌ای برای اثبات نادرستی آن. لباچفسکی حتی بعداً کارایی ابداع خود را نشان می‌دهد. او اثبات می‌کند که انتگرال جدید خاصی را می‌توان با استدلال هندسی در بافت نااقلیدسی محاسبه کرد. بنابراین هندسه نااقلیدسی را می‌توان برای حل مسائلی که در زمینه اقلیدسی ظاهر می‌شوند، به‌کار برد. ی. بویوی (۱۸۲۰-۱۸۶۰) همین هندسه را هم‌زمان و مستقلاً کشف و مشاهدات خود را به‌صورت مقاله‌ای با عنوان «تکمله‌ای متضمن دانش کلی درست فضا، مستقل از درستی یا نادرستی اصل

موضوع پنجم اقلیدس» منتشر کرد. این مقاله به صورت پیوست کتابی منتشر شد که پدر وی، ف. بویوی، در اثبات اصل موضوع توازی نوشت و در ۱۸۳۲ منتشر کرد.

بلترامی (۱۸۳۵-۱۹۰۰) اولین اثبات کامل سازگاری منطقی هندسه هذلولوی صفحه را در ۱۸۶۸ ارائه داد. در نخستین مقاله از دو مقاله‌ای که در آن سال منتشر نمود، نشان داد که مثلثات ژئودزیکهای شبه کره - رویه‌ای از هندسه اقلیدسی که مایندینگ قبلاً در سال ۱۸۱۰ مورد بررسی قرار داده بود - با مثلثات صفحه هذلولوی یکی است. در نتیجه هر تناقض ذاتی ممکن در هندسه هذلولوی لزوماً موجب تناقضی ذاتی در هندسه اقلیدسی خواهد شد. به عبارت دیگر بلترامی ثابت کرد که هندسه هذلولوی دست‌کم به همان اندازه هندسه اقلیدسی سازگار است.

مطلب فوق عیب محدودیتی را که به این نقش مایندینگ و بلترامی تا حدی آسیب می‌رساند از میان برمی‌دارد. شبه کره تصادفاً رویه‌ای است کراندار، یعنی رویه‌ای است دارای یک یال. از طرف دیگر صفحه هذلولوی در تمام جهات تا بینهایت امتداد دارد. در نتیجه شبه کره مایندینگ فقط می‌تواند برای ساختن جزئی از صفحه هذلولوی در داخل فضای اقلیدسی به کار رود. هیلبرت در ۱۹۰۱ نشان داد که حقیقتاً این مشکل مشکلی کاملاً جدی است. وی ثابت کرد که در فضای اقلیدسی هیچ رویه‌ای وجود ندارد که هندسه آن معرف تمام صفحه هذلولوی باشد. ولی در دومین مقاله‌اش در ۱۸۶۸ بلترامی با ساختن هر یک از سه الگوی هندسه هذلولوی ما به صورت یک هندسه ریمانی، بویوی و لباچفسکی را کاملاً مورد تأیید قرار داد. به عبارت دیگر وی صریحاً متریکهای ریمانی معرف نیم‌صفحه فوقانی الگوی قرص واحد و الگوی بلترامی-کلاین را فرمولبندی نمود. وی ژئودزیکهای این متریکها را پیدا کرد و نشان داد که هندسه آنها با هندسه ناقلیدسی بویوی و لباچفسکی یکی است. بلترامی عملاً در فضاهای دلخواه با ابعاد بالا کار می‌کرد، وی مؤکداً می‌گوید که ژ. لیوویل (۱۸۰۰-۱۸۸۲) در چهارمین مقدمه‌اش بر کتاب هندسه دیفرانسیل گ. مونتر (۱۷۴۶-۱۸۱۸) قبلاً به متریک دوبعدی پوانکاره در مورد نیم‌صفحه بالایی اشاره کرده است. گذشته از آن این نیز یک واقعیت است که ریمان صورت n بعدی الگوی قرص واحد را در اوایل ۱۸۵۴ بررسی کرده است، ولی هیچ سند محکمی دال بر اطلاع لیوویل یا ریمان از ارتباط متریکهای خود با هندسه هذلولوی وجود ندارد. در ۱۸۷۱ ف. کلاین اعلام کرد که یکی از الگوهای بلترامی را می‌توان در چارچوب هندسه تصویری، با استفاده از ابزارهایی که ا. کیلی در سال ۱۹۵۹ برای پرداختن یکسان به هندسه اقلیدسی صفحه و هندسه کروی ساخته بود، به دست آورد. از آن به بعد این الگو به الگوی بلترامی-کلاین یا الگوی تصویری هندسه هذلولوی معروف شد. در همان مقاله کلاین بود که هندسه ناقلیدسی بویوی و لباچفسکی هندسه هذلولوی نامیده شد.

همه این الگوها فقط به اثبات سازگاری نسبی هندسه هذلولوی پرداخته‌اند و از مسأله پیدا کردن اثبات سازگاری مطلق هر یک از هندسه‌های اقلیدسی یا هذلولوی شانه خالی کرده‌اند. در ۱۹۳۱ کورت گودل (۱۹۰۷-۱۹۷۸) قضیه‌ای را ثابت نمود که علاوه بر نتایج زیاد دیگر آن، این نتیجه را نیز در بردارد که اثبات سازگاری مطلق این هندسه‌ها امکان ندارد. بنابراین به نظر می‌رسد که بلترامی و کلاین مسأله سازگاری را تا جایی که ممکن بوده است حل کرده‌اند. ولی ریاضیدانان معیارهای مفید دیگری برای سازگاری دارند که کمتر صوری و بیشتر عملی است و توسط آنها، نظریه‌ها مورد داوری قرار می‌گیرند، و الگوی نیمصفحه یوانکاره مقبولیت خود را مدیون یکی از این معیارهاست.

در اینجا لازم است به سده هجدهم برگردیم. در این سده حسابان با سرعت حیرت‌آوری شکوفا شد. انتگرالها و معادله‌های دیفرانسیل توجه همه ریاضیدانان مستعد را هم به دلیل جذابیت ذاتی و هم به دلیل کاربردشان در علوم دیگر جلب نمودند. این ریاضیدانان به سرعت تکنیکهایی را ابداع نمودند که برای محاسبه انتگرالهایی چون

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (۱.۱۵)$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ایهای دلخواه با ضرایب حقیقی هستند، از قدرت کافی برخوردار بودند. این روشهای انتگرالگیری در تمام کتابهای استانده حسابان وجود دارند. این ادعا که همه انتگرالهایی به صورت (۱.۱۵) را می‌توان محاسبه نمود، مبتنی بر این فرض است که $Q(x)$ را می‌توان به حاصلضرب چندجمله‌ایهای درجه اول و دوم تجزیه نمود و ابزارهای انجام چنین تجزیه‌ای از روشهای آنالیز عددی به آسانی به دست می‌آیند. خوانندگان شاید از درسهای حسابان خود به یاد داشته باشند که کتابهای آنالیز آنها روشهایی برای حل انتگرالهایی از نوع

$$\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

با $R(x)$ گویا، داشته‌اند. انتگرالده دیگر به ترتیب دشواری، انتگرالی است که از قرارداد یک تابع درجه سوم به جای درجه دوم در انتگرال فوق پیدا می‌شود، مثل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}} \quad (۲.۱۵)$$

این انتگرالها به انتگرالهای بیضوی موسوم‌اند، زیرا محاسبه طول قوس بیضی به محاسبه برخی از این انتگرالها منجر می‌شود. محاسبه این انتگرالها به مراتب دشوارتر از محاسبه انتگرالهای صورت قبلی

آنهاست. ساختن نوعی نظریه برای حل این مسائل یکی از وظایف مهمی بود که ریاضیدانان قرن ۱۸ بر عهده ریاضیدانان قرن ۱۹ گذاشتند. این کار به دست ن. آبل (۱۸۰۲-۱۸۲۹) و ک. یاکوبی (۱۸۰۴-۱۸۵۱) انجام گرفت. راه حل آنها مبتنی بر دو خط مشی انقلابی بود. اولین خط مشی عطف توجه به معکوس انتگرالهای بیضوی بود. با مروری برگزیده این مطلب معلوم می شود، زیرا مثلاً

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c \quad (3.15)$$

و از این رو معکوس انتگرال فوق، یعنی $\sin x$ ، تابعی است که همه می شناسیم. معکوس انتگرالهای بیضوی به توابع بیضوی معروف شده اند.

خط مشی دیگری که آبل و یاکوبی در پرداختن به انتگرالهای بیضوی به کار بردند مستلزم جایگزین نمودن متغیر حقیقی x با متغیر مختلط z بود. مزیت این کار این بود که توابع بیضوی دوره های تناوب ساده ای را که هنگام محدودیت به خط حقیقی از دست می دادند به دست می آوردند. برای بهتر فهمیدن این موضوع خاطر نشان می کنیم که تابع سینوس به عنوان یک «تابع بیضوی» مربوط به انتگرال (۳.۱۵) دارای دوره تناوب معروف

$$\sin(z + 2n) = \sin z$$

است. آبل و یاکوبی مشاهده کردند که وقتی دامنه توابع بیضوی کلی مربوط به انتگرال (۲.۱۵) به صفحه مختلط بسط داده شود این توابع حتی دوره های تناوب قویتری خواهند داشت. به ویژه اگر $f(z)$ معرف چنین تابع بیضوی باشد، آنگاه دو عدد مختلط t و w وجود دارند به طوری که

$$\frac{t}{w} \text{ حقیقی نیست}$$

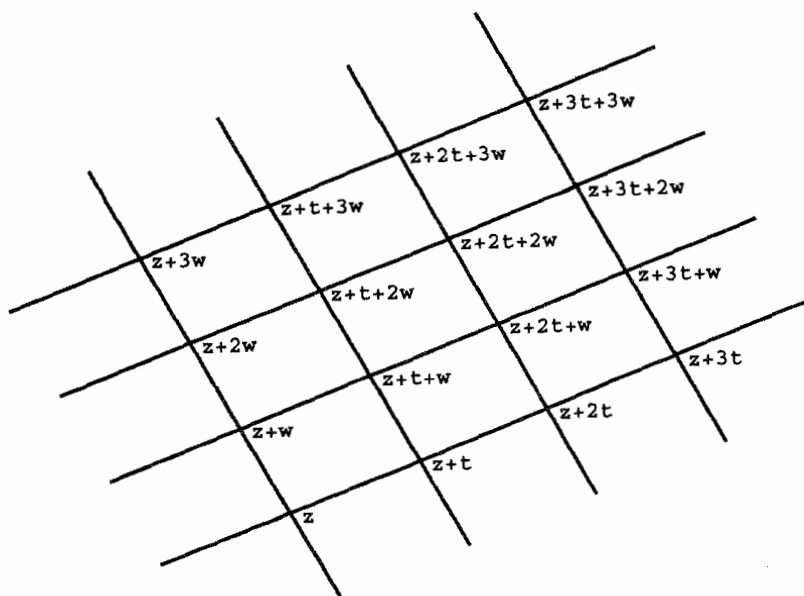
و

$$f(z) = f(z + t) = f(z + w) \text{ داریم، هر } z, \quad (4.15)$$

وجود این دوره تناوب دوگانه مطالعه توابع بیضوی را بسیار آسانتر می کرد.

روشن است که معادله های (۴.۱۵) با بیان این نکته هم ارزند که به ازای هر z

$$f(z + mt + nw) = f(z) \quad m \text{ و } n \text{ صحیح}$$



شکل ۲.۱۵

از این رو تابع بیضوی $f(z)$ به ازای همه نقاط متعلق به شبکه‌ای متشکل از همه نقاط

$$\{z + mt + nw \mid \text{صحیح } n, m\}$$

دارای یک مقدار است.

این نقطه‌ها به ازای هر z ، شبکه‌ای ایجاد می‌نمایند که همه حجره‌های آن نسخه بدل‌های متوازی‌الاضلاعی به رأسهای z ، $z+t$ ، $z+t+w$ ، $z+w$ هستند (شکل ۲.۱۵). به یک تعبیر خیلی دقیق، این دوره‌های تناوب تابع بیضوی را مشخص می‌نمایند. به بیان غیر دقیق، هر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ که در دوره تناوب (۴.۱۵) صدق نماید، در واقع یک تابع بیضوی است.

ریاضیدانان، وقتی خیالشان از انتگرالهای بیضوی راحت شد، متوجه انتگرالده‌های پیچیده‌تری شدند، که در آنها درجه چندجمله‌یی دلخواه بود و به جای رادیکال، رادیکالی پیچیده‌تر یا ترکیبی از آنها گذاشته شده بود. گ. ف. ب. ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) نظریه بسیار ژرفی را مطرح نمود که به ریاضیدانان اجازه می‌داد تا با این انتگرالها دست و پنجه نرم کنند. نظریه ریمان، درست مانند نظریه توابع بیضوی، به جای متغیر حقیقی x ، متغیر مختلط هم‌تایش z را قرار می‌داد. ولی، ریمان تکیه بر معکوسها نمی‌کرد، شاید به این دلیل که امیدی به پیدا کردن دوره‌های تناوب مفید نداشت.

با این همه معلوم بود که تمام الگوهای متناوب دوبعدی صفحه اساساً با الگوهای توابع بیضوی یکی هستند و هر تابع مناسبی که در یک دوره تناوبی از این نوع صدق کند لزوماً بیضوی و از نوعی است که آبل و یاکوبی مطرح کرده‌اند.

موجبات موفقیت‌های تازه توسط ه. پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲) فراهم شد. نخست وی بدون کسب موفقیت سعی کرد ثابت نماید که موجودیت دوره‌های تناوب لازم برای نظایر مرتبه بالاتر توابع بیضوی خیلی پیچیده است. وقتی این تلاش به ثمر نرسید، وی جهت کار خود را عوض کرد و رده‌ای از توابع ساخت که اگرچه دوره‌های تناوب آنها تعبیر هندسی ساده‌ای نداشتند ولی قالب‌های تکراری مطلوب را دارا بودند. وی این توابع را به احترام ای. ل. فوکس^۱ ریاضیدان سده نوزدهم که کار برجسته وی در این زمینه توجه پوانکاره را به خود جلب کرده بود، توابع فوکسی نامید. خوشبختانه با گفته‌های خود پوانکاره (علم و روش) می‌توانیم مرحله بعدی را شرح دهیم

«درست در این موقع، به لطف مدرسه معادن، کن، محل زندگی بعدیم را برای یک گشت زمین‌شناختی ترک نمودم. تنوعهای این مسافرت موجب شد کار ریاضی را فراموش کنم. پس از رسیدن به کوتانس برای رفتن به اینجا و آنجا سوار اتوبوس شدیم. همین که پا روی پله اتوبوس نهادم این فکر به سراغم آمد بی‌آنکه ظاهراً تفکرات قبلی من در آن راهی داشته باشند که تبدیلی که من برای تعریف توابع فوکسی به‌کار برده‌ام، باید با تبدیلیهای هندسه ناقلیدسی یکی باشند. در درستی این اندیشه تعمق نکردم؛ معلوم بود که به هنگام نشستن روی صندلی اتوبوس فرصتی نداشتم. دنباله صحبت خود را که قبلاً آغاز شده بود ادامه دادم؛ ولی احساس اطمینان کامل می‌کردم. پس از مراجعت به کن برای آرامش وجدان در فرصت مناسب درستی نتایج را بررسی نمودم.»

بنابراین پوانکاره تشخیص داده بود که هندسه ناقلیدسی دوره‌های تناوبی را که در صفحه اقلیدسی غیرممکن هستند مجاز می‌شمارد و این تناوبها را می‌توان برای به‌دست آوردن درک عمیقتری از انتگرالهای مورد بررسی ریمان به‌کار برد. مثلاً شکل ۱۰.۶ دارای دوره‌های تناوبی هذلولوی است که آشکارا در صفحه اقلیدسی غیرممکن هستند. برای تسهیل بررسی دوره‌های تناوبی مجاز در صفحه هذلولوی وی متریک ریمان

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

را در نیمصفحه بالایی تعریف کرد، متریکی که چنانچه دیده‌ایم، این نیمصفحه را واقعاً به الگویی از هندسه هذلولوی تبدیل می‌نماید. پوانکاره تقارنهای حاصل را رده‌بندی کرد و آنها را گروه‌های

فوکسی نامید. این گروهها و نیز نیمصفحه بالایی پوانکاره قسمتهای مهمی از ریاضیات جدید، موضوع تحقیقات جاری زیادی هستند. و بنابراین هندسه ناقلیدسی که ساگری آن را فقط وسیله‌ای برای اثبات عدم وجود خود آن می‌پنداشت، قسمت اصلی راه‌حل مسائلی است که در هندسه اقلیدسی پیدا می‌شوند.

۲.۱۵ تمرین

۱. ریزه‌کاریهای فنی آثار هر یک از ریاضیدانان زیر را در هندسه ناقلیدسی پیدا کنید.

الف) نیریزی

ب) خواجه نصیرالدین

ج) عمر خیام

د) جیرولامو ساگری

ه) فریدریش لوتویک واختر

و) برنهارت فریدریش تیو

ز) کارل فریدریش گوس

ح) فردینانت کارل شوایکارت

ط) فرانتس آدولف تاورینوس

ی) آرثر کیلی

ک) سوفوس لی.

۱۶

کره و کره ساعتی

۱.۱۶ مقدمه

در فصلهای ۴-۸ الگویی از هندسه هذلولوی در محدوده بافت صفحه اقلیدسی ساختیم. به احتمال نزدیک به یقین خواننده تاکنون درباره عکس این مسأله، یعنی ساختن نسخه‌ای از صفحه اقلیدسی در محدوده هندسه هذلولوی فکر کرده است. این مسأله موضوع فصل حاضر است.

الگوی یوانکاره صفحه هذلولوی با قرار دادن متریک ریمانی جدید (متریک یوانکاره) بر نیمصفحه بالایی ساخته شده است. مانند همه متریکهای ریمانی در این متریک نیز وجود یک دستگاه مختصات دکارتی مسلم گرفته شده است، که آن نیز قویاً به یکتایی توازیها به مفهومی که در اصل موضوع پلی‌فیر توضیح داده شده، بستگی دارد. روش روشنی وجود ندارد که با آن بتوان این راه را برای مسأله عکس جا انداخت. صفحه هذلولوی هیچ‌وجه

مشابهت معلومی با دستگاه مختصات دکارتی ندارد، زیرا تا جایی که مؤلف توانسته است دریابد، هیچ روش آشکاری برای ساختن هندسهٔ اقلیدسی در داخل صفحهٔ هذلولوی وجود ندارد. علت اینکه چرا چنین ساختمانی کشف نشده ممکن است منوط به عدم امکان وجود چنین ساختمانی باشد. ولی این عدم امکان وجود تاکنون ثابت نشده و لذا به گفتهٔ ریاضیدانان، مسأله هنوز باز است. مؤلف براین باور است که لاینحل ماندن مسأله تاکنون به دلیل دشواری ذاتی آن نیست، بلکه به این دلیل است که یک مسألهٔ بسیار نزدیک به آن حل شده و این راه حل به قدری زیبا و رضایتبخش است که ریاضیدانان علاقهٔ خود را به اصل مسأله از دست داده‌اند.

تصادفاً هندسهٔ هذلولوی که بویویی و لباچفسکی ساخته‌اند، در واقع هندسهٔ فضای سه‌بعدی است، نه هندسهٔ فضای دوبعدی. پس از تکمیل ابزارهای فضایی، آنها بررسی خود را محدود به صفحهٔ هذلولوی و مثلثات آن نموده‌اند. بسیاری از مفسران این موضوع این ترتیب شگفت‌انگیز رویدادها را نادیده گرفته‌اند ولی واقعاً مهم است. آنچه که به بویویی و لباچفسکی در مورد سازگاری اصلهای موضوع صفحهٔ هذلولوی اعتماد بخشید، سازگاری قابل اثبات مثلثات آن بود. به طوری که قبلاً دیدیم، فرمولهای مثلثات هذلولوی را می‌توان از فرمولهای مثلثات کروی با ضرب همهٔ طولها در $\sqrt{-1}$ به دست آورد، و از این رو ادعا شده بود که هر ناسازگاری در صفحهٔ هذلولوی الزاماً مستلزم یک ناسازگاری در هندسهٔ اقلیدسی کره است. ولی برای به دست آوردن فرمولهای مثلثات هذلولوی بویویی و لباچفسکی، هر دو، دریافتند که ضروری است ابتدا هندسهٔ مطلق فضای سه‌بعدی را بهبود بخشند. هنگام انجام این کار دوحقیقت بسیار شگفت‌انگیز را کشف نمودند.

هندسهٔ رویه‌های کره‌های هذلولوی با هندسهٔ رویه‌های کره‌های اقلیدسی یکی است.

در داخل فضای هذلولوی، رویه‌هایی به نام کره‌های زمانی وجود دارند که هندسهٔ آنها از هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی تمیزناپذیر است.

مؤلف به این باور است که این مشاهده در مورد هندسهٔ کرهٔ زمانی پاسخ ارضاکنده‌ای به شگفتی ریاضیدانان اخیر دربارهٔ امکانپذیر بودن ساختن نسخه بدلی از هندسهٔ اقلیدسی در داخل صفحهٔ هذلولوی بوده است.

این فصل به بیان و اثبات دو نکتهٔ فوق در محدودهٔ مشابه سه‌بعدی متریک پوانکاره اختصاص یافته است. ولی خوانندگان باید در نظر داشته باشند که بویویی و لباچفسکی آنها را به صورت ترکیبی، یعنی به صورت قضیه‌هایی در هندسهٔ مطلق، ثابت کرده‌اند.

۲.۱۶ فضای هذلولوی و حرکت‌های صلب آن

چون هدف ما در این فصل مقایسه و مقابله هندسه‌های گوناگون است، لازم است مفهوم هندسه را تعریف کنیم. برای کاربردهای ما در این کتاب، هر هندسه متشکل از بخشی از فضا است همراه با روش مشخصی برای اندازه‌گیری طول خمهایی که در این بخش قرار دارند. نمونه‌های اینگونه هندسه‌ها عبارت‌اند از هندسه اقلیدسی، نیمصفحه بالایی پوانکاره، الگوی قرص واحد، هر هندسه‌ای که با متریک ریمان تعریف شود، هندسه کروی، و هندسه اقلیدسی هر رویه واقع در R^3 . اکنون کار خود را با تعریف و مطالعه هندسه‌ای از این نوع که ابداع جدید پوانکاره است پی می‌گیریم.

فضای هذلولوی با الگوی نیمفضای بالایی (که هم‌اکنون تعریف می‌شود) توسط پوانکاره، درست به همان روشی ساخته شده بود که نیمصفحه بالایی ساخته شده بود. بنابراین همان تمایز موجود بین صفحه هذلولوی و نیمصفحه بالایی در مورد فضای هذلولوی و نیمفضای بالایی نیز موجود است. این نیمفضای بالایی صرفاً الگویی برای نیمصفحه بالایی است. ولی، ما به قرارداد بند آخر فصل ۴ مبنی بر اینکه عناصر این الگو باز هذلولوی تلقی می‌شوند، پای بندیم. بنابراین، مثلاً هنگام صحبت از برخی از زیرمجموعه‌های الگوی نیمفضا، اصطلاحات خطهای هذلولوی و کره‌های هذلولوی را به‌کار خواهیم برد. این اصطلاحات بسیار مناسب‌اند و نباید موجب مشکلات ناخواسته برای خواننده شوند.

فرض می‌کنیم دستگاه مختصاتی به فضای اقلیدسی بسته شده است. گیریم H^3 معرف نیمفضای بالایی این فضای اقلیدسی، یعنی مجموعه همه نقاط (x, y, z) باشد که در آنها z مثبت است. طول هذلولوی هر خم $\gamma(t)$ ، $a \leq t \leq b$ واقع در H^3 به صورت

$$\int_a^b \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} dt \quad (1.16)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱.۱۶. بیاییم طول هذلولوی پاره خط اقلیدسی به صورت پارامتری

$$1 \leq t \leq 3, \gamma(t) = (3t - 1, t + 2, 2t + 1)$$

را محاسبه کنیم. البته این پاره خط، پاره خطی است که نقطه $(2, 3, 3)$ را به نقطه $(8, 5, 7)$ وصل می‌نماید. معادلات پارامتری خطی که این پاره خط بر آن قرار دارد عبارت‌اند از

$$x = 3t - 1, y = t + 2, z = 2t + 1$$

$$dx = 3dt, dy = dt, dz = 2dt$$

بنابراین با قرار دادن این مقادیر در (۱.۱۶) طول هذلولوی پاره‌خط داده شده را به صورت

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{9dt^2 + dt^2 + 4dt^2}}{2t+1} = \int_1^3 \frac{\sqrt{14}}{2t+1} dt = \frac{\sqrt{14}}{2} \ln \frac{7}{3}$$

به دست می‌آوریم.

مثال ۲.۱۶. صورت پارامتری پاره‌خط قائم اقلیدسی که نقطه‌های (a, b, c_1) و (a, b, c_2) را به هم وصل می‌نماید چنین است

$$x = a, y = b, z = t \quad c_1 \leq t \leq c_2$$

از این رو در طول این خط داریم

$$dx = 0, dy = 0, dz = dt$$

در نتیجه طول هذلولوی این پاره‌خط مساوی است با

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + dt^2}}{t} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{c_2}{c_1}$$

مثال ۳.۱۶. اکنون طول هذلولوی خم $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ را از $t = 1$ تا $t = 2$ محاسبه می‌کنیم. در طول این خم داریم

$$dx = dt, dy = 2t dt, dz = 3t^2 dt$$

از این رو طول هذلولوی این خم با انتگرال معین زیر داده می‌شود

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}{t^3} dt \approx 2,35$$

خواننده تاکنون باید کاملاً آگاه شده باشد که آگاهی از حتی فقط برخی از حرکت‌های صلب یک هندسه، ابزاری ارزشمند برای تحقیق در آن هندسه است. این امر برای H^3 نیز صادق است. یک

حرکت صلب هذلولوی نیمفضای بالای H^3 تبدیلی است از H^3 به توی خودش که طولهای خمها را حفظ می‌کند. رده‌بندی کامل حرکت‌های صلب H^3 بیرون از محدوده این کتاب قرار دارد. در عوض به این بسنده می‌کنیم که نشان دهیم برخی حرکت‌های صلب اقلیدسی فضای سه‌بعدی R^3 حرکت‌های صلب هذلولوی H^3 را القا می‌کنند.

گزاره ۴.۱۶. فرض می‌کنیم a و b و α اعداد حقیقی ثابتی باشند. در این صورت تبدیلی‌های

$$\rho(x, y, z) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha, z)$$

$$\tau(x, y, z) = (x + a, y + b, z)$$

حرکت‌های صلب هذلولوی H^3 هستند.

برهان: ابتدا تبدیل $\rho(x, y, z)$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad a \leq t \leq b$$

خمی در H^3 باشد و نگاره آن بر اثر تبدیل ρ ، خم

$$\gamma^*(t) = [u(t), v(t), w(t)] \quad a \leq t \leq b$$

باشد که در آن

$$u(t) = x(t) \cos \alpha + y(t) \sin \alpha$$

$$v(t) = -x(t) \sin \alpha + y(t) \cos \alpha$$

$$w(t) = z(t)$$

برای اینکه نشان دهیم ρ یک حرکت صلب است، باید درستی

$$\int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

را تحقیق کنیم. اما این تحقیق کاری است ساده، زیرا

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \cos \alpha dx + \sin \alpha dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy$$

$$dw = dz$$

$$\begin{aligned} \gamma^* \text{ طول هذلولوی} &= \int_{\gamma^*} \frac{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}}{w} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)dx^2 + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)dy^2 + dz^2}}{z} \\ &= \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z} = \gamma \text{ طول هذلولوی} \end{aligned}$$

بنابراین تبدیل ρ در واقع یک حرکت صلب هذلولوی است. اثبات اینکه τ نیز یک حرکت صلب است در تمرین ۱ به‌عهده خواننده واگذار شده است.

آنچه می‌خواستیم

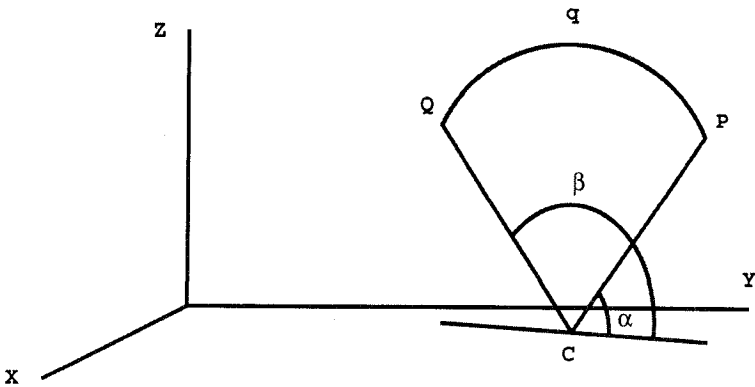
البته تبدیل τ مذکور در فوق یک انتقال اقلیدسی است که عمل آن موازی با صفحه xy است. از طرف دیگر ρ یک دوران اقلیدسی پادساعتسوی فضای اقلیدسی به‌زاویه α است که محور دوران آن محور z است، و τ انتقالی افقی است که به‌ازای هر z ، نقطه $(0, 0, z)$ را به نقطه (a, b, z) می‌نگارد. در نتیجه، ترکیب $\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}$ هر نقطه (a, b, z) را ثابت نگاه می‌دارد و لذا دورانی پادساعتسو به‌زاویه α است که محور آن خط قائم شامل نقطه $(a, b, 0)$ است. در نتیجه چون ρ و τ حرکت‌های صلب هذلولوی هستند، این دوران اخیر حول یک خط قائم دلخواه نیز یک حرکت صلب هذلولوی است. این حقایق را به‌صورت فرع زیر بیان می‌کنیم.

فرع ۵.۱۶. الف) هر دوران اقلیدسی که محورش بر صفحه xy عمود باشد یک حرکت صلب هذلولوی از H^3 را القا می‌نماید.

ب) هر انتقال اقلیدسی که عمل آن موازی صفحه xy باشد یک حرکت صلب اقلیدسی از H^3 را القا می‌نماید.

قبلاً با برخی از جنبه‌های هندسه سه‌بعدی هذلولوی آشنا شده‌ایم. مثلاً توجه کنید که به‌ازای هر خم γ از صفحه افقی $z = 1$ داریم $dz = 0$ و لذا طول هذلولوی γ که با فرمول (۱.۱۶) داده می‌شود مساوی است با طول اقلیدسی آن

$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$



شکل ۱.۱۶

بنابراین هندسه هذلولوی صفحه $z = 1$ با هندسه اقلیدسی آن یکی است. به همین ترتیب به ازای هر خم از صفحه $x = 0$ داریم $dx = 0$ و لذا طول هذلولوی خم γ در این صفحه مساوی است با

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dy^2 + dz^2}}{z}$$

که به روشنی دیده می شود که پس از بازنویسی مناسب حروف، با متریک دوبعدی پوانکاره نیمصفحه بالایی یکی است. به عبارت دیگر، تحدید متریک سه بعدی پوانکاره در H^3 به نیمصفحه $x = 0$ و $y > 0$ به یک متریک دوبعدی پوانکاره در همان نیمصفحه می انجامد. بنابر گزاره ۴.۱۶ و فرع ۵.۱۶ این مطلب در مورد تحدید هندسه هذلولوی به هر صفحه عمود بر صفحه xy نیز صادق است.

۳.۱۶ ژئودزیکهای هذلولوی

در این بخش هیچ چیز غیرمنتظره ای نخواهید دید. درست همان خمهایی ژئودزیکهای H^3 هستند که خواننده انتظار ژئودزیک بودن آنها را دارد. دایره ای در H^3 قائم نامیده می شود که صفحه آن بر صفحه xy عمود باشد. اکنون به ذکر سه گزاره می پردازیم که نظایر سه بعدی گزاره های ۱.۴، ۳.۴ و قضیه ۴.۴ هستند. برای توضیح گزاره ۶.۱۶ خواننده را به شکل ۱.۱۶ ارجاع می دهیم.

گزاره ۶.۱۶. فرض می کنیم q یک دایره قائم در H^3 به مرکز $c(a, b, 0)$ و شعاع r باشد. اگر P و Q دو نقطه از q باشند چنانکه شعاعهای CP و CQ با تصویر q بر صفحه xy به ترتیب

زاویه‌های α و β ، $\alpha \leq \beta$ ، بسازند؛ آنگاه

$$PQ \text{ طول هذلولوی کمان} = \ln \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha}$$

برهان: به طوری که در بالا دیدیم، وقتی متریک سه بعدی پوانکاره به نیم صفحه بالایی صفحه yz محدود شود هندسه‌ای را بر آن تعیین می‌کند که با هندسه نیم صفحه بالایی پوانکاره یکی است. بنابراین به موجب گزاره ۴.۴ حکم گزاره وقتی دایره در صفحه yz باشد برقرار است. توضیحات بعد از فرع ۵.۱۶ درستی این حکم را برای هر صفحه عمود بر صفحه xy نشان می‌دهد.

آنچه می‌خواستیم

گزاره زیر در مثال ۲.۱۶ ثابت شده بود.

گزاره ۷.۱۶. طول هذلولوی پاره خط اقلیدسی واصل بین نقطه‌های (a, b, z_1) و (a, b, z_2) مساوی است با

$$\ln \frac{z_2}{z_1}$$

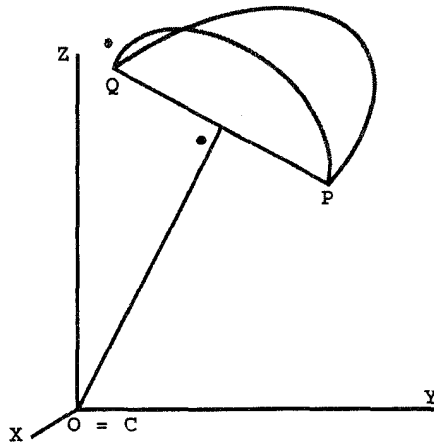
از دو گزاره فوق ژئودزیکهای H^3 به دست می‌آیند.

قضیه ۸.۱۶. پاره ژئودزیکهای نیم فضای بالایی پوانکاره یا

الف) کمانهای نیمدایره‌های اقلیدسی قائمی هستند که مراکزشان بر صفحه xy قرار دارند یا
ب) پاره خطهای راست اقلیدسی عمود بر صفحه xy اند.

برهان: فرض می‌کنیم $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه از H^3 باشند که با خم γ به هم وصل شده‌اند. دو حالت را باید در نظر بگیریم.

حالت اول: پاره خط PQ بر صفحه xy عمود نیست. فرض کنید Π صفحه شامل P و Q عمود بر صفحه xy باشد و C محل تلاقی عمود منصف پاره خط اقلیدسی PQ با صفحه xy . روشن است که یک انتقال و یک دوران از نوع مذکور در گزاره ۴.۱۶ وجود دارند که ترکیب آنها صفحه Π را به صفحه yz و نقطه C را به مبدأ مختصات بدل می‌کند (شکل ۲.۱۶). چون



شکل ۲.۱۶

این تبدیلهای هم حرکتیهای صلب هذلولوی و هم حرکتیهای صلب اقلیدسی هستند، ژئودزیکهای هذلولوی را به ژئودزیکهای هذلولوی و نیمدایره‌های قائم اقلیدسی را به نیمدایره‌های قائم اقلیدسی بدل می‌کنند. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که صفحه Π همان صفحه yz است و نقطه C همان مبدأ مختصات.

فرض کنید $\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ خم پارامتری شده‌ی واصل بین Q و P باشد. با استفاده از همان مختصات قطبی به‌کار رفته در فصل ۱۱، داریم

$$x(t) = r(t) \sin u(t) \cos v(t)$$

$$y(t) = r(t) \sin u(t) \sin v(t)$$

$$z(t) = r(t) \cos u(t),$$

در نتیجه با استفاده از نمادگذاری اختصاری داریم

$$dx = (r' \sin u \cos v + ru' \cos u \cos v - rv' \sin u \sin v) dt$$

$$dy = (y' \sin u \sin v + ru' \cos u \sin v + rv' \sin u \cos v) dt$$

$$dz = (r' \cos u - ru' \sin u) dt$$

$$\begin{aligned}
 dx^2 + dy^2 + dz^2 &= [(r' \sin u \cos v + ru' \cos u \cos v - rv' \sin u \sin v)^2 \\
 &\quad + (r' \sin u \sin v + ru' \cos u \sin v + rv' \sin u \cos v)^2 \\
 &\quad + (r' \cos u - ru' \sin u)^2] dt^2 \\
 &= [(r')^2 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + r^2 (u')^2 \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \\
 &\quad r^2 (v')^2 \sin^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) + 2rr' \sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \\
 &\quad (r')^2 \cos^2 u - 2rr'u' \sin u \cos u \\
 &\quad + r^2 (u')^2 \sin^2 u] dt^2 \\
 &= [(r')^2 + r^2 (u')^2 + r^2 (v')^2 \sin^2 u] dt^2.
 \end{aligned}$$

بنابراین طول هذلولوی خم γ مساوی است با

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2 (u')^2 + r^2 (v')^2 \sin^2 u}}{r \cos u} dt \quad (2.16)$$

که در آن t_1 و t_2 مقادیری از پارامتر t به ترتیب متناظر با نقطه‌های P و Q هستند. نشان می‌دهیم که اگر γ یک ژئودزیک باشد، لزوماً باید در صفحه yz واقع باشد. چون هندسه این صفحه با هندسه نیمصفحه بالایی پوانکاره یکی است به خود حق می‌دهیم که نتیجه بگیریم در واقع γ کمانی از نیمدایره قائمی است که مرکزش مبدأ مختصات است.

فرض می‌کنیم δ خمی باشد که با قراردادن $v = \frac{\pi}{4}$ در فرمولهای γ به دست آمده است. در این صورت δ خمی است واصل بین P و Q که کاملاً در صفحه yz واقع است و دارای صورت پارامتری

$$\delta(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

است که در آن

$$x(t) = 0$$

$$y(t) = \gamma(t) \sin u(t)$$

$$z(t) = r(t) \cos u(t)$$

و $r(t)$ و $u(t)$ همان توابعی هستند که در فرمولهای γ به کار بردیم.

طول δ با قرار دادن $v' = 0$ در فرمول (۲.۱۶) به دست می آید و لذا مساوی است با

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(r')^2 + r^2(u')^2}}{r \cos u} dt \quad (3.16)$$

ویژگیهای مقدماتی انتگرالهای معین تضمین می کنند که انتگرال (۲.۱۶) مساوی یا بزرگتر از انتگرال (۳.۱۶) است و دو انتگرال مساوی اند اگر و تنها اگر v' متحد با صفر باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر v ثابت باشد. ولی، چون P و Q هر دو در صفحه yz هستند، نتیجه می شود که مقادیر اولیه و نهایی v هر دو $\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین طول γ همواره مساوی یا بزرگتر است از طول تصویر آن δ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\delta = \gamma$. بنابراین اگر γ یک ژئودزیک باشد باید کاملاً در صفحه yz واقع باشد. به طوری که در بالا ذکر نمودیم، این مطلب تضمین می نماید که در واقع γ کمانی است از یک نیمدایره قائم.

بررسی حالت دوم، که پاره خط واصل بین P و Q عمود بر صفحه xy باشد در تمرین ۳ به عهده خواننده گذاشته شده است.

آنچه می خواستیم

۴.۱۶ تصویر گنجنگاشتی کره

یک کره هذلولوی به شعاع R مکان هندسی همه نقاطی از H^3 است که فاصله هذلولوی آنها از یک نقطه ثابت C برابر با R است. قبلاً در فصل پنجم دیدیم که هر دایره هذلولوی در نیمصفحه بالایی یک دایره اقلیدسی نیز هست. به همین ترتیب یک کره هذلولوی در H^3 یک کره اقلیدسی نیز هست. برای ملاحظه این امر باید توجه کرد که هر کره هذلولوی را می توان به روش زیر به دست آورد. یک دایره قائم انتخاب و آن را به اندازه 180° حول خط قائمی که از مرکز آن می گذرد دوران می دهیم. چون هر دایره هذلولوی یک دایره اقلیدسی نیز هست و چون این دوران هم حرکت صلب هذلولوی و هم حرکت صلب اقلیدسی است، پس رویه تولید شده هم یک کره هذلولوی و هم یک کره اقلیدسی است. گزاره زیر بلافاصله از گزاره ۲.۵ نتیجه می شود.

گزاره ۹.۱۶. اگر مرکز و شعاع اقلیدسی کره ای به ترتیب (a, b, c) و r باشند، آنگاه مرکز و شعاع

هذلولوی آن (A, B, C) و R اند به طوری که

$$A = a, B = b, C = \sqrt{c^2 - r^2}, R = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{c+r}{c-r}$$

9

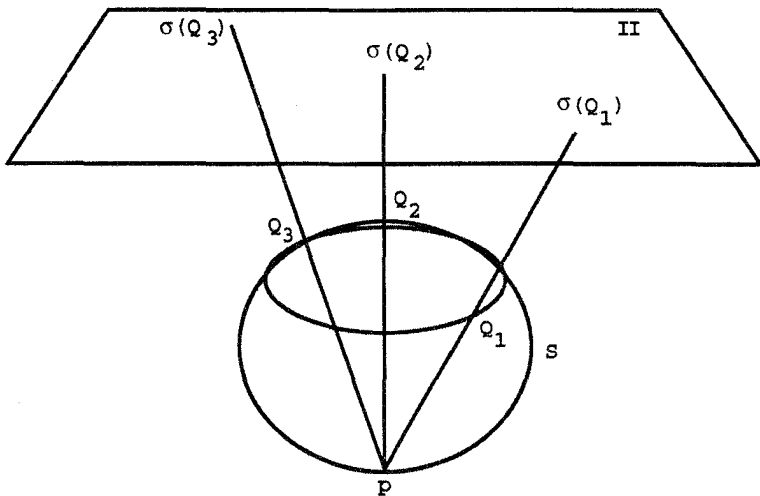
$$a = A, b = B, c = C \cosh(R), r = C \sinh(R)$$

اگرچه هر کره هذلولوی در H^3 یک کره اقلیدسی نیز هست (و برعکس)، ولی متریکهای هذلولوی و اقلیدسی H^3 هندسه‌های متفاوتی را بر آن تعیین می‌نمایند. مثلاً کره به شعاع اقلیدسی ۱ و مرکز اقلیدسی $(2, 0, 0)$ را در نظر می‌گیریم. البته طول اقلیدسی هر نصف‌النهار بر این کره برابر 2π است. از سوی دیگر، بنابر ملاحظات بعد از فرع ۳.۵ طول هذلولوی همین نصف‌النهار مساوی است با

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{2^2 - 1^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

این تفاوت دو طول نشانه آن است که متریکهای اقلیدسی و هذلولوی H^3 هندسه‌های متفاوتی بر یک کره القا می‌نمایند، که چیز تعجب‌آوری نیست. ولی چیزی که بسیار تعجب‌آور است این است که به ازای هر کره داده شده در H^3 ، کره دیگری وجود دارد که هندسه هذلولوی اولی از هندسه اقلیدسی دومی غیرقابل تمیز است. با مسامحه بگوییم، این مطلب را با «تسطیح» هر کره بر یک صفحه و نشان دادن اینکه نگاره هندسه اقلیدسی یک کره از نگاره هندسه هذلولوی کره دیگر غیرقابل تمیز است، ثابت می‌کنیم.

اثبات را با تعریف مفهوم «تسطیح» کره آغاز می‌نماییم. فرض کنید S کره‌ای است در \mathbb{R}^3 و P پایینترین نقطه (قطب جنوب) آن، π صفحه‌ای است موازی با صفحه xy که شامل P نیست. اگر Q نقطه‌ای از کره S متمایز از P باشد، آنگاه Q' تصویر گنجگاشتی نقطه Q بر صفحه π ، محل تلاقی خط PQ با صفحه π است (شکل ۳.۱۶). تبدیل $Q' = \sigma(Q)$ را تصویر گنجگاشتی S بر π می‌نامند. باید توجه داشت که، دقیقاً بگوییم، حوزه σ تمامی S نیست، بلکه S بجز قطب جنوب P است. مع هذا درست به همان صورت که انعکاس را تبدیلی از تمام صفحه تلقی می‌کنیم، تصویر گنجگاشتی را نیز به‌عنوان تبدیلی که روی تمامی کره تعریف شده است در نظر خواهیم گرفت. مزیت این کار این است که نمادها و اصطلاحات را ساده می‌نماید. وقتی



شکل ۳.۱۶

تمایزی واقعاً ضروری باشد، کره بدون قطب جنوب را کره سوراج شده خواهیم نامید. لم زیر تصویر گنجگاشتی را برحسب مختصات Q نشان می‌دهد.

لم ۱۰.۱۶. فرض می‌کنیم S کره‌ای به مرکز اقلیدسی $(c, 0, 0)$ و شعاع اقلیدسی r باشد. در این صورت تصویر گنجگاشتی S بر صفحه $z = d$ نگاشتی است که نقطه (x, y, z) از کره را به نقطه (u, v, d) می‌نگارد که در آن

$$x = \frac{2ur(d-c+r)}{u^2 + v^2 + (d-c+r)^2}$$

$$y = \frac{2vr(d-c+r)}{u^2 + v^2 + (d-c+r)^2}$$

$$z = \frac{(u^2 + v^2)(c-r) + (d-c+r)^2(c+r)}{u^2 + v^2 + (d-c+r)^2}$$

برهان: اثبات این لم ساده ولی تا حدی طولانی است. فرض می‌کنیم (u, v, d) نقطه دلخواهی در صفحه مورد نظر π باشد. کافی است ثابت کنیم که نقطه (x, y, z) که مختصات آن در صورت لم داده شده با نقاط (u, v, d) و $(0, 0, c-r)$ (قطب جنوب کره داده شده) بر یک خط راست

قرار دارند و این نقطه عملاً بر کره واقع است. معنی این گفته این است که تحقیق کنیم که (x, y, z) ، مختصات نقطه Q ، در روابط

$$\frac{x - 0}{u - 0} = \frac{y - 0}{v - 0} = \frac{z - (c - r)}{d - (c - r)} \quad (۴.۱۶)$$

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (۵.۱۶)$$

صدق می‌نماید. جزئیات برهان در تمرینهای ۴ و ۵ به عهده خواننده واگذار شده است.

آنچه می‌خواستیم

اکنون مفهوم غیرقابل تمیز بودن هندسه‌ها را ذکر می‌کنیم. فرض می‌کنیم S و T دو هندسه و f تابعی از S به T باشد. تابع f یک طولپایی نامیده می‌شود اگر در دو شرط زیر صدق کند.

(الف) f معکوس داشته باشد.

(ب) اگر γ خمی متناهی در S باشد، طول γ در S با طول $f(\gamma)$ در T یکی باشد. توابع U و V فصل ۱۳ که نیمصفحه بالایی و الگوی قرص واحد را به یکدیگر می‌نگارند، نمونه‌هایی از این طولپایها هستند. هر حرکت صلب یک طولپایی از هندسه زیربنایی آن با خودش است.

گزاره ۱۱.۱۶. فرض می‌کنیم S کره‌ای به مرکز اقلیدسی (a, b, c) و شعاع اقلیدسی r باشد، و

Π معرف صفحه $z = d$. اگر $D = d - c + r$ ، آنگاه تصویر گنجنگاشتی σ از S بر Π

بین هندسه اقلیدسی S و هندسه صفحه Π ، که با متریک ریمانی

$$\frac{4D^2 r^2 (dx^2 + dy^2)}{[x^2 + y^2 + D^2]^2} \quad (۶.۱۶)$$

تعریف می‌شود، یک طولپایی برقرار می‌کند. به علاوه اگر S^+ بخشی از کره سوراخ شده S واقع در نیمفضای بالایی H^3 باشد، σ بین هندسه هذلولوی S^+ و هندسه‌ای که با متریک ریمانی

$$\frac{4D^2 r^2 (dx^2 + dy^2)}{[(x^2 + y^2)(c - r) + D^2(c + r)]^2} \quad (۷.۱۶)$$

در بخش $\sigma(S^+)$ از صفحه Π تعیین می‌شود، یک طولپایی برقرار می‌کند.

پیش از پرداختن به اثبات این گزاره معنی قسمت دوم را روشن می‌نماییم. چون متریک پوانکاره فقط در نیمفضای فوقانی H^3 تعریف شده است، هنگام بحث از هندسه هذلولوی رویه‌ها، لازم است توجه خود را به بخشهایی از این رویه‌ها معطوف نماییم که در H^3 واقع‌اند. بنابراین اگر مرکز کره S در صفحه xy باشد، بخش S^+ نیمکره بالایی آن است. اگر شعاع کره S ، و $(0, 0, R)$ مرکز آن باشد، آنگاه این کره بر صفحه xy مماس است و S^+ کره‌ای سوراخ شده است. البته اگر کره S کاملاً در H^3 قرار داشته باشد، $S^+ = S$.

برهان گزاره ۱۱.۱۶: برای اینکه طولیابی هندسه اقلیدسی S را با متریک ریمانی (۶.۱۶) در صفحه Π نشان دهیم، باید به‌ازای هر خم γ در S برقراری تساوی

$$\int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{\sigma(\gamma)} \frac{2Dr \sqrt{dx^2 + dy^2}}{x^2 + y^2 + D^2} \quad (۸.۱۶)$$

را ثابت کنیم. چون بنابر گزاره ۴.۱۶ انتقالهای افقی اقلیدسی طولیابیهای اقلیدسی و هذلولوی هستند می‌توانیم فرض کنیم که مرکز کره‌های موردنظر در نقطه‌ای از محور z ها واقع است. بنابراین فرض می‌کنیم مرکز اقلیدسی کره نقطه $(0, 0, c)$ و شعاع اقلیدسی آن r است و این کره بر صفحه $z = d$ تصویر می‌شود. بنابر لم ۱۰.۱۶ تصویر گنجنگاشتی، نقطه (x, y, z) از کره S را بر نقطه (u, v, d) می‌نگارد، که در آن

$$x = \frac{2uDr}{u^2 + v^2 + D^2}$$

$$y = \frac{2vDr}{u^2 + v^2 + D^2}$$

بنابراین محاسبه‌ای ساده به‌ما می‌دهد

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2Dr(v^2 - u^2 + D^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-4uvDr}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-4uvDr}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2Dr(u^2 - v^2 + D^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2}$$

به‌علاوه از معادله (۴.۱۶) در فوق نتیجه می‌شود که

$$z = \frac{Dx}{u} + c - r = \frac{Dy}{v} + c - r$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-\varphi u D^{\gamma} r}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-\varphi v D^{\gamma} r}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} dx^{\gamma} + dy^{\gamma} + dz^{\gamma} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^{\gamma} \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^{\gamma} \right] du^{\gamma} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^{\gamma} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^{\gamma} \right] dv^{\gamma} \\ &\quad + \gamma \left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] du dv \\ &= \frac{\varphi D^{\gamma} r^{\gamma} [(v^{\gamma} - u^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma} + \varphi u^{\gamma} v^{\gamma} + \varphi u^{\gamma} D^{\gamma}]}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}} du^{\gamma} \\ &\quad + \frac{\varphi D^{\gamma} r^{\gamma} [\varphi u^{\gamma} v^{\gamma} + (u^{\gamma} - v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma} + \varphi v^{\gamma} D^{\gamma}]}{u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma}} dv^{\gamma} \\ &\quad + \frac{\gamma \varphi u v D^{\gamma} r^{\gamma} [-(v^{\gamma} - u^{\gamma} + D^{\gamma}) - (u^{\gamma} - v^{\gamma} + D^{\gamma}) + \gamma D^{\gamma}]}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}} du dv \\ &= \frac{\varphi D^{\gamma} r^{\gamma} (u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}} du^{\gamma} + \frac{\varphi D^{\gamma} r^{\gamma} (u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}} dv^{\gamma} \\ &= \frac{\varphi D^{\gamma} r^{\gamma} (du^{\gamma} + dv^{\gamma})}{(u^{\gamma} + v^{\gamma} + D^{\gamma})^{\gamma}} \end{aligned}$$

این تساوی مؤید معادله (۸.۱۶) و حکم گزاره در مورد هندسه اقلیدسی S است. اکنون به هندسه هذلولوی S^+ برمی گردیم و به ازای هر خم γ در S^* ثابت می کنیم

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^{\gamma} + dy^{\gamma} + dz^{\gamma}}}{z} = \int_{\sigma(\gamma)} \frac{\gamma Dr \sqrt{dx^{\gamma} + dy^{\gamma}}}{(x^{\gamma} + y^{\gamma})(c - r) + D^{\gamma}(c + r)} \quad (۹.۱۶)$$

ولی، با استفاده از قاعده زنجیری مذکور در فوق، به دست می آوریم

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2} = \frac{4D^2 r^2 (du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + D^2)^2} = \frac{\left[\frac{(u^2 + v^2)(c-r) + D^2(c+r)}{u^2 + v^2 + D^2} \right]^2}{4D^2 r^2 (du^2 + dv^2)} = \frac{4D^2 r^2 (du^2 + dv^2)}{[(u^2 + v^2)(c-r) + D^2(c+r)]^2}$$

که هم مؤید معادله (۹.۱۶) و هم مؤید درستی حکم گزاره در مورد هندسه هذلولوی S^+ است.

آنچه می خواستیم

۵.۱۶ هندسه کره و کره ساعتی

اکنون در وضعیتی هستیم که می توانیم دو قضیه مذکور در بخش مقدمه این فصل را ثابت کنیم.

قضیه ۱۲.۱۶. هندسه هذلولوی هر کره S در H^3 با هندسه اقلیدسی یک کره S^* طولی است.

برهان: به موجب گزاره ۴.۱۶ می توانیم فرض کنیم که مرکز اقلیدسی کره S نقطه $(0, 0, c)$ است.

به علاوه فرض می کنیم شعاع اقلیدسی آن r باشد. نشان می دهیم که هندسه هذلولوی S با هندسه

اقلیدسی کره S^* به مرکز اقلیدسی $(0, 0, c^*)$ و شعاع اقلیدسی r^* که در آنها

$$c^* = c - r \sqrt{\frac{c+r}{c-r}} + \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}$$

و

$$r^* = \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}$$

طولی است. برای این کار نشان می دهیم که تصویر گنجانگاشتی هندسه هذلولوی کره S بر صفحه

$z = c$ مثل تصویر گنجانگاشتی هندسه اقلیدسی کره S^* بر همین صفحه یک طولیابی بین

هندسه هذلولوی S و هندسه این صفحه برقرار می کند. تحقیق درستی این تطابق فقط با استفاده

ساده از گزاره ۱.۱۶ انجام می گیرد. بنابراین، تصویر گنجانگاشتی S بر صفحه $z = d$ یک طولیابی

بین هندسه هذلولوی S و متریک

$$\frac{4r^2(dx^2 + dy^2)}{[(x^2 + y^2)(c-r) + r^2(c+r)]^2} \quad (10.16)$$

در صفحه $z = 2$ برقرار می‌نماید، زیرا در این حالت $D = c - c + r = r$. از طرف دیگر تصویر گنجگاشتی S^* یک طولیابی بین هندسه اقلیدسی این کره و متریک

$$\frac{4D^{*2}r^{*2}(dx^2 + dy^2)}{[x^2 + y^2 + D^{*2}]^2} \quad (11.16)$$

در صفحه $z = 2$ برقرار می‌نماید، که در آن

$$\begin{aligned} D^* &= c - c^* + r^* = c - \left[c - r \sqrt{\frac{c+r}{c-r}} + \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}} \right] + \frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}} \\ &= r \sqrt{\frac{c+r}{c-r}} \end{aligned}$$

حال اگر مقادیر c^* و r^* و D^* را در (۱۱.۱۶) قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{4D^{*2}r^{*2}(dx^2 + dy^2)}{[x^2 + y^2 + D^{*2}]^2} &= \frac{4r^4}{(c-r)^2} \frac{(dx^2 + dy^2)}{[x^2 + y^2 + \frac{r^2(c+r)}{c-r}]^2} \\ &= \frac{4r^4(dx^2 + dy^2)}{[(x^2 + y^2)(c-r) + r^2(c+r)]^2} \end{aligned}$$

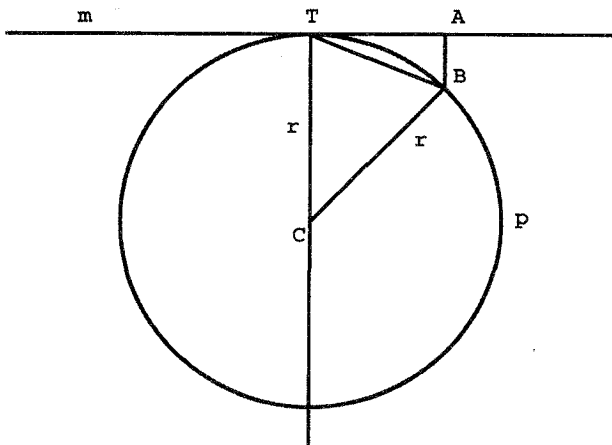
که با (۱۰.۱۶) یعنی همان تصویر گنجگاشتی هندسه هذلولوی S ، یکی است.

آنچه می‌خواستیم

خواننده تیزبین باید دریافته باشد که اثبات فوق نقص کوچکی دارد. تصویرهای کنجگاشتی کره‌های S و S^* بر صفحه $z = c$ در قطب جنوب این کره‌ها تعریف نشده‌اند. در نتیجه طولیابی مذکور بین S و S^* در واقع تنها موقعی یک طولیابی است که این قطبها نادید گرفته شده باشند. در واقع، اگرچه روشن است که این نکته صرفاً نکته ظریفی است، ولی دقت ریاضی ایجاب می‌کند که این نقص برطرف شود. این کار یا با بحث همه‌جانبه در مورد حد و پیوستگی فاصله، یا با روش نشان داده شده در تمرین ۱۰ می‌تواند انجام گیرد.

در تمرین ۷ خواسته شده است که خواننده نشان دهد هندسه هذلولوی کره‌ای به شعاع هذلولوی R با هندسه اقلیدسی کره‌ای به شعاع اقلیدسی $\sinh(R)$ طولیابی است.

یک کره ساعتی یا صفحه‌ای است افقی در H^3 یا رویه یک کره اقلیدسی است واقع در H^3 که مماس بر صفحه xy است و بجز نقطه تماس تماماً در نیمفضای بالایی قرار دارد. این تعریف



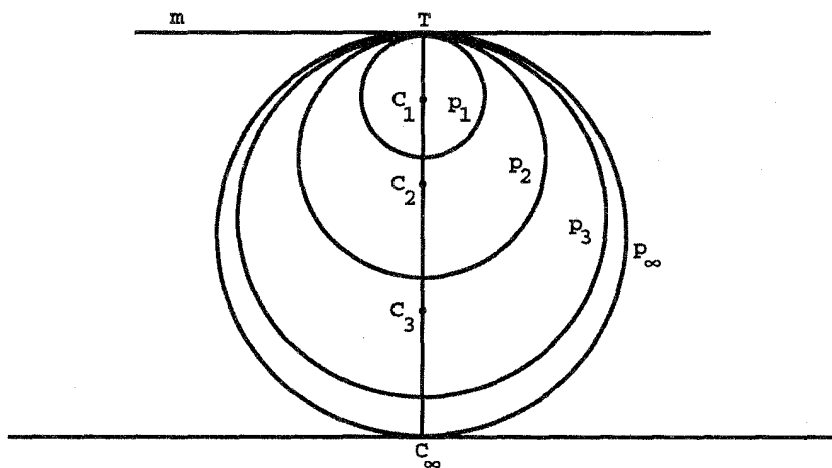
شکل ۴.۱۶

به استناد وحدت فضای سه بعدی هذلولوی و H^3 اختیار شده است و مسلماً خواننده علاقه مند میل دارد نحوه تعریف این رویه را در متن هندسه هذلولوی ترکیبی بداند. برای این منظور موقتاً به هندسه اقلیدسی برمی گردیم. فرض می کنیم p دایره ای به شعاع r و مرکز C و مماس بر خط m در نقطه T باشد (شکل ۴.۱۶). فرض می کنیم A نقطه ای دلخواه بر m باشد و B نقطه ای بر دایره چنان که AB بر خط m عمود باشد. روشن است که این B باید به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ r وجود داشته باشد. اما مثلث CTB متساوی الساقین است و لذا

$$\angle BTC = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \angle TCB \quad (۱۲.۱۶)$$

اکنون فرض کنید خط m و نقطه های T و A ثابت بمانند و نقطه C بر امتداد خط TC (که بر m عمود می ماند) به بینهایت میل کند. بنابراین شعاع r بینهایت بزرگ می شود و نقطه B در حالی که بر دایره p قرار دارد به نقطه ثابت A میل می نماید. تغییر اندکی در استدلال قضیه ۱.۱ برای اینکه نشان دهیم زاویه $DD_n A$ در شکل ۱۱.۱ به 0 همگراست، نشان می دهد که وقتی r بینهایت بزرگ می شود و C به بینهایت میل می نماید زاویه ICB در شکل ۴.۱۶ نیز به 0 میل می نماید. در نتیجه زاویه BIC وقتی r به بینهایت میل می کند به $\frac{\pi}{3}$ میل می نماید. و نقطه B به نقطه A به عبارت دیگر، وضع حدی دایره p خط مماس m است.

معادله (۱۲.۱۶) براساس این واقعیت درست است که مجموع زاویه های هر مثلث اقلیدسی برابر Π است، که در مورد مثلثهای هذلولوی صحیح نیست. در واقع در صفحه هذلولوی باید



شکل ۵.۱۶

نامعادله

$$\angle BTC < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \angle TCB$$

را جایگزین معادله (۱۲.۱۶) نماییم و لذا هیچ دلیلی وجود ندارد که نتیجه بگیریم در صفحه هذلولوی وقتی شعاع دایره p به بینهایت میل می‌کند، زاویه BTC به $\frac{\pi}{4}$ می‌گراید و نیز دلیلی وجود ندارد که خط m وضعیت حدی دایره p باشد. در واقع هم، m وضعیت حدی p نیست. برای پی‌بردن به این مطلب این فرایند را در متن نیمصفحه پوانکاره بررسی می‌کنیم (شکل ۵.۱۶).

در جریان حرکت به بینهایت، سه موضع از نقطه C را به C_1, C_2, C_3 و دایره‌های متناظر آنها را با p_1, p_2, p_3 نشان داده‌ایم. توجه می‌کنید که وقتی C به بینهایت هذلولوی میل می‌کند، ما، ناظران اقلیدسی آن را در نقطه C_∞ می‌بینیم، و وضعیت حدی دایره‌های p ، دایره اقلیدسی p_∞ است که یک خط راست هذلولوی نیست. در واقع انعکاس به مرکز C_∞ و قوت TC_∞ یک تبدیل صلب هذلولوی است که خم P_∞ را بر خط مماس اقلیدسی m می‌نگارد. بنابراین ویژگیهای هندسی m و P_∞ برای ساکنان نیمفضای بالایی پوانکاره از هم غیرقابل تمیزند.

امروزه دایره‌های اقلیدسی مماس بر محور x ها در صفحه، یا دایره‌هایی را که کاملاً در نیمصفحه بالایی قرار دارند دایره‌های ساعتی می‌نامند. لباچفسکی آنها را فزون-دایره^۱ و بویویی به توصیه گاوس آنها را فرادایره^۲ نامیده است. این دایره‌ها برای تحقیق ویژگیهای ژرفتر صفحه هذلولوی و

نظایر با ابعاد بالاتر آن بسیار مهم اند. خاطر نشان می شود که این دایره ها قبلاً در فصل ۹ به عنوان خطهای جریان بعضی انتقالهای هذلولوی در نظر گرفته شده بودند. روشن است که وقتی بتوان دایره های ساعتی را وضع حدی دایره های هذلولوی که مرکزهای آنها به بینهایت میل می کنند در نظر گرفت، کره ساعتی را نیز می توان وضع حدی کره های هذلولوی در نظر گرفت که مرکزهاشان به بینهایت میل می کنند. همچنین روشن است که هر کره ساعتی را می توان از دوران دادن یک دایره ساعتی حول محور مناسبی به دست آورد.

قضیه ۱۳.۱۶. هر کره ساعتی با صفحه اقلیدسی طولی است.

برهان: یک نمونه معمولی کره ساعتی S کره به مرکز اقلیدسی (a, b, c) و شعاع اقلیدسی $r = c$ است. در نتیجه، با قرار دادن $d = c$ در گزاره ۱۱.۱۶ صفحه II به صفحه استوای کره S تبدیل می شود، قسمت دوم این گزاره حکم می کند که هندسه هذلولوی کره ساعتی با هندسه اقلیدسی، که با متریک اقلیدسی

$$dx^2 + dy^2$$

در صفحه II تعریف شده، طولی است.

آنچه می خواستیم

۶.۱۶ تمرین

۱. نشان دهید که تبدیل τ ، مذکور در گزاره ۴.۱۶، یک حرکت صلب هذلولوی است.
۲. وسط هذلولوی پاره خط اقلیدسی واصل بین نقاط $(1, 2, 3)$ ، $(1, 2, 8)$ را پیدا کنید.
۳. قسمت (ب)ی قضیه ۸.۱۶ را ثابت کنید.
۴. درستی رابطه (۴.۱۶) را تحقیق کنید.
۵. درستی رابطه (۵.۱۶) را تحقیق کنید.
۶. دلیل طولی بودن صفحه ای با متریک $dx^2 + dy^2$ را با صفحه ای با متریک $adx^2 + bdy^2$ ، بازاری اعداد مثبت a و b ، دقیقاً شرح دهید.
۷. نشان دهید که هندسه هذلولوی کره ای به شعاع هذلولوی R با هندسه اقلیدسی کره ای به شعاع اقلیدسی $\sinh(R)$ طولی است.

۸. حجم هذلولوی جسم صلب D که تماماً در نیمفضای بالایی قرار دارد به صورت

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{z^2}$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که حجم هذلولوی کره‌ای به شعاع هذلولوی R مساوی است با

$$2\pi[\sinh(R) \cosh(R) - R]$$

۹. فرض کنید C نقطه‌ای است از فضای اقلیدسی R^3 و κ عددی است مثبت. انعکاس $J_{C,\kappa}$ تبدیلی از R^3 است که نقطه P را به نقطه‌ای چون P' می‌نگارد به طوری که P, C, P' بر یک خط راست واقع‌اند و $CP \cdot CP' = \kappa^2$ ، که C خارج پاره خط PP' است. ثابت کنید که اگر C بر صفحه xy واقع باشد، $J_{C,\kappa}$ یک حرکت صلب هذلولوی از H^3 را القا می‌کند.

۱۰. بین کره‌های S و S^* از قضیه ۱۲.۱۶ یک طولیایی مستقیم برقرار کنید.

پیوست

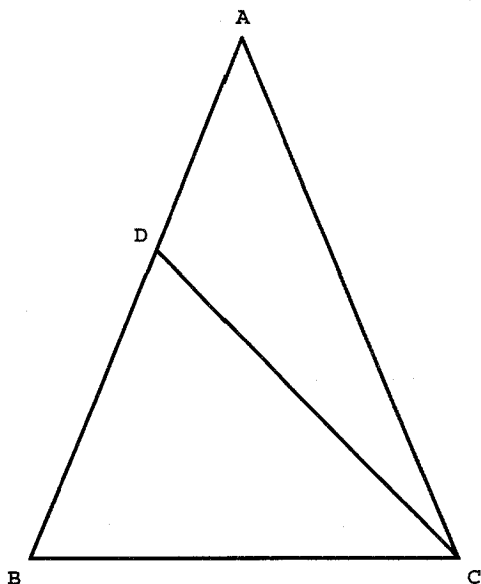
اثبات برخی از گزاره‌های اقلیدس

محتوای این پیوست گزیده‌ای از احکام و براهین گزاره‌هایی از مقاله‌های I و III اصول اقلیدس است که در فصل اول خاطرنشان شدند. اگر برهان داده شده‌ای مبتنی بر برهان خود اقلیدس نباشد، نام اثبات‌کننده آن ذکر خواهد شد. سایر براهین فقط تفاوت‌های بسیار جزئی با براهین اقلیدس دارند.

گزاره ۵. در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده متساوی‌اند؛ و اگر ساقهای متساوی را امتداد دهیم، زاویه‌های واقع در زیر قاعده نیز مساوی خواهند شد.
برهان: (پاپوس): در مثلث ABC فرض می‌کنیم $AB = AC$. در این صورت بنابر گزاره ۴ (معروف به حالت ض‌ض) داریم

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB$$

در نتیجه، $\angle ABC = \angle ACB$



شکل پ. ۱.

آنچه می‌خواستیم

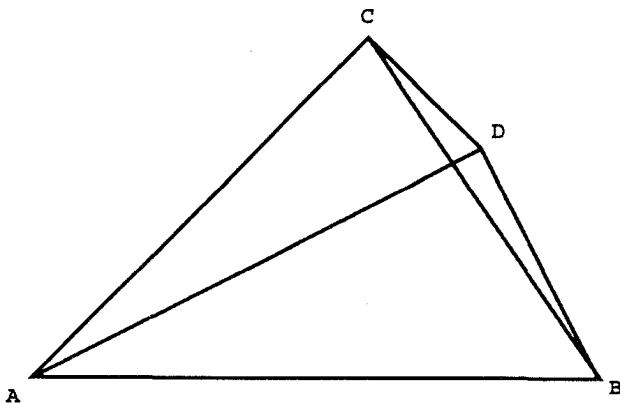
گزاره ۶. اگر در یک مثلث دو زاویه باهم برابر باشند، اضلاع مقابل به آنها نیز باهم برابرند. برهان: فرض کنیم در مثلث ABC داشته باشیم $\angle ABC = \angle ACB$ (شکل پ. ۱). می‌خواهیم ثابت کنیم که AB و AC باهم برابرند. اگر برابر نباشند فرض می‌کنیم AB بزرگتر از AC باشد، و D نقطه‌ای در داخل AB باشد به طوری که $BD = AC$. از قضیه ض‌ض نتیجه می‌شود که

$$\triangle DBC \cong \triangle ACB$$

که ناقض اصل پنجم اصلهای بدیهی (کل بزرگتر از جزء) است.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۷. از دو سر خط راستی مفروض و در یک طرف آن، دو خط راست رسم شده‌اند که یکدیگر را بریده‌اند. از دو سر همان خط راست (و در همان طرف) نمی‌توان دو خط راست دیگر چنان رسم کرد که یکدیگر را ببرند و به ترتیب با خط راست مرسوم قبلی از همان سر خط برابر باشند.



شکل پ.۲

برهان: فرض می‌کنیم این گزاره نادرست باشد. در این صورت یک چهارضلعی $ABCD$ (شکل پ.۲) وجود دارد به طوری که

$$BC = BD \text{ و } AC = AD$$

ولی چون بنا بر گزاره ۵ زاویه‌های مجاور به قاعده در یک مثلث متساوی‌الساقین متساوی‌اند، تناقض زیر را داریم:

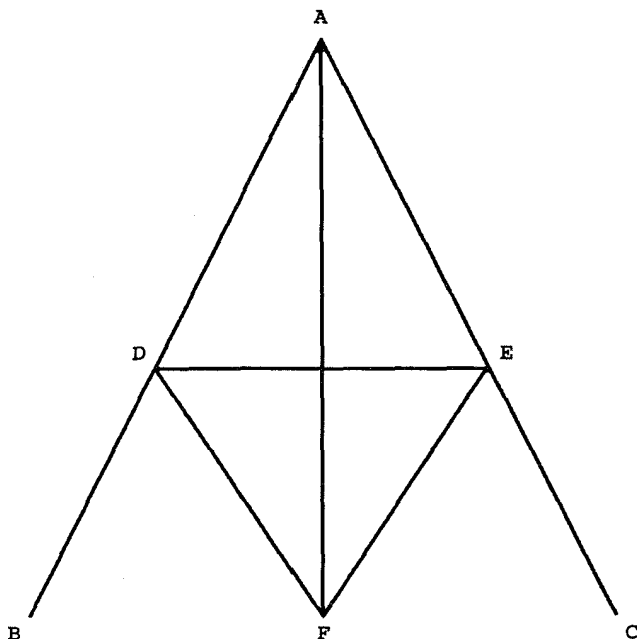
$$\angle CDB > \angle CDA = \angle DCA > \angle DCB$$

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۸. اگر در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر باهم برابر و قاعده‌ها نیز باهم برابر باشند، زاویه‌های آن دو مثلث، یعنی زاویه‌های بین اضلاع مساوی، نیز نظیر به نظیر باهم برابرند.
برهان: دو ضلع مساوی یکی از مثلثها را بر دو ضلع مساوی نظیرش از دیگری چنان قرار می‌دهیم که هر دو در یک طرف ضلع سوم که اینک مشترک‌اند قرار گیرند. اگر گزاره نادرست باشد، این پی‌کر بندی مثال نقضی برای گزاره ۷ خواهد بود.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۹. زاویه مستقیم الخطی را به دو قسمت متساوی تقسیم کنید.



شکل پ.۳

برهان: فرض می‌کنیم $\angle BAC$ زاویه‌ای است که باید به دو قسمت متساوی تقسیم شود (شکل پ.۳). بر اضلاع AB و AC به ترتیب نقاط D و E را طوری انتخاب می‌کنیم که $AD = AE$. فرض می‌کنیم مثلث DEF متساوی‌الاضلاع باشد، در این صورت بنا بر گزاره ۸ (حالت معروف به ضضض) داریم

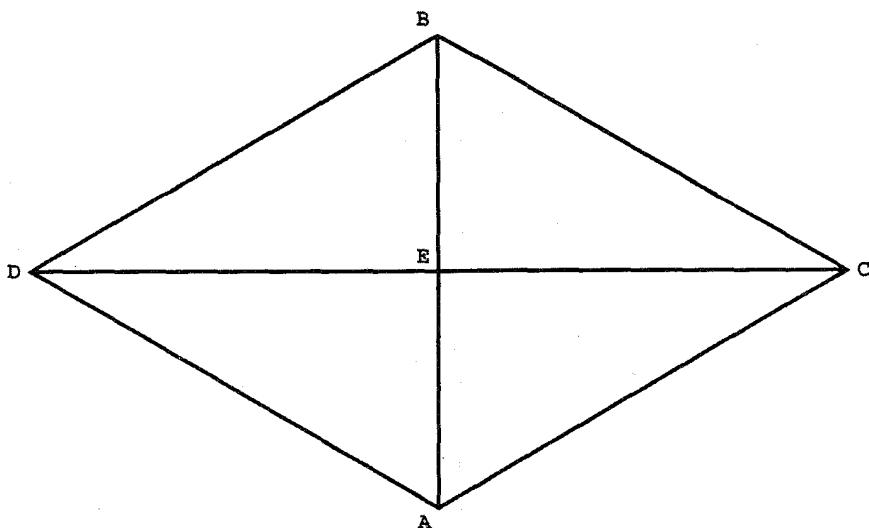
$$\triangle ADF \cong \triangle AEF$$

و لذا $\angle DAF = \angle EAF$. بنابراین خط AF زاویه داده شده را نصف می‌کند.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۰. پاره خط مفروضی را به دو نیمه تقسیم کنید.

برهان: (آپولونیوس): فرض می‌کنیم AB پاره خط راستی باشد که باید به دو نیمه تقسیم شود (شکل پ.۴). فرض می‌کنیم C و D نقطه‌های تلاقی دو دایره به شعاعهای AB و مراکز A و B به ترتیب باشند. فرض می‌کنیم E محل تلاقی CD و AB باشد. از قضیه ضضض نتیجه



شکل پ. ۴

می‌شود که

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$

از این رو نتیجه می‌گیریم که $\angle ACE = \angle BCE$ ، و لذا بنا بر قضیه ض‌ض ض داریم

$$\triangle ACE \cong \triangle BCE$$

در نتیجه E وسط AB است.

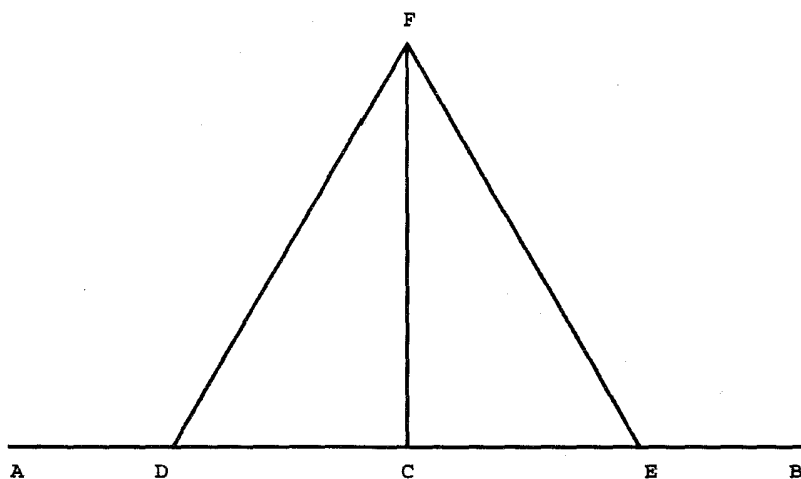
آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۱. از نقطه‌ای واقع بر یک خط راست خط راستی عمود بر آن اخراج کنید.

برهان: فرض می‌کنیم C نقطه داده شده بر خط راست AB باشد (شکل پ. ۵). فرض می‌کنیم D و E دو نقطه متمایز بر AB چنان باشند که $CE = CD$ ، و مثلث DEF متساوی‌الاضلاع باشد. استدلالی با استفاده از ض‌ض ض نشان می‌دهد که

$$\triangle FDC \cong \triangle FEC$$

از این رو $\angle FCD = \angle FCE$ و هر یک از این زاویه‌ها یک قائمه است.



شکل پ. ۵

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۲. از نقطه‌ای خارج یک خط راست نامتناهی خط راستی بر آن عمود کنید. برهان: فرض می‌کنیم AB خط راست (نامتناهی) داده شده و C نقطه داده شده‌ای ناواقع بر آن باشد (شکل پ. ۶). نقطه D را در طرفی از AB که C در آن واقع نیست در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دایره به مرکز C و شعاع CD خط AB را در دو نقطه E و G قطع کند. بالاخره فرض می‌کنیم نقطه H وسط GE باشد. استدلالی با استفاده از ض ض ض نشان می‌دهد که

$$\triangle GHC \cong \triangle EHC$$

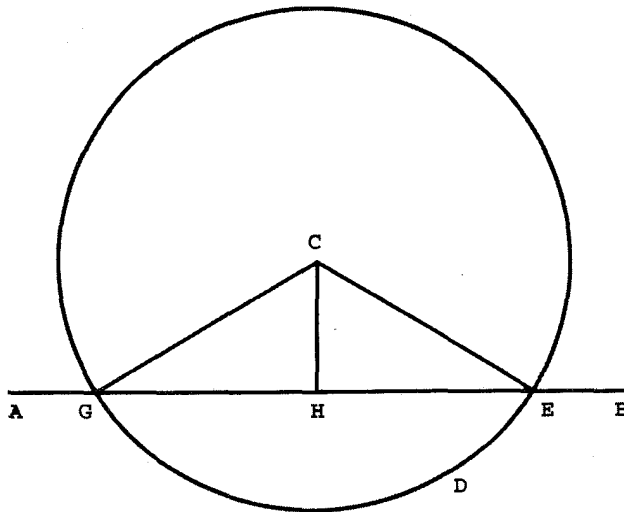
و در نتیجه

$$\angle GHC = \angle EHC$$

و این زاویه‌ها هر دو قائمه‌اند. بنابراین CH خط عمود مطلوب است.

آنچه می‌خواستیم

اقلیدس با تعریف خود از زاویه که زاویه نیمصفحه، یعنی 180° ، را در بر نمی‌گیرد تا حدی دست و بال خود را بسته است. این کار موجب شده است که برهان سه قضیه زیر خشک و کتابی از آب درآید.



شکل پ. ۶.

گزاره ۱۳. اگر خط راستی خط راست دیگری را ببرد یا دو زاویه قائمه با آن می‌سازد، یا زاویه‌هایی می‌سازد که [مجموع آنها] دو قائمه است.

برهان: فرض می‌کنیم خط راست AB خط راست CD را ببرد و زاویه‌های CBA و ABD را با آن بسازد (شکل پ. ۷). اگر این دو زاویه مساوی باشند، هر دو قائمه‌اند و اثبات تمام است. در غیر این صورت، فرض می‌کنیم BE بر CD عمود باشد. در این صورت داریم

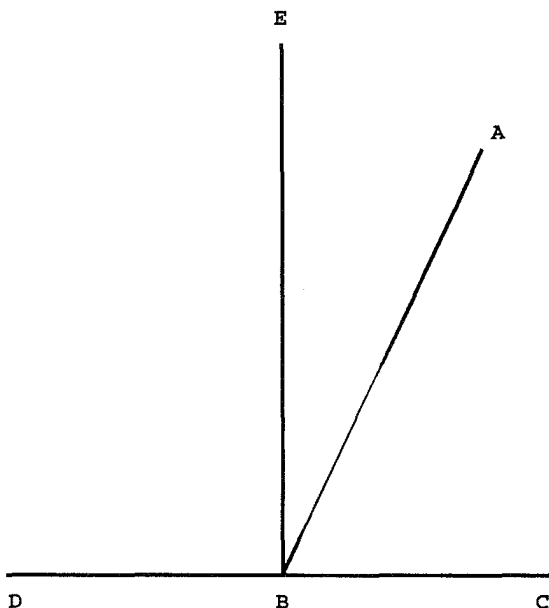
$$\angle CBA + \angle ABD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD = \angle CBE + \angle EBD$$

که مجموع اخیر مساوی با دو قائمه است.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۴. اگر از نقطه‌ای از خط راستی، دو خط راست ناواقع در یک طرف آن، چنان رسم شده باشند که مجموع زاویه‌های مجاوز باهم دو قائمه باشد، این خطهای راست بر یک خط راست قرار دارند.

برهان: فرض می‌کنیم AB خط راست داده شده باشد و در نقطه B خطهای راست BC و BD (واقع در دو طرف AB) زاویه‌های ABC و ABD را تشکیل داده باشند که مجموع آنها دو قائمه است (شکل پ. ۸). منظور اثبات این واقعیت است که خطهای BC و BD بر یک خط



شکل پ. ۷

راست قرار دارند. فرض می‌کنیم چنین نباشند و BE در امتداد BC باشد. در این صورت بنابر گزاره ۱۳ مجموع زاویه‌های ABC و ABE نیز دو قائمه است و از این رو

$$\angle ABD = \angle ABE$$

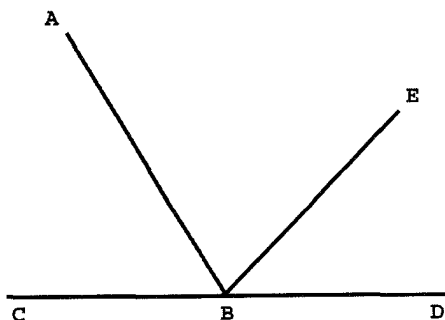
که با اصل پنجم اصلهای بدیهی متناقض و اثبات تمام است.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۵. اگر دو خط راست یکدیگر را قطع نمایند زاویه‌های متقابل به رأس مساوی باهم می‌سازند.

برهان: فرض می‌کنیم خطهای راست AB و CD در نقطه E متقاطع باشند (شکل پ. ۹). نشان می‌دهیم که زاویه‌های AEC و DEB متساوی‌اند. بنابر گزاره ۱۳ داریم

$$\angle DEA + \angle AEC = \text{دو قائمه}$$



شکل پ. ۸.

و

$$\angle DEA + \angle DEB = \text{دوقائمه}$$

از این رو

$$\angle AEC = \angle DEB$$

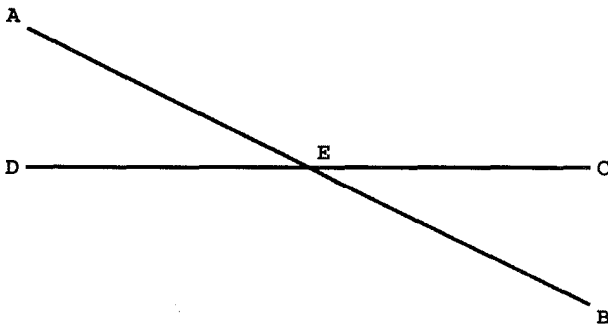
آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۸. در هر مثلث ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویه بزرگتر است. برهان: در مثلث ABC فرض می‌کنیم ضلع AC از ضلع AB بزرگتر باشد (شکل پ. ۱۰). بر پاره خط AC نقطه D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AB = AD$. با استفاده متوالی از اصل پنجم اصلهای بدیهی و گزاره ۵ و گزاره ۱۶ نتیجه می‌گیریم که

$$\angle CBA > \angle DBA = \angle BDA > \angle BCA$$

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۱۹. در هر مثلث زاویه بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است. برهان: در مثلث ABC فرض می‌کنیم $\angle ABC > \angle ACB$. اگر ضلع AC مساوی با AB یا کوچکتر از AB بود، بنابر گزاره‌های ۵ و ۱۸ به ترتیب می‌داشتیم $\angle ABC = \angle ACB$ یا $\angle ABC < \angle ACB$ که هر دو متناقض با فرض هستند. بنابراین ضلع AC باید بزرگتر از ضلع AB باشد.



شکل پ. ۹

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۲۰. در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

برهان: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. (شکل پ. ۱۱). نشان می‌دهیم که $BA + AC > BC$.

BA را تا نقطه D امتداد می‌دهیم به طوری که $AD = AC$ ؛ لذا مثلث ADC متساوی‌الساقین

است و $\angle ADC = \angle ACD$. از این رو

$$\angle BDC = \angle DCA < \angle DCB$$

و بنابراین

$$BC < BD = BA + AD = BA + AC$$

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۲۲. با سه خط راست که مساوی با سه خط راست داده شده‌اند، مثلثی بسازید که هر یک

از اضلاع آن با یکی از این سه خط مساوی باشد: پس لازم است که مجموع هر دو تا از آنها

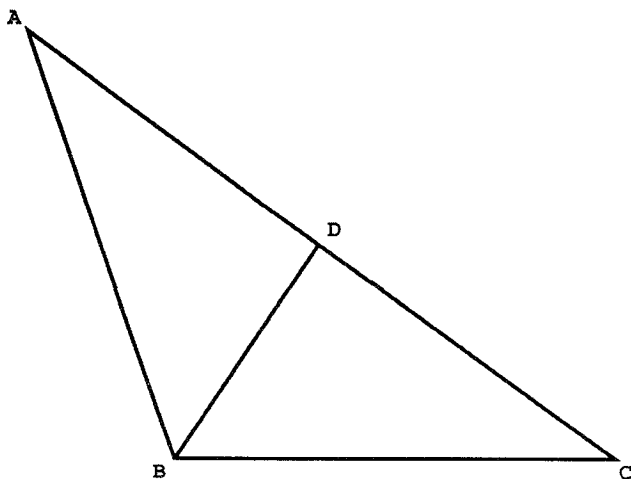
بزرگتر از سومی باشد.

برهان: فرض کنید a, b, c سه خط راست باشند به طوری که مجموع هر دو آنها از سومی بزرگتر

باشد. اگر FG پاره‌خطی به طول b باشد، دایره‌هایی به ترتیب با شعاعهای a و c و مرکزهای F و

G رسم، فرض می‌کنیم که این دایره‌ها یکدیگر را در نقطه K قطع کنند. پس مثلث FGK مثلث

مطلوب است.



شکل پ. ۱۰

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۲۳. از نقطه واقع بر خط راستی داده شده، زاویه مستقیم الخطی برابر با زاویه مستقیم الخط داده شده‌ای رسم کنید که یک ضلعش خط داده شده باشد.

برهان: فرض می‌کنیم AB خط راست داده شده باشد، و A نقطه‌ای بر آن و $\angle DCE$ زاویه داده شده (شکل پ. ۱۲). نقاط دلخواه D و E را به ترتیب بر اضلاع CD و CE اختیار می‌کنیم. به موجب گزاره قبل مثلث AGF را می‌توان چنان رسم نمود که G بر خط AB باشد و

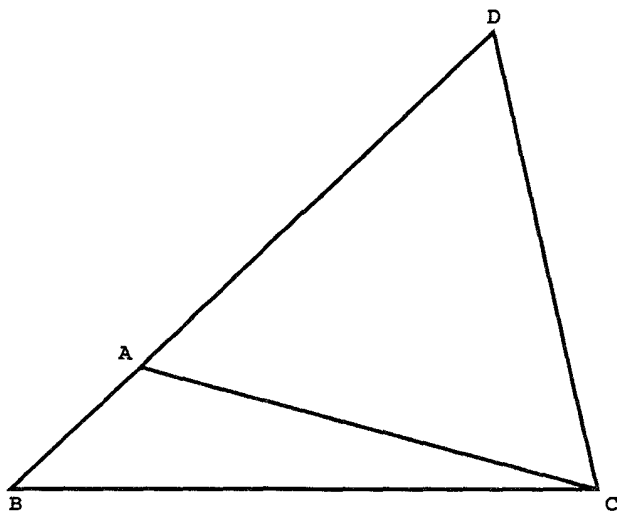
$$AG = CE, AF = CD, FG = DE$$

در این صورت $\triangle FAG \cong \triangle DCE$ و لذا $\angle FAG = \angle DCE$.

آنچه می‌خواستیم

به جای اثبات گزاره ۲۶ در حالت بسیار کلیتر، خود را به اثبات نیمه معروفتر آن یعنی حالت معروف به رضز محدود می‌کنیم. بخش کمتر شناخته شده این گزاره که به حالت رضز موسوم است. نتیجه مستقیم حالت رضز و یک قضیه قبلی است مبنی بر این که مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر با دو قائمه است. این مطلب که قسمت اخیر واقعاً مستقل از اصل توازی است، زیاد معلوم نیست.^۱ اثبات خود اقلیدس از این دو قضیه قابل انطباق باهم، بسیار طولانی است. زیرا

۱. مستقل نبودنش کاملاً معلوم و اثبات آن خیلی ساده است. م.



شکل پ. ۱۱

وی به ظاهر از به کار بردن حرکت‌های صلب (قراردادن یکی بر دیگری، در اصطلاح وی) اجتناب می‌کند. به خاطر اختصار فقط حالت زضز را با استفاده از مفهوم قراردادن یکی بر دیگری ثابت می‌کنیم زیرا وی از این مفهوم در برهان گزارهٔ ۴ استفاده کرده است.

گزارهٔ ۲۶. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، و ضلع‌های بین این دو زاویه نیز برابر باشند، بقیهٔ اضلاع متناظراً با بقیهٔ اضلاع مساوی هستند، و زاویهٔ دیگر با زاویهٔ دیگر.

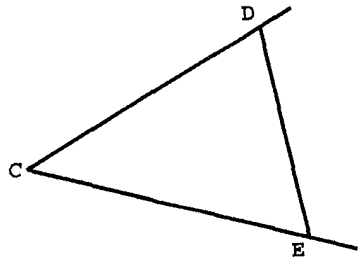
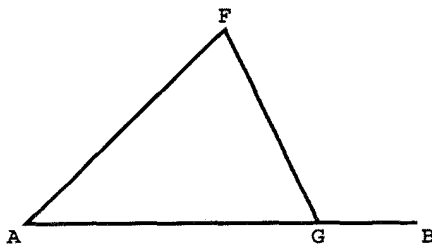
برهان: (نیریزی): در دو مثلث ABC و DEF (شکل پ. ۱۳) فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\angle ABC = \angle DEF, \angle ACB = \angle DFE, BC = EF$$

مثلث ABC را بر مثلث DEF چنان قرار می‌دهیم که B و C به ترتیب بر E و F منطبق شوند. به علت برابری زاویه‌های داده شده این کار را می‌توان انجام داد به طوری که BA و CA به ترتیب بر ED و FD منطبق می‌شوند. بنابراین از اصل موضوع اول نتیجه می‌شود که باید A بر D منطبق شود. از این رو

$$\angle BAC = \angle EDF \text{ و } BA = ED \text{ و } CA = FD$$

آنچه می‌خواستیم



شکل پ. ۱۲

گزاره ۲۷. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و زاویه‌های متبادل درونی متساوی ایجاد نماید، این دو خط باهم موازی‌اند.

برهان: فرض می‌کنیم خط راست EF بر خطهای راست AB و CD فرود آمده و زاویه‌های متبادل درونی متساوی $\angle AEF$ و $\angle EFD$ را ایجاد نموده است (شکل پ. ۱۴). فرض کنید خطهای AB و CD باهم موازی نباشند و در نقطه G تلاقی کنند. در این صورت زاویه $\angle AEF$ زاویه خارجی مثلث EFG است. بنابراین گزاره ۱۶ این زاویه از زاویه داخلی غیرمجاورش F بزرگتر خواهد شد، و این امر با فرض گزاره متناقض است.

آنچه می‌خواستیم

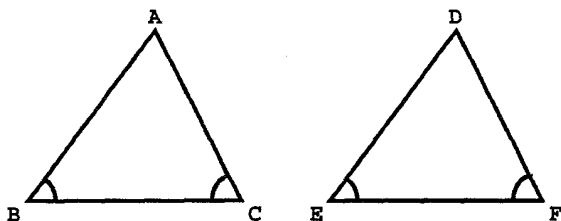
گزاره ۲۸. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و دو زاویه متقابل داخل و خارج متساوی پدید آورد یا مجموع دو زاویه متقابل داخلی حاصل در آن برابر دو قائمه شود، آن دو خط راست باهم موازی‌اند.

برهان: درستی این گزاره نتیجه مستقیم گزاره‌های ۱۳، ۱۵ و ۲۷ است. ■

از مقاله III

گزاره ۱۸. اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد و خط راستی مرکز دایره را به نقطه تماس وصل نماید، این خط راست بر خط مماس عمود است.

برهان: فرض می‌کنیم P نقطه‌ای بر دایره به مرکز C ، و خط PT بر شعاع CP عمود باشد. در مثلث CPT ، CT وتر و بزرگتر از شعاع CP است. از این رو نقطه T در خارج دایره قرار دارد. بنابراین هر نقطه PT بجز P در خارج دایره واقع است. معنی این جمله این است که PT بر دایره



شکل پ. ۱۳

داده شده مماس است و لذا خط مماس بر دایره در نقطه داده شده P بر شعاع CP عمود است.

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۲۰. در هر دایره زاویه مرکزی روبه‌رو به یک کمان دو برابر زاویه محاطی روبه‌رو به همان کمان است.

برهان: فرض می‌کنیم C مرکز یک دایره و AmB کمانی از این دایره، و P نقطه‌ای بر این دایره باشد که بر کمان مذکور قرار ندارد (شکل پ. ۱۵). باید ثابت کنیم

$$\angle ACB = 2\angle APB$$

خط راست PCD را رسم می‌کنیم. چون $\angle ACD$ زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین ACP است داریم

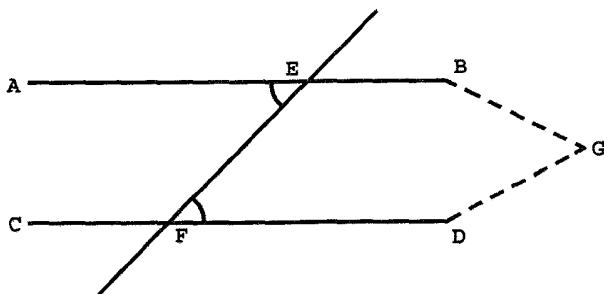
$$\angle ACD = 2\angle APC$$

به همین ترتیب داریم

$$\angle BCD = 2\angle BPC$$

وقتی این دو تساوی با توجه به شکل پ. ۱۵ (الف) باهم جمع و با توجه به شکل پ. ۱۵ (ب) از هم کم شوند، تساوی مورد نظر به دست می‌آید.

آنچه می‌خواستیم



شکل پ. ۱۴

گزاره ۲۲. در هر چهارضلعی محاط در دایره زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی با دو قائمه‌اند. برهان: فرض می‌کنیم رأسهای چهارضلعی $ABCD$ بر دایره به مرکز O واقع باشند (شکل پ. ۱۶). شعاعهای OB و OD را رسم می‌کنیم. اگر زاویه مرکزی متناظر با کمان BAD و γ زاویه مرکزی متناظر با کمان DCB باشد، آنگاه بنا بر گزاره ۲۰، مذکور در فوق، داریم

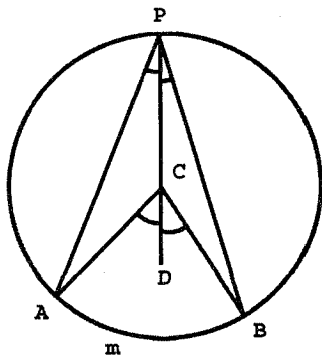
$$\angle DAB = \frac{\gamma}{2} \quad \text{و} \quad \angle BCD = \frac{\alpha}{2}$$

در نتیجه

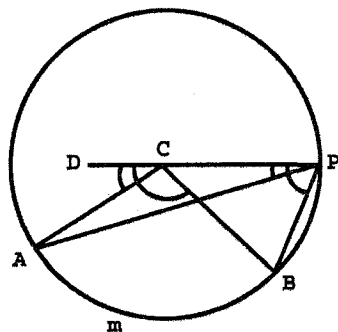
$$\angle DAB + \angle BCD = \frac{\gamma + \alpha}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

آنچه می‌خواستیم

گزاره ۳۱. زاویه محاط در یک نیم‌دایره، قائمه است.



(الف)



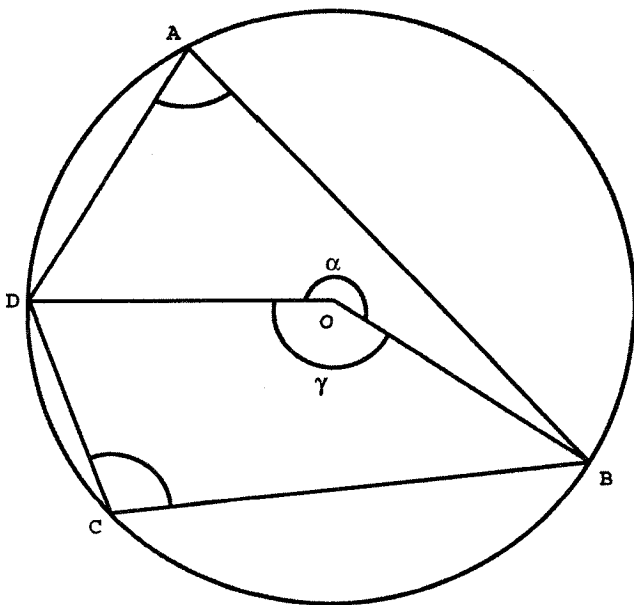
(ب)

شکل پ. ۱۵

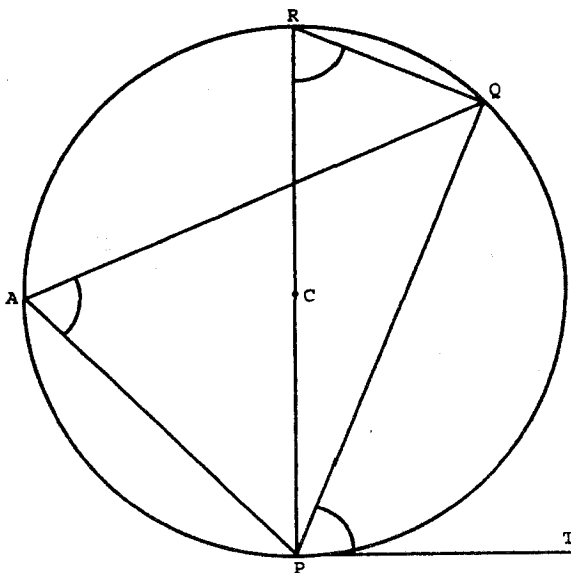
برهان: فرض می‌کنیم AB قطری از دایره به مرکز O و نقطه‌ای بر این دایره باشد. بنا بر گزاره ۲° داریم

$$\angle APB = \frac{1}{4} \angle AOB = \frac{1}{4} \pi$$

آنچه می‌خواستیم



شکل پ. ۱۶



شکل پ. ۱۷

گزاره ۳۲. اگر خط راستی بر دایره‌ای مماس باشد، و از نقطه تماس خط راستی در داخل دایره رسم شود که دایره را قطع نماید، زاویه‌هایی که این خط با خط مماس تشکیل می‌دهد با زاویه‌های محاطی در یکی از دو قطعه دایره مساوی‌اند.

برهان: در دایره به مرکز C ، فرض می‌کنیم یک وتر PQ ، وتر PT یک خط مماس، و A نقطه‌ای از دایره واقع بر کمانی باشد که درون نیم‌خط PT و وتر PQ محصور نشده است (شکل پ. ۱۷). می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\angle PAQ = \angle TPQ$$

قطر PR را در نظر می‌گیریم، به موجب گزاره ۲۰ در فوق، داریم

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle PCQ = \angle PRQ$$

ولی بنابر گزاره‌های ۱۸ و ۳۱، $\angle RQP$ و $\angle TPR$ هر دو قائمه‌اند و مجموع زاویه‌های هر مثلث دو قائمه است، داریم

$$\angle PAQ = \angle PRQ = \frac{\pi}{2} - \angle QPR = \angle TPQ$$

آنچه می‌خواستیم

واژه‌نامه

reflection	تقارن محوری	Abel, N.	آبل، ن.
Fuchsian functions	توابع فوکسی	Escher, M.	اشر، م.
cross product	حاصلضرب بیرونی	Playfair's postulate	اصل موضوع پلی‌فیر
rigid motion	حرکت صلب	Beltrami-Klein Model	الگوری بلترامی-کلاین
hyperbolic rigid motion	حرکت صلب هذلولوی	Almagest	المجسطی
flow line	خط جریان	Euler, L.	اویلر، ل.
horocycle	دایره ساعتی	Ptolemy	بطلمیوس
Democritus	دموکریت	Beltrami	بلترامی، ا.
Riemann, G. F. B.	ریمان، گ، ف. ب.	Archimedes Axion	بنداشت ارشمیدس
Beltrami-Klein angle	زاویه بلترامی-کلاین	Bolyai, J.	بویوی، ج.
oriented angle	زاویه سو دار	Bolyai, F.	بویوی، ف.
geodesic	ژئودزیک	geodesic segment	پاره ژئودزیک
straight geodesic	ژئودزیک راست	Pasch	پاش
bowed geodesic	ژئودزیک خمیده	Poincaré H.	پوانکاره، ه.
Girard, A.	ژیارد، آ.	Polaris	پولاریس
Saccheri, G.	ساکری، ج.	Proclus	پروکلوس
Ceva	سوا	Pieri, M.	پیری، م.
Sophists	سوفسطائیان	Thales	طالس

Liouville, J.	لیوویل، ژ.	Chasles, M.	شال، م.
Minding	مایندینگ	pseudosphere	شبه کره
antipodal	مقاطر	geodesic ray	شعاع ژئودزیک
Mathematica	متمتیکا XIII،	Schwarz, H. A.	شوارتس، ه. آ.
geodesic Triangle	مثلث ژئودزیک	defect	کاستی
rectilinear	مستقیم الخط	Coxeter, H. S. M.	کاکستر، ه. س. م.
tesselation	موزاییک بندی	horosphere	کره ساعتی
Menelaus	منلائوس	Klein, F.	کلاین، ف.
Maple	مپل	Klugel, G. S.	کلوگل، گ. س.
Cross ratio	نسبت ناهمساز	Cayley, A.	کیلی، ا.
Gauss map	نگاشت گاوس	Gauss, K. F.	گاوس، ک. ف.
cocyclic points	نقطه‌های هم‌دایره	Fuchsian groups	گروه‌های فوکسی
Flow diagram	نمودار جریان	Godel, K.	گودل، ک.
Harriot, T.	هریوت، ت.	Lagrange, J. L.	لاگرانژ، ژ. ل.
Absolute geometry	هندسه مطلق	Lambert, J. H.	لامبرت، ی. ه.
Neutral geometry	هندسه نتاری	Lobachevsky, N.	لباچفسکی، ن.
Hilbert, D.	هیلبرت، د.	Legendre, A. M.	لژاندر، ا. م.
Jacobi, K.	یاکوبی، ک.	glide reflection	لغزه

نمایه

قابلیت انطباق هذلولوی سه زاویه باهم ۱۰۳	کاستی ۱۳۶، ۱۹۲
آبل، ن. ۲۹۲	ذیمقراطیس ۶
هندسهٔ مطلق ۲۶، ۳۵، ۵۸، ۵۹، ۱۰۶، ۱۹۶، ۱۹۰	کتاب اصول ۶، ۲۸۶، ۳۱۸
المجسطی ۱۹۸	هندسهٔ بیضوی ۲۱۱، ۲۱۳
بنداشت ارشمیدس ۳۴، ۳۹	إشر، م. ۲۶۶
بلترامی، ا. ۲۹۰	اوپلر، ل. ۱۹۸، ۲۰۷
الگوی بلترامی-کلاین ۲۷۱	نمودار جریان ۱۶۸، ۱۷۱
بویویی، ف. ۲۹۰	خط جریان ۱۷۰
بویویی، ی. ۱۴۰، ۱۹۷، ۲۸۹، ۲۹۷، ۳۱۵	توابع فوکسی ۲۹۴
ژئودزیک خمیده ۸۴	گروههای فوکسی ۲۹۴
کیلی، آ. ۲۹۰	نگاشت گوس ۲۱۶، ۲۳۰
سوا ۴۱، ۱۵۲، ۲۱۴	خمیدگی گوسی ۲۲۲، ۲۲۹
شال، م. ۴۴	مثلث ژئودزیک ۲۱۹، ۲۴۰
نقطه‌های هم‌دایره ۲۴۵	نیم‌خط ژئودزیک ۱۱۳
اصلهای بدیهی (بدیهیات) ۱۳، ۱۴، ۱۳۲، ۱۳۳	پاره ژئودزیک ۸۲، ۱۹۹، ۲۲۱
کاکستر، ه.س.م. ۲۶۶	ژیوار، آ. ۲۰۷
حاصلضرب بیرونی ۲۰۳	لغزه ۵۳
نسبت ناهمساز ۲۴۴، ۲۴۷، ۲۶۳، ۲۸۱	گودل، ک. ۲۹۱
خمیدگی ۲۱۵، ۲۴۰، ۲۴۱	هریوت، ت. ۲۰۷

تبدیل مویوس ۱۶۸، ۲۴۳	هیلبرت، د. ۵، ۲۹، ۴۳، ۲۹۰
زاویه سودار ۴۷	دایره ساعتی ۳۱۶
پیری، م. ۴۳	کره ساعتی ۲۹۷، ۳۱۳، ۳۱۶
اصل موضوع پلی فیر ۳۲، ۳۵، ۱۰۲، ۲۸۷	مساحت هذلولوی ۱۳۰-۱۳۹
یوانکاره، ه. ۲۹۴	نمودار جریان هذلولوی ۱۸۳-۱۷۱، ۲۴۹-۲۵۷
پولاریس ۲۳۲-۲۳۳	حرکت صلب هذلولوی ۸۶-۸۸، ۱۰۷-۱۰۸
پروکلوس ۲۸۶	۱۶۲-۱۸۶
شبه کره ۲۴۰	موزاییک بندی هذلولوی ۱۲۴-۲۶۸
بطلمیوس ۱۹۸، ۲۸۶	انعکاس ۶۳-۷۶، ۷۸، ۳۱۷
زاویه مستقیم الخط ۹	برگشت ۶۵
شکل مستقیم الخط ۱۰	طولپایی ۳۰۹
تقارن محوری ۴۸، ۱۶۰	یاکوبی، ک. ۲۹۲
ریمان، گ. ف. ب. ۸۹، ۲۹۳	کلاین، ف. ۴۴، ۲۷۱، ۲۹۰
حرکت صلب ۴۳-۶۱	کلوگل، گ. س. ۲۸۸
ساکری، ج ۲۸۸	لاگرانژ، ژل. ۲۰۳، ۲۱۵
قابلیت انطباق با هم (ضرض) ۱۹-۲۰	لامبرت، ی. ه. ۲۸۸-۲۸۹
شوارتس ه. آ. ۲۶۵	لژاندر، ا. م. ۲۸۸
سوفسطائیان ۶	لیوویل، ژ. ۲۹۰
قابلیت انطباق با هم (ضرض) ۲۱	لیاچفسکی، ن. ۱۹۷، ۲۰۵، ۲۲۲، ۲۸۹، ۲۹۷
موزاییک بندی ۱۲۴	۳۱۵
طالس ۶	میل ۳۲، ۷۶، ۹۴، ۱۲۹
خمیدگی کل ۲۱۷	متمتیکا ۳۲، ۷۶، ۹۴، ۱۲۹
نیمدایره قائم ۳۰۵	منلائوس ۴۰، ۱۵۲، ۲۱۴
	مایندینگ ۲۴۲، ۲۹۰

علامتهای مهم

D_k , ۱۷۴	$\arg(z)$, ۱۵۶
γ_{AB} , ۵۴	$\beta(x)$, ۲۷۴
$h(AB)$, ۲۷۳	\bar{z} , ۱۵۹
$h(P, Q)$, ۸۴	(z_1, z_2, z_3, z_4) , ۲۴۵
	$d(P, Q)$, ۴۴