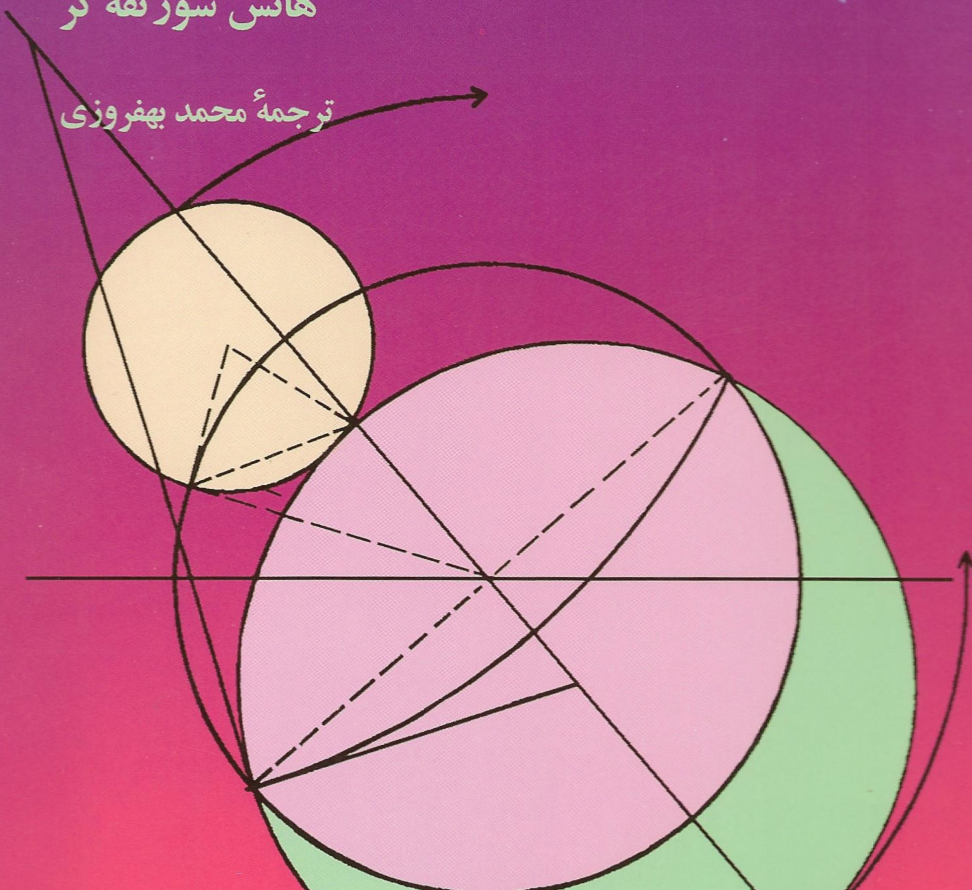
هندسهٔ اعداد مختلط

هانس شورتفه‌گر

ترجمهٔ محمد بهفروزی



مرکز نشر دانشگاهی
www.iup.ir

کتابِ روشنگر استاد شورتفه گر از نخستین سال انتشارش، ۱۹۶۲، از نظریهٔ هندسی توابع تحلیلی و نیز ارتباط بین شاخه‌های مختلف هندسه، مفهوم عمیق‌تری پدید آورده، که تحسین همگان را برانگیخته است. توجه عمده در این مبحث به اشتراکِ هندسه، آنالیز، و جبر است که عرضهٔ آنها، روی هم رفته، در سطح نسبتاً پیشرفته‌ای صورت گرفته است. ولی تکیهٔ زیادی بر ارائهٔ دقیق جزئیات و بسط یک تکنیک جبری مناسب دارد.

مؤلف در سه فصل کلی با وضوح و ظرافتی خاص به موضوع خود نزدیک می‌شود. در فصل اوّل، یعنی در مبحث هندسهٔ تحلیلی دایره‌ها، به موضوعهایی از قبیل نمایش دایره‌ها توسط ماتریسهای ارمیتی، انعکاس، تصویر گنجنگاشتی و نسبتهای ناهمساز پرداخته است. در فصل دوّم تبدیل موبیوس را عمیقاً مورد بررسی قرار داده است: خواص مقدماتی آن، ویژگیهای ناشی از تصویر در فضای حقیقی یک‌بعدی آن، تشابه و رده‌بندی انواع مختلف، پادهمنگاریها، بارشث و مشخصات هندسی آن. در فصل آخر یعنی در مبحث هندسه‌های نااقلیدسی در صفحه، از زیرگروههای تبدیلهای موبیوس، هندسهٔ یک گروه تبدیل، هندسهٔ هذلولوی و هندسهٔ کروی و بیضوی صحبت به میان آورده است. استاد شورتفه گر به این چاپِ دووِرْ (Dover) چهار پیوست تازه و یک کتابنامهٔ تکمیلی افزوده است.

دانشجویان پیشرفتهٔ دورهٔ کارشناسی که از جبر اعداد مختلط و جبر عناصر هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی، اطلاعات کافی دارند از مطالعهٔ این کتاب بهرهٔ فراوانی خواهند برد. این کتاب برای استادان و معلّمان ریاضی کتابی است شوق‌آور و اندیشه‌برانگیز.

نحوهٔ تنظیم این کتاب خیلی خوب و شامل تمرینهای متعدد و کتابنامه‌ای متناسب است. برای استفاده در واحد درسی متغیّرهای مختلط، یک متن تکمیلیِ آرمانی است. بودن این کتاب در هر کتابخانه‌ای ضروری است و برای هر اهل فنّی که در زمینهٔ نظریهٔ توابع کلاسیک کار می‌کند لازم است. مؤلف با در دسترس قرار دادن این مباحث در یک کتاب، آن هم به این سادگی خدمت بزرگی انجام داده است.ــ *Mathematical Reviews*.

هندسهٔ اعداد مختلط

هانس شورتفه‌گر

ترجمهٔ محمد بهفروزی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۴۲

مرکز نشر دانشگاهی
۱۱۸۸

Geometry of Complex Numbers
Hans Schwerdtfeger
Dover Publications, Inc. 1979

هندسهٔ اعداد مختلط
تألیف هانس شورتفه‌گر
ترجمهٔ محمد بهفروزی
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
طراح جلد: آزاده اصغری‌نسب
نمونه‌خوان: فاطمه پیوندی
حروفچین: صدیقه مسعودی
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۴
تعداد ۱۰۰۰
لیتوگرافی: مردمک
چاپ و صحافی: معراج

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

شورتفگر، هانس — Schwerdtfeger, Hans
هندسهٔ اعداد مختلط / تألیف هانس شورتفه‌گر؛ ترجمهٔ محمد بهفروزی؛ ویراستهٔ محمدهادی شفیعیها.ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۴.
هشت، ۲۶۲ ص.ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۱۸۸. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۱۴۲)
ISBN: 964-01-1188-0

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Geometry of complex numbers: Circle geometry, Moebius transformation non euclidean geometry, 1979.
واژه‌نامه.
کتابنامه: ص. ۲۵۳ــ۲۴۶.
نمایه.
۱. اعداد مختلط. ۲. هندسه. ۳. توابع متغیر مختلط. ۴. توابع تحلیلی. الف. بهفروزی، محمد، ۱۳۱۱ ــ ، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
QA ۲۵۵/ ۹ه۹ش ۵۱۶
۱۳۸۴
کتابخانهٔ ملی ایران — ۲۴۱۴ــ۸۴م

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان صفحه

پیشگفتار چاپ اول

این کتاب بخشهایی از مجموعهٔ درسهایی از نظریهٔ توابع متغیر مختلط است که مؤلف بارها در طی بیست سال اخیر در چندین دانشگاه در استرالیا و کانادا تدریس کرده است. پاره‌ای از مندرجات آن جزء مطالب استاندهٔ این درس نیست. ولی به‌نظر می‌رسد که برای درک عمیق نظریهٔ هندسی توابع تحلیلی و ارتباط آن با شاخه‌های دیگر هندسه مفید باشد.

دو فصل اول برای دانشجویانی است که اطلاعات کافی از جبر اعداد مختلط و مقدمات هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی دارند و به‌علاوه در جریان مطالعه، در صورت لزوم، از راه مراجعه به یک کتاب مقدماتی جبر جدید گرایشی به فراگیری مفاهیم اساسی نظریهٔ (غیربینهایت کوچک) گروههای تبدیلها پیدا می‌کنند.

در فصل سوم، مبانی هندسهٔ نااقلیدسی برای دانشجویانی که قبل از همه علاقه به جبر و آنالیز دارند ارائه شده است. طبیعتاً این فصل بر پایهٔ دو فصل قبلی تدوین یافته، ولی نیازمند گرایش تخصصی‌تری از سوی خواننده است.

به دنبال هر بخش مجموعه‌ای از مثالها آورده شده است. به‌جای اینکه مطالب درس را سنگین کنیم، این مسائل را طرح کرده‌ایم تا اطلاعات بیشتری را که ممکن نبوده است به آسانی در متن اصلی بگنجانیم، به خواننده منتقل کنیم. برای همکاری و مشارکت خواننده در این مثالها، آوردن برهانهای ساده به عهدهٔ وی گذاشته شده و اشارات توضیحی کوتاهی داده شده تا بتواند بخشی از استدلال را به تفصیل تکمیل نماید.

عمدهٔ توجه این کتاب به اشتراک هندسه و آنالیز و جبر است که معمولاً در سطح نسبتاً پیشرفته

با نگرشهای خاص به تحقیقات تازه عرضه شده است و همواره به بیان دقیق جزئیات و بسط روش جبری مناسب تأکید دارد.

منظور ما این نبوده که کتابنامهٔ کاملی عرضه کنیم. دو نوع مرجع در اینجا آورده‌ایم: (۱) کتابها و مقاله‌هایی که در تدوین متن مورد استفاده قرارگرفته‌اند. این کتابها بر حسب نام مؤلف و عددی در داخل کروشه ثبت شده‌اند. مراجع اصلی در این رده، کتابهای کاراتئودوری (Caratheodory) [۳] و اِ. کارتان (E. Cartan) [۲][1] هستند. (۲) کتابها و مقاله‌هایی هستند که در متن از آنها اقتباسی نشده و شامل مطالبی دربارهٔ موضوع مورد بحث هستند که ممکن است برای خواننده جالب باشند.

تعدادی از دوستان و همکارانم در دانشگاه تورنتو در نقد و اصلاح نوشته‌های این کتاب مرا یاری کرده‌اند که بدین‌وسیله از همهٔ آنها سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان مایلم مراتب سپاس خود را از پشتیبانی و تشویقی که از من به عنوان عضو تابستانی انستیتو تحقیقات کنگره ریاضی کانادا در کینگستن در ۱۹۵۸، و به‌طور کلیتر، به عنوان عضو جدید جامعهٔ ریاضی کانادا به عمل آمده تشکر کنم. تشکرات ویژهٔ خود را از هیأت تحریریهٔ سلسله انتشارات ریاضی دانشگاه تورنتو که در نهایت لطف کتاب مرا در عداد سلسله انتشارات خود قرار داده‌اند تقدیم می‌دارم.

هانس شوِرتفه‌گر
آوریل ۱۹۶۰

---

۱. تنها پس از تکمیل دستنویس کتاب حاضر با تمام جزئیات اساسی‌اش ازکتابهای جالب R. Deaux ([۱] یا [۶]) آگاه شدم. روشها و بیشتر موضوعها در هر دو کتاب متفاوت‌اند. هدف هر دو کتاب نمایش محتوای هندسی مفاهیم دستگاه اعداد مختلط است.

مقدمه

نکاتی دربارهٔ اصطلاحات و علائم

در اکثر شاخه‌های ریاضی، از جمله مبحثی که در اینجا به آن خواهیم پرداخت، توافقی کلی برای اصطلاحات و قراردادها صورت نگرفته و شاید هم چنین توافقی مطلوب نباشد. ولی مؤلف کوشیده است این‌گونه نمادها و اصطلاحات را به صورتی که مورد توافق اکثر نویسندگان هندسهٔ اعداد مختلط بوده ارائه کند. درعین‌حال از تأکید بر اصطلاحاتی که تعبیر خاصی را موجب می‌شوند، اجتناب ورزیده است. از این‌رو است که ما پیوسته از «دوایر» سخن به میان می‌آوریم و از اصطلاح «زنجیر» احتراز می‌کنیم.

توضیحات زیر بر اساس هندسهٔ تحلیلی یا به‌کارگیری مختصات دکارتی x و y نقاط در صفحه آغاز می‌شود. این مختصات اعداد حقیقی دلخواهی هستند. با توجه به منظور ما مناسب این است که نقطهٔ (x, y) را با عدد مختلط $z = x + iy$، $i = \sqrt{(-1)}$، نمایش دهیم. $x = \operatorname{Re} z$ را جزء حقیقی و $y = \operatorname{Im} z$ را جزء انگاری z می‌نامیم. همچنین $\bar{z} = x - iy$ را مزدوج z و $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)} = r \geq 0$ را کالبد یا قدرمطلق z می‌گوییم. ملاحظه می‌کنیم که $z\bar{z} = r^2$ فقط و فقط زمانی صفر خواهد بود که $z = 0$. جبر مقدماتی اعداد مختلط را دانسته[1] فرض می‌کنیم.

با استفاده از مختصات قطبی r و θ، می‌توان عدد مختلط z را به صورت مثلثاتی

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

---

۱. ر.ک. به فصل II کتاب H. Robbins و R. Courant [۱]، یا فصل III کتاب G. H. Hardy [۱].

نوشت. عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را «عامل زاویه‌ای» z می‌نامند. این عامل عددی است مختلط با قدرمطلق یک، و آن را معمولاً با $e^{i\theta}$ نمایش می‌دهند. این نمادِ نمایی با اتحاد

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

توجیه می‌شود، یعنی یک معادلهٔ تابعی از تابع نمایی که نتیجهٔ صوری قضایای جمع در مثلثات مقدماتی[1] است. آگاهی از نظریهٔ توابع متغیر مختلط دانسته فرض نشده است، ولی ما مفاهیم پیوستگی و مشتقگیری را که گاه‌گاهی از آنها استفاده می‌کنیم، در اینجا بیان نخواهیم کرد.

گاهی لازم می‌آید به‌جای عامل زاویه پی عدد مختلط z، یعنی $e^{i\theta}$، خود زاویهٔ θ را به صورت تابعی از z وارد کنیم. در این‌گونه موارد، زاویهٔ θ به صورت

$$\theta = \operatorname{arc} z = \operatorname{arc} e^{i(\theta+2k\pi)} \qquad (\text{عدد درست } k)$$

نمایش داده می‌شود، که به‌ازای همهٔ اعداد $z \neq 0$ با تقریب مضارب جمعی صحیحی از 2π تعریف می‌شود. این مضرب را به‌راحتی می‌توان طبق قرارداد از مبدأ عدد z اختیار نمود. اما اغلب دامنهٔ مقادیر $\operatorname{arc} z$ به بازه‌ای به طول 2π محدود می‌شود. مثلاً: $-\pi < \theta \leq \pi$ (مقدار اصلی $\operatorname{arc} z$) و یا $0 \leq \theta < 2\pi$؛ تابع $\operatorname{arc} z$ به‌ترتیب در طول قسمت منفی یا مثبت محور حقیقی (محور xها) ناپیوسته خواهد بود. مقدار افزایش در طول این محور بر حسب جهتی که z این محور را قطع می‌کند $\pm 2\pi$ خواهد بود.

اطلاعات اساسی از جبر خطی تا حدی که از مقدار لازم برای درک مطالبِ حساس مقدمات هندسهٔ تحلیلی[2]، از جمله مختصات همگن، تجاوز نکند (پیوست شمارهٔ ۱، ج.خ) مورد نیاز است. از قوانین صوری جبر ماتریسها سخت استفاده خواهیم نمود (بخشهای ۱۲ و ۱۳، ج.خ)، ولی در مراحل اولیه فقط ماتریسهای دو سطری را که عناصر آنها اعداد مختلط‌اند به‌کار خواهیم برد. چنین ماتریسهایی را با حروف بزرگ سیاه آلمانی نمایش خواهیم داد. مثلاً

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ولی قبول می‌کنیم که نماد $\mathfrak{H}$ را همزمان هم برای ماتریس و هم برای تبدیل

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} = \mathfrak{H}(z) \qquad (1)$$

---

۱. ر.ک. به صفحات ۴۷۷ تا ۹ کتاب Robbins و Courant [1] یا صفحات ۲۳۲ تا ۳ کتاب Hardy [1].

۲. ر.ک به فصول مربوطه در هرکتاب درسی جبر خطی، به‌ویژه آنکه مؤلفش [2] است که در ج.خ آمده است.

به‌کار خواهیم برد و آن را تبدیل موبیوسِ $\mathfrak{H}$ می‌خوانیم. درعین‌حالی که تبدیل موبیوس به‌طور یکتا با ماتریس $\mathfrak{H}$ تعریف می‌شود، عکس آن درست نیست. وقتی تبدیل موبیوس داده شده باشد، ماتریس آن $\mathfrak{H}$، با اختلاف مضربی از یک عدد مختلط $q \neq 0$ تعیین می‌شود. از این‌رو ممکن است ماتریسهای $\mathfrak{H}$ و $q\mathfrak{H}$، هر دو فقط یک تبدیل موبیوس را نمایش دهند. ولی، در بسیاری موارد ما ترجیح می‌دهیم فقط در معادلات دقیق ماتریسی عامل q نامعین بماند.

ترانهادهٔ ماتریس $\mathfrak{C}$ را با $\mathfrak{C}'$، یعنی با $\mathfrak{C}' = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم و مزدوج آن را با $\overline{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}$. اگر $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}'$، $\mathfrak{C}$ را ارمیتی می‌گویند. (بخش ۲۰، ج.خ). در بخش ۱ نشان می‌دهیم که هر ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ (به تعبیری) معرف یک دایره است، $\mathfrak{C}, \lambda\mathfrak{C}$ (λ حقیقی و $\lambda \neq 0$) معرف دایرهٔ واحدی هستند. از این‌رو ما از «دایرهٔ $\mathfrak{C}$» صحبت به میان می‌آوریم.

دترمینان یک ماتریس مربع $\mathfrak{H}$ را با $|\mathfrak{H}|$ نمایش می‌دهیم. ولی قدرمطلق $|\mathfrak{H}|$ را با $|\det \mathfrak{H}|$ نمایش می‌دهیم.

در بحث ما تبدیلها نقش عمده‌ای دارند. تبدیل $Z = f(z)$، با تابع مختلط مقدارِ $f(z)$، که به هر نقطهٔ z از صفحهٔ اعداد مختلط (یا در یک جزء این صفحه) یک عدد مختلط Z را مربوط می‌سازد، که به صورت نقطه‌ای در همان صفحه، یا در صفحهٔ دیگری با یک دستگاه مختصات همنهشت، ظاهر می‌شود. همچنین می‌گوییم که این تبدیل نقطهٔ z را به نقطهٔ Z می‌برد (ر.ک به بخش ۱۰، ج.خ).

در بسیاری موارد، مجموعه‌ای از تبدیلهای مربوط به یک مبحث هندسی یک گروه تشکیل می‌دهند، (ر.ک به بخش ۲۲، ج.خ) در آن منظور از ضرب گروهی، ترکیب دو تبدیل از مجموعهٔ مفروض برای تشکیل تابعی از یک تابع است. عنصر واحد در چنین گروهی تبدیل همانی $Z = z$ است که هر نقطه را به خودش بدل می‌کند. بجز شناختی از مفهوم کلی یک گروه که هنگام کار با گروههای خاص تبدیلهای به‌دست‌آمده در این کتاب حاصل می‌شود، اطلاع بیشتری از نظریهٔ گروهها لازم نخواهد شد.

دستگاههای همهٔ اعداد گویا، همهٔ اعداد حقیقی و یا همهٔ اعداد مختلط به معنی جبری هیأت‌اند. معنی این گفته این است که در داخل این دستگاهها اعمال مقدماتی حساب ــ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، (غیر از تقسیم بر صفر)ــ را می‌توان انجام داد، به‌طوری‌که مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج‌قسمت هر دو عدد از یکی از دستگاهها، باز عددی از همان دستگاه است. غیر

از هیأتهایی که در بالا عنوان شد، هیأتهای عددی بسیاری وجود دارند که همهٔ آنها در هیأت اعداد مختلط قرار دارند که خود آنها نیز به صورت یک زیر هیأت اعداد گویا هستند (بخش ۱۴، ج.خ). تنها در یک مورد خواننده باید دریابد که هیأتهایی وجود دارند که عناصر آنها عدد نیستند. مثلاً هیأتهایی که تعدادی متناهی عنصر دارند (مثال ۱.۱۶، ج.خ). در چنین هیأتهایی اعمال مقدماتی طوری تعریف شده‌اند که قوانین حساب یعنی وجود و یکتایی عناصر صفر و واحد، همین‌طور قرینه و عکس و شرکتپذیری و تعویضپذیری و قوانین توزیعی برقرارند.

دو هیأت $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ را یکریخت (بخش ۱۴، ج.خ) گویند، اگر بتوان بین عناصر a_1، b_1، ... و a_2، b_2، ... آنها یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک $a_1 \leftrightarrow a_2$، $b_1 \leftrightarrow b_2$، ... برقرار کرد به‌طوری‌که: $a_1 + b_1 \leftrightarrow a_2 + b_2$ و $a_1b_1 \leftrightarrow a_2b_2$. عناصر صفر و واحد $\mathscr{F}_1$ به‌ترتیب با عناصر صفر و واحد $\mathscr{F}_2$ متناظر خواهند بود.

هر یکریختی یک هیأت بر روی خودش (یعنی حالتی که $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ معرف یک هیأت باشند) خودریختی نام دارد. همهٔ خودریختیهای یک هیأت، تشکیل یک گروه می‌دهند. در مورد هیأت همهٔ اعداد گویا و هیأت همهٔ اعداد حقیقی این گروه متشکل از فقط عنصر همانی: $a \leftrightarrow a$ است (مثال ۸.۱۴، ج.خ). در هیأت همهٔ اعداد مختلط، به آسانی دیده می‌شود که تناظر $z \leftrightarrow \bar{z}$ یک خودریختی غیر از خودریختی همانی است.

از مفاهیم‌اولیه و احکام مسلم توپولوژی استفاده خواهد شد. برای توضیحات و براهین، خواننده را به نوشته‌هایی در این زمینه، بالاخص به کتابهایی که شامل فصول مقدماتی هستند ارجاع می‌دهیم[۱]. برای پاره‌ای از مثالهای فصل ۳، انتگرالهای منحنی‌الخط و انتگرالهای سطح دانسته فرض شده‌اند. کتابهای مرجع هم معرفی خواهند شد.

سرانجام می‌توان به معدودی از اصطلاحات که مزاحم جلوه می‌کنند اشاره کرد. بیشتر دشواریهای آنها عمدتاً، تا آنجا که مضمونهای مختلف معمولاً با یک واژهٔ مشخصی بیان می‌شوند، زبانی هستند.

در هندسه معانی متفاوتی برای هر یک از واژه‌های «حقیقی» و «انگاری» قائل شده‌اند. اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که به نقاط محور حقیقی (یا واقع بر محور حقیقی) از صفحه‌ای مختلط، که آن را صفحهٔ گاوس (یا صفحهٔ آرگان) نیز می‌نامند، وابسته‌اند. به‌همین‌طریق، اعداد انگاری محض به نقاط حقیقی محور انگاری وابسته‌اند. (نقطه و عدد مختلط وابسته به آن همواره با یک نماد نشان داده می‌شود.) همهٔ نقاط واقع در صفحهٔ (اعداد مختلط) یا صفحهٔ z، که

---

۱. Caratheodory [۳]، جلد I بخش II، Courant و Robbins [۱]، فصل V، Hilbert و Cohn-Vossen [۱]، فصل VI.

هر کدام با یک عدد مختلط مشخص می‌شوند «نقاط حقیقی» هستند. بجز شکلهایی که از نقاط حقیقی تشکیل می‌شوند، باید شکلهایی (فقط به صورت موجودات جبری محض) مانند «دایره‌های انگاری» را که «دایره‌های آرمانی» هم نام دارند (ر.ک Deaux [۱] صفحهٔ ۴۹)، و نقاط (غیرحقیقی) آنها مختصات دکارتی غیرحقیقی دارند، نیز در نظر گرفت. این دایره‌های انگاری فقط به وسیلهٔ منعکسهای مربوط به آنها تعبیر هندسی حقیقی پیدا می‌کنند (ر.ک، بخش ۲). «نقاط انگاری» تنها به‌وجود نخواهند آمد. همین‌طور ملاحظه می‌کنیم که دایره‌های حقیقی نقاط انگاری دارند. یک دایرهٔ حقیقی ممکن است فصل مشترک غیرحقیقی (انگاری) با محور حقیقی داشته باشد. از این‌رو حتی بر محور حقیقی هم نقاط غیرحقیقی وجود دارند.

می‌توانیم چند کلمه‌ای هم دربارهٔ استفاده از صفتهای «هذلولوی»، «سهموی» و «بیضوی» سخن بگوییم. در واقع بدون مراجعه به هندسه‌های نااقلیدسی که استفاده از این صفات در آنها اکنون جنبهٔ تاریخی به خود گرفته است، برای این صفات توجیه مختصری وجود دارد. از این‌رو دسته دایره و کلاف دایرهٔ هذلولوی، سهموی و بیضوی هم داریم. اما تبدیلهای هذلولوی، سهموی و بیضوی، موبیوس و انعکاس، و تبدیلهای پادهمنگاری موبیوس هم وجود دارند که فقط در همان‌جاهایی که در این کتاب می‌آیند، از آنها صحبت خواهد شد و استفاده از این اصطلاحات کلاسیک در هندسهٔ نااقلیدسی، کم‌وبیش منسوخ شده است. ولی به نظر می‌رسد که توافق کلی برای این تعاریف وجود دارد و بنابراین جدای از این تغییر جزئی که در پانوشت شمارهٔ ۴، بخش ۸ـج، توضیح داده می‌شود، آنها را پذیرفته‌ایم.

۱

هندسهٔ تحلیلی دایره‌ها

۱. نمایش دایره‌ها با ماتریسهای ارمیتی

الف. یک دایره. همهٔ نقاط $z = x + iy$ از صفحهٔ مختلط، که محیط دایره‌ای به مرکز $\gamma = \alpha + i\beta$ و به شعاع ρ را تشکیل می‌دهند با معادلهٔ

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = \rho^{۲}$$

مشخص شده‌اند. با نوشتن سمت چپ این معادله به صورت $|z-\gamma|^{۲} = (z-\gamma)(\bar{z}-\bar{\gamma})$ معادلهٔ دایره به صورت زیر در می‌آید

$$z\bar{z} - \bar{\gamma}z - \gamma\bar{z} + \gamma\bar{\gamma} - \rho^{۲} = ۰ \tag{۱.۱}$$

با توجه به منظور ما صلاح این است که مطلب را با معادلهٔ کلیتر به صورت زیر آغاز کنیم

$$\mathfrak{C}(z,\bar{z}) = Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = ۰ \tag{۲.۱}$$

که در آن A وD اعداد حقیقی‌اند و B و C اعداد مختلط مزدوج. از این‌رو ماتریس

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (۱.۲.۱)$$

یک ماتریس ارمیتی است.

روشن است که (۱.۱) حالت خاصی از (۲.۱) است، و اگر $A \neq 0$، و

$$B = -A\bar{\gamma}, \qquad C = -A\gamma = \bar{B}, \qquad D = A(\gamma\bar{\gamma} - \rho^2) \qquad (۳.۱)$$

هر دو معادله نمایش یک دایره‌اند. هر ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ به یک معادلهٔ (۲.۱) مربوط است. می‌گوییم این ماتریس معرف یا بیانگر یک «دایره» است مگر آنکه $A = B = C = 0$. بنابراین حرف $\mathfrak{C}$ هم برای نشان‌دادن این دایره و هم برای نشان‌دادن ماتریس ارمیتی مربوط به آن است. دو ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}_1$، $\mathfrak{C}$ معرف یک دایره‌اند، اگر و فقط اگر $\mathfrak{C}_1 = \lambda\mathfrak{C}$، که λ عددی است حقیقی و مخالف صفر.

برای اینکه تفاوت بین انواع مختلف «دایره‌ها»یی را که در این تعریف می‌گنجند تشخیص دهیم. دترمینان

$$\Delta = |\mathfrak{C}| = AD - BC = AD - |B|^2 \qquad (۴.۱)$$

را وارد می‌کنیم. پیداست که این عدد حقیقی است و آن را مبین دایرهٔ $\mathfrak{C}$ گویند. برای یک دایرهٔ حقیقی که با معادلهٔ (۱.۱) نشان داده شده داریم: $\Delta = -\rho^2$. در مورد دایره‌ای با معادلهٔ (۲.۱)، بنابر (۳.۱) مبین آن مساوی است با

$$\Delta = -A^2\rho^2 \qquad (۱.۴.۱)$$

اما به سهولت می‌توان دید که دایرهٔ $\mathfrak{C}$ که با معادلهٔ (۲.۱) داده شده یک دایرهٔ حقیقی معمولی است، اگر و فقط اگر $A \neq 0$ و $\Delta < 0$. مرکز γ و شعاع آن ρ را می‌توان از (۳.۱) و (۱.۴.۱) به‌دست آورد که آن را با (γ, ρ) نیز نشان خواهیم داد. اگر $A = 0$، دایره به یک خط راست بدل می‌شود، زیرا در این حالت (۲.۱) به یک معادلهٔ خطی بر حسب x و y با ضرایب حقیقی تبدیل می‌شود. به‌ازای هر $A \neq 0$ و $\Delta = 0$ این دایره به صورت یک نقطه‌دایرهٔ $\rho = 0$ ظاهر می‌شود.

سرانجام حالت $\Delta > 0$ را داریم. طبق (۱.۴.۱) لازمهٔ آن این است که $\rho^2 < 0$. در این حال دایرهٔ $\mathfrak{C}$ یک «دایرهٔ انگاری» است با شعاع انگاری محض ρ و مرکز حقیقی γ. این دایره

را باز هم می‌توان با نماد (γ, ρ) نمایش داد و همانند حالت دایرهٔ حقیقی γ و ρ را از (۳.۱) و (۱.۴.۱) به‌دست آورد. یک دایرهٔ انگاری هیچ نقطهٔ حقیقی ندارد. یعنی: هیچ نقطهٔ آن با عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن x و y اعداد حقیقی باشند نمایش داده نمی‌شود. به عنوان مثال «دایرهٔ واحد انگاری»

$$z\bar{z} + ۱ = ۰, \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \tag{۲.۴.۱}$$

را در نظر می‌گیریم. روشن است که این معادله را نمی‌توان بر حسب یک عدد مختلط معمولی z حل کرد. اما می‌توان آن را به صورت $x^۲ + y^۲ = -۱$ نوشت و این معادله را می‌توان بر حسب «نقاط» (x, y) که مختصات x و y آن هر دو اعداد حقیقی[۱] نیستند (مثلاً $x = ۰$ و $y = i$) حل کرد.

ردەبندی دایره‌ها

$A \neq ۰$: $\Delta < ۰$ دایرهٔ حقیقی $\rho^۲ > ۰$

$\Delta = ۰$ نقطه‌دایره $\rho^۲ = ۰$

$\Delta > ۰$ دایرهٔ انگاری $\rho^۲ < ۰$

$A = ۰$: در این صورت همیشه داریم $\Delta = -|B|^۲ \leq ۰$

$\Delta < ۰$ خط راست

$\Delta = ۰$ دایره‌ای وجود ندارد: $B = C = ۰$ (ر.ک. بخش ۳، مثال ۷).

به موجب (۱.۴.۱)

$$A = \pm \frac{۱}{\rho} \sqrt{(-\Delta)} \tag{۳.۴.۱}$$

می‌گویند دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}$ جهت مثبت یا راستای مثبت دارد، اگر $A > ۰$. در این حالت $-\mathfrak{C}$، همان دایره با جهت منفی است. جهت یک دایرهٔ جهت‌دار را می‌توان با یک پیکان بر محیط آن مشخص ساخت. جهت مثبت متناظر با حرکت پادساعتی بر محیط دایره است به‌طوری‌که درون دایره در سمت چپ قرار گیرد.

مفهوم جهت یا امتداد را می‌توان به‌طور صوری برای دایره‌های انگاری تعمیم داد. جهت امتداد با علامت A مشخص می‌شود.

---

۱. در اینجا نمی‌خواهیم به نمایش هندسی یا تعبیر نقاط غیرحقیقی یک دایرهٔ انگاری (یا حقیقی) بپردازیم. برای مطالعهٔ این مطلب به فصل III کتاب J. L. Coolidge [۲] مراجعه کنید.

ب. دو دایره. $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ را دو دایرهٔ متفاوت می‌گیریم. معنی این امر این است که دو ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ متناسب (وابستهٔ خطی) نیستند. لذا هیچ عدد حقیقی λای وجود ندارد که $\mathfrak{C}_2 = \lambda\mathfrak{C}_1$. اکنون به مطالعهٔ خانوادهٔ دایره‌های یک پارامتری

$$\mathfrak{C} = \lambda_1\mathfrak{C}_1 + \lambda_2\mathfrak{C}_2 \qquad (\lambda_1 \text{ و } \lambda_2 \text{ حقیقی و هر دو ناصفرند})$$

می‌پردازیم. این خانواده را یک دسته دایره نامند. بنا به تعریف مبین این دسته دایره عبارت است از دترمینان

$$|\mathfrak{C}| = \begin{vmatrix} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 & \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 & \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \end{vmatrix} = \Delta_1\lambda_1^2 + 2\Delta_{12}\lambda_1\lambda_2 + \Delta_2\lambda_2^2 \qquad (۵.۱)$$

یعنی یک صورت درجه دوم بر حسب متغیرهای حقیقی λ_1، λ_2 با ضرایب حقیقی

$$\Delta_1 = |\mathfrak{C}_1|, \quad \Delta_2 = |\mathfrak{C}_2|, \quad 2\Delta_{12} = A_1D_2 + A_2D_1 - B_1C_2 - B_2C_1 \qquad (۱.۵.۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم $A_1A_2 \neq 0$. اگر $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ دایره‌های (γ_1, ρ_1) و (γ_2, ρ_2) باشند، آنگاه بنابر (۳.۱) و (۱.۴.۱)

$$\Delta_1 = -A_1^2\rho_1^2, \quad \Delta_2 = -A_2^2\rho_2^2, \quad 2\Delta_{12} = A_1A_2(\delta^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2) \qquad (۲.۵.۱)$$

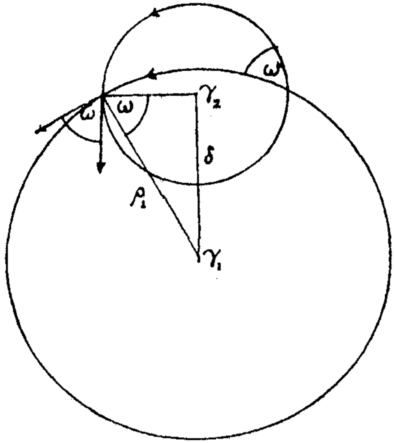
که در آن

$$\delta = |\gamma_1 - \gamma_2|$$

طول خط‌المرکزین دو دایره است.

علاوه بر این فرض کنید $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ هر دو دایره‌هایی حقیقی ($A_j \neq 0$، $\Delta_j < 0$، $j = 1, 2$) و دست‌کم در یک نقطهٔ حقیقی مشترک باشند (شکل ۱ را ببینید). بر این دایره‌ها جهت ثابتی توسط علامت ضرایب A_j مشخص می‌شود. در این صورت ω، زاویهٔ بین دو دایرهٔ جهتدار $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$، به صورت زاویهٔ بین دو مماس در نقطهٔ مشترک در جهت تعریف‌شده با این جهت‌دهی تعریف می‌شود. در هندسهٔ مقدماتی دیده‌ایم که

$$\delta^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \mp 2\rho_1\rho_2\cos\omega \qquad (۶.۱)$$



شکل۱

بنابراین

$$۲\Delta_{۱۲} = \mp ۲A_۱A_۲\rho_۱\rho_۲\cos\omega = -۲\sqrt{(-\Delta_۱)}\sqrt{(-\Delta_۲)}\cos\omega$$

علامت در آن با جهتهای این دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_j$ به‌طور یکتا معین می‌شود، و

$$\cos\omega = -\frac{\Delta_{۱۲}}{\sqrt{-\Delta_۱}\sqrt{-\Delta_۲}} = \frac{\Delta_{۱۲}}{\sqrt{\Delta_۱}\sqrt{\Delta_۲}} \qquad (۱.۶.۱)$$

برای اینکه دایره‌های حقیقی $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ نقاط مشترک داشته باشند لازم و کافی است که ω زاویهٔ حقیقی باشد

$$-۱ \le \cos\omega \le +۱ \qquad (۲.۶.۱)$$

به موجب (۶.۱) این رابطه هم‌ارز است با

$$\Delta_۱\Delta_۲ - \Delta_{۱۲}^۲ \ge ۰ \qquad (۳.۶.۱)$$

که به انضمام $\Delta_۱ < ۰$، شرطی است برای اینکه صورت درجهٔ دوم (۵.۱) به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ فقط مقادیر نامثبت داشته باشد.

علامتهای تساوی در (۲.۶.۱) و (۳.۶.۱) تماس یا انطباق این دو دایره را بر هم مشخص می‌کنند. فرض کنید هر دو دایره جهت مثبت داشته باشند. اگر $\cos\omega = +۱$، آنگاه $\omega = ۰$

و بنابراین $\delta^۲ = (\rho_۱ - \rho_۲)^۲$، لذا دو دایره مماس داخلی هستند. همچنین اگر $\cos\omega = -۱$، آنگاه $\omega = \pi$، $\delta = \rho_۱ + \rho_۲$ و دو دایره مماس خارجی‌اند.

روشن است که به‌ازای هر زوج دایرهٔ (جهتدار) حقیقی یا انگاری، جملهٔ سمت راست (۱.۶.۱) معرف یک عدد حقیقی است. این عدد را ناوردای مشترک دو دایره می‌نامیم و آن را با $\cos\omega$ نشان می‌دهیم؛ ولو آنکه لازم نباشد یک زاویهٔ حقیقی ω را تعریف کنیم. در مورد دو دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$، اگر به‌ازای دو مقدار مختلف $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ صورت درجهٔ دوم (۵.۱) را بتوان مثبت یا منفی فرض کرد، وضع همین است، یعنی اگر

$$\Delta_۱\Delta_۲ - \Delta_{۱۲}^۲ < ۰ \tag{۷.۱}$$

آنگاه یا

$$\cos\omega > +۱$$

که نشان می‌دهد دایرهٔ کوچکتر تماماً درون دایرهٔ بزرگتر قرار دارد، و یا

$$\cos\omega < -۱$$

که در این صورت این دو دایره متخارج‌اند. این مطلب فوراً دیده می‌شود، اگر (۶.۱) را به صورت

$$(\rho_۱ \mp \rho_۲)^۲ - \delta^۲ = ۲\rho_۱\rho_۲(\cos\omega \mp ۱) \tag{۱.۷.۱}$$

بنویسیم. در واقع $\cos\omega > ۱$ بدین معنی است که $\delta < |\rho_۱ - \rho_۲|$، و نیز $\cos\omega < -۱$، نشان می‌دهد که $\rho_۱ + \rho_۲ < \delta$. همین مطلب از روی «پیوستگی»، در بحث قبلی برای دو حالت متفاوت تماس نتیجه می‌شود.

به موجب (۶.۱) دو دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ متعامدند، اگر و فقط اگر

$$\delta^۲ = \rho_۱^۲ + \rho_۲^۲ \tag{۲.۷.۱}$$

با توجه به (۱.۶.۱) می‌توان مفهوم تعامد را تعمیم داد. دو دایره را که لزوماً حقیقی نیستند ولی نقطه‌دایره نیستند ($\Delta_j \neq ۰$) متعامد گویند هرگاه

$$\Delta_{۱۲} = ۰ \tag{۳.۷.۱}$$

که در مورد دو دایرهٔ حقیقی با (۲.۷.۱) هم‌ارز است.

ج. دسته دایره. دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ را مولدهای دسته دایرهٔ $\lambda_1\mathfrak{C}_1 + \lambda_2\mathfrak{C}_2$ گویند. هر دو دایرهٔ مختلفِ دیگرِ این دسته را می‌توان مولدهای همین دسته دایره گرفت. زیرا با توجه به ثابتهای μ_j و ν_j

$$\mathfrak{C}_3 = \mu_1\mathfrak{C}_1 + \mu_2\mathfrak{C}_2 \qquad \text{و} \qquad \mathfrak{C}_4 = \nu_1\mathfrak{C}_1 + \nu_2\mathfrak{C}_2$$

دو دایره از این دسته دایره هستند، که دسته دایرهٔ

$$\lambda_3\mathfrak{C}_3 + \lambda_4\mathfrak{C}_4 = (\lambda_3\mu_1 + \lambda_4\nu_1)\mathfrak{C}_1 + (\lambda_3\mu_2 + \lambda_4\nu_2)\mathfrak{C}_2$$

را تولید می‌کنند که بر دسته دایرهٔ مفروض منطبق است، به شرط آنکه λ_3 و λ_4 هر دو با هم صفر نباشند،

$$\lambda_3\mu_1 + \lambda_4\nu_1 = 0$$
$$\lambda_3\mu_2 + \lambda_4\nu_2 = 0$$

معنی این تساویها این است که $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 \neq 0$. زیرا اگر دترمینان صفر شود، μ_1 و μ_2 و ν_1 و ν_2 متناسب خواهند شد و از آنجا دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_3$ و $\mathfrak{C}_4$ بر هم منطبق می‌شوند و نمی‌توانند یکدسته دایره تولید کنند.

سه نوع دسته دایرهٔ متفاوت وجود دارند.

(i) دستهٔ بیضوی $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^2 > 0$ یا $|\cos\omega| < 1$. صورت درجهٔ دوم (۵.۱) معین و منفی است و بنابراین تمام دایره‌های این دسته دایره، دایره‌هایی حقیقی‌اند. که از دو نقطهٔ متمایز z_1 و z_2، نقاط مشترک دو دایره، می‌گذرند.

در واقع همهٔ دایره‌هایی که از این دو نقطه می‌گذرند به این دسته دایره تعلق دارند. زیرا برای هر دایره باید

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

در شرایط

$$\begin{cases} \mathfrak{C}(z_1, \bar{z}_1) = Az_1\bar{z}_1 + Bz_1 + C\bar{z}_1 + D = 0 \\ \mathfrak{C}(z_2, \bar{z}_2) = Az_2\bar{z}_2 + Bz_2 + C\bar{z}_2 + D = 0 \end{cases} \qquad (۸.۱)$$

صدق کند. این یک دستگاه دو معادلهٔ خطی همگن بر حسب متغیرهای A، B، C و D است با ماتریس

$$\begin{pmatrix} z_۱\bar{z}_۱ & z_۱ & \bar{z}_۱ & ۱ \\ z_۲\bar{z}_۲ & z_۲ & \bar{z}_۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

که از رتبهٔ ۲ خواهد بود، اگر $z_۲ \neq z_۱$. پس این دستگاه ۲ = ۲ − ۴ جواب مستقل خطی دارد ولی لازم نیست که مؤلفه‌های آن، A، B، C و D، عناصر ماتریسهای ارمیتی باشند. اما توجه داریم که به‌ازای هر دو مقدار مفروض A و B مقادیر C و D به طور یکتا معین می‌شوند، زیرا دترمینان ضرایب آنها در (۸.۱)، یعنی $\bar{z}_۲ - \bar{z}_۱$، صفر نیست. از این‌رو A را حقیقی و ناصفر می‌گیریم. اما هر دو ماتریس $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ و $\overline{\mathfrak{C}}' = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}$ معرف جوابهای (۸.۱) هستند. بستگی خطی $\overline{\mathfrak{C}}' = \lambda\mathfrak{C}$ ایجاب می‌کند که $\lambda = ۱$، و لذا باید $\mathfrak{C}$ ارمیتی باشد. اما چون $C = c_۱A + c_۲B$ ($c_۱$ و $c_۲$ به $z_۱$ و $z_۲$ وابسته‌اند)، روشن است که هر تغییری در انتخاب مقدار حقیقی A، این شرط را نقض می‌کند. پس $\mathfrak{C}$ و $\overline{\mathfrak{C}}'$ را می‌توان مستقل خطی فرض نمود. در این صورت

$$\mathfrak{C}_۱ = \mathfrak{C} + \overline{\mathfrak{C}}', \qquad \mathfrak{C}_۲ = i(\mathfrak{C} - \overline{\mathfrak{C}}') \qquad (۱.۸.۱)$$

معرف دو جواب ارمیتی مستقل خطی (۸.۱) هستند و

$$\mathfrak{C} = \lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲ \quad (\text{با مقادیر حقیقی } \lambda_۱ \text{ و } \lambda_۲) \qquad (۲.۸.۱)$$

کلیترین جواب ارمیتی را به‌دست می‌دهد؛ زیرا به‌ازای مقادیر غیرحقیقی $\lambda_۱$ یا (و) $\lambda_۲$ ماتریس (۲.۸.۱) ارمیتی نخواهد بود.

(ii) دستهٔ سهموی $\Delta_۱\Delta_۲ - \Delta_{۱۲}^۲ = ۰$ یا $|\cos\omega| = ۱$. صورت درجهٔ دوم (۵.۱) مربع کامل با ضریب منفی

$$-[\sqrt{(-\Delta_۱)\lambda_۱} + \sqrt{(-\Delta_۲)\lambda_۲}]^۲$$

است، از این‌رو این دسته درست یک نقطه‌دایرهٔ حقیقی دارد

$$\lambda_۱ = \sqrt{(-\Delta_۲)}, \qquad \lambda_۲ = -\sqrt{(-\Delta_۱)}$$

که بر تنها نقطهٔ مشترک همهٔ دوایر این دسته قرار دارد. در اینجا دایره‌ها بر یکدیگر مماس‌اند. (ω مساوی ۰ یا π). همهٔ دایره‌های این دسته حقیقی‌اند.

(iii) دستهٔ هذلولوی $\Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^2 < 0$ یا $|\cos\omega| > 1$. صورت درجهٔ دوم (۵.۱) نامعین است؛ لذا این دسته شامل دایره‌های حقیقی، دایره‌های انگاری، و دو نقطه‌دایرهٔ متمایز است. دو دایره از یک دسته دایرهٔ هذلولوی نمی‌توانند نقطهٔ مشترک داشته باشند.

تصاویر این سه نوع دسته دایره در شکلهای ۱۷ و ۱۸ نمایش داده شده‌اند.

بالاخره مسئلهٔ صورت درجهٔ دوم معین مثبت (یا نامنفی) (۵.۱) مربوط به دسته‌ای است که فقط متشکل از دایره‌های انگاری (یا دسته‌ای که تنها دایرهٔ حقیقی آن نقطه‌دایره باشد) است. می‌توان از راه جبر نشان داد (ر.ک. به تمرین ۷) که از این نوع دسته‌ها وجود ندارند. این مطلب را می‌توان با استدلالِ هندسیِ (خیلی آسانتر) بخش ۴ به‌دست آورد که در آنجا بحث هندسی انواع مختلف دسته‌ها خواهد آمد.

مثالها

۱. خطهای راست را هم که حالتهای خاصی از دایره هستند می‌توان به‌وسیلهٔ ماتریسهای ارمیتی $\mathfrak{C}$ نمایش داد که در آنها $A = 0$.

(الف) ضرایب ناصفر ماتریس ارمیتی یک خط راست را بنویسید، یعنی B، C و D را برحسب p، فاصلهٔ خط راست از مبدأ مختصات متعامد، پیدا کنید، θ زاویه‌ای است که بردار فاصله با محور xها می‌سازد.

(ب) درستی صورت کلی (۱.۶.۱) را هنگامی که $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ دو خط راست باشند تحقیق کنید.

۲. وضعیت نسبی دایره‌های $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}' = \overline{\mathfrak{C}}$ چگونه است؟

۳. فرض کنید $\mathfrak{C}$ دایرهٔ غیرمشخصی باشد. ماتریس $\mathfrak{C}_0$ دایرهٔ حاصل از $\mathfrak{C}$ بر اثر انتقال $\tilde{z} = z + b$ را پیدا کنید به‌طوری‌که مبدأ مختصات مرکز دایرهٔ جدید $\mathfrak{C}_0$ شود.

۴. (الف) نشان دهید که هر دسته از دایره‌های غیرهم‌مرکز دست‌کم شامل یک خط راست است، و این دسته فقط هنگامی متشکل از خطهای راست خواهد بود که بیش از یک خط راست داشته باشد.

(ب) اگر دسته فقط یک خط راست داشته باشد، وضع این خط را در این دسته تعیین کنید. (در مورد دستهٔ هذلولوی مولدها را دو نقطه‌دایره بگیرید).

۵. آیا ممکن است یک دایرهٔ حقیقی و یک دایرهٔ انگاری بر هم مماس باشند؟

۶. ناوردای مشترک $\cos\omega$ را برای دو دایرهٔ هم‌مرکز $(\circ,\rho_1)$ و $(\circ,\rho_2)$ حساب کنید.

۷. فرض کنید $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ دو دایرهٔ انگاری باشند که با دو ماتریس ارمیتی معین مثبت نمایش داده شده‌اند. پس دسته دایرهٔ $\lambda_1\mathfrak{C}_1+\lambda_2\mathfrak{C}_2$ همواره شامل دایره‌های حقیقی است. (ملاحظه می‌کنید که $A_2\mathfrak{C}_1 - A_1\mathfrak{C}_2$ یک خط راست است و بنابر همین واقعیت، حقیقی است).

تبصره. این واقعیت تا حدی مستلزم وجود یک نابرابری کلی بین اعداد مختلط است. فرض کنید B_1 و B_2 دو عدد مختلط باشند و A_1، D_1، A_2 و D_2 چهار عدد مثبت و

$$A_1D_1 > |B_1|^2 \quad \text{و} \quad A_2D_2 > |B_2|^2$$

پس

$$\Delta_1\Delta_2 - \Delta_{12}^2 = -\frac{1}{4}(A_1D_2 - A_2D_1)^2 + (\operatorname{Im} B_1\overline{B}_2)^2 + \operatorname{Re}\{(A_1\overline{B}_2 - A_2\overline{B}_1)(D_2B_1 - D_1B_2)\} < \circ$$

برای یک استدلال هندسی به بخش ۴الف مراجعه کنید.

۸. ثابت کنید دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ متعامدند اگر و فقط اگر

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2^{-1}) = \circ \tag{۹.۱}$$

(منظور از $\operatorname{tr} A$، یا اثر A، مجموع عناصر قطری ماتریس A است.)

۹. معادلهٔ

$$z = \frac{at+b}{ct+d} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

نمایش پارامتری یک دایرهٔ حقیقی است. ماتریس ارمیتی این دایره، $\mathfrak{C}$، را بیابید. این دایره یک خط راست خواهد شد، اگر و فقط اگر $c=\circ$ یا اگر d/c حقیقی باشد.

۱۰. نقطه‌دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ بر دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ = \begin{pmatrix} A_\circ & B_\circ \\ C_\circ & D_\circ \end{pmatrix}$ عمود است، اگر و فقط اگر تنها نقطه (و مرکز) آن نقطه‌ای از محیط دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ$ باشد. فرض می‌کنیم $A=1$؛ در این صورت $D=BC$ و $z=-C$ همان نقطهٔ $\mathfrak{C}$ است. شرط تعامد

$$A_\circ D + D_\circ A - B_\circ C - C_\circ B = A_\circ z\bar{z} + B_\circ z + C_\circ \bar{z} + D_\circ = \circ$$

مبین این واقعیت است که این نقطه، نقطه‌ای از دایرهٔ $\mathfrak{C}$ است.

۱۱. هر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ عمود بر یک دایرهٔ انگاری $\mathfrak{C}_\circ$ دایره‌ای است حقیقی. فرض می‌کنیم $A_\circ = ۱$؛ پس $D_\circ > B_\circ \bar{B}_\circ$. چون (بنابر تعامد) $D = B_\circ C + C_\circ B - D_\circ A$، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} AD - BC =& A(B_\circ C + C_\circ B) - D_\circ A^{۲} - BC \\ &< A(B_\circ \bar{B} + \bar{B}_\circ B) - A^{۲} B_\circ \bar{B}_\circ - B\bar{B} = -|B - AB_\circ|^{۲} \leq \circ \end{aligned}$$

۱۲. برای مشخص ساختن یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ در دستهٔ $\mathfrak{C}_۱ + \lambda \mathfrak{C}_۲$، مطالعهٔ شعاع دایرهٔ $\rho = \rho(\lambda)$ به صورت تابعی از λ مفید است. با توجه به (۱.۴.۱)

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{(-|\mathfrak{C}_۱ + \lambda \mathfrak{C}_۲|)}}{A_۱ + \lambda A_۲}$$

ضریب دیفرانسیلی این تابع عبارت است از

$$\rho'(\lambda) = \frac{A_۲ \Delta_۱ - A_۱ \Delta_{۱۲} + (A_۲ \Delta_{۱۲} - A_۱ \Delta_۲)\lambda}{(A_۱ + A_۲\lambda)^{۲} \sqrt{[-(\Delta_۱ + ۲\Delta_{۱۲}\lambda + \Delta_۲ \lambda^{۲})]}}$$

علامت

$$\rho'(\circ) = \frac{A_۲}{A_۱} \frac{\rho_۲^{۲} - \delta^{۲} - \rho_۱^{۲}}{۲\rho_۱}$$

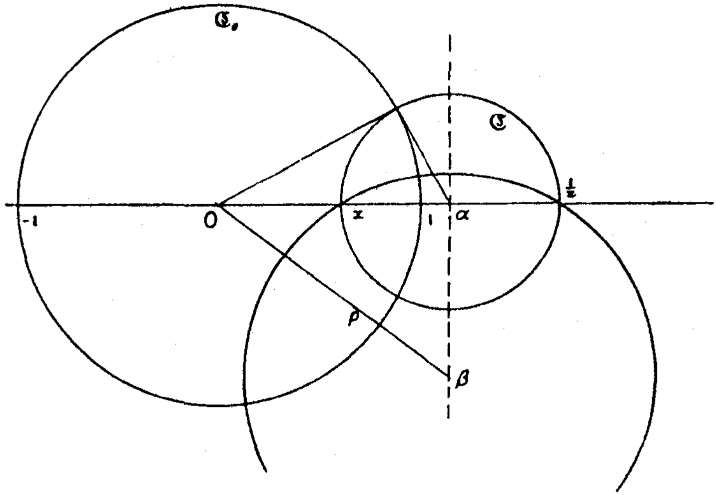
بیان می‌کند که به‌ازای دوایر $\mathfrak{C}$ نزدیک به $\mathfrak{C}_۱$ پارامتر λ افزایش یا کاهش می‌یابد و از آنجا مثبت یا منفی است، اگر شعاع ρ از $\rho_۱$ زیادتر شود.

۲. انعکاس

الف. تعریف. تعریف انعکاس بر قضیهٔ زیر استوار است.

قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}_\circ$ یک دایره (نه نقطه‌دایره باشد) و z نقطه‌ای باشد نه بر محیط این دایره و نه بر مرکز آن. در این صورت یک و فقط یک نقطهٔ z^* غیر از z وجود دارد که نقطهٔ مشترک بین همهٔ دایره‌هایی است که از z می‌گذرند و بر $\mathfrak{C}_\circ$ عمودند.

نقطهٔ z^* را منعکس z نسبت به «دایرهٔ مبنا»ی $\mathfrak{C}_\circ$ گویند، که $\mathfrak{C}_\circ$ ممکن است حقیقی، انگاری و یا خط راست باشد. تبدیلی که z را به z^* منتقل می‌کند (یا از z به z^* منتهی می‌شود) انعکاس



شکل۲

نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ نامیده می‌شود. انعکاس تبدیلی است برگشتی یعنی تبدیلی است که بر منعکس خودش منطبق است؛ در واقع طبق این قضیه نقطهٔ z هم منعکس z^* است.

اگر $\mathfrak{C}_\circ$ یک خط راست باشد، نقطهٔ z^* قرینهٔ z نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ است. اگر $\mathfrak{C}_\circ$ دایرهٔ حقیقی $(\gamma_\circ, \rho_\circ)$ باشد، خط راستی که از $\gamma_\circ$ و z می‌گذرد، دایره‌ای است عمود بر $\mathfrak{C}_\circ$. از این‌رو z^* باید بر این خط قرار داشته باشد و به‌وسیلهٔ دایرهٔ متعامد دیگری مشخص شود. برای توضیح این امر فرض کنید $\mathfrak{C}_\circ$ دایرهٔ واحد $z\bar{z} - ۱ = \circ$ باشد و $\mathfrak{C}_\circ = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{pmatrix}$، و فرض می‌کنیم $z = x$ حقیقی ($x \neq \circ$ و $\pm ۱ \neq$) باشد. در این صورت $z^* = ۱/x$. زیرا مراکز همهٔ دایره‌های $\mathfrak{C}$ که از x و $۱/x$ می‌گذرند، طولی برابر $\alpha = \frac{۱}{۲}(x + ۱/x)$ دارند. اگر ρ شعاع $\mathfrak{C}$ باشد، β عرض مرکز آن، از رابطهٔ $\beta^۲ = \rho^۲ - (\alpha - x)^۲$ (شکل ۲ را ببینید) به‌دست می‌آید. پس

$$\delta^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ = \rho^۲ + ۱$$

که به موجب (۲.۷.۱) بدین معنی است که شعاع

$$\rho \geq \frac{۱}{۲}|x - \frac{۱}{x}|$$

هرچه باشد، $\mathfrak{C}_\circ$ و $\mathfrak{C}$ متعامدند.

به عکس هرگاه یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ عمود بر $\mathfrak{C}_\circ$ از نقطهٔ x بگذرد، از نقطهٔ $1/x$ هم خواهد گذشت. زیرا شرط تعامد در این حالت $A - D = \circ$ است و معادلهٔ $Ax^2 + (B+C)x + A = \circ$ بیان می‌کند که x نقطه‌ای است از $\mathfrak{C}$ و ریشهٔ دیگر آن به صورت $1/x$ است.

برهان قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}_\circ = \begin{pmatrix} A_\circ & B_\circ \\ C_\circ & D_\circ \end{pmatrix}$ ماتریس ارمیتی دایرهٔ مبنا باشد و بنابراین $z \neq -C_\circ/A_\circ$. حال باید همهٔ دوایری مانند $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ را مشخص سازیم که از z می‌گذرند و بر $\mathfrak{C}_\circ$ عمودند و نشان دهیم که این دایره‌ها همگی از یک نقطهٔ معین z^* می‌گذرند. بدین‌ترتیب دستگاه سه معادلهٔ خطی همگن چهارمجهولی زیر را بر حسب مجهولهای A، B، C و D به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} \mathfrak{C}(z, \bar{z}) = Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = \circ & z \text{ بر } \mathfrak{C} \text{ واقع است} \\ \Delta_{\circ 1} = AD_\circ - BC_\circ - CB_\circ + DA_\circ = \circ & \mathfrak{C} \perp \mathfrak{C}_\circ \\ \mathfrak{C}(z^*, \overline{z^*}) = Az^*\overline{z^*} + Bz^* + C\overline{z^*} + D = \circ & z^* \text{ بر } \mathfrak{C} \text{ واقع است} \end{cases} \qquad (1.2)$$

این دستگاه همواره یک جواب غیرصفر دارد. ولی، هر جواب ارمیتی مستقل خطی منفرد با دایرهٔ منفردی عمود بر $\mathfrak{C}$، مارّ بر z و z^* متناظر است. برای یافتن یک خانوادهٔ دو پارامتری از جوابها، باید z^* را چنان تعیین کنیم که ماتریس سه معادلهٔ (۱.۲) یعنی

$$\begin{pmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ D_\circ & -C_\circ & -B_\circ & A_\circ \\ z^*\overline{z^*} & z^* & \overline{z^*} & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.1.2)$$

از رتبهٔ ۲ باشد.

فرض می‌کنیم که z^* این ویژگی را داشته باشد. پس عناصر دو ماتریسِ (در حالت کلی ناارمیتی)

$$\mathfrak{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z} \\ -z^* & z^*\bar{z} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z^*} \\ -z & z\overline{z^*} \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{C}^{(1)\prime}} \qquad (2.1.2)$$

نه‌تنها در معادله‌های اول و آخر (۱.۲) بلکه در معادلهٔ دوم نیز صدق خواهند کرد. در هر حالت از اینجا شرط

$$A_\circ z^*\bar{z} + B_\circ z^* + C_\circ\bar{z} + D_\circ = \mathfrak{C}_\circ(z^*, \bar{z}) = \circ \qquad (2.2)$$

به‌دست می‌آید که به‌وسیلهٔ آن z^* به‌طور یکتا به صورت تابعی از z مشخص می‌شود

$$z^* = -\frac{C_\circ \bar{z} + D_\circ}{A_\circ \bar{z} + B_\circ} \tag{۱.۲.۲}$$

بحث مذکور معتبر خواهد ماند، اگر z بر $\mathfrak{C}_\circ$ واقع باشد. پس داریم

$$\mathfrak{C}_\circ(z, \bar{z}) = A_\circ z\bar{z} + B_\circ z + C_\circ \bar{z} + D_\circ = \circ$$

و بنابراین با توجه به (۲.۲) خواهیم داشت

$$(z - z^*)(A_\circ \bar{z} + B_\circ) = \circ$$

چون بنابه فرض، $A_\circ \bar{z} + B_\circ = \overline{A_\circ z + C_\circ} \neq \circ$، از اینجا نتیجه می‌گیریم که $z = z^*$. بنابراین هر نقطه از (محیط) دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_\circ$ منعکس خودش است. این نقاط را نقاط ثابت (یاناوردای) انعکاس می‌نامند.

فرض شده بود که دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ$ نقطه‌دایره نیست، پس دترمینان $|\mathfrak{C}_\circ| \neq \circ$. بنابراین (۱.۲.۲) را که تعریف انعکاس است می‌توان (از حل نسبت به z) عکس کرد و در واقع تبدیل عکس بر خود شکل اصلی منطبق است.

اگر دترمینان $|\mathfrak{C}_\circ| = \circ$، (و $A_\circ \neq \circ$)، به‌طوری‌که $\mathfrak{C}_\circ$ یک نقطه‌دایره باشد، آنگاه

$$D_\circ = \frac{B_\circ C_\circ}{A_\circ}$$

و بنابراین با توجه به (۱.۲.۲)

$$z^* = -\frac{C_\circ}{A_\circ} = \text{const}$$

مستقل از z است. معنی این عبارت این است که این تبدیل هر نقطهٔ z را به یک و فقط یک نقطهٔ z^* می‌برد؛ بنابراین نمی‌تواند عکسپذیر باشد.

انعکاس (۱.۲.۲) نسبت به دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_\circ$ را تقارن نسبت به دایرهٔ اصلی $\mathfrak{C}_\circ$ نیز می‌نامند و z و z^* را نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ متقارن خوانند. معادلهٔ (۲.۲) معرف تقارن بین دو نقطهٔ z و z^* است؛ که عملاً از معادلهٔ $\mathfrak{C}_\circ(z, \bar{z}) = \circ$، دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_\circ$، با قراردادن z^* به‌جای z و تغییرندادن $\bar{z}$ به‌دست می‌آید. اگر معادلهٔ دایرهٔ مبنا را به صورت $(z - \gamma_\circ)(\bar{z} - \bar{\gamma}_\circ) = \rho_\circ^۲$ بنویسیم، با همان روش عملی خواهیم داشت

$$z^* = \gamma_\circ + \frac{\rho_\circ^۲}{\bar{z} - \bar{\gamma}_\circ} \tag{۲.۲.۲}$$

اگر $\mathfrak{C}_\circ$ حقیقی ($\rho^{\text{۲}} > \circ$) باشد، انعکاس را هذلولوی گویند. به دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_\circ = (\gamma_\circ, \rho_\circ)$ می‌توان یک دایرهٔ انگاری $(\gamma_\circ, i\rho_\circ)$، را وابسته ساخت. z_* منعکس نقطهٔ z نسبت به این دایره چنین است

$$z_* = \gamma_\circ - \frac{\rho_\circ^{\text{۲}}}{\bar{z} - \bar{\gamma}_\circ} \qquad (\text{۳.۲})$$

این انعکاس، انعکاس بیضوی است.

نقطهٔ z_* را می‌توان از z با انعکاس هذلولوی (۲.۲.۲) (نسبت به دایرهٔ حقیقی وابسته به آن $\mathfrak{C}_\circ$) از راه تقارن نسبت به مرکز $\gamma_\circ$ به‌دست آورد

$$z_* = \text{۲}\gamma_\circ - z^* \qquad (\text{۱.۳.۲})$$

ب. ویژگیهای سادهٔ انعکاس. هر نقطهٔ صفحه، غیر از مرکز دایرهٔ مبنا، یعنی $z = \gamma_\circ = -C_\circ/A_\circ$، از طریق انعکاس به یک نقطهٔ معین z^* برده می‌شود که با رابطهٔ (۱.۲.۲) یا (۲.۲.۲) داده می‌شود. فرض کنید $z^* = f(z)$ این رابطه باشد. برای اینکه انعکاس را به یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک از تمامی صفحه بر روی خودش بدل کنیم، لازم است که صفحهٔ معمولی اعداد مختلط را با افزودن یک نقطه به نام نقطهٔ بینهایت، به آن که با نماد ∞ نشان داده می‌شود، کامل کنیم. پس با قراردادن

$$f(\gamma_\circ) = \infty \qquad (\text{۴.۲})$$

تعریف انعکاس را کامل می‌کنیم. چون انعکاس برگشتی است، یعنی $z = f(z^*)$، طبیعی است که قرار دهیم

$$f(\infty) = \gamma_\circ \qquad (\text{۱.۴.۲})$$

که بر اثر آن انعکاسِ $z^* = f(z)$ یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک از صفحهٔ «کامل‌شده» بر روی خودش خواهد بود.

از (۱.۲.۲) یا (۲.۲.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{z \to \gamma_\circ} f(z) = \infty, \qquad \lim_{z \to \infty} f(z) = \gamma_\circ$$

که با توجه به (۴.۲) و (۱.۴.۲) بیانگر پیوستگی انعکاس به‌ترتیب در مرکز $\gamma_\circ$ و در ∞ است.

تعریف تبدیل $Z = \phi(z)$ از صفحهٔ z به صفحهٔ Z (که ممکن است صفحهٔ z را با صفحهٔ دستگاه محورهای مختصاتی با مقیاسهای متساوی یکی گرفت) در نقطهٔ $z_\circ$ را حافظ زاویه خوانند، هرگاه هر دو منحنی متقاطع در $z_\circ$ را که با هم زاویهٔ ω[1] می‌سازند به دو منحنی در $Z_\circ = \phi(z_\circ)$ بدل کند که با هم زاویهٔ $\Omega = \pm\omega$ بسازند. اگر $\omega = \Omega$، این تبدیل را در نقطهٔ $z_\circ$ همدیس خوانند.

اکنون دو قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ب. هر انعکاس، دایره را به دایره، دوایر حقیقی (از جمله خط راست) را به دوایر حقیقی و دوایر انگاری را به دوایر انگاری بدل می‌کند.

قضیهٔ ج. انعکاس تبدیلی است حافظ زاویه که دو منحنی به زاویهٔ ω را به دو منحنی به زاویهٔ $\omega^* = -\omega$ بدل می‌کند.

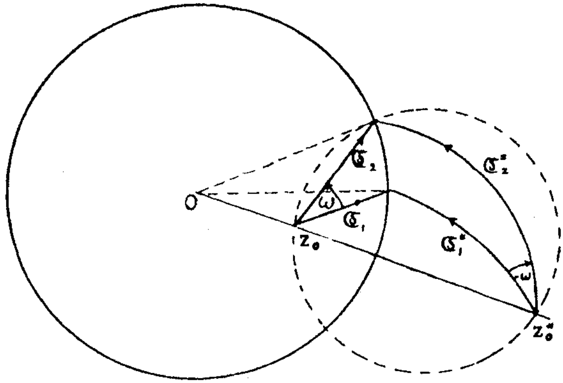
به موجب تبصرهٔ نهایی که در ذیل بخش **الف** آمده بود، کافی است این قضیه را فقط برای انعکاس هذلولوی ثابت کنیم. زیرا روشن است که تقارن (۱.۳.۲)، که از یک انعکاس هذلولوی، یک انعکاس بیضوی پدید می‌آورد (i) دایره را به دایره بدل می‌کند، (ii) تبدیلی است همدیس. بنابراین اگر به دنبال نگاشت همدیسی که دایره را محفوظ نگاه می‌دارد، تقارن (۱.۳.۲) را انجام دهیم، نگاشت همدیس حافظ دایرهٔ دیگری حاصل می‌شود.

برهان قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_\circ$ انعکاس، یک دایرهٔ حقیقی خاص ($|\mathfrak{C}_\circ| < \circ, A_\circ \neq \circ$) باشد. در مورد حالت خط راست به مثال ۳ مراجعه کنید. به‌موجب تعریف هندسی انعکاس (بر پایهٔ قضیهٔ الف)، ویژگیهای هندسی، نه به موضع $\mathfrak{C}_\circ$ در صفحه بستگی دارند و نه به اندازهٔ شعاع $\rho_\circ$. از این‌رو می‌توان $\gamma_\circ$ را برابر صفر و $\rho_\circ$ را مساوی ۱ اختیار کرد. با توجه به (۲.۲.۲) این انعکاس $z^* = 1/\bar{z}$ داده می‌شود. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}$ دایرهٔ دلخواهی باشد. نگارهٔ آن بر اثر انعکاس از قراردادن $z = 1/\overline{z^*}$ (۲.۱) به‌دست می‌آید. پس از ضرب آن در عامل مثبت $z^*\overline{z^*}$ معادله چنین خواهد شد

$$z^*\overline{z^*}\mathfrak{C}\left(\frac{1}{\overline{z^*}}, \frac{1}{z^*}\right) = Dz^*\overline{z^*} + Bz^* + C\overline{z^*} + A = \circ \qquad (۵.۲)$$

---

۱. طبق تعریف زاویه بین دو منحنی در نقطهٔ تقاطع آنها عبارت است از زاویهٔ بین دو مماس بر این دو منحنی در این نقطه.



شکل۳

این معادله، معادلهٔ نگارهٔ دایرهٔ $\mathfrak{C}^* = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}$ است. مبین آن عبارت است از $\Delta^* = \Delta$؛ پس $\mathfrak{C}^*$ حقیقی است اگر $\mathfrak{C}$ حقیقی باشد، و انگاری است اگر $\mathfrak{C}$ انگاری باشد.

تبصره. در انعکاس دایره‌ای که از مرکز دایرهٔ مبنا، γ_0، ($\gamma_0 = 0$ در برهان) می‌گذرد به دایره‌ای که از نقطهٔ بینهایت می‌گذرد، یعنی به یک خط راست، بدل می‌شود. زیرا هیچ دایرهٔ حقیقی دیگری از نقطهٔ بینهایت نمی‌گذرد. از لحاظ جبری (به‌موجب آنچه که در برهان قضیه آمده است): اگر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ از ۰ بگذرد، آنگاه $D = 0$، و از آنجا $\mathfrak{C}^*$ یک خط راست خواهد بود.

برهان قضیهٔ ج. برای دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ نگاره‌های آنها، $\mathfrak{C}_1^*$ و $\mathfrak{C}_2^*$، را طبق (۵.۲) به‌دست می‌آوریم، بنابراین $\Delta_1 = \Delta_1^*$، $\Delta_2 = \Delta_2^*$ و $\Delta_{12} = \Delta_{12}^*$؛ و از آنجا به موجب (۱.۶.۱) داریم

$$\cos\omega^* = \cos\omega \qquad (۶.۲)$$

بدون تغییر علامت، زیرا که انعکاس جهت هر دایرهٔ حقیقی را عوض می‌کند. این مطلب را می‌توان به آسانی از ساختمان هندسی آنها که در شکل ۳ آمده است، نتیجه گرفت. بنابراین $\omega^* = \pm\omega$. ولی با استدلالی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $\omega^* = -\omega$.

تبصره. رابطهٔ (۶.۲) یک اتحاد جبری است که برای هر دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ معتبر است، حتی اگر این دوایر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. این واقعیت دلیل موجهی برای نام «ناوردای مشترک» برای $\cos\omega$ است. فقط وقتی $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ حقیقی و نقطهٔ مشترکی داشته باشند، تعبیر هندسی ساده‌ای برای آن وجود دارد.

مثالها

۱. اگر z بر دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}$، عمود بر دایرهٔ (حقیقی یا انگاری) $\mathfrak{C}_\circ$ حرکت کند، به موجب قضیهٔ الف، نقطهٔ z^*، منعکس z نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$، بر همان دایرهٔ $\mathfrak{C}$ حرکت خواهد کرد. به عکس اگر z و z^* هر دو بر یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ حرکت کنند، آنگاه $\mathfrak{C}$ بر $\mathfrak{C}_\circ$ عمود است. از این‌رو: یک دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_\circ$ بر اثر انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ ناورداست، اگر و فقط اگر $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_\circ$ متعامد باشند. اگر $\mathfrak{C}_\circ$ حقیقی باشد، انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ نقاط درونی دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را بر نقاط درونی خود $\mathfrak{C}$ می‌نگارد (ر.ک. مثال ۱۳، بخش ۶).

۲. به‌ازای نقطهٔ مفروض $z \neq \circ$، نقاط $\bar{z}/۱$ و $z/۱$ را به طریق هندسی پیدا کنید.

۳. انعکاس (تقارن یا تقارن محوری) نسبت به یک خط راست به عنوان دایرهٔ مبنا را بررسی کنید. این انعکاس دوایر خاص را بر دوایری خاص می‌نگارد و خطوط راست را بر خطوط راست.

۴. برای دو نقطه‌دایرهٔ $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$، نشان دهید که مراکز آنها، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نسبت به هر دایره از دسته دایرهٔ

$$\lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲ \qquad (\lambda_۱ \text{ و } \lambda_۲ \text{ حقیقی})$$

منعکس یکدیگرند.

۵. جواب معادله‌های (۱.۲). فرض می‌کنیم z نقطه‌ای از دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_\circ$ نباشد. به فرض آنکه شرط (۲.۲) برقرار باشد، عناصر دو ماتریس $\mathfrak{C}^{(۱)}$ و $\mathfrak{C}^{(۲)}$ از ماتریسهای (۲.۱.۲) یک پایه برای جواب (۱.۲) تشکیل می‌دهند. از ترکیب خطی مناسب $\mathfrak{C}^{(۱)}$ و $\mathfrak{C}^{(۲)}$، می‌توان یک پایهٔ ارمیتیِ

$$\mathfrak{C}_۱ = \frac{۱}{۲}(\mathfrak{C}^{(۱)} + \mathfrak{C}^{(۲)}), \qquad \mathfrak{C}_۲ = \frac{۱}{۲}i(\mathfrak{C}^{(۱)} - \mathfrak{C}^{(۲)}) \qquad [\text{ر.ک. بخش ۱،ج، (i)}]$$

را به‌دست آورد. در واقع چون $\overline{\mathfrak{C}^{(۱)\prime}} = \mathfrak{C}^{(۲)}$، از اینجا نتیجه می‌شود $\overline{\mathfrak{C}'}_۱ = \mathfrak{C}_۱$ و $\overline{\mathfrak{C}'}_۲ = \mathfrak{C}_۲$. از این‌رو $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ ماتریسهای ارمیتی دو دایرهٔ متمایزی هستند که از نقاط z و z^* می‌گذرند

$$\mathfrak{C}_۱(z, \bar{z}) = \circ, \qquad \mathfrak{C}_۱(z^*, \overline{z^*}) = \circ, \qquad \mathfrak{C}_۲(z, \bar{z}) = \circ, \qquad \mathfrak{C}_۲(z^*, \overline{z^*}) = \circ$$

این دایره‌ها دستهٔ $\lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲$ مرکب از تمام دوایری را تولید می‌کنند که از z می‌گذرند و بر $\mathfrak{C}_\circ$ عمودند.

۶. قطبی نقطهٔ $z_\circ \neq \circ$ نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}_+ = (\circ, \rho)$ (یا $\mathfrak{C}_- = (\circ, i\rho)$) با معادلهٔ

$$\bar{z}_\circ z + z_\circ \bar{z} = 2\rho^2 (= -2\rho^2 \text{ یا})$$

نمایش داده می‌شود. نشان دهید که قطبی $z_\circ$ از نقطه $z_\circ^*$، منعکس $z_\circ$ نسبت به این دایره، می‌گذرد. این قطبی بر بردار شعاعی $\overrightarrow{oz_\circ}$ عمود است. اگر $z_\circ$ نقطه‌ای از این دایره باشد، قطبی آن در نقطهٔ $z_\circ$ بر این دایره مماس است. فرض می‌کنیم $z_\circ$ بیرون دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_+$ باشد؛ قطبی آن دایره را در دو نقطهٔ z_1 و z_2 قطع می‌کند. در این صورت مماسهای بر دایره در نقاط z_1 و z_2 یکدیگر را در نقطهٔ $z_\circ$ قطع می‌کنند.

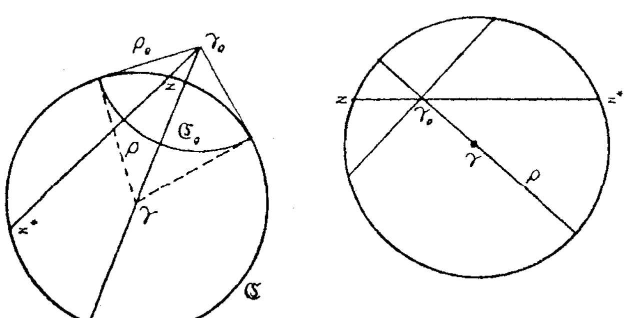
۷. فرض می‌کنیم $\gamma_\circ$ نقطه‌ای بر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ نباشد. پس می‌توان یک دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ = (\gamma_\circ, \rho_\circ)$ پیدا کرد که بر $\mathfrak{C}$ عمود باشد. اگر $\mathfrak{C}$ حقیقی باشد، دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ$ حقیقی خواهد بود اگر $\gamma_\circ$ در بیرون $\mathfrak{C}$ واقع باشد، و انگاری است اگر $\gamma_\circ$ در داخل $\mathfrak{C}$ واقع باشد؛ اگر $\mathfrak{C}$ انگاری باشد، دایرهٔ $\mathfrak{C}_\circ$ همواره حقیقی است (ر.ک. مثال ۱۱، بخش ۱). فرض می‌کنیم $\mathfrak{C} = (\gamma, \rho)$، پس به موجب (۲.۷.۱) داریم

$$\rho_\circ^2 = |\gamma - \gamma_\circ|^2 - \rho^2$$

این مقدار ثابت را قوت نقطهٔ $\gamma_\circ$ نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}$ گویند. این مقدارِ ثابت مثبت است، اگر $\gamma_\circ$ در خارج $\mathfrak{C}$ واقع باشد و منفی است اگر $\gamma_\circ$ در داخل $\mathfrak{C}$ باشد.

در هر یک از این دو حالت دو نقطهٔ z و z^* بر $\mathfrak{C}$ که بر یک خط مارّ بر $\gamma_\circ$ قرار دارند، نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$ قرینه‌اند. از این‌رو داریم

$$(\bar{z} - \bar{\gamma}_\circ)(z^* - \gamma_\circ) = \rho_\circ^2 = \text{const} \qquad \text{(ر.ک. شکل ۴)}$$



۸. نقاط ثابت. نقطهٔ $z_\circ$ را نقطهٔ ثابت یا نقطهٔ ناوردای تبدیل $Z = f(z)$ گویند هرگاه در معادلهٔ $f(z_\circ) = z_\circ$ صدق کند. یک انعکاس هذلولوی قسمتهای خارجی و داخلی هر شعاع دایرهٔ مبنا را با هم عوض می‌کند. بنابراین نقاط واقع بر این دایره تنها نقاط ثابت انعکاس‌اند. یک انعکاس بیضوی (با دایرهٔ مبنای انگاری) هیچ نقطهٔ ثابت ندارد. از آنجا که هر دایره با سه نقطه‌اش کاملاً معین می‌شود، روشن است که هر انعکاس هذلولوی با سه نقطهٔ ثابتش مشخص می‌شود.

۹. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}_\circ$ دایرهٔ مبنای یک انعکاس باشد و $\mathfrak{C}_\backslash$ دایرهٔ مفروضی (حقیقی یا انگاری) دیگر. دایرهٔ $\mathfrak{C}_\backslash^*$، قرینهٔ $\mathfrak{C}_\backslash$ نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$، دایره‌ای است از دسته دایره‌ای که به وسیلهٔ $\mathfrak{C}_\circ$ و $\mathfrak{C}_\backslash$ تولید می‌شود. پس

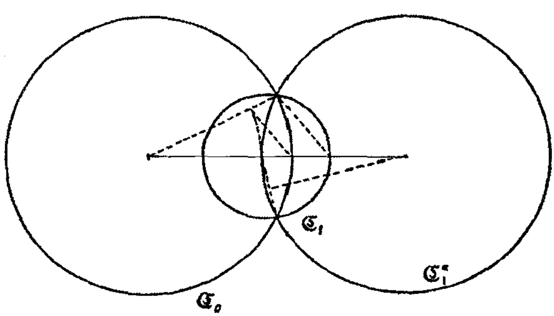
$$\mathfrak{C}_\backslash^* = \lambda_\circ \mathfrak{C}_\circ + \lambda_\backslash \mathfrak{C}_\backslash \qquad (۷.۲)$$

که $\lambda_\circ$ و $\lambda_\backslash$ حقیقی و هر دو با هم صفر نیستند. این مطلب از لحاظ هندسی روشن است وقتی که $\mathfrak{C}_\circ$ و $\mathfrak{C}_\backslash$ یک یا دو نقطهٔ مشترک داشته باشند. در این حالت این دسته سهموی یا بیضوی است. اگر هیچ نقطهٔ مشترکی وجود نداشته باشد، دسته هذلولوی است. نقاط متناظر z از $\mathfrak{C}_\backslash$ و z^* از $\mathfrak{C}_\backslash^*$ بر دایره‌ای قرار دارند که از نقطهٔ z می‌گذرد و بر $\mathfrak{C}_\backslash$ و $\mathfrak{C}_\circ$ عمود است.

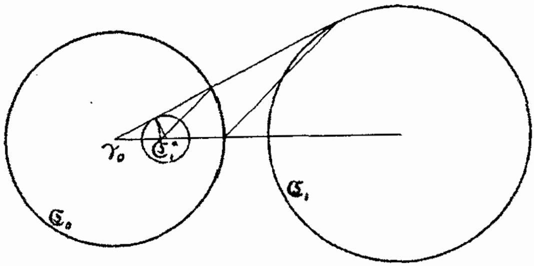
با استفاده از (۱.۲.۲) معادلهٔ $\mathfrak{C}_\backslash(z, \bar{z}) = \circ$ به $\mathfrak{C}_\backslash^*(z^*, \overline{z^*}) = \circ$ تبدیل می‌شود که باید همان دایرهٔ $(\lambda_\circ \mathfrak{C}_\circ + \lambda_\backslash \mathfrak{C}_\backslash)(z^*, \overline{z^*}) = \circ$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{cases} \lambda_\circ = ۲\Delta_{\circ\backslash} = A_\circ D_\backslash + A_\backslash D_\circ - B_\circ C_\backslash - B_\backslash C_\circ \\ \lambda_\backslash = -\Delta_\circ = B_\circ C_\circ - A_\circ D_\circ \end{cases} \qquad (۱.۷.۲)$$

در حالتی که دوایر $\mathfrak{C}_\circ$ و $\mathfrak{C}_\backslash$ حقیقی هستند، ساختمان هندسی $\mathfrak{C}_\backslash^*$ در سه موقعیت مختلف در شکلهای ۵.الف‌ـج داده شده است.



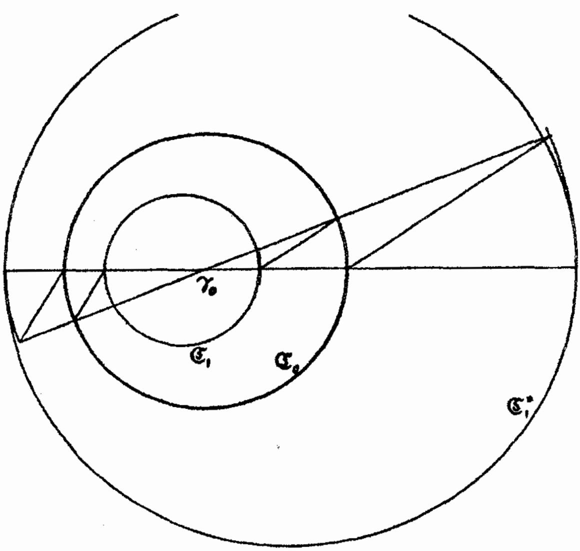
شکل۵. الف



شکل ۵. ب

۱۰. با استفاده از (۱.۷.۲) می‌توان عکس مسئله را حل کرد: به‌ازای هر دو دایرهٔ مفروض $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ (هر دو حقیقی یا هر دو انگاری) دایرهٔ مبنای $\mathfrak{C}_0$ را چنان پیدا می‌کنیم که $\mathfrak{C}_1^* = \mathfrak{C}_2$، یعنی، منعکس (قرینهٔ) $\mathfrak{C}_1$ نسبت به $\mathfrak{C}_0$ باشد. روشن است که $\mathfrak{C}_0$ باید به دسته‌ای که توسط $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ تولید می‌شود تعلق داشته باشد. پس به موجب (۱.۷.۲)

$$\mathfrak{C}_1^* = 2\Delta_{01}(\mathfrak{C}_1 + \lambda\mathfrak{C}_2) - \Delta_0\mathfrak{C}_1$$



شکل ۵. ج

که در آن

$$۲\Delta_{۰۱} = ۲\Delta_۱ + ۲\Delta_{۱۲}\lambda, \qquad \Delta_۰ = \Delta_۱ + ۲\Delta_{۱۲}\lambda + \Delta_۲\lambda^۲$$

اکنون λ را چنان تعیین می‌کنیم که

$$۲\Delta_{۰۱} - \Delta_۰ = \Delta_۱ - \Delta_۲\lambda^۲ = ۰$$

یعنی

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\Delta_۱}{\Delta_۲}} \qquad (۲.۷.۲)$$

که همواره عددی است حقیقی.

در حالت کلی برای این مسئله دو جواب وجود دارد. چگونگی این جوابها به علامت مبین بستگی دارد

$$|\mathfrak{C}_۰| = \left|\mathfrak{C}_۱ \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_۱}{\Delta_۲}\right)\mathfrak{C}_۲}\right| = ۲\Delta_۱\left(۱ \pm \frac{\Delta_{۱۲}}{\sqrt{\Delta_۱}\sqrt{\Delta_۲}}\right)$$

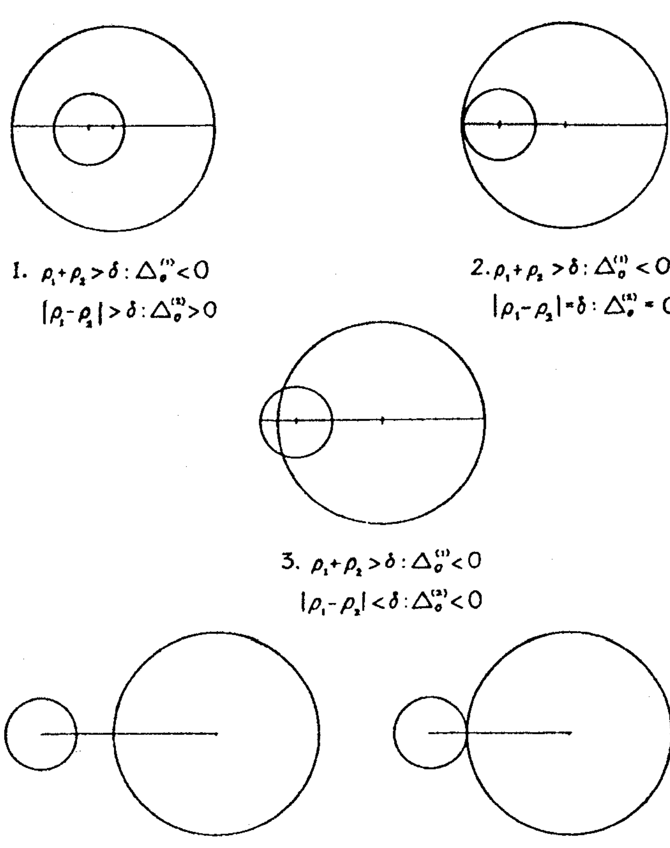
در حالتی که دایره‌های $\mathfrak{C}_۱ = (\gamma_۱, \rho_۱)$ و $\mathfrak{C}_۲ = (\gamma_۲, \rho_۲)$ حقیقی باشند باید از (۲.۵.۱) دو مقدار

$$|\mathfrak{C}_۰| = \begin{cases} \Delta_۰^{(۱)} = A_۱^۲\dfrac{\rho_۱}{\rho_۲}[\delta^۲ - (\rho_۱ + \rho_۲)^۲] \\ \Delta_۰^{(۲)} = A_۱^۲\dfrac{\rho_۱}{\rho_۲}[(\rho_۱ - \rho_۲)^۲ - \delta^۲] \end{cases}$$

را به‌دست آورد. چون یکی از مقادیر $\Delta_۰^{(۱)}$ و $\Delta_۰^{(۲)}$ منفی می‌شود، لذا همواره یک دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_۰$ وجود دارد. هر دو مقدار بالا منفی خواهند شد اگر و فقط اگر $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ دو نقطهٔ مشترک متمایز داشته باشند. همهٔ وضعیتهای ممکن در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. همچنین به بخش ۴، مثال ۸، مراجعه کنید که در آنجا نشان داده شده است که وقتی دایره‌های $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ متقاطع باشند دایره‌های $\mathfrak{C}_۰$ دایره‌هایی هستند که زاویه‌های بین $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ را نصف می‌کنند.

۳. تصویر گنجنگاشتی

الف. تعریف. صفحهٔ کامل‌شده، چنانکه در بخش ۲،ب، معرفی شد به علت موضع دور افتادهٔ یکی از عناصرش (نقطهٔ ∞) اغلب زمینهٔ مناسبی برای هندسهٔ دایره و کاربردهای آن نیست.



1. $\rho_1+\rho_2>\delta : \Delta_0^{(1)}<0$
$|\rho_1-\rho_2|>\delta : \Delta_0^{(2)}>0$

2. $\rho_1+\rho_2>\delta : \Delta_0^{(1)}<0$
$|\rho_1-\rho_2|=\delta : \Delta_0^{(2)}=0$

3. $\rho_1+\rho_2>\delta : \Delta_0^{(1)}<0$
$|\rho_1-\rho_2|<\delta : \Delta_0^{(2)}<0$

4. $\rho_1+\rho_2=\delta : \Delta_0^{(1)}=0$
$|\rho_1-\rho_2|<\delta : \Delta_0^{(1)}<0$

5. $\rho_1+\rho_2<\delta : \Delta_0^{(1)}>0$
$|\rho_1-\rho_2|<\delta : \Delta_0^{(2)}<0$

شکل ۶

بنابراین، بهتر است که به‌جای صفحهٔ کامل‌شده زمینهٔ هندسی دیگری از اعداد مختلط گذاشته شود که هیچ نقطهٔ آن وضع استثنایی نداشته باشد. تصور هندسی قراردادن نقطهٔ ∞ در یک فاصلهٔ «خیلی دور» از بیننده در صفحه، این فکر را به ذهن القا می‌کند که این عنصر را برای این می‌گیریم که سوراخ یا شکاف موجود در صفحهٔ معمولی را پر کنیم و از این طریق این صفحه را در بینهایت مسدود سازیم. با این فرایند صفحه به یک رویهٔ هندسی با ماهیت کره بدل می‌شود. تنها کافی است که توضیح دقیقی از این فرایند، از راه برقراری یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین نقاط صفحهٔ کامل‌شده و نقاط یک کره در فضا به‌دست آوریم.

برقراری چنین تناظری از راههای زیادی ممکن است. یکی از این راهها که برای مقاصد کنونی ما اهمیت خاصی دارد، تصویر گنجنگاشتی است. در یک دستگاه مختصات دکارتی (ξ, η, ζ) در فضا، کرهٔ واحد

$$\xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ = ۱ \tag{۱.۳}$$

را در نظر می‌گیریم. صفحهٔ مختلط z را صفحهٔ ξ و η می‌گیریم به‌طوری‌که در مورد نقطهٔ $z = x+iy$ از این صفحه داریم $\xi = x$، $\eta = y$ و $\zeta = ۰$. نگارهٔ گنجنگاشتی نقطهٔ $z = x + iy$ از این صفحه نقطه‌ای است مانند $\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta)$ بر کرهٔ (۱.۳) که دومین نقطهٔ تلاقی خط راست مارّ بر نقطهٔ $\mathbf{S}(۰, ۰, -۱)$، قطب جنوب کره، و نقطهٔ z است. با این کره، به‌ازای هر z از این صفحه نقطهٔ یکتای متناظر $\mathbf{P}$ بر این کره وجود دارد. $\mathbf{S}$، قطب جنوب کره، یعنی مرکز تصویر، به صورت نگارهٔ یک نقطهٔ z در نمی‌آید. پس آزادیم که $\mathbf{S}$ را نگارهٔ نقطهٔ ∞ صفحهٔ کامل‌شده بگیریم. بدین‌ترتیب تصویر گنجنگاشتی معرف یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین نقاط z از صفحهٔ کامل‌شده و نقاط $\mathbf{P}$ از کره است.

اکنون به یافتن معادله‌های تصویر گنجنگاشتی می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{P}_۱(\xi_۱, \eta_۱, \zeta_۱)$ و $\mathbf{P}_۲(\xi_۲, \eta_۲, \zeta_۲)$ دو نقطه از فضا باشند. هر نقطهٔ $\mathbf{Q}(\xi, \eta, \zeta)$ از خط $\mathbf{P}_۱\mathbf{P}_۲$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbf{Q} = (۱ - \lambda)\mathbf{P}_۱ + \lambda\mathbf{P}_۲ \qquad (\lambda \text{ پارامتر حقیقی})$$

یعنی:

$$\begin{cases} \xi = (۱ - \lambda)\xi_۱ + \lambda\xi_۲ \\ \eta = (۱ - \lambda)\eta_۱ + \lambda\eta_۲ \\ \zeta = (۱ - \lambda)\zeta_۱ + \lambda\zeta_۲ \end{cases} \tag{۲.۳}$$

برای یافتن نگارهٔ گنجنگاشتی $\mathbf{P}$ِ نقطهٔ $z = x + iy$، فرض می‌کنیم

$$\mathbf{P}_۱ = \mathbf{S}(۰, ۰, -۱), \qquad \mathbf{P}_۲ = (x, y, ۰)$$

پس $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ و به موجب (۲.۳) داریم

$$\xi = \lambda x, \qquad \eta = \lambda y, \qquad \zeta = -(۱ - \lambda)$$

مقدار λ با شرط (۱.۳) تعیین می‌شود

$$\xi^{۲}+\eta^{۲}+\zeta^{۲}=\lambda^{۲}(x^{۲}+y^{۲})+۱-۲\lambda+\lambda^{۲}=۱$$

پس (با مستثناکردن مقدار $\lambda=۰$ که متناظر با نقطهٔ $\mathbf{S}$ است)، داریم

$$\lambda=\frac{۲}{۱+x^{۲}+y^{۲}}=\frac{۲}{۱+z\bar{z}}$$

بنابراین مختصات $\mathbf{P}(\xi,\eta,\zeta)$ چنین داده می‌شود

$$\xi+i\eta=\frac{۲z}{۱+z\bar{z}},\qquad \zeta=\frac{۱-z\bar{z}}{۱+z\bar{z}} \tag{۳.۳}$$

برای یافتن z متناظر با یک نقطهٔ $\mathbf{P}$ بر کره، مجدداً با استفاده از (۲.۳) و قراردادن $\mathbf{P}_{۱}=\mathbf{S}$، $\mathbf{P}_{۲}=\mathbf{P}$ و $\mathbf{Q}=(x,y,۰)$؛ خواهیم داشت

$$x=\lambda\xi,\qquad y=\lambda\eta,\qquad ۰=-(۱-\lambda)+\lambda\zeta$$

بنابراین $\lambda=۱/(۱+\zeta)$ و در نتیجه

$$z=\frac{\xi+i\eta}{۱+\zeta} \tag{۱.۳.۳}$$

به هر نقطهٔ $\mathbf{P}\neq\mathbf{S}$ از کره یعنی، $(\zeta\neq-۱)$، به موجب (۱.۳.۳) نقطه‌ای مانند z از صفحهٔ اعداد مختلط متناظر است. هنگامی که $\mathbf{P}$ به $\mathbf{S}$ نزدیک می‌شود، $\zeta\to-۱$، چون

$$|z|^{۲}=\frac{\xi^{۲}+\eta^{۲}}{(۱+\zeta)^{۲}}=\frac{۱-\zeta^{۲}}{(۱+\zeta)^{۲}}=\frac{۱-\zeta}{۱+\zeta}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $|z|\to\infty$، یعنی $z\to\infty$. پس تصویر گنجنگاشتی کره بر صفحهٔ کامل‌شده در همه‌جای کره، و از جمله نقطهٔ $\mathbf{S}$، پیوسته است.

به موجب (۳.۳) به هر z یک نقطهٔ $\mathbf{P}$ از کرهٔ (۱.۳) متناظر است. حال اگر $z\to\infty$، یعنی،

$$\frac{۱}{z}=\frac{۱+\zeta}{\xi+i\eta}\to ۰$$

آنگاه $\zeta\to-۱$، و در همین حال بنابر (۱.۳) $\xi^{۲}+\eta^{۲}\to ۰$، یعنی، $\xi\to ۰$ و $\eta\to ۰$ که معنی آن این است که $\mathbf{P}$ به نقطهٔ $\mathbf{S}$ نزدیک می‌شود. پس تصویر گنجنگاشتی این صفحه بر کره، به‌ویژه در نقطهٔ ∞ نیز نگاشتی پیوسته است.

نگاشتی از یک رویه بر روی رویهٔ دیگر را که پیوسته و عکسپذیر باشد و نگاشت عکس آن نیز پیوسته باشد نگاشت توپولوژیک گویند. از این رو

قضیهٔ الف. تصویر گنجنگاشتی، نگاشتی است توپولوژیک از کره بر صفحهٔ کامل‌شده؛ لذا این دو رویه هم ارزِ توپولوژیک‌اند.

ب. ویژگیهای سادهٔ تصویر گنجنگاشتی. مشابه با دو قضیهٔ بخش ۲، ب، در مورد انعکاس، در اینجا نیز دو قضیه داریم که دلیل موجهی برای کاربرد تصویر گنجنگاشتی در هندسهٔ دایره و مباحث مربوط به آن است.

قضیهٔ ب. تصویر گنجنگاشتی دایره‌های واقع در صفحه را به دایره‌های واقع بر کره بدل می‌کند و به عکس؛ به‌ویژه دایره‌های حقیقی (از جمله خطوط راست) را به دایره‌های حقیقی کره و دایره‌های انگاری را به دایره‌های انگاری آن بدل می‌کند.

قضیهٔ ج. تصویر گنجنگاشتی، نگاشتی است همدیس.

برهان قضیهٔ ب. هر خط راست از صفحه، در صفحه‌ای واقع است که از نقطهٔ $\mathbf{S}$ می‌گذرد و این صفحه کره را در دایره‌ای مارّ بر $\mathbf{S}$ می‌برد که نگارهٔ گنجنگاشتی این خط است. بعکس هر دایره‌ای که از $\mathbf{S}$ بگذرد تصویرش خط راستی از صفحه است.

قضیه را در حالت کلی از راه تحلیلی اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم دایرهٔ $\mathfrak{C}$ با معادلهٔ (۲.۱) داده شده باشد. منحنی متناظر آن بر روی کره، از قراردادن

$$z = \frac{\xi + i\eta}{۱ + \zeta}$$

در معادلهٔ (۲.۱) با شرط $\xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ = ۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\mathfrak{C}(z, \bar{z}) = A\frac{\xi^۲ + \eta^۲}{(۱ + \zeta)^۲} + B\frac{\xi + i\eta}{۱ + \zeta} + C\frac{\xi - i\eta}{۱ + \zeta} + D = ۰$$

$\zeta + ۱$ فقط در حالت خط راست ممکن است صفر باشد که این حالت قبلاً بحث شده است. چون $\xi^۲ + \eta^۲ = (۱ + \zeta)(۱ - \zeta)$ داریم

$$(۱ + \zeta)\mathfrak{C}(z, \bar{z}) = A(۱ - \zeta) + B(\xi + i\eta) + C(\xi - i\eta) + D(۱ + \zeta) = ۰$$

یا

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d = \circ \qquad (۴.۳)$$

که در آن

$$a = B + C, \quad b = i(B - C), \quad c = D - A, \quad d = D + A \quad (۱.۴.۳)$$

این ضرایب همگی حقیقی‌اند؛ از این‌رو (۴.۳) معادلهٔ یک صفحه در فضاست.

آیا این صفحه کره را می‌برد؟ فاصله آن از مبدأ با

$$p = \frac{|d|}{\sqrt{(a^۲ + b^۲ + c^۲)}}$$

داده می‌شود. پس اگر

$$\left.\begin{cases} p^۲ < ۱ \\ p^۲ = ۱ \\ p^۲ > ۱ \end{cases}\right.$$ ، صفحهٔ (۴.۳) کره را در یک دایرهٔ حقیقی می‌برد / در یک نقطهٔ تنها بر کره مماس است / تماماً در خارج کره قرار دارد

پس پاسخ این پرسش به علامت $۱ - p^۲$ بستگی دارد که علامت

$$\begin{aligned} d^۲ - a^۲ - b^۲ - c^۲ &= (D + A)^۲ - (B + C)^۲ + (B - C)^۲ - (D - A)^۲ \\ &= ۴\Delta = ۴|\mathfrak{C}| \end{aligned}$$

نیز هست. این، نشان می‌دهد که هر دایرهٔ حقیقی ($\Delta < \circ$) با یک دایرهٔ حقیقی از کره متناظر است؛ هر نقطه‌دایره ($\Delta = \circ$) با یک نقطه‌دایره، یعنی، نقطه‌ای تنها بر این کره متناظر است؛ هر دایرهٔ انگاری ($\Delta > \circ$) با صفحه‌ای که کره را نمی‌برد ($p^۲ > ۱$) متناظر است. صفحه‌ای از این نوع، معرف یک دایرهٔ انگاری بر کره است.

عکس این مطلب بلافاصله روشن می‌شود. زیرا که اگر a، b، c و d داده شده باشند معادله‌های (۱.۴.۳) را می‌توان بر حسب A، B، C و D حل کرد

$$A = \frac{۱}{۲}(d - c), \quad B = \frac{۱}{۲}(a - ib), \quad C = \frac{۱}{۲}(a + ib), \quad D = \frac{۱}{۲}(d + c) \quad (۲.۴.۳)$$

تبصره. دوایر عظیمهٔ کره دایره‌هایی هستند که صفحه‌های آنها از مرکز کره، که مبدأ مختصات است، می‌گذرند. این صفحه‌ها با شرط $d = \text{۰}$ مشخص می‌شوند. بنابراین برای دایره‌های متناظر $\mathfrak{C}$ در صفحه باید بنویسیم

$$D + A = \text{۰} \qquad (\text{۳.۴.۳})$$

از هر نقطهٔ صفحه دایرهٔ یکتایی از این نوع می‌گذرد که بر یک منحنی مفروض در این نقطه مماس است.

برهان قضیهٔ ج. Ω، زاویهٔ بین دو منحنی در روی کره، متلاقی در نقطهٔ $\mathbf{P}$، به صورت زاویهٔ بین دو صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ مارّ بر $\mathbf{P}$ تعریف می‌شود که مماسهای بر آنها در نقطهٔ $\mathbf{P}$ بر مماسهای آن دو منحنی منطبق‌اند. فرض می‌کنیم $(j = \text{۱}, \text{۲})\, a_j\xi + b_j\eta + c_j\zeta = \text{۰}$ این دو صفحه باشند. در این صورت داریم

$$\cos\Omega = \frac{a_\text{۱}a_\text{۲} + b_\text{۱}b_\text{۲} + c_\text{۱}c_\text{۲}}{\sqrt{a_\text{۱}^\text{۲} + b_\text{۱}^\text{۲} + c_\text{۱}^\text{۲}}\sqrt{a_\text{۲}^\text{۲} + b_\text{۲}^\text{۲} + c_\text{۲}^\text{۲}}}$$

به موجب (۱.۴.۳) و (۱.۵.۱)

$$a_j^\text{۲} + b_j^\text{۲} + c_j^\text{۲} = -\text{۴}\Delta_j \quad , \quad a_\text{۱}a_\text{۲} + b_\text{۱}b_\text{۲} + c_\text{۱}c_\text{۲} = -\text{۴}\Delta_\text{۱۲}$$

پس با توجه به (۱.۶.۱): $\cos\Omega = \cos\omega$ که در آن ω زاویهٔ بین نگاره‌های گنجنگاشتی این دو دایرهٔ عظیمه در صفحه است. از این‌رو تصویر گنجنگاشتی حافظ زاویه است.

اگر از خارج کره به دایره‌های روی کره نگاه کنیم، به‌وضوح می‌بینیم که جهت دوران محفوظ می‌ماند. پس این تصویر یک نگاشت همدیس است.

تبصره. تصویر گنجنگاشتی دوایر متعامد در صفحهٔ z، دوایر متعامدی در روی کره به‌دست می‌دهد و به عکس. از این‌رو تعریف انعکاس را می‌توان به کره منتقل کرد. دو نقطهٔ $\mathbf{P}$، $\mathbf{P}^*$ در روی کره را نسبت به یک دایرهٔ Γ در روی کره، متعاکس (یا متقارن) خوانند، اگر دوایر مارّ بر $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$ در روی کره، بر Γ عمود باشند. در این صورت نگاره‌های گنجنگاشتی $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$ در صفحه، دو نقطهٔ z و z^* خواهند بود که نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}$، نگارهٔ Γ در صفحه، منعکس یکدیگرند. انعکاس نسبت به یک دایرهٔ عظیمه در روی کره بر قرینهٔ معمولی نسبت به صفحهٔ این دایره عظیمه منطبق است.

ج. تصویر گنجنگاشتی و ویژگی قطب و قطبی. فرض کنید $C = (\xi_\circ, \eta_\circ, \zeta_\circ)$ نقطهٔ دلخواهی در فضا باشد. صفحهٔ γ به معادلهٔ

$$\xi_\circ \xi + \eta_\circ \eta + \zeta_\circ \zeta = ۱ \qquad (۵.۳)$$

را صفحهٔ قطبی نقطهٔ C نسبت به کرهٔ (۱.۳) می‌نامند و C را قطب صفحهٔ γ خوانند (ر.ک. مثال ۶، بخش ۲). اگر C نقطه‌ای بر کره باشد، صفحهٔ قطبی آن بر صفحهٔ مماس بر کره در نقطهٔ C منطبق است.

در مورد قطب و قطبی احکام زیرین وجود دارند.

قانون عکس. (i) صفحهٔ قطبی یک نقطهٔ Q از صفحهٔ γ از نقطهٔ C، قطب γ، می‌گذرد.

(ii) قطب صفحهٔ مارّ بر نقطهٔ C در صفحهٔ قطبی C (صفحهٔ γ) قرار دارد.

(i) به‌ازای هر نقطهٔ $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ از γ، صفحهٔ قطبی برحسب مختصات جاری $\tilde{\xi}$، $\tilde{\eta}$ و $\tilde{\zeta}$ با رابطهٔ

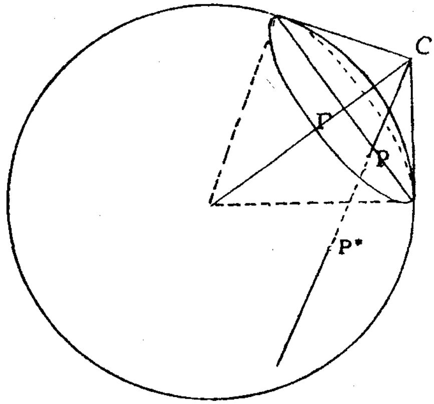
$$\xi\tilde{\xi} + \eta\tilde{\eta} + \zeta\tilde{\zeta} = ۱ \qquad (۱.۵.۳)$$

داده می‌شود. با توجه به (۵.۳) این معادله به‌ازای $\tilde{\xi} = \xi_\circ$، $\tilde{\eta} = \eta_\circ$ و $\tilde{\zeta} = \zeta_\circ$ برقرار است. پس C در صفحهٔ (۱.۵.۳) قرارداد.

(ii) اگر صفحهٔ $a\xi + b\eta + c\zeta = ۱$ از نقطهٔ C بگذرد، یعنی، $a\tilde{\xi}_\circ + b\tilde{\eta}_\circ + c\tilde{\zeta}_\circ = ۱$، آنگاه قطب آن، (a, b, c)، نقطه‌ای است در صفحهٔ (۵.۳).

اگر C خارج کره باشد. صفحهٔ قطبی‌اش کره را در یک دایرهٔ حقیقی Γ قطع می‌کند. به موجب (i) صفحهٔ مماس بر کره در یک نقطهٔ دلخواه Q از دایرهٔ Γ از نقطهٔ C می‌گذرد. بنابراین قطب C رأس مخروط محیطی به قاعدهٔ Γ است.

اگر C در داخل کره واقع باشد، هر صفحه که از C بگذرد کره را در یک دایرهٔ حقیقی قطع می‌کند که قطب این صفحه را به صورت رأس مخروط محیطی این دایره به‌دست می‌دهد. با توجه به (i) همهٔ این قطبها در صفحهٔ γ، صفحهٔ قطبی C، قرار دارند؛ برای تعیین γ سه تا از این قطبها کافی هستند. همچنین با توجه به (ii) می‌توان نقطهٔ C قطب یک صفحهٔ γ، را که کره را تلاقی نمی‌کند تعیین کرد.



شکل۷

اگر صفحهٔ γ از مبدأ بگذرد، یعنی،

$$a\xi + b\eta + c\zeta = \circ \tag{۲.۵.۳}$$

قطب آن نقطه‌ای در بینهایت خواهد بود (به معنی هندسهٔ آفین) که با امتداد قائم (a, b, c) تعیین می‌شود. صفحهٔ قطبی نقطهٔ $\mathbf{O}$، مرکز کره، صفحهٔ بینهایت فضای آفین است.

قضیهٔ د. فرض می‌کنیم Γ دایره‌ای بر کرهٔ (۱.۳)، γ صفحهٔ آن، و $\mathbf{P}$ نقطه‌ای بر این کره ناواقع بر Γ باشد. در این صورت $\mathbf{P}^*$، منعکس $\mathbf{P}$ نسبت به Γ، دومین نقطهٔ تقاطع خط راست مارّ بر $\mathbf{C}$ و $\mathbf{P}$ با این کره است. (ر.ک. شکل ۷).

برهان هندسی. از هر نقطه از دایرهٔ Γ دایرهٔ عظیمهٔ عمود بر Γ و مماس بر این دایرهٔ عظیمه را رسم می‌کنیم. همهٔ این مماسها از نقطهٔ $\mathbf{C}$، قطب صفحهٔ γ (صفحهٔ دایره Γ)، می‌گذرند. همچنین دوایر $\tilde{\Gamma}$ عمود بر Γ گذرنده از نقطهٔ $\mathbf{P}$ و در نتیجه از نقطهٔ $\mathbf{P}^*$ را رسم می‌کنیم. مماسهای آنها در نقاط Γ بر مماسهای دایره‌های عظیمهٔ متناظرشان منطبق‌اند. به‌ویژه صفحهٔ $\tilde{\gamma}$ی دایرهٔ $\tilde{\Gamma}$ شامل این مماس و بنابراین شامل $\mathbf{C}$ است. این صفحه شامل $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$ هم خواهد بود. از این دو فصل مشترک صفحات $\tilde{\gamma}$ خط راستی است شامل $\mathbf{C}$، $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$.

تبصره. این ساختمان هندسیِ نقطهٔ $\mathbf{P}^*$ به‌ازای نقطهٔ داده شدهٔ $\mathbf{P}$ هنگامی هم که دایرهٔ مبنا انگاری باشد معتبر است. در این صورت صفحهٔ (حقیقی) γی آن هیچ نقطهٔ مشترکی با کره ندارد از این‌رو قطب $\mathbf{C}$ درون کره واقع است. برهان تحلیلی آن در مثال ۴ آورده خواهد شد.

قضیهٔ ه. دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ بر دایرهٔ $\mathfrak{C}_2$ عمود است اگر و فقط اگر نقطهٔ $\mathbf{C}_1$ قطب صفحهٔ γ_1 (صفحهٔ دایرهٔ کروی Γ_1)، در صفحهٔ γ_2 (صفحهٔ دایرهٔ کروی Γ_2) واقع باشد.

برهان. (i) اگر $\mathfrak{C}_1 \perp \mathfrak{C}_2$، آنگاه $\Gamma_1 \perp \Gamma_2$. $\mathbf{C}_1$، قطب γ_1، به صورت رأس مخروط محیطی Γ_1 به‌دست می‌آید. دو تا از مولدهای این سطح مخروطی بر Γ_2 مماس‌اند و بنابراین در صفحهٔ γ_2 قرار دارند، لذا $\mathbf{C}_1$ در γ_2 (صفحهٔ Γ_2) قرار دارد.

(ii) اگر $\mathbf{C}_1$ قطب γ_1، داخل صفحهٔ γ_2 (صفحهٔ Γ_2) باشد، مخروط محیطی به رأس $\mathbf{C}_1$، صفحه γ_2 را در دو خط مماس بر Γ_2، یعنی، در دو نقطه‌ای که به‌وسیلهٔ Γ_1 دیده می‌شود، قطع می‌کند. فرض می‌کنیم $\mathbf{P}$ نقطهٔ دلخواهی از Γ_2 باشد. در این صورت خط $\mathbf{C}_1\mathbf{P}$ برای بار دوم کره را در $\mathbf{P}^*$ قطع می‌کند و چون باز این نقطه، نقطه‌ای از Γ_2 است با توجه به قضیهٔ د، منعکس نقطهٔ $\mathbf{P}$ نسبت به Γ_1 است. از اینجا نتیجه می‌شود که Γ_1 و Γ_2 باید متعامد باشند (ر.ک. مثال ۱، بخش ۲).

مثالها

۱. فرض می‌کنیم z_1 نگارهٔ گنجنگاشتی نقطهٔ $\mathbf{P}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ از کرهٔ (۱.۳) باشد. نقطهٔ متقاطر $\mathbf{P}_1$ را بر کره با $\mathbf{P}_2$ نشان می‌دهیم و نگارهٔ گنجنگاشتی آن را در صفحه با z_2. نشان دهید که z_1 و z_2 نسبت به دایرهٔ واحد انگاری $(\circ, i)$ متعاکس‌اند. با توجه به وضع نقاط $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ بر کره، z_1 و z_2 را دو نقطهٔ متقاطر می‌نامیم.

۲. نگارهٔ گنجنگاشتی دایره‌های حاصل از تقاطع کره با خانوادهٔ صفحات موازی، مثلاً، خانوادهٔ صفحات عمود بر خط $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ (ر.ک. مثال ۱) را در صفحهٔ z پیدا کنید. نشان دهید که این دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هذلولی به «مراکز» (نقطه‌دایره‌های) z_1 و z_2 تشکیل می‌دهند (ر.ک. مثال ۴، بخش ۲).

۳. بر کرهٔ (۱.۳) پیدا کنید نگارهٔ گنجنگاشتی

(الف) نقاط $\bar{z}$، $-z$، $1/\bar{z}$، $-1/\bar{z}$ را، اگر $\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta)$ نگارهٔ z باشد؛

(ب) محور حقیقی را؛

(ج) یک دسته خط راست موازی را؛

(د) پاره‌خط z_1z_2 را؛ بویژه حالت $z_1 = 1$ و $z_2 = i$ را انتخاب کنید.

(ه) مثلث z_1, z_2, z_3 را.

۴. برهان تحلیلی قضیهٔ د. فرض می‌کنیم (۴.۳) معادلهٔ γ، صفحهٔ دایرهٔ Γ، باشد. نقطهٔ $\mathbf{C}$، قطب

γ، نسبت به کرهٔ (۱.۳) مختصاتی به صورت زیر دارد

$$-\frac{a}{d}, \qquad -\frac{b}{d}, \qquad -\frac{c}{d}$$

و اگر $\mathbf{P} = (\xi, \eta, \zeta)$، آنگاه خطی که از $\mathbf{C}$ و $\mathbf{P}$ می‌گذرد با معادلهٔ $\mathbf{Q} = (۱ - \lambda)\mathbf{P} + \lambda\mathbf{C}$ مشخص می‌شود. اگر $\xi_۱$ و $\eta_۱$ و $\zeta_۱$ مختصات نقطهٔ $\mathbf{Q}$ باشند و اگر این نقطه، نقطه‌ای بر کره (غیر از $\mathbf{P}$) باشد، آنگاه

$$\lambda = ۲d\frac{a\xi + b\eta + c\zeta + d}{a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + ۲d(a\xi + b\eta + c\zeta)}$$

اکنون فرض می‌کنیم $z = (\xi + i\eta)/(۱ + \zeta)$ تصویر گنجنگاشتی $\mathbf{P}$ بر صفحهٔ z باشد. گذشته از آن، اگر $\mathfrak{C}$ نگارهٔ Γ باشد آنگاه بنابر (۱.۴.۳)

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(D + A)\mathfrak{C}(z, \bar{z})}{(D + A)\mathfrak{C}(z, \bar{z}) - \Delta(۱ + z\bar{z})} \\ ۱ - \lambda = \dfrac{-\Delta(۱ + z\bar{z})}{(D + A)\mathfrak{C}(z, \bar{z}) - \Delta(۱ + z\bar{z})} \end{cases} \tag{۶.۳}$$

تصویر گنجنگاشتی $\mathbf{Q}$ چنین می‌شود

$$z_۱ = \frac{\xi_۱ + i\eta_۱}{۱ + \zeta_۱} = \frac{(۱ - \lambda)(\xi + i\eta) - (\lambda/d)(a + ib)}{۱ + (۱ - \lambda)\zeta - (\lambda/d)c}$$

که با توجه به (۱.۴.۳) و (۲.۴.۳)، چنین خواهد شد

$$z_۱ = \frac{۲(۱ - \lambda)z - ۲\lambda C(۱ + z\bar{z})/(D + A)}{[۱ - \lambda(D - A)/(D + A)](۱ + z\bar{z}) + (۱ - \lambda)(۱ - z\bar{z})}$$

که با رعایت مقادیر داده شده در (۶.۳) نتیجه می‌شود که

$$z_۱ = -\frac{\Delta z + C\mathfrak{C}(z, \bar{z})}{-\Delta + A\mathfrak{C}(z, \bar{z})} = -\frac{C\bar{z} + D}{A\bar{z} + B} = z^*$$

که در واقع به موجب (۱.۲.۲) منعکس z نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}$ است. پس $\mathbf{P}^*$ منعکس $\mathbf{P}$ نسبت به دایرهٔ Γ است.

۵. در چارچوب تمرین ۴ نشان دهید که خط واصل بین قطب $\mathbf{C}$ و مرکز تصویر (قطب جنوب) $\mathbf{S}$ بر کره، از مرکز دایرهٔ $\mathfrak{C}$ در صفحهٔ z می‌گذرد. این قضیه همان قضیهٔ شال است. (راهنمایی: خط $(۱ - \lambda)\mathbf{S} + \lambda\mathbf{C}$ را در نظر بگیرید].

۶. خطهای قطبی. اگر نقطهٔ $\mathbf{C} = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ بر یک خط دلخواه l حرکت کند، آنگاه γ، صفحهٔ قطبی $\mathbf{C}$ نسبت به کره (۱.۳)، حول یک خط l^* دوران خواهد کرد. این خط را خط قطبی l نسبت به کرهٔ (۱.۳) گویند. طبق قانون دوگانی دیده می‌شود که l هم خط قطبی l^* است. دو خط l و l^* بر هم عمودند.

برهان. (i) فرض می‌کنیم $\mathbf{P}_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ و $\mathbf{P}_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$، دو نقطهٔ متمایز بر خط l باشند. اگر به‌جای ξ_0، مقدار $(1-\lambda)\xi_1 + \lambda\xi_2$ و غیره را قرار دهیم، صفحهٔ قطبی یک نقطهٔ غیرمشخص $\mathbf{C}$ واقع بر l از معادلهٔ (۵.۳) به‌دست می‌آید. از این‌رو همهٔ این صفحات قطبی شامل فصل مشترک دو صفحهٔ $\xi_1\xi + \cdots = 1$ و $\xi_2\xi + \cdots = 1$ هستند که همان خط l^* است.

(ii) اگر l کره را در دو نقطهٔ $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ قطع کند، فصل مشترک صفحات مماس بر کره در این دو نقطه خط l^* است که آشکارا بر خط l عمود و با آن متنافر است. اگر l کره را قطع نکند، دو صفحه وجود دارند که بر l می‌گذرند و در دو نقطهٔ $\mathbf{P}_1^*$ و $\mathbf{P}_2^*$ بر کره مماس‌اند و l^* خط $\mathbf{P}_1^*\mathbf{P}_2^*$ است. بالاخره فرض می‌کنیم l در $\mathbf{P}_1$ بر کره مماس باشد به‌جای $\mathbf{P}_2$ نقطهٔ بینهایت l را قرار می‌دهیم. صفحهٔ قطبی آن از $\mathbf{O}$، مرکز کره، می‌گذرد و بر l عمود است. صفحهٔ قطبی $\mathbf{P}_1$ صفحهٔ مماس در نقطهٔ $\mathbf{P}_1$ بر کره است و l^* فصل مشترک این دو صفحه است. بنابراین l^* از نقطهٔ $\mathbf{P}_1$ می‌گذرد و بر l عمود است.

۷. ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}_\infty$ را بنویسید که معرف نقطه‌دایره در نقطهٔ بینهایتِ (∞) صفحهٔ کامل‌شدهٔ z باشد.

۴. دسته و کلاف دایره

الف. دسته دایره. هنگام بحث از روابط موجود بین دو دایره در صفحه و بعداً در تعریف انعکاس، اهمیت دسته دایره معلوم شد. تصویر گنجنگاشتی امکان مطالعهٔ دسته دایره بر کره را به ما داد. بدین‌ترتیب تعبیر نتایج به‌دست‌آمده در هندسهٔ مسطحه تقریباً آشکار است. فرض می‌کنیم

$$\gamma = (a, b, c, d)$$

معرف صفحه‌ای باشد که به موجب (۱.۴.۳) و (۲.۴.۳) به دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ مربوط است.

بدین‌ترتیب یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین تمام دوایر $\mathfrak{C}$ (از جمله خطهای راست، دوایر انگاری و

نقطه‌دایره‌ها) در صفحهٔ کامل‌شده و صفحه‌های γی فضای آفین[1] (از جمله صفحهٔ $(۱, ۰, ۰, ۰)$ واقع در بینهایت، متناظر با دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ یعنی، دایرهٔ واحد انگاری) وجود دارد.

حال فرض می‌کنیم $(j = ۱, ۲)\gamma_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$ دو صفحهٔ متمایز و $\mathfrak{C}_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$ دایره‌های مربوط به آنها باشند. فصل مشترک دو صفحهٔ $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ را با

$$l = \langle \gamma_۱, \gamma_۲ \rangle$$

نمایش می‌دهیم. همهٔ صفحات مارّ بر l تشکیل یک دسته صفحه به صورت

$$\gamma = \lambda_۱\gamma_۱ + \lambda_۲\gamma_۲ = (\lambda_۱ a_۱ + \lambda_۲ a_۲, \cdots, \lambda_۱ d_۱ + \lambda_۲ d_۲)$$

می‌دهند. خط l را محور دستهٔ (γ) می‌گویند. از تقاطع این صفحه‌ها با کره یک دسته دایره بر کره به‌دست می‌آید که با دستهٔ $(\mathfrak{C})$، مرکب از دایره‌های $\mathfrak{C} = \lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲$ در صفحهٔ کامل‌شده، متناظر است.

سه حالت مختلف را باید از هم تمیز دهیم:

(i) فرض می‌کنیم محور l کره را در دو نقطهٔ متمایز $\mathbf{P}_۱$ و $\mathbf{P}_۲$ قطع کند. در این صورت دستهٔ $(\mathfrak{C})$ بیضوی، و متشکل از همهٔ دوایری است که از $z_۱$ و $z_۲$، نگاره‌های گنجنگاشتی $\mathbf{P}_۱$ و $\mathbf{P}_۲$، می‌گذرند. اگر $\mathbf{P}_۱ = \mathbf{S}$، آنگاه دستهٔ $(\mathfrak{C})$ فقط متشکل از خطهای راست، یعنی همهٔ خطهایی است که از $z_۰$، نقطهٔ تلاقی محور l با صفحهٔ z، می‌گذرند.

(ii) اگر l در نقطهٔ $\mathbf{P}_۱$ بر کره مماس باشد دستهٔ $(\mathfrak{C})$ سهموی خواهد بود. دسته‌های $(\mathfrak{C})$ در روی کره بر یکدیگر و بر خط l مماس‌اند. در حالت کلی بین دایره‌های دستهٔ $(\mathfrak{C})$ یک خط راست وجود دارد که متناظر با صفحه‌ای است که از نقطهٔ $\mathbf{S}$ می‌گذرد. این خط با دو نقطهٔ $z_۰$ و $z_۱$ (نگاره‌های گنجنگاشتی $\mathbf{P}_۱$) مشخص می‌شود. اگر $\mathbf{P}_۱ = \mathbf{S}$، آنگاه همهٔ دایره‌های $\mathfrak{C}$ی این دسته، خطهای متوازی‌اند.

(iii) اگر l کره را قطع نکند، دستهٔ $(\mathfrak{C})$ هذلولوی است. به آن دو صفحه از دستهٔ (γ) که بر کره مماس‌اند، دو نقطه‌دایره از دستهٔ $(\mathfrak{C})$ مربوط است. ولی می‌توان $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ را انتخاب کرد،

---

۱. مختصات صفحه‌ای a، b، c و d و همچنین مختصات دایره‌ای A، B، C و D مختصاتی همگن‌اند؛ و بنابراین هر چهار مختص نمی‌توانند همزمان صفر باشند؛ و مختصات یک صفحه یا یک دایره (رک. به بخش ۱، الف) فقط تا حد یک تناسب تعریف می‌شود. پس می‌توان یکی از مختصات ناصفر را برابر ۱ اختیار کرد.

دستهٔ $(\mathfrak{C})$ همواره شامل دوایر حقیقی خواهد بود (ر.ک. تمرین ۷، بخش ۱). صفحهٔ مارّ بر $\mathbf{S}$ تنها خط راست این دسته را در صفحهٔ z تولید می‌کند، مگر اینکه این صفحه در نقطهٔ $\mathbf{S}$ بر کره مماس باشد. در این حالت اگر صفحهٔ دیگری در نقطهٔ $\mathbf{Q}$ بر کره مماس باشد، آنگاه $(\mathfrak{C})$ متشکل از کلیهٔ دوایر متحدالمرکز به مرکز z_2، نگارهٔ گنجنگاشتی $\mathbf{Q}$، خواهد بود (این مطلب از تمرین ۴، بخش ۲، و نیز از قضیهٔ الف در زیر نتیجه می‌شود).

قضیهٔ الف. به‌ازای هر دستهٔ هذلولویِ (سهموی، بیضویِ) $(\mathfrak{C})$ یک دستهٔ بیضویِ (سهموی، هذلولوی) یکتای $(\tilde{\mathfrak{C}})$ وجود دارد به‌طوری‌که هر دایرهٔ $(\tilde{\mathfrak{C}})$ بر هر دایرهٔ $(\mathfrak{C})$ عمود است.

برهان. فرض می‌کنیم $(\mathfrak{C})$ هذلولوی باشد، بنابراین تمامی محورش در خارج کره قرار دارد. فرض می‌کنیم γ_1 و γ_2 دوصفحه‌ای باشند که بر l می‌گذرند و در دو نقطهٔ $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ بر کره مماس‌اند. خط $\tilde{l}$ که از نقاط $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ می‌گذرد قطبی $\tilde{l}$ است (ر.ک. تمرین ۶، بخش ۳). دسته صفحهٔ $\tilde{\gamma}$ به محور $\tilde{l}$، یک دستهٔ بیضویِ $(\tilde{\mathfrak{C}})$ در صفحهٔ z پدید می‌آورد. هر صفحهٔ $\tilde{\gamma}$ قطبی بر خط l دارد، قطب هر صفحهٔ γ درون هر $\tilde{\gamma}$ است و بنابراین بر خط $\tilde{l}$ واقع است. پس، بنابر قضیهٔ هـ ، بخش ۳، دوایر $\mathfrak{C}$ و $\tilde{\mathfrak{C}}$ متعامدند. اگر با یک دستهٔ سهموی یا بیضوی $(\mathfrak{C})$ شروع کنیم همین استدلال عیناً به‌کار برده می‌شود.

• فرع. دو نقطه‌ای که همهٔ دوایر یک دستهٔ بیضوی بر آنها می‌گذرند، نقطه‌دایره‌های دستهٔ هذلولوی متعامد مربوطه‌اند.

ترکیب دو دسته دایرهٔ متعامد در سراسر مبحث کنونی از اهمیت اساسی برخوردار است. (ر.ک. بخش ۸، ج).

ب. کلاف دایره. همهٔ صفحاتی که از یک نقطهٔ $\mathbf{P}$ در فضا می‌گذرند، یک کلاف صفحه تشکیل می‌دهند. اگر γ_1، γ_2 و γ_3 سه صفحهٔ متفاوت از کلافی به مرکز $\mathbf{P}$ ناواقع در یک دسته باشند، آنگاه

$$\gamma = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 \qquad (\lambda_j \text{ها حقیقی‌اند و همه صفر نیستند})$$

معرف صفحهٔ کلی کلاف است. این کلاف شامل هر دسته‌ای است که از دو تا از صفحاتش تولید می‌شود. اگر $\mathbf{P}$ یک نقطهٔ بینهایت فضا باشد، کلاف متشکل از همهٔ دسته‌هایی است که محورهای آنها، l، از $\mathbf{P}$ می‌گذرند، یعنی دسته صفحاتی که با امتداد معینی از فضا موازی‌اند.

کلاف صفحه، بر اثر تقاطع، یک کلاف دایره را بر روی کره معین می‌کند که با تصویر گنجنگاشتی

به یک کلاف دایره در صفحهٔ z تبدیل می‌شود

$$\mathfrak{C} = \lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲ + \lambda_۳\mathfrak{C}_۳$$

قضیهٔ ب. به‌ازای هر کلاف دایرهٔ $\mathfrak{C}$ دایره‌ای مانند $\mathfrak{P}$ وجود دارد چنان‌که هر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ بر $\mathfrak{P}$ عمود است.

برهان. صفحهٔ قطبی $\mathbf{P}$، مرکز کلاف صفحات γ، را با π نمایش می‌دهیم. پس صفحهٔ π شامل قطبهای همهٔ این صفحات γ نسبت به کره است. بنابراین دوایر Π و Γ که فصل مشترک این صفحات با کره‌اند. متعامدند (قضیهٔ هـ ، بخش ۳) و دوایر متناظر $\mathfrak{P}$ و $\mathfrak{C}$ در صفحهٔ z نیز چنین‌اند.

ماهیت هندسی یک کلاف به وضعیت مرکز آن $\mathbf{P}$ نسبت به کره بستگی دارد. از این‌رو همانند حالت دسته دایره سه حالت ذیل رخ خواهد داد:

(i) کلاف بیضوی. نقطهٔ $\mathbf{P}$ درون کره قرار دارد؛ پس همهٔ دوایر کلاف حقیقی‌اند (ر.ک. به مثال ۱۱، بخش ۱). و همهٔ دسته‌هایش بیضوی هستند. چون صفحهٔ قطبی $\mathbf{P}$ تماماً خارج کره است، دایرهٔ $\mathfrak{P}$ی قضیهٔ ب انگاری است. اگر $\mathbf{P}$ بر مرکز کره منطبق باشد، کلاف دایرهٔ Γ روی کره بر دستگاه همهٔ دوایر عظیمه منطبق است. کلاف متناظر آن در صفحهٔ z با معادله (۳.۴.۳) تعیین می‌شود.

(ii) کلاف سهموی. نقطهٔ $\mathbf{P}$ بر کره واقع است و همهٔ دوایر کلاف حقیقی‌اند؛ این دوایر، دوایری هستند که از نقطهٔ $\mathbf{P}$ می‌گذرند. l، محورهای دسته که در کلاف قرار دارند، یا بر کره مماس‌اند و یا آن را در $\mathbf{P}$ قطع می‌کنند؛ از این‌رو دسته‌های دوایر متناظر یا سهموی هستند، یا بیضوی. اگر $\mathbf{P} = \mathbf{S}$، کلاف به صورت دستگاه خطوط راست واقع در صفحهٔ z در می‌آید. در این صورت دایرهٔ $\mathfrak{P}$ی قضیهٔ ب به نقطه‌دایره در بینهایت بدل خواهد شد.

(iii) کلاف هذلولوی. نقطهٔ $\mathbf{P}$ خارج کره واقع است. کلاف، شامل دوایر حقیقی و انگاری و بینهایت نقطه‌دایره است. این نقطه‌دایره‌ها متناظر با صفحات γای هستند که بر کره مماس‌اند. بنابراین بر دایرهٔ $\mathfrak{P}$، که روشن است دایره‌ای حقیقی است، قرار دارند. کلاف هذلولوی شامل دسته‌های بیضوی، سهموی و هذلولوی است. اگر $\mathbf{P}$ به نقطهٔ بینهایت محور ζ برده شود، کلاف شامل همهٔ دوایری می‌شود که بر دایرهٔ استوا، یعنی، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ در صفحهٔ z عمودند.

برای هر یک از این سه نوع کلاف نمونه‌ای آورده‌ایم. بعداً خواهیم دید (فصل ۳، بخش ۱۲، ج)

که پاره‌ای از ویژگیهای واضح این نمونه‌ها در واقع مشخصهٔ همهٔ کلافهای نوع خودشان هستند. بدین‌منظور لازم است از ردهٔ کلیتری از تبدیلهای صفحهٔ z بر خودش استفاده کنیم که، نظیر حالت انعکاس، دایره‌ها را به دایره بدل می‌کنند.

مثالها

۱. نشان دهید که هر دسته یا کلاف بیضوی (سهموی، هذلولوی) بر اثر انعکاس به دسته یا کلاف بیضوی (سهموی، هذلولوی) تبدیل می‌شود.

۲. نشان دهید که دوایر حقیقی داده شده در صفحهٔ z بر اثر یک انعکاس مناسب، به یک جفت خط راست یا یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز، تبدیل می‌شوند.

از این‌رو به کمک یک انعکاس مناسب می‌توان دسته دایره‌ای را به یکی از سه «صورت نرمال» زیر تبدیل نمود:

(i) بیضوی: دستهٔ تمام خطهای راست مارّ بر یک نقطهٔ z_0.

(ii) سهموی: دسته‌ای از خطهای راست موازی.

(iii) هذلولوی: دستهٔ همهٔ دوایر هم‌مرکز، به مرکز یک نقطهٔ z_0.

نقطهٔ z_0 در حالت (i) و (iii) و امتداد خطهای موازی در حالت (ii) از چه راهی به دستهٔ داده‌شده‌ای محدود می‌شوند؟

۳. همهٔ دوایر $\mathfrak{C}$، عمود بر دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$، یک دسته دایره تشکیل می‌دهند. رده‌بندی دسته‌ها را بر اساس این تعریف انجام دهید.

۴. یک دستگاه دایره کلاف است، اگر نقطه‌ای مانند γ_0 وجود داشته باشد که قوتش نسبت به همهٔ این دوایر یکی باشد. (ر.ک. مثال ۷، بخش ۲). طبقه‌بندی این کلافها را بر اساس این تعریف انجام دهید.

۵. هر کلاف دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را می‌توان با یک معادلهٔ خطی بر حسب عناصر A، B، C و D از ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ با ضرایب حقیقی (مثلاً (۳.۴.۳)) مشخص نمود. از این بیان نتیجه می‌شود که دستگاه همهٔ دایره‌های حقیقی که یک شعاع داشته باشند، یک کلاف نیست.

۶. به‌ازای هر دسته یا کلاف دایره، می‌توان یک دایرهٔ (خط) حقیقی $\mathfrak{C}_0$ یافت که آن دسته یا کلاف بر اثر انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_0$ به خودش تبدیل شود.

۷. به‌ازای هر کلاف دایرهٔ $\mathfrak{C}$ یک دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_1$ می‌توان یافت که انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_1$، کلاف را به یکی از سه «صورت نرمال» زیر درآورد:

(i) بیضوی: (۳.۴.۳) $A + D = \circ$.

(ii) سهموی: همهٔ خطهای راست: $A = \circ$.

(iii) هذلولوی: همهٔ دوایر عمود بر دایرهٔ واحد: $A - D = \circ$.

۸. به‌ازای دو دایرهٔ مفروض $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ از دسته دایرهٔ بیضویِ مارّ بر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، از راه ترسیم با خط‌کش و پرگار، دایره‌های $\mathfrak{C}$ و $\tilde{\mathfrak{C}}$ از این دسته را پیدا کنید که زاویه‌های بین $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ را نصف کنند.

از راه جبری: فرض می‌کنیم $\mathfrak{C} = \lambda_۱\mathfrak{C}_۱ + \lambda_۲\mathfrak{C}_۲$، فرض می‌کنیم $\omega_j (j = ۱, ۲)$ زاویهٔ بین $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_j$ باشد. با استفاده از نمادهای بخش ۱ و قراردادن

$$\Delta_{\circ j} = A_j(\lambda_۱ D_۱ + \lambda_۲ D_۲) + D_j(\lambda_۱ A_۱ + \lambda_۲ A_۲) - B_j(\lambda_۱ C_۱ + \lambda_۲ C_۲) \\ - C_j(\lambda_۱ B_۱ + \lambda_۲ B_۲)$$

می‌توان شرط $\cos\omega_۱ = \cos\omega_۲$ را به صورت

$$\frac{\Delta_{\circ ۱}}{\sqrt{-\Delta_۱}} = \pm\frac{\Delta_{\circ ۲}}{\sqrt{-\Delta_۲}}$$

نوشت، از آنجا

$$\lambda = \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \pm\frac{\sqrt{-\Delta_۱}}{\sqrt{-\Delta_۲}}$$

به‌وسیلهٔ مثال ۱۲ بخش ۱، می‌توان دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_۱ + \lambda\mathfrak{C}_۲$ را که زاویه‌های بین $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ را نصف می‌کنند، از هم تمیز داد. از (۲.۷.۲) (مثال ۱۰، بخش ۲) معلوم می‌شود که $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ نسبت به هر یک از دو دایرهٔ $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_۱ + \lambda\mathfrak{C}_۲$ قرینهٔ یکدیگرند.

۵. نسبت ناهمساز

الف. نسبت ساده. برای اجتناب از ورود استثناها در قضایای هندسی، مناسب بود که نماد ∞ را به صورت نقطه‌ای اضافی در صفحهٔ z اختیار کنیم. به کمک تصویر گنجنگاشتی بر روی کره، ∞ مثل هر نقطهٔ «معین» z نگاره‌ای روی کره داشت؛ به‌همین سبب مدلل شده بود که ∞ نباید اصولاً به عنوان نقطه‌ای متمایز از سایر نقاط صفحهٔ کامل‌شده تلقی گردد. البته معنی این گفته این نیست که ∞ باید عنصر جدیدی در هیأت اعداد مختلط گرفته شود. ولی می‌توان قوانین جبری را طوری بسط داد که نماد ∞ هم در اعمال معینی وارد شود و هیچ‌گونه تعارضی در جبر معمولی ایجاد نکند.

فرض می‌کنیم c عددی مختلط یا ∞ باشد؛ در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{c}{\infty} = 0, & c \pm \infty = \infty \qquad : c \neq \infty \text{ به‌ازای} \\ \frac{c}{0} = \infty, & c \cdot \infty = \infty \qquad : c \neq 0 \text{ به‌ازای} \end{cases} \tag{1.5}$$

عبارتهای $\infty \pm \infty$، ∞/∞، $0 \cdot \infty$ و $0/0$ تعریف نشده‌اند.

می‌توانیم نماد ∞ را حد دنباله‌ای از اعداد مختلط c_1، c_2، ... که هیچ نقطهٔ تجمع معینی ندارد تعریف کنیم، (که حالتی است که فقط و فقط وقتی قدرمطلق $|c_n|$ به بینهایت میل می‌کند که $n \to \infty$، لذا هر دایرهٔ به مرکز 0 فقط شامل تعداد محدودی از c_nهاست). اگر یک‌چنین دنباله‌ای را همگرا بگیریم، می‌توانیم قوانین معمولی جبرِ حدودِ دنباله‌های همگرا (مثلاً $\lim c_n + \lim c'_n = \lim(c_n + c'_n)$ و ...) را در مورد آن به‌کار بریم. بدین‌طریق می‌توانیم قواعد (۱.۵) را به آسانی ثابت کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم z_1، z_2، z_3 سه عددمختلط باشند که هر سه با هم برابر نیستند. در این صورت نسبت سادهٔ z_1 ؛ z_2، z_3 با

$$(z_1; z_2, z_3) = \begin{cases} \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} & z_1 \neq z_3 \text{ اگر} \\ \infty & z_1 = z_3 \text{ اگر} \end{cases} \tag{2.5}$$

تعریف می‌شود. این تعریف را با تعاریف

$$(\infty; z_2, z_3) = 1, \qquad (z_1; \infty, z_3) = \infty, \qquad (z_1; z_2, \infty) = 0 \tag{1.2.5}$$

و

$$(\infty; \infty, z_3) = 0, \qquad (\infty; z_2, \infty) = \infty, \qquad (z_1; \infty, \infty) = 1 \tag{2.2.5}$$

تکمیل می‌کنیم. پس اگر z_1؛ z_2، z_3 یک سه نقطه‌ای دلخواه از صفحهٔ مختلط کامل‌شده باشند که هر سه یکی نیستند، نسبتهای زیر برقرارند

$$\begin{cases} (z_1; z_2, z_3) = r, & (z_2; z_3, z_1) = \dfrac{r-1}{r}, & (z_3; z_1, z_2) = \dfrac{1}{1-r} \\ (z_1; z_3, z_2) = \dfrac{1}{r}, & (z_2; z_1, z_3) = \dfrac{r}{r-1}, & (z_3; z_2, z_1) = 1 - r \end{cases} \tag{3.5}$$

باید یادآوری کنیم که تعاریف (۱.۲.۵) و (۲.۲.۵) آگاهانه اختیار شده‌اند تا قواعد جایگشت (۳.۵)، حتی اگر یکی یا دو تا از zها ∞ شوند، نیز معتبر باقی بمانند. چون به موجب (۱.۲.۵)

$$\lim_{z\to\infty}(\infty; z, z_۳) = ۱ \neq (\infty; \infty, z_۳)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $(\infty; z, z_۳)$ در $z = \infty$ ناپیوسته است. در نتیجه امکان ندارد که قواعد جایگشت (۳.۵) دست‌نخورده بمانند و درعین‌حال نسبت ساده در بینهایت پیوسته باشد. به‌جای مقادیر اختیارشده در (۲.۲.۵) می‌توان مقادیر دیگری را نیز انتخاب نمود.

ب. نسبت مضاعف یا نسبت ناهمساز. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ چهار نقطه از صفحه‌ای کامل‌شده چنان باشند که هیچ سه‌تایی از آنها با هم برابر نباشند. در این صورت چهار نسبت سادهٔ

$$(z_۱; z_۳, z_۴), \qquad (z_۲; z_۳, z_۴), \qquad (z_۳; z_۱, z_۲), \qquad (z_۴; z_۱, z_۲)$$

وجود دارند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که هیچ‌یک از دو نسبت اول و هیچ‌یک از دو نسبت آخر همزمان صفر یا ∞ نباشد. نسبت ناهمساز (یا نسبت مضاعف یا نسبت ناهمساز) دو جفت نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$؛ $z_۳$، $z_۴$ را با

$$(z_۱, z_۲; z_۳, z_۴) = \frac{(z_۱; z_۳, z_۴)}{(z_۲; z_۳, z_۴)} = \frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۴} \div \frac{z_۲ - z_۳}{z_۲ - z_۴} \qquad (۴.۵)$$

تعریف می‌کنیم.

گروه چهار عنصری حاصل از چهار جایگشت مربوط به چهار نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ مقدار این نسبت ناهمساز را عوض نمی‌کند.

$$(z_۱, z_۲; z_۳, z_۴) = (z_۲, z_۱; z_۴, z_۳) = (z_۳, z_۴; z_۱, z_۲) = (z_۴, z_۳; z_۲, z_۱) = \lambda \quad (۱.۴.۵)$$

از این‌رو اگر از چهار نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ جایگشتهای دیگری بسازیم، حداکثر شش مقدار برای این نسبت ناهمساز به‌دست می‌آید. مانند حالت نسبت سادهٔ (۳.۵) پنج مقدار دیگر عبارت‌اند از

$$(z_۲, z_۳; z_۱, z_۴) = \frac{\lambda - ۱}{\lambda}, \qquad (z_۳, z_۱; z_۲, z_۴) = \frac{۱}{۱-\lambda}, \qquad (z_۲, z_۱; z_۳, z_۴) = \frac{۱}{\lambda},$$
$$(z_۳, z_۲; z_۱, z_۴) = \frac{\lambda}{\lambda - ۱}, \qquad (z_۱, z_۳; z_۲, z_۴) = ۱ - \lambda \qquad (۲.۴.۵)$$

این رابطه‌ها مستقیماً از (۳.۵) به‌دست خواهند آمد.

ابتدا نشان داده خواهد شد که محدودیتهایی نظیر صفر یا بینهایت‌نبودن نسبتها را که در تعریف (۴.۵) آوردیم می‌توان حذف نمود. زیرا فرض کنیم

$$(z_1; z_3, z_4) = (z_2; z_3, z_4) = \infty$$

چون هیچ سه نقطه‌ای در این چهارتاییها نمی‌توانند با هم برابر باشند تساوی فوق نمی‌تواند به دلیل $z_4 = z_1$ و $z_4 = z_2$ حاصل شود؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $z_3 = \infty$، و اگر z_1، z_2 و z_4 معین باشند، آنگاه به موجب (۱.۲.۵) داریم

$$(z_1, z_2; \infty, z_4) = (\infty, z_4; z_1, z_2) = \frac{(\infty; z_1, z_2)}{(z_4; z_1, z_2)} = (z_4; z_2, z_1) \quad (۳.۴.۵)$$

اگر z_1 یا z_2 بینهایت باشد، مقدار فرمول (۳.۴.۵) به‌ترتیب برابر ۰ یا بینهایت می‌شود. این مقادیر وقتی $z \to \infty$، حدود $(z, z_2; \infty, z_4)$ و $(z_1, z; \infty, z_4)$ نیز هستند.

همچنین اگر $(z_1; z_3, z_4) = (z_2; z_3, z_4) = 0$، نتیجه می‌شود که $z_4 = \infty$، و بنابراین

$$(z_1, z_2; z_3, \infty) = \frac{(z_3; z_1, z_2)}{(\infty; z_1, z_2)} = (z_3; z_1, z_2) \qquad (۴.۴.۵)$$

این فرمول نیز معتبر است اگر $z_1 = \infty$ یا $z_2 = \infty$، که به ترتیب مقادیر ∞ یا ۰ را برای نسبت ناهمساز به‌دست می‌دهد. به‌علاوه $(z_1, z_2; z_3, \infty)$ و $(z_1, z; z_3, \infty)$ به‌ازای $z = \infty$ در z پیوسته‌اند.

بدین‌ترتیب نسبت ناهمساز به‌ازای هر مجموعهٔ چهار نقطه‌ای از صفحهٔ کامل‌شده تعریف می‌شود به شرط آنکه بیش از دو نقطه از این چهار نقطه با هم برابر نباشند. وانگهی اگر سه نقطه از این چهار نقطه ثابت بمانند، نسبت ناهمساز در نقطهٔ بینهایت نیز به صورت تابعی پیوسته از متغیر نقطهٔ چهارم در می‌آید.

با توجه به این نتیجه قواعد جایگشت (۲.۴.۵) را می‌توان به وسیلهٔ (۳.۵) از (۴.۴.۵) به‌دست آورد که به‌ازای $z_4 = \infty$ به صورت نسبت سادهٔ $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ بیان می‌شود.

تبصره. در بحث هندسی بخشهای ۱ـ۴، نمادگذاری اعداد مختلط روش مناسب دیگری برای مختصات دکارتی در اختیار ما قرار داد. از این به‌بعد اعداد مختلط معنی عمیقتری پیدا خواهند کرد. مفهوم نسبت ناهمساز ریشه در هندسهٔ تصویری حقیقی دارد که برای یک

مجموعهٔ چهار نقطه‌ای بر یک خط راست، مثل محور xها، تعریف شده‌است. این خط (یا هر خط دیگر) را می‌توان محمل هیأت همهٔ اعداد حقیقی در نظر گرفت که برای کاربرد در هندسهٔ تصویری حقیقی با یک نقطهٔ بینهایت کامل شده است. نسبت ناهمساز برای مجموعهٔ چهار نقطه‌ای ناواقع بر یک خط راست در صفحهٔ هندسهٔ تصویری تعریف نشده است. فقط رابطهٔ بین نقاط صفحه با اعداد مختلط و کامل‌کردن صفحه با یک نقطهٔ بینهایت است که به ما امکان می‌دهد تعریف نسبت ناهمساز را برای مجموعهٔ چهار نقطه‌ای در صفحهٔ کامل‌شده بسط دهیم. این کار ما را به فکر تعبیر دیگری از صفحهٔ کامل‌شدهٔ z، یعنی به صورت خط راست تصویری مختلط می‌اندازد. در واقع هر هیأت (به معنی جبری)، کامل‌شده با یک عنصر بینهایت، را می‌توان به صورت خط راست تصویری در نظر گرفت و لذا آن را پایه‌ای برای یک هندسهٔ تصویری مجرد[1] قلمداد نمود. با این تعبیر، چنانچه بعداً (در بخش ۱۱، ب) مشخص خواهد شد، هندسهٔ اعداد مختلط به صورت هندسهٔ تصویری مختلط[2] یک‌بعدی در می‌آید.

ج. نسبت ناهمساز در هندسهٔ دایره.

قضیهٔ الف. چهار نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4 از صفحهٔ کامل‌شده بر یک دایرهٔ یکتا قرار دارند، اگر و فقط اگر نسبت ناهمساز $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ حقیقی باشد.

برهان. اگر سه نقطه از این چهار نقطه، مثلاً z_2، z_3، z_4، از هم متمایز نباشند، آنگاه $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ برابر صفر، یا ۱ و یا ∞ (که مانند نقطه‌ای بر محور حقیقی، حقیقی شمرده می‌شود) است و یک دایره وجود دارد که این‌نقاط بر آن قرار دارند.

از این به‌بعد فرض می‌کنیم z_2، z_3، z_4 از هم متمایز باشند. اگر یکی از آنها، مثلاً z_4، بینهایت شود. به موجب (۴.۴.۵)، $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ در واقع یک نسبت ساده است و به سهولت دیده می‌شود که سه نقطهٔ معین z_1، z_2، z_3 بر یک خط راست قرار دارند اگر و فقط اگر، نسبت $(z_3; z_1, z_2)$ حقیقی باشد.

از این‌رو می‌توان فرض کرد که z_2، z_3، z_4 معین هستند. پس $(z, z_2; z_3, z_4)$ حقیقی است یعنی تساوی

$$(\bar{z}, \bar{z}_2; \bar{z}_3, \bar{z}_4) = (z, z_2; z_3, z_4)$$

---

۱. ر.ک. فصلهای VI، VII و IX کتاب G. de B. Robinson [۱].

۲. بحث جامعی از این موضوع درکتاب E. Cartan [۲] قسمت I ارائه شده است.

برقرار است اگر و فقط اگر

$$(z - z_3)(\bar{z} - \bar{z}_4)(z_2 - z_4)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - (z - z_4)(\bar{z} - \bar{z}_3)(z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4) = 0 \quad (5.5)$$

پس از ضرب این معادله در i، این معادله به صورت (۲.۱) در می‌آید که طبق فرضهای ما همهٔ ضرایب آن صفر نیستند، بنابراین(۵.۵) معرف یک دایره است. چون z_2، z_3 و z_4 بر این دایره قرار دارند، (۵.۵) معادلهٔ دایرهٔ حقیقی یکتای مارّ بر این سه‌نقطه است.

یک برهان مقدماتیتر دیگر چنین است.

ما تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که z_2، z_3، z_4 سه نقطهٔ معین ناهم‌خط باشند. فرض می‌کنیم

$$z_j - z_k = \rho_{jk} e^{i\phi_{jk}}, \qquad \rho_{jk} = |z_j - z_k|, \qquad (j = 1, 2; k = 3, 4)$$

به‌طوری‌که

$$\alpha_1 = \phi_{13} - \phi_{14}, \qquad \alpha_2 = \phi_{23} - \phi_{24}$$

زوایایی باشند که تحت آنها قطعهٔ z_3z_4، به‌ترتیب از نقاط z_1، z_2 دیده می‌شود. پس

$$(z_1; z_3, z_4) = \rho_1 e^{i\alpha_1}, \qquad (z_2; z_3, z_4) = \rho_2 e^{i\alpha_2}, \qquad \rho_j = \frac{\rho_{j3}}{\rho_{j4}}$$

و

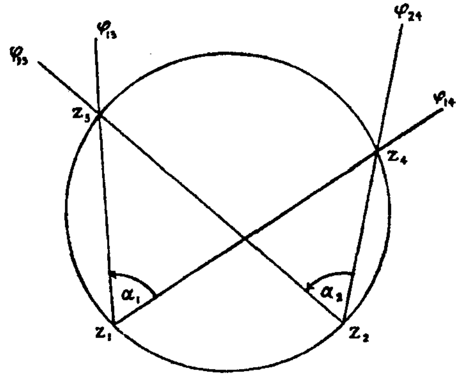
$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

این عدد، عددی است حقیقی اگر و فقط اگر، $\alpha_1 - \alpha_2$ مضرب صحیحی از π باشد، که به موجب یکی از قضایای هندسهٔ مقدماتی حالتی است که اگر و فقط اگر z_1 و z_2 بر دایره‌ای واقع باشند که z_3 و z_4 وتر آن است (ر.ک. شکل ۸).

برهان دیگر در مثال ۳ در ذیل آمده است، همچنین به بخش ۶، ه مراجعه کنید.

این مبحث را با کاربرد قضیهٔ الف در ذیل به پایان می‌بریم. فرض می‌کنیم z_2، z_3، z_4 سه عدد مختلط از هم متمایز باشند. گیریم λ معرف یک پارامتر حقیقی باشد. در این صورت

$$(z, z_2; z_3, z_4) = \lambda \qquad (6.5)$$



شکل۸

معادله‌ای است خطی برحسب متغیر z. از حل آن نسبت به z، نمایش پارامتری دایره‌ای به‌دست می‌آید که از $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ می‌گذرد و لذا هر λ یک نقطهٔ λ مشخص می‌کند. از این‌رو (۶.۵) نگاشت یک‌ـبه‌ـیک پیوسته‌ای از $\mathfrak{C}$ بر محور حقیقی z را برای دایرهٔ $\mathfrak{C}$ معین می‌کند؛ به عکس هر z از دایره مقداری را برای کامل شده است.

سه نقطهٔ $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را به سه کمان $z_۳z_۲$، $z_۲z_۴$، $z_۴z_۳$ تقسیم می‌کند. اگر λ از

$$\left\{\begin{array}{l} ۰ \text{ تا } ۱ \\ ۱ \text{ تا } \infty \\ -\infty \text{ تا } ۰ \end{array}\right\} \text{ افزایش پیدا کند، } z \text{ بر } \left\{\begin{array}{l} z_۳z_۲ \text{ از } z_۳ \text{ تا } z_۲ \\ z_۲z_۴ \text{ از } z_۲ \text{ تا } z_۴ \\ z_۴z_۳ \text{ از } z_۴ \text{ تا } z_۳ \end{array}\right\} \text{ حرکت می‌کند}$$

(یادآوری می‌کنیم که $\lambda = (\lambda, ۱; ۰, \infty)$).

به‌ویژه $\lambda = -۱$ متناظر با نقطهٔ $z_۱$ بر کمان $z_۴z_۳$ است. گفته می‌شود که نقاط $z_۱$، $z_۲$؛ $z_۳$ و $z_۴$ یکدیگر را بر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ به‌طور همساز تقسیم نموده‌اند و یا مجموعه‌ای همساز یا یک تقسیم همساز تشکیل داده‌اند هرگاه رابطهٔ

$$(z_۱, z_۲; z_۳, z_۴) = -۱ \qquad (۱.۶.۵)$$

برقرار باشد. به‌ویژه ۱−، ۱؛ ۰، ∞ یکدیگر را بر محور حقیقی به‌نسبت‌همساز (با نسبت توافقی) از هم جدا می‌کنند.

قضیهٔ ب. فرض می‌کنیم z_j^* منعکس نقطهٔ z_j، $(j = ۱, ۲, ۳, ۴)$، نسبت به یک دایرهٔ $\mathfrak{C}_۰$

باشد. در این صورت

$$(z_1^*, z_2^*; z_3^*, z_4^*) = \overline{(z_1, z_2; z_3, z_4)}$$

برهان. به موجب (۱.۳.۲) می‌توانیم فرض کنیم که $\mathfrak{C}_0$ دایره‌ای حقیقی است. پس بنابر (۲.۲.۲) [با حذف حالت خط راست (ر.ک. مثال ۲)]، داریم

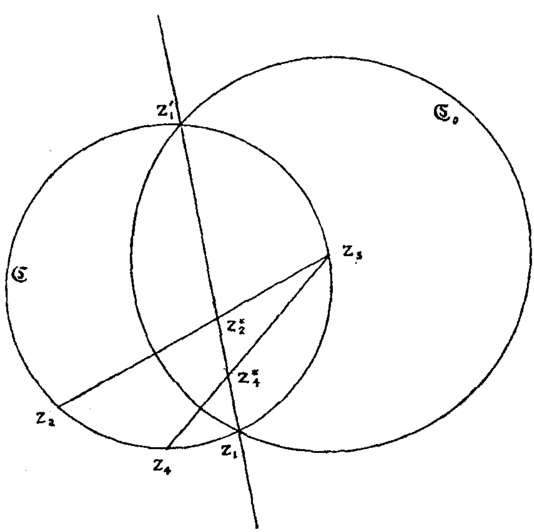
$$z_j^* = \gamma_0 + \frac{\rho_0^2}{\bar{z}_j - \bar{\gamma}_0}, \qquad z_j^* - z_k^* = \rho_0^2 \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_j}{(\bar{z}_j - \bar{\gamma}_0)(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_0)}$$

$$(z_j^*; z_3^*, z_4^*) = (\bar{\gamma}_0; \bar{z}_4, \bar{z}_3)(\bar{z}_j; \bar{z}_3, \bar{z}_4) \qquad (j = 1, 2)$$

و قضیه بی‌درنگ ثابت می‌شود.

بنابراین می‌توان چهارمین نقطهٔ z_4، همساز با سه نقطهٔ دوبه‌دو متمایز ناهم‌خط z_1، z_2 و z_3 را با ترسیم هندسی ساده‌ای پیدا کرد. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}$ دایرهٔ مارّ بر این سه نقطه باشد. دایرهٔ $\mathfrak{C}_0$ به مرکز z_3 و مارّ بر z_1 را رسم می‌کنیم (ر.ک. شکل ۹). انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_0$ نقطهٔ z_3 را به نقطهٔ $z_3^* = \infty$ می‌برد؛ و z_1 را ثابت نگاه می‌دارد، و بدین‌ترتیب $\mathfrak{C}$ را بر خط راست l، مارّ بر z_1 و نقطهٔ z_1'، دومین نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_0$، می‌نگارد. همچنین z_2^* منعکس z_2 را، از تقاطع مارّ بر z_2 و z_3 با خط l، پیدا می‌کنیم. لذا بنابر قضیهٔ **ب** برای z_4^* شرط

$$(z_1, z_2^*; \infty, z_4^*) = -1$$



شکل۹

را داریم. در نتیجه

$$z_۴^* = \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲^*)$$

این نقطه بلافاصله بر l مشخص می‌شود. حال $z_۳$ را با یک خط راست به $z_۴^*$ وصل می‌کنیم تا $\mathfrak{C}$ را در $z_۴$ تلاقی کند.

مثالها

۱. نسبت $(z_۱; z_۲, z_۳)$ حقیقی است اگر و فقط اگر سه نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ همخط باشند.

۲. اگر $z_۱^*$، $z_۲^*$، $z_۳^*$ به‌ترتیب منعکسهای نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ نسبت به خط راستی باشند آنگاه: $(z_۱^*; z_۲^*, z_۳^*) = \overline{(z_۱; z_۲, z_۳)}$.

۳. به‌ازای هر دایرهٔ (حقیقی) $\mathfrak{C}$ می‌توان دایرهٔ دیگری مانند $\mathfrak{C}_۰$ طوری پیدا کرد که انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_۰$ دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را به محور حقیقی بدل کند.

این قضیه به همراه قضیهٔ **ب** اثبات دیگری برای قضیهٔ **الف** به‌دست می‌دهند.

۴. فرض می‌کنیم

$$z_j = \gamma_۰ + \rho_۰ e^{i\alpha_j} \qquad (j = ۱, ۲, ۳, ۴)$$

چهار نقطه بر یک دایره باشند. نشان دهید که

$$(z_۱, z_۲; z_۳, z_۴) = \frac{\sin \frac{۱}{۲}(\alpha_۱ - \alpha_۳)}{\sin \frac{۱}{۲}(\alpha_۱ - \alpha_۴)} \div \frac{\sin \frac{۱}{۲}(\alpha_۲ - \alpha_۳)}{\sin \frac{۱}{۲}(\alpha_۲ - \alpha_۴)}$$

۵. اوضاع نسبی ممکنِ سه‌نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ را چنان پیدا کنید که به‌ازای آنها دو مقدار از شش مقدارِ نسبت $(z_j; z_k, z_l)$ با هم مساوی باشند.

۶. وضعیت نسبی چهار نقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ را پیدا کنید که برای آنها دو مقدار از شش مقدار نسبت ناهمساز $(z_j, z_k; z_l, z_m)$ با هم برابر باشند. مقادیر ممکن این نسبت ناهمساز چقدرند؟ رابطهٔ $۱ = (z_۱, z_۲; z_۳, z_۴)$ را تحلیل کنید.

۷. اگر $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ همخط باشند یافتن چهارمین نقطهٔ همساز به‌نحوی که در قضیهٔ ب شرح داده شده، میسر نیست. با استفاده از این نکته که اگر $z_۱$ و $z_۲$ نسبت به یک دایرهٔ حقیقی که خط

مارّ بر z_1 و z_2 را در z_3 و z_4 تلاقی کند، آنگاه $(z_1, z_2; z_3, z_4) = -1$، آن روش را در این حالت تکمیل نمایید.

۸. به‌ازای سه نقطهٔ مفروض z_1، z_2، z_3 با رسم هندسی، نقطهٔ چهارم z_4 را به‌دست آورید به‌طوری‌که $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ یک مقدار حقیقی یا مختلط از پیش داده‌شده‌ای را داشته باشد.

۹. چهار نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4 بر یک دایره واقع‌اند، اگر و فقط اگر

$$\begin{vmatrix} z_1\bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ z_4\bar{z}_4 & z_4 & \bar{z}_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[ر.ک. (۵.۵)]

۲

تبدیل موبیوس

۶. تعریف: خواص مقدماتی

الف. تعریف و نمادگذاری. یک تبدیل موبیوس با تساوی

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (۱.۶)$$

داده می‌شود که در آن z می‌تواند در تمام صفحهٔ مختلط کامل‌شده تغییر کند. عناصر ماتریس

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

اعداد مختلط ثابت‌اند. دترمینان آن

$$|\mathfrak{H}| = \delta = ad - bc$$

صفر نیست، زیرا اگر $|\mathfrak{H}| = ۰$، طرف راست (۱.۶) ثابت خواهد بود.

روشن است که ماتریس $\mathfrak{H}$ معرف تبدیل موبیوس (۱.۶) است. نظر به اینکه این تبدیل فقط با تقریب مضرب ثابتی معرف این ماتریس است. پس همهٔ ماتریسهای $q\,\mathfrak{H}$ به‌ازای هر عدد مختلط $q \neq 0$، یک تبدیل یکتایی را تعریف می‌کنند.

تبدیل موبیوس هم مانند انعکاس یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین صفحهٔ z و صفحهٔ Z است که می‌توان صفحهٔ اخیر را رونوشت دوم صفحهٔ z در نظر گرفت (ر.ک. بخش ۲، ب). اگر هر دو صفحه (از جمله دستگاههای مختصات و مقیاسهای محورها) یکی باشند، گوییم تابع (یا تبدیل) (۱.۶) نمایش نگاشتی است از صفحهٔ کامل‌شده بر روی خودش. به مقادیر مختلف z، مقادیر متفاوت Z متناظر است و به عکس. نقطهٔ

$$z_\infty = -\frac{d}{c}$$

را قطب تابع $\mathfrak{H}(z)$ گویند؛ نگارهٔ آن در صفحهٔ Z ، نقطهٔ $Z = \infty$ است.

تبصرهٔ ۱. یک تبدیل موبیوس را همنگاری یا تبدیل خطی از متغیر z نیز می‌گویند، این نامگذاری به دلیل زیر است. به‌جای متغیرهای z؛ Z، می‌توان به‌ترتیب متغیرهای متجانس z_1، z_2؛ Z_1، Z_2 را قرار داد، یعنی

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \qquad Z = \frac{Z_1}{Z_2}$$

در این صورت رابطهٔ (۱.۶) چنین خواهد شد

$$\frac{1}{q}Z_1 = az_1 + bz_2, \qquad \frac{1}{q}Z_2 = cz_1 + dz_2 \qquad (۱.۱.۶)$$

که در آن q عدد مختلط دلخواهی است مخالف صفر. این تبدیل یک تبدیل خطی متجانس از متغیرهای z_1، z_2 با ماتریس $\mathfrak{H}$ است. با استفاده از نماد ستونی

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

می‌توان (۱.۱.۶) را به صورت زیر نوشت

$$\mathfrak{Z} = q\mathfrak{H}\mathfrak{z} \qquad (q \neq 0) \ (۲.۱.۶)$$

سرانجام گاهی (۱.۶) را تبدیل دو خطی می‌نامند، زیرا که از رابطهٔ دو خطیِ بین دو متغیر z و Z یعنی

$$czZ + dZ - az - b = 0 \qquad (۳.۱.۶)$$

که نمایش ضمنی تابع (۱.۶) است، نتیجه شده است.

تبصرهٔ ۲. انعکاس (۱.۲.۲)، یک تبدیل موبیوس نیست؛ بلکه حالت خاصی از تبدیلی است به صورت

$$Z = \mathfrak{H}(\bar{z}), \qquad (|\mathfrak{H}| \neq 0)$$

که آن را پادهمنگاری می‌نامند. به‌این پادهمنگاریها در بخش ۹ خواهیم پرداخت.

ب. گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}_1$ و $\mathfrak{H}_2$ دو تبدیل موبیوسِ

$$\mathfrak{H}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

باشند. این تبدیلها را بتوالی انجام می‌دهیم، اول $z_1 = \mathfrak{H}_1(z)$ و سپس $Z = \mathfrak{H}_2(z_1)$، تبدیل

$$Z = \mathfrak{H}_2[\mathfrak{H}_1(z)] \tag{۲.۶}$$

به‌دست می‌آید که حاصلضرب دو تبدیل $\mathfrak{H}_1$، $\mathfrak{H}_2$ (به‌همین‌ترتیب) نامیده می‌شود. بلافاصله دیده می‌شود که این تبدیل هم باز یک تبدیل موبیوس است، یعنی

$$Z = \frac{a_2\mathfrak{H}_1(z) + b_2}{c_2\mathfrak{H}_1(z) + d_2} = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + a_2b_1 + b_2d_1}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + c_2b_1 + d_2d_1} = \mathfrak{H}_3(z)$$

که ماتریس آن $\mathfrak{H}_3$ به صورت حاصلضرب دو ماتریس $\mathfrak{H}_1$ و $\mathfrak{H}_2$

$$\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_1 = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} \tag{۱.۲.۶}$$

است. تابع حاصلضرب (۲.۶) مطمئناً ثابت نیست زیرا هیچ‌یک از توابع $\mathfrak{H}_1(z)$ و $\mathfrak{H}_2(z)$ ثابت فرض نشده است. لذا $|\mathfrak{H}_3| = |\mathfrak{H}_2||\mathfrak{H}_1| \neq 0$.

تبدیل موبیوس (۱.۶) عکسپذیر است، و عکس آن هم یک تبدیل موبیوس است

$$z = \mathfrak{H}^{-1}(Z) = \frac{dZ - b}{-cZ + a} \tag{۲.۲.۶}$$

ماتریس آن $\mathfrak{H}^{-1}$، عکس $\mathfrak{H}$، یا، با حذف ضریب عددی $1/\delta$ (مانند (۲.۲.۶))، ماتریس $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ است.

یک تبدیل خاص موبیوس، تبدیل همانی $Z = z$ است؛ ماتریس آن ماتریس واحد زیر است.

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ضرب ماتریسها شرکتپذیر است؛ این امر در مورد ترکیب سه تبدیل یا چند تبدیل موبیوس هم صادق است.[۱]

احکام بالا را می‌توان ترکیب کرد و چنین نوشت

قضیهٔ الف. دستگاه همهٔ تبدیلهای موبیوس، با ترکیب تابعی به عنوان ضرب گروهی، یک گروه است.

به‌وسیلهٔ تصویر گنجنگاشتی، هر تبدیل موبیوس را می‌توان بر کرهٔ واحد منتقل کرد که در اینجا به صورت تبدیلی از کره بر روی خودش نمایان می‌شود. گروه همهٔ این تبدیلهای کروی با گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس یکریخت است. در حالت کلی نمایش تحلیلی تبدیلهای کروی پیچیده جلوه می‌کند. (ر.ک. بخش ۱۱، ج)، یک حالت خاص و مهم آن به تفصیل در (بخش ۱۲، **ب**) مورد بحث قرار خواهد گرفت.

ج. انواع سادهٔ تبدیلهای موبیوس. اگر در (۱.۶) مقدار c مساوی صفر باشد، d را می‌توان مساوی با ۱ گرفت، و از اینجا $\mathfrak{H}(z)$ یک تابع خطی «صحیح» به صورت زیر خواهد شد

$$Z = az + b$$

اگر $c \neq ۰$، فرمول (۱.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Z = \frac{a}{c} - \frac{\delta}{c}\frac{۱}{cz + d} \qquad (۳.۶)$$

بنابراین یک تبدیل موبیوس به صورت حاصلضرب تبدیلهای موبیوس از «انواع سادهٔ» زیر ظاهر می‌شود:

۱. انتقال.

$$Z = z + b, \qquad \text{ماتریس}\ \mathfrak{T}_b = \begin{pmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad (b \neq ۰ \text{ و مختلط}) \qquad (۱.۳.۶)$$

---

۱. توجه داریم که ترکیب تبدیلهای تابعی همواره شرکتپذیر است.

هر خط راست موازی با بردار انتقال $\overrightarrow{ob}$ بر اثر انتقال (۱.۳.۶)، ناوردا می‌ماند (یا به خودش بدل می‌شود). خطوط هر دسته از خطوط راست موازی یا بردار انتقال با هم جابه‌جا می‌شوند؛ این مطلب به‌ویژه در مورد دسته‌خط عمود بر $\overrightarrow{ob}$ صادق است. به هر یک از این دسته خطها، دسته دایره‌ای سهموی در کره متناظر است که همهٔ آنها از نقطهٔ $\mathbf{S}$ می‌گذرند. این تنها نقطه‌ای است که بر اثر تبدیل کروی متناظر با (۱.۳.۶) ثابت می‌ماند؛ از این‌رو $z = \infty$ تنها نقطهٔ ثابت این انتقال است (ر.ک. مثال ۸، بخش ۲).

انتقال $\mathfrak{T}_b$ حاصلضرب (یعنی، نتیجهٔ ترکیب) دو انعکاس است.

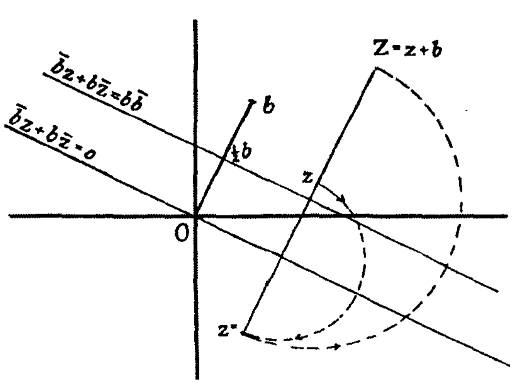
برهان. جنبهٔ هندسی قضیه اشارت بر این دارد که خطهای راست را باید دوایر اصلی در انعکاس بگیریم. این خطوط باید بر بردار انتقال $\overrightarrow{ob}$ عمود باشند. برای انعکاس اول خط مارّ بر مبدأ o به معادلهٔ $\bar{b}z + b\bar{z} = 0$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت برای انعکاس مربوط به این خط داریم

$$z^* = -\frac{b}{\bar{b}}\bar{z}$$

برای دایرهٔ اصلی دوم خط $\bar{b}z + b\bar{z} = b\bar{b}$ را که به فاصلهٔ $\frac{1}{2}|b|$ از مبدأ بر امتداد $\overrightarrow{ob}$ جدا می‌شود می‌گیریم. (ر.ک. شکل ۱۰)، انعکاس مربوط به آن z^* را به

$$Z = -\frac{b\overline{z^*} - b\bar{b}}{\bar{b}} = \frac{\bar{b}z + b\bar{b}}{\bar{b}} = z + b$$

می‌برد.



شکل ۱۰

۲. دوران حول o به زاویهٔ α.

$$Z = e^{i\alpha} z، \quad \text{با ماتریس} \quad \mathfrak{R}_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & \circ \\ \circ & ١ \end{pmatrix} \qquad (۲.۳.۶)$$

هر دایرهٔ به مرکز o، ناورداست. دوایری که عوض می‌شوند، دوایری از دسته هستند که بر دوایر هم‌مرکز دسته یعنی، دستهٔ همهٔ خطهای راست مارّ بر o عمودند. به دورانهای حول O در صفحه، دوران کره حول محور قطبی NS مربوط است. اگر α مضرب صحیحی از ۲π نباشد، **N** و **S** تنها نقاط ثابت این دورانهای کروی هستند. بنابراین o و ∞ تنها نقاط ثابت دورانِ (۲.۳.۶) هستند.

هر دوران $\mathfrak{R}_\alpha$ حاصلضرب دو انعکاس است.

برهان. برای انعکاس اول محور حقیقی $iz - i\bar{z} = \circ$ را دایرهٔ اصلی می‌گیریم. پس $z^* = \bar{z}$. دایرهٔ اصلی دوم را خطی اختیار می‌کنیم که از o می‌گذرد و با محور حقیقی زاویهٔ $\frac{١}{۲}\alpha$ تشکیل می‌دهد

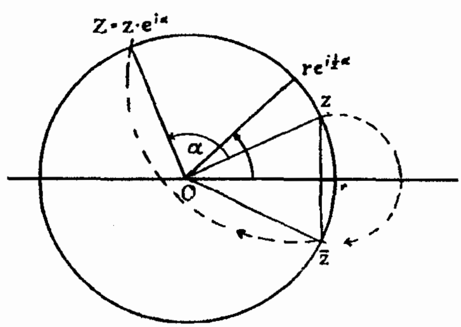
$$ie^{-i(\alpha/۲)} z - ie^{i(\alpha/۲)} \bar{z} = \circ$$

انعکاس دوم z^* را به $Z = (e^{i(\alpha/۲)}/e^{-i(\alpha/۲)})\overline{z^*} = e^{i\alpha} z$ می‌برد (ر.ک. شکل ۱۱).

۳. اتساع به مرکز o با ضریب اتساع $\rho > \circ$.

$$Z = \rho z، \quad \text{با ماتریس} \quad \mathfrak{D}_\rho = \begin{pmatrix} \rho & \circ \\ \circ & ١ \end{pmatrix} \qquad (۳.۳.۶)$$

هر خط مارّ بر o ناورداست. همهٔ دایره‌های به مرکز o با هم عوض می‌شوند. باز هم o و ∞ نقاط ثابت‌اند.



شکل۱۱

هر اتساع $\mathfrak{D}_\rho$ حاصلضرب دو انعکاس است.

برهان. دایرهٔ واحد به مرکز o را دایرهٔ اصلی اول می‌گیریم

$$z^* = \frac{۱}{\bar{z}}$$

برای انعکاس دوم، دایرهٔ به مرکز o و به شعاع $\sqrt{\rho}$ را دایرهٔ اصلی اختیار می‌کنیم؛ پس

$$Z = \frac{\rho}{\overline{z^*}} = \rho z$$

۴. عکس‌یابی.

$$Z = \frac{۱}{z} \quad ، \quad \text{با ماتریس} \quad \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (۴.۳.۶)$$

در روی کره عمل عکس‌یابی نقطهٔ $\mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta)$ را به نقطهٔ $(\xi, -\eta, -\zeta)$ می‌برد؛ زیرا اگر $z = (\xi + i\eta)/(۱ + \zeta)$، آنگاه $۱/z = (\xi - i\eta)/(۱ - \zeta)$. بنابراین عکس‌یابی روی کره دورانی است حول محور ξ به زاویهٔ ۱۸۰°. همهٔ دوایر واقع در صفحه‌های موازی با صفحهٔ $\eta\zeta$ و همهٔ دایره‌های عظیمه‌ای که صفحه‌های آنها بر محور ξها می‌گذرند، ناوردا هستند. از این‌رو هر دایره‌ای که از $۱-$ و ۱ بگذرد و هر دایره از دسته دایرهٔ هذلولوی متعامد، به خودش بدل می‌شود.

از تعبیر عکس‌یابی به صورت دورانی از این کره، روشن می‌شود که عمل عکس‌یابی هم حاصلضرب دو انعکاس است.

د. ویژگیهای نگاشت تبدیل موبیوس. نماد ماتریسی انواع سادهٔ تبدیل موبیوس ما را بر آن می‌دارد که ماتریس تبدیل صحیح موبیوس را به صورت

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T}_b \mathfrak{R}_a \mathfrak{D}_{|a|}$$

بنویسیم و به موجب (۳.۶) اگر $c = |c|e^{i\gamma} \neq ۰$ و $-\delta/c = |\delta/c|e^{i\phi}$، در حالت ناصحیح داریم

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T}_{a/c} \mathfrak{D}_{|\delta/c|} \mathfrak{R}_\phi \mathfrak{R} \mathfrak{T}_d \mathfrak{D}_{|c|} \mathfrak{R}_\gamma$$

بنابراین هر تبدیل موبیوس به صورت حاصلضربی از نابیشتر از هفت تبدیل از چهار نوع ساده با یک ترتیب معین ظاهر می‌شود. بنابراین هر تبدیل موبیوس حاصلضرب تعداد زوجی نابیشتر از ۱۴ انعکاس است.

از قضیهٔ بخش ۲، **ب** نتیجه می‌گیریم

قضیهٔ ب. هر تبدیل موبیوس (۱.۶) نگاشتی همدیس از صفحهٔ کامل‌شدهٔ z بر صفحهٔ کامل‌شدهٔ Z است. این تبدیل دایره را به دایره، دایرهٔ حقیقی (از جمله خط راست) را به دایرهٔ حقیقی یا خط، و دایرهٔ انگاری را به دایرهٔ انگاری، می‌برد.

به‌موجب بخش۱، **الف** به هر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ می‌توان جهتی داد. از لحاظ هندسی روشن است که با یک تبدیل موبیوس از یکی از سه نوع اول (انتقال، دوران، و اتساع) جهت دایره در صفحه محفوظ می‌ماند. داخل آن به داخل دایرهٔ نگاره نگاشته می‌شود.

پیداکردن نقطهٔ $۱/z$ از راه هندسی به‌ازای $z \neq ۰$ مفروض (ر.ک. مثال ۲، بخش ۲)، نشان می‌دهد که عکس‌یابی جهت دایره‌ای را که شامل o نباشد محفوظ می‌دارد، ولی جهت هر دایره را که o نقطهٔ درونی آن باشد عوض می‌کند. پس:

فرع. هر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ سو نگهدار هر دایره‌ای است که شامل قطب $\mathfrak{H}$ نباشد. اگر $\mathfrak{C}$ شامل قطب $\mathfrak{H}$ باشد، آنگاه $\mathfrak{C}_۱$، نگارهٔ دایرهٔ $\mathfrak{C}$، جهتی مخالف جهت $\mathfrak{C}$ دارد.

اگر قطب $\mathfrak{H}$ بر $\mathfrak{C}$ واقع باشد، نگارهٔ آن یک خط راست است.

تبصره. بعداً خواهیم دید که هر تبدیل موبیوس را می‌توان به‌صورت حاصلضرب دو یا چهار انعکاس نوشت.

هر پادهمنگاری از انعکاس نسبت به محور حقیقی $\bar{z} = z^*$ و به دنبال آن یک تبدیل مناسب موبیوس به‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب یک پادهمنگاری به صورت حاصلضرب تعداد فردی نابیشتر از ۱۵ انعکاس نوشته می‌شود. بنابراین پادهمنگاری تبدیلی است همزاویه که جهت دوران را عوض می‌کند، و دایره را به دایره بدل می‌کند.

قضیهٔ ج. فرض می‌کنیم $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ چهار نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ کامل‌شده هستند که هیچ سه‌تایی از آنها با هم برابر نیستند. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی باشد که $Z_j = \mathfrak{H}(z_j)$ $(j = ۱, ۲, ۳, ۴)$ در این صورت

$$(Z_۱, Z_۲; Z_۳, Z_۴) = (z_۱, z_۲; z_۳, z_۴)$$

مختصرتر بگوییم: نسبت ناهمساز، یک ناوردای («ناوردای چهار نقطه‌ای») گروه تبدیلهای موبیوس است.

برهان. اگر بر اثر انعکاسی چهار نقطهٔ z_j به چهار نقطهٔ z_j^* تبدیل شوند. نسبت ناهمساز آنها به مقدار مزدوجش بدل می‌شود (ر.ک. قضیهٔ ب، بخش ۵، ج)؛ پس نسبت ناهمساز، بر اثر حاصلضرب دو یا تعداد زوجی انعکاس، ناورداست. (اثباتی دیگر در مثال ۸ آمده است)

از قضیهٔ ج نتیجه می‌شود که

$$(Z, Z_۱; Z_۲, Z_۳) = (z, z_۱; z_۲, z_۳) \tag{۵.۳.۶}$$

یک نمایش ضمنی از تبدیل موبیوسی است که $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ را به‌ترتیب به $Z_۱$، $Z_۲$، $Z_۳$ بدل می‌کند. پس داریم

قضیهٔ د. فرض می‌کنیم سه نقطهٔ متمایز $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ در صفحهٔ z داده شده‌اند و سه نقطهٔ متمایز $Z_۱$، $Z_۲$، $Z_۳$ در صفحهٔ Z. در این صورت تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ که به‌ازای آن داشته باشیم

$$Z_۱ = \mathfrak{H}(z_۱), \qquad Z_۲ = \mathfrak{H}(z_۲), \qquad Z_۳ = \mathfrak{H}(z_۳)$$

به‌طور یکتا معین می‌شود. این تبدیل از حلِ معادلهٔ (۵.۳.۶) نسبت به Z به‌دست می‌آید.

از قراردادن $Z_j = z_j$ $(j = ۱, ۲, ۳)$ نتیجه می‌گیریم که یک تبدیل موبیوس با سه نقطهٔ ثابت متمایز، الزاماً تبدیلی است همانی. این قضیه بیان دیگری برای یکتایی حکم قضیهٔ د است. زیرا اگر $\mathfrak{H}_۱$ و $\mathfrak{H}_۲$ دو تبدیل موبیوس چنان باشند که $Z_j = \mathfrak{H}_۱(z_j) = \mathfrak{H}_۲(z_j)$، آنگاه $\mathfrak{H}_۲^{-۱}\mathfrak{H}_۱$ تبدیل موبیوسی با سه نقطهٔ ثابت متمایز، یعنی، یک همانی است. بنابراین $\mathfrak{H}_۱$ و $\mathfrak{H}_۲$ یکی هستند. (ر.ک. پیوست ۱)

از قضیهٔ د برهان دیگری برای قضیهٔ الف در بخش۵، ج نتیجه می‌شود. توجه داریم که از سه نقطهٔ متمایز همواره دایرهٔ یکتای $\mathfrak{C}$ می‌گذرد. اکنون سه نقطهٔ متمایز $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ را بر محور حقیقی به عنوان نگاره‌های نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ معین می‌کنیم؛ تبدیل موبیوس یکتایی که با رابطهٔ

$$(Z, X_۱; X_۲, X_۳) = (z, z_۱; z_۲, z_۳)$$

تعریف می‌شود دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را به محور حقیقی تبدیل می‌کند که به معنی آن است که Z حقیقی است، اگر و فقط اگر، z نقطه‌ای بر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ باشد. چون روشن است که نسبت ناهمساز هر چهار نقطه بر محور حقیقی، حقیقی است، نتیجه می‌گیریم که نسبت ناهمساز چهار نقطه از صفحهٔ کامل‌شده حقیقی است، اگر و فقط اگر این چهار نقطه بر یک دایره قرار داشته باشند (ر.ک. بخش ۱، مثال ۹).

بحث فوق را می‌توان به صورت زیر کامل کرد

فرع. هر تبدیل $Z = f(z)$ از صفحهٔ کامل‌شده بر روی خودش، که نسبت ناهمسازی ناوردای چهار نقطه‌ای آن باشد، لزوماً یک تبدیل موبیوس است.

این فرع مستقیماً از این واقعیت نتیجه می‌شود که از حل معادلهٔ (۵.۳.۶) نسبت به Z یک تبدیل موبیوس به‌دست می‌آید.

ه. تبدیل یک دایره. فرض می‌کنیم دایره‌ای با ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ و در نتیجه با معادلهٔ (۲.۱) داده شده است. با یک تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ این دایره بر دایرهٔ دیگری که می‌توان آن را از لحاظ نمادی با $\mathfrak{H}(\mathfrak{C})$ نمایش داد نگاشته می‌شود. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ ماتریس ارمیتی آن باشد. بنابراین معادلهٔ آن چنین خواهد شد

$$\mathfrak{C}_1(Z, \bar{Z}) = A_1 Z\bar{Z} + B_1 Z + C_1 \bar{Z} + D_1 = 0 \qquad (۴.۶)$$

چه رابطه‌ای بین ماتریسهای $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_1$ وجود دارد؟

ساده‌ترین راه برای پاسخ‌دادن به این پرسش استفاده از متغیرهای متجانس است (ر.ک. بخش ۶، الف) در این صورت معادلهٔ (۲.۱) را می‌توان به صورت

$$z_2\bar{z}_2\mathfrak{C}(z, \bar{z}) = Az_1\bar{z}_1 + Bz_1\bar{z}_2 + C\bar{z}_1 z_2 + Dz_2\bar{z}_2 = 0$$

و یا با نماد ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$\mathfrak{z}'\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{z}} = 0, \qquad \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (۱.۴.۶)$$

حال اگر $Z = \mathfrak{H}(z)$، آنگاه به موجب (۲.۱.۶) در مختصات متجانس داریم

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{q}\mathfrak{H}^{-1}\mathfrak{Z} = \frac{1}{q_1}\mathfrak{G}\mathfrak{Z}, \qquad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \delta\mathfrak{H}^{-1}$$

و معادلهٔ (۱.۴.۶) چنین خواهد شد

$$\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{G}'\,\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{G}}\,\overline{\mathfrak{Z}} = 0$$

بدین‌ترتیب معادلهٔ زیر را برای دایرهٔ مبدَل داریم

$$\mathfrak{C}_1(Z,\bar{Z}) = 0 \qquad \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}} \tag{۲.۴.۶}$$

این ماتریس، ماتریس ارمیتی است: $\mathfrak{C}'_1 = \overline{\mathfrak{S}}'\mathfrak{C}'\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}'\overline{\mathfrak{C}}\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{C}}_1$، و چون

$$|\mathfrak{C}_1| = |\mathfrak{S}||\mathfrak{C}||\overline{\mathfrak{S}}| = |\det\mathfrak{S}|^2|\mathfrak{C}|$$

نگاشت $\mathfrak{C}$ بر روی $\mathfrak{C}_1$ علامت دترمینان را عوض نمی‌کند. این مطلب برهان دیگری برای احکام مربوط به تبدیل دوایر در قضیهٔ **ب** است.

هر دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}$ را می‌توان به دایرهٔ واحد حقیقی $z\bar{z} - 1 = 0$ تبدیل کرد. بنابراین یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{S}$ وجود دارد به‌طوری که

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۳.۴.۶}$$

اگر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ انگاری (یعنی ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ معین مثبت) باشد معلوم است که ماتریس $\mathfrak{S}$ای وجود دارد که

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{E} \tag{۴.۴.۶}$$

از این‌رو هر دایرهٔ انگاری را می‌توان با یک تبدیل موبیوس مناسب به دایرهٔ واحد انگاری $z\bar{z} + 1 = 0$ تبدیل کرد این قضیه از راه دیگری در بخش ۹، **د** اثبات خواهد شد.

و. برگشت. تبدیل (یا تابع) $Z = f(z)$ را که همانی ($Z = z$) نیست، برگشتی گویند، اگر به‌ازای همهٔ مقادیر z داشته باشیم: $z = f(f(z))$ (ر.ک. بخش۲، **الف**). یک تبدیل برگشتی-موبیوس را یک برگشت خوانند. ماتریس یک برگشت

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

باید در شرط زیر صدق کند

$$\mathfrak{H}^2 = \mu\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad (\mu \neq 0 \text{، مختلط}) \tag{۵.۶}$$

با پیداکردن ماتریس $\mathfrak{H}^{۲}$ خواهیم داشت $\begin{pmatrix} a^{۲}+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^{۲} \end{pmatrix}$؛ بنابراین

قضیهٔ ه. تبدیل موبیوس (۱.۶) یک برگشت است، اگر و فقط اگر $a+d=۰$.

باید توجه داشت که این رابطه بیانگر این واقعیت است که تابع دو خطی طرف چپ (۳.۱.۶) نسبت به Z و z متقارن است، و این شرط لازم و کافی برای آن است که تبدیل موبیوس متناظر با $\mathfrak{H}$ با عکسش یکی، یعنی یک برگشت باشد.

روشن است که هر برگشت $\mathfrak{H}$ ویژگی زیر را دارد. به‌ازای هر نقطهٔ $z_{۱}$ از صفحهٔ کامل‌شده فرض کنید $z_{۲}=\mathfrak{H}(z_{۱})$؛ پس همین‌طور داریم $z_{۱}=\mathfrak{H}(z_{۲})$. دو نقطهٔ $z_{۱}$ و $z_{۲}$ را که چنین ارتباطی با هم پیدا کرده باشند نسبت به برگشت $\mathfrak{H}$ یک «جفت مزدوج» می‌خوانند. هر نقطه‌ای در این صفحه عضوی از یک جفت مزدوج است.

قضیهٔ و. اگر تبدیل موبیوس $Z=\mathfrak{H}(z)$ یک‌جفت مزدوج $z_{۱}$ و $z_{۲}$ $(z_{۱}\neq z_{۲})$ داشته باشد به‌طوری‌که $z_{۲}=\mathfrak{H}(z_{۱})$ و $z_{۱}=\mathfrak{H}(z_{۲})$، $\mathfrak{H}$ یک برگشت است.

برهان. فرض می‌کنیم $z_{۳}$ از $z_{۱}$ و $z_{۲}$ متمایز باشد و $Z_{۳}=\mathfrak{H}(z_{۳})$. در این صورت به‌موجب (۵.۳.۶)

$$(Z,z_{۲};z_{۱},Z_{۳})=(z,z_{۱};z_{۲},z_{۳})$$

به‌علاوه اگر $z'_{۳}=\mathfrak{H}(Z_{۳})$، آنگاه به‌موجب (۱.۴.۵)

$$(Z_{۳},z_{۱};z_{۲},z_{۳})=(z'_{۳},z_{۲};z_{۱},Z_{۳})=(Z_{۳},z_{۱};z_{۲},z'_{۳})$$

بنابراین $z_{۳}=z'_{۳}$. چیزی که می‌خواستیم.

هر برگشت $\mathfrak{H}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$، دو نقطهٔ ثابت متمایز $\gamma_{۱}$ و $\gamma_{۲}$ دارد که ریشه‌های معادلهٔ $z=\mathfrak{H}(z)$، یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم

$$cz^{۲}-۲az-b=۰ \qquad (۱.۵.۶)$$

هستند، که مبین آن، $-۴|\mathfrak{H}|$، صفر نیست. اگر c مخالف صفر باشد. هر دو نقطهٔ ثابت معین هستند؛ زیرا

$$\gamma_{۱}+\gamma_{۲}=۲\frac{a}{c}=۲z_{\infty} \qquad (۲.۵.۶)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که z_∞، قطب $\mathfrak{H}$، در وسط γ_1 و γ_2 قرار دارد. بنابراین خط راست l واصل بین نقاط ثابت بر اثر برگشت $\mathfrak{H}$ بر خودش نگاشته می‌شود.

اگر $c = 0$، می‌توان d را مساوی ۱ گرفت و از این‌رو $Z = -z + b$ کلیترین برگشت صحیح است. یکی از نقاط ثابت آن در بینهایت بر قطب منطبق است.

سرانجام توجه می‌کنیم که فقط و فقط یک برگشت وجود دارد که نقاط γ_1 و γ_2 نقاط ثابت آن هستند (ر.ک. مثال ۹).

مثالها

۱. تعویضپذیری (استقلال از ترتیب) انواع ساده.

$$\mathfrak{T}_a\mathfrak{T}_b = \mathfrak{T}_b\mathfrak{T}_a, \quad \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{R}_\beta = \mathfrak{R}_\beta\mathfrak{R}_\alpha, \quad \mathfrak{D}_\rho\mathfrak{D}_\sigma = \mathfrak{D}_\sigma\mathfrak{D}_\rho, \quad \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{D}_\rho = \mathfrak{D}_\rho\mathfrak{R}_\alpha$$

نشان دهید که اگر $b \neq 0$، و α مضرب صحیحی از 2π نباشد. آنگاه

$$\mathfrak{T}_b\mathfrak{R}_\alpha \neq \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{T}_b$$

بدین‌ترتیب، مانند ضرب ماتریسها، ترکیب (ضرب) تبدیلهای موبیوس، در حالت کلی، مستقل از ترتیب نیست. همچنین دربارهٔ تعویضپذیری عوامل در حاصلضربهای:

$$\mathfrak{T}_b\mathfrak{D}_\rho, \quad \mathfrak{R}\mathfrak{T}_b, \quad \mathfrak{R}\mathfrak{R}_\alpha, \quad \mathfrak{R}\mathfrak{D}_\rho$$

بحث کنید (و نیز ر.ک. مثال ۸، بخش ۸).

۲. ماتریس $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی را پیدا کنید که معرف دورانی به زاویهٔ α حول نقطهٔ γ در صفحهٔ مختلط باشد.

۳. نشان دهید که هر انتقال $\mathfrak{T}_b$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو دوران حول مراکز γ_1 و γ_2 که به‌نحوی مناسب انتخاب شده باشند نوشت.

(زاویه‌های دو دوران باید مساوی و مختلف‌الجهت باشند، و مضرب صحیحی از 2π نباشند؛ پس از انتخاب یک زاویه، مرکز γ_1 را می‌توان به دلخواه اختیارکرد، و سپس γ_2 به به‌طور یکتا معین می‌شود. توجه داشته باشید که در حالت کلی، عوامل دوران مستقل از ترتیب نیستند.)

۴. همهٔ تبدیلهای صحیح موبیوس (مشابهتها) یک گروه تشکیل می‌دهند. نسبت $(z_1; z_2, z_3)$ ناوردای سه‌نقطه‌ای این گروه است. به‌عکس: هر تبدیل $Z = f(z)$ که در آن $(z_1; z_2, z_3)$ ناوردا باشد، یک تبدیل صحیح موبیوس $Z = az + b$ است.

۵. همهٔ تغییر مکانها (یا حرکتها)ی $Z = e^{i\alpha}z + b$ (α حقیقی) زیرگروهی از گروه تبدیلهای موبیوس تشکیل می‌دهند. برای این گروه، فاصلهٔ $|z_۲ - z_۱|$ یک ناوردای دونقطه‌ای است.
۶. همهٔ دورانهای حول o یک گروه تشکیل می‌دهند که در آن $|z|$ ناوردای تک‌نقطه‌ای است.
۷. همهٔ انتقالهای $\mathfrak{T}_b$ یک گروه تشکیل می‌دهند که تفاضل $z_۲ - z_۱$ برای آنها ناوردای دونقطه‌ای است.
۸. قضیهٔ ج را می‌توان با استفاده از تجزیهٔ موبیوس $\mathfrak{H}$ به عواملی از نوع ساده، اثبات نمود (ر.ک. د). سه‌تای اول تبدیلهای ساده حتی نسبت سه‌نقطه را تغییر نمی‌دهند. در مورد عکس‌یابی، اگر هیچ‌یک از چهارنقطهٔ $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ صفر نباشد، داریم

$$\left(\frac{۱}{z_۱};\frac{۱}{z_۳},\frac{۱}{z_۴}\right)=\frac{z_۴}{z_۳}(z_۱;z_۳,z_۴),\qquad \left(\frac{۱}{z_۲};\frac{۱}{z_۳},\frac{۱}{z_۴}\right)=\frac{z_۴}{z_۳}(z_۲;z_۳,z_۴)$$

و بنابراین

$$\left(\frac{۱}{z_۱},\frac{۱}{z_۲};\frac{۱}{z_۳},\frac{۱}{z_۴}\right)=(z_۱,z_۲;z_۳,z_۴)$$

اگر مثلاً $z_۳ = ۰$، به موجب (۳.۴.۵) داریم

$$\left(\frac{۱}{z_۱},\frac{۱}{z_۲};\infty,\frac{۱}{z_۴}\right)=\left(\frac{۱}{z_۴};\frac{۱}{z_۲},\frac{۱}{z_۱}\right)=\frac{z_۱}{z_۲}(z_۴;z_۲,z_۱)=(z_۱,z_۲;۰,z_۴)$$

۹. فرض می‌کنیم تبدیل موبیوسی به صورت ضمنی با معادلهٔ

$$(Z,z;\gamma_۱,\gamma_۲)=k \qquad (\gamma_۱\neq\gamma_۲)$$

داده شده است که k یک ثابت مختلط ناصفر است. نشان دهید که $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ نقاط ثابت (مثال ۸، بخش ۲) این تبدیل‌اند. به‌ازای چه مقداری از k این تبدیل موبیوس یک برگشت است؟
۱۰. قضیهٔ و را بدون استفاده از نسبتهای ناهمساز، ثابت کنید.
(اگر $z_۱$ یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ نباشد، یعنی، $cz_۱^۲-(a-d)z_۱-b\neq ۰$، آنگاه از $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(z_۱)) = z_۱$ نتیجه می‌شود که $a + d = ۰$).
۱۱. هر دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}$ نگارهٔ موبیوس محور حقیقی است و لذا نقاط z آن را می‌توان با $z = \mathfrak{H}(t)$، که در آن t پارامتر حقیقی است، نمایش داد (ر.ک. مثال ۹، بخش ۱). یک نمایش پارامتری از این نوع برای دایرهٔ واحد حقیقی بیابید. نتیجه را با توجه به مفاد بخش ۶، ﻫ تعبیر کنید.

۱۲. هر پادهمنگاری، چهار نقطه با نسبت ناهمساز λ را به چهار نقطه با نسبت ناهمساز $\bar{\lambda}$ تبدیل می‌کند.

۱۳. قضیهٔ بخش ۲، مثال ۱ را می‌توان برای حالت یک دایرهٔ انگاری $\mathfrak{C}$ و انعکاس به یک دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}_\circ$ تعمیم داد. چون هر دایرهٔ حقیقی را می‌توان با یک تبدیل موبیوس بر دایرهٔ واحد حقیقی نگاشت، کافی است قضیه را به‌جای $\mathfrak{C}_\circ$ برای این دایره ثابت کرد. در این صورت انعکاس $z^* = 1/\bar{z}$، هر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ای عمود بر دایرهٔ واحدِ $\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & A \end{pmatrix}$ را ناوردا نگاه می‌دارد، و هر دایرهٔ ناوردای $\mathfrak{C}$، یک ماتریس ارمیتی با دو عنصر قطری برابر با هم دارد. با درنظرگرفتن قضیهٔ اخیر و مثال ۱۱ بخش ۱، قضیهٔ کلی زیر را داریم. هر دایرهٔ $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_\circ$ بر اثر انعکاس نسبت به $\mathfrak{C}_\circ$، بر خودش نگاشته می‌شود، اگر و فقط اگر $\mathfrak{C}$ بر $\mathfrak{C}_\circ$ عمود باشد.

۱۴. با تعمیم آخرین تبصرهٔ بخش ۶، و، می‌توان نشان داد که هر دو جفت نقطهٔ مزدوج دلخواه مفروض z_1، Z_1 و z_2، Z_2 یک برگشت یکتا را معین می‌کنند. z_1 یا z_2 و یا هر دو می‌توانند نقاط ثابت باشند. اگر هر چهار نقطه متمایز باشند، نقاط ثابت برگشت که به‌وسیلهٔ این دو جفت تعیین می‌شوند، یک مجموعهٔ همساز با هر یک از این جفتها تشکیل می‌دهند. این برگشت با تساوی زیر داده می‌شود

$$Z = \frac{(z_1 Z_1 - z_2 Z_2)z + z_2 Z_2(z_1 + Z_1) - z_1 Z_1(z_2 + Z_2)}{(z_1 + Z_1 - z_2 - Z_2)z + z_2 Z_2 - z_1 Z_1}$$

۱۵. با استفاده از روش جبری بخش۶، ه نشان دهید که یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ جهت یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را که مرکزش قطب $\mathfrak{H}$ باشد، عوض می‌کند (ر.ک. بخش ۱، الف).

۷. روابط تصویری یک‌بعدی حقیقی

الف. تصویرهای منظری (یا تصویرهای مرکزی). نقاط z و $\tilde{z}$ بر دو خط راست متمایز l و $\tilde{l}$ را متناظر در تصویر منظری گویند و نگاشتی که l را به $\tilde{l}$ می‌برد تصویر منظری نامند، اگر نقطه‌ای مانند $z_\circ$ که بر هیچ‌یک از دو خط l و $\tilde{l}$ نیست وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر z بر l، خط راستی شامل z، $z_\circ$، $\tilde{z}$ وجود داشته باشد. نقطهٔ $z_\circ$ را مرکز تصویر منظری خوانند.

قضیهٔ الف. هر تصویر منظری را می‌توان با تبدیل موبیوسی که دو نقطهٔ ثابت متمایز داشته باشد نشان داد.

برهان. هر خط از دسته خطهای راست مارّ بر $z_\circ$ با معادله‌ای به صورت

$$cz + \bar{c}\bar{z} = cz_\circ + \bar{c}\bar{z}_\circ \tag{۱.۷}$$

داده می‌شود که در آن $c \neq \circ$ پارامتری است مختلط. از این‌رو هر خط از این دسته با معادلهٔ

$$w = \frac{\bar{c}}{c} \qquad (|w| = ۱)$$

معین می‌شود. فرض می‌کنیم خط l با معادلهٔ

$$az + \bar{a}\bar{z} = a_۱ \qquad (a \neq \circ, \text{حقیقی}\, a_۱)$$

داده شده باشد. دسته‌خط (۱.۷) این خط را در نقطهٔ

$$z = \frac{a_۱\bar{c} - \bar{a}(cz_\circ + \bar{c}\bar{z}_\circ)}{a\bar{c} - \bar{a}c} = \frac{(a_۱ - \bar{a}\bar{z}_\circ)w - \bar{a}z_\circ}{aw - \bar{a}} = \mathfrak{H}_a(w)$$

می‌بَرَد. ماتریس

$$\mathfrak{H}_a = \begin{pmatrix} a_۱ - \bar{a}\bar{z}_\circ & -\bar{a}z_\circ \\ a & -\bar{a} \end{pmatrix} \tag{۱.۱.۷}$$

دارای دترمینان $|\mathfrak{H}_a| = \bar{a}(az_\circ + \bar{a}\bar{z}_\circ - a_۱) \neq \circ$ است، زیرا $z_\circ$ نقطه‌ای از l نیست.

اگر خط $\tilde{l}$ معادله‌ای به صورت $bz + \bar{b}\bar{z} = b_۱$ ($b \neq \circ$ و $b_۱$ حقیقی و $bz_\circ + \bar{b}\bar{z}_\circ \neq b_۱$) داشته باشد، آنگاه خط (۱.۷) l را در نقطهٔ

$$\tilde{z} = \mathfrak{H}_b(w)$$

می‌بَرَد که در آن ماتریس $\mathfrak{H}_b$ مطابق (۱.۱.۷) تشکیل شده است. بنابراین z، $z_\circ$، $\tilde{z}$ همخط‌اند و

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_b\mathfrak{H}_a^{-۱} \qquad \text{با} \qquad \tilde{z} = \mathfrak{H}(z), \tag{۲.۱.۷}$$

معرف تصویر منظری است.

روشن است که یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$، همان فصل مشترک l و $\tilde{l}$ است، یعنی،

$$Z_\circ = \frac{a_۱\bar{b} - b_۱\bar{a}}{a\bar{b} - b\bar{a}} \tag{۳.۱.۷}$$

نقطهٔ ثابت دیگر، مرکز $z_\circ$ تصویر منظری است

$$\mathfrak{H}_a^{-\text{۱}}(z_\circ) = \circ, \qquad \mathfrak{H}_b(\circ) = z_\circ$$

بدین‌ترتیب با توجه به (۲.۱.۷)

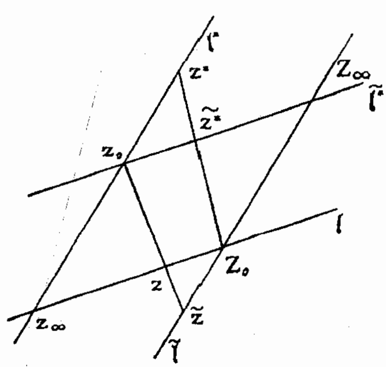
$$\mathfrak{H}(z_\circ) = z_\circ$$

و قضیهٔ ثابت شده است.

z_∞ را قطب $\mathfrak{H}$ می‌گیریم چنانکه $\mathfrak{H}(z_\infty) = \infty$ و Z_∞ را قطب $\mathfrak{H}^{-\text{۱}}$ می‌گیریم به‌طوری‌که $\mathfrak{H}(\infty) = Z_\infty$. لذا z_∞ نقطه‌ای در صفحه است که بر اثر $\mathfrak{H}$ به بینهایت می‌رود، و چون نگارهٔ l هم خطی است مثل $\tilde{l}$، نتیجه می‌گیریم که z_∞ نقطه‌ای است بر l. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود که Z_∞ نقطه‌ای است بر $\tilde{l}$ (ر.ک. شکل ۱۲). چون تصویر منظری به مرکز $z_\circ$، z_∞ را هم به ∞ بدل می‌کند و ∞ را به Z_∞، از اینجا نتیجه می‌گیریم که خط l^* که از $z_\circ$ و z_∞ می‌گذرد با $\tilde{l}$ موازی است و خط $\tilde{l}^*$ که از $z_\circ$ و Z_∞ می‌گذرد با l موازی است. بنابراین

فرع. اگر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ معرف یک تصویر منظری باشد، آنگاه $z_\circ$ و $Z_\circ$، نقاط ثابت آن، و z_∞ و Z_∞، قطبهای $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{H}^{-\text{۱}}$، جفتهای رأسهای متقابل یک متوازی‌الاضلاع‌اند، که متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ نامیده می‌شود.

تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ معرف تصویر منظری دیگری هم هست که مرکز آن $Z_\circ$ است و خط l^* را به خط $\tilde{l}^*$ بدل می‌کند.



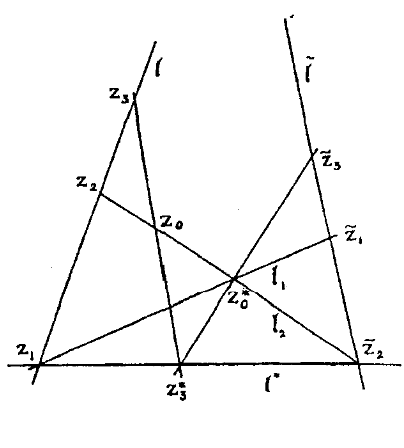
شکل ۱۲

ب. روابط تصویری. منظور از یک رابطهٔ تصویری بین دو خط راست متساوی یا متمایز، بنا به تعریف، نتیجه‌ای از یک یا چند تصویر منظری (از یکی بر دیگری) به مراکز تصویر منطبق یا متمایز است. از بحث قبل نتیجه می‌گیریم که، هر رابطهٔ تصویری بین دو خط متساوی یا متمایز l و $\tilde{l}$ در صفحهٔ مختلط را می‌توان با یک تبدیل موبیوس نشان داد.

مجموعه‌های نقاط بر دو خط (متساوی یا متمایز) را که بتوان با یک رابطهٔ تصویری به یکدیگر تبدیل نمود، مجموعهٔ نقاط تصویری می‌نامند. از قضیهٔ ج، بخش ۶، نتیجه می‌گیریم که دو دسته نقاط چهارتایی تصویری واقع بر دو خط متساوی یا متمایز، نسبتهای ناهمساز متساوی دارند.

یک بررسی سادهٔ هندسی نشان می‌دهد که هر سه نقطهٔ z_1، z_2، z_3 واقع بر یک خط را می‌توان با (حاصلضرب) نابیشتر از دو تصویر منظری متوالی، به سه نقطهٔ $\tilde{z}_1$، $\tilde{z}_2$، $\tilde{z}_3$ بر خط دیگر $\tilde{l}$ برد (شکل ۱۳). l^* خط واصل بین نقاط z_1 و $\tilde{z}_2$، و l_1 خط واصل بین نقاط z_1 و $\tilde{z}_1$، و خط l_2، واصل بین نقاط z_2 و $\tilde{z}_2$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ z_0^*، محل تلاقی l_1 و l_2 را به نقطهٔ $\tilde{z}_3$ وصل می‌کنیم؛ این خط، خط l^* را در z_3^* تلاقی می‌کند. خطی را که از نقاط z_3 و z_3^* می‌گذرد رسم می‌کنیم؛ این خط، خط l_2 را در z_0 قطع می‌کند بدین‌ترتیب z_0 مرکز آن تصویر منظری است که نقاط z_1، z_2، z_3 را به نقاط z_1، $\tilde{z}_2$، z_3^* بر خط l^* می‌برد؛ z_0^* مرکز آن تصویر منظری است که این سه نقطه را به سه نقطهٔ $\tilde{z}_1$، $\tilde{z}_2$، $\tilde{z}_3$ بر $\tilde{l}$ می‌برد.

به کمک یک رابطهٔ تصویری دیگر می‌توان سه نقطه بر $\tilde{l}$ را به هر سه نقطه‌ای بر l نگاشت. پس با نابیشتر از چهار تصویر منظری متوالی، می‌توان هر سه نقطه از یک خط را بر هر سه نقطه از همان خط نگاشت.



شکل ۱۳

با توجه به قضیهٔ د، بخش ۶، فقط یک تبدیل موبیوس وجود دارد که به‌وسیلهٔ آن می‌توان این عمل را انجام داد. چون هر رابطهٔ تصویری را می‌توان با یک تبدیل موبیوس نشان داد، نتیجه می‌گیریم که

قضیهٔ ب. فقط و فقط یک رابطهٔ تصویری وجود دارد که سه نقطه از یک خط را بر سه نقطهٔ داده شده از همان خط یا خط دیگر می‌نگارد.

تا آنجا که به نگاشت تصویری بر یک خط مربوط می‌شود، این قضیه را اصطلاحاً قضیهٔ بنیادی برای هندسهٔ تصویری یک‌بعدی حقیقی می‌نامند. در واقع در هندسهٔ اعداد مختلط ما، که آن را هندسهٔ همدیس نیز می‌نامند، خط راست خطِ تصویریِ حقیقی (بسته)، یعنی، یک دایره است. اما در مورد نگاشت از خطی بر همان خط یا خط دیگر، این قضیه به تبدیلهای میان کلاف سهموی همهٔ دایره‌ها مربوط می‌شود که نقطهٔ مشترکشان در بینهایت است (ر.ک. بخش ۴، ب (ii)).

قضیهٔ ج. هر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ معرف یک رابطهٔ تصویری از نقاط یک خط غیرمشخص l مارّ بر قطبش z_∞ است بر یک خط $\bar{l}$ مارّ بر قطب Z_∞ از تبدیل $\mathfrak{H}^{-1}$. اگر l از نقطهٔ ثابت $Z_\circ$ (یا $z_\circ$) بگذرد، $\bar{l}$ نیز از همان نقطه خواهد گذشت؛ اگر $\bar{l}$ بر خط l مارّ بر $Z_\circ$ (یا $z_\circ$) منطبق نباشد، رابطهٔ تصویری $l \to \bar{l}$ تصویر منظری است که نقطهٔ ثابتِ دیگر مرکز آن است.

برهان. اگر $\mathfrak{H}$ یک تبدیل صحیح موبیوس باشد، یکی از نقاط ثابت آن بر قطب واقع در بینهایت منطبق است، و l و همچنین نگاره‌اش $\bar{l}$، باید از نقطهٔ ثابت معین، در صورت وجود، بگذرند. اگر $\mathfrak{H}$ یک انتقال (هر دو نقطهٔ ثابت آن منطبق بر هم در بینهایت) باشد آنگاه، هر خطی را می‌توان l گرفت و $\bar{l}$ با l موازی خواهد بود. در هر صورت رابطهٔ تصویری، یک تصویر منظری به مرکزِ بینهایت خواهد بود.

ولی اگر در ماتریس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، عنصر $c \neq \circ$، $z_\circ$ و $Z_\circ$، نقاط ثابت (مساوی یا متمایز) $\mathfrak{H}$، متناهی‌اند. هر خط l که از z_∞ بگذرد بر اثر $\mathfrak{H}$ بر خطی مانند $\bar{l}$ که از Z_∞ می‌گذرد نگاشته می‌شود، و این نگاشت معرف یک رابطهٔ تصویری $l \to \bar{l}$ است. اگر نقاط ثابت متمایز باشند و قطب z_∞ با این نقاط ثابت همخط نباشد، آنگاه l، خط مارّ بر $Z_\circ$ و z_∞، به‌وسیلهٔ $\mathfrak{H}$ بر خط $\bar{l}$، مارّ بر $Z_\circ$ و قطب $\mathfrak{H}^{-1}$، یعنی Z_∞، نگاشته می‌شود. این رابطهٔ تصویری که $Z_\circ$، فصل مشترک l و $\bar{l}$، نقطهٔ ثابت آن است، یک تصویر منظری است که مرکزش $z_\circ$ دومین نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ است. از

این‌رو باز هم متوازی‌الاضلاع مشخصه‌ای به رأسهای $z_\circ$، $Z_\circ$، z_∞، Z_∞ خواهیم داشت. (ر.ک. فرع بخش ۷، الف و بخش ۸، ه).

علاوه بر این روشن است که اگر $z_\circ$، $Z_\circ$، z_∞ همخط باشند، Z_∞ بر خط واصل بین این نقاط (ر.ک. مثال ۵) قرار خواهد داشت و این خط به‌وسیلهٔ $\mathfrak{H}$ بر خودش نگاشته می‌شود. این نگاشت را می‌توان با تعدادی نابیشتر از سه تصویر منظری متوالی به‌دست آورد.[1]

به‌ویژه اگر $z_\infty = Z_\infty$، آنگاه $\mathfrak{H}$ یک برگشت است و بنابراین نمی‌توان آن را با تصویر منظری بین دو خط نشان داد (ر.ک. مثال ۱). با فرض $c \neq \circ$ دو تصویر منظری $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{B}$ را چنان می‌گیریم که تساوی $\mathfrak{B}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}$ برقرار باشد. برای مرکز $\mathfrak{U}$ نقطه‌ای مانند A را اختیار می‌کنیم که بر l، خط مارّ بر $z_\circ$ و $Z_\circ$، نباشد و عمل تصویر را از آن نقطه بر خط l' مارّ بر $z_\circ$ و موازی با $\overrightarrow{AZ_\circ}$ انجام می‌دهیم (ر.ک. شکل ۱۴). پس

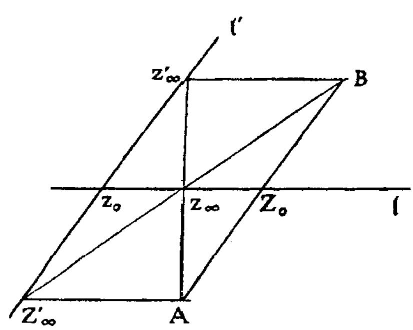
$$\mathfrak{U}(\infty) = Z'_\infty, \quad \mathfrak{U}(z_\circ) = z_\circ, \quad \mathfrak{U}(z_\infty) = z'_\infty, \quad \mathfrak{U}(Z_\circ) = \infty$$

در مورد مرکز $\mathfrak{B}$، نقطهٔ B را بر خط مارّ بر A و $z_\circ$ طوری اختیار می‌کنیم که فاصله‌اش از $Z_\circ$ با فاصله‌اش از A برابر باشد. در این صورت به موجب (۲.۵.۶) خواهیم داشت

$$\mathfrak{B}(Z'_\infty) = z_\infty, \quad \mathfrak{B}(z_\circ) = z_\circ, \quad \mathfrak{B}(z'_\infty) = \infty, \quad \mathfrak{B}(\infty) = Z_\circ$$

بنابراین

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{U}(\infty)] = z_\infty, \quad \mathfrak{B}[\mathfrak{U}(z_\circ)] = z_\circ, \quad \mathfrak{B}[\mathfrak{U}(z_\infty)] = \infty, \quad \mathfrak{B}[\mathfrak{U}(Z_\circ)] = Z_\circ$$



شکل ۱۴

۱. ر.ک. Coxeter [۲] بخش ۲.۲.۴ صفحهٔ ۳۹.

بنابراین

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{U}(z)] = \mathfrak{H}(z)$$

سرانجام حالتی را در نظر می‌گیریم که تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ یک نقطهٔ ثابت معین یکتای $z_\circ$ داشته باشد. پس این نقطه وسط خط واصل بین قطبهای z_∞، Z_∞ است (ر.ک. مثال ۶). باز هم می‌توان دو تصویر منظری $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{B}$ چنان پیدا کرد که حاصلضربشان معرف تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ شود. یک خط واسط l' غیر از خط l مارّ بر $z_\circ$ که از قطبها گذشته است انتخاب می‌کنیم. نقطه‌ای مانند A را که نه بر خط l و نه بر خط l' باشد به عنوان مرکز نخستین تصویر منظری $\mathfrak{U}$ اختیار می‌کنیم. در این صورت (ر.ک. شکل ۱۵)

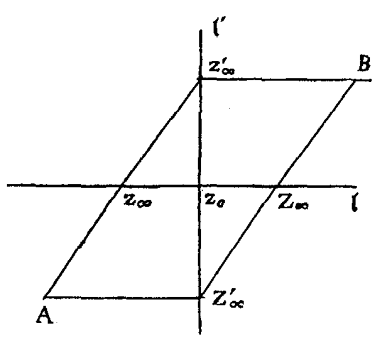
$$\mathfrak{U}(z_\infty) = z'_\infty, \quad \mathfrak{U}(z_\circ) = z_\circ, \quad \mathfrak{U}(\infty) = Z'_\infty$$

برای دومین تصویر منظری $\mathfrak{B}$، مرکز B را رأس مقابل A از متوازی‌الاضلاعی که با A، z'_∞، Z'_∞ ساخته می‌شود اختیار می‌کنیم؛ در این صورت

$$\mathfrak{B}(z'_\infty) = \infty, \quad \mathfrak{B}(z_\circ) = z_\circ, \quad \mathfrak{B}(Z'_\infty) = Z_\infty$$

بنابراین حاصلضرب $\mathfrak{B}\mathfrak{U}$ ویژگیهای مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ را داراست. از این‌رو

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{U}(z)] = \mathfrak{H}(z)$$



شکل۱۵

ج. تصویر منظری خط ـ دایره. فرض می‌کنیم $l_j (j = ۱, ۲, ۳, ۴)$ چهار خط مارّ بر $Z_۰$ با معادله‌های زیر باشند

$$c_j z + \bar{c}_j \bar{z} = c_j Z_۰ + \bar{c}_j \bar{Z}_۰ \qquad (۲.۷)$$

اگر هیچ سه‌تایی از این خطها بر هم منطبق نباشند، نسبت همساز آنها را با

$$(l_۱, l_۲; l_۳, l_۴) = (w_۱, w_۲; w_۳, w_۴), \qquad w_j = \frac{\bar{c}_j}{c_j} \quad (j = ۱, ۲, ۳, ۴)$$

تعریف می‌کنیم. چون $|w_j| = ۱$، این نسبت ناهمساز حقیقی است.

حال فرض می‌کنیم که خط l با معادلهٔ

$$az + \bar{a}\bar{z} = a_۱ \qquad (a \neq ۰ \text{، حقیقی } a_۱) \quad (۱.۲.۷)$$

از $Z_۰$ نگذرد و l_j را در نقطهٔ z_j قطع کند. در بخش ۷، **الف** نشان داده شد که تبدیل موبیوسی مانند $\mathfrak{H}_a$ وجود دارد که $\mathfrak{H}_a(w_j) = z_j$. بنابراین

$$(l_۱, l_۲, ; l_۳, l_۴) = (z_۱, z_۲; z_۳, z_۴) \qquad (۲.۲.۷)$$

مستقل از انتخاب l است.

این رابطه را می‌توان بسط داد. فرض می‌کنیم $Z_۰$ نقطه‌ای بر دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C} = (\gamma, \rho)$ باشد و خطوط (۲.۷) این دایره را در نقاط Z_j قطع کنند. بنابراین به‌ازای هر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ مارّ بر $Z_۰$ داریم

$$(l_۱, l_۲; l_۳, l_۴) = (Z_۱, Z_۲; Z_۳, Z_۴) \qquad (۳.۷)$$

برای اثبات این تساوی تبدیل موبیوسی مانند $\mathfrak{H}$ می‌سازیم که معرف تصویر منظری از l به $\mathfrak{C}$ به مرکز $Z_۰$ باشد. فرض می‌کنیم

$$cz + \bar{c}\bar{z} = cZ_۰ + \bar{c}\bar{Z}_۰ \qquad (۱.۳.۷)$$

خط دلخواهی باشد که از $Z_۰$ می‌گذرد. پس یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}_a$ وجود دارد چنان‌که $z = \mathfrak{H}_a(w)$، و $(w = \bar{c}/c)$ نقطه‌ای است که خط (۱.۳.۷) خط l را می‌برد.

نقطهٔ Z دومین نقطهٔ تلاقی خط (۱.۳.۷) با دایرهٔ $\mathfrak{C}$ چنین به‌دست می‌آید. چون

$$\rho = |Z_۰ - \gamma|$$

معادلهٔ $\mathfrak{C}$، یعنی، $(Z-\gamma)(\bar{Z}-\bar{\gamma})=\rho^{۲}$ به صورت زیر در می‌آید

$$(Z-Z_\circ)(\bar{Z}-\bar{Z}_\circ)-(\bar{\gamma}-\bar{Z}_\circ)(Z-Z_\circ)-(\gamma-Z_\circ)(\bar{Z}-\bar{Z}_\circ)=\circ$$

به‌موجب (۱.۳.۷) داریم

$$\bar{Z}-\bar{Z}_\circ=-\frac{c}{\bar{c}}(Z-Z_\circ)$$

و از این‌رو به‌ازای $Z\neq Z_\circ$ داریم

$$(Z-Z_\circ)+w(\bar{\gamma}-\bar{Z}_\circ)-(\gamma-Z_\circ)=\circ$$

از این‌رو

$$Z=\gamma+\mathfrak{H}_a^{-۱}(z)(\bar{Z}_\circ-\bar{\gamma})$$

تبدیل موبیوسی است که معرف تصویر منظری از l به $\mathfrak{C}$ به مرکز $Z_\circ$ است.
ماهیت این تبدیل به مواضع نسبی l و $\mathfrak{C}$ بستگی دارد که در مثال ۴ بررسی خواهد شد.

مثالها

۱. این واقعیت که هرگز نمی‌توان یک تصویر منظری را با یک برگشت (که در آن $Z_\infty=z_\infty$) نشان داد از اینجا روشن می‌شود که اثر ماتریس $\mathfrak{H}_b\mathfrak{H}_a^{-۱}$ (ر.ک. برهان قضیهٔ **الف**)، یعنی،

$$(\bar{a}b+\bar{b}a)z_\circ+۲\bar{a}\bar{b}\bar{z}_\circ-(a_۱\bar{b}+b_۱\bar{a})$$

هرگز نمی‌تواند صفر شود مگر وقتی که $z_\circ=Z_\circ$ [ر.ک. (۳.۱.۷)]، که غیرممکن است.

۲. تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ با دو نقطهٔ ثابت معین و متمایز $z_\circ$ و $Z_\circ$ و قطب z_∞ به صورت ضمنی با

$$(Z,\infty;z_\circ,Z_\circ)=(z,z_\infty;z_\circ,Z_\circ)$$

داده می‌شود. پس

$$(Z_\infty,\infty;z_\circ,Z_\circ)=(\infty,z_\infty;z_\circ,Z_\circ)$$

که با رابطهٔ

$$Z_\infty - Z_\circ = -(z_\infty - z_\circ)$$

هم‌ارز است، مبین آن است که $z_\circ$، $Z_\circ$ و z_∞، Z_∞ دو جفت رأسهای متقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند. این همان متوازی‌الاضلاع مشخصه است که نخستین بار توسط یاکوب‌اشتال (Jacobsthal) [۳] (ر.ک. بخش ۷، **الف**) ارائه شده است.

۳. فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}_\circ$ دایره‌ای به مرکز $z_\circ$ و شعاع $\rho > \circ$ باشد. خط راست (۱.۷)، $\mathfrak{C}_\circ$ را در دو نقطهٔ z و $\tilde{z} = ۲z_\circ - z$ می‌برد که در معادلهٔ درجهٔ دوم

$$\text{اگر } w = \frac{\bar{c}}{c}, \qquad (z - z_\circ)^۲ + w\rho^۲ = \circ$$

صدق می‌کنند. چهار خط l_j، مارّ بر $z_\circ$، که $\mathfrak{C}_\circ$ را به ترتیب در نقاط $z_j (j = ۱, ۲, ۳, ۴)$ می‌برند، نسبت ناهمساز زیر را دارند

$$(l_۱, l_۲; l_۳, l_۴) = ((z_۱ - z_\circ)^۲, (z_۲ - z_\circ)^۲; (z_۳ - z_\circ)^۲, (z_۴ - z_\circ)^۲)$$
$$= (z_۱, z_۲; z_۳, z_۴)(z_۱, z_۲; \tilde{z}_۳, \tilde{z}_۴)$$

۴. فرض می‌کنیم $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ دایرهٔ

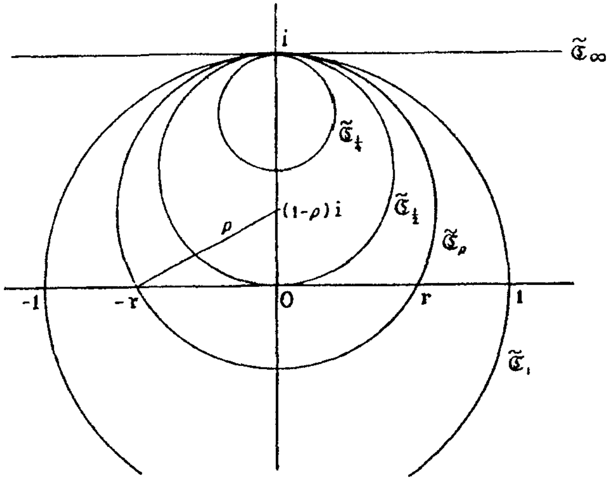
$$(Z - (۱ - \rho)i)(\bar{Z} + (۱ - \rho)i) = \rho^۲ \qquad (-\infty < \rho < \infty)$$

باشد. همهٔ این دایره‌های $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ دسته سهموی همهٔ دوایری هستند مارّ بر $Z_\circ = i$ که مراکز آنها $\gamma = (۱ - \rho)i$، بر محور انگاری قرار دارند. تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}_\rho$ را که به‌ازای مقادیر مختلف ρ معرف نگاشت منظری محور حقیقی (l) بر دایرهٔ $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ است (ر.ک. بخش ۷، ج)، تعیین می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\rho > \frac{۱}{۲}$، لذا دایرهٔ $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ محور حقیقی را در دو نقطهٔ $\pm r$ می‌برد که

$$r = \sqrt{۲\rho - ۱} \qquad \text{(ر.ک. شکل ۱۶)}$$

پس این نقاط، نقاط ثابت تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}_\rho$ هستند که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$(Z, i; -r, r) = (z, \infty; -r, r)$$



شکل۱۶

که از آنجا

$$Z = \mathfrak{H}_\rho(z) = \frac{iz + r^۲}{z + i} \qquad (۴.۷)$$

اما، در واقع این معادله، تبدیل موبیوس مطلوب است به‌ازای همهٔ مقادیر ρ. در اینجا r و $-r$ نقاط ثابت و i قطب $\mathfrak{H}_\rho^{-۱}$ است و ρ هر مقدار حقیقی می‌تواند باشد. علاوه بر این نقاط

$$z = x(\text{حقیقی}), \qquad Z = \frac{ix + r^۲}{x + i}, \qquad Z_\circ = i$$

همخط‌اند. زیرا که نسبت $(Z - i)/(x - i) = (r^۲ + ۱)/(x^۲ + ۱)$ حقیقی است. بنابراین $\mathfrak{H}_\rho$ معرف تصویر منظری به مرکز i است.

اگر $\rho < \frac{۱}{۲}$، نقاط ثابت $\mathfrak{H}_\rho$ دو نقطهٔ حقیقی متمایز تقاطع دایرهٔ $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ با محور حقیقی است. اگر $\rho = \frac{۱}{۲}$، این دو نقطهٔ ثابت بر هم منطبق‌اند و بنابراین فقط یک نقطهٔ ثابت $r = \circ$ وجود خواهد داشت. اگر $\rho > \frac{۱}{۲}$، نقاط ثابت چنین‌اند

$$\left.\begin{array}{c} r \\ \bar{r} \end{array}\right\} = \pm r = \pm i\sqrt{(۱ - ۲\rho)}$$

این نقاط نسبت به محور حقیقی و همچنین نسبت به دایرهٔ $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$ قرینه هستند.

۵. با استفاده از نمادهای تعریف‌شده در بخشهای **الف** و **ب**، نشان دهید که دو نسبت $(z_\circ - Z_\infty)/(Z_\circ - Z_\infty)$ و $(z_\circ - z_\infty)/(Z_\circ - z_\infty)$ عکس یکدیگرند. از این‌رو اگر سه نقطه

از چهار نقطهٔ $z_\circ$، $Z_\circ$، z_∞، Z_∞ بر یک خط واقع باشند، نقطهٔ چهارم هم بر همان خط واقع است.
۶. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ماتریس تبدیل موبیوسی باشد که فقط یک نقطهٔ ثابت معین یکتای $z_\circ$ دارد. در این صورت

$$z_\circ = \frac{a-d}{۲c} = \frac{۱}{۲}(z_\infty + Z_\infty)$$

۷. دستگاه همهٔ روابط تصویری یک‌بعدی در صفحه گروه نیست. ترکیب دو رابطهٔ تصویری ممکن است، اگر و فقط اگر نگارهٔ خط اولی بر خطی که دومی بر آن عمل می‌کند منطبق باشد. ولی زیر دستگاه همهٔ نگاشتهای روابط تصویریِ داده شده بر خودش، یک گروه تشکیل می‌دهد (ر.ک. بخش ۸، د).
۸. نگاشتی که در بخش ۷، ج، مطالعه شد به صورت یک تصویر گنجنگاشتی صفحه ظاهر می‌شود. فرض کنید $\mathfrak{C}$ دایرهٔ واحد $z\bar{z} = ۱$ باشد و $Z_\circ = -i$. در این صورت شعاع تصویر (۱.۳.۷) با معادلهٔ $cz + \bar{c}\bar{z} = (\bar{c} - c)i$ داده می‌شود. دومین نقطهٔ تقاطع آن با دایرهٔ واحد نقطهٔ $\zeta = \xi + i\eta = iw(w = \bar{c}/c)$ است. فصل مشترک آن با محور حقیقی چنین خواهد شد

$$z = x = i\frac{\bar{c} - c}{\bar{c} + c} = i\frac{w - ۱}{w + ۱} = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{۲ - i(\zeta - \bar{\zeta})} = \frac{\xi}{۱ + \eta}$$

این معادله را با معادلهٔ (۱.۳.۳) مقایسه کنید.

۸. مشابهت و رده‌بندی تبدیلهای موبیوس

الف. واردکردن متغیری جدید. در بخش ۶، ه چگونگی تغییر ماتریس ارمیتی یک دایره را به کمک یک تبدیل موبیوس، وقتی متغیر جدیدی وارد می‌شود، بررسی کردیم. اکنون مسئلهٔ متناظر چگونگی تغییر $\mathfrak{H}$، ماتریس تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$، را مطالعه می‌کنیم وقتی متغیرهای z و Z همزمان به متغیرهای جدید

$$z^* = \mathfrak{T}(z), \qquad Z^* = \mathfrak{T}(Z), \qquad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}, \qquad |\mathfrak{T}| \neq \circ \qquad (۱.۸)$$

تبدیل می‌شوند.

فرض می‌کنیم $Z = f(z)$ تابع مختلط ـ مقدار دلخواهی باشد. اگر رابطهٔ $Z^* = f^*(z^*)$ را به صورت نتیجه‌ای از (۱.۸) داشته باشیم، تابع f^* را با f متشابه خواهیم گفت. عبارت صریح f^* را به آسانی می‌توان پیدا کرد

$$Z^* = \mathfrak{T}(Z) = \mathfrak{T}[f(z)] = \mathfrak{T}\{f[\mathfrak{T}^{-۱}(z^*)]\} \qquad (۱.۱.۸)$$

اگر $f(z) = \mathfrak{H}(z)$ یک تبدیل موبیوس باشد، هر تبدیل متشابه آن هم یک تبدیل موبیوس $Z^* = \mathfrak{H}^*(z^*)$ است که ماتریس آن چنین است:

$$\mathfrak{H}^* = q\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱} \qquad (q \neq ۰) \quad (۲.۱.۸)$$

اگر $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$ (ماتریس واحد)، آنگاه به‌ازای هر $\mathfrak{T}$، $\mathfrak{H}^* = q\mathfrak{E}$؛ از این‌رو فقط تبدیل همانی با تبدیل همانی متشابه است.

ماتریس $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ را با ماتریس $\mathfrak{H}$ متشابه گویند. از اصول جبر ماتریسها معلوم می‌شود (در حالت کنونی از ماتریسهای دو سطری به سهولت تحقیق می‌شود) که ماتریسهای متشابه، دترمینانهای برابر و اثرهای برابر دارند. از این‌رو

$$\delta = |\mathfrak{H}| = ad - bc, \qquad \operatorname{tr}\mathfrak{H} = a + d = \tau$$

ناورداهای مشابهت‌اند، یعنی،

$$|\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}| = |\mathfrak{H}|, \qquad \operatorname{tr}(\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}) = \operatorname{tr}\mathfrak{H} \qquad (۳.۱.۸)$$

دو تبدیل موبیوس با ماتریسهای متشابه، متشابه‌اند [$q = ۱$ در (۲.۱.۸)]، ولی ماتریسهای دو تبدیل متشابه موبیوس ناورداهای مشابهتی دارند که به‌وسیلهٔ

$$|\mathfrak{H}^*| = q^۲|\mathfrak{H}|, \qquad \operatorname{tr}\mathfrak{H}^* = q\operatorname{tr}\mathfrak{H}$$

به‌هم مربوط‌اند. از این‌رو خارج‌قسمت $(\operatorname{tr}\mathfrak{H})^۲/|\mathfrak{H}|$ یک ناوردای مشابهت تبدیل موبیوسی با ماتریس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ خواهد بود. در مورد تبدیل همانی $(\mathfrak{H} = q\mathfrak{E})$ مقدار این خارج‌قسمت ۴ است بنابراین، می‌توانیم طول

$$\sigma = \sigma(\mathfrak{H}) = \frac{(\operatorname{tr}\mathfrak{H})^۲}{|\mathfrak{H}|} - ۴ = \frac{\tau^۲}{\delta} - ۴ = \frac{(a-d)^۲ + ۴bc}{ad - bc} \qquad (۴.۱.۸)$$

را به عنوان ناوردای مشابهت اصلی موبیوس معرفی کنیم. لذا، اگر تبدیلهای $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{H}^*$ متشابه باشند.

$$\sigma(\mathfrak{H}^*) = \sigma(\mathfrak{H}) \qquad (۵.۱.۸)$$

هر تبدیل $\mathfrak{H}$ با خودش متشابه است (با گرفتن $\mathfrak{E} = \mathfrak{T}$). اگر همان‌گونه که در (۲.۱.۸) بیان شده است $\mathfrak{H}^*$ با $\mathfrak{H}$ متشابه باشد، آنگاه $\mathfrak{H}$ نیز با $\mathfrak{H}^*$ متشابه است

$$\mathfrak{H} = \frac{۱}{q}\mathfrak{T}^{-۱}\mathfrak{H}^*\mathfrak{T} = \frac{۱}{q}\mathfrak{T}^{-۱}\mathfrak{H}^*(\mathfrak{T}^{-۱})^{-۱}$$

سرانجام اگر $\mathfrak{H}_۲$ با $\mathfrak{H}_۱$ متشابه باشد و $\mathfrak{H}_۳$ با $\mathfrak{H}_۲$، آنگاه $\mathfrak{H}_۳$ هم با $\mathfrak{H}_۱$ متشابه است:

اگر $\mathfrak{H}_۲ = \mathfrak{T}_۱\mathfrak{H}_۱\mathfrak{T}_۱^{-۱}$ و $\mathfrak{H}_۳ = \mathfrak{T}_۲\mathfrak{H}_۲\mathfrak{T}_۲^{-۱}$، آنگاه $\mathfrak{H}_۳ = (\mathfrak{T}_۲\mathfrak{T}_۱)\mathfrak{H}_۱(\mathfrak{T}_۲\mathfrak{T}_۱)^{-۱}$.[۱]
از این‌رو همهٔ تبدیلهای $\mathfrak{H}$ متشابه با یک تبدیل $\mathfrak{H}_۰$ با هم متشابه‌اند؛ این تبدیلها (یعنی، یک رده از عناصر مزدوج) در گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس یک رده تشکیل می‌دهند. هر عنصر یک رده را می‌توان از یک عنصر دلخواه $\mathfrak{H}_۰$ رده به وسیلهٔ یک تبدیل مشابهت، با ماتریس مناسبی مانند $\mathfrak{T}$، یعنی، به صورت

$$\mathfrak{H} = q\mathfrak{T}\mathfrak{H}_۰\mathfrak{T}^{-۱}$$

به‌دست آورد. بنابراین هر تبدیل موبیوس فقط و فقط در یک رده قرار دارد، و از این‌رو دو ردهٔ متمایز، یعنی دو رده‌ای که همهٔ عناصرشان مشترک نیستند، در واقع هیچ عنصر مشترکی نخواهند داشت.

ب. صورتهای نرمالِ تبدیلهای موبیوس. دستگاهی از تبدیلهای موبیوس را که یک و فقط یک عنصر از هر رده را دربر داشته باشد، دستگاه کامل صورتهای نرمال گویند. برای تعیین چنین دستگاهی نقاط ثابت یک تبدیل موبیوس، یعنی $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، اساسی هستند. این اعداد ریشه‌های معادلهٔ $\mathfrak{H}(z) = z$، یعنی، معادلهٔ

$$cz^۲ - (a-d)z - b = ۰ \qquad (۲.۸)$$

هستند. از این‌رو حداکثر دو نقطهٔ ثابت وجود دارد که می‌توانند منطبق هم باشند. اگر $c \neq ۰$، هر دوی آنها معین هستند؛ اگر $c = ۰$ و $a \neq d$، یکی از آنها نامتناهی خواهد شد، و اگر $c = ۰$ و $a = d$، هر دو آنها بینهایت خواهند بود. تبدیل موبیوسی که یک نقطهٔ ثابت در بینهایت داشته

۱. خلاصه: مشابهت، انعکاسی، متقارن و ترایاست.

باشد، تبدیل صحیح خواهد بود؛ اگر هر دو نقطهٔ ثابت در بینهایت بر هم منطبق باشند، این تبدیل یک انتقال خواهد بود.

اگر z_∞ قطب $\mathfrak{H}$ باشد و $Z_\infty = \mathfrak{H}(\infty)$ «قطب معکوس» $\mathfrak{H}$، آنگاه

$$\gamma_۱ + \gamma_۲ = z_\infty + Z_\infty \tag{۱.۲.۸}$$

اگر γ یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ باشد، آنگاه $\mathfrak{T}(\gamma)$ یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ است؛ زیرا اگر $\mathfrak{H}(\gamma) = \gamma$، آنگاه

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}[\mathfrak{T}(\gamma)] = \mathfrak{T}\mathfrak{H}(\gamma) = \mathfrak{T}(\gamma)$$

این نیز روشن است که تعداد نقاط ثابت متمایز هر دو تبدیل متشابه موبیوس یکی است.

لم. هر تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ با یک تبدیل صحیح

$$Z^* = \mathfrak{H}^*(z^*) = kz^* + t$$

متشابه است. مقدار ثابت k با ردهٔ $\mathfrak{H}$ معین می‌شود (یعنی برای همهٔ تبدیلهای متشابه یک مقدار است)؛ ممکن است به‌جای آن $۱/k$ قرار داد. اگر $k \neq ۱$، عدد t دلخواه است.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ ناصحیح باشد: پس $c \neq ۰$. فرض می‌کنیم γ یک جواب معادلهٔ (۲.۸) باشد. با تبدیل

$$z^* = \mathfrak{T}(z) = \frac{۱}{z-\gamma}, \qquad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -\gamma \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathfrak{T}(\gamma) = \infty$، از $\mathfrak{H}$ به تبدیل متشابهی که ∞ نقطهٔ ثابت آن، و بنابراین صحیح است می‌رسیم:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}(z^*) = kz^* + t, \qquad \mathfrak{H}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$$

چون $|\mathfrak{H}^*| = k$ و $\operatorname{tr}\mathfrak{H}^* = k + ۱$، داریم

$$\sigma = \sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{H}^*) = \frac{(k+۱)^۲}{k} - ۴ = \frac{(k-۱)^۲}{k} = k + \frac{۱}{k} - ۲ \tag{۳.۸}$$

به‌ازای هر عدد مختلط σ، یک $\mathfrak{H}$، و بنابراین یک ردهٔ $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1}$ چنان وجود دارد که $\sigma = \sigma(\mathfrak{H})$. فقط لازم است k، ریشهٔ معادله درجهٔ دوم (۳.۸)، را به‌دست آوریم. در این صورت ریشهٔ دیگر $1/k$ است. در واقع $Z^* = kz^*$، و ماتریس $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\tilde{Z} = (1/k)\tilde{z}$ تبدیلهای متشابه‌اند (ر.ک. مثال ۲). علاوه بر این اگر $k \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{t}{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سپس می‌توان با یک تبدیل مشابهت، مثلاً با تبدیلی که نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}^*$، یعنی $\gamma_1^* = -t/(k-1)$ را به صفر بدل می‌کند ثابت t را به صفر تبدیل کرد.

اما $k = 1$، اگر و فقط اگر $\sigma = 0$. در این حالت یا $\mathfrak{H}^*$، و در نتیجه $\mathfrak{H}$، تبدیل همانی $\mathfrak{E}$ است، و یا $\mathfrak{H}^*$ انتقالی به صورت $Z^* = z^* + t$ $(t \neq 0)$ است. با گذاردن $z^* = t\tilde{z}$ و $Z^* = t\tilde{Z}$، می‌توان این انتقال را به

$$\tilde{Z} = \tilde{z} + 1، \quad \text{ماتریس} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۱.۳.۸}$$

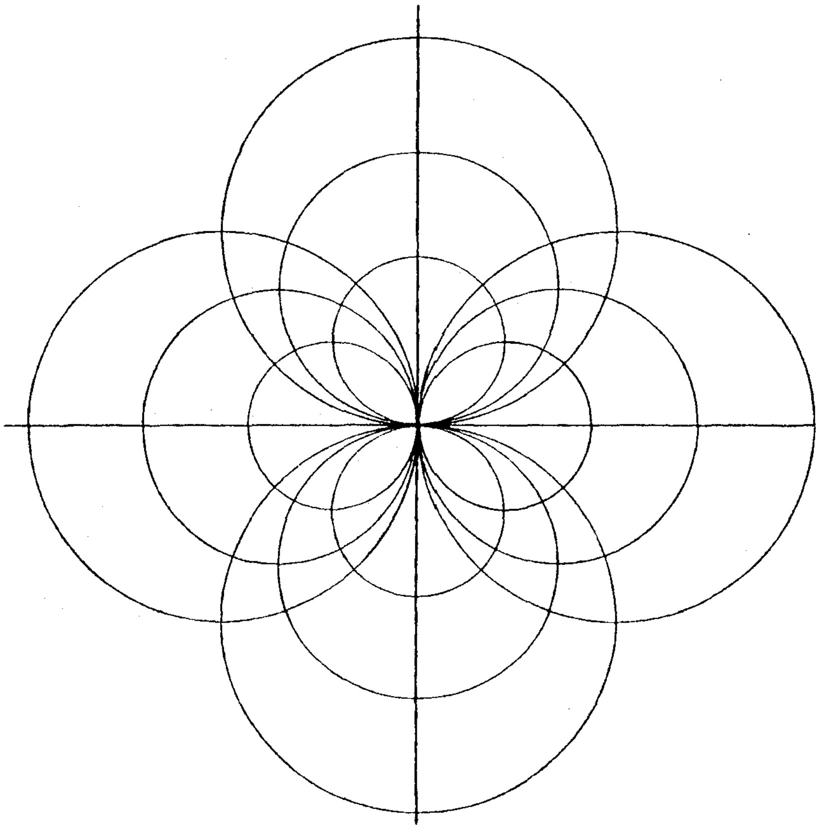
تبدیل نمود. از این‌رو همهٔ انتقالها با یکدیگر متشابه‌اند.

هر تبدیل $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$ را که در آن $\sigma = \sigma(\mathfrak{H}) = 0$، و با یک انتقال (با نقطهٔ ثابت در ∞) متشابه است، باید تبدیلی دانست با یک نقطهٔ ثابت تنها (متناهی یا نامتناهی). همهٔ این تبدیلها را سهموی می‌نامند. همهٔ تبدیلهای سهموی یک رده تشکیل می‌دهند. نمونهٔ این رده «صورت نرمال» (۱.۳.۸) است. یک دسته دایرهٔ سهموی وجود دارد که هر یک بر اثر $\mathfrak{H}$ ناورداست. این دسته دایره نگارهٔ دستهٔ همهٔ خطهای موازی با محور حقیقی بر اثر تبدیل موبیوس $\mathfrak{T}$ است که (۱.۳.۸) را به $\mathfrak{H}$ تبدیل می‌کند (ر.ک. شکل ۱۷).

اگر $\sigma \neq 0$، آنگاه $k \neq 1$، و صورت نرمال $\mathfrak{H}$ و نیز نمونهٔ ردهٔ $\mathfrak{H}$ چنین داده می‌شود

$$\tilde{Z} = k\tilde{z}، \quad \text{ماتریس} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۲.۳.۸}$$

قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}_1$ و $\mathfrak{H}_2$ دو تبدیل موبیوس، متمایز از تبدیل همانی باشند. این تبدیلها



شکل۱۷. دسته‌های سهموی متعامد.

با هم متشابه‌اند، فقط و فقط اگر

$$\sigma(\mathfrak{H}_۱) = \sigma(\mathfrak{H}_۲)$$

برهان. در حالت $\sigma = ۰$ این قضیه اندکی قبل اثبات شد و به موجب (۵.۱.۸) اگر $\sigma \neq ۰$، این شرط، شرط لازم نیز هست. حال فرض می‌کنیم این شرط برقرار است و $\sigma \neq ۰$. چون

$$\sigma(\mathfrak{H}_۱) = \sigma\begin{pmatrix} k_۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} \frac{۱}{k_۱} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \sigma(\mathfrak{H}_۲) = \sigma\begin{pmatrix} k_۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$= k_۱ + \frac{۱}{k_۱} - ۲, \qquad\qquad = k_۲ + \frac{۱}{k_۲} - ۲$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم: $k_1 = k_2$ و یا $k_2 = 1/k_1$. از این‌رو $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، و بنابراین $\mathfrak{H}_1$ و $\mathfrak{H}_2$ متشابه‌اند.

k را ثابت مشخصهٔ یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ گویند. این عدد ردهٔ $\mathfrak{H}$ را معین می‌کند، ولی این رده فقط مقدار k یا معکوس آن را معین می‌کند. هر رده، بجز رده‌ای که فقط شامل عنصر همانی $\mathfrak{E}$ است، مقدار ناوردای σ را به‌طور یکتا تعیین می‌کند و خودش به وسیلهٔ مقدار σ به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

یک مجموعهٔ کامل از صورتهای نرمال دیگری برای همهٔ تبدیلهای نابرگشتی در مثال ۱۴،بخش ۱۰، به‌دست داده خواهد شد.

ج. تبدیلهای هذلولوی، بیضوی، و ثابت زاویه‌ای. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی با دو نقطهٔ ثابت متمایز γ_1 و γ_2 باشد. در این صورت $k \neq 1$، یعنی، $\sigma \neq 0$. این تبدیل با تبدیلی مانند $\mathfrak{T}$ که γ_1 را به 0 و γ_2 را به ∞ منتقل می‌کند، یعنی

$$z^* = \mathfrak{T}(z) = \frac{z-\gamma_1}{z-\gamma_2}, \qquad Z^* = \mathfrak{T}(Z) \tag{۴.۸}$$

به صورت نرمال مشابهتش تبدیل می‌شود. بنابراین $\mathfrak{H}$ به صورت ضمنی با

$$\frac{Z-\gamma_1}{Z-\gamma_2} = k\frac{z-\gamma_1}{z-\gamma_2} \tag{۱.۴.۸}$$

و یا با

$$(Z, z; \gamma_1, \gamma_1) = k \qquad \text{(ر.ک. مثال ۹، بخش ۶)} \tag{۲.۴.۸}$$

تعریف می‌شود که در آن k ثابت مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ است.

اگر دو مقدار متناظر z و $Z = \mathfrak{H}(z)$ (متمایز از γ_1 و γ_2) معلوم باشند. این فرمول عبارت صریحی برای k خواهد داد. مثلاً اگر γ_1 و γ_2 هر دو معین باشند، داریم

$$k = (Z_\infty, \infty; \gamma_1, \gamma_2) = \frac{Z_\infty - \gamma_1}{Z_\infty - \gamma_2} = \frac{a - c\gamma_1}{a - c\gamma_2} \tag{۳.۴.۸}$$

با قراردادن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (۲.۸) به‌جای γ_1 و γ_2 خواهیم داشت

$$k = \frac{\tau + \sqrt{(\sigma\delta)}}{\tau - \sqrt{(\sigma\delta)}} \tag{۴.۴.۸}$$

تبدیل $\mathfrak{H}$ را به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم

بنابر (۳.۸) $\begin{cases} \text{تبدیل بیضوی} & \text{اگر } |k| = 1\text{، یعنی، } -4 \leq \sigma < 0 \\ \text{تبدیل هذلولوی خاص} & \text{اگر } k > 0\text{، یعنی، } \sigma > 0 \\ \text{تبدیل هذلولوی غیرخاص[1]} & \text{اگر } k < 0\text{، یعنی، } \sigma \leq -4 \\ \text{تبدیل ثابت زاویه‌ای} & \text{اگر } |k| \neq 1 \text{ و } k \text{ حقیقی نباشد، یعنی، } \sigma \text{ حقیقی نباشد.} \end{cases}$

هر تبدیل بیضوی $\mathfrak{H}$ با یک دوران $Z^* = e^{i\alpha}z^*$ حول o به زاویهٔ $\alpha = \pm\text{arc } k$ متشابه است (ر.ک. بخش ۶، ج، ۲). بدین‌ترتیب $\mathfrak{H}$ دوایر دستهٔ هذلولوی را که نقطه‌دایره‌های آنها نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، یعنی γ_1، γ_2 هستند ناوردا می‌گذارد. طبق (۳.۸) داریم

$$\sigma = -4(\sin \tfrac{1}{2}\alpha)^2 \tag{۵.۴.۸}$$

یک شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد، از رابطهٔ (۴.۴.۸) بلافاصله نتیجه می‌شود

$$|\tau - \sqrt{(\sigma\delta)}| = |\tau + \sqrt{(\sigma\delta)}|$$

که با

$$\frac{1}{2}(\bar{\tau}\sqrt{(\sigma\delta)} + \tau\sqrt{(\sigma\delta)}) = \operatorname{Re}[\bar{\tau}\sqrt{(\sigma\delta)}] = 0 \tag{۶.۴.۸}$$

یا $\bar{\tau}^2(\tau^2 - 4\delta) < 0$، یا اگر $\tau \neq 0$ با

$$\tau^2 \text{ و } \delta \text{ کمانهای مساوی دارند و } 4|\delta| > |\tau|^2 \tag{۷.۴.۸}$$

هم‌ارز است.

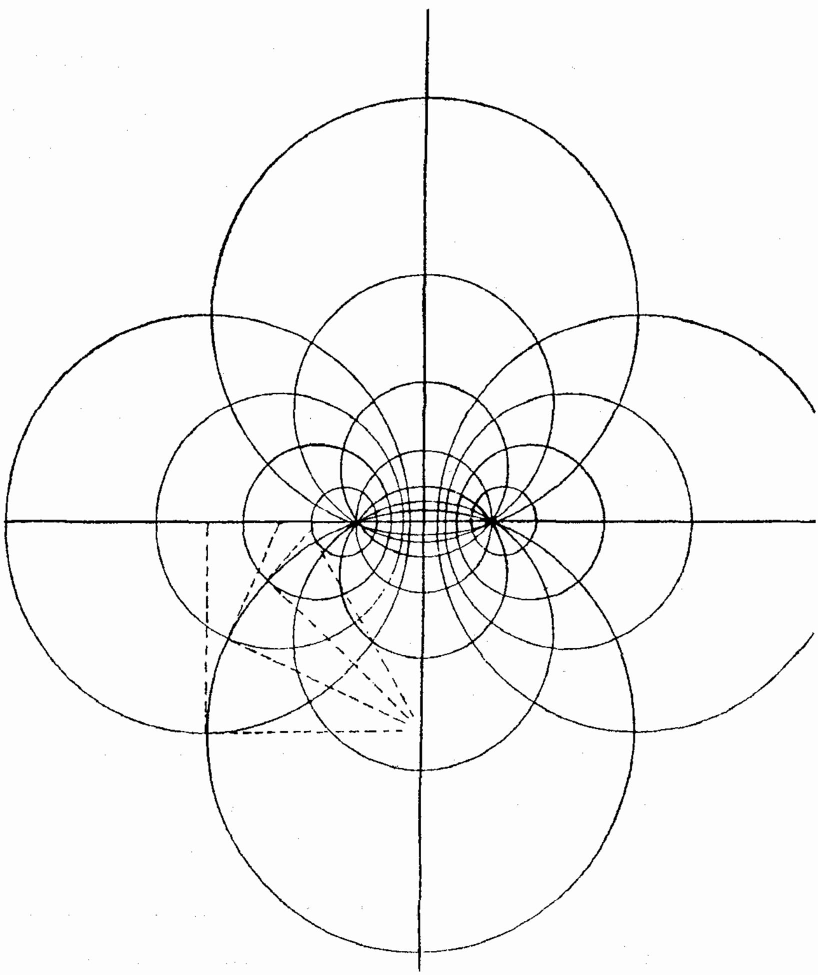
اگر $\tau = 0$، یعنی $k = -1$، یعنی $\sigma = -4$، این تبدیل با تبدیل $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ که معرف تبدیل $Z^* = -z^*$ است متشابه خواهد بود. این تبدیل یک برگشت است. از آنجاکه هر تبدیل متشابه با یک برگشت، خودش برگشت است، ملاحظه می‌شود که $\mathfrak{H}$ یک برگشت است (همین‌طور ر.ک. قضیه ه، بخش ۶). به‌عکس هر برگشتی با $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ متشابه است.

---

۱. معمولاً تبدیلهای هذلولوی غیرخاص را «ثابت زاویه‌ای به زاویهٔ π» گویند. با مستثناکردن اینها از تبدیلهای ثابت زاویه‌ای می‌توان گفت که فقط آن تبدیلهایی ثابت زاویه‌ای هستند که در آنها هیچ دایره‌ای ناوردا نباشد (ر.ک. توضیح زیر) چند ساده‌سازی دیگر از این ترتیب را P. Scherk نتیجه گرفته است.

یک تبدیل هذلولوی خاص $\mathfrak{H}$ با یک اتساع $Z^* = \rho z^*$ $(\rho > \circ)$ متشابه است، که در آن $\rho = k$ یا $\rho = \frac{1}{k}$ (ر.ک. بخش ۶، ج، ۳). دسته دایره‌ای که هر یک از آنها بر اثر $\mathfrak{H}$ به خودش تبدیل می‌شود، دستهٔ بیضوی و متشکل از همهٔ دوایری است که از γ_1 و γ_2، دو نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$، می‌گذرند. این دسته دایره بر دستهٔ هذلولوی دوایر ناوردای یک تبدیل بیضوی با همان نقاط ثابت عمود است (شکل ۱۸ را ببینید).

یک تبدیل هذلولوی غیرخاص $\mathfrak{H}$ با یک اتساع $Z^* = -\rho z^*$ $(\rho > \circ)$، که در آن $\rho = -k$



شکل۱۸. دسته دایره‌های بیضوی و هذلولی متعامد.

یا $\rho = -\frac{۱}{k}$، متشابه است. به‌روشنی دیده می‌شود که دو تبدیل

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} -\rho & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T} \quad و \quad \mathfrak{H}_۰ = \mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} \rho & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T}$$

نقاط ثابت واحد و دسته دایرهٔ ناوردای واحدی دارند.

ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathfrak{H}_۰^{-۱}\mathfrak{H} = \mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{۱}{\rho} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} -\rho & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T} = \mathfrak{I}$$

یک برگشت است، یعنی، تنها تبدیل در خانوادهٔ همهٔ تبدیلهای موبیوسی که مانند $\mathfrak{H}_۰$ و $\mathfrak{H}$، همان نقاط ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، را دارند. بنابر (۲.۴.۸) $\mathfrak{I}$ با

$$(Z, z; \gamma_۱, \gamma_۲) = -۱$$

تعریف می‌شود. درعین‌حال نشان دادیم که به‌ازای هر تبدیل هذلولوی غیرخاص، یک تبدیل هذلولوی خاص $\mathfrak{H}_۰$ و یک برگشت $\mathfrak{I}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_۰\mathfrak{I} \tag{۸.۴.۸}$$

یک تبدیل ثابت زاویه‌ای $\mathfrak{K}$، هیچ دایرهٔ ناوردایی در صفحه ندارد. زیرا اگر

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

دایره‌ای در صفحهٔ z^* که بر اثر $Z^* = kz^*$ ناورداست وجود داشته باشد، آنگاه باید $\mathfrak{C}$ با دایرهٔ

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} k\overline{k}A & kB \\ \overline{k}C & D \end{pmatrix}$$

برابر باشد. از این‌رو یا $k\overline{k} = ۱$ و $B = ۰$ و یا $A = D = ۰$ و k حقیقی است (ر.ک. مثال ۶).

چون صورت نرمال یک تبدیل ثابت زاویه‌ای، حاصلضرب یک دوران $\mathfrak{R}_\alpha(\alpha \neq n\pi)$ و یک اتساع $\mathfrak{D}_\rho(\rho \neq ۱)$ است (ر.ک. بخش ۶، ج)، داریم

قضیهٔ ب. یک تبدیل ثابت زاویه‌ای $\mathfrak{K}$ با نقاط ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، حاصلضرب یک تبدیل بیضوی و یک تبدیل هذلولوی خاص است که نقاط ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ در آنها یکی هستند. این دو عامل ضرب تعویضپذیرند (ر.ک. مثال ۸).

د. زیرگروه تبدیلهای حقیقی موبیوس. یک تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ را حقیقی گویند، اگر محور حقیقی یک دایرهٔ ناوردای آن باشد. چون تبدیل موبیوس تعامد دایره‌ها را حفظ می‌کند، $\mathfrak{H}$ هر دو نقطهٔ متقارن z و $\bar{z}$ را به نقاط متقارن $Z = \mathfrak{H}(z)$ و $\bar{Z} = \mathfrak{H}(\bar{z})$ می‌برد. پس

$$\mathfrak{H}(z) = \overline{\mathfrak{H}(\bar{z})} = \bar{\mathfrak{H}}(z) \quad \text{یا} \quad \overline{\mathfrak{H}(z)} = \mathfrak{H}(\bar{z})$$

بنابراین هر دو ماتریس $\mathfrak{H}$ و $\bar{\mathfrak{H}}$ فقط و فقط یک تبدیل موبیوس را معین می‌کنند، به‌طوری‌که $\bar{\mathfrak{H}} = q\mathfrak{H} (q \neq ۰)$. که این مطلب را می‌رساند که $\mathfrak{H} = \bar{q}\bar{\mathfrak{H}}$. پس $q\bar{q} = ۱$ و $q = e^{i\phi}$. پس ماتریس $e^{\frac{۱}{۲}i\phi}\mathfrak{H} = \overline{e^{\frac{۱}{۲}i\phi}\mathfrak{H}}$ که به تبدیل داده شدهٔ $z = \mathfrak{H}(z)$ تعلق دارد، حقیقی خواهد بود. به‌عکس اگر $\mathfrak{H}$ یک ماتریس حقیقی باشد، تبدیل موبیوس متناظر آن حقیقی است.

با این قید، اثر ماتریس یک تبدیل حقیقی موبیوس با تقریب یک مضرب حقیقی معلوم و مشخص می‌شود و دترمینان آن با تقریب یک ضریب مثبت معین. بدین‌ترتیب گروه تبدیلهای حقیقی موبیوس همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس با دترمینان مثبت را، به عنوان زیرگروهی با شاخص ۲ در بر می‌گیرند.

برای نگاشتی که با یک تبدیل حقیقی موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ صورت گرفته است، دو امکان وجود دارد. یا این نگاشت نیم‌صفحهٔ بالایی $\operatorname{Im} z > ۰$ را بر خودش (و نیم‌صفحهٔ پایینی $\operatorname{Im} z < ۰$ را بر خودش) می‌نگارد و یا این دو نیم‌صفحه را به‌هم بدل می‌کند. برای اینکه $\mathfrak{H}$ این دو نیم‌صفحه را بر خودشان بنگارد، به دلایل پیوستگی، لازم و کافی است که داشته باشیم

$$\delta = ad - bc > ۰ \quad \text{یعنی،} \quad \operatorname{Im}\mathfrak{H}(i) = \frac{ad-bc}{c^۲+d^۲} > ۰ \qquad (۵.۸)$$

بنابراین در تبدیل حقیقی موبیوس $\mathfrak{H}$، علامت دترمینان $|\mathfrak{H}|$ است که مشخص می‌کند آیا این نگاشت هر نیم‌صفحه را بر خودش می‌نگارد و یا آنها را با هم عوض می‌کند.

به‌ازای هر تبدیل حقیقی موبیوس $\mathfrak{H}$ انتظار داریم که یک صورت نرمال حقیقی با یک تبدیل حقیقی موبیوس $\mathfrak{T}$ از راه تبدیل تشابهی $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ به‌دست آید. اگر $\mathfrak{H}$ نقاط ثابت حقیقی (یعنی نقاط ثابتی بر محور حقیقی) داشته باشد، «صورتِ نرمالِ مختلط» خودش حقیقی است و همچنین است تبدیل $\mathfrak{T}$ که این نقاط ثابت را به‌ترتیب به o و ∞، و یا اگر این دو نقطه بر هم منطبق باشند، به ∞ (تبدیل سهموی $\mathfrak{H}$) می‌برد. در حالتی که دو نقطهٔ ثابت حقیقی متمایز باشند، تبدیل $\mathfrak{H}$ هذلولوی است.

ولی اگر $\mathfrak{H}$ نقاط ثابت غیرحقیقی و بنابراین دو نقطهٔ ثابت مزدوج مختلط متمایز γ و $\bar{\gamma}$ داشته باشد، بنابر (۳.۴.۸) داریم $|k| = ۱$، و لذا $\mathfrak{H}$ بیضوی خواهد بود. پس به موجب (۷.۴.۸)، $\tau^۲ < ۴\delta$ و

$$\delta = |\mathfrak{H}| > ۰ \qquad (۶.۸)$$

حال، به‌ازای هر تبدیل بیضوی $\mathfrak{H}$، تبدیل متشابهی می‌سازیم که نقاط ثابتش i و $-i$ باشد. این تبدیل را «صورت نرمال حقیقی» $\mathfrak{H}$ خواهیم گرفت.

در واقع فرض می‌کنیم $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ و $\bar{\gamma} = \gamma' - i\gamma''$ (γ' و γ'' حقیقی و $\gamma'' \neq ۰$) این نقاط ثابت باشند و $k = e^{i\alpha}$ ($\alpha \neq ۲n\pi$، n عدد صحیح) ثابت مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ باشد. پس تبدیل خطی‌ای مانند $z^* = \mathfrak{T}(z) = tz + u$ (با t و u حقیقی) می‌توان یافت به‌طوری‌که داشته باشیم $\mathfrak{T}(\gamma) = i$. می‌گیریم

$$t = \frac{۱}{\gamma''}, \qquad u = -\frac{\gamma'}{\gamma''}$$

در این صورت تبدیل (حقیقی) $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ دارای نقاط ثابت i و $-i$ است. این تبدیل به صورت ضمنی با (۱.۴.۸). یعنی با

$$\frac{Z^* - i}{Z^* + i} = e^{i\alpha}\frac{z^* - i}{z^* + i} \qquad (۱.۶.۸)$$

داده می‌شود. از حل این رابطه بر حسب Z^* صورت نرمال حقیقی

$$Z^* = \mathfrak{H}_\alpha(z^*), \qquad \mathfrak{H}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\frac{۱}{۲}\alpha & \sin\frac{۱}{۲}\alpha \\ -\sin\frac{۱}{۲}\alpha & \cos\frac{۱}{۲}\alpha \end{pmatrix} \qquad (۲.۶.۸)$$

تبدیل بیضوی $\mathfrak{H}$ را خواهد داد. مقدار دترمینان $|\mathfrak{H}_\alpha|$ برابر یک است.

روشن است که زیرگروه همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس با دترمینان مثبت، شامل تبدیلهای حقیقی بیضوی، هذلولوی خاص و سهموی است؛ زیرا نامساویهای $\sigma > -۴$ و $\delta > ۰$ هم‌ارزند. متمم مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای حقیقی با دترمینان منفی متشکل از تبدیلهای هذلولوی غیرخاص موبیوس: $\sigma < -۴$ یا $\sigma > ۰$ است.

در هریک از دو مجموعه دقیقاً یک رده از برگشتهای زیر وجود دارد: ۱. برگشتهای هذلولوی غیرخاص با نقاط ثابت واقع بر محور حقیقی. همهٔ این برگشتها با صورت نرمال $Z^* = -z^*$ که

دترمینانش ۱ − است متشابه‌اند. ۲. برگشتهای بیضوی، که نقاط ثابت مزدوج غیرحقیقی دارند. همهٔ اینها با $Z^* = -1/z^*$، یعنی، (۲.۶.۸) به‌ازای $\alpha = \pi$ متشابه‌اند.

تبصره. گروه همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس با گروه همهٔ تصاویر بر محور حقیقی یکریخت است. (ر.ک. مثال ۷، بخش ۷).

ه. متوازی‌الاضلاع مشخصه. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی با نقاط ثابت معین γ_1 و γ_2 و قطبهای معین z_∞ و Z_∞ باشد. پس به موجب (۱.۲.۸) داریم

$$Z_\infty - \gamma_1 = \gamma_2 - z_\infty, \qquad Z_\infty - \gamma_2 = \gamma_1 - z_\infty \tag{۷.۸}$$

بدین‌ترتیب دو جفت نقطهٔ γ_1 و γ_2، z_∞ و Z_∞ دو رأس متقابل متوازی‌الاضلاع، «متوازی‌الاضلاع مشخصه»، تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ هستند که قبلاً در بخش، ۷، **الف** معرفی شده‌اند. مشخصهٔ یک رأس ــ نقطهٔ ثابت یا قطب ــ به‌طور یکتا تعریف شده است؛ از این‌رو هر متوازی‌الاضلاعِ هندسی معرف دو متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ مختلف است.

یک متوازی‌الاضلاع مشخصه ممکن است به یک قطعه خط تباهیده شود، و علاوه بر این با این فرایند دو رأس متقابل با یک نقطهٔ تنهای این قطعه خط یکی شود (ر.ک. بخش ۷، **ب**). با درنظرگرفتن این موارد مشاهده می‌شود که هر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ نه‌تنها متوازی‌الاضلاع مشخصه‌اش را به‌طور یکتا تعیین می‌کند، بلکه برای هر متوازی‌الاضلاع مفروضی با رأسهای مشخصه خوشتعریف هم، فقط و فقط یک $\mathfrak{H}$ چنان وجود دارد که متوازی‌الاضلاع مذکور، متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{H}^{-1}$ است، و نه هیچ تبدیل دیگر.

بنابر (۳.۴.۸) ثابت مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ چنین است

$$k = \frac{Z_\infty - \gamma_1}{Z_\infty - \gamma_2} = \frac{z_\infty - \gamma_2}{z_\infty - \gamma_1} \tag{۱.۷.۸}$$

بنابراین

$$(Z_\infty, z_\infty; \gamma_1, \gamma_2) = k^2 \tag{۲.۷.۸}$$

از بخش ۷، **ب** معلوم می‌شود که با یک تصویر منظری به مرکز γ_2، که تبدیل آن با $\mathfrak{H}$ نمایش داده می‌شود، خطوط راست مارّ بر γ_1، که محمل دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع هستند، بر یکدیگر نگاشته می‌شوند.

متوازی‌الاضلاعهای متفاوت به تبدیلهای موبیوس[۱] متفاوت مربوط می‌شوند. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی [و در نتیجه k حقیقی (و مخالف صفر و یک)] باشد، آنگاه بنابر (۱.۷.۸) چهار نقطهٔ Z_∞، z_∞، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ همخط‌اند. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی خاص باشد، $k > ۰$ و z_∞، Z_∞ خارج پاره‌خط $<\gamma_۱, \gamma_۲>$ و در طرفین آن به فاصله‌های مساوی از وسط این قطعه‌خط قرار دارند. اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، آنگاه $\gamma_۱ = \gamma_۲$، و این نقطه بین z_∞ و Z_∞ واقع است (ر.ک. بخش ۷، ب).

اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی غیرخاص باشد، آنگاه z_∞ و Z_∞ بر پاره‌خط $<\gamma_۱, \gamma_۲>$ به فاصله‌های مساوی از وسط آن قرار دارند. به‌ازای $z_\infty = Z_\infty$ تبدیل $\mathfrak{H}$ یک برگشت خواهد بود [ر.ک. (۲.۵.۶) و بخش ۷، ب].

اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی $[|k| = ۱)(k \neq ۱, -۱)]$ باشد از (۷.۸) و (۱.۷.۸) نتیجه می‌شود که این متوازی‌الاضلاع باید لوزی باشد. مربع خواهد بود اگر $k = \pm i$، یعنی $\sigma = -۲$.

به‌ازای هر تبدیل ثابت زاویه‌ای موبیوس $\mathfrak{H}$، مسلماً متوازی‌الاضلاع مشخصه لوزی نخواهد شد. متوازی‌الاضلاع مستطیل خواهد بود اگر و فقط اگر $k = \pm \rho i$، یعنی، $\mathrm{Re}\,(\sigma) = -۲$ [ر.ک. (۳.۸)].

چون زاویهٔ متوازی‌الاضلاع مشخصه در رأس z_∞ برابر $\theta = \mathrm{arc}\, k$ یا $۲\pi - \theta = \mathrm{arc}\, k$ است، در نتیجه تبدیلهای متشابه موبیوس، متوازی‌الاضلاعهای مشخصهٔ متشابه دارند. هر مشابهت در صفحهٔ z با یک تبدیل صحیح موبیوس

$$z^* = \mathfrak{T}(z) = uz + v, \qquad (u \neq ۰) \quad (۳.۷.۸)$$

نمایش داده می‌شود. اکنون نشان خواهم داد که متوازی‌الاضلاعی با رأسهای

$$\mathfrak{T}(\gamma_۱), \quad \mathfrak{T}(\gamma_۲), \quad \mathfrak{T}(z_\infty), \quad \mathfrak{T}(Z_\infty) \qquad (۴.۷.۸)$$

متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ است. چون با یک انتخاب مناسب $\mathfrak{T}$ می‌توان متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ و z_∞ و Z_∞ در صفحه به صورت (۴.۷.۸) به‌دست آورد، از اینجا نتیجه می‌شود که

قضیهٔ ج. اگر $\mathfrak{H}$ تبدیلِ موبیوسی با نقاط ثابت معین و قطبهای معین باشد، هر تبدیل $\mathfrak{H}_۱$ متشابه با $\mathfrak{H}$، با نقاط ثابت معین و قطبهای معین را می‌توان به صورت $\mathfrak{H}_۱ = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ نشان داد، که در آن $\mathfrak{T}$ یک تبدیل صحیح مناسب موبیوس است (۳.۷.۸).

---

۱. ر.ک. E. Jacobsthal [۳]، II، ص ۱۳.

برهان. تبدیل $Z = \mathfrak{H}(z)$ با نقاط ثابت γ_1 و γ_2 و قطب z_∞ به‌طور ضمنی با

$$\frac{Z-\gamma_1}{Z-\gamma_2} = \frac{z_\infty-\gamma_2}{z_\infty-\gamma_1}\frac{z-\gamma_1}{z-\gamma_2} = (z, z_\infty; \gamma_1, \gamma_2) = \zeta$$

داده می‌شود. بنابراین

$$Z = \frac{\gamma_2\zeta-\gamma_1}{\zeta-1} = \frac{Z_\infty z-\gamma_1\gamma_2}{z-z_\infty}$$

و

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} Z_\infty & -\gamma_1\gamma_2 \\ 1 & -z_\infty \end{pmatrix}, \qquad Z_\infty = \gamma_1+\gamma_2-z_\infty \tag{5.7.8}$$

اگر در (۵.۷.۸) به‌جای γ_1 قرار دهیم $u\gamma_1+v$ و به‌جای γ_2 قرار دهیم $u\gamma_2+v$ و به‌جای z_∞ بگذریم $uz_\infty+v$ این ماتریس به صورت زیر درخواهد آمد

$$\begin{pmatrix} uZ_\infty+v & -(u\gamma_1+v)(u\gamma_2+v) \\ 1 & -(uz_\infty+v) \end{pmatrix}$$

که در واقع اگر $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، می‌توان آن را به صورت $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1}$ نوشت.

اما تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}^{-1}$ هم با تبدیل $\mathfrak{H}$ متشابه است، به‌علاوه تبدیل صحیحی مانند $\mathfrak{T}_0$ می‌توان یافت به‌طوری‌که

$$\mathfrak{T}_0\mathfrak{H}\mathfrak{T}_0^{-1} = q\mathfrak{H}^{-1} \qquad (q \neq 0)$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که ماتریس

$$\mathfrak{T}_0 = \begin{pmatrix} -1 & \gamma_1+\gamma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در این شرط صدق می‌کند. زیرا که رأسهای متقابل متوازی‌الاضلاع مشخصه را به هم بدل می‌کند و لذا حافظ خصوصیت آنهاست

$$\mathfrak{T}_0(\gamma_1) = \gamma_2, \qquad \mathfrak{T}_0(\gamma_2) = \gamma_1, \qquad \mathfrak{T}_0(z_\infty) = Z_\infty$$

فرع. تبدیل صحیح موبیوس $\mathfrak{T}$ به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H}_۱ = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$$

یکتاست، مگر هنگامی‌که $\mathfrak{H}$ یک برگشت باشد.

برهان. اگر $\mathfrak{T}_۱\mathfrak{H}\mathfrak{T}_۲^{-۱} = q\mathfrak{T}_۲\mathfrak{H}\mathfrak{T}_۲^{-۱}$، آنگاه

$$\mathfrak{T}_۲^{-۱}\mathfrak{T}_۱\mathfrak{H}\mathfrak{T}_۱^{-۱}\mathfrak{T}_۲ = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱} = q\mathfrak{H}$$

که در آن

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_۲^{-۱}\mathfrak{T}_۱ = \begin{pmatrix} u & v \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و چون $q^۲ = ۱$، u و v باید در شرط

$$\begin{pmatrix} u & v \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ ۱ & d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ ۱ & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

یعنی در

$$\begin{pmatrix} ua+v & ub+vd \\ ۱ & d \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} au & av+b \\ u & v+d \end{pmatrix}$$

صدق کند. از اینجا $u = \pm ۱$، $ua + v = \pm au$. از اینجا نتیجه می‌شود که $v = ۰$، اگر $u = +۱$؛ پس $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$. اما اگر $u = -۱$، آنگاه $v = ۲a$ و این حالت وقتی رخ می‌دهد که $a + d = ۰$، یعنی وقتی که $\mathfrak{H}$ یک برگشت باشد. از این‌رو در این حالت فقط دو امکان وجود دارد

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} -۱ & ۲a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

مثالها

۱. فرض می‌کنیم $\mathfrak{B}$ انتقال دلخواهی باشد. بزرگترین گروه تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{T}$ را بیابید که به‌ازای همهٔ عناصر $\mathfrak{T}$، $\mathfrak{T}\mathfrak{B}\mathfrak{T}^{-۱}$ یک انتقال باشد. (این‌گروه را «نرمالساز» گروه انتقالِ همهٔ تبدیلهای موبیوس گویند).

۲. از راه محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که تبدیل $Z = kz$ با $Z^* = k_۱ z^*$ متشابه است، اگر و فقط اگر $k_۱ = k$ یا $k_۱ = ۱/k$.

۳. هر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو برگشت نوشت.

اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، کافی است درستی قضیه را برای انتقال $\mathfrak{B}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$

تحقیق کنیم. زیرا $\begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_۱$، و بنابراین

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-۱} \begin{pmatrix} -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \mathfrak{T}$$

اگر $\mathfrak{H}$ ناسهموی باشد و ثابت مشخصه‌اش k مساوی یک نباشد، صورت نرمال آن چنین خواهد شد $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & k \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$، که حاصلضرب دو برگشت است.

۴. هر تبدیل هذلولوی حقیقی غیرخاص موبیوس حاصلضرب یک تبدیل هذلولوی حقیقی غیرخاص و یک برگشت حقیقی است.

۵. منحنی $\mathfrak{c}$ واقع در صفحه را منحنی ناوردای (ثابت) تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ گویند، اگر به‌ازای هر z بر $\mathfrak{c}$، $\mathfrak{H}(z)$ هم‌نقطه‌ای از $\mathfrak{c}$ باشد. آیا، این عبارت را می‌توانیم با عبارت خلاصهٔ $\mathfrak{H}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$ بیان کنیم؟ آیا ممکن است $\mathfrak{H}(\mathfrak{c})$ فقط جزء خاصی از $\mathfrak{c}$ باشد؟

۶. خانوادهٔ منحنیهای ناوردای یک تبدیل ثابت زاویه‌ای موبیوس را می‌توان چنین مشخص کرد. فرض می‌کنیم

$$z^* = r(\theta)e^{i\theta} \qquad [r(\theta) = |z^*|]$$

نمایش پارامتری منحنی ناوردای صورت نرمال $\mathfrak{H}$، $Z^* = kz^*$، باشد که در آن θ پارامتر حقیقی است. فرض می‌کنیم $k = \rho e^{i\alpha}$ و $\rho = |k|$. در این صورت

$$Z^* = \rho r(\theta)e^{i(\theta+\alpha)}$$

هم باید نقطه‌ای از این منحنی باشد. پس برای تابع مجهول $r(\theta)$ شرط زیر را داریم

$$\rho r(\theta) = r(\theta + \alpha)$$

اگر ثابت حقیقی k را طوری انتخاب کنیم که $|k| = \rho = e^{\kappa\alpha}$، پیدا می‌کنیم که

$$r(\theta) = r_{\circ} e^{\kappa\theta} \qquad (۸.۸)$$

که در آن $r_{\circ}$ ثابت مثبتی است دلخواه که در این شرط صدق می‌کند.

معادلهٔ (۸.۸) معرف یک خانواده از منحنیهای ناوردا در صفحهٔ z^* با مختصات قطبی r و θ است. این منحنیها، مارپیچهای لگاریتمی به مرکز نقطهٔ ثابت o هستند. اگر با تبدیل مناسب $\mathfrak{T}^{-1}$ به صفحهٔ z برگردیم، این منحنیها بر خانواده‌ای از منحنیهای ناوردای تبدیل ثابت زاویه‌ای $\mathfrak{H}$ نگاشته می‌شوند. این «منحنیهای ثابت زاویه‌ای» حول دونقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ پیچ می‌خورند.

۷. فرض می‌کنیم

$$\mathfrak{H}_\rho = \begin{pmatrix} i & ۲\rho - ۱ \\ ۱ & i \end{pmatrix} \qquad \text{(ر.ک. مثال ۴، بخش ۷)}$$

در این صورت $\sigma(\mathfrak{H}_\rho) = \frac{۲}{\rho} - ۴$، و بنابراین پیدا می‌کنیم که $\mathfrak{H}_\rho$ چنین است

هذلولوی غیرخاص، اگر $\rho < ۰$،

هذلولوی خاص، اگر $۰ < \rho < \frac{۱}{۲}$،

سهموی، اگر $\rho = \frac{۱}{۲}$،

بیضوی، اگر $\rho > \frac{۱}{۲}$.

۸. همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{T}$ که با یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ تعویض‌پذیرند، یعنی

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H} = q\mathfrak{H}\mathfrak{T}, \qquad (q \neq ۰) \quad (۹.۸)$$

یک گروه تشکیل می‌دهند. با توجه به صورتهای نرمال مناسب، قضیهٔ زیر به آسانی ثابت می‌شود.

قضیهٔ د. اگر $\mathfrak{H}$ نه‌سهموی باشد و نه‌برگشتی، گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{T}$ که با $\mathfrak{H}$ تعویض‌پذیرندبا گروه همهٔ تبدیلهای موبیوسی که نقاط ثابت آنها همان نقاط ثابت $\mathfrak{H}$ هستند یکی است. اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، این گروه تعویض‌پذیر متشکل از همهٔ تبدیلهای سهموی است که نقاط ثابت آنها همان نقاط ثابت $\mathfrak{H}$ هستند. اگر $\mathfrak{H}$ یک برگشت باشد، این گروه تعویض‌پذیر متشکل از همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{T}$ است که همان نقاط ثابت $\mathfrak{H}$ را دارند، و آن برگشتهایی است که این نقاط ثابت را به یکدیگر بدل می‌کنند.

برهان. (i) در حالت ناسهموی $\begin{pmatrix} k & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} = \mathfrak{H}(k \neq ۱)$، با قراردادن $\begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \mathfrak{T}$، (۹.۸) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} kt & u \\ kv & w \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} kt & ku \\ v & w \end{pmatrix}$$

اگر $t \neq \circ$: $\quad q = ۱$، $\quad u = v = \circ$، $\quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} t & \circ \\ \circ & w \end{pmatrix}$.

اگر $t = \circ$: $\quad u \neq \circ$، $\quad v \neq \circ$، $\quad u = qku$، $\quad qk = ۱$؛ $\quad kv = qv$، $\quad k^۲ = ۱$، $\quad k = -۱$، $\quad w = \circ$؛

پس

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \circ & u \\ v & \circ \end{pmatrix}$$

(ii) در حالت سهموی $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} = \mathfrak{H}$، معادلهٔ (۹.۸) چنین خواهد شد

$$\begin{pmatrix} t & t+u \\ v & v+w \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} t+v & u+w \\ v & w \end{pmatrix}$$

چون $v \neq \circ$ ممکن نیست، داریم $t \neq \circ$، $v = \circ$، $q = ۱$، $w = t$. در این صورت $\begin{pmatrix} t & u \\ \circ & t \end{pmatrix} = \mathfrak{T}$، که معرف یک انتقال است.

۹. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ یک تبدیل سهموی موبیوس باشد و $\mathfrak{J}$ یک برگشت. حاصلضرب $\mathfrak{H}\mathfrak{J}$ یک برگشت است، اگر و فقط اگر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، یک جفت مزدوج از $\mathfrak{J}$ را تشکیل دهند.

کافی است قضیه را برای صورت نرمال $\mathfrak{H}$، یعنی $\begin{pmatrix} k & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix}$ ثابت کنیم؛ در واقع $\begin{pmatrix} k & \circ \\ \circ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku & kv \\ w & -u \end{pmatrix}$ یک برگشت است، اگر و فقط اگر $(k - ۱)u = \circ$، یعنی $u = \circ$.

۱۰. نقاط ثابت تبدیل موبیوس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (۲.۸) هستند. از این‌رو اگر $c \neq 0$

$$\left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{matrix}\right\} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc} = \frac{1}{2c}[\tau \pm \sqrt{(\delta\sigma)}\,] - \frac{d}{c} \qquad (۱.۹.۸)$$

از طرف دیگر ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $\mathfrak{H}$ عبارت‌اند از ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم بر حسب λی زیر

$$|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{H}| = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$$

یعنی

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{\tau}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\tau^2 - 4\delta)} = \frac{1}{2}[\tau \pm \sqrt{(\delta\sigma)}\,]$$

بنابراین

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1 - d}{c}, \qquad \gamma_2 = \frac{\lambda_2 - d}{c} \qquad (۲.۹.۸)$$

چون

$$\delta = \lambda_1\lambda_2 \quad \text{و} \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\sigma = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2} - 4 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2 \qquad (۳.۹.۸)$$

و با توجه به (۴.۴.۸)

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \left(\text{یا } \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \quad \text{اگر، } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

اگر $\mathfrak{H}$ همانی نباشد، سهموی است اگر و فقط اگر $\lambda_2 = \lambda_1$. برگشت است اگر و فقط اگر $\lambda_2 = -\lambda_1$.

۱۱. یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ که یک نقطهٔ ثابت (و در نتیجه قطبهای $Z_\infty = z_\infty$) در بینهایت داشته باشد صحیح است و به‌عکس. در این حالت متوازی‌الاضلاع مشخصه به یک زاویه که

رأسش نقطهٔ ثابت معینی است تباهیده می‌شود، ولی در غیر این‌صورت موضعی نامعین خواهد داشت. در حالت یک انتقال این متوازی‌الاضلاع به نقطهٔ ∞ فشرده می‌شود.

۱۲. به موجب مثال ۱۴، بخش ۶، نقاط ثابتِ برگشتِ $Z = \mathfrak{J}(z)$ که با دو جفت نقطهٔ مزدوج $z_۱$ و $Z_۱$؛ $z_۲$ و $Z_۲$ تعریف شده‌اند دو نقطهٔ $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ هستند که با هر یک از این جفتها نسبت همساز دارند چنانکه

$$(z_۱, Z_۱; \gamma_۱, \gamma_۲) = -۱, \qquad (z_۲, Z_۲; \gamma_۱, \gamma_۲) = -۱$$

بدین‌ترتیب وجود و یکتایی دو نقطهٔ $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ که در این دو شرط صدق می‌کنند ثابت شده است.

با فرض اینکه $z_۱$، $Z_۱$، $z_۲$ و $Z_۲$ بر محیط یک دایره واقع نباشند، ف‌ـلوبل (F. Löbell) [۱] راه حل زیر را برای این مسئله که به ساختمان هندسی $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ می‌انجامد پیشنهاد نموده است.

اگر با یک تبدیل موبیوسِ $z^* = \mathfrak{T}(z)$ برگشت $Z = \mathfrak{J}(z)$ را به صورت نرمال $Z^* = -z^*$ تبدیل کنیم، آنگاه

$$\mathfrak{T}(\gamma_۱) = ۰ \qquad \text{و} \qquad \mathfrak{T}(\gamma_۲) = \infty$$

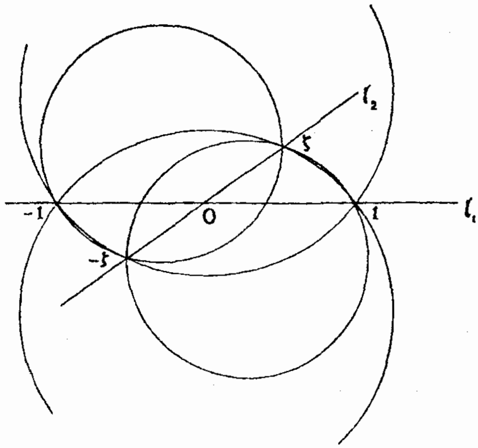
نقاط ثابت خواهند بود و هر دو نقطهٔ متقابل z^* و $-z^*$ یک جفت مزدوج تشکیل می‌دهند. حال عمل تبدیل‌کنندهٔ $\mathfrak{T}$، را طوری اختیار می‌کنیم که $\mathfrak{T}(z_۱) = ۱$ و $\mathfrak{T}(Z_۱) = -۱$؛ اگر $\mathfrak{T}(z_۲) = \zeta$، و از آنجا $\mathfrak{T}(Z_۲) = -\zeta$، عدد ζ را (که مسلماً غیرحقیقی است) از رابطهٔ

$$\lambda = (z_۱, Z_۱; z_۲, Z_۲) = (۱, -۱; \zeta, -\zeta) = \left(\frac{۱-\zeta}{۱+\zeta}\right)^۲$$

پیدا می‌کنیم که (به‌موجب ناوردابودن نسبت ناهمساز) برابر است با

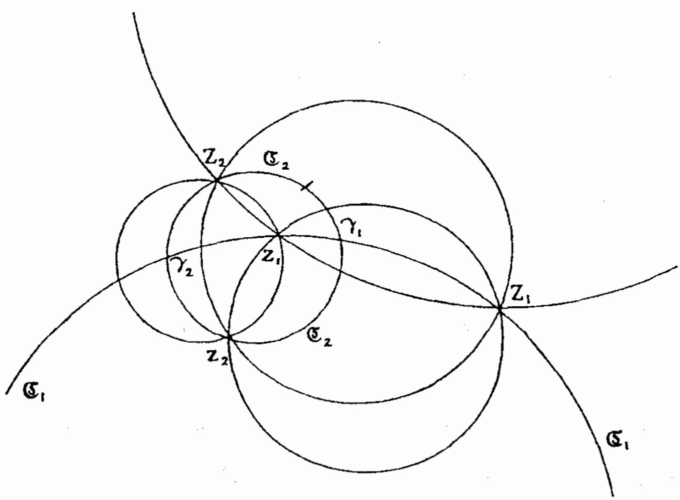
$$\zeta = \frac{۱+\sqrt{\lambda}}{۱-\sqrt{\lambda}} \qquad (۴.۹.۸)$$

حال می‌دانیم که ۰ و ∞ فصل مشترک دو دایرهٔ $l_۱$ و $l_۲$ هستند که $l_۱$ محور حقیقی، یعنی، دایره‌ای است از دستهٔ بیضوی مارّ بر نقاط ۱ و ۱− که زاویهٔ بین دو تا از دوایر این دسته را که به ترتیب از ζ و $-\zeta$ می‌گذرند، نصف می‌کند؛ و $l_۲$ خطی است متعلق به دسته بیضوی مارّ بر ζ و $-\zeta$، یعنی، دایره‌ای که زاویهٔ بین آن دو دایره از دسته را که به‌ترتیب از ۱ و ۱− می‌گذرند نصف می‌کند (ر.ک. شکل ۱۹).



شکل۱۹

با پیدا کردن عکس تبدیل $\mathfrak{T}$ به مورد زیر در صفحهٔ z می‌رسیم (شکل ۲۰). نقاط $\gamma_1 = \mathfrak{T}^{-1}(0)$ و $\gamma_2 = \mathfrak{T}^{-1}(\infty)$ فصل مشترک دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{T}^{-1}(l_1)$ و $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{T}^{-1}(l_2)$ هستند که به طریق زیر می‌توان آنها را معین نمود. $\mathfrak{C}_1$ یکی از دوایرِ دسته بیضوی مارّ بر نقاط z_1 و Z_1 است که زاویهٔ بین آن دو دایره‌ای از این دسته را که به ترتیب از نقاط z_2 و Z_2 می‌گذرند نصف می‌کند. علاوه بر این $\mathfrak{C}_2$ دایره‌ای از این دسته بیضوی است که از z_2 و Z_2 می‌گذرد و زاویهٔ بین آن دو



شکل۲۰

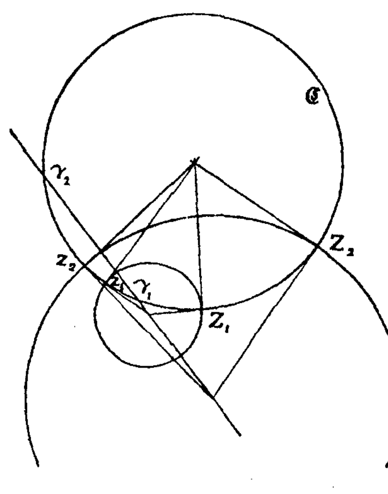
دایره‌ای از این دسته را که به ترتیب از z_1 و Z_1 می‌گذرند نصف می‌کند. انتخاب دو دایرهٔ نیمساز از جمله دو تا برای $\mathfrak{C}_1$ و دو تا برای $\mathfrak{C}_2$ (ر.ک. مثال ۸، بخش ۴) یکتاست، زیرا γ_1 و γ_2 باید z_1 و Z_1 را بر $\mathfrak{C}_1$ جدا کنند و z_2 و Z_2 را بر $\mathfrak{C}_2$، تا نسبت ناهمساز منفی، یعنی مساوی ۱− شود (ر. ک. مثال ۱۵، بخش ۶).

اگر دو جفت z_1 و Z_1؛ z_2 و Z_2 بر یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ واقع باشند، دو امکان وجود دارد.

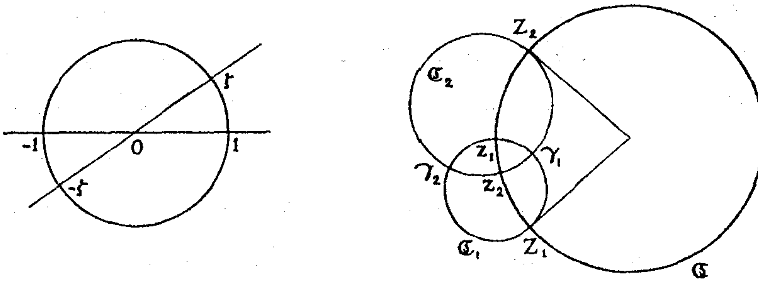
۱. شمول: $\lambda = (z_1, Z_1; z_2, Z_2) > 0$. در این حالت ζ حقیقی است و o و ∞ نقطه‌دایره‌هایی از دسته هذلولوی همهٔ دایره‌های هم‌مرکز به مرکز o هستند که بر محور حقیقی عمودند. بنابراین γ_1 و γ_2 نقطه‌دایره‌هایی از دسته هذلولوی عمود بر $\mathfrak{C}$ هستند که شامل دایره‌های مارّ بر z_1 و Z_1؛ z_2 و Z_2 هستند. و در نتیجه γ_1 و γ_2 نقاط تقاطع $\mathfrak{C}$ با خط واصل بین مراکز آن دو دایرهٔ متعامدند (ر.ک. شکل ۲۱).

۲. جدایی: $\lambda < 0$. چهار نقطهٔ ۱− و ۱؛ $-\zeta$ و ζ بر دایرهٔ واحد از هم جدا می‌شوند. در این حال γ_1 و γ_2 فصل مشترکهای دو دایرهٔ $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ هستند که دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را به‌ترتیب در z_1، Z_1 و z_2، Z_2 به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند (شکل ۲۲).

۱۳. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی به قطب معین $z_\infty (c \neq 0)$ باشد. در این صورت z'_∞، قطب $\mathfrak{H}^{-1}$، نقطه‌ای است معین. اگر $\mathfrak{H}$ برگشت نباشد ($z_\infty \neq z'_\infty$)، خط راستی که از z_∞ و z'_∞ می‌گذرد یک ناوردای $\mathfrak{H}$ است، اگر و فقط اگر $\mathfrak{H}$ ثابت زاویه‌ای نباشد.



شکل ۲۱



شکل۲۲

۹. رده‌بندی پادهمنگاریها

الف. پادهمنگاری. تعریف و خواص مقدماتی نگاشت پادهمنگاری در بخش ۶ (به‌ویژه در بخش ۶، الف، تبصرهٔ ۲، و بخش ۶، د، مثال ۱۲). بیان‌شده و مورد بحث قرارگرفته‌است.

اگر $z_{۱} = \mathfrak{H}_{۱}(\bar{z})$ و $Z = \mathfrak{H}_{۲}(\bar{z}_{۱})$ دو پادهمنگاری باشند، حاصلضرب آنها

$$Z = \mathfrak{H}_{۲}(\overline{\mathfrak{H}_{۱}(\bar{z})}) = \mathfrak{H}_{۲}\overline{\mathfrak{H}}_{۱}(z) = \mathfrak{H}_{۳}(z)$$

تبدیل موبیوسی است با ماتریس

$$\mathfrak{H}_{۳} = q\mathfrak{H}_{۲}\overline{\mathfrak{H}}_{۱}, \qquad (q \neq ۰) \quad (۱.۹)$$

به‌ویژه اگر $\mathfrak{H}_{۱} = \mathfrak{H}_{۲} = \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، تبدیل موبیوس

$$Z = \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}(z)$$

به‌دست می‌آید که آن را «مربع» پادهمنگاری $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ می‌خوانیم. دترمینان آن

$$\delta_{۲} = |\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}| = |\mathfrak{H}||\overline{\mathfrak{H}}| = |\mathfrak{H}|\overline{|\mathfrak{H}|} = |\delta|^{۲} > ۰ \qquad (۱.۱.۹)$$

و اثر آن

$$\tau_{۲} = \operatorname{tr}(\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}) = a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + \bar{b}c \qquad (۲.۱.۹)$$

عددی است حقیقی. بنابراین

$$\sigma(\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}) = \frac{\tau_۲^۲}{\delta_۲} - ۴ \geq -۴ \qquad (۳.۱.۹)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که هرگز مربع یک پادهمنگاری هذلولوی ثابت زاویه‌ای یا غیرخاص، نمی‌شود.

با توجه به تبدیل موبیوس $z^* = \mathfrak{T}(z)$ و $Z^* = \mathfrak{T}(Z)$ متغیرهای جدید z^* و Z^* را تعریف می‌کنیم. اگر z و Z به‌وسیلهٔ یک پادهمنگاری $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ به هم وابسته باشند، آنگاه پادهمنگاری

$$Z^* = \mathfrak{T}(\mathfrak{H}(\bar{z})) = \mathfrak{T}\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{T}^{-۱}(z^*)}) = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{T}}^{-۱}(\overline{z^*}) = \mathfrak{H}^*(\overline{z^*}) \qquad (۲.۹)$$

را با پادهمنگاری $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ متشابه گویند. ماتریس

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{T}}^{-۱} \qquad (۱.۲.۹)$$

را وابستهٔ[1] ماتریس $\mathfrak{H}$ گویند. به‌موجب (۱.۲.۹)

$$\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*} = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{T}}^{-۱}\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{H}}\mathfrak{T}^{-۱} = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{T}^{-۱}$$

از این‌رو پادهمنگاریهای متشابه با ماتریسهای متشابه متناظرند.

مشابهتِ پادهمنگاریها و وابستگی ماتریسها بازتابی، متقارن و ترایا هستند (ر.ک. بخش ۸، **الف** ص ۸۱). بدین‌ترتیب در دستگاه همهٔ پادهمنگاریها تقسیمی به رده‌های پادهمنگاریهای متشابه وجود دارد که در آن رده‌های مختلف شامل عنصر مشترکی نیستند. هر رده را می‌توان با یکی از عناصرش مشخص ساخت. یک مجموعهٔ کامل از صورتهای نرمال مشخص خواهد شد.

ب. پاد برگشتها. بنابه تعریف یک پاد برگشت یک پادهمنگاری برگشتی است، یعنی، تبدیلی است مانند $Z = \mathfrak{K}(\bar{z})$، $|\mathfrak{K}| = \delta \neq ۰$، که مربع آن تبدیل همانی است

$$\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} = \mu\mathfrak{E} \qquad (۳.۹)$$

«ضریب» μ عددی است حقیقی به‌طوری‌که $\delta\bar{\delta} = \mu^۲$. ماتریس مختلط دو سطری $\mathfrak{K}$ را که در شرط (۳.۹) صدق می‌کند، ماتریس دوری[2] گویند.

1. 'Verwandt,' cf. E. Jacobsthal [۲] 2. 'Kreismatrix,' cf. Jacobsthal [۲]

اگر دایره‌ای با ماتریس ارمیتیِ

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad |\mathfrak{C}| = \Delta \neq 0$$

داده شده باشد، این ماتریس انعکاس (۱.۲.۲) را با ماتریس

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}, \qquad |\mathfrak{K}| = |\mathfrak{C}| \tag{۱.۳.۹}$$

یعنی تبدیل $Z = \mathfrak{K}(\bar{z})$ را که یک پاد برگشت است مشخص می‌کند، (ر.ک. بخش ۲، الف)

$$\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} = -|\mathfrak{C}|\mathfrak{E}$$

بنابراین $\mathfrak{K}$ یک ماتریس دوری است با ضریب

$$\mu = -|\mathfrak{C}| \tag{۲.۳.۹}$$

که مثبت است اگر $\mathfrak{C}$، دایرهٔ اصلی انعکاس $Z = \mathfrak{K}(\bar{z})$، حقیقی باشد و منفی است اگر انگاری باشد. دایرهٔ اصلی مجموعهٔ همهٔ نقاط ثابت انعکاس است. از این‌رو معادله‌اش را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$\mathfrak{K}(\bar{z}) = z \tag{۳.۳.۹}$$

هر ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ با دترمینان ناصفر، با تغییر علامتِ یک سطر و تعویض دو سطر با هم، به ماتریس دوری $\mathfrak{K}$ تبدیل می‌شود. برهان قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که با مختصر تعدیلی می‌توان این فرایند را عکس نمود.

قضیهٔ الف. هر پاد برگشت $Z = \mathfrak{K}(\bar{z})$ معرف یک انعکاس است.

برهان. بنابه فرض $\mathfrak{K}$ یک ماتریس دوری است. فرض می‌کنیم $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathfrak{K}$. ابتدا فرض می‌کنیم $c = |c|e^{i\phi}$ صفر نیست. گیریم $\mathfrak{K}_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} = e^{-i\phi}\mathfrak{K}$ به‌طوری‌که

$\circ < |c| = c_\circ$. ماتریس $\mathfrak{K}_\circ$ هم معرف همان پاد برگشت $\mathfrak{K}$ است، و بنابر (۳.۹) داریم $\mathfrak{K}_\circ\overline{\mathfrak{K}}_\circ = \mu\mathfrak{E}$، یعنی

$$a_\circ\bar{a}_\circ + b_\circ c_\circ = \mu \qquad a_\circ\bar{b}_\circ + b_\circ\bar{d}_\circ = \circ$$

$$c_\circ\bar{a}_\circ + d_\circ c_\circ = \circ \qquad c_\circ\bar{b}_\circ + d_\circ\bar{d}_\circ = \mu$$

چون μ حقیقی است، لذا نتیجه می‌شود $b_\circ = \frac{\text{۱}}{c_\circ}(\mu - a\bar{a})$ حقیقی است. علاوه بر این $c_\circ(\bar{a}_\circ + d_\circ) = \circ$؛ از آنجا $\bar{a}_\circ = -d_\circ$. بدین‌ترتیب ماتریس

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_\circ & d_\circ \\ -a_\circ & -b_\circ \end{pmatrix}$$

ارمیتی خواهد بود. پاد برگشت مفروض به صورت انعکاسی نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}$ ظاهر می‌شود.

اگر $c = \circ$ و $b \neq \circ$، فرض می‌کنیم $b = |b|e^{i\phi}$. فرض می‌کنیم $\mathfrak{K}_\circ = e^{-i\phi}\mathfrak{K}$، پس $b_\circ = |b| > \circ$ و می‌توان همان استدلال قبل را تکرار کرد.

اگر $b = \circ$ و $c = \circ$، نتیجه می‌گیریم که $|a| = |d|$. فرض می‌کنیم $a = |a|e^{i\alpha}$ و $d = |a|e^{i\beta}$. در این صورت ماتریس $\mathfrak{C} = ie^{-\frac{i}{\text{۲}}(\alpha+\beta)}\begin{pmatrix} \circ & d \\ -a & \circ \end{pmatrix}$ به‌دست می‌آید که ارمیتی است.

قضیهٔ ب. ماتریس

$$\mathfrak{K}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{T}}^{-\text{۱}}$$

وابسته به یک ماتریس دوری $\mathfrak{K}$، خود نیز یک ماتریس دوری با همان ضریب $\mathfrak{K}$ است. اگر $\mathfrak{K}$ با ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ متناظر باشد، آنگاه $\mathfrak{K}^*$ با ماتریس ارمیتیِ زیر متناظر است.

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{T}^{-\text{۱}}$$ (ر.ک. بخش ۶، ه)

برهان. با توجه به (۳.۹)، $\mathfrak{K}^*\overline{\mathfrak{K}^*} = \mathfrak{T}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{T}^{-\text{۱}} = \mu\mathfrak{E}$، به‌علاوه معادلهٔ دایرهٔ با ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ را می‌توان به‌صورت (۳.۳.۹) نوشت، که بر اثر تبدیل $z^* = \mathfrak{T}(z)$ چنین خواهد شد

$$z^* = \mathfrak{T}(\mathfrak{K}(\bar{z})) = \mathfrak{T}(\mathfrak{K}(\overline{\mathfrak{T}^{-\text{۱}}(z^*)})) = \mathfrak{T}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{T}}^{-\text{۱}}(\overline{z^*}) = \mathfrak{K}^*(\overline{z^*})$$

از طرف دیگر با توجه به (۲.۴.۶) ماتریس ارمیتی این دایره ماتریس $\mathfrak{C}^*$ است.

ج. صورتهای نرمال پادهمنگاریهای نابرگشتی. چنان‌که در مورد تبدیلهای موبیوس دیده بودیم، برای رده‌بندی پادهمنگاریها هم نقاط ثابت مهم و اساسی هستند. فرض می‌کنیم $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ یک پادهمنگاری نابرگشتی باشد و $\gamma_۱$ نقطهٔ ثابت مربعِ آن، یعنی $Z = \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}(z)$ باشد. فرض می‌کنیم $\gamma_۲ = \mathfrak{H}(\bar{\gamma}_۱)$، و از آنجا $\gamma_۱ = \mathfrak{H}(\bar{\gamma}_۲)$. پس یا $\gamma_۲ = \gamma_۱$ و $\gamma_۱$ نقطهٔ ثابت $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ است؛ و یا $\gamma_۲ \neq \gamma_۱$، که در این صورت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ تشکیل یک جفت مزدوج $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ را می‌دهند، یعنی، به‌وسیلهٔ یک پادهمنگاری با هم تعویض می‌شوند.

به‌عکس: هر نقطهٔ ثابت، و دو نقطهٔ یک جفت مزدوج $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$، نقاط ثابت مربع $Z = \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}(z)$ هستند. از بخش ۹، **الف**، معلوم می‌شود که این تبدیل موبیوس یا

(i) هذلولوی خاص: $$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{T}^{-۱} = \begin{pmatrix} \rho_۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (\rho_۲ > ۰)،$$

و یا

(ii) سهموی: $$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{T}^{-۱} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و یا

(iii) بیضوی: $$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}\mathfrak{T}^{-۱} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (\beta \neq ۲n\pi)$$ است.

از احکام مربوط به نقاط ثابت یک پادهمنگاری نابرگشتی $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ نتیجه می‌گیریم که سه امکان زیرین وجود دارند: یا این تبدیل

(i) درست دو نقطهٔ ثابت متمایز دارد و هیچ جفت مزدوج ندارد: که پادهمنگاری هذلولوی است.

یا

(ii) درست یک نقطهٔ ثابت دارد و هیچ جفت مزدوج ندارد: که پادهمنگاری سهموی است.

یا

(iii) نقطهٔ ثابت ندارد و درست یک جفت مزدوج دارد: که پادهمنگاری بیضوی است.

اکنون خواهیم دید که این تقسیم‌بندی پادهمنگاریها متناظراً برای مربعهایشان هم وجود دارد.

(i) اگر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ دو نقطهٔ ثابت پادهمنگاری هذلولوی دادهٔ شدهٔ $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ باشد، می‌توان

تبدیل $\mathfrak{T}_\backslash(z) = (z-\gamma_\backslash)/(z-\gamma_\text{۲})$، $z_\backslash = \mathfrak{T}_\backslash(z)$، $Z_\backslash = \mathfrak{T}_\backslash(Z)$ را اعمال کرد که این تبدیل را به

$$Z_\backslash = \mathfrak{T}_\backslash \mathfrak{H} \overline{\mathfrak{T}}^{-\backslash}(\bar{z}_\backslash) = k\bar{z}_\backslash, \qquad k = |k|e^{i\alpha}$$

بدل می‌کند، که o و ∞ نقاط ثابت آن هستند (ر.ک. بخش ۸، ج). اگر $\alpha \neq \text{۲}n\pi$، تبدیل $z^* = e^{-i(\alpha/\text{۲})}z_\backslash$، $Z^* = e^{-i(\alpha/\text{۲})}Z_\backslash$ ما را به

$$Z^* = |k|e^{i(\alpha/\text{۲})}\bar{z}_\backslash = |k|\overline{z^*} = \mathfrak{H}^*(\overline{z^*}) \tag{۴.۹}$$

می‌رساند که صورت نرمال است. همانند بخش ۸، ب می‌توان به‌جای ثابت مثبت $\rho = |k|$، $\backslash/\rho$ را قرار داد.

روشن است که مربع صورت نرمال $Z^* = \mathfrak{H}^*(\overline{z^*})$، صورت نرمال هذلولوی خاص $\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}$، یعنی، اتساع $\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*} = \begin{pmatrix} \rho_\text{۲} & \circ \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$ است با $\rho_\text{۲} = \rho^\text{۲}$. در این صورت ردهٔ مشابهت $\mathfrak{H}(\bar{z})$ به‌نحو یکتا با ردهٔ مشابهت تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}$، یعنی، با مقدار $\sigma(\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}) > \circ$ تعریف می‌شود.

(ii) پادهمنگاری $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ و مربع آن درعین‌حال سهموی هستند و با بردن تنها نقطهٔ ثابت آن به بینهایت صورت نرمال هر دو به‌دست می‌آید. بنابراین $\mathfrak{H}^*$ باید در شرط

$$\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*} = \begin{pmatrix} \backslash & \backslash \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$$

صدق کند. برای داشتن یک نقطهٔ ثابت در بینهایت باید $\mathfrak{H}^*(\overline{z^*})$ به شکل $a\overline{z^*} + b$ درآید. پس

$$\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*} = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} + b \\ \circ & \backslash \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \backslash & \backslash \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$$

و از این‌رو

$$a\bar{a} = \frac{\backslash - b - \bar{b} + b\bar{b}}{b\bar{b}} = \backslash \quad \text{و} \quad a = \frac{\backslash - b}{\bar{b}}$$

یا

$$\mathfrak{H}_\backslash^* = \begin{pmatrix} \backslash & b \\ \circ & \backslash \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad a = \backslash \quad \text{و} \quad b + \bar{b} = \backslash \tag{۱.۴.۹}$$

با تبدیل $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} ۱ & -b/۲ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ این ماتریس به ماتریس

$$Z^* = \overline{z^*} + \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \mathfrak{H}^* = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \tag{۲.۴.۹}$$

تبدیل می‌شود که صورت نرمال سهموی دارد. ردهٔ سهموی پادهمنگاریهای $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ با $\sigma(\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}) = ۰$ مشخص می‌شود.

(iii) سرانجام، اگر $\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}$ بیضوی با صورت نرمال $\begin{pmatrix} e^{i\beta} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*}$ باشد، آنگاه، o و ∞ (نقاط ثابت $\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{H}^*}$) جفت مزدوج صورت نرمال آن $Z^* = \mathfrak{H}^*(\overline{z^*})$ خواهد بود. پس داریم

$$\mathfrak{H}^*(\overline{z^*}) = \frac{\kappa}{\overline{z^*}} \qquad (\kappa \neq ۱)$$

بنابراین

$$\mathfrak{H}^* = \begin{pmatrix} ۰ & \kappa \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}^*} = \begin{pmatrix} \kappa & ۰ \\ ۰ & \bar{\kappa} \end{pmatrix} = \bar{\kappa} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

یا

$$\frac{\kappa}{\bar{\kappa}} = e^{i\beta}, \qquad \kappa = |\kappa| e^{i(\beta/۲)}$$

با تبدیل اضافی $\mathfrak{T}_۱ = \begin{pmatrix} |\kappa|^{-۱/۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$، قدر مطلق $|k|$ را می‌توان به واحد تبدیل کرد؛ بنابراین

$$Z^* = \frac{e^{i(\beta/۲)}}{\overline{z^*}} \quad \text{و} \quad \mathfrak{T}_۱\mathfrak{H}^*\overline{\mathfrak{T}}_۱^{-۱} = \sqrt{|\kappa|} \begin{pmatrix} ۰ & e^{i(\beta/۲)} \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \tag{۳.۴.۹}$$

صورت نرمال بیضوی است. رده‌های بیضوی آن با مقادیر $\sigma(\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}})$ در بازهٔ $-۴ \leq \sigma < ۰$ مشخص می‌شوند.

به‌عنوان نتیجه‌ای از بحث مذکور قضیهٔ زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیهٔ ج. دو پادهمنگاری نابرگشتی $Z = \mathfrak{H}_۱(\bar{z})$ و $Z = \mathfrak{H}_۲(\bar{z})$ متشابه‌اند، اگر و فقط اگر مربعهای آنها تبدیلهای موبیوس متشابه باشند.

د. صورتهای نرمال ماتریسهای دوری و پادبرگشتها. حکم اول قضیهٔ ب را می‌توان عکس کرد.

قضیهٔ د. هرگاه دو ماتریس دوری، یک ضریب داشته باشند، وابسته‌اند.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathfrak{K}$ یک ماتریس دوری است با ضریب μ. اگر $\mu > \circ$ مشاهده می‌کنیم که $\sqrt{\mu}\mathfrak{E}$ یک ماتریس دوری با ضریب μ است. نشان می‌دهیم که این ماتریس وابسته به $\mathfrak{K}$ است. زیرا، می‌نویسیم $\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{S} = \mathfrak{K} + \sqrt{\mu}\mathfrak{E}$؛ بنابراین با توجه به (۳.۹)

$$\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}} + \sqrt{\mu}\mathfrak{S} = \mu\mathfrak{E} + \sqrt{\mu}\mathfrak{K} = \sqrt{\mu}\mathfrak{S}$$

یا $\mathfrak{T}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{T}}^{-1} = \sqrt{\mu}\mathfrak{E}$.

اگر $\mu = -\rho^{2} < \circ$، $\rho > \circ$، و $\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ -1 & \circ \end{pmatrix}$، ملاحظه می‌کنیم که ماتریس $\rho i\mathfrak{J}$ ماتریسی دوری است با ضریب μ؛ نشان می‌دهیم که $\mathfrak{K}$ به‌این ماتریس وابسته است. فرض می‌کنیم $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}\mathfrak{J} + \rho i\mathfrak{E}$؛ چون $\mathfrak{J}^{2} = -\mathfrak{E}$، نتیجه می‌شود که

$$\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{S}} = \mu\mathfrak{J} - \rho i\mathfrak{K} = \rho i(\rho i\mathfrak{E} + \mathfrak{K}\mathfrak{J})\mathfrak{J} = \rho i\mathfrak{S}\mathfrak{J}$$

بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که دو ردهٔ مشابهت از نابرگشتها (انعکاسها)ی $Z = \mathfrak{K}(\bar{z})$ وجود دارند که عبارت‌اند از:

(i) انعکاسهایی با یک دایرهٔ اصلی حقیقی ($\mu > \circ$). صورت نرمال آن $Z^* = \overline{z^*}$. دایرهٔ اصلی متناظر آن محور حقیقی $z^* = \overline{z^*}$ است ($\mathfrak{K}^* = \sqrt{\mu}\mathfrak{E}$).

(ii) انعکاسهایی با دایرهٔ اصلی انگاری ($\mu < \circ$). صورت نرمال آن چنین است $Z^* = -1/\overline{z^*}$، ($\mathfrak{K}^* = \sqrt{\mu}\mathfrak{J}$). دایرهٔ متناظر آن دایرهٔ واحد انگاری $z^*\overline{z^*} + 1 = \circ$ است (ر.ک. بخش ۶، ه).

ه. تبدیلهای موبیوس و پادهمنگاریها به صورت حاصلضرب انعکاسها. در بخش ۶، ه نشان داده شده که هر یک از انواع سادهٔ تبدیلهای موبیوس را می‌توان به صورت حاصلضرب دو انعکاس نوشت. اکنون به انواع سادهٔ مذکور در بخش ۶، ه می‌توان «اتساع ناویژهٔ»

$$Z^* = -\rho z^* \qquad (\rho > \circ)$$

را اضافی کرد، که صورت نرمال یک تبدیل هذلولوی غیرخاص موبیوس است و می‌توان آن را به صورت حاصلضرب دو انعکاس نشان داد. دایرهٔ اصلی اولی را می‌توان دایرهٔ واحد انگاری به مرکز o اختیار نمود که انعکاس

$$z_۱^* = -\frac{۱}{\overline{z^*}}$$

را به‌دست می‌دهد. برای انعکاس دوم دایرهٔ به مرکز o و شعاع $\sqrt{\rho} > ۰$ را اختیار می‌کنیم. در واقع داریم

$$Z^* = \frac{\rho}{\overline{z_۱^*}} = -\rho z^*$$

از این‌رو اگر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ ثابت زاویه‌ای نباشد، تبدیل موبیوسی مانند $\mathfrak{T}$ چنان وجود دارد که

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}(z^*) = \mathfrak{H}^*(z^*) = \begin{cases} z^* + ۱ & \text{اگر } \mathfrak{H} \text{ سهموی باشد} \\ kz^* & \text{که در آن } k \text{ حقیقی یا } |k| = ۱ \text{ و } k \neq ۱ \end{cases}$$

اما

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{J}_۲^* \overline{\mathfrak{J}_۱^*}$$

که در آن $\mathfrak{J}_۱$ و $\mathfrak{J}_۲$ دو انعکاس‌اند؛ بنابراین

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T}^{-۱}\mathfrak{H}^*\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}^{-۱}\mathfrak{J}^*\overline{\mathfrak{T}})(\overline{\mathfrak{T}}^{-۱}\overline{\mathfrak{J}_۱^*}\mathfrak{T})$$

که حاصلضرب دو انعکاس است.

اگر دایرهٔ اصلی انعکاس عضوی از یک‌دسته دایره باشد، انعکاس را انعکاسی درون این دسته دایره گویند. انعکاسهایی که انواع مقدماتی آنها حاصلضرب هستند عبارت‌اند از: انعکاس درون دستهٔ همهٔ خطهای راست مارّ بر o یا دسته دایرهٔ به مرکز o، در حالت دوران، یا اتساع؛ انعکاس درون دستهٔ همهٔ خطهای موازی با محور انگاری در حالت انتقال. با تبدیل $\mathfrak{T}^{-۱}$ این دسته به دسته بیضوی (هذلولوی، سهموی) دوایری تبدیل می‌شود که بر اثر تبدیل بیضوی (هذلولوی، سهموی) موبیوس داده شدهٔ $\mathfrak{H}$ به هم بدل می‌شوند. این دسته با $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، تعریف می‌شوند.

در حالت بیضوی این دسته، دسته دوایر مارّ بر نقاط $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ هستند و در حالت هذلولوی دسته‌ای هستند که $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ نقطه‌دایره‌های آنها هستند.

قضیهٔ ه. هر تبدیل بیضوی (هذلولوی، سهموی) موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو انعکاس درون دستهٔ بیضوی (هذلولوی، سهموی) دایره‌هایی که بر دسته هذلولویِ (بیضوی، سهوی) دایره‌های ناوردا تحت تبدیل $\mathfrak{H}$ عمود است، نشان داد. (ر. ک. شکل ۱۷، بخش ۸، ب؛ شکل ۱۸، بخش ۸، ج).

عکس این قضیه هم صحیح است:

قضیهٔ و. حاصلضرب هر دو انعکاس مختلف، یک تبدیل ناثابت زاویه‌ای موبیوس است.

برهان. فرض کنید $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ دوایر اصلی دو انعکاس باشند. پس حاصلضرب آنها $\mathfrak{H}$، تبدیل موبیوس درون دسته‌ای است که به‌وسیلهٔ $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ ایجاد می‌شود، یعنی دسته دایره‌هایی است که بر اثر تبدیل $\mathfrak{H}$ به هم بدل می‌شوند. با برگرداندن به صورت نرمال این دسته (یعنی همهٔ خطهای راست مارّ بر o یا دوایر به مرکز o، و یا تمام خطوط موازی با محور انگاری)، تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ به یکی از انواع ساده بدل می‌شود؛ از این‌رو این تبدیل یک تبدیل ناثابت زاویه‌ای است.

صورت نرمال یک تبدیل ثابت زاویه‌ای، حاصلضرب (تعویضپذیر) یک دوران و یک اتساع خاص است. به عنوان نتیجه‌ای از دو قضیهٔ فوق داریم:

فرع. هر تبدیل ثابت زاویه‌ای موبیوس حاصلضرب چهار، و نه کمتر از چهار، انعکاس است.

اکنون فرض می‌کنیم $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ یک پادهمنگاریِ نابرگشتی باشد. بنابر بخش ۹، ج، با یک تبدیل مناسب موبیوس $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}(\overline{z^*}) = \begin{cases} \rho\overline{z^*} & (\rho > ۰) \quad \text{در حالت هذلولوی} \\ \overline{z^*} + \frac{۱}{۲} & \text{در حالت سهموی} \\ \dfrac{e^{i(\beta/۲)}}{\overline{z^*}} & \text{در حالت بیضوی} \end{cases}$$

به آسانی دیده می‌شود که هر یک از این صورتهای نرمال دقیقاً حاصلضرب سه انعکاس است. از آنجا عین این مطلب در مورد یک پادهمنگاری مفروض درست است. پس

قضیهٔ ز. هر پادهمنگاریِ نابرگشتی حاصلضرب دقیقاً سه انعکاس است.

و. گروههای یک دسته. به سهولت دیده می‌شود که دستگاه همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H}$ با نقاط ثابت مفروض γ_1 و γ_2 (یا نقطهٔ ثابت γ) یک گروه است. زیرا اگر $\gamma = \mathfrak{H}_1(\gamma)$ و $\gamma = \mathfrak{H}_2(\gamma)$، آنگاه $\gamma = \mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_1(\gamma)$. این دستگاه علاوه بر $\mathfrak{H}$ شامل عکس $\mathfrak{H}^{-1}$ و در نتیجه شامل عنصر همانی $\mathfrak{E}$ است.

گروه همهٔ تبدیلهای موبیوسی را که γ_1 و γ_2 $(\gamma_1 \neq \gamma_2)$ نقاط ثابت آن باشند با $\mathscr{H}(\gamma_1, \gamma_2) = \mathscr{H}$ نشان می‌دهیم. عناصر این گروه، بیضوی یا هذلولوی یا ثابت زاویه‌ای هستند. با یک تبدیل تنهای $\mathfrak{T}$، مثلاً (۴.۸)، همهٔ آنها به صورتهای نرمالشان $Z^* = kz^*$ در می‌آیند. بنابراین گروه $\mathscr{H}$ که با گروه این صورتهای نرمال متشابه و لذا با آن یکریخت است، تعویضپذیر است. این گروه به صورت حاصلضرب مستقیم گروه بیضویِ $\mathscr{H}_e = \mathscr{H}_e(\gamma_1, \gamma_2)$ و گروه تبدیلهای هذلولوی خاص $\mathscr{H}_h^+ = \mathscr{H}_h^+(\gamma_1, \gamma_2)$ با نقاط ثابت γ_1 و γ_2 ظاهر می‌شود.

همهٔ تبدیلهای هذلولوی با نقاط ثابت γ_1 و γ_2 یک گروه $\mathscr{H}_h = \mathscr{H}_h(\gamma_1, \gamma_2)$ تشکیل می‌دهند که $\mathscr{H}_h^+$ زیرگروه با اندیس ۲ی آن است. متمم مجموعهٔ آن، $\mathscr{H}_h^-$، شامل همهٔ تبدیلهای هذلولوی غیرخاص است. بنابر (۸.۴.۸)

$$\mathscr{H}_h^- = \mathscr{H}_h^+ \mathfrak{J}$$

که در آن $\mathfrak{J}$ یک برگشت است.

هر عنصر $\mathscr{H}_e$ حاصلضرب دو انعکاس درون دسته بیضوی همهٔ دوایری است که از γ_1 و γ_2 می‌گذرند. هر عنصر $\mathscr{H}_h$ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو انعکاس درون دسته هذلولوی همهٔ دوایر عمود بر دسته بیضوی دایره‌های مارّ بر γ_1 و γ_2 نوشت. گروه $\mathscr{H}_h^+$ مرکب از همهٔ تبدیلهای هذلولوی خاص است که به صورت حاصلضرب دو انعکاس درون یک دسته هذلولوی ولی با دوایر اصلی حقیقی ظاهر می‌شود.

اگر $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$، گروه تبدیلهای سهموی $\mathscr{H}_p = \mathscr{H}_p(\gamma)$ با نقطهٔ ثابت γ به‌دست می‌آید. این گروه با گروه همهٔ انتقالهای $Z^* = z^* + b$ متشابه و لذا یکریخت است. دسته‌های دوایر ناوردای تعویض‌شده با هم وابسته به این گروه، دو دسته سهموی متعامدند که از γ می‌گذرند. همهٔ تبدیلهای سهموی موبیوس که حاصلضربهای انعکاسهای درون یکی از این دسته‌ها هستند، یک زیرگروه $\mathscr{H}_p^{(1)} = \mathscr{H}_p^{(1)}(\gamma)$ را تشکیل می‌دهند. همین‌طور یک زیرگروه $\mathscr{H}_p^{(2)} = \mathscr{H}_p^{(2)}(\gamma)$ از حاصلضربهای انعکاسها نسبت به دستهٔ دیگر وجود دارد. بنابراین $\mathscr{H}_p$ حاصلضرب مستقیم $\mathscr{H}_p^{(1)}$ و $\mathscr{H}_p^{(2)}$ است.

تبصره. با استفاده از صورتهای نرمال دسته‌ها، احکام ذیل به آسانی ثابت می‌شوند. گروه $\mathscr{H}_e$ با گروه همهٔ دورانها در صفحه حول یک نقطهٔ ثابت، یا با گروه جمعی اعداد حقیقی (به پیمانهٔ ۲π) یکریخت است. گروه $\mathscr{H}_p^{(۱)}$ با گروه همهٔ انتقالها در یک امتداد مفروض، لذا با گروه جمعی همهٔ اعداد حقیقی یکریخت است. گروه $\mathscr{H}_h^+$ با گروه ضربی همهٔ اعداد حقیقی مثبت یکریخت است، و گروه $\mathscr{H}_h$ با گروه ضربی همهٔ اعداد حقیقی ناصفر یکریخت است (ر.ک. مثال ۱۲، بخش ۱۰).

مثالها

۱. فرض می‌کنیم $\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یک ماتریس دوری باشد. مانند برهان قضیهٔ **الف** قرار می‌دهیم

$$\text{اگر } c \neq ۰, \qquad c = |c|e^{i\phi}$$

در این صورت

$$\mathfrak{K}_۱ = ie^{-i\phi}\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} a_۱ & ib_۱ \\ ic_۱ & \bar{a}_۱ \end{pmatrix} \tag{۵.۹}$$

را یک «ماتریس دوری نرمالشده» خواهیم نامید. در اینجا $b_۱$ و $c_۱$ حقیقی هستند و $a_۱$ مختلط است. شرط $c \neq ۰$ برای نرمالسازی اساسی نیست؛ برای هر ماتریس دوری $\mathfrak{K}$ یک عامل مناسب به طول یک می‌توان یافت به‌طوری‌که $\mathfrak{K}_۱ = \lambda\mathfrak{K}$ صورت نرمالشدهٔ (۵.۹) را داشته باشد. نرمالسازی، ضریب $\mu = |\mathfrak{K}_۱|$ را تغییر نمی‌دهد.

با استفاده از استقرای ریاضی نسبت به n، نشان دهید که توانهای $\mathfrak{K}_۱^n$ یک ماتریس دوری نرمالشدهٔ $\mathfrak{K}_۱$ هم ماتریسهای دوری نرمالشده هستند.

۲. نشان دهید که $\mathfrak{C}_۱$ و $\mathfrak{C}_۲$ وابسته به ماتریسهای دوری (نرمالشدهٔ) $\mathfrak{K}_۱$ و $\mathfrak{K}_۲$ متعامدند، اگر، فقط اگر انعکاسهای $z_۱ = \mathfrak{K}_۱(\bar{z})$ و $z_۲ = \mathfrak{K}_۲(\bar{z})$ تعویضپذیر باشند

$$\text{(ر.ک مثال ۸، بخش ۱)} \qquad \mathfrak{K}_۱\overline{\mathfrak{K}}_۲ + \mathfrak{K}_۲\overline{\mathfrak{K}}_۱ = ۰$$

۳. ردهٔ همهٔ پادهمنگاریهای $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ که در آنها مربع $\mathfrak{H}\overline{\mathfrak{H}}$ معرف یک برگشت است صورت نرمالش تبدیلی به صورت

$$Z^* = \frac{i}{z^*}, \qquad (\beta = \pi)$$

دارد. هر عنصر این رده به‌وسیلهٔ جفت مزدوجش $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ تعریف می‌شود. اگر این نقاط معین باشند، پادهمنگاری متناظرش $Z = \mathfrak{H}(\bar{z})$ ماتریسی به صورت

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \gamma_۱ - i\gamma_۲ & -\gamma_۱\bar{\gamma}_۱ + i\gamma_۲\bar{\gamma}_۲ \\ ۱ - i & -\bar{\gamma}_۱ + i\bar{\gamma}_۲ \end{pmatrix}$$

دارد. اگر $\gamma_۲$ یک نقطهٔ این جفت، به بینهایت برود، خواهیم داشت.

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \gamma_۱ & i - \gamma_۱\bar{\gamma}_۱ \\ ۱ & -\bar{\gamma}_۱ \end{pmatrix}$$

۴. دستگاه همهٔ تبدیلهای موبیوس و همهٔ پادهمنگاریها، گروهی تشکیل می‌دهند که گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس، زیرگروه اندیس ۲ آن است.

۵. دستگاه همهٔ تبدیلهای موبیوسی که دو نقطهٔ مفروض متمایز $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ را محفوظ نگاه دارد و یا با هم عوض کند، گروه تعویضناپذیر است

$$\hat{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \mathfrak{I}\mathscr{H}$$

که در آن $\mathfrak{I}$ یک برگشت است با جفت مزدوج $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$؛ مثلاً

$$\mathfrak{I}(z) = -z + \gamma_۱ + \gamma_۲$$

همهٔ عناصر متمم مجموعهٔ $\mathfrak{I}\mathscr{H}$ برگشتهایی هستند که $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ را به هم بدل می‌کنند.

۶. گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H}$ که $\gamma_۱$ نقطهٔ ثابت آنهاست، باگروه تمام تبدیلهای صحیح موبیوس، متشابه و در نتیجه یکریخت است. وقتی $\gamma_۱$ معین باشد داریم

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} b\gamma_۱ + ۱ & \gamma_۱(a - b\gamma_۱ - ۱) \\ b & a - b\gamma_۱ \end{pmatrix} \qquad (a \neq ۰)$$

دومین نقطهٔ ثابت این تبدیل چنین خواهد شد

$$\gamma_۲ = \gamma_۱ + \frac{۱ - a}{b}$$

۷. رده‌بندی مشابهت تبدیلهای موبیوس با ماتریسهای دوری. فرض می‌کنیم

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} a & b_۲ i \\ c_۲ i & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (a = a_۱ + i a_۲; a_۱, a_۲, b_۲, c_۲ \text{ حقیقی})$$

یک ماتریس دوری نرمالشده باشد و $\mu = |\mathfrak{K}| = a_۱^۲ + a_۲^۲ + b_۲ c_۲$ ضریب آن. ردهٔ مشابهت $\mathfrak{K}$ با مقدار

$$\sigma = \sigma(\mathfrak{K}) = \frac{\tau^۲}{\mu} - ۴ \qquad (\tau = \operatorname{tr} \mathfrak{K} = ۲a_۱)$$

(۶.۹)

$$= -۴ \frac{a_۲^۲ + b_۲ c_۲}{a_۱^۲ + a_۲^۲ + b_۲ c_۲}$$

تعریف می‌شود، که حقیقی است؛ در این صورت $\mathfrak{K}$ (بخش ۸، ج) نمی‌تواند ثابت زاویه‌ای باشد. نقاط ثابت $\mathfrak{K}$ در معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی

$$c_۲ z^۲ - ۲a_۲ z - b_۲ = ۰$$

صدق می‌کنند که $۴(a_۲^۲ + b_۲ c_۲)$ مبین آن است.

حالتهای ممکن زیر وجود دارند:

(i) $\mathfrak{K}$ هذلولوی غیرخاص است: $-۴ \le \sigma$. اگر $\sigma > -۴$، الزاماً $\mu > ۰$؛ بنابراین، $a_۲^۲ + b_۲ c_۲ < ۰$، و از آنجا $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نقاط ثابت $Z = \mathfrak{K}(z)$، غیرحقیقی و مختلط و مزدوج‌اند. اگر $\mathfrak{K}$ معرف یک برگشت باشد ($a_۱ = ۰$ و $\mu < ۰$)، می‌توان نوشت $\sigma = -۴ - ۰$.

(ii) $\mathfrak{K}$ بیضوی است: $-۴ \le \sigma < ۰$؛ پس $۰ < a_۲^۲ + b_۲ c_۲ \le \mu$ و $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ حقیقی‌اند. یک برگشت بیضوی ($a_۱ = ۰$ و $\mu > ۰$) را می‌توان با $\sigma = -۴ + ۰$ مشخص ساخت.

(iii) $\mathfrak{K}$ سهموی است: $\sigma = ۰$، یعنی، $a_۲^۲ + b_۲ c_۲ = ۰$ و $\mu = a_۱^۲ > ۰$ و نقطهٔ ثابت γ حقیقی است.

(iv) $\mathfrak{K}$ هذلولوی خاص است: $\sigma > ۰$، پس $a_۲^۲ + b_۲ c_۲ < ۰$ و $\mu > ۰$ و نقاط ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ غیرحقیقی و مختلط و مزدوج‌اند.

صورت نرمال $\mathfrak{T}\mathfrak{K}\mathfrak{T}^{-۱}$ با یک تبدیل حقیقی $\mathfrak{T}$ به‌دست می‌آید. به‌سهولت دیده می‌شود که

ماتریس یک برگشت $\mathfrak{K} = i\begin{pmatrix} a_۲ & b_۲ \\ c_۲ & -a_۲ \end{pmatrix}$ است؛ از این‌رو این برگشت حقیقی است (ر.ک. بخش ۸، د).

ویژگی تبدیل موبیوسِ $Z = \mathfrak{K}(z)$ را می‌توان از وضعیت دایرهٔ $\mathfrak{C}$، که با معادلهٔ (۳.۳.۹) داده شده است، یعنی، $z = \mathfrak{K}(\bar{z})$، نسبت به محور حقیقی که با $\bar{z} = z$ تعریف می‌شود به‌دست آورد. اگر نقاط تلاقی $\mathfrak{C}$ با محور حقیقی باشند، این نقاط، نقاط ثابت $Z = \mathfrak{K}(z)$ خواهند بود. دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_۲ & -\bar{a}i \\ ai & -b_۲ \end{pmatrix}$، ($|\mathfrak{C}| = -\mu$)، به مرکز $z = -ai/c_۲$ و شعاع $\rho = \sqrt{\mu}/|c_۲|$ است. فاصلهٔ این مرکز از محور حقیقی برابر $|a_۱/c_۲|$ است. بدین‌ترتیب در مواردی که در بالا عنوان شده‌اند داریم:

(i) $\mathfrak{C}$ دایرهٔ انگاری است.

(ii) $\mathfrak{C}$ محور حقیقی را در دو نقطهٔ حقیقی قطع می‌کند، و مرکز آن بر محور حقیقی است، اگر $\mathfrak{K}$ معرف یک برگشت باشد.

(iii) $\mathfrak{C}$ بر محور حقیقی مماس است.

(iv) $\mathfrak{C}$ هیچ نقطهٔ مشترکی با محور حقیقی ندارد: $a_۱^۲/c_۲^۲ > \mu/c_۲^۲$.

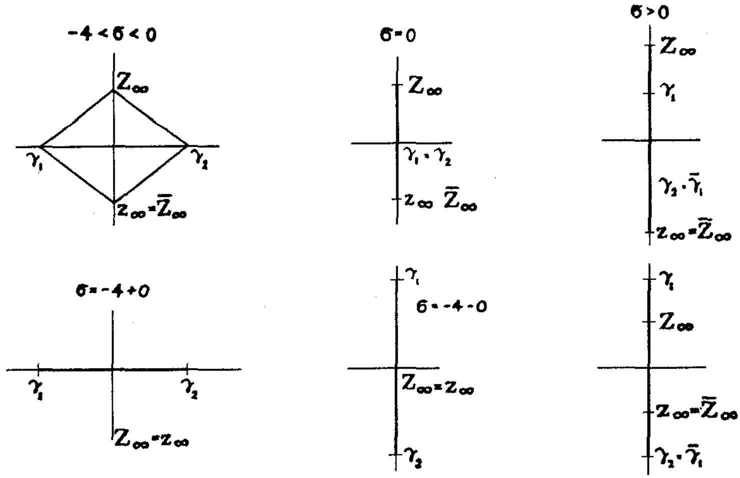
اگر $c_۲ = ۰$، دایرهٔ $\mathfrak{C}$ به خط $-a_۲x + a_۱y = b_۲/۲$ بدل می‌شود.

مجموعهٔ خاصی از تبدیلهای موبیوس با ماتریس دوری $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_\rho$ در مثال ۴، بخش ۷ مورد مطالعه قرار گرفته است. دوایر وابستهٔ (نه دوایر $\tilde{\mathfrak{C}}_\rho$) دوایر هم‌مرکزی به مرکز $z = i$ هستند. ر.ک. مثال ۷، بخش ۸.

۸. یک تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{K}(z)$ با ماتریس دوری $\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$ $(A \neq ۰)$ دارای یک (قطب معکوس) $Z_\infty = \mathfrak{K}(\infty)$ است، که مرکز دایرهٔ اصلی $\mathfrak{C}$ در انعکاس $z^* = \mathfrak{K}(\bar{z})$ است. قطب خودش $z_\infty = \bar{Z}_\infty$ است. $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ نقاط ثابت آن نقاط تلاقی حقیقی یا غیرحقیقی $\mathfrak{C}$ با محور حقیقی، یعنی، ریشه‌های معادلهٔ زیر است

$$Az^۲ + (B + C)z + D = ۰ \qquad (۸.۹)$$

بنابراین اگر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ حقیقی نباشند، $\mathrm{Re}\,(\gamma_۱) = \mathrm{Re}\,(Z_\infty)$. انواع مختلف مشابهت به‌وسیلهٔ متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ آن معین می‌شوند. همهٔ حالات ممکن در شکل ۲۳ نمایش داده شده‌اند.



شکل۲۳

۱۰. بارِستِ یک تبدیل موبیوس

الف. ملاحظات کلی دربارهٔ بارِشت. «بارست»، یعنی، کاربرد مکرر یک عمل ریاضی. این کار تقریباً در همهٔ عملهای ریاضی نقش مهمی ایفا می‌کند. مثلاً c^n، توانِ n یک عدد c، n بار بارِستِ ضرب c است در خودش.

فرض می‌کنیم $f(z)$ تابع تعریف‌شده‌ای در حوزهٔ معین $\mathscr{D}$ از صفحهٔ z و شاید در تمام صفحهٔ کامل‌شده باشد. به‌ازای هر z در $\mathscr{D}$ فرض می‌کنیم $f(z_۰) = z_۱$ هم‌نقطه‌ای از $\mathscr{D}$ باشد. پس مقدار $f(z_۱) = z_۲$ را باز می‌توان پیدا کرد که نقطه‌ای است از $\mathscr{D}$. این فرایند را می‌توان به هر تعداد مرتبه تکرار کرد. از بارست عملِ تابعیِ $f(z)$ روی مقدار آغازین $z_۰$ بدین‌طریق «دنبالهٔ تراجعی» زیر به‌دست می‌آید.

$$z_۰, z_۱ = f(z_۰), \cdots, z_n = f(z_{n-۱}) \qquad (n = ۱, ۲, \cdots,) \quad (۱.۱۰)$$

اگر $f(z)$ در $\mathscr{D}$ تابعی پیوسته باشد و اگر دنبالهٔ (۱.۱۰) وقتی که $n \to \infty$ یک حد γ داشته باشد، آنگاه γ الزاماً یک نقطهٔ ثابت تابع $f(z)$ است، یعنی $f(\gamma) = \gamma$. زیرا

$$f(\lim z_n) = \lim f(z_n) = \lim z_{n+۱} = \lim z_n$$

یک نقطهٔ ثابت γ را جاذب گویند اگر به‌ازای جمیع مقادیر $z_\circ$ در یک همسایگی معین γ دنبالهٔ متناوب (۱.۱۰) همگرا و حد آن، γ باشد.

نقاط o و ∞ نقاط ثابت تابع $f(z) = kz$ $(k \neq \circ)$ هستند. اگر $|k| < ۱$، چون به‌ازای هر $z_\circ$ مختلط: $z_n = k^n z_\circ \to \circ$، نقطهٔ ثابت o نقطهٔ جاذب است. اگر $|k| > ۱$، آنگاه چون به‌ازای هر $z_\circ \neq \circ$، $k^n z_\circ \to \infty$، نقطهٔ ثابت ∞، نقطهٔ جاذب خواهد شد. در هر حالت هنگامی که نقاط z_n این دنباله به نقطهٔ جاذب ثابت نزدیک می‌شوند از نقطهٔ ثابت دیگر دور می‌شوند و از این‌رو این نقطهٔ اخیر را نقطهٔ دافع گویند.

اگر $|k| = ۱$، نقاط $k^n z_\circ$ با افزایش n بر دایره‌های به مرکز نقطهٔ ثابت o و شعاع $|z_\circ|$ حرکت می‌کنند. بدین‌ترتیب این نقاط به هیچ‌یک از دو نقطهٔ ثابت میل نمی‌کنند. در این حالت نقاط ثابت تابع kz را نقاط معمولی می‌نامند.

ویژگیهای جاذب یا دافع یا معمولی‌بودن نقطهٔ ثابت γی یک تابع $f(z)$ بر اثر دخالت متغیر جدید z^* به‌وسیلهٔ یک تبدیل موبیوس $z^* = \mathfrak{T}(z)$ ناورداست (ر.ک. بخش ۸، **الف و ب**). زیرا اگر $z_n \to \gamma$، آنگاه $\mathfrak{T}(z_n)$ به $\mathfrak{T}(\gamma)$ یعنی به نقطهٔ ثابت تابع $f^*(z^*) = \mathfrak{T}\{f[\mathfrak{T}^{-۱}(z^*)]\}$ میل می‌کند و

$$\mathfrak{T}(z_n) = \mathfrak{T}[f(z_{n-۱})] = \mathfrak{T}(f\{\mathfrak{T}^{-۱}[\mathfrak{T}(z_{n-۱})]\})$$

دنبالهٔ متناوب تابع $f^*(z^*)$، به‌ازای مقدار آغازین $z^*_\circ = \mathfrak{T}(z_\circ)$ است. اگر z_n از γ دور شود، $\mathfrak{T}(z_n)$ نمی‌تواند به $\mathfrak{T}(\gamma)$ نزدیک شود.

می‌توان ملاحظه نمود که اگر با یک تبدیل دلخواه $z^* = \varphi(z)$ (که لزوماً موبیوس نیست) که یک نگاشت توپولوژیک $\mathscr{D}$ بر روی خودش است، یک متغیر جدید z^* وارد کنیم، صحت این احکام معتبر می‌مانند (ر.ک. بخش ۳، **الف**).

اگر دنبالهٔ متناوب (۱.۱۰) تابع $f(z)$ با متغیر جملهٔ آغازین $z_\circ$ در $\mathscr{D}$ را در نظر گیریم، سر و کار ما در واقع با دنبالهٔ توابع

$$f^\circ(z) = z, \quad f^۱(z) = f(z), \quad f^۲(z) = f[f(z)], \cdots, \quad f^n(z) = f[f^{n-۱}(z)], \cdots, \qquad (۲.۱۰)$$

است که آنها را بارستنهای تابع $f(z)$ می‌گوییم. قراردادی که هم‌اکنون به‌کار بردیم ما را به این فکر می‌اندازد که، بارستنهای متوالی تابع $f(z)$ را به صورت «توانهای» عمل f تلقی کنیم که روی متغیر z صورت گرفته است.

به‌موجب (۲.۱۰) به‌ازای همهٔ اندیسهای صحیح و نامنفی n، بارستنها (توانها)ی f معین هستند. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر در $\mathscr{D}$ تابع $f(z)$ عکسپذیر باشد و عکس (تک‌مقداری) آن با $f^{-1}(z)$ نمایش داده می‌شود، می‌توان تعریف $f^n(z)$ را برای توانهای منفی هم تعمیم داد

$$f^{-m}(z) = (f^{-1})^m(z) \qquad (m > 0) \quad (۱.۲.۱۰)$$

بنابراین بلافاصله دیده می‌شود که به‌ازای همهٔ اعداد صحیح m و n قوانین معمولی توانها معتبرند

$$f^m[f^n(z)] = f^{m+n}(z), \qquad (f^m)^n(z) = f^{mn}(z) \qquad (۲.۲.۱۰)$$

اگر γ یک نقطهٔ ثابت $f(z)$ باشد، نقطهٔ ثابت همهٔ بارستنهای $f^n(z)$ $(n > 0)$ هم خواهد بود. بسته به اینکه این نقطه یک نقطهٔ جاذب، دافع و یا معمولی $f(z)$ باشد، نقطهٔ جاذب یا دافع و یا معمولی $f(z)$ هم خواهد بود. اگر $f^{-1}(z)$ وجود داشته باشد، باز هم γ یک نقطهٔ ثابت است، ولی ممکن است مانند حالت $f(z) = kz$ ماهیت متفاوت داشته باشد.

ب. بارست یک تبدیل موبیوس. اگر $Z = f(z) = \mathfrak{H}(z)$ یک تبدیل موبیوس باشد، حوزهٔ $\mathscr{D}$ صفحهٔ کامل‌شده است. همهٔ بارستنهای $\mathfrak{H}$ (هم‌توانهای مثبت و هم‌توانهای منفی) تبدیلهای موبیوس‌اند. ماتریسهای آنها توانهای $\mathfrak{H}^n$ ماتریس $\mathfrak{H}$ هستند. به‌ازای هر نقطهٔ آغازین z_0 یک دنبالهٔ متناوب، یعنی

$$z_n = \mathfrak{H}^n(z_0) \qquad (۳.۱۰)$$

تعریف می‌شود. رفتار همگرایی این دنباله همانند رفتار همگرایی دنبالهٔ

$$z_n^* = \mathfrak{T}(z_n) = (\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1})^n\mathfrak{T}(z_0) \qquad (۱.۳.۱۰)$$

است. بنابراین، اگر $\mathfrak{T}$ طوری اختیار شود که $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1}$ صورت نرمال $\mathfrak{H}$ باشد (ر.ک. بخش ۸، ب و ج) دنبالهٔ z_n^* به صورت زیر در می‌آید

$$z_n^* = k^n z_0^* \qquad \text{اگر } \mathfrak{H} \text{ ناسهموی باشد}$$

$$z_n^* = z_0^* + n \qquad \text{اگر } \mathfrak{H} \text{ سهموی باشد}$$

بنابراین

قضیهٔ الف. نقطهٔ ثابت یک تبدیل سهموی موبیوس همواره جاذب است. از دو نقطهٔ ثابت متفاوت یک تبدیل ناسهموی موبیوس $\mathfrak{H}$ یکی جاذب است و دیگری دافع، مگر هنگامی‌که $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد. نقاط ثابت یک تبدیل بیضوی هر دو معمولی‌اند.[۱]

فرع. دنبالهٔ (۳.۱۰) همواره همگراست، و حد آن نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}$ است، اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی نباشد و z_0، نقطهٔ آغازی این دنباله، نقطهٔ ثابت دافع $\mathfrak{H}$ نباشد.

در اینجا دنباله را همگرا تلقی می‌کنیم حتی اگر این حد ∞ باشد. این قرارداد معمولاً در نظریهٔ توابع متغیر مختلط که اغلب نقطهٔ بینهایت نقش استثنایی دارد، کلاً مورد قبول نیست. ولی در هندسهٔ صفحهٔ کامل‌شدهٔ اعداد مختلط که در آن ∞ نقش یک نقطهٔ عادی دارد، این قرارداد مفید است. مقبولیت این مطلب از راه تصویر گنجنگاشتی بر روی کره توجیه شده است.[۲]

اگر γ_1 نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}$ باشد و γ_2 نقطهٔ ثابت دافع آن، آنگاه γ_2 نقطهٔ جاذب $\mathfrak{H}^{-1}$ خواهد شد و γ_1 نقطهٔ ثابت دافع آن.

ج. دنبالهٔ متناوب تبدیلهای موبیوس. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}_1$، $\mathfrak{H}_2$، ... دنباله‌ای از تبدیلهای موبیوس باشد. به‌ازای هر نقطهٔ آغازی z_0 دنبالهٔ

$$z_0, z_1 = \mathfrak{H}_1(z_0), \qquad z_2 = \mathfrak{H}_1[\mathfrak{H}_2(z_0)], \cdots \qquad (۴.۱۰)$$

را در نظر می‌گیریم. مسئلهٔ تعیین همگرایی چنین دنباله‌ای دشوار به‌نظر می‌آید.[۳] ولی قضیهٔ اخیر، **الف**، تعیین همگرایی را در یک حالت مهم ممکن می‌سازد، و آن حالتی است که دنبالهٔ مفروضِ تبدیلهای $\mathfrak{H}_n$ متناوب باشد، یعنی یک عدد صحیح حداقل $p \geq 1$، دورهٔ تناوب دنباله، وجود داشته باشد به‌طوری‌که دنبالهٔ ماتریسهای متناظر آن را بتوان به صورت زیر نوشت

$$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_p, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_p, \cdots,$$

به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H}_{mp+r} = \mathfrak{H}_r \qquad (0 < r \leq p; m = 0, 1, 2, \cdots) \quad (۱.۴.۱۰)$$

---

۱. در این قضیه هر برگشت $(k = -1)$ باید بیضوی منظور شود.

۲. اگر از مختصات متجانس استفاده شود (ر.ک. بخش ۶، الف، تبصرهٔ ۱) نقطهٔ بینهایت مانند نقاط دیگر صفحه با یک جفت اعداد مختلط که هر دو آنها صفر نیستند، مثلاً جفت $(1, 0)$ داده می‌شود. (ر.ک. تبصرهٔ بخش ۵، ب).

۳. ر.ک. G. Piranian و W.J. Thron [۱] و P. Erdös و G. Piranian [۱].

ماتریس دورهٔ تناوب این دنباله را با

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_p \qquad (۲.۴.۱۰)$$

تعریف می‌کنیم.

اگر $n = mp + r$ $(0 < r \leq p)$، آنگاه

$$z_n = \mathfrak{H}^m\mathfrak{H}_1 \cdots \mathfrak{H}_r(z_0) = \mathfrak{H}^m(z_r)$$

فرض می‌کنیم که هیچ‌یک از p مقدار z_0، z_1، z_2، ... و z_{p-1} یعنی

$$z_0, \qquad z_r = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_r(z_0)$$

بر نقطهٔ ثابت دافع $\mathfrak{H}$ منطبق نباشد. اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی نباشد، دنبالهٔ

$$z_{mp} = \mathfrak{H}^m(z_0), \qquad z_{mp+1} = \mathfrak{H}^m(z_1), \cdots, z_{mp+p-1} = \mathfrak{H}^m(z_{p-1})$$

همگی، وقتی $m \to \infty$، به یک حد γ_1 (نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}$) میل خواهند کرد. از این‌رو دنبالهٔ (۴.۱۰) هم که عناصرش در این p دنباله مندرج است به همان حد γ_1 میل می‌کند، اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد. هیچ‌یک از این دنباله‌ها همگرا نخواهد بود، مگر آنکه یکی از z_rها نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ باشد. از اینجا قضیهٔ زیر را داریم

قضیهٔ ب. دنبالهٔ (۴.۱۰) وابسته به دنبالهٔ متناوب تبدیلهای موبیوسِ $\mathfrak{H}_1$، $\mathfrak{H}_2$ و ... با دورهٔ تناوب $p \geq 1$ همگراست، اگر و فقط اگر

یا: اولین p مقدار z_0، z_1، $\cdots$ و z_{p-1} همگی همان نقطهٔ ثابت تبدیل موبیوس با ماتریس دورهٔ تناوب $\mathfrak{H}$ باشند.

یا: $\mathfrak{H}$ یک نقطهٔ ثابت جاذب γ_1 داشته باشد (یعنی $\mathfrak{H}$ نابیضوی باشد و $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{E}$) و هیچ‌یک از نقاط z_0، z_1، $\cdots$ و z_{p-1} بر نقطهٔ ثابت دافع $\mathfrak{H}$، در صورت وجود، منطبق نباشد. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \gamma_1$$

یکی از کاربردهای مهم قضیهٔ ب در نظریهٔ کسرهای مسلسل در مثال ۲ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

د. تبدیلهای موبیوس با بارِستِ متناوب. وقتی می‌گویند تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ بارست دورهٔ تناوبی به طول p دارد، که عدد مختلطی مانند $z_\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H}(z_\circ) = z_\backslash, \quad \mathfrak{H}(z_\backslash) = z_\Upsilon, \cdots, \quad \mathfrak{H}(z_{p-\backslash}) = z_\circ \qquad (\Delta.\backslash\circ)$$

و اعداد $z_\circ$، $z_\backslash$، $\cdots$ و $z_{p-\backslash}$ همگی از هم متمایز باشند. این اعداد یک «دورهٔ تناوب بارستی» در $\mathfrak{H}$ تشکیل می‌دهند. اگر $\mathfrak{T}$ تبدیل موبیوس دیگری باشد، آنگاه $\mathfrak{T}(z_\circ)$، $\mathfrak{T}(z_\backslash)$، $\cdots$ و $\mathfrak{T}(z_{p-\backslash})$ یک دورهٔ تناوب بارستی برای تبدیل $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-\backslash}$ خواهد بود.

اگر $p = \backslash$، $z_\circ = z_\backslash$ یکی از نقاط ثابت $Z = \mathfrak{H}(z)$ خواهد بود. به‌عکس یک نقطهٔ ثابت در هر $\mathfrak{H}$، یک دورهٔ تناوب بارستی به طول واحد پدید می‌آورد.

فرض کنید $p > \backslash$. اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، با انتقال $\begin{pmatrix} \backslash & \backslash \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$ متشابه است که $\begin{pmatrix} \backslash & n \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$ nامین بارست آن است. پس $\mathfrak{H}$ هیچ بارستی با دورهٔ تناوب $p > \backslash$ نمی‌پذیرد.

اگر $\mathfrak{H}$ ناسهموی و مغایر با تبدیل همانی باشد، با $\begin{pmatrix} k & \circ \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$ متشابه است $(k \neq -\backslash)$، و $\mathfrak{H}^p$ با $\begin{pmatrix} k^p & \circ \\ \circ & \backslash \end{pmatrix}$ متشابه‌است. از این‌رو به‌ازای $z_\circ \neq \gamma$، $\mathfrak{H}^p(z_\circ) = z_\circ$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$k^p z_\circ^* = z_\circ^* \quad (z_\circ^* \neq \circ), \quad k^p = \backslash$$

بنابراین $\mathfrak{H}$ بیضوی است و ثابت مشخصه‌اش k یکی از نخستین ریشه‌های ریشهٔ nام واحد است

$$k = e^{(\Upsilon\pi i\nu)/p} \qquad \text{(}p\text{ و }\nu\text{ نسبت به هم اول)} \quad (\backslash.\Delta.\backslash\circ)$$

بنابراین

قضیهٔ ج. اگر بارستی از یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ دارای دورهٔ تناوبی به طول $p > \backslash$ باشد، $\mathfrak{H}$ بیضوی و از مرتبهٔ p است (یعنی p کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که $\mathfrak{H}^p = \mathfrak{E}$).

توجه داریم که به‌ازای $p = \Upsilon$، تبدیل $\mathfrak{H}$ یک برگشت است (ر.ک. و. قضیهٔ و. بخش ۶، و مثال ۱۰، بخش ۶). برهان دیگری برای قضیهٔ ج در مثال ۴ خواهد آمد.

به‌موجب قضیهٔ ج می‌توانیم تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H}$ از مرتبهٔ متناهی $p \geq ۲$ را مورد مطالعه قرار دهیم. با توجه به (۵.۴.۸) و (۱.۵.۱۰) داریم

$$\sigma = k + \frac{۱}{k} - ۲ = -۴\left(\sin\frac{\nu\pi}{p}\right)^{۲} = ۲\left(\cos\frac{۲\nu\pi}{p} - ۱\right) \quad (۲.۵.۱۰)$$

و از آنجا به‌ازای مقادیر کوچک p جدول زیر به‌دست می‌آید

(۳.۵.۱۰)

p	۲	۳	۴	۶
σ	-۴	-۳	-۲	-۱

چون به‌ازای هر تبدیل سهموی $\mathfrak{H}$ همواره داریم $-۴ \leq \sigma < ۰$، نتیجه می‌گیریم که هیچ مقداری از p غیر از ۲، ۳، ۴ و ۶ وجود ندارد که مقدار $\sigma = \sigma(\mathfrak{H})$ عدد صحیحی باشد. در واقع تبدیلهای موبیوس از مراتب متفاوت نمی‌توانند متشابه باشند و بنابراین به مقادیر مختلف ناوردای σ متعلق‌اند.

نقاط $z_۰$، $z_۱$، $\cdots$ و $z_{p-۱}$ از یک بارِستِ تناوبی همواره بر یک دایرهٔ ناوردای تبدیل $\mathfrak{H}$ قرار دارند. با یک تبدیل موبیوس $z^* = \mathfrak{T}(z)$ که سه نقطهٔ متمایز این دایره را به سه نقطه از محور حقیقی در صفحهٔ z^* می‌برد، تبدیل $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ به‌دست خواهد آمد که برای آن محور حقیقی صفحهٔ z^* دایرهٔ ناوردایی است که نقاط بارست تناوبی حقیقی تبدیل $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$، یعنی نقاط $\mathfrak{T}(z_۰)$، $\mathfrak{T}(z_۱)$، $\cdots$ و $\mathfrak{T}(z_{p-۱})$، بر آن قرار دارند. با توجه به مفاد بخش ۸، د روشن می‌شود که این تبدیل حقیقی است. پس می‌توان فرض کرد که ماتریس $\mathfrak{H}$ حقیقی است، یعنی عناصر آن اعداد حقیقی‌اند.

علاوه بر این حالا فرض می‌کنیم که این عناصر اعداد گویا هستند. پس $\operatorname{tr}\mathfrak{H}$ و $|\mathfrak{H}|$ و $\sigma(\mathfrak{H})$ و $k+k^{-۱}$ گویا هستند. از اینجا معلوم می‌شود که یا k گویاست و یا k ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب گویاست. از طرف دیگر به‌ازای $۰ < n < p$ داریم $k^p = ۱$ و $k^n \neq ۱$. اما در جبر دیده‌ایم که در این صورت k ریشهٔ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیری با ضرایب گویا یعنی یک مقسوم‌علیه چندجمله‌ای $x^p - ۱$ است. درجهٔ این چند جمله‌ای تحویلناپذیر (که آن را چندجمله‌ای دایره بُری درجهٔ p گویند) برابر $\phi(p)$ است، یعنی، برابر تعداد اعداد صحیح مثبت کوچکتر از p و اول نسبت به p. چون درجهٔ یک معادلهٔ تحویلناپذیری که عدد جبری مفروضی ریشهٔ آن باشد منحصراً به‌وسیلهٔ این عدد تعیین می‌شود، از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\phi(p)$ باید مساوی ۱ یا ۲ باشد. در نظریهٔ مقدماتی اعداد دیده‌ایم که p نمی‌تواند مقدار دیگری جز مقادیر ۲، ۳، ۴ و ۶ داشته باشد. از این‌رو

قضیهٔ د. تنها مرتبه‌های متناهی ممکن یک تبدیل موبیوس با ضرایب گویا اعداد $p = ۱, ۲, ۳, ۴, ۶$، هستند.

ه. بارست مسلسل. اکنون تعریف توانهای تابعی (بارستنها، ر.ک. (۲.۱۰)) را از توانهای صحیح n به توانهای عدد حقیقی دلخواه s تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $f(s,z)$ تابعی باشد که به‌ازای همهٔ مقادیر پارامتر حقیقی s برای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$ تعریف شده است. این تابع را بارست مسلسل (یا تحلیلی) تابع $f(z)$ می‌نامیم و با

$$f(s,z) = f^s(z) \tag{۶.۱۰}$$

نمایش می‌دهیم، اگر این تابع در شرایط زیر صدق کند.

به‌ازای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$ و همهٔ مقادیر $s_۱$ و $s_۲$

$$f(\circ, z) = z, \qquad f(۱, z) = f(z) \tag{۱.۶.۱۰}$$

$$f[s_۲, f(s_۱, z)] = f(s_۱ + s_۲, z) \tag{۲.۶.۱۰}$$

چنین خانواده‌ای از توابع $f^s(z)$، معرف گروهی از تبدیلهای یک پارامتری است. بدین‌ترتیب مسئلهٔ بارست مسلسل یک تابع (یا تبدیل) مفروض $Z = f(z)$ هم‌ارز با مسئلهٔ زیر است: آیا می‌توان گروههای تبدیلهای یک پارامتری $Z = f(s,z)$ را طوری تعیین نمود که تبدیل مفروضی یک عنصر آن باشد؟

برای دستیابی به حل جزئی این مسئله فرض می‌کنیم که به‌ازای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$ این تابع با تابع kz^* (که در آن k ثابت مختلطی است) متشابه باشد. این بدین‌معنی است که به‌ازای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$ تابعی مانند $z^* = \phi(z)$ با عکس یکتای $\phi^{-۱}(z^*) = z$ وجود دارد (ر.ک. مثال ۷) به‌طوری‌که

$$f(z) = \phi^{-۱}[k\phi(z)] \tag{۳.۶.۱۰}$$

این معادله اغلب به صورت

$$\phi[f(z)] = k\phi(z) \tag{۴.۶.۱۰}$$

نوشته می‌شود و معادلهٔ تابعی شرودر (Schröder) نام دارد. به فرض آنکه این معادله جوابی مانند $\phi(z)$ داشته باشد به آسانی می‌توان ثابت کرد که

$$f(s, z) = \phi^{-1}[k^s \phi(z)] \tag{۵.۶.۱۰}$$

که معرف یک خانواده از توابعی است که در شرایط (۱.۶.۱۰) و (۲.۶.۱۰) صدق می‌کنند، یعنی یک بارست مسلسل $f(z)$ است. توجه داریم که بارستنهای مسلسل دیگر $f(z)$ چنین داده می‌شوند

$$f_m(s, z) = \phi^{-1}[e^{2\pi i m s} k^s \phi(z)] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{۶.۶.۱۰}$$

اگر تابع مفروض $f(z)$ با انتقالی مانند $Z^* = z^* + 1$ متشابه باشد، مسئلهٔ بارست مسلسل هم جوابی دارد. با این فرض تابعی مانند $\psi(z) = z^*$ تعریف شده در $\mathscr{D}$ با عکس یکتا وجود دارد که

$$f(z) = \psi^{-1}[\psi(z) + 1] \tag{۷.۶.۱۰}$$

این رابطه به صورت $\psi(f(z)) = \psi(z) + 1$ هم نوشته می‌شود که به معادلهٔ تابع آبل (Abel) مشهور است. در این حالت

$$f(s, z) = \psi^{-1}[\psi(z) + s] \tag{۸.۶.۱۰}$$

معرف یک بارست مسلسل تابع $f(z)$[1] است.

و. بارست مسلسل یک تبدیل موبیوس. در مورد یک تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$، مسئلهٔ بارست مسلسل را همیشه می‌توان به‌وسیلهٔ یک خانواده (گروه) از تبدیلهای موبیوس حل کرد.

۱. فرض کنید $\mathfrak{H}$ غیرسهموی، k ثابت مشخصهٔ آن، γ_1 و γ_2 نقاط ثابت آن، هر دو متناهی (معین) باشند. از حل معادلهٔ (۱.۴.۸) نسبت به Z نمایش تبدیل زیر را برای $\mathfrak{H}$ به‌دست می‌آوریم که در آن ثابت k را به روشنی در معرض دید قرار می‌دهد

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{(k\gamma_2 - \gamma_1)z + (1 - k)\gamma_1\gamma_2}{(k - 1)z + \gamma_2 - k\gamma_1} \tag{۷.۱۰}$$

۱. به‌طور صوری می‌توان گفت که دو تابع kz و $z + 1$ که به‌ترتیب مشخص حالات شرودر و آبل هستند با یکدیگر «متشابه»اند. زیرا به‌ازای $f(z) = z + 1$ معادلهٔ (۴.۶.۱۰) شرودر به‌وسیلهٔ تابع $\phi(z) = k^z$ حل می‌شود. ولی این تابع معکوس یکتا (تک‌مقداری) ندارد. این «مشابهت» صوری به‌جا نیست. به‌علاوه مقدار ثابت‌اساسی k را در معادلهٔ شرودر از بین می‌برد. (این تبصره می‌تواند روشنگر حکمی باشد که به کرات دربارهٔ «هم‌ارز» بودن معادلات تابعی شرودر و آبل می‌آید. به عنوان مثال رک. E. Picard [۱]، ص ۱۵۵).

اکنون دو ماتریس مرتبهٔ یک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{L}_1 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2 \\ 1 & -\gamma_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{L}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2\gamma_1 \\ 1 & -\gamma_2 \end{pmatrix}$$

که هر یک از دیگری با تعویض γ_1 و γ_2 با هم به‌دست می‌آید. پس (۷.۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathfrak{H} = q(k\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2) \qquad (۱.۷.۱۰)$$

با یک عامل دلخواه مختلط $q \neq 0$.

به‌موجب (۵.۶.۱۰) بارست مسلسل تبدیل $\mathfrak{H}$ از قراردادن k^s به‌جای k، به‌طور صوری در (۷.۱۰) به‌دست می‌آید. یک ماتریس تبدیل موبیوس (و نیز خود تبدیل) را، که در این خانواده به مقدار پارامتر s تعلق دارد می‌توان با $\mathfrak{H}^s$ نمایش داد بدین‌ترتیب

$$\mathfrak{H}^s = q(s)(k^s\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2) \qquad (۲.۷.۱۰)$$

که در آن $q(s)$ تابع دلخواهی از پارامتر حقیقی s است؛ از این‌رو می‌توانیم قرار دهیم $q(s) \equiv 1$، باید توجه داشت که (۲.۷.۱۰) رابطه‌ای بین ماتریسهاست.

به‌ازای عدد صحیح $s = n$ رابطهٔ (۲.۷.۱۰) به‌طور یکتا معرف n امین بارست تبدیل $\mathfrak{H}$ است (ر.ک. مثال ۸). ولی در حالت کلی تبدیل $\mathfrak{H}^s$ یکتا نیست. زیرا $k^s = e^{s\log k}$، به مقداری که برای k اختیار شده بستگی دارد. اگر $k = \rho e^{\alpha i}$، آنگاه

$$\log k = \log\rho + i(\alpha + 2m\pi) \qquad (\rho = |k|)$$

که در آن m می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. طبیعی است که در بیشتر حالات برای $\log k$ مقدارِ به اصطلاح اصلی، یعنی m برابر صفر، اختیار می‌شود، اگر α محدود به بازهٔ $-\pi < \alpha < \pi$ باشد. اگر $k > 0$، این مقدار اصلی، لگاریتم معمولی یک عدد مثبت است.

اگر $|k| < 1$، آنگاه به کمک معادلهٔ ماتریسی (۲.۷.۱۰) می‌توانیم حد زیر را به‌دست آوریم

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{H}^n = -\mathfrak{L}_2 \qquad (۱.۲.۷.۱۰)$$

یعنی، ماتریسی از رتبهٔ یک که با توجه به تعریف اولیه، تبدیل موبیوسی را معلوم نمی‌کند. ولی، با بسط نمادگذاری معمولی، که به‌وسیلهٔ آن هر ماتریس، یک تبدیل موبیوس را معین می‌کند، خواهیم داشت

$$\mathfrak{L}_۲(z) = \frac{\gamma_۱ z - \gamma_۲\gamma_۱}{z - \gamma_۲} = \gamma_۱, \qquad z \neq \gamma_۲ \text{ اگر} \qquad (۲.۲.۷.۱۰)$$

درصورتی‌که $z = \gamma_۲$، این «تبدیل تباهیدهٔ موبیوس» نامعین است. از این‌رو $\gamma_۲$ را «نقطهٔ نامعین» آن گویند. توجه داریم که رابطهٔ اخیر، اثبات دیگری برای جزء اول قضیهٔ الف است.

۲. فرض کنید $\mathfrak{H}$ سهموی باشد و γ نقطهٔ ثابت آن. بر اثر تبدیل

$$z^* = \mathfrak{T}(z) = \frac{h}{z - \gamma}$$

با یک مقدار مناسب $h \neq ۰$، تبدیل $\mathfrak{H}$ به $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}(z^*) = z^* + ۱$ بدل می‌شود و بنابر (۷.۶.۱۰) داریم

$$\mathfrak{H}(z) = \mathfrak{T}^{-۱}[\mathfrak{T}(z) + ۱]$$

و از آنجا با توجه به (۸.۶.۱۰) خواهیم داشت

$$\mathfrak{H}^s(z) = \frac{\gamma\left(\frac{h}{z-\gamma} + s\right) + h}{\frac{h}{z-\gamma} + s} = \frac{(h + \gamma s)z - \gamma^۲ s}{sz + h - \gamma s}$$

برحسب ماتریسها

$$\mathfrak{H}^e = q(s)(h\mathfrak{E} + s\mathfrak{L}) \qquad (۳.۷.۱۰)$$

که در آن $\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma^۲ \\ ۱ & -\gamma \end{pmatrix}$، باز هم تعریف یک تبدیل تباهیدهٔ موبیوس است که برخلاف $\mathfrak{L}_۲$ دارای هیچ نقطهٔ ثابتی نیست. زیرا به‌ازای هر $z \neq \gamma$، $\mathfrak{L}(z) = \gamma$، و γ نقطهٔ نامعین آن است. تابع $q(s)$ دلخواه است (ر.ک. تمرین ۹).

به هر تبدیل ناثابت زاویه‌ایِ موبیوس $\mathfrak{H}$ یک دسته دایرهٔ ناوردا و یک دسته دایرهٔ تبدیل‌شده به یکدیگر وابسته کرده‌ایم که در حالتهای غیرسهموی با دو نقطهٔ ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$یِ تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی خاص باشد، همهٔ $\mathfrak{H}^s$ها هذلولوی خاص هستند و

نقاط ثابت واحد و لذا جفت دسته دایره‌های دوبه‌دو متعامد واحدی خواهند داشت. اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد، همهٔ $\mathfrak{H}$ها نیز (به‌ازای هر مقداری که برای $\log k$ معین شود) بیضوی هستند. هر برگشتی بیضوی تلقی می‌شود. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی غیرخاص باشد، آنگاه $\alpha = \pi$، و برای مقادیر ناصحیح s تبدیل $\mathfrak{H}^s$ ثابت زاویه‌ای است. بالاخره اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، همهٔ $\mathfrak{H}^s$ها سهموی خواهند بود. زیرا به‌موجب (۳.۷.۱۰)

$$\operatorname{tr}\mathfrak{H}^s = ۲qh, \qquad |\mathfrak{H}^s| = q^۲h^۲$$

بنابراین

$$\sigma(\mathfrak{H}^s) = ۰$$

حال فرض کنید $\mathfrak{M}_۱ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، $(c \neq ۰)$، ماتریسی از رتبهٔ یک چنان باشد که $\gamma_۱$ نامعین و $\gamma_۲$ نقطهٔ ثابت تبدیل تباهیدهٔ موبیوس متناظر با آن باشد

$$\mathfrak{M}_۱(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \gamma_۲ \qquad (\text{به‌ازای هر } z \neq \gamma_۱)$$

ثابت می‌شود که $\mathfrak{M}_۱$ مضرب عددی از $\mathfrak{L}_۱$ است. زیرا بنا به فرض

$$b = \gamma_۲ d \text{ ،} \quad a = \gamma_۲ c \quad \text{یا} \quad az+b = \gamma_۲(cz+d)$$

و همچنین

$$d = -\gamma_۱ c \text{ ،یعنی} \text{ ،} c\gamma_۱ + d = ۰$$

بنابراین

$$\mathfrak{M}_۱ = c\mathfrak{L}_۱$$

به‌همین‌ترتیب ماتریس $\mathfrak{L}$ با نقطهٔ نامعین γ و بدون نقطهٔ ثابت، جدا از ضریب معین می‌شود.

اکنون به آسانی دیده می‌شود که‌اگر $\mathfrak{L}_۱$ ماتریسی از رتبهٔ یک با نقطهٔ نامعین $\gamma_۱$ و نقطهٔ ثابت $\gamma_۲$ باشد، $\mathfrak{T}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-۱}$ از رتبهٔ یک با نقطهٔ نامعین $\mathfrak{T}(\gamma_۱)$ و نقطهٔ ثابت $\mathfrak{T}(\gamma_۲)$ خواهد بود. بنابراین

$$\mathfrak{T}\mathfrak{L}_۱\mathfrak{T}^{-۱} = q\begin{pmatrix} \mathfrak{T}(\gamma_۲) & -\mathfrak{T}(\gamma_۱)\mathfrak{T}(\gamma_۲) \\ -۱ & -\mathfrak{T}(\gamma_۱) \end{pmatrix} \qquad (۴.۷.۱۰)$$

به‌ازای هر تبدیل (ناتباهیدهٔ) موبیوسِ $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ با روابط متناظر برای $\mathfrak{L}_2$ و $\mathfrak{L}$ که در آن γ_1 و γ_2 قطب نیستند. ضریب q در معادلهٔ ماتریسی (۴.۷.۱۰) به صورت

$$q = \frac{1}{|\mathfrak{T}|}(v\gamma_1 + w)(v\gamma_2 + w) \qquad (5.7.10)$$

به‌دست می‌آید که برحسب γ_1 و γ_2 متقارن است. بنابراین وقتی $\mathfrak{L}_2$ را به‌جای $\mathfrak{L}_1$ بگذاریم q تغییر نمی‌کند.

از این‌رو با توجه به(۲.۷.۱۰) نتیجه می‌گیریم که

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}^s\mathfrak{T}^{-1} = (\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1})^s \quad \text{(به‌ازای همهٔ } s \text{های حقیقی)} \qquad (6.7.10)$$

که اگر s یک عدد صحیح باشد، واضح است.

اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد، باز هم رابطهٔ (۶.۷.۱۰) معتبر است، که با نرمال‌نمودن ماتریس $\mathfrak{T}$، به‌صورتی‌که تساوی $(v\gamma + w)^2 = 1$ برقرار باشد، به‌راحتی می‌توان آن را دید. پس از (۳.۷.۱۰) بلافاصله (۶.۷.۱۰) نتیجه می‌شود.

با توجه به صورتهای نرمال و (۶.۷.۱۰) قضیهٔ زیر آشکار می‌شود. این قضیه یک تعبیر سینماتیک (جنبش‌شناسی) از بارِستِ مسلسل یک تبدیل موبیوس است.

قضیهٔ ه. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ یک تبدیل خاص هذلولوی یا سهموی یا بیضوی موبیوس است و z_0 نقطهٔ ثابتی غیر از نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$. در این صورت نقطهٔ

$$z = \mathfrak{H}^s(z_0)$$

بر دایرهٔ ناوردای $\mathfrak{C}$ از تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$، مارّ بر نقطهٔ z_0 حرکت می‌کند.

فرع ۱. اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی (از جمله، حالت یک برگشت) باشد، اگر s همهٔ اعداد حقیقی را اختیار کند، نقطهٔ z دایرهٔ کامل $\mathfrak{C}$ را، اغلب بینهایت بار، طی خواهد کرد. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی خاص و بنابراین دسته دایرهٔ بیضوی ناوردا باشد، z همواره بر کمانی واقع بین نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، که نقطهٔ آغازین z_0 هم بر آن قرار دارد، باقی می‌ماند.

شاید بتوانیم اشاره کنیم که دایرهٔ $\mathfrak{C}$ که از z_0 می‌گذرد و بر اثر $\mathfrak{H}$ ناورداست، به‌طور یکتا معین می‌شود، مگر آنکه $\mathfrak{H}$ یک برگشت باشد که در این صورت دو دسته دایرهٔ متعامدی که توسط نقاط ثابت $\mathfrak{H}$ تعیین می‌شوند دایره‌های ناوردا هستند.

فرع ۲. فرض کنید $\mathfrak{H}$ ناصحیح $(c \neq ۰)$ باشد به‌طوری‌که دارای قطبهای معین (متناهی) $Z_\infty = \mathfrak{H}(\infty)$ و $z_\infty = \mathfrak{H}^{-۱}(\infty)$ باشد. در این صورت نقطهٔ

$$Z_\infty^{(s)} = \mathfrak{H}^s(\infty) \qquad (۷.۷.۱۰)$$

یعنی، قطب معکوس بارست $\mathfrak{H}^s$ بر خط راستی حرکت می‌کند که $\langle z_\infty , Z_\infty \rangle$، قطر متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$، بر آن واقع است. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی خاص باشد، $Z_\infty^{(s)}$ همواره در خارج پاره‌خط $\langle \gamma_۱, \gamma_۲ \rangle$ باقی می‌ماند. اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد، توان $\mathfrak{H}^s$ که به‌ازای آن $Z_\infty^{(s)}$ نقطهٔ تقاطع دو قطر لوزی مشخصه است (بخش ۸، ه)، یک برگشت است.

اگر $\mathfrak{H}$ ثابت زاویه‌ای و یا هذلولوی غیرخاص باشد ولی $k \neq -۱$، نقطهٔ $z = \mathfrak{H}^s(z_۰)$ بر یک منحنی ثابت زاویه‌ای حرکت می‌کند که نگارهٔ مارپیچ لگاریتمی بر اثر یک تبدیل موبیوس است (ر.ک. بخش ۸، مثال ۶).

مثالها

۱. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ یک تبدیل نابیضوی موبیوس با دو نقطهٔ متمایز ثابت معین (متناهی) باشد. نشان دهید که نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}$ یعنی $\gamma_۱$، از نقطهٔ ثابت دافع $\gamma_۲$، به قطب $Z_\infty = a/c$ از تبدیل $\mathfrak{H}^{-۱}$ نزدیکتر است (ر.ک. ۱.۷.۸).

۲. کسرهای مسلسل متناوب. دنباله‌ای از تبدیلهای موبیوس با ماتریسهای

$$\mathfrak{H}_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & a_۱ \\ ۱ & b_۱ \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{H}_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & a_۲ \\ ۱ & b_۲ \end{pmatrix}, \cdots, \qquad \text{(همهٔ } a_n \text{ها مخالف صفر)} \quad (۸.۱۰)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌موجب (۴.۱۰) این دنباله معرف دنبالهٔ اعداد مختلط

$$z_۱ = \frac{a_۱}{b_۱ + z_۰}, \quad z_۲ = \frac{a_۱}{b_۱ + \dfrac{a_۲}{b_۲ + z_۰}}, \quad z_۳ = \frac{a_۱}{b_۱ + \dfrac{a_۲}{b_۲ + \dfrac{a_۳}{b_۳ + z_۰}}}, \cdots ; \quad (۱.۸.۱۰)$$

و یا با استفاده از نماد اختصاری، معرف دنبالهٔ

$$z_n = \frac{a_۱}{b_۱} + \frac{a_۲}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n}{b_n + z_۰} \qquad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

است.

به‌ازای $z_\circ = \circ$، این z_nها «تقریب زننده‌های»، «کسر مسلسل نامتناهی»ای هستند که به صورت نمادی با

$$f_\text{۱} = \frac{a_\text{۱}}{b_\text{۱}} {+} \frac{a_\text{۲}}{b_\text{۲}} {+} \cdots \qquad (\text{۲.۸.۱۰})$$

نشان داده می‌شود که اگر دنبالهٔ این تقریب زننده‌ها به حدی میل کند آن را همگرا گویند؛ در این صورت این حد را مقدار این کسر مسلسل گویند و آن را با $f_\text{۱}$ نشان می‌دهند.

اگر از یک اندیس به بعد، دنبالهٔ $\mathfrak{H}_n$ متناوب باشد، (۲.۸.۱۰) را یک کسر مسلسل متناوب نامند، چنانچه این تناوب درست با اولین جمله شروع شود آن را متناوب محض خوانند. به‌طوری‌که

$$f_\text{۱} = \frac{a_\text{۱}}{b_\text{۱}} {+} \frac{a_\text{۲}}{b_\text{۲}} {+} \cdots {+} \frac{a_p}{b_p} {+} \frac{a_\text{۱}}{b_\text{۱}} {+} \frac{a_\text{۲}}{b_\text{۲}} {+} \cdots {+} \frac{a_p}{b_p} {+} \cdots$$

در این حالت مسئلهٔ همگرایی $f_\text{۱}$ به‌وسیلهٔ قضیهٔ ب مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\text{۱}\mathfrak{H}_\text{۲} \cdots \mathfrak{H}_p$$

ماتریس دورهٔ تناوب، $\gamma_\text{۱}$ نقطهٔ ثابت جاذب، و $\gamma_\text{۲}$ نقطهٔ ثابت دافع آن باشند. (پس بیضوی‌بودن $\mathfrak{H}$ منتفی است)؛ اگر هیچ‌یک از p تقریب‌زنندهٔ اول برابر $\gamma_\text{۲}$ نباشد، آنگاه $f_\text{۱} = \gamma_\text{۱}$.

نقاط ثابت تبدیل موبیوس، اعداد $\gamma_\text{۱}$ و $\gamma_\text{۲}$، ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم هستند. اگر $\gamma_\text{۱}$ نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}$ باشد، $\gamma_\text{۲}$ نقطهٔ ثابت جاذب $\mathfrak{H}^{-\text{۱}}$ خواهد بود. از اینجا می‌توان یک کسر مسلسل متناوب $f_\text{۲}$ پیدا کرد که مقدارش مساوی $\gamma_\text{۲}$ باشد.

بدین‌منظور توجه می‌کنیم که به‌ازای هر ماتریس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با دترمینان $\delta = |\mathfrak{H}|$ داریم

$$\delta\mathfrak{H}^{-\text{۱}} = \mathfrak{I}\mathfrak{H}'\mathfrak{I}^{-\text{۱}} = \mathfrak{I}\mathfrak{H}'_p\mathfrak{H}'_{p-\text{۱}}\cdots\mathfrak{H}'_\text{۱}\mathfrak{I}^{-\text{۱}} \quad \text{و} \quad \mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \circ & -\text{۱} \\ \text{۱} & \circ \end{pmatrix}$$

چون

$$\mathfrak{H}'_\nu = \begin{pmatrix} \circ & \text{۱} \\ a_\nu & b_\nu \end{pmatrix} = a_\nu \begin{pmatrix} \circ & \dfrac{\text{۱}}{a_\nu} \\ \text{۱} & \dfrac{b_\nu}{a_\nu} \end{pmatrix}, \mathfrak{H}'_\nu(z) = \frac{\text{۱}}{b_\nu + a_\nu z} \qquad (\nu = \text{۱}, \cdots, p)$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای $f_۲$ دنبالهٔ $z_۰^*, z_۱^*, z_۲^*, \cdots$ (به‌ازای $f_۱$ متناظر با دنبالهٔ $z_۱, z_۲, \cdots$)

$$z_۰^* = \mathfrak{I}(z) = -\frac{۱}{z}, \qquad z_۱^* = -\frac{۱}{\mathfrak{H}_p'(z)} = -(b_p + a_p z),$$

$$z_۲^* = -\left(b_p + \frac{a_p}{b_{p-۱} + a_{p-۱} z}\right), \quad z_۳^* = -\left(b_p + \frac{a_p}{b_{p-۱}} + \frac{a_{p-۱}}{b_{p-۲} + a_{p-۲} z}\right), \cdots,$$

$$z_{p+۱}^* = -\left(b_p + \frac{a_p}{b_{p-۱}} + \frac{a_{p-۱}}{b_{p-۲}} + \cdots + \frac{a_۲}{b_۱} + \frac{a_۱}{b_p + a_p z}\right) \cdots,$$

به‌ازای $z = ۰$ مقادیر این z_n^*ها تقریب‌زننده‌های کسر مسلسل

$$f_۲ = -\left(b_p + \frac{a_p}{b_{p-۱}} + \cdots + \frac{a_۲}{b_۱} + \frac{a_۱}{b_p} + \frac{a_p}{b_{p-۱}} + \cdots + \frac{a_۱}{b_d} + \cdots\right) \quad (۳.۸.۱۰)$$

هستند که اگر هیچ‌یک از p تقریب‌زنندهٔ اول برابر $\gamma_۱$ نباشد، معرف مقدار $\gamma_۲$ است.

در نظریهٔ حسابی کسرهای مسلسل دیده‌ایم که اگر همهٔ a_νها و b_νها اعداد گویا باشند، $f_۱ = \gamma_۱$ گنگ است و بنابراین با یکی از تقریب‌زننده‌های گویای $f_۱$ مساوی نخواهد بود. بنابراین $f_۱$ و $f_۲$ دو ریشهٔ یک معادلهٔ درجه دوم تحویلناپذیر با ضراب گویا هستند.[۱]

۳. نشان دهید که اگر b حقیقی باشد کسر مسلسل $f_۱ = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{b} + \cdots$ همواره همگراست. به‌ازای مقدار مختلط b واگراست، اگر و فقط اگر ماتریس $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & b \end{pmatrix}$ متعلق به یک تبدیل بیضوی موبیوس باشد، یعنی $b = ib_۰$ و $-۲ < b_۰ < ۲$.

۴. برهان قضیه ج به‌ازای $p > ۲$. بارستی را در نظر می‌گیریم که به‌ازای نقطهٔ معلوم $z_۰$ با (۵.۱۰) تعریف شده است. به‌علاوه فرض می‌کنیم z متغیر باشد و

$$Z^{(۱)} = \mathfrak{H}(z), \qquad Z^{(۲)} = \mathfrak{H}(Z^{(۱)}), \qquad Z^{(۳)} = \mathfrak{H}(Z^{(۲)}) \cdots$$

پس با توجه به بخش ۶، د، قضیهٔ ج روابط زیر برقرارند

$$(z, z_۰; z_۱, z_۲) = (Z^{(۱)}, z_۱; z_۲, z_۳) = (Z^{(۲)}, z_۲; z_۳, z_۴) = \cdots = (Z^{(p)}, z_۰; z_۱, z_۲)$$

---

۱. کسر مسلسل $f_۱$ را ساده گویند هرگاه همهٔ a_nها مساوی ۱ باشند. در مورد کسرهای مسلسل سادهٔ متناوب قضیهٔ اخیر اول‌بار توسط E. Galois [۱] در ۱۸۲۸ در «اثبات قضیه‌ای دربارهٔ کسرهای مسلسل متناوب» نوشته شده است. همین‌طور رجوع کنید به فصلهای II و III کتاب O.Perron [۱]. اخیراً شرحی در نظریهٔ کسرهای مسلسل که همه‌اش دربارهٔ کاربرد تبدیلهای موبیوس است توسط K. Kolden [۱] منتشر شده است.

بنابراین به‌ازای همهٔ zها، $Z^{(p)} = z$. بنابراین $\mathfrak{H}^p$ همانی است.

۵. با استفاده از جدول (۳.۵.۱۰) مثالهایی از تبدیلهای موبیوس با ضرایب گویای صحیح برای هر یک از دوره‌های تناوب ممکن ۲، ۳، ۴ و ۶ تهیه کنید.

۶. همهٔ تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ از مرتبه‌های ممکن را بیابید که ضرایبشان اعداد گویای مختلط باشند، یعنی، $a = a_1 + ia_2$ و غیره، که در آنها a_1، a_2، b_1، $\cdots$ اعداد گویا هستند.

۷. یک تابع $\phi(z)$ در حوزهٔ $\mathscr{D}$ از صفحهٔ z را «تک‌ارز یا ساده» گویند، هرگاه به‌ازای دو نقطهٔ متمایز z_1 و z_2 در $\mathscr{D}$، $\phi(z_1)$ هم از $\phi(z_2)$ متمایز باشد. از این‌رو در مورد یک تابع تک‌ارز فرض بر این است که هر یک از مقادیر ممکن آن فقط یک بار به‌دست می‌آید و فقط یک عکس یکتای تک‌مقداری با همان ویژگی دارد. می‌توان نشان داد که به‌ازای هر تابع $\phi(z)$ که در $\mathscr{D}$ منظم و تک‌ارز باشد، به‌ازای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$، ضریب دیفرانسیلیِ آن $\phi'(z)$، مخالف صفر است.

ثابت k در معادلهٔ (۴.۶.۱۰) شرودر برابر با $f'(\gamma)$ است اگر γ نقطهٔ ثابتی از تابع دیفرانسیلپذیر $f(z)$ باشد. اگر $f(z) = \mathfrak{H}(z)$، آنگاه

$$k = \frac{ad - bc}{(c\gamma + d)^2}$$

در حالت معادلهٔ (۷.۶.۱۰) آبل، $f'(\gamma) = 1$. به‌هرحال $\mathfrak{H}'(\gamma)$ معرف مقداری برای ثابت مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ است و اگر $\mathfrak{H}$ دو نقطهٔ ثابت معین متمایز γ_1 و γ_2 داشته باشد، آنگاه

$$\mathfrak{H}'(\gamma_1)\mathfrak{H}'(\gamma_2) = 1 \qquad \text{(ر.ک. بخش ۸، ب)}$$

۸. در مورد ماتریسهای تکین $\mathfrak{L}_1$ و $\mathfrak{L}_2$ که در بخش ۱۰، و، ۱ معرفی شده‌اند، روابط زیر برقرارند

$$\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2 = (\gamma_2 - \gamma_1)\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{L}_1^2 = (\gamma_2 - \gamma_1)\mathfrak{L}_1, \qquad \mathfrak{L}_2^2 = (\gamma_1 - \gamma_2)\mathfrak{L}_2,$$

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1 = 0 \qquad \text{(ماتریس صفر)}$$

ماتریس $\mathfrak{L}$ که از (۳.۷.۱۰) به‌دست‌آمده پوچتوان است: $\mathfrak{L}^2 = 0$. از این‌رو ماتریس $\mathfrak{H}$ در یک تبدیل سهموی موبیوس مساوی است با مجموع مضربی از ماتریس واحد $\mathfrak{E}$ و یک ماتریس پوچتوان. نشان دهید عکس این حکم هم درست است.

۹. برای تکمیل بحث بخش ۱۰، و، ۱ نشان دهید که اگر $\gamma_2 = \infty$، $(\mathfrak{H}(z) = az + b)$، آنگاه

$$\mathfrak{H}^s = a^s \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۱۰. بارست تبدیل موبیوس با ماتریس دوری. با استفاده از نمادهای مثال ۷ بخش ۹، به‌ازای همهٔ مقادیر s می‌توان بارست مسلسل $\mathfrak{K}^s$ را به‌ترتیب طبق (۲.۷.۱۰) یا (۳.۷.۱۰) تشکیل دارد. پس با روابط مثال ۸ با نشان‌دادن اینکه $\mathfrak{K}^s\overline{\mathfrak{K}^s}$ مضربی از ماتریس واحد $\mathfrak{E}$ است به‌آسانی دیده می‌شود که $\mathfrak{K}^s$ هم‌زمان با $\mathfrak{K}$، به‌ازای همهٔ sهای حقیقی یک ماتریس دوری نرمالشده است. پس بارست $\mathfrak{K}^s$ به خانوادهٔ دوایری وابسته است که به‌ازای $s = ۱$ شامل دایرهٔ $\mathfrak{C}$ وابسته به $\mathfrak{K}$ است. در حالت هذلولوی داریم $\bar{\gamma}_۱ = \gamma_۲$، از این‌رو $\mathfrak{L}_۲ = \overline{\mathfrak{L}}_۱$. این ماتریسهای $\mathfrak{L}_۱$ و $\mathfrak{L}_۲$ متناظر با دو نقطه‌دایره از دسته دایره‌های هذلولوی هستند که به‌وسیلهٔ $\mathfrak{K}$ به‌هم بدل می‌شوند؛ محور حقیقی عنصری از این دسته است.

برای حالتهای دیگر هم نتایج متناظری به‌دست آمده‌اند. اگر $\mathfrak{K}$ بیضوی باشد (که در این صورت نقاط ثابت آن، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، حقیقی‌اند)، آنگاه دسته دایرهٔ وابسته به بارست مسلسل $\mathfrak{K}^s$، بر دستهٔ همه دایره‌های بیضوی گذرنده از نقاط $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ که به‌وسیلهٔ $\mathfrak{K}$ به‌هم بدل شده‌اند، منطبق است. سرانجام اگر $\mathfrak{K}$ سهموی باشد و γ نقطهٔ ثابت آن، آنگاه دسته دایره‌ای که به‌وسیلهٔ بارست مسلسل $\mathfrak{K}^s$ نمایش داده می‌شود، بر دسته دایرهٔ سهموی که در نقطهٔ γ بر محور حقیقی مماس‌اند منطبق است. و باز خودش دسته دایره‌ای است که به‌وسیلهٔ $\mathfrak{K}$ به‌هم بدل می‌شوند.

بدین‌ترتیب مطالعهٔ تبدیلهای موبیوس با ماتریسهای دوری مفید به‌نظر می‌آید. زیرا در این حالت ماتریسِ بارست معرفِ دوایر وابسته به دسته دایره‌ای است که به هم بدل می‌شوند.

۱۱. فرض کنید $\mathfrak{H}$ بیضوی و $z_۰$ نقطه‌ای بر خط راست مارّ بر نقاط ثابت $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ باشد. در این صورت معادلهٔ

$$z = \mathfrak{H}^s(z_۰) \qquad (۹.۱۰)$$

معرف دسته دایرهٔ ناوردای $\mathfrak{H}$ است که در آن $z_۰$ پارامتر خانوادگی است. به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$z_۰ = (۱ - t)\gamma_۱ + t\gamma_۲$$

می‌توان یک پارامتر حقیقی t را تعریف کرد. اگر $\mathfrak{H}$ هذلولوی خاص باشد، خانوادهٔ دوایر ناوردا با همان معادلهٔ (۹.۱۰) نمایش داده می‌شود، اما $z_۰$ بر خطی که نقاطش از نقاط $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ به یک فاصله‌اند، حرکت می‌کند

$$z_۰ = \frac{۱}{۲}(\gamma_۱ + \gamma_۲) + \frac{۱}{۲}i(\gamma_۱ - \gamma_۲)t$$

۱۲. اگر $\mathfrak{H}$ بیضوی، سهموی یا هذلولوی خاص باشد، خانوادهٔ تبدیلهای $\mathfrak{H}^s$ به‌ترتیب برگروههای $\mathscr{H}_e$، $\mathscr{H}_p^{(1)}$ و $\mathscr{H}_h^+$ از بخش ۹، ز یعنی گروههای شامل همهٔ تبدیلهای موبیوسی که از حاصلضربهای دو انعکاس به‌ترتیب در دسته دایره‌های حقیقی بیضوی، سهموی و هذلولوی بر اثر تبدیل $\mathfrak{H}$ حاصل شده‌اند منطبق هستند. با توجه به تبصرهٔ بخش ۹، ز به آسانی دیده می‌شود که هر یک از این گروهها دوری است، به این معنی که عناصرشان به صورت $\mathfrak{H}^s$ (با توان حقیقی s) ظاهر می‌شوند. از این‌رو $\mathfrak{H}$ را یک مولد این گروه می‌نامیم. هر عنصر، غیر از عنصر همانی (عنصر یکه)، یک مولد آن گروه دوری پیوسته است. (در حالت کلی، در مورد گروههای متناهی یا گروههای دوری گسسته، که در آنها همهٔ عناصر توانهای صحیح یک عنصر گروه هستند، این حکم صادق نیست).

۱۳. ناوردای مشابهت $\sigma_n = \sigma(\mathfrak{H}^n)$، به‌ازای $n = ۱, ۲, \cdots$، را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای برحسب $\sigma = \sigma_۱ = \sigma(\mathfrak{H})$ نوشت. با توجه به این مطلب که هرگاه $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ریشه‌های مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ باشند، $\lambda_۱^n$ و $\lambda_۲^n$ ریشه‌های مشخصهٔ $\mathfrak{H}^n$ خواهند بود (ر.ک. مثال ۱۰، بخش ۸). از (۳.۹.۸) نتیجه می‌گیریم که

$$\sigma_n = \frac{(\lambda_۱^n + \lambda_۲^n)^۲}{\lambda_۱^n\lambda_۲^n} - ۴ = \frac{\lambda_۱^{۲n} + \lambda_۲^{۲n}}{\delta^n} - ۲$$
$$= \frac{۱}{۲^{۲n}\delta^n}\{[\tau + \sqrt{(\sigma\delta)}]^{۲n} + [\tau - \sqrt{(\sigma\delta)}]^{۲n}\} - ۲$$

با استفاده از رابطهٔ $\frac{\tau}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{(\sigma + ۴)}$ خواهیم داشت

$$\sigma_n = \frac{۱}{۴^n}\{[\sqrt{(\sigma + ۴)} + \sqrt{\sigma}]^{۲n} + [\sqrt{(\sigma + ۴)} - \sqrt{\sigma}]^{۲n}\} - ۲$$
$$= \frac{۱}{۲^{۲n-۱}}\sum_{\nu=۰}^{n}\binom{۲n}{۲\nu}\sigma^\nu(\sigma + ۴)^{n-\nu} - ۲$$

برای اینکه این فرمول به‌ازای $\sigma = ۰$ معتبر باشد، قرار می‌دهیم $۰^۰ = ۱$.[۱]

به‌ویژه به‌ازای $\sigma = -۲$ (یعنی، ناوردای رده‌ای که متوازی‌الاضلاع مشخصه‌اش مربع است)، می‌توان نوشت

$$\sigma_n^{(-۲)} = \frac{۱}{۲^{n-۱}}\sum_{\nu=۰}^{n}(-۱)^\nu\binom{۲n}{۲\nu} - ۲$$

۱. ر.ک. E. Jacobsthal [۳]، I.

که مقادیر عددی این مجموعها را فوری می‌توان نوشت. چون ثابت مشخصهٔ متناظر آن $\pm i$ است، به‌موجب (۳.۸) داریم

$$\sigma^{(-۲)}_{۲m-۱} = -۲, \qquad \sigma^{(-۲)}_{۴m-۲} = -۴ \ \text{(برگشت)}, \qquad \sigma^{(-۲)}_{۴m} = ۰ \ \text{(همانی)}$$

۱۴. فرایند بارست هر تبدیل موبیوس نابرگشتی $\mathfrak{H}$ را می‌توان به فرمول تراجعی دنباله‌ای از چندجمله‌ایها تبدیل نمود. فرض کنید

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \tau = a + d \neq ۰$$

در این صورت می‌توان یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{T}$ چنان یافت که

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱} = q\mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \tag{۱.۹.۱۰}$$

چون

$$\sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{B}) = \frac{\tau^۲}{\delta} - ۴ = -\frac{۱}{\beta} - ۴$$

داریم

$$\beta = -\frac{\delta}{\tau^۲} = -\frac{۱}{\sigma + ۴} \tag{۲.۹.۱۰}$$

اگر $\mathfrak{H}$ تبدیل صحیح موبیوس نباشد ($c \neq ۰$) می‌توان یک تبدیل صحیح موبیوس $\mathfrak{T}$، مثل

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & a + d \end{pmatrix}$$

را انتخاب نمود (ر.ک. قضیهٔ ج، بخش ۸، ه) تا تبدیل تشابهی (۱.۹.۱۰) را تحقق بخشد. اگر $\mathfrak{H}$ صحیح باشد، $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$، $a \neq -۱$، قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} a & ۰ \\ a + ۱ & -b(a + ۱) \end{pmatrix}$$

چون β با ردهٔ ناوردای σ (و به‌طور یکتا) تعریف شده است (ر.ک. قضیهٔ الف، بخش ۸، ب)، ماتریسهای $\mathfrak{B}$ معرف یکدستگاه کامل صورتهای نرمال نابرگشتی هستند. صورت نرمال $\mathfrak{B}$ این امتیاز را دارد که می‌شود آن را به‌وسیلهٔ یک ماتریس تبدیل $\mathfrak{T}$ که عناصرش توابع گویای بسیار ساده‌ای از عناصر $\mathfrak{H}$ هستند، به‌دست آورد.

به گفته یاکوب اشتال (Jacobsthal) [۱] اکنون می‌توان بارست $\mathfrak{B}$ را با روش زیر تشکیل داد

$$\mathfrak{B}^n = \begin{pmatrix} f_n(\beta) & \beta f_{n-۱}(\beta) \\ f_{n-۱}(\beta) & \beta f_{n-۲}(\beta) \end{pmatrix} \qquad (n = ۱, ۲, \cdots) \quad (۳.۹.۱۰)$$

که در آن $f_n(x)$ دنبالهٔ چندجمله‌ایهای معروف فیبوناتچی (Fibonacci) است. این دنباله توسط رابطهٔ تراجعی

$$f_{n+۱}(x) = f_n(x) + x f_{n-۱}(x), \qquad f_۰(x) = ۱ \qquad f_{-۱}(x) = ۰$$

تعریف می‌شود که به‌وسیلهٔ آن رابطهٔ (۳.۹.۱۰) از طریق استقراء ریاضی ثابت می‌شود. پس

$$\mathfrak{H}^n = q^n \mathfrak{T}^{-۱} \mathfrak{B}^n \mathfrak{T}$$

از این رابطهٔ تراجعی به‌دست می‌آوریم: $N = [n/۲]$، $f_n(x) = \sum_{\nu=۰}^{N} \binom{n-\nu}{\nu} x^\nu$.

برای تعیین ریشه‌ها و ویژگیهای جبری (تحویلپذیری یا تحویلناپذیری) چندجمله‌ایهای فیبوناتچی می‌توان از فرمول (۳.۹.۱۰) استفاده کرد. یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ و لذا تبدیل متناظر آن $\mathfrak{B}$ نیز دارای مرتبهٔ متناهی n خواهد بود، اگر و فقط اگر مقدار ثابت مشخصهٔ آن k، ریشهٔ nام اولیهٔ واحد

$$k = e^{۲\pi i p/n}, \qquad (p, n) = ۱$$

باشد. پس $\sigma = k + \bar{k} - ۲ = -۴(\sin \pi p/n)^۲$. با درنظرگرفتن (۲.۹.۱۰) قرار می‌دهیم

$$\beta_n^{(\nu)} = -\frac{۱}{۴} \frac{۱}{(\cos \pi\nu/n)^۲} \qquad (۴.۹.۱۰)$$

اگر $\left\{\begin{array}{l} n = ۲m + ۱ \\ n = ۲m \end{array}\right\}$، آنگاه تعداد $\left\{\begin{array}{l} [n/۲] = m \\ [n/۲] - ۱ = m - ۱ \end{array}\right.$ مقدار متمایز $(\cos \pi\nu/n)^۲ \neq ۰$ وجود دارد. به‌ازای همهٔ مقادیر متناظر $\beta_n^{(\nu)}$ داریم $\begin{pmatrix} ۱ & \beta_n^{(\nu)} \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}^n = q_n \mathfrak{E}$.

بنابراین به‌موجب (۳.۹.۱۰) داریم

$$f_{n-1}(\beta_n^{(\nu)}) = 0, \qquad \begin{array}{ll} \nu = 1, \cdots m & n = 2m+1 \text{ اگر} \\ \nu = 1, \cdots, m-1 & n = 2m \text{ اگر} \end{array}$$

یا

$$f_{2m}(\beta_{2m+1}^{(\nu)}) = 0, \qquad f_{2m-1}(\beta_{2m}^{(\nu)}) = 0$$

و چون درجهٔ $f_{2m}(x)$ مساوی m است، همهٔ m ریشهٔ $\beta_{2m+1}^{(\nu)}$ به‌دست می‌آیند؛ و همچنین $\beta_{2m}^{(\nu)}$، $m-1$ ریشهٔ متمایز $f_{2m-1}(x)$ هستند، که درجه‌اش $m-1$ است.

اگر l یک مقسوم‌علیه n باشد، ریشه‌های $f_{l-1}(x)$، ریشه‌های $f_{n-1}(x)$ نیز هستند. پس $f_{l-1}(x)$ یک مقسوم‌علیه $f_{n-1}(x)$ است و چندجمله‌ای $f_{n-1}(x)$ تحویلپذیر خواهد بود اگر n عدد اول نباشد.

۱۵. اگر یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با ضرایب صحیح و $c \neq 0$ بتواند دنبالهٔ بارستی $(x_n = \mathfrak{H}^n(x_0)$ از اعداد صحیح x_0، x_1، x_2، $\cdots$ را اختیار کند، این دنباله تناوبی است.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$؛ پس $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-1}(z^*) = (\tau z^* - \delta)/z^* = \tau - \delta/z^*$ دنبالهٔ بارستی صحیح $x_n^* = cx_n + d = \tau - \delta/x_{n-1}^*$ را دارد که تناوبی است اگر و فقط اگر x_n تناوبی باشد، همهٔ x_n^*ها باید مقسوم‌علیه δ باشند؛ بنابراین فقط تعداد معینی x_n متمایز می‌توانند وجود داشته باشند. اگر p، طول دورهٔ تناوب، برابر ۱ باشد، x_0 یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ است. پس $p > 1$ را در نظر می‌گیریم. در این دنباله هیچ جملهٔ پیش‌ـدورهٔ تناوبی وجود ندارد، زیرا $x_n = x_m$، $(0 < m < n)$ به معنی $\mathfrak{H}^n(x_0) = \mathfrak{H}^m(x_0)$ است و لذا x_0 باید یک نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}^{n-m}$، و در نتیجه $\mathfrak{H}$ باشد.

اگر طول دورهٔ تناوب $p > 1$ باشد، $\mathfrak{H}$ از مرتبهٔ p است و p لزوماً مساوی با ۲ یا ۳ یا ۴ و یا ۶ است (رک. قضایای ج و د، زیربخش ج). جدول ۳.۵.۱۰ مقادیر صحیح متناظر σ را می‌دهد؛ و برای وجود یک دنبالهٔ بارستی صحیح با دورهٔ تناوب p شرط لازم زیر را داریم

$$p = 2: \quad \tau = 0; \quad p = 3: \quad \tau^2 = \delta; \quad p = 4: \quad \tau^2 = 2\delta; \quad p = 6: \quad \tau^2 = 3\delta$$

در مورد شرایط لازم دیگر و ساختن تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H}$ که برای دوره‌های تناوب ۲، ۳، ۴ و ۶ بارستهای صحیحی به‌دست می‌دهند. به مقالهٔ آدلمن (Adelman) [۱] مراجعه کنید.

۱۱. ویژگی هندسی تبدیل موبیوس

الف. قضیهٔ اساسی. تبدیل موبیوس با تعریف جبری‌اش در (۱.۶) معرفی و در بخش ۶، د ثابت شد که تبدیلهای موبیوس همانند پادهمنگاریها تبدیلهایی حافظ دایره‌اند.[۱] آیا در صفحهٔ کامل‌شده تبدیلهای حافظ دایرهٔ دیگری هم وجود دارند؟

این پرسش شبیه و در واقع دقیقاً مربوط به مسئلهٔ متناظرش در هندسهٔ تصویری است. تقریباً روشن است که هر تبدیل همگن خطی عکسپذیر در مختصات همگن با سه مجهول معرف یک هخطّی در صفحهٔ تصویری است، یعنی، یک تبدیل عکسپذیر یکتاست که نقطه را به نقطه بدل می‌کند و خط راست را به خط راست. آیا در صفحهٔ تصویری حقیقی همخطّی دیگری هم وجود دارد؟

پاسخ این هر دو پرسش «نه» است. در حالت دوم با قضایای اساسی هندسهٔ تصویری در صفحهٔ تصویری حقیقی[۲] پاسخ داده می‌شود. پاسخ حالت اول موضوع قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ الف. فرض می‌کنیم $Z = f(z)$ نگاشتی تک‌مقداری با عکس یکتا از صفحهٔ کامل‌شده «به‌توی»[۳] خودش باشد به‌طوری‌که هر دایرهٔ حقیقی (یا خط راست) را بر یک دایرهٔ حقیقی یا خط راست بنگارد. در این صورت $f(z)$ یک تبدیل موبیوس است یا یک پادهمنگاری.

برهان. حاصلضرب دو تبدیل حافظ دایره خود یک تبدیل حافظ دایره است. پس تمام این تبدیلها گروهی تشکیل می‌دهند که شامل همهٔ تبدیلهای موبیوس و پادهمنگاریهاست.

فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ تبدیل موبیوسی باشد که $f(\circ)$، $f(1)$ و $f(\infty)$ را به‌ترتیب بر ۰، ۱ و ∞ می‌نگارد. در این صورت $\mathfrak{H}(f(z))$ و $\overline{\mathfrak{H}(f(z))}$ هم‌نگاشتهایی تک‌مقداری با عکس یکتا از صفحهٔ کامل‌شده به‌توی خودش هستند که دایره را به دایره تبدیل می‌کنند؛ ۰، ۱ و ∞ نقاط ثابت اینها هستند. یکی از این نگاشتها ـــ که می‌شود آن را با $g(z)$ نمایش دادـــ نقطهٔ $z = i$ را به توی نیم‌صفحهٔ بالایی

$$\operatorname{Im} g(i) > \circ \tag{۱.۱۱}$$

می‌نگارد.

---

۱. آلمانی: Kreisverwandtschaften. ر.ک. Moebius [۱] و [۲].

۲. ر.ک. کتاب O. Veblen و J. W. Young [۱] جلد اول صفحات ۹ـ۱۸۸. همین‌طور کتاب M. Coxeter [۲] صفحهٔ ۱۶۸ و کتاب R. Brauer. بخش ۱۱، ب و مثال ۱ را هم مطالعه کنید.

۳. واژهٔ «به‌توی» مبین آن است که نگارهٔ صفحهٔ کامل‌شده بر اثر نگاشت $Z = f(z)$، صفحهٔ کامل‌شده و یا جزء خاصی از آن فرض شده است. از این قضیه نتیجه می‌شود که حتی با این فرض وسیع، نگاره عملاً صفحهٔ کامل‌شده است.

چون $g(\infty) = \infty$، خطوط راست (دوایر مارّ بر ∞) بر خطوط راست نگاشته می‌شوند. چون $g(\circ) = \circ$، خطوط راست مارّ بر o بر خطوط راست مارّ بر o نگاشته می‌شوند. به‌ویژه محور حقیقی (خطی که بر نقاط ثابت می‌گذرد) در تبدیل $g(z)$ بر خودش نگاشته خواهد شد.

دایره‌های مماس بر هم، دقیقاً یک نقطه‌مشترک دارند. از این‌رو نگاره‌های آنها هم بر یکدیگر مماس خواهند بود. به‌ویژه خطوط موازی (دوایری که در ∞ بر هم مماس‌اند) بر خطوط موازی نگاشته می‌شوند (توجه کنید که خطوط راست متوازی در صفحهٔ کامل‌شده، به‌طور گنجنگاشتی متناظر دوایری بر کره‌اند که در نقطهٔ S، مرکز تصویر، بر هم مماس‌اند.)

اکنون فرض می‌کنیم نقاط $z_\circ$، $z_۱$ و $z_۲$ همخط نیستند. پس خطوط راست: مارّ بر $z_۱$ و موازی با بردار $\overrightarrow{z_\circ z_۲}$، یکدیگر را در نقطهٔ $z_۱ + z_۲ - z_\circ$ می‌برند. نگاره‌های آنها خطوط راستی هستند، مارّ بر نقاط $g(z_۱)$ و $g(z_۲)$ به‌ترتیب موازی با بردارهای $\overrightarrow{g(z_\circ)g(z_۲)}$ و $\overrightarrow{g(z_\circ)g(z_۱)}$. نقطهٔ تقاطع اینها $g(z_۱) + g(z_۲) - g(z_\circ)$، نگارهٔ $z_۱ + z_۲ - z_\circ$ است. بنابراین

$$g(z_۱ + z_۲ - z_\circ) = g(z_۱) + g(z_۲) - g(z_\circ) \qquad (۱.۱.۱۱)$$

به‌ویژه

$$g(z_۱ \pm z_۲) = g(z_۱) \pm g(z_۲) \qquad (۲.۱.۱۱)$$

اگر $\circ$، $z_۱$ و $z_۲$ همخط نباشند. به‌موجب (۲.۱.۱۱)،

$$g(z_۱) - g(z) = g(z_۱ - z) = g[z_۱ + (-z)] = g(z_۱) + g(-z)$$

یا

$$g(-z) = -g(z) \qquad (۳.۱.۱۱)$$

حال فرض می‌کنیم o، $z_۱$ و $z_۲$ همخط باشند؛ در این صورت جز در وقتی که $z_۲ = \mp z_۱$، (یک حالت بدیهی و حالت دیگری که در (۳.۱.۱۱) آمده است)، $z_۱ - iz_۱$ و $z_۲ \pm iz_۱$ با o بر یک خط راست نیستند. بنابراین می‌توان به‌جای $z_۱$ و $z_۲$ مقادیر $z_۱ - iz_۱$ و $z_۲ \pm iz_۱$ را قرار داد

$$\begin{aligned} g(z_۱ \pm z_۲) &= g[(z_۱ - iz_۱) \pm (z_۲ \pm iz_۱)] = g(z_۱ - iz_۱) \pm g(z_۲ \pm iz_۱) \\ &= g(z_۱) - g(iz_۱) \pm [g(z_۲) \pm g(iz_۱)] = g(z_۱) \pm g(z_۲) \end{aligned}$$

بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر z_1 و z_2، (۲.۱.۱۱) درست است.

با استقراء از (۲.۱.۱۱) و (۳.۱.۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$g(nz) = ng(z) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

فرض می‌کنیم m عدد صحیح مثبتی باشد. دراین‌صورت

$$g(z) = g\left(m\frac{z}{m}\right) = mg\left(\frac{z}{m}\right) \qquad \text{یا} \qquad g\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{1}{m}g(z)$$

بنابراین

$$g\left(\frac{n}{m}z\right) = g\left(n\frac{z}{m}\right) = ng\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{n}{m}g(z)$$

از این‌رو به‌ازای هر عدد گویای r داریم

$$g(rz) = rg(z) \tag{۴.۱.۱۱}$$

به‌ویژه

$$g(r) = rg(1) = r$$

بنابراین همهٔ اعداد گویای r، نقاط ثابت‌اند.

استدلال هندسی زیر نشان می‌دهد که تبدیل $Z = g(z)$ حافظ تعامد است. فرض می‌کنیم l_1 و l_2 دو خط راست متعامد باشند. خطهای راست $l'_1 || l_1$ و $l'_2 || l_2$ $(l'_2 \neq l_2, l'_1 \neq l_1)$ را رسم می‌کنیم. این چهار خط راست در رأسهای یک مستطیل همدیگر را قطع می‌کنند. پس نقاط تقاطع نگاره‌های آنها، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع خواهند شد. چون چهار رأس این مستطیل بر محیط یک دایره‌اند، نگاره‌های آنها هم بر محیط یک دایره‌اند. پس متوازی‌الاضلاع نگاره نیز مستطیل است؛ بنابراین $g(l_1)$ بر $g(l_2)$ عمود است (به قرارداد مثال ۵، بخش ۸ نگاه کنید).

اکنون نتیجه می‌گیریم که محور انگاری بر خودش نگاشته می‌شود. به‌ویژه

$$g(i) = \lambda i$$

و بنابر (۲.۱.۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$g(\pm 1 + i) = \pm 1 + \lambda i$$

که در آن λ حقیقی است. به‌علاوه ملاحظه می‌کنیم که خطهای راست مارّ بر o و $i+۱\pm$ متعامدند؛ همین وضعیت باید برای نگاره‌های آنها، که به‌ترتیب از نقاط $\lambda i + ۱ \pm$ می‌گذرند، برقرار باشد. بنابراین $\lambda = \pm ۱$، و با توجه به (۱.۱۱) داریم

$$\lambda = +۱$$

بنابراین $g(i) = i$ و به‌موجب (۴.۱.۱۱) به‌ازای همهٔ اعداد گویای r و s داریم

$$g(r+si) = r+si \qquad (۵.۱.۱۱)$$

حال فرض می‌کنیم α گنگ باشد. فرض می‌کنیم $r_۰$، $r_۱$ و $r_۲$ اعداد گویا چنان باشند که

$$r_۰ < r_۱ < \alpha < r_۲ \qquad (۶.۱.۱۱)$$

فرض می‌کنیم $\mathfrak{C}$ دایره‌ای باشد که از $r_۱$، $r_۲$ و i می‌گذرد. هر دایره‌ای که از $r_۰$ و α بگذرد $\mathfrak{C}$ را قطع خواهد کرد. پس هر دایرهٔ مارّ بر $g(\alpha)$ و $g(r_۰) = r_۰$، دایرهٔ نگارهٔ $g(\mathfrak{C})$ را که بر $\mathfrak{C}$ منطبق است، قطع خواهد کرد. چون $g(\alpha)$ حقیقی است از آنجا نتیجه می‌شود که

$$r_۱ < g(\alpha) < r_۲$$

این نامساوی به‌ازای هر جفت عدد گویای $r_۱$ و $r_۲$ که در (۶.۱.۱۱) صدق کنند برقرار است. پس $g(\alpha) = \alpha$. به‌همین‌ترتیب $g(\alpha i) = \alpha i$ و به‌ازای جمیع مقادیر مختلط z داریم

$$g(z) = g(x+yi) = g(x) + g(yi) = x+yi = z$$

بنابراین $g(z)$ همانی است و

$$f(z) = \mathfrak{H}^{-۱}(z) \qquad \text{یا} \qquad f(z) = \overline{\mathfrak{H}^{-۱}(z)}\ ^{۱}$$

فرع. هر تبدیل حافظ دایره‌ای از صفحهٔ کامل‌شده که جهت دوران را در یک نقطه محفوظ نگاه دارد، لزوماً یک تبدیل موبیوس است.

---

۱. به‌نظر می‌آید که برهانهای مستقیم برای قضیهٔ الف، به‌ندرت در ریاضیات مدون پیدا می‌شود و از آنجا بود که C. Caratheodory [۲] در اوایل سال ۱۹۳۷ لزوم انتشار آن را احساس نمود. ساده‌کردن برهان کنونی مرهون اظهارنظرهای P. Scherk است. برهانهای دیگری در بخش ۱۱، ج و مثال ۱ آورده شده است. همین‌طور ر.ک. مقالهٔ G. Darboux [۱]. برهان دیگری به‌وسیلهٔ Lie and Scheffers [۱] در صفحات ۱۶_۴۱۴ که مسلماً مشکلترین قسمت مطلب است درج گردیده است.

ب. تبدیلهای تصویری مختلط. قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری در صفحه‌ای که در ابتدای بخش ۱۱، **الف** آمده است، یکی از مشخصات جبریِ همخطّی در صفحه را به‌دست می‌دهد. به‌آسانی می‌توان آن را برای فضای سه‌بعدی و نیز برای همهٔ فضاهای به‌بعد $n > 2$ [1] تعمیم داد. ولی برای $n = 1$، یعنی، برای خط راست تصویری حقیقی مشخصهٔ هندسی یک رابطهٔ تصویری به صورت یک «همخطّی» طبیعتاً وجود ندارد. در چنین حالتی یک تعریف از رابطهٔ تصویری در بخش ۷، **ب** آورده و ثابت شده است که هر رابطهٔ تصویری یک‌بعدی را می‌توان به‌وسیلهٔ یک تبدیل موبیوس نشان داد. این نتیجه بی‌درنگ ما را به قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویریِ خط راست حقیقی (بخش ۷، قضیهٔ **ب**) راهنمایی می‌کند. اگر این خط محور حقیقی باشد، تبدیل موبیوس معرف یک رابطهٔ تصویر حقیقی خواهد بود (ر.ک. تبصرهٔ آخر بخش ۸، د).

برای تعریف رابطهٔ تصویری یک‌بعدی حقیقی که در بخش ۷، **ب** آورده شده است، از ساختمان دوبعدی یک رابطهٔ تصویری استفاده شده است. اکنون به‌جای این تعریف، تعریف «صرفاً یک‌بعدی» زیر را قرار می‌دهیم. یک رابطهٔ تصویری بر محور xها عبارت است از یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک $X = f(x)$ بین نقاط حقیقی x و X که هر مجموعهٔ همساز از چهار نقطهٔ x_1، x_2، x_3 و x_4 را بر مجموعهٔ همساز X_1، X_2، X_3 و X_4 به صورت $X_\nu = f(x_\nu)$ می‌نگارد [ر.ک. (۱.۶.۵)].

روشن است که مطابق این تعریف هر تبدیل حقیقی موبیوس معرف یک رابطهٔ تصویری است. یک قضیهٔ اساسی دیگرِ هندسهٔ تصویری یک‌بعدی حاکی از امکان نشان‌دادن هر رابطهٔ تصویری، (به این معنی) به‌وسیلهٔ تبدیل حقیقی موبیوس (بنابراین یک رابطهٔ تصویری به معنی تعریف قبلی) است. برهان آن بلافاصله از بحث بعدی همراه با پاره‌ای نکات که در مثال ۲ آمده نتیجه می‌شود.

حال یک رابطهٔ تصویری بر خط راست مختلط (یعنی بر صفحهٔ کامل‌شدهٔ z) را به صورت نگاشت صفحهٔ کامل‌نشده به‌توی خودش تعریف می‌کنیم که لزوماً تک‌مقداری با عکس یکتا نیست و هر مجموعهٔ همساز $z_1, z_2; z_3, z_4$ را بر یک مجموعهٔ همساز $Z_1, Z_2; Z_3, Z_4$ می‌نگارد. به‌موجب قضیهٔ ج و مثال ۱۲ از بخش ۶، روشن می‌شود که تبدیلهای موبیوس و پادهمنگاریها، روابطی تصویری بر خط مختلط هستند. پرسشی که پیش می‌آید این است که آیا روابط تصویری مختلط دیگری هم وجود دارند یا نه؟

فرض می‌کنیم $Z = f(z)$ یک رابطهٔ تصویری مختلط دلخواهی باشد. همانند ابتدای برهان

---

۱. به مقاله R. Brauer [۱] رجوع کنید.

الف، می‌توان یک تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ چنان یافت که نقاط ۰ و ۱ و ∞، نقاط ثابت رابطهٔ تصویری مختلطِ

$$g(z) = \mathfrak{H}[f(z)] \qquad (۲.۱۱)$$

باشند.

لم. هر رابطهٔ تصویریِ (حقیقی یا مختلطِ) $Z = g(z)$ که نقاط ۰ و ۱ و ∞ نقاط ثابت آن باشند، معرف یک خودریختی در هیأت اعداد مختلط است، یعنی، به‌ازای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داریم

$$g(z_۱ + z_۲) = g(z_۱) + g(z_۲) \qquad (۱.۲.۱۱)$$

$$g(z_۱ z_۲) = g(z_۱)g(z_۲) \qquad (۲.۲.۱۱)$$

برهان. به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $z_۱$ و $z_۲$ داریم

$$(z_۱, z_۲; \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲), \infty) = -۱$$

و لذا همچنین

$$(g(z_۱), g(z_۲); \frac{۱}{۲}[g(z_۱) + g(z_۲)], \infty) = -۱$$

چون g حافظ نسبت همساز است، از همان فرمول نتیجه می‌شود که

$$(g(z_۱), g(z_۲); g[\frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲)], \infty) = -۱$$

و

$$g[\frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲)] = \frac{۱}{۲}[g(z_۱) + g(z_۲)]$$

قرار می‌دهیم $z = z_۱$ و $z_۲ = ۰$؛ دراین‌صورت $g(\frac{۱}{۲}z) = \frac{۱}{۲}g(z)$. این بدین‌معنی است که در فرمول قبلی می‌توان ضریب $\frac{۱}{۲}$ را از هر دو طرف حذف کرد. بدین‌ترتیب (۱.۲.۱۱) ثابت می‌شود.

به‌علاوه فرض می‌کنیم $z_۲ = -z_۱ = -z$؛ پس

$$g(z_۱ + z_۲) = g(۰) = ۰ = g(z_۱) + g(z_۲) \qquad \text{یا} \qquad g(-z) = -g(z)$$

با استفاده از این استدلال که به فرمول (۴.۱.۱۱) می‌انجامد، از (۱.۲.۱۱) بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$g(rz) = rg(z) \qquad \text{(۳.۲.۱۱) (} r \text{ عدد گویا)}$$

که به‌ازای $z = ۱$، بیانگر این مطلب است که همهٔ نقاط گویای محور حقیقی نقاط ثابت رابطهٔ تصویری g هستند.

برای اثبات (۲.۲.۱۱) ابتدا نشان می‌دهیم که

$$g(z^۲) = [g(z)]^۲ \qquad \text{(۴.۲.۱۱)}$$

بدین‌منظور ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $z \neq ۱$ داریم

$$(z, -z; ۱, z^۲) = ۱ \qquad \text{(۵.۲.۱۱)}$$

با قراردادن $g(z)$ به‌جای z خواهیم داشت

$$(g(z), -g(z); ۱, g(z)^۲) = -۱$$

از طرف دیگر، چون g حافظ نسبت همساز است، از (۵.۲.۱۱) نتیجه می‌گیریم

$$(g(z), -g(z); ۱, g(z^۲)) = -۱$$

از مقایسهٔ دو نسبت اخیر (۴.۲.۱۱) نتیجه می‌شود.

اکنون در (۴.۲.۱۱) قرار می‌دهیم $z = z_۱ + z_۲$؛ پس

$$\begin{aligned} g(z^۲) &= g(z_۱^۲) + ۲g(z_۱z_۲) + g(z_۲^۲) \\ &= g(z)^۲ = [g(z_۱) + g(z_۲)]^۲ = g(z_۱)^۲ + ۲g(z_۱)g(z_۲) + g(z_۲)^۲ \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب از مقایسهٔ جمله‌های وسط، (۲.۲.۱۱) به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ب. اگر رابطهٔ تصویری مختلطی در صفحهٔ z دست‌کم یک دایرهٔ حقیقی را به‌توی خودش بنگارد یا بر یک دایرهٔ حقیقی پیوسته باشد، یک تبدیل موبیوس یا یک پادهمنگاری است.

برهان. (i) فرض می‌کنیم f یک نگاشت رابطهٔ تصویری است که دایرهٔ حقیقی $\mathfrak{C}$ را به‌توی خودش می‌نگارد. فرض می‌کنیم $\mathfrak{T}$ تبدیل موبیوسی است که در آن $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ محور حقیقی است.

پس $f = \mathfrak{T}\bar{f}\mathfrak{T}^{-1}$ یک نگاشت رابطهٔ تصویر است که محور حقیقی را به‌توی خودش می‌نگارد. آن رابطهٔ تصویریِ متناظر $g = \mathfrak{H}f$ را تعیین می‌کنیم که ۰، ۱ و ∞ نقاط ثابت آن باشند. بنابه فرضِ ما، همهٔ مقادیر $g(x)$ به‌ازای مقدار حقیقی x، حقیقی هستند.

ابتدا نشان می‌دهیم که تابع $g(x)$ یکنوا غیرنزولی است. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $x_۱ < x_۲$ و $x_۲ - x_۱ = x^۲ > ۰$. پس به موجب (۴.۲.۱۱) داریم

$$g(x_۲) - g(x_۱) = g(x_۲ - x_۱) = g(x^۲) = g(x)^۲ \geq ۰$$

حال اگر α گنگ و $r_۱$ و $r_۲$ دو عدد گویا چنان باشند که $r_۱ < \alpha < r_۲$، آنگاه

$$g(r_۱) = r_۱ < g(\alpha) < g(r_۲) = r_۲$$

بنابراین اعداد حقیقی α و $g(\alpha)$ در مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا با برش ددکیند واحدی تعریف شده‌اند، و بنابراین متساوی‌اند. از این‌رو

(۳.۱۱) (به‌ازای همهٔ xهای حقیقی) $\quad g(x) = x$

(ii) همین رابطه درست است اگر $\bar{f}(z)$ بر یک دایرهٔ $\mathfrak{C}$ پیوسته باشد. پس خودسانی متناظر g بر محور حقیقی پیوسته است. بنابر (۳.۲.۱۱) به‌ازای همهٔ اعداد گویای r داریم $g(r) = r$. با یک استدلال روشن، (۳.۱۱) دوباره نتیجه می‌شود.[1]

برای تکمیل برهان قضیه توجه می‌کنیم که به‌موجب (۳.۱۱) و (۱.۲.۱۱) و (۲.۲.۱۱) به‌ازای مقادیر حقیقی x و y داریم

(۱.۳.۱۱) $$g(x + iy) = g(x) + g(iy) = x + g(i)y$$

اما $(۱, -۱; i, -i) = -۱$، و بنابراین

$$(۱, -۱; g(i), -g(i)) = -۱$$

به آسانی دیده می‌شود که معادلهٔ اخیر هم‌ارز است با

$$g(i)^۲ = -۱$$

---

۱. چون هر عدد حقیقی را می‌توان با دنباله‌ای از اعداد گویا تقریب زد، نتیجه می‌شود که مقادیر یک تابع پیوستهٔ $\phi(x)$، به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، فقط با این شرط که مقادیر این تابع به‌ازای همهٔ نقاط گویای $x = r$، معین شده باشند.

از این‌رو فقط دو امکان وجود دارد

$$g(i) = -i \quad \text{و} \quad g(i) = +i$$

و از آنجا به‌موجب (۱.۳.۱۱)

$$g(z) = \bar{z} \qquad \text{یا} \qquad g(z) = z \tag{۲.۳.۱۱}$$

که $\bar{f}$ در حالت اول لزوماً یک تبدیل موبیوس است و در حالت دوم یک پاد همنگاری.

تبصره. قضیهٔ ب پاسخگوی تمام پرسشها دربارهٔ همهٔ روابط تصویری مختلطی است که به محدودیتهایی مقیدند. ولی، به‌موجب لم مذکور، هر خودریختی g از هیأت همهٔ اعداد مختلط، وقتی با یک تبدیل موبیوس یا یک پادهمنگاری ترکیب شود، همانند دو خودریختی پیوستهٔ (۲.۳.۱۱) یک رابطهٔ تصویری مختلط تولید خواهد کرد. ولی این یک واقعیت روشن (ولی غیرنمایان) است که بینهایت خودریختی (خیلی ناپیوسته) در هیأت همهٔ اعداد مختلط وجود دارد.از این‌رو، همان‌قدر هم رابطهٔ تصویری مختلط وجود خواهد داشت.[1]

ج. نمایش در فضا. خواص مقدماتیِ تصویر گنجنگاشتی، ضامن وجود یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک میان‌تبدیلهای حافظ دایره برکره و تبدیلهای حافظ دایره در صفحهٔ کامل‌شده است. به حاصلضرب دو تبدیل کروی حاصلضرب دو تبدیل حافظ دایره در صفحه متناظر است. لذا این دو گروه تبدیلها یکریخت‌اند.

ابتدا نمایش تحلیلی تبدیلهای کروی حافظ دایره را تعیین می‌کنیم. هر دایره برکره معرف یک صفحه در فضاست و هر صفحه در فضا معرف یک دایره برکره است که با معادلهٔ (۴.۳) نمایش داده می‌شود. برای ساده‌کردن بحث ذیل، مختصات متجانس $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ را در فضای ξ، η و ζ وارد می‌کنیم. بدین‌ترتیب

$$\xi = \frac{x_۱}{x_۴}, \qquad \eta = \frac{x_۲}{x_۴}, \qquad \zeta = \frac{x_۳}{x_۴}$$

به‌علاوه به‌جای a، b و c و d، مقادیر $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ و $u_۴$ می‌گذاریم. در این صورت صفحهٔ (۴.۳) با معادلهٔ

$$u_۱x_۱ + u_۲x_۲ + u_۳x_۳ + u_۴x_۴ \equiv u'x = ۰ \tag{۴.۱۱}$$

---

۱. ر.ک. B. Segre [۱]. برای مطالب بیشتر جبر خطی صفحات ۴ـ۹۳ را ببینید.

داده می‌شود و کرهٔ واحد (۱.۳) با معادلهٔ

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ - x_۴^۲ \equiv x'Lx = ۰, \qquad L = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \qquad (۱.۴.۱۱)$$

صفحهٔ (۴.۱۱) معرف:

(i) یک دایرهٔ حقیقی بر کرهٔ (۱.۴.۱۱) است، اگر کره را قطع کند، که در این صورت قطب آن (ر.ک. بخش ۳، ج)

$$x = Lu$$

خارج کره قرار دارد: $x'Lx > ۰$؛

(ii) معرف یک نقطه‌دایره است، اگر بر کره مماس باشد. در این صورت قطب آن، x، نقطه‌ای است بر کره؛ $x'Lx = ۰$؛

(iii) معرف یکِ دایرهٔ انگاری است، اگرِ نقطهٔ مشترکی با این کره نداشته باشد، که در این صورت قطب آن، x، داخل کره قرار دارد: $x'Lx < ۰$ (ر.ک. بخش ۳، **ب**).

از این‌رو هر تبدیل حافظ دایره از کره بر خودش به‌وسیلهٔ یک تبدیل حافظ صفحه از فضا بر خودش القا می‌شود که (۱) معادلهٔ (۱.۴.۱۱) را به [به‌علت (ii)] ناوردا می‌گذارد و (۲) علامت صورت درجهٔ دوم $x'Lx$ [به‌دلیل (i) و (iii)] را تغییر نمی‌دهد تا تضمین کند که دایرهٔ حقیقی بر دایرهٔ حقیقی نگاشته می‌شود، نقطه‌دایره بر نقطه‌دایره، و دایرهٔ انگاری بر دایرهٔ انگاری.

طبق قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری تحلیلی هر تبدیل حافظ صفحه (همخطّی) را می‌توان به‌وسیلهٔ یک تبدیل خطی همگن منتظمِ

$$y = Sx \qquad (۲.۴.۱۱)$$

برحسب چهار مختصّ متجانس x_ν با یک ماتریس منتظمِ

$$S = \begin{pmatrix} s_{۱۱} & s_{۱۲} & s_{۱۳} & s_{۱۴} \\ s_{۲۱} & s_{۲۲} & s_{۲۳} & s_{۲۴} \\ s_{۳۱} & s_{۳۲} & s_{۳۳} & s_{۳۴} \\ s_{۴۱} & s_{۴۲} & s_{۴۳} & s_{۴۴} \end{pmatrix}$$

با ضرایب حقیقی $s_{\mu\nu}$ نمایش داد. شرط ما در حالت کنونی

$$y'Ly = \sigma^2 x'Lx \qquad (\sigma^2 > 0)$$

و یا بر حسب نمایش ماتریسی

$$S'LS = \sigma^2 L \qquad (۳.۴.۱۱)$$

است.

همهٔ تبدیلهای تصویری $y = S(x)$ که ماتریسهای آنها، S، در شرط (۳.۴.۱۱) صدق می‌کنند، یک گروه $\mathscr{G}$ تشکیل می‌دهند. هر یک از این تبدیلها، یک تبدیل حافظ دایره از کرهٔ واحد را القا می‌کند، و هر چنین تبدیل حافظ دایره‌ای تبدیلی از صفحه‌های متقاطع (مماس یا نامتقاطع) این کره را بر صفحه‌های متقاطع (مماس یا نامتقاطع) این کره القا می‌کند. پس بنابر خصوصیت تصویر گنجنگاشتی گروه $\mathscr{G}$ با گروه $\mathscr{C}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای حافظ دایرهٔ صفحهٔ کامل‌شده، یکریخت است. حال ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ج. هر تبدیل (۲.۴.۱۱) از گروه $\mathscr{G}$ یک تبدیل موبیوس یکتا یا یک پادهمنگاری یکتا را در صفحهٔ کامل‌شدهٔ z القا می‌کند.

بدین‌ترتیب بر پایهٔ قضیهٔ اساسیِ هندسهٔ تصویری سه‌بعدی،[1] این‌بار اثبات دیگری برای قضیهٔ الف به‌دست می‌آید. ترتیبی را که برای اثبات قضیهٔ الف در جزء دوم آن (صفحهٔ ۱۴۱) آورده شده است، می‌توان خلاصه نمود. نگاره‌های سه نقطهٔ ۰، ۱ و ∞ در صفحهٔ کامل‌شدهٔ z بر کره نقاطی هستند که در مختصات متجانس به‌ترتیب با بردارهای ستونی

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۴.۴.۱۱)$$

نشان داده شده‌اند. از این‌رو باید ثابت کرد که اگر تبدیل S در (۳.۴.۱۱) صدق کند و سه‌نقطهٔ (۴.۴.۱۱) را ناوردا گذارد، آنگاه S تحت تصویر گنجنگاشتی یا با تبدیل موبیوس $Z = z$ متناظر است و یا با پادهمنگاری $Z = \bar{z}$.

---

۱. در این زمینه اثباتی اندک مستقیم در کتاب W. Blaschke [۱] در بخشهای ۷، ۸، ۲۰ و ۴۹ آمده است.

در واقع ناوردایی نقاط (۴.۴.۱۱) به روابط زیر بین اعداد حقیقی $s_{\mu\nu}$ منجر می‌شود:

(i) $Sx^{(۰)} = \lambda_۰ x^{(۰)}$، یعنی $s_{۱۳} + s_{۱۴} = s_{۲۳} + s_{۲۴} = ۰$

(ii) $s_{۳۳} + s_{۳۴} = s_{۴۳} + s_{۴۴} = \lambda_۰$

(i)′ $Sx^{(۱)} = \lambda_۱ x^{(۱)}$، یعنی $s_{۲۱} + s_{۲۴} = s_{۳۱} + s_{۳۴} = ۰$

(ii)′ $s_{۱۱} + s_{۱۴} = s_{۴۱} + s_{۴۴} = \lambda_۱$

(i)″ $Sx^{(\infty)} = \lambda_\infty x^{(\infty)}$، یعنی $s_{۱۴} - s_{۱۳} = s_{۲۴} - s_{۲۳} = ۰$

(ii)″ $s_{۳۳} - s_{۳۴} = s_{۴۴} - s_{۴۳} = \lambda_\infty$

به‌موجب (i) و (i)″، $s_{۱۳} = s_{۱۴} = s_{۲۳} = s_{۲۴} = ۰$؛ به‌موجب (i)′، $s_{۲۱} = ۰$؛ به‌موجب (ii)′، $s_{۱۱} = \lambda_۱$؛ به‌موجب (ii) و (ii)″، $s_{۳۳} = s_{۴۴} = \frac{۱}{۲}(\lambda_۰ + \lambda_\infty)$ و $s_{۳۴} = s_{۴۳} = -s_{۳۱} = \frac{۱}{۲}(\lambda_۰ - \lambda_\infty)$. به‌موجب (ii)′، $s_{۴۱} = \lambda_۱ - \frac{۱}{۲}(\lambda_۰ + \lambda_\infty)$.

علاوه بر این شرط (۳.۴.۱۱) را داریم. با یافتن فقط اولین سطر ماتریس $S'LS$ معلوم می‌شود که: $\lambda_۰ = \lambda_۱ = \lambda_\infty = \sigma$ و نیز $s_{۱۲} = s_{۳۲} = s_{۴۲} = ۰$. به‌علاوه $s_{۲۲}^{۲} = \lambda_۰^{۲}$ و از آنجا

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \pm\lambda_۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda_۰ \end{pmatrix} \qquad (۵.۴.۱۱)$$

که تبدیل متناظر

$$y_۱ = \lambda_۰ x_۱, \qquad y_۲ = \pm\lambda_۰ x_۲, \qquad y_۳ = \lambda_۰ x_۳, \qquad y_۴ = \lambda_۰ x_۴$$

را به‌دست می‌دهد.

اما در مختصات همگن، تصویر گنجنگاشتی (۱.۳.۳) با

$$z = \frac{x_۱ + ix_۲}{x_۳ + x_۴}, \qquad Z = \frac{y_۱ + iy_۲}{y_۳ + y_۴}$$

نشان داده می‌شود. از این‌رو با توجه به فرمول قبلی داریم

$$Z = \frac{x_۱ \pm ix_۲}{x_۳ + x_۴} = \begin{cases} z \\ \bar{z} \end{cases}$$

که برهان را تکمیل می‌کند.

با گرفتن دترمینان از دو طرف (۳.۴.۱۱) داریم

$$|S|^{۲} = \sigma^{۸} \qquad \text{یا} \qquad |S| = \pm\sigma^{۴}$$

چون S و σS هر دو معرف یک تبدیل تصویری هستند ($\sigma \neq ۰$ حقیقی)، می‌توان مطلب را به Sهایی که در شرط

$$S'LS = L \tag{۶.۴.۱۱}$$

و لذا در شرط $|S| = \pm ۱$ صدق می‌کنند محدود نمود. فقط با این نرمالسازی دو ماتریس S و $-S$ عنصر واحدی از $\mathscr{G}$ را نمایش می‌دهند. بدیهی است که S و $-S$ یک دترمینان دارند.

همهٔ آن تبدیلهایی در $\mathscr{G}$ که ماتریسهای آنها، S، دترمینان مثبت دارند، یک زیرگروه $\mathscr{G}_+$ با اندیس ۲ در $\mathscr{G}$ تشکیل می‌دهند (ر.ک. مثال ۷).

قضیهٔ د. در یکریختی گروه $\mathscr{G}$ با گروه $\mathscr{C}$ی همهٔ تبدیلهای حافظ دایرهٔ صفحهٔ کامل‌شده، گروه $\mathscr{G}_+$ با گروه همهٔ تبدیلهای موبیوس یکریخت است؛ به عناصری با دترمینانهای منفی در $\mathscr{G}$ پادهمنگاریهای $\mathscr{C}$ متناظرند.

برهان. ثابت شده بود که هر تبدیل موبیوس را می‌توان به صورت حاصلضرب دو یا چهار انعکاس نشان داد. این انعکاسها عناصر $\mathscr{C}$ هستند. پس کافی است نشان دهیم که S، یعنی ماتریسهای فضای این تبدیلها، با انعکاسهایی با دترمینان $|S| < ۰$ متناظرند.

اما همهٔ انعکاسها در دو ردهٔ مشابهت قرار دارند. انعکاسهای نوع اول همگی با $Z = \bar{z}$ متشابه‌اند. در برهان قبلی ثابت شده بود که تبدیل فضای متناظر، دارای دترمینان منفی است.

همهٔ انعکاسهای نوع دوم (ر.ک. بخش ۹، د) با انعکاس نسبت به دایرهٔ واحد انگاریِ $z\bar{z} + ۱ = ۰$، یعنی

$$Z = -\frac{۱}{\bar{z}}$$

متشابه‌اند و یا بر حسب مختصات متجانس، با استفاده از (۱.۴.۱۱)،

$$\frac{y_۱ + iy_۲}{y_۳ + y_۴} = -\frac{x_۳ + x_۴}{x_۱ - ix_۲} = -\frac{(x_۳ + x_۴)(x_۱ + ix_۲)}{x_۱^۲ + x_۲^۲} = \frac{x_۱ + ix_۲}{x_۳ - x_۴}$$

این تساوی به‌ازای $y_۱ = x_۱$، $y_۲ = x_۲$، $y_۳ = x_۳$ و $y_۴ = -x_۴$ برقرار است، و مقدار دترمینان این تبدیل مساوی -۱ است.

مثالها

۱. برهان دیگری برای قضیهٔ الف بر پایهٔ قضیهٔ اساسی هندسهٔ تصویری صفحهٔ حقیقی می‌توان به‌دست آورد که تنها با استفاده از جزء اول برهان بخش ۱۱، **الف**، یعنی، تا ناوردا بودن دایرهٔ واحد، صورت می‌گیرد. چون تبدیل $Z = g(z)$ خط را به خط بدل می‌کند، لذا معرف یک همخطّی در صفحه است، و با توجه به مفاد هندسهٔ تصویری، صفحه نه‌تنها با یک نقطه، بلکه با یک خط راست در بینهایت کامل شده است. چون دربارهٔ ماهیت این همخطّی، در همسایگی نقطهٔ o بحث می‌شود، می‌توان ویژگی بینهایت را نادیده گرفت و از آنجاکه این همخطّی، نقطهٔ o را ناوردا می‌گذارد، می‌توان آن را چنین نوشت

$$X = ax + by, \qquad Y = cx + dy \qquad\qquad (ad - bc \neq ۰)$$

چون این تبدیل محور xها را ناوردا می‌گذارد، داریم $b = ۰$. این تبدیل دوایر حول o را به دوایری حول o بدل می‌کند. بنابراین $c = ۰$ و $a^۲ = d^۲$، یعنی $d = \pm a$. بالاخره این همخطّی نقطهٔ $x = ۱$ و $y = ۰$ را ناوردا می‌گذارد؛ بنابراین $a = ۱$. از اینجا نتیجه می‌شود که $X = x$ و $Y = \pm y$، آنچه می‌خواستیم.

۲. هر رابطهٔ تصویری یک‌بعدی حقیقی را وقتی به صورت نگاشتی تعریف شود که محور حقیقی را بر خودش و مجموعه‌های همساز را بر مجموعه‌های همساز (ر.ک. بخش ۱۱، **ب**) بنگارد، همواره می‌توان به‌وسیلهٔ یک تبدیل حقیقی موبیوس نشان داد. برای این قضیهٔ اساسی برهانی از بحث بخش ۱۱، **ب** به‌دست می‌آید. زیرا در این لم اگر به‌جای «هیأت اعداد مختلط» هر هیأت عددی (که با عنصر بینهایت کامل[۱] شده است)، به‌ویژه هیأت اعداد حقیقی، را بگذاریم، لم یادشده معتبر خواهد ماند. می‌توان نشان داد که تنها خودریختی موجود در هیأت همهٔ اعداد حقیقی، همانی است (ر.ک. جبر خطی، صفحات ۹۳_۹۲). در واقع این برهان با استدلالی که در بخش ۱۱، **الف** به‌کار رفته به‌سهولت کامل می‌شود.

۳. با استفاده از تصویر گنجنگاشتیِ صفحه (ر.ک. بخش ۷، مثال ۸) می‌توان نشان داد که هر تبدیل تصویری از صفحه که دایرهٔ واحد را بر خودش بنگارد، با نگاشتی متناظر است که محور حقیقی را بر خودش می‌نگارد و این نگاشت با یک تبدیل حقیقی موبیوس نشان داده می‌شود.

۴. پیدا کنید همهٔ تبدیلهای تصویری را که کرهٔ واحد را ناوردا بگذارد و قطب جنوب، $x^{(\infty)}$، نقطهٔ ثابت آنها باشد. نمایشی از تبدیل متناظر (صحیح) موبیوس، یا پادهمنگاری پیدا کنید که ضریبهایش

---

۱. برهان این لم که در فوق آمده است به‌ازای هر هیأت $\mathscr{F}$ (به‌معنی جبر مجرد) که مشخصه‌اش ۲ نباشد معتبر است A. J. Hoffman [۱] ثابت کرده است که این لم برای هر هیأت از مشخصهٔ ۲ هم معتبر است.

بر حسب ضریبهای تبدیل تصویری متناظرش صراحتاً، بیان شده باشد.

۵. تبدیل تصویری S را که با انعکاس نسبت به دایرهٔ مفروض $\mathfrak{C}$ متناظر باشد می‌توان از قضیهٔ **د**، بخش ۳، به‌دست آورد. فرض می‌کنیم a، b، c، و d ضرایب معادلهٔ صفحهٔ متناظری باشند که در (۱.۴.۳) آمده است؛ در این صورت a، b، c، و $-d$ مختصات نقطهٔ $\mathbf{C}$ی قطب این صفحه نسبت به کرهٔ واحد است. فرض کنید x بردار ستونی مختصات متجانس x_1، ...، x_4 یک نقطهٔ $\mathbf{P}$ بر کرهٔ ($x'Lx = 0$) باشد. مختصات نقطهٔ منعکس آن، $\mathbf{P}^*$، با رابطهٔ

$$x^* = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \end{pmatrix} + \lambda_2 x$$

داده می‌شود، که در آن λ_1 و λ_2 با شرط $x^{*\prime} L x^* = 0$ معین می‌شوند. پس $x^* = Sx$، که در آن

$$S = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & 2ab & 2ac & 2ad \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 & 2bc & 2bd \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 + d^2 & 2cd \\ -2ad & -2bd & -2cd & -a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

چون همهٔ تبدیلهای موبیوس و پادهمنگاریها را می‌توان از حاصلضرب چند انعکاس به‌دست آورد، از اینجا نتیجه می‌شود که همهٔ تبدیلهای تصویری را که کرهٔ واحد را ناوردا می‌گذارند می‌توان با حاصلضرب ماتریسهایی (نابیشتر از چهارتا) از نوع S نشان داد.

۶. هر تبدیل تصویری از کرهٔ واحد بر خودش که مرکز کره نقطهٔ ثابت آن باشد معرف یک دوران کره حول مرکزش نقطهٔ $\mathbf{O}$ (در حالت دترمینان مثبت) و یا دورانی توأم با یک تقارن محوری (در حالت دترمینان منفی) است. شرط

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \\ s_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

را داریم. چون $\lambda \neq 0$، می‌توانیم فرض کنیم $s_{44} = \lambda = 1$. پس

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & 0 \\ t' & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن S_3 ماتریسی سه‌سطری است و $t' = (s_{41}, s_{42}, s_{43})$. اما

$$S'LS = \begin{pmatrix} S_3'S_3 - tt' & -t \\ -t' & -1 \end{pmatrix}$$

از این‌رو به‌موجب (۳.۴.۱۱)

$$t = 0, \qquad S_3'S_3 = E_3$$

که در آن E_3 ماتریس واحد سه‌سطری است. بنابراین S_3 ماتریس قائم است. تبدیلهای موبیوس متناظرش در بخش ۱۲، ب مشخص شده است.

۷. $\mathscr{L}$ یعنی، گروه همهٔ ماتریسهای S را که در (۶.۴.۱۱) صدق می‌کنند گروه لورنتس نامند. گروه $\mathscr{G}$ با گروه خارج‌قسمت $\mathscr{L}/\mathscr{E}$، که در آن $\mathscr{E}$ زیرگروه $\mathscr{L}$ متشکل از دو ماتریس E و $-E$ است، یکریخت است. فرض می‌کنیم

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & s \\ t' & \sigma \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_{14} \\ s_{24} \\ s_{34} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} s_{41} \\ s_{42} \\ s_{43} \end{pmatrix}$$

عنصری از $\mathscr{L}$ باشد. پس به‌موجب (۶.۴.۱۱) داریم

$$S_3'S_3 = E_3 + tt' \quad (5.11)، \qquad \sigma^2 = 1 + s's \quad (1.5.11)$$

اما در مورد بردار ستونی t به عنوان نقطه‌ای در فضای سه‌بعدی با $t't = \rho^2$، می‌توان دورانی مانند R_3 حول o چنان یافت که

$$R_3 t = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس
$$R_3(E_3+tt')R_3' = \begin{pmatrix} 1+\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین به‌موجب (۵.۱۱) دترمینان

$$|S_3'S_3| = |S_3|^2 = 1+\rho^2$$

و بنابراین

$$|S_3| \le -1 \quad \text{یا} \quad |S_3| \ge 1$$

همین‌طور بنابر (۱.۵.۱۱)

$$\sigma \le -1 \quad \text{یا} \quad \sigma \ge 1$$

این مبین آن است که $\mathscr{L}_+$، گروه همهٔ ماتریسهای S با دترمینان مثبت، که آن را «گروه خاص لورنتس» گویند متشکل از دو جزء جدا از همِ زیر است

$$\mathscr{L}_{++}: \text{همهٔ } S \text{هایی که} \quad |S_3| \ge 1, \quad \sigma \ge 1$$
$$\mathscr{L}_{--}: \text{همهٔ } S \text{هایی که} \quad |S_3| \le -1, \quad \sigma \le -1$$

همهٔ تبدیلهای $y = Sx$، با S در $\mathscr{L}_{++}$ تشکیل گروه $\mathscr{G}_+$ را می‌دهند. پس $\mathscr{L}_{++}$ با $\mathscr{G}_+$ یکریخت است. گروه $\mathscr{L}_{++}$ یک مقسوم‌علیه نرمال با اندیس ۴ در $\mathscr{L}$ است و یک زیرگروه با اندیس ۲ در $\mathscr{L}_+$.

فرض می‌کنیم $\mathscr{L}_{+-}$ دستگاه همهٔ Sهایی باشد که $|S_3| \ge 1$، $\sigma \le -1$ و $\mathscr{L}_{-+}$ دستگاه همهٔ Sهایی باشد که $|S_3| \le -1$، $\sigma \ge 1$. دراین‌صورت $\mathscr{L}$ سه زیرگروه مختلف با اندیس ۲ خواهد داشت، یعنی

$$\mathscr{L}_{++}+\mathscr{L}_{--}, \qquad \mathscr{L}_{++}+\mathscr{L}_{+-}, \qquad \mathscr{L}_{++}+\mathscr{L}_{-+}$$

گروه خارج‌قسمت $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{++}$ با گروه چهار عنصری (ر.ک. بخش ۵، ب) یکریخت است.

۳

هندسه‌های نااقلیدسیِ دوبعدی

۱۲. زیرگروههای تبدیل موبیوس

در اینجا سعی بر این نیست که به‌نحوی جامع به این مبحث گسترده و دامنه‌دار بپردازیم. توجه عمدهٔ ما به ویژگیهای هندسی آن دو زیرگروهی خواهد بود که برای شرح هندسه‌های نااقلیدسی اهمیت اساسی دارند.

الف. گروه دایرهٔ واحد $\mathscr{U}$. این گروه متشکل از همهٔ تبدیلهای موبیوس به صورت زیر است

$$Z \doteq \mathfrak{H}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

که (محیط) دایرهٔ واحد را بر خودش می‌نگارد. این گروه با گروه همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس متشابه است. (ر.ک. بخش ۸، د). اگر $\mathfrak{T}$ تبدیل موبیوسی باشد که محور حقیقی را بر دایرهٔ $|z| = 1$ بنگارد (ر.ک. مثال ۱۱، بخش ۶)، $\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{T}$ معرف یک تبدیل حقیقی موبیوس است. لذا این دو گروه یکریخت‌اند.

تبدیل $\mathfrak{H}$ هر دو نقطهٔ متعاکس z و $1/\bar{z}$ را بر دو نقطهٔ متعاکس Z و $1/\bar{Z}$ می‌نگارد. بنابراین

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{b\bar{z}+a}{d\bar{z}+c} \qquad \text{یا} \qquad Z = \frac{\bar{d}z+\bar{c}}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

که به شرط ماتریسی زیر منجر می‌شود

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (q \neq 0)$$

با فرض آنکه $a \neq 0$، از $a = q\bar{d} = q\bar{q}a$ نتیجه می‌شود که $q\bar{q} = 1$، قرار می‌دهیم

$$q = e^{2i\phi}$$

در این صورت $d = e^{2i\phi}\bar{a}$ و $c = e^{2i\phi}\bar{b}$. اگر به‌طور صوری به‌جای $e^{-i\phi}a$ و $e^{-i\phi}b$، به‌ترتیب a و b بگذاریم، ماتریس $\mathfrak{H}$ به صورت زیر در می‌آید

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad Z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \qquad (1.12)$$

که با تقریب یک ضریب تناسب حقیقی، یکتاست. و لذا دترمینان و اثر آن

$$\tau = a + \bar{a}، \qquad \delta = |\mathfrak{H}| = a\bar{a} - b\bar{b} \qquad (1.1.12)$$

حقیقی هستند. اگر $a = 0$، آنگاه $bc \neq 0$ و $b = q\bar{c} = q\bar{q}b$. از این‌رو $|q| = 1$، و باز هم (۱.۱۲) نتیجه می‌شود.

تبدیلهای موبیوس $\mathfrak{H}$ که درون دایرهٔ واحد را بر دورن آن (و بنابراین بیرون آن را بر بیرون آن) می‌نگارند، یک زیرگروه با اندیس ۲ ازگروه دایرهٔ واحد تشکیل می‌هند. برای هر یک از اینها لازم و کافی است: که $\mathfrak{H}(0) = b/\bar{a}$ نقطه‌ای در درون این دایرهٔ واحد باشد، که هم‌ارز است با $|b| < |a|$ و یا با

$$\delta > 0 \qquad (2.1.12)$$

این زیرگروه را با $\mathscr{U}_+$ نمایش می‌دهیم و آن را گروه سَره دایرهٔ واحد می‌نامیم.

نگاشتهای ناسرهِ دایرهٔ واحد بر خودش با شرط $\delta < 0$ مشخص می‌شوند. این نگاشتها بیرون و درون دایرهٔ واحد را به هم بدل می‌کنند.

از مطالب بخش ۸، د روشن می‌شود که گروه $\mathscr{U}_+$ از تبدیلهای بیضوی، سهموی و هذلولوی سره موبیوس تشکیل شده است، ولی هر نگاشت ناسره دایرهٔ واحد باید هذلولوی ناسره باشد.

اگر $a = ۰$، تبدیل (۱.۱۲) یک برگشت هذلولوی خواهد بود. اگر $a \neq ۰$، قرار می‌دهیم

$$\mathfrak{H}^{-۱}(۰) = -\frac{b}{a} = z_۱, \qquad \operatorname{arc} a = \alpha$$

پس

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{a}{\bar{a}} \frac{z - z_۱}{-\bar{z}_۱ z + ۱} = e^{۲i\alpha} \mathfrak{H}_{z_۱}(z) \tag{۳.۱.۱۲}$$

که در آن

$$Z = \mathfrak{H}_{z_۱}(z) = \frac{z - z_۱}{-\bar{z}_۱ z + ۱}, \qquad \mathfrak{H}_{z_۱} = \begin{pmatrix} ۱ & -z_۱ \\ -\bar{z}_۱ & ۱ \end{pmatrix} \tag{۴.۱.۱۲}$$

تبدیل دایرهٔ واحد است بر خودش که $z_۱$ را به ۰ می‌نگارد. چون

$$\sigma(\mathfrak{H}_{z_۱}) = \frac{۴}{۱ - z_۱ \bar{z}_۱} - ۴$$

به‌ازای هر $z_۱$ تبدیل $\mathfrak{H}_{z_۱}$ هذلولوی است مگر آنکه $z_۱ = ۰$ یا $|z_۱| = ۱$؛ اگر $|z_۱| < ۱$، هذلولوی خاص و اگر $|z_۱| > ۱$، هذلولوی غیرخاص است. نقاط ثابت آن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $\bar{z}_۱ z^۲ = z_۱$ هستند. پس اگر قرار دهیم

$$z_۱ = r_۱ e^{i\theta_۱}$$

این نقاط، نقاط متقاطر $\pm e^{i\theta_۱}$ از دایرهٔ واحدند. به‌موجب (۳.۴.۸) ثابت مشخصهٔ $\mathfrak{H}_{z_۱}$ با

$$k = \frac{۱ + \bar{z}_۱ e^{i\theta_۱}}{۱ - \bar{z}_۱ e^{i\theta_۱}} = \frac{۱ + r_۱}{۱ - r_۱}$$

داده می‌شود. از این‌رو

$$r_۱ = \frac{k - ۱}{k + ۱}, \qquad z_۱ = \frac{k - ۱}{k + ۱} e^{i\theta_۱}$$

حال فرض کنید $\mathfrak{H}_{z_1}$ هذلولوی خاص (در $\mathscr{U}_+$) باشد؛ پس $0 < r_1 < 1$ ($k > 1$)، با استفاده از (۲.۷.۱۰) به‌ازای نمای حقیقی s، بارست مسلسل $\mathfrak{H}^s_{z_1}$ از $\mathfrak{H}_{z_1}$ را با گذاردن k^s به‌جای k در هر جا از $\mathfrak{H}_{z_1}$ که k در آن آمده باشد، تشکیل می‌دهیم. تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$z_s = \frac{k^s - 1}{k^s + 1} e^{i\theta_1}$$

به‌ازای $-\infty < s < \infty$ نقطهٔ z_s تمام قطعه خط باز (قطر دایرهٔ واحد) را طی خواهد کرد که دو سرش $-e^{i\theta_1}$ $(s = -\infty)$ و $e^{i\theta_1}(s = \infty)$ نقاط ثابت تبدیل $\mathfrak{H}$ هستند. بدین‌ترتیب داریم

$$\mathfrak{H}^s_{z_1}(z) = \mathfrak{H}_{z_s}(z), \qquad \mathfrak{H}_{z_s} = \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ -\bar{z}_s & 1 \end{pmatrix} \tag{۵.۱.۱۲}$$

اگر تبدیل $\mathfrak{H}^s_{z_1}$ را در معرض دوران حول o قرار دهیم، تبدیل متشابه

$$Z = e^{it}\mathfrak{H}^s_{z_1}(e^{-it}z) = \frac{z - e^{it}z_s}{-e^{-it}\bar{z}_s z + 1} \tag{۶.۱.۱۲}$$

را به‌دست می‌آوریم که این هم یک تبدیل هذلولوی، یعنی تبدیلی است که نقطهٔ $e^{it}z_s$ را به نقطهٔ o بدل می‌کند. می‌توانیم با نگاشت (۶.۱.۱۲) و متعاقب آن دورانی مناسب، نمایش هر تبدیل خاص دایرهٔ واحد را به‌دست آوریم. پس داریم

قضیهٔ الف. هر عنصر گروه سره دایرهٔ واحد را می‌توان به صورت

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_1^{t_1}\mathfrak{H}^s_{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}_1^{t_2} \qquad (s\text{، }t_1\text{، }t_2 \text{ حقیقی})$$

نوشت که در آن $\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ماتریس تبدیل هذلولوی است که $z = \frac{1}{2}$ را بر 0 می‌نگارد و -1 و $+1$ نقاط ثابت آن هستند.

سرانجام نتیجهٔ سادهٔ (۳.۱.۱۲) را مورد توجه قرار می‌دهیم. هر تبدیل $\mathfrak{H}$ دایرهٔ واحد که مرکز o نقطهٔ ثابت آن باشد ($z_1 = 0$ یا $b = 0$) لزوماً یک دورانِ صرف حول o است.

ب. گروه تبدیلهای دورانی موبیوس $\mathscr{R}$. در مثال ۶ بخش ۱۱، نشان داده شد که همهٔ تبدیلهای تصویری کرهٔ واحد که مرکز $\mathbf{O}$ نقطهٔ ثابت آنهاست، گروهی تشکیل می‌دهند که با گروه ماتریسهای متعامد سه‌سطری S_3 یکریخت‌اند. تبدیلهایی که دترمینانشان مثبت است معرف دورانهای کره حول

O هستند. این تبدیلها خطوط مارّ بر **O** را بر خطوط مارّ بر **O** می‌نگارند، و بنابراین دو نقطهٔ متقاطر کره را به دو نقطهٔ متقاطر آن بدل می‌کنند. از لحاظ گنجنگاشتی این تبدیلها با تبدیلهای موبیوس

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

متناظرند که دو نقطهٔ متقاطر z و $-۱/\bar{z}$ را بر دو نقطه متقاطر Z و $-۱/\bar{Z}$ از صفحه می‌نگارند. (ر.ک. مثالهای ۱ و ۳ (الف) از بخش ۳). بنابراین

$$-\frac{۱}{\bar{Z}} = \mathfrak{H}\left(-\frac{۱}{\bar{z}}\right) = \frac{b\bar{z}-a}{d\bar{z}-c}$$

یا

$$Z = \frac{\bar{d}z - \bar{c}}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

و از آنجا

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

همانند بخش ۱۲، الف دیده می‌شود که $q\bar{q} = ۱$ و $q = e^{۲i\phi}$ و بنابراین

$$e^{-i\phi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

از این‌رو اگر به‌جای a، $e^{-i\phi}a$ و غیره را قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود که

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}$$

یا

$$Z = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} \quad \text{و} \quad \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (۲.۱۲)$$

مبین یک تبدیل دورانی موبیوس است .

دیده می‌شود که هر چنین تبدیل $\mathfrak{H}$ باید بیضوی باشد؛ زیرا

$$\delta = a\bar{a} + b\bar{b} > \circ \quad , \quad \tau = a + \bar{a}$$

و بنابراین

$$\frac{\tau^{۲}}{\delta} = \frac{(a+\bar{a})^{۲}}{a\bar{a}+b\bar{b}} \leq ۴\left(\frac{\mathrm{Re}\, a}{|a|}\right)^{۲} \leq ۴$$

و بنابراین

$$-۴ \leq \sigma(\mathfrak{H}) \leq \circ$$

و $\sigma(\mathfrak{H}) = \circ$ می‌رساند که a حقیقی است و $b = \circ$، و از این‌رو $\mathfrak{H} = q\mathfrak{E}$.

باز هم ملاحظه می‌کنیم که آن تبدیلهای دورانی موبیوس که $z = \circ$ نقطهٔ ثابت آنهاست، دورانهایی صرفاً حول o هستند.

ماتریس (۲.۱۲) با تقریب یک مضرب حقیقی دلخواه معین است. بنابراین وقتی بخواهیم داشته باشیم

$$\delta = |\mathfrak{H}| = |a|^{۲} + |b|^{۲} = ۱ \tag{۱.۲.۱۲}$$

$\mathfrak{H}$ ممکن است بعداً به صورت نرمال در آید. پس دیده می‌شود که ماتریس $\mathfrak{H}$ یکانی است، یعنی

$$\mathfrak{H}^{-۱} = \overline{\mathfrak{H}}' \quad \text{یا} \quad \overline{\mathfrak{H}}'\mathfrak{H} = \mathfrak{E} \tag{۲.۲.۱۲}$$

به‌عکس اگر $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یکانی باشد و $|\mathfrak{H}| = ۱$، آنگاه

$$\mathfrak{H}^{-۱} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

و در واقع $\mathfrak{H}$ به همان صورت (۲.۱۲) است.

گروه تبدیلهای دورانی موبیوس $\mathscr{R}$ را می‌توان گروه همهٔ تبدیلهای موبیوسی معرفی کرد که دایرهٔ واحدِ انگاریِ $z\bar{z} + ۱ = \circ$ را ناوردا می‌گذارند، و بدین‌ترتیب نمایانگر مشابهت آن با گروه تبدیلهای

$\mathscr{U}_+$ هستند که دایرهٔ واحد حقیقی $z\bar{z} - ۱ = ۰$ را ناوردا می‌گذارند. در واقع هر تبدیلی که دایرهٔ واحد انگاری را ناوردا گذارد، زوجهای نقاط متقارن نسبت به این دایره را بر زوجهای نقاط متقارن نسبت به این دایره می‌نگارد؛ و این زوجهای نقاط متقاطرند، و این تبدیل دورانی موبیوس است.

هر صورت نرمال مشابهت $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ از یک تبدیل دورانی $\mathfrak{H}$ را می‌توان با یک تبدیل $\mathfrak{T}$ از گروه $\mathscr{R}$ به‌دست آورد. ملاحظه می‌کنیم که اگر γ یکی از نقاط ثابت $\mathfrak{H}$ باشد، نقطهٔ ثابت دیگر نقطهٔ متقاطر آن $-۱/\bar{\gamma}$ خواهد بود. فرض می‌کنیم $\mathbf{P}$ و $-\mathbf{P}$ نقاط کروی متناظر (متقاطر) باشند. با یک دوران $\mathfrak{T}$ از کره، می‌توان $\mathbf{P}$ را به $\mathbf{N}$ [قطب شمال $(۰, ۰, ۱)$] و $-\mathbf{P}$ را به $\mathbf{S}$ [قطب جنوب $(۰, ۰, -۱)$] بدل کرد. تبدیل موبیوس متناظر آن $z^* = \mathfrak{T}(z)$ دورانی است و نقطهٔ γ را به o و نقطهٔ $-۱/\bar{\gamma}$ را به ∞ بدل می‌کند. از این‌رو

$$Z^* = e^{i\psi} z^* = \mathfrak{H}^*(z^*), \qquad \mathfrak{H}^* = \begin{pmatrix} e^{i(\psi/۲)} & ۰ \\ ۰ & e^{-i(\psi/۲)} \end{pmatrix} \qquad (۳.۲.۱۲)$$

صورت نرمال آن است. ماتریس $\mathfrak{H}^*$ با تقریب علامتش (ر.ک. مثال ۳) به‌طور یکتا معین است.

اگر $a = ۰$، نگاشت $\mathfrak{H}$ یک برگشت $Z = -b/\bar{b}z = -e^{۲i\beta}/z$ است؛ در این صورت نقاط ثابت آن نقاط متقاطر $\pm ie^{i\beta}$ هستند.

اگر $a \neq ۰$، همانند بخش ۱۲، الف، نقطهٔ

$$z_۱ = \mathfrak{H}^{-۱}(۰) = -\frac{b}{a} = r_۱ e^{i\theta_۱} \qquad (r_۱ > ۰)$$

را وارد می‌کنیم که با تبدیل دورانی $\mathfrak{H}$ از (۲.۱۲) به o نگاشته می‌شود. در این صورت

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{a}{\bar{a}} \frac{z - z_۱}{\bar{z}_۱ z + ۱} = e^{۲i\alpha} \frac{z - z_۱}{\bar{z}_۱ z + ۱} = e^{۲i\alpha} \mathfrak{H}_{z_۱}(z) \qquad (۴.۲.۱۲)$$

نقاط ثابت تبدیل

$$Z = \mathfrak{H}_{z_۱}(z), \qquad \mathfrak{H}_{z_۱} = \begin{pmatrix} ۱ & -z_۱ \\ \bar{z}_۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

دو نقطهٔ متقاطر $\pm ie^{i\theta_۱}$ از دایرهٔ واحد حقیقی هستند. ثابت مشخصهٔ آن

$$k = \frac{۱ - \bar{z}_۱ ie^{i\theta_۱}}{۱ + \bar{z}_۱ ie^{i\theta_۱}} = \frac{۱ - ir_۱}{۱ + ir_۱} = e^{-i\kappa}$$

مستقل از θ_1 است و ثابت حقیقی κ را که با تقریب مضرب صحیح جمعی از 2π معین است، می‌توان مثبت نابزرگتر از π گرفت. پس

$$r_1 = \tan\frac{\kappa}{2}$$

بارست مسلسل $\mathfrak{H}^s_{z_1}$ به‌ازای مقدار حقیقی s با قراردادن k^s به‌جای k در $\mathfrak{H}_z$، یعنی با تبدیل κ به $s\kappa$ به‌دست می‌آید، که در آن s در بازهٔ $0 \leq \kappa s < \pi$ تغییر می‌کند؛ بنابراین

$$\mathfrak{H}^s_{z_1}(z) = \mathfrak{H}_{z_s}(z), \qquad \mathfrak{H}\bar{z}_s = \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ \bar{z}_s & 1 \end{pmatrix}, \qquad z_s = \tan\left(\frac{\kappa s}{2}\right) e^{i\theta_1} \quad (5.2.12)$$

اگر $z_1 = 1$، داریم $\mathfrak{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$، $\kappa = \pi/2$ و $z_s = \tan(\pi s/4)$. بنابراین همهٔ مقادیری را که برای z_s می‌توان فرض کرد، می‌شود برای s در بازهٔ $0 \leq s < 2$ درنظر گرفت. حالت حدی $s = 2$ با برگشت $(a = 0)$ متناظر است.

با استدلالی که در برهان قضیهٔ **الف** به‌کار بردیم خواهیم داشت

قضیهٔ ب. هر تبدیل دورانی موبیوس را می‌توان به صورت

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}^{t_1}\mathfrak{H}^s_1\mathfrak{R}^{t_2} \qquad (0 \leq s \leq 2)$$

نوشت که در آن $\mathfrak{R}$ دورانی حول o و $\mathfrak{H}_1$ تبدیل بیضوی است که $z = 1$ را به 0 می‌نگارد، و $\pm i$ نقاط ثابت آن هستند.

ج. صورتهای نرمال کلاف دایره. هر دسته دایره در صفحه را می‌توان به وسیلهٔ تبدیل مناسب موبیوس به صورت نرمالش درآورد (ر.ک. مثال ۲، بخش ۴)، یعنی

در حالت بیضوی: تمام خطوط گذرنده از o،

در حالت سهموی: تمام خطوط موازی با محور حقیقی،

در حالت هذلولوی: تمام دوایر به مرکز o.

اکنون وضعیت متناظر را برای کلاف دایره ثابت می‌کنیم که در آن صورتهای نرمال به همان صورتی هستند که در بخش ۴، **ب** آورده‌ایم و از همان قراردادهای به‌کاررفته در آن بخش استفاده می‌کنیم.

(i) یک کلاف بیضوی داده شده است، نگارهٔ آن بر کره با نقطهٔ $\mathbf{P}$ که صفحات متناظر دوایر کروی از آن می‌گذرند تعیین می‌شود. با یک دوران مناسب کره، این نقطهٔ $\mathbf{P}$ را به نقطه‌ای از محور ζ با مختصات متجانس $(۰, ۰, \rho, ۱)$، $(۰ \leq \rho = \mathbf{OP} < ۱)$ می‌بریم. تبدیل تصویری که با ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \tilde{\rho} & -\rho\tilde{\rho} \\ ۰ & ۰ & -\rho\tilde{\rho} & \tilde{\rho} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\rho} = \frac{۱}{\sqrt{(۱ - \rho^۲)}}$$

داده‌شده، کرهٔ واحد را بر خودش می‌نگارد و نقطهٔ $(۰, ۰, \rho, ۱)$ را بر مبدأ $\mathbf{O} = (۰, ۰, ۰, ۱)$. به این دو تبدیل به‌کاررفته، تبدیل موبیوسی در صفحه متناظر است که کلاف بیضوی مذکور را بر صورت نرمالش، دستگاه همهٔ دوایر عمود بر دایرهٔ واحدانگاری، می‌نگارد.

(ii) یک کلاف سهموی روی کره، متشکل از دوایری است که از تقاطع کره با صفحات گذرنده از نقطهٔ $\mathbf{P}$ بر سطح کره به‌وجود آمده‌اند. یک دوران، این نقطه را به قطب جنوب کره، S، می‌برد، پس این کلاف متشکل از همهٔ دوایری است که از S می‌گذرند و نگاره‌های گنجنگاشتی آنها در صفحه، عناصر صورت نرمال، یعنی همهٔ خطوط راست صفحه‌اند.

(iii) یک کلاف هذلولوی روی کره مرکب از فصل مشترکهای کره با صفحاتی است که از یک نقطهٔ $\mathbf{P}$ واقع در خارج کره می‌گذرند. به‌وسیلهٔ یک رابطهٔ تصویری می‌توان این کره را بر خودش و نقطهٔ $\mathbf{P}$ را به نقطهٔ بینهایت محور ζها نگاشت. لذا این کلاف دوایری از کره هستند که صفحات آنها با محور ζها موازی‌اند. پس همهٔ این دوایر بر دایرهٔ استوا عمودند.این رابطهٔ تصویری متناظر با تبدیل موبیوسی در صفحه است که کلاف هذلولوی مذکور را به صورت نرمال خودش یعنی، به کلاف همهٔ دوایر عمود بر دایرهٔ واحد، بدل می‌کند.

تبصره. هر کلاف دایره را می‌توان با یک شرط خطی همگن میان ضرایب A، B، C و D از معادلهٔ دایرهٔ (۲.۱) به صورت تحلیلی تعریف کرد. برای سه صورت نرمال، این شرایط در مثال ۷، بخش ۴، آورده شده‌اند. اگر تبدیل موبیوسی که کلاف مفروض به‌وسیلهٔ آن به‌صورت نرمال درآمده، معلوم باشد، شرایط متناظر برای کلاف داده‌شده در وضعیت اولیه‌اش را می‌توان به‌وسیلهٔ (۲.۴.۶) از این معادله‌ها به‌دست آورد.

د. گروههای کلافی. نشان داده شد (بخش ۹، هـ، و مثال ۱۲، بخش ۱۰) که همهٔ تبدیلهای موبیوسی که حاصلضربهای انعکاسهای درون یک دسته دایره‌اند، گروه (دوری) همهٔ تبدیلهای

موبیوسی را تشکیل می‌دهند، که دوایر این دسته را به هم تبدیل می‌کنند. حال به بحث در وضعیت متناظر برای یک کلاف می‌پردازیم.

هر انعکاس نسبت به یک دایره از یک کلاف β را می‌توان «انعکاسی درون کلاف β» نامید (ر.ک. بخش ۹، هـ). این کلاف متشکل از همهٔ دوایر عمود بر یک دایرهٔ مفروض $\mathfrak{P}$ است (ر.ک. بخش ۴، ب، قضیهٔ ب). بنابراین هر انعکاس درون کلاف، $\mathfrak{P}$ را بر خودش می‌نگارد (ر.ک. بخش ۲، مثال ۱، بخش ۶، مثال ۱۳) و هر دایرهٔ این کلاف را بر دایره‌ای از همین کلاف. بنابراین حاصلضرب هر دو انعکاس درون کلاف تبدیل موبیوسی است که کلاف را بر خودش می‌نگارد.

عکس این حکم بدون محدودیت درست نیست:

قضیهٔ ج. هر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ از کلاف β بر خودش، حاصلضرب دو انعکاس درون کلاف است، اگر و فقط اگر، β بیضوی یا هذلولوی باشد.

برهان. اگر β بیضوی یا هذلولوی باشد، دایره‌اش $\mathfrak{P}$ انگاری یا حقیقی است و نقطه‌دایره نیست. بنابراین گروه $\mathscr{G}_\beta$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس β بر خودش شامل هیچ تبدیل ثابت زاویه‌ای نیست. حال فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ عضوی از $\mathscr{G}_\beta$ باشد. دستهٔ همهٔ دایره‌هایی که به‌وسیلهٔ $\mathfrak{H}$ به یکدیگر (عمود بر دسته دایرهٔ ناوردا) بدل می‌شوند گنجیده در β است و به‌موجب قضیهٔ هـ از بخش ۹، هـ، معلوم است که $\mathfrak{H}$ حاصلضرب دو انعکاس درون این دسته و لذا درون β است.

اگر β سهموی باشد، بلافاصله دیده می‌شود که گروه $\mathscr{G}_\beta$ شامل تبدیلهای ثابت زاویه‌ای است. زیرا می‌توان فرض کرد که β صورت نرمال یک کلاف سهموی، یعنی دستگاه همهٔ خطهای راست صفحه است (نقطه‌دایرهٔ $\mathfrak{P}$ نقطه‌ای است در بینهایت)، پس گروه $\mathscr{G}_\beta$، گروه همهٔ تبدیلهای صحیح موبیوس $Z = az + b$ (ر.ک. مثال ۴، بخش ۶ و مثال ۶، بخش ۹) است که اگر a حقیقی و قدرمطلقش یک نباشد، ثابت زاویه‌ای‌اند (ر.ک. فرع قضیهٔ و، بخش ۹، هـ).

از طرف دیگر دوباره انعکاسهای درون کلاف سهموی را مورد توجه قرار می‌دهیم؛ این انعکاسها تقارنهایی نسبت به خطهای راست هستند (ر.ک. مثال ۸، بخش ۲) و لذا تمام فاصله‌ها را در صفحه حفظ می‌کنند. از این‌رو تبدیلهای موبیوسی که حاصلضربهای چنین انعکاسهایی هستند نیز فاصله‌ها را حفظ می‌کنند. بنابراین حرکتهای اقلیدسی یا انتقالهایی در صفحه هستند و می‌توان آنها را با

$$Z = e^{i\alpha} z + b \qquad (\text{حقیقی } \alpha) \quad (۳.۱۲)$$

نشان داد. همین نتیجه از این واقعیت که این تبدیلها، تبدیلهای صحیح بیضوی یا سهموی موبیوسی

هستند، به‌دست می‌آید. گروه (۳.۱۲) با $\mathscr{E}$ نموده می‌شود. عناصر آن به سه پارامتر حقیقی مستقل: α، $b_۱$ و $b_۲$ بستگی دارند اگر $b = b_۱ + ib_۲$ (ر.ک. مثال ۷).

اگر $\boldsymbol{\beta}$ بیضوی باشد، صورت نرمالش کلاف نگاره‌های گنجنگاشتی همهٔ دوایر عظیمه کره است. هر تبدیل تصویری در فضا که دوایر عظیمه را بر دوایر عظیمه بنگارد، صفحات مارّ بر $\mathbf{O}$ را بر صفحات مارّ بر $\mathbf{O}$ و خطوط مارّ بر $\mathbf{O}$ را بر خطوط مارّ بر $\mathbf{O}$ می‌نگارد. بنابراین جفتهای نقاط دوبه‌دو متقاطر کره را بر جفتهای نقاط دوبه‌دو متقاطر می‌نگارد. پس این تبدیل دورانی حول $\mathbf{O}$ است. لذا گروه کلاف بیضوی در صورت نرمالش، گروه همهٔ تبدیلهای دورانی موبیوس، $\mathscr{R}$ است.

تبصره. با توجه به قضیهٔ د، از بخش ۳، ج این حقیقت آشکار را نتیجه می‌گیریم که هر دوران فضا حول $\mathbf{O}$ رامی‌توان به صورت حاصلضرب دو تقارن نسبت به صفحات مارّ بر $\mathbf{O}$ نمایش داد.

اگر $\boldsymbol{\beta}$ هذلولوی باشد صورت نرمالش کلاف همهٔ دوایر عمود بر دایرهٔ واحد حقیقی است، و شامل دسته‌های بیضوی، سهموی و هذلولوی و لذا همچنین دوایر انگاری است. گروه آن $\mathscr{U}$، گروه همهٔ تبدیلهای موبیوسی است که دایرهٔ واحد را بر خودش می‌نگارند. دوایر اصلی انعکاسها را که از حاصلضرب آنها یک عنصر $\mathfrak{H}$ از $\mathscr{U}$ می‌تواند به‌دست آید، می‌توان حقیقی اختیار کرد، مگر هنگامی که $\mathfrak{H}$ هذلولوی غیرخاص باشد که در این صورت یکی از آن دایره‌ها باید انگاری باشد.

ه. ترایایی گروههای کلافی. یک گروه $\mathscr{G}$ از تبدیلهای $Z = \mathfrak{T}(z)$ از صفحهٔ کامل‌شده بر خودش را در یک حوزهٔ $\mathscr{D}$ از صفحه ترایا خوانند، هرگاه به‌ازای هر جفت نقطهٔ $z_۱$ و $Z_۱$ در D دست‌کم یک تبدیل $\mathfrak{T}$ در $\mathscr{G}$ وجود داشته باشد که $Z_۱ = \mathfrak{T}(z_۱)$. این حوزهٔ $\mathscr{D}$ را (که ممکن است تمام صفحه هم باشد) یک حوزهٔ ترایایی گروه $\mathscr{G}$ گویند.

گروه $\mathscr{G}$ را در $\mathscr{D}$ pتایی ترایا گویند هرگاه به‌ازای هر دو مجموعهٔ p نقطه‌های: $z_۱$، $z_۲$، . . .، z_p و $Z_۱$، $Z_۲$، . . .، Z_p دست‌کم یک $\mathfrak{T}$ در $\mathscr{G}$ وجود داشته باشد که

$$Z_۱ = \mathfrak{T}(z_۱), \qquad Z_۲ = \mathfrak{T}(z_۲), \cdots , Z_p = \mathfrak{T}(z_p)$$

روشن است که هر گروه pتایی ترایا در همان حوزهٔ $\mathscr{D}$، $(p - ۱)$تایی ترایا هم خواهد بود. اگر $p = ۱$، این گروه ساده ترایاست.

از قضیهٔ د، بخش ۶، د معلوم می‌شود که گروه $\mathscr{M}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس در صفحهٔ کامل‌شده سه‌تایی ترایاست، ولی چهارتایی ترایا نیست. محور حقیقی برای گروه همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس حوزه‌ای سه‌تایی ترایاست. گروه همهٔ تبدیلهای صحیح موبیوس در صفحهٔ (باز) اعداد مختلط (بدون نقطهٔ بینهایت) دوتایی ترایاست.

در مطالب فصل سوم، احکام زیر از اهمیت اساسی برخوردارند:

قضیهٔ د. هر گروه $\mathscr{G}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس به‌دست‌آمده از حاصلضربهای انعکاسهای درون کلافی دایره‌ها در حوزهٔ $\mathscr{D}$، ساده ترایاست. اما دوتایی ترایا نیست. در مورد گروه کلاف بیضوی، $\mathscr{D}$ صفحهٔ کامل شده است. برای گروه کلاف سهموی، $\mathscr{D}$ صفحهٔ سوراخدار است (یعنی صفحهٔ کامل‌شده‌ای که یک نقطه از آن برداشته شده است)[1]. برای گروه سره کلاف هذلولوی، $\mathscr{D}$ درون یک دایره است.

برهان. کافی است قضیه را برای سه گروه $\mathscr{R}$، $\mathscr{E}$ و $\mathscr{U}_+$ ثابت کنیم.

(i) در مورد کلاف بیضوی کافی است نشان دهیم که کره یک حوزهٔ ساده‌ترایا برای گروه همهٔ دورانهای حول مرکز آن است. در واقع هر نقطه از کره را می‌توان با دورانی مناسب به هر نقطهٔ دیگر آن منتقل کرد. اما دوران، فاصلهٔ هر دو نقطه از کره را حفظ می‌کند؛ از این‌رو هر جفت نقطهٔ داده‌شده از کره را به هر جفت نقطهٔ دیگر آن نمی‌توان بدل کرد.

(ii) استدلال مشابهی را می‌توان برای حالت سهموی به‌کار برد. صفحهٔ اعداد مختلط، که در نقطهٔ بینهایت سوراخ‌شده است، حوزه‌ای است ساده‌ترایا برای گروه $\mathscr{E}$ از انتقالهای اقلیدسی. یک جفت نقطهٔ z_1، z_2 را می‌توان به یک جفت نقطهٔ دیگر Z_1، Z_2 انتقال داد، اگر و فقط اگر $|Z_1 - Z_2| = |z_1 - z_2|$. پس این گروه دوتایی ترایا نیست.

(iii) گروه هذلولوی $\mathscr{U}_+$ وقتی درون دایرهٔ واحد $|z| < 1$ حوزه گرفته شود ساده‌ترایاست. در واقع، با تبدیل (۴.۱.۱۲) هر نقطهٔ مفروض $z_1(|z_1| < 1)$ به مرکز o نگاشته می‌شود، ولی ثابت شده بود که هر تبدیل دیگری که بخواهد نقطهٔ دومی را به وضع مشخصی ببرد باید یک دوران صِرف حول o باشد [رک. (۳.۱.۱۲)]، و در نتیجه فاصله از o را حفظ می‌کند.

در دو حالت اول برهان بر اساس وجود یک تابعِ فاصلهٔ ناورداِی از لحاظ هندسی بدیهی، یعنی، یک تابع فاصلهٔ $d(z_1, z_2)$ برای دو نقطهٔ z_1 و z_2 استوار است که در شرایط زیر صدق می‌کند. به‌ازای هر عنصر $\mathfrak{H}$ از این گروه

$$d[\mathfrak{H}(z_1), \mathfrak{H}(z_2)] = d(z_1, z_2) \qquad (۴.۱۲)$$

و

$$d(z_1, z_1) = 0; \quad d(z_1, z_2) \neq 0, \quad z_1 \neq z_2 \text{ اگر } \qquad (۱.۴.۱۲)$$

۱. در حالت کلاف سهموی در صورت نرمالش (همهٔ خطوط صفحه)، $\mathscr{D}$ صفحهٔ (باز) اعداد مختلط است که متناظر با کرهٔ سوراخدار، یعنی، کرهٔ بدون قطب جنوب $\mathbf{S}$ است.

در حالت سوم یک ناوردای دونقطه‌ای با نسبت ناهمساز

$$d_{-1}(z_1, z_2) = \left(z_1, z_2; \frac{1}{\bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_2}\right) \qquad (2.4.12)$$

داده شده است. در واقع فرض می‌کنیم $Z = \mathfrak{H}(z)$ عنصری از گروه $\mathscr{U}_+$ (بخش ۱۲، الف) باشد. پس $1/\bar{Z} = \mathfrak{H}(1/\bar{z})$، و بنابراین

$$d_{-1}(Z_1, Z_2) = \left(\mathfrak{H}(z_1), \mathfrak{H}(z_2); \mathfrak{H}\left(\frac{1}{\bar{z}_1}\right), \mathfrak{H}\left(\frac{1}{\bar{z}_2}\right)\right) = d_{-1}(z_1, z_2)$$

از این‌رو در حالت هذلولوی برهان به همان صورت دو حالت دیگر صورت می‌گیرد.

تبصره. از قضیهٔ د بخش ۶، د، نتیجه می‌گیریم که گروه $\mathscr{M}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس در صفحهٔ کامل‌شده «دقیقاً سه‌تایی ترایاست» و به فِرْسِ قاطع می‌توان گفت که فقط یک تبدیل موبیوس، و نه بیشتر وجود دارد که سه نقطهٔ متمایز مفروض را به سه نقطهٔ متمایز مفروض می‌نگارد. نکتهٔ قابل توجه این است که هر گروه از تبدیلهای پیوسته از صفحهٔ کامل‌شده بر خودش که دقیقاً سه‌تایی تراياست، با گروه $\mathscr{M}$ متشابه است؛ این بدین معنی است که پس از یک تبدیل توپولوژیکی از صفحهٔ کامل بر خودش (که ممکن است همانی هم باشد) این گروه مفروضِ دقیقاً سه‌تایی ترایا، بر $\mathscr{M}$ منطبق می‌شود. این مسئله را ب. دوکرِک‌ژارتو (B. de Kérekjártó) [۲] در سال ۱۹۴۰ ثابت کرده بود. اخیراً یک روش جدیدی برای حل مسئله به‌وسیلهٔ ج. تیتس (J. Tits) [۱] و [۲] پیدا شده است. برای خصوصیات جبری بیشتر گروه $\mathscr{M}$ به مقالهٔ ف. باخمن (F. Bachmann) [۱] و همین‌طور کتاب [۲]، بخش ۱۱ مراجعه کنید.

مثالها

۱. اشتراک دو گروه $\mathscr{R}$ و $\mathscr{U}$، یعنی، مجموعهٔ (زیرگروه) همهٔ تبدیلهایی را پیدا کنید که در هر دو گروه مشترک‌اند.

۲. به‌ازای دو نقطهٔ متمایز z_1 و z_2 یک تبدیل دورانی موبیوس $\mathfrak{R}$ می‌توان یافت که $\mathfrak{R}(z_1)$ و $\mathfrak{R}(z_2)$ نسبت به دایرهٔ واحد حقیقی متقارن باشند.

ملاحظه می‌کنید که یک دایرهٔ عظیمهٔ یکتای Γ وجود دارد که نقاط کروی $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$، متناظر گنجنگاشتی با z_1 و z_2، نسبت به آن متقارن‌اند. $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & -A \end{pmatrix}$، نگارهٔ گنجنگاشتی Γ در

صفحه، به دسته هذلولویی تعلق دارد که دایره‌نقطهٔ آن در $z_۱$ و $z_۲$ قرار دارند، یعنی

$$\lambda_۱\begin{pmatrix} ۱ & -\bar{z}_۱ \\ -z_۱ & z_۱\bar{z}_۱ \end{pmatrix} + \lambda_۲\begin{pmatrix} ۱ & -\bar{z}_۲ \\ -z_۲ & z_۲\bar{z}_۲ \end{pmatrix}$$

طبق (۳.۴.۳) مقادیر پارامترهای متناظر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ در شرط

$$\lambda_۱(۱ + z_۱\bar{z}_۱) + \lambda_۲(۱ + z_۲\bar{z}_۲) = ۰$$

صدق می‌کنند. از این‌رو می‌توان $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ را چنین اختیار کرد: $\lambda_۱ = -(۱ + z_۲\bar{z}_۲)$ و $\lambda_۲ = ۱ + z_۱\bar{z}_۱$. در این صورت

$$A = z_۱\bar{z}_۱ - z_۲\bar{z}_۲, \qquad B = (۱ + z_۲\bar{z}_۲)\bar{z}_۱ - (۱ + z_۱\bar{z}_۱)\bar{z}_۲ \qquad (۵.۱۲)$$

اکنون باید دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را به دایرهٔ واحد تبدیل کنیم. با توجه به (۳.۴.۶) یک تبدیل دورانی موبیوس

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}} = \lambda\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \qquad (\lambda \text{ حقیقی})$$

این عمل به شرط $۲a\bar{b}A + a^۲B - \bar{b}^۲\bar{B} = ۰$ یا

$$\frac{A\bar{b} + Ba}{\bar{b}} = \frac{\bar{B}\bar{b} - Aa}{a} = \rho$$

می‌انجامد که دیده می‌شود مسئلهٔ ویژهٔ مقدار ماتریس ارمیتی $\mathfrak{C}$ است

$$A\bar{b} + Ba = \rho\bar{b}$$

$$\bar{B}\bar{b} - Aa = \rho a$$

مقادیر مشخصهٔ (ریشه‌های) $\mathfrak{C}$ عبارت‌اند از

$$\rho = \pm\sqrt{(A^۲ + B\bar{B})} = \pm Ar \qquad (۱.۵.۱۲)$$

که در آن r شعاع دایرهٔ $\mathfrak{C}$ است. از این‌رو می‌توان چنین اختیار کرد

$$b = -\bar{B} \quad , \quad a = A(1+r) = A - \sqrt{(A^2 + B\bar{B})} \qquad (۲.۵.۱۲)$$

و

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^{-1} = \begin{pmatrix} A - \sqrt{(A^2 + B\bar{B})} & \bar{B} \\ -B & A + \sqrt{(A^2 + B\bar{B})} \end{pmatrix} \qquad (۳.۵.۱۲)$$

۳. تبدیل کروی متناظر با تبدیل دورانی مفروض موبیوس

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \qquad |\mathfrak{R}| = u\bar{u} + v\bar{v} = 1 \qquad (۶.۱۲)$$

یک دوران کره حول $\mathbf{O}$ است، که می‌توان آن را با یک ماتریس متعامد ویژهٔ R نمایش داد که عناصرش به دو عدد مختلط

$$u = u_1 + iu_2, \qquad v = v_1 + iv_2$$

بستگی دارند. تبدیلی که با R تعریف می‌شود، دوایر عظیمهٔ Γ را بر دوایر عظیمهٔ Γ^* می‌نگارد و تبدیل موبیوس $\mathfrak{R}$ بر دوایر متناظرش در صفحهٔ z اثر می‌کند و دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & -A \end{pmatrix}$ را به $\mathfrak{C}^* = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ \bar{B}^* & -A^* \end{pmatrix}$ بدل می‌کند. با قراردادن $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix}$، طبق (۲.۴.۶) داریم $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}}$، که به صورت روشن و باز، عناصر آن چنین‌اند

$$\begin{cases} A^* = (u\bar{u} - v\bar{v})A + \bar{u}vB + u\bar{v}\bar{B} \\ B^* = -2\bar{u}\bar{v}A + \bar{u}^2 B - \bar{v}^2\bar{B} \\ \overline{B^*} = -2uvA - v^2 B + u^2\bar{B} \end{cases} \qquad (۱.۶.۱۲)$$

اکنون فرض می‌کنیم a، b، c و a^*، b^*، c^* به‌ترتیب مختصات صفحات دو دایرهٔ عظیمهٔ Γ و

Γ^* باشند که از لحاظ گنجنگاشتی متناظرند. پس به‌موجب (۱.۴.۳) و (۲.۴.۳) داریم

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & i & -i \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ \overline{B^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & i & -i \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\bar{u} - v\bar{v} & \bar{u}v & u\bar{v} \\ -۲\bar{u}\bar{v} & \bar{u}^۲ & -\bar{v}^۲ \\ -۲uv & -v^۲ & u^۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ \bar{B} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & i & -i \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\bar{u} - v\bar{v} & \bar{u}v & u\bar{v} \\ -۲\bar{u}\bar{v} & \bar{u}^۲ & -\bar{v}^۲ \\ -۲uv & -v^۲ & u^۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}i & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}i & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= R \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

که در آن

$$R = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲}(u^۲ + \bar{u}^۲ - v^۲ - \bar{v}^۲) & \frac{۱}{۲}i(u^۲ - \bar{u}^۲ + v^۲ - \bar{v}^۲) & \bar{u}\bar{v} + uv \\ \frac{۱}{۲}i(\bar{u}^۲ - u^۲ + v^۲ - \bar{v}^۲) & \frac{۱}{۲}(u^۲ + \bar{u}^۲ + v^۲ + \bar{v}^۲) & i(\bar{u}v - uv) \\ -(\bar{u}v + u\bar{v}) & i(\bar{u}v - u\bar{v}) & u\bar{u} - v\bar{v} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_۱^۲ - u_۲^۲ - v_۱^۲ + v_۲^۲ & -۲(u_۱u_۲ + v_۱v_۲) & ۲(u_۱v_۱ - u_۲v_۲) \\ +۲(u_۱u_۲ - v_۱v_۲) & u_۱^۲ - u_۲^۲ + v_۱^۲ - v_۲^۲ & ۲(u_۱v_۲ + u_۲v_۱) \\ -۲(u_۱v_۱ + u_۲v_۲) & -۲(u_۱v_۲ - u_۲v_۱) & u_۱^۲ + u_۲^۲ - v_۱^۲ - v_۲^۲ \end{pmatrix} \quad (۲.۶.۱۲)$$

به‌موجب نرمالسازی (۶.۱۲)، یعنی، $u\bar{u} + v\bar{v} = ۱$، این نمایش معروف به گروه دوران به‌وسیلهٔ «پارامترهای چهارتایی[۱]» $u_۱$، $-v_۲$، $v_۱$ و $u_۲$ است.

برای اینکه به‌طور هندسی دورانی را که با ماتریس (۲.۶.۱۲) نمایش‌داده‌شده مشخص کنیم، باید محور و زاویهٔ دوران را تعیین کنیم. به آسانی ثابت می‌شود که این محور بر قطری منطبق است

۱. ر.ک. (جبر خطی ص ۲۳۹، معادلهٔ (۲۸ و ۲۹)). همین‌طور ر.ک. Cayley [۱] و Watson [۱].

که از نقطهٔ به مختصات $-v_۲$، $v_۱$ و $u_۲$ می‌گذرد؛ زیرا

$$R\begin{pmatrix}-v_۲\\ v_۱\\ u_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v_۲\\ v_۱\\ u_۲\end{pmatrix}$$

ψ، زاویهٔ این دوران، همان زاویه‌ای است که در صورت نرمال تبدیل آغازین موبیوس $\mathfrak{R}$ [ر.ک. (۳.۲.۱۲)] نشان داده شده است. این صورت نرمال به شکل $\mathfrak{T}\mathfrak{R}\mathfrak{T}^{-۱}$ است که در آن $\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}۱ & -\gamma\\ \bar{\gamma} & ۱\end{pmatrix}$ معرف تبدیل موبیوسی است که یکی از نقاط ثابت تبدیل موبیوس $\mathfrak{R}$ یعنی γ را بر o می‌نگارد، و از آنجا دوران متناظر آن R به دورانی حول محور قطبی، **NS**، تبدیل می‌شود. از این‌رو یک ریشهٔ درجهٔ دوم $\bar{v}\gamma^۲+(u-\bar{u})\gamma+v=۰$ است، خواهیم داشت

$$\psi=۲\mathrm{arc}\,(\bar{u}\gamma\bar{\gamma}+\bar{v}\gamma-v\bar{\gamma}+u) \qquad (۳.۶.۱۲)$$

تبصره. تبدیلهای دورانی موبیوس، دایرهٔ واحد انگاریِ $\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}$ را ناوردا می‌گذارد و این تبدیلها با این ویژگی کاملاً معین می‌شوند. دورانهای متناظر آنها در فضا، صفحهٔ به مختصات

$$a=b=c=۰, \qquad d=۲$$

یعنی، صفحهٔ بینهایت $(x_۴=۰)$ در مختصات متجانس $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ را با

$$\xi=\frac{x_۱}{x_۴}, \qquad \eta=\frac{x_۲}{x_۴}, \qquad \zeta=\frac{x_۳}{x_۴} \qquad (۴.۶.۱۲)$$

ناوردا می‌گذارد. ولی این ویژگی برای مشخص‌کردن دورانهای فضا کافی نیست. این دورانها، آن تبدیلهای تصویری هستند که کرهٔ واحد و صفحهٔ بینهایت را ناوردا می‌گذارند.

۴. با روشی مشابه می‌توان تبدیل تصویری S در فضا را که متناظر با تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ است و دایرهٔ واحد حقیقی را ناوردا می‌گذارد، به صراحت مشخص ساخت (ر.ک. بخش ۱۲، **الف**). هر تبدیل S از این نوع، نیمکرهٔ بالایی را بر خودش می‌نگارد، و کرهٔ واحد و صفحهٔ استوا را ناوردا می‌گذارد. هر دایرهٔ کروی عمود بر استوا، بر دایره‌ای عمود بر استوا نگاشته می‌شود؛ از این‌رو هر صفحهٔ موازی با محور قطبی بر صفحه‌ای موازی با محور قطبی نگاشته می‌شود که فاصله‌اش از این محور کوچکتر از واحد، برابر واحد، و یا بزرگتر از واحد باقی می‌ماند.

حال صفحهٔ استوا را صفحهٔ تصویر می‌گیریم. این صفحه در بخشهای متناهی‌اش بر صفحهٔ z منطبق است. تبدیل فضایی S با یک تبدیل تصویری صفحه که دایرهٔ واحد $\xi^۲ + \eta^۲ = ۱$ را ناوردا می‌گذارد، و داخل دایره را بر خودش می‌نگارد، به‌طور یکتا معین می‌شود.

تبدیل موبیوس داده‌شدهٔ $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ [ر.ک. (۱.۱۲)] را می‌توان نرمالشده فرض کرد به‌طوری‌که

$$|\mathfrak{H}| = u\bar{u} - v\bar{v} = ۱ \qquad (۷.۱۲)$$

این تبدیل دایرهٔ $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & A \end{pmatrix}$ را (که بر دایرهٔ واحد $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ عمود است، ر.ک. مثال ۷، بخش ۴) بر دایرهٔ

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ \overline{B^*} & A^* \end{pmatrix} \qquad \left[\mathfrak{S} = \mathfrak{H}^{-۱} = \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ -\bar{v} & u \end{pmatrix}\right]$$

می‌نگارد که مختصاتش با

$$\begin{cases} A^* = (u\bar{u} + v\bar{v})A - \bar{u}vB - u\bar{v}\bar{B} \\ B^* = -۲\bar{u}\bar{v}A + \bar{u}^۲B + \bar{v}^۲\bar{B} \\ C^* = -۲uvA + v^۲B + u^۲\bar{B} \end{cases} \qquad (۱.۷.۱۲)$$

داده می‌شود. با شروع از مختصات صفحه، یعنی، a، b، c، d و a^*، b^*، c^*، d^*، به‌موجب (۱.۴.۳) و (۲.۴.۳) ملاحظه می‌کنیم که $c = ۰$ و $c^* = ۰$ (زیرا صفحات مورد نظر بر صفحهٔ استوا عمودند) و

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & i & -i \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\bar{u} + v\bar{v} & -\bar{u}v & -u\bar{v} \\ -۲\bar{u}\bar{v} & \bar{u}^۲ & \bar{v}^۲ \\ -۲uv & v^۲ & u^۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}i & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}i & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \tilde{S} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

که در آن

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u^2 + \bar{u}^2 + v^2 + \bar{v}^2) & \frac{1}{2}i(u^2 - \bar{u}^2 + \bar{v}^2 - v^2) & uv + \bar{u}\bar{v} \\ \frac{1}{2}i(\bar{u}^2 - u^2 - v^2 + \bar{v}^2) & \frac{1}{2}(u^2 + \bar{u}^2 - v^2 - \bar{v}^2) & i(\bar{u}\bar{v} - uv) \\ -(\bar{u}v + u\bar{v}) & i(\bar{u}v - u\bar{v}) & u\bar{u} + v\bar{v} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2 & -2(u_1u_2 - v_1v_2) & 2(u_1v_1 - u_2v_2) \\ 2(u_1u_2 + v_1v_2) & u_1^2 - u_2^2 - v_1^2 + v_2^2 & 2(u_1v_2 + u_2v_1) \\ -2(u_1v_1 + u_2v_2) & -2(u_1v_2 - u_2v_1) & u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \end{pmatrix} \quad (۲.۷.۱۲)$$

حال مختصات متجانس x_1، x_2، x_3، x_4 به صورت (۴.۶.۱۲) را وارد می‌کنیم. پس معادلهٔ

$$ax_1 + bx_2 + dx_4 = 0 \quad (۳.۷.۱۲)$$

معادلهٔ یک خط در صفحهٔ $\xi\eta$ (و نیز معادلهٔ صفحه‌ای موازی با محور ζ در فضا) است. ماتریس آن، به عنوان معرف یک تبدیل تصویری در مختصات خطی a، b، d، یک ماتریس سه سطری لورنتس، یعنی

$$\tilde{S}'\tilde{L}\tilde{S} = \tilde{L}, \qquad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴.۷.۱۲)$$

است. بنابراین تبدیل تصویری متناظرش در مختصات نقطه‌ای x_1، x_2، x_4، یعنی

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = \tilde{S}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (۵.۷.۱۲)$$

دارای ماتریس $\tilde{S}_1$ است که $\tilde{S}'^{-1}$ ماتریس عکس ترانهادهٔ[1] ماتریس $\tilde{S}$ از ماتریس $\tilde{S}$ است که با توجه به (۴.۷.۱۲) از قراردادن قرینه‌های عددی[2] هر عنصر به‌جای عناصر سطر و ستون سوم در $\tilde{S}$؛ به‌استثنای عنصر مشترکشان، به‌دست می‌آید (ر.ک. مثال ۲، بخش ۱۴).

۱. ر.ک. جبر خطی ص ۲۶۴، به‌ویژه معادلهٔ (′۸ و A) و جبر خطی ص ۱۹۸.
۲. این نیز روشن می‌شود که $x_1 = a$، $x_2 = b$ و $x_4 = -d$ مختصات قطب خط (۳.۷.۱۲) نسبت به دایرهٔ $x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0$ است.

تبدیل فضای تصویری متناظر با تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$ در صفحهٔ z، و تبدیل فضای تصویری $\tilde{S}_۱$ متناظر با تبدیل تصویری در صفحهٔ $\xi\eta$، از راه زیر به‌دست می‌آیند. $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ مختصات یک نقطهٔ x از کره در شرط $x_۳^۲ = x_۴^۲ - x_۱^۲ - x_۲^۲$ صدق می‌کنند، و با در نظر گرفتن (۷.۱۲) به‌موجب (۵.۷.۱۲) داریم

$$y_۳^۲ = y_۴^۲ - y_۱^۲ - y_۲^۲ = x_۳^۲$$

بنابراین $y_۳ = \pm x_۳$؛ ولی چون نیمهٔ بالایی کره بر نیمه بالایی آن نگاشته می‌شود، داریم $y_۳ = x_۳$. بنابراین تبدیلی که نقطهٔ x را بر نقطهٔ y از کره می‌نگارد با

$$y = Sx$$

داده می‌شود که در آن

$$S = \begin{pmatrix} u_۱^۲-u_۲^۲+v_۱^۲-v_۲^۲ & -۲(u_۱u_۲-v_۱v_۲) & ۰ & -۲(u_۱v_۱-u_۲v_۲) \\ ۲(u_۱u_۲+v_۱v_۲) & u_۱^۲-u_۲^۲-v_۱^۲+v_۲^۲ & ۰ & -۲(u_۱v_۲+u_۲v_۱) \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲(u_۱v_۱+u_۲v_۲) & ۲(u_۱v_۲-u_۲v_۱) & ۰ & u_۱^۲+u_۲^۲+v_۱^۲+v_۲^۲ \end{pmatrix} \quad (۶.۷.۱۲)$$

این یک نمایش پارامتری از تبدیلهای تصویری صفحه است که دایرهٔ واحد و داخل آن را ناوردا نگاه می‌دارند.

۵. با همین روش می‌توان یک نمایش پارامتری از آن تبدیلهای تصویری که کره را بر خودش می‌نگارند و با حرکتهای صفحهٔ اقلیدسی متناظرند به‌دست آورد. در این حالت دوایر تعویض‌شده با هم بر کره، آنهایی هستند که با خطهای راست واقع در صفحهٔ z متناظرند. ماتریسهای ارمیتی آنها به‌صورت $\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} ۰ & B \\ \bar{B} & D \end{pmatrix}$ $(A = ۰)$ هستند. از این‌رو به‌موجب (۲.۴.۳)، $d = c$. اگر $\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & v \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ معرف حرکت مفروض باشد، با فرض

$$e^{i(\alpha/۲)}\mathfrak{H}^{-۱} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha/۲)} & -e^{-i(\alpha/۲)} - e^{-i(\alpha/۲)v} \\ ۰ & e^{i(\alpha/۲)} \end{pmatrix} = \mathfrak{S}$$

عناصر ماتریس $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{S}'\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{S}}$ چنین خواهند شد

$$B^* = e^{-i\alpha}B, \qquad \overline{B^*} = e^{i\alpha}\bar{B}, \qquad D^* = -ve^{-i\alpha}B - \bar{v}e^{i\alpha}\bar{B} + D$$

اگر قرار دهیم $v = re^{i\beta}(|v| = r)$، آنگاه

$$\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & ۰ \\ \sin\alpha & \cos\alpha & ۰ \\ -r\cos(\beta-\alpha) & -r\sin(\beta-\alpha) & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

اما این ماتریس را فقط و فقط از یک راه می‌توان تکمیل کرد و به صورت ماتریس لورنتسِ

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & r\cos\beta & -r\cos\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & r\sin\beta & -r\sin\beta \\ -r\cos(\beta-\alpha) & -r\sin(\beta-\alpha) & ۱-\frac{۱}{۲}r^۲ & \frac{۱}{۲}r^۲ \\ -r\cos(\beta-\alpha) & -r\sin(\beta-\alpha) & -\frac{۱}{۲}r^۲ & ۱+\frac{۱}{۲}r^۲ \end{pmatrix}$$

درآورد که معرف تبدیل در مختصات صفحه‌ای a، b، c، d است. ماتریس S که معرف همین تبدیل در مختصات نقطه‌ای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ است ماتریس عکس ترانهادهٔ $T'^{-۱}$ (ر.ک. مثال ۴) خواهد شد، یعنی

$$S = LTL$$

که از T، با قراردادن قرینه‌های مقادیر عددی به‌جای هر عنصر سطر و ستون چهارم T، به‌استثنای عنصر مشترک $\left(۱ + \dfrac{۱}{۲}r^۲\right)$، به‌دست می‌آید.

۶. یک ناوردای دونقطه‌ای (تابع فاصله) برای گروه $\mathscr{R}$ با نسبت ناهمساز

$$d_۱(z_۱, z_۲) = \left(z_۱, z_۲; -\frac{۱}{\bar{z}_۱}, -\frac{۱}{\bar{z}_۲}\right) \qquad \text{(۸.۱۲) [ر.ک. (۲.۴.۱۲)]}$$

داده می‌شود.

۷. گروه تغییر مکانهای اقلیدسی (۳.۱۲)، یعنی $\mathscr{E}$، یک زیرگروه ناوردای گروه $\mathscr{I}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای صحیح موبیوس است، گروه خارج‌قسمت $\mathscr{I}/\mathscr{E}$ با گروه تمام اتساعهای ویژهٔ $Z = az$ $(a > ۰)$ یکریخت است.

۸. گروه $\mathscr{G}^{(\rho^2)}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوسی که دایرهٔ $(\circ,\rho)$ را بر خودش می‌نگارند با ماتریس

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{\bar{b}}{\rho^2} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (۹.۱۲)$$

نشان داده می‌شود که در آن ρ حقیقی یا انگاری محض است. در این صورت $\mathscr{G}^{(1)} = \mathscr{U}$، $\mathscr{G}^{\infty} = \mathscr{E}$ و $\mathscr{G}^{(-1)} = \mathscr{R}$. بنابراین گروههای $\mathscr{G}^{(\rho^2)}$ با $\mathscr{U}$ متشابه خواهند بود اگر $\rho^2 > \circ$، و با $\mathscr{R}$ متشابه خواهند بود اگر $\rho^2 < \circ$.

می‌توانیم ببینیم که اگر b انگاری محض باشد ماتریس (۹.۱۲) یک ماتریس نرمالشدهٔ دایره است (ر.ک. مثال ۱، بخش ۹).

۱۳. هندسهٔ یک گروه تبدیل

الف. هندسهٔ اقلیدسی. به عنوان مقدمه‌ای برای درک مطالبی که بعداً دربارهٔ هندسه نااقلیدسی خواهد آمد، ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مطالب اساسی هندسهٔ اقلیدسی را از بعضی خواص گروه همهٔ تغییر مکانها (حرکتها)ی اقلیدسی $\mathscr{E}$ به‌دست آورد.

شکلهای هندسی واقع در صفحه مانند پاره‌خطها، مثلثها، دایره‌ها و غیره را به $\mathscr{F}$، $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ و غیره نشان می‌دهیم. هندسهٔ اقلیدسی صفحه، مطالعهٔ آن خواصی از شکلهای $\mathscr{F}$ است که اگر $\mathscr{F}$ به هر نحو در صفحه حرکت داده شود، آن خواص تغییر نکنند. فاصله‌های بین نقاط مختلف یک شکل $\mathscr{F}$ و زاویهٔ بین خطها، یا دایره‌ها بر اثر تغییر مکان تغییر نمی‌کنند؛ فاصلهٔ بین یک نقطه از شکل $\mathscr{F}$ و نقطهٔ ثابتی از صفحه تغییر می‌کنند.

اگر یک شکل $\mathscr{F}_1$ را بتوان با تغییر مکانی بر شکل $\mathscr{F}_2$ منطبق نمود، $\mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_2$ را «همنهشت نسبت به گروه همهٔ تغییر مکانها» و ما به اختصار «همنهشت» گوییم. بدین‌ترتیب گروه همهٔ تغییر مکانهای $\mathscr{E}$ی (۳.۱۲) همنهشتی اشکال هندسی را معین می‌کند. بعضی اعمال، یا عناصر گروه $\mathscr{E}$ به ما امکان می‌دهند که همنهشت‌بودن دو شکل مفروض را امتحان کنیم.

علاوه بر این به‌وسیلهٔ زیرگروههای یک پارامتری آن، یعنی، به‌وسیلهٔ پاره‌ای از ویژگیهای ساختاری گروه، گروه $\mathscr{E}$ عناصر بنیادی هندسهٔ اقلیدسی (خطهای راست و دایره‌ها) را معین می‌کند. این عناصر با دونوع متمایز از زیرگروههای یک پارامتری $\mathscr{E}$ متناظرند.

۱. زیرگروههای سهموی، که توسط بارستِ مسلسل تبدیلهای سهموی گروه $\mathscr{E}$ به‌دست می‌آیند. همهٔ تبدیلهای سهموی این گروه انتقالهای $\mathfrak{T}_b$ هستند

$$Z = \mathfrak{T}_b(z) = z + b$$

به‌ازای ثابت z و متغیر حقیقی s، نقطهٔ

$$Z = \mathfrak{T}_b^s(z) = z + sb$$

بر خط راست خوشتعریف مارّ بر z و موازی بردار انتقال b حرکت می‌کند (ر.ک. مثال ۹، بخش ۱۰ و قضیهٔ ه، بخش ۱۰، و).

۲. زیرگروههای بیضوی. هر تغییر مکانی بجز انتقال در گروه $\mathscr{E}$ بیضوی است. فرض کنید $\alpha \neq 2n\pi$؛ در این صورت

$$\gamma = \frac{b}{1 - e^{i\alpha}}$$

تنها نقطهٔ ثابت معین دوران (۳.۱۲) است و می‌توان آن را به صورت

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \gamma + e^{i\alpha}(z - \gamma)$$

نوشت. از این‌رو اگر ثابت $z \neq \gamma$ داده شده باشد و اگر s متغیری حقیقی باشد، نقطهٔ

$$Z = \mathfrak{H}^s(z) = \gamma + e^{i\alpha s}(z - \gamma)$$

بر دایرهٔ به مرکز γ مارّ بر z حرکت می‌کند.

با یک تغییر مکان مناسب $\mathfrak{H}$، هر نقطهٔ z را می‌توان به هر نقطهٔ دیگر صفحه منتقل ساخت. از این‌رو اگر $f(z)$ تابعی ناوردا باشد، یعنی، اگر به‌ازای همهٔ $\mathfrak{H}$های واقع در $\mathscr{E}$

$$f[\mathfrak{H}(z)] = f(z) \qquad (۱.۱۳)$$

آنگاه الزاماً این تابع تابعی است ثابت. این درست منظور ما از آن چیزی است که می‌گوییم در گروه تغییر مکان $\mathscr{E}$ هیچ ناوردای تک‌نقطه‌ای وجود ندارد. البته این حقیقت نتیجه‌ای از ترایایی گروه $\mathscr{E}$ است.

در نزدیکی نقطهٔ z، پاره‌خطی راکه با دو نقطهٔ $z_۱$ و $z_۲$ معین شده در نظر می‌گیریم. تابعی از دو نقطهٔ $z_۱$ و $z_۲$ وجود دارد که در هر تغییر مکانی ناورداست؛ این تابع، تابع فاصلهٔ بین آنها $|z_۲ - z_۱|$ است. مسلماً هر تابعی از این فاصله ناورداست. ولی صرف‌نظر از مختاربودن در انتخاب یک تابع، دیده می‌شود که فاصلهٔ $|z_۲ - z_۱|$ تنها تغییر مکان ناوردایی است که به دو نقطه وابسته است. معنی این گفته این است که هر تابع ناوردای $f(z_۱, z_۲)$ تابعی از فاصلهٔ $|z_۲ - z_۱|$ است.

در واقع اگر $f(z_۱, z_۲)$ ناوردا باشد، هنگامی که $z_۱$ و $z_۲$ هر دو در جریان انتقال دلخواهی قرار می‌گیرند خواهیم داشت: $f(z_۱ + b, z_۲ + b) = f(z_۱, z_۲)$. به‌ازای $b = -z_۲$ نتیجه می‌شود

$$f(z_۱, z_۲) = f(z_۱ - z_۲, ۰)$$

پس این ناوردا تابعی است از تفاضل $z_۲ - z_۱$.

اما اگر $z_۱$ و $z_۲$ تحت تأثیر یک دوران دلخواهی قرارگیرند $f(z_۱, z_۲)$ مقدارش ثابت می‌ماند

$$f(z_۱, z_۲) = f[e^{i\alpha}(z_۱ - z_۲), ۰]$$

فرض می‌کنیم $\alpha = -\mathrm{arc}\,(z_۱ - z_۲)$؛ در این صورت

$$f(z_۱, z_۲) = f(|z_۱ - z_۲|, ۰)$$

آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره. مسئلهٔ سادهٔ دوتایی ترایانبودن گروه $\mathscr{E}$ برای وجود و یکتایی فاصلهٔ ناوردا، اساسی است (ر.ک. بخش ۱۳، ج). در واقع به آسانی دیده می‌شود که یک گروه دوتایی ترایا از تبدیلها، نمی‌تواند ناوردایی وابسته به دونقطه داشته باشد، و یک گروه ناترایا ممکن است چند ناوردای دونقطه‌ای داشته باشد.

ب. هندسهٔ $\mathscr{G}$. فکر اساسی کلاین (۱۸۷۲) در «برنامهٔ ارلانگر» این بود که هندسه‌ای را (که هندسهٔ $\mathscr{G}$ای خواهیم خواند) به‌گروه تبدیلهایی نسبتاً دلخواه $\mathscr{G}$ وابسته سازد که نحوهٔ عمل آنها در «فضای» این هندسه به همان طریق عمل گروه حرکتهای اقلیدسی $\mathscr{E}$، در صفحهٔ اقلیدسی باشد. «فضای» هندسهٔ $\mathscr{G}$ای را می‌توان به صورت حوزه‌ای از ترایایی سادهٔ گروه مفروض $\mathscr{G}$ (مرکب از تبدیلها) در نظر گرفت.

به‌ویژه هندسه‌های مسطحه‌ای را مطالعه خواهیم کرد که به تعبیر کلاین به گروههای کلافهای هذلولوی، سهموی و بیضوی (ر.ک. بخش ۱۲) تعلق دارند. ممکن است این کلافها را به صورت نرمالشان در نظر گرفت. بنابراین $\mathscr{G}$ یکی از گروههای $\mathscr{U}_+$، $\mathscr{E}$ و $\mathscr{R}$ است که حوزهٔ ترایایی سادهٔ آنها به‌ترتیب درون دایرهٔ واحد، صفحهٔ اقلیدسی معمولی، و صفحهٔ کامل‌شدهٔ اعداد مختلط است. در هر

حالت می‌توان این حوزه را با $\mathscr{D}$ نمایش داد؛ این حوزه با صفحهٔ (یا فضای) هندسهٔ $\mathscr{G}$ای متناظر است.

همان‌گونه که در مورد هندسهٔ اقلیدسی (بخش ۱۳، الف) گفتیم، دو شکلی از $\mathscr{D}$ را همنهشت $\mathscr{G}$ای گویند، اگر بتوان با یک تبدیل $\mathscr{G}$ یکی را بر دیگری نگاشت (ر.ک. مثال ۶).

نقاط یک هندسهٔ $\mathscr{G}$ای اعداد مختلط درون $\mathscr{D}$ هستند. عناصر اساسی دیگر هندسهٔ $\mathscr{G}$ای که خطهای راست، خمها، و دایره‌ها خوانده می‌شوند به‌وسیلهٔ زیرگروههای یک پارامتری $\mathscr{G}$ معرفی می‌شوند، که متشکل از بارستنهای مسلسل $\mathfrak{H}^s$ از یک عنصر $\mathfrak{H}$ در $\mathscr{G}$ هستند، به صورتی که در بخش ۱۰، و معین شده‌اند. از قضیهٔ هـ، بخش ۱۰، و، معلوم می‌شود که هر منحنی $\mathfrak{C}$ که از اِعمال همهٔ توانهای $\mathfrak{H}$ بر یک نقطهٔ $z_\circ$ از $\mathscr{D}$ به‌دست می‌آید، یک دایره یا کمانی از یک دایره است.[1] نمایش پارامتری آن با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$z = \mathfrak{H}^s(z_\circ) \qquad (-\infty < s < \infty) \quad (۱.۱.۱۳)$$

تعاریف. دایرهٔ $\mathfrak{C}$ را دایرهٔ $\mathscr{G}$ای خوانند هرگاه تبدیل $\mathfrak{H}$ بیضوی باشد. γ نقطهٔ ثابت $\mathfrak{H}$ را که درون $\mathscr{D}$ واقع است، مرکز دایرهٔ $\mathscr{G}$ای گویند. یک کمان از دایرهٔ (۱.۱۳) را یک اَبَرخم $\mathscr{G}$ای (یا منحنی همفاصله) خوانند، هرگاه $\mathfrak{H}$ هذلولوی ویژه باشد؛ آن را خم زمانی $\mathscr{G}$ای می‌گویند، اگر $\mathfrak{H}$ سهموی باشد (ر.ک. بخش ۱۰، و، قضیهٔ هـ و فرع ۱).

اگر $\mathscr{R} = \mathscr{G}$، هر تبدیلی در $\mathscr{G}$ بیضوی است و لذا هیچ دایرهٔ $\mathscr{G}$ای وجود ندارد. اگر $\mathscr{E} = \mathscr{G}$، هر تبدیلی بیضوی یا سهموی است و لذا هیچ ابرخمی وجود ندارد.

بنا به تعریف دایره‌های $\mathscr{G}$ای و ابرخمهای $\mathscr{G}$ای که بر خطوط راست معمولی (اقلیدسی) مارّ بر o قرار دارند، «خطهای راست» $\mathscr{G}$ایِ مارّ بر o هستند. هر منحنی که با یک خط راست $\mathscr{G}$ای مارّ بر o همنهشت باشد، یک خط راست $\mathscr{G}$ای خوانده می‌شود.

پس هر خط راست $\mathscr{U}_+$ای، یک ابرخم $\mathscr{U}_+$ای عمود بر دایرهٔ واحد (وکراندارشده با آن) است. یک خط راست $\mathscr{E}$ای، یک دایرهٔ زمانی است؛ این دایره، دایره‌ای است مارّ بر نقطهٔ بینهایت، یعنی، یک خط راست معمولی.

بر اساس تعاریف پیش، نشان داده خواهد شد که چگونه می‌توان نظریه‌های هندسی را بسط داد. به حالت $\mathscr{E} = \mathscr{G}$ در بخش ۱۳، الف اشاره شده است و آن را بسط بیشتری نخواهیم داد. در مورد $\mathscr{U}_+ = \mathscr{G}$، «هندسهٔ هذلولوی[2]» را به‌دست می‌آوریم و برای $\mathscr{R} = \mathscr{G}$ «هندسهٔ کروی»

---

۱. این منحنی مسیر نقطهٔ $z_\circ$، بر اثر تبدیل گروه متشکل از توانهای $\mathfrak{H}^s$ از $\mathfrak{H}$ است.

۲. گاهی آن را «هندسهٔ نااقلیدسی» خوانند. نامی که به معنی وسیعتری به کار خواهم برد و شامل هندسه‌هایی است که در بخش ۱۵ بدان خواهیم پرداخت، آن را «هندسهٔ لباچفسکی» هم می‌نامند.

را. در هر یک از این هندسه‌ها، عناصر گروه $\mathscr{G}$ نقش حرکتها را در هندسهٔ اقلیدسی دارند؛ از این‌رو $\mathscr{U}_+$ را گروه حرکتهای هذلولوی، $\mathscr{R}$ را گروه حرکتهای کروی نامند.

ج. تابع فاصله. در (بخش ۱۲، ه، مثال ۶) نشان داده شده است که چگونه می‌توان یک تابع فاصله برای هندسهٔ هذلولوی و هندسهٔ کروی ساخت. اکنون روش مشترک دیگری را برای سه گروه $\mathscr{U}_+$، $\mathscr{E}$ و $\mathscr{R}$ و احتمالاً برای گروههای دیگر $\mathscr{G}$ ذکر می‌کنیم. در ضمن یکتایی تابع فاصله را هم ثابت خواهیم کرد.

این برهان بر پایهٔ چند ویژگی سادهٔ گروه $\mathscr{G}$ که در حالت $\mathscr{U}_+$، $\mathscr{E}$ و $\mathscr{R}$ تحقق یافته‌اند، عرضه خواهد شد.

I. عناصر $\mathscr{G}$ نگاشتهای $\mathscr{D}$ بر خودش هستند.

عکسهای عناصر $\mathscr{G}$ نیز عناصر گروه‌اند و بنابراین یک‌ـبه‌ـیک و عکسپذیرند.

II. $\mathscr{G}$ ترایای ساده است، نه ترایای دوتایی.

همهٔ عناصر $\mathfrak{H}_0$ از $\mathscr{G}$ که z_0 برای آنها یک نقطهٔ ثابت در $\mathscr{D}$ باشد، زیرگروه $\mathscr{H}_0$ از $\mathscr{G}$ را تشکیل می‌دهند که «زیرگروه پایداری» $\mathscr{G}$ در z_0 نامیده می‌شوند.

قضیهٔ الف. زیرگروههای پایداری در نقاط $\mathscr{D}$، یک مجموعهٔ کامل از زیرگروههای مزدوج $\mathscr{G}$ را تشکیل می‌دهند.

برهان. فرض می‌کنیم z_1 نقطه‌ای در $\mathscr{D}$ باشد و $\mathscr{H}_1$ زیرگروه پایداری در z_1. با توجه به فرض II یک تبدیل $\mathfrak{T}$ در $\mathscr{G}$ وجود دارد که $z_1 = \mathfrak{T}(z_0)$. در این صورت

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}_0\mathfrak{T}^{-1}(z_1) = \mathfrak{T}\mathfrak{H}_0(z_0) = \mathfrak{T}(z_0) = z_1$$

که بدین‌معنی است که به‌ازای هر $\mathfrak{H}^n$ در $\mathscr{H}_0$ تبدیل $\mathfrak{T}\mathfrak{H}_0\mathfrak{T}^{-1}$ عنصری از $\mathscr{H}_1$ است. همچنین به‌ازای هر $\mathfrak{H}_1$ در $\mathscr{H}_1$ تبدیل $\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{H}_1\mathfrak{T}$ عنصری از $\mathscr{H}_0$ است. بنابراین به صورت نمادگذاری نظریهٔ گروهی داریم $\mathscr{H}_1 = \mathfrak{T}\mathscr{H}_0\mathfrak{T}^{-1}$، که یعنی $\mathscr{H}_0$ و $\mathscr{H}_1$ زیرگروههای مزدوج‌اند.

از الف و ب بخش ۱۲ و الف بخش ۱۳ روشن می‌شود که در هرکدام از گروههای $\mathscr{U}_+$، $\mathscr{E}$ و $\mathscr{R}$، زیرگروه پایداری در نقطهٔ o، گروه همهٔ دورانها حول این نقطه است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\mathscr{D}$ شامل نقطهٔ o است و

III. زیرگروه پایداری $\mathscr{G}$ در o گروه همهٔ دورانها (ی اقلیدسی) حول نقطهٔ o است.

اکنون بر پایهٔ این سه فرض به‌ازای همهٔ جفتهای نقاط z_1 و z_2 در $\mathscr{D}$ یک ناوردای $f(z_1, z_2)$ را چنین تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathfrak{H}$ عنصری از $\mathscr{G}$ باشد و داشته باشیم

$$\mathfrak{H}(z_1) = Z_1, \qquad \mathfrak{H}(z_2) = Z_2$$

نقطهٔ دلخواه z_0 را، در $\mathscr{D}$ اختیار نموده و دو تبدیل $\mathfrak{H}_{z_1}$ و $\mathfrak{H}_{z_2}$ را در $\mathscr{G}$ چنان پیدا می‌کنیم که

$$\mathfrak{H}_{z_2}(z_2) = \mathfrak{H}_{Z_2}(Z_2) = z_0$$

پس z_0 نقطهٔ ثابتی است از تبدیلِ

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{Z_2}\mathfrak{H}\mathfrak{H}_{z_2}^{-1}$$

اگر این تبدیل را بر $z = \mathfrak{H}_{z_2}(z_1)$ اثر دهیم، خواهیم داشت

$$\mathfrak{H}_0[\mathfrak{H}_{z_2}(z_1)] = \mathfrak{H}_{Z_2}[\mathfrak{H}(z_1)] = \mathfrak{H}_{Z_2}(Z_1) \qquad (۳.۱۳)$$

اگر زیرگروه پایداری $\mathscr{H}_0$ در z_0 فقط متشکل از عنصر واحد باشد، لزوماً باید داشته باشیم $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{E}$، پس به‌موجب (۲.۱۳) $\mathfrak{H}_{z_2}(z_1)$ یک ناوردای گروه $\mathscr{G}$ است.

اما حالا فرض می‌کنیم $z_0 = 0$؛ بنابراین طبق III زیرگروه پایداری $\mathscr{H}_0$، گروه همهٔ دورانها حول o است. از این‌رو

$$\mathfrak{H}_0(z) = e^{i\alpha} z$$

و از (۲.۱۳) روشن می‌شود که

$$f(z_1, z_2) = |\mathfrak{H}_{z_2}(z_1)| \qquad (۱.۲.۱۳)$$

معرف یک ناوردای دو نقطه‌ای گروه $\mathscr{G}$ است.

ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای همهٔ zهای واقع در $\mathscr{D}$

$$f(z, 0) = |\mathfrak{H}_0(z)| = |z| \qquad (۲.۲.۱۳)$$

تنها ناوردای گروه پایداری $\mathscr{H}_\circ$ است. بنابراین هر ناوردای دیگر $\circ$ و z تابعی است از $|z|$. پس تا وقتی که تقارن تابع $f(z_1, z_2)$ ثابت نشده است، فقط می‌توان گفت یک تابع $F(r)$ از متغیر نامنفی r وجود دارد که

$$f(\circ, z) = F(|z|)$$

علاوه بر این اگر به‌ازای یک عنصر $\mathfrak{H}$ از $\mathscr{G}$ داشته باشیم

$$\mathfrak{H}(\circ) = Z_\circ, \qquad \mathfrak{H}(z) = Z$$

آنگاه

$$f(Z, Z_\circ) = |z| \tag{۳.۲.۱۳}$$

به‌طور یکتا تعیین می‌شود؛ همین‌طور $f(Z_\circ, Z) = F(|z|)$.

حال فرض می‌کنیم $f_1(z_1, z_2)$ یک ناوردای دونقطه‌ای دیگر $\mathscr{G}$ باشد. چون ناوردای زیرگروه $\mathscr{H}_\circ$ یکتاست، نتیجه می‌شود که تابعی مانند $F_1(r)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_1(z_1, \circ) = F_1(|z|)$؛ بنابراین

$$f_1(Z, Z_\circ) = F_1(|z|) = F_1[f(Z, Z_\circ)]$$

که در آن $Z_\circ$ با انتخاب $\mathfrak{H}$ معین می‌شود. چون z نقطهٔ دلخواهی در $\mathscr{D}$ است، همین مطلب در مورد Z هم صادق است؛ بنابراین معادلهٔ آخر به‌ازای همهٔ جفتهای نقاط $Z_\circ$ و Z در $\mathscr{D}$ معتبر است. از این‌رو

قضیهٔ ب. برای هر گروه $\mathscr{G}$ که در شرایط I_III صدق می‌کند، فقط و فقط یک ناوردای دونقطه‌ای مستقل $f(z_1, z_2)$ وجود دارد. این ناوردا با (۱.۲.۱۳) داده می‌شود و می‌توان آن را تابع فاصلهٔ $\mathscr{G}$ای z_1 و z_2 نامید.

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع فاصلهٔ $\mathscr{E}$ایِ هر دو نقطهٔ z_1 و z_2 با فاصلهٔ اقلیدسی $|z_2 - z|$ در صفحهٔ اقلیدسی برابر است. برخی از خواص واضح این فاصله، خواص تابع فاصلهٔ $\mathscr{G}$ای نیز هستند. تابع $f(z_1, z_2)$ که با (۱.۲.۱۳) داده شده نامنفی، و برابر صفر است، اگر و فقط اگر $z_1 = z_2$. در واقع $\mathfrak{H}_{z_2}(z_2) = z_\circ = \circ$، و چون تبدیل $\mathfrak{H}_{z_2}$ در $\mathscr{G}$ عکس یکتا دارد، نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ $\mathfrak{H}_{z_2}(z) = \circ$ یک جواب یکتای $z = z_2$ دارد.

به‌نظر غیرممکن می‌رسد که بدون فرضهای بیشتر دربارهٔ گروه $\mathscr{G}$ بتوان متقارن‌بودن تابع فاصله، یعنی تساوی $f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$ را ثابت کرد. اما اگر فرض کنیم

$$f(0, z) = f(z, 0) \qquad (۴.۱۳)$$

تقارن نتیجه می‌شود و گروه $\mathscr{G}$ متضمن شرط زیر است:

IV. یک تبدیل $\mathfrak{H}_{z_1}$ در $\mathscr{G}$ که برای آن $\mathfrak{H}_{z_1}(z_1) = 0$، ویژگی $|\mathfrak{H}_{z_1}(0)| = |z_1|$ را داراست. [ر.ک. (۳.۲.۱۳)].

در واقع با استفاده از ناوردابودن $f(z_1, z_2)$ می‌توانیم متقارن‌بودن این تابع را ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= |\mathfrak{H}_{z_2}(z_1)| = f[\mathfrak{H}_{z_1}(z_1), \mathfrak{H}_{z_1}(z_2)] \\ &= f[0, \mathfrak{H}_{z_1}(z_2)] = f[\mathfrak{H}_{z_1}(z_2), 0] = |\mathfrak{H}_{z_1}(z_2)| = f(z_2, z_1) \end{aligned}$$

اکنون فرض می‌کنیم $\mathscr{G}$ برابر $\mathscr{U}_+$ یا $\mathscr{E}$ و یا $\mathscr{R}$ است و ε به‌ترتیب برابر ۱− یا ۰ و یا ۱+. در این صورت عناصر $\mathscr{G}$ تبدیلهای $\mathfrak{H}(z) = (az + b)/(-\varepsilon\bar{b}z + \bar{a})$ هستند و $\mathfrak{H}_{z_2}(z_2) = 0$ ایجاب می‌کند که $b = -az_2$. بدین‌ترتیب به‌موجب (۱.۲.۱۳) توابع فاصلهٔ

$$f_\varepsilon(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 + \varepsilon\bar{z}_2 z_1|} \qquad (۱.۳.۱۳)$$

را داریم که متقارن‌بودن آنها به‌وضوح دیده می‌شود. این توابع با توابع d_{-1} و d_1 که در (۲.۴.۱۲) و مثال ۶، بخش ۱۲ معرفی شده‌اند مرتبط‌اند؛ و نیز ر.ک. مثال ۵، بخش ۱۳.

د. دایره‌های $\mathscr{G}$ای. باز هم فرض می‌کنیم $\mathscr{G}$ یکی از سه گروه $\mathscr{U}_+$، $\mathscr{E}$، $\mathscr{R}$ است. همانند هندسهٔ اقلیدسی مقدماتی در هندسهٔ $\mathscr{G}$ای هم می‌توان یک دایره را چنین مشخص نمود:

قضیهٔ ج. یک دایرهٔ $\mathscr{G}$ای مکان هندسی همه نقاطی در $\mathscr{D}$ است که فاصله‌های $\mathscr{G}$ای آنها از یک نقطهٔ z_0 در $\mathscr{D}$ ثابت باشند و هر منحنی با این خصوصیت یک دایرهٔ $\mathscr{G}$ای است. نقطهٔ z_0 را مرکز $\mathscr{G}$ای دایرهٔ $\mathscr{G}$ای گویند.

برهان. بنابه تعریف (بخش ۱۳، **ب**) یک دایرهٔ $\mathscr{G}$ای عبارت است از همهٔ نقاط $\mathfrak{H}^s(z_1)$ که در آن z_1 ثابتی است در $\mathscr{D}$ و $\mathfrak{H}$ عنصری بیضوی از $\mathscr{G}$. پس $\mathfrak{H}$ دست‌کم یک نقطهٔ ثابت z_0 در $\mathscr{D}$ دارد. با تبدیل $\mathfrak{H}_{z_0}$ از $\mathscr{G}$ (که z_0 را بر O می‌نگارد)، این دایرهٔ $\mathscr{G}$ای بر مجموعهٔ همهٔ نقاط

$$z^* = \mathfrak{H}_0^s(z_1^*) \qquad \text{که در آن} \qquad z_1^* = \mathfrak{H}_{z_0}(z_1)$$

نگاشته می‌شود. بنابراین

$$\mathfrak{H}_{\circ} = \mathfrak{H}_{z_{\circ}} \mathfrak{H} \mathfrak{H}_{z_{\circ}}^{-1}$$

تبدیل $\mathfrak{H}_{\circ}$ دارای یک نقطهٔ ثابت o است و بنابراین یک دوران است؛ از این‌رو $|z^*| = |z_1^*|$ و

$$f(z, z_{\circ}) = f(z_1, z_{\circ}) \qquad (۵.۱۳)$$

به‌عکس، با انتخاب معینی از $z_{\circ}$ و z_1 در $\mathscr{D}$، (۴.۱۳) با

$$\mathfrak{H}_{z_{\circ}}(z) = e^{is}\mathfrak{H}_{z_{\circ}}(z_1) \qquad (s \text{ حقیقی}) \ (۱.۴.۱۳)$$

هم‌ارز می‌شود که از اینجا (با اثردادن $\mathfrak{H}_{z_{\circ}}^{-1}$ بر دو طرف این رابطه) یک نمایش پارامتری برای این منحنی به‌دست می‌آید که با (۴.۱۳) داده شده است. به‌موجب (۶.۷.۱۰) این رابطه را می‌توان به صورت $z = \mathfrak{H}^s(z_1)$ نوشت، که در آن $\mathfrak{H}$ یک تبدیل بیضوی موبیوس است. پس (۴.۱۳) معرف یک دایرهٔ $\mathscr{G}$ای مارّ بر z_1 به مرکز $\mathscr{G}$ای $z_{\circ}$ است.

از (۲.۲.۱۳) پیداست که دایره‌های $\mathscr{G}$ای به مرکز o دایره‌های معمولی به مرکز o هستند.

در حالت $\mathscr{G} = \mathscr{U}_+$، یعنی، در هندسهٔ هذلولوی، $\mathscr{D}$ درون دایرهٔ واحد است. محیط آن به مرکز o را «افق» یا «مطلق» صفحهٔ هذلولوی گویند. نقاط آن معرف نقاط بینهایت «صفحهٔ» $\mathscr{D}$ هستند. این منحنی با Γ نشان داده می‌شود.

هر قرص هذلولوی (یعنی، درون یک دایرهٔ $\mathscr{U}_+$ای) فقط متشکل از نقاط داخلی $\mathscr{D}$ است؛ از این‌رو هیچ نقطهٔ مشترکی با افق ندارد. در واقع هر نقطه از یک قرص هذلولوی از یکی از نقاط آن با یک حرکت هذلولوی (یعنی تبدیلی از $\mathscr{D}$ به خودش) به‌دست می‌آید. از قراردادن نقاط z_1 از منحنی Γ در فرمول (۱.۴.۱۳) چنین نتیجه می‌شود که هر نقطهٔ $z_{\circ}$ در $\mathscr{D}$ یک مرکز $\mathscr{G}$ایِ این دایرهٔ Γ است. این نکته وضعیت غیرعادی منحنی Γ را نشان می‌دهد. ما این ناهمخوانی را با بیان این فرض که، $\mathscr{D}$ قرص مستدیر بازی است بدون محیطش، برطرف می‌کنیم.

در حالت هندسهٔ اقلیدسی، $\mathscr{D}$ صفحهٔ همهٔ اعداد مختلط است و Γ نقطه دایرهٔ ∞. در حالت هندسهٔ بیضوی ($\mathscr{G} = \mathscr{R}$) افق Γ تهی است.

مثالها

۱. اشتراک هر دو زیرگروه پایداری ازگروه $\mathscr{G}$، فقط زیرگروه همانی است. زیرگروههای پایداری $\mathscr{R}$ در دو نقطهٔ متقاطر، یکی هستند.

۲. برهان وجود و یکتایی تابع فاصله (قضیهٔ ب) را می‌توان برای شرایطی تا حدی کلیتر، تعمیم داد. به‌نظر می‌رسد که کافی است به‌جای $\mathscr{D}$، نگارهٔ توپولوژیک آن $\tilde{\mathscr{D}}$ را در صفحهٔ مختلط بگیریم؛ یعنی فرض کنیم یک تبدیل توپولوژیک $\mathfrak{T}$، که لازم نیست عنصری از $\mathscr{G}$ باشد، وجود دارد که اگر $\mathscr{H}_\circ$ زیرگروه پایداری $\mathscr{G}$ در $z_\circ$ باشد، آنگاه $\mathfrak{T}\mathscr{H}_\circ\mathfrak{T}^{-1}$، زیرگروه پایداری $\mathfrak{T}\mathscr{G}\mathfrak{T}^{-1}$ در $\mathfrak{T}(z_\circ) = \circ$، یعنی گروه همهٔ دورانهای صفحه حول o باشد؛ در این‌صورت به‌ازای هر $\mathfrak{H}_\circ$ در $\mathscr{H}_\circ$ داریم

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}_\circ\mathfrak{T}^{-1}(z) = e^{i\alpha}z \qquad (\alpha \text{ حقیقی})$$

از این‌رو با اثردادن $\mathfrak{T}$ بر هر دو طرف (۲.۱۳) خواهیم داشت

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{H}_{Z_۲}(Z_۱)] = \mathfrak{T}\mathfrak{H}_\circ\mathfrak{T}^{-۱}\mathfrak{T}\mathfrak{H}_{z_۲}(z_۱) = e^{i\alpha}\mathfrak{T}\mathfrak{H}_{z_۲}(z_۱) \qquad (۶.۱۳)$$

بنابراین

$$f(z_۱, z_۲) = |\mathfrak{T}\mathfrak{H}_{z_۲}(z_۱)| \qquad (۱.۵.۱۳)$$

معرف ناوردای دو نقطه‌ای (تابع فاصله) گروه $\mathscr{G}$ است که در $\mathscr{D}$ عمل می‌کند. تعمیم (۱.۲.۱۳) به (۱.۵.۱۳) در مثال زیر مفید واقع خواهد شد.

۳. فرض می‌کنیم $\mathscr{G}$ گروهی باشد که عناصرش حاصلضربهای تعداد زوجی از انعکاسهای درون کلاف سهموی دوایر مارّ بر o در صفحهٔ کامل‌شده هستند. هر عنصر گروه $\mathscr{G}$ به صورت

$$Z = \frac{z}{bz + e^{i\alpha}} \qquad (۶.۱۳)\ (\alpha \text{ حقیقی})$$

ظاهر می‌شود و $\mathscr{D}$، حوزهٔ هندسهٔ $\mathscr{G}$ای، صفحهٔ کامل‌شدهٔ سوراخدار در o است (به‌طوری‌که o به $\mathscr{D}$ متعلق نیست). تبدیل (۶.۱۳) سهموی است فقط و فقط اگر $e^{i\alpha} = ۱$. به‌ازای $b = \circ$، این تبدیل معرف دورانی است حول o (که نقطه‌ای از $\mathscr{D}$ نیست) و «دورانی است حول ∞» (که نقطه‌ای از $\mathscr{D}$ است). بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش ۱۳، ج، $z_\circ$ را مساوی با بینهایت اختیار می‌کنیم و

$$\mathfrak{H}_{z_۲} = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ -\frac{۱}{z_۲} & ۱ \end{pmatrix}$$

با تبدیل

$$z^* = \mathfrak{T}(z) = \frac{۱}{z}$$

نقطهٔ ∞ را به o می‌بریم. در این صورت

$$\mathfrak{T}\mathfrak{H}_{z_۲}(z_۱) = \frac{۱}{z_۱} - \frac{۱}{z_۲}$$

و

$$f(z_۱, z_۲) = \left|\frac{۱}{z_۱} - \frac{۱}{z_۲}\right| \qquad (۱.۶.۱۳)$$

همان تابع فاصلهٔ $\mathscr{G}$ای است.

همهٔ خطهای راست $\mathscr{G}$ای به صورت خمهای زمانی، یعنی مدارهای گروههای سهموی، به‌دست می‌آیند؛ با توجه به (۳.۷.۱۰) این مدارها دوایر معمولی مارّ بر o خواهند بود. هندسهٔ $\mathscr{G}$ای اساساً با هندسهٔ اقلیدسی یکی است.

۴. متقارن بودن تابع فاصلهٔ معمولی $f(z_۱, z_۲)$ را نمی‌توان ثابت کرد. اما بنابر قضیهٔ ب می‌دانیم که تابعی مانند $F(r)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z_۲, z_۱) = F[f(z_۱, z_۲)]$. پس با نادیده‌گرفتن IV، می‌توان تابع فاصلهٔ آشکارا متقارن زیر را، وارد کرد

$$g(z_۱, z_۲) = f(z_۱, z_۲) + f(z_۲, z_۱) = G[f(z_۱, z_۲)]$$

که در آن $G(r) = r + F(r)$. همچنین تابع $g(z_۱, z_۲)$ نامنفی و برابر صفر است، فقط و فقط اگر $z_۱ = z_۲$. باید توجه کرد که $F[F(r)] = r$.

۵. بین تابعهای فاصلهٔ $d_\varepsilon(z_۱, z_۲)$، $(\varepsilon = -۱, ۱)$، که در (۲.۴.۱۲) و (۸.۱۲) و تابعهای (۱.۳.۱۳) معرفی شده‌اند رابطهٔ زیر برقرار است

$$d_\varepsilon(z_۱, z_۲) = ۱ + \varepsilon f_\varepsilon(z_۱, z_۲)^۲ \qquad (۷.۱۳)$$

۶. همنهشتی $\mathscr{G}$ای. هندسهٔ $\mathscr{G}$ای مطالعهٔ خواصی از اشکال مسطح هندسی $\mathscr{F}$ (مثلاً دستگاههای خطهای راست $\mathscr{G}$ای یا پاره‌خطهایی بر این خطها، نظیر مثلثهای $\mathscr{G}$ای؛ دایره‌های $\mathscr{G}$ای، خمهای $\mathscr{G}$ای، و جز اینها) است که اگر $\mathscr{F}$ تحت‌تأثیر هر تبدیلی از گروه $\mathscr{G}$ قرار گیرد تغیر نکنند. دو شکل $\mathscr{F}_۱$ و $\mathscr{F}_۲$ در $\mathscr{D}$ را «همنهشت نسبت به گروه $\mathscr{G}$»، یا به اختصار «همنهشت $\mathscr{G}$ای» گویند اگر یک تبدیل $\mathfrak{T}$ در $\mathscr{G}$ چنان وجود داشته باشد که $\mathscr{F}_۱$ را به $\mathscr{F}_۲$، بدل کند (به‌طوری‌که پس از این تبدیل، که در واقع فقط بر $\mathscr{F}_۱$ اثر می‌کند، هر دو شکل بر هم منطبق شوند؛ فرض بر این است که $\mathscr{F}_۲$ در صفحهٔ نگارهٔ تبدیل قرار دارد). به صورت نمادی چنین می‌نویسیم $\mathscr{F}_۱ \underset{G}{=} \mathscr{F}_۲$.

این نماد همنهشتی $\mathscr{G}$ای چهار ویژگی معمولی تساوی (یا هم‌ارزی)، متناظر با ویژگیهای اساسی مسلم هر گروه کلی را داراست:

۱. دو شکل واقع در $\mathscr{D}$ یا همنهشت $\mathscr{G}$ای هستند یا نیستند. امکان سومی وجود ندارد.

۲. هر شکل $\mathscr{F}$ با خودش همنهشت $\mathscr{G}$ای است: $\mathscr{F} \underset{G}{=} \mathscr{F}$. زیرا $\mathscr{G}$ شامل تبدیل همانی $\mathfrak{E}$ است.

۳. اگر $\mathscr{F}_2 \underset{G}{=} \mathscr{F}_1$، آنگاه $\mathscr{F}_1 \underset{G}{=} \mathscr{F}_2$. زیرا اگر تبدیل $\mathfrak{T}$ در $\mathscr{G}$، $\mathscr{F}_1$ را بر $\mathscr{F}_2$ منطبق کند، عکس آن $\mathfrak{T}^{-1}$ (که در $\mathscr{G}$ واقع است) $\mathscr{F}_2$ را بر $\mathscr{F}_1$ منطبق خواهد کرد.

۴. اگر $\mathscr{F}_2 \underset{G}{=} \mathscr{F}_1$ و $\mathscr{F}_3 \underset{G}{=} \mathscr{F}_2$، آنگاه $\mathscr{F}_3 \underset{G}{=} \mathscr{F}_1$. بنابه فرض یک تبدیل $\mathfrak{T}_1$ در $\mathscr{G}$ وجود دارد که $\mathscr{F}_1$ را به وضع $\mathscr{F}_2$ می‌برد، و یک $\mathfrak{T}_2$ وجود دارد که $\mathscr{F}_2$ را به $\mathscr{F}_3$ می‌برد؛ پس حاصلضرب $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1$ (که عنصری از $\mathscr{G}$ است) $\mathscr{F}_1$ را بر $\mathscr{F}_3$ منطبق خواهد کرد.

باید توجه داشت که چون ترکیب تبدیلها خودبه‌خود شرکتپذیر است، شرکتپذیری گروه حاصلضرب هیچ همتایی بین ویژگیهای همنهشتی $\mathscr{G}$ای ندارد.

۱۴. هندسهٔ هذلولوی

در این بخش نشان داده می‌شود که هندسهٔ هذلولوی به گونه‌ای که در بخش ۱۳، **ب** تعریف‌شده، در واقع معرف یک نظریهٔ هندسی سازگار است. اثبات این مطلب که این هندسه در دستگاه اصل موضوعی حاصل از حذف اصل موضوع توازی از اصلهای موضوع هندسهٔ اقلیدسی صدق می‌کند، ابداً دشوار نیست. بحث مفصلی از این لحاظ صورت نخواهد گرفت.

الف. خطهای راست هذلولوی و فاصله. خطهای راست $\mathscr{U}_+$ای خطهای راست هذلولوی نامیده خواهند شد. آن خطهای راستی که از o می‌گذرند پاره‌خطهای درون دایرهٔ واحد از خطوط معمولی هستند که از o می‌گذرند و بنابراین بر دایرهٔ واحد عمودند. بنابه تعریف (ر.ک. بخش ۱۳، **ب**) همهٔ خطهای هذلولوی مارّ بر یک نقطهٔ z_1 درون دایرهٔ واحد $\mathscr{D}$، با اِعمال یک حرکت هذلولوی، یعنی، عنصری مانند $\mathfrak{H}_{z_1}^{-1}$ از گروه $\mathscr{U}_+$، بر خطهای راست مارّ بر o به‌دست می‌آیند. لذا این خطها با کمانهای درون $\mathscr{D}$ از دسته بیضوی دایره‌های مارّ بر z_1 و عمود بر دایرهٔ واحد Γ، نمایش داده می‌شوند. بنابراین همهٔ خطهای هذلولوی، همهٔ کمانهای واقع در $\mathscr{D}$ از دوایر کلاف هذلولوی هستند که حرکتهای هذلولوی به صورت حاصلضرب انعکاسها از آنها به‌دست آمده‌اند (بخش ۱۲، د).

بدیهی است که این خود دلیل خوبی است برای اینکه این دوایر متعامد را خطهای راست

هذلولوی بنامیم. در واقع حرکتهای اقلیدسی حاصلضرب انعکاسهای (تقارنهای محوری) (ر.ک. مثال ۳، بخش ۲) درون کلاف (سهموی) همهٔ خطهای راست اقلیدسی است. در ذیل دلایل دیگری در تأیید این مطلب که این دوایر متعامد خطهای راست هذلولوی هستند، داده خواهد شد.

ولی در اینجا بلافاصله یک اختلاف اساسی با هندسهٔ اقلیدسی آشکار می‌شود. دو خط راست هذلولوی ممکن است در $\mathscr{D}$ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. در این صورت ممکن است که یک نقطهٔ مشترک در بینهایت، یعنی بر افق Γ داشته باشند. در این حالت آنها را متواری گویند. چنانچه این دو خط نه در نقطهٔ معمولی مشترک باشند و نه در نقطهٔ بینهایت، آنها را فراموازی خوانند. شرط اخیر در هندسهٔ اقلیدسی وجود ندارد.

هر دو خط هذلولوی یا موازی‌اند و یا موازی نیستند. اگر یک خط هذلولوی $l_۱$ با l موازی باشد، خط l با $l_۱$ موازی است، ولی اگر $l_۱$ با l موازی باشد و $l_۲$ با $l_۱$ موازی باشد، الزاماً $l_۲$ با l موازی نیست. به‌ازای هر نقطه از $\mathscr{D}$ ناواقع بر l، دو خط هذلولوی متمایز موازی با l وجود دارد و سه خط موازی‌اند اگر و فقط اگر «نقطهٔ بینهایت» آنها یکی باشد.

اکنون به‌جای تابع فاصلهٔ هذلولوی $f_{-۱}(z_۱, z_۲)$ از (۱.۳.۱۳)، $(\varepsilon = -۱)$، ناوردای دو نقطه‌ای دیگری را قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم $z_۱$ و $z_۲$ دو نقطهٔ متمایز از $\mathscr{D}$ باشند. این نقطه‌ها یک خط راست هذلولوی، یعنی، یک دایرهٔ عمود بر دایرهٔ واحد Γ را مشخص می‌کنند که در دو نقطه $\zeta_۱$، $\zeta_۲$ این دایره را قطع می‌کنند. قرار می‌گذاریم که بر این دایرهٔ عمود، چهار نقطهٔ $\zeta_۲$، $z_۱$، $z_۲$، $\zeta_۱$ به‌همین‌ترتیب قرار گرفته‌اند.

یک حرکت هذلولوی $\mathfrak{H}$ وجود دارد که $z_۱$ را بر o می‌نگارد و $z_۲$ را بر یک عدد حقیقی $x > ۰$. این حرکت خط راست هذلولوی مارّ بر $z_۱$ و $z_۲$ را بر خط مارّ بر o و x، یعنی، بر پاره‌خطی از محور حقیقی درون دایرهٔ واحد می‌نگارد. بنابراین

$$\mathfrak{H}(\zeta_۱) = +۱, \quad \mathfrak{H}(\zeta_۲) = -۱$$

همانند یک تبدیل موبیوس، $\mathfrak{H}$ نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند. بنابراین

$$(z_۱, z_۲; \zeta_۱, \zeta_۲) = (۰, x; +۱, -۱) = \frac{۱ + x}{۱ - x} > ۱ \qquad (۱.۱۴)$$

این نسبت ناهمساز به عنوان یک ناوردا باید تابعی از تابع فاصلهٔ هذلولوی $f(z_۱, z_۲)$ باشد. زیرا

$$f(z_۱, z_۲) = f(۰, x) = x \qquad (۲.۱۴)$$

و بنابراین

$$(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) = \frac{1 + f_{-1}(z_1, z_2)}{1 - f_{-1}(z_1, z_2)} \qquad (1.2.14)$$

این نسبت ناهمساز برابر یک خواهد شد اگر و فقط اگر $z_1 = z_2$.

رابطهٔ

$$f_{-1}(z_1, z_2) = \frac{(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) - 1}{(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) + 1} \qquad (2.2.14)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌ازای دو نقطهٔ z_1 و z_2 واقع در $\mathscr{D}$ فاصلهٔ هذلولوی

$$D(z_1, z_2) = \log(z_1, z_2; \zeta_1, \zeta_2) = 2\operatorname{arth} f_{-1}(z_1, z_2) \text{ [1]} \qquad (3.2.14)$$

را معرفی می‌کنیم. باید دانست که دلیل امتیاز این ناوردا بر همهٔ توابع دیگر $f_{-1}(z_1, z_2)$ این واقعیت است که این ناوردا برخی ویژگیهای معمولی فاصلهٔ اقلیدسی را داراست.

از تعریف (۳.۲.۱۴) با توجه به ویژگیهای مقدماتی لگاریتم نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همهٔ z_1 و z_2های واقع در $\mathscr{D}$ داریم

$$D(z_1, z_2) > 0 \quad \text{اگر } z_1 \neq z_2; \quad D(z_1, z_1) = 0 \qquad (4.2.14)$$

به‌علاوه

$$\text{اگر} \quad z \to \zeta \quad \text{آنگاه} \quad D(z_1, z) \to \infty$$

که در آن ζ نقطه‌ای بر افق Γ است. این رابطه قرارداد ما را که به موجب آن افق را «بینهایتِ» صفحهٔ هذلولوی گرفتیم، توجیه می‌کند.

ب. نابرابری مثلثی. اگر z_1 و z_2 دو نقطه در $\mathscr{D}$ باشند، «پاره‌خط هذلولوی» راکه با این دو نقطه بر خط راست هذلولوی مارّ بر z_1 و z_2 تعریف می‌شود با (z_1, z_2) نمایش می‌دهیم. $D(z_1, z_2)$ را طول این پاره‌خط می‌نامیم.

---

۱. تابع $\log r$ فقط برای مقدار مثبت r به‌کار می‌رود. تابع معکوس تابع تانژانت هذلولوی $u = \operatorname{th}x (= \tanh x)$ را با $\operatorname{arth}u = \operatorname{th}^{-1}u$ نمایش می‌دهیم. همین‌طور توابع هذلولوی دیگر $\operatorname{ch}x (= \cosh x)$ و $\operatorname{sh}x (= \sinh x)$ که بعداً خواهند آمد. خواص مقدماتی اینها دانسته فرض می‌شوند.

فرض می‌کنیم z_1، z_2 و z_3 سه نقطهٔ متمایز در $\mathscr{D}$ باشند. این سه نقطه یک مثلث هذلولوی، یعنی، شکلی را که ضلعهای آن سه پاره‌خط هذلولوی (z_2, z_3)، (z_3, z_1)، (z_1, z_2) هستند، مشخص می‌کند. یک قضیهٔ مقدماتی در هندسهٔ اقلیدسی بیان می‌کند که مجموع طولهای دو ضلع هر مثلث از ضلع سوم کوچکتر نیست. عین این قضیه برای هندسهٔ هذلولوی صحیح است.

قضیهٔ الف. فاصلهٔ هذلولوی به اصطلاح «نابرابری مثلثی»

$$D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \geq D(z_1, z_3) \qquad (۵.۲.۱۴)$$

صدق می‌کند، که در آن علامت تساوی فقط و فقط وقتی صدق می‌کند که هر سه نقطه بر یک خط راست هذلولوی واقع باشند و z_2 بین z_1 و z_3 قرار داشته باشد.

برهان. یک حرکت هذلولوی $\mathfrak{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H}(z_2) = 0, \qquad \mathfrak{H}(z_1) = x > 0, \qquad \mathfrak{H}(z_3) = z$$

چون حرکت فاصله‌ها را تغییر نمی‌دهد، کافی است ثابت کنیم که

$$D(x, 0) + D(0, z) \geq D(x, z)$$

و یا

$$\operatorname{arth} x + \operatorname{arth}|z| \geq \operatorname{arth}\left|\frac{x - z}{1 - xz}\right|$$

طرف چپ این نابرابری برابر است با $\operatorname{arth}\dfrac{x + |z|}{1 + x|z|}$ و چون به‌ازای $-1 < u < 1$، $\operatorname{arth} u$ یکنوا صعودی است، فقط لازم است نشان دهیم که اگر $0 < x < 1$ و $0 < |z| < 1$، آنگاه

$$\frac{x + |z|}{1 + x|z|} \geq \frac{|x - z|}{|1 - xz|} \qquad (۶.۲.۱۴)$$

در واقع

$$\left|\frac{x - z}{1 - xz}\right|^2 = \frac{1 - x(z + \bar{z}) + x^2|z|^2 - (1 - x^2)(1 - |z|^2)}{1 - x(z + \bar{z}) + x^2|z|^2}$$

$$= 1 - \frac{(1 - x^2)(1 - |z|^2)}{|1 - xz|^2}$$

و

$$\left(\frac{x+|z|}{۱+x|z|}\right)^۲ = \frac{۱+۲x|z|+x^۲|z|^۲-۱+x^۲+|z|^۲-x^۲|z|^۲}{۱+۲x|z|+x^۲|z|^۲}$$
$$= ۱ - \frac{(۱-x^۲)(۱-|z|^۲)}{(۱+x|z|)^۲}$$

بدین‌ترتیب تفاضل $\left|\frac{x-z}{۱-xz}\right|^۲ - \left(\frac{x+|z|}{۱+x|z|}\right)^۲$ چنین خواهد شد

$$(۱-x^۲)(۱-|z|^۲)\left(\frac{۱}{|۱-xz|^۲}-\frac{۱}{(۱+x|z|)^۲}\right)$$
$$= (۱-x^۲)(۱-|z|^۲)\frac{۲x(|z|+\operatorname{Re} z)}{|۱-xz|^۲(۱+x|z|)^۲} \geq ۰$$

با علامت تساوی فقط و فقط اگر $\operatorname{Re} z = -|z|$، یعنی، اگر z در قسمت منفی محور حقیقی باشد. این بدین‌معنی است که تساوی در (۵.۲.۱۴) فقط و فقط وقتی برقرار است که $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، به‌همین‌ترتیب، بر یک خط راست هذلولویِ تنها قرار داشته باشند. در این حالت معادلهٔ

$$D(z_۱, z_۲) + D(z_۲, z_۳) = D(z_۱, z_۳) \qquad (۷.۲.۱۴)$$

مبین این واقعیت است که فاصلهٔ هذلولوی جمعپذیر است.

از قضیهٔ الف ویژگی مهمی از خط راست هذلولوی که در هندسهٔ اقلیدسی هم نظیری دارد، یعنی، ویژگی طول مینیمم، نتیجه می‌شود.

فرض می‌کنیم $\mathscr{C}$ کمانی از یک منحنی پیوسته در $\mathscr{D}$ باشد: $z = z(t)(۰ \leq t \leq ۱)$. فرض می‌کنیم $z(۰) = a$ و $z(۱) = b$. یک افراز $۰ = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = ۱$ و افراز متناظرش در $\mathscr{C}$ به‌وسیلهٔ نقاط

$$z_\nu = z(t_\nu) \qquad (\nu = ۱, ۲, \cdots, n)$$

را در نظر می‌گیریم. این افرازها یک چندضلعی محاطی در کمان $\mathscr{C}$ ایجاد می‌کنند. اضلاع این چندضلعیِ Π، پاره‌خطهای $(z_{\nu-۱}, z_\nu)$ هستند. بنابه تعریف

$$L(\Pi) = \sum_{\nu=۱}^{n} D(z_{\nu-۱}, z_\nu) \qquad (۳.۱۴)$$

طول هذلولوی چندضلعی Π است و

$$L = \sup_{(\Pi)} L(\Pi) \qquad (۱.۳.۱۴)$$

را طول (احتمالاً نامتناهی) هذلولوی $\mathscr{C}$ می‌نامیم. بنابه قضیهٔ الف، چنانچه افراز Π تظریف شود $L(\Pi)$ کاهش نمی‌یابد. اگر $\mathscr{C}$ بر پاره‌خط هذلولوی (a,b) منطبق شود، به‌موجب نیمهٔ دوم قضیهٔ الف هر $L(\Pi)$ برابر $D(a,b)$ خواهد شد. از این‌رو در حالت پاره‌خط هذلولوی، تعریف جدید طول با تعریف اولی یکی خواهد شد.

ولی، اگر $\mathscr{C}$ چنان افرازی باشد که همهٔ نقاط z_ν بر پاره‌خط (a,b) واقع نباشند، آنگاه برای این افراز مسلماً $L(\Pi) > D(a,b)$. چون $L \geq L(\Pi)$، داریم

قضیهٔ ب. در میان همهٔ کمانهای $\mathscr{C}$ واقع در $\mathscr{D}$ که دو نقطهٔ a و b را به هم وصل می‌کنند، پاره‌خط هذلولوی (a,b) دارای طول هذلولوی مینیمم است.

ج. دایره‌ها و خمهای هذلولوی. برای تعریف این منحنیها به بخش ۱۳، **ب** مراجعه می‌کنیم. همهٔ اینها به‌ترتیب دایره‌ها و کمانهای دایره‌های معمولی هستند که درون $\mathscr{D}$ واقع‌اند. به‌عکس هر دایره‌ای که کاملاً درون $\mathscr{D}$ قرار داشته باشد، معرف یک دایرهٔ هذلولوی است. $z_\circ$، مرکز هذلولوی ($\mathscr{U}_+$) آن، از تقاطع دو دایره‌ای که هر دو بر $\mathfrak{C}$ و بر دایرهٔ واحد Γ عمودند به‌دست می‌آید. همهٔ نقاط z از $\mathfrak{C}$ دارای فاصلهٔ هذلولوی ثابت $D(z_\circ, z) = r$ از $z_\circ$ هستند؛ r را شعاع هذلولوی $\mathfrak{C}$ گوییم. دوایر هم‌مرکز هذلولوی، جزئی از یک دستهٔ هذلولوی را تشکیل می‌دهند که شامل Γ است و $z_\circ$ یکی از نقطه‌دایره‌های آن است.

همهٔ ابرخمهای تولیدشده بر اثر تبدیل هذلولوی خاص موبیوس $\mathfrak{H}$ [ر.ک. (۱.۱۳)]، کمانهایی از دایره‌های درون $\mathscr{D}$ هستند که به دو نقطهٔ ثابت γ_1، γ_2 از $\mathfrak{H}$، دو نقطه بر دایرهٔ واحد Γ، محدود شده‌اند. این دایره‌ها به دسته دایره‌های بیضوی مارّ بر γ_1 و γ_2 تعلق دارند. دقیقاً یکی از این ابرخمها خط راست هذلولوی است. به‌عکس هر دسته از کمانهای دایرهٔ درون $\mathscr{D}$، محدود به دو نقطهٔ γ_1، γ_2 از Γ، معرف یک دستگاه ابرخم است.

دسته دایرهٔ هذلولوی عمود بر دستهٔ ابرخمهای مارّ بر γ_1 و γ_2 (و بنابراین عمود بر Γ) دارای نقطه‌دایره‌های γ_1 و γ_2 است. پس دایره‌های این دسته (هذلولوی) خطهای راست هذلولوی هستند.

قضیهٔ ج. فرض می‌کنیم $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$ دو ابرخم مارّ بر دو نقطهٔ متمایز γ_1 و γ_2 از Γ باشند. فاصلهٔ هذلولوی بین $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$، که با خطهای راست هذلولوی متعامد اندازه گرفته می‌شود، ثابت است.

برهان. ابرخمهای $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$، هر دو با یک حرکت تنهای (هذلولوی) $\mathfrak{H}$ به‌وجود می‌آیند. فرض می‌کنیم z_1 بر $\mathfrak{h}_1$ و z_2 بر $\mathfrak{h}_2$، دو نقطه از یک خط راست هذلولوی عمود بر $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$ باشند. پس $\mathfrak{H}^s(z_1)$ و $\mathfrak{H}^s(z_2)$ به‌ترتیب باز بر یک خط راست هذلولوی تنهای عمود بر $\mathfrak{h}_1$ و $\mathfrak{h}_2$ واقع‌اند و به‌ازای هر جفت نقطه از این نوع یک مقدار پارامتر حقیقی s وجود دارد. به سبب ناوردابودن فاصله داریم،

$$D[\mathfrak{H}^s(z_1), \mathfrak{H}^s(z_2)] = D(z_1, z_2) \qquad (۴.۱۴)$$

آنچه می‌خواستیم.

حرکت هذلولوی که با تبدیل هذلولوی موبیوس $\mathfrak{H}$ (که دایره‌های دسته دایرهٔ بیضوی مارّ بر γ_1، γ_2 را ناوردا می‌گذارد) نشان داده شده است از حاصلضرب دو انعکاس میان دسته‌خطهای راست هذلولوی عمود بر دسته بیضوی ابرخمها به‌دست می‌آید.

یک خم هذلولوی یک خم زمانی است اگر تبدیل مولد $\mathfrak{H}$ سهموی باشد. همهٔ خمهای زمانی، که با معادلهٔ پارامتری $z = \mathfrak{H}^s(z_0)$، به‌ازای z_0 درون $\mathscr{D}$، نشان داده می‌شوند، دایره‌های اقلیدسی هستند که در γ، (تنها) نقطهٔ ثابت تبدیل سهموی $\mathfrak{H}$، بر دایرهٔ واحد Γ مماس داخل‌اند. پس دستگاه همهٔ خمهای زمانی مارّ بر γ، یک دسته دایرهٔ سهموی هستند.

دستهٔ متعامد یک دسته سهموی نیز دسته‌ای سهموی است، که نقطهٔ تماس مشترک آنها همان نقطهٔ γ است. این دستهٔ دوم متشکل از دایره‌هایی است که از γ می‌گذرند و شامل خطهای راستِ هذلولویِ موازیِ هذلولوی هستند. بلافاصله دیده می‌شود (ر.ک. قضیه ج) که، وقتی اندازه‌گیری با این خطوط صورت گیرد، خمهای زمانی دستهٔ اولِ مارّ بر γ، فاصلهٔ هذلولوی ثابتی از یکدیگر دارند.

حرکت (سهموی) هذلولی $\mathfrak{H}$، حاصلضرب دو انعکاس درون دستهٔ سهمویِ متعامدِ خطهای راست هذلولویِ موازیِ هذلولوی است.

د. مثلثات هذلولوی. فرض می‌کنیم z_1، z_2، z_3 رأسهای یک مثلث هذلولوی باشند؛ ضلعهای آن پاره‌خطهای هذلولوی (z_1, z_2)، (z_1, z_3)، (z_2, z_3) هستند و

$$D(z_1, z_2) = a, \qquad D(z_1, z_3) = b, \qquad D(z_2, z_3) = c$$

طولهای هذلولوی آنها. ابتدا فرض می‌کنیم این مثلث «قائم» یا قائم‌الزاویه است که رأس z_1 در آن قائمه است. همانند هندسهٔ اقلیدسی رابطهٔ میان ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه، یعنی a و b، و وتر c را پیدا می‌کنیم. پس اول رابطهٔ «فیثاغورسی هذلولوی» را پیدا می‌کنیم.

بدین‌منظور از یک حرکت هذلولوی استفاده می‌کنیم که این مثلث را در «وضعیت نرمال» طوری قرار دهد که اضلاع زاویهٔ قائمه بر محورهای حقیقی و انگاری منطبق شوند و وتر آن در ربع اول دستگاه مختصات، به‌صورتی‌که در شکل ۲۴ نمایش داده شده است قرار گیرد. پس داریم

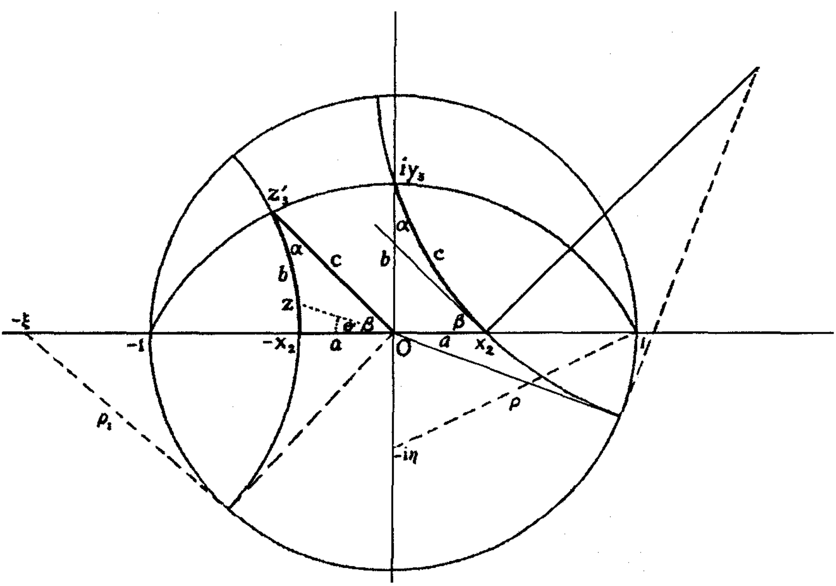
$$\left.\begin{aligned} x_۲ = \mathrm{th}\tfrac{a}{۲} > ۰ \quad \text{یا} \quad a = D(۰, x_۲) = ۲\mathrm{arth}\, x_۲ \\ y_۳ = \mathrm{th}\tfrac{b}{۲} > ۰ \quad \text{یا} \quad b = D(۰, iy_۳) = ۲\mathrm{arth}\, y_۳ \\ c = D(x_۲, iy_۳) = ۲\mathrm{arth}\left|\frac{x_۲ - iy_۳}{۱ + ix_۲y_۳}\right| \end{aligned}\right\} \qquad (۵.۱۴)$$

و از این‌رو[۱]

$$\mathrm{th}^۲\frac{c}{۲} = \frac{x_۲^۲ + y_۳^۲}{۱ + x_۲^۲y_۳^۲} = \frac{\mathrm{th}^۲(a/۲) + \mathrm{th}^۲(b/۲)}{۱ + \mathrm{th}^۲(a/۲)\mathrm{th}^۲(b/۲)} \qquad (۱.۵.۱۴)$$

برای ساده کردن این فرمول ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathrm{th}^۲\frac{x}{۲} = \frac{\mathrm{ch}x - ۱}{\mathrm{ch}x + ۱} \qquad (x = a, b, c)$$



شکل ۲۴

۱. به پیروی از عادت معمول، تابعی را که بایستی به صورت $(\mathrm{th}x)^۲$ نوشته شود با $\mathrm{th}^۲x$ نمایش می‌دهیم.

بدین‌ترتیب (۱.۵.۱۴) به

$$\frac{\text{ch}c-1}{\text{ch}c+1}=\frac{\text{ch}a\ \text{ch}b-1}{\text{ch}a\ \text{ch}b+1}$$

بدل می‌شود. و از آنجا داریم

$$\text{ch}c=\text{ch}a\ \text{ch}b \qquad (۲.۵.۱۴)$$

تبصره. این صورت از رابطهٔ «فیثاغورسی هذلولوی» نشان می‌دهد که هندسهٔ هذلولوی «موضعی ـ اقلیدسی» است. یعنی که در مورد مثلثهای قائم‌الزاویهٔ «کوچک» رابطهٔ فیثاغورسی اقلیدسی تقریباً درست است. زیرا با استفاده از سری توانی معروف $\text{ch}x$، یعنی، $\text{ch}x=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$ و با درنظرگرفتن تنها جمله‌های درجه دوم، از (۲.۵.۱۴) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای مقادیر کوچک a، b، c رابطهٔ $c^2=a^2+b^2$ تقریباً درست است.

حال روابطی را که میان ضلعها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ (z_1,z_2,z_3) وجود دارند پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم β زاویه رأس z_2 باشد و α زاویهٔ رأس z_3. برای این مثلث وضعیت نرمال دیگری اختیار می‌کنیم که مثلاً z_2 (به‌طور هذلولوی) به مبدأ برده شود و ضلع aی زاویهٔ قائمه بر قسمت منفی محور حقیقی منطبق باشد. وضع جدید این مثلث (ر.ک. شکل ۲۴) از وضع قبلی آن با ساختمان هندسی زیر به‌دست می‌آید. از ۱+ و ۱− ابرخمی رسم می‌کنیم که از محور حقیقی به فاصلهٔ هذلولوی ثابت b باشد؛ فرض می‌کنیم ρ شعاع اقلیدسی آن باشد و $-i\eta$ مرکز آن؛ پس

$$\eta^2=\rho^2-1,\qquad \eta=\rho-y_3$$

$$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y_3}-y_3\right)>0 \qquad (۳.۵.۱۴)$$

بدین‌ترتیب معادلهٔ این ابرخم عبارت است از

$$x^2+(y+\eta)^2=\rho^2$$

یا

$$z\bar{z}+2\eta\,\text{Im}\,z=\rho^2-\eta^2=1 \qquad (۴.۵.۱۴)$$

اما حالا وتر مثلث ما بر خط راست هذلولوی (= خط معمولی) مارّ بر o قرارگرفته است

$$z=re^{i\beta'} \qquad (\beta'=\pi-\beta,\ 0\le r\le r_3) \quad (۱.۴.۵.۱۴)$$

که این خط ابرخم را در رأس $z'_{۳}$ی مثلث ما در وضعیت جدید تلاقی می‌کند، $r_{۳} = |z'_{۳}|$. پس به‌موجب (۴.۵.۱۴)،

$$r_{۳}^{۲} + ۲\eta r_{۳} \sin\beta = ۱$$

از اینجا به‌موجب (۳.۵.۱۴) داریم

$$\frac{y_{۳}}{۱ - y_{۳}^{۲}} = \frac{r_{۳}}{۱ - r_{۳}^{۲}} \sin\beta \qquad (۲.۴.۵.۱۴)$$

طبق ساختمان این مثلث در وضعیت جدید، داریم (ر.ک. شکل ۲۴)

$$x_{۲} = \mathrm{th}\frac{a}{۲}, \quad r_{۳} = \mathrm{th}\frac{c}{۲}, \quad \left|\frac{z'_{۳} + x_{۲}}{۱ + x_{۲} z'_{۳}}\right| = \mathrm{th}\frac{b}{۲} = y_{۳} \qquad (۵.۵.۱۴)$$

از این‌رو (۲.۴.۵.۱۴) به‌صورت رابطهٔ $\sin\beta$ و تانژانتهای هذلولوی در می‌آید؛ با نوشتن رابطهٔ اخیر بر حسب ch و sh خواهیم داشت

$$\mathrm{ch}\frac{b}{۲}\mathrm{sh}\frac{b}{۲} = \mathrm{ch}\frac{c}{۲}\mathrm{sh}\frac{c}{۲} \sin\beta$$

یا

$$\mathrm{sh}b = \mathrm{sh}c \ \sin\beta, \quad \mathrm{sh}a = \mathrm{sh}c \ \sin\alpha \qquad (۶.۵.۱۴)$$

که در آن فرمول دوم نتیجهٔ آشکاری است از فرمول اولی.

به روشی مشابه، با محاسبهٔ نقطهٔ $z'_{۳}$، فصل مشترک خط (۱.۴.۵.۱۴) با دایرهٔ عمودی که از نقطهٔ $-x_{۲}$ می‌گذرد، (باز به دومین وضعیت نرمال مثلث مراجعه کنید) رابطه‌ای بین a،c، β (یا b، c، α) به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $-\xi$ مرکز این دایرهٔ عمود باشد؛ خواهیم داشت

$$\xi = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x_{۲}} + x_{۲}\right)$$

و برای $r_{۳}$ شرط زیر برقرار است

$$r_{۳}^{۲} + ۲\xi r_{۳} \cos\beta' = r_{۳}^{۲} - ۲\xi r_{۳} \cos\beta = -۱$$

که این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{x_{۲}^{۲} + ۱}{x_{۲}} \cos\beta = \frac{r_{۳}^{۲} + ۱}{r_{۳}}$$

بنابراین به‌موجب (۵.۵.۱۴) داریم

$$\text{th}c\ \cos\beta = \text{th}a, \quad \text{th}c\ \cos\alpha = \text{th}b \qquad (۷.۵.۱۴)$$

اکنون برای مثلثات یک مثلث هذلولوی دلخواه پایه‌ای در دست داریم. همانطورکه در شکل ۲۵ مشخص شده است فرض می‌کنیم این مثلث در یک وضعیت نرمال باشد. ضلع a بر محور حقیقی قرار دارد و ارتفاع وارد بر آن $h = h_a$، بر محور انگاری. فرض می‌کنیم پای این ارتفاع ضلع a را به دو قطعهٔ هذلولوی $a_۱$ و $a_۲$ (و نیز طولهای هذلولوی) قسمت کرده است. دراین‌صورت

$$a_۱ = \begin{cases} a - a_۲ & \text{اگر ارتفاع درون مثلث بیفتد (شکل ۲۵الف)} \\ a + a_۲ & \text{اگر ارتفاع بیرون مثلث بیفتد (شکل ۲۵ب)} \end{cases}$$

با توجه به (۷.۵.۱۴) و (۲.۵.۱۴) داریم

$$\text{th}a_۱ = \pm\text{th}b\ \cos\gamma, \quad \text{ch}h = \frac{\text{ch}b}{\text{ch}a_۱}$$

و بنابراین

$$\text{ch}c = \text{ch}a_۲\ \text{ch}h = \text{ch}(a \mp a_۱)\text{ch}h = (\text{ch}a \mp \text{sh}a\ \text{th}a_۱)\text{ch}b$$

پس

$$\text{ch}c = \text{ch}a\ \text{ch}b - \text{sh}a\ \text{sh}b\ \cos\gamma \qquad (۸.۵.۱۴)$$

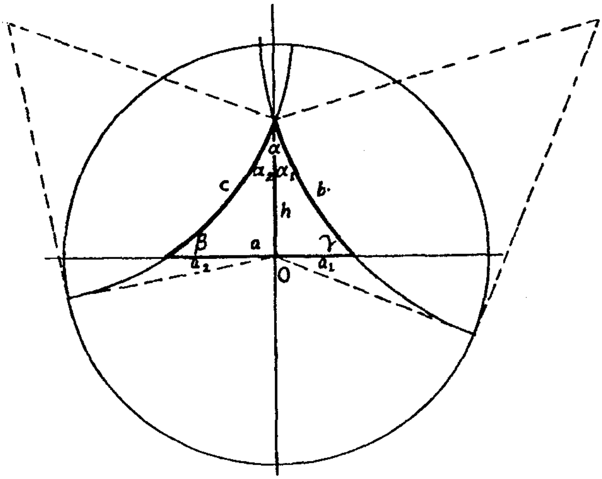
این دستور شبیه دستور «قضیهٔ کسینوسها» در مثلثات مقدماتی است. علاوه بر این بنا به (۶.۵.۱۴) داریم

$$\text{sh}h = \text{sh}b\ \sin\gamma = \text{sh}c\ \sin\beta$$

لذا

$$\frac{\text{sh}a}{\sin\alpha} = \frac{\text{sh}b}{\sin\beta} = \frac{\text{sh}c}{\sin\gamma} \qquad (۹.۵.۱۴)$$

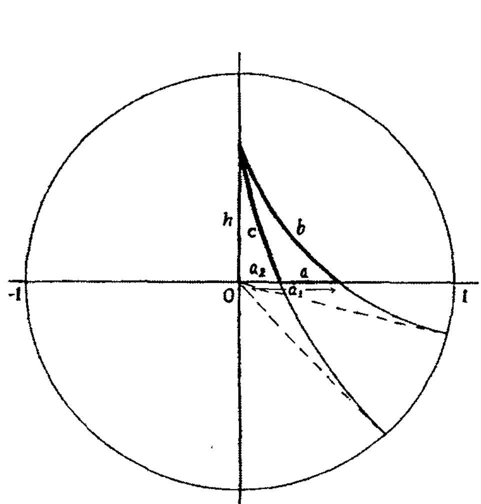
که این قضیه به قضیهٔ سینوسها معروف است.



شکل ۲۵الف

ه. کاربردها. فرمولهای مثلثاتی بخش ۱۴، د، به ما امکان می‌دهد که اطلاعات مهمی را به‌دست آوریم که تفاوت اساسی بین هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی را نشان می‌دهند.

به‌موجب قضیهٔ معروف هندسهٔ اقلیدسی، مجموع سه زاویهٔ هر مثلث (اقلیدسی) برابر π است. این قضیه دیگر در هندسهٔ هذلولوی درست نیست.



شکل۲۵ب

قضیهٔ د. مجموع زاویه‌های هر مثلث هذلولوی کمتر از π است.

برهان. واضح است که کافی است، قضیه را برای مثلث قائم‌الزاویه ثابت کنیم. پس به‌موجب (۷.۵.۱۴) و (۶.۵.۱۴)،

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{th}b}{\mathrm{th}c}\frac{\mathrm{th}a}{\mathrm{th}c}-\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}c}\frac{\mathrm{sh}b}{\mathrm{sh}c}=\frac{\mathrm{sh}a\ \mathrm{sh}b}{\mathrm{sh}^{۲}c}(\mathrm{ch}c-۱)$$
$$=\sin\alpha\sin\beta(\mathrm{ch}c-۱)>۰$$

بنابراین

$$\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$$

که چون α و β مثبت فرض شده‌اند قضیه ثابت می‌شود.

با سه طول مفروض a، b، c (اقلیدسی یا هذلولوی) که در نابرابری مثلثی صدق کنند، می‌توان مثلثی (اقلیدسی یا هذلولوی) ساخت که طول ضلعهایش درست همین طولها باشند، و هر مثلثی با همین اندازه‌ها با مثلث اول (به‌ترتیب به معنای اقلیدسی یا هذلولوی ($\mathscr{U}_+$ همنهشت)) همنهشت است. ولی در هندسهٔ اقلیدسی سه زاویهٔ α، β، γ که مجموع آنها برابر π باشد، برای تعیین مثلثی یکتا که دارای زوایای α، β، γ باشد کافی نیستند، به تعداد نامتناهی مثلثهای ناهمنهشت وجود دارند که زاویه‌های آنها این اندازه‌ها را با همان ترتیب داشته باشند. همهٔ این مثلثها را با هم متشابه گویند. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در هندسهٔ هذلولوی مشابهت وجود ندارد.

قضیهٔ ه. اگر α، β، γ سه زاویه‌ای باشند که در شرط $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ صدق کنند، آنگاه یک مثلث هذلولوی با این زاویه‌ها وجود دارد، و هر دو مثلثی با شرط فوق هذلولوی[۱] همنهشت‌اند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\gamma=\pi/۲$؛ پس $\alpha+\beta<\pi/۲$؛ استفاده از نماد استاندارد شکل ۲۴، به‌موجب (۶.۵.۱۴) و (۷.۵.۱۴) رابطهٔ زیر را داریم

$$\mathrm{ch}a=\mathrm{ch}c\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\qquad \text{یا}\qquad \frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{th}a}=\frac{\mathrm{sh}c}{\mathrm{th}c}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

از این‌رو به‌موجب (۲.۵.۱۴) داریم

$$\mathrm{ch}b=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\qquad \mathrm{ch}a=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta},\qquad \mathrm{ch}c=\cot\alpha\cot\beta \qquad (۶.۱۴)$$

عبارتهای طرف راست این رابطه‌ها بزرگتر از یک هستند؛ زیرا، بنابه فرض $\alpha<(\pi/۲)-\beta$ و لذا $\cos\alpha>\cos[(\pi/۲)-\beta]=\sin\beta$ و همچنین $\cos\beta>\sin\alpha$. پس اضلاع یک مثلث

۱. این یعنی «$\mathscr{U}_+$همنهشت» (ر.ک. مثال ۶، بخش ۱۳).

قائم‌الزاویه با دو زاویه α و β به‌طور یکتا مشخص می‌شوند. زیرا (۲.۵.۱۴) برقرار است، و بنابراین با توجه به (۸.۵.۱۴) داریم $\gamma = \pi/۲$. پس مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که a و b اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن هستند با وتر c، α و β زاویه‌های آن هستند.

اکنون فرض می‌کنیم α، β و γ سه زاویهٔ معینی باشند که در شرط $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ صدق می‌کنند. α را منفرجه یا قائمه می‌گیریم ولی β و γ باید حاده باشند. فرض می‌کنیم $\alpha = \alpha_۱ + \alpha_۲$ (ر.ک. شکل ۲۵الف). می‌خواهیم $\alpha_۱$ را طوری تعیین کنیم که دو مثلث قائم‌الزاویه، یکی با زوایای γ و $\alpha_۱$، $\pi/۲$، و دیگری با زاویه‌های β، $\alpha_۲$ و $\pi/۲$، در یک ضلع از زاویه قائمه مشترک باشند که ارتفاع مثلثی است با زاویه‌های α، β، γ و $h_a = h$. بنابر (۶.۱۴) داریم

$$\mathrm{ch}h = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha_۱} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha_۲} \qquad (۱.۶.۱۴)$$

تساوی این دو کسر یعنی

$$\frac{\sin\alpha_۲}{\sin\alpha_۱} = \sin\alpha\cot\alpha_۱ - \cos\alpha = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \qquad (۲.۶.۱۴)$$

بدین‌ترتیب $\cot\alpha_۱$ به‌دست می‌آید، و در نتیجه $۱/\sin^۲\alpha_۱$ بر حسب α، β و γ معلوم می‌شود.

اما برای وجود یک h حقیقی لازم و کافی است که $\mathrm{ch}h > ۱$. فرض می‌کنیم یک h وجود دارد که در این شرط صدق می‌کند، داریم

$$\alpha_۱ + \gamma < \frac{\pi}{۲} \qquad (۳.۶.۱۴)$$

که بنابر (۲.۶.۱۴) هم‌ارز است با

$$\tan\gamma < \cot\alpha_۱ = \frac{۱}{\sin\alpha}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \cos\alpha\right)$$

یا

$$\cos(\alpha+\gamma) + \cos\beta > ۰ \qquad (۴.۶.۱۴)$$

اما بنابه فرض $\pi/۲ > \beta > ۰$، و بنابراین $\cos\beta > ۰$. همچنین اگر $\alpha+\gamma \le \pi/۲$، نامساوی (۴.۶.۱۴) برقرار است. اگر $\alpha+\gamma > \pi/۲$، آنگاه بنابر (۴.۶.۱۴) داریم

$$\cos\beta > -\cos(\alpha+\gamma) = \cos[\pi - (\alpha+\gamma)]$$

که ایجاب می‌کند $\beta < \pi - \alpha - \gamma$ و به‌عکس. پس (۳.۶.۱۴) در تمام حالات ثابت شده است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\cot \alpha_1 > \tan \gamma$ یا

$$\sin^2 \alpha_1 = \frac{1}{1+\cot^2 \alpha_1} < \frac{1}{1+\tan^2 \gamma} = \cos^2 \gamma$$

از این‌رو (۱.۶.۱۴) می‌تواند به‌ازای یک مقدار حقیقی h برقرار باشد.

سرانجام بنابر (۶.۱۴)

$$\mathrm{ch} a_1 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin \gamma}, \qquad \mathrm{ch} a_2 = \frac{\cos \alpha_2}{\sin \beta}, \qquad a = a_1 + a_2$$

و با توجه به (۲.۵.۱۴) و (۱.۶.۱۴)

$$\mathrm{ch}b = \mathrm{ch}a_1 \ \mathrm{ch}h = \mathrm{ch}a_1 \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha_1} = \cot\alpha_1 \cot\gamma \tag{۵.۶.۱۴}$$

$$\mathrm{ch}c = \mathrm{ch}a_2 \ \mathrm{ch}h = \mathrm{ch}a_2 \frac{\cos\beta}{\sin\alpha_2} = \cot\alpha_2 \cot\beta$$

لذا این مثلث با زاویه‌های از پیش‌تعیین‌شده وجود دارد و تا حد همنهشتی یکتاست.

با نوشتن (۵.۶.۱۴) به صورت

$$\mathrm{ch}b \ \sin\gamma \sin\alpha = \cot\alpha_1 \cos\gamma \sin\alpha$$

و استفاده از معادلهٔ دوم (۲.۶.۱۴) عبارت طرف راست به صورت زیر در می‌آید

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma\sin\alpha}\right)\cos\gamma\sin\alpha = \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta$$

بنابراین دوگان قضیهٔ کسینوس [ر.ک. (۸.۵.۱۴)] به‌دست می‌آید

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \ \mathrm{ch}b \tag{۶.۶.۱۴}$$

مثالها

۱. در بحث قبلی درون دایرهٔ واحد صفحهٔ هذلولوی گرفته شده است. درون هر دایرهٔ دیگر هم برای این منظور مناسب خواهد بود، به‌ویژه می‌توان یک خط راست مثلاً، محور حقیقی، را افق انتخاب کرد. دراین‌صورت صفحهٔ هذلولوی $\mathscr{D}$ نیم‌صفحهٔ بالایی $\mathrm{Im}\, z > 0$ خواهد بود. گروه

حرکتها در این هندسهٔ $\mathscr{G}$ای، گروه همهٔ تبدیلهای حقیقی موبیوس (ر.ک. بخش ۸، د) با دترمینان مثبت خواهد شد. در این حالت خطهای راست هذلولوی نیمدایره‌های عمود بر محور حقیقی هستند. تابع فاصلهٔ $f(z_1, z_2)$ را می‌توان به روش مثال ۳، بخش ۱۳، مشخص ساخت. z_0 را مساوی i می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\mathfrak{T}$ تبدیل موبیوسی باشد که نیم‌صفحهٔ بالایی را بر درون دایرهٔ واحد می‌نگارد به‌طوری‌که $\mathfrak{T}(i) = 0$؛ فرض می‌کنیم $\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ و اگر $z_2 = x_2 + iy_2$، $\mathfrak{H}_{z_2}(z) = (z - x_2)/y_2$. پس

$$f(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2}\right| = (z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2)^{\frac{1}{2}}$$

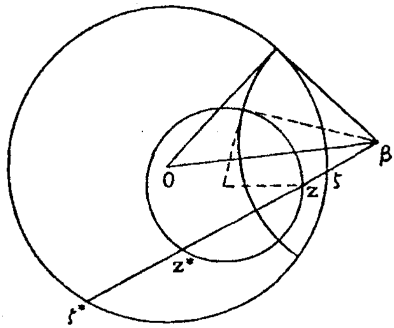
برای همهٔ کاربردهای هندسی این «الگوی نیمصفحه» از هندسهٔ هذلولوی کاملاً با «الگوی دایرهٔ واحد»[1] هم‌ارز است. به علت کاربردهای آن در نظریهٔ توابع تحلیلی، ما این دومی را ترجیح می‌دهیم.

۲. برای هندسهٔ هذلولوی، الگوهایی دیگر، یعنی، نمایشهایی با عناصر هندسهٔ اقلیدسی، وجود دارند. هندسهٔ هذلولوی درون دایرهٔ واحد را می‌توان، به‌وسیلهٔ تصویر گنجنگاشتی، بر نیمکرهٔ بالایی، منتقل کرد. در این‌صورت خط استوا نقش افق را خواهد داشت و خطهای راست هذلولوی با نیمدایره‌های کروی عمود بر خط استوا نمایش داده می‌شوند. صفحات آنها بر صفحهٔ استوا عمودند. یک نمایش جبری از گروه حرکت در مثال ۴، بخش ۱۲ مشخص شده است.

با یک تصویر دیگر، یعنی یک تصویر منظری از نقطهٔ بینهایتِ محور ζها (به عنوان مرکز تصویر) می‌توانیم به درون دایرهٔ واحد برگردیم. به آسانی دیده می‌شود که با این تصویر موازی، نیمدایره‌های کروی عمود بر خط استوا بر پاره‌خطهای درون دایرهٔ واحد نگاشته می‌شوند. بدین‌ترتیب به الگوی دیگری از هندسهٔ هذلولوی می‌رسیم که در آن خطهای راست با وترهای دایرهٔ واحد نشان داده می‌شوند. در این الگو، گروه حرکتهای هذلولوی به‌وسیلهٔ گروه همهٔ آن تبدیلهای تصویری در صفحه که دایرهٔ واحد را ناوردا می‌گذارند نمایش داده می‌شوند. این تبدیلها به‌وسیلهٔ (۵.۷.۱۲) داده شده‌اند.

چون نگاشت تصویری موازی نیمکرهٔ بالایی به درون دایرهٔ واحد (جز در قطب شمال) همدیس نیست روشن است که در حالت کلی اندازهٔ زاویه‌های هذلولوی در الگوی دومِ دایرهٔ واحد، با اندازهٔ زاویه‌های متناظرِ اقلیدسی اختلاف خواهد داشت. برای شرح و تفسیر هندسهٔ هذلولوی بر اساس این الگو می‌توان به کتاب بالدوس (Baldus) [۱] مراجعه نمود.

[1] الگوی نیم‌صفحه اغلب الگوی پوانکاره (Poincaré) نامیده می‌شود.



شکل۲۶

در همهٔ مثالهای بعدی، همان‌گونه که در متن بخش ۱۴، غیر از مثال ۵، بخش ۱۵، عمل شده است، از اصطلاح «الگوی همدیس دایرهٔ واحد» (که الگوی دایرهٔ پوانکاره نیز نامیده می‌شود) استفاده کرده‌ایم.

۳. هر انعکاس نسبت به یک دایرهٔ قائم در $\mathscr{D}$، یعنی، یک خط راست هذلولوی، یک تقارن هذلولوی نامیده خواهد شد. ویژگیهای عمدهٔ این تقارنها چنین هستند: یک تقارن هذلولوی، درون دایرهٔ واحد را به خودش بدل می‌کند و دایرهٔ واحد را (به‌عنوان یک منحنی) ناوردا می‌گذارد. به‌ازای هر نقطهٔ z درون دایرهٔ واحد ($|z| < ۱$) قرینهٔ هذلولوی آن، z^*، هم درون دایرهٔ واحد قرار دارد (ر.ک. شکل ۲۶). یک تقارن هذلولوی خطهای راست هذلولوی را بر خطهای راست هذلولوی می‌نگارد. فاصلهٔ هذلولوی نسبت به تقارنهای هذلولوی ناورداست.

۴. برای یک پاره‌خط مفروض هذلولوی $(z_۱, z_۲)$ در $\mathscr{D}$، پاره‌خط همنهشت آن را به‌وسیلهٔ ترسیم هندسی در وضعیت نرمال پیدا کنید، یعنی، به‌طوری‌که o یک سر آن شود و سر دیگر بر قسمت مثبت محور حقیقی قرار گیرد. همین‌طور به‌ازای یک مثلث مفروض، همنهشت آن را در وضعیت نرمال بیابید (شکل ۲۴).

۵. یکتایی فاصلهٔ هذلولوی $D(z_۱, z_۲)$ را، تا حد یک عامل مثبت، ثابت کنید اگر خواسته شده باشد که

۱. در حرکت هذلولوی ناوردا باشد.

۲. نامنفی باشد.

۳. بر هر خط راست هذلولوی جمع‌پذیر باشد [ر.ک. (۷.۲.۱۴)]

ناوردایی ایجاب می‌کند که $D(z_1, z_2) = \phi[f_{-1}(z_1, z_2)]$، که در آن $\phi(u)$ به‌ازای $1 > u \geq 0$ یک تابع حقیقی نامنفی است. جمع‌پذیریِ D ایجاب می‌کند که برای $\phi(u)$ معادلهٔ تابعی زیر را داشته باشیم

$$\phi\left(\frac{x_1 - x_2}{1 - x_1 x_2}\right) = \phi(x_1) - \phi(x_2) \qquad (x_1 \geq x_2)$$

از اینجا روشن است که $\phi(u)$ یکنوا و $\phi(0) = 0$. این تابع پیوسته هم هست. زیرا، فرض می‌کنیم $\lim_{u \to +0} \phi(u) = \alpha$؛ در این صورت $\alpha \geq 0$. از این معادلهٔ تابعی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x_1 \to x_2 + 0} \phi(x_1) = \phi(x_2) + \alpha$$

و چون یک تابع یکنوا فقط می‌تواند تعدادی شمارا ناپیوستگی داشته باشد، $\alpha = 0$، یعنی، $\phi(u)$ از راست پیوسته است. معادلهٔ تابعی ایجاب می‌کند که از چپ هم پیوسته باشد و بنابراین پیوسته است.

اما یکی از جوابهای این معادله معلوم است: $\phi(x) = \mathrm{arth} x$. فرض می‌کنیم $\psi(x)$ جواب دیگری باشد؛ پس

$$\psi^{-1}[\psi(x_1) - \psi(x_2)] = \phi^{-1}[\phi(x_1) - \phi(x_2)]$$

از این‌رو با گذاردن $\phi(x_i) = X_i$ و $\psi[\phi^{-1}(X)] = F(X)$ برای $F(X)$ معادلهٔ تابعی معروف

$$F(X_1) - F(X_2) = F(X_1 - X_2)$$

را خواهیم داشت که هر جواب پیوستهٔ آن با $F(X) = cX$ داده می‌شود، که در آن c ثابت است. پس $\psi(x) = c\phi(x)$. (ر.ک. مثال ۵، بخش ۱۵)

۶. زاویهٔ توازی. در مثلث قائم‌الزاویه با رأسهای o و x_2 و iy_3 [ر.ک. شکل ۲۴]، فرض می‌کنیم x_2 به $+1$ میل کند، یعنی، (به‌طور هذلولوی) به یکی از نقاط بینهایت خط راست هذلولوی a، ضلع زاویهٔ قائمه، میل کند. این مثلث به مثلث تباهیده‌ای به نام «مثلث ساده‌ـمجانبی» بدل می‌شود که در آن زاویهٔ $\beta = 0$، و وتر cِ آن موازی با a، ضلع زاویهٔ قائمه است. ملاحظه می‌کنیم که زاویهٔ αی این مثلث ساده‌ـمجانبی، برخلاف هندسهٔ اقلیدسی که یک خط موازی با خط مفروض l با خط عمود بر l زاویهٔ قائمه می‌سازد، α یک زاویهٔ قائمه نخواهد بود. در هندسهٔ هذلولوی دو خط

موازی اصلاً عمود مشترکی ندارند. در جریانِ تباهیدگیِ مثلثِ ما، $a \to \infty$، همین‌طور $c \to \infty$، و بنابراین $\mathrm{th}c \to ۱$؛ پس به‌موجب (۷.۵.۱۴) زاویهٔ α به یک زاویهٔ حدی α^* نزدیک می‌شود به‌طوری‌که

$$\cos \alpha^* = \mathrm{th} b$$

بنابراین $\alpha^* < \pi/۲$ و α^* کوچکتر خواهد شد، هرچه b را بزرگتر اختیار کنیم. α^* را زاویهٔ توازی می‌نامند.

۷. همهٔ خطهای راست هذلولوی مارّ بر یک نقطهٔ $z_۰$ از $\mathscr{D}$ که با یک خط راست هذلولوی داده‌شدهٔ l (که از $z_۰$ نمی‌گذرد) فراموازی باشند، درون زاویهٔ خارجی حاصل از دو خط هذلولوی موازی با l مارّ بر $z_۰$ قرار دارند. نشان دهید که هر دو خط نامتقاطع فراموازی با l یک خط عمود مشترک هذلولوی دارند.

۸. یک مثلث مجانبی بسازید که مجموع زاویه‌هایش صفر باشد. نشان دهید که برای دو خط هذلولوی ناموازی چهار موازی هذلولوی مشترک وجود دارد.

۹. نقاطی از صفحهٔ کامل‌شده را که بیرون دایرهٔ واحد قرار دارند «نقاط فرانامتناهیِ» هندسهٔ هذلولوی گویند. با اینکه در این هندسه این نقاط عناصر بیگانه‌اند، اغلب، مثلاً در تعریف یک تابع فاصله، چنانکه در (۲.۴.۱۲)، (ر.ک. مثال ۵، بخش ۱۳) نشان داده شده، به صورت مفیدی به‌کار گرفته می‌شوند.

۱۰. شعاع اقلیدسی دایره‌ای به مرکز o که با یک دایرهٔ هذلولوی به شعاع هذلولوی r، همنهشت هذلولوی باشد برابر است با $\rho = \mathrm{th}\, \frac{۱}{۲} r$.

۱۱. مساحت در هندسهٔ هذلولوی. فرض می‌کنیم $\mathscr{A}$ ناحیهٔ بسته‌ای در $\mathscr{D}$، محصور به یک یا چند منحنی ساده باشد. عدد نامنفی $m(\mathscr{A})$ به صورت تابعی از $\mathscr{A}$، جمع‌پذیر است. (i) یعنی، اگر $\mathscr{A}$ متشکل از دو قسمت نامتداخل $\mathscr{A}_۱$ و $\mathscr{A}_۲$ باشد، آنگاه $m(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A}_۱) + m(\mathscr{A}_۲)$. (ii) این مساحت ناورداست؛ یعنی، اگر $\tilde{\mathscr{A}}$ نگارهٔ $\mathscr{A}$ در یک حرکت یا تقارن هذلولوی (ر.ک. مثال ۳) باشد آنگاه $m(\tilde{\mathscr{A}}) = m(\mathscr{A})$.

$m(\mathscr{A})$ را با یک انتگرال دوگانه که در ناحیهٔ $\mathscr{A}$ گرفته می‌شود، و لذا جمع‌پذیری را تضمین می‌کند، تعریف می‌کنیم. برای بیان شرط ناوردایی از فرمول انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم.[۱] بدین‌منظور نیازمند دترمینان تابعی (ژاکوبی) یک تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z) = (az+b)/(cz+d)$

۱. ر.ک. Courant [۱] جلد II ص ۲۵۳.

هستیم. با قراردادن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ این دترمینان چنین خواهد شد

$$\Delta(z) = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \left|\frac{d\mathfrak{H}(z)}{dz}\right|^{۲} = \left|\frac{ad-bc}{(cz+d)^{۲}}\right|^{۲} \quad (۷.۱۴)$$ [۱]

اگر $Z = \mathfrak{H}_{z_۱}(z) = (z - z_۱)/(۱ - \bar{z}_۱ z)$، این دترمینان چنین خواهد شد.

$$\Delta_{z_۱}(z) = \frac{(۱ - |z_۱|^{۲})^{۲}}{|۱ - \bar{z}_۱ z|^{۴}} \quad (۱.۷.۱۴)$$

اکنون فرض می‌کنیم $\psi(z)$ تابعی حقیقی، تعریف‌شده در درون دایرهٔ واحد، مثبت، پیوسته و نسبت به دو متغیر حقیقی x و y دیفرانسیلپذیر باشد. عبارت

$$m(\mathscr{A}) = \iint_{\mathscr{A}} \psi(z)dx\ dy \quad (۲.۷.۱۴)$$

را در نظر می‌گیریم. ناوردایی نسبت به حرکت هذلولوی $Z = \mathfrak{H}_{z_۱}(z)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$m(\tilde{\mathscr{A}}) = \iint_{\tilde{\mathscr{A}}} \psi(Z)dX\ dY = \iint_{\mathscr{A}} \psi[\mathfrak{H}_{z_۱}(z)]\Delta_{z_۱}(z)dx\ dy = \iint_{\mathscr{A}} \psi(z)dx\ dy$$

با فشردن $\mathscr{A}$ به یک نقطهٔ منفرد در $\mathscr{D}$ و استفاده از فرایند «فضای مشتقگیری»[۲] بر پایهٔ قضیهٔ مقدار میانگین انتگرالهای دوگانه، از شرط انتگرال معادلهٔ تابعی زیر بر حسب تابع مجهول $\psi(z)$ نتیجه می‌شود

$$\psi[\mathfrak{H}_{z_۱}(z)] \cdot \Delta_{z_۱}(z) = \psi(z) \quad (۳.۷.۱۴)$$

فرض می‌کنیم x و $x_۱$ حقیقی‌اند. $x_۱$ را پارامتر خانوادهٔ حرکتهای هذلولوی

$$X = \frac{x - x_۱}{۱ - x_۱ x}$$

بر محور حقیقی می‌گیریم که برای آن شرط ناوردای (۳.۷.۱۴) چنین می‌شود

۱. این فرمول نتیجه مستقیم معادلهٔ دیفرانسیل کوشی-ریمن است که در آن X و Y قسمتهای حقیقی و انگاری تابع مشتقپذیر در متغیر مختلط z است. ر.ک. Courant [۱] جلد II ص ۵۳۲.

۲. ر.ک. Courant [۱] جلد II ص ۲۳۴.

$$\psi(X)(1 - x_1^2) = (1 - x_1 x)^4 \psi(x)$$

این رابطه اتحادی است بر حسب پارامتر x_1 با مشتقگیری از آن نسبت به x_1 و سپس قراردادن $x_1 = 0$، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی خطی زیر برای تابع (x) به‌دست می‌آید

$$(x^2 - 1)\psi'(x) = -4x\psi(x)$$

بنابراین داریم

$$\psi(x) = \frac{k}{(1 - x^2)^2} \qquad (۴.۷.۱۴)$$

که k مقدار ثابت مثبت حقیقی دلخواه است، و

$$\psi(z) = \psi(|z|) = \frac{k}{(1 - |z|^2)^2} \qquad (۵.۷.۱۴)$$

پس به‌موجب (۲.۷.۱۴) داریم

$$m(\mathscr{A}) = k\iint_{\mathscr{A}} \frac{dx\ dy}{(1 - |z|^2)^2} = k\iint_{\mathscr{A}} \frac{\rho\ d\rho\ d\theta}{(1 - \rho^2)^2} \qquad (۶.۷.۱۴)$$

که با استفاده از مختصات قطبی ρ و θ در انتگرال دوم حاصل شده است.

اگر $\mathscr{A}$ قرص مستدیری در $\mathscr{D}$ باشد، و r شعاع هذلولوی آن، ρ_0 شعاع اقلیدسی قرص مستدیر هذلولوی‌ـ‌همنهشت آن و o مرکز این قرص، آنگاه انتگرال دوم (۶.۷.۱۴) را می‌توان به آسانی محاسبه نمود

$$m(\mathscr{A}) = 2\pi k\int_0^{\rho_0} \frac{\rho\ d\rho}{(1 - \rho^2)^2} = \pi k\frac{\rho_0^2}{1 - \rho_0^2} = \pi k\ \mathrm{sh}^2\frac{1}{2}r \qquad \text{(ر.ک. مثال ۱۴)}$$

برای اینکه این فرمول به‌ازای مقادیر کوچک شعاع هذلولوی r تقریباً با فرمول اقلیدسی متناظر با مساحت دایره یکی باشد، باید

$$k = 4 \qquad (۷.۷.۱۴)$$

گرفته شود [ر.ک. تبصرهٔ ذیل فرمول (۲.۵.۱۴)].

۱۲. مساحت مثلث هذلولوی. فرض می‌کنیم $\mathscr{A}$ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وضعیت نرمال دوم نشان داده شده در شکل ۲۴، و زاویهٔ β در رأس o باشد. فرض می‌کنیم z نقطه‌ای بر ضلع bی مثلث باشد

$$z = \rho(\theta)e^{i\theta} \qquad (\pi - \beta \leq \theta \leq \pi)$$

و

$$\rho = \operatorname{th}\frac{s}{۲} \quad ، \quad s = s(\theta) = D(\circ, z)$$

با توجه به (۶.۷.۱۴) و (۷.۷.۱۴) داریم

$$\begin{aligned} m(\mathscr{A}) &= ۴\iint_{\mathscr{A}} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(۱-\rho^{۲})^{۲}} = ۲\int_{\theta=\pi-\beta}^{\pi}\int_{\sigma=\circ}^{s(\theta)} \operatorname{sh}\frac{\sigma}{۲}\operatorname{ch}\frac{\sigma}{۲} d\sigma\, d\theta \\ &= \int_{\pi-\beta}^{\pi} [\operatorname{ch} s(\theta) - ۱] d\theta \end{aligned}$$

با استفاده از (۷.۵.۱۴) در مثلث قائم‌الزاویه به رأسهای o، $-x_۲$، z داریم

$$\operatorname{th} s = \frac{\operatorname{th} a}{\cos\theta'}, \qquad \operatorname{ch}^{۲} s = \frac{\cos^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta - \operatorname{th}^{۲}a}, \qquad \theta' = \pi - \theta$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} m(\mathscr{A}) &= -\int_{\pi-\beta}^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos^{۲}\theta - \operatorname{th}^{۲}a)}} - \beta = \int_{\circ}^{\sin\beta} \frac{du}{\sqrt{(۱ - \operatorname{th}^{۲}a - u^{۲})}} - \beta \\ &= \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{ch}a\ \sin\beta) - \beta = \operatorname{arc\,sin}(\cos\alpha) - \beta \\ &= \frac{\pi}{۲} - \alpha - \beta = \pi - \frac{\pi}{۲} - \alpha - \beta \end{aligned}$$

همانطور که در شکل ۲۵ نمایان است، مثلث غیر مشخص به صورت «مجموع» دو مثلث قائم‌الزاویه ظاهر می‌شود؛ بنابراین مساحت آن برابر مجموع مساحتهای دو مثلث قائم‌الزاویه است، یعنی

$$\frac{\pi}{۲} - \beta - \alpha_۱ + \frac{\pi}{۲} - \gamma - \alpha_۲ = \pi - \alpha - \beta - \gamma = \Delta_A \qquad (۸.۷.۱۴)$$

این عدد Δ_A که طبق قضیهٔ د همواره مثبت است، به کاستی مثلث هذلولوی با زوایای α، β و γ معروف است.

قضیهٔ و. مساحت هذلولوی یک مثلث هذلولوی مساوی با کاستی آن است: $m(\mathscr{A}) = \Delta_A$.

بدون مراجعه به برهان قبلی به آسانی دیده می‌شود که کاستی Δ_Aی یک مثلث دو ویژگی (i) و (ii) مساحت را داراست (ر.ک. مثال ۱۱):

(i) جمعپذیری. کاستی یک مثلث برابر مجموع کاستیهای دو مثلثی است که از رسم موربی در مثلث مفروض حاصل می‌شود.

(ii) ناوردایی. دو مثلث همنهشت یک کاستی دارند.

۱۳. طول هذلولوی یک کمان $\mathscr{C}$ در (۱.۳.۱۴) داده شده است. به فرض آنکه $\mathscr{C}$ طولپذیر باشد، حالا می‌خواهیم یک نمایشی از L_C را به‌وسیلهٔ یک انتگرال خطی به‌دست آوریم.

بنابر (۳.۲.۱۴) داریم

$$D(z_{\nu-۱}, z_\nu) = ۲\operatorname{arth} f_{-۱}(z_{\nu-۱}, z_\nu)$$

و بنابراین به‌موجب قضیهٔ مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل داریم

$$D(z_{\nu-۱}, z_\nu) = \frac{۲}{۱-u_\nu^۲} f_{-۱}(z_{\nu-۱}, z_\nu)$$

که در آن $۰ < u_\nu < f_{-۱}(z_{\nu-۱}, z_\nu)$. چون u_ν از هر عدد مثبت داده‌شده‌ای کوچکتر است، اگر پاره‌خط $(z_{\nu-۱}, z_\nu)$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد با توجه به (۱.۳.۱۳) و (۳.۱۴) داریم

$$L(\Pi) = \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{۲}{۱-u_\nu^۲} \frac{|z_\nu - z_{\nu-۱}|}{|۱-\bar{z}_{\nu-۱} z_\nu|} = \frac{۲}{۱-v_n^۲} \sum_{\nu=۱}^{n} \frac{|z_\nu - z_{\nu-۱}|}{|۱-\bar{z}_{\nu-۱} z_\nu|}$$

که در آن v_n مقدار میانگین n عدد $u_۱$، $\cdots$، u_n است که به $\mathscr{C}$ و Π بستگی دارد. یک فرایند حدی آشنا برای همه از تعریف انتگرال خطی، چنین به‌دست می‌دهد که

$$L = \int_{\mathscr{C}} \frac{۲|dz|}{۱-|z|^۲}$$

۱۴. طول هذلولوی محیط یک دایرهٔ $\mathscr{C}$ به شعاع هذلولوی r برابر است با

$$L = ۲\pi \operatorname{sh} r$$

۱۵. هندسهٔ کروی و بیضوی

هندسهٔ کروی در بخش ۱۳، ب به صورت هندسهٔ $\mathscr{G}$ای گروه $\mathscr{R} = \mathscr{G}$ تعریف شده است. صفحهٔ آن $\mathscr{D}$، صفحهٔ کامل‌شدهٔ اعداد مختلط است. از راه تصویر گنجنگاشتی، این هندسه با هندسه در سطح کره، متناظر می‌شود. تعبیر آن در صفحه دشواریهایی پدید می‌آورد. که این دشواریها با دخالت‌دادن هندسهٔ بیضوی حل می‌شود.

الف. خطهای راست کروی و فاصله. طبق تعریف بخش ۱۳، ب، خطهای راست $\mathscr{R}$ای (که از این به‌بعد خطهای راست کروی نامیده می‌شوند) دایره‌هایی هستند عمود بر دایرهٔ واحد انگاری. به‌موجب بخش ۱۲، ج (i)، این دایره‌ها نگاره‌های گنجنگاشتی دوایر عظیمه کره‌اند که به‌طور تحلیلی با (۳.۴.۳) مشخص شده‌اند: اگر یک نقطهٔ z بر یکی از این خطها واقع باشد نقطهٔ متقاطر آن $-1/\bar{z}$ نیز بر همان خط قرار دارد. و به‌عکس، هر دایره شامل دو نقطهٔ متقاطر، یک خط راست کروی است. خطهای راست کرویِ مارّ بر o، متناظر با دوایر عظیمهٔ مارّ بر $\mathbf{N}$ و $\mathbf{S}$ از کره، همان خطهای راست معمولی مارّ بر o هستند. هر دو خط راست کروی یکدیگر را در دو نقطهٔ متقاطر قطع می‌کنند. بدین‌ترتیب در هندسهٔ کروی خطهای راست موازی وجود ندارند.

همانند هندسهٔ تصویری حقیقی، در هندسهٔ کروی نقطهٔ حقیقی بینهایت وجود ندارد؛ نقطهٔ ∞، مانند سایر نقاط صفحهٔ کامل‌شده، نظیر نگارهٔ نقطهٔ $\mathbf{S}$ از کره، از نقاط دیگر صفحهٔ مختلط متمایز نیست. در هندسهٔ کروی دایرهٔ واحد انگاری را می‌توان به صورت یک جانشین جبری «مطلق» یا «بینهایت» در نظر گرفت.

حال پس از این مقدمات، به تعریف فاصلهٔ کروی دو نقطهٔ z_1 و z_2 در صفحهٔ کروی می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ نگاره‌های گنجنگاشتی نقاط z_1 و z_2 از کرهٔ واحد باشند. واضح است که فاصلهٔ اقلیدسی آنها که بر طول دایرهٔ عظیمه مارّ بر $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ اندازه‌گیری می‌شود، نسبت به دورانهای این کره، یک ناوردای دو نقطه‌ای است. اگر $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ بر هم منطبق و یا متقاطر نباشند، برای فاصلهٔ بین $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$، دو مقدار متفاوت، یعنی، یکی مقدار $\omega_{12}(0 \le \omega_{12} < \pi)$، زاویهٔ حاصل از دو بردار $\mathbf{OP}_1$ و $\mathbf{OP}_2$، و دیگری مقدار $2\pi - \omega_{12}$، به‌دست می‌آیند. یک حکم کلی برای انتخاب یکی از این دو مقدار برای فاصلهٔ $\tilde{D}(z_1, z_2)$ نمی‌توان به‌دست داد.

صحیح این است که نه‌تنها این دو مقدار، بلکه تمام مقادیر $\omega_{12} + 2k\pi$ و $-\omega_{12} + 2k\pi$ (با k عدد صحیح) را هم برای مقدار $\tilde{D}(z_1, z_2)$ پذیرفت. در این صورت $\tilde{D}(z_1, z_2) = 2k\pi$

مبین آن است که $z_1 = z_2$، و به‌عکس. به‌ازای همهٔ این مقادیر k، پیدا می‌کنیم که

$$\cos \tilde{D}(z_1, z_2) \quad \text{ونیز} \quad |\tan \frac{1}{2}\tilde{D}(z_1, z_2)|$$

به‌ترتیب یک مقدار دارند.

به‌موجب (۱.۳.۱۳) تابع فاصلهٔ کروی چنین داده می‌شود

$$f_1(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2}\right|$$

اگر (ξ_1, η_1, ζ_1) و (ξ_2, η_2, ζ_2) به‌ترتیب مختصات نقاط $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ باشند، آنگاه

$$z_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{1 + \zeta_1}, \qquad z_2 = \frac{\xi_2 + i\eta_2}{1 + \zeta_2}$$

با یک محاسبهٔ ساده خواهیم داشت

$$f_1(z_1, z_2)^2 = \frac{1 - (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)}{1 + (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)} = \frac{1 - \cos\omega_{12}}{1 + \cos\omega_{12}}$$

که از آنجا

$$f_1(z_1, z_2) = |\tan \frac{1}{2}\tilde{D}(z_1, z_2)| \qquad (۱.۱۵)$$

فرض می‌کنیم مقدار اصلی تابع $\text{arc tan}\ u$ را با $\tan^{-1} u$ نمایش می‌دهیم؛ در این صورت بنابر (۱.۱۵) داریم

$$\tilde{D}(z_1, z_2) = \pm 2\tan^{-1} f_1(z_1, z_2) + 2k\pi \qquad (۱.۱.۱۵)$$

به عنوان «مقدار اصلی» فاصلهٔ بین z_1 و z_2 به تعریف زیر می‌رسیم

$$D(z_1, z_2) = 2\tan^{-1} f_1(z_1, z_2) \qquad (۲.۱.۱۵)$$

دراین‌صورت

$$0 \le D(z_1, z_2) = \omega_{12} < \pi \qquad (۳.۱.۱۵)$$

$$D(z_1, z_2) = 0، \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad z_1 = z_2$$

و اگر z_2 به $-1/\bar{z}_1$، نقطهٔ متقاطر z_1، میل کند $D(z_1, z_2)$ به π میل خواهد کرد.

ب. جمع‌پذیری و نابرابر مثلثی. گوییم سه نقطهٔ $\mathbf{P}_1$، $\mathbf{P}_2$ و $\mathbf{P}_3$ از کره «به‌ترتیبِ زیرنمایه‌ها» بر یک دایرهٔ عظیمه قرار دارند، اگر $\mathbf{P}_2$ و نقطهٔ متقاطر آن $-\mathbf{P}_2$، نقاط $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_3$ را از هم جدا کنند. به‌همین قیاس سه نقطهٔ z_1، z_2 و z_3، به‌ترتیب زیرنمایه‌ها، بر یک خط راست کروی قرار دارند، اگر z_2 و نقطهٔ متقاطر آن $-1/\bar{z}_2$ نقاط z_1 و z_3 را بر دایره‌ای که معرف خط راست کروی است، از هم جدا کنند.

به‌دلایل هندسی واضح است که اگر z_1، z_2 و z_3، به‌ترتیبِ زیرنمایه‌ها، بر خط راست کروی خود قرار داشته باشند، آنگاه

$$\tilde{D}(z_1, z_2) + \tilde{D}(z_2, z_3) = \pm\tilde{D}(z_1, z_3) + 2k\pi$$

که در آن k عددی است درست.

برای مقدار اصلی فاصلهٔ $D(z_1, z_2)$، بلافاصله جمع‌پذیری دقیقتری پیدا می‌شود. در مورد وضع نقاط بر کره به سهولت دیده می‌شود که اگر z_1، z_2 و z_3، به‌ترتیب زیرنمایه‌هاشان، بر یک خط راست کروی قرار داشته باشند، آنگاه

$$D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) = \begin{cases} D(z_1, z_3) & \text{اگر } D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \leq \pi \\ 2\pi - D(z_1, z_3) & \text{اگر } D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \geq \pi \end{cases} \tag{2.15}$$

نابرابری مثلثی در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ الف. به‌ازای هر سه نقطهٔ z_1، z_2 و z_3 بر صفحهٔ کروی داریم

$$D(z_1, z_3) \leq D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \leq 2\pi - D(z_1, z_3)$$

علامت برابری فقط و فقط زمانی معتبر است که z_1، z_2 و z_3 به‌همان ترتیبِ زیرنمایه‌هاشان بر یک خط راست کروی قرار داشته باشند و

$$D(z_1, z_2) + D(z_2, z_3) \begin{cases} \leq \pi & \text{در حالت اول} \\ \geq \pi & \text{در حالت دوم} \end{cases}$$

برهان. یک حرکت کروی (تبدیل دورانی موبیوس) $\mathfrak{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathfrak{H}(z_۱) = x > ۰, \qquad \mathfrak{H}(z_۲) = ۰, \qquad \mathfrak{H}(z_۳) = z$$

از آنجا که این حرکت فاصلهٔ کروی را تغییر نمی‌دهد، کافی است ثابت کنیم که

$$D(x,z) \leq D(x,o) + D(o,z) \leq ۲\pi - D(x-z) \qquad (۳.۱۵)$$

علامت برابری فقط و فقط وقتی برقرار است که z حقیقی و منفی و

$$۱ + xz \begin{cases} > ۰ & \text{در حالت اول} \\ < ۰ & \text{در حالت دوم} \end{cases}$$

اما $D(x,o) = ۲\tan^{-۱} x$ و $D(o,z) = ۲\tan^{-۱}|z|$ و

$$\tan^{-۱} x + \tan^{-۱}|z| = \begin{cases} \tan^{-۱} \dfrac{x+|z|}{۱-x|z|} & \text{اگر } ۱ - x|z| > ۰ \\ \dfrac{\pi}{۲} & \text{اگر } ۱ - x|z| = ۰ \\ -\tan^{-۱} \dfrac{x+|z|}{|۱-x|z||} + \pi & \text{اگر } ۱ - x|z| < ۰ \end{cases}$$

این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

(i) $x|z| < ۱$. باید تحقیق کنیم که

$$\frac{|x-z|}{|۱+xz|} \leq \frac{x+|z|}{۱-x|z|} \qquad (۱.۳.۱۵)$$

که این کار ساده است. زیرا $|x-z| \leq x + |z|$ و $|۱ + xz| > ۱ - x|z|$. دیده می‌شود که علامت تساوی در (۱.۳.۱۵) یعنی در $|x-z|(۱-x|z|) = (x+|z|)|۱+xz|$ با شرط $z + \bar{z} + ۲|z| = ۰$، یعنی، $\operatorname{Re} z = -|z|$ هم‌ارز است. از این‌رو z باید بر قسمت منفی محور حقیقی واقع باشد و $۱ + xz > ۰$. نابرابری دوم (۳.۱۵) خودبه‌خود نمایان است.

(ii) $x|z| = ۱$. در این حالت

$$\tan^{-۱} \frac{|x-z|}{|۱+xz|} \leq \frac{\pi}{۲}$$

(iii) $۱ < x|z|$. اما نامساوی دوم (۳.۱۵) هم‌ارز است با

$$\tan^{-۱}\frac{x+|z|}{|۱-x|z||}+\tan^{-۱}\frac{|x-z|}{|۱+xz|}\leq\pi$$

که درست است زیرا هر یک از جملات سمت چپ برابر $\pi/۲$ یا کوچکتر از آن است. هر دو مساوی $\pi/۲$ هستند اگر و فقط اگر z منفی و $۱+xz=۰$. بنابه فرض نامساوی اولی بدیهی است.

بحثی را که در انتهای بخش ۱۴، ب به معرفی طول قوس هذلولوی $\mathscr{C}$ از یک منحنی واقع در صفحهٔ هذلولوی انجامید، در اینجا می‌توان، با جرح و تعدیل لازم، برای رسیدن به طول قوس کروی یک منحنی در صفحهٔ کروی، تکرار کرد. دراین‌صورت به کمک نابرابری مثلثی می‌توان ویژگی اقصر فاصله‌بودن خط راست کروی را اثبات نمود. برهان آن به‌طور بیانی به همان شکلی است که در مورد قضیهٔ ب از بخش ۱۴، ب گفته‌ایم و در اینجا تکرار نمی‌کنیم.

ج. دایره‌های کروی. دایره‌های کروی، یعنی، دایره‌های $\mathscr{R}$ای، طبق بخش ۱۳، د، دایره‌های معمولی حقیقی در صفحهٔ مختلط‌اند. فرض می‌کنیم دایرهٔ $\mathfrak{C}$ به‌وسیلهٔ تبدیل دورانی موبیوس $\mathfrak{H}$ همان‌گونه تولید شود که در (۱.۱۳) نشان داده شده است. در این صورت $z_۰$ و $z_۰^*$، نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، مرکزهای کروی $\mathfrak{C}$ هستند. این دو نقطه متقاطرند و نسبت به دایرهٔ $\mathfrak{C}$ منعکس (متقارن) یکدیگرند. همهٔ دایره‌های هم‌مرکز کروی با دایرهٔ $\mathfrak{C}$ دستهٔ هذلولوی را تشکیل می‌دهند که در آن $z_۰$ و $z_۰^*$ نقطه‌دایره‌اند.

فرض می‌کنیم z نقطهٔ دلخواهی بر دایرهٔ $\mathfrak{C}$ با مرکزهای کروی $z_۰$ و $z_۰^*$ باشد. دو عدد نامنفی

$$r=D(z_۰,z)\leq\pi \quad \text{و} \quad r^*=D(z_۰^*,z)\leq\pi$$

را که در شرط

$$r+r^*=\pi$$

صدق می‌کنند شعاعهای کروی $\mathfrak{C}$ هستند؛ از این دو عدد، آن یک را که کوچکتر است، می‌توان شعاع کروی $\mathfrak{C}$ نامید. این عدد همواره برابر $\pi/۲$ یا کوچکتر از آن است. مرکز متناظر آن را می‌توان مرکز کروی $\mathfrak{C}$ نامید.

این مرکز نامعین می‌شود اگر و فقط اگر $r=r^*=\pi/۲$، که در این حالت دایرهٔ کروی $\mathfrak{C}$ یک خط راست کروی است. به‌عکس یک خط راست کروی را می‌توان دایره‌ای به شعاع کروی $\pi/۲$ تعریف کرد.

خطهای راست کروی، خطهای راست اقلیدسی هستند اگر و فقط اگر از نقطهٔ o بگذرند. دایره‌های هم‌مرکز کروی، فقط و فقط زمانی هم‌مرکز اقلیدسی خواهند بود که o مرکز آنها باشد. در میان دایره‌های هم‌مرکز به مرکز o، دقیقاً یک خط راست کروی وجود دارد، که همان دایرهٔ واحد است. هر دو سر یک قطر دلخواه آن دو نقطهٔ متقاطرند. این مطلب در مورد هر خط راست کروی دیگر درست نیست. در هر دسته از دایره‌های هم‌مرکز کروی یک و فقط یک خط راست کروی وجود دارد.

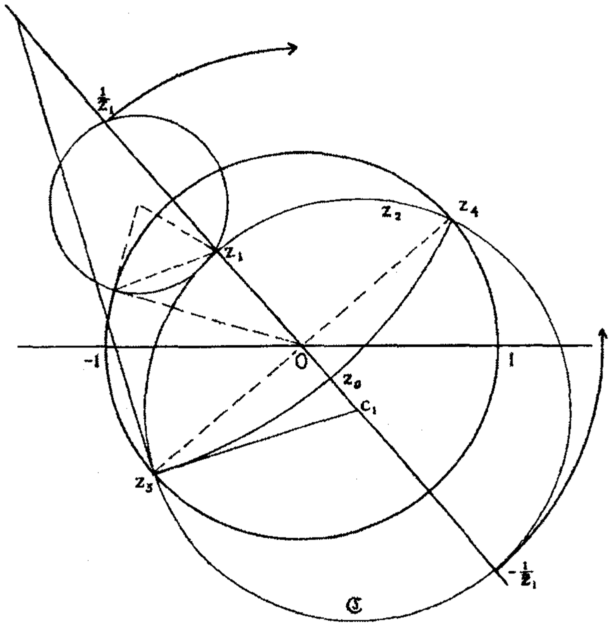
دسته دایره‌های بیضوی که از دو مرکز (دو سر یک قطر) $\mathfrak{C}$ می‌گذرند، دسته قطرهای کروی دایره‌های دسته هذلولوی متعامد از دسته دایره‌های هم‌مرکز کروی هستند. همهٔ این دایره‌های قطری، خطهای راست کروی هستند. یکی از این خطها از o می‌گذرد و بنابراین یک خط راست معمولی l است که از مرکز اقلیدسی $\mathfrak{C}$ نیز می‌گذرد. بر این خط می‌توان $z_۰$، مرکز کروی $\mathfrak{C}$، را مشخص کرد. فرض می‌کنیم $z_۱$ نقطه‌ای بر $\mathfrak{C}$ باشد که بر l نیست. دایرهٔ متعامد $\mathfrak{C}_۱$ مارّ بر $z_۱$ و نقطهٔ متقاطرش $z_۱^* = -۱/\bar{z}_۱$ را رسم می‌کنیم؛ این دایره خط l را در $z_۰$ و $z_۰^* = -۱/\bar{z}_۰$، مراکز کروی $\mathfrak{C}$، قطع می‌کند.

با ترسیمی مشابه می‌توان خط راست کروی مارّ بر نقاط مفروض $z_۱$ و $z_۲$ را به‌دست آورد. این خط راست دایرهٔ $\mathfrak{C}$ است که از سه نقطهٔ $z_۱, z_۲, z_۱^* = -\frac{۱}{\bar{z}_۱}$ می‌گذرد. $z_۰$، یک مرکز کروی $\mathfrak{C}$ از تقاطع دو قطر کروی به‌دست می‌آید؛ یکی از o می‌گذرد (یک خط راست معمولی ر.ک. شکل۲۷) دیگری از نقاط متقاطر $z_۳$ و $z_۳^*$ می‌گذرد، جایی که دایرهٔ $\mathfrak{C}$ دایرهٔ واحد را قطع می‌کند.

بحث در هندسهٔ کروی اغلب بر اثر تبدیل یک شکل به «وضعیت نرمال» به‌وسیلهٔ یک حرکت کروی، ساده می‌شود. بدین‌ترتیب می‌توان یک دایره را به وضعی بدل کرد که مرکزش بر o منطبق شود. اگر ρ شعاع اقلیدسی آن باشد، شعاع کروی آن به صورت زیر مشخص می‌شود

$$r = ۲\,\mathrm{Min}\left(\tan^{-۱}\rho, \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}\rho\right) \qquad (۴.۱۵)$$

د. **هندسهٔ بیضوی.** این کلاین بود که اول‌بار به روشنی دید که چگونه می‌توان هندسهٔ کروی را از یک نقصش آزاد کرد: این که دو خط هم‌صفحه (که دو دایرهٔ عظیمهٔ یک کره‌اند) نه‌فقط یک نقطه، بلکه دو نقطهٔ مشترک دارند. چون هر نقطه یک نقطهٔ متقاطر یکتا دارد، و لذا هر شکل در نقاط متقاطر مشابه با خودش است، او متوجه شد که اگر هر جفت نقطهٔ متقاطر را به‌نحو انتزاعی یکی بگیریم، هیچ چیزی از دست نمی‌دهیم، بلکه خیلی هم سود می‌بریم، یعنی اگر معنی واژهٔ



شکل۲۷

«نقطه» را عوض کنیم و این یک جفت نقطه را یک نقطه تلقی کنیم.[۱]

با این روشِ یکی گرفتن، هندسهٔ کروی به هندسهٔ بیضوی تبدیل می‌شود. این یکی‌گرفتنِ هر دو نقطهٔ متقاطر $z, z^* = -\frac{1}{\bar{z}}$، یا دو نقطهٔ متناظر گنجنگاشتی $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$ بر کره، را می‌توان از لحاظ هندسی با وصل‌کردن $\mathbf{P}$ و $\mathbf{P}^*$ با یک خط راست (معمولی)، که البته از $\mathbf{O}$، مرکز کره، می‌گذرد، تجسم کرد. بنابراین یک تناظر یک‌ـبه‌ـیک میان نقاط «صفحهٔ بیضوی» و عناصر کلاف همهٔ خطهای مارّ بر $\mathbf{O}$ داریم، و هر خط مارّ بر $\mathbf{O}$ معرف یک نقطه از صفحهٔ بیضوی است. پس هر خط راست از این صفحهٔ بیضوی معرف صفحه‌ای است که از $\mathbf{O}$ می‌گذرد، نقاط آن عناصر دستهٔ همهٔ خطهای مارّ بر $\mathbf{O}$ و جفتهای نقاط متقاطر یک دایرهٔ عظیمه بر کره هستند.

می‌توانیم یک گام جلوتر برویم. فرض می‌کنیم π صفحه‌ای در فضا باشد که از $\mathbf{O}$ نمی‌گذرد، مثل صفحهٔ مماس بر کره در قطب شمال که با معادلهٔ $\zeta = 1$ داده شده است. هر خط مارّ بر $\mathbf{O}$، غیر از خطهایی که در صفحهٔ استوایی $\zeta = 0$ قرار دارند، این صفحه را در نقطه‌ای به مختصات

---

۱. نقل گفتار از Coxeter [۱] ص ۱۳.

X، Y، ۱ قطع می‌کند، به‌طوری‌که

$$X + iY = \frac{\xi + i\eta}{\zeta} = \frac{۲z}{۱ - z\bar{z}} \qquad (۵.۱۵)$$

[ر.ک. (۳.۳)].

هر صفحهٔ مارّ بر O، غیر از صفحهٔ استوایی، صفحهٔ π را در یک خط راست خوشتعریف قطع می‌کند. اگر صفحهٔ π را با «یک خط راست واقع در بینهایت» به عنوان محمل نقاط متناظر با خطهای مارّ بر O در صفحهٔ استوایی کامل کنیم، الگوی دیگری از صفحهٔ بیضوی، یعنی، صفحهٔ تصویری حقیقی به‌دست می‌آوریم.

عناصر، نقاط، و خطهای راست واقع در این صفحه برای هندسه‌های تصویری و بیضوی یکی هستند. هندسهٔ بیضوی درون چارچوب هندسهٔ تصویری، با واردکردن یک «متریک» یا فاصله، یعنی فاصلهٔ کروی، به صورت یک ناوردای دونقطه‌ای از گروه حرکتها به‌دست می‌آید. در صفحهٔ کامل‌شده این حرکتها به‌وسیلهٔ تبدیلهای موبیوسی که دایرهٔ واحد انگاری $z\bar{z} + ۱ = ۰$ را ناوردا می‌گذارند، نشان داده می‌شوند. چون به‌موجب (۵.۱۵)

$$X^۲ + Y^۲ + ۱ = \left(\frac{۱ + z\bar{z}}{۱ - z\bar{z}}\right)^۲$$

گروه «حرکتهای بیضوی» در π به‌وسیلهٔ گروه همهٔ تبدیلهای تصویری (همخطیها)، که دایرهٔ واحد انگاری $X^۲ + Y^۲ + ۱ = ۰$ را ناوردا می‌گذارند، نشان داده می‌شود، ولی، اکنون، به صفحهٔ π پیوسته است.

بدین‌ترتیب متریک بیضوی در صفحهٔ تصویری π به‌وسیلهٔ این قطع مخروطی ناوردا یا «مطلق» تعریف شده است، که با دایرهٔ واحد انگاری نشان داده شده است. در مثال ۲، بخش ۱۴، اشاره شده است که هندسهٔ هذلولوی می‌تواند در صفحهٔ تصویری حقیقی نیز تحقق یابد. اگر قطع مخروطی دیگری، مثلاً دایرهٔ واحد حقیقی، ناوردا یا مطلق در نظر گرفته شود، در هندسهٔ هذلولوی این مطلق نقش بینهایتِ صفحهٔ هذلولوی را دارد. از لحاظ مشابهت می‌توان گفت که بینهایتِ صفحهٔ بیضوی انگاری است.

این واقعیت که در هندسهٔ بیضوی بینهایتِ حقیقی وجود ندارد، به‌وسیلهٔ کراندار بودنِ (۳.۱.۱۵) مربوط به فاصلهٔ D هم نشان داده شده است، که در واقع متریک خاصی در «الگوی همدیس» صفحهٔ بیضوی به‌دست می‌دهند که از صفحهٔ کامل‌شدهٔ اعداد مختلط با یکی‌گرفتن نقاط متقاطر به‌دست آمده است.

باید یادآوری کنیم که در هندسهٔ تصویری نیز «خط راست بینهایت» که الحاق آن به صفحهٔ اقلیدسی، صفحهٔ اقلیدسی را به الگوی اولیهٔ معمولی هندسهٔ تصویری بدل می‌کند، نباید به صورت عنصر استثنایی صفحهٔ تصویری تلقی شود. هندسهٔ تصویری به «بومی‌سازی» خود نیازمند است تا در بنداشتها این خط با خط دیگرِ صفحهٔ تصویری تفاوتی نداشته باشد.

فاصلهٔ بیضوی دو نقطهٔ $(X_1, Y_1, 1)$ و $(X_2, Y_2, 1)$ در صفحهٔ π به‌وسیلهٔ فاصلهٔ کروی $D(z_1, z_2)$ مربوط به دو نقطهٔ متناظر z_1 و z_2 در صفحهٔ کامل‌شده و یا به‌وسیلهٔ زاویهٔ ω_{12} بین دو بردار $\overrightarrow{\mathbf{OP}_1}$و $\overrightarrow{\mathbf{OP}_2}$ اندازه‌گیری می‌شود. پس این فاصله از رابطهٔ

$$\cos\omega_{12} = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + 1}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2 + 1)}\sqrt{(X_2^2 + Y_2^2 + 1)}} \qquad (6.15)$$

به‌دست می‌آید.

برای آگاهی بیشتر از روابط بین شاخه‌های مختلف هندسه و تحقق آنها باید به آثار مکتوبی که وجود دارند مراجعه کرد.[1]

ه. مثلثات کروی. یک مثلث کروی هرگز با سه رأس z_1، z_2، z_3 به‌طور یکتا مشخص نمی‌شود. اضلاع آن پاره‌خطهایی از خطهای راست کروی، مارّ بر z_2، z_3؛ z_3، z_1؛ z_1، z_2 هستند. هنگامی یک مثلث کروی با رأسهای z_1، z_2، z_3 به‌طور یکتا معین می‌شود که قید کرده باشیم که باید تمام آن بر یک نیمکره واقع باشد و اضلاعش با مقادیر اصلی فاصله‌های $D(z_2, z_3)$، $D(z_3, z_1)$ و $D(z_1, z_2)$ یکی و همهٔ آنها کوچکتر از π باشند؛ در این صورت نابرابریهای مثلثی

$$D(z_i, z_k) < D(z_i, z_j) + D(z_j, z_k) \qquad (7.15)$$

برقرارند. علاوه بر این می‌خواهیم که داشته باشیم

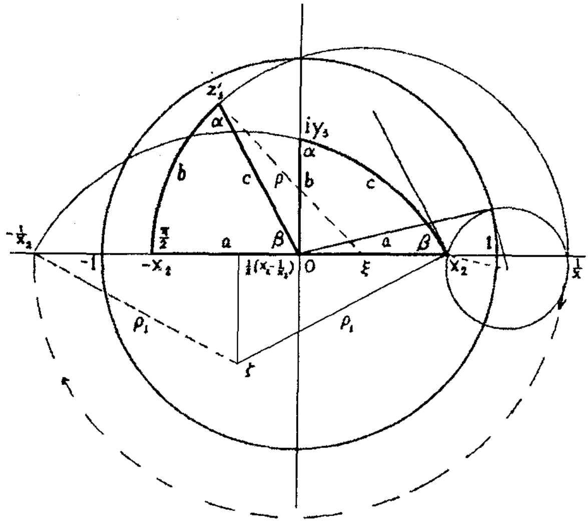
$$D(z_2, z_3) + D(z_3, z_1) + D(z_1, z_2) < 2\pi \qquad (1.7.15)$$

این‌گونه مثلثهای کروی را مثلثهای اویلر خوانند.

در این شرایط مشابهت صوری کاملی با فرمولهای مثلثات هذلولوی (بخش ۱۴، د) پیدا می‌شوند. گذار از مثلثات هذلولوی به مثلثات کروی از تعویض توابع هذلولوی در روابط هندسهٔ هذلولوی، با توابع مثلثاتی متناظر صورت می‌گیرد.

---

۱. ر.ک. Coxeter [۱] فصول I، VI و XIV که در آن منابع بیشتری پیدا می‌شوند. به‌خصوص فصل IV کتاب Klein [۲] را می‌توان نام برد: به‌علاوه مطالعهٔ Hilbert and Cohn-Vossen [۱]، بخش ۳۴، درکنار کتابهای دیگر در اینجا خیلی مناسب است.



شکل۲۸

همانند هندسهٔ هذلولوی تمامی مثلثات به نظریهٔ مثلث قائم‌الزاویه وابسته است. با تعویض تمام نمادها و ترتیبهای بخش ۱۴، د، دو وضعیت نرمال از مثلث قائم‌الزاویه به‌صورتی‌که در شکل ۲۸ نمایش داده شده، حاصل می‌شود. با مراجعه به وضعیت اول (با رأس زاویه قائمه در o) مانند (۵.۱۴) داریم

$$x_۲ = \tan\frac{a}{۲}, \qquad y_۳ = \tan\frac{b}{۲}, \qquad \frac{|x_۲ - iy_۳|}{|۱ - ix_۲y_۳|} = \tan\frac{c}{۲} \qquad (۲.۷.۱۵)$$

که از آنجا داریم

$$\tan^۲\frac{c}{۲} = \frac{\tan^۲(a/۲) + \tan^۲(b/۲)}{۱ + \tan^۲(a/۲)\tan^۲(b/۲)}$$

و با استفاده از فرمولهای مثلثاتی مقدماتی داریم

$$\cos c = \cos a \cos b \qquad (۳.۷.۱۵)$$

این رابطهٔ «فیثاغورس کروی» [ر.ک. (۲.۵.۱۴)] است و نشان می‌دهد که [همانند آنچه در تبصرهٔ ذیل (۲.۵.۱۴) آمده است] هندسهٔ کروی هم «موضعاً اقلیدسی» است.

برای به‌دست‌آوردن روابط بین اضلاع و زوایای مثلث قائم‌الزاویه، مثلث را در وضعیت نرمال دوم با زاویهٔ β در مبدأ در نظر می‌گیریم. ساختمان آن در شکل ۲۸ پیداست. ضلع b به عنوان

یک پاره‌خط کروی باید بر دایرهٔ مارّ بر نقطهٔ $-x_2$ و متقاطر آن $1/x_2$ قرار داشته باشد. مرکز این دایره نقطهٔ

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2} - x_2\right) \qquad (۴.۷.۱۵)$$

بر محور حقیقی است و

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2} + x_2\right)$$

شعاع آن است، به‌طوری‌که $\rho^2 - \xi^2 = 1$. در این صورت این دایره با معادلهٔ $(x-\xi)^2 + y^2 = \rho^2$، یا

$$z\bar{z} - 2\xi \operatorname{Re} z = 1$$

تعیین می‌شود. رأس z_3' در این مثلث

$$z_3' = r_3 e^{i\beta'} \qquad (\beta' = \pi - \beta)$$

بر این دایره قرار دارد؛ بنابراین $r_3^2 - 2\xi r_3 \cos\beta' = 1$ و لذا بنابر (۴.۷.۱۵) داریم

$$\frac{r_3}{1 - r_3^2}\cos\beta = \frac{x_2}{1 - x_2^2}$$

به‌علاوه

$$x_2 = \tan\frac{a}{2}, \qquad r_3 = \tan\frac{c}{2} \qquad (۵.۷.۱۵)$$

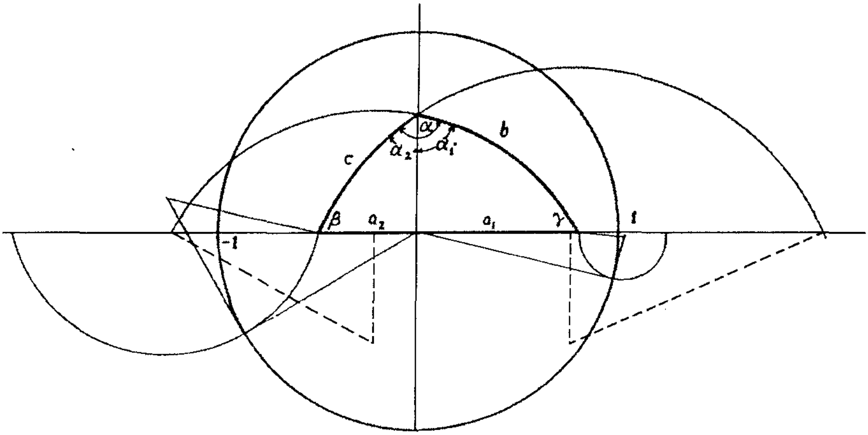
بنابراین

$$\tan c \cos\beta = \tan a, \qquad \tan c \cos\alpha = \tan b \qquad (۶.۷.۱۵)$$

[ر.ک. (۷.۵.۱۴)].

اکنون می‌توان مشابه‌های کروی روابط (۶.۵.۱۴) را با یک محاسبهٔ مثلثاتی ساده، با دو بار استفاده از (۳.۷.۱۵) به‌دست آورد

$$\sin c \sin\beta = \sin c\left(1 - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\frac{\cos^2 c}{\sin^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\sin^2 c - \sin^2 a \cos^2 b)}$$



شکل۲۹

که از آنجا داریم

$$\sin c \sin \beta = \sin b, \qquad \sin c \sin \alpha = \sin a \tag{۷.۷.۱۵}$$

این فرمولها را برای مثلث غیرمشخص اویلر نمی‌نویسیم؛ اکنون پیداست که چگونه می‌توان آنها را از روابط هذلولوی متناظر (۸.۵.۱۴) و (۹.۵.۱۴)، (ر.ک. شکل ۲۹) به‌دست آورد. این مبحث را با قضیهٔ زیر به پایان می‌بریم.

قضیهٔ ب. مجموع زاویه‌های یک مثلث اویلر

$$\sigma = \alpha + \beta + \gamma$$

در نابرابریهای زیر صدق می‌کند

$$\pi < \sigma < ۳\pi$$

برهان. برای یک مثلث قائم‌الزاویه $(\gamma = \pi/۲)$ داریم

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\tan b}{\tan c}\frac{\tan a}{\tan c} - \frac{\sin a}{\sin c}\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin b \sin a}{\sin^{۲} c}(\cos c - ۱) < ۰$$

زیرا هیچ‌یک از اضلاع این مثلث مساوی π یا بزرگتر از π نیست، پس همهٔ جمله‌های سینوسی مثبت هستند. از این‌رو

$$\frac{\pi}{۲} < \alpha + \beta < ۳\frac{\pi}{۲} \tag{۸.۷.۱۵}$$

اما در مورد مثلث کلی اویلر، می‌توان آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه، مثلاً با رسم ارتفاع وارد بر ضلع a (ر.ک. شکل ۲۹)، تجزیه کرد. این ارتفاع، زاویهٔ α را به $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ تجزیه می‌کند، و از جمع‌کردن روابط (۸.۷.۱۵) برای این دو مثلث قائم‌الزاویه، حکم قضیه نتیجه می‌شود

$$\frac{\pi}{۲} < \alpha_۱ + \gamma < ۳\frac{\pi}{۲}, \qquad \frac{\pi}{۲} < \alpha_۲ + \beta < ۳\frac{\pi}{۲}$$

مقدارِ (همواره مثبتِ)

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{۹.۷.۱۵}$$

را «فزونی کروی» مثلث اویلر گویند که مانند کاستی در حالت هذلولوی معرف اندازهٔ مساحت مثلث است (ر.ک. مثال ۹).

مثالها

۱. انعکاس نسبت به یک خط راست کروی را تقارن کروی گویند. تقارن کروی دایرهٔ واحد انگاری را ناوردا می‌گذارد. این انعکاس خطهای راست کروی را بر خطهای راست کروی می‌نگارد و فاصلهٔ کروی $D(z_۱, z_۲)$ بین دو نقطه را ناوردا می‌گذارد (ر.ک. مثال ۳، بخش ۱۴).

۲. پاره‌خط کروی $(z_۱, z_۲)$ مفروض است. از راه ترسیم هندسی پاره‌خط کروی-همنهشتِ آن را در وضعیت نرمال، یعنی، در وضعیتی که یک سر پاره‌خط در o و سر دیگرش بر قسمتِ مثبت محور حقیقی قرار داشته باشد، پیدا کنید. همچنین مثلثی داده شده است، مثلث کروی-همنهشت آن را در وضعیت نرمال پیدا کنید (ر.ک. مثال ۴، بخش ۱۴).

۳. یکتایی فاصلهٔ کروی D را، با تقریب یک عامل مثبت ثابت کنید درصورتی‌که D

۱. در حرکت ناوردا باشد.

۲. نامنفی باشد.

۳. جمع‌پذیر بر هر خط راست کروی بر یک نیمکره باشد (ر.ک. قضیهٔ ج).

همانند بخش ۱۴، مثال ۵، برای تابع $\phi(u)$ چنانکه $D(z_۱, z_۲) = \phi[f_۱(z_۱, z_۲)]$، می‌توان مسئله را به بحث در معادلهٔ تابعی

$$\phi\left(\frac{x_۱ - x_۲}{۱ + x_۱ x_۲}\right) = \phi(x_۱) - \phi(x_۲)$$

تبدیل نمود.

۴. فاصله در الگوی تصویری هندسهٔ بیضوی (ر.ک. بخش ۱۵، د). در صفحهٔ تصویری π که صفحهٔ مماس بر کره در قطب شمال است، فرض می‌کنیم $\mathbf{Q}$ نگارهٔ نقطهٔ $\mathbf{P}(\xi,\eta,\zeta)$ بر کره باشد. می‌توان ξ، η و ζ را مختصات همگن نرمالشدهٔ $\mathbf{Q}$ در نظر گرفت به‌طوری‌که این نرمالسازی با شرط $\xi^۲+\eta^۲+\zeta^۲=۱$ صورت گیرد. در جبر برداری دیده‌ایم که حاصلضرب عددی

$$(\xi_۱\xi_۲)=\xi_۱\xi_۲+\eta_۱\eta_۲+\zeta_۱\zeta_۲$$

تنها ناوردای دو نقطه‌ای مستقل نسبت به دورانهای کره حول $\mathbf{O}$ است. لذا فاصلهٔ بیضوی دو نقطهٔ $\mathbf{Q}_۱$ و $\mathbf{Q}_۲$ در π را می‌توان به صورت

$$D(\mathbf{Q}_۱,\mathbf{Q}_۲)=\phi[(\xi_۱\xi_۲)]$$

نشان داد، که در آن $\phi(u)$ تابع یکنوا پیوستهٔ نامنفی از u است. بنابر (۶.۱۵) داریم

$$(\xi_۱\xi_۲)^۲\leq ۱$$

که نتیجه‌ای است از نابرابری کوشی‌ـشوارتس

$$(\xi_۱\xi_۲)^۲\leq(\xi_۱\xi_۱)(\xi_۲\xi_۲)$$

جمعپذیری D مستلزم رابطهٔ

$$\phi[(\xi_۱\xi_۲)]+\phi[(\xi_۲\xi_۳)]=\phi[(\xi_۱\xi_۳)] \qquad (۸.۱۵)$$

است که به‌ازای سه نقطهٔ $\mathbf{Q}_۱$، $\mathbf{Q}_۲$ و $\mathbf{Q}_۳$ به‌همین‌ترتیب بر یک خط راست کروی قرار دارند. با توجه به ویژگی ناوردایی می‌توانیم فرض کنیم که این خط محور حقیقی است و

$$\mathbf{Q}_۲:\xi_۲=۰,\qquad \eta_۲=۰,\qquad \zeta_۲=۱$$

$$\mathbf{Q}_۱:\xi_۱<۰,\qquad \eta_۱=۰,\qquad \zeta_۱=\sqrt{(۱-\xi_۱^۲)}$$

$$\mathbf{Q}_۳:\xi_۳>۰,\qquad \eta_۳=۰,\qquad \zeta_۳=\sqrt{(۱-\xi_۳^۲)}$$

پس بنابر (۸.۱۵) داریم

$$\phi[\sqrt{(۱-\xi_۱^۲)}]+\phi[\sqrt{(۱-\xi_۳^۲)}]=\phi[\xi_۱\xi_۳+\sqrt{(۱-\xi_۱^۲)}\sqrt{(۱-\xi_۳^۲)}]$$

یا، اگر

$$۱ - \xi_۱^۲ = u^۲, \qquad \xi_۱ = -\sqrt{(۱ - u^۲)}$$

$$۱ - \xi_۳^۲ = v^۲, \qquad \xi_۳ = \sqrt{(۱ - v^۲)}$$

آنگاه

$$\phi(u) + \phi(v) = \phi[uv - \sqrt{(۱ - u^۲)}\sqrt{(۱ - v^۲)}]$$

می‌دانیم که تنها جواب پیوستهٔ $\phi(u)$ از این معادلهٔ تابعی که بر بازهٔ $۱ > u > ۱-$، یکنوا نزولی و مثبت‌است، برابر $c \arccos u$ است که در آن c ثابتی است مثبت.

۵. شاید بجا باشد که بحث مسئلهٔ متناظر را در حالت الگوی تصویری هندسهٔ هذلولوی که در بخش ۱۴، مثال ۲، آورده شده بود، مطرح کنیم. صفحهٔ هذلولوی (یعنی، درون دایرهٔ واحد که در آن پاره‌خطهای راست معرف خطهای هذلولوی‌اند) را می‌توان درون صفحهٔ تصویری π که در $\mathbf{N}$ بر کره مماس است گذارد، به‌طوری‌که این صفحه به صورت نگارهٔ نیمکرهٔ شمالی بر اثر تصویر موازی بر محور ζها درآید. در این صورت یک نقطهٔ $\mathbf{Q}$ در صفحهٔ هذلولوی به مختصات همگن X، Y و Z با

$$\frac{X}{Z} = \xi, \quad \frac{Y}{Z} = \eta \qquad (\xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ = ۱)$$

مشخص می‌شود. معادلهٔ دایرهٔ واحد (یعنی، افق، یا مطلق، یا بینهایت صفحهٔ هذلولوی) عبارت است از

$$X^۲ + Y^۲ - Z^۲ = ۰$$

همهٔ نقاط داخل آن به وسیلهٔ نابرابری

$$X^۲ + Y^۲ - Z^۲ < ۰$$

مشخص می‌شوند. لذا با قراردادن

$$X^۲ + Y^۲ - Z^۲ = -۱ \qquad (۱.۸.۱۵)$$

می‌توانیم مختصات همگن را نرمال کنیم.

حرکتهای هذلولوی در π با تبدیلهای سه‌بعدی لورنتس نمایش داده می‌شوند (ر.ک. مثال ۴، بخش ۱۲) که تنها ناوردای دو نقطه‌ای و مستقل آن با «حاصلضرب عددی لورنتس» داده می‌شود.

$$[X_۱X_۲] = X_۱X_۲ + Y_۱Y_۲ - Z_۱Z_۲$$

فاصلهٔ هذلولوی دو نقطهٔ $\mathbf{Q}_۱$ و $\mathbf{Q}_۲$ به شکل

$$D(\mathbf{Q}_۱, \mathbf{Q}_۲) = \phi([X_۱X_۲])$$

ظاهر می‌شود که در آن $\phi(u)$ تابعی یکنوا پیوستهٔ نامنفی از u است.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$[X_۱X_۲]^۲ \geq ۱ \qquad (۲.۸.۱۵)$$

که نتیجه‌ای از «مشابه لورنتسیِ» نابرابری کوشی-شوارتس در ذیل است. بدون توجه به (۱.۸.۱۵)، اگر

$$[X_۱X_۱] < ۰ \text{، آنگاه } \qquad [X_۱X_۲]^۲ \geq [X_۱X_۱][X_۲X_۲]$$

که علامت تساوی فقط و فقط زمانی برقرار خواهد بود که $X_۱$، $Y_۱$، $Z_۱$ و $X_۲$، $Y_۲$، $Z_۲$ متناسب باشند. برای اثبات این نابرابری، تابع درجهٔ دوم از متغیر حقیقی λی زیرین را در نظر می‌گیریم

$$[(\lambda X_۱ + X_۲)(\lambda X_۱ + X_۲)] = (\lambda X_۱ + X_۲)^۲ + (\lambda Y_۱ + Y_۲)^۲ - (\lambda Z_۱ + Z_۲)^۲$$

$$= [X_۱X_۱]\lambda^۲ + ۲[X_۱X_۲]\lambda + [X_۲X_۲]$$

این عبارت به‌ازای مقادیر بزرگ λ منفی است، ولی به‌ازای $\lambda = -Z_۲/Z_۱$ مثبت یا صفر است (توجه کنید که $Z_۱ \neq ۰$، زیرا که $X_۱^۲ + Y_۱^۲ - Z_۱^۲ < ۰$). زیرا در حالت اخیر مقدار این تابع چنین است

$$\left(X_۲ - \frac{Z_۲}{Z_۱}X_۱\right)^۲ + \left(Y_۲ - \frac{Z_۲}{Z_۱}Y_۱\right)^۲ \geq ۰$$

لذا این تابع درجهٔ دوم بر حسب λ، دارای مبین

$$[X_۱X_۲]^۲ - [X_۱X_۱][X_۲X_۲] \geq ۰$$

است که برابر صفر است اگر و فقط اگر $Z_۲/Z_۱ = Y_۲/Y_۱ = X_۲/X_۱$. (آتسِل (Aczél) [۱]).

جمعپذیری فاصلهٔ هذلولوی D ایجاب می‌کند که به‌ازای هر سه نقطهٔ $\mathbf{Q}_1$، $\mathbf{Q}_2$ و $\mathbf{Q}_3$ به‌همین‌ترتیب، بر یک خط راست هذلولوی داشته باشیم

$$\phi(-[X_1X_2]) + \phi(-[X_2X_3]) = \phi(-[X_1X_3]) \qquad (3.8.15)$$

به‌موجب ویژگی ناوردایی، می‌توان این خط را پاره‌خط $-1 < X < 1$ فرض کرد و بنابراین

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_2 : X_2 = 0 && Y_2 = 0, && Z_2 = 1\\
&\mathbf{Q}_1 : X_1 < 0, && Y_1 = 0, && Z_1 = \sqrt{(1 + X_1^2)}\\
&\mathbf{Q}_3 : X_3 > 0, && Y_3 = 0, && Z_3 = \sqrt{(1 + X_3^2)}
\end{aligned}$$

از این‌رو به‌موجب (۳.۸.۱۵) داریم

$$\phi[\sqrt{(1 + X_1^2)}] + \phi[\sqrt{(1 + X_3^2)}] = \phi[-X_1X_3 + \sqrt{(1 + X_1^2)}\sqrt{(1 + X_3^2)}]$$

و یا اگر بگیریم

$$\begin{aligned}
&1 + X_1^2 = u, && X_1 = -\sqrt{(u^2 - 1)}\\
&1 + X_3^2 = v, && X_3 = \sqrt{(v^2 - 1)}
\end{aligned}$$

آنگاه

$$\phi(u) + \phi(v) = \phi[uv + \sqrt{(u^2 - 1)}\sqrt{(v^2 - 1)}]$$

که به‌ازای شناسه‌های u بزرگتر از ۱ (ر.ک. ۲.۸.۱۵) فقط یک جواب یکنوا پیوسته به صورت تابع $\phi(u) = c \operatorname{arch} u$دارد که در آن c ثابتی است مثبت.

۶. مکان هندسی نقاطی که از یک خط کروی l فاصلهٔ کروی ثابت d (که در امتداد خطهای راست کروی عمود بر l اندازه‌گیری می‌شوند) داشته باشند، یکجفت دایرهٔ$\mathfrak{C}$ است. مرکز و شعاع این دایره‌ها را در توابعی از d بیابید.

۷. نشان دهید که سه زاویهٔ (مثبت) α، β و γ (همه کوچکتر از π) که در نابرابری قضیهٔ ه صدق می‌کنند، همواره یک مثلث یکتای اویلر را (تا حد یک حرکت یا تقارن کروی) تعیین می‌کنند. این بدین معنی است که هر مثلث اویلر با زاویه‌های از پیش تعیین‌شده، با هر مثلث دیگری با همین زاویه‌ها همنهشت یا متقارن است (ر.ک. قضیهٔ د، بخش ۱۴، و).

۸. با انجام جرح و تعدیلهایی در بحث مثال ۱۱، بخش ۱۴، در هندسهٔ کروی، مساحت کروی ناحیهٔ $\mathscr{A}$ در صفحهٔ کامل‌شده برابر است با

$$m(\mathscr{A}) = ۴\iint_{\mathscr{A}} \frac{dx\, dy}{(۱+|z|^۲)^۲}$$

اگر $\mathscr{A}$ قرص مستدیری به شعاع کروی r باشد، مساحت کروی آن برابر است با: $m(\mathscr{A}) = ۴\pi \sin^۲ \frac{۱}{۲} r$.

۹. ثابت کنید مساحت کروی یک مثلث اویلر با فزونی کروی آن برابر است. تحقیق کنید که این مقدار ویژگیهای معمولی یک مساحت، یعنی جمعپذیری، ناوردایی نسبت به حرکتها و تقارنهای کروی را داراست.

۱۰. طول کروی یک منحنی اندازه‌پذیر $\mathscr{C}$ با انتگرال خطی

$$L = \int_{\mathscr{C}} \frac{۲|dz|}{۱+|z|^۲}$$

(ر.ک. مثال ۱۳، بخش ۱۴)

داده می‌شود. از آنجا طول کروی محیط یک دایرهٔ کروی $\mathfrak{C}$ با شعاع کروی r برابر است با

$$L = ۲\pi \sin r$$

پیوستها

پیوست ۱

یکتایی نسبت ناهمساز

به‌موجب قضیهٔ ج بخش ۶، د (ص ۶۴)، نسبت ناهمساز چهار نقطه در صفحهٔ کامل‌شده ناوردایی است از گروه $\mathscr{M}$ مرکب از همهٔ تبدیلهای موبیوس. اکنون نشان داده خواهد شد که این نسبت ناهمساز اساساً یکتاست، یعنی

قضیه. هر ناوردای چهار نقطه‌ای درگروه موبیوس $\mathscr{M}$، تابعی است از نسبت ناهمساز (ر.ک. آتسل (Aczél) [۲] و شورتفه‌گر (Schwerdtfeger) [۵]).

برهان. فرض می‌کنیم $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ سه نقطهٔ ثابت متمایز باشند، مثل

$$z_۱ = ۰, \qquad z_۲ = ۱, \qquad z_۳ = -۱$$

نسبت ناهمساز این نقاط به انضمام یک نقطهٔ دلخواه z، چنین است

$$\lambda = (z, z_۱; z_۲, z_۳) = -\frac{z-۱}{z+۱}$$

در نتیجه (۵.۳.۶) به صورت

$$(Z, Z_۱; Z_۲, Z_۳) = -\frac{z-۱}{z+۱}$$

ظاهر می‌شود. از حل این معادله بر حسب Z تبدیل موبیوس $Z = \mathfrak{H}(z)$ به‌دست می‌آید که تبدیلی است که در شرایط قضیهٔ د (ص ۶۴) صدق می‌کند، یعنی $Z_1 = \mathfrak{H}(0)$، $Z_2 = \mathfrak{H}(1)$ و $Z_3 = \mathfrak{H}(-1)$. عکس آن $z = \mathfrak{H}^{-1}(Z)$ را، که طبق (۶.۳.۶) تابعی از نسبت ناهمساز λ است، در نظر می‌گیریم؛ چون $-(z-1)/(z+1)$ برگشتی است

$$z = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

که به عنوان تابعی از λ، یک ناوردای چهار نقطه‌ای است.

اکنون فرض می‌کنیم $f(Z, Z_1; Z_2, Z_3)$ معرف یک ناوردای چهار نقطه‌ای دلخواه باشد. ناوردایی این تابع نسبت به $\mathfrak{H}^{-1}$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} f(Z, Z_1, Z_2, Z_3) &= f(\mathfrak{H}^{-1}(Z), \mathfrak{H}^{-1}(Z_1); \mathfrak{H}^{-1}(Z_2), \mathfrak{H}^{-1}(Z_3)) \\ &= f(z, 0, 1, -1) \\ &= f\left(-\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, 0, 1, -1\right) \end{aligned}$$

که در حقیقت تابعی است از λ.

پیوست ۲

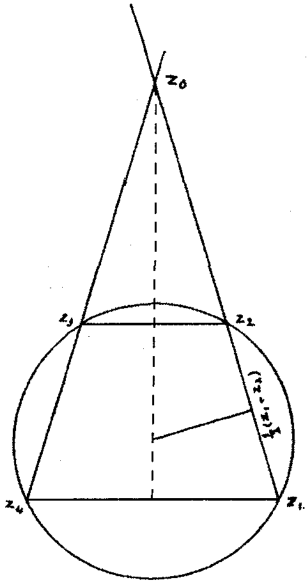
قضیه‌ای از ه. هاروکی

اخیراً هاروکی در یک مقالهٔ تازه [۲] یک ویژگی جالب دسته دایره‌های متعامد را اثبات کرده است. دو دستهٔ سهموی دوبه‌دو متعامد (ر.ک. شکل ۱۷، ص ۸۶) یا دو دستهٔ دوبه‌دو متعامد را در نظر می‌گیریم که یکی از آنها هذلولوی باشد دیگری بیضوی (ر.ک. شکل ۱۸، ص ۸۹). هر جفت از دوایر یکدسته با هر جفت از دایره‌های دستهٔ متعامد در حالت سهموی دو تا، و در حالت هذلولوی چهار تا چهار ضلعی محاطی پدید می‌آورند.

قضیه. چهار رأس هر کدام از این چهار ضلعیها همدایره‌اند، یعنی، بر محیط یک دایره قرار دارند.

برای اثبات این حکم، دسته‌ها را تحت تأثیر یک انعکاس یا یک تبدیل موبیوس قرار می‌دهیم تا به صورت نرمال درآیند. (ر.ک. مثال ۲، بخش ۴). بدین‌ترتیب در حالت سهموی نقطهٔ مشترک تمام این دایره‌ها را به نقطهٔ بینهایت انتقال می‌دهیم و دودسته خط راست موازی و متعامد به‌دست می‌آوریم. اکنون روشن است که این چهارضلعیها، مستطیلهایی خواهند بود که رأسهای آنها همدایره‌اند؛ پس رأسهای این چهار ضلعیهای دسته‌های اولیه نیز همدایره‌اند (ر.ک. بخش ۲، قضیهٔ ب، یا بخش ۶، قضیه ب).

در حالت بیضوی‌ـهذلولوی، صورت نرمال مرکب از دسته‌خطهای راست بیضوی مارّ بر یک



شکل ۳۰

نقطهٔ z_0 و دستهٔ هذلولوی دایره‌های هم‌مرکز به مرکز z_0 هستند. رأسهای z_1، z_2، z_3 و z_4 یک چهار ضلعی نیز رأسهای یک ذوزنقهٔ متقارن و لذا همدایره هستند (ر.ک. شکل ۳۰). دوباره با برگرداندن این صورت نرمال به صورت اولیه که به صورت جفتهای مفروض دسته‌های عمود بر یکدیگرند، قضیه ثابت می‌شود.

بلافاصله دیده می‌شود که اگر دو دستهٔ مذکور بر هم عمود نباشند، قضیه درست نیست. از این‌رو دسته‌های متعامد به‌وسیلهٔ همدایره‌بودن چهار ضلعیهاشان مشخص می‌شوند.

پیوست ۳

کاربردهای چندجمله‌ای مشخصه

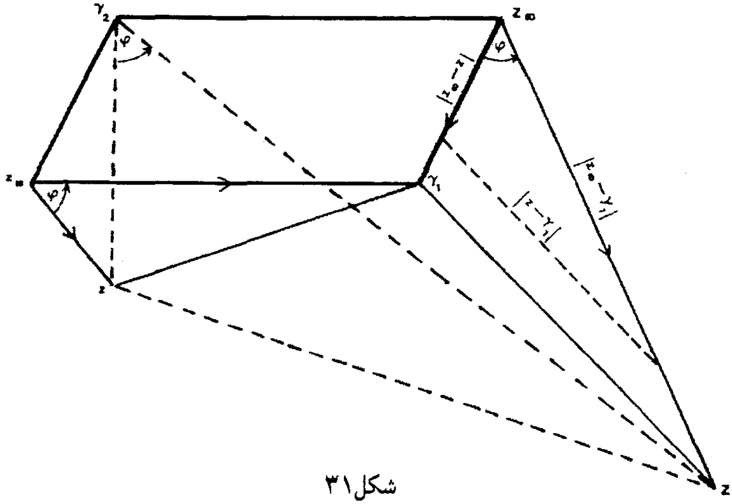
این بخش از پیوست دنبالهٔ بخش ۸، ه، صفحهٔ ۹۳ است. در این بخش به برخی نتایج مندرج در رسالهٔ (منتشرنشده از) ر. استاروست (R. Starrost) [۱] پرداخته می‌شود. نگارنده از استاد ف. باخمن متشکر است که یک فتوکپی از این مقاله را که در آن به‌نحوی نظام‌مند از متوازی‌الاضلاع مشخصه به عنوان پایه‌ای برای ساختمانهای هندسی مربوط به تبدیلهای متناظر موبیوس استفاده نموده، برای او فرستاده است.

الف. پیدا کردن نگارهٔ نقطه. فرض کنید که یک تبدیل ناصحیح موبیوس $\mathfrak{H}$ با چهار نقطهٔ z_∞، Z_∞، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ از متوازی‌الاضلاع مشخصه‌اش که در شرط

$$z_\infty + Z_\infty = \gamma_۱ + \gamma_۲$$

صدق می‌کنند داده شده باشد. به‌موجب (۵.۷.۸) داریم

$$Z = \mathfrak{H}(z) = \frac{Z_\infty z - \gamma_۱\gamma_۲}{z - z_\infty} \qquad (۱.۵.۷.۸)$$



شکل۳۱

این معادله با هر یک از دو رابطهٔ زیر هم‌ارز است

$$Z - Z_\infty = \frac{(\gamma_۱ - Z_\infty)(\gamma_۱ - z_\infty)}{z - z_\infty}, \qquad Z - \gamma_۲ = \frac{(\gamma_۱ - z_\infty)(z - \gamma_۲)}{z - z_\infty}$$

که از آنجا داریم

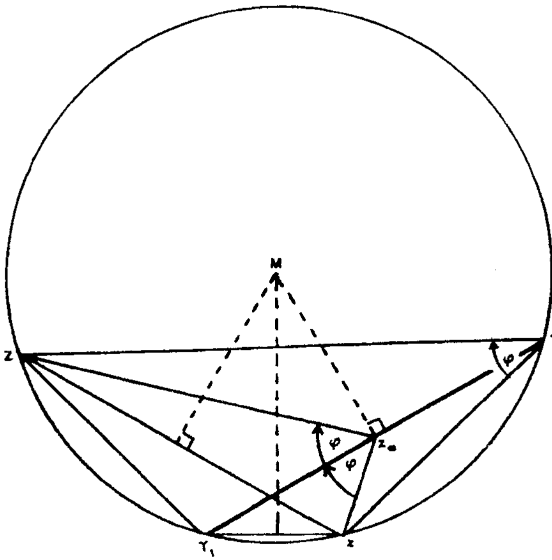
$$\frac{\gamma_۱ - z_\infty}{z - z_\infty} = \frac{Z - Z_\infty}{\gamma_۱ - Z_\infty} = \frac{Z - \gamma_۲}{z - \gamma_۲} \qquad (۶.۷.۸)$$

این روابط تلویحاً بیانگر تبدیل موبیوس $\mathfrak{H}$، از مشابهت سه مثلث

$$\Delta \gamma_۱ z_\infty z, \qquad \Delta Z Z_\infty \gamma_۱, \qquad \Delta Z \gamma_۲ z$$

هستند. اگر متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ معلوم باشد (ر.ک. شکل ۳۱)، با این مشابهتها می‌توان به‌ازای هر $z \neq z_\infty$، نمودار نگارهٔ نقطهٔ $Z = \mathfrak{H}(z)$ را به‌دست آورد. در واقع از این سه مثلث، مثلث اول داده شده است. خود شکل نشان می‌دهد که چگونه مثلث دوم به‌دست می‌آید. مشابهت مثلث سوم محک صحت این پیداکردن است.

ب. فرض کنید $\mathfrak{I} = \mathfrak{H}$، که $\mathfrak{I}$ یک برگشت است، یعنی $z_\infty = Z_\infty$. این متوازی‌الاضلاع مشخصه به یک پاره‌خط تباهیده می‌شود که با $s = s(\gamma_۱, \gamma_۲)$ نمایش داده می‌شود، و دو سر این پاره‌خط،



شکل۳۲

$\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نقاط ثابت $\mathfrak{I}$ هستند و قطب z_∞ وسط s است (ر.ک. بخش ۶، قضیهٔ و، ص ۶۷). اما روابط (۶.۷.۸) چنین خواهند شد

$$\frac{\gamma_۱ - z_\infty}{z - z_\infty} = \frac{Z - z_\infty}{\gamma_۱ - z_\infty} = \frac{Z - \gamma_۲}{z - \gamma_۲} \qquad (۷.۷.۸)$$

از این‌رو مثلثهای $\Delta\gamma_۱ z_\infty z$، $\Delta Z z_\infty \gamma_۱$ و $\Delta Z\gamma_۲ z$ متشابه‌اند و از آنجا، مانند قبل می‌توان به‌ازای هر $z \neq z_\infty$، نگارهٔ نقطهٔ $Z = \mathfrak{I}(z)$ را به صورتی که در شکل ۳۲ آمده است، به‌دست آورد.

باید یادآور شویم که خط راست مارّ بر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، یعنی محمل پاره‌خط s، نیمساز زاویهٔ $\sphericalangle Z z_\infty z = ۲\varphi$ است که در آن

$$\varphi = \operatorname{arc}\frac{Z - z_\infty}{\gamma_۱ - z_\infty} = \operatorname{arc}\frac{Z - \gamma_۲}{z - \gamma_۲}$$

چون k، مقدار ثابت مشخصهٔ یک برگشت، برابر ۱− است، از (۲.۴.۸) نتیجه می‌شود که چهار نقطهٔ Z، z، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ نسبت ناهمساز حقیقی دارند؛ لذا بر یک دایرهٔ حقیقی یا بر یک خط راست واقع‌اند. بر یک خط راست قرار دارند اگر و فقط اگر z بر محمل پاره‌خط $s(\gamma_۱, \gamma_۲)$ واقع باشد. در این حالت $\gamma_۱$ (یا $\gamma_۲$) پاره‌خط $s(z, Z)$ را طوری تقسیم می‌کند که $\gamma_۱ - z_\infty$ واسطهٔ هندسی بین پاره‌خطهای $z - z_\infty$ و $Z - z_\infty$ می‌شود (ر.ک. (۷.۷.۸)).

اکنون با عکس‌نمودن این بحث نشان خواهم داد که به‌ازای هر پاره‌خط $s(\gamma_1, \gamma_2)$ در صفحه یک برگشت $\mathfrak{I}$ وجود دارد که $s(\gamma_1, \gamma_2)$ پاره‌خط مشخصه‌اش است، یعنی، γ_1 و γ_2 نقاط ثابت آن هستند و $z_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ قطب آن است. زیرا اگر این سه نقطه داده شده باشند $\mathfrak{I}$ به‌طور صریح با تساوی

$$Z = \mathfrak{I}(z) = \frac{z_\infty z - \gamma_1\gamma_2}{z - z_\infty}$$

معین می‌شود. این نیز تبدیل موبیوسی است که با سه شرط

$$\mathfrak{I}(\gamma_1) = \gamma_1, \quad \mathfrak{I}(\gamma_2) = \gamma_2, \quad \mathfrak{I}(z_\infty) = \infty$$ (ر.ک. بخش ۶، د)

مشخص می‌شود.

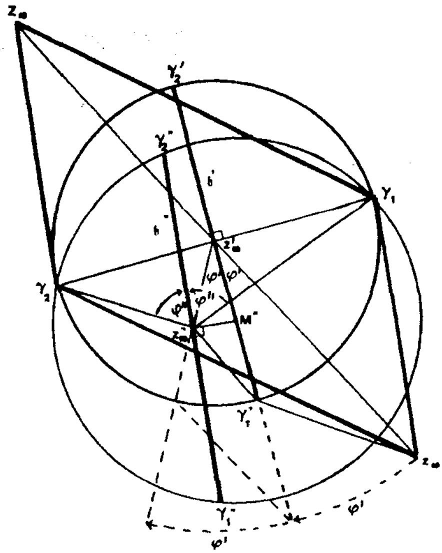
به‌موجب بخش ۶، قضیهٔ و، هر تبدیل موبیوس یک بازگشت است اگر یک‌جفت نقطهٔ مزدوج z و Z داشته باشد به‌طوری‌که $Z = \mathfrak{I}(z)$ و $z = \mathfrak{I}(Z)$. علاوه بر این همهٔ جفتهای z و $\mathfrak{I}(z)$ نسبت به $\mathfrak{I}$ مزدوج‌اند. یک‌جفت دیگر از این مزدوجها معرف یک برگشت است؛ به‌ویژه می‌توان جفت z_∞ و ∞ را اختیار کرد یعنی: یک جفت از مزدوجهای z و Z و قطب z_∞، معرف یک برگشت $\mathfrak{I}$ و نیز پاره‌خط آن $s(\gamma_1, \gamma_2)$ است.

از لحاظ هندسی: با توجه به شکل ۳۲، فرض می‌کنیم نقاط z، Z و z_∞ داده شده باشند. خط $\mathfrak{b}$ مارّ بر دو نقطهٔ γ_1 و γ_2، که اکنون مجهول است، نیمساز زاویهٔ $\sphericalangle z z_\infty Z = 2\varphi$ خواهد بود. عمود بر $\mathfrak{b}$ در z_∞ و عمودمنصف پاره‌خط $s(z, Z)$ را رسم می‌کنیم. این دو خط یکدیگر را در M می‌برند. دایرهٔ مارّ بر z و به مرکز M را رسم می‌کنیم این دایره $\mathfrak{b}$ را در نقاط γ_1 و γ_2 می‌برد.

ج. تجزیهٔ یک تبدیل موبیوس. فرض کنید $\mathfrak{H}$ تبدیل ناصحیح موبیوس باشد که نه برگشتی است و نه سهموی. از بخش ۸، مثال ۹، به این نتیجه می‌رسیم که می‌توان $\mathfrak{H}$ را به صورت حاصلضرب دو برگشت $\mathfrak{I}'$ و $\mathfrak{I}''$ نوشت. زیرا فرض می‌کنیم γ_1 و γ_2 نقاط ثابت، و z_∞ و Z_∞ قطبهای تبدیل $\mathfrak{H}$ و $\mathfrak{H}^{-1}$ باشند. یک برگشت $\mathfrak{I}'$ را طوری انتخاب می‌کنیم که γ_1 و γ_2 یک جفت نقطهٔ مزدوج باشند: $\mathfrak{I}'(\gamma_1) = \gamma_2$. در این صورت $\mathfrak{I}'' = \mathfrak{H}\mathfrak{I}'$ یک برگشت است. بنابراین

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{I}''\mathfrak{I}'$$

یک «تجزیهٔ» $\mathfrak{H}$ خواهد شد.



شکل۳۳

متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ مفروض است. می‌خواهیم پاره‌خطهای مشخصهٔ $s' = s(\gamma_1', \gamma_2')$ و $s'' = s(\gamma_1'', \gamma_2'')$ و از روی آنها قطبهای $z' = \frac{1}{2}(\gamma_1' + \gamma_2')$ و $z'' = \frac{1}{2}(\gamma_1'' + \gamma_2'')$ به‌ترتیب مربوط به $\mathfrak{I}'$ و $\mathfrak{I}''$ را تعیین کنیم. s' و s'' را یک تجزیه متوازی‌الاضلاع $\mathfrak{H}$ گویند.

z_∞'، قطب $\mathfrak{I}'$، را می‌توان به دلخواه، متفاوت با چهار نقطهٔ γ_1، γ_2، z_∞، Z_∞، نقاط ثابت و قطبهای $\mathfrak{H}$ اختیار کرد. پس فرض می‌کنیم z_∞' بر مرکز متوازی‌الاضلاع $\mathfrak{H}$ منطبق باشد

$$z_\infty' = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{2}(z_\infty + Z_\infty) \qquad \text{(ر.ک. شکل ۳۳)}$$

نیمساز $\mathfrak{b}'$ (متناظرِ $\mathfrak{b}$ در ساختمان مذکور در آخرین بند از زیربخش ب) عمودمنصف $s(\gamma_1, \gamma_2)$ در z_∞' است، زیرا γ_1 و γ_2 نسبت به $\mathfrak{I}'$ مزدوج‌اند و زاویهٔ $\sphericalangle \gamma_1 z_\infty' \gamma_2 = \pi$. M' مرکز آن، از تقاطع عمودمنصف $s(\gamma_1, \gamma_2)$ و عمود بر $\mathfrak{b}'$ در z_∞' به‌دست می‌آید؛ پس $M' = z_\infty'$. دایرهٔ به مرکز z_∞' مارّ بر γ_1 و γ_2، $\mathfrak{b}'$ را در نقاط γ_1' و γ_2'، نقاط ثابت $\mathfrak{I}'$، تلاقی می‌کند.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathfrak{H}(z_\infty) = \mathfrak{I}''\mathfrak{I}'(z_\infty) = \infty$$

از این‌رو

$$\mathfrak{I}'(z_\infty) = \mathfrak{I}''(\infty) = z_\infty''$$

در ساختمان هندسی که ابتدا در رابطه با شکل ۳۲ شرح داده شد، z''_∞، قطب $\mathfrak{I}''$، به صورت نگارهٔ z_∞ در نگاشت $\mathfrak{I}'$ پیدا می‌شود. در نتیجه

$$\sphericalangle z_\infty z'_\infty \gamma'_۱ = \sphericalangle \gamma'_۱ z'_\infty z''_\infty = \varphi'$$

و مثلثهای $\Delta z_\infty z'_\infty \gamma'_۱$ و $\Delta \gamma'_۱ z'_\infty z''_\infty$ متشابه‌اند. علاوه‌براین ملاحظه می‌کنیم که $\gamma_۱ = (\gamma_۱)\mathfrak{I}'\mathfrak{I}''$؛ بنابراین $\gamma_۲ = (\gamma_۱)\mathfrak{I}' = (\gamma_۱)\mathfrak{I}''$، در نتیجه $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ هم نسبت به برگشت $\mathfrak{I}''$، که تاکنون از آن فقط قطب z''_∞ را در دست داریم، مزدوج‌اند. برای تعیین نقاط ثابت $\gamma''_۱$ و $\gamma''_۲$ عملی را انجام می‌دهیم که قبلاً در شکل ۳۳ انجام داده بودیم: زاویهٔ $\sphericalangle \gamma_۱ z''_\infty \gamma_۲ = ۲\varphi''$ را با $\mathfrak{b}''$ نصف می‌کنیم. عمود $\mathfrak{p}''$ را بر $\mathfrak{b}''$ در z''_∞ رسم می‌کنیم و M'' نقطهٔ تقاطع $\mathfrak{p}''$ و $\mathfrak{b}'$، یعنی عمودمنصف $s(\gamma_۱, \gamma_۲)$ در z'_∞ را تعیین می‌کنیم. دایرهٔ به مرکز M'' مارّ بر $\gamma_۱$، $\mathfrak{b}''$ را در نقاط $\gamma''_۱$ و $\gamma''_۲$ قطع می‌کنند.

د. متوازی‌الاضلاع حاصلضرب. سرانجام به مسئلهٔ ترسیم متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ یک تبدیل ناصحیح موبیوس $\mathfrak{H}$ می‌پردازیم که حاصلضرب دو تبدیل ناصحیح موبیوس $\mathfrak{H}_۱$ و $\mathfrak{H}_۲$ای است که متوازی‌الاضلاعهای آنها داده شده‌اند. پس $\mathfrak{H}_۲\mathfrak{H}_۱ = \mathfrak{H}$. با توجه به (۵.۷.۸) می‌نویسیم

$$\mathfrak{H}_۱ = \begin{pmatrix} Z_{۱\infty} & -\gamma_{۱۱}\gamma_{۱۲} \\ ۱ & -z_{۱\infty} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_۲ = \begin{pmatrix} Z_{۲\infty} & -\gamma_{۲۱}\gamma_{۲۲} \\ ۱ & -z_{۲\infty} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{۱۱} + \gamma_{۱۲} = z_{۱\infty} + Z_{۱\infty}, \qquad \gamma_{۲۱} + \gamma_{۲۲} = z_{۲\infty} + Z_{۲\infty}$$

نگاشت $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_۲\mathfrak{H}_۱$ صحیح خواهد بود اگر و فقط اگر قطبش $z_\infty = \infty$ باشد، یعنی، $\mathfrak{H}_۲\mathfrak{H}_۱(\infty) = \mathfrak{H}_۲(Z_{۱\infty}) = \infty$ و بنابراین $Z_{۱\infty} = z_{۲\infty} = \mathfrak{H}_۲^{-۱}(\infty)$. پس $\mathfrak{H}$ ناصحیح خواهد شد اگر و فقط اگر $z_{۲\infty} \neq Z_{۱\infty}$. برای پیدا کردن z_∞ و Z_∞، قطبهای $\mathfrak{H}$، توجه داریم که

$$z_\infty = \mathfrak{H}^{-۱}(\infty) = \mathfrak{H}_۱^{-۱}\mathfrak{H}_۲^{-۱}(\infty) = \mathfrak{H}_۱^{-۱}(z_{۲\infty}), \qquad Z_\infty = \mathfrak{H}_۲\mathfrak{H}_۱(\infty) = \mathfrak{H}_۲(Z_{۱\infty})$$

و از روش مذکور در زیربخش الف در رابطه با شکل ۳۱ استفاده می‌کنیم. z_∞، قطب $\mathfrak{H}$، نگارهٔ $z_{۲\infty}$، قطب (معلوم) $\mathfrak{H}_۲$، بر اثر نگاشت $\mathfrak{H}_۱^{-۱}$ است که متوازی‌الاضلاع مشخصه‌اش متوازی‌الاضلاع $\mathfrak{H}_۱$ است با این توضیح که $z_{۱\infty}$ و $Z_{۱\infty}$ با هم عوض شده‌اند. با همین روش Z_∞ را به صورت نگاشت $Z_{۱\infty}$ بر اثر نگاشت $\mathfrak{H}_۲$ به‌دست می‌آوریم.

پس با داشتن دو رأس قطب متوازی‌الاضلاع $\mathfrak{H}$، وسط پاره‌خط $s(z_\infty, Z_\infty)$، یعنی

$$z^{(m)} = \frac{۱}{۲}(z_\infty + Z_\infty) = \frac{۱}{۲}(\gamma_۱ + \gamma_۲)$$

را که برای پیداکردن $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، نقاط ثابت $\mathfrak{H}$، مهم است وارد می‌کنیم. با اثر دادن نگاشت $\mathfrak{H}_۱$ بر $z^{(m)}$ و $\mathfrak{H}_۲$ بر $\mathfrak{H}_۱(z^{(m)})$، نقطهٔ

$$Z^{(m)} = \mathfrak{H}(z^{(m)})$$

را (باز هم از راه ترسیم) به‌دست می‌آوریم.

برای یافتن $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ یادآور می‌شویم که این نقاط یک جفت نقطهٔ مزدوج نسبت به هر یک از عوامل برگشت تجزیهٔ $\mathfrak{H}$ هستند. $\mathfrak{J}'$ را برگشتی می‌گیریم که قطبش $z^{(m)}$ باشد: $z^{(m)} = z'_\infty$، و به‌ازای آن z_∞ و $Z^{(m)}$ یک جفت نقطهٔ مزدوج هستند. پس $s(\gamma'_۱, \gamma'_۲)$، پاره‌خط مشخصهٔ $\mathfrak{J}'$، بر $\mathfrak{b}'$، یعنی نیمساز زاویهٔ $\sphericalangle z_\infty z^{(m)} Z^{(m)} = ۲\varphi'$ (ر.ک. شکل ۳۴)، واقع خواهد بود. پس $\gamma'_۱$ و $\gamma'_۲$ نقاط ثابت $\mathfrak{J}'$ چنین پیدا می‌شوند: $\mathfrak{p}'$ عمود بر $\mathfrak{b}'$ در $z^{(m)}$ و عمودمنصف پاره‌خط $s(z_\infty, Z^{(m)})$ را رسم می‌کنیم. این دو خط یکدیگر را در یک نقطهٔ M' تلاقی می‌کنند. دایرهٔ به مرکز M' مارّ بر $Z^{(m)}$ را رسم می‌کنیم. این دایره $\mathfrak{b}'$ را در نقاط $\gamma'_۱$ و $\gamma'_۲$ قطع می‌کند. نقاط $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ فصل مشترکهای $\mathfrak{p}'$ با دایرهٔ به مرکز $z^{(m)}$ و مارّ بر $\gamma'_۱$ و $\gamma'_۲$ هستند. با این کار ترسیم متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ $\mathfrak{H}$ پایان می‌یابد.

$z^{(m)}$ و Z_∞ به صورت یک جفت نقطهٔ $\mathfrak{J}''$، دومین عامل در تجزیهٔ $\mathfrak{H}$، هستند و نیمساز زاویهٔ $\sphericalangle z^{(m)} Z^{(m)} Z_\infty$ دایرهٔ به مرکز $Z^{(m)}$، مارّ بر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ را در نقاط $\gamma''_۱$ و $\gamma''_۲$ تلاقی می‌کند. پس، در واقع

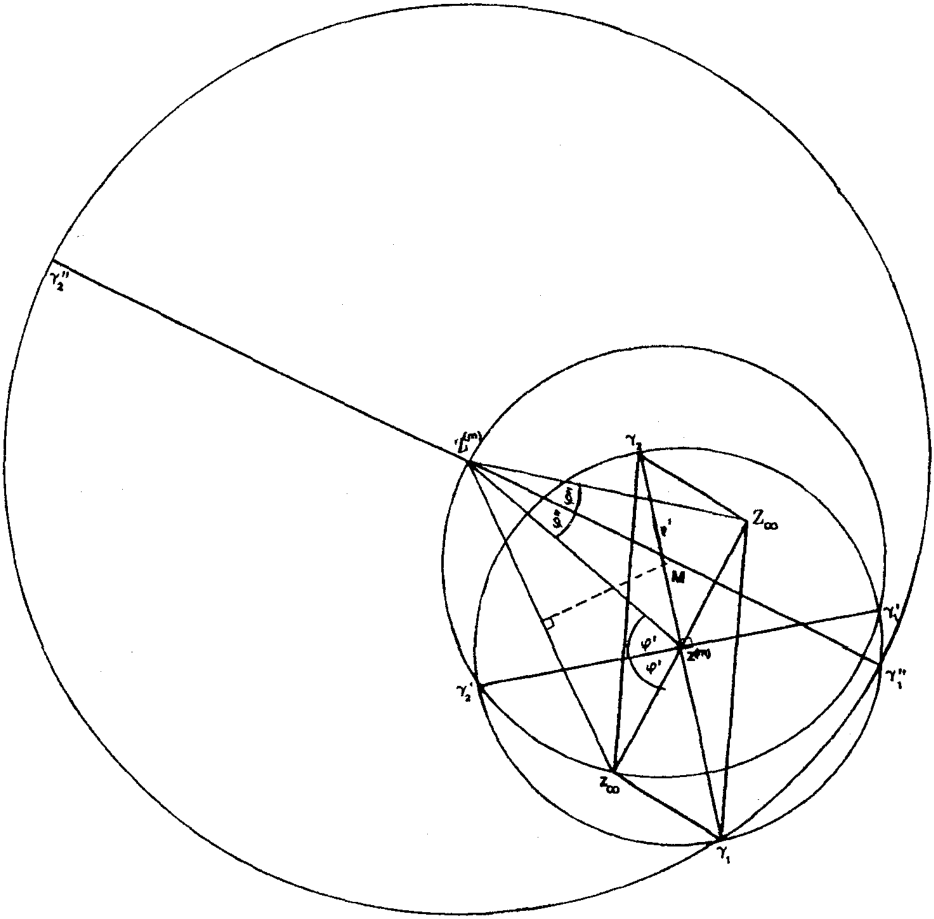
$$\mathfrak{J}'(z_\infty) = Z^{(m)}, \quad \mathfrak{J}''(Z^{(m)}) = \infty, \quad \mathfrak{J}'(\gamma_۱) = \gamma_۲, \quad \mathfrak{J}''(\gamma_۲) = \gamma_۱$$

که $\mathfrak{H} = \mathfrak{J}''\mathfrak{J}'$ را معین می‌کند.

مثالها

۱. شکل ۳۱ را در حالتی رسم کنید که $\mathfrak{H}$ تبدیل سهموی ناصحیح موبیوس $\mathfrak{H}$، مثلاً $\mathfrak{H}(z) = -z/(z-۱)$ باشد.

۲. برای یک متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ مفروض $\mathfrak{H}$، از راه ترسیم هندسی متوازی‌الاضلاع $\mathfrak{T}\mathfrak{H}\mathfrak{T}^{-۱}$ را پیدا کنید اگر $\mathfrak{T}$ متوازی‌الاضلاع مشخصهٔ تبدیل ناصحیح موبیوس از پیش تعیین شده باشد.



شکل۳۴

۳. در شکل ۳۳ نشان دهید که دو مثلث $\Delta \gamma_2 z''_\infty z'_\infty$ و $\Delta z_\infty \gamma_1 z'_\infty$ متشابه‌اند.

۴. با انتخاب نقطهٔ z'_∞ در یک وضعیت دلخواه، پیداکردن تجزیهٔ یک تبدیل ناصحیح موبیوس $\mathfrak{H}$ را به‌صورتی‌که در شکل ۳۳ آمده است، تعمیم دهید.

پیوست ۴

اعداد مختلط در هندسه[1]

کتاب یاگلم به زبان روسی [۱] در ۱۹۶۳ و ترجمهٔ مفصل آن به زبان انگلیسی [۲] در سال ۱۹۶۸ منتشر شد. آن کتاب را نمی‌توان جایگزین کتاب حاضر کرد، با اینکه عنوان آن چنین شبهه‌ای را القا می‌کند. مقدار نسبتاً زیادی از هندسه و همین‌طور از جبر در این دو کتاب با هم متفاوت‌اند. کتاب ما به مبحث هیأت C مرکب از اعداد مختلط «معمولی» محدود شده است. یکی گرفتن این اعداد با نقاط یک صفحه طبعاً به بسط تحلیلی هندسهٔ گروه تبدیلهای حافظ دایره (تبدیلهای موبیوس و پاد همنگاریها (ر.ک. بخشهای ۶ تا ۹)) و برخی از زیرگروههای آن منجر می‌شود (بخشهای ۱۳ تا ۱۵). ولی یاگلم غیر از C دو دستگاه از اعداد مختلط شرکتپذیر و مستقل از ترتیب را به عنوان ابزار جبری برای بسط نظریه‌های هندسی ارائه نموده است، یعنی

الف. دستگاه $C_\circ$ اعداد دوتایی[2].

$$z = u + \varepsilon v, \qquad \varepsilon^{۲} = ۰,\ \ \varepsilon \neq ۰ \qquad (u \text{ و } v \text{ حقیقی})$$

---

۱. نوشتهٔ I. M. Yaglom.

2. *dual numbers*

که هیأت نیست، بلکه حلقه‌ای است مستقل از ترتیب با عنصر واحد یکتای $1+\varepsilon 0$ و مقسوم‌علیه صفر $0+\varepsilon v$. این اعداد دوتایی با خطهای راست جهت‌دار در صفحه یکی گرفته شده‌اند، یعنی، u و v مختصات خط گرفته شده‌اند. باز تبدیلها خطی‌ـ‌کسری

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc\neq\varepsilon g; \quad a,b,c,d,g \text{ در } C_0$$

نمایشهای تحلیلی نگاشتهای معنی‌دارِ هندسی (مثل حرکتهای اقلیدسی صفحه بر خودش) هستند که خط را بر خط و هر چهار خط مماس بر یک دایره یا مارّ بر یک نقطه را بر چهار خط مماس بر یک دایره یا مارّ بر یک نقطه تصویر می‌کنند و لذا دایره‌ها را هم بر دایره می‌نگارند. بدین‌جهت این نگاشتها را «تبدیلهای مستدیر محوری» گویند. اِ. لاگر این تبدیلها را به شکل دیگری بررسی کرده است و ازاین‌رو آنها را تبدیلهای لاگر هم می‌گویند. به‌عنوان یک ناوردای چهار نقطه‌ای، نسبت ناهمساز چهار عدد دوتایی هم بر اثر این تبدیها تعبیر هندسی دارد. همانند حالت C، برخی قضایای جالب هندسی با جبر C_0 حاصل می‌شوند.

ب. دستگاه C_1 موسوم به اعداد دوگانه.

$$z=u+ev, \qquad e^2=1, \quad e\neq\pm 1 \qquad (u \text{ و } v \text{ حقیقی})$$

حلقه‌ای است مستقل از ترتیب با عنصر یکهٔ یکتای $1+e0$ و مقسوم‌علیه‌های صفر $u+eu$ (زیرا $(1+e)(1-e)=1-e^2=0$). این دستگاه در هندسهٔ هذلولوی (لباچفسکی) نقشی مشابه نقش C_0 در هندسهٔ خط اقلیدسی را دارد.

کتاب او. بنتس (W. Benz) [۲] به تعمیمهای گسترده‌ای از مفاهیم بنیادی کتاب یاگلم تخصیص یافته است.

کتاب‌شناسی

J. Aczél (Ya. Ačel')

[1] Some general methods in the theory of functional equations in one variable. New applications of functional equations (in Russian). *Uspehi Mat. Nauk* (N.S.), **11**, no. 3 (69) (1956), 3–68. Cf. *Math. Reviews*, **18**, p. 807.

D. M. Adelman

[1] Note on the arithmetic of bilinear transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 443–8.

F. Bachmann

[1] Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen. *Math. Annalen*, **126** (1953), 76–92.

[2] *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* (Sammlung "Grundlehren", Bd. 96), Berlin, 1959.

R. Baldus

[1] Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene. *Sammlung Göschen*, **970** (Berlin-Leipzig, 1927).

H. Behnke and F. Sommer

[1] *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Grundlehren, Bd. 77, Berlin, 1955) Kap. IV, §§ 3–5.

W. Benz

[1] Über Möbiusebenen, Ein Bericht. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker vereinigung*, **63** (1960), 1–27.

W. Blaschke

[1] *Vorlesungen ueber Differentialgeometrie III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln* (Grundlehren, 29, Berlin, 1929).

R. Brauer

[1] A characterization of null systems in projective space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936), 247–54.

N. G. de Bruijn and G. Szekeres

[1] On some exponential and polar representations of matrices. *Nieuw. Arch. Wisk.* (3), III (1955), 20–32.

C. Caratheodory

[1] *Conformal representation.* Cambridge Tracts, **28** (1932).

[2] The most general transformations of plane regions which transform circles into circles. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 573–9. (Gesammelte Mathematische Schriften, vol. III, **73** [München, 1955]).

[3] *Funktionentheorie, Band I* (Basel, 1950).

[4] *Theory of functions of a complex variable* (translation of [3] by F. Steinhardt) (New York, 1954).

E. Cartan

[1] *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. Mémor. Sci. Math.*, **42** (Paris, 1930).

[2] *Leçons sur la géométrie projective complexe. Cahiers scientifiques*, **10** (Paris, 1931).

W. B. Carver

[1] The conjugate coordinate system for plane euclidean geometry. *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956). (Slaught Memorial Paper, no. 5, 86 pp., 1956).

A. CAYLEY

[1] On the correspondence of homographies and rotations. *Math. Annalen*, **15** (1879), 238–40. Coll. Math. Papers X, 153–4.

[2] On the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and in connection therewith the function $\frac{ax+b}{cx+d}$. *Mess. of Math.* 9 (1880), 104–9. Coll. Math. Papers XI, 252–7.

S. COHN-VOSSEN, *see* HILBERT and COHN-VOSSEN

J. L. COOLIDGE

[1] *A treatise on the circle and the sphere* (Oxford, 1916).

[2] *The geometry of the complex domain* (Oxford, 1924).

C. COSNITA

[1] Sur une substitution homographique. *Bull. Inst. Politchn. Bucuresti*, **18** (1956), no. 3–4, 89–97. Cf. *Math. Reviews*, **20**, no. 3487 (1959), p. 577.

R. COURANT

[1] *Differential and integral calculus* (London, 1937).

R. COURANT and H. ROBBINS

[1] *What is mathematics?* (Oxford University Press, 1945).

H. S. M. COXETER

[1] *Non-euclidean geometry*, Math. Expositions 2 (Toronto, 1957).

[2] *The real projective plane* (New York, 1949).

[3] On subgroups of the modular group, *J. Math. pures et appl.* (1958), 317–19.

[4] *Introduction to Geometry*, (New York, 1961), chapters 6, 9, 14, 16.

G. DARBOUX

[1] Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. *Math. Annalen*, **17** (1880), 55–61.

R. DEAUX

[1] *Introduction à la géométrie des nombres complexes* (Bruxelles, 1947).

[2] Sur l'image d'une affinité dans le plan de Gauss. *Mathésis*, **59** (1950), 101–10.

[3] A Moebius involution (advanced problem). *Amer. Math. Monthly*, **60** (1953), 127–8.

[4] Sur trois homographies du plan de Gauss. *Bull. de l'école polytechnique de Jassy*, **2** (1947), 106–16. (Cf. *Zentralblatt für Mathematik*, **32** [1950], 114.)

[5] Couples communs à une involution de Moebius et à une inversion isogonale. *Mathesis*, **63** (1954), 216–18.

[6] *Introduction to the geometry of complex numbers* (translation of [1] by H. Eves) (New York, 1957).

M. P. DRAZIN

[1] A note on permutable bilinear transformations. *Math. Gazette*, **36**, no. 315 (1952), 30–2.

P. ERDÖS and G. PIRANIAN

[1] Sequences of linear fractional transformations. *Michigan Math. J.*, **6**, no. 3 (1959), 205–9.

H. EVES and V. E. HOGGATT

[1] Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model. *Amer. Math. Monthly*, **58**, (1951), 469–74.

G. EWALD

[1] Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie. *Math. Annalen*, **131** (1956), 354–71.

K. FLADT

[1] Bemerkungen zur Darstellung der ebenen hyperbolischen Geometrie im ebenen hyperbolischen Kreisbündel. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 99–105.

L. R. FORD

[1] *Automorphic functions* (New York, 1929).

H. G. FORDER

[1] Coordinates in geometry, *Auckland Univ. College Bull.*, **41**, Math. Ser. no. 1 (1953), 32 pp.

A. R. FORSYTH

[1] *Theory of functions* (Cambridge, 1900), p. 717.

R. FRICKE and F. KLEIN

[1] *Vorlesungen ueber die Theorie der automorphen Funktionen*, vol. I (2nd ed., Leipzig-Berlin, 1926).

E. GALOIS

[1] Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques. Oeuvres mathématiques (Paris, 1951), pp. 1–8.

K. GOLDBERG

[1] Unimodular matrices of order 2 that commute. *Washington Acad. Sci.*, 46 (1956), 337–8.

TH. GOT

[1] *Propriétés générales des groupes discontinus. Mémor. Sci. math.*, 60 (1933).

[2] *Domaines fondamentaux des groupes fuchsiens et automorphes. Mémor. Sci. math.*, 68 (1934).

G. H. HARDY

[1] *A course in pure mathematics* (Cambridge, 1938), chapter III.

D. HILBERT

[1] *Grundlagen der Geometrie* (6th ed., Leipzig-Berlin, 1923), Anhang IV (*Math. Annalen*, 56 [1902], 381–422).

D. HILBERT and S. COHN-VOSSEN

[1] *Anschauliche Geometrie* (Berlin, 1932).

[2] *Geometry and the imagination* (translation of [1]) (New York, 1952).

A. J. HOFFMAN

[1] A note on cross ratio. *Amer. Math. Monthly*, 58 (1951), 613–14.

J. E. HOFMANN

[1] Ueber sich nicht treffende hyperbolische Gerade. *Archiv der Math.*, 9 (1958), 219–27.

[2] Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene, *Enseignement Math.* (2), 4 (1958), 178–211.

E. JACOBSTHAL

[1] Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen. *Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft*, 17 (1919–20), 43–57 (cf. *Jahrbuch Fortschritte der Math.*, 47 [1924], 109).

[2] Zur Theorie der linearen Abbildungen. *Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft*, 33 (1934), 15–34.

[3] Ueber die Klasseninvariante ähnlicher Abbildungen. *Kon. Norske Vid. Selskab Forhandlinger*, Part I, 25 (1952), 119–24; Part II, 26 (1953), 10–15.

[4] Ueber die Kreise, die durch eine gegebene lineare Funktion auf einen konzentrischen Kreis abgebildet werden. *Kon. Norske Vid. Selskabs Skrifter*, 3 (1954), 22 pp.

G. JULIA

[1] *Principes géométriques d'analyse* I. *Cahiers scientifiques*, 6 (Paris, 1930).

B. DE KERÉKJÁRTÓ

[1] A geometrical theory of continuous groups I, II. *Ann. Math.*, 27 (1925–6), 105–17; *Ann Math.*, 29 (1928), 169–79.

[2] Sur le groupe des homographies et des anti-homographies d'une variable complexe. *Comm. math. Helv.*, 13 (1940), 68–82.

[3] Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. *Acta math.*, 74 (1941), 311–41 (*J. Math. pures et appl.*, 21 [1942], 67–100).

F. KLEIN

[1] Vergleichende Betrachtungen ueber geometrische Forschungen (Erlanger Programm

1872). *Math. Annalen*, 43 (1893) (Gesammelte Mathematische Werke Bd. I, no. 27, 460–97)
[2] *Vorlesungen ueber nicht-euklidische Geometrie* (Berlin, 1928).
[3] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus Bd. II: Geometrie* (Berlin, 1925).
[4] Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie. *Göttinger Nachrichten* 1872, or *Math. Annalen* 22, or *Gesammelte Mathematische* Werke Bd. I, no. 23, 402–5.

K. Kolden
[1] Continued fractions and linear substitutions. *Archiv for Math. og Naturvid. B.L.*, 6 (Oslo, 1949), 46 pp.

K. Leisenring
[1] A theorem on non-loxodromic Moebius transformations. *Michigan Math. J.*, 6 (1959), 51–52.

P. Libois
[1] Systèmes linéaires de projectivités entre deux formes de première espèce. *Mathésis*, 40 (1930), 121–8.

S. Lie and G. Scheffers
[1] *Geometrie der Berührungstransformationen* (Leipzig, 1896), pp. 414–6.

F. Löbell
[1] Eine Konstruktion des Punktepaares, das zu zwei gegebenen Punktepaaren der komplexen Zahlenebene harmonisch liegt. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinigung*, 36 (1927), 364.

A. I. Markushevich (Markuševič)
[1] *Teoriya analitičeskich funkcii* (Moscow, 1950), chapter II, § 4.

V. Medek
[1] Linearne systemy projectivnych pribuznosti na priamke (Linear systems of projective transformations on a straight line) (Slovakian). *Mat. Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied* 6, 2 (1956), 98–108. Cf. *Math. Reviews*, 18 (1957), 329.

R. Mehmke
[1] Zur Bestimmung des Punktepaares, das im Sinne von Moebius zwei gegebene Punktepaare der Ebene harmonisch trennt. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinigung*, 37 (1928), 333–4.

A. F. Moebius
[1] Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. *Leipziger Ber., math.-phys. Kl.*, 4 (1852), 41–54 (*J. f. Math.* [Crelle], 52 [1856], 229–42, and *Werke Bd. II*, 191–204).
[2] Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren. *Leipziger Ber.*, 5 (1853), 14–24 (*J. f. Math.*, 52 [1856], 218–28, and *Werke Bd. II*, 205–17).
[3] Ueber die Involution von Punkten in einer Ebene. *Leipziger Ber.*, 5 (1853), 176–90 (*Werke Bd. II*, 219–36).
[4] Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Gestalt. *Leipziger Ber.*, 7 (1855), 529–95 (*Werke Bd. II*, 243–314).

P. Montel
[1] *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, 1927), chapter VIII.

F. Morley and F. V. Morley

[1] *Inversive geometry* (London, 1933).

F. MORLEY and J. R. MUSSELMAN

[1] On $2n$ points with a real cross ratio. *Amer. J. Math.*, **59** (1937), 787–92.

A. PANTAZI

[1] Sur certaines configurations d'homographies planes. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest*, 7 (1937), 15–19.

D. PEDOE

[1] *Circles* (London, New York, Paris, 1957).

O. PERRON

[1] *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig, 1929).

E. PICARD

[1] *Leçons sur quelques équations fonctionelles avec des applications. Cahiers scientifiques*, 3 (Paris, 1928).

G. PIRANIAN, *see* P. ERDÖS

G. PIRANIAN and W. J. THRON

[1] Convergence properties of linear fractional transformations. *Michigan Math. J.*, **4** (1957), 129–35.

G. DE B. ROBINSON

[1] *Foundations of geometry.* Math. Expositions 1 (Toronto, 1946).

HERMANN SCHMIDT

[1] *Die Inversion und ihre Anwendungen* (München, 1950).

H. SCHWERDTFEGER

[1] Moebius transformations and continued fractions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 307–10.

[2] *Introduction to linear algebra and the theory of matrices.* (Groningen, 1950).

[3] Zur Geometrie der Moebius-Transformation. *Math. Nachrichten*, **18** (1958), 168–72.

[4] On the discriminant $x'Ax \cdot y'Ay - (x'Ay)^2$. *Can. Math. Bull.*, **1** (1958), 175–9.

B. SEGRE

[1] Gli automorphismi del corpo complesso ed un problema di Corrado Segre. *Atti Accad. Naz. Lincei 1947 Rendiconti*, 3 (1947), 414–20.

C. SEGRE

[1] Note sur les homographies lineaires et leurs faisceaux. *J. r. a. Math.*, **100** (1887), 317–30.

F. SIMONART

[1] Sur les déplacements dans le plan complexe. *Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci.*, **38** (1952), 885–91.

C. STEPHANOS

[1] Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques. *Math. Annalen*, **22** (1883), 299–367.

E. STUDY

[1] Das Appolonische Problem. *Math. Annalen*, **49** (1897), 497–542.

[2] Eine neue Art geometrischer Konstruktionen. *Sitzungsber. d. Niederrheinischen Gesellsch. f. Natur-u. Heilkunde* (1897), 1–7 (cf. E. A. Weiss [2]).

P. SZASZ

[1] Ueber die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen Geometrie. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 29–34.

[2] Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 65–69.

[3] Neuer Beweis für die Darstellung der Bewegungen und Umwendungen der hyper-

bolischen Ebene mit Hilfe der Hilbertschen Endenrechnung. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Scet. Math.*, **1** (1958), 67–70.

O. TAUSSKY and J. TODD

[1] Commuting bilinear transformations and matrices. *J. Washington Acad. Sci.*, **46** (1956), 373–5.

W. J. THRON, *see* G. PIRANIAN.

J. TITS

[1] Généralisation des groups projectifs basée sur leurs propriétés de transitivité. *Mém. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci.*, **27** (1952), 1–115.

[2] Groupes triplement transitifs continus; généralisation d'un théorème de Kerékjártó. *Compos. math.*, **9** (1951), 85–96.

O. VEBLEN and J. W. YOUNG

[1] *Projective geometry I* (Boston, New York, 1910, 1938).

H. WAADELAND

[1] Ueber die Klassen ähnlicher linearer Abbildungen. *Kon. Norske Vid. Selskab Forhandlinger*, Part I, **25** (1952), 125–8; Part II, **25** (1952), 129–30.

G. N. WATSON

[1] A bilinear transformation. *Edinburgh Math. Notes*, no. 40 (1956), 1–7.

E. A. WEISS

[1] Zur Konstruktion des Punktepaares, das zu zwei gegebenen Punktepaaren der komplexen Zahlenebene harmonisch liegt. *Jahresber Deutsche Math. Vereinigung*, **37** (1928), 334–5.

[2] E. Study's Mathematische Schriften I. *Jahresber. Deutsche Math. Vereinigung*, **43** (1933), 108–24.

کتاب‌شناسی تکمیلی

J. ACZÉL

[2] *Lectures on functional equations and their applications* (New York and London: Academic Press, 1966), pp. 232–3.

J. ACZÉL and M. A. MCKIERNAN

[1] On the characterization of plane projective and complex Moebius transformations. *Math. Nachrichten*, 33 (1967), 315–37.

R. ARTZY

[1] *Linear geometry* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1965).

W. BENZ

[2] *Vorlesungen über Geometrie der Algebren* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1973).

H. S. M. COXETER

[5] The inversive plane and hyperbolic space. *Abhandl. Math. Seminar*, Universität Hamburg, 29 (1966), 217–42.

[6] The Lorentz group and the group of homographies. *Proc. Internat. Congress on the Theory of Groups*, held at the Australian National University, Canberra, 1965 (1967), 73–7.

[7] Parallel lines. *Can. Math. Bull.* (1979).

H. S. M. COXETER and S. L. GREITZER

[1] *Geometry revisited*, New Math. Library 19 (New York: Random House, 1967), chapter 5.

P. J. DAVIS

[1] *The Schwarz function and its applications* (Carus Math., monograph no. 17, Math. Association of America, 1974).

H. EVES

[1] A survey of geometry (London: Allyn and Bacon, 1965).

H. HARUKI

[1] On the principle of circle transformation of a linear rational function in analytic function theory. *Duke Math. J.*, 36 (1969), 257–59.

[2] A characteristic property of orthogonal pencils of coaxial circles from the standpoint of conformal mapping. *Annales Polon. Math.*, 31 (1975), 171–7.

H. LIEBECK

[1] The convergence of sequences with linear fractional recurrence relation. *Amer. Math. Monthly*, 68 (1961), 353–5.

W. MAGNUS

[1] *Noneuclidean tesselations and their groups* (New York and London: Academic Press, 1974).

D. PEDOE

[2] *A course of geometry* (Cambridge University Press, 1970).

H. SCHWERDTFEGER

[5] Invariants of a class of transformation groups. *Aequationes Math.*, 14 (1976), 105–10.

[6] Invariants of a class of transformation groups II. *Aequationes Math.*, 17 (1978), 292–4.

R. STARROST

[1] *Das charakteristische Parallelogramm einer Moebiustransformation Staatsexamensarbeit* (Kiel, 1966), 53 pp.

I. M. YAGLOM (JAGLOM)

[1] *Complex numbers and their applications in geometry* (in Russian) (Gosudarst. izdat., Moscow, 1963).

[2] *Complex numbers in geometry* (translation of [1] by E. J. F. Primrose) (New York and London: Academic Press, 1968).

واژه‌نامه

اَبَر خم	hypercycle
اتساع	dilation
افق	horizon
الگوی پوانکاره	Poincaré model
انتقال	translation
انعکاس	inversion
بارست مسلسل (پیوسته)	iteration continuous
برگشت	involution
پادبرگشت	anti-involution
پادهمنگاری	anti-homography
تبدیل برگشتی	involutory transformation
تبدیل برگشتی موبیوس	involution
تبدیل ثابت زاویه‌ای	loxodromic
تبدیل حافظ دایره	circle-preserving transformation
تبدیل حافظ زاویهٔ واحد موبیوس	preserving the unit circle
تبدیل دوخطی	bilinear trasformation
تبدیل موبیوس	Moebius transformation
تصویر گنجنگاشتی	stereographic projection
تصویر منظری	perspectivity

orthogonality	تعامد
commutativity	تعویضپذیری
symmetry	تقارن
harmonic division	تقسیم همساز
schlight (univalent)	تک‌ارز
characteristic constant	ثابت مشخصه
conjugate pair	جفت مزدوج
cyclotomic polynomial	چندجمله‌ای دایره‌بُری
Fibonacci polynomials	چندجمله‌ایهای فیبوناتچی
complex projective line	خط تصویری مختلط
$\mathcal{G}$-straight line	خط راست $\mathcal{G}$ای
polar line	خط قطبی
automorphism	خودریختی
horocycle	دایرهٔ زمانی
recurrent sequence	دنبالهٔ تراجعی
periodic sequences	دنبالهٔ متناوب
rotation	دورانها
angel of parallelism	زاویهٔ توازی
angle of parallelism	زاویهٔ توازی
Chasles	شال
Schröder's	شرودر
completed plane	صفحهٔ کامل‌شده
normal forms	صورتهای نرمال
angular factor	عامل زاویه‌ای
ultra-parallel	فراموازی
spherical excess	فزونی کروی
reciprocity law	قانون عکس
pole, polarity	قطب، قطبی

کاستی	defect
کاستی مثلث	defect of triangle
کسر مسلسل	continued fraction
کسرهای مسلسل متناوب	periodic continued fractions
کلاف دوایر	bundles of circle
کلافهای دوایر	bundles of circles
گروه تبدیلهای موبیوس	groups of moebius transformations
گروه چهارعنصری	four group
گروه لورنتس	Lorentz group
لباچفسکی	Lobačevski
ماتریس نرمالشده	normalized matrix
مبین	discriminant
متقاطر	antipodal
متوازی‌الاضلاع مشخصه	characteristic parallelogram
مثلث اویلر	Euler triangle
مثلثات	trigonometry
مختصات همگن (متجانس)	homogeneous coordinates
مطلق	absolute
معادلهٔ تابعی آبل	Abel's functional equation
مقدار اصلی	principal value
نابرابری کوشی-شوارتس	cauchy-schwarz inequality
ناورداها	invariants
نسبت ناهمساز	cross ratio
نقاط متقاطر	antipodal points
نقطهٔ بینهایت	point at infinity
نقطهٔ ثابت	fixed point
نقطهٔ جاذب	attractive point
نقطهٔ دافع	repulsive point

indifferent point	نقطهٔ معمولی
comformal mapping	نگاشت همدیس
collineation	همخطی
homography	همنگاری
elliptic geometry	هندسهٔ بیضوی
spherical geometry	هندسهٔ کروی
non-Euclidean geometry	هندسهٔ نااقلیدسی
non-Euclidean	هندسهٔ نااقلیدسی
hyperbolic geometry	هندسهٔ هذلولوی
field	هیأت
Yaglom	یاگلم
isomorphism	یکریختی

نمایه