دانش پژوهان جوان

هندسه اعداد مختلط

تألیف :
مهران احمدلو
امیر آجرلو
برنده چهار مدال طلای کشوری و جهانی
المپیاد ریاضی

هندسه اعداد مختلط

مؤلفین:

مهران احمدلو

امیر آجرلو

برنده چهار مدال طلای کشوری و جهانی المپیاد ریاضی

احمدلو، مهران، ۱۳۶۲.
هندسه اعداد مختلط / مولفین مهران احمدلو، امیرآجرلو. -- تهران:
دانش‌پژوهان جوان، ۱۳۸۳.
۱۱۳ص.: مصور، نمودار.
ISBN 964-7685-51-3
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. اعداد مختلط -- راهنمای آموزشی (عالی). ۲. اعداد مختلط -- مسائل، تمرینها و غیره (عالی). ۳. هندسه جدید. الف. آجرلو، امیر، ۱۳۵۹ - .
ب. عنوان

۹ه۳الف / QA ۲۵۵	۵۱۶/۰۴۰۷۶
کتابخانه ملی ایران	۳۰۰۸۹ - ۸۳م

هندسه اعداد مختلط

مؤلفین	امیرآجرلو - مهران احمدلو
ناشر	دانش‌پژوهان جوان
قطع	وزیری
تیراژ	۵۰۰۰ نسخه
چاپ اول	پائیز ۱۳۸۳
قیمت	۱۴۰۰ تومان

ناشر کتابهای المپیاد

نشانی ناشر: خیابان انقلاب - خیابان منیری‌جاوید (اردیبهشت)
نبش لبافی‌نژاد پلاک ۱۷۷
تلفن ۶۴۹۸۹۹۸ - فاکس ۶۹۶۷۰۱۲

مقدمه ناشر

بی‌شک خبر موفقیت جوانان ایرانی در المپیادهای جهانی باعث شادی و غرور تمامی ایرانیان می‌گردد و این شادی زمانی بیشتر می‌شود که احساس کنیم در این موفقیت سهمی داشته‌ایم.

مؤسسه فرهنگی دانش‌پژوهان جوان با هدف حمایت از کلیه جوانان مستعد ایرانی و به منظور تقویت بنیه علمی دانش‌آموزان، خصوصاً آن عزیزانی که متأسفانه به دلیل نداشتن امکانات و منابع مطالعاتی مناسب، امکان رشد و شکوفایی نیافته‌اند قدم در مسیری نهاده است که به راهنمایی‌های تمامی اهل علم و فرهنگ نیاز دارد.

انتشارات دانش‌پژوهان جوان به عنوان ناشر تخصصی کتاب‌های المپیاد از کلیهٔ صاحب‌نظران در زمینهٔ المپیاد دعوت به همکاری نموده و منتظر دریافت نظرات و پیشنهادهای شما می‌باشد.

در خاتمه از حمایت‌های مالی شرکت محترم سانیو به عنوان حامی دانش‌پژوهان جوان و اهدای رایگان تعدادی از نسخ این کتاب به مدارس و کتابخانه‌های مناطق محروم توسط شرکت سانیو تشکر و قدردانی به‌عمل می‌آید.

مقدمه مولفین

یکی از تکنیک‌های پرقدرت در رویارویی با مسایل هندسه، استفاده از اعداد مختلط است. اعداد مختلط، با دارا بودن هم‌زمان دو چهرهٔ جبری و برداری، امکان استفادهٔ توام از تکنیک‌های هندسه تحلیلی و جبر و تکنیک‌های هندسه برداری را فراهم می‌آورد.

موضوع اصلی کتاب آموزش این روش قدرتمند به صورت اصولی و پایه‌ای بویژه جهت بکارگیری در مراحل مختلف المپیاد ریاضی می‌باشد.

کتاب سرشار از مسایل و تمرینات متنوعی است که از میان مسایل المپیادهای ریاضی داخلی و خارجی گلچین شده و یا بعضاً توسط مؤلفین طراحی شده‌اند. همچنین قضایای مهم و اساسی هندسه کلاسیک به زبان اعداد مختلط بیان و اثبات شده است. استفاده هوشمندانه و مبتکرانه از دانش هندسه کلاسیک و درهم‌آمیختن آن با هندسه مختلط نیز از اهداف آموزشی این مجموعه است.

در پایان از همه عزیزانی که در تهیه این اثر به هر نحو به ما یاری رساندند، تشکر می‌نماییم.

امیر آجرلو - مهران احمدلو
پائیز ۱۳۸۳

فهرست مطالب

هندسهٔ اعداد مختلط

۱. اعداد مختلط

$\sqrt{-1}$ را i می‌نامیم، در این صورت جذر تمام اعداد منفی با معنی خواهد بود، در نتیجه معادله‌های درجه دوم، همگی ریشه‌های با معنی‌ای خواهند داشت. برای مثال $+\sqrt{-9}$ و $-\sqrt{-9}$، یا در واقع $+3i$ و $-3i$، ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 9 = 0$ هستند. اما این گونه اعداد، حقیقی نیستند، چرا که مجذور آن‌ها مثبت نیست. بنابراین با اعداد جدیدی روبرو هستیم. این اعداد را اعداد مختلط (یا موهومی) نامیده‌اند.

نماد i، اولین بار توسط اویلر در قرن هیجدهم معرفی شده است و برابر است با $\sqrt{-1}$. بدین ترتیب به ازای اعداد حقیقی b, a، عدد $a + bi$، عددی مختلط است که به a بخش حقیقی و به b بخش مختلط گفته می‌شود. اگر $a + bi$ را z بنامیم، می‌نویسیم: $Re(z) = a$ و $Im(z) = b$، که R_e و I_m بترتیب معرف بخش حقیقی و مختلط هستند.

حال اگر اعداد مختلط z_2, z_1 را چنین تعریف کنیم:

$$z_1 = a + bi \quad , \quad z_2 = c + di$$

حاصل جمع و حاصل ضرب آن‌ها این گونه تعریف می‌شود:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

زیرا همان طور که گفتیم، $i^2 = -1$ می‌باشد.

بنابراین جمع و ضرب اعداد مختلط دارای خواص زیر است:

۱ـ جابجایی: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ و $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

۲ـ شرکت‌پذیری: $z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$ و $z_1\cdot(z_2\cdot z_3) = (z_1\cdot z_2)\cdot z_3$.

۳ـ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

صفر مختلط برابر است با $0 + 0i$، همچنین z' را قرینهٔ z نامیم هرگاه: $z' = -z$. z'' را معکوس z گوئیم هرگاه: $z \cdot z'' = 1$، بدین ترتیب:

$$z'' = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

در نتیجه حاصل تقسیم z_1 بر z_2 چنین محاسبه می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2'' = (a+bi)\Big(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{di}{c^2+d^2}\Big)$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \Big(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\Big)i$$

و یک نوع نمایش نیز به این شکل است: $z = (a,b) \leftrightarrow z = a+bi$.

بنابراین اگر فرض کنید $z_1 : (a,b)$ و $z_2 : (c,d)$ نقاطی در صفحه‌اند، داریم:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,b)$$

که جمع و ضرب آن‌ها بنابر آنچه که تعریف کردیم، چنین خواهد بود:

$$z_1 + z_2 = (a+c, b+d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, bc + ad)$$

توجه کنید که هر عدد مختلط توسط ۲ جزء (a, b) قابل نمایش است پس با این اعمال روی $\mathbb{R}^2$ دستگاهی از اعداد پدید می‌آید که به آن دستگاه اعداد مختلط گویند، و آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهند. صفحه‌ای که نقاط آن را اعداد مختلط تشکیل دهند، صفحهٔ مختلط می‌نامند. این صفحه‌دارای دو محور افقی و عمودی است. تمام اعداد مختلطی را در نظر بگیرید (مانند $z = (a, b)$) که بخش مختلط آن صفر است، این اعداد به صورت

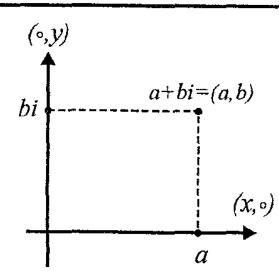
$$(a, 0) = a + 0i = a$$

خواهند بود و همان طور که مشاهده می‌شود، اعدادی حقیقی هستند. یعنی محور افقی این صفحه، محور اعداد حقیقی است. حال اگر بخش حقیقی آن را صفر کنید، اعدادی به صورت $(0, b) = 0 + bi = bi$ بدست می‌آیند، که محور عمودی این صفحه را تشکیل می‌دهند و به اعداد مختلط محض معروفند.

با این تعاریف داریم:

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

و آنچه که در مورد جمع و ضرب اعداد مختلط تعریف نمودیم بر تعریف آن در صفحهٔ مختلط هم منطبق خواهد بود. لذا نمایش عدد مختلط $a + bi$ در صفحهٔ مختلط همان نمایش زوج مرتب (a, b) خواهد بود:



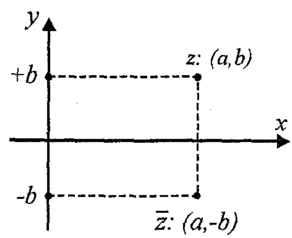
شکل (۱)

$\overline{z}$ (z بار):

حال اگر قرینهٔ $z = a + bi$ را نسبت به محور حقیقی بدست آوریم و این نقطه را با $\overline{z}$ نمایش دهیم، واضح است که داریم:

$$\overline{z} = a - bi = (a, -b)$$

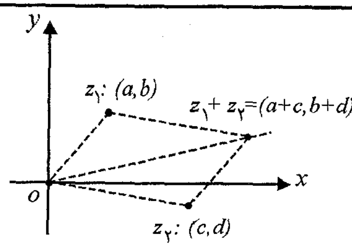
به $\overline{z}$، مزدوج z نیز گفته می‌شود.



شکل (۲)

حال نمایش $z_۳ = z_۱ + z_۲$ را در صفحهٔ مختلط ببینید:

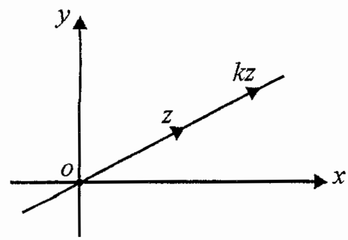
$$z_۱ + z_۲ = (a + c, b + d)$$



شکل (۳)

همان طور که مشاهده می‌شود نمایش $z_۱ + z_۲$ در صفحهٔ مختلط، مانند نمایش $\vec{a} + \vec{b}$ در صفحه است (که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای مکانی هستند).

همچنین به تناظر نمایش حاصل‌ضرب عدد مختلط z در عدد حقیقی k و بردار مکانی $\vec{z}$ ضرب در عدد حقیقی k توجه کنید:



شکل (۴)

در قسمت‌های بعدی با تناظر یک به یک بین برخی اعمال، در اعداد مختلط z و بردار مکانی آن‌ها بیشتر آشنا خواهید شد.

به تعریف مزدوج z باز می‌گردیم، با توجه به آنچه گفتیم، به راحتی می‌توانید ثابت کنید:

(۱) $\overline{(\overline{z})} = z$

(۲) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(۳) $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow$ z مختلط محض است

(۴) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

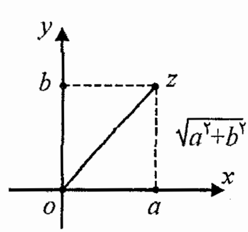
(۵) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \Rightarrow \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

(۶) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

توجه کنید که برای $z = a + bi$ داریم: $\overline{z} = a - bi$، پس:

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 - abi + abi = (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

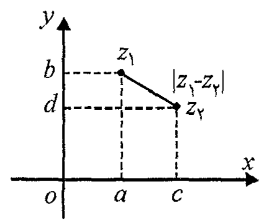
و از لحاظ هندسی، جذر این مقدار، برابر خواهد بود با فاصلهٔ نقطهٔ z از مبدأ مختصات.



شکل (۵)

نُرم یا مُدول:

مقدار $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ را با $|z|$ نمایش می‌دهیم و آن را نرم z می‌نامیم. همان طور که دیدید، داریم: $|z|^{۲} = z \cdot \overline{z}$



شکل (۶)

بنابراین:

$$|z_۱ - z_۲| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^{۲}+(b-d)^{۲}}$$

که بیانگر فاصلهٔ دو نقطهٔ $z_۱$ و $z_۲$ می‌باشد، (واضح است که $|z_۱ - z_۲| = |z_۲ - z_۱|$) و با توجه به شکل، از قضیهٔ فیثاغورث درستی این ادعا نتیجه خواهد شد.

حال چند ویژگی دیگر از $|z|$ را بیان می‌کنیم که به سادگی می‌توانید درستی آن‌ها را ثابت کنید:

(۱) $|z| = |\overline{z}|$

(۲) $|z_۱ \cdot z_۲| = |z_۱| \cdot |z_۲| \Rightarrow |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$

(۳) $\left|\dfrac{z_۱}{z_۲}\right| = \dfrac{|z_۱|}{|z_۲|}$

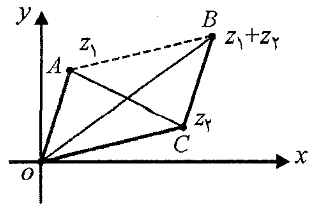
(۴) $|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$

(۵) $\big||z_۱| - |z_۲|\big| \leq |z_۱ - z_۲|$

به دلیل اهمیت خواص (۴) و (۵) به اثبات آن‌ها می‌پردازیم:

همان‌طور که گفتیم، $(z_۱ + z_۲)$ رأس متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن $z_۱$، $z_۲$ و ۰ هستند $(z_۲ \neq kz_۱)$. بنابراین اگر برای مثلث ΔOBC نابرابری مثلثی را بنویسیم،

خواهیم داشت: $OB < BC + OC$



شکل (۷)

در نتیجه:

$$|z_1 + z_2| < |(z_1 + z_2) - z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

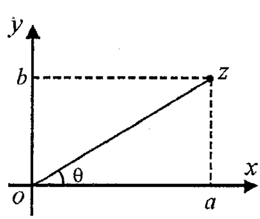
و اگر $z_2 = kz_1$ باشد، z_1، z_2، $z_1 + z_2$ و ۰، در امتداد هم قرار می‌گیرند و حالت تساوی برقرار می‌شود. همچنین اگر $z_2 \neq kz_1$ باشد، با نوشتن نابرابری مثلثی در مثلث ΔOAC، داریم:

$$AC + OC > OA \Rightarrow |z_2 - z_1| + |z_2| > |z_1| \Rightarrow |z_2 - z_1| > |z_1| - |z_2|$$

و به همین ترتیب: $|z_2 - z_1| > |z_2| - |z_1|$. پس $\big||z_2| - |z_1|\big| < |z_2 - z_1|$، و در صورتی که $z_2 = kz_1$، حالت تساوی برقرار می‌گردد.

حال نمایشی دیگر از اعداد مختلط را معرفی می‌کنیم که به **نمایش قطبی** معروف است.

می‌دانیم که:



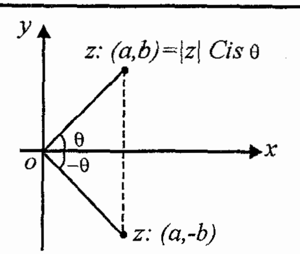
شکل (۸)

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$= |z| \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} + \frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}i\right)$$

که مطابق شکل، معادل $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ است. عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با نماد $Cis\ \theta$ نمایش می‌دهیم، پس: $z = |z| \cdot Cis\ \theta$، θ را آرگومان عدد z گویند، که با $arg(z)$ نشان داده می‌شود.

حال آنچه را تاکنون بحث نموده‌ایم با نمایش قطبی نیز نشان می‌دهیم. گفتیم اگر $z = (a,b)$ آن‌گاه $\overline{z} = (a,-b)$، بنابراین اگر $\overrightarrow{Oz}$ با محور xها زاویهٔ θ بسازد، آن‌گاه $\overrightarrow{O\overline{z}}$ با محور xها زاویهٔ $-\theta$ می‌سازد. در نتیجه: $\overline{z} = |z| \cdot Cis\ (-\theta)$.



شکل (۹)

همچنین، با توجه به تعریف $Cis\ \theta$، داریم: $Cis\ \theta = Cis\ (۲k\pi + \theta)$

به این ترتیب در صورتیکه θ بین $-\pi$ و π باشد، به آن آرگومان اصلی z گویند و با علامت $Arg(z)$ نشان داده می‌شود. (به حرف بزرگ A در اول Arg توجه کنید).

حال فرض کنید $z_۱ = |z_۱| \cdot Cis\ \alpha$ و $z_۲ = |z_۲| \cdot Cis\beta$، به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} z_۱ \cdot z_۲ &= |z_۱| \cdot |z_۲| \cdot Cis\ \alpha \cdot Cis\ \beta \\ &= |z_۱| \cdot |z_۲| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= |z_۱| \cdot |z_۲| \Big((\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \\ &\quad + i(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha) \Big) \end{aligned}$$

$$= |z_۱| \cdot |z_۲|\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$$

$$= |z_۱| \cdot |z_۲| Cis\ (\alpha+\beta)$$

نتیجه:

۱ـ داریم: $|Cis\theta| = ۱$.

۲ـ $|z_۱ \cdot z_۲| = |z_۱| \cdot |z_۲|$ که قبلاً هم ذکر شده بود.

۳ـ $Cis\ \alpha \cdot Cis\ \beta = Cis\ (\alpha+\beta)$، بنابراین با استقراء می‌توان این رابطه را تعمیم داد و به رابطهٔ زیر رسید:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \ (Cis(\alpha))^n = Cis\ (n\alpha)$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{(|z_۱|Cis\ \alpha)}{(|z_۲|Cis\ \beta)} = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}Cis\ \alpha \cdot Cis\ (-\beta) = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}Cis\ (\alpha-\beta)$$

زیرا داریم:

$$Cis\ (\beta) \cdot Cis\ (-\beta) = Cis\ (\beta + (-\beta)) = \cos(\circ)$$
$$= \cos(\circ) + i\sin(\circ) = ۱$$

پس:

$$Cis\ (-\beta) = \frac{۱}{Cis\ \beta}$$

نتیجه:

۱ـ همان طور که قبلاً هم آوردیم: $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right| = \frac{|z_۱|}{|z_۲|}$.

۲ـ $\frac{Cis\ \alpha}{Cis\ \beta} = Cis\ (\alpha-\beta)$، همچنین داریم:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ (Cis\ \alpha)^{-n} = Cis\ (-n\alpha)$$

حال فرض کنید $z = |z|Cis\ \theta$، جوابی برای معادلهٔ $x^n = ۱$ باشد، بنابراین داریم:

$$z^n = ۱ \Rightarrow |z^n| = ۱ \Rightarrow |z|^n = ۱ \Rightarrow |z| = ۱$$

در نتیجه: $z = Cis\ \theta$. پس: $z^n = (Cis\theta)^n = Cis\ (n\theta)$ و بنابراین:

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = ۱ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos n\theta = ۱ \\ \sin n\theta = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow n\theta = ۲k\pi \Rightarrow \theta = \frac{۲k\pi}{n}$$

که $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$ می‌باشد. به عبارت دیگر هر z_k به شکل

$$(k \in \{۰, ۱, \cdots, n-۱\})Cis\ (\frac{۲k\pi}{n}) = \cos(\frac{۲k\pi}{n}) + i\sin(\frac{۲k\pi}{n})$$

یک ریشهٔ معادلهٔ $x^n = ۱$ خواهد بود و بالعکس (زیرا می‌دانیم تعداد ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ n، اعم از حقیقی و یا موهومی، n تاست). یعنی ما تمام n ریشهٔ معادلهٔ $x^n = ۱$ را یافته‌ایم.

نمای مختلط:

چنین تعریف می‌کنیم که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، و به $e^{i\theta}$ نمای مختلط می‌گوییم (توجه کنید که $e^{i\theta} \equiv Cis\theta$ است). در این کتاب از علت درستی این تساوی صرف‌نظر می‌کنیم، اما خواص نمای مختلط را بررسی خواهیم نمود.

بنابر آنچه که گفتیم داریم: $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^۲\theta + \sin^۲\theta} = ۱$. پس $e^{i\theta}$ دارای مختصات $(\cos\theta, \sin\theta)$ بوده و روی محیط دایرهٔ یکه (دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد) قرار دارد، همچنین با توجه به خواص $Cis\ \theta$ داریم:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+۲k\pi)}(k = ۰, ۱, \cdots) \quad (۱)$$

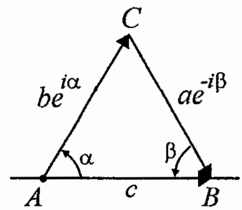
$$e^{i\theta} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\theta+\beta)} \quad (۲)$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)} \quad (۳)$$

$$\left(\overline{e^{i\theta}}\right) = e^{-i\theta} \quad (۴)$$

حال از تساوی $e^{i\theta} = Cis\ \theta$، می‌توانیم شکل نمایی z را نیز بدست آوریم:

$$z = |z|Cis\ \theta = |z|e^{i\theta}$$



شکل (۱۰)

برای مثال می‌توان قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها را با استفاده از این روش ثابت نمود. با توجه به شکل داریم:

$$c = be^{i\alpha} + ae^{-i\beta} \qquad (c \in \mathbb{R})$$
$$= b(\cos\alpha + i\sin\alpha) + a(\cos\beta - i\sin\beta)$$
$$\Rightarrow c + i۰ = (b\cos A + a\cos B) + i(b\sin A - a\sin B)$$

از برابر قرار دادن قسمتهای موهومی و حقیقی رابطهٔ فوق باید قسمت موهومی برابر صفر باشد، یعنی: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$، و قسمت حقیقی آن با c برابر شود، یعنی:

$$c = b\cos A + a\cos B \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos(A+B)$$
$$= a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\widehat{C}$$

قضیهٔ دمو آور:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \theta \in \mathbb{R}\ :\ (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$$

با توجه به این که $e^{i\theta} = Cis\ \theta$، این رابطه قبلاً ثابت شده است.

گفتیم $(\frac{۲k\pi}{n})$ Cis یا در واقع $e^{i(\frac{۲k\pi}{n})}$ $(k = ۰, ۱, \cdots, n-۱)$ ریشه‌های معادلهٔ $x^n = ۱$ هستند. بنابراین $a^n \cdot e^{i(\frac{۲k\pi}{n})}$ که $a \in \mathbb{R}^+$ و $k = ۰, \cdots, n-۱$ ریشه‌های معادلهٔ $x^n = a^n$ هستند، یعنی کلیهٔ این نقاط روی دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ

مختصات قرار دارند. همچنین این n نقطه رئوس یک n ضلعی منتظم خواهند بود.

قضیه: مجموع تمام n ریشهٔ nاُم واحد، برابر با صفر است.

اثبات: فرض کنید w^i $(i = ۰, ۱, \cdots, n-۱)$ ریشه‌های nاُم واحد باشند (ریشهٔ w که $w = Cis\,(\frac{۲\pi}{n})$ ریشهٔ nاُم اولیهٔ واحد نام دارد)، پس مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$۱ + w + w^۲ + \cdots + w^{n-۱} = \frac{۱ - w^n}{۱ - w}$$

امّا داشتیم: $w^n = ۱$ $(w \neq ۱)$، پس صورت کسر سمت راست تساوی فوق، صفر خواهد بود و حکم ثابت شد.

مثال ۱: فرض کنید $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ رئوس یک n ضلعی منتظم با دایرهٔ محیطی به شعاع واحد باشند. ثابت کنید به ازای هر نقطهٔ P روی محیط این دایره داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \overline{PA}_i^۲ = ۲n$$

حل: اگر اعداد مختلط متناظر A_iها را در صفحه مختلط با a_iها، و عدد متناظر P را با p نشان دهیم،

داریم: $$K = \sum_{i=۱}^{n} \overline{PA}_i^۲ \to \sum_{i=۱}^{n} |p - a_i|^۲$$

(نماد $(\to)$ را نشان دهندهٔ تناظر در صفحهٔ مختلط در نظر گرفته‌ایم)

که خواهیم داشت:

$$K = \sum_{i=۱}^{n} |p - a_i|^۲ = \sum_{i=۱}^{n} (p - a_i)(\overline{p} - \overline{a}_i)$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} (p\overline{p} + a_i\overline{a_i} - (a_i \cdot \overline{p} + \overline{a_i} \cdot p))$$

حال از آنجا که p و a_iها روی محیط دایرهٔ به شعاع واحد قرار دارند، اگر مرکز دایره را مبدأ مختصات قرار دهیم، داریم:

$$p\overline{p} = |p|^{۲} = ۱ \quad , \quad a_i\overline{a_i} = |a_i|^{۲} = ۱$$

بنابراین:

$$K = ۲n - (\sum_{i=۱}^{n} a_i \cdot \overline{p} + \sum_{i=۱}^{n} \overline{a_i} \cdot p) = ۲n - (\overline{p} \cdot \sum_{i=۱}^{n} a_i) - (p \sum_{i=۱}^{n} \overline{a_i})$$

همچنین از قضیه قبلی می‌دانیم که: $\sum_{i=۱}^{n} a_i = ۰$ و در نتیجه

$$\overline{(\sum_{i=۱}^{n} a_i)} = \sum_{i=۱}^{n} \overline{a_i} = ۰$$

پس:

$$K = ۲n - (\overline{p} \times ۰) - (p \times ۰) = ۲n$$

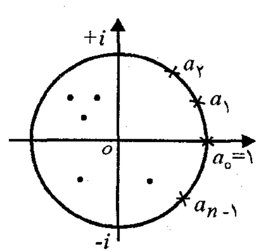
و حکم بدین ترتیب اثبات گردید.

مثال ۲: اگر $A_۰, A_۱, \cdots, A_{n-۱}$ رئوس یک n ضلعی منتظم با دایرهٔ محیطی به شعاع واحد باشند، ثابت کنید:

$$\overline{A_۰A_۱} \times \overline{A_۰A_۲} \times \cdots \times \overline{A_۰A_{n-۱}} = n$$

حل: همان طور که بیان شد، a_iها ریشه‌های nاُم واحداند. (a_i متناظر است با، عدد مختلط متناظر با نقطهٔ A_i) در نتیجه اگر $a_۰$ برابر با واحد باشد، داریم:

$$K = \prod_{i=۱}^{n-۱} \overline{A_۰A_i} \to \prod_{i=۱}^{n-۱} |(a_۰ - a_i)|$$



شکل (۱۱)

$$K = \prod_{i=۱}^{n-۱}(۱ - a_i)$$

در نتیجه:

حال اگر $a_۱$ را با a نشان دهیم، داریم: $a_i = a^i$ (که قبلاً بیان شد) و بنابر قضیهٔ داریم:

$\sum_{i=۰}^{n} a^i = ۰$. یعنی a^iها ریشه‌های معادلهٔ $f(z) = \sum_{i=۰}^{n-۱} z^i = ۰$ هستند؛ بنابراین:

$$f(۱) = n = (۱ - a)(۱ - a^۲)\cdots(۱ - a^{n-۱}) \Rightarrow n$$
$$= \prod_{i=۰}^{n-۱}(۱ - a^i) = \prod_{i=۰}^{n-۱}(۱ - a_i)$$

و حکم ثابت شد.

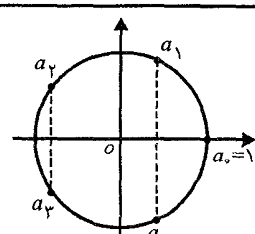
مثال ۳: اگر $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ و $A_۴$ به همین ترتیب روی محیط دایره‌ای به شعاع واحد قرار گیرند بطوریکه آن را به ۵ کمان مساوی تقسیم نمایند، نشان دهید:

$$(\overline{A_۰A_۱} \times \overline{A_۰A_۲})^۲ = ۵$$

حل: اگر a_i ها اعداد متناظر با A_iها باشند و دایرهٔ مفروض را دایرهٔ یکه فرض کنیم، حکم معادل با این است که:

$$(|a_۰ - a_۱| \cdot |a_۰ - a_۲|)^۲ = ۵$$

$$\Leftrightarrow (a_۰ - a_۱)(a_۰ - a_۲)(\overline{a_۰} - \overline{a_۱})(\overline{a_۰} - \overline{a_۲}) = ۵$$



شکل (۱۲)

حال اگر دایره را بچرخانیم تا a_0 روی عدد حقیقی ۱ قرار گیرد، با توجه به شکل خواهیم داشت: $a_0 = 1$، $\overline{a_2} = a_3$ و $\overline{a_1} = a_4$. بنابراین باید ثابت کرد:

$$(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot (1 - a_3) \cdot (1 - a_4) = 5$$

که همان مسأله قبلی ست به ازای $n = 5$، و بدین ترتیب حکم ثابت شد.

مثال ۴: فرض کنید A_1، $A_2, \cdots, A_n$ رئوس یک چند ضلعی منتظم باشند، که در دایره‌ای با شعاع R و به مرکز O محاط شده است. P را نقطه‌ای در امتداد OA_1 و در طرف دیگر A_1، در نظر بگیرید. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{PA_i} = OP^n - R^n$$

حل: اگر مرکز این دایره را مبدأ مختصات در نظر بگیریم و اعداد مختلط a_iها و p، متناظر با A_iها و P را روی محور حقیقی بگیریم حکم معادل این است که

$$\sum_{i=1}^{n} |p - a_i| = p^n - R^n$$

داریم:

$$K = \prod_{i=1}^{n} |p - a_i| = \left|\sum_{i=1}^{n}(p - a_i)\right|$$

از طرفی a_iها ریشه‌های $p^n - R^n$ هستند، در نتیجه:

$$a_i = R \cdot e^{2\pi(\frac{k-1}{n})i}$$

پس:

$$K = |p^n - R^n| = p^n - R^n (p, R \in \mathbb{R} \text{ زیرا که})$$

پس حکم ثابت شد.

مثال ۵: نقاط A_1، A_2، ... و A_n روی محیط دایرهٔ واحدی به مرکز O، بگونه‌ای واقعند که:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = 0$$

ثابت کنید، برای هر نقطهٔ خارج از دایرهٔ به شعاع ۲، مانند B داریم:

$$BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n \geq n$$

حل: فرض کنید a_iها و b اعداد مختلط متناظر با A_iها و B باشند. مرکز دایرهٔ مذکور را مبدأ مختصات بگیرید، پس بنابر قضیه، داریم:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \qquad (*)$$

از طرفی عبارت معادل با سمت چپ نامساوی حکم، این است:

$$K = |b - a_1| + |b - a_2| + \cdots + |b - a_n|$$

که برابر است با:

$$K = \sum_{i=1}^{n} |b - a_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(b - a_i)(\overline{b} - \overline{a}_i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b\overline{b} + a_i\overline{a_i} - (b \cdot \overline{a_i} + \overline{b} \cdot a_i)}$$

اما می‌دانیم: $b\overline{b} = |b|^2 \geq 0$ و $a_i\overline{a_i} = |a_i|^2 = 1$، پس:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|b|^2 + 1 - (b\overline{a_i} + \overline{b} \cdot a_i)}$$

حال اگر b را روی محور حقیقی در نظربگیریم، خواهیم داشت:

$$K = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b^2 + 1 - b(a_i + \overline{a_i})}\ \Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b^2 + 1 - b(2Re(a_i))}\ \Big)$$

واضح است که $Re\{a_j\} < |a_i| = 1$، پس:

$$K \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{b^2 + 1 - 2b} = \sum_{i=1}^{n} |b - 1| = n \cdot |b - 1| \geq n$$

زیرا فرض کردیم که $b \geq 2$.

مثال ۶: برای چهار ضلعی محاطی $ABCD$، ثابت کنید:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

حل: بدون کاسته شدن از فرض مسأله، دایرهٔ محیطی این چهار ضلعی را دایرهٔ یکه در نظر بگیرید و a و b و c و d را به ترتیب اعداد متناظر با نقاط A و B و C و D فرض نمایید. بنابراین از آنجا که $a \cdot \overline{a} = |a|^2 = 1$، داریم: $\overline{a} = \frac{1}{a}$. به همین ترتیب $\overline{b} = \frac{1}{b}$ و $\overline{c} = \frac{1}{c}$ و $\overline{d} = \frac{1}{d}$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
AC \cdot BD &= |a-c| \cdot |b-d| = \sqrt{(a-c)(\overline{a}-\overline{c})} \cdot \sqrt{(b-d)(\overline{b}-\overline{d})} \\
&= \sqrt{(a-c)(b-d)(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})(\frac{1}{b}-\frac{1}{d})} \\
&= \sqrt{\frac{(a-c)(b-d)(c-a)(d-b)}{abcd}} \\
&= \frac{(a-c)(b-d)}{\sqrt{abcd}} = \frac{1}{\sqrt{abcd}}(ab+cd-bc-ad) \qquad (1)
\end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}
AB \cdot CD + AD \cdot BC &= |a-b| \cdot |c-d| + |a-d||b-c| \\
&= \sqrt{(a-b)(c-d)(\overline{a}-\overline{b})(\overline{c}-\overline{d})} \\
&+ \sqrt{(a-d)(b-c)(\overline{a}-\overline{d})(\overline{b}-\overline{c})} \\
&= \frac{(a-b)(c-d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{(a-d)(b-c)}{\sqrt{abcd}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{abcd}}\big((a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)\big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{abcd}}(ac + bd - bc - ad + ab + cd - bd - ac)$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{abcd}}(ab + cd - ad - bc) \qquad (۲)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲)، درستی حکم براحتی نتیجه می‌شود.

۲. عنصرهای اساسی هندسی

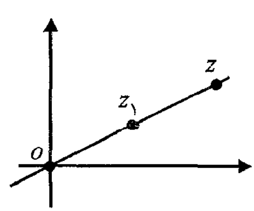
۱ـ نقطه: با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل ارائه دادیم، نقطهٔ $z = a + bi$ به صورت‌های زیر نیز نمایش داده می‌شود:

$$z = |z| Cis\, \theta \qquad\qquad z = |z|e^{i\theta}$$

که $|z|$، فاصلهٔ z از مبدأ بوده و برابر $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ می‌باشد، و θ زاویهٔ بین بردار $\overrightarrow{Oz}$ و محور حقیقی است.

۲ـ خط:

(i) خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد. اگر این خط از نقطهٔ ثابت $z_۱$ بگذرد، آن‌گاه هر نقطهٔ دیگر مانند z روی این خط، ضریبی از $z_۱$ خواهد بود. زیرا زاویهٔ $\overrightarrow{Oz}$ با محور حقیقی، همان زاویهٔ $\overrightarrow{Oz_۱}$ با محور حقیقی است، و تنها فاصلهٔ z از مبدأ تغییر می‌کند. پس معادلهٔ این خط چنین است: $z = kz_۱ \quad (k \in \mathbb{R})$



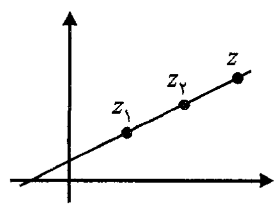
شکل (۱۴)

(ii) خطی که از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. اگر دو نقطهٔ z_1 و z_2 از این خط را در اختیار داشته باشیم، معادلهٔ خط چنین خواهد بود:

$$(k \in \mathbb{R}) \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = k$$

زیرا زاویه‌ای که $(\overrightarrow{z - z_1})$ با محور xها می‌سازد، با زاویهٔ $\overrightarrow{z - z_2}$ با محور xها، برابر است، در نتیجه پارامتر θ ثابت است. اما به ازای هر z فاصلهٔ z تا z_1، نسبت به فاصلهٔ z تا z_2، تغییر خواهد کرد.

همچنین از آنجا که k عددی است حقیقی، خواهیم داشت:



شکل (۱۳)

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{\overline{z} - \overline{z_2}}$$

۳ـ زاویه:

(i) زاویهٔ خط $k = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ $k \in \mathbb{R}$ با محور xها، برابر است با: $\operatorname{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)$ ؛ که با توجه به خواص $Cis\ \theta$ خواهیم داشت:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z - z_1) - \operatorname{Arg}(z - z_2)$$

(ii) با توجه به فرمول فوق، زاویهٔ بین دو خط $k_1 = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ و $k_2 = \frac{z - z_3}{z - z_4}$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$، برابر خواهد بود با:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) - \operatorname{Arg}\left(\frac{z - z_3}{z - z_4}\right)$$

۴ـ توازی: توازی دو خط بدین معنی است که زاویهٔ بین آن‌ها صفر است. در نتیجه دو خط که یکی از $a_۱$ و $a_۲$ و دیگری از $b_۱$ و $b_۲$ می‌گذرند، موازی‌اند، اگر و تنها اگر، زاویه‌ای که با محور حقیقی می‌سازند با هم برابر باشد، یعنی:

$$\frac{a_۲ - a_۱}{b_۲ - b_۱} = k \in \mathbb{R}$$

یا در واقع:

$$\frac{a_۲ - a_۱}{\overline{a_۲} - \overline{a_۱}} = \frac{b_۲ - b_۱}{\overline{b_۲} - \overline{b_۱}}$$

۵ـ تعامد: اگر دو خط $l_۱$، گذرنده از $a_۱$ و $a_۲$، و $l_۲$، گذرنده از $b_۱$ و $b_۲$، برهم عمود باشند، بدین معنی است که:

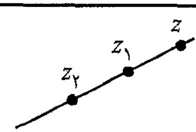
$$\frac{a_۲ - a_۱}{b_۲ - b_۱} = kCis\, ۹۰^\circ = k(\cos ۹۰^\circ + i \sin ۹۰^\circ) = ki \quad (k \in \mathbb{R})$$

یا به عبارت دیگر $l_۱$ و $l_۲$ بر هم عمودند، اگر وتنها اگر:

$$\frac{a_۲ - a_۱}{b_۲ - b_۱} + \frac{\overline{a_۲} - \overline{a_۱}}{\overline{b_۲} - \overline{b_۱}} = ۰$$

۶ـ پاره خط و تقسیم پاره خط: معادلهٔ خط $\frac{z - z_۱}{z - z_۲} = k$ را در نظر بگیرید. اگر z در امتداد $\overrightarrow{z_۲ z_۱}$ بوده و به $z_۱$ نزدیک‌تر باشد، واضح است که $۰ < k < ۱$ خواهد بود، در نتیجه معادلهٔ خط، محدود می‌گردد به معادله پاره خط زیر:

$$z - z_۱ = k(z - z_۲) \Rightarrow (۱ - k)z + kz_۲ = z_۱ \qquad (۰ < k < ۱)$$



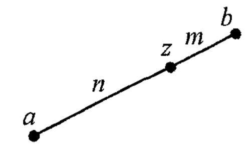
شکل (۱۵)

که z و $z_۲$ دو سر پاره خط ما را تشکیل می‌دهند، در واقع برای پاره خطی با دو سر a و b به ازای هر نقطه z در این پاره خط داریم:

$$z = (۱ - k)a + kb \qquad (۰ < k < ۱)$$

حال اگر نقطهٔ z پاره خط ab را مانند شکل، به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نماید، داریم:

$$\frac{z-a}{b-z}=\frac{n}{m}$$



شکل (۱۶)

در نتیجه:

$$m(z-a)=n(b-z)\Rightarrow z(m+n)=nb+ma\Rightarrow z=\frac{ma+nb}{m+n}$$

برای مثال اگر z وسط b, a باشد، خواهیم داشت:

$$z=\frac{a+b}{۲}$$

۷ـ **تشابه مثلث‌ها**: مثلث‌های Δabc و $\Delta a'b'c'$ متشابهند، اگر وتنها اگر:

(توجه شود که a و b و ... اعداد مختلط در صفحه می‌باشند)

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{b'-a'}{c'-a'}$$

زیرا این تساوی نشان می‌دهد که:

$$\text{Arg }(\frac{b-a}{c-a})=\text{Arg }(\frac{b'-a'}{c'-a'})\quad,\quad \frac{|b-a|}{|c-a|}=\frac{|b'-a'|}{|c'-a'|}$$

یعنی نشان می‌دهد، نسبت دو ضلع متناظر در دو مثلث یکسان است و زاویه بین این دو ضلع در هر دو برابر است، پس دو مثلث متشابه خواهند بود.

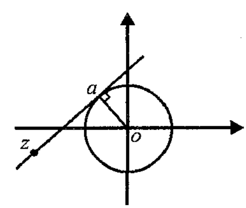
۸ـ **دایره، نقطهٔ تماس و خط مماس**: همان طور که گفتیم، $|z|$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ z از مبدأ است و می‌دانیم دایره مکان هندسی کلیهٔ نقاطی است که از نقطهٔ ثابتی که مرکز دایره باشد، به یک فاصله‌اند. بنابراین معادلهٔ دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات، برابر است با: $R=|z|$. حالت کلی، اگر مرکز دایره نقطهٔ $z_۱$ باشد، با یک انتقال به معادلهٔ زیر خواهیم

رسید: $R = |z_1 - z|$. هر نقطه مانند z که روی محیط دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ است، از فرمول زیر پیروی می‌کند:

$z = R \cdot e^{i\theta}$

حال دایرهٔ یکّه را در نظر بگیرید که نقطهٔ a روی محیط آن مفروض است. می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطهٔ a را بدست آوریم. نقطهٔ z را روی خط مماس در نظر بگیرید، oa بر az عمود است، در نتیجه:

$$\frac{z-a}{\circ - a} + \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{\circ}-\overline{a}} = \circ \Rightarrow \frac{z-a}{a} + \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{a}} = \circ$$



شکل (۱۷)

اما a روی محیط دایرهٔ یکّه قرار دارد، پس: $\overline{a} = \frac{1}{a}$، در نتیجه:

$$\frac{z-a}{a} + \frac{\overline{z}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \circ \Rightarrow \frac{z-a}{a} + a\overline{z} - 1 = \circ$$

$$\Rightarrow \frac{z}{a} + a\overline{z} = 2 \quad : a \text{ معادلهٔ خط مماس در }$$

حال اگر بخواهیم، نقطهٔ تماس یک خط مماس، از نقطه‌ای بیرون از دایره مانند $z_\circ$ را بدست آوریم، واضح است که باید نقطهٔ تماس a، در رابطهٔ: $\frac{z_\circ}{a} + a\overline{z_\circ} = 2$ صدق کند. و از آنجا می‌توان مجهول a را یافت.

(البته دو نقطه بدست خواهد آمد، زیرا از یک نقطه خارج از دایره، دو خط مماس می‌توان بر آن رسم نمود)

۹ـ همخط بودن: با توجه به تعریف خط و یا توازی خطوط، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که سه نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ همخطند، اگر وتنها اگر:

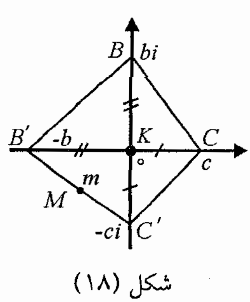
$$\frac{z_۲ - z_۱}{z_۳ - z_۱} = \frac{\overline{z_۲} - \overline{z_۱}}{\overline{z_۳} - \overline{z_۱}}$$

حال به حل چند سئوال از مسابقات المپیادهای مختلف می‌پردازیم:

مثال ۱: فرض کنید K محل برخورد اقطار چهار ضلعی عمود قطر $BB'C'C$ باشد، به طوریکه: $KC = KC'$ و $KB = KB'$. اگر M وسط $B'C'$ باشد، ثابت کنید: $MK \perp BC$.

حل: از آنجا که چهار ضلعی $BB'C'C$ عمود قطر است، می‌توان K (محل برخورد قطرها) را مبدأ مختصات در نظر گرفت، به طوریکه قطر BC' روی محور yها و قطر $B'C$ روی محور xها قرار گیرند. بدین ترتیب اگر عدد c متناظر با نقطهٔ C باشد، عدد متناظر با C' برابر خواهد بود با $-ci$. عدد متناظر با B باید به صورت موهومی محض باشد، فرض کنید این عدد bi باشد، بنابراین $-b$ متناظر با B' خواهد بود (توجه کنید که $c \in I\!R$ و b هستند). حال اگر m متناظر با M باشد، داریم: $m = \frac{-b-ci}{۲}$.

همچنین خواهیم داشت:



شکل (۱۸)

$$\frac{bi-c}{b+ci}+\frac{\overline{bi}-\overline{c}}{\overline{b}+\overline{ci}}=\frac{bi-c}{b+ci}+\frac{c+bi}{-b+ci}$$
$$=\frac{(b+ci)(c+bi)+(bi-c)(ci-b)}{(b+ci)(ci-b)}$$

اما صورت کسر برابر خواهد بود با:

$$(bc+c^{۲}i+b^{۲}i+bci^{۲})+(bci^{۲}+bc-c^{۲}i-b^{۲}i)$$
$$=۲bc+(c^{۲}i-c^{۲}i)+(b^{۲}i-b^{۲}i)+۲bci^{۲}=۲bc-۲bc=۰\quad (i^{۲}=-۱:\text{زیرا})$$

پس ثابت شد: $MK\perp BC$.

مثال ۲: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع اضلاع از مجموع میانه‌ها بزرگتر است.

حل: مثلث دلخواه abc را در نظر بگیرید. اوساط اضلاع آن نقاط $\frac{a+b}{۲}$، $\frac{b+c}{۲}$ و $\frac{c+a}{۲}$ خواهند بود. بنابراین طول اضلاع آن، $|a-b|, |c-a|, |b-c|$ و طول میانه‌های آن، $|a-\frac{b+c}{۲}|$, $|b-\frac{c+a}{۲}|$, $|c-\frac{a+b}{۲}|$ می‌باشند. در نتیجه حکم این است که ثابت کنیم:

$$|\frac{b+c}{۲}-a|+|\frac{c+a}{۲}-b|+|\frac{a+b}{۲}-c|<|a-b|+|b-c|+|c-a|$$

داریم:

$$|b+c-۲a|+|c+a-۲b|+|a+b-۲c|=|(b-a)+(c-a)|+$$
$$+|(c-b)+(a-b)|+|(a-c)+(b-c)|<۲(|a-b|+|b-c|+|c-a|)$$

در روابط بالا از این نکته استفاده کردیم که برای هر دو عدد مختلط β, α داریم: $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$ (که α و β با مبدأ همخط نیستند). بنابراین واضح است که برای

سه عدد دلخواه c, b, a داریم:

$$|(b-a)+(c-a)| \leq |a-b|+|a-c|$$

$$|(c-b)|+(a-b)| \leq |c-b|+|a-b|$$

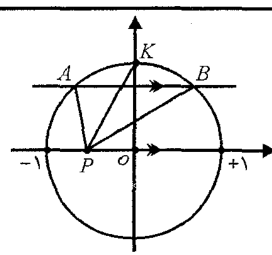
$$|(a-c)+(b-c)| \leq |a-c|+|b-c|$$

از آنجا که abc یک مثلث است، حداقل یکی از اضلاع آن از مبدأ نمی‌گذرد، بنابراین در سه نابرابری فوق حداقل در یکی از آن‌ها، هیچ‌گاه حالت تساوی رخ نخواهد داد. بنابراین از جمع این سه رابطه، نابرابری حکم ثابت می‌شود.

مثال ۳: وتر متغیر AB، از یک دایرهٔ مفروض، با قطر ثابتی از آن دایره، که از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد، موازی است. نشان دهید که مجموع مربع فواصل P از دو انتهای AB، مقداری ثابت و برابر است با، دو برابر مربع فاصلهٔ P از وسط کمان $\widehat{AB}$.

حل: دایرهٔ مفروض مسأله را می‌توان دایرهٔ یکه در نظر گرفت که قطر ثابت آن، روی محور اعداد حقیقی قرار داشته باشد. در این صورت از آنجا که AB با این قطر موازی است، نقطهٔ K روی محور اعداد موهومی قرار خواهد گرفت. بنابراین اگر اعداد p, k, b, a متناظر با نقاط P, K, B, A باشند، داریم:

$$\frac{b-a}{1-(-1)} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{1-(-1)}}$$ (زیرا ab با قطر گذرنده از نقاط ۱+ و ۱ـ موازی است)



شکل (۱۹)

در نتیجه:

$$b-a=\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\Rightarrow -۱=\frac{۱}{ab}\Rightarrow ab=-۱ \qquad (۱)$$

باید ثابت کرد:

$$PA^{۲}+PB^{۲}=۲PK^{۲}$$

و حکم معادل در صفحهٔ مختلط این است که:

$|p-a|^{۲}+|p-b|^{۲}=۲|p-k|^{۲}$ اما داریم:

$$\begin{aligned}|p-a|^{۲}+|p-b|^{۲}&=|a|^{۲}+۲|p|^{۲}-\overline{a}p-ap+|b|^{۲}\\&-\overline{b}p-bp=۲|p|^{۲}+۲\\&-p\big((a+b)+(\overline{a}+\overline{b})\big)\\&=۲|p|^{۲}+۲-p(a+b+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\end{aligned}$$

از طرفی بنابر رابطهٔ (۱) داریم: $a=-\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{a}=-b$، پس: $a+b+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=۰$.

در نتیجه:

$$|p-a|^{۲}+|p-b|^{۲}=۲|p|^{۲}+۲=۲p^{۲}+۲$$ (زیرا $p\in\mathbb{R}$ است)

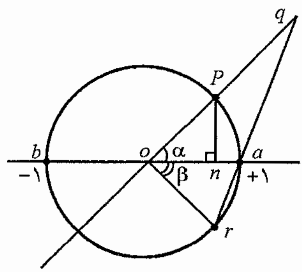
از طرفی عدد مختلط متناظر با K، برابر است با $+i$، بنابراین:

$$\begin{aligned}۲|p-k|^{۲}&=۲(p-k)(\overline{p}-\overline{k})=۲(p-i)(p+i)\\&=۲p^{۲}-۲ip+۲ip-۲i^{۲}=۲p^{۲}+۲\end{aligned}$$

پس حکم ثابت شد.

مثال ۴: نقطهٔ N، تصویر نقطهٔ P، از محیط دایره‌ای به مرکز O، روی قطر AOB از آن دایره است. روی امتداد PO پاره خط PQ را برابر با $۲AN$ جدا می‌نماییم. اگر AQ دایره را در نقطهٔ دیگری مانند R، قطع کند، نشان دهید: $\angle AOR = ۳\angle AOP$.

حل: مطابق شکل (۲۰) اعداد متناظر با A و B را ۱+ و ۱ـ فرض کنید و دیگر نقاط را با حروف کوچک متناظر با آن‌ها، نمایش دهید.



شکل (۲۰)

از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. فرض کنید، زاویهٔ $\overrightarrow{op}$ با محور xها، α، و زاویهٔ $\overrightarrow{or}$ با محور xها، برابر با β باشد (مطابق شکل)، پس داریم: $p = e^{i\alpha} \quad , \quad r = e^{-i\beta}$.

همچنین n تصویر p، روی محور xها است، پس بخش موهومی p، یعنی $i\sin\alpha$، حذف می‌شود تا داشته باشیم: $n = \cos\alpha$. بنابراین $|a-n| = ۱ - \cos\alpha$ و در نتیجه:

$$|p-q| = ۲(۱-\cos\alpha)$$

و از آنجا که $q = kp$ $(k \in \mathbb{R})$ و با توجه به این که $|op| = ۱$، داریم:

$$q = (۳ - ۲\cos\alpha)p$$

در نتیجه:

$$q = (۳ - ۲\cos\alpha)e^{i\alpha}$$

حال اگر از همخط بودن نقاط r, q, a استفاده می‌نماییم:

$$\frac{e^{-i\beta}-۱}{(۳-۲\cos\alpha)e^{i\alpha}-۱}=\frac{\overline{e^{-i\beta}-۱}}{\overline{(۳-۲\cos\alpha)e^{i\alpha}-۱}}$$
$$=\frac{e^{+i\beta}-۱}{(۳-۲\cos\alpha)e^{-i\alpha}-۱}$$
$$\Rightarrow (۳-۲\cos\alpha)e^{-i(\alpha+\beta)}-e^{-i\beta}-(۳-۲\cos\alpha)e^{-i\alpha}$$
$$=(۳-۲\cos\alpha)e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i\beta}-(۳-۲\cos\alpha)e^{i\alpha}$$

پس از مقایسهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی تساوی فوق هر دو رابطهٔ زیر را داریم:

تساوی در قسمت حقیقی : $(-۳+۲\cos\alpha)\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta$

$$+(۳-۲\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$=(۳-۲\cos\alpha)\sin(\alpha+\beta)$$
$$+(۲\cos\alpha-۳)\sin\alpha-\sin\beta$$
$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)(۲\cos\alpha-۳)$$
$$=(۲\cos\alpha-۳)\sin\alpha-\sin\beta$$

که با قرار دادن $\alpha=۳\beta$ رابطهٔ فوق اثبات خواهد شد؛

تساوی در قسمت موهومی : $(۳-۲\cos\alpha)\cos(\alpha+\beta)+\cos\beta$

$$+(۳-۲\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$=(۳-۲\cos\alpha)\cos(\alpha+\beta)$$
$$+\cos\beta+(۳-۲\cos\alpha)\cos\alpha$$

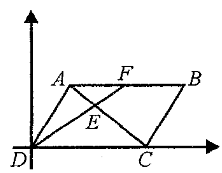
که البته برابری آن بدیهی است. بدین ترتیب حکم ثابت خواهد شد.

مثال ۵: فرض کنید F وسط ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد. ثابت کنید AC، FD را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کند.

حل: فرض کنید f, d, c, b, a متناظر با نقاط F, D, C, B, A به طوریکه c روی محور xها و d مبدأ باشد. همچنین عدد e متناظر با نقطهٔ E باشد، بطوریکه: $\frac{AE}{CE} = \frac{۱}{۲}$؛ حال باید ثابت کرد که E روی FD نیز قرار دارد.

اثبات: داریم: $f = \frac{a+b}{۲}$ و $d = ۰$ و $c \in \mathbb{R}$؛ همچنین می‌دانیم که: $b = a + c$؛ (*)؛

حال داریم:
$$\frac{f-e}{d-e} = \frac{(\frac{a+b}{۲}) - e}{۰ - e}$$



شکل (۲۱)

همان طور که گفتیم $\frac{۱}{۲} = \frac{AE}{CE}$؛ پس $e = \frac{۲a+c}{۳}$؛ در نتیجه:

$$\frac{f-e}{d-e} = \frac{(\frac{a+b}{۲}) - (\frac{۲a+c}{۳})}{۰ - (\frac{۲a+c}{۳})} \overset{\text{از}(*)}{=} \frac{(\frac{۲a+c}{۲}) - (\frac{۲a+c}{۳})}{-(\frac{۲a+c}{۳})} = \frac{-۱}{۲} \in \mathbb{R}$$

از تساوی فوق دو نتیجه می‌گیریم:

(۱) $\frac{f-e}{d-e} \in \mathbb{R} \Longleftarrow \frac{\overline{f}-\overline{e}}{\overline{d}-\overline{e}} = \frac{f-e}{d-e}$, c, d, f همخطند.

(۲) $\frac{f-e}{d-e} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow |\frac{f-e}{d-e}| = \frac{|f-e|}{|d-e|} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |d-e| = ۲|f-e| \cdot$

یعنی علاوه بر اینکه F, D, E همخطند؛ داریم: $ED = ۲FE$.

مثال ۶: در چهار ضلعی محدب $ABCD$ که AB با CD موازی نیست، فرض کنید X نقطه‌ای درون چهارضلعی باشد، بطوری که:

$$\angle ADX = \angle BCX < ۹۰^\circ \quad , \quad \angle DAX = \angle CBX < ۹۰^\circ$$

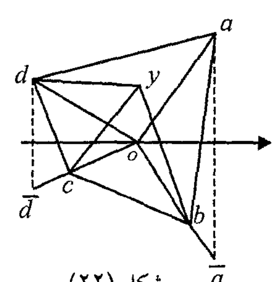
اگر Y محل تلاقی عمود منصف‌های AB و CD باشد، ثابت کنید:

$\angle AYB = ۲\angle ADX$ (سؤال پیشنهادی المپیاد جهانی ـ ۲۰۰۰)

حل: اعداد x, y, d, c, b, a را متناظر با نقاط X, Y, D, C, B, A بگیرید، بطوریکه x برابر با صفر باشد. مثلث‌های ΔDAX و ΔCBX بنابر فرض مسأله متشابهند، بنابراین با توجه به شکل (۲۲) داریم:

$$b = k\overline{a} \quad , \quad c = k\overline{d} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

از طرفی y، هم روی عمود منصف ab قرار دارد و هم روی عمود منصف cd؛ پس داریم:



شکل (۲۲)

$$|y-a| = |y-b| = |y-k\overline{a}| \Rightarrow (y-a)(\overline{y}-\overline{a}) = (y-k\overline{a})(\overline{y}-ka)$$

$$\Rightarrow (ka-\overline{a})y + (k\overline{a}-a)\overline{y} = (k^۲-۱)|a|^۲ \qquad (۱)$$

$$|y-d| = |y-c| = |y-k\overline{d}| \Rightarrow (y-d)(\overline{y}-\overline{d}) = (y-k\overline{d})(\overline{y}-kd)$$

$$\Rightarrow (kd-\overline{d})y + (k\overline{d}-d)\overline{y} = (k^۲-۱)|d|^۲ \qquad (۲)$$

در نتیجه از رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$y = \frac{ka\overline{d}(a-d) + ad(\overline{d}-\overline{a})}{a\overline{d}-\overline{a}d}$$

(توجه کنید که بنابر فرض مسأله $AB \not\parallel CD$، در نتیجه: $k^۲ \neq ۱$ و $a\overline{d} - \overline{a}d \neq ۰$، یعنی محاسبات ما درست است و y موجود است) حال توجه کنید اگر $\frac{d-a}{d-۰} = l \cdot Cis\ \alpha$ $(l \in I\!R^+)$ باشد، آن‌گاه α نشان دهندهٔ زاویهٔ $\angle ADX$ است.

می‌دانیم که: $Cis\ ۲\alpha = (Cis\ \alpha)^۲$، بنابراین کافیست ثابت کنیم:

$$\frac{a-y}{b-y} = t(Cis\ \alpha)^۲ = t' \cdot (\frac{d-a}{d-۰})^۲ (t, t' \in I\!R^+)$$

از رابطهٔ بدست آمده در بالا داریم:

$$a - y = a - \frac{ka\overline{d}(a-d) + ad(\overline{d}-\overline{a})}{a\overline{d} - \overline{a}d}$$

$$= \frac{a(a\overline{d} - \overline{a}d) + ka\overline{d}(d-a) + ad(\overline{a}-\overline{d})}{a\overline{d} - \overline{a}d} = \frac{\overline{d}(a-d)(a-k\overline{a})}{a\overline{d} - \overline{a}d} \qquad (۱)$$

همچنین:

$$b - y = k\overline{a} - \frac{ka\overline{d}(a-d) + ad(\overline{d}-\overline{a})}{a\overline{d} - \overline{a}d}$$

$$= \frac{k\overline{a} \cdot (a\overline{d} - \overline{a}d) + ka\overline{d}(d-a) + ad(\overline{a}-\overline{d})}{a\overline{d} - \overline{a}d}$$

$$= \frac{a \cdot (\overline{a}-\overline{d})(a-k\overline{a})}{a\overline{d} - \overline{a}d} \qquad (۲)$$

بنابراین از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

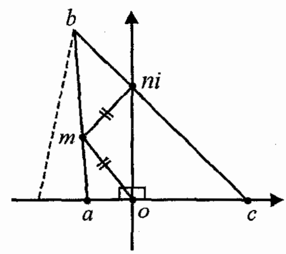
$$\frac{a-y}{b-y} = \frac{\overline{d}(a-d)}{d(\overline{a}-\overline{d})} = \frac{(\overline{d}(a-d))^۲}{|d(\overline{a}-\overline{d})|^۲} = \frac{(d-a)^۲ \cdot (\overline{d})^۲}{|d|^۲ \cdot |a-d|^۲}$$

$$= \frac{(d-a)^۲ (\overline{d})^۲ (d)^۲}{d^۲ \cdot |d|^۲ \cdot |a-d|^۲} = (\frac{d-a}{d-۰})^۲ \cdot (\frac{|d|^۴}{|d|^۲ |a-d|^۲})$$

$$= (\frac{d-a}{d-۰})^۲ \cdot (\frac{|d|^۲}{|d-a|^۲})$$

اکنون قرار می‌دهیم: $t' = \frac{|d|^۲}{|d-a|^۲}$. پس ادعای ما و در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

مثال ۷: نقاط N, M به ترتیب روی اضلاع AB و BC از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، بگونه‌ای قرار دارند که: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{k}{l}$. اگر از N، عمود NH را بر AC رسم کنیم، داریم: $NM = MH$. مقدار $\frac{k}{l}$ را بدست آورید.



شکل (۲۳)

حل: اعداد m, h, c, b, a را به ترتیب متناظر با نقاط M, H, C, B, A بگیرید، بطوریکه c, a روی محور xها و h مبدأ مختصات باشد. واضح است که ni روی محور yها، نشان‌دهندهٔ N خواهد بود $(n \in I\!R)$.

حال از فرض مسأله خواهیم داشت: $ni = \frac{lb + kc}{l + k}$ ، $m = \frac{kb + la}{k + l}$

همچنین از فرض مسأله داریم: $|m - ni| = |m - ۰|$

بنابراین: $(m - ni) \cdot (\overline{m} + ni) = m\overline{m}$

$$\Rightarrow -n\overline{m}i + nmi + n^۲ = ۰ \Rightarrow (-m + \overline{m})i = n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-kb - la}{k + l} + \frac{k\overline{b} + la}{k + l}\right)i = \frac{k}{k + l}(-\overline{b} + b)i = n \qquad (*)$$

اما می‌دانیم که $b - \overline{b}$ برابر است با دو برابر اندازهٔ ارتفاع وارد از b بر محور xها، پس اگر اندازهٔ این ارتفاع را t بنامیم، از تشابه مثلث‌ها داریم: $\frac{n}{t} = \frac{l}{l + k}$. از رابطهٔ $(*)$ خواهیم داشت:

$$\frac{k}{k + l}|b - \overline{b}| = n \Rightarrow ۲\left(\frac{k}{k + l}\right) = \left(\frac{l}{l + k}\right) \Rightarrow l = ۲k$$

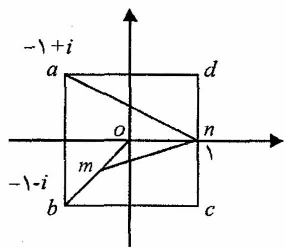
بنابراین $\frac{k}{l} = \frac{۱}{۲}$ و مسأله حل شد.

مثال ۸: O محل برخورد قطرهای مربع $ABCD$ می‌باشد. اگر M و N بترتیب اوساط OB و DC باشند، زاویهٔ $\angle ANM$ را بیابید.

حل: d, c, b, a را مطابق زیر بدست می‌آوریم؛ فرض کنید O روی مبدأ قرار گیرد و AB با محور yها موازی باشد. اندازهٔ ضلع مربع را ۲ بگیرید، خواهیم داشت:

$$a = i - ۱\ ,\ b = -(۱ + i)\ ,\ n = ۱$$

و $$m = \frac{\circ + b}{۲} = -(\frac{۱ + i}{۲})$$



شکل (۲۴)

بنابراین برای محاسبهٔ زاویهٔ بین AN و MN داریم:

$$\frac{a-n}{m-n} = \frac{(i-۱)-۱}{-\dfrac{(۱+i)}{۲}-۱} = \frac{۲(i-۲)}{-۳-i}$$

$$= \frac{۲(۲-i)}{۳+i} = \frac{۲(۲-i)(۳-i)}{(۳+i)(۳-i)} = \frac{(۲-i)(۳-i)}{۵}$$

$$= \frac{۵-۵i}{۵} = ۱-i = \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}i) = \sqrt{۲}Cis\ (-۴۵^\circ)$$

(علامت منفی در $Cis\ (-۴۵^\circ)$ تنها جهت زاویه را نشان می‌دهد) بنابراین:

$$\left|\text{Arg}\ (\frac{a-n}{m-n})\right| = ۴۵^\circ$$

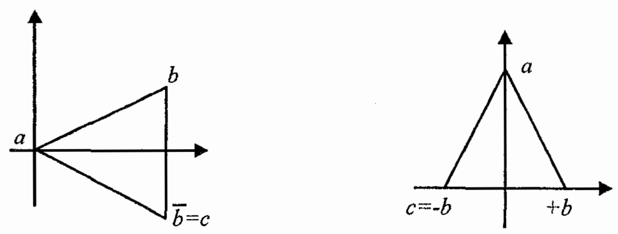
پس زاویهٔ موردنظر ۴۵° است.

۳. مثلث و اجزای آن

ابتدا چند مثلث خاص را بررسی می‌کنیم:

۱ـ **مثلث متساوی‌الساقین**: در این صورت اگر زاویای $\angle B$ و $\angle C$ از مثلث ΔABC برابر باشند، بهتر است چنین عمل شود، که a مبدأ مختصات باشد و c, b نسبت به محور x ها متقارن باشند، یعنی: $c = \overline{b}$.

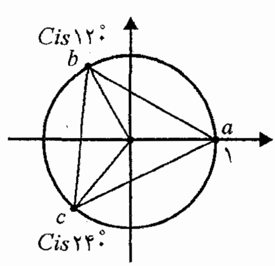
یا اینکه، a روی محور yها قرار گیرد و وسط BC روی مبدأ باشد، در این صورت خواهیم داشت: $b, c \in I\!R$ و $c = -b$.



شکل (۲۵)

۲ـ **مثلث قائم‌الزاویه** $(\angle A = ۹۰^\circ)$: در این صورت بهتر است a مبدأ باشد، بطوریکه b روی محور xها، و c روی محور yها قرار گیرد.

۳ـ **مثلث متساوی الاضلاع**: همان طور که قبلاً اشاره کردیم اگر $a = ۱$ باشد، c, b, a رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ یکّه خواهند بود، (اگر c, b, a ریشه‌های سوم واحد باشند؛ یعنی در معادلهٔ $x^۳ = ۱$ صدق کنند.) بدین ترتیب: $a = ۱$، $b = Cis\ ۱۲۰^\circ$ و $c = Cis\ ۲۴۰^\circ$.



شکل (۲۶)

در هر صورت، غالباً بهتر است، یک مثلث را در دایرهٔ یکّه محاط نمایید و بعد به ادامهٔ محاسبات لازم جهت حل مسأله بپردازید. حال اجزای مثلث دلخواه Δabc در صفحهٔ مختلط را بررسی می‌نماییم:

۱ـ **مرکز دایرهٔ محیطی** Δabc: اگر Δabc در دایرهٔ یکّه محاط باشد، واضح است که مرکز دایرهٔ محیطی آن مبدأ مختصات است، در غیر اینصورت باید بترتیب زیر عمل کرد: اگر مرکز دایرهٔ محیطی Δabc را o بنامیم، می‌دانیم که o محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع Δabc است. بنابراین:

$$|o-a| = |o-b| = |o-c|$$

زیرا فاصلهٔ O تا A، B و C، مساوی شعاع دایره محیطی است. پس:

$$|o-a| = |o-b| \Rightarrow |o-a|^2 = |o-b|^2 \Rightarrow (o-a)(\overline{o}-\overline{a})$$
$$= (o-b)(\overline{o}-\overline{b}) \Rightarrow o(\overline{b}-\overline{a}) + \overline{o}(b-a) + (a\overline{a}-b\overline{b}) = 0$$

به همین ترتیب:

$$|o-a| = |o-c| \Rightarrow o(\overline{c}-\overline{a}) + \overline{o}(c-a) + (a\overline{a}-c\overline{c}) = 0$$

که از حل دو معادلهٔ اخیر، خواهیم داشت:

$$o = \frac{a(|c|^2-|b|^2) + b(|a|^2-|c|^2) + c(|b|^2-|a|^2)}{a(\overline{c}-\overline{b}) + b(\overline{a}-\overline{c}) + c(\overline{b}-\overline{a})}$$

این معادله برای محاسبهٔ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث دلخواه Δabc صادق است.

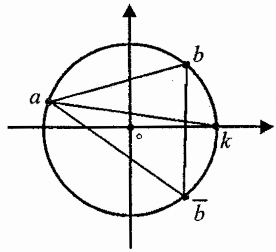
۲ـ **پای میانه**: همان طور که بیان شد، نقطهٔ وسط bc برابر است با $\frac{b+c}{2}$.

۳ـ **پای نیمساز**: اگر مثلث Δabc را در دایرهٔ یکّه محاط نمائیم، بطوریکه $c = \overline{b}$؛ آن‌گاه نقطهٔ وسط کمان $\widehat{bc}$ روی محور xها قرار خواهد داشت. این نقطه را k می‌نامیم؛ بنابراین، پای نیمساز نظیر رأس a در مثلث Δabc را می‌توان از برخورد خط $\overleftrightarrow{b\overline{b}}$ با $\overleftrightarrow{ak}$ بدست آورد.

همچنین در حالت کلی برای مثلث دلخواه Δabc، می‌توان به طریق زیر پای نیمساز نظیر

رأس a را بدست آورد: می‌دانیم که پای نیمساز نظیر رأس A در مثلث ΔABC، که آن را D_1 می‌نامیم، BC را به نسبت $\frac{AB}{AC}$ قطع می‌کند، یعنی:

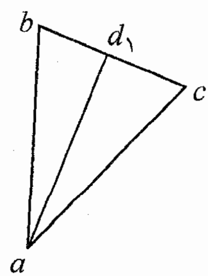
$$\frac{CD_1}{BD_1} = \frac{AC}{AB}$$



شکل (۲۷)

در نتیجه اگر d_1 متناظر با D_1 باشد، داریم:

$$d_1 = \frac{|b-a|c + |c-a|b}{|b-a| + |c-a|}$$

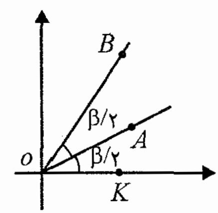


شکل (۲۸)

همچنین از نمایش قطبی، می‌توان مختصات نقطهٔ a با اندازه مفروض $|a|$ را روی نیمساز زاویهٔ $\angle BOK$ بدست آورد. فرض کنید o مبدأ باشد و k روی محور اعداد حقیقی واقع باشد، در نتیجه اگر: $b = |b|e^{i\beta}$، آن‌گاه: $a = |a|e^{i\frac{\beta}{2}}$. همچنین در حالت کلی اگر BT نیمساز زاویهٔ $\angle ATC$ باشد، داریم:

$$\frac{a-t}{b-t} = \left(\frac{b-t}{c-t}\right)^{۲} \cdot l$$

که $l \in \mathbb{R}^+$. استدلال: فرض کنید $\frac{b-t}{c-t} = kCis\ \alpha$ $(k \in \mathbb{R}^+)$، در نتیجه بنابر آنچه که قبلاً آوردیم، α زاویهٔ بین $\vec{tb}$ و $\vec{tc}$ خواهد بود و اگر BT نیمساز $\angle ATC$ باشد، داریم:

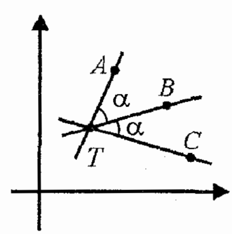


شکل (۲۹)

$$(k' \in \mathbb{R}^+)\frac{a-t}{c-t} = k'Cis\ ۲\alpha$$

از طرفی:

$$Cis\ (۲\alpha) = (Cis\ \alpha)^{۲}$$



شکل (۳۰)

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{a-t}{c-t} = k'k(Cis\ \alpha)^{۲} = l(\frac{b-t}{c-t})^{۲}$$

۴ـ مرکز دایرهٔ محاطی: در حالت کلی فرمول پیچیده‌ای بدست خواهد آمد که حل مسأله را با مشکل مواجه خواهد نمود، بنابراین باید حالات خاص را در نظر گرفت. بهترین حالت در

نظر گرفتن دایرهٔ یکّه به عنوان دایرهٔ محاطی مثلث دلخواه Δabc است، در این صورت اگر m و n و t به ترتیب محل تماس این دایره با اضلاع BC، CA و AB باشند، داریم:

$$a = \frac{۲nt}{n+t} \quad , \quad b = \frac{۲tm}{t+m} \; , \; c = \frac{۲mn}{m+n}$$

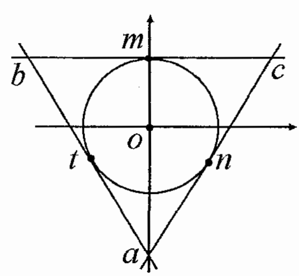
زیرا می‌دانیم که معادلهٔ خطوط مماس بر نقاط m و n برابرند با:

$$m\overline{z} + \frac{z}{m} = ۲$$
$$n\overline{z} + \frac{z}{n} = ۲$$

که از حل این دو معادلهٔ خط خواهیم داشت:

$$z = \frac{۲mn}{m+n}$$

که همان نقطهٔ برخورد دو مماس یعنی c می‌باشد. به همین ترتیب a و b بدست آمده‌اند.



شکل (۳۱)

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{a} = \frac{t+n}{۲tn} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n} + \frac{۱}{t})$$

$$\frac{۱}{b} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{t} + \frac{۱}{m}) \quad , \quad \frac{۱}{c} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n})$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۲}\Big(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t}+\frac{۱}{m}-\frac{۱}{m}-\frac{۱}{n}\Big)=\frac{۱}{۲}(\frac{۲}{t})=\frac{۱}{t}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}}$$

به همین ترتیب:

$$m=\frac{۱}{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}}\ ,\ \ n=\frac{۱}{\frac{۱}{c}+\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}}$$

یعنی با داشتن a, b, c هم می‌توان t, m, n را محاسبه نمود.

۵ـ مرکز ثقل: اگر g مرکز ثقل مثلث Δabc باشد و m وسط b, a، می‌دانیم g پاره خط mc را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. بنابراین از آنجا که $m=\frac{a+b}{۲}$، داریم:

$$g=\frac{۲m+c}{۳}=\frac{۲(\frac{a+b}{۲})+c}{۳}=\frac{a+b+c}{۳}$$

۶ـ مرکز ارتفاعی: در حالت کلی محل تلاقی ارتفاع‌ها، فرمول پیچیده‌ای خواهد داشت، که حل مسأله را بسیار دشوار می‌سازد. بنابراین حالت خاص محاط بودن مثلث دلخواه Δabc، در دایره‌ای به مرکز مبدأ را نظر می‌گیریم، پس مرکز دایرهٔ محیطی Δabc، مبدأ مختصات است. همچنین از هندسهٔ کلاسیک می‌دانیم که اگر، H مرکز ارتفاعی، O مرکز دایرهٔ محیطی و G مرکز ثقل ΔABC باشند، آن‌گاه: $OH=۳OG$ و H و G با O هم‌خط می‌باشند (خط اویلر).

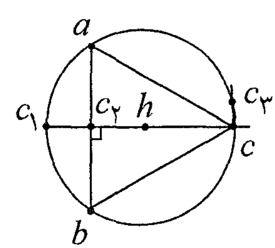
بنابراین اگر h متناظر با H باشد، از آنجا که $g=\frac{a+b+c}{۳}$ و $o=۰$ داریم:

$$h=۳g=a+b+c$$

۷ـ پای ارتفاع: مثلث Δabc با مرکز ارتفاعی h، که در دایرهٔ یکّه محاط شده است، را در

نظر بگیرید. فرض کنید $\vec{ch}$ ضلع ab را در c_2 و دایرهٔ محیطی Δabc را در c_1 قطع کند. همچنین c_3 نقطه‌ای روی محیط این دایره باشد بطوریکه $\vec{cc_3} || \vec{ab}$. بنابراین داریم:

$$bc = ac_3 \Rightarrow \angle boc = \angle c_3oa = \alpha$$



شکل (۳۲)

بنابراین از آنجا که داریم: $\angle boc = \text{Arg}\,(\frac{c-0}{b-0})$ و $\angle c_3oa = \text{Arg}\,(\frac{a-0}{c_3-0})$،

پس:

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{c_3} = Cis\ \alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

پس: $\frac{ab}{c} = c_3$. اما c_3 و c_1 دو سه یک قطر از این دایره‌اند، بنابراین: $c_1 = -c_3$.

اما از هندسهٔ کلاسیک می‌دانیم که $hc_2 = c_1c_2$، پس:

$$c_2 = \frac{c_1+h}{2} = (\frac{-ab}{2c}) + (\frac{a+b+c}{2})$$

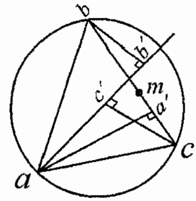
به همین ترتیب a_2 و b_2 نیز بدست می‌آیند:

$$b_2 = (\frac{-ca}{2b}) + (\frac{a+b+c}{2})$$

$$a_2 = (\frac{-bc}{2a}) + (\frac{a+b+c}{2})$$

- حال با شناختن اجزای مثلث در صفحهٔ مختلط، می‌توانیم به حل مثال‌هایی از مسابقات و المپیادهای مختلف بپردازیم.

مثال ۱: ثابت کنید پای یک ارتفاع مثلث، به همراه تصویرهای رئوس دیگر روی قطر دایرهٔ محیطی گذرنده از رأس ارتفاع مذکور، روی دایره‌ای به مرکز وسط ضلع مقابل قرار دارند.



شکل (۳۳)

حل: مثلث Δabc محاط در دایرهٔ یکّه را در نظر بگیرید. m وسط ضلع bc بوده و a' پای ارتفاع وارد بر bc می‌باشد. همچنین تصاویر c, b روی قطر مذکور را b' و c' می‌نامیم.

داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a' = (\frac{a+b+c}{۲}) - (\frac{bc}{۲a}) \\ \text{و} \\ m = \frac{b+c}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow |m - a'|$$

$$= |\frac{a}{۲} - \frac{bc}{۲a}| = \frac{۱}{۲|a|}|a^۲ - bc| = \frac{۱}{۲}|a^۲ - bc|$$

(زیرا: $۱ = |a|$). همچنین داریم: $b' = \frac{b+a-a}{۲} - \frac{(a)(-a)}{۲b} = \frac{b}{۲} + \frac{a^۲}{۲b}$

زیرا b' پای ارتفاع مثلثی است که رئوسش عبارتند از $-a, b, o$.

$$\Rightarrow |m - b'| = |\frac{c}{۲} - \frac{a^۲}{۲b}| = \frac{۱}{۲|b|}|bc - a^۲| = \frac{۱}{۲}|a^۲ - bc|$$

و مشابهاً $c' = \frac{c+a-a}{۲} - \frac{(a)(-a)}{۲c} = \frac{c}{۲} + \frac{a^۲}{۲c}$

$$\Rightarrow |m - c'| = |\frac{b}{۲} - \frac{a^۲}{۲c}| = \frac{۱}{۲|c|}|a^۲ - bc| = \frac{۱}{۲}|a^۲ - bc|$$

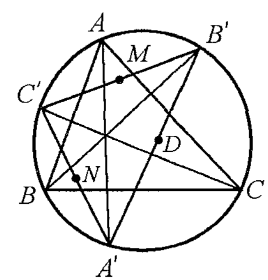
بنابراین داریم: $|m - a'| = |m - b'| = |m - c'|$ و حکم ثابت شد، زیرا فاصلهٔ m از a'، b' و c' یکسان است.

مثال ۲: فرض کنید A'، B' و C' محل برخورد ارتفاع‌های نظیر رئوس A، B و C با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض ΔABC باشند. همچنین M، N و D اوساط $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ باشند.

ثابت کنید:

الف) محیط مثلث $\Delta ABC >$ محیط مثلث $\Delta A'B'C'$

ب) $R \cdot MN = ۲S(A\overset{\Delta}{O}B)$. که R و O بترتیب شعاع و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC هستند و S نشانگر مساحت می‌باشد.



شکل (۳۴)

حل: ابتدا قسمت (ب) را حل می‌کنیم: فرض کنید $R = ۱$ و $o \to ۰$؛ داریم: $\vec{cc'} \perp \vec{ba}$؛

در نتیجه:

$$\frac{c-c'}{\overline{c}-\overline{c'}} + \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = ۰ \Rightarrow \frac{c-c'}{\frac{۱}{c}-\frac{۱}{c'}} + \frac{b-a}{\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{c-c'}{\frac{c'-c}{cc'}} + \frac{b-a}{\frac{a-b}{ab}} = ۰ \Rightarrow -cc' = ab \Rightarrow c' = \frac{-ab}{c}$$

پس به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$a' = \frac{-bc}{a} \ , \ \ b' = -\frac{ca}{b}$$

بنابراین:

$$MN = |m-n| = \frac{۱}{۲}\Big|\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - \frac{ab}{c} - \frac{ca}{b}\Big|$$
$$= \frac{۱}{۲}\Big|\frac{bc}{a} - \frac{ca}{b}\Big| = \frac{۱}{۲}|c|\cdot\Big|\frac{b^۲ - a^۲}{ba}\Big|$$

اما $|a| = |b| = |c| = R = ۱$، در نتیجه:

$$R\cdot|MN| = \frac{۱}{۲}\Big|\frac{b^۲-a^۲}{ba}\Big| = \frac{۱}{۲}\frac{|b-a||b+a|}{|b||a|} = \frac{۱}{۲}|b-a|\cdot|b+a|$$
$$= |b-a|\cdot\Big|\frac{b+a}{۲} - ۰\Big| = AB\cdot OK$$

که K وسط AB می‌باشد، امّا می‌دانیم، $OK\perp AB$ و $S(A\overset{\triangle}{O}B) = \frac{OK\cdot AB}{۲}$، در نتیجه:

$$۲S(A\overset{\triangle}{O}B) = R\cdot MN$$

برای قسمت (الف) هم خواهیم داشت:

$$۲S(A\overset{\triangle}{B}C) = ۲\big(S(A\overset{\triangle}{O}B) + S(B\overset{\triangle}{O}C) + S(C\overset{\triangle}{O}A)\big)$$
$$= R(MN + ND + DM) \Rightarrow ۲P(A\overset{\triangle}{B}C)\cdot r$$
$$= ۲P(M\overset{\triangle}{N}D)\cdot R = P(A'\overset{\triangle}{B'}C')\cdot R$$

(r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ΔABC، و P نصف محیط آن است). پس:

$$\frac{P(A\hat{B}C)}{P(A'\overset{\triangle}{B'}C')} = \frac{R}{۲r} \geq ۱$$

(نابرابری اخیر در هندسهٔ کلاسیک با توجه به خط اولر و روابط آن اثبات می‌شود) و حکم ثابت شد.

مثال ۳: فرض کنید H و K پای ارتفاع‌های وارد بر AC و BC از مثلث ΔABC باشند، و O مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث باشد. ثابت کنید: $OC \perp HK$.

حل: دایرهٔ محیطی مفروض را دایرهٔ یکّه در نظر بگیرید، پس $o = ۰$. اعداد متناظر با نقاط را با حروف کوچک همان نقاط نشان می‌دهیم. داریم:

$$h = \frac{a+b+c}{۲} - \frac{ac}{۲b}$$

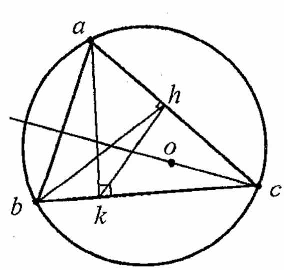
و

$$k = \frac{a+b+c}{۲} - \frac{bc}{۲a}$$

بنابراین:

$$\frac{c-۰}{h-k} + \frac{\overline{c}-\overline{۰}}{\overline{h}-\overline{k}} = \frac{c}{\dfrac{bc}{۲a} - \dfrac{ac}{۲b}} + \frac{\dfrac{۱}{c}}{\dfrac{a}{۲bc} - \dfrac{b}{۲ac}}$$

$$= \frac{۲ab}{۲b^۲ - ۲a^۲} + \frac{۲ab}{۲a^۲ - ۲b^۲} = ۰$$

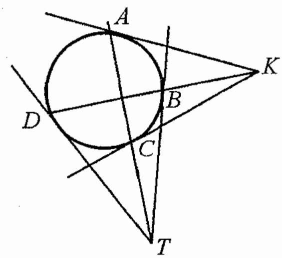


شکل (۳۵)

پس حکم ثابت شد.

مثال ۴: ۴ نقطهٔ A، B، C و D به همین ترتیب روی دایره‌ای واقعند. ثابت کنید، اگر مماس‌های وارد براین دایره در نقاط C, A، یکدیگر را روی امتداد BD قطع کنند، آن‌گاه مماس‌های وارد بر دایره در نقاط B و D نیز با خط AC همرسند.

حل: دایرهٔ مفروض را دایرهٔ یکّه در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم شرط همخط بودن K، B و D، با شرط همخط بودن T، C و A معادل است (K محل تلاقی مماس‌های وارد بر A و C؛ و T محل تلاقی مماس‌های وارد بر B و D می‌باشد).



شکل (۳۶)

TB و TD بر دایره مماسند.

اگر اعداد متناظر را با حروف کوچک همان نقاط نشان دهیم، شرط هم خط بودن K و B و D معادل است با:

$$\frac{b-k}{b-d}=\frac{\overline{b}-\overline{k}}{\overline{b}-\overline{d}}$$

اما $\overline{d}=\frac{۱}{d}$ و $\overline{b}=\frac{۱}{b}$ و $\overline{c}=\frac{۱}{c}$ و $\overline{a}=\frac{۱}{a}$ و $k=\frac{۲ac}{a+c}$. در نتیجه:

$$\frac{b-(\frac{۲ac}{a+c})}{b-d}=\frac{\frac{۱}{b}-(\frac{۲}{a+c})}{\frac{۱}{b}-\frac{۱}{d}}\Leftrightarrow\frac{b(a+c)-۲ac}{(b-d)(a+c)}=\frac{d(a+c-۲b)}{(a+c)(d-b)}$$

$$\Leftrightarrow ba+bc-۲ac=-cd-ad+۲bd\Leftrightarrow(a+c)(b+d)=۲(ac+bd)(۱)$$

حال اگر شرط هم خط بودن T و C و A را بنویسیم، به طریق مشابه خواهیم داشت:

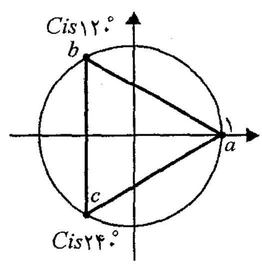
$$\frac{a-(\frac{۲bd}{b+d})}{a-c}=\frac{\overline{a}-(\frac{۲\overline{bd}}{\overline{b}+\overline{d}})}{\overline{a}-\overline{c}}$$

و با اندکی محاسبات، به این نتیجه می‌رسیم که باید داشته باشیم:

$$(b+d)(a+c)=۲(bd+ac) \qquad (۲)$$

همان طور که مشاهده می‌شود شروط (۱) و (۲) یکسانند. پس حکم ثابت شد.

مثال ۵: نقطهٔ P واقع بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC را در نظر بگیرید. ثابت کنید فاصلهٔ آن تا یکی از رئوس مثلث ΔABC برابر است با مجموع فواصل آن تا دو رأس دیگر.



شکل (۳۷)

حل: دایرهٔ محیطی را طبق معمول یکّه فرض می‌نماییم. همان طور که در توضیح مثلث متساوی‌الاضلاع گفتیم، اگر یکی از رئوس Δabc مثلاً a، مساوی واحد باشد، رئوس دیگر آن $b=Cis\ ۱۲۰^\circ$ و $c=Cis\ ۲۴۰^\circ$ هستند. نقطهٔ $p=Cis\ \alpha$ را در نظر بگیرید، این نقطه روی دایرهٔ مفروض قرار دارد. داریم:

$$|p-a|=|Cis\ \alpha-۱|$$

و

$$|p-b| = |Cis\ \alpha - Cis\ ۱۲۰^\circ|$$

$$|p-c| = |Cis\ \alpha - Cis\ ۲۴۰^\circ| \Rightarrow |p-a| = |(\cos\alpha - ۱) + i\sin\alpha|$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha - ۱)^۲ + \sin^۲\alpha} = \sqrt{۲ - ۲\cos\alpha}$$

و

$$|p-b| = |(\cos\alpha - \cos ۱۲۰) + i(\sin\alpha - \sin ۱۲۰^\circ)|$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha - \cos ۱۲۰^\circ)^۲ + (\sin\alpha - \sin ۱۲۰^\circ)^۲}$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha + \frac{۱}{۲})^۲ + (\sin\alpha - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}$$

$$= \sqrt{۲ + \cos\alpha - \sqrt{۳}\sin\alpha}$$

و

$$|p-c| = |(\cos\alpha - \cos ۲۴۰^\circ) + i(\sin\alpha - \sin ۲۴۰^\circ)|$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha + \frac{۱}{۲})^۲ + (\sin\alpha + \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}$$

$$= \sqrt{۲ + \cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha}$$

بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که P روی کمان $\widehat{BC}$ باشد یا معادلاً $۲۴۰^\circ > \alpha > ۱۲۰^\circ$ باشد، ثابت می‌کنیم: $|p-a| = |p-b| + |p-c| \Leftrightarrow$

$$|p-a|^۲ = |p-b|^۲ + |p-c|^۲ + ۲|p-b|\cdot|p-c|$$

$$\Leftrightarrow (۲ - ۲\cos\alpha)$$

$$= (۲ + \cos\alpha - \sqrt{۳}\sin\alpha) + (۲ + \cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha)$$

$$+ ۲\sqrt{(۲ + \cos\alpha - \sqrt{۳}\sin\alpha)(۲ + \cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow (۲ - ۲\cos\alpha)$$
$$= ۴ + ۲\cos\alpha + ۲\sqrt{(۲+\cos\alpha)^۲ - ۳\sin^۲\alpha}$$
$$= ۴ + ۲\cos\alpha + ۲\sqrt{(۲\cos\alpha + ۱)^۲}$$
$$= ۴ + ۲\cos\alpha - ۲(۲\cos\alpha + ۱)$$

(زیرا : $۱۲۰^\circ < \alpha < ۲۴۰^\circ$ و در نتیجه:

$(|۲\cos\alpha + ۱| = -۲\cos\alpha - ۱ \Leftrightarrow ۲ - ۲\cos\alpha = ۲ - ۲\cos\alpha$

و بنابراین حکم ثابت شد.

مثال ۶: ثابت کنید، متقارن مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC نسبت به رأس A، متقارن A نسبت به M (وسط BC)، و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC هم‌خطند.

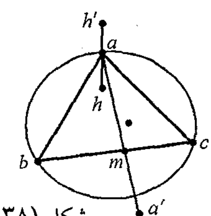
حل: اعداد h, m, c, b, a و a', h' نشان دهندهٔ نقاط A و B و C و M و H (مرکز ارتفاعی) و H' (قرینهٔ H نسبت به A) و A' (قرینهٔ A نسبت به M) هستند. دایرهٔ محیطی ΔABC را دایرهٔ یکّه می‌گیریم.

باید ثابت کنیم: $O \in A'H'$، داریم: $o = ۰$ و $h = a + b + c$ و $m = \dfrac{b+c}{۲}$

همچنین: $a = \dfrac{h+h'}{۲} \Rightarrow h' = ۲a - h = a - b - c$

و

$m = \dfrac{a+a'}{۲} \Rightarrow a' = ۲m - a = b + c - a$



شکل (۳۸)

در نتیجه: $\dfrac{a'+h'}{۲} = ۰$، یعنی علاوه بر این که O با A' و H' هم‌خط است، وسط پاره خط $A'H'$ نیز قرار دارد.

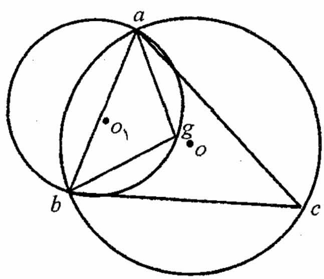
مثال ۷: مرکز ثقل مثلث ΔABC را G بنامید. اگر $O_۱, O_۲, O_۳$ مراکز دوایر محیطی مثلث‌های ΔGAB، ΔGBC و ΔGAC باشند، ثابت کنید، O مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC، مرکز ثقل مثلث $\Delta O_۱O_۲O_۳$ می‌باشد.

حل: طبق معمول O را مبدأ مختصات و دایرهٔ محیطی ΔABC را دایرهٔ یکّه می‌گیریم. داریم: $g = \frac{a+b+c}{۳}$، و هم‌چنین:

$$o_۱ = \frac{a(|g|^۲ - |b|^۲) + b(|a|^۲ - |g|^۲) + g(|b|^۲ - |a|^۲)}{a(\overline{g} - \overline{b}) + b(\overline{a} - \overline{g}) + g(\overline{b} - \overline{a})}$$

$$= \frac{a(|g|^۲ - ۱ + b(۱ - |g|^۲) + g(۱ - ۱)}{a(\overline{g} - \frac{۱}{b}) + b(\frac{۱}{a} - \overline{g}) + g(\frac{۱}{b} - \frac{۱}{a})}$$

$$= \frac{a(|g|^۲ - ۱) + b(۱ - |g|^۲)}{\overline{g}(a-b) + \frac{b^۲ - a^۲}{ab} + g(\frac{a-b}{ab})} = \frac{۱ - |g|^۲}{\frac{a+b}{ab} - \frac{g}{ab} - \overline{g}}$$



شکل (۳۹)

که با جایگذاری مقدار g خواهیم داشت:

$$o_۱ = \frac{۱ - |g|^۲}{-\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}) + \frac{a+b}{ab} - \frac{a+b+c}{۳ab}} = \frac{-۳abc(۱ - |g|^۲)}{(c-a)\cdot(c-b)}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$o_۲ = \frac{-۳abc(۱-|g|^۲)}{(a-b)(a-c)} \quad , \quad o_۳ = \frac{-۳abc(۱-|g|^۲)}{(b-a)(b-c)}$$

بنابراین مرکز ثقل مثلث $\Delta o_۱o_۲o_۳$ برابر خواهد بود با:

$$\frac{o_۱+o_۲+o_۳}{۳} = -abc(۱-|g|^۲)$$

$$\left(\frac{۱}{(c-a)(c-b)} + \frac{۱}{(a-b)(a-c)} + \frac{۱}{(b-a)(b-c)}\right)$$

اما داریم:

$$\frac{۱}{(c-a)(c-b)} + \frac{۱}{(a-b)(a-c)} + \frac{۱}{(b-c)(b-a)}$$
$$= \frac{(a-b)+(b-c)+(c-a)}{(c-a)(a-b)(b-c)} = ۰$$

بنابراین $\frac{o_۱+o_۲+o_۳}{۳} = ۰$، که صفر همان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC است و حکم ثابت شد.

مثال ۸: چهار ضلعی محاطی $ABCD$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. فرض کنید $L_۱$ و $L_۲$ محل تلاقی میانه‌های دو مثلث ΔABC و ΔADC باشند. محل برخورد خطوطی که وسط اضلاع مقابل این چهار ضلعی را به هم وصل می‌کنند، M بنامید. اگر $G_۱$ و $G_۲$ مرکز ثقل مثلث‌های ΔOBD و $\Delta G_۱L_۱L_۲$ باشند، ثابت کنید:

(i) $G_۲, M, O$ همخطند.

(ii) $\overline{OM} = \frac{۹}{۸}\overline{G_۲O}$

حل: مطابق معمول بهتر است دایرهٔ محیطی $ABCD$ را دایرهٔ یکّه در نظر بگیریم، در نتیجه o مبدأ مختصات خواهد بود و داریم:

$$l_1 = \frac{a+b+c}{3} \quad , \quad l_2 = \frac{a+d+c}{3} \quad , \quad g_1 = \frac{o+b+d}{3} = \frac{b+d}{3}$$

همچنین m_1، m_2، m_3 و m_4 به ترتیب اوساط اضلاع ab، cd، bc و da هستند.

m، وسط m_1m_2 و m_3m_4 قرار دارد، و داریم:

$$\frac{m_1+m_2}{2} = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{m_3+m_4}{2}$$

(یعنی محل تلاقی m_1m_2 با m_3m_4 منصف آن‌ها نیز می‌باشد)، پس:

$$m = \frac{a+b+c+d}{4}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{l_1+l_2+g_1}{3} \\ &= \frac{(\frac{a+b+c}{3}) + (\frac{a+d+c}{3}) + (\frac{b+d}{3})}{3} \\ &= \frac{2}{9}(a+b+c+d) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{m-0}{g_2-0} = \frac{(\frac{a+b+c+d}{4})-0}{\frac{2}{9}(a+b+c+d)-0} = \frac{9}{8} \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

که نشان می‌دهد m و g_2 روی خط گذرنده از مبداء o می‌باشند.

$$\Rightarrow |m-0| = \frac{9}{8}|g_2-0| \qquad (2)$$

پس، از (۱) و (۲) درستی حکم (i) و (ii) نتیجه می‌شود.

مثال ۹: فرض کنید D نقطه‌ای دلخواه روی کمان $\widehat{BC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC باشد. اگر $H_۱$ و $H_۲$ مراکز ارتفاعی مثلث‌های ΔABD و ΔACD باشند، ثابت کنید:
$H_۱H_۲ = BC$ و $H_۱H_۲ || BC$.

حل: مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC را مبدأ مختصات می‌گیریم، داریم:

$$h_۱ = a + b + d \quad , \quad h_۲ = a + c + d$$

بنابراین:

$$\frac{h_۱ - h_۲}{b - c} = \frac{(a + b + d) - (a + c + d)}{b - c} = \frac{b - c}{b - c} = ۱$$

که از تساوی فوق دو نتیجه می‌گیریم:

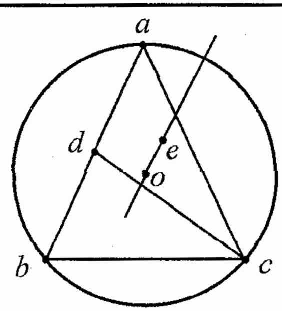
(۱) $\frac{h_۲ - h_۱}{b - c} \in \mathbb{R}$ ؛ در نتیجه $BC || H_۱H_۲$

(۲) $\left|\frac{h_۲ - h_۱}{b - c}\right| = \frac{|h_۲ - h_۱|}{|b - c|} = ۱$ ؛ در نتیجه $H_۱H_۲ = BC$

مثال ۱۰: O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین $\Delta ABC (AB = AC)$ می‌باشد. D وسط ضلع AB و E مرکز ثقل مثلث ΔACD می‌باشد. ثابت کنید: $CD \perp OE$.

حل: مطابق معمول دایرهٔ محیطی ΔABC را یکّه می‌گیریم.

خواهیم داشت:



شکل (۴۰)

$$d = \frac{a+b}{۲}$$

$$e = \frac{a+d+c}{۳} \Rightarrow e = \frac{a + (\frac{a+b}{۲}) + c}{۳} = \frac{۳a + ۲c + b}{۶}$$

حکم این است که:

$$CD \perp OE \Leftrightarrow \frac{۳a+۲c+b}{۲c-a-b} + \frac{۳\overline{a}+۲\overline{c}+\overline{b}}{۲\overline{c}-\overline{a}-\overline{b}} = ۰$$ (توجه کنید $o = ۰$)

$$\Leftrightarrow \frac{۳a+۲c+b}{۲c-a-b} + \frac{\frac{۳}{a}+\frac{۲}{c}+\frac{۱}{b}}{\frac{۲}{c}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}} = ۰$$

$$\Leftrightarrow \frac{۳a+۲c+b}{۲c-a-b} + \frac{۳bc+۲ab+ac}{۲ab-bc-ac} = ۰$$

$$\Leftrightarrow (۲ab-bc-ac)\cdot(۳a+۲c+b)$$

$$+(۳bc+۲ab+ac)\cdot(۲c-a-b) = ۰$$

$$\Leftrightarrow ۴a^۲b - ۴b^۲c + ۴bc^۲ - ۴a^۲c = ۰$$

$$\Leftrightarrow b(a^۲+c^۲) = c(b^۲+a^۲) \qquad (۱)$$

اما داریم: $AB = AC$، یعنی:

$$|a-b| = |a-c| \Rightarrow |a-b|^۲ = |a-c|^۲$$

$$\Rightarrow (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (a-c)(\overline{a}-\overline{c})$$

$$\Rightarrow ۲ - (\frac{a}{b}+\frac{b}{a}) = ۲ - (\frac{a}{c}+\frac{c}{a})$$

$$\Rightarrow b(a^۲+c^۲) = c(b^۲+a^۲)$$

که همان رابطهٔ (۱) است، بنابراین حکم ثابت شد.

مثال ۱۱: در مثلث ΔABC، G محل همرسی میانه‌ها است، و نیمساز BD بر میانهٔ AM عمود است. ثابت کنید: $AB||GD$.

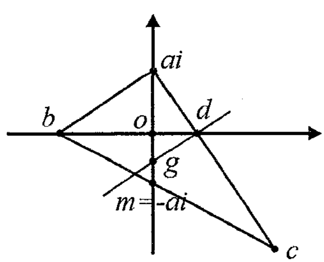
حل: از آنجا که $\vec{bd}\perp a\vec{m}$، اگر محل همرسی $a\vec{m}$ و $\vec{bd}$ را مبدأ در نظر بگیریم، بطوریکه $\vec{bd}$ روی محور اعداد حقیقی قرار گیرد، A روی محور yها می‌افتد که متناظر با ai $(a \in I\!R)$ در نظر گرفته شده است؛ همچنین چون $\vec{bd}$ نیمساز زاویهٔ $\angle ABM$ می‌باشد، خواهیم داشت: $m = -ai$. پس داریم:

$$m = -ai = \frac{b+c}{۲} \Rightarrow c = -۲ai - b$$

در نتیجه:
$$g = \frac{ia+b+c}{۳} = \frac{ai+b-۲ai-b}{۳} = \frac{-ai}{۳}$$

همچنین $d = \overline{d}$ و $d \in \overrightarrow{(ai)c}$، پس:

$$\frac{d-ai}{\overline{d}-\overline{ai}} = \frac{ai+(۲ai+b)}{\overline{ai}+(۲\overline{ai}+\overline{b})} \Rightarrow \frac{d-ai}{d+ai} = \frac{۳ai+b}{-ai+b-۲ai} = \frac{b+۳ai}{b-۳ai}$$
$$\Rightarrow (b-۳ai)d - ai(b-۳ai) - (b+۳ai)d - ai(b+۳ai) = ۰$$



شکل (۴۱)

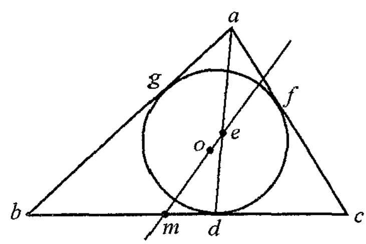
بنابراین:

$$\frac{d-g}{ai-b} = \frac{-\frac{۱}{۳}b + \frac{۱}{۳}ai}{ai-b} = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین هم توازی AB، CD اثبات گردید و هم ثابت شد: $AB = ۳GD$

مثال ۱۲: ضلع BC از مثلث ΔABC بر دایرهٔ محاطی آن در نقطهٔ D مماس است. ثابت کنید، مرکز این دایره بر خط راستی قرار دارد که از وسط پاره خط‌های راست BC و AD می‌گذرد.

حل: نقاط تماس دیگر را مطابق شکل F و G می‌نامیم و نقطهٔ وسط BC را M، و وسط AD را E می‌نامیم. دایرهٔ محاطی را دایرهٔ یکه فرض می‌کنیم، بنابراین باید ثابت کنیم که $\overrightarrow{em}$ از مبدأ می‌گذرد. از قبل می‌دانیم: $a = \frac{۲fg}{f+g}\ ,\ b = \frac{۲gd}{g+d}\ ,\ c = \frac{۲df}{d+f}$



شکل (۴۳)

داریم:
$$e = \frac{a+d}{۲} = \frac{fg}{f+g} + \frac{d}{۲}$$
و
$$m = \frac{b+c}{۲} = \frac{gd}{g+d} + \frac{df}{d+f}$$
باید ثابت کرد:
$$\frac{e-۰}{\overline{e}-\overline{۰}} = \frac{m-۰}{\overline{m}-\overline{۰}} \Leftrightarrow \frac{\frac{fg}{f+g}+\frac{d}{۲}}{\frac{۱}{f+g}+\frac{۱}{۲d}} = \frac{\frac{gd}{g+d}+\frac{fd}{f+d}}{\frac{۱}{g+d}+\frac{۱}{f+d}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{۲fg+d(f+g)}{\frac{۲d+(f+g)}{d}} = \frac{gd(f+d)+(g+d)fd}{(f+g)+۲d}$$
$$\Leftrightarrow ۲fgd + d^۲(f+g) = gd(f+d)+(g+d)fd = ۲fgd + d^۲(f+g)$$

پس حکم ثابت شد.

مثال ۱۳: خط واصل بین مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC و وسط BC، دایرهٔ محیطی ΔABC را در نقاط $A_۱$ و $A_۲$ قطع می‌کند. ثابت کنید مراکز ارتفاعی سه مثلث ΔABC، $\Delta A_۱BC$ و $\Delta A_۲BC$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

حل: دایرهٔ محیطی مثلث Δabc را دایرهٔ یکّه در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم: $\overline{c}=\frac{۱}{c}$ و $\overline{b}=\frac{۱}{b}$ و $\overline{a}=\frac{۱}{a}$ و $h=a+b+c$ (h مرکز ارتفاعی Δabc) و $m=\frac{b+c}{۲}$ (m وسط ضلع bc).

نقاط $a_۱$ و $a_۲$ از یک طرف روی دایرهٔ یکّه قرار دارند، که نتیجه می‌شود در معادلهٔ $|z|=۱$ یا در واقع $\overline{z}=\frac{۱}{z}$ صدق می‌کنند، و از طرف دیگر روی خط گذرنده از $(a+b+c)$ و $(\frac{b+c}{۲})$ قرار دارند، بنابراین $a_۱$ و $a_۲$ جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$\frac{(a+b+c)-(\frac{b+c}{۲})}{(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})-(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{۲})}=\frac{z-(\frac{b+c}{۲})}{\overline{z}-(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c-(\frac{b+c}{۲})}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{(b+c)}{۲bc}}=\frac{z-(\frac{b+c}{۲})}{\frac{۱}{z}-(\frac{b+c}{۲bc})}$$

$$\Rightarrow (۲bc+ab+ac)(۲z-b-c)z=a(۲a+b+c)(۲bc-bz-cz)$$

$$\Rightarrow ۲(۲bc+ab+ac)z^۲-[(b+c)(۲bc-۲a^۲)]z-۲abc(۲a+b+c)=۰$$

از طرفی حکم ($\angle h_۲h_۱h=۹۰^\circ$) ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

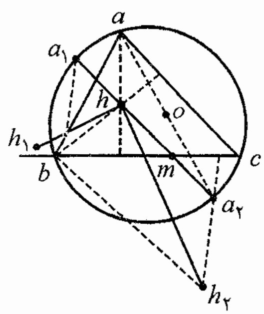
$$\frac{h_۲-h_۱}{h-h_۱}=-\frac{\overline{h_۱}-\overline{h_۲}}{\overline{h}-\overline{h_۱}}$$

که $h_۱$ و $h_۲$ مراکز ارتفاعی مثلث‌های $\Delta a_۱bc$ و $\Delta a_۲bc$ هستند، پس:

$$h_۱=a_۱+b+c\ ,\quad h_۲=a_۲+b+c$$

در نتیجه شرط لازم این است که:

$$\frac{a_2 - a_1}{a - a_1} = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}} \Leftrightarrow \frac{a_2(a_2 - a_1)}{a(a - a_1)} = \frac{a_2 - a_1}{(a_1 - a)} \Leftrightarrow -a = a_2$$



شکل (۴۴)

بنابراین لازم است ثابت کنیم $a_2 = -a$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند؛ با قرار دادن $-a$ در معادلهٔ (۱) داریم:

$$2(2bc + ab + ac)a^2 + 2(b + c)(bc - a^2) - 2abc(2a + b + c)$$
$$= (4bca^2 - 4aba^2) + (2a^3b + 2a^3c - 2a^3b - 2a^3c)$$
$$+(2b^2ca + 2c^2ba - 2ab^2c - 2ac^2b) = 0$$

بنابراین a_2، o و a بر یک امتدادند، پس داریم $\angle aa_1a_2 = 90^\circ$؛ حال از آنجا که

$$\frac{h_2 - h_1}{a_2 - a_1} = 1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \frac{h_2 - h}{a_2 - a} = 1 \in \mathbb{R}$$

تشابه مثلث‌های $a\overset{\triangle}{a_1}a_2$ و $h\overset{\triangle}{h_1}h_2$ را داریم و به دنبال آن خواهیم داشت:

$$\angle hh_1h_2 = \angle aa_1a_2 = 90^\circ$$

پس حکم اثبات شد.

مثال ۱۴: اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی ΔABC باشند، نشان دهید: $AH^{۲} + BC^{۲} = ۴OA^{۲}$.

حل: دایرهٔ محیطی Δabc را دایرهٔ یکّه بگیرید، بنابراین: $o = ۰$ و $h = a + b + c$ و $\overline{c} = \frac{۱}{c}$ و $\overline{b} = \frac{۱}{b}$ و $\overline{a} = \frac{۱}{a}$؛

پس:

$$\begin{aligned}
AH^{۲} + BC^{۲} &= |a-h|^{۲} + |b-c|^{۲} \\
&= |a-(a+b+c)|^{۲} + |b-c|^{۲} \\
&= |b+c|^{۲} + |b-c|^{۲} \\
&= (b+c)(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}) + (b-c)(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}) \\
&= \frac{(b+c)^{۲}}{bc} - \frac{(b-c)^{۲}}{bc} = \frac{۱}{bc}(۴bc) = ۴
\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$۴OA^{۲} = ۴|a-۰|^{۲} = ۴|a|^{۲} = ۴$$

پس حکم ثابت شد.

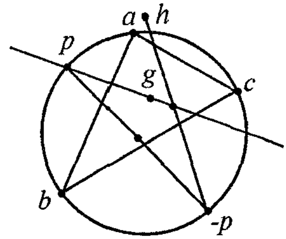
مثال ۱۵: ثابت کنید خطی که از مرکز ثقل مثلث به نقطهٔ دلخواه P، روی محیط دایرهٔ محیطی آن وصل می‌گردد، از وسط خطی می‌گذرد که، مرکز ارتفاعی مثلث را به روبروی قطری P متصل می‌نماید.

حل: دایرهٔ محیطی مثلث دلخواه Δabc را یکّه در نظر بگیرید. واضح است که روبروی قطری p برابر است با $-p$.

داریم:

$$h = a + b + c \quad , \quad g = \frac{a+b+c}{۳}$$

(h و g مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل Δabc هستند) وسط پاره خط $\overline{h(-p)}$ برابر است با:
$$e = \frac{a+b+c-p}{۲}$$



شکل (۴۵)

کافی است ثابت کنیم، e روی $\vec{pg}$ قرار دارد، پس حکم چنین است:

$$\frac{(\frac{a+b+c-p}{۲})-p}{(\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}-\overline{p}}{۲})-\overline{p}} = \frac{(\frac{a+b+c}{۳})-p}{(\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{۳})-\overline{p}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+b+c-p}{۲}-p}{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})-\frac{۱}{p}} = \frac{\frac{a+b+c}{۳}-p}{\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})-\frac{۱}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}+\frac{c}{۲}-\frac{۳p}{۲})}{(\frac{a}{۳}+\frac{b}{۳}+\frac{c}{۳}-p)} = \frac{(\frac{۱}{۲a}+\frac{۱}{۲b}+\frac{۱}{۲c}-\frac{۳}{۲p})}{(\frac{۱}{۳a}+\frac{۱}{۳b}+\frac{۱}{۳c}-\frac{۱}{p})}$$

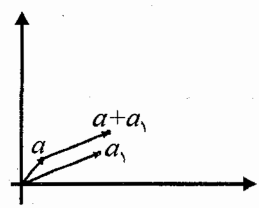
$$\Leftrightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}(\frac{acp+bcp+bap-۳abc}{acp+bcp+bap-۳abc}) = \frac{۳}{۲}$$

پس حکم ثابت شد.

۴. تبدیلات هندسی

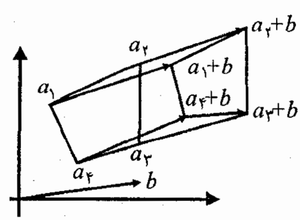
در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان با استفاده از هندسهٔ اعداد مختلط، مسائل مربوط به تبدیلات هندسی را حل کرد.

(۱) **انتقال**: نقطهٔ a را در نظر بگیرید، در این صورت $a + a_1$ نشان دهندهٔ، رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن a، a_1 و ۰ هستند. در واقع با جمع a با a_1، نقطهٔ a را تحت بردار مکان $\vec{a_1}$ انتقال داده‌ایم.



شکل (۴۷)

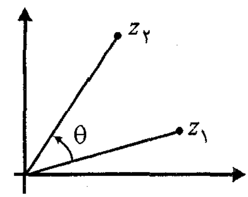
بنابراین شکلی که نقاط آن، $a_1 + b$، $a_2 + b$ و ... هستند، انتقال یافتهٔ شکلی است که از نقاط a_1 ، a_2 و ... تشکیل شده و این انتقال تحت بردار $\vec{ob}$ صورت گرفته است.
برای مثال، خط $z = ak + b$ $(k \in \mathbb{R})$ انتقال یافتهٔ خط $z = ak$ می‌باشد، تحت بردار $\vec{ob}$.



شکل (۴۸)

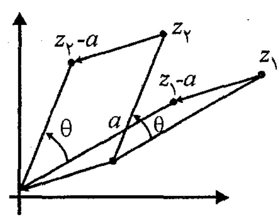
(۲) **دوران**: فرض کنید z_2 دوران یافتهٔ z_1 تحت زاویهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات باشد؛ بنابراین طبق تعریف دوران، اندازهٔ پاره خط $\overline{oz_1}$ با $\overline{oz_2}$ برابر است، یعنی :

$|z_1| = |z_2|$، و بنابر تعریف، تنها آرگومان z_2 نسبت به z_1، θ درجه اضافه می‌گردد، یعنی: $Arg(z_2) = Arg(z_1) + \theta$، بنابراین: $z_2 = z_1 Cis\ \theta$.



شکل (۴۹)

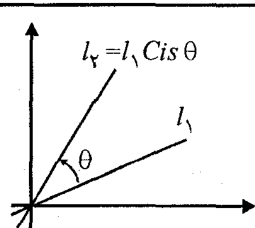
حال اگر همین دوران حول نقطه a صورت گرفته باشد، و با یک انتقال a را به مبدأ ببریم،



شکل (۵۰)

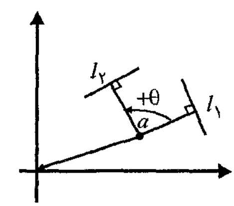
z_1 و z_2، به $z_1 - a$ و $z_2 - a$ تبدیل می‌شوند. پس بنابر آنچه که پیشتر بدست آوردیم، خواهیم داشت:

$$z_2 - a = (z_1 - a)Cis\ \theta \Rightarrow z_2 = (z_1 - a)Cis\ \theta + a$$



شکل (۵۱)

با توجه به آنچه که بیان شد، نقطهٔ $(k \in I\!R)ke^{i\theta_1}$ با دوران حول مبدأ تحت زاویهٔ $+\theta_2$، بر نقطهٔ $ke^{i(\theta_1+\theta_2)}$ منطبق می‌شود. همچنین خط $l_2 = l_1 Cis\ \theta$ دوران یافتهٔ l_1 تحت $+\theta$ درجه حول مبدأ است (l_1 از مبدأ می‌گذرد)



شکل (۵۲)

حال اگر l_2 دوران یافتهٔ l_1 حول a به اندازهٔ $+\theta$ باشد، برای بدست آوردن معادلهٔ l_2، ابتدا a را به مبدأ انتقال می‌دهیم، پس l_1 به $l_1 - a$، و l_2 به $l_2 - a$ تبدیل می‌شود. حال هر نقطه از $l_2 - a$ دوران یافتهٔ دقیقاً یکی از نقاط $l_1 - a$ تحت زاویهٔ $+\theta$ و حول مبدأ می‌باشد، پس داریم:

$$l_2 - a = (l_1 - a)Cis\ \theta \Rightarrow l_2 = (l_1 - a)Cis\ \theta + a$$

یعنی اگر معادلهٔ l_1 برابر باشد با: $(k \in I\!R)\ l_1 : kz_1 + b$؛ آن‌گاه خواهیم داشت:

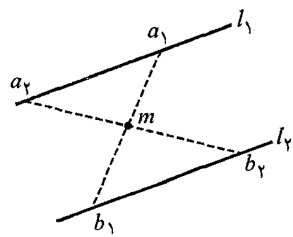
$$l_2 : (kz_1 + b - a)Cis\ \theta + a$$

(۳) تقارن و بازتاب: همان طور که می‌دانید، اگر نقطهٔ b قرینهٔ a نسبت به m باشد، آن‌گاه داریم:

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \text{یا} \quad b = 2m - a$$

همین طور قرینهٔ یک شکل یا یک خط را می‌توان بدست آورد. برای مثال اگر خط l_2 قرینه l_1 نسبت به نقطهٔ m باشد، برای هر نقطهٔ $z_1 \in l_1$، وجود دارد $z_2 \in l_2$ بطوریکه:

$$z_2 = 2m - z_1 \quad \text{یا} \quad m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



شکل (۵۳)

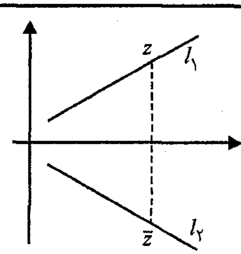
(و همچنین به ازای هر $z_2 \in l_2$ وجود دارد $z_1 \in l_1$، که: $z_1 = 2m - z_2$) بنابراین اگر معادلهٔ l_1 برابر باشد با: $l_1 : z = ka + b$ $(k \in \mathbb{R})$، داریم:

$$l_2 : z = 2m - (ka + b)$$

می‌دانیم قرینهٔ z نسبت به محور xها برابر با $\overline{z}$، و در نمایش قطبی $ke^{-i\theta}$ $(k \in \mathbb{R})$ قرینهٔ $ke^{i\theta}$ است.

حال برای بدست آوردن بازتاب هر شکل یا هر خط، نسبت به محور حقیقی نیز می‌توان به همین ترتیب عمل کرد. برای مثال، بازتاب خط $l_1 : z = a \cdot k + b$ $(k \in \mathbb{R})$ نسبت به محور حقیقی برابر است با:

$$l_2 : z = \overline{a} \cdot k + \overline{b} \qquad (K \in \mathbb{R})$$



شکل (۵۴)

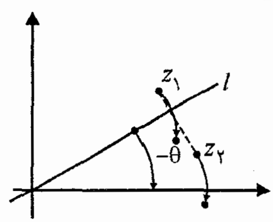
اما فرض کنید، بخواهیم بازتاب نقطهٔ z_1 را نسبت به خطی مانند $l : z = ke^{i\theta}$ $(k \in \mathbb{R})$ بدست آوریم (این خط از مبدأ می‌گذرد)، بنابراین اگر z_1

نقطهٔ حاصل از این بازتاب باشد، می‌توان آن را به ترتیب زیر بدست آورد: ابتدا باید شکل را تحت زاویهٔ θ حول مبدأ دوران داد، تا خط l به محور xها تبدیل شود، بنابراین نقاط متناظر با $z_۱$ و $z_۲$ حاصل از این دوران برابرند با: $z_۱ Cis\ (-\theta)$ و $z_۲ Cis\ (-\theta)$. پس باید داشته باشیم:

$$z_۲ Cis\ (-\theta) = \overline{z_۱ Cis\ (-\theta)}$$

بنابراین خواهیم داشت:

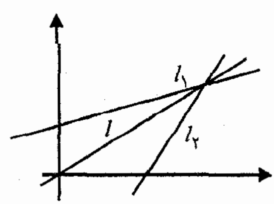
$$z_۲ = \frac{\overline{z_۱ Cis\ (-\theta)}}{Cis\ (-\theta)} = \overline{z_۱} \cdot Cis\ (\theta + \theta) = \overline{z_۱} Cis\ (۲\theta)$$



شکل (۵۵)

بدین ترتیب بازتاب هر شکل یا هر خط را، نسبت به خطی که از مبدأ می‌گذرد، می‌توان بدست آورد. برای مثال بازتاب خط $l_۱ : z = ka_۱ + b_۱$ $(k \in I\!R)$ نسبت به خط $l : z = ke^{i\theta}$ برابر است با: $l_۲ : z = (k\overline{a_۱} + \overline{b_۱}) Cis\ ۲\theta$

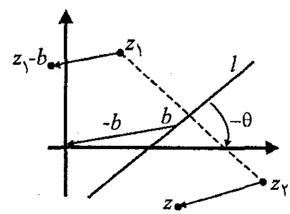
(توجه کنید که l نیمساز زاویه‌ای است که از برخورد $l_۱$ و $l_۲$ بوجود آمده)



شکل (۵۶)

حال اگر بازتاب نقطهٔ z_1، نسبت به خط l، به معادلهٔ $l : z = ke^{i\theta} + b$ $(k \in I\!R)$ را که از مبدأ نمی‌گذرد، z_2 بنامیم، z_2 را می‌توان با انتقال به اندازهٔ $-b$ بدست آورد، بدین ترتیب خواهیم داشت:

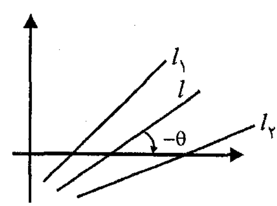
$$z_2 - b = (\overline{z_1 - b})Cis\ (2\theta) \Rightarrow z_2 = (\overline{z_1} - \overline{b})Cis\ (2\theta) + b$$



شکل (۵۷)

و مشابهاً بازتاب خط l_1 به معادلهٔ $l_1 : z = ka_1 + b_1$، نسبت به خط $l : z = ke^{i\theta} + b$ $(k \in I\!R)$ از معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

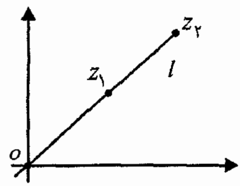
$$l_2 : z = (k\overline{a_1} + \overline{b_1} - \overline{b})Cis\ (2\theta) + b$$



شکل (۵۸)

(۴) تجانس: فرض کنید z_2 مجانس z_1، با نسبت k و به مرکز مبدأ مختصات باشد. بنابراین خط $\overrightarrow{z_1 z_2}$ از مبدأ می‌گذرد، یعنی:

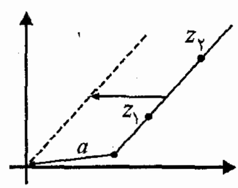
$$z_2 = kz_1 \quad (k \in I\!R)$$



شکل (۵۹)

حال اگر مرکز تجانس نقطهٔ a باشد، با یک انتقال به اندازهٔ $-a$ خط $\overleftrightarrow{z'_1 z'_2}$ از مبدأ می‌گذرد ($z'_2 = z_2 - a \quad , \quad z'_1 = z_1 - a$)؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$z'_2 = kz'_1 \quad (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 - a = k(z_1 - a) \Rightarrow z_2 = k(z_1 - a) + a$$

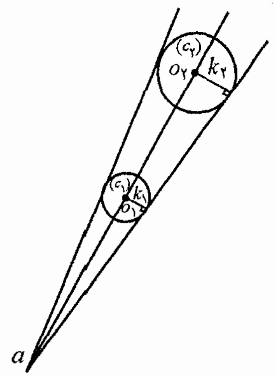


شکل (۶۰)

(از دیدگاه نمایش قطبی نیز، نقطهٔ $k_2 e^{i\theta}$ مجانس $k_1 e^{i\theta}$ می‌باشد، با نسبت $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ $\frac{k_2}{k_1}$ و به مرکز مبدأ مختصات.)

با توجه به آنچه گفته شد، مجانس هر شکل را به نسبت k و با هر مرکزی می‌توان بدست آورد. برای مثال، مجانس دایرهٔ $c_1 : |z - o_1| = k_1$، به مرکز a و با نسبت $\frac{k_2}{k_1}$، برابر است با دایرهٔ c_2، به معادلهٔ زیر:

$$c_2 : \left|z - \frac{k_2}{k_1}(o_1 - a) - a\right| = k_2$$



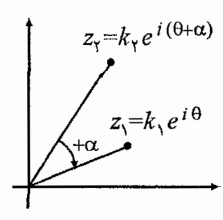
شکل (۶۱)

(۵) تجانس مارپیچی: همان طور که می‌دانیم، اگر $z_1 = k_1 e^{i\theta}$ باشد و z'_2 با دوران z_1 حول مبدأ با زاویهٔ $+\alpha$ بدست آمده باشد و z_2 با دوران z'_2 به نسبت $\frac{k_2}{k_1}$ باشد، داریم: $z_2 = k_2 e^{i(\theta+\alpha)}$، یا:

$$z_2 = k_2 z_1 Cis\ \alpha \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

همچنین اگر مرکز تجانس مارپیچی نقطهٔ a باشد، خواهیم داشت:

$$z_2 - a = k_2(z_1 - a)Cis\ \alpha \Rightarrow z_2 = k_2(z_1 - a)Cis\ \alpha + a$$



شکل (۶۲)

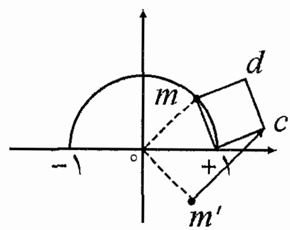
بنابراین معادلهٔ هر شکل را تحت هر تجانس مارپیچی، می‌توان بدست آورد.

• حال برای آشنایی بیشتر به حل چند مثال از المپیادها و مسابقات مختلف، با استفاده از تبدیلات هندسی در صفحهٔ مختلط می‌پردازیم.

مثال ۱: نقطهٔ M روی نیمدایره‌ای به قطر AB تغییر می‌کند. در خارج مثلث ΔAMB مربع $MBCD$ را می‌سازیم. مکانی هندسی نقطهٔ C را بیابید.

حل: نیم‌دایره را به مرکز مبدأ و به شعاع واحد در نظر بگیرید، بطوریکه $b = +۱$ و $a = -۱$. بنابراین C دوران یافتهٔ m حول ۱+ است به اندازهٔ -۹۰°، پس:

$$
\begin{aligned}
c &= (m-۱)Cis\,(-۹۰^\circ)+۱\\
&= (m-۱)(-i)+۱ = -mi+(۱+i)\\
&= mCis\,(-۹۰^\circ)+(۱+i)
\end{aligned}
$$



شکل (۶۳)

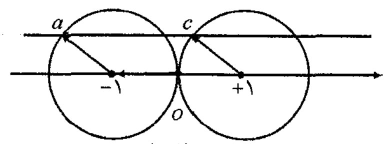
$mCis\,(-۹۰^\circ)$ یعنی دوران یافتهٔ m حول مبدأ به اندازهٔ -۹۰°. واضح است که اگر m روی این نیم دایره گردش کند، $m' = mCis\,(-۹۰)^\circ$ نیز روی همین نیم‌دایره، با -۹۰° اختلاف فاز، می‌چرخد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، C انتقال یافتهٔ m' به اندازهٔ $۱+i$ است، بنابراین مکان هندسی C، انتقال یافتهٔ نیم‌دایرهٔ واحدی است در ناحیه اول و چهارم به مرکز مبدأ، تحت بردار $(۱+i)$.

مثال ۲: دو دایرهٔ مساوی در خارج هم، در نقطهٔ K مماسند. خط قاطعی به موازات خط‌المرکزین، دو دایره را در نقاط A، B، C و D قطع می‌کند. ثابت کنید، اندازهٔ $\angle AKC$ به انتخاب قاطع بستگی ندارد.

حل: دو دایره را به مراکز ۱+ و ۱ـ و با شعاع واحد در نظر می‌گیریم. بنابراین $k = ۰$ و با توجه به شکل، پاره خطی که از $+۱$ و c می‌گذرد، و با پاره‌خطی که از a و -۱ می‌گذرد، موازی و برابر است. در نتیجه طول پاره خط ac برابر ۲ می‌باشد و داریم: $a = c - ۲$.

پس:

$$\frac{a-۰}{c-۰} = \frac{c-۲-۰}{c-۰} \doteq \frac{c-۲}{c} \qquad (۱)$$



شکل (۶۴)

همچنین c روی دایرهٔ $|z-۱| = ۱$ قرار دارد، پس:

$$|c-۱| = ۱ \Rightarrow (c-۱)(\overline{c}-۱) = ۱ \Rightarrow \overline{c} = \frac{۱}{c-۱} + ۱ = \frac{c}{c-۱}$$

بنابراین:

$$\frac{\overline{a}-\overline{۰}}{\overline{c}-\overline{۰}} = \frac{\overline{c}-۲}{\overline{c}} = \frac{\dfrac{c}{c-۱}-۲}{\dfrac{c}{c-۱}} = \frac{۲-c}{c} \qquad (۲)$$

در نتیجه از (۲) و (۱) داریم:

$$\frac{a-۰}{c-۰} + \frac{\overline{a}-\overline{۰}}{\overline{c}-\overline{۰}} = ۰ \Rightarrow \angle AKC = ۹۰^\circ$$

پس حکم ثابت شد.

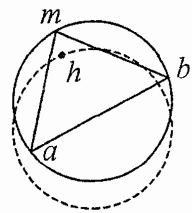
مثال ۳: وتر ثابت AB و نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ (C) مفروضند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث ΔAMB را بیابید.

حل: دایرهٔ (C) را دایرهٔ یکّه می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$m = e^{i\theta}$$

و

$$h = m + a + b = e^{i\theta} + (a+b)$$



شکل (۶۵)

با تغییر m، در واقع θ تغییر می‌کند و مکان هندسی h دایره‌ای خواهد بود به شعاع واحد که به اندازهٔ $(a+b)$ منتقل شود (این مقدار انتقال، در هندسهٔ کلاسیک نشان دهندهٔ، ۲ برابر فاصلهٔ وسط پاره خط AB است تا مرکز دایرهٔ (C). یعنی اگر N وسط AB باشد، بردار انتقال برابر خواهد بود با $\overrightarrow{ON}$ (O مرکز (C))).

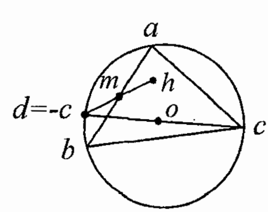
مثال ۴: اگر D روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC، بگونه‌ای باشد که CD قطر این دایره باشد، ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC و نقطهٔ D، نسبت به وسط AB قرینهٔ یکدیگرند.

حل: دایرهٔ محیطی Δabc را یکّه فرض کنید، پس $o = 0$ و $h = a+b+c$. حال داریم:

$$a - d = a - (-c) = a + c$$

و

$$h - b = (a+b+c) - b = a + c$$



شکل (۶۶)

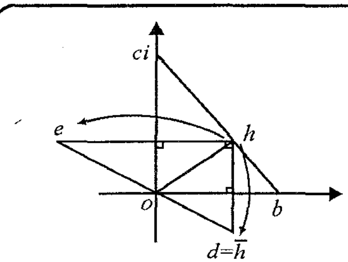
پس: $|a-d| = |h-b|$ و $\vec{ad} || \vec{hb}$، لذا چهار ضلعی $ahbd$ متوازی الاضلاع بوده و حکم ثابت می‌شود.

مثال ۵: مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta ABC (\angle A = ۹۰^\circ)$ مفروض است. ارتفاع AH را رسم کرده و قرینهٔ H نسبت به AB و AC را بترتیب D و E بنامید. ثابت کنید D، E و A همخطند.

حل: مطابق شکل مثلث را روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم، اگر داشته باشیم: $h = e^{i\theta}$، آن‌گاه:

$$d = \overline{h} = e^{-i\theta} \ , \ e = hCis\,(۱۸۰^\circ - ۲\theta)$$

$$= e^{i(\theta + ۱۸۰^\circ - ۲\theta)} = e^{i(۱۸۰^\circ - \theta)} = e^{i\pi} \times e^{-i\theta} = -e^{-i\theta}$$



شکل (۶۷)

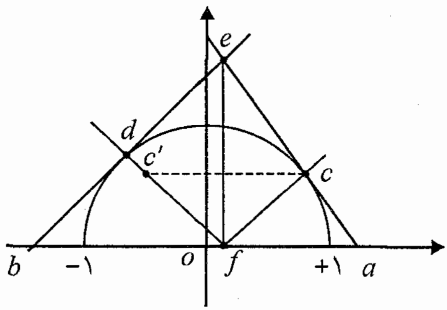
پس: $\frac{e-۰}{d-۰} = -۱$. یعنی علاوه بر این که D, E, A همخطند، A نیز وسط ED قرار دارد.

مثال ۶: نیمدایره γ در یک طرف L رسم شده، بطوریکه مرکز آن روی L قرار دارد. C و D نقاطی روی γ هستند. مماس‌های بر γ در نقاط C و D، خط L را در A و B قطع می‌کنند، بطوریکه مرکز γ بین A و B قرار دارد. محل تقاطع AC و BD را E بنامید و F را پای ارتفاع وارد از E بر L در نظر بگیرید. ثابت کنید EF نیمساز $\angle CFD$ است.

حل: نیم دایرهٔ γ را نیم‌دایرهٔ یکه فرض می‌نمائیم، پس: $e = \frac{۲cd}{c+d}$. اگر حکم برقرار باشد، بدین معنی است که متقارن c نسبت به خط $\vec{ef}$ روی خط $\vec{fd}$ قرار می‌گیرد. فرض

کنید متقارن c نسبت به خط ef نقطهٔ c' باشد، بنابراین خواهیم داشت: $c' = -\overline{(c-f)} + f$.

از طرفی داریم:
$$f = \frac{e+\overline{e}}{۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲cd}{c+d} + \frac{۲\frac{۱}{cd}}{\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}}\right) = \frac{cd+۱}{c+d}$$



شکل (۶۸)

پس:

(توجه کنید: $f = \overline{f}$)
$$c' = -\overline{\left(c - \frac{cd+۱}{c+d}\right)} + \frac{cd+۱}{c+d} = -\frac{۱}{c} + ۲\left(\frac{cd+۱}{c+d}\right)$$

حال باید ثابت کرد:
$$\frac{c'-d}{f-d} = \frac{\overline{c'}-\overline{d}}{\overline{f}-\overline{d}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c'-d}{\overline{c'}-\overline{d}} = \frac{f-d}{\overline{f}-\overline{d}} \Leftrightarrow \frac{-\frac{۱}{c}+۲\left(\frac{cd+۱}{c+d}\right)-d}{-c+۲\left(\frac{cd+۱}{c+d}\right)-\frac{۱}{d}} = \frac{\frac{cd+۱}{c+d}-d}{\frac{cd+۱}{c+d}-\frac{۱}{d}}$$

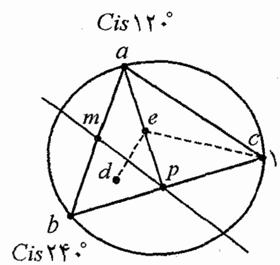
$$\Leftrightarrow \frac{(cd+۱)\left(\frac{c-d}{c(c+d)}\right)}{(cd+۱)\left(\frac{d-c}{d(c+d)}\right)} = \frac{\frac{۱-d^۲}{c+d}}{\frac{c(d^۲-۱)}{d(c+d)}} \Leftrightarrow -\frac{d}{c} = -\frac{d}{c}$$

پس حکم ثابت شد.

مثال ۷: مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC مفروض است. خط راستی موازی با ضلع AC، خط‌های راست AB و BC را به ترتیب، در نقاط M و P قطع کرده است. نقطهٔ D را مرکز مثلث $B\overset{\Delta}{P}M$ و نقطهٔ E را وسط AP در نظر بگیرید، زاویهٔ $\angle DEC$ را بیابید.

حل: می‌توان دایرهٔ محیطی Δabc را دایرهٔ یکه فرض نمود و رئوس a و b و c را چنین قرار داد: $c = ۱$، $a = Cis\ ۱۲۰^\circ$ و $b = Cis\ ۲۴۰^\circ$. مثلث‌های Δbmp و Δbac به مرکز b متجانسند. فرض کنید نسبت این تجانس k باشد (یعنی: $\frac{BM}{BA} = k$)، بنابراین:

$$m = k(a-b)+b \ , \ \ p = k(c-b)+b$$



شکل (۶۹)

در نتیجه:

$$d = \frac{m+p+b}{۳} = \frac{k(a-b+c-b)+b+b+b}{۳} = \frac{k(a+c-۲b)}{۳}+b$$

پس با اندکی محاسبات داریم:

$$p = k(۱ - Cis\ ۲۴۰^\circ) + Cis\ ۲۴۰^\circ = \frac{۱}{۱۲}(۳+\sqrt{۳}i)(۶k - ۳i\sqrt{۳} - ۳)$$

و

$$d = \frac{k}{۳}(۱ + Cis\ ۱۲۰^\circ - ۲Cis\ ۲۴۰^\circ) + Cis\ ۲۴۰^\circ = \frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۳}i)(k-۱)$$

$$e = \frac{a+p}{۲} = \frac{k}{۲} + \frac{۱}{۴}(۱+\sqrt{۳}i)(k-۱)$$

(بهتر است خواننده، شخصاً این روابط را بدست آورد.)

حال داریم:

$$\frac{d-e}{c-e}=\frac{-\sqrt{۳}i(۲k+i\sqrt{۳}-۱)}{(i\sqrt{۳}+۶k-۹)}$$

در نتیجه:

$$\frac{\overline{d}-\overline{e}}{\overline{c}-\overline{e}}=\frac{i\sqrt{۳}(۲k-\sqrt{۳}i-۱)}{(-i\sqrt{۳}+۶k-۹)}$$

از این روابط نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{d-e}{c-e}+\frac{\overline{d}-\overline{e}}{\overline{c}-\overline{e}}=۰$$

یعنی $\angle DEC = ۹۰^\circ$.

مثال ۸: ۶ نقطهٔ A، B، C، D ، E، F به همین ترتیب روی محیط دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر داشته باشیم:

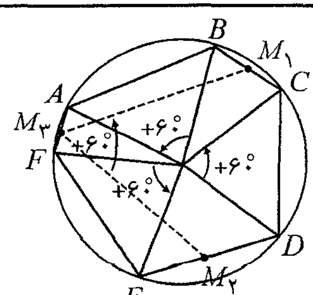
$$\angle AOB=\angle COD=\angle EOF=۶۰^\circ$$

ثابت کنید نقاط وسط BC ، DE، FA، رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

حل: دایرهٔ مفروض مسأله را دایرهٔ یکه می‌گیریم:

با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$c=dCis\,۶۰^\circ \quad و \quad a=bCis\,۶۰^\circ \quad و \quad e=fCis\,۶۰^\circ$$



شکل (۷۰)

و اگر m_1، m_2 و m_3 به ترتیب اوساط bc، de و fa باشند، خواهیم داشت:

$$m_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{aCis\,(-60) + dCis\,(60^\circ)}{2}$$

و

$$m_2 = \frac{d+e}{2} = \frac{d + fCis\,(60)}{2}$$

و

$$m_3 = \frac{a+f}{2}$$

برای اثبات حکم مسأله باید ثابت کرد: $(m_2 - m_3)Cis\,60 + m_3 = m_1$

اما داریم:

$$(m_2 - m_3)Cis\,60 + m_3$$
$$= \frac{1}{2}\Big[(dCis\,60 + fCis\,120 - aCis\,60 - fCis\,60) + (a+f)\Big]$$
$$= \frac{1}{2}(dCis\,60 - aCis\,60 + a) = \frac{1}{2}(dCis\,60 + aCis\,(-60)) = m_1$$

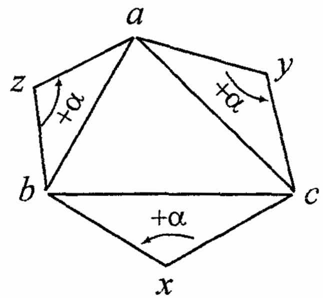
پس حکم ثابت شد.

مثال ۹: روی اضلاع مثلث دلخواه ΔABC و خارج از آن مثلث‌های متساوی‌الساقین و متشابه ΔBXC، ΔCYA و ΔAZB را ساخته‌ایم؛ ثابت کنید مرکز ثقل مثلث ΔXYZ بر مرکز ثقل مثلث ΔABC منطبق است.

حل: برای مرکز ثقل مثلث Δabc داریم: $g = \dfrac{a+b+c}{3}$

از آنجا که Δbxc، Δcya و Δazb متساوی الساقین بوده و با هم متشابهند، نتیجه می‌گیریم که: $\angle bza = \angle ayc = \angle cxb = \alpha$

یعنی a دوران یافتهٔ b حول z، c دوران یافتهٔ a حول y و b دوران یافتهٔ c حول x می‌باشند که تمام دوران‌ها تحت زاویهٔ $+\alpha$ صورت گرفته است. بنابراین داریم:



شکل (۷۱)

$$a = (b - z)Cis\ \alpha + z$$

$$b = (c - x)Cis\ \alpha + x$$

$$c = (a - y)Cis\ \alpha + y$$

در نتیجه:

$$z = \frac{a - bCis\ \alpha}{۱ - Cis\ \alpha}$$

$$x = \frac{b - cCis\ \alpha}{۱ - Cis\ \alpha}$$

$$y = \frac{c - aCis\ \alpha}{۱ - Cis\ \alpha}$$

بنابراین اگر g' مرکز ثقل مثلث Δxyz باشد، داریم:

$$g' = \frac{x + y + z}{۳} = \frac{(a + b + c) - (a + b + c)Cis\ \alpha}{۳(۱ - Cis\ \alpha)}$$

$$= \frac{(a + b + c)}{۳} = g$$

بدین ترتیب g' بر g منطبق است و حکم ثابت شد.

مثال ۱۰: اضلاع مثلث دلخواه ΔABC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. روی قسمت‌های میانی هر ضلع، مثلثی متساوی‌الاضلاع و خارج از مثلث ΔABC می‌سازیم. ثابت کنید سه رأس غیرواقع بر اضلاع ΔABC از این ۳ مثلث، خود تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند.

حل: نام گذاری‌ها را مطابق شکل انجام دهید.

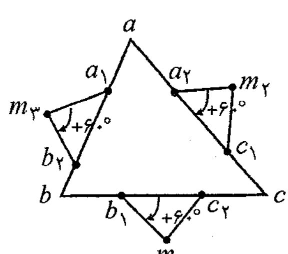
از آنجا که $BB_۱ = B_۱C_۲ = C_۲C$ و $C, C_۲, B_۱, B$ همخطند، داریم:

$$b_۱ = \frac{۲b+c}{۳} \quad , \quad c_۲ = \frac{۲c+b}{۳}$$

در نتیجه از آنجا که $m_۱$ دوران یافتهٔ $c_۲$، حول $b_۱$ و تحت زاویهٔ ۶۰ درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، اگر جهت حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$m_۱ = (\frac{۲c+b}{۳} - \frac{۲b+c}{۳})Cis\ ۶۰^\circ + \frac{۲b+c}{۳}$$

$$= (\frac{c-b}{۳})Cis\ ۶۰^\circ + \frac{۲b+c}{۳}$$



شکل (۷۲)

پس، بنابر تقارنی که در شکل و بین اجزاء وجود دارد، مشابهاً خواهیم داشت:

$$m_۲ = (\frac{a-c}{۳})Cis\ ۶۰^\circ + \frac{۲c+a}{۳}$$

و

$$m_3 = (\frac{b-a}{3})Cis\ 60^\circ + \frac{2a+b}{3}$$

حال داریم:

$$(m_2 - m_3)Cis\ 60^\circ + m_3$$
$$= \left[(\frac{a-c}{3} - \frac{b-a}{3})Cis\ 60^\circ + (\frac{2c+a}{3} - \frac{2a+b}{3})\right] Cis\ 60^\circ +$$
$$\frac{(b-a)}{3}Cis\ 60^\circ + \frac{2a+b}{3}$$
$$= \left(\frac{2a-b-c}{3}Cis\ 120^\circ + \frac{2c-a-b}{3}Cis\ 60^\circ\right)$$
$$+ (\frac{b-a}{3})Cis\ 60^\circ + \frac{2a+b}{3}$$
$$= (\frac{2a-b-c}{2})Cis\ 120^\circ + \frac{2}{3}(c-a)Cis\ 60^\circ + \frac{2a+b}{3}$$
$$= -\frac{1}{6}Cis\ 60^\circ(4a + 2bi\sqrt{3} + ci\sqrt{3} - 7c)$$
$$= \frac{-1}{6}Cis\ 120^\circ(c + 2b + ci\sqrt{3})$$
$$= (\frac{c-b}{3})Cis\ 60^\circ + (\frac{2b+c}{3}) = m_1$$

بنابراین m_1 دوران یافته m_2، حول m_3 تحت زاویهٔ ۶۰ درجه و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، پس مثلث $\Delta m_1m_2m_3$ متساوی‌الاضلاع است.

مثال ۱۱: چهار ضلعی‌های $ABCD$ و $BKMN$ مربع هستند. فرض کنید E وسط AN باشد، ثابت کنید: $BE \perp CK$.

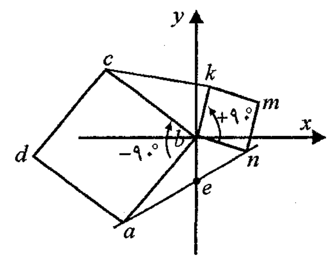
حل: برای راحتی در انجام محاسبات، b را مبدأ مختصات فرض کنید و e را روی محور yها در نظر بگیرید. پس حکم این است که: (محور xها) $||ck$، یا به عبارت ساده‌تر:

$c-k=\overline{c}-\overline{k}$. می‌دانیم k دوران یافتهٔ n، حول مبدأ تحت زاویهٔ ۹۰° در جهت مثلثاتی است، پس:

$$k=nCis\,۹۰^\circ=ni$$

همچنین c دوران یافتهٔ a حول مبدأ تحت زاویهٔ ۹۰° در خلاف جهت مثلثاتی است، پس:

$c=aCis\,(-۹۰^\circ)=-ai$



شکل (۷۳)

بنابراین: $c-k=-ai-ni=-i(a+n)$

و

$\overline{c}-\overline{k}=+i(\overline{a}+\overline{n}) \qquad (*)$

از طرفی داشتیم $e\in o\vec{y}$، پس: $e=-\overline{e}$ یا به عبارت دیگر:

$$\frac{a+n}{۲}=-\frac{\overline{a}+\overline{n}}{۲}\Rightarrow(a+n)=-(\overline{a}+\overline{n})$$

پس با توجه به تساوی $(*)$ داریم: $c-k=\overline{c}-\overline{k}$، و حکم ثابت شد.

مثال ۱۲: روی اضلاع AB، BC ، CD ، DA از چهار ضلعی دلخواه $ABCD$، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع $\Delta AM_۲B$، $\Delta BM_۳C$، $\Delta CM_۴D$ و $\Delta DM_۱A$ را خارج از آن ساخته‌ایم. اگر مراکز ثقل این مثلث‌ها به ترتیب، $O_۲$، $O_۳$، $O_۴$ و $O_۱$ باشند، ثابت کنید: $O_۲O_۴\perp O_۱O_۳$.

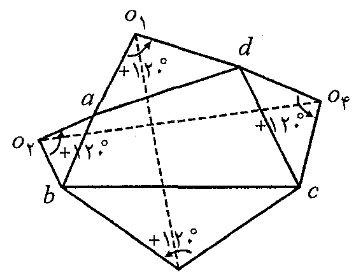
حل: واضح که $o_۱$ مرکز دورانی‌ست که با زاویهٔ ۱۲۰°، نقطهٔ a را به d می‌برد، به همین ترتیب $o_۲$، $o_۳$ و $o_۴$ مراکز دوران‌های مشابهی هستند. بنابراین داریم:

$$d = (a - o_۱)Cis\ ۱۲۰^\circ + o_۱$$

$$c = (d - o_۴)Cis\ ۱۲۰^\circ + o_۴$$

$$b = (c - o_۳)Cis\ ۱۲۰^\circ + o_۳$$

$$a = (b - o_۲)Cis\ ۱۲۰^\circ + o_۲$$



شکل (۷۴)

در نتیجه:

$$o_۱ = \frac{d - aCis\ ۱۲۰^\circ}{۱ - Cis\ ۱۲۰^\circ}\ ,\quad o_۲ = \frac{a - bCis\ ۱۲۰^\circ}{۱ - Cis\ ۱۲۰^\circ}$$

$$o_۳ = \frac{b - c\cdot Cis\ ۱۲۰^\circ}{۱ - Cis\ ۱۲۰^\circ}\ ,\quad o_۴ = \frac{c - d\cdot Cis\ ۱۲۰^\circ}{۱ - Cis\ ۱۲۰^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{o_۲ - o_۴}{o_۱ - o_۳} = \frac{a - bCis\ ۱۲۰^\circ - c + dCis\ ۱۲۰^\circ}{d - a\cdot Cis\ ۱۲۰^\circ - b + c\cdot Cis\ ۱۲۰^\circ}$$

$$= \frac{(a - c) + (d - b)Cis\ ۱۲۰^\circ}{(d - b) + (c - a)Cis\ ۱۲۰^\circ}$$

همچنین:

$$\frac{\overline{o_۲} - \overline{o_۴}}{\overline{o_۱} - \overline{o_۳}} = \frac{(\overline{a} - \overline{c}) + (\overline{d} - \overline{b})Cis\ (-۱۲۰^\circ)}{(\overline{d} - \overline{b}) + (\overline{c} - \overline{a})Cis\ (-۱۲۰^\circ)}$$

که با انجام محاسبات لازم (به روش بازگشتی) به این نتیجه می‌رسید که:

$$\frac{o_۲ - o_۴}{o_۱ - o_۳} + \frac{\overline{o_۲} - \overline{o_۴}}{\overline{o_۱} - \overline{o_۳}} = ۰$$

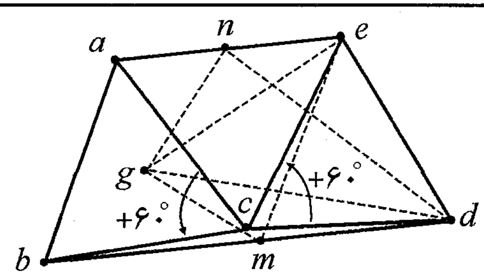
یعنی: $\overrightarrow{o_۱o_۳} \perp \overrightarrow{o_۲o_۴}$.

مثال ۱۳: رئوس ۵ ضلعی $ABCDE$ طوری قرار گرفته‌اند که مثلث‌های ΔABC و ΔCDE متساوی‌الاضلاعند. اگر G مرکز ثقل مثلث ΔABC و نقاط M و N بترتیب وسط پاره خط‌های BD و AE باشند، ثابت کنید: $\Delta GME \sim \Delta GND$.

حل: بنابر فرض مسأله خواهیم داشت:

$$e = (d-c)Cis\,۶۰^\circ + c$$

$$b = (a-c)\cdot Cis\,۶۰^\circ + c$$



شکل (۷۵)

همچنین $g = \dfrac{a+b+c}{۳}$ و از آنجا که m وسط bd و n وسط ae قرار دارد، داریم:

$$m = \frac{b+d}{۲} \quad , \quad n = \frac{a+e}{۲}$$

برای راحتی محاسبات، c را مبدأ مختصات در نظر بگیرید، پس:

$$e = dCis\,۶۰^\circ \quad , \quad b = aCis\,۶۰^\circ$$

در نتیجه:
$$m = \frac{a\cdot Cis\,۶۰^\circ + d}{۲} \quad , \quad n = \frac{a + dCis\,۶۰^\circ}{۲}$$

و

$$g = \frac{a + aCis\,۶۰^\circ}{۳}$$

حال باید ثابت کرد:

$$\frac{g-m}{e-m}=\frac{-g+n}{+d-n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\frac{۱}{۲}(d+a\cdot Cis\ ۶۰^\circ)+\frac{۱}{۳}(a+a\cdot Cis\ ۶۰^\circ)}{dCis\ ۶۰^\circ-\frac{۱}{۲}(d+aCis\ ۶۰^\circ)}$$

$$=\frac{-\frac{۱}{۲}(a+d\cdot Cis\ ۶۰^\circ)+\frac{۱}{۳}(a+aCis\ ۶۰^\circ)}{-d+\frac{۱}{۲}(a+d\cdot Cis\ ۶۰^\circ)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i\sqrt{۳}}{۳}=\frac{i\sqrt{۳}}{۳}$$

یعنی دو مثلث ΔGMF و ΔGND متشابهند، و همچنین داریم:

$$CM=\frac{\sqrt{۳}}{۳}EM \quad , \quad GN=\frac{\sqrt{۳}}{۳}DN$$

مثال ۱۴: روی اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$، مربع‌هایی ساخته شده‌اند که در بیرون متوازی الاضلاع قرار دارند. ثابت کنید مراکز این مربع‌ها، خود، رئوس یک مربعند.

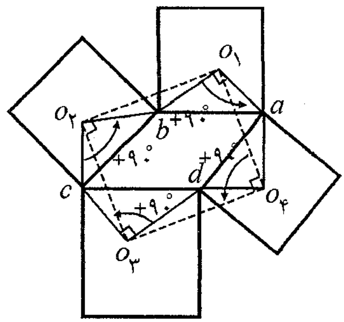
حل: همان‌طور که از شکل پیداست، داریم:

$$a=(b-o_۱)Cis\ ۹۰^\circ+o_۱$$

$$d=(a-o_۴)Cis\ ۹۰^\circ+o_۴$$

$$c=(d-o_۳)Cis\ ۹۰^\circ+o_۳$$

$$b=(c-o_۲)Cis\ ۹۰^\circ+o_۲$$



شکل (۷۶)

اما $Cis\ ۹۰^\circ = i$، بنابراین:

$$o_۱ = \frac{a-bi}{۱-i}\ ,\ o_۲ = \frac{b-ci}{۱-i}\ ,\ o_۳ = \frac{c-di}{۱-i}\ ,\ o_۴ = \frac{d-ai}{۱-i}$$

حال داریم:

$$\frac{o_۱-o_۲}{o_۱-o_۴} = \frac{(a-b)+(c-b)i}{(a-d)+(a-b)i} = \frac{(a-b)+(c-b)i}{(b-c)+(a-b)i} = -i$$

(زیرا $abcd$ متوازی‌الاضلاع بوده و داریم: $a+c=b+d$) بنابراین داریم: $o_۱o_۲ \perp o_۱o_۴$ و $\overline{o_۱o_۲} = \overline{o_۱o_۴}$. به طریق مشابه ثابت خواهد شد:

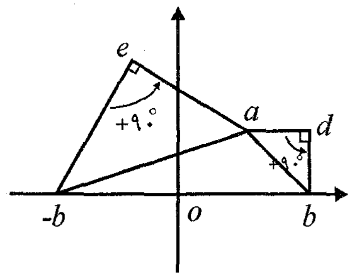
$o_۲o_۳ \perp o_۲o_۱$ و $\overline{o_۲o_۱} = \overline{o_۲o_۳}$. بنابراین چهار ضلعی $o_۱o_۲o_۳o_۴$ مربع بوده و حکم ثابت شده است.

مثال ۱۵: مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ΔAEC و ΔADB خارج از مثلث ΔABC رسم شده‌اند ($\angle D = \angle E = ۹۰^\circ$). ثابت کنید مثلثی که رئوس آن E، D و وسط ضلع BC می‌باشند، قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

حل: وسط bc را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم به طوریکه c, b روی محور xها باشند؛ پس $c = -b$. همچنین با توجه به دوران‌های موجود در شکل داریم:

$$a=(-b-e)Cis\ ۹۰^\circ+e=-(b+e)i+e\Rightarrow e=\frac{a+bi}{۱-i}$$

$$b=(a-d)Cis\ ۹۰^\circ+d=(a-d)i+d\Rightarrow d=\frac{b-ai}{۱-i}$$



شکل (۷۷)

بنابراین: $\frac{d-۰}{e-۰}=\frac{b-ai}{a+bi}$

در نتیجه: $(\frac{d-۰}{e-۰})i=\frac{bi+a}{a+bi}=۱$

یعنی: $\frac{d-۰}{e-۰}=\frac{۱}{i}=-i$

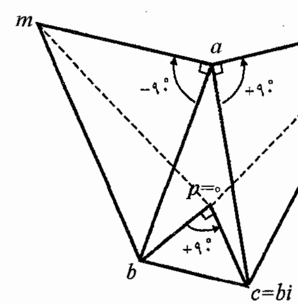
پس $OD\perp OE$ و $\overline{OD}=\overline{OE}$ و حکم ثابت شد.

مثال ۱۶: روی اضلاع مثلث $\Delta ABC(\angle B,\angle C>۴۵^\circ)$، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ΔMAB و ΔNAC و ΔBPC را به گونه‌ای ساخته‌ایم که M و N بیرون و P داخل مثلث ΔABC قرار گیرد $(\angle NAC=\angle MAB=\angle BPC=۹۰^\circ)$؛ ثابت کنید مثلث ΔPMN نیز قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

حل: اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که، ساده‌ترین محاسبات هنگامی انجام‌پذیر است که P مبدأ باشد. اما داریم: $c = (b-p)Cis\ ۹۰^\circ + p$؛

در نتیجه:

$$p = \frac{c - bCis\cdot ۹۰^\circ}{۱ - Cis\ ۹۰^\circ} = \frac{c - bi}{۱ - i}$$



شکل (۷۸)

و اگر $p = ۰$ باشد: $c - bi = ۰ \Rightarrow c = bi$

در نتیجه:

$$m = (b-a)Cis\ (-۹۰^\circ) + a = (b-a)(-i) + a = (a-b)i + a$$

$$n = (c-a)\cdot Cis\ ۹۰^\circ + a = (c-a)i + a = (bi-a)i + a = -ai + (a-b)$$

بنابراین:

$$\frac{m-۰}{n-۰} = \frac{(a-b)i + a}{-ai + (a-b)}$$

در نتیجه:

$$(\frac{m-۰}{n-۰})(-i) = \frac{(a-b)i + a}{a + (a-b)i} = ۱$$

یعنی:

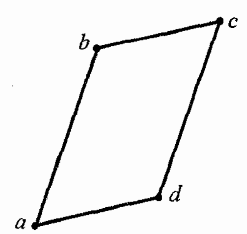
$$\frac{m-۰}{n-۰} = \frac{۱}{-i} = i$$

بنابراین $MP \perp NP$ و $MP = NP$، و حکم ثابت شد.

۵. چهار ضلعی‌ها و n ضلعی‌ها

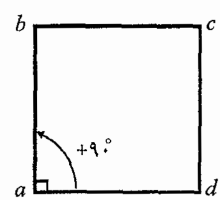
تا اینجا انواع چهار ضلعی‌ها را تقریباً بررسی نموده‌ایم؛ اما در این بخش به بیان جزئیات بیشتری می‌پردازیم.

(۱) متوازی الاضلاع: در متوازی‌الاضلاع دلخواه $abcd$ بنابر استدلالی که قبلاً بیان شده است، داریم: $a + c = b + d$.



شکل (۷۹)

بنابراین برای مربع $abcd$ داریم: $b = (d-a)Cis\ ۹۰^\circ + a = (d-a)i + a$



شکل (۸۰)

و نقطهٔ c با توجه به رابطهٔ $a + c = b + d$، بدست می‌آید:

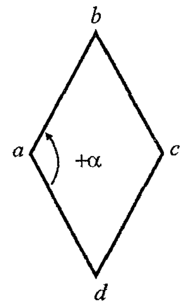
$$c = b + d - a = (d-a)i + a + d - a = (d-a)i + d$$

همچنین برای لوزی $abcd$ که $\angle bad = \alpha$، خواهیم داشت:

$$b = (d-a)Cis\ \alpha + a$$

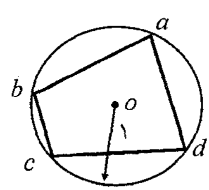
و

$$c = b + d - a = (d - a)Cis\ \alpha + d$$



شکل (۸۱)

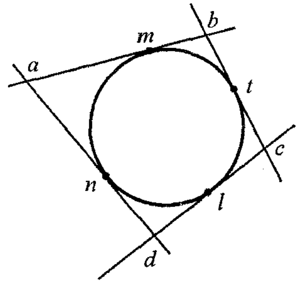
(۲) چهار ضلعی‌های محاطی: اگر چهار ضلعی $abcd$ محاطی باشد برای ساده شدن انجام محاسبات، بهتر است مرکز دایرهٔ محیطی آن را مبدأ، و در صورت امکان به شعاع واحد بگیریم، که در این صورت خواهیم داشت: $\overline{a} = \frac{1}{a}\ ,\ \overline{b} = \frac{1}{b}\ ,\ \overline{c} = \frac{1}{c}\ ,\ \overline{d} = \frac{1}{d}$



شکل (۸۲)

و این باعث جلوگیری از پیچیدگی‌در حل مسأله‌های مربوط به چهار ضلعی‌های محاطی می‌شود.

(۳) چهار ضلعی‌های محیطی: همان طور که قبلاً توضیح داده شد، اگر مماس‌های دایرهٔ یکّه در نقاط m و n روی آن، یکدیگر را در نقطهٔ a قطع کنند، داریم: $a = \frac{2mn}{m+n}$



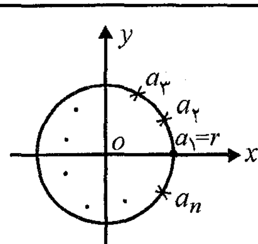
شکل (۸۳)

بنابراین، بهتر است دایرهٔ محاطی چهارضلعی محیطی $abcd$ را، دایرهٔ یکّه در نظر بگیریم تا از پیچیدگی محاسباتی در حل مسأله کاسته شود. در این صورت اگر مطابق شکل (۸۳) دایرهٔ محاطی چهار ضلعی $abcd$، بر اضلاع ab، bc، cd و da به ترتیب در نقاط m، t، l و n مماس باشد، داریم:

$$a = \frac{۲mn}{m+n}\ ,\ \ b = \frac{۲tm}{t+m}\ ,\ c = \frac{۲lt}{l+t}\ ,\ d = \frac{۲nl}{n+l}$$

توجه: در مورد n ضلعی‌های محاطی و محیطی نیز به همین ترتیب می‌توان عمل کرد.

همچنین در مورد n ضلعی‌های منتظم، همان‌طور که در ابتدای فصل بیان شد، ریشه‌های nاُم واحد ($z^n = ۱$)، رئوس یک ضلعی منتظم هستند، و به عبارت دیگر اگر یکی از رئوس n ضلعی منتظم را عدد حقیقی r فرض کنیم، رئوس این n ضلعی، ریشه‌های nاُم معادلهٔ $z^n = r^n$ خواهند بود، که روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع r قرار می‌گیرند.



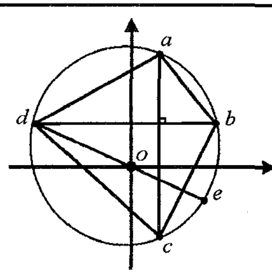
شکل (۸۴)

• حال به حل چند مثال از المپیادها و مسابقات داخلی و خارجی می‌پردازیم.

مثال ۱: اگر قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ بر هم عمود باشند و E روبروی قطری D، در دایرهٔ محیطی چهارضلعی باشد، نشان دهید: $AE = BC$.

حل: دایرهٔ محیطی چهار ضلعی $abcd$ را دایرهٔ یکّه در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید: $\vec{ac}||$ (محور yها)، پس خواهیم داشت: $\vec{db}||$ (محور xها). از این توازی‌ها داریم:

$$(*)\quad \begin{cases} a-c+\overline{a}-\overline{c}=0 \\ \text{و} \\ b-d=\overline{b}-\overline{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=\frac{1}{c}-\frac{1}{a} \Rightarrow ac=1 \\ \text{و} \\ b-d=\frac{1}{b}-\frac{1}{d} \Rightarrow bd=-1 \end{cases}$$



شکل (۸۵)

همچنین از فرض مسأله داریم $e=-d$. پس حکم این است که:

$$|a-e|=|b-c| \Leftrightarrow |a+d|=|b-c| \Leftrightarrow |a+d|^2=|b-c|^2$$
$$\Leftrightarrow (a+d)(\overline{a}+\overline{d})=(b-c)(\overline{b}-\overline{c})$$
$$\Leftrightarrow (a+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{d})=(b-c)(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})$$
$$\Leftrightarrow \frac{bc(a+d)^2}{adbc}=\frac{-ad(b-c)^2}{bcad}$$

$$\Leftrightarrow bc(a+d)^{۲} = -ad(b-c)^{۲}$$

$$\Leftrightarrow bc(a^{۲}+d^{۲}+۲ad) = -ad(b^{۲}+c^{۲}-۲bc)$$

$$\overset{(*)\text{از}}{\Leftrightarrow} bca^{۲}+bcd^{۲}-۲ = -adb^{۲}-adc^{۲}-۲$$

$$\overset{(*)\text{از}}{\Leftrightarrow} ba-cd = ab-dc$$

و بدین ترتیب حکم ثابت شد.

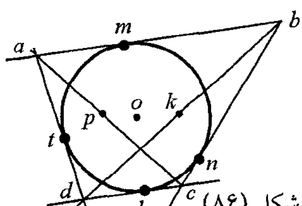
مثال ۲: چهار ضلعی $ABCD$ محیطی‌است. ثابت کنید، خطی که وسط قطرهای BD و AC را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایرهٔ محاطی آن می‌گذرد.

حل: فرض کنید p, k اوساط bd و ac باشند، و محل تماس اضلاع ab، bc، cd و da با دایرهٔ محاطی مذکور، بترتیب نقاط m، n، l و t باشند. در نتیجه اگر دایرهٔ محاطی را دایرهٔ یکّه در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{p-o}{k-o} = \frac{\frac{a+c}{۲}-۰}{\frac{b+d}{۲}-۰} = \frac{\frac{tm}{t+m}+\frac{nl}{n+l}}{\frac{mn}{m+n}+\frac{lt}{l+t}}$$

$$= \frac{tmn+tml+tnl+mnl}{mnl+mnt+mlt+nlt} \times \frac{(m+n)\cdot(l+t)}{(t+m)(n+l)}$$

$$= \frac{(m+n)(l+t)}{(t+m)(n+l)} \qquad (۱)$$



شکل (۸۶)

پس:

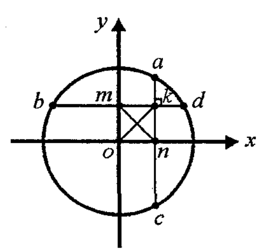
$$\frac{\overline{p}-\overline{o'}}{\overline{k}-\overline{o}}=\frac{\overline{\dfrac{a+c}{2}}-0}{\overline{\dfrac{b+d}{2}}-0}=\frac{(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n})\cdot(\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{t})}{(\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{m})\cdot(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{l})}$$

$$=\frac{(m+n)\cdot(l+t)}{(t+m)\cdot(n+l)} \qquad (2)$$

از تساوی روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که o روی kp قرار دارد و حکم ثابت شد.

مثال ۳: ثابت کنید طول پاره خطی که اوساط قطرهای چهار ضلعی محاطی و عمود قطر $ABCD$ را به هم وصل می‌کند، برابر است با، فاصلهٔ محل برخورد قطرها از مرکز دایرهٔ محیطی $ABCD$.

حل: دایرهٔ محیطی $abcd$ را دایرهٔ یکه می‌گیریم. چهار ضلعی $abcd$ عمود قطر است، بنابراین طوری آن را قرار می‌دهیم که: $\overrightarrow{ac}||$ (محور yها) و $\overrightarrow{bd}||$ (محور xها) باشد.



شکل (۸۷)

همان طور که از شکل معلوم است، نقاط وسط ac و bd، یعنی n و m به ترتیب روی محور xها و yها قرار می‌گیرند، بنابراین واضح است که چهار ضلعی $omnk$ مستطیل است. پس $MN=OK$، و به سادگی حکم بدون نیاز به محاسبات ثابت شد.

۶. همخط بودن و هم‌دایره بودن

از هندسهٔ کلاسیک می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای همدایره بودن نقاط A، B، C و D این است که: $\angle ACB = \angle ADB$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$Arg(\frac{a-c}{b-c}) = Arg(\frac{a-d}{b-d})$$

به عبارت دیگر عبارت $(\frac{a-c}{b-c}) \div (\frac{a-d}{b-d})$ باید عددی حقیقی باشد، یا در واقع:

$$(\frac{a-c}{b-c}) \div (\frac{a-d}{b-d}) = (\frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}) \div (\frac{\overline{a}-\overline{d}}{\overline{b}-\overline{d}})$$

همچنین شرط لازم و کافی برای همخط بودن سه نقطهٔ دلخواه c, b, a این است که:

$$Arg(\frac{a-c}{b-c}) = \pi \quad \text{یا} \quad 0$$

و به عبارت دیگر:

$$\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R} \quad \text{یا} \quad \frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{a}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}}$$

مثال ۱: فرض کنید خطوط مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ΔABC در نقاط A، B و C، به ترتیب اضلاع BC، CA و AB را در نقاط A_1، B_1 و C_1 قطع کنند. ثابت کنید، A_1، B_1 و C_1 بر یک استقامتند.

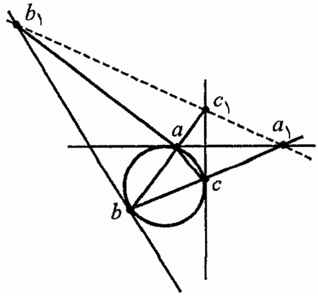
حل: دایرهٔ محیطی Δabc را یکّه می‌گیریم، داریم:

(۱) c_1 روی مماس در نقطهٔ c قرار دارد $\quad \frac{c_1}{c} + c\overline{c_1} = 2 \Rightarrow \overline{c_1} = \frac{2c - c_1}{c^2}$

(۲) c_1 روی خط گذرنده از b, a قرار دارد $\quad \frac{c_1 - b}{\overline{c_1} - \overline{b}} = \frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} \Rightarrow \frac{c_1 - b}{\overline{c_1} - \frac{1}{b}} = -ab$

از قرار دادن رابطهٔ (۱) در (۲) خواهیم داشت:

$$c_1 = b - ab\Big[(\frac{2c - c_1}{c^2}) - \frac{1}{b}\Big] = b - \frac{2ab}{c} + \frac{abc_1}{c^2} + a$$



شکل (۸۸)

در نتیجه:

$$(\frac{c^2-ab}{c^2})c_1=(a+b)-\frac{2ab}{c}\Rightarrow c_1=\frac{(ac+bc-2ab)c}{c^2-ab}$$

به طریق مشابه:

$$b_1=\frac{(ab+bc-2ac)b}{b^2-ca}\quad,\quad a_1=\frac{(ca+ab-2bc)a}{a^2-bc}$$

برای راحتی محاسبات، بی‌آنکه خللی به حل مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد: $b=1$.

پس باید ثابت کرد:

$$\frac{a_1-b_1}{\overline{a_1}-\overline{b_1}}=\frac{c_1-b_1}{\overline{c_1}-\overline{b_1}}\Leftrightarrow\frac{\frac{2a+b+c}{bc-a^2}-\frac{2b+c+a}{ca-b^2}}{\frac{2c+a+b}{ab-c^2}-\frac{2b+c+a}{ca-b^2}}$$

$$=\frac{\frac{(ac+ab-2bc)a}{a^2-bc}-\frac{(ab+cb-2ac)b}{b^2-ac}}{\frac{(ac+bc-2ab)c}{c^2-ab}-\frac{(ab+bc-2ac)b}{b^2-ac}}$$

$$\Leftrightarrow[c(b^2-ac)(ac+bc-2ab)-b(c^2-ab)(ab+cb-2ac)][(a^2-bc)(2b+c+a)+\{b^2-ac)(2a+b+c)\}$$

$$=[a(b^2-ac)(ac+ab-2cb)-b(a^2-bc)(ab+cb-2ac)][(c^2-ab)(2b+c+a)+(b^2-ac)(2c+a+b)]$$

و با کمی ساده‌سازی درستی تساوی فوق اثبات خواهد شد.

مثال ۲: چهار دایرهٔ c_1، c_2، c_3, c_4 را در صفحه در نظر بگیرید. فرض کنید $c_1 \cap c_2 = \{z_1, w_1\}$، $c_2 \cap c_3 = \{z_2, w_2\}$، $c_3 \cap c_4 = \{z_3, w_3\}$ و $c_4 \cap c_1 = \{z_4, w_4\}$ (مطابق شکل)

ثابت کنید، نقاط z_1، z_2، z_3 و z_4 همدایره‌اند، اگر و تنها اگر w_1، w_2 ، w_3 و w_4 همدایره باشند.

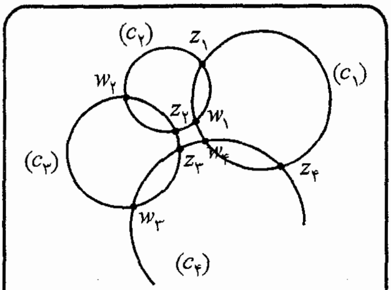
حل: بنابر فرض داریم:

$$s_1 = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \div \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1} \in \mathbb{R}$$

$$s_2 = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \div \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2} \in \mathbb{R}$$

$$s_3 = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \div \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3} \in \mathbb{R}$$

$$s_4 = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \div \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4} \in \mathbb{R}$$



شکل (۸۹)

در نتیجه با اندکی محاسبات داریم:

$$\frac{s_1 \cdot s_3}{s_2 \cdot s_4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \div \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \cdot \left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} \div \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right) \in \mathbb{R}$$

یعنی اگر $\left(\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \div \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}\right)$ حقیقی باشد (یعنی z_1، z_2، z_3، z_4 همدایره باشند)، آن‌گاه $\left(\frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4}\right) \div \left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2}\right)$ نیز حقیقی است (یعنی w_1، w_2، w_3، w_4 نیز همدایره‌اند) و بالعکس. در نتیجه حکم ثابت شد.

مثال ۳: عمود منصف‌های اضلاع AC و AB از مثلث ΔABC، به ترتیب اضلاع AB و AC را در P و Q قطع کرده‌اند؛ ثابت کنید نقاط B، C، P و Q همدایره‌اند و این دایره از مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC می‌گذرد.

حل: دایرهٔ محیطی Δabc را دایرهٔ یکّه در نظر می‌گیریم، بنابراین از آنجا که عمود منصف ac، از وسط ac، مبدأ مختصات، و نقطهٔ p می‌گذرد، داریم:

$$\frac{\frac{a+c}{۲}-\circ}{\frac{\overline{a}+\overline{c}}{۲}-\overline{\circ}}=\frac{p-\circ}{\overline{p}-\overline{\circ}}\Rightarrow\frac{a+c}{(\frac{a+c}{ac})}=\frac{p}{\overline{p}}\Rightarrow\overline{p}=\frac{p}{ac}$$

و به طریق مشابه $\overline{q}=\frac{q}{ab}$؛ حال از آنجا که $p\in\vec{ab}$، داریم:

$$\frac{p-a}{\overline{p}-\overline{a}}=\frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{b-a}{\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}}=-ab$$

$$\Rightarrow p-a=-ab(\frac{p}{ac}-\frac{۱}{a})=b(۱-\frac{p}{c})\Rightarrow p=\frac{b}{c}(c-p)+a$$

$$\Rightarrow p=\frac{(a+b)c}{b+c}\ ,\ \ \overline{p}=\frac{a+b}{a(b+c)}$$

و به طریق مشابه داریم:

$$q=\frac{(a+c)b}{b+c}\ ,\ \ \overline{q}=\frac{a+c}{a(b+c)}$$

حکم همدایره بودن b، p، q و c معادل اینست که:

$$(\frac{p-b}{p-c})\div(\frac{q-b}{q-c})=(\frac{\overline{p}-\overline{b}}{\overline{p}-\overline{c}})\div(\frac{\overline{q}-\overline{b}}{\overline{q}-\overline{c}})$$

$$\Leftrightarrow\frac{(ba-c^{۲})(ac-b^{۲})}{bc(a-b)(a-c)}=\frac{(\frac{۱}{ab}-\frac{۱}{c^{۲}})(\frac{۱}{ac}-\frac{۱}{b^{۲}})}{\frac{۱}{bc}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c})}=\frac{(ba-c^{۲})(ac-b^{۲})}{bc(a-c)(a-b)}$$

بنابراین ثابت شد که b، p، q و c همدایره‌اند و حال برای اثبات همدایره بودن o با این نقاط، کافیست ثابت کنیم که c، b، p و o روی یک دایره قرار دارند، یعنی:

$$\frac{-\circ+p}{-c+p} \div \frac{-\circ+b}{-c+b} = \frac{-\overline{p}}{\overline{c}-\overline{p}} \div \frac{-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}} \Leftrightarrow \left(\frac{-c(a+b)}{(b+c)(c-\frac{c(a+b)}{b+c})}\right)$$

$$\div\left(\frac{b}{b-c}\right) = \left(\frac{-(a+b)}{a(b+c)(\frac{1}{c}-\frac{a+b}{a(b+c)})}\right) \div \left(\frac{(\frac{-1}{b})}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-c)(a+b)}{b(a-c)} = \frac{(a+b)(-b+c)}{b(c-a)}$$

پس حکم ثابت شد.

مثال ۴: ثابت کنید اوساط قطرهای یک چهار ضلعی کامل، بر یک امتدادند.

حل: مطابق شکل (۹۰) a را مبدأ مختصات بگیرید.

داریم:

$$c = (1-t_1)b + t_1 d \quad (t_1 \in \mathbb{R})$$

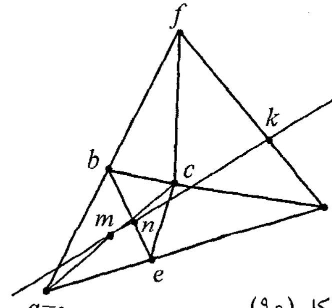
و

$$e = (1-t_2)a + t_2 d = t_2 d \quad (t_2 \in \mathbb{R})$$

حال از آنجا که d روی خطوط $\vec{ab}$ و $\vec{ec}$ قرار دارد، داریم:

$$f = a + t_3(a-b) = -bt_3$$

$$f = c + t_3(e-c) \quad (t_3 \in \mathbb{R})$$



شکل (۹۰)

که با توجه به آنچه که بدست آوردیم داریم:

$$f=\frac{t_{۲}(t_{۱}-۱)}{t_{۱}-t_{۲}}\cdot b$$

حال فرض کنید m ، n و k به ترتیب وسط‌های قطرهای ac، be و fd باشند؛ پس داریم:

$$m=\frac{۱}{۲}(a+(۱-t_{۱})b+t_{۱}d)=\frac{۱}{۲}((۱-t_{۱})b+t_{۱}d)$$

$$n=\frac{۱}{۲}(b+t_{۲}d) \quad , \quad k=\frac{۱}{۲}(d+\frac{t_{۲}(t_{۱}-۱)}{t_{۱}-t_{۲}}b)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{n-m}{n-k}=\frac{b+t_{۲}d+(t_{۱}-۱)b-t_{۱}d}{b+t_{۲}d-d+\frac{(۱-t_{۱})t_{۲}}{t_{۱}-t_{۲}}\cdot b}$$

$$=\frac{(t_{۲}-t_{۱})d+t_{۱}\cdot b}{\frac{(۱-t_{۲})}{(t_{۱}-t_{۲})}((t_{۲}-t_{۱})d+t_{۱}b)}\Rightarrow \frac{n-m}{n-k}=\frac{t_{۲}-t_{۱}}{t_{۲}-۱}\in \mathbb{R}$$

یعنی m و n و k همخطند.

۷. بردارها در صفحهٔ اعداد مختلط

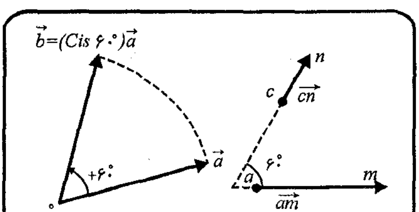
در اینجا فرض براین است که با خواص بردارها و قضایای آن‌ها در دستگاه مختصات دکارتی آشنایی دارید؛ در عین حال، خواص بردارها و قضایای مهم آن‌ها در پیوست آخرِ کتاب آمده است که توصیه می‌شود قبل از شروع به مطالعهٔ این بخش، به آن مراجعه نمائید. (اثبات این قضایا و کاربرد آن‌ها را می‌توانید در کتاب «هندسه در المپیادهای ریاضی ایران و جهان، جلد اول» مشاهده نمائید.)

همان‌طور که گفتیم نقطهٔ $p=(a,b)$ در صفحهٔ اعداد مختلط یک نقطهٔ منحصر به فرد است که فاصلهٔ آن تا مبدأ همان $|p|$ می‌باشد؛ بنابراین با توجه به تعریف بردار مکانی، می‌توان گفت $\vec{p}$ همان بردار مکانی‌ست در صفحهٔ اعداد مختلط و بدین ترتیب بردارها در صفحهٔ

اعداد مختلط همان معنا را خواهند داشت که در دستگاه دکارتی داشتند با این تفاوت که در صفحهٔ اعداد مختلط می‌توان با بردارها بسیار راحت‌تر برخورد کرد، برای مثال همان‌طور که در بخش ۴ آوردیم، نقطهٔ pi دوران یافتهٔ نقطهٔ p است حول مبدأ تحت زاویهٔ ۹۰° در جهت مثلثاتی؛ و در واقع بردار مکانِ $\vec{p}$ تحت زاویهٔ قائمه در جهت مثلثاتی می‌باشد.
اگر کمی دقت کنید با توجه به مطالبی که تاکنون در این کتاب خوانده‌اید، به این مطلب پی خواهید برد که مزیت اصلی استفاده از بردارها در صفحهٔ اعداد مختلط نسبت به هندسهٔ برداری عادی در امکان استفاده از ضریب i و یا در واقع بهتر است بگوئیم $Csi\theta$ است.
بدین ترتیب با توجه به آنچه که در بخش تبدیلات آورده شد، کافیست تنها دوران و تجانس مارپیچی را که با $Cis\theta$ در ارتباطند بررسی نمائیم.

دوران بردارها

اگر بردار $\vec{a}$ را در نظر بگیرید، بردار $Cis\theta \cdot \vec{a}$ دوران یافتهٔ این بردار است تحت زاویهٔ θ در جهت مثلثاتی. برای مثال در شکل زیر $\vec{b} = (Cis۶۰^\circ)\vec{a}$ دوران یافتهٔ $\vec{a}$ است تحت زاویهٔ $+۶۰^\circ$. همچنین در شکل زیر می‌بینید که با توجه به خواص بردارها در صورتی که $|\overrightarrow{am}| = |\overrightarrow{cn}|$ می‌توان نوشت: $\overrightarrow{cn} = (Cis۶۰^\circ)\overrightarrow{am}$

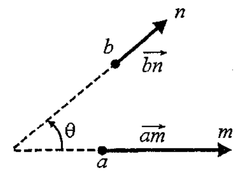


شکل (۹۱)

تجانس مارپیچی بردارها

همان‌طور که می‌دانید نقطهٔ $b = k \cdot a$ (که k عددی است حقیقی) در امتداد خطی قرار دارد که از نقطهٔ a و مبدأ می‌گذرد و در ضمن: $|b| = k|a|$؛ بنابراین می‌توان گفت که بردار $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ متجانس بردار $\vec{a}$ می‌باشد با نسبت تجانس k.

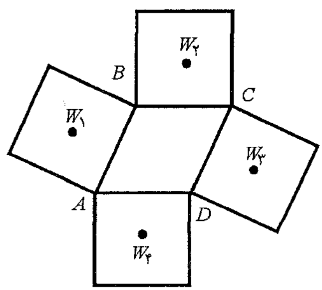
بدین ترتیب در حالت کلی برای دو بردار $\overrightarrow{bn}$ و $\overrightarrow{am}$ که مطابق شکل با هم زاویهٔ θ می‌سازند وجود دارد $k \in I\!R$ بطوریکه بتوان نوشت: $\overrightarrow{bn} = (k \cdot Cis\theta)\overrightarrow{am}$



شکل (۹۲)

حال به حلّ چند مثال با استفاده از بردارها در صفحهٔ مختلط می‌پردازیم.

مثال ۱: روی اضلاع متوازی الاضلاع $ABCD$ و خارج آن مربع‌هایی به مراکز W_1، W_2، W_3 و W_4 می‌سازیم. ثابت کنید W_1، W_2، W_3 و W_4 رئوس یک مربع هستند.



شکل (۹۳)

حل: با توجه به شکل می‌توان فرض کرد:

$$\vec{DA} = \vec{CB} = m \quad , \quad \vec{AB} = \vec{DC} = n$$

حال اگر بردارِ مکان یا در واقع عدد مختلطِ متناظرِ با $\vec{DW_3}$ را x بنامیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{W_3C} = i \cdot \overrightarrow{DW_3} = ix \Rightarrow \overrightarrow{W_3C} + \overrightarrow{DW_3} = x(i+1) = n$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{i+1} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}i \Rightarrow \overrightarrow{DW_3} = \frac{-n}{2} - \frac{n}{2}i \quad , \quad \overrightarrow{CW_3} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}i$$

و به طریق مشابه:

$$C\overrightarrow{W_۲} = \frac{m}{۲} - \frac{m}{۲}i \ , \ B\overrightarrow{W_۲} = \frac{-m}{۲} - \frac{m}{۲}i$$

$$A\overrightarrow{W_۱} = \frac{n}{۲} + \frac{n}{۲}i \ , \ B\overrightarrow{W_۱} = \frac{-n}{۲} + \frac{n}{۲}i$$

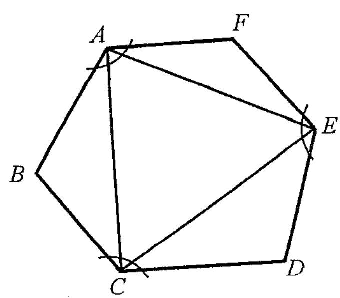
بنابراین:

$$C\overrightarrow{W_۲} - C\overrightarrow{W_۳} = \overrightarrow{W_۳W_۲} = (\frac{m+n}{۲}) + (\frac{n-m}{۲})i$$

$$B\overrightarrow{W_۱} - B\overrightarrow{W_۲} = \overrightarrow{W_۲W_۱} = (\frac{m-n}{۲}) + (\frac{m+n}{۲})i$$

در نتیجه: $(\overrightarrow{W_۲W_۱}) = i(\overrightarrow{W_۳W_۲})$ و بدین ترتیب حکم مسأله ثابت شد.

مثال ۲: شش ضلعی محدب $ABCDEF$ به گونه‌ای است که:
$\angle BAF = \angle DCB = \angle FED = ۱۲۰^\circ$ و $AB = AF$، $CB = CD$، $ED = EF$؛ ثابت کنید مثلث ΔACE متساوی‌الاضلاع است.



شکل (۹۴)

حل: فرض کنید:

$\overrightarrow{FA} = a$

$\overrightarrow{BC} = b$

$\overrightarrow{DE} = c$

بنابراین با توجه به فرض مسأله، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AB} = (Cis۶۰^\circ)a$$

,

$$\overrightarrow{CD} = (Cis۶۰^\circ)b$$

,

$$\overrightarrow{EF} = (Cis۶۰^\circ)c$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = b + aCis۶۰^\circ$$

,

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = c + bCis۶۰^\circ$$

,

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = a + cCis۶۰^\circ$$

که از جمع این سه تساوی خواهیم داشت:

$$(a+b+c)(۱ + Cis۶۰^\circ) = ۰ \Rightarrow c = -(a+b)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC})Cis(-۶۰^\circ) &= (b + aCis۶۰^\circ)Cis(-۶۰^\circ) = bCis(-۶۰) + a \\ &= a + \frac{b}{۲} - bisin۶۰^\circ \\ &= (a+b) - b(\cos۶۰^\circ + i\sin۶۰^\circ) \\ &= (a+b) - bCis۶۰^\circ \\ &= -\overrightarrow{CE}\end{aligned}$$

در نتیجه: $\angle ACE = ۶۰^\circ$ و $AC = CE$؛ پس حکم مسأله به اثبات رسید.

مثال ۳: مثلث دلخواه ΔABC مفروض است. روی اضلاع AC و BC مثلث‌های متساوی الاضلاع $\Delta AB'C$ و $\Delta BA'C$ را به سمت بیرون مثلث و روی ضلع AB مثلث متساوی‌الاضلاع $\Delta AC'B$ را به طرف داخلِ مثلث ΔABC رسم کنید.

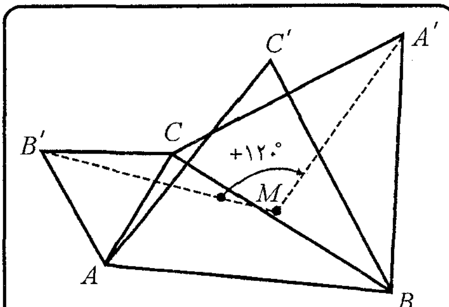
اگر M مرکز ثقل مثلث $AC'B$ باشد؛ ثابت کنید:

$A'M = B'M$ و $\angle A'MB' = ۱۲۰^\circ$.

حل: (جهت مثبت قرار دادی را جهت حرکت عقربهٔ ساعت در نظر بگیرید):

می‌توان فرض کرد: $\overrightarrow{BA} = q \quad , \overrightarrow{AC} = p$

بنابراین خواهیم داشت: $\overrightarrow{BC} = p + q$



شکل (۹۵)

در نتیجه:

$$\overrightarrow{BA'} = (p+q)Cis۶۰^\circ$$

,

$$\overrightarrow{AB'} = pCis(-۶۰^\circ)$$

و

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \cdot Cis۱۲۰^\circ$$

پس:

$$\overrightarrow{MA} = \frac{qCis۱۲۰^\circ}{Cis۱۲۰^\circ - ۱} \quad , \quad \overrightarrow{MB} = \frac{q}{Cis۱۲۰^\circ - ۱}$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB'} = \frac{qCis۱۲۰^\circ}{Cis^\circ - ۱} + pCis(-۶۰^\circ)$$

$$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA'} = \frac{q}{Cis۱۲۰^\circ - ۱} + (p+q)Cis۶۰^\circ$$

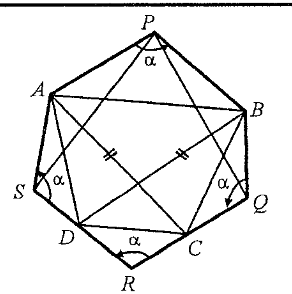
با توجه به حکم مسأله باید ثابت کنیم: $\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MB'})Cis۱۲۰^\circ$؛

$$\Leftrightarrow \frac{qCis^{۲}۱۲۰^\circ}{Cis۱۲۰^\circ - ۱} + pCis(-۶۰^\circ) \cdot Cis۱۲۰^\circ$$

$$= \frac{q}{Cis۱۲۰^\circ - ۱} + (p+q)Cis۶۰^\circ \Leftrightarrow q(Cis۱۲۰^\circ - Cis۶۰^\circ + ۱) = ۰$$

که همواره درست است؛ بدین ترتیب حکم مسأله اثبات گردید.

مثال ۴: در چهار ضلعی $ABCD$ داریم $AC = BD$ طبق شکل زیر، چهار مثلث متساوی‌الساقین روی اضلاع آن ساخته‌ایم؛ ثابت کنید: $PR \perp SQ$.



شکل (۹۶)

ثابت می‌کنیم چهار ضلعی $SPQR$ یک لوزی‌ست.

داریم:

$$\overrightarrow{PB} = Cis\alpha \cdot \overrightarrow{PA}$$

$$\overrightarrow{QC} = Cis\alpha \cdot \overrightarrow{QB}$$

$$\overrightarrow{RD} = Cis\alpha \cdot \overrightarrow{RC}$$

$$\overrightarrow{SA} = Cis\alpha \cdot \overrightarrow{SD}$$

پس:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC} = (1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{PB}$$
$$+(1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{BQ} = (1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{PQ}$$

از طرف دیگر:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{RC} = (1 - Cis\alpha)\overrightarrow{SD} + (1 - Cis\alpha)\overrightarrow{RC}$$
$$= (1 - Cis\alpha)\overrightarrow{RS}$$

در نتیجه: $(1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{PQ} = (1 - Cis\alpha)\overrightarrow{RS}$

$$\Rightarrow \Big|1 - Cis(-\alpha)\Big| \cdot |\overrightarrow{PQ}| = |1 - Cis\alpha||\overrightarrow{RS}|$$

$$\Rightarrow (1 - Cis\alpha)|\overrightarrow{PQ}| = (1 - Cis\alpha)|\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{AC}| \qquad (1)$$

(زیرا: $(|1 - Cis\alpha| = \sqrt{(1 + \cos\alpha^2) + \sin^2\alpha} = |1 - Cis(-\alpha)|$

همچنین داریم: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{RD} = (1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{QR}$

و از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = (1 - Cis(-\alpha))\overrightarrow{PS}$$

در نتیجه:

$$(1 - Cis\alpha)|\overrightarrow{PS} = |(1 - Cis\alpha)||\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{BD}| \qquad (2)$$

بنابراین با توجه به تساوی AC و BD، از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{PQ}|$$

در نتیجه $SPQR$ لوزی است و خواهیم داشت: $SQ \perp PR$

۸. مسائل بدون حل

۱ـ ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کند. نشان دهید، طول خط‌المرکزین دایره‌های محاطی این دو مثلث، با فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث اصلی از رأس قائمهٔ این مثلث، برابر است.

۲ـ اگر RS قطر متغیری از یک دایرهٔ مفروض باشد، و A و B دو نقطهٔ ثابت و همخط با مرکز این دایره باشند، مکان هندسی محل برخورد AS و BR را بیابید.

۳ـ مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متغیری را بیابید که یک قاعده و دایرهٔ محیطی آن ثابت است.

۴ـ نقاط وسط‌اضلاع AB، BC، CD، DE، EF و FA از ۶ ضلعی دلخواه $ABCDEF$ را $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، $M_۴$، $M_۵$ و $M_۶$، و همچنین نقاط وسط قطرهای AD، BE و CF را $N_۱$، $N_۲$ و $N_۳$ می‌نامیم.

ثابت کنید، مراکز ثقل مثلث‌های $\Delta M_۱M_۳M_۵$، $\Delta M_۲M_۴M_۶$ و $\Delta N_۱N_۲N_۳$ برهم منطبق است.

۵ـ مثلث حادة الزاویهٔ ΔABC را در نظر بگیرید. روی اضلاع آن، سه مثلث $\Delta B''AC$، $\Delta C''AB$ و $\Delta A''BC$ را به سمت بیرون مثلث می‌سازیم، به گونه‌ای که داشته باشیم:

$$\angle B''AC = \angle C''BA = \angle A''BC = ۳۰^\circ$$

و

$$\angle B''CA = \angle C''AB = \angle A''CB = ۶۰^\circ$$

اگر M وسط ضلع BC واقع باشد، ثابت کنید که: $A'C' \perp B'M$

۶ـ نقطه M روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC قرار دارد. نشان دهید مقدار $\overline{MA}^۴ + \overline{MB}^۴ + \overline{MC}^۴$ به مکان نقطهٔ M وابسته نیست.

۷ـ روی امتداد ضلع BC از مثلث متساوی الاضلاع ΔABC، مثلث متساوی‌الاضلاع $\Delta A'B'C$ را به گونه‌ای ساخته‌ایم که A و A' در یک طرف BC واقع باشند. اگر وسط AB' را M و وسط $A'B$ را N بنامیم؛ ثابت کنید مثلث ΔMNC متساوی الاضلاع است.

۸ـ دایرهٔ (C) با قطر AC و متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروضند. قطر BD، مماس بر نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) را در R، و CB و CD دایرهٔ (C) را در P و Q قطع کرده‌اند. نشان دهید P، Q، R همخط هستند.

۹ـ مثلث‌های متساوی الاضلاع $B\overset{\Delta}{M_1}C$، $C\overset{\Delta}{M_2}A$ و $A\overset{\Delta}{M_3}B$ را روی اضلاع BC، CA و AB از مثلث ΔABC ساخته‌ایم، به طوریکه M_1، M_2 و M_3 خارج از مثلث ΔABC واقعند.

اولاً: نشان دهید، مثلث $\Delta M_1M_2M_3$ متساوی‌الاضلاع است.

ثانیاً: طول ضلع مثلث $\Delta M_1M_2M_3$ را برحسب اضلاع مثلث ΔABC بنویسید.

۱۰ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC باشند، و AH، BH و CH دایرهٔ محیطی را به ترتیب در نقاط D'، E' و F' قطع نمایند، نشان دهید خطوطی که از D' ، E' و F' به ترتیب به موازات OA، OB و OC رسم می‌شوند، همرسند.

۱۱ـ اگر P و Q عمودهایی باشند که از دو رأس B و C از مثلث ΔABC، به ترتیب بر DF و DE رسم شده‌اند، ثابت کنید: $EQ = FP$ (E و F پای ارتفاع‌های وارد از B و C براضلاع مقابلند).

۱۲ـ DP و DQ عمودهایی هستند که از پای ارتفاع AD از مثلث ΔABC، بر اضلاع AC و AB رسم شده‌اند. ثابت کنید نقاط B، C، P و Q همدایره‌اند.

۱۳ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC باشند، ثابت کنید:

$$AH^2 + BC^2 = 4OA^2$$

۱۴ـ ثابت کنید، مجموع مربعات فواصل رئوس یک مثلث از مرکز ارتفاعی آن مثلث، برابر است با، دوازده برابر مربع شعاع دایرهٔ محیطی، منهای مجموع مربعات اضلاع مثلث؛ یعنی اگر H و R مرکز ارتفاعی و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث دلخواه ΔABC باشند، داریم:

$$AH^{2} + BH^{2} + CH^{2} = 12R^{2} - (a^{2} + b^{2} + c^{2})$$

۱۵ـ دو وتر متعامد AB و CD در یک دایره حول نقطهٔ ثابت P می‌چرخند. ثابت کنید، مراکز ارتفاعی دو مثلث ΔABC و ΔABD دایرهٔ یکسانی را می‌پیمایند. مکان هندسی مرکز ثقل این مثلث‌ها را بیابید.

۱۶ـ اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC باشد، ثابت کنید مراکز ثقل مثلث‌های ΔHBC، ΔHCA، ΔHAB رئوس مثلثی هستند که با مثلث ΔABC متشابه است. همچنین مرکز ارتفاعی این مثلث، بر مرکز ثقل مثلث ΔABC انطباق دارد. و اگر O_1، O_2 و O_3 مراکز دوایر محیطی مثلث‌های ΔHBC، ΔHCA و ΔHAB باشند، ثابت کنید مثلث $\Delta O_1O_2O_3$ با مثلث ΔABC همنهشت است، و H مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $\Delta O_1O_2O_3$ است.

۱۷ـ ثابت کنید که تصویر رأس B از مثلث ΔABC، بر نیمساز زاویهٔ ΔBAC، روی خطی قرار می‌گیرد که از نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ΔABC با اضلاع AC و BC می‌گذرد.

۱۸ـ ثابت کنید نقطهٔ وسط ارتفاع یک مثلث، نقطهٔ تماس ضلع متناظر با آن ارتفاع و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، بر یک استقامتند.

۱۹ـ خط l به موازات میانهٔ AA_1 از مثلث ΔABC رسم شده و اضلاع BC، CA و AB را بترتیب در نقاط H، N و D قطع کرده است. نشان دهید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC و BD، خود نسبت به رأس A متقارن یکدیگرند.

۲۰ـ فرض کنید I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث مختلف الاضلاع ΔABC باشد و همچنین

فرض کنید، دایرهٔ محاطی بر اضلاع BC، CA، AB به ترتیب در نقاط A'، B' و C' مماس باشد. ثابت کنید مراکز دوایر محیطی مثلث‌های $\Delta IAA'$، $\Delta IBB'$ و $\Delta ICC'$ همخطند.

۲۱ـ فرض کنید M نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC باشد و A'، B' و C' قرینهٔ آن نسبت به BC، CA و AB باشند. ثابت کنید نقطهٔ منحصر بفرد P موجود است، که از A و B'، همچنین از B و C' و نیز از C و A' به یک فاصله باشد.

۲۲ـ فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محدب و محاط در نیمدایرهٔ (S) به قطر AB باشد، و خطوط AC و BD یکدیگر را در E و خطوط AD و BC یکدیگر را در F، قطع کنند. اگر EF نیمدایرهٔ (S) را در G و خط را در H قطع کند، ثابت کنید E وسط GH است. اگر وتنها اگر G وسط FH باشد.

۲۳ـ فرض کنید ΔABC یک مثلث حادةالزاویه باشد. نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC هستند. دوایر با قطرهای BN و CM همدیگر را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید P ، Q و H همخطند (H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC است).

۲۴ـ ثابت کنید خطوطی که رئوس یک مثلث را به نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع مقابل وصل می‌کنند، همرسند.

۲۵ـ فرض کنید C نقطه‌ای روی نیمدایره‌ای به قطر AB و D وسط کمان $\widehat{AC}$ باشد. پای عمود وارد از D بر BC را E، و محل برخورد AE با نیمدایره را F می‌نامیم. ثابت کنید BF پاره خط DE را نصف می‌کند.

۲۶ـ فرض کنید I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ΔABC باشد. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ΔAIB روی CI قرار می‌گیرد.

۲۷ـ فرض کنید $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ یک ۶ ضلعی منتظم و P_0 محل برخورد A_0A_1 و A_3A_4، P_1 محل برخورد A_1A_2 و A_4A_5 و P_2 محل برخورد A_2A_3 و A_5A_0 باشند. ثابت کنید P_0، P_1 و P_2 همخطند.

۲۸ـ در مثلث ΔABC داریم: $\angle A = ۶۰^\circ$، و نیمسازهای BB' و CC' یکدیگر را در I قطع می‌کنند. ثابت کنید: $B'I = C'I$.

۲۹ـ نقطهٔ P درون مثلث متساوی الاضلاع ΔABC طوری قرار گرفته که:

$$PA = ۳\ ,\ PB = ۴\ ,\ PC = ۵$$

طول ضلع مثلث ΔABC را بیابید.

۳۰ـ فرض کنید P محل برخورد اقطار چهار ضلعی عمود قطر $ABCD$ باشد، و X، Y، Z و W پای ارتفاع‌هایی باشند که از P بر اضلاع این ۴ ضلعی وارد شده‌اند. ثابت کنید چهارضلعی $XYZW$ محاطی است.

۳۱ـ w دایره‌ای است به قطر AB و P نقطه‌ای است درون آن. اگر A' و B' محل تلاقی امتدادهای PA و PB با این دایره باشند، ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{PA'B'}$ بر این دایره عمود است.

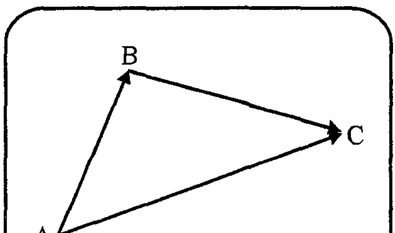
۳۲ـ دایرهٔ محاطی مثلث ΔABC بر اضلاع BC، CA و AB، به ترتیب در نقاط D، F و E مماس است. AD این دایره را در M قطع می‌کند، نقطهٔ M را به B و C وصل می‌کنیم تا دایرهٔ محاطی در P و Q قطع شود. اگر $AM = DM$، ثابت کنید: $EP || FQ$.

پیوست

قضایا و خواص مهم بردارها

خواص پایه

۱ـ با توجه به شکل ۱ـ۱ داریم: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



شکل (۱ـ۱)

و در حالت کلی برای n نقطهٔ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$$

۲ـ داریم: $\overrightarrow{AA}=\vec{O}$ یعنی برداری که ابتدا و انتهای آن یکسان است بردار صفر است.

۳ـ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF})$

۴ـ خاصیت جابجایی: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$

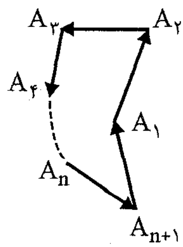
۵ـ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

۶ـ $\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$

که α عددی است حقیقی.

نکته: با توجه به خاصیت ۱ در مثلّث ΔABC خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$



شکل (۱ـ۲)

و به طریق مشابه:

$$\overrightarrow{A_۱A_۲} + \overrightarrow{A_۲A_۳} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_{n+۱}} + \overrightarrow{A_{n+۱}A_۱} = \vec{۰}$$

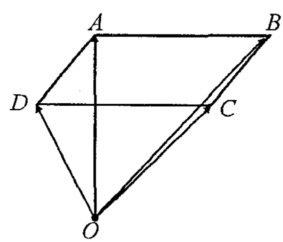
قضیه ۱ـ۱: اگر A و B و C سه نقطهٔ ناهمخط باشند و

$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} = \gamma \cdot \overrightarrow{AB} + \varphi \cdot \overrightarrow{AC}$ آنگاه داریم:

$(\alpha, \beta, \gamma, \varphi \in \mathbb{R})\alpha = \gamma, \beta = \varphi$

قضیه ۱ـ۲: اگر $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد،

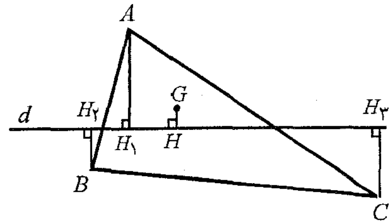
آنگاه داریم: $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$



شکل (۱ـ۸)

قضیه ۱ـ۳: هرگاه تصاویر رئوس A، B و C از مثلث ΔABC روی خط دلخواه (d) به ترتیب $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ باشد و تصویر G، مرکز ثقل مثلث ΔABC برخط (d) را H بنامیم، داریم:

$$۳\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH_۱} + \overrightarrow{BH_۲} + \overrightarrow{CH_۳}$$



شکل (۱_۱۰)

بنابراین اگر d از نقطهٔ G بگذرد خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AH_۱} + \overrightarrow{BH_۲} + \overrightarrow{CH_۳} = \vec{۰}$$

قضیه ۱_۴: اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ΔABC باشد، داریم:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

قضیه ۱_۵: می‌دانیم $S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{۱}{۲}ab\sin\gamma$، که γ زاویهٔ بین دو ضلع با طولهای a و b می‌باشد، بنابراین با توجه به تعریف ضرب خارجی داریم: $S(A\overset{\Delta}{B}C) = \left|\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\right|/۲$

قضیه ۱_۶: به ازای هر نقطهٔ دلخواه O درون مثلّث ΔABC، داریم:

$$\sum_{A,B,C} \left|\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|\right| \cdot \overrightarrow{OC} = ۰$$

(این قضیه در بخش مکان‌های هندسی اثبات می‌شود)

($\sum_{A,B,C} f_{(A,B,C)}$ به معنی حاصل جمع جایگشت‌های A و B و C روی f است.)

برای مثال اگر O برابر G، مرکز ثقل مثلّث ΔABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{A,B,C} \left|\left|\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GB}\right|\right| \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{۰} \Rightarrow \sum_{A,B,C} \frac{S(A\overset{\Delta}{B}C)}{۳} \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{۰}$$

$$\Rightarrow \sum_{A,B,C} \overrightarrow{GA} = \vec{۰}$$

که قبلاً نیز از طریق دیگری ثابت شده بود.

قضیهٔ کارنو: فرض کنید A_1، A_2، ... و A_n نقاط ثابتی در صفحه باشند. همچنین k، k_1، k_2، ... و k_n $(k_i \neq 0)$ اعدادی حقیقی و ثابت باشند؛ در این صورت، مکان هندسی نقاطی مانند M که: $k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \cdots + k_n|A_nM|^2 = k$

(i) اگر $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \neq 0$ یک دایره، یک نقطه و یا مجموعهٔ تهی است.

(ii) اگر $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 0$، یک خط، یا کل صفحه است.

قضیه (۱_۷): برای مجموعه دلخواه از نقاط A_1، A_2، ... و A_n در فضا و مجموعه اعداد حقیقی α_1 ، α_2، ... و α_n که مجموعشان مخالف صفر است، نقطهٔ منحصر به فرد O موجود است که:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{OA}_i = 0$$

و بین چنین نقطه‌ای با هر نقطهٔ دلخواه K رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i) \cdot \overrightarrow{KO} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{KA}_i$$

این نقطهٔ منحصر به فرد را مرکز هندسی نقاط $A_i(i = 1, 2, \cdots, n)$، به ضرایب $\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ می‌نامیم.

قضیه (۱_۸): اگر G مرکز ثقل مثلث ΔABC باشد، به ازای هر نقطهٔ دلخواه P در فضا داریم:

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

برای مثال اگر P همان I، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ΔABC باشد، داریم:

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$