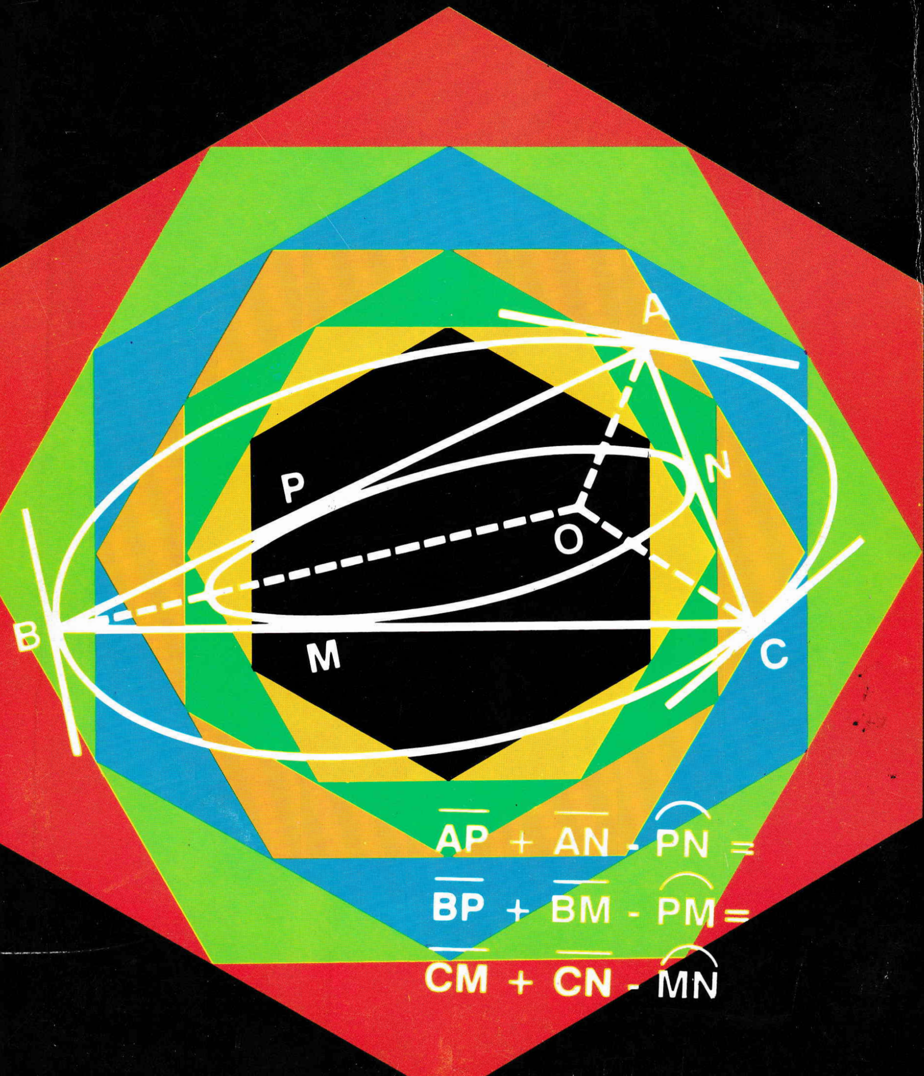
هندسهٔ تحلیلی چند محوری

و چند رسالهٔ دیگر

پژوهش و نگارش دکتر احمد شرف الدّین



فهرست

زندگینامهٔ مختصر مؤلف

به‌هنگام نوجوانی پدرم را ازدست دادم. اما یاد او که زندگی بسیار ساده و افکار عالی داشت همواره در خاطرم پایدار است.

او پس از سالها استفاده از محضر میرزای شیرازی ـ صاحب فتوای تحریم تنباکو ـ رضوان‌الله علیه، در بازگشت به‌تهران تا اواخر عمر در مدرسهٔ مشیرالسلطنه به‌تدریس فقه و اصول و حکمت پرداخت.

تحصیلات ابتدایی را در مدرسهٔ بَدر و تحصیلات متوسطه را در دبیرستانهای علمیه و البرز و تحصیلات دورهٔ لیسانس ریاضی را در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران گذراندم و پس از چندین سال تدریس ریاضی در دبیرستانها، تحصیلات دورهٔ دکتری را در فرانسه انجام دادم.

فعالیت‌شغلی من‌چندین سال‌تدریس در دبیرستانها و سپس انجام‌وظیفه در وزارت فرهنگ‌وآموزش عالی درسمت کارشناس علمی‌وعضو کمیتهٔ تخصصی شورای پژوهشهای علمی کشور و درکنار آن تدریس در چند دانشگاه بوده است.

در سال آخر دبیرستان موفق به‌ابداع چند حکم در هندسه شدم، یکی از آنها حکمی دربارهٔ چندضلعیهای منتظم بودکه تعمیمی از قضیهٔ استورم است. در آن هنگام از قضیهٔ استورم هیچ اطلاعی نداشتم. کارهای خود را به‌چند تن ارائه کردم. با کمال تأسف هیچ‌کدام نگفتند که اطلاع کافی ندارند و اظهارنظرهای غیرعادلانه کردند. در چهارمین سال تدریس در دبیرستانها، قصد تألیف کتابی در هندسه داشتم. برای بررسی بیشتر نزد شادروان دکتر محسن هشترودی رفتم و قصد خود را مطرح کردم و ضمناً احکامی راکه چند سال پیشتر ابداع کرده بودم با چند کار جدیدتر به‌ایشان ارائه کردم. ایشان تازگی بعضی از آنها را تأیید کردند و حکمی راکه دربارهٔ چندضلعیهای منتظم ابداع کرده بودم تعمیمی از قضیهٔ استورم دانستند و قضیهٔ استورم را برای من شرح دادند. ایشان مرا بسیار تشویق کردند و اقداماتی برای ادامهٔ تحصیل من در خارج مبذول داشتند. باکمال تأسف مشکلات اداری مانعی بزرگ در مقابل تحقق عنایت ایشان بود. من هیچ‌گاه رفتار

تشویق‌آمیز ایشان را فراموش نمی‌کنم. مشوق دیگر من استاد ارجمند احمد آرام بوده‌اند. ایشان تمام عمر خود را در خدمت علمی به‌این کشور گذرانده‌اند. همواره آثار علمی دیگران را با خوش‌قلبی بسیار می‌ستایند. توجه ایشان در خدمت علمی به‌میهن خود به‌حدی است که هنگامی که فرزند دلبند خود را از دست دادند، به‌جای مویه بیهوده، بیدرنگ به‌ترجمه یک کتاب علمی با ارزش که مورد علاقه شدید فرزندشان بود پرداختند تا بدینسان یاد او را گرامی بدارند، به‌راستی که چه رثاء حکیمانه‌ای.

آثاری که تاکنون در ریاضی عرضه کرده‌ام شامل چند کتاب و چندین مقاله است. عمده آنها چنین است:

۱. طرح چند دستگاه به‌شرح ذیل:

الف ـ طرح یک ماشین‌حساب آنالوژیک برای حل معادلات جبری و کاربرد آن در حل مسائلی از معادلات جبری که ضرایب آنها به‌پارامترهایی بستگی دارند. این طرح در مجلهٔ A.I.C.A اُرگان انجمن بین‌المللی حساب آنالوژیک[1] به‌چاپ رسیده است. ژانویه ۱۹۷۳.

ب ـ طرح یک خط‌کش حساب برای حل معادلهٔ درجه سوم. از انتشارات سازمان پژوهشهای علمی و صنعتی ایران. آذر ۱۳۶۲

پ ـ طرح یک دستگاه دیژیتال با خاصیت اکثریت (منتج از یکی از احکامی که در جبر بول ابداع کرده‌ام).

۲. ابداع تعداد زیادی قضیهٔ تازه در جبر بول

مجموعه این قضیه‌ها فصل جدیدی در جبر بول به‌وجود آورده است که آن را «مدل پایه‌ها و طیف توابع بول» نامیده‌ام. (تز دکتری به‌زبان فرانسه. با راهنمایی استاد ژان کونتزمن. Jean. KUNTZMANN).

۳. روشی برای حل معادلهٔ درجه چهارم. مندرج در مجله Mathématiques Spéciales. دسامبر ۱۹۷۱.

1- Proceedings of the International Association for Analog Computation. Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique.

۴. تحقیقاتی در هندسه که در کتاب «چند قضیه هندسه» و چند مقاله منتشر کرده‌ام.

۵. کتاب حاضر که آن را «هندسهٔ تحلیلی چندمحوری و چند رسالهٔ دیگر» نامیده‌ام تحقیق اخیر من در هندسه است.

طی سالها راهی پرسنگلاخ از موانع نیرومند و مشکلات را پیموده‌ام. اگر موانع بسیار نبود مسلماً آثاری بسیار گسترده‌تر و باارزشتر عرضه می‌کردم. در هر حال از اینکه با وجود موانع نیرومند در هر فرصتی به‌مطالعه پرداخته‌ام و بخصوص از اینکه در تدریسهای خود همواره کوشا و دقیق بوده‌ام خشنودم.

جوانان میهن ما باید رکن اساسی خوشبختی را کوشش مداوم در خدمت به‌جامعه بدانند. اما کسی که در جهت خدمت به‌مردم کوشش می‌کند به‌طور مداوم با مشکلات و موانع روبرو می‌شود. چنین فردی باید راه خود را با روحیه‌ای قوی ادامه دهد به‌طوری که از مقابله با مشکلات لذت ببرد تا در خود برافراشتگی روحی احساس کند. این برافراشتگی روحی قدرت کار و کوشش را افزون می‌کند. در این‌باره تمثیل جوی آبی که در آن ماهیها شنا می‌کنند، بسیار آموزنده و الهام‌بخش است. ماهیهای زنده درخلاف جهت حرکت آب شنا می‌کنند و حتی از شیبهای تند بالا می‌روند، اما ماهیهای مرده با آب می‌روند. یک جوان باید همواره این تمثیل را در خاطر داشته باشد تا آگاه باشد اگر لحظه‌ای یأس به‌خود راه دهد و از حرکت باز ایستد آنگاه همچون ماهی مرده‌ای بیش نیست. باید همواره در خاطر داشت که امید حرکت می‌آورد و حرکت امید را افزایش می‌دهد.

جوانان ما باید همواره به‌گنجینهٔ غنی و پرشکوه علم و فرهنگ میهن خود که محصول کوشش مداوم فلاسفه، دانشمندان، شعرا، نویسندگان، و هنرمندان است توجه داشته باشند و کوشش کنند بر آن گنجینه بیفزایند و در راه اعتلای علمی و صنعتی کشور مجدانه فعالیت کنند تا به‌تدریج نیاز صنعتی کشور را به‌بیگانگان کاهش دهند. در این‌باره چه زیباست سخن سنایی:

کاریز در درون تو می‌باید — کاین عاریه‌ها تو را دری نگشاید
یک کوزه آب در درون خانه — به از رودی کز برون آید

احمد شرف‌الدین

بـــه‌نام خـــداونـــد جـــان و خـــرد
کـــزین بـــرتر انـــدیشه بـــرنگذرد.
فردوسی

پیشگفتار

کتاب حاضر شامل چهار بخش مستقل است. در بخش اول که آن‌را «هندسهٔ تحلیلی چندمحوری» نامیده‌ام روشی تازه برای اثبات قضایای هندسی ارائه کرده‌ام. دراین روش با به‌کارگیری قرارداد خاصی برای فاصلهٔ یک نقطه از یک محور و انتخاب دستگاه مختصاتی متشکل از n محور که هر یک از آنها منطبق بر یکی از اضلاع یک n ضلعی است پاره‌ای خواص n ضلعیها را بررسی نموده‌ام. در بعضی موارد مطالعهٔ خواص چندضلعی مورد توجه نبوده است که چندضلعی به‌عنوان یک وسیلهٔ کمکی برای اثبات قضیهٔ موردنظر به‌کار گرفته شده است مثلاً در اثبات قضیه قطب و قطبی در دایره، یک چهارضلعی به‌عنوان وسیلهٔ کمکی برای اثبات قضیه به‌کار گرفته شده است.

قرارداد خاصی که در این بخش برای تعیین وضع یک نقطه در صفحه به‌کار رفته است از قراردادی که در «هندسهٔ مثلث» برای تعیین وضع یک نقطه در صفحه به‌کار رفته است کلی‌تر است زیرا قرارداد هندسه مثلث را نمی‌توان برای مطالعهٔ یک n ضلعی هنگامی که n عددی بزرگتر از سه باشد به‌کار برد. هنگامی که n بزرگتر از سه باشد، n ضلعی می‌تواند مقعر باشد در این صورت علامت هندسه مثلث به‌کار نمی‌آید.

به‌کارگیری دستگاه مختصات n محوری در صفحه امکان داده است تا عدهٔ زیادی از قضایای هندسه را به‌راههای تازه و جالب اثبات نمایم. بعضی از این قضایا مهم و مشهوراند مانند قضیه‌های گاوس، منلائوس، سوا، پترسن ـ اسکوت، سیمسن، اولر، پاپوس، پاسکال، نیوتن که به‌ترتیب در شماره‌های (۱۴.۲)، (۱۷.۲)، (۳۴.۲)، (۱.۳۹.۲)، (۱.۵.۳)، (۲.۵.۳)، (۳.۵.۳)، (۶.۴)، و (۸.۴) ارائه شده‌اند. قضیهٔ قطب و قطبی نسبت به‌دو خط، قضیهٔ دستگاه اشعهٔ توافقی با خاصیت تصویر مرکزی، قضیهٔ دستگاه اشعهٔ غیرتوافقی با خاصیت تصویر مرکزی، و قضیهٔ قطب و قطبی در دایره به‌ترتیب در شماره‌های (۳.۴۰.۲)، (۶.۴۰.۲)، (۱۲.۴۰.۲)، و (۹.۴) اثبات شده‌اند. چهار قضیهٔ اخیرالذکر، چهار قضیهٔ اساسی چهار فصل هندسه‌اند.

خود نیز قضیه‌هایی تازه ابداع کرده‌ام که از آن جمله‌اند قضیه‌های مشروح در شماره‌های (۱۰.۲)، (۱۱.۲)، (۱۲.۲)، (۵.۵.۳)، (۱.۴)، (۱۰.۴)، (۶.۱۱.۴)، و (۱۲.۴). اثباتی که برای قضیهٔ پاسکال عرضه نموده‌ام امکان داده است تا آن را به‌صورت کلی‌تر مطرح نمایم. این حکم کلی‌تر به‌نحو مؤثری در اثبات قضیه (۷.۴) به‌کار آمده است.

قضیهٔ تازه‌ای که در شماره (۱۰.۴) دربارهٔ هشت ضلعی محاط در مقطع مخروطی عرضه کرده‌ام در حالتهای مخصوص خود به‌دو قضیهٔ مهم هندسه تصویری تبدیل می‌شوند، بدین قرار: در حالت خاصی که سه ضلع متوالی هشت‌ضلعی برهم منطبق باشند از قضیهٔ هشت‌ضلعی، قضیهٔ شش ضلعی پاسکال حاصل می‌شود و در حالت خاصی که مقطع مخروطی به‌دو خط راست تجزیه شود از قضیهٔ هشت‌ضلعی، قضیه‌ای تازه حاصل می‌شود که تعمیمی از قضیهٔ پاپوس است که در هندسهٔ تصویری مطرح می‌شود. مطلبی که در شمارهٔ (۱۱.۴) عرضه کرده‌ام معادلهٔ یک منحنی جبری محیط بر یک n ضلعی کامل، با حداقل درجه است. این معادله وقتی n زوج است تجزیه‌پذیر است. تجزیه‌پذیری این معادله همراه با خاصیت محیط بودن نمودار آن بر n ضلعی کامل خاصیت تصویری دربر دارد. از جمله نتایج این مطلب قضیه شش‌ضلعی پاسکال است. قضیه‌ای که در شماره (۶.۱۱.۴) عرضه کرده‌ام تعمیم قضیه استورم است.

چند جمله‌ایهای n متغیری که در شماره‌های (۴.۴) و (۲.۱۱.۴) عرضه کرده‌ام تعمیمهایی از چندجمله‌ای لاگرانژاند. این چندجمله‌ایها به‌نحو مؤثری برای به‌دست آوردن معادلات منحنیهای جبری محیط بر چندضلعیها و چندضلعیهای کامل به‌کار آمده‌اند و مطالعهٔ بعضی خواص آنها را بسیار آسان کرده‌اند.

از مطالعهٔ بخش اول این کتاب بخوبی می‌توان دریافت که این بخش قابل توسعه است.

در بخش دوم این کتاب تحت عنوان «تقارن n تایی» با به‌کارگیری یکی از قضایای آنالیز متغیر مختلط بعضی از خواص اشکالی راکه دارای چند محور تقارن غیرمتقارب‌اند بررسی کرده‌ام و به‌کمک این خواص چند قضیه دربارهٔ اشکال با تقارن nتایی عرضه نموده‌ام.

در بخش سوم این کتاب تحت عنوان «تعمیم قضایا» چند حکم هندسی را تعمیم داده‌ام، بدین قرار: تعمیم حکمی دربارهٔ پنج ضلعی منتظم، تعمیم قضیه آپولونیوس، تعمیم سه قضیهٔ هندسه دربارهٔ چندضلعیهای منتظم، و تعمیم قضیهٔ برهماگوپتا. در پایان این بخش دو حکم هندسی تازه عرضه نموده‌ام. حکم اول خاصیتی برداری در چندضلعی است. حکم دوم قضیه‌ای دربارهٔ منحنیهای جبری متقارن است؛ هنگامی که این منحنی جبری متقارن به‌خطهای مستقیم تجزیه شود احکامی دربارهٔ اشکال مستقیم‌الخط به‌دست می‌آید.

در بخش چهارم تحت عنوان «اثبات قضایا» چند حکم هندسی را به‌راههای تازه اثبات کرده‌ام. به‌این قرار: قضیه‌ای از تصویر جسمنما (استرئوگرافی)، قضایای مثلث قائم‌الزاویه، قضیهٔ قوت نقطه در دایره، قضیهٔ نیمساز مثلث، قضیهٔ بطلمیوس، رابطهٔ بین میانگین حسابی و هندسی چند عدد مثبت.

در پایان کتاب در فصل ضَمیمه‌ها، چند مطلب از جبر و آنالیز متغیر حقیقی و آنالیز متغیر مختلط و هندسه راکه در متن کتاب مورد استفاده قرار گرفته‌اند یادآوری کرده‌ام.

روشهایی که در این کتاب به‌کار رفته است جبری و شیوه‌هایی از هندسه نو است. در بخش اول کتاب از نوعی دستگاه مختصات استفاده شده است (روش تحلیلی)، در بخشهای بعدی از قضیه‌های آنالیز، تبدیل همنگار، روش برداری، و تبدیلات هندسی بهره گرفته شده است. این‌گونه روشها به‌علت زیبایی و توانایی که دارند و نیز به‌علت آنکه ارتباط هندسه را با جبر و آنالیز روشن می‌کنند، خواننده را بیشتر به‌مطالعهٔ هندسه ترغیب می‌نمایند.

امیدوارم که مطالعهٔ این کتاب بتواند برای دبیران و دانشجویان مفید افتد و ساعاتی از اوقات گرانبهای آنان را دلپذیر سازد.

احمد شرف‌الدین

MATH75.IR

بخش اول

هندسه تحلیلی چندمحوری

مطالبی که در این بخش مطرح خواهیم کرد:

بخش اول این کتاب شامل چهار فصل است.

- در فصل یک تحت عنوان «کمیتهای سودار» ابتدا تعریف چند کمیت سودار ارائه شده و دربارهٔ آنها احکامی اثبات شده است. این احکام در سه فصل بعد به‌کار گرفته شده است.

- در فصل دو تحت عنوان «معادلات درجه اول» معادلهٔ خط راست در دستگاه مختصات n محوری ارائه شده است و سپس به‌کمک آن عده‌ای از قضایای هندسه اثبات شده است.

- در فصل سه تحت عنوان «معادلات درجه دوم» معادله‌های مقطع مخروطی در دستگاه مختصات سه‌محوری و چهارمحوری عرضه شده است و به‌کمک آنها عده‌ای از قضایای هندسی اثبات شده است.

- در فصل چهار تحت عنوان «معادله‌هایی از درجه سوم و درجات بالاتر» عده‌ای از قضایای هندسی به‌کمک معادلاتی از درجه سه یا بالاتر اثبات شده است.

۱

کمیتهای سودار

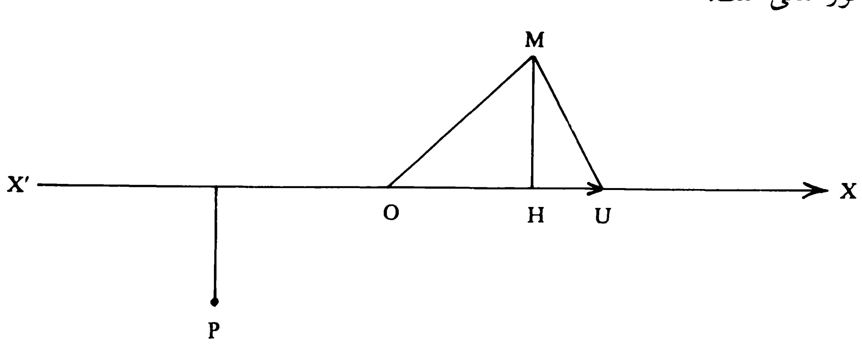
در این فصل دربارهٔ چند کمیت سودار که در سراسر بخش اول به کار خواهند آمد سخن خواهیم گفت.

۱.۱. قرارداد علامت برای فاصلهٔ یک نقطه از یک محور

در صفحهٔ P، محور $x'ox$ با بردار یکه $\overrightarrow{ou}$ و نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم. چنین قرار می‌گذاریم که فاصلهٔ نقطهٔ M از محور $x'ox$ عددی است جبری که قدرمطلق آن مساوی است با طول عمود MH که از آن نقطه بر محور یادشده فرود آید؛ علامت این عدد جبری را مثبت محسوب می‌داریم اگر جهت حِرکت روی محیط مثلث MOU موافق با جهت مثبت دوران مثلثاتی باشد و در غیر این‌صورت علامت عدد جبری را منفی محسوب می‌کنیم. فاصلهٔ هر نقطه واقع بر محور $x'ox$ از آن محور را صفر محسوب می‌داریم.

فاصلهٔ جبری یک نقطه از محور $x'ox$ را با x نشان می‌دهیم.

در شکل، فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور $x'ox$ مثبت است ولی فاصلهٔ جبری نقطهٔ P از آن محور منفی است.



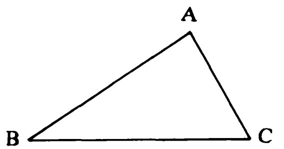
MATH75.IR

۲.۱. مختصات یک نقطه در یک دستگاه متشکل از چند محور

در صفحهٔ P، n محور $x'_{۱}x_{۱}$، $x'_{۲}x_{۲}$، ...، و x'_nx_n را در نظر می‌گیریم. فاصله‌های جبری یک نقطهٔ M از محورهای یادشده را به‌ترتیب با $x_{۱}$، $x_{۲}$، ...، و x_n نشان می‌دهیم و nگانه مرتب $(x_{۱}، x_{۲}، ...، x_n)$ را مختصات نقطهٔ M در دستگاه مختصات n محوری $x_{۱}x_{۲}...x_n$ می‌نامیم.

۳.۱. قرارداد علامت برای اندازهٔ سطح

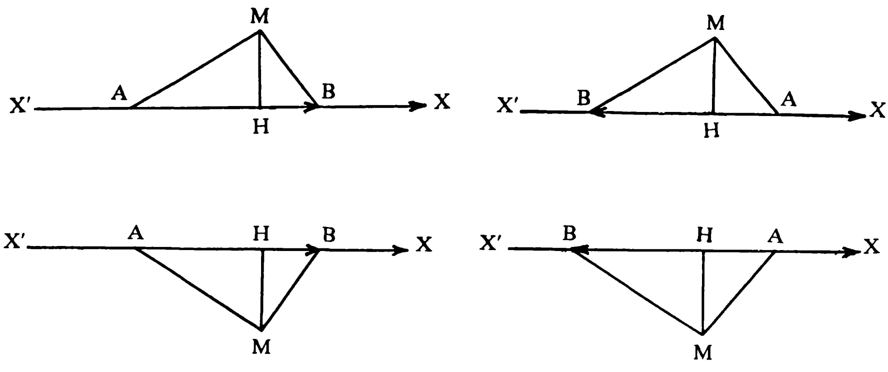
بنابر قراردادی که در کتابهای هندسه مشروح است اندازهٔ جبری سطح مثلث ABC مثبت محسوب می‌شود اگر جهت پیمایش محیط آن موافق جهت مثبت دوران مثلثاتی باشد، و در غیر این صورت اندازهٔ سطح مثلث منفی محسوب می‌شود. در شکل، اندازهٔ جبری سطح مثلث ABC مثبت است ولی اندازهٔ جبری سطح مثلث ACB منفی است. اندازهٔ جبری سطح مثلث ABC را با S(ABC) نشان می‌دهیم.



۴.۱. دستور اندازهٔ جبری سطح مثلث

اگر x فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور x'x و a اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ منطبق بر محور x'x برحسب بردار یکه $\vec{u}$ باشد، اندازهٔ جبری سطح مثلث ABC از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S(ABC) = \frac{۱}{۲}ax$$



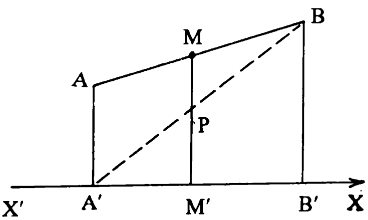
تحقیق درستی رابطهٔ بالا در هر چهار حالت نموده شده در شکل آسان است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

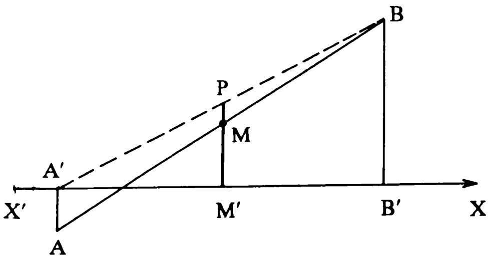
۱.۵. فاصلهٔ جبری وسط یک پاره‌خط از یک محور

محور $x'x$ و دو نقطهٔ A و B را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ جبری دو نقطهٔ A و B را از محور $x'x$ به‌ترتیب a و b می‌نامیم. نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. ثابت کنید فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور $x'x$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$x_M = \frac{a+b}{۲} \qquad (۱)$$

برهان. از سه نقطهٔ A، B، و M به‌ترتیب عمودهای AA'، BB'، و MM'، را بر محور $x'x$ فرود می‌آوریم. نقطهٔ تقاطع دو خط MM' و BA' را P می‌نامیم.





خط MP، وسط دو ضلع مثلث BAA' را به‌هم وصل می‌کند، پس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AA'} \qquad (۲)$$

خط PM' وسط دو ضلع مثلث $BA'B'$ را به‌هم وصل می‌کند، پس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{PM'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BB'} \qquad (۳)$$

از طرفی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM'} \qquad (۴)$$

پس می‌توان نوشت:

$$x_M = \overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \frac{۱}{۲}(a+b)$$

۱.۶. فاصلهٔ جبری یک نقطه از یک خط، از یک محور

محور $x'x$ و دو نقطهٔ A و B را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ جبری دو نقطهٔ A و B را از محور $x'x$ به‌ترتیب a و b می‌نامیم. بر خط AB، نقطهٔ M را طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم

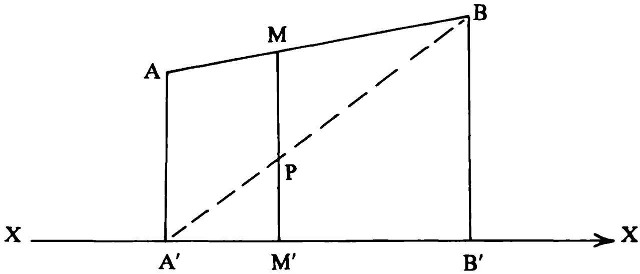
MATH75.IR

$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -\lambda$ (λ عدد جبری معلومی است). ثابت کنید فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور x'x از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(۱) \quad x_M = \frac{a+\lambda b}{۱+\lambda}$$

برهان. از سه نقطهٔ A، B، M به‌ترتیب عمودهای 'AA، 'BB، و 'MM را بر محور x'x فرود می‌آوریم. نقطهٔ تقاطع دو خط 'MM و 'BA را P می‌نامیم. در مثلث 'BAA خط MP موازی ضلع 'AA است، پس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۲) \quad \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{BA}}$$



همچنین در مثلث 'BA'B، خط 'PM موازی ضلع 'BB است، پس رابطهٔ زیر برقرار است.

$$(۳) \quad \frac{\overrightarrow{PM'}}{\overrightarrow{BB'}} = \frac{\overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{A'B}}$$

بنابر قضیهٔ تالس چنین داریم.

$$(۴) \quad \frac{\overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{A'B}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}}$$

از دو رابطهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود.

$$(۵) \quad \frac{\overrightarrow{PM'}}{\overrightarrow{BB'}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}}$$

از طرفی چنین داریم:

$$(۶) \quad x_M = \overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'}$$

از دو رابطهٔ (۲) و (۵) مقادیر $\overline{MP}$ و $\overline{PM'}$ را حساب می‌کنیم. با توجه به‌رابطهٔ $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -\lambda$ چنین حاصل می‌شود:

$$\overline{MP} = \frac{a}{۱+\lambda} \qquad \overline{PM'} = \frac{\lambda b}{۱+\lambda}$$

MATH75.IR

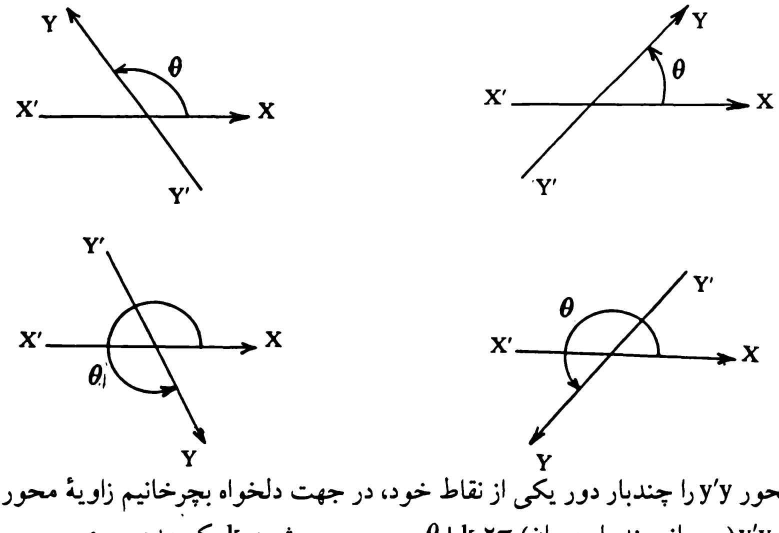
اگر مقادیر $\overline{MP}$، $\overline{PM'}$ را در رابطهٔ (۶) بگذاریم، رابطهٔ مطلوب (۱) به‌دست می‌آید.

حالت خاص. در حالت خاص که نقطهٔ M بر وسط پاره‌خط AB واقع باشد داریم: $\lambda=-1$ و از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$x_M = \frac{a+b}{2}$$

۷.۱. زاویهٔ یک محور با یک محور، با یک نیم‌خط، با یک خط

الف ـ زاویهٔ یک محور با محور دیگر. بنابه‌تعریف زاویهٔ محور $x'x$ (محور مبدأ) با محور $y'y$ (محور انتها) عبارت است از کوچکترین زاویه‌ای که باید محور $x'x$ را دور یکی از نقاط خود، به‌اندازهٔ آن در جهت مثبت مثلثاتی بچرخانیم تا با محور $y'y$ موازی و هم‌سو گردد. در چهار شکل زیر زاویهٔ محور $x'x$ با محور $y'y$ که آن را θ نامیده‌ایم، نشان داده شده است.

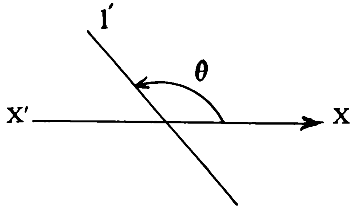


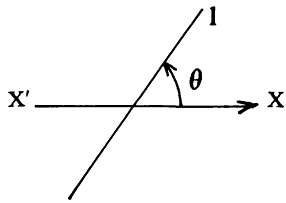
اگر محور $y'y$ را چندبار دور یکی از نقاط خود، در جهت دلخواه بچرخانیم زاویهٔ محور $x'x$ با محور $y'y$ (پس از چند بار دوران) $\theta+k.2\pi$ محسوب می‌شود. k یک عدد جبری صحیح است. اگر k مثبت باشد منظور آن است که محور $y'y$ را k مرتبه در جهت مثبت مثلثاتی چرخانده‌ایم و اگر k منفی باشد منظور آن است که محور $y'y$ را $|k|$ مرتبه برخلاف جهت مثبت مثلثاتی چرخانده‌ایم.

ب ـ زاویه یک محور با یک نیم‌خط. بنابه‌تعریف زاویهٔ محور $x'Ox$ با نیم‌خط $O\lambda$ عبارت است از کوچکترین زاویه‌ای که باید محور $x'x$ را دور نقطه O، به آن اندازه، در جهت مثبت مثلثاتی بچرخانیم تا نیم‌خط Ox بر نیم‌خط $O\lambda$ منطبق شود. مقدار این زاویه را θ می‌نامیم اگر نیم‌خط $O\lambda$ را $|k|$ مرتبه دور نقطه O بچرخانیم، اندازه زاویه محور $x'x$ با وضع نهایی $O\lambda$، $\theta+k.2\pi$ محسوب می‌شود (با همان توضیحی که در بند الف ذکر کردیم).

MATH75.IR

پ ـ زاویه یک محور با یک خط. بنابه تعریف زاویه محور $x'x$ با خط l کوچکترین زاویه‌ای است که باید محور $x'x$ را دور یکی از نقاط خود، به آن اندازه بچرخانیم تا بر خط l منطبق شود. در دو شکل زیر زاویه محور $x'x$ را با خط l که θ نامیده‌ایم نشان داده‌ایم.





۸.۱. فاصله یک نقطه متعلق به یک محور از محور دیگر

دو محور $x'x$ و $y'y$ متقاطع در نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. اندازهٔ جبری زاویهٔ محور $y'y$ با محور $x'x$ را θ می‌نامیم. بر محور $y'y$ نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم و اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OM}$ روی محور $y'y$ را با $\overline{OM}$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور $x'x$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x_M = \overline{OM}\sin\theta \qquad (۱)$$

برهان. زاویه یک محور با محور دیگر در شماره (۷.۱. الف) تعریف‌شده است. اگر خط $y'y$ بر خط $x'x$ منطبق باشد رابطهٔ (۱) مسلم است. اگر خط $y'y$ بر خط $x'x$ منطبق نباشد از نقطهٔ M واقع بر محور $y'y$ عمود MH را بر محور $x'x$ فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه MOH چنین داریم:

$$(HM) = (OM)\sin HOM \qquad (۲)$$

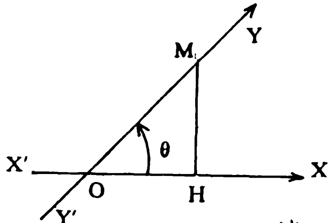
رابطه (۲) را چنین می‌نویسیم:

$$|x_M| = |\overline{OM}|.|\sin\theta| \qquad (۳)$$

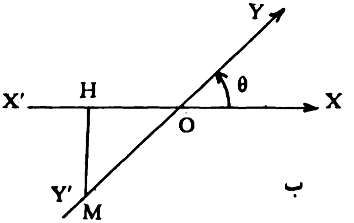
برحسب اینکه اندازه‌های جبری $\overline{OM}$ و $\sin\theta$ مثبت یا منفی باشند چهار حالت ممکن است پیش آید:

۱ ـ نقطهٔ M بر نیم‌محور Oy واقع‌است و $\circ<\theta<\pi$ باشد (شکل الف). در این حالت چنین داریم: $\sin\theta>\circ$، $\overline{OM}>\circ$ و $x_M>\circ$. در این‌صورت از رابطهٔ (۳) رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.

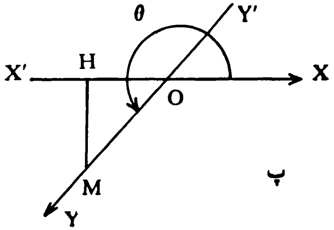
۲ ـ نقطهٔ M برنیم‌محور Oy' واقع‌است و $\circ<\theta<\pi$ می‌باشد(شکل ب). در این حالت چنین داریم: $\sin\theta>\circ$ و $\overline{OM}<\circ$ و $x_M<\circ$. در این صورت از رابطهٔ (۳) رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.



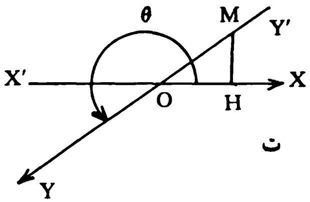
الف



ب



پ



ت

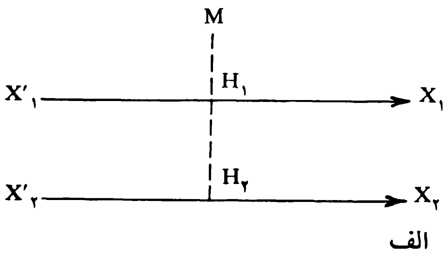
۳ـ نقطه M بر نیم‌محور Oy واقع است و $\pi<\theta<2\pi$ می‌باشد(شکل پ). دراین حالت چنین داریم: $\sin\theta<0$، $\overline{OM}>0$ و $x_M<0$ است. دراین‌صورت از رابطه(۳) رابطه(۱) حاصل می‌شود.

۴ـ نقطه M بر نیم‌محور 'Oy واقع است و $\pi<\theta<2\pi$ می‌باشد (شکل ت). در این حالت چنین داریم: $\sin\theta<0$ ، $\overline{OM}<0$ و $x_M>0$. در این صورت از رابطه (۳) رابطه (۱) حاصل می‌شود بنابراین درستی رابطه (۱) همواره مسلّم است.

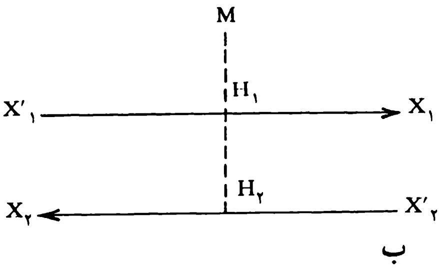
۹.۱. رابطه بین فواصل جبری یک نقطه از دو محور موازی

الف ـ در صفحه P، دو محور موازی و هم‌سوی x'_1x_1 و x'_2x_2 را در نظر می‌گیریم و فاصله‌های جبری یک نقطهٔ M از صفحه را از دو محور مذکور به‌ترتیب x_1 و x_2 می‌نامیم. ثابت کنید هنگامی‌که نقطهٔ M در صفحه حرکت می‌کند مقدار عبارت جبری (x_1-x_2) ثابت می‌ماند.

ب ـ اگر دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی و هم‌سو باشند ثابت کنید هنگامی که نقطه M در صفحه حرکت می‌کند مقدار عبارت جبری (x_1+x_2) ثابت می‌ماند.



الف



ب

اثبات آسان و به‌عهدهٔ خواننده است.

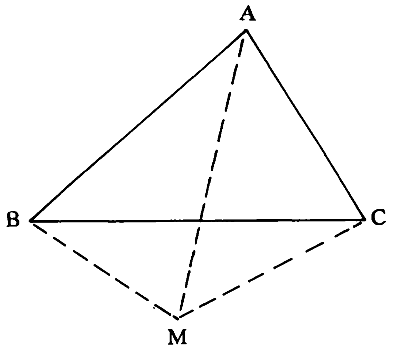
MATH75.IR

دو حکم دربارهٔ اندازهٔ جبری سطح

۱.۱۰. حکم

مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه M را در صفحه آن در نظر می‌گیریم. اگر اندازه‌های جبری سطحهای چهار مثلث ABC، MAB، MBC و MCA را به‌ترتیب با S(ABC)، S(MAB)، S(MBC) ، S(MCA) نشان دهیم رابطهٔ زیر همواره برقرار است.

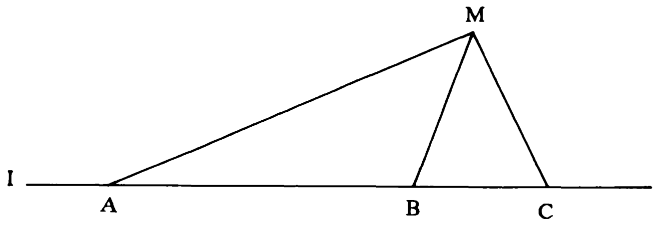
$$S(MAB)+S(MBC)+S(MCA)=S(ABC)$$



۱.۱۱. حکم

در صفحه P، سه نقطه A، B و C را بر یک خط راست l و نقطه M را در خارج از آن خط در نظر می‌گیریم. رابطهٔ زیر بین اندازه‌های جبری سطحهای سه مثلث MAB، MBC، و MCA برقرار است.

$$S(MAB)+S(MBC)+S(MCA)=0 \qquad (1)$$



برعکس اگر در صفحهٔ P، چهار نقطه A، B، C، و M طوری قرار گرفته باشند که بین اندازه‌های جبری سطحهای سه مثلث MAB، MBC، و MCA رابطه (۱) برقرار باشد آنگاه سه نقطه A، B، و C بریک خط راست قرار دارند.

میانه‌های مثلث

در مثلث خطی که یک رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند میانه نامیده می‌شود. هر مثلث دارای سه میانه است.

۱۲.۱. قضیه

در هر مثلث سه میانه بر یک نقطه می‌گذرند و این نقطه بر ثلث هر کدام از آنها ابتدا از قاعده قرار دارد.

برهان. وسطهای سه ضلع BC، CA، AB را به ترتیب M، N، و P می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه خط AM، BN، و CP که سه میانه مثلث ABC اند. بر یک نقطهٔ مشترک که آن را G می‌نامیم می‌گذرند و چنین داریم:

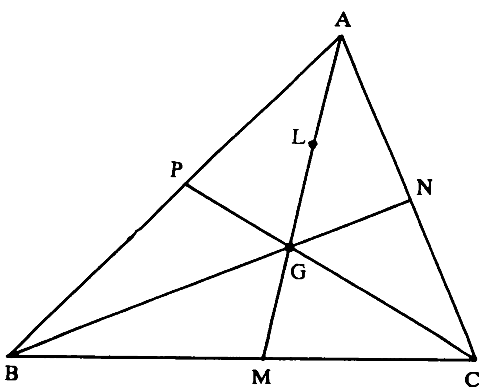
$$(MG)=\frac{1}{3}(MA) \text{ و } (NG)=\frac{1}{3}(NB) \text{ و } (PG)=\frac{1}{3}(PC)$$

بر میانهٔ AM دو نقطهٔ G و L را طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم $MG=GL=LA$. محور دلخواه $x'x$ را در صفحهٔ مثلث ABC اختیار می‌کنیم و فاصله‌های جبری نقاط A، B، C، M، G، و L را از این محور به‌ترتیب a، b، c، m، g، l می‌نامیم. سه نقطهٔ G، M، و L به‌ترتیب وسطهای سه پاره‌خط ML، BC، و AG اند پس بنابر (۵.۱) روابط زیر را می‌نویسیم:

$$(1)\quad g=\frac{m+l}{2} \qquad (2)\quad m=\frac{b+c}{2} \qquad (3)\quad l=\frac{a+g}{2}$$

دررابطهٔ (۱) به‌جای m و l مقادیر آنها را از دو رابطهٔ (۲) و (۳) می‌گذاریم رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$(4)\quad g=\frac{1}{3}(a+b+c)$$



اکنون بر میانه BN نقطه G' را طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم $(NG')=\frac{1}{3}(NB)$. فاصلهٔ جبری نقطهٔ G' از محور $x'x$ را g' می‌نامیم. با همان شیوه استدلال قبلی رابطهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$(5)\quad g'=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

MATH75.IR

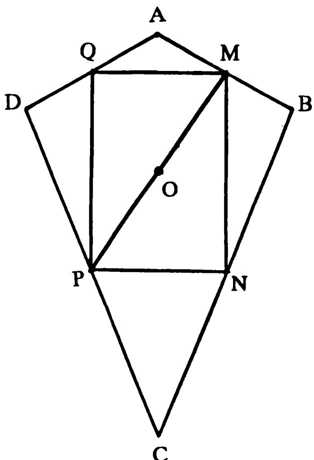
از مقایسه دو رابطه (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که فواصل جبری دو نقطه G و G′ از هر محور دلخواه برابراست. پس دو نقطهٔ G و G′ بر هم منطبق‌اند. **توضیح می‌دهیم:**
چون فواصل جبری دو نقطهٔ G و G′ از محور x′x برابر است پس دو نقطهٔ G و G′ یا بر هم منطبق‌اند یا اگر متمایز باشند آنگاه خط GG′ موازی با خط x′x خواهد بود. اکنون محور t′t متقاطع با محور x′x را در نظر می‌گیریم و می‌گوییم فواصل جبری دو نقطهٔ G و G′ از محور t′t مساوی است پس دو نقطهٔ G و G′ یا بر هم منطبق‌اند یا اگر متمایز باشند آنگاه خط GG′ موازی با خط t′t خواهد بود. چون خط GG′ نمی‌تواند موازی با دو خط متقاطع x′x و t′t باشد پس نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ G و G′ بر هم منطبق‌اند.
به‌همین شیوه ثابت می‌کنیم که میانه CP بر نقطهٔ G می‌گذرد و $(PG)=\frac{1}{3}(PC)$ است.
تبصره ۱. نقطهٔ G محل برخورد سه میانه مثلث گرانیگاه آن مثلث است.
تبصره ۲. در ضمن اثبات قضیه بالا (شماره ۱۲.۱) حکم زیر را ثابت کردیم.
مجموع فواصل جبری سه رأس یک مثلث از یک محور دلخواه برابر است با سه برابر فاصله جبری گرانیگاه مثلث از آن محور.
تمرین. قضیه سه‌میانه (شماره ۱۲.۱) را به‌کمک دستور مذکور درشماره (۶.۱)ثابت‌کنید.

۱۳.۱. قضیه وارینیون[1]

وسطهای اضلاع هر چهارضلعی، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند.
برهان. چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم و وسطهای اضلاع AB، BC، CB، و DA را به‌ترتیب M، N، P، و Q می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که چهارضلعی MNPQ یک متوازی‌الاضلاع است.

---

۱ - پیر وارینیون (pierre Varignon) از ریاضی‌دانهای فرانسوی است (۱۷۷۲-۱۶۵۴). او در سال ۱۶۸۷ اثری تحت‌عنوان «طرح یک مکانیک‌جدید» و سپس اثری تحت‌عنوان «مکانیک نو یا استاتیک» را عرضه نمود. در این‌آثار قضیه گشتاورها عرضه شده است. دستگاهی به‌نام او در کتابهای مکانیک فیزیک برای تحقیق تعادل نیروها شرح می‌شود. قضیه‌وارینیون اندکی از آنچه در شماره (۱۳.۱) ذکر کردیم کامل‌تر است و به صورت زیر است:
وسطهای اضلاع هر چهار ضلعی رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند. مساحت این متوازی‌الاضلاع نصف مساحت چهار ضلعی است. (اثبات قسمت مربوط به مقایسه مساحتها بسیار آسان است و به‌خواننده واگذار می‌شود.)



یکی از قضایای هندسه می‌گوید: در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند و برعکس اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است. لذا کافی است ثابت کنیم که در چهار ضلعی MNPQ دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند.

محور دلخواه $x'x$ را در صفحه چهار ضلعی در نظر می‌گیریم و فواصل جبری نقاط A، B، C، و D را از این محور به‌ترتیب a، b، c، و d می‌نامیم. فواصل جبری دو نقطهٔ M و P را از محور $x'x$ به‌کمک مطلب شمارهٔ (۵.۱) حساب می‌کنیم:

$$x_M = \frac{a+b}{۲} \quad \text{و} \quad x_P = \frac{c+d}{۲}$$

فاصلهٔ جبری نقطهٔ O وسط پاره خط MP از محور $x'x$ چنین است:

$$(۱) \qquad x_O = \frac{x_M + x_P}{۲} = \frac{a+b+c+d}{۲}$$

فواصل جبری دو نقطهٔ N و Q از محور $x'x$ چنین است:

$$x_N = \frac{b+c}{۲} \quad \text{و} \quad x_Q = \frac{a+d}{۲}$$

پس فاصلهٔ جبری نقطه O' وسط پاره خط NQ از محور $x'x$ چنین است:

$$(۲) \qquad x_{O'} = \frac{x_N + x_Q}{۲} = \frac{b+c+a+d}{۲}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که فاصله‌های جبری دو نقطهٔ O و O' از محور $x'x$ برابرند. چون محور $x'x$ یک محور دلخواه است پس دو نقطهٔ O و O' از دو محور متقاطع به‌یک فاصلهٔ جبری‌اند و لذا بر هم منطبق‌اند.

۱۴.۱. یک مسئله دربارهٔ گرانیگاه

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و از نقاط M، N، و P که به‌ترتیب وسطهای سه ضلع BC، CA، و AB می‌باشند عمودهای MU، NV، و PW را بر آن اضلاع رسم می‌کنیم. سه نقطهٔ مادی با جرمهای مساوی در سه نقطهٔ M، N، و P در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که

MATH75.IR

این سه نقطه به‌طور همزمان به‌ترتیب روی خطوط MU، NV، و PW با سرعتهایی متناسب با طولهای BC، CA، و AB و با یک ضریب تناسب، به‌طرف خارج مثلث حرکت کنند. این سه نقطهٔ مادی M، N، و P پس از مدت t به‌ترتیب به‌نقاط M'، N'، و P' می‌رسند. ثابت کنید گرانیگاه سه جرم M'، N'، و P' همان گرانیگاه مثلث ABC است.

حل. چون سرعتهای نقاط مادی M، N، و P به‌ترتیب با طولهای BC، CA، و AB متناسب‌اند (با یک ضریب تناسب) پس مسافتهای MM'، NN' و PP' پیموده شده در مدت t به‌ترتیب باطولهای BC، CA، و AB متناسب‌اند یعنی

$$\frac{MM'}{BC}=\frac{NN'}{CA}=\frac{PP'}{AB}$$

از این روابط نتیجه می‌شود که سه مثلث متساوی‌الساقین BCM'، CAN'، و ABP' متشابه‌اند پس زاویه‌های قاعده‌های آنها مساوی‌اند. مقدار مشترک این زاویه‌ها را α می‌نامیم.

دومحور $x'x$ و $y'y$ را به‌ترتیب منطبق بر دوبردار $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.
طولهای اضلاع مثلث ABC مقابل به‌زاویه‌های A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم.

فواصل جبری سه نقطهٔ M'، N' و P' را از محور $x'x$، به‌کمک مطلب شمارهٔ (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$x_{M'}=(CM')\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{CM'})=\frac{a}{۲\cos\alpha}\sin(\pi+\alpha)=\frac{-a}{۲\cos\alpha}\sin\alpha$$

$$x_{N'}=(CN')\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{CN'})=\frac{b}{۲\cos\alpha}\sin(\pi-C-\alpha)=\frac{b}{۲\cos\alpha}\sin(C+\alpha)$$

$$x_{P'}=(BP')\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{BP'})=\frac{c}{۲\cos\alpha}\sin(B+\alpha)$$

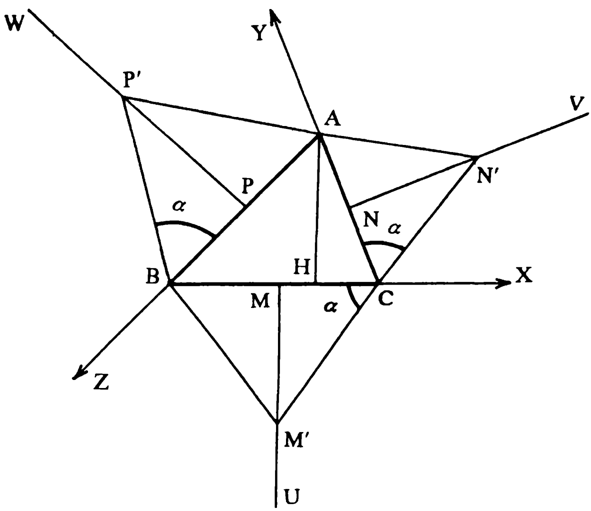
فاصلهٔ جبری نقطهٔ G' گرانیگاه مثلث $M'N'P'$ را از محور $x'x$ به‌کمک حکم مذکور در تبصرهٔ ۲ از قضیه (۱۲.۱) حساب می‌کنیم:

$$(۱)\qquad x_{G'}=\frac{۱}{۳}(x_{M'}+x_{N'}+x_{P'})=$$
$$\frac{۱}{۶\cos\alpha}[-a\sin\alpha+b\sin(C+\alpha)+c\sin(B+\alpha)]$$

عبارت داخل کروشه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$[...]=-a\sin\alpha+b\sin C\cos\alpha+b\cos C\sin\alpha+c\sin B\cos\alpha$$
$$+c\cos B\sin\alpha=-a\sin\alpha+(b\cos C+c\cos B)\sin\alpha$$
$$+(b\sin C+c\sin B)\cos\alpha$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{HC}$ را روی محور x′x به‌ترتیب $\overline{BH}$ و $\overline{HC}$ می‌نامیم.



از روی شکل، روابط زیر را می‌نویسیم:

$\overline{BH} = c \cos B$ و $\overline{HC} = b \cos C$

پس

$b \cos C + c \cos B = \overline{HC} + \overline{BH} = \overline{BC} = a$

همچنین

$b \sin C = (AH)$ و $c \cos B = (AH)$

با توجه به‌چند تساوی مثلثاتی اخیرالذکر، عبارت داخل کروشه را چنین می‌نویسیم:

$[...] = -a \sin\alpha + a \sin\alpha + ۲\,(AH) \cos\alpha = ۲(AH) \cos\alpha$

و لذا رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$(۲) \qquad x_{G'} = \frac{۱}{۶\cos\alpha} \cdot ۲(AH)\cos\alpha = \frac{۱}{۳}(AH)$$

اکنون فاصلهٔ جبری نقطه G گرانیگاه مثلث ABC را از محور x′x حساب می‌کنیم. فواصل جبری سه رأس مثلث ABC از محور x′x چنین‌اند:

$x_A = (AH)$ و $x_B = x_C = ۰$

پس فاصلهٔ جبری نقطه G از محور x′x چنین است:

$$(۳) \qquad x_G = \frac{۱}{۳}(x_A + x_B + x_C) = \frac{۱}{۳}(AH)$$

MATH75.IR

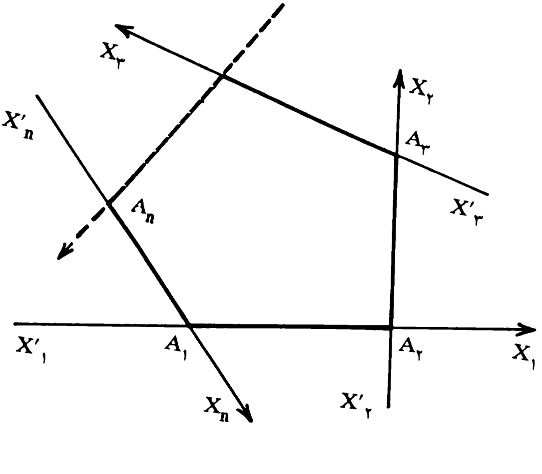
از مقایسه دو رابطهٔ (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad x_G = x_{G'}$$

با همین شیوه استدلال نتیجه می‌شود که فواصل جبری دو نقطه G و G' از محور $y'y$ برابراند. چون فواصل جبری دو نقطهٔ G و G' از دو محور متقاطع $x'x$ و $y'y$ برابرند پس این دو نقطه برهم منطبق‌اند. (رجوع شود به‌توضیحی که در پایان برهان قضیه (۱۲.۱) ذکر شده است.)

۱۵.۱. دستگاه مختصات n محوری برای مطالعه خواص هندسی اشکال

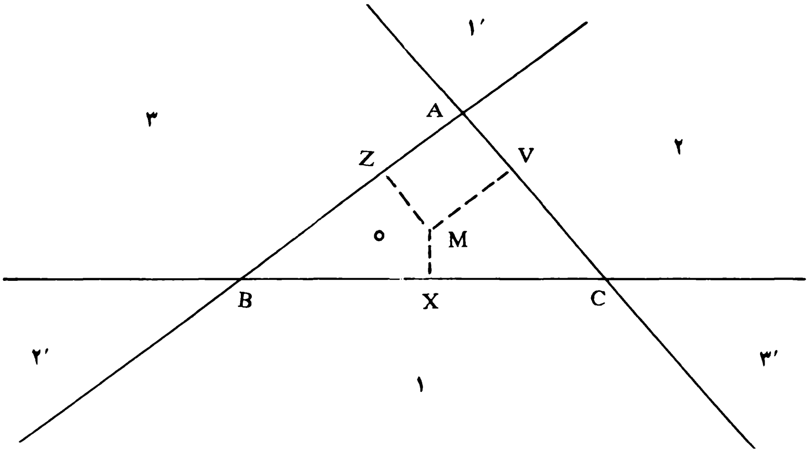
برای مطالعهٔ خواص n ضلعی $A_1A_2...A_n$، محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ... و x'_nx_n را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. مختصات هر نقطهٔ M از صفحه n ضلعی یادشده را با n گانه مرتب $(x_1, x_2, ..., x_n)$ نشان می‌دهیم و به‌کمک معادلاتی برحسب این مختصات خواص n ضلعی را مطالعه می‌کنیم. دستگاه‌مختصات یادشده رادستگاه‌مختصات nمحوری وابسته‌بهnضلعی $A_1A_2...A_n$ می‌نامیم.



۱۶.۱. مختصات در «هندسه مثلث»

مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. وضع یک نقطه M را نسبت به این مثلث با کمیتهایی تعیین می‌کنیم که مختصات این نقطه نامیده می‌شود. عمودهای MX، MY، و MZ را به‌ترتیب بر خطهای BC، CA، و AB فرود می‌آوریم و طولهای آنها را به‌ترتیب با x، y، و z نشان می‌دهیم. مقدم بر این اعداد علامت + یا − می‌گذاریم برحسب آنکه نقطهٔ M و مثلث ABC در یک طرف یا در دو طرف ضلعی که عمود بر آن وارد می‌شود قرار گرفته باشند.

MATH75.IR

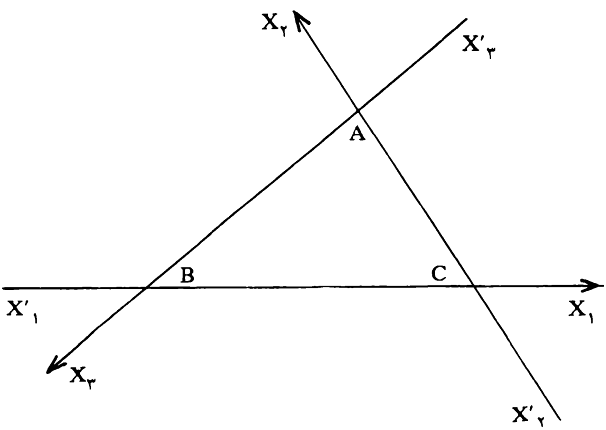


خطهای BC، CA، و AB صفحه را به‌هفت ناحیه تقسیم می‌کنند که در شکل با ۰، ۱، ۲، ۳، ′۱، ′۲، و ′۳ نموده شده‌اند. علامتهای جبری مختصات یک نقطه متعلق بـه هـر یک از ناحیه‌های مذکور به ترتیب عبارت‌اند از:

$$(+\,+\,+)\text{ ، }(-\,+\,+)\text{ ، }(+\,-\,+)\text{ ، }(+\,+\,-)\text{ ، }(+\,-\,-)\text{ ، }(-\,+\,-)\text{ ، }(-\,-\,+)$$

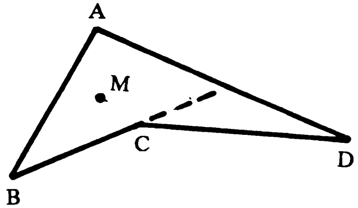
۱۷.۱. مقایسه هندسه مثلث با هندسه تحلیلی چندمحوری

در صفحه P مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، و x'_3x_3 را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. در این صورت مختصات هر نقطه M از صفحه P، در دستگاه مختصات سه محوری $x_1x_2x_3$ و در هندسه مثلث یکسان می‌شود.



MATH75.IR

قرارداد هندسه مثلث در مورد یک n ضلعی، هنگامی‌که $n > 3$ باشد به‌کار نمی‌آید زیرا یک چندضلعی که تعداد اضلاع آن بیش از سه باشد ممکن است مقعر باشد. برای مثال اگر یک چهارضلعی مقعر ABCD و نقطهٔ M واقع در داخل آن را در نظر بگیریم، نه‌می‌توان گفت که نقطهٔ M و چهارضلعی در یک طرف خط BC قرار دارند و نه‌می‌توان گفت که نقطهٔ M و چهارضلعی در دو طرف آن خط قرار دارند.



۱.۱۸. آثاری دربارهٔ «هندسه مثلث»

برای مطالعهٔ هندسه مثلث می‌توان به‌آثار زیر مراجعه کرد:

۱ ـ کتاب مجموعهٔ هندسه (Traité de géometrie) به زبان فرانسه. اثر Eugène ROUCHÉ و Ch.de COMBEROUSSE.

این کتاب شامل دو جلد است و از آثار بسیار معتبر در هندسه است. این اثر علاوه بر مباحث معمولی هندسه، شامل مباحثی چون فزایندگی عدد π و عدم امکان تربیع دایره، هندسه‌نگاری، تحقیق جالب دربارهٔ چند وجهیهای منتظم ستاره‌ای، هم‌نگاری، انولوسیون، سطوح درجه دوم، سطوح آپسیدال، سطح امواج، هندسه‌های نااقلیدسی، ... می‌باشد. فصل آخر کتاب مبحثی است تحت عنوان «هندسه مثلث» شامل ۵۷ صفحه.

۲ ـ کتاب «تمرینهای هندسه» به‌زبان فرانسه. اثر F.G.M. کتاب مذکور یک منبع غنی از قضایا و مسائل هندسه است. این کتاب شامل بیش از سه‌هزار حکم هندسی از هندسه‌دانهای بزرگ تاریخ چون، اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، پاپوس، بطلمیوس، پاسکال، دالامبر، نیوتن، اولر، گاوس، ... و هندسه‌دانهایی از سطوح پایین‌تر است.

فصل آخر این کتاب شامل مبحثی است تحت عنوان «هندسه مثلث» شامل ۱۲۹ صفحه.

۳ ـ کتاب «هندسه مثلث» به‌زبان فرانسه. اثر تراژان لالسکو. استاد دانشگاه و مدرسه پلی‌تکنیک بودا پست. این کتاب شامل ۱۲۰ صفحه است. نویسندهٔ کتاب به‌خاطر اثر خود از طرف امیل پیکار (۱۹۴۱ ـ ۱۸۵۶)، ریاضی‌دان بزرگ عصر خود که منشی آکادمی علوم فرانسه بوده است، تقدیر شده است. تراژان لالسکو، قبل از انتشار کتاب مذکور، کتابی تحت عنوان «مقدمه بر نظریهٔ معادلات انتگرال» منتشر نموده است که امیل پیکار بر آن مقدمه نوشته و آن را ستوده است.

۲

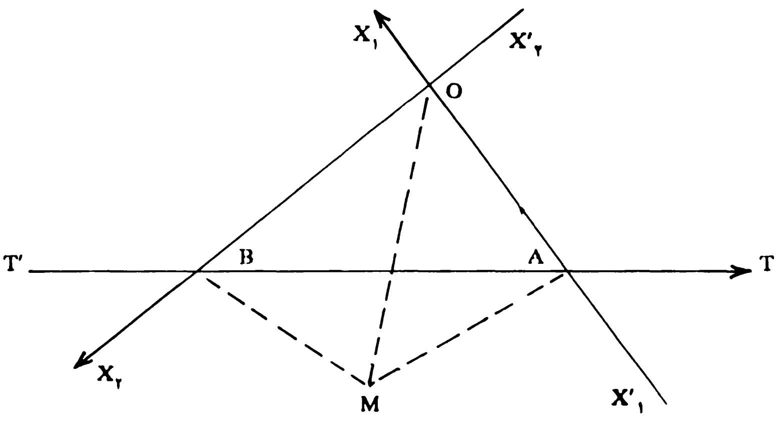
معادله‌های درجه اول

در این فصل با به‌کارگیری معادله‌های درجه اول، عده‌ای از قضیه‌های هندسه را اثبات می‌کنیم.

۱.۲ قضیه

در صفحه P، دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 و دو عدد جبری a_1 و a_2 در نظر می‌گیریم. می‌توان محوری چون $y'y$ و دو عددجبری b و c طوری تعیین کرد که مختصات هر نقطه $M(x_1,x_2,y)$ از صفحه P در دستگاه مختصات سه محوری x_1x_2y، در رابطه زیر صدق کنند

$$(1) \qquad a_1x_1+a_2x_2=by+c$$



MATH75.IR

برهان. برحسب آنکه دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 متقاطع یا موازی باشند دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. فرض کنیم دو محور $x_1'x_1$ و $x_2'x_2$ در نقطهٔ O متقاطع هستند. بردار $\overrightarrow{AO}$ را برمحور x'_1x_1، با اندازهٔ جبری a_1 و بردار $\overrightarrow{OB}$ را بر محور x'_2x_2، با اندازهٔ جبری a_2 اختیار می‌کنیم. بنابر مطلب شماره (۱۰.۱)، رابطهٔ زیر را بین اندازه‌های جبری سطحهای چهار مثلث MAO، MOB، MBA، و AOB می‌نویسیم:

$$(۲) \qquad S(MAO) + S(MOB) + S(MBA) = S(AOB)$$

بنابر مطلب شماره (۴.۱) دو رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$(۳) \qquad S(MAO) = \frac{۱}{۲} a_1x_1$$

$$(۴) \qquad S(MOB) = \frac{۱}{۲} a_2x_2$$

از رابطه‌های (۲)، (۳)، و (۴) نتیجه می‌شود:

$$(۵) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 = ۲S(AOB) - ۲S(MBA)$$

حال محور $t't$ را منطبق بر بردار $\overrightarrow{BA}$ و هم‌سو با آن اختیار می‌کنیم. اندازه جبری بردار $\overrightarrow{BA}$ را روی این محور با d و فاصلهٔ جبری نقطهٔ M از محور مذکور را با t نشان می‌دهیم. بنابر مطلب شماره (۴.۱) رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$(۶) \qquad S(MBA) = \frac{۱}{۲} d.t$$

از دو رابطه (۵) و (۶) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$(۷) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 = ۲S(AOB) - dt$$

از رابطه (۷) نتیجه می‌شود که محور مطلوب $y'y$ را باید منطبق بر محور $t't$ و هم‌سو با آن، و دو عدد b و c را باید به‌ترتیب مساوی با $-d$ و $۲.S(AOB)$ اختیار نمود.

حالت دوم. دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی‌اند. این دو محور ممکن است هم‌سو یا ناهم‌سو باشند.

الف. دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی و هم‌سوی‌اند. در این صورت عبارت $a_1x_1 + a_2x_2$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۸) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 = a_1(x_1 - x_2) + (a_2 + a_1)x_2$$

بنابر مطلب شماره (۹.۱ الف) هنگامی که نقطه $M(x_1, y_1)$ در صفحه حرکت کند، تفاضل $(x_1 - x_2)$ ثابت می‌ماند. اگر این تفاضل‌را p بنامیم رابطه (۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$a_1x_1+a_2x_2=a_1p+(a_2+a_1)x_2 \quad (9)$$

بنابر رابطهٔ (۹)، محور $y'y$ را همان محور x'_2x_2، و دو عدد b و c را به‌ترتیب مساوی با (a_2+a_1) و a_1p اختیار می‌کنیم.

می‌توان عبارت $a_1x_1+a_2x_2$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$a_1x_1+a_2x_2=a_2(x_2-x_1)+(a_2+a_1)x_1=-a_2p+(a_2+a_1)x_1 \quad (10)$$

با توجه به‌رابطه (۱۰)، محور $y'y$ را منطبق بر محور x'_1x_1 و هم‌سوی آن اختیار می‌کنیم و دو عدد b و c را به‌ترتیب مساوی با (a_2+a_1) و $-a_2p$ می‌گیریم.

ب. اگر دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی و ناهم‌سو باشند، عبارت $a_1x_1+a_2x_2$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1x_1+a_2x_2=a_1(x_1+x_2)+(a_2-a_1)x_2 \quad (11)$$

بنابر حکم شماره (۹.۱. ب) هنگامی که نقطه $M(x_1,x_2)$ در صفحه حرکت کند عبارت (x_1+x_2) ثابت می‌ماند. اگر این مقدار ثابت را q بنامیم رابطه (۱۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$a_1x_1+a_2x_2=a_1q+(a_2-a_1)x_2 \quad (12)$$

بنابر رابطه (۱۲)، محور $y'y$ را همان محور x'_2x_2 و دو عدد b و c را به‌ترتیب مساوی (a_2-a_1) و a_1q اختیار می‌کنیم.

می‌توان عبارت $a_1x_1+a_2x_2$ را به‌صورت زیر نوشت

$$a_1x_1+a_2x_2=a_2q+(a_1-a_2)x_1 \quad (13)$$

با توجه به‌رابطهٔ اخیر، محور $y'y$ را همان محور x'_1x_1، و دو عدد b و c را به‌ترتیب مساوی (a_1-a_2) و a_2q اختیار می‌کنیم.

معادلهٔ خط راست

۲.۲ قضیه

در صفحهٔ P، n محور x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و x'_nx_n را در نظر می‌گیریم. هر معادله درجه اول برحسب مختصات x_1، x_2، ...، و x_n یک خط راست را نمایش می‌دهد و برعکس هر خط راست به‌وسیلهٔ معادلهٔ درجه اول برحسب x_1، x_2، ...، و x_n نمایش داده می‌شود.

اثبات

حالت اول. $n=1$. محور x'_1x_1 و اعداد جبری x_1 و l را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم

MATH75.IR

ثابت کنیم مکان هندسی نقاطی که فاصله‌های جبری‌اشان از محور $x_1'x_1$، در معادلهٔ درجه اول

$$a_1x_1=l \qquad (1)$$

صدق می‌کند یک خط راست است.

از رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود $x_1=\frac{l}{a_1}$ و از این رابطه نتیجه می‌شود که فواصل جبری نقاط مورد نظر از محور x'_1x_1 ثابت است پس این نقاط بر یک خط راست قرار دارند.

برعکس نقاطی که بر محور $x_1'x_1$ و یا بریک خط راست موازی با محور x'_1x_1 قرار دارند فاصله‌های جبری‌اشان از آن محور ثابت است و لذا این فاصله‌های جبری در یک معادله درجه اول صدق می‌کنند.

حالت دوم. $n=2$. در صفحهٔ P، دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 و اعداد جبری a_1، a_2، و l را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه P که مختصات (x_1,x_2) آنها در معادلهٔ درجه اول

$$a_1x_1+a_2x_2=l \qquad (2)$$

صدق می‌کنند یک خط راست است و برعکس.

برحسب آنکه دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 متقاطع یا موازی باشند، دو حالت فرعی الف و ب مشروح در زیر در نظر می‌گیریم:

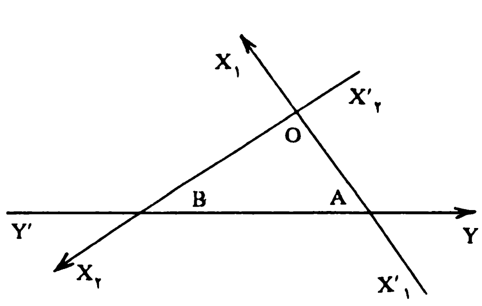
الف. دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 متقاطع‌اند. نقطهٔ تقاطع این دو محور را O می‌نامیم. بردارهای $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OB}$ را منطبق بر محورهای x'_1x_1 و x'_2x_2 با اندازه‌های جبری a و b اختیار می‌کنیم. بنابر قضیه (۱.۲)، مِحوری مانند $y'y$ و دو عدد جبری b و c می‌توان اختیار کرد به‌طوری که در دستگاه مختصات سه محوری x_1x_2y بین مختصات (x_1,x_2,y) هر نقطه از صفحه رابطه زیر برقرار باشد:

$$a_1x_1+a_2x_2=by+c \qquad (3)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$y=\frac{l-c}{b}$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که نقاطی که مختصات آنها در رابطه (۲) صدق می‌کنند بر یک خط راست که موازی محور $y'y$ است جای دارند.



MATH75.IR

ب. دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی‌اند. در این صورت برحسب آنکه دو محور مذکور هم‌سو یا ناهم‌سو باشند دو حالت فرعی (ب.۱) و (ب.۲) مشروح در زیر پیش می‌آید:

ب.۱. دو محور موازی مذکور هم‌سو می‌باشند. بنابر قسمت الف از حالت دوم قضیهٔ (۱.۲) چنین می‌نویسیم:

$$a_1x_1+a_2x_2=a_1p+(a_2+a_1)x_2$$

از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ (۲)، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$a_1p+(a_1+a_2)x_2=1$$

از این رابطه نتیجه‌می‌شود که مکان‌هندسی موردنظر خطی است راست موازی با محور x'_2x_2.

بحث. اگر $a_1+a_2=0$ و $1-a_1p\neq 0$ باشد هیچ نقطه از صفحه متعلق به‌مکان نیست و اگر $a_1+a_2=0$ و $1-a_1p=0$ باشد هر نقطه صفحه متعلق به‌مکان است.

ب.۲. دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 موازی و ناهم‌سو می‌باشند. بنابر قسمت (ب) از حالت دوم قضیهٔ شمارهٔ (۱.۲) چنین می‌نویسیم

$$a_1x_1+a_2x_2=a_1q+(a_2-a_1)x_2$$

از مقایسه رابطه اخیر با رابطه (۲) رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$a_1q+(a_2-a_1)x_2=1$$

از رابطه اخیر نتیجه‌می‌شود که مکان‌هندسی موردنظر خطی‌است راست موازی با محور x'_2x_2.

بحث. اگر $a_2-a_1=0$ و $1-a_1q\neq 0$ باشد هیچ نقطه از صفحه متعلق به‌مکان نیست و اگر $a_2-a_1=0$ و $1-a_1q=0$ باشد هر نقطه از صفحه متعلق به‌مکان است.

عکس قضیه. برعکس اگر دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 و خط l مفروض باشند می‌توان ثابت کرد که مختصات (x_1,x_2) هر نقطهٔ M از خط راست l در یک معادله درجه اول برحسب x_1 و x_2 صدق می‌کنند.

برای اثبات، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

I). خط l منطبق بر محور x'_1x_1 است. در این صورت مختصات هر نقطه از خط l در رابطهٔ درجه اول $x_1=0$ صدق می‌کنند.

II). خط l منطبق بر محور x'_2x_2 است. در این صورت مختصات هر نقطه از خط l در رابطهٔ درجه اول $x_2=0$ صدق می‌کنند.

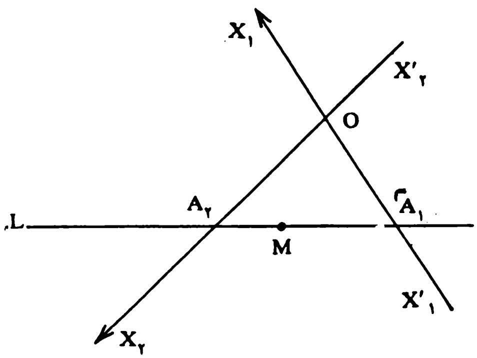
III). خط l بر نقطهٔ O محل تلاقی دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 می‌گذرد. در این صورت مختصات هر نقطه از خط l در رابطهٔ درجه اول $x_2=mx_1$ صدق می‌کنند (m عدد ثابت).

IV). خط l دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 را به‌ترتیب در دو نقطهٔ متمایز A_1 و A_2 قطع می‌کند. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{A_1O}$ و $\overrightarrow{OA_2}$ را به‌ترتیب روی دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 با a_1 و a_2 نشان می‌دهیم. اگر M نقطه‌ای از خط l باشد رابطهٔ زیر محقق است:

MATH75.IR

$$(۱) \quad S(MA_1O) + S(MOA_2) = S(A_1OA_2)$$

و چون



$$S(MA_1O) = \frac{1}{2} a_1 x_1$$

$$S(MOA_2) = \frac{1}{2} a_2 x_2$$

$$S(A_1OA_2) = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin A_2\widehat{O}A_1$$

رابطه (۱) با رعایت سه رابطه اخیر به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a_1a_2 \sin A_2\widehat{O}A_1$$

نتیجه می‌شود که مختصات هر نقطهٔ دلخواه از خط l در یک معادله درجه اول برحسب x_1 و x_2 صدق می‌کنند.

حالت سوم. $n > ۲$. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و x'_nx_n و اعداد جبری a_1، a_2، ...، a_n و l را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم نقاطی که مختصات آنها در معادله درجه اول

$$(۱) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = l$$

صدق می‌کنند بر یک خط راست قرار دارند و برعکس مختصات نقاط یک خط راست در معادله درجه اول صدق می‌کنند.

برای اثبات، در بین n محور مذکور، دو محور مثلاً x'_1x_1 و x'_2x_2 را انتخاب می‌کنیم. بنابر قضیه (۱.۲)، می‌توان محوری مانند $y'y$ و دو عدد جبری b و c تعیین کرد تا مختصات (x_1,x_2,y) هر نقطه صفحهٔ محورها در رابطهٔ

$$(۲) \quad a_1x_1 + a_2x_2 = by + c$$

صدق کنند. رابطه (۱) با رعایت رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۳) \quad by + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = l - c$$

بدینسان از تعداد محورها یکی کاهش یافته است. با تکرار همین استدلال، تعداد محورها را متوالیاً کاهش می‌دهیم تا تعداد محورها به‌دو برسد. در این هنگام، برطبق حالت دوم نتیجه می‌گیریم که مکان هندسی موردنظر خطی است راست.

اثبات عکس مطلب آسان است و به‌خواننده واگذار می‌شود.

توضیح. در قضیهٔ ۲.۲، در حالت خاص، دستگاه مختصات دو محوری را متشکل از دو محور موازی اختیار کردیم. مسلماً هنگامی‌که بخواهیم خاصیت هندسی یک شکل مسطح را مطالعه کنیم، دستگاه مختصات مورد لزوم را متشکل از دو محور موازی اختیار نمی‌کنیم چرا

MATH75.IR

که برای تعیین جای یک نقطه در صفحه، دو محور را باید متقاطع اختیار کرد. اما اگر دستگاه مختصات چند محوری مورد لزوم، شامل بیش از دو محور باشد امکان دارد که دو یا چند محور آن با هم موازی باشند مثلاً وقتی مطالعه خاصیت یک n ضلعی ($n \geq ۴$) مطرح باشد چون دو ضلع این n ضلعی ممکن است موازی باشند از این جهت دو محوری که منطبق بر این دو ضلع اختیار می‌شوند موازی‌اند. همچنین در اثبات قضیه ۲.۲ ، هنگامی که به‌جای دو محور $x_1x'_1$ و $x_2x'_2$، محور $y'y$ را جایگزین می‌کنیم، محور اخیر ممکن است موازی با یکی از محورهای $x_3x'_3$، $x_4x'_4$، ... ، و $x_nx'_n$ باشد. علاوه‌بر این ضرایب معادله‌ها ممکن است مقادیری باشند که بحثهای مذکور در قضیه (۲.۲) به‌کار آیند.

۳.۲. معادله خطی که از نقطه برخورد دو محور می‌گذرد

۳.۲. الف. دو محور $x'x$ و $y'y$ متقاطع در نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم معادلهٔ هر خطی که از نقطهٔ O می‌گذرد به‌صورت زیر است

$$ax+by=0 \qquad (۱)$$

در این معادله x و y مختصات نقطه و a و b دو عدد جبری ثابت‌اند.

برهان. خط OL را در نظر می‌گیریم و مختصات نقطهٔ P از آن را (x_0, y_0) می‌نامیم. از این نقطه، عمودهای PH و PK را به‌ترتیب بر دو محور $x'x$ و $y'y$ وارد می‌کنیم. نقطه دلخواه M را روی خط OL در نظر گرفته و مختصات آن را (x,y) می‌نامیم. از نقطه M دو عمود MR و MS را به ترتیب بر دو محور $x'x$ و $y'y$ فرود می‌آوریم.

از توازی دو خط PH و MR نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{PH}}=\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}} \qquad (۲)$$

از توازی دو خط PK و MS نتیجه می‌شود:

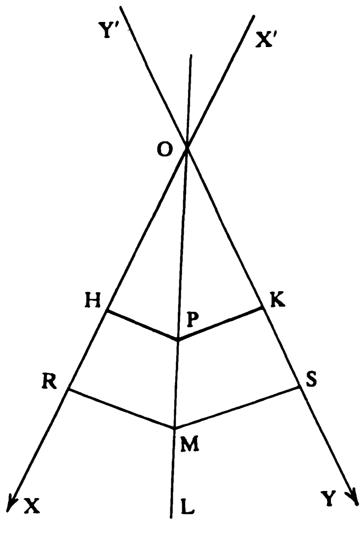
$$\frac{\overrightarrow{MS}}{\overrightarrow{PK}}=\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OP}} \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۲) و (۳) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\overrightarrow{MR}}{\overrightarrow{PH}}=\frac{\overrightarrow{MS}}{\overrightarrow{PK}} \qquad (۴)$$

از رابطه (۴) رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0} \qquad (۵)$$



بنابراین مختصات نقاط خط OL در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$y_\circ x - x_\circ y = \circ \quad (۶)$$

معادلهٔ (۶) به‌صورت معادلهٔ (۱) است پس مختصات نقاط واقع برخطی که از نقطهٔ O می‌گذرد در یک معادلهٔ درجه اول به‌صورت (۱) صدق می‌کنند.

اکنون عکس مطلب را ثابت می‌کنیم. نقاطی در نظر می‌گیریم که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. مختصات این نقاط در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b} \quad (۷)$$

بنابر رابطهٔ (۷) نسبت فواصل جبری این نقاط از دو محور $x'x$ و $y'y$ ثابت است پس مکان این نقاط خطی است راست که از نقطه O می‌گذرد.

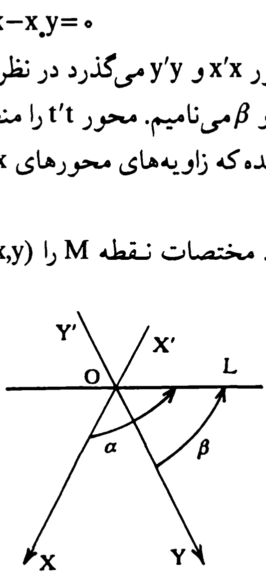
۳.۲ ب. در ضمنِ اثباتِ حکمِ پیش، حکم زیر را ثابت نمودیم.

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ بِرخورد دو محور $x'x$ و $y'y$ و نقطهٔ ثابت $M(x_\circ,y_\circ)$ می‌گذرد چنین است:

$$y_\circ x - x_\circ y = \circ$$

۳.۲ پ. خط OL را که از نقطه برخورد دو محور $x'x$ و $y'y$ می‌گذرد در نظر می‌گیریم. زاویه‌های محورهای $x'x$ و $y'y$ با خط OL به‌ترتیب α و β می‌نامیم. محور $t't$ را منطبق برخط OL اختیار می‌کنیم. جهت این محور طوری انتخاب شده که زاویه‌های محورهای $x'x$ و $y'y$ با آن به‌ترتیب α و β می‌باشند.

نقطهٔ دلخواه M را روی خط OL اختیار می‌کنیم. مختصات نقطه M را (x,y) و اندازه جبری بردار $\overrightarrow{OM}$ روی محور $t't$ را با $\overline{OM}$ نمایش‌می‌دهیم. بنابر مطلب (۸.۱) چنین داریم:



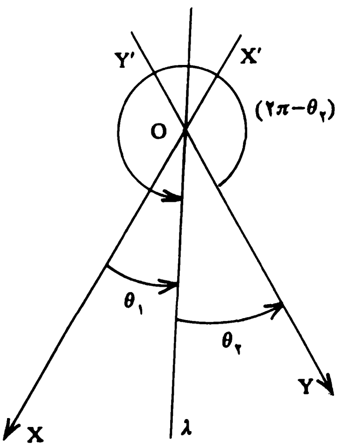
$$x = \overline{OM}\sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{t't}) = \overline{OM}\sin\alpha$$

$$y = \overline{OM}\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{t't}) = \overline{OM}\sin\beta$$

از دو رابطهٔ بالا، معادله OL به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x\sin\beta - y\sin\alpha = 0$$

۳.۲.ت. دو محور $x'ox$ و $y'oy$ و نیم‌خط $O\lambda$ را داخل زاویه xoy در نظر می‌گیریم. زاویهٔ محور ox با نیم‌خط $O\lambda$ را θ_1 و زاویه‌ای که باید نیم‌خط $O\lambda$ را حول نقطه O به‌آن اندازه در جهت مثبت مثلثاتی بچرخانیم تا بر نیم‌محور oy منطبق شود θ_2 می‌نامیم. ثابت کنید معادلهٔ خط $O\lambda$ چنین است:



$$(1)\qquad x\sin\theta_2 + y\sin\theta_1 = 0$$

زاویهٔ محور $y'oy$ با نیم‌خط $O\lambda$ برابر $(2\pi-\theta_2)$ است پس معادلهٔ خط $O\lambda$، بنابر (۳.۲. پ) چنین است:

$$(2)\qquad x\sin(2\pi-\theta_2) - y\sin\theta_1 = 0$$

معادله (۲) پس از اختصار به‌صورت (۱) در می‌آید.

۴.۲. دو خط موازی

قضیه. یک شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط l و l' به‌معادلات

$$(1)\qquad ax+by=c$$

$$(2)\qquad a'x+b'y=c'$$

موازی باشند آن است که رابطه زیر برقرار باشد

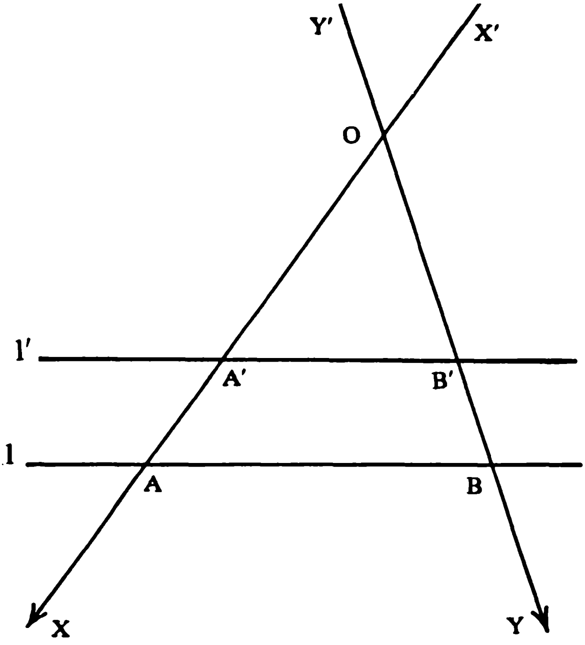
$$(3)\qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

برهان.

الف. ابتدا فرض می‌کنیم که $c \neq 0$ و $c' \neq 0$ یعنی هیچ‌یک از دو خط l و l' از نقطهٔ O محل برخورد دو محور $x'x$ و $y'y$ نگذرند. نقاط برخورد خط l را با دو محور $x'x$ و $y'y$ به‌ترتیب A و B و نقاط برخورد خط l' با محور $x'x$ و $y'y$ را به‌ترتیب A' و B' می‌نامیم. چون $x_A = 0$ پس بنابر معادلهٔ (۱) چنین داریم:

$$(4)\qquad y_A = \frac{c}{b}$$

MATH75.IR



بنابر (۸.۱) فاصله جبری نقطه A از محور $y'y$ چنین است:

$$y_A = \overline{OA}\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x}) \qquad (۵)$$

از مقایسه (۴) و (۵) رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\overline{OA} = \frac{c}{b} \times \frac{۱}{\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x})} \qquad (۶)$$

با همین شیوه استدلال، رابطهٔ زیر را می‌نویسیم

$$\overline{OB} = \frac{c}{a} \times \frac{۱}{\sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y})} = -\frac{c}{a} . \frac{۱}{\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x})} \qquad (۷)$$

از مقایسه دو رابطه (۶) و (۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -\frac{a}{b} \qquad (۸)$$

با همین شیوه استدلال، رابطه زیر را دربارهٔ خط l' می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = -\frac{a'}{b'} \qquad (۹)$$

اگر دو خط l و l′ موازی باشند چنین داریم:

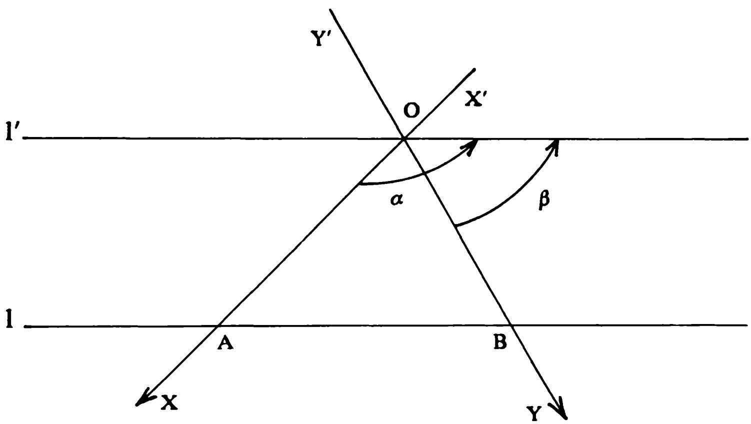
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \qquad (۱۰)$$

از سه رابطه (۸) و (۹) و (۱۰) رابطه (۳) حاصل می‌شود.

برعکس اگر بین ضرایب دو معادله (۱) و (۲)، رابطه (۳) برقرار باشد، از سه رابطه (۳) و (۸) و (۹) رابطهٔ (۱۰) حاصل می‌شود و از رابطهٔ (۱۰) توازی دو خط l و l′ نتیجه می‌شود.

ب. فرض کنیم یکی از دو خط l و l′ مثلاً l′ از نقطهٔ O بگذرد یعنی $c'=0$ باشد. معادلهٔ l′ چنین است:

$$a'x+b'y=0 \qquad (۱۱)$$



زاویه‌های محورهای x′x و y′y را با خط l′ به‌ترتیب α و β می‌نامیم.

بنابر (۳.۲. پ) معادلهٔ خط l′ چنین است:

$$x\sin\beta-y\sin\alpha=0 \qquad (۱۲)$$

از مقایسهٔ دو معادله (۱۱) و (۱۲) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\frac{a'}{\sin\beta}=-\frac{b'}{\sin\alpha} \qquad (۱۳)$$

اگر دو خط l و l′ موازی باشند آنگاه چنین داریم:

$$\sin\alpha=\sin A \quad \text{و} \quad \sin\beta=\sin B \qquad (۱۴)$$

رابطهٔ (۱۳) با رعایت رابطه‌های (۱۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{a'}{\sin B}=-\frac{b'}{\sin A} \qquad (۱۵)$$

با توجه به‌قضیهٔ سینوسها، رابطهٔ زیر را در مثلث OAB می‌نویسیم:

MATH75.IR

$$\frac{(OA)}{\sin B} = \frac{(OB)}{\sin A} \quad (۱۶)$$

از رابطهٔ (۱۶)، با توجه به‌علامت رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{a}{\sin B} = -\frac{b}{\sin A} \quad (۱۷)$$

از مقایسهٔ (۱۳) و (۱۷) با توجه به‌دو رابطه (۱۴) رابطه (۳) حاصل می‌شود.

مختصر آنکه اگر دو خط l و 'l موازی باشند آنگاه بین ضرایب دو معادله (۱) و (۱۱) رابطه (۳) برقرار است.

برعکس فرض کنیم که بین ضرایب دو معادله (۱) و (۱۱) رابطه (۳) برقرار باشد.

از رابطهٔ (۳) با توجه به‌رابطهٔ (۱۷) رابطهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود. از مقایسهٔ (۱۵) و (۱۳) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin A} \quad (۱۸)$$

اکنون خط OK را موازی با خط l (یعنی AB) رسم می‌کنیم. معادله خط OK چنین است:

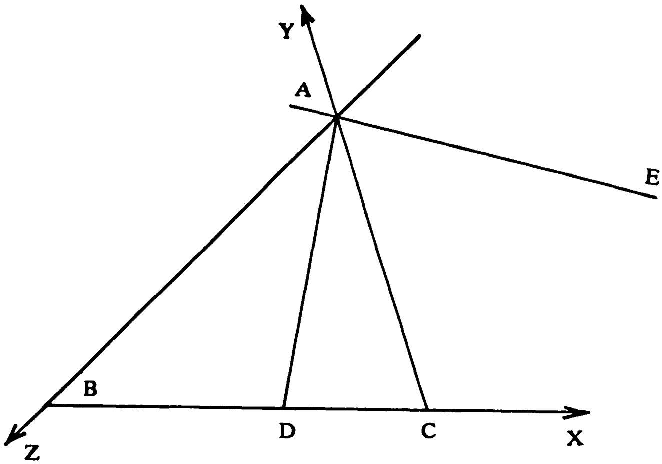
$$x\sin B - y\sin A = 0 \quad (۱۹)$$

با توجه به‌رابطهٔ (۱۸)، نتیجه می‌گیریم که در معادلهٔ (۱۲) و (۱۹) یک خط را نمایش می‌دهند. چون خط OK موازی با خط AB است پس خط 'l به‌معادله (۱۲) نیز موازی خط AB است. مختصر آنکه اگر بین ضرایب معادله (۱) و (۱۱)، رابطه (۳) برقرار باشد آنگاه دو خط l و 'l موازی‌اند.

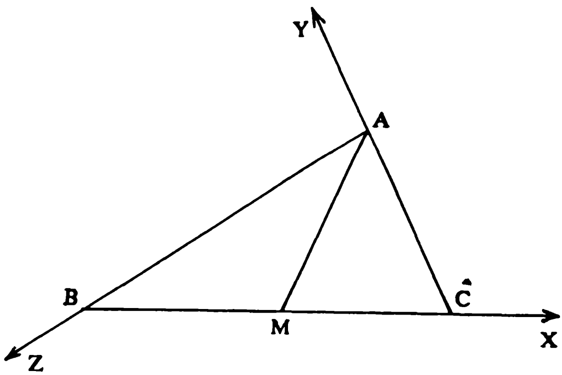
۵.۲. معادلات خطوط مهم‌در مثلث (نیمسازها، میانه‌ها، ارتفاعها، و عمودمنصفها)

۵.۲. الف. معادلات نیمسازهای مثلث. نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث خطی است که از رأس آن زاویه بگذرد و آن زاویه را به‌دو قسمت مساوی تقسیم کند. نیمساز زاویه خارجی مثلث خطی است که از رأس آن زاویه بگذرد و زاویه مکمل آن زاویه را به‌دو قسمت مساوی بخش کند. در شکل، خط AD نیمساز زاویهٔ داخلی A و خط AE نیمساز زاویه خارجی A است. هر مثلث دارای سه نیمساز داخلی و سه نیمساز خارجی است.

معادلات‌نیمسازهای داخلی‌زاویه‌های A، B، و C به‌ترتیب چنین‌اند: $y=z$ و $z=x$ و $x=y$. معادلات نیمسازهای خارجی زوایای A، B، و C به‌ترتیب چنین‌اند: $y=-z$، $z=-x$، و $x=-y$.



۵.۲ ب. معادلات سه‌میانه. میانه خطی است که رأس مثلث را به‌وسط ضلع مقابل وصل می‌کند. در شکل، خط AM که رأس A از مثلث ABC را به‌نقطه M وسط ضلع BC وصل می‌کند یک میانه مثلث است. هر مثلث دارای سه میانه است.



نخست معادلهٔ میانه AM را جست‌وجو می‌کنیم. می‌دانیم که میانه مثلث، سطح آن را به‌دوقسمت مساوی تقسیم می‌کند یعنی

(۱) $S(ABM)=S(AMC)$

فواصل جبری نقطه M را از دو محور $y'y$ و $z'z$ به‌ترتیب y_0 و z_0 می‌نامیم. طولهای دو ضلع AC و AB را به‌ترتیب b و c می‌نامیم. رابطه (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

(۲) $by_0 = cz_0$

اگر $M(x,y)$ نقطه دلخواهی از خط AM باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

(۳) $\dfrac{y}{y_0} = \dfrac{x}{x_0}$

MATH75.IR

از دو رابطهٔ (۲) و (۳) معادلهٔ خط AM به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

(۴) $by=cz$

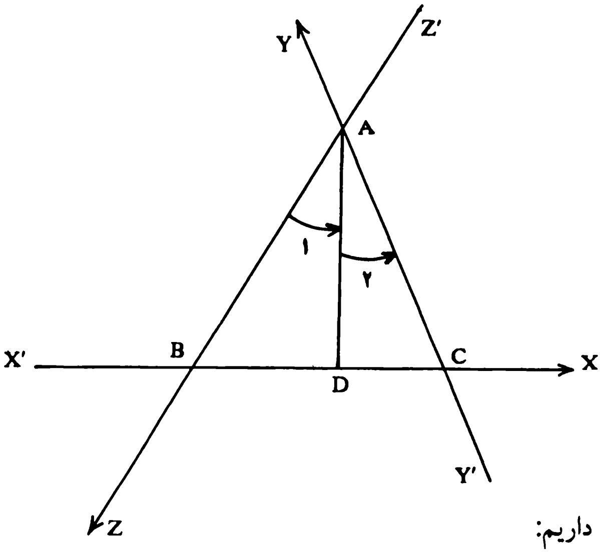
معادلات میانه‌هایی که از رأسهای B و C می‌گذرند به‌ترتیب به‌صورت زیراند:

$ax=cz$

$by=ax$

۵.۲ پ. معادلات سه ارتفاع. ابتدا معادله ارتفاع AD را می‌نویسیم.
معادلهٔ ارتفاع AD، بنابر (۳.۲.پ) چنین است:

(۱) $z\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{AD}) - y\sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AD}) = 0$



از طرفی چنین داریم:

(۲) $\sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AD}) = \sin A_1 = \cos B$

(۳) $\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{AD}) = \sin(\pi - A_2) = \sin A_2 = \cos C$

معادلهٔ (۱) با توجه به‌تساویهای (۲) و (۳) چنین نوشته می‌شود:

(۴) $z\cos C - y\cos B = 0$

معادله‌های ارتفاعهایی که از رأسهای B و C می‌گذرند به‌ترتیب چنین‌اند:

$x\cos A - z\cos C = 0$

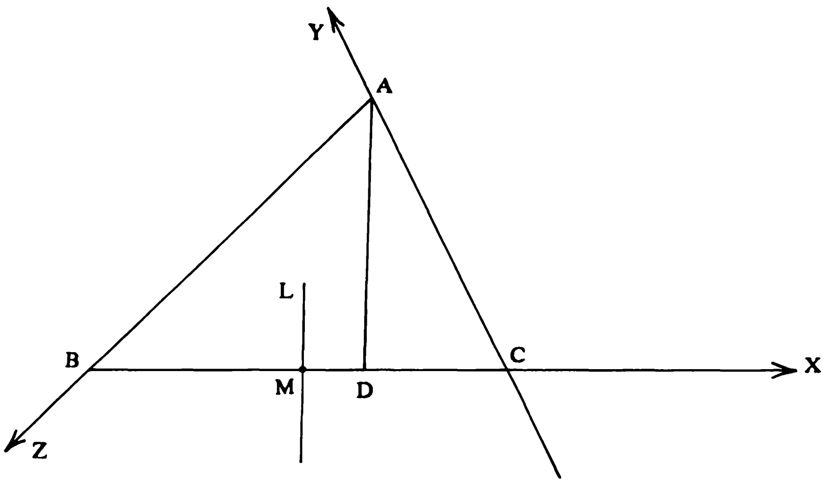
$y\cos B - x\cos A = 0$

۵.۲ ت. معادلات سه عمودمنصف. بنابه‌تعریف، عمودمنصف یک ضلع مثلث، خطی است که از وسط آن ضلع، برآن ضلع عمود رسم شود. در مثلث ABC، از نقطه M وسط

ضلع BC خط ML را برخط BC عمود رسم می‌کنیم. خط ML عمودمنصف ضلع BC نامیده می‌شود. هر مثلث دارای سه عمودمنصف است.

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC را بنویسیم. ابتدا معادله ارتفاع AD را بنابر شماره (۲.۵. پ) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y\cos B - z\cos C = 0 \qquad (۱)$$



معادله هر خط موازی با خط AD، بنابر (۲.۴) به‌صورت زیر است:

$$y\cos B - z\cos C = m \qquad (۲)$$

در معادلهٔ (۲)، m پارامتر است. با تغییر m، خط به‌معادله (۲)، موازی خود حرکت می‌کند. برای آنکه خط به‌معادله (۲)، برنقطهٔ M بگذرد لازم است که y و z نقطه M، در معادله (۲) صدق کنند. y و z نقطه M چنین‌اند:

$$y = (MC)\sin C = \frac{a}{۲}\sin C$$

$$z = (MB)\sin B = \frac{a}{۲}\sin B$$

a اندازهٔ طول ضلع BC است. y و z نقطهٔ M را در معادلهٔ (۲) می‌گذاریم، مقدار m مربوط به خط ML به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{a}{۲}\cos(C-B)$$

پس معادله خط عمود منصف ضلع BC چنین است:

$$y\cos B - z\cos C = \frac{a}{۲}\cos(B-C) \qquad (۳)$$

MATH75.IR

با همین شیوه استدلال معادلات عمودمنصفهای دو ضلع CA و AB را به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$z\cos C - x\cos A = \frac{b}{۲}\cos(C-A)$$

$$x\cos A - y\cos B = \frac{c}{۲}\cos(A-B)$$

b و c به‌ترتیب طولهای دو ضلع AC و AB اند.

نقطه‌های بر یک استقامت

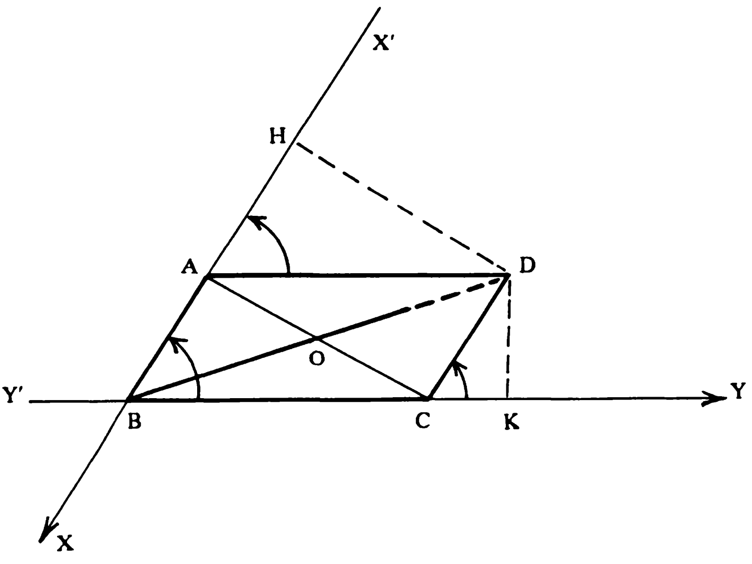
در شماره‌های (۶.۲) تا (۱۷.۲) قضیه‌هایی در زمینه نقاط بر یک استقامت مطرح می‌کنیم. برای اثبات این قضایا همواره قضیهٔ (۲.۲) را به‌کار می‌بریم.

۶.۲. قضیه

دو قطر هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

برهان. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطهٔ برخورد دو قطر AC و BD بر وسط هر یک از آنها قرار دارد.

ثابت می‌کنیم خطی که نقطهٔ B را به‌نقطهٔ O، وسط قطر AC وصل می‌کند از نقطهٔ D می‌گذرد.



MATH75.IR

محورهای $x'x$ و $y'y$ را به‌ترتیب منطبق بر دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و هم‌سوی با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای دو پاره‌خط AB و AC را به‌ترتیب a و b می‌نامیم. معادلهٔ خط BO، میانه مثلث ABC بنابر، (۵.۲. ب) چنین است:

$$(1) \quad ax=by$$

اکنون مختصات نقطهٔ D را حساب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که مختصات نقطهٔ D، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. از نقطه D، عمودهای DH و DK را به‌ترتیب بر دو خط AB و BC وارد می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه ADH و CKD به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$x_D=(DH)=(AD)\sin D\hat{A}H=b\sin B$$

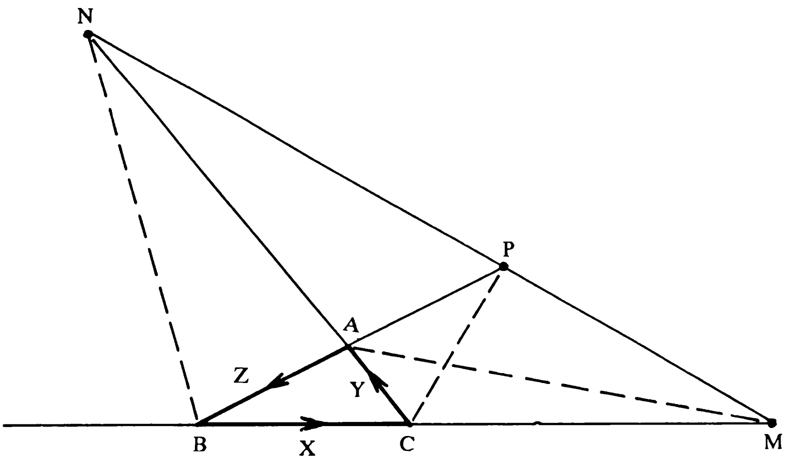
$$y_D=(KD)=(CD)\sin K\hat{C}D=a\sin B$$

مختصات نقطه D در معادله (۱)، صدق می‌کنند پس نقطهٔ D برخط BO واقع است.

۷.۲. قضیه

در هر مثلث، نیمسازهای سه زاویهٔ خارجی، امتدادهای ضلعهای روبرو را در سه نقطه که بریک خط راست جای دارند قطع می‌کنند.

برهان. در مثلث ABC، سه نقطه M، N، و P به‌ترتیب نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی A، B، و C با امتداد اضلاع مقابل آنها BC، CA، و AB می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه نقطه M، N، و P بریک خط راست جای دارند.



محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. بنابر قضیه (۲.۲) نقاطی که مختصات آنها در دستگاه مختصات سه محوری xyz، در رابطه درجه اول زیر صدق می‌کنند بریک خط راست جای دارند

MATH75.IR

$$(۱) \quad x+y+z=0$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات نقطه‌های M، N، و P در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند، زیرا دربارهٔ مختصات نقطه‌های مذکور رابطه‌های زیر برقراراند

$$M \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \end{array} \right. \qquad N \left| \begin{array}{l} y=0 \\ z=-x \end{array} \right. \qquad P \left| \begin{array}{l} z=0 \\ x=-y \end{array} \right.$$

چون مختصات سه نقطه M، N، و P در معادله درجه اول (۱) صدق می‌کنند پس این سه نقطه بریک خط راست جای دارند.

۸.۲. قضیه

در هر مثلث پایهای نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی و پای نیمساز زاویهٔ خارجی رأس سوم، سه نقطه‌اند که بر یک خط راست جای دارند.

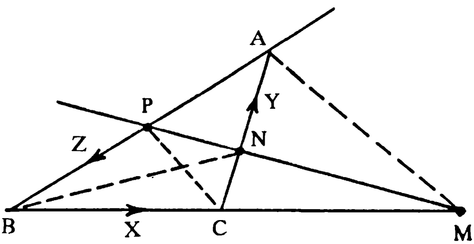
اثبات. در شکل زیر، دو نقطهٔ N، و P به‌ترتیب پاهای دو نیمساز دو زاویهٔ داخلی B و C می‌باشند و نقطهٔ M پای نیمساز زاویهٔ خارجی A می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه نقطهٔ M، N، و P بر یک خط راست قرار دارند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات سه نقطهٔ M، N، و P در دستگاه مختصات سه‌محوری xyz وابسته به‌مثلث ABC، در معادله درجه اول زیر صدق می‌کنند

$$(۱) \quad -x+y+z=0$$

زیرا مختصات نقطه‌های مذکور در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند

$$M \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \end{array} \right. \qquad N \left| \begin{array}{l} y=0 \\ x=z \end{array} \right. \qquad P \left| \begin{array}{l} z=0 \\ x=y \end{array} \right.$$

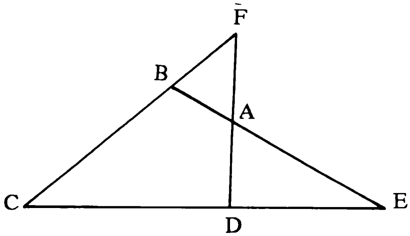
پس بنابر قضیه (۲.۲)، سه نقطه M، N، و P بر یک خط راست قرار دارند.



۹.۲. تعریف چهار ضلعی کامل

شکل حاصل از یک دستگاه متشکل از چهار خط را چهار ضلعی کامل می‌نامند. به‌عبارت دیگر اگر اضلاع یک چهارضلعی معمولی ABCD را امتداد دهیم تا در نقاط E و F

برخورد نمایند شکلی حاصل می‌شود که چهارضلعی کامل نام دارد.



یک چهار ضلعی کامل ABCDEF دارای شش رأس و سه قطر است. رأسها عبارت‌اند از A، B، C، D، E، و F که از تقاطع اضلاع حاصل می‌شوند. قطرها عبارت‌اند از سه خط AC، BD، و EF که هرکدام دو رأس مقابل چهار ضلعی کامل را به‌هم وصل می‌کنند.

۲.۱۰. قضیه

در هر چهار ضلعی کامل نقاط برخورد نیمسازهای هر دوزاویه خارجی مقابل هم، سه نقطه‌اند که بریک خط راست جای دارند.

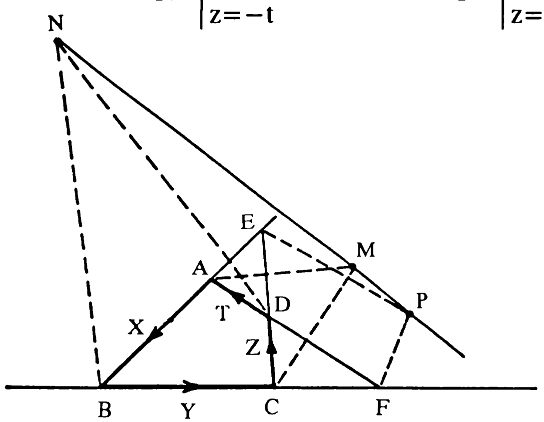
اثبات. در چهار ضلعی کامل ABCDEF، نقطه برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی مقابل A و C را M می‌نامیم. همچنین نقطه برخورد دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی مقابل B و D را N و نقطهٔ برخورد دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی مقابل E و F را P می‌نامیم.

محورهای x′x، y′y، z′z، و t′t را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{DA}$ و هم‌سو با آنها انتخاب می‌کنیم. معادلهٔ درجه اول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(1) \qquad x+y+z+t=0$$

مختصات سه نقطهٔ M، N، و P در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند زیرا دربارهٔ مختصات این سه نقطه روابط زیر برقرار است:

$$M \left| \begin{array}{l} x=-t \\ y=-z \end{array} \right. \qquad N \left| \begin{array}{l} x=-y \\ z=-t \end{array} \right. \qquad P \left| \begin{array}{l} y=-t \\ z=-x \end{array} \right.$$



پس بنابر قضیه (۲.۲)، سه نقطه M، N، و P بریک خط راست قرار دارند.

MATH75.IR

۱۱.۲. قضیه

در هر چهارضلعی کامل، نقطهٔ برخورد دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی مقابل، و دو نقطه برخورد نیمسازهای داخلی دو زوج زاویهٔ مقابل دیگر بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. در چهارضلعی کامل ABCDEF، نقطهٔ P محل برخورد نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ مقابل E و F است، نقطه M محل برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی مقابل A و C و نقطه N محل برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی مقابل B و D است. می‌خواهیم ثابت کنیم سه نقطه M، N، و P بر یک خط راست جای دارند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات سه نقطه M، N، و P، در دستگاه مختصات چهار محوری xyzt وابسته به‌چهار ضلعی ABCD در معادله درجه اول زیر صدق می‌کنند:

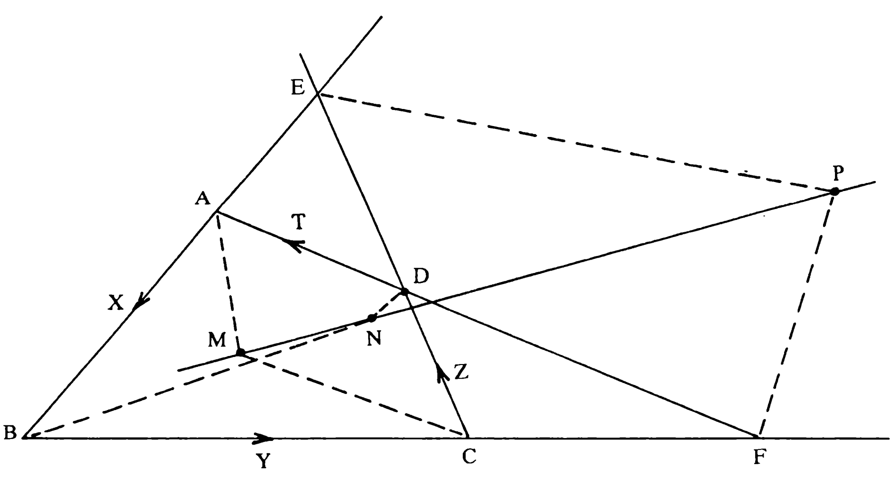
$$x-y+z-t=0$$

زیرا مختصات نقطه‌های مذکور در معادله‌های زیر صدق می‌کنند:

$$M \left| \begin{array}{l} x=t \\ y=z \end{array} \right. \qquad N \left| \begin{array}{l} z=t \\ x=y \end{array} \right. \qquad P \left| \begin{array}{l} y=-t \\ x=-z \end{array} \right.$$

پس بنابر قضیه (۲.۲)، سه نقطهٔ M، N، و P بریک خط راست قرار دارند.

اثبات قضیه در دو حالت دیگر به‌طور مشابه انجام می‌گیرد.



۱۲.۲. قضیه

در هر چهارضلعی کامل، نقطه برخورد هر ضلع با خطی که پایهای نیمسازهای خارجی

مثلث حاصل از سه ضلع دیگر را به‌هم وصل می‌کند چهار نقطه‌اند واقع بر یک خط راست.

برهان. چهارضلعی کامل ABCDEF را در نظر می‌گیریم و محورهای x'x، y'y، z'z و t't را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BD}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{DA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.

محل تلاقی خط AB را با خطی که پایهای نیمسازهای خارجی مثلث ABC را به‌هم وصل می‌کند، M می‌نامیم. مختصات نقطهٔ M بنابر قضیهٔ (۷.۲) در روابط زیر صدق می‌کند

$$M\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y+z+t=0 \end{array}\right.$$

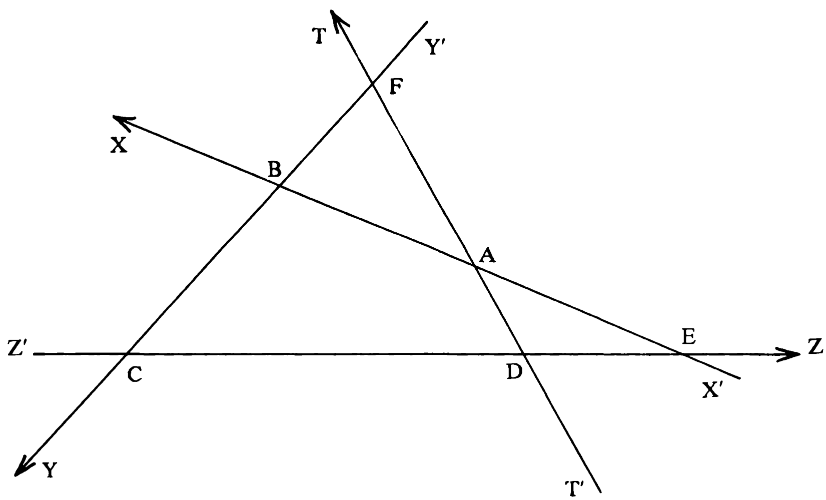
پس نقطهٔ M روی خط l به‌معادله

$$x+y+z+t=0 \qquad (1)$$

قرار دارد. مختصات سه نقطه مورد نظر دیگر در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\left|\begin{array}{l} y=0 \\ z+t+x=0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} z=0 \\ t+x+y=0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} t=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$$

پس این سه نقطه نیز بر روی خط l قرار دارند.



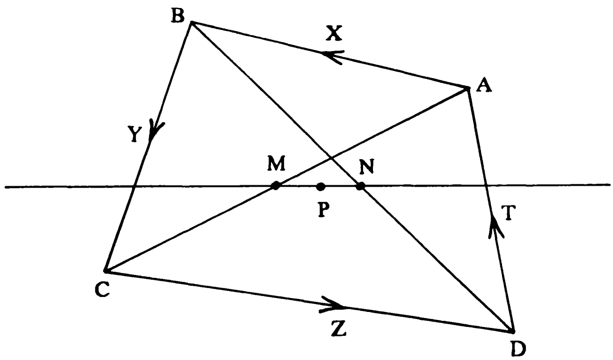
MATH75.IR

۱۳.۲. قضیه لئون آن[1]

در هر چهارضلعی ABCD خط MN که وسطهای دو قطر AC و BD را بههم وصل می‌کند مکان هندسی نقاطی مانند P است به‌طوری‌که اندازه‌های جبری سطحهای چهار مثلث PAB، PBC، PCD، و PDA در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$(۱)\qquad S(PAB)+S(PCD)=S(PBC)+S(PDA)$$

برهان. چهار محور $x'x$، $y'y$، $z'z$، و $t't$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{DA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.



اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{DA}$ را به‌ترتیب روی محورهای $x'x$، $y'y$، $z'z$، و $t't$ با a، b، c، و d نشان می‌دهیم.

خط MB میانهٔ مثلث ABC است پس بین اندازه‌های جبری سطحهای دو مثلث MAB و MBC تساوی زیر برقرار است:

$$(۲)\qquad S(MAB)=S(MBC)$$

نیز چون خط MD میانهٔ مثلث ACD است پس تساوی زیر برقرار است:

$$(۳)\qquad S(MCD)=S(MDA)$$

از جمع عضوهای نظیر تساویهای (۲) و (۳)، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$(۴)\qquad S(MAB)+S(MCD)=S(MBC)+S(MDA)$$

---

۱ ـ پیرلئون‌آن Pierre,LEON ANNE (۱۸۵۰-۱۸۰۶). مهندس پلی‌تکنیک و استاد کولژلوئی کبیر. لئون‌آن اثباتهای هوشمندانه‌ای از چند قضیه هندسه از جمله از یکی از قضیه‌های نیوتن، در مجلهٔ Les Nourelles Annales عرضه کرده است.

از رابطهٔ (۴) و مطلب شمارهٔ (۴.۱) نتیجه می‌شود که مختصات نقطهٔ M (x,y,z,t) در دستگاه مختصات چهارمحوری xyzt وابسته به چهارضلعی ABCD در معادلهٔ درجه اول زیر صدق می‌کنند:

$$ax+cz=by+dt \qquad (۵)$$

با همان شیوه استدلالی که رابطه (۴) را ثابت کردیم، رابطه زیر را ثابت می‌کنیم:

$$S(NAB)+S(NCD)=S(NBC)+S(NDA) \qquad (۶)$$

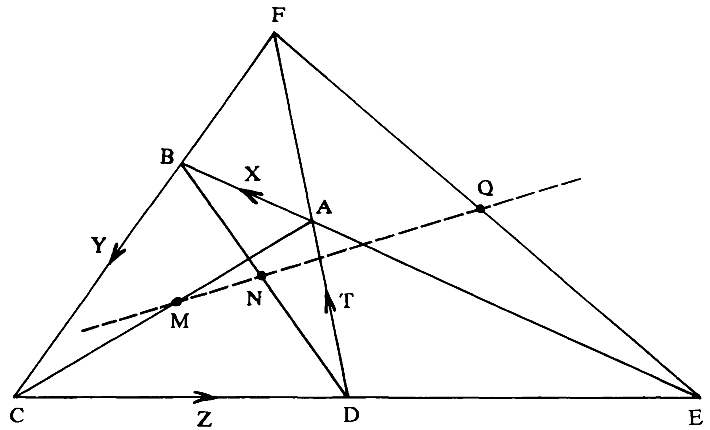
از رابطه (۶) نتیجه می‌شود که مختصات نقطه N(x,y,z,t) در رابطه (۵) صدق می‌کنند.

چون مختصات دو نقطهٔ M و N، در رابطهٔ درجه اول (۵) صدق می‌کنند پس بنابر قضیهٔ (۲.۲) مختصات هر نقطهٔ P از خط MN در رابطهٔ درجهٔ اول (۵) صدق می‌کنند و در نتیجه برای هر نقطهٔ P از خط MN رابطهٔ جبری (۱) صادق است.

۱۴.۲. قضیه گاوس[1]

در هر چهارضلعی کامل، وسطهای سه قطر، سه نقطه‌اند که بریک خط راست واقع‌اند.

برهان. در چهارضلعی کامل ABCDEF وسطهای سه قطر AC، BD، و EF را به‌ترتیب M، N و Q می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه نقطه بر یک خط راست قرار دارند.



۱ ـ **گاوس** (۱۸۵۵ ـ ۱۷۷۷) ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بزرگ آلمانی. گاوس دارای اکتشافات متعدد و بسیار ارزنده در آنالیز، حساب عالی، هندسهٔ عناصر بی‌نهایت کوچکها، مکانیک آسمانی، علم مساحی، حساب احتمالات، الکتریسیته و مغناطیس است. بعضی از نویسندگان تاریخ علم نام او را در ردیف نامهای ارشمیدس و نیوتن ذکر می‌کنند.

بنابر قضیهٔ (۱۳.۲) خط MN مکان هندسی نقاطی مانند P است به‌طوری‌که بین اندازه‌های جبری سطحهای چهار مثلث PAB، PBC، PCD، و PDA رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$(۱)\quad S(PAB)+S(PCD)=S(PBC)+S(PDA)$$

پس اگر ثابت کنیم که نقطهٔ Q در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$(۲)\quad S(QAB)+S(QCD)=S(QBC)+S(QDA)$$

نتیجه می‌شود که نقطه Q برخط MN واقع است و قضیه ثابت می‌شود.

چهار مثلث AEF، BEF، CEF، و DEF را که دارای ضلع مشترک EF می‌باشند در نظر می‌گیریم. محیطهای این چهار مثلث را در یک جهت دوران می‌پیماییم و اندازهٔ جبری سطحهای آنها را به‌ترتیب α، β، γ، و δ می‌نامیم. خطهای AQ، BQ، CQ، و DQ به‌ترتیب میانه‌های مثلثهای یاد شده‌اند. هریک از این میانه‌ها، مثلث مربوط را به‌دو مثلث معادل بخش می‌کنند. با رعایت این مطلب روابط جبری زیر را می‌نویسیم.

$$(۳)\quad S(QCD)=S(QCE)-S(QDE)=\frac{۱}{۲}\gamma-\frac{۱}{۲}\delta$$

$$(۴)\quad S(QAB)=S(QEB)-S(QEA)=-\frac{۱}{۲}\beta+\frac{۱}{۲}\alpha$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$(۵)\quad S(QCD)+S(QAB)=\frac{۱}{۲}(\alpha+\gamma-\beta-\delta)$$

با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که

$$(۶)\quad S(QBC)+S(QDA)=\frac{۱}{۲}(\alpha+\gamma-\beta-\delta)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۵) و (۶) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

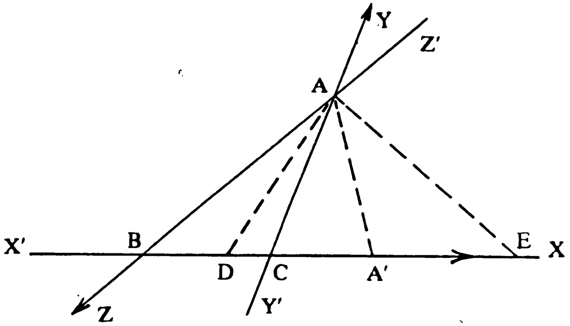
$$(۷)\quad S(QAB)+S(QCD)=S(QBC)+S(QDA)$$

از رابطهٔ (۷)، با توجه به‌قضیهٔ (۱۳.۲) نتیجه می‌شود که نقطهٔ Q برخط MN قرار دارد.

۱۵.۲. دایره‌های آپولونیوس[۱]

مثلث ABC را درنظر می‌گیریم ودوخط AD وAE راکه بترتیب نیسمازهای داخلی وخارجی زاویه A می‌باشند رسم‌می‌کنیم تاخط BC را درنقاط D و E قطع‌کنند. دایره‌به‌قطر DE را دایره آپولونیوس مربوط به‌ضلع BC می‌نامند. دایره به‌قطر DE بر رأس A می‌گذرد زیرا زاویه DAE قائمه است. هرمثلث دارای سه‌دایره آپولونیوس‌است که‌هریک ازآنها مربوط به‌یکی‌از اضلاع‌است.

قضیه. در هر مثلث مرکزهای سه دایره آپولونیوس بر یک خط راست قرار دارند.



---

۱ ـ اقلیدس، ارشمیدس، و آپولونیوس سه ریاضی‌دان بزرگ قرن سوم قبل‌از میلاداند. آپولونیوس منجّمی برجسته و هندسه‌دانی بسیار شایسته بود. مهمترین اثر او رساله‌ای است دربارهٔ مقاطع مخروطی. آپولونیوس با این اثر نام «هندسه‌دان بزرگ» را در بین معاصران خود کسب نمود. در سطور زیر سه تحقیق از آپولونیوس ذکر می‌کنیم:

۱. دو نقطهٔ ثابت A و B و عدد k مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ متحرک M به‌طوری که $\frac{MA}{MB}=k$ باشد یک دایره است اگر $k\neq ۱$ باشد و یک خط راست است اگر $k=۱$ باشد.

برای اثبات دو نقطهٔ P و Q را بر خط AB چنان اختیار می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}=k$$

دایره به‌قطر PQ مکان هندسی مطلوب است (اثبات درکتابهای هندسه مشروح است). اگر M نقطه‌ای از دایره به‌قطر PQ باشد خط MP نیمساز زاویهٔ AMB و خط MQ نیمساز زاویهٔ مجانب زاویهٔ مذکور است.

دایرهٔ مذکور در بالا، درکتابهای جدید هندسه دانشگاهها به‌دایرهٔ آپولونیوس معروف است (نقل ازکتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات» اثر هاوارد و .ایوز. شماره ۶ ـ ۴ . آپولونیوس).

۲. رسم دایره‌ای مماس بر سه دایره مفروض (این مسئله اکنون به‌مسئله آپولونیوس معروف است).

۳. تعیین مقطع مخروطی با معلوم بودن پنج خط مماس برآن.

MATH75.IR

برهان. مرکزهای سه دایرهٔ آپولونیوس مربوط به‌سه ضلع BC، CA، و AB را به‌ترتیب A'، B'، و C' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه نقطه بر یک خط راست قرار دارند.

سه محور $x'x$، $y'y$ و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. مختصات سه نقطهٔ A'، B'، و C' را حساب می‌کنیم و سپس ثابت می‌کنیم که مختصات این سه نقطه در یک معادله درجهٔ اول صدق می‌کنند و از آن نتیجه می‌گیریم که سه نقطهٔ مذکور بر یک خط راست قرار دارند.

ابتدا معادلهٔ خط AA' را جست‌وجو می‌کنیم. به‌آسانی ثابت می‌کنیم که زاویهٔ CAA' برابر زاویهٔ ABC است. می‌گوییم پاره‌خط AA' میانه مثلث قائم‌الزاویه DAE است پس طول AA' نصف طول وتر DE است. بنابراین مثلث ADA' متساوی‌الساقین است و چنین داریم:

$$\angle ADA' = \angle DAA'$$

از طرفی

$$\angle ADA' = \angle ABD + \angle BAD \quad (\text{زاویهٔ خارجی مثلث})$$

$$\angle DAA' = \angle DAC + \angle CAA'$$

از سه رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که

$$\angle CAA' = \angle ABC$$

معادلهٔ خط AA'، در دستگاه مختصات دو محوری yz، بنابر (۳.۲. پ) چنین است:

$$z \sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{AA'}) - y \sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AA'}) = 0$$

یا

$$z \sin(\pi + B) - y \sin(A + B) = 0$$

که به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$z \sin B + y \sin C = 0$$

پس مختصات نقطهٔ A' در دو معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$A' \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{y}{\sin B} + \dfrac{z}{\sin C} = 0 \end{array} \right.$$

با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که مختصات دو نقطهٔ B' و C' در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$C' \left| \begin{array}{l} z = 0 \\ \\ \dfrac{y}{\sin B} + \dfrac{x}{\sin A} = 0 \end{array} \right. \qquad B' \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sin A} + \dfrac{z}{\sin C} = 0 \end{array} \right.$$

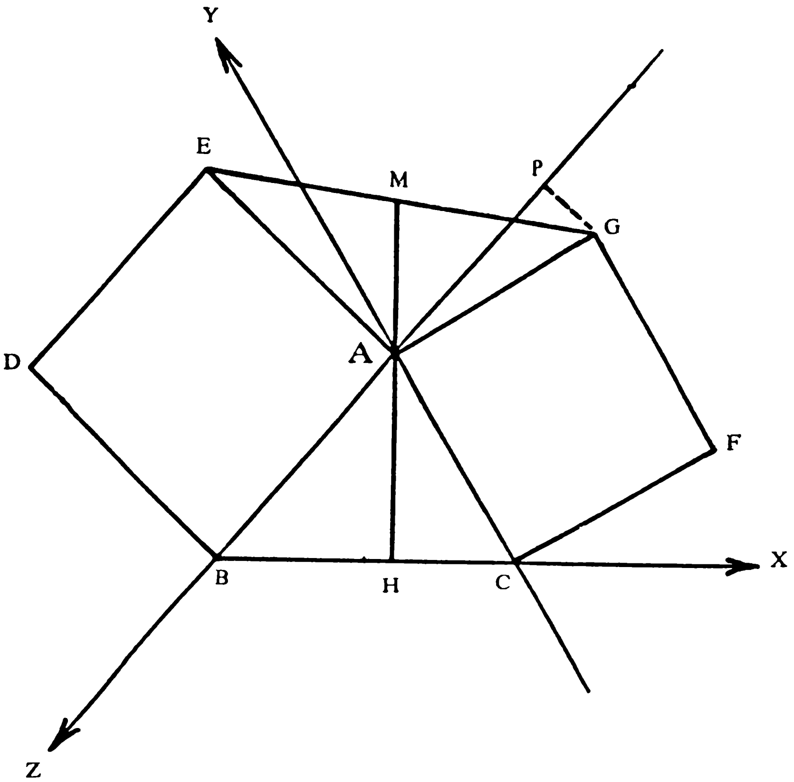
پس مختصات سه نقطهٔ A' ، B' و C' در معادلهٔ درجه اول زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{x}{\sin A} + \frac{y}{\sin B} + \frac{z}{\sin C} = 0$$

پس بنابر قضیهٔ (۲.۲)، سه نقطهٔ مذکور بر یک خط راست جای دارند.

۱۶.۲. قضیه

بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو مربع ABDE و ACFG را به‌طرف خارج می‌سازیم. ثابت کنید ارتفاع AH از مثلث ABC از نقطه M وسط پاره خط EG می‌گذرد.



MATH75.IR

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای دو ضلع AC و AB از مثلث ABC را به‌ترتیب b و c می‌نامیم. معادله ارتفاع AH بنابر (۵.۲. پ) چنین است:

$$(۱) \qquad y\cos B - z\cos C = ۰$$

اکنون y و z دو نقطه E و G را حساب می‌کنیم و سپس به‌کمک آنها، مختصات نقطه M وسط پاره خط EG را حساب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند و نتیجه می‌گیریم که خط AH از نقطهٔ M می‌گذرد.

ایگرگِ نقطهٔ G چنین است:

$$y = -(AG) = -(AC) = -b$$

برای محاسبهٔ z نقطه M، از نقطهٔ G، عمود GP را برخط AB فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه AGP چنین داریم:

$$GP = AG.\sin\ GAP$$

و چون زاویهٔ GAP متمم زاویه A است پس $\sin GAP = \cos A$. بنابراین، z نقطهٔ G چنین است:

$$z = b\cos A$$

با همین شیوه استدلال y و z نقطه E را حساب می‌کنیم.

$$z_E = -c \text{ و } y_E = c.\cos A$$

y و z نقطهٔ M وسط پاره‌خط EG از دستورهای زیر به‌دست می‌آید (ر.ک ۵.۱):

$$y_M = \frac{۱}{۲}(y_E + y_G)$$

$$z_M = \frac{۱}{۲}(z_E + z_G)$$

بنابراین

$$M \left| \begin{array}{l} y=\frac{۱}{۲}(-b+c\cos A) \\ \\ z=\frac{۱}{۲}(-c+b\cos A) \end{array} \right.$$

y و z نقطه M را در معادله (۱) می‌بریم حاصل می‌شود

$$(۲) \qquad (-b+c\cos A)\cos B-(-c+b\cos A)\cos C=۰$$

اکنون باید درستی رابطهٔ (۲) را ثابت کنیم تا نتیجه بگیریم که خط AH از نقطهٔ M می‌گذرد به‌کمک قضیهٔ سینوسها یعنی روابط (۳)، رابطهٔ (۲) را به‌صورت (۴) می‌نویسیم.

$$(۳) \qquad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$(۴) \qquad (-\sin B-\sin C.\cos A)\cos B-(-\sin C+\sin B.\cos A)\cos C=۰$$

عبارت سمت چپ تساوی بالا را به‌طرز زیر تبدیل می‌کنیم

$$\sin C\ \cos C-\sin B\ \cos B+\cos A\ \sin(C-B)$$

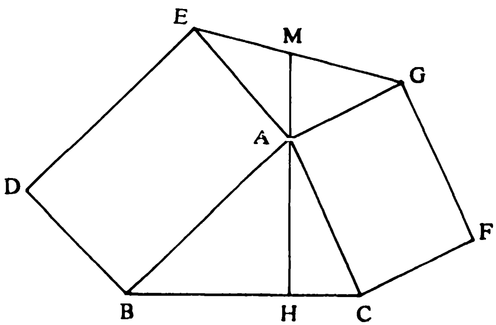
$$=\frac{۱}{۲}\sin ۲C-\frac{۱}{۲}\sin ۲B+\cos A\ \sin(C-B)$$

$$=\sin(C-B)\cos(C+B)+\cos A\sin(C-B)$$

$$=\sin(C-B)\left[\cos(B+C)+\cos A\right]$$

چون $A+B+C=\pi$ پس مقدار داخل کروشه صفر است و لذا درستی رابطهٔ (۲) مسلم است.

۲.۱۶. الف. تعمیم قضیه شماره ۲.۱۶. بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو مستطیل متشابه ABDE و ACFG را به‌طرف خارج مثلث می‌سازیم به‌طوری‌که AB و AC دو ضلع نظیر یکدیگر باشند (یعنی $\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AC}$). ثابت کنید خط AH ارتفاع مثلث ABC از نقطهٔ M وسط ضلع EG می‌گذرد.



MATH75.IR

برهان. نسبت تشابه‌دو مستطیل را k می‌نامیم: $\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AC}=k$. همان برهان‌قضیهٔ پیش را تکرار می‌کنیم و به‌نتیجهٔ مطلوب‌می‌رسیم. در قضیهٔ حاضر مختصات دونقطهٔ E و G چنین‌اند:

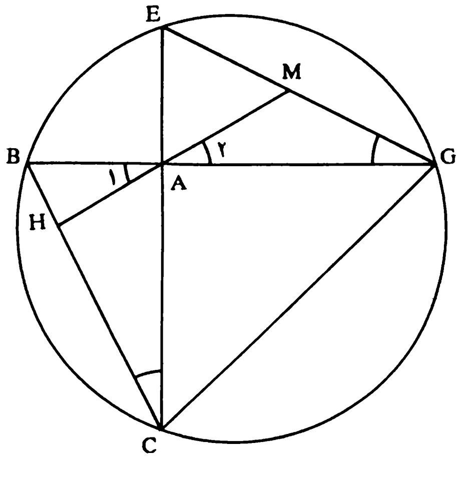
$$E\left|\begin{array}{l} y=kc\cos A \\ \\ z=-kc \end{array}\right. \qquad G\left|\begin{array}{l} y=-kb \\ \\ z=kb\cos A \end{array}\right.$$

مقایسهٔ قضیهٔ برهماگوپتا با قضیهٔ (۱۶.۲. الف). در زیر قضیهٔ برهماگوپتا را شرح می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که قضیهٔ برهماگوپتا حالت خاصی از قضیهٔ (۱۶.۲. الف) است.

۱۶.۲. ب. قضیه برهماگوپتا[1]. اگر در یک چهارضلعی محاطی دو قطر برهم عمود باشند، هر خط که از محل برخورد دوقطر بر یک ضلع چهارضلعی عمود شود از وسط ضلع مقابل به‌این ضلع می‌گذرد.

برهان. در چهارضلعی محاطی BCGE دو قطر EC و BG در نقطه A یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط AH از نقطه A برضلع BC عمود شده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که این خط از نقطه M وسط ضلع EG می‌گذرد.

چنین داریم: (دو زاویهٔ روبرو) $\hat{A}_1=\hat{A}_2$، (اضلاع برهم عمود) $\hat{A}_1=\hat{C}$، (دو زاویهٔ محاطی



۱ ـ برهماگوپتا از ریاضی‌دانهای برجستهٔ هند است. وی در حدود سال ۶۰۰ میلادی متولد گردید. از جمله ابتکارات ریاضی برهماگوپتا قضیهٔ زیر است:

اگر a، b، c، و d اضلاع یک چهارضلعی محاطی باشند و p نصف محیط آن چهارضلعی باشد مساحت آن چهارضلعی که با s نشان می‌دهیم از دستور زیر به‌دست می‌آید

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

MATH75.IR

مقابل به‌یک کمان) $\hat{C}=\hat{G}$ پس $\hat{A}_2=\hat{G}$ و لذا MA=MG به‌همین شیوه ثابت می‌کنیم MA=ME و نتیجه می‌گیریم که ME=MG و قضیه ثابت شد.

اگر در شکل قضیه (۱۶.۲. الف) مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد ($A=90°$) آنگاه خط AE در امتدادخط AC و خط AG درامتداد خط AB قرار می‌گیرد. چون AB.AG=AC.AE پس چهارضلعی BCGE محاطی می‌شود با دو قطر عمود بر هم CE و BG و قضیه تبدیل به‌قضیه برهماگوپتا می‌شود.

۱۷.۲. قضیه منلائوس[1]

نقطه‌ای که بر یک ضلع مثلث و یا بر امتداد آن واقع باشد ولی بر یکی از رأسهای مثلث نباشد یک نقطهٔ منلائوسی مثلث برای این ضلع نامیده می‌شود.

قضیه. مثلث ABC مفروض است. سه نقطهٔ D، E، و F را به‌ترتیب بر خطوط BC، AC، و AB در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد این سه نقطه بر یک خط راست واقع‌اند و برعکس

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=1 \qquad (1)$$

برهان. ابتدا به‌این نکته توجه کنیم که اگر یکی از سه نقطه D، E، و F بر یکی از رأسهای مثلث ABC قرار داشته باشد رابطهٔ (۱) برقرار نخواهد بود. مثلاً اگر نقطهٔ D بر نقطهٔ B منطبق باشد نسبت $\frac{DB}{DC}$ مساوی صفر می‌شود و رابطهٔ (۱) برقرار نخواهد بود. یا اگر نقطهٔ D برنقطهٔ C قرارگیرد نسبت مذکور بیمعنی می‌شود.

---

۱ ـ منلائوس اسکندرانی از ریاضی‌دانهای یونانی قرن اول میلادی است. قسمتی از آثار او مفقود شده است. از او رساله‌ای به‌نام «کرویها» باقی مانده است. در این رسال قضیه‌هایی دربارهٔ مثلثهای کروی عرضه شده است. از جملهٔ آنها قضیهٔ زیر است:

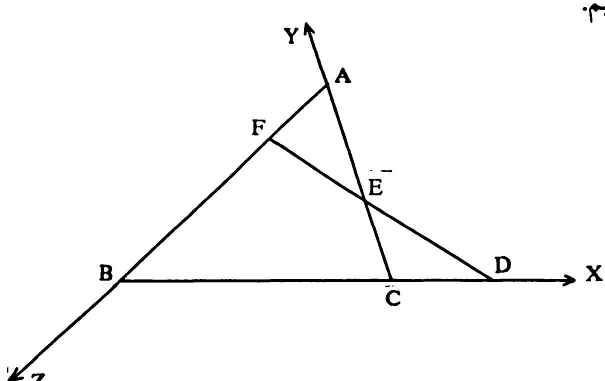
اگر دایرهٔ عظیمه‌ای اضلاع BC، CA، و AB یک مثلث کروی را به‌ترتیب در نقاط D، E، و F قطع کنند آنگاه،

$$\frac{\sin \overset{\frown}{AF}}{\sin \overset{\frown}{FB}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{BD}}{\sin \overset{\frown}{DC}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{CE}}{\sin \overset{\frown}{EA}}=1$$

قضیهٔ مذکور در شمارهٔ (۱۷.۲) حالت مسطحه قضیهٔ اخیرالذکر است. منلائوس قضیه را در حالت مسطحه معلوم فرض کرده و آن را برای اثبات حالت کروی به‌کار برده است.

MATH75.IR

سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.



مختصات سه نقطه D، E، و F را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$D\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{CD}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=\overline{DC}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=\overline{DC}\sin(\pi-C)=\overline{DC}\sin C \\ z=\overline{BD}\sin(\overrightarrow{z'z},\overrightarrow{x'x})=\overline{DB}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{z'z})=\overline{DB}\sin(\pi+B)=-\overline{DB}\sin B \end{array}\right.$$

$$E\left|\begin{array}{l} x=\overline{CE}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=\overline{CE}\sin(\pi-C)=-\overline{EC}\sin C \\ y=0 \\ z=\overline{AE}\sin(\overrightarrow{z'z},\overrightarrow{y'y})=\overline{AE}\sin(\pi+A)=\overline{EA}\sin A \end{array}\right.$$

$$F\left|\begin{array}{l} x=\overline{BF}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{z'z})=\overline{BF}\sin(\pi+B)=\overline{FB}\sin B \\ y=\overline{AF}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{z'z})=-\overline{FA}\sin(\pi-A)=-\overline{FA}\sin A \\ z=0 \end{array}\right.$$

اکنون ثابت می‌کنیم که معادله‌ای از درجه اول نسبت به x، y، و z وجود دارد به‌طوری که مختصات سه نقطهٔ D، E، و F در آن معادله صدق کنند و از این مطلب نتیجه می‌گیریم که سه نقطهٔ مذکور بر یک خط راست قرار دارند. برای این منظور معادلهٔ درجه اول زیر را در نظر می‌گیریم.

$$(۲)\qquad px+qy+rz=0$$

ثابت می‌کنیم که می‌توان برای p، q، و r سه مقدار که هیچ‌کدام صفر نیستند تعیین کرد

به‌طوری‌که مختصات سه نقطهٔ مذکور در معادلهٔ (۲) صدق کنند. مختصات سه نقطهٔ D، E، و F را در معادلهٔ (۲) می‌گذاریم، حاصل می‌شود:

$$M \begin{cases} q(\overline{DC}\sin C) + r(-\overline{DB}\sin B) = 0 & (۳) \\ p(-\overline{EC}\sin C) + r(\overline{EA}\sin A) = 0 & (۴) \\ p(\overline{FB}\sin B) + q(-\overline{FA}\sin A) = 0 & (۵) \end{cases}$$

در معادلات بالا مجهولها عبارت‌اند از r، q، و p. چون نقاط D، E، و F منلائوسی هستند پس هیچ‌یک از مقادیر داخل پرانتزهای بالا صفر نیستند لذا می‌توان یک مجهول را بین دو معادله از سه معادله دستگاه معادلات بالا حذف نمود. به‌عنوان مثال مجهول p را بین دو معادلهٔ (۳) و (۴) حذف می‌کنیم. معادلهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$(۶)\quad q(\overline{DC}\sin C)(\overline{EA}\sin A) - p(-\overline{EC}\sin C)(-\overline{DB}\sin B) = 0$$

یک شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه حاصل از دو معادلهٔ (۵) و (۶) دارای جوابی به‌جز ($q=0$ و $p=0$) باشد آن است که ضرایب p و q در این دو معادله متناسب باشند. اگر این شرط را بنویسیم و سپس ساده کنیم رابطه (۱) حاصل می‌شود.

اگر یکی از جوابهای غیر صفر دستگاه حاصل از دو معادله (۵) و (۶) را (p_0, q_0) بنامیم جوابهای کلی این دستگاه به‌صورت (kp_0, kq_0) است؛ k عدد جبری دلخواه است. حال که (p_0, q_0) را به‌دست آوردیم از معادلهٔ (۴) و یا (۵) مجهول r را حساب می‌کنیم. معادلهٔ (۳) را در نظر می‌گیریم. در این معادله چنین داریم: $q \neq 0$، $\overline{DB} \neq 0$، و $\overline{DC} \neq 0$. اگر به‌جای q بگذاریم q_0، برای r مقداری مخالف صفر حاصل می‌شود که آن را r_0 می‌نامیم. اگر (p_0, q_0, r_0) یک جواب دستگاه معادلات M باشد جواب کلی این دستگاه (kp_0, kq_0, kr_0) است.

مختصر آنکه یک شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه معادلات M دارای جوابهایی به‌جز $(0, 0, 0)$ باشد آن است که رابطهٔ (۱) برقرار باشد، پس یک شرط لازم و کافی برای آنکه مختصات سه نقطهٔ D، E، و F در معادلهٔ (۲) صدق کنند آن است که رابطهٔ (۱) برقرار باشد و لذا یک شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطهٔ مذکور بر یک خط راست قرار داشته باشند آن است که رابطهٔ (۱) مسلم باشد.

خطهای متقارب (همرس)

در صفحات آینده تعدادی از قضایای مربوط به‌خطوط متقارب را اثبات می‌کنیم. شیوهٔ

MATH75.IR

کلی اثبات، آن است که معادلات خطوط مورد نظر را می‌نویسیم و سپس ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از معادلات آن خطوط متوافق است.

۱۸.۲. قضیه

در هر مثلث نیمسازهای سه زاویهٔ داخلی همرس‌اند.

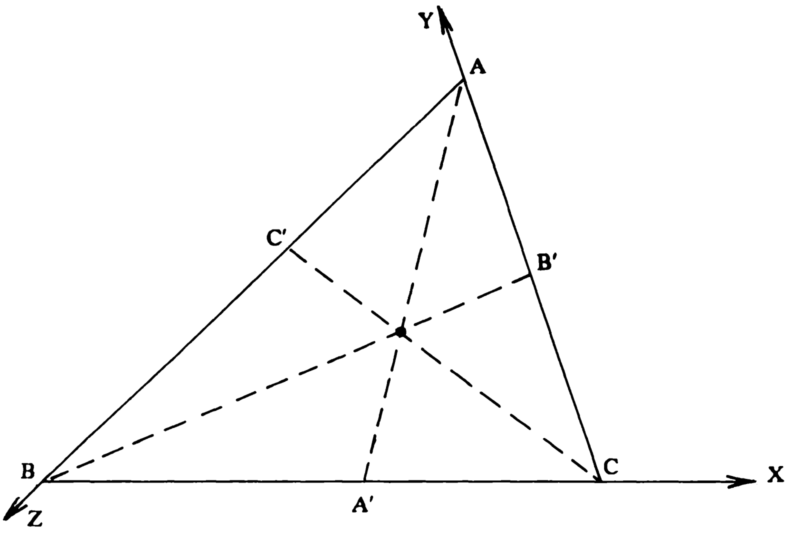
برهان. در مثلث ABC، سه‌خط AA' ، BB'، و CC' به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی A، B، و C می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم این سه خط همرس‌اند. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. معادله‌های نیمسازهای زاویه‌های A، B، و C در دستگاه مختصات سه محوری xyz به‌ترتیب چنین‌اند:

$$y=z$$

$$z=x$$

$$x=y$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ بالا متوافق است پس سه نیمساز سه زاویه A، B، و C بر یک نقطه می‌گذرند.



۱۹.۲. قضیه

در هر مثلث نیمساز زاویهٔ داخلی یک رأس و دو نیمساز دو زاویهٔ خارجی دو رأس دیگر، سه خط همرس‌اند.

برهان. در مثلث ABC، خط AA' نیمساز زاویهٔ داخلی A و دو خط BB' و CC' به‌ترتیب نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی B و C می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم سه خط AA'، BB'، و CC' همرس‌اند.

سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب متکی بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. معادله‌های سه نیمساز مورد نظر یعنی سه خط AA'، BB' و CC' به‌ترتیب چنین‌اند:

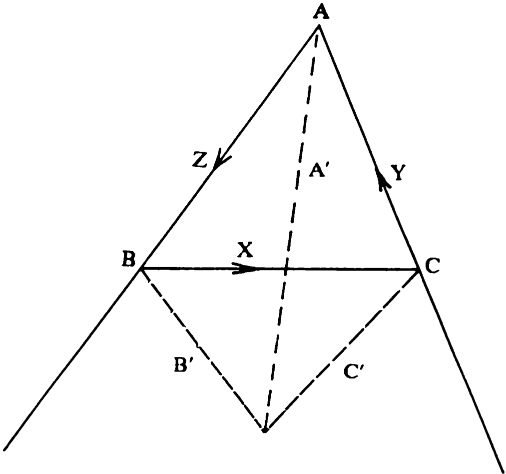
$$y=z$$

$$z=-x$$

$$x=-y$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ بالا متوافق است پس سه خط AA'، BB'، و CC' همرس‌اند.

اثبات قضیه در دو حالت دیگر به‌نحو مشابه انجام می‌گیرد.

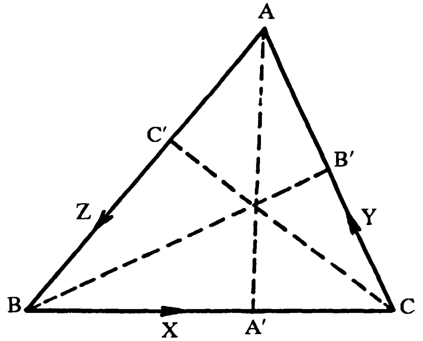


۲۰.۲. قضیه

در هر مثلث سه ارتفاع همرس‌اند.

برهان. در مثلث ABC، سه خط AA'، BB'، CC' ارتفاعهای مربوط به‌رأسهای A، B، و C می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه خط همرس‌اند. محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.

MATH75.IR



معادلات ارتفاعهای AA'، BB'، و CC' را بنابر (۲.۵.پ) به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$(1)\qquad y\cos B - z\cos C = 0$$

$$(2)\qquad z\cos C - x\cos A = 0$$

$$(3)\qquad x\cos A - y\cos B = 0$$

اگر مجهول z را بین دو معادلهٔ (۱) و (۲) حذف کنیم معادلهٔ (۳) حاصل می‌شود. پس دستگاه حاصل از سه معادلهٔ بالا متوافق است و لذا سه ارتفاع مثلث متقارب‌اند.

۲.۲۱.قضیه

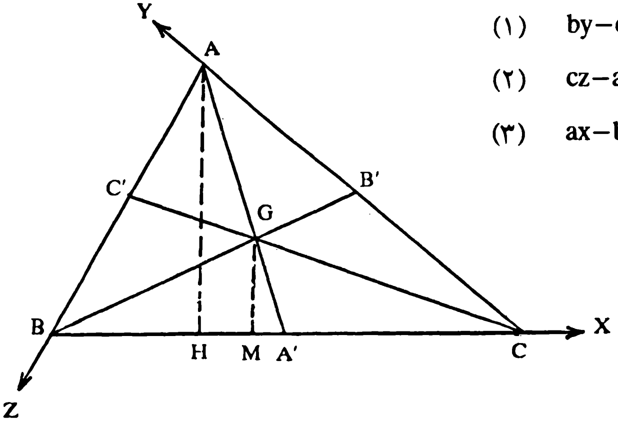
در هر مثلث سه میانه بر یک نقطه می‌گذرند و این نقطه بر ثلث هر کدام از آنها ابتدا از قاعده قرار دارد.

برهان. در مثلث ABC سه خط AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب میانه‌های مربوط به‌اضلاع BC، CA، و AB می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم سه خط مذکور متقارب‌اند. محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع BC، CA، و AB را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم. معادلات سه میانه AA'، BB'، و CC' را بنابر (۲.۵.ب) به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$(1)\qquad by - cz = 0$$

$$(2)\qquad cz - ax = 0$$

$$(3)\qquad ax - by = 0$$



ازحذف مجهول z بین دومعادله (۱) و (۲) معادلهٔ (۳) حاصل می‌شود. پس‌دستگاه حاصل‌ازسه معادلهٔ‌بالامتوافق‌است ودرنتیجه سه‌میانه‌مثلث متقارب‌اند. نقطهٔ‌برخورد سه‌میانه‌راG می‌نامیم.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطه‌های زیر برقرار است:

$$(AA')=۳(GA') \text{ و } BB'=۳(GB') \text{ و } CC'=۳(GC') \quad (۴)$$

مختصات نقطهٔ G را $(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ می‌نامیم. بنابر معادلات (۱)، (۲)، و (۳) چنین داریم:

$$ax_\circ=by_\circ=cz_\circ \quad (۵)$$

از روابط (۵) نتیجه می‌شود که اندازه‌های سطحهای سه مثلث GBC، GCA، GAB برابر است پس هر یک از این سطحها، ثلث سطح مثلث ABC است. ارتفاعهای دو مثلث ABC و GBC وارد بر قاعدهٔ مشترک BC را به‌ترتیب AH و GM می‌نامیم. چون اندازهٔ سطح مثلث GBC ثلث اندازه سطح مثلث ABC است پس:

$$(BC).(AH)=۳(BC)(GM) \quad (۶)$$

بنابراین

$$\frac{AH}{GM}=۳ \quad (۷)$$

از توازی دو خط AH و GM رابطهٔ زیر حاصل است:

$$\frac{AH}{GM}=\frac{AA'}{GA'} \quad (۸)$$

از مقایسهٔ (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$(AA')=۳(GA')$$

با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که $(BB')=۳(GB')$ و $(CC')=۳(GC')$.

۲.۲۲.قضیه

ثابت کنید در هر مثلث سه عمود منصف سه ضلع متقارب‌اند.

برهان. در شماره (۲.۵.ت) تعریف عمودهای منصف اضلاع مثلث و معادلات آنها ذکر شده است. معادلات عمودهای منصف اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC به‌ترتیب چنین‌اند:

$$M\begin{cases} y\cos B-z\cos C=-\dfrac{a}{۲}\sin(B-C) & (۱)\\[2ex] z\cos C-x\cos A=-\dfrac{b}{۲}\sin(C-A) & (۲)\\[2ex] x\cos A-y\cos B=-\dfrac{c}{۲}\sin(A-B) & (۳)\end{cases}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که دستگاه معادلات M متوافق است. از توافق این دستگاه، تقارب سه

MATH75.IR

عمود منصف اضلاع مثلث نتیجه می‌شود. از حذف مجهول z بین دو معادلهٔ (۱) و (۲) معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(۴) \quad x\cos A - y\cos B = \frac{a}{۲}\sin(B-C) + \frac{b}{۲}\sin(C-A)$$

از مقایسهٔ دو معادلهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد دستگاه معادلات M متوافق است.

$$(۵) \quad \frac{a}{۲}\sin(B-C) + \frac{b}{۲}\sin(C-A) + \frac{c}{۲}\sin(A-B) = ۰$$

برای اثبات درستی رابطهٔ(۵)، از قضیهٔ سینوسها یعنی رابطه‌های زیر (رابطه‌های ۶) استفاده می‌کنیم:

$$(۶) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

رابطهٔ (۵)، با رعایت رابطه‌های (۶) به‌صورت زیر در می‌آید

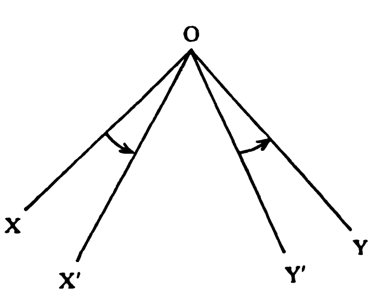
$$(۷) \quad \sin A\sin(B-C) + \sin B\sin(C-A) + \sin C\sin(A-B) = ۰$$

اگر در رابطهٔ (۵) به‌جای $\sin(A-B)$، $\sin(B-C)$، و $\sin(C-A)$ بسطهای آنها را بگذاریم و ضربهای لازم را انجام دهیم شش جمله حاصل می‌شود که دو به‌دو متساوی و مختلف‌العلامت‌اند. پس درستی رابطهٔ (۷) مسلم است و لذا دستگاه معادلات M متوافق است. بنابراین سه عمود منصف اضلاع مثلث متقارب‌اند.

۲۳.۲. تعریف خطهای همزاویه

زاویهٔ $x\hat{O}y$ را در نظر می‌گیریم. گوییم دو خط OX' و OY' نسبت به‌اضلاع زاویهٔ مذکور همزاویه‌اند اگر تساوی زیر برقرار باشد

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'}) = (\overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OY})$$



یعنی دو زاویه $X\hat{O}X'$ و $Y'\hat{O}Y$ مساوی و هم‌سو می‌باشند. به‌عبارت دیگر دو خط OX' و OY' را نسبت به‌اضلاع زاویهٔ XOY همزاویه‌نامند اگر آن‌دو خط نسبت به‌نیمساز زاویهٔ A قرینه‌باشند. قرینهٔ خط OX' نسبت به‌نیمساز زاویهٔ O و نیز قرینهٔ همان خط نسبت به‌نیمساز زاویهٔ مجانب آن زاویه، بر هم منطبق‌اند. از این‌رو در تعریف خطهای همزاویه در مثلث لزومی ندارد که مشخص کنیم نیمساز زاویهٔ داخلی منظور است یا نیمساز زاویهٔ خارجی.

۲.۲۴. قضیه

مثلث ABC و نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم سه خط AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب همزاویه‌های سه خط AM، BM، و CM نسبت به اضلاع زاویه‌های A، B، و C باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم:

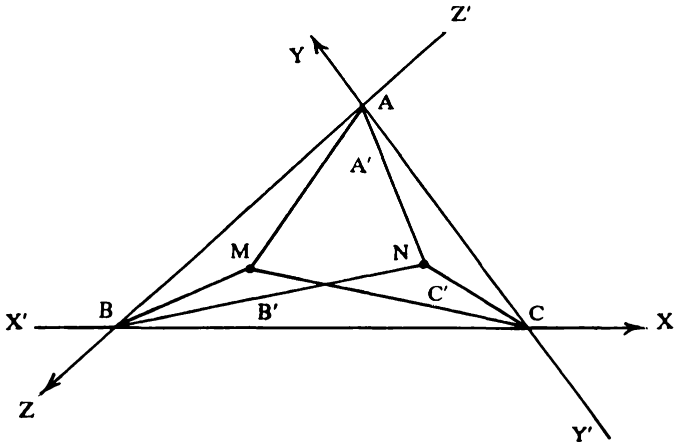
الف. سه خط AA'، BB'، و CC' در نقطه‌ای چون N به‌هم می‌رسند.

ب. اگر تصویرهای نقطهٔ M را بر خطهای BC، CA، و AB به‌ترتیب A_1، B_1، و C_1 و تصویرهای نقطهٔ N را بر آن خطها به‌ترتیب A_2، B_2، و C_2 بنامیم رابطه‌های زیر برقرار است.

$$MA_1 \,.\, NA_2 = MB_1 \,.\, NB_2 = MC_1 \,.\, NC_2$$

برهان. محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. معادله‌های سه خط AM، BM، و CM را در دستگاه مختصات سه محوری xyz به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$E\begin{cases} y=mz & (1) \\ z=nx & (2) \\ x=py & (3) \end{cases}$$



چون سه خط AM، BM، و CM همرس‌اند پس دستگاه حاصل از معادله‌های بالا متوافق است. بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$m.n.p=1 \qquad (4)$$

MATH75.IR

معادله‌های سه خط AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب چنین‌اند:

$$E' \begin{cases} z=my & (۱)' \\ x=nz & (۲)' \\ y=px & (۳)' \end{cases}$$

با توجه به‌رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود که دستگاه معادله‌های E' متوافق است. بنابراین سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند.

اکنون قسمت دوم قضیه را ثابت می‌کنیم. مختصات دو نقطهٔ M و N را به‌ترتیب $(\gamma_1، \beta_1، \alpha_1)$ و $(\gamma_2، \beta_2، \alpha_2)$ می‌نامیم. چنین داریم:

$$|\alpha_1|=MA_1\ ,\ |\beta_1|=MB_1\ ,\ |\gamma_1|=MC_1$$

$$|\alpha_2|=MA_2\ ,\ |\beta_2|=MB_2\ ,\ |\gamma_2|=MC_2$$

مختصات دو نقطهٔ M و N به‌ترتیب در معادلات E و معادلات E' صدق می‌کنند. پس چنین داریم:

$$\begin{cases} \beta_1=m\gamma_1 & (۱) \\ \gamma_1=n\alpha_1 & (۲) \\ \alpha_1=p\beta_1 & (۳) \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_2=m\beta_2 & (۱)' \\ \alpha_2=n\gamma_2 & (۲)' \\ \beta_2=p\alpha_2 & (۳)' \end{cases}$$

از مقایسهٔ (۱) و $(۱)'$ نتیجه می‌شود $\beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2$. از مقایسهٔ (۲) و $(۲)'$ نتیجه می‌شود $\alpha_1\alpha_2=\gamma_1\gamma_2$ پس چنین داریم:

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2 = \gamma_1\gamma_2$$

لذا چنین داریم:

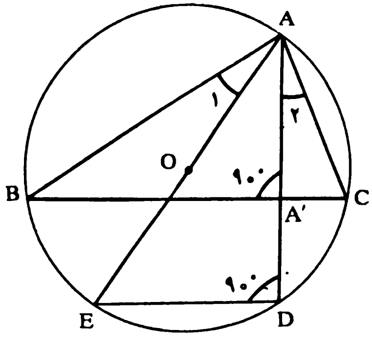
$$MA_1.NA_2 = MB_1.NB_2 = MC_1.NC_2$$

کاربردهایی از قضیه (۲.۲۴)

۲۴.۲.الف. قضیه. ثابت کنید در هر مثلث سه ارتفاع متقارب‌اند.

برهان. مرکز دایره محیطی مثلث ABC را O می‌نامیم. ثابت می‌کنیم ارتفاعهای AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب، همزاویه‌های سه خط AO، BO، و CO می‌باشند.

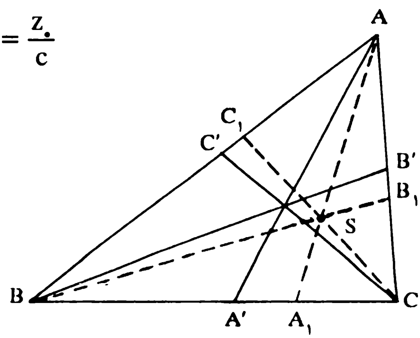
نقاط برخورد ارتفاع AA' و خط AO را با دایره محیطی مثلث به‌ترتیب D و E می‌نامیم. چون AE قطر دایره است پس زاویهٔ محاطی D که مقابل به‌این قطر است قائمه است. بنابراین دو خط DE و CB که هر دو عمود بر خط AD اند موازی‌اند. این دو خط موازی روی دایره (O)، دو کمان مساوی BE و CD جدا می‌کنند. زاویه‌های A_1 و A_2 دو زاویهٔ محاطی‌اند به‌ترتیب مقابل به‌دو کمان مساوی BE و CD. پس این دو زاویه مساوی‌اند. حال می‌گوییم که دو خط AD و AA' همزاویه‌اند.



به‌همین طریقه ثابت می‌کنیم دو ارتفاع BB' و CC' به‌ترتیب همزاویه‌های دو خط BO و CO می‌باشند. پس بنابر قضیه (۲۴.۲) سه خط AA'، BB'، و CC' که به‌ترتیب همزاویه‌های سه خط AO، BO، و CO می‌باشند متقارب‌اند.

۲۴.۲. ب. قضیه. در مثلث ABC سه میانه AA'، BB'، و CC' را در نظر می‌گیریم. قرینه‌های این سه میانه را نسبت به‌نیمسازهای زاویه‌های A، B، و C به‌ترتیب AA_1، BB_1، و CC_1 می‌نامیم. ثابت کنید سه خط AA_1، BB_1، و CC_1 بر یک نقطه که آن را S می‌نامیم می‌گذرند و مختصات این نقطه که آن را (x_0, y_0, z_0) می‌نامیم در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} \qquad (1)$$



MATH75.IR

برهان. قسمت اول قضیه یعنی تقارب سه خط AA_1، BB_1، و CC_1 نتیجهٔ مستقیم قضیه (۲۴.۲) است. بنابر (۲.۵.ب) معادلات سه میانه AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب چنین‌اند:

$$by-cz=0 \quad (۲)$$

$$cz-ax=0 \quad (۳)$$

$$ax-by=0 \quad (۴)$$

لذا معادلات سه خط AA_1، BB_1، و CC_1 به‌ترتیب چنین‌اند:

$$cy-bz=0 \quad (۵)$$

$$az-cx=0 \quad (۶)$$

$$bx-ay=0 \quad (۷)$$

از حذف‌مجهول z بین دومعادلهٔ (۵)و(۶)، معادلهٔ (۷) حاصل می‌شود. پس دستگاه‌حاصل‌از سه معادلهٔ (۵)، (۶)، و (۷) متوافق است و لذا سه خط AA_1، BB_1، و CC_1 متقارب‌اند. مختصات نقطهٔ S در سه معادلهٔ (۵) ، (۶) ، و (۷) صدق می‌کنند، پس مختصات نقطهٔ S در رابطه‌های (۱) صدق می‌کنند.

نقطهٔ S، نقطهٔ لوموآن[1] (Lemoine) مثلث ABC نامیده می‌شود.

۲۵.۲. قضیه

مثلث ABC محاط در دایره γ را در نظر می‌گیریم. خط AE قرینه میانه AD نسبت به‌نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط AE از نقطهٔ T محل تلاقی دو خط مماسی که در نقاط B و C بر دایرهٔ γ رسم می‌شوند، می‌گذرد.

برهان. معادلهٔ میانه AD بنابر (۲.۵.ب) چنین است:

$$by-cz=0 \quad (۱)$$

پس معادلهٔ خط AE چنین است:

$$cy-bz=0 \quad (۲)$$

اکنون معادلهٔ خط BT را جست‌وجو می‌کنیم. زاویه‌های محورها $z'z$ و $x'x$ با نیم‌خط BT به‌ترتیب عبارت‌اند از C و $(2\pi-A)$. بنابر (۲.۳.پ) معادلهٔ خط BT چنین است: $z\sin(2\pi-A)-x\sin C=0$ و یا

$$z\sin A+x\sin C=0 \quad (۳)$$

---

۱ ـ «لوموآن» از هندسه‌دانهایی است که تحقیقات متعددی در «هندسهٔ مثلث» عرضه کرده است.

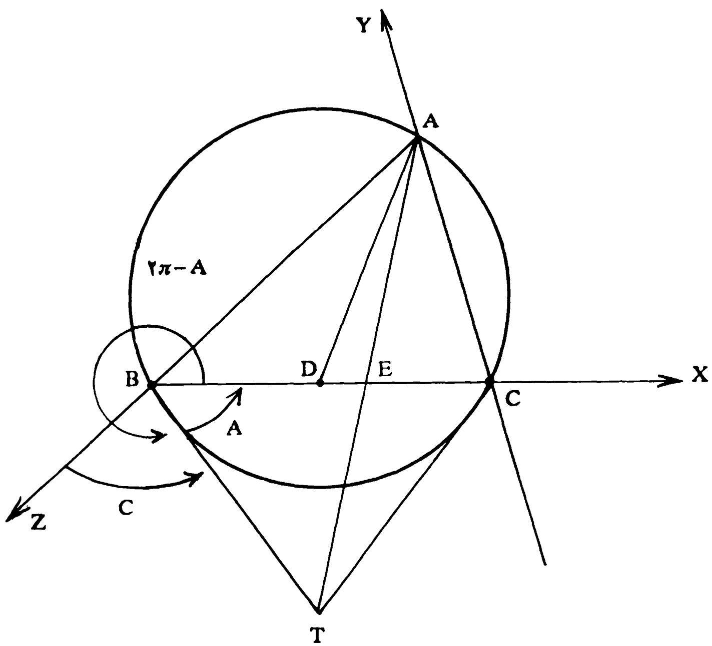
معادلهٔ خط مماس بر دایرهٔ γ در نقطهٔ C چنین است:

$$(۴) \quad y \sin A + x \sin B = 0$$

معادلهٔ (۲) با رعایت رابطهٔ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (یعنی قضیه سینوسها) چنین نوشته می‌شود:

$$(۵) \quad y \sin C - z \sin B = 0$$

از حذف مجهول x بین دو معادلهٔ (۳) و (۴) معادلهٔ (۵) حاصل می‌شود، پس دستگاه حاصل از سه‌معادلهٔ (۲)،(۳)و(۴) متوافق‌است. ازتوافق معادلات، تقارب‌خطوط موردنظرنتیجه می‌شود.



۲.۲۶. قضیه گرب (Grebe)[1]

بر سه ضلع مثلث ABC، سه مربع ABDE، BFGC، و ACHK را به‌طرف خارج آن و یا به‌طرف داخل آن می‌سازیم و قرار می‌دهیم $DE \cap HK = A'$، $FG \cap DE = B'$، و $HK \cap FG = C'$. ثابت کنید اولاً سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند و ثانیاً نقطهٔ S محل

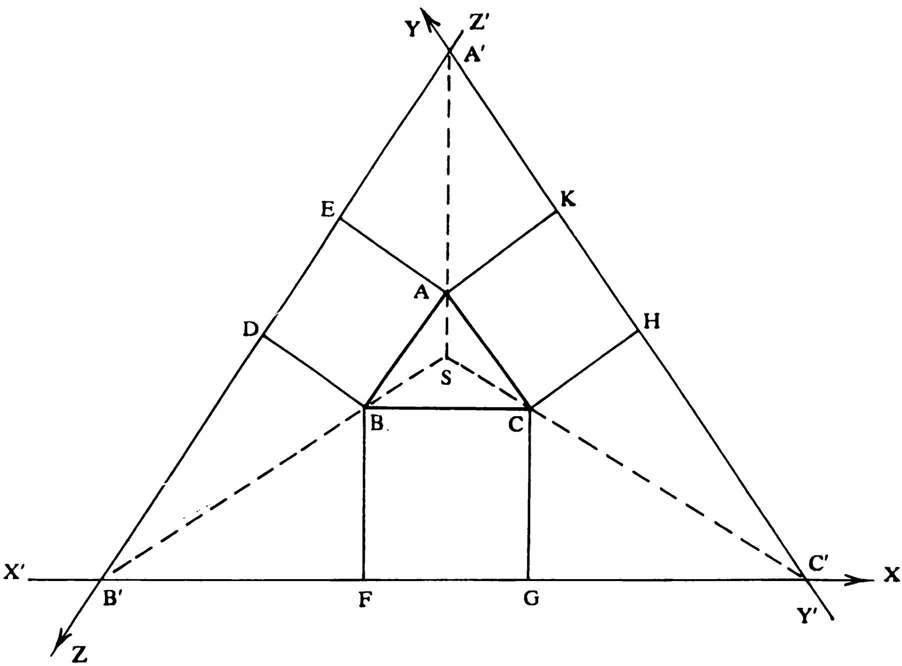
---

۱ ـ گرب از نویسندگان ریاضی آلمان است. قضیهٔ مذکور در بالا را در سال ۱۸۴۷ عرضه کرده است.

MATH75.IR

برخورد این سه خط، **نقطهٔ لوموآنِ** مثلث ABC است.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب بر سه بردار $\overrightarrow{FG}$، $\overrightarrow{HK}$، و $\overrightarrow{ED}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث ABC، مقابل به‌زوایای A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم. معادلات سه خط AA'، BB'، و CC' را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که



دستگاه حاصل از این سه معادله متوافق است. از توافق معادلات، تقارب سه خط مورد نظر نتیجه می‌شود.

ابتدا معادلهٔ خط AA' را می‌نویسیم. برای این منظور y و z نقطهٔ A را حساب می‌کنیم.

$$y_A=(AK)=(AC)=b$$

$$z_A=(AE)=(AB)=c$$

به‌کمک دو تساوی اخیرالذکر، معادلهٔ خط AA' را به‌صورت زیر می‌نویسیم (ر.ک. ۳.۲.ب):

(۱) $\quad cy=bz$

با همین شیوه استدلال، معادلات دو خط BB' و CC' را به‌صورتهای (۲) و (۳) می‌نویسیم:

(۲) $\quad az=cx$

(۳) $\quad bx=ay$

اگر بین دو معادلهٔ (۱) و (۲)، مجهول z را حذف کنیم، معادلهٔ (۳) حاصل می‌شود. پس سه معادلهٔ مورد بحث متوافق‌اند. و لذا سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند.

مختصات نقطهٔ S، محل برخورد سه خط مورد نظر در تساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad (۴)$$

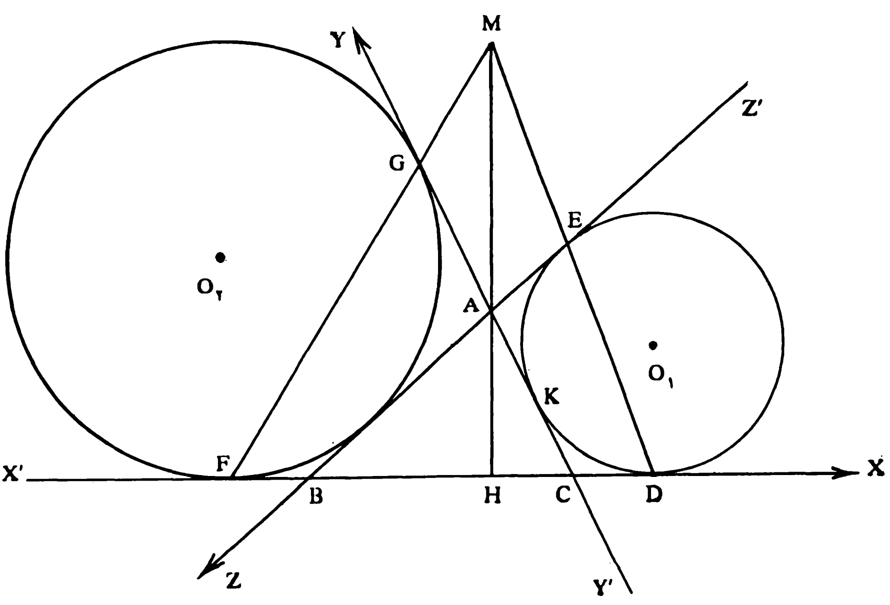
از تساویهای (۴) نتیجه می‌شود که نقطهٔ S همان نقطهٔ لوموآنِ مثلث ABC است (ر.ک. ۲۴.۲.ب).

شکل حاصل از یک مثلث دلخواه و سه مربع ساخته شده بر اضلاع، اولین بار به‌وسیلهٔ وکتن (Vecten) فرانسوی در مجلهٔ سالانه ریاضی ژرگون (۱۸۱۷-۱۸۱۶) با بررسی خواصی از آن شکل عرضه شد. سپس هندسه‌دانهای دیگر از جمله نوبرگ (Neuberg) خواصی تازه از آن را طرح و اثبات نمودند.

۲۷.۲. قضیه

مثلث ABC و دو دایرهٔ محاطی خارج آن O_1 و O_2 را در نظر می‌گیریم. دایرهٔ O_1 در نقاط D و E به‌ترتیب بر دو ضلع BC و BA مماس است. دایرهٔ O_2 در نقاط F و G به‌ترتیب بر دو ضلع BC و CA مماس است. ثابت کنید دو خط DE و FG و ارتفاع AH از مثلث ABC متقارب‌اند.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث ABC مقابل به‌زوایای A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم و اندازهٔ نصف محیط را با p نشان می‌دهیم.



MATH75.IR

معادلهٔ ارتفاع AH بنابر (۲.۵. پ) چنین است:

$$(۱) \quad y \cos B - z \cos C = 0$$

اکنون معادلهٔ خط DE را در دستگاه مختصات دومحوری xz جست‌وجو می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که $(BD)=(BE)=p$. می‌گوییم اگر از یک نقطهٔ دو مماس بر یک دایره رسم شود طول آن دو مماس مساوی است پس

$$(BD)=(BE) \text{ و } (CD)=(CK) \text{ و } (AK)=(AE)$$

K نقطهٔ تماس دایره O_1 با خط AC است. از طرفی چنین داریم:

$$(AC)=(AK)+(KC)$$

از چهار رابطهٔ اخیرالذکر نتیجه می‌شود:

$$(BD)=(BE)=p$$

اکنون مختصات دو نقطهٔ D و E را در دستگاه مختصات دومحوری xz حساب می‌کنیم و سپس به‌کمک مختصات D و E معادلهٔ خط DE را می‌نویسیم. چنین داریم:

$$D \left| \begin{array}{l} x=0 \\ \\ z=p \sin B \end{array} \right. \qquad E \left| \begin{array}{l} x=p \sin B \\ \\ z=0 \end{array} \right.$$

معادلهٔ خط DE در دستگاه مختصات xz معادله‌ای است از درجه اول برحسب x و z به‌صورت زیر

$$mx+nz=r$$

اگر مختصات دو نقطهٔ D و E را در معادلهٔ اخیرالذکر ببریم مقادیر $\frac{r}{m}$ و $\frac{r}{n}$ حاصل می‌شود و به‌کمک این مقادیر معادلهٔ خط DE چنین به‌دست می‌آید:

$$(۲) \quad x+z=p \sin B$$

با همین شیوه استدلال، معادلهٔ خط FG در دستگاه مختصات دومحوری xy به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(۳) \quad x+y=p \sin C$$

از دو معادلهٔ (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(۴) \quad y-z=p (\sin C-\sin B)$$

جوابهای دستگاه حاصل از دو معادلهٔ (۱) و (۴) چنین‌اند:

$$(۵) \quad y=\frac{p \cos C(\sin C-\sin B)}{\cos C-\cos B}$$

$$(۶) \quad z=\frac{p \cos B(\sin C-\sin B)}{\cos C-\cos B}$$

از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$(۷) \quad x=p\ \sin C - \frac{p\ \cos C(\sin C-\sin B)}{\cos C-\cos B}$$

از (۲) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$(۸) \quad x=p\ \sin B- \frac{p\ \cos B(\sin C-\sin B)}{\cos C-\cos B}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که دو مقداری که برای x به‌دست آورده‌ایم مساوی‌اند پس دستگاه معادلات مورد بحث دارای یک جواب منحصر به‌فرد است بنابراین سه خط DE، FG، و AH متقارب‌اند.

۲۸.۲. دایره‌های توریچلی[1]

بر اضلاع مثلث ABC و به‌طرف خارج سه مثلث متساوی‌الاضلاع BCA'، CAB'، و ABC' را می‌سازیم. دایره‌های محیطی این سه مثلث متساوی‌الاضلاع را دایره‌های توریچلی می‌نامند. دربارهٔ شکل حاصل از مثلث و دایره‌های توریچلی مربوط به‌آن خواص هندسی متعددی ثابت شده است. از جملهٔ آنها قضیهٔ مذکور در زیر است.

قضیه. ثابت کنید سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند. (همچنین اگر سه نقطهٔ A''، B''، و C'' به‌ترتیب سه نقطهٔ متقاطر سه نقطهٔ A'، B'، و C' در دایره‌های محیطی مثلثهای ACB'، ABC'، و BCA' باشند آنگاه سه خط AA''، BB''، و CC'' متقارب‌اند.)

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث ABC مقابل به‌زاویه‌های A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم.

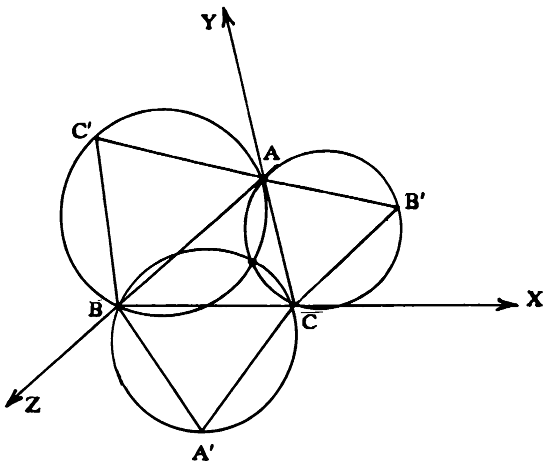
---

۱ ـ توریچلی (۱۶۴۷ ـ ۱۶۰۸) از شاگردان گالیله بود. با تحقیقات خود در فیزیک مشهور است. وی مسائل متعدد و جالبی را در هندسه حل کرده است. فرما ریاضی‌دان فرانسوی حل مسئلهٔ زیر را به‌او پیشنهاد نمود:

نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فواصل آن از سه رأس مثلث مفروض می‌نیمم باشد. توریچلی این مسئله را حل کرد. نقطهٔ مطلوب همان محل برخورد سه خط AA'، BB'، و CC' است که در قضیهٔ بالا (شمارهٔ ۲۸.۲) ذکر شد.(در صورتی که مثلث ABC حادالزوایا باشد.)

MATH75.IR

معادلات سه خط AA'، BB'، و CC' را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم دستگاه حاصل از این سه معادله متوافق است و از آن تقارب سه خط مذکور را نتیجه می‌گیریم.



ابتدا معادلهٔ خط AA' را جست‌وجو می‌کنیم. به‌کمک (۸.۱) فواصل جبری نقطهٔ A' را از دو محور $x'x$ و $y'y$ حساب می‌کنیم. حاصل می‌شود.

$$A' \left| \begin{array}{l} x=\overline{CA'} \sin (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CA'})=(BC) \sin (\pi+ \frac{\pi}{۳})=-a \sin \frac{\pi}{۳} \\ \\ y=\overline{CA'} \sin (\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{CA'})=a \sin (C+ \frac{\pi}{۳}) \end{array} \right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ A' در دستگاه مختصات xy معادلهٔ خط CA' را به‌کمک (۳.۲.ب) به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۱) \quad x \sin (C+ \frac{\pi}{۳}) + y \sin \frac{\pi}{۳} = ۰$$

با همین شیوه استدلال، معادلهٔ خط BA' را در دستگاه مختصات دومحوری zx به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۲) \quad x \sin (B+ \frac{\pi}{۳}) + z \sin \frac{\pi}{۳} = ۰$$

مختصات نقطهٔ A' در دو معادلهٔ (۱) و (۲) صدق می‌کنند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ زیر که یک ترکیب خطی دو معادلهٔ (۱) و (۲) است صدق می‌کنند.

$$\sin(B+ \frac{\pi}{۳}) \left[x\sin(C+ \frac{\pi}{۳})+y\sin \frac{\pi}{۳} \right] -\sin(C+ \frac{\pi}{۳}) \left[x\sin(B+ \frac{\pi}{۳})+z\sin \frac{\pi}{۳} \right]=۰$$

معادلهٔ اخیرالذکر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$(۳)\quad y\sin\left(B+\frac{\pi}{۳}\right)-z\sin\left(C+\frac{\pi}{۳}\right)=\circ$$

معادلهٔ (۳) برحسب y و z از درجهٔ اول است پس معادله یک خط راست است. مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند، زیرا $y_A=z_A=\circ$. پس معادلهٔ (۳)، معادلهٔ خط AA' است.

با همین شیوهٔ استدلال معادلات دو خط BB' و CC' را به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۴)\quad z\sin\left(C+\frac{\pi}{۳}\right)-x\sin\left(A+\frac{\pi}{۳}\right)=\circ$$

$$(۵)\quad x\sin\left(A+\frac{\pi}{۳}\right)-y\sin\left(B+\frac{\pi}{۳}\right)=\circ$$

اکنون ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از سه معادله (۳)، (۴)، و (۵) متوافق است. برای این منظور، بین دو معادله (۳) و (۴) مجهول z را حذف می‌کنیم. معادله‌ای که حاصل می‌شود همان معادلهٔ (۵) است. پس دستگاه معادلات مورد نظر متوافق است. از توافق معادلات دستگاه، تقارب سه خط AA'، BB'، و CC' نتیجه می‌شود.

تمرین. ثابت کنید سه خط AA''، BB''، و CC'' متقارب‌اند.

۲۹.۲. قضیهٔ وکتن (VECTEN)

وکتن استاد ریاضی اختصاصی در دانشگاه شهر نیم فرانسه بوده است. وی در سال (۱۸۱۷ ـ ۱۸۱۶) یک قضیهٔ هندسه در مجلهٔ سالانه ریاضی ژرگون منتشر نمود. در این قضیه خواصی از یک شکل هندسی متشکل از یک مثلث و سه مربع مرسوم بر سه ضلع آن، بررسی شده است. برای آنکه قضیهٔ وکتن بهتر توضیح شود آن را در سه قسمت در شماره‌های (۲۹.۲. الف)، (۲۹.۲.ب)،(۲۹.۲.پ) اثبات می‌کنیم.

۲۹.۲. الف. قضیه. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و بر دو ضلع AB و AC به‌ترتیب دو مربع ABDE و ACFG را به‌طرف خارج مثلث می‌سازیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید سه خط BF، CD، و AH متقارب‌اند.

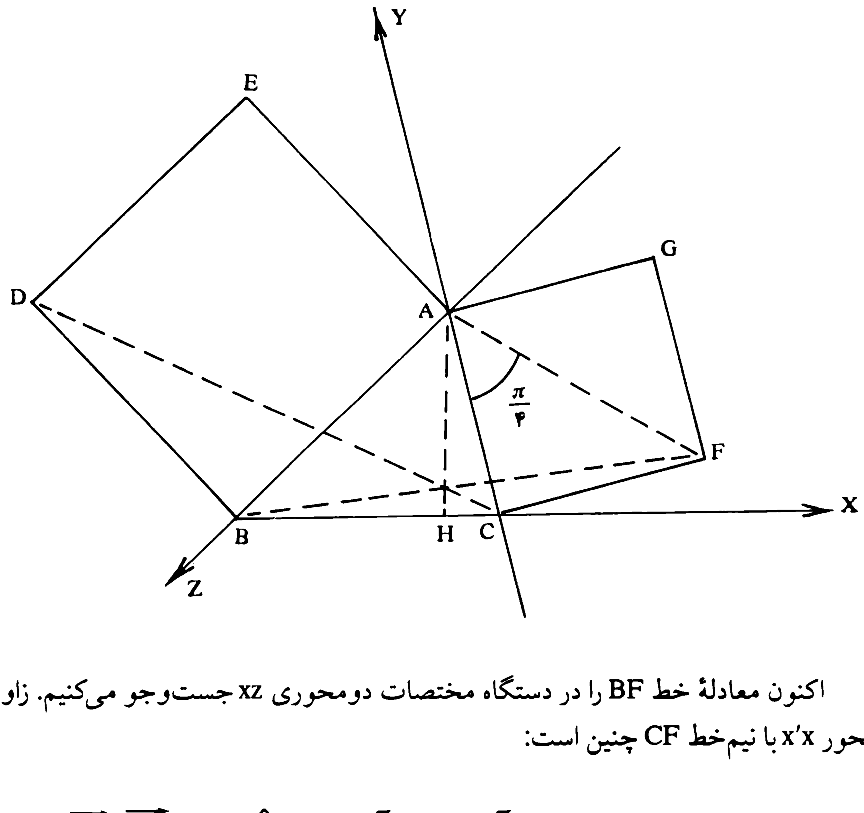
برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث ABC مقابل به‌زوایای A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم.

MATH75.IR

معادلات سه خط AH، BF، و CD را می‌نویسیم و سپس ثابت می‌کنیم دستگاه حاصل از سه معادله مذکور متوافق است و نتیجه می‌گیریم که سه خط مورد نظر متقارب‌اند.

ابتدا معادله ارتفاع AH را بنابر (۵.۲. پ) به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۱)\quad y\cos B - z\cos C = ۰$$



اکنون معادلهٔ خط BF را در دستگاه مختصات دومحوری xz جست‌وجو می‌کنیم. زاویهٔ محور x′x با نیم‌خط CF چنین است:

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CF}) = \pi - F\hat{C}B = \pi - (\frac{\pi}{۲} + C) = \frac{\pi}{۲} - C$$

زاویهٔ محور z′z، با نیم‌خط AF چنین است:

$$(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AF}) = A + \frac{\pi}{۴}$$

مختصات نقطهٔ F در دستگاه مختصات دومحوری xz را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$F\left|\begin{array}{l} x = (CF)\sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CF}) = b\cos C \\ z = (AF)\sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AF}) = \sqrt{۲}\, b\sin(A + \frac{\pi}{۴}) \end{array}\right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ F در دستگاه مختصات دومحوری xz، معادلهٔ خط BF را در این دستگاه مختصات دومحوری، به‌کمک (۲.۳.ب) به‌صورت زیر می‌نویسیم.

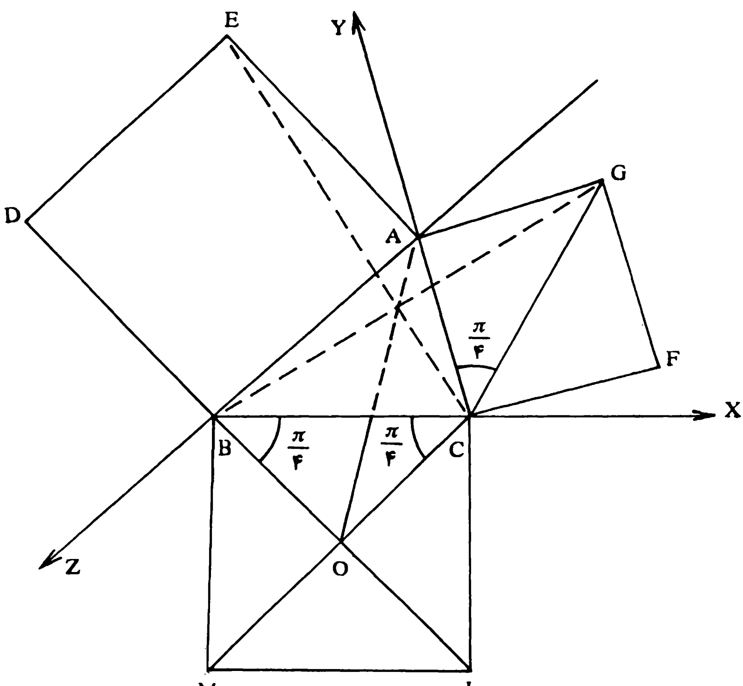
$$x.\sqrt{۲}\sin(A+\frac{\pi}{۴})-z\cos C=۰ \qquad (۲)$$

با همین شیوه استدلال، معادلهٔ خط CD را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x.\sqrt{۲}\sin(A+\frac{\pi}{۴})-y\cos B=۰ \qquad (۳)$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۱)، (۲)، و (۳) متوافق است چه اگر مجهول x را بین دو معادلهٔ (۲) و (۳) حذف کنیم معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود. از توافق دستگاه معادلات مذکور تقارب سه خط AH، BF، و CD نتیجه می‌شود.

۲۹.۲.ب. قضیه. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و سه مربع ABDE، ACFG، و BCLM را روی اضلاع این مثلث به‌طرف خارج می‌سازیم. مرکز مربع BCLM را نقطهٔ O می‌نامیم. ثابت کنید سه خط AO، BG، و CE متقارب‌اند.



برهان. سه محور x′x، y′y، و z′z را به‌ترتیب منطبق بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و

MATH75.IR

هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث ABC مقابل به‌رأسهای A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم.

معادلات سه خط AO، BG، و CE را می‌نویسیم و سپس ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از این سه معادله متوافق است. از توافق دستگاه معادلات مذکور، تقارب سه خط موردنظر نتیجه می‌شود.

ابتدا معادلهٔ خط AO را جست‌وجو می‌کنیم. زاویهٔ محور y'y با نیم‌خط CO چنین است:

$$(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{CO}) = C + \frac{\pi}{۴}$$

زاویهٔ محور z'z با نیم‌خط BO چنین است:

$$(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{BO}) = \pi - \left(B + \frac{\pi}{۴}\right)$$

فواصل جبری نقطهٔ O را از دو محور y'y و z'z، به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$O \left| \begin{array}{l} y = (CO)\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\, a \sin\left(C + \frac{\pi}{۴}\right) \\ z = (BO)\sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\, a \sin\left(B + \frac{\pi}{۴}\right) \end{array} \right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ O در دستگاه مختصات دومحوری yz، معادلهٔ خط AO را در این دستگاه مختصات دومحوری به‌کمک (۳.۲.ب) به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$(۱) \qquad y \sin\left(B + \frac{\pi}{۴}\right) - z \sin\left(C + \frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

اکنون معادلهٔ خط BG را جست‌وجو می‌کنیم. زاویهٔ محور x'x با نیم‌خط CG چنین است:

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CG}) = \pi - G\hat{C}B = \pi - \left(\frac{\pi}{۴} + C\right)$$

زاویهٔ محور z'z با نیم‌خط AG چنین است:

$$(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AG}) = A + \frac{\pi}{۲}$$

فواصل جبری نقطهٔ G را از دو محور x'x و z'z به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$G \left| \begin{array}{l} x = (CG)\sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CG}) = \sqrt{۲}\, b \sin\left(C + \frac{\pi}{۴}\right) \\ z = (AG)\sin(\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{AG}) = b \sin\left(\frac{\pi}{۲} + A\right) = b\cos A \end{array} \right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ G در دستگاه مختصات دومحوری xz، معادلهٔ خط BG را در دستگاه مختصات دومحوری xz، به‌کمک (۳.۲.ب) به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x \cos A - z \left(\sqrt{۲} \sin \left(C + \frac{\pi}{۴}\right) \right) = ۰ \qquad (۲)$$

با همین شیوهٔ استدلال، معادلهٔ خط CE را در دستگاه مختصات دومحوری xy به‌صورت زیر می‌نویسیم

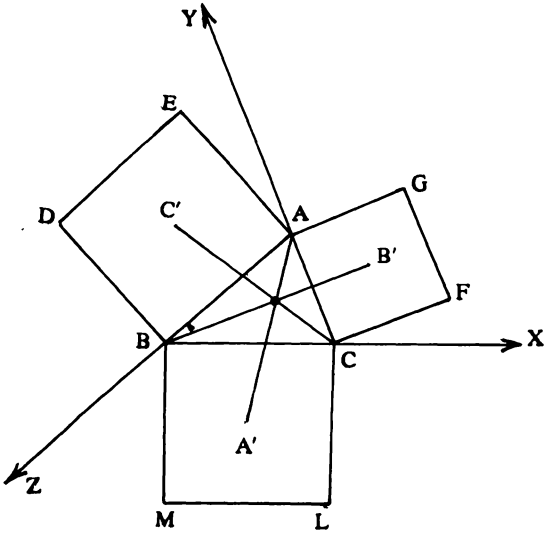
$$x \cos A - y \left(\sqrt{۲} \sin \left(B + \frac{\pi}{۴}\right) \right) = ۰ \qquad (۳)$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۱)، (۲)، و (۳) متوافق است. چه اگر مجهول x را بین دو معادلهٔ (۲) و (۳) حذف کنیم معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود. از توافق معادلات مذکور تقارب سه خط AO، BG، و CE نتیجه می‌شود.

۲۹.۲.پ. قضیه. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و سه مربع ABDE، BCLM، و ACFG را به‌طرف خارج مثلث می‌سازیم و مراکز آنها را به‌ترتیب C'، A'، و B' می‌نامیم. ثابت کنید سه خط AA'، BB'، و CC'، متقارب‌اند.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. معادلهٔ خط AA' را به‌صورت زیر می‌نویسیم (اثبات این مطلب در قسمت اول برهان قضیه (۲۹.۲.ب) ذکر شده است).

$$y \sin\left(B + \frac{\pi}{۴}\right) - z \sin\left(C + \frac{\pi}{۴}\right) = ۰ \qquad (۱)$$



MATH75.IR

با همان شیوهٔ استدلال معادلات دو خط BB' و CC' را به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$z\sin(C+\frac{\pi}{۴})-x\sin(A+\frac{\pi}{۴})=۰ \qquad (۲)$$

$$x\sin(A+\frac{\pi}{۴})-y\sin(B+\frac{\pi}{۴})=۰ \qquad (۳)$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۱)، (۲)، و (۳) متوافق است چه اگر بین دو معادلهٔ (۱) و (۲) مجهول z را حذف کنیم معادلهٔ (۳) حاصل می‌شود. از توافق دستگاه معادلات مذکور، تقارب سه خط AA'، BB'، و CC' نتیجه می‌شود.

۲.۳۰. قضیه

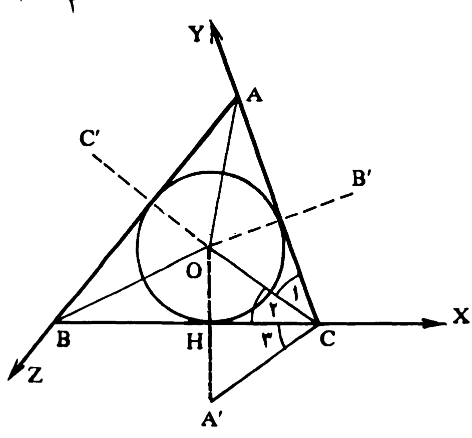
قرینه‌های نقطهٔ O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC را نسبت به‌سه ضلع BC، CA، و AB به‌ترتیب A'، B'، و C' می‌نامیم. ثابت کنید سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند.

برهان. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است. برای به‌دست آوردن قرینه نقطهٔ O نسبت به‌خط BC، عمود OH را بر خط BC وارد می‌کنیم و سپس بر این عمود طول HA' را مساوی OH اختیار می‌کنیم. نقطهٔ A' که به‌این ترتیب حاصل می‌شود قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خط BC نامیده می‌شود. به‌همین ترتیب قرینه‌های نقطهٔ O را نسبت به‌دو خط CA و AB تعیین می‌کنیم و آنها را B' و C' می‌نامیم.

برای اثبات تقارب سه خط AA'، BB'، و CC' معادلات آنها را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از سه معادلهٔ این سه خط متوافق است.

ابتدا معادلهٔ خط AA' را جست‌وجو می‌کنیم. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است، لذا $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲=\frac{۱}{۲}\hat{C}$. از تقارن دو نقطهٔ O و A' نسبت به‌خط BC نتیجه می‌شود که:

$$(CO)=(CA') \text{ و } \hat{C}_۳=\hat{C}_۲=\frac{۱}{۲}\hat{C}$$



به‌کمک (۸.۱) مختصات نقطهٔ A' را در دستگاه مختصات دومحوری xy حساب می‌کنیم.
زاویهٔ محور $x'x$ با نیم‌خط CA' برابر $(\pi+\frac{C}{۲})$ و زاویهٔ محور $y'y$ با نیم‌خط CA' برابر $\frac{۳C}{۲}$ است پس مختصات نقطهٔ A' در دستگاه مختصات دومحوری xy چنین است:

$$A'\left|\begin{array}{l} x=(CA')\sin(\overrightarrow{x'x}\,,\,\overrightarrow{CA'})=(CO)\sin(\pi+\frac{C}{۲})=-(CO)\sin\frac{C}{۲} \\ y=(CA')\sin(\overrightarrow{y'y}\,,\,\overrightarrow{CA'})=(CO)\sin\frac{۳C}{۲} \end{array}\right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ A'، معادلهٔ خط CA' را به‌کمک (۳.۲.ب)، در دستگاه مختصات دومحوری xy به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(۱)\qquad x\sin\frac{۳}{۲}C+y\sin\frac{C}{۲}=۰$$

با همین شیوهٔ استدلال معادلهٔ خط BA' را در دستگاه مختصات دومحوری zx به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(۲)\qquad x\sin\frac{۳}{۲}B+z\sin\frac{۱}{۲}B=۰$$

مختصات نقطهٔ A' در دو معادلهٔ (۱) و (۲) صدق می‌کنند پس مختصات نقطهٔ A' در معادلهٔ زیر که از ترکیب خطی دو معادلهٔ مذکور حاصل شده است صدق می‌کنند

$$\sin\frac{۳}{۲}B\left[x\sin\frac{۳}{۲}C+y\sin\frac{۱}{۲}C\right]-\sin\frac{۳}{۲}C\left[x\sin\frac{۳}{۲}B+z\sin\frac{۱}{۲}B\right]=۰$$

معادلهٔ اخیرالذکر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$(۳)\qquad y\sin\frac{C}{۲}\sin\frac{۳B}{۲}-z\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{۳C}{۲}=۰$$

معادلهٔ (۳) نسبت به y و z از درجهٔ اول است پس این معادله، معادلهٔ یک خط راست است. مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند زیرا $y_A=z_A=۰$. پس معادلهٔ (۳)، معادلهٔ خط AA' است.

با همین شیوه استدلال، معادلهٔ دو خط BB' و CC' را به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$(۴)\qquad z\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{۳C}{۲}-x\sin\frac{C}{۲}\sin\frac{۳A}{۲}=۰$$

$$(۵)\qquad x\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{۳A}{۲}-y\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{۳B}{۲}=۰$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۳)، (۴)، و (۵) متوافق است. زیرا اگر مجهول z را بین دو

MATH75.IR

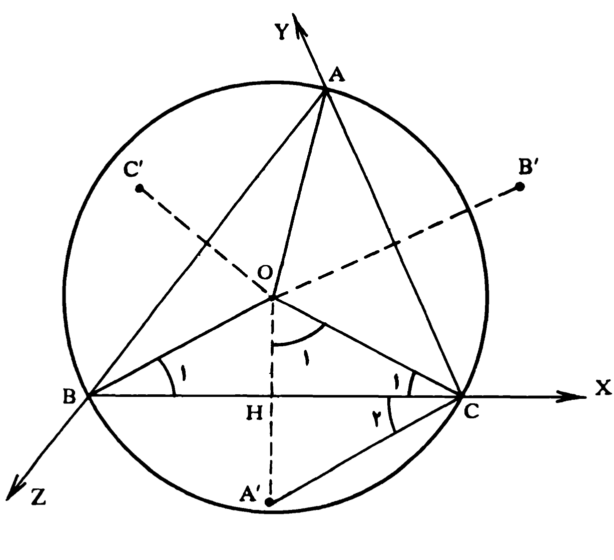
معادلهٔ (۳) و (۴) حذف کنیم معادلهٔ (۵) حاصل می‌شود. از توافق دستگاه معادلات مذکور تقارب سه خط AA'، BB'، و CC' نتیجه می‌شود.

۳۱.۲. قضیه

قرینه‌های نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را نسبت به‌خطهای BC، CA، و AB به‌ترتیب A'، B'، و C' می‌نامیم. ثابت کنید که سه خط AA'، BB'، و CC' متقارب‌اند.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. معادله‌های سه خط AA'، BB'، و CC' را می‌نویسیم و ثابت می‌کنیم دستگاه حاصل از این سه معادلهٔ متوافق است و از توافق معادلات تقارب سه خط موردنظر را نتیجه می‌گیریم. ابتدا معادلهٔ خط AA' را جست‌وجو می‌کنیم. برای این منظور نخست دو زاویهٔ $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CA'})$ و $(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{C'A})$ را حساب می‌کنیم.

نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC محلِ برخورد سه عمود منصف اضلاع مثلث است پس مثلث OBC متساوی‌الساقین است و لذا $B_1=C_1$ و خط OA' نیمساز زاویه BOC است یعنی $\hat{O}_1=\frac{1}{2}B\hat{O}C$. در دایرهٔ (O) زاویهٔ BOC زاویهٔ مرکزی است و مقابل به‌کمان BC است و زاویهٔ BAC زاویهٔ محاطی است و مقابل به‌همان کمان است پس $\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{O}$ و در نتیجه $\hat{O}_1=\hat{A}$. زاویهٔ C_1 متمم زاویهٔ O_1 است یعنی $C_1=\frac{\pi}{2}-A$. چون نقطهٔ A' قرینه نقطهٔ O نسبت به‌خط BC است پس $C_2=C_1=\frac{\pi}{2}-A$.



به‌کمک (۸.۱) مختصات نقطهٔ A' را در دستگاه مختصات دومحوری xy حساب می‌کنیم:

$$A' \left| \begin{array}{l} x=(CA')\sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{CA'})=(CA')\sin(\pi+C_2)=-(CA')\cos A \\ y=(CA')\sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{CA'})=(CA')\sin(C+C_2)=-(CA')\cos(C-A) \end{array} \right.$$

با معلوم بودن مختصات نقطهٔ A' در دستگاه مختصات دومحوری xy، به‌کمک (۳.۲.ب) معادلهٔ خط CA' را در این دستگاه به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x\cos(A-C)-y\cos A=0 \qquad (1)$$

با همین شیوه استدلال معادلهٔ خط BA' را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x\cos(A-B)-z\cos A=0 \qquad (2)$$

مختصات نقطهٔ A' در دو معادلهٔ (۱) و (۲) صدق می‌کنند پس مختصات نقطهٔ A' در معادلهٔ زیر که یک ترکیب خطی دو معادلهٔ (۱) و (۲) است صدق می‌کنند.

$$\cos(A-B)\left[x\cos(A-C)-y\cos A\right]-\cos(A-C)\left[x\cos(A-B)-z\cos A\right]=0$$

معادلهٔ اخیرالذکر پس از اختصار به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y\cos(A-B)-z\cos(A-C)=0 \qquad (3)$$

با همین شیوهٔ استدلال، معادلات دو خط BB' و CC' را به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$z\cos(B-C)-x\cos(B-A)=0 \qquad (4)$$

$$x\cos(C-A)-y\cos(C-B)=0 \qquad (5)$$

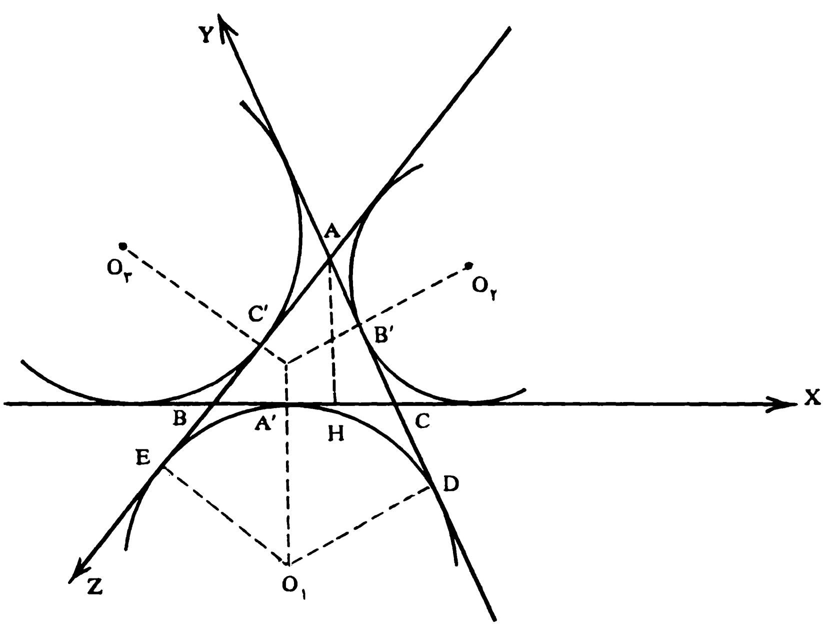
دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۳)، (۴)، و (۵) متوافق است زیرا اگر بین دو معادلهٔ (۳) و (۴) مجهول z را حذف کنیم معادلهٔ (۵) حاصل خواهد شد. از توافق دستگاه معادلات مذکور، تقارب خطوط AA'، BB'، و CC' نتیجه می‌شود.

۳۲.۲. قضیه

مثلث ABC و سه دایرهٔ محاطی خارجی آن (O_1)، (O_2)، و (O_3) را که به‌ترتیب در زاویه‌های BCA، CBA، و ACB محاط‌اند در نظر می‌گیریم. از نقاط O_1، O_2، و O_3 به‌ترتیب عمودهای O_1A'، O_2B'، و O_3C' را بر اضلاع BC، CA، و AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید سه خط O_1A'، O_2B'، و O_3C' متقارب‌اند.

برهان. محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع BC، CA، و AB را به‌ترتیب a، b و c می‌نامیم. نصف محیط مثلث را p می‌نامیم.

MATH75.IR



معادلهٔ سه خط O_1A'، O_2B'، و O_3C' را می‌نویسیم و سپس ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از این سه معادله متوافق است. از توافق معادلات تقارب سه خط مورد نظر نتیجه می‌شود.

ابتدا معادلهٔ خط O_1A' را جست‌وجو می‌کنیم. معادلهٔ ارتفاع AH، بنابر (۲.۵.پ) چنین است:

$$(۱) \quad y\cos B - z\cos C = ۰$$

بنابر (۴.۲) معادلهٔ هر خط موازی با ارتفاع AH چنین است:

$$(۲) \quad y\cos B - z\cos C = m$$

در معادلهٔ (۲)، m یک پارامتر است. چون خط O_1A'، عمود بر خط BC است پس خط O_1A' موازی با ارتفاع AH است. لذا برای تعیین معادلهٔ خط O_1A'، در معادلهٔ (۲)، پارامتر m را طوری تعیین می‌کنیم که مختصات نقطهٔ O_1 در معادلهٔ (۲) صدق کنند.

نقاط تماس دایره (O_1) را با دو خط AC و AB به‌ترتیب D و E می‌نامیم. O_1D و O_1E دو شعاع دایره (O_1) اند پس $O_1D = O_1E$. در مثلث قائم‌الزاویه O_1AD چنین داریم:

$$(۳) \quad O_1D = AD.\mathrm{tg}\,\frac{A}{۲}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $AD = p$. می‌گوییم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم شود

طولهای دو مماس مساوی‌اند. روابط زیر را با توجه به‌شکل می‌نویسیم:

$AD=AE$ و $CD=CA'$ و $BE=BA'$

و چون $AD=AC+CD=AC+CA'$ و $AE=AB+BE=AB+BA'$ و $BA'+CA'=BC$

پس $p=\dfrac{AB+BC+CA}{۲}=AD=AE$.

همچنین از مثلث قائم‌الزاویه $O_۱AE$ نتیجه می‌شود:

$$(۴)\qquad OE_۱=AE.tg\frac{A}{۲}=p.tg\frac{A}{۲}$$

پس فواصل جبری نقطهٔ $O_۱$ از دو محور $y'y$ و $z'z$ چنین‌اند:

$$(۵)\qquad y=z=p.tg\frac{A}{۲}$$

y و z نقطهٔ $O_۱$ را در معادلهٔ (۲) می‌گذاریم، مقدار m مربوط به‌معادلهٔ خط $O_۱A'$ چنین حاصل می‌شود:

$$(۶)\qquad m=p.tg\frac{A}{۲}.(\cos B-\cos C)$$

در معادلهٔ (۲)، به‌جای m مقدار آن را از رابطهٔ (۶) قرار می‌دهیم. معادلهٔ خط $O_۱A'$ حاصل می‌شود:

$$(۷)\qquad y\cos B-z\cos C=p.tg\frac{A}{۲}(\cos B-\cos C)$$

به‌همین طریقه معادلات دو خط $O_۲B'$ و $O_۳C'$ را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$(۸)\qquad z\cos C-x\cos A=p.tg\frac{B}{۲}(\cos C-\cos A)$$

$$(۹)\qquad x\cos A-y\cos B=p.tg\frac{C}{۲}(\cos A-\cos B)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۷)، (۸)، و (۹) متوافق است. بین دو معادلهٔ (۷) و (۸) مجهول z را حذف می‌کنیم. معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(۱۰)\qquad y\cos B-x\cos A=p.tg\frac{A}{۲}(\cos B-\cos C)+p.tg\frac{B}{۲}(\cos C-\cos A)$$

از مقایسهٔ دو معادلهٔ (۹) و (۱۰) شرط توافق دستگاه معادلات مذکور به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(۱۱)\qquad tg\frac{A}{۲}(\cos B-\cos C)+tg\frac{B}{۲}(\cos C-\cos A)+tg\frac{C}{۲}(\cos A-\cos B)=۰$$

عبارت $tg\frac{A}{۲}(\cos B-\cos C)$ را به‌نحو زیر تبدیل می‌کنیم

MATH75.IR

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}(\cos B-\cos C)=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\left(-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=-2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\sin C-\sin B$$

با همین شیوه استدلال چنین می‌نویسیم:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}(\cos C-\cos A)=\sin A-\sin C$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}(\cos A-\cos B)=\sin B-\sin A$$

از سه تساوی اخیرالذکر، درستی رابطهٔ (۱۱) و در نتیجه توافق دستگاه معادلات مورد نظر ثابت می‌شود. پس سه خط O_1A'، O_2B'، و O_3C' متقارب‌اند.

۲.۳۳. قضیه

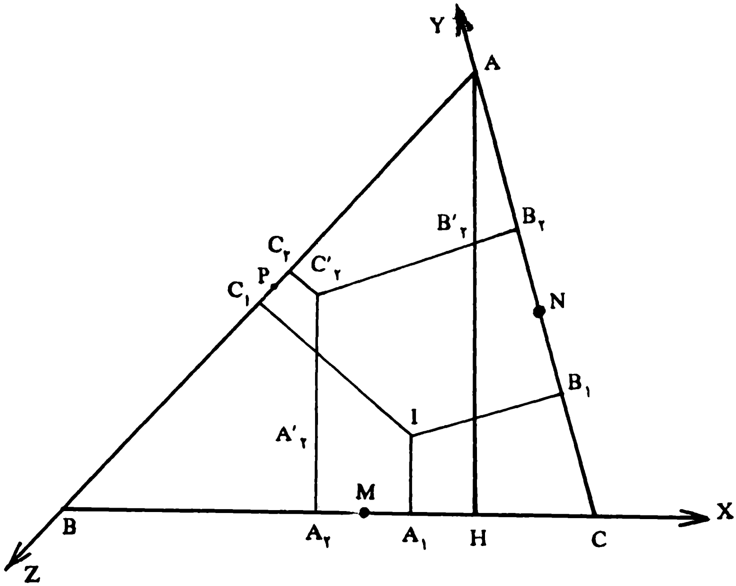
از نقطهٔ I واقع در صفحهٔ مثلث ABC عمودهای IA_1، IB_1، و IC_1 را به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA، و AB فرود می‌آوریم. وسطهای اضلاع BC، CA، و AB را به‌ترتیب نقاط M، N، و P می‌نامیم. قرینه‌های سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 را به‌ترتیب نسبت به‌نقاط M، N، و P تعیین می‌کنیم و آنها را A_2، B_2، و C_2 می‌نامیم. از سه نقطهٔ A_2، B_2، و C_2 به‌ترتیب عمودهای $A_2A'_2$، $B_2B'_2$، $C_2C'_2$ را بر خطوط BC، CA، و AB وارد می‌کنیم. ثابت کنید سه خط اخیرالذکر متقارب‌اند.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. طولهای اضلاع مثلث مقابل به‌زاویه‌های A، B، و C را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم. اندازه‌های جبری سه بردار $\overrightarrow{MA_1}$، $\overrightarrow{NB_1}$، و $\overrightarrow{PC_1}$ را به‌ترتیب روی سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ با α، β، و γ نمایش می‌دهیم:

$$\overline{MA_1}=\alpha \text{ و } \overline{MB_1}=\beta \text{ و } \overline{PC_1}=\gamma$$

ابتدا معادلهٔ خط IA_1 را جست‌وجو می‌کنیم و سپس به‌کمک آن معادلهٔ خط $A_2A'_2$ را می‌نویسیم. بنابر قضیهٔ شال چنین می‌نویسیم:

$$\overline{CA_1}=\overline{CM}+\overline{MA_1}=-\frac{a}{2}+\alpha\ ,\ \overline{BA_1}=\overline{BM}+\overline{MA_1}=\frac{a}{2}+\alpha$$



به‌کمک مطلب (۸.۱) فواصل جبری نقطهٔ A_1 را از دو محور $y'y$ و $z'z$ حساب می‌کنیم:

$$A_1 \left| \begin{array}{l} y=\overline{CA_1}\ \sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=(-\frac{a}{۲}+\alpha)\sin(\pi+C)=(\frac{a}{۲}-\alpha)\sin C \\ z=\overline{BA_1}\ \sin(\overrightarrow{z'z},\overrightarrow{x'x})=(\frac{a}{۲}+\alpha)\sin(\pi-B)=(\frac{a}{۲}+\alpha)\sin B \end{array} \right.$$

معادلهٔ ارتفاع AH بنابر (۵.۲. پ) چنین است:

$$(۱) \qquad y\cos B-z\cos C=۰$$

معادلهٔ هر خط موازی با AH بنابر (۴.۲) به‌صورت زیر است:

$$(۲) \qquad y\cos B-z\cos C=p$$

در معادلهٔ (۲)، p یک پارامتر است. چون خط IA_1 عمود بر خط BC است پس خط IA_1 موازی ارتفاع AH است لذا معادلهٔ آن به‌صورت (۲) است. مختصات نقطهٔ A_1 را در معادلهٔ (۲) می‌گذاریم تا pی مربوط به‌خط IA_1 حاصل شود:

$$(۳) \qquad p=(\frac{a}{۲}-\alpha)\sin C\cos B-(\frac{a}{۲}+\alpha)\sin B\cos C$$

$$=\frac{a}{۲}\sin(C-B)-\alpha\sin(C+B)$$

MATH75.IR

از روابط (۲) و (۳) معادلهٔ خط IA_1 حاصل می‌شود:

$$(۴) \quad y\cos B - z\cos C = \frac{a}{۲}\sin(C-B) - \alpha\sin(C+B)$$

با همین شیوه استدلال معادله‌های دو خط IB_1 و IC_1 را به‌ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$(۵) \quad z\cos C - x\cos A = \frac{b}{۲}\sin(A-C) - \beta\sin(A+C)$$

$$(۶) \quad x\cos A - y\cos B = \frac{c}{۲}\sin(B-A) - \gamma\sin(A+B)$$

چون سه خط IA_1، IB_1، و IC_1 متقارب‌اند پس دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۴)، (۵)، و (۶) متوافق است و لذا رابطهٔ زیر برقرار است (اگر بین دو معادلهٔ (۴) و (۵) مجهول z را حذف کنیم و معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ (۶) مقایسه کنیم رابطهٔ زیر حاصل می‌شود):

$$(۷) \quad X+Y=۰$$

که در آن

$$\begin{cases} X = \frac{a}{۲}\sin(C-B) + \frac{b}{۲}\sin(A-C) + \frac{c}{۲}\sin(B-A) \\ Y = -\alpha\sin(B+C) - \beta\sin(C+A) - \gamma\sin(A+B) \end{cases}$$

به‌آسانی ثابت می‌کنیم که $X=۰$. برای این منظور از قضیهٔ سینوسها در مثلث یعنی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$(۸) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

عبارت X با رعایت روابط (۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$X = R\left[\sin A\sin(C-B) + \sin B\sin(A-C) + \sin C\sin(B-A)\right]$$

اگر به‌جای $\sin(C-B)$، $\sin(A-C)$، و $\sin(B-A)$ بسطهای آنها را بگذاریم و ضربهای لازم را انجام دهیم، شش جمله حاصل می‌شود که دوبه‌دو مساوی و مختلف‌العلامت‌اند، پس

$$(۹) \quad X=۰$$

بنابراین رابطهٔ (۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۱۰) \quad Y=۰$$

اکنون معادلات سه خط $A_۲A'_۲$، $B_۲B'_۲$، و $C_۲C'_۲$ را جست‌وجو می‌کنیم. اگر در معادلات (۴)، (۵)، و (۶)، مقادیر α، β، و γ را به‌ترتیب به $(-\alpha)$، $(-\beta)$، و $(-\gamma)$ تبدیل کنیم معادلات

سه $A_2A'_2$، $B_2B'_2$، و $C_2C'_2$ به‌دست می‌آیند که به‌ترتیب چنین‌اند:

$$y\cos B - z\cos C = \frac{a}{2}\sin(C-B) + \alpha\sin(C+B) \qquad (4)'$$

$$z\cos C - x\cos A = \frac{b}{2}\sin(A-C) + \beta\sin(A+C) \qquad (5)'$$

$$x\cos A - y\cos B = \frac{c}{2}\sin(B-A) + \gamma\sin(A+B) \qquad (6)'$$

اکنون ثابت می‌کنیم دستگاه حاصل از سه معادلهٔ $(4)'$، $(5)'$، و $(6)'$ متوافق است و نتیجه می‌گیریم که سه خط $A_2A'_2$، $B_2B'_2$، و $C_2C'_2$ متقارب‌اند. مجهول z را بین دو معادلهٔ $(4)'$ و $(5)'$ حذف می‌کنیم و معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ $(6)'$ مقایسه می‌کنیم. شرط توافق دستگاه حاصل از سه معادلهٔ $(4)'$، $(5)'$، و $(6)'$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$X - Y = 0 \qquad (11)$$

بنابر (۹) داریم $X=0$ و بنابر (۱۰) داریم $Y=0$. پس درستی رابطهٔ (۱۱) مسلم است. بنابراین دستگاه معادلات مورد نظر متوافق است. از توافق معادلات، تقارب سه خط $A_2A'_2$، $B_2B'_2$، و $C_2C'_2$ نتیجه می‌شود

۳۴.۲. قضیه سوا[1]

هر خط که یک رأس مثلث را به‌نقطه‌ای از ضلع روبروی آن (بجز دو رأس دیگر) وصل کند خط سوایی نامیده می‌شود. مثلاً در شکل زیر، خط AD که رأس A ازمثلث ABC را به نقطهٔ دلخواه D از خط BC (به‌جز دونقطهٔ B و C) وصل می‌کند یک‌خط سوایی نامیده می‌شود.

قضیه. مثلث ABC و سه خط سوایی AD، BE، و CF را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید یک شرط لازم و کافی برای تقارب سه خط مذکور آن است که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

---

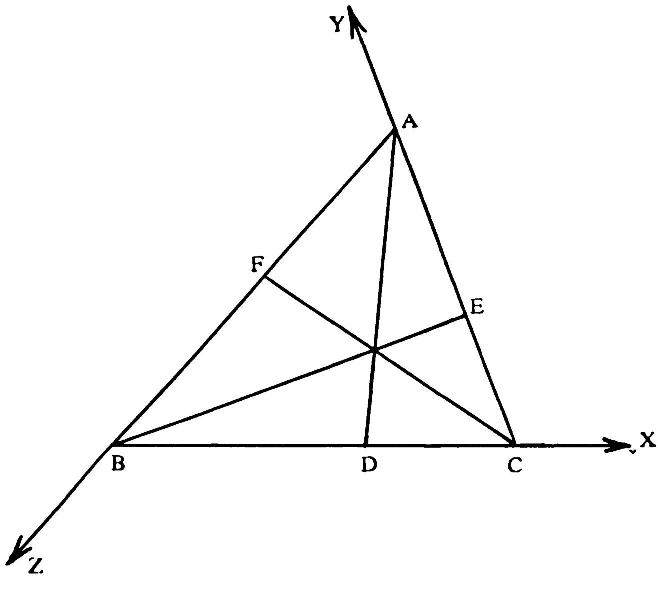
۱ ـ ژان‌دُسِوا (Jean de Ceva) از هندسه‌دانهای ایتالیایی قرن شانزدهم است. قضیه‌ای که در بالا (شماره ۳۴.۲) ذکر کردیم گاهی به‌ژان برنولی (۱۶۶۷ ـ ۱۷۴۸) نسبت داده شده است. اما این قضیه در کتابی که سوا در سال ۱۶۷۸ منتشر کرده است دیده می‌شود. پونسله هندسه‌دان فرانسوی در سال ۱۸۲۲ تعمیمی از قضیهٔ مذکور را در رساله‌ای به‌نام «خواص تصویری» به‌صورت زیر عرضه کرده است: اگر از نقطهٔ O واقع در صفحهٔ یک چندضلعی که تعداد اضلاع آن فرد است به‌هر رأس وصل کنیم تا ضلع مقابل را به‌دوقطعه بخش کند آنگاه حاصل‌ضرب قطعاتی که انتهای مشترک ندارند برابر است با حاصل‌ضرب قطعات دیگر.

MATH75.IR

$$(1)\qquad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$$

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب بر سه بردار $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. مختصات سه نقطهٔ D، E، و F را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$D\left|\begin{array}{l} x=0\\ y=\overline{DC}\sin C\\ z=-\overline{DB}\sin B\end{array}\right.\qquad E\left|\begin{array}{l} x=-\overline{EC}\sin C\\ y=0\\ z=\overline{EA}\sin A\end{array}\right.\qquad F\left|\begin{array}{l} x=\overline{FB}\sin B\\ y=-\overline{FA}\sin A\\ z=0\end{array}\right.$$



با معلوم بودن مختصات سه نقطهٔ D، E، و F، به‌کمک (۳.۲.ب) معادلات سه خط AD، BE، و CF را به‌ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$M\begin{cases} y(\overline{PB}\sin B)+z(\overline{DC}\sin C)=0 & (2)\\ z(\overline{EC}\sin C)+x(\overline{EA}\sin A)=0 & (3)\\ x(\overline{FA}\sin A)+y(\overline{FB}\sin B)=0 & (4)\end{cases}$$

بین دو معادلهٔ (۲) و (۳)، مجهول z را حذف می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$(5) \quad y(\overline{DB}\,\sin B)(\overline{EC}\,\sin C)-x(\overline{EA}\,\sin A)(\overline{DC}\,\sin C)=0$$

یک شرط لازم و کافی برای آنکه دستگاه حاصل از دو معادلهٔ (۴) و (۵) دارای جوابی بجز (۰ ، ۰) باشد آن است که ضرایب x و y در دو معادلهٔ مذکور متناسب باشند. این شرط را می‌نویسیم و مختصر می‌کنیم، رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.

یک شرط لازم و کافی برای توافق دستگاه معادلات x، برقرار بودن رابطهٔ (۱) است پس یک شرط لازم و کافی برای تقارب سه خط AD، BE، و CF برقرار بودن رابطهٔ (۱) است.

مکانهای هندسی

در شماره‌های (۳۵.۲) و (۳۸.۲) مسائلی دربارهٔ مکانهای هندسی که با معادلات درجه اول حل می‌شوند مطرح خواهیم کرد.

۳۵.۲. مسئله

دو محور x′x و y′y راکه در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. زاویهٔ محور x′x با محور y′y را θ می‌نامیم. بر محور y′y دو نقطهٔ ثابت A و B متمایز از نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$. بر محور x′x دو نقطهٔ متحرک P و Q متمایز از نقطهٔ O را به‌طور قرینه نسبت به‌نقطهٔ O در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\overline{OP}=p$. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M محل برخورد دو خط PA و QB هنگامی که دو نقطهٔ P و Q بر خط x′x حرکت کنند.

حل. مختصات نقاط A، B، P، و Q را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$A\left|\begin{array}{l} x=\overline{OA}\,\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=a\,\sin\theta \\ y=0 \end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l} x=b\,\sin\theta \\ y=0 \end{array}\right.$$

$$P\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{OP}\,\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=-\,\overline{OP}\,\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=-p\,\sin\theta \end{array}\right. \qquad Q\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=p\,\sin\theta \end{array}\right.$$

اکنون معادلهٔ خط PA را جست‌وجو می‌کنیم. چون خط PA از نقطهٔ O محل تلاقی دو محور

MATH75.IR

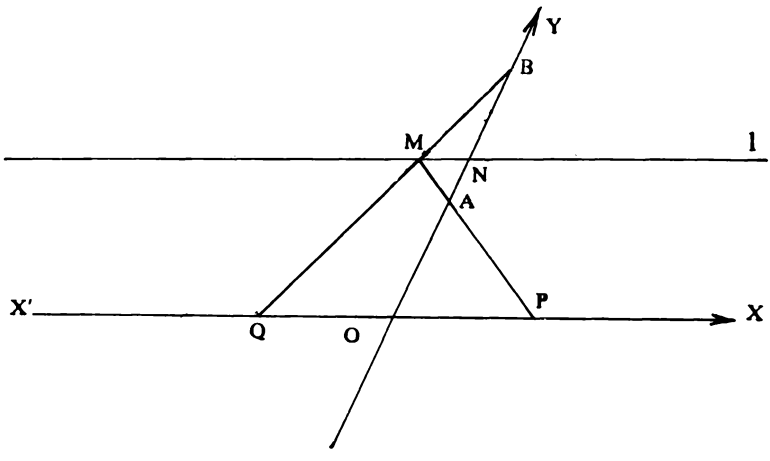
نمی‌گذرد پس معادلهٔ آن به‌صورت $mx+ny+۱=۰$ است. مختصات دو نقطهٔ P، و A را در معادلهٔ اخیرالذکر می‌بریم مقادیر m و n حاصل می‌شود. با معلوم بودن مقادیر m و n معادلهٔ خط PA چنین حاصل می‌شود:

$$(۱) \qquad px-ay=ap\ \sin\theta$$

به‌همین شیوه معادلهٔ خط QB را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲) \qquad px+by=bp\ \sin\theta$$

از حذف پارامتر p بین دو معادلهٔ (۱) و (۲) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:



$$x=\left(\frac{۱}{a\ \sin\theta}+\frac{۱}{b\ \sin\theta}\right)=۲$$

و یا

$$(۳) \qquad x=\frac{۲ab\ \sin\theta}{a+b}$$

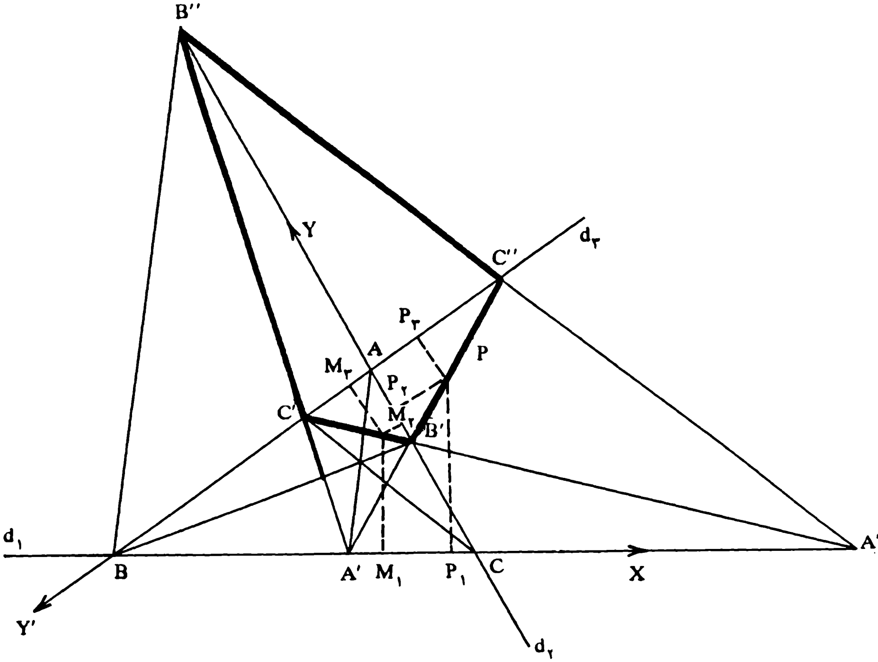
بر خط $y'y$ نقطهٔ N را طوری اختیار می‌کنیم که فاصلهٔ جبری آن از محور $x'x$ برابر $۲absin\theta/(a+b)$ باشد. از نقطهٔ N خط l را موازی با خط $x'x$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ N را از خط l حذف می‌کنیم و شکل حاصل را l' می‌نامیم. شکل l' (یعنی خط l سوده شده در نقطهٔ N) مکان هندسی مطلوب است.

۳۶.۲. مسئله

سه خط $d_۱$، $d_۲$، و $d_۳$ واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ متحرکی که فاصلهٔ آن از خط $d_۱$ مساوی مجموع فواصل آن از دو خط $d_۲$ و $d_۳$ باشد.

حل. نقاط برخورد خطوط $(d_۱,d_۲)$، $(d_۲,d_۳)$، و $(d_۳,d_۱)$ را به‌ترتیب C، A، و B

می‌نامیم. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$، و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.



مکان هندسی نقاطی را جست‌وجو می‌کنیم که مختصات آنها در رابطهٔ زیر صدق کنند:

(۱) $|x| = |y| + |z|$

پس مکان هندسی مطلوب شامل قطعات مناسبی از چهار خط به‌معادلات زیر است:

(۲) $x=y+z$

(۳) $x=-y+z$

(۴) $x=y-z$

(۵) $x=-y-z$

نیمسازهای داخلی مثلث ABC را AA'، BB'، و CC' و نیمسازهای خارجی آن را AA''، BB''، و CC'' می‌نامیم. معادلات (۲)، (۳)، (۴)، و (۵) به‌ترتیب معادلات خطوط $C'B'A''$، $A'B'C''$، $A'C'B''$، و $A''B''C''$ اند (رجوع شود به‌قضیه‌های (۷.۲) و (۸.۲)).

از نقطهٔ دلخواه $M(x,y,z)$ واقع بر پاره‌خط $B'C'$ عمودهای MM_1، MM_2، و MM_3 را

MATH75.IR

به‌ترتیب بر سه خط BC، CA، و AB فرود می‌آوریم. سه رابطهٔ زیر برقرار است:

$x=(MM_1)$ و $y=(MM_2)$ و $z=(MM_3)$

چون مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند پس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(MM_1)=(MM_2)+(MM_3) \qquad (۶)$$

هیچ نقطه از امتداد پاره خط $B'C'$ در رابطهٔ (۶) صدق نمی‌کند.

از نقطهٔ P واقع بر پاره‌خط $B'C''$ عمودهای PP_1، PP_2، و PP_3 را به‌ترتیب بر سه خط BC، CA، و AB فرود می‌آوریم. روابط زیر برقرار است:

$$x_P=(PP_1)\ ,\ y_P=-(PP_2)\ ,\ z_P=(PP_3)$$

و چون مختصات نقطهٔ P در معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند پس رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(PP_1)=(PP_2)+(PP_3) \qquad (۷)$$

فواصل هیچ نقطه از امتداد پاره‌خط $B'C''$ از سه خط d_1، d_2، و d_3 در رابطهٔ (۷) صدق نمی‌کند. به‌همین طریقه ثابت می‌کنیم که دو پاره خط $C'B''$ و $B''C''$ جزء مکان هستند.

پس مکان هندسی مطلوب عبارت است از خط شکسته بسته $C'B'C''B''$.

حالت خاص. اگر از سه خط مفروض d_1، d_2، و d_3 دو و یا هر سه موازی باشند بررسی مکان هندسی بسیار آسان است و به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

خط میانها

۳۷.۲. قضیه

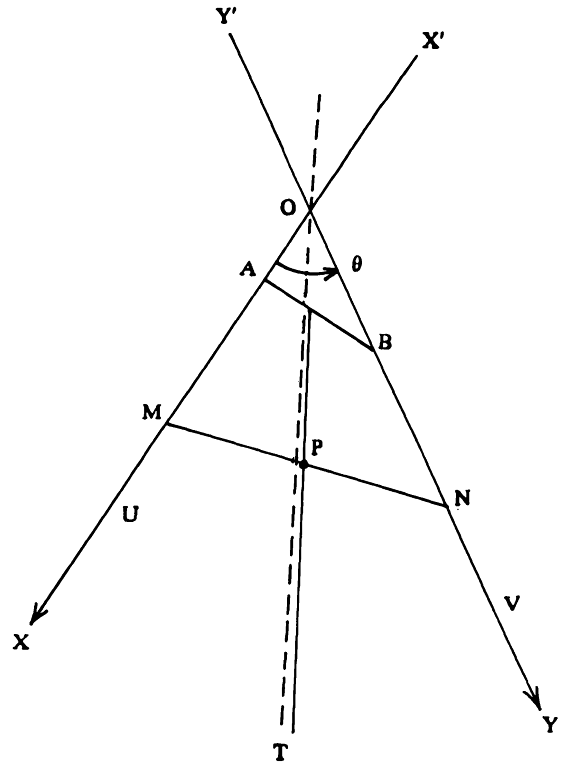
بر دو نیم‌خط Au و Bv که در نقطهٔ O متقاطع‌اند به‌ترتیب دو نقطهٔ متحرک M و N را در نظرمی‌گیریم. به‌طوری که دو بردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BN}$ با نیم‌خطهای Au و BV هم‌سو باشند و طولهای آنها مساوی باشند. ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره‌خط MN خطی است راست موازی با نیمساز زاویهٔ UOV. شال[1] این خط را «خط میانها» نامیده است.

---

۱ ـ میشل شال (۱۸۸۰ ـ ۱۷۹۳) یکی از بزرگترین هندسه‌دانهای قرن نوزدهم است. درکتاب حاضر در فصل «اثبات چند قضیه به‌راههای تازه» یکی از قضایای شال را مطرح خواهیم نمود.

از جمله آثار شال چهار کتاب مذکور در زیر است: چشم‌انداز تاریخی دربارهٔ اصل روشهای هندسی و توسعهٔ آنها، هندسهٔ عالی، پوریسمهای اقلیدس، مقاطع مخروطی. سخن زیر که آن را از کتاب تاریخ علوم پیر روسو اقتباس کرده‌ایم از شال است. «تاریخ نشان می‌دهد که هر رئیس کشوری که ریاضیات یعنی منبع مشترک تمام علوم مثبت را احترام گذاشت و ریاضیدانها را تشویق کرد دوران حکومت او درخشانتر و افتخارات او طولانیتر بوده است.»

برهان. دو محور x′x و y′y را به‌ترتیب متکی بر دو نیم‌خط AU و BV و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. زاویهٔ محور x′x با محور y′y را θ می‌نامیم. اندازه‌های جبری دوبردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به‌ترتیب روی دومحور x′x و y′y با a و b نشان‌می‌دهیم و طول بردار $\overrightarrow{AM}$ را l می‌نامیم.



به‌کمک (۸.۱) مختصات نقاط A، B، M، و N را حساب می‌کنیم.

$$A \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{OA}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=a\sin(-\theta)=-a\sin\theta \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} x=\overline{OB}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=b\sin\theta \\ y=0 \end{array} \right.$$

MATH75.IR

$$M\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=-(a+l)\sin\theta \end{array}\right. \qquad N\left|\begin{array}{l} x=(b+l)\sin\theta \\ y=0 \end{array}\right.$$

مختصات نقطهٔ P وسط پاره‌خط MN را به‌کمک (۵.۱) حساب می‌کنیم:

$$P\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{1}{2}(b+l)\sin\theta \\[2ex] y=\dfrac{y_M+y_N}{2}=-\dfrac{1}{2}(a+l)\sin\theta \end{array}\right.$$

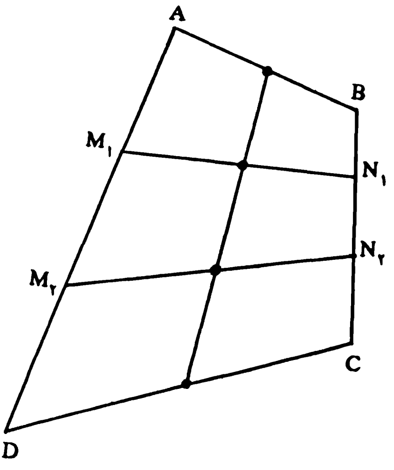
پارامتر l را بین دو معادلهٔ اخیرالذکر حذف می‌کنیم معادلهٔ زیر که معادلهٔ یک خط راست است به‌دست می‌آید:

$$(1) \qquad x+y=\frac{1}{2}(b-a)$$

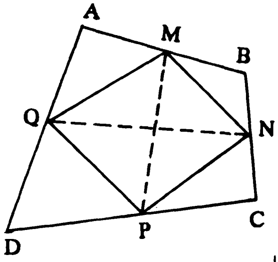
معادلهٔ خط OT نیمساز زاویهٔ UOV چنین است $x+y=0$. پس بنابر (۴.۲) معادلهٔ (۱)، معادلهٔ خطی است موازی با خط OT که آن را d می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ P بخشی است از خط d.

۳۷.۲.الف.نتیجه. دوضلع مقابل AD وBC ازچهارضلعی ABCDرا به‌وسیلهٔ‌نقاط M_1، M_2، ...، و M_{p-1} و N_1، N_2، ...، و N_{p-1} به p قسمت مساوی بخش می‌کنیم. ثابت کنید وسطهای پاره‌خطهای AB، M_1N_1، M_2N_2، ...، $M_{p-1}N_{p-1}$، و DC بریک خط راست قرار دارند.

برهان. این مطلب نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ بالا (شماره ۳۷.۲) است.



۳۷.۲.ب. قضیهٔ وارینیون. در هر چهارضلعی وسطهای چهار ضلع، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند.



برهان. وسطهای اضلاع AB، BC، CD، و DA از چهارضلعی ABCD را به‌ترتیب M، N، P، و Q می‌نامیم. بنابر حکم شماره (۳۷.۲. الف) دو پاره‌خط MP و NQ یکدیگر را نصف می‌کنند. چون در چهارضلعی MNPQ دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

قضیهٔ وارینیون را در شمارهٔ (۱۳.۱) به‌راه دیگری اثبات کرده‌ایم.

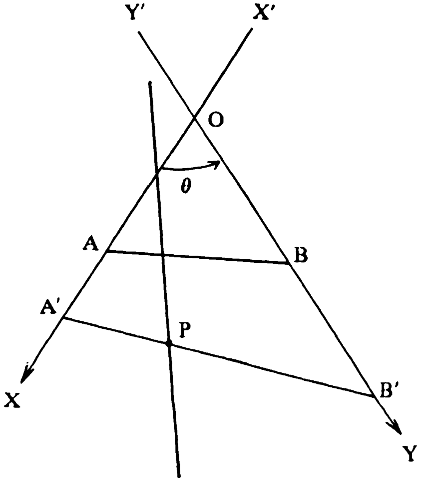
۳۸.۲. تعمیم قضیهٔ خط میانها

دو نقطهٔ A و B را به‌ترتیب بر دو محور x'x و y'y که در نقطهٔ O متقاطع‌اند در نظر می‌گیریم. بنا به‌فرض دو نقطهٔ متحرک M و N به‌ترتیب از دو نقطهٔ A و B به‌طور همزمان شروع به‌حرکت می‌نمایند و دو خط x'x و y'y را با سرعتهای ثابت v و v' می‌پیمایند. بر خط MN نقطهٔ P را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت $\dfrac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{PN}}$ همواره برابر با عدد جبری معین $(-\lambda)$ باشد. ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ P خطی است راست.

برهان. زاویهٔ محور x'x با محور y'y را θ می‌نامیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را به‌ترتیب روی دو محور x'x و y'y با a و b نمایش می‌دهیم. فرض کنیم پس ازمدت t دو متحرک M و N به‌ترتیب در نقاط A' و B' باشند. بنابر قضیهٔ شال چنین داریم:

$$\overline{OA'}=\overline{OA}+\overline{AA'}=a+vt$$

$$\overline{OB'}=\overline{OB}+\overline{BB'}=b+v't$$



MATH75.IR

مختصات دو نقطهٔ A'، و B' را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$A' \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{OA'}\,.\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=(a+vt)\,\sin(2\pi-\theta)=-(a+vt)\,\sin\theta \end{array} \right.$$

$$B' \left| \begin{array}{l} x=\overline{OB'}\,.\,\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=(b+v't)\,\sin\theta \\ y=0 \end{array} \right.$$

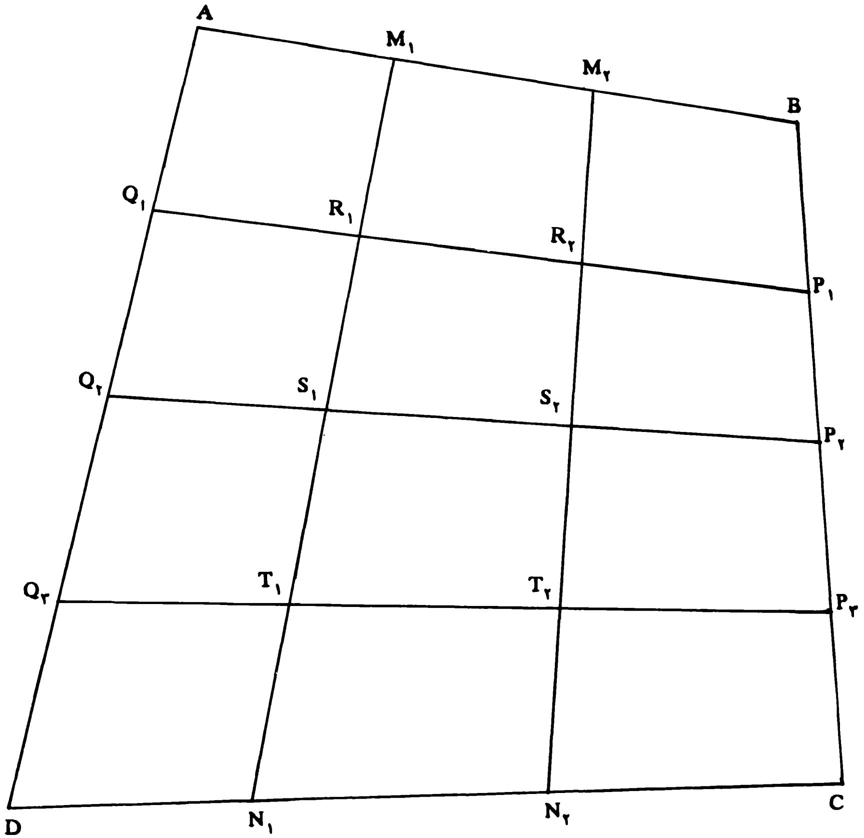
مختصات نقطهٔ P را به‌کمک (۶.۱) حساب می‌کنیم

$$P \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{x_{A'}+\lambda x_{B'}}{1+\lambda}=\dfrac{\lambda(b+v't)\,\sin\theta}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_{A'}+\lambda y_{B'}}{1+\lambda}=\dfrac{-(a+vt)\,\sin\theta}{1+\lambda} \end{array} \right.$$

در دو رابطهٔ اخیرالذکر a، b، v، 'v، λ و θ اعداد ثابت‌اند و t پارامتر است. با حذف t بین این دو معادله، یک معادله درجه اول نسبت به x و y به‌دست می‌آید پس مکان هندسی نقطهٔ P خطی است راست.

۳۸.۲. الف. یک مسئله جالب در چهارضلعی. در چهار ضلعی ABCD هر یک از دو ضلع مقابل AB و CD را به‌وسیلهٔ نقاط M_1، M_2، M_3، ... و N_1، N_2، N_3، ... به p قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (یعنی $AM_1=M_1M_2=M_2M_3=...$ و $DN_1=N_1N_2=N_2N_3=...$) و سپس خطوط M_1N_1، M_2N_2، M_3N_3، ... را وصل می‌کنیم و مجموعهٔ آنها را دسته خط اول می‌نامیم. همچنین هر یک از دو ضلع مقابل BC و AD را به‌وسیلهٔ نقاط P_1، P_2، P_3، ... و Q_1، Q_2، Q_3، ... به q قسمت مساوی بخش می‌کنیم (یعنی $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=...$ و $AQ_1=Q_1Q_2=Q_2Q_3=...$) و سپس خطوط P_1Q_1، P_2Q_2، P_3Q_3، ... را وصل می‌کنیم و مجموعه آنها را دسته خط دوم می‌نامیم. ثابت کنید هریک از خطوط دسته اول به‌وسیلهٔ خطوط دستهٔ دوم به q قسمت مساوی تقسیم می‌شود (یعنی $AQ_1=Q_1Q_2=Q_2Q_3=...$، $M_1R_1=R_1S_1=S_1T_1=...$، $M_2R_2=R_2S_2=S_2T_2=...$ ، ...) و همچنین هریک از خطوط دستهٔ دوم به‌وسیلهٔ خطوط دستهٔ اول به p قسمت مساوی بخش می‌شوند (یعنی $AM_1=M_1M_2=M_2M_3=...$، $Q_1R_1=R_1R_2=R_2R_3=...$، $Q_2S_1=S_1S_2=S_2S_3=...$، ...)

MATH75.IR



خاصیت مذکور در بالا نتیجهٔ مستقیم قضیه (۲.۳۸) است.

MATH75.IR

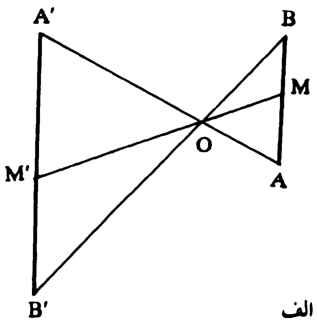
تبدیل تشابهی

قضیه پترسن ـ اسکوت و قضیه سیمسن

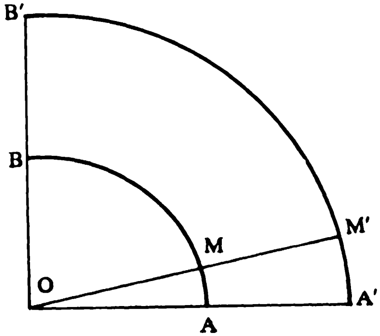
در صفحات آینده، تبدیل تشابهی را به‌طور مختصر شرح می‌دهیم و قضیه پترسن ـ اسکوت راکه یکی از قضیه‌های مهم تبدیل تشابهی است اثبات می‌کنیم سپس به‌کمک قضیه پترسن ـ اسکوت، قضیه سیمسن را اثبات می‌کنیم. این شیوه اثبات نشان می‌دهد که قضیه سیمسن در قضیه پترسن ـ اسکوت مندرج است.

۳۹.۲. تبدیل تشابهی

الف. تجانس. نقطهٔ ثابت O و عدد جبری k را در نظر می‌گیریم $(k\neq 0)$. بر شکل F نقطهٔ دلخواه M را در نظر می‌گیریم و روی خط OM نقطهٔ M' را چنان اختیار می‌کنیم که $k=\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{OM}}$ باشد. هنگامی که نقطهٔ M شکل F را می‌پیماید نقطهٔ M' شکلی راکه F' می‌نامیم می‌پیماید. می‌گوییم شکل F' مجانس شکل F است. نقطهٔ O را مرکز تجانس و عدد جبری k را نسبت تجانس می‌نامیم.



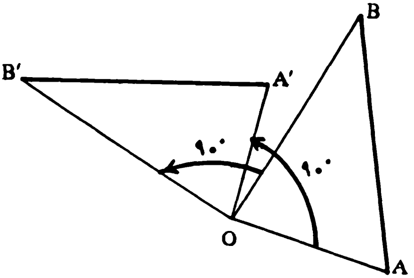
الف



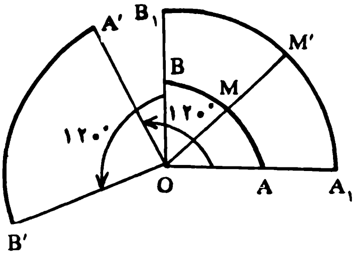
ب

در شکل الف مجانس پاره‌خط AB نسبت به‌نقطهٔ O با نسبت (۲−) ترسیم شده است و پاره‌خط A'B' حاصل شده است. در شکل ب مجانس ربع دایره AB نسبت به‌نقطهٔ O با نسبت ۲ ساخته شده است و ربع دایره A'B' به‌دست آمده است.

ب. دوران. نقطهٔ ثابت O و شکل F را در نظر می‌گیریم. هر یک از نقاط شکل F را حول نقطهٔ O به‌اندازهٔ زاویه معین θ می‌چرخانیم. شکلی حاصل می‌شود که آن را F' می‌نامیم. نقطهٔ O را مرکز دوران و زاویهٔ θ را زاویهٔ دوران می‌نامیم. در دوران نقطه‌های شکل F روی دایره‌های هم‌مرکز تغییرجا می‌دهند. در شکل روبه‌رو، پاره‌خط AB به‌اندازهٔ °۹۰ در جهت مثبت مثلثاتی دوران یافته و پاره‌خط A'B' حاصل شده است.



پ. تبدیل تشابهی. ترکیب یک تجانس و دوران با مرکزهای مشترک را یک تبدیل تشابهی می‌نامند. نقطهٔ ثابت O و شکل F را در نظر می‌گیریم. مجانس شکل F را در تجانس به مرکز O و نسبت k می‌سازیم شکل F_1 حاصل می‌شود. سپس شکل F_1 را حول نقطهٔ O به‌اندازهٔ زاویهٔ معین θ دوران می‌دهیم شکل F' حاصل می‌شود. می‌گوییم شکل F' مبدل شکل F در تبدیل تشابهی $O(k,\theta)$ است. درشکل زیر مبدل ربع دایره AB را در تبدیل تشابهی $O(۲\ ,\ ۱۲۰^\circ)$ ساخته‌ایم. ابتدا مجانس ربع دایره AB را با نسبت (۲)، ساخته‌ایم. ربع دایره A_1B_1 به‌دست آمده است. سپس ربع دایره A_1B_1 را حول نقطهٔ O به‌اندازهٔ °۱۲۰+ چرخانده‌ایم ربع دایره A'B' حاصل شده است.



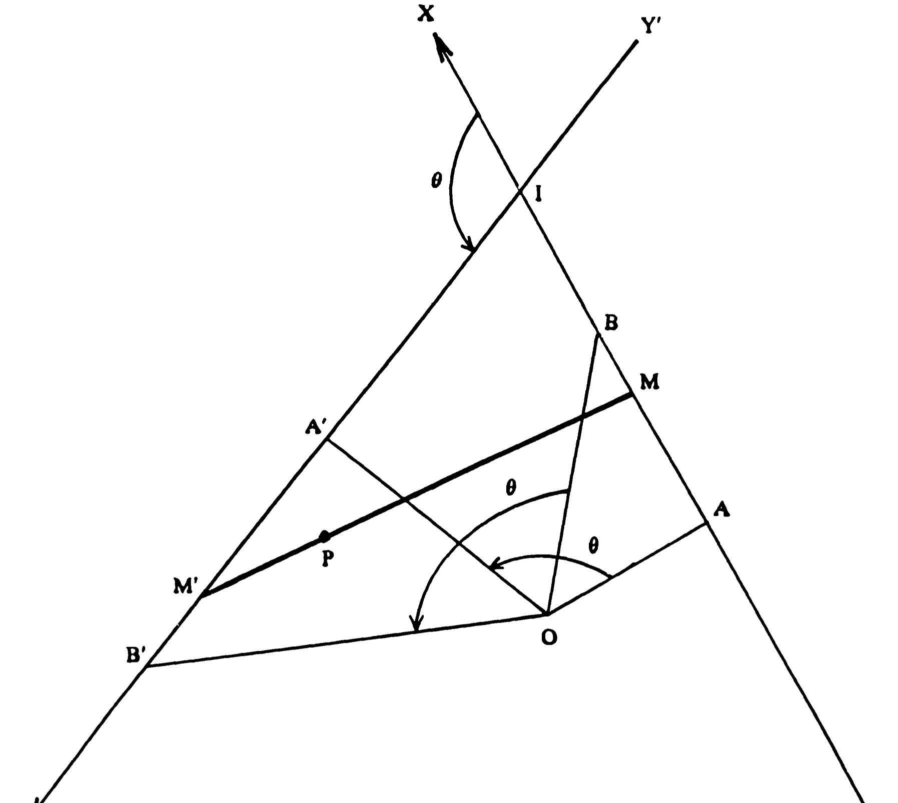
ثابت می‌شود که حاصل ترکیب یک تجانس و یک دوران با مرکزهای مختلف نیز یک تبدیل تشابهی است.

۲.۳۹.۱. قضیه پترسن ـ اسکوت. در یک تبدیل تشابهی که دو پاره AB و A'B' نظیر یکدیگراند هرگاه M نقطه‌ای از AB و M' نقطهٔ نظیرش از A'B' باشد نقطه‌هایی که MM' را به‌نسبت معین تقسیم می‌کنند بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. فرض کنیم دو پاره‌خط AB و A'B' در تبدیل تشابهی $O(k,\theta)$ نظیر یکدیگر باشند. نقطهٔ M از AB را در نظر گرفته و نظیر آن را که متعلق به A'B' است M' می‌نامیم.

بر MM' نقطهٔ P را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت $\frac{\overrightarrow{PM'}}{\overrightarrow{PM}}$ برابر عدد جبری $(-\lambda)$ باشد.

MATH75.IR



می‌خواهیم ثابت‌کنیم که‌وقتی‌نقطهٔ M خط AB را می‌پیماید، نقطهٔ P یک‌خط راست‌می‌پیماید.

محل برخورد دو خط AB و A'B' را I می‌نامیم. دو محور x'x و y'y را به‌ترتیب بر دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{AM}$ روی محور x'x را به‌ترتیب a و m و اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{IA'}$ روی محور y'y را a' می‌نامیم. چنین داریم:

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \theta$$

$$m' = |k|.m$$

بنابر قضیهٔ شال چنین می‌نویسیم:

$$\overline{IM}=\overline{IA}+\overline{AM}=a+m$$

$$\overline{IM'}=\overline{IA'}+\overline{A'M'}=a'+|k|.m$$

مختصات دو نقطهٔ M و 'M را بنابر (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$M\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{IM}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=(a+m)\sin(2\pi-\theta)-(a+m)\sin\theta \end{array}\right.$$

$$M'\left|\begin{array}{l} x=\overline{IM'}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{y'y})=(a'+|k|m)\sin\theta \\ y=0 \end{array}\right.$$

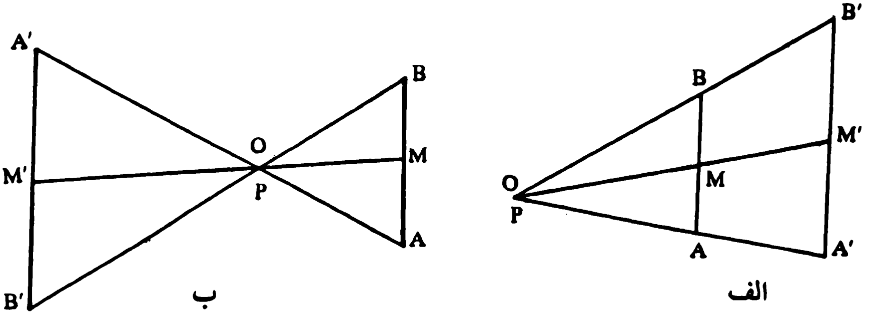
مختصات نقطهٔ P را بنابر (۶.۱) حساب می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$P\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{x_{M'}+\lambda x_M}{1+\lambda}=\dfrac{(a'+|k|m)\sin\theta}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_{M'}+\lambda y_M}{1+\lambda}=\dfrac{-\lambda(a+m)\sin\theta}{1+\lambda} \end{array}\right.$$

در دو رابطهٔ اخیرالذکر a، 'a، k، λ و θ اعداد ثابت و m پارامتر است. اگر پارامتر m را بین این دو معادله حذف کنیم یک معادلهٔ درجه اول برحسب x و y حاصل می‌شود. پس مکان هندسی نقطهٔ P خطی است راست.

حالت خاص. اگر زاویهٔ دوران برابر مضرب‌زوجی از π باشد (مثلاً ۰ یا ۳۶۰ درجه) آنگاه بردار $\overrightarrow{A'B'}$ موازی و هم‌سو با بردار $\overrightarrow{AB}$ است (شکل زیر. الف). در این‌صورت اگر $(-\lambda)$ یعنی نسبت $\dfrac{\overrightarrow{PM'}}{\overrightarrow{PM}}$ را مساوی k اختیار کنیم تمام نقاط P بر نقطهٔ O منطبق می‌شوند. (باید توجه کرد که $k=\dfrac{\overrightarrow{PM_1}}{\overrightarrow{PM}}$. رجوع شود به (۳۹.۲.پ)). اگر زاویهٔ دوران برابر مضرب خروجی از π باشد (مثلاً ۱۸۰ درجه) آنگاه بردار $\overrightarrow{A'B'}$ موازی و ناهم‌سو با بردار $\overrightarrow{AB}$ است (شکل زیر. ب). در این صورت اگر $(-\lambda)$ را مساوی $(-k)$ اختیار کنیم کلیهٔ نقاط P بر نقطهٔ O منطبق می‌شوند (باید توجه کرد که $k=\dfrac{\overrightarrow{PM_1}}{\overrightarrow{PM}}$).

MATH75.IR



تبصره. قضیهٔ پترسن ـ اسکوت همان قضیه‌ای است که در شمارهٔ (۳۸.۲) تحت عنوان «تعمیم قضیه خط میانها» ثابت کردیم.

در سطور زیر ثابت می‌کنیم که قضیهٔ سیمسن در قضیهٔ پترسن ـ اسکوت مندرج است.

۲.۳۹.۲. قضیهٔ سیمسن[1]. از نقطهٔ K واقع بر دایره محیطی مثلث ABC عمودهای

---

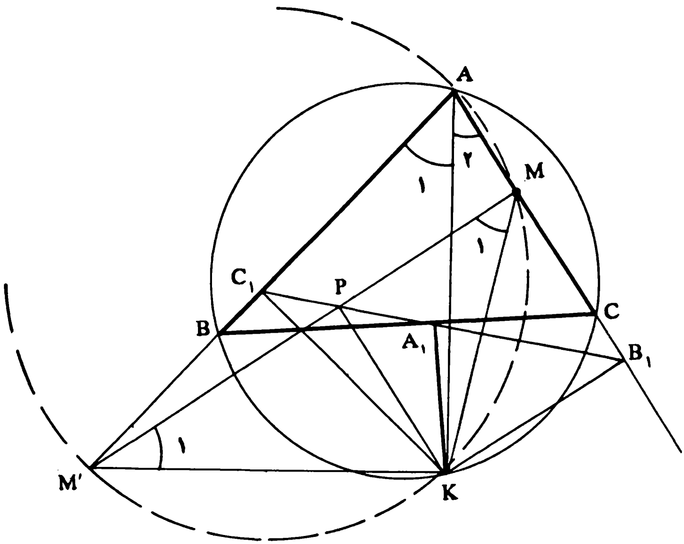
۱ ـ رابرت سیمسن Robert Simson (۱۷۶۸ ـ ۱۶۸۷) ریاضی‌دانی از اسکاتلند است. او قسمتی از آثار آپولونیوس و چند پوریسم اقلیدس را احیا کرد. قضیهٔ سیمسن شامل حکم عکس حکم مذکور در شمارهٔ (۲.۳۹.۲) نیز می‌باشد (رجوع کنید به فصل سوم، قضیهٔ سیمسن). قضیهٔ مذکور، در مجلهٔ ریاضی سالانه ژرگون (۱۸۱۴-۱۸۱۳) به‌سیمسن نسبت داده شده است. اما مجلهٔ Intermediaires des Mathématiques آن را به‌ویلیام والاس نسبت می‌دهد (سال ۱۷۹۷). رابرت سیمسن را نباید با توماس سیمپسن Thomas Simpson (۱۷۶۱ ـ ۱۷۱۰) که مبتکر فرمولهایی در مثلثات و فرمولی در تربیع است اشتباه کرد.

پوریسم امروزه به‌گزاره‌ای گفته می‌شود که شرطی رابیان می‌کند که مسئلهٔ مفروضی را قابل حل نماید به‌طوری که اگر این شرط برقرار باشد مسئله دارای بی‌نهایت جواب باشد.

مثال. دو دایره متداخل با مرکزهای متفاوت مفروض است. شعاع دایرهٔ بزرگ را R و شعاع دایرهٔ کوچک را r می‌نامیم. می‌خواهیم مثلثی در دایرهٔ بزرگ محاط کنیم که بر دایرهٔ کوچک محیط باشد. اگر d طول خط‌المرکزین دو دایره باشد بنابر قضیهٔ اولر چنین داریم $d^2=R^2-2Rr$. حال اگر بین دو شعاع و خط‌المرکزین دو دایره مفروض در مسئله، رابطهٔ اخیرالذکر موجود باشد رسم مثلث ممکن است و مسئله دارای بی‌نهایت جواب است.

KA_1، KB_1، و KC_1 را به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA، و AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. نقطهٔ دلخواه M را روی خط AC در نظر می‌گیریم و دایره‌ای بر سه نقطهٔ A، K، و M می‌گذرانیم و این دایره را γ می‌نامیم. دایرهٔ γ خط AB را بجز نقطهٔ A در نقطهٔ دیگری که آن را M' می‌نامیم قطع می‌کند. هنگامی که نقطهٔ M خط AC را می‌پیماید نقطهٔ M' خط AB را می‌پیماید. با تغییر وضع دو نقطهٔ M و M' مثلث KMM' تغییر می‌کند ولی همواره متشابه با خود باقی می‌ماند. زیرا چنین داریم: $\angle M_1=\angle A_1$ (دو زاویهٔ محاطی مقابل به‌کمان KM' در دایره γ) و $\angle M_1'=\angle A_2$ (دو زاویهٔ محاطی مقابل به‌کمان KM در دایره γ). چون زاویه‌های مثلث‌متغیر KMM' همواره‌ثابت باقی‌می‌ماند پس‌این مثلث‌همواره متشابه‌باخود باقی‌می‌ماند.



اکنون در مثلث KMM' ارتفاع KP را رسم می‌کنیم. چون مثلث متغیر KMM' همواره متشابه با خود است پس نسبت $\dfrac{\overrightarrow{PM'}}{\overrightarrow{PM}}$ همواره ثابت می‌ماند. مقدار این نسبت را l می‌نامیم.

نقطهٔ M' مبدل نقطهٔ M در تبدیل تشابهی $K(l,(\pi-A))$ می‌باشد. یادآور می‌شویم که در این تبدیل تشابهی نقطهٔ K مرکز مشترک دوران و تجانس است. زاویهٔ دوران $(\pi-A)$ است و نسبت تجانس l است. در این تبدیل تشابهی دو نقطهٔ M و M' نظیر یکدیگرند پس بنابر قضیه پترسن ـ اسکوت مکان هندسی نقطهٔ P که پاره‌خط MM' را به‌نسبت ثابت l بخش می‌کند خط راست است.

اکنون سه موضع خاص از نقطهٔ متحرک P را در نظر می‌گیریم:

(۱). اگر نقطهٔ متحرک M بر نقطهٔ C قرار گیرد آنگاه نقطهٔ M' بر نقطهٔ B قرار خواهد گرفت

MATH75.IR

و در این صورت نقطهٔ P بر نقطهٔ A_1 قرار خواهد گرفت.

(۲). اگر نقطهٔ متحرک M در جایی از خط AC قرار گیرد که نقطهٔ M' برنقطهٔ A قرار گیرد آنگاه نقطهٔ P بر نقطهٔ B_1 قرار خواهد گرفت.

(۳). اگر نقطهٔ متحرک M' در جایی از خط AB قرار گیرد که نقطهٔ M بر نقطهٔ A قرار گیرد در این صورت نقطهٔ P بر نقطهٔ C_1 قرار خواهد گرفت.

پس سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 سه موضع خاص از نقطهٔ متحرک P می‌باشند. چون مکان هندسی نقطهٔ P یک خط راست است پس سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 بر یک خط راست قرار دارند.

۲.۴۰. تقسیم توافقی و تقسیم غیرتوافقی

در صفحات آینده، تقسیم توافقی را مختصراً شرح می‌دهیم و سپس دو قضیهٔ اساسی تقسیم توافقی را ثابت می‌کنیم. قضیهٔ اول عبارت است از قضیهٔ قطبی یک نقطه نسبت به‌یک زاویه؛ قضیهٔ دوم حکمی است از دستگاه اشعه توافقی که دارای خاصیت تصویری است. این دو قضیه دارای اهمیت خاص‌اند و بسیاری از قضیه‌های جالب به‌کمک آنها ثابت شده‌اند. پس از تقسیم توافقی، تقسیم غیرتوافقی را شرح می‌دهیم و دو قضیهٔ اساسی آن را اثبات می‌کنیم.

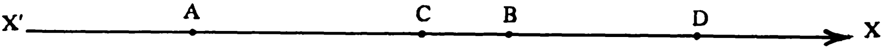
۲.۴۰.۱. *تقسیم توافقی*. اگر دو نقطهٔ A و B روی یک محور مفروض باشند، بر آن محور فقط یک نقطهٔ M وجود دارد. به‌طوری که نسبت $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA}}$ مساوی با عدد جبری مفروضی باشد، پس به‌هر نقطهٔ C از محور $x'x$ فقط یک نقطهٔ D از آن محور مربوط است به‌طوری که داشته باشیم:

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \qquad (۱)$$

و یا

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -۱$$

نقطهٔ D را مزدوج توافقی نقطهٔ C نسبت به‌دو نقطهٔ A و B می‌نامند. بنابر رابطهٔ (۱)، نقطهٔ C مزدوج توافقی نقطهٔ D نسبت به A و B است. به‌این دلیل، همچنین می‌گویند که دو نقطهٔ C و D مزدوج توافقی نسبت به A و B‌اند. نیز می‌گویند دو نقطهٔ C و D پاره‌خط AB را به‌توافق تقسیم می‌کنند.



MATH75.IR

حال می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر دو نقطهٔ C و D مزدوج توافقی نسبت به‌دو نقطهٔ A و B باشند برعکس دو نقطهٔ A و B مزدوج توافقی نسبت به C و D اند.

از رابطهٔ (۱) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=-\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

یا

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=-\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

رابطهٔ اخیرالذکر حکم را ثابت می‌کند.

از این پس وقتی می‌گوییم تقسیم (ABCD) توافقی است منظور آن است که همواره دو نقطهٔ آخر C و D مزدوج توافقی نسبت به A و B اند و یا دو نقطهٔ اول مزدوج توافقی نسبت به‌دو نقطهٔ آخراند.

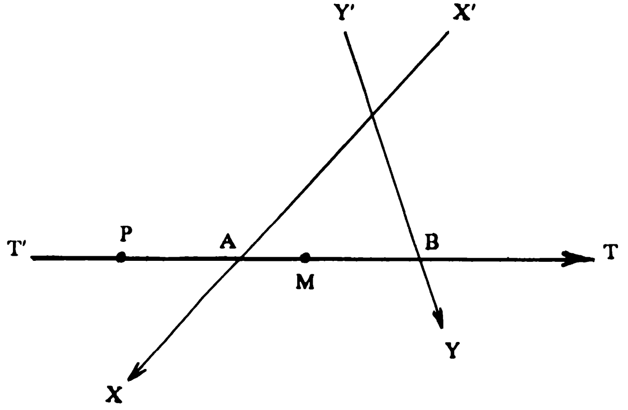
۲.۴۰.۲. قضیه. دو محور Ox و Oy و نقطهٔ P را در صفحهٔ آن دو محور در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P قاطعی رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دو خط Ox و Oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم. نقطهٔ M مزدوج توافقی نقطهٔ P را نسبت به‌دو نقطهٔ A و B تعیین می‌کنیم. مختصات دو نقطهٔ P و M را به‌ترتیب (x_1,y_1) و (x_2,y_2) می‌نامیم. ثابت کنید رابطهٔ زیر محقق است:

$$(1)\qquad x_1y_2+x_2y_1=0$$

و برعکس اگر رابطهٔ (۱) بین مختصات دو نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ و $N(x_2,y_2)$ برقرار باشد این‌دو نقطه مزدوج توافقی دونقطهٔ A و B‌اند که از برخورد خط PM با دو محور Ox و Oy به‌دست می‌آیند.

برهان. بر خط PA محور $t't$ را با جهت دلخواه انتخاب می‌کنیم، مختصات دو نقطهٔ P و M را به‌کمک (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$(2)\quad P\left|\begin{array}{l} x_1=\overline{AP}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{t't})\\ y_1=\overline{BP}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{t't})\end{array}\right.\qquad (3)\quad M\left|\begin{array}{l} x_2=\overline{AM}\sin(\overrightarrow{x'x},\overrightarrow{t't})\\ y_2=\overline{BM}\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{t't})\end{array}\right.$$



MATH75.IR

بنابه فرض چهار نقطهٔ A، B، M، و P تشکیل توافقی می‌دهند پس چنین داریم:

$$(۴)\quad \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}$$

از رابطهٔ (۴) با توجه به‌رابطه‌های (۲) و (۳) رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.

برعکس اگر رابطهٔ (۱) بین مختصات دو نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ و $M(x_2,y_2)$ برقرار باشد آنگاه این دو نقطهٔ مزدوج توافقی دو نقطهٔ A و B اند که از برخورد خط PM با دو خط Ox و Oy پدید می‌آیند. برای اثبات این مطلب می‌گوییم از رابطهٔ (۱) با توجه به‌رابطه‌های (۲) و (۳) رابطهٔ (۴) حاصل می‌شود پس چهار نقطهٔ A، B، P، و M تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

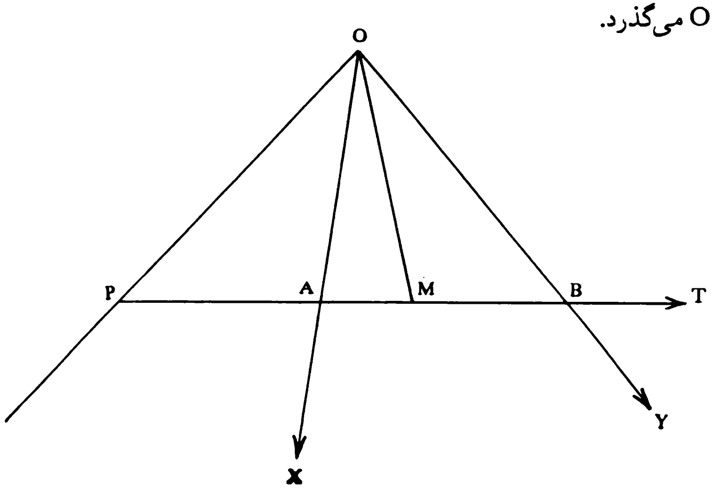
۲.۴۰.۳. *قطبی یک نقطه نسبت به‌یک زاویه (نسبت به‌دو خط).* قضیه. زاویهٔ xOy و نقطهٔ P را در صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P قاطعی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را با دو خط Ox و Oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم. نقطهٔ M مزدوج توافقی نقطهٔ P را نسبت به‌دو نقطهٔ A و B تعیین می‌کنیم. ثابت کنید هنگامی که قاطع PAB تغییر می‌کند ولی همواره از نقطهٔ P می‌گذرد مکان هندسی نقطهٔ M یک خط راست است که از نقطهٔ O می‌گذرد.

برهان. دو محور Ox و Oy را محورهای مختصات اختیار می‌کنیم. مختصات نقطهٔ ثابت P را (x_0,y_0) و مختصات نقطهٔ متغیر M را (x,y) می‌نامیم.

چون بنا به‌فرض چهار نقطهٔ A، B، M، و P تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند پس بنابر قضیه (۲.۴۰.۲) رابطهٔ زیر مسلم است:

$$(۱)\quad x_0y+y_0x=0$$

معادلهٔ (۱) نسبت به x و y از درجه اول است پس مکان هندسی نقطهٔ M خطی است راست که از نقطهٔ O می‌گذرد.



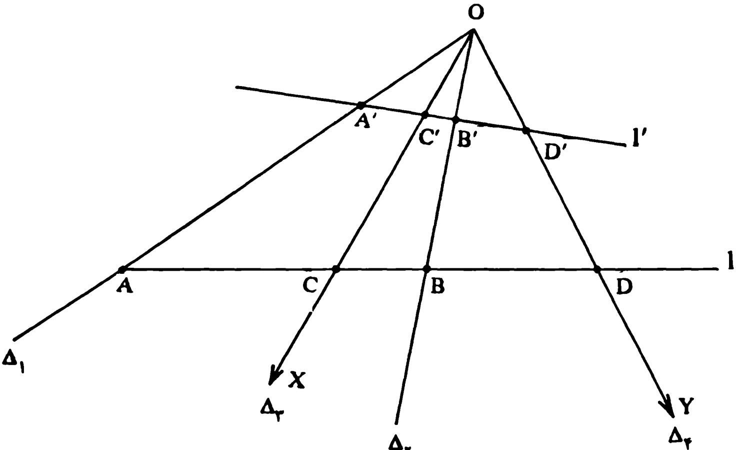
MATH75.IR

۲. ۴۰.۴. تعریف. خط OM را قطبی نقطهٔ P نسبت به‌زاویهٔ xOy (یا نسبت به‌دو خط Ox و Oy) می‌نامند و نقطهٔ P را قطب خط OM نامند.

تبصره. از رابطهٔ (۱) مذکور در قضیهٔ (۲. ۴۰.۳) نتیجه می‌شود که اگر خط OM قطبی نقطهٔ P نسبت به‌زاویهٔ xOy باشد برعکس خط OP قطبی نقطهٔ M نسبت به‌زاویهٔ xOy است.

۲. ۴۰.۵. دسته خط. مجموعه خطوطی که در یک صفحه جای دارند و همه از یک نقطه می‌گذرند دسته خط نامیده می‌شود. این خطوط را شعاعهای دسته و نقطهٔ مشترک را رأس دسته می‌نامند.

۲. ۴۰.۶. قضیه. یک دسته خط مرکب از چهار شعاع Δ_1، Δ_2، Δ_3، Δ_4 راکه بر نقطهٔ O می‌گذرند در نظر می‌گیریم. دو خط l و l′ خطوط دسته مذکور را به‌ترتیب در نقاط A، B، C، D و A′، B′، C′، D′ قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر چهار نقطهٔ A، B، C، و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند آنگاه چهارنقطهٔ A′، B′، C′، و D′ نیز تشکیل‌تقسیم توافقی خواهند داد.



برهان. دو محور Ox و Oy را منطبق بر دو شعاع Δ_3 و Δ_4 اختیار می‌کنیم. مختصات دو نقطهٔ A و B را به‌ترتیب (x_1,y_1) و (x_2,y_2) می‌نامیم. چون چهار نقطهٔ A، B، C، D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند پس بنابر قضیهٔ (۲. ۴۰.۳) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x_1y_2+x_2y_1=0 \quad (1)$$

مختصات نقاط A′ و B′ را به‌ترتیب (x'_1,y'_1) و (x'_2,y'_2) می‌نامیم. چون دو خط AA′ و BB′ از نقطهٔ O می‌گذرند پس روابط زیر مسلم است:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y'_1}{x'_1} \qquad \text{و} \qquad \frac{y_2}{x_2}=\frac{y'_2}{x'_2}$$

از دو رابطهٔ اخیرالذکر با توجه به‌رابطهٔ (۱) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

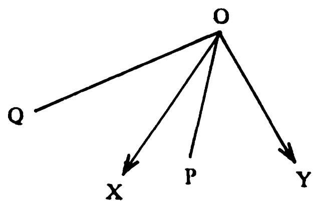
$$x'_1y'_2+x'_2y'_1=0 \quad (2)$$

MATH75.IR

پس بنابر قضیهٔ (۲.۴۰.۲) چهار نقطهٔ A'، B'، C'، D' تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۲.۴۰.۷. *دسته توافقی (یا دستگاه اشعه توافقی).* یک دسته متشکل از چهار خط به‌طوری که هر خط آن را در چهار نقطه که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند قطع کند یک دسته توافقی (یا دستگاه اشعه توافقی) نامیده می‌شود. وجود چنین دسته‌ای از قضیه (۲.۴۰.۶) نتیجه می‌شود. برای ساختن چنین دسته‌ای چهار نقطهٔ A، B، C، و D را که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند در نظر می‌گیریم و یک نقطهٔ دلخواه O را به‌آن چهار نقطه وصل می‌کنیم. در یک چنین دسته توافقی دو شعاع OC و OD را مزدوج توافقی نسبت به‌دو شعاع OA و OB می‌نامند و برعکس OA و OB را دو شعاع مزدوج نسبت به OC و OD می‌نامند. نیز می‌گویند OD مزدوج توافقی OC نسبت به دو شعاع OA و OB است.

۲.۴۰.۸. حکم. اگر دو خط OP و OQ نسبت به‌دو خط Ox و Oy مزدوج توافقی باشند و معادلهٔ خط OP در دستگاه مختصات دو محوری xy به‌صورت $ax+by=0$ باشد آنگاه معادلهٔ خط OQ به‌صورت $ax-by=0$ خواهد بود. برای اثبات، قضیهٔ شماره (۲.۴۰.۲) را به کار می‌بریم.



۲.۴۰.۹. *تقسیم غیرتوافقی.* بنا به‌تعریف نسبت غیرتوافقی چهار نقطهٔ A، B، C، و D واقع بر یک خط راست عبارت است از خارج قسمت نسبتهای فاصله‌های دو نقطهٔ دلخواه از این چهار نقطه از دو نقطهٔ دیگر. مانند خارج قسمتهای $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$، $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$، ...که آنها را با علامتهای (ABCD)، (ACDB)، ... مشخص می‌کنیم. نسبتهای مورد نظر اعداد جبری‌اند. منظور از $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ همان نسبت $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ و منظور از $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ همان نسبت $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$ است.

سه نقطهٔ A، B، C واقع بر محور $x'x$ و عدد جبری λ را در نظر می‌گیریم. روی محور $x'x$ یک نقطهٔ منحصر به‌فرد D یافته می‌شود به‌طوری که نسبت غیرتوافقی چهار نقطه A، B، C، و D برابر λ باشد زیرا رابطهٔ $\lambda = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ یا $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \; \frac{1}{\lambda} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ که طرف دوم آن کاملاً معین است فقط یک موضع برای نقطهٔ D مشخص می‌کند.

برای آنکه نقطهٔ D از سه نقطهٔ A، B، و C متمایز باشد لازم است که λ عددی محدود بجز ۰ و ۱ باشد. اگر $\lambda=0$ باشد از رابطهٔ قبل نتیجه می‌شود $DB=0$ و در نتیجه نقطهٔ D بر نقطهٔ B منطبق می‌شود. اگر $\lambda=1$ باشد آنگاه $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ و در نتیجه D بر C منطبق می‌شود.

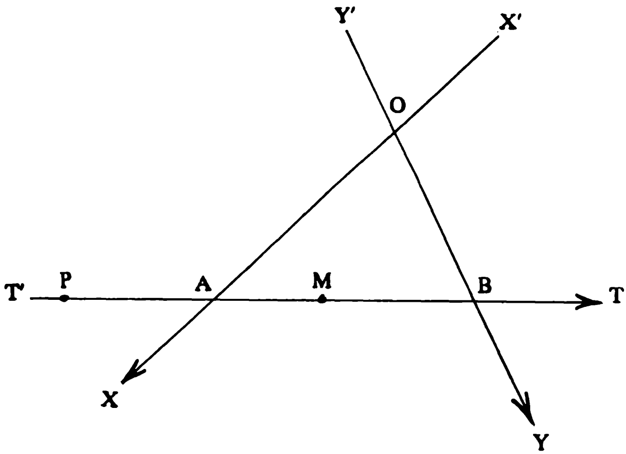
اگر λ به‌سوی بی‌نهایت میل کند آنگاه طول پاره‌خط DB به‌سوی صفر میل می‌کند و در نتیجه

نقطهٔ D به‌سوی A میل می‌کند. پس نسبت غیرتوافقی چهار نقطه متمایز می‌تواند یک عدد جبری محدود به‌جز ۰ و ۱ اختیار کند.

۲.۴۰.۱۰. قضیه. دو محور Ox و Oy و دو نقطهٔ $P(x_1 , y_1)$ و $M(x_2 , y_2)$ را در نظر می‌گیریم. نقاط تلاقی خط PM را با دو محور Ox و Oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم. ثابت کنید اگر نسبت غیرتوافقی (ABPM) برابر λ باشد آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2} = \lambda \qquad (۱)$$

برعکس چنانچه دو نقطهٔ $P(x_1 , y_1)$ و $M(x_2 , y_2)$ و عدد جبری λ مفروض باشند و نقاط A و B به‌ترتیب نقاط برخورد خط PM با دو محور Ox و Oy باشند اگر رابطهٔ (۱) بین مختصات دو نقطهٔ P و M برقرار باشد آنگاه نسبت غیرتوافقی (ABPM) برابر λ است.



برهان. بر خط PM محور $t't$ را با جهت دلخواه در نظر می‌گیریم. بنابر (۸.۱) چنین داریم:

$$(۲)\quad \begin{cases} x_1 = \overline{AP} \sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{t't}) \\ y_1 = \overline{BP} \sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{t't}) \end{cases} \qquad (۳)\quad \begin{cases} x_2 = \overline{AM} \sin(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{t't}) \\ y_2 = \overline{BM} \sin(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{t't}) \end{cases}$$

چون بنا به‌فرض نسبت غیرتوافقی (ABPM) برابر λ است پس می‌نویسیم

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} : \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda \qquad (۴)$$

از رابطهٔ (۴) با توجه به‌رابطه‌های (۲) و (۳) رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود. برعکس اگر بین مختصات نقاط P، M رابطهٔ (۱) برقرار باشد، از رابطهٔ (۱) با توجه به‌رابطه‌های (۲) و (۳) رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آید و نتیجه می‌شود: $(ABPM)=\lambda$.

MATH75.IR

۲.۴۰.۱۱. قضیه. زاویهٔ xOy و نقطهٔ P و عدد جبری λ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P قاطعی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن را با دو خط Ox و Oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم. بر خط PAB نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت غیرتوافقی (ABPM) برابر λ باشد. ثابت کنید هنگامی که خط PAB تغییر می‌کند ولی همواره بر نقطهٔ ثابت P می‌گذرد مکان هندسی نقطهٔ M یک خط راست است که از نقطهٔ O می‌گذرد.

برهان. دو محور Ox و Oy را محورهای مختصات اختیار می‌کنیم. مختصات نقطهٔ ثابت P را (x_0,y_0) و مختصات نقطهٔ متغیر M را (x,y) می‌نامیم. چون $(ABPM)=\lambda$ پس بنابر قضیهٔ (۲.۴۰.۱۰) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(1)\qquad \frac{x_0}{y_0} : \frac{x}{y} = \lambda$$

معادلهٔ (۱) نسبت به x و y از درجه اول است پس مکان هندسی نقطهٔ M خطی است راست.

۲.۴۰.۱۲. قضیه. یک دسته خط مرکب از چهار شعاع Δ_1، Δ_2، Δ_3، Δ_4 راکه بر نقطهٔ O می‌گذرند در نظر می‌گیریم. دو خط l و l′ خطوط دسته مذکور را به‌ترتیب در نقاط A، B، C، D و A′، B′، C′، D′ قطع می‌کنند. ثابت کنید نسبت غیرتوافقی (ABCD) با نسبت غیرتوافقی (A′B′C′D′) برابر است.

برهان. همان شکل مربوط به‌قضیهٔ (۲.۴۰.۶) را در نظر می‌گیریم. مختصات نقاط A، B، A′، B′، را به‌ترتیب (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، (x'_1,y'_1)، (x'_2,y'_2) می‌نامیم. نسبت غیرتوافقی (ABCD) را λ می‌نامیم، یعنی

$$(1)\qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \lambda$$

ثابت می‌کنیم که

$$(2)\qquad \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \lambda$$

بنابر قضیه (۲.۴۰.۱۰) از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$(3)\qquad \frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2} = \lambda$$

چون دو خط AA′ و BB′ از نقطهٔ O می‌گذرند پس چنین داریم:

$$\frac{x'_1}{y'_1} = \frac{x_1}{y_1} \qquad \text{و} \qquad \frac{x'_2}{y'_2} = \frac{x_2}{y_2}$$

از دو رابطهٔ اخیرالذکر و رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود:

$$(4)\qquad \frac{x'_1}{y'_1} : \frac{x'_2}{y'_2} = \lambda$$

از رابطهٔ (۴)، بنابر قضیهٔ (۲.۴۰.۱۰) نتیجه می‌شود که نسبت غیرتوافقی (A′B′C′D′) برابر λ است یعنی رابطهٔ (۲) محقق است.

MATH75.IR

۳

نمودارهای معادله‌های درجه دوم

۱.۳. درجه معادله مقطعهای مخروطی در دستگاه مختصات چندمحوری

۱.۱.۳. منحنیهای درجه دوم (*مقطعهای مخروطی*)، نمودارهای هر معادله به‌شکل

$$AX^{۲}+BXY+CY^{۲}+DX+EY+F=\circ \quad (۱)$$

می‌باشند. در این معادله X و Y مختصات دکارتی یک نقطه از مقطع مخروطی و A، B، C، D، E، F ضرایب‌اند. در معادلهٔ مقطع مخروطی شش پارامتر متجانس و پنج پارامتر مطلق وجود دارد (رجوع کنید به ۵.۳.۸).

۲.۱.۳. درجه معادله مقاطع مخروطی در دستگاه مختصات چندمحوری. می‌خواهیم ثابت کنیم که در دستگاه مختصات n محوری $x_{۱}x_{۲}...x_n$ معادله مقطع مخروطی برحسب مختصات $x_{۱}$، $x_{۲}$، ... و x_n از درجه دو است. در صفحهٔ P، دستگاه مختصات n محوری $x_{۱}x_{۲}...x_n$ و دستگاه مختصات دکارتی XY و مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. معادلهٔ مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات n محوری به‌ترتیب به‌صورتهای زیر فرض می‌کنیم.

$$f(X,Y)=\circ \quad (۲)$$

$$g(x_{۱}, x_{۲}, ..., x_i, ..., x_n)=\circ \quad (۳)$$

نقطهٔ دلخواه $M_{\circ}$ را در نظر گرفته و مختصات آن را در دستگاه مختصات دکارتی، $(X_{\circ}, Y_{\circ})$ و در دستگاه مختصات n محوری $(x_{۱\circ}, x_{۲\circ}, ..., x_{i\circ}, ..., x_{n\circ})$ می‌نامیم. معادلهٔ خط $x'_i x_i$ را در دستگاه مختصات دکارتی، از حیث علامتهای ضرایب به‌صورتی چون

MATH75.IR

$$(۴) \qquad p_iX+q_iY+r_i=0 \qquad\qquad i\in \{1, 2, \dots, n\}$$

می‌نویسیم به‌طوری که رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$(۵) \qquad x_{i0}=\frac{p_iX_0+q_iY_0+r_i}{\sqrt{p_i^2+q_i^2}}$$

برای اثبات امکان این مطلب، دو حکم زیر را به‌کار می‌گیریم:

الف. فاصلهٔ نقطهٔ M_0 از خط L به‌معادلهٔ $AX+BY+C=0$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$d=\frac{AX_0+BY_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ب. علامت عبارت جبری $AX+BY+C$ به‌ازای مختصات نقاط واقع در هر یک از دو طرف خط به‌معادلهٔ $AX+BY+C=0$ ثابت‌است. علامتهای عبارت مذکور، به‌ازای مختصات دونقطه واقع در دوطرف خط L مخالف‌یکدیگرند. از دو حکم الف و ب نتیجه می‌شود که علامتهای ضرایب معادلهٔ خط x'_ix_i را می‌توان طوری انتخاب کرد که فاصلهٔ جبری نقطهٔ M_0 از محور x'_ix_i مساوی مقدار عبارت $(AX_0+BY_0+C)/\sqrt{A^2+B^2}$ باشد.

با رعایت رابطه‌های (۵)، معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(۶) \qquad g\left(\frac{p_1X+q_1Y+r_1}{\sqrt{p_1^2+q_1^2}}, \frac{p_2X+q_2Y+r_2}{\sqrt{p_2^2+q_2^2}}, \dots, \frac{p_nX+q_nY+r_n}{\sqrt{p_n^2+q_n^2}}\right)=0$$

معادلهٔ (۶)، معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات دکارتی است. (معادلهٔ (۶) همان معادلهٔ (۲) است.) لذا این معادله برحسب مختصات (X, Y) از درجه دو است. چون عبارت سمت راست دستور (۵) برحسب مختصات دکارتی از درجه اول است پس معادلهٔ (۳) برحسب مختصات x_1، x_2، ... ، و x_n از درجه دو می‌باشد.

۳.۱.۳. *منحنی از درجه p*. با همین شیوه استدلال ثابت می‌کنیم که اگر یک منحنی در دستگاه مختصات دکارتی XY از درجه p باشد آن منحنی در دستگاه مختصات چند محوری $x_1x_2 \dots x_n$ از درجه p می‌باشد.

۲.۳. قضیهٔ فیثاغورس

معادلهٔ مقطع مخروطی، معادله‌ای است از درجه دوم و این بدان‌جهت است که در نوشتن

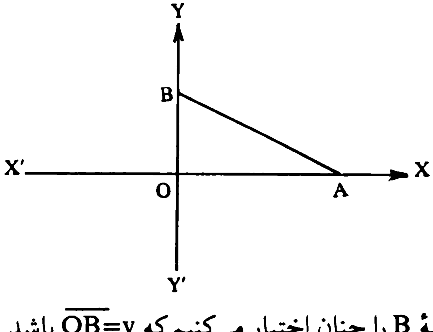
MATH75.IR

معادله مقطع مخروطی، قضیهٔ فیثاغورس به‌کار گرفته می‌شود. از این جهت پیش از آنکه معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگاه مختصات چندمحوری بیابیم، به‌اثبات قضیهٔ فیثاغورس می‌پردازیم.

در اثباتی که در سطور زیر برای قضیهٔ فیثاغورس عرضه خواهیم کرد از نکته‌های جبری بهره خواهیم گرفت.

قضیهٔ فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر مساوی است با مجموع مربعهای طولهای دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه.

برهان. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ را که دارای مبدأ مشترک O می‌باشند در نظر می‌گیریم.[1] نقاط A و B را به‌ترتیب بر دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ اختیار می‌کنیم. اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OA}$ را روی محور $x'Ox$ با x، و اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OB}$ را روی محور $y'Oy$ با y نشان می‌دهیم. همچنین اندازهٔ طول پاره‌خط AB را z می‌نامیم. اکنون مسئلهٔ ساختمانی زیر را مطرح می‌کنیم.



از مثلث قائم‌الزاویه OAB، طول وتر و اندازهٔ جبری یکی از اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه معلوم است، آن مثلث را بسازید.

مثلث قائم‌الزاویه مطلوب به‌آسانی ساخته می‌شود و برای اندازهٔ جبری ضلع مجهول دو مقدار مساوی و مختلف‌العلامت به‌دست می‌آید (مثلاً اگر z، طول وتر AB و y، اندازهٔ جبری ضلع OB معلوم باشند، بر محور $y'y$ نقطهٔ B را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{OB}=y$ باشد. سپس دایره‌ای به‌مرکز B و با شعاع z رسم می‌کنیم. این دایره محور $x'x$ را در دو نقطهٔ A و A' که نسبت به O قرینه‌اند قطع می‌کند).

از این مسئله ساختمانی نتیجه می‌شود که اولاً بین طولهای سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ای وجود دارد و ثانیاً این رابطه آنچنان است که به‌ازای دو مقدار معلوم z و y (یا z , x)، دو مقدار مساوی و مختلف‌العلامت برای x (یا y) به‌دست می‌دهد. یکی از روابطی که می‌تواند واجد شرطهای یادشده باشد چنین است:

$$ax^{2}+by^{2}=f(z) \qquad (1)$$

در رابطهٔ (۱)، a و b دو عدد ثابت‌اند و f(z) تابعی از z است.

چون رابطهٔ (۱) باید همگن باشد پس:

۱ـ این دو محور هیچ ارتباطی با دستگاه مختصات دکارتی ندارند.

MATH75.IR

$$(۲) \quad ax^2+by^2=cz^2$$

در رابطهٔ (۲)، c عددی است ثابت.

اکنون ثابت می‌کنیم که در رابطهٔ (۲)، ضرایب a، b، و c مساوی‌اند.

در مثلث قائم‌الزاویه OAB دو رأس O و A را در جای خود ثابت نگاه می‌داریم و رأس B را به‌سوی رأس O میل می‌دهیم. نتیجه می‌شود که وقتی y به‌سوی صفر میل کند، z به‌سوی $|x|$ میل می‌کند. بنابراین در رابطهٔ (۲) باید داشته باشیم:

$$(۳) \quad a=c$$

اگر در مثلث قائم‌الزاویه OAB، دو رأس O و B را در جای خود ثابت نگاه داریم و رأس A را به‌سوی رأس O میل می‌دهیم نتیجه می‌شود که وقتی x به‌سوی صفر میل می‌کند، z به‌سوی $|y|$ میل می‌کند. بنابراین در رابطهٔ (۲)، باید داشته باشیم:

$$(۴) \quad a=b$$

رابطهٔ (۲)، با رعایت رابطه‌های (۳) و (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۵) \quad x^2+y^2=z^2$$

و یا

$$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$$

اکنون ثابت می‌کنیم جز رابطهٔ (۵)، رابطهٔ دیگری بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وجود ندارد. چه اگر جز رابطهٔ (۵) رابطهٔ دیگری مانند $g(x,y,z)=0$ بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وجود داشته باشد، از حذف یکی از متغیرها بین رابطهٔ اخیر و رابطهٔ (۵)، رابطه‌ای بین دو متغیر به‌دست می‌آید و این قابل قبول نیست زیرا بین طولهای دوضلع مثلث قائم‌الزاویه هیچ رابطه‌ای وجود ندارد (به‌طور کلی بین طولهای دو ضلع یک مثلث هیچ رابطه‌ای وجود ندارد). پس تنها رابطه‌ای که بین طولهای اضلاع مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد همان رابطهٔ (۵) است.

۳.۳. معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات چندمحوری

در سطور آینده، معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگاه مختصات دو محوری، سه‌محوری و چهارمحوری خواهیم نوشت.

۱.۳.۳. *معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات دومحوری.* دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 متقاطع در نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. مختصات نقطهٔ دلخواه M را در دستگاه مختصات دومحوری x_1x_2 با (x_1 , x_2) نشان می‌دهیم. حال دستگاه مختصات مایل دکارتی متشکل از دومحور X'_1OX_1 و X'_2OX_2 را که محورهای آن به‌ترتیب منطبق بر دو محور x'_1x_1 و x'_2x_2 می‌باشند در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M خط MP_1 را موازی با خط OX_2 رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با خط OX_2، نقطهٔ P_1 می‌نامیم. همچنین از نقطهٔ M خط MP_2 را موازی با خط

OX_1 رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با خط OX_2، نقطهٔ P_2 نام می‌نهیم. اگر مختصات نقطهٔ M را در دستگاه مختصات مایل دکارتی X_1X_2 با (X_1 , X_2) نشان دهیم چنین داریم:

$$\begin{cases} X_1 = \overline{OP}_1 \\ X_2 = \overline{OP}_2 \end{cases}$$

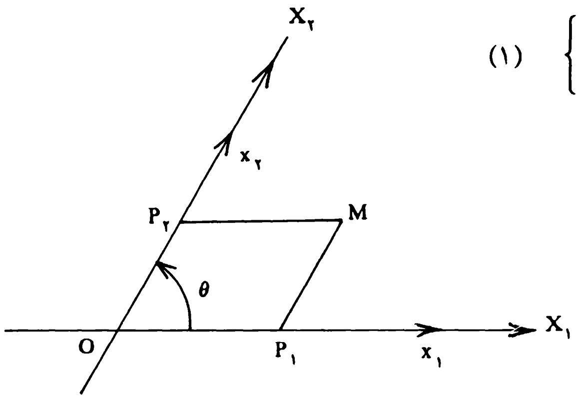
چون دو خط Ox_1 و P_2M موازی‌اند پس فواصل جبری دو نقطهٔ M و P_2 از محور Ox_1 یکسان است. بنابر مطلب شماره (۸.۱) چنین می‌نویسیم:

Ox_1 فاصلهٔ جبری نقطه P_2 از محور $= \overline{OP}_2 \,.\, \sin(\overrightarrow{Ox_1}$ و $\overrightarrow{Ox_2}) = X_2 \sin\theta$

θ اندازهٔ زاویهٔ $(\overrightarrow{Ox_1}$ و $\overrightarrow{Ox_2})$ است. با همین شیوه استدلال می‌نویسیم:

Ox_2 فاصلهٔ جبری نقطه P_1 از محور $= \overline{OP}_1 \,.\, \sin(\overrightarrow{Ox_2}$ و $\overrightarrow{Ox_1}) = -X_1 \sin\theta$

و چون $\overline{P_1M} = X_2$ و $\overline{P_2M} = X_1$ پس



$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = X_2 \sin\theta \\ x_2 = -X_1 \sin\theta \end{cases}$$

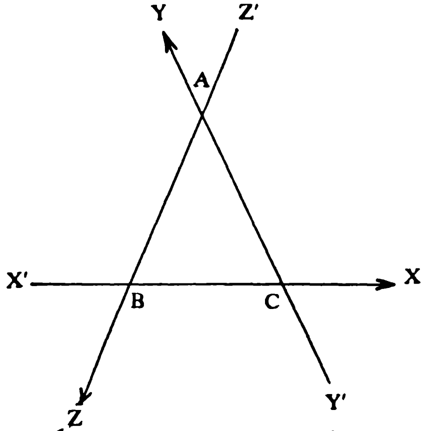
اگر $f(x_1 , x_2) = 0$ معادله یک مقطع مخروطی (یا به‌طور کلی معادله یک شکل هندسی)، در دستگاه مختصات دکارتی X_1X_2 باشد، معادلهٔ آن در دستگاه مختصات دومحوری x_1x_2 با توجه به‌روابط (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(2) \quad f\left(-\frac{x_2}{\sin\theta} \text{ و } \frac{x_1}{\sin\theta}\right) = 0$$

در حالت خاص که $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد معادله (۲) به‌صورت $f(-x_2 , x_1)$ نوشته می‌شود.

۲.۳.۳. معادلهٔ مقطع‌مخروطی در یک دستگاه مختصات سه‌محوری. دستگاه مختصات سه‌محوری xyz را در نظر می‌گیریم. نقاط A، B، و C را به‌ترتیب نقاط برخورد خطهای $(z'z , y'y)$، $(x'x , z'z)$، و $(y'y , x'x)$ فرض می‌کنیم.

MATH75.IR



بنابر مطلب شماره ۲.۱.۳ معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات سه‌محوری xyz معادله‌ای است از درجه دوم برحسب x، y، و z و لذا به‌صورت زیر است:

$$f(x,y,z)=ax^{۲}+by^{۲}+cz^{۲}+dxy+eyz+fzx+gx+hy+kz+l=۰ \qquad (۱)$$

در معادلهٔ (۱)، x، y، و z متغیراند و a، b، ... ، و l ضرایب‌اند.

اکنون معادلهٔ مقطعهای مخروطی را که بر سه نقطه A، B، و C می‌گذرند جست‌وجو می‌کنیم. می‌گوییم مختصات هر یک از سه نقطهٔ A، B، و C باید در معادلهٔ (۱) صدق کنند.

برای نقطهٔ A داریم: ۰=y و ۰=z. اگر در (۱) به‌جای y و z صفر بگذاریم حاصل می‌شود:

$$ax^{۲}+gx+l=۰ \qquad (۲)$$

xی که در رابطهٔ (۲) حضور دارد عبارت است از x هر نقطه از مقطع مخروطی به‌معادلهٔ (۱). بنابراین ضرایب معادلهٔ (۲) باید صفر باشند:

$$a=g=l=۰ \qquad (۲)'$$

مختصات نقطه‌های B و C نیز باید در معادلهٔ (۱) صدق کنند لذا داریم:

$$by^{۲}+hy+l=۰ \qquad (۳)$$

$$cz^{۲}+kz+l=۰ \qquad (۴)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) حاصل می‌شود:

$$b=h=l=۰ \qquad (۳)'$$

$$c=k=l=۰ \qquad (۴)'$$

معادله (۱) با رعایت رابطه‌های ′(۲)، ′(۳)، و ′(۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$dxy+eyz+fzx=۰ \qquad (۵)$$

مختصر آنکه معادله یک مقطع مخروطی که از نقاط برخورد سه محور x′x، y′y، و z′z می‌گذرد به‌صورت

$$Axy+Byz+Czx=۰ \qquad (۶)$$

است که در آن x، y، و z مختصات یک نقطهٔ دلخواه مقطع مخروطی و A، B، و C

ضرایب‌اند.

معادلهٔ مقطع مخروطی سوده. اگر از مقطع مخروطی، سه نقطهٔ A، B، و C را حذف کنیم شکلی حاصل می‌شود که آن را مقطع مخروطی سوده در نقاط A، B، و C می‌نامیم. معادلهٔ این مقطع مخروطی سوده چنین است:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}=0 \qquad (۷)$$

مقطع مخروطی تبهگن. اگر یکی از ضرایب معادله (۶)، مثلاً C مساوی صفر باشد آنگاه معادلهٔ مقطع مخروطی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Axy+Byz=0$$

در این حالت مقطع مخروطی به‌دو خط $y=0$ و $Ax+Bz=0$ تجزیه می‌شود.

اگر در معادلهٔ (۶)، دو ضریب مثلاً B و C صفر باشند، مقطع مخروطی به‌دو خط $x=0$ و $y=0$ تجزیه می‌شود.

تعداد پارامترهای مقطع مخروطی. معادلهٔ (۶)، به سه پارامتر متجانس بستگی دارد در حالی که مقطع مخروطی به‌شش پارامتر متجانس بستگی دارد (رجوع کنید به‌فصل ضمیمه‌ها. مطلب شماره ۵.۳.۸) و این بدان‌جهت است که مقطع مخروطی مورد بحث از سه نقطهٔ معلوم A، B، و C می‌گذرد. هر یک از این نقاط، یک شرط برای تعیین مقطع مخروطی است.

۳.۳.۳. معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات چهارمحوری. دستگاه مختصات چهارمحوری xyzt را در نظر می‌گیریم. نقاط A، B، C، و D را به‌ترتیب نقاط برخورد محورهای $(t't, x'x)$، $(x'x, y'y)$، $(y'y, z'z)$، و $(z'z, t't)$ فرض می‌کنیم. بنابر حکم شماره ۲.۱.۳، معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات چهارمحوری xyzt به‌صورت زیر است:

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2+exy+fxz+gxt+hyz+kyt+lzt+ \qquad (۱)$$
$$mx+ny+pz+qt+r=0$$

در این معادله x، y، z، و t مختصات یک نقطه از مقطع مخروطی‌اند و a، b، ...، و r ضرایب‌اند.

حال در بین مقطعهای مخروطی (۱)، آنهایی را که بر چهار نقطهٔ A، B، C، و D می‌گذرند می‌جوییم.

می‌گوییم مقطعهای مخروطی مطلوب باید از نقطهٔ A بگذرند و از طرفی برای نقطهٔ A داریم: $x=0$ و $t=0$. پس عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱) باید به‌ازای $x=0$ و $t=0$ صفر شود لذا باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$by^2+cz^2+hyz+ny+pz+r=0 \qquad (۲)$$

MATH75.IR

y و z ی که در معادلهٔ (۲) حضور دارند عبارت‌اند از y و z هر نقطه از مقطع مخروطی به‌معادلهٔ (۱). بنابراین در معادلهٔ (۲)، ضرایب مساوی صفراند:

$$(۲)' \quad b=c=h=n=p=r=0$$

همچنین چون مقطعهای مخروطی مطلوب باید از نقطهٔ B بگذرند و برای نقطهٔ B داریم $x=0$ و $y=0$، پس عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱) باید به‌ازای $x=0$ و $y=0$ مساوی صفر شود لذا باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(۳) \quad cz^2+dt^2+lzt+pz+qt+r=0$$

نتیجه می‌شود:

$$(۳)' \quad c=d=l=p=q=r=0$$

اگر همین شیوه استدلال را دربارهٔ مختصات نقاط C و D به‌کار بریم دو رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$(۴) \quad ax^2+dt^2+gxt+mx+qt+r=0$$

$$(۵) \quad ax^2+by^2+exy+mx+ny+r=0$$

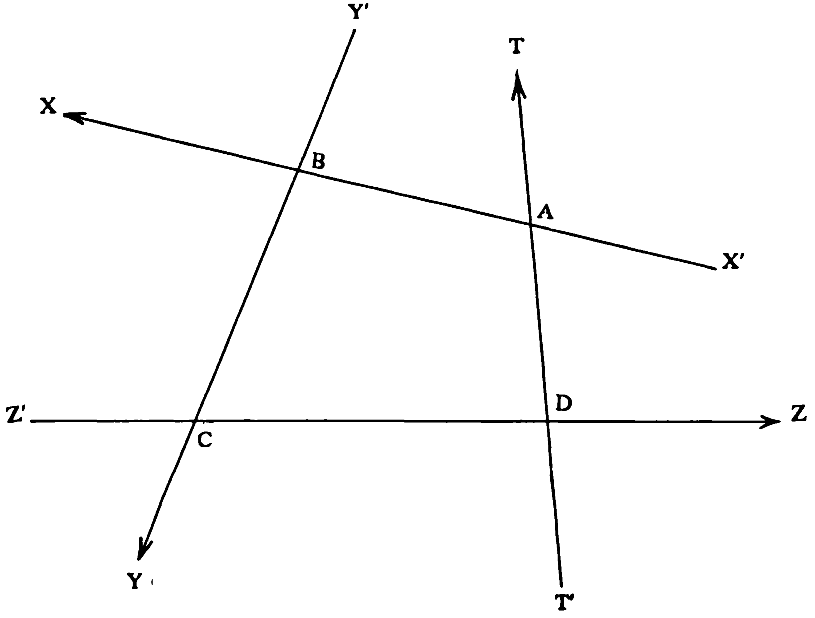
از دو رابطهٔ (۴) و (۵) به‌ترتیب تساویهای زیر حاصل می‌شود:

$$(۴)' \quad a=d=g=m=q=r=0$$

$$(۵)' \quad a=b=e=m=n=r=0$$

معادلهٔ (۱) با رعایت تساویهای $'$(۲)، $'$(۳)، $'$(۴)، و $'$(۵) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۶) \quad fxz+kyt=0$$

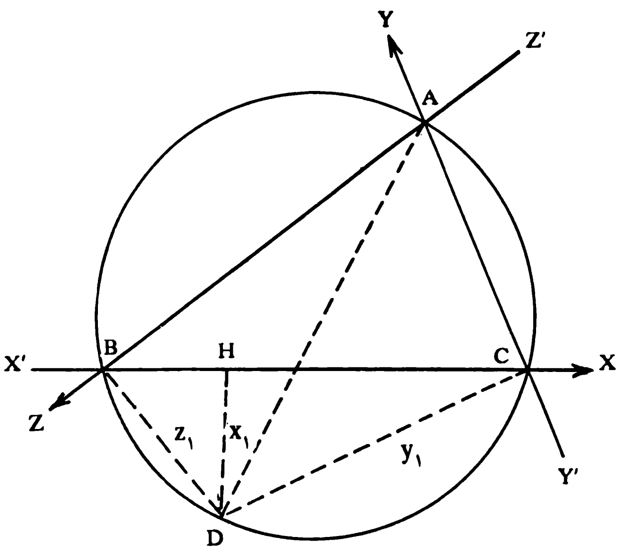


۴.۳.۳. معادلهٔ دایره

۴.۳.۳.الف. معادلهٔ دایره در دستگاه مختصات سه‌محوری. دستگاه مختصات سه‌محوری xyz را در نظر می‌گیریم. نقاط A ، B، و C را به‌ترتیب نقاط برخورد محورهای (y'y و z'z) ، (z'z و x'x) ، و (x'x و y'y) می‌نامیم. می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای راکه بر سه نقطهٔ A ، B، و C می‌گذرد بنویسیم. بنابر مطلب شماره ۲.۳.۳ ، معادلهٔ یک مقطع مخروطی که بر نقاط برخورد محورها می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$pxy+qyz+rzx=0 \qquad (1)$$

در این معادله x، y، و z مختصات یک نقطه از مقطع مخروطی‌اند و p، q و r ضرایب‌اند.



قطر AD را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ D عمود DH را برخط BC فرود می‌آوریم. سه نقطه H، C، و B به‌ترتیب تصویرهای نقطهٔ D بر خطهای BC، CA، و AB می‌باشند.

اگر مختصات نقطهٔ D را (x_1 , y_1 , z_1) و اندازه‌های جبری سطحهای سه مثلث DCH، DHB، و DBC را با S_1، S_2، و S_3 نشان دهیم، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$S_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 \sin C$$

$$S_2 = \frac{1}{2} x_1 z_1 \sin B$$

$$S_3 = \frac{1}{2} z_1 y_1 \sin A$$

از سه رابطهٔ بالا و رابطهٔ مسلم زیر (رجوع شود به‌حکم ۱۱.۱)

MATH75.IR

$$S_1+S_2+S_3=0$$

نتیجه می‌شود که

$$(2)\qquad \frac{1}{2}x_1y_1\sin C+\frac{1}{2}y_1z_1\sin A+\frac{1}{2}z_1x_1\sin B=0$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) حاصل می‌شود:

$$p=\sin C \quad , \quad q=\sin A \quad , \quad r=\sin B$$

و لذا معادلهٔ دایره به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(3)\qquad xy\sin C+yz\sin A+zx\sin B=0$$

اگر طولهای اضلاع مثلث ABC را a، b، و c بنامیم معادلهٔ دایره با توجه به‌قانون سینوسها:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(3)'\qquad cxy+ayz+bzx=0$$

معادله دایره سوده. اگر از دایره محیطی مثلث ABC، سه رأس A، B، و C را حذف کنیم شکلی حاصل می‌شود که آن را دایرهٔ سوده در نقاط A، B، و C می‌نامیم. از معادلهٔ (۳)، معادلهٔ دایره سوده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(4)\qquad \frac{\sin A}{x}+\frac{\sin B}{y}+\frac{\sin C}{z}=0$$

و یا

$$(4)'\qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$$

۴.۳.۳. ب. *معادلهٔ دایره در دستگاه مختصات چهارمحوری.* در صفحهٔ P دستگاه مختصات چهارمحوری xyzt را در نظر می‌گیریم. نقاط برخورد محورهای $(x'x\,,\,t't)$، $(y'y,x'x)$، $(z'z,y'y)$، و $(t't\,,z'z)$ را به‌ترتیب A، B، C، و D می‌نامیم (شکلهای الف و ب) و فرض می‌کنیم که این چهارنقطه بر محیط یک دایره واقع باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که معادلهٔ دایره محیط بر چهارضلعی ABCD به‌صورت زیر است:

$$(1)\qquad xz+\varepsilon yt=0 \quad \text{و} \quad \varepsilon\in\{-1\,,\,+1\}$$

$\varepsilon=+1$، اگر چهار نقطهٔ A، B، C، و D رأسهای یک چهارضلعی محدب باشند (شکل الف)

$\varepsilon=-1$، اگر چهار نقطهٔ A، B، C، و D رأسهای یک چهارضلعی پنجره‌ای باشند (شکل ب)

برهان. معادلهٔ یک مقطع مخروطی که بر چهار نقطهٔ A، B، C، و D می‌گذرد بنابر مطلب شماره ۳.۳.۳ به‌صورت زیر است:

$$pxz+qyt=0 \qquad (۲)$$

در این معادله x، y، z، و t متغیراند و p و q ضرایب‌اند.

چهارنقطه در وضعیت عمومی بر محیط یک دایره قرار ندارند. در زیر شرطی برای آنکه چهار نقطه بر محیط یک دایره قرار داشته باشند عرضه می‌کنیم:

(I). اگر در یک چهارضلعی محدب ABCD، نقطهٔ M محل برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی یک رأس (مثلاً A) با نیمساز زاویهٔ خارجی رأس مقابل (یعنی C) باشد. یک شرط لازم و کافی[1] برای آنکه چهارضلعی مفروض محاطی باشد آن است که پاره‌خطی که نقطهٔ M را به‌یکی از دو رأس مقابل دیگر (یعنی B یا D) وصل می‌کند از دو رأس مقابل اول (یعنی A و C) تحت یک زاویه یا تحت دو زاویهٔ مکمل دیده شود (اثبات بی‌درنگ انجام می‌گیرد).

اگر مختصات نقطهٔ M را (x_1,y_1,z_1,t_1) بنامیم بنابر شرط اخیرالذکر دربارهٔ چهارضلعی محدب محاطی، چنین داریم:

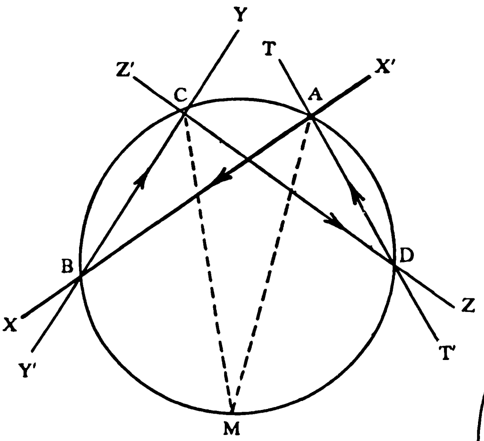
$$\begin{cases} x_1= t_1 \\ y_1= -z_1 \end{cases} \qquad (۳)$$

(II). اگر در یک چهارضلعی پنجره‌ای ABCD، نقطهٔ M محل برخورد نیمسازهای دو زاویه داخلی مقابل (مثلاً A و C) باشد یک شرط لازم و کافی برای آنکه چهار رأس این چهار ضلعی بر محیط یک دایره قرار داشته باشد آن است که پاره‌خطی که نقطهٔ M را به‌یکی از دو رأس مقابل دیگر (یعنی B یا D) وصل می‌کند، از دو رأس مقابل اول (یعنی A و C) تحت یک زاویه دیده شود (اثبات بی‌درنگ انجام می‌گیرد).

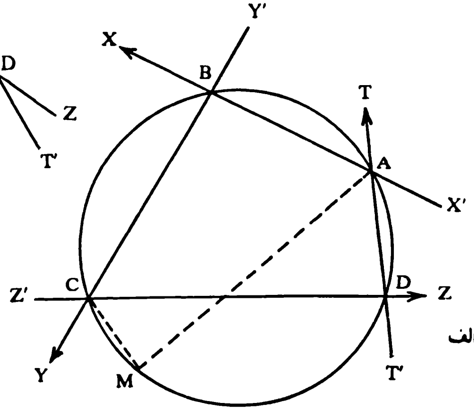
اگر مختصات نقطهٔ M را (x_1,y_1,z_1,t_1) بنامیم، بنابر شرط اخیرالذکر درباره چهارضلعی پنجره‌ای محاطی، چنین داریم:

$$\begin{cases} x_1= t_1 \\ y_1= z_1 \end{cases} \qquad (۴)$$

MATH75.IR



ب



الف

$(I)'$. حال می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای را که بر رأسهای چهارضلعی محدب محاطی ABCD می‌گذرد بنویسیم. می‌گوییم برای آنکه چهارضلعی ABCD محاطی باشد لازم و کافی است شرطهای (۳) برقرار باشند. برای‌آنکه مقطع مخروطی به‌معادلهٔ (۲)، دایره مطلوب باشد باید مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۲) صدق کنند و به‌علاوه شرطهای (۳) برقرار باشند. برای آنکه مقطع مخروطی به‌معادلهٔ (۲) بر نقطهٔ M بگذرد باید

$$(۵)\qquad px_1z_1+qy_1t_1=0$$

از این معادله با رعایت شرطهای (۳) نتیجه می‌شود:

$$p=q$$

بنابراین معادلهٔ دایره مطلوب به‌صورت زیر است:

$$(۶)\qquad xz+yt=0$$

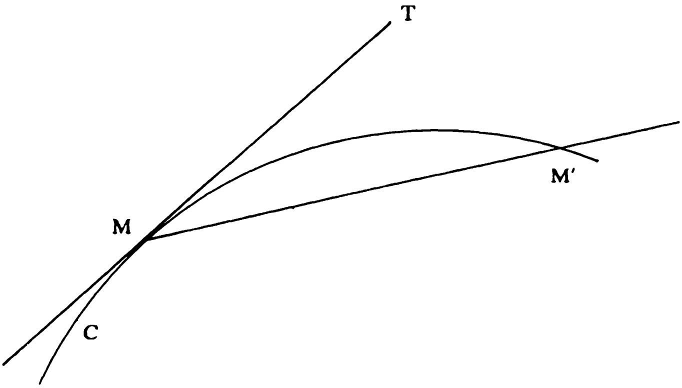
$(II)'$. برای یافتن معادلهٔ دایره‌ای که بر رأسهای چهارضلعی پنجره‌ای محاطی ABCD می‌گذرد همان شیوهٔ استدلالی را که در $(I)'$ به‌کار بردیم، با توجه به‌شرطهای (۴)، به‌کار می‌بریم، معادلهٔ دایره مطلوب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(۷)\qquad xz-yt=0$$

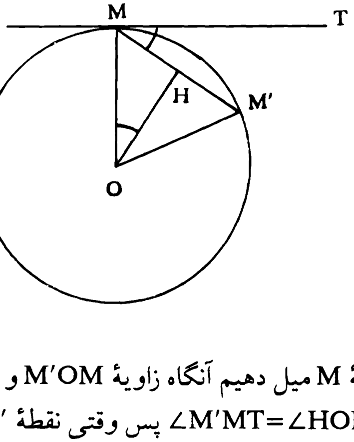
دو معادلهٔ (۶) و (۷) به‌صورت مختصر، به‌شکل (۱) نوشته می‌شوند.

۴.۳. معادلهٔ خط مماس بر منحنیهای درجه دوم

۱.۴.۳. *تعریف خط مماس بر یک منحنی.* بر منحنی C، نقطهٔ ثابت M را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ متحرک 'M را روی منحنی C اختیار می‌کنیم و آن را روی منحنی C بی‌نهایت به‌نقطهٔ M نزدیک می‌کنیم. با حرکت نقطهٔ 'M، خط 'MM گرد نقطهٔ ثابت M می‌چرخد. اگر خطی چون MT وجود داشته باشد به‌طوری که وقتی نقطهٔ 'M روی منحنی C، بی‌نهایت به‌نقطهٔ M نزدیک شود آنگاه زاویهٔ M'MT بی‌نهایت به‌صفر نزدیک شود در این صورت خط MT را مماس بر منحنی C در نقطهٔ دلخواه M می‌نامند.



۲.۴.۳. *مثال.* از نقطهٔ M واقع بر محیط دایره (O) خط MT را به‌شعاع OM عمود می‌کنیم. ثابت کنید خط MT بر دایره (O) مماس است.



برهان. نقطهٔ 'M را بر محیط دایره (O) اختیار می‌کنیم. نقطهٔ وسط وتر 'MM را H می‌نامیم. خط OH بر وتر MM'T عمود است و زاویهٔ 'MOM را نصف می‌کند. دو زاویهٔ HOM و M'MT با هم برابرانـد زیرا هر دوم متمم زاویهٔ HMO می‌باشند.

اگر نقطهٔ 'M را بر محیط دایرهٔ (O) به‌سوی نقطهٔ M میل دهیم آنگاه زاویهٔ M'OM و در نتیجه زاویهٔ HOM به‌سوی صفر میل می‌کند چون $\angle M'MT = \angle HOM$ پس وقتی نقطهٔ 'M روی محیط دایره به‌سوی نقطهٔ M میل کند آنگاه زاویهٔ M'MT به‌سوی صفر میل خواهد کرد. بنابراین خط MT مماس بر دایرهٔ (O) می‌باشد.

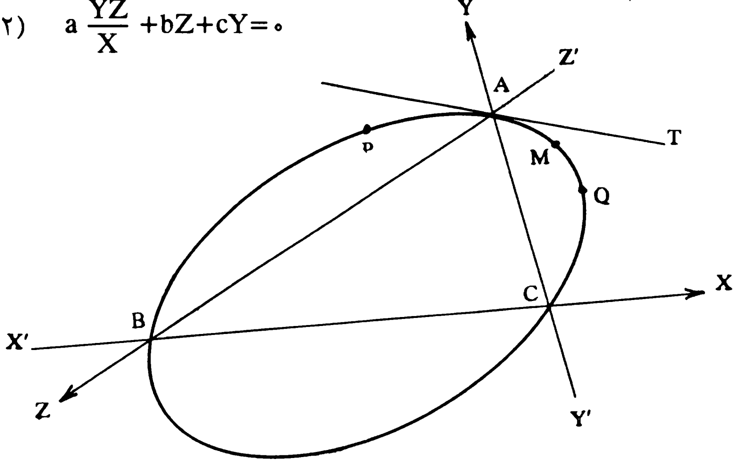
۳.۴.۳. *معادلهٔ خط مماس بر منحنیهای درجه دوم.* مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ به‌معادلهٔ

MATH75.IR

$$(1) \qquad ayz+bzx+cxy=0$$

را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر $\mathcal{C}$ را در نقاط A، B، و C بنویسیم. ابتدا معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ A را جست‌وجو می‌کنیم. دو نقطهٔ P و Q را روی $\mathcal{C}$ و در دوطرف نقطهٔ A و بی‌نهایت نزدیک به‌نقطهٔ A در نظر می‌گیریم. نقطهٔ متحرک M(x,y,z) را روی کمان PQ اختیار می‌کنیم. مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$(2) \qquad a\frac{YZ}{X}+bZ+cY=0$$



چون نقطهٔ M بی‌نهایت به‌نقطهٔ A نزدیک است پس bZ و cY دو بی‌نهایت کوچک‌اند و $a\frac{YZ}{X}$ یک بی‌نهایت کوچک مرتبه دو است. بنابراین کمان بی‌نهایت کوچک PQ (که مختصات نقاط آن در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند) به خط AT به‌معادلهٔ

$$(3) \qquad bZ+cY=0$$

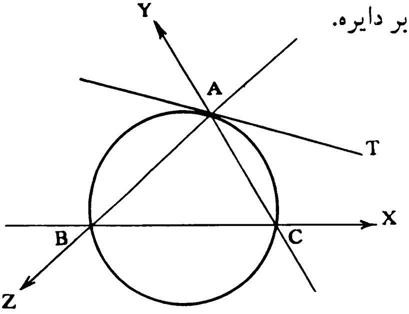
بی‌نهایت نزدیک است. بنابراین خط AT مماس بر منحنی $\mathcal{C}$ در نقطهٔ A است.

معادلات خطوط مماس بر $\mathcal{C}$ در نقاط B و C به‌ترتیب چنین‌اند:

$$aZ+cX=0$$

$$aY+bX=0$$

۳.۴.۴. *حالت خاص*. معادلهٔ خط مماس بر دایره.



معادلهٔ خطوط مماس بر دایره C به‌معادلهٔ

$$yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C=0$$

در نقاط A، B، و C به‌ترتیب چنین‌اند:

$$z\sin B+y\sin C=0$$

$$z\sin A+x\sin C=0$$

$$y\sin A+x\sin B=0$$

۵.۴.۳ مثال. مثلث ABC محاط در دایره (O) را در نظر می‌گیریم. از نقاط A، B، و C سه مماس بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آنها را با خطوط BC، CA، و AB به‌ترتیب A'، B'، و C' می‌نامیم. ثابت کنید سه نقطهٔ A'، B'، و C' بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ اختیار می‌کنیم. بنابر (۴.۳.۳) معادلهٔ دایره (O) در دستگاه مختصات سه‌محوری xyz چنین است:

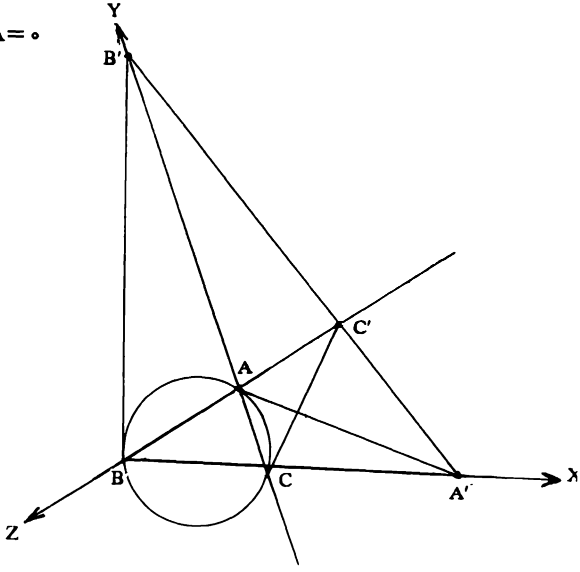
$$yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C=0 \qquad (1)$$

معادلات خطوط مماس AA'، BB'، و CC' به‌ترتیب چنین‌اند:

$$z\sin B+y\sin C=0 \qquad (2)$$

$$x\sin C+z\sin A=0 \qquad (3)$$

$$x\sin B+y\sin A=0 \qquad (4)$$



پس مختصات سه نقطهٔ A'، B'، و C' در معادلات زیر صدق می‌کند:

$$A'\left|\begin{array}{l} x=0 \\ z\sin B+y\sin C=0\end{array}\right. \qquad B'\left|\begin{array}{l} y=0 \\ x\sin C+z\sin A=0\end{array}\right. \qquad C'\left|\begin{array}{l} z=0 \\ x\sin B+y\sin A=0\end{array}\right.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مختصات سه نقطهٔ A'، B'، و C' در معادلهٔ درجه اول زیر

MATH75.IR

صدق می‌کنند:

$$\frac{x}{\sin A} + \frac{y}{\sin B} + \frac{z}{\sin C} = ۰$$

پس سه نقطهٔ مورد نظر بر یک خط راست جای دارند.

۶.۴.۳. تمرین. قضیهٔ شماره (۵.۴.۳.) را دربارهٔ مقطع مخروطی ثابت کنید.

اثبات کاملاً مشابه با اثبات قضیهٔ (۵.۴.۳) است. معادلهٔ مقطع مخروطی در دستگاه مختصات سه‌محوری در مطلب شماره (۲.۳.۳) ارائه شده است. (فرمول شماره ۶)

۵.۳. اثبات چند قضیه با به‌کارگیری معادله‌های درجه دوم

در صفحه‌های پیش معادلهٔ مقطع مخروطی را در دستگا مختصات چندمحوری به‌دست آوردیم. در صفحات آینده این معادله‌ها را برای اثبات بعضی قضیه‌های هندسه به‌کار می‌بریم.

۱.۵.۳. قضیهٔ سیمسن *(Simson)* . دایرهٔ محیطی هر مثلث مکان هندسی نقاطی است که تصاویر آنها بر اضلاع آن مثلث بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. مثلث ABC را در نظر گرفته و تصاویر یک نقطهٔ M از صفحه آن را بر خطهای BC، CA، و AB به‌ترتیب P، Q، و R می‌نامیم. از وصل سه نقطهٔ مذکور دوبه‌دو مثلث PQR حاصل می‌شود (شکل الف). می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر نقطهٔ M بر محیط دایرهٔ γ محیط بر مثلث ABC باشد آنگاه سه‌نقطهٔ P، Q، و R بر یک خط راست واقع‌اند و برعکس اگر سه‌نقطهٔ P، Q، و R بر یک‌خط راست واقع‌باشند آنگاه‌نقطهٔ M بردایرهٔ γواقع‌است(شکل ب).

سه محور $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و همسو با آنها اختیار می‌کنیم.

اندازه‌های جبری سطحهای چهار مثلث MPQ، MQR، MRS، و PQR را به‌ترتیب S_1، S_2، S_3 و S می‌نامیم و همچنین مختصات نقطهٔ M را (x_1,y_1,z_1) می‌نامیم.

رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$(۱)\quad S_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 \sin C$$

$$(۲)\quad S_2 = \frac{1}{2} y_1 z_1 \sin A$$

$$(۳)\quad S_3 = \frac{1}{2} z_1 x_1 \sin B$$

بنابر حکم شماره (۱۰.۱)، بین اندازه‌های جبری سطحهای S، S_1، S_2، و S_3 رابطهٔ زیر برقرار است.

$$(۴)\quad S = S_1 + S_2 + S_3$$

MATH75.IR

رابطهٔ (۴)، با رعایت رابطه‌های (۱)، (۲)، و (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}x_1y_1\sin C+\frac{1}{2}y_1z_1\sin A+\frac{1}{2}z_1x_1\sin B \qquad (5)$$

بنابر مطلب شماره ۴.۳.۳. (الف)، معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC در دستگاه مختصات سه‌محوری xyz به‌صورت زیر است:

$$xy\sin C+yz\sin A+zx\sin B=0 \qquad (6)$$

اگر نقطهٔ M بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار گیرد، مختصات آن در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند یعنی:

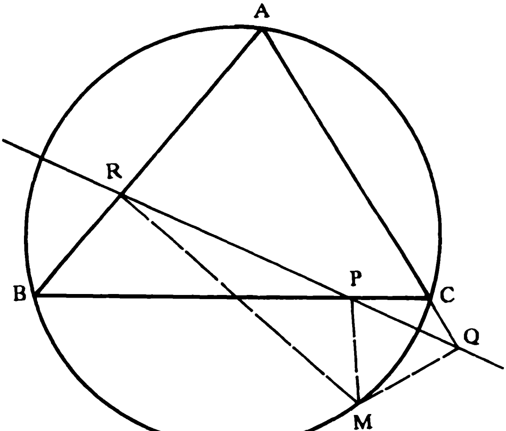
$$x_1y_1\sin C+y_1z_1\sin A+z_1x_1\sin B=0 \qquad (7)$$

از مقایسهٔ (۵) و (۷) نتیجه می‌شود که

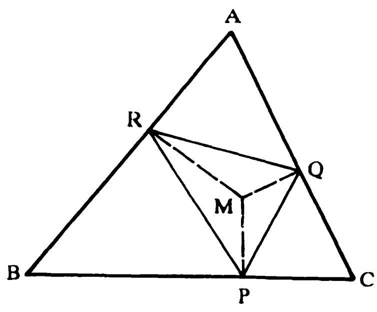
$$S=0 \qquad (8)$$

یعنی اندازهٔ سطح مثلث PQR صفراست. پس سه‌نقطهٔ P، Q، و R بریک خط راست قراردارند.

بنابراین وقتی نقطهٔ M بر دایرهٔ γ قرار گیرد سه نقطهٔ P، Q، و R بر یک خط راست قرار خواهند گرفت.



ب



الف

برعکس اگر تصاویر نقطهٔ $M(x_1,y_1,z_1)$ بر اضلاع مثلث ABC بر یک خط راست قرار گیرند آنگاه اندازهٔ سطح مثلث PQR صفر می‌شود یعنی

$$\frac{1}{2}x_1y_1\sin C+\frac{1}{2}y_1z_1\sin A+\frac{1}{2}z_1x_1\sin B=0 \qquad (9)$$

از رابطهٔ (۹) نتیجه می‌شود که مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند پس نقطهٔ M بر

MATH75.IR

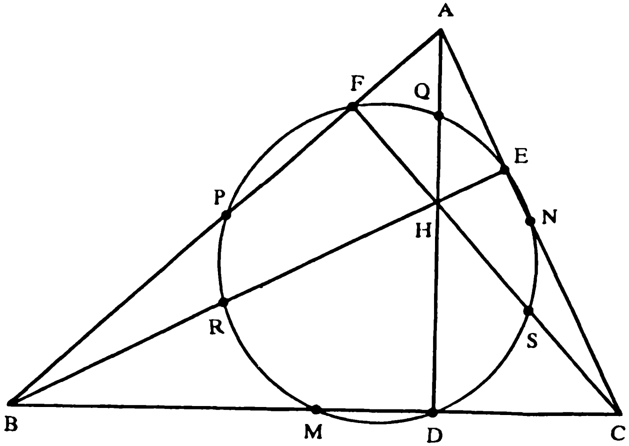
دایرهٔ γ قرار دارد.

۲.۵.۳. قضیهٔ اولر[۱] *(دایرهٔ نه نقطه)*. در هر مثلث، وسطهای سه ضلع، پاهای ارتفاعها، و وسطهای پاره‌خطهایی که رأسها را به‌محل تلاقی سه ارتفاع وصل می‌کنند، نه نقطه‌اند که بر محیط یک دایره قرار دارند.

برهان. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و پاهای سه‌ارتفاع مربوط به‌رأسهای A، B، و C را به‌ترتیب D، E، و F می‌نامیم. وسطهای سه‌ضلع BC، CA، و AB را به‌ترتیب M، N، و P و همچنین وسطهای سه‌پاره‌خط HA، HB، و HC را به‌ترتیب Q، R، و S می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که نه نقطه D، E، F، M، N، P، Q، R، و S بر محیط یک دایره قرار دارند.

مثلث DEF را که رأسهای آن پاهای سه ارتفاع مثلث ABC می‌باشند مثلث **ارتفاعی** مثلث ABC می‌نامند. قضیهٔ اولر را می‌توان با به‌کار بردن اصطلاح مثلث ارتفاعی به‌صورت سادهٔ زیر بیان نمود.

دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی هر مثلث بر وسطهای اضلاع آن مثلث و وسطهای پاره‌خطهایی که محل تلاقی سه ارتفاع مثلث را به‌سه رأس وصل می‌کنند می‌گذرد.



الف

---

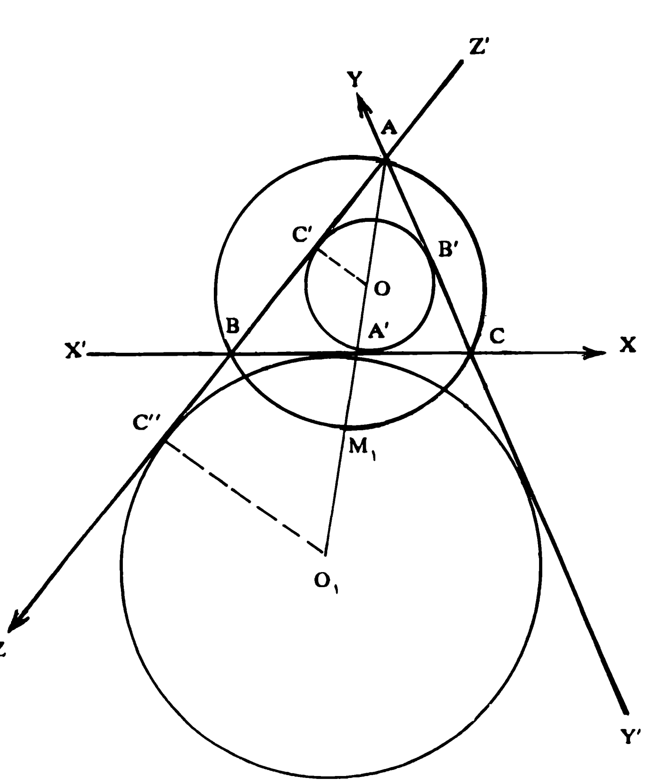
۱ - ***لئونارد اولر*** (Leonhard Euler)، از سوئیس (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷). یکی از بزرگترین ریاضی‌دانهای جهان است. او سالهای متمادی در آکادمی علوم سن‌پطرزبورگ و برلین به‌خدمات علمی مشغول بود. اولر آنالیز ریاضی و مکانیک را توسعه داد. در نجوم نظریهٔ جدید دربارهٔ ماه و تحقیقات متعدد دربارهٔ اختلال سیارات عرضه نمود. تعداد زیادی از قضایای باارزش هندسه به‌نام اوست. قدرت تجسم او به‌حدی بود که هنگامی که در اثر پیری و کار زیاد از بینایی محروم شد به‌تحقیقات خود ادامه داد.

MATH75.IR

چون نقطهٔ H، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC عبارت است از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ارتفاعی DEF و همچنین سه نقطهٔ A، B، و C عبارت‌اند از مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث DEF (اثبات این مطلب آسان است)، پس کافی است قضیهٔ اولر را به‌صورت زیر مطرح کنیم.

قضیه. *دایرهٔ محیطی هر مثلث بر وسطهای شش پاره‌خطی که مرکزهای دایره‌های محاطی را به‌هم وصل می‌کنند می‌گذرد.*

برای اثبات قضیهٔ اخیر، مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محاطی آن را O می‌نامیم و مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی واقع در زاویه‌های BAC، CBA، و ACB را به‌ترتیب $O_۱$، $O_۲$، و $O_۳$ نام می‌نهیم. وسطهای سه‌پاره‌خط $OO_۱$، $OO_۲$، و $OO_۳$ را به‌ترتیب $M_۱$، $M_۲$، و $M_۳$ می‌نامیم و همچنین وسطهای سه پاره‌خط $O_۱O_۲$، $O_۲O_۳$، و $O_۳O_۱$ را به‌ترتیب $M_{۱۲}$، $M_{۲۳}$، و $M_{۳۱}$ نام می‌نهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که شش نقطهٔ $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، $M_{۱۲}$، $M_{۲۳}$، و $M_{۳۱}$ بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث AB قرار دارند.



ب

MATH75.IR

اندازه‌های زاویه‌های مثلث را A، B، و C و اندازه‌های طولهای اضلاع مقابل به‌این زاویه‌ها را به‌ترتیب a، b، و c می‌نامیم و طول محیط مثلث را با ۲p نشان می‌دهیم.

محورهای x′x، y′y، و z′z را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$ و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. بنابر مطلب شماره (۴.۳.۳. الف)، معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC، در دستگاه مختصات سه‌محوری xyz چنین است:

$$(۱)\qquad xy\sin C+yz\sin A+zx\sin B=0$$

ثابت می‌کنیم که مختصات شش نقطهٔ M_1، M_2، M_3، M_{12}، M_{23}، و M_{31} در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. مختصات نقاط O، O_1، O_2، و O_3 که آنها را به‌ترتیب (x_0, y_0, z_0)، (x_1, y_1, z_1)، (x_2, y_2, z_2)، و (x_3, y_3, z_3) می‌نامیم چنین‌اند:

$$x_0=y_0=z_0=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$x_1=-y_1=-z_1=-p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$x_2=-y_2=z_2=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$x_3=y_3=-z_3=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

مختصات نقطهٔ M_1 وسط پاره‌خط OO_1 به‌کمک دستور مذکور در شماره (۵.۱) حساب می‌شوند. اینچنین:

$$x_{M_1}=\frac{x_0+x_1}{2}=-a\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$y_{M_1}=\frac{y_0+y_1}{2}=(2p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$z_{M_1}=\frac{z_0+z_1}{2}=(2p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات نقطهٔ M_1 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند، بدین‌قرار: عبارت سمت چپ معادلهٔ (۲) به‌ازای مختصات نقطهٔ M_1 به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۲)\qquad \left[-a(2p-a)\sin C+(2p-a)^2\sin A-a(2p-a)\sin B\right]\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$$

عبارت داخل کروشه را با X نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم $X=0$.

$$X=(2p-a)\left[-a\sin C+(2p-a)\sin A-a\sin B\right]$$

$$=(2p-a)\left[-a(\sin A+\sin B+\sin C)+2p\sin A\right]$$

به‌کمک قانون سینوسها در مثلث یعنی به‌کمک روابط زیر

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که مقدار داخل کروشه مساوی صفر است.

با همین شیوهٔ استدلال ثابت می‌کنیم که مختصات دو نقطهٔ $M_۲$ و $M_۳$ نیز در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

اکنون ثابت می‌کنیم که سه نقطهٔ $M_{۱۲}$، $M_{۲۳}$، و $M_{۳۱}$ نیز بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند. ابتدا ثابت می‌کنیم که مختصات نقطهٔ $M_{۲۳}$ که آنها را $(x_{۲۳}, y_{۲۳}, z_{۲۳})$ می‌نامیم در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. مختصات نقطهٔ $M_{۲۳}$ را بنابر دستور مذکور در شمارهٔ (۵.۱) حساب می‌کنیم:

$$x_{۲۳} = \frac{x_۲ + x_۳}{۲} = \frac{۱}{۲} p \left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} + \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right)$$

$$y_{۲۳} = \frac{y_۲ + y_۳}{۲} = \frac{۱}{۲} p \left(-\operatorname{tg} \frac{B}{۲} + \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right)$$

$$z_{۲۳} = \frac{z_۲ + z_۳}{۲} = \frac{۱}{۲} p \left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right)$$

برای آنکه ثابت کنیم نقطهٔ $M_{۲۳}$ بر محیط دایره محیطی مثلث ABC قرار دارد ثابت می‌کنیم که مختصات این نقطه در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. برای این منظور ثابت می‌کنیم که عبارت زیر مساوی صفر است:

$$Y = -\left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right)^۲ \sin A + \left(\operatorname{tg}^۲ \frac{B}{۲} - \operatorname{tg}^۲ \frac{C}{۲}\right) \sin B + \left(\operatorname{tg}^۲ \frac{C}{۲} - \operatorname{tg}^۲ \frac{B}{۲}\right) \sin C$$

عبارت بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y = \left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right) \left[-\left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right) \sin A + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} + \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right)(\sin B - \sin C)\right]$$

اگر $B=C$ باشد مقدار داخل پرانتز جلو کروشه مساوی صفر است و لذا $Y=۰$.

اگر $B \neq C$ باشد، آنگاه مقدار داخل پرانتز جلو کروشه مخالف صفر است در این صورت ثابت می‌کنیم که

$$-\left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right) \sin A + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{۲} + \operatorname{tg} \frac{C}{۲}\right).(\sin B - \sin C) = ۰$$

چون $B \neq C$ است به‌جای آنکه رابطهٔ اخیر را ثابت کنیم، رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B}{۲} + \operatorname{tg} \frac{C}{۲}}{\operatorname{tg} \frac{B}{۲} - \operatorname{tg} \frac{C}{۲}} = \frac{\sin A}{\sin B - \sin C}$$

MATH75.IR

عبارت سمت چپ رابطهٔ بالا را به‌ترتیب به‌صورتهای زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{۲}+\operatorname{tg}\frac{C}{۲}}{\operatorname{tg}\frac{B}{۲}-\operatorname{tg}\frac{C}{۲}}=\frac{\sin\frac{B+C}{۲}}{\sin\frac{B-C}{۲}}=\frac{\cos\frac{A}{۲}}{\sin\frac{B-C}{۲}}=\frac{۲\sin\frac{A}{۲}.\cos\frac{A}{۲}}{۲\sin\frac{B-C}{۲}.\sin\frac{A}{۲}}$$

$$=\frac{\sin A}{۲\sin\frac{B-C}{۲}.\cos\frac{B+C}{۲}}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin C}$$

با همین شیوهٔ استدلال نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های $M_{۱۲}$ و $M_{۳۲}$ بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند.

تبصره. همیلتن [۱] دربارهٔ مثلث ارتفاعی، قضیهٔ ساده و زیبایی عرضه کرده است. اگر در اثبات قضیهٔ اولر (دایره نه نقطه) قضیهٔ همیلتن را به‌کار بگیریم، اثبات قضیه بسیار کوتاه می‌شود.

قضیهٔ همیلتن. اگر H نقطهٔ برخورد سه ارتفاع مثلث ABC باشد، چهار مثلث ABC، HBC، HCA، و HAB دارای یک مثلث ارتفاعی می‌باشند.

برای اثبات قضیهٔ دایره نه نقطه کافی است ابتدا مطلب زیر را به‌هر شیوه‌ای که توانستیم ثابت کنیم «در هر مثلث وسطهای سه ضلع و پاهای سه ارتفاع، شش نقطه‌اند که بر محیط یک دایره قرار دارند» سپس قضیهٔ زیر را به‌کار بگیریم.

قضیهٔ. در هر مثلث دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعی، بر وسطهای سه ضلع مثلث می‌گذرد. از حکم اخیرالذکر و قضیهٔ همیلتن، قضیهٔ اولر، بی‌درنگ نتیجه می‌شود.

در شمارهٔ ۲.۴.۳ (شکل ب)، ابتدا ثابت کردیم که سه نقطهٔ $M_۱$، $M_۲$، و $M_۳$ بر روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند و سپس ثابت کردیم که سه نقطهٔ $M_{۱۲}$، $M_{۲۳}$، و $M_{۳۱}$ نیز بر محیط همان دایره قرار دارند. هنگامی که ثابت کردیم که سه نقطهٔ $M_۱$، $M_۲$، و $M_۳$ بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارند قضیهٔ همیلتن را به‌کار می‌بریم، بی‌درنگ قضیهٔ

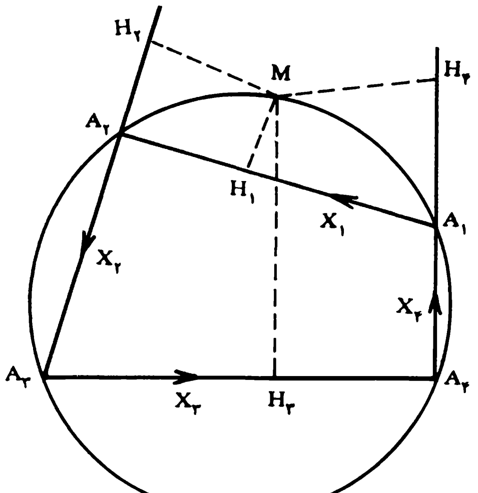
---

۱ - ***همیلتن*** ریاضی‌دان و ستاره‌شناس ایرلندی (۱۸۶۵ - ۱۸۰۵). تا سن چهارده‌سالگی چند زبان فرا گرفت. در این سن برای سفیر ایران خطابه‌ای به‌زبان فارسی تهیه نمود. عشق و علاقه به‌ریاضی موجب شد که تحصیل زبانهای گوناگون را کنار بگذارد و به‌مطالعهٔ ریاضی بپردازد. از جمله اکتشافات همیلتن «چهارگانها یا اعداد فوق مختلط» است. چهارگانهای همیلتن یک توسعهٔ اعداد مختلط در فضای چهاربعدی است. همان‌طور که اعداد مختلط ابزاری مناسب برای نمایش دوران در صفحه است، چهارگانهای همیلتن، در فضای سه‌بعدی برای نمایش دوران در حول یک خط ماربر مبدأ مختصات به‌کار می‌رود.

دایره نه نقطه نتیجه می‌شود. یعنی دیگر احتیاج نیست که ثابت کنیم سه نقطهٔ M_{12}، M_{23}، و M_{31} نیز بر محیط همان دایره قرار دارند.

۳.۵.۳. قضیهٔ پاپوس[1]. قضیهٔ پاپوس بیان خاصیتی است از $(2n)$ ضلعیهای محاط در مقطع مخروطی. در سطور آینده، قضیهٔ پاپوس را در یک چهارضلعی محاط در مقطع مخروطی مطرح می‌کنیم. در شمارهٔ ۳.۴، قضیهٔ پاپوس را در حالت کلی مطرح خواهیم کرد.

الف. درصفحهٔ P، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ محاط در دایره γ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که‌دایرهٔ γ مکان‌هندسی نقاطی‌است که‌حاصل‌ضرب فواصل‌آنها ازدوضلع مقابل چهارضلعی مفروض‌مساوی با حاصل‌ضرب فواصل‌همان نقاط از دوضلع مقابل‌دیگر.



اگر نقاط H_1، H_2، H_3، و H_4 تصویرهای نقطهٔ M از دایرهٔ γ بر خطهای A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4، و A_4A_1 باشند آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$MH_1.MH_3=MH_2.MH_4 \qquad (1)$$

برعکس اگر بین فاصله‌های نقطهٔ M از اضلاع چهارضلعی محاطی $A_1A_2A_3A_4$، رابطهٔ (۱) برقرار باشد آنگاه نقطهٔ M بر دایرهٔ γ قرار دارد.

قضیهٔ(الف) رامی‌توان به‌کمک تشابه‌مثلثها و همچنین‌به‌کمک قضیهٔ حاصل‌ضرب‌دوضلع

---

۱ ـ **پاپوس.** ریاضی‌دان یونانی که در اواخر قرن سوم و اوایل قرن چهارم در اسکندریه می‌زیسته است. اثر بزرگ او «مجموعه ریاضی» است که شامل آثار هندسی زمان او بعلاوه اصلاحات و تعمیمها و کارهای بدیع و یادداشتهای تاریخی است.

MATH75.IR

مثلث ثابت نمود (قضیهٔ حاصل‌ضرب دوضلع مثلث چنین است: در هر مثلث حاصل‌ضرب دو ضلع مساوی است با حاصل‌ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم و قطر دایره محیطی مثلث).

در سطور زیر قضیهٔ (الف) را به‌کمک دستگاه مختصات چهارمحوری ثابت می‌کنیم.

محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، x'_3x_3، و x'_4x_4 را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_4}$، و $\overrightarrow{A_4A_1}$، و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. معادلهٔ دایرهٔ γ، در دستگاه مختصات چهارمحوری $x_1x_2x_3x_4$، به‌صورت زیر است (رجوع شود به ۴.۳.۳.ب):

$$x_1x_3+\varepsilon x_2x_4=0 \qquad (۲)$$

یعنی مختصات هر نقطه از دایرهٔ γ در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند و برعکس هر نقطه که مختصاتش در رابطهٔ (۲) صدق کنند بر دایرهٔ γ قرار دارد.

به‌کمک معادلهٔ (۲) با رعایت رابطه‌های زیر

$$MH_1=|x_1| \text{ و } MH_2=|x_2| \text{ و } MH_3=|x_3| \text{ و } MH_4=|x_4|$$

قضیهٔ (الف) فوراً نتیجه می‌شود.

ب. در صفحهٔ P، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که منحنی $\mathscr{C}$ مکان هندسی نقاطی است که حاصل‌ضرب فواصل آنها از دو ضلع مقابل چهارضلعی مفروض متناسب است با حاصل‌ضرب فواصل همان نقاط از دو ضلع مقابل دیگر.

می‌دانیم که بی‌نهایت مقطع مخروطی وجود دارد که بر چهار نقطهٔ A_1، A_2، A_3، و A_4 می‌گذرند (رجوع شود به‌پارامترهای مقطع مخروطی، مشروح در ۵.۳.۸). یکی از این مقطعهای مخروطی را در نظر می‌گیریم و آن را $\mathscr{C}$ می‌نامیم. تصاویر نقطهٔ M از منحنی $\mathscr{C}$ را روی چهار خط A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4، و A_4A_1 به‌ترتیب H_1، H_2، H_3، و H_4 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم هنگامی که نقطهٔ M روی $\mathscr{C}$ حرکت می‌کند همواره رابطهٔ زیر بین چهار طول MH_1، MH_2، MH_3، و MH_4 برقرار است (p و q، دو عدد ثابت‌اند)

$$p.MH_1.MH_3+q.MH_2.MH_4=0 \qquad (۳)$$

و برعکس اگر فواصل نقطهٔ M از اضلاع چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، در رابطهٔ (۳) صدق کنند نقطهٔ M بر مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ قرار دارد.

قضیهٔ (ب) را می‌توان از قضیهٔ (الف) نتیجه گرفت. برای این منظور تبدیل تصویر را به‌کار می‌بریم و به‌علاوه از این مطلب که تصاویر خطوط موازی خطوط موازی‌اند نیزاستفاده می‌کنیم.

در سطور زیر قضیهٔ (ب) را به‌کمک دستگاه مختصات چهارمحوری ثابت می‌کنیم.

محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، x'_3x_3، و x'_4x_4 را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_4}$، و $\overrightarrow{A_4A_1}$ و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ محیط بر

چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ ، در دستگاه مختصات چهارمحوری $x_1x_2x_3x_4$ دارای معادله‌ای به‌صورت زیر است (رجوع شود به ۳.۳.۳):

$$px_1x_3=qx_2x_4 \quad (۴)$$

که در آن p و q دو عدد جبری‌اند. مختصات هر نقطه از منحنی $\mathscr{C}$ در معادلهٔ (۴) صدق می‌کنند و برعکس هر نقطهٔ M که مختصاتش در معادلهٔ (۴) صدق کنند بر منحنی $\mathscr{C}$ قرار دارد.

به‌کمک معادلهٔ (۴)، قضیهٔ (ب) ثابت می‌شود.

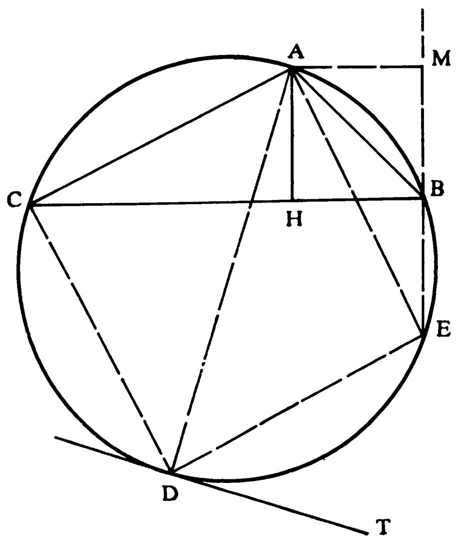
پیامدهای قضیهٔ پاپوس

۴.۵.۳ قضیه. در هر مثلث حاصل‌ضرب طولهای دوضلع مساوی است با حاصل‌ضرب طول قطر دایره محیطی و طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم.

برهان. مثلث ABC محاط در دایرهٔ γ را در نظر می‌گیریم. در شکل زیر خط AH ارتفاع مثلث ABC است. پاره‌خط AD قطر دایرهٔ γ می‌باشد. خط OT در نقطهٔ D بر دایرهٔ γ مماس است. می‌خواهیم درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$AB.AC=AH.AD \quad (۱)$$

نقطهٔ دلخواه E را بر محیط دایرهٔ γ انتخاب می‌کنیم. نقطهٔ D را به‌نقطهٔ C و نقطهٔ E را به‌دو نقطهٔ B و D وصل می‌کنیم تا چهارضلعی محاطی BCDE حاصل شود. تصویر نقطهٔ A بر خط EB را نقطهٔ M می‌نامیم.



الف

MATH75.IR

بنابر قضیهٔ (۳.۴.۳)، رابطهٔ زیر بین فاصله‌های نقطهٔ A از اضلاع چهارضلعی محاطی BCDE برقرار است:

$$(۲) \quad AH.AE=AC.AM$$

اگر نقطهٔ E، بر دایرهٔ γ حرکت نموده، به‌سوی نقطهٔ D میل کند آنگاه دو خط BE و DE به‌ترتیب به‌سوی خطهای BD و DT میل می‌کنند و در نتیجه طولهای پاره‌خطهای AM و AE به‌سوی طولهای پاره‌خطهای AB و AD میل می‌کنند. بنابراین از رابطهٔ (۲) رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

پیامدهای قضیهٔ (۴.۵.۳)

به‌کمک قضیهٔ پیش می‌توان قضیه‌های مثلث قائم‌الزاویه را نتیجه گرفت. در سطور زیر به‌این مطلب می‌پردازیم.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH، دو قطعه HB و HC بر وتر پدید می‌آورد. چند رابطهٔ مهم بین طولهای اضلاع مثلث ABC، ارتفاع AH و دو قطعه وتر وجود دارد. در زیر به‌کمک قضیهٔ (۴.۴.۳) سه رابطه از مثلث قائم‌الزاویه را ثابت می‌کنیم.

(الف). حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب طول وتر و طول ارتفاع وارد بر وتر.

(ب). مربع طول هر یک از اضلاع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب طول وتر و تصویر آن ضلع بر وتر.

(پ). مربع طول ارتفاع وارد بر وتر مساوی است با حاصل‌ضرب طولهای دو قطعه‌ای که این ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد.

اثبات قضیهٔ (الف). برای اثبات کافی است توجه کنیم در مثلث قائم‌الزاویه، وتر قطر دایره محیطی مثلث است.

اثبات قضیهٔ (ب). در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ($A=۹۰^\circ$)، نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به‌خط BC تعیین می‌کنیم. در مثلث ABD، پاره‌خط BH ارتفاع و پاره‌خط BC قطر دایرهٔ محیطی می‌باشد. بنابر قضیهٔ (۴.۴.۳) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{BA}^۲=BA.BD=BC.BH$$

اثبات قضیهٔ (پ). در مثلث قائم‌الزاویه ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل زیر). می‌خواهیم درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$\overline{AH}^۲=HB.HC$$

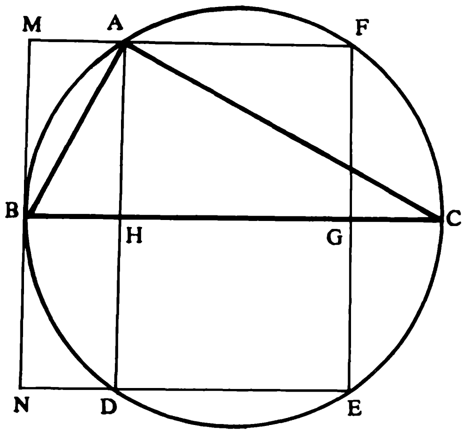
دایره γ به‌قطر BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خط AH را با دایرهٔ γ، نقطهٔ D می‌نامیم. مستطیل ADEF را در دایرهٔ γ محاط می‌کنیم. تصاویر نقطهٔ B را بر خطهای EF، AF، و DE

به‌ترتیب G، M، و N می‌نامیم. قضیهٔ شماره ۳.۴.۳ را در مورد چهارضلعی محاطی ADEF به‌کار برده، رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$BM.BN=BH.BG$$

رابطهٔ اخیر با رعایت آنکه $BM=BN=AH$ و $BG=HC$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$AH^{2}=HB.HC$$



ب

۵.۵.۳ قضیه. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. وسطهای اضلاع BC، CA، و AB را به‌ترتیب A'، B'، و C' می‌نامیم. سه زوج نقطهٔ (A_1, A_2)، (B_1, B_2)، و (C_1, C_2) را به‌ترتیب بر سه خط BC، CA، و AB طوری اختیار می‌کنیم که به‌ترتیب نسبت به‌نقاط A'، B'، و C' قرینه باشند. ثابت کنید شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

برهان. محورهای $x'x$، $y'y$، و $z'z$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CA}$، و $\overrightarrow{AB}$، و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$\overline{BA_1}=\overline{A_2C}=\alpha$$

$$\overline{CB_1}=\overline{B_2A}=\beta$$

$$\overline{AC_1}=\overline{C_2B}=\gamma$$

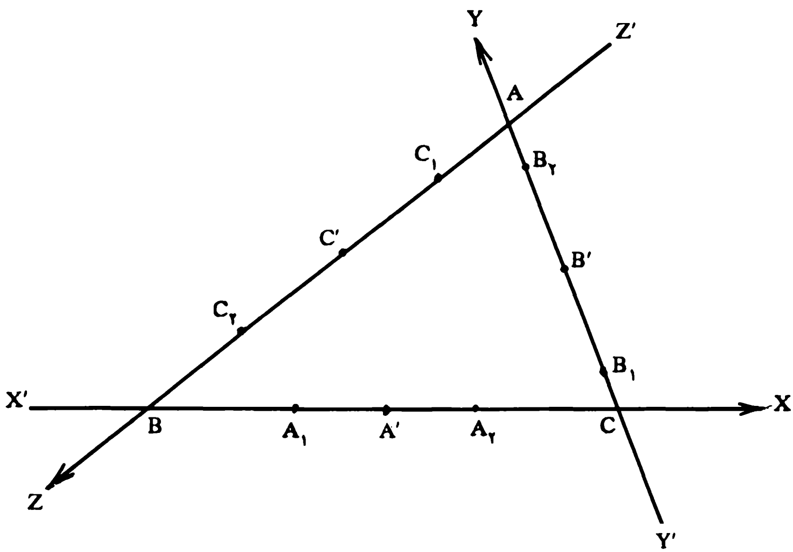
ثابت می‌کنیم مختصات شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(1)\qquad pyz+qzx+rxy=s$$

MATH75.IR

با

$$\begin{cases} p=\beta\gamma(b-\beta)(c-\gamma)\sin A \\ q=\gamma\alpha(c-\gamma)(a-\alpha)\sin B \\ r=\alpha\beta(a-\alpha)(b-\beta)\sin C \\ s=\alpha\beta\gamma(a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)\sin A\sin B\sin C \end{cases}$$



مختصات نقاط A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 را به‌کمک مطلب شماره (۸.۱) حساب می‌کنیم:

$$A_1 \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=\overline{CA_1}\,\sin(\overrightarrow{y'y},\overrightarrow{x'x})=-(a-\alpha)\sin(\pi+c)=(a-\alpha)\sin C \\ z=\overline{BA_1}\,\sin(\overrightarrow{z'z},\overrightarrow{x'x})=\alpha\sin(\pi-B)=\alpha\sin B \end{array}\right.$$

$$A_2 \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=\alpha\sin C \\ z=(a-\alpha)\sin B \end{array}\right. \qquad B_1 \left| \begin{array}{l} x=\beta\sin C \\ y=0 \\ z=(b-\beta)\sin A \end{array}\right. \qquad B_2 \left| \begin{array}{l} x=(b-\beta)\sin C \\ y=0 \\ z=\beta\sin A \end{array}\right.$$

$$C_1 \left| \begin{array}{l} x=(C-\gamma)\sin B \\ y=\gamma\sin A \\ z=0 \end{array}\right. \qquad C_2 \left| \begin{array}{l} x=\gamma\sin B \\ y=(C-\gamma)\sin A \\ z=0 \end{array}\right.$$

به‌آسانی تحقیق می‌شود که مختصات شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. چون معادلهٔ (۱) نسبت به x، y، و z از درجهٔ دوم است لذا یک مقطع مخروطی را نشان می‌دهد پس شش نقطه مورد نظر بر یک مقطع مخروطی جای دارند.

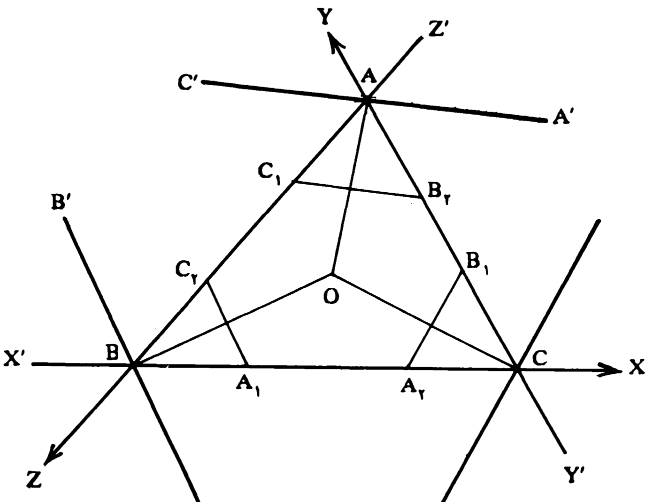
کاربردهایی از قضیه (۵.۵.۳)

۶.۵.۳. قضیه. یک مقطع مخروطی منحصر به‌فرد وجود دارد که برسه‌رأس مثلث مفروض می‌گذرد و در هر رأس بر نیمساز داخلی آن مثلث عمود است.

برهان. مثلث غیرمشخص ABC را در نظر می‌گیریم و شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 را بر خطوط اضلاع طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\overline{BA_1}=\overline{A_2C}=\overline{CB_1}=\overline{B_2A}=\overline{A_1C}=\overline{C_2B}=l$$

l یک عدد جبری دلخواه است.



بنابر قضیهٔ (۵.۵.۳) شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 بر یک مقطع مخروطی که آن‌را $\mathscr{C}$ می‌نامیم قرار دارند. با تغییر مقدار l، مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ تغییرشکل می‌دهد.

نیمسازهای داخلی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم. سه خط AA'، BB'، و CC' را به‌ترتیب بر سه خط OA، OB، و OC عمود می‌کنیم. سه خط AA'، BB'، و CC' نیمسازهای خارجی مثلث ABC اند. هر یک از سه مثلث BA_1C_2، CB_1A_2، و AC_1B_2 متساوی‌الساقین است و لذا قاعده‌های هر یک از این مثلثها بر نیمساز زاویه رأس آن مثلث عمود است (یعنی $B_2C_1 \perp OA$، $C_2A_1 \perp OB$، و $A_2B_1 \perp OC$). پس

MATH75.IR

$$A_2B_1 \parallel CC' \text{ و } C_2A_1 \parallel BB' \text{ ،} B_2C_1 \parallel AA'$$

اکنون l را به‌سوی صفر میل می‌دهیم. سه زوج نقطهٔ (B_2,C_1)، (C_2,A_1)، (A_2,B_1) به‌ترتیب به‌سوی نقاط A، B، و C میل می‌کنند و بعلاوه امتداد هر یک از سه خط B_2C_1، C_2A_1، و A_2B_1 همواره ثابت می‌ماند. پس هنگامی‌که l به‌سوی صفر میل می‌کند حدمقطع مخروطی $\mathscr{C}$ یک مقطع مخروطی است که بر سه نقطهٔ A، B، و C می‌گذرد و در این نقاط بر نیمسازهای داخلی مثلث ABC عمود است.

برهان دوم. بنابر (۲.۳.۳) معادلهٔ مقطع مخروطی که بر سه‌رأس مثلث ABC مـی‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$a_1x_2x_3+a_2x_3x_1+a_3x_1x_2=0$$

بنابر (۶.۴.۳) معادلات خطوط مماس بر این مقطع مخروطی در نقاط A، B، و C به‌ترتیب چنین است:

$$(1)\quad a_2x_3+a_3x_2=0$$

$$(2)\quad a_3x_1+a_1x_3=0$$

$$(3)\quad a_1x_2+a_2x_1=0$$

بنابر مطلب شمارهٔ (۲.۵.الف) معادلات نیمسازهای زاویه‌های خارجی A، B، و C به‌ترتیب چنین‌اند:

$$(1)'\quad x_3+x_2=0$$

$$(2)'\quad x_1+x_3=0$$

$$(3)'\quad x_2+x_1=0$$

چون می‌خواهیم مقطع مخروطی تعیین کنیم که در نقاط A، B، و C به‌ترتیب بر نیمسازهای زاویه‌های خارجی A، B، و C مماس باشند پس باید خطوط به‌معادلات (۱) ، (۲)، و (۳) به‌ترتیب بر خطوط به‌معادلات $'$(۱)، $'$(۲) و $'$(۳)، منطبق باشند لذا باید داشته باشیم:

$$a_1=a_2=a_3$$

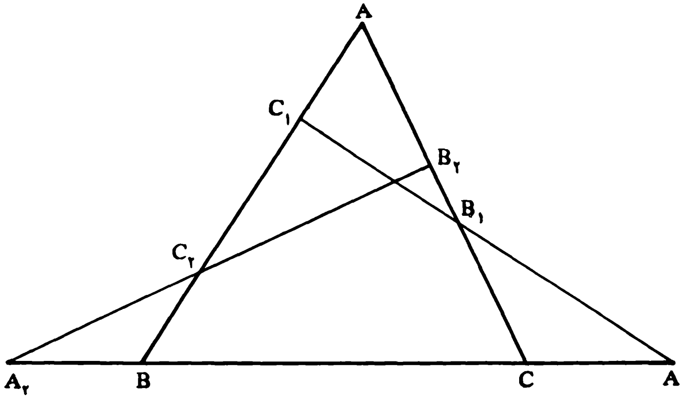
بنابراین معادلهٔ مقطع مخروطی مطلوب چنین است:

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$$

جواب منحصر به‌فرد است.

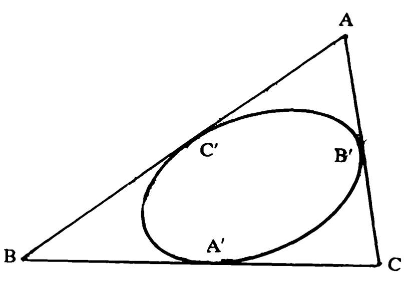
۷.۵.۳. قضیه. خط l اضلاع BC، CA، و AB از مثلث ABC را به‌ترتیب در نقاط A_1، B_1، و C_1 قطع کرده است. بر اضلاع مذکور به‌ترتیب نقاط A_2، B_2، و C_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\overline{BA_2}=\overline{A_1C}$، $\overline{CB_2}=\overline{B_1A}$، و $\overline{AC_2}=\overline{C_1B}$. ثابت کنید شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

برهان. بنابر قضیهٔ (۵.۵.۳) شش نقطهٔ A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 بر یک مقطع مخروطی که آن را $\mathscr{C}$ می‌نامیم قرار دارند. سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ بر یک خط راست قرار دارند. پس مقطع مخروطی مذکور به‌دو خط راست که یکی از آنها همان خط l است تجزیه می‌شود. بنابراین سه نقطهٔ A_2، B_2، و C_2 بر یک خط راست قرار دارند.



۸.۵.۳ قضیه. یک بیضی منحصر به‌فرد وجود دارد که بر اوساط اضلاع یک مثلث مفروض می‌گذرد و در این نقاط بر اضلاع مثلث مماس است.

برهان. شکل قضیهٔ (۶.۵.۳) را در نظرمی‌گیریم. اگر مقادیر α، β، و γ را به‌ترتیب به‌سوی $\frac{a}{2}$، $\frac{b}{2}$، و $\frac{c}{2}$ میل دهیم آنگاه سه زوج نقطهٔ (A_1, A_2)، (B_1, B_2)، و (C_1, C_2) به‌ترتیب به‌سوی نقاط A'، B'، و C' میل خواهند کرد. حد مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ که بر شش نقطه A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 می‌گذرد هنگامی که α، β، و γ به‌ترتیب به‌سوی $\frac{a}{2}$، $\frac{b}{2}$، و $\frac{c}{2}$ میل می‌کنند یک بیضی است که بر اوساط اضلاع مثلث ABC می‌گذرد و در این نقاط بر اضلاع مثلث مفروض مماس است.



۹.۵.۳ یک *مسئلهٔ جالب*. مثلث ABC در صفحهٔ P مفروض است. ثابت کنید در فضا مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود دارد به‌طوری که تصویر قائم آن بر صفحهٔ P، مثلث مفروض ABC است.

بنابر قضیهٔ (۸.۵.۳) یک بیضی منحصر به‌فرد E وجود دارد به‌طوری که در نقاط A'، B'،

MATH75.IR

و C' اوساط اضلاع مثلث ABC، بر اضلاع مثلث مذکور مماس است. محور اطول این بیضی را MN و محور اقطر آن را KL می‌نامیم. بر خط MN صفحهٔ P' را طوری می‌گذرانیم که با صفحهٔ P، زاویهٔ α بسازد. به‌طوری که $\cos\alpha = \frac{KL}{MN}$ (دو صفحه می‌توان بر خط MN عبور داد که با صفحهٔ P زاویهٔ α بسازند).

در صفحهٔ P' دایره‌ای به‌قطر MN رسم می‌کنیم و آن را γ می‌نامیم. تصویر دایرهٔ γ بر صفحهٔ P، همان بیضی E است. در صفحهٔ P'، سه نقطهٔ A_1، B_1، و C_1 را طوری اختیار می‌کنیم که تصاویر آنها بر صفحهٔ P، به‌ترتیب سه نقطهٔ A، B، و C باشند. مثلث ABC به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، مثلث متساوی‌الاضلاع مطلوب است. برای اثبات می‌گوییم اضلاع مثلث ABC بر دایرهٔ γ مماس‌اند و به‌علاوه، نقاط تماس این اضلاع با دایره γ، بر وسط هر یک از آن اضلاع قرار دارد پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

چون دو صفحه می‌توان تعیین کرد که بر خط MN بگذرند و با صفحهٔ P زاویهٔ α بسازند پس مسئله دارای دو جواب است.

۱۰.۵.۳. *کاربرد مسئلهٔ پیش.* مسئلهٔ پیش یعنی مسئلهٔ (۹.۵.۳) حائز اهمیت است. زیرا به‌ما اجازه می‌دهد که به‌جای آنکه یک خاصیت تصویری را در یک مثلث دلخواه ثابت کنیم همان خاصیت را فقط در مثلث متساوی‌الاضلاع ثابت کنیم و آن خاصیت را در هر مثلث دلخواه محقق بدانیم.

مثال. قضیه. ثابت کنید که در هر مثلث سه میانه متقارب‌اند.

برهان. در صفحهٔ P، مثلث ABC و سه میانهٔ آن AD، BE، و CF را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که سه خط مذکور متقارب‌اند. بنابر مطلب شماره (۹.۵.۳)، می‌توان در فضا یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ تعیین نمود به‌طوری که تصاویر آن بر صفحهٔ P، همان مثلث ABC باشد. در این مثلث متساوی‌الاضلاع میانه‌های نظیر اضلاع $B'C'$، $C'A'$، و $A'B'$ را به‌ترتیب $A'D'$، $B'E'$، و $C'F'$ می‌نامیم. چون مثلث متساوی‌الاضلاع نسبت به‌هر یک از میانه‌ها متقارن است پس سه میانه آن متقارب‌اند. از تقارب سه خط $A'D'$، $B'E'$، و $C'F'$ تقارب سه خط AD، BE، و CF نتیجه می‌شود (زیرا خطوط AD، BE، و CF به ترتیب تصاویر سه خط $A'D'$، $B'E'$، و $C'F'$ بر صفحهٔ P اند).

۱۱.۵.۳. قضیه. مثلث ABC مفروض است ثابت کنید اولاً یک بیضی منحصر به‌فرد E وجود دارد که بر مثلث ABC **محیط** است و در هر رأس، بر نیمساز داخلی مثلث عمود است. ثانیاً یک بیضی منحصر به‌فرد E' وجود دارد که در مثلث ABC محاط است و با بیضی E دارای کانونهای مشترک است. ثالثاً اگر نقاط تماس اضلاع BC، CA، و AB را با بیضی E' به‌ترتیب

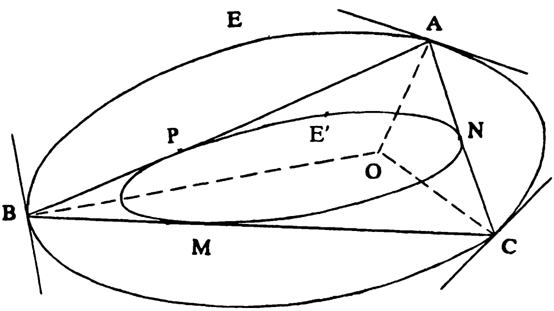
MATH75.IR

M، N، و P بنامیم روابط زیر برقرار است:

$$\overline{AP}+\overline{AN}-\widehat{PN}=\overline{BP}+\overline{BM}-\widehat{PM}=\overline{CM}+\overline{CN}-\widehat{MN} \qquad (۱)$$

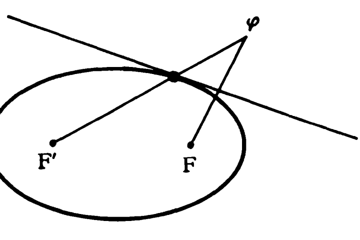
برهان. قسمت اول قضیه را در (۸.۵.۳) ثابت کردیم. اکنون به‌اثبات قسمت دوم می‌پردازیم. محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث را O و دوکانون بیضی E را F و F′ می‌نامیم. چون خط AO بر بیضی E در نقطهٔ A عمود است پس خط AO نیمساز زاویهٔ F′AF است (بنابر یکی از قضایای هندسه، خط قائم بر بیضی نیمساز زاویه دو شعاع حاملی است که از پای قائم بر بیضی می‌گذرند). به‌همین دلیل خطهای BO و CO به‌ترتیب نیمسازهای زاویه‌های F′BF و F′CF می‌باشند و لذا روابط زیر برقرار است:

$\angle BAF'=\angle CAF$ و $\angle ABF'=\angle CBF$ و $\angle BCF'=\angle ACF$



از سه رابطهٔ اخیرالذکر نتیجه می‌شود که یک بیضی منحصر به‌فرد E′ وجود دارد که در مثلث ABC محاط است و F، و F′ دو کانون آن می‌باشد. برای اثبات این مطلب دو قضیهٔ زیر را به‌کار می‌گیریم:

۱۲.۵.۳. *الف.* قضیه. بیضی $\mathscr{E}$ با دو کانون F و F′ را در نظر می‌گیریم. اگر ϕ قرینهٔ یکی از کانونها مثلاً کانون F نسبت به‌یک خط مماس بر بیضی باشد آنگاه خط $F'\phi$ بر نقطهٔ تماس می‌گذرد و به‌علاوه طول $F'\phi$ برابر با قطر اطول بیضی $\mathscr{E}$ است.

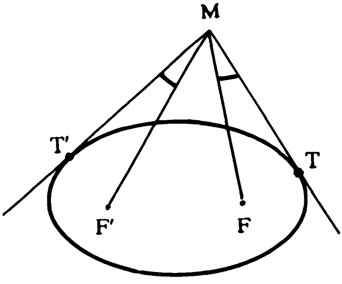


۱۲.۵.۳. ب. قضیه. اگر از نقطهٔ M دو مماس MT، و MT′ را بر بیضی $\mathscr{E}$ با دو کانون F و F′ رسم کنیم آنگاه چنین داریم:

$\angle TMF=\angle T'MF'$

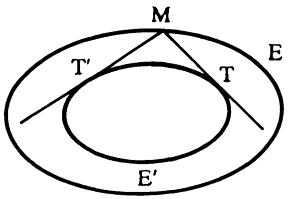
MATH75.IR

اکنون به‌کمک دو قضیهٔ اخیرالذکر بیضی E' را مشخص می‌کنیم. به‌این ترتیب قرینه نقطهٔ F را نسبت به‌خط AC تعیین می‌کنیم و آن‌را F_1 می‌نامیم. یک بیضی منحصر به‌فرد وجود دارد که F و F' دو کانون آن و طول $F'F_1$ طول قطر اطول آن باشد (بنابر قضیه‌الف). این‌بیضی بر خط AC مماس است و چون $\angle FAC=\angle F'AB$ پس این بیضی بر خط AB نیز مماس است (بنابر قضیهٔ ب). همچنین چون $\angle BCF'=\angle ACF$ پس بیضی مذکور بر خط BC مماس است.



برای اثبات قسمت سوم قضیه، قضیه گریوز (Graves) را به‌کار می‌گیریم. در سطور زیر قضیهٔ گریوز را ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ گریوز [1] (Graves) . اگر دو بیضی E و E' هم‌کانون باشند و از نقطهٔ M واقع بر بیضی خارجی E دومماس MT MT' را بر بیضی داخلی E' رسم کنیم هنگامی که نقطهٔ M روی بیضی E حرکت کند همواره مقدار عبارت $(\overline{MT}+\overline{MT'}-\widehat{TT'})$ ثابت می‌ماند. MT و MT' طولهای دو مماس و $\widehat{TT'}$ طول کمانی از بیضی E' است که تحدب آن به‌سوی نقطهٔ M است.



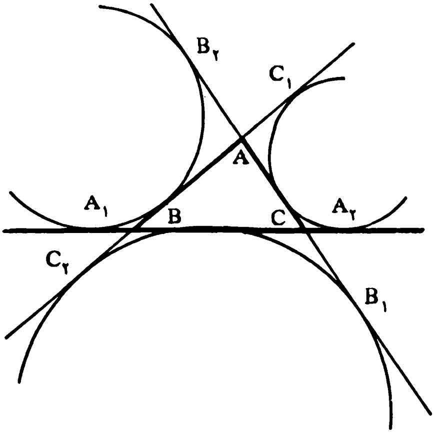
در قضیهٔ (۱۱.۵.۳) دو بیضی مورد بحث E و E' هم‌کانون‌اند. اگر نقطهٔ دلخواه M را روی بیضی E اختیار کنیم و دو مماس MT و MT' را بر بیضی E' رسم کنیم، بنابر قضیهٔ گریوز مقدار عبارت $(\overline{MT}+\overline{MT'}-\widehat{MM'})$ با حرکت نقطهٔ M بر بیضی E ثابت می‌ماند. چون سه نقطهٔ A، B، و C سه موضع خاص نقطهٔ $M\in E$ می‌باشند پس رابطه‌های (۱) برقرار است.

۱۳.۵.۳. قضیه. ثابت کنید نقاط تماس دایره‌های محاطی خارجی هر مثلث با امتداد اضلاع آن مثلث شش نقطه‌اند واقع بر یک مقطع مخروطی.

---

۱ - برای مطالعهٔ اثبات قضیهٔ گریوز، هندسه‌دان انگلیسی، رجوع کنید به‌کتاب آنالیز گورسا. چاپ پنجم، جلد اول، فصل چهارم (انتگرال‌های معین)، صفحهٔ ۲۰۲، چاپ ۱۹۲۷.

MATH75.IR



برهان. نقاط تماس دایره‌های محاطی خارجی را با امتداد اضلاع، A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، و C_2 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این شش نقطه بر یک خط راست قرار دارند.

سه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AC_1=BC_2 \text{ و } CB_1=AB_2 \text{ و } BA_1=CA_2$$

برای اثبات درستی رابطهٔ $BA_1=CA_2$ رابطهٔ $BA_2=CA_1=p$ را می‌نویسیم (رجوع کنید به‌برهان قضیهٔ ۳۲.۲) و از آن رابطهٔ $BA_1=CA_2$ را نتیجه می‌گیریم. اثبات درستی دو رابطهٔ $CB_1=AB_2$ و $AC_1=BC_2$ به‌نحو مشابه انجام می‌گیرد. پس سه زوج نقطهٔ (A_1,A_2)، (B_1,B_2)، و (C_1,C_2) به‌ترتیب نسبت به‌اوساط اضلاع BC، CA، و AB قرینه‌اند. بنابر قضیهٔ (۵.۵.۳) شش نقطهٔ مذکور بر یک مقطع مخروطی جای دارند.

۱۴.۵.۳. قضیه. مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید یک مقطع مخروطی منحصر به‌فرد وجود دارد که بر سه رأس مثلث ABC می‌گذرد و بر یک نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی مثلث عمود است.

برهان کاملاً مشابه با برهان قضیهٔ (۵.۵.۳) است.

MATH75.IR

۴

معادله‌های از درجه سوم و درجه‌های بالاتر

در این فصل با به‌کارگیری معادله‌های درجه سوم و درجه‌های بالاتر به‌مطالعهٔ بعضی خواص اشکال هندسی می‌پردازیم. این روش جبری امکان داده است تا بعضی قضایای پیچیده و سخت هندسی را به‌آسانی ثابت کنیم مثلاً قضیهٔ شش‌ضلعی پاسکال را به‌کمک یک معادلهٔ درجه سوم با شش متغیر به‌طریقهٔ بسیار آسانی ثابت کرده‌ایم (شماره ۶.۴). همچنین به‌کمک یک دستگاه متشکل از دو معادله که یکی از درجه سوم با شش متغیر و دیگری از درجه پنجم با شش متغیر است یک خاصیت مقطع مخروطی را نتیجه گرفته‌ایم (شماره ۷.۴). در شمارهٔ (۸.۴) قضیهٔ نیوتن را به‌کمک یک معادلهٔ درجه سوم چهار متغیری ثابت کرده‌ایم. در شمارهٔ (۹.۴) قضیهٔ اساسی قطب و قطبی را در مقطع مخروطی به‌کمک یک معادله درجه سوم چهار متغیری اثبات کرده‌ایم و بالاخره در شماره (۱۰.۴) قضیهٔ تازه‌ای دربارهٔ هشت‌ضلعی محاط در مقطع مخروطی عرضه کرده‌ایم که در حالتهای خاص خود قضیه‌های پاسکال و پاپوس را به‌دست می‌دهد.

در شماره (۱۱.۴) با به‌کارگیری تعمیم چند جمله‌ای لاگرانژ، معادلهٔ منحنی جبری با حداقل درجه و محیط بر n ضلعی کامل ارائه شده است. از نتایج این مطلب، حکمی است که در شمارهٔ (۶.۱۱.۴) عرضه شده که باید آن را تعمیم قضیه استورم دانست. بالاخره در شماره (۱۲.۴) حکمی کاملتر دربارهٔ چندضلعی کامل ارائه شده است.

MATH75.IR

۱.۴. قضیه

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ محاط[1] در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. رأسهای این n ضلعی رااز منحنی $\mathscr{C}$ حذف می‌کنیم و شکل حاصل را ϕ می‌نامیم[2]. محورهای x_1، x'_1، x_2، x'_2، ...، و x'_nx_n را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ را بر شکل ϕ اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اعدادی ثابت چون a_1، a_2، ...، و a_n وجود دارند به‌طوری که بین مختصات نقطهٔ M رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(1) \qquad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_n}{x_n} = 0$$

برهان. بنابر حکم (۲.۳.۳)، رابطهٔ (۱) در حالت $n=3$ برقرار است. برای اثبات رابطهٔ (۱) در حالت کلی روش استقراء ریاضی به‌کار می‌بریم یعنی می‌پذیریم که رابطهٔ (۱) برای یک p ضلعی $(p\geq 3)$ محاط در مقطع مخروطی برقرار است و ثابت می‌کنیم که آن رابطه برای یک $(p+1)$ ضلعی محاط در مقطع مخروطی نیز برقرار است و سپس نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ (۱) برای هر n ضلعی $(n\geq 3)$ محاط در مقطع مخروطی برقرار است.

حال $(p+1)$ ضلعی $A_1A_2...A_{p+1}$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم و با رسم خط A_1A_p آن را به‌مثلث $A_1A_pA_{p+1}$ و p ضلعی $A_1A_2...A_p$ تجزیه می‌کنیم، از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ رأسهای چندضلعی $A_1A_2...A_{p+1}$ را حذف می‌کنیم و شکل حاصل را ϕ_1 می‌نامیم. همچنین از حذف رأسهای p ضلعی $A_1A_2...A_p$ و رأسهای مثلث $A_1A_pA_{p+1}$ از منحنی $\mathscr{C}$ شکلهایی حاصل می‌شوند که آنها را به‌ترتیب ϕ_2 و ϕ_3 نام می‌دهیم.

محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و $x'_{p-1}x_{p-1}$، و $u'u$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، $\overrightarrow{A_{p-1}A_p}$، $\overrightarrow{A_pA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. محورهای x'_px_p، $x'_{p+1}x_{p+1}$، و $v'v$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_pA_{p+1}}$، و $\overrightarrow{A_1A_p}$ اختیار می‌کنیم.

اگر u و v به‌ترتیب فاصله‌های جبری یک نقطه از دو محور $u'u$ و $v'v$ باشند چنین داریم:

$$(2) \qquad u=-v$$

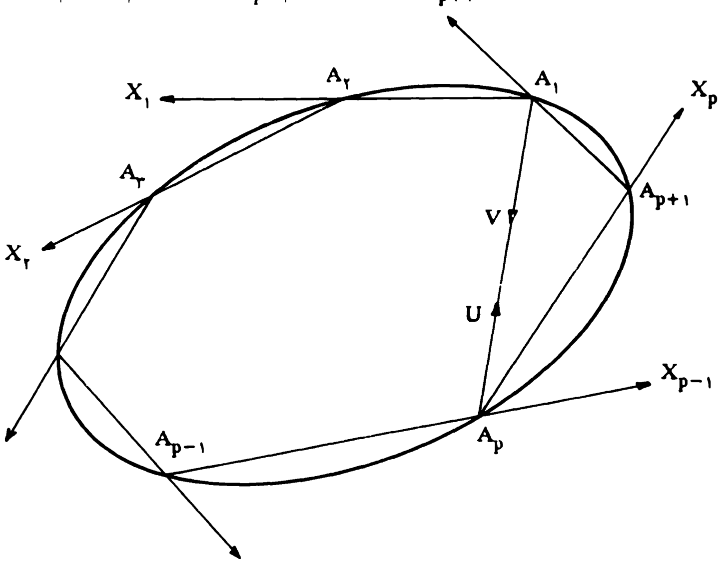
نقطهٔ دلخواه M از صفحه، در دو دستگاه مختصاتِ $x_1x_2...x_{p-1}\,u$ و $x_px_{p+1}v$، به‌ترتیب دارای مختصات $(x_1, x_2, ..., x_{p-1}, u)$ و (x_p, x_{p+1}, v) است. بنابر فرض استقراء، اعدادی چون a_1، a_2، ...، a_{p-1}، و b وجود دارند به‌طوری که مختصات نقطهٔ $M(x_1, x_2, ..., x_{p-1}, u)$ از شکل ϕ_2، در دستگاه مختصات $x_1x_2...x_{p-1}\,u$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

---

۱ ـ منظور آن است که رأسهای n ضلعی بر مقطع مخروطی جای دارند.

۲ ـ شکل ϕ از n کمان مجزا تشکیل شده است.

$$(٣) \quad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{x_{p-1}} + \frac{b}{u} = 0$$



بنابر معادلهٔ (٧) مذکور در شمارهٔ (٢.٣.٣)، اعدادی چون c، d، و e وجود دارند به‌طوری که مختصات هر نقطه $M(x_p, x_{p+1}, v)$ از شکل ϕ_3، در دستگاه مختصات سه‌محوری $x_p x_{p+1} v$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$(۴) \quad \frac{c}{x_p} + \frac{d}{x_{p+1}} + \frac{e}{v} = 0$$

اگر دو طرف رابطهٔ (۴) را در $\frac{b}{e}$ ضرب کنیم و مقادیر $\frac{b.c}{e}$ و $\frac{b.d}{e}$ را به‌ترتیب a_{p-1} و a_p بنامیم، رابطهٔ (۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(۵) \quad \frac{a_p}{x_p} + \frac{a_{p+1}}{x_{p+1}} + \frac{b}{v} = 0$$

از جمع دو رابطهٔ (٣) و (۵) عضو به‌عضو با رعایت رابطهٔ (٢)، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(۶) \quad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_p}{x_p} + \frac{a_{p+1}}{x_{p+1}} = 0$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴.۱.۱. رابطهٔ بین مختصات نقاط منحنی $\mathscr{C}$. رابطهٔ (١)، رابطه‌ای بین مختصات نقاط منحنی ϕ است. از رابطهٔ (١) نتیجه می‌شود که مختصات نقاط مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(٧) \quad a_1 x_2 x_3 \dots x_n + a_2 x_1 x_3 \dots x_n + \dots + a_n x_1 x_2 \dots x_{n-1} = 0$$

MATH75.IR

معادلهٔ (۶) دارای n جمله است. a_1، a_2، ...، و a_n ضرایب‌اند. جمله‌ای که دارای ضریب a_i; $i\in\{1,2,...,n\}$ است شامل $(n-1)$ عضو متمایز از مجموعه

$$\{x_1,x_2,...,x_n\}$$

است که دارای زیرنویس i نمی‌باشند.

۴.۱.۲. تعبیر هندسی ضرایب معادلهٔ (۱) از قضیهٔ ۴.۱. در سطور آینده حکمی دربارهٔ چندضلعی محاط در دایره عرضه می‌کنیم که تعبیری هندسی برای ضرایب معادلهٔ (۱)، هنگامی که چندضلعی قابل محاط شدن در دایره باشد، به‌دست می‌دهد. سپس از این حکم، با تبدیل تصویر، حکمی در بیضی نتیجه می‌گیریم که تعبیر هندسی برای ضرایب معادله (۱)، هنگامی که چندضلعی قابل محاط شدن در بیضی باشد به‌دست می‌دهد.

الف. تعبیر هندسی ضرایب معادلهٔ (۱) از قضیهٔ (۴.۱) وقتی که منحنی $\mathscr{C}$ دایره است. چندضلعی $A_1A_2...A_n$ محاط در دایره $\Gamma(O,r)$ را در نظر می‌گیریم و محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و x'_nx_n را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. اندازه‌های زاویه‌های مرکزی $A_1\widehat{O}A_2$، $A_2\widehat{O}A_3$، ...، و $A_n\widehat{O}A_1$ را به‌ترتیب با $2\alpha_1$، $2\alpha_2$، ...، $2\alpha_n$ نشان می‌دهیم. اگر از دایرهٔ Γ، رأسهای n ضلعی مذکور را حذف کنیم شکلی حاصل می‌شود که آن را Γ_1 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که مختصات هر نقطه از شکل Γ_1، در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\sin\alpha_1}{x_1}+\frac{\sin\alpha_2}{x_2}+...+\frac{\sin\alpha_n}{x_n}=0 \qquad (8)$$

برهان. ابتدا درستی رابطهٔ (۷) را در مورد یک مثلث ثابت می‌کنیم. سپس با به‌کار بردن روش استقرای ریاضی، حکم را در حالت کلی ثابت می‌کنیم.

مثلث $A_1A_2A_3$ محاط دردایره $\Gamma(O,r)$ را درنظر می‌گیریم. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، و x'_3x_3 را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. بین زاویه‌های A_1، A_2، و A_3 از مثلث $A_1A_2A_3$ و اندازه‌های زاویه‌های مرکزی $2\alpha_1$، $2\alpha_2$، و $2\alpha_3$ روابط زیر برقرار است:

$$A_1=\alpha_1 \text{ و } A_2=\alpha_2 \text{ و } A_3=\alpha_3 \qquad (9)$$

بنابر معادلهٔ (۴) مشروح در شماره (۴.۳.۳.الف) و با توجه به‌روابط (۸)، مختصات هر نقطه $M(x_1,x_2,x_3)$ از دایره Γ سوده در نقاط A_1، A_2، و A_3 در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\sin\alpha_1}{x_1}+\frac{\sin\alpha_2}{x_2}+\frac{\sin\alpha_3}{x_3}=0 \qquad (10)$$

حال به‌کمک رابطهٔ (۲)، و با به‌کارگیری روش استقرای ریاضی به‌شیوه‌ای کاملاً مشابه با آنچه

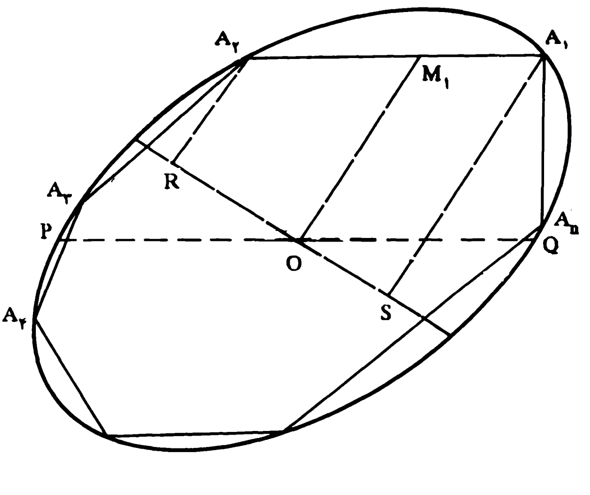
در اثبات قضیهٔ شمارهٔ (۱.۴) ذکر شد درستی رابطهٔ (۸) ثابت می‌شود.

روابط $a_1=\sin\alpha_1$، $a_2=\sin\alpha_2$،...، و $a_n=\sin\alpha_n$ تعبیر هندسی برای ضرایب معادلهٔ (۱) به‌دست می‌دهند.

نتیجه. مختصات نقاط دایره Γ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x_2x_3\dots x_n\sin\alpha_1+x_1x_3\dots x_n\sin\alpha_2+\dots+x_1x_2\dots x_{n-1}\sin\alpha_n=0$$

ب. تعبیر هندسی ضرایب معادلهٔ (۱)، وقتی که منحنی $\mathscr{C}$ بیضی است. چندضلعی $A_1A_2\dots A_n$ محاط در بیضی E به‌مرکز O را در نظر می‌گیریم. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، x'_nx_n را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ... و $\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم (شکل زیر). وسطهای وترهای A_1A_2، A_2A_3، ...، و A_nA_1 را به‌ترتیب M_1، M_2، ...، و M_n می‌نامیم.



طولهای قطرهایی از بیضی E را که موازی با وترهای A_1A_2، A_2A_3، ...، A_nA_1 می‌باشند به‌ترتیب با d_1، d_2، ...، و d_n نشان می‌دهیم. اندازه‌های تصویرهای وترهای A_1A_2، A_2A_3، ...،و A_nA_1 را به‌ترتیب بر خطهای عمود بر OM_1، OM_2، ...، و OM_n با p_1، p_2، ...، و p_n نشان می‌دهیم. در شکل بالا $PQ=d_1$ و $RS=p_1$.

مختصات هر نقطه از بیضی E، سوده در نقاط A_1، A_2، ...، و A_n، در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{\frac{p_1}{d_1}}{x_1}+\frac{\frac{p_2}{d_2}}{x_2}+\dots+\frac{\frac{p_n}{d_n}}{x_n}=0 \qquad (11)$$

MATH75.IR

روابط $a_1=\frac{p_1}{d_1}$، $a_2=\frac{p_2}{d_2}$، ... ، و $a_n=\frac{p_n}{d_n}$، تعبیر هندسی از ضرایب معادله (۱) به‌دست می‌دهند.

اثبات مطلب را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۲.۴. رابطه‌ای بین مختصات نقاط یک مخروطی محیط بر یک (۲n)ضلعی

مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و (۲n) ضلعی $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ محاط در آن را در نظر می‌گیریم. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و $x'_{2n}x_{2n}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_{2n}A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر نقطهٔ $M(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$، یک نقطهٔ دلخواه از منحنی $\mathscr{C}$ باشد آنگاه بین مختصات آن نقطه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(1)\quad px_1x_3\ldots x_{2n-1}+qx_2x_4\ldots x_{2n}=0$$

در رابطهٔ (۱)، x_1، x_2، ...، و x_{2n} متغیراند و p و q دو عدد ثابت‌اند (ضریبها). جمله‌ای که دارای ضریب p است شامل n عضو متمایز از مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$ است که دارای زیرنویسهای فرداند و جمله‌ای که دارای ضریب q است شامل n عضو متمایز از مجموعهٔ مذکور است که دارای زیرنویسهای زوج‌اند.

در حالت خاص که مقطع مخروطی دایره باشد، رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

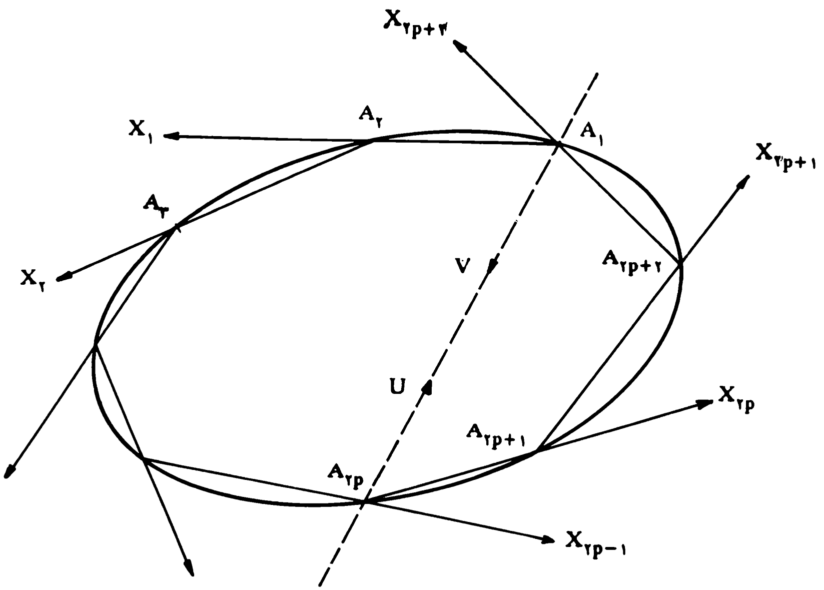
$$(2)\quad x_1x_3\ldots x_{2n-1}+\varepsilon x_2x_4\ldots x_{2n}=0 \quad ; \varepsilon\in\{-1 \text{ و } 1\}$$

برهان ۱. حکم در حالت n=۲ یعنی در یک چهارضلعی محاطی صادق است (رجوع کنید به (۴.۳.۳. ب). برای اثبات مطلب در حالت کلی، روش استقرای ریاضی به‌کار می‌بریم یعنی می‌پذیریم که رابطهٔ (۱)، در مورد یک (۲p) ضلعی (p≥۲) برقرار است و سپس ثابت می‌کنیم که آن رابطه در مورد یک ۲(p+۱) ضلعی نیز برقرار است و نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ (۱) در مورد هر (۲n) ضلعی (n≥۲) برقرار است.

حال ۲(p+۱) ضلعی $A_1A_2\ldots A_{2(p+1)}$ را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). با رسم قطر A_1A_{2p} آن را به ۲p ضلعی محاطی $A_1A_2\ldots A_{2p-1}A_{2p}$ و چهارضلعی محاطی $A_1A_{2p}A_{2p+1}A_{2p+2}$ تجزیه می‌کنیم. محور u'u را منطبق بر بردار $\overrightarrow{A_{2p}A_1}$ و هم‌سو با آن و همچنین محور v'v را منطبق بر بردار $\overrightarrow{A_1A_{2p}}$ و هم‌سو با آن اختیار می‌کنیم. اگر u و v فاصله‌های جبری یک نقطهٔ صفحه از دو محور u'u و v'v باشند چنین داریم:

$$(3)\quad u=-v$$

MATH75.IR



مختصات نقطهٔ M از صفحه شکل، در سه دستگاه مختصاتِ $x_1x_2\ldots x_{2p+1}x_{2p+2}$، $x_1x_2\ldots x_{2p-1}u$، و $x_{2p}x_{2p+1}x_{2p+2}v$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $(x_1,x_2,\ldots,x_{2p+1},x_{2p+2})$، $(x_1,x_2,\ldots,x_{2p-1},u)$، و $(x_{2p},x_{2p+1},x_{2p+2},v)$. بنابر حکم (۴.۳.۳. ب)، مختصات نقطهٔ M واقع بر منحنی $\mathscr{C}$ ، در دستگاه مختصات چهارمحوری $x_{2p}x_{2p+1}x_{2p+2}v$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$p_1 \cdot x_{2p+1} \cdot v+q_1 \cdot x_{2p} \cdot x_{2p+2}=0 \qquad (4)$$

در رابطهٔ (۴)، p_1 و q_1 دو عدد ثابت‌اند (ضریبهای معادله). بنابر فرض استقراء، در (2p) ضلعی $A_1A_2\ldots A_{2p}$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$p_2.x_1.x_3\ldots x_{2p-1}+q_2.x_2.x_4\ldots u=0 \qquad (5)$$

در رابطهٔ (۵)، p_2 و q_2 دو عدد ثابت‌اند (ضرایب معادله).

از دو رابطهٔ (۴) و (۵)، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$p_1.p_2.x_1.x_3\ldots x_{2p+1}.v-q_1q_2x_2x_4\ldots x_{2p+2}u=0 \qquad (6)$$

اگر قرار دهیم $p_1p_2=p$ و $q_1q_2=-q$، رابطهٔ (۶) با توجه به‌رابطهٔ (۳) به‌صورت رابطهٔ (۱) درمی‌آید.

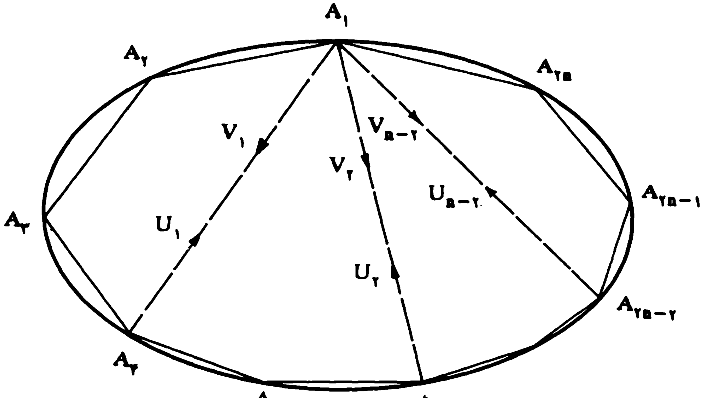
برای اثبات درستی رابطهٔ (۲) در دایره، همان شیوه استدلالی را که برای اثبات درستی رابطهٔ (۱) به‌کار بردیم به‌کار می‌بریم و به‌جای رابطهٔ (۴)، از رابطهٔ

MATH75.IR

$$x_{2p+1}.v+\varepsilon x_{2p}.x_{2p+2}=0$$

استفاده می‌کنیم (رجوع شود به‌شمارهٔ ۴.۳.۳. ب).

برهان ۲. (۲n) ضلعی $A_1A_2...A_{2n}$ را با رسم قطرهای A_1A_4، A_1A_6، ...، و A_1A_{2n-2}، به (n−۱) چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، $A_1A_4A_5A_6$، ...، و $A_1A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ تجزیه می‌کنیم (شکل زیر). محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و $x'_{2n}x_{2n}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_{2n}A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.



محورهای u'_1u_1، u'_2u_2، ...، و $u'_{n-2}u_{n-2}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_4A_1}$، $\overrightarrow{A_6A_1}$، ...، و $\overrightarrow{A_{2n-2}A_1}$ و هم‌سو باآنها اختیارمی‌کنیم. همچنین محورهای v'_1v_1، v'_2v_2، ...، و $v'_{n-2}v_{n-2}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_4}$، $\overrightarrow{A_1A_6}$، ...، و $\overrightarrow{A_1A_{2n-2}}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. فاصله‌های جبری هر نقطه از صفحه شکل از محورهای u'_1u، u'_2u_2، ...، $u'_{n-2}u_{n-2}$، v'_1v_1، v'_2v_2، ...، و $v'_{n-2}v_{n-2}$ در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} u_1=-v_1 \\ v_2=-v_2 \\ \cdots\cdots \\ u_{n-2}=-v_{n-2} \end{cases}$$

حکم مشروح در شماره (۴.۳.۳.ب) را دربارهٔ هر یک از چهارضلعیهای $A_1A_2A_3A_4$، $A_1A_4A_5A_6$، ...، و $A_1A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را به‌کار می‌بریم؛ این‌چنین:

ابتدا حکم (۴.۳.۳.ب) را دربارهٔ چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، به‌کار می‌بریم: می‌گوییم مختصات (x_1, x_2, x_3, u_1) هرنقطهٔ M از منحنی $\mathscr{C}$ در دستگاه مختصات چهار محوری $x_1x_2x_3u_1$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$(1) \qquad p_1.x_1.x_3+q_1.x_2.u_1=0$$

در رابطهٔ (۱)، p_1 و q_1 دو عدد ثابت‌اند (ضرایب).

حال حکم (۴.۳.۳.ب) را دربارهٔ چهارضلعی $A_1A_4A_5A_6$ به‌کار می‌بریم: می‌گوییم مختصات نقطهٔ $M(v_1, x_4, x_5, u_2)$ از منحنی $\mathscr{C}$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(2) \qquad p_2.v_1.x_5+q_2.x_4.u_2=0$$

در رابطهٔ (۲)، p_2 و q_2 دو عدد ثابت‌اند (ضرایب).

به‌همین شیوه‌حکم (۴.۳.۳.ب) را دربارهٔ بقیهٔ چهارضلعیهای حاصل‌از تجزیه (۲n)ضلعی $A_1A_2 \dots A_{2n}$ به‌کار می‌بریم.

از به‌کارگیری حکم (۴.۳.۳.ب) دربارهٔ چهارضلعی $A_1A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(n-2) \qquad p_{n-2}.v_{n-2}.x_{2n-1}+q_{n-2}.x_{2n-2}.x_{2n}=0$$

در رابطه (n−۲)، p_{n-2} و q_{n-2} دو عدد ثابت‌اند (دو ضریب).

از رابطه‌های (۱)، (۲)، ... ، و (n−۲)، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$p_1p_2 \dots p_{n-2}x_1x_3 \dots x_{2n-1}v_1v_2 \dots v_{n-2}+(-1)^{n-1}q_1q_2 \dots q_{n-2}x_2x_4 \dots x_{2n}u_1u_2 \dots u_{n-2}=0$$

اگر قرار دهیم $p_1p_2 \dots p_{n-2}=p$ و $(-1)^{n-1}q_1q_2 \dots q_{n-2}=q$، با توجه به‌رابطه‌های (I)، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$px_1x_3 \dots x_{2n-1}+qx_2x_4 \dots x_{2n}=0$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳.۴. حالت کلی قضیهٔ پاپوس در مقطع مخروطی

(۲n) ضلعی $A_1A_2 \dots A_{2n}$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. تصاویر یک نقطهٔ M از منحنی $\mathscr{C}$ را بر خطهای A_1A_2، A_2A_3، ...، و $A_{2n}A_1$ به‌ترتیب H_1، H_2، ...، و H_{2n} می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم هنگامی که نقطهٔ M روی منحنی $\mathscr{C}$ حرکت کند رابطهٔ زیر برقرار است:

$$P.MH_1.MH_3 \dots MH_{2n-1}=q.MH_2.MH_4 \dots MH_{2n}$$

p و q دو عدد ثابت‌اند. به‌عبارت دیگر حاصل‌ضرب فواصل هر نقطه از یک مقطع مخروطی از n ضلع متناوب یک (۲n) ضلعی محاط در آن مقطع مخروطی متناسب است با حاصل‌ضرب فواصل آن نقطه از n ضلع متناوب دیگر (۲n) ضلعی مفروض.

برهان. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و $x'_{2n}x_{2n}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_{2n}A_1}$، و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. اگر $M(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ یک نقطه از منحنی $\mathscr{C}$ باشد چنین داریم:

MATH75.IR

$$(۱) \quad \begin{cases} |x_۱| = MH_۱ \\ |x_۲| = MH_۲ \\ .... \end{cases}$$

با به‌کارگیری حکم مشروح در شماره (۲.۴) و توجه به‌رابطه‌های (۱)، قضیه مورد نظر ثابت می‌شود.

۴.۴. معادلهٔ منحنی جبری از درجهٔ n و محیط بر یک (۲n) ضلعی

(۲n) ضلعی $A_۱A_۲...A_{۲n}$ را در نظر می‌گیریم. محورهای $x'_۱x_۱$، $x'_۲x_۲$، ...، و $x'_{۲n}x_{۲n}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_۱A_۲}$، $\overrightarrow{A_۲A_۳}$، ... ، و $\overrightarrow{A_{۲n-۱}A_{۲n}}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم معادلهٔ منحنی جبری درجه n امی را که بر رأسهای چندضلعی مذکور می‌گذرد بنویسیم. این منحنی را γ می‌نامیم.

معادلهٔ جبری مطلوب درجه n، از (۲n) متغیر $x_۱$، $x_۲$، ...، و $x_{۲n}$ به‌صورت زیر است:

$$(۱) \quad f(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) = ۰$$

که در آن

$$(۲) \quad f(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) = \phi_n(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) + \phi_{n-۱}(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) + \\ + ... + \phi_۱(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) + \phi_۰(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n})$$

در تساوی بالا، تابعهای ϕ_n، $\phi_{n-۱}$، ...، $\phi_۱$، و $\phi_۰$ عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای همگن از متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n. درجه‌های این چندجمله‌ایها به‌ترتیب عبارت‌اند از n، n−۱، ...، ۱، و ۰ ($\phi_۰$ مقداری است ثابت).

چندجمله‌ای ϕ_n چنین است:

$$(۳) \quad \phi_n(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) = \sum_{i=۱}^{۲n} \sum_{j=۱}^{۲n} .... \sum_{r=۱}^{۲n} \sum_{s=۱}^{۲n} a_{ij...rs} . x_i . x_j ... x_r . x_s$$

در عبارت (۳)، هرجمله شامل یک‌ضریب و n متغیر متمایز یا غیرمتمایز از مجموعهٔ زیر است

$$(۴) \quad E = \{x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}\}$$

در همان عبارت (۳)، چندجمله‌ای $\phi_{n-۱}$ چنین است:

$$(۵) \quad \phi_{n-۱}(x_۱, x_۲, ..., x_{۲n}) = \sum_{i=۱}^{۲n} \sum_{j=۱}^{۲n} ... \sum_{r=۱}^{۲n} a_{i,j,,...,r} x_i x_j ... x_r$$

در عبارت (۵)، هر جمله شامل یک ضریب و $(n-1)$ متغیر متمایز یا غیرمتمایز از مجموعه (۴) است. به‌همین قیاس مجموع جمله‌های درجه $(n-2)$، ...، مجموع جمله‌های درجه اول، و مقدار ثابت نوشته می‌شود.

حال می‌گوییم که چون منحنی γ باید از نقاط A_1، A_2، ...، و A_{2n} بگذرد پس باید روابط زیر برقرار باشد

$$(6)\quad \begin{cases} f(0, x_2, \dots, x_{2n-1}, 0)=0 \\ f(0, 0, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, 0, 0)=0 \end{cases}$$

معادلهٔ (۱)، با رعایت روابط (۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$(7)\quad f(x_1, x_2, \dots, x_{2n})=px_1x_3\dots x_{2n-1}+qx_2x_4\dots x_{2n}=0$$

در معادلهٔ (۷)، p و q دو عدد ثابت‌اند (ضرایب).

منحنی γ مشمول نمودار معادلهٔ (۷). نمودار معادلهٔ (۷) را Γ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که منحنی Γ بر نقاطی که از برخورد خطوط اضلاع $(2n)$ ضلعی مفروض به‌طور m درمیان (m عددی است زوج: صفر، دو، ...) حاصل می‌شوند می‌گذرد. نقاط حاصل از تقاطع خطوط اضلاع، به‌ازای $m=0$ همان رأسهای $(2n)$ ضلعی مفروض می‌باشند.

برای اثبات می‌گوییم تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ مذکور در شماره (۷)، به‌ازای $x_i=0$ و $x_j=0$ که در آنها i و j به‌ترتیب دو عدد فرد و زوج از مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ می‌باشند صفر می‌شود.

حالتهای خاص

الف. اگر $n=2$ باشد، $(2n)$ ضلعی مورد بحث یک چهارضلعی است. در این صورت منحنی γ یک مقطع مخروطی است. منحنی Γ همان مقطع مخروطی γ است.

ب. اگر $n=3$ باشد، $(2n)$ ضلعی مورد بحث یک شش ضلعی است. اگر این شش ضلعی در یک مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ محاط باشد، آنگاه منحنی Γ از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و یک خط راست تشکیل می‌شود (قضیهٔ پاسکال).

پ. اگر $n=4$ باشد، $(2n)$ ضلعی مورد بحث یک هشت‌ضلعی است. اگر رأسهای این

هشت‌ضلعی بر یک مقطع مخروطی قرار داشته باشد، آنگاه منحنی Γ از دو مقطع مخروطی تشکیل می‌شود.

قضیه. مکان هندسی نقاطی که حاصل‌ضرب فواصل آنها از n ضلع متناوب یک (۲n) ضلعی مساوی با حاصل‌ضرب فواصل همان نقاط از n ضلع متناوب دیگر باشد یک منحنی جبری درجه n به‌معادلهٔ

$$px_1x_3...x_{2n-1}+qx_2x_4...x_{2n}=0$$

است. این منحنی بر نقاطی که از برخورد خطوط اضلاع (۲n) ضلعی مفروض به‌طور m درمیان (m عددی است زوج: ۰، ۲، ...) حاصل می‌شوند می‌گذرد.

برای اثبات از حکم ۴.۴ استفاده می‌کنیم.

۵.۴. تجزیه‌پذیری منحنیِ جبری با کمترین درجه و محیط بر (۲n)ضلعی کامل

۱.۵.۴. *قرارداد.* n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را در نظر می‌گیریم و آن را با p نشان می‌دهیم. خطوط اضلاع این n ضلعی را به‌طور یک‌درمیان، دودرمیان، ... ، و k درمیان امتداد می‌دهیم.

$$k=\frac{n-2}{2}\quad \text{اگر n زوج باشد}$$

$$k=\frac{n-3}{2}\quad \text{اگر n فرد باشد}$$

از تقاطع اضلاع n ضلعی مفروض، به‌طور یک درمیان، دودرمیان، ... ، و k درمیان، مجموعه‌هایی از نقاط حاصل می‌شود که آنها را به‌ترتیب با $P_{n,1}$، $P_{n,2}$، ...، و $P_{n,k}$ نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ متشکل از رأسهای n ضلعی مفروض را با $P_{n,0}$ نشان می‌دهیم.

۲.۵.۴. قضیه. (۲n) ضلعی $A_1A_2...A_{2n}$ را در نظر می‌گیریم. از تقاطع خطوط اضلاع این (۲n) ضلعی، یک ۲n ضلعی کامل که آن را P می‌نامیم حاصل می‌شود. از تقاطع خطوط اضلاع این (۲n) ضلعی به‌طور صفر درمیان، یک‌درمیان، دودرمیان، ... ، و (n−۱) درمیان مجموعه‌های نقاط $P_{2n,0}$، $P_{2n,1}$، $P_{2n,2}$، ...، و $P_{2n,(n-1)}$ حاصل می‌شود. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و $x'_{2n}x_{2n}$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

الف. معادلهٔ منحنی جبری Γ از درجهٔ (۲n−۱) و محیط بر یک ۲n ضلعی کامل به‌صورت زیر است:

$$(1)\qquad a_1x_2x_3x_4...x_{2n}+a_2x_1x_3x_4...x_{2n}+...+a_{2n}x_1x_2x_3...x_{2n-1}=0$$

MATH75.IR

معادلهٔ (۱)، دارای (۲n) جمله است. ضرایب این جمله‌ها عبارت‌اند از a_1، a_2، ...، و a_{2n}. جمله‌ای که دارای ضریب a_i ، $1 \leq i \leq 2n$ است شامل (۲n−۱) عضو متمایز از مجموعه

$$E=\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$$

می‌باشد که دارای زیرنویس i نمی‌باشند.

ب. معادلهٔ (۱)، به‌دو معادلهٔ به‌صورتهای (۲) و (۳) مذکور در زیر تجزیه می‌شود. نمودار معادله (۲) بر مجموعه نقاط $P_{2n,0}$، $P_{2n,2}$، ...، و $P_{2n,(n-1)}$ می‌گذرد. همچنین نمودار معادلهٔ (۳) بر مجموعه نقاط $P_{2n,1}$، $P_{2n,3}$، ...، و $P_{2n,(2n-3)/2}$ می‌گذرد.

$$(2)\qquad px_1x_3\ldots x_{2n-1}+qx_2x_4\ldots x_{2n}=0$$

در معالهٔ (۲)، p و q دو ضریب‌اند. جمله‌ای که دارای ضریب p است شامل n متغیر متمایز از مجموعه E است که دارای زیرنویس فرداند. جمله‌ای که دارای ضریب q است شامل n متغیر متمایز از مجموعه E است که دارای زیرنویس زوج‌اند.

$$(3)\qquad A_1x_3x_5\ldots x_{2n-1}+A_2x_4x_6\ldots x_{2n}+\ldots+A_{2n}x_2x_4\ldots x_{2n-2}=0$$

معادلهٔ (۳)، دارای (۲n) جمله است. A_1، A_2، ...، و A_{2n} اعداد ثابت‌اند (ضرایب). جمله‌ای که دارای ضریب a_i است شامل (n−۱) متغیر متمایز از مجموعه E است که زیرنویسهای آنها از نظر زوجیت و یا فردیت همانند i می‌باشند؛ جملهٔ مذکور شامل متغیر x_i نیست.

برهان. برای مطالعه اثبات قسمت (الف) رجوع کنید به‌شماره (۲.۱۱.۴).

برای مطالعهٔ درستی معادلهٔ (۲)، رجوع کنید به‌شماره (۴.۴).

اثبات تجزیه‌پذیری منحنی Γ: در معادلهٔ (۳)، در جملاتی که ضرایب آنها دارای زیرنویس فرداند حاصل‌ضرب $x_2x_4\ldots x_{2n}$ را عامل مشترک قرار می‌دهیم و همچنین در جملاتی که ضرایب آنها دارای زیرنویس زوج‌اند حاصل‌ضرب $x_1x_3\ldots x_{2n-1}$ را عامل مشترک قرار می‌دهیم، معادلهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(4)\qquad x_1x_3\ldots x_{2n-1}f(x_2, x_4, \ldots, x_{2n})+x_2x_4\ldots x_{2n}g(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1})=0$$

که در آن

$$(5)\qquad \begin{cases} f(x_2, x_4, \ldots, x_{2n}) = a_2x_4x_6\ldots x_{2n}+a_4x_2x_6\ldots x_{2n}+\ldots+a_{2n}x_2x_4\ldots x_{2n-2} \\ g(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1})=a_1x_3x_5\ldots x_{2n-1}+a_3x_1x_5\ldots x_{2n-1}+\ldots+a_{2n-1}\,x_1x_3\ldots x_{2n-3} \end{cases}$$

معادلهٔ (۴)، با رعایت معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(6)\qquad pg(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}) - qf(x_2, x_4, \ldots, x_{2n})=0$$

قرار می‌دهیم:

$$(7)\qquad \begin{cases} pa_1=A_1\ ,\ pa_3=A_3\ ,\ \ldots\ ,\ pa_{2n-1}=A_{2n-1} \\ -qa_2=A_2\ ,\ -qa_4=A_4\ ,\ \ldots\ ,\ -qa_{2n}=A_{2n} \end{cases}$$

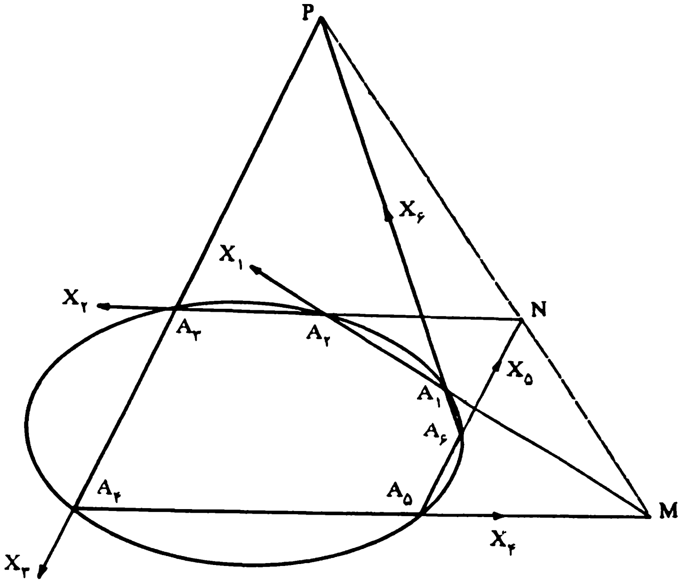
معادلهٔ (۶)، با توجه به‌قراردادهای (۷) به‌صورت معادلهٔ (۳) درمی‌آید.

MATH75.IR

۶.۴. قضیه پاسکال[1]

در هر شش ضلعی محاط در مقطع مخروطی، نقاط برخورد ضلعهای روبه‌رو، بر یک خط راست قرار دارند.

برهان. شش‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم.



---

۱ ـ بلز پاسکال (۱۶۶۲ ـ ۱۶۲۳) ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف، و نویسندهٔ مشهور فرانسوی است. در شانزده‌سالگی کتابی در مقطع مخروطی منتشرنمود. در هجده‌سالگی یک ماشین حساب اختراع کرد. وی دارای تحقیقات دربارهٔ فشار جو و تعادل مایعات است. از جمله ابداعات پاسکال، یک مثلث حسابی است که به‌نام اوست (این مثلث حسابی قبلاً به‌وسیلهٔ دانشمند ایرانی خیام ابداع شده است. خیام همچنین قبل از دکارت هندسه تحلیلی را بنیان نهاد. خیام معادلات درجه سوم و چهارم را با تقاطع منحنیهای درجه دوم حل کرد. این روش براستی بنیانگذاری هندسه تحلیلی است). پاسکال و فرما از بنیانگذاران حساب احتمالات‌اند. از آثار دیگر پاسکال بررسی خواص منحنی سیکلوئید است. پاسکال، مانند کاوالیری، روبروال، توریچلی، ... برای مطالعه بعضی خواص منحنیها، روش ارشمیدس یعنی تجزیه به‌عناصر بی‌نهایت کوچک را به‌کار می‌برد. مجموعهٔ ابداعات این دانشمندان در روش تقسیم به‌اجزای بی‌نهایت کوچک، الهام‌بخش نیوتن و لایبنیتز در ارائه حساب دیفرانسیل گردید.

ضلعهای روبه‌روی A_1A_2 و A_4A_5 یکدیگر را در M، ضلعهای روبه‌روی A_2A_3 و A_5A_6 یکدیگر را در N، ضلعهای روبه‌روی A_3A_4 و A_6A_1 یکدیگر را در P قطع می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم سه نقطهٔ M، N، و P بر یک خط راست قرار دارند.

محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، x'_3x_3، x'_4x_4، x'_5x_5، و $x_6x'_6$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_4}$، $\overrightarrow{A_4A_5}$، $\overrightarrow{A_5A_6}$، و $\overrightarrow{A_6A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.

بنابر قضیهٔ (۳.۴) مختصات هر نقطه $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ در معادله‌ای به‌صورت زیر صدق می‌کنند.

$$px_1x_3x_5+qx_2x_4x_6=0 \qquad (1)$$

در معادلهٔ (۱)، p و q دو عدد ثابت‌اند (دو ضریب معادله).

منحنی γ مکان هندسی نقاطی که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند از درجه سوم است. چون مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ از درجه دوم است پس منحنی γ به‌مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و یک خط راست که آن را L می‌نامیم تجزیه می‌شود.

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات سه نقطهٔ M، N، و P در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند زیرا دربارهٔ مختصات این سه نقطه چنین داریم:

$$M\left|\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_4=0 \end{array}\right. \qquad N\left|\begin{array}{l} x_2=0 \\ x_5=0 \end{array}\right. \qquad P\left|\begin{array}{l} x_3=0 \\ x_6=0 \end{array}\right.$$

پس سه نقطهٔ M، N، و P بر یک خط راست قرار دارند.

خط پاسکال. خط l راکه بر سه نقطهٔ M، N، و P می‌گذرد خط پاسکال می‌نامند.

اثباتی که در بالا عرضه شد، قضیهٔ پاسکال را به‌صورت کلی‌تر در می‌آورد که می‌توان به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کرد.

۱.۶.۴ قضیه. شش ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. مکان هندسی نقاطی که حاصل‌ضرب فواصل آنها از سه ضلع متناوب این شش ضلعی مساوی با حاصل‌ضرب فواصل آن نقاط از سه ضلع متناوب دیگر باشد شکلی است که از اجتماع مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و خط پاسکال تشکیل می‌شود.

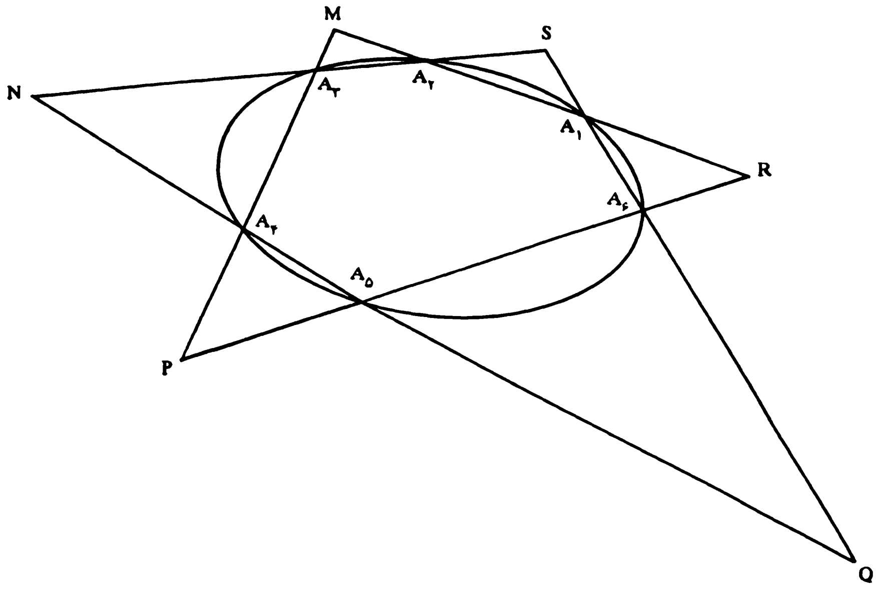
۷.۴ قضیه

در هر شش‌ضلعی محاط در یک مقطع مخروطی، نقاط برخورد اضلاع متناوب، شش

MATH75.IR

نقطه‌اند که بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

برهان. شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقاط M، N، P، Q، R، و S که از برخورد اضلاع شش‌ضلعی مذکور به‌طور یک‌درمیان حاصل می‌شوند بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.



پنج نقطه واقع در یک صفحه، یک مقطع مخروطی را تعیین می‌کنند (رجوع شود به ۵.۳.۸. پارامترهای مقطع مخروطی). اما شش نقطه در وضعیت عمومی، بر یک مقطع مخروطی قرار ندارند.

برای اثبات قضیه، شش محور $x_1x'_1$، $x_2x'_2$، $x_3x'_3$، $x_4x'_4$، $x_5x'_5$، و $x_6x'_6$ را به‌ترتیب

MATH75.IR

منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_4}$، $\overrightarrow{A_4A_5}$، $\overrightarrow{A_5A_6}$، و $\overrightarrow{A_6A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. بنابر مطلب شماره (۱.۱.۴)، مختصات هر نقطه $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ در یک معادلهٔ درجه پنج به‌صورت زیر صدق می‌کنند.

$$a_1x_2x_3x_4x_5x_6+a_2x_1x_3x_4x_5x_6+a_3x_1x_2x_4x_5x_6+ \tag{1}$$
$$a_4x_1x_2x_3x_5x_6+a_5x_1x_2x_3x_4x_6+a_6x_1x_2x_3x_4x_5=0$$

درمعادلهٔ (۱)، a_1، a_2، a_3، a_4، و a_5 اعدادثابت‌اند (ضرایب). معادلهٔ(۱) رابه‌صورت‌زیر می‌نویسیم:

$$x_1x_3x_5\, f(x_2, x_4, x_6)+x_2x_4x_6\, g(x_1, x_3, x_5)=0 \tag{2}$$

که درآن

$$\begin{cases} f(x_2, x_4, x_6)=a_2x_4x_6+a_4x_6x_2+a_6x_2x_4 & (3)\\ g(x_1, x_3, x_5)=a_1x_3x_5+a_3x_5x_1+a_5x_1x_3 & (4)\end{cases}$$

شکل حاصل از مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و خط پاسکال مربوط به‌شش ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ محاط در $\mathscr{C}$ را، ϕ می‌نامیم. بنابر قضیهٔ (۱.۶.۴) منحنی ϕ مکان هندسی نقاطی است که مختصات آنها در یک معادلهٔ درجه سوم به‌صورت زیر صدق می‌کنند:

$$px_1x_3x_5=qx_2x_4x_6 \tag{5}$$

در معادلهٔ (۵)، p و q دو عدد جبری‌اند (ضرایب).

از دو معادله (۲) و (۵) نتیجه می‌شود که نمودار معادلهٔ (۲)، به‌منحنی درجه سوم ϕ و یک منحنی درجه دو تجزیه می‌شود اما معادلهٔ (۲)، همان معادلهٔ (۱) است و به‌آسانی تحقیق می‌شود که مختصات نقاط M، N، P، Q، R، و S در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند پس این شش نقطه بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

۸.۴ قضیهٔ نیوتن[1]

دایرهٔ (O) و دو چهارضلعی ABCD و EFGH را در نظر می‌گیریم که اولی محیط بر

---

۱ ـ اسحاق نیوتن (۱۷۲۷ ـ ۱۶۴۳) ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، ستاره‌شناس، و فیلسوف انگلیسی است و با کشف قوانین جاذبهٔ عمومی و تجزیهٔ نور نام خود را با عظمت بسیار جاویدان ساخت. به‌طور همزمان با لایبنیتز اساس حساب بی‌نهایت کوچکها را کشف کرد. ارشمیدس، پاسکال، کاوالیری، روبروال، توریچلی، ... برای مطالعهٔ بعضی خواص اشکال هندسی روش تقسیم به‌بی‌نهایت کوچکها را به‌کار می‌برند. ابداعات آنها مقدمه‌ای برای ارائهٔ حساب دیفرانسیل به‌وسیلهٔ نیوتن و لایبنیتز بوده است. نیوتن در هندسه تعداد زیادی قضیه ابداع کرده است.

MATH75.IR

دایرهٔ مذکور و دومی محاط در آن است. به‌طوری که رأسهای چهارضلعی محاطی بر اضلاع چهارضلعی محیطی قرار دارند. ثابت کنید قطرهای این دو چهارضلعی (یعنی چهار خط AC، BD، EG، و FH) متقارب‌اند.

برهان. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، $x_3x'_3$، و $x_4x'_4$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$، و $\overrightarrow{DA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. اندازه‌های زاویه‌های مرکزی AOB، BOC، COD، و DOA را به‌ترتیب $2\alpha_1$، $2\alpha_2$، $2\alpha_3$، و $2\alpha_4$ می‌نامیم. بنابر نتیجهٔ مربوط به‌مطلب شماره (۲.۱.۴) مختصات نقاط دایره (O) در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x_2x_3x_4\sin\alpha_1+x_3x_4x_1\sin\alpha_2+x_4x_1x_2\sin\alpha_3+x_1x_2x_3\sin\alpha_4=0 \qquad (1)$$

معادلات خطوط مماس بر دایرهٔ (O)، در نقاط A، B، C، و D در سطور زیر به‌ترتیب در شماره‌های ۲، ۳، ۴، و ۵ ارائه شده‌اند (برای جست‌وجوی معادلات خطوط مماس، همان شیوهٔ استدلالی راکه در (۳.۴.۳) به‌کار بردیم به‌کار می‌بریم یعنی استفاده از بی‌نهایت کوچکها).

$$x_4\sin\alpha_1+x_1\sin\alpha_4=0 \qquad (2)$$

$$x_1\sin\alpha_2+x_2\sin\alpha_1=0 \qquad (3)$$

$$x_2\sin\alpha_3+x_3\sin\alpha_2=0 \qquad (4)$$

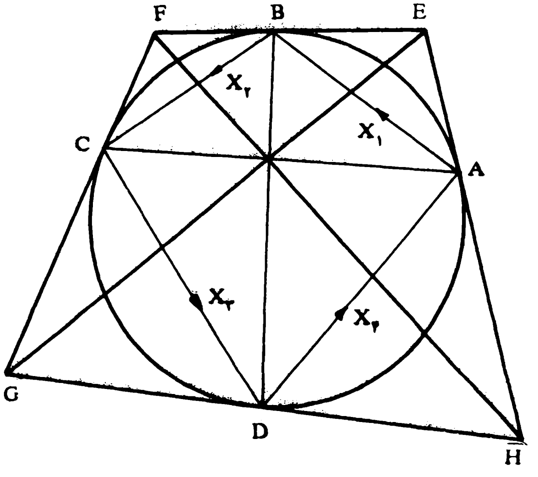
$$x_3\sin\alpha_4+x_4\sin\alpha_3=0 \qquad (5)$$

مختصات نقطهٔ E در دو معادلهٔ (۲) و (۳) صدق می‌کنند پس مختصات نقطهٔ E در معادلهٔ زیر که ترکیب خطی دو معادلهٔ مذکور است صدق می‌کنند:

$$\sin\alpha_2(x_4\sin\alpha_1+x_1\sin\alpha_4)-\sin\alpha_4(x_1\sin\alpha_2+x_2\sin\alpha_1)=0$$

معادلهٔ بالا پس از اختصار به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x_4\sin\alpha_2-x_2\sin\alpha_4=0 \qquad (6)$$



با همین شیوه استدلال، به‌کمک دو معادلهٔ (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم که مختصات نقطهٔ G در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند. معادلهٔ (۶) برحسب x_2 و x_4 از درجهٔ اول است پس یک خط راست را نشان می‌دهد. چون مختصات دو نقطهٔ E و G در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند پس معادلهٔ (۶)، معادلهٔ خط EG است.

با همین شیوه استدلال که معادلهٔ خط EG را به‌دست آوردیم معادلهٔ خط FH را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$(۷)\qquad x_3\sin\alpha_1 - x_1\sin\alpha_3 = 0$$

اکنون معادله‌های دو قطر AC و BD را جست‌وجو می‌کنیم. ابتدا معادلهٔ خط AC را جست‌وجو می‌کنیم. چون زاویهٔ BAC محاط در دایرهٔ (O) است و اندازهٔ آن نصف اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB است. پس $BAC=\alpha_2$. با همین شیوه استدلال نتیجه می‌شود که $CAD=\alpha_3$.

معادلهٔ خط AC در دستگاه مختصات دومحوری x_1x_4 چنین است:

$$(۸)\qquad x_1\sin\alpha_3 - x_4\sin\alpha_2 = 0$$

با همین شیوهٔ استدلال که معادلهٔ خط AC را به‌دست آوردیم معادلهٔ خط BD را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$(۹)\qquad x_2\sin\alpha_4 - x_1\sin\alpha_3 = 0$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۶)، (۷)، و (۸) متوافق است چه اگر مجهول x_1 را بین دو معادلهٔ (۸) و (۹) حذف کنیم معادلهٔ (۶) حاصل می‌شود. پس نقطهٔ برخورد دو قطر چهارضلعی محاطی ABCD روی قطر EG از چهار ضلعی محیطی EFGH قرار دارد.

اکنون ثابت می‌کنیم که نقطهٔ برخورد دو قطر چهارضلعی محاطی ABCD روی قطر FH از چهارضلعی محیطی EFGH قرار دارد. معادلهٔ قطر AC را در دستگاه مختصات دومحوری x_2x_3 جست‌وجو می‌کنیم. اندازه‌های زاویه‌های خط CA با دو محور x'_2x_2 و x'_2x_2 ، x'_3x_3 به‌ترتیب عبارت‌اند از α_1 و α_4. پس بنابر شماره (۳.۲.پ)، معادلهٔ خط CA در دستگاه مختصات دومحوری x_2x_3 چنین است:

$$(۱۰)\qquad x_2\sin\alpha_4 - x_3\sin\alpha_1 = 0$$

دستگاه حاصل از سه معادلهٔ (۷)، (۹) و (۱۰) متوافق است پس نقطهٔ برخورد در قطر AC و BD روی قطر FH قرار دارد.

MATH75.IR

۹.۴. قطب و قطبی در دایره

قضیهٔ مذکور در زیر یکی از قضیه‌های مهم هندسه است که در اثبات بسیاری از قضیه‌ها به‌نحو مؤثری به‌کار می‌آید.

قضیه. دایرهٔ (O) و نقطهٔ M را در صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M خط ML را رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دایره مفروض، A و B می‌نامیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M نسبت به‌دو نقطهٔ A و B را P می‌نامیم. ثابت کنید هنگامی که خط ML گرد نقطهٔ M می‌چرخد مکان هندسی نقطهٔ P یک خط راست است.

برهان. از نقطهٔ M قاطع MCD را عبور می‌دهیم و مزدوج نقطهٔ M نسبت به‌دو نقطهٔ C و D را Q می‌نامیم. محل برخورد دو خط AC و BD را N می‌نامیم. نقطهٔ برخورد دو مماس مرسوم بر دایرهٔ (O)، در دو نقطهٔ A و B را R و نقطهٔ برخورد دو مماس مرسوم بر دایرهٔ (O) در دو نقطهٔ C و D را S می‌نامیم. محورهای $x_1x'_1$، $x_2x'_2$، $x_3x'_3$، و $x_4x'_4$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BD}$، $\overrightarrow{DC}$، و $\overrightarrow{CA}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. اندازه‌های زاویه‌های مرکزی AOB، BOD، DOC، و COA را به‌ترتیب $2\alpha_1$، $2\alpha_2$، $2\alpha_3$، و $2\alpha_4$ می‌نامیم.

بنابرنتیجهٔ مطلب شماره (۲.۱.۴) مختصات نقاط دایره (O) در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$(1)\qquad x_2x_3x_4\sin\alpha_1+x_3x_4x_1\sin\alpha_2+x_4x_1x_2\sin\alpha_3+x_1x_2x_3\sin\alpha_4=0$$

بنابر (۴.۳.۳.پ) معادلهٔ دایرهٔ (O) چنین است:

$$(2)\qquad x_1x_3=-x_2x_4$$

منحنی γ، نمایش هندسی معادلهٔ (۱) از درجه سوم است و شامل دایرهٔ (O) است. پس منحنی γ به دایرهٔ (O) و یک خط راست که همان MN است تجزیه می‌شود.

معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(3)\qquad x_1x_3(x_4\sin\alpha_2+x_2\sin\alpha_4)+x_2x_4(x_1\sin\alpha_3+x_3\sin\alpha_1)=0$$

با توجه به‌معادلهٔ (۲)، معادلهٔ خط MN به‌صورت زیر است:

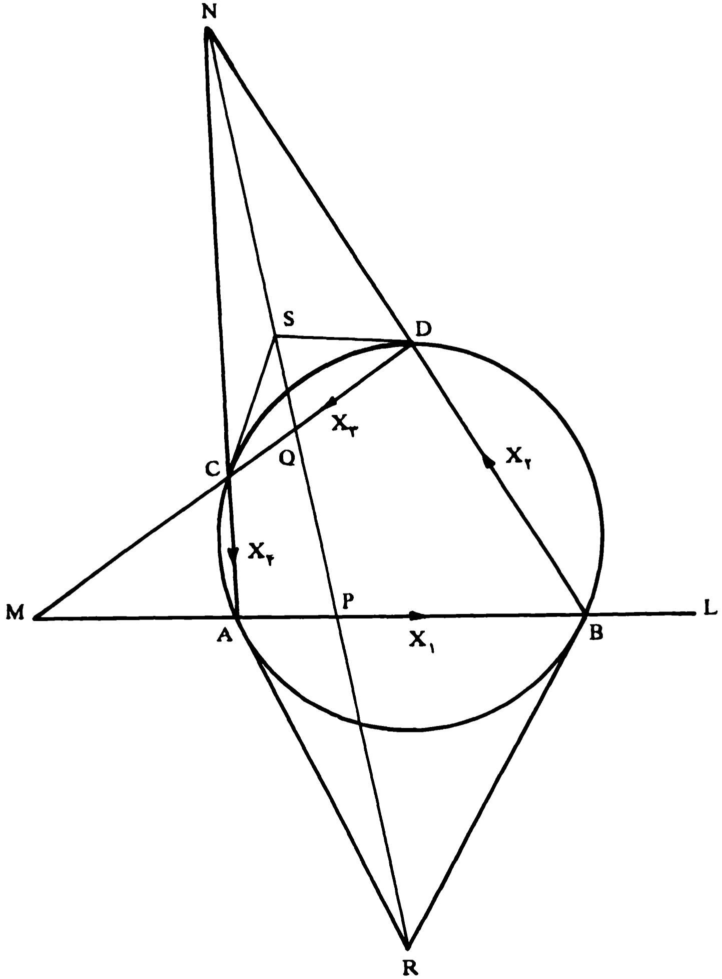
$$(4)\qquad (x_4\sin\alpha_2+x_2\sin\alpha_4)-(x_1\sin\alpha_3+x_3\sin\alpha_1)=0$$

اکنون ثابت می‌کنیم که معادلهٔ خط MN در دستگاه مختصات دومحوری x_2x_4 به‌صورت زیر

$$(5)\qquad x_4\sin\alpha_2+x_2\sin\alpha_4=0$$

و معادلهٔ آن در دستگاه مختصات دومحوری x_1x_3 به‌صورت زیر است

$$(6)\qquad x_1\sin\alpha_3+x_3\sin\alpha_1=0$$



برای اثبات این مطلب چنین می‌گوییم: مختصات نقطهٔ M را چهارگانه (X_1, X_2, X_3, X_4) فرض می‌کنیم. این چهارگانه در معادلهٔ (۴) صدق می‌کند و چون $X_1 = X_3 = 0$ پس چنین داریم:

$$X_4 \sin\alpha_2 + X_2 \sin\alpha_4 = 0 \qquad (۷)$$

بنابر مطلب شمارهٔ (۳.۲) معادلهٔ خطی که از محل برخورد دو محور x'_2x_2 و x'_4x_4 می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$pX_4 + qX_2 = 0 \qquad (۸)$$

لذا معادلهٔ (۵)، معادلهٔ خط MN در دستگاه مختصات دومحوری x_2x_4 است.

با همین شیوهٔ استدلال ثابت می‌کنیم که معادلهٔ (۶)، معادلهٔ خط MN در دستگاه مختصات دومحوری x_1x_3 است.

MATH75.IR

معادله‌های خطهای مماس بر دایرهٔ (O) در نقاط A و B به‌ترتیب چنین‌اند:

$$x_1\sin\alpha_4+x_4\sin\alpha_1=0 \qquad (9)$$

$$x_2\sin\alpha_1+x_1\sin\alpha_2=0 \qquad (10)$$

مختصات نقطهٔ R در دو معادلهٔ (۹) و (۱۰) صدق می‌کنند پس مختصات نقطهٔ R در معادلهٔ زیر که ترکیب خطی معادله‌های (۹) و (۱۰) است صدق می‌کنند:

$$\sin\alpha_2(x_1\sin\alpha_4+x_4\sin\alpha_1)-\sin\alpha_4(x_2\sin\alpha_1+x_1\sin\alpha_2)=0$$

این معادله پس از اختصار به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x_2\sin\alpha_4-x_4\sin\alpha_2=0 \qquad (11)$$

با همین شیوهٔ استدلال نتیجه می‌گیریم که مختصات نقطهٔ S در معادلهٔ (۱۱) صدق می‌کنند (برای اثبات این مطلب معادله‌های دو مماس DS و CS را می‌نویسیم و سپس x_3 را بین دو معادلهٔ حاصل حذف می‌کنیم، معادلهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید).

معادلهٔ (۱۱) نسبت به x_2 و x_4 از درجه اول است و لذا معادله یک خط راست است. چون مختصات دو نقطهٔ R و S در آن صدق می‌کنند پس این معادله، معادلهٔ خط راست RS است. چون مختصات نقطهٔ N در معادلهٔ (۱۱) صدق می‌کنند پس خط RS از نقطهٔ N می‌گذرد.

از مقایسهٔ دو معادلهٔ (۵) و (۱۱) با توجه به‌حکم (۸.۴۰.۲) نتیجه می‌شود که خط RS مزدوج خط MN است (دستگاه حاصل از چهار شعاع NM، NR، NA، و NB یک دستگاه اشعه توافقی است). پس خط NR از نقاط P و Q می‌گذرد.

اکنون قاطع MAB را ثابت نگاه می‌داریم و قاطع PCD را گرد نقطهٔ M می‌چرخانیم. خط MAB یک وضع خاص از خط متحرک ML است. چون خط PAB را ثابت نگاه می‌داریم پس دو نقطهٔ R و P دو نقطهٔ ثابت‌اند. با گردش خط MCD گرد نقطهٔ M، نقطهٔ Q حرکت می‌کند اما این نقطه همواره بر خط RP قرار دارد پس مکان هندسی نقطهٔ Q یک خط راست است.

تعریف. خط RP را قطبی نقطهٔ M نسبت به‌دایره O می‌نامند و نقطهٔ M را قطب خط RP می‌نامند.

۱.۹.۴. تمرین. قضیهٔ قطب و قطبی را در مقطع مخروطی ثابت کنید. مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و نقطهٔ M را در صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M خط ML را رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با مقطع مخروطی مفروض، A و B می‌نامیم. مزدوج توافقی نقطهٔ M نسبت به‌دو نقطهٔ A و B را P می‌نامیم. ثابت کنید هنگامی که خط ML گرد نقطهٔ M می‌چرخد مکان هندسی نقطهٔ P یک خط راست است.

اثبات کاملاً مشابه با اثبات قضیهٔ (۹.۴) است. بنابر (۱.۱.۴)، مختصات نقاط مقطع مخروطی $\mathscr{C}$، در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

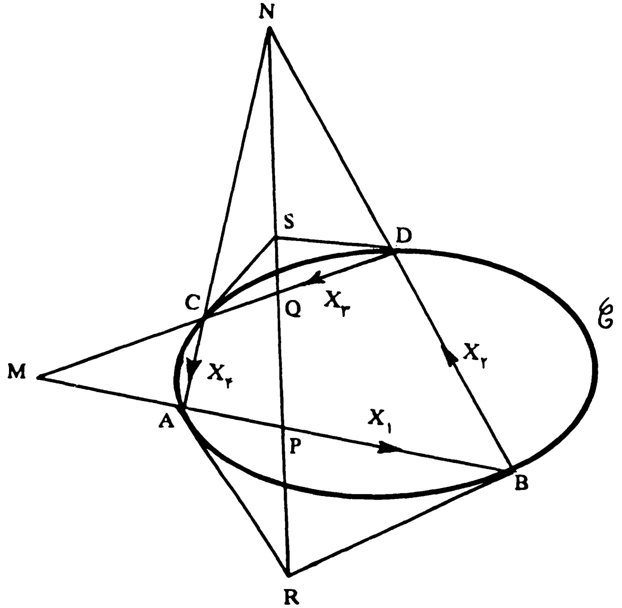
$$a_1x_2x_3x_4+a_2x_3x_4x_1+a_3x_1x_2x_4+a_4x_1x_2x_3=0$$

MATH75.IR

معادلات خطوط مماس بر مقطع مخروطی در نقاط A، B، C، و D به‌ترتیب چنین‌اند:

$$a_1x_4+a_4x_1=0$$
$$a_2x_1+a_1x_2=0$$
$$a_3x_2+a_2x_3=0$$
$$a_4x_3+a_3x_4=0$$

به‌کمک معادله مقطع مخروطی و معادلات مماسها در نقاط A، B، C و D قضیه به‌آسانی ثابت می‌شود.



۱۰.۴ قضیه دربارهٔ هشت‌ضلعی محاط در مقطع مخروطی

در هر هشت‌ضلعی محاط در یک مقطع مخروطی، هشت نقطه‌ای که از برخورد اضلاع به‌طور دودرمیان به‌دست می‌آیند، بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

برهان. هشت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). نقطه‌های برخورد خطهای (A_1A_2 و A_4A_5)، (A_2A_3 و A_5A_6)، (A_3A_4 و A_6A_7)، (A_4A_5 و A_7A_8)، (A_5A_6 و A_8A_1)، (A_6A_7 و A_1A_2)، (A_7A_8 و A_2A_3)، (A_8A_1 و A_3A_4) را به‌ترتیب B_1، B_2، B_3، B_4، B_5، B_6، B_7، و B_8 می‌نامیم.

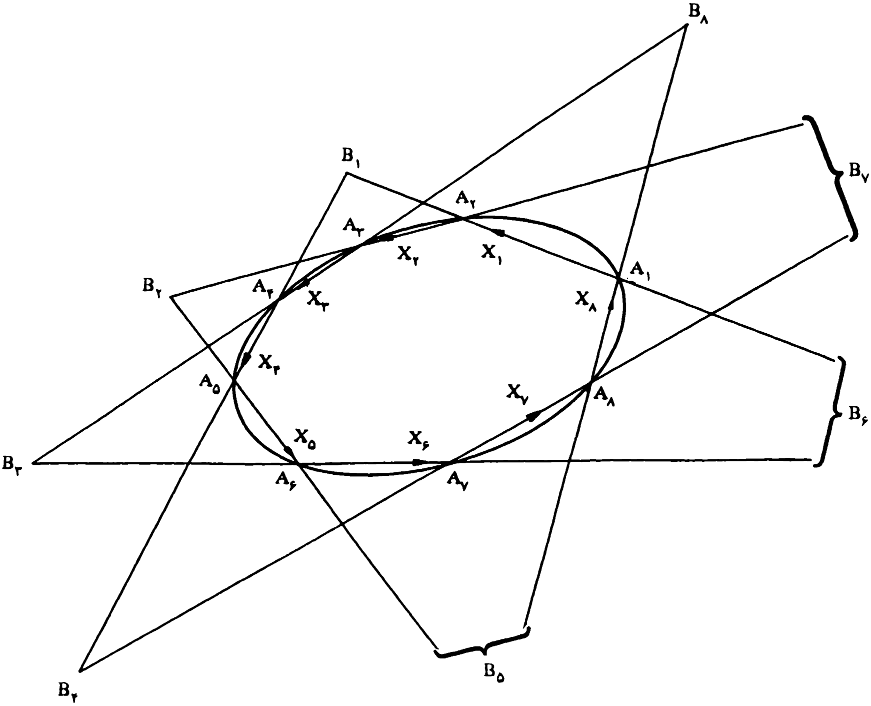
هشت محور x'_1x_1، x'_2x_2، x'_3x_3، x'_4x_4، x'_5x_5، x'_6x_6، x'_7x_7 و x'_8x_8 را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، $\overrightarrow{A_3A_4}$، $\overrightarrow{A_4A_5}$، $\overrightarrow{A_5A_6}$، $\overrightarrow{A_6A_7}$، $\overrightarrow{A_7A_8}$، و $\overrightarrow{A_8A_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.

نقطهٔ دلخواه $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ واقع بر مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر

MATH75.IR

می‌گیریم. بنابر مطلب شماره (۳.۴)، مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$ax_1x_3x_5x_7+bx_2x_4x_6x_8=0 \qquad (1)$$



در معادلهٔ (۱)، a و b دو عدد جبری‌اند (ضرایب).

مکان هندسی نقاطی که مختصات آنها در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند یک منحنی جبری از درجه چهار است. پس این مکان به‌مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و یک مقطع مخروطی دیگر که آن را $\mathscr{C}$ می‌نامیم تجزیه می‌شود.

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مختصات هشت نقطهٔ B_1، B_2، B_3، ...، و B_8 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنندزیرا دربارهٔ این نقاط چنین داریم:

$B_1\left\vert\begin{array}{l}x_1=0\\x_4=0\end{array}\right.$	$B_2\left\vert\begin{array}{l}x_2=0\\x_5=0\end{array}\right.$	$B_3\left\vert\begin{array}{l}x_3=0\\x_6=0\end{array}\right.$	$B_4\left\vert\begin{array}{l}x_4=0\\x_7=0\end{array}\right.$
$B_5\left\vert\begin{array}{l}x_5=0\\x_8=0\end{array}\right.$	$B_6\left\vert\begin{array}{l}x_6=0\\x_1=0\end{array}\right.$	$B_7\left\vert\begin{array}{l}x_7=0\\x_2=0\end{array}\right.$	$B_8\left\vert\begin{array}{l}x_8=0\\x_3=0\end{array}\right.$

پس هشت نقطهٔ مذکور بر یک مقطع مخروطی قرار دارند.

MATH75.IR

حالتهای خاص قضیهٔ هشت‌ضلعی محاطی

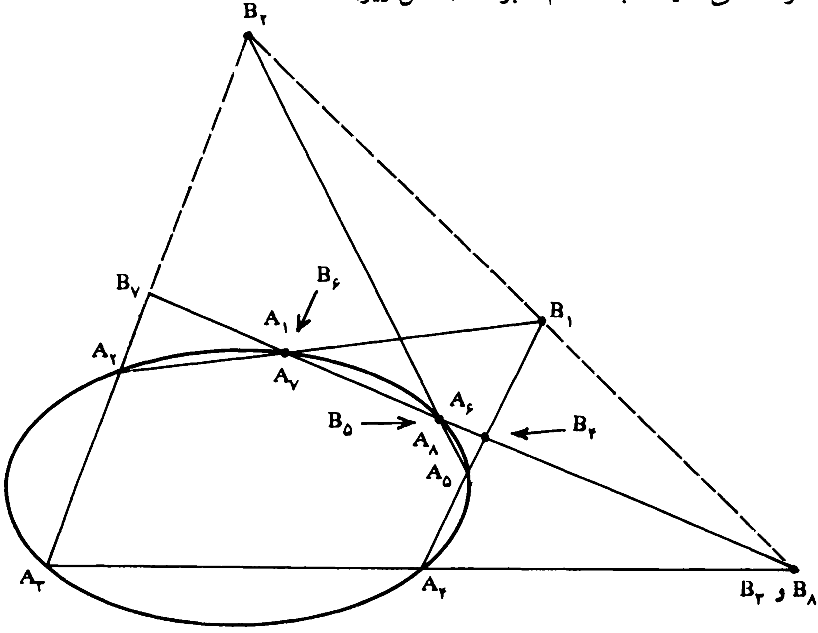
اگر برای هشت‌ضلعی محاط در مقطع مخروطی حالتهای خاص در نظر بگیریم قضیه‌هایی حاصل می‌شود. یکی از این حالتهای خاص آن است که سه ضلع متوالی هشت‌ضلعی بر هم منطبق باشند. در این‌صورت از هشت‌ضلعی، یک شش‌ضلعی حاصل می‌شود که یک ضلع آن سه‌بار پیموده می‌شود. با به‌کارگیری قضیهٔ (۸.۴) دربارهٔ این هشت‌ضلعی خاص، قضیهٔ مهم پاسکال نتیجه می‌شود.

همچنین اگر مقطع مخروطی محیط بر هشت‌ضلعی رابه‌صورت تبهگن اختیارکنیم (منظور آن است که مقطع مخروطی $\mathcal{C}$ به‌دو خط راست تجزیه شود)، قضیه‌ای تازه حاصل می‌شود که باید آن‌را تعمیمی از قضیهٔ پاپوس که در مبحث هندسهٔ تصویری مطرح می‌شود دانست.

نیز اگر به‌جای هشت‌ضلعی، یک هفت‌ضلعی و مماسهای مرسوم از رأسهای آن را بر منحنی $\mathcal{C}$ در نظر بگیریم احکامی به‌دست می‌آید و همچنین در مورد شش ضلعی و مماسهای مرسوم از رأسهای آن بر منحنی $\mathcal{C}$.

حالت خاص ۱. استنتاج قضیهٔ پاسکال. از قضیهٔ هشت‌ضلعی محاط در مقطع‌مخروطی.

هشت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ محاط در مقطع مخروطی $\mathcal{C}$ راکه در آن رأسهای A_1 و A_6 به‌ترتیب بر رأسهای A_7 و A_8 منطبق‌اند در نظر می‌گیریم. منظور آن است که متحرکی که خط شکسته $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ را در جهت پیکانها می‌پیماید پس از رسیدن مجدد به A_1، روی پاره‌خط A_1A_6، از نقطهٔ A_1 به‌نقطهٔ A_6 برمی‌گردد و سپس از نقطهٔ A_6 به‌طرف نقطهٔ A_1 حرکت می‌نماید تا به‌نقطهٔ A_1 برسد (شکل زیر).

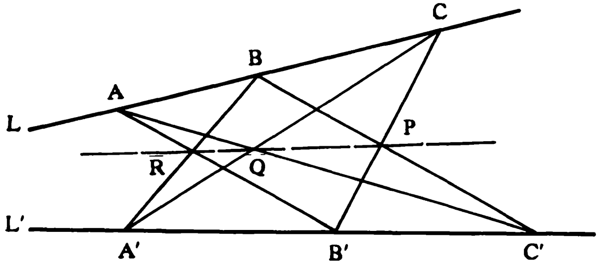


MATH75.IR

حال در هشت‌ضلعی مفروض محل برخورد اضلاع را به‌طور دودرمیان تعیین می‌کنیم. نقطه‌های B_1، B_2، B_3، B_4، B_5، B_6، B_7، و B_8 به‌ترتیب عبارت‌اند از نقطه‌های برخورد و خطهای (A_1A_2 و A_4A_5)، (A_2A_3 و A_5A_6)، (A_3A_4 و A_6A_7)، (A_4A_5 و A_7A_8)، (A_5A_6 و A_8A_1)، (A_6A_7 و A_1A_2)، (A_7A_8 و A_2A_3)، و (A_8A_1 و A_3A_4) می‌باشند. بنابر قضیهٔ شمارهٔ (۱۰.۴) این هشت نقطه بریک مقطع مخروطی که آن را $\mathscr{C}$ می‌نامیم قرار دارند. اما چون نقطه‌های B_4، B_5، B_6، B_7، و B_8 بر یک خط راست قرار دارند (این نقطه‌ها بر روی خط A_1A_6 قرار دارند)، پس مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ به‌دو خط راست تجزیه می‌شود. بنابراین سه نقطهٔ B_1، B_2، و B_3 که همان نقاط برخورد اضلاع مقابل شش‌ضلعی محاطی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ می‌باشند بر یک خط راست قرار دارند. بدین‌سان قضیهٔ پاسکال را از قضیهٔ هشت‌ضلعی محاطی نتیجه گرفتیم.

حالت خاص ۲. تعمیم قضیهٔ پاپوس. ابتدا قضیهٔ پاپوس را که تعمیم آن مورد نظر است ذکر می‌کنیم.

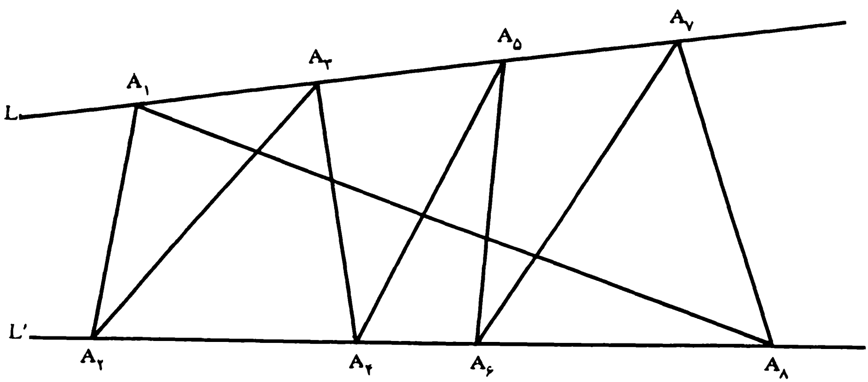
قضیهٔ پاپوس[1]. در صفحهٔ P، دو خط راست L و 'L را در نظر می‌گیریم. بر خط L سه نقطهٔ دلخواه A، B، و C و بر خط 'L، سه نقطهٔ دلخواه 'A، 'B، و 'C اختیار می‌کنیم. اگر نقاط P، Q، و R به‌ترتیب نقاط برخورد خطهای ('BC و 'CB)، ('AC و 'CA)، و ('AB و 'BA) باشند آنگاه سه نقطهٔ P، Q، و R بر یک خط راست جای دارند (شکل زیر).



۱ ـ رجوع شود مثلاً به‌کتاب «هندسه» اثر مؤلفان فرانسوی E. RAMIS، G.CAGNAC، J.COMMEAU؛ فصل هشتم تحت عنوان «ارتباط بین فضاهای آفین و فضاهای تصویری».

MATH75.IR

تعمیم قضیهٔ پاپوس. در صفحهٔ P، دو خط دلخواه L و L′ را در نظر می‌گیریم. بر خط L، چهار نقطه A_1، A_3، A_5، و A_7 و بر خط L′، چهار نقطهٔ دلخواه A_2، A_4، A_6، و A_8 را اختیار می‌کنیم. با رسم خطهای A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4، A_4A_5، A_5A_6، A_6A_7، A_7A_8، و A_8A_1، هشت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ را می‌سازیم. می‌خواهیم ثابت کنیم هشت نقطه‌ای که از برخورد اضلاع این هشت‌ضلعی، به‌طور دودرمیان حاصل می‌شود بر یک مقطع مخروطی قرار دارند (شکل زیر).

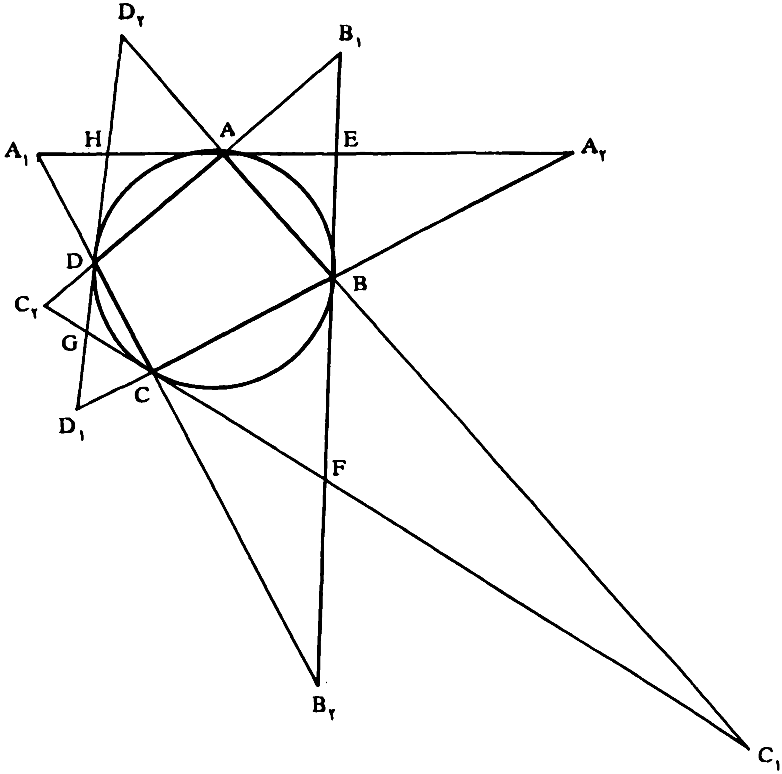


برهان. اجتماع دو خط L و L′ را می‌توان یک مقطع مخروطی دانست. هشت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ در این مقطع مخروطی محاط شده است. قضیهٔ شمارهٔ (۱۰.۴) را دربارهٔ این هشت‌ضلعی به‌کار می‌بریم، حکم مورد نظر ثابت می‌شود.

اگر در هشت‌ضلعی مذکور، سه ضلع متوالی بر هم منطبق شوند قضیهٔ پاپوس، مذکور در صفحهٔ پیش حاصل می‌شود.

حالت خاص ۳. قضیه دربارهٔ دو چهارضلعی محاطی و محیطی. چهار ضلعی ABCD محاط در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و چهارضلعی EFGH محیط بر آن مقطع مخروطی را در نظر می‌گیریم به‌طوری که هر رأس چهارضلعی محاطی بر یک ضلع چهارضلعی محیطی قرار دارد. اضلاع FG، GH، HE، و EF از چهارضلعی محیطی را به‌ترتیب اضلاع مقابل به‌رأسهای A، B، C، و D از چهارضلعی محاطی می‌نامیم. ثابت کنید چهار زوج نقطهٔ حاصل از تقاطع هر ضلع چهارضلعی محیطی با دو ضلع از چهارضلعی محاطی ماربر رأس مقابل به‌آن ضلع از چهارضلعی محیطی، بر یک مقطع مخروطی جای دارند.

MATH75.IR



برهان. قرار می‌دهیم:

$CD\cap EH=A_۱$ و $CB\cap EH=A_۲$

$DA\cap EF=B_۱$ و $DC\cap EF=B_۲$

$AB\cap FG=C_۱$ و $AD\cap FG=C_۲$

$BC\cap HG=D_۱$ و $BA\cap HG=D_۲$

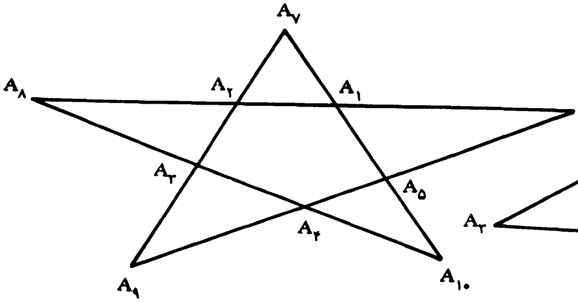
می‌خواهیم ثابت کنیم که هشت نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $B_۱$، $B_۲$، $C_۱$، $C_۲$، $D_۱$، و $D_۲$ بر یک مقطع مخروطی جای دارند. در مقطع مخروطی $\mathscr{C}$، یک هشت‌ضلعی $AA'BB'CC'DD'$ محاط می‌کنیم. چهار رأس A، B، C، و D از این هشت‌ضلعی را ثابت نگاه می‌داریم و چهاررأس A'، B'، C'، و D' را به‌ترتیب به‌سوی چهار رأس A، B، C، و D میل می‌دهیم. حد خطوط AA'، BB'، CC'، و DD' به‌ترتیب عبارت‌اند از خطوط HE، EF، FG، و GH.

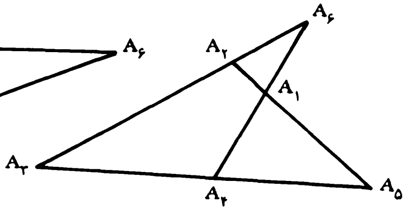
با به‌کارگیری قضیهٔ (۱۰.۴) در هشت‌ضلعی متغیر $AA'BB'CC'DD'$ و توجه به وضعیت حدی این هشت‌ضلعی، قضیهٔ موردنظر ثابت می‌شود.

۱۱.۴. معادلهٔ منحنی جبری محیط بر چندضلعی کامل

تعریف n ضلعی کامل. n ضلعی مسطح $A_۱A_۲\dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. خطوط متکی بر اضلاع این n ضلعی یکدیگر را در $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ نقطه قطع می‌کنند. شکل حاصل از n خط

A_1A_2، A_2A_3، ...، و A_nA_1 و نقاط تقاطع آنها را n ضلعی کامل می‌نامیم. نقاط تقاطع خطوط اضلاع n ضلعی کامل را رأسهای آن می‌نامیم. در شکل زیر یک چهارضلعی کامل و یک پنج‌ضلعی کامل نموده شده است.





۴.۱۱.۱ تعریف منحنی محیط بر nضلعی کامل

الف. می‌گوییم منحنی γ محیط بر یک n ضلعی است اگر رأسهای n ضلعی بر روی منحنی γ قرار داشته باشند.

ب. می‌گوییم منحنی γ محیط بر یک n ضلعی کامل است اگر منحنی γ بر $\frac{1}{2}n(n-1)$ رأس n ضلعی کامل بگذرد. حال می‌خواهیم معادلهٔ یک منحنی جبری را که محیط بر یک n ضلعی باشد و دارای حداقل درجه باشد بیابیم.

۴.۱۱.۲. معادلهٔ یک منحنی جبری از درجه $(n-1)$ و محیط بر یک nضلعی.

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را در نظر می‌گیریم و محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، x'_nx_n را به ترتیب متکی بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم معادلهٔ یک منحنی جبری درجهٔ $(n-1)$، برحسب x_1، x_2، ...، و x_n را که محیط بر n ضلعی $A_1A_2...A_n$ باشد بیابیم.

معادلهٔ یک منحنی جبری درجه $(n-1)$، برحسب n متغیر x_1، x_2، ...، و x_n چنین است:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad (1)$$

که در آن

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2)$$
$$+ \dots + \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

در عبارت سمت راست تساوی (۲)، φ_{n-1}، φ_{n-2}، ...، φ_1، و φ_0 چندجمله‌ایهای همگن‌اند که به‌ترتیب از درجه‌های $(n-1)$، $(n-2)$، ...، ۱، و صفر (مقدار ثابت) اند.

MATH75.IR

چون می‌خواهیم منحنی γ از نقاط A_1، A_2، ...، و A_n بگذرد پس چندجمله‌ای $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ باید به‌ازای $(x_n=0, x_1=0)$، $(x_1=0, x_2=0)$، ...، و $(x_{n-1}=0, x_n=0)$ مساوی صفر شود. با رعایت این شرطها، تابع $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_1x_2x_3\ldots x_n+a_2x_1x_3\ldots x_n+\ldots+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1} \qquad (3)$$

چندجمله‌ای سمت راست رابطهٔ (۳) دارای n جمله است. a_1، a_2، ...، و a_n اعداد ثابت‌اند (ضرایب). جمله‌ای که دارای ضریب a_i است شامل $(n-1)$ عضو متمایز از مجموعه $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ است که دارای زیرنویسهای مخالف i می‌باشند.

مطلب را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

معادلهٔ یک منحنی جبری درجه $(n-1)$ و محیط بر n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ چنین است:

$$a_1x_2x_3\ldots x_n+a_2x_1x_3\ldots x_n+\ldots+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}=0 \qquad (4)$$

۳.۱۱.۴. *معادلهٔ یک منحنی جبری با حداقل درجه و محیط بر یک nضلعی.* معادلهٔ (۴) که هم‌اکنون به‌دست آوردیم، معادلهٔ یک منحنی جبری باحداقل درجه‌است که محیط بریک n ضلعی باشد. برای اثبات این مطلب کافی است توجه کنیم که اگر در مجموعه

$$E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

مجموعهٔ تمام بخشهای $(n-1)$ عضوی را در نظر بگیریم، اجتماع هر دو بخش دلخواه شامل تمام اعضاء مجموعهٔ E است اما اگر مجموعه تمام‌بخشهای p عضوی $(p<n-1)$ از مجموعهٔ E را در نظر بگیریم، اجتماع دوبخش دلخواه شامل تمام اعضاء مجموعهٔ E نخواهد بود.

۴.۱۱.۴. *معادلهٔ منحنی جبری درجهٔ $(n-1)$ و محیط بر یک nضلعی کامل.* منحنی جبری γ به‌معادلهٔ (۴) بر تمام رأسهای n ضلعی کامل که تعداد آنها $\frac{1}{2}n(n-1)$ است می‌گذرد. زیرا به‌ازای

$$x_i=0\ ,\ x_j=0\ ,\ i\neq j\ ;\ i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$$

تابع مذکور در شمارهٔ (۳)، از بند (۲.۱۱.۴)، صفر می‌شود.

۵.۱۱.۴. *معادلهٔ یک منحنی جبری با حداقل درجه و محیط بر یک nضلعی کامل.* معادلهٔ (۴) که در شمارهٔ (۲.۱۱.۴) ذکر شد معادلهٔ یک منحنی جبری با حداقل درجه است که بر یک n ضلعی کامل محیط است.

۶.۱۱.۴. *معادلهٔ منحنی γ، سوده در رأسهای n ضلعی کامل.* اگر از منحنی γ، کلیهٔ

MATH75.IR

رأسهای n ضلعی کامل را برداریم شکلی حاصل می‌شود که آن را منحنی γ سوده در رأسهای n ضلعی کامل می‌نامیم. معادلهٔ این شکل به‌صورت زیر است

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n}=0 \qquad (5)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۴) مذکور در مطلب شماره (۲.۱۱.۴) را بر $x_1x_2\ldots x_n$ بخش کنیم رابطهٔ (۵) حاصل می‌شود. (عبارت $x_1x_2\ldots x_n$ به‌ازای مختصات رأسهای n ضلعی کامل مخالف صفر است.)

تعریف n ضلعی کامل منتظم. منظور ما از n ضلعی کامل منتظم عبارت است از n خط راست منطبق بر اضلاع یک n ضلعی منتظم. نقاط برخورد خطوط مذکور را رأسهای n ضلعی کامل منتظم می‌نامیم.

مجموعهٔ دوایر محیط بریک n ضلعی کامل منتظم. n ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از تقاطع اضلاع این n ضلعی، به‌طور یک‌درمیان، دودرمیان، سه درمیان، ... به ترتیب شکلهای $A'_1A'_2\ldots A'_n$ و $A''_1A''_2\ldots A''_n$، $A'''_1A'''_2\ldots A'''_n$، ... حاصل می‌شود (شکل بعد). شکلهای $A_1A_2\ldots A_n$، $A'_1A'_2\ldots A'_n$، $A''_1A''_2\ldots A''_n$، ... را به‌ترتیب p، p'، p''، ... و دایره‌های محیطی آنها را γ، γ'، γ''، ... می‌نامیم. n ضلعی کامل منتظم حاصل از n خط منطبق بر اضلاع n ضلعی p را با P و مجموعهٔ دوایر γ، γ'، γ''، ... را با Γ نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ دایره‌های سودهٔ محیط بر n ضلعی کامل منتظم. از دایرهٔ γ، رأسهای n ضلعی p را برمی‌داریم و شکل حاصل را دایرهٔ سوده محیط بر n ضلعی P می‌نامیم و آن را با γ_1 نشان می‌دهیم. همچنین از دایره‌های γ'، γ''، ... به‌ترتیب رأسهای شکلهای p'، p''، ... را برمی‌داریم و شکلهای حاصل را به‌ترتیب با γ'_1، γ''_1، ... نشان می‌دهیم. مجموعهٔ اشکال γ_1، γ'_1، γ''_1،... را با Γ_1 نشان می‌دهیم.

چندضلعیهای سازای شکلهای p'، p''، ... . اگر n عددی اول باشد هریک از شکلهای p'، p''، ... یک n ضلعی منتظم می‌باشد. اما اگر n عددی غیراول باشد هر یک از شکلهای p'، p''، ... از یک یا چند چندضلعی منتظم تشکیل می‌شود. اگر یکی از شکلهای p'، p''، ... از چند چندضلعی منتظم تشکیل شده باشد، این چندضلعیهای منتظم را چندضلعیهای سازای آن شکل می‌نامیم. مثلاً اگر $n=10$ باشد شکل p'' فقط از یک ده‌ضلعی منتظم تشکیل می‌شود که عبارت است از ده‌ضلعی منتظم $A''_1A''_2\ldots A''_{10}$. اما شکل p'، از دو پنج‌ضلعی منتظم تشکیل شده است که عبارت‌اند از $A'_1A'_3A'_5A'_7A'_9$ و $A'_2A'_4A'_6A'_8A'_{10}$. این دو پنج‌ضلعی را دوپنج‌ضلعی سازای شکل p' می‌نامیم.

معادلهٔ شکل Γ_1. چندضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_n$ و چندضلعی کامل P را که از امتداد اضلاع چندضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ حاصل می‌شود در نظر می‌گیریم. محورهای $x_1'x_1$، $x_2'x_2$، ...،

و $x'_n x_n$ را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که شکل Γ_1 (یعنی مجموعه دایره‌های سوده محیط بر n ضلعی کامل منتظم)، مکان هندسی نقاطی است که مختصات آنها در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 0 \qquad (1)$$

برهان.

الف. ابتدا ثابت می‌کنیم که مختصات نقاط دایره سوده γ_1 در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. برای این منظور حکم شماره (۲.۱.۴.الف) را با رعایت آنکه در n ضلعی منتظم $A_1A_2...A_n$، رابطه‌های $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \dots = \sin\alpha_n$ برقراراست به‌کار می‌بریم، مطلب فوراً اثبات می‌شود. به این نکته توجه شود که n ضلعی $A_1A_2...A_n$ چه محدب باشد و چه ستاره‌ای، حکم معتبر است.

ب. اکنون ثابت می‌کنیم که مختصات نقاط واقع بر دایره‌های γ'_1، γ''_1، ...، در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند.

می‌گوییم اگر یکی از شکلهای p'، p'' ... ساده باشد (یعنی فقط ازیک n ضلعی منتظم تشکیل شده باشد)، بنابر قسمت (الف) مختصات نقاط دایره سودهٔ محیط بر آن شکل، در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند. اما اگر یکی از این شکلها، مرکب از چند چندضلعی منتظم باشد، رابطهٔ (۱) را دربارهٔ هر یک از چندضلعیهای سازای آن شکل می‌نویسیم و سپس این رابطه‌ها را عضو به‌عضو با هم جمع می‌کنیم، رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود. مثلاً اگر $n=10$ باشد شکل p' عبارت است از شکل $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_{10}$ که از دو پنج‌ضلعی منتظم $A'_1A'_3A'_5A'_7A'_9$ و $A'_2A'_4A'_6A'_8A'_{10}$ تشکیل شده است. بنابر قسمت (الف)، مختصات نقاط دایرهٔ سوده γ'_1 در دستگاه مختصات پنج‌محوری $x_2x_4x_6x_8x_{10}$ (که محورهای آن بر اضلاع پنج‌ضلعی منتظم $A'_1A'_3A'_5A'_7A'_9$ منطبق‌اند) در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_8} + \frac{1}{x_{10}} = 0 \qquad (2)$$

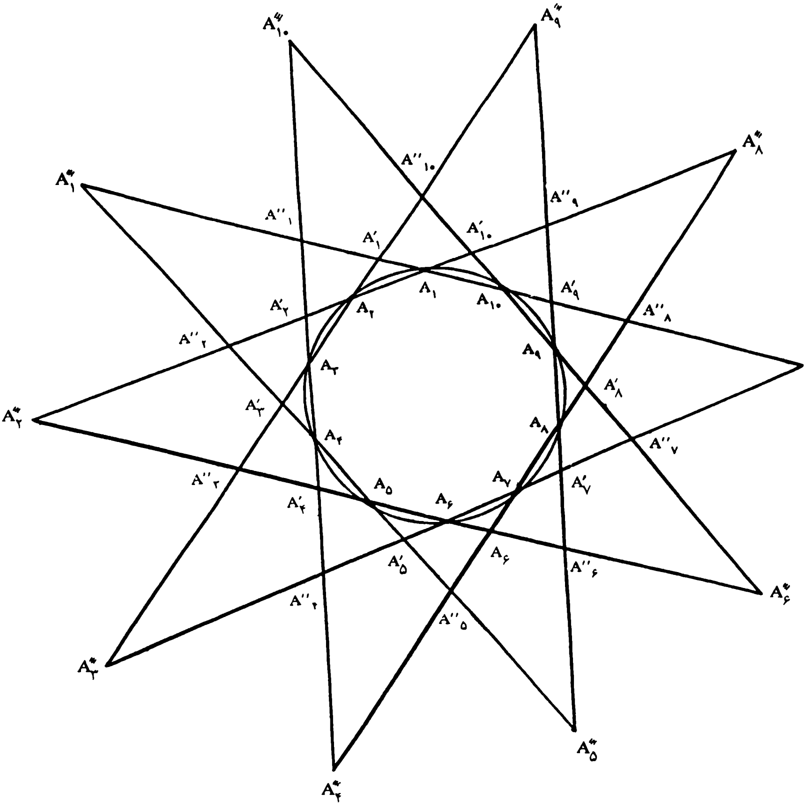
همچنین مختصات نقاط دایرهٔ سودهٔ γ'_1، در دستگاه مختصات پنج‌محوری $x_1x_3x_5x_7x_9$ که محورهای آن بر اضلاع پنج ضلعی منتظم $A'_2A'_4A'_6A'_8A'_{10}$ منطبق‌اند در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_7} + \frac{1}{x_9} = 0 \qquad (3)$$

از جمع اعضای نظیر دو رابطهٔ (۲) و (۳)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{i=1}^{i=10} \frac{1}{x_i}$$

MATH75.IR


$A'''_{۱۰}$
$A'''_{۹}$
$A'''_{۸}$
$A'''_{۱}$
$A''_{۱۰}$
$A''_{۹}$
$A''_{۱}$
$A'_{۱}$
$A'_{۱۰}$
$A_{۱}$
$A_{۱۰}$
$A'_{۹}$
$A'_{۲}$
$A_{۲}$
$A''_{۸}$
$A''_{۲}$
$A_{۹}$
$A_{۳}$
$A'''_{۷}$
$A'_{۸}$
$A'''_{۲}$
$A'_{۳}$
$A_{۴}$
$A_{۸}$
$A''_{۷}$
$A''_{۳}$
$A_{۵}$
$A_{۷}$
$A'_{۷}$
$A'_{۴}$
$A_{۶}$
$A'_{۵}$
$A'_{۶}$
$A''_{۶}$
$A'''_{۶}$
$A''_{۴}$
$A''_{۵}$
$A'''_{۳}$
$A'''_{۵}$
$A'''_{۴}$

MATH75.IR

آنچه راکه در قسمت (الف) و (ب) ثابت کردیم به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

مختصات هرنقطه از شکل Γ_1 (متشکل از دایره‌های سودهٔ γ'_1، γ''_1، ...) در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

پ. اکنون ثابت می‌کنیم که نقاطی که مختصاتشان در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند بر منحنی Γ_1 قرار دارند. می‌گوییم اگر m تعداد دایره‌های سودهٔ تشکیل‌دهنده Γ_1 باشند رابطه‌های زیر برقرار است:

$$m=\frac{n-1}{2} \qquad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$m=\frac{n-2}{2} \qquad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

اگر n زوج باشد هر دو ضلع مقابل چندضلعی p موازی‌اند.

چون معادلهٔ دایره از درجه دو است پس درجه شکل Γ_1 متشکل از m دایره سوده، مساوی $2m$ است. اگر n فرد باشد درجه شکل Γ_1 چنین است:

$$2m=2\,\frac{n-1}{2}=n-1$$

ملاحظه می‌شود که درجهٔ منحنی Γ_1، مساوی درجه معادلهٔ (۱) است پس فقط مختصات نقاط واقع بر شکل Γ_1 در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند.

اگر n زوج باشد درجهٔ منحنی Γ_1 چنین است:

$$2m=2\,\frac{n-2}{2}=n-2$$

و چون

$$(n-2)+1=n-1$$

در این صورت می‌گوییم مختصات نقاط $\frac{n-2}{2}$ دایرهٔ سودهٔ γ_1، γ'_1، γ''_1، ... و خط بی‌نهایت صفحه در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

در قسمت (الف) و (ب) ثابت کردیم که مختصات نقاط واقع بر شکل Γ_1 در معادله (۱) صدق می‌کنند و در قسمت (پ) ثابت کردیم که نقاطی که مختصاتشان در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند بر شکل Γ_1 واقع‌اند پس می‌توان گفت که شکل Γ_1 مکان هندسی نقاطی است که مختصاتشان در رابطهٔ (۱) صدق می‌کنند.

۱۲.۴. قضیه

منحنی جبری γ از درجه $(n-1)$، $n\geq 3$ و عدد $p=k(n-2)+2$ را در نظر می‌گیریم (k عددی است صحیح، بزرگتر یا مساوی واحد). در منحنی γ، p ضلعی $A_1A_2...A_p$ را محاط

می‌کنیم. محورهای x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و x'_px_p را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_pA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. رأسهای p ضلعی مذکور را از منحنی γ حذف می‌کنیم و منحنی سوده حاصل را γ_1 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که اعدادی جبری چون a_1، a_2، ...، و a_p وجود دارند به‌طوری که مختصات هر نقطه $M(x_1, x_2, ..., x_p)$ از منحنی γ_1 در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$(I) \qquad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + ... + \frac{a_p}{x_p} = 0$$

برهان. بر منحنی سودهٔ γ_1، نقطهٔ دلخواه S را انتخاب می‌کنیم و آن را از شکل γ_1 حذف می‌کنیم و منحنی حاصل را γ_2 می‌نامیم. نقطهٔ S را به‌نقاط A_1، A_{n-1}، A_{2n-3}، ...، و A_p وصل می‌کنیم تا n ضلعیهای $SA_1A_2A_3...A_{n-1}$، $SA_{n-1}A_n...A_{2n-3}$، ...، و $A_1 ... A_{p-n+4}$ SA_{p-n+3} که آنها را به‌ترتیب P_1، P_2، ...، و P_k می‌نامیم حاصل شود.

محورهای u'_1u_1، u'_2u_2، ...، و u'_ku_k را به‌ترتیب منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{SA_1}$، $\overrightarrow{SA_{n-1}}$، $\overrightarrow{SA_{2n-3}}$، ...، و $\overrightarrow{SA_{p-n+3}}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. همچنین محورهای v'_1v_1، v'_2v_2، ...، و $\overrightarrow{v'_kv_k}$ را منطبق بر بردارهای $\overrightarrow{A_1S}$، $\overrightarrow{A_{n-1}S}$، $\overrightarrow{A_{2n-3}S}$، ...، و $\overrightarrow{A_{p-n+3}S}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم.

بین فواصل جبری هر نقطه از صفحهٔ منحنی γ، از محورهای u'_1u_1، u'_2u_2، ...، و u'_ku_k، v'_1v_1، v'_2v_2، ...، و v'_kv_k روابط زیر برقرار است:

$$(II) \qquad \begin{cases} v_1 = -u_2 \\ v_2 = -u_3 \\ .... \\ v_k = -u_1 \end{cases}$$

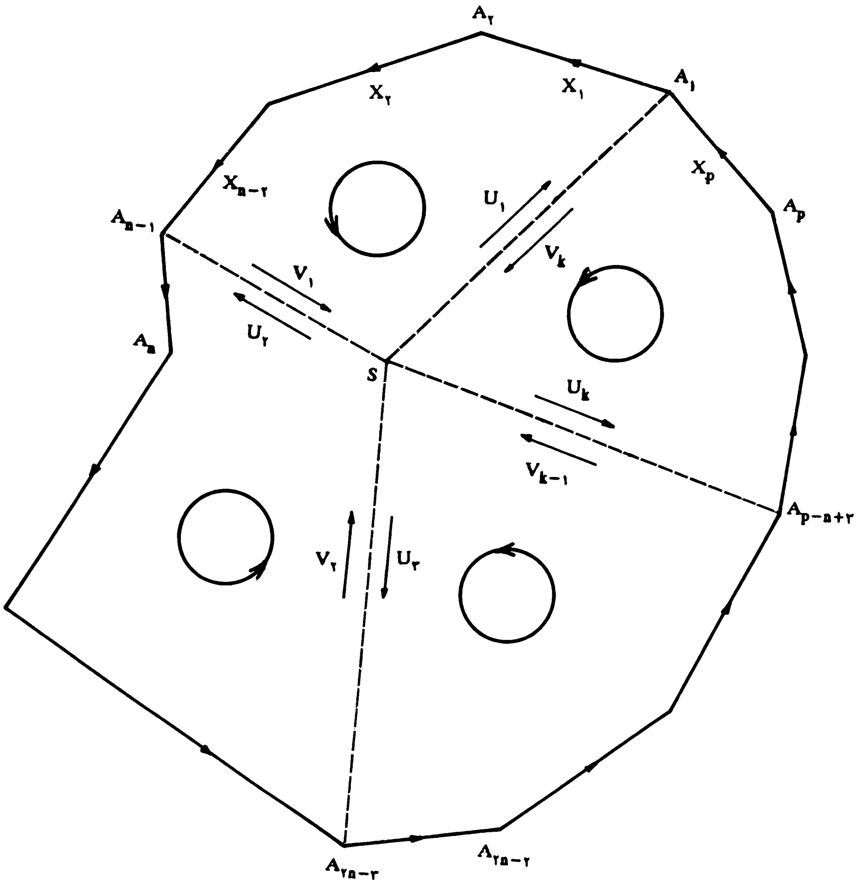
n ضلعیهای P_1، P_2، ...، و P_n در منحنی جبری γ_2 که از درجهٔ $(n-1)$ است محاط‌اند پس می‌توان حکم شمارهٔ (۱.۴) را دربارهٔ هر یک از این چندضلعیها به‌کار برد.

ابتدا حکم (۱.۴) را دربارهٔ n ضلعی P_1 به‌کار می‌بریم. می‌گوییم اعدادی جبری چون q_1، q_2، ...، و q_n وجود دارند به‌طوری که مختصات هر نقطه $M(x_1, x_2, ..., x_{n-2}, v_1 \text{ و } u_1)$ از منحنی سودهٔ γ_2، در دستگاه مختصات n محوری u_1v_1، $x_1x_2...x_{n-2}$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(1) \qquad \frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} + ... + \frac{q_{n-2}}{x_{n-2}} + \frac{q_{n-1}}{v_1} + \frac{q_n}{u_1} = 0$$

حال همان حکم (۱.۴) را دربارهٔ n ضلعی P_2 به‌کار می‌بریم. می‌گوییم اعدادی جبری چون r_1،

MATH75.IR


A۲
X۲
X۱
A۱
Xp
Ap
Xn-۲
An-۱
U۱
Vk
V۱
U۲
An
S
Uk
Vk-۱
Ap-n+۲
V۲
U۳
A۲n-۳
A۲n-۲

r_2، ...، و r_n وجود دارند به‌طوری که مختصات هر نقطه $M(x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{2n-4}, v_2, u_2)$ از منحنی سودهٔ γ_2 در دستگاه مختصات n محوری $x_{n-1}x_n \ldots x_{2n-4}v_2u_2$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{r_1}{x_{n-1}} + \frac{r_2}{x_n} + \ldots + \frac{r_{n-2}}{x_{2n-4}} + \frac{r_{n-1}}{v_2} + \frac{r_n}{u_2} = 0 \qquad (2)$$

با همین شیوهٔ استدلال، رابطه‌های زیر را دربارهٔ n ضلعیهای P_3، ...، و P_k می‌نویسیم

$$\frac{s_1}{x_{2n-3}} + \frac{s_2}{x_{2n-2}} + \ldots + \frac{s_{n-2}}{x_{3n-6}} + \frac{s_{n-1}}{v_3} + \frac{s_n}{u_3} = 0 \qquad (3)$$

. . . .

$$\frac{t_1}{x_{p-n+3}} + \frac{t_2}{x_{p-n+4}} + \ldots + \frac{t_{n-2}}{x_p} + \frac{t_{n-1}}{v_k} + \frac{t_n}{u_k} = 0 \qquad (k)$$

دو طرف رابطه‌های (۱)، (۲)، ...، و (k) را به‌ترتیب در α_1، α_2، ...، و α_n که جملگی مخالف صفر فرض می‌شوند ضرب می‌کنیم و روابط حاصل را عضو به‌عضو با هم جمع می‌کنیم، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$\text{(III)} \quad \frac{\alpha_1 q_1}{x_1} + \frac{\alpha_1 q_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_1 q_{n-2}}{x_{n-2}} + \frac{\alpha_2 r_1}{x_{n-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha_k t_{n-2}}{x_p} + \left(\frac{\alpha_1 q_{n-1}}{v_1} + \frac{\alpha_2 r_n}{u_2} \right) + \left(\frac{\alpha_2 r_{n-1}}{v_2} + \frac{\alpha_3 s_n}{u_3} \right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\alpha_k t_{n-1}}{v_k} + \frac{\alpha_1 q_n}{u_1} \right) = 0$$

عبارتهای داخل پرانتزهای رابطهٔ (III) را، با رعایت روابط (II) به‌صورتهای زیر می‌نویسیم

$$\frac{\alpha_1 q_{n-1} - \alpha_2 r_n}{v_1}, \frac{\alpha_2 r_{n-1} - \alpha_3 s_n}{v_2}, \ldots, \frac{\alpha_k t_{n-1} - \alpha_1 q_n}{v_k}$$

مقادیر α_1، α_2، ...، و α_k را طوری انتخاب می‌کنیم که صورتهای کسرهای بالا مساوی صفر شوند. مقادیر α_1، α_2، ...، و α_n جوابهای دستگاه معادله‌های زیرند:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \alpha_1 q_{n-1} - \alpha_2 r_n = 0 \\ \alpha_2 r_{n-1} - \alpha_3 s_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k t_{n-1} - \alpha_1 q_n = 0 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه (IV)، مجهول α_2 را برحسب α_1 حساب می‌کنیم حاصل می‌شود:

MATH75.IR

$$\alpha_2=\frac{q_{n-1}}{r_n}\,\alpha_1$$

از معادلهٔ دوم، مجهول α_3 را برحسب α_2 حساب می‌کنیم. با رعایت رابطهٔ بالا، مجهول α_3 برحسب α_1 چنین به‌دست می‌آید:

$$\alpha_3=\frac{r_{n-1}}{s_n}\cdot\frac{q_{n-1}}{r_n}\cdot\alpha_1$$

به‌همین شیوه، مجهولهای α_4، α_5،...، و α_k را برحسب α_1 حساب می‌کنیم. سپس به α_1 مقدار دلخواهی مخالف صفر نسبت می‌دهیم، و مجهولهای α_2، α_3، ...، α_k را حساب می‌کنیم.

اگر برای α_1، α_2، ...، و α_n مقادیری مخالف صفر که در دستگاه معادله‌های (IV) صدق می‌کنند انتخاب کنیم و به‌علاوه قرار دهیم $a_1=\alpha_1 q_1$، $a_2=\alpha_1 q_2$، ...، و $a_p=\alpha_k t_{n-2}$، آنگاه رابطهٔ (III) به‌صورت رابطهٔ (I) درمی‌آید.

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که مختصات هر نقطه از منحنی γ_2 در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند.

اکنون ثابت می‌کنیم که مختصات نقطهٔ S نیز در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند و نتیجه می‌گیریم که مختصات هر نقطه از منحنی γ_1 در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند. برای این منظور بر روی منحنی γ_1 نقطهٔ $R\neq S$ را اختیار می‌کنیم و سپس این نقطه را از منحنی γ_1 حذف می‌کنیم و منحنی حاصل را γ_3 می‌نامیم. همان شیوهٔ استدلالی راکه دربارهٔ منحنی γ_2 به‌کار بردیم دربارهٔ منحنی γ_3 به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که مختصات نقاط γ_3 در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند. پس مختصات نقطهٔ S که متعلق به‌منحنی γ_3 می‌باشد در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند. بنابراین مختصات هر نقطه از منحنی γ_1 در معادلهٔ (I) صدق می‌کنند.

۱۳.۴. چندجمله‌ای لاگرانژ و تعمیمهایی از آن

چندجمله‌ایهایی که در شماره‌های (۴.۴) و (۲.۱۱.۴) برای مطالعهٔ خواصی از چندضلعیها به‌کار گرفته شد تعمیمهایی از چندجمله‌ای لاگرانژ است.

چندجمله‌ای لاگرانژ. مطلوب است تعیین یک چندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ n به‌طوری که اگر متغیر x مقادیر داده شده x_1، x_2، ...، و x_{n+1} را اختیار کنند، چندجمله‌ای مقادیر داده شدهٔ a_1، a_2، ...، و a_{n+1} را اختیار کند[1].

---

۱ ـ برای مطالعهٔ اثبات مطلب می‌توان به‌کتاب "Cours de Mathématiques" اثر J.BASS رجوع کرد. جلد دوم. فصل انتگرالهای معین ـ سری. صفحهٔ ۱۱۲۴. چاپ ۱۹۶۸.

چندجمله‌ای مطلوب چنین است:

$$p(x)=a_1\,\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}+$$

$$a_2\,\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

تعمیمهایی از چندجمله‌ای لاگرانژ

الف. مطلوب است تعیین یک چندجمله‌ای درجه $(n-1)$ از n متغیر x_1، x_2، ...، و x_n به‌طوری که اگر مقادیر هر دو متغیر دلخواه صفر شوند بی‌آنکه بقیهٔ متغیرها صفر شوند، آنگاه مقدار چندجمله‌ای صفر شود.

چندجمله‌ای مطلوب چنین است:

$$p(x)=a_1x_2x_3\ldots x_n+a_2x_1x_3\ldots x_n+\ldots+a_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$$

چندجمله‌ای بالا شامل n جمله است. a_1، a_2، ...، و a_n اعداد جبری دلخواه‌اند.

جمله‌ای که دارای ضریب a_i , $1\le i\le n$ است شامل $(n-1)$ عضو متمایز از مجموعهٔ $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ است که دارای زیرنویس i نمی‌باشد

اثبات مطلب در شمارهٔ (۲.۱۱.۴) ذکر شده است.

ب. مطلوب است تعیین یک چندجمله‌ای درجه n از $2n$ متغیر x_1، x_2، ...، و x_{2n} به‌طوری که اگر مقادیر هر دو متغیر دلخواه که یکی با زیرنویس فرد و دیگر با زیرنویس زوج باشند صفر شوند بی‌آن‌که بقیهٔ متغیرها صفر شوند آنگاه مقدار چندجمله‌ای صفر شود.

چندجمله‌ای مطلوب چنین است

$$p.x_1.x_3\ldots x_{2n-1}+q.x_2.x_4\ldots x_{2n}=0$$

p و q دو عدد دلخواه‌اند.

اثبات کاملاً مشابه با اثبات (۴.۴) است.

MATH75.IR

بخش دوم

دربارهٔ تقارن n تایی

مطالبی که در این بخش مطرح خواهیم کرد:

تقارن از مباحث مهم هندسه است که علاوه بر آنکه در مسائل نظری مورد توجه است در مباحث عملی چون بلورشناسی، زیست‌شناسی، و شیمی حائز اهمیت است (رجوع شود مثلاً به‌کتاب «تقارن» به‌زبان فرانسه، اثر ژاک نیکول).

در این بخش که فصل پنجم کتاب حاضر را تشکیل می‌دهد کوششی برای مطالعهٔ اشکالی مسطح که دارای چند محور تقارن ناهمرس‌اند انجام گرفته است. این مطالعه ما را به‌بررسی خواصی از اشکال مسطح با محورهای تقارن همرس هدایت کرده است.

در ابتدا به‌تعریف تقارن n تایی و تابع متقارن و یادآوری یک قضیه ازمتغیر مختلط خواهیم‌پرداخت. سپس خواص اشکالی‌راکه دارای چند محور تقارن ناهمرس‌اند مورد مطالعه قرار خواهیم داد (شماره ۵.۴) و از آن همرسی محورهای تقارن منحنیهای جبری را که دارای محورهای تقارن متعدداند نتیجه خواهیم‌گرفت (شماره ۵. ۵). خاصیت اخیرالذکر را در تعیین حداکثر تعداد محورهای تقارن منحنیهای جبری به‌کار خواهیم برد (شماره ۵. ۶). از جمله نتایج این مطالعه اثبات تازه‌ای از قضیهٔ استورم (شمارهٔ ۵. ۷) و تعمیمی از آن است (شماره ۵. ۸).

۵

دربارهٔ تقارن n تایی

۱.۵. یادآوری تعریفها

۱.۱.۵. *تقارن نسبت به‌یک نقطه.* دو نقطهٔ M و M′ را نسبت به‌نقطهٔ O قرینه نامند اگر $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{o}$ باشد. دو شکل F و F′ را نسبت به‌نقطهٔ ثابت O ـ که آن را مرکز تقارن نامند ـ قرینه گویند اگر به‌ازای هر نقطه M از شکل F، نقطه‌ای چون M′ از شکل F′ موجود باشد به‌طوری که $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{o}$ باشد.

۲.۱.۵. *تقارن نسبت به یک خط (یا محور).* دو نقطهٔ M و M′ را نسبت به‌خط l قرینه نامند اگر خط l عمود منصف پاره‌خط MM′ باشد.

دو شکل F و F′ را نسبت به‌خط ثابت l ـ که آن را محور تقارن نامند ـ قرینه گویند اگر به‌ازای هر نقطه M از شکل F، نقطه‌ای چون M′ از شکل F′ موجود باشد به‌طوری که دو نقطهٔ M و M′ نسبت به‌خط l قرینه باشند.

۳.۱.۵. *تقارن n تایی.* شکل F و خط l و عدد صحیح و مثبت n را درنظر می‌گیریم اگر شکل F، پس از دوران یافتن دور خط l، به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$ رادیان، بر خودش منطبق شود می‌گویند که این شکل دارای تقارن n تایی است و خط l را محور تقارن شکل F می‌نامند.

در حالت خاص که $n=2$ باشد تقارن را دوتایی و یا مختصراً تقارن می‌نامند و می‌گویند شکل F نسبت به‌خط l متقارن است.

MATH75.IR

چند مثال

الف. مثلث متساوی‌الاضلاع دارای تقارن سه‌تایی است، محور تقارن این شکل خطی است که از مرکز دایره محیطی آن بر صفحه شکل عمود شود.

ب. مربع دارای محور تقارن چهارتایی است. محور تقارن این شکل خطی است که از مرکز مربع بر صفحهٔ آن عمود شود.

پ. چهاروجهی منتظم دارای هفت محور تقارن است به‌قرار زیر:

I). چهار محور تقارن این شکل سه‌تایی است. هر خط که از یک رأس چهاروجهی بر وجه مقابل عمود شود یک محور تقارن سه‌تایی است.

II). سه محور تقارن این شکل دوتایی است. هر خط که وسطهای دو یال مقابل چهاروجهی منتظم را به‌هم وصل می‌کند یک محور تقارن دوتایی (یا به‌طور مختصر یک محور تقارن) آن است.

۵.۱.۴. *تابع متقارن.* تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از n متغیر x_1، x_2، ...، و x_n را متقارن نامند اگر با تبدیل متغیرها تغییر نکند. مثلاً تابع $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ متقارن است.

۵.۲. قضیه[1]

فرض کنید θ یک عدد حقیقی باشد. روی دایرهٔ مثلثاتی نقاطی با طولهای منحنی‌الخط

$$0 , \theta , 2\theta , \ldots , n\theta , \ldots$$

در نظر می‌گیریم. اینها نقاطی از صفحه مختلط‌اند که آفیکسهای آنها به‌صورت زیراند:

$$z_n=e^{in\theta} \qquad (1)$$

اگر $\frac{\theta}{\pi}$ گویا باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ (۱) محدود است.

اگر $\frac{\theta}{\pi}$ گنگ باشد، هر نقطه دایرهٔ مثلثاتی یک نقطه انباشتگی مجموعهٔ (۱) است. این مجموعه روی دایره چگال است.

۵.۳. خاصیت هندسی شکلی که دارای دو محور تقارن متقاطع است

شکل مسطح F که دارای دو محور تقارن OU و OV می‌باشد که با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از شکل F باشد. قرینه‌های نقطهٔ M را

---

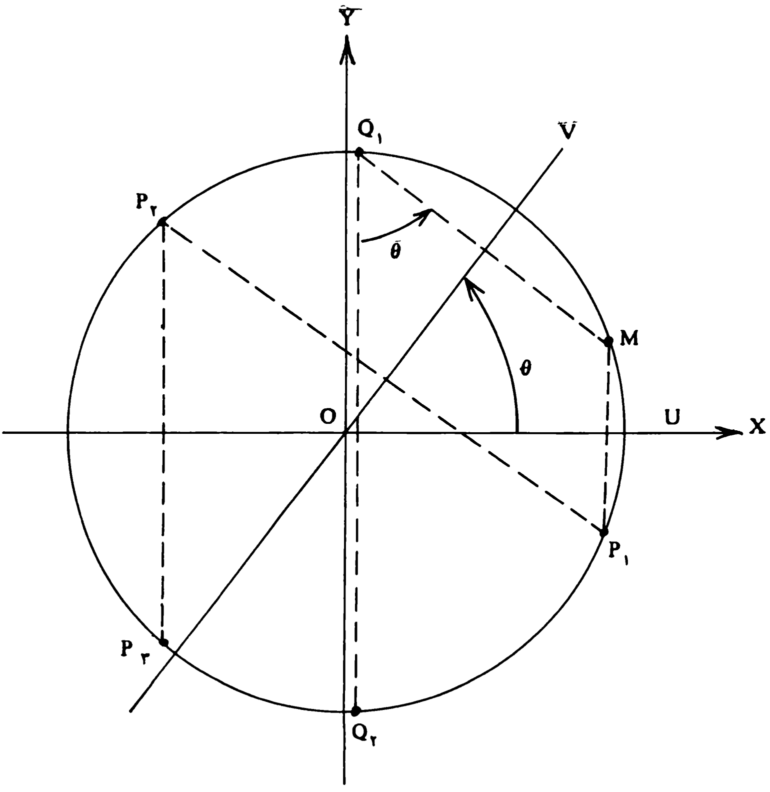
۱ - برای مطالعه اثبات این قضیه رجوع کنید به‌کتاب "Cours de Mathématiques" اثر J.BASS، فصل نهم تحت عنوان (همگرایی - پیوستگی). چاپ چهارم، سال ۱۹۶۸.

نسبت به‌دو محور مذکور تعیین می‌کنیم و سپس قرینه‌های دونقطه قرینه حاصل را نسبت به‌دو محوریادشده به‌دست می‌آوریم و این عمل قرینه‌یابی متوالی را ادامه‌می‌دهیم. مجموعهٔ متشکل از نقطهٔ M و نقاط حاصل از قرینه‌یابیهای متوالی را E می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

الف. اگر عدد $\frac{\theta}{\pi}$ گویا باشد، مجموعه نقاط E بر روی رأسهای دو چندضلعی منتظم قرار دارند که مرکز آن O و شعاع آن OM است.

ب. اگر عدد $\frac{\theta}{\pi}$ گنگ باشد، مجموعهٔ E دارای بی‌نهایت نقطه است که بر روی دایره به‌مرکز O و شعاع OM قرار دارند. هر نقطه از دایره یک نقطه انباشتگی برای مجموعهٔ E می‌باشد.

اثبات. قرینه نقطهٔ M را نسبت به‌دو محور تقارن OU و OV به‌ترتیب P_1 و Q_1 می‌نامیم (شکل زیر). قرینهٔ نقطهٔ P_1 را نسبت به‌محور تقارن OV، نقطهٔ P_2 و قرینهٔ نقطهٔ P_2 را نسبت به‌محور تقارن OU، نقطهٔ P_3 نام می‌نهیم. به‌همین قرار با قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌دو محور تقارن مذکور، نقطه‌های P_4، P_5، ... را به‌دست می‌آوریم. قرینهٔ نقطهٔ Q_1 را نسبت به‌محور OU، نقطهٔ Q_2 و قرینهٔ نقطهٔ Q_2 را نسبت به‌محور OV، نقطهٔ Q_3 می‌نامیم. به‌همین قرار با قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌دو محور تقارن مذکور، نقطه‌های Q_4، Q_5، ... را تعیین می‌کنیم.



MATH75.IR

دستگاه مختصات دکارتی قائم xOy را چنان اختیار می‌کنیم که محور Ox آن بر خط OU منطبق باشد. اگر مقدار زاویه بردار $\overrightarrow{OM}$ را با محور Ox با α نشان دهیم آفیکس نقطهٔ M در صفحهٔ مختلط xOy چنین است:

$$r.e^{i\alpha}\ ,\ r=OM \quad \text{طول پاره خط} \qquad (۱)$$

چون نقطهٔ $P_۱$ قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به‌محور ox است پس آفیکس آن مزدوج آفیکس نقطهٔ M است. اگر آفیکس نقطهٔ $P_۱$ را ζ بنامیم چنین داریم:

$$\zeta=re^{-i\alpha} \qquad (۲)$$

چون دو خط OU و OV به‌ترتیب عمود منصفهای دو پاره‌خط $MP_۱$ و $MQ_۱$ اند پس اندازهٔ زاویه $P_۱OQ_۱$ دو برابر اندازهٔ زاویهٔ UOV است. از طرفی $OP_۱=OM=OQ_۱$ (سه شعاع یک دایره) پس نقطهٔ $Q_۱$ را می‌توان از دوران نقطهٔ $P_۱$، دور نقطهٔ O، به‌اندازهٔ زاویهٔ ۲θ به‌دست آورد. بنابراین آفیکس نقطهٔ $Q_۱$ چنین است:

$$\zeta e^{i۲\theta}=r.e^{-i\alpha}.e^{i۲\theta} \qquad (۳)$$

با همین شیوه استدلال آفیکسهای نقاط $P_{۲k}$، $P_{۲k+۱}$، $Q_{۲k}$، $Q_{۲k+۱}$ (k عددی است صحیح) به‌ترتیب به‌صورت زیربه‌دست می‌آیند:

$$re^{i\alpha}.e^{i۲k\theta} \qquad (۴)$$

$$re^{-i\alpha}.e^{-i۲k\theta} \qquad (۵)$$

$$re^{i\alpha}.e^{-i۲k\theta} \qquad (۶)$$

$$re^{-i\alpha}.e^{i۲k\theta} \qquad (۷)$$

عبارتهای (۴) و (۶) به‌ازای $k=۰$، آفیکس نقطهٔ M را به‌دست می‌دهند. عبارتهای (۵) و (۷) به‌ازای $k=۰$ آفیکسهای نقطهٔ $P_۱$ را به‌دست می‌دهند.

اکنون قضیهٔ مذکور ذر شمارهٔ (۲.۵) را به‌کار می‌گیریم. برحسب آنکه $\frac{\theta}{\pi}$ گویا و یا گنگ باشد دو حالت زیر پیش می‌آید:

I). عدد $\frac{\theta}{\pi}$ گویا است. در این حالت تعداد نقاط حاصل ازرابطهٔ (۴)، به‌ازای

$$k\in \{۰,۱,۲,...\}$$

محدود است. این نقاط بر روی رأسهای یک چندضلعی منتظم محاط در دایرهٔ (O,r)، که آن را p می‌نامیم قرار دارند. نقاطی که آفیکسهای آنها از رابطهٔ (۶) به‌ازای ...,۲-,۱-,۰ =k به‌دست می‌آیند بر روی رأسهای همان چندضلعی منتظم p قرار دارند.

نقاطی که آفیکسهای آنها از رابطه‌های (۵) و (۷) به‌دست می‌آیند بر روی رأسهای یک چندضلعی منتظم p' قرار دارند. چندضلعی p را می‌توان از دوران چندضلعی p' دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ زاویهٔ ۲α به‌دست آورد.

II). عدد $\frac{\theta}{\pi}$ گنگ است. در این حالت تعداد نقاط حاصل از روابط (۴)، (۵)، (۶)، و (۷)

بی‌نهایت است. این نقاط روی دایرهٔ (O,r) قرار دارند. هر نقطه از این دایره یک نقطه انباشتگی مجموعه نقاط مورد نظر است.

نتیجه. اگر کمان AB متعلق به‌شکل F باشد با قرینه‌یابیهای متوالی نقاط این شکل، نسبت به‌دو محور تقارن OU و OV، کمانهای A_1B_1، A_2B_2، ... حاصل می‌شوند که متعلق به‌شکل F اند. هر یک از این کمانها را می‌توان از دوران کمان AB، دور نقطهٔ O به‌دست آورد. برحسب آنکه مقدار $\frac{\theta}{\pi}$ گویا و یا گنگ باشد تعداد این کمانها محدود و یا نامحدود است.

۴.۵. اشکالی که دارای چند محور تقارن ناهمرس (نامتقارب)اند

در کتابهای هندسه اشکالی را که دارای سه محور تقارن و یا دارای بیش از سه محور تقارن‌اند مطالعه کرده‌ایم. در زیر مثالهایی از این اشکال ذکر می‌کنیم:

الف. مثلث متساوی‌الاضلاع. گل سه برگ به‌معادلهٔ $r=a\sin 3\theta$.

ب. مربع. گل چهاربرگ به‌معادلهٔ $r=a\sin 2\theta$

پ. پنج‌ضلعی منتظم.

درتمام‌اشکال‌مذکور، محورهای‌تقارن همرس‌اند. اکنون‌این‌سؤال را مطرح‌می‌کنیم که‌آیا اشکالی وجود دارند که دارای چندمحور تقارن ناهمرس باشند. در زیر به‌بررسی این مطلب می‌پردازیم.

۱.۴.۵. قضیه. اگر شکل F دارای n محور تقارن ناهمرس باشد $(n\geq 3)$، دارای خاصیتهای زیر است:

الف. این شکل از بی‌نهایت نقطه مجزا و یا انباشتگی و یا بی‌نهایت کمان تشکیل می‌شود که به‌طور دورانی تا فاصلهٔ بی‌نهایت گسترده است.[1]

ب. هیچ بخش خاصی از شکل F، نسبت به n محور مذکور دارای تقارن نیست.[2]

۱ـ منظورآن‌است‌که ازهرنقطه شکل‌باقرینه‌یابیهای‌متوالی‌نسبت به‌محورهای‌تقارن،نقاطی‌حاصل‌می‌شوند که دور چندضلعی کامل حاصل از تقاطع محورهای تقارن می‌چرخند و بی‌نهایت دور می‌شوند.

۲ـ اگر MBN و PB′Q دو کمان از بیضی با قطر بزرگ A′A و قطر کوچک B′B باشند به‌طوری که دو وتر MN و PQ موازی باشند. شکل حاصل از اجتماع دو کمان مذکور بخش خاصی از بیضی است. این بخش خاص دارای دو محور تقارن است. این دو محور تقارن، همان محورهای تقارن بیضی می‌باشند (شکل الف).

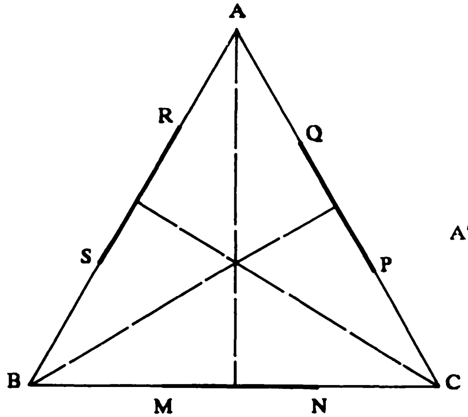
همچنین می‌توان از یک مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که دارای سه محور تقارن همرس است، بخش

MATH75.IR

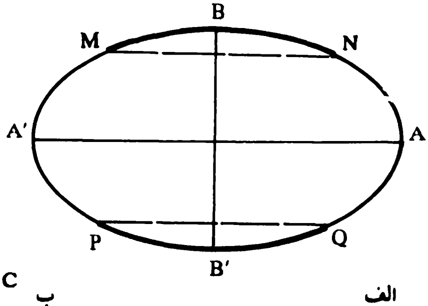
برهان. قضیه را برای $n=3$ ثابت می‌کنیم بدون آنکه از کلیت مطلب کاسته شود. فرض کنیم سه خط دوبه‌دو متقاطع d_1، d_2 و d_3 سه محور تقارن یک‌شکل مسطح F باشند. نقطه‌های تقاطع خطهای d_2 و d_3، d_3 و d_1، d_1 و d_2 را به‌ترتیب A_1، A_2، و A_3 می‌نامیم. از نقاط A_1، A_2 و A_3 خطهای l_1، l_2، و l_3 را به‌ترتیب موازی خطهای d_1، d_2، و d_3 رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع خطهای l_2 و l_3، l_3 و l_1، l_1 و l_2 را به‌ترتیب A'_1، A'_2، و A'_3 می‌نامیم. طولهای ارتفاعهای مثلث $A_1A_2A_3$ را h_1، h_2، و h_3 می‌نامیم ($A_1H_1=h_1$، $A_2H_2=h_2$، $A_3H_3=h_3$).

نقطهٔ دلخواه M از شکل F را که بنا به‌فرض دارای سه محور تقارن ناهمرس d_1، d_2، و d_3 است در نظر می‌گیریم و قرینه‌های آن نقطه را نسبت به‌سه محور مذکور تعیین می‌کنیم. سپس قرینه‌های نقطه‌های اخیر را نسبت به‌همان محورها تعیین می‌کنیم و این عمل قرینه‌یابیهای متوالی را ادامه می‌دهیم. حال می‌خواهیم خاصیتهای (الف) و (ب) شکل F را ثابت کنیم.

اثبات خاصیت الف. ابتدا ثابت می‌کنیم که شکل F دارای حداقل یک نقطه در خارج از مثلث $A'_1A'_2A'_3$ می‌باشد. اگر فرض کنیم که شکل F دارای نقطه‌ای در خارج از مثلث یاد شده نباشد آنگاه شکل F باید دارای حداقل یک نقطه در داخل مثلث مذکور یا روی محیط آن باشد. اگر P نقطه‌ای از شکل F واقع در داخل مثلث و یا روی محیط آن باشد با تعیین قرینه‌های این نقطه نسبت به‌دو محور از سه محور تقارن مذکور مثلاً نسبت به d_1 و d_2 و سپس با



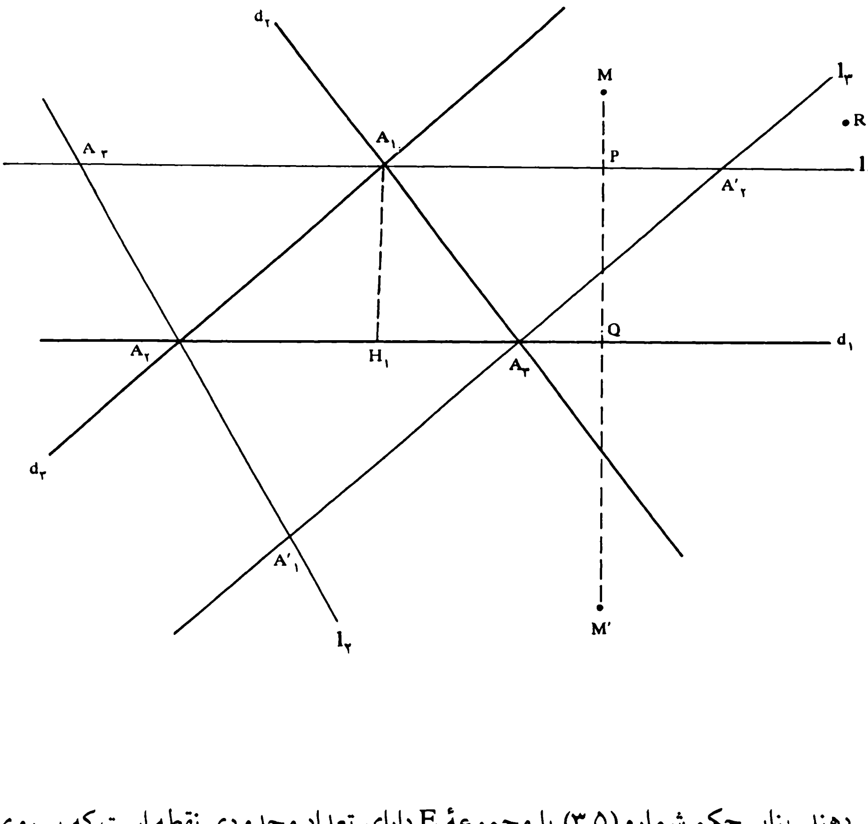
ب



الف

خاصی در نظر گرفت که نسبت به‌سه محور تقارن مثلث مذکور متقارن باشد. برای این منظور روی اضلاع AB، BC و CA از مثلث مذکور، به‌ترتیب سه پارخط MN، PQ و RS با طولهای مساوی که هر یک کمتر از طول یک ضلع مثلث یاد شده می‌باشند طوری در نظر می‌گیریم که هر کدام نسبت به‌عمود منصفِ ضلع نظیر متقارن باشند (شکل ب). شکل حاصل از سه پاره‌خط MN، PQ و RS بخش خاصی از مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است و دارای سه محور تقارن است. این محورهای تقارن همان محورهای تقارن مثلث مذکوراند. اما در شکل F چنین خاصیتی وجود ندارد.

قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌همان دو محور، نقاطی حاصل خواهد شد که در خارج از مثلث $A'_1A'_2A'_3$ قرار دارند. برای اثبات مطلب اخیر می‌گوییم نقطهٔ P و نقاط حاصل از قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌دو محور یاد شده یک مجموعه نقاط که آن را E می‌نامیم تشکیل



می‌دهند. بنابر حکم شماره (۳.۵) یا مجموعهٔ E دارای تعداد محدودی نقطه است که بر روی رأسهای دوچندضلعی منتظم محاط در دایره $(A_3, \overline{A_3P})$ قرار دارند و یا دارای بی‌نهایت نقطه است که روی همان دایره قرار دارند و هر نقطه دایره یک نقطه انباشتگی مجموعهٔ E است. چون خط l_3 از مرکز دایره $(A_3, \overline{A_3P})$ می‌گذرد پس در هر یک از دو حالت مذکور، عده‌ای از نقاط مجموعهٔ E در یک طرف خط l_3 و عده‌ای دیگر از نقاط در طرف دیگر آن خط قرار دارند. نتیجه می‌شود که نقاطی از مجموعهٔ E در خارج از مثلث $A'_1A'_2A'_3$ قرار دارند.

اکنون یک نقطهٔ M از شکل F را که در خارج مثلث $A'_1A'_2A'_3$ است در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ این نقطه از حداقل یکی از محورهای تقارن، بیش از طول ارتفاعی ازمثلث $A_1A_2A_3$

MATH75.IR

است که بر این محور عمود است (در شکل ۵.۴.۱.پ فاصلهٔ نقطهٔ M از محور d_1 بیش از طول ارتفاع A_1H_1 است اما فاصلهٔ نقطهٔ R که در زاویهٔ مقابل به‌زاویهٔ $A_1A'_2A_3$ قرار دارد، از هر یک از سه‌محور مذکور، بیش از طول ارتفاعی از مثلث $A_1A_2A_3$ است که بر آن محور عمود است.)

اکنون نقطهٔ M' قرینهٔ نقطهٔ M را نسبت به‌محور d_1 تعیین می‌کنیم. به‌علت تقارن چنین داریم:

$$(1) \quad \overline{MA_2}=\overline{M'A_2} \text{ و } \overline{MA_3}=\overline{M'A_3}$$

تصاویر نقطهٔ M را بر دو خط $A'_2A'_3$ و A_2A_3 به‌ترتیب P و Q می‌نامیم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(2) \quad \overline{MA_1}^2 = \overline{PA_1}^2 + \overline{PM}^2$$

$$(3) \quad \overline{M'A_1}^2 = \overline{PA_1}^2 + \overline{PM'}^2 = \overline{PA_1}^2 + (2\overline{PQ} + \overline{PM})^2$$

$$= \overline{PA_1}^2 + (2h_1 + \overline{PM})^2 = \overline{PA_1}^2 + \overline{PM}^2 + 4h_1^2 + 4h_1 \cdot \overline{PM}$$

از مقایسه دو رابطهٔ (۲) و (۳) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(4) \quad \overline{M'A_1}^2 > \overline{MA_1}^2 + 3h_1^2$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۴) نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$(5) \quad \overline{M'A_1}^2+\overline{M'A_2}^2+\overline{M'A_3}^2 > \overline{MA_1}^2+\overline{MA_2}^2+\overline{MA_3}^2+3h_1^2$$

اکنون حکم هندسی زیر را به‌کار می‌گیریم.

یک رابطهٔ طولی در مثلث. مجموع مربعهای فاصله‌های هر نقطه از سه رأس یک مثلث مساوی است با مجموع مربعهای فواصل گرانیگاه مثلث از سه رأس آن به‌اضافه سه برابر مربع فاصله آن نقطه از گرانیگاه مثلث.

رابطهٔ (۵) با رعایت حکم هندسی اخیرالذکر، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(6) \quad \overline{M'G}^2 > \overline{MG}^2 + h_1^2$$

اکنون قرینه‌های نقطهٔ M' را نسبت به‌سه محور مذکور تعیین می‌کنیم. در بین نقطه‌های حاصل، حداقل یک نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آن از حداقل یکی از محورها بیش از طول ارتفاعی ازمثلث $A_1A_2A_3$ است که بر این محور عمود می‌شود. اگر این نقطه را M'' و طول ارتفاع مربوط را h بنامیم چنین داریم:

$$(7) \quad \overline{M''G}^2 > \overline{M'G}^2 + h^2, \qquad h\in\{h_1, h_2, h_3\}$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۶) و (۷) نتیجه می‌شود:

$$(۸)\quad \overline{M''G} > \overline{M'G} > \overline{MG}$$

از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود که اگر قرینه‌یابی را همواره ادامه دهیم، نقطه‌های حاصل از قرینه‌یابی، بتدریج از نقطهٔ G گرانیگاه مثلث $A_۱A_۲A_۳$ دور می‌شوند و به‌سوی بی‌نهایت می‌روند زیرا مقداری که در هر قرینه‌یابی به‌مربع فاصله‌های قبلی اضافه می‌شود حداقل مساوی با مربع طول کوچکترین ارتفاع مثلث $A_۱A_۲A_۳$ است.

اثبات خاصیت ب. بخش خاصی از شکل F را در نظر گرفته و آن را $\mathscr{P}$ می‌نامیم. فرض کنیم S نقطه‌ای از این بخش باشد که فاصله‌اش از G دارای ماکزیمم است. اگر قرینه‌های این نقطه را نسبت به‌سه محور تقارن $d_۱$، $d_۲$، و $d_۳$ تعیین کنیم، بنابرآنچه در اثبات خاصیت (الف) ذکر شد، در بین نقطه‌های حاصل، حداقل یک نقطهٔ S' وجود دارد به‌طوری که:

$$(۹)\quad \overline{S'G} > \overline{SG}$$

اگر بخش $\mathscr{P}$ نسبت به‌سه محور $d_۱$، $d_۲$، و $d_۳$ متقارن باشد آنگاه نقطهٔ S' متعلق به $\mathscr{P}$ خواهد بود. از طرفی از رابطهٔ (۹) نتیجه می‌شود که S' متعلق به $\mathscr{P}$ نیست. از این تناقض نتیجه می‌شود که $\mathscr{P}$ نمی‌تواند نسبت به‌سه محور $d_۱$، $d_۲$، و $d_۳$ متقارن باشد.

حالتهای خاص قضیه (۱.۵.۴)

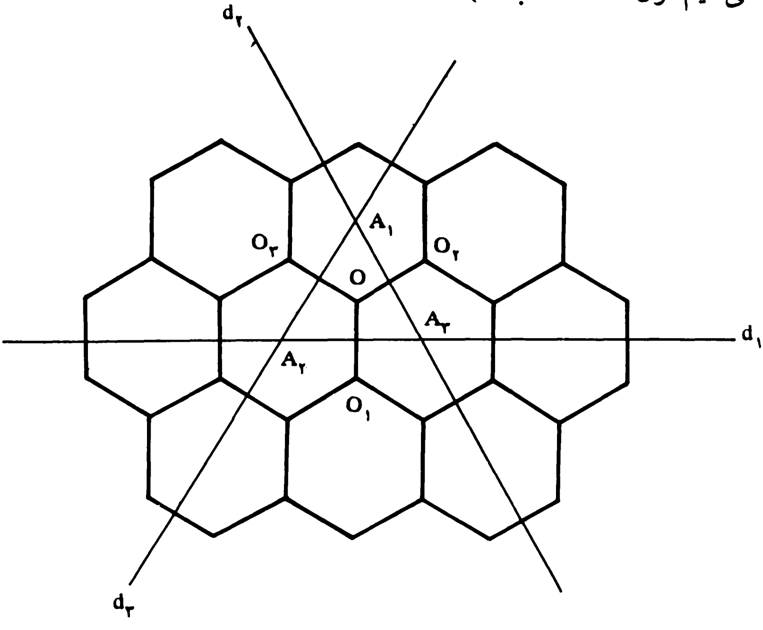
الف. شکل F دارای سه محور تقارن موازی با هم است. در این مورد از هر نقطه از شکل F، با قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌این محورها، بی‌نهایت نقطه از شکل F حاصل می‌شود. این نقاط در امتداد خط عمود بر محورهای تقارن، از این محورها، بی‌نهایت دور می‌شوند.

ب. از سه محور تقارن شکل F، دو محور موازی‌اند. دو محور موازی را $d_۱$ و $d_۲$ و محور سوم را $d_۳$ می‌نامیم. نقاط تقاطع دو محور $d_۱$ و $d_۲$ را با محور $d_۳$ به‌ترتیب $A_۱$ و $A_۲$ می‌نامیم. از هر نقطهٔ M از شکل F، با قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌دو محور $d_۱$ و $d_۲$، بی‌نهایت نقطه از شکل F حاصل می‌شود. این نقاط در امتداد خط عمود بر دو خط $d_۱$ و $d_۲$، از این دو خط بی‌نهایت دور می‌شوند. از هر نقطه N از نقاط اخیرالذکر با قرینه‌یابیهای متوالی نسبت به‌دو محور متقاطع $d_۱$ و $d_۳$ و همچنین نسبت به دو محور $d_۲$ و $d_۳$، نقاطی واقع بر دایره‌های $(A_۱$ و $\overline{A_۱N})$ و $(A_۲$ و $\overline{A_۲N})$ حاصل می‌شود. مختصر آنکه از هر نقطه از شکل F، با قرینه‌یابی نسبت به سه محور $d_۱$، $d_۲$، و $d_۳$ بی‌نهایت نقطه حاصل می‌شود که دور دو نقطهٔ $A_۱$ و $A_۲$ به‌صورت دورانی، تا فاصلهٔ بی‌نهایت دور گسترده‌اند.

MATH75.IR

مثال

اکنون کوشش می‌کنیم یک شکل بسیار ساده طرح کنیم که دارای سه محور تقارن غیرهمرس باشد. شکلی تصور می‌کنیم که دارای سه محور تقارن غیرهمرس باشد به‌طوری‌که محورها با هم زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ رادیان بسازند. محورهای تقارن را خطهای d_1، d_2، و d_3 می‌نامیم (شکل زیر). نقاط تقاطع محورهای d_2 و d_3، d_3 و d_1، d_1 و d_2 را به‌ترتیب A_1، A_2، و A_3 می‌نامیم. مثلث $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است. مرکز دایره محیطی این مثلث را O می‌نامیم. فرض می‌کنیم نقطهٔ O متعلق به‌شکل مورد نظر باشد (این فرضها برای آن است که شکلی که طرح می‌کنیم فوق‌العاده ساده باشد).



قرینه‌های نقطهٔ O را نسبت به‌محورهای d_1، d_2، و d_3 تعیین می‌کنیم. نقاط O_1، O_2، و O_3 حاصل می‌شود. این نقاط متعلق به‌شکل مورد نظراند. قرینه‌های نقاط O_1، O_2، و O_3 را نسبت به‌سه محور مذکور تعیین می‌کنیم و این عمل قرینه‌یابی را بی‌نهایت بار ادامه می‌دهیم، شکلی حاصل می‌شود که نقاط آن بر رأسهای شش‌ضلعیهای منتظمی که صفحه‌را فرش می‌کنند قرار دارند. این شکل، ساده‌ترین شکلی است که دارای سه محور تقارن غیرهمرس می‌باشد.

از قضیهٔ (۱.۴.۵) قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید.

۵.۵. قضیه

اگر یک منحنی جبری دارای n محور تقارن باشد $(n\geq 3)$ آنگاه این محورها همرس‌اند.

۶.۵. قضیه

یک‌منحنی جبری‌غیرهمگن[1] از درجهٔ n، (۱<n) اگر دایره‌نباشد و یامتشکل ازدایره‌های هم‌مرکز نباشد، چنانچه دارای محورهای تقارن باشد، تعداد محورها حداکثر مساوی n است.

برهان. چون منحنی مورد بحث بنا به‌فرض جبری است پس اگر دارای محور تقارن باشد این محورها بنا بر قضیهٔ (۵.۵) از یک نقطه که آن را O می‌نامیم می‌گذرند.

فرض‌کنیم منحنی موردبحث که آن‌را γ می‌نامیم دارای pمحور تقارن‌باشد. نقطهٔ‌دلخواه M را روی این منحنی‌اختیار می‌کنیم. تعداد قرینه‌های نقطهٔ M نسبت به‌p محور تقارن موردنظر و قرینه‌های‌هریک‌ازنقاط حاصل‌ازقرینه‌یابی،نسبت‌به‌محورهای‌تقارن‌مذکور مساوی ۲pمی‌باشد.

از طرفی دایره به‌مرکز O و شعاع OM، منحنی γ را در ۲n نقطه قطع می‌کند (زیرا بنابر یکی از قضایای هندسهٔ تحلیلی نقاط تقاطع دو منحنی جبری از درجه‌های p و q مساوی pq می‌باشد اگر نقطهٔ مکرر از درجه r را به‌عنوان r نقطه در نظر بگیریم و همچنین نقاط با مختصات مختلط را نیز به‌حساب آوریم). از این مطلب نتیجه می‌شود:

$$2p \leq 2n$$

$$p \leq n$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

چند تبصره

I). اگر ۱=n باشد منحنی γ یک خط راست است و دارای بی‌نهایت محور تقارن است.

II). اگر منحنی γدایره باشد و یا متشکل از دایره‌های هم‌مرکز باشد دارای بی‌نهایت محور تقارن است.

III). اگر معادلهٔ منحنی γ همگن باشد، این منحنی از n خط راست که از مبدأ مختصات می‌گذرند تشکیل می‌شود. در این حالت اگر خطها با هم زاویه‌های مساوی بسازند، شکل دارای ۲n محور تقارن است.

۷.۵. قضیه استورم[2]

اگر مجموع توانهای pام فاصله‌های یک نقطه از n ضلع یک n ضلعی منتظم مقدار ثابتی

---

۱ ـ قضیه‌ای از منحنی جبری همگن در فصل ضمیمه‌ها، شمارهٔ (۴.۳.۸) ذکر شده است.

۲ ـ **شارل استورم** (۱۸۵۵ ـ ۱۸۰۳) ریاضی‌دان فرانسوی متولد ژنو. استاد دانشگاه سُربن. تحقیقات متعددی در معادلات دیفرانسیل، نور، و مکانیک عرضه کرده است.

MATH75.IR

باشد و $2 \leq p \leq n-1$ باشد مکان این نقطه دایره است.

برهان. n ضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_n$ محاط در دایره (O,r) را در نظر می‌گیریم. تصاویر یک نقطهٔ M از صفحه‌را روی‌خطهای A_1A_2، A_2A_3، ...، و A_nA_1 به‌ترتیب H_1، H_2، ...، و H_n می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم مکان هندسی نقاطی چون M که فواصل آنها از اضلاع n ضلعی منتظم در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند دایره است:

$$(1) \quad \overline{MH_1}^{\,p} + \overline{MH_2}^{\,p} + \dots + \overline{MH_n}^{\,p} = l^p$$

l عددی است مثبت.

الف. ابتدا ثابت می‌کنیم مکان هندسی مطلوب که آن را Γ می‌نامیم، یک منحنی جبری از درجه p است. برای این منظور می‌گوییم فاصلهٔ یک نقطه $M(X,Y)$ از یک خط راست به‌معادلهٔ $ax+by+c=0$ عبارت است از $\frac{aX+bY+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. چون عبارت اخیر نسبت به X و Y از درجهٔ اول است پس اگر معادله منحنی Γ را در دستگاه مختصات دکارتی بنویسیم یک معادلهٔ جبری از درجه p حاصل می‌شود.

ب. اگر خط l یک محور تقارن یک چندضلعی منتظم باشد و M و M′ دو نقطهٔ قرینه نسبت به‌این محور باشند، فاصله‌های دو نقطهٔ M و M′ از دو ضلع چندضلعی منتظم مذکور که نسبت به‌خط l متقارن باشند، مساوی است.

پ. از مطالب قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که مکان هندسی مطلوب یک منحنی جبری از درجهٔ p است که دارای n محور تقارن است. چون شرطهای $2 \leq p \leq n-1$ محقق است پس بنابر قضیهٔ شماره (۶.۵)، مکان هندسی مطلوب دایره است.

۸.۵ قضیه

n ضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_n$ محاط در دایره γ را در نظر می‌گیریم. اضلاع این n ضلعی را امتداد می‌دهیم. از تقاطع اضلاع به‌طور یک‌درمیان، دودرمیان، ...، و p درمیان ($p=\frac{n-3}{2}$ اگر n فرد باشد و $p=\frac{n-4}{2}$ اگر n زوج باشد) به‌ترتیب شکلهای $B_1B_2 \dots B_n$، $C_1C_2 \dots C_n$، ...، و $L_1L_2 \dots L_n$ حاصل می‌شود. هر یک از این شکلها از یک یا چند، چندضلعی منتظم تشکیل می‌شود. دایره‌های محیطی این شکلها را به‌ترتیب γ_1، γ_2، ...، و γ_p می‌نامیم. شکل حاصل از اجتماع دایره‌های γ، γ_1، ...، و γ_p را Γ نام می‌نهیم. از شکل Γ رأسهای تمام چندضلعیها را برمی‌داریم، شکل حاصل را Γ′ می‌نامیم.

n محور x'_1x_1، x'_2x_2، ...، و x'_nx_n را به‌ترتیب متکی بر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و

$\overrightarrow{A_nA_1}$ و هم‌سو با آنها اختیار می‌کنیم. فواصل جبری یک نقطهٔ دلخواه صفحه را از محورهای مذکور به‌ترتیب x_1، x_2، ...، و x_n می‌نامیم[1]. می‌خواهیم ثابت کنیم شکل Γ' مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فواصل جبری آنها از محورهای مذکور در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}=0 \qquad (1)$$

برهان

الف. مکان هندسی نقاطی از صفحه راکه فواصل جبری آنها در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند جست‌وجو می‌کنیم:

$$x_1x_2x_3\dots x_{n-1}+x_1x_3\dots x_n+\dots=0 \qquad (2)$$

عبارتِ سمت چپ معادلهٔ (۲)، مجموع حاصل‌ضربهای $(n-1)$ عضو متمایز از مجموعه $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ می‌باشد. نمودار معادلهٔ (۲) را $\mathscr{C}$ می‌نامیم. ثابت می‌کنیم نمودار $\mathscr{C}$ همان نمودار Γ است.

ب. اگر M نقطه‌ای از نمودار $\mathscr{C}$ باشد قرینهٔ آن نسبت به‌هر یک از محورهای تقارن چندضلعی منتظم $A_1A_2\dots A_n$ متعلق به‌نمودار $\mathscr{C}$ می‌باشد. این مطلب از تقارن عبارت سمت چپ رابطهٔ (۲) و تقارن چندضلعی منتظم نتیجه می‌شود. بنابراین نمودار $\mathscr{C}$ دارای n محور تقارن است.

پ. چون عبارت فاصله یک نقطه از یک خط راست یعنی عبارت $\frac{ax_1+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ نسبت به‌مختصات x و y از درجه اول است پس اگر عبارت سمت چپ تساوی (۲) را با مختصات دکارتی بنویسیم یک عبارت جبری از درجه $(n-1)$ نسبت به x و y حاصل می‌شود. لذا نمودار معادلهٔ (۲) یک منحنی جبری از درجه $(n-1)$ است.

ت. ثابت می‌کنیم نمودار $\mathscr{C}$ نمی‌تواند از n خط راست همرس که با یکدیگر زاویه‌های مساوی می‌سازند تشکیل شود. اگر نمودار $\mathscr{C}$ از n خط راست که با هم زاویه‌های مساوی می‌سازند تشکیل شود، آنگاه نقطه همرسی باید بر نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ γ منطبق شود. در نتیجه مختصات O یعنی nگانه $(a,a,\dots,a)$ باید در معادلهٔ (۲) صدق کند (a فاصلهٔ نقطهٔ O از یکی از اضلاع چندضلعی منتظم $A_1A_2\dots A_n$ می‌باشد). چون مختصات نقطهٔ O در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کنند پس نمودار $\mathscr{C}$ از n خط راست همرس که با هم زوایای مساوی می‌سازند

---

۱ ـ رجوع کنید به‌بخش اول این کتاب. فصل اول، شمارهٔ ۹.۱.

MATH75.IR

تشکیل نمی‌شود.

ث. بنابر قضیهٔ (۶.۵)، نمودار معادلهٔ (۲) که از درجه (n−۱) است یا حداکثر دارای (n−۱) محور تقارن است یا آنکه دارای ۲(n−۱) محور تقارن است. حالت اخیر در صورتی پیش می‌آید که نمودار از (n−۱) خط همرس که با هم زاویه‌های مساوی می‌سازند تشکیل شده باشد. اما در بند (ت) ثابت کردیم که نمودار $\mathscr{C}$ دارای چنین خاصیتی نیست بنابراین نمودار $\mathscr{C}$ حداکثر دارای (n−۱) محور تقارن است.

ج. در قسمت (الف) ثابت کردیم که نمودار $\mathscr{C}$ دارای n محور تقارن است و در بند (ث) ثابت کردیم که این نمودار حداکثر دارای (n−۱) محور تقارُن می‌باشد لذا بنابر قضیهٔ (۶.۵)، نمودار $\mathscr{C}$، دایره و یا اجتماع چند دایره هم‌مرکز است. چون مختصات رأسهای شکلهای $A_1A_2 \dots A_n$، $B_1B_2 \dots B_n$، ....، و $L_1L_2 \dots L_n$ در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند پس دایره‌های γ، γ_1، γ_2، ....، و γ_p بخشهایی از نمودار $\mathscr{C}$ می‌باشند.

چ. اکنون ثابت می‌کنیم که نمودار $\mathscr{C}$ همان نمودار Γ است. اگر m تعداد دایره‌های شکل Γ باشد، درجه منحنی Γ مساوی ۲m می‌باشد. از طرفی برحسب آنکه n فرد یا زوج باشد چنین داریم:

$$m=\frac{n-1}{2} \qquad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$m=\frac{n-2}{2} \qquad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

اگر n فرد باشد درجه منحنی Γ چنین است:

$$2m=2\,\frac{n-1}{2}=n-1$$

ملاحظه می‌کنیم که درجه منحنی Γ مساوی است با درجه معادلهٔ (۲)، پس فقط مختصات نقاط مجموعه دوایر γ، γ_1، ....، و γ_p در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند.

اگر n زوج باشد درجه منحنی Γ چنین است:

$$2m=2\,\frac{n-2}{2}=n-2$$

و چون

$$n-1=(n-2)+1$$

در این صورت می‌گوییم مختصات نقاط $\frac{n-2}{2}$ دایره‌های γ، γ_1، γ_2، ....، و γ_p و خط بی‌نهایت صفحه در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند (زیرا در این حالت اضلاع مقابل چندضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_n$ با هم موازی‌اند).

ح. از تقسیم دو طرف معادلهٔ (۲) بر عبارت $x_1x_2 \dots x_n \neq 0$ معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود. پس شکل Γ' مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مختصات آنها در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

تبصره. قضیهٔ بالا تعمیمی است از قضیهٔ استورم[1]. یعنی حالت $p=-1$ و $l=0$ (رجوع شود به ۷.۵).

---

۱ ـ در کتاب «چند قضیهٔ هندسه» که در سال ۱۳۴۷ منتشر نمودم اثبات دیگری از قضیهٔ (۸.۵) عرضه نمودم. رجوع شود به‌صفحه‌های (۵۵ ـ ۵۰) آن کتاب.

MATH75.IR

بخش سوم

تعمیم قضایا

مطالبی که در این بخش مطرح خواهیم کرد:

در این بخش که فصل ششم کتاب حاضر را تشکیل می‌دهد چند حکم هندسی را تعمیم داده‌ایم که عبارت‌اند از:

تعمیم حکمی دربارهٔ پنج‌ضلعی منتظم، تعمیم قضیهٔ آپولونیوس، تعمیم سه حکم هندسی دربارهٔ چندضلعیهای منتظم، و تعمیم قضیهٔ برهماگوپتا که به‌ترتیب در شماره‌های (۶.۱)، (۶.۲)، (۶.۳)، و (۶.۴) ارائه شده‌اند.

در پایان این بخش دو حکم هندسی تازه عرضه و اثبات کرده‌ایم که عبارت‌اند از: یک خاصیت برداری در چندضلعیها و یک قضیه دربارهٔ منحنیهای جبری متقارن که به‌ترتیب در شماره‌های (۶.۵) و (۶.۶) عرضه شده‌اند.

MATH75.IR

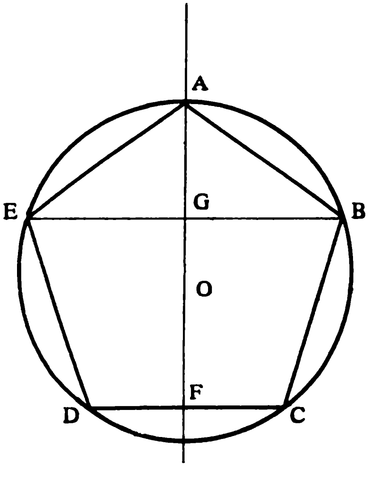
۶

تعمیم قضایا

۱.۶. تعمیم یک قضیه دربارهٔ پنج‌ضلعی منتظم

در زیر ابتدا حکمی دربارهٔ پنج‌ضلعی منتظم محدب که در بعضی کتابهای هندسه مطرح شده است ذکر می‌کنیم. سپس این حکم را با به‌کارگیری اعداد مختلط در n ضلعی منتظم محدب تعمیم می‌دهیم. نتیجه را به‌صورت یک رابطهٔ مثلثاتی مطرح می‌کنیم. برای مطالعه تعمیم حکم، مطالب مذکور در شماره‌های (۱.۱.۸) تا (۸.۱.۸) مورد احتیاج است.

۱.۱.۶. *خاصیتی از پنج‌ضلعی منتظم*. پنج ضلعی منتظم و محدب ABCDE، محاط در دایره (O,r) را در نظر می‌گیریم. نقاط برخورد خط OA را با دو خط CD و BE به‌ترتیب F و G می‌نامیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OF}$، و $\overrightarrow{OG}$ را روی محور Ox منطبق بر بردار $\overrightarrow{OA}$ به‌ترتیب $\overline{OA}$، $\overline{OF}$، و $\overline{OG}$ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم دو نقطهٔ O و A پاره‌خط FG را به‌توافق تقسیم می‌کنند.



MATH75.IR

کافی است ثابت کنیم:

$$\text{(I)} \qquad \frac{۲}{\overline{OA}} = \frac{۱}{\overline{OF}} + \frac{۱}{\overline{OG}}$$

دو پاره‌خط OF و OG به‌ترتیب سهمهای پنج‌ضلعی منتظم محدب و پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای محاط در دایره (O,r) می‌باشند. اندازه‌های طولهای این پاره‌خطها به‌ترتیب عبارت‌اند از: $OF=\frac{r}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$ و $OG=\frac{r}{۴}(\sqrt{۵}-۱)$. اگر محور Ox را هم‌سو با بردار $\overrightarrow{OA}$ اختیار کنیم چنین داریم: $\overline{OA}=r$، $\overline{OG}=\frac{r}{۴}(\sqrt{۵}-۱)$، و $\overline{OF}=-\frac{r}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$. اگر این مقادیر را در رابطهٔ (I) ببریم یک تساوی عددی حاصل می‌شود و به‌این ترتیب حکم مورد نظر ثابت می‌شود.

۶.۱.۲. تعمیم حکم پیش در *n* ضلعی منتظم محدب. n ضلعی منتظم محدب $A_۰A_۱...A_{n-۱}$ محاط در دایره مثلثاتی (O,۱) را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). فرض می‌کنیم وقتی محیط دایرهٔ مثلثاتی را در جهت مثبت طی می‌کنیم پس از نقطهٔ $A_۰$ به‌نقطهٔ $A_۱$ برسیم. n را عددی اول فرض می‌کنیم و قرار می‌دهیم $p=\frac{n-۱}{۲}$. دستگاه مختصات دکارتی قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور Ox آن منطبق بربردار $\overrightarrow{OA_۰}$ و هم‌سو با آن باشد. نقاط برخورد خط Ox را با وترهای $A_۱A_{n-۱}$، $A_۲A_{n-۲}$، ...، و $A_pA_{p+۱}$ به‌ترتیب $H_۱$، $H_۲$، ...، و H_p می‌نامیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{OH_۱}$، $\overrightarrow{OH_۲}$، ...، و $\overrightarrow{OH_p}$ را روی محور Ox به‌ترتیب با $\overline{OH_۱}$، $\overline{OH_۲}$، ...، و $\overline{OH_p}$ نشان می‌هیم. می‌خواهیم دو عبارت زیر را که مساوی‌اند و مقدار مشترک آنها را S می‌نامیم حساب کنیم.

$$(۱) \qquad \frac{۱}{\overline{OH_۱}} + \frac{۱}{\overline{OH_۲}} + ... + \frac{۱}{\overline{OH_p}}$$

$$(۲) \qquad \frac{۱}{\cos\frac{۲\pi}{n}} + \frac{۱}{\cos ۲\frac{۲\pi}{n}} + ... + \frac{۱}{\cos p\frac{۲\pi}{n}}$$

برای حل مسئله مراحل (الف)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) مشروح در زیر را طی می‌کنیم.

الف. معادلهٔ دو جمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

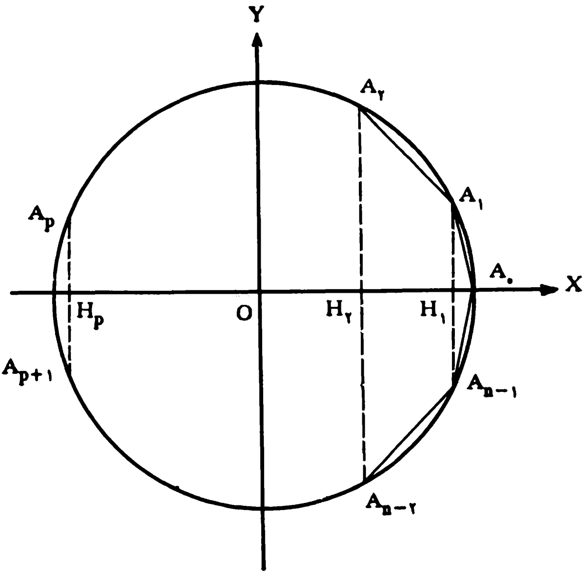
$$(۳) \qquad x^n - ۱ = ۰$$

جوابهای این معادله از دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۴) \qquad x_k = e^{ik\frac{۲\pi}{n}} = \cos k\frac{۲\pi}{n} + i\sin k\frac{۲\pi}{n}$$

$$k \in \{۰, ۱, ۲, ..., (n-۱)\}$$

MATH75.IR



$x_۰$، $x_۱$، ...، و $x_{n-۱}$ به‌ترتیب آفیکسهای رأسهای $A_۰$، $A_۱$، ...، و $A_{n-۱}$ می‌باشند.

ب. به‌کمک دستور (۴) می‌توان نوشت:

$$x_k + \frac{۱}{x_k} = ۲\cos k\,\frac{۲\pi}{n}$$

از طرفی

$$\overline{OH_j} = \cos j\,\frac{۲\pi}{n} = \cos(n-j)\,\frac{۲\pi}{n} \quad , \quad j \in J = \{۱, ۲, \ldots, p\}$$

پس رابطهٔ زیر مسلم است:

$$(۵) \qquad x_j + \frac{۱}{x_j} = x_{n-j} + \frac{۱}{x_{n-j}} = ۲\overline{OH_j} \quad , \quad j \in J$$

پ. برای محاسبهٔ عبارت (۲)، احتیاج به‌احکامی دربارهٔ جوابهای معادلهٔ (۳) داریم. در زیر، این احکام را ذکر می‌کنیم.

I). رابطه‌های زیر بین جوابهای معادلهٔ (۳) برقرار است:

$$x_۲ = x_۱{}^۲ \quad , \quad x_۳ = x_۱{}^۳ \,,\, \ldots \,,\, x_n = x_۱{}^n = ۱$$

II). دو رأس n ضلعی منتظم $A_۰A_۱\ldots A_n$ که نسبت به‌محور Ox قرینه‌اند نظیر دو جواب معکوس معادلهٔ (۳) می‌باشند.

III). مجموعه جوابهای معادلهٔ (۳)، باقانون ضرب یک گروه جابه‌جایی مرتبه nام است.

MATH75.IR

IV). اگر n عددی اول باشد و $\omega \neq 1$ یکی از جوابهای معادلهٔ (۳) باشد آنگاه مجموعهٔ زیر

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

مجموعهٔ کاملی از جوابهای معادلهٔ (۳) می‌باشد.[1]

ت. از اتحاد:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

نتیجه می‌شود که آفیکسهای نقاط A_1، A_2، ...، و A_{n-1} عبارت‌اند از ریشه‌های معادلهٔ زیر

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0 \qquad (6)$$

معادلهٔ (۶) را با توجه به‌آنکه $n=2p+1$، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{2p} + x^{2p-1} + \dots + x + 1 = 0 \qquad (7)$$

چون در معادلهٔ بالا $x \neq 0$ است پس می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \dots + x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \qquad (8)$$

قرار می‌دهیم:

$$y = x + \frac{1}{x} \qquad (9)$$

معادلهٔ (۸) با تبدیل (۹) به‌صورت معادله‌ای برحسب y که آن را:

$$\varphi(y) = 0 \qquad (10)$$

فرض می‌کنیم در می‌آید. در این معادله، $\varphi(y)$ یک چندجمله‌ای درجه p از y است.

$$\varphi(y) = a_p y^p + a_{p-1} y^{p-1} + \dots + a_1 y + a_0 \qquad (11)$$

با توجه به‌احکام مذکور در (پ) نتیجه می‌شود که تبدیل:

$$y = x^j + \frac{1}{x^j}\ ; \quad j \in J \qquad (12)$$

معادله(۸) را به‌همان معادله (۱۰) تبدیل می‌کند. بنابراین جوابهای‌معادله (۱۰) مقادیر $x+\frac{1}{x}$، $x^2+\frac{1}{x^2}$، ...، و $x^p+\frac{1}{x^p}$ می‌باشند.

ث. از رابطهٔ (۵) و مطلب مشروح در بند (ت) نتیجه می‌شود که مقدار عبارت (۲) یعنی S مساوی است با دو برابر مجموع عکسهای جوابهای معادلهٔ (۱۰). از طرفی می‌دانیم که در معادلهٔ جبری:

---

۱ ـ حکم کلی‌تر چنین است:

قضیه. یک عضو a^t از یک گروه متناهی دوری مرتبه n، مولدی از این گروه است اگر و فقط اگر n و t نسبت به‌هم اول باشند.

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$$

مجموع عکسهای جوابها از دستور زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=-\frac{a_1}{a_0}$$

بنابراین رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(13)\quad \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{n}}+\frac{1}{\cos 2\frac{2\pi}{n}}+....+\frac{1}{\cos p\frac{2\pi}{n}}=-\frac{2a_1}{a_0}$$

و یا با عبارت مختصر:

$$(13)'\quad S=-\frac{2a_1}{a_0}$$

۲.۱.۶. تبصره. برای محاسبهٔ عبارتهای $x^2+\frac{1}{x^2}$، $x^3+\frac{1}{x^3}$، ...، و $x^p+\frac{1}{x^p}$ برحسب y، می‌توان از یک دستور بازگشتی که در زیر ذکر می‌کنیم استفاده نمود.[1]

قرار می‌دهیم.

$$(14)\quad x^m+\frac{1}{x^m}=P(y)$$

m عددی است صحیح، بزرگتر یا مساوی یک

P(y) یک چندجمله‌ای درجه m برحسب y است. برحسب این قرارداد می‌توان نوشت:

$$(15)\quad x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=P_{m+1}(y)$$

$$(16)\quad x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}=P_{m-1}(y)$$

رابطهٔ مسلم زیر را می‌نویسیم:

$$(17)\quad \left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}$$

از روابط (۱۵)، (۱۶)، و (۱۷) دستور بازگشتی زیر نتیجه می‌شود:

$$(18)\quad P_{m+1}(y)=yP_m(y)-P_{m-1}(y)$$

---

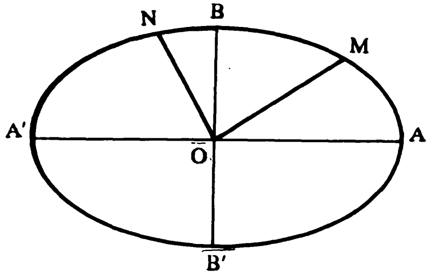
۱ ـ رجوع شود به‌کتاب جبر از مجموعهٔ "Nouveau Cours de Mathématiques Spéciales" اثر J.COMMEAU ،E.RAMIS ،G.CAGNAC. فصل هشت. معادلات جبری، چاپ ۱۹۶۵.

MATH75.IR

۶.۲. تعمیم قضیهٔ آپولونیوس[1]

۶.۲.۱. *قضیهٔ آپولونیوس.* در بیضی E، نقطهٔ O مرکز و نقاط A، 'A، B، و 'B چهار رأس می‌باشند. اگر OM و ON نصف طولهای دو قطر عمود بر هم باشند رابطهٔ زیربرقرار است:

$$\frac{۱}{\overline{OM}^{۲}} + \frac{۱}{\overline{ON}^{۲}} = \frac{۱}{\overline{OA}^{۲}} + \frac{۱}{\overline{OB}^{۲}} \qquad (۱)$$



۶.۲.۲. *تعمیم قضیهٔ آپولونیوس.* بیضی E را در نظر می‌گیریم. طولهای قطرهای بزرگ و کوچک آن را به‌ترتیب ۲a و ۲b می‌نامیم. نیم‌محورهای $OU_۱$، $OU_۲$، ...، و OU_m را طوری رسم می‌کنیم که $U_۱\widehat{O}U_۲=U_۲\widehat{O}U_۳=...=U_n\widehat{O}U_۱$ باشد. اگر نقاط برخورد نیم‌محورها را با بیضی E، به‌ترتیب $M_۱$، $M_۲$، ...، و M_n بنامیم رابطهٔ زیر برقرار است (شکل بعد):

$$\frac{۱}{\overline{OM_۱}^{۲}} + \frac{۱}{\overline{OM_۲}^{۲}} + ... + \frac{۱}{\overline{OM_n}^{۲}} = \frac{n}{۲}\left(\frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲}\right) \qquad (۲)$$

---

۱ ـ **آپولونیوس.** اقلیدس، ارشمیدس، و آپولونیوس سه ریاضی‌دان بسیار برجسته قرن سوم قبل از میلاداند. آپولونیوس ۲۵ سال از ارشمیدس جوانتر بود. آپولونیوس منجمی برجسته بود و دربارهٔ موضوعهای مختلف ریاضی مطالبی نوشت. اثر مهم او کتابی بسیار باارزش دربارهٔ مقاطع مخروطی است. آپولونیوس با این اثر لقب «هندسه‌دان کبیر» را دربین معاصران خود کسب نمود. در سطور زیر چند مطلب از ابداعات آپولونیوس ذکر می‌کنیم.

۱ ـ اگر A، B، ... نقاط ثابتی باشند و a، b، ...، و k اعداد ثابتی باشند در این صورت مکان هندسی نقطه‌ای چون P به‌طوری که $a.\overline{PA}^{۲}+b.\overline{PB}^{۲}+...=k$ باشد یک دایره است. (دایرهٔ آپولونیوس)

۲ ـ مجموع مربعهای دو قطر مزدوج یک بیضی ثابت است و نیز تفاضل مربعهای دو قطر مزدوج یک هذلولی ثابت است.

۳ ـ رسم دایره‌ای مماس بر سه دایرهٔ مفروض.

برهان. دستگاه مختصات دکارتی قائم xOy را چنان اختیار می‌کنیم که محور Ox آن منطبق بر نیم‌خط OA باشد. معادلهٔ بیضی E، در این دستگاه چنین است:

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1 \qquad (3)$$

محور Ox را محور قطبی اختیار می‌کنیم و مختصات قطبی یک نقطهٔ دلخواه صفحهٔ بیضی را با (ρ,θ) نشان می‌دهیم. معادلهٔ (۳)، در مختصات قطبی با توجه به‌روابط $x=\rho\cos\theta$ و $y=\rho\sin\theta$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\cos^{2}\theta}{a^{2}}+\frac{\sin^{2}\theta}{b^{2}}=\frac{1}{\rho^{2}} \qquad (4)$$

زاویهٔ xOM_1 را α و طولهای پاره‌خطهای OM_1، OM_2، ...، و OM_n را به‌ترتیب ρ_1، ρ_2، ...، و ρ_n می‌نامیم. مختصات قطبی نقاط M_1، M_2، ...، و M_n در معادلهٔ (۴) صدق می‌کنند لذا رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\frac{\cos^{2}\alpha}{a^{2}}+\frac{\sin^{2}\alpha}{b^{2}}=\frac{1}{\rho_1^{2}}$$

$$\frac{\cos^{2}\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)}{a^{2}}+\frac{\sin^{2}\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)}{b^{2}}=\frac{1}{\rho_2^{2}}$$

$$\frac{\cos^{2}\left(\alpha+2\frac{2\pi}{n}\right)}{a^{2}}+\frac{\sin^{2}\left(\alpha+2\frac{2\pi}{n}\right)}{b^{2}}=\frac{1}{\rho_3^{2}}$$

....

$$\frac{\cos^{2}\left(\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}{a^{2}}+\frac{\sin^{2}\left(\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}{b^{2}}=\frac{1}{\rho_n^{2}}$$

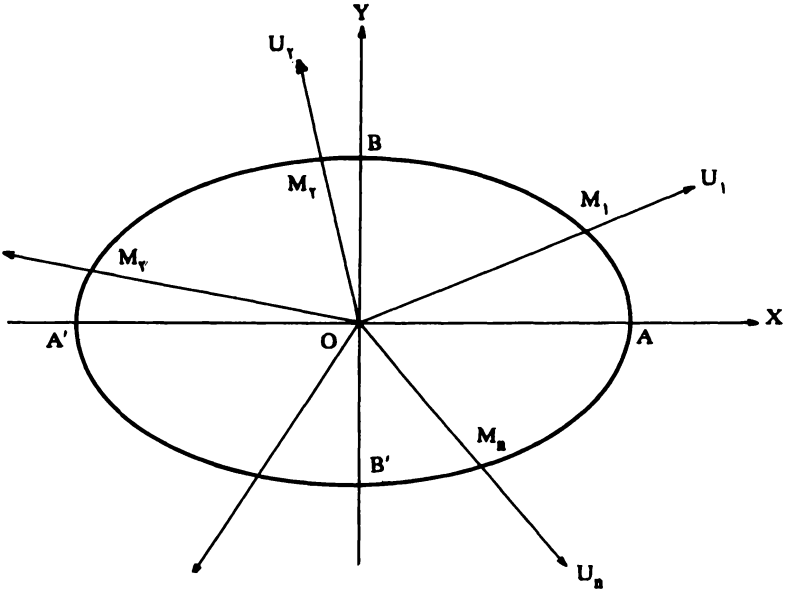
از جمع اعضاء نظیر روابط بالا، روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{a^{2}}\left[\cos^{2}\alpha+\cos^{2}\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\dots+\cos^{2}\left(\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]+$$
$$\frac{1}{b^{2}}\left[\sin^{2}\alpha+\sin^{2}\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\dots+\sin^{2}\left(\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right]=\frac{1}{\rho_1^{2}}+\frac{1}{\rho_2^{2}}+\dots+\frac{1}{\rho_n^{2}}$$

در عبارت سمت چپ تساوی بالا، مقادیر هر یک از عبارتهای داخل کروشه مساوی $\frac{n}{2}$

MATH75.IR

است (اثبات به‌خواننده واگذار می‌شود). بنابراین از تساوی بالا، تساوی (۲) حاصل می‌شود.



۶.۲.۳. *حالت خاص*. در شکل مربوط به‌تعمیم قضیهٔ آپولونیوس، از دو انتهای قطر کوچک بیضی E یعنی دو نقطهٔ B و B'، دو خط l و l' را بر محور Oy عمود می‌کنیم. در این بیضی دو رأس B و B' را ثابت نگاه می‌داریم و رأس A را روی نیم‌خط Ox حرکت می‌دهیم. شکل بیضی E با تغییر نقطهٔ A تغییر می‌کند ولی همواره رابطه‌ای به‌صورت رابطهٔ (۲) بین مقادیر متغیر $OM_۱$، $OM_۲$، ...، OM_n، و a وجود خواهد داشت. اگر نقطهٔ A را روی نیم‌خط Ox، از نقطهٔ O بی‌نهایت دور کنیم به‌عبارت دیگر a را به‌سوی بی‌نهایت میل دهیم، بیضی E به‌طرف شکل حاصل از اجتماع دو خط l و l' میل خواهد کرد. از این ملاحظات حکم هندسی زیر نتیجه می‌شود.

دو خط موازی l و l' و نقطهٔ O را که از این دو خط به‌فاصله‌های مساوی است در نظر می‌گیریم. این فاصله را d می‌نامیم. نیم‌محورهای $OU_۱$، $OU_۲$، ...، و OU_n را طوری رسم می‌کنیم که $U_۱\widehat{O}U_۲=U_۲\widehat{O}U_۳=...=U_n\widehat{O}U_۱$ باشد. اگر نقاط برخورد نیم‌محورها را با شکل

حاصل از اجتماع دو خط موازی l و 'l، به‌ترتیب M_1، M_2، ...، و M_n بنامیم آنگاه رابطهٔ زیر محقق است:

$$\frac{1}{\overline{OM_1}^2}+\frac{1}{\overline{OM_2}^2}+\dots+\frac{1}{\overline{OM_n}^2}=\frac{n}{2d^2}$$

۶.۳. تعمیم سه قضیهٔ هندسی دربارهٔ چندضلعیهای منتظم

در زیر سه حکم هندسی دربارهٔ n ضلعی منتظم به‌ازای $n=3, 5, 6$ ذکر می‌کنیم، سپس حکمی دربارهٔ nضلعی منتظم عرضه و اثبات می‌کنیم که تعمیم سه حکم هندسی موردبحث است.

۶.۳.۱. سه حکم هندسی مورد نظر چنین‌اند [1]

اگر P نقطه‌ای بر کمان AB از دایرهٔ محیطی هر یک از اشکال زیر باشد:

I. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، آنگاه $PC=PA+PB$.

II. پنج‌ضلعی منتظم ABCDE آنگاه $PC+PE=PA+PB+PD$.

III. شش‌ضلعی منتظم ABCDEF آنگاه $PD+PE=PA+PB+PC+PF$.

۶.۳.۲. قضیه‌ای دربارهٔ *n*ضلعی منتظم

الف. نقطهٔ P را بر محیط دایره (O,r) و عدد اول n را در نظر می‌گیریم ($n\geq 3$). محورهای x'_1ox_1، x'_2ox_2، ...، و x'_nox_n را طوری اختیار می‌کنیم که رابطه‌های زیر بین اندازه‌های زاویه‌های آنها برقرار باشد:

$$(\overrightarrow{px_1}, \overrightarrow{px_3})=(\overrightarrow{px_3}, \overrightarrow{px_5})=\dots=(\overrightarrow{px_n}, \overrightarrow{px_2})=$$
$$(\overrightarrow{px_2}, \overrightarrow{px_4})=(\overrightarrow{px_4}, \overrightarrow{px_6})=\dots=(\overrightarrow{px_{n-1}}, \overrightarrow{px_1})=\frac{\pi}{n}$$

نقطه‌های برخورد محورهای x'_1Px_1، x'_2Px_2، ...، و x'_nPx_n را با دایره (O,r) به‌ترتیب A_1، A_2، ...، و A_n می‌نامیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PA_1}$، $\overrightarrow{PA_2}$، ...، $\overrightarrow{PA_n}$ را روی محورهای محمل نظیر، به‌ترتیب با $\overline{PA_1}$، $\overline{PA_2}$، ...، و $\overline{PA_n}$ نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم رابطهٔ زیر بین اندازه‌های جبری بردارهای مذکور وجود دارد.

---

[1] ـ در کتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات» اثر هاورد و. ایوز، در فصل ۶ (ریاضیات یونان بعد از اقلیدس)، در شمارهٔ ۶.۹ (جدول وترهای بطلمیوس)، از احکام مذکور به‌عنوان قضیه‌های جالب منتج از قضیه بطلمیوس یاد شده است. کتاب یادشده به‌وسیلهٔ آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل به‌فارسی ترجمه شده است.

MATH75.IR

$$\overline{PA_1} + \overline{PA_2} + \dots + \overline{PA_n} = \vec{0} \quad (۲)$$

برهان. مقدار زاویهٔ بردار $\overrightarrow{OA_1}$ را با بردار $\overrightarrow{PO}$، با α نشان می‌دهیم و رابطه‌های زیـر را می‌نویسیم:

$$\overline{PA_1} = 2r\cos\alpha$$

$$\overline{PA_2} = 2r\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\overline{PA_3} = 2r\cos\left(\alpha + 3\,\frac{2\pi}{n}\right)$$

. . . .

$$\overline{PA_n} = 2r\cos\left(\alpha + (n-1)\,\frac{2\pi}{n}\right)$$

لذا عبارت سمت چپ رابطهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{PA_1} + \overline{PA_2} + \dots + \overline{PA_n} = 2\pi.\sigma$$

که در آن

$$\sigma = \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) \quad (۳)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $\sigma = 0$ و از آن درستی رابطهٔ (۱) را نتیجه می‌گیریم. در نظر می‌گیریم که جمله‌های عبارت (۳)، از چپ به‌راست به‌ترتیب عبارت‌اند از قسمتهای حقیقی عبارتهای $e^{i\alpha}$، $e^{i(\alpha + \frac{2\pi}{n})}$، ...، $e^{i\left[\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right]}$. بنابراین عبارت (۳)، قسمت‌حقیقی عبارت زیر می‌باشد:

$$e^{i\alpha}\left[1 + e^{\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n})}\right] \quad (۴)$$

در زیر ثابت می‌کنیم که مقدار داخل کروشهٔ عبارت (۴)، مساوی صـفر است و از آن نـتیجه می‌گیریم که عبارت (۴) مساوی صفر است. از مطلب اخیر نتیجه می‌شود که قسمتهای حقیقی و موهومی این عبارت مساوی صفراند.

بنابر دستور دوموآور (رجوع شود به‌فصل ضمیمه‌ها شـمارهٔ ۴.۱.۸) جـمله‌های داخـل کروشهٔ عبارت (۴)، جوابهای معادلهٔ زیراند:

$$x^n - 1 = 0 \quad (۵)$$

MATH75.IR

از طرفی می‌دانیم که در معادلهٔ جبری

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

مجموع جوابها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_0}$$

با توجه به‌رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که مجموع جوابهای معادلهٔ (۵) مساوی صفر است. پس عبارت داخل کروشه عبارت (۴) مساوی صفر است.

ب. حالت کلی. در زیر ثابت می‌کنیم که حکم پیش، در حالتی که عدد n یعنی تعداد محورها غیراول باشد و به‌صورت 2^k نباشد باز معتبر است.

عدد صحیح $n \geq 3$ را که به‌صورت 2^k نیست در نظر می‌گیریم. اگر n اول نباشد آن را به‌صورت $p.q$ می‌نویسیم به‌طوری که p یک عدد اول ناکمتر از سه باشد. از نقطهٔ P واقع بر محیط دایره (O,r)، تعداد p محور مطابق شرطهای مذکور در قسمت (الف) عبور می‌دهیم. مجموعهٔ این محورها را S_1 می‌نامیم. از تقاطع این محورها با دایره (O,r) تعداد p بردار حاصل می‌شود که مبدأ آنها نقطهٔ P و انتهای آنها بر محیط دایرهٔ مذکور واقع‌اند. دربارهٔ اندازه‌های جبری این بردارها روی محورهای نظیر از مجموعهٔ S_1، رابطه‌ای به‌صورت (۱) می‌نویسیم (زیرا p عدد اول فرض شده است). از دوران مجموعه بردارهای S_1، دور نقطهٔ P، به‌اندازهٔ زاویه‌های $\frac{2\pi}{pq}$، $2\frac{2\pi}{pq}$، $3\frac{2\pi}{pq}$، ...، و $(q-1)\frac{2\pi}{pq}$ رادیان، مجموعه‌هایی از محورها حاصل می‌شود که آنها را به‌ترتیب S_2، S_3، ...، و S_{q-1} می‌نامیم. دربارهٔ اندازه‌های جبری هر p بردار متکی بر هر یک از این مجموعه محورها، رابطه‌ای به‌صورت رابطهٔ (۱) می‌نویسیم. به‌این ترتیب تعداد q رابطه حاصل می‌شود. از جمع اعضا نظیر این رابطه‌ها، رابطه‌ای به‌صورت رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره. اگر n به‌صورت 2^k باشد نمی‌توان آن را به‌صورت $p.q$ نوشت به‌طوری که p یک عدد اول ناکمتر از ۳ باشد. در n ضلعیهای منتظمی که برای آنها $n=2^k$ باشد رابطه‌ای به‌صورت (۱) وجود ندارد.

حالتهای خاص

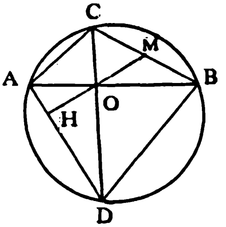
از قضیهٔ مشروح در شمارهٔ (۲.۳.۶) قسمت الف و ب، به‌ازای $n=3, 5, 6$ به‌ترتیب حکمهای (I)، (II)، و (III) مذکور در مطلب شماره (۱.۳.۶) حاصل می‌شود.

MATH75.IR

۶.۴. تعمیم قضیهٔ برهماگوپتا

در زیر ابتدا حکم هندسی برهماگوپتا را در یک چهارضلعی محاط در دایره ذکر می‌کنیم و سپس آن را در یک هشت‌وجهی محاط در کره تعمیم می‌دهیم.

۱.۴.۶. حکم هندسی برهماگوپتا[1]. در دایرهٔ γ، دو وتر AB و CD را که در نقطهٔ O بر هم عموداند در نظر می‌گیریم. در چهارضلعی محاطی ACBD، هر خطی که از نقطهٔ O بر یک ضلع عمود شود، از وسط ضلع مقابل خواهد گذشت.



در شکل خط OM که بر وسط وتر BC می‌گذرددر نقطهٔ H برضلع AD عمود است.

۲.۴.۶. تعمیم حکم هندسی برهماگوپتا. کرهٔ S و سه وتر AB، CD، و EF را که دو به‌دو در نقطه O برهم عموداند در نظر می‌گیریم. نقاط A، B، C، D، E، و F رأسهای یک هشت‌وجهی می‌باشند که هر وجه آن یک مثلث است. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر خطی که از نقطهٔ O بر یک وجه هشت‌وجهی مذکور عمود شود از گرانیگاه وجه مقابل خواهد گذشت.

برهان. در شکل زیر، یک هشت‌وجهی نموده شده است. در این هشت‌وجهی E و F دو رأس مقابل‌اند. بر رأس E، چهار وجه EAC، ECB، EBD، و EDA می‌گذرند همچنین بررأس F، چهار وجه FAC، FCB، FBD، و FDA می‌گذرند.

برای‌اثبات‌حکم موردنظرکافی‌است یک‌وجه‌مثلاًوجه ACE رادرنظربگیریم‌وثابت‌کنیم عمودی که از نقطهٔ O بر این وجه واردمی‌شود از نقطهٔ G گرانیگاه وجه مقابل (یعنی وجه FBD) می‌گذرد.

دستگاه مختصات دکارتی قائم Oxyz را که مبدأ آن نقطهٔ O می‌باشد و محورهای x، y، و z آن به‌ترتیب منطبق بر سه خط OA، OC، و OE می‌باشند در نظر می‌گیریم.

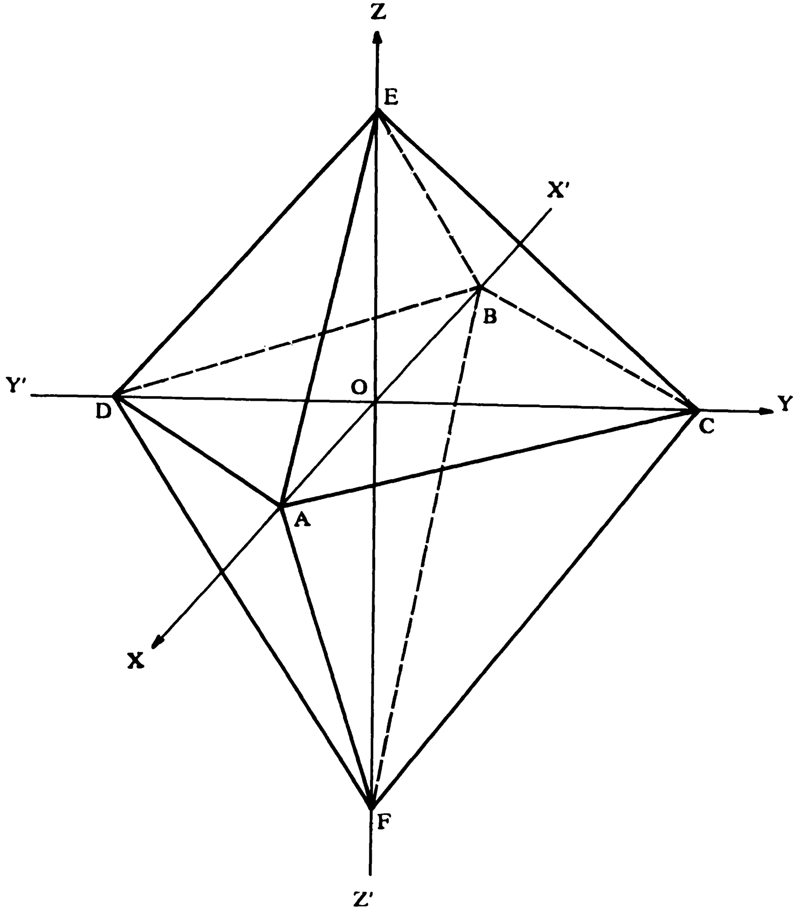
---

۱ ـ **برهماگوپتا** (Brahmagupta) ریاضی‌دان برجستهٔ هندی قرن ششم میلادی است. از جمله تحقیقات او کشف دستور مساحت مثلث برحسب سه ضلع آن است (این دستور قبلاً به‌وسیلهٔ هرون اسکندرانی ارائه شده بود). برهماگوپتا دستور مساحت چهارضلعی محاطی را به‌صورت زیر به‌دست داد:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

در این فرمول a، b، c، و d طولهای اضلاع و p نصف محیط چهارضلعی محاطی است. او همچنین فرمول طولهای قطرهای چهارضلعی محاطی را برحسب اضلاع ارائه کرد.

MATH75.IR



اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OC}$، و $\overrightarrow{OE}$ را به‌ترتیب روی محورهای x، y، و z با a، b، و c نشان می‌دهیم. مختصات نقاط A، C، و E عبارت‌اند از:

$$A(a,0,0)\ ,\ C(0,b,0)\ ,\ E(0,0,c)$$

اگر قوت نقطهٔ O نسبت به‌کره S را π بنامیم چنین داریم:

$$\overline{OA}\ .\ \overline{OB} = \overline{OC}\ .\ \overline{OD} = \overline{OE}\ .\ \overline{OF} = \pi \qquad (1)$$

بنابراین مختصات نقاط B، D، و F چنین‌اند:

$$B(\frac{\pi}{a}\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,\ D(0\ ,\ \frac{\pi}{b}\ ,\ 0)\ ,\ F(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{\pi}{c}\ )$$

MATH75.IR

مختصات نقطهٔ G گرانیگاه مثلث BDF از دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۲) \quad \begin{cases} x_G = \dfrac{x_B+x_D+x_F}{۳} \\ y_G = \dfrac{y_B+y_D+y_F}{۳} \\ z_G = \dfrac{z_B+z_D+z_F}{۳} \end{cases}$$

لذا مختصات نقطهٔ G چنین‌اند:

$$G\left(\frac{\pi}{۳a}, \frac{\pi}{۳b}, \frac{\pi}{۳c}\right)$$

معادلهٔ صفحه ACE که برسه نقطهٔ $A(a,۰,۰)$، $C(۰,b,۰)$، و $E(۰,۰,c)$، می‌گذرد چنین است:

$$(۳) \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$$

به‌کمک معادلهٔ (۳)، سه مقدار p، q، و r پارامترهای هادی خط OH عمود بر صفحهٔ ACE حساب می‌شوند:

$$(۴) \quad p=\frac{۱}{a}, q=\frac{۱}{b}, r=\frac{۱}{c}$$

می‌دانیم که معادلات خطی که از نقطهٔ $M_۰(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد و پارامترهای هادی آن (p,q,r) می‌باشند عبارت‌اند از:

$$(۵) \quad \frac{x-x_۰}{p}=\frac{y-y_۰}{q}=\frac{z-z_۰}{r}$$

از (۴) و (۵)، معادلات خط OH به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(۶) \quad ax=by=cz$$

چون مختصات نقطهٔ G در معادلهٔ (۶) صدق می‌کنند پس نقطهٔ G بر خط OH قرار دارد.

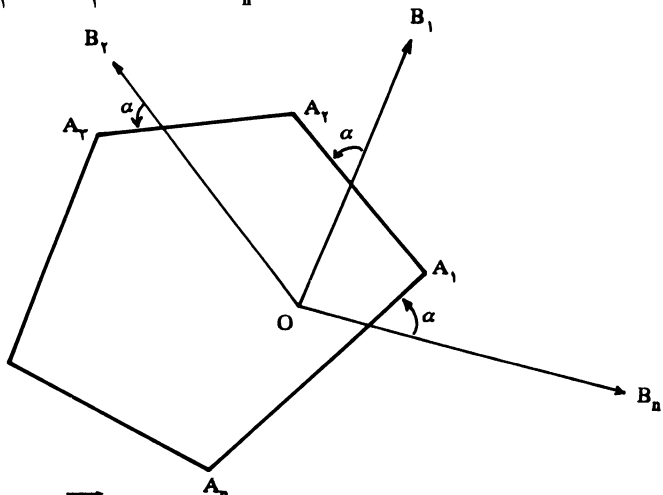
۵.۶. یک خاصیت برداری در چندضلعیها

در صفحهٔ P، چندضلعی $A_۱A_۲ \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. اگر از نقطهٔ O بردارهای $\overrightarrow{OB_۱}$، $\overrightarrow{OB_۲}$، ...، و $\overrightarrow{OB_n}$ را طوری رسم کنیم که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$(۱)\quad \begin{cases} (\overrightarrow{OB_1},\ \overrightarrow{A_1A_2}) = (\overrightarrow{OB_2},\ \overrightarrow{A_2A_3}) = \dots = (\overrightarrow{OB_n},\ \overrightarrow{A_nA_1}) \\ \dfrac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{A_1A_2}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OB_2}|}{|\overrightarrow{A_2A_3}|} = \dots = \dfrac{|\overrightarrow{OB_n}|}{|\overrightarrow{A_nA_1}|} \end{cases}\quad (۲)$$

آنگاه رابطهٔ برداری زیر برقرار است:

$$(۳)\quad \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \vec{0}$$



برهان. اندازهٔ زاویه $(\overrightarrow{OB_1}\ ,\ \overrightarrow{A_1A_2})$ را α و نسبت $\dfrac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{A_1A_2}|}$ را k می‌نامیم. بردارهای $\overrightarrow{OB_1}$، $\overrightarrow{OB_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB_n}$ را دور نقطهٔ O، به‌اندازهٔ زاویهٔ α می‌چرخانیم، به‌ترتیب بردارهای $\overrightarrow{OB'_1}$، $\overrightarrow{OB'_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB'_n}$ حاصل می‌شوند. بردارهای اخیرالذکر به‌ترتیب موازی و هم‌سو با بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{A_2A_3}$، ...، و $\overrightarrow{A_nA_1}$ می‌باشند.

حال مجانسهای بردارهای $\overrightarrow{OB'_1}$، $\overrightarrow{OB'_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB'_n}$ را نسبت به‌نقطهٔ O با ضریب $\dfrac{1}{k}$ می‌سازیم؛ به‌ترتیب بردارهای $\overrightarrow{OB''_1}$، $\overrightarrow{OB''_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB''_n}$ حاصل می‌شوند به‌طوری که رابطه‌های زیر برقراراند:

$$(۴)\quad \overrightarrow{OB''_1} = \overrightarrow{A_1A_2}\ ,\ \overrightarrow{OB''_2} = \overrightarrow{A_2A_3}\ ,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{A_nA_1}$$

چون

$$(۵)\quad \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$$

پس

MATH75.IR

$$(۶) \quad \overrightarrow{OB''_1} + \overrightarrow{OB''_2} + \dots + \overrightarrow{OB''_n} = \vec{0}$$

از رابطهٔ (۶)، درستی رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود: دوطرف رابطهٔ (۶) را در k ضرب می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$(۷) \quad k\,\overrightarrow{OB''_1} + k\,\overrightarrow{OB''_2} + \dots + k\,\overrightarrow{OB''_n} = \vec{0}$$

چون

$$k\,\overrightarrow{OB''_1} = \overrightarrow{OB'_1}\,,\ k\,\overrightarrow{OB''_2} = \overrightarrow{OB'_2}\,,\ \dots,\ k\,\overrightarrow{OB''_n} = \overrightarrow{OB'_n}$$

پس رابطه (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\overrightarrow{OB'_1} + \overrightarrow{OB'_2} + \dots + \overrightarrow{OB'_n} = \vec{0}$$

اگر بردارهای $\overrightarrow{OB'_1}$، $\overrightarrow{OB'_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB'_n}$ را به‌اندازهٔ زاویهٔ $(-\alpha)$، دور نقطهٔ O بچرخانیم به‌ترتیب بردارهای $\overrightarrow{OB_1}$، $\overrightarrow{OB_2}$، ...، و $\overrightarrow{OB_n}$ حاصل می‌شود. پس رابطهٔ (۱) محقق است.

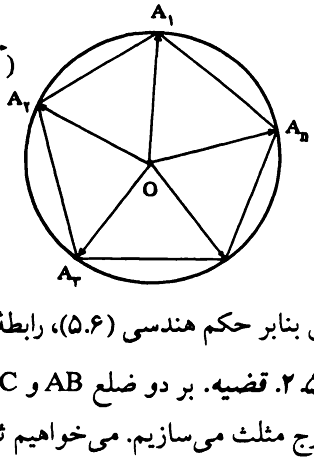
پیامدهای حکم هندسی ۵.۶

۱.۵.۶. دایرهٔ C به‌مرکز O را به‌وسیلهٔ نقطه‌های A_1، A_2، ...، و A_n به n قسمت مساوی بخش می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(۱) \quad \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

برهان. رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA_2}\,,\ \overrightarrow{A_1A_2}) = (\overrightarrow{OA_3}\,,\ \overrightarrow{A_2A_3}) = \dots = (\overrightarrow{OA_1}\,,\ \overrightarrow{A_nA_1}) \\[2mm] \dfrac{|\overrightarrow{OA_2}|}{|\overrightarrow{A_1A_2}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OA_3}|}{|\overrightarrow{A_2A_3}|} = \dots = \dfrac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{A_nA_1}|} \end{cases}$$



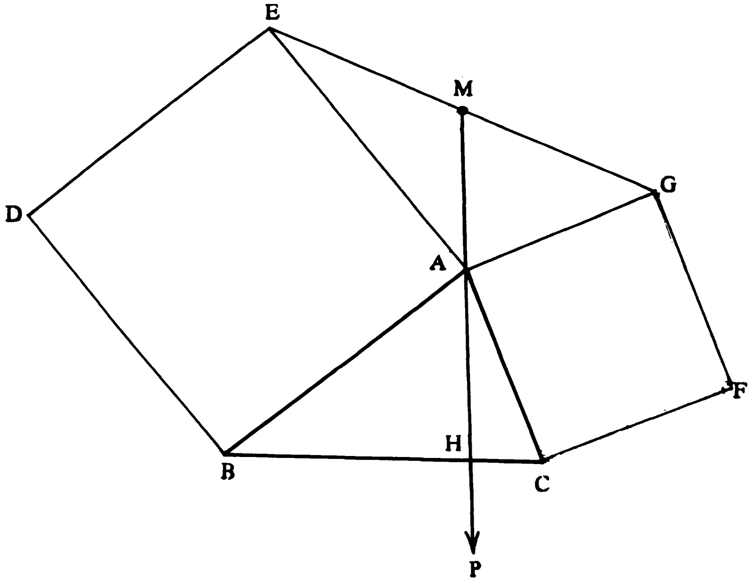
پس بنابر حکم هندسی (۵.۶)، رابطهٔ (۱) برقرار است.

۲.۵.۶. قضیه. بر دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو مربع ABDE و ACFG را به‌طرف خارج مثلث می‌سازیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

الف. خط AH، ارتفاع مثلث ABC و خط AM میانهٔ مثلث AEG در یک امتدادند.

ب. طول ضلع BC دو برابر طول میانهٔ AM است.

MATH75.IR



برهان. از نقطهٔ A بردار $\overrightarrow{AP}$ رابر خط BC عمود می‌کنیم. جهت و طول این بردار را طوری انتخاب می‌کنیم که دو رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AP}) = \frac{+\pi}{۲} \text{ رادیان}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{CB}|$$

اکنون حکم شماره (۵.۶) را دربارهٔ مثلث ABC به‌کار می‌بریم:

به‌جای چندضلعی $A_۱A_۲ \ldots A_n$، نقطهٔ O، و عدد k به‌ترتیب مثلث ABC، نقطهٔ A و عدد یک در نظر می‌گیریم. در این صورت رابطهٔ (۳)، مذکور در حکم (۵.۶) به‌صورت رابطهٔ زیر نوشته می‌شود:

$$(۴) \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = \vec{۰}$$

چون بنابه‌فرض خط AM میانه مثلث AEG است پس:

$$(۵) \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = ۲\overrightarrow{AM}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۴) و (۵) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$(۶) \quad \overrightarrow{AP} = -۲\overrightarrow{AM}$$

از رابطهٔ (۶) نتیجه می‌شود که خط AH در امتداد خط AM است و به‌علاوه BC=۲AM.

۶.۶. قضیه‌ای دربارهٔ منحنیهای جبری متقارن

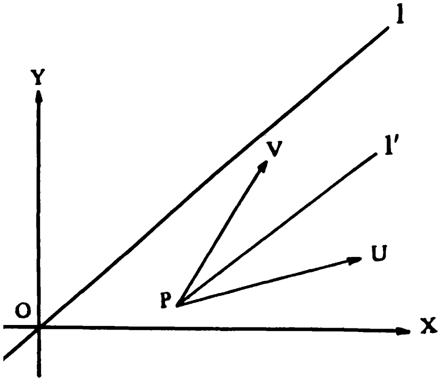
۱.۶.۶. در زیر قضیه‌ای دربارهٔ منحنیهای جبری متقارن طرح و اثبات می‌کنیم. سپس از آن قضیه چند حکم هندسی نتیجه می‌گیریم، از جمله: قضیهٔ مربع ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه،

MATH75.IR

رابطهٔ نیوتون در تقسیم توافقی، قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره، قضیه‌هایی دربارهٔ مقطعهای مخروطی.

در قضیهٔ زیر رابطهٔ تیلور به‌کار می‌آید. رابطهٔ تیلور در فصل ضمیمه‌ها در شماره‌های (۱.۲.۸) و (۲.۲.۸) ذکر شده است.

۶.۶.۲. قضیه. در صفحهٔ π منحنی جبری Γ از درجهٔ n را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این منحنی نسبت به‌یک خط که آن را l می‌نامیم متقارن باشد. از نقطهٔ P واقع در صفحهٔ π، خط l' را موازی خط l رسم می‌کنیم و سپس دو محور PU و PV را به‌طور قرینه نسبت به‌خط l' رسم می‌کنیم.



نقاط برخورد محور PU را با منحنی Γ با M_1، M_2، ...، و M_n، و نقاط برخورد محور PV را با همان منحنی با N_1، N_2، ...، و N_n نشان می‌دهیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PM_1}$، $\overrightarrow{PM_2}$، ...، و $\overrightarrow{PM_n}$ را روی محور PU به‌ترتیب با $\overline{PM_1}$، $\overline{PM_2}$، ...، و $\overline{PM_n}$ و اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PN_1}$، $\overrightarrow{PN_2}$، ...، و $\overrightarrow{PN_n}$ را روی محور PV را با $\overline{PN_1}$، $\overline{PN_2}$، ...، و $\overline{PN_n}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(1)\quad \overline{PM_1}\,.\,\overline{PM_2}\ldots\overline{PM_n}=\overline{PN_1}\,.\,\overline{PN_2}\ldots\overline{PN_n}$$

برهان. دستگاه مختصات دکارتی xOy را چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ آن بر خط l قرار داشته باشد و به‌علاوه خط l نیمساز زاویهٔ xOy باشد.

در دستگاه مختصات دکارتی xOy، معادلهٔ منحنی Γ را

$$(2)\quad f(x,y)=0$$

فرض می‌کنیم. چون منحنی Γ نسبت به‌خط نیمساز زاویهٔ xOy قرینه است پس تابع $f(x,y)$ نسبت به x و y متقارن است یعنی:

$$(3)\quad f(x,y)=f(y,x)$$

اگر α و β کسینوسهای هادی محور PU باشند، آنگاه کسینوسهای هادی محور PV چنین‌اند: $(\beta$ و $\alpha)$.

مختصات نقطهٔ P را (x_0, y_0) می‌نامیم. اگر M نقطه‌ای از محور PU باشد و ρ اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{PM}$ روی این محور باشد مختصات نقطهٔ M چنین‌اند:

$$\begin{cases} x=x_\circ+\rho\alpha \\ y=y_\circ+\rho\beta \end{cases}$$

مقادیر ρ مربوط به‌نقاط برخورد محور PU با منحنی Γ، ریشه‌های معادلهٔ زیراند:

$$(۴) \qquad f(x_\circ+\rho\alpha\ ,\ y_\circ+\rho\beta)=\circ$$

معادلهٔ (۴) بنابر فرمول تیلور با به‌کارگیری توان رمزی به‌صورت زیر نوشته می‌شود (رجوع شود به‌یک کتاب آنالیز).

$$(۵) \qquad f(x_\circ\ ,\ y_\circ)+\rho\ \left(\alpha f'_x(x_\circ,y_\circ)+\beta f'_y(x_\circ,y_\circ)\right)\ +\ \frac{\rho^۲}{۲}\left(\alpha f'_x(x_\circ,y_\circ)+\beta f'_y(x_\circ,y_\circ)\right)^{(۲)}$$

$$....\ +\ \frac{\rho^{n-۱}}{(n-۱)!}\left(\alpha f'_x(x_\circ,y_\circ)+\beta f'_y(x_\circ,y_\circ)\right)^{(n-۱)}\ +\ \rho^n\ f(\alpha,\beta)=\circ$$

معادلهٔ (۵) برحسب ρ از درجهٔ n است. اندازه‌های جبری $\overline{PM_۱}$، $\overline{PM_۲}$، ...، و $\overline{PM_n}$ عبارت‌اند از ریشه‌های معادله (۵).

ازطرفی می‌دانیم‌که‌حاصلضرب‌جوابهای‌معادلهٔ‌جبری $a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_\circ=\circ$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(۶) \qquad x_۱x_۲...x_n=(-۱)^n\ \frac{a_\circ}{a_n}$$

با توجه به‌دستور (۶)، حاصل‌ضرب جوابهای معادلهٔ (۵) چنین است:

$$(۷) \qquad \rho_۱.\rho_۲...\rho_n=(-۱)^n\ \frac{f(x_\circ\ ,y_\circ)}{f(\alpha\ ,\beta)}$$

از رابطهٔ (۷)، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$(۸) \qquad \overline{PM_۱}\ .\ \overline{PM_۲}\ ...\ \overline{PM_n}\ =\ (-۱)^n\ \frac{f(x_\circ\ ,y_\circ)}{f(\alpha\ ,\beta)}$$

با همین شیوه استدلالی که در بالا ذکر شد ثابت می‌کنیم که:

$$(۹) \qquad \overline{PN_۱}\ .\ \overline{PN_۲}\ ...\ \overline{PN_n}\ =\ (-۱)^n\ \frac{f(x_\circ\ ,y_\circ)}{f(\beta\ ,\alpha)}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۸) و (۹) با توجه به‌رابطهٔ (۳)، رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

۶.۶.۳. پیامدهای قضیه ۶.۶.۲. از قضیهٔ ۶.۶.۲ احکام زیر را نتیجه می‌گیریم:

۶.۶.۳.الف. قضیه‌ای در چندضلعیهای متقارن. در صفحهٔ π، چندضلعی $A_۱A_۲...A_n$ را که دارای محور تقارن l است در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ دلخواه P واقع در صفحهٔ π، خط l' را

MATH75.IR

موازی خط l رسم می‌کنیم. دو محور PU و PV را طوری رسم می‌کنیم که نسبت به‌خط l' متقارن باشند. نقاط برخورد محور PU را با خطهای A_1A_2، A_2A_3، ...، و A_nA_1 به‌ترتیب M_1، M_2، ...، و M_n و نقاط برخورد محور PV را با همان خطها به‌ترتیب N_1، N_2، ...، و N_n می‌نامیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PM_1}$، $\overrightarrow{PM_2}$، ...، و $\overrightarrow{PM_n}$ را روی محور PU به‌ترتیب $\overline{PM_1}$، $\overline{PM_2}$، ...، و $\overline{PM_n}$ و اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PN_1}$، $\overrightarrow{PN_2}$، ...، و $\overrightarrow{PN_n}$ را روی محور PV به‌ترتیب $\overline{PN_1}$، $\overline{PN_2}$، ...، و $\overline{PN_n}$ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(10)\quad \overline{PM_1}.\overline{PM_2}...\overline{PM_n}=\overline{PN_1}.\overline{PN_2}...\overline{PN_n}$$

برهان. اجتماع n خط A_1A_2، A_2A_3، ...، و A_nA_1 را می‌توان یک منحنی جبری درجه n دانست. این منحنی بنا به‌فرض دارای محور تقارن l است. قضیهٔ (۶.۶.۲) را دربارهٔ این منحنی جبری متقارن به‌کار می‌بریم، درستی رابطهٔ مورد نظر ثابت می‌شود.

۶.۶.۳. ب. **خاصیتی از خط شکسته متقارن.** به‌کمک قضیهٔ (۶.۶.۲) می‌توان حکمی مشابه حکم پیش دربارهٔ خط شکسته متقارن عرضه نمود.

۶.۶.۳. پ. **خاصیتی از خطهای متقارب متقارن.** به‌کمک قضیهٔ (۶.۶.۲) می‌توان حکمی مشابه با حکم (۶.۶.۳. الف) دربارهٔ چند خط متقارب که دارای محور تقارن باشند عرضه نمود.

۶.۶.۳. ت. **واسطهٔ هندسی بین چند طول.** واسطهٔ هندسی بین چند عدد مثبت a_1، a_2، ...، و a_n که با g نموده می‌شود با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$g=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

در زیر مسئله‌ای طرح می‌کنیم که یک طول واسطه هندسی بین چند طول است.

در صفحهٔ π، n خط متقارب OA_1، OA_2، ...، و OA_n را که دارای محور تقارن OL می‌باشند در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه P را در صفحه π در نظر گرفته و از آن نقطه خط PL' را موازی OL رسم می‌کنیم. محور PU را منطبق بر بردار $\overrightarrow{PO}$ و هم‌سو با آن اختیار می‌کنیم. قرینهٔ محور PU را نسبت به‌خط PL'، محور PV می‌نامیم. نقاط برخورد محور PV را با خطهای OA_1، OA_2، ...، و OA_n به‌ترتیب B_1، B_2، ...، و B_n می‌نامیم. اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{PO}$ را روی محور PU با $\overline{PO}$ و اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PB_1}$، $\overrightarrow{PB_2}$، ...، و $\overrightarrow{PB_n}$ را روی محور PV به‌ترتیب با $\overline{PB_1}$، $\overline{PB_2}$، ...، و $\overline{PB_n}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنیم:

$$(11)\quad \overline{PO}^n = \overline{PB_1}\ .\ \overline{PB_2}\ ...\ \overline{PB_n}$$

یعنی طول پاره‌خط PO واسطهٔ هندسی بین طولهای پاره‌خطهای PB_1، PB_2، ...، و PB_n است. برای اثبات می‌گوییم مجموعهٔ n خط OA_1، OA_2، ...، و OA_n را می‌توان یک منحنی

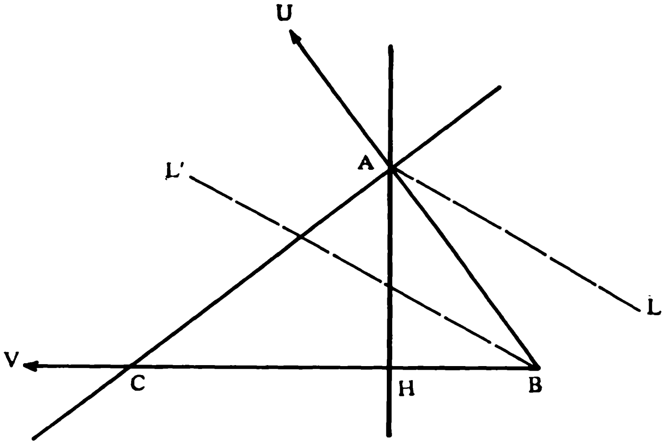
MATH75.IR

جبری از درجهٔ n تلقی نمود که دارای محور تقارن OL است. محور PU این منحنی جبری درجه n را در n نقطه منطبق بر هم که همان نقطهٔ O است قطع کرده است، پس بنابر قضیهٔ (۲.۶.۶) رابطهٔ (۱۱) برقرار است.

۶.۳.۶.ث. قضیهٔ ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر. در مثلث قائم‌الزاویه ABC (درجه ۹۰=A)، خط AH را ارتفاع فرض می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\text{(I)} \qquad \overline{BA}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BH}$$

$$\text{(II)} \qquad \overline{CA}^2 = \overline{CB}\,.\,\overline{CH}$$



در زیر رابطهٔ (I) را ثابت می‌کنیم، اثبات رابطهٔ (۲) به‌نحو مشابه انجام می‌گیرد. اجتماع دو خط AH و AC را می‌توان یک منحنی درجه دوم که آن را $\mathscr{C}$ می‌نامیم تلقی نمود. خط AL نیمساز زاویهٔ مجانب زاویهٔ CAH را رسم می‌کنیم و دو محور BU و BV را به‌ترتیب منطبق بر دو بردار $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BH}$ و همسو با آنها اختیار می‌کنیم. محور BU منحنی درجه دوم $\mathscr{C}$ را در دو نقطهٔ منطبق بر هم که همان نقطهٔ A است قطع کرده است. محور BV منحنی درجه دوم $\mathscr{C}$ را در دو نقطهٔ H و C قطع کرده است. خط BL′ که از نقطهٔ B موازی خط AL (محور تقارن منحنی $\mathscr{C}$) رسم شود نیمساز زاویهٔ دو محور BU و BV است (اثبات فوری است). پس بنابر قضیهٔ شمارهٔ (۲.۶.۶) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BH}$$

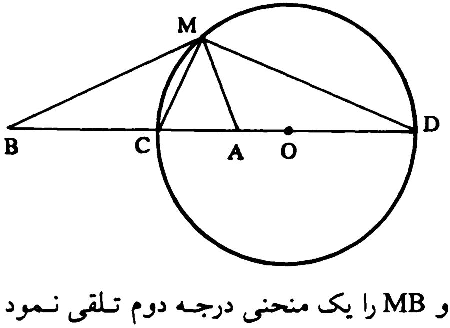
۶.۳.۶.ج. رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی. دو نقطهٔ C و D پاره‌خط AB را به‌توافق تقسیم

می‌کنند. نقطهٔ O وسط پاره‌خط CD می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\overline{OC}^{2} = \overline{OD}^{2} = \overline{OA}\,.\,\overline{OB}$$

برای اثبات، دایره‌ای به‌قطر CD رسم می‌کنیم و نقطهٔ M را بر این دایره اختیار می‌کنیم. خط MC نیمساز زاویهٔ AMB و خط MD نیمساز زاویهٔ مجانب زاویهٔ AMB است. اجتماع سه خط MA، MC، و MB را می‌توان یک منحنی‌درجه سوم که آن را γ می‌نامیم تلقی نمود. خط MD یک محور تقارن منحنی γ است. محور OU را منطبق بر بردار $\overrightarrow{OM}$ و هم‌سو با آن و همچنین محور OV را منطبق بر بردار $\overrightarrow{OA}$ و هم‌سو با آن اختیار می‌کنیم. خط OL که از نقطهٔ O موازی خط MD رسم شود نیمساز زاویهٔ دو محور است (اثبات فوری است). اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OM}$ را روی محور OU با $\overline{OM}$ و اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، و $\overrightarrow{OC}$ را بر محور OV به‌ترتیب با $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، و $\overline{OC}$ نشان می‌دهیم.

حال قضیهٔ (۲.۶.۶) را به‌کار می‌بریم. می‌گوییم منحنی درجه سوم γ دارای محور تقارن MD است. خط OL موازی با این محور تقارن است و دو محور OU و OV نسبت به‌خط OL متقارن‌اند. محور OU، منحنی γ را در سه نقطه منطبق بر هم که همان نقطهٔ M است قطع کرده است و محور OV منحنی γ را در سه نقطهٔ A، B، و C قطع کرده است پس بنابر قضیهٔ (۲.۶.۶) رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\overline{OM}^{3} = \overline{OA}\,.\,\overline{OB}\,.\,\overline{OC}$$

چون $\overline{OM} = \overline{OC}$ پس $\overline{OC}^{2} = \overline{OA}\,.\,\overline{OB}$

تبصره. می‌توان اجتماع دو خط MA و MB را یک منحنی درجه دوم تلقی نمود و مطلب را ثابت کرد.

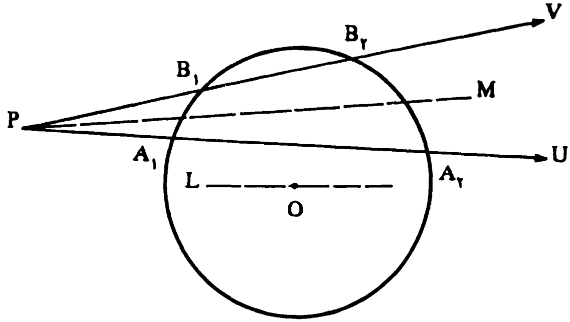
۳.۶.۶.ج. قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره. دایرهٔ γ به‌مرکز O را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P واقع در صفحهٔ دایره مفروض، دو محور PU و PV رسم می‌کنیم. نقاط برخورد محور PU را با دایرهٔ γ با A_1 و A_2 و نقاط برخورد محور PV را با همان دایره با B_1 و B_2 نشان می‌دهیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{PA_1}$ و $\overrightarrow{PA_2}$، را روی محور PU به‌ترتیب $\overline{PA_1}$ و $\overline{PA_2}$ و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{PB_1}$ و $\overrightarrow{PB_2}$ را روی محور PV به‌ترتیب $\overline{PB_1}$ و $\overline{PB_2}$ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(1)\qquad \overline{PA_1}\,.\,\overline{PA_2} = \overline{PB_1}\,.\,\overline{PB_2}$$

برهان. خط PM نیمساز زاویهٔ دو محور PU و PV را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ

γ، خط OL را موازی خط PM رسم می‌کنیم.

حال قضیهٔ (۶.۶.۲) را به‌کار می‌گیریم: می‌گوییم دایره γ یک منحنی جبری درجه‌دوم است وخط OL یک محور تقارن آن است. خط PM موازی با خط OL (محور تقارن γ) است و همچنین دو محور PU و PV نسبت به‌خط OM قرینه‌اند پس بنابر قضیهٔ (۶.۶.۲) رابطهٔ (۱) برقرار است.



۶.۶.۳.ح. قضیه. در صفحهٔ π، مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ P واقع در صفحهٔ π، خط PL را موازی یکی از محورهای مخروطی رسم می‌کنیم. از همان نقطه P دو محور PU و PV را طوری رسم می‌کنیم که نسبت به‌خط PL قرینه باشند.

نقاط برخورد محور PU را با منحنی $\mathscr{C}$ با A_1 و A_2 و نقاط برخورد محور PV را با منحنی $\mathscr{C}$ با B_1 و B_2 نشان می‌دهیم. اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PA_1}$ و $\overrightarrow{PA_2}$ را روی محور PU با $\overline{PA_1}$ و $\overline{PA_2}$ و اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{PB_1}$ و $\overrightarrow{PB_2}$ را روی محور PV به‌ترتیب با $\overline{PB_1}$ و $\overline{PB_2}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(1) \quad \overline{PA_1} \,.\, \overline{PA_2} = \overline{PB_1} \,.\, \overline{PB_2}$$

برعکس اگر از نقطهٔ P واقع در صفحهٔ مقطع مخروطی $\mathscr{C}$، دو محور متمایز PU و PV را طوری رسم کنیم که بین اندازه‌های جبری چهار بردار $\overrightarrow{PA_1}$، $\overrightarrow{PA_2}$، $\overrightarrow{PB_1}$،و $\overrightarrow{PB_2}$ حاصل از برخورد دو محور یاد شده با منحنی $\mathscr{C}$ ، رابطهٔ (۱) برقرار باشد آنگاه نیمساز زاویهٔ UPV موازی یکی از محورهای تقارن مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ است.

برهان. می‌گوییم مقطع مخروطی یک منحنی جبری درجه دو است که دارای محور تقارن است. بنابراین، از قضیه (۶.۲.۲) درستی رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود.

برای اثبات عکس قضیه، نقطهٔ دلخواه O را روی محور تقارن منحنی $\mathscr{C}$ اختیار می‌کنیم و دستگاه مختصات xOy را چنان اختیار می‌کنیم که محور تقارن $\mathscr{C}$ ، نیمساز زاویهٔ xOy باشد. معادلهٔ منحنی $\mathscr{C}$ در دستگاه مختصات xOy چنین است:

$$(2) \quad f(x,y)=0$$

که در آن

$$(3) \quad f(x,y)=a(x^2+y^2)+bxy+c(x+y)+d$$

MATH75.IR

مختصات نقطهٔ P را $(x_۰,y_۰)$ و اندازه‌های زاویه‌های دو محور PU و PV را با محور Ox به ترتیب $\theta_۱$ و $\theta_۲$ می‌نامیم. بنابر رابطهٔ (۸) مذکور در اثبات قضیهٔ (۲.۶.۶) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۴)\quad \overline{PA_۱}\,.\,\overline{PA_۲} = \frac{f(x_۰,y_۰)}{f(\cos\theta_۱,\sin\theta_۱)}$$

$$(۵)\quad \overline{PB_۱}\,.\,\overline{PB_۲} = \frac{f(x_۰,y_۰)}{f(\sin\theta_۲,\cos\theta_۲)}$$

و چون بنابه‌فرض رابطهٔ (۱) برقرار است پس:

$$(۶)\quad f(\cos\theta_۱,\sin\theta_۱)=f(\sin\theta_۲,\cos\theta_۲)$$

و یا

$$(۷)\quad b\,\sin\theta_۱\cos\theta_۱+c(\sin\theta_۱+\cos\theta_۱)=b\sin\theta_۲\cos\theta_۲+c(\sin\theta_۲+\cos\theta_۲)$$

از رابطهٔ (۷) نتیجه می‌شود:

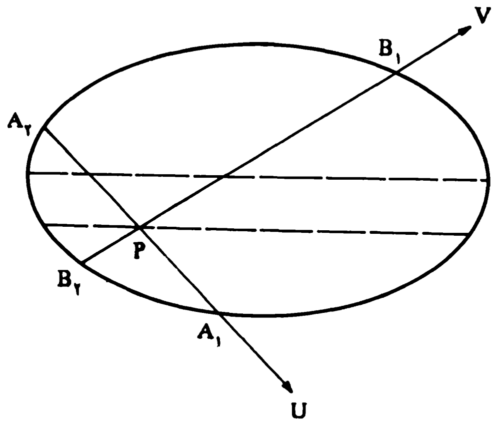
$$(۸)\quad \theta_۱=\theta_۲$$

و یا

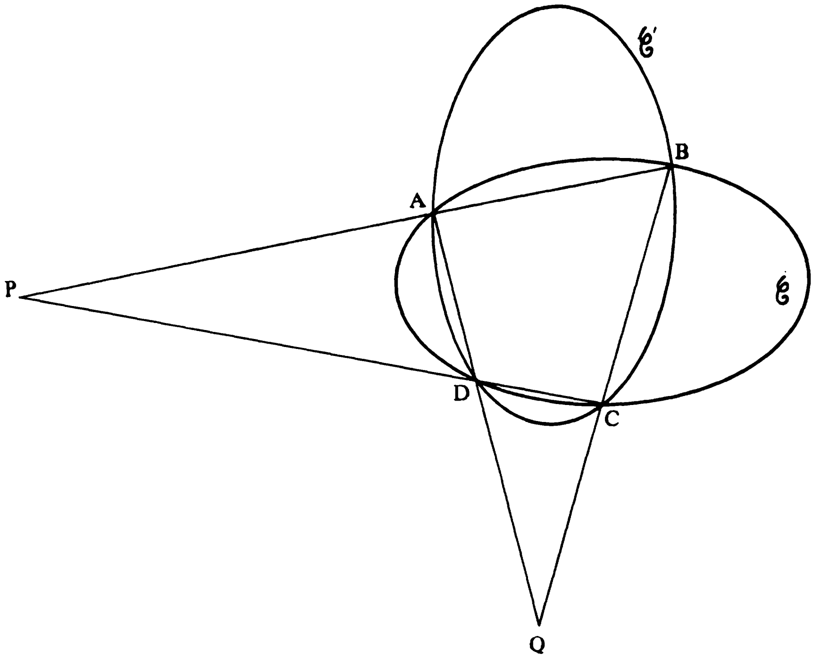
$$(۹)\quad \theta_۱+\theta_۲ = \frac{\pi}{۲}$$

از رابطهٔ (۸) نتیجه می‌شود که محور PV می‌تواند بر محور PU منطبق باشد تا رابطهٔ (۱) برقرار باشد. این نتیجه بدیهی است و مورد توجه ما نیست زیرا دو محور PU و PV را متمایز فرض کردیم.

از رابطهٔ (۹) نتیجه می‌شود که دو محور PU و PV نسبت به‌خطی که از نقطهٔ P موازی نیمساز زاویهٔ xOy رسم می‌شوند قرینه‌اند.



۶.۶.۳.خ. قضیه. اگر چهارنقطهٔ تقاطع دو مقطع مخروطی بر یک دایره قرار داشته باشند آنگاه محورهای آن دو مقطع مخروطی بر هم عموداند. برعکس اگر محورهای دو مقطع مخروطی بر هم عمود باشند نقاط تقاطع آن دو مقطع مخروطی بر یک دایره قرار دارند.



برهان. دو مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ را که در نقاط همدایره A، B، C، و D یکدیگر را قطع می‌کنند در نظر می‌گیریم. اگر دو نقطهٔ P و Q به‌ترتیب نقطه‌های برخورد خطهای (AB و CD) و (CB و DA) باشند بنابر قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره می‌توان نوشت:

$$\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PC}\,.\,\overline{PD} \qquad (۱)$$

$$\overline{QA}\,.\,\overline{QD} = \overline{QC}\,.\,\overline{QB} \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) با توجه به‌قضیهٔ (۶.۶.۳.ح) نتیجه می‌شود که نیمساز زاویهٔ APD موازی با یک محور مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ است. همچنین از رابطهٔ (۲) با توجه به‌قضیهٔ (۶.۶.۳.ح) نتیجه می‌شود که نیمساز زاویهٔ AQB موازی با یک محور تقارن مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ است پس محورهای تقارن دو مقطع مخروطی $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ بر هم عموداند.

اثبات عکس قضیه را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

حالت خاص. اگر دو سهمی دارای محورهای تقارن عمود بر هم باشند نقاط تقاطع آنها بر محیط یک دایره قرار دارند و برعکس.

MATH75.IR

حکم اخیر در مورد دو سهمی راکه ما از قضیهٔ (۶.۶.۳.خ) نتیجه گرفته‌ایم می توان به کمک ترکیب خطی از دو معادلهٔ دو سهمی نتیجه گرفت (رجوع شود مثلاً به‌درس جبر سال اول فوق‌لیسانس، اثر م. لوسیور M. LESSIEUR. فصل چهارم. حل معادلات با درجه کمتر یا مساوی چهار. به‌زبان فرانسه).

۶.۶.۳.د. یک نوموگرام[۱] برای حل معادلهٔ درجه چهارم. حکم اخیرالذکر مربوط به‌نقاط تقاطع دو سهمی با محورهای عمود بر هم را می‌توان برای حل ترسیمی معادلهٔ درجه چهارم به‌کار برد (رجوع شود به‌صفحه‌های ۳۱۸ و ۳۱۹ از کتاب تمرینهای ریاضیات مقدماتی و هندسه دوایر. اثر شادروان دکتر محسن هشترودی. از انتشارات یکان).

---

۱ ـ آباکها یا نوموگرامها روشهای ترسیمی حل معادلات است. از جمله کتابهای معتبر در این زمینه، کتاب «اصول نوموگرافی» اثر ژرژ خووانسکی است. در مقدمهٔ این کتاب خوانده می‌شود که خووانسکی بیش از صد اثر در زمینهٔ نوموگرافی ارائه کرده است و مدیر بخش نوموگرافی مرکز محاسبات آکادمی‌علوم شوروی است. از جمله مطالب جالب کتاب مذکور یک نوموگرام برای محاسبهٔ **انتگرال بیضوی** زیر است.

$$\int_{۰}^{\varphi} \frac{d\alpha}{(۱+n\sin\alpha)\sqrt{۱-K^{۲}\sin^{۲}\alpha}}$$

خووانسکی در پایان کتاب چنین می‌نویسد: «اهمیت آباکها که ساده‌ترین، باصرفه‌ترین، و قابل دسترس‌ترین ابزارهای محاسبه‌اند، با توسعهٔ ماشینهای حساب بیشتر می‌شود. این مطلب این‌طور تبیین می‌شود که از یک‌طرف، ماشینهای حساب امکانات وسیعی برای حساب کردن و ساختن آباکها به‌وجود می‌آورند و از طرف دیگر ماشینهای حساب به‌حل مسائل بسیار پیچیده می‌پردازند؛ مسائلی که کمتر پیچیده‌اند با روشهای نوموگرافی حل می‌شوند.»

لازم به‌ذکر است که موریس دوکانی فرانسوی (۱۹۲۸ ـ ۱۸۶۲) نوموگرافی را فوق‌العاده توسعه داد.

MATH75.IR

بخش چهارم

اثبات چند قضیه به‌راههای تازه

مطالبی که در این بخش مطرح خواهیم کرد:

در این بخش که فصل هفتم کتاب حاضر را تشکیل می‌دهد چند قضیه را به‌راههای تازه اثبات خواهیم کرد که عبارتند از:

قضیه‌ای از تصویر جسمنما (استرئوگرافی)، قضایای مثلث قائم‌الزاویه، قضیه قوت نقطه نسبت به‌دایره، قضیه نیمساز مثلث، قضیه بطلمیوس، رابطه بین میانگین حسابی و میانگین هندسی چند عدد مثبت که به‌ترتیب در شماره‌های (۱.۷)، (۲.۷)، (۳.۷)، (۴.۷)، (۵.۷)، و (۶.۷) ارائه شده‌اند.

MATH75.IR

۷

اثبات چند قضیه به‌راههای تازه

۱.۷. اثبات قضیه‌ای از تصویر گنجنگاری (استرئوگرافی)

۱.۱.۷. تصویر گنجنگاری یا جسمنما از تبدیلهای مهم هندسه است. این تصویر در تهیه نقشه جغرافیا اهمیت شایان‌دارد. تصویر گنجنگاری به‌وسیلهٔ هیپارخوس [۱] ستاره‌شناس یونان باستان برای ترسیم نقشه جغرافیا ابداع‌شد. سپس درطی تاریخ‌بعضی ریاضی‌دانها درآن زمینه کار کردند.

آقای ابوالقاسم قربانی در کتاب «بیرونی‌نامه»، در بخش پنجم، تحت عنوان «چند نوع تصویر جسمنما از مخترعات بیرونی» چنین مرقوم داشته‌اند: «ابوریحان بیرونی [۲] چند روش

---

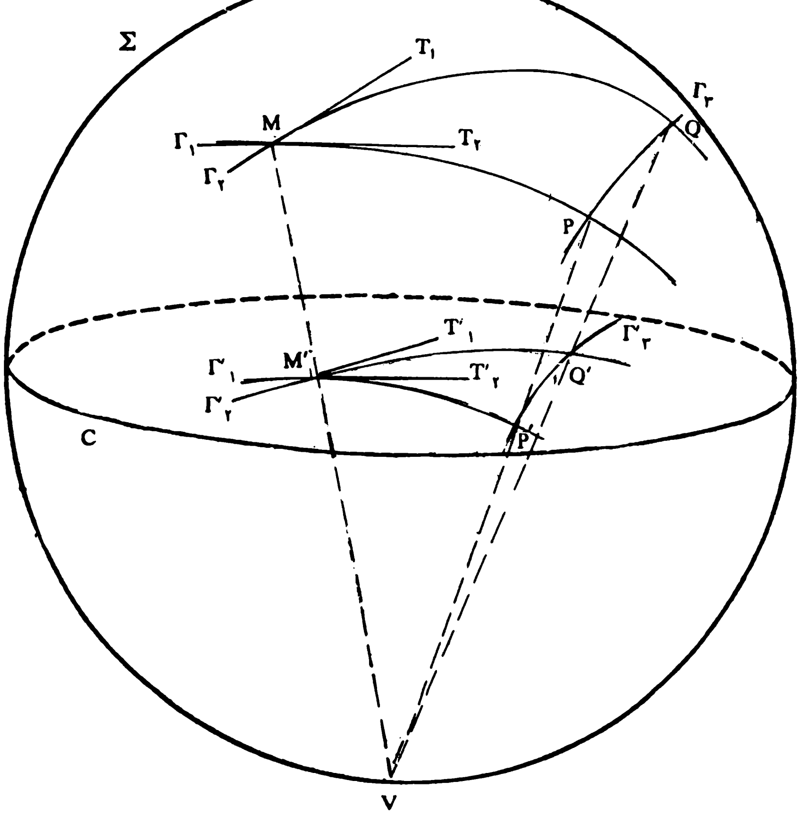
۱ ـ **هیپارخوس (ابرخس)** ستاره‌شناس برجسته قرن دوم قبل‌از میلاد است. او رصدگری فوق‌العاده دقیق بوده است. از جمله کارهای او تعیین طول متوسط یک ماه قمری با تقریب کمتراز ۱° نسبت به‌مقادیر قابل قبول امروزی است و نیز محاسبه دقیق میل دایره‌البروج و کشف و برآورد تقدیم‌اعتدالین سالانه است.

۲ ـ **ابوریحان، محمدبن احمد بیرونی** (۳۶۲ هجری قمری ـ اندکی پس از ۴۴۲ هجری قمری). دانشمند برجسته ایرانی، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیزیک‌دان، متبحر در تاریخ، جغرافیا، زبانشناسی، و دانشمندی جامع و بسیار مبتکر و عاشق عمیق حقیقت. کوشایی او در علم به‌حدی بود که در سنی متجاوز بر هشتاد کتابی دربارهٔ داروهای طبی نوشت. بیرونی از چهره‌های علمی کم‌نظیر و بسیار درخشان جهان است. جورج سارتن دانشمند بسیار برجسته تاریخ علم در کتاب «مقدمه تاریخ علم» چنین می‌نویسد: «اگر بگوییم که نیمه اول قرن یازدهم میلادی نقطه اوج پیشرفت افکار بوده است اغراق نگفته‌ایم. علت اصلی امتیاز و برتری آن دوره وجود بیرونی و ابن‌سینا بوده است ...» برای مطالعه درباره احوال و آثار بیرونی رجوع شود به کتاب «بیرونی‌نامه» پژوهش و نگارش استاد محترم آقای ابوالقاسم قربانی.

MATH75.IR

برای تصویر جسمنما بیان کرده است و کارهای دیگران را در اینباره شرح داده و نقایص آنها را خاطرنشان کرده است و راه اصلاح آن نقایص را با ذکر روشهایی که خود اختراع کرده است نشان داده است.» در زیر تصویر گنجگاری را بهطور بسیار مختصر شرح میدهیم و سپس قضیهای از شال هندسهدان برجستهٔ فرانسوی را در زمینه تصویر گنجگاری ذکر میکنیم و آنگاه دو برهان تازه برای اثبات قضیه مذکور عرضه میکنیم.

۲.۱.۷. *تعریف تصویر گنجگاری.* کره Σ و یک دایره عظیمه آن C و نقطه V یکی از دو قطب این دایره عظیمه را در نظر میگیریم. بنا بهتعریف، تصویر گنجگاری نقطهٔ M از سطح Σ عبارت است از نقطه M' محل برخورد خط VM با صفحه دایره عظیمه C (شکل زیر). تصویر گنجگاری یک منحنی Γ واقع بر کره Σ عبارت است از منحنی Γ' واقع بر صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ C بهطوری که هر نقطه Γ' تصویر نقطهای از Γ است.



۳.۱.۷. *خاصیت مهم تصویر گنجنگاری.* دو منحنی دلخواه Γ_1 و Γ_2 را که بر سطح Σ قرار دارند و از نقطه M می‌گذرند در نظر می‌گیریم. تصویرهای گنجنگاری این دو منحنی را به‌ترتیب Γ'_1 و Γ'_2 می‌نامیم. خطوط مماس بر دو منحنی Γ_1 و Γ_2 در نقطه M را به‌ترتیب MT_1 و MT_2 و همچنین خطوط مماس بر دو منحنی Γ'_1 و Γ'_2 در نقطه M' را به‌ترتیب $M'T'_1$ و $M'T'_2$ می‌نامیم. ثابت شده است که:

$$\text{اندازه زاویه } T_1MT_2 = \text{اندازه زاویه } T'_1M'T'_2$$

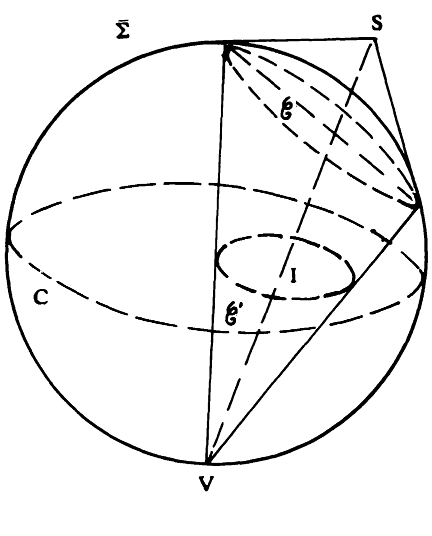
این مطلب چنین بیان می‌شود: در تصویر گنجنگاری زاویه‌ها محفوظ می‌مانند.

این خاصیت بسیار با ارزش است و در تهیه نقشه جغرافیا مورد توجه است. در چند سطر زیر این مطلب مهم را به‌طور مختصر شرح می‌دهیم.

بر سطح کره Σ، مثلث منحنی‌الخط MPQ حاصل از تلاقی سه منحنی Γ_1، Γ_2 و Γ_3 را در نظر می‌گیریم و تصویر گنجنگاری آن را مثلث منحنی‌الخط $M'P'Q'$ می‌نامیم. زاویه‌های متناظر دو مثلث منحنی‌الخط مذکور مساوی‌اند.

قضیهٔ زیر از قضیه‌های مهم تصویر گنجنگاری است.

۴.۱.۷. قضیه. تصویر گنجنگاری یک دایره $\mathscr{C}$ از سطح کره Σ، یک دایره $\mathscr{C}'$ است (شکل زیر).



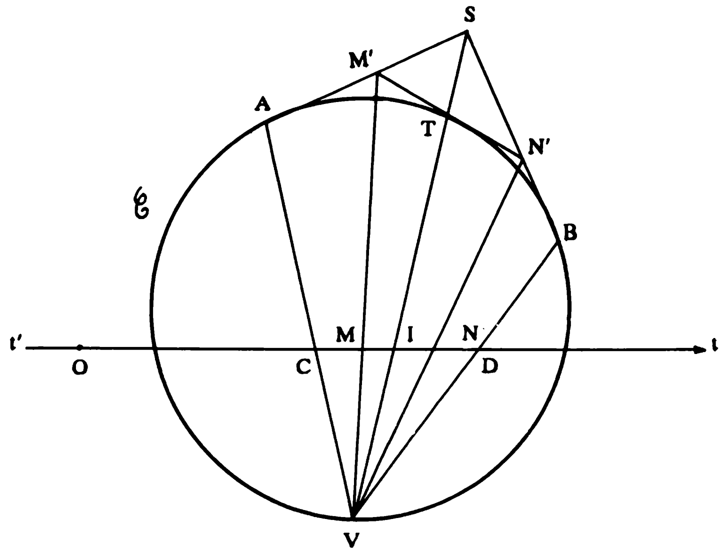
شال، با به‌کارگیری تبدیل همشکل به‌نحو بسیار زیبایی قضیه زیر را اثبات کرده است.

MATH75.IR

۵.۱.۷ قضیه. اگر نقطه S رأس مخروط دواری باشد که مولدهای آن روی محیط دایره $\mathfrak{C}$، بر کره Σ مماس باشند، آنگاه نقطه I مرکز دایره $\mathfrak{C}$، بر خط VS قرار دارد. (شکل پیش)

در سطور زیر دو برهان تازه برای اثبات قضیه (۵.۱.۷) عرضه می‌کنیم.

برهان اول. بر دو نقطهٔ S و V صفحهٔ دلخواه P را عبور می‌دهیم و مقطع آن را با کره Σ و سطح مخروط به‌رأس S و مماس بر کره Σ تعیین می‌کنیم. این مقطع در شکل زیر نموده شده



است. در این شکل دایره γ فصل مشترک صفحه P با کره Σ است. دو خط SA و SB فصل مشترکهای صفحهٔ P با سطح مخروط یاد شده‌اند. خط t′t فصل مشترک صفحهٔ P با صفحهٔ دایره عظیمه C است. سه نقطه C، D و I به‌ترتیب نقاط برخورد خطهای VA، VB و VS با خط t′t اند. برای آنکه ثابت کنیم نقطهٔ I مرکز دایره $\mathfrak{C}$ است، کافی است ثابت کنیم: CI=ID

محور t′ot را منطبق بر خط t′t با جهت دلخواه اختیار می‌کنیم. محل برخورد دو خط VM و SA را نقطه M′ می‌نامیم. مماس M′T را بر دایره γ رسم کرده و محل برخورد آن را با خط SB نقطه N′ می‌نامیم و بالاخره نقطه برخورد دو خط VN′ و t′t را N می‌نامیم.

اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ را روی محور t′t به‌ترتیب x و y می‌نامیم. چون به‌ازای هر نقطه M فقط یک نقطه N حاصل می‌شود و برعکس، پس بین دو متغیر x و y یک رابطه یک به‌یک

$$(۱) \qquad f(x\,,\,y)=\circ$$

وجود دارد. رابطه(۱) جبری است چراکه برای به‌دست‌آوردن آن کافی است روی معادله‌های دایره γ و خطهای VA و SA و ... که معادله‌های جبری‌اند اعمال جبری به‌تعداد متناهی انجام گیرد.

MATH75.IR

چون معادله (۱) جبری و یک به‌یک است پس به‌صورت زیر است:

$$(۲) \quad axy+bx+cy+d=0$$

اکنون تجسس می‌کنیم که در چه موقعی از محور $t't$ دو نقطهٔ M و N بر هم قرار می‌گیرند. از نظر جبری جوابهای معادله زیر چنین موقعی را مشخص می‌سازند (دو موقع):

$$(۳) \quad ax^2+(b+c)x+d=0$$

از نظر هندسی، دو نقطه M و N هنگامی بر هم قرار می‌گیرند که خط مماس $M'N'$ بر دایره γ، بر نقطه V بگذرد. اگر نقطهٔ T روی محیط دایره γ، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به‌سوی نقطه V میل کند، دو نقطه M و N روی نیم‌خط ot بی‌نهایت دور می‌شوند. اما اگر نقطه t روی محیط دایره γ، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به‌سوی نقطه V میل کند، دو نقطهٔ M و N روی نیم‌خط ot' بی‌نهایت دور می‌شوند. از این ملاحظات نتیجه می‌شود که معادله (۳) دارای دو جواب بی‌نهایت است پس در معادله (۳) ضریبهای جمله درجه اول و جمله درجه دوم مساوی صفراند (رجوع شود به ۳.۱۸):

$$a=0 \quad \text{و} \quad b+c=0$$

پس معادله (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۴) \quad x-y=l \quad (\text{عدد ثابت } l)$$

از رابطه (۴) نتیجه می‌شود هنگامی که نقطه M روی خط $t't$ حرکت می‌کند بردار $\overrightarrow{MN}$ هم‌سنگ با خود می‌ماند. اگر نقطهٔ M را روی خط $t't$ به‌سوی نقطهٔ C میل دهیم، نقطه M' روی خط SA به‌سوی نقطهٔ A میل خواهد کرد و در نتیجه نقطه N' روی خط SB به‌سوی نقطهٔ S و نقطه N روی خط $t't$ به‌سوی نقطهٔ I میل خواهد کرد. از این ملاحظات نتیجه می‌شود:

$$(۵) \quad \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{MN}$$

با همین شیوه استدلال نتیجه می‌گیریم که:

$$(۶) \quad \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{MN}$$

از مقایسه (۵) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$(۵) \quad \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{ID}$$

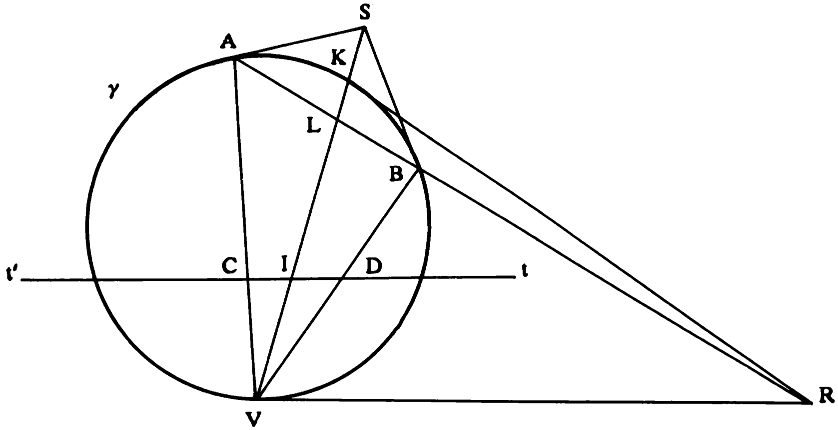
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

برهان دوم. نقاط برخورد خط SV را با دایرهٔ γ و خط AB به‌ترتیب K و L می‌نامیم. از دو نقطهٔ K و V مماسهایی بر دایره γ رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو مماس را R می‌نامیم (شکل صفحهٔ بعد).

MATH75.IR

ابتدا ثابت می‌کنیم خط VR موازی خط t't است. برای این منظور می‌گوییم در شکل زیر صفحهٔ دایرهٔ عظیمه C با صفحه مماس بر سطح کره در نقطه V موازی است. لذا فصل مشترکهای صفحهٔ P که بر دو نقطهٔ S و V می‌گذرد با دو صفحهٔ اخیرالذکر دو خط موازی‌اند. این دو خط موازی در شکل بالا عبارت‌اند از t't و VR.

اکنون ثابت می‌کنیم که خط AB از نقطه R می‌گذرد. می‌گوییم چون دو خط SA و SB بر دایره γ مماس‌اند پس خط AB قطبی نقطه S نسبت به‌دایره γ است و به‌همین دلیل خط VK قطبی نقطه R نسبت به دایره γ می‌باشد. چون خط VK از نقطهٔ S که قطب خط AB است می‌گذرد پس قطب خط VK یعنی نقطهٔ R، بر خط AB که قطبی نقطه S است قرار دارد.



تاکنون به‌این نتیجه رسیده‌ایم که خط VS قطبی نقطه R نسبت به‌دایره γ است و از نقطه R خطی عبور داده‌ایم که این قطبی را در نقطه L و دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است.

پس پاره خط AB به‌وسیله دو نقطه L و R به‌توافق تقسیم می‌شود و چهار خطی که نقطه V را به چهار نقطه A، B، L و R وصل می‌کنند یک دستگاه اشعه توافقی تشکیل می‌دهند.

خط t't موازی با شعاع VR از دستگاه اشعه توافقی یاد شده است پس دو پاره‌خطی که به‌وسیلهٔ سه شعاع دیگر اشعه توافقی مذکور روی خط t't پدید می‌آید مساوی‌اند یعنی CI=ID و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲.۷. اثبات قضیه‌های مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه چهار قضیه مشهور وجود دارد که در زیر شرح می‌دهیم:

الف . قضیه مربع ضلع مجاور به‌زوایه قائمه. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع هر یک از اضلاع مجاور به‌زاویه قائمه مساوی است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر.

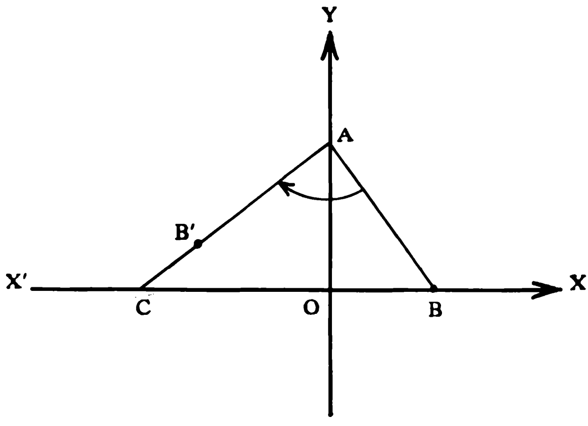
ب . قضیه فیثاغورس[1]. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر مساوی است با مجموع مربعهای دو ضلع مجاور به‌زاویه قائمه.

پ . قضیه مربع ارتفاع وارد بر وتر: در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع ارتفاع وارد بر وتر مساوی است با حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد.

ت . قضیهٔ نسبت مربعهای دو ضلع مجاور به‌زاویه قائمه. نسبت مربعهای دو ضلع مجاور به‌زاویه قائمه مساوی است با نسبت تصاویر آنها بر وتر.

برهان

دستگاه مختصات دکارتی قائم xoy را در نظر می‌گیریم. نقاط B، A، و C را به‌ترتیب بر نیم‌خطهای oy،ox و ox′ طوری اختیار می‌کنیم که زاویه CAB قائمه باشد. طولهای اضلاع مقابل به‌زاویه‌های B،A و C مثلث ABC را به‌ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. طولهای سه پاره‌خط OA،OB، و OC را به‌ترتیب با h،m، و n نشان می‌دهیم.



۱ ـ **فیثاغورس** مشهورترین حکمای یونان باستان. معاصر کوروش و داریوش هخامنشی. مدرسه مشهوری تأسیس کرد که علاوه بر آن که فرهنگستانی بود برای مطالعه فلسفه، ریاضیات و علوم طبیعی، به‌یک انجمن اخوت کاملاً متحد تحول یافت.

MATH75.IR

در صفحه مختلط xy، آفیکسهای (z های) سه نقطه A، B، و C به‌ترتیب چنین‌اند:

(۱) $z_A=h_i$

(۲) $z_B=m$

(۳) $z_C=-n$

بردار $\overrightarrow{AB'}$ را منطبق بر خط AC و هم‌سو با بردار $\overrightarrow{AC}$ و با طول c اختیار می‌کنیم.

(۴) $\overrightarrow{AB'}=\frac{c}{b}\overrightarrow{AC}$

از رابطهٔ برداری $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ نتیجه می‌شود که عدد مختلط نظیر بردار $\overrightarrow{AB}$ چنین است:

(۵) $z_B-z_A=m-hi$

i واحد موهومی است. بردار $\overrightarrow{AB'}$ از دوران بردار $\overrightarrow{AB}$، به‌اندازهٔ $\left(\frac{-\pi}{۲}\right)$ رادیان، دور نقطه A حاصل می‌شود، لذا عدد مختلط نظیر بردار $\overrightarrow{AB'}$ چنین است:

(۶) $(z_B-z_A)(-i)=(m-hi)(-i)=-h-mi$

از این رابطه نتیجه می‌شود که عدد مختلط نظیر بردار $\overrightarrow{AC}$ چنین است:

(۷) $\frac{b}{c}(-h-mi)$

از طرفی از رابطه برداری $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$ و دو رابطه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود که عدد مختلط نظیر بردار $\overrightarrow{AC}$ چنین است:

(۸) $-hi-n$

بنابراین، دو عبارت (۷) و (۸) مساوی‌اند:

(۹) $\frac{b}{c}(-h-mi)=-hi-n$

و یا

(۱۰) $\left(-h\frac{b}{c}+n\right)+\left(h-m\frac{b}{c}\right)i=0$

چون عبارت بالا مساوی صفر است پس قسمت حقیقی و قسمت موهومی آن باید مساوی صفر باشند:

(۱۱) $-h\frac{b}{c}+n=0$

(۱۲) $h-m\frac{b}{c}=0$

از دو رابطه (۱۱) و (۱۲) دو رابطه زیر حاصل می‌شود:

(۱۳) $h^2 = m \cdot n$

(۱۴) $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m}{n}$

رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) به‌ترتیب قضیه‌های (پ) و (ت) را بیان می‌کنند.

اثبات قضیه (ب). ابتدا رابطهٔ زیر را می‌نویسیم:

(۱۵) $a = m + n$

رابطه (۱۵) با رعایت رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

(۱۶) $a = h\frac{c}{b} + h\frac{b}{c}$

و یا

(۱۷) $\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{a}{h}$

از رابطه (۱۷) با رعایت آنکه $bc = ah$ نتیجه می‌شود:

(۱۸) $b^2 + c^2 = a^2$

اثبات قضیه (الف). از رابطهٔ (۱۸) نتیجه می‌شود:

(۱۹) $\frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{c^2}{b^2}$

از رابطه‌های (۱۴) و (۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{m}{n} = \frac{m+n}{n} = \frac{a}{n}$$

و یا

$$b^2 = an$$

و با همین شیوه استدلال درستی رابطه زیر را ثابت می‌کنیم:

$$c^2 = am$$

۳.۷. اثبات قضیه قوت نقطه نسبت به‌دایره

قضیه. از نقطه M واقع در صفحه دایره (C , r) محور Mt را به‌طور دلخواه عبور می‌دهیم و نقاط برخورد آن رابا دایره یاد شده، A و B می‌نامیم. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ را روی محور Mt به‌ترتیب با $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل‌ضرب

MATH75.IR

$\overline{MA}.\overline{MB}$ هنگامی که محور Mt دور نقطه M می‌چرخد ثابت می‌ماند و این مقدار ثابت مساوی $(\overline{MC}^۲-r^۲)$ می‌باشد.

برهان. برای اثبات قضیه به‌جای آنکه وضع دایره را ثابت پنداریم و محور Mt را حول نقطه M در جهتی بچرخانیم، محور Mt را ثابت نگاه می‌داریم و دایره را حول نقطه M در جهت مخالف می‌چرخانیم.

دستگاه مختصات دکارتی قائم xy را چنان اختیار می‌کنیم که محور xهای آن به‌مبدأ M و منطبق بر خط Mt باشد. مختصات نقطه C مرکز دایره را (a,b) می‌نامیم و معادله دایره را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۱)\qquad (x-a)^۲+(y-b)^۲-r^۲=۰$$

هنگامی که دایره (C , r) دور نقطه M می‌چرخد، فاصله نقطه C از نقطه M و نیز طول شعاع دایره ثابت می‌ماند. بنابراین رابطه‌های زیر برقرار است:

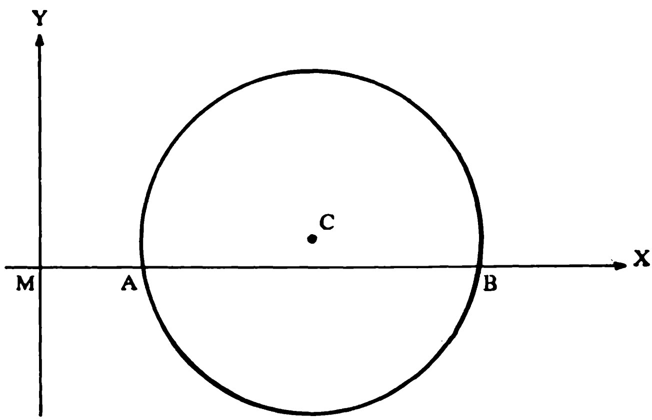
$$(۲)\qquad \overline{MC}^۲= a^۲+b^۲= \text{ثابت}$$

$$(۳)\qquad r= \text{ثابت}$$

از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که مقادیر $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ عبارت‌اند از ریشه‌های معادله:

$$(۴)\qquad x^۲-ax+a^۲+b^۲-r^۲=۰$$

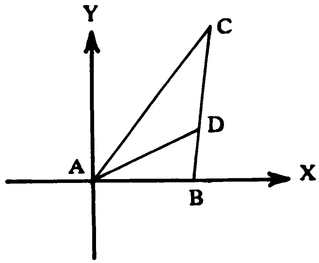
حاصل‌ضرب دوجواب این معادله عبارت‌است از $a^۲+b^۲-r^۲$. با توجه به‌رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب $\overline{MA}.\overline{MB}$ ثابت است و مساوی $(\overline{MC}^۲ - r^۲)$ می‌باشد.



MATH75.IR

۴.۷. اثبات قضیه نیمساز مثلث با کمک اعداد مختلط

الف . قضیه نیمساز زاویه داخلی. در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع مجاور به‌آن زاویه تقسیم می‌کند.



برهان . مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی A را با ضلع BC با D نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(۱) \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

اگر محور $t't$ منطبق بر خط BC اختیار شود و اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را روی آن محور به‌ترتیب $\overline{DB}$ و $\overline{DC}$ بنامیم، رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(۱)' \quad \frac{AB}{AC} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

طولهای اضلاع AC و AB مثلث رابه‌ترتیب b و c می‌نامیم و به‌جای رابطهٔ $'$(۱) رابطهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(۲) \quad \frac{c}{b} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

دستگاه‌محورهای مختصات دکارتی‌قائم xAy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور Ax آن منطبق بر بردار $\overrightarrow{AB}$ و هم‌سو با آن باشد. در صفحهٔ مختلط xy، آفیکسهای دو نقطهٔ B و C عبارت‌انداز:

$$(۳) \quad z_B=c \text{ و } z_C=b.e^{iA}$$

A اندازهٔ زاویهٔ BAC است.

نقطهٔ P را بر خط BC طوری اختیار می‌کنیم که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(۴) \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{c}{b}$$

و سپس ثابت می‌کنیم که خط AP نیمساز زاویهٔ A است و بدین‌سان قضیهٔ مورد نظر ثابت می‌شود (این شیوه استدلال معتبر است چراکه بر پاره‌خط BC فقط یک نقطه می‌توان یافت که آن پاره‌خط را به‌نسبت معینی بخش نماید).

MATH75.IR

می‌دانیم که اگر $M_۱$ و $M_۲$ دو نقطه با zهای $z_۱$ و $z_۲$ باشند و M نقطه‌ای از خط $M_۱M_۲$ باشد به‌طوری که $\frac{\overline{MM_۱}}{\overline{MM_۲}} = -\lambda$ (λ عددی است جبری)، آنگاه z نقطهٔ M چنین است:

$$(۵) \quad z = \frac{z_۱ + \lambda z_۲}{۱+\lambda}$$

بنابر رابطه‌های (۳)، (۴)، و (۵) آفیکسهای نقطهٔ M چنین است:

$$(۶) \quad z = \frac{c + \frac{c}{b}.b.e^{iA}}{۱+\frac{c}{b}} = \frac{b.c}{b+c}(۱+e^{iA})$$

چون $bc/(b+c)$ عددی حقیقی است پس آوند (آرگومان) z همان آوند عدد مختلط $(۱+e^{iA})$ است. از طرفی:

$$(۷) \quad ۱+e^{iA} = ۱+\cos A + i\sin A$$

لذا اگر θ آوند $۱+e^{iA}$ باشد، از رابطهٔ (۷) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$(۸) \quad tg\theta = \frac{\sin A}{۱+\cos A}$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۸) با اتحاد مثلثاتی

$$(۹) \quad tg\frac{A}{۲} = \frac{\sin A}{۱+\cos A}$$

نتیجه می‌شود:

$$(۱۰) \quad \theta = \frac{A}{۲}$$

از رابطهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود که خط AP، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد.

ب. قضیهٔ نیمساز زاویهٔ خارجی. در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ خارجی A را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با امتداد ضلع BC، نقطهٔ E می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

اثبات قضیهٔ (ب) کاملاً مشابه با اثبات قضیهٔ (الف) می‌باشد.

۵.۷. اثبات قضیهٔ بطلمیوس[1]

۱.۵.۷. قضیهٔ بطلمیوس از قضیه‌های مهم هندسه است. در زیر این قضیه را به‌راه تازه‌ای اثبات می‌کنیم. سپس چند قضیه را به‌کمک آن ثابت می‌کنیم. این قضایا عبارت‌اند از: قضیهٔ فیثاغورس، قضیهٔ مربع ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه، قضیهٔ حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه، قضیهٔ تفاضل مربعات دو ضلع مثلث، قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره، رابطهٔ کلی شال، رابطهٔ مثلثاتی سینوس مجموع دو کمان. استنتاج این قضیه‌های مهم از قضیهٔ بطلمیوس ارزش این قضیه را تأیید می‌نماید.

۲.۵.۷. *قضیهٔ بطلمیوس.* در هر چهارضلعی محدب محاط در دایره، مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای‌روبرو، برابراست باحاصل‌ضرب دوقطر. برعکس اگر دریک چهارضلعی محدب مجموع حاصل‌ضربهای ضلعهای‌روبرو مساوی‌باحاصل‌ضرب دوقطرباشد آن‌چهارضلعی محاطی‌است

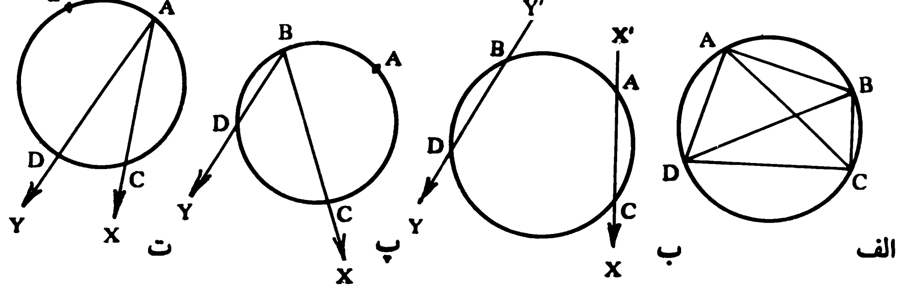
برهان. چهارضلعی محدب محاطی ABCD را در نظر می‌گیریم (شکل الف). می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AB.CD+BC.AD=AC.BD \qquad (1)$$

و برعکس اگر رابطهٔ (۱) بین اضلاع و قطرهای یک چهارضلعی محدب برقرار باشد آن چهارضلعی محاطی است.

برای اثبات مطلب مراحل (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) مذکور در زیر را طی می‌کنیم.

الف. در صفحهٔ P، دو نقطهٔ ثابت A و B و دو محور $x'x$ و $y'y$ را که اولی به‌مبدأ A و دومی به‌مبدأ B می‌باشد درنظر می‌گیریم. جهت مثبت دو محور را طوری اختیارمی‌کنیم که دو نیم‌محور مثبت Ax و By در یک طرف خط AB قرار گیرند (شکل ب).



---

۱ ـ **بطلمیوس اسکندرانی** منجم قرن دوم بعد از میلاد است. اثر اصلی او کتاب مشهور «ترکیب ریاضی» است. شارحین بعدی آن کتاب را «مجیسته» به‌معنی عالی نامیدند. این کتاب در سال ۸۲۷ میلادی به‌عربی ترجمه شد و «المجسطی» نام گرفت. سپس از عربی به‌لاتین ترجمه شد و طی چند قرن تا زمان کپرنیک و کپلر با اقتدار بود.

MATH75.IR

نقطهٔ دلخواه C را بر محور $x'x$ اختیار می‌کنیم و دایرهٔ γ محیط بر مثلث ABC را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با محور $y'y$ با D نشان می‌دهیم. با این عمل ترسیم به‌ازای هر نقطهٔ C از محور $x'x$ یک و فقط یک نقطهٔ D بر محور $y'y$ حاصل می‌شود و برعکس.

اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ را به‌ترتیب روی دو محور $x'x$ و $y'y$ با x و y نشان می‌دهیم. چون به‌ازای هر نقطهٔ C از محور $x'x$ یک و فقط یک نقطهٔ D از محور $y'y$ حاصل می‌شود و برعکس، پس بین دو متغیر x و y یک رابطه یک‌به‌یک که آن را به‌صورت

$$f(x,y)=0 \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم وجود دارد. رابطهٔ (۱) جبری است زیرا برای به‌دست آوردن آن باید روی معادلهٔ دایره و معادله‌های چند خط که جبری‌اند اعمال جبری به‌تعداد متناهی انجام داد.

چون معادلهٔ (۲) جبری است و به‌علاوه یک به‌یک است پس به‌صورت زیر است:

$$axy+bx+cy+d=0 \qquad (۳)$$

در رابطهٔ بالا a، b، c و d اعداد ثابت‌اند (ضرایب).

اگر نقطهٔ C روی محور xها به‌فاصلهٔ بی‌نهایت برود آنگاه نقطهٔ D روی محور y ها به‌فاصلهٔ بی‌نهایت خواهد رفت. برای اثبات حکم اخیر می‌گوییم اگر نقطهٔ C به‌فاصلهٔ بی‌نهایت برود ولی نقطهٔ D در فاصلهٔ محدود باشد آنگاه تمام نقاط دایره γ محیط بر مثلث ABD در فاصلهٔ محدود می‌باشند و لذا این دایره نمی‌تواند شامل نقطهٔ C باشد که به‌فاصلهٔ بی‌نهایت رفته است. برعکس اگر نقطهٔ D روی محور y ها به‌فاصلهٔ بی‌نهایت برود آنگاه نقطهٔ C روی محور x ها به‌فاصلهٔ بی‌نهایت خواهد رفت. از این ملاحظات نتیجه می‌شود که در رابطهٔ (۲)، ضریب xy مساوی صفر است: $a=0$. بنابراین معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$bx+cy+d=0 \qquad (۴)$$

مطلب را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد.

دایرهٔ متغیر γ که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد محورهای $x'x$ و $y'y$ را در دو نقطهٔ متغیر C و D قطع می‌کند به‌طوری که بین دو مقدار متغیر $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یک رابطهٔ خطی وجود دارد.

برای تعیین مقادیر b، c، و d چنین عمل می‌کنیم: دایره دلخواه γ_1 را که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد در نظر گرفته و نقاط برخورد آن را به‌ترتیب با دو محور $x'x$ و $y'y$ با C_1 و D_1 نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\overline{AC_1}=x_1$ و $\overline{BD_1}=y_1$، باشد. همچنین دایرهٔ دلخواه γ_2 را که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد در نظر گرفته و نقاط برخورد آن را به‌ترتیب با دو محور $x'x$ و $y'y$ با C_2 و D_2 نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\overline{AC_2}=x_2$ و $\overline{BD_2}=y_2$ باشد. معادلهٔ (۴) باید به‌ازای زوجهای مرتب (x_1,y_1) و (x_2,y_2) صادق باشد یعنی

$$(۵) \qquad \begin{cases} bx_1+cy_1+d=0 \\ bx_2+cy_2+d=0 \end{cases}$$

از دستگاه معادلات (۵)، مقادیر b، c، و d حاصل می‌شوند (با تقریب یک ضریب).

اکنون همان استدلالی راکه دربارهٔ شکل (ب) ارائه کردیم دربارهٔ هر یک از دو شکل (پ) و (ت) ارائه می‌کنیم. در شکل پ (شکل ت) دو محور x'x و y'y را به‌مبدأ مشترک B (A) در نظر می‌گیریم و جهت مثبت دو محور x'x و y'y را طوری اختیار می‌کنیم که دو نیم‌محور مثبت Bx و By (Ay, Ax) در یک طرف خط AB قرار گیرند. اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ($\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$) را به‌ترتیب روی دو محور x'x و y'y با x و y نشان می‌دهیم. اگر همان استدلالی راکه دربارهٔ شکل (ب) ذکر کردیم دربارهٔ شکل (پ) و شکل (ت) تکرار کنیم نتیجه می‌شود که بین x و y یک رابطهٔ خطی به‌صورت (۴) وجود دارد. از آنچه در بالا اثبات کردیم با توجه به‌محدب بودن چهارضلعی محاطی و با توجه به‌اینکه دو نیم‌محور مثبت x و y در یک‌طرف خط AB قرار دارند نتیجه‌ای که در زیر در بند (ب) ذکر می‌کنیم حاصل می‌شود.

ب. در هر چهارضلعی محدب محاط در یک دایره یک رابطهٔ جبری بین طولهای اضلاع و طولهای دو قطر وجود دارد که نسبت به‌هر یک از آنها از درجه اول است و به‌علاوه دو پاره‌خط سازای[1] چهارضلعی که دارای رأس مشترک‌اند در یک جمله ظاهر نمی‌شوند.

پ. بنابراین در چهارضلعی محدب قابل محاط شدن در دایره، بین طولهای اضلاع و دو قطر رابطه‌ای به‌صورت زیر وجود دارد:

$$\alpha.AB.CD+\beta.AD.BC+\gamma.AC.BD=0 \qquad (۶)$$

در رابطهٔ (۶)، α، β، و γ سه عدد ثابت‌اند (ضرایب). برای تعیین این ضرایب تدبیر زیر را به‌کار می‌بریم.

۱. در چهارضلعی محاطی ABCD، سه رأس A، B، و C را ثابت نگاه می‌داریم و رأس D را روی دایرهٔ محیطی به‌سوی رأس A میل می‌دهیم. طولهای سه پاره‌خط DA، DB، و DC به‌ترتیب به‌سوی ۰ (صفر)، طول AB، و طول AC میل می‌کنند. از این ملاحظات نتیجه می‌شود که:

$$\alpha=-\gamma \qquad (۷)$$

۲. اگر در چهارضلعی مذکور سه رأس A، B، و C را ثابت نگاه داریم و رأس D رابه‌سوی رأس C میل دهیم و همان شیوهٔ استدلال پیش را به‌کار بریم نتیجه می‌شود:

$$\beta=-\gamma \qquad (۸)$$

رابطهٔ (۶) با رعایت دو رابطهٔ (۷) و (۸) به‌صورت رابطهٔ مطلوب (۱) در می‌آید.

ت. اثبات عکس قضیه. اکنون به‌بند (الف) باز می‌گردیم. می‌گوییم اگر دو نقطهٔ C و D را

---

۱ ـ هر چهارضلعی‌دارای چهارضلع و دوقطر است که آنهارا شش‌پاره‌خط سازای چهارضلعی نام‌می‌نهیم. هر دو ضلع مقابل و همچنین دو قطر، دو پاره‌خط سازایی هستند که دارای رأس مشترک نیستند.

MATH75.IR

به‌ترتیب بر دو محور $y'y$ و $x'x$ طوری انتخاب کنیم که ایکسِ نقطهٔ D و ایگرکِ نقطهٔ C در رابطهٔ (۳) صدق کنند آنگاه چهارضلعی ABCD قابل محاط شدن در دایره است. این خاصیت از یک به‌یک بودن رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود.

از مطلب اخیرالذکر نتیجه می‌شود که اگر طولهای اضلاع و طولهای دو قطر یک چهارضلعی در رابطهٔ (۱) صدق کنند آن چهارضلعی محاطی است.

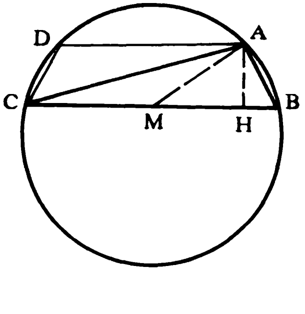
۳.۵.۷. *پیامدهای قضیهٔ بطلمیوس.* از قضیهٔ بطلمیوس می‌توان قضیه‌های زیر را فوراً نتیجه گرفت. برای نتیجه‌گیری هر قضیه، یک چهارضلعی محاطی مناسب با آن قضیه اختیار می‌کنیم.

۳.۵.۷. *الف. قضیهٔ فیثاغورس.* چهار ضلعی محاطی را مستطیل اختیار می‌کنیم.

۳.۵.۷. *ب. قضیهٔ حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه.* یک چهارضلعی محاطی اختیار می‌کنیم که یکی از قطرهای آن قطر دایره محیطی چهارضلعی باشد و قطر دیگر آن عمود بر قطر اول باشد.

۳.۵.۷. *پ. قضیهٔ تفاضل مربعات دو ضلع.* در هر مثلث تفاضل مربعات دو ضلع مساوی است با دو برابر ضلع سوم در تصویر میانهٔ ضلع سوم بر آن ضلع.

در مثلث ABC، ارتفاع AH و میانه AM را رسم می‌کنیم. در دایرهٔ محیطی مثلث ABC، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ بطلمیوس می‌توان نوشت:



$$BC.AD+AB.CD=AC.BD$$

و یا

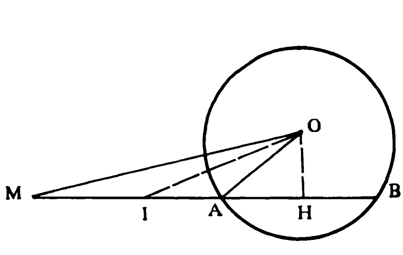
$$\overline{AC}^{۲}-\overline{AB}^{۲}=BC.AD$$

و چون $AD=۲MH$ پس

$$\overline{AC}^{۲}-\overline{AB}^{۲}=۲BC.MH$$

۳.۵.۷.ت. *قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره.*

دایرهٔ (O,r) و نقطهٔ M را در صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ M خطی راست رسم می‌کنیم و نقاط برخورد آن را با دایره مفروض، A و B می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:



$$\overline{MA}\ .\ \overline{MB}=\overline{MO}^{۲}-r^{۲} \quad (۱)$$

کافی است ثابت کنیم:

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB}=\overline{MO}^{2}-\overline{OA}^{2} \qquad (۲)$$

اگر وسطهای پاره‌خطهای MA و AB را به‌ترتیب I و H بنامیم چنین داریم:

$$\overline{MB}=2\overline{IH} \qquad (۳)$$

چون پاره‌خط IH تصویر پاره‌خط IO (میانه مثلث MOA) روی خط MB است پس بنابر قضیهٔ پیش چنین داریم:

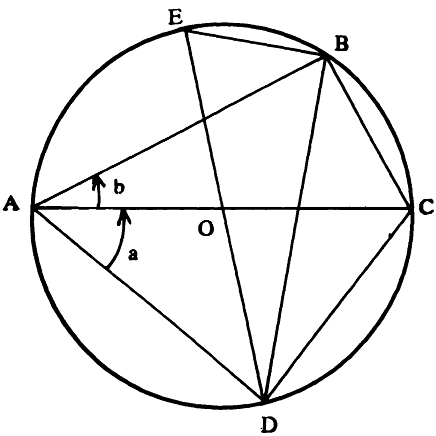
$$\overline{MO}^{2}-\overline{OA}^{2}=\overline{MA}.(2\overline{IH}) \qquad (۴)$$

از دو رابطهٔ (۳) و (۴)، رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.

۷.۵.۳.ث. *یک اتحاد مهم مثلثاتی.* اگر a و b دو زاویهٔ حاده باشند رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad (۱)$$

برای اثبات در دایرهٔ (O,r)، چهارضلعی ABCD را طوری محاط می‌کنیم که قطر AC آن، قطری از دایرهٔ مفروض باشد و اندازه‌های دو زاویه DAC و CAB به‌ترتیب مساوی a و b باشند (شکل زیر).



در مثلث قائم‌الزاویه ADC چنین می‌نویسیم:

$$(CD)=(AC)\sin a=2r\sin a\ ,\ (AD)=2r\cos a \qquad (۲)$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC چنین می‌نویسیم:

$$(BC)=2r\sin b\ ,\ (AB)=2r\cos b \qquad (۳)$$

اکنون قطر DE را رسم می‌کنیم. در مثلث EBD زاویهٔ B قائمه و زاویهٔ BED برابر

MATH75.IR

(a+b) است زیرا دو زاویهٔ BED و BAD محاطی و مقابل به‌کمان BCD اند. در مثلث قائم‌الزاویه BED چنین می‌نویسیم:

$$(BD) = ۲r \sin(a+b) \qquad (۴)$$

اکنون در چهارضلعی محاطی ABCD رابطهٔ بطلمیوس را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(AC).(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD) \qquad (۵)$$

در رابطهٔ (۵) به‌جای طولهای اضلاع و در قطر مقادیر آنها را از رابطه‌های (۲)، (۳)، و (۴) می‌گذاریم. پس از اختصار رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.

۳.۵.۷.ج. *رابطهٔ کلی شال.* در زیر اثبات تازه‌ای برای رابطهٔ کلی شال عرضه می‌کنیم که به‌ما اجازه می‌دهد که رابطهٔ کلی شال را حالت خاص قضیهٔ بطلمیوس محسوب کنیم.

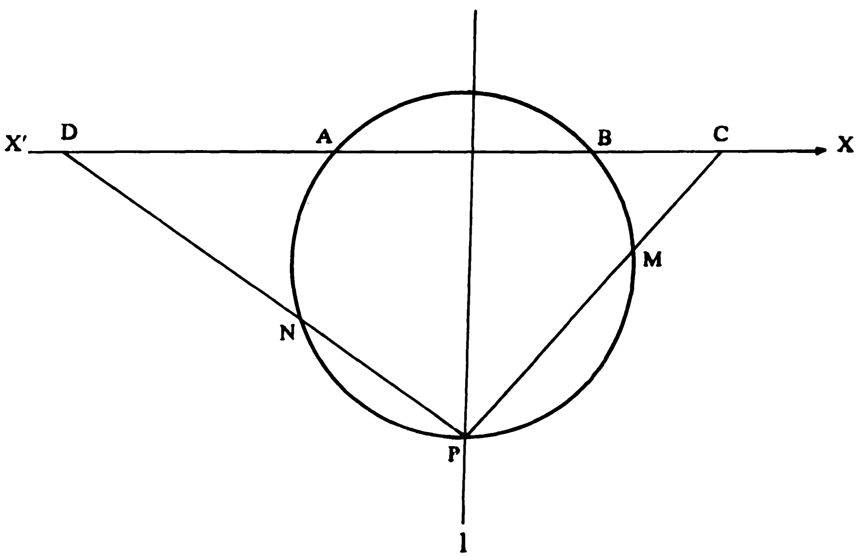
رابطهٔ شال. اگرسه نقطهٔ A، B، و C بر یک محور باشند رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = ۰ \qquad (۱)$$

رابطهٔ کلی شال. اگر چهار نقطه A، B، C، و D بر یک محور باشند (شکل زیر)، رابطهٔ زیر مسلم است:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CA}.\overline{BD} = ۰ \qquad (۲)$$

برای اثبات رابطهٔ (۲)، از رابطهٔ (۱) استفاده می‌شود. اگر نقطهٔ D روی محور به‌سوی بی‌نهایت برود از رابطهٔ (۲)، رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود.



اثبات رابطهٔ کلی شال به‌کمک قضیهٔ بطلمیوس. خط l عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. بر خط l نقطهٔ دلخواه P را اختیار کرده و دایره محیطی مثلث PAB را رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره را با دو خط PC و PD به‌ترتیب M و N می‌نامیم. در چهارضلعی ABMN، رابطهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم:

$$AB.MN+BM.AN=AM.BN \qquad (۳)$$

اگر نقطهٔ P روی خط l به‌سوی بی‌نهایت برود، دو نقطهٔ M و N به‌ترتیب به‌سوی دو نقطهٔ C و D میل می‌کنند و طولهای پاره‌خطهای BM، BN، AM، AN، و MN به‌ترتیب به‌سوی طولهای پاره‌خطهای BC، BD، AC، AD، و CD میل خواهند کرد. با این ملاحظات از رابطهٔ (۳)، با رعایت علامتها، رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود.

۶.۷. اثبات هندسی رابطه بین میانگین حسابی و میانگین هندسی چند عدد مثبت

تعریف میانگین حسابی. میانگین حسابی n عدد $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n که با A_n نموده می‌شود با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$A_n=\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}$$

تعریف میانگین هندسی. میانگین هندسی n عدد مثبت $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n که با G_n نموده می‌شود با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$G_n=\sqrt[n]{x_۱.x_۲...x_n}$$

رابطهٔ بین میانگین حسابی و میانگین هندسی n عدد مثبت. اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، و x_n اعداد نامنفی باشند می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_۱.x_۲...x_n} \qquad (۱)$$

برهان. برای اثبات مطلب مراحل الف، ب، و پ مشروح در زیر را طی می‌کنیم.

الف. اعداد U_i و $k>۰$ را چنان اختیار می‌کنیم که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$x_i=kU_i \qquad i\in\{۱,۲,...,n\} \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۱) با رعایت رابطه‌های (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{U_۱+U_۲+...+U_n}{n}\geq\sqrt[n]{U_۱U_۲...U_n} \qquad (۳)$$

MATH75.IR

رابطهٔ (۳) به‌همان صورت رابطهٔ (۱) است.

عدد k را بی‌نهایت بزرگ اختیار می‌کنیم تا اعداد U_i بی‌نهایت کوچک باشند. لذا به‌جای آنکه رابطهٔ (۳) را در حالت کلی ثابت کنیم کافی است همان رابطه را در حالتی که x_i ها بی‌نهایت کوچک‌اند ثابت کنیم.

ب. n زاویه با اندازه‌های متغیر v_1، v_2، ...، و v_n با شرطهای زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 0 \le v_i \le \dfrac{\pi}{2} \;،\; 1 \le i \le n \\ 0 \le v_1 + v_2 + \dots + v_n = \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \text{ رادیان} \end{cases}$$

φ عددی است ثابت

و سپس حاصل‌ضرب زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$P_n = \sin v_1 . \sin v_2 \dots \sin v_n$$

می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل‌ضرب P_n دارای ماکزیمم است و این ماکزیمم هنگامی احراز می‌شود که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = \frac{\varphi}{n}$$

برای اثبات بر محیط دایره $C(O,r)$ دو نقطهٔ ثابت A_0 و A_n را طوری اختیار می‌کنیم که اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{A_0A_n}$ مساوی 2φ باشد. خط شکستهٔ $A_0A_1\dots A_n$ محاط در کمان A_0A_n را در نظر می‌گیریم (شکل الف). اندازه‌های کمانهای $\overset{\frown}{A_0A_1}$، $\overset{\frown}{A_1A_2}$، ...، و $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ را به‌ترتیب مساوی $2v_1$ ، $2v_2$ ، ...، و $2v_n$ اختیار می‌کنیم. اندازهٔ طول وتر $A_{i-1}A_i$ چنین است:

$$(4) \qquad A_{i-1}A_i \text{ اندازهٔ طول وتر} = r \sin v_i \;,\; 1 \le i \le n$$

حاصل‌ضرب طولهای اضلاع خط شکسته $A_0A_1\dots A_n$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P_n = A_0A_1 \times A_1A_2 \times \dots \times A_{n-1}A_n$$

ثابت می‌کنیم که این حاصل‌ضرب وقتی ماکزیمم خود را احراز می‌کند که رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$(5) \qquad \overset{\frown}{A_0A_1} = \overset{\frown}{A_1A_2} = \dots = \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$$

این مطلب را ابتدا برای $n=2$ ثابت می‌کنیم. برای این منظور بر محیط دایره (O,r)، دو نقطهٔ ثابت A_1 و A_2 اختیارمی‌کنیم و نقطهٔ دلخواه A_1 را بر کمان A_0A_2 در نظر می‌گیریم (شکل ب). اندازهٔ سطح مثلث $A_0A_1A_2$ را می‌توان به‌دو صورت زیر نوشت:

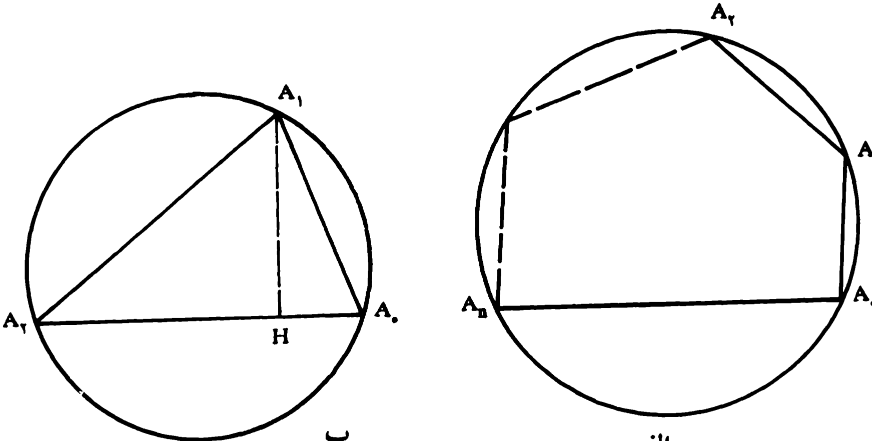
$$(6) \qquad S = \frac{1}{2} A_0A_1 . A_1A_2 . \sin A_2A_1A_0$$

$$(7) \qquad S = \frac{1}{2} A_0A_2 . A_1H$$

(A_1H طول ارتفاع رأس A_1 است)

MATH75.IR

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۶) و (۷) نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب $A_1A_2 \cdot A_0A_1$ هنگامی ماکزیمم خود را احراز می‌کند که طول ارتفاع A_1H بزرگترین مقدار خود را به‌دست آورد و این هنگامی حاصل می‌شود که نقطهٔ A_1 بر وسط کمان A_0A_2 قرار گیرد.



ب　　　　　　　　الف

اگر $n>2$ باشد می‌گوییم چنانچه خط شکسته $A_0A_1 \ldots A_n$ منتظم نباشد، مثلاً $A_1A_2 \neq A_2A_3$ باشد، با انتخاب نقطهٔ A_2 بر وسط کمان A_1A_3 مقدار حاصل‌ضرب $A_1A_2 . A_2A_3$ افزایش می‌یابد و در نتیجه مقدار حاصل‌ضرب P_n افزایش می‌یابد. لذا حاصل‌ضرب P_n وقتی ماکزیمم خود را احراز می‌کند که خط شکسته $A_0A_1 \ldots A_n$ منتظم شود. (بدیهی است که وجود ماکزیمم P_n محقق است زیرا خط شکسته $A_0A_1 \ldots A_n$ در هنگام تغییرشکلهای خود لحظه‌ای به‌صورت منتظم در می‌آید.)

پ. از آنچه گذشت با رعایت رابطهٔ (۴) نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n} \geq \sqrt[n]{\sin v_1 . \sin v_2 \ldots \sin v_n}$$

هنگامی که v_i ها بی‌نهایت کوچک باشند نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n} \geq \sqrt[n]{v_1 . v_2 \ldots v_n}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

MATH75.IR

۸

ضمیمه‌ها

در این فصل به‌یادآوری بعضی تعریفها و قضایا از جبر و آنالیز متغیر حقیقی و متغیر مختلط و هندسه تحلیلی که در این کتاب به‌کار گرفته شده‌اند می‌پردازیم. برای مطالعه اثبات قضایا لازم است به‌کتابهای مربوط مراجعه شود. هر یک از قضایا و تعریفهای مذکور در صفحه‌های آینده چندین بار در متن کتاب به‌کار رفته‌اند. چون تکرار شرح آنها در متن کتاب به‌دفعات مناسب نیست از این‌رو در این فصل آنها را با توضیح لازم ذکر می‌کنیم.

MATH75.IR

۸.۱. یادآوری چند مطلب از جبر

۸.۱.۱. *قضیه اساسی جبر.* هر معادله جبری با ضرایب حقیقی

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots + a_{n-1}x+a_n=0$$

دارای n ریشه است. (لازم است جوابهای مختلط را به‌حساب آوریم و هر جواب مکرر از مرتبه p را p جواب محسوب بداریم.) چون در این کتاب همواره قضیه مذکور در بالا را با ضرایب حقیقی به‌کار برده‌ایم، از این‌رو قضیه را با ضرایب حقیقی بیان نمودیم.

چند مثال:

(الف) معادله $x^3-2x^2-x+2=0$ دارای سه جواب حقیقی ۱-، ۱ و ۲ می‌باشد.

(ب) معادلهٔ $x^3+2x^2+3x+2=0$ دارای جواب حقیقی $x=-1$ و دو جواب مختلط $\frac{-1\pm I\sqrt{7}}{2}$ می‌باشد.

(پ) معادلهٔ $x^4-2x^3+2x-1=0$ دارای جواب ساده $x=-1$ و جواب سه‌گانه $x=1$ است.

۸.۱.۲. *رابطهٔ بین ضرایب معادله جبری و ریشه‌های آن.* معادله جبری

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots + a_{n-1}x+a_n=0$$

را در نظر می‌گیریم و جوابهای آن را x_1، x_2 ، .... ، x_n می‌نامیم. اگر مجموع جوابها را s_1 و مجموع حاصل‌ضرب دو به‌دو جوابها را s_2 و به‌طور کلی مجموع حاصل‌ضربهای p به p جوابها را s_p و بالاخره حاصل‌ضرب جوابها را s_n بنامیم، یعنی اگر قرار دهیم:

$$s_1=\Sigma x_1\ ,\ \ s_2=\Sigma x_1x_2\ , \dots ,\ s_p=\Sigma x_1x_2 \dots x_p \quad , \quad s_n=x_1x_2 \dots x_n$$

روابط زیر مسلم است:

$$s_1=-\frac{a_1}{a_0} \quad , \quad s_2=(-1)^2\frac{a_2}{a_0}\ , \dots ,\ s_p=(-1)^p\frac{a_p}{a_0} \quad , \quad s_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

۸.۱.۳. *ریشه‌های بی‌نهایت در معادله درجه دوم.* اگر در معادله $ax^2+bx+c=0$ ضریب a به‌سوی صفر میل کند و b و c ثابت بمانند و صفر نباشند، یکی از جوابها به‌سوی بی‌نهایت و جواب دیگر به‌سوی $-\frac{c}{b}$ میل می‌کند. اگر a و b هر دو به‌سوی صفر میل کنند و c ثابت بماند و صفر نباشد هر دو جواب به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کنند.

۸.۱.۴. *حل معادله دو جمله‌ای.* معادلهٔ

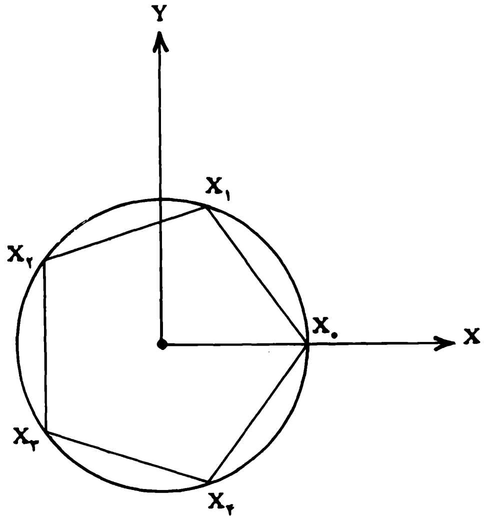
$$(1) \quad x^n-1=0$$

دارای n جواب است که از دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

در این دستور به جای k، مقادیر ۰، ۱، ... و (n−۱) می‌گذاریم. n جواب حاصل می‌شود. اگر به‌جای k اعداد صحیح دیگر (مثبت یا منفی) بگذاریم همان جوابهای پیش حاصل می‌شود. مثلاً $x_n=x_0$، $x_{n+1}=x_1$، ....

نمایش هندسی جوابها. اگر ریشه‌های nام واحد را در صفحه رسم کنیم، این نقاط رأسهای یک n ضلعی منتظم محاط در دایره به‌شعاع واحد را تشکیل می‌دهند. رأس نظیر ریشه $x_0=1$ روی محور حقیقی قرار دارد. حالت n=۵ در شکل زیر مشاهده می‌شود.



خواص ریشه‌های nام واحد

۸.۱.۵. بین ریشه‌های x_2، x_3، ...، و x_n و ریشه x_1 رابطه‌های زیر وجود دارد:

$$x_2=x_1^2,\ x_3=x_1^3,\ \ldots,\ x_n=x_1^n=1$$

۸.۱.۶. قضیه. مجموعه ریشه‌های nام واحد با قانون ضرب، یک گروه تعویض‌پذیر تشکیل می‌دهد.

۸.۱.۷. قضیه . اگر n عددی اول و $\omega\neq 1$ یکی از ریشه‌های nام واحد باشد، آنگاه اعداد

$$\omega\ ,\ \omega^2,\ldots,\omega^n$$

MATH75.IR

مجموعه کاملی از جوابهای معادله (۱) را تشکیل می‌دهند.

۸. ۱. ۸. *قضیه‌ای از تئوری گروه.* یک عضو a^t از یک گروه متناهی دوری مرتبه n، مولدی از این گروه است اگر و فقط اگر n و t نسبت به‌هم اول باشند.

۲.۸. یادآوری چند مطلب از آنالیز

۱.۲.۸ *قضیه تیلور.* اگر تابع f در همسایگی نقطه $x_۰$ دارای مشتق $(n+۱)$م متناهی باشد، مقدار f در هر نقطه این همسایگی از دستور زیر که به‌دستور تیلور معروف است به‌دست می‌آید:

$$f(x)=f(x_۰)+(x-x_۰)f'(x_۰)+\frac{(x-x_۰)^۲}{۲!}f''(x_۰)+\dots+\frac{(x-x_۰)^n}{n!}f^{(n)}(x_۰)+R_n(x)$$

در فرمول بالا، $R_n(x)$ باقیمانده نامیده می‌شود و عبارت آن چنین است:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_۰)^{n+۱}}{(n+۱)!}f^{(n)}(\xi)$$

ξ مقداری است بین $x_۰$ و x.

۸. ۲. ۲. *قضیه تیلور در مورد تابع دو متغیری.* تابع f از دو متغیر x و y را در نظر می‌گیریم. اگر در همسایگی نقطه $(x_۰,y_۰)$ مشتقات جزئی مرتبه یکم، دوم، ....، و $(n+۱)$ام تابع f موجود و پیوسته باشند، آنگاه مقدار f در هر نقطه (x,y) این همسایگی از فرمول زیر که به‌فرمول تیلور مشهور است به‌دست می‌آید:

$$f(x,y)=f(x_۰,y_۰)+(x-x_۰)\frac{\partial f(x_۰,y_۰)}{\partial x}+(y-y_۰)\frac{\partial f(x_۰,y_۰)}{\partial y}$$

$$+\frac{۱}{۲}(x-x_۰)\frac{\partial^۲ f(x_۰,y_۰)}{\partial x^۲}+(x-x_۰)(y-y_۰)\frac{\partial^۲ f(x_۰,y_۰)}{\partial x\partial y}+\frac{۱}{۲}(y-y_۰)^۲\frac{\partial^۲ f(x_۰,y_۰)}{\partial y^۲}$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$+\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{۱}{n!}\sum_{i=۰}^{n}\binom{x}{j}(x-x_۰)^{n-j}.(y-y_۰)^j\frac{\partial^n f(x_۰,y_۰)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}+R_n(x,y)$$

در دستور بالا $R_n(x,y)$ باقیمانده نامیده می‌شود و عبارت آن چنین است:

$$R_n(x,y)=\frac{۱}{(n+۱)!}\sum_{j=۰}^{n+۱}\binom{n+۱}{j}(x-x_۰)^{n+۱-j}.(y-y_۰)^j\frac{\partial^{n+۱}(\xi,\eta)}{\partial x^{n+۱-j}\partial y^j}$$

MATH75.IR

نقطه (ξ,η)، نقطه‌ای بر پاره‌خط واصل بین دو نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ و (x,y) می‌باشد.

۳.۲.۸. قضیه . فرض کنیم θ عددی حقیقی باشد. روی دایره‌ای به‌شعاع واحد نقاطی با طولهای منحنی‌الخط

$$\circ\ ,\ \theta\ ,\ ۲\theta\ ,\ \dots\ ,\ n\theta\ ,\ \dots$$

را در نظر می‌گیریم. این نقاط در صفحهٔ مختلط دارای آفیکسهای زیر می‌باشند:

$$z_n = e^{in\theta}$$

الف. اگر $\frac{\theta}{\pi}$ گویا باشد، مجموعه z_n دارای عده محدودی نقطه است.

ب. اگر $\frac{\theta}{\pi}$ گنگ باشد، هر نقطه از دایره مثلثاتی، یک نقطه انباشتگی این مجموعه است. این مجموعه روی دایره مذکور چگال است.

۳.۸. یادآوری چند مطلب از هندسه

۱.۳.۸. تعریف منحنی جبری. وقتی می‌گوییم که یک منحنی از صفحه دستگاه مختصات دکارتی xOy جبری است منظور آن است که بین x و y یک نقطه آن منحنی رابطه‌ای به‌صورت $f(x,y)=\circ$ وجود دارد که در آن f یک چند جمله‌ای بر حسب x و y است. درجه این چند جمله‌ای درجه منحنی نامیده می‌شود.

۲.۳.۸. قضیه. هر خط راست در صفحه، هر منحنی جبری درجه n از آن صفحه را در n نقطه قطع می‌کند لازم است نقاط مختلط و نقاط واقع در فاصله بی‌نهایت دور به‌حساب آورده شوند و همچنین نظیر هر جواب مکرر معادله تقاطع خط و منحنی، نقطه مکرر با همان مرتبه در نظر گرفته شود.

۳.۳.۸. قضیه. دو منحنی جبری از درجه‌های m و n واقع در صفحه یکدیگر را در $m.n$ نقطه قطع می‌کنند.

۴.۳.۸. قضیه. اگر $f(x,y)$ یک چند جمله‌ای همگن درجه n نسبت به x و y باشد نمودار معادله $f(x,y)=\circ$ از n خط راست که از مبدأ می‌گذرند تشکیل می‌شود (لازم است خطوط موهومی را به‌حساب آوریم و نیز p خط منطبق بر هم را p بار به‌حساب آوریم).

MATH75.IR

۵.۳.۸ *پارامترهای هندسی و پارامترهای جبری.* هر شرط تعیین کننده یک شکل هندسی یک پارامتر هندسی نامیده می‌شود. مثلاً خط راست به‌وسیلهٔ دو نقطه متمایز آن و یا به‌وسیلهٔ یک نقطه و امتداد آن مشخص می‌شود. از این جهت می‌گویند که خط راست دو پارامتر دارد. یک دایره به‌وسیلهٔ سه نقطه آن تعیین می‌شود از این جهت می‌گویند که دایره سه پارامتر دارد. یک مقطع مخروطی به‌وسیلهٔ پنج نقطه آن مشخص می‌شود لذا می‌گویند مقطع مخروطی دارای ۵ پارامتر است.

هر نقطه از یک شکل هندسی یک پارامتر به‌حساب می‌آید مگر آنکه یک نقطهٔ مخصوص شکل باشد. مثلاً در مقطع مخروطی کانون دو پارامتر محسوب می‌شود (به‌عنوان مثال یک بیضی با معلوم بودن جای دو کانون و یک نقطه آن کاملاً مشخص است). همچنین رأس در مقطع مخروطی دو پارامتر محسوب می‌شود (مثلاً یک بیضی با معلوم بودن جای دو رأس و یک نقطه از آن مشخص است) و نیز در مقطع مخروطی مرکز دو پارامتر به‌حساب می‌آید (مثلاً دایره با معلوم بودن مرکز و یک نقطه آن مشخص است). خط مماس نیز یک شرط تعیین کننده است (مثلاً مقطع مخروطی با دو کانون و یک خط مماس مشخص می‌شود).

تعداد پارامترهای معادله یک شکل مساوی با تعداد پارامترهای آن شکل است مثلاً معادله یک خط راست دو پارامتر دارد و به‌صورتهای زیر نوشته می‌شود:

$$(۱)\qquad y = mx + n$$

$$(۲)\qquad ax + by + 1 = 0$$

اوضاع مختلف یک خط راست را نمی‌توان با معادله‌های (۱) و (۲) مشخص کرد و لذا نمی‌توان اوضاع مختلف خط راست را با دو پارامتر تعیین کرد. مثلاً اگر در مسئله‌ای لازم باشد ضریب y را به‌سوی صفر میل دهیم، به‌وسیلهٔ صورت (۱) امکان ندارد و یا اگر بخواهیم معادله خطی را بنویسیم که بر دو نقطه که دارای یک طول‌اند بگذرند معادله (۱) را نمی‌توان به‌کار گرفت. همچنین اگر بخواهیم معادله خطی را بنویسیم که از مبدأ مختصات بگذرد معادله (۲) را نمی‌توان به‌کار برد.

برای فائق آمدن بر این مشکل، در معادله یک شکل، پارامترهای متجانس جبری به‌کار می‌برند و معادله خط راست را به‌صورت

$$(۳)\qquad ax + by + c = 0$$

می‌نویسند. صورت (۳) کلیه اوضاع خط راست را نمایش می‌دهد و پارامترهای واقعی نسبت این پارامترها به‌یکی از آنهاست. پس پارامترهای هندسی خط راست همیشه مساوی (۲) است.

برای نوشتن معادله خط (یا به‌طور کلی معادله یک منحنی و یا یک سطح) به‌کمک

پارامترهای جبری باید ضرایب معادله کلی را بر یکی از آنها تقسیم کرد. اما وقتی ضرایب معادله را بر یکی از آنها تقسیم می‌کنیم یک محدودیت برای شکل به‌وجود می‌آوریم و در این صورت به‌کلیت معادله لطمه وارد می‌شود. مثلاً با تقسیم ضرایب معادله (۳) بر ضریب c، معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Ax+By+1=0$$

اما عمل تقسیم ضرایب بر c هنگامی جایز است که $c\neq 0$ باشد، یعنی خط مورد نظر نباید از مرکز بگذرد.

در مسئله زیر یک‌بار پارامتر جبری و یک‌بار پارامتر جبری متجانس به‌کار خواهیم برد و مزیت پارامترهای جبری متجانس را نشان خواهیم داد.

مسئله. معادله خط راستی راکه از نقطه $M(1,2)$ می‌گذرد و با دایرهٔ C به‌معادلهٔ $x^2+y^2=1$ مماس است بنویسید.

حل. معادله خط راستی راکه از نقطه $M(1,2)$ با ضریب زاویه m می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$(4)\quad y-2=m(x-1)$$

مختصات نقاط برخورد خط به‌معادلهٔ (۴) با دایره به‌معادلهٔ

$$(5)\quad x^2+y^2=1$$

ریشه‌های دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(6)\quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-2=m(x-1) \end{cases}$$

از حذف y بین دو معادلهٔ دستگاه (۶)، حاصل می‌شود:

$$(1+m^2)x^2-2m(m+2)x+m^2-4m+3=0$$

شرط تماس خط (۴) با دایرهٔ (۵) چنین است:

$$\Delta'=m^2(m+2)^2-(1+m^2)(m^2-4m+3)=0$$

این معادله دارای جواب زیر است:

$$(7)\quad m=\frac{3}{4}$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ $M(1,2)$ را از مرکز دایره C حساب می‌کنیم حاصل می‌شود: $\sqrt{5}$ و چون

MATH75.IR

$\sqrt{5}$ بزرگتر از طول شعاع دایره است پس نقطهٔ $M(1, 2)$ خارج دایره قرار دارد. از طرفی می‌دانیم که از یک نقطهٔ واقع در خارج دایره، دو مماس بر آن می‌توان رسم نمود. پس چرا برای ضریب زاویهٔ مماس فقط یک جواب $\frac{3}{4}$ به‌دست آمده است؟ علت این امر آن است که ما معادلهٔ خط را به‌صورت (۴) نوشته‌ایم که معادلهٔ کلی خطی که از یک نقطه معلوم می‌گذرد نیست. معادلهٔ کلی خطی که از نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

لذا معادلهٔ کلی خطی که از نقطهٔ $M(1, 2)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$a(x-1)+b(y-2)=0 \qquad (8)$$

مختصات نقاط تلاقی این خط با دایره C ریشه‌های دستگاه معادله‌های زیراند:

$$(9) \qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ a(x-1)+b(y-2)=0 \end{cases}$$

اکنون بین دو معادله دستگاه (۹) یک متغیر را حذف می‌کنیم:

الف. حذف x بین دو معادلهٔ دستگاه ۹. با شرط $a\neq 0$، متغیر x را بین دو معادلهٔ دستگاه (۹) حذف می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$(a^2+b^2)y^2-2b(2b+a)y+4b(a+b)=0$$

شرط تماس خط به‌معادلهٔ (۸) با دایرهٔ C چنین است:

$$\Delta'=-3ba^2(3b+4a)=0$$

چون $a\neq 0$ پس نتیجه می‌شود:

$$b=0 \text{ و } \frac{b}{a}=-\frac{4}{3}$$

اگر $b=0$ باشد از معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود که معادلهٔ خط مماس به‌صورت $x=1$ است و اگر $\frac{b}{a}=-\frac{4}{3}$ باشد از معادلهٔ (۸) معادلهٔ خط مماس دیگر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$3(x-1)-4(y-2)=0$$

ب. حذف y بین دو معادلهٔ دستگاه (۹). با شرط $b\neq 0$، متغیر y را بین دو معادلهٔ دستگاه (۹) حذف می‌کنیم حاصل می‌شود:

 MATH75.IR

$$x^2 + \left[\frac{-a}{b}(x-1) + 2\right]^2 = 1 \qquad (10)$$

شرط تماس خط به‌معادلهٔ (۸) با دایرهٔ C آن است که مبین معادله مساوی صفر باشد. از این شرط نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{b} = \frac{-3}{4} \qquad (11)$$

از دو رابطهٔ (۸) و (۱۱) معادلهٔ خط مماس بر دایره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$3(x-1) - 4(y-2) = 0$$

اگر $b=0$ باشد متغیر y را نمی‌توان بین دو معادلهٔ دستگاه (۱۱) حذف کرد. در این صورت معادلهٔ (۸) به‌صورت $x=1$ درمی‌آید. اکنون باید امتحان کنیم که خط $x=1$ بر دایره C مماس است یا نه. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=1 \end{cases}$$

دارای جواب مضاعف $y=0$ است پس خط $x=1$ بر دایرهٔ C مماس است.

پارامترهای معادلهٔ دایره. گفتیم که دایره با معلوم بودن سه نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود. لذا معادلهٔ دایره دارای سه پارامتر جبری است و معمولاً معادله دایره را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad (12)$$

در بعضی مسائل هندسه احتیاج است که خط راست را حالت خاصی از دایره محسوب بداریم. یعنی خط راست را دایره‌ای به‌شعاعِ بی‌نهایت بدانیم (یکی از مثالها در این مورد تبدیل خطی ـ کسری یا تبدیل موبیوس است که در کتابهای آنالیز متغیر مختلط مطرح می‌شود). اما از معادله دایره به‌صورت (۱۲)، معادلهٔ خط راست به‌دست نمی‌آید. برای فایق آمدن بر این مشکل پارامترهای جبری متجانس به‌کار می‌برند و معادلهٔ دایره را به‌صورت

$$\lambda(x^2+y^2)+ax+by+c=0$$

می‌نویسند. لذا معادلهٔ دایره به‌چهار پارامتر متجانس بستگی دارد. معادلهٔ خط راست به‌ازای $\lambda=0$ حاصل می‌شود.

پارامترهای مقطع مخروطی. معادلهٔ مقطع مخروطی واقع در صفحهٔ مختصات xOy، یک معادلهٔ درجه دوم کامل نسبت به x و y است که معمولاً به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

MATH75.IR

در این معادله شش پارامتر جبری متجانس وجود دارد. از تقسیم ضرایب به‌یکی از آنها پنج پارامتر جبری حاصل می‌شود.

۶.۳.۸. مختصات قطبی

در این کتاب در چند مورد مختصات قطبی را به‌کار گرفته‌ایم. در این‌باره که در مختصات قطبی، شعاع قطبی عدد جبری است کاملاً تأکید می‌کنیم. اگر شعاع قطبی را منحصراً عدد نامنفی محسوب داریم بسیاری از مسائل هندسی را در یک افق بسیار تنگ حل خواهیم نمود. از این جهت لازم می‌دانیم که دربارهٔ مختصات قطبی توضیح بدهیم.

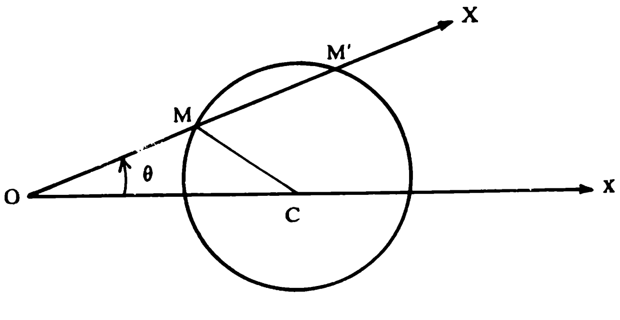
در صفحهٔ P، نقطهٔ O و محور Ox را در نظر می‌گیریم و آنها را به‌ترتیب قطب و محور قطبی می‌نامیم. نقطهٔ M از صفحه را در نظر می‌گیریم و بردار $\overrightarrow{OM}$ را شعاع حامل نقطهٔ M نام می‌نهیم. روی‌خط OM محور OX را اختیارمی‌کنیم (یعنی‌آنکه محور OX می‌تواند با بردار $\overrightarrow{OM}$ هم‌سو یا ناهم‌سو باشد) و بردار یکه آن را $\vec{U}$ می‌نامیم. زاویهٔ $\theta=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OX})$ یا $(\overrightarrow{Ox},\vec{U})$ را یک زاویهٔ قطبی نقطهٔ M می‌نامیم. اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OM}$ برحسب $\vec{U}$ را شعاع قطبی می‌نامیم و آن را با r نشان می‌دهیم: $r=\overline{OM}$. نقطهٔ M دارای بی‌نهایت دستگاه مختصات قطبی است:

$$\begin{cases}\theta+k.2\pi\\ r\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\theta+\pi+k.2\pi\\ -r\end{cases}$$

مسئله‌ای که در زیر مطرح می‌شود از مثالهای مناسبی است که فکر را سوق می‌دهد به‌سوی اینکه شعاع قطبی باید عدد جبری محسوب گردد.

بر محور قطبی Ox، نقطهٔ C را به‌فاصلهٔ d از نقطهٔ O اختیار می‌کنیم و دایره‌ای به‌مرکز C و به‌شعاع l رسم می‌کنیم. مختصات قطبی‌یک نقطه M از صفحه‌را (r,θ) می‌نامیم. اگر قانون کسینوسها را برای مثلث OCM بنویسیم رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$(1)\qquad r^2-2dr\cos\theta+d^2-l^2=0$$



رابطهٔ (۱)، معادلهٔ دایرهٔ (C,l) در مختصات قطبی است.

بنابر معادلهٔ (۱)، به‌ازای هر مقدار θ برای r دو مقدار حاصل می‌شود که یکی اندازهٔ شعاع

MATH75.IR

قطبی نقطهٔ M و دیگری اندازهٔ شعاع قطبی نقطهٔ M' است (نقطهٔ M'، نقطهٔ تقاطع دوم خط OM با دایرهٔ (C,l) است.)

حاصل‌ضرب دو مقدار OM و OM' را به‌کمک معادلهٔ (۱) حساب می‌کنیم:

$$\overline{OM}\ .\ \overline{OM'} = \text{(۱) حاصل‌ضرب دو جواب معادلهٔ} = d^{2}-l^{2}$$

(رابطهٔ اخیر همان قضیهٔ قوت نقطه نسبت به‌دایره است.)

اگر نقطهٔ O را داخل دایره (C,l) اختیار کنیم، مقدار $d^{2}-l^{2}$ منفی می‌شود یعنی حاصل‌ضرب $\overline{OM'}\ .\ \overline{OM}$ منفی می‌شود. بنابراین از دو شعاع قطبی یکی مثبت و دیگری منفی است. عدهٔ زیادی از مسائل هندسی ما را راهنمایی می‌کنند که باید شعاع قطبی را عدد جبری محسوب کنیم.

MATH75.IR

کتابنامه

بخش اول کتاب حاضر به‌نام «هندسهٔ تحلیلی چندمحوری» را می‌توان تعمیمی از «هندسهٔ مثلث» دانست. در شمارهٔ (۱۸.۱)، سه اثر دربارهٔ «هندسهٔ مثلث» ذکر کرده‌ام و دربارهٔ هر یک از آنها توضیح داده‌ام. دربارهٔ قضایای مذکور درکتاب حاضر مانند قضایای فیثاغورس، بطلمیوس، برهماگوپتا، پاسکال، شال، ...که اثباتهای تازه و یا تعمیمهایی از آنها ارائه کرده‌ام می‌توان مراجع بسیاری ذکر نمود، مثلاً کافی است در نظر بگیریم که دربارهٔ قضیهٔ فیثاغورس ۳۷۰ برهان در کتابهای مختلف ذکر شده است. لذا ذکر مراجع دربارهٔ قضایای مذکور صفحات بسیاری را اشغال می‌کند و چندان سودی ندارد. از این جهت در متن کتاب حاضر، هرجا که ذکر مرجع لازم بوده است، مرجع و شماره‌های صفحات مورد لزوم از آن را ذکر کرده‌ام.

MATH75.IR

بعضی از آثار نویسندهٔ این کتاب

۱ ـ طرح یک ماشین حساب آنالوژیک برای حل معادله‌های جبری با ضریبهای پارامتری.
این اثر در مجلهٔ A.I.C.A ارگان «انجمن بین‌المللی حساب آنالوژیک»
Annales de l'Association International pour le calcul Analogique.
Proceedings of the international Association for Analog Computation.
به‌چاپ رسیده است. ژانویه ۱۹۷۳.

۲ ـ طرح یک خط‌کش حساب برای حل معادلات درجه سوم. از انتشارات سازمان پژوهشهای علمی و صنعتی ایران. آذر ۱۳۶۲.

۳ ـ کتاب «چند قضیهٔ هندسه». اثر پژوهشی. منتشر در سال ۱۳۴۷.

۴ ـ روشی برای حل معادلهٔ جبری درجه چهارم، مندرج در مجلهٔ Mathématiques Spéciales. دسامبر ۱۹۷۱.

۵ ـ کتاب «دربارهٔ معادله‌های جبری». اثر پژوهشی. از انتشارات وزارت علوم و آموزش عالی. مرداد ۱۳۵۱.

۶ ـ کتاب «پژوهشهایی در ریاضیات». اثر پژوهشی. منتشر در سال ۱۳۵۳.

۷ ـ کتاب «چند مسئله مشهور هندسه». تألیف و نقد. از انتشارات امیرکبیر. ۱۳۵۳.

۸ ـ کتاب مختصر «مقدمه بر جبر بول و کاربرد آن در زنجیرهای اتصالیها». ترجمه. از انتشارات مروج. ۱۳۵۳.

۹ ـ کتاب «هندسهٔ تحلیلی چندمحوری و چند رسالهٔ دیگر». از انتشارات مدرسه. سال ۱۳۷۳.

انتشارات مدرسه

۶۳۰۰ ریال ـ کد ۲/ ۲۴۹

کتاب «هندسه تحلیلی چند محوری و چند رساله دیگر» اثری است تحقیقی در هندسه. مطالعه آن برای دبیران و دانشجویان بسیار آموزنده و سودمند است. همچنین قسمتهایی از بخش سوّم و چهارم کتاب برای دانش آموزان قابل استفاده است. در این کتاب بسیاری از قضایای مشهور و مهم هندسه با روشهای تازه و جالب اثبات شده است و بعلاوه احکام تازه‌ای نیز عرضه شده است. روشهای ارائه شده جبری، با محاسبات بسیار کوتاه و دلپذیر است. تنوع مطالب و دلپذیری اثباتها علاقه خواننده را به مطالعه هندسه افزایش می‌دهد.